

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica
Departamento de Telemática

MODELAGEM E OTIMIZAÇÃO DE PROBLEMAS DE PRODUÇÃO - ESTOQUE
VIA PROCESSOS DETERMINÍSTICOS POR PARTES

Orientador :

João Bosco Ribeiro do Val

Aluno :

José Leandro Félix Salles

Tese Apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica
da Universidade Estadual de Campinas , UNICAMP ,
Como Requisito Parcial à Obtenção do Título de
Mestre em Engenharia Elétrica

Este exemplar corresponde à relação final da tese
defendida por José Leandro Félix Salles
e aprovada pela Comissão
Julgadora em 15 / 03 / 1991.


Orientador

Fevereiro de 1991

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Doc/910943 7

A minha esposa Regina

Aos meus Pais , Sebastião
e Margarida

AGRADECIMENTOS

Ao Prof.^o João Bosco Ribeiro do Val pela valiosa orientação ,
crítica e sugestões demonstrados em todos os momentos deste trabalho .

A Regina pela paciência e compreensão .

Aos meus pais pelo estímulo e apoio .

Aos amigos da Pós - Graduação da F.E.E , pelos momentos
agradáveis

A CAPES pelo suporte financeiro .

RESUMO

O objetivo deste trabalho é modelar e otimizar uma classe de sistemas de produção - estoque através da teoria de Processos Determinísticos por Partes (P.D.P.). O P.D.P. é um processo estocástico markoviano a tempo contínuo. Sua trajetória de estado é determinística e contínua com descontinuidades em instantes aleatórios, provocado por saltos de tamanho também aleatórios, no interior ou na fronteira do espaço de estados. Este tipo de processo pode caracterizar um sistema de produção - estoque, onde se nota a existência de saltos no nível de estoque ocasionados pelo atendimento ao cliente, ou provocados após itens serem produzidos.

Propomos uma classe de modelos de produção - estoque, cujo modelo mais genérico fabrica $m > 0$ itens diferentes, mas é limitado a produzir somente um item de cada vez. A produção é controlada continuamente, podendo ser paralizada em qualquer instante para iniciar a produção de um novo item mais solicitado pela demanda. A demanda aleatória é caracterizada por uma distribuição de Poisson. O nosso interesse é determinar o momento certo de paralisar e reiniciar a produção de maneira que os custos de produção e estoque sejam minimizados.

Esta questão é resolvida formulando - se um problema de controle ótimo estocástico de P.D.P., que é dado pela minimização do valor esperado dos custos considerados no modelo. Uma solução é obtida resolvendo - se iterativamente uma equação de $H - J - B$, relacionada a um problema de controle ótimo cujo horizonte é o instante de primeiro salto.

Apresentamos uma caracterização analítica da política de produção do modelo mais simples da classe proposta, analisando o comportamento da função valor. Para os modelos de produção - estoque que fabricam um item e dois itens, desenvolvemos algoritmos que determinam a política ótima de produção e mostramos os resultados computacionais obtidos.

ÍNDICE

Capítulo	Página
I - O P.D.P. E O PROBLEMA DE PRODUÇÃO - ESTOQUE	1
I.1 - INTRODUÇÃO	
I.2 - UMA CLASSE DE PROBLEMAS DE PRODUÇÃO - ESTOQUE	
I.2.a - O PROBLEMA DE M ÍTENS	
I.2.b - O PROBLEMA DE UM ITEM	
I.2.c - O PROBLEMA DE DOIS ÍTENS	
I.3 - O PROCESSO DETERMINÍSTICO POR PARTES (P.D.P.)	
I.3.a - DEFINIÇÃO	
I.3.b - O P.D.P. CONTROLADO	
I.3.c - SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLE DO P.D.P.	
II - EXEMPLOS DE MODELOS DE PRODUÇÃO - ESTOQUE	27
II.1 - INTRODUÇÃO	
II.2 - MODELO DE PRODUÇÃO - ESTOQUE ANÁLOGO A UM SISTEMA DE FILA	
II.2.a - CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA	
II.2.b - MODELO MATEMÁTICO	
II.2.c - RESULTADOS	
II.3 - MODELO DE PRODUÇÃO - ESTOQUE ANALISADO COM TEORIA DE REOVARIAÇÃO	
II.3.a - CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA	
II.3.b - MODELO MATEMÁTICO SEM PERDA DE LOTE	
II.3.c - MODELO MATEMÁTICO COM PERDA PARCIAL DO LOTE	

II.3.d - RESULTADOS

II.4 - MODELO DE PRODUÇÃO - ESTOQUE ANALISADO COM TÉCNICAS
DE CONTROLE ÓTIMO

II.4 .a - CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA

II.4 .b - SOLUÇÃO DO PROBLEMA PARA DEMANDA
DETERMINÍSTICA

II.4 .c - SOLUÇÃO DO PROBLEMA PARA DEMANDA ALEATÓRIA

II.5 - COMPARAÇÃO DOS MODELOS DE PRODUÇÃO - ESTOQUE

III - ANÁLISE E ALGORITMOS

62

III.1 - INTRODUÇÃO

III.2 - A POLÍTICA DO PROBLEMA DE M ÍTENS

III.3 - ANÁLISE DA POLÍTICA DO PROBLEMA DE UM ITEM

III.4 - ALGORITMOS DO PROBLEMA DE UM ITEM

III.5 - ALGORITMOS DO PROBLEMA DE DOIS ÍTENS

IV - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL E RESULTADOS

95

IV.1 - INTRODUÇÃO

IV.2 - IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO DO PROBLEMA DE UM ITEM

IV.3 - IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO DO PROBLEMA DE DOIS ÍTENS

IV.4 - RESULTADOS DO PROBLEMA DE UM ITEM

IV.5 - RESULTADOS DO PROBLEMA DE DOIS ÍTENS

V - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

113

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

115

CAPÍTULO I

O P.D.P. E O PROBLEMA DE PRODUÇÃO - ESTOQUE .

I.1. INTRODUÇÃO

Um importante problema da área de Pesquisa operacional consiste em determinar a taxa de produção de um certo item de maneira que uma demanda aleatória seja atendida , sem que haja falta ou excesso de itens estocados . A questão levantada neste problema diz respeito à velocidade que a produção deve ter para responder às flutuações aleatórias na demanda e pretende determinar qual extensão desta flutuação que deve ser absorvida pelo estoque , tendo em vista os valores relativos aos custos operacionais deste sistema . Entre estes custos estão o custo de produção , o custo de estoque , os custos devido às perdas nas vendas e os custos devido a mudanças na taxa de produção .

Manter altas taxas de produção durante um período longo implicará em custo de produção e estoque elevados. Por outro lado, manter a taxa de produção em um nível constante e baixo acentuará os custos envolvidos com a espera e/ou perda de clientes devido à demanda não atendida instantaneamente . Se a taxa de produção for mantida em um nível constante , tal que atenda a demanda média , o nível de estoque pode se tornar muito elevado ou muito baixo , ocasionando elevados custos . Todavia , frequentes mudanças na taxa de produção resultam em altos custos relativos à variação na taxa de produção .

O problema de encontrar um compromisso apropriado entre estas alternativas conflitantes é conhecido na literatura como o Problema de Produção-Estoque .

A principal preocupação que surge na busca da solução do problema de produção-estoque , é saber qual o momento certo em que se deve começar e terminar de produzir uma certa quantidade de itens de tal maneira que os custos operacionais deste sistema sejam minimizados. A figura I.1 mostra a trajetória de estoque do sistema de produção - estoque , onde a decisão de paralisar ou reinicializar a

produção é realizada quando o nível de estoque crítico I é atingido .

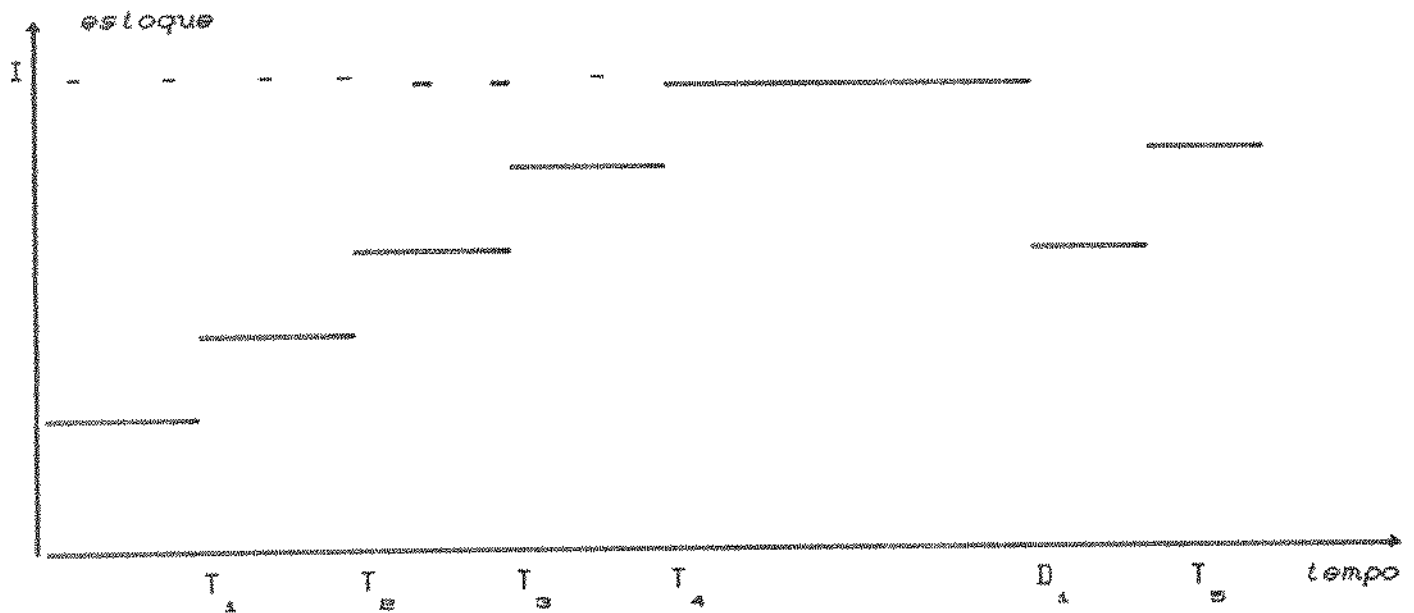


figura I.1. Trajetória do estoque no sistema produção-estoque.
 T_i 's - Instantes de finalização de itens ; D_i 's - Instantes de chegadas de pedidos .

Nos problemas de produção-estoque com revisão periódica , isto é , quando as observações do nível de estoque ocorrem em intervalos de tempo regulares , a decisão de qual o tamanho do lote que deve ser produzido é realizada no início de cada período de observação. Esta é a situação proposta nos trabalhos de Heyman e Sobell[15] , Scarf[23] , Iglehart[16] , Federgruen e Zipkin[7] . Já nos modelos de produção - estoque com revisão contínua , a decisão de quanto produzir é realizada em qualquer instante de tempo . Isto quer dizer que o nível de estoque é observado continuamente . Este caso é encontrado nos trabalhos de Gaver[9] , Tijms[26] , Gavish e Graves [10] . Alguns destes modelos de produção -estoque encontrados na literatura serão apresentados no capítulo II .

é importante esclarecer que a diferença do sistema de produção - estoque com relação aos sistemas de estoques usuais é que , no primeiro , os itens são repostos à medida em que são produzidos a uma certa taxa , enquanto que em sistemas de estoques , simplesmente a reposição é instantânea ou se dá com atraso .

O estudo dos sistemas puramente de estoques focaliza o problema cujos itens são repostos em lotes após o estoque estar suficientemente baixo. Consequentemente a teoria preocupa-se em determinar quando deve ser feito a encomenda do lote e qual a quantidade deve ser encomendada. Ela ignora os mecanismos de produção dos lotes, mas considera os atrasos entre a encomenda e a disponibilide do item. De acordo com Hax e Candea [13] os resultados principais da teoria de estoque são:

a) A política de decisão (S,Q) para a política de revisão contínua, onde o pedido de encomenda é feito quando o estoque chega no nível S , numa quantidade de lote igual a Q (figura I.2).

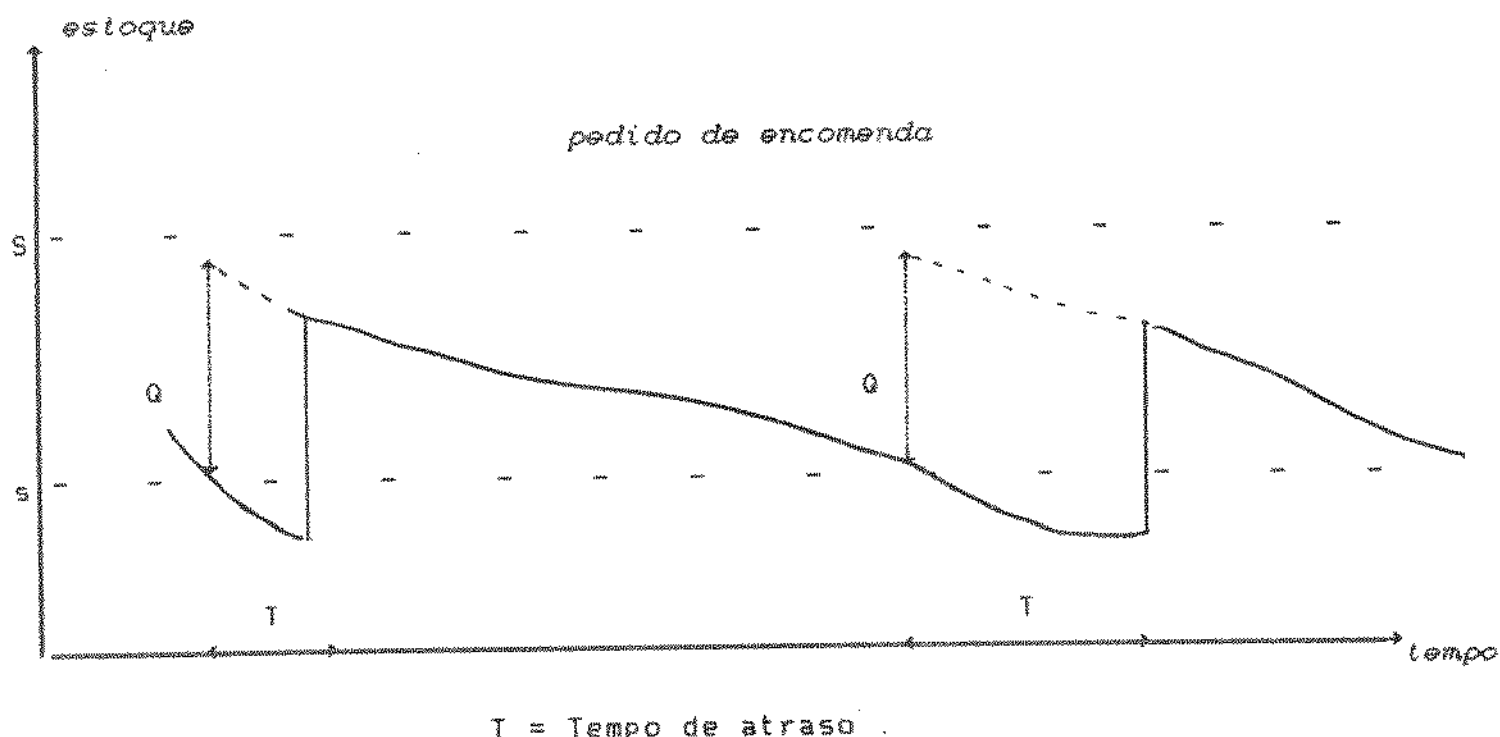


Figura I.2. Variação do estoque com a política (S,Q) .

b) A política de decisão (S,R) para a política de revisão periódica onde o pedido de encomenda é feito no início do período de revisão R , numa quantidade de lote que aumenta o estoque até o nível S no instante do pedido (figura I.3).

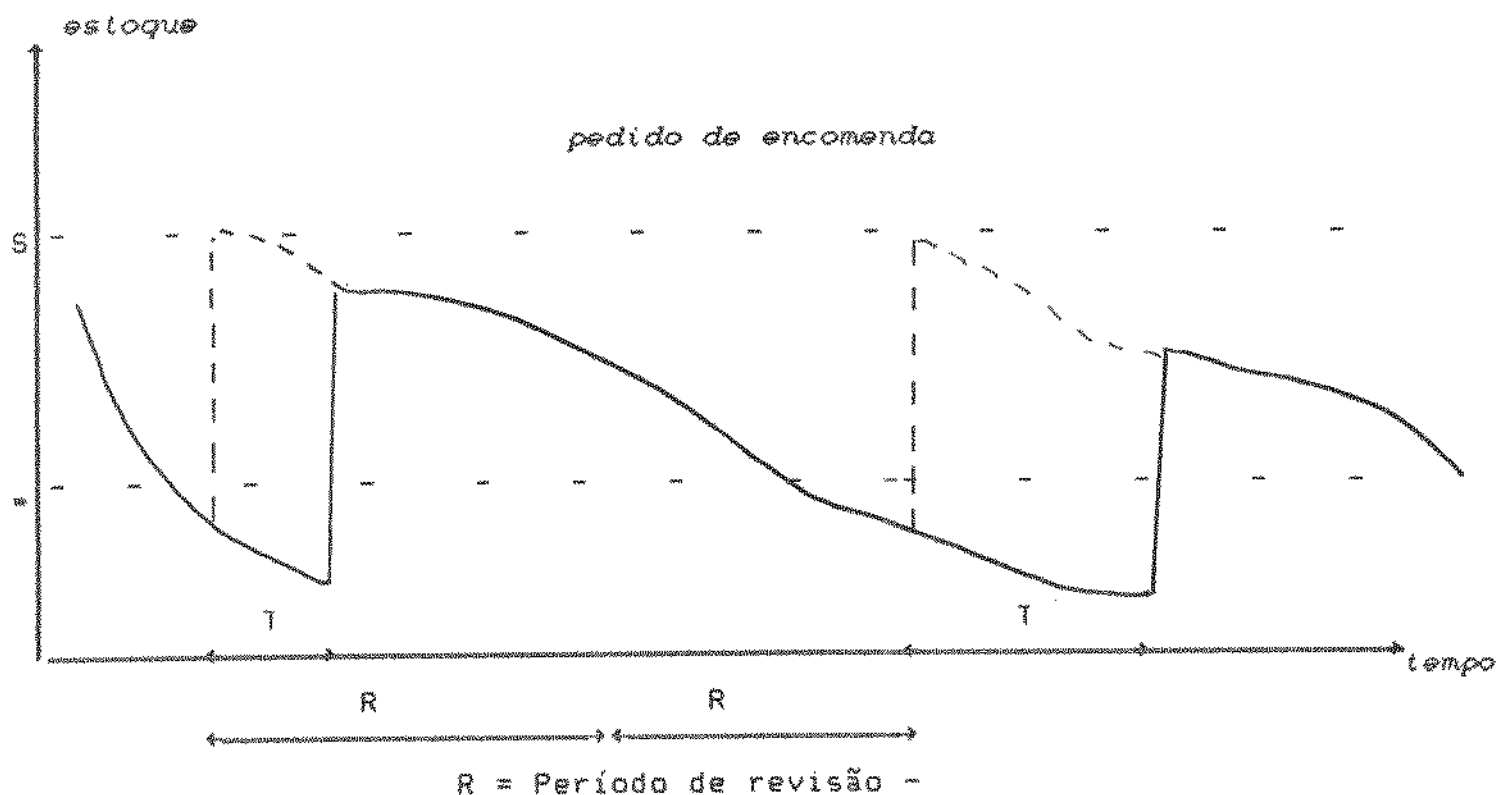


Figura 1.3. Variação do estoque com a política (S,R).

Os modelos de produção-estoque visam uma situação integrada, onde o tempo decorrido entre a intenção de repor o estoque e sua efetiva reposição está associada ao tempo de produção dos itens, que é considerado mais complexo do que o simples tempo de atraso de encomenda. Além disso, o modelo proposto neste trabalho procura levar em conta a situação de demanda aleatória, onde as expectativas de demanda inferidas antes da produção ser inicializada podem não se concretizarem; sendo assim, a decisão de produzir é revisada continuamente, podendo ser alterada antes que o item seja finalizado.

Apresentaremos a seguir na seção 1.2 os modelos propostos de produção-estoque. Para que possamos tratá-los de forma sistemática, verificamos que eles se enquadram na classe geral de Processos Determinísticos por Partes, cuja teoria será estudada na seção 1.3.

I.2. UMA CLASSE DE PROBLEMAS DE PRODUÇÃO - ESTOQUE .

I.2.a - O PROBLEMA DE M ÍTEMS .

Um sistema de manufatura flexível dedica-se à produzir M itens diferentes . Somente um item de cada vez deve ser produzido . No entanto , a produção de um item pode ser interrompida para inicializar a de um outro que está sendo mais solicitado pela demanda .

Cada item é fabricado durante um ciclo de produção , que pode ser entendido como várias etapas consecutivas de produção , onde uma parte do item é fabricado e montado , até se obter o item acabado no final do ciclo de produção . A etapa k_j de produção do item j , $j = 1 \dots M$, possui um tempo de duração S_{k_j} , $k_j = 1 \dots K_j$, onde

K_j é o número total de etapas de produção do item j . Portanto , a duração de um ciclo de produção do item j , definido por T_j^* , é igual a :

$$T_j^* = \sum_{k_j=1}^{K_j} S_{k_j} \quad (I.1)$$

Supõe - se que a progressão da produção do item j durante uma determinada etapa k_j de produção pode ser medida pela variável $\xi_j(t)$ dada por:

$$\xi_j(t) = \Gamma_{k_j-1} + \int_{\theta_{k_j}}^t F_j(\xi_j(s), u_j(s), K_j) ds \quad (I.2)$$

para $\Gamma_{k_j-1} < \xi_j \leq \Gamma_{k_j}$, $\theta_{k_j} \leq t \leq S_{k_j} + \theta_{k_j}$

onde:

- θ_{k_j} - instante de início da k_j -ésima etapa .

- Γ_{k_j} - progressão da produção do item j ao término da k_j -ésima

etapa , $\Gamma_0 = 0$.

- $F_j(\xi_j, u_j(t), K_j) \geq 0$ é a velocidade de fabricação do item j na

etapa k_j

- $u_j(t) \in [0,1]$ é uma variável externa que controla a velocidade da produção do item j . Um item j será produzido quando $u_j(t) \neq 0$. Se $u_j(t) \neq 0$ então $u_i = 0$, $i \neq j$.

Considera-se que a medida do esforço total para produzir um item j é igual Γ_{K_j} .

A velocidade de produção pode ser variada ao longo de uma etapa. Caso $F_j(\cdot)$ seja estritamente positiva, o sistema não admite paralisação de produção. Outro caso interessante considera a velocidade de produção constante e decidida antes de iniciar uma etapa.

A justificativa de se produzir ou não uma certa etapa está relacionada aos custos de produção, estoque e inicialização da produção naquela etapa.

O intervalo entre os instantes de chegadas de dois clientes consecutivos são v.a. i.i.d.. Quando esta v.a. é exponencialmente distribuída, o número de clientes que chegam forma um processo de Poisson com taxa λ . Os pedidos dos clientes são lotes cujo tamanho é aleatório. Os tamanhos dos lotes encomendados do item j , denotados por W_j , são variáveis aleatórias i.i.d caracterizadas por qualquer função de distribuição discreta definida por $p(L) = P(\text{lote do cliente } j = L)$. A estabilidade deste sistema de produção - estoque será garantida quando $E[L] < 1 / (\lambda \times T_j^*)$, onde λ_j é a taxa de chegada do cliente do item j e T_j^* é definido em I.1.

Seja $T_{j,i}$, $i = 1, 2, \dots$, a sequência de instantes correspondentes aos pedidos dos clientes do item j e $W_{j,i}$ os respectivos tamanhos de lotes pedidos no instante $T_{j,i}$. A demanda acumulada do item j até o instante t é igual a:

$$D_j(t) = \sum_1 W_{j,i} I_{\{T_{j,i} \leq t\}} \quad (1.3)$$

Onde I_A é a função indicadora do conjunto A

Seja τ_{jk} , $k = 1, 2, \dots$, uma sequência de instantes no qual o item j é finalizado. A produção acumulada do item j até o instante t é igual a:

$$P_j(t) = \sum_k I_{\tau_{jk} \leq t} \quad (1.4)$$

Se todos os pedidos forem atendidos, o nível de estoque do item j até o instante t , definido pela variável $n_j(t)$, é igual a:

$$n_j(t) = P_j(t) - D_j(t) \quad (1.5)$$

Pode-se incluir, neste modelo, diferentes comportamentos de clientes quando o lote pedido não é encontrado imediatamente no estoque. Por exemplo, o cliente pode esperar pela produção do lote completo com probabilidade α_1 , ou levar o que estiver estocado com probabilidade α_2 , ou desistir do pedido com probabilidade α_3 .

O objetivo deste problema é escolher um item j a ser produzido entre M itens diferentes, e determinar sua velocidade de produção na etapa μ_j para que os custos operacionais sejam minimizados.

Os custos operacionais admissíveis são: custo de estoque, custo de penalização por item pedido e não fornecido, custo de produção associado ao item j e a etapa μ_j , custo de reinicialização da produção, e ganho de investimento financeiro quando paralisa-se ou retarda-se a velocidade de produção. Atrasos devido a reinicialização podem ser levados em conta no modelo através da equação 1.2 tomando-se, por exemplo,

$$\bar{\xi}_j = F_j = \beta (\xi - \Gamma_{\mu_j} - 1) + g_{\mu_j}(u)$$

com $\beta > 0$ e $g_{\mu_j}(u) \geq 0$.

O problema aqui apresentado é bastante geral, por isso daremos maior ênfase ao estudo de dois casos particulares deste modelo de M itens: o sistema de produção - estoque que fabrica um item e o que fabrica dois itens. Veremos na seção 1.2.a e 1.2.b que estes

dois modelos são representativos de duas situações possíveis em sistemas de produção - estoque com características próprias e distintas.

I.2.b O PROBLEMA DE UM ITEM

Este sistema de produção - estoque produz item de um único tipo ($j = 1$). O custo de reinicialização é desconsiderado e existe uma única etapa de produção. O processo estocástico que caracteriza este sistema pode ser representado pelo vetor variáveis de estado $(n(t), \xi(t))$ que assume valores em $\mathbb{N} \times [0, \Gamma]$, $\Gamma \in \mathbb{R}^+$.

Observa-se uma trajetória típica do processo estocástico $X_t = (n(t), \xi(t))$, na figura I.4. Verifica-se que o nível de estoque atual saltará para um nível inferior, devido ao pedido de clientes que chegam em intervalos de tempos caracterizados por uma função de distribuição exponencial com taxa λ . Quando a produção de um item é completada no final do ciclo de produção ($\xi = \Gamma$), o nível de estoque será acrescido de uma unidade. Na figura I.4 a produção é paralisada em ξ^* .

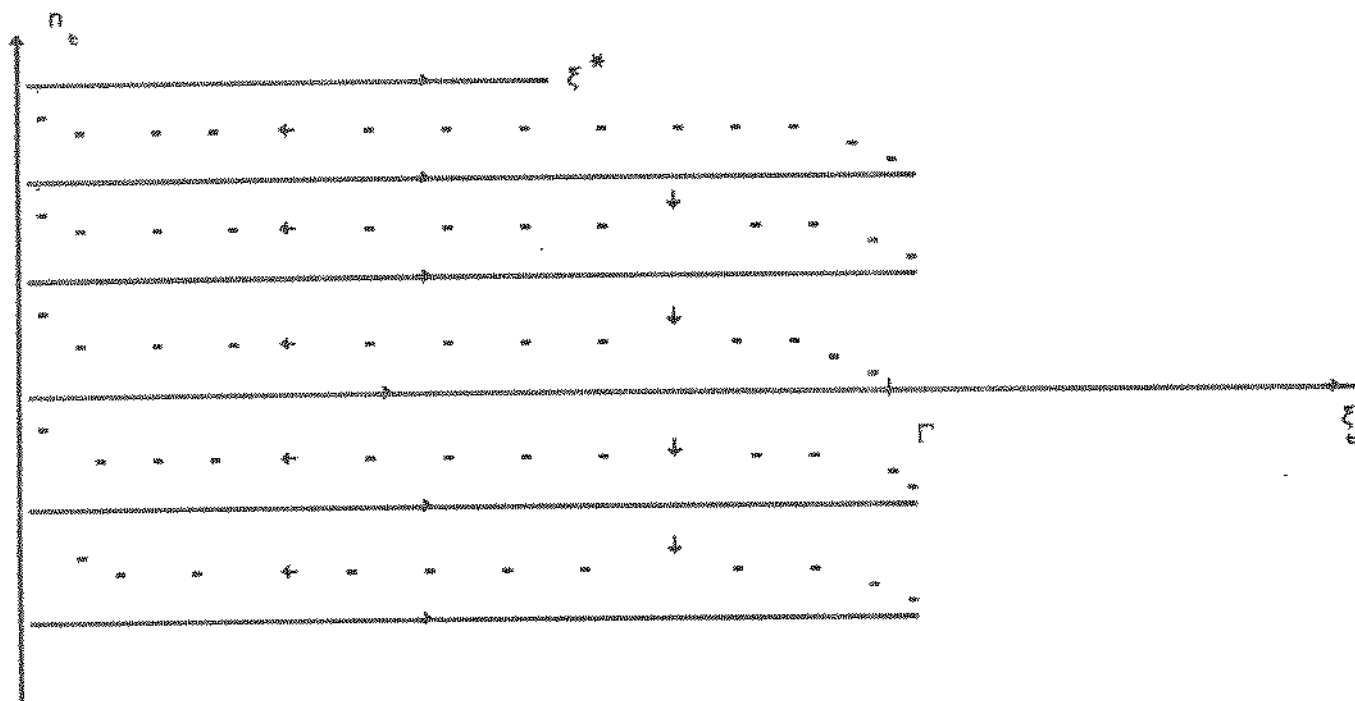


Fig. I.4 TRAJETÓRIA DO ESTADO $X_t = (n(t), \xi(t))$

O objetivo deste problema é controlar a velocidade da produção ao longo da etapa de produção tendo em vista os custos operacionais e o estado atual (n, ξ) .

Esse modelo serve igualmente para análise de situações onde ocorrem conflitos entre investir na produção de um item sujeito a demanda aleatória e a possibilidade de investir no mercado financeiro. Nessa forma o modelo assemelha-se ao proposto por Davis et al [6], aplicado à expansão de capacidade.

1.2.c O PROBLEMA DE DOIS ITENS

Neste caso, o sistema fabrica dois itens diferentes ($j = 2$). O custo de reinicialização é nulo e cada item é produzido numa única etapa. Este processo pode ser caracterizado por um processo estocástico $X_t = (n_1, n_2, \xi_1, \xi_2)$.

Os pedidos dos clientes chegam de acordo com um processo de Poisson com taxa λ e o tamanho do lote solicitado tem distribuição $p[L = (i_1, i_2)]$ estabelecido de forma independente de outras variáveis por uma distribuição conjunta qualquer.

O processo estocástico X_t , representado em 3 dimensões na figura 1.5 (neste caso os custos associados a n_1 e n_2 são idênticos), tem uma trajetória determinística até que ocorra um salto aleatório para baixo, quando um cliente levar um lote do item 1 ou do item 2 do estoque n_1 ou n_2 respectivamente. O processo x_t tem um salto forçado para cima, quando o item 1 ou o item 2 é produzido e enviado imediatamente ao estoque n_1 ou n_2 respectivamente. Note que em ξ_1^* a produção do item 1 é paralisada para dar início à produção do item 2. Em Γ_2 o item 2 é finalizado e conseqüentemente se reinicializa a produção do item 1 a partir de ξ_1^* .

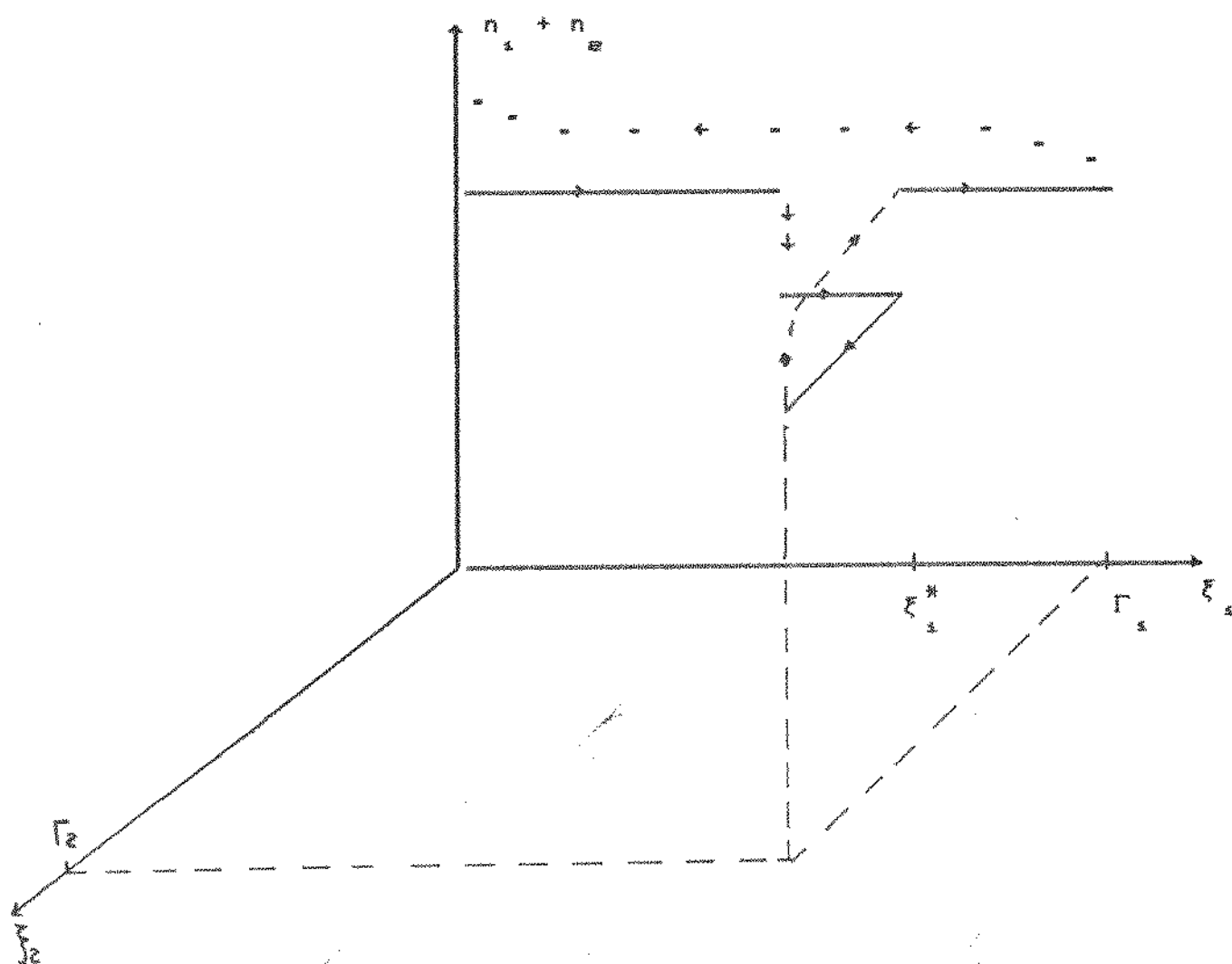


Fig.I.5 TRAJETÓRIA DE ESTADO $X_t = (n_1 + n_2, \xi_1, \xi_2)$

Nota-se, portanto, que a classe de modelos de produção - estoque proposta é caracterizado por um processo estocástico com movimento determinístico, intercalado por saltos aleatórios. Este tipo de processo também é encontrado em problemas de filas, análise de investimento, geração de energia, etc. e foram estudados inicialmente por Cox[4]. Desde então vários modelos foram desenvolvidos e cada problema específico foi tratado com técnicas distintas.

Com o objetivo de unificar o tratamento destes problemas, Gnedenko e Kovalenko [11] introduziram um modelo markoviano, chamado de Processos Lineares por Partes (P.L.P), o qual possui uma trajetória determinística e linear entre os instantes de saltos. Em 1984, Davis [5], estende a aplicação do P.L.P. para processos estocásticos com trajetória gerais entre os instantes de saltos, que foram denominados de Processo Determinístico por Partes (P.D.P.). Exemplos de aplicações do P.D.P. podem ser encontrados em [2], [12], [18]. Neste trabalho, a abordagem via P.D.P. será empregada para se estabelecer o problema de controle ótimo dos sistemas apresentados e dar-lhes solução adequada. Uma breve introdução aos P.D.P.'s será apresentada a seguir na seção 1.3; em 1.3.a suas definições básicas, em 1.3.b o P.D.P. com controle e em 1.3.c a solução do problema de controle ótimo estocástico.

1.3 - O PROCESSO DETERMINÍSTICO POR PARTES .

1.3.a - DEFINIÇÃO .

Seja E um subconjunto fechado do R^n , chamado conjunto domínio de estado do Processo Determinístico por Partes (P.D.P). E_0 um subconjunto na fronteira de E ; e σ a σ -álgebra gerada pelos abertos de E .

O P.D.P é um processo estocástico markoviano a tempo contínuo [14]. A trajetória de estado descrita por este processo é contínua e determinística no interior do conjunto E , exceto em instantes aleatórios onde ocorrem saltos também aleatórios. A trajetória obrigatoriamente saltará quando a fronteira E_0 for atingida.

O P.D.P é caracterizado localmente pelos seguintes elementos.

- i) Campo vetorial $f : E \rightarrow R^n$;
- ii) Taxa de salto $\lambda : E \rightarrow R^n$;

$$Q : \text{int} (E) \times E \rightarrow [0,1]$$

$$P : E_0 \times E \rightarrow [0,1]$$

Iniciando a trajetória do P.D.P a partir do estado inicial $Z = Z_0$ e no instante $t_0 = 0$, pode-se determiná-la unicamente por:

$$x(t, Z) = Z + \int_0^t f(x(s, Z_0)) ds, \quad t \in [0, t^*] \quad (1.6)$$

onde:

$$t^* = \inf \{ t \geq 0 : x(t, Z) \in E_0 \}. \text{ Convenciona-se que } \inf \emptyset = \infty$$

O processo $x(t, Z)$, segue um caminho determinístico, definido pela equação 1.6 até ocorrer um salto aleatório num instante aleatório T_1 , ou até a fronteira E_0 , onde ocorrerá um salto forçado no instante t^* .

Após o instante de primeiro salto T_1 , o processo $x(t, Z)$ reinicia - se num novo estado, que é independente dos estados ocupados até o instante do salto, com uma trajetória determinística dada por 1.6.

Se a trajetória $x(t, Z)$ reiniciar-se num novo estado $Z = Z_1$, ela será determinística até que aconteça um novo salto no instante T_2 , tal que $T_1 \leq T_2$. Depois deste salto, o processo $x(t, Z)$ irá reiniciar - se em $Z = Z_2$.

Continuando com este comportamento, o P.D.P descreverá uma trajetória x_t , dada por:

$$x_t = \sum x(t - T_n, Z_n) I_{[T_n \leq t < T_{n+1}]} \quad (1.7)$$

onde, I_A é a função indicadora do conjunto A.

$$T_k = \inf (t \in R_+ - [0, T_{k-1}] : x_t \neq x_{t-}) \quad (I.8)$$

$$\sup (T_{k+1} - T_k : x_{T_k} = Z_k) \leq t^* \quad (I.9)$$

$x(t-T_k, Z_k)$ é uma trajetória determinística definida pela expressão I.6 .

A lei de probabilidade do P.D.P é definido pelas seguintes funções:

1) A distribuição de probabilidade $F(t) = P((T_{k+1} - T_k) > t)$ do tempo entre saltos é exponencial com taxa $\lambda(x(s, Z))$ e dada por :

$$F(t) = \begin{cases} e^{-\int_0^t \lambda(x(s, Z)) ds} & , \quad t < t^* \\ 0 & , \quad t \geq t^* \end{cases} \quad (I.10)$$

2) A distribuição de probabilidade de transição condicional $P(x_t \in A / x_{t-} \neq x_{t-})$, $A \in \mathcal{E}$, é dado por:

$$I_{(t < t^*)} Q(x_{t-}, A) + I_{(t = t^*)} P(x_{t-}, A) \quad (I.11)$$

O problema de M itens pode ser representado por um P.D.P. com características que dependem da complexidade que se introduz no sistema de produção - estoque como , por exemplo , número de itens a serem produzidos , existência ou não do custo de inicialização entre etapas de produção .

UM ITEM

O P.D.P. que caracteriza o problema de UM ITEM é definido pelo espaço de estado :

$$E = \mathbb{N} \times [0, \Gamma] , E_0 = \mathbb{N} \times \Gamma$$

onde,

$\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais

$$\Gamma \in \mathbb{R}^+$$

Os elementos deste P.D.P. são os seguintes :

- i) Campo vetorial igual a F no intervalo $[0, \Gamma]$;
- ii) Taxa de salto λ ;
- iii) Medidas de transição:

$$Q[(n, \xi), A] = \sum p_i I_A(n - i, \xi) \quad A \in E \quad (I.12)$$

$$P[(n, \Gamma), (n + 1, 0)] = 1 \quad (I.13)$$

A curva integral $t \rightarrow x_t$ é determinada pela equação:

$$\begin{bmatrix} n(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n(0) \\ \xi(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \int_0^t F(\xi(s), n(s)) ds \end{bmatrix} \quad (I.14)$$

para,

$$t \in [0, \Gamma]$$

A medida de transição I.12 indica os saltos no espaço de estado E provocados pela demanda, enquanto que a medida I.13 indica o salto na fronteira E_0 ocorrida com a produção de um item.

DOIS ITENS

Para o problema de DOIS ITENS o espaço de estado do P.D.P. será :

$$E = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times [0, \Gamma_1] \times [0, \Gamma_2] \text{ e } E_0 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \Gamma_1 \times \Gamma_2$$

onde $\Gamma_1, \Gamma_2 \in R_+$

Os elementos deste P.D.P. serão :

i) Campo vetorial =
$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

ii) Medidas de transições:

iii) $Q(x, A) = \sum \sum p_{ij} I_A(n_1 - i, n_2 - j, \xi_1, \xi_2) \quad x \in \text{int}(E)$

$$P(x, A) = I_A(n_1 + 1, n_2, 0, \xi_2) + I_A(n_1, n_2 + 1, \xi_1, 0)$$

para $\xi_1 < \Gamma_1$ e $\xi_2 < \Gamma_2, x \in E_0$

iv) Taxa de saltos λ

A curva integral $t \rightarrow x_t$ será unicamente determinada pela equação:

$$\begin{bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1(0) \\ n_2(0) \\ \xi_1(0) \\ \xi_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \int_0^t F_1(n_1(s), n_2(s), \xi_1(s), \xi_2(s)) ds \\ \int_0^t F_2(n_1(s), n_2(s), \xi_1(s), \xi_2(s)) ds \end{bmatrix} \quad (I.15)$$

O nosso interesse é que o P.D.P. não somente modele um sistema de manufatura pertencente à classe de sistemas propostos mas também possa fornecer meios para determinar a política de produção, ou seja, saber até que instante um item deve ser produzido e quando

iniciar uma nova etapa de produção de um outro item que está sendo mais solicitado pela demanda. A decisão é tomada de tal maneira que os custos operacionais sejam minimizados. Esta questão pode ser formulada genericamente pelo seguinte problema de controle ótimo estocástico:

$$\text{minimizar } E_Z^u \left(\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} L_0(\bar{n}(s), \bar{\xi}(s), \bar{u}(s)) ds + \right. \\ \left. \sum_k e^{-\alpha T_k} l_0(\bar{n}_{T_k}^-, \bar{\xi}_{T_k}^-) I(x_{T_k}^- \in E_0, T_k < \infty) \right) \quad (I.16)$$

satisfazendo

$$\frac{d\bar{\xi}(t)}{dt} = \bar{F}(\bar{\xi}(t), \bar{u}(t)) \quad (I.17)$$

onde:

E_Z^u é o valor esperado relativo as medidas de transição Q e P.

α é a taxa de desconto.

$$\bar{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_m \end{bmatrix}$$

$$\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix}$$

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix}$$

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

L_0 é o custo de produção e estoque. l_0 é o custo de mudança de etapa ou reinicialização da produção.

A solução do problema estabelecido pela equação 1.16 pode ser resolvida, conforme veremos a seguir, utilizando-se a teoria de controle desenvolvida para P.D.P. controlado.

I.3.b O P.D.P. CONTROLADO.

Um P.D.P é controlado quando a quádrupla f, λ, Q, P pode ser parametrizada por uma função exógena chamada controle.

Seja $U \subset R^n$ e $U_\partial \subset R^n$ conjuntos compactos. Uma classe de controle admissível $\underline{U} = \underline{U}_\circ \times \underline{U}_\partial$ é um conjunto definido por:

$$\underline{U}_\circ = \{ u_\circ : R_+ \times \text{int}(E) \rightarrow U, \text{ mensurável} \}$$

$$\underline{U}_\partial = \{ u_\partial : E_\partial \rightarrow U_\partial, \text{ mensurável} \}$$

onde, o controle $u_\circ$ atua no interior do espaço de estado E , enquanto que u_∂ atua na fronteira E_∂ .

Um P.D.P controlado é caracterizado pelos elementos:

i) Campo vetorial e taxa de saltos controlados:

$$f : E \times u \rightarrow R^n \quad \text{e} \quad \lambda : E \times u \rightarrow R_+$$

onde, f e λ são mensuráveis tais que $z \rightarrow f(z,u)$ e $z \rightarrow \lambda(z,u)$ são funções uniformemente Lipschitz contínuas para cada $u \in \underline{U}$.

ii) Medidas de transição controladas:

$$Q : E \times \underline{U}_\circ \times \mathcal{E} \rightarrow [0,1] \quad \text{e} \quad P : E \times \underline{U}_\partial \times \mathcal{E} \rightarrow [0,1]$$

tal que,

$Q(\dots, A)$ e $P(\dots, A)$ são funções mensuráveis para cada $A \in \mathcal{E}$

Para toda função $h : E \rightarrow R$ que seja uniformemente Lipschitz contínua

$$z \rightarrow \int_E h \, dQ(z, u) \quad , \quad z \rightarrow \int_{E_\theta} h \, dP(z, u_\theta)$$

são funções uniformemente Lipschitz contínuas para cada $u \in \underline{U}_\bullet$ e $u_\theta \in \underline{U}_\theta$.

Observe que os modelos de produção-estoque propostos são P.D.P's controlados onde se deseja controlar apenas os campos vetoriais $F_j(\cdot)$.

Considere as funções custos $l_\bullet : E \times \underline{U}_\bullet \rightarrow R_+$ e $l_\theta : E_\theta \times \underline{U}_\theta \rightarrow R_+$ mensuráveis e limitadas, tais que $z \rightarrow l_\bullet(z, u)$ e $z \rightarrow l_\theta(z, u_\theta)$ são contínuas Lipschitz para cada $u \in \underline{U}_\bullet$ e $u_\theta \in \underline{U}_\theta$.

O problema de controle estocástico do P.D.P controlado (x_t, u_t) é definido por:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } E_x^\bullet \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} l_\bullet(x_t, u_\bullet(t)) \, dt + \right. \\ \left. \sum_k e^{-\alpha T_k} l_\theta(x_{T_k}^-, u_\theta) I_{(x_{T_k}^- \in E_\theta, T_k < \infty)} \right] \quad (I.18) \end{aligned}$$

na classe de controles admissível $\underline{U}_\bullet \times \underline{U}_\theta$ para cada $z \in E$.

I.3.c. SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLE DO P.D.P.

Seja a função $V : E \rightarrow R$ o valor do problema de controle ótimo estocástico do P.D.P, definido por:

$$V(z) = \inf_{u \in \underline{U}_\bullet \times \underline{U}_\theta} V(z, u) = E_x^\bullet \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} l_\bullet(x_t, u_\bullet(t)) \, dt + \right.$$

$$\sum_k e^{-\alpha T_k} l_\theta(x_{T_k}^-, u_\theta) I(x_{T_k}^- \in E_\theta, T_k < \infty) \quad (I.19)$$

para cada $z \in E$ e $u \in \underline{U}_\theta \times \underline{U}_\theta$.

A função valor, $V(z)$, é obtida através de um procedimento sequencial descrito a seguir:

Seja uma sequência de funções $V^i: E \rightarrow R$, obtidas a cada iteração $i = 0, 1, 2, \dots$, resolvendo-se um problema de controle ótimo estocástico, chamado P_i , com $x_0 = z$ cujo horizonte é o instante do primeiro salto do P.D.P., ou seja:

$$P_i = \underset{u \in \underline{U}_\theta \times \underline{U}_\theta}{\text{minimizar}} V^i(z, u) = E_x^u \left[\int_0^{T_1} e^{-\alpha t} l(x_t^-, u_\theta(t)) dt + e^{-\alpha T_1} l_\theta(x_{T_1}^-, u_\theta) I(x_{T_1}^- \in E_\theta, T_1 < \infty) + V^{i-1}(x_{T_1}^-) I(T_1 < \infty) \right] \quad (I.20)$$

$$\text{onde} \quad V^i(z) = \inf_{u \in \underline{U}_\theta \times \underline{U}_\theta} V^i(x_0^-, u) \quad (I.21)$$

e $V^0(\cdot): E \rightarrow R$ é função Lipschitz contínua arbitrária, não negativa e limitada.

O problema P_i pode ser transformado num problema de controle ótimo determinístico considerando-se o seguinte ponto de vista:

Seja $x_u(t, z)$ uma trajetória controlada por $u \in \underline{U}_\theta \times \underline{U}_\theta$ sobre $[0, t_u^*(z)]$, onde:

$$t_u^*(z) = \inf \{ t \geq 0 : x_u(t, z) \in E_\theta \} \quad (I.22)$$

Se $x(t, z)$ coincide com a versão contínua à esquerda de x_t sobre $[0, T_1]$, $F(t)$ é a distribuição de probabilidade I.I.D e $dF(t)$ uma função densidade de probabilidade exponencial, então

$$E_u^u \left[\int_0^{T_1} e^{-\alpha t} l_{\theta}(x_{u_{\theta}}(t, z), u_{\theta}) dt + e^{-\alpha T_1} l_{\theta}(x_{u_{\theta}}(T_1, z), u_{\theta}) \right] =$$

$$\int_0^{t^*} (dF(t) \int_0^t e^{-\alpha s} l_{\theta}(x_{u_{\theta}}(s, z), u_{\theta}) ds) dt +$$

$$F(t^*) \left(\int_0^{t^*} e^{-\alpha t} l_{\theta}(x_{u_{\theta}}(t, z), u_{\theta}) dt + e^{-\alpha t^*} l_{\theta}(x_{u_{\theta}}(t^*, z), u_{\theta}) \right) =$$

$$\int_0^{t^*} ([\lambda(x_{u_{\theta}}(t, z), u_{\theta}) e^{-\int_0^t \lambda(x(s, z), u_{\theta}) ds}] \int_0^t e^{-\alpha s} l_{\theta}(x(s, z), u_{\theta}) ds) dt +$$

$$e^{-\int_0^{t^*} \lambda(x_{u_{\theta}}(s, z), u_{\theta}) ds} \left(\int_0^{t^*} e^{-\alpha s} l_{\theta}(x(s, z), u_{\theta}) ds + e^{-\alpha t^*} l_{\theta}(x_{u_{\theta}}(t^*, z), u_{\theta}) \right)$$

definindo-se: $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(x(s, z), u_{\theta}) ds$

e, agrupando-se os termos da integral acima, chega-se a seguinte expressão :

$$E_z^u \left[\int_0^{T_1} e^{-\alpha t} l_{\bullet}(x_{u_{\bullet}}(t, z), u_{\bullet}) dt + e^{-\alpha T_1} l_{\theta}(x_{u_{\bullet}}(T_1, z), u_{\theta}) \right] =$$

$$\int_0^{t^*} e^{-(\Lambda(s) + \alpha s)} l_{\bullet}(x_{u_{\bullet}}(s, z), u_{\bullet}) ds + e^{-(\Lambda(t^*) + \alpha t^*)} l_{\theta}(x(t^*, z), u_{\theta}) \quad (I.23)$$

Aplicando a distribuição condicional I.11 no último termo da expressão (I.20) obtém-se :

$$E_z^u [e^{-\alpha T_1} l_{\bullet}(x_{T_1}, u)] = E_z^u [e^{-\alpha T_1} l_{\bullet}(x_{T_1}, u) E[V^{i-1}(x_{T_1}, u)/x_{T_1}]]$$

Notando-se que $l_{\bullet}(x_{T_1}, u) = 1$, a expressão anterior será equivalente a :

$$\int_0^{t^*} e^{-(\Lambda(t) + \alpha t)} l_{\bullet}(x(t, z), u_{\bullet}) \left(\int_E V^{i-1}(y) dQ(x(t, z), u_{\bullet}; y) \right) dt +$$

$$e^{-(\Lambda(t^*) + \alpha t^*)} \int_E V^{i-1}(y) dP(x(t^*, z), u_{\theta}; y) \quad (I.24)$$

Seja $f_{\bullet} : E \times \underline{U}_{\bullet} \rightarrow R$ e $F_{\theta} : E_{\theta} \times \underline{U}_{\theta} \rightarrow R$, funções definidas por:

$$f_{\bullet}(z, u_{\bullet}) = e^{-\alpha t} (l_{\bullet}(z, u_{\bullet}) + \int_E V^{i-1}(y) dQ(y; z, u_{\bullet})) \quad (I.25)$$

$$F_{\theta}(z, u_{\theta}) = e^{-\alpha t^*} (l_{\theta}(z, u_{\theta}) + \int_E V^{i-1}(y) dP(y; z, u_{\theta})) \quad (I.26)$$

Substituindo I.25 e I.26 em I.23 e I.24, obtém-se um problema de controle ótimo determinístico chamado P_{dz} , equivalente a P_z :

$$P_{dz} = \underset{u \in \underline{U}_0 \times \underline{U}_0}{\text{minimizar}} \quad V(x,u) = \int_0^{t^*} e^{-\lambda(t)} f_0(x(t,z), u_0) dt + e^{-\lambda(t^*)} F_0(x(t^*,z), u_0) \quad (I.27)$$

Considere para o problema P_{dz} as seguintes hipóteses :

S1) O conjunto domínio E é um conjunto fechado . Na vizinhança do subconjunto fronteira E_0 , E é convexo ou côncavo diferenciável (neste caso, a fronteira pode ser descrita por uma função g diferenciável , tal que $g(x) = 0$ para todo $x \in E_0$) .

Seja $d_A(z) = \inf_{y \in A} |z-y|$, a função distância de um ponto z a um conjunto A . Então $\sup_{z \in E} d_{E_0}(z) < \infty$.

$$S2) \sup_{u \in \underline{U}_0 \times \underline{U}_0} \int_{R_+} P_{\frac{u}{\lambda}}(T_1)(t) e^{Kt} dt < \infty \quad \text{para } z \in E \quad \text{e} \\ \inf_{u \in U} \lambda(z,u) > K$$

onde K é a constante Lipschitz de $f(\cdot, u)$ para todo $u \in U$.

S3) Para cada ponto z no domínio deve existir um controle $t \rightarrow u(t)$ tal que para um certo k^* tomado independente de z ,

$$t_u^*(z) = \inf \{ t \geq 0 : x_u(t,z) \in E_0 \} \leq k^* d_{E_0}(z)$$

S4) Seja $E_{+\rho}$ o domínio $\{ z \in R^n : d_E(z) \leq \rho \}$ com $\rho > 0$.

Seja $V_{+\rho}^i$ e V o valor do problema P_{dz} tendo como domínio o conjunto $E_{+\rho}$ e E respectivamente . O problema P_{dz} é calmo [3] no sentido que existe uma função de ρ contínua à direita , definida como α , com $\alpha(0) = 0$, para cada extensão apropriada, tal que $V_{+\rho}(z) + V(z) \leq \alpha(\rho)$ para todo $z \in \text{int}(E)$.

Define-se $H : R \times R^n \times E \times U \times \text{Lipchitz}(E) \rightarrow R$ como sendo:

$$H(-\alpha V^i, p, z, u, V^{i-1}(\cdot)) = \langle p, F(z, u) \rangle - l_0(z, u) -$$

$$\lambda(z, u) \int_E [V^{i-1}(y) + q] dQ(y; z, u) \quad (I.28)$$

Teorema 1 : Suponha que $S_1, \dots, S_4$ sejam satisfeitas . Então a função valor do problema P_{dz} , $V^i(z)$, é uma função uniformemente lipschitziana sobre E e satisfaz a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman modificada:

$$\min_{w \in \partial V^i(z)} - \max_{u \in U_0} H(-\alpha V^i(z), -w, z, u, V^{i-1}) = 0 \quad (I.29)$$

para cada $z \in E$,

$$V^i(z) + \max_{u \in U_0} - F_0(z, u) = 0 \quad (I.30)$$

para cada $z \in E_0$, onde ∂V indica o gradiente generalizado no sentido de Clarke [3] .

Além disto , esta sequência converge uniformemente em E para a função valor do problema de controle ótimo do P.D.P. $z \rightarrow V(z)$.

PROVA : Vide[19]

A função valor do problema P_{dz} é obtida resolvendo-se a equação de otimalidade I.29 na classe de controle U_0 , juntamente com a condição de fronteira I.30 na classe de controle U_0 .

Teorema 2 : A função $z \rightarrow V(z)$ é Lipschitz contínua em relação a segunda componente de z e satisfaz a equação de H - J - B :

$$\min_{w \in \partial V(z)} - \max_{u \in \underline{U}_0} H(-\alpha V(z), -w, z, u, V) = 0 \quad (I.31)$$

para cada $z \in E$,

$$V(z) + \max_{u \in \underline{U}_0} - F_\theta(z, u) = 0 \quad (I.32)$$

PROVA : Vide [19]

Os teoremas 1 e 2 fornecem um método sequencial para construir as funções $V^i(z)$, $i = 1, 2, \dots$. A cada iteração calcula-se a função $V^i(z)$ resolvendo-se a equação de H - J - B. Na iteração seguinte $V^{i+1}(z)$ é determinado a partir de $V^i(z)$. $V(z)$ será obtido quando o procedimento convergir. Dado $V(z)$, a política ótima será determinada a partir das condições necessárias e suficientes para otimalidade, fornecida pelo teorema 2.

Verifica-se com facilidade que os modelos de produção - estoque satisfazem as hipóteses S_1, S_2, S_3 sobre o problema. S_1 é satisfeito se notarmos que o espaço de estado do P.D.P. relacionado a tais modelos é limitado pela fronteira $E_\theta = (N \times \Gamma)^m$. S_2 é satisfeito desde que $f(z, u) = C u(t)$, onde C é uma constante. Neste caso a constante lipschitz de $f(z, u)$ é igual a zero. Sendo $P(T_1 > t) = e^{-\lambda t}$ pode-se verificar que S_2 será satisfeito. S_3 será sempre válido pois é possível controlar a velocidade de produção de maneira que o tempo necessário para concluir um item seja finito. Quanto a S_4 , a hipótese do problema ser calmo, é de difícil verificação. No entanto, para o problema de UM ITEM ela é naturalmente satisfeita. A conjectura que fazemos é que S_4 deve ser satisfeita no problema genérico de M itens, já que esta hipótese é violada em situações onde o cone de vetor velocidade é obrigatoriamente tangencial à fronteira, o que em geral está associado a cones de vetor velocidade restritos com relação a aproximação da

fronteira . Esta situação é encontrada , por exemplo , quando após a ocorrência de uma perturbação na fronteira do item j , aumentando - a para $\Gamma_j' = \Gamma_j + \beta_j$, for necessário mudar bruscamente a política de produção no sentido de paralisar a produção do item j e inicializar a produção de outro item .

No capítulo III concluiremos , através da aplicação do teorema 2 que a política de produção do problema de M itens será definida por meio das derivadas parciais $\frac{\partial V}{\partial \xi_j}(z)$. Um item j

será produzido se $\frac{\partial V}{\partial \xi_j}(z) < 0$ e for menor que $\frac{\partial V}{\partial \xi_k}(z)$ $j \neq k$. Um item j não será produzido quando sua derivada parcial for maior que zero .

Além disso iremos desenvolver algoritmos que determinam a política ótima de produção dos problemas de um item e dois itens . Para estes casos mais simples da classe de modelos proposta , serão apresentados , no capítulo IV , resultados do programa computacional relativos aos algoritmos desenvolvidos .

Apesar de não considerarmos a influência do custo de reinicialização nos modelos a serem estudados , podemos esclarecer que o P.D.P. pode representá - lo através do custo $z \rightarrow l_\theta(z, u_\theta, k)$. Neste caso a produção só pode ser paralisada na fronteira E_θ , que é definida nos instantes de mudança de etapas de produção .

Se incluirmos este custo e a existência de etapas no problema de UM ITEM , este processo será definido pelo P.D.P. (n, ξ, k) , no espaço de estados:

$$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \dots \cup E_K \quad \text{e} \quad E_\theta = E_{\theta_1} \cup E_{\theta_2} \cup E_{\theta_3} \cup \dots \cup E_{\theta_K}$$

onde :

$$E_i = \mathbb{N} \times [\Gamma_{i-1}, \Gamma_i] \times (1) \quad , \quad E_{\theta_i} = \mathbb{N} \times \Gamma_i \times (1)$$

$$E_E = N \times [\Gamma_E, \Gamma_E] \times (2) \quad ; \quad E_{\emptyset E} = N \times \Gamma_E \times (2)$$

$$E_K = N \times [\Gamma_{K-1}, \Gamma_K] \times (K) \quad ; \quad E_{\emptyset K} = N \times \Gamma_K \times (K)$$

Neste caso os elementos do P.D.P. serão :

- i) Campo vetorial igual F_K no intervalo $[\Gamma_{K-1}, \Gamma_K]$;
- ii) Taxa de saltos λ ;
- iii) Medidas de transição:

$$Q[(n, \xi, \mu), A] = \sum p_i I_A(n-i, \xi) \quad A \in E$$

$$P[(n, \Gamma_{\mu}, \mu), (n, \Gamma_{\mu}, \mu+1)] = 1 \quad \text{para } \mu < K \quad (I.33)$$

$$\text{e } P[(n, \Gamma_K, K), (n+1, \emptyset, 1)] = 1 \quad (I.34)$$

A medida de transição I.33 , indica mudança de etapas de produção relativas ao item que está sendo produzido e a medida I.34 indica que um item foi produzido .

EXEMPLOS DE MODELOS DE PRODUÇÃO - ESTOQUE

II.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentamos alguns modelos de produção-estoque encontrados na literatura , para dar idéia do escopo do problema estudado ao leitor . Além disso , mostramos na seção II.5 as principais contribuições do modelo proposto no capítulo I , analisando as características de cada sistema de manufatura .

No primeiro problema obtém - se uma expressão do custo médio de operação do sistema de produção - estoque por unidade de tempo , através da teoria de filas . No segundo problema utiliza-se conceitos da teoria de renovação para determinar uma medida da qualidade do atendimento à demanda aleatória . No último problema discute-se a aplicação da teoria de controle estocástico no sistema de produção - estoque .

II.2. MODELO DE PRODUÇÃO - ESTOQUE ANÁLOGO A UM SISTEMA DE
FILA [10]

II.2.a. CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA .

O modelo do sistema de manufatura proposto em [10] possui uma linha de produção que fabrica itens idênticos. Os produtos acabados vão imediatamente ao estoque que tem capacidade finita de estocagem .O tempo gasto para se produzir um item é constante ou uma variável aleatória com função de distribuição acumulada $F(\cdot)$. A demanda de um produto é um processo de Poisson com taxa λ e os lotes admissíveis são de apenas um item . O cliente é atendido imediatamente quando o item pedido encontra-se estocado . Caso o item não esteja disponível no estoque , o cliente espera pela sua fabricação , isto quer dizer que não ocorre a perda de pedidos . Considera-se neste sistema de manufatura os seguintes

custos lineares:

h - Custo de estoque por item por unidade de tempo .

b - Custo de atraso de entrega do item ao cliente por item por unidade de tempo .

Além desses, inclui-se o custo fixo $c_k = k$ devido à reinicialização da produção.

II.2.b. MODELO MATEMÁTICO .

O comportamento deste sistema de produção - estoque é análogo a um sistema de fila , onde a linha de produção é associado ao servidor , a produção é associada ao serviço e os pedidos da demanda associam-se às chegadas na fila . O tamanho da fila é relacionado ao nível do estoque , verificando-se que um acréscimo na fila , devido à chegada de cliente , corresponde a um decréscimo no nível do estoque , e que a saída de um elemento da fila quando um serviço é finalizado , implica no acréscimo de um item no estoque , após a sua produção.

A relação entre o tamanho da fila q e o nível do estoque W , pode ser especificado definindo-se o parâmetro Q_0 como o nível máximo de estoque, tal que:

$$W = Q_0 - q \quad (II.1)$$

Considera-se que o tempo médio de serviço , $E(s)$ é menor que o tempo médio de ocorrência de chegada entre os clientes $1/\lambda$. Neste caso a política ótima deriva-se do problema de fila com servidor removível , que consiste em interromper o serviço quando o tamanho da fila for igual a Q^* , ou reiniciá-lo quando a fila for igual a Q^{**} [11] .

Através da equação II.1, a política (Q^*, Q^{**}) para $Q^* \leq Q^{**}$ do sistema de fila é relacionada com a política de produção do sistema de produção-estoque, definindo-se os parâmetros:

$$W^{**} = Q_0 - Q^* \quad (II.2)$$

$$W^* = Q_2 - Q^{**} \quad (II.3)$$

Assim $W^{**} \geq W^*$ e a política (W^*, W^{**}) é parar de produzir quando o nível de estoque for igual a W^{**} e reiniciar a produção quando o nível de estoque for igual a W^* .

Arbitrando-se $Q^{**} = Q_1$ e $Q^* = 0$, pode-se caracterizar a política (W^*, W^{**}) pelo par (Q_1, Q_2) , onde a produção é paralisada quando $w^{**} = Q_1$ e reinicializada quando $w^* = Q_2 - Q_1$.

Para $Q_2 > Q_1 > 0$, a trajetória do nível de estoque para uma política de revisão contínua (Q_1, Q_2) está exemplificada na figura II.1. Observe que o tamanho da fila é a diferença entre o nível máximo de estoque e o nível atual de estoque.

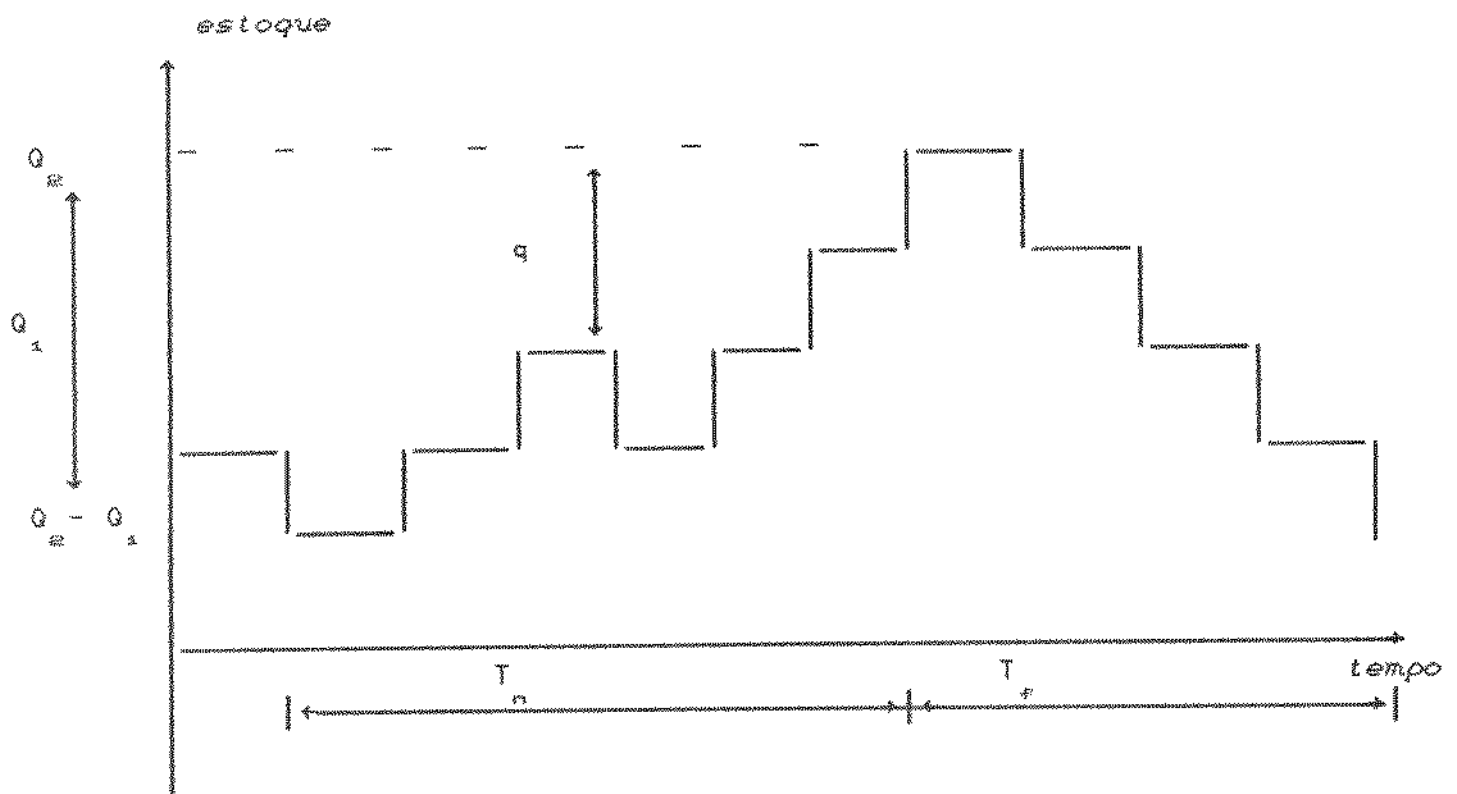


Figura II.1. Trajetória do nível do estoque para $Q_2 > Q_1$.

Seja $C(t)$ o custo médio de produção - estoque acumulado até o instante $t \geq 0$. objetivo deste problema é

$$\text{minimizar} \quad \frac{C(t)}{t} \quad (II.4)$$

$$t \rightarrow \infty$$

Um ciclo de produção pode ser visto como um processo regenerativo, alternando-se entre períodos de produção e ociosidade. Portanto, pode-se concluir da teoria de renovação, que o problema definido em II.4 é equivalente a minimizar o custo médio por unidade de tempo de operação do sistema de produção - estoque durante um ciclo de produção completo [14].

$$\text{Seja } T_p = E[t_p], C_p = E[c_p], T_n = E[t_n], C_n = E[c_n]$$

onde :

t_p e c_p são variáveis aleatórias que indicam a duração e o custo médio por unidade de tempo, respectivamente, de um período sem produção.

t_n e c_n são variáveis aleatórias que indicam a duração e o custo médio por unidade de tempo, respectivamente, de um período de produção.

Então, a probabilidade no estado estacionário de haver ou não a produção é $T_p / (T_p + T_n)$ ou $T_n / (T_p + T_n)$, respectivamente [24]

O custo médio por unidade de tempo durante um ciclo, definido por $\bar{C}$, é dado pela combinação de C_p e C_n , com pesos correspondendo à probabilidade de estado estacionário apropriado e acrescentando-se somente uma vez o custo de reinicialização C_k , ao longo deste período [14], ou seja :

$$\bar{C} = \frac{C_p * T_p + C_n * T_n + C_k}{T_p + T_n} \quad (II.5)$$

As expressões para C_p , T_p , T_n e C_n podem ser desenvolvidas através da análise da fila M/G/1 com servidor removível conforme veremos a seguir :

Caso 1: $W^* \geq 0$ ($Q_2 \geq Q_1$).

Observe (fig.II.1) que T_p é o tempo gasto para que a fila varie entre $q = 0$ e $q = Q_1$. Considerando um tempo de chegada entre clientes igual a $1/\lambda$, obtém-se :

$$T_p = \frac{Q_1}{\lambda} \quad (II.6)$$

A fila média durante o período T_p é igual a

$$E[q] = \frac{Q_1 - 1}{2} \quad (II.7)$$

A partir das equações II.1 e II.7 determina-se $E[w]$, que é o nível de estoque esperado durante o período T_p , ou seja :

$$E[w] = \frac{2Q_2 - Q_1 + 1}{2} \quad (II.8)$$

Portanto a taxa de custo C_p é dada por:

$$C_p = h E(w) = \frac{h (2Q_2 - Q_1 + 1)}{2} \quad (II.9)$$

O período de produção é analisado dividindo-o em Q_1 sub-períodos de produção. O sub-período i de produção começa quando a fila chega à $q = Q_1 - i + 1$ e termina quando a fila chega à $q = Q_1 - i$.

O tempo de duração de cada sub-período de produção i , definida por T_i , é equivalente ao tempo médio gasto para o servidor ficar ocupado numa fila M/G/1 [17], ou seja:

$$T_1 = \frac{E(s)}{(1 - \lambda E(s))} \quad (\text{II.10})$$

onde $E(s)$ é o tempo de produção esperado de um item, portanto:

$$T_n = \frac{Q_1 E(s)}{1 - \lambda E(s)} \quad (\text{II.11})$$

A taxa de custo C_n é constituído pelas taxas de custos de estoque e falta de estoque esperado durante o período de produção. A taxa de custo de estoque esperado é o produto da taxa de custo de estoque h , pelo nível de estoque positivo esperado ($E(W^+)$) no período de produção. A taxa de custo de falta de estoque esperado ($E(W^-)$) é o produto da taxa de custo h pelo nível de estoque negativo esperado ($E(W^-)$) no mesmo período.

Para encontrar os valores $E(W^+)$ e $E(W^-)$, define-se θ o tamanho da fila que excede Q_m , ou seja:

$$\theta = \begin{cases} 0 & \text{se } q < Q_m \\ q - Q_m & \text{se } q \geq Q_m \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

Seja π_n ($n = 1, 2, \dots$) a probabilidade do tamanho da fila ser igual a n durante o período com servidor ocupado de um sistema M/G/1 que é dado por:

$$\pi_n = \frac{P_n}{(1 - p_0)} \quad (\text{II.13})$$

Onde P_n é a probabilidade incondicional do tamanho da fila.

O tamanho da fila esperado que excede Q_m dado que o servidor produz quando a fila chega a Q_1 , definido por $E[\theta(Q_1, Q_m)]$, pode ser alculado através do seguinte conjunto de equações [10]:

$$E[\theta(1, 0)] = 1 + \frac{\lambda^2 E(s^2)}{2(1 - \lambda E(s))\lambda E(s)} \quad (\text{II.14})$$

$$E\theta(1, Q_{\infty}) = \sum_{i=Q_{\infty}}^{\infty} [i - Q_{\infty}] \pi_i = \sum_{i=Q_{\infty}+1}^{\infty} [i - (Q_{\infty} + 1)] \pi_i + \sum_{i=Q_{\infty}+1}^{\infty} \pi_i \quad (\text{II.15})$$

$$E[\theta(Q_1, Q_{\infty})] = \frac{1}{Q_1} \sum_{i=1}^{Q_1} E\theta(1, Q_{\infty} - Q_1 + i) \quad (\text{II.16})$$

Dado $E[\theta(1, 0)]$ e π_n determina-se $E[\theta(1, Q_{\infty})]$ resolvendo - se recursivamente a equação II.15. Após calculado $E[\theta(1, Q_{\infty})]$, determina-se $E[\theta(Q_1, Q_{\infty})]$ através da relação II.16 para qualquer $Q_1 \neq 1$.

Assim podemos calcular $E[W^+]$ e $E[W^-]$ usando as seguintes relações :

$$E(W^-) = E(\theta) \quad (\text{II.17})$$

$$E(W^+) = E(Q_{\infty} - q + \theta) = Q_{\infty} - E(q) + E(\theta) \quad (\text{II.18})$$

Portanto determina - se $C(n)$ através da expressão :

$$C_n = hE(W^+) + bE(W^-) = h(Q_{\infty} - E(q)) + (h + b)E(\theta) \quad (\text{II.19})$$

Onde $E(q)$ é o tamanho médio da fila M/G/1 com servidor ocupado. Em [17] verifica - se que :

$$E(q) = \frac{\lambda^m E(s^m)}{2(1 - \lambda E(s))\lambda E(s)} + \frac{Q_1 + 1}{2} \quad (II.20)$$

Substituindo II.6 , II.9 , II.11 , e II.19 em II.5, encontra-se a taxa de custo médio de uma política (Q_1, Q_2) , para $Q_2 \geq Q_1$:

$$\bar{C} = \frac{h(2Q_2 - Q_1 + 1)}{2} + \lambda E(s) ((h+b) E[\theta(Q_1, Q_2)] -$$

$$h E[\theta(1,0)] + \frac{k\lambda(1 - E(s))}{Q_1} \quad (II.21)$$

Caso 2: $W^* < 0$ ($Q_2 < Q_1$)

Esta é uma situação em que o sistema funciona intencionalmente com estoque negativo (fig.II.2)

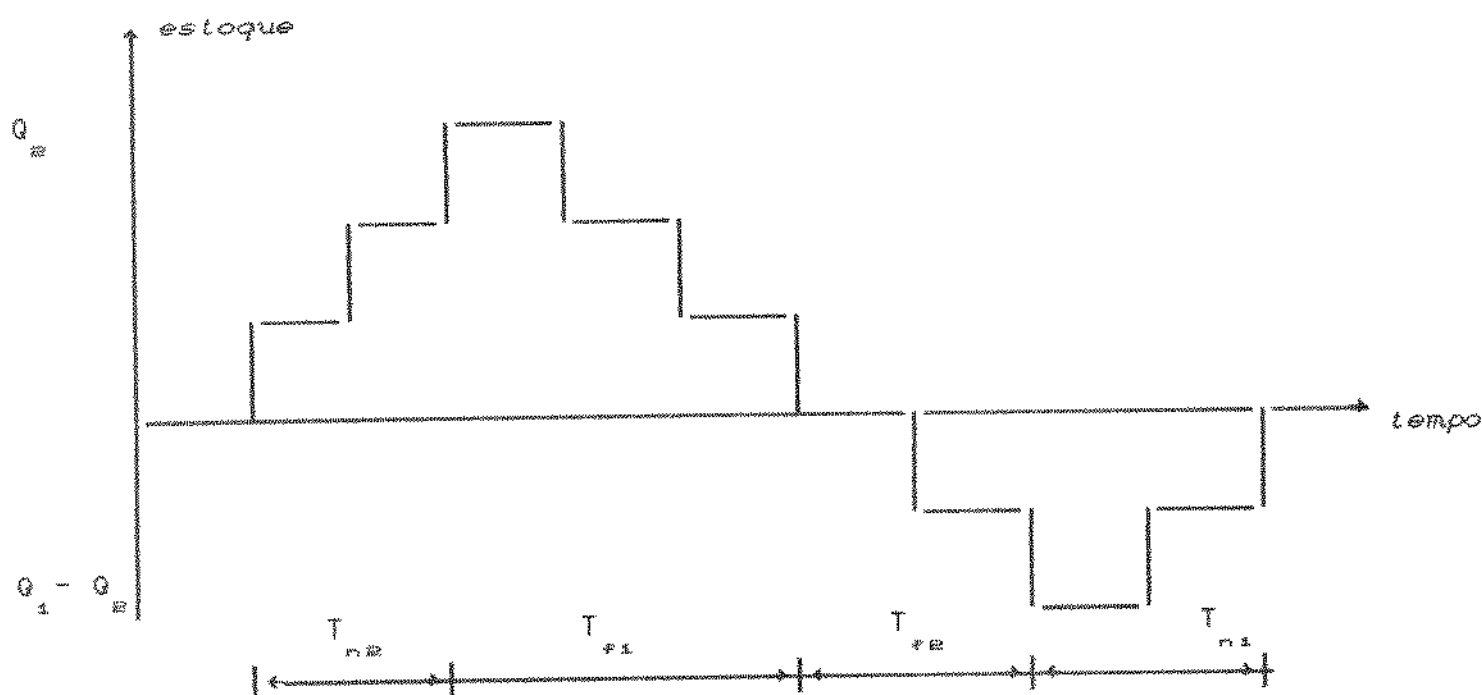


Fig. II.2 : TRAJETÓRIA DO NÍVEL DE ESTOQUE PARA $Q_2 < Q_1$.

A análise deste caso é semelhante à anterior. O custo médio por unidade de tempo é calculado para um ciclo de produção, constituído por um período de produção do servidor e o seu período de ociosidade.

O período sem produção é dividido em duas etapas. Na primeira o estoque é positivo, portanto, começa quando a fila é igual a $q = 0$ e termina quando $q = Q_2$. Na segunda etapa, o estoque é negativo, portanto, inicia-se em $q = Q_2$ e termina em $q = Q_1$.

A duração de cada uma destas etapas é igual a:

$$T_{p_1} = \frac{Q_2}{\lambda} \quad \text{para } W \geq 0 \quad (\text{II.22})$$

$$T_{p_2} = \frac{(Q_1 - Q_2)}{\lambda} \quad \text{para } W < 0 \quad (\text{II.23})$$

E as taxas de custos esperados para a primeira e segunda etapas são, respectivamente, dadas por:

$$C_{p_1} = \frac{h \sum_{q=0}^{Q_2-1} (Q_2 - q)}{Q_2} = h \frac{(Q_2 + 1)}{2} \quad (\text{II.24})$$

$$C_{p_2} = \frac{b \sum_{q=Q_2}^{Q_1-1} (q - Q_2)}{Q_1 - Q_2} = b \frac{(Q_1 - Q_2 - 1)}{2} \quad (\text{II.25})$$

O período de produção também é dividido numa primeira etapa no qual o estoque é positivo e numa segunda no qual o estoque fica

negativo. A primeira etapa compreende $(Q_1 - Q_2)$ sub-períodos de produção, enquanto que os Q_2 sub-períodos restantes estão compreendidos na segunda etapa. A duração da primeira e segunda etapas são dados, respectivamente, pelas expressões :

$$T_{n_1} = (Q_1 - Q_2) E(s) / (1 - \lambda E(s)) \quad (II.26)$$

$$T_{n_2} = Q_2 E(s) / (1 - \lambda E(s)) \quad (II.27)$$

E os custos médios por unidade de tempo da primeira e segunda etapas do período de produção são respectivamente iguais a :

$$C_{n_1} = b (E[\theta(1,0)]) + \frac{Q_1 - Q_2 - 1}{2} \quad (II.28)$$

$$C_{n_2} = (h + b) E[\theta(Q_2, Q_2)] + h \left[\frac{Q_2 + 1}{2} - E[\theta(1,0)] \right] \quad (II.29)$$

A taxa de custo médio médio para a política (Q_1, Q_2) $Q_1 > Q_2$, é dado através de uma combinação entre as taxas de custo C_{n_1} , C_{n_2} , $C_{f_1} = C_{f_2}$ com os respectivos tempos t_{n_1} , t_{n_2} , t_{f_1} e t_{f_2} e incluindo-se o custo fixo C_k , ou seja :

$$\bar{C} = \frac{C_{f_1} T_{f_1} + C_{f_2} T_{f_2} + C_{n_1} T_{n_1} + C_{n_2} T_{n_2} + C_k}{T_{f_1} + T_{f_2} + T_{n_1} + T_{n_2}} =$$

$$= \frac{k\lambda(1 - \lambda E(s))}{Q_1} + \frac{h(Q_2 + 1)Q_1}{2Q_1} + \frac{b(Q_1 - Q_2)(Q_1 - Q_2 - 1)}{2Q_1} +$$

$$\frac{\lambda E(s)E[\theta(1,0)] [bQ_1 - (h+b)Q_1]}{Q_1} + \frac{\lambda E(s)Q_2 (h+b)E[\theta(Q_2, Q_2)]}{Q_1} \quad (II.30)$$

Quando $Q_1 = Q_2 = Q$, a expressão II.30 é equivalente a II.21.

Os valores Q_1 e Q_2 que minimizam o custo esperado, são obtidos através de procedimento de busca unidimensional.

II.2.c RESULTADOS .

Os gráficos II.1 a II.6 foram obtidos através de simulações efetuadas por [10] e mostram, respectivamente, a política de produção e a taxa de custo médio associado às variações na taxa da demanda, custo de reinicialização e custo de falta de estoque do sistema de produção - estoque analisado na seção anterior. Considera-se uma demanda com taxa $\lambda = 0.8$, custo de estoque $h = 1.0$, custo de falta de estoque $b = 10$ e custo de reinicilização da produção $k = 100$. A distribuição do tempo de serviço é definido pela variável S dada por:

$$S = \sum_{i=1}^3 S_i, \text{ onde}$$

S_i é uma variável aleatória com distribuição exponencial $1/\mu_i$. Considera-se que $1/\mu_1 = 1/2$, $1/\mu_2 = 1/3$, $1/\mu_3 = 1/6$.

O gráfico II.1 mostra que um aumento na taxa de demanda implica no aumento dos parâmetros W^* e W^{**} . Isto pode ser explicado observando-se que a elevação na média e na variabilidade da demanda reflete no acréscimo do estoque de segurança W^* , enquanto que o parâmetro W^{**} deve ser expandido de tal maneira que o número esperado de reinicializações da produção, definido pela variável $E(R)$, permaneça constante, onde:

$$E(R) = \lambda (1 - \lambda E(s)) / (W^{**} - W^*) \quad (II.31)$$

O crescimento no custo de reinicialização da produção diminui o

valor de $E(R)$. Portanto , a diferença $W^{**} - W^*$ deve ser aumentada conforme pode ser observado no gráfico II.3 .

O gráfico II.5 mostra que W^{**} e W^* variam proporcionalmente com o custo de falta de estoque .

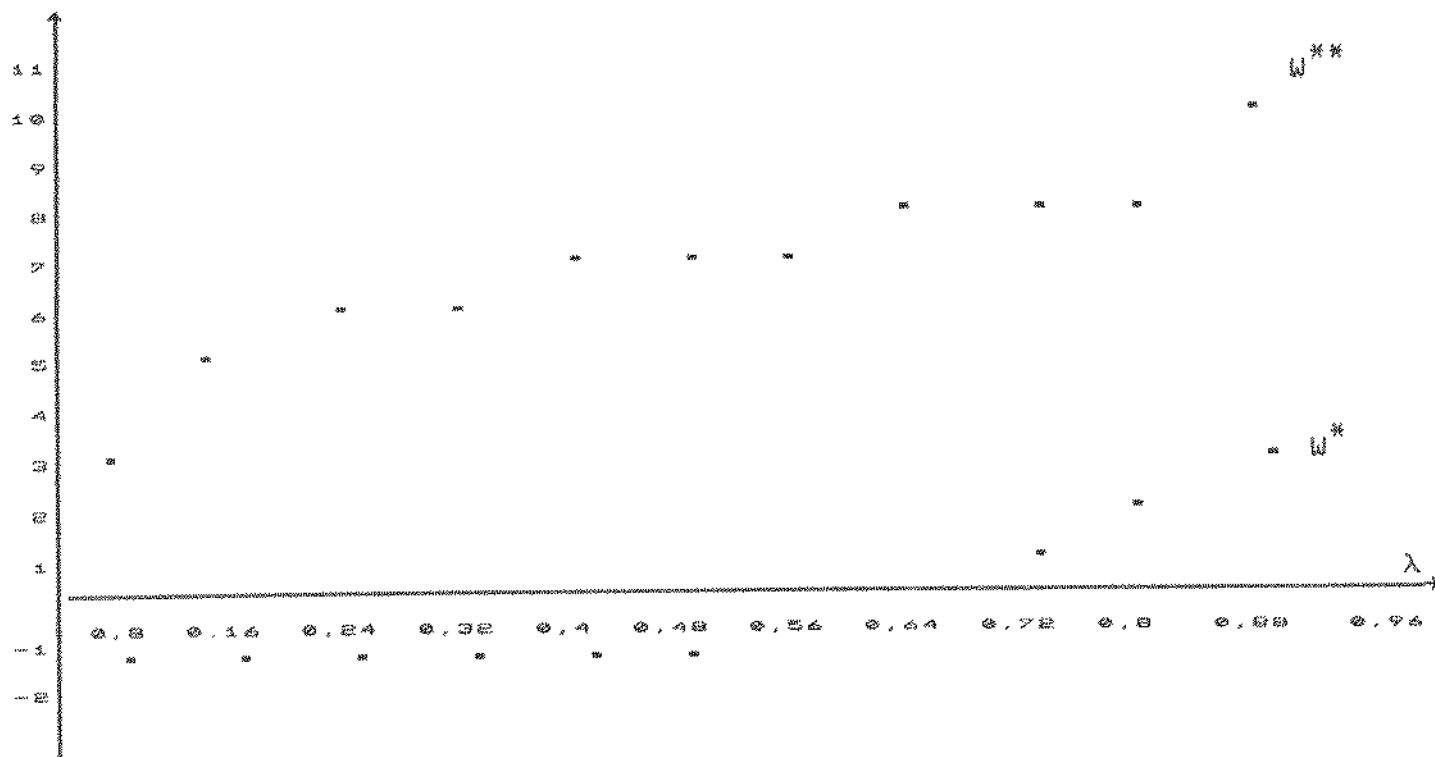


Gráfico II.1 - Variação da Política de Produção com a Demanda .

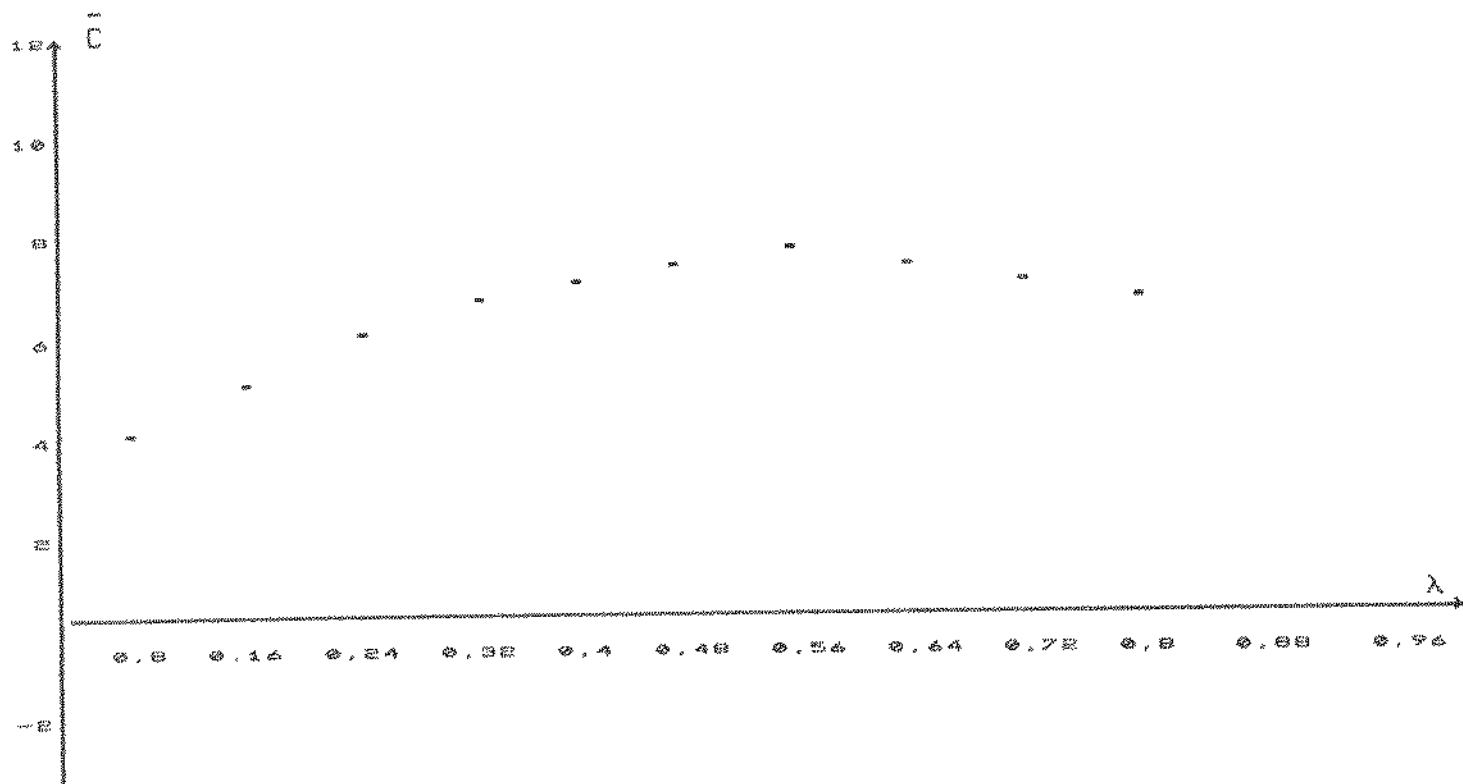


Gráfico II.2 - Variação do Custo Médio com a demanda .

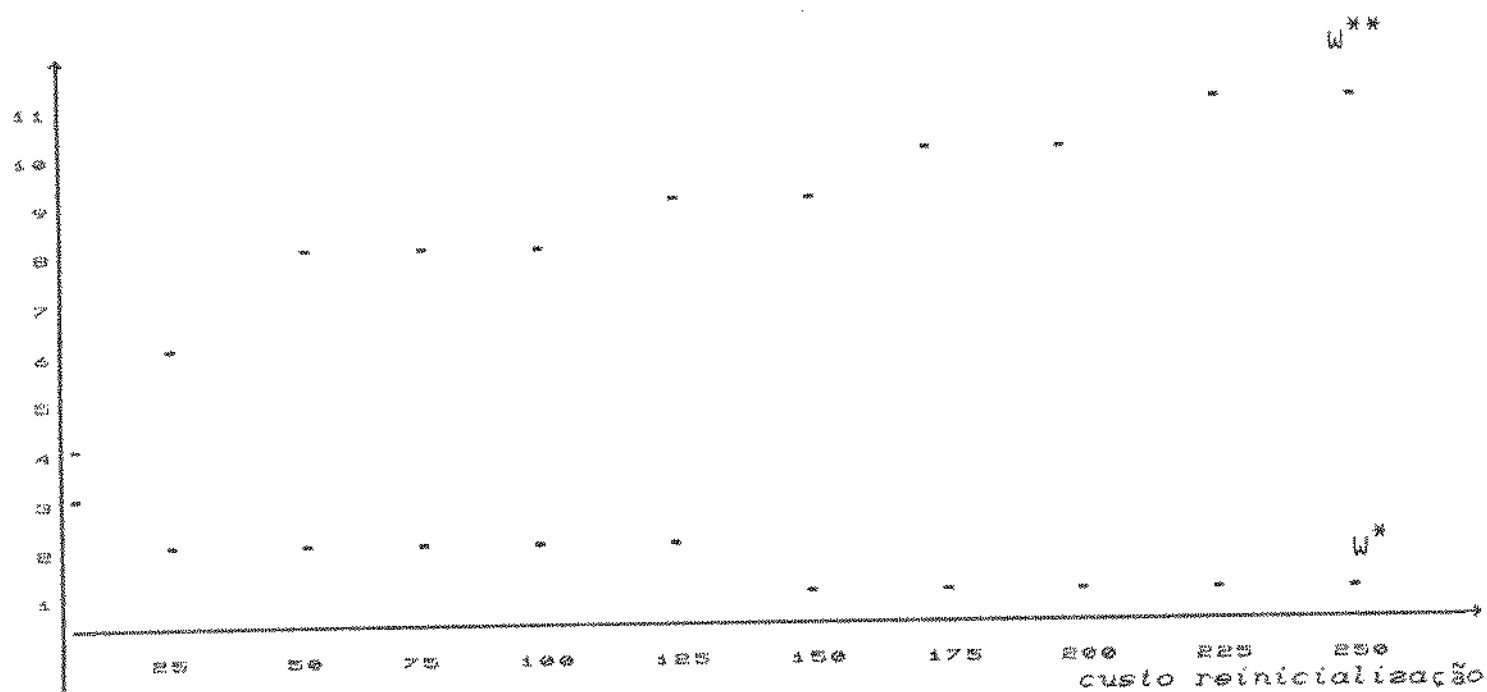


Gráfico II.3 - Variação da Política de Produção com os Custos de Reinicialização

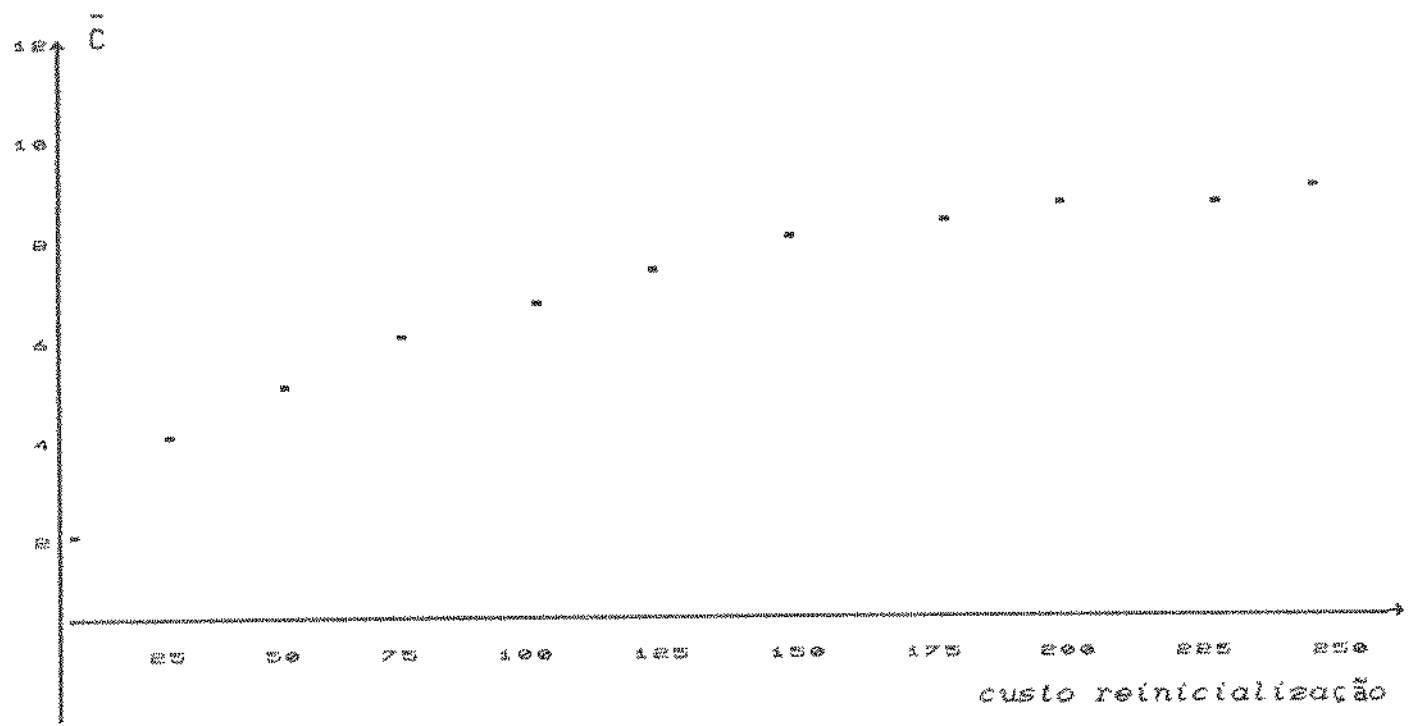


Gráfico II.4 - Variação do Custo Médio de Produção com o Custo de Reinicialização

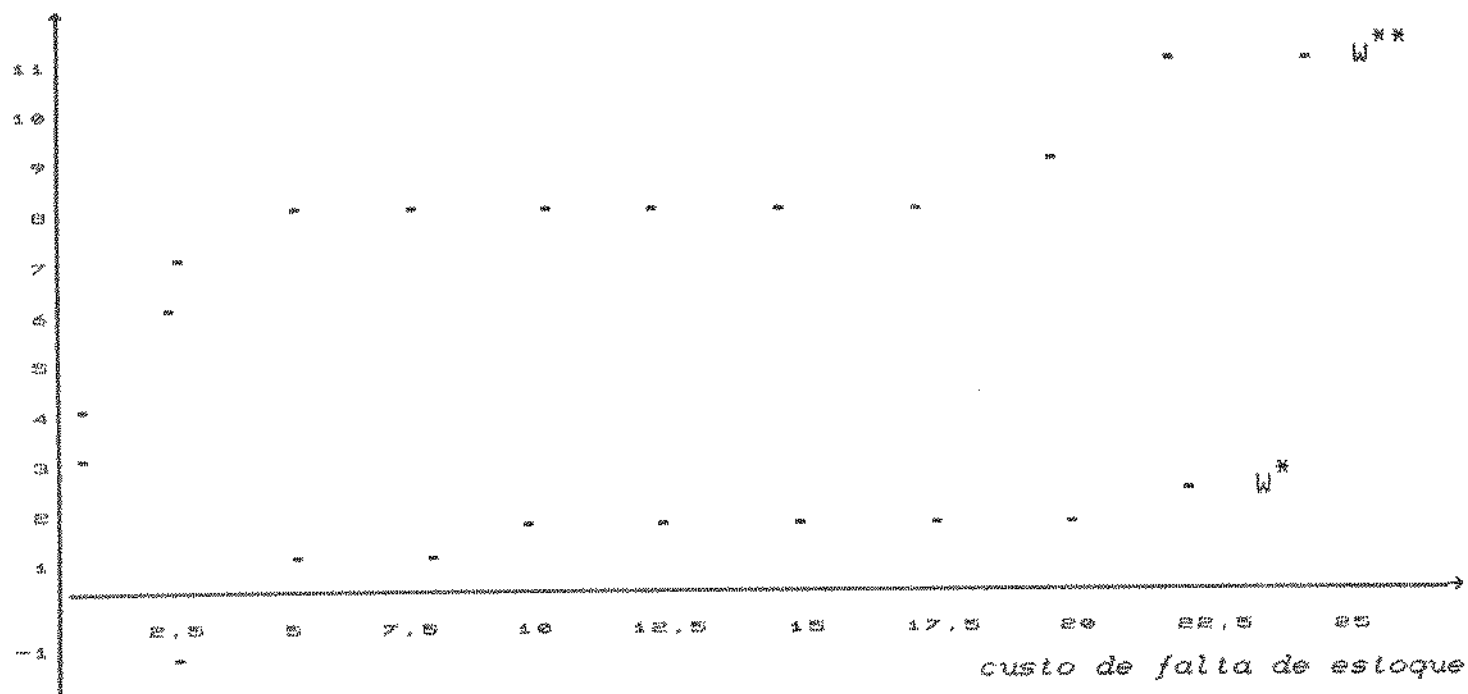


Gráfico II.5 - Variação da Política de Produção com o Custo de Falta de Estoque .

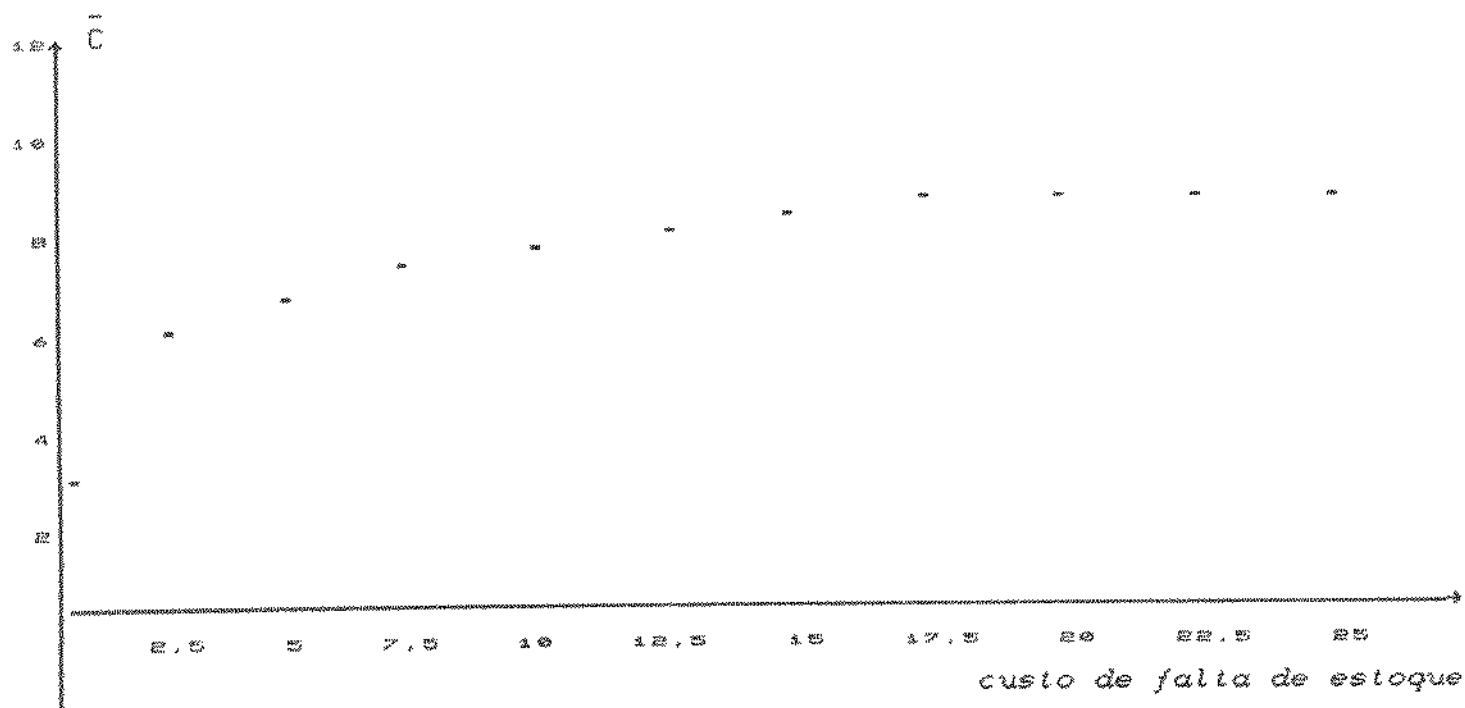


Gráfico II.6 - Variação do Custo Médio de Produção com o Custo de Falta de Estoque .

II.3. MODELO DE PRODUÇÃO - ESTOQUE ANALISADO COM TEORIA DE RENOVACÃO [26]

II.3.a. CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA

O modelo apresentado em [26] possui um sistema de manufatura que produz itens do mesmo tipo a uma taxa τ itens por unidade de tempo suficiente para atender a demanda. A produção é paralisada quando o nível de estoque é elevado ($= M$), enquanto que a produção é reiniciada imediatamente quando o nível de estoque torna-se suficientemente baixo ($= m$). A demanda para um produto é um processo de Poisson composto, ou seja, os clientes chegam de acordo com um processo de Poisson com taxa λ e os tamanhos dos lotes pedidos por cada cliente são variáveis aleatórias com densidade de probabilidade $b(.)$. Sendo o lote pedido por um cliente definido pela variável genérica D , assume-se para efeito de estabilidade do sistema que,

$$\tau > \lambda E(D) \quad (II.32)$$

Considera-se um primeiro modelo onde o cliente espera quando o lote pedido excede o nível de estoque. E um outro modelo no qual o cliente perde a sua parte do lote que exceder o nível de estoque.

II.3.b. MODELO MATEMÁTICO SEM PERDA DE LOTE

O objetivo deste problema é encontrar níveis de estoque m e M tais que um compromisso adequado é encontrado entre o número de itens estocados, falta de itens no estoque e mudança da taxa de produção.

Seja $\Delta = M - m$. Este valor é aproximado pela fórmula do tamanho de lote econômico [26] dado por :

$$\Delta = \sqrt{\frac{2 k [\tau - \lambda E(D)] \lambda E(D)}{\tau h}} \quad (II.33)$$

onde:

k = custo para reinicializar a produção;

h = custo de estoque por unidade de tempo.

A partir do tamanho do lote produzido, indicado em (II.33), o nível de estoque m é calculado em função de uma medida da qualidade de serviço prestado que é, por definição, igual a:

f = fração do lote pedido pelo cliente que é encontrado imediatamente no estoque, $0 \leq f \leq 1$

O processo estocástico descrevendo o nível do estoque e o estado da produção (produzir ou não) é um processo regenerativo. Isto significa que, para se determinar a medida de serviço associado com a política de produção (M,m), basta estudar o processo durante um ciclo de regeneração.

Seja um ciclo definido como o tempo entre dois instantes consecutivos no qual a posição do estoque chega ao nível M e a produção é paralisada. Assumindo que um ciclo destes começa no instante igual a zero, o comportamento em regime estacionário do processo pode ser estudado em função do comportamento de um ciclo, caracterizado pelas variáveis aleatórias:

T: A duração de um ciclo de regeneração;

V: O tamanho do total dos lotes pedidos pelo cliente durante o ciclo $[0, T]$

S: A parte dos lotes pedidos pelo cliente, que não são encontrados imediatamente no estoque durante o ciclo $[0, T]$.

Do teorema de Wald's [14] :

$$E(V) = \lambda E(T) E(D) \quad (II.34)$$

A fração do lote não encontrado imediatamente no estoque no regime estacionário é dado por :

$$\frac{E(S)}{\lambda E(T) E(D)} = (1 - f) \quad (II.35)$$

Seja as funções:

$t_0(x, m)$: Tempo esperado até o primeiro instante no qual o nível de estoque cai abaixo do nível crítico m , dado que no instante zero, a posição de estoque é $x + m$ e a produção está paralisada, $x \geq 0$;

$t_1(x, M)$: O tempo esperado para que o estoque atinja o nível M , dado que a posição do estoque é x e o estado do sistema é produzir;

$\gamma(u/x)$: A densidade de probabilidade de salto abaixo do nível de estoque m ser igual a u dado que, no instante zero, o estoque é igual à $x + m$ e a produção está paralisada, $x \geq 0$;

$S(x, M)$: a quantidade esperada do tamanho dos lotes pedidos que não serão encontrados imediatamente no estoque, até o instante em que o nível de estoque é igual a M , dado que o nível de estoque é $x \leq M$, e o estado do sistema é produzir.

As expressões que determinam $t_0(M-m, m)$, $t_1(x, m)$, $S(x, M)$ e $\gamma(u/M-m)$ abrangem dois casos: $M-m = 0$ e $M-m > 0$

Para $M-m = 0$:

$$t_0(M-m) = 1/\lambda \quad (II.36)$$

$$\gamma(u/M-m) = b(u) \quad , \quad u \geq 0 \quad (II.37)$$

Para $M-m > 0$:

$$t_1(x, M) = (M-x)/(\tau - \lambda E(D)) \quad , \quad x \leq M \quad (II.38)$$

Em regime estacionário, as funções $t_1(M-m)$, $\gamma(u/M-m)$ e $S(x, M)$ são aproximadas pelas seguintes expressões :

$$t_1(M-m) \approx \frac{M-m}{\lambda E(D)} + \frac{E(D^2)}{2\lambda E^2(D)} \quad (II.39)$$

$$\gamma(u/M-m) \approx \frac{1}{E(D)} [1 - B(u)] \quad (II.40)$$

Onde $B(u)$ é a função de distribuição do tamanho do lote .

A expressão II.39 é válida desde que $M-m$ seja suficientemente grande quando comparado com $E(D)$, ou seja:

$$M-m \geq \begin{cases} E(D) & \text{se } 0 \leq C_D^2 \leq 1 \\ \frac{1}{2} C_D^2 E(D) & \text{se } C_D^2 > 1 \end{cases} \quad (II.41)$$

onde C_D^2 é o coeficiente de variação de D definido por:

$$C_D^2 = \frac{\sigma(D)}{E(D)} \quad (II.42)$$

$$S(x, M) \approx \sum_{i=1}^2 C_i (e^{-d_1 x} - e^{-d_2 x}) , \quad 0 \leq x \leq M \quad (\text{II.43})$$

com,

$$C_1 = \frac{\alpha \sigma}{\beta[\tau - \lambda E(D)]} \quad (\text{II.44})$$

$$C_2 = \frac{\gamma \tau}{\delta[-\lambda E(d)]} \quad (\text{II.45})$$

$$d_1 = \beta , \quad (\text{II.46})$$

$$d_2 = \delta \quad (\text{II.47})$$

(α , β , γ , δ são definidos em [26] pelas equações 1.75 , 1.76 e 1.80)

Determinadas as funções $t_0(x, m)$, $\gamma(u/M-m)$, $t_1(x, M)$ e $S(x, M)$ obtem-se $E(T)$ e $E(S)$ através da esperança condicional :

$$E(T) = t_0(M-m, m) + \int_0^{\infty} t_1(m-u, M) \gamma(u/M-m) du \quad (\text{II.48})$$

$$E(S) = \int_m^{\infty} [u-m+S(m-u, M)] \gamma(u/M-m) du + \int_0^m S(m-u, M) \gamma(u/M-m) du \quad (\text{II.49})$$

II.3.c MODELO MATEMÁTICO COM PERDA PARCIAL DO LOTE .

Este modelo também é estudado pelas variáveis T , V e S que caracterizam o ciclo do processo regenerativo , definido na seção II.3.a Para diferenciar as notações entre os dois casos, considera-se que $E'(T)$, $E'(V)$ e $E'(S)$ são os respectivos valores esperados das

variáveis T, V e S , no modelo com perda parcial de lote.

A fração dos lotes perdidos pelos clientes em regime estacionário é equivalente à fração dos lotes não encontrados imediatamente no estoque , que neste caso é igual a :

$$\frac{E'(s)}{\lambda E'(T) E'(D)} = f \quad (II.50)$$

Para o modelo sem perda de lote, a produção total durante um ciclo é igual ao total de lotes pedidos durante um ciclo, ou seja:

$$\tau[E(T) - t_0(M-m)] = \lambda E(T) E(D) \quad (II.51)$$

Para o modelo com perda parcial de lote, a produção total por ciclo é igual ao total de lotes pedidos durante um ciclo menos o total de lotes não encontrados imediatamente no estoque durante um ciclo , ou seja:

$$\tau[E'(T) - t_0(M-m)] = \lambda E'(T) E(D) - E'(S) \quad (II.52)$$

Relacionando-se II.51 e II.52 , obtem-se a expressão :

$$E'(T) = E(T) - \frac{E'(s)}{\tau - \lambda E(D)} \quad (II.53)$$

Para obter a relação entre E(S) e E'(S) defini-se a variável aleatória I como o período de um ciclo durante o qual o nível do estoque é negativo para o modelo sem perda de lote . E[I] é o tempo gasto para produzir os itens que não foram encontrados imediatamente no estoque pelo cliente . Portanto ,

$$E(T) = E'(T) + E(I) \quad (II.54)$$

$$E(S) = E'(S) + \lambda E(D)E(D) \quad (II.55)$$

$$E'(S) = \left[1 - \frac{\lambda E(D)}{\tau} \right] \quad (II.56)$$

As equações II.52 e II.55, determinam as funções $E'(T)$ e $E'(S)$ através de $E(T)$ e $E(S)$. As expressões para estas últimas funções já foram desenvolvidas para o modelo sem perda de lote.

Fornecendo-se uma medida de serviço f e relacionando-se as equações II.35 , II.48 , II.49 para o modelo sem perda de lote , e as equações II.50 , II.53 e II.56 para o modelo com perda de lote , o nível de estoque m pode ser determinado a partir da seguinte expressão :

Para $\Delta = 0$

$$\left\{ \frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda E(D)}{\tau - \lambda E(D)} \right\} \left[\frac{\tau}{\tau - \lambda E(D)} \int_m^0 (u - m) b(u) du + \right. \\ \left. (1 - B(m)) \sum_{i=1}^2 c_i (1 - e^{-d_i m}) + \sum_{i=1}^2 c_i e^{-d_i m} \int_0^m (e^{d_i u} - 1) b(u) du \right] = \\ = (1 - f) c_f \lambda E(D) \quad (II.57)$$

para $\Delta > 0$

$$\left[\frac{E(D^2)}{2\lambda E^2(D)} + \frac{\Delta}{\tau - \lambda E(D)} + \frac{E(D^2)}{2E(D)[\tau - E(D)]} \right]^{-1} \left[\frac{\tau}{2E(D)[\tau - \lambda E(D)]} \right. \\ \left. * \int_m^{\infty} (u - m)^2 b(u) d(u) + \frac{1}{E(D)} \left[\int_m^{\infty} (1 - B(u)) d(u) \right] \sum_{i=1}^{\infty} c_i (1 - e^{-d_i(\Delta+m)}) \right. \\ \left. + \frac{1}{E(D)} \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{-d_i m} \int_0^m (e^{-d_i u} - e^{-d_i u}) (1 - B(u)) du \right] = \\ = (1 - f) c_* \lambda E(D) \quad (II.58)$$

onde :

$$c_* = \begin{cases} \frac{\tau}{\tau - \lambda E(D)} & \text{para o modelo sem perda ;} \\ 1 & \text{para o modelo com perda ;} \end{cases}$$

As equações II.57 e II.58 podem ser resolvidas numericamente , usando qualquer procedimento para determinar o zero de uma equação .

II.3.d RESULTADOS .

As tabelas II.1 e II.2 , obtidas através de simulações efetuadas por [26] , mostram os níveis de estoque m e M para as políticas $m = M$ e $M > m$ respectivamente , quando são variados a taxa de produção τ e o fator de serviço f . Em cada tabela é possível comparar também os níveis de estoques para os casos com perda e sem perda de lote .

O nível m é determinado através da equação II.57 na tabela II.1 e através da equação II.58 na tabela II.2. Considera-se que a demanda tenha uma distribuição gamma e o coeficiente de variação $C_D^2 = 1/3$. O valor Δ é determinado de acordo com a equação II.33 para $k =$

25 e $h = 1$. Supõe-se em todos os exemplos que $\lambda = 1$, $E(D) = 1$.

τ	f	Sem Perda	Com Perda Parcial
		(m, M)	(m, M)
1,25	0,95	(9,75 ; 9,75)	(5,17 ; 5,17)
1,25	0,99	(14,92 ; 14,92)	(9,88 ; 9,88)
2,00	0,95	(3,74 ; 3,74)	(2,97 ; 2,97)
2,00	0,99	(5,66 ; 5,66)	(4,84 ; 4,84)

Tabela II.1 - Resultados para política $M = m$

τ	f	Sem Perda	Com Perda Parcial
		(m, M)	(m, M)
1,25	0,95	(8,05 ; 11,21)	(3,46 ; 6,63)
1,25	0,99	(13,22 ; 16,38)	(8,17 ; 11,34)
2,00	0,95	(1,87 ; 6,87)	(1,11 ; 6,11)
2,00	0,99	(3,79 ; 8,79)	(2,98 ; 7,98)

Tabela II.2 - Resultados para política $M > m$

II.4 - MODELO DE PRODUÇÃO - ESTOQUE ANALISADO COM TÉCNICAS DE CONTROLE ÓTIMO [25]

II.4.a - CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA

Para cada período $t = 0, 1, 2, \dots$ de revisão um sistema é caracterizado pelas seguintes variáveis :

W_t = força de trabalho acumulado até o período t .

P_t = Total de itens produzidos até o período t .

I_t = O estoque acumulado no final do período t .

O_t = Demanda acumulada até o período t , que deve ser atendida no final deste período . Caso não seja possível , a demanda será atendida no próximo período .

Para $t = 0$, W_0 , P_0 , I_0 , O_0 são dados . Os períodos de planejamentos são $t = 1, 2, \dots, N$.

As variáveis definidas acima , relacionam-se com as variáveis do período $t + 1$ na seguinte maneira :

$$I_{t+1} = I_t + P_{t+1} - O_{t+1}$$

$$P_{t+1} = P_t + \Delta P_t$$

$$W_{t+1} = W_t + \Delta W_t \quad (II.59)$$

$$O_{t+1} = O_t + \Delta O_t$$

Onde : ΔP_t é o acréscimo do número de itens produzidos entre os períodos t e $t + 1$. ΔW_t é a força de trabalho acrescentado entre os períodos t e $t + 1$. ΔO_t é o acréscimo na demanda entre os períodos t e $t + 1$.

Os custos envolvidos neste sistema são :

1 - O custo médio de produção durante o período t , dado por :

$$C_p(W_t, P_t) = c_1 W_t + c_{13} + c_2 (W_t - W_{t-1} - c_{11})^2 + \\ c_3 (P_t - c_4 W_t)^2 + c_5 P_t - c_6 W_t + c_{12} P_t W_t$$

2 - O custo de estoque no período t :

$$C_n = c_7 (I_t - I_t^*) + c_7 (I_t - c_8 - c_9 O_t)^2$$

Onde I^* é o nível de estoque ótimo determinado pela fórmula do lote economico (equação II.33), que inclui os custos de estoque, falta de estoque e reinicialização da produção.

O custo total durante os períodos de planejamentos $t = 1, 2, \dots, N$ é dado por :

$$J = \sum_{t=1}^N C_p(W_t, P_t) + C_n(I_t, O_t) =$$

$$\sum_{t=1}^N c_1 W_t + c_{13} + c_2 (W_t - W_{t-1} - c_{11})^2 + c_3 (P_t - c_4 W_t)^2 +$$

$$c_5 P_t - c_6 W_t + c_{12} P_t W_t + c_7 (I_t - I_t^*) = c_7 (I_t - c_8 - c_9 O_t)^2 \quad (II.60)$$

O problema é encontrar W_t e P_t tal que o custo J seja minimizado e as restrições dadas em II.59 sejam satisfeitas para $t = 1, \dots, N$.

II.4.b - SOLUÇÃO DO PROBLEMA PARA DEMANDA DETERMINÍSTICA.

O Sistema de equações dado em II.59, pode ser representado

na seguinte formulação em espaço de estados :

$$X_{t+1} = A X_t + B U_t + G d_t \quad (II.61)$$

onde

d_t é a demanda prevista = Δo_t

$$X_t = \begin{bmatrix} I_t \\ P_t \\ W_t \\ O_t \end{bmatrix} \quad \text{é o vetor de estados}$$

$$u_t = \begin{bmatrix} \Delta P_t \\ \Delta W_t \end{bmatrix} \quad \text{é o vetor de controle}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A função custo , dado pela expressão II.60 , é equivalente a:

$$J = \sum_{t=0}^{N-1} [F' X_t + X_t' Q X_t + S U_t + U_t' R U_t + C_0] + g X_N + X_N' H X_N + c_0^I \quad (II.62)$$

onde :

$$Q = \begin{bmatrix} c_7 & 0 & 0 & -c_7 c_9 \\ 0 & c_3 & c_{12}/2 - c_3 c_4 & 0 \\ 0 & c_{12}/2 - c_3 c_4 & 0 & 0 \\ -c_7 c_9 & 0 & 0 & c_7^2 c_9 \end{bmatrix}$$

$$H = 0 \quad ; \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_{12} \end{bmatrix}$$

$$f' = [-2 c_7 c_9 \quad c_5 \quad c_1 - c_4 \quad 2 c_7 c_9 c_9]$$

$$s' = [0 \quad -2 c_{12} c_{11}] \quad ; \quad g' = f'$$

$$c_0 = c_{19} + c_7 c_8 + c_2 c_{11} \quad ; \quad c_0^* = c_7 c_8 + c_{12}$$

A expressão II.61 pode ser escrita na forma :

$$X_{t+1} = A X_t + [B : G] \begin{bmatrix} u \\ -\frac{u}{d_t} \end{bmatrix} \quad (II.63)$$

O problema de encontrar o controle u do sistema discreto definido pela equação II.63, que minimiza a função quadrática

II.62 , é conhecido como o problema do regulador linear de estado com perturbação determinística .

Pode-se mostrar (teorema 4.2 em [25]) que o controle ótimo deste sistema discreto é do tipo malha fechada , dado por :

$$u_t^* = K(t) X_t^* + F(t) d_t + r_t + e_t \quad (II.64)$$

onde u_t^* e X_t^* indicam o controle ótimo e o vetor solução de estado respectivamente e

$$K(t) = - [R + B' M(t+1) B]^{-1} B' M(t+1) A$$

$$F(t) = - [R + B' M(t+1) B]^{-1} B' M(t+1) G$$

$$r_t = - [R + B' M(t+1) B]^{-1} B' a_{t+1}$$

$$e_t = - [R + B' M(t+1) B]^{-1} [(1/2) B' c_{t+1} + s]$$

O controle ótimo é obtido desde que $(R + B' Q B)$ e $(R + B' H B)$ sejam matrizes definidas positivas (teorema 4.1 em [25]) .

$M(t)$, a_t , c_t são determinadas recursivamente pelas seguintes relações :

$$M(t) = [A + B K(t)]' M(t+1) [A + B K(t)] + K'(t) R K(t) + Q$$

para $t = 0, \dots, N-1$.

$$M(N) = H ,$$

$$a_t = [A + B K(t)]' [a_{t+1} + M(t+1) G d_t]$$

$$a = 0$$

$$c = [A + B K(t)]' c_{t+1} + 2 K'(t) s + f$$

Dado o estado X_t , o custo ótimo do período t ao período N pode ser calculado sequencialmente retroagindo no tempo :

$$J_{t,N}^*(x) = X_t' M(t) X_t + 2 a_t' X_t + b_t + c_t' X_t + h_t, \text{ para } t = 0$$

, 1, ..., N - 1, onde :

$$b_t = b_{t+1} + d_t' [G - M(t+1) [G + B F(t)]] d_t + [(2a_{t+1}' + c_{t+1}')$$

$$[G + B F(t)] + 2 s' F(t)] d_t + [2 s' + c_{t+1}' B + a_{t+1}' B] r_t$$

$$b_n = 0,$$

$$h_t = h_{t+1} + [c_{t+1}' B + 2 s'] e_t + e_t' [R + B M(t+1) B] e_t$$

$$h_n = 0.$$

Os termos $K(\cdot)$, $M(\cdot)$, e_t e c_t são determinados sequencialmente. $F(\cdot)$ é obtido quando $M(\cdot)$ é calculado. Deste que o distúrbio d_t é definido à priori, r_t e a_t podem ser calculados.

Observando a expressão II.64 do controle ótimo, nota-se que o primeiro termo representa uma realimentação do estado atual para aproximá-lo de zero. Esta estrutura é semelhante àquela do regulador ótimo sem perturbação.

O segundo termo representa uma ação contrária ao distúrbio externo que deve ser levado em consideração quando se deseja minimizar os custos. Os dois últimos termos, representam uma ação antecipatória dos futuros impactos.

II.4.c - SOLUÇÃO DO PROBLEMA PARA DEMANDA ALEATÓRIA .

Neste caso , a demanda é vista como um ruído correlacionado , cuja média é diferente de zero . Da teoria de identificação , este ruído pode ser visto como a saída de um sistema dinâmico , perturbado na sua entrada por um ruído branco com média zero , ou seja

$$\zeta_{t+1} = H \zeta_t + L v_t \quad d_t = C \zeta_t + D \omega_t \quad (\text{II.65})$$

Onde v_t e ω_t são ruídos brancos com média zero .

Substituindo a variável d_t no sistema de equações de estado II.62 pelo seu modelo definido em II.65 , o espaço de estado fica representado pelas equações :

$$\begin{bmatrix} X_{t+1} \\ \zeta_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & | & GC \\ \hline 0 & | & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_t \\ \zeta_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u_t + \begin{bmatrix} 0 & | & GD \\ \hline L & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_t \\ \omega_t \end{bmatrix} \quad (\text{II.66})$$

Sob esta formulação , o distúrbio externo $[v \mid \omega^T]$ é um ruído branco normalizado .

O problema de controle u_t do sistema linear representado acima , que minimiza o valor esperado do custo quadrático do tipo

$$J = E \left(\sum_{t=0}^{N-1} [f'X_t + X_t'Q X_t + S U_t + U_t'R U_t + C_0] + g X_N + X_N'H X_N + c_0^f \right)$$

é definido como o problema Linear Quadrático Gaussiano . A solução deste problema é dada pelo teorema da separação . Isto quer dizer que o controle do sistema fica composto de duas partes : um filtro /

preditor que prediz a demanda futura em função da demanda atual e um controlador com estrutura idêntica ao do regulador linear determinístico, atuando conforme a demanda prevista.

Se os custos não forem quadráticos, uma estratégia de controle subótima pode ser obtida determinando o controle do tipo malha aberta através de programação matemática, e o controlador em malha fechada usando uma função de custo quadrático, conforme esquematizado na fig.II.3.

Considere um sistema linear discreto, sujeito ao distúrbio externo d_t ,

$$X_{t+1} = A X_t + B U_t + G d_t \quad (II.67)$$

$$d_t = \bar{d}_{t/\phi} + \Delta d_t$$

Onde $\bar{d}_{t/\phi}$ é a demanda prevista antes do período ϕ e Δd_t é o erro de previsão.

Baseado nesta previsão realizada à priori, pode-se utilizar técnicas de programação matemática para obter o conjunto de controle $(u^*)_{t=1}^N$ e a trajetória de estado $(X^*)_{t=1}^N$.

O processo calculado é dado pela relação:

$$X_{t+1}^* = A X_t^* + B U_t^* + G \bar{d}_{t/\phi} \quad (II.68)$$

No entanto, o processo real segue a dinâmica descrita pela equação II.67. O valor do desvio da trajetória real em relação à trajetória aproximada por II.68 é igual a:

$$\Delta X_t = X_t - X_t^*$$

A dinâmica deste desvio é dada por:

$$\Delta X_{t+1} = A \Delta X_t + B \Delta U_t + G \Delta d_t$$

Onde ΔU_t é o controle adicional usado para manter o desvio de estado o menor possível.

A proposta de controle subótimo é selecionar o controle ΔU_t que minimiza um custo quadrático aproximado da função custo real. O controle regulador ΔU_t tem a forma de um controle do tipo malha fechada, semelhante ao da seção anterior (equação II.64), onde as contribuições devidas ao erro de predição atual Δd_t e erros de predição futura $(\Delta d_t)_{t+1}^N$, são calculados facilmente e separados do controle $K(t) \Delta X(t)$.

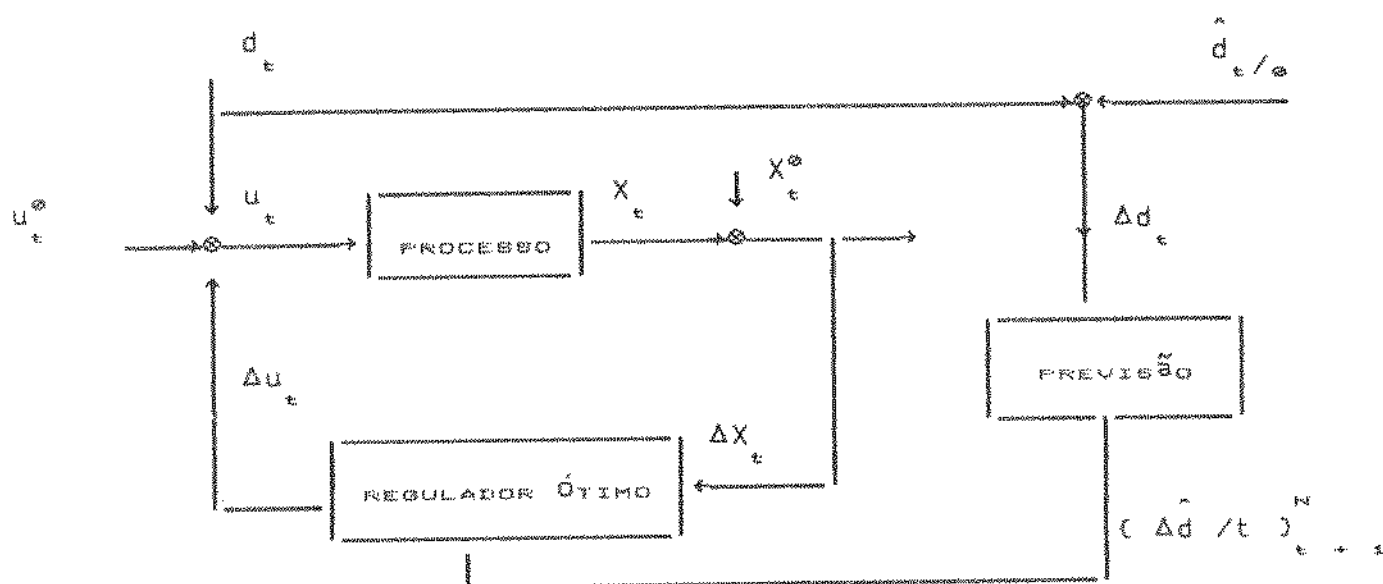


Fig. II.3 - Diagrama de Blocos do Controlador Sub ótimo.

II.5 COMPARAÇÃO DOS MODELOS DE PRODUÇÃO - ESTOQUE.

A tabela II.3 permite comparar as características de cada um dos modelos de produção - estoque estudados no capítulo I e neste capítulo.

MODELO	A	B	C	D
DISTRIBUICAO DA DEMANDA	POISSON	POISSON	POISSON	DISCRETA E PERIODICA
DISTRIBUICAO DO LOTE	DISCRETA QUALQUER	UNITARIO	DISCRETA QUALQUER	GAUSSIANA COM MEDIA PREVISTA
ITENS PRODUZIDOS	≥ 1	$= 1$	$= 1$	$= 1$
POLITICA DE PRODUCAO	$\{ n , \xi^* \}$	s , S	s , S	I^*
TEMPO DE PRODUCAO	DETERMINISTICO	ALEATORIO		
REVISAO DO ESTOQUE	CONTINUO	CONTINUO	CONTINUO	PERIODICO
TIPO DE CUSTO	CUSTO MEDIO DESCONTADO A LONGO PRAZO	CUSTO LINEAR MEDIO A LONGO PRAZO		CUSTO QUADRATICO MEDIO

Tabela II.3 - Características dos Modelos de Produção - Estoque .

- A - Sistema de Produção - Estoque análogo ao proposto no capítulo I .
 B - Sistema de Produção - Estoque análogo à Fila .
 B - Sistema de Produção - Estoque analisado através da teoria de renovação
 C - Sistema de Produção - Estoque analisado com técnicas de controle .

Os modelos B , C , D têm a característica comum de determinar os instantes iniciais e finais de produção , observando apenas o nível de estoque . No modelo B , a produção é paralisada quando o nível de estoque atinge o nível W^{**} e iniciada quando o estoque é igual a W^* ($W^{**} \geq W^*$) (política (s , S)) . No modelo C , paralisa-se ou reinicia-se a produção quando o estoque atinge os níveis M ou m respectivamente ($M \geq m$) (política (s , S)) . No modelo D procura-se produzir o suficiente em cada período para manter o estoque no nível ótimo I^* (política I^*)

Mas , se considerarmos um sistema de produção - estoque cujo tempo de produção é longo , somente a variável nível de estoque pode não ser suficiente para determinarmos o melhor momento de parada ou início de produção . Neste caso talvez seja mais adequado paralisar antes de terminar de produzir um item , considerando que sua produção progrediu até um valor ξ^* . Assim estamos introduzindo uma política não considerada anteriormente , onde se permite parar de produzir um item em qualquer instante do seu ciclo de produção tendo em vista que o estoque atingiu um nível igual a n . Definimos este tipo de política através do conjunto $((n , \xi^*))$, pois supomos que a produção deve ser paralisada em diferentes instantes quando o nível de estoque é variado . Uma política análoga a esta pode ser encontrado em [6] onde se deseja expandir a capacidade c_t de uma instalação , controlando a taxa de investimento u_t na obra , a fim de que uma demanda d_t seja atendida . Formulando - se este problema como um P.D.P. $x_t = (m_t , \xi_t)$, onde

$$m_t = d_t - c_t \quad e \quad \frac{d\xi}{dt} = u_t$$

verifica - se que a política é construir a máxima velocidade ou paralisar a construção em ξ_t^* , dado que a capacidade instalada é c_t .

A parada de produção antes que um item seja produzido pode ser justificado quando se verifica (após uma determinada quantidade do item estiver sido produzida e o estoque atingir um certo nível) que os custos de matéria-prima , mão de obra e estoque penalizam mais os custos operacionais do que o custo gerado com a paralização da produção daquele tipo de item .

Uma outra característica que merece destaque no modelo que este trabalho destina-se a estudar , é a possibilidade de decisão sobre o momento certo no qual a produção de um tipo de item deve ser paralisada , para iniciar a produção de um outro item que está tendo maior demanda de mercado . Esta é uma decisão a ser tomada quando se deseja lançar novos produtos no mercado à medida que se verifica quedas de vendas do item atualmente produzido .

CAPÍTULO III

ANÁLISE E ALGORITMOS

III.1 INTRODUÇÃO :

No capítulo I foram propostos alguns modelos de produção - estoque . Mostramos que a política de produção destes sistemas é obtida resolvendo-se um problema de controle ótimo estocástico de P.D.P definido pela equação 1.19 . Validando - se as hipóteses S_1 , S_2 , S_3 e S_4 , que garantem que a função valor do problema de controle do P.D.P. seja lipschitz , podemos obter a solução a partir dos teoremas 1 e 2 .

Neste capítulo definiremos a política de produção do problema de M itens supondo que a função valor seja lipschitz , devido à dificuldade de se mostrar a condição S_4 , que diz respeito ao problema ser calmo . No entanto , poderemos nos certificar de que a função valor do problema de UM ITEM pertence a classe de funções lipschitz a partir da análise das características da sua política de produção .

Para os problemas de UM ITEM e DOIS ÍTENS desenvolveremos algoritmos que determinam iterativamente a função $V(z)$ e fornecem a política ótima de produção . Aproveitamos os resultados da análise do problema de UM ITEM para tornar o seu algoritmo mais eficiente .

III.2 A POLÍTICA DO PROBLEMA DE M ÍTENS .

A política ótima é determinar o controle da velocidade de produção $u_j \in [0, 1]$, $0 \leq \sum u_j \leq 1$ de cada item j de modo que seja obtido o valor $V(z)$, dado por :

$$V(z) = \inf_{\bar{u}} \left\{ E \left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} L_{\theta}(\bar{z}_t, \bar{u}_t) dt \right] + \sum_{\kappa} e^{-\alpha T_{\kappa}} L_{\theta}(\bar{z}_{T_{\kappa}}) I(\bar{z}_{T_{\kappa}} \in E_{\theta}^{\kappa}) \right\} \quad (III.1)$$

onde o infimum é tomado sobre todas as políticas admissíveis

Além disso cada controle deve satisfazer a equação :

$$\frac{d\bar{\xi}}{dt} = \bar{F}(\bar{z}, \bar{u})$$

onde : $\bar{z} = (\bar{n}, \bar{\xi}, \bar{k})$ e $z_{\theta} = (\bar{n}, \bar{\Gamma}, \bar{k})$;

$\bar{n}$, $\bar{\xi}$, $\bar{k}$ são vetores de dimensão $m \times 1$, que definem o nível de estoque, a evolução da produção e as etapas de produção de cada item $j = 1 \dots m$ respectivamente.

$\bar{\Gamma}$ é um vetor $m \times 1$, que indica a quantidade produzida do item j após a etapa κ_j .

$\bar{F}$, $\bar{u}$ são vetores $m \times 1$ que definem a velocidade de produção e o respectivo controle de cada item $j = 1 \dots m$.

Consideramos que :

(H1) - A função custo de produção e estoque é linear, ou seja :

$$L_{\theta}(\bar{n}, \bar{\xi}, \bar{k}, \bar{u}) = \langle \bar{A}(\bar{k}), \bar{U} \rangle + \langle \bar{B}(\bar{k}), \bar{\xi} \rangle + C(\bar{n}) \quad (III.2)$$

onde :

$\bar{A}(\bar{k}) \in R^m$ é um vetor $1 \times m$, cujo elemento da coluna j define o custo de produção do item j na etapa κ_j por unidade de tempo ;

$\bar{B}(\bar{k}) \in R$ é um vetor $1 \times m$, cujo elemento da coluna j define o custo

relacionado à quantidade produzida de cada item j na etapa k_j por unidade de tempo ;

$C(.)$ é o custo total de estoque , dado por :

$$C(\bar{n}) = \sum_{j=1}^m C_j^+ \max(n_j, 0) - C_j^- \min(n_j, 0) \quad (\text{III.3})$$

C_j^+ é o custo de estoque do item j por unidade de tempo .

C_j^- é o custo de falta de cada item j no estoque por unidade de tempo .

n_j é o nível de estoque do item j .

(H2) - A velocidade da produção do item j na etapa k_j é linear em relação ao controle u_j :

$$\bar{F}(\bar{Z}, \bar{U}) = \bar{P}(\bar{k}) \bar{U} \quad (\text{III.4})$$

onde a matriz $\bar{P}(\bar{k}) = \text{diag} (P(k_1), P(k_2), \dots, P(k_m))$.

(H3) - A função valor é lipshitz .

Considerando-se as hipóteses H1 , H2 e H3 veremos que o controle $u_j \in [0,1]$ da velocidade de produção do item j é um controle do tipo bang - bang .

Aplicando o teorema 2 e considerando os pontos onde a função valor $V(.)$ possui derivada em relação às suas componentes ξ_j , determina-se a equação de $H - J - B$ do P.D.P que caracteriza o problema III.1 .

$$\max \{ (-\langle \bar{W}, \bar{F}(\bar{z}, \bar{u}) \rangle) - L_{\alpha}(\bar{z}, \bar{u}) - \\ - \sum u_j \leq 1, u_j \in [0, 1], j = 1, 2, \dots, m$$

$$- \lambda(\bar{z}, \bar{u}) \int_E [V(\bar{y}) - V(\bar{z})] dQ(\bar{z}) - \alpha V(\bar{z}) = 0 \quad (\text{III.5})$$

satisfazendo $\frac{d\bar{\xi}}{dt} = \bar{F}(\bar{z}, \bar{u})$

onde :

$$\bar{W} = \begin{bmatrix} \partial V(\cdot) / \partial \xi_1 \\ \partial V(\cdot) / \partial \xi_2 \\ \vdots \\ \partial V(\cdot) / \partial \xi_n \end{bmatrix}$$

Substituindo III.2 , III.3 , III.4 , em III.5

$$\max \{ (-\langle \bar{W}, \langle \bar{P}(\bar{k}), \bar{u} \rangle \rangle - [\langle \bar{A}(\bar{k}), \bar{u} \rangle + \langle \bar{B}(\bar{k}), \bar{\xi} \rangle + C(\bar{n})] -$$

$$- \lambda(\bar{z}, \bar{u}) \int_E [V(\bar{y}) - V(\bar{z})] dQ(\bar{z}) - \alpha V(\bar{z}) = 0 \quad (\text{III.6})$$

Pode - se verificar que

$$\int_E [V(\bar{y}) - V(\bar{z})] dQ(\bar{z}) = \int_E V(\bar{y}) dQ(\bar{z}) - V(\bar{z}) \quad (\text{III.7})$$

Substituindo III.7 em III.6 obtém - se

$$0 \leq \sum u_j \leq 1, u_j \in [0,1] \quad \min ((W^T P(k) + A(k)) u) + B(k) \xi + C(n) +$$

$$+ \lambda \int_E V(\bar{y}) dQ(\bar{z}) - (\lambda + \alpha) V(\bar{z}, u) = 0 \quad (III.8)$$

Considera-se que

$$\int_E V(\bar{y}) dQ(\bar{z}) = \sum p(i_1, i_2, \dots, i_m) V(\bar{n} - \bar{i}, \bar{\xi}, \bar{k})$$

onde

$$\bar{n} - \bar{i} = \begin{bmatrix} n_1 - i_1 \\ n_2 - i_2 \\ \vdots \\ n_m - i_m \end{bmatrix}$$

O termo dependente de u da equação III.8 é equivalente a :

$$0 \leq \sum u_j \leq 1 \quad \min \left[u_1 \frac{\partial V}{\partial \xi_1} P_1 + A_1 \right] + u_2 \frac{\partial V}{\partial \xi_2} P_2 + A_2 + \dots + u_m \frac{\partial V}{\partial \xi_m} P_m + A_m \quad (III.9)$$

Verifica-se, a partir da expressão III.9, que um item $j \in [1 \dots m]$ será escolhido para ser produzido se

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \xi_j} P_j + A_j \right) < \left(\frac{\partial V}{\partial \xi_i} P_i + A_i \right) \text{ e } \frac{\partial V}{\partial \xi_j} P_j + A_j < 0 \quad (\text{III.10})$$

para $i = 1, 2, \dots, m, i \neq j$. Neste caso $u_j = 1$ e $u_i = 0$.

A condição III.10 escolhe qual item deve preferencialmente ser produzido. O item j será realmente produzido com máxima velocidade ($u_j = 1$) se a derivada de $V(z)$ em relação a ξ_j for menor que zero. Caso contrário, o item não será produzido ($u_j = 0$). Esta política de paralisar a produção antes de finalizar um item foi definido no capítulo II como uma política (N^*, ξ^*) .

III.3 ANÁLISE DA POLÍTICA DO PROBLEMA DE UM ITEM.

PROPOSIÇÃO 1 - Seja $P = 1$ e $L(n, \xi, u) = C(n)$. Então a política ótima do problema de UM ITEM típica é dada pela fig. III.1 e possui as seguintes características:

(i) - $u = 1$ para $n < 0$;

(ii) - Há um único ponto $\xi^*(n)$, $0 < \xi^*(n) \leq \Gamma$ para cada n , tal que

$$u(n, \xi) = \begin{cases} 1 & \text{se } \xi < \xi^* \\ 0 & \text{se } \xi \geq \xi^* \end{cases}$$

(iii) - para n suficientemente grande $u(n, \xi) = 0$

(iv) - $\xi^*(n) \leq \max \{ \xi^*(n-k) \text{ para } p(k) \neq 0, k = 1, 2, \dots, L \}$

Onde L é o tamanho do maior lote.

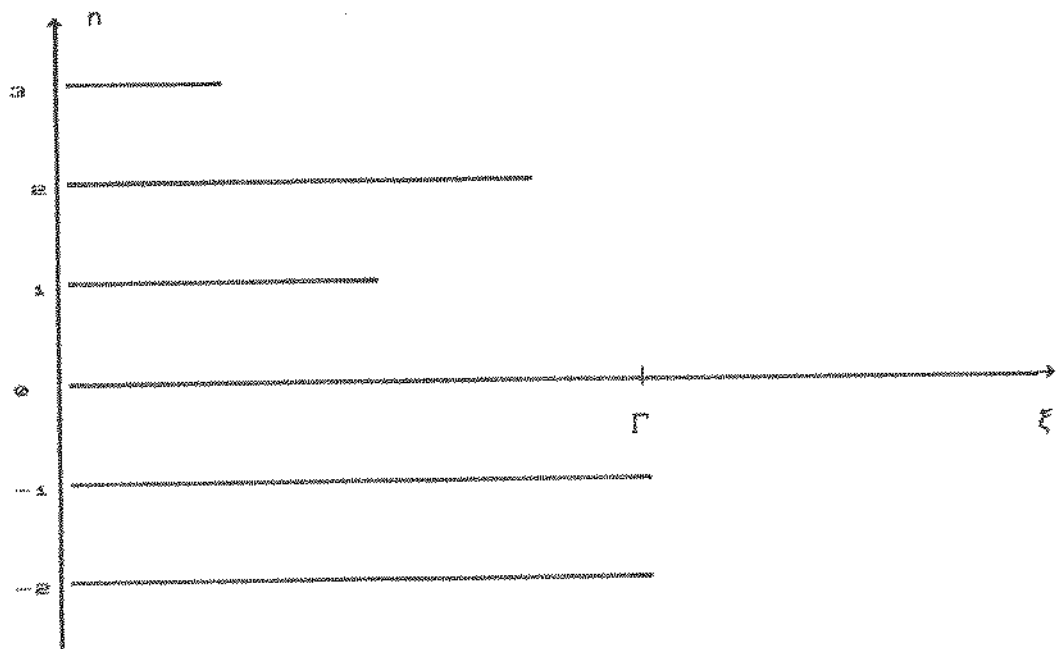


Fig. III.1 - Política de Produção Típica do Problema de UM ITEM .

A prova da Proposição 1 será efetuada a partir dos lemas que serão estabelecidos a seguir . Antes disso , faremos algumas observações :

Seja I qualquer subconjunto de $\mathbb{N}$ e seja $B (I \times [0, \Gamma])$ o espaço de funções mensuráveis limitadas $\phi(n, \xi)$.

Seja T um operador aplicado a $\phi(n, \xi)$ tal que

$$T_u \phi(n, \xi) = E_{(n, \xi)}^u \left[\int_0^{T_1} e^{-\alpha t} [L(n)] dt + e^{-\alpha T_1} \phi(n(T_1), \xi(T_1)) \right] \quad (\text{III.11})$$

Onde $L(n) = C(n)$ e T_1 é o instante do primeiro salto do P.D.P.

Revendo a expressão I.20 que fornece a função valor do PROBLEMA DE UM SALTO , podemos escrever que :

$$V^i(n, \xi) = \inf_{u \in U} T_u V^{i-1}(n, \xi) = T V^{i-1}(n, \xi) \quad (\text{III.12})$$

Portanto o equivalente determinístico do operador de UM SALTO é semelhante ao definido na expressão I.27, ou seja:

$$T V^{i-1}(n, \xi) = \inf_{u \in U} \left[\int_0^{T^*} \bar{e}^{-(\alpha + \lambda)t} [C(n)] dt + \lambda \sum P(k) V^{i-1}(n-k, \xi) \right. \\ \left. + e^{-(\lambda + \alpha)T^*} V^i(n, \Gamma) \right] \quad (\text{III.13})$$

$$\text{Onde } T^* = \inf \{ t \geq 0, \xi(T^*) = \Gamma, \xi(0) = \xi \}$$

De acordo com o teorema 1, dado $V^0(n, \xi)$ arbitrariamente, a sequência de funções $V^i(n, \xi)$, $i = 1, 2, \dots$, obtidas através da equação de H - J - B, converge para a função valor do problema de UM ITEM, $V(z)$. Sob as hipóteses H_1 , H_2 e H_3 e nos pontos onde $\frac{dV^i(\cdot)}{d\xi}$ existe, esta equação é dada por

$$\min_{u \in [0,1]} u \left[\frac{dV^i(n, \xi)}{d\xi} \right] + C(n) + \lambda E [V^{i-1}(\cdot)/(n, \xi)] \\ - (\lambda + \alpha) V^i(n, \xi) = 0 \quad \text{para } (n, \xi) \in E \quad (\text{III.14})$$

Levando em conta que um item é enviado imediatamente ao estoque após a sua finalização, ou seja $(n, \Gamma) = (n+1, 0)$, obtém-se a seguinte condição de fronteira:

$$V^i(n, \Gamma) = V^{i-1}(n+1, 0) \quad \text{na fronteira } E_\partial \quad (\text{III.15})$$

$$\text{Onde } E = \mathbb{N} \times [0, \Gamma] \text{ e } E_\partial = \mathbb{N} \times \Gamma$$

$$e \quad E [V^{i-1} (.) / (n, \xi)] = \sum p(k) V^{i-1}(n - k, \xi), \quad k = 1 \dots L \quad (\text{III.16})$$

A solução da equação III.14 será obtida fazendo $V^i(.)$ igual ao menor valor entre $V^i_0(.)$ e $V^i_1(.)$, onde $V^i_1(.)$ é a solução da equação III.14 quando $u = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{dV^i_1}{d\xi^1}(n, \xi) + C(n) + \lambda E [V^{i-1} / (n, \xi)] - \\ - (\lambda + \alpha) V^i_1(n, \xi) = 0 \quad \text{para } \xi < \Gamma \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

$$V^i_1(n, \Gamma) = V^{i-1}(n+1, 0) \quad \text{para } \xi = \Gamma \quad (\text{III.18})$$

$V^i_0(.)$ é obtido pela equação III.14 quando $u = 0$:

$$V^i_0(n, \xi) = \frac{C(n) + \lambda E [V^{i-1} / (n, \xi)]}{(\lambda + \alpha)} \quad (\text{III.19})$$

O teorema 2 mostra que $V(n, \xi)$ é o ponto fixo do operador T , ou seja:

$$V(n, \xi) = TV(n, \xi) \quad (\text{III.20})$$

Além disso $V(n, \xi)$ pode ser obtida a partir da equação de $H - J - B$:

$$\min_{u \in [0,1]} u \left[\frac{dV^i}{d\xi}(n, \xi) \right] + C(n) + \lambda E [V^{i-1} (.) / (n, \xi)] \quad (\text{III.21})$$

$V(n, \xi) = \min [V_1(n, \xi), V_0(n, \xi)]$, onde $V_1(n, \xi)$ é dado por III.21 com $u = 1$:

$$\frac{dV}{d\xi}(n, \xi) + C(n) + \lambda E[V^{i-1}/(n, \xi)] - (\lambda + \alpha)V_1(n, \xi) = 0 \quad \text{para } \xi < \Gamma \quad (\text{III.22})$$

$$V_1(n, \Gamma) = V(n+1, 0) \quad \text{para } \xi = \Gamma \quad (\text{III.23})$$

$V_0(n, \xi)$ é dada por III.21 com $u = 0$:

$$V_0(n, \xi) = \frac{C(n) + \lambda E[V/(n, \xi)]}{(\lambda + \alpha)} \quad (\text{III.24})$$

Suponha que $\xi \rightarrow V^{i-1}(n, \xi)$ satisfaça as seguintes hipóteses:

$h_1)$ $\xi \rightarrow V^{i-1}(n, \xi)$, $n < 0$, $\xi \in [0, \Gamma]$ é decrescente em relação a n e ξ , tal que $\xi \rightarrow V^{i-1}(n, \xi)$ seja continuamente diferenciável em $[0, \Gamma]$. Além disso $\frac{dV^{i-1}}{d\xi} < 0$ para $n < 0$.

$h_2)$ $(\alpha + \lambda)V^{i-1}(n+1, 0) - C(n) - \lambda \sum p_k V^{i-1}(n-k, \Gamma) < 0$ para $n < 0$

LEMA 1: Seja $V^{i-1}(n, \xi)$ e $V^i(n, \xi)$ tais que as condições de fronteiras

$$V^{i-1}(n, 0) = V^{i-1}(n, \Gamma)$$

$$V^i(n, 0) = V^i(n, \Gamma)$$

são satisfeitas para $n < 0$.

Se $V^{i-1}(n, \xi)$ satisfaz as condições h_1 e h_2 , então $V^i(n, \xi)$ também irá satisfazer h_1 e h_2 .

Prova : Substituindo a condição de fronteira III.15 e as expressões III.19 e III.12 em III.13 podemos escrever que

$$V^i(n, \xi) = \left(\int_0^{T^*} e^{-(\alpha + \lambda)t} (\lambda + \alpha) V_{\theta}^i(n, \xi(t)) dt + e^{-(\lambda + \alpha)T^*} V^{i-1}(n+1, 0) \right) \quad (\text{III.25})$$

Considerando h_1 podemos fazer a integração por partes de III.25 para chegar a seguinte expressão :

$$V^i(n, \xi) = V_{\theta}^i(n, \xi) + \int_0^{T^*} e^{-(\alpha + \lambda)t} \frac{dV^i}{d\xi}(n, \xi(t)) dt + e^{-(\lambda + \alpha)T^*} [V^{i-1}(n+1, 0) - V_{\theta}^i(n, \Gamma)] \quad (\text{III.26})$$

Dado h_1 e verificando - se que

$$\frac{dV^i}{d\xi}(n, \xi) = (\lambda / (\lambda + \alpha)) \sum p(k) \frac{dV^{i-1}}{d\xi}(n-k, \xi) \quad \xi \in [0, \Gamma]$$

$$\text{Conclui - se que } \frac{dV^i}{d\xi}(n, \xi) < 0 \quad (\text{III.27})$$

$$\text{Dado } h_2 \text{ verifica - se que } V^{i-1}(n+1, 0) - V_{\theta}^i(n, \Gamma) < 0 \quad (\text{III.28})$$

De III.26 , III.27 e III.28 obtém - se

$$V^i(n, \xi) < V_{\circ}^i(n, \xi) \quad (\text{III.29})$$

Portanto $u = 1$. Assim $V^i(n, \xi)$ satisfaz a equação :

$$\frac{dV^i(n, \xi)}{d\xi} + \lambda [V^{i-1}(\cdot)/(n, \xi)] + C(n) = V^i(n, \xi) (\lambda + \alpha) \quad (\text{III.30})$$

Substituindo a expressão III.19 em III.30 obtém - se

$$\frac{dV^i(n, \xi)}{d\xi} + \lambda + V_{\circ}^i(n, \xi) (\lambda + \alpha) = V^i(n, \xi) (\lambda + \alpha) \quad (\text{III.31})$$

Substituindo a desigualdade III.28 em III.31 verifica - se que $\frac{dV^{i-1}(n, \xi)}{d\xi} < 0$, $\xi \in [0, \Gamma]$, $n < 0$.

Portanto $V^i(n, \xi)$ satisfaz h_1 . Mostraremos agora que $V^i(n, \xi)$ satisfaz h_2 .

Da condição de fronteira III.15 verifica - se que $V^i(n-1, \Gamma) = V^{i-1}(n, 0)$. Assim a expressão III.19 para $(n, \xi) = (n, 0)$ é igual a :

$$V_{\circ}^i(n, 0) = [\lambda \sum p(k) V^i(n-k-1, \Gamma) + C(n)] / (\lambda + \alpha) \quad (\text{III.32})$$

Dado que $C(n+1) - C(n) < 0$, $n < 0$, onde $C(n)$ é dado pela expressão III.3 , obtém - se a partir de III.32 a seguinte desigualdade :

$$V_{\circ}^i(n, 0) < [\lambda \sum p(k) V^i(n-k-1, \Gamma) + C(n-1)] / (\lambda + \alpha) \quad (\text{III.33})$$

Substituindo III.29 em III.33 , obtém - se

$$V^i(n, 0) < [\lambda \sum p(k) V^i(n-k-1, \Gamma) + C(n-1)] / (\lambda + \alpha) \quad (\text{III.34})$$

Portanto verificamos através de III.34 que h_2 é satisfeito

para $V^i(n, 0)$, $n < -1$. Faltava mostrar que h_2 é satisfeito para $V^i(n, 0)$ $n < 0$.

Considerando h_1 na derivada a esquerda de $V^i(n, \xi)$ em $(n, \xi) = (-1, \Gamma)$, obtém-se a relação

$$\frac{dV^{-i}}{d\xi}(-1, \Gamma) = -\lambda \sum p(k) V^{i-1}(-1-k, \Gamma) - C(-1) - V^i(-1, \Gamma) < 0 \quad (\text{III.35})$$

Aplicando as condições de fronteiras estabelecidas no lema verifica-se que

$$\frac{dV^{-i}}{d\xi}(-1, \Gamma) = -\lambda \sum p(k) V^{i-1}(-k, 0) - C(-1) - V^i(0, 0) < 0 \quad (\text{III.36})$$

Obtendo a derivada a direita de $V(n, \xi)$ em $(n, \xi) = (0, 0)$ e comparando com a expressão III.36 verifica-se que

$$\frac{dV^{-i}}{d\xi}(-1, \Gamma) = \frac{dV^{+i}}{d\xi}(0, 0) - C(-1) + C(0) > \frac{dV^{+i}}{d\xi}(0, 0) \quad (\text{III.37})$$

$$\text{Portanto } \frac{dV^{+i}}{d\xi}(0, 0) < 0$$

Aplicando a condição de fronteira $V^i(-1, \Gamma) = V^i(0, 0)$ na expressão de h_2 para $n = -1$ verifica-se que

$$(\lambda + \alpha) V^i(0, 0) - \lambda \sum p(k) V^{i-1}(-k, 0) - C(-1) =$$

$$\frac{dV^{+i}}{d\xi}(0, 0) - C(0) + C(-1) < 0$$

De III.20 verifica-se que as condições de fronteiras são simultaneamente satisfeitas se tomarmos $V(\cdot) = V^i(\cdot)$ e $V(\cdot) = V^{i-1}(\cdot)$. Consequentemente $V(\cdot)$ satisfaz h_1 e h_2 . Sendo $\frac{dV}{d\xi} < 0$ para $n < 0$, então

a expressão III.21 será minimizada quando $u = 1$ para $n < 0$ e todo $\xi \in [0, \Gamma]$. Portanto o item (i) da proposição 1 está provado.

Lema 2 - Para um dado n , considere que a política de produção ótima é $u = 0$ em (n, ξ^*) tal que $0 \leq \xi^* < \Gamma$. Então $u = 1$ é ótimo para (n, ξ) $0 \leq \xi < \xi^*$ e $u = 0$ é ótimo para (n, ξ) , $\xi^* \leq \xi \leq \Gamma$.

Prova: É desnecessário verificar a existência de um ponto de comutação de política quando $n < 0$ tendo em vista os resultados do Lema 1. Para $n \geq 0$, a prova é mostrar que

$$\frac{dV(\cdot)}{d\xi} < 0 \text{ para } \xi < \xi^* \leq \Gamma \text{ e } \frac{dV(\cdot)}{d\xi} > 0 \text{ para } \xi > \xi^* \geq 0$$

onde $V(\cdot)$ é definido em III.22. Supor inicialmente que $n = 0$. Dado que $u = 0$ em (n, ξ^*) , então:

$$V(n, \xi^*) = [\lambda E[V(\cdot)/(n, \xi)] + C(n)] / (\lambda + \alpha) \quad (\text{III.38})$$

Resolvendo a equação III.22 com a condição de contorno III.37 determina-se $V_1(n, \xi)$, $\Gamma > \xi \geq \xi^*$:

$$V_1(n, \xi) = \frac{(\lambda + \alpha)(\xi - \xi^*)}{e} \left(\lambda E[V(\cdot)/(n, \xi^*)] + C(n) \right) / (\lambda + \alpha) - \int_{\xi^*}^{\xi} e^{-(\lambda + \alpha)(t - \xi^*)} [\lambda E[V(\cdot)/(n, t)] + C(n)] dt \quad (\text{III.39})$$

Mantendo fixo o valor esperado da integral em III.39 no ponto (n, ξ^*) e verificando - se que $E[V(\cdot)/(n, \xi^*)] > E[V(\cdot)/(n, \xi)]$ para $\xi > \xi^*$ e $n < 0$, obtém - se a seguinte relação:

$$\begin{aligned}
V_1(n, \xi) &> e^{-(\lambda + \alpha)(\xi - \xi^*)} \left[\lambda E[V / (n, \xi^*)] + C(n) \right] / (\lambda + \alpha) + \\
&+ \left[1 - e^{-(\lambda + \alpha)(\xi - \xi^*)} \right] \left[\lambda E[V / (n, \xi^*)] + C(n) \right] / (\lambda + \alpha) \\
&= \left[\lambda E[V / (n, \xi^*)] + C(n) \right] / (\lambda + \alpha) \quad (\text{III.40})
\end{aligned}$$

Relacionando - se a desigualdade III.40 na equação diferencial III.22 verifica - se que

$$\begin{aligned}
\frac{dV_1(\cdot)}{d\xi} &= (\lambda + \alpha)V_1(n, \xi) - \lambda E[V(\cdot) / (n, \xi^*)] - C(n) \\
&> \lambda E[V / (n, \xi^*)] - \lambda E[V(\cdot) / (n, \xi)] > 0, \quad \xi^* < \xi \leq \Gamma
\end{aligned}$$

Tomando - se agora $0 \leq \xi < \xi^*$ podemos escrever que

$$\begin{aligned}
V_1(n, \xi) &= e^{-(\lambda + \alpha)(\xi^* - \xi)} \left[\lambda E[V(\cdot) / (n, \xi^*)] + C(n) \right] / (\lambda + \alpha) + \\
&+ \int_{\xi}^{\xi^*} e^{-(\lambda + \alpha)(t - \xi^*)} \left[\lambda E[V(\cdot) / (n, t)] + C(n) \right] dt \quad (\text{III.41})
\end{aligned}$$

Mantendo fixo o valor esperado da equação III.41 no ponto (n, ξ) e levando em conta $E[V(\cdot) / (n, \xi)] > E[V(\cdot) / (n, \xi^*)]$, $0 \leq \xi < \xi^*$, obtém - se a desigualdade :

$$V_1(\cdot) \leq \left(\lambda E[V(\cdot)/(n, \xi)] + C(n) \right) / (\lambda + \alpha) + \\ + e \frac{(\lambda + \alpha)(\xi^* - \xi)}{\left(\lambda E[V(\cdot)/(n^*, \xi)] - \lambda E[V(\cdot)/(n, \xi)] \right) / (\lambda + \alpha)}$$

$$\left(\left(\lambda E[V(\cdot)/(n, \xi)] + C(n) \right) / (\lambda + \alpha) \right) = V_0(n, \xi) \quad (\text{III.42})$$

$$\text{Portanto } V(n, \xi) = V_1(n, \xi)$$

Considerando a desigualdade III.42 na equação diferencial III.22 verifica-se que :

$$\frac{dV(\cdot)}{d\xi} = \frac{dV_1(\cdot)}{d\xi} = -\lambda E[V(\cdot)/(n, \xi)] - C(n) + (\lambda + \alpha) V_1(n, \xi) \\ = -(\lambda + \alpha) V_0(n, \xi) + (\lambda + \alpha) V_1(n, \xi) < 0 \quad (\text{III.43})$$

Desta forma concluímos o resultado para $n = 0$

Para $n = 1$, basta verificarmos se $\xi \rightarrow V(0, \xi)$ é decrescente. Quando $0 \leq \xi < \xi^*$, $V(0, \xi) = V_1(0, \xi)$, portanto satisfaz III.42.

Quando $\xi^* < \xi < \Gamma$, $V(0, \xi) = V_0(0, \xi)$ que é igual a uma combinação linear positiva de funções decrescentes. Assim o lema é válido para $n = 1$.

Para $n > 1$ o lema é provado por indução.

O LEMA 2 diz que a produção é paralisada uma única vez no intervalo $0 \leq \xi < \Gamma$, para um nível de estoque maior que zero. A função $\xi \rightarrow V(\cdot)$ com este tipo de política não será diferenciável nos pontos (n, ξ^*) , onde ocorre transição de política $u = 1$ para $u = 0$.

, de acordo com o resultado obtido em Rishel e Flemming [8] no capítulo 3, sobre o comportamento da função valor no instante de comutação de política. Além disso, este tipo de função será estritamente decrescente em relação a ξ , pois se $u = 1$ então $V(n, \xi) = V^1(n, \xi)$, logo $\frac{dV(n, \xi)}{d\xi} < 0$. Se $u = 0$, $V(n, \xi) = V_0(n, \xi)$ que é uma combinação positiva de funções estritamente decrescentes.

Lema 3 - Para n suficientemente grande $u(n, \xi) = 0$ para todo $\xi \in [0, \Gamma]$

Prova: Suponha que para todo $n \geq 0$ exista um ponto de comutação de política ótima $u = 1$ para $u = 0$ em $\xi^*(n)$ com $0 < \xi^*(n) \leq \Gamma$. Veremos que esta situação conduz a um absurdo. Neste caso $V(n, \xi)$, $\xi < \xi^*(n)$, é obtido pelo controle $u = 1$. Portanto $V(\dots)$ satisfaz a condição de contorno na fronteira

$$V(n, 0) = V(n-1, \Gamma)$$

Assim se escrevermos $z = n\Gamma + \xi$ e fizermos a transformação biunívoca $(n, \xi) \rightarrow z$, veremos que $z \rightarrow V(z)$ é função contínua e estritamente decrescente, portanto $n \rightarrow V(n, \xi)$ é também função estritamente decrescente, portanto $\lim_{n \rightarrow \infty} V(n, \xi) = 0$.

Por outro lado, usando o fato de que $E[V(\cdot) / (n, \xi)] \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, para n suficientemente grande teríamos:

$$V(n, \xi) = e^{(\lambda+\alpha)\xi} \int_{\xi}^{\xi^*(n)} e^{-(\lambda+\alpha)t} \{ [\lambda E[V(\cdot)/(n, t)] + C(n)] dt \} +$$

$$+ e^{-(\lambda+\alpha)(\xi^*-\xi)} V(n, \xi^*) \geq \int_{\xi}^{\xi^*(n)} e^{-(\lambda+\alpha)t} C(n) dt +$$

$$+ \frac{-(\lambda + \alpha) \xi^{*}(n)}{e^{-(\lambda + \alpha) \xi^{*}(n)}} C(n) / (\lambda + \alpha) = C(n) / (\lambda + \alpha) \quad \text{para } \xi < \xi^{*}$$

$$e \quad V(n, \xi) = V^{\circ}(n, \xi) \geq C(n) / (\lambda + \alpha) \quad \text{para } \xi \geq \xi^{*}$$

Portanto $n \rightarrow V(n, \xi)$ será crescente para n suficientemente grande notando que $n \rightarrow C(n)$, dado pela equação III.3, é estritamente crescente quando $n \geq 0$.

Lema 4 - $\xi^{*}(n) \leq \max (\xi^{*}(n - k))$ para todo $k \in [1, 2, \dots, L]$ com $p(k) \neq 0$)

Prova : Podemos escrever $V(n, 0)$, tendo em vista $V_{\circ}(n, \xi)$:

$$\begin{aligned} V(n, 0) &= \int_0^{\xi} e^{-(\lambda + \alpha)t} (\lambda + \alpha) V_{\circ}(n, t) dt + \\ &+ V(n, \xi) e^{-(\lambda + \alpha)\xi} \end{aligned} \quad (\text{III.44})$$

Notando - se que $\xi \rightarrow V_{\circ}(n, \xi)$ é diferenciável para $\xi < \xi^{*}(n - k)$ com $k \in [1, \dots, L]$ e $p(k) \neq 0$, podemos desenvolver a integral de III.44 numa integral por partes equivalente a

$$\begin{aligned} V_{\circ}(n, 0) - V_{\circ}(n, \xi) e^{-(\lambda + \alpha)\xi} &+ \\ + \int_0^{\xi} e^{-(\lambda + \alpha)t} \frac{dV_{\circ}}{d\xi}(n, t) dt \end{aligned} \quad (\text{III.45})$$

Onde $\frac{dV}{d\xi}(n, \xi) = \lambda \sum p(k) \frac{dV}{d\xi}(n-k, \xi) / (\lambda + \alpha)$

Substituindo III.44 em III.45 obtém-se :

$$V(n, 0) - V_0(n, 0) = [V(n, \xi) - V_0(n, \xi)] e^{(\lambda + \alpha)\xi} + \int_0^\xi e^{-(\lambda + \alpha)t} [\lambda \sum p(k) \frac{dV}{d\xi}(n-k, t)] / (\lambda + \alpha) dt \quad (\text{III.46})$$

$$V(n, 0) - V_0(n, 0) = [V(n, \xi) - V_0(n, \xi)] e^{(\lambda + \alpha)\xi} + \sum p(k) (e^{-(\lambda + \alpha)\xi} \lambda V(n-k, \xi) - V(n-k, 0) + \int_0^\xi e^{-(\lambda + \alpha)t} V(n-k, t) dt) \lambda / (\lambda + \alpha) \quad (\text{III.47})$$

Agora, vendo que

$$V(n-k, 0) = \int_0^\xi e^{-(\lambda + \alpha)t} (\lambda + \alpha) V_0(n-k, t) dt + V(n-k, \xi) e^{-(\lambda + \alpha)\xi} \quad (\text{III.48})$$

Substituindo III.47 em III.48 e modificando a ordem dos termos da igualdade, chega-se a seguinte expressão :

$$[V(n, \xi) - V_0(n, \xi)] e^{-(\lambda + \alpha)\xi} = V(n, 0) - V_0(n, 0) -$$

$$- \sum p(k) \int_0^\xi e^{-(\lambda + \alpha)t} [V(n-k, t) - V_0(n-k, t)] \lambda / (\lambda + \alpha) dt \quad (III.49)$$

A igualdade acima é encontrada variando ξ no intervalo $[0, \Gamma]$. Notando - se que $V(n-k, \xi) = V_0(n-k, \xi)$ para $\xi^*(n-k) \leq \xi \leq \Gamma$, verifica - se que a integral da equação III.49 permanece inalterada quando $\Gamma \geq \xi \geq \max \{ \xi^*(n-k) : p(k) \neq 0 \}$. Lembrando que $V(n, 0) - V_0(n, 0)$ é constante, conclui - se que a igualdade III.49 será satisfeita se $V(n, \xi) = V_0(n, \xi)$ para $\Gamma \geq \xi \geq \max \{ \xi^*(n-k) : p(k) \neq 0 \}$. Isto quer dizer que existe um limite máximo de ξ para o qual $u = 1$. Portanto $\xi^*(n) \leq \max \{ \xi^*(n-k) : p(k) \neq 0 \}$.

Seja $z = n\Gamma + \xi$

A seguir descreveremos o comportamento de $z \rightarrow V(z)$ e $z \rightarrow E[V(\cdot)/z]$ a partir dos Lemas 1 a 3, para esboçarmos estas funções de acordo com a figura III.2.

Se a política é produzir, então $\frac{dV(n, \xi)}{d\xi} < 0$.

Considerando - se este fato na equação diferencial III.22, obtemos a seguinte relação

$$(\lambda + \alpha) V(n, \xi) - \lambda E[V(\cdot)/(n, \xi)] < C(n) \quad (III.50)$$

Se a política é não produzir então $V(n, \xi)$ é dado pela equação III.24. Portanto obtém - se outra relação

$$(\lambda + \alpha) V(n, \xi) - \lambda E[V(\cdot)/(n, \xi)] = C(n) \quad (III.51)$$

A relação III.50 é satisfeita para $n < 0$ (lema 1).

Supondo que o lema 2 é válido para $n = 1$ então a relação III.50 é satisfeito para $0 \leq \xi < \xi''(1)$ e III.51 é satisfeito para $\xi''(1) \leq \xi \leq \Gamma$.

Além disso $\xi \rightarrow V(1, \xi)$ é decrescente pois é dada pela combinação de funções decrescentes.

Supondo que o lema 3 seja satisfeito para $n = 3$, então

$$(\lambda + \alpha) V(3, \xi) - E [V(.) / (3, \xi)] = C(3) \text{ para } \xi \in [0, \Gamma]$$

Assim haverá uma descontinuidade na fronteira, pois

$$V(2, \Gamma) = \lambda E [V / (n, \Gamma)] + C(2) / (\lambda + \alpha)$$

$$V(3, 0) = \lambda E [V / (n, 0)] + C(3) / (\lambda + \alpha) =$$

$$V(2, \Gamma) + [C(3) - C(2)] / (\lambda + \alpha)$$

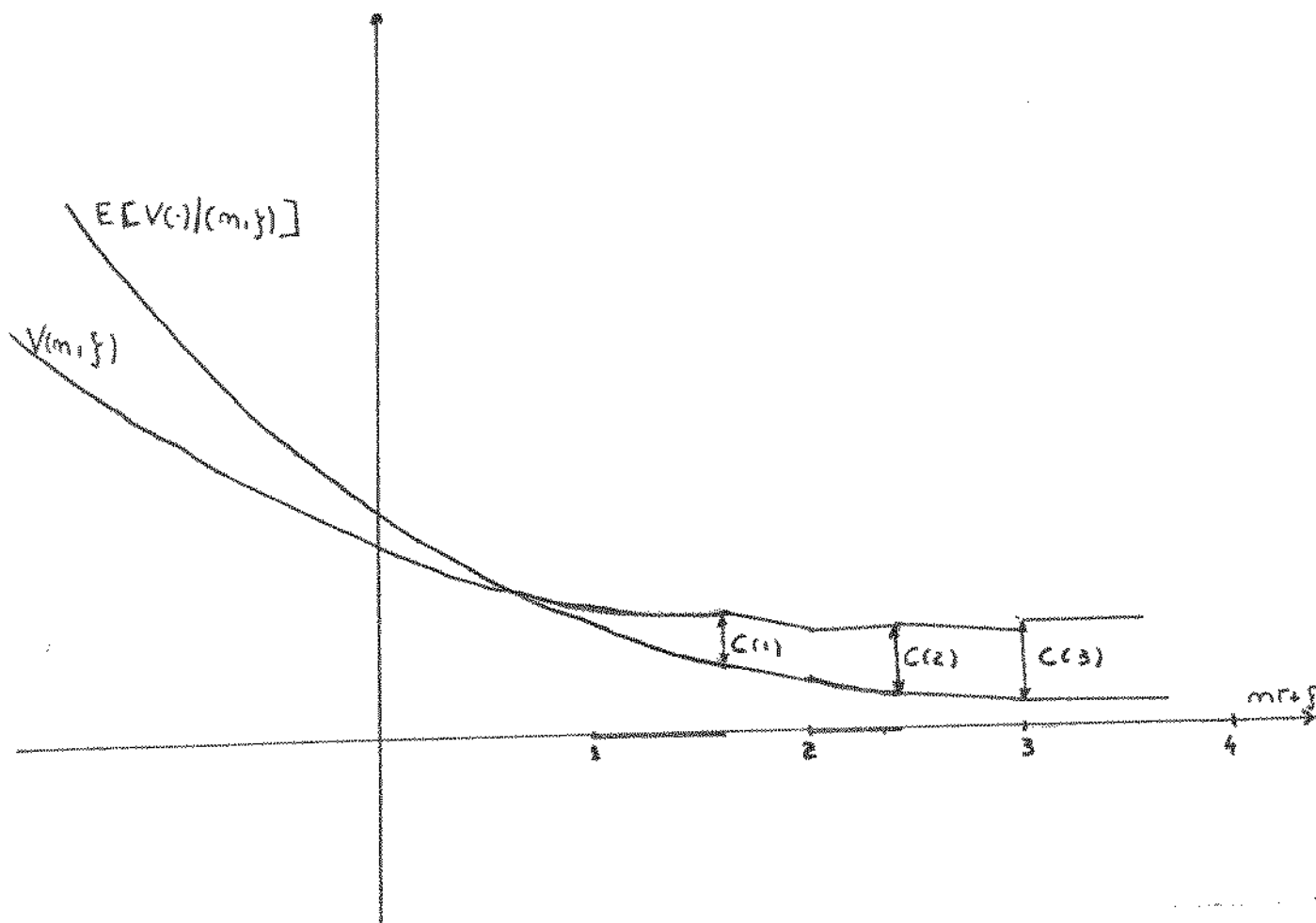


Fig. III.2 - Esboço das funções $z \rightarrow V(z)$ e $z \rightarrow E[V(.)/z]$

Nas próximas secções desenvolvem-se algoritmos que determinam a função $z \rightarrow V(z)$ e a política ótima de produção dos problemas de UM ITEM e DOIS ÍTENS. Para isso, os algoritmos constroem um arquivo de dados que deve ser modificado a cada iteração. O formato deste arquivo depende do número de itens produzidos pelo sistema de produção - estoque, do número de iterações necessárias à convergência da função $V(.)$ e das características da demanda.

III.4 - ALGORITMOS DO PROBLEMA DE UM ITEM .

De acordo com o teorema 1 , podemos utilizar a equação de H - J - B , definida em I.29 e I.30 , como base para desenvolver o algoritmo recursivo do problema de UM ITEM . Nos pontos onde $\xi \rightarrow V^i(n, \xi)$ for diferenciável , esta equação será dada pelas seguintes expressões :

$$\min_{u \in [0,1]} \left[\frac{dV^i(n, \xi)}{d\xi} P + A \right] u + B\xi + C(n) + E[V^{i-1}/(n, \xi)]$$

$$- (\lambda + \alpha) V^i(n, \xi) = 0 \quad \text{para } (n, \xi) \in E \quad (\text{III.52})$$

$$V^i(n, \Gamma) = V^{i-1}(n+1, 0) \quad \text{na fronteira } E_\partial \quad (\text{III.53})$$

$$\text{Onde } E = \mathbb{N} \times [0, \Gamma] \text{ e } E_\partial = \mathbb{N} \times \Gamma$$

$$E[V^{i-1}/(n, \xi)] = \sum_{k=1}^L P_k V^{i-1}(n-k, \xi)$$

Definimos P_k como uma distribuição binomial dada por :

$$P_k = \binom{L-1}{k-1} \times q^{k-1} p^{L-k} \quad k = 1, 2, \dots, L$$

onde $p + q = 1$, L é o lote máximo .

O cálculo de $\xi \rightarrow V^i(n, \xi)$ é efetuado através das equações III.51 e III.52 , conforme mostra o seguinte algoritmo :

ALGORITMO III.1

Passo 1 - Definir o passo de discretização Δ . Faça $\xi = \Gamma$ e $V^1(n, \Gamma) = V^{i-1}(n+1, 0)$

Passo 2 - Faça $\xi = \xi - \Delta$.

Determine $V_1^i(n, \xi)$ e $V_0^i(n, \xi)$, onde

$V_1^i(n, \xi)$ é a solução de III.51 para $u = 1$ com a condição de contorno $V_1^i(n, \xi + \Delta) = 0$.

$$\frac{dV_1^i(\cdot)}{d\xi} + P + A + B\xi + C(n) + \lambda E[V^{i-1}(\cdot)] + -(\lambda + \alpha)V(n, \xi) = 0$$

e $V_0^i(n, \xi)$ é a solução de III.52 para $u = 0$:

$$V_0^i(n, \xi) = \frac{B\xi + C(n) + \lambda E[V^{i-1}(\cdot)]}{(\lambda + \alpha)}$$

Passo 3 - Faça $V^i(n, \xi) = \min(V_1^i(n, \xi), V_0^i(n, \xi))$.

Pare se $\xi = 0$. Senão retorne ao Passo 2.

O algoritmo III.1 necessita que seja arquivado um conjunto de funções na iteração $i - 1$ para se determinar $\xi + E[V^{i-1}(\cdot)]$ e $V^{i-1}(n+1, 0)$. Na iteração i , estes valores são utilizados para se calcular $\xi + V^i(n, \xi)$. A maneira apropriada para a construção deste arquivo será mostrado no seguinte exemplo:

Considere que a convergência da função valor ocorra na terceira iteração. Observa-se que o cálculo da função $V^3(n, \xi)$ através do algoritmo III.1, necessita da condição de fronteira

$V^m(n+1, 0)$ e do valor esperado $EC V^2/(n, \xi) = \sum_{k=1}^L P_k V^m(n-k, \xi)$

Para calcularmos este valor esperado, deve-se armazenar as funções:

$$\xi \rightarrow V^2(n-1, \xi), \xi \rightarrow V^2(n-2, \xi), \dots, \xi \rightarrow V^2(n-L, \xi)$$

Pelo mesmo motivo anterior conclui-se que o cálculo de cada destas funções acima e da condição de fronteira necessita de um arquivo contendo as seguintes funções da primeira iteração:

$$\xi \rightarrow V^1(n+2, \xi), \xi \rightarrow V^1(n+1, \xi), \dots, \xi \rightarrow V^1(n-2L, \xi)$$

Para construir o arquivo anterior na primeira iteração, deve-se estar arquivado em $i = 0$ a sequência de funções

$$\xi \rightarrow V^0(n+3, \xi), \xi \rightarrow V^0(n+2, \xi), \dots, \xi \rightarrow V^0(n-3L, \xi)$$

Se ocorrer de fato a convergência em 3 iterações, então a função $\xi \rightarrow V^3(n, \xi)$ é a função valor do problema de UM ITEM definido em III.1, para $m = 1$. Caso contrário deveremos estipular que a convergência acontecerá em $I > 3$ iterações e armazenar em cada iteração uma nova sequência de funções suficiente para obter $\xi \rightarrow V^I(n, \xi)$ na última iteração ($i = I$).

Este método de tentativa justifica-se pelo fato de não existir meios para determinar o número de iterações necessário para a convergência da função $V^1(n, \xi)$. Uma abordagem sobre operadores contrativos de programação dinâmica, semelhante a desenvolvida por Bertsekas e Shreve [1] pode levar a um limitante superior sobre o número de iterações para a convergência. Vale a pena esclarecer que esta sequência de funções citada anteriormente é resultado da contração do espaço de estado $N \times [0, \Gamma]$. Na iteração zero este espaço de estado é truncado para conter a sequência de funções da iteração $i = 0$. Na última iteração, o espaço de estado conterá apenas a função $\xi \rightarrow V(n, \xi)$.

Seja $S_I^i(n)$ um conjunto de funções arquivadas na iteração i , considerando-se que a convergência ocorrerá em I iterações. $S_I^i(n)$ é definido por :

$$S_I^i(n) = \{ \xi \rightarrow V^i(n+1, \xi), l = -(I-i)L, \dots, (I-i) \}$$

Quando $i = I$ $S_I^i(n) = \{ \xi \rightarrow V^i(n, \xi) \}$

Se $I_1 > I_2$, então $S_{I_1}^i(n) > S_{I_2}^i(n)$

Armazenando o conjunto de funções S_I^{i-1} poderemos resolver $\xi \rightarrow V^i(n+1, \xi)$, $l = -(I-i)L, \dots, (I-i)$ de acordo com o algoritmo III.1 para determinar S_I^i . Este método gera um outro algoritmo, descrito a seguir, para obter a convergência de $z \rightarrow V^i(z)$ quando $i = I$ e determinar a política de produção do problema de UM ITEM [19].

ALGORITMO III.2

PASSO 1 - Faça $i = 0$. Escolher arbitrariamente um conjunto de funções contínuas igual a S_x^0 . Arquivar S_x^0 .

PASSO 2 - Faça $i = i + 1$. Dado S^{i-1} , Determinar as funções do conjunto S_I^i , definidas por $\xi \rightarrow V^i(n+1, \xi)$, $l = -(I-i)L, \dots, (I-i)$, de acordo com o algoritmo I.1. Se $i \neq I$ reinicie o PASSO 2.

PASSO 3 - Se $\xi \rightarrow V^I(n, \xi)$ convergiu faça $\xi = 0$. Senão aumentar I e volte ao PASSO 1.

PASSO 4 - Faça $\xi = \xi + \Delta$. A política de produção será :

1 - Produzir até (n, ξ) se $V^I(n, \xi) = V_1^I(n, \xi)$

2 - Parar de produzir em $(n, \xi - \Delta)$ se $V^I(n, \xi) = V_e^I(n, \xi)$

Se $\xi = \Gamma$, pare. Senão reinicie o PASSO 4.

O algoritmo III.2 obtém soluções para o caso genérico do problema de UM ITEM. No entanto podemos utilizar a análise desenvolvida na seção III.3, válida quando $A = B = 0$ e $P = 1$, para melhorar este algoritmo, dado o resultado do LEMA 4.

ALGORITMO III.3

PASSO 1 - Faça $i = 0$ e $n = -1$. Suponha que a convergência se dá em $I - 1$ iterações. Escolher arbitrariamente $S_I^0(-1)$ tal que $(n, \xi) \rightarrow V^0(n+1, \xi)$, $l = -(I - i)L, \dots, (I - i)$ seja decrescente. Arquivar $S_I^0(-1)$.

PASSO 2 - Faça $i = i + 1$. Dado S_I^{i-1} , determinar as funções do conjunto $S_I^i(-1)$, através do algoritmo III.1. Se $i < I - 1$ reinicie o PASSO 2.

PASSO 3 - Se $\xi \rightarrow V^{I-1}(n+1, \xi)$, $l = \dots, -1, \dots, -L$ convergiu então defina $V^{I-1}(\cdot) = V(\cdot)$. Faça $k = 0$ e obtenha $\xi^*(n+k)$ através da seguinte expressão

$$C(n) - C(n-1) = \lambda \sum_{i=1}^L p(i) \int_0^{\xi^*(n+k-i)} e^{-(\lambda + \alpha)t} V(n-i, t) dt \quad (\text{III.53})$$

Se o lado direito da equação III.53 não se igualar ao lado esquerdo, então faça $\xi^*(n+k) = 0$. Defina $\xi \rightarrow V(n+k, \xi)$ de acordo com $\xi^*(n+k)$. Incremente k e defina $\xi^*(n+k)$ até onde interessar.

III.5 - ALGORITMOS DO PROBLEMA DE DOIS ÍTENS .

O algoritmo será desenvolvido a partir da equação de H - J - B aplicada ao problema de DOIS ÍTENS . Supondo que $V^i(z_1, z_2)$ seja diferenciável em relação a ξ_1 e ξ_2 , esta equação será dada por :

$$\begin{aligned} \min [& u_1 (\frac{\partial V^i(z_1, z_2)}{\partial \xi_1} P_1 + A_1) + u_2 (\frac{\partial V^i(z_1, z_2)}{\partial \xi_2} P_2 + A_2)] \\ & 0 \leq u_1 + u_2 \leq 1 \\ & u_1 \text{ e } u_2 \in [0, 1] \\ & + \bar{B} \bar{\xi} + C(\bar{N}) + \lambda E[V^{i-1}/(z_1, z_2)] \quad \text{para } z_1 \text{ e } z_2 \in E \end{aligned} \quad (\text{III.54})$$

$$V^i(z) = V^{i-1}(y) \quad \text{para } z \in E_\partial, \quad y \in E. \quad (\text{III.55})$$

onde

$$E = \mathbb{N} \times [0, \Gamma_1] \times [0, \Gamma_2], \quad E_\partial = \mathbb{N} \times \Gamma_1 \times \Gamma_2$$

$$z_1 = (n_1, n_2, \xi_1, \xi_2) \quad \text{e} \quad z_2 = (n_1, n_2, \xi_1, \xi_2)$$

$$E[V^{i-1}/(z_1, z_2)] = \alpha_1 V^{i-1}(n_1 - 1, \xi_1, n_2, \xi_2) +$$

$$\alpha_2 V^{i-1}(n_1, \xi_1, n_2 - 1, \xi_2)$$

α_1 é a probabilidade do cliente levar o item 1 e α_2 é a probabilidade do cliente levar o item 2 .

O cálculo de $z \rightarrow V^i(z)$ é dado pelo seguinte algoritmo :

ALGORITMO III.4

PASSO 1 - Definir os passos de discretização Δ_1 e Δ_2 . Faça $\xi_1 = \Gamma_1$,

$$\xi_2 = \Gamma_2, \quad V^i(n_1, n_2, \xi_1, \Gamma_2) = V^{i-1}(n_1, n_2 + 1, \xi_1, 0) \quad \text{e}$$

$$V^i(n_1, n_2, \Gamma_1, \xi_2) = V^{i-1}(n_1 + 1, n_2, 0, \xi_2)$$

PASSO 2 - Faça $\xi_1 = \Gamma_1 - \Delta_1$, $\xi_2 = \Gamma_2 - \Delta_2$.

Determinar $V^i_1(z_1, z_2)$, $V^i_2(z_1, z_2)$, $V^i_3(z_1, z_2)$, onde

$V^i_1(\cdot)$ é a solução da equação III.54 para $u_1 = 1$ e $u_2 = 0$, com a condição de contorno $V^i(n_1, n_2, \xi_1 + \Delta_1, \xi_2)$:

$$\frac{\partial V^i_1(z_1, z_2)}{\partial \xi_1} p_1 + A_1 + \bar{B} \bar{\xi} + C(\bar{n}) - (\lambda + \alpha) V^i_1(z_1, z_2)$$

$$+ \lambda E[V^{i-1}_1(z_1, z_2)] = 0$$

$V^i_2(\cdot)$ é a solução da equação III.54 para $u_1 = 0$ e $u_2 = 1$, com a condição de contorno $V^i(n_1, n_2, \xi_1, \xi_2 + \Delta_2)$:

$$\frac{\partial V^i_2(z_1, z_2)}{\partial \xi_2} p_2 + A_2 + \bar{B} \bar{\xi} + C(\bar{n}) - (\lambda + \alpha) V^i_2(z_1, z_2)$$

$$+ \lambda E[V^{i-1}_2(z_1, z_2)] = 0$$

$V^i_3(\cdot)$ é a solução da equação III.54 para $u_1 = 0$ e $u_2 = 0$

$$V^i_3(z_1, z_2) = \frac{B \bar{\xi} + C(N) + \lambda E[V^{i-1}_3(z_1, z_2)]}{\lambda + \alpha}$$

PASSO 3 - Faça $V^i(z_1, z_2) = \min (V_1^i(\dots), V_2^i(\dots), V_3^i(\dots))$

Pare se $\xi_1 = \xi_2 = 0$. Senão retorne ao PASSO 2 .

No algoritmo III.4 também devemos arquivar um conjunto de funções na iteração $i - 1$, a partir da qual se realiza o cálculo do valor esperado $z \rightarrow E[V^{i-1}/(z)]$ e se obtém as condições de fronteira $V^{i-1}(n_1, n_2 + 1, \xi_1, 0)$ e $V^{i-1}(n_1 + 1, n_2, 0, \xi_2)$. Este conjunto pode ser definido através do seguinte exemplo :

Considere que a convergência de $z \rightarrow V^i(z)$ aconteça na segunda iteração . A função $\xi_1, \xi_2 \rightarrow V^2(n_1, \dots, n_2, \dots)$ deverá ser obtida a partir das seguintes funções :

$$\xi_1, \xi_2 \rightarrow V^1(n_1 - 1, \dots, n_2, \dots) ; \xi_1, \xi_2 \rightarrow V^1(n_1, \dots, n_2 - 1, \dots) ; \quad (\text{III.55})$$

$$\xi_1, \xi_2 \rightarrow V^1(n_1 + 1, \dots, n_2, \dots) ; \xi_1, \xi_2 \rightarrow V^1(n_1, \dots, n_2 + 1, \dots) .$$

O cálculo de cada uma destas funções será possível tivermos armazenado na iteração inicial ($i = 0$) as funções :

$$\begin{aligned} \xi_1, \xi_2 &\rightarrow V^0(n_1 - 2, \dots, n_2, \dots) ; \xi_1, \xi_2 \rightarrow V^0(n_1 + 2, \dots, n_2, \dots) ; \\ \xi_1, \xi_2 &\rightarrow V^0(n_1, \dots, n_2 - 2, \dots) ; \xi_1, \xi_2 \rightarrow V^0(n_1, \dots, n_2 + 2, \dots) ; \\ \xi_1, \xi_2 &\rightarrow V^0(n_1 - 1, \dots, n_2 - 1, \dots) ; \xi_1, \xi_2 \rightarrow V^0(n_1 - 1, \dots, n_2 + 1, \dots) ; \quad (\text{III.56}) \\ \xi_1, \xi_2 &\rightarrow V^0(n_1 + 1, \dots, n_2 - 1, \dots) ; \xi_1, \xi_2 \rightarrow V^0(n_1 + 1, \dots, n_2 + 1, \dots) ; \\ \xi_1, \xi_2 &\rightarrow V^0(n_1, \dots, n_2, \dots) \end{aligned}$$

O conjunto de funções que deve ser arquivado numa iteração qualquer , dado que a convergência ocorrerá na I ésima iteração , é facilmente obtida se ele for representado num sistema de coordenadas

cartesianas. Cada par (l, c) l e $c \in [-(I-i), I-i]$, representado no gráfico $l \times c$ por um X , indica a função $\xi_i, \xi \rightarrow V^i(n_1+1, \dots, n_i+c, \dots)$. Por exemplo, para $I = 2$ o conjunto de funções III.56, gerado na iteração $i = 0$ tem a seguinte representação gráfica:

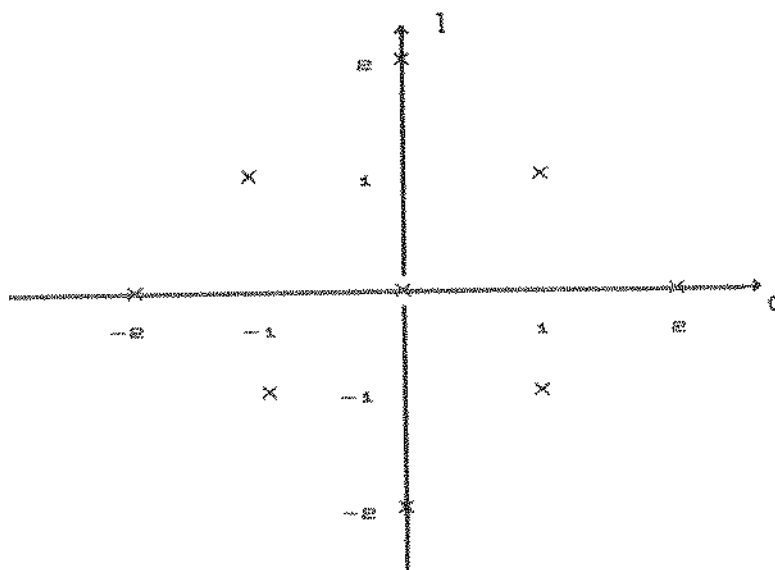


Fig. III.3 - Gráfico que representa o conjunto III.56 ($I = 2$, $i = 0$)

O gráfico da sequência III.55 será:

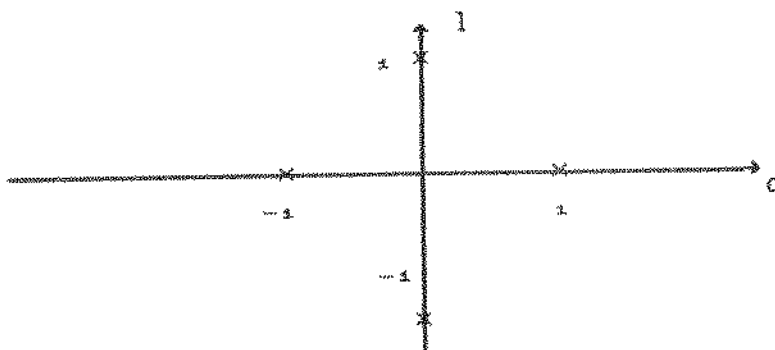


Fig. III.4 - Gráfico que representa o conjunto III.55 ($I = 2$, $i = 1$)

Observe nas figuras anteriores que os pontos do gráfico que representam os elementos de cada conjunto de funções formam losangos, cujos vértices são menores ou iguais a $I - 1$ e possuem coordenadas pares se $I - 1$ for par. Quando $I - 1$ for ímpar, os vértices dos losangos são coordenadas ímpares.

Portanto pode-se gerar , através deste recurso gráfico , qualquer conjunto de funções numa iteração i , a partir do número de iterações I necessárias à convergência de $z \rightarrow V^i(z)$. Por exemplo o conjunto de funções a ser armazenado na iteração $i = 0$, quando a convergência acontece na iteração $I = 3$, é representado pelo seguinte gráfico :

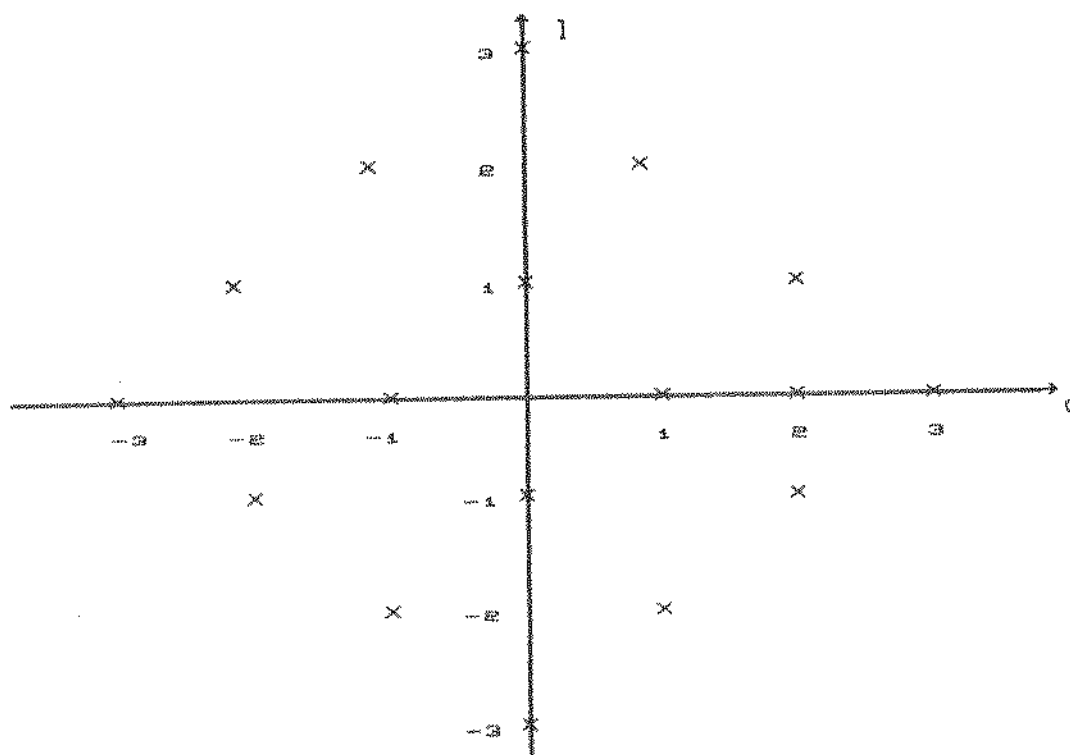


Fig. III.5 - Gráfico que representa o conjunto de funções quando $I = 3$ e $i = 0$

Podemos também aproveitar esta metodologia para determinar o conjunto de funções do problema de dois itens que considera um tamanho de lote qualquer , $L > 1$.

Seja $S_I^1(n_1, n_2)$ o conjunto de funções arquivado a cada iteração i supondo que $z \rightarrow V^i(z_1, z_2)$ convergirá na iteração I . O número de elementos de S_I^1   dado pela seguinte fórmula :

$(I - i + 1)^2$ se $I - i$ for ímpar

$(I - 1) (I - i + 2) + 1$ se I for par .

O algoritmo descrito a seguir obtém a convergência de $z \rightarrow V^1(z)$ quando $i = I$ e determina a política de produção do problema de DOIS ÍTENS [19] .

ALGORITMO III.5

PASSO 1 - Faça $i = 0$. Escolher arbitrariamente uma sequência de funções contínuas S_i^0 . Arquivar S_i^0 .

PASSO 2 - Faça $i = i + 1$. Dado S_i^{i-1} , determinar as funções $z \rightarrow V^i(z)$ do conjunto S_i^1 de acordo com o algoritmo III.4 . Se $i < I$ reinicie o PASSO 2 .

PASSO 3 - Se $V^I(z_1, z_2)$ convergiu faça $\xi_1 = 0$ e $\xi_2 = 0$. Senão aumente I e volte ao PASSO 1 .

PASSO 4 - Faça $\xi_1 = \xi_1 + \Delta_1$ e $\xi_2 = \xi_2 + \Delta_2$. A política de produção será :

1 - Se $V^I(z) = V_A^I(z)$ então deve - se Produzir o item 1 até ξ_1 e parar de produzir o item 2 em $\xi_2 - \Delta_2$;

2 - Se $V^I(z) = V_B^I(z)$ então deve - se parar de produzir o item 1 em $\xi_1 - \Delta_1$ e produzir o item 2 até ξ_2 ;

3 - Se $V^I(z) = V_C^I(z)$, deve - se parar de produzir o item 1 em $\xi_1 - \Delta_1$ e o item 2 em $\xi_2 - \Delta_2$.

CAPÍTULO IV .

RESULTADOS e IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

IV.1 - INTRODUÇÃO :

No capítulo III mostramos os algoritmos dos problemas de UM ITEM e DOIS ÍTENS e vimos que eles basicamente armazenam um conjunto de funções S_I^{i-1} na iteração $i - 1$, para determinar as funções do conjunto S_I^i , até a convergência de $V^i(.)$ na última iteração , $i = I$.

Neste capítulo descrevemos nas seções IV.2 e IV.3 a implementação computacional destes algoritmos , que são estruturados no programa conforme mostra fluxograma da fig. IV.1 .

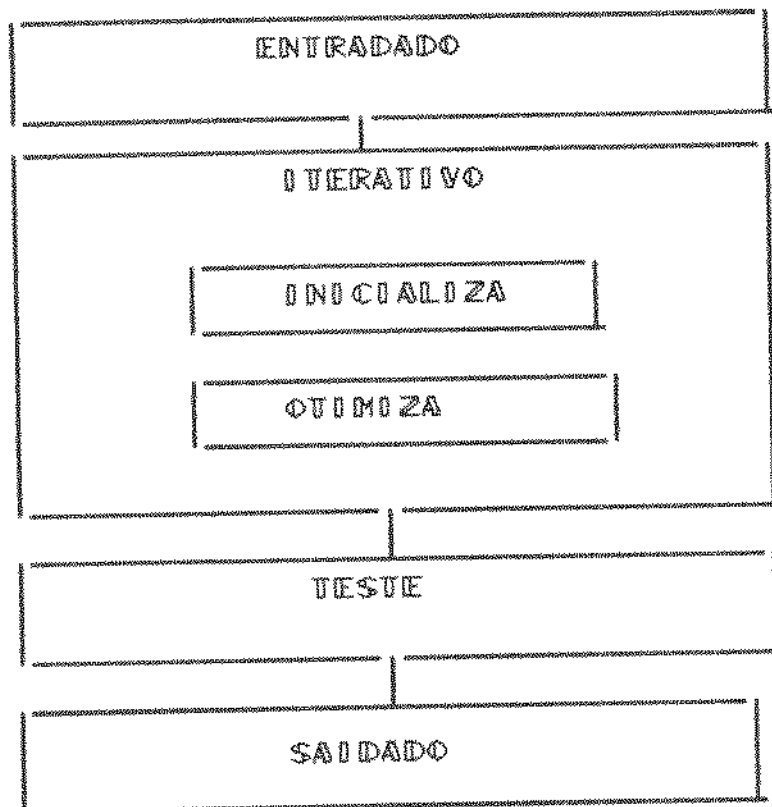


Fig . IV.1 - Estrutura dos Programas Computacionais dos Problemas de UM ITEM e DOIS ÍTENS

Para diferentes situações de demanda e custos de produção e estoque, mostramos nas seções IV.4 e IV.5 o comportamento da política de produção (n, ξ^*) relativo aos problemas de UM ITEM e DOIS íTEMS respectivamente e comentamos os resultados obtidos.

IV.2 - IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO DO PROBLEMA DE UM ITEM

Para $0 \leq i \leq I$, as funções do conjunto $S_I^i(n) = \{ \xi + V^i(n+j, \xi), j = -(I-i)L, \dots, (I-i) \}$ são arquivadas numa matriz com $I \times (L+1) + 1$ linhas e $(\beta+1)$ colunas, onde β é o número de intervalos de discretização de tamanho igual a Δ e L é o tamanho do maior lote. Cada uma destas funções é arquivada conforme a seguinte regra:

1 - As funções do conjunto $S_I^i(n)$, estão localizadas entre as linhas $l = i+1, \dots, I(L+1) - iL + 1$. Por exemplo:

NA linha $l = i+1$ armazena-se a função $\xi + V^i(n + I - i, \xi)$

NA linha $l = i+2$ armazena-se a função $\xi + V^i(n + I - i - 1, \xi)$

⋮

Na linha $l = I(L+1) - iL + 1$ armazena-se a função

$$\xi + V^i(n + L(i - I), \xi)$$

2 - As colunas $c = [1 \dots \beta+1]$ contém a função $\xi + V^i(n, \xi)$ discretizada nos pontos $\xi = (c-1)\Delta$.

Utilizando-se esta regra para armazenar as funções do conjunto $S_I^i(n)$, podemos localizar o valor $V^i(n + i - 1 + I, (c-1)\Delta)$ na linha $l = i+1, \dots, I(L+1) - iL + 1$ e coluna $c = 1, \dots, \beta+1$ (vide fig.IV.2).

$$c = 1 \quad c = 2 \quad c = 3 \quad \dots \quad c = \beta + 1$$

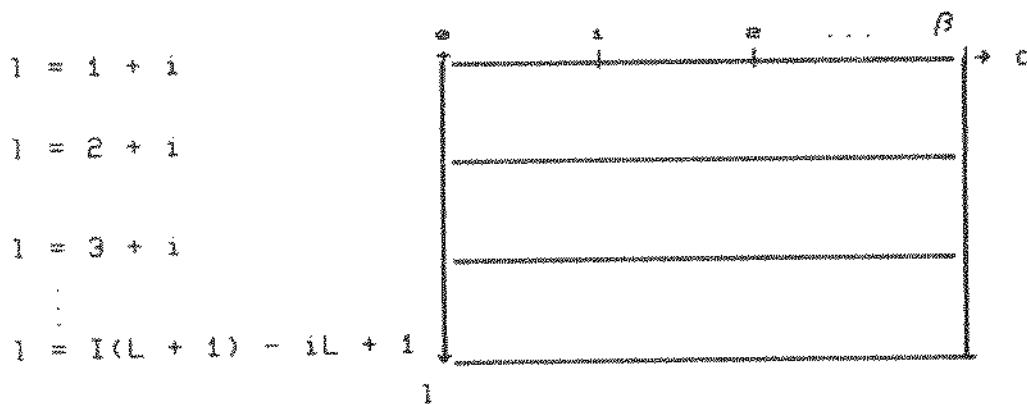


Fig. IV.2 - Localização das funções $(c - 1)\Delta + V(n - 1 + I + 1, (c-1)\Delta)$ na matriz com dimensão $[I \times (L + 1) + 1] \times (\beta + 1)$

Também verifica-se que o conjunto S_I^1 ocupa menos espaço na matriz à medida que se aumenta i . Quando $i = I$, S_I^1 é igual a função $\xi + V^1(n, \xi)$, localizada na linha $l = I + 1$.

O programa computacional que implementa o algoritmo III.1 do problema de UM ITEM é constituído pelos seguintes procedimentos :

1 - ENTRADADOS :

Realiza a leitura dos seguintes dados : $I, L, \lambda, P, c^*, c^-, A, B, q, p$. A matriz com dimensão $[I \times (L + 1) + 1] \times [I \times (\beta + 1)]$, que armazena o conjunto S_I^1 , é criada e identificada pela variável VALOR.

2 - ITERATIVO :

Determina o conjunto S_I^1 para $0 \leq i \leq I$. É constituído dos procedimentos INICIALIZA, OTIMIZA, ESPERADO e pelas funções CUSTOQUE e BINOMIAL.

O procedimento inicializa define o conjunto

$$S_I^0 = \{ \xi \rightarrow V^0(n+1-l+I, \xi), l = 1, \dots, I(L+1)+1 \}$$

com os valores $\{ C(n+1), l = 1, \dots, I(L+1)+1 \}$ e armazena este conjunto na matriz VALOR conforme a regra estabelecida.

Para $1 < i < I$ o procedimento OTIMIZA determina as funções $\xi \rightarrow V^i(n+1-l+I, \xi), l = i+1, \dots, I(L+1)-iL+1$ do conjunto S_I^i executando o algoritmo III.1 do capítulo III. A condição de fronteira $V^i(n+2-l+I, 0)$, pertence ao conjunto S_I^{i-1} . Na iteração i ele é transferido da matriz VALOR para a variável FRONTEIRA.

As funções da sequência S_I^{i-1} que estão localizadas entre as linhas l e $l+L$ da matriz VALOR durante a iteração $i-1$, são utilizadas para calcular $EV^{i-1}(\cdot)/(n, \xi)$ no procedimento ESPERADO durante a iteração i .

O custo de estoque $C(n)$ e a distribuição binomial p_n são calculados nas funções CUSTOQUE e BINOMIAL respectivamente.

Após a função $\xi \rightarrow V^i(n+1-l+I, \xi)$ ser calculada, ela é passada do procedimento OTIMIZA para ITERATIVO, onde será armazenada na matriz VALOR, de acordo com a regra definida.

3 - TESTE :

Na última iteração ($i = I$) o procedimento TESTE realiza o teste de convergência da função $c \rightarrow V^I(n, (c-1)\Delta), c = 1, \dots, \beta+1$, armazenada na linha $l = I+1$ da matriz VALOR. O teste é verificar se o erro relativo médio E_1 igual a

$$E_1 = \frac{1}{\beta + 1} \sum_{c=1}^{\beta+1} \frac{|V^1(n, (c-1)\Delta) - V^{1-1}(n, (c-1)\Delta)|}{V^1(n, (c-1))}$$

é menor que um valor $\epsilon > 0$ pré-estabelecido.

4 - SAÍDADOS :

Se a função convergiu, a política de produção é determinada verificando - se os valores de $\xi + V^1/(n, \xi)$, conforme o algoritmo III.3

IV.3 - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO PROBLEMA DE DOIS ÍTENS.

Vimos na seção III.5 do capítulo III que o conjunto $S^1_i(n_1, n_2)$ para $0 \leq i \leq I$ pode ser definida num gráfico de coordenadas $1 \times c$, onde cada par (l, c) representa a função

$$(\xi_1, \xi_2) + V^1(n_1 + 1, \xi_1, n_2 + c, \xi_2) \quad (IV.1)$$

Assim, para armazenar cada ponto $V^1(n_1 + 1, \xi_1, n_2 + c, \xi_2)$ deve-se referenciar o par (l, c) , l e $c = -(I - i), \dots, I - i$, e os valores ξ_1 e ξ_2 .

Por isso consideramos que o conjunto $S^1_i(n_1, n_2)$ deve ser armazenado numa matriz com dimensão $(2I + 1) \times (2I + 1)$, chamada matriz PRINCIPAL. Cada elemento desta matriz é uma matriz com dimensão $(\beta_1 + 1) \times (\beta_2 + 1)$, chamada matriz SECUNDÁRIA, que armazena a função IV.1, onde β_1 é o número de intervalos de discretização de tamanho igual a Δ_1 e β_2 é o número de intervalos de discretização de tamanho igual a Δ_2 .

A regra utilizada para armazenar o conjunto $S^i_1(n_1, n_2)$ numa estrutura de dado deste tipo é a seguinte :

1 - A linha l_1 e coluna c_1 da matriz PRINCIPAL , l_1 e $c_1 = 1, \dots, 2I - 1$, estão associados com o par (l, c) através das seguintes relações :

$$l_1 = l + I \quad \text{e} \quad c_1 = c + I \quad (\text{IV.2})$$

Consequentemente em cada elemento da matriz PRINCIPAL localiza-se a função $(\xi_1, \xi_2) + V^1(n_1 + l_1 - I, \xi_1, n_2 + c_1 - I, \xi_2)$ (veja exemplo na fig. IV.3) .

2 - Em cada linha l_2 e coluna c_2 , $l_2 = 0, \dots, \beta_1$ e $c_2 = 0, \dots, \beta_2$ da matriz secundária localiza-se o ponto .

$$V^1(n_1 + l_1 - I, \Delta_1 \times l_2, n_2 + c_1 - I, \Delta_2 \times c_2)$$

	0	1	2	3	4	l_1
0			x			
1		x		x		
2	x		x		x	
3		x		x		
4			x			
c_1						

Fig. IV.3 - localização de $(\xi_1, \xi_2) + V^1(n_1 + l_1 - I, \xi_1, n_2 + c_1 - I, \xi_2)$ (representada por um x) na matriz principal quando $I = 2$, $i = 0$.

A convergência de $(\xi_1, \xi_2) \rightarrow V^1(n_1, \xi_1, n_2, \xi_2)$ define os limites necessários de armazenamento, tendo em vista que a dimensão da matriz Principal é determinada a partir do número máximo de iterações igual a I. Portanto é importante buscar o aproveitamento máximo da memória disponível. Uma alternativa para alcançar este objetivo é alocar dinamicamente os elementos da matriz Principal através do uso de apontadores.

Baseando-se nesta regra desenvolvemos os seguintes procedimentos que implementam o algoritmo III.5 do problema de DOIS ÍTENS:

1 - ENTRADADOS:

Realiza a leitura dos seguintes dados: $\lambda_i, n_i, c_i^+, c_i^-, A_i, B_i, \alpha_i, P_i, i = 1, 2$.

Os elementos da matriz PRINCIPAL são identificados pela variável $A[i, c]$ quando a iteração é ímpar ou pela variável $A[i, c]$ quando a iteração é par. $A[i, c]$ e $A[i, c]$ são variáveis do tipo apontador.

Os elementos da matriz secundária são identificados pela variável $A[i, c][i, c]$ ou $A[i, c][i, c]$.

2 - ITERATIVO:

Determina o conjunto de funções $S_1^i(n_1, n_2)$. É constituído pelos procedimentos INICIALIZA, OTIMIZA e APAGA.

Quando $i = 0$, o procedimento INICIALIZA define o conjunto

$$S_1^0 = \{ (\xi_1, \xi_2) \rightarrow V^0(n_1 + l_1 - I, \xi_1, n_2 + c_2 - I, \xi_2) \\ l_1 = c_1 = 0, \dots, 2I \}$$

com os valores

$$(C(n_1 + l_1 - I, n_2 + c_1 - I), l_1 = c_1 = 0, \dots, 2I)$$

onde o par (l_1, c_1) relaciona-se com as coordenadas (l, c) conforme IV.2.

As funções conjunto S_I^0 são armazenadas no procedimento ITERATIVO conforme a regra estabelecida.

Quando $i > 0$, o procedimento OTIMIZA determina cada função $(\xi_1, \xi_2) \rightarrow V^i(n_1 + l_1 - I, \xi_1, n_2 + c_1 - I, \xi_2)$, $l_1 = c_1 = i, \dots, 2I - i$ pertencente ao conjunto $S_I^i(n_1, n_2)$ de acordo com o algoritmo III.4 do capítulo III.

As funções do conjunto $S_I^{i-1}(n_1, n_2)$ que determinam o valor esperado $E(V^{i-1}(\cdot) / (n_1, \xi_1, n_2, \xi_2))$ e fornecem os valores da fronteira dados por:

$$V^{i-1}(n_1 + l_1 - I + 1, n_2 + c_1 - I, 0, \xi_2)$$

$$\text{e } V^{i-1}(n_1 + l_1 - I, n_2 + c_1 - I + 1, \xi_1, 0)$$

são transferidas do procedimento ITERATIVO para OTIMIZA na iteração i .

A medida que cada função do conjunto S_I^i é calculada no procedimento OTIMIZA, ela é armazenada na matriz secundária e transferida para o procedimento iterativo, onde será armazenada na matriz principal A_1 se a iteração for ímpar, ou A_2 se a iteração for par, conforme a regra estabelecida. Antes disso, o procedimento NEW reserva um endereço na memória para armazenar cada elemento da matriz principal.

No procedimento APAGA, os endereços alocados pelos apontadores das matrizes A_1 ou A_2 são liberados através do procedimento DISPOSE. Assim cada uma destas matrizes fica preparada para

armazenar novos dados da sequência S_i^{i+1} .

3 - TESTE

Na última iteração $i = I$, este procedimento realiza o teste de convergência da função $(l, c) \rightarrow V^i(n_1, l \Delta_1, n_2, c \Delta_2)$ localizada na linha I e coluna I da matriz PRINCIPAL. A função converge se o erro relativo médio E_e , dado por:

$$E_e = \frac{1}{(\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1)} \sum_{l=0}^{\beta_1} \sum_{c=0}^{\beta_2} \frac{V^i(l, l \Delta_1, c, c \Delta_2) - V^{i-1}(l, l \Delta_1, c, c \Delta_2)}{V^i(l, l \Delta_1, c, c \Delta_2)}$$

for menor que um valor ϵ pré - estabelecido.

Se esta função convergiu então a política de produção será definida de acordo com a equação utilizada para determinar $(\xi_1, \xi_2) \rightarrow V^i(n_1, \xi_1, n_2, \xi_2)$, conforme o algoritmo III.5.

4 - SAÍDADOS :

As etapas que devem ser produzidas são indicadas numa matriz com dimensão $\beta_1 \times \beta_2$, definida pela variável PRODUÇÃO. Cada elemento desta matriz localizado na linha $l = 1 \dots \beta_1$ e coluna $c = 1 \dots \beta_2$ é obtido da seguinte maneira :

Se o item 1 deve ser produzido até $\xi_1 = l \Delta_1$ então $PRODUÇÃO[l, c] = 1$

Se o item 2 deve ser produzido até $\xi_2 = c \Delta_2$ então $PRODUÇÃO[l, c] = 2$

Se a produção dos itens 1 e 2 forem paralisadas em $\xi_1 = (l - 1) \Delta_1$ e em $\xi_2 = (c - 1) \Delta_2$ respectivamente, então $PRODUÇÃO[l, c] = 0$

Os programas computacionais que implementam os algoritmos dos problemas de UM ITEM e DOIS ÍTENS foram desenvolvidos em linguagem turbo pascal versão 3.0 . Na seção seguinte mostaremos o comportamento da política de produção dos problemas de UM ITEM e DOIS ÍTENS quando se variam os dados que caracteriza cada um destes sistemas de produção - estoque . No caso de UM ITEM verifica-se , para cada nível de estoque , qual o valor ξ^* onde a produção deve ser paralisada . No segundo caso identifica - se os valores ξ_1^* e ξ_2^* , para os itens 1 e 2 respectivamente , que indicam o momento de produzir ou não cada um destes itens .

IV.4 - RESULTADOS DO PROBLEMA DE UM ITEM .

O gráfico 1 mostra a política de produção problema de UM ITEM , obtidos através do programa descrito na seção IV.2 , com as seguintes características :

- 1 - Custos : $C^+ = 5$; $C^- = 5$; $A = 5$; $B = 0$; .
- 2 - Constante da velocidade de produção : $P = 5$.
- 3 - tamanho máximo do lote pedido pelo cliente : $L = 3$
- 4 - $p = q = 0.5$
- 5 - Taxa de desconto : $\alpha = 0.01$
- 6 - número de pontos de discretização : $\beta = 10$.
- 7 - medida do item acabado : $\Gamma = \beta \Delta = 5$
- 8 - Os clientes chegam a uma taxa $\lambda = 0.2$.

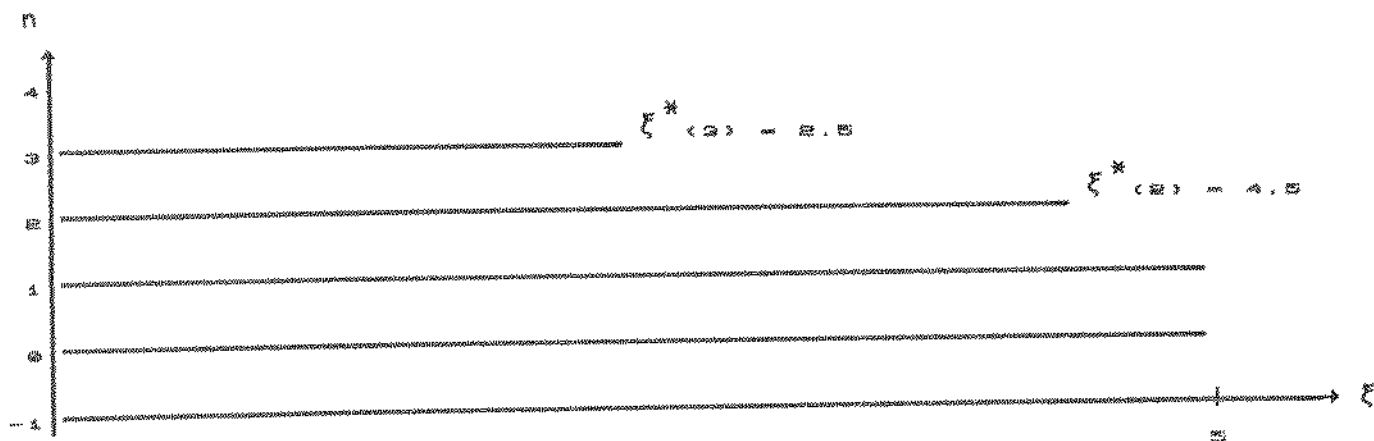


Gráfico 1 .

Os gráficos de 2 a 6 mostram a variação da política de produção do PROBLEMA DE UM ITEM em relação à política definida no gráfico 1 quando se modifica o parametro sub - escrito .

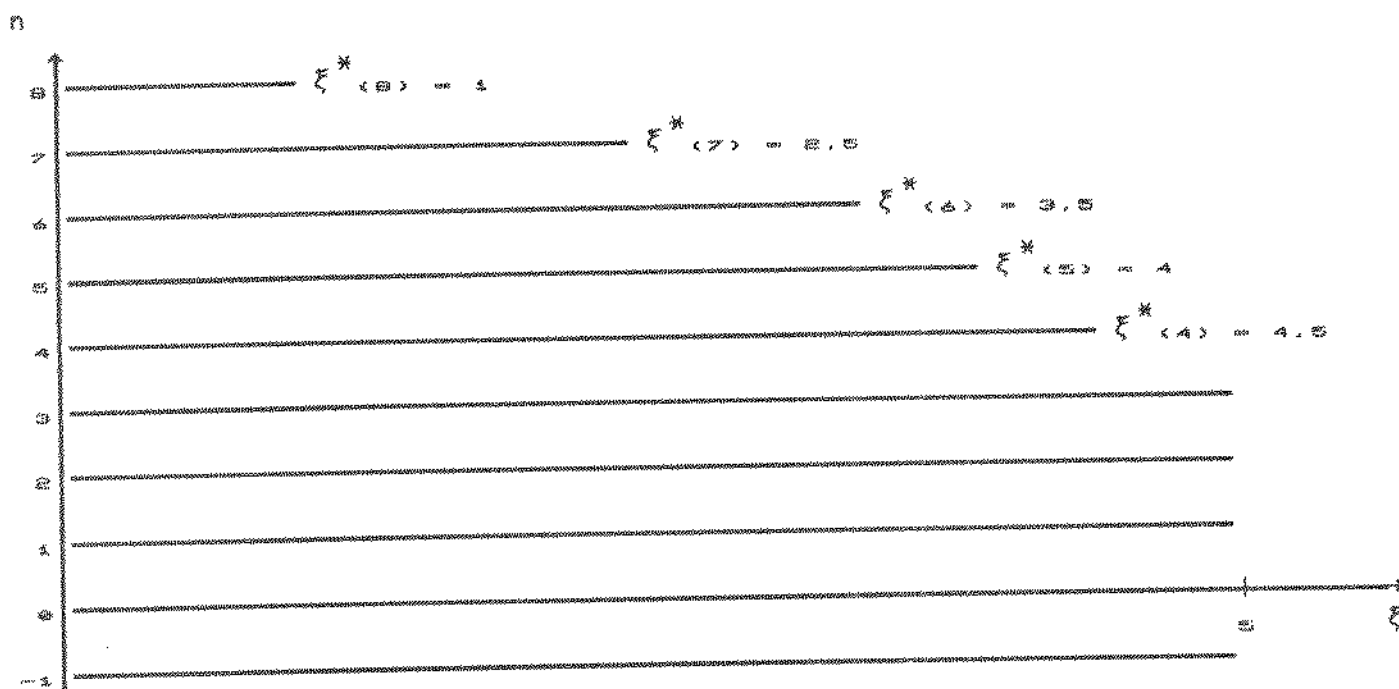


Gráfico 2 - $L = 6$.

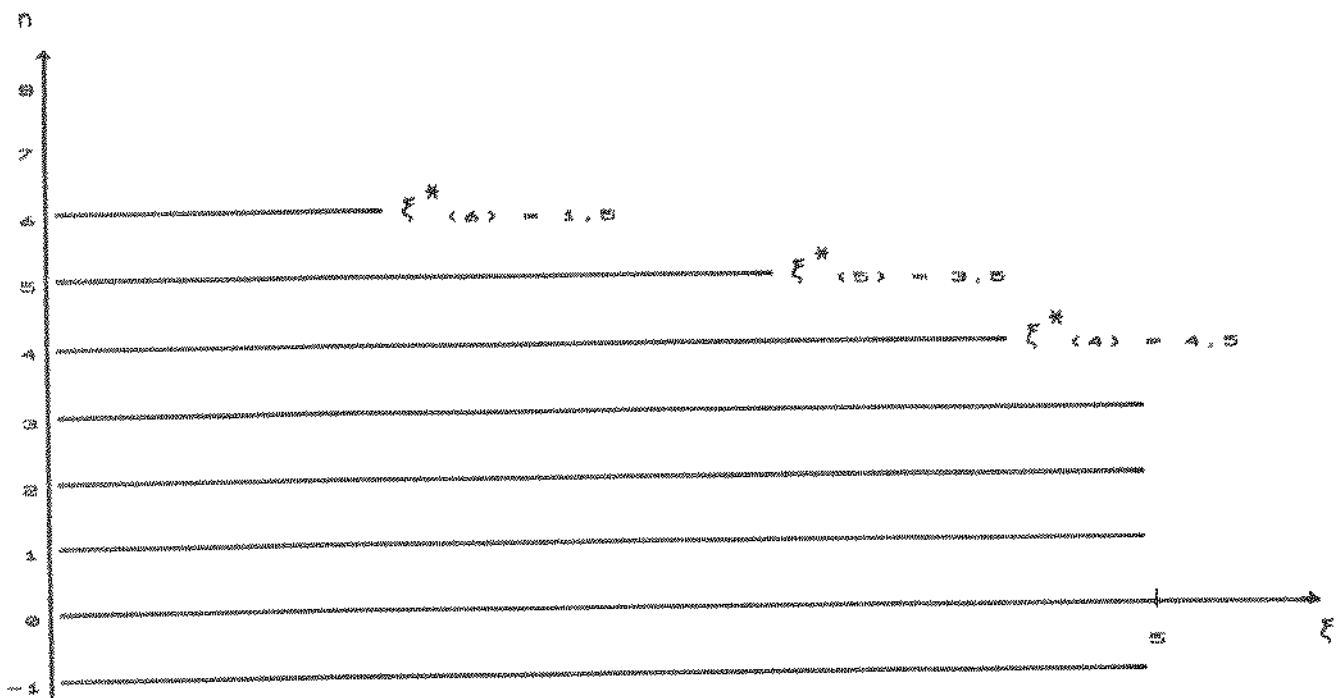


Gráfico 3 - $C^- = 100$.

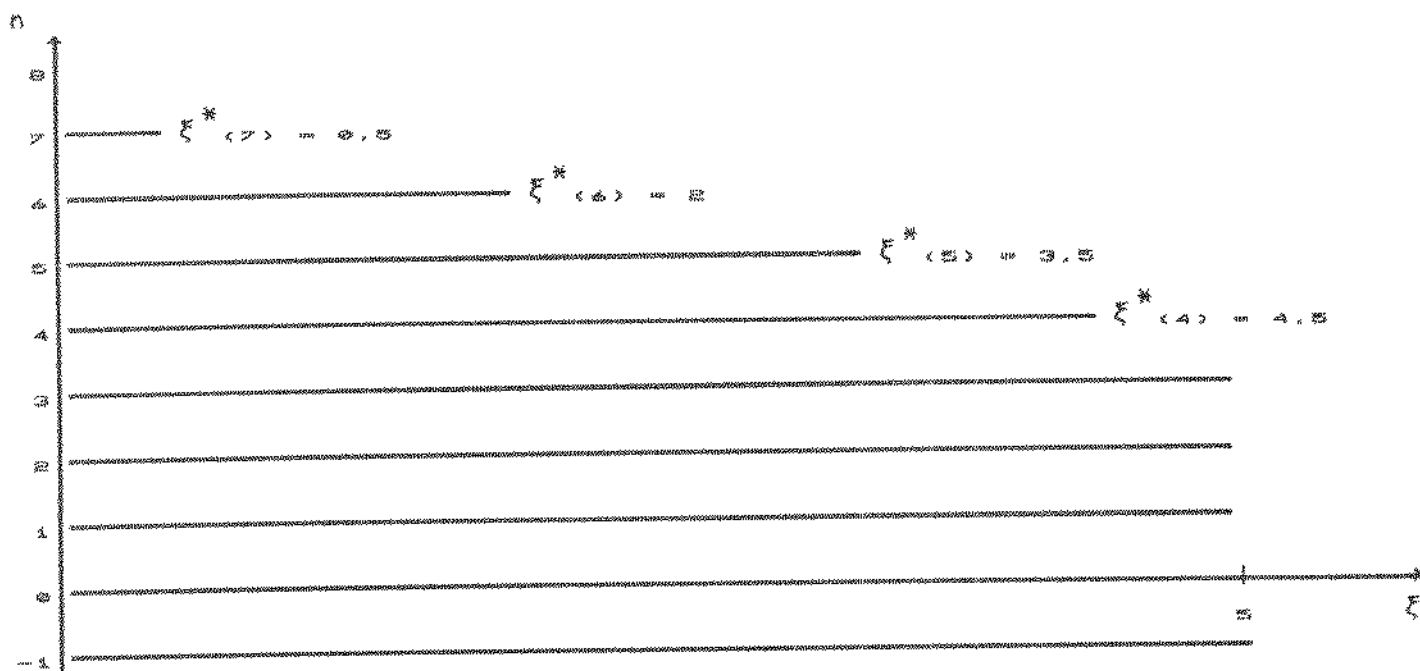


Gráfico 4 - $\lambda = 0.6$

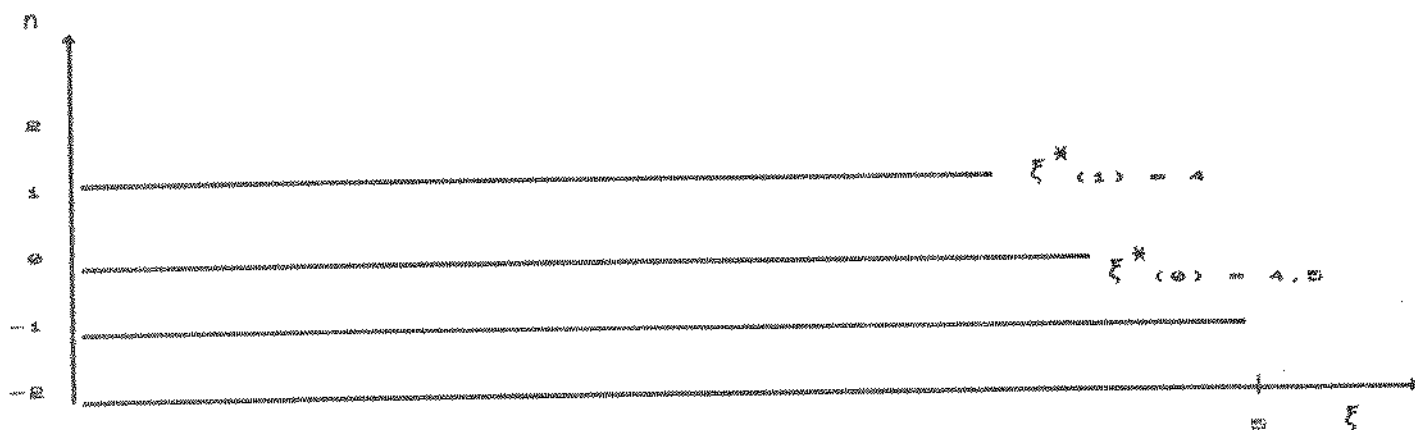


Gráfico 5 - $A = 0.5$

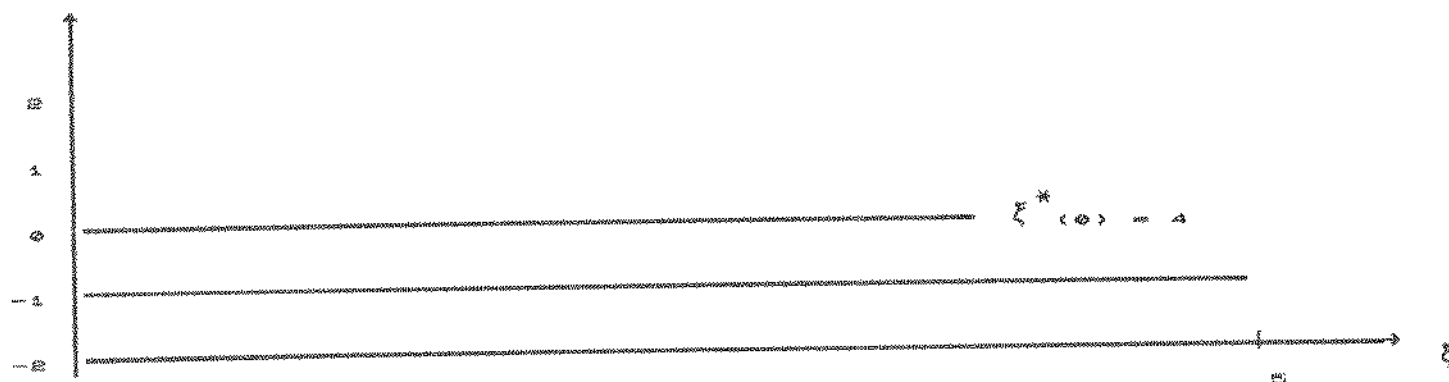


Gráfico 6 - $B = 0.5$

Observando-se estes resultados verifica-se que o nível de estoque varia proporcionalmente com os custos de racionamento (C^-) e produção (A), e o tamanho do lote máximo (L). O nível de estoque varia inversamente com o custo que penaliza o item inacabado (B). Este comportamento pode ser melhor entendido verificando-se o seguinte ponto de vista:

Quando a política de produção $u = 1$ é ótima de (n, ξ) até (n, Γ) , podemos escrever que

$$\begin{aligned}
 V(n, \xi) = & V(n, \Gamma) e^{-(\lambda + \alpha)(\Gamma - \xi)} + \\
 & + e^{(\lambda + \alpha)\xi} \int_{\xi}^{\Gamma} (e^{-t(\lambda + \alpha)} [A + Bt + \\
 & + C(n) + \sum_{k=1}^L P_k(V(n, t))]) dt \quad (IV.3)
 \end{aligned}$$

Considerando que $t \rightarrow V(n, t)$ é decrescente e fixando a função $t \rightarrow \sum_{k=1}^L P_k(V(n, t))$ em $t = \Gamma$ obtém-se a desigualdade:

$$\begin{aligned}
 V(n, \xi) & \leq V(n, \Gamma) \times e^{-(\lambda + \alpha)(\Gamma - \xi)} + \\
 & + (1 - e^{(\lambda + \alpha)(\Gamma - \xi)}) \left(\lambda \sum_{k=1}^L P_k V(n - k, \Gamma) + C(n) \right) / (\lambda + \alpha) + \\
 & + B \left(\xi + 1/(\lambda + \alpha)^2 \right) - e^{-(\lambda + \alpha)(\Gamma - \xi)} \left[\Gamma + 1/(\lambda + \alpha)^2 \right] \\
 & = F_1(n, \xi) + F_2(n, \xi), \quad \text{onde:}
 \end{aligned}$$

$$F_1(n, \xi) = [A + C(n) + \sum_{k=1}^L P_k(V(n, \Gamma))] [1 - e^{-(\lambda + \alpha)(\Gamma - \xi)}] / (\lambda + \alpha)$$

$$F_2(\xi) = B \left[\xi + 1/(\lambda + \alpha)^2 \right] + (V(n, \Gamma) -$$

$$- \left[\Gamma + 1 / (\lambda + \alpha)^m \right] B \quad \text{e} \quad -(\lambda + \alpha)(\Gamma - \xi)$$

Note que $\xi \rightarrow F_1(\xi)$ é decrescente . $\xi \rightarrow F_2(\xi)$ é

crescente se $\Gamma (\lambda + \alpha)^m + 1 > \frac{(\lambda + \alpha) \Gamma}{e}$

Portanto o aumento dos parametros A , C^+ , e L , aumenta o peso de $\xi \rightarrow F_1(\xi)$ tornando a derivada de $V(n, \xi)$ em relação a ξ mais negativa , conforme observado nos gráficos 2 , 3 , 5 . Portanto a política varia no sentido de produzir mais . Por outro lado , o aumento de B acentua o peso $\xi \rightarrow F_2(\xi)$, tornando a derivada $\frac{dV(n, \xi)}{d\xi}$ mais positiva , já que as condições para que

$\xi \rightarrow F_2(\xi)$ seja crescente é satisfeita no caso apresentado nesta seção . Portanto , a política varia no sentido de produzir menos , conforme observado no gráfico 6 .

IV.5 - RESULTADOS DO PROBLEMA DE DOIS ÍTENS .

As matrizes de PRODUÇÃO 1 a 5 a seguir mostram o comportamento da política de produção do PROBLEMA DE DOIS ÍTENS obtido no programa descrito em IV.3 à medida que se varia os respectivos níveis de estoque . Considera-se que os dados deste sistema de produção -estoque tenham os seguintes valores :

- 1 - Custos : $C_1^+ = C_2^+ = 5$; $C_1^- = C_2^- = 50$; $A_1 = A_2 = 0$;
 $B_1 = B_2 = 0$.
- 2 - Constante da velocidade de produção : $P_1 = P_2 = 1$.
- 3 - Taxa de chegada de clientes : $\lambda = 0.8$.
- 4 - Probabilidade de clientes solicitarem um item do tipo 1 : $\alpha_1 = 0.8$.
- 5 - Probabilidade de clientes solicitarem um item do tipo 2 : $\alpha_2 = 0.2$.

- 6 - Número de discretizações : $\beta_1 = \beta_2 = 5$.
 7 - Passo de discretização : $\Delta_1 = \Delta_2 = 0,2$
 8 - Medida do total produzido dos itens 1 e 2 : $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$

	1	2	3	4	5	
1	1	1	1	1	1	$\rightarrow \xi_2$
2	1	1	1	1	1	
3	1	1	1	1	1	
4	1	1	1	1	1	
5	1	1	1	1	1	
$\xi_1 \downarrow$						

MATRIZ 1 - $n_1 = 0$; $n_2 = 0$

	1	2	3	4	5	
1	1	1	1	1	1	$\rightarrow \xi_2$
2	1	1	1	1	1	
3	1	1	1	1	1	
4	2	2	2	2	1	
5	2	2	2	2	0	
$\xi_1 \downarrow$						

MATRIZ 2 - $n_1 = 1$; $n_2 = 0$

	1	2	3	4	5	
1	1	1	1	1	1	→ ξ_2
2	1	1	1	1	1	
3	1	1	1	1	1	
4	2	2	2	2	1	
5	0	0	0	0	0	
↓ ξ_1						

MATRIZ 3 - $n_1 = 1$; $n_2 = 1$

	1	2	3	4	5	
1	1	1	1	2	1	→ ξ_2
2	2	2	2	0	0	
3	0	0	0	0	0	
4	0	0	0	0	0	
5	0	0	0	0	0	
↓ ξ_1						

MATRIZ 4 - $n_1 = 2$; $n_2 = 1$

	1	2	3	4	5
1	•	•	•	•	•
2	•	•	•	•	•
3	•	•	•	•	•
4	•	•	•	•	•
5	•	•	•	•	•

ξ_2

ξ_1

MATRIZ 5 - $n_1 = 3$; $n_2 = 2$

Quando os níveis de estoque estão baixos , deve-se priorizar a produção do item 1 até ele ser completamente produzido , pois a sua demanda é maior (MATRIZ 1) . Se o nível de estoque do item 1 for aumentado e o estoque do item 2 se mantiver baixo , a MATRIZ 2 indica que se deve produzir o item 1 até $\xi_1^* = 0,6$ e produzir o item 2 até $\xi_2^* = 0,6$. Aumentando-se o nível de estoque dos itens 1 e 2 gradativamente chega-se à política de não produzir os itens 1 e 2 (MATRIZ 5)

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Concluimos discutindo alguns aspectos da abordagem dos problemas de Produção - Estoque por meio da teoria de Processos Determinísticos por Partes, realizada neste trabalho.

A análise da política de produção é dificultada pela forma implícita da equação de $H - J - B$, devido ao valor esperado $E[V(\cdot)/z]$ e a inexistência de condições de contorno. Por esta razão limitamos a dizer algumas características da política do problema de UM ITEM. Apesar da dificuldade de se caracterizar o comportamento de soluções ótimas, este parece ser um caminho promissor no sentido de se obter algoritmos mais simples e um meio alternativo de mostrar a característica lipschitziana da função valor para problemas de produção - estoque mais complexos.

No que diz respeito a modelagem dos Problemas de UM ITEM e DOIS ÍTENS, os resultados do capítulo IV não consideram o custo de parada e / ou reinício da produção. Sugerimos que este custo pode ser incluído nestes modelos através do custo de fronteira $z_0 + l_0(z_0, u_0)$. Neste sentido a dificuldade reside em criar adequadamente a fronteira E_0 no espaço de estado. No nosso modelo esta fronteira é definida entre etapas de produção. Se considerarmos que a política é produzir à taxa constante e que a decisão de parar é executada continuamente, podemos resolver este problema através da teoria de controle impulsional aplicado ao P.D.P.. Neste caso um custo poderá ser incluído sempre que a intervenção na fronteira ocasionar a parada de produção.

A analogia entre o sistema de produção - estoque e um sistema de fila mostrado no capítulo II, pode ser estendido à classe de modelos propostos neste trabalho. Como exemplo podemos citar o

problema de UM ITEM . Neste caso o tempo de serviço é relacionado com a variável $\xi(t)$. Assim o servidor é controlado continuamente , podendo ser removido em qualquer momento . A política de remoção do servidor teria as mesmas características apresentadas pela política de produção do problema de UM ITEM , ou seja , o instante de remoção de servidor é proporcional a diminuição do tamanho da fila .

Em relação a implementação computacional é possível desenvolver um programa que generalize os problemas de UM ITEM e DOIS ÍTENS usando a mesma abordagem aqui utilizada , apesar de se observar um aumento bastante significativo do esforço computacional do segundo modelo em relação ao primeiro . Isto pode ser constatado verificando - se que a função valor do problema de UM ITEM , com as características mostradas no capítulo IV , convergiu em 20 iterações no tempo de processamento de 1,2 minutos no PC - AT com coprocessador . Já a função valor do problema de DOIS ÍTENS convergiu em 10 iterações durante o tempo de processamento de 5 minutos no mesmo computador . Além disso , verifica - se no capítulo III que o tipo de algoritmo desenvolvido necessita que se guarde um conjunto de funções a cada iteração . No problema de DOIS ÍTENS este conjunto é consideravelmente maior do que o conjunto relativo ao problema de UM ITEM . Portanto é importante fazer uma abordagem analítica de caracterização de soluções ótimas com objetivo de se obter algoritmos mais eficientes que minimizem o tempo de processamento e diminuam o consumo de memória computacional . Um exemplo seria o algoritmo III.3 do problema de UM ITEM , mostrado no capítulo III . Ele aproveita o resultado do LEMA 1 , que considera que a política é produzir quando $n < 0$, resolvendo a equação diferencial de $H - J - B$ quando $u = 1$ somente para $n < 0$. Para saber qual deve ser o ponto (n , ξ^*) $n \geq 0$, onde a produção é paralisada , basta fazer o teste da equação III.38 , utilizando os valores já calculados .

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS :

- 1 - Bertsekas , D. P. and Shereve S.E.(1978) . Optimal Control : The Discrete Time Case , Academic Press , New York .
- 2 - Boukas , K. and Haurie A. (1988) . Planning Production and Preventive Maintenance in a Flexible Manufacturing System : A Stochastic Control Approach . 27 th. Conference on Decision and Control , Austin Texas , December .
- 3- Clarke , F.H . Optimization and Nonsmooth Analysis , John Wiley & Son .
- 4 - Cox , D. R. (1955) . The Analysis of Non - Markovian Stochastic Process by Inclusion of Suplemantary Variables . Proc. Cambrige. Phil. Soc. , 51 , pg. 433 - 441 .
- 5 - Davis , M . H . A.(1984) . Piecewise Deterministic Markov Process : A general Class of Non - Diffusion Stochastic Models . J. R. Statist. Soc. B. , 46 , N° 3 , pg. 353 - 388 .
- 6 - Davis , M.H.A. ; Dempster , M.H.A. ; Sethi , S.P. ; Vermes , D. (1987) . Optimal Capacity Expansion Under Uncertainty . Ad. Appl. Prob. , 19 , 156 - 175 .
- 7 - Federgruem , A. and Zipkin , P. (1986) . A Inventory Model with Limited Production Capacity and Uncertain Demands . The average - Cost Criterion .Mathematics Of Operations Research , Vol II , N° 2 , 193 - 207 .
- 8 - Fleming , W. H. and Rishel , R. W. (1975) . Deterministic and Stochastic Optimal Control . Springer - Verlag New York .

- 9 - Gaver Jr , D.P. (1961). Operating Characteristics of a Simple Production , Inventory - Control Model . Operations Research , Vol. 9 , p.g. 635 - 649 .
- 10 - Gavish , B. and Graves , S. C. (1981) . Production /Inventory Systems with a Stochastic Production Rate Under a Continuous Review Policy . Comput. & Ops . Res. , Vol. 8 , N° 3 , p.g. 169 - 183 .
- 11 - Gnedenko , B. V. and Kovalenko . I.I. (1966) . Introduction to the Theory of Mass Service . Nauka (Trad. ingles : 1968 , Jerusalém)
- 12 - Gugerli , U.S. (1986) . Optimal Stopping of a Piecewise Deterministic Markov Process . Stochastic , Vol. 19 , pg. 221 - 236 .
- 13 - Hax , Arnold .C. and Candea , D.(1984) . Production and Inventory Management . Prentice - Hall .
- 14 - Heynman , D. and Sobel , M. (1984) . Stochastic Models in Operations Research . Vol. I , McGraw - Hill , New York .
- 15 - Heynman , D. and Sobel , M. (1984) . Stochastic Models in Operations Research . Vol. II , McGraw - Hill , New York .
- 16 - Iglehard , D.(1963) . Dinamic Programming and Stationary Analysis in Inventory Problems . Stanford University Press , Stanford Cal.
- 17 - Kleinrock , L.(1974) . Queueing Systems . Vol.I , John Wiley , New York .
- 18 - Ribeiro do Val , J.B. ; Ragazzi , S. ; Pinto Jr , D.L. . (1989) . Solução de um Problema de Parada ótima de Um Modelo de Crescimento . XII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - São José do Rio Preto (S.P.) , pg. 237 - 240 .

- 19 - Ribeiro do Val (1985) .Stochastic Optimal Control For Piecewise Deterministic Markov Processes . Tese de Doutorado . Imperial College Londres .
- 20 - Ribeiro do Val , J. B. (1987) . Optimal Control of Itemized Production to Meet Uncertain Demand . 25 th Allerton Conference Univ. of Illinois at Urbana - Champaign , pg. 713 - 720 .
- 21 - Salles , J. L. F. e Ribeiro do Val , J.B. (1989). Um Problema Estocástico de Planejamento de Produção por Lotes com Demanda Aleatória . 1º Encontro Regional de Automação e Instrumentação - Vitória (E.S.) , Vol. II , pg. AM : 07 - 11
- 22 - Salles , J. L. F. e Ribeiro do Val , J.B. (1990) . Uma Aplicação do P.D.P. no Modelamento e Controle de Um Sistema de Manufatura Multi - Item com Demanda Aleatória . 8º Congresso Brasileiro de Automática - Belém (P.A.) , Vol. 2 , pg. 1172 - 1179 .
- 23 - Scarf , H. (1960) . The Optimality Of (s , S) Policies In The Dinamic Inventory Problem . In . K. Arrow , S. Karlin and P. Suppes (Eds) , Mathematical Methods in the Social Sciences . Stanford University Press , Stanford , Cal.
- 24 - S. Stidman , Jr. (1972) . Regenerative Processes in the Theory of Queues with Applications to the Alternating Priority Queue . Adv. Appl. Probl. Vol. 4 , pg. 542 - 577 .
- 25 - Tao , K. M. and Zunde, P. (1986) . A Stochastic Optimal Control Approach to a Class of Production and Inventory Problems . J. Optimization Theory and Applications . Vol. 49 , N° 2 , p.g. 289 - 317.
- 26 - Tijms , H. C. (1986) . Stochastic Modelling and Analysis : A Computational Approach . John Wiley & Sons .