Gustavo Rodrigues de Lima Tejerina

Distribuição Conjunta Fase-Envoltória Eta-Mu Generalizada

Campinas
2014

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Gustavo Rodrigues de Lima Tejerina

Distribuição Conjunta Fase-Envoltória Eta-Mu Generalizada

Dissertação de mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Telecomunicações e Telemática.

Orientador: Michel Daoud Yacoub

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno, e orientada pelo Prof. Dr. Michel Daoud Yacoub

Campinas
2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

T235p
Tejerina, Gustavo Rodrigues de Lima, 1987-
Distribuição conjunta fase-envoltória eta-mu generalizada / Gustavo Rodrigues de Lima Tejerina. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Michel Daoud Yacoub.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Sistemas de comunicação sem fio. 2. Radio - Transmissores e transmissão - Desvanecimento. 3. Modelos estatísticos. I. Yacoub, Michel Daoud,1955-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Generalized eta-mu phase-envelope joint distribution
Palavras-chave em inglês:
Wireless communication systems
Radio - Transmitters and transmission - Fading
Statistical models
Área de concentração: Telecomunicações e Telemática
Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica
Banca examinadora:
Michel Daoud Yacoub [Orientador]
Élvio João Leonardo
Paulo Cardieri
Data de defesa: 18-02-2014
Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

Candidato: Gustavo Rodrigues de Lima Tejerina

Data da Defesa: 18 de fevereiro de 2014

Título da Tese: "Distribuição Conjunta Fase-Envoltória Eta-Mu Generalizada"

Prof. Dr. Michel Daoud Yacoub (Presidente): ______________________

Prof. Dr. Élvio João Leonardo: ______________________

Prof. Dr. Paulo Cardieri: ______________________

Resumo

Esta dissertação propõe um modelo generalizado para a distribuição de desvanecimento η-μ. O novo modelo está fundamentado na introdução de um parâmetro que afeta o equilíbrio do número de *clusters* de multipercurso nos sinais fase e quadratura. Apesar da inserção deste novo parâmetro, algumas expressões relativas à distribuição da fase foram obtidas em sua forma fechada. Também, foi observado por meio de métodos numéricos que a distribuição da envoltória foi afetada pelo parâmetro em questão. Alguns gráficos são apresentados com o intuito de retratar o comportamento das novas distribuições marginais. Reescrevendo o novo parâmetro em termos do parâmetro de desvanecimento μ, novas expressões simplificadas, de fase são definidas. Diante do proposto, estatísticas de ordem superior relativas à taxa de cruzamento de fase são determinadas e alguns gráficos são apresentados.

Palavras-chave: Distribuição η-μ. Distribuição conjunta fase-envoltória. Distribuição de fase. Distribuição da envoltória. Taxa de cruzamento de fase (PCR).

Abstract

This dissertation proposes an improved and more realistic model for the η-μ fading distribution. The principle behind this new model consists in the introduction of a parameter affecting the balance of number of multipath clusters in the phase and quadrature signals. Regardless of this new parameter, the phase-related formulations are still presented in closed-form expressions. On the other hand, the envelope distribution was affected by this parameter, unfortunately, no closed-form equations were found for this case. Plots are shown to describe the phase and the envelope of the new proposed distribution. Assuming some specific conditions, the new parameter may be rewritten as a function of fading parameter μ, and a new simplified phase distribution is attained. Moreover, with the proposed fading model, high order statistics related to phase crossing rate are then derived.

Key-words: η-μ Distribution. Phase-envelope joint distribution. Phase distribution. Envelope distribution. Phase crossing rate.

Sumário

Para Maman e Toutou...

Agradecimentos

Agradeço,

Ao Prof. Dr. Michel Daoud Yacoub pela excelente orientação, paciência, preocupação, conselhos, e, principalmente, pela oportunidade concedida.

À minha mãe, Jacqueline, por me compreender, me amar e se orgulhar de tudo que eu faço.

À minha irmã, Gabriela, por me mostrar que mesmo distanciados, continuamos juntos.

À minha família franco-boliviana, Leonardo, Laurence e Chloé, pelo *soutien* afetivo e financeiro, e por propocionar lembranças inesquecíveis.

À minha família candango-goiâna por sempre incentivar minhas decisões.

Aos meus amigos, Larissa, Luiza, Yuri, Bernardo, Ricardo, Rafael e Ruan pela excelente companhia durante estes dois anos. A vida campineira não seria a mesma sem vocês!

À Maysa por me lembrar que eu nunca deveria largar a natação.

Aos meus colegas do Laboratório Wisstek, em especial Gabriel, Tarcísio, Thiago, Rubem, André, Matias, Kobi e Bernardo, pelo convívio diário, dentro e fora do LE09.

Aos Professores do Departamento de Comunicações, pela prestimosa colaboração em minha formação.

À FEEC/UNICAMP por nos proporcionar um excelente ambiente de pesquisa com uma infraestrutura inigualável.

À CAPES, agência financiadora durante todo o meu período de mestrado.

A todos que de certa forma colaboraram neste período de dificuldades e aprendizado.

The creation of a single world comes from a huge number of fragments and chaos.

Hayao Miyazaki

— Les hommes ont oublié cette vérité, dit le renard. Mais tu ne dois pas l'oublier. Tu deviens responsable pour toujours de ce que tu as apprivoisé. Tu es responsable de ta rose...

Le Petit Prince - Antoine de St Exupéry

Lista de Figuras

Lista de Acrônimos

AFD	Tempo médio de desvanecimento (do inglês *Average Fade Duration*)
BPSK	Modulação por deslocamento de fase (do inglês *Binary Phase Shift Keying*)
FDP	Função Densidade de Probabilidade
FM	Modulação em frequência (do inglês *Frequency Modulation*)
LCR	Taxa de cruzamento de nível (do inglês *Level Crossing Rate*)
MIMO	Técnica de transmissão visando múltiplas antenas de entrada e saída (do inglês *Multiple-Input Multiple-Output*)
OFDM	Multiplexação ortogonal por divisão de frequência (do inglês *Orthogonal Frequency-Division Multiplexing*)
PCR	Taxa de cruzamento de fase (do inglês *Phase Crossing Rate*)
RMS	Valor quadrático médio ou valor eficaz (do inglês *Root Mean Square*)
FEEC	Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
WissTek	Laboratório de Tecnologia sem Fio (do inglês *Wireless Technology Laboratory*)

Notação

m	Parâmetro de desvanecimento de Nakagami-m
Ω	Potência média de um sinal Nakagami-m
μ	Parâmetro de desvanecimento η-μ
η	Parâmetro de desvanecimento η-μ
R	Envoltória de um sinal
$\hat{r}$	Valor eficaz (RMS) de R
P	Envoltória normalizada com relação a $\hat{r}$ ou a σ
Θ	Fase de um sinal
X_i	Componente fase de um sinal no i-ésimo ramo
Y_i	Componente quadratura de um sinal no i-ésimo ramo
X	Componente fase de um sinal
Y	Componente quadratura de um sinal
$\dot{A}$	Derivada temporal de uma variável aleatória A
f_m	deslocamento (ou desvio) máximo de Doppler em hertz
$f_A(a)$	Função densidade de probabilidade de uma variável aleatória A
$f_{A_1,\cdots,A_n}(a_1,\cdots,a_n)$	Função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias $A_1,\cdots A_n$
$N_\Theta(\theta)$	Taxa de cruzamento de fase
$E[\cdot]$	Esperança de uma variável aleatória
$Var[\cdot]$	Variância de uma variável aleatória

Capítulo 1

Introdução Geral

O avanço tecnológico vem alterando, e muito, o cenário das comunicações sem fio. Além da mobilidade, a constante busca pelo quesito "informação em tempo real" transformou, completamente, a relação entre usuário e seus dispositivos móveis. Desta forma, pesquisas vêm sendo impulsionadas para suprir as novas exigências e necessidades do usuário final. E para isso, um estudo apropriado do canal sem fio torna-se imprescindível. Nesta temática, a perda de percurso, o desvanecimento e a aleatoriedade dos sinais são fenômenos persistentes e um problema a ser melhor caracterizado.

1.1 Perda de Percurso e Desvanecimento

O fenômeno de perda de percurso corresponde à atenuação do nível médio de sinal ao longo do percurso entre transmissor e receptor. A degradação no sinal ocorre devido a uma série de fatores que incluem a distância entre transmissor e receptor, o ambiente de propagação, a altura e a localização das antenas, entre outros. Já o desvanecimento corresponde às flutuações aleatórias do nível de sinal no receptor, e é classificado em dois tipos: (a) longo prazo e (b) curto prazo.

O desvanecimento de longo prazo é determinado pelo efeito de sombreamento. Este, por sua vez, é provocado por obstruções em larga escala entre a transmissão e a recepção. As obstruções podem ser caracterizadas por montanhas e colinas, ou até mesmo grandes construções humanas, como túneis e edifícios. Uma forma de amenizar o efeito do desvanecimento, no cenário apresentado, é utilizando a diversidade macroscópica. Em outras palavras, o sistema de comunicação é projetado estrategicamente de forma que pelo menos uma estação rádio-base tenha percurso livre até o dispositivo móvel [1]. O desvanecimento de longo prazo define a variação média global do sinal recebido e ocorre aproximadamente em intervalos de dezenas ou centenas de comprimento de onda.

Já o desvanecimento de curto prazo está relacionado ao multipercurso. O multipercurso, em grande parte, é provocado pelos diversos fenômenos físicos que afetam os sinais eletromagnéticos, por exemplo, reflexão, refração, difração e espalhamento. Desta forma, os efeitos no sinal podem variar entre atrasos diversos, defasagem e interferências construtivas e destrutivas. O sinal afetado pelo multipercurso atenua rapidamente, na ordem de frações de comprimento de onda, atingindo flutuações de dezenas de decibéis, abaixo do nível médio do sinal [1, 2]. A diversidade microscópica constitui uma forma de neutralizar os efeitos do desvanecimento de curto prazo. A lógica por trás deste método consiste em explorar a baixa suscetibilidade de sinais independentes a situações de desvanecimento profundo em mesno instantes de tempo. Desta forma, a informação é repetida por meio de percursos independentes e, posteriormente, associadas, convenientemente, de acordo com critérios apropriados [1].

1.2 Estatísticas do Canal Sem Fio

Com o intuito de melhor descrever o comportamento de canal rádio-móvel, diversos modelos de desvanecimento têm sido propostos. Em geral, estes modelos são conhecidos pela função densidade de probabilidade (FDP) da envoltória do sinal que representam. Estudos demonstraram que a distribuição Lognormal descreve bem a variação de sinal de longo prazo [1]. Já a variação de sinal de curto prazo é bem definida por distribuições clássicas na literatura, sendo estas: Rayleigh [3], Hoyt [4], Rice [5] e Nakagami-m [6]. Em particular, Rayleigh, Hoyt e Rice foram derivadas a partir de modelos físicos que abrangiam tanto a envoltória quanto a fase. Por outro lado, a distribuição Nakagami-m foi proposta de forma empírica, e, apenas, a envoltória foi determinada. Da mesma forma, outras distribuições mais gerais, tais como α-μ [7], κ-μ [8] e η-μ [8] também foram propostas visando somente a envoltória. Portanto, a distribuição de fase destas distribuições é tema em aberto e sujeito a pesquisa. Neste sentido, surgiram, para estas, algumas propostas de modelo para a distribuição conjunta fase-envoltória. Especificamente, para Nakagami-m, uma proposta inicial apareceu em [9], tendo evoluído para uma condição mais geral em [10]. Para as distribuições η-μ e κ-μ, as propostas referentes às versões de sinais complexos aparecem em [11] e em [12], respectivamente.

As estatísticas da fase de um sinal impactam em diversos campos das telecomunicações. Um exemplo é a detecção de sinais de radar [5, 13, 14, 15, 16, 17, 18]. Ainda, estudos mostram que as estatísticas de fase do canal afetam diretamente o desempenho de esquemas de modulação usando detecção coerente não ideal ou detecção não-coerente [19, 20]. Em muitos casos, a distribuição conjunta fase-envoltória é, também, usada na determinação de estatísticas de ordem superior em cenários com diversidade multiramos [21]. A capacidade de canais do tipo MIMO pode ser influenciada pela distribuição de fase do sinal [22]. Do mesmo modo, a informação de fase é imprescindível para se avaliar o desempemho da taxa de erro em modulações BPSK em sinais OFDM [23].

1.3 Estatísticas de Segunda Ordem

Decorrente do multipercurso, o sinal eletromagnético está sujeito a uma série de flutuações aletórias, afetando tanto fase quanto envoltória. Sendo assim, a caracterização destas variações torna-se um tópico de estudo interessante, pois permite uma melhor compreensão dos fenômenos de desvanecimento. As variações no âmbito da envoltórias são determinadas, basicamente, pela taxa de cruzamento de nível (LCR, do inglês *Level Crossing Rate*) e pelo tempo médio de desvanecimento (AFD, do inglês *Average Fade Duration*). Estas estatísticas de segunda ordem são úteis no desenvolvimento de código corretores de erro [24] e esquemas de diversidade em sistemas móveis [2]. A LCR é definida como o número médio de cruzamentos de um sinal desvanecido para um determinado nível de sinal por um certo período de tempo. A AFD, por outro lado, determina a razão entre o tempo total do sinal recebido estar abaixo de um limiar e o número total de ocorrências de desvanecimento [1].

As variações relativas à fase são definidas pela taxa de cruzamento de fase (PCR, do inglês *Phase Crossing Rate*). A PCR indica o número médio de cruzamentos ascendentes (ou descendentes) por segundo de um sinal em um determinado nível de fase. Esta estatística de segunda ordem é de grande importância nos estudos de sinais e foi apresentada no artigo pioneiro de [5], com o intuito de avaliar *clicks* ruidosos em sistemas FM. Desde então, uma série de trabalhos foram publicados buscando compreender o comportamento da fase por meio da PCR. Alguns concluiram que a PCR é indispensável para o desenvolvimento de esquemas ótimos de recuperação da portadora na sincronização de subsistemas em receptores coerentes [25]. Também, [26] verificou que a PCR é uma estatística interessante para medir a performance de receptores FM usando um detector discriminador-limitado, em que *spikes* aleatórios FM gerados por saltos na fase deterioram a performance da taxa de erro. Outros usos estão na definição do número médio de *spikes* ruidosos e de eventos *slipping* [25, 27], e na determinação do formato dos *spikes* ruidosos [28]. E por isso, visando caracterizar estes diversos efeitos, estudos da PCR foram conduzidos os mais diversos canais: Rayleigh e Rice [29, 30, 31], Hoyt (ou Nakagami-q) [32], Weibull [33], Nakagami-m [34], η-μ [35] e α-μ [36].

1.4 Objetivos

O principal objetivo desta dissertação é propor um modelo mais abrangente para o sinal complexo η-μ, generalizando o modelo incialmente apresentado em [11]. Fundamentado em [10], este novo modelo introduz um novo parâmetro p que se relaciona com a quantidade de *clusters* existentes nas componentes de fase e de quadratura. É possível certificar de antemão que a inclusão do novo parâmetro afetará o comportamento das distribuições de fase e da envoltória. Posteriormente, estes serão justificados pelo efeito do desbalanceamento de potência entre os componentes fase e quadratura. A partir destes resultados, uma simplificação no modelo generalizado η-μ será apresentada com o intuito de obter a condição Gaussiana. Finalmente, tendo em vista a importância das estatísticas de fase, novas formas da PCR serão apresentadas.

1.5 Estrutura da Dissertação

A presente dissertação está estruturada da forma a seguir:

- O **Capítulo 2** revisita alguns conceitos e as principais estatísticas de primeira e segunda ordem relativos às distribuições de desvancimento Hoyt, Nakagami-m e η-μ.

- O **Capítulo 3** propõe um novo modelo generalizado para ambos os Formatos da distribuição η-μ introduzindo um novo parâmetro p que quantiza a distribuição relativa dos *clusters* de multipercursos das componentes de fase e de quadratura do sinal.

- O **Capítulo 4** apresenta uma discussão envolvendo o parâmetro p e suas principais implicações no modelo proposto. Também, alguns gráficos serão apresentados para ilustrar o comportamento do novo modelo de fase e de envoltória.

- O **Capítulo 5** introduz uma simplificação no modelo proposto que impõe a condição Gaussiana na distribuição η-μ. Ainda, o capítulo contém diversos gráficos para ilustrar o comportamento das FDPs obtidas.

- O **Capítulo 6** encerra as contribuições da dissertação introduzindo as estatísticas de segunda ordem, mais especificamente a PCR, para a nova proposta de distribuição η-μ. Este inclui, também, a condição Gaussiana e gráficos para ilustrar o comportamento da PCR obtida.

- O **Capítulo 7** apresenta algumas considerações finais e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Revisitando as Distribuições de Desvanecimento

O presente capítulo introduz as principais estatísticas de primeira e segunda ordem relativas às distribuições de desvanecimento Hoyt, Nakagami-m e η-μ. A distribuição Hoyt, também conhecida como Nakagami-q, é uma distribuição comumente utilizada para descrever canais em condições desvanecidas de curto prazo para comunicações via satélite [4]. A Nakagami-m é uma distribuição clássica na literatura de comunicações sem fio, utilizada em situações com desvanecimento moderado. Seu modelo foi apresentado em [6] e, desde então, vem sendo bastante explorada. Já a η-μ é uma distribuição mais genérica, que apresenta, para algumas condições particulares, as distribuições de desvanecimento Nakagami-m e Hoyt.

2.1 Distribuição Hoyt

O modelo físico da distribuição Hoyt considera que as componentes fase e quadratura do sinal são processos Gaussianos de média nula e variâncias arbitrárias. E por isso, o modelo apresenta como casos especiais as distribuições Rayleigh e Gaussiana Unilateral. Além disso, as estatísticas de Hoyt são utilizadas para descrever a distribuição da amplitude do sinal em um enlace de satélite em condições de cintilação ionosférica [37, 38]. Outra aplicação incluem a investigação de desempenho em enlaces sem fio [39, 40, 41, 42].

Pelo modelo físico, dado uma envoltória R, a FDP é denotada por

$$f_R(r) = 2\sqrt{\frac{r^2}{1-b^2}}\,\exp\left(\frac{r^2}{1-b^2}\right)\, I_0\left(\frac{br^2}{1-b^2}\right), \quad 0 \leq r < \infty \tag{2.1}$$

em que $-1 \leq b \leq 1$ é o parâmetro de desvanecimento Hoyt e I_0 é a função modificada de Bessel de primeiro tipo e ordem zero [43, Eq. 9.6.16].

A FDP da fase Θ é dada por

$$f_\Theta(\theta) = \frac{\sqrt{1-b^2}}{2\pi(1-b\cos(2\theta))}, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi. \tag{2.2}$$

Finalmente em [32], a PCR da distribuição Hoyt é obtida como

$$N_\Theta(\theta) = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{\beta_1 \sin^2(\theta) + \beta_2 \cos^2(\theta)}{\sigma_1^2 \sin^2(\theta) + \sigma_2^2 \cos^2(\theta)}} \tag{2.3}$$

em que σ_i^2 é o desvio padrão das componentes fase e quadratura, e β_i é dado em termos da derivada temporal da função de autocorrelação.

2.2 Distribuição Nakagami-m

2.2.1 Modelo Tradicional

A distribuição Nakagami-m vem sendo amplamente utilizada por ser de fácil manipulação matemática e representar, de forma adequada, situações reais de desvanecimento. A Nakagami-m foi proposta de forma empírica em [6]. Um modelo físico equivalente foi definido, posteriormente, em [44]. No entanto, o modelo proposto não contemplava a fase do sinal, pois, até então, considerava-se que esta era uniforme. Assim, [9] demonstrou que a FDP de fase para a distribuição Nakagami-m é não uniforme e se assemelha às FDPs de fase de Hoyt e Rice. O método desenvolvido em [9] consiste na obtenção da distribuição conjunta de fase-envoltória não alterando, portanto, a FDP da envoltória de [44]. Para tal, o sinal complexo Nakagami-m é dado pela variável complexa $N = X + jY$, com X e Y indicando, respectivamente, as componentes fase e quadratura de N. Disto, a envoltória R e a fase Θ são definidas como

$$R^2 = X^2 + Y^2 \tag{2.4}$$

$$\Theta = arg(X + jY) \tag{2.5}$$

com

$$X^2 = \sum_{i=0}^{m} X_i^2 \tag{2.6}$$

$$Y^2 = \sum_{i=0}^{m} Y_i^2. \tag{2.7}$$

As variáveis X_i e Y_i são Gaussianas com média zero e variância $\frac{\Omega}{m}$, e m representa o número de Gaussianas em fase e quadratura (ou *clusters* de multipercurso). Com isso, a FDP da envoltória foi denotada como [44]

$$f_R(r) = \frac{2m^m r^{2m-1}}{\Omega^m \Gamma(m)} \exp\left(-\frac{mr^2}{\Omega}\right), \quad r \geq 0, \tag{2.8}$$

em que $\Omega = E[R^2]$ é a potência média do sinal recebido, m é o fator de desvanecimento e $\Gamma(\cdot)$ é a função Gamma [43, Eq. 6.1.1].

A FDP da fase foi definida como [9]

$$f_\Theta(\theta) = \frac{\Gamma(m) \left|\sin(2\theta)\right|^{m-1}}{2^m \Gamma^2(\frac{m}{2})}, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi. \tag{2.9}$$

Finalmente, a PCR do modelo tradicional é dada por [34]

$$N_\Theta(\theta) = \frac{\sqrt{\pi} f_m \left|\sin(2\theta)\right|^{m-1} \Gamma\left(m - \frac{1}{2}\right)}{2^{m+\frac{1}{2}} \Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)} \tag{2.10}$$

em que f_m é o desvio Doppler máximo em Hertz.

2.2.2 Modelo Generalizado

Uma expansão do modelo tradicional Nakagami-m foi proposta, posteriormente, em [10]. Neste, o autor acrescentou um parâmetro de fase p que quantiza a relação entre a quantidade de Gaussianas nas componentes fase e quadratura, alterando significativamente a FDP de fase. Vale ressaltar que a introdução do parâmetro não afetou em nada no comportamento da FDP da envoltória. A redefinição do modelo físico permite que o número de componentes Gaussianas em fase e quadratura apresentem valores diferentes e arbitrários. Portanto, tendo como base as Equações (2.4) e (2.5) para a envoltória e fase, tem-se que

$$X^2 = \sum_{i=0}^{m_X} X_i^2 \tag{2.11}$$

$$Y^2 = \sum_{i=0}^{m_Y} Y_i^2. \tag{2.12}$$

As variáveis X_i e Y_i, neste caso, são Gaussianas com média zero e variância $\frac{\Omega_X}{2m_X}$ e $\frac{\Omega_Y}{2m_Y}$, m_X e m_Y representam, respectivamente, o número de Gaussianas em fase e quadratura, e obedecem à relação

$$m_X + m_Y = 2m. \tag{2.13}$$

Tendo em vista a Equação (2.13), o parâmetro de fase foi definido como

$$p = \frac{m_X - m_Y}{m_X + m_Y}, \quad -1 \leq p \leq 1. \tag{2.14}$$

Quando $p = 0$, atinge-se a condição balanceada, portanto, o número de Gaussianas nas componentes fase e quadratura é idêntico. Para $p = 1$, todas as Gaussianas que formam o processo Nakagami-m estão concentradas no sinal em fase. Em contrapartida, para $p = -1$, o processo está concentrado no sinal em quadratura.

Com isso, a FDP de fase foi obtida como [10]

$$f_\Theta(\theta) = \frac{\Gamma(m)}{2^m \Gamma\left(m\frac{1+p}{2}\right) \Gamma\left(m\frac{1-p}{2}\right)} \frac{\left|\sin(\theta)\right|^{m-1}}{\left|\tan(\theta)\right|^{pm}} \tag{2.15}$$

sendo que p é o parâmetro de fase e m é o fator de desvanecimento. Fazendo $p = 0$ e $m = 1$, a Equação (2.15) reduz à FDP de fase derivada no modelo tradicional (Eq. (2.9)).

Diante destes resultados, [10] também caracterizou a taxa de cruzamento de fase como

$$N_\Theta(\theta) = \frac{\sqrt{\pi} f_m \left|\sin(2\theta)\right|^{m-1} \Gamma\left(m - \frac{1}{2}\right)}{2^{m+\frac{1}{2}} \Gamma\left(m\frac{1+p}{2}\right) \Gamma\left(m\frac{1-p}{2}\right) \left|tan(\theta)\right|^{pm}} \tag{2.16}$$

em que f_m é o desvio Doppler máximo em Hertz. Substituindo $p = 0$, a Equação (2.16) reduz ao modelo de PCR previamente definido na Equação (2.10).

A introdução do parâmetro de fase, nesta distribuição, permitiu a obtenção de uma simplificação que garante a condição Gaussiana para uma das componentes fase ou quadratura [10]. A condição Gaussiana é definida como uma redução da expressão da FDP marginal em fase ou em quadratura à uma função Gaussiana. A princípio, tal condição era alcançada apenas para $m = 1$ em ambas componentes, e, com a inclusão do parâmetro de fase, a restrição foi expandida para todo $m > \frac{1}{2}$ [10].

Gaussiana em Fase

Neste cenário, substituindo-se $p = \frac{1}{m} - 1$, a componente em fase do sinal Nakagami-m segue uma Gaussiana de média nula e desvio padrão $\frac{\Omega}{2m}$. Assim, a FDP conjunta fase-envoltória e a FDP marginal de fase são denotadas, respectivamente, por

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = \frac{m^m \left|\sin(\theta)\right|^{2m-2} r^{2m-1}}{\Omega^m \sqrt{\pi}\Gamma\left(m - \frac{1}{2}\right)} \exp\left(\frac{mr^2}{\Omega}\right), \quad r \geq 0,\ -\pi \leq \theta \leq \pi \tag{2.17}$$

$$f_\Theta(\theta) = \frac{\Gamma(m) \left|\sin(\theta)\right|^{2m-2}}{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(m - \frac{1}{2}\right)}, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi. \tag{2.18}$$

E assim, a PCR foi definida por

$$N_\Theta(\theta) = \frac{f_D \left|\sin(2\theta)\right|^{2m-2}}{2\sqrt{2}}. \tag{2.19}$$

Gaussiana em Quadratura

Da mesma forma, fazendo-se $p = 1 - \frac{1}{m}$, a condição Gaussiana em quadratura é definida para todo $m > \frac{1}{2}$. Portanto, a FDP conjunta de fase-envoltória e a FDP marginal de fase são dadas, respectivamente, por

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = \frac{m^m \left|\cos(\theta)\right|^{2m-2} r^{2m-1}}{\Omega^m \sqrt{\pi}\Gamma\left(m - \frac{1}{2}\right)} \exp\left(\frac{mr^2}{\Omega}\right), \quad r \geq 0,\ -\pi \leq \theta \leq \pi \tag{2.20}$$

$$f_\Theta(\theta) = \frac{\Gamma(m) \left|\cos(\theta)\right|^{2m-2}}{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(m - \frac{1}{2}\right)}, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi. \tag{2.21}$$

Com isso, a PCR resulta em

$$N_\Theta(\theta) = \frac{f_D \left|\cos(2\theta)\right|^{2m-2}}{2\sqrt{2}}. \tag{2.22}$$

É interessante lembrar que as Equações (2.17), (2.18), (2.19) (2.20), (2.21) e (2.22) reduzem ao caso Rayleigh para todo $m = 1$.

2.3 Distribuição η-μ

A η-μ é uma distribuição geral de desvanecimento que pode ser aplicada em sinais desvanecidos com pequenas variações de escala sem linha de visada [8, 11, 45]. Esta distribuição é composta pelos parâmetros η e μ. O parâmetro $\mu > 0$ descreve a quantidade de *clusters* de multipercurso no ambiente. O parâmetro η assume papéis distintos definindo assim dois formatos para a distribuição: Formato 1 e Formato 2. No Formato 1, η descreve a razão entre as potências fase e quadratura. No Formato 2, η descreve a correlação entre componentes fase e quadratura.

A definição do modelo físico para um sinal complexo η-μ segue o mesmo procedimento estabelecido para a distribuição Nakagami-m em [9]. Desta vez, no entanto, as componentes real (X) e imaginária (Y) são dadas respectivamente por

$$X^2 = \sum_{i=0}^{2\mu} X_i^2 \tag{2.23}$$

$$Y^2 = \sum_{i=0}^{2\mu} Y_i^2. \tag{2.24}$$

As variáveis X_i e Y_i seguem uma distribuição Gaussiana de média zero e variâncias arbitrárias σ_X^2 e σ_Y^2. Para o Formato 1, X_i e Y_i são processos independentes com variâncias distintas, e o parâmetro η é dado como $\eta = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$. No Formato 2, X_i e Y_i são processos correlacionados e as variâncias são dadas por $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \hat{r}^2$, e η indica a correlação entre os *clusters* na forma $\eta = \frac{E[X_i Y_i]}{\hat{r}^2}$.

Desta forma, para uma envoltória R, uma fase Θ e valor RMS $\hat{r} = \sqrt{E[R^2]}$, a FDP conjunta fase-envoltória η-μ é dada por [11]

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = \frac{2\mu^{2\mu} h^{2\mu} r^{4\mu-1} |\sin(2\theta)|^{2\mu-1}}{(h^2 - H^2)^{\mu} \hat{r}^{4\mu} \Gamma^2(\mu)} \times \exp\left(-\frac{2\mu h r^2}{\hat{r}^2 (h^2 - H^2)} (h + H\cos(2\theta))\right) \tag{2.25}$$

em que h e H são funções de η e assumem relações diferentes para cada Formato, $\mu = \frac{E^2[R^2]}{2Var[R^2]} \times \left[1 + \left(\frac{H}{h}\right)^2\right]$, e $E[\cdot]$ e $Var[\cdot]$ indicam, respectivamente, os operadores esperança e variância.

Assim, as FDP marginais da envoltória e de fase são definidas, respectivamente, por [8, 11]

$$f_R(r) = \frac{4\sqrt{\pi}\mu^{\mu+\frac{1}{2}} h^{\mu}}{\Gamma(\mu) H^{\mu-\frac{1}{2}} \hat{r}} \left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^{2\mu} \exp\left(-2\mu h \left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^2\right) \times I_{\mu-\frac{1}{2}}\left(2\mu H \left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^2\right), \quad r \geq 0 \tag{2.26}$$

$$f_{\Theta}(\theta) = \frac{(h^2 - H^2)^{\mu} \Gamma(2\mu) |\sin(2\theta)|^{2\mu-1}}{2^{2\mu} \Gamma^2(\mu) (h + H\cos(2\theta))^{2\mu}}, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \tag{2.27}$$

sendo que $I_{\nu}(\cdot)$ é a função de Bessel modificada de primeiro tipo e ordem arbitrária ν [43, Eq. 9.6.20].

A taxa de cruzamento de fase para o canal de desvanecimento para o Formato 1 é dada por

$$N_\Theta(\theta) = \frac{f_m\sqrt{\pi}\eta^{\mu-\frac{1}{2}}\Gamma(2\mu-\frac{1}{2})|\sin(2\theta)|^{2\mu-1}}{2^{\frac{3}{2}}\Gamma^2(\mu)[1+\eta+(1-\eta)\cos(2\theta)]^{2\mu-1}}. \tag{2.28}$$

com f_m indicando o desvio Doppler máximo, dado em Hertz.

A distribuição η-μ apresenta como caso especial a distribuição Nakagami-n fazendo $\mu = m$ e $\eta \to 0$ ou $\eta \to \infty$, no Formato 1, ou $\eta \to \pm 1$, no Formato 2. Para obter a distribuição de Hoyt (ou Nakagami-q) basta fixar $\mu = \frac{1}{2}$, e alterar o parâmetro de Hoyt para $b = -(1-\eta)/(1+\eta)$ (ou $q^2 = \eta$), no Formato 1, ou $b = -\eta$ (ou $q = (1-\eta)/(1+\eta)$), no Formato 2. Outros casos especiais consistem na distribuição Gaussiana Unilateral fazendo $\eta \to 0$ ou $\eta \to \infty$, no Formato 1, ou $\eta \to \pm 1$, no Formato 2, e na distribuição de Rayleigh fazendo $\mu = \frac{1}{2}$ e ajustando $\eta = 1$, no Formato 1, ou $\eta = 0$, no Formato 2 [8].

Vale ressaltar, também, que a parte da cauda da distribuição η-μ mostra-se razoavelmente apropriada para caracterizar sinais de níveis baixos, onde o ajuste usando as distribuições conhecidas falham [8]. Ainda, a distribuição η-μ pode ser utilizada para obter uma aproximação da soma de variáveis Hoyt independentes e não idênticas, e com potência média e níveis de desvanecimento arbitrários [46].

2.3.1 Formato 1

O modelo físico para o Formato 1 contempla um sinal composto de *clusters* de multipercurso com ondas propagando em um ambiente não homogêneo. Em cada *cluster*, os componentes fase e quadratura do sinal desvanecido são independentes e apresentam potências distintas. Neste formato, o parâmetro $0 < \eta < \infty$ representa a razão entre potências das ondas dispersadas nos componentes em fase e quadratura. Neste caso, $h = \frac{2+\eta^{-1}+\eta}{4}$ e $H = \frac{\eta^{-1}-\eta}{4}$. Dentro dos intervalos $0 < \eta < 1$ e $0 < \eta^{-1} < 1$, a FDP da envoltória apresenta os mesmos valores, portanto, ela é simétrica em torno de 1.

2.3.2 Formato 2

No Formato 2, o sinal é composto por *clusters* de multipercurso com ondas propagando em ambientes não homogêneos. Os componentes fase e quadratura apresentam potências iguais e são correlacionadas entre si. O parâmetro $-1 < \eta < 1$ representa o coeficiente de correlação entre os componentes em fase e quadratura para cada *cluster* de multipercurso. Neste caso, $h = \frac{1}{1-\eta^2}$ e $H = \frac{\eta}{1-\eta^2}$. O modelo apresenta um eixo de simetria em torno de 0, para os intervalos $0 < \eta < 1$ e $-1 < \eta < 0$.

2.3.3 Relação Entre Formatos

Verifica-se que $\frac{H}{h} = \frac{1-\eta}{1+\eta}$ no Formato 1, e $\frac{H}{h} = \eta$ no Formato 2. Usando destes artifícios, infere-se que um Formato é obtido pelo outro aplicando $\eta_1 = \frac{1-\eta_2}{1+\eta_2}$ ou $\eta_2 = \frac{1-\eta_1}{1+\eta_1}$, em que η_1 e η_2 são o parâmetro η para o Formato 1 e o Formato 2, respectivamente.

2.4 Conclusões

Este capítulo apresentou uma breve descrição das estatísticas de primeira e segunda ordem para as distribuições Hoyt, Nakagami-m e η-μ. Para cada distribuição, foram citadas sua importância, e algumas aplicabilidades, além da sua relação, caso exista, com as demais distribuições de desvanecimento. Particularmente, para a Nakagami-m, o modelo físico apresentado consiste em uma proposta de generalização recente, cenário semelhante à proposição desta dissertação.

Capítulo 3

Proposta de Generalização da Distribuição η-μ

Em [11], foi definido um modelo complexo para o sinal η-μ, em que fase e quadratura são compostos por um número idêntico de clusters de multipercurso. Posteriormente, [10] propôs um novo modelo generalizado para o sinal complexo Nakagami-m, em cujo modelo físico quantidades diferentes de *clusters* de multipercurso nas componentes fase e quadratura aparecem. Tal diferença modificou a distribuição resultante de fase, mantendo, porém, a envoltória Nakagami-m. Desta forma, a proposta da dissertação consiste na aplicação da mesma lógica de [10] no modelo complexo η-μ.

Este capítulo generaliza o modelo de desbalanceamento de potência do desvanecimento original η-μ para contemplar também o desbalanceamento da presença de *clusters* de multipercurso nas componentes fase e quadratura do sinal. O efeito do desbalanceamento é explorado por meio da introdução de um novo parâmetro p. Sendo assim, deduzem-se a FDP conjunta fase-envoltória e as marginais correspondentes para fase e envoltória. Vale ressaltar que o modelo proposto implica em novos comportamentos tanto para a envoltória quanto para a fase.

3.1 Modelo Físico

O modelo físico da distribuição η-μ define uma variável complexa

$$S = X + jY \tag{3.1}$$

com X e Y denotando, respectivamente, a parte real (ou componente fase) e a parte imaginária (ou componente quadratura) de S. Desta forma, é possível obter as seguintes relações para uma dada envoltória R e fase Θ.

$$R^2 = X^2 + Y^2 \tag{3.2}$$

$$\Theta = \arg\left(X + jY\right). \tag{3.3}$$

E assim, para a proposta de generalização, conjectura-se que

$$X^2 = \sum_{i=1}^{2\mu_X} X_i^2 \tag{3.4}$$

$$Y^2 = \sum_{i=1}^{2\mu_Y} Y_i^2 \tag{3.5}$$

X_i e Y_i como sendo variáveis Gaussianas com média nula e variâncias arbitrárias σ_X e σ_Y, e, μ_X e μ_Y o número de *clusters* de multipercurso em fase e em quadratura. Para fins das deduções que se seguem, supõe-se um número inteiro de *clusters* (μ_X e $\mu_Y \in \mathbb{Z}_{>0}$). Esta restrição é, posteriormente, relaxada para se terem números reais positivos (μ_X e $\mu_Y \in \mathbb{R}_{>0}$). No Formato 1 da distribuição η-μ, X_i e Y_i são processos independentes com $E[X_i] = E[Y_i] = 0$, $E[X_i^2] = \sigma_X^2$ e $E[Y_i^2] = \sigma_Y^2$, e o parâmetro $0 < \eta < \infty$ relaciona-se com a razão entre potências entre os *clusters* de multipercuso na forma $\eta = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$. Já no Formato 2, X_i e Y_i são processos correlacionados com $E[X_i] = E[Y_i] = 0$, $E[X_i^2] = E[Y_i^2] = \hat{r}^2$, e o parâmetro $-1 < \eta < 1$ relaciona-se com a correlação entre os *clusters* de multipercurso na forma $\eta = \frac{E[X_iY_i]}{\hat{r}^2}$.

Com o intuito de facilitar os cálculos envolvidos no desenvolvimento da distribuição fase-envoltória, definiu-se uma variável genérica $Z = sgn(Z) \times |Z|$, $Z^2 = \sum_{i=1}^{2\mu_Z} Z_i^2$, em que $sgn(\cdot)$ é a função sinal, e Z_i é uma variável Gaussiana independente com $E[Z_i] = 0$ e $E[Z_i^2] = \frac{\Omega_Z}{2\mu_Z}$. Desta forma, considera-se que $Z = X$ ou $Z = Y$ e seus respectivos parâmetros $\mu_Z = \mu_X$ ou $\mu_Z = \mu_Y$, e $\Omega_Z = \Omega_X$ ou $\Omega_Z = \Omega_Y$. Com isso, fazendo a substituição de variável $W_i = Z_i^2$, tem-se que a FDP marginal de W_i é dada por [8]

$$f_{W_i}(w_i) = \sqrt{\frac{\mu_Z}{w_i \pi \Omega_Z}} \exp\left(-\frac{\mu w_i}{\Omega_Z}\right). \tag{3.6}$$

Desta forma, sabe-se que a transformada de Laplace da FDP $f_{W_i}(w_i)$ é

$$\mathcal{L}[f_{W_i}(w_i)] = \sqrt{\frac{\mu_Z}{\mu_Z + s\Omega_Z}}. \tag{3.7}$$

Como W_i é uma variável independente para qualquer valor de $i = 1, 2, ..., 2\mu_Z$ e $W = \sum_{i=1}^{2\mu_Z} W_i$, é possível afirmar que a transformada de Laplace da FDP $f_W(w)$ é

$$\mathcal{L}[f_W(w)] = \left(\sqrt{\frac{\mu_Z}{\mu_Z + s\Omega_Z}}\right)^{2\mu_Z}. \tag{3.8}$$

E assim, fazendo a transformada inversa, obtem-se a FDP de W

$$f_W(w) = \frac{\mu_Z^{\mu_Z} w^{\mu_Z - 1}}{\Omega_Z^{\mu} \Gamma(\mu_Z)} \exp\left(-\frac{\mu_Z w}{\Omega_Z}\right). \tag{3.9}$$

Finalmente, realizando novamente a transformação de variável para $Z^2 = W$, obtem-se a FDP $f_Z(z)$

$$f_Z(z) = \frac{\mu_Z^{\mu_Z} |z|^{2\mu_Z - 1}}{\Omega_Z^{\mu} \Gamma(\mu_Z)} \exp\left(-\frac{\mu_Z z^2}{\Omega_Z}\right), \quad -\infty < z < \infty \tag{3.10}$$

com $\mu_Z > 0$.

3.2 Parâmetro p

O parâmetro p é o componente fundamental no desenvolvimento deste novo modelo. Em princípio, este parâmetro quantifica a distribuição relativa de *clusters* de multipercurso nas componentes fase e quadratura, obedecendo à seguinte inequação

$$-1 \leq p \leq 1.$$

Para $p = 0$, denominado como condição balanceada, os *clusters* de multipercurso estão igualmente distribuídos em ambas as componentes. A condição desbalanceada, $p \neq 0$, é definida para situações em que os *clusters* encontram-se distribuídos arbitrariamente nas componentes fase e quadratura. Desta forma,

$$p = \frac{\mu_X - \mu_Y}{\mu_X + \mu_Y}. \tag{3.11}$$

3.3 Formato 1

No Formato 1 da distribuição η-μ, o parâmetro η representa a razão entre potências das ondas dispersadas nos componentes fase e quadratura. Portanto, a variância para os processos X_i e Y_i é dada, respectivamente, por

$$\sigma^2_{X_i} = \frac{\Omega_X}{2\mu_X} \tag{3.12}$$

$$\sigma^2_{Y_i} = \frac{\Omega_Y}{2\mu_Y} \tag{3.13}$$

em que Ω_X e Ω_Y são indicadores de potência denotados por

$$\Omega_X = \frac{\hat{r}^2}{(1+\eta^{-1})} \tag{3.14}$$

$$\Omega_Y = \frac{\hat{r}^2}{(1+\eta)}. \tag{3.15}$$

Para se obter um sinal η-μ no Formato 1, deve-se obedecer às seguintes condições:

$$\mu_X + \mu_Y = 2\mu \tag{3.16}$$

$$\frac{\Omega_X}{\Omega_Y} = \frac{\mu_X}{\mu_Y}\eta. \tag{3.17}$$

Portanto, partindo de (3.11) e (3.16) obtêm-se

$$\mu_X = (1+p)\mu \tag{3.18}$$

$$\mu_Y = (1-p)\mu. \tag{3.19}$$

3.3.1 Distribuição Conjunta Fase-Envoltória

Com isso, ao definir o parâmetro p e suas relações, é possível determinar as FDPs $f_X(x)$ e $f_Y(y)$. Substituindo-se (3.14) e (3.18) em (3.10) obtém-se

$$f_X(x) = \frac{|x|^{2\mu(1+p)-1}\left(\mu(1+p)(1+\eta)\right)^{\mu(1+p)}}{(\eta\hat{r}^2)^{\mu(1+p)}\Gamma\left(\mu(1+p)\right)}\exp\left(\frac{\mu(1+p)(1+\eta)x^2}{\eta\hat{r}^2}\right), \quad -\infty < x < \infty. \tag{3.20}$$

A FDP de Y é obtida substituindo (3.15) e (3.19) em (3.10)

$$f_Y(y) = \frac{|y|^{2\mu(1+p)-1}\left[\mu(1-p)(1+\eta)\right]^{\mu(1-p)}}{\hat{r}^{2\mu(1-p)}\Gamma\left(\mu(1-p)\right)}\exp\left(\frac{\mu(1-p)(1+\eta)y^2}{\hat{r}^2}\right), \quad -\infty < x < \infty. \tag{3.21}$$

A FDP conjunta de R e de Θ, $f_{R,\Theta}(r,\theta)$, é determinada por $f_{R,\Theta}(r,\theta) = |J| f_{X,Y}(x,y)$, em que $|J| = R$ é o Jacobiano da transformação $X = R\cos(\Theta)$ e $Y = R\sin(\Theta)$. Considerando-se que os componentes fase e quadratura são independentes, a FDP conjunta de X e de Y, $f_{X,Y}(x,y)$, é dada por $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y)$. Assim, com as devidas substituições de variáveis,

$$\begin{aligned} f_{R,\Theta}(r,\theta) = {} & \frac{r^{4\mu-1}\mu^{2\mu}(1-p)^{\mu(1-p)}(1+\eta)^{2\mu}|\cos(\theta)|^{2\mu(1+p)-1}|\sin(\theta)|^{2\mu(1-p)-1}}{\hat{r}^{4\mu}\eta^{\mu(1+p)}(1+p)^{-\mu(1+p)}\Gamma(\mu(1+p))\Gamma(\mu(1-p))} \\ & \times \exp\left(-\frac{r^2(1+\eta)\mu[(1+p)\cos(\theta)^2+(1-p)\eta\sin(\theta)^2]}{\eta\hat{r}^2}\right) \end{aligned} \tag{3.22}$$

em que $r \geq 0$ e $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

3.3.2 Distribuição de Fase

Dada a FDP conjunta fase-envoltória, integrando-a nos intervalos apropriados, obtém-se a distribuição marginal ou a FDP de fase para o modelo generalizado

$$f_\Theta(\theta) = \int_0^\infty f_{R,\Theta}(r,\theta)\,\mathrm{d}r$$

$$f_\Theta(\theta) \;=\; \frac{(1-p)^{\mu(1-p)}(1+p)^{\mu(1+p)}\eta^{\mu(1-p)}\left|\sin(2\theta)\right|^{2\mu-1}\Gamma(2\mu)}{(1+p+\eta-p\eta+(1+p-\eta+p\eta)\cos(2\theta))^{2\mu}|\tan(\theta)|^{2\mu p}\Gamma\left(\mu(1+p)\right)\Gamma\left(\mu(1-p)\right)}. \tag{3.23}$$

com $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Como esperado, no caso balanceado ($p = 0$), a Equação (3.23) reduz-se à FDP de fase do modelo original (Eq. (2.27)), portanto, substituindo $h = \frac{2+\eta^{-1}+\eta}{4}$ e $H = \frac{\eta^{-1}-\eta}{4}$, tem-se

$$f_\Theta(\theta) = \frac{\eta^\mu\left|\sin(2\theta)\right|^{2\mu-1}\Gamma(2\mu)}{(1+\eta+(1-\eta)\cos(2\theta))^{2\mu}\Gamma(\mu)^2}. \tag{3.24}$$

Ainda, para $\mu = \frac{m}{2}$ e $\eta = \frac{1+p}{1-p}$, a Equação (3.23) reduz-se à FDP de fase Nakagami-m Generalizada (Eq. (2.15)). Além disso, é possível observar que, como em [11], R e Θ são variáveis correlacionadas. Em outras palavras, as variáveis em destaque não são independentes, portanto, a relação $f_{R,\Theta}(r,\theta) = f_R(r) \times f_\Theta(\theta)$ não é válida.

3.4 Formato 2

No formato 2 da distribuição η-μ, o parâmetro η representa o coeficiente de correlação entre os componentes fase e quadratura. Sendo assim, efetuando uma rotação apropriada de eixos [8], os processos Gaussianos correlacionados tornam-se independentes com variâncias

$$\sigma^2_{X_i} = (1-\eta)\hat{r}^2 \tag{3.25}$$

$$\sigma^2_{Y_i} = (1+\eta)\hat{r}^2. \tag{3.26}$$

Com isso, tem-se que os indicadores de potência são definidos por

$$\Omega_X = 2\mu_X(1-\eta)\hat{r}^2 \tag{3.27}$$

$$\Omega_Y = 2\mu_Y(1-\eta)\hat{r}^2. \tag{3.28}$$

Como foi apresentado na seção anterior, para obter um sinal η-μ, deve-se obedecer à equação (3.16) e, desta vez, à seguinte condição

$$\frac{\Omega_X}{\Omega_Y} = \frac{\mu_X(1-\eta)}{\mu_Y(1+\eta)} \tag{3.29}$$

3.4.1 Distribuição Conjunta Fase-Envoltória

Deste modo, substituindo, respectivamente, (3.18) e (3.19), em (3.27) e (3.28) têm-se

$$\Omega_X = 2\mu(1+p)(1-\eta)\hat{r}^2 \tag{3.30}$$

$$\Omega_Y = 2\mu(1-p)(1+\eta)\hat{r}^2. \tag{3.31}$$

E assim, as FPDs $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ são escritas, respectivamente, como

$$f_X(x) = \left[\frac{1}{2\hat{r}^2(1-\eta)}\right]^{\mu(1+p)} \frac{|x|^{2\mu(1+p)-1}}{\Gamma(\mu(1+p))} \exp\left(\frac{-x^2}{2\hat{r}^2(1-\eta)}\right), \quad -\infty < x < \infty \tag{3.32}$$

$$f_Y(y) = \left[\frac{1}{2\hat{r}^2(1+\eta)}\right]^{\mu(1-p)} \frac{|y|^{2\mu(1-p)-1}}{\Gamma(\mu(1-p))} \exp\left(\frac{-y^2}{2\hat{r}^2(1+\eta)}\right), \quad -\infty < y < \infty. \tag{3.33}$$

A FDP conjunta de R e de Θ, $f_{R,\Theta}(r,\theta)$, é obtida por $f_{R,\Theta}(r,\theta) = |J| f_{X,Y}(x,y)$, sendo $|J| = R$ o Jacobiano das variáveis de transformação $X = R\cos(\Theta)$ e $Y = R\sin(\Theta)$. Novamente, assumindo que os componentes fase e quadratura são independentes, a FDP conjunta de X e de Y, $f_{X,Y}(x,y)$, é denotada por $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y)$, e, com isso,

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = \frac{r^{4\mu-1}|\sin(\theta)\cos(\theta)|^{2\mu-1}|\tan(\theta)|^{-2\mu p}}{2^{2\mu}\hat{r}^{4\mu}\Gamma\left(\mu(1-p)\right)\Gamma\left(\mu(1+p)\right)(1+\eta)^{\mu(1-p)}(1-\eta)^{\mu(1+p)}} \times \exp\left(-\frac{r^2}{2\hat{r}^2}\left(\frac{\cos^2(\theta)}{1-\eta} + \frac{\sin^2(\theta)}{1+\eta}\right)\right) \quad (3.34)$$

para $r \geq 0$ e $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

3.4.2 Distribuição de Fase

Finalmente, a FDP de fase, $f_\Theta(\theta)$, é dada por

$$f_\Theta(\theta) = \frac{(1-\eta)^{\mu(1-p)}(1+\eta)^{\mu(1+p)}\Gamma\left(2\mu\right)|\sin(2\theta)|^{2\mu-1}}{2^{2\mu}\Gamma(\mu(1-p))\Gamma(\mu(1+p))|\tan(\theta)|^{2\mu p}(1+\eta\cos(2\theta))^{2\mu}}, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi. \quad (3.35)$$

Assim, quando $p = 0$ (caso balanceado), a Equação (3.35) reduz-se a (2.27) para $h = \frac{1}{1-\eta^2}$ e $H = \frac{\eta}{1-\eta^2}$.

$$f_\Theta(\theta) = \frac{\left(1-\eta^2\right)^{\mu}\Gamma(2\mu)\left|\sin(2\theta)\right|^{2\mu-1}}{2^{2\mu}\Gamma(\mu)^2(1+\eta\cos(2\theta))^{2\mu}} \quad (3.36)$$

Como em [11], R e Θ são variáveis correlacionadas. Ainda, para $\mu = \frac{m}{2}$ e $\eta = 0$, a Equação (3.35) reduz-se à FDP de fase Nakagami-m definida pela Equação (2.15).

3.5 Relação entre Formatos na Fase

Vale ressaltar que é possível obter as estatísticas de fase de um Formato pelo outro realizando as devidas substituições dos parâmetros η e p. Para se obter a FDP de fase por meio do Formato 1, devemos realizar a seguinte substituição

$$\eta_1 = \frac{(1-\eta_2)(1+p)}{(1+\eta_2)(1-p)} \quad (3.37)$$

sendo η_1 e η_2 o parâmetro η no Formato 1 e Formato 2. Caso contrário, deve-se substituir o parâmetro η no Formato 2 por

$$\eta_2 = \frac{(1+p)-(1-p)\eta_1}{(1+p)+(1-p)\eta_1}. \quad (3.38)$$

3.6 Distribuição da Envoltória

Para se obter a envoltória do sinal complexo η-μ é necessário integrar a distribuição conjunta fase-envoltória nos intervalos apropriados. Portanto,

$$f_R(r) = \int_{-\pi}^{\pi} f_{R,\Theta}(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

substituindo $f_{R,\Theta}(r,\theta)$ pelas Equações (3.22) e (3.34) correspondendo ao Formato 1 e ao Formato 2, respectivamente. Infelizmente, este procedimento não resultou em nenhuma expressão fechada. Ao contrário do que ocorreu com o modelo Nakagami-m [10], a introdução do parâmetro p afeta a envoltória do sinal η-μ. Isto é comprovado fazendo-se integração numérica para valores arbitrários de p, η e μ. Pelos resultados obtidos (disponibilizados no Capítulo 4), observa-se que a FDP da envoltória é afetada pelos valores de p. Diante deste fato, é possivel afirmar que o presente modelo propõe uma generalização completa para a distribuição de desvanecimento η-μ.

3.7 Conclusões

Neste capítulo foi apresentado todo o desenvolvimento matemático envolvido na obtenção do modelo generalizado da distribuição conjunta fase-envoltória η-μ. Para isto, foi introduzido um novo parâmetro p nas formulações que quantifica a distribuição relativa de *clusters* de multipercurso nas componentes fase e quadratura. Sendo assim, foram obtidas diversas formulações para a nova distribuição conjunta e marginais para ambos Formatos. Também, verificou-se a extensão da generalização do modelo à distribuição da envoltória de um sinal complexo η-μ.

Capítulo 4

Discussão e Gráficos

O capítulo anterior resultou na definição de um modelo generalizado para a distribuição conjunta fase-envoltória η-μ. Desta forma, novas expressões foram determinadas em termos parâmetro p. Além de quantizar a distribuição relativa de cluster de multipercursos, uma breve análise indica uma possível relação entre parâmetro p e a potência dos sinais fase e quadratura. E assim, neste capítulo, será discutido os efeito do parâmetro p. Também, serão apresentados alguns gráficos para ilustrar o comportamento da distribuição generalizada da envoltória e de fase do sinal complexo η-μ. Para isto, será considerado apenas o Formato 1 da distribuição, pois o mesmo raciocínio poderá ser empregado para o Formato 2.

4.1 Parâmetro p

A questão mais fundamental desta dissertação é o efeito do parâmetro p e como este afeta a distribuição η-μ. Primeiramente, analisando a equação de p (3.11), observou-se que é possível relacionar p com os indicadores de potência. Substituindo as Equações (3.17) (Formato 1) e (3.29) (Formato 2), obtêm-se as seguintes expressões

$$p_1 = \frac{\Omega_X - \eta\Omega_Y}{\Omega_X + \eta\Omega_Y} \tag{4.1}$$

$$p_2 = \frac{(1+\eta)\Omega_X - (1-\eta)\Omega_Y}{(1+\eta)\Omega_X + (1-\eta)\Omega_Y} \tag{4.2}$$

com p_1 e p_2 indicando o parâmetro p para os Formatos 1 e 2, respectivamente.

A partir destas, infere-se que o parâmetro p, em ambos os Formatos, quantifica o desbalanceamento total de potência entre as componentes fase e quadratura. Desta forma, ao fazer $p = 1$, toda a potência está concentrada na componente fase, enquanto que para $p = -1$, a potência concentra-se na componente quadratura. Diante destas equações, pressupunha-se, de início, que o parâmetro η estava, de certo modo, relacionado ao parâmetro p. A conjectura foi, previamente, levantada devido à relação imposta por η entre potência (Formato 1) ou correlação dos sinais em fase e quadratura (Formato 2). No entanto, a análise dos gráficos, mostrados logo a seguir, indicam que esta hipótese não é verdadeira tanto para a fase quanto para a envoltória do sinal. Esta afirmação é reforçada ao analisar qualquer equação aqui definida. Ainda, vale ressaltar que a introdução do parâmetro p afetou a relação entre a distribuição generalizada Nakagami-m [10] e a distribuição η-μ Formato 1. Anteriormente, a redução para a Nakagami-m estava definida para $\eta = 1$. No entanto, com o parâmetro p atuando no desbalanceamento de potência, a distribuição em questão é obtida para $\eta = \frac{1+p}{1-p}$. Outra forma de visualizar esta situação seria pela análise da nova razão entre potências (Eq. (3.17)), anteriormente, dada apenas por η.

Além disso, a partir de relações simples, as distribuições para componente fase ou para a componente quadratura podem ser reduzidas à Gaussiana (em detalhes no Capítulo 5). Em outras palavras, por meio de (3.20) e para $p = \frac{1}{2\mu} - 1$, a FDP da componente fase é uma Gaussiana de média nula e variância $\sigma^2 \frac{\eta}{1+\eta}$. Da mesma forma, da Equação (3.21) e para $p = 1 - \frac{1}{2\mu}$, a FDP da componente quadratura é uma Gaussiana de média nula e variância $\frac{\sigma^2}{1+\eta}$. Por outro lado, a condição Gaussiana não pode ser obtida com a manipulação do parâmetro η. Isto implica, claramente, que os parâmetros η e p desempenham funções distintas afetando de forma diversa no comportamento do sinal complexo η-μ.

4.2 Distribuição da Envoltória

Os gráficos a seguir esboçam a FDP da envoltória R normalizada em função de σ $\left(\rho = \frac{r}{\sigma}\right)$. A Figuras 4.1 ilustra o comportamento da envoltória para valores arbitrários de p, $\eta = 0.5$ e $\mu = 0.5$. Da mesma forma, a Figura 4.2 demonstra a FDP da envoltória, desta vez, para $\mu = 0.5$, $p = 0.5$ e η assume valores arbitrários. Observe que a influência do parâmetro p é nítida e as curvas, apesar da semelhança, se comportam de forma única. Repare, na Figura 4.1, que o aumento de p implica no deslocamento da massa de probabilidade para uma região mais próxima da origem. E, na Figura 4.2, o crescimento gradual de η impõe, exatamente, a situação oposta. Vale ressaltar, por esta breve análise, que os parâmetros p e η atuam de forma distinta na envoltória como um todo. Outro aspecto interessante da envoltória está no aumento do parâmetro μ associado a p (Fig. 4.1, 4.3 e 4.4). Para $\mu \leq 0.5$, os picos de amplitude vão crescendo com o aumento gradual de p (Fig. 4.1 e 4.3). Para $\mu > 0.5$, no entanto, os picos de amplitude descrescem até determinado valor de p, para, em seguida, crescerem novamente (Fig. 4.4). Este comportamento é justificado pelo fato de uma das componentes fase ou quadratura passar pela condição Gaussiana.

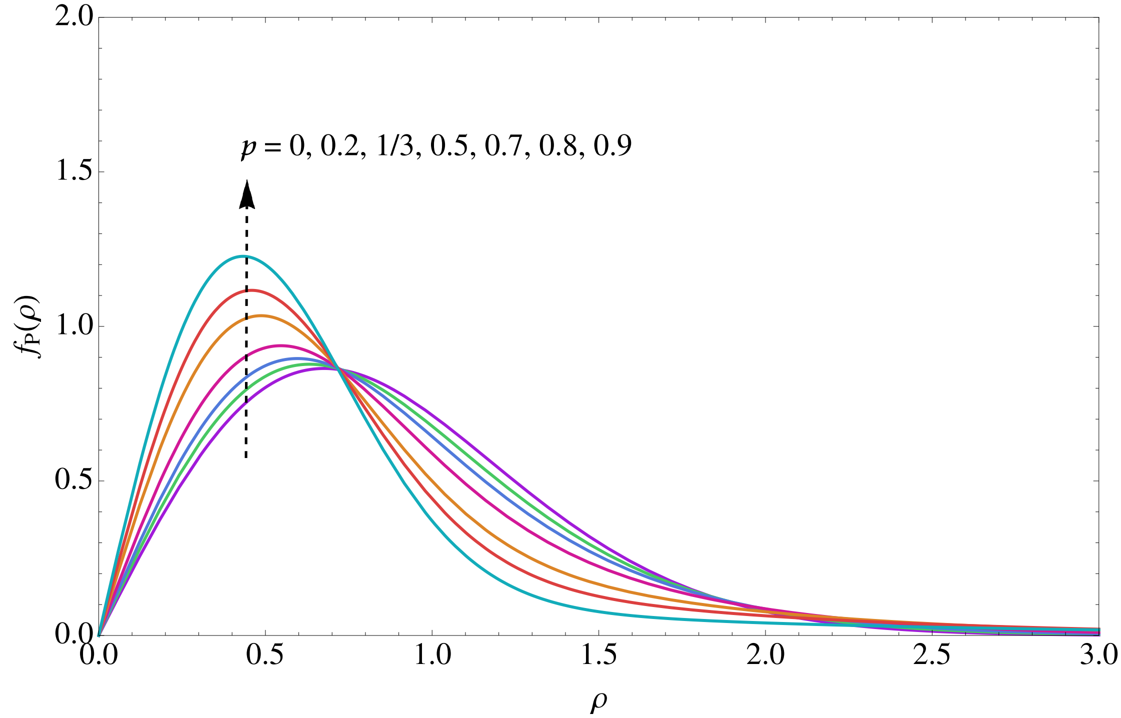

Figura 4.1: FDP da envoltória com $\eta = 0.5$, $\mu = 0.5$ e parâmetro p variando.

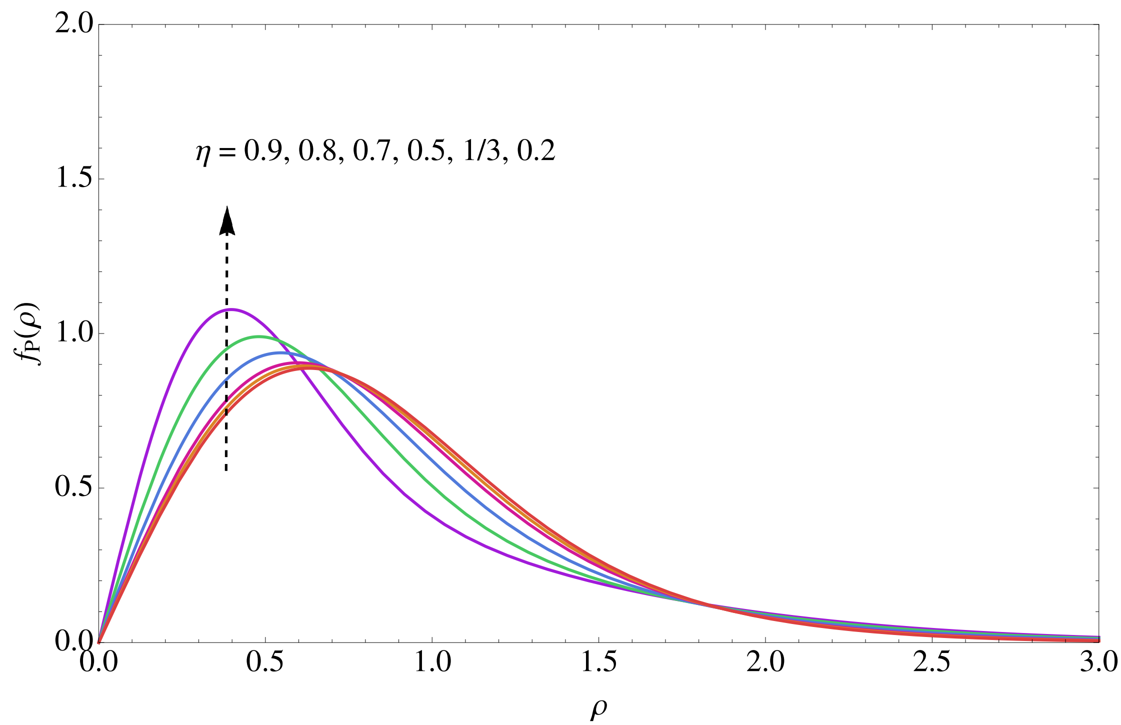

Figura 4.2: FDP da envoltória com $p = 0.5$, $\mu = 1.5$ e parâmetro η variando.

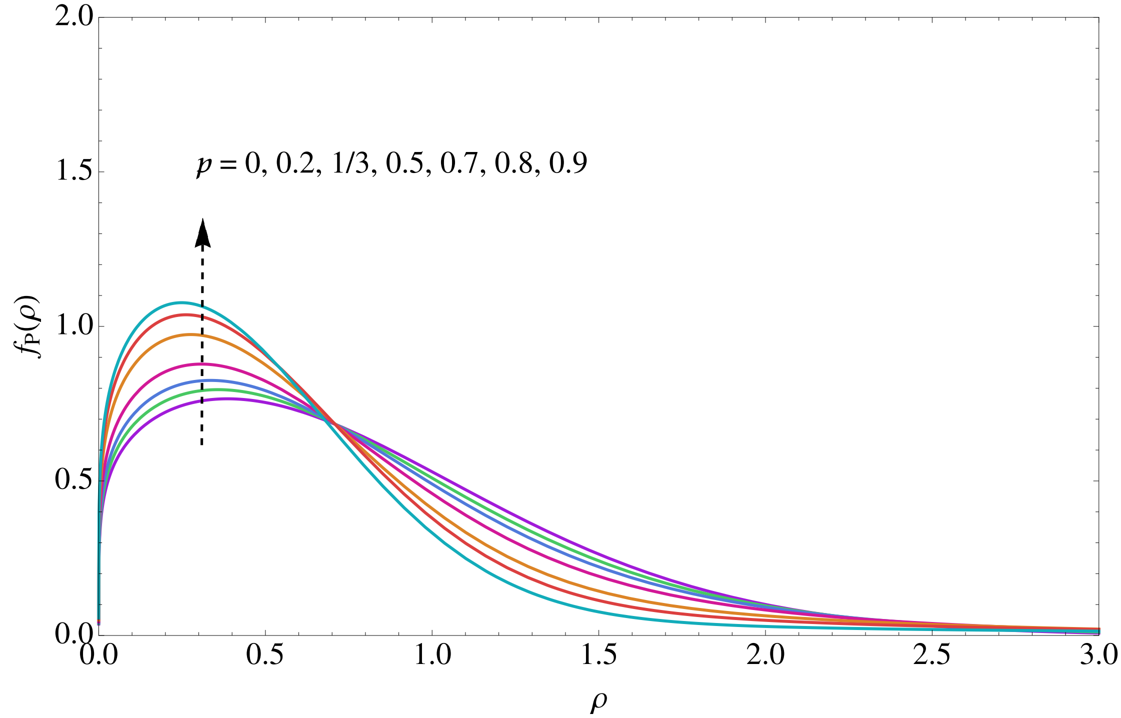

Figura 4.3: FDP da envoltória com $\eta = 0.5$, $\mu = 0.3$ e parâmetro p variando.

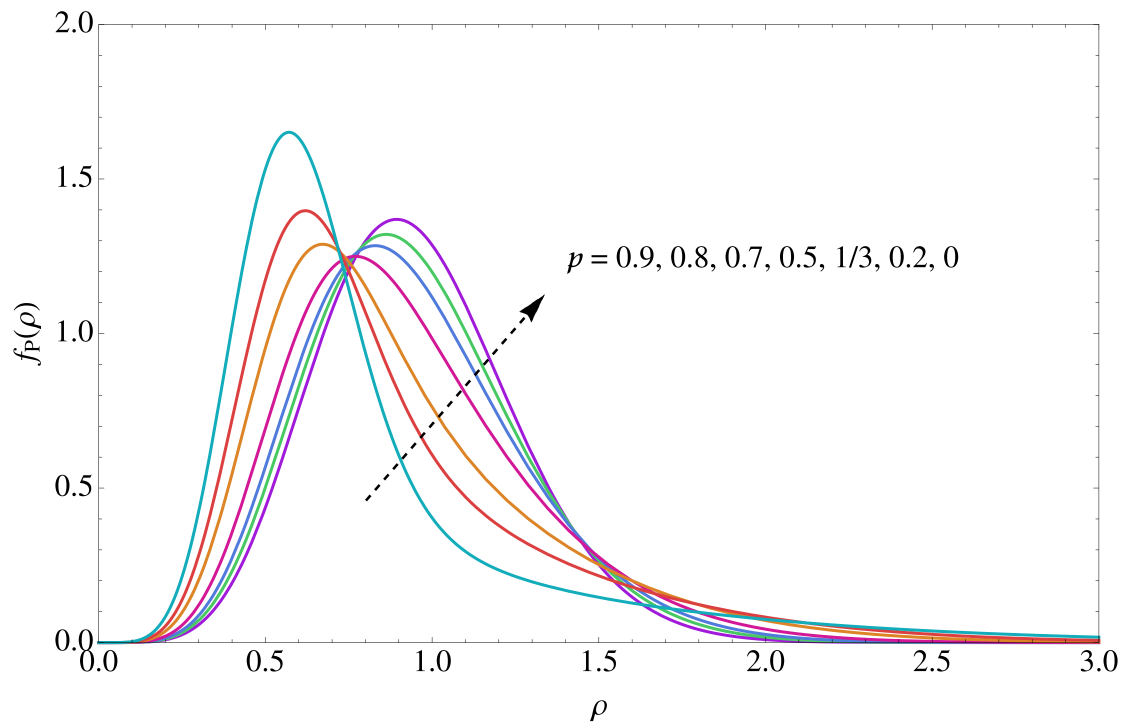

Figura 4.4: FDP da envoltória com $\eta = 0.5$, $\mu = 1.5$ e parâmetro p variando.

4.3 Distribuição de Fase

Nesta seção, os gráficos serão apresentados em coordenadas cartesianas e polares. Entretanto, a análise para os esboços em coordenadas polares será mais detalhada, pois considera-se que esta visualização garante uma melhor compreensão do comportamento da distribuição de fase.

A Figura 4.5 apresenta a FDP da fase com $\mu = 0.5$, $\eta = 0.5$ e p variando. Da mesma forma, a FDP da fase é indicada na Figura 4.9 para $\mu = 0.5$, $p = 0.5$ e η arbitrário. Reparem em ambos os cenários que as curvas são obviamente distintas, apesar de que em certas condições elas demonstram alguma similaridade. O importante, nesta situação, é vislumbrar que os parâmetros η e p não são equivalentes. As Figuras 4.6 e 4.10 indicam o mesmo comportamento, embora representados em coordenadas cartesianas.

As Figuras 4.7 e 4.11 mostram situações equivalentes, porém para $\mu = 1.5$. Vale constatar que para um dado μ e um dado p (Fig. 4.9 e 4.11), a distribuição de fase é quatro-modal, independetemente de η. Por outro lado, para um dado μ e um dado η (Fig. 4.5 e 4.7), a distribuição de fase pode passar de quadri- para bi-modal dependendo de p. Isto é justificado por uma das componentes fase ou quadratura passar pela condição Gaussiana.

A Figura 4.13 (ou na visualização cartesiana Fig. 4.14) mostra a distribuição de fase para $\eta = 0.5$, $p = 0.5$ e μ variando. Note como o aumento de μ tende a provocar uma maior concentração da fase em torno de valores específicos. Particularmente, na situação indicada, estes valores são $\pm\pi$, $\pm\pi/2$, $\pm\pi/4$, e $\pm 3\pi/4$. Isto, porém, pode se modificar dependendo de η e p.

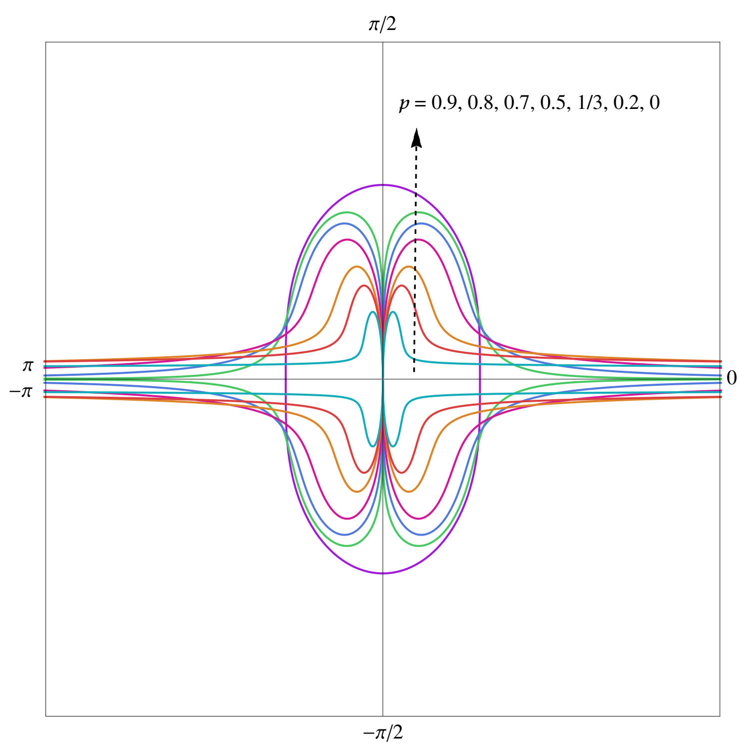

Figura 4.5: FDP da fase em coordenadas polares com $\eta = 0.5$, $\mu = 0.5$ e parâmetro p variando.

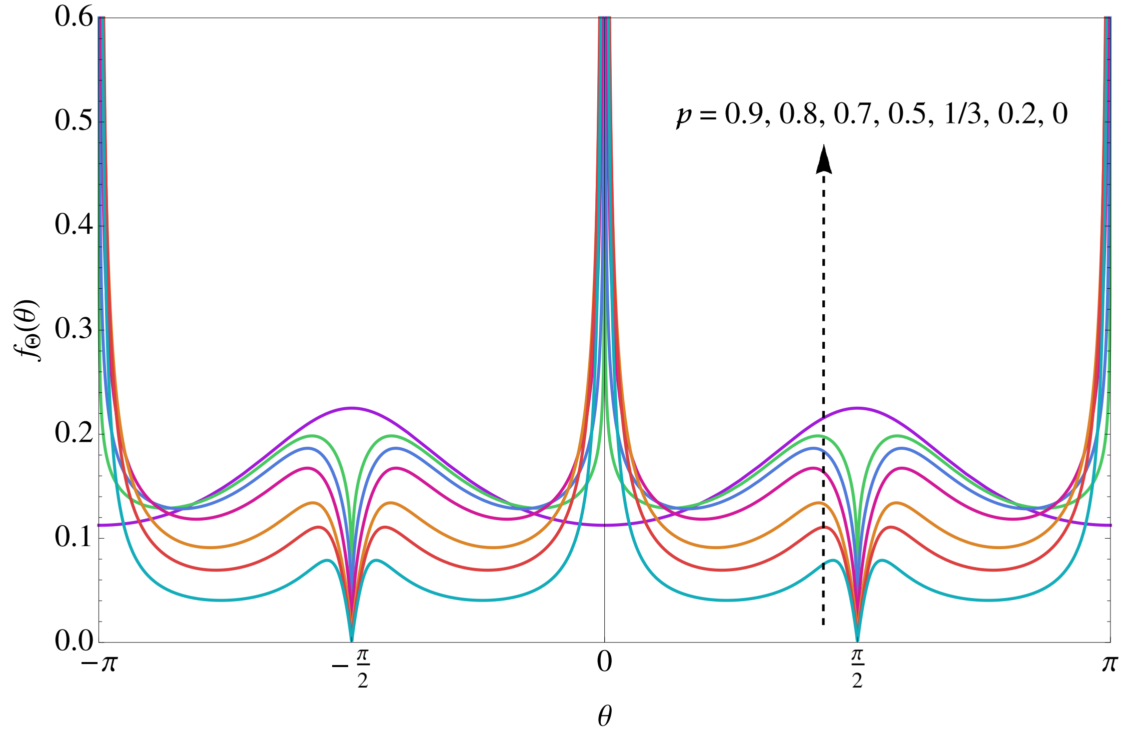

Figura 4.6: FDP da fase em coordenadas cartesianas com $\eta = 0.5$, $\mu = 0.5$ e parâmetro p variando.

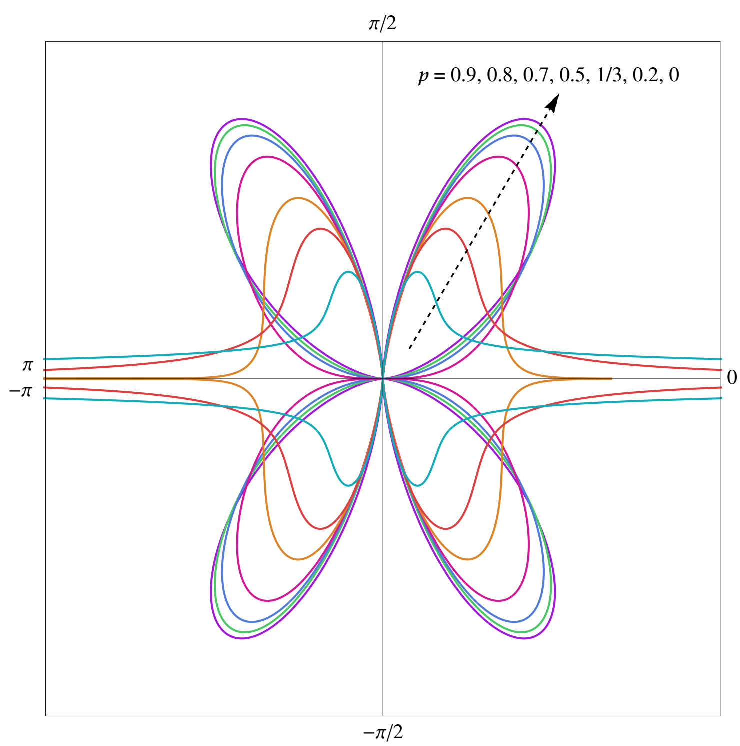

Figura 4.7: FDP da fase em coordenadas polares com $\eta = 0.5$, $\mu = 1.5$ e parâmetro p variando.

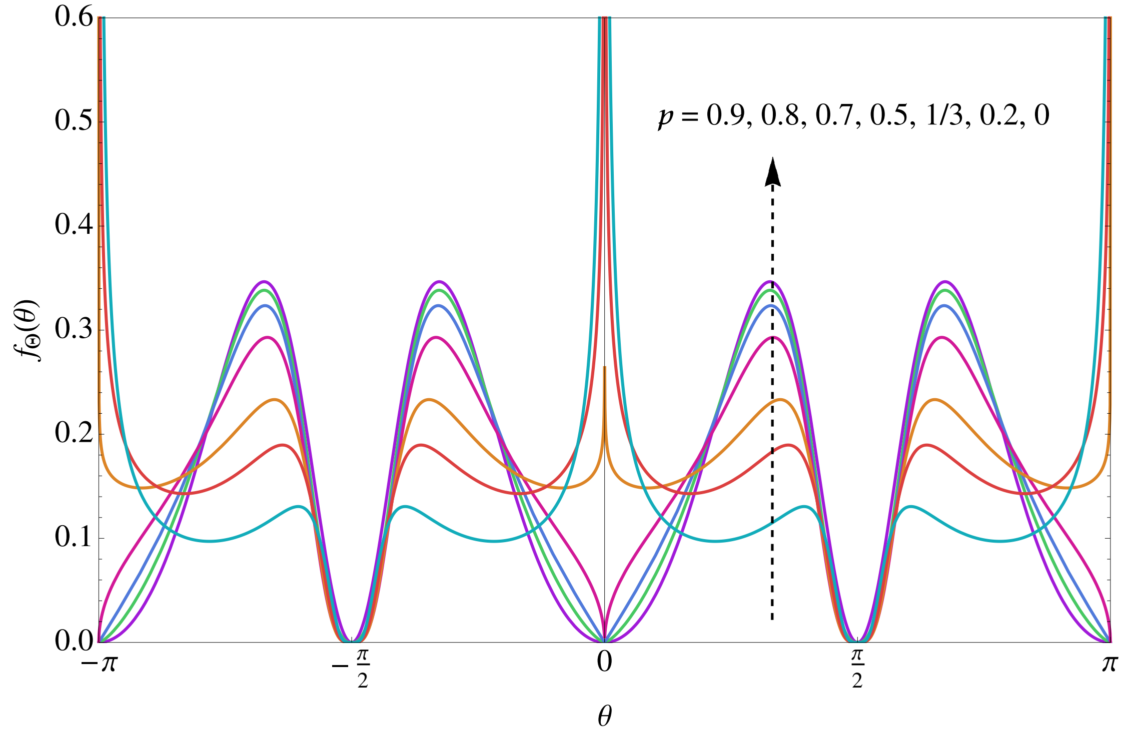

Figura 4.8: FDP da fase em coordenadas cartesianas com $\eta = 0.5$, $\mu = 1.5$ e parâmetro p variando.

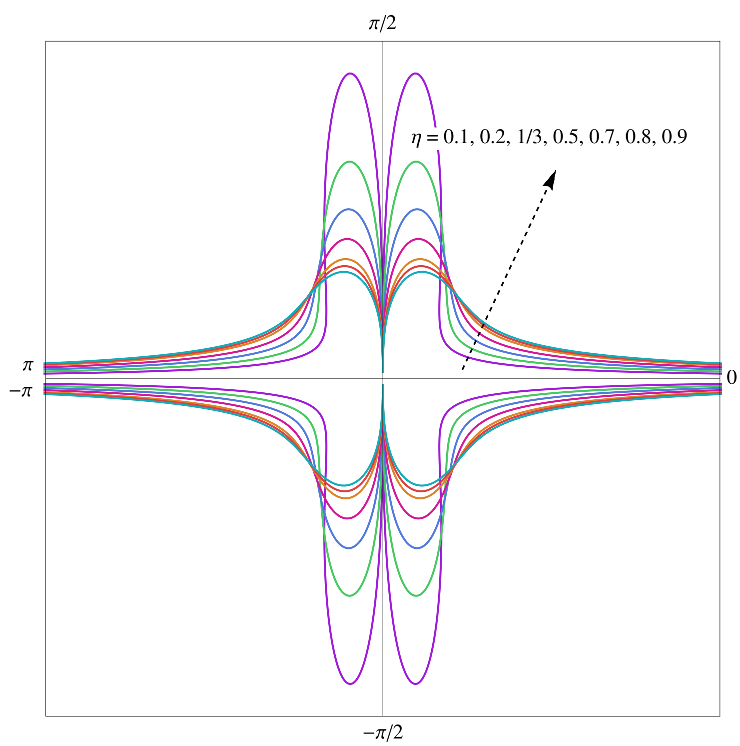

Figura 4.9: FDP da fase em coordenadas polares com, $\mu = 0.5$, $p = 0.5$ e η variando.

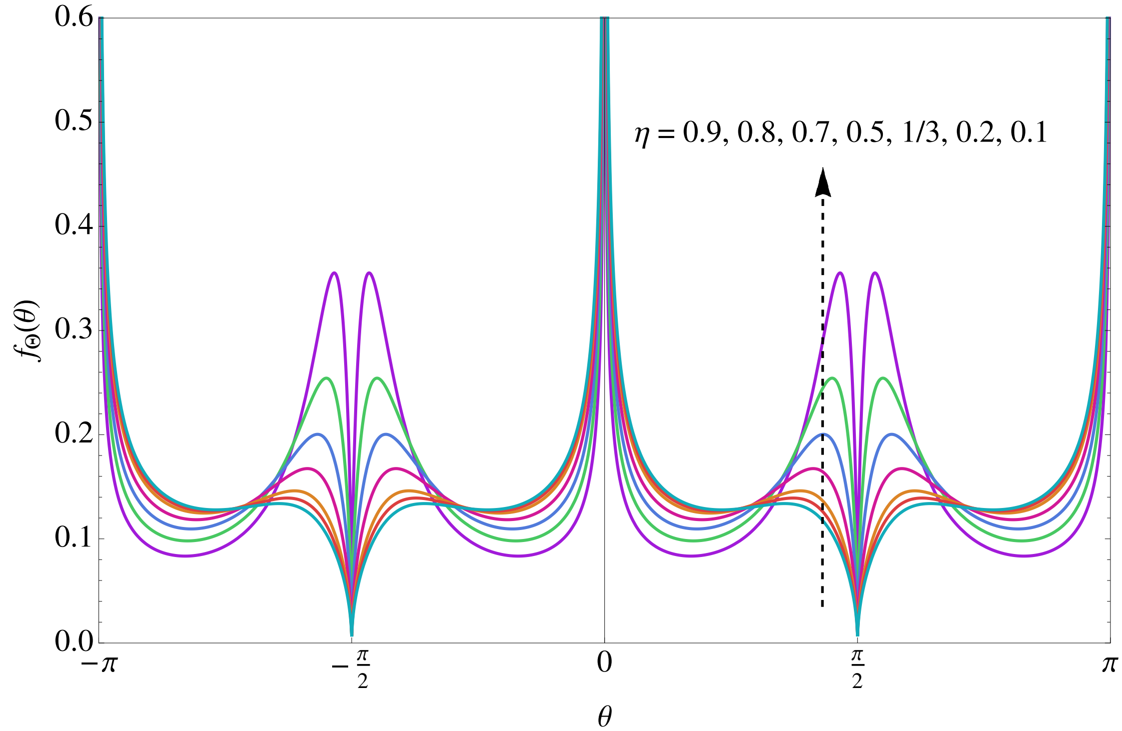

Figura 4.10: FDP da fase em coordenadas cartesianas com, $\mu = 0.5$, $p = 0.5$ e η variando.

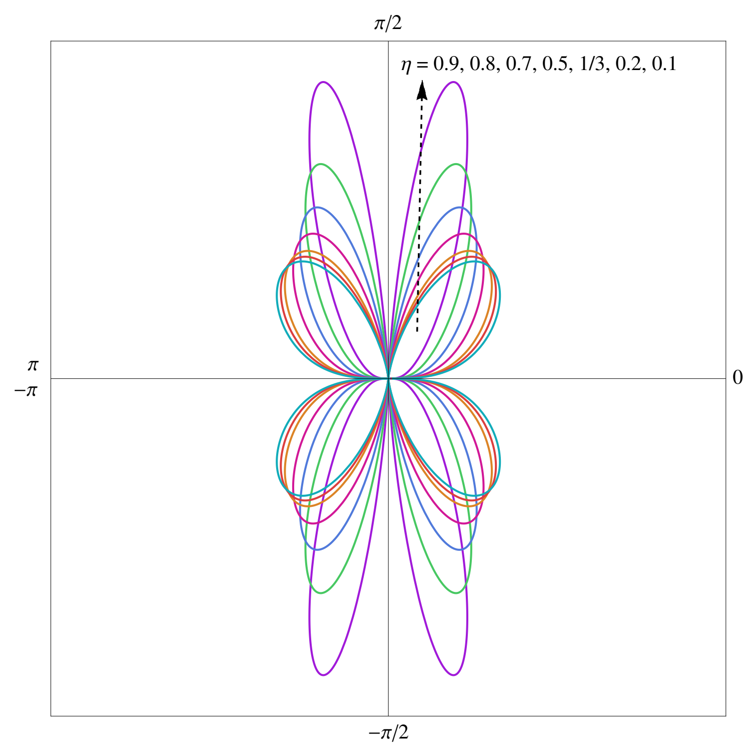

Figura 4.11: FDP da fase em coordenadas polares com, $\mu = 1.5$, $p = 0.5$ e η variando.

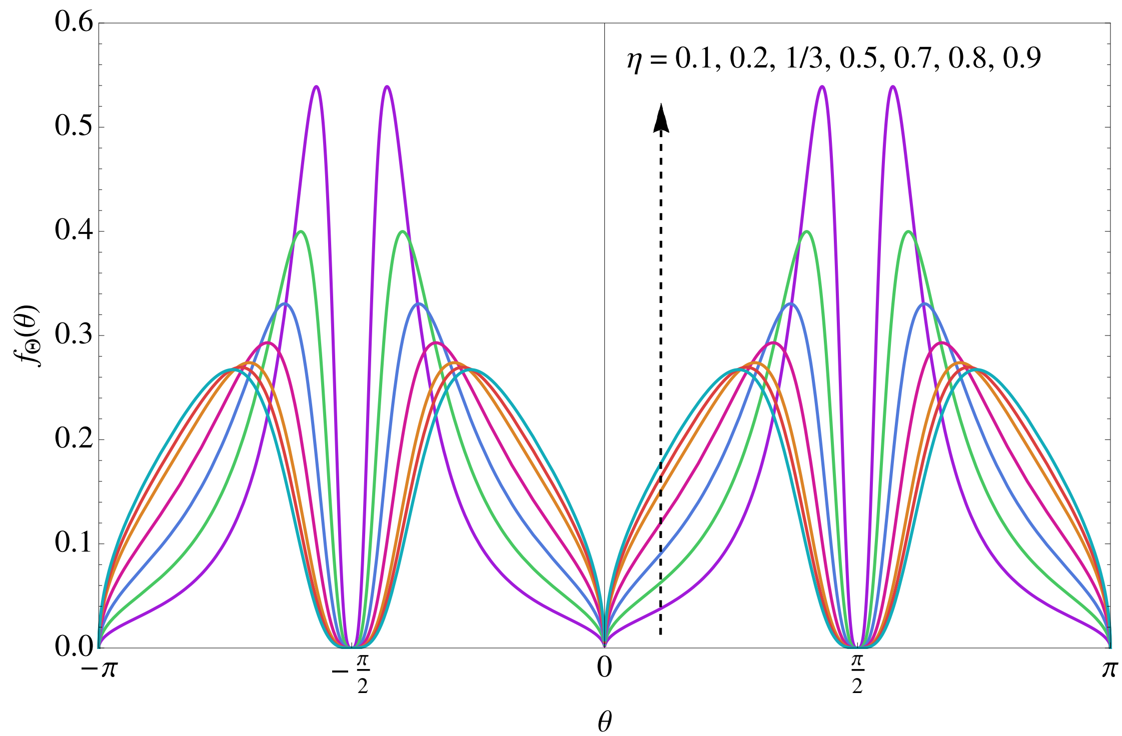

Figura 4.12: FDP da fase em coordenadas cartesianas com, $\mu = 1.5$, $p = 0.5$ e η variando.

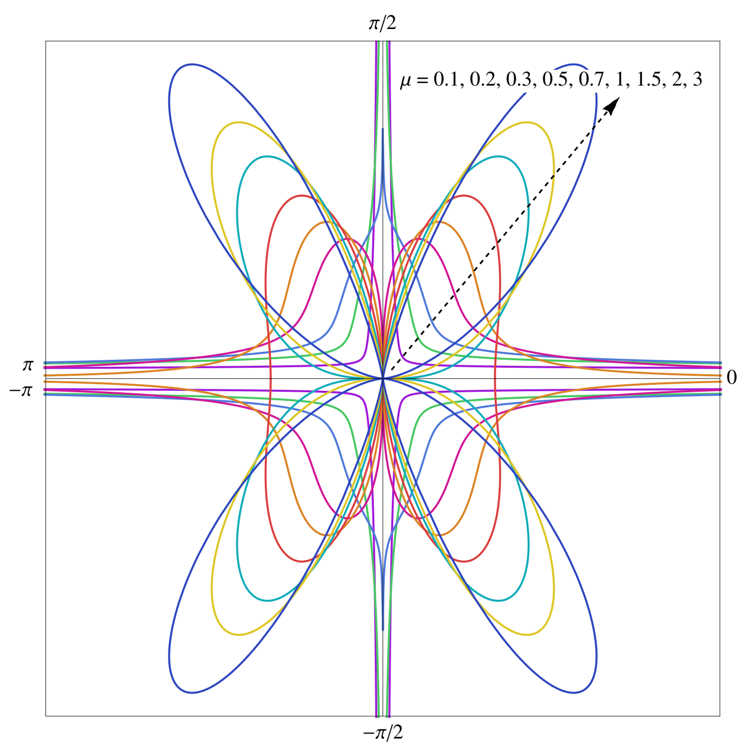

Figura 4.13: FDP da fase em coordenadas polares com, $\eta = 0.5$, $p = 0.5$ e μ variando.

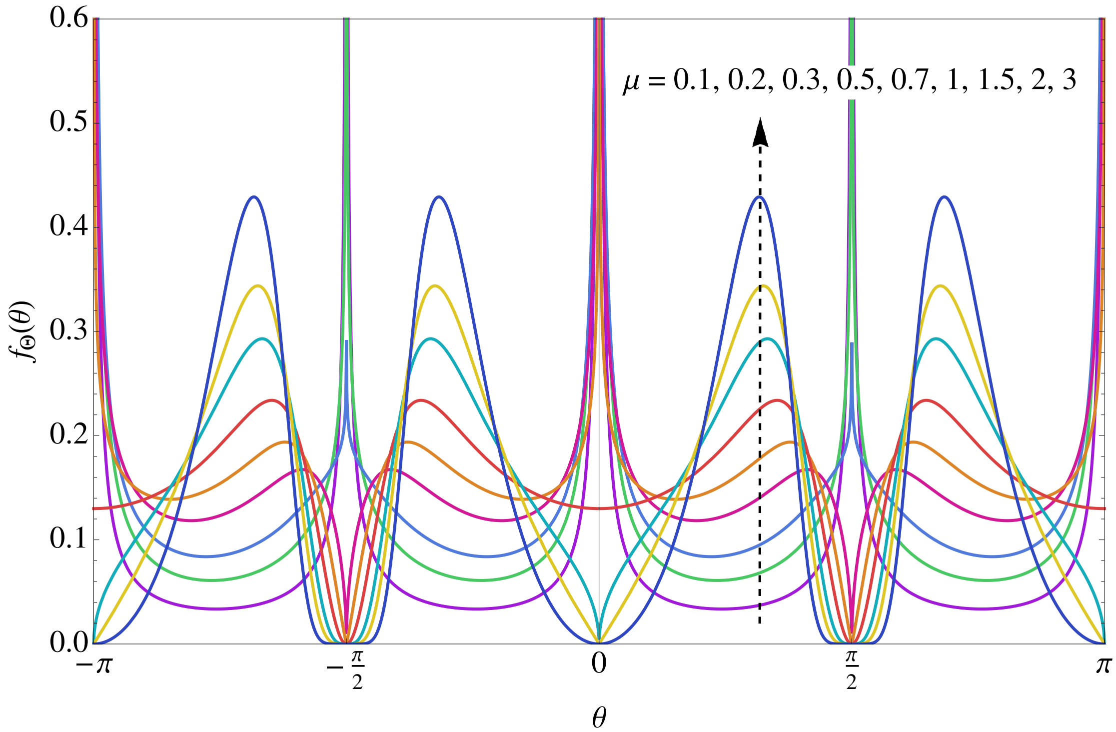

Figura 4.14: FDP da fase em coordenadas cartesianas com, $\eta = 0.5$, $p = 0.5$ e μ variando.

4.4 Conclusões

Neste capítulo foi comentado alguns pontos interessantes relativos às funções desempenhadas pelo parâmetro p. Além de quantificar a quantidade relativa de sinais fase e quadratura, o parâmetro p, também, quantifica os desbalanceamento de potência das componentes. Isto justifica, de certo modo, os diversos comportamentos das FDPs de fase e da envoltória. Ainda, a dissociação entre os parâmetros p e η foi um ponto importante da discussão, pois garantiu a formulação de um modelo generalizado para distribuição η-μ. Desta forma, a introdução do parâmetro p poderá prover uma melhor acurácia e flexibilidade em situações práticas.

Capítulo 5

Condição Gaussiana

A condição Gaussiana de uma distribuição aleatória foi introduzida em [10] para o modelo generalizado Nakagami-m. Neste caso, a modelagem permitiu que os sinais fase ou quadratura atingissem uma característica Gaussiana, para todo $m > \frac{1}{2}$. Desta forma, a envoltória do sinal Nakagami-m permanece inalterada enquanto a fase apresenta um comportamento único e não uniforme.

Portanto, considerando o que foi proposto para a distribuição Nakagami-m, o mesmo procedimento será realizado para a distribuição η-μ Formatos 1 e 2. Tal desenvolvimento depende intrinsecamente da flexibilidade inserida pelo parâmetro p e permitirá, portanto, obter algumas simplificações para as FDPs de fase determinadas no Capítulo 3. Neste caso, porém, os sinais fase e quadratura poderão assumir uma característica Gaussiana para todo $\mu > \frac{1}{4}$.

5.1 Gaussiana em Fase

Nesta seção, considera-se que o sinal fase está distribuído de forma Gaussiana, em outras palavras, o sinal se encontra no formato

$$f_A(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(a-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{5.1}$$

sendo que μ e σ^2 representam, respectivamente, a média e variância. Assim, partindo das Equações (3.20) e (3.32), relativas ao Formato 1 e ao Formato 2, respectivamente, infere-se por inspeção que a condição será alcançada se $\mu > \frac{1}{4}$ e

$$p = \frac{1}{2\mu} - 1. \tag{5.2}$$

5.1.1 Formato 1

Substituindo (5.2) nas Equações (3.20) e (3.21) obtêm-se as FDPs marginais $f_X(x)$ e $f_Y(y)$

$$f_X(x) = \frac{(1+\eta)^{\frac{1}{2}}}{\eta^{\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi\hat{r}^2}} \exp\left(-\frac{(1+\eta)x^2}{2\hat{r}^2\eta}\right) \tag{5.3}$$

$$f_Y(y) = \frac{(1+\eta)^{2\mu-\frac{1}{2}}(4\mu-1)^{2\mu-\frac{1}{2}}|y|^{4\mu-2}}{2^{2\mu-\frac{1}{2}}\hat{r}^{4\mu-1}\Gamma\left(2\mu-\frac{1}{2}\right)} \exp\left(-\frac{(1+\eta)(4\mu-1)y^2}{2\hat{r}^2}\right). \tag{5.4}$$

Reparem que a FDP de X, componente em fase do sinal, segue uma distribuição Gaussiana de média nula e variância $\hat{r}^2\frac{\eta}{1+\eta}$. Assim, ao efetuar os procedimentos matemáticos adequados, tem-se a FDP conjunta fase-envoltória e a FDP de fase, dadas, respectivamente, por

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = \frac{r^{4\mu-1}(\eta+1)^{2\mu}(4\mu-1)^{2\mu-\frac{1}{2}}|\sin(\theta)|^{4\mu-2}}{4^{\mu}\hat{r}^{4\mu}\eta^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\Gamma\left(2\mu-\frac{1}{2}\right)} \times \exp\left(-\frac{(\eta+1)r^2[\eta(4\mu-1)\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)]}{2\eta\hat{r}^2}\right) \tag{5.5}$$

$$f_\Theta(\theta) = \frac{\Gamma(2\mu)|\sin(\theta)|^{4\mu-2}(4\mu-1)^{2\mu-\frac{1}{2}}\eta^{2\mu-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\pi}\Gamma(2\mu-\frac{1}{2})[\eta(4\mu-1)\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)]^{2\mu}}. \tag{5.6}$$

Ainda, as Equações (5.5) e (5.6) reduzem às expressões de Nakagami-m referentes à condição Gaussiana em fase (Equações (2.17) e (2.18)), para $\mu = \frac{m}{2}$ e $\eta = \frac{1}{2m-1}$.

5.1.2 Formato 2

Substituindo (5.2) nas Equações (3.32) e (3.33), obtêm-se

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{r}^2(1-\eta)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\hat{r}^2(1-\eta)}\right) \tag{5.7}$$

$$f_Y(y) = \frac{|y|^{4\mu-2}}{\left[2\hat{r}^2(1+\eta)\right]^{2\mu-\frac{1}{2}}\Gamma\left(2\mu-\frac{1}{2}\right)} \exp\left(-\frac{y^2}{2\hat{r}^2(1+\eta)}\right) \tag{5.8}$$

Da mesma forma, análogo ao Formato 1, a componente fase (Equação (5.7)) segue uma distribuição Gaussiana com média nula e variância $\hat{r}^2(1-\eta)$. Finalmente, tem-se a FDP conjunta fase-envoltória e a FDP de fase, dadas, respectivamente, por

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = \frac{r^{4\mu-1}|\sin(\theta)|^{4\mu-2}}{4^{\mu}\left[\hat{r}^2(1+\eta)\right]^{2\mu-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi\hat{r}^2(1-\eta)}\Gamma\left(2\mu-\frac{1}{2}\right)} \exp\left(-\frac{r^2(1+\eta\cos(2\theta))}{2\hat{r}^2(1-\eta^2)}\right) \tag{5.9}$$

$$f_\Theta(\theta) = \frac{|\sin(\theta)|^{4\mu-2}(1-\eta)^{2\mu-\frac{1}{2}}(1+\eta)^{\frac{1}{2}}\Gamma(2\mu)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(2\mu-\frac{1}{2})(1+\eta\cos(2\theta))^{2\mu}}. \tag{5.10}$$

Além disso, as equações derivadas reduzem à Nakagami-m na mesma condição para $\mu = m/2$ e $\eta = 0$ (Eq. (2.17) e (2.18)).

5.2 Gaussiana em Quadratura

Assume-se que o sinal quadratura está distribuído de forma Gaussiana, com isso, analisando as Equações (3.21) e (3.33), infere-se que a condição é obtida se

$$p = 1 - \frac{1}{2\mu}. \tag{5.11}$$

5.2.1 Formato 1

A partir de (5.11) é possível obter as FDPs marginais de X e Y para o Formato 2.

$$f_X(x) = \frac{(\eta+1)^{2\mu-\frac{1}{2}}(4\mu-1)^{2\mu-\frac{1}{2}}|x|^{4\mu-2}}{2^{2\mu-\frac{1}{2}}\eta^{2\mu-\frac{1}{2}}\hat{r}^{4\mu-1}\Gamma\left(2\mu-\frac{1}{2}\right)} \exp\left(-\frac{(\eta+1)(4\mu-1)x^2}{2\eta\hat{r}^2}\right) \tag{5.12}$$

$$f_Y(y) = \frac{(1+\eta)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi\hat{r}^2}} \exp\left(-\frac{(1+\eta)y^2}{2\hat{r}^2}\right) \tag{5.13}$$

Observem que para este caso, a componente em quadratura é uma Gaussiana de média nula e variância $\frac{\hat{r}^2}{1+\eta}$. Consequentemente, efetuando os mesmos procedimentos descritos no capítulo 3, obtem-se a FDP conjunta fase-envoltória, e a FDP marginal de fase.

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = \frac{r^{4\mu-1}(1+\eta)^{2\mu}(4\mu-1)^{2\mu-\frac{1}{2}}|\cos(\theta)|^{4\mu-2}}{4^{\mu}\sqrt{\pi}\hat{r}^{4\mu}\eta^{2\mu-\frac{1}{2}}\Gamma\left(2\mu-\frac{1}{2}\right)} \times \exp\left(-\frac{(1+\eta)r^2[\eta\sin^2(\theta)+(4\mu-1)\cos^2(\theta)]}{2\eta\hat{r}^2}\right) \tag{5.14}$$

$$f_\Theta(\theta) = \frac{\Gamma(2\mu)(4\mu-1)^{2\mu-\frac{1}{2}}\eta^{\frac{1}{2}}|\cos(\theta)|^{4\mu-2}}{2\sqrt{\pi}\Gamma(2\mu-\frac{1}{2})[\eta\sin^2(\theta)+(4\mu-1)\cos^2(\theta)]^{2\mu}} \tag{5.15}$$

Esta são reduzida à condição semelhante para a distribuição Nakagam-m para $\mu = \frac{m}{2}$ e $\eta = 2m-1$ (Eq. (2.20) e (2.21)).

5.2.2 Formato 2

Novamente, substituindo (5.11) nas Equações (3.32) e (3.33), tem-se

$$f_X(x) = \frac{|x|^{4\mu-2}}{[2\hat{r}^2(1-\eta)]^{2\mu-\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(2\mu-\frac{1}{2}\right)} \exp\left(-\frac{x^2}{2\hat{r}^2(1-\eta)}\right) \tag{5.16}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{r}^2(1+\eta)}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\hat{r}^2(1+\eta)}\right). \tag{5.17}$$

É importante notar que $f_Y(y)$ é uma Gaussiana de média nula e variância $\hat{r}^2(1+\eta)$.
Portanto, a FDP conjunta e a FDP marginal são denotadas por

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) \quad = \quad \frac{r^{4\mu-1}|\cos(\theta)|^{4\mu-2}}{4^{\mu}\left[\hat{r}^2(1-\eta)\right]^{2\mu-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi\hat{r}^2(1+\eta)}\Gamma\left(2\mu-\frac{1}{2}\right)}\, exp\left(-\frac{r^2(1+\eta\cos(2\theta))}{2\hat{r}^2(1-\eta^2)}\right) \quad (5.18)$$

$$f_{\Theta}(\theta) = \frac{|\cos(\theta)|^{4\mu-2}(1+\eta)^{2\mu-\frac{1}{2}}(1-\eta)^{\frac{1}{2}}\Gamma[2\mu]}{2\sqrt{\pi}\Gamma(2\mu-\frac{1}{2})(1+\eta\cos(2\theta))^{2\mu}}. \quad (5.19)$$

Como no caso Gaussiana em fase, as equações (5.18) e (5.19) reduzem, exatamente, à Nakagami-m para $\mu = m/2$ and $\eta = 0$ nas Equações (2.20) e (2.21), respectivamente.

5.3 Comentários e Gráficos

Os gráficos a seguir foram esboçados para a FDP de fase para o Formato 1 da distribuição η-μ em coordenadas cartesianas e polares. Apesar das duas representações, a análise será realizada em termos das curvas ilustradas em coordenadas polares.

A Figura 5.1 apresenta a FDP de fase para a condição Gaussiana em fase para $\mu = 0.3$ e valores arbitrários de η. Por outro lado, a Figura 5.5 representa a PDF de fase para a condição Gaussiana em quadratura para os mesmos parâmetros de η e μ. Note que para η diferentes, ambas as figuras apresentam uma construção semelhante, entretanto, a concentração de fase ocorre em eixos opostos. Em outras palavras, na Figura 5.1, a fase converge para infinito em 0 e $\pm\pi$, enquanto na Figura 5.5, a fase converge em $\pm\frac{\pi}{2}$. Perceba que este mesmo comportamento é perceptível nas curvas esboçadas em coordenadas cartesianas para as condições Gaussiana em fase (Fig. 5.2) e em quadratura (Fig. 5.6). As figuras 5.3 e 5.7 apresentam uma caraterística semelhante. Desta vez, no entanto, $\eta = 0.5$ e μ assume valores arbitrários. Para $\mu > 0.5$, as curvas aparentam uma forma bi-modal bem definida, e a fase se concentra nos pontos $\pm\frac{\pi}{2}$ (Gaussiana em fase) e, aproximadamente, nos pontos $\pm\frac{\pi}{3}$ e $\pm\frac{2\pi}{3}$ (Gaussiana em quadratura). Porém, estes podem variar dependendo de η. Repare, também, que para $\mu = 0.5$, ambas componentes X e Y atingem a condição Gaussiana, assumindo um formato oval mais definido.

5.4 Conclusões

Neste capítulo, foi acrescentado mais uma funcionalidade ao parâmetro p. Fazendo uma simples substituição, o modelo generalizado foi simplificado e reduziu uma das componentes fase ou quadratura a uma Gaussiana de média nula e desvio parâmetro definido em termos de η. Desta forma, novas FDPs de fase foram definidas e algumas curvas foram analisadas com o intuito de verificar o efeito dos parâmetros η e μ.

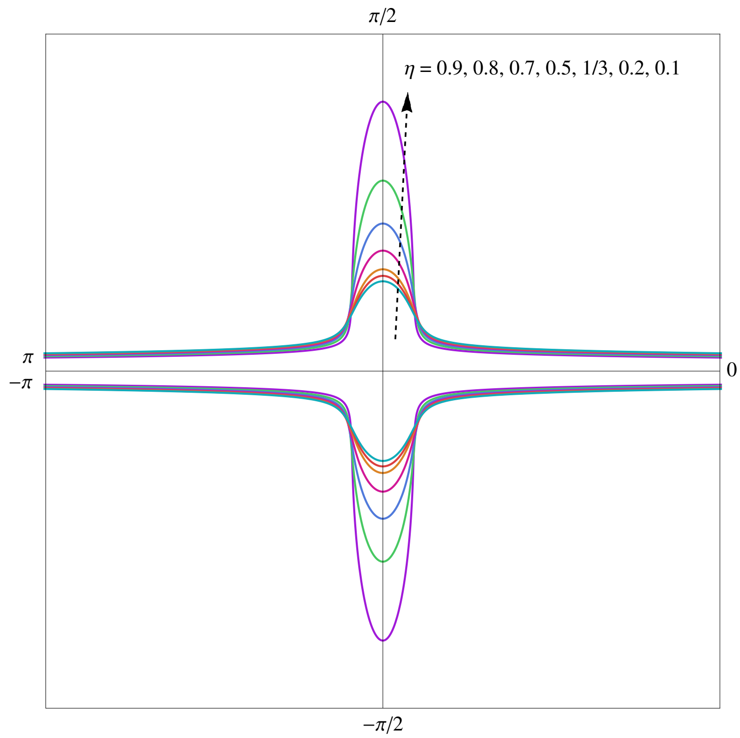

Figura 5.1: FDP de fase para a condição Gaussiana em fase em coordenadas polares com $\mu = 0.3$ e parâmetro η variando.

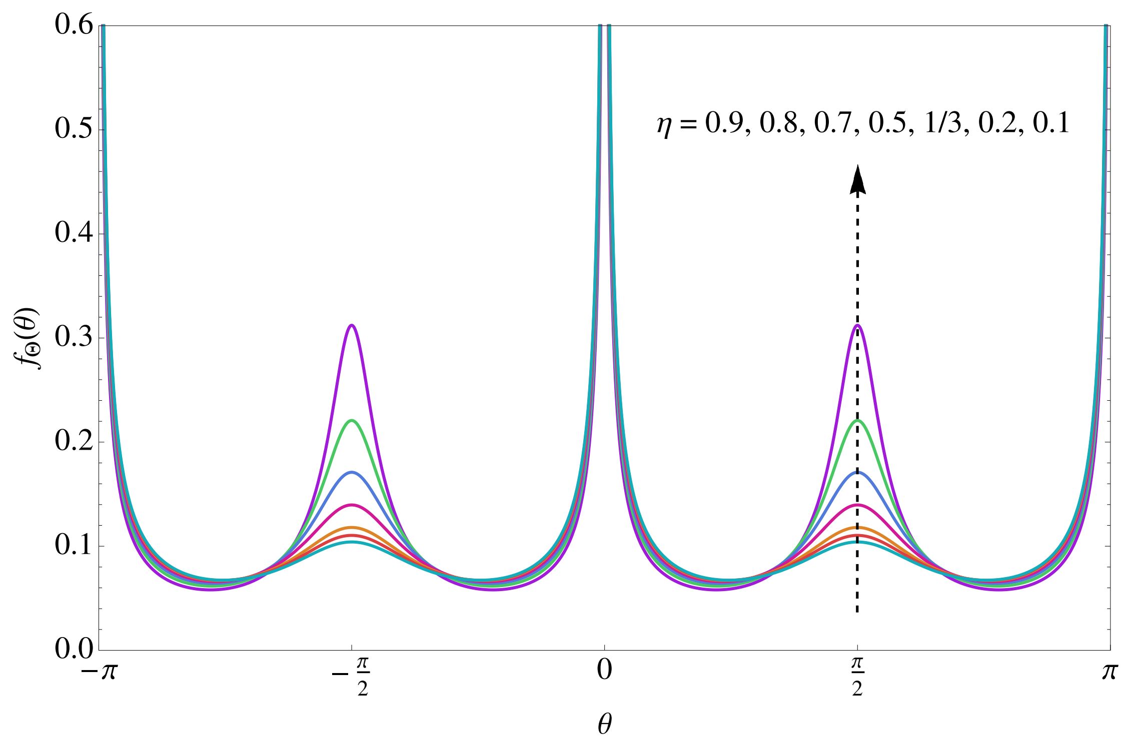

Figura 5.2: FDP de fase para a condição Gaussiana em fase em coordenadas cartesianas com $\mu = 0.3$ e parâmetro η variando.

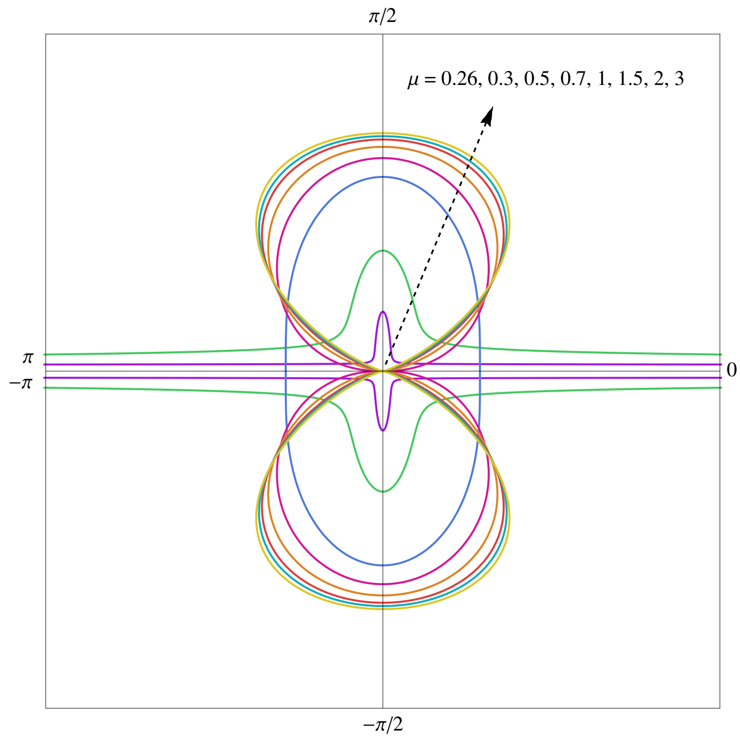

Figura 5.3: FDP de fase para a condição Gaussiana em fase em coordenadas polares com $\eta = 0.5$ e parâmetro μ variando.

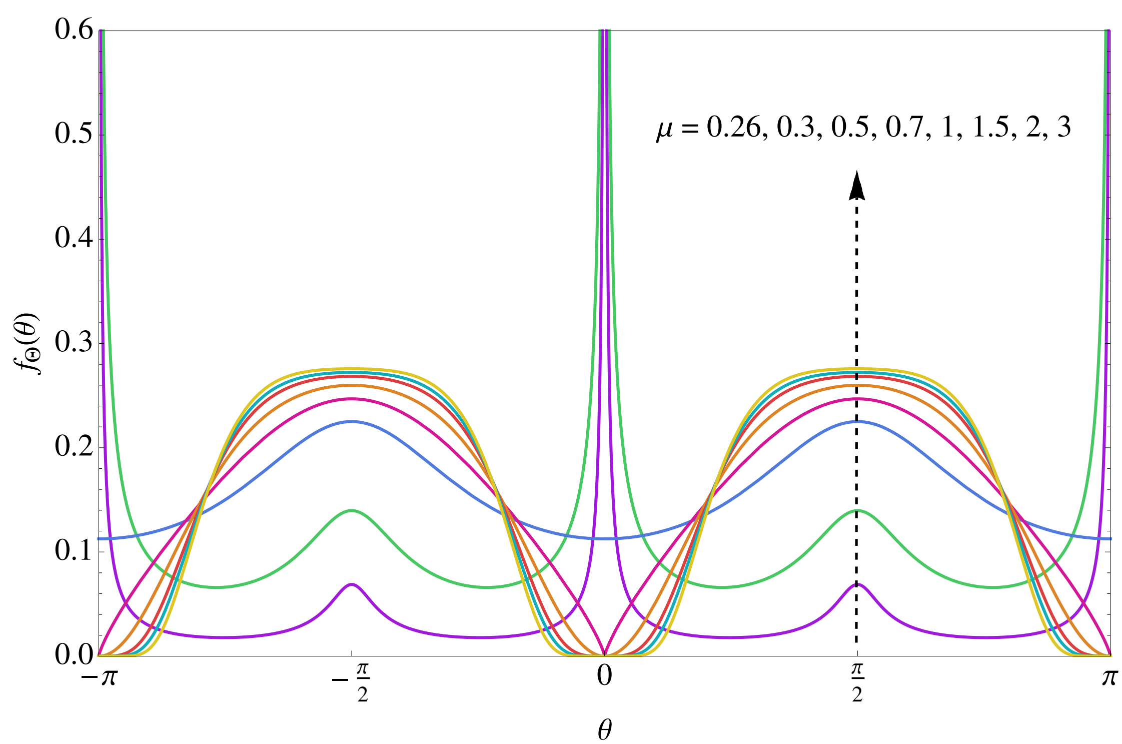

Figura 5.4: FDP de fase para a condição Gaussiana em fase em coordenadas cartesianas com $\eta = 0.5$ e parâmetro μ variando.

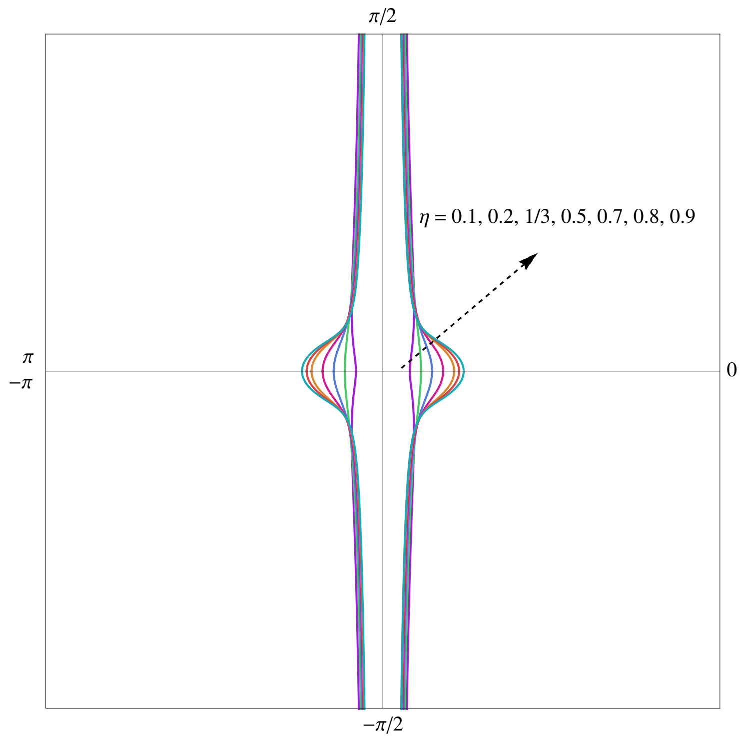

Figura 5.5: FDP de fase para a condição Gaussiana em quadratura em coordenadas polares com $\mu = 0.3$ e parâmetro η variando.

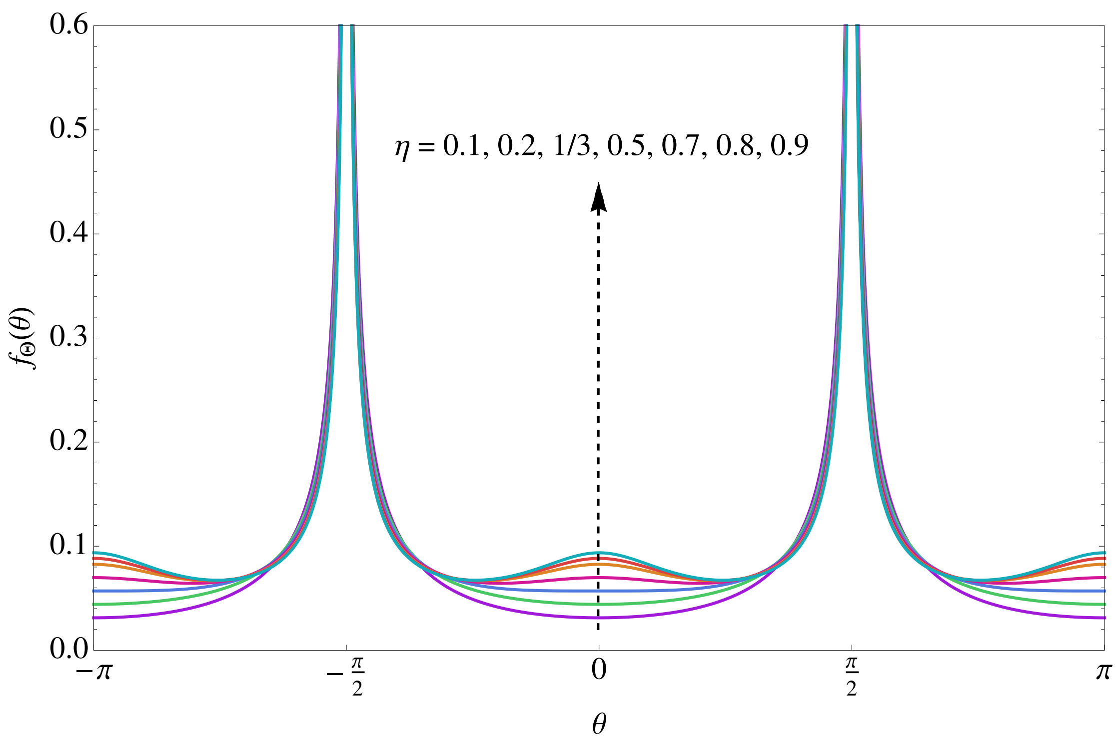

Figura 5.6: FDP de fase para a condição Gaussiana em quadratura em coordenadas cartesianas com $\mu = 0.3$ e parâmetro η variando.

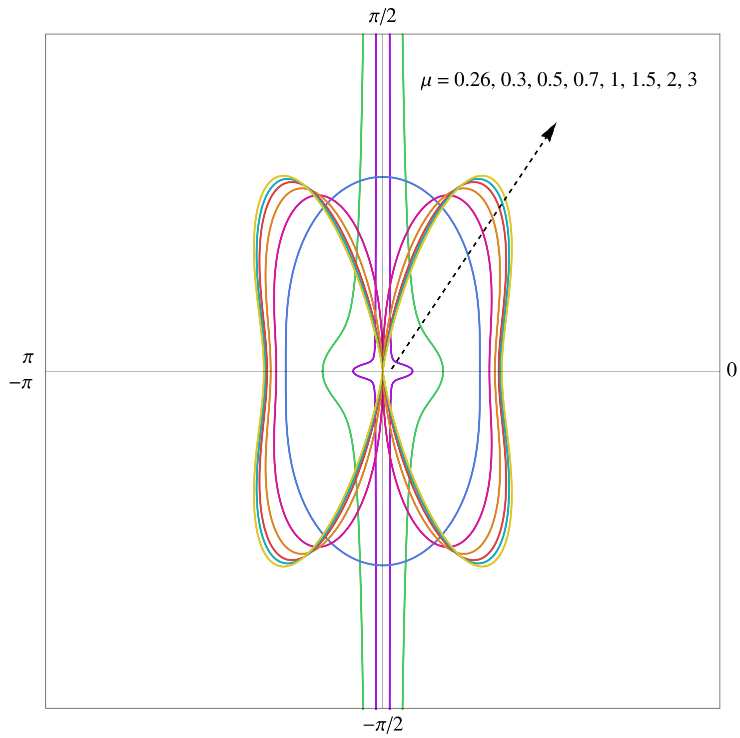

Figura 5.7: FDP de fase para a condição Gaussiana em quadratura em coordenadas polares com $\eta = 0.5$ e parâmetro μ variando.

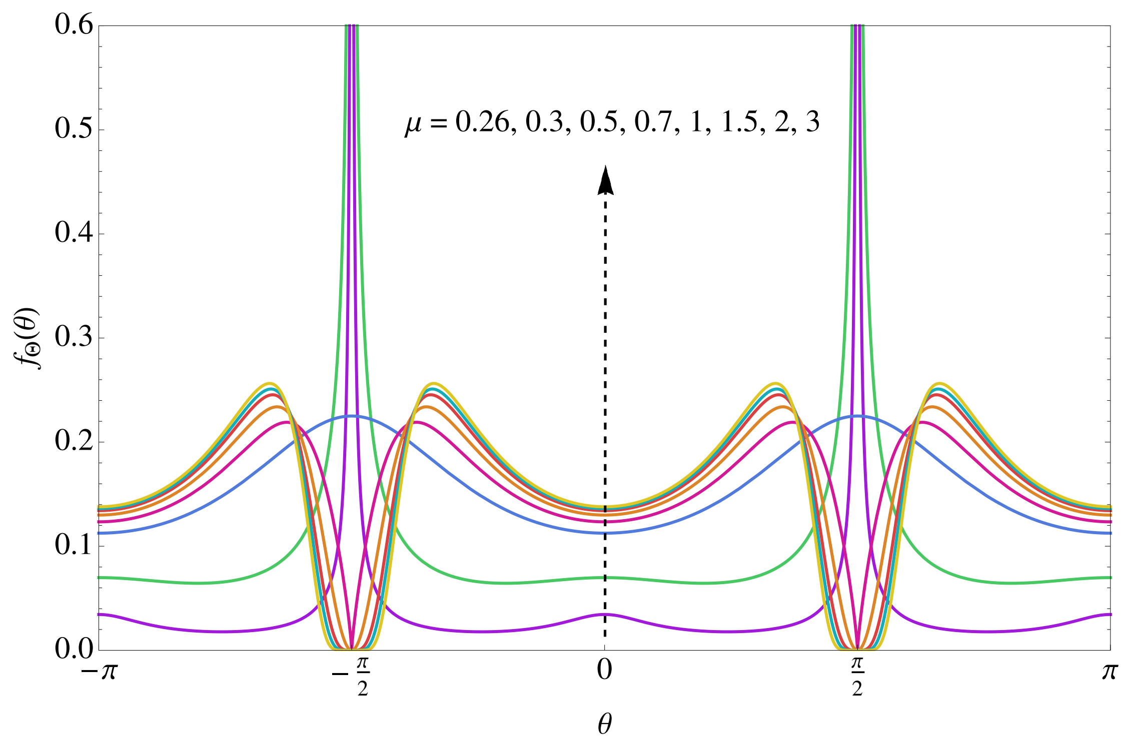

Figura 5.8: FDP de fase para a condição Gaussiana em quadratura em coordenadas cartesianas com $\eta = 0.5$ e parâmetro μ variando.

Capítulo 6

Estatísticas de Segunda Ordem

Em comunicações sem fio, as estatísticas de segunda ordem (ou ordem superior) caracterizam as variações aleatórias da envoltória e da fase de um sinal desvanecido. Portanto, as estatísticas relativas às variações da envoltória são dadas, por exemplo, pela LCR e pela AFD. Referente à variação de fase, a estatística comumente utilizada é a PCR. Tanto para a fase quanto para a envoltória, estas estatísticas foram determinadas em fórmulas fechadas para canais de desvanecimento η-μ [35].

Sendo assim, é válido afirmar que o modelo aqui definido pode interferir nas estatísticas de ordem superior devido ao seu envolvimento direto com a distribuição de fase. Portanto, o objetivo deste capítulo é apresentar novas formulações para as estatícas de segunda ordem de canais de desvanecimento η-μ, mais especificamente, relativas à PCR.

6.1 Taxa de Cruzamento de Fase

A PCR, indicada por $N_\Theta(\theta)$, é definida como o número médio de cruzamento ascendentes (ou descendentes) por segundo de um sinal em um nível de fase específico θ. Sendo assim, tem-se que a PCR é expressa por

$$N_\Theta(\theta) = \int_0^\infty \dot{\theta} f_{\Theta,\dot{\Theta}}(\theta,\dot{\theta})\,\mathrm{d}\dot{\theta} \tag{6.1}$$

em que $f_{\Theta,\dot{\Theta}}(\theta,\dot{\theta})$ denota a FDP conjunta da fase Θ e de sua derivada no tempo $\dot{\Theta}$.

Para definir a FDP conjunta, é necessário aplicar a mesma lógica utilizada em [9] e em [35]. Nestes, considera-se que cada componente Z (determinado no Capítulo 3), pode ser reescrita como $Z = S|Z|$, em que $S = sgn(Z)$ (sinal de Z), e $|Z|$ segue a distribuição Nakagami-m. Assim, podemos representar $Z = SN$, com N denotando a variável Nakagami-m. Realizando o processo de diferenciação no tempo, obtem-se $\dot{Z} = \dot{S}N + S\dot{N}$. Por representar uma função sinal, S deve assumir valores constantes ± 1, salvo nos instantes de transição ($-1 \to +1$ e $+1 \to -1$), portanto, infere-se que $\dot{S}$ é nulo. Também, $|Z|$ é nulo, pois, Z é constante e os instantes de transição ocorrem exatamente nos instantes de cruzamento em zero de Z. Todas estas considerações implicam nas seguintes definições $\dot{S}N = 0$ e $\dot{Z} = S\dot{N}$. Sabendo que $\dot{N}$ é gaussiano e independente de N [44], infere-se que $\dot{Z}$ está condicionado a Z e segue uma distribuição Gaussiana com os mesmo parâmetros de $\dot{N}$. Com isso, é possivel concluir que $\dot{Z}$ é independente de Z [44]. Desta forma, entende-se que $\dot{X}$ e $\dot{Y}$ seguem uma distribuição Gaussiana de média nula com desvio padrão $\pi\sqrt{2}f_m\sigma_{X_i}$ e $\pi\sqrt{2}f_m\sigma_{Y_i}$, respectivamente, sendo f_m o desvio Doppler máximo em Hertz, e, σ_{X_i} e σ_{Y_i} o desvio padrão relativo à distribuição η-μ definido previamente no capítulo 3. Sendo assim, a FDP conjunta X, $\dot{X}$, Y and $\dot{Y}$ é denotada como $f_{X,\dot{X},Y,\dot{Y}}(x,\dot{x},y,\dot{y}) = f_X(x)\times f_Y(y)\times f_{\dot{X}}(\dot{x})\times f_{\dot{Y}}(\dot{y})$.

No desenvolvimento a seguir, foi considerado apenas o Formato 1. Vale lembrar, no entanto, que este mesmo procedimento pode ser efetuado para o Formato 2, cuja equações encontram-se disponibilizadas no Anexo A. Sendo assim, para o Formato 1 da distribuição η-μ, o desvio padrão de $\dot{X}$ e $\dot{Y}$ é dado por

$$\sigma_{\dot{X}} = \pi f_m\sqrt{\frac{\hat{r}^2}{\mu_X(1+\eta^{-1})}} \tag{6.2}$$

$$\sigma_{\dot{Y}} = \pi f_m\sqrt{\frac{\hat{r}^2}{\mu_Y(1+\eta)}}. \tag{6.3}$$

Portanto, a FDP conjunta é definida por

$$\begin{aligned} f_{X,\dot{X},Y,\dot{Y}}(x,\dot{x},y,\dot{y}) = {} & \frac{\mu^{2\mu+1}(1+\eta)^{2\mu+1}(1-p)^{\mu(1-p)}(1+p)^{\mu(1+p)}(1-p^2)^{\frac{1}{2}}\left|x\right|^{2\mu(1+p)-1}\left|y\right|^{2\mu(1-p)-1}}{2\pi^3 f_m^2\hat{r}^{4\mu+2}\eta^{\mu(1+p)+\frac{1}{2}}\Gamma(\mu(1+p))\Gamma(\mu(1-p))} \\ & \times\exp\left(-\frac{\mu(1+\eta)(1-p)\dot{y}^2}{2\pi^2 f_m^2\hat{r}^2}-\frac{\mu\left(1+\eta\right)\left(1+p\right)\dot{x}^2}{2\pi^2 f_m^2\hat{r}^2\eta}-\frac{2\mu(1+\eta)(1+p)x^2}{2\hat{r}^2\eta}\right) \\ & \times\exp\left(-\frac{2\mu(1+\eta)(1-p)y^2}{2\hat{r}^2}\right) \end{aligned} \tag{6.4}$$

E assim, define-se a a FDP conjunta como $f_{R,\dot{R},\Theta,\dot{\Theta}(r,\dot{r},\theta,\dot{\theta})} = |J|\times f_{X,\dot{X},Y,\dot{Y}}(x,\dot{x},y,\dot{y})$, em que $|J| = R^2$ o Jacobiano das variáveis de transformação. Reescrevendo X, Y, $\dot{X}$ e $\dot{Y}$ em termos da envoltória R, da fase Θ e das respectivas derivadas no tempo $\dot{R}$ e $\dot{\Theta}$ como $X = R\cos(\Theta)$, $Y = R\sin(\Theta)$, $\dot{X} = \dot{R}\cos(\Theta) - R\dot{\Theta}\sin(\Theta)$ e $\dot{Y} = \dot{R}\sin(\Theta) + R\dot{\Theta}\cos(\Theta)$, define-se a FDP conjunta como

$$\begin{aligned} f_{R,\dot{R},\Theta,\dot{\Theta}}(r,\dot{r},\theta,\dot{\theta}) = {} & \frac{\mu^{2\mu+1}(1+\eta)^{2\mu+1}(1-p)^{\mu(1-p)}(1+p)^{\mu(1+p)}(1-p^2)^{\frac{1}{2}}r^{4\mu}\left|\sin(2\theta)\right|^{2\mu-1}}{2^{2\mu}\pi^3 f_m^2\hat{r}^{4\mu+2}\eta^{\mu(1+p)+\frac{1}{2}}\left|\tan\theta\right|^{2\mu p}\Gamma(\mu(1+p))\Gamma(\mu(1-p))} \\ & \times\exp\left(-\frac{\mu(1+\eta)(1+p)(\dot{r}\cos(\theta)-r\dot{\theta}\sin(\theta))^2}{2\pi^2 f_m^2\hat{r}^2\eta}-\frac{\mu(1+\eta)(1-p)(r\dot{\theta}\cos(\theta)+\dot{r}\sin(\theta))^2}{2\pi^2 f_m^2\hat{r}^2}\right) \\ & \times\exp\left(-\frac{\mu(1+\eta)(1-p)r^2\sin^2(\theta)}{\hat{r}^2}-\frac{\mu(1+\eta)(1+p)r^2\cos^2(\theta)}{\eta\hat{r}^2}\right) \end{aligned} \tag{6.5}$$

Em condições apropriadas ($\eta = \frac{1+p}{1-p}$ e $\mu = \frac{m}{2}$), (6.5) reduz de maneira exata ao caso generalizado Nakagami-m [10, Eq. 25], e, quando $p = 0$, reduz ao proposto em [35, Eq. 8]. Vale ressaltar que por meio de (6.5) e efetuando as devidas integrações, algumas FDPs conjuntas, exatas e em forma fechada podem ser encontradas. São estas $f_{R,\Theta,\dot{\Theta}}(r,\theta,\dot{\theta})$ e $f_{\Theta,\dot{\Theta}}(\theta,\dot{\theta})$ definidas, respectivamente, por

$$
\begin{aligned}
f_{R,\Theta,\dot{\Theta}}(r,\theta,\dot{\theta}) &= \exp\left(-\frac{(1+\eta)\mu r^2\left(-6\pi^2 f_m^2\eta^2 p+6\pi^2 f_m^2 p+3\pi^2 f_m^2+4\eta\phi^2-4\eta p^2\phi^2\right)}{4\pi^2 f_m^2\eta\hat{r}^2(\eta+\cos(2\theta)(-\eta+\eta p+p+1)-\eta p+p+1)}\right)\\
&\times \exp\left(-\frac{(1+\eta)\mu r^2\left(3\pi^2 f_m^2\eta^2p^2-2\pi^2 f_m^2\eta p^2+3\pi^2 f_m^2 p^2+\pi^2 f_m^2\cos(4\theta)(-\eta+\eta p+p+1)^2\right)}{4\pi^2 f_m^2\eta\hat{r}^2(\eta+\cos(2\theta)(-\eta+\eta p+p+1)-\eta p+p+1)}\right)\\
&\times \exp\left(-\frac{(1+\eta)\mu r^2\left(3\pi^2 f_m^2\eta^2+2\pi^2 f_m^2\eta-4\pi^2 f_m^2\cos(2\theta)\left(\eta^2+\left(\eta^2-1\right)p^2-2\left(\eta^2+1\right)p-1\right)\right)}{4\pi^2 f_m^2\eta\hat{r}^2(\eta+\cos(2\theta)(-\eta+\eta p+p+1)-\eta p+p+1)}\right)\\
&\times \frac{2^{1-2\mu}\pi^{-\frac{3}{2}}((1+\eta)\mu)^{2\mu+\frac{1}{2}}(1-p)^{\mu(1-p)+\frac{1}{2}}(1+p)^{\mu(1+p)+\frac{1}{2}}r^{4\mu}\left|\sin(2\theta)\right|^{2\mu-1}\left|\tan(\theta)\right|^{-2\mu p}}{f_m\hat{r}^{4\mu+1}\eta^{\mu(1+p)}\Gamma((p+1)\mu)\Gamma(\mu(1-p))\sqrt{(\eta+\cos(2\theta)(-\eta+\eta p+p+1)-\eta p+p+1)}} \quad (6.6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{\Theta,\dot{\Theta}}(\theta,\dot{\theta}) = &\frac{16^{\mu}\pi^{4\mu-\frac{1}{2}}f_m^{4\mu}\Gamma\left(2\mu+\frac{1}{2}\right)(1-p)^{\mu(1-p)+\frac{1}{2}}(1+p)^{\mu(1+p)+\frac{1}{2}}\left|\sin(2\theta)\right|^{2\mu-1}\left|\tan(\theta)\right|^{-2\mu p}}{2^{2\mu-1}\eta^{-\mu(1+p)-1/2}\Gamma(\mu(1+p))\Gamma(\mu(1-p))}\\
&\times\frac{[\eta+\cos(2\theta)(-\eta+\eta p+p+1)-\eta p+p+1]^{2\mu}}{\Lambda^{2\mu+\frac{1}{2}}} \quad (6.7)
\end{aligned}
$$

em que Λ é uma variável auxiliar dada por

$$
\begin{aligned}
\Lambda = &\,3\pi^2 f_m^2\eta^2+2\pi^2 f_m^2\eta-4\pi^2 f_m^2\cos(2\theta)\left(\eta^2+\left(\eta^2-1\right)p^2-2\left(\eta^2+1\right)p-1\right)+3\pi^2 f_m^2\eta^2p^2\\
&-2\pi^2 f_m^2\eta p^2+3\pi^2 f_m^2p^2+\pi^2 f_m^2\cos(4\theta)(-\eta+\eta p+p+1)^2-6\pi^2 f_m^2\eta^2 p+6\pi^2 f_m^2 p+3\pi^2 f_m^2+4\eta\phi^2-4\eta p^2\phi^2.
\end{aligned}
$$

Com isso, substituindo (6.7) em (6.1), tem-se a PCR para a distribuição generalizada η-μ. Este procedimento, portanto, resultou na seguinte equação

$$
\begin{aligned}
N_{\Theta}(\theta) = &\frac{\sqrt{\pi}f_m\Gamma\left(2\mu-\frac{1}{2}\right)(1+p)^{\mu(1+p)}(1-p)^{\mu(1-p)}\eta^{\mu(1-p)-\frac{1}{2}}\left|\sin(2\theta)\right|^{2\mu-1}}{2^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-p^2}\Gamma(\mu(p+1))\Gamma(\mu(1-p))\left|\tan(\theta)\right|^{2\mu p}}\\
&\times(\eta+\cos(2\theta)(-\eta+\eta p+p+1)-\eta p+p+1)^{1-2\mu}. \quad (6.8)
\end{aligned}
$$

Outra forma de se obter a PCR para o Formato 2 é utilizando a relação entre os Formatos para estatísticas de fase dada pela Equação (3.37).

O processo de verificação de (6.8) foi realizado, primeiramente, substituindo $p=0$. Neste, observou-se que a equação reduz, exatamente, à expressão definida no modelo precedente da distribuição η-μ (Eq. (2.28)). Em seguida, substituindo $\mu=\frac{m}{2}$ e $\eta=\frac{1+p}{1-p}$, obtêm-se o caso generalizado Nakagami-m (Eq. (2.16)), e, em consequência, $p=0$ resulta no modelo restrito de Nakagami-m [9, Eq. (12)]. Finalmente, (6.8) reduz ao caso Hoyt, ao substituir $\mu=0.5$ e $p=0$ (Eq. (2.3)). Neste, a PCR é constante e, portanto, independente do nível de fase θ.

Alguns gráficos serão apresentados para ilustrar o comportamento da PCR normalizada em termos de f_m ($N_\Theta(\theta)/f_m$). A Figura 6.1, esboça a PCR para valores arbitrários de p, $\eta = 0.5$, e $\mu = 0.5$. A escolha do valor de μ foi proposital, pois, em condições normais, esperaria-se, como foi comentado anteriormente, uma redução ao Caso Hoyt. Vislumbrando a Figura 6.1, observa-se a notória influência do parâmetro p na PCR. Para $p = 0$, a curva se caracterizou de forma idêntica ao caso Hoyt. Já para $p > 0$, as curvas apresentam um deslocamento gradual na amplitude, ou seja, com o aumento de p, os pontos de convergência na amplitude vão reduzindo a 0, para $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ou $\theta = \frac{\pi}{2}$. Finalmente, observa-se que as curvas apresentam um comportamento periódico com período π e tendem ao infinito em múltiplos inteiros de π , exceto, obviamente para $p = 0$. No modelo precedente da distribuição η-μ, para $\mu < 0.5$ e $p = 0$, as curvas da PCR são convexas tendendo ao infinito em múltiplos inteiros de $\frac{\pi}{2}$ e a amplitude não ultrapassa a linha definida em $\mu = 0.5$ [35]. Portanto, para verificar este comportamento, na Figura 6.2, esboçou-se a PCR para valores arbitrários de p, $\eta = 0.5$ e $\mu = 0.35$. Observa-se que a convergência, nos pontos $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, vai se invertendo de infinito para zero. Um comportamento semelhante é observado se $\mu = 1.5$ (Figura 6.3). Neste, a amplitude da PCR assumindo valores nulos, passa a tender para o infinito em $-\pi$, 0 e π. A Figura 6.4 demonstra o comentado acima por meio de uma ótica diferente, desta vez, os valores fixos estão em p e η, enquanto μ é variado. Finalmente, as Figuras 6.5 e 6.6 mostram, mais uma vez, como os parâmetros η e p desempenham funções distintas, afetando de forma diversa no comportamento da PCR.

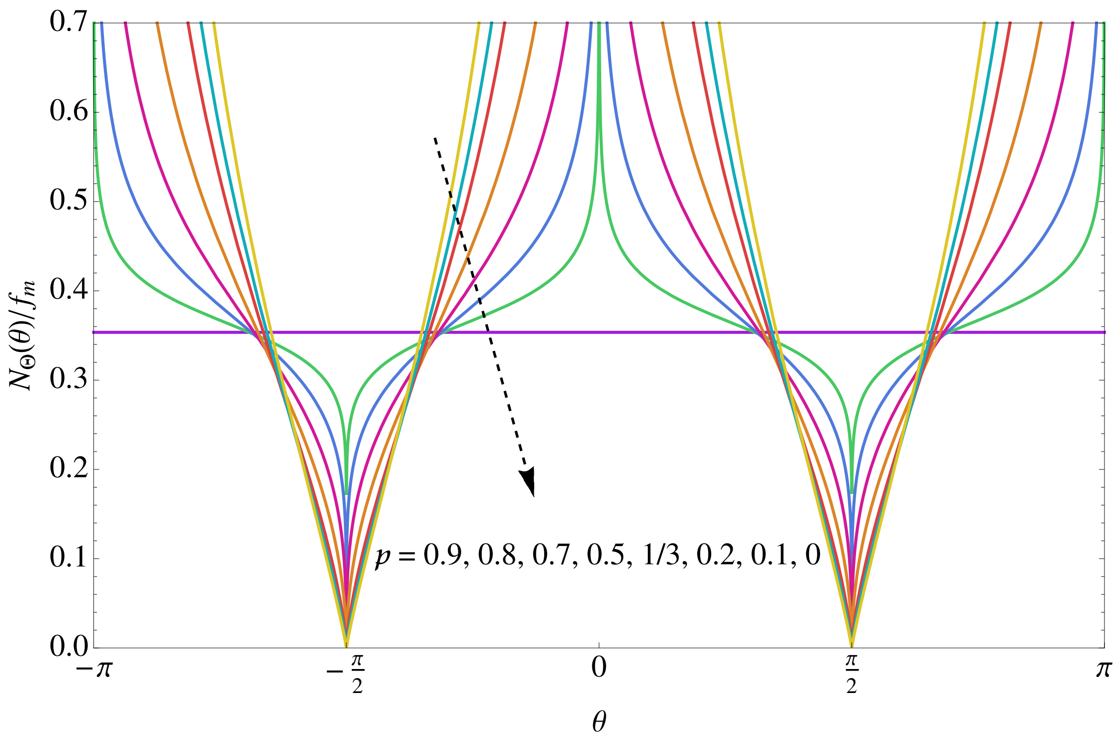

Figura 6.1: PCR com $\eta = 0.5$, $\mu = 0.5$ e parâmetro p variando.

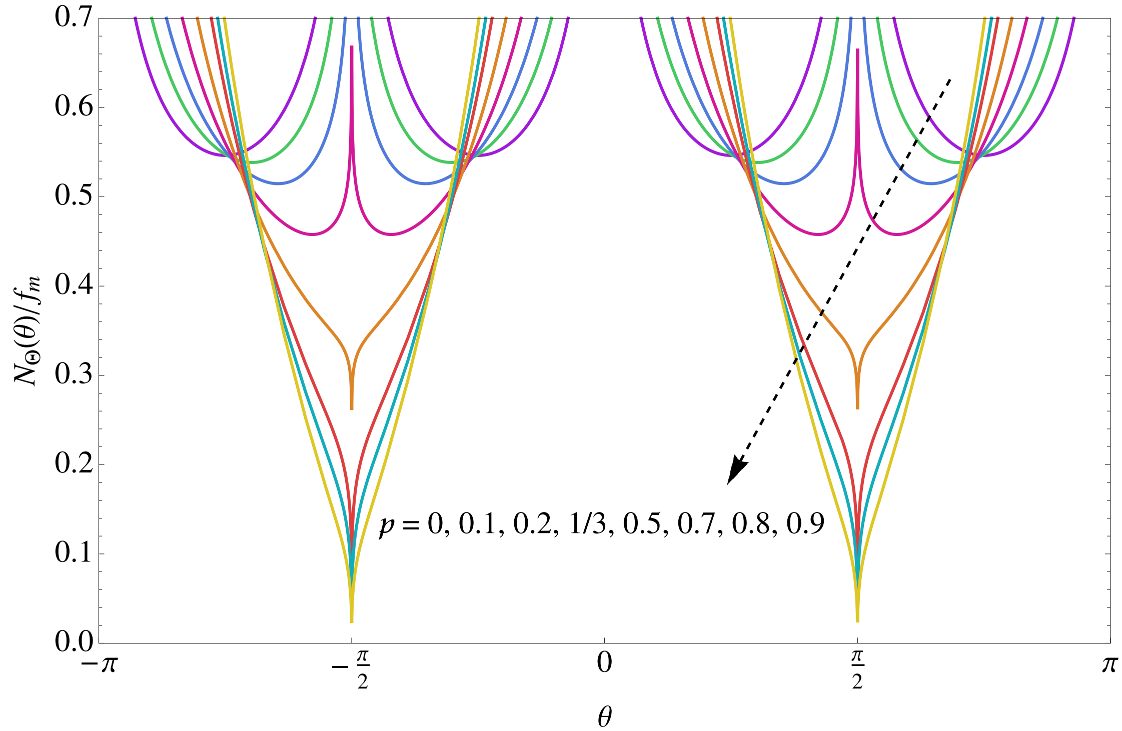

Figura 6.2: PCR com $\eta = 0.5$, $\mu = 0.35$ e parâmetro p variando.

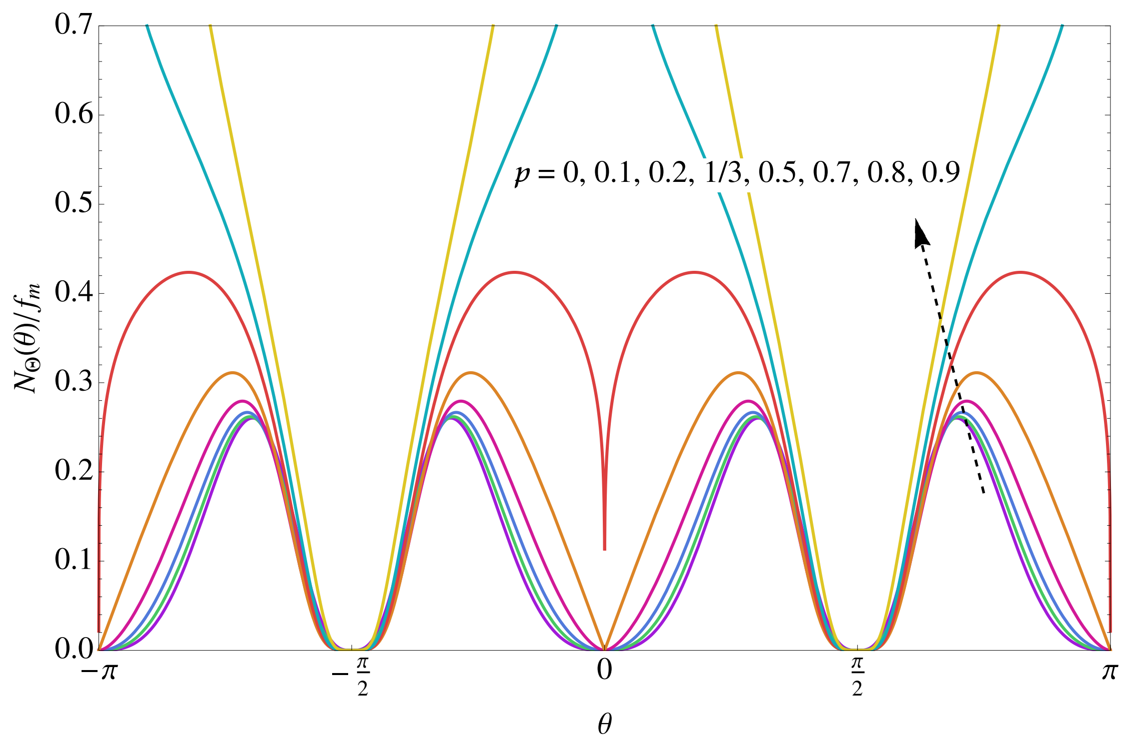

Figura 6.3: PCR com $\eta = 0.5$, $\mu = 1.5$ e parâmetro p variando.

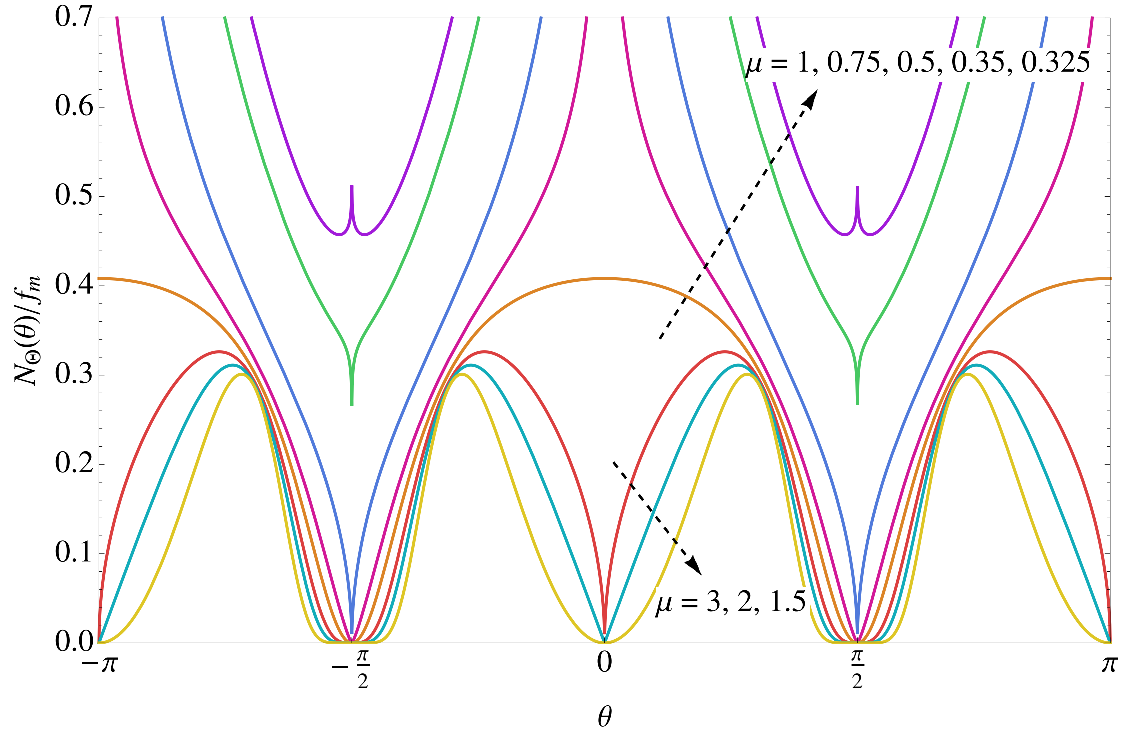

Figura 6.4: PCR com $p = 0.5$, $\eta = 0.5$ e parâmetro μ variando.

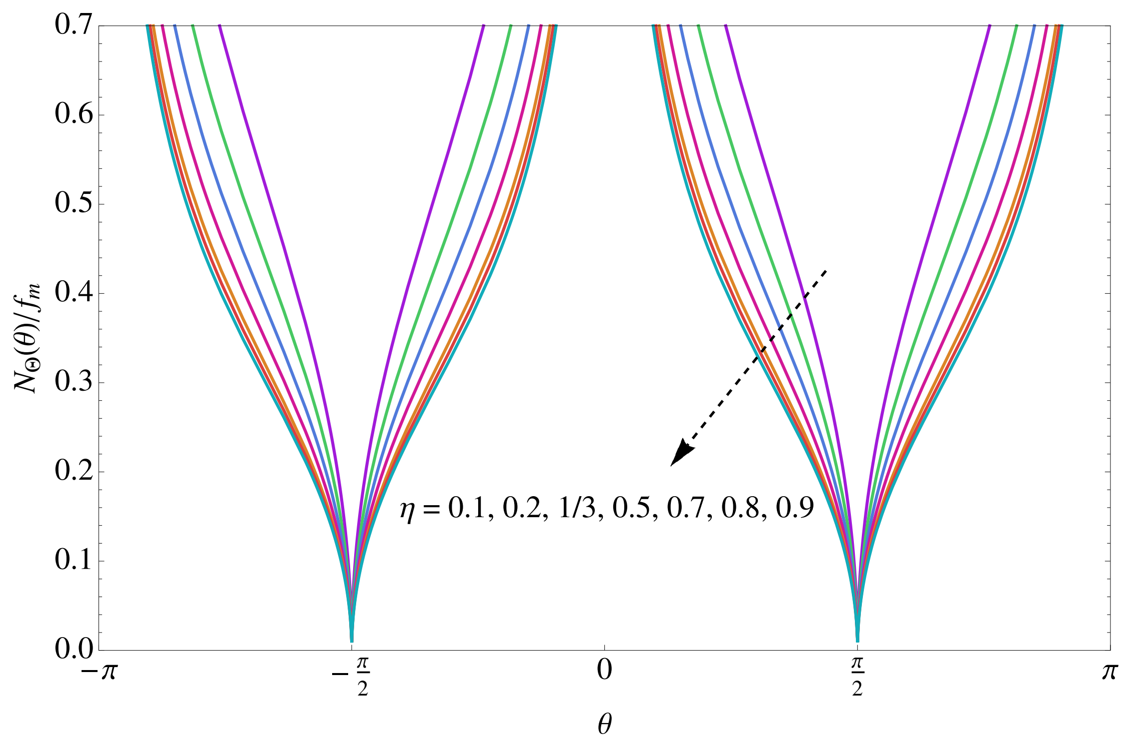

Figura 6.5: PCR com $p = 0.5$, $\mu = 0.5$ e parâmetro η variando.

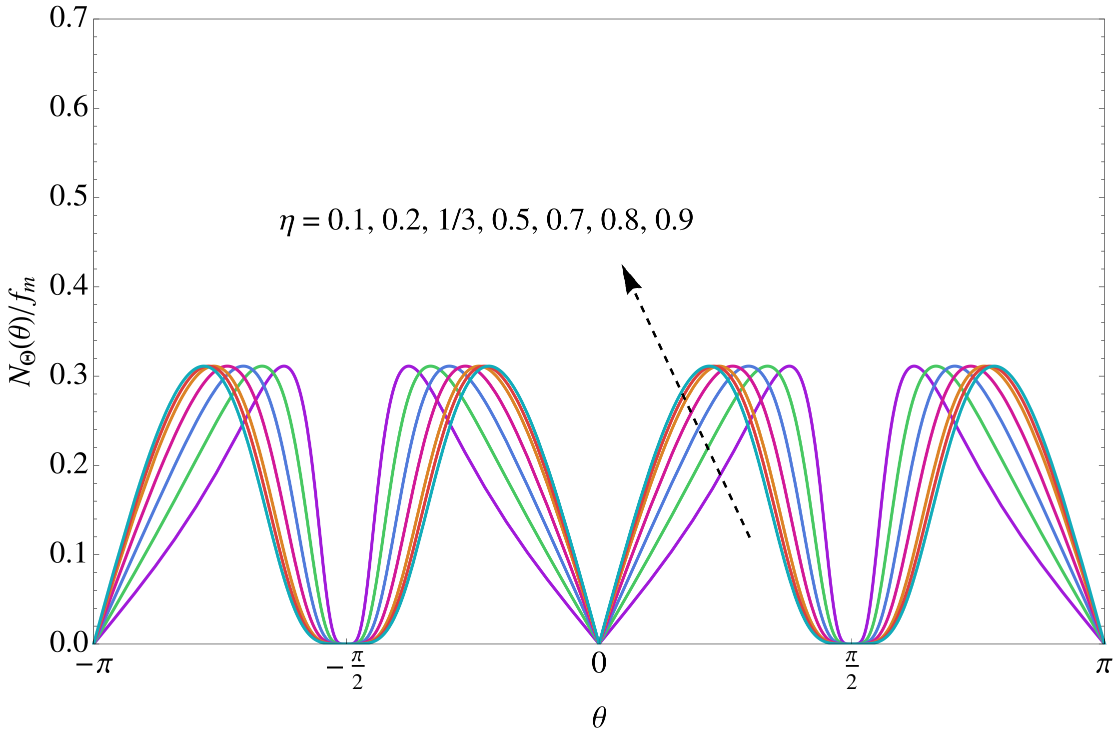

Figura 6.6: PCR com $p = 0.5$, $\mu = 1.5$ e parâmetro η variando.

6.2 Condição Gaussiana

Como descrito, detalhadamente, no Capítulo 5, a distribuição complexa η-μ apresenta uma simplificação semelhante à distribuição generalizada Nakagami-m para a condição Gaussiana. Para obtê-la, basta substituir $p = \frac{1}{2\mu} - 1$ (Gaussiana em fase) ou $p = 1 - \frac{1}{2\mu}$ (Gaussiana em quadratura) em qualquer estatística definida nesta dissertação. Seguindo este raciocínio, nesta seção serão apresentadas a PCR para os modelos simplificados no Formato 1. Também, algumas curvas serão esboçadas para indicar o comportamento desta estatísticas. As expressões para o Formato 2 encontram-se disponibilizadas no Anexo A.

Realizando o procedimento comentado, tem-se que a PCR para a condição Gaussiana em fase é dada por

$$N_\Theta(\theta) = \frac{f_m \eta^{2\mu-1}((4\mu-1))^{2\mu-2}\Gamma\left(2\mu+\frac{1}{2}\right)\left|\sin(2\theta)\right|^{2\mu-1}\left|\tan(\theta)\right|^{2\mu-1}}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(2\mu-\frac{1}{2}\right)\left[(-4\eta\mu+\eta+1)\cos(2\theta)+\eta(4\mu-1)+1\right]^{2\mu-1}} \tag{6.9}$$

Finalmente, a PCR para condição Gaussiana em quadratura é denotada por

$$N_\Theta(\theta) = \frac{f_m(4\mu-1)^{2\mu-2}\Gamma\left(2\mu+\frac{1}{2}\right)\left|\sin(2\theta)\right|^{2\mu-1}\left|\tan(\theta)\right|^{1-2\mu}}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(2\mu-\frac{1}{2}\right)(\eta-(\eta-4\mu+1)\cos(2\theta)+4\mu-1)^{1-2\mu}} \tag{6.10}$$

As figuras 6.7 e 6.8 ilustram o comportamento da PCR para condição Gaussiana em fase e em quadratura, respectivamente. Notem como PCR para ambas as condições são nitidamente distintas.

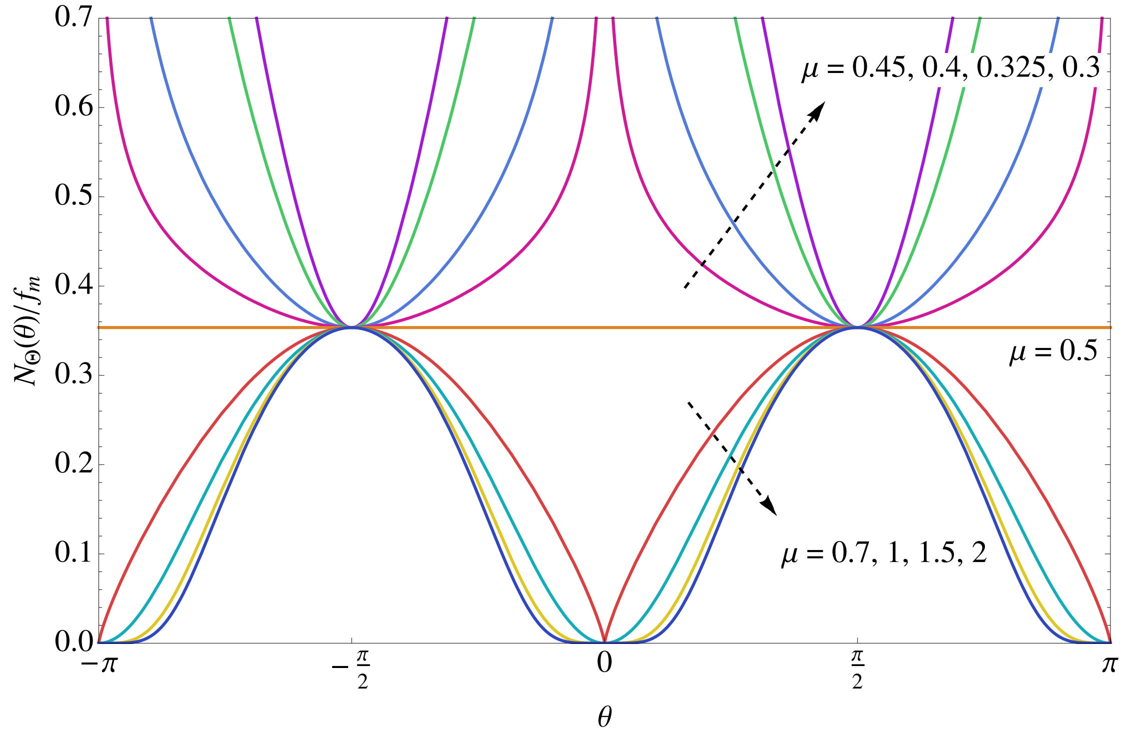

Figura 6.7: PCR em Fase com $\eta = 0.5$ e parâmetro μ variando.

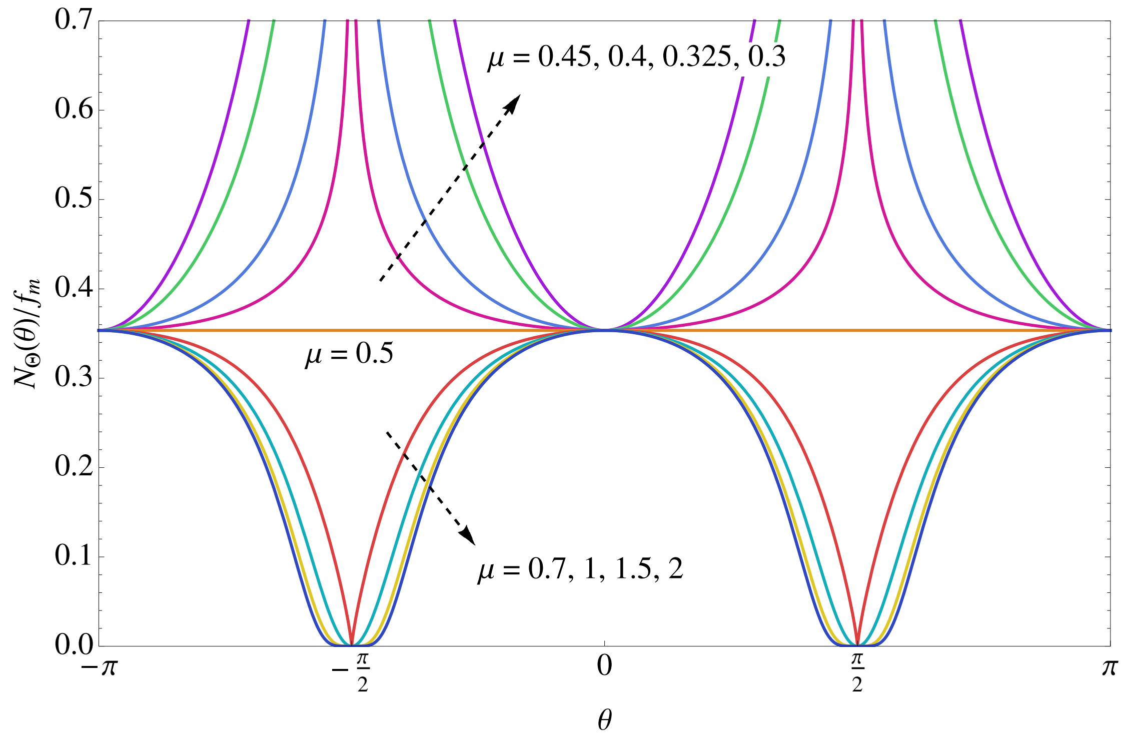

Figura 6.8: PCR em Quadratura com $\eta = 0.5$ e parâmetro μ variando.

6.3 Conclusões

Este capítulo introduziu o conceito de estatística de segunda ordem, especificamente, à estatística relacionada à fase do sinal complexo η-μ. Assim, foi desenvolvido novas equações exatas para PCR que envolvem o conceito de desbalanceamento de sinais fase e quadratura, representado pelo parâmetro p. Dado, a nova PCR, alguns gráficos foram ilustrados para indicar o efeito de p para os diversos valores de η e μ. Finalmente, realizando uma simples substituição, definiram-se formulações da PCR para um modelo simplificado da η-μ, em que se assume uma condição Gaussiana para os sinais fase ou quadratura.

Capítulo 7

Comentários Finais e Perspectivas

Visando aprofundar o conhecimento das estatísticas de primeira e segunda ordem para o sinal de rádio em comunicação sem fio, esta dissertação propôs um modelo generalizado para a distribuição η-μ. O modelo introduz um parâmetro p que indica a distribuição relativa de clusters de multipercurso das componentes fase e quadratura. Uma análise mais detalhada verificou que este, também, quantiza o desbalanceamento de potência entre os componentes fase e quadratura. Apesar deste fato, os resultados demonstraram que η e p não apresentam uma relação direta. E assim, a inserção de p implicou na obtenção de um nova distribuição conjunta de fase-envoltória. Esta, por sua vez, resultou em expressões fechadas da distribuição de fase nos Formatos 1 e 2 da η-μ. As análises gráficas demonstraram, claramente, a influência do parâmetro p em tais estatísticas. Embora formulações fechadas para a envoltória não foram encontradas, um estudo numérico associado ao esboço de gráficos indicou que o parâmetro p também afetava sua a distribuição. De fato, este comportamento contrasta com o modelo generalizado Nakagami-m para o qual, desbalanceamento de potência não afeta a envoltória [10]. No entanto, uma análise atenta dos parâmetros da distribuição η-μ mostram que p está implícito na concepção da distribuição, justificando, assim, a sua influência nas FDPs obtidas. Diante disso, a validade do modelo foi confirmada ao reduzir as expressões definidas aos casos especiais: Nakagami-m generalizada e η-μ clássica.

Assim, com o intuito de explorar as diversos cenários impostos pelo parâmetro p, foi proposta uma simplificação que permite atingir a condição Gaussiana em fase ou em quadratura. Desta forma, para valores de $\mu > \frac{1}{4}$, uma das componentes X e Y reduz a uma distribuição Gaussiana, e isto porporcionou no desenvolvimento de novas FDPs de fase tanto para o Formato 1 quanto para o Formato 2. A definição desta simplificação permitiu observar mais uma vez que parâmetros η e p não estão relacionados, visto que a condição Gaussiana não é obtida manipulando η. Finalmente, tendo em vista a importância das estatísticas de segunda ordem, novas propostas de PCR foram determinadas. Estas incluem ambos Formatos da distribuição η-μ e as condições Gaussianas. A influência do parâmetro p foi explorada em diversos gráficos, demonstrando o potencial do modelo generalizado η-μ. A validade das equações foi constatada ao reduzir as diversas expressões ao casos especiais Hoyt, Nakagami-m e η-μ clássica.

Uma proposta interessante de trabalho seria a implementação de um simulador para verificar a validade do modelo. O desenvolvimento do algorítmo de simulação para canais de desvanecimento é pouco trivial, pois, em muito deles, o sinal é composto por componentes Gaussianas não inteiras [47, 48]. Outra proposta seria verificar, em termos práticos, a distribuição generalizada η-μ, pois a flexibilidade que p pode prover ainda é desconhecida. Desta forma, um estudo apropriado dos possíveis ajustes práticos de p seria conduzido. Finalmente, diante do comportamento da envoltória no modelo generalizado, um possível trabalho futuro seria desenvolver uma aproximação para a distribuição da envoltória em termo do parâmetro p, e, por meio desta, realizar estudos relativos às estatísticas de segunda ordem, como a AFD e a LCR.

Publicações

1. Tejerina, G. R. L. & Yacoub, M. D. (2013). Distribuição Conjunta De Fase-Envoltória Eta-Mu: Uma Nova Abordagem, *XXXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT 2013).* SBrT, Fortaleza.*

*Este trabalho ganhou o prêmio de melhor artigo apresentado no XXXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT) 2013.

Bibliografia

[1] M. D. Yacoub. *Foundations of Mobile Radio Engineering.* Taylor & Francis, 1993.

[2] T. S. Rappaport. *Wireless Communications: Principles and Practice.* Prentice Hall Communications Engineering and Emerging Technologies Series. Dorling Kindersley, 2009.

[3] Lord Rayleigh. Xii. on the resultant of a large number of vibrations of the same pitch and of arbitrary phase. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 10(60):73–78, 1880.

[4] R. S. Hoyt. Probability functions for the modulus and angle of the normal complex variate. *Bell Syst. Tech. J.*, 26(2):318–359, 1947.

[5] S. O. Rice. Statistical properties of a sine wave plus random noise. *Bell System Technical Journal*, 27(1):109–157, January 1948.

[6] M. Nakagami. The m-distribution – a general formula of intensity distribution of rapid fading. *Statistical Methods in Radio Wave Propagation: Proceedings of a Symposium hel June 18-20*, pages 3–36, 1960.

[7] M. D. Yacoub. The α-μ distribution: A physical fading model for the stacy distribution. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 56(1):27–34, January 2007.

[8] M. D. Yacoub. The κ-μ; distribution and the η-μ distribution. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 49(1):68–81, February 2007.

[9] M. D. Yacoub, G. Fraidenraich, and J. C. S. Santos Filho. Nakagami-m phase-envelope joint distribution. *Electronics Letters*, 41(5):259–261, 2005.

[10] M. D. Yacoub. Nakagami-m phase-envelope joint distribution: A new model. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 59(3):1552–1557, 2010.

[11] D. B. Costa and M. D. Yacoub. The η-μ joint phase-envelope distribution. *Antennas and Wireless Propagation Letters, IEEE*, 6:195–198, 2007.

[12] U. S. Dias and M. D. Yacoub. The κ-μ phase-envelope joint distribution. *IEEE Transactions on Communications*, 58(1):40–45, 2010.

[13] J. Marcum. A statistical theory of target detection by pulsed radar. *IRE Transactions on Information Theory*, 6(2):59–267, 1960.

[14] P. Beckmann. *Probability in Communication Engineering*. Harcourt, Brace & World, New York, 1967.

[15] J. H. Roberts. *Angle Modulation*. Peregrinus, Stevenage, U.K., 1977.

[16] R. F. Pawula. On the theory of error rates for narrow-band digital fm. *IEEE Transactions on Communications*, 29(11):1634–1643, 1981.

[17] M. K. Simon, S. M. Hinedi, and W. C. Lindsey. *Digital Communication Techniques: signal design and detection*. PTR Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.

[18] M. Schwartz, W. R. Bennett, and S. Stein. *Communication Systems and Techniques*. IEEE Press, Piscataway, NJ, 1996.

[19] J. G. Proakis. Probabilities of error for adaptive reception of M-phase signals. *IEEE Transactions on Communication Technology*, 16(1):71–81, 1968.

[20] J. G. Proakis. *Digital Communications*. McGraw-Hill Higher Education, New York, 2001.

[21] G. Fraidenraich, J. C. S. Santos Filho, and M. D. Yacoub. Second-order statistics of maximal-ratio and equal-gain combining in hoyt fading. *Communications Letters, IEEE*, 9(1):19–21, 2005.

[22] Caijun Zhong, Shi Jin, T. Ratnarajah, and Kai-Kit Wong. On the capacity of non-uniform phase mimo nakagami-m fading channels. *IEEE Communications Letters*, 14(6):536–538, 2010.

[23] K. A. Hamdi. Analysis of ofdm over nakagami-m fading with nonuniform phase distributions. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 11(2):488–492, 2012.

[24] S. Tsai. Markov characterization of the hf channel. *Communication Technology, IEEE Transactions on*, 17(1):24–32, 1969.

[25] D. T. Hess. Cycle slipping in a first-order phase-locked loop. *Communication Technology, IEEE Transactions on*, 16(2):255–260, 1968.

[26] R. G. Vaughan. Signals in mobile communications: A review. *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, 35(4):133–145, 1986.

[27] S. O. Rice. Noise in fm receivers. *Time series analysis*, pages 395–422, 1963.

[28] I. Bar-David and S. Shamai. On the rice model of noise in fm receivers. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 34(6):1406–1419, 1988.

[29] B. R. Davis. Random fm in mobile radio with diversity. *Communication Technology, IEEE Transactions on*, 19(6):1259–1267, 1971.

[30] F. Adachi and J. D. Parsons. Random fm noise with selection combining. *Communications, IEEE Transactions on*, 36(6):752–750, 1988.

[31] M. Lecours, M. Têtu, A. Chefaoui, J. Ahern, and A. Michaud. Phase measurements and characterization of mobile radio channels. *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, 45(1):105–113, 1996.

[32] N. Youssef, W. Elbahri, M. Patzold, and S. Elasmi. On the crossing statistics of phase processes and random fm noise in nakagami-q mobile fading channels. *Wireless Communications, IEEE Transactions on*, 4(1):24–29, 2005.

[33] D. B. Costa, M. D. Yacoub, and G. Fraindenraich. Generalized phase crossing rate and random fm noise for weibull fading channels. In *Microwave and Optoelectronics, 2005 SBMO/IEEE MTT-S International Conference on*, pages 509–512, 2005.

[34] D. B. Costa, M. D. Yacoub, J. C. S. Santos Filho, G. Fraidenraich, and J. R. Mendes. Generalized nakagami-m phase crossing rate. *Communications Letters, IEEE*, 10(1):13–15, 2006.

[35] D. B. Costa, J. C. S. S. Filho, M. D. Yacoub, and G. Fraidenraich. Second-order statistics of η-μ fading channels: Theory and applications. *Wireless Communications, IEEE Transactions on*, 7(3):819–824, 2008.

[36] A. K. Papazafeiropoulos and S. A. Kotsopoulos. Generalized phase-crossing rate and random fm noise for α-μ fading channels. *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, 59 (1):494–499, 2010.

[37] B Chytil. The distribution of amplitude scintillation and the conversion of scintillation indices. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, 29(9):1175–1177, 1967.

[38] K. Bischoff and B. Chytil. A note on scintillation indices. *Planetary and Space Science*, 17 (5):1059–1066, 1969.

[39] M. K. Simon and M.-S. Alouini. A unified approach to the performance analysis of digital communication over generalized fading channels. *Proceedings of the IEEE*, 86(9):1860–1877, 1998.

[40] A. Mehrnia and H. Hashemi. Mobile satellite propagation channel. part ii-a new model and its performance. In *Vehicular Technology Conference, 1999. VTC 1999-Fall. IEEE VTS 50th*, volume 5, pages 2780–2784. IEEE, 1999.

[41] Cheng-Xiang Wang, N. Youssef, and M. Patzold. Level-crossing rate and average duration of fades of deterministic simulation models for nakagami-hoyt fading channels. In *Wireless Personal Multimedia Communications, 2002. The 5th International Symposium on*, volume 1, pages 272–276. IEEE, 2002.

[42] K. T. Hemachandra and N. C. Beaulieu. Simple expressions for the ser of dual mrc in correlated nakagami-q (hoyt) fading. *Communications Letters, IEEE*, 14(8):743–745, 2010.

[43] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions: With Formulars, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, Incorporated, New York, 1972.

[44] M. D. Yacoub, J. E. V. Bautista, and L. G. R. Guedes. On higher order statistics of the nakagami-m distribution. *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, 48(3):790–794, 1999.

[45] M. D. Yacoub. The η- μ; distribution: a general fading distribution. In *Vehicular Technology Conference, 2000. IEEE-VTS Fall VTC 2000. 52nd*, volume 2, pages 872–877, 2000.

[46] J. C. S. Santos Filho and M. D. Yacoub. Highly accurate η-μ; approximation to the sum of m independent nonidentical hoyt variates. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 4:436–438, 2005.

[47] A. A. Galiza Nunes and J. C. S. Santos Filho. Design and analysis of an efficient simulation scheme for α-μ fading channels. In *Proc. International Workshop on Telecommunications (IWT)*, Santa Rita do Sapucaí, Brazil, May 2013.

[48] J. C. S. Santos Filho, B. V. Teixeira, M. D. Yacoub, and G. T. F. de Abreu. The rm^2 nakagami fading channel simulator. *Wireless Communications, IEEE Transactions on*, 12 (5):2323–2333, May 2013.

Apêndice A

Taxa de Cruzamento de Fase – Formato 2

Nesta seção serão apresentados as estatísticas de segunda ordem para a distribuição η-μ no Formato 2. Seguindo os procedimentos listados no Capítulo 6, definiram-se, primeiramente, o desvio padrão de $\dot{X}$ e de $\dot{Y}$

$$\sigma_{\dot{X}}^2 = \pi f_m \sigma \sqrt{2(1-\eta)} \tag{A.1}$$

$$\sigma_{\dot{Y}}^2 = \pi f_m \sigma \sqrt{2(1+\eta)}. \tag{A.2}$$

Fazendo as devidas substituições, denota-se a FDP conjunta $f_{X,\dot{X},Y,\dot{Y}}(x,\dot{x},y,\dot{y})$ por

$$f_{X,\dot{X},Y,\dot{Y}}(x,\dot{x},y,\dot{y}) = \frac{(1-\eta)^{-\mu(1+p)}(1+\eta)^{-\mu(1-p)}\left|x\right|^{2\mu(1+p)-1}\left|y\right|^{2\mu(1-p)-1}}{4^{\mu+1}\pi^3\hat{r}^{4\mu+2}f_m^2\sqrt{1-\eta^2}\Gamma(\mu(1-p))\Gamma(\mu(1+p))} \times \exp\left(-\frac{1}{2\hat{r}^2}\left(\frac{x^2}{1-\eta}+\frac{y^2}{1+\eta}\right)-\frac{1}{4\hat{r}^2\pi^2 f_m^2}\left(\frac{\dot{x}^2}{1-\eta}+\frac{\dot{y}^2}{1+\eta}\right)\right). \tag{A.3}$$

Assim, reescrevendo X, Y, $\dot{X}$ e $\dot{Y}$ em termos da envoltória R, da fase Θ e das respectivas derivadas no tempo $\dot{R}$ e $\dot{\Theta}$ como $X = R\cos(\Theta)$, $Y = R\sin(\Theta)$, $\dot{X} = \dot{R}\cos(\Theta) - R\dot{\Theta}\sin(\Theta)$ e $\dot{Y} = \dot{R}\sin(\Theta) + R\dot{\Theta}\cos(\Theta)$, define-se a FDP conjunta como

$$f_{R,\dot{R},\Theta,\dot{\Theta}}(r,\dot{r},\theta,\dot{\theta}) = \frac{r^{4\mu}(1-\eta)^{-u(1+p)}(1+\eta)^{-u(1-p)}\left|\sin(\theta)\cos(\theta)\right|^{2\mu-1}\left|\tan(\theta)\right|^{-2\mu p}}{4^{\mu+1}\pi^3\hat{r}^{4\mu+2}f_m^2\sqrt{1-\eta^2}\,\Gamma(\mu(1-p))\Gamma(\mu(1+p))} \times \exp\left(-\frac{1}{4\hat{r}^2\pi^2 f_m^2}\left(\frac{(\dot{r}\cos(\theta)-r\dot{\theta}\sin(\theta))^2}{1-\eta}+\frac{(\dot{r}\sin(\theta)+r\dot{\theta}\cos(\theta))^2}{1+\eta}\right)\right) \times \exp\left(-\frac{1}{2\hat{r}^2}\left(\frac{r^2\cos^2(\theta)}{1-\eta}+\frac{r^2\sin^2(\theta)}{1+\eta}\right)\right). \tag{A.4}$$

Em seguida, integrando a Equação (A.4) nos devidos intervalos, obtem-se as FDPs conjuntas $f_{R,\Theta,\dot{\Theta}}(r,\theta,\dot{\theta})$ e $f_{\Theta,\dot{\Theta}}(\theta,\dot{\theta})$ dadas, respectivamente, por

$$f_{R,\Theta,\dot{\Theta}}(r,\theta,\dot{\theta}) = \frac{2^{-2\mu-1} r^{4\mu} (1-\eta)^{-\mu(1+p)} (1+\eta)^{-\mu(1-p)} |\sin(\theta)|^{2\mu(1-p)-1} |\cos(\theta)|^{2\mu(1+p)-1}}{\pi^{3/2} f_m \hat{r}^{4\mu+1} \sqrt{1+\eta\cos(2\theta)}\Gamma(\mu(1+p))\Gamma(\mu(1-p))}$$
$$\times \exp\left(\frac{r^2 \left(\pi^2 f_m^2 \eta^2 \cos(4\theta) + \pi^2 f_m^2 \eta^2 + 4\pi^2 f_m^2 \eta \cos(2\theta) + 2\pi^2 f_m^2 - \eta^2 \phi^2 + \phi^2\right)}{4\pi^2 f_m^2 \hat{r}^2 (\eta-1)(\eta+1)(1+\eta\cos(2\theta))}\right) \quad (A.5)$$

$$f_{\Theta,\dot{\Theta}}(\theta,\dot{\theta}) = \frac{2^{2\mu-1} \pi^{4\mu-\frac{1}{2}} f_m^{4\mu} \Gamma\left(2\mu+\frac{1}{2}\right) |\sin(\theta)|^{2\mu(1-p)-1} |\cos(\theta)|^{2\mu(1+p)-1}}{(1-\eta)^{\mu(1+p)} (1+\eta)^{\mu(1-p)} \sqrt{1+\eta\cos(2\theta)}\Gamma(\mu(1+p))\Gamma(\mu(1-p))}$$
$$\times \left(-\frac{\pi^2 f_m^2 \eta^2 \cos(4\theta) + \pi^2 f_m^2 \eta^2 + 4\pi^2 f_m^2 \eta \cos(2\theta) + 2\pi^2 f_m^2 - \eta^2 \phi^2 + \phi^2}{(\eta^2-1)(\eta\cos(2\theta)+1)}\right)^{-2\mu-\frac{1}{2}} \quad (A.6)$$

Com isso, substituindo (A.6) em (6.1), encontra-se a equação para a PCR, definida por

$$N_\Theta(\theta) = \frac{f_m \sqrt{\pi} \left(1-\eta^2\right)^{2\mu-\frac{1}{2}} (1-\eta)^{-\mu(1+p)} \Gamma\left(2\mu+\frac{1}{2}\right) |\sin(\theta)|^{2\mu(1-p)-1} |\cos(\theta)|^{2\mu(1+p)-1}}{\sqrt{2}(4\mu-1)(1+\eta)^{\mu(1-p)}(1+\eta\cos(2\theta))^{2\mu-1}\Gamma(\mu(1+p))\Gamma(\mu(1-p))}. \quad (A.7)$$

Para obter a PCR para o Formato 1, basta utilizar a relação entre formatos dada pela Equação (3.38).

Finalmente, para obter as PCRs nas condições Gaussianas, basta substituir $p = \frac{1}{2\mu} - 1$ (Gaussiana em fase) na Equação (A.7), resultando em

$$N_\Theta(\theta) = \frac{f_m (1+\eta)^{\frac{1}{2}-2\mu} \left(1-\eta^2\right)^{2\mu-\frac{1}{2}} \Gamma\left(2\mu+\frac{1}{2}\right) |\sin(\theta)|^{4\mu-2} (\eta\cos(2\theta)+1)^{1-2\mu}}{\sqrt{2}(1-\eta)^{\frac{1}{2}}(4\mu-1)\Gamma\left(2\mu-\frac{1}{2}\right)}. \quad (A.8)$$

E fazendo $p = 1 - \frac{1}{2\mu}$ (Gaussiana em quadratura), a PCR é denotada por

$$N_\Theta(\theta) = \frac{f_m (1-\eta)^{\frac{1}{2}-2\mu} \left(1-\eta^2\right)^{2\mu-\frac{1}{2}} \Gamma\left(2\mu+\frac{1}{2}\right) |\cos(\theta)|^{4\mu-2} (\eta\cos(2\theta)+1)^{1-2\mu}}{\sqrt{2}(1+\eta)^{\frac{1}{2}}(4\mu-1)\Gamma\left(2\mu-\frac{1}{2}\right)} \quad (A.9)$$