

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E AUTOMAÇÃO INDUSTRIAL

GEOMETRIA FRACTAL
Um estudo da teoria com proposição de
taxonomia
baseada no processo de geração

por: Tania Mara Stahlke

orientador: Léo Pini Magalhães

Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas, para preenchimento dos pré-requisitos parciais para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

outubro 1993

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida por Tania Mara Stahlke
e aprovada pela Comissão Julgadora em 11/10/93.
Léo Pini Magalhães
Orientador

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	T/UNICAMP
	St14g
V.	Ex.
TCMBO BC/	26.865
PROC.	667/96
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	02/03/96
N.º CPD	

Cmo 84829-6

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

St14g

Stahlke, Tania Mara

Geometria fractal um estudo da teoria com proposição de taxonomia baseada no processo de geração / Tania Mara Stahlke.--Campinas, SP: [s.n.], 1993.

Orientador: Léo Pini Magalhães.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica.

1. Fractais. 2. Computação gráfica. I. Magalhães, Léo Pini. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica. III. Título.

Resumo

Este trabalho procura organizar os conhecimentos divulgados até o momento sobre a Teoria dos Fractais e apresentá-los de maneira simples mas precisa. Um novo conceito para fractais é proposto, baseado no processo de obtenção dos fractais e também uma taxonomia baseada nos tipos de algoritmos de geração. Pretende-se com este trabalho condensar a base teórica necessária ao estudo dos fractais, mostrando que a sua face mais divulgada, a beleza das imagens, é apenas uma das faces destes complexos objetos e que além desta existem muitas outras faces não tão conhecidas mas igualmente importantes. Temos assim uma matemática rica e aberta a novas pesquisas, aplicações em vários ramos da Ciência e uma correspondência muito grande com a linguagem da natureza que nos cerca.

Abstract

This work intends to organize the knowledge published until this moment about the fractal theory and show them in a facile and precise way. Here it is proposed a new conceit based on fractal generation process and also a taxonomy founded in this new algorithm. It is wanted with this work to concentrate the necessary theoretical basis to study fractals, showing that its most announced face, the beauty of the images, is only one of the faces of these complex objects and that besides this there are many others faces, not so known, but with equal importance. There is than a rich mathematic's area open to new researchs, with applications to many branches of science and with a very large correspondence with the language of Nature around us.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador pela paciência e incentivo, aos amigos Regina e Aluísio que se tornaram a minha família campineira e especialmente aos meus pais Domingos e Terezinha e aos meus filhos Daniel, Juliana e Thiago pela ajuda e compreensão demonstradas neste período.

Particularmente, agradeço ao CEFET-PR pela licença concedida para a pós-graduação e também à CAPES pela ajuda financeira fornecida durante o período de afastamento.

Dedico esta tese ao meu marido Mario, que no final
é sempre mais importante do que tudo.

Conteúdo

RESUMO	i
ABSTRACT	ii
AGRADECIMENTOS	iii
CONTEÚDO	v
LISTA DE FIGURAS	viii
1 INTRODUÇÃO	1
2 FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS	13
2.1 Conceitos Básicos	13
2.2 Transformações	17
2.2.1 Congruência ou Isometria	18
2.2.2 Homotetia	20
2.2.3 Similaridade	21
2.2.4 Linearidade	21
2.2.5 Afinidade	22
2.3 Medidas	23
2.3.1 Contagem	23

2.3.2	Massa Pontual	23
2.3.3	Medida de Lebesgue em $\mathfrak{R} - \mathcal{L}^1$	24
2.3.4	Medida de Lebesgue em $\mathfrak{R}^n - \mathcal{L}^n$	24
2.3.5	Medida de Hausdorff — $\mathcal{H}^s(F)$	25
2.4	Comentários Finais	28
3	DIMENSÃO FRACTAL	29
3.1	Dimensão de similaridade — \mathcal{D}_f	31
3.2	Dimensão de Hausdorff–Besicovitch — $dim_H F$	31
3.2.1	Propriedades	35
3.3	Dimensões equivalentes à Dimensão de Hausdorff	35
3.3.1	Dimensão de Hausdorff usando coberturas por Bolas Esféricas — \mathcal{D}_b	36
3.3.2	Dimensão de Hausdorff usando coberturas por intervalos binários — \mathcal{D}_i	36
3.4	Outras dimensões	37
3.4.1	Dimensões fracionárias — $\Delta(E)$ e $Dim(E)$	37
3.4.2	Dimensão Espectral — \mathcal{D}_s	37
3.4.3	Dimensão da Contagem de Caixas — \mathcal{D}_c	38
3.4.4	Dimensão Raio-Massa — \mathcal{D}_{rm}	39
3.4.5	Função Dimensão	40
3.4.6	Dimensão por Imagens	40
3.5	Comentários Finais	41
4	UMA TAXONOMIA	43
4.1	Conceitos Básicos	43
4.1.1	Semelhança e Similaridade	44
4.1.2	Fractal	44
4.1.3	Graftal	53

4.2	Estrutura da Taxonomia	55
4.2.1	Taxonomia	55
4.2.2	Estudo de Casos	55
4.3	Comentários Finais	77
5	APLICAÇÕES	78
6	CONCLUSÃO	82
a	GERAÇÃO	86
b	IMAGENS	118
c	REFERÊNCIA	130
d	BIBLIOGRAFIA COMENTADA	131
	BIBLIOGRAFIA	143

Lista de Figuras

1.1	Função de Weierstrass	3
1.2	Conjunto de Julia	5
1.3	Conjunto de Mandelbrot	6
1.4	Folha de Samambaia	10
1.5	Procedimento Fractal	11
2.1	Conjuntos abertos e fechados	16
2.2	Transformações em um conjunto	19
2.3	Medida de Lebesgue	25
2.4	Coberturas de um conjunto	27
3.1	Dimensão Euclidiana e Dimensão Fractal	30
3.2	Dimensão de similaridade da Curva de Koch	32
3.3	Medida de Hausdorff-Besicovitch	33
3.4	Dimensão da contagem de caixas	39
4.1	Fractal Auto-Afim	52
4.2	Árvore Graftal	54
4.3	Uma Taxonomia	56
4.4	Curva de Koch	60
4.5	Deslocamento gaussiano	69

4.6	Algoritmo para obter uma distribuição Gaussiana	70
4.7	Algoritmo para desenhar uma curva fractal	71
4.8	Algoritmo para criação de uma linha fractal	72
b.1	Triângulo de Sierpiński obtido pelo método do IFS	119
b.2	Curva de Koch gerada pelo uso de transformações	120
b.3	Fractal Auto-afim gerado por transformações	121
b.4	Conjunto de Julia	122
b.5	Método de Newton	123
b.6	Conjunto de Mandelbrot	124
b.7	Curva Fractal obtida pelo Deslocamento do Ponto Médio	125
b.8	Curva Fractal obtida pela Interpolação de Pontos	126
b.9	Triângulo de Sierpiński Randômico	127
b.10	Movimento Browniano Fractal	128
b.11	Galaxia Espiral Fractal	129
c.1	Carta de Benoit Mandelbrot	130

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Até poucos anos atrás sempre que os cientistas encontravam um fenômeno estranho com um comportamento não previsível, ou seja, caótico, tinham dificuldades em encontrar ferramentas adequadas para o desenvolvimento de suas pesquisas. Este lado irregular da natureza era então classificado como um enigma ou uma “monstruosidade”, e muitas vezes, deixado de lado. Assim, o comportamento do tempo do planeta dentro da Meteorologia, o crescimento de certas populações de animais dentro da Biologia ou as oscilações dos batimentos cardíacos dentro da Medicina, eram consideradas áreas perigosas, nas quais apenas alguns pesquisadores mais ousados se arriscavam.

Por volta de 1970, alguns desses pesquisadores, em várias áreas como matemáticos, físicos, médicos, biólogos, economistas, começaram a encontrar um certo tipo de ordem no meio deste caos. As experiências inicialmente eram muito isoladas, trabalhando cada pesquisador sozinho dentro de sua área. Há cerca de dez anos atrás, com a divulgação de vários trabalhos, de palestras sobre o assunto e da publicação de alguns livros, estes pesquisadores começaram a conhecer o trabalho uns dos outros e a trocar informações. Descobriram então que independentemente da área, certos fenômenos apresentam comportamentos com uma propriedade em comum, a *auto-semelhança*. Por essa propriedade um fenômeno tende a se repetir em alguma escala temporal ou espacial, aparecendo em fenômenos tão diversos como a variação da Bolsa de Valores e o crescimento da população mundial. Formou-se assim a *TEORIA DO CAOS*, que abriga o estudo de todos estes fenômenos auto-semelhantes cujo comportamento foge ao tradicional e que rapidamente

está revolucionando a estrutura do conhecimento científico. Dentro desta teoria fenômenos comuns do dia a dia das pessoas, como uma torneira gotejando ou a fumaça saindo de um cigarro são estudados como uma manifestação do caos, apresentando um tipo diferente de ordem que durante muitos anos ninguém soube reconhecer.

O caos é uma ciência do *processo* e não do *estado*, do *vir-a-ser* e não do *ser*. Assim, estuda-se não o que uma molécula do coração é ou faz, mas sim o resultado do que milhões delas fazem.

Com este tipo de enfoque dentro da ciência, as fronteiras entre as disciplinas foram rompidas e a tendência à especialização foi revertida. Os cientistas da Teoria do Caos não analisam as partes de um processo mas sim o todo.

Uma das ciências que passou por esta evolução no comportamento foi a Matemática. No final do século passado, por volta de 1875, ela entrou em crise quando foi publicado pelo matemático duBois Reymond um trabalho no qual aparecia uma função construída por Weierstrass, outro famoso matemático da época. Apesar de contínua em todos os pontos, esta função não era diferenciável em nenhum desses pontos. Esta curva (ver figura 1.1) tinha um comportamento diferente das outras curvas conhecidas na época. Ela era auto-selhante, isto é, repetia-se em várias escalas. Definir ou medir seu comprimento era muito difícil e atribuir o tradicional valor *um* para sua dimensão parecia não representar corretamente o comportamento desta nova função. A intuição dos matemáticos dizia que alguma coisa das regras estabelecidas não funcionava neste caso¹. Estas curvas pareciam estar situadas em algum lugar entre uma linha e um plano. Isto foi considerado uma revolução: como estas curvas '*ousavam*' não se comportar como deveriam?

A dificuldade na representação visual e o pensamento científico da época fizeram com que o estudo destas curvas fosse deixado de lado. Durante muitos anos os resultados que já tinham sido obtidos ficaram escondidos em algumas publicações pelas quais ninguém mais se interessou. Esta situação durou até 1925, quando matemáticos mais abertos a novas pesquisas resolveram '*aceitar*' o aparecimento de certos comportamentos estranhos

¹Um estudo detalhado desta função, na sua forma determinística e probabilística, definindo os parâmetros para os quais ela se torna fractal ou não pode ser encontrado em [BL80]. Nesta referência são vistos também sua dimensão, alguns casos particulares em que esta função modela o movimento de uma partícula ao longo de um eixo (movimento Browniano), a modelagem de '*ruídos*' do tipo $\frac{1}{f}$ e também quando modela uma paisagem glacial imaginária. Os aspectos apresentados são matemáticos mas várias sugestões são dadas para implementações computacionais de gráficos para cada caso.

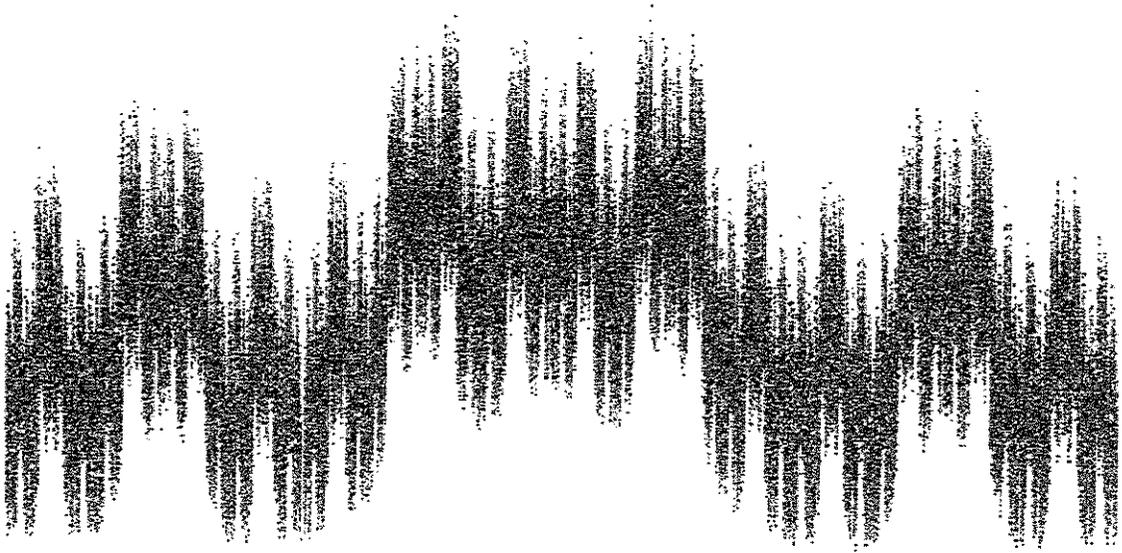


Figura 1.1: A função de Weierstrass $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} \sin(\lambda^k t)$ com $\lambda = 1.5$ e $s = 1.7$.
[Fal90]

nestas e noutras curvas. Os estudos empíricos de alguns matemáticos devem ser destacados, considerando que estas pessoas trabalhavam sem a ajuda do computador em um assunto de cálculos extremamente árduos: Cantor, Peano, Lebesgue, Hausdorff, Besicovitch, Bolzano, Cesáro, Koch, Osgood, Sierspiński e Urysohn. Todos estes matemáticos contribuíram direta ou indiretamente com este trabalho, trabalhando de forma a superar seus próprios limites e afetando o estudo da Matemática e da Natureza.

É enorme o contraste entre a geometria exuberante estudada atualmente e o trabalho que era feito por esses matemáticos. Sente-se isso numa carta escrita pelo matemático Cantor a um amigo por volta de 1880 [AP91]: “*vejo e não creio*”. Hoje, dentro da nova matemática, “*ver é crer*”.

Atualmente o primeiro nome dentro deste campo a ser citado é o de Benoit B. Mandelbrot, um matemático pesquisador do Instituto de Pesquisas Thomas Watson, da IBM. Ele descobriu dentro da Matemática o que outros cientistas da Teoria do Caos também estavam descobrindo em outras áreas: que expressões matemáticas muito simples podiam resultar em funções não-periódicas e caóticas, mas que possuíam um tipo diferente e bem definido de ordem.

Mandelbrot havia retomado os estudos que o matemático Gaston Julia havia realizado no início do século, a respeito da equação:

$$z_n^2 = z_{n-1}^2 + c \quad \text{com } z, c \in \mathcal{C} \quad (1.1)$$

onde \mathcal{C} é o conjunto dos números complexos.

Aparentemente uma função quadrática não deveria apresentar nada de novo, pois sabe-se trabalhar com ela muito bem, avaliando-se e traçando gráficos. O comportamento novo surge quando estas funções quadráticas, cúbicas ou outras são tratadas como um sistema dinâmico, isto é, um sistema que muda com o tempo. A palavra chave aqui é “*iteração*”, processo que executa o mesmo procedimento repetidas vezes, obtendo resultados inesperados: caos, imprevisibilidade ou resultados extremamente complexos, mesmo com objetos elementares como uma familiar função quadrática.

Ao pesquisar a equação (1.1) usando números imaginários, Mandelbrot encontrou uma imagem altamente complexa e de uma beleza surpreendente. Como uma equação aparentemente tão simples poderia resultar num comportamento tão complexo? Com a curiosidade científica despertada, Mandelbrot aprofundou-se em seus estudos e tirou importantes conclusões. O princípio da consistência, pelo qual pequenas alterações nos dados iniciais de um sistema linear ou não, causavam pequenas alterações nos valores finais que satisfaziam este sistema, era um princípio universalmente aceito até esta data. Mandelbrot provou que mínimas alterações no valor atribuído ao parâmetro c da equação (1.1) produziam imagens totalmente diferentes entre si, sendo cada uma tão complexa quanto as outras. Estas múltiplas imagens obtidas em função da variação do parâmetro c compõem o conjunto de Julia (ver figura 1.2), que não segue o princípio da consistência citado anteriormente.

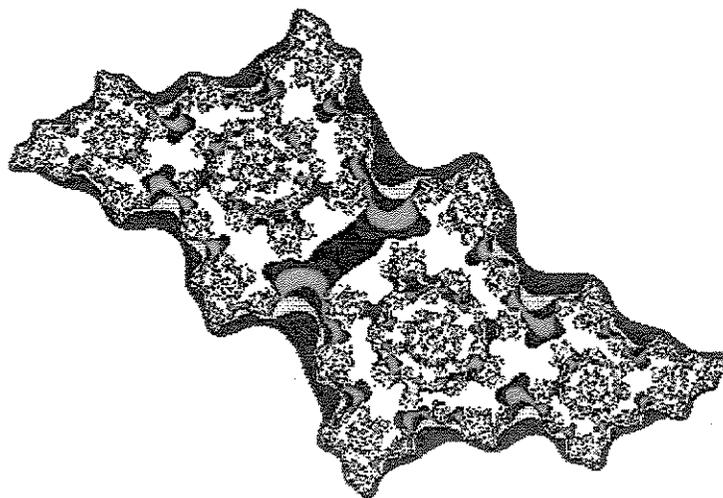


Figura 1.2: Uma das imagens do Conjunto de Julia. [PSaa88]

A estas figuras enroscadas, emaranhadas e contorcidas obtidas durante suas pesquisas, Mandelbrot deu o nome de *FRACTAL*, usando duas palavras latinas muito apropriadas para compor o termo: o verbo *frangere* (fragmentar) e o adjetivo *fractus* (irregular).

Durante os seus estudos ele criou também um 'catálogo' pelo qual podia-se prever qual a imagem do conjunto de Julia iria ser gerada em função do valor do parâmetro c . Na realidade este catálogo também é uma imagem fractal, complexa e de grande beleza, que desafia os matemáticos até hoje na pesquisa de suas propriedades — o *CONJUNTO DE MANDELBROT* (ver figura 1.3).

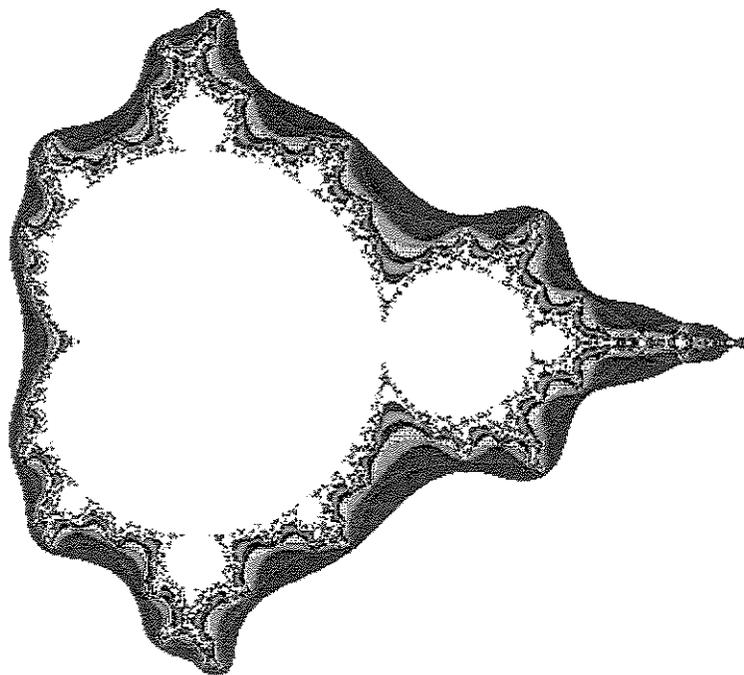


Figura 1.3: O conjunto de Mandelbrot. [PSaa88]

Todas estas descobertas foram publicadas em [Man77] e posteriormente aperfeiçoadas na publicação de [Man82b]. Este último livro de Mandelbrot é a fonte clássica de consulta no assunto *fractal*, sendo que todas as bibliografias encontradas referenciam-se a ele.

A geometria fractal injetou ânimo novo no estudo da Matemática. Pode-se transformar o conceito de ciência árida e inacessível numa matemática viva, com objetos visuais e intuitivos, com aparência magnífica e, além de tudo, com grande variedade de aplicações.

Mas apesar de todas as pesquisas em andamento, o conceito de fractal é ainda uma questão em aberto e a discussão em torno do assunto não chegou a um consenso geral. Não há uma definição simples e precisa. Todas as tentativas já feitas até agora no sentido de definir um fractal geraram resultados insatisfatórios, pois a cada definição apresentada aparece em contrapartida um novo objeto que nela não se enquadra, mas que apesar disso comporta-se como um fractal. Mesmo a definição de Mandelbrot [Man82b]:

“Fractais são curvas cuja dimensão Hausdorff-Besicovitch é estritamente maior que sua dimensão Euclidiana”,

que é uma definição clássica agrupando inúmeras formas cujo comportamento não pode ser analisado pela geometria tradicional, deixa de fora alguns conjuntos que devem ser considerados como fractais.

Algumas definições mais genéricas foram propostas, como:

“Fractal é uma figura composta por partes que são semelhantes ao todo sob alguma forma.”

Esta definição, proposta por J. Feder em 1988, no seu livro *Fractals*, permite a inclusão de muitas formas naturais randômicas, algumas das quais contidas na definição de Mandelbrot e outras não. São conhecidas formas naturais com dimensão Euclidiana *igual* a dimensão de Hausdorff-Besicovitch, o que as tira do conjunto dos fractais definidos por Mandelbrot, mas que são compostas por partes semelhantes ao todo, o que as coloca dentro do conjunto dos fractais definido por Feder.

Atualmente, tentar definir fractais ainda é um propósito incerto. Parece ser mais sensato tentar obter um conhecimento intuitivo do que é um fractal e relacionar as características que ele deveria ter, como possuir infinitos detalhes, ser sempre muito irregular, possuir alguma forma de semelhança, ter na maioria dos casos conhecidos um valor de dimensão topológica menor que sua dimensão fractal (sob algum dos aspectos definidos no capítulo 3) e poder ser obtido por procedimentos muito simples, em geral por recursão.

Definir fractal desta forma pode soar de alguma maneira vago e impreciso, mas o que acontece realmente é que quando não se conhece todos os fractais existentes e, nos

vários ramos da Ciência, cada vez mais novas descobertas são feitas, qualquer definição restritiva que hoje pareça corretamente formulada, certamente corre o risco de mostrar-se incorreta amanhã. Atualmente, a geometria fractal é uma geometria experimental.

A característica dos fractais estarem organizados em escalas tem um notável paralelo na Teoria do Caos contemporânea. Eventos caóticos como turbulência da atmosfera ou batidas do coração humano, mostram padrões familiares em diferentes escalas de tempo. A correspondência entre os fractais e o caos não é um mero acidente. Ao contrário, é um sintoma de profunda correlação: “a *geometria fractal é a geometria do caos*”. [JPS90]

Enquanto um *objeto euclidiano* sempre pode ser expresso através de elementos básicos, como uma linha ou um ponto, um *objeto fractal* pode ser expresso em função de um algoritmo, ou seja, em função de um conjunto de procedimentos matemáticos. Assim, este trabalho propõe uma nova definição para um fractal, usando a característica de seu algoritmo de geração em conjunto com as características citadas anteriormente:

“Fractais são objetos matemáticos obtidos pela iteração de funções dentro do campo dos números complexos ou pela repetição de um conjunto de procedimentos matemáticos e que apresentam as seguintes características:

- *um fractal \mathcal{F} possui uma estrutura fina, isto é, sempre possui infinitos detalhes em qualquer escala arbitrariamente pequena;*
- *\mathcal{F} é irregular demais para ser descrito pela linguagem da geometria tradicional;*
- *\mathcal{F} possui freqüentemente alguma forma de auto-semelhança, seja ela estrita, aproximada ou estatística;*
- *usualmente, a dimensão fractal de \mathcal{F} (sob alguma interpretação) é maior ou igual a sua dimensão topológica;*
- *na maioria dos casos de interesse, \mathcal{F} é definida de modo muito simples, muitas vezes recursivamente.”*

Ao usarmos um método qualquer para mostrar a imagem de um fractal na tela de um computador, obtemos na realidade uma aproximação do fractal em questão. A “*imagem*” está limitada fisicamente pelo equipamento que a gerou enquanto o “*fractal ideal*” não pode ser visto porque é gerado por um número infinito de repetições.

As idéias acima referem-se aos “*fractais matemáticos*”, os quais são obtidos por procedimentos de iterações. Podemos considerar também os “*fractais naturais*” que possuem as mesmas características dos fractais matemáticos, mas são objetos já existentes na natureza como nuvens, relevos, árvores, etc.

Um dos maiores méritos de Mandelbrot foi reconhecer a correspondência de certos tipos de fractais matemáticos com algumas formas da natureza, conseguindo assim representar muito melhor objetos do mundo real do que usando a geometria tradicional.

“*Assim como nuvens não são esferas e montanhas não são cones*” [Man82b], a Teoria dos Fractais parece ser uma resposta para a representação do mundo que nos cerca.

Uma outra conseqüência muito importante que surge da maneira como os fractais são expressos usando um conjunto de procedimentos, é o fato disso resultar numa forma extremamente compacta para descrever objetos. Para termos uma idéia do que isto significa, basta saber que um objeto altamente complexo como uma folha de samambaia (ver figura 1.4) pode ser descrito por um algoritmo linear de poucas linhas e apenas 32 números (ver figura 1.5).

Dentro do contexto apresentado, o presente trabalho pretende oferecer sua contribuição na estruturação do assunto *fractal*, selecionando e organizando os conteúdos espalhados nas diversas publicações, dando um embasamento matemático que irá valorizar a teoria fractal e estudando alguns casos representativos de classes de fractais.

Assim o capítulo 1, esta introdução, situa os fractais dentro de um contexto histórico, acompanhando seu desenvolvimento desde o início do século até sua participação na contemporânea Teoria do Caos. Procura introduzir também de forma simples mas precisa, os principais conceitos da teoria dos fractais, permitindo que nos capítulos seguintes sejam formados grupos de fractais com a finalidade de estudar as características comuns entre eles.

O capítulo 2 extrai da matemática tradicional todo o embasamento necessário para definir a geometria fractal. São revistos os conceitos mais importantes, cuja melhor compreensão tornará possível apresentar no capítulo 3 a noção de dimensão fractal.

O capítulo 3 destaca dos conceitos da teoria dos fractais aquele que maior relevância apresenta até o momento — a *Dimensão Fractal*. São mostradas as diferentes

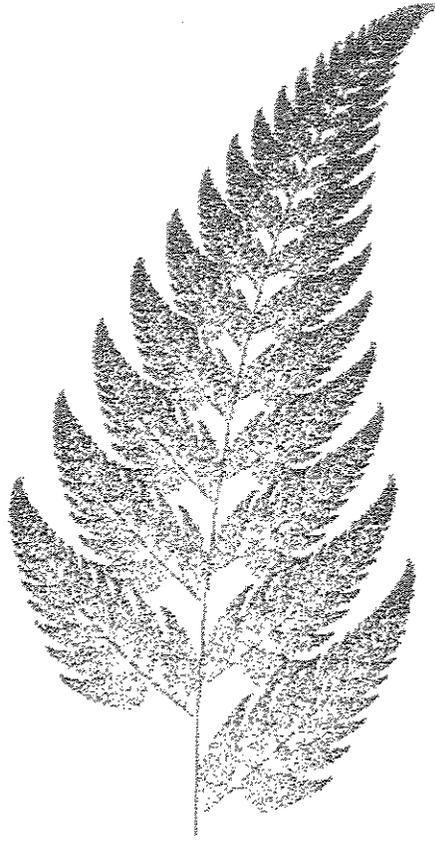


Figura 1.4: Folha de samambaia reproduzida por procedimento fractal. [Bar88]

definições existentes, seus significados geométricos e alguns métodos de cálculo.

O estudo de casos apresentado no capítulo 4 procura agrupar todo o conteúdo apresentado anteriormente para criar uma taxonomia dos fractais mais conhecidos, abordando para cada grupo as suas características comuns e uma descrição. São dados alguns exemplos de cada grupo procurando, quando possível, calcular sua dimensão, apresentar um método de geração e definir sua melhor utilização. Aplicações mais amplas para fractais foram colocadas no capítulo 5, onde pode-se relacionar o assunto aqui tratado com estudo de problemas em diversas áreas.

As conclusões do trabalho bem como as sugestões para continuação da pesquisa são colocadas no capítulo 6.

Para não comprometer a continuidade dos capítulos anteriores, foram deslocados para o apêndice a relação dos programas usados para gerar as imagens (apêndice a) e a seleção das fotos das imagens geradas (apêndice b). No apêndice c colocou-se uma carta do pesquisador Benoit B. Mandelbrot, resultante de uma correspondência mantida em 1990 sobre o gênero da palavra fractal.

Procedimento para geração de um fractal

Desenha uma folha de samambaia.

```

pt = 0
m = 4

it = 1000
data      0      0      0      0.16      0      0      0.01
data      0.85    0.04   -0.04    0.85      0      1.60    0.85
data      0.20   -0.26    0.23    0.22      0      1.60    0.07
data     -0.15    0.28    0.26    0.24      0      0.44    0.07
for j = 1 to m
    read a(j), b(j), c(j), d(j), e(j), f(j), pk
    pt = pt + pk
    p(j) = pt
next j
screen 1 : cls
for n = 0 to it
    nr = rnd
    if nr <= p(1) then k = 1
        else if nr <= p(2) then k = 2
            else if nr <= p(3) then k = 3
                else k = 4

    newx = a(k) * x + b(k) * y + e(k)
    newy = c(k) * x + d(k) * y + f(k)
    x = newx
    y = newy
    if n > 10 then plot (x,y)
next n
end

```

Figura 1.5: Procedimento fractal para geração de uma folha de samambaia

Finalmente, procurando dar uma contribuição a mais para as pessoas interessadas em trabalhar com fractais dentro dos vários campos possíveis de atuação, acrescentou-se no apêndice d um pequeno comentário sobre cada bibliografia que, apesar de lida, não foi usada diretamente no desenvolver da tese. Pretende-se assim que ao definir um interesse particular dentro dos fractais, seja possível procurar artigos com mais informações sobre este assunto dentro da bibliografia complementar.

Cada capítulo apresentado não pretende ser exaustivo no assunto, mas o conjunto de todos eles permitirá uma visão global dos fractais, adequada a todos que pretendam utilizar-se dos mesmos dentro de algum campo de aplicação e, em particular, dentro da Síntese de Imagens.

Com este trabalho espera-se contribuir particularmente na direção de possibilitar uma distribuição de funções em classes de fractais, facilitando assim a obtenção de comportamentos e propriedades previamente definidos.

Capítulo 2

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

Nos últimos anos, com o advento da síntese de imagens, os fractais tornaram-se muito populares como uma forma de arte e como modelo para uma grande variedade de fenômenos físicos.

Apesar de ser possível apreciá-los com pouco ou nenhum conhecimento de sua matemática, uma compreensão mais apurada certamente elevará a admiração por esses objetos tão diversificados. A frase — “*The Beauty of Fractals*”— é tão freqüentemente ouvida e chega a ser título de livro, mas é bom lembrar que muito de sua beleza pode ser encontrada também em sua matemática.

Os métodos da geometria clássica não são adequados para estudar os fractais, por isso precisa-se de algumas técnicas alternativas. A ferramenta principal da geometria fractal é a dimensão nas suas muitas formas e através dela vemos refletidas propriedades escalares e auto-similares. Para melhor compreensão desta dimensão fractal alguns conhecimentos da matemática tradicional serão revisados e adequados para serem usados no capítulo 3.

2.1 Conceitos Básicos

Para melhor clareza das idéias a serem desenvolvidas é necessário selecionar algumas noções matemáticas da *Teoria dos Conjuntos* que serão usadas no desenvolver deste capítulo e introduzir-se algumas notações que evitarão futuras ambigüidades. O matemático

Falconer, em [Fal90] apresenta um resumo muito consistente desta parte da matemática, o qual orientará o desenvolvimento desta seção.

Em geral, os conjuntos que serão estudados pertencem ao espaço Euclidiano n -dimensional \mathfrak{R}^n , onde $\mathfrak{R}^1 = \mathfrak{R}$ é o conjunto de números reais ou a *reta real* e \mathfrak{R}^2 é o plano Euclidiano. Os pontos em \mathfrak{R}^n são denotados por letras minúsculas e ocasionalmente serão usadas formas coordenadas para representá-los. Assim,

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

e

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

representam as coordenadas dos pontos x e y em \mathfrak{R}^n . As operações de adição e multiplicação por escalar são definidas da maneira usual, sendo

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

e

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

onde λ é um escalar real.

A distância entre dois pontos é dada pela forma usual da distância Euclidiana, ou seja, é a *distância métrica*. Assim, dados dois pontos x e y em \mathfrak{R}^n , a distância entre eles é

$$|x - y| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Os conjuntos, geralmente sub-conjuntos de \mathfrak{R}^n , são denotados por letras maiúsculas A, B, C , etc. Como na matemática tradicional, $x \in E$ significa que o ponto x pertence ao conjunto E , e $A \subset B$ diz que o conjunto A está contido no conjunto B , ou seja, A é um subconjunto de B .

A expressão “ x : *condição*” deve ser lida “ x tal que *condição*” e inclui o conjunto de pontos x para os quais *condição* é verdadeira.

Alguns conjuntos que ocorrem com certa frequência possuem uma notação especial. O conjunto vazio, que não possui nenhum elemento, será denotado por \emptyset . O conjunto

dos números inteiros será \mathcal{Z} e o conjunto dos números racionais será \mathcal{Q} . O sobrescrito $+$ representa os elementos positivos de um conjunto; assim \mathfrak{R}^+ são os números reais positivos e \mathcal{Z}^+ são os números inteiros positivos. Serão feitas referências ao conjunto dos números complexos \mathbb{C} , que muitas vezes se identificam com o plano \mathfrak{R}^2 , com $(x + iy)$ de \mathbb{C} correspondendo ao ponto (x, y) de \mathfrak{R}^2 .

A *bola fechada* de centro x e raio r é definida por

$$B_r(x) = \{y : |y - x| \leq r\}$$

Da mesma maneira, a *bola aberta* de centro x e raio r é

$$B_r^o(x) = \{y : |y - x| < r\}$$

Assim, uma bola fechada contém a esfera que a limita e uma bola aberta não. Em \mathfrak{R}^2 uma bola é apenas um disco e em \mathfrak{R}^1 um intervalo. Serão usadas expressões clássicas de intervalo, onde se $a < b$, um intervalo fechado $[a, b]$ será o conjunto

$$\{y : a \leq y \leq b\}$$

e um intervalo aberto (a, b) será

$$\{y : a < y < b\}$$

As idéias de *aberto* e *fechado*, referenciadas a bolas podem ser estendidas para conjuntos muito mais genéricos. Intuitivamente, um conjunto fechado contém os pontos de sua borda e um conjunto aberto não. Com mais precisão, um subconjunto A de \mathfrak{R}^n é *aberto*, se para todos os pontos de A existe uma $B_r(x)$, centrada em x e com raio positivo r contida em A . Um conjunto A é *fechado* se sempre que uma seqüência de pontos x_k de A convergir para um ponto x de \mathfrak{R}^n , então x está em A (ver fig. 2.1). Os conjuntos \emptyset e \mathfrak{R}^n são definidos como abertos e fechados.

A *união* dos conjuntos A e B será representada por $A \cup B$ e conterà todos os pontos que pertencem a A ou B . A *interseção* de A e B será $A \cap B$ e conterà os pontos que pertencem a ambos os conjuntos. Generalizando estas noções, $\cup_{\alpha} A_{\alpha}$ denota a união de uma coleção de conjuntos A_{α} e contém todos os pontos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A_{α} . Similarmente $\cap_{\alpha} A_{\alpha}$ denota a interseção desses conjuntos e contém os pontos

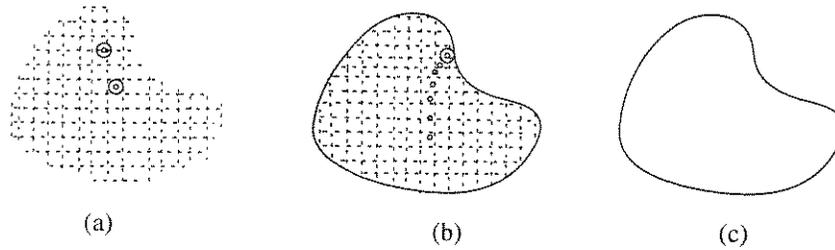


Figura 2.1: (a) - *Conjunto aberto* - para cada ponto do conjunto existe uma bola aberta ou fechada pertencente ao conjunto. (b) - *Conjunto fechado* - o limite da convergência de qualquer sequência de pontos de um conjunto está no conjunto. (c) - *borda* do conjunto em (a) ou (b).

comuns a todos os conjuntos A_α . Uma coleção de conjuntos é *disjunta* se a interseção de qualquer par de conjuntos da coleção for vazia. A *diferença* $A - B$ consiste nos pontos do conjunto A que não estão no conjunto B . Em particular, a diferença $\mathbb{R}^n - A$ é chamada o *complemento* de A .

O conjunto de todos os pares ordenados

$$\{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$$

é chamado *produto Cartesiano de A e B* e é representado por $A \times B$. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$, o produto $A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$.

Um conjunto A é *enumerável* se seus elementos podem ser listados na forma x_1, x_2, \dots , com todo elemento de A aparecendo em um lugar específico da lista. Os conjuntos \mathbb{Z} e \mathbb{Q} são enumeráveis mas \mathbb{R} não é.

O conjunto A é *compacto* se toda coleção de conjuntos abertos que cobre¹ A possui uma subcoleção finita que também cobre A . A compactidade é uma propriedade muito útil num conjunto pois permite que conjuntos infinitos de condições sejam reduzidos a muitos conjuntos finitos. Para o presente trabalho é suficiente pensar em subconjuntos compactos de \mathbb{R}^n como os conjuntos fechados e limitados. A interseção de qualquer coleção de conjuntos compactos é compacta.

Um subconjunto A de \mathbb{R}^n é *conexo* se não existirem os conjuntos abertos U e V tais que $U \cup V$ contém A com $A \cap U$ e $A \cap V$ disjuntos e não-vazios. O conjunto A é

¹Dizemos que uma coleção de conjuntos abertos cobre A quando sua união contém A .

totalmente desconexo se o maior subconjunto conexo que contém cada ponto de A consiste unicamente deste ponto. Algebricamente, dizemos que uma forma é *desconexa* se ela for a soma de duas outras formas envolvendo conjuntos separados de variáveis. Caso contrário, ela é *conexa* [Cox73]. Por exemplo:

$$x_1^2 + x_2^2 \text{ é desconexa, e}$$

$$x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 \text{ é conexa.}$$

Se A é um conjunto de números reais, o *supremo* de A , é o menor número m tal que $x \leq m$ para todo $x \in A$, ou é ∞ se este número não existe. O *ínfimo* de A é o maior número n tal que $n \leq x$ para todo $x \in A$, ou é $-\infty$ caso n não exista. Intuitivamente, pensa-se em supremo e ínfimo como o máximo e o mínimo de um conjunto, mas é bom ressaltar que o supremo e o ínfimo não precisam pertencer ao conjunto enquanto o máximo e o mínimo de um conjunto sempre pertencem a ele. Denota-se o supremo de um conjunto de A como $\sup A$ e o ínfimo como $\inf A$.

Define-se o *diâmetro*² $|A|$ de um sub-conjunto não vazio A de \mathbb{R}^n como a maior distância entre os pares de pontos de A . Assim tem-se:

$$|A| = \sup\{|x - y| : x, y \in A\}$$

Um conjunto A é *limitado* se possuir um diâmetro finito, ou de forma equivalente, A é limitado se puder ser contido em alguma bola finita suficientemente grande.

Convergência de seqüências é definida da maneira usual. Uma seqüência x_k em \mathbb{R}^n *converge* para um ponto x de \mathbb{R}^n quando $k \rightarrow \infty$, se dado um $\varepsilon > 0$, existe um número K tal que $|x_k - x| < \varepsilon$ sempre que $k > K$, isto é, se $|x_k - x|$ converge para 0. O número x é chamado *limite* da seqüência e escreve-se $x_k \rightarrow x$ ou $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$.

2.2 Transformações

Sejam X e Y conjuntos quaisquer. Uma *função* ou *transformação* f de X em Y é uma regra ou fórmula que associa um ponto $f(x)$ de Y a cada ponto x de X . Escreve-se

²Para ficar coerente com a notação de distância entre dois pontos x e y que é $|x - y|$, adotou-se para diâmetro de um conjunto A a mesma representação, substituindo os pontos pelo nome do conjunto $|A|$.

$f : X \rightarrow Y$, onde X é chamado *domínio* de f e Y é o *contra-domínio*.

Se A é um subconjunto de X , a *imagem* de A , denotada por $f(A)$, é dada pelo conjunto de pontos $f(x)$ de Y , associados aos pontos x de A , isto é:

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

Se B é um sub-conjunto de Y , a função $f^{-1}(B)$ é a *imagem inversa* de B , dada pelo conjunto

$$\{x \in X : f(x) \in B\}$$

Desta maneira a imagem inversa de um único ponto pode conter muitos pontos.

Algumas funções de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n possuem uma significância geométrica particular, recebendo então o nome de *transformações*. Para melhor diferenciar das outras funções, as transformações serão denotadas por letras maiúsculas. Na figura 2.2 mostra-se o efeito causado por transformações sobre conjuntos.

2.2.1 Congruência ou Isometria

É uma transformação $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que preserva distâncias, isto é,

$$|S(x) - S(y)| = |x - y|$$

para x e y em \mathbb{R}^n . Nesta transformação os ângulos, a área e as perpendiculares também são preservados.

- *Congruência direta* ou *movimento rígido* : são transformações obtidas pela combinação de rotação e/ou translação rígida, as quais preservam o sentido de um objeto [Cox73]. Assim, um quadrado ABCD no sentido horário, continuará sendo um quadrado ABCD no sentido horário após sofrer uma rotação e/ou uma translação rígida. Movimentos rígidos são chamados também de *deslocamentos*.

1. *Translação Rígida* : é uma transformação da forma

$$S(x) = x + a$$

onde o termo independente a mantém-se constante para todas as componentes do ponto em \mathbb{R}^n .

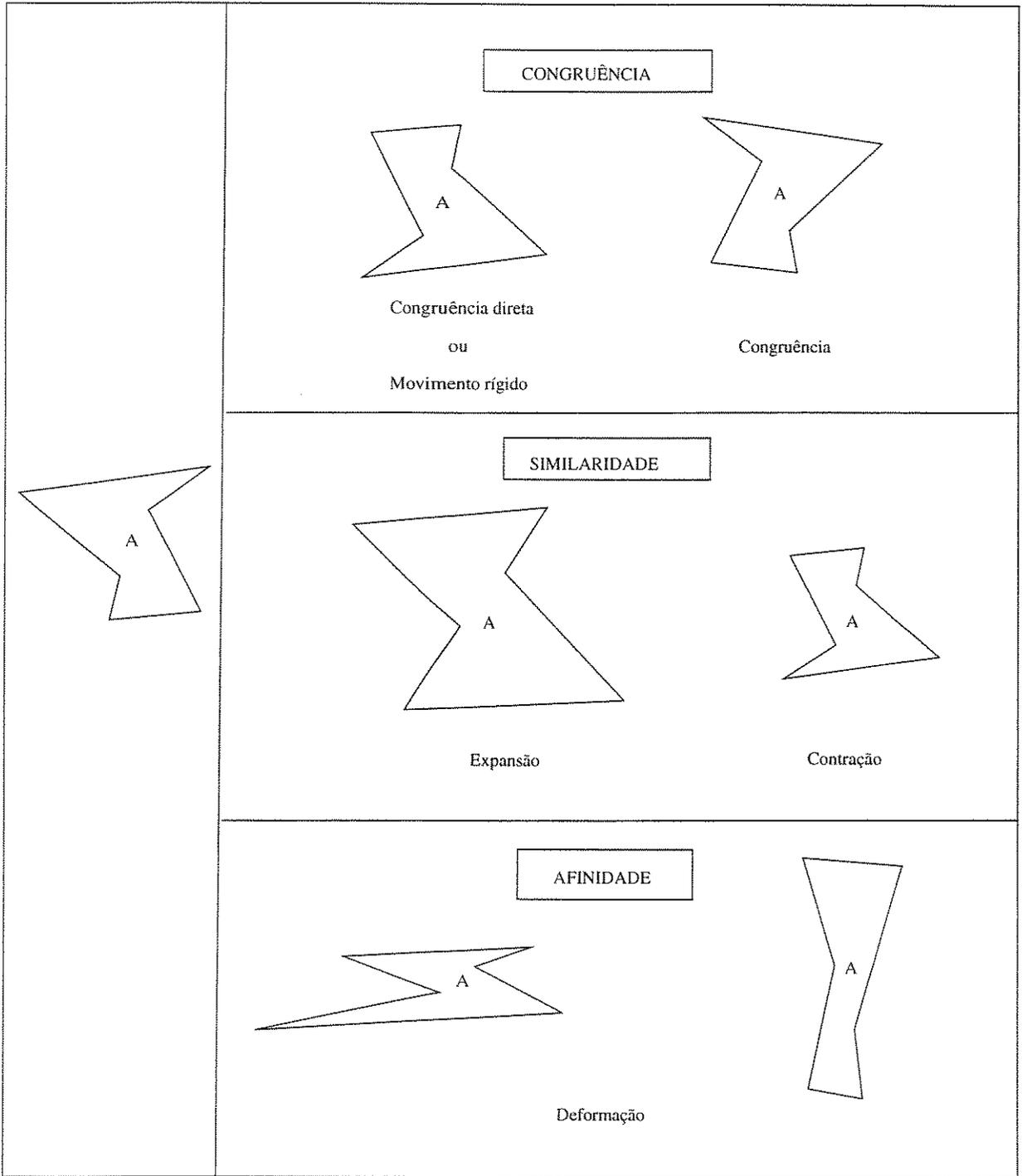


Figura 2.2: Exemplos de transformações

2. *Rotação* : é uma transformação que está centrada num ponto a , de tal forma que

$$|S(x) - a| = |x - a|$$

- *Congruência indireta ou Simetria* : são transformações que envolvem rebatimentos. Transformações deste tipo invertem o sentido de um objeto. Assim, um quadrado ABCD no sentido horário passará a ser um quadrado DCBA no mesmo sentido horário.

1. *Reflexão* : é uma transformação que mapeia pontos para sua imagem espelhada, num plano $(n - 1)$ dimensional.

2.2.2 Homotetia

Uma transformação $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma homotetia se

$$S_c(x) = cx$$

para todo $c \geq 0$.

Temos uma *contração* quando $0 < c < 1$ e uma *expansão* quando $c > 1$. Se $c = 1$ temos uma transformação *identidade*.

Uma outra forma para determinar contrações é usar o conceito da *constante de Lipschitz*. O valor desta constante para uma função $F : X \rightarrow X$, onde X é um espaço métrico, é dada pela relação:

$$Lip F_x = \sup_{x \neq y} \left\{ \frac{d(F(x), F(y))}{d(x, y)} \right\}$$

sendo:

- d uma métrica no espaço X ;
- sup a convenção adotada para supremo de um conjunto, conforme definição na página 17.

Esta função será uma contração no conjunto X quando $Lip F_x < 1$.

2.2.3 Similaridade

Uma transformação $S : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ é uma similaridade se existe uma constante $c \neq 0$ para a qual

$$|S(x) - S(y)| = c |x - y|$$

para todo x, y em \mathfrak{R}^n .

Similaridades são composições de isometrias e homotetias. Uma transformação S de similaridade transforma conjuntos em outros conjuntos geometricamente similares, através de translações rígidas, rotações, reflexões, contrações ou expansões, preservando todos os ângulos. Nestas transformações linhas retas do objeto considerado continuam linhas retas no objeto transformado.

2.2.4 Linearidade

Uma transformação $T : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ é linear se:

$$T(x + y) = T(x) + T(y) \tag{2.1}$$

$$T(\lambda x) = \lambda T(x) \tag{2.2}$$

para todo $x, y \in \mathfrak{R}^n$ e $\lambda \in \mathfrak{R}$. A característica de uma transformação linear é poder ser representada por uma matriz, composta pelos coeficientes das funções lineares homogêneas que as representam. Como exemplo, temos uma transformação $T : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$ expressa por [BM80]:

$$y_1 = a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3$$

$$y_2 = a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3$$

$$y_3 = a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3$$

A representação genérica para estas funções será:

$$y_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j, \quad \text{com } i = \{1, 2, 3\}$$

A este sistema podemos fazer corresponder a representação matricial:

$$Y = AX$$

onde $Y = \|y_i\|$, $A = \|a_{ij}\|$ e $X = \|x_j\|$.

Transformações lineares são rotações, reflexões e escalamentos (expansão e contração). Translações não são transformações lineares porque não verificam as equações 2.1 e 2.2 acima.

- *Linearidade não-singular*: para que uma transformação linear seja não-singular basta que sua nulidade seja 0 [Lip74], ou seja:

$$T(x) = 0 \iff x = 0$$

Estas transformações também são chamadas de *transformações lineares completas*.

2.2.5 Afinidade

Transformações afins são transformação da forma

$$S(x) = T(x) + a$$

onde $T(x)$ é uma transformação linear não-singular e $a \in \mathfrak{R}^n$ é um valor fixo. Esta transformação causa uma expansão, contração ou translação, porém desigual em cada direção. O resultado é uma deformação na figura original, apesar das linhas retas continuarem retas, das paralelas continuarem paralelas e das tangentes permanecerem tangentes [BM80].

2.3 Medidas

São maneiras de atribuir um “*tamanho*” numérico a conjuntos, de tal forma que se um conjunto é decomposto em um número finito de partes, de uma maneira razoável, o tamanho do todo é igual a soma do tamanho das partes.

Assim, μ é uma medida de A em \mathbb{R}^n , se:

- $0 \leq \mu(A) < \infty, \forall A \subset \mathbb{R}^n$;
- $\mu(\emptyset) = 0$;
- $\mu(A) \leq \mu(B)$, se $A \subset B$;
- Se A_1, A_2, \dots é uma sequência finita de conjuntos, então:

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A(i) \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu A_i$$

Quando $0 < \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$, podemos pensar em medida como uma distribuição de massa da seguinte maneira:

toma-se uma quantidade finita de massa e distribui-se de alguma maneira por um conjunto X . Medida seria então a quantidade de massa espalhada pelos pontos do conjunto X .

Na sequência desta seção serão apresentados alguns tipos de medidas.

2.3.1 Contagem

$\mu(A)$ é o número de pontos de $A \in \mathbb{R}^n$ se A é finito ou é ∞ se A é infinito.

2.3.2 Massa Pontual

Considerando $a \in \mathbb{R}^n$, o valor $\mu(A) = 1$ se $a \in A$, caso contrário $\mu(A) = 0$. Assim μ pode ser pensada como a massa pontual concentrada em a .

2.3.3 Medida de Lebesgue em \mathbb{R} — \mathcal{L}^1

É uma extensão da idéia de “comprimento”.

1. para intervalos abertos ou fechados:

$$\mathcal{L}^1(A) = \mathcal{L}^1[a, b] = |b - a|$$

2. para um conjunto A , sendo $A = \cup_i [a_i, b_i]$, a união finita de i intervalos disjuntos:

$$\mathcal{L}^1(A) = \sum (|b_i - a_i|),$$

portanto, o comprimento de A seria a soma dos comprimentos dos intervalos.

3. para um conjunto A qualquer:

$$\mathcal{L}^1(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (|b_i - a_i|) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \right\}$$

onde:

- \inf é a convenção adotada para *ínfimo* de um conjunto, conforme definição na página 17;
- o símbolo $:$ representa a expressão “*tal que*”, conforme convenção adotada na página 14.

Pode-se escrever $\text{compr}(A)$ no lugar de $\mathcal{L}^1(A)$, para enfatizar a relação com a noção intuitiva de comprimento.

2.3.4 Medida de Lebesgue em \mathbb{R}^n — \mathcal{L}^n

É uma extensão da idéia de *área e volume*.

1. para $n = 2$ temos $A \subset \mathbb{R}^2$

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \leq x_1 \leq b_1 \text{ e } a_2 \leq x_2 \leq b_2\}$$

A medida \mathcal{L}^2 é a área do paralelogramo A (ver figura 2.3 (a)).

2. em \mathbb{R}^3

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : a_1 \leq x_1 \leq b_1, a_2 \leq x_2 \leq b_2, a_3 \leq x_3 \leq b_3\}$$

A medida \mathcal{L}^3 é o volume do paralelepípedo A (ver figura 2.3 (b)).

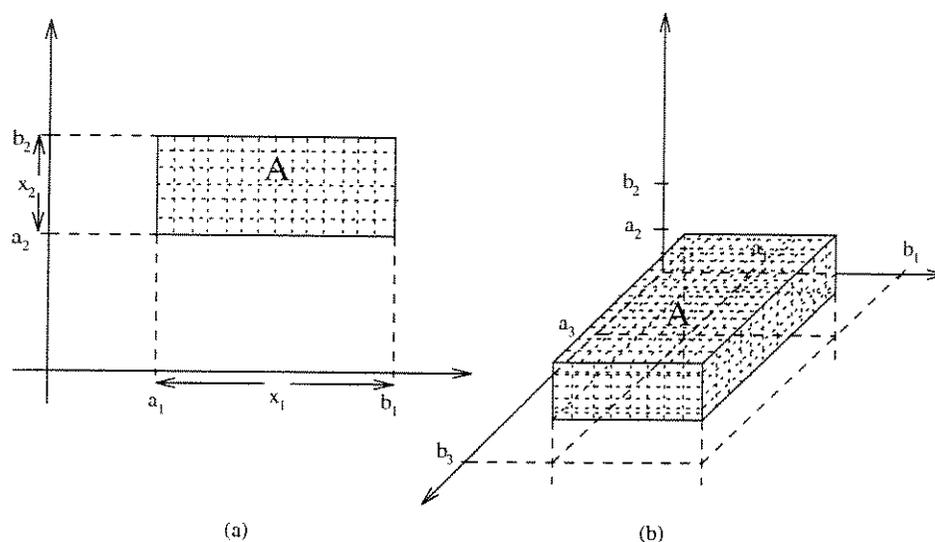


Figura 2.3: (a) – Medida de Lebesgue em \mathbb{R}^2 . (b) – Medida de Lebesgue em \mathbb{R}^3 .

3. em \mathbb{R}^n

$$A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i\}$$

(a)

$$\text{vol}^n(A) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$$

(b)

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}^n(A_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}$$

2.3.5 Medida de Hausdorff — $\mathcal{H}^s(F)$

Em [Fal88a] considera-se um sub-conjunto U não vazio do espaço Euclidiano n -dimensional \mathbb{R}^n . O diâmetro de U , definido anteriormente como:

$$|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$$

representa a maior distância entre todos os pares de pontos de U .

Se $\{U_i\}$ é uma coleção finita de conjuntos com diâmetro de medida máxima δ que cobre um conjunto F , isto é:

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$$

com $0 < |U_i| \leq \delta$ para cada i , diz-se que U_i é uma δ -cobertura de F .

Suponha-se que F seja um subconjunto de \mathbb{R}^n e s seja um número não-negativo. Para qualquer $\delta > 0$, define-se a *medida de Hausdorff* como sendo:

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } F \right\} \quad (2.3)$$

Assim, consideram-se todas as coberturas de F por conjuntos de diâmetro máximo δ e define-se o menor somatório das potências s -dimensional dos diâmetros de cada uma dessas coberturas como o valor da medida considerada.

Quando δ decresce, a classe das coberturas permitidas diminui e portanto, a quantidade de conjuntos necessários para cobrir F cresce. Com isso, o menor valor para $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ também cresce, tendendo para um limite quando δ tende para 0.

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$$

Este limite sempre existe, podendo assumir os valores 0 e ∞ , entre outros [Fal90].

Chama-se $\mathcal{H}^s(F)$ a *medida Hausdorff s -dimensional de F* .

Na figura 2.4 tem-se um exemplo do cálculo da medida de Hausdorff com o conjunto F , em \mathbb{R}^2 , e duas possíveis coberturas C_1 e C_2 . Considerando-se a distância horizontal e vertical entre dois pontos vizinhos de F como 1 e determinando-se que o diâmetro máximo de cada conjunto que compõe as coberturas é $\alpha = 2$ e sendo $s = 1$, e aplicando-se estes valores à equação 2.3, tem-se:

$$C_1 = \sum_{i=1}^8 |U_i|^1 = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 2 = 4$$

$$C_2 = \sum_{i=1}^6 |U_i|^1 = 0 + 0 + 1 + 1 + 2 + 2 = 6$$

⋮

O menor valor de somatório encontrado desta forma, para todas as possíveis coberturas de F , quando $\delta \rightarrow 0$, corresponde ao valor de $\mathcal{H}^s(F)$.

Outra definição para a mesma medida, usando a noção de vizinhança de um ponto e distância de ponto a conjunto, pode ser encontrada em [Hut81].

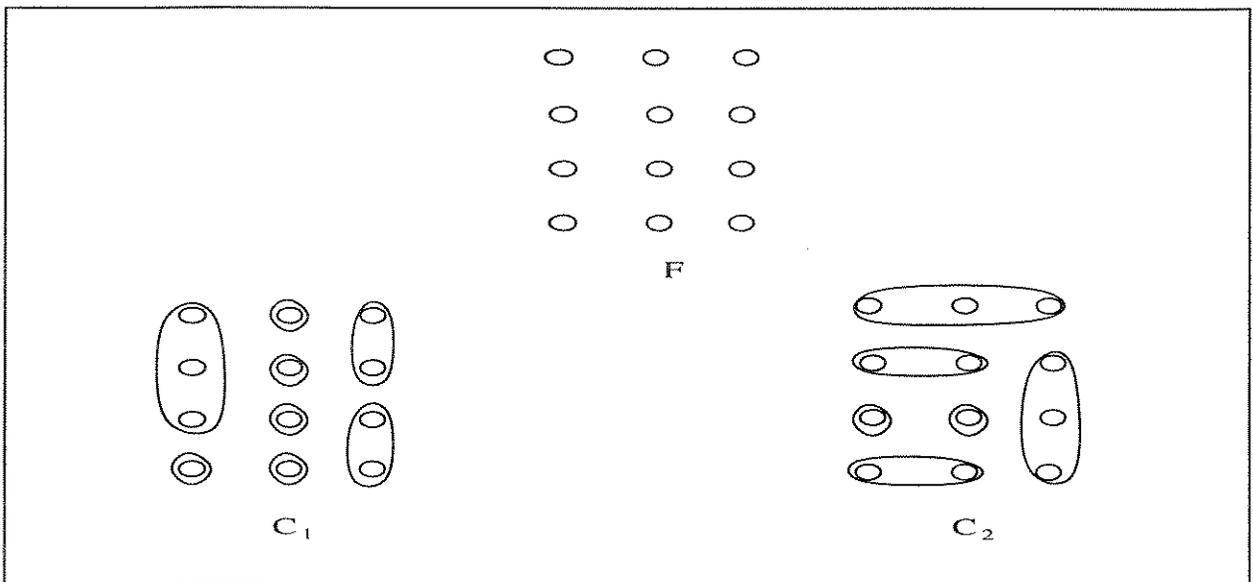


Figura 2.4: O conjunto F em \mathbb{R}^2 e duas possíveis coberturas C_1 e C_2 .

2.3.5.1 Propriedades da medida de Hausdorff

- $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$.
- Se $E \subset F$, então $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$: *monotonicidade*
- Se F_i é uma coleção de conjuntos disjuntos, então:

$$\mathcal{H}^s \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i)$$

isto é, \mathcal{H}^s da união de conjuntos disjuntos é igual à soma de \mathcal{H}^s de cada um dos conjuntos.

2.4 Comentários Finais

Neste capítulo introduziram-se os fundamentos matemáticos que darão o suporte necessário aos capítulos que se seguem e, em especial, ao capítulo 3. Procurou-se abranger este conteúdo de forma simplificada, facilitando sua compreensão também a não matemáticos. Para obter um nível de aprofundamento maior nos assuntos cobertos por este capítulo, sugere-se consultar livros textos de matemática a nível de graduação, nas áreas de análise numérica e teoria das probabilidades. Já o conteúdo da teoria das medidas é encontrado em livros de matemática mais avançados, a nível de pós-graduação. Algumas referências podem ser citadas, tais como [AP91], [Lip74] e [BM80] para consultas básicas e [PS89] e [Cox73] para consultas mais avançadas. Para atingir-se o nível de conhecimento da geometria fractal pretendido por este trabalho, o conteúdo apresentado neste capítulo é considerado suficiente.

Capítulo 3

DIMENSÃO FRACTAL

Uma das principais ferramentas da geometria fractal é a dimensão em suas várias formas. Muitas noções novas precisam ser vistas para entender este conceito, pois estamos familiarizados com o fato de que uma curva é um objeto unidimensional e uma superfície é bidimensional, e é um tanto incomum afirmar-se que o conjunto de Cantor tem dimensão 0,631 e a curva de von Koch possui dimensão 1,262. No entanto, uma boa avaliação desses valores fracionários permite obter muitas informações sobre os objetos fractais, que ficariam escondidas pela noção tradicional de dimensão.

Desde o final do século passado os matemáticos reconheceram que o método tradicional para o cálculo de dimensão, baseado no número de vetores necessários para gerar o espaço ao qual pertence um objeto considerado [Lip74], não satisfazia alguns novos objetos que estavam sendo encontrados. Já em 1877 o matemático Cantor fez algum trabalho de pesquisa no assunto, assim como Peano em 1890, Felix Hausdorff em 1919 e Besicovitch um pouco mais tarde. Vários destes trabalhos originaram versões diferentes de dimensão, cada uma delas com um sentido próprio.

As diversas noções de dimensão fractal vieram preencher a lacuna existente na definição Euclidiana de dimensão procurando abranger o maior número possível de objetos. Em [Fog87], temos um exemplo que mostra de maneira muito interessante a noção intuitiva da nova dimensão fractal. Consideremos uma folha de papel e comecemos a amassar esta folha em nossas mãos, cada vez mais, fazendo a superfície 2-dimensional da folha de papel tornar-se gradativamente mais irregular. No final, a forma de uma esfera começa a aparecer

fazendo a superfície parecer cada vez mais com um objeto 3-dimensional, apesar de continuar sendo uma folha de papel 2-dimensional. A dimensão fractal deste objeto iria mudando durante este processo, variando entre *dois* e *três*, representando assim o quanto o papel está amarrotado no momento. Enquanto isso a sua dimensão Euclidiana continuaria tendo o valor fixo *dois*, perdendo muito de sua representatividade. O mesmo comportamento poderia ser aplicado a uma linha unidimensional tendo sua dimensão variando entre *um* e *dois*, como mostra a figura (3.1).

elemento dimensão			
Euclidiana	1	1	1
Fractal	1	1,3 ...	1,8 ...

Figura 3.1: Dimensão Euclidiana e Dimensão Fractal

Falando de forma muito rudimentar, dimensão fractal é uma medida que, sob qualquer interpretação, avalia quanto espaço uma curva ocupa, resalta a irregularidade de um conjunto e contém muitas informações sobre as propriedades geométricas desse conjunto.

Existem interpretações mais satisfatórias e outras menos, algumas são mais abrangentes outras mais restritas, algumas são de cálculo fácil e outras de difícil obtenção. Diferentes interpretações podem resultar em diferentes valores de dimensão para um mesmo conjunto e também podem representar diferentes propriedades desse conjunto. É preciso, portanto, ser consistente no uso do termo *dimensão fractal*, procurando sempre o seu significado preciso e particular.

Veremos a seguir os conceitos principais já propostos para calcular a dimensão

fractal.

3.1 Dimensão de similaridade — \mathcal{D}_f

Em [Hut81] encontra-se a dimensão de similaridade definida em função da constante de Lipschitz¹. Considera-se para isso o espaço \mathfrak{R}^n com a métrica Euclidiana, o conjunto $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ composto de similaridades² e faz-se a constante de Lipschitz para cada conjunto S_i ser representada por c_i . Define-se então:

Dimensão de similaridade é o único número positivo s para o qual:

$$\sum_{i=1}^n c_i^s = 1 \quad (3.1)$$

Um método conveniente para encontrar a dimensão de certos conjuntos auto-similares³, fazendo uso da própria similaridade inerente a eles é usando sua representação esquemática⁴. Neste esquema a dimensão seria dada por:

$$\mathcal{D}_s = -\frac{\ln N}{\ln n} \quad (3.2)$$

Nesta equação N representa o número de segmentos do *gerador* e n será a proporção de contração de cada segmento.

Na figura (3.2) temos o cálculo da dimensão de similaridade para uma das formas da curva de Koch.

3.2 Dimensão de Hausdorff–Besicovitch — $\dim_H F$

Esta dimensão está relacionada com a maneira pela qual o objeto preenche o espaço no qual está contido.

¹ver definição desta constante na página 20, seção 2.2.2.

²ver definição de transformações de similaridades no capítulo 2, seção 2.2.3.

³ver definição de auto-similaridades no capítulo 4, seção 4.1.1

⁴Além do exemplo visto nesta seção, temos no capítulo 4, exemplos mais detalhados desta dimensão.

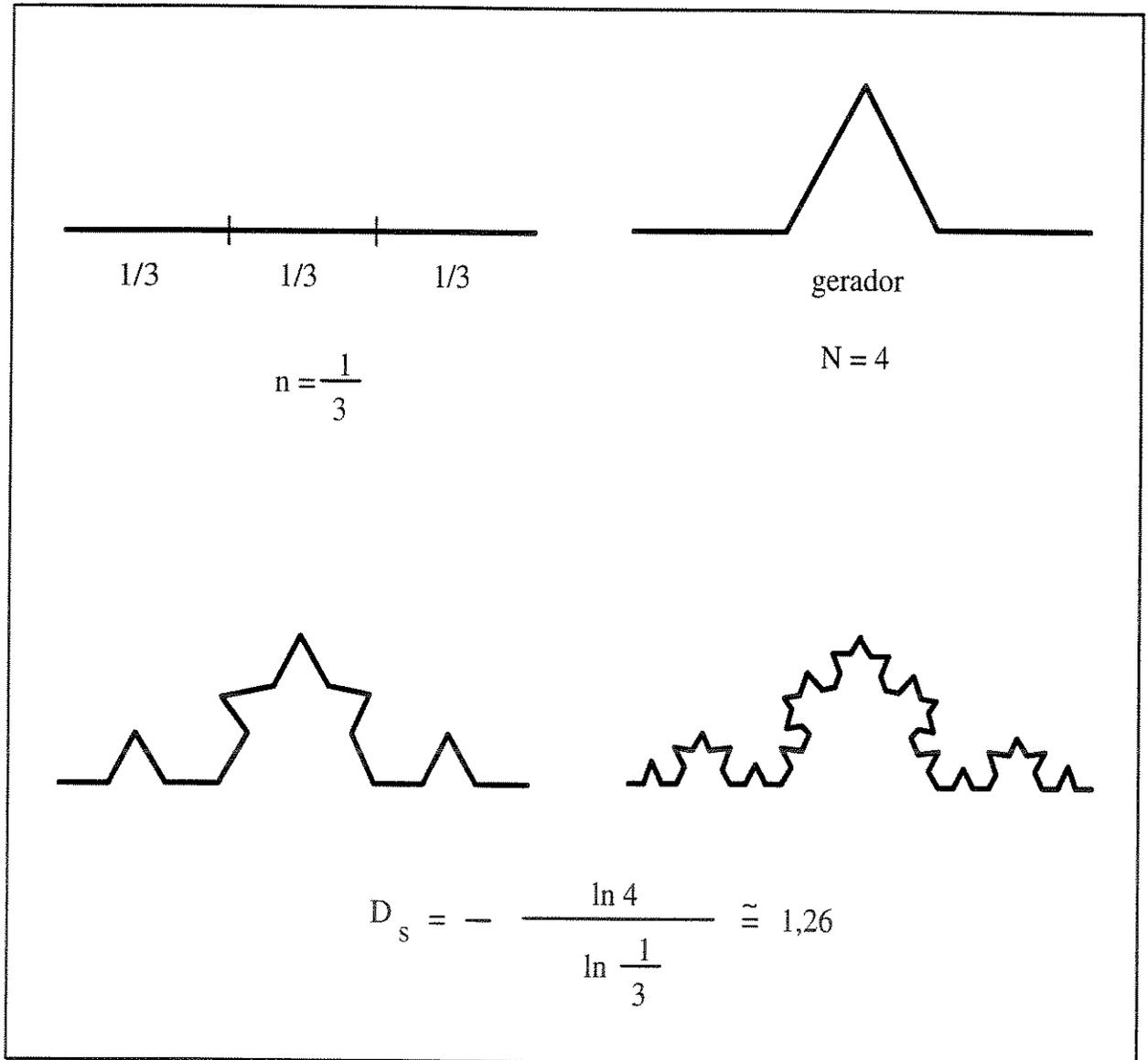


Figura 3.2: Dimensão de similaridade da Curva de Koch

A idéia de uma dimensão não inteira aplicada a formas descontínuas surgiu ao matemático Hausdorff por volta de 1919. Sua proposição foi mais tarde aperfeiçoada por Besicovitch e este método criado recebeu seus nomes. Apesar de alguns autores citarem apenas Hausdorff parece mais justo acrescentar o nome de Besicovitch como reconhecimento à sua contribuição, que deu a esta dimensão a forma conhecida atualmente. Muitas vezes esta dimensão é chamada simplesmente *dimensão fractal* devido ao seu uso ser largamente difundido e assim, muitas vezes, ser confundida com a única medida de dimensão para fractal.

Hutchinson em [Hut81] e Falconer em [Fal90] usam a medida de Hausdorff⁵ para definir esta dimensão. Observando a equação 2.3, no capítulo 2, verifica-se que se $\delta < 1$ a medida não cresce com s . Assim, pode-se provar⁶ que há um único valor crítico da potência s -dimensional para o qual o valor de $\mathcal{H}^s(F)$ salta repentinamente de ∞ para 0. Esta situação crítica está representada na figura (3.3).

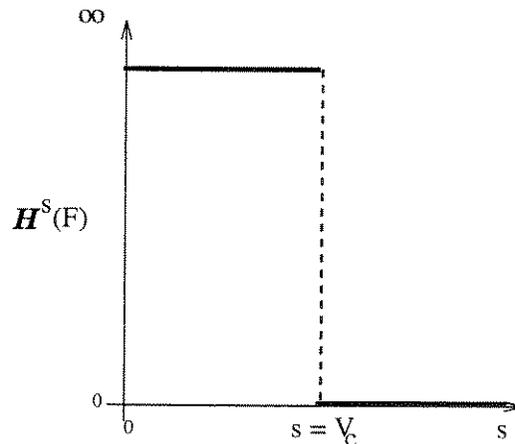


Figura 3.3: Valor crítico V_c da Medida de Hausdorff–Besicovitch, representada por $\dim_{\mathcal{H}}F$

Este valor crítico é chamado de dimensão Hausdorff–Besicovitch ($\dim_{\mathcal{H}}F$) e é tal que:

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & , \text{ se } s < \dim_{\mathcal{H}}F \\ (0, \infty) & , \text{ se } s = \dim_{\mathcal{H}}F \\ 0 & , \text{ se } s > \dim_{\mathcal{H}}F \end{cases}$$

⁵Ver a definição desta medida no capítulo 2, seção 2.3.5.

⁶Detalhes desta prova podem ser encontrados em [Fal90].

Um exemplo simplificado pode ser dado considerando-se um disco plano F , de raio unitário, em \mathbb{R}^3 . Usando métricas Euclidianas usuais neste espaço como comprimento, área e volume, pode-se fazer os seguintes cálculos para obter a medida de Hausdorff:

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } F \right\} \quad (3.3)$$

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$$

- para o espaço unidimensional:

$$\mathcal{H}^1(F) = \text{compr}(F) = \infty$$

- para o espaço bidimensional:

$$\mathcal{H}^2(F) = \text{área}(F) \longrightarrow 0 < \mathcal{H}^2(F) < \infty$$

- para o espaço tridimensional:

$$\mathcal{H}^3(F) = \text{vol}(F) = 0$$

- resumindo:

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & , \text{ se } s < 2 \\ (0, \infty) & , \text{ se } s = 2 \\ 0 & , \text{ se } s > 2 \end{cases}$$

Como em $s = 2$ o valor de $\mathcal{H}^s(F)$ muda repentinamente de ∞ para 0, dizemos então que:

$$\dim_H F = 2$$

O exemplo acima, cuja dimensão de Hausdorff foi facilmente obtida, é apenas ilustrativo. Para conjuntos realmente fractais parece não haver um caminho fácil para computar as convergências necessárias como é mostrado em [Fal88a].

3.2.1 Propriedades

- Se $F \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto, então $\dim_H F = n$.
- Se F é uma superfície m -dimensional, continuamente diferenciável⁷ em \mathbb{R}^m , então $\dim_H F = m$. Portanto, curvas contínuas tem dimensão *um* e superfícies contínuas tem dimensão *dois* em qualquer espaço que as contenha.
- monotonicidade: $E \subset F$ então $\dim_H E \leq \dim_H F$
- estabilidade enumerável: F_1, F_2, \dots é uma seqüência enumerável de conjuntos, então:

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i < \infty} (\dim_H F_i)$$

- Se F é um conjunto enumerável então $\dim_H F = 0$. Neste caso cada F_i é um único ponto.
- invariância geométrica: sendo F invariante a transformações em que:

$$c_1 |x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2 |x - y|$$

com $x, y \in F$ e $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$,

temos que $\dim_H f(F)$ será invariante também.

Portanto $\dim_H f(F) = \dim_H F$ se f é uma transformação em \mathbb{R}^n tal como translação, rotação, similaridade ou afinidade

- Um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ com $\dim_H F < 1$ é totalmente desconexo⁸ (ver prova em [Fal90]).

3.3 Dimensões equivalentes à Dimensão de Hausdorff

A dimensão de Hausdorff–Besicovitch vista na seção 3.2 considera que a cobertura de um conjunto F em \mathbb{R}^n é feita por conjuntos quaisquer também em \mathbb{R}^n .

Outras classes de coberturas, que usam um tipo particular de conjunto podem ser usadas para medir a dimensão de Hausdorff–Besicovitch. Em [Fal90] temos dois exemplos:

⁷Funções continuamente diferenciáveis possuem derivada contínua em todos os seus pontos.

⁸Ver definição de conjuntos totalmente desconexos na página 16.

3.3.1 Dimensão de Hausdorff usando coberturas por Bolas Esféricas — \mathcal{D}_b

Adaptando a medida de Hausdorff para bolas esféricas⁹, temos:

$$\mathcal{B}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum |B_i|^s : \{B_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } F \text{ por bolas} \right\}$$

$$\mathcal{B}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{B}_\delta^s(F)$$

O valor de s onde $\mathcal{B}^s(F)$ salta de ∞ para 0 é o valor da dimensão obtida. Importante também é ressaltar que o valor obtido é o mesmo quer se use coberturas por bolas esféricas ou por conjuntos quaisquer.

3.3.2 Dimensão de Hausdorff usando coberturas por intervalos binários — \mathcal{D}_i

Considera-se o conjunto F como um subconjunto do intervalo $[0, 1)$. Um intervalo binário é da forma $[r 2^{-k}, (r+1) 2^{-k})$ onde $k = 0, 1, 2, \dots$ e $r = 0, 1, \dots, 2^k - 1$. Baseando-se na medida de Hausdorff, define-se a medida $\mathcal{M}^s(F)$ como:

$$\mathcal{M}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum |U_i|^s : \{U_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } F \text{ por intervalos binários} \right\}$$

$$\mathcal{M}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{M}_\delta^s(F)$$

Da mesma maneira usada para encontrar a dimensão de Hausdorff, o valor de s onde $\mathcal{M}^s(F)$ pula de ∞ para 0 é o valor da dimensão obtida e esse valor é o mesmo para $\dim_H F$ e para D_b .

⁹Bolas estão definidas no capítulo 2, seção 2.1.

3.4 Outras dimensões

Muitos estudos já foram feitos e outros estão atualmente em andamento procurando encontrar novos métodos para o cálculo de dimensão fractal. Alguns procuram métodos que sejam mais simples de serem aplicados e em geral dedicam-se a um tipo particular de fractal. Outros estudos visam um método que seja aplicável em todos os tipos de fractais, mas os métodos deste tipo propostos até agora são todos de difícil computação.

Como em todas as áreas dentro da teoria fractal, as perspectivas para o cálculo de dimensão fractal estão abertas em todos os sentidos e várias experimentações estão procurando sua validação.

3.4.1 Dimensões fracionárias — $\Delta(E)$ e $Dim(E)$

A dimensão de Hausdorff–Besicovitch é obtida a partir da definição de uma medida, a medida de Hausdorff. Da mesma forma, usando outras definições de medidas pode-se obter definições equivalentes de dimensão.

Duas dimensões deste tipo são mostradas em [Jr.82]. Além das definições, que envolvem uma grande complexidade matemática, algumas propriedades são estudadas e o autor conclui que a dimensão $\Delta(E)$ é monotônica mas sua estabilidade é não-enumerável¹⁰. Já a segunda dimensão estudada, $Dim(E)$ é monotônica e sua estabilidade é enumerável. Mostra-se também que $dim_{\mathbb{H}}E^{11} \leq Dim(E)$ e estuda-se o coeficiente de irregularidade $R = Dim(E) - dim_{\mathbb{H}}E$ como mais um parâmetro de informações sobre o conjunto estudado.

3.4.2 Dimensão Espectral — \mathcal{D}_s

A medida desta dimensão, apresentada em [Hib91] relaciona-se com a conectividade¹² de um sistema e assim, com a ramificação encontrada no fractal.

\mathcal{D}_s pode ser definida em função de uma caminhada randômica sobre um objeto. Genericamente percorrida desde a origem de um sistema em t passos, a distância alcançada

¹⁰ Monotonicidade e estabilidade foram vista na página 35, seção 3.2.1.

¹¹ Dimensão Hausdorff–Besicovitch de E .

¹² Conjuntos conexos são definidos na página 16, seção 2.1.

por essa caminhada é proporcional a $t^{\frac{1}{d}}$. O valor d representa o coeficiente de difusão de um sistema, sendo que no espaço Euclidiano temos $d = 2$, o que nos dá a usual dependência da raiz quadrada. Num fractal a difusão é mais difícil e assim $d > 2$. Isto porque d examina o movimento sobre o fractal, o que inclui muitos retornos ao mesmo ponto.

A dimensão espectral de um conjunto F é dada por:

$$\mathcal{D}_s = \frac{2 \dim_H F}{d}$$

O número de lugares distintos visitados em t passos é:

$$N(t) = t^{\frac{\mathcal{D}_s}{2}}$$

3.4.3 Dimensão da Contagem de Caixas — \mathcal{D}_c

Esta dimensão tem a vantagem de poder ser usada em qualquer conjunto e também de poder ser estimada sem muito esforço. Em [Hib91] e também em [Fal90] a medida de \mathcal{D}_c é feita considerando-se o número de caixas necessárias para cobrir a área ocupada por um objeto em função do tamanho da caixa. Esta caixa deve ter a mesma dimensão do espaço envolvido. Assim em \mathbb{R}^2 a caixa é um quadrado, em \mathbb{R}^3 a caixa é um cubo e assim por diante. $N(\delta)$ representa o número de caixas necessárias para envolver o objeto, sendo δ a medida do lado da caixa. O valor de $N(\delta)$ é escalado pelo fator δ^{D_c} e portanto, quanto maior o número de caixas necessárias para cobrir o objeto, maior a sua dimensão.

Esta noção pode ser refinada fazendo-se a cobertura do objeto por esferas de raio r , no espaço tri-dimensional ou círculos de raio r no espaço bi-dimensional. Desta maneira $N(\delta)$ seria escalado pelo fator r^{D_c} , onde r é o raio da esfera considerada.

Para uma escolha adequada de δ , podemos escrever:

$$N(\delta) = \delta^{D_c}$$

de onde obtemos:

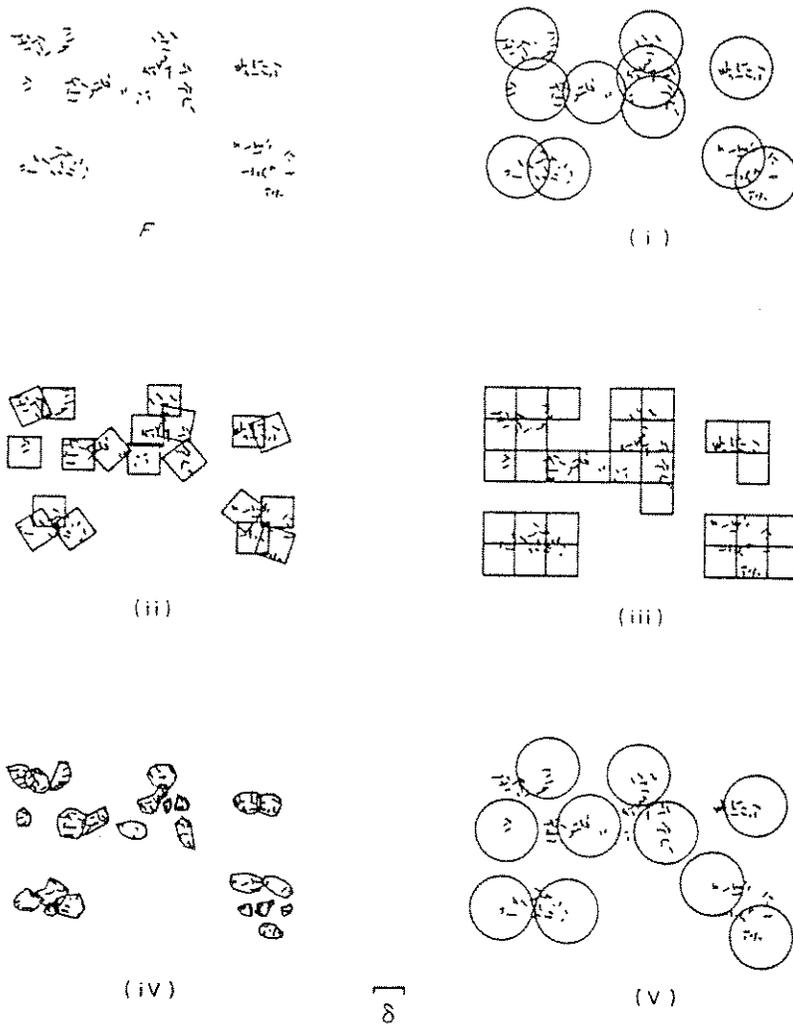


Figura 3.4: Cinco formas diferentes de encontrar a dimensão do conjunto F pelo processo da contagem de caixas. [Fal90]

$$D_c = -\frac{\ln(N(\delta))}{\ln(\delta)}$$

Na figura (3.4) temos um exemplo da contagem de caixas num fractal.

3.4.4 Dimensão Raio-Massa — D_{rm}

Esta forma para medir-se a dimensão de um conjunto F , mostrada em [Hib91], propõe a construção de uma série de círculos com raios crescentes. A massa do conjunto dentro de cada círculo é computada. Obtém-se que $D_{rm}(R)$, dentro do círculo de raio R , é

escalada pelo fator R^{\dim_H} . Este método é adequado para examinar a dimensão de diferentes partes de um objeto, escolhendo diferentes centros para construir os círculos.

3.4.5 Função Dimensão

Algumas vezes é desejável ter-se uma indicação mais bem definida de dimensão do que um simples número. Pode-se então chamar uma função $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ crescente e contínua, de função dimensão e definir (ver [Fal90]):

$$\mathcal{H}_\delta^h = \inf \left\{ \sum h(|U_i|) : \{U_i\} \text{ é uma } \delta \text{ cobertura de } F \right\}$$

$$\mathcal{H}^h(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^h(F)$$

para todo $F \subset \mathbb{R}^n$

Se a função h for em particular $h(t) = t^s$ esta definição é a definição usual da medida de Hausdorff-Besicovitch s -dimensional.

Através desta função dimensão é possível estudar fractais importantes como o movimento Browniano, cuja complexidade de comportamento pode ser melhor assimilada pela variação de uma função do que pelo valor de um simples número.

3.4.6 Dimensão por Imagens

A dimensão de Hausdorff-Besicovitch \dim_H , tem sido usada há muitos anos para estabelecer tamanhos de conjuntos Euclidianos e de outros tipos de conjuntos como os conjuntos fractais. No entanto, com a difusão dos conjuntos não-Euclidianos, observou-se que conjuntos com diferentes características possuíam o mesmo valor de \dim_H . Por exemplo, um segmento de reta em \mathbb{R}^2 possui $\dim_H = 1$ e o produto cartesiano em \mathbb{R}^2 de dois conjuntos de Cantor também possui $\dim_H = 1$. Apesar de características no plano totalmente diferentes, o cálculo de sua dimensão de Hausdorff-Besicovitch resultou num mesmo valor. Pensando nisto, vários matemáticos começaram a pesquisar novas propostas

para dimensão como as vistas nas seções anteriores e, em especial, o matemático Rogers, publicou em [Rog88] os resultados de seu trabalho neste campo, apresentando uma noção de dimensão totalmente diferente de todas as anteriores. Sua proposta é de uma dimensão que não será expressa por um valor, mas sim por um conjunto de vetores. Para chegar a esse resultado ele propôs o uso de coberturas¹³ de um conjunto por paralelepípedos retangulares em \mathfrak{R}^n , cujo lados definiriam uma medida semelhante a medida de Hausdorff. A diferença entre estas medidas está no fato de $\mathcal{H}^s(F)$ ser uma medida s -dimensional, com $s \in \mathfrak{R}^n$, e $\mu^\alpha(F)$, a medida proposta por Rogers, seria n -dimensional, com $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ sendo um vetor em \mathfrak{R}^n . Assim as ‘*imagens*’ da dimensão de um conjunto seriam dadas pelo conjunto de vetores α para os quais a medida $\mu^\alpha(F)$ é maior do que zero. Demonstra-se também que sua medida é aditiva e monotônica e assim, sendo $P(F)$ o conjunto de vetores que representam a ‘*imagem*’ da dimensão de um conjunto F , temos:

•

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} P(F_i) : \textit{aditiva}$$

•

$$P(F_1) \subset P(F_2) \text{ sempre que } F_1 \subset F_2 : \textit{monotônica}$$

Esta proposta parece ser bem adequada para estudar fractais, mas devido ao pouco tempo de sua publicação não foram encontradas aplicações de seus conceitos em fractais conhecidos.

3.5 Comentários Finais

Muitas outras medidas de *dimensão fractal* são propostas na literatura pesquisada. Algumas propostas recentes como [Jr.82] e [Rog88] usam das similaridades inerentes aos fractais e também de contrastes com a dimensão de Hausdorff–Besicovitch para firmar-se como uma importante ferramenta teórica para o estudo da geometria fractal.

¹³Ver coberturas de conjuntos no capítulo 2, seção 2.3.5.

Em [Fal90] é apresentado um capítulo dedicado às técnicas usuais para calcular dimensão que é muito bem fundamentado. Algumas dessas técnicas foram usadas no capítulo 4 para calcular a dimensão de certos fractais especialmente estudados.

Nesta mesma referência são estudadas além de dimensão, outras geometrias dos fractais como: estrutura local, densidades, tangentes, projeções, produtos e interseções de fractais. Em particular, a integração geométrica de curvas fractais no plano foi completamente definida em [HN91]. Devido ao aspecto unicamente teórico, estes itens não entraram no escopo deste trabalho.

Capítulo 4

UMA TAXONOMIA

Propor uma classificação para os objetos fractais foi uma das primeiras pretensões deste trabalho e revelou-se a tarefa mais árdua. Na bibliografia pesquisada foi encontrada apenas uma tentativa de classificação (ver [Pic90]) e, mesmo essa, falha na conceituação dos elementos que a compõem. Com mais frequência encontram-se divisões com um único nível, ou seja, considera-se uma determinada característica e divide-se os fractais em grupos que possuem ou não esta característica. Assim, um fractal é determinístico ou randômico, é linear ou não-linear, possui semelhança exata ou estatística. A dificuldade surge quando se começa a relacionar estas propriedades para descobrir quando elas são compatíveis entre si ou quando são excludentes. Pesquisa-se a existência de um fractal determinístico e que apresente uma semelhança estatística, ou um mesmo fractal que possa ser randômico e linear simultaneamente. Surge então a pergunta: é possível, com o que se conhece da geometria fractal até o momento, criar uma classificação com elementos bem definidos, onde escolhida uma família saiba-se o tipos de fractal que pertencem a ela ou, tendo-se a imagem de um fractal, saiba-se a que família ele pertence?

4.1 Conceitos Básicos

Com a pergunta anterior em mente partiu-se para uma conceituação bem clara dos termos usados para caracterizar um objeto fractal, procurando evitar assim ambigüidades de conceitos.

4.1.1 Semelhança e Similaridade

O uso da palavra inglesa “*similar*” dentro da teoria fractal gera duas possíveis interpretações. Uma delas considera a semelhança existente entre duas imagens e a outra leva em consideração a utilização de transformações de similaridade para gerar o fractal. Este trabalho adota as seguintes definições:

Semelhança Dois objetos são semelhantes quando suas imagens podem ser superpostas e apresentam coincidência de pontos. Esta semelhança pode ser *exata* se todos os pontos coincidirem ou pode ser *aproximada* se a coincidência dos pontos puder ser considerada satisfatória segundo uma estatística qualquer (média, variância, etc.). Um objeto é considerado *auto-semelhante* quando apresentar semelhança com ele mesmo. Ao serem modelados estes objetos servem de padrão para si mesmos.

Pode-se assim considerar semelhança entre partes de uma imagem numa mesma escala e semelhança em várias escalas de uma mesma imagem. A semelhança escalar aparece quando ampliamos ou reduzimos partes de uma figura e o resultado é uma outra figura semelhante à primeira. Temos objetos matemáticos auto-semelhantes que são os chamados *fractais matemáticos* (curvas de Koch, conjuntos de Julia, etc.) e temos objetos naturais auto-semelhantes que são os *fractais naturais* (nuvens, relevo, árvores, etc.). Nos fractais matemáticos a auto-semelhança surge pela repetição de procedimentos usados para gerar o fractal. Nos fractais naturais a própria Natureza encarregou-se de criar a auto-semelhança.

Similaridade A similaridade é obtida pela aplicação de transformações de similaridade¹ sobre um objeto. Este objeto é *auto-similar* quando é obtido pela aplicação destas transformações sobre si mesmo num processo de iteração.

4.1.2 Fractal

Os fractais podem ser conceituados dentro de uma gramática formal que utiliza um conjunto de símbolos gráficos (ponto, linha, sólido) e um conjunto de regras eminentemente geométricas (funções) que transformam esses símbolos.

¹Similaridades são transformações que envolvem translações rígidas, rotações, reflexões, contrações e expansões conforme definição na página 21, seção 2.2.3.

O uso de funções para caracterizar um objeto fractal pode ser usado para diferenciar estes de um objeto graftal² que sempre é dependente de uma topologia. Estas mesmas funções possuem a propriedade paradoxal de serem geométricas e apesar disso não possuem derivadas [FBO⁺87]. A noção de derivadas dentro da matemática clássica está ligada diretamente ao limite para o qual tendem as tangentes à curva ou à superfície representada por essa função. Algumas funções não se adaptam a essa definição e o limite citado parece não convergir para nenhum lugar. Benoit Mandelbrot, em [Man82b], observou este comportamento estranho e desenvolveu a partir destas observações a teoria que embasa a geometria fractal.

4.1.2.1 Fractal Determinístico

Fractais determinísticos são aqueles obtidos por processos de iteração ou recursão aos quais não é acrescentado nenhum elemento aleatório. Um mesmo processo determinístico aplicado um mesmo número de vezes irá gerar sempre um mesmo objeto fractal. Apesar de sua aparência interessante e complexa, estes fractais são “*regulares*” demais para representar modelos naturais convincentes.

4.1.2.2 Fractal Randômico

São fractais que incorporam aspectos randômicos ao seu processo de geração, os quais influenciam diretamente na aparência do fractal gerado. Isto é conseguido usando elementos estocásticos que assegurem a imprevisibilidade de uma única ocorrência, mas que permitem a quantificação de um comportamento médio após muitas ocorrências. Uma forma muito comum de se conseguir aspectos randômicos é incluir algoritmos para geração de números pseudo-randômicos no processo de geração do fractal, obtendo-se assim um *processo estocástico*. A Estatística oferece vários destes processos e pode-se basear a escolha no tipo de comportamento que se espera obter. Uma opção pode ser o *processo Gaussiano*, descrito com mais detalhes na geração da *Curva Fractal* mostrada na página 67. Outra opção é o *processo Markoviano*, caracterizado pelo fato de eventos passados não influírem no futuro, desde que o presente seja conhecido. Pode-se também usar *processos Estacionários*

²Os objetos graftais estão definidos na seção 4.1.3, na página 53

nos quais as propriedades estatísticas são invariantes para $x(t)$ e $x(t + c)$, qualquer que seja c . A “irregularidade” obtida com estes e outros processos estocásticos³ representa muito bem modelos naturais.

4.1.2.3 Fractal Linear

São aqueles fractais que envolvem na sua geração apenas funções polinomiais de 1º grau. Neste caso o fractal é obtido pela aplicação de várias transformações nas quais as coordenadas da *nova* posição de cada ponto de um objeto são descritas por expressões lineares das coordenadas da *antiga* posição do ponto.

Este tipo de transformação pode ser expresso por [PS89]:

$$x_i = \sum_{j=1}^d a_{ij}x_j + c_i \quad (4.1)$$

onde d representa a dimensão Euclidiana do espaço considerado e $i = 1, 2, \dots, d$.

Transformações que podem ser representadas pela equação 4.1, são:

- translações
- expansões
- contrações
- rotação
- espelhamento
- composições de translações, expansões, contrações, rotações e espelhamentos.

Considerando-se um sistema composto de dois eixos, por exemplo \mathfrak{R}^2 , as coordenadas de um ponto seriam representadas por:

$$T(x, y) = \left(\sum_{j=1}^2 a_{ij}x_j + j_i, \sum_{j=1}^2 b_{ij}y_j + k_i \right) \quad (4.2)$$

³A definição destes processos pode ser encontrada em [Pap84].

onde a equação 4.1 é usada para transformar cada coordenada do ponto T e é permitido ao termo independente c_i assumir diferentes valores para transformar $x (j_i)$ e $y (k_i)$.

4.1.2.4 Fractal Não – Linear

As imagens deste grupo de fractais são as mais ricas e variadas. Na sua geração estão envolvidos termos de ordem maior ou igual a 2 ou expressões não-algébricas, que compõem transformações que podem levar retas a tornarem-se curvas. O método usado para obter-se as imagens deste grupo é o mesmo processo iterativo ou de repetição citado na definição da página 8. Dentro da Teoria do Caos encontram-se muitos exemplos de fractais não-lineares e muitos fenômenos naturais são representados por expressões quadráticas.

O estudo das transformações que compõem este grupo de fractais não está tão bem desenvolvido quanto o estudo do grupo de fractais lineares. O motivo evidente é a grande diversidade de funções que nele se incluem. No estágio atual, existe um estudo quase que particular para cada fractal que mostre ser a representação do comportamento de um fenômeno de interesse em alguma área.

Tentativas de generalizações são feitas procurando simplificar os polinômios, as formas quadráticas e as várias figuras geométrica pela aplicação de transformações convenientes. Com o uso de conceitos do tipo *forma canônica* e *invariante*, definidos dentro da Álgebra Linear, consegue-se formular alguma generalização para fractais não-lineares. O grupo das formas quadráticas já foi e está sendo muito estudado e tem como representantes mais conhecido os Conjuntos de Julia e o Conjunto de Mandelbrot. Apesar disto, ainda não há o embasamento teórico necessário para subdividir os fractais não-lineares em sub-grupos e assim, este grande grupo acaba abrangendo formas tão diferentes entre si como:

$$L_{n+1} = 2^{\frac{-3}{2x}} L_n$$

e

$$z_n = c \left(16z_{n-1}^5 - 20z_{n-1}^3 + 5z_{n-1} \right)$$

4.1.2.5 Fractal Auto – Similar

São fractais auto-semelhantes cujo processo de geração é composto por transformações de similaridades e que podem incorporar ou não um aspecto randômico.

As transformações que entram no processo de geração destes fractais podem ser representadas por:

$$T(x, y) = \left(\sum_{j=1}^d a_{ij}x_j + b_i, \sum_{j=1}^d b_{ij}y_j + b_i \right) \quad (4.3)$$

onde:

- a expressão usada representa uma transformação linear (ver equação 4.2) onde o termo independente b_i é igual para as duas coordenadas x e y .
- $d \rightarrow$ é a dimensão Euclidiana do espaço no qual o fractal será gerado.
- $i \rightarrow \{1, 2, \dots, d\}$
- $x, y, b \in \mathbb{C}$
- $0 < a_{ij}, b_{ij} \leq 1$

Os fractais auto-similares são exaustivamente usados por muitos pesquisadores atuais, como Mandelbrot e outros, mas a teoria específica para caracterizar estes fractais começou a ser definida por Moran [1946] e foi formalizada em [Hut81]. Neste trabalho Hutchinson usou o conceito da *constante de Lipschitz*⁴ para caracterizar conjuntos auto-similares.

Falconer, em [Fal90], levou em consideração as transformações representadas pela equação 4.3 para conceituar um fractal F como auto-similar. Nesta referência define-se um conjunto compacto $F \subset \mathbb{R}^n$ como *invariante* se existe um conjunto de contrações $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$, em \mathbb{R}^n , tal que:

$$F = \bigcup_{i=1}^N S_i(F)$$

⁴Esta constante é usada para identificar contrações em conjuntos e está definida na seção 2.2.2, da página 20.

ou seja, aplicando-se cada transformação sobre o conjunto F e unido-se os resultados destas transformações obtém-se novamente o mesmo conjunto. Este conjunto F é considerado então *invariante* e chamado de fractal auto-similar.

Um importante resultado deste tipo de abordagem é que este conjunto invariante F é completamente determinado por \mathcal{S} , isto é, para um dado conjunto de transformações \mathcal{S} existe um único conjunto compacto F , invariante com respeito a \mathcal{S} . Além disso, F é o limite das várias seqüências de aproximações de conjuntos que podem ser construídas a partir de \mathcal{S} . Esta é uma afirmação muito forte pois dela pode-se deduzir que independentemente do conjunto inicial de pontos, se o conjunto de transformações for o mesmo, o resultado final será sempre a mesma imagem. Em [JPS90] são mostradas várias imagens que representam este comportamento característico dos fractais auto-similares.

Considerando-se os fatos acima, define-se:

Um conjunto fractal F é auto-similar quando for completamente especificado por um conjunto de contrações $S_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e dizemos que:

$$F = \bigcup_{i=1}^N S_i(F)$$

Uma maneira adequada de construir um fractal F auto-similar é usando um procedimento iterativo que parte de um segmento ou um polígono “*iniciante*” e um segmento ou polígono “*gerador*” obtido pela aplicação do conjunto de contrações \mathcal{S} sobre o “*iniciante*”. Este gerador consiste de um certo número de segmentos e de dois pontos especialmente indicados. Associa-se a cada segmento a transformação de similaridade que mapeia os dois pontos indicados nos extremos do segmento. Repetidas aplicações do “*gerador*” sobre o “*iniciante*” darão aproximações de F , resultantes da união de cópias menores semelhantes e similares ao próprio F .

Como o conjunto $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um conjunto de similaridades, sua aplicação sobre um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ resulta em:

$$|S_i(x) - S_i(y)| = k_i |x - y|$$

onde $x, y \in F$, k_i são constantes e as barras $|$ são usadas para representar a *distância métrica* entre dois pontos, conforme definição na página 14.

Se considerarmos que o conjunto \mathcal{S} representa apenas contrações neste caso particular, temos que $0 < k_i < 1$.

A dimensão Hausdorff–Besicovitch e a dimensão da Contagem de Caixas definidas no capítulo 3 são representadas por um mesmo valor numérico quando temos conjuntos auto-similares [Fal90]. Este valor é obtido pela potência de s para qual a expressão abaixo é válida:

$$\sum_{i=1}^N c_i^s = 1$$

onde N é a quantidade de contrações utilizadas para gerar o fractal e c_i é o valor da constante de Lipschitz de cada contração.

4.1.2.6 Fractal Auto – Afim

Os conjuntos auto-afins formam uma classe muito importante de conjuntos. As transformações S usadas para obter estes conjuntos fractais são uma combinação de translações não-rígidas, rotações, similaridades (particularmente contração) e, às vezes, reflexões. Por essas transformações esferas são mapeadas para elipsóides, quadrados para paralelogramos, etc. Ao contrário das similaridades, transformações afins contraem ou expandem com diferentes proporções em diferentes direções.

Em [Fal90] os conjuntos auto-afins são definidos usando as mesmas representações usadas para conjunto auto-similares. Assim temos um conjunto $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_N\} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ onde S_i são contrações afins. Este conjunto de contrações define completamente o conjunto invariante F , que será um fractal auto-afim.

As transformações que entram no processo de geração destes fractais podem ser expressas por:

$$T(x, y) = \left(\sum_{j=1}^d a_{ij} x_j + j_i, \sum_{j=1}^d b_{ij} y_j + k_i \right) \quad (4.4)$$

onde:

- a expressão usada representa uma transformação linear (ver equação 4.2), onde os termos independentes j_i e k_i que transformam as duas coordenadas x e y são diferentes entre si.
- d — é a dimensão Euclidiana do espaço no qual o fractal será gerado.
- i — $\{1, 2, \dots, d\}$
- $x, y, c, e \in \mathcal{C}$
- $0 < a_{ij}, b_{ij} \leq 1$

Define-se então:

Um conjunto fractal F é auto-afim quando for totalmente especificado por um conjunto de contrações afins $S_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e dizemos que:

$$F = \bigcup_{i=1}^n S_i(F)$$

A figura 4.1 mostra a formação de um conjunto auto-afim. As transformações S_1, S_2 e S_3 são transformações que mapeam o quadrado E em três retângulos. O conjunto invariante F , que é a aproximação do fractal desejado, é composto de três cópias afins de si mesmo: $S_1(E), S_2(E)$ e $S_3(E)$.

Ao procurar-se uma fórmula para calcular a dimensão de um conjunto fractal auto-afim, pode-se pensar numa simples generalização da fórmula para o cálculo de dimensão de conjuntos fractais auto-similares. Na realidade este problema é bem mais complicado. As transformações afins, que compõem um fractal F , são funções contínuas. Já a dimensão de conjuntos obtidos pela aplicação destas transformações não varia continuamente. Esta diferença de comportamento é tanto maior quanto mais transformações afins estiverem envolvidas e isto leva a uma grande dificuldade na procura de uma expressão genérica para calcular a dimensão de fractais auto-afins. O que se obteve até agora são valores que representam a dimensão de alguns casos particulares destes fractais [Fal90], o que significa que muitos fractais auto-afins não tem dimensão conhecida.

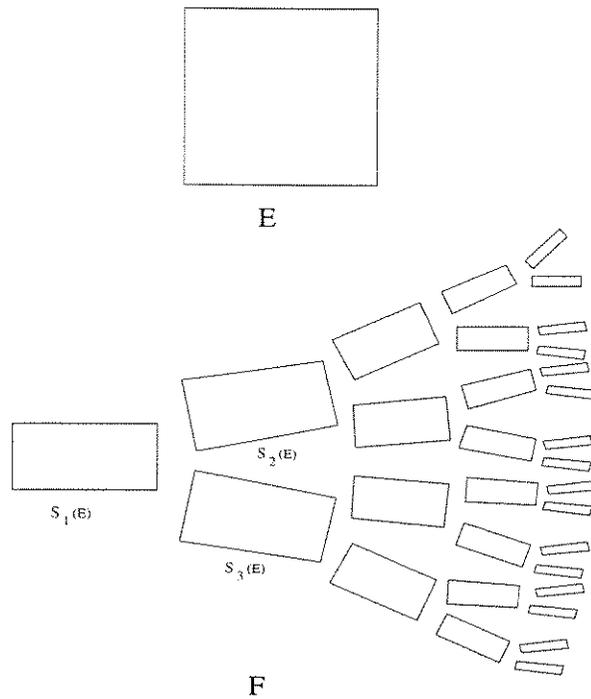


Figura 4.1: Fractal auto-afim, invariante sob as transformações afins S_1, S_2, S_3

4.1.2.7 Fractal Estritamente Auto – Semelhante

Um fractal é estritamente auto–semelhante quanto a semelhança apresentada por sua imagem é *exata* em qualquer escala considerada. Procedimentos da área de Processamento de Imagens, como o *matching*⁵, podem ser usados para verificar a exatidão desta semelhança.

⁵Matching é a superposição de duas imagens de modo que pontos das imagens que correspondam aos mesmos objetos coincidam espacialmente. Ao fazer uma operação de matching fica estabelecida uma interpretação ou uma correspondência entre dois modelos representados no computador.

4.1.2.8 Fractal Estatisticamente Auto – Semelhante

Se a semelhança apresentada por um fractal em relação a imagem de si mesmo em várias escalas não for exata, pode-se usar o resultado do matching ou de um outro procedimento para determinar-se estatisticamente se a hipótese de auto-semelhança pode ser aceita ou não, segundo um procedimento de teste de significância estatística sobre a média, a variância ou outro parâmetro mais adequado para avaliar a auto-semelhança. Avaliações de quanto um objeto é auto-semelhante e de quanto esta auto-semelhança o torna um fractal é um campo de pesquisa dentro da geometria fractal que ainda não foi muito difundido. *A partir de quando podemos dizer que um objeto possui uma auto-semelhança fractal?* A resposta a essa pergunta poderia permitir, num futuro próximo, formalizar um conceito mais bem definido para um objeto fractal.

4.1.3 Graftal

Usando o conceito de gramática formal estudado em [Smi84], podemos dizer que os graftais são objetos gerados por uma gramática composta de um conjunto de símbolos gráficos e por um conjunto de regras topológicas que transformam esses símbolos. A essa gramática é acrescentada posteriormente uma interpretação geométrica que torna possível representar a topologia do objeto. Assim, os graftais não são geométricos apesar de usarem geometria para transformá-los em objetos visuais.

Sob algumas condições, um graftal pode ser considerado um *subfractal*, significando com isso que ele possui uma parte fractal mas não o todo. Por outro lado, um fractal determinístico linear pode ser sempre representado por um graftal.

Esta classe de objetos é muito adequada para modelar o crescimento de plantas e árvores, possuindo mais potencial que os fractais para criar este tipo de imagem no computador. A razão disto é o fato dos graftais serem menos restritivos que os fractais. A representação de um graftal usa uma topologia e uma geometria, o que permite variar a

interpretação geométrica de uma mesma topologia e obter uma grande variedade de árvores e plantas, cada qual com uma identidade distinta [Opp86].

Uma gramática formal topológica muito usada para gerar graftais são os *L-Systems*, cujo procedimento foi criado por Lindenmayer em 1968 [PH90]. Um exemplo de graftal gerado por este processo pode ser visto na figura 4.2. Referências mais completas sobre graftais são encontradas em [PH90].

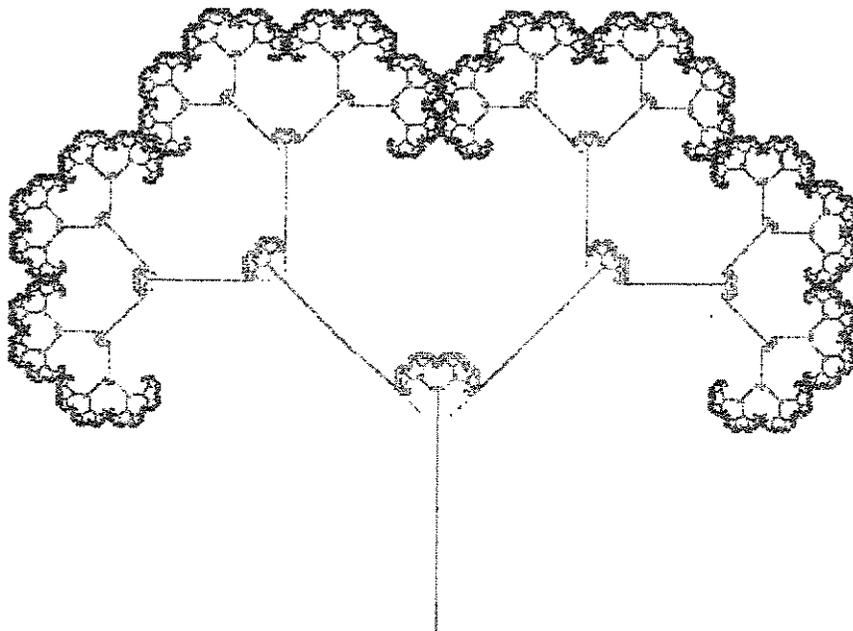


Figura 4.2: Aqui está representada uma árvore criada pelo L-System, descritas em [PH90].

4.2 Estrutura da Taxonomia

Os conceitos básicos apresentados na seção anterior são um resumo dos tipos de fractais descritos na literatura. Procurou-se fazer com que esta descrição fosse o mais precisa possível, deixando bem claro quais as características que diferenciam um tipo de fractal de outro.

Baseando-se nestes conceitos e definindo-se uma hierarquia na aplicação destes conceitos pode-se responder à pergunta formulada na introdução deste capítulo de forma afirmativa: *sim, é possível classificar os fractais, definindo uma estrutura em árvore cujos ramos representam no sentido descendente o tipo do fractal a ser obtido e, no sentido ascendente, o procedimento necessário para obter-se este fractal.*

4.2.1 Taxonomia

A estrutura representada na figura 4.3 é a proposição deste trabalho para classificar os fractais.

A montagem desta taxonomia levou em consideração o fato de que enquanto os objetos Euclidianos são definidos por elementos básicos como uma reta ou um ponto, os objetos fractais tem como elemento básico um algoritmo ou um conjunto de procedimentos matemáticos. Assim sendo, parece mais conveniente adotar critérios sobre estes algoritmos para propor uma classificação dos tipos de fractais conhecidos até agora. Com isto deixou-se de lado outras possibilidades como classificar os fractais por sua dimensão (fractais com dimensão menor do que 1, com dimensão entre 1 e 2 e com dimensão maior do que 2). O critério por dimensões torna-se inadequado pelo fato de serem desconhecidos os valores de dimensão de vários fractais, mas com certeza será um critério a ser usado no futuro, quando a noção de dimensão estiver com um embasamento teórico melhor.

4.2.2 Estudo de Casos

Serão apresentados agora cada um dos grupos de fractais, definindo o tipo de fractal que se enquadra em cada grupo, citando alguns exemplos dos fractais mais conhecidos de cada tipo e fazendo um estudo completo de alguns desses fractais.

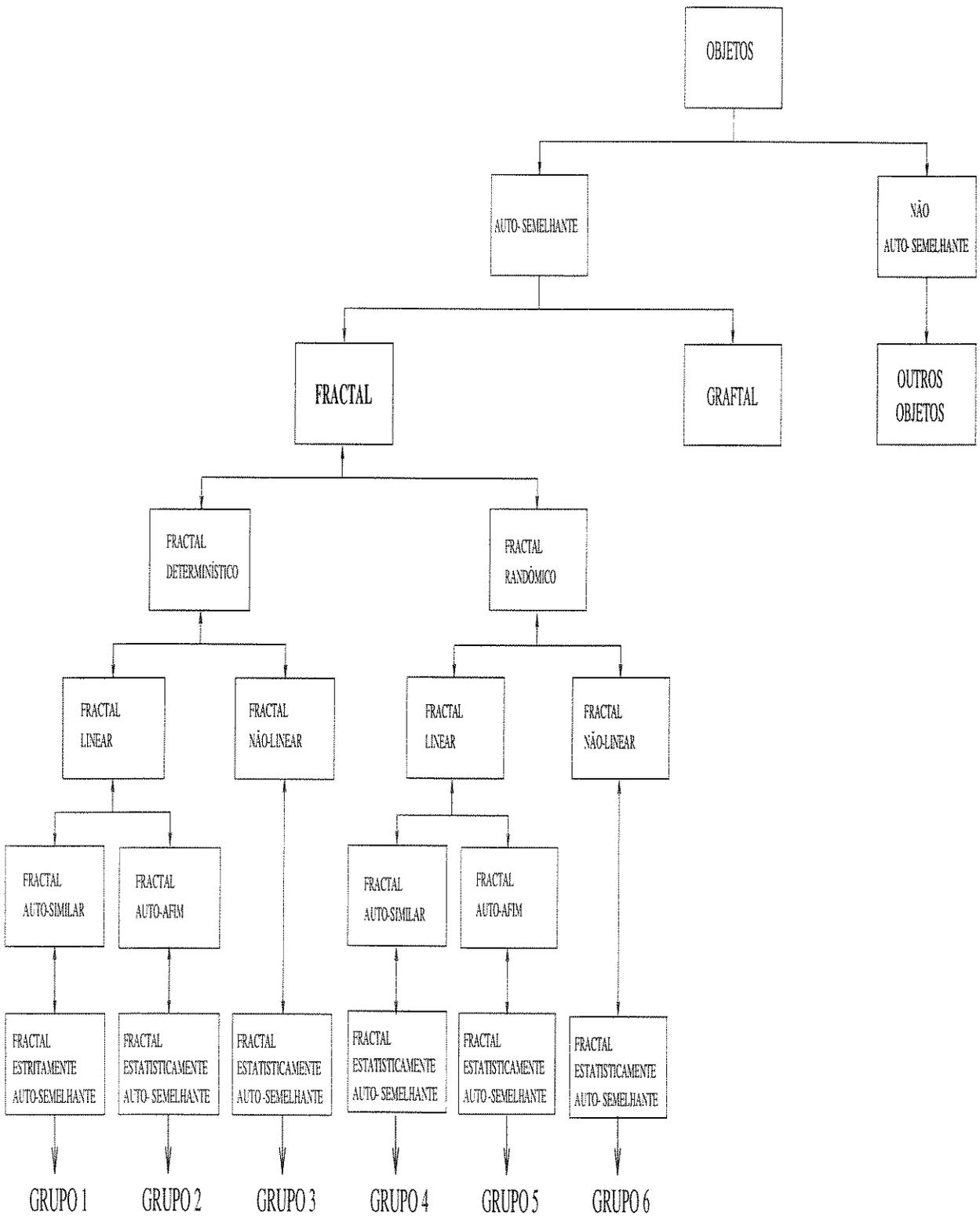


Figura 4.3: Classificação dos objetos fractais

4.2.2.1 Fractal determinístico linear auto-similar

Neste grupo estão contidos fractais que não incorporam em seu algoritmo de geração elementos estocásticos capazes de influenciar a forma final do objeto gerado. O algoritmo usado deve conter apenas funções polinomiais de 1º grau que representem transformações de similaridade, conforme definição na página 21.

Alguns dos fractais mais conhecidos deste grupo são o *Triângulo de Sierpiński* e as *Curvas de Koch*.

1. Triângulo de Sierpiński

Este objeto matemático foi estudado no final do século passado pelo matemático polonês Waclaw Sierpiński e caracterizou-se como um fractal com o desenvolvimento da teoria que estuda funções obtidas por processos de iteração.

Uma razão óbvia para ser um dos fractais mais conhecidos atualmente é que não importa qual técnica seja criada para gerar fractais, sempre há uma variação para produzir este triângulo.

Uma destas técnicas é o método da recursão onde começamos com um triângulo equilátero e ligamos os pontos médios de seus lados para obter quatro outros triângulos. Descartamos o triângulo central invertido e repetimos o processo para cada um dos três triângulos remanescentes. Iterações deste processo até o infinito resulta na figura final. Na prática, pára-se ao atingir o limite de resolução do meio utilizado (tela do computador, folha de papel, etc.).

Outra técnica consiste em considerar a superfície limitada pelo triângulo inicial e retirar-se o triângulo central fazendo um “furo” na figura. Repete-se o processo para cada triângulo “cheio” que permaneceu definindo-se assim uma iteração do procedimento. Apesar do método anterior preencher o espaço com repetidas inclusões de segmentos e este segundo método retirar partes da figura inicial, o resultado final após um certo número de repetições será o mesmo.

Estes dois métodos levaram o matemático Sierpiński a fazer considerações sobre a área desta figura. Pelo segundo método, infinitos “furos” levam a acreditar que a área tende a zero mas pelo primeiro método a inclusão de infinitos segmentos induz à conclusão que a área nunca pode ser zero. Essa contradição é respondida pela

Matemática como sendo zero pois um segmento de linha matemático não ocupa nenhuma área e portanto o primeiro método preenche a figura sem ocupar nenhuma área. Paradoxos como esse são muito comuns hoje em dia, e o valor *zero* ainda é aceito por falta de resposta para qual seria o valor da área se não fosse *zero*.

Outra construção pode ser encontrada em [Ste90a] usando os L-Systems⁶.

Nesta seção, o método escolhido para gerar o Triângulo de Sierpiński foi o *Iterated Function Systems - IFS*. Este método foi usado por Michael Barnsley em [Bar88] e para sua implementação, considera-se um conjunto de equações que representam transformações de escalamento, rotação e translação. Inicia-se com um ponto qualquer, escolhe-se randômicamente uma das equações do conjunto considerado e aplica-se a transformação representada por esta equação. Ao ponto resultante aplica-se uma nova equação, novamente escolhida de forma randômica. Usando regras de probabilidade específicas e repetindo-se sucessivamente este processo obtém-se o fractal esperado. A forma deste fractal depende exclusivamente das transformações representadas pelo conjunto de equações, o que garante que a escolha randômica da transformação não afeta o resultado final. A dimensão deste fractal é calculada pela expressão $\log 3 / \log 2 = 1,58$ e a prova matemática deste valor é dado em [Fal90] e também em [McM84].

A implementação está no apêndice *a*, na página 88 e a imagem obtida no apêndice *b*, na página 119.

Uma variação para este método pode ser encontrada em [Ste90a], a qual usa as seguintes funções no campo dos complexos para geração:

$$z_n = 2z_{n-1} + c,$$

onde:

- $c = -i$, se a parte imaginária de $z_{n-1} < 0,5$;
- $c = -1$, se a parte real de $z_{n-1} < 0,5$;
- $c = 0$, caso contrário.

Usando como elemento inicial outras figuras regulares, como quadrados, pentágonos, hexágonos e outros, podemos obter fractais chamados “*Entrelaçados de Sierpiński*”

⁶O uso deste processo esta referenciado na página 54.

e “*Entrelaçados de Dürer*”, todos eles pertencentes a este mesmo grupo. Referências a este tipo de fractal pode ser encontrado em [Jon90a].

2. Curvas de Koch

Estas curvas foram criadas pelo matemático sueco Helge von Koch, por volta de 1904, e voltou ao interesse dos matemáticos no início dos anos 70 quando Benoit Mandelbrot classificou-as como um objeto fractal. Como muitos outros matemáticos de sua época, von Koch trabalhava sempre querendo entender o infinito e curvas como essa, de comprimento infinito, não conseguiam ser estudadas com as ferramentas matemáticas da época. Mandelbrot seguiu os mesmos procedimentos de geração usados na época por von Koch só que agora com a ajuda de computadores. O método utilizado pelos dois é muito parecido com a técnica usada para o Triângulo de Sierpiński, pois ambos são fractais do mesmo tipo.

Matematicamente estas curvas podem ser definidas por um conjunto de cinco pontos em \mathbb{R}^2 sendo $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$. Considera-se $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ onde $S_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a transformação de similaridade que mapeia $\overline{a_1 a_2}$ para $\overline{a_i a_{i+1}}$, sem reflexões. O conjunto K_i é o resultado da i -ésima aplicação de \mathcal{S} sobre o conjunto de pontos $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$. Assim, $K_1 = \mathcal{S}^1(a_1, a_5)$, $K_2 = \mathcal{S}^2(a_1, a_5)$, \dots (ver aproximação mostrada na figura 4.4). O conjunto $K = \cup_{i=1}^{\infty} K_i$ é chamado de *Curva de Koch*.

Numa implementação prática, inicia-se o processo com um simples segmento de linha o qual é dividido em três partes iguais. Retira-se o segmento central e substitui-se por dois segmentos iguais formando um triângulo equilátero. Itera-se o processo repetindo-se para cada um dos quatro segmentos resultantes do passo anterior. Após algumas iterações aparece a curva pretendida. Este algoritmo, embora conciso, simples de escrever e facilmente computado, não tem uma representação algébrica que consiga especificar os pontos pertencentes a curva. O processo também permite calcular a dimensão deste fractal pela expressão $\log 4 / \log 3 = 1,26$. A figura obtida é estritamente auto-semelhante pois em qualquer escala obtemos *quartos* semelhantes a figura inicial. Ela possui uma estrutura fina, ou seja, em todas as escalas as irregularidades sempre aparecem, mas mesmo assim, o processo de descrição é simples. Apesar desta simplicidade qualquer noção de medida usual é difícil de ser computada. O comprimento, por exemplo, tende ao infinito e apesar disso a área permanece zero. Novamente sente-se a contradição dos conceitos usuais da matemática.

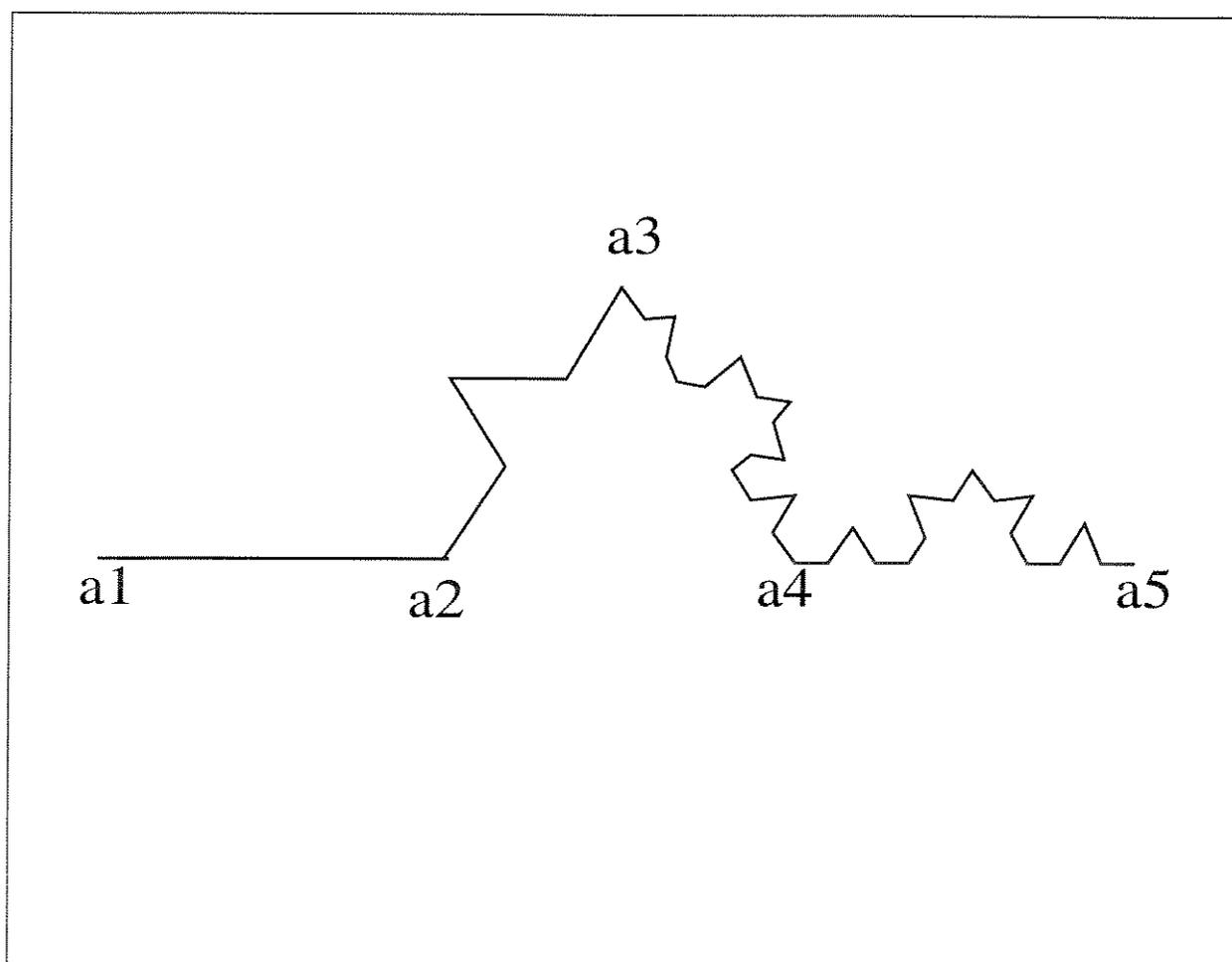


Figura 4.4: Níveis de expansão da Curva de Koch

A implementação do processo descrito acima está no apêndice *a*, na página 91 e a imagem obtida no apêndice *b*, na página 120.

Muitas variações desta curva aparecem na literatura, fazendo a substituição de outras partes proporcionais do segmento por quantidades diferentes de segmentos. Pode-se, por exemplo, substituir por 8 novos segmentos cada quarta parte do segmento inicial (ver os diferentes procedimentos em [PSaa88], [Oli92], [Fal90]). No artigo [War84] é apresentado um algoritmo para gerar esta curva usando linguagem BASIC e em [Ste89] são apresentadas também as curvas de Gosper, as quais são variações da curva de Koch que resultam em figuras com aparência final bem diferente. Da mesma forma que o Triângulo de Sierpiński, a curva de Koch pode ser gerada a partir de um triângulo, formando o que é chamado da *Curva do Floco de Neve*. Este triângulo pode ser considerado *cheio*, isto é, com uma superfície. Isto permite usar dois processos para obter a curva: acrescentar “*furos*” ou acrescentar segmentos. Estes dois métodos estão descritos em [PS88].

Outros fractais pertencentes a este grupo são encontrados facilmente na literatura existente, todos com as mesmas características de simplicidade de descrição, mas usando vários métodos (ver [MT87] e [LM87]).

4.2.2.2 Fractal determinístico linear auto-afim

A forma final dos fractais deste grupo não é alterada pela presença de elementos randômicos. As funções utilizadas pelo processo de iteração são sempre do 1º grau e representam transformações afins, definidas na página 22. As operações básicas envolvidas são a translação, o escalamento e a rotação. Usando a fórmula 4.4 e considerando que cada uma destas operações pode ocorrer em duas dimensões (*x* ou *y*), podemos exprimir qualquer transformação afim com seis números: *deslocamento x*, *deslocamento y*, *escalamento x*, *escalamento y*, *rotação x*, *rotação y*. Assim, se x_1 e y_1 são as coordenadas dos pontos da figura original, os novos pontos depois da transformação serão:

$$x_2 = a * x + b * y + movex$$

$$y_2 = c * x + d * y + movey$$

onde:

- $move_x$ e $move_y$ são os deslocamentos para x e y ;
- a , b , c e d são os valores resultantes da composição de escalamento e rotação, usualmente expressos por:

$$a = size_x * \cos(rotx)$$

$$b = -size_y * \sin(roty)$$

$$c = size_x * \sin(rotx)$$

$$d = size_y * \sin(roty)$$

com $size_x$ e $size_y$ representando o escalamento em cada direção e $rotx$ e $roty$ a rotação em cada eixo.

Podemos obter assim uma grande variedade de fractais dentro desse grupo, bastando para isso aplicar iterativamente as transformações conforme foram definidas acima. Entre eles começam a aparecer exemplos que deixam de ser objetos puramente matemáticos e passam a aproximar-se mais da Natureza que nos cerca. O exemplo aqui apresentando descreve um programa que implementa essas transformações, fazendo sua aplicação numa figura inicial, gerando cópias transformadas desta figura e gerando também vários níveis de detalhes destas cópias. O resultado será um fractal auto-afim que terá sua forma final dependente dos tipos de transformações aplicadas à figura inicial.

Algoritmo para gerar fractal auto-afim

1. Entre com os pontos da figura inicial
2. Diminua o total de níveis de um
3. Compute o primeiro ponto da cópia
4. Mova o cursor para o primeiro ponto da cópia

5. Compute os demais pontos da cópia aplicando as transformações
6. Desenhe a cópia conectando os ponto com segmentos de linhas
7. Termine a cópia ligando o último ponto com o primeiro
8. Se este foi o último nível desta cópia, retorne à função que chamou para gerar a próxima cópia
9. Gere o nível inferior de cada uma das cópias
10. Selecione a cor para desenhar, de acordo com o nível
11. Adicione a transformação corrente na transformação para a próxima cópia
12. Chame recursivamente a função para desenhar a próxima cópia e seus níveis sucessivos
13. Quando todas as partes estiverem desenhadas até o último nível, fim

A implementação deste algoritmo está no apêndice *a*, na página 93 e a imagem obtida no apêndice *b*, na página 121.

4.2.2.3 Fractal determinístico não-linear

Estes fractais são gerados por funções que envolvem termos de ordem maior ou igual a 2 ou expressões não-algébricas nas quais não estão presentes elementos estocásticos que possam alterar a forma final do objeto gerado.

Neste grupo estão dois dos fractais mais conhecidos e estudados até agora: os *Conjuntos de Julia* e o *Conjunto de Mandelbrot*.

1. Conjuntos de Julia

O matemático francês Gaston Julia (ver biografia em [MF88]), nascido na antiga província francesa da Argélia em 1893, ficou conhecido através de um artigo publicado em 1918 sobre iterações de funções polinomiais complexas. Na realidade, o problema estudado por Julia já tinha sido proposto por outro matemático, Arthur Cayley, em 1879. Este problema consiste em determinar a região do plano complexo na qual um ponto inicial P , tomado numa posição qualquer dentro desta região, seja

atraído finalmente a um ponto A , raiz de uma equação polinomial complexa. Cayley, para facilidade de estudos, concentrou-se na função $f(z) = z^2 + 1$ em \mathcal{C} . Somente 30 anos mais tarde, Julia e também o matemático Fatou, estenderam este estudo para qualquer função polinomial complexa ([JPSvH84]). Após a retomada destes estudos por Benoit Mandelbrot, os conjuntos resultantes desta atração para raízes de polinômios complexos ficaram conhecidos por *Conjuntos de Julia*.

Pode-se então obter o Conjunto de Julia de uma função polinomial complexa qualquer plotando a fronteira do conjunto de pontos desta função polinomial que escapam para o infinito (não convergem para a raiz). Outra maneira, seria aplicando o Método de Newton para obter as raízes da equação correspondente, e plotando cada ponto com a cor da raiz para a qual o ponto é atraído.

O resultado obtido é um fractal “quase” auto-semelhante, no qual porções arbitrariamente pequenas do conjunto podem ser ampliadas e deformadas de maneira uniforme para coincidir com a parte maior do conjunto. Isto resulta na classificação de fractal estatisticamente auto-semelhante.

A dimensão de um Conjunto de Julia pode ser calculada facilmente aplicando o Método da Contagem de Caixas⁷ e obtendo-se valores entre 1 e 2 dependendo do conjunto gerado. Em [Sau87] é proposto um algoritmo mais eficiente para calcular a dimensão destes conjuntos, o qual usa divisões por caixas recursivas no lugar de caixas com mesmo tamanho. O procedimento matemático para obter a dimensão de Hausdorff-Besicovitch⁸ pode ser encontrado em [Urb91].

A implementação de algoritmos para geração de imagens de Conjuntos de Julia de várias funções polinomiais complexas pode ser encontrada na maioria das publicações sobre fractais. Em [Ent89a] são apresentados alguns processos para geração de Conjuntos de Julia e de outros conjuntos obtidos por iteração, usando testes de divergência. Outra referência para geração de imagens é [Dev89] onde o autor descreve suas experiências para geração de um filme de vídeo com imagens dinâmicas dos Conjuntos de Julia e suas “*explosões*”, para ser usado para fins didáticos. Estas experiências acabaram gerando um livro ([Dev90]) acompanhado pelo filme de vídeo correspondente. Já o livro [Ste90b] apresenta um aspecto diferente na geração destes

⁷Este método está definido na página 38.

⁸Esta dimensão está definida na página 31.

conjunto através de *quaternions*.

O algoritmo para gerar o Conjunto de Julia pode ser encontrado em [PR86] onde são apresentados também os parâmetros para gerar imagens com um visual mais interessante. A implementação deste algoritmo está no apêndice *a*, na página 97 e a imagem obtida no apêndice *b*, na página 122. Na página 123 também é mostrada uma imagem do Conjunto de Julia obtido pela aplicação do Método de Newton.

2. Conjunto de Mandelbrot

O conjunto de Mandelbrot é formado por todos os pontos que não tendem para o infinito quando a função $z^2 + c$ é iterada dentro do campo dos complexos. Generalizando ainda mais esta definição, qualquer conjunto de pontos que não tenda para o infinito quando uma função que contenha um valor constante é iterada, forma um Conjunto de Mandelbrot [Oli92]. Esse conjunto criado por Mandelbrot em 1977, é sempre um *mapa* dos Conjuntos de Julia obtidos pela mesma equação. Isso significa que ampliando a região adjacente a um determinado valor de c na imagem do Conjunto de Mandelbrot, aparece o conjunto de Julia correspondente ao mesmo valor de c . Esse parentesco entre os Conjuntos de Julia e de Mandelbrot surge do fato dos dois poderem ser gerados a partir da mesma equação.

A definição do Conjunto de Mandelbrot pode ser obtida tomando-se por base a equação:

$$F(z, c) = z^2 + c$$

onde z e c são números complexos.

O conjunto de Mandelbrot consiste de todos os pontos c 's para os quais a sequência de z 's obtida pela iteração da função nunca sai do círculo de raio 2. A justificativa matemática deste círculo de raio 2 pode ser encontrada em [SCF88] e a descrição do comportamento da função durante a iteração aparece em [Dew85].

Para gerar o conjunto de Mandelbrot existem muitas técnicas já apresentadas. A mais simples de ser implementada pode ser encontrada em [PR86] onde são sugeridos também alguns valores iniciais para gerar imagens com um visual bonito. A implementação deste algoritmo está no apêndice *a*, na página 99 e a imagem obtida no apêndice *b*, na página 124.

Outras técnicas podem ser encontradas sendo que todas procuram mostrar os infinitos detalhes desde conjunto enfocados de diversos pontos de vista. Alguns artigos que podem servir de referência para estas outras implementações são [Ent89b], [Dew89b] e [Jon90b].

O grupo dos fractais não-lineares é um dos que possuem maior número de exemplos já estudados. O pesquisador Clifford Pickover, da IBM, diz que a escolha de um

algoritmo não influencia apenas o processo de computação mas também a maneira pela qual interpreta-se os resultados que são obtidos. Assim, ele apresenta uma série de artigos mostrando, em cada um, uma técnica diferente para gerar fractais determinísticos não-lineares. Temos assim em [Pic88b] a descrição da técnica para gerar o Mapa de Halley para obtenção das raízes de uma equação, em [Pic88e] uma técnica para a representação das funções polinomiais de Chebyshev, em [Pic88f] aparecem mapas de bifurcações, em [Pic88a] funções transcendentais do tipo $z - \cosh(z) + \mu$ e em [Pic89b] e [Pic87] sistemas dinâmicos associados a tempos discretos.

4.2.2.4 Fractal randômico linear auto-similar

O objeto fractal deste grupo é gerado por funções polinomiais do 1º grau que representem transformações lineares. A este processo são acrescentados algoritmos para geração de números pseudo-randômicos que assegurem a presença de um elemento estocástico capaz de modificar a forma final do objeto gerado.

A *Curva Fractal* e o *Triângulo Sierpiński Randômico* são dois fractais conhecidos deste grupo, mas muitos outros podem ser encontrados apenas acrescentando-se o elemento randômico a um fractal determinístico auto-similar.

1. Curva Fractal

O processo descrito em [Har86] segue os critérios descritos para obter-se um fractal randômico linear, usando transformações lineares e algoritmos para obtenção de números pseudo-randômicos.

Se tivermos um segmento de reta entre os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) o ponto médio será representado pela expressão:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Para uma linha fractal deslocamos um pouco este ponto médio através da adição de um fator de deslocamento a cada coordenada do ponto médio:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2} + dx, \frac{y_1 + y_2}{2} + dy \right)$$

Para introduzir o elemento aleatório, estes fatores de deslocamento são determinados de forma randômica, com as seguintes expressões:

$$dx = L * W * GAUSS$$

$$dy = L * W * GAUSS$$

onde:

L = comprimento do segmento

W = peso para a rugosidade da curva, o qual determinará a dimensão fractal

GAUSS = variável Gaussiana com média 0

O uso de variável Gaussiana neste processo assegura que os valores obtidos terão uma *distribuição Gaussiana*, garantindo com isso que:

- aproximadamente a metade dos valores serão positivos e a outra metade serão negativos.
- números muito afastados de 0 aparecerão muito menos vezes que números próximos de 0.

As funções para geração de números randômicos encontradas nas linguagens de programação comuns apresentam uma *distribuição uniforme*, significando com isso que as chances dos números entre 0 e 1 aparecerem são iguais. Neste caso não é isso que se quer. É necessário então implementar um algoritmo para obter os valores Gaussianos, conforme nos mostra a figura 4.6, que irá aproximar uma distribuição Gaussiana pela média de alguns números randômicos uniformes. Cada número randômico gerado é alternadamente somado e subtraído, permitindo assim a média 0.

Aplicando uma vez o ponto médio deslocado por este valor gaussiano calculado, obtemos a figura 4.5.

Esta figura nos mostra o segmento original dividido em duas partes ($N = 2$), cada uma delas estatisticamente semelhante ao original e com um comprimento médio um pouco maior do que a metade do segmento original.

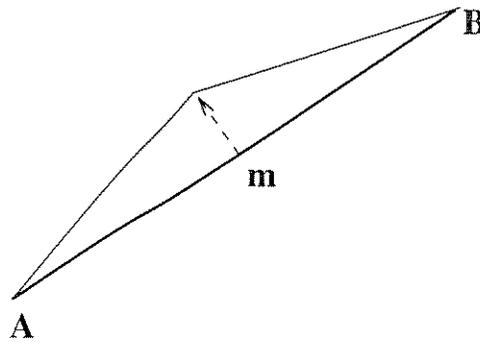


Figura 4.5: Ponto médio de um segmento e seu deslocamento gaussiano

A dimensão fractal da curva mostrada nesta figura está agora um pouco maior do que 1. Este valor W controla a rugosidade da curva após várias repetições deste procedimento e quanto maior o valor do comprimento L do segmento, menor será o valor de uma variável s pela qual cada segmento deverá ser escalado para obter o segmento original.

Os algoritmos que implementam o procedimento para obtenção de uma curva fractal, descritos nas figuras 4.6, 4.7 e 4.8, consideram que a curva fractal será traçada da posição corrente até um ponto especificado. Os argumentos necessários são o ponto inicial e o ponto final, a rugosidade desejada e o nível de recursão desejado. Este nível pode ser determinado automaticamente calculando quando o segmento gerado se torna menor que um pixel da tela, mas isto implicará num processamento mais longo. Da forma usada aqui o processo poderá fazer paradas intermediárias, obtendo-se o grau de precisão desejado.

Estes algoritmos estão implementados no apêndice *a*, na página 101 e a imagem obtida está no apêndice *b*, na página 125.

Outra forma de obter-se uma curva fractal é através da interpolação de pontos pré-conhecidos. O estudo deste tipo de interpolação, encontrado em [Bar88], baseia-se num procedimento já existente na matemática e muito usado para analisar dados. A geometria Euclidiana e as funções elementares tradicionais, tais como polinômios, senos e cosenos, são largamente utilizadas para analisar dados experimentais. Este processo consiste em representar os dados obtidos de uma experiência qualquer como um subconjunto de \mathbb{R}^2 e depois procurar uma entidade geométrica que possa repre-

Algoritmo Gauss

Calcula uma distribuição Gaussiana aproximada entre -1 e 1.

```

Local      I                               variável para somar as amostras
BEGIN
    GAUSS ← 0;
    FOR I=1 TO 6 DO GAUSS ← GAUSS + RND - RND;
    GAUSS ← GAUSS / 6;
    RETURN;
END

```

Figura 4.6: Algoritmo para obter uma distribuição Gaussiana

sentá-los com uma aproximação considerada adequada. Geralmente esta entidade é uma simples fórmula que permite a comunicação de uma grande quantidade de informação de forma muito simples. Para uma grande quantidade de objetos criados pelo homem e para estudar o comportamento de muitos fenômenos estas fórmulas encontradas dentro da matemática tradicional são adequadas, mas para muitos casos elas não são. Objetos naturais como relevos, contornos de nuvens, estalactites no interior de cavernas, horizontes de florestas e outros, ou fenômenos com comportamento dinâmico tal como a análise de voltagens num ponto do cérebro humano através de um eletroencefalograma não encontram uma ajuda adequada para serem analisados pela matemática tradicional.

Neste sentido, as funções fractais interpoladoras são como as funções tradicionais que encontram as *'formulas'* adequadas para representar um comportamento. A diferença principal está no elemento básico de cada uma. Assim, uma função tradicional tem como base um elemento Euclidiano (ponto, linha, superfície) e a função fractal interpoladora tem como base o algoritmo fractal de sua representação.

A implementação do procedimento de interpolar pontos por uma função fractal está no apêndice *a*, na página 105 e a curva interpoladora gerada por este procedimento está no apêndice *b*, na página 126.

Algoritmo Subdivisão_Fractal

Desenha uma linha fractal entre os pontos X1, Y1 e X2, Y2.

Argumentos	X1, Y1;	ponto inicial da linha
	X2, Y2;	ponto final da linha
	S ;	fator de escala do deslocamento
	N ;	nível de recursão desejado
Local	XMID, YMID;	coordenada da posição na qual a linha será quebrada

```

BEGIN
  IF N = 0 THEN
    BEGIN
      pára a recursão, apenas desenha o segmento
      LINE_ABS_2 (X2, Y2) ;
    END ;
  ELSE
    BEGIN
      calcular o ponto medio
      XMID ← (X1 + X2) / 2 + S * GAUSS ;
      YMID ← (Y1 + Y2) / 2 + S * GAUSS ;
      desenhar as duas metades
      SUBDIVISÃO_FRACTAL (X1, Y1, XMID, YMID, S / 2, N-1) ;
      SUBDIVISÃO_FRACTAL ( XMID, YMID, X2, Y2, S / 2, N-1) ;
    END ;
  RETURN ;
END ;

```

Figura 4.7: Algoritmo para desenhar uma curva fractal

Algoritmo Linha_Fractal

Rotina do usuário para criar a linha fractal.

Argumentos	X!, Y!; W; N ;	ponto final da linha valor que controla a rugosidade nível de recursão desejado
Global	DF_PEN_X, DF_PEN_Y; SEED;	ponto inicial valor da semente para obter os números pseudo-aleatórios
Local	L;	comprimento aproximado

```

BEGIN
  L ← |X - DF_PEN_X| + |Y - DF_PEN_Y|;
  SUBDIVISÃO_FRACTAL ( DF_PEN_X, DF_PEN_Y, X, Y, L * W, N);
END ;

```

Figura 4.8: Algoritmo para criação de uma linha fractal

2. Triângulo de Sierpiński

O triângulo de Sierpiński foi obtido no grupo 1 da taxonomia⁹ proposta neste trabalho, usando o método IFS. Como aplicação neste grupo 4 foi implementado o mesmo algoritmo acrescentando um elemento randômico na definição da posição de cada ponto. Pode-se observar na figura gerada que após algumas iterações a auto-similaridade exata desaparece e a imagem torna-se indefinida. A implementação deste procedimento está no apêndice *a*, na página 108 e a imagem do triângulo gerado por este método está no apêndice *b*, na página 127.

O mesmo método pode ser usado para obter-se entrelaçados randômicos a partir de entrelaçados determinísticos. O processo para obter-se um dos Entrelaçado de Sierpiński determinístico consiste em dividir-se um quadrado em nove quadrados e retirar a porção do meio. O processo repete-se com a retirada da porção central de cada quadrado remanescente. O resultado é uma imagem que lembra um *carpet* com desenhos, o que justifica o nome que estes entrelaçados também são chamados: *Carpets de Sierpiński*. Esta é uma figura puramente matemática na qual um número de iterações tendendo ao infinito representa um quadrado sem área. No mundo real é difícil imaginar uma situação que possa ser modelada por esse objeto fractal. No entanto, construindo-se um carpet auto-similar randômico, no qual a posição dos elementos possa ser randomizada no espaço, encontra-se uma semelhança com a forma de ocorrência de muitos sistemas naturais. Uma descrição da aplicação deste modelo a um sistema natural pode ser encontrada em [Hay89].

⁹Ver a descrição deste grupo na página 57.

4.2.2.5 Fractal randômico linear auto-afim

Para obter estes fractais são usadas transformações afins, representadas por polinômios do 1º grau, dentro de um processo iterativo. O elemento estocástico volta a aparecer de forma a modificar o aspecto final do fractal.

Os representantes conhecidos deste grupo são os fractais que representam o *Movimento Browniano* e as *Superfícies Brownianas*.

1. Movimento Browniano

Até chegar-se aos fractais pertencentes ao grupo 3, tratou-se de figuras que são deterministicamente definidas por iterações de funções. Por apresentarem muitas irregularidades pode-se pensar que somente com elas seria possível descrever matematicamente e representar realisticamente qualquer fenômeno natural. Mas por mais riqueza e irregularidade de detalhes que elas apresentem nunca serão exatamente como fenômenos naturais, os quais são plenos de irregularidades randômicas. Tenta-se aproximar-se mais da Natureza incluindo alguma forma de randomicidade nas técnicas fractais.

Uma das primeiras investigações detalhadas de randomicidade na Natureza foi feita pelo botânico escocês Robert Brown, em 1828, quando ele observou, através de um microscópio, que minúsculas partículas de pólen de flores suspensas em líquido apresentavam um padrão de movimento altamente irregular. Este, e outros fenômenos similares de movimento de partículas no ar, foram explicadas não como resultado de fatores externos mas sim por choques entre partículas no próprio sistema. Em 1923, Wiener propôs um rigoroso modelo matemático que mostrava um comportamento randômico similar ao observado no movimento Browniano. Este padrão de Wiener descrito num espaço tridimensional é tão irregular que apresenta dimensão de Hausdorff igual a 2. Ele é um bom exemplo de um fenômeno natural com uma aparência fractal que pode ser explicado por um simples modelo matemático.

A forma mais simples de ocorrência do movimento Browniano é quando o tempo é dividido em unidades e plotado no eixo X . O espaço deslocado pela partícula no tempo é plotado no eixo y . É provado [Fal90] que o valor de y neste caso tem uma distribuição gaussiana.

Para simular este tipo de movimento no computador escolhe-se uma certa quantidade de partículas e calcula-se sua trajetória randomicamente. Recursos de acender e apagar pontos na tela permitem controlar a quantidade de pontos a serem mostrados.

Algoritmo para geração de Movimento Browniano

- (a) Definir o número máximo de iterações
- (b) Calcular a direção do movimento
- (c) Movimentar a partícula até o próximo ponto
- (d) Acender o ponto
- (e) Apagar o ponto aceso a mais tempo
- (f) Repetir

2. Superfície Browniana

Considerando que as partículas em suspensão possam fazer o movimento browniano num plano, obtém-se uma Superfície Browniana. Uma técnica para representar este movimento num computador consiste em considerar um sistema de 3 eixos nos quais a posição da partícula é colocada em 2 eixos e o terceiro é usado para o tempo. Outra técnica mais simples, permite simplesmente não plotar o tempo e usar 2 eixos nos quais será considerado apenas a posição bidimensional da partícula.

A implementação deste procedimento, conforme [Bru93], está no apêndice *a*, na página 111 e a imagem do movimento de partículas gerado por este algoritmo está no apêndice *b*, na página 128.

Vários tipos de sistemas que apresentam este comportamento são estudados dentro de uma área denominada “*random walk*”. Estes métodos de *caminhos randômicos* usam a técnica do movimento browniano para visualizar o comportamento de diversos sistemas. Uma referência completa para este assunto está em [Hay89].

Uma aplicação muito importante para estes fractais dentro da Síntese de Imagens está na criação de texturas para cenas naturais (ver [Pen86b]. Até o momento as técnicas conhecidas permitiam apenas a colocação de texturas em objetos euclidianos. Cenas muito realísticas podem agora ser criadas acrescentando texturas com aspecto natural em cenas naturais, resultando numa com aparência visual muito realística. A restrição neste caso é

que a geração de cenas com métodos randomizados fica limitado ao uso de computadores de grande poder de processamento pois os cálculos são muito árduos [KCC89]. Ao longo do tempo esta restrição vai diminuir, pois a capacidade de processamento dos computadores de pequeno porte aumenta rapidamente.

4.2.2.6 Fractal randômico não-linear

O processo iterativo usado para obter este tipo de fractais envolve funções de grau maior ou igual a 2 ou funções não-algébricas. Além disso, usa-se um elemento estocástico que provoque uma modificação na forma final do fractal.

Como exemplo de fractal que pertence a este grupo temos as *Estranhas Espirais* descritas abaixo, mas como nos outros grupos de fractais randômicos muitos objetos podem ser obtido acrescentando um fator de randomicidade aos objetos determinísticos correspondentes.

Estranhas Espirais

Este termo é usado para denotar objetos que possuem muitas das propriedades visuais normalmente associadas com espirais mas que possuem também outras propriedades novas como ser infinitamente convolutivo, infinitamente descontínuo ou simplesmente tendo fórmulas mais complicadas para sua geração [Pic90].

A espiral logaritmica de aparência mais expressiva é a que lembra os braços de uma galaxia. A forma da espiral de uma galaxia pode ser facilmente implementada através da plotagem de pontos formando uma espiral logaritmica dupla. Um braço está defasado de 180 graus do outro e a equação usada é:

$$r_1 = e^{[\theta \tan \phi]}$$

$$r_2 = e^{[(\pi + \theta) \tan \phi]}$$

onde: r_1 e r_2 correspondem aos dois braços da espiral, ϕ controla a curvatura dos braços e θ controla a relação da posição das estrelas em relação aos braços. O fator randômico é acrescentado para dar maior realismo ao resultado obtido.

A implementação destas espirais está no apêndice *a*, na página 116 e a imagem da galaxia gerada por este algoritmo está no apêndice *b*, na página 129.

4.3 Comentários Finais

Em qualquer área de pesquisa, seja nas Ciências Exatas, Humanas, Biológicas ou qualquer ramo do conhecimento, o homem sempre procura classificar para organizar seu pensamento. Temos a formação geológica da Terra classificada em *eras*, os pintores clássicos separados em *escolas*, as funções do nosso organismo divididas em *sistemas*. A matemática também procura classificar toda sua teoria, desde um enfoque amplo, como Geometria, Álgebra, Cálculo, até pequenas divisões, como funções simples e compostas. A observação deste comportamento comum, presente em qualquer forma do aprendizado humano, motivou a busca de uma taxonomia para os fractais. Estando numa área tão nova do conhecimento estes objetos matemáticos tem sua teoria levada constantemente a uma situação de dispersão.

Procurou-se então sedimentar bem alguns conhecimentos, definir claramente cada tipo de fractal usando uma linha de raciocínio comum a todos e permitir assim que se percebesse como um tipo é uma ramificação de outro. O resultado conseguido é a árvore da figura 4.3.

Esta classificação funciona muito bem no sentido descendente, ou seja, sabendo-se quais e de que forma as transformações são usadas nos algoritmos para geração de um fractal pode-se prever muito bem qual a forma final da imagem que se irá obter. O sentido inverso, que é da imagem gerada encontrar as transformações que a originaram, já é mais complicado considerando que o uso de diferentes cores torna uma mesma imagem com aparência visual bem variada, o que pode levar a diferentes conclusões sobre quais transformações foram usadas para obter esta imagem. Para usar a Teoria dos Fractais, o sentido descendente da classificação é bem mais interessante uma vez que a equação usada é sempre conhecida pois origina-se do campo da aplicação.

Capítulo 5

APLICAÇÕES

O estudo da *teoria* dos fractais dentro da Matemática tem se desenvolvido bastante mas a difusão maior tem sido na *aplicação* dos fractais em várias áreas. Em muitos casos a teoria ainda não provou certas afirmações e não se sabe porque algum procedimento funciona mas como não há dúvidas de que ele realmente funciona, está sendo usada sem restrições. Como muitas outras inovações dentro da teoria fractal, a prática aqui está vindo antes da teoria.

Um dos motivos principais para a difusão das técnicas fractais é sua grande capacidade de ampliação de uma base de dados e sua grande capacidade de simulação. Supondo-se que um pesquisador da área de BOTÂNICA consiga modelar matematicamente uma planta através de uma equação, a técnica fractal pode ser usada para representar graficamente esta planta e, mais ainda, com pequenas modificações nos coeficientes desta equação, a mesma técnica pode representar toda uma família de plantas. Assim, a base de dados seria uma única equação e o resultado seria a representação visual de uma infinidade de membros desta família.

Ligado a isso aparece um aspecto de grande interesse na área da *COMPUTAÇÃO*, que é a compressão de imagens. Hoje em dia o uso de imagens cresce cada vez mais dentro de todas as áreas da Informática e, como se sabe, imagens ocupam grande quantidade de espaço na memória. Existe então uma grande corrida para descobrir novos métodos de compactação e compressão que tornem o futuro das imagens no computador livre de restrições. A área de *COMUNICAÇÕES* é uma das mais beneficiadas com o sucesso destes métodos

tendo em vista o esforço necessário para transmitir sinais, sejam eles de imagens, sons, vozes ou textos. Com o desenvolvimento de aplicações gráficas, nas quais grandes arquivos são gerados para transformá-las em sinais passíveis de serem enviados, transmissão de grandes volumes de dados é uma questão crucial a ser resolvida. Hoje também procura-se soluções para transmissão de vozes pois esta é outra tendência atual da informática -*falar com o computador*, e nisto também os fractais podem dar sua contribuição¹.

Dentro disso os fractais acenam com uma solução para compressão de imagens que ser parece altamente interessante como pode ser visto no exemplo dado no capítulo 1, na página 9, onde a imagem de uma folha de samambaia pode ser armazenada por uma simples matriz 4 x 7. A solução para este tipo de compressão é composta por um método para comprimir a imagem chamado *Teorema da Colagem* e de outro método para descomprimir a imagem, chamado *IFS* (Iterated Function System). Estes métodos estão descritos pelo pesquisador Michael Barnsley em [Bar88] mas alguns detalhes não divulgados impedem sua implementação por outra pessoa que não da própria empresa comercial deste pesquisador. Um sistema usando estes métodos já está sendo por ele comercializado e empresas do porte da Microsoft, acabaram de comprar os direitos para uso desta solução dentro de seus produtos. Infelizmente a comunidade científica ficou sem conhecer detalhes destes métodos.

Outro grande interesse pelos fractais vem das ciências que estudam SISTEMAS DINÂMICOS. Dentro desses sistemas, um modelo científico é simplesmente uma tentativa de transladar a natureza em alguma forma quantificável. Nessas ciências experimentais, o sucesso de uma teoria é medido pelo grau com que o modelo de previsão combina com seus dados experimentais.

Dentro da área de *SÍNTESE DE IMAGENS*, um fractal é um novo estilo de modelo de previsão. Dizemos que a simulação no computador obtém sucesso quando reflete uma semelhança muito grande com o objeto a ser modelado. Se pudermos modelar objetos altamente complexos com regras bem simples e ainda fazer isso muito bem, o sucesso é ainda maior.

Na *QUÍMICA*, fenômenos de agregação com difusão limitada (DLA), eletrodeposição, testes de reações cinéticas em superfícies fractais, cromatografia e outros tem sido estudados com o auxílio de fractais (ver [Hib91]).

¹ver [[HJB⁺93]] e [[PK86]]

As *CIÊNCIAS BIOLÓGICAS* e a *MEDICINA* trabalham com um conceito cuja característica essencial é a atividade dinâmica existente em muitos fenômenos humanos que resultam num tipo de movimento imperceptível. Este movimento relaciona um nível de espaço ou tempo com o próximo por um fator de escala. Este tipo de processo é o mesmo descoberto por Mandelbrot para um objeto fractal, o que levou muitos cientistas da área da Biomedicina a modelarem os fenômenos chamados na literatura médica de “*periodicidades patológicas*”, por um processo fractal. Certos neurônios em nosso cérebro, quando examinados sob a lente de um microscópio com baixo poder de ampliação, mostram ramificações assimétricas, chamadas dendrites, ligadas as células do corpo. Amplificações sucessivas por lentes mais poderosas, mostram outros dendrites menores, e outros, e mais outros. Esta propriedade de *auto-semelhança* também é encontrada nos fractais. Pode-se encontrar esta característica no sistema sanguíneo, no sistema nervoso, nos intestinos e em vários outros sistemas do organismo humano. Fractais e caos dentro da fisiologia humana deverão indicar um caminho melhor para caracterizar disfunções resultantes da idade e de doenças. Saúde então será considerado como um balanceamento entre a ordem e o caos (ver [WS90] e [GRW90]).

Nas *CIÊNCIAS FÍSICAS* a teoria dos fractais, e particularmente sua dimensão, estão sendo largamente utilizadas. São usadas descrições fractais da pulverização de metais e do fluxo de pós secos que possuem muitas aplicações na metalurgia, na química, na biologia, na indústria farmacêutica e de alimentos e na exploração de minérios. A estrutura de partículas finas cósmicas, de alguns tipos de grãos de areia e poeiras respiráveis também já foram estudados com o recurso dos fractais, como pode ser visto em [Hay89].

Numa área bem diferente, a *TEORIA DAS ARTES*, estão sendo estudadas as implicações dos padrões visuais gerados pelas imagens fractais. A beleza dos fractais acendeu a imaginação de muitas pessoas. Mesmo os cientistas, entre eles o próprio Mandelbrot, já admitiram o prazer que sentem em observar a evolução de um padrão fractal resultante de um algoritmo dado ao computador. Como resultado disso, fractais já apareceram na capa dos principais periódicos como *American Scientist*, *Science*, *Nature*, *Physics Today*, *Research and Development*, *Scientific American*, além de outras publicações fora da área científica. Muitas imagens sintetizadas recebem como textura um padrão fractal, pois com certeza o resultado será agradável aos olhos humanos. Cenários de filmes já foram criados com recursos fractais, como “*O Retorno de Jedi*”, procurando dar maior realismo às cenas

simuladas. Já houve lançamentos comerciais de tapetes, postais, calendários que atestam a influência da beleza das imagens fractais na vida atual.

A própria *MATEMÁTICA* está usando os fractais como uma ferramenta para entender o comportamento dinâmico de certos sistemas que envolvem variáveis que se modificam constantemente ao longo do espaço. Um desses fenômenos é observado no *Método de Newton* para encontrar raízes de equações. Apesar de muito difundido, nunca foi explicado porque valores iniciais muito próximos de uma raiz divergem rapidamente, e encontram outra raiz bem mais distante. O “*panorama*” deste comportamento é mostrado na figura b.5, no apêndice b.

Na área de *PROCESSAMENTO DE IMAGENS e COMPUTAÇÃO GRÁFICA*, a Teoria Fractal tem sido usada para descrever a forma de objetos naturais complexos e mostrar suas imagens com grande intensidade de detalhes. Pode-se citar as seguintes aplicações dentro desta área:

- modelamento matemático de objetos naturais para analisar suas formas;
- análise da textura de cenas naturais;
- compressão e codificação de dados de linhas de contorno em mapas topológicos (relêvos);
- aproximação e interpolação de formas e superfícies naturais;
- geração de imagens realísticas de objetos naturais irregulares;
- compressão de imagens digitalizadas.

Não há dúvidas de que na primeira corrida para aplicar a geometria fractal em sistemas naturais houveram excessos intelectuais e tentativas de forçar muitas coisas a se organizarem dentro de uma lógica fractal. Tentativas foram feitas para colocar uma descrição fractal onde não havia necessidade de mudar a descrição clássica do sistema. Isto gerou várias discussões entre os cientistas (ver [HG89], [DD89], [Kra89], [Man89a] e [Man89b]) sobre a validade desta teoria. Atualmente não existe mais sentido em discutir a validade ou não pois a teoria impôs-se por si mesma. A situação agora é de sedimentação desta teoria, conforme sugestão feita no próximo capítulo, das *Conclusões*, para justificar as aplicações já existentes e utilizar esta teoria em novas aplicações.

Capítulo 6

CONCLUSÃO

No início, a presente pesquisa sobre o assunto *geometria fractal* foi muito difícil pois o fato de ser um assunto tão novo, em 1990, fazia com que existisse pouca bibliografia disponível no Brasil e mesmo no exterior. Poucas pessoas já tinham tomado conhecimento sobre os fractais e não existiam publicações brasileiras. Este quadro foi tão marcante que não havia um parâmetro que orientasse o uso do gênero masculino ou feminino para a palavra *fractal*. Uma consulta feita por escrito em 1990 (ver apêndice c) ao criador do termo, Benoit Mandelbrot, levou ao uso do gênero masculino¹, o qual consolidou-se de fato dentro da língua portuguesa. Com o passar do tempo este panorama foi se modificando, e de forma tão rápida, que a dificuldade tornou-se acompanhar o progresso do assunto. Em torno de 10 anos no exterior e pouco mais de três anos no Brasil, os fractais saíram de um quase anonimato para uma palavra que está no vocabulário de todos, nem que seja para comentar apenas sua grande beleza.

Nas pesquisas feitas na literatura que foi surgindo, o principal fato observado foi a especialização. Cada novo livro ou artigo que surgiu durante este tempo tratou de um aspecto muito específico dentro da geometria fractal e nenhum deles preocupou-se em abranger um contorno mais amplo dentro desta geometria.

Para preencher esta lacuna, este trabalho procurou organizar os principais conteúdos já publicados, dentro de uma ordem lógica e sequencial que, de forma gradativa,

¹ Mesmo assim, a revista *Exame Informática*, da Editora Abril, de agosto/92, na página 79, faz referência a uma foto na qual cita “o universo imprevisível das fractais ...”, usando o gênero feminino.

introduzisse o leitor numa teoria muito complexa mas de forma simples e precisa. Assim, o capítulo 1 procurou situar os fractais dentro de um contexto histórico-científico, posicionando-os em relação a teoria do Caos, onde os fractais aparecem como uma ferramenta de visualização de fenómenos, e em relação a Matemática onde se procura fundamentos teóricos que sustentem esta teoria. Tendo-se despertado o interesse pelo assunto, o passo seguinte foi entrar em um campo mais teórico, envolvendo os aspectos matemáticos da geometria fractal. Como estes aspectos usam muitos conceitos da matemática tradicional, colocou-se no capítulo 2 uma revisão destes conteúdos, fixando-se notações e citando conceitos não muito estudados em currículos normais de matemática como conexidade e medidas. Este capítulo tornou-se então o embasamento necessário para os conceitos vistos nos capítulos seguintes. No capítulo 3 a matemática específica da geometria fractal foi estudada através de seu conceito mais conhecido até agora que é a *dimensão fractal*.

Tendo os principais conteúdos conhecidos já organizados, procurou-se dar um passo a frente ao que já existia e propor uma classificação para os fractais. Esta taxonomia resultou na maior contribuição deste trabalho ao assunto por ser uma tentativa pioneira na criação de agrupamentos. Esta divisão em grupos irá permitir que dificuldades encontradas no tratamento global dos fractais sejam divididas em partes menores e mais fáceis de serem compreendidas. Permitirá também que pesquisadores de outras áreas identifiquem em qual grupo suas pesquisas se enquadram simplesmente conhecendo a equação que representa o fenómeno de seu interesse e assim usufruir de toda teoria já desenvolvida para aquele grupo.

Vários critérios para esta taxonomia foram pesquisados e várias possibilidades foram testadas. Uma destas foi classificar os fractais por sua dimensão, o que daria origem a três grandes grupos: fractais com dimensão menor do que um, fractais com dimensão entre um e dois e fractais com dimensão maior do que dois. Esta possibilidade foi abandonada considerando-se que a própria pesquisa sobre dimensão não está bem sedimentada e também que dependendo do tipo da dimensão considerada, sua medida pode variar. Além disso, existem fractais que não tem sua dimensão calculada até o momento. Outros possíveis critérios foram considerados e eliminados em função de diversas dificuldades ou por falta de interesse no resultado obtido. Finalmente fez-se a opção por uma taxonomia baseada no processo de geração do fractal. O aspecto mais positivo desta classificação é possibilitar a escolha do tipo do fractal que se deseja obter antes da sua geração. Até agora, ou o aspecto da imagem do fractal já era conhecido porque já tinha sido gerado anteriormente ou o

resultado seria totalmente imprevisível. Por outro lado, o sentido contrário da classificação, o qual permitiria que pela observação da imagem de um fractal se pudesse saber qual o método usado para sua geração, ainda não ficou totalmente resolvido. A aparência da imagem de um fractal fica muito alterada pelo uso ou não de cores e também pela quantidade de cores usadas, não sendo assim muito seguro tirar conclusões apenas pelo que se vê.

Para classificar os fractais num dos seis grupos que compõem a taxonomia é suficiente o conhecimento do algoritmo usado para sua geração. Os fractais que constam no capítulo 4 foram classificados verificando se o algoritmo que gerou sua imagem inclui um gerador de números randômicos que altere a posição do ponto colocado na tela e verificando também qual o tipo da função, ou conjunto de procedimentos, que constam neste algoritmo de geração. Estas informações foram comparadas com a descrição de cada grupo obtendo-se assim a classificação. O processo é simples e rápido.

A continuação de um processo de pesquisa em qualquer área, após o uso da técnica de classificação proposta neste trabalho, seria a aplicação dos conceitos já existentes para o tipo de fractal identificado, agora já relacionado com o problema real a ser estudado, dentro da área ou classe de aplicações à qual o problema pertence.

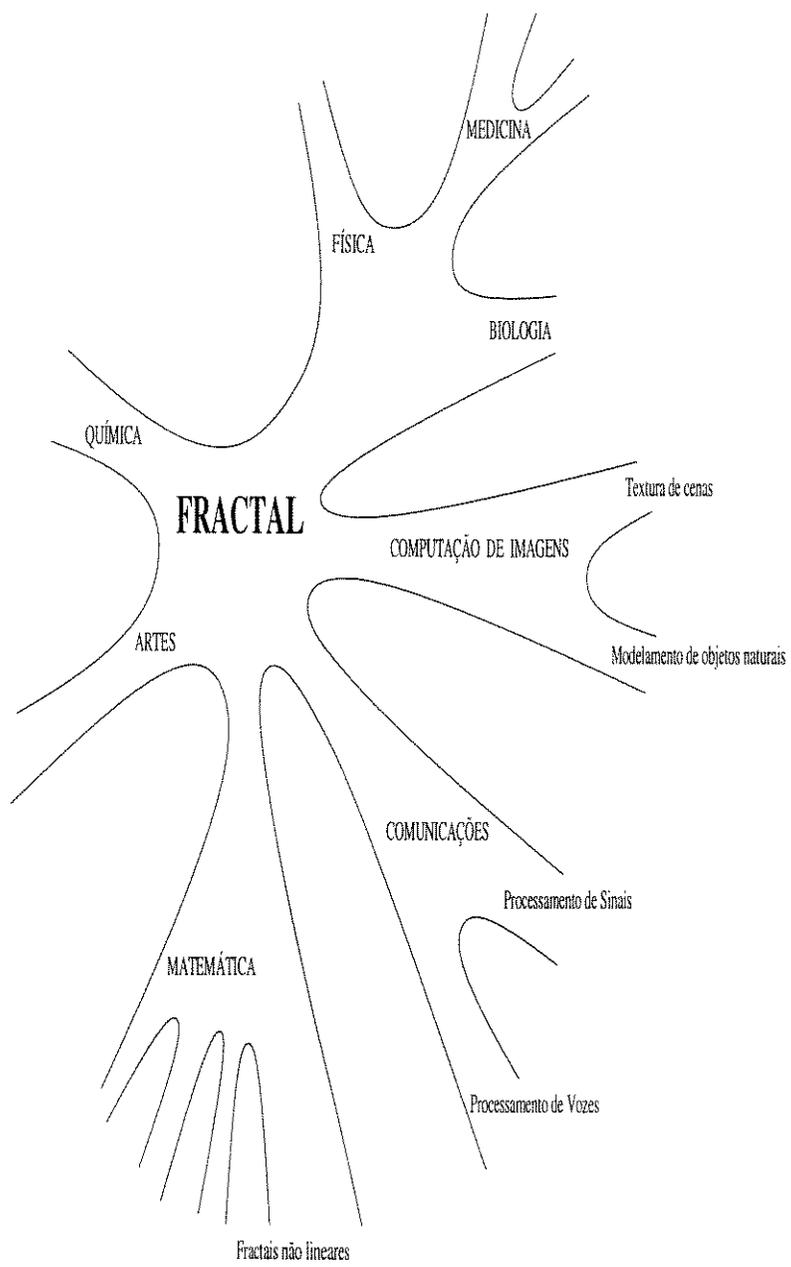
Considerando-se que nenhuma literatura publicada até o momento deu um enfoque didático e abrangente para uma iniciação dentro da Teoria dos Fractais, o presente trabalho valoriza seus objetivos de preencher uma lacuna existente e ampliar para muitas pessoas iniciantes no assunto o conhecimento necessário para relacionar as várias áreas de pesquisa entre si.

Como continuação desta pesquisa sugere-se duas áreas distintas:

matemática: subdividir os fractais não lineares em grupos menores, como os fractais quadráticos, e procurar propriedades que caracterizem estes grupos.

computação de imagens: modelar objetos naturais e analisar texturas de cenas naturais através de sua dimensão.

Com certeza, qualquer destas sugestões irá gerar uma pesquisa que muito contribuirá no desenvolvimento da Ciência.



Apêndice a

GERAÇÃO

A tecnologia para criar imagens gráficas está rapidamente mudando a maneira pela qual pesquisadores usam computadores nas várias ciências, inclusive na matemática, fornecendo técnicas cada vez mais sofisticadas para visualizar e simular a realidade física. Por outro lado novas idéias surgem nestas pesquisas científicas e matemáticas enriquecendo ainda mais o mundo da computação gráfica. O procedimento de iteração múltipla de uma função particular ou da repetição de uma sequência de operações matemáticas abre uma ampla gama de possibilidade que estão inclusas nestas novas tecnologias. Muitas das equações utilizadas são de interesse em áreas particulares, como biologia, química, física e matemática, as quais utilizam desses procedimentos fractais para visualizar situações específicas de suas pesquisas, isto é, transformar informações em imagens. Geralmente é difícil detectar aspectos randômicos ou de regularidade numa página cheia de 0 's e 1 's, que são a maneira fundamental de mostrar *bits* de dados. É muito mais fácil sentir que um sistema através das imagens resultantes de um procedimento fractal. Além desta vantagem principal, outras surgem espontaneamente e podem ser utilizadas. A beleza das imagens surge quase sempre quando estes procedimentos são aplicados e assim muitas discussões estão acontecendo no meio das Artes a respeito do uso destas imagens em criações artísticas. Aparentemente a beleza da Natureza acontece não só no seu aspecto estático mas também no seu comportamento dinâmico.

As implementações apresentadas neste apêndice foram feitas em linguagem *C* e compiladas usando o *Borland C++*, versão 3.1. O objetivo da apresentação destas imagens

está na sua relação com a taxonomia apresentada e não na qualidade da implementação em si. Assim, não foram exploradas técnicas especiais para aumentar a rapidez, nem técnicas para melhoria do visual apresentado. Apesar disso as imagens levaram entre um e dez minutos para geração, o que não foi considerado um tempo muito grande tendo em vista que o equipamento usado foi em 386SX, 25 MHz, com co-processador aritmético.

Outras técnicas além das usadas neste trabalho podem ser encontradas na maior parte da bibliografia sobre o assunto. Como referência específica de métodos de geração aplicáveis a vários dos grupos aqui propostos pode-se citar [Nor82a], [Pen56], [Dew86] e [HB86].

TRIÂNGULO DE SIERPIŃSKI GERADO PELO MÉTODO IFS

```
#include <dos.h>
#include <graphics.h>
#include <stdio.h>

#define DIM 4

static unsigned int seed = 1345;
#define RND (seed = seed*37+1)

void main ()
{
int m      = DIM-1, n, j, k,
    mode   = DETECT,
    driver = DETECT;

static double a[DIM] = { .5, 0.5, 0.5, 0 },
              b[DIM] = { 0, 0, 0, 0 },
              c[DIM] = { 0, 0, 0, 0 },
              d[DIM] = { .5, .5, .5, 0 },
              e[DIM] = { 0, 1, .5, 0 },
              f[DIM] = { 0, 0, .5, 0 },
              pk[DIM] = { .34, .33, .33, 0 },
              p[DIM];

double pt    = 0.,
        xscale = 300,
        yscale = 200,
        xoffset = 0,
        yoffset = 0,
        x      = 0,
        y      = 0,
```

```
        newx, newy,
        pq;

for (j = 0; j < m; j++)
    {
    pt += pk[j];

    p[j] = pt;
    }

initgraph(&mode, &driver, "");

for (n = 0; n < 15000; n++)
    {
    pq = (double) RND/65536.;
    if (pq <= p[0])
        k = 0;
    else if (pq <= p[1])
        k = 1;
    else if (pq <= p[2])
        k = 2;
    else k = 3;

    newx = a[k] * x + b[k] * y + e[k];
    newy = c[k] * x + d[k] * y + f[k];
    x = newx;
    y = newy;
    if (n > 10)
        {
        int cor = EGA_LIGHTBLUE;

        putpixel (x * xscale + xoffset ,
```

```
        y * yscale + yoffset, cor) ;  
    }  
}  
  
getch();  
closegraph();  
  
}
```

CURVA DE KOCH GERADA PELA APLICAÇÃO DE TRANSFORMAÇÕES

```
#include "graphics.h"
#include "math.h"
#include "stdlib.h"
#include "stdio.h"
#include "conio.h"

#define XMAX 30
#define INCR 60*3.1416/180

int graphdriver, graphmode, maxX, maxY, minX=0, minY=0, maxcores;
double x1=0.0, y1=0.0, x5=0.0, y5=0.0;

void init_graf(void);
void koch(double, double, double, double, double);

void main()
{
    init_graf();
    koch(x1,y1,x5,y5,INCR);
    getch();
}

void koch(double x1, double y1, double x5, double y5, double incr)
{
    double x2=0., y2=0., x3=0., y3=0., x4=0., y4=0., teta=0., delta=0.;
    if ((int)(abs((x5-x1)))<1.5) {
        setcolor(15);
        line(x1, (maxY-y1), x5, (maxY-y5));
        return;
    }
}
```

```
}
x2=x1+(x5-x1)/3.;
y2=y1+(y5-y1)/3.;
x4=x1+2*(x5-x1)/3.;
y4=y1+2*(y5-y1)/3.;
teta=atan((y5-y1)/(x5-x1));
delta=(x5-x1)/(3*cos(teta));
x3=x2+delta*cos(teta+incr);
y3=y2+delta*sin(teta+incr);
koch(x1,y1,x2,y2, incr);
koch(x2,y2,x3,y3, incr);
koch(x3,y3,x4,y4, incr);
koch(x4,y4,x5,y5, incr);
}

void init_graf()
{
graphdriver = DETECT;
initgraph( &graphdriver, &graphmode, "" );
maxcores = getmaxcolor() + 1;
maxX = getmaxx()+1;
maxY = getmaxy()+1;
x1 = 4*XMAX;
x5 = maxX-4*XMAX;
y1 = maxY/2;
y5 = y1;
}
```

FRACTAL AUTO-AFIM GERADO POR CÓPIAS TRANSFORMADAS

```

#include <conio.h>
#include <stdio.h>
#include <graphics.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>

#define MAIN
#include "fvtc.h"

#define NPARTES 4
#define NLEVS 5
#define NPTSH 8
#define XSCREEN 1200.
#define YSCREEN 800.
#define XWIN 300.
#define YWIN 200.

static double a[NPARTES]      = {1.13,-1.2,-1.0,-.5},
             b[NPARTES]      = {-0.14,-2.8,-1.2,-4.},
             c[NPARTES]      = {2.08,-1.5,-2.3,-2.8},
             d[NPARTES]      = {-0.003,-2.,-2.4,-1.2},
             e[NPARTES]      = {0.5,1.2,2.1,1.5},
             f[NPARTES]      = {0.5,0.,0.,0.},
             y[NPTSH]        = {800.,500.,400.,300.,300.,400.,500.,800.},
             x[NPTSH]        = {0.,50.,0.,50.,100.,50.,100.,50.};
static int clr[NPARTES][NLEVS]= {1 , 2 ,3 ,4 , 5,6,7,8,9,10,
 11, 12,13,14,15,1,2,3,4,5};
double a0, b0, c0, d0, e0=-20., f0=-10., p=60., q=50., r=1.5, s=1.5;
double x0,y0,px,py,a1,b1,c1,d1,e1,f1,fatx,faty;

```

```
int i, j, level, part;

void draw(double a0, double b0, double c0,
          double d0, double e0, double f0, int level);

void main()
{
/* inicializa o modo grafico */
int mode = DETECT;
int driver = DETECT;
initgraph(&mode, &driver, " ");

fatx = XWIN/XSCREEN;
faty = YWIN/YSCREEN;
part = NPARTES;

/* desenha a 'semente' na tela*/
moveto(x[0]*fatx+XWIN, y[0]*faty+YWIN);
for (i = 0; i < NPTSH; i++){
    x[i] = (x[i]*fatx+XWIN);
    y[i] = (y[i]*faty+YWIN);
    fillrect(x[i]-2, y[i]-2, x[i]+2, y[i]+2, level+1);
    lineto(x[i], y[i]);
}
lineto(x[0], y[0]);

/* define valores para a transformacao inicial
a0 = r * cos(p);
b0 = -s * sin(q);
c0 = r * sin(p);
d0 = s * cos(q); */

/* desenha as partes e os niveis */
```

```

level = NLEVS;
draw(a[0],b[0],c[0],d[0],e[0],f[0],level);

getch();
closegraph();
}

void draw(double a0,double b0,double c0,double d0,double e0,double f0,int level)
    { level = level - 1;
x0 = x[0] * a0 + y[0] * b0 + e0;
y0 = x[0] * c0 + y[0] * d0 + f0;
x0 = (x0*fatx+XWIN)/level;
y0 = (y0*faty+YWIN)/level;
moveto(x0,y0);
fillrect(x0-2,y0-2,x0+2,y0+2,level);
for (i = 1; i < NPTSH; i++){
    px = x[i] * a0 + y[i] * b0 + e0;
    py = x[i] * c0 + y[i] * d0 + f0;
    px = (px*fatx+XWIN)/level;
    py = (py*faty+YWIN)/level;
    fillrect(px-2,py-2,px+2,py+2,level);
    lineto(px,py);
}
lineto(x0,y0);
if (level<0) return;
    /* part = part - 1;
if (part<1) getch(); */
for (j=1;j<NPARTES;j++){
setcolor(clr[j][NLEVS - level]);
a1 = a[j] * a0 + c[j] * b0;
b1 = b[j] * a0 + d[j] * b0;
c1 = a[j] * c0 + c[j] * d0;

```

```
d1 = b[j] * c0 + d[j] * d0;  
e1 = e[j] * a0 + f[j] * b0 + e0;  
f1 = e[j] * c0 + f[j] * d0 + f0;  
draw(a1,b1,c1,d1,e1,f1,level);  
}  
}
```

CONJUNTO DE JULIA

```
#include <conio.h>
#include <stdio.h>
#include <graphics.h>

#define nx 640
#define ny 600

void main()
{
double x,y,r,cx=-0.74543,cy=0.11301,xx,yy,x1,y1,x0,y0,dx,dy;
int px,py,i, m=100, niter=150;

int mode = DETECT;
int driver = DETECT;
initgraph (&mode,&driver, "");

x0 = -1.55;
x1 = 1.55;
y0 = -1.20;
y1 = 1.80;

dx = (x1-x0)/(nx-1);
dy = (y1-y0)/(ny-1);

for (px=0; px<nx-1; px++) {
    for (py=0; py<ny-1; py++) {
        x = x0 + px * dx;
        y = y0 + py * dy;
```

```
i=0;
do {xx = x*x - y*y + cx;
    yy = 2*x*y + cy;
    x = xx;
    y = yy;
    i = i+1;
    if (i >= niter) break;
} while (x*x + y*y <= m);
if (i==niter) i=0;
putpixel (px,py,i);
}
}
getch();
closegraph();
}
```

CONJUNTO DE MANDELBROT

```
#include <conio.h>
#include <stdio.h>
#include <graphics.h>

#define nx 640
#define ny 600

void main()
{
double x,y,r,cx,cy,xx,yy,x1,y1,x0,y0,dx,dy;
int px,py,i, m=4, niter=150;

int mode = DETECT;
int driver = DETECT;
initgraph (&mode,&driver, "");

x0 = -2.25;
x1 = 0.75;
y0 = -1.15;
y1 = 1.85;

dx = (x1-x0)/(nx-1);
dy = (y1-y0)/(ny-1);

for (px=0; px<nx-1; px++) {
    for (py=0; py<ny-1; py++) {
        cx = x0 + px * dx;
        cy = y0 + py * dy;
```

```
x = 0;
y = 0;
i=0;
do {xx = x*x - y*y + cx;
    yy = 2*x*y + cy;
    x = xx;
    y = yy;
    i = i+1;
    r = x*x + y*y;
        if (i >= niter) break;
    } while (r <= m);
if (i==niter) i=0;
putpixel (px,py,i);
}
}
getch();
closegraph();
}
```

CURVA FRACTAL OBTIDA PELO MÉTODO DO DESLOCAMENTO DO PONTO MEDIO

```
#include <conio.h>
#include <stdio.h>
#include <graphics.h>
#include <math.h>

int seed= 5;
int n;
int df_pen_x, df_pen_y ;

void linha_fractal(int,int, float,int);
void subdivisao_fractal (int, int, int, int, float, int);
double rnd();
double gauss();
void linha_abs_2 (int, int);

void main()
{
    int mode = DETECT;
    int driver = DETECT;
    initgraph (&mode, &driver, "");

    df_pen_x = 50;
    df_pen_y = 200;
    linha_fractal(200, 50, .5, 9);

    df_pen_x = 200;
    df_pen_y = 50;
    linha_fractal(300, 165, .5, 9);
```

```
df_pen_x = 200;
df_pen_y = 200;
linha_fractal(500, 100, .3, 14);

df_pen_x = 500;
df_pen_y = 100;
linha_fractal(600, 200, .3, 14);

getch();
closegraph();
}

void linha_fractal(int x,int y, float w,int n)
{
int l;

l = abs(x - df_pen_x) + abs(y - df_pen_y);
subdivisao_fractal(df_pen_x, df_pen_y, x, y, l*w, n);
}

void subdivisao_fractal (int x1, int y1, int x2, int y2, float s, int n)
{
int xmid, ymid;
if (n == 0)
linha_abs_2 (x2,y2);
else {
xmid = (x1 + x2) / 2 + s*gauss();
ymid = (y1 + y2) / 2 + s*gauss();
```

```
        subdivisao_fractal (x1, y1, xmid, ymid, s/2, n-1);
        subdivisao_fractal (xmid, ymid, x2, y2, s/2, n-1);
    }

}

double rnd()
{
    seed = ((seed * 37) + 1) & 0xFFFF;
    return (seed);
}

double gauss()
{
    int i;
    double gauss;

    gauss = 0.;

    for (i=0; i<=6; i++)
        gauss += rnd() - rnd();

    gauss = gauss / (6*65536);
    return (gauss);
}

void linha_abs_2 (x2, y2)
{
    line (df_pen_x, df_pen_y, x2, y2);
}
```

```
df_pen_x = x2;  
    df_pen_y = y2;  
  
}
```

CURVA FRACTAL OBTIDA PELA INTERPOLAÇÃO DE PONTOS

```
#include <graphics.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <conio.h>

#define DIM1 4
#define DIM2 3

double rnd();
static unsigned seed = 1345;
double rn;

void main()
{
double x = 0, y = 0, newx, newy, pq, pt = 0, b;
    int m = DIM1 - 1,
        k, j, cor,
        mode = DETECT,
        driver = DETECT;

static double z[DIM1] = { 0, 200, 400, 700},
    f[DIM1] = { 180, 70, 150, 200},
    d[DIM2] = {.4, -.4, .6},
    e[DIM1],
    a[DIM1],
    c[DIM1],
    ff[DIM1];
```

```

    b = z[3] - z[0];

for (m=1; m<= 3; m++){
    a[m-1] = (z[m] - z[m-1]) / b;
    e[m-1] = (z[3] * z[m-1] - z[0] * z[m]) / b;
    c[m-1] = (f[m] - f[m-1] - d[m-1] * (f[3] - f[0]))/b;
    ff[m-1] = (z[3] * f[m-1] - z[0] * f[m] - d[m-1] *
                (z[3] * f[0] - z[0] * f[3]))/b;
    }

    initgraph(&mode, &driver, "");

    for (m = 1; m<=15000; m++)
    {
k = floor(3*rnd() - .0001) + 1;
        newx = a[k-1] * x + e[k-1];
        newy = c[k-1] * x + d[k-1] * y + ff[k-1];
        x = newx;
        y = newy;
        if (m>1){
            cor = EGA_MAGENTA;
            putpixel(x,y,cor);
        }
    }

    getch();
    closegraph();
}

double rnd()
{
seed = ((seed*37) + 1) & 0xFFFF;

```

```
rn = seed/65536.;  
return(rn);  
}
```

TRIÂNGULO DE SIERPIŃSKI RANDÔMICO

```
#include <conio.h>
#include <dos.h>
#include <graphics.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

#define DIM 4

static unsigned int seed = 1345;
#define RND (seed = seed*37+1)

void main ()
{
int m      = DIM-1, n, j, k,
    mode   = DETECT,
    driver = DETECT;

static double  a[DIM] = { .5, 0.5, 0.5, 0 },
b[DIM] = { 0, 0, 0, 0 },
c[DIM] = { 0, 0, 0, 0 },
d[DIM] = { .5, .5, .5, 0 },
e[DIM] = { 0, 1, .5, 0 },
f[DIM] = { 0, 0, .5, 0 },
pk[DIM] = { .34, .33, .33, 0 },
p[DIM];

double pt      = 0.,
xscale = 300,
yscale = 480,
xoffset = 0,
yoffset = 0,
```

```
x      = 0,
y      = 0,
newx, newy,
pq,rad;

for (j = 0; j < m; j++)
  {
    pt  += pk[j];
    p[j] = pt;
  }

initgraph(&mode, &driver, "");

for (n = 0; n < 15000; n++)
  {
    pq = (double) RND/65536.;
    if (pq <= p[0])
k = 0;
    else if (pq <= p[1])
k = 1;
    else if (pq <= p[2])
k = 2;
    else  k = 3;

    newx = a[k] * x + b[k] * y + e[k];
    newy = c[k] * x + d[k] * y + f[k];
    x = newx;
    y = newy;
    if (n > 10)
  {
    int cor = LIGHTRED;
    rad = rand()/1000.;
```

```
    putpixel (x * xscale + xoffset - rad,  
             y * yscale + yoffset - rad, cor) ;  
  }  
  }  
  
  getch();  
  closegraph();  
  
}
```

MOVIMENTO BROWNIANO FRACTAL

```
#include "graphics.h"
#include "math.h"
#include "stdlib.h"
#include      "stdio.h"
#include      "conio.h"
#include      "ctype.h"
#include "time.h"
```

```
#define MX 40
#define MY 20
```

```
int GraphDriver;
int GraphMode;
double AspectRatio;
int MaxX, MaxY;
int MinX, MinY;
int MaxColors;
int ErrorCode;
char *DriverName;
char *ModeName;
```

```
int ITERACOES=40;
```

```
struct no_tela {
int px;
int py;
struct no_tela *proximo;
};
```

```
typedef struct no_tela *nodeptr;
nodeptr tela_atu = NULL;
nodeptr tela_pri = NULL;
nodeptr tela_ult = NULL;
```

```
void initialize_grafico(void);
void desenha_fractal(void);
void limpa_tela (void);
int valida_posicao(int, int);
```

```
void main()
{
randomize();
initialize_grafico();
outtextxy(0, 0, "MOV. BROWNIANO");
desenha_fractal();
printf ("%c", 0x7);
printf ("%c", 0x7);
printf ("%c", 0x7);
}
```

```
void initialize_grafico()
{
GraphDriver = DETECT;
initgraph( &GraphDriver, &GraphMode, "" );
ErrorCode = graphresult();
if (ErrorCode != grOk) {
```

```
printf(" Graphics System Error: %s\n",
grapherrormsg( ErrorCode ) );
exit( 1 );
}
MaxColors = getmaxcolor() + 1;
MaxX = getmaxx();
MaxY = getmaxy();
MinX = 0;
MinY = 0;
ITERACOES = 3*MaxY;
}

void desenha_fractal()
{
int x=MaxX/2,
y=100,
nx=0,
ny=0,
k=0,
cor=MaxColors/2;

k=0;
do {
k++;
cor=cor+random(3)-1;
if (!valida_posicao(x, y))
putpixel(x, y, cor);

tela_atu = (struct no_tela *)malloc(sizeof(struct no_tela));
if (tela_atu == NULL) {
line (10, 10, 100, 100);
return;
}
```

```
}
if (tela_pri == NULL)
tela_pri = tela_atu;
if (tela_ult)
tela_ult->proximo = tela_atu;
tela_atu->px = x;
tela_atu->py = y;
tela_atu->proximo = NULL;
tela_ult = tela_atu;

if (k>ITERACOES) {
limpa_tela();
k--;
}
nx=random(3);
x=x+nx-1;
if (x>MaxX) x=MaxX;
if (x<MX) x=MaxX;
ny=random(3);
y=y+ny-1;
if (y>MaxY) y=MY;
if (y<MY) y=MaxY;
} while (!kbhit());
while (tela_pri)
limpa_tela();
}

void limpa_tela (void)
{
tela_atu = tela_pri;
tela_pri = tela_pri->proximo;
putpixel(tela_atu->px, tela_atu->py, 0);
```

```
free (tela_atu);  
}
```

```
int valida_posicao(int x, int y)  
{  
    unsigned GP;  
    GP=getpixel(x, y);  
    return (GP);  
}
```

GALAXIA ESPIRAL FRACTAL

```
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <math.h>
#include <time.h>
#include <graphics.h>

int i, maxit=1000;
double in=0.2, theta,r,scale=8.5,cut=250,x,y,
        randx,randy,f=8,theta2;

void main()
{
int mode = DETECT;
int driver = DETECT;
initgraph(&mode,&driver,"");

randomize();

for (i=0; i<=maxit; i++) {
    theta = i/50.;
    r = scale*exp(theta*tan(in));
    if (r>cut) break;
    x = r*cos(theta)+300.;
    y = r*sin(theta)+250.;
    randx = random (100)/ 100.;
    randy = random (100) / 100.;
    putpixel(x+f*randx,y+f*randy,YELLOW);
}
```

```
for (i = 0; i<=maxit; i++) {  
    theta = i/50.;  
    theta2 = i/50. - 3.14;  
    r = scale*exp(theta2*tan(in));  
    if (r>cut) break;  
    x = r*cos(theta) + 300.;  
    y = r*sin(theta) + 250.;  
    randx = random(100) / 100.;  
    randy = random(100) / 100.;  
    putpixel(x+f*randx,y+f*randy,YELLOW);  
}  
getch();  
closegraph();  
}
```

Apêndice b

IMAGENS

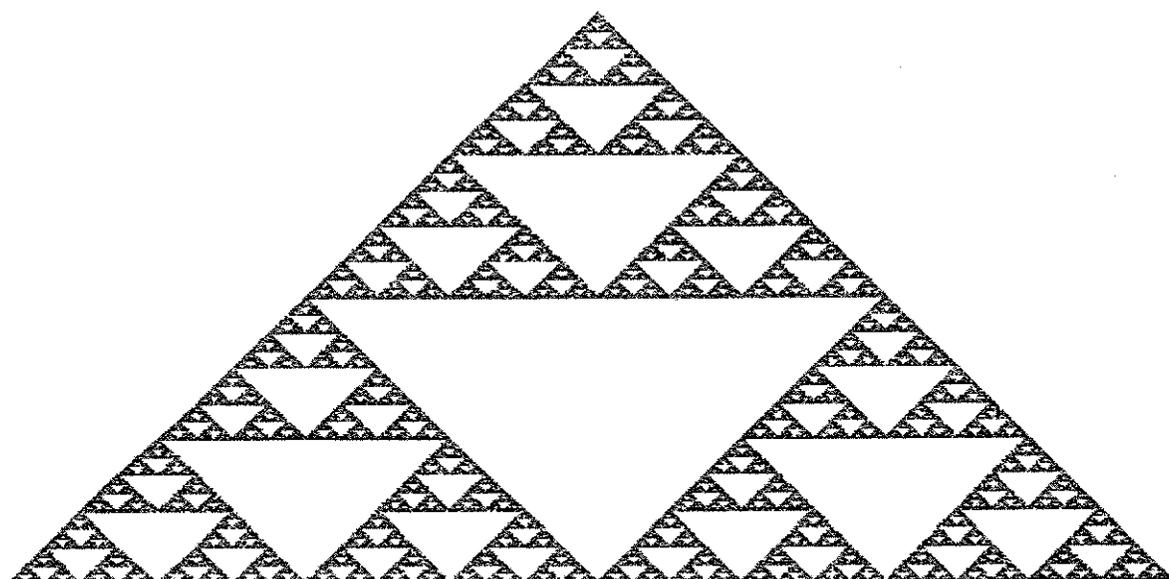


Figura b.1: Triângulo de Sierpiński obtido pelo método do IFS

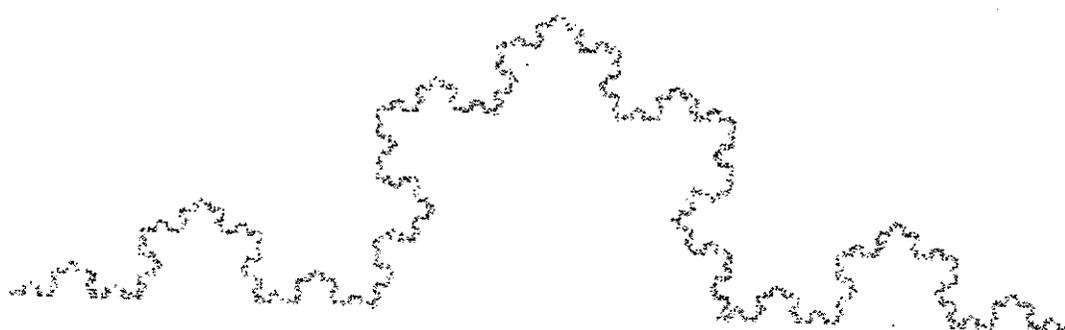


Figura b.2: Curva de Koch gerada pelo uso de transformações

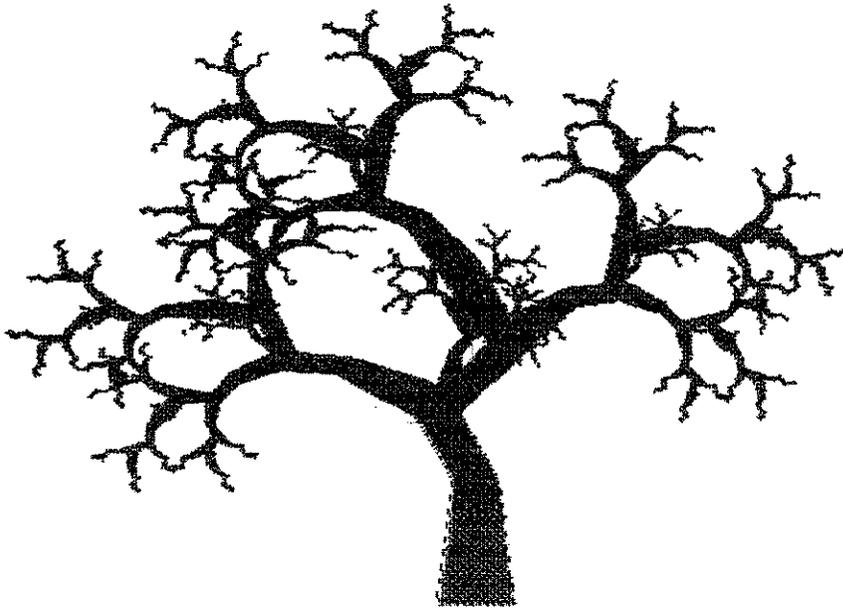


Figura b.3: Fractal Auto-afim gerado por transformações

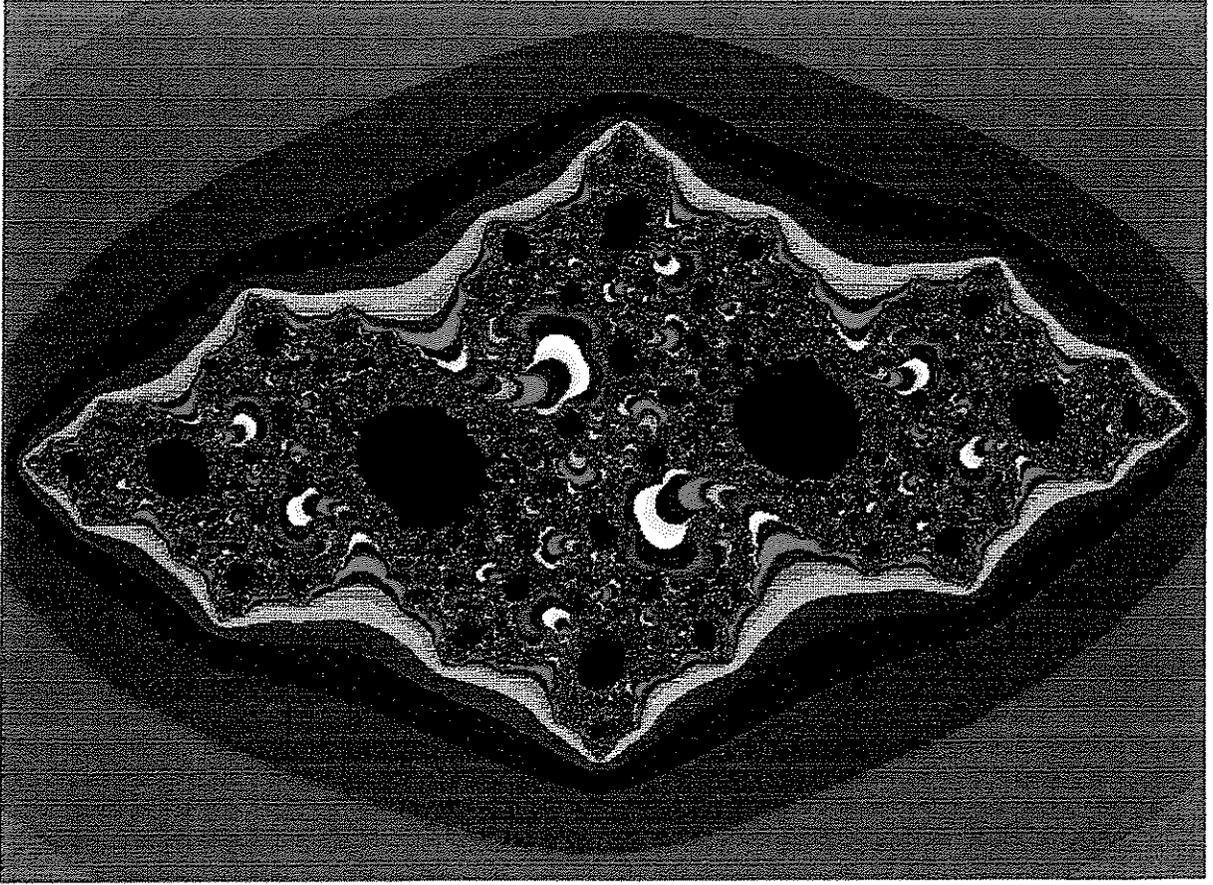


Figura b.4: Conjunto de Julia

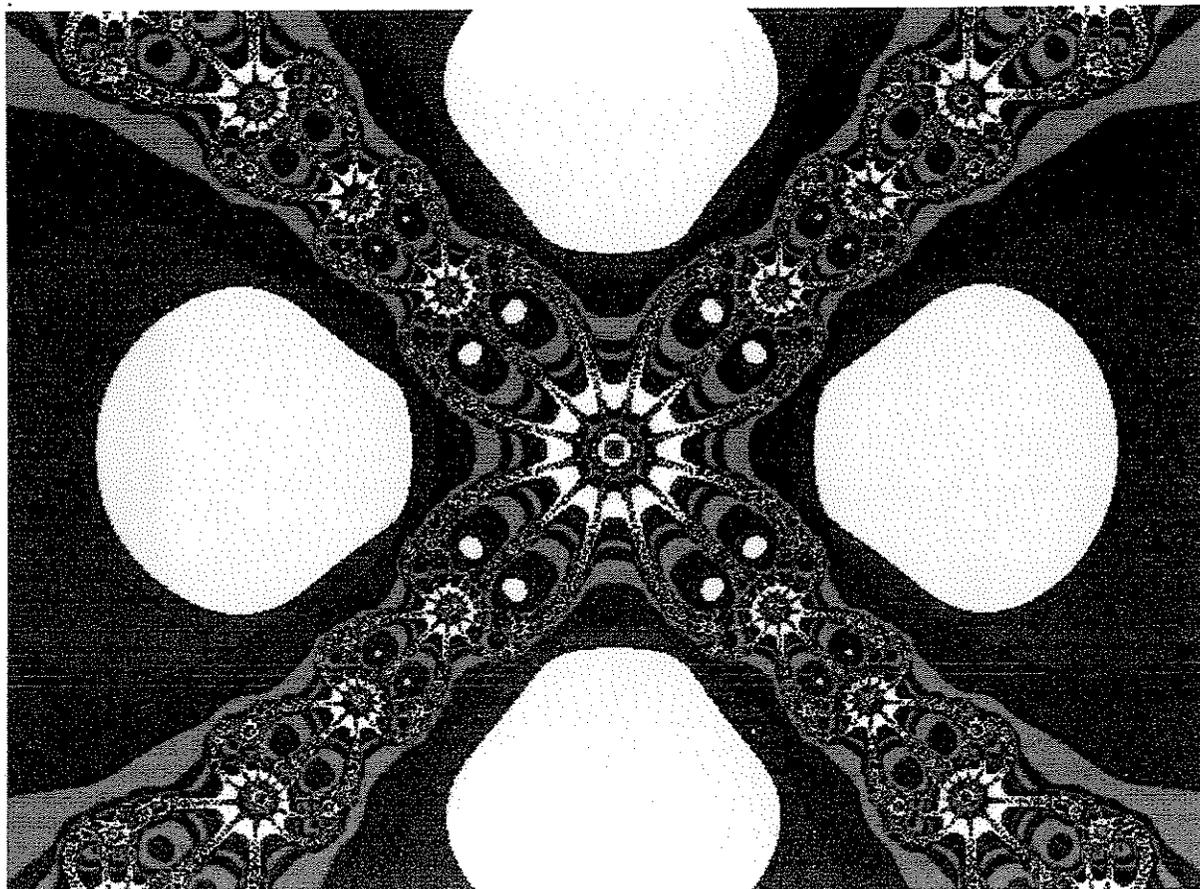


Figura b.5: Estudo da convergência das raízes da equação $z^4 - 1 = 0$, onde a cor vermelha representa os pontos iniciais que convergem para a raiz $(1, 0)$, a cor amarela para a raiz $(-1, 0)$, a cor azul para a raiz $(0, 1)$ e a cor verde para a raiz $(0, -1)$. Esta imagem foi criada por Adálbero Fernandes Guimarães, Victor Fernando Ribeiro e Lúcio Tunes dos Santos e a foto foi tirada pelo Diomar, todos do IMECC - UNICAMP.

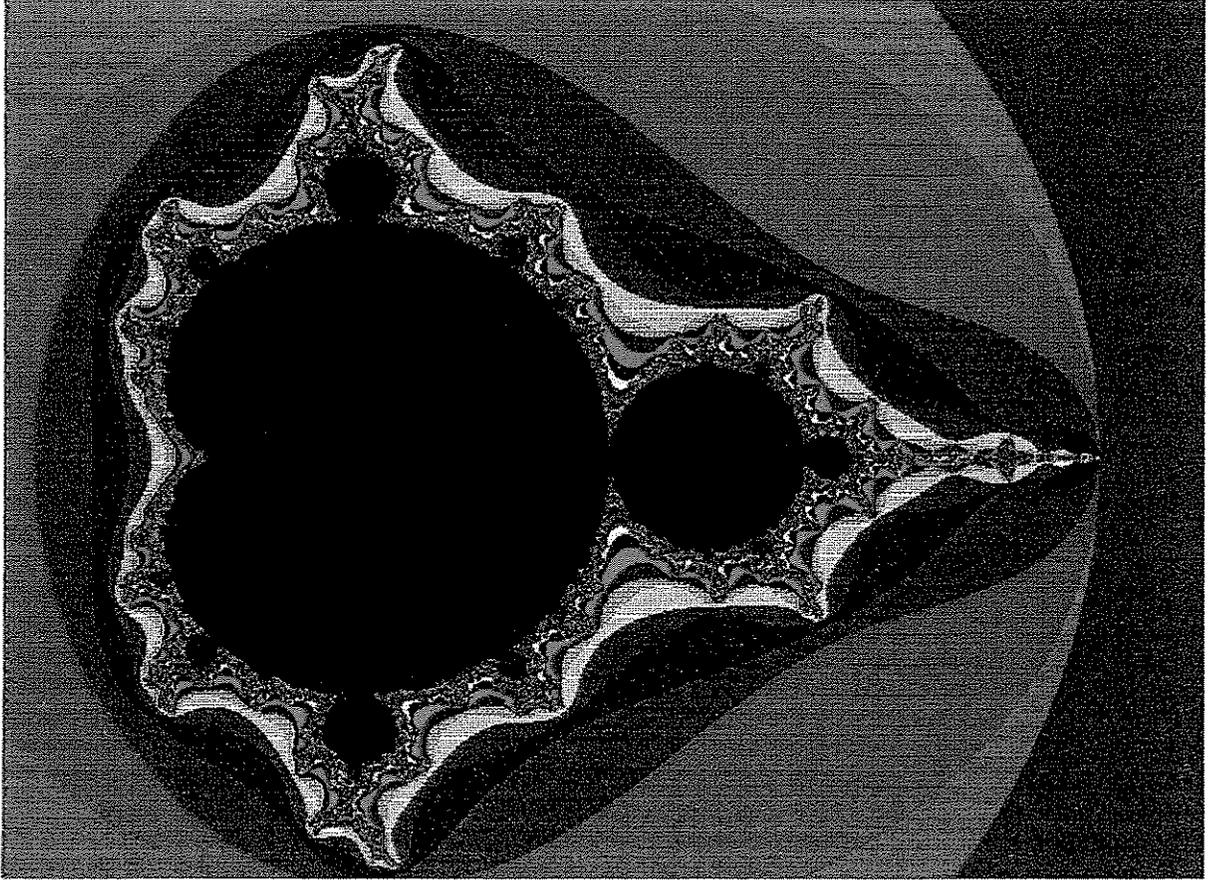


Figura b.6: Conjunto de Mandelbrot



Figura b.7: Curva Fractal obtida pelo Deslocamento do Ponto Médio

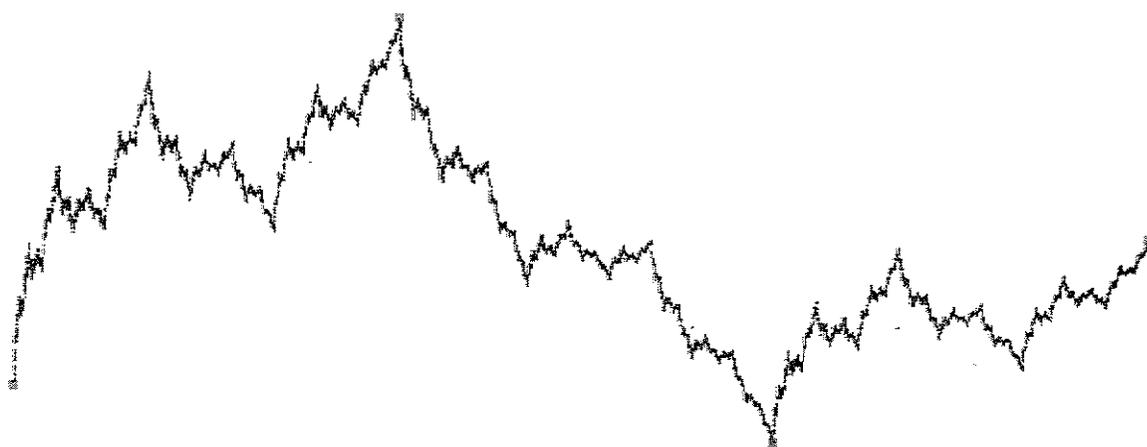


Figura b.8: Curva Fractal obtida pela Interpolação de Pontos

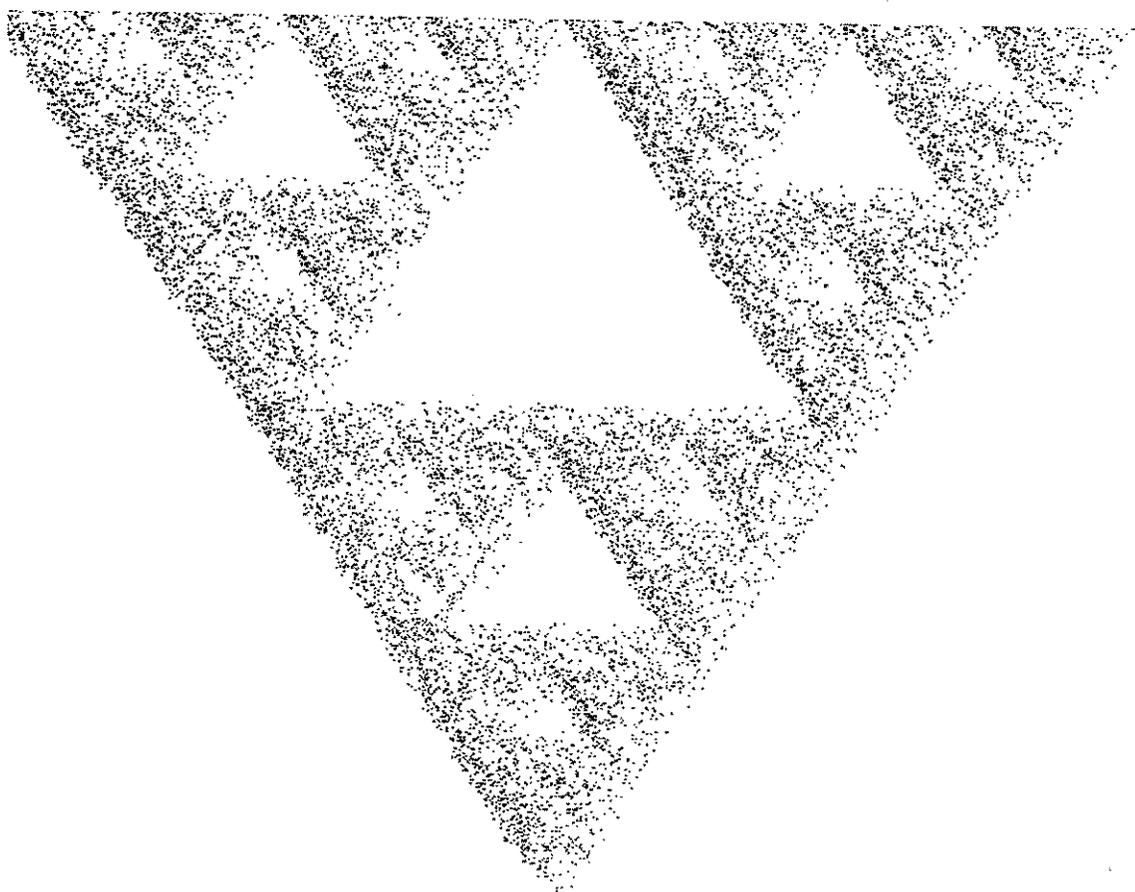


Figura b.9: Triângulo de Sierpiński Randômico

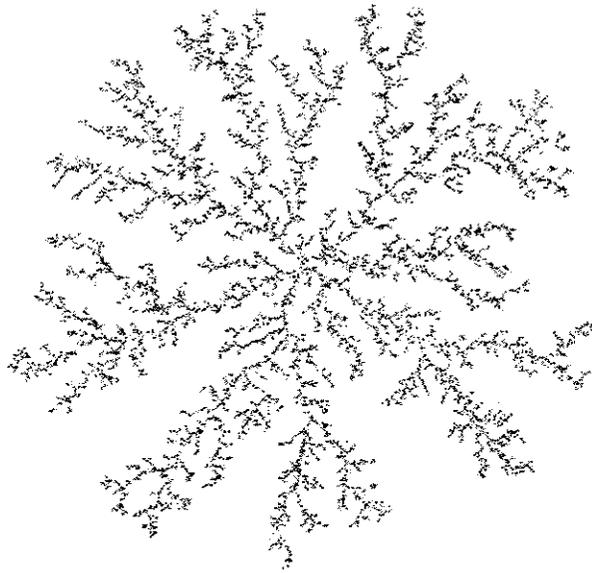


Figura b.10: Movimento Browniano Fractal

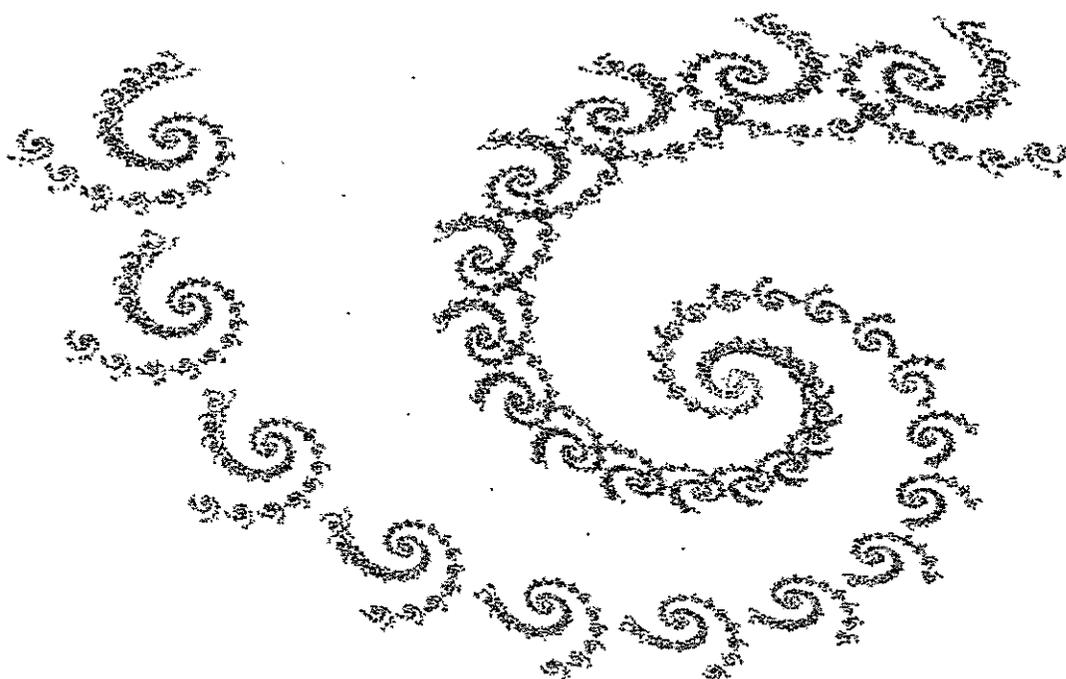


Figura b.11: Galaxia Espiral Fractal

Apêndice c

REFERÊNCIA

Figura c.1: Resposta de Benoit Mandelbrot sobre o gênero da palavra fractal

Benoit B. Mandelbrot
P.O. Box 218, Yorktown Heights, NY 10598

October 17, 1990

Ms. T. M. Stahlke
A/C Prof. Leo Pini Magalhaes
Universidade Estadual de Campinas
FEE/DCA
C.P. 6101
Campinas
Sao Paulo, Brazil.

Dear Ms. Stahlke

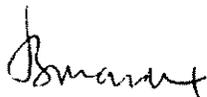
In English, the gender of *fractal* poses no problem, but in other languages, the story can be very very complicated.

In French, I had wanted it to be *fractale*, that is, feminine, and I continue always to write in this style. However, many other people use the masculine *fractal*. It turns out that there is no official rule but a very powerful tendency for French words that are borrowed from English to be made masculine. Many people, even in France, first read of fractals in English.

In Russian, it is most often masculine. But there is a fight on whether the last *L* should be soft or hard.

My recommendation to you is to use the masculine in Portuguese.

Yours very sincerely,



Benoit B. Mandelbrot

Tel: 914 945 1712. Fax: 914 945 2141. E-mail: PKUMAR^c at YKTVMZ.BITNET

BBM/pkn

Apêndice d

BIBLIOGRAFIA COMENTADA

A amplitude do assunto fractais levou à leitura de um grande número de artigos e, ao mesmo tempo, a uma restrição da abrangência da tese. O conjunto desse dois fatores fez com que muitos artigos lidos não fossem referenciados no escopo do trabalho, ficando seu conteúdo desconhecido para as pessoas que fossem ler este trabalho. Procurando mais uma vez atingir o objetivo de servir de fonte de consulta para futuros trabalhos na área, optou-se por colocar neste apêndice um pequeno comentário sobre cada um destes artigos, orientando a busca de informações sobre um interesse específico.

[AR90] O método de Newton é um método iterativo usado dentro na matemática para encontrar raízes de equações. Apesar de usado a séculos, até hoje não são conhecidas as propriedades de convergência nem o comportamento do domínio de atração. Aqui é mostrado claramente, através de exemplos, que este método apresenta um comportamento caótico, caracterizado pelos fractais, quando é aplicado para polinômios avaliados no campo dos números complexos. São mostradas as imagens que representam o *panorama* deste comportamento, obtidas por um algoritmo apresentado no artigo.

[BC91] Grandes sistemas interativos estão sempre envolvidos num estado crítico no qual o menor evento pode levar a uma catástrofe. Este artigo pretende mostrar a teoria das Criticalidades Auto-Organizadas que procura explicar a dinâmica de fenômenos como os terremotos, as bolsas de valores e ecossistemas. Os autores sugerem que os fractais podem ser vistos como uma representação instantânea desses processos

criticamente auto-organizados e que a estrutura fractal seja uma *impressão digital* desses sistemas.

- [BEHL86] O princípio do mapeamento de fractais por contrações e o Teorema da Colagem usado por Michael Barnsley em [Bar88] são provados matematicamente neste artigo.
- [BD85] Neste artigo é feita a primeira apresentação da teoria dos Iterated Functions Systems (IFS) como uma maneira de descrever uma classe dos fractais descritos por Benoit Mandelbrot em [Man82b]. Em 1988 este artigo originou o livro escrito por Michael Barnsley [Bar88].
- [BS88] Novamente falando sobre os Iterated Functions Systems (IFS), Michael Barnsley procura ressaltar o poder de compressão de seu método de representação de fractais. Mostra que o que é novo em seu método é a habilidade de começar com uma imagem e encontrar fractais que *imitam* esta imagem com qualquer grau de acuracidade que se queira. Segundo este artigo pode-se obter compressão em proporções que chegam a 10.000 por 1.
- [Edi90] O artigo apresentado neste jornal fala da empresa comercial Iterated Systems criada por Michael Barnsley para vender os codificadores construídos para colocar em hardware a técnica criada por ele para comprimir imagens.
- [Blo85] Árvores completas, com tronco, galhos e folhas são gerados por um método descrito neste artigo, usando técnicas tradicionais da computação gráfica como cilindros, cones, interpolação, etc. É uma forma interessante para comparação para o mesmo tipo de árvore gerada por procedimento graftal pois o resultado obtido pelos autores é muito bom.
- [B89] O autor, prof. Reinhard Bölling, trabalha no Instituto Karl-Weierstrass de Matemática, em Berlim. Ele escreveu esta biografia sobre o matemático Karl Weierstrass, baseada num álbum encontrado que descreve a comemoração do aniversário de 70 anos deste matemático, em 1885.
- [Bou85] Muitos artigos já foram publicados mostrando as vantagens de se usar algoritmos de intersecção para modelamento procedural de objetos. Este artigo pretende mostrar que é possível ampliar este uso para superfícies estocásticas adicionando técnicas recursivas de subdivisão, criadas para modelar objetos fractais.

- [CS85] Uma aplicação em Processamento de Imagens é apresentada pela definição de uma Transformada Fractal de Contorno e seus operadores associados. O método pode ser aplicado para reconhecimento de padrão bidimensional tendo vantagens sobre a Transformada de Fourier quando os objetos possuem contornos muito detalhados.
- [dC88] São apresentadas técnicas para Reconhecimento de Padrões em superfícies naturais. Devido a grande variedade de processos físicos envolvidos na formação dessas superfícies, os procedimentos tradicionais apresentam-se inadequados. Os modelos fractais parecem facilitar esse processo de reconhecimento de texturas naturais e são a base do procedimento aplicado. Como aplicação é mostrado um trabalho feito com textura de mosaicos de aglomerados de cortiça.
- [CEM89] O objetivo deste artigo é dar uma definição e descrever a implementação de um núcleo de funções para gerar e manipular imagens em múltiplos níveis num ambiente padrão. Como exemplo de aplicação, os autores implementam um procedimento para gerar o Conjunto de Mandelbrot. A vantagem apresentada para este método é poder ser usado para transferência de imagens em redes que ligam ambientes computacionais heterogêneos.
- [CC91] Esta é uma referência em francês, onde o assunto fractais é tratado de forma básica, com definições de vários tipos de dimensão e processos para determinação destas dimensões.
- [Dav90] Este artigo apresenta um processo para gerar imagens fractais bem diferente dos tradicionais. São gerados arquivos separados para o vermelho, o verde e o azul da imagem e randomicamente escolhida uma cor para ser colocada num dos quatro planos de cores de um monitor VGA ou EGA. Com este método consegue-se obter 1296 variações de uma imagem, permitindo combinações para obter-se muitos efeitos especiais.
- [DHN85] Baseado na dificuldade de geração de objetos naturais pelos métodos tradicionais de síntese de imagens, é proposto um método para gerar fractais a partir de um conjunto de transformações lineares afins e de um conjunto de probabilidades associadas. Este é o primeiro artigo que descreve o Iterated Function Systems (IFS) que irá originar mais tarde os trabalhos feitos por Michael Barnsley.

- [Dew87] É apresentado um programa que permite ao homem imitar o processo de evolução de um ciclo de vida. *Watchmaker* mostra num ambiente computacional o poder de mudanças cumulativas na vida sobre a Terra, usando para isso técnicas fractais.
- [Dew87] O algoritmo descrito neste artigo permite representar agregações de difusão limitada, os chamados processos DLA, aplicados para difusão e crescimento de partículas, através de técnicas fractais.
- [Dew89a] Novamente o autor apresenta técnicas para gerar organismos *biomorfos*, os quais podem ser usados para estudar o crescimento de organismos vivos dentro da biologia. Novas técnicas fractais são apresentadas, procurando obter maior rapidez na geração das imagens.
- [Dor90] Este autor brasileiro discute no artigo a real existência do caos, uma vez que todos os procedimentos usados para estudar sistemas caóticos são aproximações representadas no computador. As provas matemáticas ainda não foram apresentadas e o autor faz restrições aos resultados obtidos por esta teoria até este momento.
- [Edw84] Os processos usados até agora para modelar ambientes naturais tais como colinas e montanhas requerem sempre uma grande quantidade de dados, consumindo muito tempo de trabalho intensivo de máquina. Nesta proposta são apresentadas rotinas em Fortran para gerar modelos de terrenos baseados em linhas fractais.
- [Fal88b] Conjuntos compactos não-vazios formados por transformações lineares que contraem os elementos do conjunto possuem sua dimensão de Hausdorff calculada neste artigo. Indo mais além, o autor mostra que a dimensão da contagem de caixas destes mesmos conjuntos é igual a dimensão de Hausdorff. Este artigo foi uma das bases usadas pelo autor para escrever o livro *Geometria Fractal*, [Fal90].
- [FP89] O autor sugere um processo de variação no algoritmo de geração do Conjunto de Mandelbrot para permitir a manipulação das cores da imagem por uma tabela de cores própria para monitores VGA. São encontrados também algumas sugestões para obtenção de cópias físicas das imagens através do uso apropriado de câmeras fotográficas.
- [FFC82] É apresentado um novo algoritmo para representar modelos de relevo terrestre com imagens realistas e visualmente satisfatórias. Isto é feito pelo uso do Movimen-

to Browniano *Fractional*, considerando os objetos modelados como *padrões* de um processo estocástico. São sugeridas também extensões para este processo, utilizando superfícies estocásticas e a utilização de movimentos nas imagens.

[Zor88] O modelamento de objetos naturais é visto em linhas gerais neste artigo e é apresentada uma descrição da técnica de compressão de imagens de Michael Barnsley concluindo que o método é correto e deverá superar o que existe até hoje.

[Fra88] A aplicação de técnicas nas Artes é muito antiga, apesar de até hoje gerar muitas discussões entre o que é arte e o que é simples aplicação de técnicas. Este artigo discorre sobre o assunto, sugerindo muitas aplicações artísticas para processos fractais originados de equações matemáticas nas quais são aplicadas transformações criadas em Processamento de Imagens para distorcer e criar novas imagens.

[HJB⁺93] Muitos algoritmos usados para processamento de sinais e análise de dados pressupõem um conhecimento anterior que embasem tendências ou distribuições. Se os ruídos encontrados são periódicos ou normais, não há problemas e as técnicas tradicionais destas áreas funcionam bem. Caso os ruídos apareçam de forma não periódica precisa-se então de técnicas alternativas para evitar perda de informações. Os autores propõem várias outras técnicas, entre elas as que usam estatísticas fractais como embasamento, mostrando sua implementação em FORTRAN 77.

[MV89] O artigo traz uma visão geral e moderna sobre a Computação Gráfica, apresentando suas fases de modelagem e visualização e uma breve descrição das técnicas usadas em cada fase. Os fractais são apresentados como uma técnica de modelagem de objetos naturais, apresentando muitas vantagens sobre as técnicas tradicionais.

[Jon90a] O Triângulo de Sierpiński foi gerado por Michael Barnsley através de uma técnica de deslocamento de pontos, o chamado *Jogo do Caos*. Neste artigo o autor propõe uma extensão desta técnica para gerar *malhas* cujo padrão seria obtido por outros polígonos regulares e não por triângulos. Assim, são usados quadrados, pentágonos, hexágonos, eneágonos e até dodecágonos para gerar *malhas* fractais.

[Kaj83] Ray-Tracing é uma técnica para geração de imagens que muitas vezes é criticada por ser grande consumidora de tempo computacional. Apesar disso sua capacidade de combinar efeitos de superfícies escondidas, sombreamentos, reflexões e refração ainda são inigualáveis por outros métodos. Este artigo apresenta a técnica de ray-

tracing para gerar objetos definidos de forma procedural e entre eles as superfícies fractais. São obtidas imagens muito realistas de montanhas com a aplicação dessas técnicas.

- [Kei89] Os procedimentos usados para gerar fractais, usando métodos de iteração, são largamente difundidos. Poucas pessoas, no entanto, preocuparam-se no problema de como corresponder a cor obtida para um ponto com a cor do pixel na tela. Este artigo propõe várias técnicas que podem ser usadas para este processo final de representação da imagem e mostra alguns exemplos de imagens obtidas usando estas técnicas.
- [KCC89] Neste artigo é apresentada uma técnica para calcular a dimensão fractal a partir de imagens de superfícies e mostra como ela funciona para descrever e segmentar os conjuntos fractais que geraram a imagem estudada. Como a dimensão fractal sózinha não é suficiente para analisar e caracterizar texturas naturais, é proposto também uma nova classe de medidas de textura baseadas no conceito de lacunariade. A dimensão e a nova classe de medidas são então usadas para descrever e segmentar textura de objetos naturais.
- [Lak89] As *malhas* fractais geradas por polígonos regulares, como o Triângulo de Sierpiński, são descritas na literatura muitas vezes. O autor apresenta neste artigo uma forma de gerar estas malhas a partir de sequências de números primos, obtendo uma *malha* fractal bem definida.
- [LM89] Baseando-se na mesma teoria mostrada em [Lak89], o autor apresenta uma *malha* fractal gerada por uma sequência da soma de Gauss.
- [Man82a] Esta correspondência técnica apresenta um comentário de B. Mandelbrot sobre o trabalho sobre geração de modelos estocásticos de A. Fournier, D. Fussel e L. Carpenter (ver [FFC82]). Segundo Mandelbrot a técnica apresentada por estes autores não acrescenta nada às técnicas já conhecidas e por isso não é valorizada. O documento apresenta também uma resposta dos autores aos comentários de B. Mandelbrot.
- [MH89] Muitos fenômenos naturais podem ser expressos por uma função da forma $x_{n+1} = f(x_n)$. O autor mostra que as propriedades de f são topologicamente conjugadas com $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ e exibem qualitativamente as mesmas características dinâmicas. O valor de r exprime as condições do ambiente em que ocorre o fenômeno

e é considerado um fator constante nos métodos de pesquisa tradicionais. Neste trabalho o autor considera que r pode mudar periodicamente, representando melhor o mundo real. O resultado obtido mostra r como um fator de dicotomia entre estados de ordem e caos, e imagens gerados com várias sequências de variação para r mostram profunda correlação com imagens fractais.

- [MR89] O Mapa de Hénon é um dos mais simples mapas inversíveis bidimensionais. Embora muito já seja conhecido a respeito deste mapa, inclusive sua geração gráfica, o autor pretende ter encontrado um novo comportamento, ainda não conhecido, envolvendo fases periódicas de ordem e caos.
- [Mic90] Seguindo o mesmo raciocínio usado em [MR89], o autor propõe uma mudança no método de geração do Conjunto de Mandelbrot, substituindo os x_n da função por termos que envolvam cossenos e tangentes desses valores e obtendo imagens interessantes, todas derivadas do próprio Conjunto de Mandelbrot.
- [MR90] O comportamento caótico do método de Newton, quando aplicado a multivariáveis, é explorado neste artigo pela representação gráfica onde parâmetros complexos correspondem a pixels na tela do computador. Vários exemplos são mostrados e são relacionados detalhes das imagens com o tipo de equação ao qual o método foi aplicado.
- [Nor82b] São propostos algoritmos para gerar e visualizar fractal em 3-D. Estas técnicas são adaptadas ao fato dos fractais serem muito mais difíceis de serem gerados do que de serem visualizados. São especificamente adaptadas para uso de *array processor* e o resultado obtido neste geração é posteriormente sombreado e visualizado com o algoritmo de *z-buffer*.
- [Opp86] A geométrica noção de fractal auto-similar tornou-se um paradigma para estruturas de objetos naturais. Este artigo apresenta um modelo para modelar plantas, árvores complexas, folhas, sistemas orgânicos de veias, deltas de rios e quaisquer outros objetos com ramificações. A conclusão do autor é que os resultados obtidos *casam* muito bem com o mundo real e por isso servem de ferramenta para estudos em vários ramos da Ciência.
- [PJSa91] Este livro é uma coletânea de atividades para alunos de matemática que oferecerá um conjunto de experiências do tipo *hands-on* com fractais e com os princípios

e características da matemática envolvida neste assunto. Ele propicia uma ligação entre diferentes aspectos da matemática e como os fractais ligam estes aspectos. É uma referência ótima para um curso extra-curricular sobre fractais para estudantes da área de Ciências Exatas.

[FTB90] Este livro contém uma coleção de treze artigos relacionados com o uso de fractais nas Ciências Físicas e Naturais. Fenômenos com fase de transições, DLA, agregação e reações são tratados por especialistas nas áreas e eles ensinam como usar fractais como uma ferramenta nas pesquisas nestes campos.

[BD90] Experiências matemáticas, fenômenos naturais, objetos naturais e computação gráfica são os temas principais deste livro. Com implementações muito simples orientadas para linguagem Pascal, o autor trata dos principais fractais conhecidos e sua ligação com a matemática. É um livro didático que resultou das experiências dos autores na Universidade de Bremen, junto com o grupo de pesquisas em Dinâmicas Complexas.

[Pen86a] Neste artigo o autor apresenta uma forma de representação por partes que pretende descrever uma grande variedade de formas naturais assim como ser utilizada para representar objetos manufaturados. É usada uma estrutura em escala que adapta-se muito bem ao processo iterativo usado para obter os fractais que representam esses objetos naturais.

[Pet90] O autor discute a forma como a tecnologia para criar imagens está mudando rapidamente a maneira como os cientistas usam o computador na ciência e na matemática. Técnicas com crescente sofisticação usadas para visualização de dados e simulação da realidade aparecem com a cada dia. Por outro lado novas idéias vão surgindo aos pesquisadores como resultado do enriquecimento das pesquisas em computação gráfica. Dentre estes novos aparecimentos está a teoria dos fractais com sua revolução na forma de estudar os fenômenos naturais.

[Pic85] A matemática da iteração de funções algébricas vem sendo estudada a décadas. Porém só nos últimos anos, com o aparecimento da teoria dos fractais foi possível visualizar e explorar em detalhes o comportamento destas iterações. Os autores apresentam um algoritmo para representar estas imagens e apresentam diversos exemplos de imagens da imagem de iterações de funções complexas.

- [PK86] Os métodos normalmente usados para trabalhar com fractais são aplicados neste artigo na avaliação de formas de ondas da linguagem falada. Os autores concluem que tanto a fala digitalizada quanto a fala humana apresentam uma mesma dimensão fractal, em torno de 1.66, considerada numa escala de tempo. A aplicação do resultado deste estudo melhoraria muito a comunicação falada entre máquina-homem.
- [Pic88c] O autor apresenta uma técnica para gerar imagens fractais em 3-D, chamadas *Atratores Estranhos*, que é aplicável a qualquer sistema sensivelmente dependente das condições iniciais. Apresenta como resultado uma imagem de um atrator em 3-D usando pseudo-cores.
- [Pic88d] Poucos estudos foram realizados a respeito da riqueza dos padrões fractais produzidos por complicadas redes resultante de interconexões entre anéis, nós e linhas e da propagação de dados por elas. É a computação gráfica sendo usada para explorar o comportamento caótico do processamento de sinais digitais em conexões deste tipo.
- [Pic89a] A técnica apresentada pelo autor neste artigo permite a geração e a visualização de um grande número de imagens compostas por círculos e esferas que se tocam mas nunca se interceptam. Apesar da finalidade do procedimento ser apenas apreciar o comportamento caótico de certas fórmulas matemáticas, o autor ressalta pesquisas recente no campo da microeletrônica e bioquímica que aplicam procedimentos semelhantes a este para modelar situações de interesse nestes campos. Extensão para círculos com distribuição browniana e algoritmo de ray-tracing também são apresentados.
- [Ram89] Como uma complementação aos estudos de Clifford A. Pickover, este autor propõe uma variação na representação de funções matemáticas usando *fatias* de planos algébricos para representar senóides truncadas da forma $Z_{xy} = \alpha(\text{Sin}x + \text{Sin}y)$.
- [RDP+92] Os processos de formação de padrões tem um interesse científico considerável. Um modelo usado para representar estes padrões é a Agregação de Difusão Limitada (DLA), que possui um padrão irregular e fractal. Este artigo propõe uma maneira de representar computacionalmente estes processos DLA, com um custo mais baixo que a montagem de laboratórios propriamente ditos.

- [San87a] O assunto tratado neste artigo é a aplicação dos fractais na teoria do crescimento de organismo, utilizando a Agregação de Difusão Limitada (DLA). É mostrada uma ilustração esquemática de um crescimento por DLA numa forma muito clara e compreensível. Um novo conceito de dimensão espectral é introduzido, permitindo a avaliação e a descrição da difusão e a dinâmica do crescimento fractal. Segundo o autor a existência da geometria fractal veio abrir ainda mais as fronteiras da física.
- [San87b] O trabalho relata os resultados referentes ao desenvolvimento de técnicas avançadas de geração e representação de superfícies com interesse nas aplicações da Engenharia Civil e Arquitetura. É apresentado um algoritmo baseado numa primitiva fractal triangular e um exemplo é apresentado para estudo de caso na implantação de uma barragem.
- [Sha89] O procedimento apresentado neste artigo usa de duas entidades matemáticas para representar fractais: os produtos de Kronecker e homeomorfismos valorizados por matrizes iteradas. São gerados imagens do tipo *bitmap* do conjunto. Usados para gerar fractais do tipo da curva de Koch, curvas de Hilbert, Peano e o triângulo de Sierpiński, mostra-se que os dois métodos se equivalem em poder. Implementação para Macintosh é mostrada no final do artigo.
- [Smi84] Esta é uma referência sobre *graftais*. Definido como um tipo de subfractais, são estudados algoritmos para gerar algumas famílias de plantas, usando fórmulas que definem seu crescimento. Acrescentando variações ao método de Lindenmayer e comparando com definições dadas por Mandelbrot, este autor caracteriza muito bem as diferenças e as semelhanças em os fractais e os graftais.
- [Sor84] Um resumo da teoria fractal é apresentada neste artigo, onde o autor faz uma correlação com a quarta dimensão, definida por Einstein como sendo o tempo. Como os fractais tem a capacidade de mostrar a variação no tempo o relacionamento parece viável. Uma geração de fractais auto-homeográficos, resultado do produto de uma inversão, uma simetria em relação a uma linha e a rotação, é apresentada, assim como sua implementação em linguagem AppleSoft BASIC.
- [SO90] Grandes progressos foram feitos nos últimos anos para entender a estrutura de formas randômicas e a aparência com que certas formas crescem. Este livro desenvolve toda combinação entre estas duas estruturas dentro do ponto de vista das

ciências físicas, como o simulação do crescimento e processos de agregações através de fractais. Exemplos são apresentados com fluídos mecânicos, avaliações dielétricas, eletromagnetismo e outros.

- [SLP83] A curva estudada por Peano por volta de 1900, caracterizada atualmente como fractal, possui propriedades estatísticas que podem ser usadas em processamento de imagens. Atuando como transformada de um espaço multidimensional em unidimensional, pode ser aplicada para facilitar classificação, análise ou representação de informações. Para uso imediato é mostrada uma técnica para apresentar imagens com alta fidelidade de cores num dispositivo capaz de representar apenas 256 cores simultaneamente.
- [Tri89] A filosofia hindu vê o cosmos como sendo auto-semelhante por natureza e seus templos procuram representar simbolicamente esta auto-semelhança através de sua forma. Este artigo mostra como as técnicas de construção destes templos aproximam-se das técnicas usadas pela computação gráfica para construir os fractais.
- [Vit91] O autor discute o tema de como introduzir a tecnologia dos computadores na sala de aula. São colocadas questões sobre o que fazer quando o computador já chegou à escola e o problema é integrá-los ao desenvolvimento do currículo escolar. Dez “teses” são apresentadas e entre elas propõe-se a programação em LOGO de figuras fractais visando explorar o domínio bastante complexo da geometria (topologia), da lógica e aplicar estes conhecimentos ao desenho, à botânica e à biologia em geral.
- [WKC86] São descritos novos conceitos para compressão de dados baseados na teoria fractal. Um algoritmo é apresentado usando técnicas semelhantes às tradicionais de processamento de imagens. Os resultados são aplicados na compressão de algumas imagens e os autores classificam o resultado obtido como muito bons, quando a medida de acuracidade é dada pelo olho humano.
- [WC89] Padrões de periodicidade de mapeamentos não-lineares são frequentemente representados por variações potenciais. Como exemplo pode-se citar mapeamentos logísticos unidimensionais sofrem mudanças num período de dois. Este artigo mostra que este período pode ser usado como parâmetro para colorir uma imagem e revelar padrões de órbitas para os atratores desta imagem. É apresentado o pseudocódigo de um algoritmo que pode ser usado para produzir imagens fractais com destaques para a periodicidade inerentes a sua geração.

[Wri92a] Neste artigo o autor faz uma avaliação do método de compressão de imagens apresentado por Michael Barnsley e avalia sua performance. Sua conclusão é que o método é fantástico e que deve surgir como um padrão para imagens a partir de 1993.

[Wri92b] O autor comenta o sucesso da compressão de imagens pelo Sistema de Funções Iterativas (IFS) de Michael Barnsley, comprovado pela Microsoft para uso em seus produtos a partir de 1993. Faz um comparativo com outros métodos de compressão existentes no mercado e mostra que a continuação da pesquisa com os IFS leva agora para compressão de imagens em movimento.

BIBLIOGRAFIA

- [AP91] Jair Minoro Abe and Nelson Papavero. *Teoria Intuitiva dos Conjuntos*. Makron Books, São Paulo – SP, 1991.
- [AR90] D. C. Arney and B. T. Robinson. Exhibiting chaos and fractals with a microcomputer. *Computer Math Applications*, 19(3):1 – 11, 1990.
- [B89] Reinhard Bölling. A birthday present. *The Mathematical Intelligencer*, 11(4):20 – 25, 1989.
- [Bar88] Michael Barnsley. *Fractals Everywhere*. Academic Press, Inc, San Diego, Califórnia, 1988.
- [BC91] Per Bak and Kan Chen. Self-organized criticality. *Scientific American*, (1):26 – 33, 1991.
- [BD85] Michael Barnsley and S. Demko. Iterated function systems and the global construction of fractals. *Proceedings of Royal Society of London*, (399):243 – 275, 1985.
- [BD90] Karl-Heinz Becker and Michael Dörfler. *Dynamical Systems and Fractals*. Cambridge University Press, Cambridge - USA, 1990.
- [BEHL86] Michael Barnsley, V. Ervin, D. Hardin, and J. Lancaster. Solution of an inverse problem for fractals and other sets. *Proceedings of National Academy of Science – Mathematics*, 83(4):1975 – 1977, 1986.
- [BL80] M. V. Berry and Z. V. Lewis. On the Weierstrass–Mandelbrot fractal function. *Proceedings of Real Society of London*, (A370):459–484, 1980.
- [Blo85] Jules Bloomenthal. Modeling the mighty maple. In *SIGGRAPH*, 1985.

- [BM80] Garret Birkhoff and Saunders MacLane. *Álgebra Moderna Básica*. Guanabara Dois, Rio de Janeiro – RJ, 1980.
- [Bou85] Christian Bouville. Bounding ellipsoids for ray-fractal intersection. In *SIGGRAPH*, 1985.
- [Bru93] José Carlos Bruffeff. Teoria e geração de fractais, 1993.
- [BS88] Michael Barnsley and Alan D. Sloan. A better way to compress images. *Byte*, (1):215 – 223, 1988.
- [CC91] Michel Coster and J. L. Chermant. *Precis D'Analyse D'Imagens*. Presses du CNRS, Paris, 1991.
- [CEM89] R. Cossu, M. Ercoli, and L. Moltedo. An extension of cgi functions for generation and manipulation of raster images. *Computer & Graphics*, 13(1):39 – 48, 1989.
- [Cox73] H. S. M. Coxeter. *Regular Polytopes*. Dover Publications, Inc., New York, NY, 1973.
- [CS85] F. M. Caimi and M. S. Schmalz. Geometric properties of non-differentiable contours: Concurrent spatial harmonic and fractal analyses. *SPIE – Particle Sizing and Spray Analysis*, 573:21 – 30, 1985.
- [Dav90] Frank Davidoff. Dynamic fractals. *Computer & Graphics*, 14(1):135 – 136, 1990.
- [dC88] Antônio Miguel de Campos. Modelos fractais na inspeção de superfícies naturais. *publicação interna – Ministério da Indústria e Comércio de Lisboa – Portugal*, pages 109 – 114, 1988.
- [DD89] Keith Devlin and Ronald G. Douglas. Chaos. *The Mathematical Intelligencer*, 11(3):3 – 4, 1989.
- [Dev89] Robert L. Devaney. Film and video as a tool in mathematical research. *The Mathematical Intelligencer*, 11(2):33 – 38, 1989.
- [Dev90] Robert L. Devaney. *Chaos, Fractals and Dynamics - Computer Experiments in Mathematics*. Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1990.
- [Dew85] A. K. Dewdney. A computer microscope zooms in for a look at most complex object in mathematics. *Scientific American*, 253(2):8 – 14, 1985.

- [Dew86] A. K. Dewdney. Wallpaper for the mind: computer images that are almost, but not quite, repetitive. *Scientific American*, 255(3):14 – 23, 1986.
- [Dew87] A. K. Dewdney. A blind watchmaker surveys the land of biomorphs. *Scientific American*, (5):84 – 87, 1987.
- [Dew89a] A. K. Dewdney. Catch of the day: biomorphs on truchet files, served with popcorn and snails. *Scientific American*, (7):92 – 95, 1989.
- [Dew89b] A. K. Dewdney. A tour of the mandelbrot set aboard the mandelbus. *Scientific American*, (2):88 – 91, 1989.
- [DHN85] Stephen Demko, Laurie Hodges, and Bruce Naylor. Construction of fractals objects with iterated functions systems. In *SIGGRAPH*, 1985.
- [Dor90] Francisco Antonio Doria. Chaos cannot be proved to exist. *Proceedings of Stanford University*, 1990.
- [Edi90] Editorial. Empresa cria técnica de compressão de imagens. *Folha de São Paulo*, (6), 1990.
- [Edw84] Gareth John Edwards. Fractal based terrain modelling. *Computer Ex'84*, (1):49 – 56, 1984.
- [Ent89a] Ian D. Entwistle. Julia set art and fractals in the complex plane. *Computer & Graphics*, 13(3):389 – 392, 1989.
- [Ent89b] Ian D. Entwistle. Methods of displaying the behaviour of the mapping $z \rightarrow z^2 + \mu$. *Computer & Graphics*, 13(4):549 – 551, 1989.
- [Fal88a] Kenneth J. Falconer. The Hausdorff dimension of self-affine fractals. *Mathematical Proceedings of Cambridge*, (103):339–350, 1988.
- [Fal88b] Kenneth J. Falconer. The hausdorff dimension of self-affine fractals. *Mathematical Proceedings of Cambridge Philosophical Society*, (103):339 – 350, 1988.
- [Fal90] Kenneth J. Falconer. *Fractal Geometry - Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons, Chichester, Inglaterra, 1990.
- [FBO⁺87] Alain Fournier, Jules Bloomenthal, Peter Oppenheimer, William T. Reeves, and Alvy Ray Smith. The modeling of natural phenomena. In *SIGGRAPH*, 1987.

- [FFC82] Alain Fournier, Don Fussel, and Loren Carpenter. Computer rendering of stochastic models. *Communications of the ACM*, 25(6):371 – 384, 1982.
- [Fog87] Larry Fogg. Introduction to fractals – Math can be beautiful. *Micro Cornupia*, (33), 1987.
- [FP89] Peter D. Fortescue and Geoffrey S. Puterbaugh. A note on the practical use of the VGA monitor for the display of fractal images. *Computer & Graphics*, 13(4):559 – 560, 1989.
- [Fra88] Herbert W. Franke. The computer – a new tool for visual art. *Visual Computer*, (4):35 – 39, 1988.
- [FTB90] M. Fleischmann, D. J. Tildesley, and R. C. Ball. *Fractal in the Natural Science*. Princeton University Press, New Jersey - USA, 1990.
- [GRW90] Ary L. Goldberger, David R. Rigney, and Bruce J. West. Chaos and fractals in human physiology. *Scientific American*, (2):35 – 41, 1990.
- [Har86] Steven Harrington. *Computer Graphics – A programming aproach*. McGraw – Hill, USA, 4 edition, 1986.
- [Hay89] Brian H. Haye. *A Random Walk through Fractals Dimensions*. VCH Publishers, New York, NY, 1989.
- [HB86] Donald Hearn and M. Pauline Baker. *Computer Graphics*. Prentice Hall, USA, 1986.
- [HG89] Morris W. Hirsch and James Gleick. Chaos, rigos, and hype. *The Mathematical Intelligencer*, 11(3):6 – 9, 1989.
- [Hib91] Brynn Hibbert. Fractals in Chemistry. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, (11):1–11, 1991.
- [HJB⁺93] J. W. Handley, H. M. Jaenisch, C. A. Bjork, L. T. Richardson, and R. T. Caruth. Chaos and fractal algorithms applied to signal processing and analysis. *Simulation*, (1):36 – 52, 1993.
- [HN91] Jenny Harrison and Alec Norton. Geometric integration on fractal curves in the plane. *Indiana University Mathematics*, 40(2), 1991.

- [Hut81] John E. Hutchinson. Fractals and Self-similarity. *Indiana University Mathematical Journal*, (30):713–743, 1981.
- [Jon90a] Huw Jones. Dürer, Gaskets and Barnsley’s Chaos Game. *Computer Graphics Forum*, (9):327–332, 1990.
- [Jon90b] John Dewey Jones. Three unconventional representations of the mandelbrot set. *Computer & Graphics*, 14(1):127 – 129, 1990.
- [JPS90] Hartmut Jürgens, Heinz-Otto Peitgen, and Dietmar Saupe. The Language of Fractals. *Scientific American*, (08):40 – 47, 1990.
- [JPSvH84] Hartmut Jürgens, Heinz-Otto Peitgen, Dietmar Saupe, and F. v. Haeseler. Cayley’s problem and julia sets. *The Mathematical Intelligencer*, 6(2):11 – 20, 1984.
- [Jr.82] Claude Tricot Jr. Two definitions of fractional dimension. *Mathematical Proceedings of Cambridge Philosophical Society*, (91):57–74, 1982.
- [Kaj83] James T. Kajiya. New techniques for ray tracing procedurally defined objects. *ACM Transactions on Graphics*, 2(3):161 – 181, 1983.
- [KCC89] James M. Keller, Susan Chen, and Richard M. Crownover. Texture description and segmentation through fractal geometry. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, (45):150 – 166, 1989.
- [Kei89] Michael Keith. Artistic choice in the display of chaotic dynamics. *Computer & Graphics*, 13(3):393 – 395, 1989.
- [Kra89] Steven G. Krantz. Fractal geometry. *The Mathematical Intelligencer*, 11(4):12 – 16, 1989.
- [Lak89] Akhlesh Lakhtakia. A simple gasket derived from prime numbers. *Computer & Graphics*, 13(1):57 – 58, 1989.
- [Lip74] Seymour Lipschutz. *Álgebra Linear*. McGraw–Hill, Brasil, 1974.
- [LM87] Ivan B. Liss and Thomas C. McMillan. Fractals with turtle graphics: a CS2 programming exercise for introducing recursion. *ACM on Graphics*, (9):141 – 147, 1987.
- [LM89] Akhlesh Lakhtakia and Russel Messier. Self-similar sequences and chaos from gauss sums. *Computer & Graphics*, 13(1):59 – 62, 1989.

- [Man77] Benoit B. Mandelbrot. *Fractals, Form, Chance and Dimension*. Freeman, São Francisco, Califórnia, 1977.
- [Man82a] Benoit B. Mandelbrot. Comment on computer rendering of fractal stochastic models. *Communications of the ACM*, 25(8):581 – 584, 1982.
- [Man82b] Benoit B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, São Francisco, Califórnia, 1982.
- [Man89a] Benoit B. Mandelbrot. Chaos, bourbaki, and poincaré. *The Mathematical Intelligencer*, 11(3):10 – 13, 1989.
- [Man89b] Benoit B. Mandelbrot. Some “facts” that evaporate upon examination. *The Mathematical Intelligencer*, 11(4):17 – 19, 1989.
- [McM84] Curt McMullen. The hausdorff dimension of general Sierpiński carpets. *Nagoya Mathematical Journal*, 96(12):1 – 9, 1984.
- [MF88] Michel Mendés-France. *∴ The mathematical Intelligencer*, 10(4):35, 1988.
- [MH89] Mario Markus and Benno Hess. Lyapunov exponents of the logistic map with periodic forcing. *Computer& Graphics*, 13(4):553 – 558, 1989.
- [Mic90] Michael Michelitsch. Color maps generated by “Trigonometric Iteration Loops”. *Computer& Graphics*, 14(1):125 – 126, 1990.
- [MR89] M. Michelitsch and O. E. Rössler. A new feature in Hénon’s map. *Computer& Graphics*, 13(2):263 – 265, 1989.
- [MR90] Mark A. Motyka and Clifford A. Reiter. Chaos and newton’s method on systems. *Computer& Graphics*, 14(1):131 – 134, 1990.
- [MT87] Willian A. McWorter and Jane Morrill Tazelaar. Creating fractals. *Byte*, (8):123 – 134, 1987.
- [MV89] Jonas Miranda and Luiz Velho. Computação gráfica. *Ciência Hoje*, 10(56):36 – 47, 1989.
- [Nor82a] Alan Norton. Generation and display of geometric fractals in 3-D. *Computer Graphics*, 16(3):61 – 67, 1982.
- [Nor82b] Alan Norton. Generation and display of geometric fractals in 3-D. *ACM - Computer Graphics*, 16(3):61 – 67, 1982.

- [Oli92] Dick Oliver. *FractalVision*. Sams Publishing, Indiana - USA, 1992.
- [Opp86] Peter E. Oppenheimer. Real time design and animation of fractal plants and trees. *ACM SIGGRAPH*, 20(4):55 – 64, 1986.
- [Pap84] Athanasios Papoulis. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. McGraw – Hill, USA, 2 edition, 1984.
- [Pen86a] Alex P. Pentland. Part models. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, pages 242 – 249, 1986.
- [Pen86b] Alex P. Pentland. Shading into texture. *Artificial Intelligence*, (4):147 – 170, 1986.
- [Pen56] Alex P. Pentland. On describing complex surface shapes. *Image and Visual Computing*, 3(4):153 – 162, 1985.
- [Pet90] Ivars Peterson. Recipes for artificial realities. *Science News*, 138(11):328 – 329, 1990.
- [PH90] Przemyslaw Prusinkiewicz and Jim Hanom. Visualization of botanical structures and processes using parametric L-System. In *SIGGRAPH*, 1990.
- [Pic85] Clifford A. Pickover. Computer graphics generated from the iteration of algebraic transformations in the complex plane. *Computer & Graphics*, 9(2):147 – 151, 1985.
- [Pic87] Clifford A. Pickover. Mathematics and beauty: time-discrete phase planes associated with cyclic system, $\{\dot{x} = -f(y(t)), \dot{y} = f(x(t))\}$. *Computer & Graphics*, 11(2):217 – 226, 1987.
- [Pic88a] Clifford A. Pickover. Chaotic behavior of the transcendental mapping $(z \rightarrow \cosh(z) + \mu)$. *The Visual Computer*, (4):243 – 246, 1988.
- [Pic88b] Clifford A. Pickover. A note on chaos and halley's method. *Communications of the ACM*, 31(11):1326 – 1329, 1988.
- [Pic88c] Clifford A. Pickover. A note on rendering 3-D strange-attractors. *Computer & Graphics*, 12(2):263 – 267, 1988.
- [Pic88d] Clifford A. Pickover. Pattern formation and chaos in networks. *Communications of the ACM*, 31(2):136 – 151, 1988.

- [Pic88e] Clifford A. Pickover. Symmetry, beauty and chaos in chebyshev's paradise. *The Visual Computer*, (4):142 – 147, 1988.
- [Pic88f] Clifford A. Pickover. The use of image processing techniques in rendering maps with deterministic chaos. *The Visual Computer*, (4):271 – 276, 1988.
- [Pic89a] Clifford A. Pickover. Circles which kiss: A note on osculatory packing. *Computer& Graphics*, 13(1):63 – 67, 1989.
- [Pic89b] Clifford A. Pickover. Visualization of time-discrete dynamical systems. *The Visual Computer*, (5):375 – 377, 1989.
- [Pic90] Clifford A. Pickover. *Computers Pattern, Chaos and Beauty*. St. Martin's Press, New York – NY, 1990.
- [PJSa91] Heinz-Otto Peitgen, Harmut Jürgens, Dietmar Saupe, and all. *Fractals for the Classroom - Vol. 1 e Vol. 2*. Springer-Verlag, New York - USA, 1991.
- [PK86] Clifford A. Pickover and Al. Khorasani. Fractal characterization of speech waveform graphs. *Computer& Graphics*, 10(1):51 – 61, 1986.
- [PR86] Heinz-Otto Peitgen and Peter H. Richter. *The Beauty of Fractals*. Sprienger-Verlag, Berlin, 1986.
- [PS88] Przemyslaw Prusinkiewicz and Glen Sandness. Koch curves as attractors and repellers. *IEEE - Computer Graphics and Applications*, (11):26 – 40, 1988.
- [PS89] Franco P. Preparatta and Michael Ian Shamos. *Computational Geometry*. Springer-Verlag, New York – NY, 1989.
- [PSaa88] Heinz-Otto Peitgen, Dietmar Saupe, and at all. *The Science of Fractal Images*. Sprienger-Verlag, New York, 1988.
- [Ram89] S. R. Ramesh. Graphics of truncated sinusoids. *Computer& Graphics*, 13(4):545 – 547, 1989.
- [RDP+92] R. P. Rastogi, Ishwar Das, Anal Pushkarna, Archana Sharma, Kiran Jaiswai, and Sudha Chand. Inexpensive laboratory experiments on crystal growth of water soluble substances in gel media. *Journal of Chemical Education*, 69(2):A47 – A50, 1992.
- [Rog88] C A. Rogers. Dimension prints. *Mathematika*, 35(69):1–27, 1988.

- [San87a] Leonard M. Sander. Fractal growth. *Scientific American*, 256(1):82 – 88, 1987.
- [San87b] Haroldo P. Santo. Técnicas fractais para a geração de superfícies em aplicações da engenharia. *publicação interna – Universidade Técnica de Lisboa*, pages 1 – 30, 1987.
- [Sau87] Dietmar Saupe. Efficient computation of julia sets and their fractal dimension. *Physica*, (167):358 – 370, 1987.
- [SCF88] David A. Smith, R. Stephen Cunningham, and Harley Flanders. Looking at mandelbrot set. *The College Mathematics Journal*, 19(4):353 – 363, 1988.
- [Sha89] Jeffrey Shallit. Two methods for generating fractals. *Computer & Graphics*, 13(2):185 – 191, 1989.
- [SLP83] R. J. Stevens, A. F. Lehar, and F. H. Preston. Manipulation and presentation of multidimensional image data using Peano scan. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-5(5):520 – 526, 1983.
- [Smi84] Alvy Ray Smith. Plants, Fractals and Formal Languages. *Computer Graphics*, 18(3):1 – 10, 1984.
- [SO90] H. Eugene Stanley and Nicole Ostrowsky. *On Growth and Form - Fractal and Non-Fractal Patterns in Physics*. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht - Netherlands, 1990.
- [Sor84] Peter R. Sorensen. Fractals. *Byte*, (9):157 – 172, 1984.
- [Ste89] Roger T. Stevens. *Fractal - Programming in C*. M & T - Books, CA - USA, 1989.
- [Ste90a] Roger T. Stevens. *Advanced Fractal - Programming in C*. M & T - Books, CA - USA, 1990.
- [Ste90b] Roger T. Stevens. *Fractal Programming and Ray Tracing with C++*. M & T - Books, CA - USA, 1990.
- [Tri89] Kirti Trivedi. Hindu temples: models of a fractal universe. *Visual Computer*, (5):243 – 258, 1989.
- [Urb91] M. Urbański. On the hausdorff dimension of a julia set with a rationally indifferent periodic point. *Studia Mathematica*, 97(3):167 – 188, 1991.

- [Vit91] Bruno Vitale. Computador na escola: um brinquedo a mais? *Ciência Hoje*, 13(77):19 – 25, 1991.
- [War84] Simon Wardrop. Plotting fractals on your computer. *Micro*, (3):74 – 77, 1984.
- [WC89] Stephen T. Welstead and Thomas L. Cromer. Coloring periodicities os two-dimensional mappings. *Computer& Graphics*, 13(4):539 – 543, 1989.
- [WKC86] E. Walach, E. Karnin, and D. Chevion. On fractal based approach to image coding. *Signal Processing III*, pages 731 – 734, 1986.
- [Wri92a] Andy Wright. Fractals - transform image compression. *Eletronics World + Wireless World*, (3):208 – 211, 1992.
- [Wri92b] Andy Wright. Squeezing into the picture. *Eletronics World + Wireless World*, (8):663 – 666, 1992.
- [WS90] Bruce J. West and Michael Shlesinger. The noise in natural phenomena. *American Scientist*, 78(Jan-Feb):40 – 45, 1990.
- [Zor88] Glenn Zorpette. Fractals: not just another pretty picture. *IEEE – Spectrum*, (10):29 – 31, 1988.