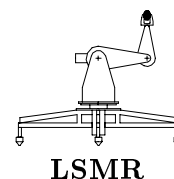




Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Departamento de Sistemas e Controle da Energia
Laboratório de Sistemas Modulares Robóticos
LSMR-DSCE-FEEC-UNICAMP



TÉCNICAS ALTERNATIVAS DE RECONHECIMENTO DE CAOS EM SISTEMAS COM DINÂMICA COMPLEXA: ANÁLISE DE UM SISTEMA COM DESCONTINUIDADE

Prof. MSc. Reinaldo Gonçalves Nogueira

Prof. Dr. Marconi Kolm Madrid

Orientador

Prof. Dr. Álvaro Geraldo Badan Palhares

Co-orientador

Banca Examinadora

Prof. Dr. Marconi Kolm Madrid - Presidente

Prof. Dr. Carlos Dias Maciel - UEL/Londrina

Prof. Dr. David Sérgio Adães de Gouvêa - UFJF/Juiz de Fora

Prof. Dr. João Maurício Rosário - UNICAMP/FEM

Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres - UNICAMP/FEEC

Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura - UNICAMP/FEEC

*Tese submetida à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
da Universidade Estadual de Campinas, para preenchimento
dos pré-requisitos parciais para obtenção do título de
Doutor em Engenharia Elétrica*

Campinas, 18 de junho de 2001

*A minha esposa Maria Assima
e meus filhos Gustavo e Rafael.*

Resumo

O presente trabalho tem como principal objetivo viabilizar o reconhecimento de comportamentos dinâmicos de sistemas que apresentam estados descontínuos, usando-se ferramentas bem conhecidas que são os Mapas de *Poincaré*, os Diagramas de Bifurcação e os Expoentes de *Lyapunov*. Com este intuito, adota-se o modelo de um módulo robótico constituído de um pêndulo invertido com restrições no espaço de trabalho.

Por ser basicamente de carácter computacional, destacam-se os aspectos computacionais envolvidos e as dificuldades encontradas na utilização de tais ferramentas da forma tradicional usando-se o *Simulink/Matlab*, e que estas dificuldades podem ser superadas com a utilização da linguagem de programação C^{++} para a criação de blocos no *Simulink*.

Descrevem-se duas novas técnicas para construção de Mapas de *Poincaré*, usando a recorrência no tempo e a recorrência na própria variável e as implementações computacionais feitas para possibilitar a obtenção dos Diagramas de Bifurcação e os Expoentes de *Lyapunov* usando este pacote de simulação.

Abstract

The present work has as main objective to make possible the recognition of dynamic behaviors of systems that present discontinuous states, using the Poincaré Maps, Bifurcation Diagrams and Lyapunov Exponents, which are known tools. With this intention, the model of a robotic module constituted of an inverted pendulum with restrictions in the work space is adopted.

Due to its computational character, the computational aspects involved and the difficulties found in the use of such tools in the traditional way within Simulink/Matlab are evidenced, and it is shown that these difficulties can be overcome with the use of the programming language C^{++} for the creation of blocks in the Simulink.

Two new techniques are described for Poincaré Maps construction: using the time recurrence and the own variable recurrence, and the computational implementations done to make possible the Bifurcation Diagrams and the Lyapunov Exponents obtaining using this simulation package.

Agradecimentos

- Ao professor Dr. Marconi Kolm Madrid, pela orientação e pelo incentivo.
- Ao professor Dr. Álvaro Geraldo Badan Palhares, pela co-orientação e grande contribuição.
- Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro.
- Aos amigos que fiz no DSCE, Bonani, Caixeta, Comin, Edson, Enes, Fernando, Isabel, Jês, José Carlos, Luciana, Márcio, Nélon, Ricardo, Roberto e tantos outros que, embora não citados, não foram esquecidos, pelos inúmeros e indispensáveis momentos de descontração e que direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão deste trabalho.
- A meus pais Jair e Anna Maria e meus irmãos Andrea, Cristina e Eduardo, pelo incentivo.
- A minha esposa Maria Assima, pela força, paciência e compreensão.
- A Deus pela oportunidade de ter cumprido mais esta etapa.

Sumário

Resumo	v
Abstract	vii
Agradecimentos	ix
Sumário	xi
Lista de Figuras	xiii
Introdução	xv
1 Estruturas Robóticas	1
1.1 Configuração Articulada	2
1.2 Configuração Esférica	7
1.3 Configuração Scara	7
1.4 Configuração Cilíndrica	8
1.5 Configuração Cartesiana	9
1.6 Configuração Paralela	9
1.7 Modelo Dinâmico do Módulo Robótico Estudado	12

SUMÁRIO

1.7.1	Cálculo da Energia Cinética Total	13
1.7.2	Cálculo da Energia Potencial Total	14
1.7.3	Lagrangeano	15
1.7.4	Cálculo do Torque no Elo	15
2	Caos: Como Identificá-lo	19
2.1	Resposta no Tempo	19
2.2	Planos de Fase e Espaço de Estado	23
2.3	Análise Espectral	25
2.4	Mapas de <i>Poincaré</i>	28
2.5	Expoentes de <i>Lyapunov</i>	31
3	Ambiente de Simulação e Aspectos Computacionais	33
3.1	O Ambiente de Simulação	33
3.1.1	As <i>S-functions</i>	34
3.1.2	A Interface <i>C MEX</i>	36
3.2	Aspectos Computacionais	44
4	Mapas de <i>Poincaré</i>	49
4.1	Mapas de <i>Poincaré</i>	50
4.1.1	Mapa de <i>Poincaré</i> para sistemas não autônomos	51
4.1.2	Mapa de <i>Poincaré</i> para sistemas autônomos	53
4.1.3	Conjuntos Limites de Mapas de <i>Poincaré</i>	54
4.2	Construção de Mapas de <i>Poincaré</i> usando a Recorrência no Tempo	58
4.3	Construção de Mapas de <i>Poincaré</i> usando a Recorrência na Própria Variável	66

4.4	Aplicação ao Modelo Estudado	73
5	Diagramas de Bifurcação	87
5.1	Introdução	87
5.2	Aplicação a Sistemas Conhecidos	89
5.3	Aplicação ao Modelo Estudado	97
6	Expoentes de <i>Lyapunov</i>	103
6.1	Introdução	103
6.2	Definição e Interpretação	104
6.3	Um Algoritmo para o Cálculo	107
6.4	Aplicações do Método	114
6.5	Aplicação ao Sistema Estudado	119
7	Conclusões	123
7.1	Sugestões para Trabalhos Futuros	125
A	Definições Importantes	127
A.1	Fundamentos Matemáticos	127
A.2	Sistemas Dinâmicos	130
A.3	Transformações Pontuais	139
A.4	Estabilidade dos Conjuntos Limites	142
B	Programa <i>C MEX</i>	159
	Referências Bibliográficas	171

SUMÁRIO

Lista de Figuras

1.1	Manipulador robótico com configuração articulada do tipo cotovelo.	2
1.2	Manipulador robótico com configuração articulada do tipo paralelogramo. . . .	3
1.3	Estrutura de um manipulador de configuração articulada.	3
1.4	Estrutura em paralelogramo de um manipulador de configuração articulada. .	5
1.5	Protótipo de um manipulador robótico com configuração articulada do tipo cotovelo.	6
1.6	Estrutura de um manipulador de configuração esférica.	7
1.7	Manipulador robótico com configuração esférica.	8
1.8	Estrutura de um manipulador de configuração scara.	8
1.9	Manipulador robótico com configuração scara.	9
1.10	Estrutura de um manipulador de configuração cilíndrica.	10
1.11	Manipulador robótico com configuração cilíndrica.	10
1.12	Estrutura de um manipulador de configuração cartesiana.	11
1.13	Manipulador robótico com configuração cartesiana.	11
1.14	Estrutura de um manipulador de configuração paralela.	11
1.15	Manipulador robótico com configuração paralela.	12
1.16	Módulo robótico articulado.	13

1.17	Módulo robótico com obstáculos.	14
2.1	Resposta no tempo da equação de <i>Duffing</i> (2.1) para $\epsilon = 0.22$, $\gamma = 0.3$ e $w = 1.0$	21
2.2	Resposta no tempo da equação de <i>Van der Pol</i> (2.2) para $A = 0.5$ e $w = 1.1$	21
2.3	Resposta no tempo da equação de <i>Duffing</i> (2.1) para $\epsilon = 0.25$, $\gamma = 0.3$ e $w = 1.0$	21
2.4	Resposta no tempo da equação de <i>Duffing</i> (2.1) para as mesmas condições da figura 2.1, substituindo-se o cosseno por um ruído branco.	22
2.5	Resposta no tempo da equação de <i>Van der Pol</i> (2.2) para as mesmas condições da figura 2.2, substituindo-se o cosseno por um ruído branco.	22
2.6	Plano de fase para a equação de <i>Duffing</i> (2.1) para $\epsilon = 0.22$, $\gamma = 0.3$ e $w = 1.0$	24
2.7	Plano de fase da equação de <i>Van der Pol</i> (2.2) para $A = 0.5$ e $w = 1.1$	24
2.8	Plano de fase para a equação de <i>Duffing</i> (2.1) para $\epsilon = 0.25$, $\gamma = 0.3$ e $w = 1.0$	24
2.9	Plano de fase para a equação de <i>Duffing</i> (2.1) para $\epsilon = 0.22$, $\gamma = 0.3$ e $w = 1.0$, fora do conjunto limite.	25
2.10	Densidade espectral de potência (DEP) de uma senóide com frequência de 500 KHz, amostrada a uma taxa de 10 MHz.	26
2.11	Densidade espectral de potência (DEP) para a variável x da equação de <i>Van der Pol</i> (2.2), usando $A = 0.5$ e $w = 1.1$	26
2.12	Densidade espectral de potência (DEP) para a variável y da equação de <i>Van der Pol</i> (2.2), usando $A = 0.5$ e $w = 1.1$	27
2.13	Densidade espectral de potência (DEP) para a equação de <i>Duffing</i> (2.1) para $\epsilon = 0.25$, $\gamma = 0.3$ e $w = 1.0$	28
2.14	A curva de Koch.	29
2.15	Tapete de Sierpinski.	29

2.16	Esponja de Menger.	30
2.17	Processo de obtenção da ferradura de <i>Smale</i>	30
2.18	Mapa de <i>Poincaré</i> para a equação de <i>Duffing</i>	31
3.1	Exemplo de um bloco <i>S-function</i> que usa um programa chamado "programa", especificado em sua caixa de diálogo.	35
3.2	Características gerais de cada bloco dentro de um modelo no <i>Simulink</i>	35
3.3	Estrutura de uma <i>S-function C MEX</i>	37
3.4	Detalhamento do bloco <i>S-Function</i> usado nas simulações.	40
3.5	Modelo do sistema para o <i>Simulink</i>	41
3.6	Bloco <i>Hit Crossing</i> do <i>Simulink</i>	42
3.7	Bloco <i>Mux</i> do <i>Simulink</i>	42
3.8	Bloco <i>Demux</i> do <i>Simulink</i>	43
3.9	Bloco <i>Stop</i> do <i>Simulink</i>	43
3.10	Fluxograma do bloco "Atualização dos estados", detalhando a detecção dos obstáculos e a manutenção da variável auxiliar x_3 dentro do intervalo $[-\pi, \pi]$	44
3.11	Janela de parâmetros configurada para o modelo no <i>Simulink</i>	45
4.1	Mapa de <i>Poincaré</i> para um sistema não autônomo de primeira ordem.	52
4.2	Plano de <i>Poincaré</i> definido para $x_1 = q$ cte.	52
4.3	Mapa de <i>Poincaré</i> para um sistema autônomo de terceira ordem.	54
4.4	Mapas de <i>Poincaré</i> de um mesmo fluxo mostrando diferentes ordens, depen- dentes da escolha de Σ	55
4.5	Mapa de <i>Poincaré</i> da equação de <i>Van der Pol</i> para uma situação de compor- tamento quasi-periódico.	56

4.6	Representação de uma trajetória e um mapa de <i>Poincaré</i> para um sistema periódico de período dois.	56
4.7	Mapa de <i>Poincaré</i> para a equação de <i>Duffing</i>	58
4.8	Representação de uma trajetória e respectivo mapa de <i>Poincaré</i> de um sistema genérico qualquer.	59
4.9	Representação de uma trajetória e respectivo mapa de <i>Poincaré</i> para um sistema periódico de período $T = 2$	60
4.10	Mapa de <i>Poincaré</i> da equação de <i>Duffing</i> para a mesma situação de comportamento periódico mostrada na figura 2.6.	61
4.11	Mapas de <i>Poincaré</i> da equação de <i>Van der Pol</i> para uma situação de comportamento quasi-periódico, usando a recorrência no tempo para a variável x	62
4.12	Mapas de <i>Poincaré</i> da equação de <i>Van der Pol</i> para uma situação de comportamento quasi-periódico, usando a recorrência no tempo para a variável y	62
4.13	Mapas de <i>Poincaré</i> da equação de <i>Van der Pol</i> para uma situação de comportamento quasi-periódico, usando a recorrência no tempo para a norma $\sqrt{x^2 + y^2}$	63
4.14	Mapa de <i>Poincaré</i> da equação de <i>Duffing</i> para a situação de comportamento caótico mostrado na figura 2.8.	64
4.15	Detalhamento do mapa de <i>Poincaré</i> da equação de <i>Duffing</i> para a situação de comportamento caótico mostrado na figura 4.14.	64
4.16	Mapa de <i>Poincaré</i> do sistema de equações representativo do circuito de <i>Chua</i> , usando $\alpha = 9.0$, $\beta = 100/7$, $m_0 = -1/7$ e $m_1 = 2/7$	65
4.17	Detalhamento do mapa de <i>Poincaré</i> para o circuito de <i>Chua</i> mostrado na figura 4.16.	66
4.18	Mapa de <i>Poincaré</i> da equação de <i>Duffing</i> para a situação de comportamento periódico mostrado na figura 2.6.	67

4.19	Mapa de <i>Poincaré</i> da equação de <i>Van der Pol</i> para uma situação de comportamento quasi-periódico, usando a recorrência na variável x	67
4.20	Mapa de <i>Poincaré</i> da equação de <i>Van der Pol</i> para uma situação de comportamento quasi-periódico, usando a recorrência na variável y	68
4.21	Mapa de <i>Poincaré</i> da equação de <i>Duffing</i> para as mesmas condições mostradas no mapa da figura 2.8.	69
4.22	Mapa de <i>Poincaré</i> do sistema de equações representativo do circuito de <i>Chua</i> , usando $\alpha = 9.0$, $\beta = 100/7$, $m_0 = -1/7$ e $m_1 = 2/7$	69
4.23	Detalhamento do mapa de <i>Poincaré</i> para o circuito de <i>Chua</i> mostrado na figura 4.22.	70
4.24	Mapa de <i>Poincaré</i> do sistema de equações representativo do circuito de <i>Chua</i> , usando $\alpha = 9.0$, $\beta = 100/7$, $m_0 = -1/7$ e $m_1 = 2/7$	70
4.25	Detalhamento do mapa de <i>Poincaré</i> para o circuito de <i>Chua</i> mostrado na figura 4.24.	71
4.26	Mapa de <i>Poincaré</i> para as equações de <i>Hénon</i> , usando $\alpha = 1.4$ e $\beta = 0.3$	71
4.27	Mapa de <i>Poincaré</i> para as equações de <i>Hénon</i> , usando $\alpha = 1.4$ e $\beta = 0.3$ e a recorrência na variável x	72
4.28	Mapa de <i>Poincaré</i> para as equações de <i>Hénon</i> , usando $\alpha = 1.4$ e $\beta = 0.3$ e a recorrência na variável y	72
4.29	Mapa de <i>Poincaré</i> para $\alpha = 0.1$, $\beta = 2.0$ e $w = 1.0$, com o plano Σ definido em $x_1 = 0.9$, usando o modelo descrito por (4.8).	75
4.30	Mapa de <i>Poincaré</i> para $\alpha = 0.1$, $\beta = 2.0$ e $w = 1.0$, com o plano Σ definido em $x_1 = 0.9$, usando o modelo descrito por (4.8) e a técnica da recorrência no tempo.	76
4.31	Detalhamento do mapa de <i>Poincaré</i> mostrado na figura 4.30(c).	77

4.32	Mapa de <i>Poincaré</i> para $\alpha = 0.1$, $\beta = 2.0$ e $w = 1.0$, com o plano Σ definido em $x_1 = 0.9$, usando o modelo descrito por (4.8) e a técnica da recorrência na própria variável (x_2).	78
4.33	Mapa de <i>Poincaré</i> para $\alpha = 0.1$, $\beta = 2.0$ e $w = 1.0$, com o plano Σ definido em $x_1 = 0.9$, usando o modelo descrito por (4.8) e a técnica da recorrência na própria variável (x_3).	79
4.34	Mapa de <i>Poincaré</i> para $\alpha = 0.1$, $\beta = 1.705$ e $w = 1.0$, com o plano Σ definido em $x_1 = 0.9$, usando o modelo descrito por (4.8).	80
4.35	Mapa de <i>Poincaré</i> para $\alpha = 0.1$, $\beta = 1.705$ e $w = 1.0$, com o plano Σ definido em $x_1 = 0.9$, usando o modelo descrito por (4.8) e a técnica da recorrência no tempo.	81
4.36	Mapa de <i>Poincaré</i> para $\alpha = 0.1$, $\beta = 1.705$ e $w = 1.0$, com o plano Σ definido em $x_1 = 0.9$, usando o modelo descrito por (4.8) e a técnica da recorrência na própria variável (x_2).	82
4.37	Mapa de <i>Poincaré</i> para $\alpha = 0.1$, $\beta = 1.705$ e $w = 1.0$, com o plano Σ definido em $x_1 = 0.9$, usando o modelo descrito por (4.8) e a técnica da recorrência na própria variável (x_3).	83
4.38	Mapa para $\alpha = 0.1$, $\beta = 1.705$, $w = 1.0$ e $k_r = 1.0$, com o plano Σ definido em $x_1 = 0.9$, usando o modelo sem linearização.	84
4.39	Mapa para $\alpha = 0.1$, $\beta = 1.705$, $w = 1.0$ e $k_r = 1.0$ com o plano Σ definido em $x_1 = 0.9$, usando o modelo aproximado por Shaw e Rand (1989). Caótico. . . .	84
4.40	Sobreposição dos mapas das figuras 4.38 e 4.39.	85
4.41	Mapas de <i>Poincaré</i> para $\alpha = 0.1$, $\beta = 1.705$, $w = 1.0$ e $k_r = 0.986$, com o plano Σ definido em $x_1 = 0.9$, usando o modelo descrito por (4.8) e o descrito por Shaw e Rand (1989).	85
4.42	Detalhe do atrator quando $\alpha = 0.1$, $\beta = 1.705$, $w = 1.0$ e $k_r = 0.986$ com o plano Σ definido em $x_1 = 0.9$, usando o modelo aproximado.	86

5.1	Diagrama de bifurcação do tipo sela-nó do sistema representado pela equação (5.1), usando $\beta = 0.2$ e $w = 5$ rad/s.	89
5.2	Diagrama de bifurcação do tipo transcítica do sistema representado pela equação (5.2), usando $\beta = 0.1$ e $w = 5$ rad/s.	90
5.3	Diagrama de bifurcação do tipo forquilha supercrítica do sistema representado pela equação (5.3), usando $\beta = 0.2$ e $w = 5$ rad/s.	91
5.4	Diagrama de bifurcação do tipo forquilha subcrítica do sistema representado pela equação (5.4), usando $\beta = 0.2$ e $w = 5$ rad/s.	91
5.5	Diagrama de bifurcação de <i>Hopf</i> ou <i>Poincaré-Andronov</i> do sistema representado pela equação (5.5).	92
5.6	Bifurcação homoclínica do sistema representado pela equação (5.6), para $\mu = 0$	92
5.7	Bifurcação homoclínica do sistema representado pela equação (5.6), para $\mu = -1$	93
5.8	Bifurcação homoclínica do sistema representado pela equação (5.6), para $\mu = 1$	93
5.9	Diagrama de bifurcação para a equação de <i>Duffing</i> (2.1) para a variável x com $\gamma = 0.3$ e $w = 1.0$	94
5.10	Diagrama de bifurcação para a equação de <i>Duffing</i> (2.1) para a variável y com $\gamma = 0.3$ e $w = 1.0$	95
5.11	Diagramas de bifurcação para o modelo de <i>Lorenz</i> de quarta ordem da equação (5.7).	96
5.12	Diagrama de bifurcação de $k_r \times x_2$ para $\alpha = 0.1$, $\beta = 1.705$ e $w = 1.0$ com o plano Σ definido em $x_1 = 0.9$	98
5.13	Diagrama de bifurcação de $k_r \times x_3$ para $\alpha = 0.1$, $\beta = 1.705$ e $w = 1.0$ com o plano Σ definido em $x_1 = 0.9$	99
5.14	Detalhamento da região caótica do diagrama de bifurcação mostrado na figura 5.12.	99

LISTA DE FIGURAS

5.15	Detalhamento da região caótica do diagrama de bifurcação mostrado na figura 5.13.	100
5.16	Diagrama de bifurcação de $\alpha \times x_2$ para $k_r = 1$, $\beta = 2.0$ e $w = 4.0$ com o plano Σ definido em $x_1 = 0.95$	100
5.17	Diagrama de bifurcação de $\alpha \times x_3$ para $k_r = 1$, $\beta = 2.0$ e $w = 4.0$ com o plano Σ definido em $x_1 = 0.95$	101
6.1	Evolução de um elemento de volume esférico para um elipsóide (caso bidimensional).	105
6.2	Expoentes de <i>Lyapunov</i> e diagrama de bifurcação para a equação de <i>Duffing</i> , com ε variando de 0 a 0.8.	115
6.3	Sobreposição das figuras 6.2(a) e 6.2(b).	116
6.4	Detalhamento da região caótica da figura 6.3.	116
6.5	Sobreposição das figuras 6.2(a) e 6.2(c).	117
6.6	Detalhamento da região caótica da figura 6.5.	117
6.7	Mapas de bifurcação e espectros de expoentes de <i>Lyapunov</i> para ambos os sentidos de variação do parâmetro ε . Equações de <i>Duffing</i>	118
6.8	Mapa de bifurcação e espectro de <i>Lyapunov</i> para o mapa quadrático dado pela equação $x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2$	119
6.9	Espectro de <i>Lyapunov</i> para o modelo de Lorenz de quarta ordem.	120
6.10	Expoentes de <i>Lyapunov</i> e diagrama de bifurcação para o sistema estudado neste trabalho, com k_r variando de 0.98 a 1.0.	122
A.1	Exemplos e contra-exemplos de variedades.	129
A.2	Exemplos de conjuntos compactos.	129
A.3	Contra-exemplos de embutimentos.	130
A.4	Ilustração de uma trajetória.	132

A.5	Ilustração de um fluxo.	133
A.6	Exemplos de pontos w -limite.	133
A.7	Exemplo de ponto α -limite.	134
A.8	Representação da estabilidade.	135
A.9	Ilustração dos subespaços invariantes.	136
A.10	Ilustração do teorema de Hartman - Grobman.	137
A.11	Ilustração do teorema da superfície estável.	138
A.12	Ilustração da transformação pontual.	140
A.13	Ilustração de um ponto homoclínico não transverso.	141
A.14	Ilustração de um ponto homoclínico transverso.	141
A.15	Ilustração de uma trajetória heteroclínica.	142
A.16	Ilustração de uma órbita homoclínica.	142
A.17	Ilustração de uma órbita homoclínica transversa.	143
A.18	Bifurcação do tipo sela-nó.	149
A.19	Bifurcação do tipo transcritical.	150
A.20	Bifurcação tipo forquilha supercrítica.	151
A.21	Bifurcação tipo forquilha subcrítica.	153
A.22	Bifurcação de Hopf.	154
A.23	Bifurcação homoclínica para $\mu = 0$	156
A.24	Bifurcação homoclínica para $\mu < 0$	156
A.25	Bifurcação homoclínica para $\mu > 0$	157

LISTA DE FIGURAS

Introdução

Desde a descoberta e divulgação da existência de soluções não periódicas em equações diferenciais (Lorenz, 1963) e da comprovação da existência de comportamentos caóticos em sistemas dinâmicos contínuos de ordem três ou superior, inúmeros foram os estudos feitos no sentido de identificar este fenômeno nas mais diversas áreas do conhecimento científico, tais como astronomia, biologia, química, matemática, medicina, física e até mesmo em ciências sociais. Em uma grande parte destes estudos conseguiu-se constatar sua presença, tendo sido muitas vezes interpretado, equivocadamente, como sendo ruído inserido no sistema em questão.

A certeza da existência do caos e a constatação de sua presença em sistemas considerados aparentemente bem simples certamente influenciou e até mesmo mudou os rumos de diversos trabalhos de pesquisa. Nestas últimas duas décadas muitos foram os trabalhos publicados mostrando formas de identificá-lo nos mais diversos tipos de sistemas.

Uma área em que os efeitos do caos têm sido bastante explorados é a robótica. Ela está hoje, sem dúvida alguma, cada vez mais presente em atividades antes apenas realizadas pelo homem. Os robôs deixaram de ser exclusividade das fábricas e passaram a fazer parte de outros ambientes, executando tarefas cada vez mais diversificadas, como limpar sistemas de ar condicionado e oleodutos, desativar explosivos e executar operações em grandes profundidades com um elevado grau de segurança, e até mesmo realizar cirurgias com um nível de precisão impossível de ser alcançado anteriormente.

O aumento da complexidade e a necessidade cada vez maior de precisão e repetibilidade na execução destas tarefas ampliaram muito os horizontes de pesquisa nesta área, e muitos

foram os trabalhos realizados com o intuito de buscar formas alternativas de operar e/ou controlar tais dispositivos robóticos (veja Nogueira (1995), por exemplo). Este controle passa, necessariamente, pelo estudo da dinâmica de tais sistemas, evidenciando os possíveis tipos de comportamento.

Apesar do enorme avanço nas possibilidades de emprego de sistemas robóticos nas mais variadas áreas do conhecimento humano, ainda são bem poucos os trabalhos referentes a aplicações destes sistemas sujeitos a restrições em seu espaço de trabalho. Suponha, por exemplo, um sistema robótico com a configuração articulada sendo usado para fazer a limpeza de uma determinada canalização. O que poderia acontecer a este sistema se algum problema afetasse o controle de alguma das juntas deste robô, quando sua parte terminal já estivesse no interior desta canalização?

A resposta para esta e outras perguntas exige um estudo detalhado do sistema, tarefa esta praticamente impossível de ser realizada analiticamente. Daí a primeira motivação para o estudo e desenvolvimento de ferramentas computacionais a serem utilizadas nestes tipos de análise. Com o intuito de possibilitar a maior abrangência possível dos resultados obtidos, optou-se por utilizar o pacote de simulação *Simulink* do *Matlab*, de fácil utilização, bastante conhecido e de fácil acesso para a comunidade científica. Para mostrar a eficiência das técnicas computacionais de análise desenvolvidas, procurou-se aplicá-las inicialmente a sistemas cujos modelos dinâmicos são conhecidos na área de sistemas não lineares, e cujos comportamentos são definidos na literatura. É importante ressaltar que não existem na atualidade ferramentas gerais de análise para o estudo de sistemas que apresentam descontinuidades nas variáveis de estado e que, portanto, os resultados advindos da aplicação destas técnicas desenvolvidas em sistemas que apresentam tais características são inéditos.

O trabalho foi estruturado de tal forma que no Capítulo 1 são mostradas as principais estruturas robóticas existentes com o intuito de enfatizar a necessidade do desenvolvimento destas técnicas face à complexidade dinâmica presente em seus modelos, e apresenta-se o desenvolvimento do modelo dinâmico de um módulo robótico constituído de um pêndulo invertido com restrições em seu espaço de trabalho, o qual possui uma descontinuidade nos estados e será utilizado para o estudo das técnicas aqui apresentadas. O Capítulo 2 é dedi-

cado a mostrar as principais ferramentas usadas para identificar comportamentos dinâmicos. Devido à importância dos aspectos computacionais no desenvolvimento do trabalho, dedica-se o Capítulo 3 para apresentar o ambiente de simulação utilizado e ressaltar os principais problemas envolvidos nas simulações e decorrentes das simulações digitais. O Capítulo 4 é dedicado ao detalhamento da obtenção dos Mapas de *Poincaré* através da técnica tradicional e das novas técnicas propostas da recorrência no tempo e recorrência na própria variável. O capítulo 5 mostra a utilidade dos Diagramas de Bifurcação para a verificação de comportamentos dinâmicos de sistemas em função de um determinado parâmetro e os diagramas encontrados para sistemas com e sem descontinuidades e um sistema de quarta ordem, evidenciando a aplicabilidade do método implementado. No Capítulo 6 detalha-se o método implementado para determinação dos expoentes de *Lyapunov*, e mostram-se os espectros de *Lyapunov* obtidos para sistemas contínuos e os progressos obtidos na tentativa de obtê-los para sistemas com descontinuidade. O Capítulo 7 destaca as principais contribuições proporcionadas pelo presente desenvolvimento e algumas sugestões para trabalhos futuros. Finalmente, para facilitar o entendimento aos leitores, procurou-se colocar em anexo as principais definições e teoremas usados na área de análise de sistemas dinâmicos, transcritas da literatura especializada e de algumas teses que abordam o assunto, além do código fonte de um dos programas *CMEX* implementados para as simulações.

Capítulo 1

Estruturas Robóticas

Neste capítulo mostram-se as estruturas robóticas mais conhecidas e utilizadas, fazendo-se alguns comentários sobre os modelos dinâmicos de cada uma delas. O principal objetivo deste capítulo é chamar a atenção para a complexidade dos modelos dinâmicos destas estruturas, bem como evidenciar a importância do estudo de seus comportamentos dinâmicos, visto serem todas elas susceptíveis a condições inadequadas de funcionamento, as quais podem conduzir a regiões de operação onde apareçam fenômenos indesejáveis, como é o caso do caos.

A classificação mostrada a seguir, a qual engloba a maioria dos manipuladores robóticos existentes, tem como parâmetro as articulações existentes entre os elos responsáveis pelo posicionamento do elemento terminal do manipulador (garra). Estas articulações podem ser rotacionais ou prismáticas, caso o movimento relativo entre os elos adjacentes seja rotacional ou linear, respectivamente.

Para aplicar as técnicas de análise propostas, adotou-se um módulo robótico constituído por um pêndulo invertido com restrições em seu espaço de trabalho, cujo modelo dinâmico deriva-se na seção 1.7. Este sistema, embora estruturalmente simples, apresenta comportamentos dinâmicos variados e que justificam sua utilização para estudo. As técnicas de análise propostas e apresentadas no corpo do trabalho são aplicáveis também para o estudo de fenômenos no comportamento dinâmico de sistemas mais complexos, considerando-se uma

junta da estrutura perturbada periodicamente e as subseqüentes paradas.

1.1 Configuração Articulada

O manipulador do tipo articulado possui as articulações responsáveis pelo posicionamento do tipo rotacional. Os modelos mais comuns são os manipuladores do tipo ombro-cotovelo, como o mostrado na figura 1.1, e os manipuladores do tipo paralelogramo, como o mostrado na figura 1.2.



Figura 1.1: Manipulador robótico com configuração articulada do tipo cotovelo.

Na configuração articulada os eixos de rotação das juntas 2 e 3 são paralelos, e estes dois são perpendiculares ao eixo da junta 1, como pode ser visto na figura 1.3. Uma grande vantagem da configuração paralelogramo é que o atuador da junta 3 localiza-se no elo 1, diminuindo o peso a ser suportado pelos elos subseqüentes e, conseqüentemente, exigindo



Figura 1.2: Manipulador robótico com configuração articulada do tipo paralelogramo.

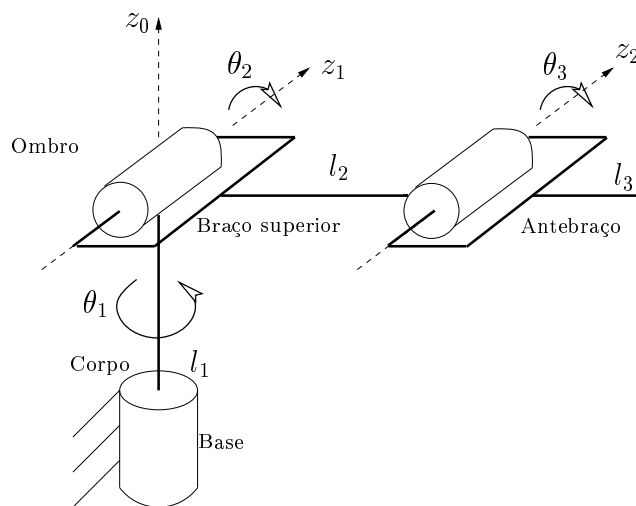


Figura 1.3: Estrutura de um manipulador de configuração articulada.

menos potência dos motores que os acionam.

O modelo dinâmico de um manipulador com a configuração articulada pode ser visto nas equações (1.1), (1.2) e (1.3) (Rivin, 1987),

$$\begin{aligned} T_0 = & \{I_0 + (m_1 l_{1c}^2 + I_1) \cos^2 \theta_1 + m_2 l_1 [l_1 \cos \theta_1 + 2l_{2c} \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta_1] + \\ & + (m_2 l_{2c}^2 + I_2) \cos(\theta_1 + \theta_2)\} \ddot{\theta}_0 + 2\{(m_1 l_{1c}^2 + I_1) \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \\ & + m_2 l_1 [l_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1 + l_{2c} \sin \theta_1 \cos(\theta_1 + \theta_2)] + \\ & + (m_2 l_{2c}^2 + I_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2)\} \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 + \\ & + 2[m_2 l_1 l_{2c} \cos \theta_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) + (m_2 l_{2c}^2 + I_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2)] \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} T_1 = & (m_1 l_{1c}^2 + I_1 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 l_{2c} \cos \theta_2 + m_2 l_{2c}^2 + I_2) \ddot{\theta}_1 + \\ & + (m_2 l_1 l_{2c} \cos \theta_2 + m_2 l_{2c}^2 + I_2) \ddot{\theta}_2 - \{(m_1 l_{1c}^2 + I_1) \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \\ & + m_2 [l_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 + l_1 l_{2c} \sin \theta_1 \cos(\theta_1 + \theta_2)] + \\ & + l_{2c}^2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2)\} \dot{\theta}_0^2 + \\ & + (m_2 l_1 l_{2c} \sin \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + (2m_2 l_1 l_{2c} \sin \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \\ & + g\{m_1 l_{1c} \cos \theta_1 + m_2 [l_1 \cos \theta_1 + l_{2c} \cos(\theta_1 + \theta_2)]\} \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} T_2 = & (m_2 l_1 l_{2c} \cos \theta_2 + m_2 l_{2c}^2 + I_2) \ddot{\theta}_1 + (m_2 l_{2c}^2 + I_2) \ddot{\theta}_2 + \\ & - \{m_2 [l_1 l_{2c} \cos \theta_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_{2c}^2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2)] + \\ & + I_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2)\} \dot{\theta}_0^2 - (m_2 l_1 l_{2c} \sin \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + g[m_2 l_{2c} \cos(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned} \quad (1.3)$$

onde T_i são os torques desenvolvidos pelos atuadores das juntas, m_i são as massas dos elos, l_i são seus comprimentos, l_{ic} localizam seus centros de massa e I_i são os momentos de inércia de cada elo, considerando-se uma geometria simétrica em relação aos eixos e distribuição uniforme de massa. Caso contrário, este modelo é bastante mais sofisticado.

Este modelo, por ser rotacional, apresenta um alto grau de não linearidade, com produtos de derivadas, termos em senos e cossenos e acoplamentos entre os elos que pode conduzir a um histórico no tempo bastante complexo para os torques envolvidos. Estas não linearidades e acoplamentos podem ser substancialmente reduzidas, embora não eliminadas, através do

uso de contra-pesos ou da redistribuição adequada da massa dos elos. Por exemplo, os termos gravitacionais não lineares podem ser atenuados fazendo-se $l_{1c} = l_{2c} = 0$. Não é, entretanto, uma tarefa muito simples de ser executada, uma vez que a massa da carga do manipulador pode não ser constante.

Quando a configuração articulada possui uma estrutura em paralelogramo (1.4), suas equações de movimento são dadas por (1.4). Para este caso, pode-se ter o número de não

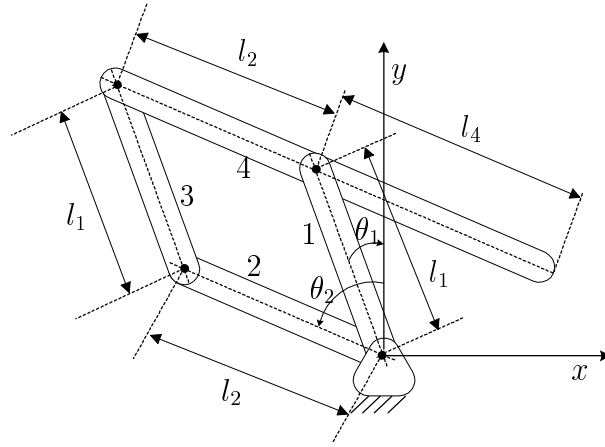


Figura 1.4: Estrutura em paralelogramo de um manipulador de configuração articulada.

linearidades bastante reduzido através da adoção de algumas medidas construtivas.

$$\begin{aligned}
M_1 = & (m_1 l_{1c}^2 + I_1 + m_3 l_{3c}^2 + I_3 + m_4 l_1^2 + m_0 l_1^2) \ddot{\theta}_1 + \\
& + (m_3 l_2 l_{3c} - m_4 l_1 l_{4c} - m_0 l_1 l_4) \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 + \\
& + (m_3 l_2 l_{3c} - m_4 l_1 l_{4c} - m_0 l_1 l_4) \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + \\
& + (m_1 l_{1c} + m_3 l_{3c} + m_4 l_1 + m_0 l_1) g \sin \theta_1
\end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}
M_2 = & (m_3 l_2 l_{3c} - m_4 l_1 l_{4c} - m_0 l_1 l_4) \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 + \\
& + (m_2 l_{2c}^2 + I_2 + m_3 l_2^2 + m_4 l_{4c}^2 + I_4 + m_0 l_4^2 + I_0) \ddot{\theta}_2 + \\
& - (m_3 l_2 l_{3c} - m_4 l_1 l_{4c} - m_0 l_1 l_4) \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + \\
& + (m_2 l_{2c} + m_3 l_2 - m_4 l_{4c} - m_0 l_4) g \sin \theta_2
\end{aligned}$$

Por exemplo, se por construção faz-se $m_3l_2l_{3c} - m_4l_1l_{4c} - m_0l_1l_4 = 0$, tem-se os acoplamentos entre os eixos de coordenadas eliminados, bem como os termos não lineares (exceto os gravitacionais). Se a massa da carga não for considerada ($m_0 \ll m_4$), chega-se à expressão $m_3l_2l_{3c} = m_4l_1l_{4c}$. Isto satisfeito e adicionando-se algum sistema para contrabalançar as forças de gravidade, vários termos não lineares das equações (1.4) podem ser eliminados (veja Fernandes (1997)).

Vê-se, portanto, que a estrutura em paralelogramo pode simplificar o controle, embora este tipo de estrutura tenha como aspecto negativo a limitação no espaço de trabalho devido à interferência entre os diversos elos.

A figura 1.5 mostra o protótipo de um robô articulado que vem sendo projetado e construído no Laboratório de Sistemas Robóticos da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da UNICAMP. Existe ainda em andamento no mesmo laboratório um trabalho cuja meta é desenvolver uma versão paralelogramo para o mesmo manipulador.

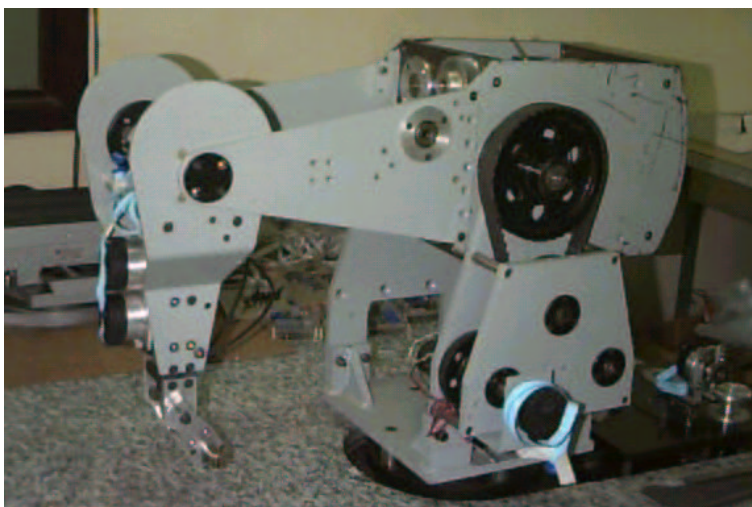


Figura 1.5: Protótipo de um manipulador robótico com configuração articulada do tipo cotovelo.

1.2 Configuração Esférica

Pertencem a esta classificação os robôs cujos eixos formam um sistema de coordenadas polares. Apresentam as duas primeiras articulações rotativas e a terceira prismática, sendo os dois eixos de rotação e o eixo de deslocamento linear mutuamente perpendiculares, como mostrado na figura 1.6. Um manipulador industrial com esta configuração pode ser visto na figura 1.7.

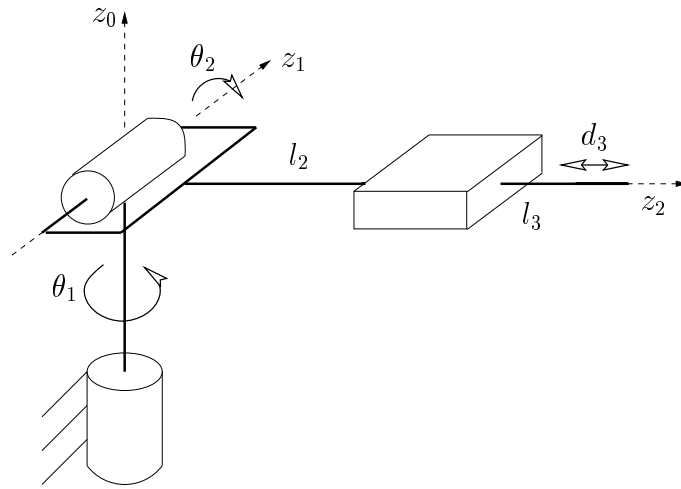


Figura 1.6: Estrutura de um manipulador de configuração esférica.

Este tipo de configuração apresenta uma equação dinâmica altamente não linear, onde aparecem forças de coriolis e centrípetas. Isto faz do problema de controle uma tarefa computacional difícil porque contém vários termos não lineares cujos efeitos tendem a provocar desvios nos movimentos prescritos (Rivin, 1987).

1.3 Configuração Scara

Também apresenta as duas primeiras juntas rotativas e a terceira prismática, diferenciando-se da configuração anterior pelo fato de possuir os dois eixos de rotação e o eixo de deslocamento linear paralelos, como representado na figura 1.8. O fato de também possuir juntas



Figura 1.7: Manipulador robótico com configuração esférica.

rotativas faz com que seu modelo dinâmico seja não linear e, conseqüentemente, exige um sistema de controle sofisticado. O manipulador da figura 1.9 apresenta esta estrutura.

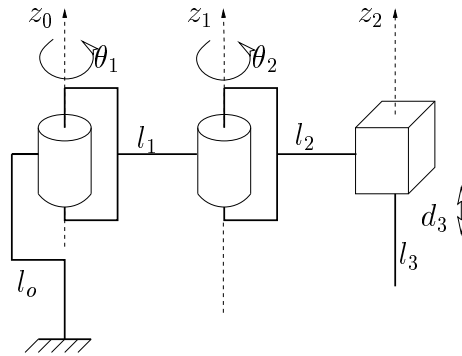


Figura 1.8: Estrutura de um manipulador de configuração scara.

1.4 Configuração Cilíndrica

Possui a primeira junta rotativa e as duas seguintes prismáticas, cujos eixos formam um sistema de coordenadas cilíndricas, como mostrado na figura 1.10. O robô da figura 1.11



Figura 1.9: Manipulador robótico com configuração scara.

é cilíndrico.

Seu modelo dinâmico também apresenta algumas não linearidades decorrentes da existência de uma junta rotativa.

1.5 Configuração Cartesiana

Apresenta as três primeiras juntas prismáticas, cujos eixos são coincidentes com o sistema de coordenadas cartesianas, como pode ser visto na figura 1.12. Um exemplo pode ser visto na figura 1.13.

Uma grande vantagem desta configuração é o fato de apresentar um modelo dinâmico desacoplado, o que favorece o controle.

1.6 Configuração Paralela

Robô cujos braços possuem juntas prismática ou rotacionais concorrentes. Tem-se um exemplo desta estrutura na figura 1.14 e o robô da figura 1.15 tem esta configuração.

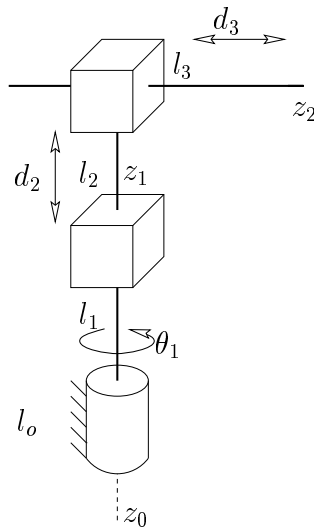


Figura 1.10: Estrutura de um manipulador de configuração cilíndrica.



Figura 1.11: Manipulador robótico com configuração cilíndrica.

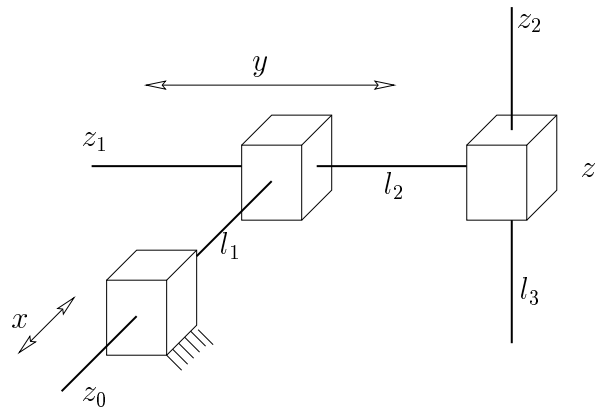


Figura 1.12: Estrutura de um manipulador de configuração cartesiana.

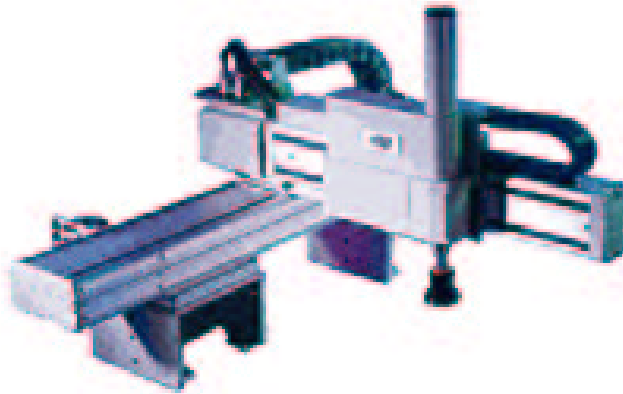


Figura 1.13: Manipulador robótico com configuração cartesiana.

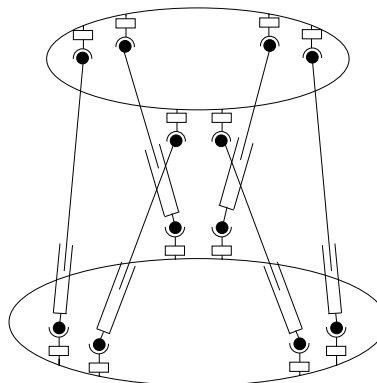


Figura 1.14: Estrutura de um manipulador de configuração paralela.



Figura 1.15: Manipulador robótico com configuração paralela.

O fato de existirem diversos tipos de juntas concorrentes leva a um modelo dinâmico também bastante complexo e não linear e, conseqüentemente, exige um sistema de controle também mais complexo. Embora aumente a complexidade, esta configuração é utilizada quando se deseja dar ao sistema uma maior flexibilidade, obtida através da inserção de graus de liberdade adicionais.

1.7 Modelo Dinâmico do Módulo Robótico Estudado

O objetivo deste trabalho foi estudar e desenvolver ferramentas computacionais para auxiliar na análise dinâmica de sistemas não lineares. Neste intuito, optou-se pela utilização de um módulo robótico que, apesar de ser bem simples (conforme mostra a figura 1.16), apresenta dois tipos distintos de não linearidades: a primeira intrínseca do modelo matemático, e a segunda decorrente da inserção dos obstáculos no seu espaço de trabalho.

O módulo robótico representativo do último elo de um robô com a configuração articulada e com restrições em seu espaço de trabalho comporta-se como um pêndulo invertido de massa m e comprimento l , como mostrado na figura 1.17, e cujo modelo dinâmico será aqui apresentado.

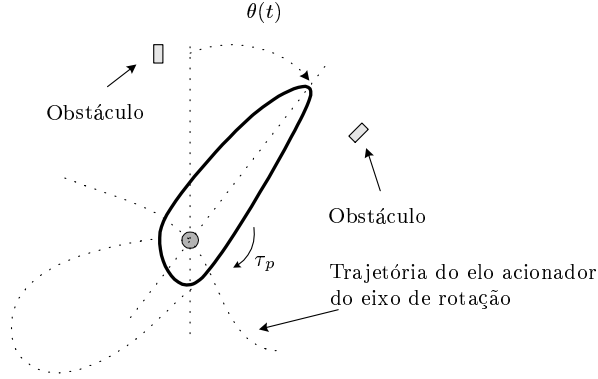


Figura 1.16: Módulo robótico articulado.

Segundo as equações de *Euler-Lagrange* (Spong e Vidyasagar, 1989), para sistemas não conservativos o torque resultante em cada junta de um robô constituído de elos rígidos e cadeia cinemática serial pode ser determinado pela equação 1.5:

$$\tau = \frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{\theta}} - \frac{dL}{d\theta} \quad (1.5)$$

onde L é o Lagrangeano dado pela equação 1.6

$$L = K_t - P_t, \quad (1.6)$$

sendo K_t a energia cinética total e P_t a energia potencial total deste sistema chamado robô.

1.7.1 Cálculo da Energia Cinética Total

Considerando-se o fato de que trata-se de um elo delgado e com massa uniformemente distribuída, a energia cinética total pode ser bem representada apenas pela sua componente translacional, dada pela equação $K = \frac{1}{2}mv^2$. Portanto, para se obter uma expressão para esta energia total, é necessário o equacionamento para posição e velocidade, como mostrado a seguir.

✓ Equações de posição: Da figura 1.17, pode-se ver que:

$$x = l \sin(\theta)$$

$$y = l \cos(\theta)$$

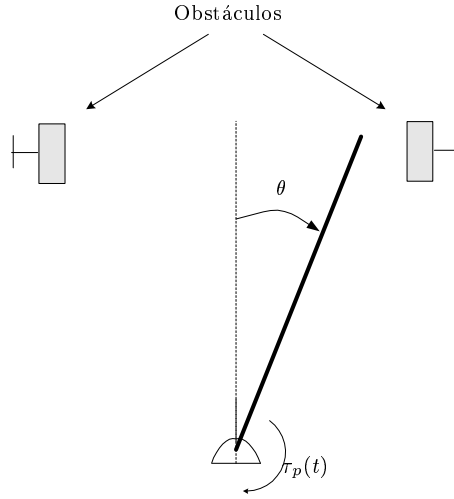


Figura 1.17: Módulo robótico com obstáculos.

- ✓ Equações de velocidade: Sendo a velocidade o resultado da derivada da posição, tem-se que:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= l \cos(\theta) \dot{\theta} \\ \dot{y} &= -l \sin(\theta) \dot{\theta}\end{aligned}$$

Portanto,

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = l^2 \cos^2(\theta) \dot{\theta}^2 + (-l)^2 \sin^2(\theta) \dot{\theta}^2 = l^2 \dot{\theta}^2$$

- ✓ Energia Cinética: Substituindo-se as expressões anteriores na equação da energia cinética, tem-se o seguinte resultado:

$$K = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \quad (1.7)$$

1.7.2 Cálculo da Energia Potencial Total

Usando a figura 1.17 como referência, pode-se facilmente determinar a energia potencial como sendo:

$$P = mgl \cos(\theta) \quad (1.8)$$

1.7.3 Lagrangeano

O Lagrangeano é dado pela equação 1.6. Substituindo os valores de K (1.7) e P (1.8), tem-se

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos(\theta) \quad (1.9)$$

1.7.4 Cálculo do Torque no Elo

O torque no elo, segundo Lagrange, é dado pela equação 1.5. Mostra-se a seguir a determinação desta equação.

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\dot{\theta}} &= ml^2\dot{\theta} \\ \frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{\theta}} &= ml^2\ddot{\theta} \\ \frac{dL}{d\theta} &= mgl\sin(\theta) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Substituindo-se as equações 1.10, 1.10 e 1.10 na equação 1.5, tem-se o torque resultante.

$$\tau = ml^2\ddot{\theta} - mgl\sin(\theta) \quad (1.11)$$

Finalmente, considerando-se os efeitos do amortecimento viscoso, o torque de equilíbrio dinâmico que deve ser fornecido pelo atuador da junta é determinado como:

$$\tau = u - \alpha\dot{\theta} \quad (1.12)$$

onde u é o torque de entrada do atuador e α é a constante de amortecimento viscoso do sistema.

Igualando-se as equações 1.11 e 1.12, considerando $u = \beta\cos(wt)$, tem-se a equação dinâmica do sistema:

$$\tau = ml^2\ddot{\theta} - mgl\sin(\theta) = \beta\cos(wt) - \alpha\dot{\theta}$$

ou, ainda,

$$ml^2\ddot{\theta} = mgl\sin(\theta) - \alpha\dot{\theta} + \beta\cos(wt) \quad (1.13)$$

Reescalando tempo e comprimento de modo que os obstáculos sejam considerados a uma unidade de distância da posição de equilíbrio vertical (instável) do pêndulo e que a constante de tempo do pêndulo seja a unidade, fazendo $x_1 = \theta$ e $x_2 = \dot{\theta}$ e acrescentando-se o efeito dos obstáculos, chega-se às equações de estado (1.14):

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \sin(x_1) - \alpha x_2 + \beta\cos(wt) \end{bmatrix} \quad \text{quando } |x_1| < 1 \quad (1.14)$$

$$x_2 \rightarrow -k_r x_2 \quad \text{quando } |x_1| = 1$$

onde k_r é o coeficiente de reposição da velocidade após cada choque, o qual depende dos materiais dos elementos que se chocam (Nogueira *et al.*, 2000).

É importante ressaltar aqui mais uma vez, que o sistema estudado neste trabalho é não linear devido a duas características. A primeira diz respeito ao termo $\sin(x_1)$, que aparece na segunda equação da sua representação de estado. A segunda diz respeito à descontinuidade da variável de estado x_2 , que ocorre durante o impacto com os obstáculos.

Se a não linearidade do sistema fosse somente devido ao termo $\sin(x_1)$, ou seja, se não houvesse obstáculos, as técnicas de análise tradicionais poderiam até ser consideradas suficientes. Entretanto, a descontinuidade da variável x_2 faz com que o modelo analisado tenha propriedades que não satisfazem a grande maioria das hipóteses assumidas para as demonstrações dos mais importantes teoremas e métodos de análise que se conhece. Por exemplo, a integração da equação variacional com aplicação do método de ortonormalização de *Gram-Schmidt* neste caso não se aplica, inviabilizando a determinação do espectro de expoentes de *Lyapunov* e das dimensões fractais.

Através da leitura do artigo *Shaw e Rand (1989)*, pode-se notar as dificuldades encontradas na análise das seções de *Poincaré* obtidas pelos métodos convencionais. Os autores daquele artigo não puderam concluir com certeza sobre a existência de regiões caóticas no sistema, exatamente porque a seção de *Poincaré* obtida através dos programas para computação

digital disponíveis na época, e que ainda são empregados atualmente por muitos pesquisadores, não é um plano, é na verdade um paralelepípedo de espessura muito pequena, porém não nula. Isto leva a graves imprecisões principalmente em sistemas com descontinuidades.

É ainda importante observar que mesmo para pequenos deslocamentos (valores pequenos de x_1), a linearização do termo $\sin(x_1)$ (Shaw e Rand, 1989; Moore e Shaw, 1990; Lenci e Rega, 1998) pode levar a comportamentos distintos entre o modelo real e o aproximado, mesmo sendo o valor de $\sin(x_1)$ bem próximo do valor de x_1 (Nogueira *et al.*, 2001).

Outro aspecto importante a ser observado é a presença da descontinuidade na variável x_2 do sistema. Esta característica leva a um sistema que não atende às condições para aplicação de algumas das técnicas de identificação de caos, como os expoentes de *Lyapunov* e o método de *Melnikov*, por exemplo. Este assunto será abordado com maior detalhamento no capítulo 6.

Capítulo 2

Caos: Como Identificá-lo

Existem hoje diversas técnicas empregadas na detecção de dinâmica caótica nos mais diversos tipos de sistemas. Além disto, cada sistema pode apresentar características não lineares distintas, ou mesmo apresentar duas ou mais características não lineares distintas, tais como *backlash*, relé, zona morta, funções transcendentais como por exemplo senos e cossenos, produtos entre variáveis $(x_i^2, x_i x_j, \dot{x}_i x_j, \ddot{x}_i^2)$ e descontinuidades, entre outras. Isto tem como consequência o fato de que nem sempre uma técnica de identificação pode ser considerada a mais eficiente para todos os sistemas não lineares. A seguir faz-se uma pequena descrição das técnicas mais conhecidas e aplicadas.

2.1 Resposta no Tempo

Uma característica clássica dos sistemas caóticos é o fato de que possuem trajetórias complexas totalmente imprevisíveis e que podem jamais voltar a um determinado ponto anteriormente visitado. Isto teoricamente permite dizer que esta ferramenta de identificação mostra se o caos existe ou não em determinado sistema.

Entretanto, para que conclusões precipitadas não sejam tiradas, alguns cuidados devem ser tomados, dentre os quais:

- A análise deve ser feita quando a resposta do sistema já tiver atingido um conjunto limite, ou seja, após o sistema ter encontrado um atrator. Como existem sistemas que possuem transitórios muito longos, deve-se prestar especial atenção para que eles sejam descartados, sob pena da análise conduzir a conclusões equivocadas.
- Existem sistemas que podem apresentar soluções periódicas de um ou mais períodos muito longos, que em uma observação descuidada, podem ser confundidos com respostas não periódicas. Nestes casos diz-se que o sistema ainda não atingiu seu conjunto limite.
- Existem sistemas cujas soluções são quasi-periódicas que também podem gerar erros de interpretação na análise, principalmente quando se restringe a análise à série temporal ou ao espaço de estado do sistema. Isto pode ocorrer quando existem frequências de oscilação com relações irracionais entre si, geralmente ocasionadas por excitação externa ao sistema estudado.

As figuras 2.1, 2.2 e 2.3 mostram, respectivamente, exemplos de respostas no tempo (série temporal) periódica, quasi-periódica e caótica (Parker e Chua, 1989). As respostas periódica e caótica foram obtidas através da simulação da equação de *Duffing* mostrada em (2.1). A resposta quasi-periódica foi obtida através da equação de *Van der Pol* mostrada em (2.2).

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3 - \epsilon y + \gamma \cos(\omega t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= (1 - x^2)y - x + A \cos(\omega t)\end{aligned}\tag{2.2}$$

Nestes exemplos clássicos observa-se com clareza a diferença de comportamento qualitativo entre os três casos. Entretanto, nem sempre isto é trivial e também pode-se notar que a resposta no caso caótico poderia ser de um sistema periódico perturbado com um sinal aleatório (ruído). Isto pode ser melhor observado através das figuras 2.4 e 2.5, onde são mostradas as respostas no tempo para as equações de *Duffing* e *Van der Pol* para as

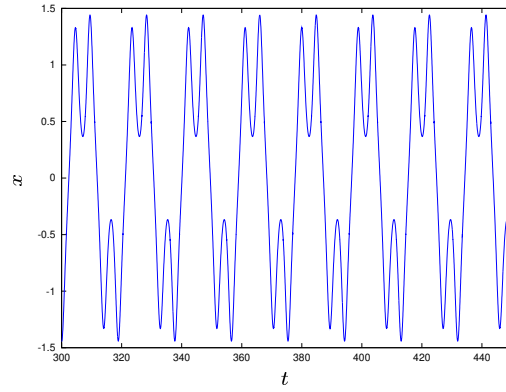


Figura 2.1: Resposta no tempo da equação de *Duffing* (2.1) para $\epsilon = 0.22$, $\gamma = 0.3$ e $w = 1.0$.

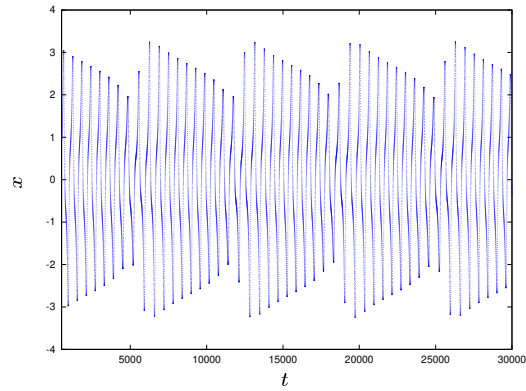


Figura 2.2: Resposta no tempo da equação de *Van der Pol* (2.2) para $A = 0.5$ e $w = 1.1$.

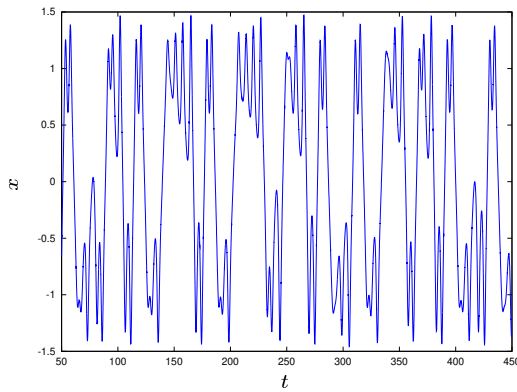


Figura 2.3: Resposta no tempo da equação de *Duffing* (2.1) para $\epsilon = 0.25$, $\gamma = 0.3$ e $w = 1.0$.

mesmas condições das figuras 2.1 e 2.2, respectivamente, com a substituição da perturbação cossenoidal por uma entrada de ruído branco.

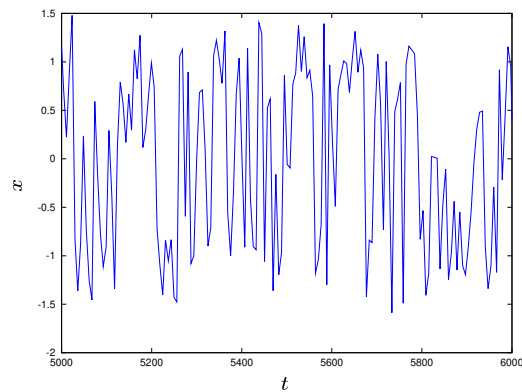


Figura 2.4: Resposta no tempo da equação de *Duffing* (2.1) para as mesmas condições da figura 2.1, substituindo-se o cosseno por um ruído branco.

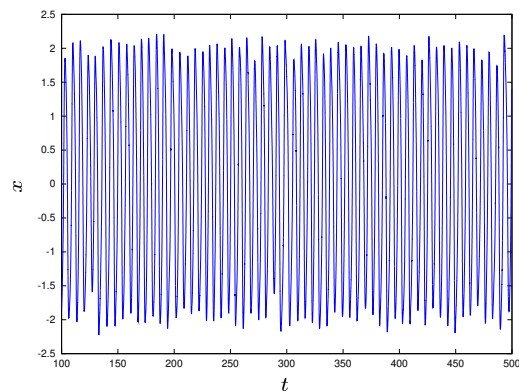


Figura 2.5: Resposta no tempo da equação de *Van der Pol* (2.2) para as mesmas condições da figura 2.2, substituindo-se o cosseno por um ruído branco.

Uma análise sem critérios destas respostas no tempo poderia levar à conclusão errada de que os sistemas estariam operando em regiões de comportamento caótico ao invés de periódico e quasi-periódico, como nas figuras 2.1 e 2.2.

2.2 Planos de Fase e Espaço de Estado

Trata-se de uma ferramenta qualitativa de análise, pelo fato de somente poder mostrar se o sistema é ou não periódico, uma vez que todo sistema com solução periódica possui como plano de fase uma curva fechada, normalmente conhecida como ciclo limite.

Todos os cuidados relativos a transitórios também devem ser considerados, ou seja, a análise deve ser feita quando o sistema já estiver em seu conjunto limite.

Os avanços tecnológicos computacionais em termos de velocidade de processamento e disponibilidade de recursos gráficos ampliaram bastante as possibilidades e utilidades desta ferramenta, podendo ser usada em uma análise preliminar na detecção de caos, fazendo o papel de um filtro que descarta os sistemas periódicos, ou seja, aqueles que apresentam uma curva fechada como plano de fase. Entretanto suas limitações são enormes pois permite somente análises pontuais, ou seja, somente para alguns valores de parâmetros.

As figuras 2.6, 2.7 e 2.8 mostram, respectivamente, os exemplos de planos de fase dos mesmos sistemas analisados anteriormente nas condições de comportamento periódico, quasi-periódico e caótico.

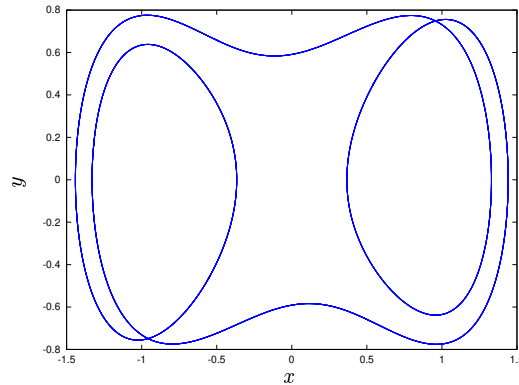


Figura 2.6: Plano de fase para a equação de *Duffing* (2.1) para $\epsilon = 0.22$, $\gamma = 0.3$ e $w = 1.0$.

Pode-se perceber que, aparentemente, não existe dificuldade em diferenciar os três tipos de sistemas apenas através da análise de seus planos de fase. Entretanto, esta análise somente pode ser feita quando os sistemas já tiverem alcançado o conjunto limite. Antes disto,

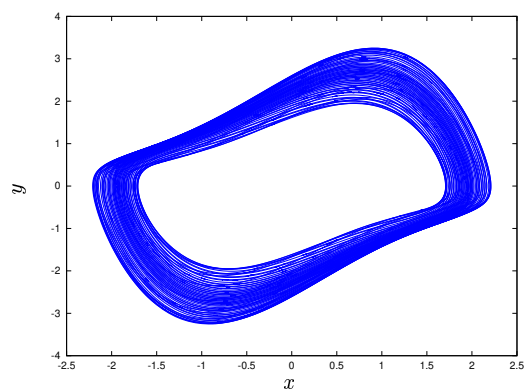


Figura 2.7: Plano de fase da equação de *Van der Pol* (2.2) para $A = 0.5$ e $w = 1.1$.

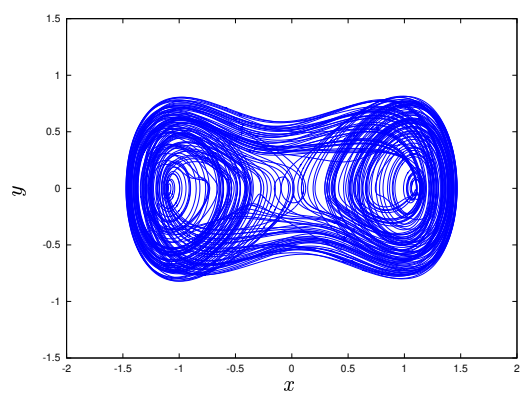


Figura 2.8: Plano de fase para a equação de *Duffing* (2.1) para $\epsilon = 0.25$, $\gamma = 0.3$ e $w = 1.0$.

qualquer interpretação pode ser precipitada. A figura 2.9, por exemplo, em uma primeira análise poderia ser considerada como uma situação de comportamento caótico, como o da figura 2.8. Entretanto, trata-se do mesmo caso mostrado na figura 2.6 na situação em que o conjunto limite ainda não havia sido atingido. Isto poderia levar ao seguinte questionamento: quer dizer que um sistema caótico está sempre em condição transitória? A resposta é não, pois se os mesmos sistemas da figuras 2.6 e 2.8 forem analisados a partir das seções de *Poincaré*, os seus conjuntos limites são distintos e também as seções de *Poincaré* destes sistemas antes de atingirem os conjuntos limites são distintas da situação onde já atingiram tais conjuntos.

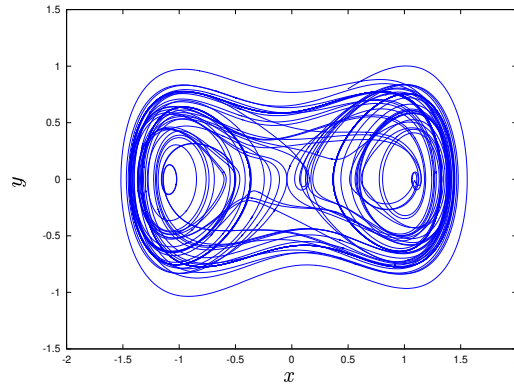


Figura 2.9: Plano de fase para a equação de *Duffing* (2.1) para $\epsilon = 0.22$, $\gamma = 0.3$ e $w = 1.0$, fora do conjunto limite.

2.3 Análise Espectral

Um sinal no tempo, sendo ele periódico ou não, pode ser decomposto em um somatório de sinais cossenoidais e/ou senoidais utilizando-se a teoria de transformadas de *Fourier*. Como resultado da aplicação desta teoria, tem-se o espectro de frequências do sinal analisado, e o conteúdo deste espectro fornece informações importantes sobre o comportamento do sistema analisado.

O exemplo mostrado na figura 2.10 foi obtido a partir de uma senóide amostrada a uma taxa de 10 MHz. A existência de um único pico confirma a característica periódica do sinal.

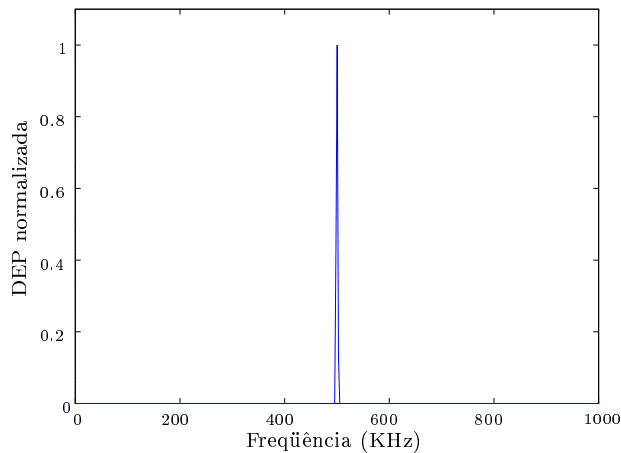


Figura 2.10: Densidade espectral de potência (DEP) de uma senóide com frequência de 500 KHz, amostrada a uma taxa de 10 MHz.

Para os sinais quasi-periódicos, o espectro de frequências também deve conter um número discreto de picos, uma vez que tais sinais são formados pela soma de dois ou mais sinais senoidais e/ou cossenoidais cujas razões entre frequências sejam irracionais (Comin, 1995). A figura 2.11 mostra o espectro encontrado para a variável x da equação de *Van der Pol* (2.2), usando $A = 0.5$ e $w = 1.1$. O mesmo comportamento pode ser observado na figura 2.12, que mostra o espectro para a variável y , usando as mesmas condições anteriores. Como os valores das frequências envolvidas não são necessárias para este tipo de análise, optou-se também pela normalização desta variável.

É importante observar que, teoricamente, o que distingue um sinal quasi-periódico de um sinal periódico é a distância entre os picos do espectro. Para sinais quasi-periódicos não existe uma relação racional entre as frequências dos picos. Na prática, devido à dificuldade de se determinar se a distância medida é precisamente um valor racional ou irracional, um espectro que parece ser de um sinal quasi-periódico pode na verdade ser de um sinal periódico com um período muito longo, significando que conclusões obtidas somente com a utilização deste método de análise podem conter erros, embora por outro lado possam dar fortes indícios sobre o comportamento real do sistema.

Finalmente, para sinais de natureza caótica, cuja principal característica é a não repeti-

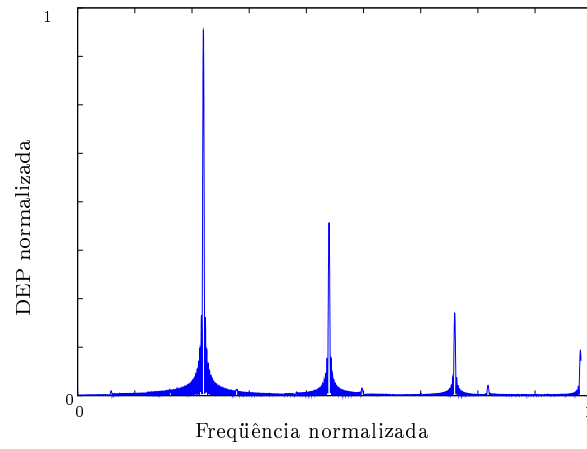


Figura 2.11: Densidade espectral de potência (DEP) para a variável x da equação de *Van der Pol* (2.2), usando $A = 0.5$ e $w = 1.1$.

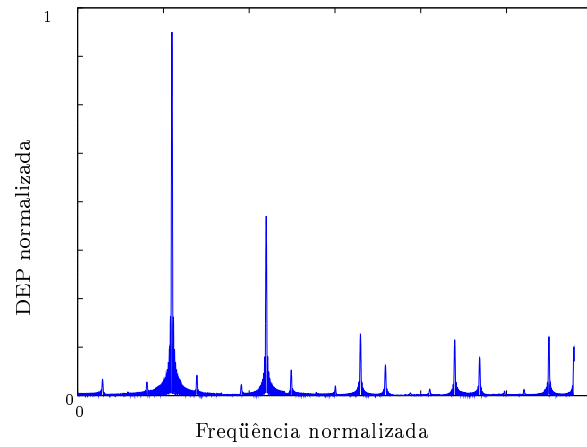


Figura 2.12: Densidade espectral de potência (DEP) para a variável y da equação de *Van der Pol* (2.2), usando $A = 0.5$ e $w = 1.1$.

bilidade do sinal, o espectro é composto por uma faixa contínua contendo infinitas frequências. É importante ressaltar que, embora saiba-se que um sistema caótico apresenta um espectro contínuo de frequências, uma análise espectral não permite a imediata identificação do caos, a menos que se tenha certeza de que o sinal analisado esteja completamente livre de ruídos. A figura 2.13 mostra o espectro obtido para a equação de *Duffing* nas mesmas condições usadas para o plano de fase mostrado na figura 2.8, indicando um comportamento caótico. Pode-se ver que existe uma faixa contínua de frequências do sinal.

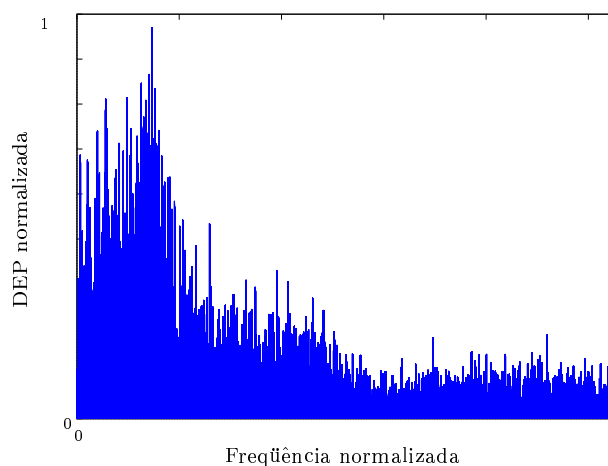


Figura 2.13: Densidade espectral de potência (DEP) para a equação de *Duffing* (2.1) para $\epsilon = 0.25$, $\gamma = 0.3$ e $w = 1.0$.

Cabe também aqui ressaltar a importância de se garantir que as análises sejam feitas quando o sistema já tenha atingido um conjunto limite, ou seja, quando já se tenha passado um tempo suficientemente grande que garanta o descarte dos efeitos transitórios.

2.4 Mapas de *Poincaré*

Técnica clássica de análise dinâmica de sistemas, trata-se de uma ferramenta muito utilizada na identificação de caos. Baseia-se na idéia de que determinadas características tais como estruturas fractais, atratores estranhos e ferraduras de *Smale*, estão presentes nos mapeamentos de sistemas caóticos.

Uma estrutura fractal é aquela que se repete independentemente da escala em que é observada. As figuras 2.14, 2.15 e 2.16 mostram três exemplos bastante citados de estruturas fractais (Comin, 1995; Fiedler-Ferrara e Prado, 1994; Gouvêa, 2000). Nestas figuras podem-

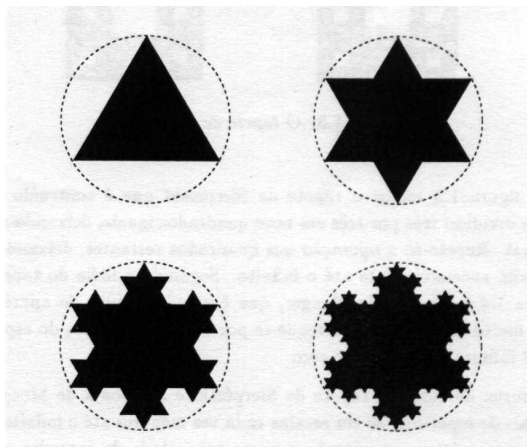


Figura 2.14: A curva de Koch.

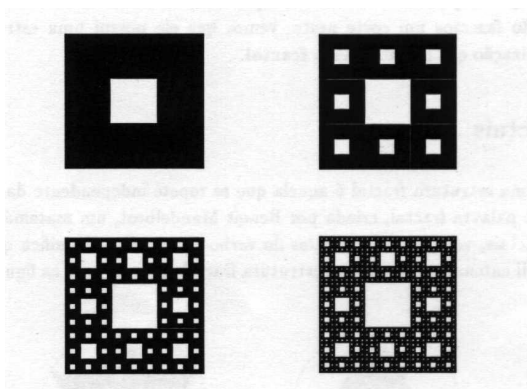


Figura 2.15: Tapete de Sierpinski.

se ver as características fractais (Barnsley, 1988) repetindo-se em escalas cada vez menores e, delas, pode-se abstrair a idéia de como uma área finita pode ser cercada por uma curva infinita, ou como uma superfície infinita pode estar contida em uma região limitada do espaço.

As ferraduras de *Smale* são obtidas através de processos sucessivos de contração e expansão. Seja um retângulo de vértices ABCD. Este retângulo sofre uma contração na

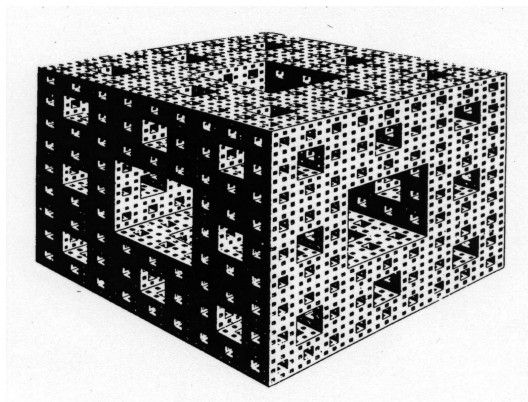


Figura 2.16: Esponja de Menger.

direção vertical e uma expansão na direção horizontal, de modo que os novos vértices passam a ser EFGH (figura 2.17). O novo retângulo alterado é dobrado e colocado dentro do espaço do retângulo de vértices ABCD. A figura obtida lembra uma ferradura, e é o motivo do nome escolhido por *Smale*. Este processo pode ser repetido indefinidamente, o que mostra que a

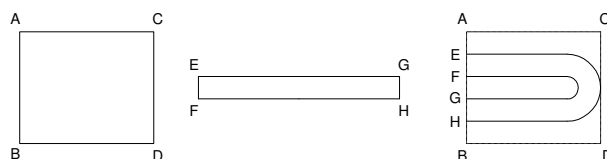


Figura 2.17: Processo de obtenção da ferradura de *Smale*.

existência de dobras também explica o fato de uma superfície infinita poder estar contida em uma região limitada do espaço.

A existência de estruturas fractais é prova da existência de atratores estranhos. Entretanto, cabe aqui ressaltar que nem sempre um atrator estranho significa a existência de comportamento caótico. Atratores estranhos não caóticos já foram observados em algumas regiões dos espaços de parâmetros de sistema não lineares excitados por funções quasi-periódicas (Grebogi *et al.*, 1984; Romeiras *et al.*, 1987; Heagy e Hammel, 1994; Pikovsky e Feudel, 1995). Nos sistemas onde não existem funções forçantes quasi-periódicas, a visualização de uma estrutura fractal em um mapa de *Poincaré* é prova qualitativa de comportamento caótico deste

sistema (Comin, 1995).

Trata-se, portanto, de uma técnica qualitativa de análise, cujos métodos de construção certamente foram muito beneficiados pelos avanços tecnológicos, uma vez que exige uma grande capacidade de armazenamento de informações para que uma boa análise possa ser feita. Um exemplo de mapa de *Poincaré* pode ser visto na figura 2.18. Pode-se observar que esta figura mostra uma estrutura delgada e que contém ferraduras de *Smale*.

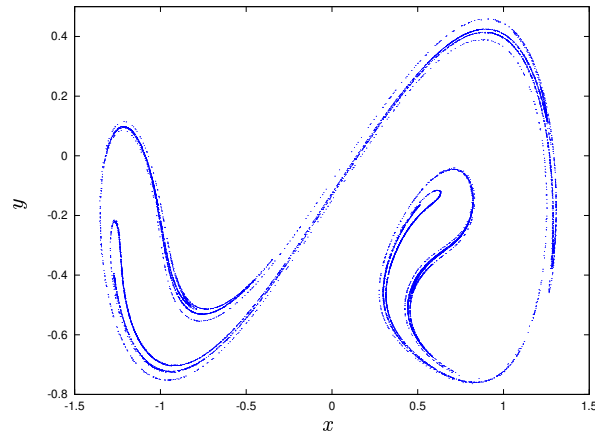


Figura 2.18: Mapa de *Poincaré* para a equação de *Duffing*.

Sendo esta uma das ferramentas bastante utilizadas neste trabalho, ela será melhor detalhada no capítulo 4.

2.5 Expoentes de *Lyapunov*

Os sistema caóticos têm como principal característica a sensibilidade às condições iniciais. Assim sendo, para um sistema caótico, trajetórias que partem de condições iniciais infinitesimalmente próximas podem afastar-se durante a evolução temporal. O que os expoentes de *Lyapunov* indicam é a taxa média de afastamento ou aproximação de trajetórias iniciadas com tais condições iniciais.

Existem muitas referências bibliográficas que tratam deste assunto (Wolf *et al.* (1985),

Parker e Chua (1989), Comin (1995), Müller (1995), Klecza e Kreuzer (1995), Theodossiades e Natsiavas (2000), Begley e Virgin (1998), entre outros). Entretanto, por ser uma ferramenta bastante útil para análises quantitativas sobre o comportamento de sistemas, diferentemente dos métodos até aqui descritos, terá no capítulo 6 um tratamento mais detalhado.

Capítulo 3

Ambiente de Simulação e Aspectos Computacionais

O fato deste trabalho ter sido totalmente desenvolvido com base em simulações computacionais justifica a importância de dedicar-se este capítulo para descrever o ambiente de simulação usado, bem como evidenciar os principais problemas computacionais envolvidos nas simulações.

3.1 O Ambiente de Simulação

O *Simulink* é um pacote de *software* para modelagem, simulação e análise de sistemas dinâmicos. Suporta sistemas lineares e não lineares, modelados em tempo contínuo ou discreto, ou ainda de uma forma híbrida, ou seja, parte discreta e parte contínua. Além disto, permite que existam diferentes taxas de amostragem dentro de um mesmo modelo.

Sua interface gráfica para construir modelos usando-se diagramas de blocos permite que estes modelos possam ser construídos de maneira relativamente fácil.

Outra característica importante e bastante útil é o fato de que o pacote permite que alterações de parâmetros sejam feitas a qualquer momento, durante as simulações, de forma

que os resultados possam ser vistos imediatamente. Tudo isto somado com a possibilidade de acesso a todas as ferramentas de análise do MATLAB®.

Estas, entre inúmeras outras, foram algumas das razões que fizeram do *Simulink* o ambiente de simulação escolhido para as análises e que fazem dele, hoje, um dos pacotes mais usados nos meios acadêmicos e indústrias para modelar e simular sistemas dinâmicos.

Um recurso do *Simulink* muito utilizado nas simulações realizadas neste trabalho de tese foi o bloco chamado *S-function* (*System-function*), o qual permite a inserção de novos blocos que podem ser criados através de linguagens de programação de alto nível.

3.1.1 As *S-functions*

Uma *S-function* é uma rotina que simula o comportamento de um determinado sistema dinâmico usando um padrão específico de entrada e saída de dados, e que permite a fácil incorporação dos recursos do *Simulink* e do MATLAB® para resolução de equações diferenciais, sendo que pode ser escrita através de linguagens de alto nível como *C*, *Pascal*, *Fortran*, etc.

Para que esta rotina seja incorporada ao modelo do *Simulink*, existe um bloco também chamado de *S-function*, em cuja caixa de diálogo são especificados o nome do programa criado e os parâmetros de inicialização a serem passados para ela, como pode ser visto na figura 3.1.

Cada bloco dentro de um modelo no *Simulink* tem as seguintes características gerais: um vetor de entradas, um vetor de saídas e um vetor de estados, como mostrado na figura 3.2. Este vetor de estados pode consistir de estados contínuos, discretos ou ambos.

Uma característica importante da *S-function* é que ela permite que o relacionamento matemático entre estas entradas, saídas e estados seja feita tanto em linguagem *Matlab* (*M file*) quanto em linguagem *C* ou *C++*, *Pascal* ou *Fortran* (*C MEX file*). Todas as rotinas disponíveis para *S-functions* feitas em *M file* existem para as *S-functions C MEX*. O inverso não é válido, ou seja, o *Simulink* tem rotinas especiais para as *S-functions* feitas com o *C MEX*.

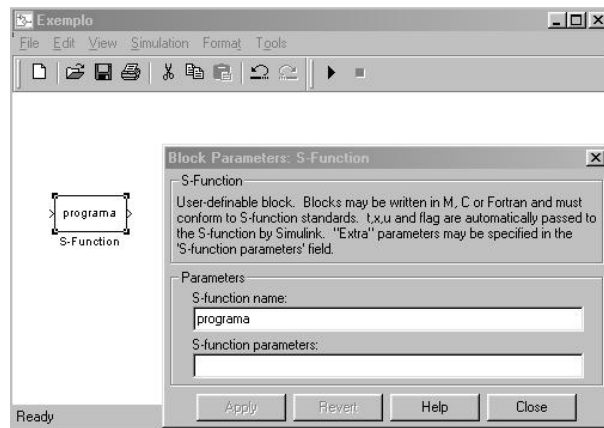


Figura 3.1: Exemplo de um bloco *S-function* que usa um programa chamado "programa", especificado em sua caixa de diálogo.

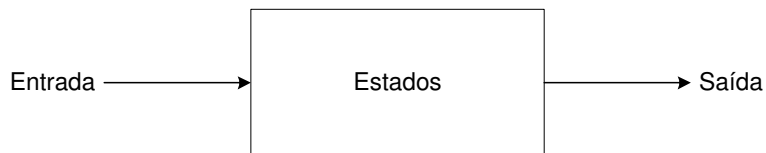


Figura 3.2: Características gerais de cada bloco dentro de um modelo no *Simulink*.

A diferença básica entre um *M file* e um *C MEX file* é que no primeiro caso o código escrito é interpretado, enquanto que no segundo o código deve ser previamente compilado. E normalmente os códigos compilados rodam muito mais rápidos que os interpretados por serem previamente otimizados.

Somente esta diferença já seria bastante para justificar a opção pelo *C MEX* neste trabalho. Entretanto, o principal motivo da escolha foi a existência da descontinuidade no modelo (1.14). Para este modelo, por exemplo, existe a necessidade de que a velocidade mude de sinal em cada choque com os obstáculos, o que equivale a fornecer novas condições iniciais para o integrador a cada um destes choques. Em uma simulação de tempo contínuo esta descontinuidade equivaleria a uma mudança brusca nos estados (inexistência de valor da derivada), que pode ser imposta adotando-se integradores com *reset*, ou seja, impondo-se novas condições iniciais. No *M file* isto não pode ser feito com precisão, pois não é permitida

a imposição de valores aos estados durante a evolução da simulação, e nos programas feitos em *C MEX* isto é permitido através de chamadas a rotinas especialmente desenvolvidas para tal ¹.

Existe ainda uma outra alternativa para resolver este problema, que é fazer simulação por partes, armazenando-se os valores assumidos pelos estados nos momentos das ocorrências das descontinuidades para posterior reinício baseado em tais condições de estado, impondo-se as mudanças através de reinicialização da próxima parte da simulação. Isto possibilita desenvolver o programa em *M file* e simular o processo como se houvesse a possibilidade de fazer-se *reset* dos integradores, embora incorpore o inconveniente de que, sendo a simulação feita por partes, fica muito mais complicado usar outras funções como, por exemplo, as de saídas gráficas, que são baseadas no tempo, ou para mostrar planos de fase, etc. Nestes casos, como a simulação começa e pára a cada imposição de mudança brusca de estado, perde-se a base de tempo e, conseqüentemente, tais tipos de gráficos não podem ser apresentados na forma convencional durante as simulações.

3.1.2 A Interface *C MEX*

Como citado anteriormente, a principal diferença entre uma *S-function* do tipo *M file* e uma do tipo *C MEX* é que, na execução, a primeira é interpretada e a última é compilada. Esta diferença é responsável por uma diminuição bastante considerável no tempo de simulação das equações dinâmicas.

Quando o programa fonte escrito em linguagem *C++* que resolve o modelo dinâmico desejado é compilado, ele dá origem a uma biblioteca dinâmica do tipo DLL (*Dynamic Link Library*), a qual é associada ao bloco *S-function* do *Simulink*. Este programa deve apresentar uma estrutura bem definida, contendo subrotinas com nomes e funções bem específicas. A estrutura padrão de uma *S-function C MEX* pode ser vista na figura 3.3.

¹Note que isto é questão tecnológica, e a *Mathworks* afirma que o problema será resolvido em versões futuras do *Matlab*

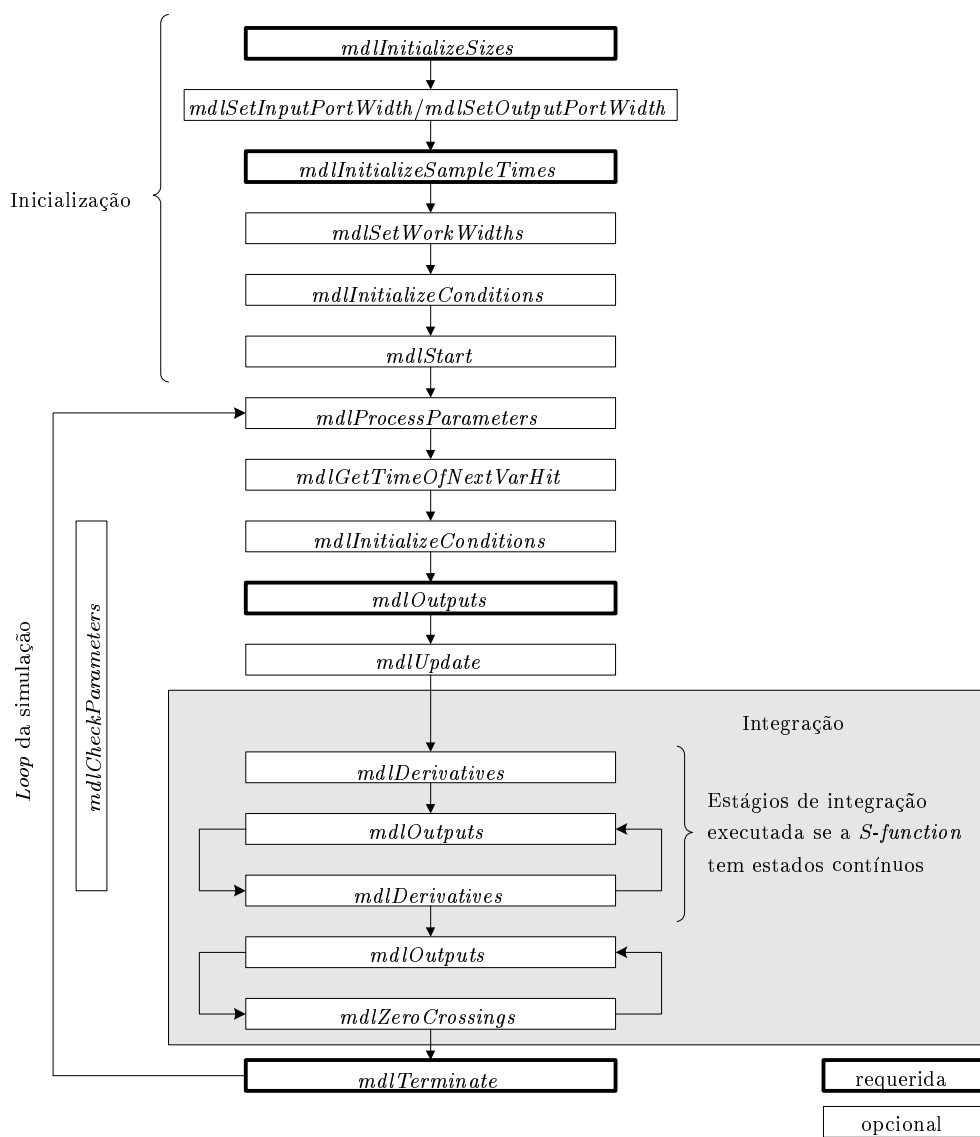


Figura 3.3: Estrutura de uma *S-function C MEX*.

Descrição das rotinas *S-function C MEX*

Conforme mostrado na figura 3.3, uma *S-function C MEX* é composta de funções obrigatórias e opcionais. Faz-se, a seguir, uma breve descrição do objetivo de cada uma destas subrotinas, uma vez que os métodos gráficos para a obtenção de mapas de *Poincaré*, diagramas de bifurcação e expoentes de *Lyapunov* usados neste trabalho foram desenvolvidos neste ambiente.

(a) *mdlInitializeSizes*

Primeira rotina chamada pelo *Simulink* quando interagindo com uma *S-function*. Especifica os tamanhos das informações que o *Simulink* usa para determinar as características dos blocos da *S-function* (número de entradas, saídas, estados, etc.).

(b) *mdlSetInputPortWidth* e *mdlSetOutputPortWidth*

Os sinais de entrada e saída podem ser especificados de forma a serem vetores de tamanhos variáveis. Estas duas rotinas são usadas para influenciar no tamanho destes vetores durante sua propagação pelo modelo.

(c) *mdlInitializeSampleTimes*

Rotina que dá ao *Simulink* a informação que ele precisa pra determinar quando executar o bloco *S-function*. Especifica o período e o *offset* para cada tempo de amostragem.

(d) *mdlSetWorkWidths*

É chamada após a determinação dos tamanhos das portas de entrada e saída e dos tempos de amostragem da *S-function* para estabelecer qualquer tamanho de vetor de estado que seja função da entrada, saída e/ou tempo de amostragem.

(e) *mdlInitializeConditions*

Usada para inicializar estados contínuos e discretos do bloco *S-function*, além de qualquer outra inicialização necessária. Esta rotina será chamada pelo *Simulink* em duas situações:

- No início da simulação;

- Se estiver presente um subsistema configurado para "resetar" estados.

(f) *mdlStart*

É chamada uma vez no início da execução da simulação do modelo. Toda inicialização a ser feita uma única vez deve ser colocada aqui.

(g) *mdlProcessParameters*

Rotina chamada quando os parâmetros são mudados durante a simulação.

(h) *mdlCheckParameters*

Usada para verificar se as definições dos parâmetros estão corretas. Verifica novas definições sempre que há uma mudança durante a simulação.

(i) *mdlGetTimeOfNextVarHit*

Rotina usada com integradores de passo variável para determinar o instante da próxima amostragem.

(j) *mdlOutputs*

Local onde são determinadas as saídas do bloco *S-function*.

(k) *mdlUpdate*

Estados discretos são normalmente atualizados aqui, mas esta rotina é bastante útil para qualquer tarefa que deva ser executada uma vez por passo de integração.

(l) *mdlDerivatives*

Local onde são calculadas as derivadas para os estados contínuos.

(m) *mdlZeroCrossings*

Determina passagens por zero. Somente executada quando a *S-function* tem passagens por zero não amostradas.

(n) *mdlTerminate*

Rotina que efetua qualquer ação necessária ao término da simulação.

A figura 3.4 mostra de forma geral as tarefas realizadas por uma *S-function* durante uma simulação.

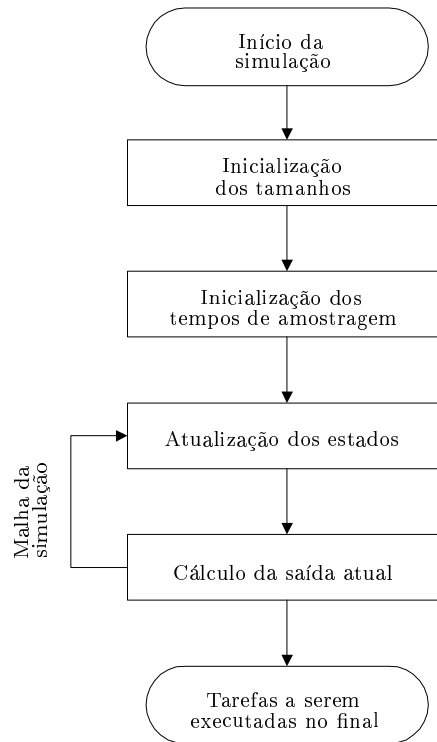
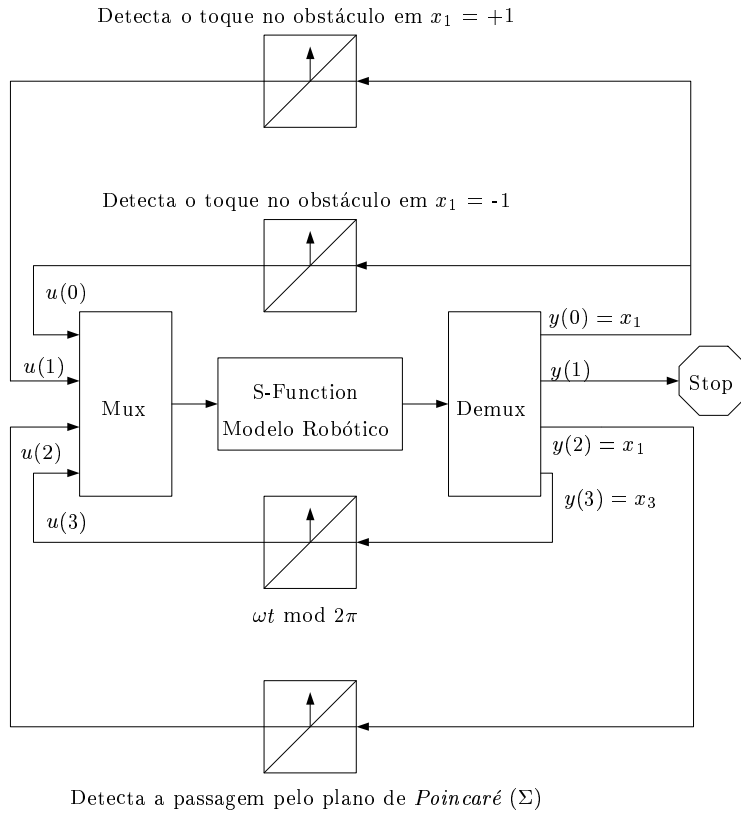


Figura 3.4: Detalhamento do bloco *S-Function* usado nas simulações.

Para o módulo robótico proposto neste trabalho, o modelo construído para simulação no *Simulink* pode ser visto na figura 3.5. Nesta figura podem ser vistos os principais blocos usados na construção dos modelos simulados, cuja descrição é feita a seguir.

(a) *Hit Crossing*

A finalidade deste bloco é detectar o momento em que sua entrada passa por um determinado ponto, definido pelo parâmetro *Hit crossing offset* mostrado na figura 3.6 e na direção especificada pelo parâmetro *Hit crossing direction*. Com a opção *Show output port* selecionada, a saída do bloco assume o valor 1 quando o sinal de entrada é exatamente igual ao valor do *offset*. O grande problema dos *softwares* disponíveis no mercado para


 Figura 3.5: Modelo do sistema para o *Simulink*.

a obtenção do plano de *Poincaré* é que na verdade eles simulam um paralelepípedo de *Poincaré* ao invés do plano. Isto traz imprecisões nas curvas obtidas e, portanto, podem mascarar o comportamento que se quer analisar.

A utilização do bloco *Hit Crossing* força o processo de simulação a, necessariamente, incluir um ponto previamente definido, alterando convenientemente o passo de integração na sua vizinhança, até que tal ponto seja localizado com grande precisão. É bom lembrar que tal procedimento torna a simulação mais lenta, porém viabiliza a real interseção da trajetória com a condição definida pelo *offset* de bloco. À medida em que se aproxima do ponto definido pelo *Hit*, a diminuição do passo de integração resulta em uma diminuição da velocidade de simulação, o que é função das precisões relativas e absolutas exigidas dos integradores. Em contrapartida, a utilização do *Hit* permite, por exemplo, que Σ

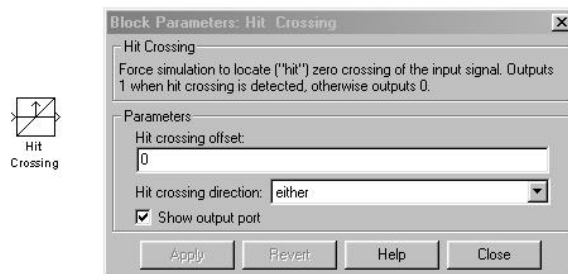


Figura 3.6: Bloco *Hit Crossing* do *Simulink*.

(seção de *Poincaré*) seja realmente um plano, e não um paralelepípedo delgado, como o que ocorre em vários algoritmos propostos na literatura (Parker e Chua, 1989; Tufillaro *et al.*, 1992; Gumowski e Mira, 1980).

Para o modelo mostrado na figura 3.5, este bloco foi usado para representar as descontinuidades existentes no sistema (obstáculos em $x_1 = +1$ [rad] e $x_1 = -1$ [rad]), para criar o estado adicional x_3 , e para determinar os pontos exatamente sobre o plano Σ escolhido.

(b) *Mux*

A função deste bloco é combinar as diversas entradas possíveis em um único vetor na saída. O número de entradas é definido pelo parâmetro *Number of inputs*, mostrado na figura 3.7.

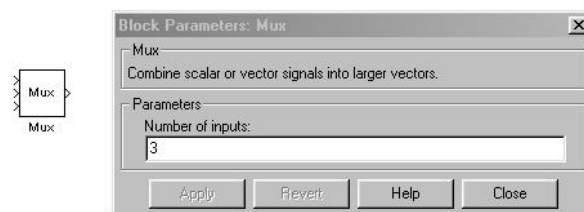


Figura 3.7: Bloco *Mux* do *Simulink*.

Para o modelo mostrado na figura 3.5, as entradas do *Mux* são colocadas dentro do vetor u e desta forma ele é usado na *S-function*.

(c) *Demux*

A função deste bloco é separar as diversas entradas possíveis em saídas isoladas. O número de entradas é definido pelo parâmetro *Number of outputs*, mostrado na figura 3.8.

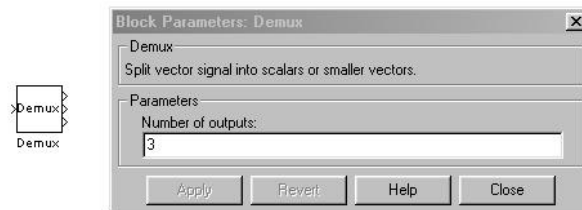


Figura 3.8: Bloco *Demux* do *Simulink*.

Para o modelo mostrado na figura 3.5, a entrada do *Demux* é o vetor de saídas da *S-function*, o qual é dividido nas diversas saídas definidas.

(d) *Stop*

Este bloco é usado para fazer com que a simulação pare dependendo de condições pré-definidas na programação da *S-function*. Seu funcionamento é bastante simples, fazendo com que a simulação termine sempre que tiver em sua entrada um valor diferente de zero, conforme mostrado na figura 3.9. Os critérios usados para este término de simulação devem ser definidos na *S-function*, e isto permite o estabelecimento de um intervalo predeterminado de variação dos parâmetros envolvidos na simulação.

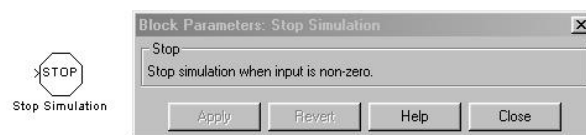


Figura 3.9: Bloco *Stop* do *Simulink*.

(e) *S-function*

É o bloco onde o modelo a ser simulado está definido, usando-se a estrutura definida anteriormente. Para a figura 3.5, a *S-function* corresponde ao modelo do módulo robótico

proposto no início deste capítulo. Aqui são definidas todas as variáveis envolvidas nas equações dinâmicas do modelo e, conseqüentemente, aqui devem ser estabelecidas todas as operações necessárias para a simulação deste modelo, como por exemplo, a variação de um determinado parâmetro para a construção de diagramas de bifurcação. A idéia é fazer uma simulação para cada valor do parâmetro de forma contínua.

Ainda para o modelo mostrado na figura 3.5, a figura 3.10 mostra como é feita a atualização dos estados do sistema mostrado na figura 3.4. Como exemplos de tarefas a serem executadas no final da simulação, pode-se citar o fechamento de arquivos e a liberação da memória alocada durante seu processamento.

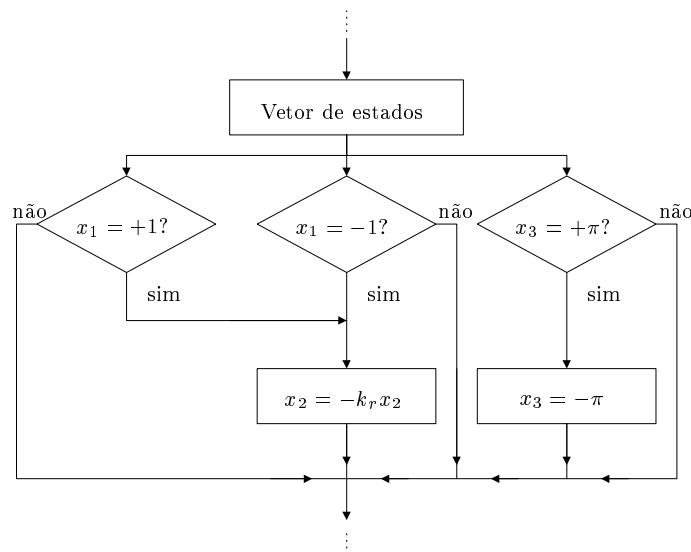


Figura 3.10: Fluxograma do bloco "Atualização dos estados", detalhando a detecção dos obstáculos e a manutenção da variável auxiliar x_3 dentro do intervalo $[-\pi, \pi]$.

3.2 Aspectos Computacionais

O *Simulink* contém várias rotinas de integradores que podem ser usadas nas simulações. Devido à diversidade de comportamentos dos sistemas dinâmicos, alguns métodos de inte-

gração podem ser mais eficientes do que os outros. Para obter-se conjuntamente precisão e rapidez nos resultados, deve-se tomar cuidado na escolha do tipo de método e os seus respectivos parâmetros (Parker e Chua, 1989; MathWorks, ©1990 - 1998).

A escolha do método de integração usado neste trabalho foi baseada na velocidade de processamento e na precisão com que os obstáculos presentes na trajetória do sistema são detectados. Assim sendo, optou-se pelo uso das tolerâncias a erros relativa e absoluta máximas suportadas pelo simulador ($2,8421\text{e-}14$). Face a esta opção e seguindo a orientação de fabricante do simulador, fez-se a escolha do integrador de ordem variável ode113 (Adams). Trata-se de um integrador de múltiplos passos e, conseqüentemente, considera soluções de vários pontos anteriores para calcular a solução atual. Por este motivo, pode ocupar mais espaço na memória do equipamento. Mesmo assim, ainda segundo a *MathWorks*, este integrador pode ser mais adequado quando a exigência em termos de tolerâncias for mais severa (ver figura 3.11).

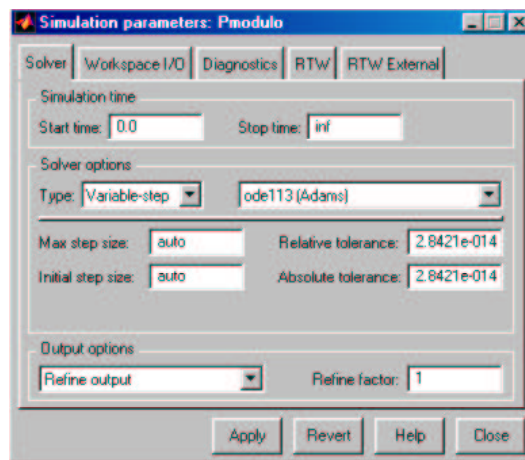


Figura 3.11: Janela de parâmetros configurada para o modelo no *Simulink*.

O uso do passo variável é explicado pela necessidade de que a simulação atinja com precisão pontos pré-definidos (obstáculos e plano Σ , por exemplo), o que é possível com o uso do *Hit Crossing*, e também para aumentar a velocidade da simulação. A definição do tempo de simulação (*Stop time*) como infinito (inf) é usada pelo fato de que o critério de término da simulação é definido na *S-function*, como relatado anteriormente.

Outro ponto importante é o referente à precisão usada nas simulações. Obviamente, quanto maior a precisão requisitada dos integradores, tanto mais confiável será o resultado obtido, embora mais lenta fique a simulação. Os resultados apresentados foram obtidos utilizando-se as tolerâncias a erros relativa e absoluta máximas suportadas pelo *Simulink/Matlab*.

O uso de tolerâncias desta ordem de grandeza faz com que os tempos de simulação sejam relativamente longos. Para a obtenção de mapas de bifurcação (capítulo 5) por exemplo, foram necessários, em média, onze dias de simulação contínua, utilizando-se um microcomputador com processador *Intel Pentium II* de 450 Mhz, disco rígido SCSI-U2W, 256 Mbytes de memória RAM (*Random Access Memory*) e 8 Mbytes de memória de vídeo.

Um procedimento possível, e muito útil, para possibilitar análises intermediárias durante o processamento de cada simulação, é imprimir os pontos obtidos em gráficos mantidos na tela de vídeo do computador. Entretanto, devido ao longo tempo de simulação, normalmente necessário para que se consiga informação suficiente para uma análise consistente, e também devido ao grande número de pontos gerados, ocorre um decréscimo acentuado no desempenho global do computador, pelo fato das memórias de vídeo e RAM serem limitadas, havendo extensiva exigência de escrita e leitura em disco rígido, através do uso temporário do arquivo de *swap* mantido pelo sistema operacional. Dependendo da configuração de *hardware* do computador usado como hospedeiro, este decréscimo de desempenho ao longo da simulação pode ficar tão acentuado a ponto de inviabilizá-la.

Para solucionar este problema, na programação do bloco *S-Function C MEX*, deve-se usar uma engenharia de *software* que ofereça soluções alternativas, como por exemplo, ao invés de manter gráficos abertos na tela, deixá-los o maior tempo possível minimizados, isto quando julgar-se extremamente necessária sua manutenção. Alternativamente, pode-se abrir um arquivo em disco e gravar, em momentos oportunos, as seqüências de pontos obtidos durante pequenos intervalos de simulação, os quais previamente estiveram mantidos em um *buffer* na RAM. No mesmo procedimento, pode-se fazer uma cópia deste arquivo em formato ASCII, o qual pode ser fechado e, portanto, apresentado na tela de vídeo por algum outro *software* independente do simulador, como por exemplo o *Gnuplot* (Williams e

Kelley, ©1986 - 1993, 1998, 1999). Este arquivo pode ser atualizado em intervalos de tempos determinados, o mesmo acontecendo com a visualização na tela. A título de exemplo, e utilizando-se este procedimento, os mapas de *Poincaré* para os comportamentos caóticos mostrados no desenvolvimento deste trabalho são compostos, em média, de 70.000 pontos obtidos após um tempo de simulação de 200.000 segundos. Entenda-se aqui que este tempo não é real, e sim tempo simulado.

A localização adequada do plano Σ é muito importante para que se possa obter atratores estranhos bem representados onde as características fractais sejam evidenciadas. Para o caso do módulo robótico modelado neste trabalho, a pior escolha para esta localização é sobre os obstáculos, no caso em $x_1 = 1$ [rad] ou $x_1 = -1$ [rad], posições nas quais ocorrem as descontinuidades na velocidade angular do elo, dificultando a visualização das características caóticas do atrator, devido ao fato de introduzir-se uma componente probabilística, dado que a velocidade neste momento tem derivada infinita e seu valor será plotado aleatoriamente no plano de *Poincaré*, devido principalmente às imprecisões e às limitações numéricas envolvidas.

Capítulo 4

Mapas de *Poincaré*

Neste capítulo, procura-se mostrar com mais rigor uma das ferramentas de análise utilizadas neste trabalho. A seção 4.1 é dedicada a definir e mostrar formas de análise de mapas de *Poincaré* construídos da forma tradicional encontrada na literatura. As seções 4.2 e 4.3 mostram novas propostas para a construção de tais mapas, que são a recorrência no tempo e a recorrência na própria variável, respectivamente. Nesta proposta procura-se resolver um clássico problema da definição do hiperplano de *Poincaré*. Sabe-se que os métodos tradicionais definem este hiperplano com uma espessura não nula, uma vez que sua identificação é feita por técnicas digitais, o ponto exato que se quer localizar é substituído por um que seja o mais próximo deste.

Em nossa proposta, a utilização do *hit crossing* permite que aquele ponto seja determinado com precisão, dependente unicamente do limite de precisão da máquina (*double word*). Com isto podemos afirmar que o hiperplano procurado tem realmente espessura desprezível ou nula, o que evita que a simulação introduza componentes probabilísticas ao modelo adotado para o sistema em análise.

Para todos os casos de estudo que basearam este trabalho são mostrados exemplos clássicos da literatura e aplicações feitas no sistema proposto no capítulo 3.

4.1 Mapas de *Poincaré*

Mapa geralmente é a denominação dada a um sistema dinâmico cuja evolução no tempo ocorre de forma discreta. Entretanto, esta definição também pode ser aplicada para fluxos contínuos.

No estudo dos sistemas dinâmicos contínuos no tempo, podem-se sempre obter mapas discretos arbitrariamente, bastando para isto que se obtenham pontos da trajetória contínua segundo um determinado critério de discretização. É importante ressaltar aqui que tal critério pode basear-se no tempo ou no espaço. No primeiro caso, muitas vezes especifica-se um período, que passa a ser a variável discreta independente. No segundo caso, procura-se definir um hiperplano baseado no vetor de estado do sistema, sem restrições do tempo de ocorrência entre este e a trajetória. Ainda neste segundo caso, o intervalo de tempo entre duas interseções da trajetória e o hiperplano, geometricamente especificado, é uma variável dinâmica discreta, cuja dinâmica é definida por uma recorrência de primeira ordem.

Uma maneira de obter-se um mapa discreto a partir de um fluxo contínuo é através da utilização de Seções de *Poincaré*. A seção de *Poincaré* de uma trajetória contínua, sendo um mapa discreto associado a esta trajetória, contém propriedades que permitem uma fácil visualização das características do conjunto limite da trajetória. Por exemplo, se uma trajetória é periódica, a seção de *Poincaré*, seja ela obtida por discretização no tempo ou discretização geométrica, será caracterizada por um número finito de pontos, e este número está diretamente associado ao período da trajetória. Se a trajetória do sistema tem um conjunto limite não periódico, a seção de *Poincaré* nunca será caracterizada por um número finito de pontos. Dependendo desta não periodicidade, poderá apresentar características como uma curva fechada discreta ou curvas contínuas com propriedades vistas nos conjuntos de *Cantor* e ferraduras de *Smale*. A seção de *Poincaré* é uma maneira de reduzir o estudo de um fluxo no espaço de dimensão n a uma aplicação (difeomorfismo), chamada mapa de *Poincaré* ou mapa de retorno, em um espaço com dimensão $n - 1$ (Fiedler-Ferrara e Prado, 1994).

A definição do mapa de *Poincaré* geralmente é feita de duas maneiras, sendo uma para sistemas autônomos e outra para sistemas não autônomos, conforme mostrada-se a seguir.

4.1.1 Mapa de *Poincaré* para sistemas não autônomos

Um sistema não autônomo de ordem n com perturbação periódica de período T pode sempre ser convertido em um sistema autônomo de ordem $n + 1$, acrescentando-se um estado adicional $\dot{\theta} = 2\pi/T$, resultando em um sistema como o mostrado em (4.1)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t), & x(t_o) &= x_o \\ \dot{\theta} &= 2\pi/T, & \theta(t_o) &= 2\pi t_o/T. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Desta forma os planos $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$ podem ser identificados e o espaço de estados transformado do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ para o espaço cilíndrico $\mathbb{R}^n \times S^1$, onde $S^1 = [0, 2\pi)$ representa o círculo.

A solução de (4.1) no espaço de estados cilíndrico é:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_t(x_o, t_o) \\ 2\pi t/T \bmod 2\pi \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

onde a função módulo (mod) restringe θ para o intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$.

Considere um hiperplano n -dimensional $\Sigma \in \mathbb{R}^n \times S^1$ definido por:

$$\Sigma_\theta = \{(x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times S^1 \mid \theta = \theta_o\}. \quad (4.3)$$

A cada T segundos, a trajetória (4.2) intercepta Σ_θ (ver figura 4.1).

É importante ressaltar neste caso que a transformação de modelo introduz um estado periódico na definição da trajetória. Isto induz imediatamente que o hiperplano de *Poincaré* seja definido de tal forma a obter-se uma discretização no tempo, como vemos pela definição de Σ_θ . Entretanto, nada impede que o mapa de *Poincaré* seja, neste caso, obtido através de uma discretização no espaço, uma vez que a transformação acima faz com que o sistema transformado seja matematicamente um sistema dinâmico autônomo (Parker e Chua, 1989). Por exemplo, a seção de *Poincaré* poderia ser definida na forma da equação (4.4) (ver figura 4.2).

$$\Sigma_{x_i} = \{(x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times S^1 \mid x_i = \text{constante}\}. \quad (4.4)$$

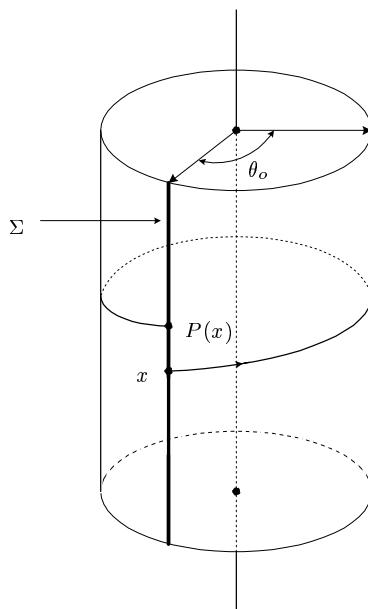


Figura 4.1: Mapa de *Poincaré* para um sistema não autônomo de primeira ordem.

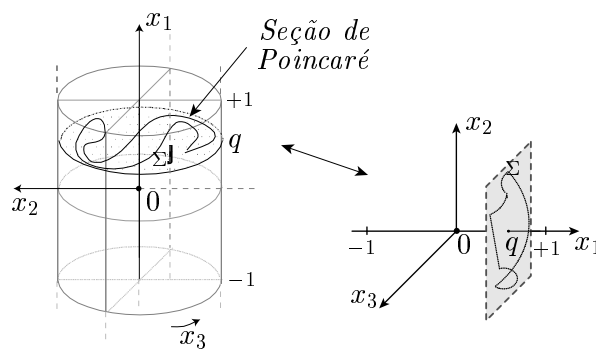


Figura 4.2: Plano de *Poincaré* definido para $x_1 = q$ cte.

Chamamos a atenção para isto porque em alguns casos, tais como sistemas com descontinuidades, a forma geométrica de discretização permite uma melhor visualização das características da órbita de *Poincaré*.

O mapa resultante $P_N : \Sigma_c \rightarrow \Sigma_c$ ($\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$), onde o ponto representa o tipo de discretização utilizada - temporal (θ) ou geométrica (x_i) - é definido por

$$P_N(x) = \phi_{t_o+T}(x, t_o) \quad (4.5)$$

P_N é chamado mapa de *Poincaré* para o sistema não autônomo. Note que para um t fixo, $\phi(t)$ é um difeomorfismo (definição 3) e, logo, P_N é inversível e diferenciável.

4.1.2 Mapa de *Poincaré* para sistemas autônomos

Para estes tipos de sistemas, a discretização é sempre do tipo geométrica. Considere inicialmente um sistema autônomo periódico de ordem n com um ciclo limite Γ , como mostrado na figura 4.3. Seja x^* um ponto no ciclo limite e seja Σ um hiperplano de dimensão $n - 1$ transversal a Γ em x^* . A trajetória originada de x^* irá atingir Σ em x^* em T segundos, onde T é o período mínimo do ciclo limite. Devido à continuidade de ϕ_t com respeito ao estado inicial, trajetórias iniciadas em Σ em uma vizinhança suficientemente pequena de x^* , irão interceptar Σ na vizinhança de x^* em aproximadamente T segundos. Por conseguinte, ϕ_t e Σ definem um mapeamento P_A de alguma vizinhança $U \subset \Sigma$ de x^* em outra vizinhança $V \subset \Sigma$ de x^* . P_A é o mapa de *Poincaré* do sistema autônomo. Observações:

- (a) P_A é definido localmente, ou seja, na vizinhança de x^* . Diferentemente do caso não autônomo, não se pode garantir que uma trajetória originada em qualquer ponto de Σ irá interceptar Σ .
- (b) Para um espaço de estados Euclidiano, o ponto $P_A(x)$ não é o primeiro ponto onde $\phi_t(x)$ intercepta Σ ; $\phi_t(x)$ deve passar através de Σ pelo menos uma vez antes de retornar a V .
- (c) P_A é um difeomorfismo e é, portanto, inversível e diferenciável.

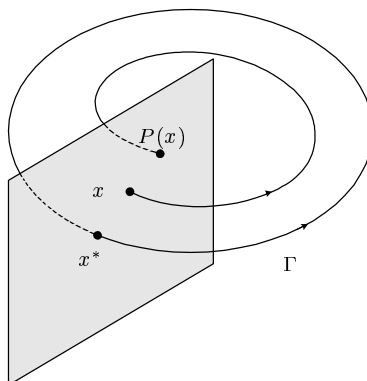


Figura 4.3: Mapa de *Poincaré* para um sistema autônomo de terceira ordem.

Esta é a definição padrão de mapa de *Poincaré* a partir da teoria de sistemas dinâmicos, mas raramente é utilizada devido ao fato de exigir o conhecimento detalhado da posição do ciclo limite ou do conjunto limite, no caso não periódico.

4.1.3 Conjuntos Limites de Mapas de *Poincaré*

Mostra-se nesta seção a relação entre os conjuntos limites de determinados fluxos e os correspondentes conjuntos limites apresentados nos mapas de *Poincaré*.

Pontos de Equilíbrio

Não existe nenhum conjunto limite de mapa de *Poincaré* que corresponda a um ponto de equilíbrio. Se o plano Σ contém o ponto de equilíbrio, e o mapa de *Poincaré* é bem definido na vizinhança deste ponto de equilíbrio, então o conjunto limite do mapa de *Poincaré* é o próprio ponto de equilíbrio. É importante observar que este conjunto limite não é estruturalmente estável, uma vez que o ponto de equilíbrio não permanece sobre Σ para toda perturbação de Σ .

Soluções Periódicas

Para sistemas autônomos ou não autônomos, o conjunto limite do mapa de *Poincaré* depende da posição de Σ . Diferentes escolhas de Σ conduzem a órbitas limitadas de diferentes ordens (ver figura 4.4). O que se pode afirmar é que pelo menos um destes mapas de *Poincaré* corresponde ao ciclo limite do fluxo original, e que ele vai ser constituído de um número finito de pontos.

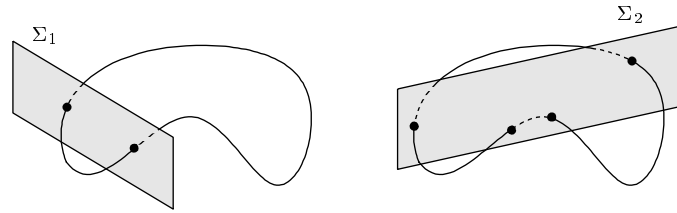


Figura 4.4: Mapas de *Poincaré* de um mesmo fluxo mostrando diferentes ordens, dependentes da escolha de Σ .

Soluções Quasi-Periódicas

Geralmente o conjunto limite do mapa de *Poincaré* para sistemas cujas soluções são quasi-periódicas é composto por uma ou mais curvas fechadas, dependendo da localização do plano Σ . Como exemplo, pode-se ver a figura 4.5, a qual mostra o mapa de *Poincaré* obtido para a equação de *Van der Pol* (2.2) para os mesmos parâmetros do plano de fase mostrado na figura 2.7.

Como uma solução quasi-periódica é caracterizada pela presença de duas ou mais frequências (porém, um número finito) na solução do modelo, sendo que a razão entre elas é irracional, podemos verificar que isto gera mapas com as características supra mencionadas.

Vamos, por exemplo, analisar um caso periódico com período dois, ou seja, a presença de duas frequências na solução, com relação racional. O mapa conterá no mínimo dois pontos, dependendo de como se defina o hiperplano, como mostra a figura 4.6.

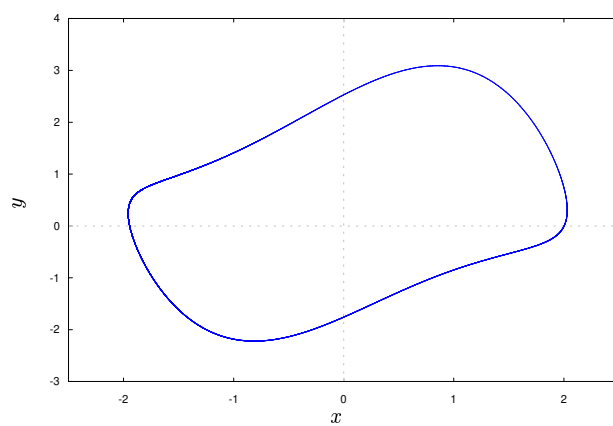


Figura 4.5: Mapa de *Poincaré* da equação de *Van der Pol* para uma situação de comportamento quasi-periódico.

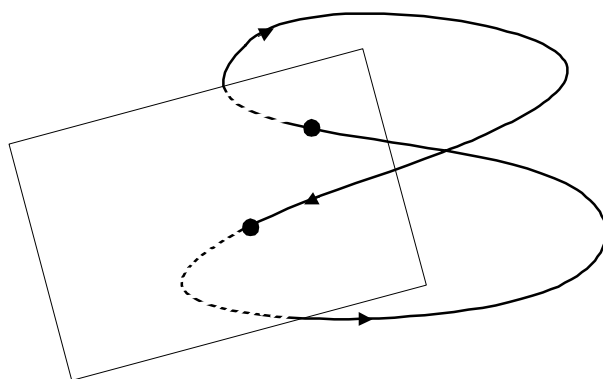


Figura 4.6: Representação de uma trajetória e um mapa de *Poincaré* para um sistema periódico de período dois.

Para este mesmo exemplo, suponha uma mudança de parâmetros feita de tal forma que a relação entre as duas frequências presentes na solução seja irracional. Neste caso com duas frequências, podemos considerar que a mais baixa é a envoltória da solução e a mais alta a portadora. Sendo a relação entre elas irracional, podemos dizer que nem sempre a portadora assume o mesmo valor nos momentos em que a envoltória assume um valor fixo. Isto significa que, embora a solução contenha duas frequências, o mapa de *Poincaré* não será caracterizado por dois pontos.

Por que, então, será uma curva fechada? Se existem realmente duas frequências bem definidas na solução, embora com relação irracional, pode-se escolher o hiperplano baseado, por exemplo, na envoltória, supostamente uma frequência de perturbação e a portadora uma frequência natural. O mapa, no conjunto limite, terá um par de pontos para cada ciclo da envoltória. Ao longo dos ciclos observa-se que estes pontos deslocam-se, dado que a relação das frequências é irracional. Este deslocamento dos dois pontos define uma curva no mapa e dado que a portadora está sempre contida nos limites da envoltória, esta curva será fechada.

Soluções Caóticas

Quando um sistema opera com comportamento caótico, o mapa de *Poincaré* correspondente geralmente não possui uma forma geométrica simples como nos casos periódicos e quasi-periódicos, formando os chamados atratores de estrutura fina e com características fractais, que se assemelham aos conjuntos de *Cantor* ou ferraduras de *Smale* (Thompson e Stewart, 1989; Moon, 1987; Thompson e Bishop, 1994; Parker e Chua, 1989).

Pode-se considerar que o número de frequências presentes na solução é infinito, com relações irracionais e/ou racionais. Neste caso, a cada ciclo da envoltória (frequência mais baixa) teríamos infinitos pontos no mapa. No próximo ciclo, estes infinitos pontos estarão localizados em posições distintas e próximas, porém sempre dentro dos limites da envoltória. A repetição de um número muito grande destes ciclos poderá fazer com que se obtenha como resultado para o mapa uma curva contínua aberta, em função de ser infinito o número de frequências presentes na solução. A intuição nos diz que para uma curva de comprimento infinito estar contida em um espaço limitado, ela deve conter dobras (ferraduras de *Smale*).

A figura 4.7 mostra um exemplo de mapa obtido para um comportamento caótico.

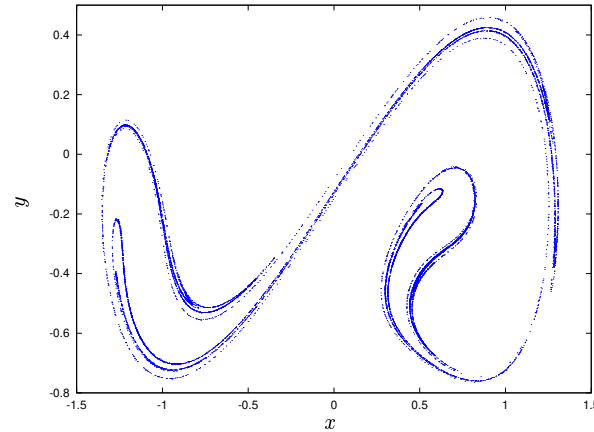


Figura 4.7: Mapa de *Poincaré* para a equação de *Duffing*.

4.2 Construção de Mapas de *Poincaré* usando a Recorrência no Tempo

As formas de construção de mapas de *Poincaré* mostradas até aqui possuem um mesmo princípio básico: mostrar graficamente em um hiperplano previamente definido as propriedades de uma órbita associada à trajetória do sistema. É importante ressaltar que a definição de um hiperplano exato requer a busca por valores pré-definidos que uma simulação digital convencional pode não realizar corretamente. As técnicas tradicionais adotam aproximações utilizando pontos que sejam os mais próximos destes, daí dizer-se que usam "hiperparalelepípedos" de *Poincaré* e não hiperplanos de *Poincaré*. Isso pode até ser aceitável para estudar-se, com boa aproximação, o comportamento de sistemas sem descontinuidades, porém é inaceitável para o estudo correto de sistemas que apresentam tais características, pois pode mascarar a visualização das órbitas procuradas. Esta limitação (paralelepípedo) bem como as dificuldades para a melhor definição do hiperplano contribuem enormemente para que os pesquisadores procurem métodos mais eficientes de análise, tais como a determinação dos expoentes de *Lyapunov*. Entretanto, no caso de sistemas com descontinuidades

estes expoentes são de difícil determinação, dado que não se consegue obter a equação variacional (a descontinuidade infringe uma condição de existência da variacional). Em vista disto, teve-se a preocupação de refinar os métodos de construção da seção de *Poincaré* a fim de que passem a exercer um papel importante na conclusão da análise, e não somente um papel de indicador em uma análise preliminar. O método proposto a seguir procura fornecer uma alternativa para esta construção gráfica, procurando localizar com precisão a interseção entre a trajetória e o hiperplano previamente definido.

Seja $\dot{x} = f(x)$ a equação que representa um sistema dinâmico contínuo de ordem n . Como foi mostrado neste capítulo, a análise do conjunto limite obtido no mapa de *Poincaré* deste sistema possibilita caracterizar o comportamento dinâmico do mesmo, e este conjunto limite é formado pelos pontos da trajetória do sistema que pertencem à seção de *Poincaré* Σ previamente definida.

Diferentemente do método tradicional que utiliza variáveis de estado do sistema na construção dos mapas de *Poincaré*, a estratégia aqui proposta permite esta construção usando como variável o intervalo de tempo decorrido entre duas interseções da trajetória com Σ , como descreve-se a seguir.

Considere um sistema cuja trajetória e órbita na seção Σ , são mostradas na figura 4.8. É possível saber, durante a simulação, o tempo exato em que cada um dos pontos mostrados

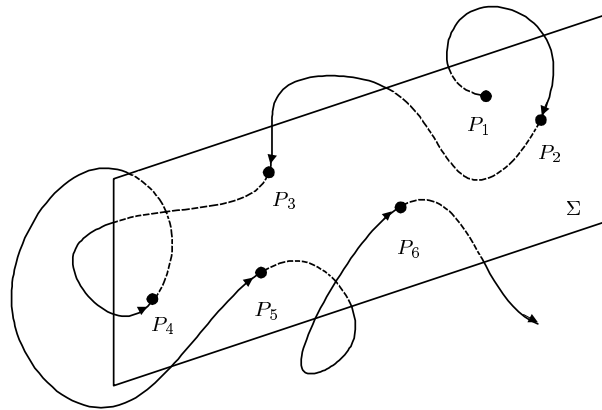


Figura 4.8: Representação de uma trajetória e respectivo mapa de *Poincaré* de um sistema genérico qualquer.

nesta figura foi determinado, ou seja, os exatos instantes em que a trajetória atingiu a seção Σ , definida. O que interessa neste método são os intervalos de tempo decorridos entre cada uma destas interseções, ou seja, a sequência de intervalos de tempo $T_k = [T_1, T_2, T_3, \dots, T_{k-1}]$, onde T_k é o intervalo de tempo existente entre as aquisições de P_k e P_{k+1} . Estes intervalos de tempo definem uma variável discreta que será usada na geração do mapa de *Poincaré*, onde poder-se-á estudar a periodicidade da trajetória do sistema através da relação $T_{k+1} = \mathcal{F}(T_k)$, que é uma recorrência de primeira ordem associada à trajetória do sistema de dimensão n . $\mathcal{F}$ é, então, uma recorrência dinâmica do tempo de retorno ao hiperplano, ou $\mathcal{F}$ é o mapa de *Poincaré* do tempo de retorno ao hiperplano.

Seja por exemplo a figura 4.9, onde pode ser vista a trajetória e um possível conjunto limite do mapa de *Poincaré* para um sistema periódico qualquer de período $T = 2$. Por ser periódico e considerando que o conjunto limite já tenha sido atingido, a trajetória deste sistema somente cruzará a seção de *Poincaré* nestes dois pontos, independentemente do tempo de simulação decorrido. Conseqüentemente, os intervalos de tempo T_1 e T_2 entre os cruzamentos em P_1 e P_2 e entre P_2 e P_1 , respectivamente, serão sempre os mesmos. Logo, uma representação que mostre a relação $T_k \times T_{k+1}$ conterà somente dois pontos: (T_1, T_2) e (T_2, T_1) . Isto quer dizer que o mapa obtido mantém a característica periódica do mapa construído da forma tradicional, ou seja, o tempo de retorno para a seção de *Poincaré* também guarda informações importantes para a análise do comportamento dinâmico do sistema.

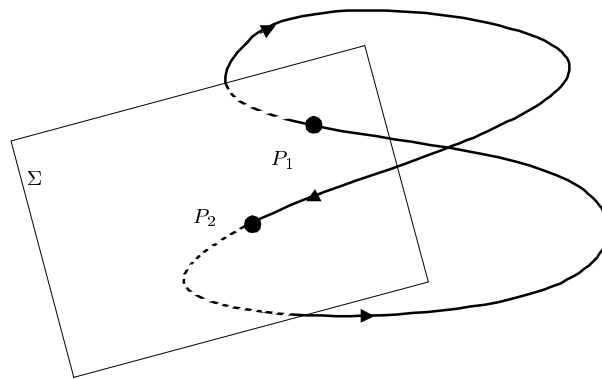


Figura 4.9: Representação de uma trajetória e respectivo mapa de *Poincaré* para um sistema periódico de período $T = 2$.

Assim sendo, os resultados gráficos encontrados nos mapas de *Poincaré* construídos desta forma também podem ser usados para analisar a periodicidade da trajetória contínua do sistema pelos conjuntos limites, ou seja:

- (a) Para soluções periódicas, tem-se um número limitado de tempos de retorno, dependendo do período. Como exemplo, a figura 4.10 mostra o mapa de *Poincaré* obtido para a equação de *Duffing* (2.1) para as mesmas condições do plano de fase mostrado na figura 2.6.

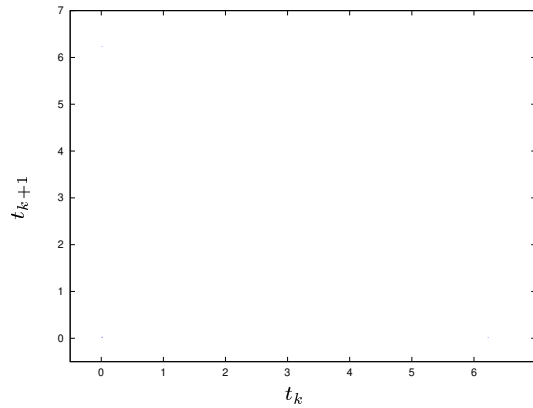


Figura 4.10: Mapa de *Poincaré* da equação de *Duffing* para a mesma situação de comportamento periódico mostrada na figura 2.6.

- (b) Para sistemas quasi-periódicos, tem-se a formação de uma ou mais curvas fechadas. Veja, por exemplo, a figura 4.11, a qual mostra o mapa de *Poincaré* para a variável x nas mesmas condições do mapa da figura 4.5.

Usando a mesma técnica, agora para a variável y , e também para as mesmas condições do mapa da figura 4.5, obtém-se como resultado o mapa mostrado na figura 4.12.

Para a determinação dos mapas mostrados nas figuras 4.11 e 4.12, foram utilizados como instantes de discretização aqueles nos quais as variáveis x e y passam por zero, respectivamente. Convém aqui ressaltar o fato de que esta discretização pode ser feita de formas variadas, obtendo-se as mesmas características qualitativas nos mapas resultantes. Veja, por exemplo, o mapa mostrado na figura 4.13, onde foi escolhido como

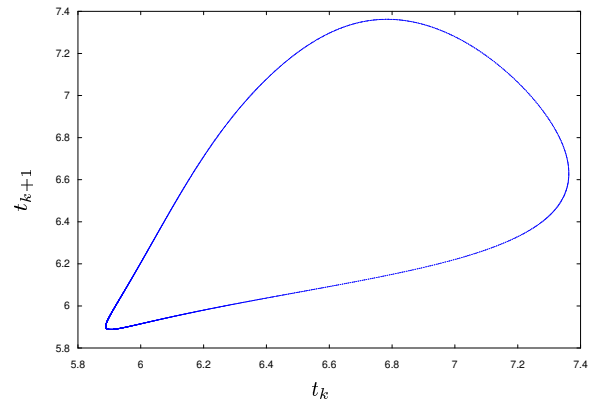


Figura 4.11: Mapas de *Poincaré* da equação de *Van der Pol* para uma situação de comportamento quasi-periódico, usando a recorrência no tempo para a variável x .

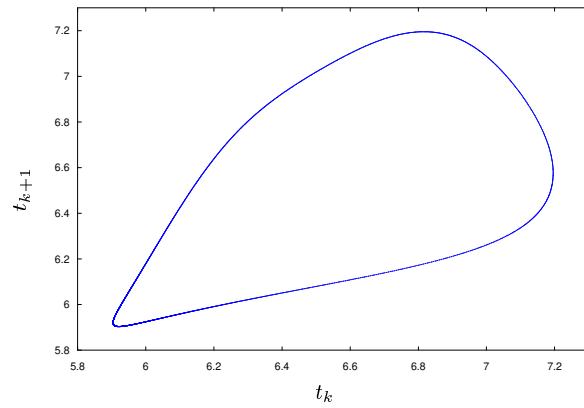


Figura 4.12: Mapas de *Poincaré* da equação de *Van der Pol* para uma situação de comportamento quasi-periódico, usando a recorrência no tempo para a variável y .

critério de discretização os instantes em que a norma $\sqrt{x^2 + y^2} = 2, 0$. A curva fechada continua aparecendo no referido mapa.

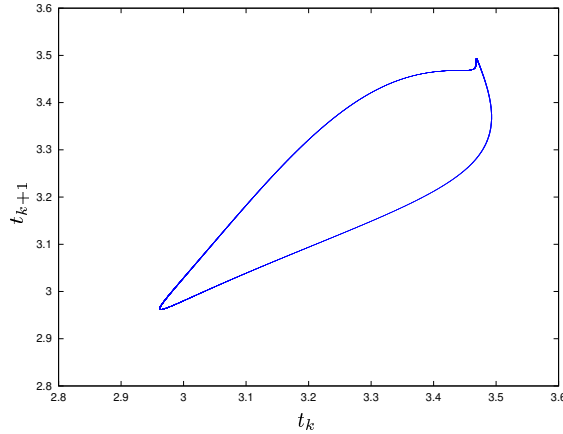


Figura 4.13: Mapas de *Poincaré* da equação de *Van der Pol* para uma situação de comportamento quasi-periódico, usando a recorrência no tempo para a norma $\sqrt{x^2 + y^2}$.

- (c) Para sistemas caóticos, como já foi observado nas análises dos mapas construídos pelos métodos tradicionais, tem-se a formação de estruturas finas que se assemelham aos conjuntos de *Cantor* e ferraduras de *Smale* e com características fractais. A figura 4.14 mostra o mapa obtido para a equação de *Duffing* (2.1) com $\epsilon = 0.25$, $\gamma = 0.3$ e $w = 1.0$, que correspondem a uma condição de comportamento caótico.

Na observação da figura 4.14 nota-se uma estrutura fractal da seção de *Poincaré*. Se uma observação mais detalhada for feita através de um *zoom* de um dos módulos fractais apresentados (figura 4.15), é possível observar a presença de formas de ferraduras de *Smale*, com um número incontável de repetições, contendo portanto cada um destes módulos estruturas fractais. É ainda importante observar que todos os módulos contidos no mapa da figura 4.14 têm sempre as mesmas características observadas na ampliação da figura 4.15.

Um outro exemplo também bastante conhecido na literatura para o qual foi aplicado o método da recorrência no tempo foi o circuito de *Chua*, um circuito eletrônico descrito pelo

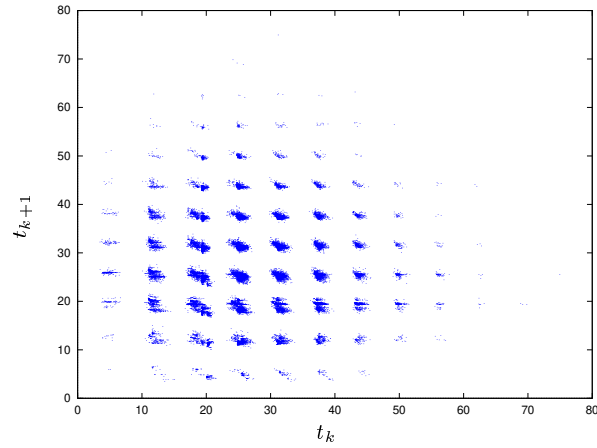


Figura 4.14: Mapa de *Poincaré* da equação de *Duffing* para a situação de comportamento caótico mostrado na figura 2.8.

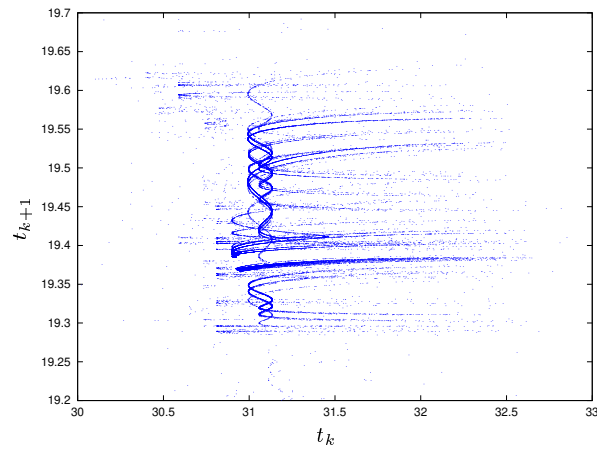


Figura 4.15: Detalhamento do mapa de *Poincaré* da equação de *Duffing* para a situação de comportamento caótico mostrado na figura 4.14.

sistema de equações (4.6).

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(y - h(x)) \\ \dot{y} &= x - y + z \\ \dot{z} &= -\beta y\end{aligned}\tag{4.6}$$

onde h é uma função não linear (linear por partes):

$$h(x) = \begin{cases} m_1 x + (m_0 - m_1), & x \geq 1 \\ m_0 x, & |x| \leq 1 \\ m_1 x - (m_0 - m_1), & x \leq -1 \end{cases}$$

Para estas equações (4.6), Parker e Chua (1989) mostram que a trajetória é caótica quando $\alpha = 9$, $\beta = 100/7$, $m_0 = -1/7$ e $m_1 = 2/7$. Para estas condições, fazendo-se a discretização geométrica em $y = 0$ e utilizando-se o método da recorrência no tempo para a variável x , obteve-se o mapa mostrado na figura 4.16. A figura 4.17 mostra o detalhamento de uma parte da figura 4.16, onde pode-se ver com maior nitidez a estrutura fina com características fractais.

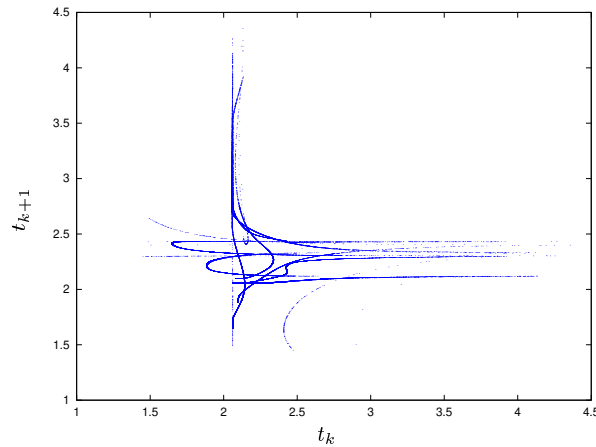


Figura 4.16: Mapa de *Poincaré* do sistema de equações representativo do circuito de *Chua*, usando $\alpha = 9.0$, $\beta = 100/7$, $m_0 = -1/7$ e $m_1 = 2/7$.

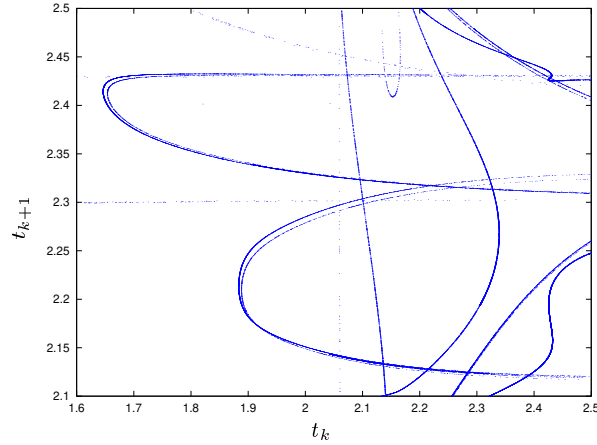


Figura 4.17: Detalhamento do mapa de *Poincaré* para o circuito de *Chua* mostrado na figura 4.16.

4.3 Construção de Mapas de *Poincaré* usando a Recorrência na Própria Variável

Este método leva em consideração o fato de que, aparentemente, qualquer variável de estado natural do sistema guarda em sua evolução o comportamento dinâmico do sistema. Desta forma, com uma escolha adequada do hiperplano para a obtenção do mapa de *Poincaré*, uma análise da relação de $x_i(k+1) = \mathcal{F}(x_i(k))$ retrata qualitativamente o comportamento dinâmico deste sistema e conclusões podem ser tiradas a partir dos conjuntos limites encontrados em seus mapas de *Poincaré*.

Para sistemas periódicos como o da figura 4.9 isto torna-se mais que evidente, uma vez que sempre teremos apenas dois pontos no mapa final: (P_k, P_{k+1}) e (P_{k+1}, P_k) . Isto pode ainda ser confirmado na figura 4.18, que mostra o mapa obtido através desta técnica para a equação de *Duffing* nas condições de comportamento periódico mostrado na figura 2.6.

A figura 4.19 mostra o mapa de *Poincaré* encontrado para a equação de *Van der Pol*, nas mesmas condições das figuras 4.5 em relação à variável x do sistema. Se a mesma análise for feita em relação à variável y da equação, obtém-se o mapa mostrado na figura 4.20. Pode-se perceber que, também neste método, foram obtidas curvas fechadas para ambas as variáveis.

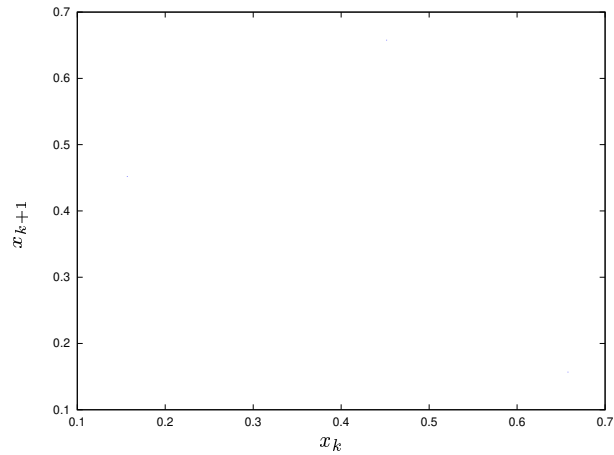


Figura 4.18: Mapa de *Poincaré* da equação de *Duffing* para a situação de comportamento periódico mostrado na figura 2.6.

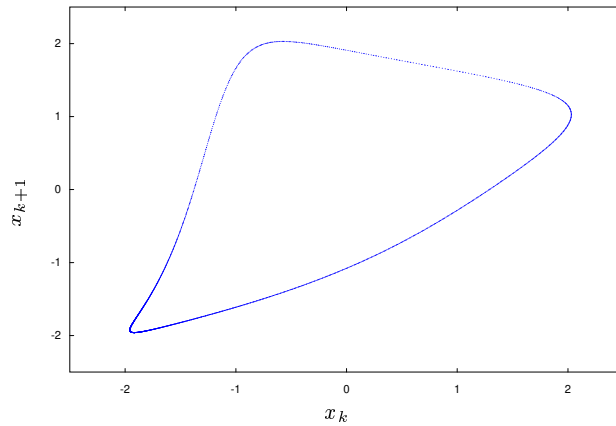


Figura 4.19: Mapa de *Poincaré* da equação de *Van der Pol* para uma situação de comportamento quase-periódico, usando a recorrência na variável x .

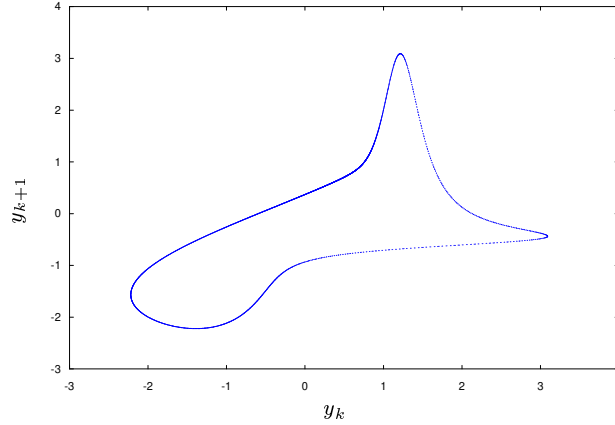


Figura 4.20: Mapa de *Poincaré* da equação de *Van der Pol* para uma situação de comportamento quasi-periódico, usando a recorrência na variável y .

Para o caso do comportamento caótico e usando a equação de *Duffing* para as mesmas condições mostradas no mapa da figura 2.8, obteve-se o mapa mostrado na figura 4.21. Pode-se ver no mapa obtido com a recorrência na própria variável a existência das estruturas fractais e de ferraduras de *Smale*, características que evidenciam a existência de caos.

Pode-se ainda verificar a existência de tais características no mapa da figura 4.22, obtida para o circuito de *Chua* (equações (4.6)), usando-se os mesmos parâmetros da figura 4.16 e a recorrência na variável x . O detalhamento mostrado na figura 4.23 deixa ainda mais evidente a estrutura fina com características fractais.

Para o mesmo circuito de *Chua* ainda foi feita a recorrência na variável z . O mapa obtido pode ser visto na figura 4.24, e em detalhe na figura 4.25.

Um outro exemplo bem conhecido na literatura é o mapa de *Hénon* (Parker e Chua, 1989), um sistema discreto definido pelas equações (4.7).

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= y_k + 1 - \alpha x_k^2 \\ y_{k+1} &= \beta x_k \end{aligned} \tag{4.7}$$

O mapa de *Poincaré* obtido da forma tradicional para este sistema é mostrado na

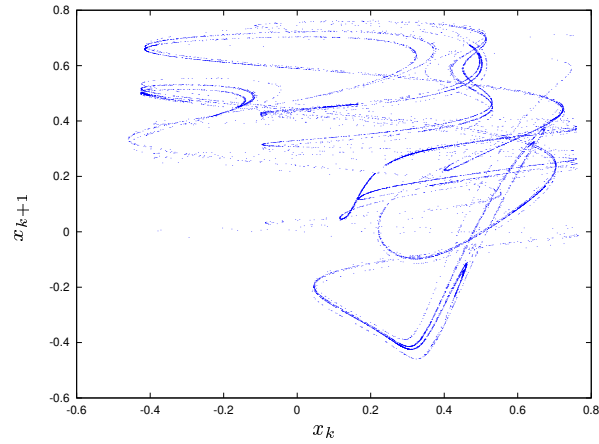


Figura 4.21: Mapa de *Poincaré* da equação de *Duffing* para as mesmas condições mostradas no mapa da figura 2.8.

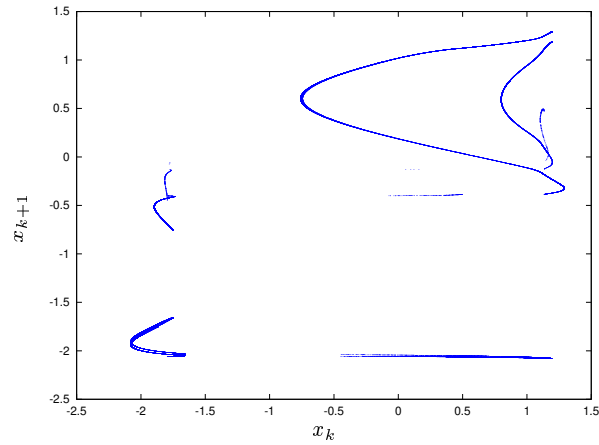


Figura 4.22: Mapa de *Poincaré* do sistema de equações representativo do circuito de *Chua*, usando $\alpha = 9.0$, $\beta = 100/7$, $m_0 = -1/7$ e $m_1 = 2/7$.

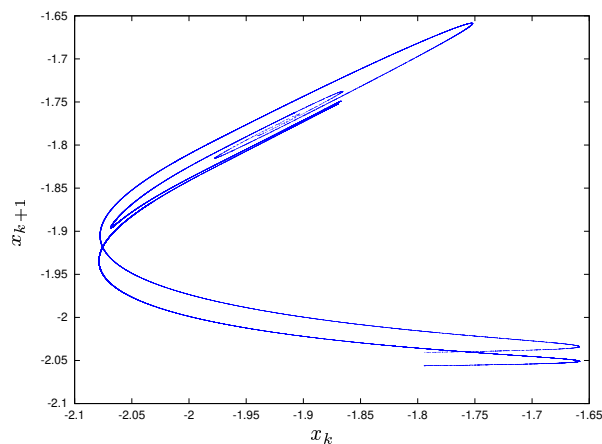


Figura 4.23: Detalhamento do mapa de *Poincaré* para o circuito de *Chua* mostrado na figura 4.22.

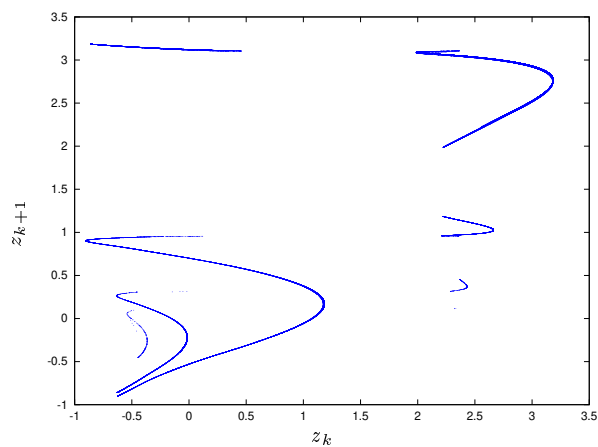


Figura 4.24: Mapa de *Poincaré* do sistema de equações representativo do circuito de *Chua*, usando $\alpha = 9.0$, $\beta = 100/7$, $m_0 = -1/7$ e $m_1 = 2/7$.

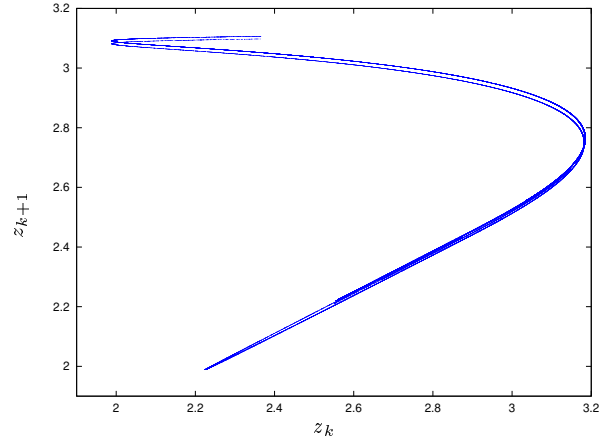


Figura 4.25: Detalhamento do mapa de *Poincaré* para o circuito de *Chua* mostrado na figura 4.24.

figura 4.26, e aplicando-se a técnica da recorrência na própria variável, obtém-se os mapas das figuras 4.27 e 4.28, onde foram usadas as recorrências nas variáveis x e y , respectivamente. É indiscutível a semelhança entre estas três figuras.

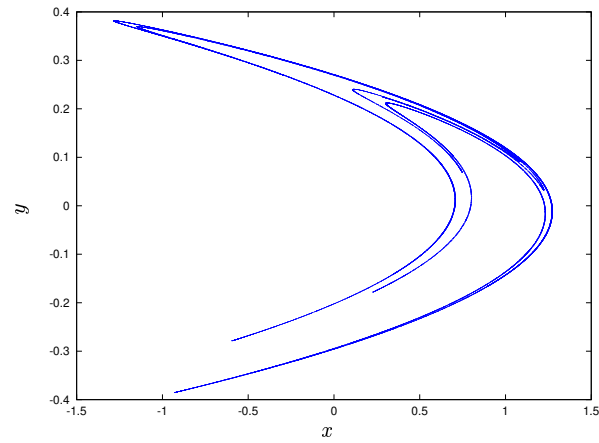


Figura 4.26: Mapa de *Poincaré* para as equações de *Hénon*, usando $\alpha = 1.4$ e $\beta = 0.3$.

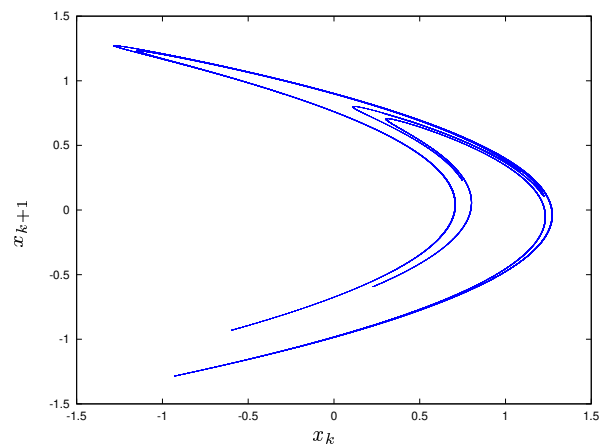


Figura 4.27: Mapa de *Poincaré* para as equações de *Hénon*, usando $\alpha = 1.4$ e $\beta = 0.3$ e a recorrência na variável x .

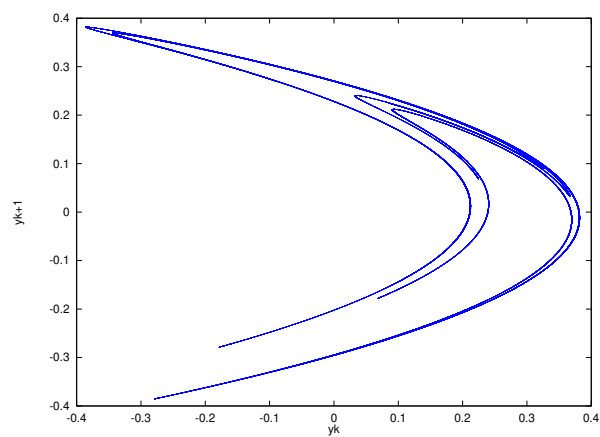


Figura 4.28: Mapa de *Poincaré* para as equações de *Hénon*, usando $\alpha = 1.4$ e $\beta = 0.3$ e a recorrência na variável y .

4.4 Aplicação ao Modelo Estudado

Como mostrado na equação (1.14), o sistema em estudo é não autônomo de segunda ordem e sujeito a restrições de movimentos, proporcionados pelos obstáculos colocados em seu espaço de trabalho. Assim sendo, este sistema pode ser transformado em autônomo de terceira ordem, representado no espaço cilíndrico de dimensão três $\mathbb{R}^2 \times S^1$. Definindo a variável de estado adicional $x_3 = wt$, tem-se o sistema autônomo equivalente a (1.14) dado pela equação (4.8).

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \text{sen}(x_1) - \alpha x_2 + \beta \cos(wt) \\ w \end{bmatrix} \quad \text{quando } |x_1| < 1 \quad (4.8)$$

$$x_2 \rightarrow -k_r x_2 \quad \text{quando } |x_1| = 1$$

Sendo k_r um coeficiente de reposição de velocidade, ele é dependente do material que compõe o pêndulo e os obstáculos, além de depender também da velocidade do impacto (Moore e Shaw, 1990).

A técnica apresentada aqui tem como objetivo principal fazer com que através do *Hit* do *Simulink/Matlab*, que realiza a busca exata de um ponto, o plano de *Poincaré* seja de fato um plano, ou melhor dizendo, uma superfície com espessura nula. Além disso, outra contribuição importante é o fato de que a discretização dos sistemas não-autônomos perturbados periodicamente para a obtenção da Transformação de *Poincaré* é tratada na literatura clássica como uma discretização no tempo, utilizando-se o período de perturbação (no caso a variável x_3) como uma constante para a definição do plano de *Poincaré*. Ora, sabe-se também que para sistemas essencialmente autônomos não perturbados não é correto definir um hiperplano de *Poincaré* através de um período. A discretização deve ser geométrica. No espaço de dimensão n , tal hiperplano, de dimensão $n-1$, deve ser definido por uma associação entre as variáveis de estado do sistema, ou seja, entre as n componentes da trajetória de estado.

O sistema estudado é não-autônomo e perturbado periodicamente. Se fossem adota-

dos os métodos clássicos, ter-se-ia que fazer tal discretização no tempo, além de utilizar-se uma respectiva seção de *Poincaré* definida por um paralelepípedo de espessura não nula. A discretização no tempo nos conduziria de imediato a erros, pois fixando-se o plano como aquele definido pelo período constante (plano $x_1 \times x_2$ para x_3 constante), há a possibilidade de ocorrerem retornos a este "plano" nos momentos dos impactos. Nestes casos, quais seriam os valores de x_2 que pertenceriam ao referido "plano-paralelepípedo", principalmente sabendo-se que tal "plano", se obtido pelos *softwares* disponíveis no mercado, é na verdade um paralelepípedo? Como em cada um desses instantes, x_2 tem derivada teórica infinita, seu valor estaria sendo determinado de forma aleatória no "plano", e assim teríamos uma componente probabilística intrínseca à técnica empregada para a determinação da seção de *Poincaré*.

Através da discretização geométrica, ou seja, definindo o plano de *Poincaré* por x_1 constante (e diferente de ± 1), garante-se que a trajetória o interceptará sempre fora dos instantes de impacto, além disso, utilizando o *Hit*, garante-se que o plano tenha de fato espessura nula. Estes dois procedimentos eliminam a componente estocástica introduzida pelos métodos clássicos de obtenção das seções de *Poincaré*, problema este que é agravado nos casos de sistemas com descontinuidades. Isto mostra que o método proposto, e empregado no exemplo, é uma contribuição de grande valia, pois resgata a importância da análise de sistemas caóticos feitas através das seções de *Poincaré*, tão criticadas principalmente devido à dificuldade que se encontra na fiel definição de tais hiperplanos, quando se empregam métodos numéricos de simulação. Fica evidente, portanto, que as questões de ordem computacional são fundamentais no contexto de qualquer trabalho que vise a análise dinâmica e/ou controle de sistemas.

A simulação analógica feita de fato com elementos analógicos (amplificadores operacionais, resistores, capacitores, etc...) poderia minimizar os problemas acima descritos, pois as variáveis de estado seriam geradas de forma analógica e, portanto, contínua. Neste caso, a definição do plano de *Poincaré* seria trivial. A mesma simulação feita com componentes digitais, que fornecem dados discretos, impõe as dificuldades supra-mencionadas. A definição de um plano exato requer a busca por valores pré-definidos que uma simulação digital convencional pode não realizar corretamente. As técnicas tradicionais adotam aproximações utilizando

pontos que sejam os mais próximos destes, daí dizer-se que usam "hiperparalelepípedos" de *Poincaré* e não hiperplanos de *Poincaré*. Isso pode até ser aceitável para estudar-se, com boa aproximação, o comportamento de sistemas sem descontinuidades, porém é inaceitável para o estudo correto de sistemas que apresentam tais características. Esta é a razão de tamanha ênfase nos aspectos computacionais no contexto de um trabalho como este.

A figura 4.29 mostra os mapas de *Poincaré* obtidos da forma tradicional para valores de parâmetros $\alpha = 0.1$, $\beta = 2.0$, $w = 1.0$, usando o plano de *Poincaré* Σ definido em $x_1 = 0.9$ e com valores de $k_r = \{0.85, 0.90, 0.95, 1.0\}$. Pode-se perceber que, neste caso, a variação

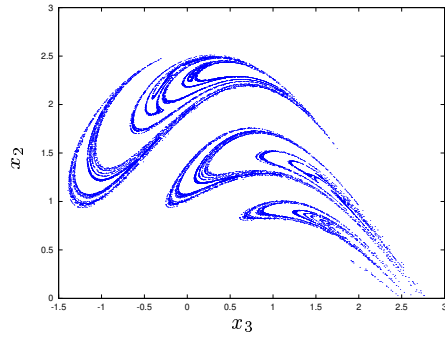
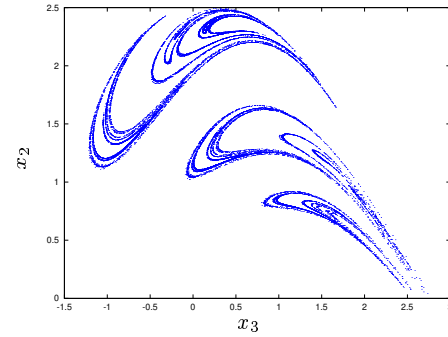
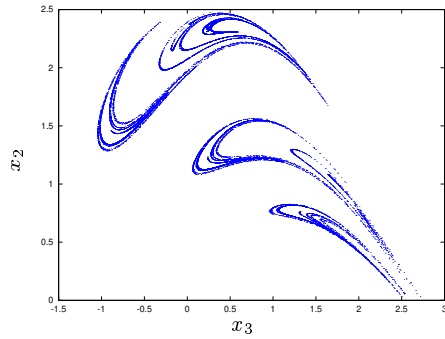
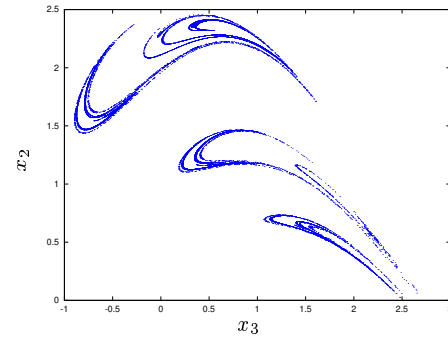

(a) $k_r = 1.0$

(b) $k_r = 0.95$

(c) $k_r = 0.90$

(d) $k_r = 0.85$

Figura 4.29: Mapa de *Poincaré* para $\alpha = 0.1$, $\beta = 2.0$ e $w = 1.0$, com o plano Σ definido em $x_1 = 0.9$, usando o modelo descrito por (4.8).

em k_r não alterou qualitativamente o comportamento dinâmico do sistema, permanecendo em oscilação caótica para os quatro casos.

Para os mesmos parâmetros da figura 4.29, foi aplicada a técnica da recorrência no tempo, mantendo-se o plano Σ em $x_1 = 0,9$ e verificando-se neste plano a recorrência $t_{k+1} = \mathcal{F}(t_k)$. A figura 4.30 mostra os mapas de *Poincaré* obtidos nesta condições. Também neste caso, como era de se esperar, o comportamento de oscilação caótica foi observado para os quatro valores de k_r . Pode-se perceber a existência das estruturas fractais, e ainda mais

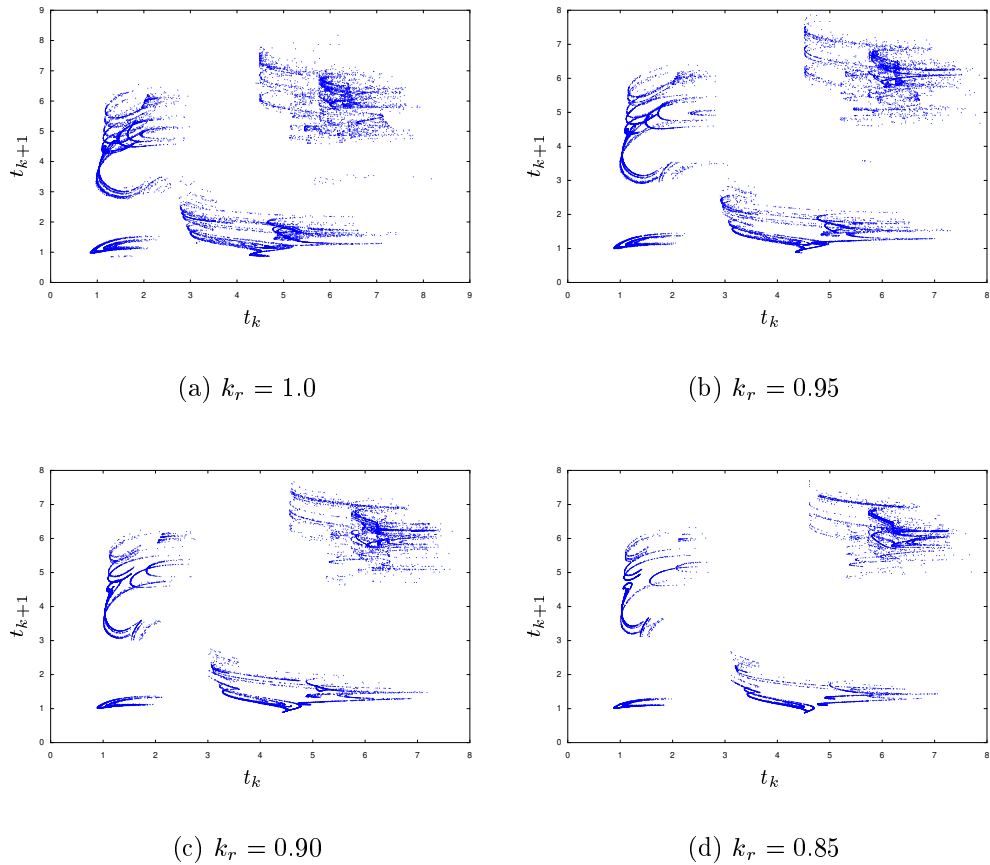


Figura 4.30: Mapa de *Poincaré* para $\alpha = 0.1$, $\beta = 2.0$ e $w = 1.0$, com o plano Σ definido em $x_1 = 0.9$, usando o modelo descrito por (4.8) e a técnica da recorrência no tempo.

detalhadamente com uma ampliação como a mostrada na figura 4.31, onde mostra-se uma pequena região da figura 4.30(c).

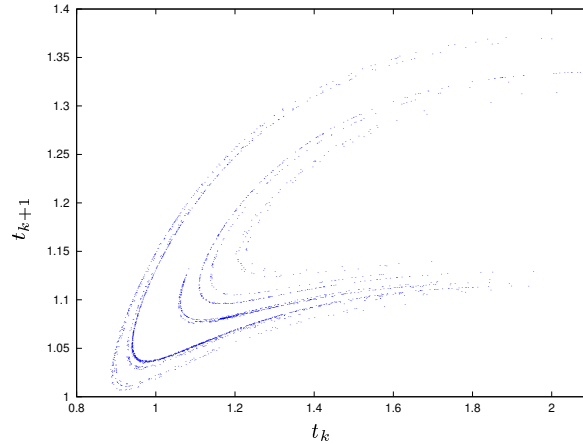
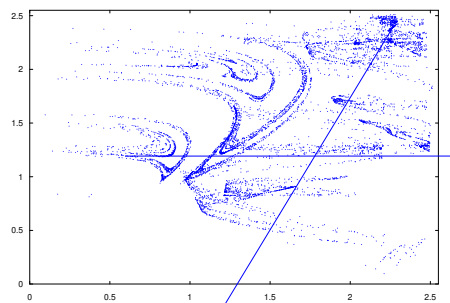


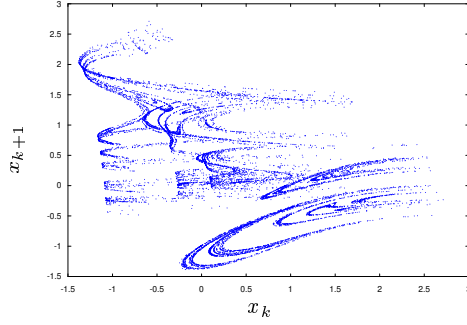
Figura 4.31: Detalhamento do mapa de *Poincaré* mostrado na figura 4.30(c).

Ainda com os mesmos parâmetros da figura 4.29 e o plano de *Poincaré* definido em $x_1 = 0.9$, foi feita a análise utilizando-se a técnica da recorrência na própria variável. A figura 4.32 mostra os mapas de *Poincaré* obtidos para a recorrência $x_2(k+1) = \mathcal{F}(x_2(k))$ e a figura 4.33 mostra os mapas de *Poincaré* obtidos para a recorrência $x_3(k+1) = \mathcal{F}(x_3(k))$. A oscilação caótica também pode ser observada para os quatro valores de k_r .

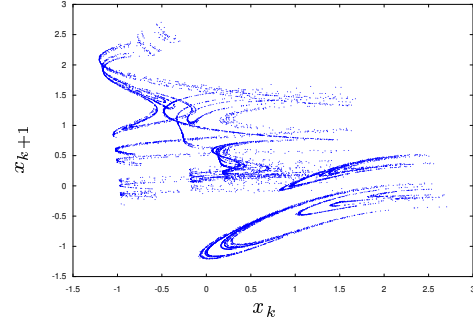
Uma situação diferente foi encontrada alterando-se o valor de β para 1.705 e mantendo-se os demais parâmetros constantes. A figura 4.34 mostra os mapas de *Poincaré* obtidos da forma tradicional para valores de parâmetros $\alpha = 0.1$, $\beta = 1.705$, $w = 1.0$, usando o plano de *Poincaré* Σ definido em $x_1 = 0.9$ e com valores de $k_r = \{0.85, 0.90, 0.95, 1.0\}$. Pode-se perceber que, neste caso, houve uma mudança qualitativa no comportamento dinâmico do sistema, passando de oscilação caótica para periódica. Observe que a figura 4.34(a) apresenta uma estrutura fina e com características fractais semelhante à obtida para o mapa de *Hénon* mostrado nas figuras 4.26, 4.27 e 4.28.

Com os mesmos parâmetros usados nas simulações cujos resultados são mostrados na figura 4.34, utilizou-se a técnica da recorrência no tempo, e os resultados encontrados mais uma vez mostram a transição de uma oscilação caótica para uma oscilação periódica à medida

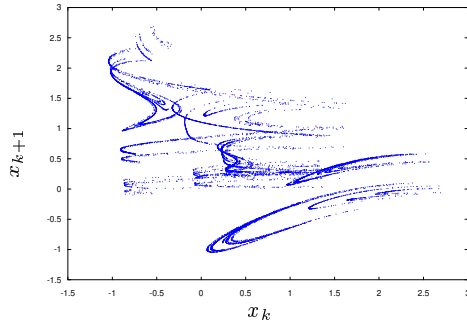




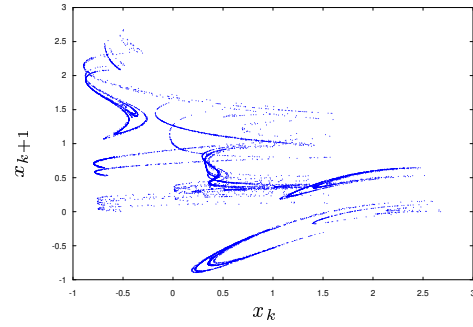
(a) $k_r = 1.0$



(b) $k_r = 0.95$

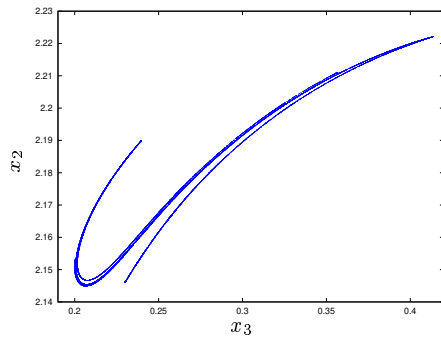


(c) $k_r = 0.90$

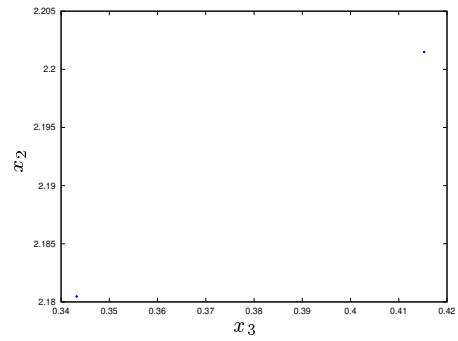


(d) $k_r = 0.85$

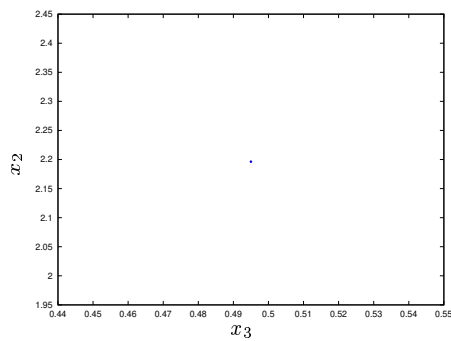
Figura 4.33: Mapa de *Poincaré* para $\alpha = 0.1$, $\beta = 2.0$ e $w = 1.0$, com o plano Σ definido em $x_1 = 0.9$, usando o modelo descrito por (4.8) e a técnica da recorrência na própria variável (x_3).



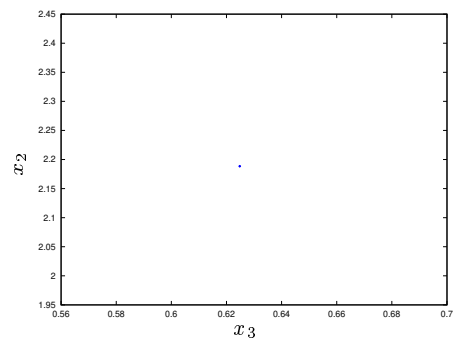
(a) $k_r = 1.0$



(b) $k_r = 0.95$



(c) $k_r = 0.90$



(d) $k_r = 0.85$

Figura 4.34: Mapa de *Poincaré* para $\alpha = 0.1$, $\beta = 1.705$ e $w = 1.0$, com o plano Σ definido em $x_1 = 0.9$, usando o modelo descrito por (4.8).

que o fator de restituição da velocidade k_r diminui, o que pode ser visto na figura 4.35.

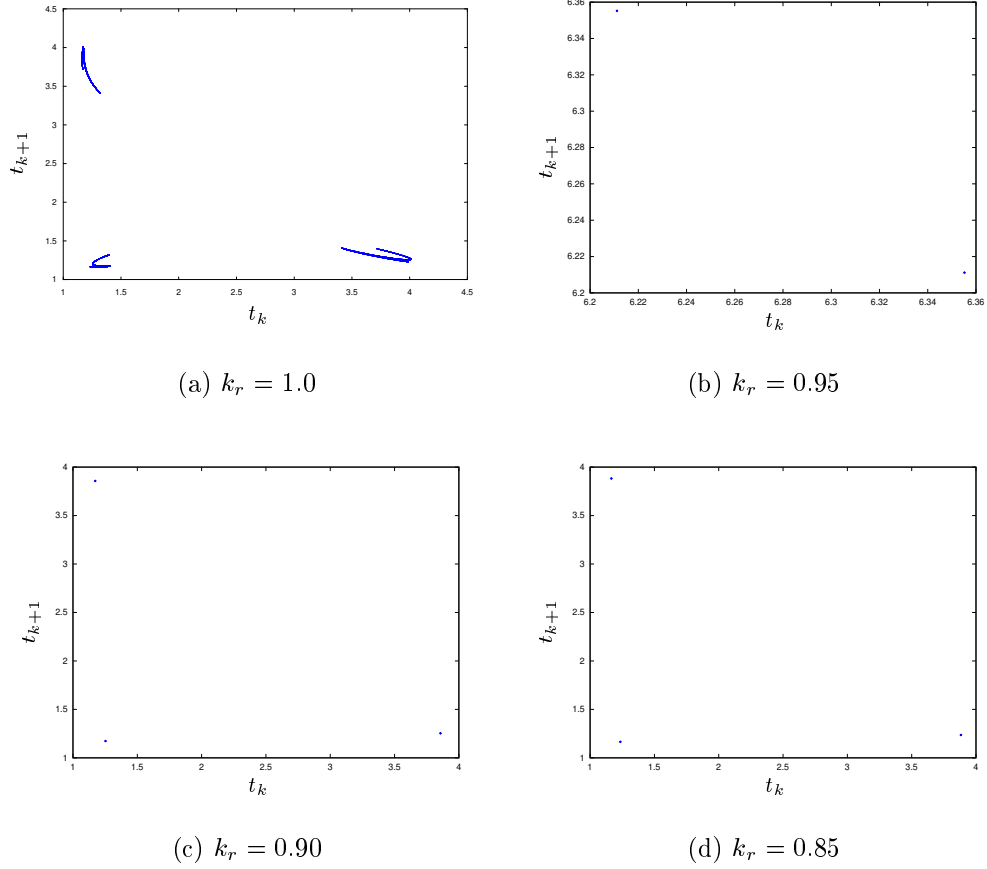
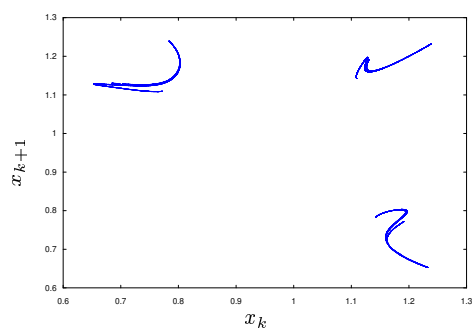
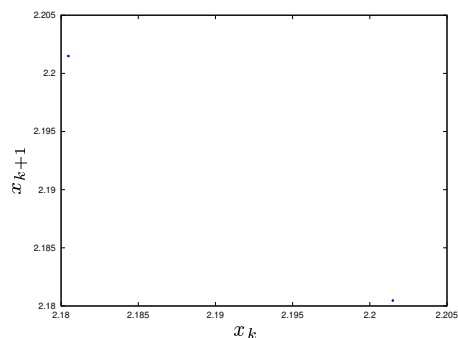


Figura 4.35: Mapa de *Poincaré* para $\alpha = 0.1$, $\beta = 1.705$ e $w = 1.0$, com o plano Σ definido em $x_1 = 0.9$, usando o modelo descrito por (4.8) e a técnica da recorrência no tempo.

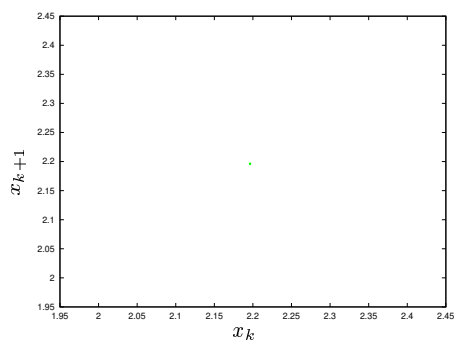
Ainda com os parâmetros das simulações cujos resultados são mostrados na figura 4.34 e utilizando-se agora a recorrência na própria variável, foram obtidos os resultados mostrados nas figuras 4.36 e 4.37, os quais mostram, respectivamente, as recorrências em x_2 ($x_2(k+1) = \mathcal{F}(x_2(k))$) e em x_3 ($x_3(k+1) = \mathcal{F}(x_3(k))$). Também aqui a mudança qualitativa no comportamento dinâmico do sistema é evidenciada, passando de oscilação caótica para periódica.



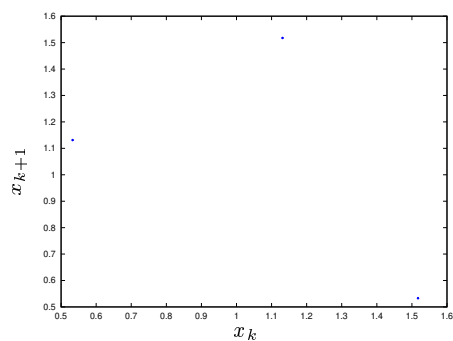
(a) $k_r = 1.0$



(b) $k_r = 0.95$

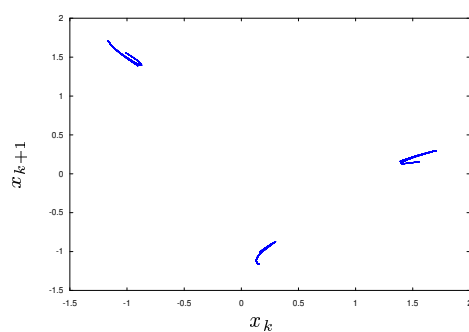


(c) $k_r = 0.90$

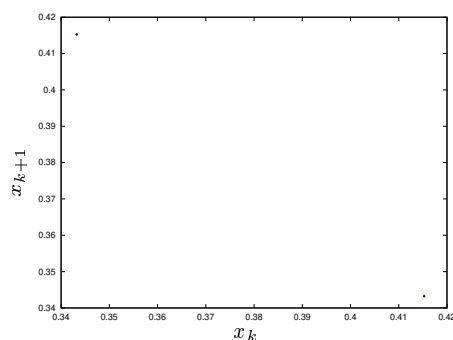


(d) $k_r = 0.85$

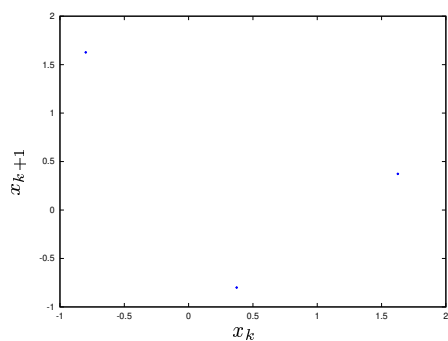
Figura 4.36: Mapa de *Poincaré* para $\alpha = 0.1$, $\beta = 1.705$ e $w = 1.0$, com o plano Σ definido em $x_1 = 0.9$, usando o modelo descrito por (4.8) e a técnica da recorrência na própria variável (x_2).



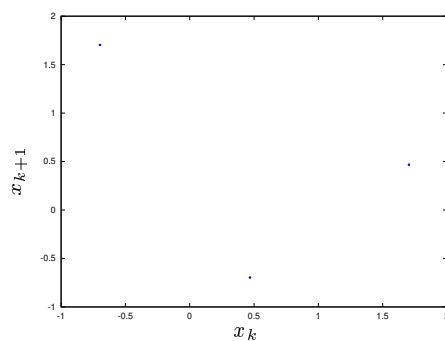
(a) $k_r = 1.0$



(b) $k_r = 0.95$



(c) $k_r = 0.90$



(d) $k_r = 0.85$

Figura 4.37: Mapa de *Poincaré* para $\alpha = 0.1$, $\beta = 1.705$ e $w = 1.0$, com o plano Σ definido em $x_1 = 0.9$, usando o modelo descrito por (4.8) e a técnica da recorrência na própria variável (x_3).

Cabe aqui ressaltar a importância do modelo matemático usado na análise do comportamento do sistema. A linearização ou utilização de aproximações em um modelo matemático pode levar a conclusões equivocadas do comportamento do sistema. É o que se pode perceber fazendo-se uma comparação entre as figuras 4.38 e 4.39, onde nota-se que existe uma diferença quantitativa. A figura 4.40 apresenta a sobreposição dos dois atratores obtidos. Note que o atrator referente ao modelo (4.8) é uma parte do atrator referente ao modelo aproximado (equações 4.8, aproximando-se $\sin(x_1)$ por x_1).

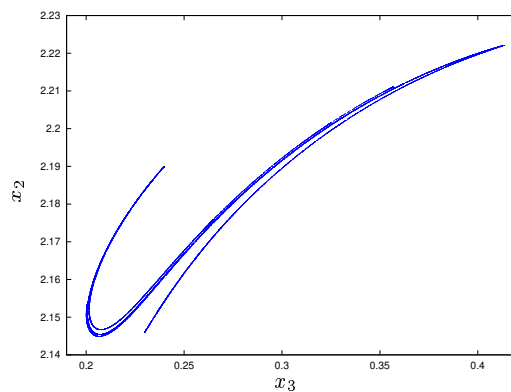


Figura 4.38: Mapa para $\alpha = 0.1$, $\beta = 1.705$, $w = 1.0$ e $k_r = 1.0$, com o plano Σ definido em $x_1 = 0.9$, usando o modelo sem linearização.

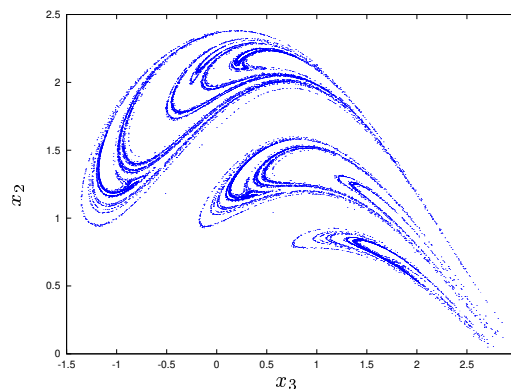


Figura 4.39: Mapa para $\alpha = 0.1$, $\beta = 1.705$, $w = 1.0$ e $k_r = 1.0$ com o plano Σ definido em $x_1 = 0.9$, usando o modelo aproximado por Shaw e Rand (1989). Caótico.

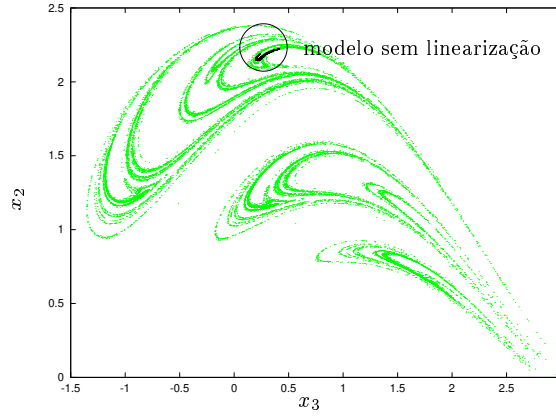


Figura 4.40: Sobreposição dos mapas das figuras 4.38 e 4.39.

Foi possível ainda detectar outras diferenças qualitativas entre os dois modelos, mostrando que o modelo aproximado, em algumas circunstâncias, leva a comportamentos dinâmicos diferentes daqueles obtidos via modelo sem linearização, devido à grande sensibilidade do sistema modelado às condições iniciais. Neste sentido, certos comportamentos dinâmicos podem ser mascarados na análise, devido à modificação imposta pela linearização feita na modelagem. Como exemplo, para $\alpha = 0.1$, $\beta = 1.705$, $\omega = 1.0$ e $k_r = 0.986$, o modelo sem linearização apresenta comportamento periódico, enquanto que o modelo aproximado apresenta comportamento caótico, como pode ser visto na figura 4.41. A figura 4.42 mostra uma parte do atrator apresentado pelo modelo aproximado (figura 4.41(b)), evidenciando a característica fractal deste, donde se poderia concluir erroneamente que para estas condições o sistema é caótico.

É importante também chamar a atenção para um recurso computacional usado na obtenção dos mapas de *Poincaré* mostrados neste capítulo. O número de pontos que compõem tais mapas é bastante elevado, principalmente nos referentes a comportamentos caóticos (podem chegar a 100.000 pontos por mapa, dependendo do tempo de simulação). Este número seria muito mais elevado se não fosse adotado um critério de arquivamento de pontos que levasse em consideração a distância do ponto em questão e os demais pontos já armazenados. Isto devido ao fato de que estes pontos, embora distintos, podem estar próximos o bastante de tal forma que em uma representação gráfica pudessem ser considerados um mesmo ponto.

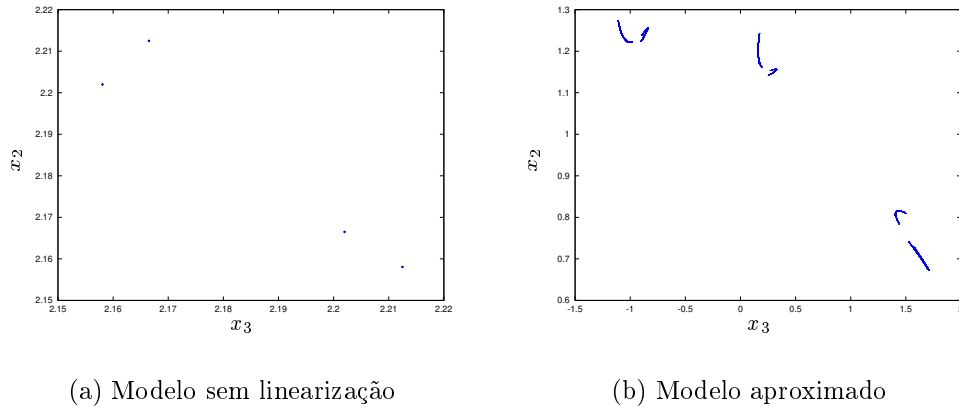


Figura 4.41: Mapas de *Poincaré* para $\alpha = 0.1$, $\beta = 1.705$, $w = 1.0$ e $k_r = 0.986$, com o plano Σ definido em $x_1 = 0.9$, usando o modelo descrito por (4.8) e o descrito por Shaw e Rand (1989).

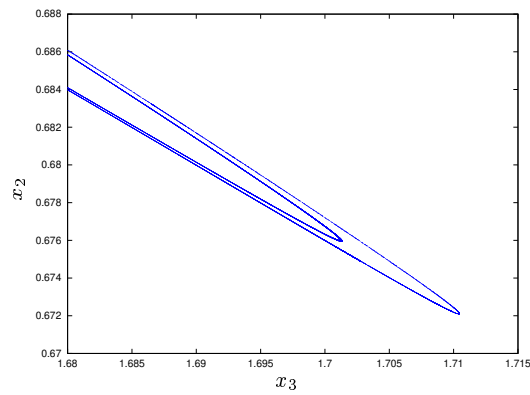


Figura 4.42: Detalhe do atrator quando $\alpha = 0.1$, $\beta = 1.705$, $w = 1.0$ e $k_r = 0.986$ com o plano Σ definido em $x_1 = 0.9$, usando o modelo aproximado.

Adotando-se este critério de seleção de pontos a serem armazenados, pode-se minimizar o problema do tamanho dos arquivos de dados.

Capítulo 5

Diagramas de Bifurcação

5.1 Introdução

O aparecimento de caos em sistemas dinâmicos sempre está ligado à ocorrência de algum tipo de bifurcação (Fiedler-Ferrara e Prado, 1994). Daí a importância deste capítulo, cuja finalidade é mostrar uma forma de construção de diagramas de bifurcação.

Um diagrama ou mapa de bifurcação tem por finalidade mostrar o comportamento de um determinado sistema em função da variação de um determinado parâmetro, mantendo-se os demais constantes. Este tipo de análise é extremamente útil na implementação de sistemas de controle.

Como foi mostrado no capítulo 4, um mapa de *Poincaré* mostra o comportamento dinâmico de um determinado sistema de ordem n através dos valores assumidos por suas variáveis quando atingem um hiperplano de ordem $n - 1$ e com todos os parâmetros constantes. Portanto, escolhendo-se um determinado parâmetro para análise, cada valor deste parâmetro conduz a um mapa de *Poincaré* diferente. Este é o princípio usado para a construção dos diagramas de bifurcação mostrados neste capítulo, ou seja, escolhido o parâmetro do sistema a ser analisado, constrói-se um mapa de *Poincaré* para cada valor deste parâmetro, e mostra-se o comportamento de uma das variáveis do sistema em função da variação deste

parâmetro, supondo que cada uma das suas variáveis carrega a informação qualitativa do seu comportamento dinâmico. Logo, o diagrama de bifurcação resultante é uma justaposição de tantos mapas de *Poincaré* quantos forem os valores estudados do parâmetro, e será tão mais rico em informações quanto menores forem os intervalos entre cada valor por ele assumido.

Como consequência imediata disto, para que se tenha um diagrama de bifurcação no mínimo interessante, necessita-se de uma grande quantidade mapas de *Poincaré* justapostos. E como já foi dito na seção 3.2, estes mapas são normalmente compostos de uma quantidade muito grande de pontos, especialmente em regiões de comportamento caótico. Desta forma, os mapas de bifurcação encontrados, via de regra, quando armazenados geram arquivos de tamanhos bastante consideráveis o que, por vezes, os tornam difíceis de serem manipulados.

Outro ponto importante a ser ressaltado é o fato de que a forma de variação do parâmetro também influencia no diagrama encontrado. Isto se deve ao fato de que o sistema pode passar por regiões de extrema sensibilidade às condições iniciais. Assim sendo, uma variação crescente ou decrescente do parâmetro pode levar a diferentes comportamentos do sistema e, conseqüentemente, a diferentes diagramas de bifurcação, se forem consideradas como condições iniciais para a obtenção do novo mapa de *Poincaré* as condições finais encontradas na obtenção do mapa de *Poincaré* anterior. Este fenômeno é conhecido na literatura como problema de histerese (Parker e Chua, 1989; Fiedler-Ferrara e Prado, 1994).

A utilização do *C MEX* foi de extrema importância na obtenção de tais mapas, visto a necessidade de simulações contínuas durante espaços longos de tempo sem que ocorressem problemas por falta de capacidade de memória, comuns no ambiente *Matlab* quando trata com grandes quantidades de dados.

Ainda para garantir qualidade nos resultados obtidos, foi utilizada a precisão máxima permitida pelo *Matlab*, o que também faz aumentar o tempo de simulação. O integrador utilizado foi o ode113 (Adams), com passo de integração variável, segundo orientação do fabricante do *software* (MathWorks, ©1990 - 1998).

5.2 Aplicação a Sistemas Conhecidos

Para ilustrar a construção de diagramas de bifurcação pelo método descrito anteriormente, optou-se por mostrar inicialmente alguns mapas de bifurcações conhecidos e mencionados no anexo. Para todos os diagramas mostrados a seguir utilizou-se uma variação de 0.0001 para o parâmetro dentro dos intervalos estudados.

Seja, então, o sistema representado pela equação (A.15), o qual apresenta uma bifurcação do tipo sela-nó. Considere que este sistema seja perturbado periodicamente, de tal forma que resulte na seguinte expressão:

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu - x^2 + \beta \cos(wt) \quad (5.1)$$

Para este sistema foi determinado o diagrama de bifurcação em função da variação do parâmetro μ , e o resultado é mostrado na figura 5.1.

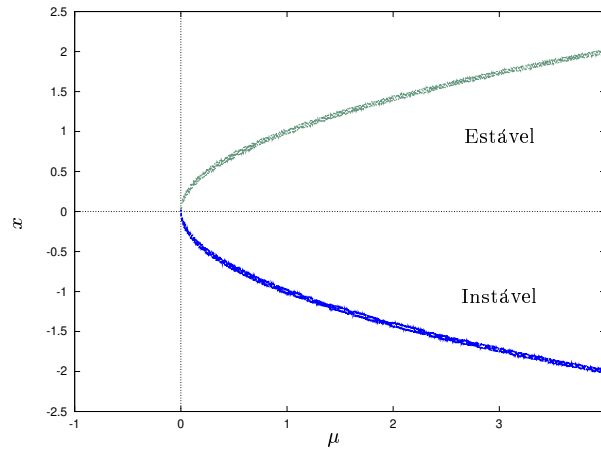


Figura 5.1: Diagrama de bifurcação do tipo sela-nó do sistema representado pela equação (5.1), usando $\beta = 0.2$ e $w = 5$ rad/s.

Seja agora um sistema que apresenta uma bifurcação do tipo transcítica (equação (A.16)) perturbado periodicamente, cuja equação é:

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x + x^2 + \beta \cos(wt) \quad (5.2)$$

Variando-se o parâmetro μ da equação (5.2) obtém-se o diagrama mostrado na figura 5.2. Também aqui a troca de estabilidade quando μ passa por zero pode ser observada.

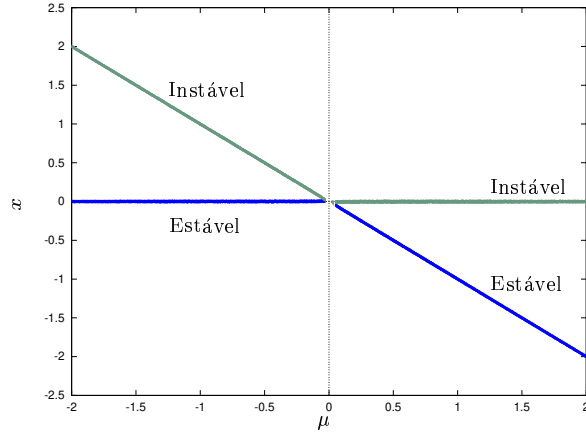


Figura 5.2: Diagrama de bifurcação do tipo transcritical do sistema representado pela equação (5.2), usando $\beta = 0.1$ e $w = 5$ rad/s.

Considerando o sistema da equação (A.17), também perturbado periodicamente, tal que:

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x - x^3 + \beta \cos(wt) \quad (5.3)$$

obtém-se o diagrama de bifurcação mostrado na figura 5.3. Observe que continua existindo a bifurcação com forma de forquilha.

Para o sistema da equação (A.18), possuidor de uma bifurcação tipo forquilha subcrítica, uma perturbação periódica leva a:

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x + x^3 + \beta \cos(wt) \quad (5.4)$$

Este sistema perturbado periodicamente apresenta o diagrama de bifurcação mostrado na figura 5.4, onde também existe uma bifurcação na forma de forquilha.

A figura 5.5 mostra o diagrama de bifurcação do tipo *Hopf* encontrado para o sistema de equações (5.5)

$$f(x, \mu) = \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_0(x_0^2 + x_1^2 - \mu) \\ -x_0 - x_1(x_0^2 + x_1^2 - \mu) \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

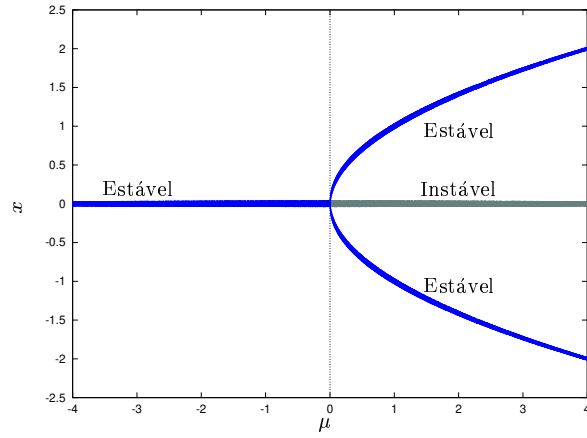


Figura 5.3: Diagrama de bifurcação do tipo forquilha supercrítica do sistema representado pela equação (5.3), usando $\beta = 0.2$ e $w = 5$ rad/s.

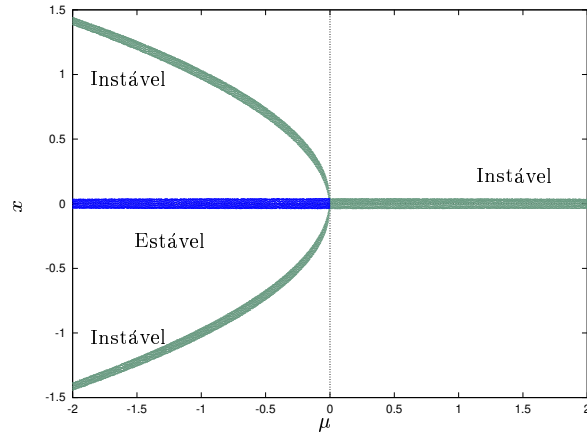


Figura 5.4: Diagrama de bifurcação do tipo forquilha subcrítica do sistema representado pela equação (5.4), usando $\beta = 0.2$ e $w = 5$ rad/s.

onde o parâmetro μ foi variado entre -1 e 2.5, com passo de variação de 0.01.

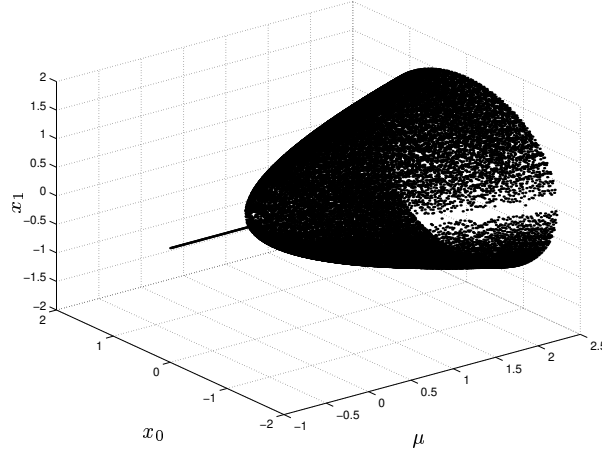


Figura 5.5: Diagrama de bifurcação de *Hopf* ou *Poincaré-Andronov* do sistema representado pela equação (5.5).

Tem-se nas figuras 5.6, 5.7 e 5.8 as bifurcações do tipo homoclínica encontradas para o sistema de equações (5.6), para as condições de $\mu = 0$, $\mu < 0$ e $\mu > 0$, respectivamente.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 + \mu x_1 - x_0^2 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

As figuras 5.9 e 5.10 mostram os diagramas de bifurcação encontrados para a equação de *Duffing* (2.1) para x e y em função do parâmetro ϵ , respectivamente.

Estes diagramas mostram, como era de se esperar, o mesmo comportamento periódico obtido nas figuras 2.1 e 2.6, bem como também retrata o comportamento caótico mostrado nas figuras 2.3, 2.8 e 2.13.

Trata-se de um método bastante eficiente para construção de mapas de bifurcação, embora sua obtenção seja bastante demorada e exija a manipulação de arquivos de dados de grandes tamanhos. Os diagramas mostrados nas figura 5.9 e 5.10, por exemplo, são constituídos de 8000 mapas de *Poincaré* justapostos, correspondentes à variação de ϵ entre 0 e 0.8, com passo de 0.0001 e variação decrescente. Além do tempo necessário para a

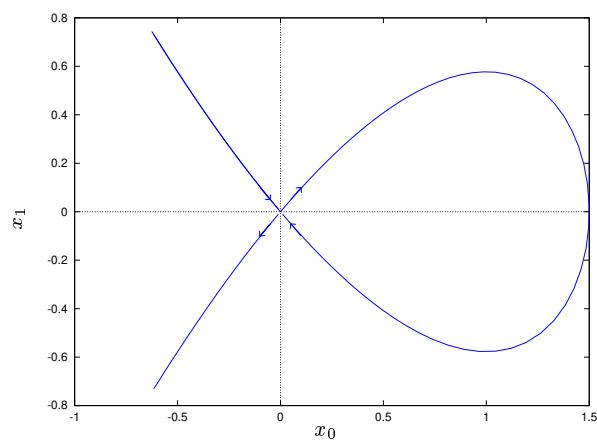


Figura 5.6: Bifurcação homoclínica do sistema representado pela equação (5.6), para $\mu = 0$.

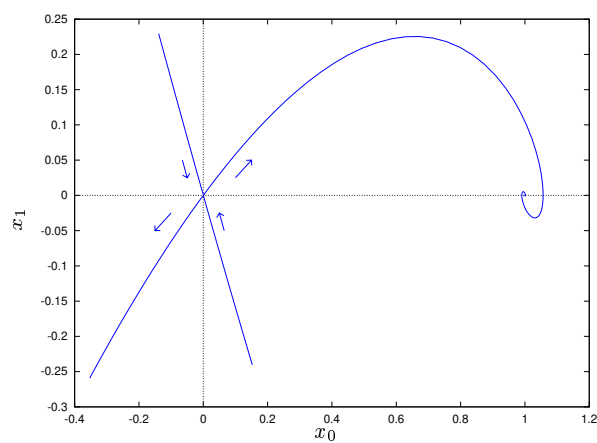


Figura 5.7: Bifurcação homoclínica do sistema representado pela equação (5.6), para $\mu = -1$.

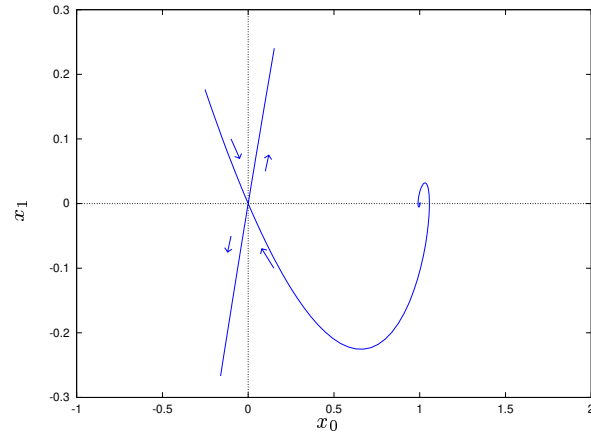


Figura 5.8: Bifurcação homoclínica do sistema representado pela equação (5.6), para $\mu = 1$.

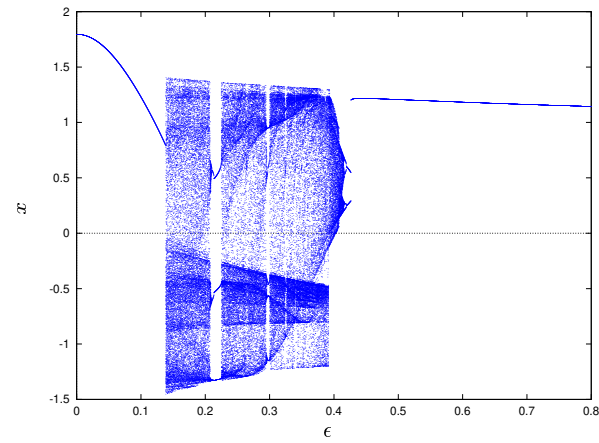


Figura 5.9: Diagrama de bifurcação para a equação de *Duffing* (2.1) para a variável x com $\gamma = 0.3$ e $w = 1.0$.

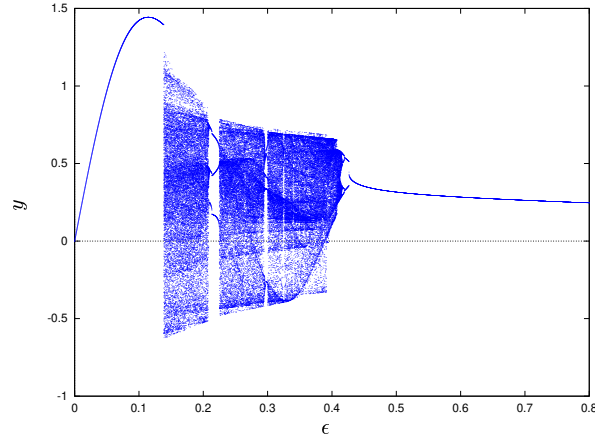


Figura 5.10: Diagrama de bifurcação para a equação de *Duffing* (2.1) para a variável y com $\gamma = 0.3$ e $w = 1.0$.

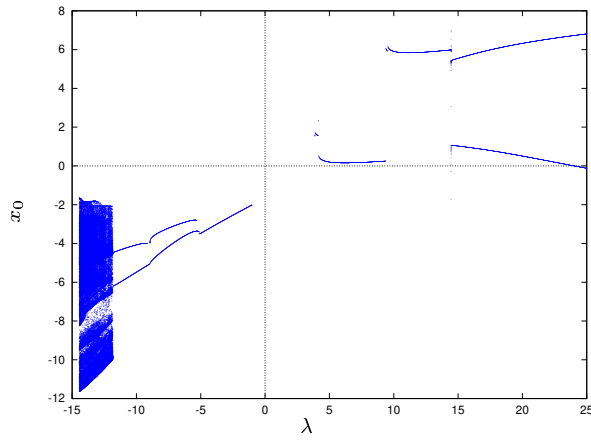
construção de cada um destes mapas, ainda resta a necessidade de se garantir que o sistema alcance o conjunto limite após cada variação do parâmetro em estudo, o que aumenta bastante o tempo de simulação. Foram utilizadas condições iniciais nulas para o primeiro mapa de *Poincaré*, e para os demais consideraram-se como condições iniciais as condições finais do mapa anterior.

Outro ponto a ser observado é a possibilidade de obtenção de bifurcações de sistemas de ordens superiores. Seja, por exemplo, o modelo de *Lorenz* de quarta ordem dado pelas equações (5.7).

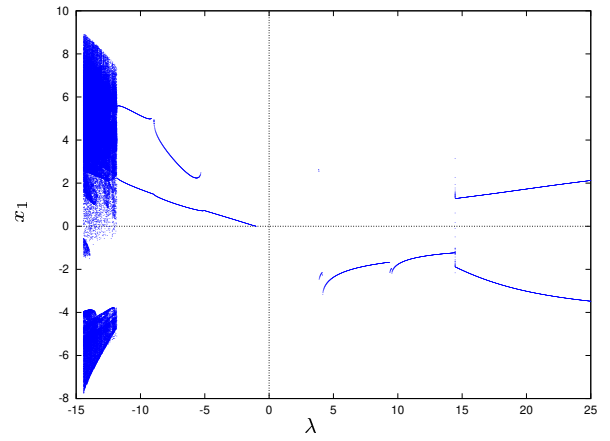
$$\begin{aligned}
 \dot{x}_0 &= -x_0 + 2\lambda - (x_1)^2 + \frac{(x_2)^2 + (x_3)^2}{2} \\
 \dot{x}_1 &= -x_1 + (x_0x_1 - x_2x_3) + \frac{(x_3)^2 - (x_2)^2}{2} \\
 \dot{x}_2 &= -x_2 + \frac{(x_1 - x_0)(x_2 + x_3)}{2} \\
 \dot{x}_3 &= -x_3 + \frac{(x_1 + x_0)(x_2 - x_3)}{2}
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Fazendo-se a bifurcação para este sistema de equações em função da variação do parâmetro λ , obtêm-se os diagramas mostrados na figura 5.11.

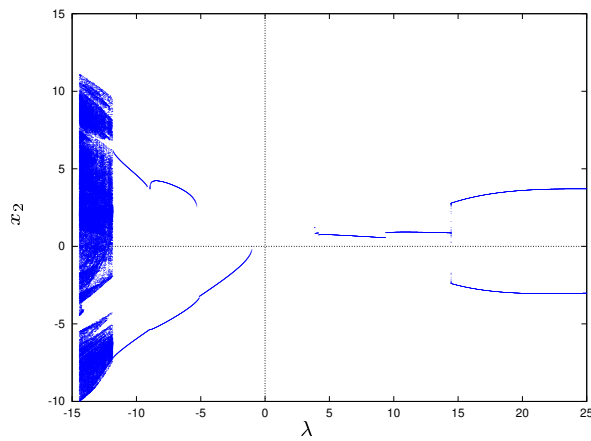
Neste caso aparece um problema diferente na obtenção dos mapas de bifurcação. En-



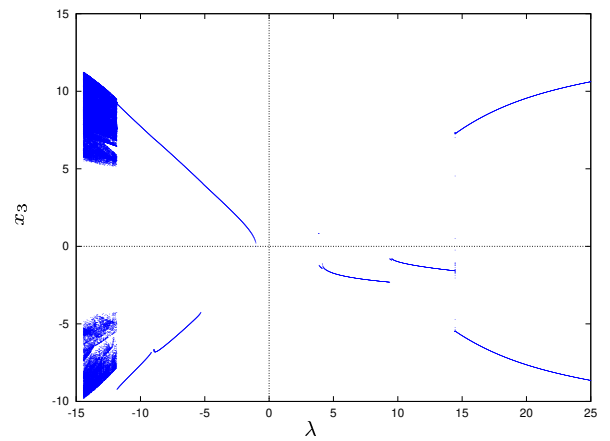
(a) $\lambda \times x_0$



(b) $\lambda \times x_1$



(c) $\lambda \times x_2$



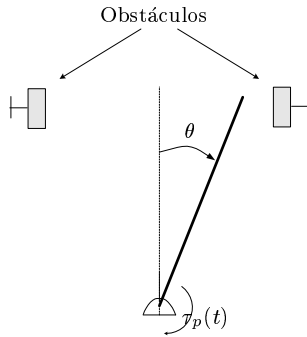
(d) $\lambda \times x_3$

Figura 5.11: Diagramas de bifurcação para o modelo de *Lorenz* de quarta ordem da equação (5.7).

quanto a simulação evolui, para algumas faixas de variação do parâmetro λ , o sistema migra para pontos de equilíbrios estáveis, o que faria com que a simulação parasse de progredir porque todos os estados possuem derivadas nulas no equilíbrio. Portanto, o *C MEX* deve ter programado um método para detectar quando isto ocorre, terminar tal etapa da simulação, forçar o incremento do parâmetro e restabelecer a progressão da simulação.

5.3 Aplicação ao Modelo Estudado

A equação (5.8) mostra, mais uma vez, o modelo do módulo robótico estudado neste trabalho, onde k_r é o coeficiente de reposição da velocidade após cada choque.



$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \text{sen}(x_1) - \alpha x_2 + \beta \cos(wt) \end{bmatrix} \text{ quando } |x_1| < 1 \quad (5.8)$$

$$x_2 \rightarrow -k_r x_2 \text{ quando } |x_1| = 1$$

Pode-se perceber que, para este caso, são quatro os parâmetros que estão diretamente influenciando o comportamento dinâmico do sistema:

- α : é a constante de amortecimento do sistema
- β : amplitude do sinal forçante
- ω : velocidade angular do sinal forçante
- k_r : coeficiente de reposição da velocidade

E com apenas estes quatro parâmetros, são infinitas as possibilidades de análise, visto serem infinitas as combinações possíveis para os valores destes parâmetros dentro de suas possíveis faixas de variação. Note que apenas algumas condições foram escolhidas para análise.

Como primeiro exemplo, considere que várias condições típicas de operação podem ocorrer nos instantes dos choques com os obstáculos. Dependendo dos materiais utilizados no elo e nos obstáculos, o coeficiente de reposição k_r pode assumir valores diferentes. Neste caso, é importante verificar os tipos de comportamento possíveis para as variações deste parâmetro dentro de uma determinada faixa. Esta é uma justificativa já suficiente para explicar a necessidade de se mapear o comportamento dinâmico do sistema em função da variação deste parâmetro de reposição de velocidade.

Neste estudo considerou-se um diagrama de bifurcação traçado a partir da transformação de *Poincaré* descrita no plano Σ e escolhendo-se uma das variáveis x_i , $i \neq 1$ obtendo-se um diagrama no plano $k_r \times x_i$. A exclusão de x_1 é devida ao fato de ter sido usada para a definição do plano Σ escolhido para a obtenção dos mapas de *Poincaré*, o que evidentemente a tornará sempre constante no instante de cada interseção.

Os mapas de bifurcação obtidos podem ser vistos nas figuras 5.12 e 5.13. Eles foram

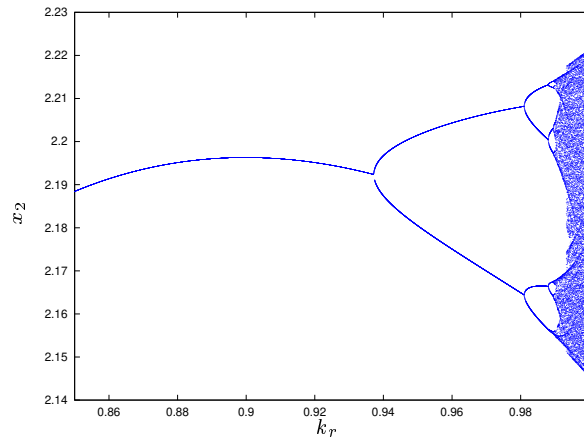


Figura 5.12: Diagrama de bifurcação de $k_r \times x_2$ para $\alpha = 0.1$, $\beta = 1.705$ e $w = 1.0$ com o plano Σ definido em $x_1 = 0.9$.

construídos usando-se os mesmos parâmetros dos mapas de *Poincaré* das figuras 4.34(a), 4.34(b), 4.34(c) e 4.34(d). Pode-se observar que os comportamentos mostrados em tais mapas são retratados nestes diagramas, ou seja, comportamento caótico para $k_r = 1.0$ e comportamentos periódicos para $k_r = 0.95$, 0.9 e 0.85, respectivamente. Foi considerada uma variação

decrecente para k_r , e as condições iniciais para cada novo valor do parâmetro iguais às condições finais do caso anterior, sendo nulas as condições iniciais para $k_r = 1.0$. Os mesmos

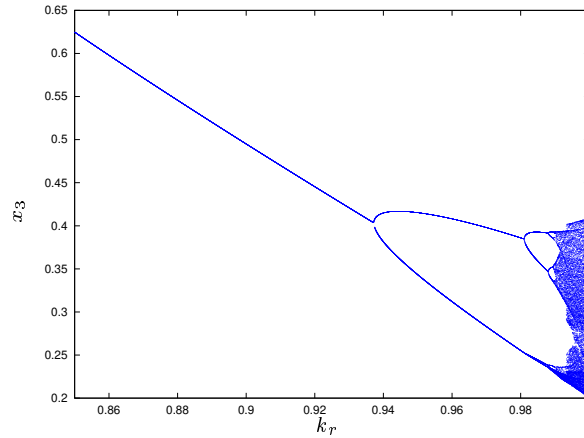


Figura 5.13: Diagrama de bifurcação de $k_r \times x_3$ para $\alpha = 0.1$, $\beta = 1.705$ e $w = 1.0$ com o plano Σ definido em $x_1 = 0.9$.

mapas de bifurcação são mostrados nas figuras 5.14 e 5.15 dando um melhor detalhamento da região de comportamento caótico mostrado nas figuras 5.12 e 5.13, respectivamente.

Observe que qualquer outra combinação dos parâmetros α , β e w certamente levaria a mapas de bifurcação distintos dos mostrados nas figuras 5.12, 5.13, 5.14 e 5.15.

Suponha agora que o sistema tenha sido projetado para trabalhar em locais com diferentes coeficientes de amortecimento (α). É o que acontece, por exemplo, se o sistema estiver operando no ar ou imerso em fluidos de diferentes densidades. Cabe, neste caso, uma análise do comportamento do sistema em função da variação deste parâmetro. Obviamente, mais uma vez ressalta-se o fato de que existem infinitas possibilidades de casos a serem analisados, uma vez que são infinitas as possibilidades de combinação de valores dos parâmetros do sistema. As figuras 5.16 e 5.17 mostram os diagramas de bifurcação encontrados para a variação do parâmetro α em função das variáveis x_1 e x_2 , respectivamente. Cabe lembrar que a variável x_o foi a escolhida para definir o mapa de *Poincaré* e, portanto, não pode ser usada nesta análise, por ser sempre constante.

Nestes últimos dois mapas, foi possível observar uma característica interessante freqüen-

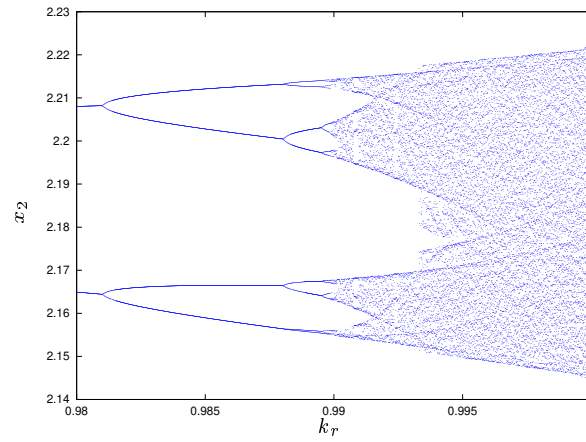


Figura 5.14: Detalhamento da região caótica do diagrama de bifurcação mostrado na figura 5.12.

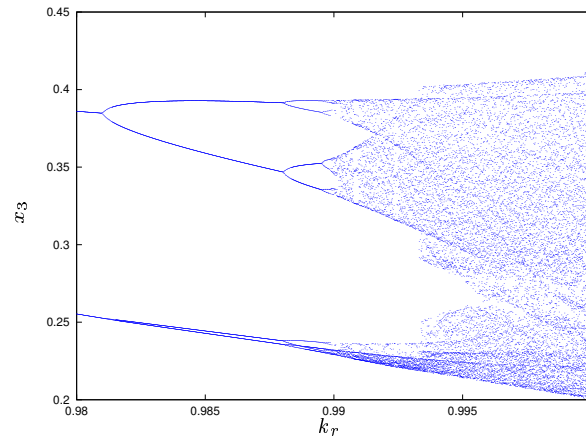


Figura 5.15: Detalhamento da região caótica do diagrama de bifurcação mostrado na figura 5.13.

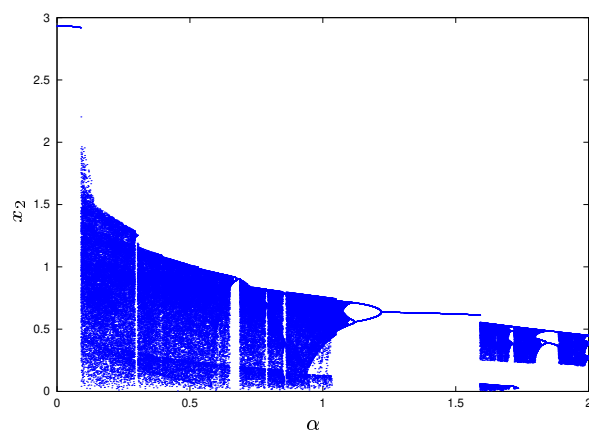


Figura 5.16: Diagrama de bifurcação de $\alpha \times x_2$ para $k_r = 1$, $\beta = 2.0$ e $w = 4.0$ com o plano Σ definido em $x_1 = 0.95$.

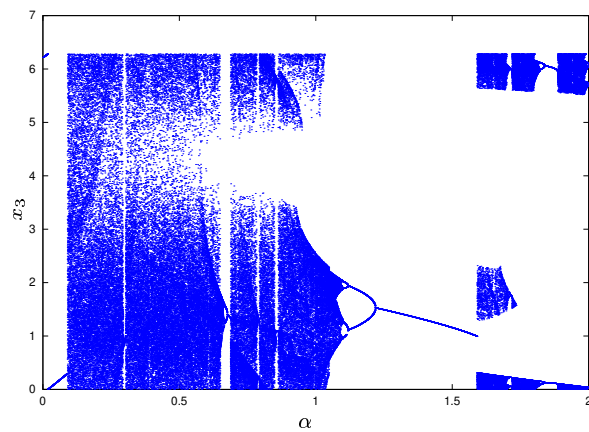


Figura 5.17: Diagrama de bifurcação de $\alpha \times x_3$ para $k_r = 1$, $\beta = 2.0$ e $w = 4.0$ com o plano Σ definido em $x_1 = 0.95$.

temente presente em sistema dinâmicos: a existência de regiões de comportamento periódico entre regiões de comportamento caótico. Estas janelas periódicas foram também observadas nos diagramas de bifurcação para a equação de *Duffing* mostrados nas figuras 5.9 e 5.10.

É importante enfatizar que o tempo gasto para a obtenção de tais mapas é bastante elevado, principalmente quando se deseja resultados com elevada precisão. A grande quantidade de diferentes valores para o parâmetro em estudo e a necessidade de deixar um intervalo de tempo entre cada mudança no valor deste para eliminação de efeitos transitórios indesejados, juntamente com a necessidade de alta precisão faz com que mapas como os mostrados nas figuras 5.9 e 5.10 sejam obtidos através de simulações contínuas de dez dias, utilizando-se um microcomputador *Pentium III* de 450 MHz. E devido a esta demora, a utilização de uma técnica de *backup* automático durante o processamento foi de fundamental importância para diminuir riscos de perda de grandes quantidades de informações decorrentes de problemas de falta de energia elétrica. Neste aspecto, a utilização do *C MEX* facilita bastante na execução das tarefas, visto que toda a programação é feita utilizando-se o C^{++} . Um exemplo de programa *C MEX* pode ser visto no apêndice B.

O elevado tempo de simulação é uma restrição deste método, mas que também ocorre em outros métodos propostos na literatura. É o caso, por exemplo, do método da Força Bruta, cujo algoritmo é mostrado em Parker e Chua (1989). Outro método cujo algoritmo também é mostrado em Parker e Chua (1989) é o da Continuação, que também é demorado e não consegue manipular comportamentos caóticos.

Capítulo 6

Expoentes de *Lyapunov*

6.1 Introdução

Como foi mencionado anteriormente, os mapas de *Poincaré* e os diagramas de bifurcação são ferramentas gráficas que permitem analisar a dinâmica de sistemas a partir de características específicas de cada comportamento identificadas nestes mapas. Tratam-se, portanto, de análises qualitativas que, apesar de serem bastante úteis, por vezes podem não ser conclusivas.

O procedimento de obtenção dos expoentes de *Lyapunov* nos fornece uma ferramenta que permite determinar a estabilidade de qualquer tipo de sistema em regime permanente, inclusive os dos tipos quasi-periódico, caótico e instável, através de análises da dependência sensitiva às condições iniciais impostas ao sistema. Esta sensibilidade é expressa em termos da taxa de divergência de trajetórias que partem de condições iniciais infinitesimalmente próximas, a qual é identificada em função dos expoentes de *Lyapunov* correspondentes. Trata-se, portanto, de uma análise quantitativa e conclusiva do comportamento dinâmico de sistemas.

Não se pretende aqui dar uma definição rigorosa para os expoentes de *Lyapunov*, mas sim introduzir o conceito associado, assim como evidenciar a interpretação dada aos expo-

entes calculados e um algoritmo usado para sua obtenção. Definições rigorosas podem ser encontradas em Guckenheimer e Holmes (1990) e em Fiedler-Ferrara e Prado (1994).

6.2 Definição e Interpretação

Os expoentes de *Lyapunov* são os autovalores do modelo da diferença dinâmica entre duas trajetórias iniciadas em pontos distintos e muito próximos, o qual é linear e variante no tempo (variacional). Estes expoentes podem ser usados para determinar a estabilidade de comportamentos quasi-periódicos e caóticos assim como de pontos de equilíbrio, soluções periódicas e instabilidades. Esta associação com autovalores pode ser constatada nas definições mostradas na seção A.4.

Para um melhor entendimento deste conceito, seja um sistema contínuo composto de n equações diferenciais ordinárias. Seja ainda um pequeno hiper-volume esférico de raio $\varepsilon_0(x_0)$ formado por estados iniciais x_{ε_0} em torno do ponto inicial x_0 de uma linha de fluxo, ou seja,

$$|x_{\varepsilon_0} - x_0| \leq \varepsilon_0(x_0) \quad (6.1)$$

Com o decorrer do tempo, esta hiper-esfera é deformada pelo fluxo, dando origem a um hiper-elipsóide, de eixos principais $\varepsilon_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$ (ver figura 6.1). Os expoentes de *Lyapunov* medem a taxa de crescimento exponencial destes eixos principais (Fiedler-Ferrara e Prado, 1994) e podem ser definidos por

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon_0(x_0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\varepsilon_i(t)}{\varepsilon_0(x_0)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.2)$$

Da equação (6.2) tem-se que

$$\varepsilon_i(t) \sim \varepsilon_0(x_0) e^{\lambda_i t}, \quad (6.3)$$

o que permite concluir que

- (a) A existência de expoentes de *Lyapunov* positivos define uma instabilidade orbital nas direções associadas, ou seja, uma expansão;

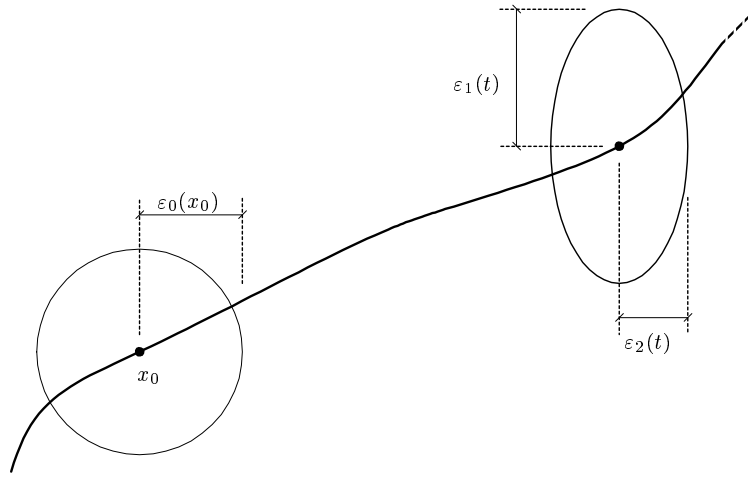


Figura 6.1: Evolução de um elemento de volume esférico para um elipsóide (caso bidimensional).

- (b) A existência de expoentes de *Lyapunov* negativos significa a existência de contração;
- (c) Para uma solução caótica associada a um atrator estranho, a dependência às condições iniciais implica na existência de pelo menos um expoente de *Lyapunov* positivo;
- (d) Para uma solução periódica ou quasi-periódica pode-se esperar que deslocamentos na direção perpendicular ao movimento diminuam com o tempo, enquanto que ao longo da trajetória eles não devem se alterar, correspondendo a um simples deslocamento do ponto inicial. Portanto, a partir de (6.3), segue que no caso de solução periódica ou quasi-periódica $\lambda_i < 0$ nas direções perpendiculares ao movimento e $\lambda_i = 0$ ao longo da trajetória.

Se for considerado um instante qualquer t , pode-se supor que o elemento do hipervolume seja dado por

$$\delta V(t) = \prod_{i=1}^n \varepsilon_i(t) \quad (6.4)$$

Substituindo-se (6.3) em (6.4) tem-se

$$\delta V(t) = \delta V(0) e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i t} \quad (6.5)$$

Analisando-se a equação (6.5), podem-se definir duas situações para que o hiper-volume no espaço de fases não seja divergente:

- (a) Quando $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 0$. Neste caso, $\delta V(t) = \delta V(0)$ e o sistema é dito conservativo;
- (b) Quando $\sum_{i=1}^m \lambda_i < 0$. Isto resulta em $\delta V(t) < \delta V(0)$, ou seja, há uma diminuição do hiper-volume no espaço de fases, e o sistema é dito dissipativo.

Pode-se concluir daí que a existência de um atrator está vinculada à necessidade de que a contração sobreponha-se à expansão o que, em termos dos expoentes de *Lyapunov*, significa dizer que seu somatório deve ser negativo.

Tudo isto nos permite concluir que o comportamento dinâmico de um sistema pode ser bem definido através da análise de seus expoentes de *Lyapunov*. A tabela 6.1 mostra resumidamente o comportamento dinâmico de sistemas em função dos respectivos valores para os expoentes de *Lyapunov* encontrados (Parker e Chua, 1989).

Tabela 6.1: Comportamento dinâmico de sistemas em função de seus expoentes de *Lyapunov*

Comportamento no Conjunto Limite	Expoentes de <i>Lyapunov</i>
Ponto de equilíbrio	$0 > \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$
Periódico	$\lambda_1 = 0$ $0 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$
Bi-periódico	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $0 > \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n$
k-periódico	$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ $0 > \lambda_{k+1} \geq \dots \geq \lambda_n$
Caótico	Pelo menos um $\lambda_j > 0$ $\sum_i \lambda_i < 0$

Do ponto de vista de análise e/ou identificação de sistema caóticos, os expoentes de *Lyapunov* são considerados tão importantes que até são usados para definir tais sistemas, ou

seja, um sistema caótico pode ser definido como aquele que possui pelo menos um expoente de *Lyapunov* positivo. Além disto, eles servem para determinar a dimensão do sistema, que pode ser inteira para atratores não caóticos ou fracionária para atratores estranhos (Parker e Chua, 1989; Fiedler-Ferrara e Prado, 1994).

6.3 Um Algoritmo para o Cálculo

O método de cálculo dos expoentes de *Lyapunov* usado neste trabalho baseia-se na utilização da equação variacional e da ortonormalização de *Gram-Schmidt*. Esta abordagem leva em consideração o fato de que qualquer perturbação imposta a um sistema cresce, em média, com taxa $e^{\lambda_i t}$, conforme mostra a equação (6.3). É importante ressaltar que a aplicação do método aqui exposto é restrita para sistemas que atendam à condição imposta para a determinação da variacional (ver seção A.4), ou seja, ele não pode ser aplicado eficientemente no caso de sistemas que possuam descontinuidades.

É importante lembrar que, uma vez que os expoentes de *Lyapunov* expressam uma taxa de variação exponencial, qualquer pequena variação terá reflexos nos valores obtidos. Assim sendo, deve-se dar uma grande atenção aos aspectos computacionais citados na seção 3.2, enfatizando a importância e a influência de uma escolha adequada para o método de integração e as precisões utilizadas nos cálculos. Erros referentes à precisão nos cálculos podem levar a informações equivocadas sobre o comportamento do sistema.

Descreve-se a seguir os passos usados na determinação dos expoentes de *Lyapunov* para um sistema de ordem n , representado por $\dot{x} = f(x)$.

- Determinar a equação variacional

A equação variacional referente ao sistema em questão é determinada aplicando-se a definição dada na equação (A.8), ou seja, determinar $\dot{\Phi}(x)$ tal que

$$\dot{\Phi}(x) = Df(x) \Phi(x), \quad (6.6)$$

onde $Df(x)$ é o Jacobiano de $f(x)$.

- Encontrar o primeiro expoente (λ_1)

Escolhe-se uma condição inicial x_0 e uma perturbação inicial para o sistema δx_0 . Faz-se $\delta x^{(o)} = \delta x_0$, $u^{(o)} = \delta x_0 / \|\delta x_0\|$ e $x^{(o)} = x_0$, onde os expoentes (i) indicam a iteração atual do cálculo.

Integra-se, então, a equação variacional a partir de $u^{(o)}$ por T segundos para obter o próximo valor para δx , ou seja,

$$\delta x^{(1)} = \delta x(T; u^{(o)}, x^{(o)}) = \Phi_T(x^{(o)}) u^{(o)} \quad (6.7)$$

Encontra-se a versão normalizada de $\delta x^{(1)}$, dada por $u^{(1)} = \delta x^{(1)} / \|\delta x^{(1)}\|$ e novamente integra-se a equação variacional a partir de $u^{(1)}$ por T segundos para obter $\delta x^{(2)}$, ou seja

$$\delta x^{(2)} = \delta x(T; u^{(1)}, x^{(1)}) = \Phi_T(x^{(1)}) u^{(1)} \quad (6.8)$$

onde $x^{(1)} = \Phi_T(x^{(o)})$.

Repetem-se os procedimentos de integração e normalização K vezes e obtêm-se

$$\delta x(T; u^{(1)}, x^{(1)}) = \|\delta x^{(K)}\| \cdots \|\delta x^{(1)}\| u^{(K)} \quad (6.9)$$

Para um valor de K suficientemente grande, obtêm-se

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\approx \frac{1}{KT} \ln \|\delta x(KT; \delta x_0, x_0)\| \\ &= \frac{1}{KT} \ln \prod_{k=1}^K \|\delta x^{(k)}\| \\ &= \frac{1}{KT} \sum_{k=1}^K \ln \|\delta x^{(k)}\|. \end{aligned} \quad (6.10)$$

- Encontrar os demais expoentes (λ_2 a λ_n)

Para que se possam generalizar expressões para a determinação dos expoentes de *Lyapunov*, faz-se necessário discutir um pouco sobre a técnica de ortonormalização de *Gram-Schmidt*. Este procedimento é importante pois elimina o efeito do alinhamento para o qual tendem os vetores δx_1 e δx_2 , quando $t \rightarrow \infty$ (Parker e Chua, 1989).

Seja $\{\delta x_1, \dots, \delta x_n\}$ um conjunto de n vetores linearmente independentes no $\mathbb{R}^n$. A ortogonalização de *Gram-Schmidt* gera um conjunto ortonormal $\{u_1, \dots, u_n\}$ de n vetores com a propriedade de que $\{u_1, \dots, u_i\}$ ocupa o mesmo subespaço de $\{\delta x_1, \dots, \delta x_i\}$ para $i = 1, \dots, n$. As fórmulas são dadas em (6.11) (Parker e Chua, 1989).

$$\begin{aligned}
v_1 &= \delta x_1 \\
u_1 &= v_1 / \|v_1\| \\
v_2 &= \delta x_2 - \langle \delta x_2, u_1 \rangle u_1 \\
u_2 &= v_2 / \|v_2\| \\
&\vdots \\
v_n &= \delta x_n - \langle \delta x_n, u_1 \rangle u_1 - \dots - \langle \delta x_n, u_{n-1} \rangle u_{n-1} \\
u_n &= v_n / \|v_n\|.
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Para encontrar os n expoentes de *Lyapunov* simultaneamente, um conjunto de n vetores de perturbação linearmente independentes deve ser repetidamente integrado e ortonormalizado. Na K -ésima iteração, a ortonormalização produz n vetores, $\{v_1^{(K)}, \dots, v_n^{(K)}\}$, e para um K suficientemente grande, tem-se os expoentes de *Lyapunov*, dados pelas expressões da equação (6.12).

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &\approx \frac{1}{KT} \sum_{k=1}^K \ln \|\delta v_1^{(k)}\| \\
&\vdots \\
\lambda_n &\approx \frac{1}{KT} \sum_{k=1}^K \ln \|\delta v_n^{(k)}\|
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Trata-se, aparentemente, de um procedimento simples. Sua aplicação para a verificação de existência de comportamento caótico, entretanto, leva à necessidade de resolução de um sistema de equações lineares composto de, no mínimo, doze equações diferenciais: três do sistema original (visto que comportamentos caóticos somente podem ser observados em sistemas desta ordem ou ordens superiores), e nove originadas da equação variacional.

Para exemplificar tal procedimento, consideremos a obtenção dos expoentes de *Lyapunov* para a equação de *Duffing* (2.1), reproduzida na equação (6.13) depois de uma mudança no nome das variáveis e da inserção do estado adicional para transformá-la em um sistema de equações autônomo.

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_0(x) \\ f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_0(x) \\ \dot{x}_1(x) \\ \dot{x}_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 - x_0^3 - \varepsilon x_1 + \gamma \cos(x_2) \\ w \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

O primeiro passo é encontrar a equação variacional para o sistema (6.13), o que pode ser feito através da equação (6.6), onde $Df(x)$ é o Jacobiano de $f(x)$ e é dado por:

$$Df(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_0(x)}{\partial x_0} & \frac{\partial f_0(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_0(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_0} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_0} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 - 3x_0^2 & -\varepsilon & -\gamma \sin(x_2) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

Seja $\Phi(x)$ definido como na equação (6.15). Conseqüentemente, $\dot{\Phi}(x)$ também está definida, ou seja:

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} x_3 & x_4 & x_5 \\ x_6 & x_7 & x_8 \\ x_9 & x_{10} & x_{11} \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\Phi}(x) = \begin{bmatrix} \dot{x}_3 & \dot{x}_4 & \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 & \dot{x}_7 & \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 & \dot{x}_{10} & \dot{x}_{11} \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

Substituindo-se (6.14) e (6.15) em (6.6), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 & \dot{x}_4 & \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 & \dot{x}_7 & \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 & \dot{x}_{10} & \dot{x}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 - 3x_0^2 & -\varepsilon & -\gamma \sin(x_2) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 & x_4 & x_5 \\ x_6 & x_7 & x_8 \\ x_9 & x_{10} & x_{11} \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

o que resulta em nove equações diferenciais. Somadas às equações diferenciais iniciais, tem-se o sistema a ser integrado composto de doze equações diferenciais, ou seja:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_0 &= x_1 & \dot{x}_6 &= (1 - 3x_0^2) x_3 - \varepsilon x_6 - \gamma \operatorname{sen}(x_2) x_9 \\
\dot{x}_1 &= x_0 - x_0^3 - \varepsilon x_1 + \gamma \cos(x_2) & \dot{x}_7 &= (1 - 3x_0^2) x_4 - \varepsilon x_7 - \gamma \operatorname{sen}(x_2) x_{10} \\
\dot{x}_2 &= w & \dot{x}_8 &= (1 - 3x_0^2) x_5 - \varepsilon x_8 - \gamma \operatorname{sen}(x_2) x_{11} \\
\dot{x}_3 &= x_6 & \dot{x}_9 &= 0 \\
\dot{x}_4 &= x_7 & \dot{x}_{10} &= 0 \\
\dot{x}_5 &= x_8 & \dot{x}_{11} &= 0
\end{aligned} \tag{6.17}$$

O passo seguinte é estabelecer as condições iniciais para os estados x_i , além dos valores iniciais para as perturbações. Para as variáveis da equação variacional, de acordo com a definição (A.8), os valores iniciais são dados por

$$\Phi_{t_0}(x_i(t_0)) = I \Rightarrow \begin{bmatrix} x_3(0) & x_4(0) & x_5(0) \\ x_6(0) & x_7(0) & x_8(0) \\ x_9(0) & x_{10}(0) & x_{11}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.18}$$

Para as perturbações iniciais pode-se atribuir valores aleatórios, desde que seja atendida a condição de que os vetores sejam linearmente independentes, o que é requisito do método de ortonormalização de *Gram-Schmidt*. Genericamente, são dados pela equação (6.19), e uma vez escolhidos, obtêm-se os vetores ortonormalizados.

$$\delta k^{(0)} = \begin{bmatrix} \delta k(1, 1) & \delta k(1, 2) & \delta k(1, 3) \\ \delta k(2, 1) & \delta k(2, 2) & \delta k(2, 3) \\ \delta k(3, 1) & \delta k(3, 2) & \delta k(3, 3) \end{bmatrix} \tag{6.19}$$

Pode-se então obter os vetores normalizados $u_k^{(0)}$, cujos valores são calculados a partir das equações (6.20).

$$u_k^{(0)}(i, j) = \frac{\delta k^{(0)}(i, j)}{\sqrt{\sum_{m=1}^3 [\delta k^{(0)}(m, j)]^2}}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3 \tag{6.20}$$

A partir daí, deve-se proceder à integração simultânea das doze equações obtidas e mostradas em (6.17), e a cada iteração (i), atualizam-se os valores dos expoentes de *Lyapunov* para o sistema (no caso, três expoentes), através dos procedimentos mostrados a seguir.

Passo 1: *Cálculo do primeiro expoente*

O vetor atual de perturbações é dado por:

$$\delta k^{(i)}(j, 1) = \Phi(x)u_k^{(i-1)}(j, 1), \quad j = 1, 2, 3.$$

Aplicando-se a ortonormalização de *Gram-Schmidt*, tem-se:

$$\begin{aligned} v_k^{(i)}(j, 1) &= \delta k^{(i)}(j, 1), & j &= 1, 2, 3. \\ u_k^{(i)}(j, 1) &= \frac{v_k^{(i)}(j, 1)}{\sqrt{\sum_{m=1}^3 [v_k^{(i)}(m, 1)]^2}}, & j &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

E, finalmente, atualiza-se o valor do primeiro expoente, inicialmente igual a zero.

$$\text{Expoente}(1)^{(i)} = \text{Expoente}(1)^{(i-1)} + \log \left(\sqrt{\sum_{m=1}^3 [v_k^{(i)}(m, 1)]^2} \right)$$

Passo 2: *Cálculo do segundo expoente*

Calcula-se o vetor de perturbações atual, dado por:

$$\delta k^{(i)}(j, 2) = \Phi(x)u_k^{(i-1)}(j, 2), \quad j = 1, 2, 3.$$

Com a ortonormalização, obtém-se:

$$\begin{aligned} v_k^{(i)}(j, 2) &= \delta k^{(i)}(j, 2) - \sum_{m=1}^3 \left[\delta k^{(i)}(m, 2)u_k^{(i)}(m, 1) \right] u_k^{(i)}(j, 1) & j &= 1, 2, 3. \\ u_k^{(i)}(j, 2) &= \frac{v_k^{(i)}(j, 2)}{\sqrt{\sum_{m=1}^3 [v_k^{(i)}(m, 2)]^2}}, & j &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

A atualização do valor do segundo expoente, inicialmente nulo, é feita por:

$$\text{Expoente}(2)^{(i)} = \text{Expoente}(2)^{(i-1)} + \log \left(\sqrt{\sum_{m=1}^3 [v_k^{(i)}(m, 2)]^2} \right)$$

Passo 3: *Cálculo do terceiro expoente*

Como anteriormente, calcula-se o vetor de perturbações atual, dado por:

$$\delta k^{(i)}(j, 3) = \Phi(x)u_k^{(i-1)}(j, 3), \quad j = 1, 2, 3.$$

Após a ortonormalização, obtém-se:

$$\begin{aligned} v_k^{(i)}(j, 2) &= \delta k^{(i)}(j, 2) - \sum_{m=1}^3 \left[\delta k^{(i)}(m, 3)u_k^{(i)}(m, 1) \right] u_k^{(i)}(j, 1) \\ &\quad - \sum_{m=1}^3 \left[\delta k^{(i)}(m, 3)u_k^{(i)}(m, 2) \right] u_k^{(i)}(j, 2) \quad j = 1, 2, 3. \\ u_k^{(i)}(j, 3) &= \frac{v_k^{(i)}(j, 3)}{\sqrt{\sum_{m=1}^3 [v_k^{(i)}(m, 3)]^2}}, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Finalmente, acumula-se o valor do terceiro expoente;

$$\text{Expoente}(3)^{(i)} = \text{Expoente}(3)^{(i-1)} + \log \left(\sqrt{\sum_{m=1}^3 [v_k^{(i)}(m, 2)]^2} \right)$$

Passo 4: *Verificação da convergência*

Faz-se a comparação entre os valores dos expoentes calculados e os valores anteriores. Se os valores estiverem suficientemente próximos, calculam-se os expoentes dividindo-se os valores acumulados em $\text{Expoente}(n)^{(i)}$ pelo tempo de integração da equação variacional. Se ainda não convergiram, atribui-se novamente a condição inicial à equação variacional dada por (6.18) e retorna-se ao primeiro passo, até que haja a convergência ou seja ultrapassado o número máximo de iterações.

Esta necessidade de reiniciar condições iniciais mais uma vez foi possibilitada pelo uso do ambiente *C MEX* do *Simulink*, conforme explicado na seção 3.1.

A utilização deste ambiente de simulação e das técnicas acima descritas possibilita, então, calcularem-se todos os expoentes de *Lyapunov* ao mesmo tempo para um determinado sistema.

6.4 Aplicações do Método

Ampliando um pouco esta aplicação, foi possível obter o comportamento de um sistema em função dos valores de seus expoentes de *Lyapunov*, fazendo-se um mapeamento dos expoentes em função da variação de um determinado parâmetro do sistema, como no caso da obtenção dos diagramas de bifurcação.

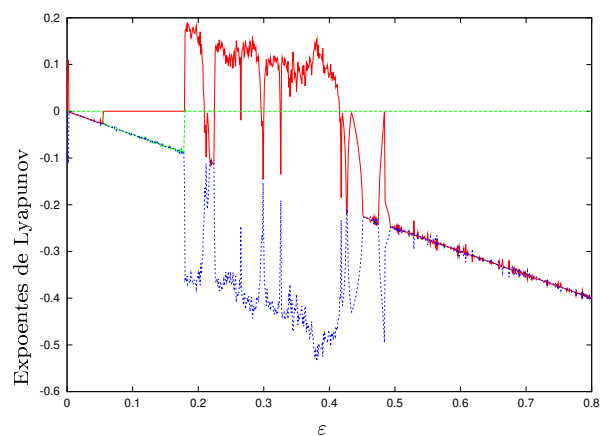
A figura 6.2(a) mostra o mapa dos expoentes de *Lyapunov* obtidos para a equação de *Duffing*, quando o parâmetro ε varia de 0 a 0.8. Comparando-se este mapa com os diagramas de bifurcação para o mesmo sistema mostrado nas figuras 6.2(b) e 6.2(c), e para a mesma faixa de variação de ε , pode-se perceber que o comportamento do maior expoente corresponde ao comportamento qualitativo do sistema, ou seja,

- (a) Nos pontos de bifurcação o maior expoente é nulo;
- (b) Nas regiões de comportamento periódico o maior expoente não nulo é negativo;
- (c) Nas regiões de comportamento caótico o maior expoente é positivo.

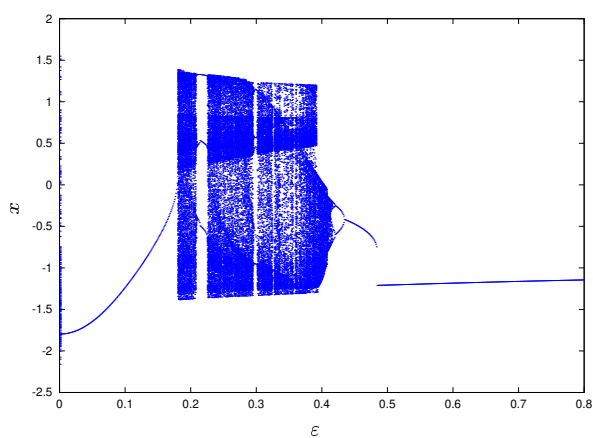
Isto pode ser melhor observado nas sobreposições mostradas nas figuras 6.3 e 6.4 para a bifurcação em função da variável x , e nas figuras 6.5 e 6.6 para a bifurcação em função da variável y .

Para reforçar a dependência do sistema às condições iniciais e a ocorrência de problemas como a histerese, foram feitas simulações para a equação de *Duffing* com variações crescentes e decrescentes de ε . A figura 6.7 mostra a presença do fenômeno.

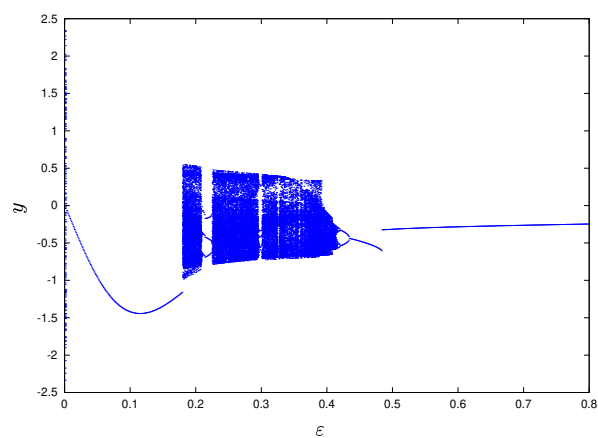
Um outro exemplo de aplicação pode ser visto na figura 6.8, onde mostra-se a sobreposição do mapa de bifurcação convencional (*Poincaré*) (Parker e Chua, 1989; Fiedler-Ferrara e Prado, 1994) e do espectro de *Lyapunov* obtidos para um mesmo range de variação decrescente do parâmetro. É importante notar que as informações nesta figura são muito didáticas do ponto de vista de mostrar o que deve ocorrer em mapas que mostram os expoentes de *Lyapunov* como função da variação de parâmetros de um sistema. Onde há caos o expoente característico é positivo, onde há periodicidade o expoente é negativo, e nos pontos de bifurcação o expoente é zero.



(a) Expoentes de *Lyapunov*



(b) Mapa de bifurcação para x



(c) Mapa de bifurcação para y

Figura 6.2: Expoentes de *Lyapunov* e diagrama de bifurcação para a equação de *Duffing*, com ε variando de 0 a 0.8.

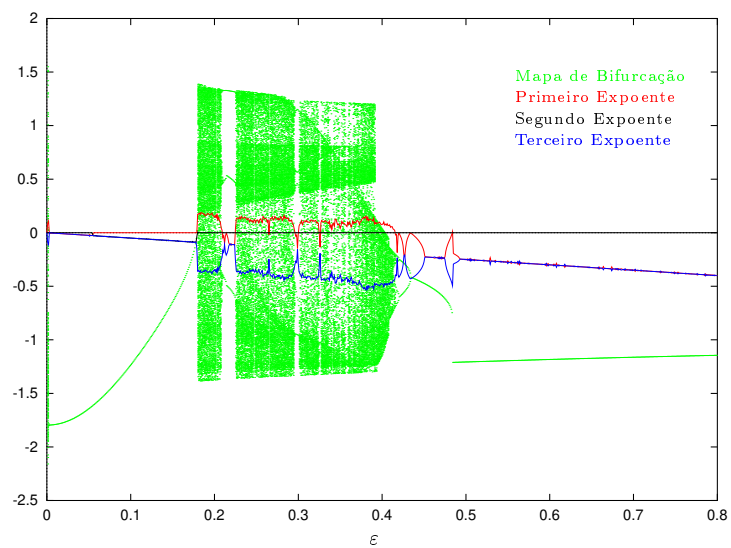


Figura 6.3: Sobreposição das figuras 6.2(a) e 6.2(b).

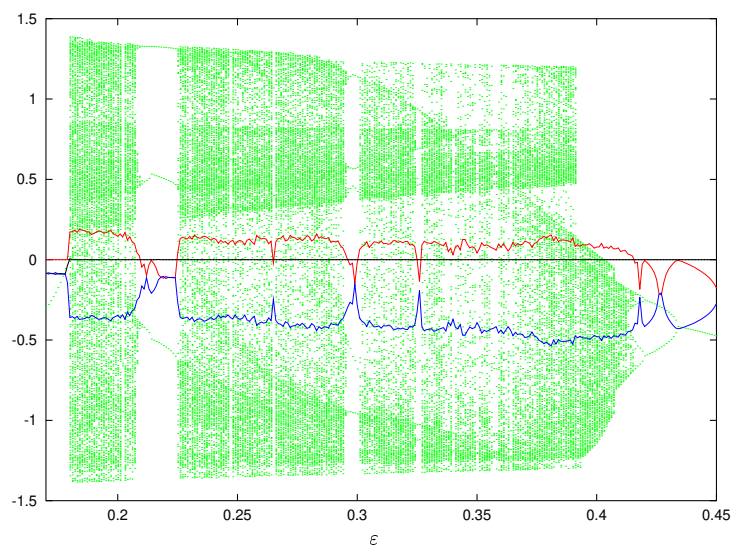


Figura 6.4: Detalhamento da região caótica da figura 6.3.

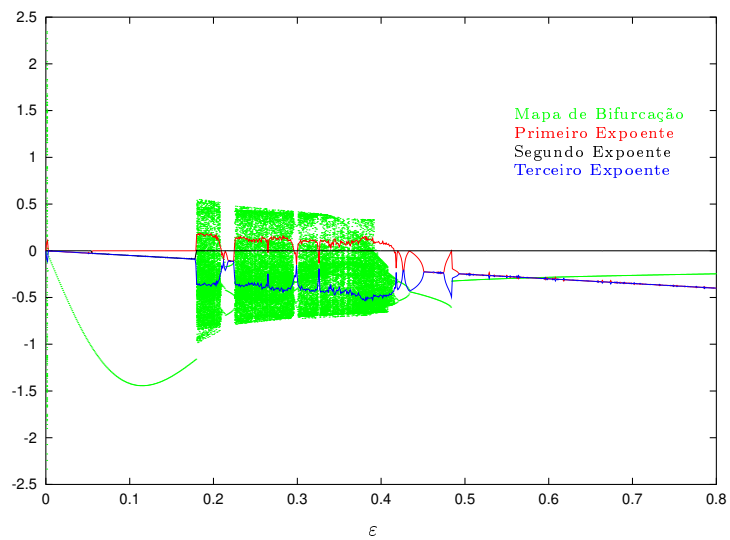


Figura 6.5: Sobreposição das figuras 6.2(a) e 6.2(c).

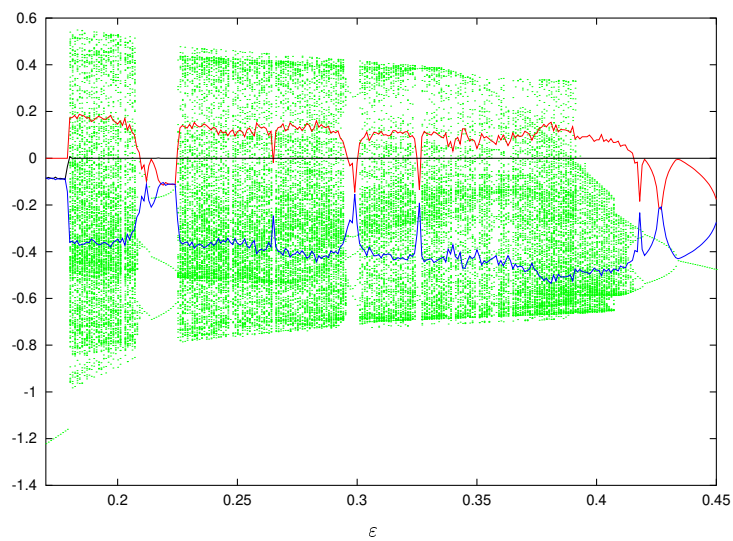


Figura 6.6: Detalhamento da região caótica da figura 6.5.

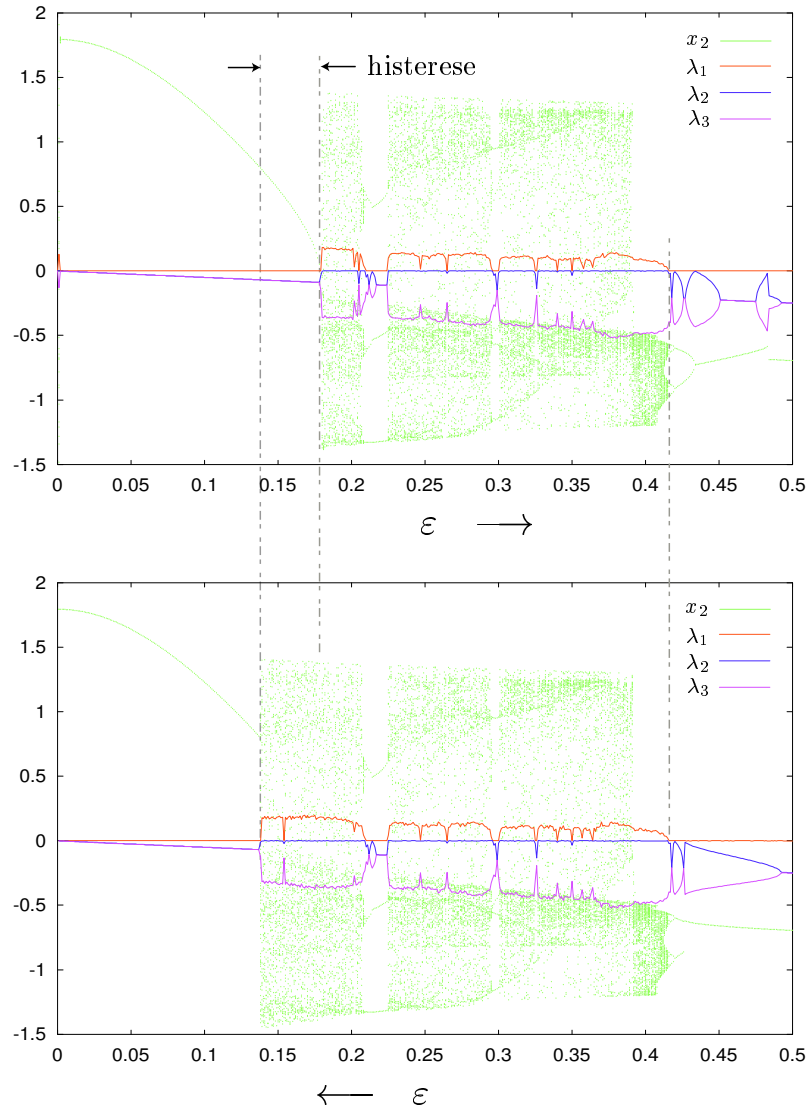


Figura 6.7: Mapas de bifurcação e espectros de expoentes de *Lyapunov* para ambos os sentidos de variação do parâmetro ε . Equações de *Duffing*.

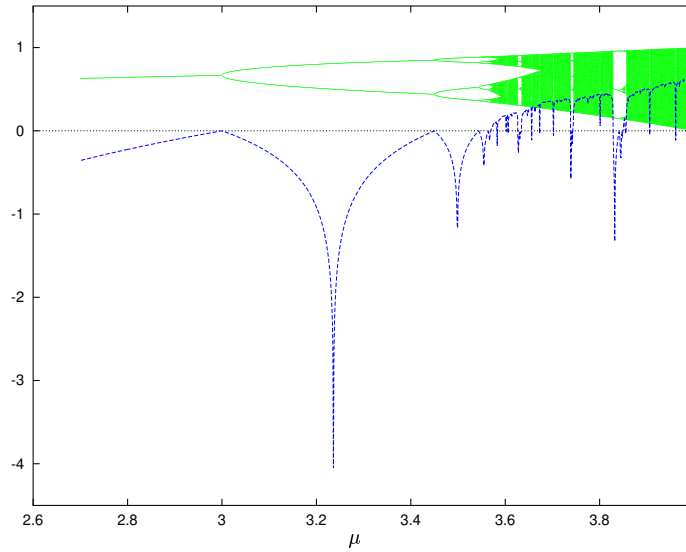


Figura 6.8: Mapa de bifurcação e espectro de *Lyapunov* para o mapa quadrático dado pela equação $x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2$.

Para o modelo de Lorenz de quarta ordem mostrado na equação (5.7) (Sparrow, 1982), foi aplicado o método de determinação dos expoentes de *Lyapunov*, e o espectro encontrado para a variação do parâmetro λ é apresentado na figura 6.9, sendo que o comportamento de cada um dos quatro expoentes é mostrado de uma cor diferente. Pode-se notar que na região compreendida pelos valores de λ entre -1 e +4 (aproximadamente), todos os expoentes são negativos, o que representa a existência de pontos de equilíbrio. Este comportamento também pode ser observado nos diagramas de bifurcação mostrados na figura 5.11.

Mais uma vez chama-se a atenção para a grande utilidade desta ferramenta para a análise do comportamento dinâmico de sistemas de ordens superiores, desde que não possuam descontinuidades.

6.5 Aplicação ao Sistema Estudado

O método anteriormente descrito mostrou-se bastante eficaz na obtenção dos expoentes de *Lyapunov*, mas sua aplicação é limitada. Isto se deve ao fato de que a equação variacional

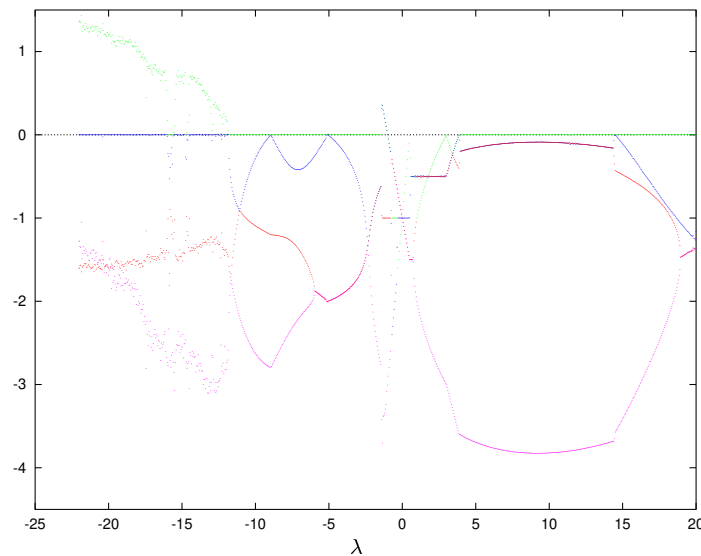


Figura 6.9: Espectro de *Lyapunov* para o modelo de Lorenz de quarta ordem.

é restrita a sistemas que sejam continuamente diferenciáveis (Parker e Chua, 1989). Logo, a descontinuidade presente no modelo estudado inviabiliza o cálculo dos expoentes de *Lyapunov* através do uso da equação variacional. Existem algoritmos bem estabelecidos para a determinação dos expoentes de *Lyapunov* quando os sistemas dinâmicos em questão possuem trajetórias de estado suaves. Eles são baseadas na integração das equações variacionais associadas às n trajetórias de estado, com respectivas condições iniciais linearmente independentes. Existe um problema numérico na solução destas equações devido a sua divergência exponencial, no caso do sistema apresentar oscilações caóticas, que pode ser resolvido com um aprimoramento da abordagem via uso da ortonormalização de *Gram-Schmidt* ou triangulação de *Householder*. Mas esta abordagem não pode ser diretamente aplicada para o caso em questão, porque o sistema estudado possui descontinuidades inerentes aos impactos com os obstáculos. Pode-se tentar usar certas aproximações no sentido de suavizar as trajetórias de estado na vizinhança das descontinuidades, como os métodos de aproximação propostos em Müller (1995) e Klecza e Kreuzer (1995) para análises qualitativas, mas que para sistemas com descontinuidades tipo impacto são de difícil, senão impossível, implementação, podendo levar a soluções contendo erros grosseiros, principalmente na determinação do maior expoente característico. Este ainda é um problema que se está procurando resolver. Temos

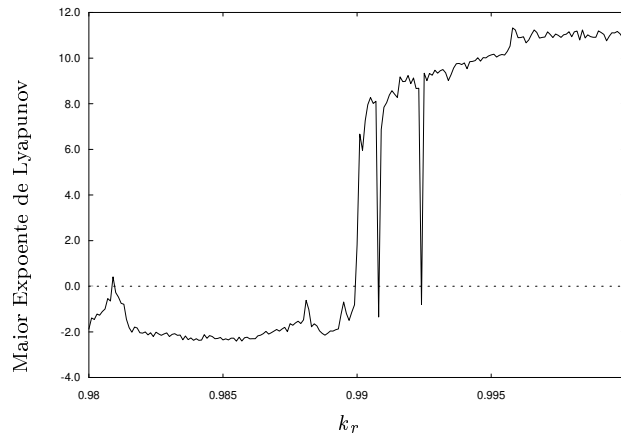
resolvido tal problema com a implementação computacional no ambiente *Simulink/Matlab* de um algoritmo que determina o espectro completo dos expoentes de *Lyapunov* para sistemas com trajetórias suaves, sendo que ainda enfrentam-se problemas na implementação da mesma técnica para sistemas com descontinuidades. Ainda hoje não há algoritmo geral para a obtenção da solução exata para estes problemas publicado nos meios científicos especializados.

Uma tentativa de evitar este problema foi feita através da obtenção dos expoentes a partir de sua própria definição, ou seja, se os expoentes medem a taxa da divergência de trajetórias iniciadas com condições iniciais infinitesimalmente próximas, a idéia foi simular dois sistemas idênticos evoluindo ao mesmo tempo, com pequena diferença nas condições iniciais de ambos.

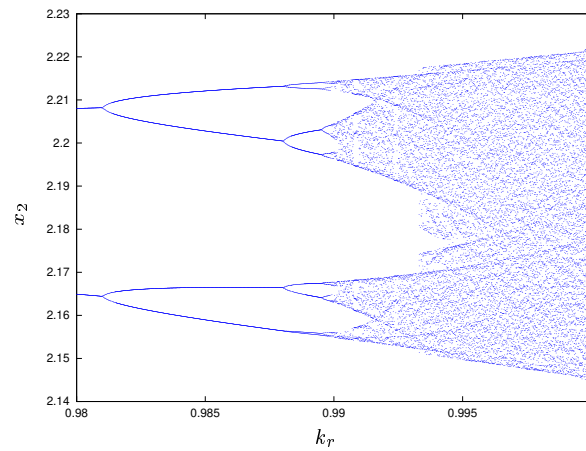
Para evitar que alguma comparação fosse feita nas proximidades das descontinuidades, o que poderia levar a uma falsa divergência, optou-se por fazer esta análise sobre uma seção de *Poincaré* pré-definida, ou seja, cada iteração foi feita no instante da passagem das trajetórias pela seção de *Poincaré*. O resultado encontrado pode ser visto na figura 6.10(a), onde foram calculados os expoentes de *Lyapunov* para o sistema estudado em função da variação do parâmetro k_r , o coeficiente de reposição da velocidade.

Se uma comparação for feita com o diagrama de bifurcação obtido para o mesmo sistema (figura 6.10(b)), e nas mesmas condições, pode-se perceber que não foram obtidos resultados tão precisos como no caso da equação de *Duffing*, ou seja, não houve uma perfeita correspondência entre, por exemplo, os pontos de bifurcação e valores nulos para os expoentes de *Lyapunov*. Isto leva a concluir-se que as descontinuidades do sistema influenciam no cálculo dos expoentes via simulação digital usando este método, ou seja, de alguma forma erros computacionais estão sendo inseridos no sistema de tal forma que não se conseguem determinar os valores dos expoentes com grande precisão.

É importante notar que, mesmo assim, este último resultado pode fornecer uma noção das tendências de mudança de qualidade de operação dos sistemas em função da variação de seus parâmetros.



(a) Expoentes de *Lyapunov*



(b) Mapa de bifurcação

Figura 6.10: Expoentes de *Lyapunov* e diagrama de bifurcação para o sistema estudado neste trabalho, com k_r variando de 0.98 a 1.0.

Capítulo 7

Conclusões

A possibilidade de criação de blocos *S-function* utilizando-se recursos da programação *C++* tornou bastante viável a obtenção de mapas de Poincaré, diagramas de bifurcação e expoentes de Lyapunov através de simulações digitais, sendo possível obter resultados de grande precisão.

Com as metodologias implementadas conseguimos analisar com maior detalhamento o sistema proposto por Shaw e Rand (1989), e constatamos que realmente existe comportamento caótico em tal sistema. Pudemos ainda comprovar problemas decorrentes de linearizações realizadas na modelagem deste sistema.

A programação de blocos na linguagem *C++* possibilitou a utilização de recursos para realização de *backups* automáticos durante as simulações, o que viabilizou simulações com tempos elevados (cerca de dez dias usando um microcomputador *Pentium III* de 450 MHz com 256 MB de memória RAM, no caso dos diagramas de bifurcação) sem que houvesse problemas inerentes à quantidade de memória disponível para que o *Matlab* mantivesse a alta performance de operação. O acompanhamento pôde ser feito pela visualização destes arquivos usando-se outro *software*, sem comprometimento da simulação em curso.

Além da grande sensibilidade às condições iniciais inerente de sistemas com comportamento caótico, conseguimos verificar fenômenos de histerese na obtenção de mapas de

bifurcação, como mostra a figura 6.7.

Apresentamos neste trabalho uma técnica para fazer com que o plano de *Poincaré* seja de fato um plano, ou melhor dizendo, uma superfície com espessura nula. Isto foi conseguido através do uso do bloco *Hit crossing* do *Simulink/Matlab*, que realiza a busca exata de um ponto. Utilizando o *Hit*, eliminamos a componente estocástica introduzida pelos métodos clássicos de obtenção das seções de *Poincaré*, problema este que é agravado nos casos de sistemas com descontinuidades. Acreditamos com isto que o método proposto, e empregado nos exemplos, resgata a importância da análise de sistemas caóticos feitas através das seções de *Poincaré*, tão criticadas, principalmente devido à dificuldade que se encontra na fiel definição de tais hiperplanos quando se empregam métodos numéricos de simulação.

Implementamos as técnicas de recorrência no tempo e recorrência na própria variável para a obtenção de mapas de Poincaré, as quais forneceram resultados bastante satisfatórios para os sistemas estudados e abriram formas alternativas para este tipo de análise, inclusive para sistemas de ordens superiores.

Construímos diagramas de bifurcação para sistemas contínuos e descontínuos, com o que consideramos ter contribuído bastante para a análise da dependência do comportamento de sistemas em função da variação de seus parâmetros.

Implementamos uma técnica de cálculo de expoentes de *Lyapunov* para sistemas contínuos que comprovam a eficiência das técnicas propostas para ambos os casos, e que são aplicáveis para auxiliar na análise de uma infinidade de sistemas dinâmicos, quando o objetivo for o estudo da dependência de comportamento como função da variação de seus parâmetros.

Os expoentes de *Lyapunov* medem uma taxa média de afastamento ou aproximação de trajetórias de estado de um mesmo sistema, quando são iniciadas com condições iniciais infinitesimalmente próximas. Uma vez que o *Matlab* não permite que se faça o *reset* de um integrador com uma precisão de casas decimais tão alta quanto se queira (o truncamento é feito dentro da precisão do integrador), a cada comando de *reset* imposto a este integrador estar-se-á inserindo um erro que, mesmo sendo infinitesimal, certamente influencia no processo de determinação destes expoentes. Assim sendo, não conseguimos a mesma eficiência para sistemas que apresentam descontinuidades devido a restrições de *software*, mas acre-

ditamos ter conseguido resultados que permitem obter boas aproximações para as soluções procuradas, e que podem ser de grande relevância para as análises sobre os comportamentos dinâmicos envolvidos.

7.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

- ✓ Durante a execução do trabalho deparou-se com a possibilidade de construir diagramas de bifurcações a partir dos números de rotação, que também pode servir como técnica alternativa para auxiliar na análise de comportamentos dinâmicos. Esta é uma linha de pesquisa que merece um maior aprofundamento.
- ✓ O grande problema encontrado no decorrer dos trabalhos foi o cálculo de expoentes de Lyapunov para sistemas que apresentam descontinuidades. Este é um problema cuja solução é alvo de grande interesse nas pesquisas da atualidade.
- ✓ Uso de computação híbrida, ou seja, simulação analógica e digital em um mesmo sistema, para acelerar a obtenção de dados com circuitos analógicos e manter as possibilidades de análise oferecidas pelos computadores digitais.
- ✓ Implementação prática do experimento de Shaw e Rand (1989).
- ✓ Estudo de outras técnicas avançadas para abordar e analisar sistemas que possuam descontinuidades.
- ✓ Controle do caos.
- ✓ Desenvolver um sistema dedicado de análise que não possua as restrições numéricas impostas pelo *Matlab*.

Apêndice A

Definições Importantes

Não pretende-se, neste capítulo, descrever toda a teoria de análise de sistemas dinâmicos conhecida, mas fornecer ao leitor algumas definições e teoremas encontradas na literatura especializada (Arrowsmith e Place, 1990; Guckenheimer e Holmes, 1990; Parker e Chua, 1989; Mahla, 1991; Mahla, 1994) e que formam uma base conceitual necessária para um melhor entendimento dos métodos utilizados para analisar os sistemas estudados.

A.1 Fundamentos Matemáticos

Definição 1. *Função de classe C^r*

Uma função $g : u \rightarrow \mathbb{R}$, $u \subset \mathbb{R}$, u aberto, é dita de classe C^r se é r vezes continuamente diferenciável com $r \in [0, \infty]$. Se $r = 0$, g é dita contínua e se $r = \infty$, g é dita suave.

Definição 2. *Mapeamento de classe C^r*

Seja $x \in u \subset \mathbb{R}^n$, u aberto, $y \in v \subset \mathbb{R}^m$, v aberto e $g(x) = y$. O mapeamento $G : u \rightarrow v$ cujas componentes são $y_i = g_i(x)$ é dito de classe C^r se todas as componentes $g_i(x)$ são de classe C^r .

$$G = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

Se $r = 0$ o mapeamento é contínuo não diferenciável; se $r = \infty$, o mapeamento é suave; e se $0 < r \leq \infty$, diz-se que o mapeamento é diferenciável.

Definição 3. *Homeomorfismo*

Uma função $g : u \rightarrow \mathbb{R}$, $u \subset \mathbb{R}$, u aberto, é dita ser um homeomorfismo se é inversível, ou seja, se g é uma bijeção.

Se g é um homeomorfismo e tanto g quanto g^{-1} são diferenciáveis, então g e g^{-1} são ditos difeomorfismos.

Definição 4. *Difeomorfismo de classe C^k*

Um mapeamento g é dito um difeomorfismo de classe C^k se tanto g quanto g^{-1} são mapeamentos de classe C^k . Se existir um difeomorfismo entre X e Y , então X e Y são ditos difeomórficos.

Definição 5. *Variedade de dimensão k ($Mfold^k$)*

É um conjunto de pontos que localmente assemelha-se ao espaço $\mathbb{R}^k$, ou seja, M é $Mfold^k$ se para cada ponto $x \in M$, existir uma vizinhança u de x , aberta, tal que u é difeomórfico de alguma vizinhança de $\mathbb{R}^k$. A figura A.1 mostra exemplos e contra-exemplos.

Se X é $Mfold^{kx}$ e Y é $Mfold^{ky}$, e se X e Y são difeomórficos, então $X.Y$ é $Mfold^{kx+ky}$.

Definição 6. *Conjunto compacto*

Um conjunto $u \subset \mathbb{R}$ é compacto se é fechado e limitado (ver figura A.2).

Definição 7. *Pré imagem*

Para uma transformação $f : x \rightarrow y$, a pré imagem de um conjunto $Z \subset Y$, denotada por $f^{-1}(Z)$, é o conjunto de todos os pontos em X os quais f mapeia para Z , ou seja:

$$f^{-1}(Z) = \{x \in X \mid f(x) \in Z\}$$

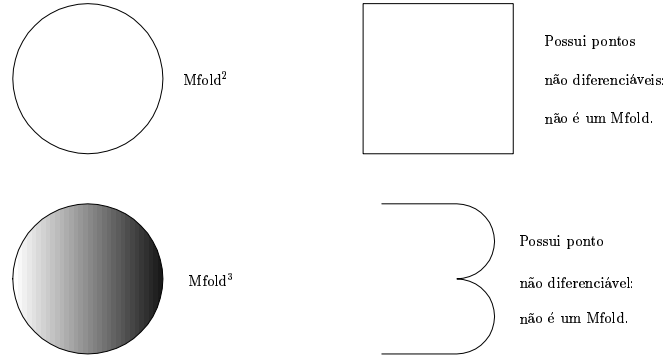


Figura A.1: Exemplos e contra-exemplos de variedades.

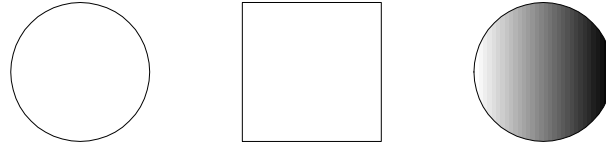


Figura A.2: Exemplos de conjuntos compactos.

Definição 8. *Transformação própria*

Uma transformação f é própria se a pré imagem de todo conjunto compacto em Y é compacta.

Definição 9. *Imersão*

Sejam X e Y dois Mfolds com dimensões $k_x < k_y$. Uma transformação $f : X \rightarrow Y$ é uma imersão se as suas derivadas $Df(x)$ têm posto total $\forall x \in X$.

Definição 10. *Embutimento*

Seja X um Mfold^{k_x} e compacto. Se $f : X \rightarrow Y$ é uma imersão, própria e um a um, então f é um embutimento.

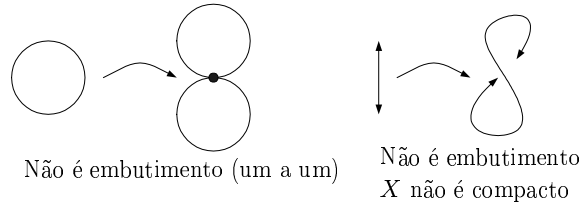


Figura A.3: Contra-exemplos de embutimentos.

A.2 Sistemas Dinâmicos

Definição 11. *Sistemas dinâmicos contínuos autônomos*

Um sistema dinâmico autônomo contínuo e de ordem n é definido pela equação de estado (A.1)

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_o) = x_o \quad (\text{A.1})$$

onde $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o estado no tempo t , e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é chamado de campo vetorial. Uma vez que, no caso autônomo, o vetor campo não depende do tempo, o tempo inicial pode sempre ser considerado como sendo $t_o = 0$. Para mostrar explicitamente a dependência com a condição inicial, a solução de (A.1) é freqüentemente escrita como $\phi_t(x_o)$.

O sistema dinâmico (A.1) será dito linear se o campo vetorial $f(x)$ for linear.

Definição 12. *Sistemas dinâmicos contínuos não autônomos*

Um sistema dinâmico não autônomo contínuo e de ordem n é definido pela equação de estado A.2

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_o) = x_o \quad (\text{A.2})$$

Para sistemas não autônomos, o campo vetorial depende do tempo, e diferentemente do caso autônomo, o tempo inicial não pode ser sempre definido como zero. A solução de (A.2) passando por x_o no tempo t_o é denotada por $\phi_t(x_o, t_o)$.

O sistema dinâmico (A.2) será dito linear se o campo vetorial $f(x, t)$ for linear em relação a x .

Se existe um $T > 0$ tal que $f(x, t) = f(x, t + T)$ para todo x e t , então diz-se que o sistema não autônomo é periódico no tempo com período T . O menor valor para este T é chamado de período mínimo.

Definição 13. *Pontos de equilíbrio*

Seja $x^* \in \phi_t(x_o)$ tal que $f(x^*) = 0$. Neste caso x^* é dito um ponto de equilíbrio. Se $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x_o) = x^*$, então diz-se que o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável.

Definição 14. *Solução periódica*

$\phi_t(x^*, t_o)$ é solução periódica de um sistema não autônomo contínuo se

$$\phi_t(x^*, t_o) = \phi_{t+T}(x^*, t_o), \quad \forall t \text{ e algum período mínimo } T > 0. \quad (\text{A.3})$$

No caso de um sistema autônomo, a condição A.3 é substituída por $\phi_t(x^*) = \phi_{t+T}(x^*)$

Em um sistema não autônomo periodicamente perturbado, T é tipicamente um múltiplo inteiro do período da perturbação, e a solução é chamada de solução de período k ou subharmônica de k -ésima ordem.

No caso autônomo, uma solução periódica isolada $\phi_t(x^*)$ (aquela que possui uma vizinhança que não contenha nenhuma outra solução periódica) é chamada de ciclo limite.

Definição 15. *Soluções quasi-periódicas*

Uma solução quasi-periódica é aquela que pode ser escrita como a soma de um número finito de funções periódicas $h_i(t)$, ou seja:

$$x(t) = \sum_i h_i(t) \quad (\text{A.4})$$

onde h_i tem período mínimo T_i e frequência $f_i = 1/T_i$, tal que existe um conjunto finito de frequências-base $\{\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_p\}$ que satisfaz as duas condições seguintes:

- (i) O conjunto é linearmente independente no campo dos inteiros, isto é, não existe um conjunto de números inteiros diferentes de zero $\{k_1, \dots, k_p\}$ tais que $k_1 \hat{f}_1 + \dots + k_p \hat{f}_p = 0$.

- (ii) Forma uma base integral finita para as f_i , ou seja, para cada i , $f_i = |k_1 \hat{f}_1 + \dots + k_p \hat{f}_p|$ para alguns inteiros $\{k_1, \dots, k_p\}$.
- (iii) A relação existente entre as frequências existentes é irracional.

A base não é única, mas p está definido. Uma solução quasi-periódica com p frequências-base é chamada p -periódica.

Definição 16. *Soluções caóticas*

Uma definição formal que seja amplamente aceita para soluções caóticas não existe. Do ponto de vista prático, uma solução caótica pode ser definida como um comportamento em um conjunto limite, base de um atrator que não é um ponto de equilíbrio, não é periódico e não é quasi-periódico.

Definição 17. *Trajetoória*

Seja $\phi_t(x_o, t_o)$ a solução do sistema $\dot{x} = f(x)$. Para qualquer $t \in I \subset \mathbb{R}$, o mapeamento $\phi(x_o, \cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\phi(x_o, \cdot) = \phi(\cdot, x_o)$ é denominado trajetória deste sistema passando por $x(0) = x_o$.

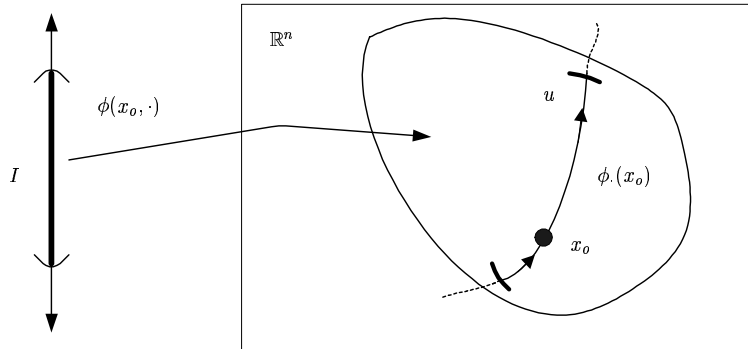


Figura A.4: Ilustração de uma trajetória.

Definição 18. *Fluxo*

O mapeamento $\phi_t : u \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\forall x \in u$ é denominado fluxo do sistema $\dot{x} = f(x)$. Em outras palavras, fluxo é o conjunto de todas as soluções possíveis para o sistema, a partir de diferentes condições iniciais.

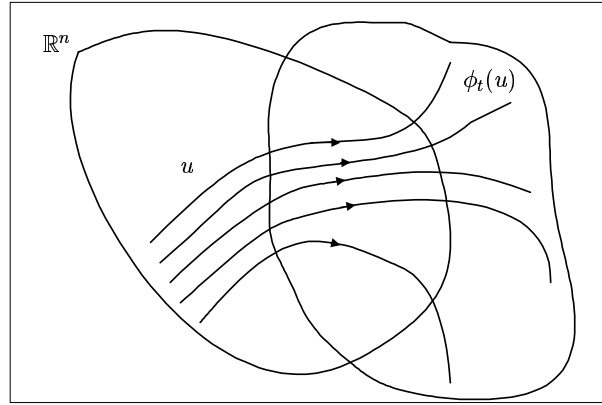


Figura A.5: Ilustração de um fluxo.

Definição 19. *Ponto ω -limite*

Um ponto p é um ponto w -limite de x se existe uma vizinhança de p do tipo $u = \{\phi_t(x)\}$ na trajetória de x tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t = p$.

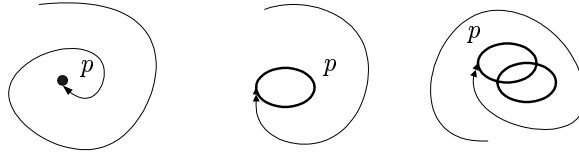


Figura A.6: Exemplos de pontos w -limite.

Definição 20. *Ponto α -limite*

Um ponto q é um ponto α -limite de x se existe uma vizinhança de q , $u = \{\phi_t(x)\}$, na trajetória de x , tal que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t = q$.

Definição 21. *Conjuntos ω -limite e α -limite*

São os conjuntos que contêm todos os pontos ω -limite e α -limite, respectivamente, da trajetória. O conjunto ω -limite também é conhecido simplesmente por conjunto limite.

Definição 22. *Conjunto atrativo*

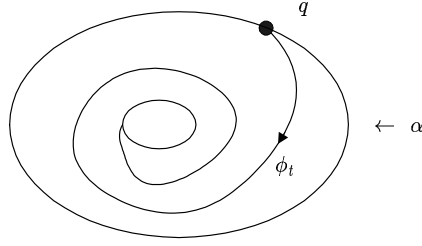


Figura A.7: Exemplo de ponto α -limite.

Seja $A(x) \in \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado e invariante. Se existe uma vizinhança $\mathbf{u}$ de A tal que $\phi_t(x) \in \mathbf{u}$, $\forall t \geq 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = A(x)$, $\forall x \in \mathbf{u}$, então A é dito um conjunto atrativo.

Definição 23. *Base ou bacia de atração*

O conjunto $\bigcup_{t \geq 0} \phi_t(u)$ é a base de atração de A .

Definição 24. *Atrator*

Uma região compacta A é um atrator de um fluxo $\phi(t, x)$ se as quatro hipóteses a seguir valem:

- (a) A é invariante segundo ϕ ;
- (b) A tem uma vizinhança contraente;
- (c) o fluxo é recorrente, isto é, trajetórias começando em qualquer subconjunto aberto de A voltam a este subconjunto para valores de t suficientemente longos;
- (d) o fluxo não pode ser decomposto, isto é, A não pode ser dividida em duas partes invariantes não triviais.

Se o atrator contém uma órbita homoclínica transversa (definição 39) ele é dito atrator estranho.

Definição 25. *Estabilidade*

Um ponto $x = x^*$ é dito estável se uma solução $\phi_t(x_o)$ mantém-se próxima de $x^* \forall t \geq 0$, ou seja, se para toda vizinhança V de $x^* \in u$ existir uma vizinhança $V_1 \subset V$ tal que toda solução $\phi_t(x_o)$ com $x_o \in V_1$ é definida e está contida em V , $\forall t > 0$.

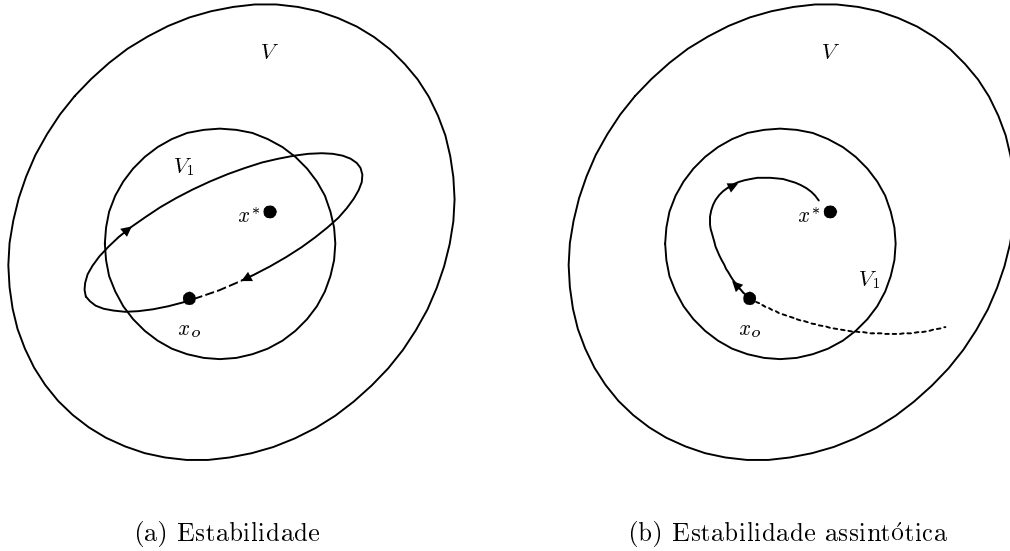


Figura A.8: Representação da estabilidade.

Se $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x_o) = x^*$, então o ponto é dito assintoticamente estável.

Teorema 1. *Teorema da estabilidade e estabilidade assintótica de Hirsh e Smale*

Seja $x^* \in u$ um ponto de equilíbrio de $\dot{x} = f(x)$, $V : W \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável definida numa vizinhança $W \subseteq u$ de x^* tal que:

(i) $V(x^*) = 0$ e $V(x) > 0$ se $x \neq x^*$; e

(ii) $\dot{V}(x) \leq 0$ no conjunto $W - \{x^*\}$.

Então x^* é estável. Além disto, se:

(iii) $\dot{V}(x) < 0$ no conjunto $W - \{x^*\}$,

então x^* é assintoticamente estável.

Definição 26. *Subespaços invariantes*

(a) Sistemas lineares

Sejam dados a função $f(x) = Ax$, o fluxo fundamental $\phi_t(x) = e^{At}$, e os autovetores de A , x_j .

(i) *Subespaço estável de ϕ_t (E^s)*

E^s é o gerador de todos os n_s autovetores x_j cujos correspondentes autovalores possuam a parte real negativa. Trata-se de um subespaço de contração.

(ii) *Subespaço central de ϕ_t (E^c)*

E^c é o gerador de todos os n_c autovetores x_j cujos correspondentes autovalores possuam a parte real igual a zero.

(iii) *Subespaço instável de ϕ_t (E^u)*

E^u é o gerador de todos os n_u autovetores x_j cujos correspondentes autovalores possuam a parte real positiva. Trata-se de um subespaço de expansão.

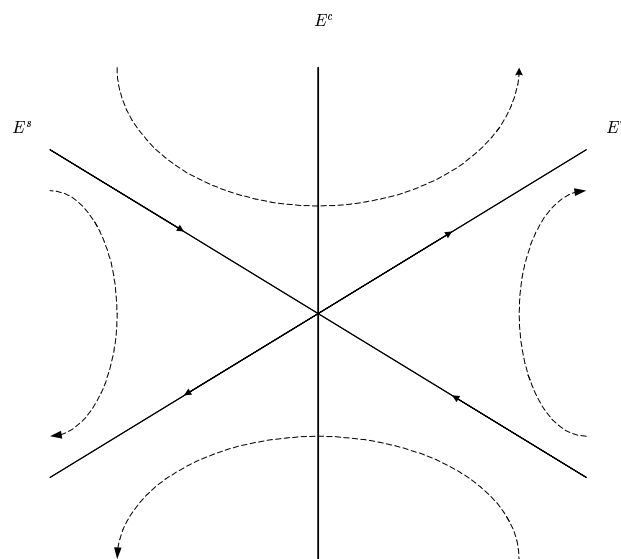


Figura A.9: Ilustração dos subespaços invariantes.

(b) Sistemas não lineares

Seja $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $x(0) = x_0$, sendo $f : u \rightarrow \mathbb{R}^n$ um mapeamento suave definido numa vizinhança $t \in (-c, c)$ de $t = 0$. Seja ainda $\phi_{t,t}(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um fluxo local obtido da equação dinâmica $\dot{\xi} = Df(x^*)\xi$, onde:

$$\xi \in M \subset \mathbb{R}^n / M \rightarrow \text{Mfold de } \mathbb{R}^n$$

$$\xi = x - x^*$$

$$Df(x^*) : \text{ Jacobiano de } f \text{ em } x = x^* = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right] \Big|_{x=x^*}$$

Teorema 2. *Teorema de Hartman - Grobman*

Se $Df(x^*)$ não tem autovalores nulos ou puramente imaginários, então existe um homeomorfismo h definido em alguma vizinhança u de $x^* \in \mathbb{R}^n$ fazendo coincidir as trajetórias do fluxo não linear ϕ_t com as do fluxo linear $e^{Df(x^*)t}$. Este homeomorfismo preserva a orientação das trajetórias.

Seja u a vizinhança do ponto de equilíbrio x^* . De forma análoga à definição de E^s e E^u , definem-se $W_{loc}^s(x^*)$ e $W_{loc}^u(x^*)$ do sistema não linear $\dot{x} = f(x)$

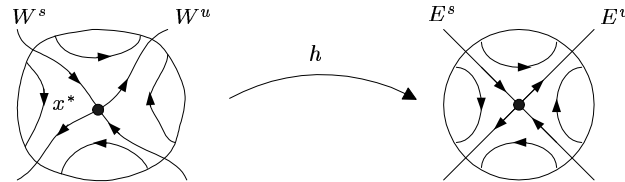


Figura A.10: Ilustração do teorema de Hartman - Grobman.

Definição 27. *Variedade localmente estável*

Define-se variedade localmente estável de x^* , $W_{loc}^s(x^*)$ como

$$W_{loc}^s(x^*) = \{x \in u / \phi_t(x) \rightarrow x^* \text{ para } t \rightarrow \infty, \text{ e } \phi_t(x) \in u \forall t \geq 0\}$$

Definição 28. *Variedade localmente instável*

Define-se variedade localmente instável de x^* , $W_{loc}^u(x^*)$ como

$$W_{loc}^u(x^*) = \{x \in u / \phi_t(x) \rightarrow x^* \text{ para } t \rightarrow -\infty, \text{ e } \phi_t(x) \in u \forall t \leq 0\}$$

Definição 29. *Variedade globalmente estável*

Define-se a variedade globalmente estável de W^s como a superfície obtida a partir da evolução dos pontos de $W_{loc}^s(x^*)$ em tempo reverso, ou seja:

$$W^s(x^*) = \bigcup_{t \leq 0} \phi_t[W_{loc}^s(x^*)]$$

Definição 30. *Variedade globalmente instável*

A variedade globalmente instável W^u é definida como a superfície obtida a partir da evolução dos pontos de W_{loc}^u em tempo direto, ou seja:

$$W^u(x^*) = \bigcup_{t \geq 0} \phi_t[W_{loc}^u(x^*)]$$

Teorema 3. *Teorema da variedade estável para um ponto de equilíbrio*

Suponha que $\dot{x} = f(x)$ tem um ponto de equilíbrio hiperbólico x^* (definição 36). Então existem variedades localmente estável e instável, $W_{loc}^s(x^*)$ e $W_{loc}^u(x^*)$, com as mesmas dimensões n_s e n_u dos subespaços E^s e E^u do sistema $\dot{\xi} = Df(x^*)\xi$ e são tangentes a E^s e E^u no ponto x^* .

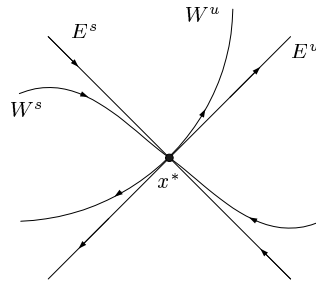


Figura A.11: Ilustração do teorema da superfície estável.

Definição 31. *Perturbação de campo vetorial*

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ dois campos vetoriais. O campo $g(x)$ é uma perturbação de $f(x)$ de tamanho ε real e positivo se:

$$\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Definição 32. *Equivalência topológica*

Dois campos vetoriais f e g (ou dois mapeamentos, f^k e g^k) são topologicamente equivalentes se existir um homeomorfismo h tal que

- (a) Caso contínuo: h transforma o fluxo de f no fluxo de g .

$$h(\phi_{t_1}^f(x)) = \phi_{t_2}^g(h(x))$$

- (b) Caso discreto: h transforma o conjunto de órbitas de f em órbitas de g .

$$hf^k = g^kh$$

Definição 33. *Estabilidade estrutural*

Um sistema é estruturalmente estável se campos vetoriais suficientemente próximos têm retratos de fase equivalentes. Assim, a estabilidade estrutural significa robustez de um ponto no espaço dos campos vetoriais, entendendo-se robustez como a propriedade que o sistema apresenta de reter as características qualitativas de sua dinâmica, relativamente a pequenas perturbações ou mudanças nas funções envolvidas na sua definição.

A.3 Transformações Pontuais

Definição 34. *Transformação pontual (caso linear)*

Seja $\phi_t(x)$ o fluxo linear de $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$ e seja a matriz quadrada $e^{At} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, que é a matriz que mapeia o fluxo. Fixando um intervalo $\tau = t_k$, a matriz quadrada $A_D = e^{A\tau} \in \mathbb{R}^n$, com elementos constantes, gera um sistema dinâmico discreto a partir do fluxo, pela equação a diferenças

$$x(k+1) = A_D x(k)$$

$$x \mapsto A_D x$$

Esta discretização pode ser no tempo, se τ é constante, e no espaço se $h(x)$ é constante, onde $h(x) \in \mathbb{R}^{n-1}$ é um hiperplano de dimensão $n-1$.

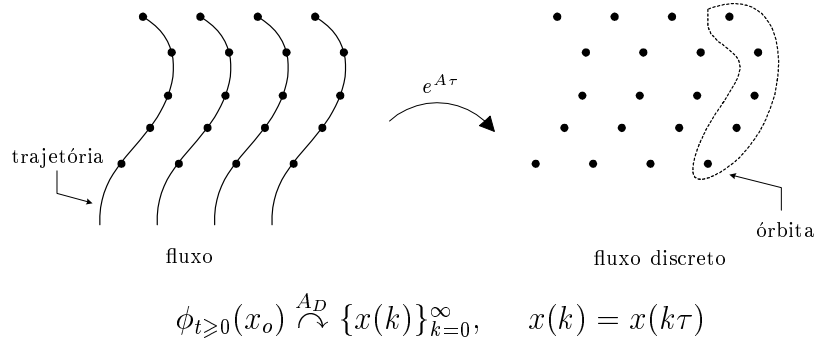


Figura A.12: Ilustração da transformação pontual.

Definição 35. *Transformação pontual (caso não linear)*

Seja $\phi_t(x)$ o fluxo não linear de $\dot{x} = f(x)$. Para um intervalo τ , a família de órbitas $\phi_\tau(x)$ mapeia o fluxo ϕ_t em órbitas discretas pela equação a diferenças

$$x(k+1) = \phi_\tau(x(k))$$

$$x \longmapsto \phi_\tau(x)$$

Definição 36. *Pontos de equilíbrio hiperbólicos*

Se $Df(x^*)$ tem autovalores todos com $Re(\lambda_j) \neq 0$, então x^* é dito hiperbólico. Caso contrário, o ponto de equilíbrio é dito degenerado.

Definição 37. *Pontos homoclínicos e trajetórias homoclínicas*

Sejam $W^u(x^*)$ e $W^s(x^*)$ as variedades de $f(x)$ e sejam p_i pontos do fluxo $\phi_t(x)$ que satisfazem

$$p_i \neq x^* \text{ e } p_i \in W^u(x^*) \cap W^s(x^*)$$

p_i são denominados pontos homoclínicos e o conjunto dos pontos homoclínicos forma uma trajetória homoclínica.

Observações:

- (a) Sejam $v_t^u(p_i)$ versores tangentes a $W^u(x^*)$ em p_i e $v_t^s(p_i)$ versores tangentes a $W^s(x^*)$ em p_i . Então:

(i) se $\langle v_t^u(p_i), v_t^s(p_i) \rangle = 1$, p_i é um ponto homoclínico não transverso.

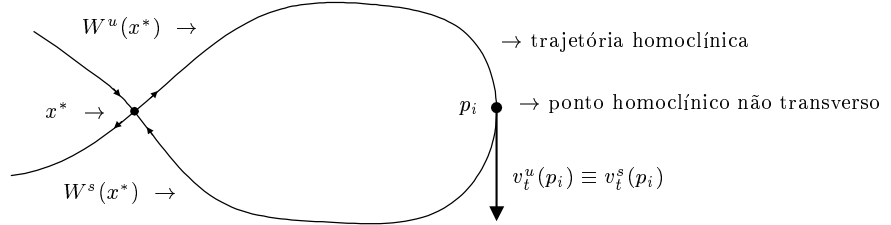


Figura A.13: Ilustração de um ponto homoclínico não transverso.

(ii) se $\langle v_t^u(p_i), v_t^s(p_i) \rangle \neq 1$, p_i é um ponto homoclínico transverso.

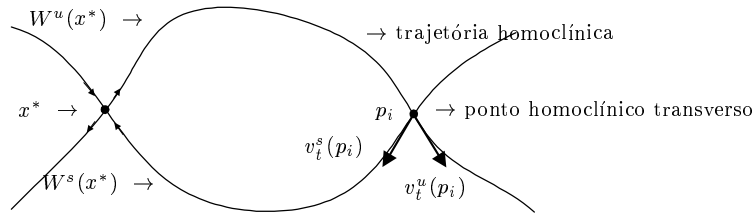


Figura A.14: Ilustração de um ponto homoclínico transverso.

(b) Sistemas que contêm pontos homoclínicos transversos possuem dinâmica complexa, e podem apresentar comportamento caótico.

(c) Sistemas contínuos de dimensão $n \leq 2$ não contêm pontos homoclínicos transversos. Portanto, nunca são caóticos.

Definição 38. *Trajetoórias heteroclínicas*

Sejam x_1^* e x_2^* dois pontos de equilíbrio de $f(x)$. O conjunto de todos os pontos p_i tal que:

$$p_i \in W^u(x_1^*) \cap W^s(x_2^*) \text{ ou } p_i \in W^u(x_2^*) \cap W^s(x_1^*)$$

forma uma trajetória denominada heteroclínica.

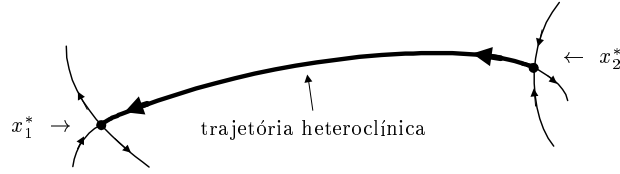


Figura A.15: Ilustração de uma trajetória heteroclínica.

Definição 39. *Órbitas homoclínicas*

Seja x^* um ponto fixo hiperbólico não estável do difeomorfismo $\phi_\tau^k(x)$. Então, se $W^u(x^*) \cap W^s(x^*) = p \neq x^*$, a órbita $\{x(k)\}_{k=k_1}^\infty$ que passa por p é dita homoclínica (figura A.16).

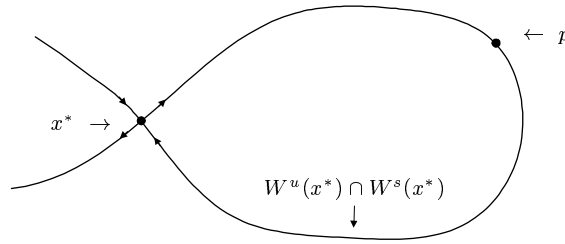


Figura A.16: Ilustração de uma órbita homoclínica.

Se a órbita homoclínica possui pontos homoclínicos transversos, ela é dita órbita homoclínica transversa (figura A.17).

A.4 Estabilidade dos Conjuntos Limites

Definição 40. *Multiplicadores característicos*

Seja a equação a diferenças $\delta x_{k+1} = DP(x^*)\delta x_k$ a linearização de um mapa P no ponto de equilíbrio x^* .

Seja p a dimensão do mapa de Poincaré, onde $p = n$ para sistemas não autônomos e $p = n - 1$ para sistemas autônomos. Sejam $m_i \in \mathbb{C}$ os autovalores de $DP(x^*)$, cujos autovetores são $\eta_i \in \mathbb{C}^n$, $i = 1, \dots, p$.

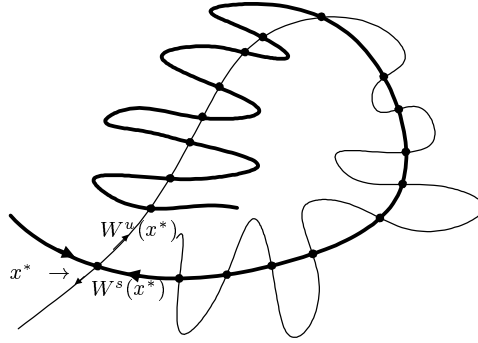


Figura A.17: Ilustração de uma órbita homoclínica transversa.

Os autovalores $\{m_i\}$ são chamados de multiplicadores característicos de uma solução periódica.

Definição 41. *Equação variacional*

Seja o sistema de n -ésima ordem

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_o) = x_o \quad (\text{A.5})$$

com solução $\phi_t(x_o, t_o)$, ou seja,

$$\dot{\phi}_t(x_o, t_o) = f(\phi_t(x_o, t_o), t), \quad \phi_{t_o}(x_o, t_o) = x_o \quad (\text{A.6})$$

Derivando-se (A.6) em relação a x_o , tem-se

$$D_{x_o} \dot{\phi}_t(x_o, t_o) = D_{x_o} f(\phi_t(x_o, t_o), t) D_{x_o} \phi_t(x_o, t_o), \quad D_{x_o} \phi_{t_o}(x_o, t_o) = I. \quad (\text{A.7})$$

Definindo-se $\Phi_t(x_o, t_o) = D_{x_o} \phi_t(x_o, t_o)$ e substituindo-se em A.7, tem-se

$$\dot{\Phi}_t(x_o, t_o) = D_x f(\phi_t(x_o, t_o), t) \Phi_t(x_o, t_o), \quad \Phi_{t_o}(x_o, t_o) = I \quad (\text{A.8})$$

A equação (A.8) é a equação variacional.

É importante observar que uma das aplicações da equação variacional é no cálculo dos expoentes de Lyapunov. É bom destacar aqui que a utilização da equação variacional pressupõe que o sistema seja continuamente diferenciável, o que inviabiliza sua aplicação para casos em que existam descontinuidades no sistema.

Definição 42. *Expoentes de Lyapunov*

(a) **Sistemas contínuos:**

Seja qualquer condição inicial $x_o \in \mathbb{R}^n$. Sejam $m_1(t), m_2(t), \dots, m_n(t)$ os autovalores da matriz de transição de estado $\Phi_t(x_o)$. Os expoentes de Lyapunov de x_o são

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |m_i(t)|, \quad i = 1, \dots, n$$

sempre que o limite existir.

(b) **Sistemas discretos:**

Para uma dada condição inicial x_o , seja $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ a órbita de um sistema discreto P de ordem p . Assim sendo, $x(k+1) = P(x(k))$. Sejam ainda $m_1(k), \dots, m_p(k)$ os autovalores de $DP^k(x_o)$. Os números de Lyapunov são dados por

$$\hat{m}_i = \lim_{k \rightarrow \infty} |m_i(k)|^{\frac{1}{k}}, \quad i = 1, \dots, p$$

sempre que o limite existir.

Definição 43. *Números de rotação*

Os números de rotação de uma dada trajetória são uma medida do deslocamento angular médio associada a esta trajetória. O número de rotação de uma determinada trajetória é dado por

$$W = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi N} \sum_{j=0}^N (\theta_{j+1} - \theta_j)$$

O cálculo de W para uma trajetória pode levar a três resultados distintos:

- (i) Se a série convergir para um número racional, a trajetória é periódica;
- (ii) Se a série convergir para um número irracional, a trajetória é quasi-periódica;
- (iii) Se a série não convergir, a trajetória é caótica.

Definição 44. *Dimensões dos atratores*

O conceito de dimensão é normalmente associado com dimensão euclidiana, onde um conjunto finito de pontos tem dimensão zero, uma linha tem dimensão um, um plano tem dimensão dois e assim por diante. Entretanto, a partir do conceito de atrator estranho existe a possibilidade da construção de estruturas geométricas complexas, cujas dimensões são não inteiras. A seguir definem-se alguns tipos de dimensões utilizados na caracterização de sistemas.

- (a) Dimensão de capacidade: Usa como medida uma distância, um plano ou um volume. Seja A um subconjunto limitado do $\mathbb{R}^n$ (atrator), com volume V_A e volume elementar V_i de diâmetro ε muito pequeno. Seja $N(\varepsilon)$ o número destes volumes elementares contidos em V_A , ou seja,

$$\sum_{i=0}^{N(\varepsilon)} V_i = V_A \Rightarrow N(\varepsilon) V_i = V_A$$

Chamando D de dimensão do atrator, normalizando o volume ($V_A = 1$), e ainda fazendo $V_i = \text{constante} = \varepsilon^D$, tem-se:

$$N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^D} \Rightarrow \ln N(\varepsilon) = -\ln \varepsilon^D$$

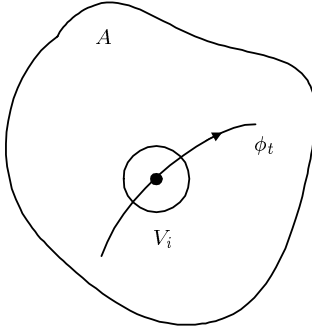
Aplicando-se o limite para $\varepsilon \rightarrow 0$, tem-se:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln N(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \frac{1}{\varepsilon^D}$$

A dimensão de capacidade é definida como

$$D_{cap} = \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \quad (\text{A.9})$$

- (b) Dimensão de informação: Leva em conta não somente o determinismo empregado como no caso anterior, mas também a probabilidade de um elemento de volume ser visitado pela trajetória ϕ_t .



$$D_I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \quad (\text{A.10})$$

onde

$$S(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i \ln \frac{1}{P_i}$$

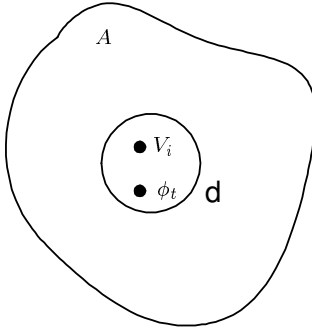
e P_i é a frequência de retorno de ϕ_t a V_i .

- (c) Dimensão de correlação: Leva em conta a probabilidade de dois pontos quaisquer x_i e x_j em V_A pertencerem ao mesmo elemento de volume.

$$x_i \neq x_j \Rightarrow P(x_i, x_j) = P(x_i)P(x_j)$$

$$P(x_i) = P(x_j) \Rightarrow P(x_i, x_j) = P_i^2$$

Sendo $C(\varepsilon)$ a probabilidade de dois pontos quaisquer x_i e x_j estarem em um mesmo volume elementar qualquer de V_A , $B_\varepsilon(x_i)$



$$C(\varepsilon) = P[x_i, x_j \in B_\varepsilon(x_1)] + P[x_i, x_j \in B_\varepsilon(x_2)] + \dots + P[x_i, x_j \in B_\varepsilon(x_{N(\varepsilon)})]$$

$$C(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i^2$$

o que é equivalente a dizer que $C(\varepsilon)$ é a probabilidade de que dois pontos x_i e x_j estejam a uma distância menor que $\varepsilon \Rightarrow \|x_i - x_j\| < \varepsilon$. A dimensão de correlação é dada por:

$$D_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \quad (\text{A.11})$$

- (d) Dimensão de Lyapunov: Sejam $\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \dots \geq \hat{\lambda}_n$ os expoentes de Lyapunov de um atrator $f(x) = \dot{x}$. Seja j o maior inteiro tal que $\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \dots + \hat{\lambda}_j \geq 0$. A dimensão de Lyapunov é definida por

$$D_L = j + \frac{\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \dots + \hat{\lambda}_j}{|\hat{\lambda}_{j+1}|} \quad (\text{A.12})$$

A partir desta equação, pode-se fazer a seguinte análise:

- Para um ponto de equilíbrio assintoticamente estável,

$$\hat{\lambda}_i < 0 \Rightarrow D_L = 0$$

- Em um ciclo limite,

$$\hat{\lambda}_1 = 0, \hat{\lambda}_j < 0, \forall j \geq 2 \Rightarrow D_L = 1$$

- Para sistemas caóticos, que têm ordem da equação diferencial no mínimo igual a três,

$$\hat{\lambda}_1 > 0, \hat{\lambda}_2 = 0, \hat{\lambda}_j < 0 \Rightarrow D_L = 2 + \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_3|}$$

Como o atrator é limitado, tem-se que $\sum \hat{\lambda}_i < 0$. Logo,

$$|\lambda_3| > \lambda_1 \Rightarrow \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_3|} < 1 \Rightarrow 2 < D_L < 3$$

Definição 45. *Bifurcação*

Seja a equação (A.13) a representação de um sistema dinâmico contínuo de ordem n .

$$\dot{x} = f(x) \tag{A.13}$$

Qualquer sistema dinâmico do tipo mostrado pela equação (A.13) que descreva um sistema real depende de um ou mais parâmetros, cujas variações influenciam no seu comportamento. Assim sendo, pode-se estudar o comportamento deste sistema como função dos valores assumidos por determinado parâmetro, ou seja,

$$\dot{x} = f(x, \mu) \tag{A.14}$$

onde $\mu \in \mathbb{R}$ é o parâmetro do sistema cuja influência deseja-se verificar.

Normalmente, uma pequena perturbação em μ tem como consequência uma pequena mudança quantitativa no conjunto limite da solução de (A.14). Como exemplo, pode-se citar uma pequena mudança da posição deste conjunto limite ou, em não se tratando de um ponto de equilíbrio, uma mudança em sua forma ou tamanho. Nestes casos, diz-se que o sistema

é estruturalmente estável, ou seja, para qualquer perturbação suficientemente pequena das equações que o definem, tem-se como resultado um fluxo que é topologicamente equivalente ao associado ao sistema sem a perturbação.

Entretanto, existe também a possibilidade de que esta pequena perturbação em μ possa provocar uma mudança qualitativa no conjunto limite do sistema. Esta mudança qualitativa chama-se bifurcação, e o valor de μ para o qual a bifurcação ocorreu é chamado de valor de bifurcação.

Esta mudança qualitativa ocorre quando o sistema é estruturalmente instável. Desta forma, o conjunto de valores de bifurcação é o conjunto de valores de parâmetros para os quais o sistema é estruturalmente instável.

Como exemplos de bifurcação podem ser citadas a criação ou desaparecimento de um conjunto limite, a mudança no tipo de estabilidade ou mesmo a permanência na mesma situação de estabilidade com mudança no período do sistema.

A visualização do comportamento do sistema em função da variação do parâmetro μ pode ser feita através dos chamados mapas de bifurcação ou diagramas de bifurcação, cuja construção será tratada neste apêndice.

Mostram-se, a seguir, os tipos de bifurcação mais simples, considerando-se exemplos de equações dinâmicas também bastante simples.

(i) *Bifurcação Sela-Nó:*

Seja a equação

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu - x^2 \tag{A.15}$$

Uma análise direta da equação A.15 mostra que somente existe solução para $\mu \geq 0$. O estudo da estabilidade, então, reduz-se à verificação do sinal da derivada de $f(x, \mu)$ em relação a x calculada nos pontos de equilíbrio.

Os pontos de equilíbrio são calculados por:

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu - x^2 = 0 \Rightarrow x^* = \begin{bmatrix} +\sqrt{\mu} \\ -\sqrt{\mu} \end{bmatrix}$$

Fazendo-se a análise da estabilidade

$$\left. \frac{df(x, \mu)}{dx} \right|_{x=+\sqrt{\mu}} = -2x|_{x=+\sqrt{\mu}} = -2\sqrt{\mu} < 0 \Rightarrow \text{equilíbrio estável}$$

e

$$\left. \frac{df(x, \mu)}{dx} \right|_{x=-\sqrt{\mu}} = -2x|_{x=-\sqrt{\mu}} = 2\sqrt{\mu} > 0 \Rightarrow \text{equilíbrio instável}$$

O resultado desta análise de estabilidade pode ser visto na figura A.18. O equilíbrio estável é um nó e o equilíbrio instável é um ponto de sela hiperbólico. A bifurcação associada é denominada bifurcação sela-nó.

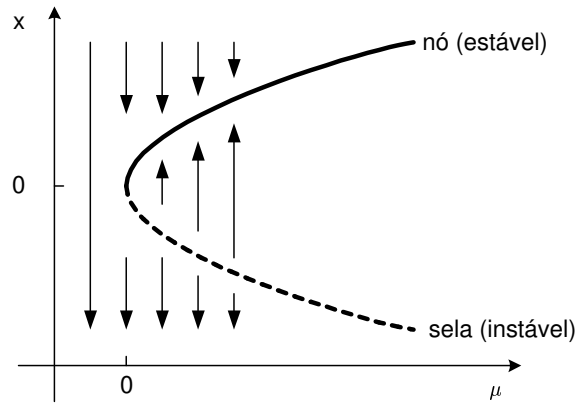


Figura A.18: Bifurcação do tipo sela-nó.

(ii) *Bifurcação Transcrítica:*

Considere a equação A.16 a seguir.

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x + x^2 \tag{A.16}$$

Os pontos de equilíbrio desta equação são calculados por:

$$f(x, \mu) = \mu x + x^2 = 0 \Rightarrow x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mu \end{bmatrix}$$

Fazendo-se a análise de estabilidade, tem-se:

$$\left. \frac{df(x, \mu)}{dx} \right|_{x=0} = 2x + \mu|_{x=0} = \mu \Rightarrow \begin{cases} \mu \geq 0 \Rightarrow \text{equilíbrio instável} \\ \mu < 0 \Rightarrow \text{equilíbrio estável} \end{cases}$$

$$\left. \frac{df(x, \mu)}{dx} \right|_{x=-\mu} = 2x + \mu|_{x=-\mu} = -\mu \Rightarrow \begin{cases} \mu > 0 \Rightarrow \text{equilíbrio estável} \\ \mu \leq 0 \Rightarrow \text{equilíbrio instável} \end{cases}$$

O resultado desta análise pode ser visto na figura A.19. Pode-se perceber que há uma troca de estabilidade quando o parâmetro de controle passa por $\mu = 0$. Esta bifurcação é chamada de bifurcação transcritical.

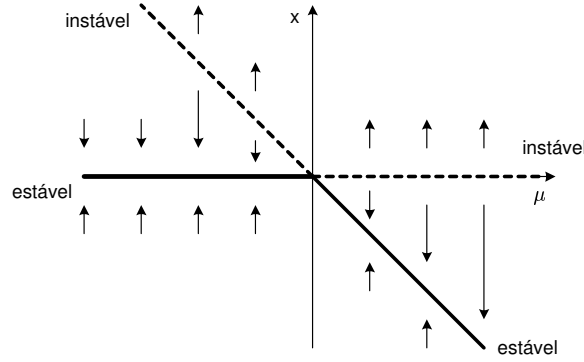


Figura A.19: Bifurcação do tipo transcritical.

(iii) *Bifurcação tipo forquilha:*

Este tipo de bifurcação pode ser subdividido em dois tipos: supercrítica e subcrítica.

- Supercrítica: Seja a equação

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x - x^3 \quad (\text{A.17})$$

Os pontos de equilíbrio são dados por:

$$f(x, \mu) = \mu x - x^3 = 0 \Rightarrow x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ +\sqrt{\mu} \\ -\sqrt{\mu} \end{bmatrix}$$

Note que os dois últimos pontos de equilíbrio ($\pm\sqrt{\mu}$) somente existem para valores de $\mu > 0$.

A análise de estabilidade é feita da seguinte forma:

$$\left. \frac{df(x, \mu)}{dx} \right|_{x=0} = \mu - 3x^2|_{x=0} = \mu \Rightarrow \begin{cases} \mu > 0 \Rightarrow \text{equilíbrio instável} \\ \mu \leq 0 \Rightarrow \text{equilíbrio estável} \end{cases}$$

$$\left. \frac{df(x, \mu)}{dx} \right|_{x=+\sqrt{\mu}} = \mu - 3x^2|_{x=+\sqrt{\mu}} = -2\mu \Rightarrow \begin{cases} \mu \geq 0 \Rightarrow \text{equilíbrio estável} \\ \mu < 0 \Rightarrow \text{não existe} \end{cases}$$

$$\left. \frac{df(x, \mu)}{dx} \right|_{x=-\sqrt{\mu}} = \mu - 3x^2|_{x=-\sqrt{\mu}} = -2\mu \Rightarrow \begin{cases} \mu \geq 0 \Rightarrow \text{equilíbrio estável} \\ \mu < 0 \Rightarrow \text{não existe} \end{cases}$$

O resultado desta análise pode ser visto na figura A.20. Pode-se perceber que existe uma bifurcação na forma de uma forquilha, daí o nome bifurcação supercrítica tipo forquilha.

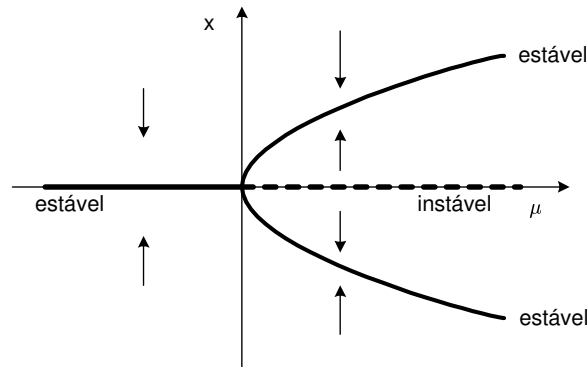


Figura A.20: Bifurcação tipo forquilha supercrítica.

- Subcrítica: Seja a equação

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x + x^3 \tag{A.18}$$

Os pontos de equilíbrio são dados por:

$$f(x, \mu) = \mu x + x^3 = 0 \Rightarrow x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ +\sqrt{-\mu} \\ -\sqrt{-\mu} \end{bmatrix}$$

Note que os dois últimos pontos de equilíbrio ($\pm\sqrt{-\mu}$) somente existem para valores de $\mu < 0$.

A análise de estabilidade é feita da seguinte forma:

$$\left. \frac{df(x, \mu)}{dx} \right|_{x=0} = \mu + 3x^2|_{x=0} = \mu \Rightarrow \begin{cases} \mu > 0 \Rightarrow & \text{equilíbrio instável} \\ \mu \leq 0 \Rightarrow & \text{equilíbrio estável} \end{cases}$$

$$\left. \frac{df(x, \mu)}{dx} \right|_{x=+\sqrt{-\mu}} = \mu + 3x^2|_{x=+\sqrt{-\mu}} = -2\mu \Rightarrow \begin{cases} \mu > 0 \Rightarrow & \text{não existe} \\ \mu \leq 0 \Rightarrow & \text{equilíbrio instável} \end{cases}$$

$$\left. \frac{df(x, \mu)}{dx} \right|_{x=-\sqrt{-\mu}} = \mu + 3x^2|_{x=-\sqrt{-\mu}} = -2\mu \Rightarrow \begin{cases} \mu > 0 \Rightarrow & \text{não existe} \\ \mu \leq 0 \Rightarrow & \text{equilíbrio instável} \end{cases}$$

O resultado desta análise pode ser visto na figura A.21. Pode-se perceber que também existe uma bifurcação na forma de uma forquilha, cujo nome é bifurcação subcrítica tipo forquilha.

(iv) *Bifurcação de Hopf ou Poincaré-Andronov:*

Seja o seguinte sistema de equações diferenciais

$$f(x, \mu) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - \mu) \\ -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - \mu) \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

Os pontos de equilíbrio são dados por:

$$\begin{aligned} (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - \mu) = 0 & \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 0 \Rightarrow P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ x_1^2 + x_2^2 - \mu = 0 & \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = \mu \Rightarrow \{P_2\} \end{aligned}$$

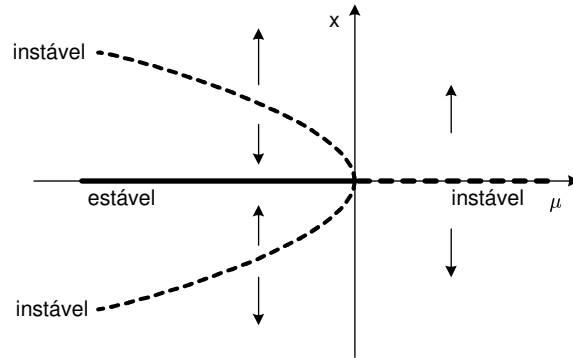


Figura A.21: Bifurcação tipo forquilha subcrítica.

Para simplicidade de cálculo, uma transformação de coordenadas cartesianas para coordenadas polares resulta em um sistema cuja equação é:

$$f(r) = \dot{r} = r\mu - r^3 \quad (\text{A.20})$$

obtida fazendo-se $x_1 = r\cos(\theta)$ e $x_2 = r\sin(\theta)$.

Os pontos de equilíbrio da equação (A.20) são dados por:

$$r\mu - r^3 = 0 \Rightarrow r(\mu - r^2) = 0 \Rightarrow r^* = \begin{bmatrix} 0 \\ +\sqrt{\mu} \\ -\sqrt{\mu} \end{bmatrix}$$

onde os últimos dois valores ($\pm\sqrt{\mu}$) somente existem para $\mu \geq 0$.

A análise de estabilidade é feita através da análise do sinal da derivada nos pontos de equilíbrio, ou seja,

$$\left. \frac{df(r)}{dr} \right|_{r=0} = \mu - 3r^2|_{r=0} = \mu \Rightarrow \begin{cases} \mu > 0 \Rightarrow & \text{equilíbrio instável} \\ \mu \leq 0 \Rightarrow & \text{equilíbrio estável} \end{cases}$$

$$\left. \frac{df(r)}{dr} \right|_{r=+\sqrt{\mu}} = \mu - 3r^2|_{r=+\sqrt{\mu}} = -2\mu \Rightarrow \begin{cases} \mu < 0 \Rightarrow & \text{não existe} \\ \mu \geq 0 \Rightarrow & \text{equilíbrio estável} \end{cases}$$

$$\left. \frac{df(r)}{dr} \right|_{r=-\sqrt{\mu}} = \mu - 3r^2|_{r=-\sqrt{\mu}} = -2\mu \Rightarrow \begin{cases} \mu < 0 \Rightarrow & \text{não existe} \\ \mu \geq 0 \Rightarrow & \text{equilíbrio estável} \end{cases}$$

O resultado desta análise pode ser visto na figura A.22. Pode-se perceber que em $\mu = 0$ há troca de estabilidade, passando-se de um equilíbrio estável para um ciclo limite estável, o qual envolve o equilíbrio instável para $\mu > 0$. Esta bifurcação de equilíbrio estável para oscilação periódica é chamada bifurcação de Hopf.

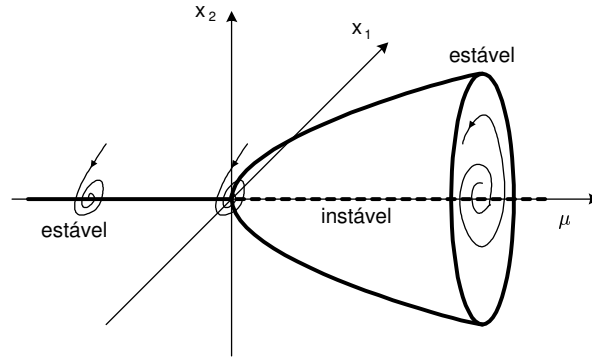


Figura A.22: Bifurcação de Hopf.

(v) *Bifurcação Homoclínica:*

Considere o seguinte sistema de equações:

$$f(x_1, x_2, \mu) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 + \mu x_2 - x_1^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

Para o sistema representado pela equação (A.21), tem-se os seguintes pontos de equilíbrio:

$$\begin{aligned} x_2^* &= 0 \\ x_1^* + \mu x_2^* - x_1^{*2} &= 0 \Rightarrow x_1^*(1 - x_1^*) = 0 \Rightarrow x_1^* = 0 \text{ ou } x_1^* = 1 \end{aligned}$$

ou seja:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A matriz jacobiana de $f(x_1, x_2, \mu)$ é dada por:

$$J = Df(x_1, x_2, \mu) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 2x_1 & \mu \end{bmatrix}$$

Para os pontos de equilíbrio P_1 e P_2 , tem-se:

$$Df(P_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Df(P_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}$$

cujos autovalores são dados por:

(a) Para P_1 :

$$\lambda(\lambda - \mu) - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \mu\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\mu}{2} \pm \frac{\sqrt{\mu^2 + 4}}{2}$$

Note que estes autovalores serão sempre reais, independentemente do valor de μ .

(b) Para P_2 :

$$\lambda(\lambda - \mu) + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \mu\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\mu}{2} \pm \frac{\sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$$

Neste caso, os autovalores poderão ser números complexos, dependentes do valor de μ .

Portanto, fazendo-se uma análise de estabilidade levando-se em consideração a variação do parâmetro μ , chega-se aos seguintes resultados:

(a) Para $\mu = 0$

$$\begin{aligned} P_1 &\Rightarrow \lambda_1 = +1 ; \lambda_2 = -1 \Rightarrow \text{sela} \\ P_2 &\Rightarrow \lambda_1 = +j ; \lambda_2 = -j \Rightarrow \text{ciclo limite em torno de } P_2 \end{aligned}$$

A figura A.23 mostra o resultado desta análise.

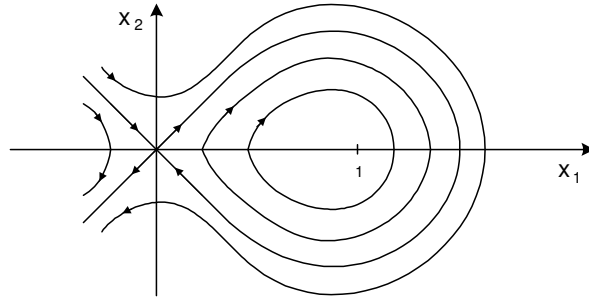


Figura A.23: Bifurcação homoclínica para $\mu = 0$.

(b) Para $\mu < 0$

$$\begin{aligned}
 P_1 &\Rightarrow \lambda_1 > 0 ; \lambda_2 < 0 \Rightarrow \text{sela} \\
 P_2 &\Rightarrow \begin{cases} \mu^2 < 4 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{\mu}{2} \pm j \frac{\sqrt{4 - \mu^2}}{2} \Rightarrow \text{Assintoticamente estável} \\ \mu^2 > 4 \Rightarrow \lambda_{1,2} < 0 \Rightarrow \text{Assintoticamente estável} \end{cases} \\
 &\quad \quad \quad \begin{matrix} \text{espiral sub-amortecida.} \\ \text{amortecido.} \end{matrix}
 \end{aligned}$$

A figura A.24 mostra o resultado desta análise.

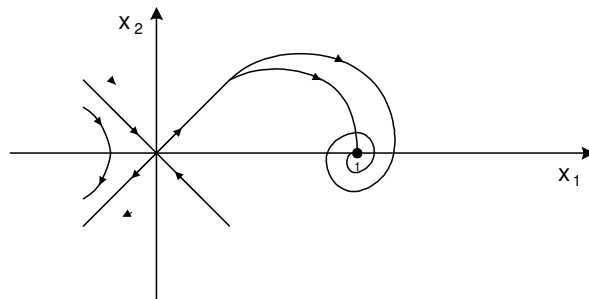


Figura A.24: Bifurcação homoclínica para $\mu < 0$.

(c) Para $\mu > 0$

$P_1 \Rightarrow \lambda_1 > 0 ; \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ sela

$$P_2 \Rightarrow \begin{cases} \mu^2 < 4 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{\mu}{2} \pm j \frac{\sqrt{4 - \mu^2}}{2} \Rightarrow \text{Instável na forma espiral.} \\ \mu^2 > 4 \Rightarrow \lambda_{1,2} > 0 \Rightarrow \text{Instável.} \end{cases}$$

A figura A.25 mostra o resultado desta análise.

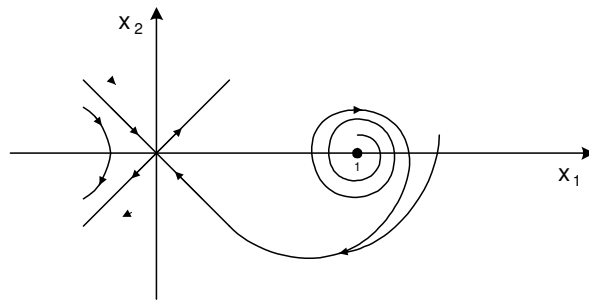


Figura A.25: Bifurcação homoclínica para $\mu > 0$.

Apêndice B

Programa *C MEX*

```
/*#####  
    ARQUIVO FONTE PARA  "C" S-function.  
  
#####*/  
#define S_FUNCTION_LEVEL 2  
// #define usado para especificar o nome desta S-function.  
#define S_FUNCTION_NAME cbshaw  
// '#include' necessário para definir a estrutura da simulação (SimStruct) e  
// suas definições de macro associadas. (simstruct.h).  
#include "simstruc.h"  
#include <string.h>  
#include <math.h>  
  
#define PI  3.1415926535897934440892098500626 // Define o valor de  PI.  
  
// Definição para fácil acesso dos parâmetros passados (X0).
```

```
#define XO(S)    ssGetSFcnParam(S, 0)

#if defined(MATLAB_MEX_FILE)
# define MDL_CHECK_PARAMETERS
/*****
// Função mdlCheckParameters - Esta rotina será chamada depois da
    mdlInitializeSizes, sempre que houver mudança nos parâmetros ou sua
    reavaliação. Seu objetivo é verificar se os novos parâmetros foram setados
    corretamente.
*****/
static void mdlCheckParameters(SimStruct *S){
    if (!mxIsDouble(XO(S)) || mxGetNumberOfElements(XO(S)) != 9) {
        ssSetErrorStatus(S,"O número de parâmetros passados pelo Simulink \
        para a S-function está incorreto");
        return;
    }
}
#endif

FILE *Fp1,*Fp2,*Fp3;
double alfa,beta,omega;
double t,ti,tt,tp,tpi,tpf,tbak;

int i,ip,jp,ind;
double num,Va[1001];
double to,tpfa,kr,inckr;

/*****
// Função mdlInitializeSizes - Inicializa os tamanhos dos vetores
*****/
static void mdlInitializeSizes(SimStruct *S){
    ssSetNumSFcnParams(S, 1); // Espera que o Simulink passe o vetor contendo
```

```
                                // os parâmetros (um só vetor).

#ifdef MATLAB_MEX_FILE
    if(ssGetNumSFcnParams(S) == ssGetSFcnParamsCount(S)){
        mdlCheckParameters(S);
        if(ssGetErrorStatus(S) != NULL) return;
    }else{
        return; // Aqui o erro na entrada dos parâmetros será avisado pelo
                // Simulink.
    }
#endif

    ssSetNumContStates          (S, 3); //Número de estados contínuos.
    ssSetNumDiscStates          (S, 0); //Número de estados discretos.
    if (!ssSetNumInputPorts(S, 1)) return;
    ssSetInputPortWidth         (S, 0, 4); //Número de entradas.
    ssSetInputPortDirectFeedThrough (S, 0, 0); //Flag de 'feedthrough' direto.
    if (!ssSetNumOutputPorts(S, 1)) return;
    ssSetOutputPortWidth        (S, 0, 4); //Número de saídas.
    ssSetNumSampleTimes          (S, 1); //Número de períodos de amostragem.
// ssSetNumSFcnParams          (S, 0); //Número de argumentos de entrada.
    ssSetNumRWork                (S, 0); //Elem. reais do vetor de trabalho.
    ssSetNumIWork                (S, 0); //Elem. inteiros do vet. de trabalho.
    ssSetNumPWork                (S, 0); //Ponteiros do vetor de trabalho.
    ssSetNumModes                (S, 0);
    ssSetNumNonsampledZCs        (S, 0);

    // Retira tratamento de excessões
    // Aqui deve-se ter cuidado para que o código do programa não cause
    // erros ("Em caso de erro o resultado é inesperado").
    //ssSetOptions(S, SS_OPTION_EXCEPTION_FREE_CODE);
}
```

```
/*#####  
    Função mdlInitializeSampleTimes - Inicializa o vetor dos períodos  
    de amostragem  
//#####*/  
/* Esta função é usada para especificar os períodos de amostragem da S-function.  
    Deve-se registrar o mesmo número de períodos de amostragem conforme  
    especificado em 'ssSetNumSampleTimes'. Se for especificado que não há  
    períodos de amostragem, então a S-function assume ter 1 período de amostragem  
    inerente.*/  
static void mdlInitializeSampleTimes(SimStruct *S){  
    ssSetSampleTime(S, 0, CONTINUOUS_SAMPLE_TIME);  
    ssSetOffsetTime(S, 0, 0.0);  
}  
  
/*#####  
    Função mdlInitializeConditions - Inicializa os estados  
//#####*/  
#define MDL_INITIALIZE_CONDITIONS    // Mudar por #undef para remover a função.  
#if defined(MDL_INITIALIZE_CONDITIONS)  
/* Note que se esta S-function for colocada dentro de um subsistema habilitado,  
    o qual está configurado para resetar os estados, ela irá ser chamada durante  
    o reset dos estados.*/  
static void mdlInitializeConditions(SimStruct *S){  
real_T *x0 = ssGetContStates(S);  
  
    /*Usa a condição inicial passada.*/  
    x0[0] = mxGetPr(X0(S))[0];  
    x0[1] = mxGetPr(X0(S))[1];  
    x0[2] = -PI;  
  
    alfa= mxGetPr(X0(S))[2];  
    beta= mxGetPr(X0(S))[3];
```

```

    omega= mxGetPr(X0(S))[4];
    ti= mxGetPr(X0(S))[5];
    tpf=mxGetPr(X0(S))[6];    // Tempo de simulação para cada kr
    tt=mxGetPr(X0(S))[7];    // Tempo de transitório a ser retirado em cada
                                // incremento do parâmetro kr.
    inckr=mxGetPr(X0(S))[8]; // Incremento para kr.

kr=1.0;
tpi=0.0;
ip=0;
tpfa=tpf;
tbak=0.0;
/* Cria um novo arquivo no disco para armazenar o mapa de bifurcação. */
remove("bshawp.dat");
remove("logbif.dat");
remove("bshawpx1.dat");
remove("bshawpx2.dat");
remove("logbifx.dat");

Fp1=fopen("bshawpx1.dat","wb");
fclose(Fp1);
Fp1=fopen("bshawpx2.dat","wb");
fclose(Fp1);
Fp1=fopen("logbifx.dat","wb");
fclose(Fp1);

Fp1=fopen("bshawp.dat","wb");
Fp2=fopen("logbif.dat","wb");
}
#endif /* Fim da MDL_INITIALIZE_CONDITIONS */

/*****

```

```
Função mdlUpdate - Atualização no passo principal de integração
//#####*/
#define MDL_UPDATE // Mudar por #undef para remover a função.
#if defined(MDL_UPDATE)
/* Esta função é chamada uma vez a cada passo principal de integração.
   Os estados discretos são tipicamente atualizados aqui, mas esta função.
   Ela é útil para fazer qualquer tarefa que deva ser realizada somente
   uma vez por passo de integração.*/
static void mdlUpdate(SimStruct *S, int_T tid){
InputRealPtrsType u  = ssGetInputPortRealSignalPtrs(S,0);
real_T               *x  = ssGetContStates(S);

char buf[50],buf1[50];

    if(*u[0] == 1.0){
        x[0]= 1.0;
        x[1]= -kr*x[1];
        ssSetSolverNeedsReset(S);
    }
    if(*u[1] == 1.0){
        x[0]= -1.0;
        x[1]= -kr*x[1];
        ssSetSolverNeedsReset(S);
    }
    if(*u[3]== 1.0){
        x[2]= -PI;
        ssSetSolverNeedsReset(S);
    }
}
#endif /* Fim da MDL_UPDATE */

/#####
```

```

    Função mdlDerivatives - Calcula as derivadas
//#####*/
#define MDL_DERIVATIVES // Mudar por #undef para remover a função.
#if defined(MDL_DERIVATIVES)
static void mdlDerivatives(SimStruct *S){
    real_T *dx          = ssGetdX(S);
    real_T *x           = ssGetContStates(S);
    InputRealPtrsType u = ssGetInputPortRealSignalPtrs(S,0);

    double buf[50],buf1[30];
    char num1[15],num2[15];

    t=ssGetT(S); // Pega o tempo atual de simulação.

    dx[0] = x[1];
    dx[1] = sin(x[0]) - 2.0*alfa*x[1]+ beta*cos(x[2]); // Não Linearizado
    dx[1] = x[0] - 2.0*alfa*x[1]+ beta*cos(x[2]);      // Linearizado
    dx[2] = omega;

    tp=t-tpi;
    if(t>=ti && tp>tpfa){
        fprintf(Fp2,"%0.5f %d%c%c",kr,ip,0x0d,0x0a); //logbif.dat para Disco.
        ip=0;
        tpi=t;
        // Decrementa automaticamente o parâmetro kr.
        kr-=inckr;
        tp=0.0;
        tpfa=tpf;
    }
    // Monitora pontos a serem considerados para impressão no gráfico.
    if(*u[2]==1 && t>=tpi+tt && t>=ti){
        num=x[1];

```

```
    ind=0;
    if(ip==0){
        Va[1]=num;
        ip=1;
    }else{
        if(ip < 30){
            jp=1;
            while(jp <= ip){
                if(fabs(num-Va[jp])<=0.01){
                    ind=1;
                    break;
                }
                jp++;
            }
            if(ind==0){
                ip++;
                Va[ip]=num;
            }
        }
    }

    if(ind==0){
//        strcpy(buf,"hold on; plot(");
//        sprintf(buf1,"%0.5f, %0.9f,'k');",kr,num);
//        strcat(buf,buf1);
//        mexEvalString(buf); //Imprime ponto na tela de vídeo.
        fprintf(Fp1,"%0.5f %0.9f%c%c",kr,num,0x0d,0x0a); //Envia ponto p/ disco.
        to=t;
    }

    if((t-to) > 500.0) tpfa=tp; // 1000 segundos sem adquirir novo ponto?
}

if(t-tbak >= 5000.0){ // Faz backup a cada 5000 segundos.
```



```

        tbak=t;
        fcloseall();
        Fp1=fopen("bshawp.dat","rb");
        Fp2=fopen("bshawpx1.dat","rb+");
        fseek(Fp2,0L,SEEK_END);
        while(fscanf(Fp1,"%s",num1) != EOF){
            fscanf(Fp1,"%s",num2);
            fprintf(Fp2,"%s %s %c%c",num1,num2,0x0d,0x0a);
        }
        fcloseall();

        Fp1=fopen("logbif.dat","rb");
        Fp2=fopen("logbifx.dat","rb+");
        fseek(Fp2,0L,SEEK_END);
        while(fscanf(Fp1,"%s",num1) != EOF){
            fscanf(Fp1,"%s",num2);
            fprintf(Fp2,"%s %s %c%c",num1,num2,0x0d,0x0a);
        }
        fcloseall();

        //Reabre os arquivos de armazenamento de dados parciais.
        remove("bshawp.dat");
        Fp1=fopen("bshawp.dat","wb");
        remove("logbif.dat");
        Fp2=fopen("logbif.dat","wb");
    }
}

#endif /* Fim da MDL_DERIVATIVES */

/*****
    Função mdlOutputs - Calcula as saídas
*****/

```

```
// As saídas são colocadas na variável y.
static void mdlOutputs(SimStruct *S, int_T tid){
real_T *y = ssGetOutputPortRealSignal(S,0);
real_T *x = ssGetContStates(S);

    y[0] = x[0];
    y[1] = kr;
    y[2] = x[2];

//Limita intervalo de variação de kr.
    if(kr>=0.85) y[3] = 0.0; // 0.85 < kr < 1.0
    else y[3]= 1.0;
}

/*****
    Função mdlTerminate - Chamada quando a simulação termina
*****/
static mdlTerminate(SimStruct *S){
char num1[15],num2[15];

    fcloseall();
    Fp1=fopen("bshawp.dat","rb");
    Fp2=fopen("bshawpx1.dat","rb+");
    fseek(Fp2,0L,SEEK_END);
    fseek(Fp3,0L,SEEK_END);
    while(fscanf(Fp1,"%s",num1) != EOF){
        fscanf(Fp1,"%s",num2);
        fprintf(Fp2,"%s %s %c%c",num1,num2,0x0d,0x0a);
    }
    fcloseall();

    Fp1=fopen("logbif.dat","rb");
    Fp2=fopen("logbifx.dat","rb+");
```

```
fseek(Fp2,0L,SEEK_END);
while(fscanf(Fp1,"%s",num1) != EOF){
    fscanf(Fp1,"%s",num2);
    fprintf(Fp2,"%s %s %c%c",num1,num2,0x0d,0x0a);
}
fcloseall();

//Remove os arquivos de armazenamento de dados parciais.
remove("bshawp.dat");
remove("logbif.dat");
}

#ifdef MATLAB_MEX_FILE // Este arquivo será compilado como um arquivo MEX?
#include "simulink.c"    // Mecanismo de interface de arquivo MEX.
#else
#include "cg_sfun.h"     // Código para a geração do registro da função.
#endif
```


Referências Bibliográficas

- Arrowsmith, D. K. e C. M. Place (1990). *An Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press. Cambridge.
- Barnsley, Michael (1988). *Fractals Everywhere*. Academic Press, Inc.
- Begley, C. J. e L. N. Virgin (1998). Impact response and the influence of friction. *Journal of Sound and Vibration* **211**(5), 801–818.
- Comin, P. R. (1995). Ferramentas para identificação experimental de caos em sistemas de engenharia. Tese de Mestrado. UNICAMP.
- Fernandes, V. T. (1997). Análise e proposta de desenvolvimento de um robô manipulador utilizando a estrutura do paralelogramo. Tese de Mestrado. UNICAMP.
- Fiedler-Ferrara, N. e C. P. C. Prado (1994). *Caos: Uma Introdução*. Edgard Blücher Ltda.
- Gouvêa, D. S. A. (2000). Aplicação da Teoria de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares ao EEG de Recém-Nascidos. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- Grebogi, C., E. Ott, S. Pelikan e J. A. Yorke (1984). Strange attractors that are not chaotic. *Physica D* **13**(1-2), 261–268.
- Guckenheimer, J. e P. Holmes (1990). *Nonlinear Oscillators, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Cambridge University Press. Cambridge.
- Gumowski, I. e C. Mira (1980). *Dynamique Chaotique, Transformations Ponctuelles Transition Ordre-Désordre*. Collection Nabla. Cepadues Editions. Toulouse, France.

- Heagy, J. F. e S. M. Hammel (1994). The birth of strange nonchaotic attractors. *Physica D* **70**(1-2), 140–153.
- Klecza, W. e E. Kreuzer (1995). On the systematic analytic-numeric bifurcation analysis. *Journal of Nonlinear Dynamics* **7**(2), 149–163.
- Lenci, S. e G. Rega (1998). Controlling nonlinear dynamics in a two-well impact system. I. attractors and bifurcation scenario under symmetric excitations. *Int. Journal of Bifurcation and Chaos*. **8**(12), 2387–2407.
- Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonlinear flow. *Journal of the Atmospheric Sciences* **20**, 40–130.
- Mahla, Adelheid Ingeborg (1991). Caos em sistemas de controle de motores pela técnica pll-dual. Tese de Mestrado. UNICAMP.
- Mahla, Adelheid Ingeborg (1994). Estabilidade e Caos em Sistemas Dinâmicos Não Lineares: Aplicação no Sistema PLL-Dual. Tese de Doutorado. UNICAMP.
- MathWorks, Inc. (©1990 - 1998). *Using Simulink*.
- Müller, P.C. (1995). Calculation of Lyapunov exponents for dynamic systems with discontinuities. *Chaos, Solitons & Fractals*. **5**(9), 1671–1681.
- Moon, F. C. (1987). *Chaotic Vibrations*. John Wiley & Sons. USA.
- Moore, D. B. e S. W. Shaw (1990). The experimental response of an impacting pendulum system. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **25**(1), 1–16.
- Nogueira, R. G. (1995). Controle de posição e orientação de um manipulador através de um mouse espacial. Tese de Mestrado. UNICAMP.
- Nogueira, R. G., A. G. B. Palhares e M. K. Madrid (2000). Influência do coeficiente de reposição de velocidade no comportamento dinâmico de um pêndulo invertido perturbado periodicamente e com restrições na trajetória. *Aceito para publicação na Revista Semina da área de Ciências Exatas/Tecnológicas*.

- Nogueira, R. G., A. G. B. Palhares e M. K. Madrid (2001). Study of the dynamics of a robotic module periodically disturbed. *Proceedings of the 5th International Conference on Mechatronics Technology, Singapore* p. 345.
- Parker, T. S. e L. O. Chua (1989). *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer-Verlag. New York.
- Pikovsky, A. S. e U. Feudel (1995). Characterizing strange nonchaotic attractors. *Chaos* **5**(1), 253–260.
- Rivin, Eugene I. (1987). *Mechanical Design of Robots*. McGraw-Hill.
- Romeiras, F. J., A. Bondeson, E. Ott, T. M. Antonsen e C. Grebogi (1987). Quasi-periodically forced dynamic-systems with strange nonchaotic attractors. *Physica D* **26**(1-3), 277–294.
- Shaw, S. W. e R. H. Rand (1989). The transition to chaos in a simple mechanical system. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **24**(1), 41–56.
- Sparrow, Colin (1982). *The Lorenz equations: bifurcations, chaos and strange attractors*. Springer-Verlag.
- Spong, Mark W. e M. Vidyasagar (1989). *Robot Dynamics and Control*. John Wiley and Sons.
- Theodossiades, S. e S. Natsiavas (2000). Non-linear dynamics of gear-pair systems with periodic stiffness and backlash. *Journal of Sound and Vibration. Academic Press. Online* <http://www.idealibrary.com>. **229**(2), 287–310.
- Thompson, J. M. T. e H. B. Stewart (1989). *Nonlinear Dynamics and Chaos: Geometrical Methods for Engineers and Scientists*. John Wiley & Sons. England.
- Thompson, J. M. T. e S. R. Bishop (1994). *Nonlinearity and Chaos in Engineering Dynamics*. John Wiley & Sons. England.
- Tuffillaro, N. B., T. Abbott e J. Reilly (1992). *An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos*. Addison-Wesley Publishing Company. Massachusetts, USA.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Williams, T. e C. Kelley (©1986 - 1993, 1998, 1999). *Gnuplot*.

Wolf, A., J. B. Swift, H. L. Swinney e J. A. Vastano (1985). Determining Lyapunov expoents from a time series. *Physica D* **16**(3), 285–317.