



Juliana Verga Shirabayashi

ALGORITMOS PARA REDES DE TRANSPORTE MULTIMODAL
APLICADO AO TRÁFEGO URBANO

Campinas, SP



Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Juliana Verga Shirabayashi

ALGORITMOS PARA REDES DE TRANSPORTE MULTIMODAL APLICADO AO TRÁFEGO
URBANO

Tese de doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutora em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Automação.

Orientador: Akebo Yamakami.

Co-orientador: Ricardo Coelho Silva.

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida pelo aluno, e orientada pelo Prof. Dr. Akebo Yamakami

Campinas, SP

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

V586a Verga, Juliana, 1984-
Algoritmos para redes de transporte multimodal aplicado ao tráfego urbano /
Juliana Verga Shirabayashi. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Akebo Yamakami.
Coorientador: Ricardo Coelho Silva.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de
Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Lógica fuzzy. 2. Teoria dos grafos. 3. Programação matemática. 4.
Transporte urbano. I. Yamakami, Akebo, 1947-. II. Silva, Ricardo Coelho. III.
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Algorithms for multimodal transportation network applied to urban traffic

Palavras-chave em inglês:

Fuzzy logic
Graph theory
Mathematical programming
Urban transportation

Área de concentração: Automação

Titulação: Doutora em Engenharia Elétrica

Banca examinadora:

Akebo Yamakami [Orientador]
Maria José de Paula Castanho
Márcia Braga de Carvalho Ferreira
Takaaki Ohishi
Priscila Cristina Berbert Rampazzo

Data de defesa: 30-05-2014

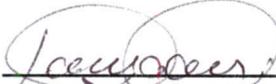
Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE DOUTORADO

Candidata: Juliana Verga Shirabayashi

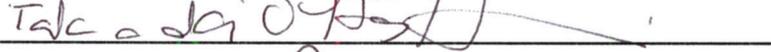
Data da Defesa: 30 de maio de 2014

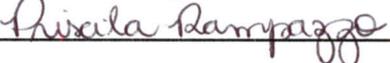
Título da Tese: "Algoritmos para Redes de Transporte Multimodal Aplicado ao Tráfego Urbano"

Prof. Dr. Akebo Yamakami (Presidente):  _____

Profa. Dra. Maria José de Paula Castanho:  _____

Profa. Dra. Márcia Braga de Carvalho Ferreira:  _____

Prof. Dr. Takaaki Ohishi:  _____

Profa. Dra. Priscila Cristina Berbert Rampazzo:  _____

Resumo

A teoria de grafos é comumente utilizada na área da engenharia para resolver problemas que podem ser representados na forma de redes. Dentre diversos problemas abordados, o problema de transporte multimodal é um dos que podem ser modelados por grafos.

Este trabalho apresenta três algoritmos para redes de transporte multimodal aplicados ao tráfego urbano. O primeiro algoritmo é de carregamento incremental de fluxo e aborda incertezas nos custos e nas capacidades dos arcos utilizando a teoria dos conjuntos *fuzzy*. Neste caso, o problema foi modelado através de subgrafos, onde cada modo de transporte considerado é representado por um subgrafo e o grafo total é a união de todos os subgrafos. O segundo, é um algoritmo de caminho mínimo para grafos coloridos com custos *crisp* e é baseado no algoritmo clássico de caminho mínimo de Ford-Moore-Bellman. O terceiro algoritmo é de carregamento incremental de fluxo e utiliza o segundo algoritmo para encontrar os caminhos mínimos multimodais. Neste caso os custos e capacidades são *crisp* e assim como no primeiro algoritmo, os custos dependem do fluxo. A modelagem com relação ao segundo e ao terceiro algoritmo, foi feita utilizando grafos coloridos, onde cada modo de transporte é representado por uma cor.

Palavras-chave: Transporte Multimodal, Conjuntos *Fuzzy*, Teoria de Grafos, Grafos Coloridos, Programação Matemática *Fuzzy*.

Abstract

The graph theory is commonly used in the area of engineering to solve problems that can be represented in the form of networks. Among several problems, the multimodal transport problem is one that can be modeled by graphs.

This work presents three algorithms for multimodal transport networks applied to urban traffic. The first algorithm is of incremental loading flow and deals uncertainties in costs and in capacities of arcs using the fuzzy sets theory. In this case the problem was modeled by subgraphs, where each mode of transport considered is represented by a subgraph and the total graph is the union of all subgraphs. The second, is an algorithm of shortest path for colored graphs with crisp costs and is based in the classical shortest path algorithm of Ford-Moore-Bellman. The third algorithm is of incremental loading flow and uses the second algorithm to find the multimodal shortest paths. In this case the costs and the capacities are crisp and thus in the first algorithm, the costs depend on the flow. The modeling with respect to the second and third algorithm was done using colored graphs, where each transport mode is represented by a color.

Keywords: Multimodal Transport. Fuzzy Sets. Graph Theory. Colored Graph. Fuzzy Mathematical Programming.

1	Introdução	1
2	Conceitos e Definições	5
2.1	Conjuntos <i>fuzzy</i>	5
2.2	Coloração em grafos	11
2.2.1	Tipos de Coloração	11
3	Revisão Bibliográfica	15
3.1	Formulação do Problema	15
3.1.1	Formulação básica	16
3.1.2	Formulação considerando número máximo de transferências modais	19
3.1.3	Formulação considerando restrições quanto a ordem dos modos utilizados	20
3.1.4	Formulação considerando janelas de tempo	20
3.1.5	Formulação considerando incertezas nas variáveis do problema	21
3.2	Métodos de resolução	22
3.2.1	Métodos Clássicos	22
3.2.2	Metaheurísticas	34
3.2.3	Métodos <i>fuzzy</i>	40
3.2.4	Métodos Híbridos	44
4	Algoritmos propostos	47
4.1	Modelagem usando subgrafos	48

4.1.1	Algoritmo 1	52
4.2	Modelagem usando coloração em grafos	54
4.2.1	O Problema de caminho mínimo em grafos coloridos	54
4.2.2	O Problema de fluxo de custo mínimo em grafos coloridos	58
5	Testes Computacionais	61
5.1	Resultados obtidos através do algoritmo 1	61
5.1.1	Instância 1	62
5.1.2	Instância 2	64
5.1.3	Instância 3	68
5.1.4	Instância 4	72
5.1.5	Instância 5	75
5.2	Resultados obtidos através do algoritmo 2	77
5.2.1	Instância 1	77
5.2.2	Instância 2	79
5.2.3	Instância 3	80
5.2.4	Instância 4	82
5.3	Resultados obtidos através do algoritmo 3	84
5.3.1	Instância 1	85
5.3.2	Instância 2	87
5.3.3	Instância 3	89
6	Conclusões e trabalhos futuros	93
6.1	Conclusões	93
6.2	Perspectivas Futuras	95
6.3	Trabalhos publicados e submetidos	96
	Bibliografia	98

DEDICATÓRIA

Ao meu esposo Wesley e ao nosso bebê que embora ainda dentro do meu ventre já nos traz muitas alegrias.

Ao meu avô Fortunato Verga (in memorian), que embora não esteja mais presente, ficaria muito orgulhoso por esta conquista.

AGRADECIMENTOS

Desejo expressar meus sinceros agradecimentos...

A Deus, pelo dom da vida e por tudo o que tem me proporcionado.

Ao meu orientador e ao meu co-orientador, Prof. Akebo e Prof. Ricardo. Obrigada pela preciosa orientação, oportunidade, paciência e motivação, os quais foram de extrema importância para a realização deste trabalho.

Aos meus pais, Inês e Luiz Carlos. Obrigada pelo amor incondicional, pela doação e por serem exemplos de humildade, perseverança, a quem eu devo tudo. A sua criação e educação me fizeram chegar até aqui.

Ao meu esposo Wesley. Obrigada pelo amor, pelo carinho, pelas sugestões e por sempre se manter presente e compreensivo nos muitos momentos em que estivemos distantes. Juntos, não há sonhos que não possamos realizar.

À toda a minha família. Obrigada pelo apoio, pelo carinho, pelo incentivo e pela torcida de sempre. Amo vocês.

A todos meus queridos amigos e amigas. Obrigada por tornarem a minha vida mais agradável e bela e por compartilharem comigo os momentos alegres e difíceis.

Ao pessoal da FEEC. Obrigada pela ajuda, pelas sugestões e pelos incentivos.

À Capes e à FAPESP, pelo apoio financeiro para realização deste trabalho.

Aos membros da banca pelas valiosas correções e sugestões.

Não sei se a vida é curta ou longa para nós, mas sei que nada do que vivemos tem sentido se não tocarmos o coração das pessoas.

Muitas vezes basta ser: colo que acolhe, braço que envolve, palavra que conforta, silêncio que respeita, alegria que contagia, lágrima que corre, olhar que acaricia, desejo que sacia, amor que promove.

E isso não é coisa de outro mundo, é o que dá sentido à vida.

É o que faz com que ela não seja nem curta, nem longa demais, mas que seja intensa, verdadeira, pura enquanto durar.

“Feliz aquele que transfere o que sabe e aprende o que ensina.”

(Cora Coralina)

LISTA DE FIGURAS

2.1	Número triangular <i>fuzzy</i>	8
2.2	Número trapezoidal <i>fuzzy</i>	9
2.3	Coloração de vértices do grafo	13
4.1	Capacidade fuzzy	51
5.1	Exemplo Ilustrativo	62
5.2	Rede multimodal com três modos	65
5.3	Rede multimodal com três modos	69
5.4	Rede Sioux Falls	73
5.5	Rede Sioux Falls	75
5.6	Rede Ilustrativa	78
5.7	Rede com dois modos de transporte	79
5.8	Rede com dois modos de transporte	80
5.9	Rede com três modos de transporte entre alguns nós	82

LISTA DE TABELAS

5.1	Dados da Rede da Figura 5.1	62
5.2	Dados da Rede da Figura 5.1	63
5.3	Envio de fluxo para $I = 1$	63
5.4	Envio de fluxo para $I = 2$	64
5.5	Envio de fluxo para $I = 5$	64
5.6	Dados da Rede Multimodal da Figura 5.2	65
5.7	Dados da Rede Multimodal da Figura 5.2	66
5.8	Envio de fluxo para $I = 1$	67
5.9	Envio de fluxo para $I = 5$	67
5.10	Envio de fluxo para $I = 7$	68
5.11	Dados da Rede Multimodal da Figura 5.3	69
5.12	Dados da Rede Multimodal da Figura 5.3	70
5.13	Envio de fluxo para $I = 2$	71
5.14	Envio de fluxo para $I = 5$	71
5.15	Envio de fluxo para $I = 10$	72
5.16	Envio de fluxo para $I = 100$	73
5.17	Custos dos caminhos para $I = 100$	74
5.18	Envio de fluxo para $I = 1000$	74
5.19	Custos dos caminhos para $I = 1000$	74
5.20	Envio de fluxo para $I = 2$	76
5.21	Envio de fluxo para $I = 1000$	76

5.22 Envio de fluxo para $I = 2750$	76
5.23 Dados da Rede Multimodal da Figura 5.6	78
5.24 Dados da Rede Multimodal da Figura 5.7	80
5.25 Dados da Rede Multimodal da Figura 5.8	81
5.26 Resultados obtidos através do algoritmo 2	81
5.27 Dados da Rede Multimodal da Figura 5.9	83
5.28 Resultados obtidos através do algoritmo 2 para o nó origem 1	84
5.29 Resultados obtidos através do algoritmo 2 para o nó origem 6	84
5.30 Dados da Rede Multimodal da Figura 5.6	86
5.31 Envio de fluxo para $I = 1$	86
5.32 Envio de fluxo para $I = 2$	86
5.33 Envio de fluxo para $I = 4$	87
5.34 Dados da Rede Multimodal da Figura 5.8	88
5.35 Dados da Rede Multimodal da Figura 5.8	88
5.36 Envio de fluxo para $I = 1$	89
5.37 Envio de fluxo para $I = 3$	89
5.38 Envio de fluxo para $I = 6$	89
5.39 Dados da Rede Multimodal da Figura 5.9	90
5.40 Envio de fluxo para $I = 1$	91
5.41 Envio de fluxo para $I = 2$	91
5.42 Envio de fluxo para $I = 5$	91

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Um dos fatores que afetam a qualidade de vida em uma área metropolitana é o sistema de transporte local. Redes de transporte urbanas são cada vez mais caracterizadas por congestionamentos e seus impactos correspondentes na acessibilidade individual, na poluição do ar e no desenvolvimento de atividades econômicas urbanas [43]. Um fato que ocorre na maioria das cidades é que o local de trabalho das pessoas, muitas vezes, é longe da casa, o que faz com que utilizem mais de um meio de transporte para se deslocar de sua residência até o local de trabalho.

Sistemas de transportes são considerados multimodais pois geralmente contêm vários modos de transportes, tais como: ônibus, metrô, trem, dentre outros. Dessa forma, os usuários podem utilizar vários modos de transporte em uma viagem e geralmente não estão dispostos a trocar muitas vezes de meio de transporte. Vários parâmetros são considerados pelos usuários ao usar vários meios de transporte, como por exemplo: o número de mudanças de modo, o percurso da viagem, tempo de percurso, que devem ser os mais curtos possíveis [43]. Isto nos leva ao problema de caminho mínimo, para o qual existem diversos algoritmos. Porém, considerando uma rede multimodal e seus parâmetros associados, tais algoritmos se tornam insuficientes para orientar os usuários corretamente. Várias extensões tem sido propostas para suprir tais deficiências [12, 35, 45].

Na literatura, encontramos vários trabalhos que lidam com o problema de redes de transportes multimodais e com problemas correlatos, na tentativa de encontrar soluções para os usuários e para os administradores das redes de transportes, visto que atualmente, a

crescente frota de veículos particulares e de passageiros, aliada às condições não muito boas dos transportes públicos de um modo geral, tornam o fluxo de passageiros e veículos cada vez mais caótico. Com isso, tratar do problema de redes de transportes multimodais, monomodais e problemas correlatos é cada vez mais importante e necessário para buscar soluções, melhorar o planejamento e permitir uma viagem mais tranquila tanto para os usuários de transportes públicos bem como de veículos particulares.

Quanto à formulação, a teoria de grafos é comumente usada neste caso. Ela fornece uma modelagem consistente do problema de redes de transporte multimodal e de muitos outros problemas, facilitando a implementação de algoritmos que auxiliam na obtenção da sua solução [3]. A coloração em grafos é um problema de otimização combinatória bastante estudado e que possui variantes: coloração em nós, coloração em arestas, coloração em faces, dentre outras. Muitos problemas práticos podem ser modelados através da coloração em grafos, dentre eles: gerência, alocação de recursos, redes de telecomunicação, redes de transporte, dentre outros.

Geralmente, problemas reais têm associado vários parâmetros que são incertos, tais como: capacidade, custo e demanda. Ao trabalhar com parâmetros incertos, uma informação deixa de ser representada por um único valor e passa a ser representada por um conjunto. Assim, o uso da teoria dos conjuntos clássica torna-se inviável devido à sua ineficiência no tratamento de informações incertas. No entanto, essas incertezas podem ser estudadas e modeladas de forma mais robusta utilizando a teoria dos conjuntos *fuzzy*.

A introdução à teoria dos conjuntos *fuzzy* foi proposta pelo matemático Lotfi A. Zadeh em 1965 [89]. Este foi o grande passo no sentido de programar e armazenar conceitos vagos em computadores, tornando possível fazer cálculos com informações incertas, a exemplo do que faz o ser humano. Porém, foi somente nas duas últimas décadas que houve uma intensificação nos estudos desta área, onde extensões das teorias que envolvem programação linear, não linear, mista e inteira foram abordadas neste ambiente impreciso.

O tratamento de incertezas em problemas de grafos e as principais definições de grafos *fuzzy* foram propostos por Rosenfeld em 1975 [71], marco inicial da teoria dos grafos *fuzzy*. Em contraste aos inúmeros trabalhos existentes utilizando a teoria de grafos clássica, o estudo dos grafos *fuzzy* ainda está na sua fase inicial, tanto na teoria quanto na prática. Isto se deve ao fato da teoria de grafos e os problemas associados à mesma serem extensos.

Outro motivo se deve às diferentes abordagens que um problema de grafos *fuzzy* pode ter, pois os níveis de incerteza podem estar associados tanto na estrutura (nós e/ou arcos) quanto nos parâmetros (custo, capacidade, demanda).

A partir destas considerações e conhecendo a importância e relevância do problema, surgiu o interesse em estudar métodos para redes de transporte multimodal com ênfase em tráfego urbano.

Este trabalho apresenta três métodos para o problema de redes de transporte multimodal. O primeiro, baseado em carregamento incremental de fluxo e caminho mínimo *fuzzy*, tem como objetivo resolver o problema de fluxo em redes de transporte multimodal com incertezas nos custos e nas capacidades. O conceito de dominância entre caminhos de Okada e Soper [56] é usado para construir um subconjunto representativo do conjunto de soluções para o problema de caminho mínimo *fuzzy* chamado conjunto de caminhos mínimos não-dominados. Com a teoria de possibilidade [57] atribui-se a cada caminho um grau de possibilidade de ser o melhor, ordenando assim, todos os caminhos não-dominados. O envio de fluxo é feito através dos caminhos ordenados. Neste caso, os custos dos arcos dependem do fluxo nos mesmos, então os caminhos mínimos são calculados em cada iteração através do algoritmo proposto por Hernandez [32]. No carregamento incremental de fluxo, ao invés de passar todo o fluxo disponível uma única vez, dividimos o mesmo em incrementos (quantas vezes pretendemos dividir o fluxo) e distribuimos pelos caminhos mínimos não-dominados de acordo com a ordenação citada anteriormente. A atualização dos custos dos arcos é feita através de uma adaptação da função tempo de viagem B.P.R. (*Bureau of Public Roads*).

O segundo método é baseado no algoritmo clássico de caminho mínimo de Ford-Moore-Bellman [10] e tem como objetivo encontrar os caminhos mínimos multimodais em grafos coloridos com custos *crisp*, cada modo de transporte considerado é representado por uma cor, podendo ter vários arcos entre dois nós do grafo. Durante o procedimento de resolução, o método detecta se houve mudança de modo e um custo referente a esta mudança é acrescentado no caminho. Ao final temos um caminho mínimo multimodal com informação de qual modo foi utilizado para percorrer cada arco do caminho. Considerando o problema de fluxo, o terceiro método é baseado em carregamento incremental de fluxo e utiliza o segundo método proposto para encontrar os caminhos mínimos em cada iteração. Neste caso, os custos e capacidades são *crisp* e assim como no primeiro método, os custos dependem do

fluxo.

Organização do trabalho

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

- No Capítulo 2 são apresentados alguns conceitos básicos da teoria de conjuntos *fuzzy* e de coloração em grafos;
- No Capítulo 3 é apresentada a revisão bibliográfica dos trabalhos já existentes na literatura;
- No Capítulo 4 são apresentadas as modelagens e os algoritmos para os três métodos propostos;
- No Capítulo 5 são apresentados os resultados e análises dos testes computacionais realizados para cada método proposto;
- No Capítulo 6 são feitas as considerações finais deste trabalho e algumas propostas para trabalhos futuros.

Neste capítulo são apresentados os conceitos utilizados ao longo deste trabalho. Na primeira seção, são apresentados alguns conceitos da teoria dos conjuntos *fuzzy* e na segunda seção são apresentados alguns conceitos de coloração em grafos.

2.1 Conjuntos *fuzzy*

A seguir serão apresentados alguns conceitos da teoria dos conjuntos *fuzzy*. Maiores detalhes podem ser encontrados em [25, 63, 90].

A teoria dos conjuntos *fuzzy* foi introduzida, em 1965, pelo matemático Lotfi A. Zadeh [89] com intuito de tratar matematicamente termos linguísticos, como “em torno de”, “aproximadamente”, entre outros. Esta teoria consegue manipular e operar quantidades exatas e inexatas (quantificadores através de valores linguísticos).

Conjunto é uma maneira de organizar, resumir e generalizar o conhecimento sobre objetos. Assim, trabalha-se com uma dicotomia sobre um objeto pertencer ou não a um conjunto. Esta dicotomia pode ser representada matematicamente por uma função característica:

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \quad (2.1)$$

A idéia fundamental de conjunto *fuzzy* é a pertinência gradual, ou seja, relaxar

este requerimento admitindo valores intermediários entre 0 e 1 para quantificar o grau com que cada elemento do universo está associado a uma classe. Quanto mais próximo o valor estiver de 1, mais compatível o elemento está com as propriedades que distingue a classe.

Quando houver a necessidade de diferenciar entre conjuntos clássicos e conjuntos *fuzzy*, o conjunto com função característica com dois valores (0 ou 1), será chamado de conjunto clássico (ordinário ou *crisp*) ou simplesmente conjunto.

Definição 2.1.1. *Um conjunto fuzzy A é descrito por uma função de pertinência que mapeia os elementos de um universo X no intervalo unitário $[0, 1]$:*

$$\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$$

Um conjunto *fuzzy* pode ser visto como um conjunto de pares ordenados $\{x, \mu_A(x)\}$, onde x é um elemento de X e $\mu_A(x)$ denota o grau de pertinência de x em A .

Definição 2.1.2. *Seja X o conjunto universo. Um conjunto fuzzy A é normal se e somente se $\exists x \in X$ tal que $\mu_A(x) = 1$.*

Caso não exista um valor x tal que o valor supremo (altura) da função de pertinência seja igual a um ($\sup(\mu_A(x)) \neq 1, \forall x \in A$), então A é um conjunto subnormal.

Definição 2.1.3. *O α -corte de um conjunto fuzzy A é definido por:*

$$[A]_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

onde $0 < \alpha \leq 1$

Definição 2.1.4. *O suporte de um conjunto fuzzy A é definido por:*

$$\text{supp}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}$$

ou seja, o suporte é formado pelos elementos que possuem graus de pertinência não-nulos.

Definição 2.1.5. *Um conjunto fuzzy A é convexo se sua função de pertinência é tal que:*

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)]$$

para quaisquer $x_1, x_2 \in X$ e $\lambda \in [0, 1]$.

Definição 2.1.6. *O núcleo de um conjunto fuzzy A é definido por:*

$$\text{nucleo}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 1\}$$

As operações básicas realizadas em conjuntos clássicos também são definidas para conjuntos *fuzzy*. Com base nisso, Zadeh [89] definiu, a partir da função de pertinência tais operações básicas.

A intersecção e a união podem ser identificadas, respectivamente, pela conjunção (E) e pela disjunção (OU), assim, estas operações podem ser representadas pelos operadores \wedge e \vee [63].

Definição 2.1.7. *A união de dois conjuntos fuzzy A e B é definida por:*

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

Definição 2.1.8. *A intersecção de dois conjuntos fuzzy A e B é definida por:*

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

Definição 2.1.9. *O complemento de um conjunto fuzzy A é definido por:*

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

Definição 2.1.10. *Um número triangular fuzzy (Figura 2.1), denotado por $\tilde{a} = (m, \alpha, \beta)$, é descrito pela seguinte função de pertinência:*

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq m - \alpha \\ \frac{x - (m - \alpha)}{\alpha}, & m - \alpha < x < m \\ 1, & x = m \\ \frac{(m + \beta) - x}{\beta}, & m < x < m + \beta \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.2)$$

sendo que m é o valor modal (elemento do universo com grau de pertinência igual a 1), α é o espalhamento à esquerda e β o espalhamento à direita ($\alpha, \beta \neq 0$). Os valores $m - \alpha$ e $m + \beta$ são os limitantes, inferior e superior, respectivamente. Desse modo, um número triangular *fuzzy* também pode ser denotado por $\tilde{a} = (m - \alpha, m, m + \beta)$.

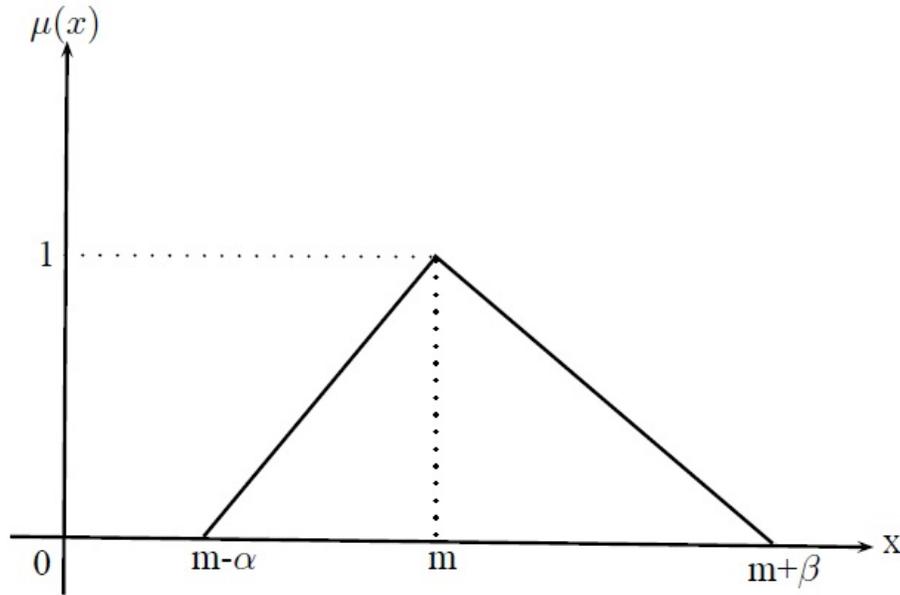
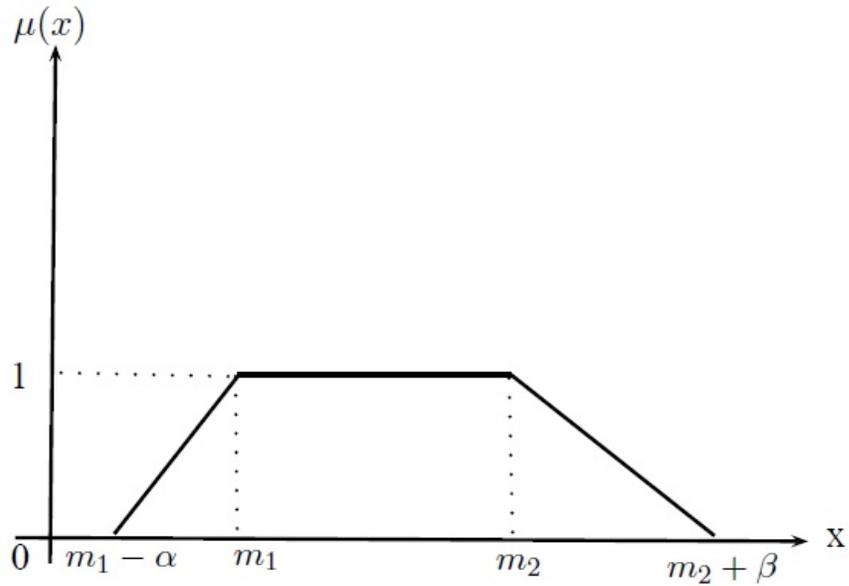


Figura 2.1: Número triangular fuzzy

Definição 2.1.11. Um número trapezoidal fuzzy ou um intervalo fuzzy (Figura 2.2), denotado por $\tilde{a} = (m_1, m_2, \alpha, \beta)$ é descrito pela seguinte função de pertinência:

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} \frac{x-(m_1-\alpha)}{\alpha}, & m_1 - \alpha < x < m_1 \\ 1, & m_1 \leq x \leq m_2 \\ \frac{(m_2+\beta)-x}{\beta}, & m_2 < x < m_2 + \beta \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.3)$$

sendo que m_1 é o extremo inferior do valor modal, m_2 o extremo superior do valor modal, α o espalhamento à esquerda e β o espalhamento à direita ($\alpha, \beta \neq 0$). Os valores $m_1 - \alpha$ e $m_2 + \beta$ são os limitantes, inferior e superior, respectivamente. Desse modo, um número fuzzy trapezoidal também pode ser denotado por $\tilde{a} = (m_1 - \alpha; m_1; m_2; m_2 + \beta)$.

Figura 2.2: Número trapezoidal *fuzzy*

Para realização de operações algébricas nos números *fuzzy* existem dois métodos básicos. O primeiro, é baseado no intervalo aritmético e nos α -cortes, o segundo, emprega o princípio da extensão. Para maiores detalhes, consultar Pedrycz e Gomide [63].

Definição 2.1.12. *Sejam $\tilde{a} = (m_1, \alpha_1, \beta_1)$ e $\tilde{b} = (m_2, \alpha_2, \beta_2)$ dois números triangulares fuzzy e $k \in \mathbb{R}$. Definem-se as operações:*

- *Soma:*

$$\tilde{a} + \tilde{b} = (m_1 + m_2, \alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2)$$

- *Multiplicação por escalar:*

$$k\tilde{a} = (km_1, k\alpha_1, k\beta_1), \text{ se } k \geq 0$$

$$k\tilde{a} = (km_1, -k\alpha_1, -k\beta_1), \text{ se } k < 0$$

- *Subtração:*

$$\tilde{a} - \tilde{b} = \tilde{a} + (-\tilde{b}) = (m_1 - m_2, \alpha_1 + \beta_2, \beta_1 + \alpha_2)$$

As operações algébricas de números trapezoidais *fuzzy* ocorrem de maneira similar.

Existem diferentes formas de comparar números *fuzzy*, por exemplo, dominância, índice de possibilidade, etc.

Definição 2.1.13. *Sejam $\tilde{a} = (m_1, \alpha_1, \beta_1)$ e $\tilde{b} = (m_2, \alpha_2, \beta_2)$ dois números triangulares fuzzy, então $\tilde{a} \prec \tilde{b}$ (\tilde{a} domina \tilde{b}) se e somente se*

$$m_1 \leq m_2, (m_1 - \alpha_1) \leq (m_2 - \alpha_2), (m_1 + \beta_1) \leq (m_2 + \beta_2) \text{ e } \tilde{a} \neq \tilde{b}.$$

Através da Definição 2.1.13, Okada e Soper [56] introduziram o conceito de dominância entre caminhos para o problema de caminhos mínimos *fuzzy*. Com a teoria de possibilidade atribui-se a cada solução um grau de possibilidade de ser a solução ótima. É preciso encontrar todas as soluções e compará-las para obter o grau de possibilidade de cada uma [57].

Definição 2.1.14. *Seja $G = (N, A)$ um grafo com custo $\tilde{c} = \{\tilde{c}_{ij}\}$ associado aos seus arcos. Sejam dois subgrafos T^1 e T^2 , $T^1 \neq T^2$. O grau de possibilidade de T^1 ter custo menor que T^2 é dado por [57]:*

$$\tilde{w} = Poss \left(\sum_{(i,j) \in T^1} \tilde{c}_{ij} \leq \sum_{(i,j) \in T^2} \tilde{c}_{ij} \right) = \sup_{u \leq v} \min \{ \mu_{T^1}(u), \mu_{T^2}(v) \} \quad (2.4)$$

onde:

- *Poss: medida de Possibilidade;*
- *$\mu_{T^1}(u)$ e $\mu_{T^2}(v)$ são as funções de pertinência dos custos dos subgrafos T^1 e T^2 , respectivamente;*
- *sup min : o valor supremo do mínimo (intersecção), ou seja, o maior grau de pertinência que pode ser obtido do conjunto resultante da intersecção das funções de pertinência $\mu_{T^1}(u)$ e $\mu_{T^2}(v)$.*

O grau de possibilidade de T ser a solução ótima é dado por:

$$D_T = \min_{T^k \in \tau} \left\{ Poss \left(\sum_{(i,j) \in T} \tilde{c}_{ij} \leq \sum_{(i,j) \in T^k} \tilde{c}_{ij} \right) \right\} \quad (2.5)$$

onde τ é o conjunto de todas as soluções.

Esta equação também é estudada por Dubois e Prade [25].

O grau de possibilidade do arco (i, j) pertencer à solução ótima é dado por [57]:

$$D_{ij} = \max_{T^k | (i,j) \in T^k} \{D_{T^k}\} \quad (2.6)$$

Isso torna o problema de difícil resolução pois, além de ter que enumerar todas as soluções, a comparação entre elas torna o problema NP -completo.

2.2 Coloração em grafos

A seguir serão apresentados alguns conceitos da teoria de coloração em grafos. Maiores detalhes podem ser encontrados em [13, 30].

Definição 2.2.1. *Colorir um grafo $G = (N, A)$ é atribuir cores aos seus elementos de forma a satisfazer algumas restrições.*

Simplesmente colorir um grafo é tarefa trivial, uma vez que pode-se imaginar distribuir uma cor para cada vértice. O problema da coloração realmente surge quando desejamos colorir o tal grafo utilizando o menor número possível de cores.

É comum na literatura o estudo de coloração em grafos para solução de problemas de otimização combinatória. Esses tipos de problemas podem ser representados como grafos não orientados, onde os vértices representam recursos que devem ser gerenciados e as arestas, o grau de incompatibilidade entre estes recursos. Os problemas que se enquadram nessa categoria podem ser modelados e solucionados utilizando-se um grafo não orientado e em seguida determinando sua k -coloração.

Colorir os vértices de um grafo utilizando um número mínimo de cores, em geral é uma tarefa de difícil execução, pois requer um número elevado de operações. O método da força bruta, usando todas as combinações possíveis, pode ser aplicado, como em qualquer problema combinatorial, mas torna-se inviável computacionalmente à medida que cresce o número de vértices. Existem vários algoritmos que empregam heurísticas em sua estrutura, resolvendo problemas desta natureza em um tempo viável e que fornecem, em geral, boas soluções.

2.2.1 Tipos de Coloração

A coloração de grafos consiste em atribuir cores a partes pertencentes a eles. Essas partes podem ser arestas, vértices, faces e caminhos. O mais comum é a coloração de vértices,

pois todos os outros componentes de um grafo podem ser expressos em forma de vértices.

1. Coloração de faces: atribui-se uma cor a cada face do grafo, onde faces adjacentes devem possuir cores diferentes.
2. Coloração de caminhos: consiste em atribuir cores a caminhos do grafo, onde caminhos com cores iguais não podem compartilhar a mesma aresta. Esse tipo de coloração é utilizada quando vários caminhos passam por uma mesma aresta, e cada um deles recebe uma cor.
3. Coloração de arestas: consiste em atribuir uma cor a cada aresta do grafo, usando o menor número de cores possíveis, onde não é permitido mais de uma aresta da mesma cor partindo de um vértice. A coloração de arestas pode também ser descrita como coloração de vértices. Para tal, deve-se construir um grafo linear do grafo, onde a cada aresta do grafo é atribuído um vértice. Se não for especificado o tipo de coloração subentende-se como sendo uma coloração de vértices, pois este é o método mais comum. Como para os processos anteriores, neste caso atribui-se uma cor a cada vértice, de modo que vértices adjacentes tenham cores diferentes. Esta coloração deve ser feita de maneira a utilizar o mínimo de cores.

Número Cromático

Uma coloração de interesse é aquela em que se utiliza um número mínimo de cores. Um grafo G , que exige k cores para colorir seus vértices, e não menos, é chamado um grafo k -cromático, e o número k é chamado número cromático de G . Na figura 2.3, o número mínimo de cores necessárias para colorir o grafo é 3, logo $k = 3$ e o grafo é 3-cromático.

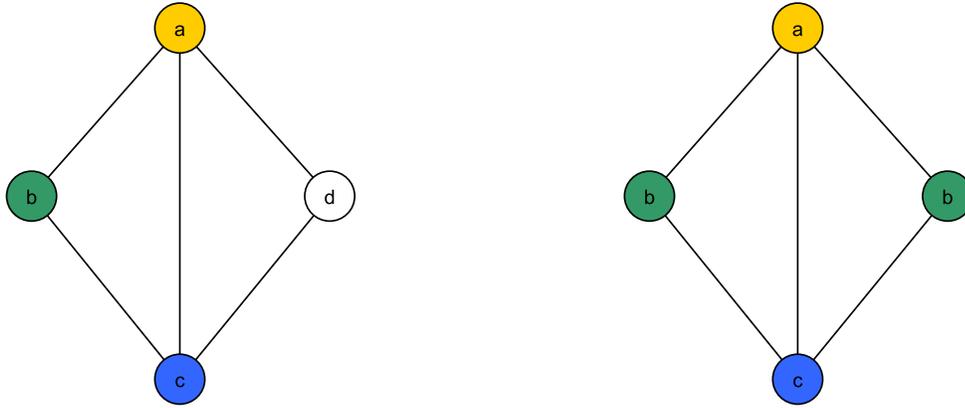


Figura 2.3: Coloração de vértices do grafo

A Figura 2.3 ilustra um grafo 3-cromático.

Neste capítulo, apresentamos alguns conceitos da teoria dos conjuntos *fuzzy* e de coloração em grafos que serão utilizados no decorrer deste trabalho.

No próximo capítulo, apresentamos a revisão bibliográfica dos trabalhos correlatos, bem como os diferentes tipos de modelagem referentes à problemas de transporte.

CAPÍTULO 3

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O problema de transporte multimodal tem sido estudado extensivamente em diversas áreas de pesquisa. Neste capítulo apresentamos um levantamento bibliográfico de trabalhos encontrados na literatura que abordam tal problema através de diferentes metodologias. Consideramos três tipos de métodos usados: métodos clássicos, metaheurísticas e métodos *fuzzy*. Apresentamos também a formulação básica do problema juntamente com algumas restrições que podem ser consideradas, tornando a formulação mais aderente à realidade, porém, mais complexa de ser resolvida. Algumas vantagens e desvantagens de cada método também são apresentadas.

3.1 Formulação do Problema

Uma formulação básica e muito utilizada considera que os sistemas de transporte são compostos por redes. Cada rede é associada com um modo de transporte, e as conexões são feitas através de transferências modais. Este sistema pode ser visto como um grafo multimodal. Em um grafo multimodal um nó representa um lugar onde usuário escolhe entre continuar com o modo corrente ou mudar de modo. Temos dois tipos de arcos: arcos de transporte e arcos de transferência. Os arcos de transporte conectam dois nós no mesmo modo e os arcos de transferência conectam um modo ao outro. Somente um modo de transporte é associado com cada arco.

Na formulação deste problema, podemos considerar outros fatores que tornam o

mesmo cada vez mais difícil de resolver, como veremos nas subseções seguintes.

3.1.1 Formulação básica

Seja $G = (N, A)$ um grafo onde N é o conjunto de nós e A é o conjunto de arcos e seja M o conjunto dos modos de transporte considerados. O problema de transporte multimodal pode ser formulado matematicamente como o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = \sum_{m=1}^M \sum_{(i,j) \in A} c_{ij}^m x_{ij}^m \\ \text{s.a} \quad & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j:(i,j) \in A} x_{ij}^m - \sum_{j:(j,i) \in A} x_{ji}^m = b_i^m, \forall i \in N, \forall m = 1, \dots, M \\ \sum_{m=1}^M x_{ij}^m \leq u_{ij}, \quad \forall (i, j) \in A \\ x_{ij}^m \geq 0, \quad \forall (i, j) \in A, m = 1, \dots, M. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde:

- c_{ij}^m é o custo do arco (i, j) no modo m ;
- u_{ij} é a capacidade do arco (i, j) ;
- x_{ij}^m é o fluxo do arco (i, j) no modo m ;
- M é o conjunto de modos de transporte;
- b_i^m oferta ou demanda no nó i pelo modo m .

Uma modelagem encontrada com frequência na literatura é: G pode ser considerado como a união de subgrafos, representando os modos de transporte considerados. Por exemplo, se $M = \{\text{carro}, \text{ônibus}, \text{metrô}\}$ então $G = (N, A)$ é tal que $G = G_{\text{carro}} \cup G_{\text{ônibus}} \cup G_{\text{metro}}$, onde $G_{\text{carro}} = (N_{\text{carro}}, A_{\text{carro}})$ é a rede privada, $G_{\text{ônibus}} = (N_{\text{ônibus}}, A_{\text{ônibus}})$ é a rede de ônibus e $G_{\text{metro}} = (N_{\text{metro}}, A_{\text{metro}})$ é a rede de metrô. As transferências modais são representadas por T , então $A = A_{\text{carro}} \cup A_{\text{ônibus}} \cup A_{\text{metro}} \cup T$.

3.1. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O custo de cada arco é constante na Formulação 3.1, mas podemos considerar também o caso em que os custos nos arcos dependem do fluxo nos mesmos. Neste caso, os custos são modelados por funções tempo de viagem, para as quais existem vários tipos na literatura. Para este caso, temos a seguinte formulação:

$$\begin{aligned} \min \quad z &= \sum_{w \in W} \sum_{(i,j) \in A} t_{ij}(x_{ij}) x_{ij}^w \\ \text{s.a} \quad &\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j:(i,j) \in A} x_{ij}^w - \sum_{j:(j,i) \in A} x_{ji}^w = b_i^w, \forall i \in N, \forall w \in W \\ \sum_{w \in W} x_{ij}^w \leq u_{ij}, \forall (i,j) \in A \\ x_{ij}^w \geq 0, \forall (i,j) \in A, w \in W. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde:

- W é o conjunto de todos os pares origem-destino;
- w é um par origem-destino (O-D);
- x_{ij}^w é o fluxo de passageiros no arco (i, j) para o par w ;
- b_i^w é a oferta ou demanda para o par w ;
- $t_{ij}(x_{ij})$ é o tempo de viagem para percorrer o arco (i, j) dependente do fluxo (x_{ij}) no arco;
- u_{ij} é a capacidade do arco (i, j) .

Na formulação acima, dependendo da função tempo de viagem utilizada, temos um problema de programação não linear.

Na literatura, existem vários modelos de funções tempo de viagem desenvolvidos para a utilização em planejamento de transportes onde o tempo de viagem é calculado em função do fluxo de tráfego. A primeira função tempo de viagem proposta, foi em 1964, pela *Bureau of Public Roads* (BPR) dos EUA. Esta função é muito utilizada ainda nos dias de hoje para planejamento de redes de transporte [73].

A função BPR é dada por:

$$t = t_0 \left[1 + \rho \left(\frac{x}{c} \right)^\lambda \right] \quad (3.3)$$

onde:

- t é o tempo de viagem;
- t_0 é o tempo de viagem com fluxo livre;
- c é a capacidade do arco;
- x é o fluxo no arco;
- ρ e λ são os parâmetros do modelo (usualmente são $\rho = 0,15$ e $\lambda = 4$).

Os valores dos parâmetros ρ e λ são sugeridos por vários pesquisadores e variam amplamente [73].

Outra função utilizada para a estimativa do tempo de viagem é a função proposta por Davidson [23] e é dada por:

$$t = t_0 \left[1 + \left(\frac{J_D y}{1 - y} \right) \right] \quad (3.4)$$

onde:

- t é o tempo de viagem;
- t_0 é o tempo de viagem com fluxo livre;
- J_D é um parâmetro de atraso que representa as características da rodovia e as condições ambientais;
- $y = \frac{x}{c}$, onde x é o fluxo no arco e c é a capacidade do arco;

O problema com a fórmula de Davidson é que a mesma prediz tempo de viagem infinito quando o fluxo se aproxima da capacidade. Para resolver este problema, Akçelik [4] propôs a função modificada de Davidson, porém sua fórmula é bem mais complexa que a original:

$$t = t_0 \left(1 + 0.25r_f \left[z + \left(z^2 + 8J_D \frac{x}{r_f} \right)^{0.5} \right] \right) \quad (3.5)$$

onde:

- $z = y - 1$;
- $r_f = \frac{T}{t_0}$ é a razão entre determinado período de passagem de fluxo e o tempo de viagem a fluxo livre.

Comparações entre várias funções tempo de viagem encontradas na literatura podem ser encontradas nos trabalhos de Akçelik [4] e Gattuso et al [27].

3.1.2 Formulação considerando número máximo de transferências modais

Uma restrição que também pode ser considerada ao formular o problema de redes de transporte multimodal é o número máximo de transferências modais permitidas ao usuário. As transferências modais incluem implicitamente um conjunto de fatores que podem variar fortemente de um usuário para outro. O comportamento dos usuários com respeito às transferências modais são muito variáveis. Sob as mesmas condições, um caminho que é o melhor para um tipo de usuário pode não ser o melhor para outro usuário.

Na prática, o número de transferências modais que os usuários estão dispostos a fazer durante uma viagem é pequeno. Lozano e Storchi ([43], [44]), propõem que os usuários escolham o número máximo de transferências modais que estão dispostos a fazer. Dessa forma, a escolha do melhor caminho depende de dois critérios: custo e número de transferências modais.

Ao acrescentar esta restrição na formulação do problema de redes de transporte multimodal, a dificuldade em resolvê-lo aumenta. Como vimos acima, temos dois critérios a serem analisados para decidir qual o melhor caminho. Por outro lado, ao considerar o número de transferências modais, tornamos a formulação do problema mais realística, pois na prática, os usuários não estão dispostos a mudar de modo, mas geralmente o fazem por não terem outra alternativa.

Na Formulação 3.2 essa restrição pode ser acrescentada da seguinte forma:

$$\text{número de transferências modais} \leq k \tag{3.6}$$

A restrição acima garante que o número de transferências modais no caminho não é maior que k , onde k é um valor definido pelos usuários.

3.1.3 Formulação considerando restrições quanto a ordem dos modos utilizados

Uma outra restrição que pode ser considerada no problema de redes de transporte multimodal é a restrição referente a ordem dos modos utilizados.

Alguns trabalhos da literatura ([12], [43], [44], [49]) consideram este tipo de restrição introduzindo o conceito de caminho viável, que é definido como o caminho que respeita um conjunto de restrições na sequência dos modos de transporte usados. Essas restrições podem ser definidas de acordo com os modos de transporte considerados ao formular o problema. Por exemplo, ao considerar os modos carro, ônibus e metrô, podemos ter a seguinte restrição: o usuário que começar a viagem com o carro não consegue mudar para os modos públicos (ônibus e metrô, neste caso). Uma outra restrição considerando estes modos seria: o usuário que começar a viagem com o carro e mudar para os modos ônibus e/ou metrô não conseguirá usar novamente seu carro para continuar a viagem.

Essas duas restrições citadas acima são frequentemente utilizadas para restringir a sequência de uso entre os modos privados e públicos.

Observemos que este tipo de restrição depende dos modos de transporte considerados no problema de redes de transporte multimodal e também do contexto para o qual o problema esta sendo formulado. Aqui no Brasil, por exemplo, faz mais sentido considerar que o usuário que começa a viagem com seu carro não muda para outros modos de transporte.

Lozano e Storchi [43] formulam o problema de caminho viável multimodal com essas restrições.

3.1.4 Formulação considerando janelas de tempo

As restrições de tempo tornam a formulação do problema de redes de transporte multimodal mais realística, visto que, os parâmetros deste problema geralmente dependem do tempo. Por exemplo, o tempo de espera em determinado ponto de ônibus depende da frequência das linhas do ônibus e do horário, já que em horas de pico a tendência é que a frequência das linhas tenha um menor espaço de tempo.

Quanto às restrições de tempo, podemos ter vários tipos de formulações referentes as mesmas. Por exemplo, restrições relacionadas ao custo dependente de tempo, como é o

caso da Formulação 3.2. Restrições referentes aos horários das linhas de ônibus, van, trem e metrô. Podemos ter também restrições de janelas de tempo, isto é, a viagem deve ser feita dentro de determinado intervalo de tempo definido a priori. E, por fim, podemos ter todas essas restrições referentes ao tempo em uma mesma formulação.

Na literatura, existem vários trabalhos que consideram janelas de tempo. Ziliaskopoulos et al [91] consideram janela de tempo na formulação do problema, onde o tempo é discretizado. Zografos et al [93] também consideram janelas de tempo na formulação do problema de planejamento de itinerário multimodal. Moccia et al [46] consideram janelas de tempo múltiplas, isto é, na partida e na chegada de cada comodidade. Perugia et al [64] abordam o problema de serviços de ônibus da casa para o trabalho em uma área metropolitana. As janelas de tempo podem ter outras utilizações tais como, por exemplo, garantir a sincronização do serviço com outros modos de transporte.

As restrições de janela de tempo, podem ser inseridas na Formulação 3.2 da seguinte forma:

$$a \leq \sum_{(i,j) \in A} t_{ij}(x_{ij}^w) \leq b \quad \forall w \in W \quad (3.7)$$

onde um intervalo da janela de tempo é denotado como $[a, b]$.

3.1.5 Formulação considerando incertezas nas variáveis do problema

Um outro fator que pode ser considerado na formulação do problema de redes de transporte multimodal é a incerteza nas variáveis do problema. Geralmente, problemas reais têm associado vários parâmetros que são incertos, tais como: capacidade, custo, demanda, tempo de viagem, dentre outros. Ao formular o problema de redes de transporte multimodal e tratar os parâmetros do mesmo como sendo incertas, tornamos a solução do problema mais próxima do que, de fato acontece na realidade.

As incertezas nos parâmetros podem ser tratadas estatisticamente ou através da teoria dos conjuntos *fuzzy*.

Tratar as incertezas do problema estatisticamente, significa usar métodos estatísticos para modelar os parâmetros do problema de redes de transporte multimodal: custos

dos arcos, capacidade, oferta/demanda da rede, dentre outros. Sumalee et al [74] consideram a oferta e demanda da rede como sendo estocásticas segundo a Distribuição de Poisson. Segundo os autores, essas incertezas se devem, principalmente às condições climáticas adversas com diferentes graus de impacto nos diferentes modos de transporte considerados: carro, ônibus, trem e caminhadas. Outros trabalhos da literatura também tratam de incertezas estocásticas/estatísticas na modelagem de problemas de redes de transporte ([16], [58], [62], [82]).

No problema de redes de transporte multimodal, podemos considerar incertezas no custo ou tempo de viagem, na capacidade dos modos de transporte e também na oferta/demanda de passageiros. As incertezas no custo e na capacidade são mais comuns de serem tratadas, e existem alguns trabalhos na literatura que tratam esses tipos de incertezas ([6], [28], [29], [68]).

3.2 Métodos de resolução

Nesta seção apresentamos uma breve descrição de alguns métodos encontrados na literatura para resolver o problema de redes de transporte multimodal. Os métodos de resolução podem ser classificados em três grupos: (i) métodos clássicos; (ii) metaheurísticas, (iii) métodos *fuzzy* e (iv) métodos híbridos.

3.2.1 Métodos Clássicos

Nesta seção, descrevemos os trabalhos que utilizam métodos clássicos para resolver o problema de redes de transporte multimodal. Muitos dos trabalhos apresentados aqui utilizam como base algoritmos clássicos de caminhos mínimos, como o algoritmo de Dijkstra [24]. Métodos de otimização também são utilizados. Na formulação do problema, a teoria de grafos é comumente utilizada.

3.2.1.1 Abordagens baseadas em Grafos

No trabalho de Modesti e Sciomachen [47] é estudado o problema de caminho mínimo multimodal em redes de transporte urbano, com o objetivo de minimizar o custo global, tempo e desconforto dos usuários, tornando o problema multiobjetivo. É apresentado

uma abordagem baseada no problema de caminho mínimo clássico em uma rede representando o sistema de transporte urbano multimodal, isto é, modalidades privadas, públicas e pedestres. A idéia é fazer uso de uma função utilidade para a “pesagem” dos arcos, ambos com seu custo e tempo, considerando ao mesmo tempo a preferência dos usuários relacionados com todas as possíveis modalidades de transporte. A abordagem proposta foi desenvolvida para análise de uma rede de transporte urbano de uma cidade italiana.

As modalidades de transporte consideradas são:

- Modalidade privada: carro próprio;
- Modalidade pública: ônibus, trem, etc;
- Modalidade pedestriana: caminhadas.

A rede de transporte urbano foi modelada através de um grafo $G = (N, A)$, onde N é o conjunto de n nós, representando locais relevantes na área urbana chamados de centróides, e A é o conjunto de m arcos (i, j) , conectando o nó i ao nó j . Cada arco tem um par de pesos associados: tempo e custo necessário para viajar de i para j . Cada modalidade de transporte citada acima é representada por um subgrafo, assim G é a união de três subgrafos.

Na modelagem do tempo e do custo são considerados vários fatores. O tempo total é formado pelo tempo gasto pelo usuário viajar com seu carro ao longo de um determinado caminho, o tempo gasto em ônibus, metrô e outros modos de transporte públicos, o tempo médio de espera do transporte público em determinado nó e, por fim, o tempo total de caminhada em determinado caminho. O custo total é formado pelo custo de viajar de carro por determinado caminho que inclui custo de combustível, custo de estacionamento e o custo do transporte público. O algoritmo proposto pelos autores é uma variante do algoritmo de Dijkstra [24].

No trabalho de Ambrosino e Sciomachen [7], os autores focam no problema de determinar os nós que podem ser polos atrativos para mudanças modais e que podem tornar-se local para novos serviços, tais como parques de estacionamento, paradas de ônibus e painéis informativos. Os autores consideram modalidades públicas e privadas, onde a seleção do caminho, intermodal ou monomodal, é feita diretamente pelos usuários com base no custo de viagem previsto, que é dado pelo tempo, custo monetário e incluem alguns elementos

subjetivos que não são fáceis de serem calculados, tais como fatores econômicos, caminhadas e desconforto. São feitos testes com alguns dados da área central da cidade de Genoa, Itália.

A modelagem do problema é feita utilizando o grafo $G = (N, A, C, I, D, M, R)$, com as seguintes especificações:

- N é o conjunto de nós;
- A é o conjunto de arcos;
- C é o conjuntos de pesos (tempo de viagem) associados a cada arco $(i, j) \in A$;
- I é o conjunto de pesos (custo de transferência modal) associado a cada nó;
- D é o conjunto de qualidades associadas aos nós de transferência modal;
- M é o conjunto dos modos de transporte considerados, que são divididos em :
 - Modos restritos: carro e moto;
 - Modos públicos: ônibus e trem.
- R é o conjunto dos possíveis critérios de decisão que avaliam o custo total de uma viagem em uma rede multimodal.

O algoritmo proposto é uma abordagem heurística para o problema de encontrar rotas ótimas multimodais em redes de transporte urbano. Tal algoritmo detecta os nós de melhor mudança modal e computa o caminho de custo mínimo baseado no algoritmo clássico de Dijkstra [24].

No trabalho de Bousquet [14], as questões vinculadas ao desenvolvimento de um sistema, capaz de calcular dinamicamente o tempo de viagem mínimo em rotas multimodais com combinações factíveis de modos de transporte são apresentadas. É proposta uma visão metodológica da estimação do tempo de viagem. Baseado nisso, o autor introduziu algoritmos que podem ser usados para roteamento multimodal. Neste contexto, a computação em uma cadeia de viagem ótima não é equivalente a computação separada de uma série de viagens ótimas. Assim, é proposto um algoritmo capaz de calcular viagens ótimas de duas maneiras (isto é, viagens em dois sentidos da rede, por exemplo ida e volta).

A modelagem da rede de transporte foi feita usando um grafo direcionado $G = (N, A)$ com uma função custo associada a cada arco $(i, j) \in A$ que pode representar tempo de viagem, distância, etc. A estrutura em camadas foi usada para representar a rede multimodal, ou seja, cada modo de transporte é representado por uma rede monomodal e as ligações entre os mesmos são feitas através de arcos de transferência.

O algoritmo proposto é baseado nos algoritmos clássicos de correção/definição de etiquetas, tais como os algoritmos de Dijkstra e de Bellman ([10], [24]), e é capaz de calcular o tempo mínimo multimodal em viagens de uma maneira (viagens somente em um sentido da rede) em um ambiente dinâmico. Tal algoritmo foi estendido para calcular viagens de duas maneiras também em um ambiente dinâmico. A abordagem proposta é testada em uma rede de transporte urbano de Lyon, França.

No trabalho de Lillo et al [40] sistemas de transportes multimodais reais são analisados experimentalmente. Redes rodo-ferroviárias reais da Dinamarca, Hungria, Espanha, Noruega e Nova Zelândia são construídas baseadas em um conjunto de mapas digitalizados obtidos a partir de várias bibliotecas do GIS (sistema de informações geográficas). Essas redes são modeladas através de grafos coloridos. A cardinalidade do conjunto resultante é analisada e conclui-se que a conectividade dos vértices e a forma da rede afetam consideravelmente o número total de caminhos ótimos.

Os autores usam coloração em grafos para representar atributos específicos da rede de transporte, tais como um modo de transporte. Um grafo colorido é definido como $G = (N, A, \omega, \lambda)$ onde, (N, A) é um grafo direcionado, $\omega : A \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função peso dos arcos e $\lambda : A \rightarrow M$ é uma função cor nos arcos. M é um conjunto finito de cores com $K = |M|$.

Xu et al [79] propõem uma abordagem algébrica para encontrar todos os caminhos coloridos em um multigrafo colorido. Uma função de conversão é proposta para transformar o problema original de encontrar caminhos coloridos em um multigrafo colorido, para o problema padrão de encontrar caminhos em um grafo sem restrição de cores. A abordagem proposta foi aplicada em um problema para análise *status quo* em um modelo de grafo para resolução de conflito.

Cerulli et al [19] apresentam algumas extensões do problema de árvore geradora mínima rotutada. O foco principal é no problema de árvore de Steiner mínima: dado um

grafo G com um rótulo (cor) atribuído para cada arco e um subconjunto Q de nós de G (vértices básicos), a idéia é encontrar um subgrafo G conectado com um número mínimo de cores diferentes, cobrindo todos os vértices básicos. Os autores utilizam vários tipos de metaheurísticas para resolver o problema: *greedy heuristic*, *variable neighborhood search*, *simulate annealing* e *reactive tabu search*.

Clímaco et al [22] lidam com o problema de árvore geradora bicritério. O primeiro critério pretende minimizar o custo total da árvore geradora, enquanto que o segundo critério pretende encontrar a solução com um número mínimo de rótulos diferentes. Como esses critérios, em geral, são conflitantes, o algoritmo desenvolvido encontra um conjunto de árvores geradoras não-dominadas. Na modelagem do problema, os autores utilizam grafos não direcionados, onde cada arco tem um custo c_{ij} e um rótulo (cor) l_{ij} . O custo de uma árvore geradora T é $c(T) = \sum_{(i,j) \in T} c_{ij}$ e $l(T)$ representa os números de rótulos distintos em T . Testes computacionais em grandes instâncias são apresentados para mostrar a eficiência da abordagem proposta.

Bousquet et al [15] apresentam um algoritmo dinâmico de definição de etiqueta (*label-setting*) capaz de computar um caminho mínimo multimodal de uma maneira (somente em um sentido da rede) o qual é uma adaptação do algoritmo clássico de Dijkstra. Baseado neste algoritmo, os autores propõem uma estratégia para resolver o problema de caminho mínimo de duas maneiras (em dois sentidos da rede, por exemplo ida e volta). Esta última estratégia proposta justifica-se pelo fato de que caminhos mínimos multimodais de duas maneiras nem sempre são equivalentes a dois caminhos mínimos de uma maneira computados separadamente.

O trabalho de Lam et al [37] descreve uma técnica de clusterização que melhora o desempenho da computação convencional de k -caminhos mínimos em redes de transporte multimodal, através da transformação da rede em uma representação acíclica, onde os ciclos são identificados e clusterizados. O algoritmo generalizado de Floyd é aplicado nos clusters para a computação dos k -caminhos mínimos. Testes feitos mostram que a técnica proposta melhora significativamente o desempenho de algoritmos convencionais, particularmente quando o número de k -caminhos mínimos necessários aumenta.

Vantagens e Desvantagens das Abordagens baseadas em Grafos

O algoritmo de Dijkstra resolve o problema de caminho mínimo em um grafo dirigido ou não, onde os custos dos arcos devem ser não negativos. É um algoritmo simples de ser utilizado e implementado. As abordagens baseadas neste algoritmo, preservam as características do mesmo, então como vantagens dessas abordagens podemos citar a simplicidade na implementação e interpretação dos resultados. Também é possível fazer comparações com os algoritmos já existentes, nesse caso, com o próprio.

Uma desvantagem dessa abordagem é que a modelagem do problema e as propostas de soluções apresentam resultados, que embora sejam exatos, não representam de fato, o que acontece na realidade, onde dificilmente existe apenas uma solução.

3.2.1.2 Abordagens baseadas em técnicas de otimização

O trabalho de Loureiro [42] apresenta um algoritmo solução para o modelo de rede multimodal multiproduto, formulado em uma estrutura não-linear de dois níveis que seleciona investimentos para uma rede de transporte multimodal regional, dado um orçamento de investimento limitado. A função objetivo minimiza os custos de transporte dos usuários e os impactos ambientais causados pela utilização de modos de transporte menos eficientes.

O algoritmo proposto consiste de um procedimento heurístico de decomposição baseado em técnicas de geração de colunas, o qual permite a solução de problemas de grande escala em tempo razoável. O autor também trata o problema de equilíbrio de usuário para distribuir viagens sobre a rede multimodal de acordo com um modelo do tipo *logit*. A teoria de grafos é utilizada na formulação matemática do modelo.

Na solução do modelo utilizando a heurística de geração de colunas, o problema de desenho da rede multimodal é classificado como o problema principal, com seu subproblema sendo um problema de otimização multicritério com dois objetivos: minimizar o custo de transporte no grafo e minimizar o custo dos investimentos necessários para as rotas selecionadas. O subproblema compreende um submodelo de construção de rotas (geração de colunas) responsável por criar as rotas novas (colunas) a serem consideradas pelo problema principal. Este submodelo é solucionado por uma forma modificada do algoritmo de Dijkstra [24].

O autor apresenta uma lista dos principais problemas de otimização de redes, tais como, caminho mínimo, caixeiro-viajante, roteamento de veículos, localização de facilidades,

equilíbrio de tráfego, dentre outros, como versões especiais do problema de projeto de redes para destacar a importância do mesmo.

Em Lawphongpanich et al [38], o objetivo é reduzir os atrasos das viagens ou melhorar o benefício social. Os autores propõem um modelo de otimização que pode ser formulado como:

$$\begin{aligned} & \min_{v,x,\beta,\rho} t(v)^T v \\ & \text{s.t.} \left\{ \begin{array}{l} v = \sum_w x^w \\ Ax^w = E^w d_w \quad \forall w \\ t_{ij}(v) + \beta_{ij} \geq \rho_i^w - \rho_j^w \quad \forall w, (i,j) \in L \\ x_{ij}^w (t_{ij}(v) + \beta_{ij} - \rho_i^w + \rho_j^w) = 0 \quad \forall w, (i,j) \in L \\ \rho_{o(w)}^w - \rho_{d(w)}^w \leq c_w^{UE} \quad \forall w \\ 0 \leq x_{ij}^w \leq x_{max}, 0 \leq \beta_{ij} \leq \beta_{max}, \quad \forall (i,j) \in L, \forall w. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.8)$$

A função objetivo é minimizar o tempo total de viagem ou o atraso no sistema. A primeira restrição é agregação do fluxo, a segunda garante que o grafo está balanceado, a terceira e a quarta restrição são as condições *KKT* associadas com o problema de desigualdade variacional: $(t(v) + \beta)^T (u - v) \geq 0, \forall u \in V$, onde

$$V = \{v : v = \sum_w x^w, Ax^w = E^w d_w, x^w \geq 0\}$$

A quinta restrição é relativa ao custo do caminho, e a última restrição é a não-negatividade do fluxo.

Os autores propõem um novo algoritmo que converge para uma solução fortemente estacionária em um número finito de operações. O algoritmo é aplicável quando as demandas são fixas ou variadas. Testes computacionais foram realizados em redes de grande porte e mostram a eficiência do método proposto.

Wu et al [81] apresentam um esquema de melhoramento de preços para aliviar o congestionamento em redes de transporte multimodal que inclui serviços de trânsito, alta ocupação/ pedágio e pistas de propósito geral. Neste cenário, um regime de preços refere-se a uma estratégia para pedágios em estradas e rodovias bem como ajustar as tarifas em várias linhas de trânsito. Além disso, um tal regime é Pareto-ótimo se maximiza o benefício social

sem aumentar despesas relacionadas com viagens dos usuários que inclui passageiros em trânsito, operadores de trânsito, autoridades de transporte, etc. Os autores consideram três modos de transporte: veículo de ocupância única (SOV), veículo de ocupância alta (HOV) e trânsito. A rede multimodal geral consiste de duas sub-redes: rede de veículos e rede de trânsito. Quando integradas, essas redes formam uma rede multimodal $G=(N, A)$, onde N é o conjunto de nós e paradas e A é o conjunto de arcos e linhas de trânsito. Cada arco tem associado um tempo de espera e um tempo de viagem em veículo.

Nesse trabalho os autores lidam com os problemas de equilíbrio de usuário e de sistema ótimo em redes multimodais, que são formulados como um problema matemático com restrições de complementaridade e resolvidos via algoritmo de subotimização múltipla que foi desenvolvido por Lawphongpanich e Yin [38].

Vantagens e Desvantagens das Abordagens baseadas em Técnicas de Otimização

Existem vários tipos de técnicas baseadas em otimização que são usadas para resolver o problema de redes de transportes: programação linear, não-linear, mista, problemas de complementaridade, técnicas de geração de colunas, dentre outros. Essas técnicas permitem uma modelagem clara e interpretativa do problema a ser resolvido, permitindo uma análise consistente dos resultados obtidos, que geralmente são soluções exatas.

Assim como no caso de abordagens baseadas no algoritmo de Dijkstra, uma desvantagem dessas técnicas é que a modelagem do problema e as propostas de soluções apresentam resultados, que embora sejam exatos, não representam de fato, o que acontece na realidade, onde dificilmente existe apenas uma solução.

3.2.1.3 Outras Abordagens

Lozano e Storchi [43], consideram uma abordagem usando rótulos para encontrar o caminho mínimo viável em redes de transporte multimodal. Um caminho é viável se sua sequência de modos é factível com respeito a um conjunto de restrições. Os autores apresentam uma modificação do algoritmo *Chronological* proposto por Pallottino e Scutellà [59] para resolver o problema de caminho mínimo viável multimodal.

Os resultados obtidos com a metodologia proposta são um conjunto solução

(soluções Pareto-ótimas) e a escolha do caminho depende das preferências dos usuários com respeito ao custo e ao número de modos.

Os modos de transporte considerados são: metrô, veículo particular (carro ou moto) e outros modos (ônibus e caminhada). O uso do modo metrô e do modo particular está sujeito à restrições.

Neste caso, o problema a ser resolvido é encontrar o caminho mínimo com respeito ao custo total para cada número de mudanças de modo não maior que k . Dessa forma os dois critérios usados para escolher o melhor caminho são o custo e o número de mudanças de modo. O custo total é formado pelo custo dos arcos e pelo custo das mudanças de modo.

Em [44], Lozano e Storchi fazem uma generalização de [43], onde são apresentados os conceitos de hipergrafos multimodais e hipercaminhos viáveis. O problema de hipercaminho mínimo viável em redes de transporte multimodal é definido. As soluções, ou seja, os hipercaminhos mínimos viáveis, compõem um conjunto Pareto-ótimo, onde os usuários podem escolher o “melhor” hipercaminho de acordo com suas preferências pessoais com respeito ao tempo de viagem esperado e ao número máximo de mudanças de modo que está disposto a fazer. Um hipergrafo é uma generalização de um grafo, com suas arestas ligando quaisquer quantidades positivas de vértices. Um hipergrafo é um par $H = (N, E)$, onde N é o conjunto de nós e E é o conjunto de h -arcos. Um h -arco $e = (t(e), h(e))$ é identificado por sua extremidade $t(e) \in N$ e por sua “cabeça” $h(e) \subseteq N/t(e)$. Se $|h(e)| = 1$, o h -arco é equivalente a um arco $e = (i, j)$.

Resolver o problema de hipercaminho mínimo viável é encontrar hipercaminhos viáveis com o mínimo de tempo esperado para a viagem, onde o usuário não tem que fazer mais que k transferências modais. O algoritmo proposto para resolver o problema de hipercaminho mínimo viável é baseado no algoritmo desenvolvido pelos autores em [43].

No trabalho de Bieli et al [12], é descrito um sistema de transporte multimodal projetado para atender as necessidades de uma variedade de oferta/demanda. Para viagens urbanas, foi considerado que os passageiros podem usar ônibus, metrô ou carro particular, já para viagens entre cidades os modos disponíveis são “autobus”, trens e carro particular. Uma solução para o problema de planejamento a longo prazo foi proposta e testada.

O algoritmo proposto reconhece o conjunto de restrições relacionadas ao tempo de espera e a sequência de modos usados em uma viagem.

Um software com interface gráfica é apresentado, no qual os usuários podem obter informações sobre rotas, horários, dentre outras coisas. A modelagem da rede de trânsito é feita através de um grafo direcionado $G = (N, A)$, onde N é o conjunto de nós e A é o conjunto de arcos, cada nó em N representa objetos de rede (estações de ônibus, estacionamento).

O algoritmo apresentado é uma versão modificada do algoritmo de k -caminhos mínimos que integra caminhos viáveis multimodais e restrições de tempo. Os autores fazem uso da dominância, no qual comparam tanto o tempo como o número de transferências modais. O algoritmo determina os k melhores caminhos seguindo o número de transferências modais dado pelo usuário e respeitando as partidas programadas associadas a cada estação de modo de trânsito.

Em [49], Mouncif et al apresentam uma proposta de solução para o problema de viagem origem-destino em redes de transporte multimodal usando a ferramenta *GIS* (Geographic information system). Um método eficiente para manipulação de informações de viagens em uma rede de transporte multimodal consiste em lidar com rotas multimodais de um ponto de origem a um ponto de destino. O objetivo é fornecer um modelo de viagem capaz de ajudar a melhorar a decisão do usuário do caminho, que pode viajar envolvendo diferentes combinações de modos de transporte. Os usuários podem acessar informações sobre todos os modos de transporte público e disponíveis em sua área, encontrar rotas mais rápidas e mais seguras para seus destinos. A modelagem do problema é feita usando subgrafos, ou seja, cada modo de transporte é um subgrafo e o grafo total é a união de todos os subgrafos. Os autores consideram restrições de tempo nesse trabalho.

O algoritmo proposto é uma versão modificada do algoritmo de k -caminhos mínimos, no qual foi feito um novo projeto de caminhos multimodais viáveis a fim de definir uma solução eficiente para o problema de caminho mínimo multimodal viável.

Em [93], Zografos e Androutsopoulos apresentam uma nova formulação e um algoritmo para resolver o problema de planejamento de itinerário, isto é, a determinação do itinerário que otimiza um conjunto de critérios (tempo total de viagem, número de transferências modais, tempo total de caminhada e de espera), satisfazendo uma determinada janela de tempo entre uma origem e um destino. Baseado na formulação proposta, o problema de planejamento de itinerário é expresso como um problema de caminho mínimo em uma rede multimodal com janela de tempo.

Em Xin-bo et al [78] redes de transporte multimodal são modeladas usando uma estrutura hierárquica. A relação entre diferentes níveis é descrita em detalhes e técnicas de segmentação dinâmica e referenciamento linear são usados para resolver o problema de sobreposição em redes multimodais. Além disso, um algoritmo de caminho mínimo é proposto para resolver o problema de transferência com vários modos de veículo público. Finalmente os resultados simulados pelo *GIS* (*geographic information system*) são dados para demonstrar a efetividade do modelo proposto.

Mouncif et al [50] estudam o problema de caminho mínimo multimodal em um sistema de redes de transporte onde os usuários tem vários modos para viajar de uma origem a um destino. O objetivo é obter as melhores rotas que satisfazem as restrições: tempo de viagem esperado, atrasos nos modos e nos pontos de mudança de modo, viabilidade da sequência de modos usados e o número de transferências modais. O sistema é descrito por um grafo multimodal e cada modo é modelado por um subgrafo. A complexidade computacional do algoritmo é provada e foi desenvolvido um operador de caminho multimodal com base no algoritmo proposto.

No trabalho de Nielsen et al [52], o problema de hipercaminho mínimo é apresentado. Este problema é uma extensão do problema de caminho mínimo clássico e tem aplicações em várias áreas. Neste trabalho, os autores melhoram o pior caso de complexidade computacional de um algoritmo para encontrar k -hipercaminhos mínimos em um hipergrafo acíclico. Este resultado é obtido pela aplicação de novas técnicas de otimização para hipercaminhos mínimos. O algoritmo é eficaz na prática e tem aplicação bem sucedida no contexto de redes estocásticas dependentes de tempo para encontrar as k melhores estratégias para resolver problemas bicritérios, como mostra outros trabalhos dos autores ([53], [54]).

Kheirikharzar [34] usa algoritmos de definição de etiquetas para encontrar k -caminhos ótimos entre dois pontos pré-definidos em uma rede de transporte multimodal. Tal algoritmo mantém uma lista de etiquetas em cada nó, define os caminhos e atualiza-os pela adição de nós de maneira iterativa. A escolha final depende das preferências dos usuários com respeito a distância, tempo de viagem e número de transferências modais. O projeto desenvolvido neste trabalho é aplicado na rede de transporte multimodal da cidade de Mashhad, Iran. O autor utiliza o *software* ArcMap para desenho da rede e incorpora neste *software* o algoritmo desenvolvido.

Alivand et al [5], propõem uma análise espacial para encontrar o caminho ótimo entre dois locais específicos em uma rede, onde o congestionamento de tráfego muda continuamente. Um método baseado no particionamento espaço-temporal é apresentado. No método proposto, algumas funções heurísticas as quais são extraídas de características gráficas são usadas para encontrar a solução em cada partição. Por fim, um modelo para coleta de dados de tráfego é introduzido, então dados em tempo real do tráfego em diferentes locais e horários podem ser obtidos. Além disso, esse modelo pode ajudar o usuário obter a melhor rota em sua viagem urbana utilizando *GIS* (*geographic information system*) para encontrar o caminho ótimo.

Ziliaskopoulos e Wardell [91] apresentam um algoritmo para o problema de caminho ótimo intermodal dependente de tempo para redes de transporte multimodal levando em conta atrasos nos modos e nos pontos de comutação. A convergência e a complexidade computacional do algoritmo são demonstradas. Uma representação simples das opções de comutação modo a modo é introduzida e melhora substancialmente a eficiência do algoritmo. Testes foram realizados em redes com tamanhos reais e os resultados foram promissores. Na formulação do problema, os autores consideram um grafo $G = (N, A, T, M)$ onde N é o conjunto de nós, A é o conjunto de arcos, T é o período de tempo de interesse discretizado e M é o conjunto de modos de transporte.

Vantagens e Desvantagens das outras Abordagens

Abordagens que utilizam hipergrafos, sistemas de informações geográficas, programação dinâmica também são utilizadas para resolver problemas de redes de transportes. Aqui, geralmente temos um conjunto solução, que pode ser: caminhos mínimos viáveis, hipercaminhos mínimos viáveis, soluções para o planejamento de itinerário, dentre outros. Ao apresentarmos aos usuários um conjunto solução, os mesmos podem escolher as soluções que mais lhe agradam de acordo com determinados critérios, com isso atendemos as necessidades e preferências de todos os usuários.

Como desvantagem podemos citar a complexidade computacional dessas técnicas, que aumenta a medida que mais restrições e variáveis são consideradas no problema. Uma outra desvantagem dessas técnicas é com respeito a modelagem e as soluções encontradas, que apesar de atenderem as preferências dos usuários através do conjunto solução, não re-

presentam de fato o que acontece na realidade, visto que as variáveis são exatas.

3.2.2 Metaheurísticas

Nesta seção apresentamos alguns trabalhos da literatura que utilizam redes neurais artificiais, algoritmos genéticos e híbridos na solução do problema de redes de transporte multimodal.

3.2.2.1 Métodos baseados em Redes Neurais Artificiais

Redes neurais artificiais são técnicas computacionais que apresentam um modelo matemático inspirado na estrutura interconectada dos neurônios. Nós simples (ou neurônios, ou processadores ou unidades) são interligados para formar uma rede de nós - daí o termo rede neural. A inspiração original para essa técnica advém do exame das estruturas do cérebro, em particular do exame de neurônios. As redes neurais artificiais (RNAs) têm muitas vantagens, porque se baseiam na estrutura do sistema nervoso humano, principalmente o cérebro.

O trabalho de Nijkamp et al [55] visa comparar o poder descritivo e preditivo de duas classes de modelos para estimar fluxos de rede multimodal: a família de modelos de escolha discreta (isto é, modelos *logit* e *probit*) e os modelos de redes neurais.

Esta abordagem foi aplicada em um grande conjunto de dados da Europa para dois tipos de produtos (alimentos e produtos químicos). Depois de uma exposição concisa de questões políticas, metodológicas e de modelagem do problema, vários testes foram realizados. Os resultados mostram que em geral o potencial preditivo das redes neurais é maior que dos modelos discretos.

Vantagens e Desvantagens das Redes Neurais Artificiais

Como vantagens das RNAs, podemos citar a flexibilidade com relação a dados incompletos e ruídos. A capacidade de aprendizagem e de predizer resultados, quando submetidas a padrões desconhecidos, transformam as RNAs em interessante opção nas soluções de vários tipos de problemas, incluindo os problemas de redes de transporte.

Como desvantagens, temos a dificuldade em estabelecer os melhores fatores de treinamento das RNAs. A procura pela melhor arquitetura das RNAs para resolver determinado problema requer um tempo bastante longo. Por serem denominadas como uma

caixa preta durante o processo de resolução, as RNAs não permitem uma análise simples dos resultados obtidos.

3.2.2.2 Métodos baseados em Metaheurísticas

Metaheurísticas evolutivas são procedimentos computacionais resultantes da aplicação de técnicas heurísticas para a resolução de problemas.

Algoritmos genéticos são uma classe especial de algoritmos evolutivos que usam técnicas inspiradas pela biologia evolutiva como hereditariedade, mutação, seleção natural e recombinação (ou *crossing over*). São implementados como uma simulação de computador em que uma população de representações abstratas de solução é selecionada em busca de soluções melhores. A evolução geralmente se inicia a partir de um conjunto de soluções criado aleatoriamente e é realizada por meio de gerações. A cada geração, a adaptação de cada solução na população é avaliada, alguns indivíduos são selecionados para a próxima geração, e recombinados ou mutados para formar uma nova população. A nova população então é utilizada como entrada para a próxima iteração do algoritmo.

Os algoritmos genéticos diferem dos algoritmos tradicionais de otimização em basicamente quatro aspectos:

- Baseiam-se em uma codificação do conjunto das soluções possíveis, e não nos parâmetros da otimização em si;
- Os resultados são apresentados como uma população de soluções e não como uma solução única;
- Não necessitam de nenhum conhecimento derivado do problema, apenas de uma forma de avaliação do resultado;
- Baseiam-se em buscas estocásticas e não em regras determinísticas.

Abbaspour e Samadzadegan [1] tratam do problema de caminho mínimo multimodal dependente de tempo em áreas urbanas grandes e complexas. Um algoritmo evolucionário adaptado foi empregado para resolver o problema. A solução proposta foi testada sobre um conjunto de dados da cidade de Tehran e foram considerados os seguintes modos de transporte: táxi, van, micro-ônibus, ônibus e metrô. Os autores consideram que, como o uso

de redes multimodais requer informações sobre horários de veículos, é necessário ter alguma informação sobre a hora de partida da viagem para resolver o problema. Devido a isto, essas redes podem ser consideradas redes dinâmicas, nas quais o tempo de viagem associado com cada arco muda com o tempo.

Em um outro trabalho, Abbaspour e Samadzadegan [2] apresentam investigações na aplicação de algoritmos genéticos para resolver o problema de caminho mínimo multimodal. Para testar a eficiência e robustez do método proposto, o algoritmo foi testado com uma rede contendo 250 pares de nós origem-destino selecionados aleatoriamente com diferentes distâncias e números de nós. Os modos de transporte considerados foram: ônibus, metrô e caminhada. As soluções consideradas são: monomodais, bimodais ou multimodais.

Em Yamada et al [86] um modelo para o planejamento estratégico, particularmente no desenvolvimento de redes de transporte inter-regionais de frete foi proposto. O modelo determina um conjunto adequado de ações tais como: melhorar a infraestrutura existente ou o estabelecimento de novas estradas, ferrovias, ligações marítimas e terminais de carga. A modelagem é realizada no âmbito de programação de dois níveis, onde uma técnica de atribuição de tráfego de usuários multiclassés multimodais é incorporada no problema de nível inferior, enquanto o problema de nível superior determina a melhor combinação de ações tais que a razão frete-custo benefício seja maximizada.

O problema de nível superior envolve otimização combinatória e uma abordagem heurística, baseada em busca local genética, é aplicada como uma técnica de solução.

Resultados empíricos mostram que esta abordagem obteve um bom desempenho quando comparada com outras heurísticas. O modelo proposto foi aplicado com sucesso no planejamento da rede de transportes nas Filipinas, onde o desenvolvimento de uma rede de transportes de carga é necessária para aumentar a utilização de outros modos de transporte.

Ayed et al [9] apresentam uma abordagem para o problema de caminho mínimo em redes multimodais dependentes de tempo. Esta abordagem é baseada em uma metaheurística evolutiva chamada *ACO (Ant Colony Optimization)*, o qual resolve um problema modelado como um grafo com estrutura simples e não dependente de tempo. Uma adaptação do algoritmo de Dijkstra é feita para tratar o problema dependente de tempo e é usada para computar o caminho mínimo sobre a nova estrutura.

No trabalho de Flórez et al [26] o objetivo principal é introduzir o TIMIPLAN,

que combina técnicas de Pesquisa Operacional com inteligência artificial a fim de obter planos de boa qualidade, explorando os benefícios de ambos tipos de técnicas. O TIMIPLAN foi desenvolvido no contexto de um projeto de pesquisa envolvendo uma das maiores companhias espanholas em transportes intermodais: *Acciona Transmediterránea Cargo*, para resolver problemas de logística em redes multimodais. Este programa foi aplicado em um problema de grande escala com mais de 300 containers, caminhões e outros serviços a serem tratados diariamente. O objetivo é obter um plano que minimize o custo de serviço de todos os pedidos diários.

Mohaymany et al [48] apresentam uma abordagem que utiliza dois ou mais modos no projeto de redes de transporte multimodal, o que resulta na redução de custos tanto para os usuários como para os operadores. Para os usuários significa menos tempo andando ou esperando por determinado modo de transporte e para os operadores a redução de custos possibilita uma extensão do sistema de transporte multimodal.

Os custos dos usuários referem-se ao tempo gasto no sistema, tais como: tempo de espera, tempo de caminhada entre os modos e tempo de transferência de modos. Já os custos dos operadores referem-se ao custo inicial do serviço, custo de operação e custo de manutenção. As tarifas não estão incluídas no custo do usuário nem no custo do operador, uma vez que são transferidas de usuário para operador. Inicialmente, os autores trabalham apenas com o modo ônibus, depois trabalham com dois modos: ônibus e van, e comparam a rede unimodal e a rede multimodal. A metodologia apresentada neste trabalho utiliza *ACO* (*Ant Colony Optimization*) para construção das rotas. Além disso, os autores utilizam *ACO* para a escolha dos pontos terminais.

Na e Zhi [51] estudam o problema de transporte de suprimentos de emergência usando vários modos de transporte. Quando ocorre algum tipo de desastre, há várias áreas que são afetadas e necessitam de grande quantidade de suprimentos de emergência. Como os modos de transporte tem limites de capacidade é necessário utilizar vários modos para a entrega de suprimentos nas áreas afetadas.

O problema é formulado matematicamente da seguinte maneira:

$$\min T = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n T_{i,j}^k \frac{X_{i,j}^k}{b_j}$$

$$\text{s.a } \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^m X_{i,j}^k = b_j \quad j = 1, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, K \\ \sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n \\ \sum_{k=1}^K S_k \geq \sum_{j=1}^n b_j \\ X_{i,j}^k \geq 0. \end{array} \right. \quad (3.9)$$

onde: $a_i, i = 1, 2, \dots, m$ é a oferta; $b_j, j = 1, 2, \dots, n$ é a demanda; S_k é a capacidade máxima do modo de transporte k ; $X_{i,j}^k$ é a quantidade de transporte atual de i para j pelo modo k e $T_{i,j}^k$ é o tempo de viagem de i para j pelo modo k .

A função objetivo afirma que o tempo ponderado deve ser minimizado. A primeira restrição garante que a soma das demandas em cada modo de transporte é igual a demanda do nó. A segunda restrição garante que a soma das ofertas em cada nó origem não é menor que a demanda total em cada nó destino. A terceira restrição garante que a quantidade de produtos transportados em cada modo não excede a capacidade do mesmo. E por fim, a última restrição, garante a não-negatividade do fluxo.

Como este problema é NP-completo, é difícil encontrar uma solução global ótima ou uma solução satisfatória, então os autores usam algoritmos genéticos para resolver o problema. Por fim, os autores fazem um exemplo prático para mostrar a eficiência do algoritmo genético na solução do problema apresentado.

Cipriani et al [21] apresentam um método para resolver o problema de redes de trânsito em um contexto multimodal onde as demandas urbanas são elásticas. A formulação matemática do problema leva em consideração a relação entre divisão de demanda modal, nível de serviços de trânsito e transportes externos. O procedimento de solução consiste de um conjunto de heurísticas, os quais incluem uma rotina para geração de rotas, um algoritmo genético para encontrar um conjunto de rotas sub-ótimas com frequências associadas e várias regras práticas para melhoramento das soluções. O desempenho da rede é estimado por um modelo de divisão modal probabilístico que reproduz o comportamento dos usuários na escolha dos modos, um modelo de atribuição de trânsito que reproduz o comportamento

dos usuários em relação à escolha de linhas de ônibus e um modelo de equilíbrio de usuário determinístico que estima o efeito da interação entre o comportamento dos motoristas na escolha de rotas e o congestionamento dos arcos.

Yu e Lu [80] propõem um algoritmo genético para resolver o problema de planejamento de rotas multimodais. Cromossomos com tamanhos variáveis com várias partes (sub-cromossomos) são utilizados para representar rotas no ambiente de viagens multimodais, onde cada parte descreve um tipo de modo de transporte. Dois novos operadores são propostos para serem usados em operações intermodais e eles são chamados hipercrossover e hipermutação. Um método de avaliação multicritério usando um vetor p -dimensional para representar múltiplos critérios é adotado na função *fitness* para seleção de soluções ótimas.

A modelagem do problema foi feita usando a teoria de grafos, onde cada modo de transporte é um subgrafo e o grafo total é a união de todos os subgrafos. Cada arco $e = (i, j)$ tem um peso $w(e)$ associado e um vetor p -dimensional de critérios:

$$C(e) = (C_1(e), C_2(e), \dots, C_p(e))$$

$e \in R(s, t)$, onde $R(s, t)$ é uma rota do nó s ao nó t . O valor de qualquer critério para uma dada rota $R(s, t)$ é definido como $C_k^{R(s,t)} = \sum_{e \in R(s,t)} C_k^e$. Assim, o problema ótimo pode ser escrito como $\min C^{R(s,t)}$. Critérios como tempo, tarifa, transferências modais, podem ser descritos como um problema multicritério. Testes foram feitos com dados do centro da cidade de Pequim e os resultados obtidos foram satisfatórios, segundo os autores.

Liu e Lin [41] estudam o problema de transporte de mercadorias usando redes de transporte multimodal. Neste contexto, a escolha de modos de transporte influencia diretamente no custo do transporte de mercadorias, tempo e qualidade de transporte. Os autores constroem uma rede de transportes virtual, onde o problema original é convertido em um problema de caminho mínimo com restrições de tempo e de capacidade. É proposto um algoritmo genético para resolver o problema. Através de um exemplo, os autores mostram que a otimização do modelo e o algoritmo proposto podem reduzir substancialmente a complexidade da rede, o que mostra a viabilidade e eficácia do método.

Vantagens e Desvantagens das metaheurísticas evolutivas/ bioinspiradas

Os algoritmos genéticos, possuem grande vantagem na área de problemas de transporte, uma vez que trabalham com avaliações de soluções através de procedimentos de análise baseados em dados estocásticos. Partindo de um conjunto conhecido onde situam-se as melhores respostas, pode-se selecionar a que melhor se adapta ao contexto do problema.

As desvantagens dos algoritmos genéticos é que eles exigem um tempo muito maior de execução e/ou maior poder computacional que as demais heurísticas, dependendo do tamanho do problema e, dependendo do problema, a convergência na busca de soluções é prematura.

3.2.3 Métodos *fuzzy*

Nesta seção apresentamos alguns trabalhos encontrados na literatura que utilizam a teoria dos conjuntos *fuzzy* na modelagem e solução do problema de redes de transporte multimodal. As incertezas podem estar nos custos dos arcos, nas capacidades dos arcos, na oferta/demanda da rede, nos parâmetros do modelo, etc. A seguir, temos alguns desses tipos de incertezas.

3.2.3.1 Incertezas nos custos dos arcos

Golnarkar et al [29] propõem uma solução para o problema de caminho ótimo em redes de transporte multimodal no qual os custos dos arcos são números discretos *fuzzy*. O algoritmo proposto é baseado em *dioid* de k -caminhos mínimos *fuzzy*.

A abordagem considera o número de mudanças de modo, a ordem correta dos modos usados e a modelagem de caminhos de duas maneiras (nos dois sentidos da rede). Não há restrições quanto ao número e variedade dos serviços a serem considerados. A modelagem é feita usando grafos e *dioids*. O grafo é composto por vários subgrafos, onde cada subgrafo representa um modo de transporte. Os modos de transporte considerados são: ônibus, metrô, táxi e carro particular. O carro particular é considerado um modo restrito, isto é, existe uma ordem no qual este modo pode ser utilizado. Por exemplo, se um passageiro começa a viagem com seu carro particular e muda para o modo metrô, não será capaz de usar seu carro novamente.

Em cada subgrafo, a viabilidade dos caminhos ou a ordem correta dos modos usados é considerada. Cada subgrafo tem um nível, que é definido como o número mínimo de

arcos de transferência usados da origem para o subgrafo. Há também uma preocupação com o número de mudanças de modo (mais que três ou quatro mudanças já são consideradas ruins), onde a solução para prevenir este problema é associar custo alto aos arcos de transferência.

Em Ramazani et al [68], é proposto um método para resolver o problema de caminho mínimo em processos de escolha de rotas quando o tempo de viagem nos arcos é um número *fuzzy*, chamado tempo de viagem percebido (PTT). O algoritmo resolve o problema de caminho mínimo *fuzzy* (FSPA). Para redes congestionadas, o método é capaz de encontrar os caminhos mínimos em termos do tempo de viagem percebido e grau de saturação (congestionamento) ao longo das rotas.

Ramazani et al [69] apresentam um algoritmo para o problema de atribuição de tráfego o qual assumem que a percepção do motorista em relação ao tempo de viagem afeta a escolha de rotas. A teoria dos conjuntos *fuzzy* é usada para definir o tempo de viagem “percebido” pelos usuários. Um equilíbrio *fuzzy* é sugerido para predição de fluxo em redes. Também, um algoritmo de atribuição de tráfego incremental *fuzzy* (FITA) é desenvolvido. Este algoritmo é testado em uma rede real de Mashhad, Iran. O fluxo de tráfego que é estimado por um FITA e por algoritmos convencionais é comparado para dados reais, os quais indicam que o FITA é mais preciso que os algoritmos convencionais para estimação de fluxo de tráfego.

Vantagens e Desvantagens das Incertezas nos custos dos arcos

O uso da teoria dos conjuntos *fuzzy* para tratar incertezas nas variáveis do problema aqui apresentado traz grandes vantagens, tornando a solução do mesmo mais aderente à realidade e permitindo resolvê-lo na forma *fuzzy* sem transformá-lo na forma clássica. Neste caso, temos um conjunto de soluções Pareto-ótimas, das quais os usuários podem escolher as que mais lhe agradam, já que uma solução que é boa do ponto de vista de um usuário, pode não ser boa para outro usuário.

Como desvantagem pode citar a complexidade de resolução do problema, que aumenta à medida que restrições, variáveis e incertezas são consideradas. Uma outra desvantagem é a subjetividade ao definir os parâmetros *fuzzy* que modelam as incertezas nos custos dos arcos, pois as mesmas se devem a diversos fatores, que são difíceis de serem medidos e analisados, como por exemplo, condições climáticas, trânsito, dentre outras.

3.2.3.2 Incertezas na Oferta/Demanda da rede

No trabalho de Ghatee e Hashemi [28], o problema de fluxo de custo mínimo *fuzzy* (PFCM) é estudado. As incertezas podem estar na oferta ou demanda dos nós e também no custo ou na capacidade dos arcos da rede. No caso da oferta/demanda essas incertezas podem surgir devido à dados estatísticos incompletos ou simulações.

Os autores apresentam três modelos: PFCM com custos *fuzzy*, PFCM com oferta/demanda *fuzzy* e uma combinação dos dois casos. Para o último modelo, os autores apresentam um método exato e métodos heurísticos. Por fim, é feita uma aplicação dos modelos desenvolvidos no problema de planejamento de redes de ônibus.

No trabalho de Pandian e Natarajan [60] um novo método chamado método da separação é proposto para encontrar uma solução ótima para o problema de transporte inteiro onde o custo de transporte, oferta e demanda são intervalos. Este método pode ser uma ferramenta importante para os tomadores de decisão quando estiverem lidando com vários tipos de problemas logísticos com parâmetros intervalares. Os autores estendem o método proposto para o caso em que o problema de transporte é *fuzzy*.

Ammar e Youness [6] investigam soluções eficientes e estabilidade do problema de transporte multiobjetivo com coeficientes *fuzzy* $\tilde{c}_{ij}^r \in \tilde{c}^r$ e/ou oferta *fuzzy* \tilde{a}_i e/ou demanda *fuzzy* \tilde{b}_j . O conceito de α -*fuzzy* eficiente foi introduzido nos quais a solução eficiente ordinária é estendida baseada no α -corte de números *fuzzy*. Uma condição necessária e suficiente para tal solução é estabelecida.

Noções como o conjunto solvabilidade e o conjunto estabilidade de primeiro tipo são definidos e caracterizados. A análise paramétrica é usada para caracterizar as soluções ótimas paramétricas para problemas auxiliares. Um algoritmo para a determinação do conjunto estabilidade é proposto e alguns exemplos são feitos.

Vantagens e Desvantagens das Incertezas na oferta/demanda da rede

Como vantagem temos que, ao considerar incertezas na oferta/demanda da rede, deixamos a modelagem do problema mais realística e robusta, pois na prática nunca sabemos exatamente o número de passageiros/ mercadorias/ produtos a serem transportados entre determinados nós origem/destino da rede.

Assim como no caso de incertezas nos custos dos arcos, uma desvantagem ao se

considerar incertezas na oferta/demanda da rede é a complexidade de resolução do problema.

3.2.3.3 Outros tipos de incertezas

Shih [72] resolve o problema de planejamento de transporte de cimento de Taiwan usando métodos de programação linear *fuzzy*. Três tipos de modelos de programação linear *fuzzy* são usados para determinar a quantidade ideal de transporte e a capacidade de novas instalações. O autor dá ênfase sobre como formular um problema de planejamento de transporte onde a capacidade do porto, o cumprimento de demanda e as restrições de congestionamento de tráfego estão incluídas. Os três modelos de programação linear *fuzzy* usados pelo autor são: abordagem de Zimmermann [92], abordagem de Chanas [20] e abordagem de Julien [33]. Os resultados obtidos neste trabalho podem ser usados no planejamento de infra-estrutura geral bem como no planejamento de logística para as empresas de cimento de Taiwan.

O trabalho de Khanbaghi e Malhamé [36] utiliza controladores baseados em lógica *fuzzy* para reduzir os custos de energia do metrô de Montreal, Canadá. Dois controladores *fuzzy* são propostos. O primeiro não produz praticamente nenhuma melhora, enquanto o segundo atinge uma média de economia de 6% e reduz ligeiramente o tempo médio de viagem. Os autores fazem vários testes para analisar o desempenho dos dois controladores propostos e concluem que os resultados são satisfatórios.

Tuzkaya e Önüt [75] apresentam um estudo de caso para examinar os diferentes modos de transporte de mercadorias por uma empresa prestadora de serviços da Turquia. Há uma série de critérios qualitativos e quantitativos conflitantes para avaliar as alternativas de modos de transporte. Critérios qualitativos são frequentemente acompanhados de ambiguidade e imprecisão, que neste trabalho, são tratados usando redes de processo analítico *fuzzy* (ANP). Um grande número de critérios detalhados que interagem uns com outros tem sido avaliados para obter o modo de transporte mais adequado. Esta avaliação foi feita por um grupo de tomadores de decisão da empresa prestadora de serviços com a intenção de prestar um serviço mais preciso e mutuamente aceitável. Além disso, o modelo utilizado neste trabalho foi validado comparando os resultados obtidos com as preferências atuais da empresa.

Vantagens e Desvantagens dos outros tipos de Incertezas

A programação linear *fuzzy* é uma classe de problemas de otimização onde os parâmetros do modelo não estão bem definidos, ou seja, os coeficientes da função objetivo ou das restrições não são precisamente conhecidos e podem estar sujeitos a limites não muito precisos. A grande vantagem dos modelos de programação linear *fuzzy* é que os mesmos modelam os diversos tipos de incertezas existentes em problemas reais, que frequentemente são modelados através da programação linear.

Como desvantagem, novamente, podemos citar a alta complexidade em se resolver tais problemas, principalmente na forma *fuzzy* durante todo o processo de resolução. Para contornar isso, pode-se usar índices de defuzzificação, mas neste caso, também temos desvantagens: a perda de informações durante o processo de defuzzificação e a dificuldade de encontrar o índice mais adequado para cada tipo de problema tratado.

3.2.4 Métodos Híbridos

No trabalho de Qu e Chen [65] é desenvolvido um método de tomada de decisão multicritério híbrido para encontrar a melhor rota em redes de transporte multimodal. Tal método é baseado em processo hierárquico analítico *fuzzy* (AHP) e redes neurais artificiais (RNAs).

A justificativa para desenvolver tal método é que em redes multimodais os objetivos relevantes geralmente são conflitantes, portanto não há uma única solução ótima mas sim um conjunto de soluções não dominadas, ou não inferiores, dos quais o decisor deve selecionar a preferida ou a solução de melhor compromisso. O método proposto é testado em uma rede multimodal que inclui transporte rodoviário, ferroviário, aéreo e aquático.

Qu et al [67] utilizam redes neurais artificiais (RNAs) para tomada de decisão multicritério em redes de transporte multimodal, que geralmente são complexas e todos os componentes devem estar interligados de forma eficiente. Considerando que muitos critérios são conflitantes, não-lineares e até mesmo incomensuráveis, a seleção de modos de transporte é estudada no âmbito de tomada de decisão multicritério.

A base teórica das redes neurais artificiais *feedforward* para resolver este problema é apresentada. Com uma topologia inicial pré-determinada por processo hierárquico analítico *fuzzy* (AHP), um sistema de redes neurais adaptativo é proposto, nos quais os números de nós de entrada das redes neurais artificiais adaptam-se às preferências dos tomadores de decisão.

Resultados empíricos mostram que o método proposto é eficiente e flexível na seleção de modos de transporte.

Em [9], Ayed et al apresentam uma abordagem híbrida para resolver o problema de transporte multimodal dependente de tempo. Esta abordagem foi testada em instâncias reais de problemas fornecendo um balanço adequado entre tempo de computação e espaço de memória. A solução apresentada para resolver tal problema pode ser aplicada em redes de transporte real afim de reduzir o impacto do congestionamento do tráfego sobre a poluição, economia e bem estar do cidadão. Uma comparação com duas abordagens anteriores são dadas do ponto de vista teórico bem como desempenho experimental. A abordagem híbrida proposta é baseada no algoritmo de Dijkstra e *ACO* (*ant colony optimization*). A modelagem usando subgrafos mantém todos os modos de transporte em diferentes redes unimodais, o que permite que tais redes sejam facilmente e independentemente atualizadas.

Beltran et al [11] estudam o problema de alocação de veículos não poluentes em uma frota pública existente, cuja rede de trânsito é multimodal, com demandas variáveis. Os autores consideram duas sub-redes de trânsito, integradas da seguinte forma: a sub-rede poluente é composta por veículos tradicionais que estão autorizados a se locomoverem somente ao longo de rotas onde nenhuma proteção ambiental tem que ser garantida; a sub-rede não poluente é composta por veículos não poluentes, pertencentes a uma frota de tamanho limitado, que podem se locomover ao longo de rotas com elevada qualidade ambiental e também nas rotas sem proteção ambiental.

Dessa forma, o objetivo principal deste trabalho é encontrar uma configuração ideal da rede de trânsito, afim de minimizar os custos operacionais e os custos dos usuários, levando em conta a elasticidade da demanda modal e a disponibilidade de veículos não poluentes. Os usuários podem escolher qualquer uma das redes do sistema multimodal: ônibus, metrô ou carro. Neste caso, os usuários também podem escolher entre veículos poluentes e não poluentes.

O procedimento de solução consiste de um conjunto de heurísticas as quais incluem uma rotina para geração de rotas e um algoritmo genético para encontrar um conjunto de rotas sub-ótimas com frequências associadas.

Em Brito et al [17], o problema de roteamento de veículos em um ambiente incerto é resolvido. O problema de roteamento de veículos com custos *fuzzy* na função objetivo e o

problema de roteamento de veículos com janela de tempo e restrições *fuzzy* são formulados. Um algoritmo heurístico híbrido para resolver diferentes tipos de problemas é proposto e é baseado no GRASP (Greedy Randomized Adaptive Search Procedure)[70] e no VNS (Variable Neighbourhood Search)[31]. Os resultados mostram que o algoritmo híbrido proposto é eficaz para encontrar boas soluções em um curto espaço de tempo.

Vantagens e Desvantagens dos métodos híbridos

Como vantagens temos que os métodos híbridos surgem da necessidade em se aproveitar os benefícios das técnicas envolvidas, afim de sanar as deficiências do uso de apenas uma técnica, permitindo a construção de sistemas mais robustos e eficientes, pelo proveito das vantagens das técnicas utilizadas.

Como desvantagens, podemos citar a complexidade das abordagens híbridas. As soluções encontradas através dessas abordagens, nem sempre são as melhores, pois da mesma forma em que se busca tirar proveito das vantagens das técnicas utilizadas, em alguns casos, pode ocorrer das desvantagens das técnicas prevalecerem.

Considerações finais do capítulo

Neste capítulo, apresentamos uma revisão bibliográfica sobre o problema de redes de transporte multimodal. Diferentes fatores podem ser considerados na formulação do problema afim de torná-lo mais aderente à realidade. Algumas técnicas de resolução também foram apresentadas, bem como suas vantagens e desvantagens. Diante do exposto, o principal objetivo desta tese será propor soluções para o problema de redes de transporte multimodal buscando tirar proveito das vantagens encontradas nos métodos aqui apresentados.

CAPÍTULO 4

ALGORITMOS PROPOSTOS

Neste capítulo, apresentamos os algoritmos propostos para redes de transporte multimodal aplicados ao tráfego urbano. Foram desenvolvidos três algoritmos: o primeiro algoritmo é de carregamento incremental de fluxo onde os custos e capacidades dos arcos são números *fuzzy* e os caminhos mínimos não-dominados são encontrados através do algoritmo proposto por Hernandez [32]. O segundo algoritmo é de caminho mínimo para grafos coloridos com custos *crisp* e o terceiro algoritmo é de carregamento incremental de fluxo onde os caminhos mínimos são encontrados através do segundo algoritmo, e os custos e as capacidades são *crisp*.

Sistemas de transporte urbano geralmente apresentam topologias complexas e restrições, conseqüentemente modelá-los é uma tarefa difícil [43]. Neste trabalho, apresentamos três tipos de modelagens para o problema de redes de transporte multimodal, todas utilizando teoria de grafos: no primeiro caso, que trata o problema de fluxo em redes de transporte multimodal com custos e capacidades *fuzzy*, cada modo de transporte é representado por um subgrafo e o grafo total é a união de todos os subgrafos. No segundo caso, que trata o problema de caminho mínimo em grafos coloridos, utilizamos coloração em grafos, isto é, cada modo de transporte é representado por uma cor (rótulo) e existem vários arcos entre dois nós do grafo. No terceiro caso, além da coloração utilizada no segundo método, consideramos o problema de fluxo multimodal *crisp*.

Os três algoritmos propostos são inovativos: o primeiro une dois algoritmos existentes na literatura (caminho mínimo *fuzzy* e carregamento incremental de fluxo), porém não

há conhecimento de outro algoritmo semelhante. O segundo algoritmo é uma adaptação do algoritmo clássico de Ford-Moore-Bellman para caminho mínimos em grafos coloridos e o terceiro algoritmo une o segundo algoritmo com o carregamento incremental de fluxo.

4.1 Modelagem usando subgrafos

Nesta modelagem, cada modo de transporte considerado é representado por um subgrafo e há interligações entre os subgrafos. O grafo total é a união de todos os subgrafos.

Neste caso um nó representa um lugar onde o usuário inicia uma viagem ou onde escolhe entre continuar com o modo corrente ou mudar de modo, um arco é uma conexão entre dois nós. Temos dois tipos de arcos nesta modelagem: arcos de transporte e arcos de transferência. Os arcos de transporte conectam dois nós no mesmo modo e os arcos de transferência conectam um modo ao outro.

Seja $G = (N, A)$ um grafo onde N é o conjunto de nós e A é o conjunto de arcos e seja M o conjunto dos modos de transporte considerados, isto é, $M = \{M_1, M_2, M_3, \dots, M_k\}$. Cada arco é representado por (i, j) onde $i, j \in N$. Aqui G é representado por:

$$G = G_{M_1} \cup G_{M_2} \cup \dots \cup G_{M_k}$$

onde:

$$G_{M_1} = (N_{M_1}, A_{M_1}), G_{M_2} = (N_{M_2}, A_{M_2}), \dots, G_{M_k} = (N_{M_k}, A_{M_k})$$

A mudança entre um modo e outro é representada por arcos de transferência, que chamaremos de T . Daí temos que:

$$A = A_{M_1} \cup A_{M_2} \cup \dots \cup A_{M_k} \cup T$$

Vamos considerar que, quando o usuário começa a viagem no modo M_1 ou M_2 (onde $M_1 =$ carro e $M_2 =$ moto) ele não muda de modo (é o que acontece, em geral, aqui no Brasil).

Existem diferentes formas de descrever um problema de redes de transporte multimodal e nesse caso foi escolhido o modelo em que o custo nos arcos depende do fluxo nos mesmos. Assim, a formulação desse tipo de problema tem uma função objetivo não-linear. Visto que o tempo de viagem é incerto, podemos formular o problema de fluxo em redes de transporte multimodal com custos e capacidades *fuzzy* da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z = \sum_{w \in W} \sum_{(i,j) \in A} \tilde{t}_{ij}(x_{ij}) x_{ij}^w \\
 \text{s.a} \quad & \left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{j:(i,j) \in A} x_{ij}^w - \sum_{j:(j,i) \in A} x_{ji}^w = b_i^w, \forall i \in N, \forall w \in W \\
 \sum_{w \in W} x_{ij}^w \lesssim \tilde{u}_{ij}, \forall (i,j) \in A, \\
 x_{ij} = \sum_{w \in W} x_{ij}^w \\
 x_{ij}^w \geq 0, \forall (i,j) \in A, w \in W.
 \end{array} \right. \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

onde:

- W é o conjunto de todos os pares origem-destino;
- w é um par origem-destino (O-D);
- x_{ij}^w é o fluxo de passageiros no arco (i, j) para o par w ;
- b_i^w é a oferta ou demanda do par w ;
- $\tilde{t}_{ij}(x_{ij})$ é o tempo de viagem *fuzzy* para percorrer o arco (i, j) dependente do fluxo (x_{ij}) no arco;
- o símbolo \lesssim representa a relação de ordem *fuzzy*;
- \tilde{u}_{ij} é a capacidade *fuzzy* do arco (i, j) .

Para modelar o tempo de viagem em cada modo, utilizamos a forma *fuzzy* da função custo de viagem B.P.R. (*Bureau of Public Roads*) que foi proposta em 1964 pelo *Bureau of Public Roads* [18]. A forma geral dessa função, considerando o parâmetro t_0 sendo *fuzzy* é:

$$\tilde{t}_{ij}(x_{ij}) = \tilde{t}_0 \left[1 + \rho \left(\frac{x_{ij}}{m_{ij}} \right)^\lambda \right]. \quad (4.2)$$

onde:

- \tilde{t}_{ij} é o tempo de viagem *fuzzy* no arco (i, j) ;
- \tilde{t}_0 é o tempo de viagem *fuzzy* com fluxo livre;

- m_{ij} é o valor modal da capacidade do arco (i, j) ;
- x_{ij} é o fluxo no arco (i, j) ;
- ρ e λ são os parâmetros do modelo, que usualmente são $\rho = 0,15$ e $\lambda = 4$.

Na literatura, existem vários modelos de funções tempo de viagem desenvolvidos para a utilização em planejamento de transportes onde o tempo de viagem é calculado em função do fluxo de tráfego e neste trabalho, optamos por usar a função B.P.R.. Os parâmetros desta função podem variar de acordo com o tipo de estrada e de acordo com a abordagem do problema; no nosso caso consideramos os valores usuais dos parâmetros.

Sem perda de generalidade, os custos (tempos de viagem) são números triangulares *fuzzy*, escritos na forma: (m, α, β) onde m é o valor modal, α é o espalhamento à esquerda e β é o espalhamento à direita. Os valores $(m - \alpha)$ e $(m + \beta)$ são chamados de limitante inferior e superior, respectivamente. As capacidades são números trapezoidais *fuzzy* escritos na forma $(m_1 - \alpha, m_1, m_2, m_2 + \beta)$ onde $\alpha = m_1 = 0$. Logo a capacidade é escrita da seguinte forma: $(\underline{\alpha}, m_1, m_2, \bar{\alpha})$.

Considerando $\alpha = m_1 = 0$, a capacidade *fuzzy* é dada por $(0, 0, m_2, m_2 + \beta)$. A Figura 4.1 ilustra este caso. Assim, se o fluxo no arco (i, j) pertence ao intervalo $[0, m_2]$, o grau de pertinência em relação a este arco é 1, ou seja, satisfaz totalmente a restrição de capacidade do arco; se o fluxo pertence ao intervalo $(m_2, m_2 + \beta)$, o grau de pertinência está entre 0 e 1, ou seja, satisfaz parcialmente a restrição de capacidade, neste caso a restrição de capacidade foi parcialmente violada; e se o fluxo for igual ou maior que $m_2 + \beta$ a restrição foi totalmente violada e o grau de pertinência é 0. Isto define a relação de ordem *fuzzy* representada pelo símbolo \lesssim .

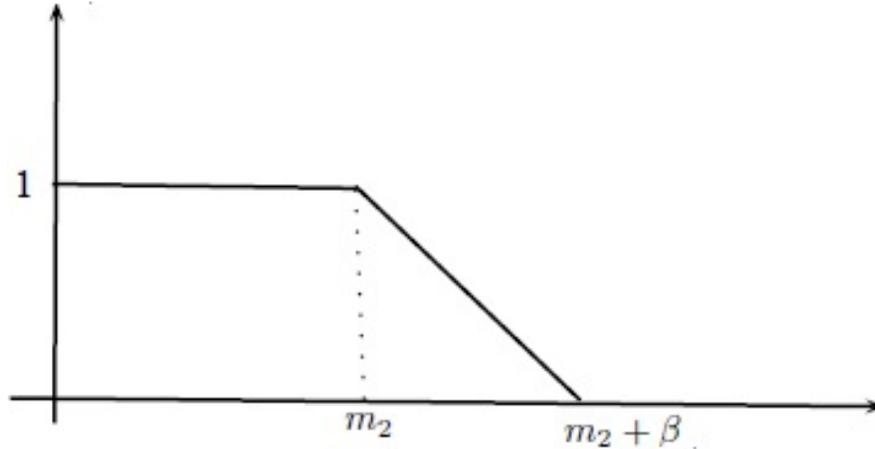


Figura 4.1: Capacidade fuzzy

Por exemplo, se a capacidade do arco (i, j) é $\tilde{u}_{ij} = (0; 0; 4; 6)$ e o fluxo que percorre este arco é 5, então a pertinência neste arco é dada por

$$\mu_{ij}(\text{fluxo}) = \frac{(m_2 + \beta) - \text{fluxo}}{\beta} = \frac{6 - 5}{2} = 0,5$$

A restrição de capacidade foi parcialmente violada, ou seja, além do extremo superior do intervalo modal da capacidade (m_2), passou

$$1 - \mu_{ij}(\text{fluxo}) = 0,5$$

do espalhamento (β) do arco, com violação de:

$$4 + 0,5 \cdot 2 = 4 + 1 = 5$$

Quanto às restrições descritas na Equação 4.1, a primeira restrição garante que o grafo esteja balanceado, ou seja, a quantidade de fluxo que entra no nó menos a quantidade de fluxo que sai do nó é igual a oferta ou demanda do nó para cada par origem-destino considerado; a segunda restrição garante que o fluxo em cada arco não excede sua capacidade, a terceira restrição garante que o fluxo total no arco (i, j) é a somatória de todos os fluxos que passam por (i, j) , e por fim, a quarta restrição garante a não-negatividade do fluxo.

Neste trabalho não consideramos a frequência das linhas de ônibus e de metrô. O tempo de espera, quando há transferências modais está incluso no custo das mesmas.

4.1.1 Algoritmo 1

O primeiro algoritmo proposto é de carregamento incremental de fluxo. Tal algoritmo foi escolhido por sua simplicidade e eficiência e é uma proposta de solução para o problema de redes de transporte multimodal com incerteza nos custos e nas capacidades. A seguir, temos os passos do algoritmo.

Este algoritmo trabalha com o problema na forma *fuzzy* durante todo o procedimento de resolução.

- Passo 0 (Inicialização): Fixe I (número de incrementos). Seja n o número de iterações.
- Passo 1: Encontrar os caminhos mínimos não-dominados para cada par de nós origem-destino de todos os modos de transportes considerados;
- Passo 2: Ordenar todos os caminhos p_k :

$$\mu_{cam} = Poss\{\text{cam ser o melhor caminho}\} = \min\{\mu_{custo}, \mu_{capac}\}.$$

- Passo 3: Envio de fluxo incrementalmente:
 1. Seja I o número de incrementos e b o fluxo a transitar pela rede. Enviar fluxo para o primeiro caminho ordenado incrementalmente $\left(\frac{b}{I}\right)$, respeitando a capacidade de cada arco do caminho;
 2. Atualizar os custos nos arcos através da função $\tilde{t}_{ij}(x_{ij}) = \tilde{t}_0 \left[1 + \rho \left(\frac{x_{ij}}{m_{ij}}\right)^\lambda\right]$.
- Passo 4: Critério de parada.
 1. Se $n \leq I$ ou existir fluxo a transitar ir para o Passo 1 e $n = n + 1$.
 2. Senão \Rightarrow fim.

Segue abaixo uma explicação detalhada do algoritmo proposto.

Para encontrar o conjunto de todos os caminhos não-dominados para cada par de nós origem-destino de todos os modos considerados, utilizamos o algoritmo proposto por Hernandez [32]. Tal algoritmo é baseado no algoritmo clássico de Ford-Moore-Bellman [10]. Trata-se de um algoritmo iterativo, tendo como critério de parada o número de iterações ou a não alteração dos custos de todos os caminhos encontrados na iteração anterior com relação à iteração atual. Desta forma, são encontrados todos os caminhos não-dominados entre os

nós origem e destino de todos os modos considerados, aplicando a relação de Okada e Soper [56] para descartar os caminhos dominados.

Para fazer a ordenação dos caminhos:

- Calcular μ_{custo} para cada caminho, ou seja, verificar através da medida de possibilidade de Dubois e Prade [25], qual a possibilidade de cada caminho ter o custo menor do que todos os demais;
- Calcular μ_{capac} para cada caminho;
- Calcular a pertinência de cada caminho: $\mu_{cam} = \min\{\mu_{custo}, \mu_{capac}\}$; onde:
 1. $\mu_{custo} = Poss\{\text{cam ser mínimo}\}$
 2. $\mu_{capac} = \min_{(i,j) \in \text{cam}} \{\mu_{capac}(i, j)\} = Poss\{\text{fluxo passar no arco } (i, j) \text{ através de cam}\}$
- Colocar os caminhos em ordem decrescente de acordo com μ_{cam} . Se houver empate, usar o valor modal dos custos dos caminhos: escolher aquele com menor custo. Se ainda empatar, assumir a ordem que aparece.

Para enviar fluxo incrementalmente pelos caminhos de acordo com a ordenação feita:

- Seja I o número de incrementos, isto é quantas vezes iremos enviar o fluxo pela rede e b o fluxo disponível. A quantidade de fluxo a ser enviada em cada iteração é $\frac{b}{I}$.
- Verificar se existe oferta no nó origem do melhor caminho, caso não haja, ir para o próximo melhor caminho com oferta;

Finalmente:

- Atualizar a matriz de fluxo;
- Atualizar os custos nos arcos de acordo com o fluxo atribuído no passo anterior através da Função 4.2.
- Verificar o critério de parada.

4.2 Modelagem usando coloração em grafos

Nesta seção apresentamos dois tipos de modelagens: problema de caminho mínimo em grafos coloridos e problema de fluxo de custo mínimo em grafos coloridos.

4.2.1 O Problema de caminho mínimo em grafos coloridos

Um problema bem conhecido em teoria de grafos envolvendo cores é o problema de coloração em grafos. Este problema lida com a atribuição de cores nos elementos de um grafo de acordo com determinadas restrições. Coloração em nós é uma variante deste problema, neste caso o objetivo é colorir os nós de um grafo usando o menor número de cores tal que dois nós adjacentes tenham cores diferentes. Analogamente, o problema de coloração em arcos trata da atribuição de cores nos arcos de um grafo usando o menor número de cores tal que dois arcos adjacentes tenham cores diferentes.

A coloração em grafos utilizada neste trabalho é significativamente diferente dos tipos de coloração citados acima. A coloração nos arcos não está relacionada com a atribuição de cores aos elementos do grafo de acordo com determinadas restrições, mas neste caso as cores representam os diferentes modos de transportes em uma rede e o objetivo é encontrar uma estrutura ótima da rede através de caminhos mínimos. Na literatura, encontramos um trabalho [77] que trata o problema de redes de transporte multimodal usando coloração em grafos e baseia-se no algoritmo clássico de Dijkstra [24].

Seja $G = (N, A, L)$ um multigrafo direcionado e colorido, consistindo de um conjunto de nós ($n \in N$), um conjunto de cores (ou rótulos) $l \in L$ e um conjunto de arcos rotulados (i, j, l) os quais são triplas em $N \times N \times L$, com $i, j \in N, l \in L$. Cada cor (rótulo), $l \in L$, representa um modo de transporte, dessa forma (i, j, l) representa o arco ligando o nó i ao nó j com modo de transporte l .

Neste contexto, para redes de transporte monomodal há apenas um arco entre cada par de nós do grafo, já para redes de transporte multimodal, há mais de um arco entre os nós do grafo, mas não necessariamente entre todos os pares de nós. Além das cores (rótulos), cada arco tem um custo, por exemplo, c_{ijl} representa o custo do arco (i, j) usando o modo l .

O problema de caminho mínimo em redes de transporte multimodal pode ser

formulado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad z &= \sum_{(i,j) \in A} \sum_{l \in L} c_{ijl} x_{ijl} \\ \text{s.a} \quad \sum_{l \in L} \sum_{j: (i,j) \in A} x_{ijl} - \sum_{l \in L} \sum_{j: (j,i) \in A} x_{jil} &= \begin{cases} 1, & i = o \\ 0, & i \neq o, d \\ -1, & i = d \end{cases} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$x_{ijl} = \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in A, \quad \forall l \in L.$$

onde:

- o : nó origem;
- d : nó destino;
- x_{ijl} : variável de decisão.

Quanto às restrições, a primeira restrição garante que o grafo esteja balanceado, a segunda restrição garante a não negatividade da variável de decisão bem como os valores que a mesma pode assumir: 1 se o arco (i, j, l) pertence ao caminho ou 0 se o arco (i, j, l) não pertence ao caminho. A função objetivo minimiza a soma dos custos dos arcos que compõem o caminho mínimo.

4.2.1.1 Algoritmo 2

O segundo algoritmo proposto é uma adaptação do algoritmo clássico de Ford-Moore-Bellman [10] para grafos coloridos cuja aplicação será feita em redes de transporte multimodal. Tal algoritmo é iterativo, possuindo como critério de parada o número de iterações ou a não alteração dos custos encontrados na iteração anterior com relação à iteração atual.

Na generalização feita, cada nó terá um conjunto de etiquetas $etq(j, l_j, ant, rot, cust)$ onde:

- j : nó em análise;
- l_j : número da etiqueta do nó j ;

- *ant*: guarda o nó i antecedente do nó j pelo caminho considerado;
- *rot*: guarda o modo (ou cor) utilizado para chegar de i até j ;
- *cust*: guarda o custo acumulado da origem até o nó (incluindo o custo de mudança de modo, quando houver).

Notações para o algoritmo

- N : número de nós do grafo;
- Γ_j^{-1} : conjunto dos nós predecessores do nó j ;
- *it*: contador de iterações;
- d_{ijl} : custo do arco (i, j) pelo modo l ;
- N_{modos} : números de modos de transporte considerados;
- ϵ : custo de mudança de modo, que, neste caso é um número fixo.

A seguir temos os passos do algoritmo.

- Passo 1: Inicialização:

- $ant = []$.
- $rot = []$.
- $cust^0(\text{origem}) = 0$.
- $cust^0(j) = \infty$ se $j \neq \text{origem}$.
- $it \leftarrow 1$.

- Passo 2:

Para todo $j \in N$ faça:

Para todo $i \in \Gamma^{-1}(j)$ faça:

Para todo l_i faça:

Para todo $l \in N_{modos}$ faça:

Se $rot(j) \neq rot(i)$

$$cust^{it}(j) = cust^{it-1}(j) + d_{ijl} + \epsilon$$

Senão

$$cust^{it}(j) = cust^{it-1}(j) + d_{ijl}$$

$$ant(j) = i$$

$$rot(j) = l$$

Fim Se

Fim l

Fim l_i

Fim i

Fim j

- Passo 3: Critério de Parada:

1. Se $it = it + 1 \geq$ número de arcos, ou se $cust^{it} = cust^{it-1}$, $\forall j \in N$, vá para o Passo 4;
2. Senão, vá para o Passo 2.

- Passo 4: Recompôr os caminhos a partir das etiquetas construídas no Passo 2.

Neste algoritmo é necessário que o número de etiquetas por nó seja limitado, pois o mesmo tende a aumentar rapidamente conforme aumenta-se o número de nós, o número de arcos e o número de modos de transporte, tornando caro o cálculo de cada informação. Uma solução para este problema é limitar o número de etiquetas por nó através do número de modos.

O algoritmo clássico de Ford-Moore-Bellman, examina todos os nós até que não seja possível melhorias, dessa forma, aceita arcos com custos negativos. Como o algoritmo proposto é baseado no algoritmo de Ford-Moore-Bellman, a estrutura é mantida.

4.2.2 O Problema de fluxo de custo mínimo em grafos coloridos

Nesta seção lidamos com o problema de fluxo em redes de transporte multimodal considerando os custos e as capacidades *crisp*. Assim como na Seção 4.2.1, utilizamos a coloração em grafos para modelagem do problema, onde cada modo de transporte considerado é representado por uma cor. Semelhante ao que fizemos na Seção 4.1, o custo nos arcos depende do fluxo nos mesmos, assim, a formulação desse tipo de problema tem uma função objetivo não-linear, conforme descrito a seguir.

$$\begin{aligned} \min \quad z &= \sum_{(i,j) \in A} \sum_{l \in L} t_{ij}(x_{ij}) x_{ijl} \\ \text{s.a} \quad &\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j:(i,j) \in A} x_{ijl} - \sum_{j:(j,i) \in A} x_{jil} = b_{il}, \forall i \in N, \forall l \in L \\ x_{ijl} \leq u_{ijl}, \forall (i,j) \in A, \forall l \in L \\ x_{ij} = \sum_{l \in L} x_{ijl} \\ x_{ijl} \geq 0, \forall (i,j) \in A, l \in L. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde:

- L é o conjunto de todos os modos de transporte considerados;
- l é um modo de transporte;
- x_{ijl} é o fluxo no arco (i, j) usando o modo l ;
- x_{ij} é o fluxo total no arco (i, j) ;
- b_{il} é a oferta ou demanda do nó i no modo l ;
- $t_{ij}(x_{ij})$ é o tempo de viagem para percorrer o arco (i, j) dependente do fluxo (x_{ij}) no arco;
- u_{ijl} é a capacidade do arco (i, j) usando o modo l .

Assim como na Seção 4.1, para modelar o tempo de viagem, utilizamos a função custo de viagem B.P.R. (*Bureau of Public Roads*) que foi proposta em 1964 pelo *Bureau of Public Roads* [18]. Neste caso, a forma geral dessa função é:

$$t_{ij}(x_{ij}) = t_0 \left[1 + \rho \left(\frac{x_{ij}}{u_{ij}} \right)^\lambda \right]. \quad (4.5)$$

Neste caso,

$$u_{ij} = \sum_{l \in L} u_{ijl}$$

Os demais parâmetros da função já foram definidos anteriormente.

4.2.2.1 Algoritmo 3

O terceiro algoritmo proposto é de carregamento incremental de fluxo. Tal algoritmo foi escolhido por sua simplicidade e eficiência e é uma proposta de solução para o problema de redes de transporte multimodal com custos e capacidades *crisp* no qual os caminhos mínimos são encontrados através do algoritmo 4.2.1.1. A seguir, temos os passos do algoritmo.

- Passo 0 (Inicialização): Fixe I (número de incrementos). Seja n o número de iterações.
- Passo 1: Encontrar o caminho mínimo colorido utilizando o algoritmo proposto em 4.2.1.1.
- Passo 2: Envio de fluxo incrementalmente:
 1. Seja I o número de incrementos e b o fluxo a transitar pela rede. Enviar fluxo para o caminho mínimo encontrado no Passo 1 incrementalmente $\left(\frac{b}{I}\right)$, respeitando a capacidade de cada arco do caminho;
 2. Atualizar os custos nos arcos através da função $t_{ij}(x_{ij}) = t_0 \left[1 + \rho \left(\frac{x_{ij}}{u_{ij}} \right)^\lambda \right]$.
- Passo 3: Critério de parada.
 1. Se $n \leq I$ ou existir fluxo a transitar ir para o Passo 1 e $n = n + 1$.

2. Senão \Rightarrow fim.

As principais diferenças entre os algoritmos 4.1.1 e 4.2.2.1 são:

- No algoritmo 4.1.1 os custos e as capacidades são incertos enquanto que no algoritmo 4.2.2.1, os custos e as capacidades são *crisp*;
- No algoritmo 4.1.1, os caminhos não-dominados são encontrados através do algoritmo proposto por Hernandez [32] e no algoritmo 4.2.2.1, os caminhos mínimos são encontrados através do algoritmo 4.2.1.1, que é uma proposta inovativa para grafos coloridos, neste caso, aplicada ao problema de redes de transporte multimodal.

Neste capítulo, apresentamos as modelagens matemáticas do problema e os algoritmos propostos para cada modelagem. Temos dois algoritmos para o problema de fluxo, onde as principais diferenças foram citadas acima e também, temos um algoritmo para o problema de caminho mínimo em grafos coloridos.

No próximo capítulo, apresentamos os testes computacionais feitos utilizando os algoritmos propostos neste capítulo.

CAPÍTULO 5

TESTES COMPUTACIONAIS

Neste capítulo apresentamos os testes computacionais realizados em algumas instâncias com os algoritmos propostos no capítulo anterior, implementado em Matlab 7.0.1 e executado em uma plataforma Intel I3, 6 Gb de memória RAM, com sistema operacional Windows 7.

5.1 Resultados obtidos através do algoritmo 1

Nesta seção apresentamos os resultados obtidos através do algoritmo 1 que foi descrito na Seção 4.1.1. Foram utilizadas cinco instâncias, e para cada uma testamos o algoritmo com diferentes valores de I (número de incrementos). Os valores de I foram escolhidos aleatoriamente após testes feitos com vários valores do mesmo.

A análise dos resultados foi feita baseando-se nas pertinências de cada caminho (μ_{cam}), no fluxo enviado por cada caminho, no custo atualizado de cada caminho, no custo final total e no número de incrementos.

Em todos os exemplos apresentados, o custo atualizado e μ_{cam} são calculados após o envio da última parcela de fluxo.

Nas tabelas de dados, as capacidades estão dadas na notação $\tilde{a} = (m_1 - \alpha, m_1, m_2, m_2 + \beta)$.

5.1.1 Instância 1

A primeira instância, que foi criada pelos autores deste trabalho, ilustra a abordagem proposta na Seção 4.1, utilizando subgrafos. Consideramos dois modos de transporte: ônibus e metrô. Os nós de cor cinza representam o modo ônibus e os nós de cor branca representam o modo metrô. Os arcos tracejados representam as mudanças modais. A demanda para a origem O e destino D é 20. Os arcos que ligam O aos nós 1 e 5, assim como os arcos que ligam os nós 4 e 8 a D podem ter custo zero. ‘ O ’ representa a origem da viagem dos usuários, que neste caso, pode ser feita usando ônibus ou metrô, considerando que é conveniente ter pontos de ônibus e estações de metrô próximos a determinada origem de viagem. ‘ D ’ representa o destino dos usuários, que na prática pode ser o local de trabalho, local de lazer, local de estudos, dentre outros.

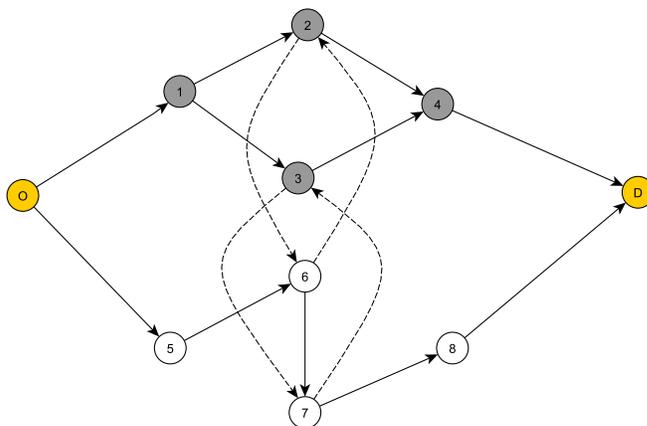


Figura 5.1: Exemplo Ilustrativo

Os arcos, as capacidades e o tempo de viagem a fluxo livre (\tilde{t}_0) estão definidos nas Tabelas 5.1 e 5.2.

Tabela 5.1: Dados da Rede da Figura 5.1

Arco	Origem \rightarrow Destino	\tilde{t}_0	Capacidades
1	$O \rightarrow 1$	(0; 0; 0)	(0; 0; 20; 22)
2	$O \rightarrow 5$	(0; 0; 0)	(0; 0; 20; 22)
3	$1 \rightarrow 2$	(5; 2; 2)	(0; 0; 7; 9)
4	$1 \rightarrow 3$	(5; 1; 1)	(0; 0; 5; 7)

Tabela 5.2: Dados da Rede da Figura 5.1

Arco	Origem \rightarrow Destino	\tilde{t}_0	Capacidades
5	2 \rightarrow 4	(4; 1; 1)	(0; 0; 5; 7)
6	3 \rightarrow 4	(6; 1; 1)	(0; 0; 3; 5)
7	2 \rightarrow 6	(4; 1; 1)	(0; 0; 30; 32)
8	6 \rightarrow 2	(4; 1; 1)	(0; 0; 30; 32)
9	5 \rightarrow 6	(4; 1; 1)	(0; 0; 11; 13)
10	6 \rightarrow 7	(2; 1; 1)	(0; 0; 12; 14)
11	7 \rightarrow 8	(2; 1; 1)	(0; 0; 15; 17)
12	3 \rightarrow 7	(6; 1; 1)	(0; 0; 20; 22)
13	7 \rightarrow 3	(6; 1; 1)	(0; 0; 20; 22)
14	4 \rightarrow D	(0; 0; 0)	(0; 0; 20; 22)
15	8 \rightarrow D	(0; 0; 0)	(0; 0; 20; 22)

O algoritmo atendeu todas as demandas de acordo com o número de incrementos. Foram feitos testes para diferentes valores de I , que foram escolhidos aleatoriamente, após testes feitos com vários valores de I .

O envio de fluxo para $I = 1$ ocorreu segundo a Tabela 5.3. O tempo de processamento foi de 0,24 segundos. O custo final total é (196, 24; 63, 7343; 63, 7343).

Tabela 5.3: Envio de fluxo para $I = 1$

caminho	μ_{cam}	fluxo enviado	custo inicial	custo atualizado
O \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow D	0,9307	5	(9; 3; 3)	(9, 7952; 3, 2281; 3, 2281)
O \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow D	0,5	12	(8; 3; 3)	(9, 2727; 3, 4238; 3, 4238)
O \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow D	0,3631	3	(11; 2; 2)	(11, 9972; 2, 1694; 2, 1694)

Quanto aos μ_{cam} , no caminho O \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow D, o mesmo é referente ao μ_{custo} , no caminho O \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow D, é referente ao μ_{capac} e no caminho O \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow D, é referente ao μ_{custo} .

O envio de fluxo para $I = 2$ ocorreu segundo a Tabela 5.4. O tempo de processamento foi de 0,27 segundos. O custo final total é (196, 24; 63, 7343; 63, 7343).

Tabela 5.4: Envio de fluxo para $I = 2$

caminho	μ_{cam}	fluxo enviado	custo inicial	custo atualizado
$O \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow D$	0,9307	5	(9; 3; 3)	(9, 7952; 3, 2281; 3, 2281)
$O \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow D$	0,5	12	(8; 3; 3)	(9, 2727; 3, 4238; 3, 4238)
$O \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow D$	0,3631	3	(11; 2; 2)	(11, 9972; 2, 1694; 2, 1694)

Neste caso, a análise do μ_{cam} de cada caminho é a mesma do caso $I = 1$, pois as Tabelas 5.3 e 5.4 são iguais.

O envio de fluxo para $I = 5$ ocorreu segundo a Tabela 5.5. O tempo de processamento foi de 0,28 segundos. O custo final total é (197, 5604; 65, 9898; 65, 9898).

Tabela 5.5: Envio de fluxo para $I = 5$

caminho	μ_{cam}	fluxo enviado	custo inicial	custo atualizado
$O \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow D$	0,5204	2	(11; 2; 2)	(11, 1970; 2, 0334; 2, 0334)
$O \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow D$	0,5	6	(9; 3; 3)	(10, 6490; 3, 4729; 3, 4729)
$O \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow D$	0,5	12	(8; 3; 3)	(9, 2727; 3, 4238; 3, 4238)

Quanto aos μ_{cam} , no caminho $O \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow D$, é referente ao μ_{custo} , no caminho $O \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow D$, o mesmo é referente ao μ_{capac} e no caminho $O \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow D$, é referente ao μ_{capac} .

5.1.2 Instância 2

A Figura 5.2 ilustra a rede multimodal onde consideramos três modos de transporte: carro, ônibus e metrô. Os nós de cor branca representam o modo carro, os nós de cor cinza escuro representam o modo ônibus e os nós de cor cinza claro representam o modo metrô. O nó ‘O’ representa a origem da viagem e o nó 26 representa o destino dos usuários. Os arcos que ligam o nó origem ‘O’ aos nós 1 e 2 tem custo zero; os arcos tracejados representam as transferências modais, que nesse caso, são permitidas apenas entre os modos ônibus e metrô. Esta instância foi baseada no exemplo encontrado no trabalho de Mouncif et al [50].

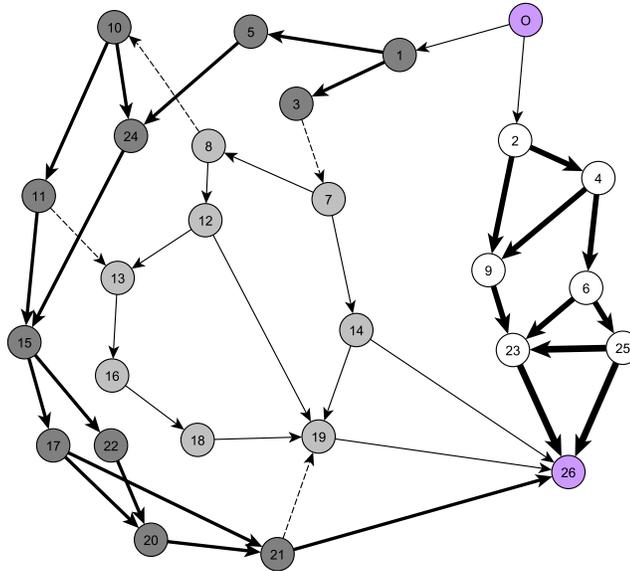


Figura 5.2: Rede multimodal com três modos

A demanda para a origem ‘O’ e destino 26 é 35.

Os arcos, as capacidades e o tempo de viagem a fluxo livre (\tilde{t}_0) estão definidos nas Tabelas 5.6 e 5.7. Os arcos estão ordenados de acordo com os modos de transporte. Primeiro, os arcos do modo carro, seguido dos arcos do modo ônibus, do modo metrô, e, por fim, os arcos de transferência.

Tabela 5.6: Dados da Rede Multimodal da Figura 5.2

Arco	Origem \rightarrow Destino	\tilde{t}_0	Capacidades
1	$O \rightarrow 1$	(0; 0; 0)	(0; 0; 35; 37)
2	$O \rightarrow 2$	(0; 0; 0)	(0; 0; 35; 37)
3	$2 \rightarrow 4$	(4; 1; 2)	(0; 0; 13; 15)
4	$2 \rightarrow 9$	(6; 1; 2)	(0; 0; 15; 17)
5	$4 \rightarrow 9$	(7; 1; 2)	(0; 0; 10; 12)
6	$4 \rightarrow 6$	(7; 1; 2)	(0; 0; 9; 11)
7	$6 \rightarrow 23$	(19; 1; 2)	(0; 0; 10; 12)
8	$6 \rightarrow 25$	(7; 1; 2)	(0; 0; 12; 14)
9	$9 \rightarrow 23$	(15; 1; 2)	(0; 0; 15; 17)
10	$25 \rightarrow 23$	(6; 1; 2)	(0; 0; 15; 17)

Tabela 5.7: Dados da Rede Multimodal da Figura 5.2

Arco	Origem \rightarrow Destino	\tilde{t}_0	Capacidades
11	23 \rightarrow 26	(5; 1; 2)	(0; 0; 12; 14)
12	25 \rightarrow 26	(5; 1; 2)	(0; 0; 10; 12)
13	1 \rightarrow 3	(5; 1; 2)	(0; 0; 13; 15)
14	1 \rightarrow 5	(4; 1; 2)	(0; 0; 10; 12)
15	5 \rightarrow 24	(4; 1; 2)	(0; 0; 15; 17)
16	10 \rightarrow 24	(7; 1; 2)	(0; 0; 15; 17)
17	24 \rightarrow 15	(3; 1; 2)	(0; 0; 30; 32)
18	10 \rightarrow 11	(7; 1; 2)	(0; 0; 10; 12)
19	11 \rightarrow 15	(4; 1; 2)	(0; 0; 20; 22)
20	15 \rightarrow 17	(5; 1; 2)	(0; 0; 10; 12)
21	15 \rightarrow 22	(7; 1; 2)	(0; 0; 12; 14)
22	17 \rightarrow 20	(7; 1; 2)	(0; 0; 14; 16)
23	17 \rightarrow 21	(5; 1; 2)	(0; 0; 10; 12)
24	22 \rightarrow 20	(7; 1; 2)	(0; 0; 10; 12)
25	20 \rightarrow 21	(4; 1; 2)	(0; 0; 20; 22)
26	21 \rightarrow 26	(4; 1; 2)	(0; 0; 15; 17)
27	7 \rightarrow 8	(5; 1; 2)	(0; 0; 20; 22)
28	8 \rightarrow 12	(6; 1; 2)	(0; 0; 16; 18)
29	12 \rightarrow 19	(7; 1; 2)	(0; 0; 10; 12)
30	12 \rightarrow 13	(20; 1; 2)	(0; 0; 15; 17)
31	13 \rightarrow 16	(7; 1; 2)	(0; 0; 30; 32)
32	16 \rightarrow 18	(17; 1; 2)	(0; 0; 10; 12)
33	18 \rightarrow 19	(7; 1; 2)	(0; 0; 12; 14)
34	14 \rightarrow 19	(7; 1; 2)	(0; 0; 12; 14)
35	19 \rightarrow 26	(5; 1; 2)	(0; 0; 10; 12)
36	14 \rightarrow 26	(7; 1; 2)	(0; 0; 18; 20)
37	3 \rightarrow 7	(5; 1; 2)	(0; 0; 20; 22)
38	7 \rightarrow 14	(6; 1; 2)	(0; 0; 40; 42)
39	8 \rightarrow 10	(17; 1; 2)	(0; 0; 30; 32)
40	11 \rightarrow 13	(20; 1; 2)	(0; 0; 20; 22)
41	21 \rightarrow 19	(16; 1; 2)	(0; 0; 50; 52)

O algoritmo atendeu todas as demandas de acordo com o número de incrementos. Foram feitos testes para diferentes valores de I .

O envio de fluxo para $I = 1$ ocorreu segundo a Tabela 5.8. O tempo de processamento foi de 0,3 segundos. O custo final total é (900, 4246; 172, 4980; 344, 9962).

Tabela 5.8: Envio de fluxo para $I = 1$

caminho	μ_{cam}	fluxo enviado	custo inicial	custo atualizado
O \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 24 \rightarrow 15 \rightarrow 17 \rightarrow 21 \rightarrow 26	0,7987	10	(25; 6; 12)	(27, 3426; 6, 5111; 13, 0223)
O \rightarrow 2 \rightarrow 9 \rightarrow 23 \rightarrow 26	0,7714	1	(26; 3; 6)	(26, 0002; 3, 0000; 6, 0000)
O \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 25 \rightarrow 26	0,5	10	(23; 4; 8)	(25, 6786; 4, 4257; 8, 8516)
O \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 14 \rightarrow 26	0,5	14	(23; 4; 8)	(24, 5866; 4, 2950; 8, 5898)

Quanto à μ_{cam} , nos caminhos O \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 24 \rightarrow 15 \rightarrow 17 \rightarrow 21 \rightarrow 26 e O \rightarrow 2 \rightarrow 9 \rightarrow 23 \rightarrow 26, é referente à μ_{custo} e nos caminhos O \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 25 \rightarrow 26 e O \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 14 \rightarrow 26, é referente à μ_{capac} .

O envio de fluxo para $I = 5$ ocorreu segundo a Tabela 5.9. O tempo de processamento foi de 0,34 segundos. O custo final total é (875, 6153; 153, 1435; 306, 2857).

Tabela 5.9: Envio de fluxo para $I = 5$

caminho	μ_{cam}	fluxo enviado	custo inicial	custo atualizado
O \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 25 \rightarrow 26	1	9	(23; 4; 8)	(24, 7573; 4, 2795; 8, 5587)
O \rightarrow 2 \rightarrow 9 \rightarrow 23 \rightarrow 26	0,7581	6	(26; 3; 6)	(26, 1275; 3, 0170; 6, 0341)
O \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 24 \rightarrow 15 \rightarrow 17 \rightarrow 21 \rightarrow 26	0,7312	6	(25; 6; 12)	(25, 3037; 6, 0660; 12, 1326)
O \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 14 \rightarrow 26	0,5	14	(23; 4; 8)	(24, 5866; 4, 2950; 8, 5898)

Quanto à μ_{cam} , no caminho O \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 25 \rightarrow 26, é referente à μ_{custo} e μ_{capac} , pois $\mu_{cam} = 1$, nos caminhos O \rightarrow 2 \rightarrow 9 \rightarrow 23 \rightarrow 26 e O \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 24 \rightarrow 15 \rightarrow 17 \rightarrow 21 \rightarrow 26 é referente à μ_{custo} e no caminho O \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 14 \rightarrow 26, é referente à μ_{capac} .

O envio de fluxo para $I = 7$ ocorreu segundo a Tabela 5.10. O tempo de processamento foi de 0,35 segundos. O custo final total é (879, 7080; 153, 6059; 307, 2167).

Tabela 5.10: Envio de fluxo para $I = 7$

caminho	μ_{cam}	fluxo enviado	custo inicial	custo atualizado
$O \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 14 \rightarrow 26$	1	13	(23; 4; 8)	(24, 1796; 4, 2193; 8, 4385)
$O \rightarrow 2 \rightarrow 9 \rightarrow 23 \rightarrow 26$	0,7581	6	(26; 3; 6)	(26, 1275; 3, 0170; 6, 0341)
$O \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 24 \rightarrow 15 \rightarrow 17 \rightarrow 21 \rightarrow 26$	0,7312	6	(25; 6; 12)	(25, 3037; 6, 0660; 12, 1326)
$O \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 25 \rightarrow 26$	0,5	10	(23; 4; 8)	(25, 6786; 4, 4257; 8, 8516)

Quanto à μ_{cam} , no caminho $O \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 14 \rightarrow 26$, é referente à μ_{custo} e μ_{capac} , pois $\mu_{cam} = 1$, nos caminhos $O \rightarrow 2 \rightarrow 9 \rightarrow 23 \rightarrow 26$ e $O \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 24 \rightarrow 15 \rightarrow 17 \rightarrow 21 \rightarrow 26$ é referente à μ_{custo} e no caminho $O \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 25 \rightarrow 26$, é referente à μ_{capac} .

Em relação aos caminhos utilizados para o envio de fluxo, temos que o caminho $O \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 14 \rightarrow 26$ apresentou uma transferência modal entre os nós 3 e 7. O caminho $O \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 24 \rightarrow 15 \rightarrow 17 \rightarrow 21 \rightarrow 26$ não apresentou transferências modais. Os caminhos $O \rightarrow 2 \rightarrow 9 \rightarrow 23 \rightarrow 26$ e $O \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 25 \rightarrow 26$ são referentes ao modo carro, e, portanto, não apresentam transferências modais.

O exemplo acima foi baseado no exemplo encontrado no trabalho de Mouncif et al [50], onde os autores resolvem o problema de caminho mínimo multimodal clássico, permitindo mudanças entre os modos privados e públicos e com custos fixos nos arcos. No intuito de verificar a eficiência da abordagem proposta nesse trabalho, o exemplo publicado em [50] teve que ser adaptado. A primeira adaptação está em não permitir mudanças entre os modos privado e público, enquanto que a segunda é que o custo depende do fluxo que passa naquele arco. Assim, realizar uma comparação direta dos resultados obtidos pela simulação descrita em [50] e o resultado obtido por nossa abordagem não é possível.

5.1.3 Instância 3

A Figura 5.3 ilustra a rede multimodal onde consideramos três modos de transporte: carro, ônibus e metrô. Os nós de cor branca representam o modo carro, os nós de cor cinza escuro representam o modo ônibus e os nós de cor cinza claro representam

o modo metrô. Os arcos tracejados representam as transferências modais. O nó 'O' representa a origem da viagem e o nó 20 representa o destino dos usuários. Assim como no exemplo anterior, os arcos que ligam o nó origem 'O' aos nós 1 e 3 tem custo zero. Esta instância foi baseado no exemplo encontrado no trabalho de Lozano e Storchi [43].

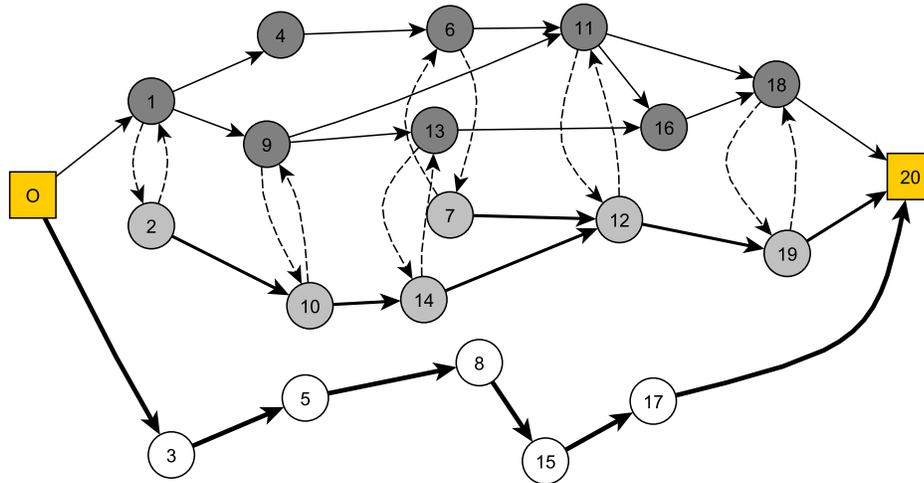


Figura 5.3: Rede multimodal com três modos

A demanda para a origem 'O' e destino 20 é 30.

Os arcos, as capacidades e o tempo de viagem a fluxo livre *fuzzy* (\tilde{t}_0) estão definidos nas Tabelas 5.11 e 5.12.

Tabela 5.11: Dados da Rede Multimodal da Figura 5.3

Arco	Origem \rightarrow Destino	\tilde{t}_0	Capacidades
1	$O \rightarrow 3$	(0; 0; 0)	(0; 0; 40; 43)
2	$3 \rightarrow 5$	(7; 1; 1)	(0; 0; 12; 14)
3	$5 \rightarrow 8$	(9; 1; 1)	(0; 0; 11; 14)
4	$8 \rightarrow 15$	(12; 1; 1)	(0; 0; 13; 16)
5	$15 \rightarrow 17$	(2; 1; 1)	(0; 0; 10; 13)
6	$17 \rightarrow 20$	(6; 1; 1)	(0; 0; 12; 14)
7	$2 \rightarrow 10$	(10; 1; 1)	(0; 0; 15; 18))
8	$10 \rightarrow 14$	(5; 1; 1)	(0; 0; 18; 20)
9	$7 \rightarrow 12$	(7; 1; 1)	(0; 0; 20; 23)
10	$14 \rightarrow 12$	(2; 1; 1)	(0; 0; 17; 20)

Tabela 5.12: Dados da Rede Multimodal da Figura 5.3

Arco	Origem \rightarrow Destino	\tilde{t}_0	Capacidades
11	12 \rightarrow 19	(12; 1; 1)	(0; 0; 18; 21)
12	19 \rightarrow 20	(4; 1; 1)	(0; 0; 20; 23)
13	$O \rightarrow 1$	(0; 0; 0)	(0; 0; 40; 43)
14	1 \rightarrow 4	(10; 1; 1)	(0; 0; 10; 13)
15	1 \rightarrow 9	(10; 1; 1)	(0; 0; 18; 20)
16	4 \rightarrow 6	(12; 1; 1)	(0; 0; 12; 15)
17	9 \rightarrow 11	(8; 1; 1)	(0; 0; 10; 13)
18	9 \rightarrow 13	(7; 1; 1)	(0; 0; 15; 18))
19	6 \rightarrow 11	(12; 1; 1)	(0; 0; 12; 14)
20	11 \rightarrow 16	(10; 1; 1)	(0; 0; 15; 18)
21	11 \rightarrow 18	(11; 1; 1)	(0; 0; 20; 23)
22	13 \rightarrow 16	(13; 1; 1)	(0; 0; 12; 14)
23	16 \rightarrow 18	(3; 1; 1)	(0; 0; 22; 25)
24	18 \rightarrow 20	(5; 1; 1)	(0; 0; 40; 43)
25	1 \rightarrow 2	(3; 1; 1)	(0; 0; 50; 53)
26	2 \rightarrow 1	(3; 1; 1)	(0; 0; 50; 53)
27	6 \rightarrow 7	(2; 1; 1)	(0; 0; 50; 53)
28	7 \rightarrow 6	(2; 1; 1)	(0; 0; 50; 53)
29	9 \rightarrow 10	(2; 1; 1)	(0; 0; 50; 53)
30	10 \rightarrow 9	(2; 1; 1)	(0; 0; 50; 53)
31	11 \rightarrow 12	(3; 1; 1)	(0; 0; 50; 53)
32	12 \rightarrow 11	(3; 1; 1)	(0; 0; 50; 53)
33	13 \rightarrow 14	(2; 1; 1)	(0; 0; 50; 53)
34	14 \rightarrow 13	(2; 1; 1)	(0; 0; 50; 53)
35	18 \rightarrow 19	(1; 0,5; 0,5)	(0; 0; 50; 53)
36	19 \rightarrow 18	(1; 0,5; 0,5)	(0; 0; 50; 53)

O algoritmo atendeu todas as demandas de acordo com o número de incrementos. Foram feitos testes com diferentes valores de I .

O envio de fluxo para $I = 2$ ocorreu segundo a Tabela 5.13. O tempo de processamento

foi de 0,16 segundos. O custo final total é $10^3 \cdot (1, 15641; 0, 1617; 0, 1617)$.

Tabela 5.13: Envio de fluxo para $I = 2$

caminho	μ_{cam}	fluxo enviado	custo inicial	custo atualizado
$O \rightarrow 1 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 14 \rightarrow 12 \rightarrow 19 \rightarrow 20$	1	9	(35; 6; 6)	(37, 0701; 6, 2232; 6, 2232)
$O \rightarrow 1 \rightarrow 9 \rightarrow 11 \rightarrow 18 \rightarrow 20$	0,5831	10	(35; 4; 4)	(38, 1776; 4, 3462; 4, 3462)
$O \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 15 \rightarrow 17 \rightarrow 20$	0,5420	11	(36; 5; 5)	(40, 0888; 5, 6583; 5, 6583)

Quanto à μ_{cam} , no caminho $O \rightarrow 1 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 14 \rightarrow 12 \rightarrow 19 \rightarrow 20$ é referente à μ_{custo} e μ_{capac} , pois $\mu_{cam} = 1$, nos caminhos $O \rightarrow 1 \rightarrow 9 \rightarrow 11 \rightarrow 18 \rightarrow 20$ e $O \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 15 \rightarrow 17 \rightarrow 20$ é referente à μ_{custo} .

O envio de fluxo para $I = 5$ ocorreu segundo a Tabela 5.14. O tempo de processamento foi de 0,23 segundos. O custo final total é $10^3 \cdot (1, 1474; 0, 1692; 0, 1692)$.

Tabela 5.14: Envio de fluxo para $I = 5$

caminho	μ_{cam}	fluxo enviado	custo inicial	custo atualizado
$O \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 15 \rightarrow 17 \rightarrow 20$	1	11	(36; 5; 5)	(40, 0888; 5, 6583; 5, 6583)
$O \rightarrow 1 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 14 \rightarrow 12 \rightarrow 19 \rightarrow 20$	1	12	(35; 6; 6)	(37, 4690; 6, 3216; 6, 3216)
$O \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 10 \rightarrow 14 \rightarrow 12 \rightarrow 19 \rightarrow 20$	1	1	(36; 6; 6)	(36, 8008; 6, 1083; 6, 1083)
$O \rightarrow 1 \rightarrow 9 \rightarrow 11 \rightarrow 18 \rightarrow 20$	0,9926	6	(35; 4; 4)	(36, 6705; 4, 1707; 4, 1707)

Quanto à μ_{cam} , nos caminhos $O \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 15 \rightarrow 17 \rightarrow 20$, e $O \rightarrow 1 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 14 \rightarrow 12 \rightarrow 19 \rightarrow 20$ e $O \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 10 \rightarrow 14 \rightarrow 12 \rightarrow 19 \rightarrow 20$ é referente à μ_{custo} e μ_{capac} , pois $\mu_{cam} = 1$, no caminho $O \rightarrow 1 \rightarrow 9 \rightarrow 11 \rightarrow 18 \rightarrow 20$ é referente à μ_{custo} .

O envio de fluxo para $I = 10$ ocorreu segundo a Tabela 5.15. O tempo de processamento foi de 0,3 segundos. O custo final total é $10^3 \cdot (1, 1211; 0, 1607; 0, 1607)$.

Tabela 5.15: Envio de fluxo para $I = 10$

caminho	μ_{cam}	fluxo enviado	custo inicial	custo atualizado
$O \rightarrow 1 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 14 \rightarrow 12 \rightarrow 19 \rightarrow 20$	1	9	(35; 6; 6)	(37, 1563; 6, 2661; 6, 2661)
$O \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 10 \rightarrow 14 \rightarrow 12 \rightarrow 19 \rightarrow 20$	1	3	(36; 6; 6)	(36, 6584; 6, 1162; 6, 1162)
$O \rightarrow 1 \rightarrow 9 \rightarrow 11 \rightarrow 18 \rightarrow 20$	0,9930	9	(35; 4; 4)	(37, 3631; 4, 2550; 4, 2550)
$O \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 15 \rightarrow 17 \rightarrow 20$	0,8637	9	(36; 5; 5)	(37, 8323; 5, 2950; 5, 2950)

Quanto à μ_{cam} , nos caminhos $O \rightarrow 1 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 14 \rightarrow 12 \rightarrow 19 \rightarrow 20$ e $O \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 10 \rightarrow 14 \rightarrow 12 \rightarrow 19 \rightarrow 20$ é referente à μ_{custo} e μ_{capac} , pois $\mu_{cam} = 1$, nos caminhos $O \rightarrow 1 \rightarrow 9 \rightarrow 11 \rightarrow 18 \rightarrow 20$ e $O \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 15 \rightarrow 17 \rightarrow 20$ é referente à μ_{custo} .

5.1.4 Instância 4

A Figura 5.4 representa a rede teste Sioux Falls. Esta rede não é multimodal, mas fizemos testes afim de mostrar que a abordagem proposta funciona também para casos particulares de redes multimodais, neste caso, temos uma rede monomodal. Os dados da rede Sioux Falls foram obtidos do site <http://www.bgu.ac.il/bargera/tntp/>, que é um site que contém instâncias de problemas de redes de transportes. Na prática, podemos considerar que esta rede representa o modo ônibus.

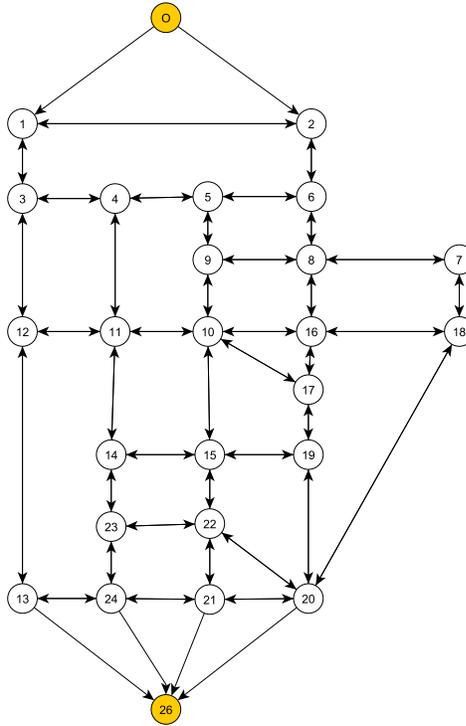


Figura 5.4: Rede Sioux Falls

A demanda para origem O e destino 26 é 33000.

Foram utilizados dois valores diferentes para o número de incrementos ($I = 100$ e $I = 1000$). Para $I = 100$, os resultados estão nas Tabelas 5.16 e 5.17. O tempo de processamento foi de 1,5 segundos. O custo final total é $10^5 \cdot (6, 8814; 1, 7241; 1, 7241)$.

Tabela 5.16: Envio de fluxo para $I = 100$

caminho	μ_{cam}	fluxo enviado
$O \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 18 \rightarrow 20 \rightarrow 26$	0,9413	3300
$O \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 18 \rightarrow 20 \rightarrow 26$	0,9304	6486
$O \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 12 \rightarrow 13 \rightarrow 26$	0,9032	10193
$O \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 15 \rightarrow 22 \rightarrow 21 \rightarrow 26$	0,9032	5431
$O \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 11 \rightarrow 14 \rightarrow 23 \rightarrow 24 \rightarrow 26$	0,8857	7590

Neste caso, μ_{cam} de cada caminho que compõem a solução final é referente à μ_{custo} .

Tabela 5.17: Custos dos caminhos para $I = 100$

caminho	custo inicial	custo atualizado
$O \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 18 \rightarrow 20 \rightarrow 26$	(20; 5; 5)	(20, 9207; 5, 2838; 5, 2838)
$O \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 18 \rightarrow 20 \rightarrow 26$	(20; 5; 5)	(20, 9032; 5, 2856; 5, 2856)
$O \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 12 \rightarrow 13 \rightarrow 26$	(19; 3; 3)	(20, 9249; 3, 3226; 3, 3226)
$O \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 15 \rightarrow 22 \rightarrow 21 \rightarrow 26$	(20; 7; 7)	(20, 6779; 7, 2833; 7, 2833)
$O \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 11 \rightarrow 14 \rightarrow 23 \rightarrow 24 \rightarrow 26$	(20; 6; 6)	(20, 8079; 6, 2282; 6, 2282)

Para $I = 1000$, os resultados estão nas Tabelas 5.18 e 5.19. O tempo de processamento foi de 3 segundos. O custo final total é $10^5 \cdot (6, 8812; 1, 7245; 1, 7245)$.

Tabela 5.18: Envio de fluxo para $I = 1000$

caminho	μ_{cam}	fluxo enviado
$O \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 18 \rightarrow 20 \rightarrow 26$	0,8997	3234
$O \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 18 \rightarrow 20 \rightarrow 26$	0,8996	6534
$O \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 12 \rightarrow 13 \rightarrow 26$	0,9029	10194
$O \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 15 \rightarrow 22 \rightarrow 21 \rightarrow 26$	0,8992	5452
$O \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 11 \rightarrow 14 \rightarrow 23 \rightarrow 24 \rightarrow 26$	0,9055	7586

Tabela 5.19: Custos dos caminhos para $I = 1000$

caminho	custo inicial	custo atualizado
$O \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 18 \rightarrow 20 \rightarrow 26$	(20; 5; 5)	(20, 9034; 5, 2794; 5, 2794)
$O \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 18 \rightarrow 20 \rightarrow 26$	(20; 5; 5)	(20, 9029; 5, 2851; 5, 2851)
$O \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 12 \rightarrow 13 \rightarrow 26$	(19; 3; 3)	(20, 9250; 3, 3226; 3, 3226)
$O \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 15 \rightarrow 22 \rightarrow 21 \rightarrow 26$	(20; 7; 7)	(20, 6871; 7, 2876; 7, 2876)
$O \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 11 \rightarrow 14 \rightarrow 23 \rightarrow 24 \rightarrow 26$	(20; 6; 6)	(20, 8066; 6, 2278; 6, 2278)

Assim como para $I = 100$, neste caso, μ_{cam} de todos caminhos da solução final é referente à μ_{custo} . Isso acontece, pois neste exemplo, o valor da capacidade em cada arco é da ordem de 10^4 .

5.1.5 Instância 5

A Figura 5.5 representa uma adaptação feita a partir da rede teste Sioux Falls afim de torná-la multimodal. Neste caso, consideramos dois modos de transporte: ônibus e metrô.

A demanda para origem O e destino D é 5500.

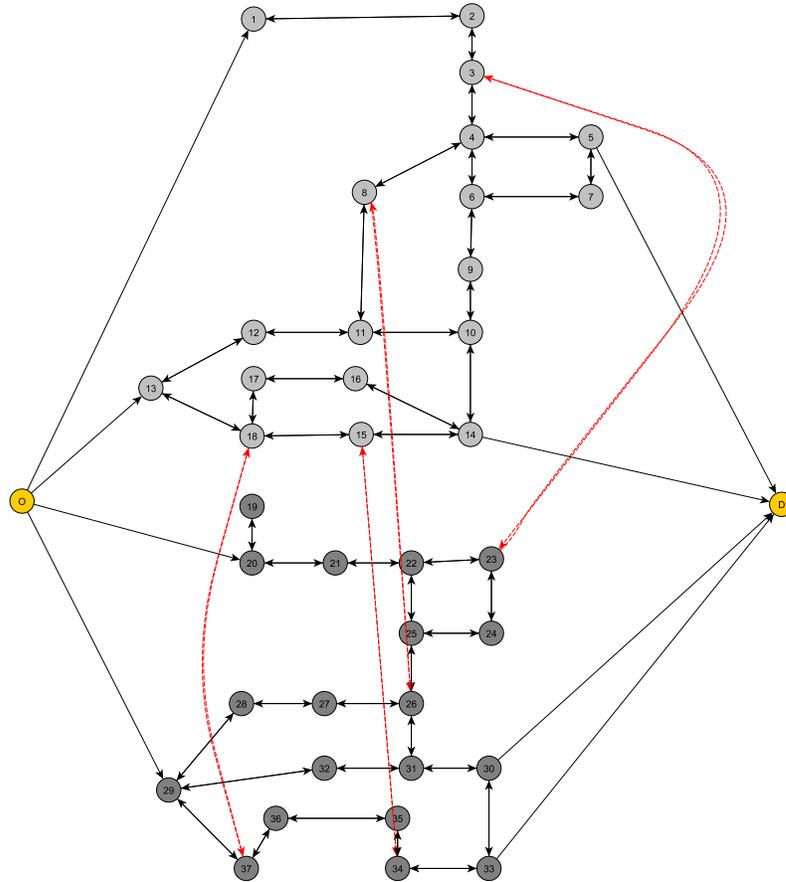


Figura 5.5: Rede Sioux Falls

O envio de fluxo para $I = 2$ ocorreu segundo a Tabela 5.20. O tempo de processamento foi de 0,24 segundos. O custo final total é $10^4 \cdot (8,9088; 1,6696; 1,6696)$.

Quanto à μ_{cam} , em ambos os caminhos que compõem a solução final, são referentes à μ_{custo} e μ_{capac} , pois $\mu_{cam} = 1$.

O envio de fluxo para $I = 1000$ ocorreu segundo a Tabela 5.21. O tempo de processamento foi de 3,4980 segundos. O custo final total é $10^4 \cdot (8,8103; 2,1533; 2,1533)$.

Tabela 5.20: Envio de fluxo para $I = 2$

caminho	μ_{cam}	fluxo enviado	custo inicial	custo atualizado
O → 13 → 18 → 15 → 14 → D	1	2750	(16; 3; 3)	(16, 2410; 3, 0454; 3, 0454)
O → 29 → 32 → 31 → 30 → D	1	2750	(16; 3; 3)	(16, 1546; 3, 0260; 3, 0260)

Tabela 5.21: Envio de fluxo para $I = 1000$

caminho	μ_{cam}	fluxo enviado	custo inicial	custo atualizado
O → 13 → 18 → 15 → 34 → 33 → D	1	132	(16; 4; 4)	(16, 0179; 4, 0045; 4, 0045)
O → 29 → 37 → 36 → 35 → 34 → 33 → D	1	1870	(16; 5; 5)	(16, 0189; 5, 0063; 5, 0063)
O → 13 → 18 → 17 → 16 → 14 → D	0,9999	1155	(16; 4; 4)	(16, 0187; 4, 0048; 4, 0048)
O → 29 → 32 → 31 → 30 → D	0,9969	1623	(16; 3; 3)	(16, 0187; 3, 0032; 3, 0032)
O → 13 → 18 → 15 → 14 → D	0,4281	720	(16; 3; 3)	(16, 0187; 3, 0046; 3, 0046)

Neste caso, μ_{cam} de cada caminho que compõe a solução final são referentes à μ_{custo} e μ_{capac} nos dois primeiros caminhos e à μ_{custo} nos demais caminhos.

O envio de fluxo para $I = 2750$ ocorreu segundo a Tabela 5.22. O tempo de processamento foi de 5 segundos. O custo final total é $10^4 \cdot (8, 8103; 2, 1552; 2, 1552)$.

Tabela 5.22: Envio de fluxo para $I = 2750$

caminho	μ_{cam}	fluxo enviado	custo inicial	custo atualizado
O → 13 → 18 → 15 → 14 → D	1	718	(16; 3; 3)	(16, 0187; 3, 0046; 3, 0046)
O → 13 → 18 → 17 → 16 → 14 → D	1	1156	(16; 4; 4)	(16, 0187; 4, 0048; 4, 0048)
O → 29 → 37 → 36 → 35 → 34 → 33 → D	1	1868	(16; 5; 5)	(16, 0188; 5, 0063; 5, 0063)
O → 29 → 32 → 31 → 30 → D	0,9566	1624	(16; 3; 3)	(16, 0188; 3, 0032; 3, 0032)
O → 13 → 18 → 15 → 34 → 33 → D	0,4803	134	(16; 4; 4)	(16, 0187; 4, 0048; 4, 0048)

Assim como para $I = 1000$, neste caso, μ_{cam} de cada caminho que compõe a solução final são referentes μ_{custo} e μ_{capac} nos três primeiros caminhos e à μ_{custo} nos demais caminhos.

O objetivo do algoritmo de carregamento incremental é tentar evitar que o fluxo passe completamente por um determinado caminho, congestionando-o. Como o algoritmo de caminhos mínimos *fuzzy* gera um conjunto de soluções não-dominadas (caminhos

não-dominados), podemos utilizá-las para o envio de fluxo através do carregamento incremental e a expectativa é que a medida que aumentamos o valor de I , o custo total diminua. Nas instâncias das Seções 5.1.3, 5.1.4 e 5.1.5 esse fato ocorreu. Na instância da Seção 5.1.1 houve um pequeno aumento no custo final total quando aumentamos o valor de I se compararmos o valor modal.

Na instância da Seção 5.1.2 houve uma redução no custo final total quando aumentamos o valor de I de 1 para 5 e um aumento quando aumentamos o valor de I de 5 para 7.

5.2 Resultados obtidos através do algoritmo 2

Nesta seção apresentamos os resultados obtidos através do algoritmo 2 que foi descrito na Seção 4.2.1.1. Foram utilizadas quatro instâncias, e para cada uma testamos o algoritmo com diferentes valores do custo de mudança de modo.

Vale ressaltar que devido a grande dificuldade em encontrar, na literatura, instâncias para testarmos o algoritmo 2, todos os exemplos apresentados nesta seção foram criados pelos autores deste trabalho. Esta dificuldade deve-se ao fato do algoritmo 2 ser inovativo.

5.2.1 Instância 1

Este exemplo ilustra a modelagem proposta na Seção 4.2.1 onde consideramos dois modos de transportes entre cada arco. Esta é uma rede pequena, apenas para fins ilustrativos, contendo 4 nós e 8 arcos.

Os arcos, os custos e os modos de transportes estão definidos na Tabela 5.23. Os arcos de cor preta são referentes ao modo 1 e os arcos de cor azul são referentes ao modo 2.

Fizemos testes para diferentes valores do custo de mudança de modo, conforme descrito abaixo.¹

- Considerando o custo de mudança de modo igual a 0, o algoritmo 2 encontrou o caminho mínimo $1 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{2} 4$ com custo 6.

¹O número em cima da seta em cada arco indica o modo de transporte utilizado para percorrê-lo.

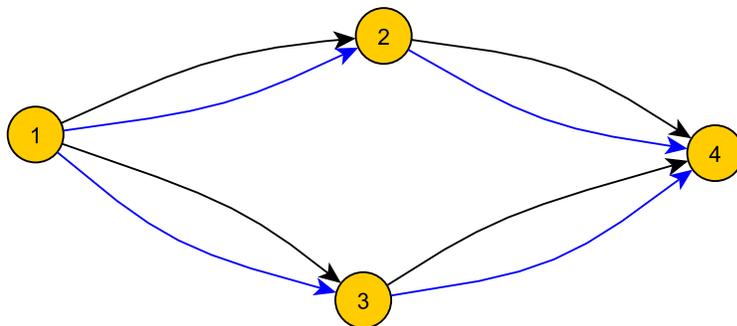


Figura 5.6: Rede Ilustrativa

Tabela 5.23: Dados da Rede Multimodal da Figura 5.6

Arco	Origem → Destino	Custos	Modos
1	1 → 2	4	1
2	1 → 2	5	2
3	1 → 3	3	1
4	1 → 3	5	2
5	2 → 4	3	1
6	2 → 4	2	2
7	3 → 4	4	1
8	3 → 4	4	2

- Considerando o custo de mudança de modo igual a 0,5, o caminho mínimo encontrado é $1 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{2} 4$ com custo 6,5.
- Considerando o custo de mudança de modo igual a 1, o caminho mínimo encontrado é $1 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{1} 4$ com custo 7. Neste caso, há outros caminhos com o mesmo custo: $1 \xrightarrow{1} 3 \xrightarrow{1} 4$ e $1 \xrightarrow{2} 2 \xrightarrow{2} 4$. A escolha do caminho, neste caso, é feita através da ordem que os mesmos aparecem na execução do algoritmo, ressaltando que neste exemplo, consideramos duas etiquetas por nó (número de modos considerados na rede).

Este teste ilustrativo nos mostra que à medida que mudamos o valor do custo de mudança de modo, os caminhos mínimos podem mudar, mas a partir de um determinado

valor para o custo de mudança de modo, o caminho mínimo encontrado será sempre o mesmo, neste caso, para valores maiores ou iguais a 1.

Observemos ainda que, neste caso, ao examinar o nó 4, temos oito caminhos chegando em tal nó, o que torna necessário limitar o número de etiquetas por nó, como já foi dito anteriormente.

5.2.2 Instância 2

Neste exemplo também consideramos dois modos de transportes entre cada arco. Esta é uma rede pequena, contendo 4 nós e 10 arcos.

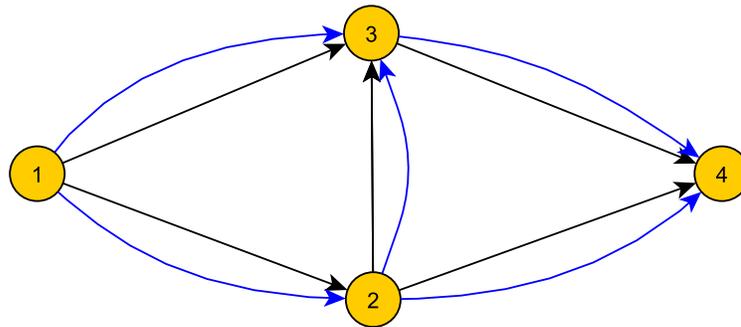


Figura 5.7: Rede com dois modos de transporte

Os arcos, os custos e os modos de transportes estão definidos na Tabela 5.24. Os arcos de cor preta são referentes ao modo 1 e os arcos de cor azul são referentes ao modo 2.

Tabela 5.24: Dados da Rede Multimodal da Figura 5.7

Arco	Origem \rightarrow Destino	Custos	Modos
1	1 \rightarrow 2	6	1
2	1 \rightarrow 2	6	2
3	1 \rightarrow 3	5	1
4	1 \rightarrow 3	4	2
5	2 \rightarrow 3	2	1
6	2 \rightarrow 3	1	2
7	2 \rightarrow 4	4	1
8	2 \rightarrow 4	2	2
9	3 \rightarrow 4	5	1
10	3 \rightarrow 4	4	2

Neste exemplo, também consideramos diferentes valores para o custo de mudança de modo, mas em todos os casos, o algoritmo 2 encontrou o caminho mínimo:

1 $\xrightarrow{2}$ 2 $\xrightarrow{2}$ 4 com custo 8.

5.2.3 Instância 3

Neste exemplo também consideramos dois modos de transportes entre cada par de nós do grafo. A rede contém 6 nós e 18 arcos.

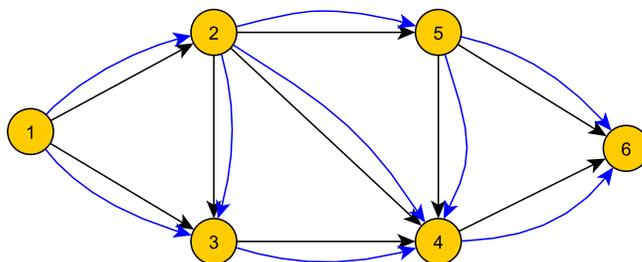


Figura 5.8: Rede com dois modos de transporte

Os arcos, custos e os modos de transportes estão definidos na Tabela 5.25. Os arcos de cor preta são referentes ao modo 1 e os arcos de cor azul são referentes ao modo 2.

Tabela 5.25: Dados da Rede Multimodal da Figura 5.8

Arco	Origem \rightarrow Destino	Custos	Modos
1	1 \rightarrow 2	4	1
2	1 \rightarrow 2	4	2
3	1 \rightarrow 3	2	1
4	1 \rightarrow 3	3	2
5	2 \rightarrow 3	3	1
6	2 \rightarrow 3	3	2
7	2 \rightarrow 4	6	1
8	2 \rightarrow 4	5	2
9	2 \rightarrow 5	5	1
10	2 \rightarrow 5	4	2
11	3 \rightarrow 4	5	1
12	3 \rightarrow 4	6	2
13	4 \rightarrow 6	2	1
14	4 \rightarrow 6	2	2
15	5 \rightarrow 4	5	1
16	5 \rightarrow 4	2	2
17	5 \rightarrow 6	1	1
18	5 \rightarrow 6	2	2

A Tabela 5.26 apresenta os resultados obtidos através do algoritmo 2 para diferentes valores do custo de mudança de modo.

Tabela 5.26: Resultados obtidos através do algoritmo 2

Custo de mudança	Caminho mínimo	Custo do caminho
0	1 \rightarrow^1 3 \rightarrow^1 4 \rightarrow^1 6	9
0,5	1 \rightarrow^1 3 \rightarrow^1 4 \rightarrow^1 6	9
2	1 \rightarrow^1 3 \rightarrow^1 4 \rightarrow^1 6	9

Quando o custo de mudança é zero, o caminho 1 \rightarrow^1 3 \rightarrow^1 4 \rightarrow^2 6 também tem

custo 9, isso acontece pois o arco $4 \rightarrow 6$ tem o mesmo custo para os dois modos de transporte considerados. Para valores do custo de mudança maiores que zero, o caminho mínimo encontrado será sempre o mesmo, no caso $1 \xrightarrow{1} 3 \xrightarrow{1} 4 \xrightarrow{1} 6$.

Observe que, neste exemplo, não precisaríamos fazer testes com valores do custo de mudança diferentes de zero, pois como não houve mudança de modo para tal custo de mudança de modo, aumentando o mesmo também não haverá caminhos mínimos com mudança de modo.

5.2.4 Instância 4

Neste exemplo, a rede multimodal é constituída de 17 nós e 52 arcos, contendo três modos de transporte. Os nós 1 e 6 são nós origem e o nó 17 é nó destino. Os arcos de cor preta são referentes ao modo 1, os arcos de cor azul são referentes ao modo 2 e os arcos de cor vermelha são referentes ao modo 3.

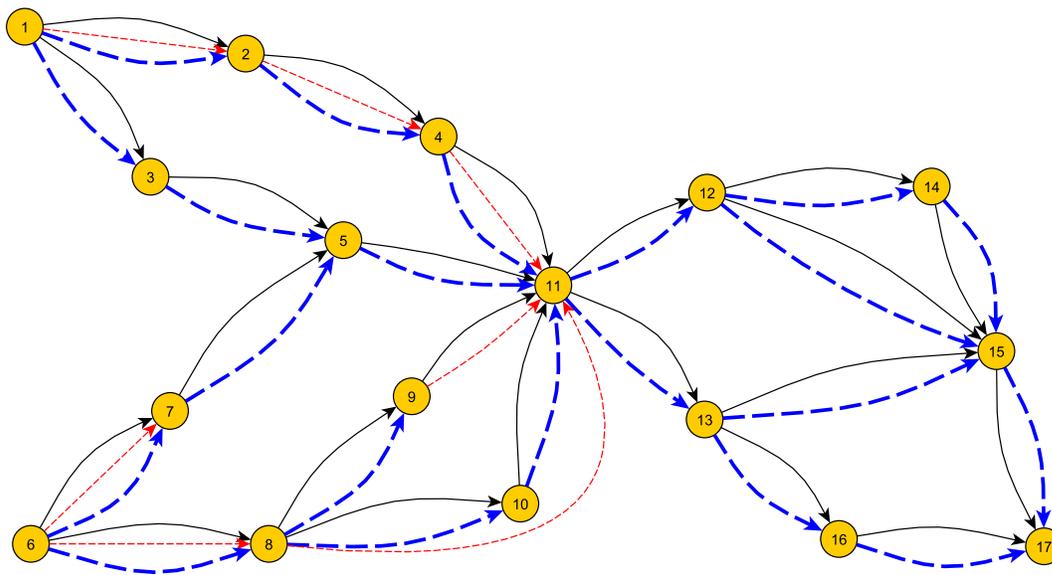


Figura 5.9: Rede com três modos de transporte entre alguns nós

Os arcos, custos e os modos de transporte estão definidos na Tabela 5.27.

Tabela 5.27: Dados da Rede Multimodal da Figura 5.9

Arco	Origem → Destino	Custos	Modos	Arco	Origem → Destino	Custos	Modos
1	1 → 2	4	1	27	8 → 10	5	2
2	1 → 2	7	2	28	8 → 11	13	3
3	1 → 2	3	3	29	9 → 5	4	1
4	1 → 3	2	1	30	9 → 5	1	2
5	1 → 3	7	2	31	9 → 11	5	1
6	2 → 4	3	1	32	9 → 11	2	3
7	2 → 4	4	2	33	10 → 11	3	1
8	2 → 4	7	3	34	10 → 11	6	2
9	3 → 5	5	1	35	11 → 12	12	1
10	3 → 5	3	2	36	11 → 12	2	2
11	4 → 11	7	1	37	11 → 13	11	1
12	4 → 11	6	2	38	11 → 13	4	2
13	4 → 11	5	3	39	12 → 14	4	1
14	5 → 11	6	1	40	12 → 14	5	2
15	5 → 11	5	2	41	12 → 15	10	1
16	6 → 7	2	1	42	12 → 15	12	2
17	6 → 7	7	2	43	13 → 15	5	1
18	6 → 7	2	3	44	13 → 15	7	2
19	6 → 8	4	1	45	13 → 16	8	1
20	6 → 8	5	2	46	13 → 16	9	2
21	6 → 8	2	3	47	14 → 15	4	1
22	7 → 5	8	1	48	14 → 15	4	2
23	7 → 5	3	2	49	15 → 17	5	1
24	8 → 9	3	1	50	15 → 17	3	2
25	8 → 9	4	2	51	16 → 17	3	1
26	8 → 10	3	1	52	16 → 17	2	2

As Tabelas 5.28 e 5.29 apresentam os resultados obtidos através do algoritmo 2 para diferentes valores do custo de mudança de modo considerando os nós 1 e 6 como nós

origem.

Tabela 5.28: Resultados obtidos através do algoritmo 2 para o nó origem 1

Custo de mudança	Caminho mínimo	Custo do caminho
0	1 \rightarrow^1 3 \rightarrow^2 5 \rightarrow^2 11 \rightarrow^2 13 \rightarrow^1 15 \rightarrow^2 17	22
0,5	1 \rightarrow^1 3 \rightarrow^2 5 \rightarrow^2 11 \rightarrow^2 13 \rightarrow^1 15 \rightarrow^2 17	23,5
2	1 \rightarrow^1 3 \rightarrow^2 5 \rightarrow^2 11 \rightarrow^2 13 \rightarrow^2 15 \rightarrow^2 17	26
4	1 \rightarrow^1 3 \rightarrow^1 5 \rightarrow^1 11 \rightarrow^2 13 \rightarrow^2 15 \rightarrow^2 17	31
8	1 \rightarrow^1 3 \rightarrow^1 5 \rightarrow^1 11 \rightarrow^1 13 \rightarrow^1 15 \rightarrow^1 17	34

Tabela 5.29: Resultados obtidos através do algoritmo 2 para o nó origem 6

Custo de mudança	Caminho mínimo	Custo do caminho
0	6 \rightarrow^3 8 \rightarrow^1 9 \rightarrow^3 11 \rightarrow^2 13 \rightarrow^1 15 \rightarrow^2 17	19
0,5	6 \rightarrow^3 8 \rightarrow^1 9 \rightarrow^3 11 \rightarrow^2 13 \rightarrow^1 15 \rightarrow^2 17	21,5
2	6 \rightarrow^3 8 \rightarrow^1 10 \rightarrow^1 11 \rightarrow^2 13 \rightarrow^2 15 \rightarrow^2 17	26
4	6 \rightarrow^3 8 \rightarrow^1 10 \rightarrow^1 11 \rightarrow^2 13 \rightarrow^2 15 \rightarrow^2 17	30
8	6 \rightarrow^3 8 \rightarrow^3 11 \rightarrow^2 13 \rightarrow^2 15 \rightarrow^2 17	37

Neste exemplo, fizemos testes para outros valores do custo de mudança de modo e observamos que para valores maiores ou iguais a 8, o caminho mínimo encontrado é sempre o mesmo.

Analisando os resultados obtidos em cada instância, concluímos que o valor do custo de mudança de modo interfere no caminho mínimo encontrado, fato que é condizente com o que acontece em problemas reais, visto que os usuários geralmente não estão dispostos a mudar de modo, mas muitas vezes não há outra opção.

5.3 Resultados obtidos através do algoritmo 3

Nesta seção apresentamos os resultados obtidos através do algoritmo 3 que foi descrito na Seção 4.2.2.1. Foram utilizadas três instâncias (todas já foram testadas na seção

anterior) e, assim como na Seção 5.1, fizemos testes para diferentes valores do número de incrementos.

A análise dos resultados foi feita baseando-se no fluxo enviado por cada caminho, no custo atualizado de cada caminho, no custo final total e no número de incrementos. O custo atualizado é calculado após o envio da última parcela de fluxo.

Em todos os exemplos apresentados, foram feitos testes com diferentes valores do custo de mudança de modo, mas os resultados apresentados foram obtidos considerando o valor do custo de mudança de modo 0,5. Como tal custo influencia nos caminhos mínimos encontrados em cada iteração e, neste algoritmo, o principal objetivo é o carregamento incremental de fluxo, optamos por utilizar apenas um valor do custo de mudança de modo nos resultados descritos a seguir.

5.3.1 Instância 1

Este exemplo ilustra a modelagem proposta na Seção 4.2.2. A rede considerada é a mesma da Figura 5.6, onde consideramos 2 modos de transporte entre cada nó do grafo. A demanda para origem 1 e destino 4 é 20.

Os arcos, os custos, os modos de transportes estão definidos na Tabela 5.30. A capacidade total (quantidade máxima de fluxo a transitar em cada arco independente do modo de transporte) de cada arco é 10, ou seja, a capacidade não é definida por modo e sim por arco. O custo de mudança considerado é 0,5.

Tabela 5.30: Dados da Rede Multimodal da Figura 5.6

Arco	Origem \rightarrow Destino	Custos	Modos
1	1 \rightarrow 2	4	1
2	1 \rightarrow 2	5	2
3	1 \rightarrow 3	3	1
4	1 \rightarrow 3	5	2
5	2 \rightarrow 4	3	1
6	2 \rightarrow 4	2	2
7	3 \rightarrow 4	4	1
8	3 \rightarrow 4	4	2

O algoritmo 3, descrito na Seção 4.2.2.1 atendeu a demanda da rede conforme o número de incrementos. Foram feitos testes para diferentes valores de I (número de incrementos).

O envio de fluxo para $I = 1$ ocorreu segundo a Tabela 5.31. O tempo de processamento foi de 0,1 segundos. O custo final total é 154,5.

Tabela 5.31: Envio de fluxo para $I = 1$

caminho	fluxo enviado	custo inicial	custo atualizado
1 \rightarrow^1 2 \rightarrow^2 4	10	6,5	7,4
1 \rightarrow^1 3 \rightarrow^1 4	10	7	8,05

O envio de fluxo para $I = 2$ ocorreu segundo a Tabela 5.32. O tempo de processamento foi de 0,2 segundos. O custo final total é 154,5.

Tabela 5.32: Envio de fluxo para $I = 2$

caminho	fluxo enviado	custo inicial	custo atualizado
1 \rightarrow^1 2 \rightarrow^2 4	10	6,5	7,4
1 \rightarrow^1 3 \rightarrow^1 4	10	7	8,05

O envio de fluxo para $I = 4$ ocorreu segundo a Tabela 5.33. O tempo de processamento foi de 0,4 segundos. O custo final total é 154,5.

Tabela 5.33: Envio de fluxo para $I = 4$

caminho	fluxo enviado	custo inicial	custo atualizado
$1 \rightarrow^1 2 \rightarrow^2 4$	10	6,5	7,4
$1 \rightarrow^1 3 \rightarrow^1 4$	10	7	8,05

Neste exemplo, os resultados obtidos para os três valores de I são iguais, e apesar de não ser o resultado ideal, visto que, em algoritmos de carregamento incremental de fluxo, o ideal é que a medida que o valor de I aumenta, a solução encontrada muda e o custo total final diminua; a igualdade dos resultados obtidos neste exemplo, justificase pelo fato que o caminho $1 \rightarrow^1 2 \rightarrow^2 4$ continua sendo o caminho mínimo após o envio de várias parcelas de fluxo (para $I = 4$), portanto, tal caminho é utilizado até o fluxo atingir a capacidade dos arcos do mesmo. Quando este caminho está “cheio”, o caminho mínimo é $1 \rightarrow^1 3 \rightarrow^1 4$, e o fluxo restante passa por este caminho. Vale ressaltar que este fato ocorreu apenas neste exemplo.

5.3.2 Instância 2

Neste exemplo utilizamos a rede da Figura 5.8. Os arcos, os custos, os modos de transportes estão definidos nas Tabelas 5.34 e 5.35. A capacidade total de cada arco é 40.

Os arcos de cor preta são referentes ao modo 1 e os arcos de cor azul são referentes ao modo 2. A demanda para origem 1 e destino 6 é 60. O custo de mudança considerado é 0,5.

Tabela 5.34: Dados da Rede Multimodal da Figura 5.8

Arco	Origem \rightarrow Destino	Custos	Modos
1	1 \rightarrow 2	4	1
2	1 \rightarrow 2	4	2
3	1 \rightarrow 3	2	1
4	1 \rightarrow 3	3	2
5	2 \rightarrow 3	3	1
6	2 \rightarrow 3	3	2

Tabela 5.35: Dados da Rede Multimodal da Figura 5.8

Arco	Origem \rightarrow Destino	Custos	Modos
7	2 \rightarrow 4	6	1
8	2 \rightarrow 4	5	2
9	2 \rightarrow 5	5	1
10	2 \rightarrow 5	4	2
11	3 \rightarrow 4	5	1
12	3 \rightarrow 4	6	2
13	4 \rightarrow 6	2	1
14	4 \rightarrow 6	2	2
15	5 \rightarrow 4	5	1
16	5 \rightarrow 4	2	2
17	5 \rightarrow 6	1	1
18	5 \rightarrow 6	2	2

O algoritmo 3 atendeu todas as demandas de acordo com o número de incrementos. Foram feitos testes para diferentes valores de I .

O envio de fluxo para $I = 1$ ocorreu segundo a Tabela 5.36. O tempo de processamento foi de 0,1 segundos. O custo final total é 615,8740.

O envio de fluxo para $I = 3$ ocorreu segundo a Tabela 5.37. O tempo de processamento foi de 0,2 segundos. O custo final total é 615,8740.

Tabela 5.36: Envio de fluxo para $I = 1$

caminho	fluxo enviado	custo inicial	custo atualizado
$1 \rightarrow^1 3 \rightarrow^1 4 \rightarrow^1 6$	40	9	10,35
$1 \rightarrow^2 2 \rightarrow^2 5 \rightarrow^2 6$	20	10	10,0937

Tabela 5.37: Envio de fluxo para $I = 3$

caminho	fluxo enviado	custo inicial	custo atualizado
$1 \rightarrow^1 3 \rightarrow^1 4 \rightarrow^1 6$	40	9	10,35
$1 \rightarrow^2 2 \rightarrow^2 5 \rightarrow^2 6$	20	10	10,0937

O envio de fluxo para $I = 6$ ocorreu segundo a Tabela 5.38. O tempo de processamento foi de 0,4 segundos. O custo final total é 614,9960.

Tabela 5.38: Envio de fluxo para $I = 6$

caminho	fluxo enviado	custo inicial	custo atualizado
$1 \rightarrow^1 3 \rightarrow^1 4 \rightarrow^1 6$	40	9	10,35
$1 \rightarrow^2 2 \rightarrow^2 5 \rightarrow^2 6$	10	10	10,0058
$1 \rightarrow^1 2 \rightarrow^1 5 \rightarrow^1 6$	10	10	10,0938

Neste caso os resultados obtidos para $I = 1$ e para $I = 3$ são iguais, para $I = 6$ os resultados são diferentes e como esperado, o valor do custo final total para $I = 6$ é menor que os valores encontrados para os demais incrementos. Portanto, a medida em que se aumenta o número de incrementos, a tendência é que o custo final total diminua.

5.3.3 Instância 3

Neste exemplo, utilizamos a rede da Figura 5.9 que é constituída de 17 nós e 52 arcos, contendo três modos de transporte e fizemos os testes considerando apenas o nó 1 como nó origem. A demanda para origem 1 e destino 17 é 60.

Os arcos, os custos, os modos de transportes estão definidos na Tabela 5.39. A capacidade total de cada arco é 50, exceto no arco $15 \rightarrow 17$ que é 80.

Tabela 5.39: Dados da Rede Multimodal da Figura 5.9

Arco	Origem → Destino	Custos	Modos	Arco	Origem → Destino	Custos	Modos
1	1 → 2	4	1	27	8 → 10	5	2
2	1 → 2	7	2	28	8 → 11	13	3
3	1 → 2	3	3	29	9 → 5	4	1
4	1 → 3	2	1	30	9 → 5	1	2
5	1 → 3	7	2	31	9 → 11	5	1
6	2 → 4	3	1	32	9 → 11	2	3
7	2 → 4	4	2	33	10 → 11	3	1
8	2 → 4	7	3	34	10 → 11	6	2
9	3 → 5	5	1	35	11 → 12	12	1
10	3 → 5	3	2	36	11 → 12	2	2
11	4 → 11	7	1	37	11 → 13	11	1
12	4 → 11	6	2	38	11 → 13	4	2
13	4 → 11	5	3	39	12 → 14	4	1
14	5 → 11	6	1	40	12 → 14	5	2
15	5 → 11	5	2	41	12 → 15	10	1
16	6 → 7	2	1	42	12 → 15	12	2
17	6 → 7	7	2	43	13 → 15	5	1
18	6 → 7	2	3	44	13 → 15	7	2
19	6 → 8	4	1	45	13 → 16	8	1
20	6 → 8	5	2	46	13 → 16	9	2
21	6 → 8	2	3	47	14 → 15	4	1
22	7 → 5	8	1	48	14 → 15	4	2
23	7 → 5	3	2	49	15 → 17	5	1
24	8 → 9	3	1	50	15 → 17	3	2
25	8 → 9	4	2	51	16 → 17	3	1
26	8 → 10	3	1	52	16 → 17	2	2

O algoritmo 3 atendeu todas as demandas de acordo com o número de incrementos.

Foram feitos testes para diferentes valores de I .

O envio de fluxo para $I = 1$ ocorreu segundo a Tabela 5.40. O tempo de processamento foi de 2 segundos. O custo final total é 1596.

Tabela 5.40: Envio de fluxo para $I = 1$

caminho	fluxo enviado	custo inicial	custo atualizado
$1 \rightarrow^1 3 \rightarrow^2 5 \rightarrow^2 11 \rightarrow^2 13 \rightarrow^1 15 \rightarrow^2 17$	50	23,5	26,4924
$1 \rightarrow^1 2 \rightarrow^2 4 \rightarrow^2 11 \rightarrow^2 12 \rightarrow^1 14 \rightarrow^2 15 \rightarrow^2 17$	10	26,0687	27,1477

O envio de fluxo para $I = 2$ ocorreu segundo a Tabela 5.41. O tempo de processamento foi de 3 segundos. O custo final total é 1596.

Tabela 5.41: Envio de fluxo para $I = 2$

caminho	fluxo enviado	custo inicial	custo atualizado
$1 \rightarrow^1 3 \rightarrow^2 5 \rightarrow^2 11 \rightarrow^2 13 \rightarrow^1 15 \rightarrow^2 17$	50	23,5	26,4924
$1 \rightarrow^1 2 \rightarrow^2 4 \rightarrow^2 11 \rightarrow^2 12 \rightarrow^1 14 \rightarrow^2 15 \rightarrow^2 17$	10	26,0687	27,1477

O envio de fluxo para $I = 5$ ocorreu segundo a Tabela 5.42. O tempo de processamento foi de 2 segundos. O custo final total é 1585.

Tabela 5.42: Envio de fluxo para $I = 5$

caminho	fluxo enviado	custo inicial	custo atualizado
$1 \rightarrow^1 3 \rightarrow^2 5 \rightarrow^2 11 \rightarrow^2 13 \rightarrow^1 15 \rightarrow^2 17$	48	23,5	26,2890
$1 \rightarrow^1 3 \rightarrow^2 5 \rightarrow^2 11 \rightarrow^2 12 \rightarrow^2 14 \rightarrow^2 15 \rightarrow^2 17$	2	25,8323	26,1474
$1 \rightarrow^3 2 \rightarrow^1 4 \rightarrow^2 11 \rightarrow^2 12 \rightarrow^1 14 \rightarrow^1 15 \rightarrow^2 17$	10	26,0687	27,1502

Neste exemplo, os resultados obtidos para $I = 1$ e para $I = 3$ são iguais, já para $I = 5$ o resultado obtido é diferente dos demais, e o custo final total é menor que nos demais casos.

Neste capítulo, apresentamos os testes computacionais realizados com os três algoritmos propostos. Os resultados obtidos em cada exemplo apresentado de cada algoritmo proposto, mostram a eficiência dos mesmos. A principal dificuldade encontrada para realização dos testes computacionais, foi com relação às instâncias, pois como os três algoritmos apresentados são inovadores, foi necessário adaptações nas instâncias encontradas na literatura (no caso do algoritmo 1, adaptamos algumas instâncias) e criações

de instâncias para testar o algoritmo 2 e o algoritmo 3. Vale ressaltar que esta dificuldade não prejudicou a verificação da eficiência de todos os algoritmos propostos.

No próximo capítulo, apresentamos as conclusões deste trabalho bem como as perspectivas de trabalhos futuros.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste capítulo são apresentadas as conclusões da tese, as perspectivas de trabalhos futuros e os trabalhos publicados.

6.1 Conclusões

Problemas de redes de transporte têm sido extensamente estudados e aplicados nas soluções de problemas reais. Uma vez que a complexidade de tais problemas consome uma grande quantidade de recursos computacionais e, na maioria dos casos, os mesmos não podem ser resolvidos usando ferramentas determinísticas que forneçam resultados exatos, a busca por outras formas de resolução é de suma importância.

Este trabalho apresentou três métodos para tratar o problema de redes de transporte multimodal. O primeiro método abordou incertezas nos custos e nas capacidades dos arcos e tratou do problema de fluxo em redes de transportes multimodal, onde primeiramente encontramos os caminhos mínimos não-dominados e posteriormente distribuimos o fluxo pela rede de forma incremental, através dos caminhos encontrados. Através do carregamento incremental de fluxo, conseguimos distribuir o fluxo pela rede de forma equilibrada, sem congestionar os caminhos mínimos utilizados. Outro aspecto importante deste algoritmo é o fato do custo nos arcos depender do fluxo nos mesmos, o que

torna o algoritmo mais aderente à realidade, da mesma forma em que aumenta a complexidade do mesmo, pois os caminhos mínimos não-dominados são calculados em cada iteração do algoritmo. Este método, assim como os demais apresentados, é inovador, pois não há conhecimento de trabalhos na literatura que faz a junção dos algoritmos decaminho mínimo *fuzzy* e de carregamento incremental de fluxo para propor um novo algoritmo.

A análise dos resultados computacionais comprovou a eficiência do primeiro método apresentado, que usou a teoria dos conjuntos *fuzzy* no tratamento de parâmetros incertos mostrando-se promissor para obter boas soluções em diversos problemas, dentre eles, o de redes de transporte multimodal que é abordado neste trabalho. Vale ressaltar que trabalhamos com o problema na forma *fuzzy* durante todo o procedimento de resolução.

Por fim, vale lembrar, que este algoritmo de carregamento incremental de fluxo não se restringe à problemas de redes de transporte multimodal, podendo ser aplicado em outros tipos de problemas que podem ser modelados na forma de rede.

O segundo método tratou o problema de caminho mínimo em grafos coloridos, uma abordagem inovadora e que se mostrou promissora na resolução dos problemas apresentados na Seção 5.2. Ao considerar diferentes valores para o custo de mudança de modo, diferentes soluções foram encontradas, fato que ocorre em problemas reais, já que os usuários, em geral, não estão dispostos a realizar mudança de modo, mas fazem tal mudança quando não tem outra opção. O algoritmo detecta as mudanças de modo através da coloração dos arcos e um custo referente a esta mudança é acrescentado no caminho. O uso da coloração em grafos, neste caso, torna o algoritmo mais inteligente e aderente à realidade, já que diferentes modos de transporte, como por exemplo, veículos particulares, ônibus e vans, compartilham a mesma rede e a coloração permite diferenciá-los.

Vale lembrar que este método é inovador, pois na literatura encontramos um trabalho que propõe um algoritmo semelhante, porém baseado no algoritmo clássico de Dijkstra.

O terceiro método tratou o problema de fluxo em redes multimodais com custos e capacidades *crisps*. Para encontrar os caminhos mínimos utilizamos o segundo método

e assim como no primeiro método o envio de fluxo foi feito de forma incremental. Analisando os resultados obtidos através dos testes computacionais, podemos verificar a eficiência do método, que atendeu todas as demandas para diferentes valores do número de incrementos. Este método também é inovador, visto que usa o segundo método para encontrar os caminhos mínimos e não há conhecimento de trabalhos na literatura que tratam problemas de redes de transporte multimodal ou problemas correlatos da forma aqui apresentada.

Além dos três métodos, nesta tese foi feita uma extensa revisão bibliográfica dos vários tipos de métodos usados para tratar o problema de redes de transporte multimodal.

O grande diferencial dos métodos aqui apresentados em relação aos trabalhos encontrados na literatura referentes ao tema abordado neste trabalho, deve-se ao uso da teoria dos conjuntos *fuzzy*, o fato do custo depender do fluxo nos arcos (algoritmo 1 e algoritmo 3) e o uso da coloração em grafos de forma diferente dos tipos de coloração clássica.

6.2 Perspectivas Futuras

- Fazer análise de sensibilidade nos testes computacionais realizados com todos os algoritmos propostos a fim de verificar a estabilidade das soluções diante das variações dos parâmetros envolvidos.
- No caso do algoritmo de caminho mínimo para grafos coloridos (Seção 4.2.1.1), uma ideia é estudar a viabilidade de considerar os custos *fuzzy*, bem como modelar o custo de mudança de modo através de alguma função que leve em conta os fatores que influenciam em tal mudança.
- Realizar testes considerando várias origens e vários destinos no algoritmo 2 (Seção 4.2.1.1) e no algoritmo 3 (Seção 4.2.2.1) e considerar custos de mudança de modo diferentes para cada arco.
- Realizar testes computacionais em instâncias maiores no algoritmo 2 (Seção 4.2.1.1) e no algoritmo 3 (Seção 4.2.2.1).

- Verificar a possibilidade de utilizar otimização multiobjetivo para os três algoritmos propostos.
- Em todos os algoritmos pretendemos realizar testes computacionais com redes reais, como por exemplo, a rede de transporte metropolitano de São Paulo.

6.3 Trabalhos publicados e submetidos

Durante esse período foram aceitos seis trabalhos para apresentação em congresso e foi submetido um artigo para publicação em revista:

- (Verga, J., Yamakami, A., Silva, R. C., Shirabayashi, W.V.I) Algoritmo de caminho mínimo para grafos coloridos aplicado a redes de transporte multimodal, XXXV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, setembro de 2014, Natal-RN.
- (Verga, J., Yamakami, A., Silva, R. C., Shirabayashi, W.V.I) A flow incremental loading algorithm to solve fuzzy multimodal transport problems, IEEE 2014 Conference on Norbert Wiener in the 21st Century, junho de 2014, Boston- Estados Unidos.
- (Verga, J., Yamakami, A., Silva, R. C., Shirabayashi, W.V.I) Problema de redes de transporte multimodal: uma abordagem utilizando a teoria dos conjuntos *fuzzy*, XLV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, setembro de 2013, Natal-RN.
- (Verga, J., Yamakami, A., Silva, R. C., Shirabayashi, W.V.I) Using the Fuzzy Sets Theory in the Multimodal Transport Network Problem, IFSA World Congress NAFIPS Annual Meeting, junho de 2013, Edmonton-Canadá.
- (Verga, J., Yamakami, A., Silva, R. C., Shirabayashi, W.V.I) Proposta de solução para o problema de redes de transporte multimodal com custos *fuzzy*, II Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy, novembro de 2012, Natal-RN.

- (Verga, J., Yamakami, A.) Uma abordagem para o problema de transporte multimodal fuzzy, *I Congresso de Matemática Aplicada e Computacional da Região Sudeste*, setembro de 2011, Uberlândia-MG.
- (Verga, J., Yamakami, A., Silva, R. C.) “A review about multimodal transport network problem: classical and innovative approaches”, submetido, em março de 2014, à revista *Public Transport: Planning and Operations*.

- [1] R. A. Abbaspour, F. Samadzadegan. An evolutionary solution for multimodal shortest path problem in metropolises. *Computer Science and Information Systems* 7(4)2010, 1-24.
- [2] R. A. Abbaspour, F. Samadzadegan. A solution for time-dependent multimodal shortest path problem. *Journal of Applied Sciences*, 9(21)2009, 3804-3812.
- [3] Ahuja, T. L., Magnanti, R. K., Network Flows. Prentice Hall, Philadelphia, PA, USA, 1993.
- [4] R. Akçelik. Travel time functions for transport planning purposes: Davidson's function, its time-dependent form and an alternative travel time function. *Australian Road Research Report* 21(3) 1991, 49-59.
- [5] M. Alivand, A. A. Alesheikh, M. R. Malek. New method for finding optimal path in dynamic networks. *World Applied Sciences Journal*, 3(1)2008, 25-33.
- [6] E. E. Ammar, E. A. Youness. Study on multiobjective transportation problem with fuzzy numbers. *Applied Mathematics and Computation*, 166(2005), 241-253.
- [7] D. Ambrosino, A. Sciomachen. A shortest path algorithm in multimodal networks: a case study with time varying costs. *Proceedings of International Network Optimization Conference*, Pisa, Itália, 2009.

- [8] H. Ayed, C. Galvez-Fernandez, Z. Habbas, D. Khadraoui. Solving time-dependent multimodal transport problems using a transfer graph model. *Computer & Industrial Engineering*, 2010, In Press.
- [9] H. Ayed, C. Galvez-Fernandez, Z. Habbas, D. Khadraoui. Hybrid algorithm for solving a multimodal transport problems using a transfer graph model. *UBIROADS Workshop*, Tunisia, 2009.
- [10] R. E. Bellman. On a routing problem. *Quarterly Applied Mathematics*, 16(1958), 87-90.
- [11] B. Beltran, S. Carrese, E. Cipriani, M. Petrelli. Transit network design with allocation of green vehicles: A genetic algorithm approach. *Transportation Research Part C*, 17(2009), 475-483.
- [12] M. Bieli, A. Boumakoul, H. Mouncif. Object modeling and path computation for multimodal travel systems. *Eur. J. Oper. Res.*, 175(2006), 1705-1730.
- [13] P. O. Boaventura Netto. *Grafos: teoria, modelos e algoritmos*. Blucher, Rio de Janeiro, 2012.
- [14] A. Bousquet. Rountig strategies minimizing travel time within multimodal urban transport networks. *ECTRI Young Researcher Seminar*, Torino, Itália, 2009.
- [15] A. Bousquet, C. Sophie, E.F. Nour-Eddin. On the adaptation of a label-setting shortest path algorithm for one-way and two-way routing in multimodal urban transport networks. *International Network Optimization Conference*, Pisa, Italy, 2009.
- [16] P.H.L. Bovy, R. Uges, S. H. Lanser. Modeling Route Choice Behavior in Multimodal Transport Networks. *10th International Conference on Travel Behaviour Research*, Lucerne, 2003.
- [17] J. Brito, F. J. Martínez, J. A. Moreno, J. L. Verdegay. Fuzzy Approach for Vehicle Routing Problems with Fuzzy Travel Time. *International Conference Fuzzy Systems*, Barcelona, Espanha, 2010.

- [18] Bureau of Public Roads, Traffic assignment manual. Technical Report, U.S. Department of Commerce, 1964.
- [19] R. Cerulli, A. Fink, M. Gentili, S. Vob. Extensions of the minimum labelling spanning tree problem. *Journal of Telecommunications and Information Technology*, 4(2006), 39-45.
- [20] S. Chanas. The use of parametric programming in fuzzy linear programming. *Fuzzy Sets and Systems*, 11(1983), 243-251.
- [21] E. Cipriani, M. Petrelli, G. Fusco. A multimodal transit network design procedure for urban areas. *Advances in Transportation Studies an international Journal*, 10(2006), 5-20.
- [22] J. C. N. Clímaco, M. E. Captivo, M. M. B. Pascoal. On the bicriterion - minimal cost/minimal label - spanning tree problem. *European Journal of Operational Research*, 204(2010), 199-205.
- [23] K. B. Davidson. A Flow Travel Time Relationship for use in Transportation Planning. *Proc. Australian Road Research Board*, Conf. 3(1)1966.
- [24] E. W. Dijkstra. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1(1959), 269-271.
- [25] H. Dubois, D. Prade. *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. Academic Press, INC, New York, 1980.
- [26] J. E. Flórez, A. Torralba, J. García, C. L. López, A. G. Olaya, D. Borrajo. TIMI-PLAN: an application to solve multimodal transportation problems. *Association for the Advancement of Artificial Intelligence*, 2010.
- [27] D. Gattuso, G. Meduri. Estimating running speeds on urban roads. *Traffic Engineering Control*, 2004, 182-186.
- [28] M. Ghatee, S. M. Hashemi. Generalized minimal cost flow problem in fuzzy nature: An application in bus network planning problem. *Applied Mathematical Modelling* 32(2008), 2490-2508.

- [29] A. Golnarkar, A.A. Alesheikh, M.R. Malek. Solving best path on multimodal transportation networks with fuzzy costs. *Iranian Journal of Fuzzy Systems* 7(3)2010, 1-13.
- [30] M. Gondran, M. Minoux. *Graphs and Algorithms*. John Wiley and Sons, New York, 1984.
- [31] P. Hansen, N. Mladenovic, J. A. Moreno. Variable neighbourhood search: methods and applications. *A Quarterly Journal of Operations Research*, 6(4)2008, 319-360.
- [32] F. Hernandes. Algoritmos para Problemas de Grafos com Incertezas. Tese de doutorado. Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação - UNICAMP, Fevereiro, 2007.
- [33] B. Julien. An extension to possibilistic linear programming. *Fuzzy Sets and Systems* 64(1994), 195-206.
- [34] M. Kheirikharzar. Shortest path algorithm in multimodal networks for optimization of public transport. *XXIV FIG Congress Facing the Challenges – Building the Capacity*, Sydney-Australia, 2010.
- [35] A. Keshtiarast, A. A. Alesheikh, A. Kheirbadi. Best route finding based on cost in multimodal network with care of networks constraints. *Map Asia*, India, Ref no. 66(2006).
- [36] M. Khanbaghi, R. P. Malhamé. Reducing Travel Energy Costs for a Subway Train via Fuzzy Logic Controls. *International Symposium on Intelligent Control*, Ohio, USA, 1994.
- [37] S. K. Lam, T. Srikanthan. Accelerating the K-shortest paths computation in multimodal transportation networks. *5th International Conference on Intelligent Transportation Systems*, Singapura, 2002.
- [38] S. Lawphongpanich, Y. Yin. Solving the Pareto-improving toll problem via manifold suboptimization. *Transportation Research Part C*, 18(2010), 234–246.

- [39] S. Lawphongpanich, Y. Yin. Pareto-improving congestion pricing for general road networks. *Technical Report*, Department of Industrial and Systems Engineering, University of Florida, Gainesville, Florida, 2007.
- [40] F. Lillo, F. Schmidt. Optimal paths in real multimodal transportation Networks: An appraisal using GIS data from New Zealand and Europe. *Proceedings of the 45th Annual Conference of the Operations Research Society of New Zealand*, Nova Zelândia, 2010.
- [41] X. Liu, H. Lin. Optimization model of multimodal transportation mode and its algorithm. *International Conference on Transportation Information and Safety*, 2011, 1068-1075.
- [42] C. F. G. Loureiro. Geração de colunas na solução de problemas de desenhos de redes multimodais de transportes. *XVII Encontro Nacional de Engenharia de Produção*, Porto Alegre-RS, 1997.
- [43] A. Lozano, G. Storchi. Shortest viable path algorithm in multimodal networks. *Transportation Research*, 35(2001), 225-241.
- [44] A. Lozano, G. Storchi. Shortest viable hyperpath in multimodal networks. *Transportation Research - Part B*, 36(2002), 853-874.
- [45] H. J. Miller, J. D. Storm, M. Bowen. GIS design for multimodal networks analysis. *Proceedings of GIS/LIS*, 1995, 750-759.
- [46] L. Moccia, J. F. Cordeau, G. Laporte, S. Ropke, M. P. Valentini. Modeling and solving a multimodal transportation problem with flexible-time and scheduled services. *Networks*, 57(1) 2011, 53-68.
- [47] P. Modesti, A. Sciomachen. A utility measure for finding multiobjective shortest paths in urban multimodal transportations networks. *European Journal of Operational Research*, 111(1998), 495-508.
- [48] A. S. Mohaymany, A. Gholami. Multimodal feeder network design problem: ant colony optimization approach. *Journal of transportation engineering*, 138(4)2010, 323-331.

- [49] H. Mouncif, A. Boulmakoul, M. Chala. Integrating GIS-technology for modelling origin-destination trip in multimodal transportation networks. *The International Arab Journal of Information Technology*, 3(2006), 256-263.
- [50] H. Mouncif, M. Rida, A. Boulmakoul. An efficient multimodal path computation integrated within location based service for transportation networks system (Multimodal path computation within LBS). *Journal of Applied Sciences*, 11(1)2011, 1-15.
- [51] L. Na, L. Zhi. Emergency Relief Goods Multi-mode Transportation Based on Genetic Algorithm. *Second International Conference on Intelligent Computation Technology and Automation*, 2009, 181-184.
- [52] L. R. Nielsen, K. A. Andersen, D. Pretolani. Finding the k shortest hyperpaths using reoptimization. *Operations Research Letters*, 34(2)2006, 155-164.
- [53] L. R. Nielsen. "Route choice in stochastic time-dependent networks". PhD Thesis. Department of Operations Research, University of Aarhus, Dinamarca, 2004.
- [54] L. R. Nielsen, K. A. Andersen, D. Pretolani. *Bicriterion shortest hyperpaths in random time-dependent networks*. IMA Journal of Management Mathematics, 14(3)2003, 271-303.
- [55] P. Nijkamp, A. Reggiani, W. F. Tsang. Comparative modelling of interregional transport flows: Applications to multimodal European freight transport. *European Journal of Operational Research*, 155(2004), 584-602.
- [56] S. Okada, T. Soper. A shortest path problem on a network with *fuzzy* arc lengths. *Fuzzy Sets and Systems*, 109(2000), 129-140.
- [57] S. Okada. Fuzzy shortest path problems incorporating interactivity among paths. *Fuzzy Sets and Systems*, 142(3)(2004), 335-357.
- [58] A. Palma, N. Picard. Route choice decision under travel time uncertainty. *Transportation Research Part A*, 39(2005), 295-324.

- [59] S. Pallottino, M. G. Scutellà. Shortest path algorithms in transportation models: classical and innovative aspects. *Proceedings of the Equilibrium and Advanced Transportation Modelling Colloquium*, Klumer, 1997.
- [60] P. Pandian, G. Natarajan. A New Method for Finding an Optimal Solution of Fully Interval Integer Transportation Problems. *Applied Mathematical Sciences*, 4(37)2010, 1819-1830.
- [61] B. B. Park, K. Zhu. Time-Dependent Origin-Destination Estimation: Genetic Algorithm-Based Optimization with Updated Assignment Matrix. *Journal of Civil Engineering*, 11(4) 2007, 199-208.
- [62] P. Pattanamekar, D. Park, L. R. Rilett, J. Lee, C. Lee. Dynamic and stochastic shortest path in transportation networks with two components of travel time uncertainty. *Transportation Research Part C*, 11(2003), 331-354.
- [63] W. Pedrycz, F. Gomide. *An Introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design*. MIT PRESS, London, 1998.
- [64] A. Perugia, L. Moccia, J. F. Cordeau, G. Laporte. Designing a home-to-work bus service in a metropolitan area. *Transportation Research Part B*, 45(2011), 1710-1726.
- [65] L. Qu, Y. Chen. A hybrid MCDM method for route selection of multimodal transportation network. *F. Sun et al*, 2008, 374-383.
- [66] L. Qu, Y. Chen. The Research on RBF Network Structure Optimization and the Application in Transportation Prediction. *Proceedings of the Sixth International Conference on Intelligent Systems Design and Applications*, 2006.
- [67] L. Qu, Y. Chen, X. Mu. A transport mode selection method for multimodal transportation based on an adaptive ANN System. *Fourth International Conference on Natural Computation*, 2008, 436-440.
- [68] H. Ramazani, Y. Shafahi, S.E. Seyedabrishami. A shortest path problem in an urban transportation network based on driver perceived travel time. *Scientia Iranica A*, 17(4)2010, 285-296.

-
- [69] H. Ramazani, Y. Shafahi, S.E. Seyedabrishami. A fuzzy traffic assignment algorithm based on driver perceived travel time of network links. *Scientia Iranica A*, 18(2)2011, 190-197. 285-296.
- [70] M. G. C. Resende, C. C. Ribeiro. Greedy randomized adaptive search procedure. *In Handbook in Metaheuristics*, 219-249, Kluwer, 2003.
- [71] A. Rosenfeld. Fuzzy graphs, fuzzy sets and their applications. *Proceeding of US-Japan Sem.*, University of California, Berkeley, CA, 1975.
- [72] L.H. Shih. Cement transportation planning via fuzzy linear programming. *International Journal Production Economics*, 58(1999), 277-287.
- [73] M. G. Sreelekha, M. V. L. R. Anjaneyulu. Development of link travel time model in mixed mode environment. *Proceedings of Inter-American Congress on Traffic and Transportation*, 2010, <http://117.211.100.42:8180/jspui/handle/123456789/1113>.
- [74] A. Sumalee, K. Uchida, W. H. K. Lam. Stochastic multi-modal transport network under demand uncertainties and adverse weather condition. *Transportation Research Part C*, 19(2) 2011, 338-350.
- [75] U. R. Tuzkaya, S. Önüt. A fuzzy analytic network process based approach to transportation-mode selection between Turkey and Germany: A case study. *Information Sciences*, 178(2008), 3133–3146.
- [76] J. Verga. “Algoritmo para resolução do problema de fluxo multiproduto fuzzy”. Dissertação de Mestrado, FEEC- UNICAMP, Campinas-SP, 2009.
- [77] F. E. L. Viedma, Coloured-edge graph approach for the modelling of multimodal networks. Tese de Doutorado, Auckland University of Technology, 2011.
- [78] W. Xin-bo, Z. Gui-jun, H. Zhen, G. Hai-feng, Y. Li. Modeling and implementing research of multimodal transportation network. *The 1st International Conference on Information Science and Engineering*, 2009, 2100-2103.
- [79] H. Xu, K. W. Li, D. M. Kilgour, K. W. Hipel. A matrix-based approach to searching colored paths in a weighted colored multidigraph. *Applied Mathematics and Computation*, 215(2009), 353-366.

- [80] H. Yu, F. Lu. A Multimodal route planning approach with an improved genetic algorithm. *The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, 38(2) 2011, 343-348.
- [81] D. Wu, Y. Yin, S. Lawphongpanich. Pareto-improving congestion pricing on multimodal transportation networks. *European Journal of Operational Research*, 210(2011), 660-669.
- [82] M. P. Wellman, K. Larson, M. Ford, P. R. Wurman. Path Planning under Time-Dependent Uncertainty. *Proceedings of the 11th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, 1995.
- [83] R.R. Yager. Ranking fuzzy subsets over the unit interval. *Proceedings of the CDC*, 1978, 1435-1437.
- [84] R.R. Yager. On choosing between fuzzy subsets. *Kybernetcs*, 9(1980), 151-154.
- [85] R.R. Yager. A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval. *Informations Sciences*, 24(1981), 143-161.
- [86] T. Yamada, B. F. Russ, J. Castro, E. Taniguchi. Designing multimodal freight transport networks: A heuristic approach and applications. *Transportation Science*, 43(2)2009, 129-143.
- [87] X. Zhang, Z. He, Y. Pan. Study on Multimodal Transport Network Model Base on Genetic Algorithm Method. *International Conference on Logistics Engineering and Management*, 2010, 3517-3523.
- [88] Y. Zhang, W. H. K. Lam, A. Sumalee. Transit Schedule Design in Dynamic Transit Network with Demand and Supply Uncertainties. *Journal of the Eastern Asia Society for Transportation Studies*, 7(2009).
- [89] L. Zadeh. Fuzzy sets. *Journal of Information and Control*, 8(1965),338-353.
- [90] L. Zadeh. Fuzzy sets as a theory of possibility. *Journal of Fuzzy Sets and Systems*, 1(1978), 3-28.

- [91] A. Ziliaskopoulos, W. Wardell. An intermodal optimum path algorithm for multimodal networks with dynamic arc travel times and switching delays. *European Journal of Operational Research*, 125(2000), 486-502.
- [92] H. J. Zimmermann. *Fuzzy Sets Theory and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1991.
- [93] K. G. Zografos, K. N. Androutsopoulos. Algorithms for itinerary planning in multimodal transportation networks. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 9(2008), 175-184.