

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
DEPARTAMENTO DE COMUNICAÇÕES

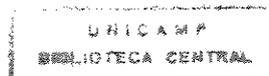
MÉTODOS CONSTRUTIVOS E CAPACIDADE DE  
CÓDIGOS DE ESTADOS FINITOS

Carlos Alberto Moller Pingarilho

Orientador  
Prof. Dr. Helio Waldman

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade  
Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para obtenção do  
Título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Campinas, julho de 1995



UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	T/UNICAMP
	P654m
V.	Ex.
TOMBO BC/	26975
PROC.	66796
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	12/3/96
N.º CPD	

CM-00084803-2

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

P654m Pingarilho, Carlos Alberto Moller  
Métodos construtivos e capacidade de códigos de estados finitos. / Carlos Alberto Moller Pingarilho.-- Campinas, SP: [s.n.], 1995.

Orientador: Helio Waldman.  
Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica.

1. Teoria da codificação. 2. Teoria da informação.  
3. Entropia (Teoria da informação). 4. Modulação digital.  
I. Waldman, Helio. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica. III. Título.

## SUMÁRIO

Neste trabalho, é apresentada uma extensa descrição do algoritmo dos blocos deslizantes e de uma técnica de determinação do espectro de códigos de bloco.

São descritas as características básicas e são introduzidos os conceitos iniciais da restrição  $(d, N)$ . Então é aplicado o algoritmo dos blocos deslizantes para procurar códigos  $(d, N)$ . A técnica de determinação de espectro de códigos de bloco é aplicada sobre os códigos  $(d, N)$  encontrados, bem como sobre as restrições para se verificar os espectros maxentrópicos (de máxima entropia).

Numa segunda parte, são determinados limitantes inferiores e tetos nas taxas assintóticas alcançáveis, dada uma distância relativa mínima de Hamming, auxiliando a busca de códigos em espaços restritos com capacidade de correção de erro.

## ABSTRACT

This work presents a full description of the sliding block algorithm and of the Cariolaro-Tronca method for the determination of block code spectra.

The  $(d, N)$  constraint basic characteristics and concepts are introduced. Then the sliding block algorithm is applied to search for  $(d, N)$  codes, and spectra for some  $(d, N)$  codes are obtained.

In a second part, lower and upper bounds on the minimum Hamming distance achievable with RLL and DC-free constraint are described and calculated.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>TÉCNICA SISTEMÁTICA PARA OBTENÇÃO DE CÓDIGOS DE ESTADOS FINITOS</b>	<b>3</b>
2.1	Introdução . . . . .	3
2.2	Definições Importantes . . . . .	4
2.3	Divisão de Estados . . . . .	9
2.3.1	Divisão Básica . . . . .	11
2.3.2	Obtenção de Autovetores Aproximados . . . . .	13
2.3.3	Divisão de Estados $v$ -consistente . . . . .	19
2.4	Fusão de Estados . . . . .	22
2.5	Avaliação Espectral de Códigos de Bloco . . . . .	24
2.6	Conclusão . . . . .	29
<b>3</b>	<b>CÓDIGOS DE DISPARIDADE FINITA</b>	<b>31</b>
3.1	Introdução . . . . .	31
3.2	Supressão Espectral na Componente DC . . . . .	32
3.3	A Restrição $(d, N)$ . . . . .	33
3.3.1	Códigos Binários . . . . .	34
3.3.2	Códigos Ternários . . . . .	38
3.4	Espectro Maxentrópico . . . . .	42
3.5	Uma Restrição Reforçada . . . . .	44
3.6	Códigos de Janelas Deslizantes . . . . .	47
<b>4</b>	<b>LIMITANTES DA CAPACIDADE DE CORREÇÃO DE ERROS DE CÓDIGOS EM ESPAÇOS RESTRITOS</b>	<b>55</b>
4.1	Introdução . . . . .	55
4.2	Definições . . . . .	56
4.3	Limitantes Inferiores . . . . .	57
4.3.1	O Limitante Inferior de Gilbert-Varshamov . . . . .	58
4.3.2	O Limitante Inferior de Kolesnik-Krachkovsky . . . . .	58
4.3.3	O Limitante Inferior de Marcus-Roth . . . . .	65

4.4	Limitantes Superiores . . . . .	67
4.4.1	O Limitante Superior de Plotkin . . . . .	67
4.4.2	O Limitante Superior de Hamming . . . . .	68
4.4.3	O Limitante Superior de Hamming-Plotkin . . . . .	69
4.5	Conclusões . . . . .	70
<b>5</b>	<b>TAXAS ASSINTÓTICAS E LIMITANTES</b>	<b>72</b>
5.1	Introdução . . . . .	72
5.2	Método Combinatório para Cálculo de Taxas Assintóticas . . .	73
5.2.1	Taxas Assintóticas de Esferas com Centros de Distância Típica Máxima . . . . .	75
5.2.2	Taxas Assintóticas de Esferas com Centros de Distância Típica Mínima . . . . .	89
5.3	Limitantes para a Restrição $(d, k) = (0, 1)$ . . . . .	98
5.4	Outros Limitantes Inferiores . . . . .	103
5.4.1	Reforçando Restrições . . . . .	106
5.4.2	O Limitante Inferior de Gilbert e Varshamov . . . . .	110
5.4.3	O Limitante Inferior de Kolesnik e Krachkovsky . . . . .	110
5.4.4	O Limitante Inferior de Marcus e Roth . . . . .	112
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>122</b>

# Lista de Figuras

2.1	Relação entre $A_G$ e $G$ . . . . .	6
2.2	Máquina de Estados Codificadora . . . . .	7
2.3	FSTD $G$ e $G^2$ da restrição DC-free com desbalanço $m=2$ . . . . .	10
2.4	Codificador de Manchester . . . . .	10
2.5	Divisão de Estados, Caso 1 . . . . .	11
2.6	Divisão de Estados, Caso 2 . . . . .	12
2.7	Divisão de Estados, Caso 3 . . . . .	12
2.8	Matriz de Transição de Estados Antes e Depois da Divisão . . . . .	13
2.9	Fluxograma do Algoritmo de Franaszek . . . . .	15
2.10	FSTD da restrição RLL (1,2) . . . . .	16
2.11	FSTD genérico . . . . .	23
2.12	FSTD genérico após fusão $\mathbf{v}$ -consistente . . . . .	24
2.13	FSTD da restrição DC-free ternário com desbalanço $m=3$ . . . . .	26
2.14	Exemplo de Espectro de Amplitude Maxentrópico . . . . .	30
3.1	Espectro de Potência Maxentrópico da Restrição $(d, N)$ Binária . . . . .	41
3.2	Espectro de Potência Maxentrópico da Restrição $(d, N)$ Ternária . . . . .	42
3.3	Espectro de Potência Maxentrópico da Restrição $(d, N) = (1, 5)$ Reforçada . . . . .	43
3.4	Espectro do Código $(d, N) = (1, 5)$ Taxa 5/9 . . . . .	45
3.5	Espectro do Código $(d, N) = (1, 5)$ Taxa 4/7 . . . . .	52
3.6	Espectro do Código $(d, N) = (1, 5)$ Taxa 3/5 . . . . .	53
3.7	Vales Espectrais . . . . .	54
4.1	FSTD da restrição RLL (0,1) . . . . .	62
5.1	Treliça Representando Centro $\mathbf{x} = (01)^{\frac{n}{2}}$ da Restrição RLL (0,1) . . . . .	75
5.2	Início de um Evento de Erro com Centro $\mathbf{x} = (01)^{\frac{n}{2}}$ da Restrição RLL (1,2) . . . . .	78
5.3	Interstício em um Evento de Erro com Centro $\mathbf{x} = (01)^{\frac{n}{2}}$ da Restrição RLL (1,2) . . . . .	78
5.4	Fim de um Evento de Erro com Centro $\mathbf{x} = (01)^{\frac{n}{2}}$ da Restrição RLL (1,2) . . . . .	79

5.5	FSTD da Restrição RLL (1, 3) . . . . .	80
5.6	Evento de Erro do Tipo 1 para a Restrição RLL (1, 3) . . . . .	82
5.7	Início de Um Evento de Erro do Tipo 2 da Restrição RLL (1, 3) . . . . .	82
5.8	Ocorrência de 0001 em Um Evento de Erro do Tipo 2 na Restrição RLL (1, 3) . . . . .	83
5.9	Ocorrência de 01 em Um Evento de Erro do Tipo 2 na Restrição RLL (1, 3) . . . . .	83
5.10	Fim de Um Evento de Erro do Tipo 2 da Restrição RLL (1, 3) . . . . .	86
5.11	Superfícies Esféricas da Restrição RLL (1, 3) com Centro $x = 010101\dots$ . . . . .	86
5.12	Superfícies Esféricas da Restrição RLL (2, 4) com Centro $x = 001001001\dots$ . . . . .	90
5.13	Treliça Representando Centro $x = (01)^{\frac{n}{2}}$ da Restrição RLL (0, 1) . . . . .	91
5.14	Superfícies Esféricas da Restrição RLL (0, 1) com Centros $x = 010101\dots$ e $x = 111\dots$ . . . . .	92
5.15	Início de um Evento de Erro com Centro $x = (001)^{\frac{n}{3}}$ da Restrição RLL (1, 2) . . . . .	94
5.16	Segunda Palavra 01 em um Evento de Erro com Centro $x = (001)^{\frac{n}{3}}$ da Restrição RLL (1, 2) . . . . .	94
5.17	Fim de um Evento de Erro com Centro $x = (001)^{\frac{n}{3}}$ da Restrição RLL (1, 2) . . . . .	94
5.18	Erros a Partir do Centro $x = (001)^{\frac{n}{3}}$ na Restrição RLL (1, 2), no Primeiro Interstício . . . . .	95
5.19	Erros a Partir do Centro $x = (001)^{\frac{n}{3}}$ na Restrição RLL (1, 2), no Segundo Interstício . . . . .	95
5.20	Superfícies Esféricas da Restrição RLL (1, 2) com Centros $x = 010101\dots$ e $x = 001001001\dots$ . . . . .	97
5.21	Passos de Tamanho 2 na Treliça da Restrição RLL (0, 1) . . . . .	98
5.22	Limitantes Inferiores e Superiores da Restrição RLL (0, 1) . . . . .	104
5.23	FSTD da Restrição DC-free com Desbalanço $m = 3$ , Primitivo . . . . .	105
5.24	FSTD da Restrição DC-free com Desbalanço $m = 5$ , Primitivo . . . . .	106
5.25	Treliça da Restrição $m=3$ DC-Free . . . . .	107
5.26	Células da Restrição DC-free com $m=3$ Reforçada de Tamanho $N=4$ e $N=6$ . . . . .	114
5.27	Limitantes Inferiores de Gilbert e Varshamov da Restrição DC-free com $m = 3$ , Reforçada com Células de Comprimento 4, 6, 8 e 10 . . . . .	114
5.28	Limitantes Inferiores de Kolesnik e Krachkovsky da Restrição DC-free com $m = 3$ , Reforçada com Células de Comprimento 6, 8 e 10 . . . . .	115
5.29	Melhores Limitantes Inferiores de Esferas Reforçadas da Restrição DC-free com $m = 3$ . . . . .	116

5.30	Melhores Limitantes Inferiores de Gilbert e Varshamov da Restrição DC-free com $m = 3$ . . . . .	117
5.31	Melhores Limitantes Inferiores de Kolesnik e Krachkovsky da Restrição DC-free com $m = 3$ . . . . .	118
5.32	Melhores Limitantes Inferiores da Restrição DC-free com $m = 3$	119
5.33	Limitante Inferior de Kolesnik e Krachkovsky da Restrição DC-free com $m = 4$ . . . . .	120
5.34	Limitante Inferior de Marcus e Roth da Restrição DC-free com $m = 5$ . . . . .	121

# Lista de Tabelas

3.1	Número de Estados para Algumas Restrições $(d, N)$ Binárias Antes da Redução . . . . .	34
3.2	Número de Estados para Algumas Restrições $(d, N)$ Binárias Após Redução . . . . .	35
3.3	Capacidade de Shannon de Várias Restrições $(d, N)$ Binárias .	37
3.4	Número de Estados Reduzido para Várias Restrições $(d, N)$ Ternárias . . . . .	39
3.5	Codificador da Restrição $(d, N) = (1, 5)$ Reduzida com Taxa 4:7	46
3.6	Árvore de Decodificação da Restrição $(d, N) = (1, 5)$ Reduzida com Taxa 4:7 . . . . .	48
3.7	Codificador da Restrição $(d, N) = (1, 5)$ Reduzida com Taxa 5:9	49
3.8	Árvore de Decodificação da Restrição $(d, N) = (1, 5)$ Reduzida com Taxa 5:9 . . . . .	50
3.9	Codificador da Restrição $(d, N) = (1, 5)$ com Taxa 3:5 . . . . .	50
3.10	Árvore de Decodificação da Restrição $(d, N) = (1, 5)$ com Taxa 3:5 . . . . .	51
3.11	Árvore de Decodificação . . . . .	51
5.1	Valores Relativos a Esfera com Centro $\mathbf{x} = (01)^{\frac{N}{2}}$ da Restrição RLL $(1, 3)$ . . . . .	82
5.2	Valores Relativos à Esfera com Centro $\mathbf{x} = (01)^{\frac{N}{2}}$ da Restrição RLL $(2, 4)$ . . . . .	85
5.3	Exemplo de Esferas de Raio Não Assintótico . . . . .	100
5.4	Polinômios de Distribuições de Distâncias . . . . .	108

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

Várias aplicações no campo de transmissão digital e armazenamento de dados requerem o uso de códigos que satisfaçam determinadas propriedades espectrais.

Canais de gravação magnética digital utilizando modulação por posição de pulsos empregam códigos RLL (runlength limited) para formatar o sinal, limitando o conteúdo em baixas frequências para auxiliar a extração do relógio e limitando o conteúdo em altas frequências para reduzir a interferência intersimbólica.

Códigos RLL são obtidos de restrições RLL relacionadas a dois parâmetros ( $d$  e  $k$ ) onde  $d$  e  $k$  são respectivamente o mínimo e o máximo número de 0's entre dois 1's consecutivos. O parâmetro inferior  $d$  assegura que transições não ocorram tão próximas reduzindo a interferência intersimbólica. O parâmetro superior  $k$  garante a ocorrência de transições com uma frequência suficiente para que o sincronismo da informação possa ser retirado da cadeia de dados.

Seja uma sequência  $\mathbf{x}$  de comprimento  $n$  qualquer pertencente a um espaço restrito  $\chi^n$ . Diz-se que este espaço restrito representa a restrição DC-free de disparidade  $m$  se para todo  $t \leq n$ :

$$m = \max_{\mathbf{x}_1 \in \chi^n} SDC(t, \mathbf{x}_1) - \min_{\mathbf{x}_2 \in \chi^n} SDC(t, \mathbf{x}_2)$$

onde  $SDC(\cdot)$  denota a soma digital corrida, dada por:

$$SDC(t, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^t (2x_j - 1) \quad \text{com } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

e

$$x_i \in \{0, 1\}$$

e a disparidade  $m$  é a máxima variação da soma digital corrida. Esse confinamento da soma digital corrida garante um nulo espectral na componente DC do espectro do código [9].

Este trabalho está dividido em duas partes. A primeira, composta dos Capítulos 2 e 3 está concentrada na construção de códigos de conformação espectral, chamados  $(d, N)$ . A segunda parte trata de limitantes assintóticos nas taxas alcançáveis de códigos em espaços restritos dada uma distância de Hamming relativa mínima  $\delta = d/n$  onde  $d$  é a distância de Hamming (absoluta) mínima e  $n \rightarrow \infty$  o comprimento das palavras código.

No Capítulo 2 é introduzida a técnica do algoritmo dos blocos deslizantes e alguns conceitos básicos sobre capacidade de restrições, grafos, teoria de matrizes não-negativas e espectro de códigos de bloco.

No Capítulo 3 a restrição  $(d, N)$  é definida e os conceitos apresentados no Capítulo 2 são utilizados para a obtenção de códigos com taxas notáveis, e seus espectros são avaliados.

No Capítulo 4 são apresentados os principais limitantes inferiores e superiores sobre as taxas alcançáveis por códigos corretores de erro em espaços restritos, e no Capítulo 5 eles são calculados para as restrições RLL e DC-free, e comparados.

No Capítulo 6 são apresentadas algumas conclusões relativas às duas partes do trabalho, e propostas para futuros trabalhos são apresentadas.

## Capítulo 2

# TÉCNICA SISTEMÁTICA PARA OBTENÇÃO DE CÓDIGOS DE ESTADOS FINITOS

### 2.1 Introdução

Informações a serem transmitidas em um sistema de banda-base devem ser codificadas em uma sequência de símbolos que seja ajustada ao próprio canal. Observa-se que para este tipo de informação, meios de gravação magnética e óptica são também considerados de transmissão.

A estrutura de tais códigos é dominada pelo conjunto de imposições das características do canal. Os códigos de comprimento serial limitado RLL (do inglês Runlength Limited) e os códigos com componente espectral nula em DC tem tido muita ênfase nos últimos anos, se ajustando perfeitamente para esta categoria de transmissão. Neste capítulo será apresentada uma técnica sistemática para a obtenção deste tipo de código que há até algum tempo era projetado de maneira não sistemática, ou seja, através de propostas engenhosas (invenções).

## 2.2 Definições Importantes

Nesta Seção serão apresentadas algumas definições importantes para o entendimento deste assunto. Uma vantagem de se utilizar códigos de bloco é a facilidade com que eles podem ser analisados computacionalmente para que suas propriedades sejam comparadas.

Este tipo de código é modelado matematicamente como um sistema que faz parte do conjunto da dinâmica simbólica, isto é, espaços invariantes ao deslocamento em sequências infinitas de um alfabeto finito de símbolos determinados. O termo sistema dinâmico deve-se ao fato de tais espaços serem compostos por órbitas discretas no tempo, cada órbita consistindo de uma sucessão de sequências deslocadas. Tais sistemas são chamados sistemas do tipo finito quando há uma lista finita de blocos proibidos.

Quando se pode mapear um conjunto  $X$  em um conjunto  $Y$  ( $X \rightarrow Y$ ), com cada elemento do conjunto  $X$  sendo de comprimento  $p$ , e de  $Y$ , de comprimento  $q$ . A taxa de codificação  $r$  é igual a  $p/q$ . A entropia topológica é caracterizada como a taxa de crescimento, com  $n \rightarrow \infty$ , do número de cadeias diferentes de comprimento  $n$  aparecendo na sequência infinita de um sistema simbólico. Este sistema  $Y$  passará a ser chamado de sistema restrito.

Segundo o teorema de codificação sem ruído de Shannon, a codificação só é possível quando a entropia topológica de  $X$  é menor ou igual que a de  $Y$ . Shannon chamou  $Y$  de canal e sua entropia topológica de capacidade de canal  $c(S)$ .

Tal sistema pode ser representado por um grafo direcionado finito  $G$  com estados  $V(G)$ , ramos  $E(G)$ , e rótulos  $L : E \rightarrow \Sigma$  para algum alfabeto finito  $\Sigma$ . Um grafo é dito determinístico se para cada estado  $v$  pertencente a  $V(G)$ , os ramos saindo de  $v$  tem rótulos distintos. Todo sistema restrito tem uma representação determinística [30].

Um grafo  $G$  é dito sem perdas se quaisquer dois percursos distintos com os mesmos estados inicial e terminal tem rotulações diferentes. Note-se que um grafo determinístico é do tipo sem perdas. Seja um grafo  $G$  e um estado  $\mu \in V(G)$ , o conjunto seguidor  $F_G(\mu)$  é o conjunto de palavras geradas por percursos em  $G$  que começam em  $\mu$ .

Pode-se dizer que  $G'$  é irredutível ou fortemente conectado se existe um percurso em  $G$ , começando em  $\mu$  e terminando em  $v$ , para todo  $\mu, v \in V(G)$ . Portanto, uma componente

irredutível  $G'$  de  $G$  é um subgrafo de  $G$  tendo conjunto de estados  $V(G')$  cujos ramos  $E(G')$  vão de  $V(G')$  para  $V(G')$ .

Conhecendo-se o conceito de grafo, pode-se então conceituar matriz de adjacências  $A_G = [(A_G)_{\mu,v}]$ , que está diretamente relacionada a  $G$  como sendo uma matriz quadrada  $|V(G)| \times |V(G)|$  com entradas  $(A_G)_{\mu,v}$  dadas pelo número de ramos partindo do estado  $\mu$ , e indo para o estado  $v$ . Pode-se notar, a partir do conceito de matriz de adjacências e da Figura 2.1, que  $(A_G)^k = A_{G^k}$ . Por definição,  $A_G$  tem todas suas componentes maiores ou iguais a 0, sendo então dita não negativa.

$$A_G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_G^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Uma matriz quadrada não negativa é dita irredutível se e somente se para todo  $\mu$  e  $v$  existe um  $m$  tal que  $(A^m)_{\mu,v} > 0$ . Obrigatoriamente,  $G$  é irredutível se  $A_G$  também o for. Sendo  $A_G$  uma matriz quadrada não negativa e  $n$  um inteiro positivo,  $\mathbf{x}$  um vetor inteiro não negativo será dito autovetor aproximado associado a  $n$ , se  $A\mathbf{x} \geq n\mathbf{x}$ , com  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .  $A\mathbf{x} \geq n\mathbf{x}$  significa que a condição  $\{A\mathbf{x}\}_i \geq \{n\mathbf{x}\}_i$ , é válida para todo  $i$ . Relativamente aos autovalores de  $A$ , são válidos os seguintes Teoremas provados em [4], [28] e [30]:

**Teorema 2.1** (Perron-Frobenius): Seja  $A$  uma matriz não negativa e irredutível:

- O máximo autovalor de  $A$ ,  $\lambda(A)$ , tem multiplicidade 1, sendo

$$\min_i \sum_j (A)_{i,j} \leq \lambda(A) \leq \max_i \sum_j (A)_{i,j}.$$

- Associado a este máximo autovalor existe um autovetor aproximado  $\mathbf{x}$ , com todas componentes positivas.

**Teorema 2.2** (Perron-Frobenius): Seja  $G$  um grafo determinístico representando um siste-

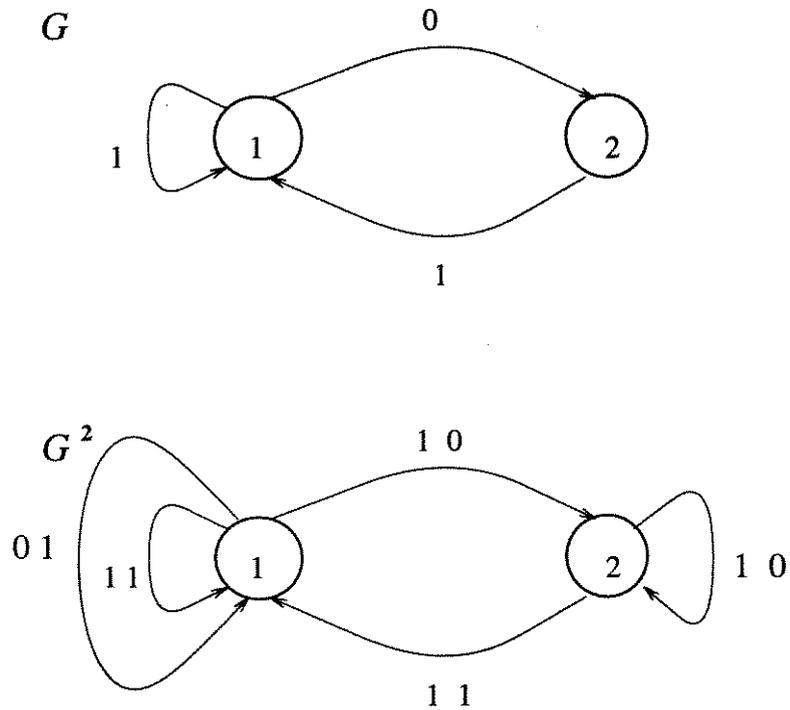


Figura 2.1: Relação entre  $A_G$  e  $G$

ma restrito  $S(G)$ , e  $n$  um inteiro positivo, então:

- $c(S) = \log \lambda(A_G)$ , onde  $\lambda(A_G)$  é o máximo autovalor de  $A_G$ .
- $c(S) \geq \log n \iff \lambda(A_G) \geq n$ , então existe pelo menos um  $x$  tal que  $A_G x \geq nx$ .

Esses Teoremas são provados em [4] e [28]

A cobertura de Shannon  $G_S$  de um sistema restrito irreduzível  $S$  é um grafo determinístico, que representa  $S$  com o menor número de estados. A cobertura de Shannon  $G_S$ , salvo os isomorfismos, é o único grafo determinístico irreduzível que representa  $S$  e para o qual os conjuntos seguidores de estados distintos são diferentes.

A partir de agora, o sistema restrito  $S$  passará a ser chamado de código, e grafo  $G$  de diagrama de transição de estado finito FSTD (do inglês *finite state transition diagram*).

Um codificador de estados finitos com taxa  $p : q$  aceita como entrada blocos de  $p$  bits e gera uma palavra código, de  $q$  bits, dependente do bloco de entrada e do estado atual do codificador, conforme Figura 2.2.

O decodificador é o inverso do codificador, extraindo a sequência de estados seguida pelo

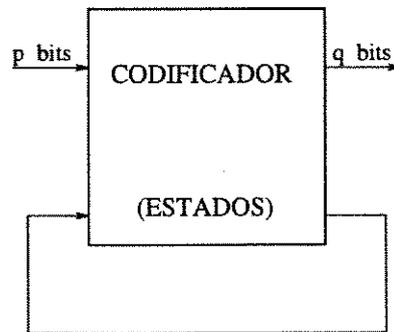


Figura 2.2: Máquina de Estados Codificadora

codificador ao gerar a sequência codificada. Este tipo de decodificador considerado de desempenho razoável, chamado dependente de estados, aceita como entrada palavras código de comprimento  $q$  e gera blocos de  $p$  bits dependendo do estado interno, que deve ser uma imitação do codificador. Um erro na entrada deste tipo de decodificador pode causar uma perda da trilha de sequência de estados do codificador, não garantindo a extração correta da informação transmitida e com a possibilidade de propagação ilimitada de erros. Decodificadores que permitem uma propagação ilimitada de erros são ditos catastróficos. Portanto, o decodificador necessita ter limitada tal propagação de erros.

Decodificadores que limitam a propagação de erros são ditos não-catastróficos. Na prática, para se ter estes erros limitados na saída, é preferível se ter um decodificador de janelas deslizantes. Este decodificador, para tomar uma decisão, necessita da palavra código a ser decodificada, de  $m$  palavras anteriores a ela, e de  $a$  palavras posteriores. Os símbolos anteriores constituem a memória  $m$  do decodificador e os posteriores a antecipação  $a$ . Portanto, a janela de decodificação  $w$  (do inglês *window*), é constituída de  $m + a + 1$  palavras código, o que limita a ocorrência de erros causados por um erro de transmissão a  $m + a + 1$  palavras ou blocos de informação no máximo.

Além disso, é desejável que o código seja eficiente, onde eficiência  $\eta$  é a relação entre a taxa  $r$  do codificador e a capacidade de Shannon  $c(S)$ . Nos anos 60 e 70 [23]-[26] era sabido que  $r < c$  era alcançável. No entanto, a eficiência não chegaria necessariamente a 100%. Nos anos 80, Adler, Coppersmith e Hassner [28] introduziram uma técnica com a qual foi provado que, caso a capacidade de Shannon seja um número racional  $c(S) = p/q$ , é possível se projetar um

codificador com eficiência de 100%.

Quanto à periodicidade, se  $G^q$  é irredutível para toda potência  $q \geq 1$ , então  $G$  é dito aperiódico ou primitivo. Se  $G^q$  se decompõe em  $q$  componentes distintas, sendo cada componente aperiódica, então  $G$  possui período  $q$ . O período de  $G$  pode também ser definido como o MDC (máximo divisor comum) dos comprimentos de todos os ciclos em  $G$ , onde um ciclo em  $G$  é um percurso que começa e termina no mesmo estado.

Exemplo 2.1: Restrição DC-free com disparidade máxima  $m = 3$ .

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_G^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_G^3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_G^4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Pode-se verificar que não existem ciclos de comprimento ímpar, ou seja,  $[A_G^k]_{i,i} = 0$  para todo  $k$  ímpar. Portanto conclui-se que  $G$  tem período 2.

Seja  $R(i)$  a soma dos elementos de uma linha  $i$  de uma matriz  $A$ , isto é,

$$R(i) = \sum_j (A)_{i,j},$$

define-se grau de saída de  $G$  como o menor número de ramos que partem de um estado de  $G$ . Pode-se verificar que o grau de saída de  $G$  corresponde a  $\min_i R(i)$ .

## 2.3 Divisão de Estados

Nesta seção será descrita a técnica de obtenção de códigos denominada "state splitting" ou divisão de estados.

Consideremos um FSTD  $G$  que represente um sistema restrito  $S$  para o qual será projetado um código com taxa  $p : q$  tal que  $r = p/q \leq c(S)$ . O primeiro passo para se projetar tal código é analisar a  $q$ -ésima potência de  $G$ , ou de  $A_G$ . O caso mais simples seria  $G^q$  ou um de seus subgrafos, ter grau de saída maior ou igual a  $2^p$ . Neste caso cada estado geraria para cada bloco de tamanho  $p$  um bloco de tamanho  $q$  em  $S$ . Isto pode ser verificado caso

$$A^q \mathbf{u} \geq 2^p \mathbf{u},$$

onde  $\mathbf{u}$  é um vetor não nulo constituído somente de 0's e 1's. O subgrafo  $G'$ , correspondente aos estados cujas componentes de  $\mathbf{u}$  são todas iguais a 1, satisfaz a condição de grau de saída pelo menos igual a  $2^p$ .

Exemplo 2.2: Restrição DC-free com desbalanço  $m=2$ , taxa  $r = 1/2$ , com  $q = 2$

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_G^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

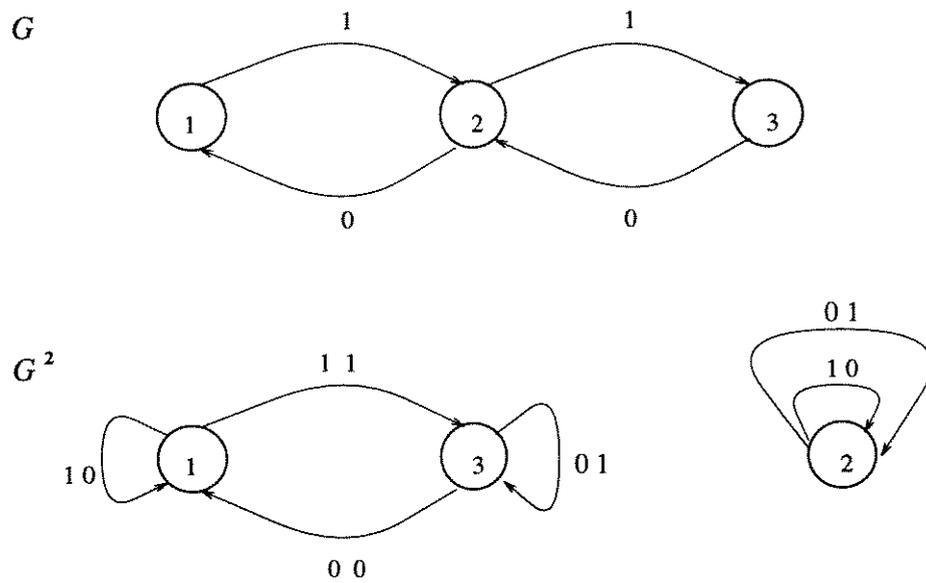


Figura 2.3: FSTD  $G$  e  $G^2$  da restrição DC-free com desbalanço  $m=2$

$\mu = [0 \ 1 \ 0]$  satisfaz a condição  $A^2\mu \geq 2\mu$ , portanto a Figura 2.4 mostra o codificador resultante, conhecido como Manchester. Observa-se que neste caso se obtém um código com memória e antecipação nulas, ou seja, a janela de decodificação é de apenas 1 bloco.

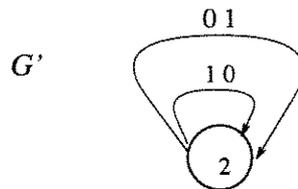


Figura 2.4: Codificador de Manchester

### 2.3.1 Divisão Básica

O que aconteceria caso não fosse possível se obter um autovetor  $\mathbf{u}$  positivo composto de 0's e 1's? Considerando-se a condição  $p/q \leq c(S)$  satisfeita, é possível se obter um código, porém não de forma tão simples e direta. Será necessário utilizar técnicas baseadas em divisão de estados e autovetores.

Seja  $i$  um estado pertencente a  $V(G)$  e  $E_i$  o conjunto de ramos de  $E(G)$  partindo do estado  $i$ . Seja  $(E_i^1, E_i^2)$  uma partição de  $E_i$  tal que  $E_i = E_i^1 \cup E_i^2$  e  $E_i^1 \cap E_i^2 = \emptyset$ , com  $E_i^1 \neq \emptyset$  e  $E_i^2 \neq \emptyset$ . Seja  $G'$  um novo FSTD obtido a partir de  $G$  com algumas alterações em torno de  $i$  explicadas a seguir. Os novos estados  $i_1$  e  $i_2$ , chamados filhos de  $i$ , são resultados da divisão de  $i$ . As interconexões ou ramos de  $G$  que não envolvem o estado  $i$ , permanecem as mesmas em  $G'$ . Com ramos que tem relação com o estado  $i$ , a divisão se dá de acordo com um dos três casos que seguem:

- Caso 1:

Seja um ramo  $e$  em  $G$  que parte de um estado  $j \neq i$  e termina em  $i$ . Este ramo é duplicado em  $G'$ , produzindo um ramo  $e_1$  para o estado  $i_1$  e um ramo  $e_2$  para o estado  $i_2$  com o mesmo rótulo como se vê na Figura 2.5.

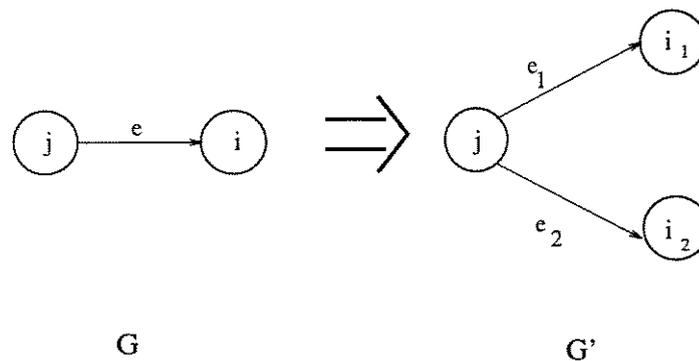


Figura 2.5: Divisão de Estados, Caso 1

- Caso 2:

Seja um ramo  $e$  em  $G$  que parte do estado  $i$  e termina em  $j \neq i$ , supondo  $e \in E_i^1$  na partição de  $E_i$ . Haverá em  $G'$  um ramo correspondente de  $i_1$  para  $j$  como se vê na Figura 2.6.

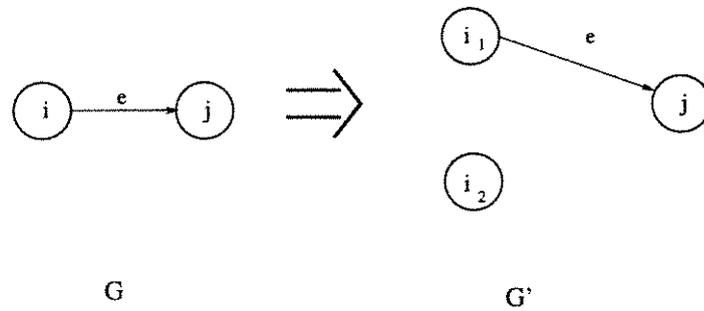


Figura 2.6: Divisão de Estados, Caso 2

• Caso 3:

Seja  $e$  um autoenlace em  $i$  e  $e \in E_i^1$ . Em  $G'$  existirão dois ramos partindo de  $i_1$  (com o mesmo rótulo), um para estado  $i_1$  e outro para  $i_2$  como se vê na Figura 2.7.

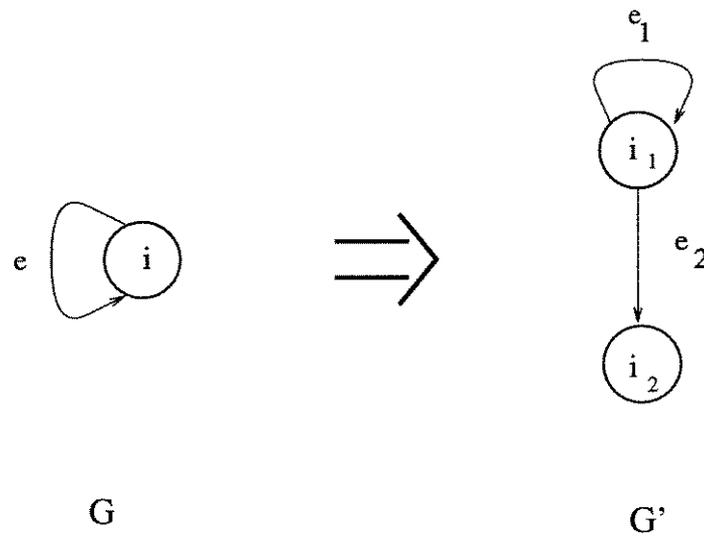
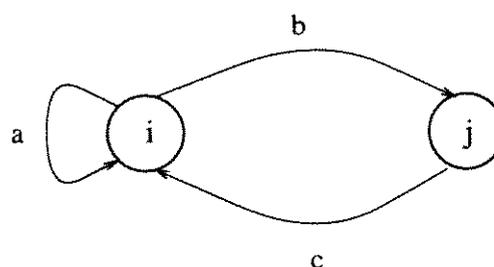


Figura 2.7: Divisão de Estados, Caso 3

Pode-se verificar nas Figuras 2.5, 2.6, 2.7 que o sistema de sequências geradas por  $G'$  é o mesmo de  $G$ . Se  $G$  tem antecipação  $a$  e memória  $m$ ,  $G'$  terá no máximo antecipação  $a + 1$  e memória  $m$ . Considerando-se que  $E_i^k \neq \emptyset$  para qualquer  $k \in \{0, 1\}$ , então se  $G$  é irreduzível,  $G'$  também o será. Na Figura 2.8 estão representadas as alterações na matriz de transição de estados após a divisão de estados.

Em geral, um estado  $i$  pode ser subdividido em  $N$  novos estados particionando-se o conjunto

$$A = \begin{matrix} & i & j & \cdot & \cdot \\ i & \left[ \begin{array}{cccc} 1_a & 1_b & & \\ & 1_c & 0 & \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \end{array} \right] & & & \\ j & & & & \end{matrix}$$



$$A' = \begin{matrix} & i_1 & i_2 & j \\ i_1 & \left[ \begin{array}{cccc} 1_a & 1_a & 0 & \\ 0 & 0 & 1_b & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1_c & 1_c & 0 & \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \end{array} \right] & & & \\ j & & & & \end{matrix}$$

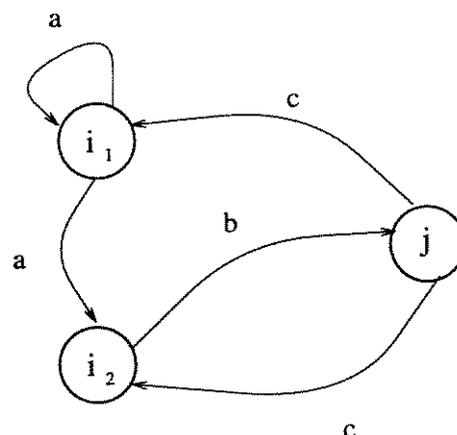


Figura 2.8: Matriz de Transição de Estados Antes e Depois da Divisão

$E_i$  adequadamente em  $N$  subconjuntos. Obviamente tem-se

$$E_i = E_i^1 \cup \dots \cup E_i^k \dots \cup E_i^N$$

e

$$E_i^k \cap E_i^l = \emptyset \quad \forall k, l = 1, 2, \dots, N \text{ com } k \neq l$$

### 2.3.2 Obtenção de Autovetores Aproximados

A partir do Teorema 2.2 pode-se verificar que:

$$\lambda(A_G^q) \geq 2^p$$

ou

$$\lambda(A_{G^q}) \geq 2^p.$$

Ainda o Teorema 2.2 garante a existência de um autovetor aproximado  $\mathbf{v}$ , com componentes inteiras positivas satisfazendo a desigualdade

$$A_G^q \mathbf{v} \geq 2^p \mathbf{v} \quad (2.1)$$

Para um ramo  $e$  qualquer, onde  $j$  é o estado terminal

$$w(e) = v_j.$$

Então a desigualdade ( 2.1) pode ser escrita como um conjunto de desigualdades, uma para cada  $i$ :

$$\sum_{e \in E_i} w(e) \geq 2^p v_i \quad (2.2)$$

ou seja, a soma dos pesos dos ramos que partem de um estado  $i$  deve ser pelo menos  $2^p$  vezes maior que o peso desse estado.

No fluxograma da Figura 2.9, baseado no algoritmo de Franaszek [21]-[30], está representado um método sequencial para a obtenção de um autovetor aproximado com as seguintes propriedades:

- $\mathbf{v}$  é o autovetor aproximado de  $G^q$  relativo a  $2^p$  cuja máxima componente é mínima.
- $\sum_i v_i$  é mínima para tal componente máxima.

Exemplo 2.3: Restrição RLL com parâmetros  $(d, k) = (1, 2)$

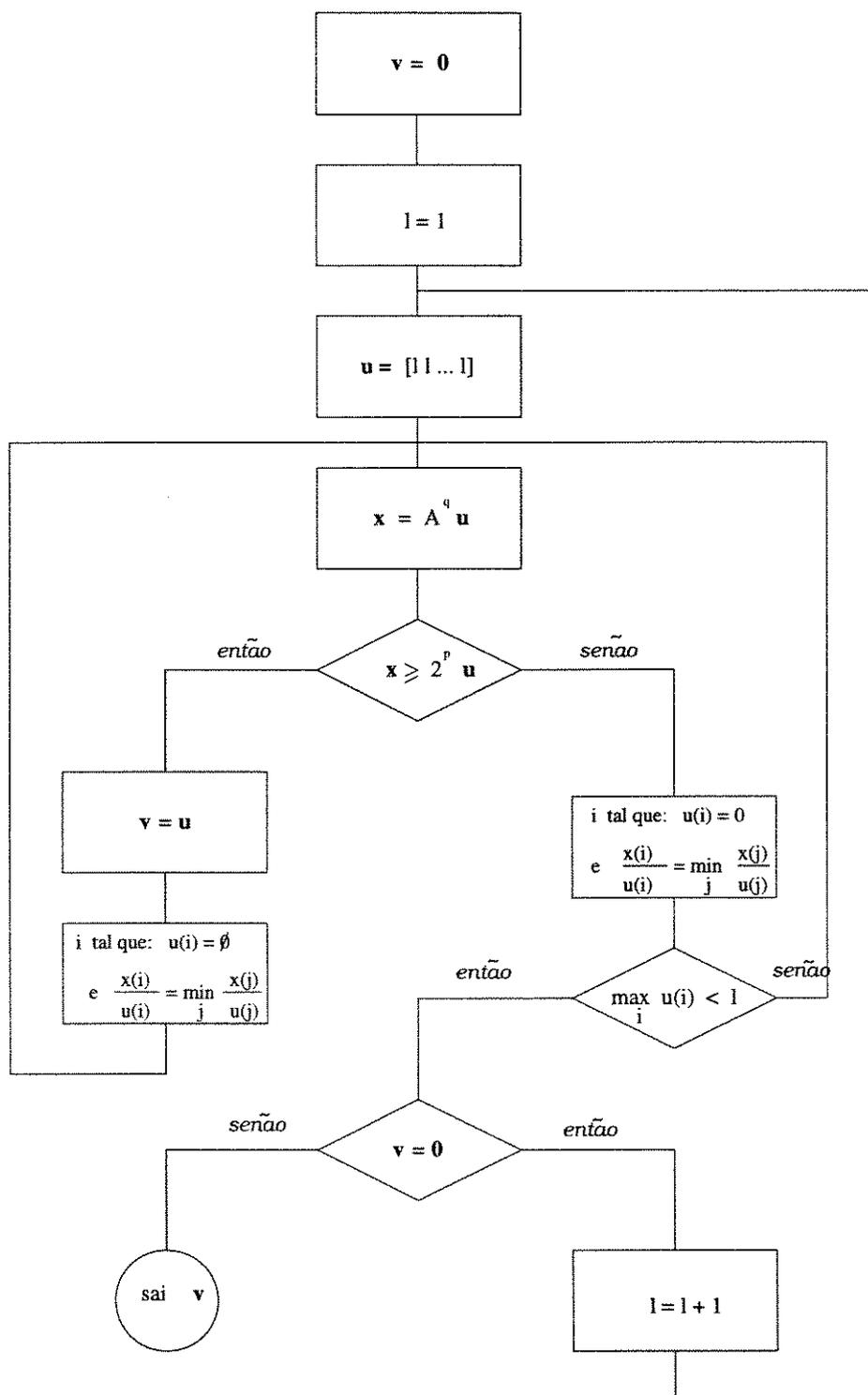


Figura 2.9: Fluxograma do Algoritmo de Franaszek

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

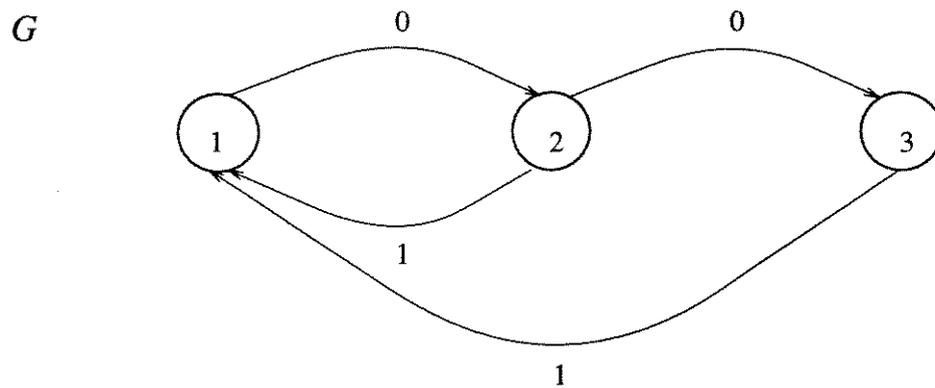


Figura 2.10: FSTD da restrição RLL (1,2)

*Tendo em vista que o máximo autovalor de  $A_G$  é*

$$\lambda(A_G) = 1,3247$$

*então,*

$$c(S) = 0,4057$$

*Será buscado um codificador para a taxa  $p : q = 2 : 5$ , que satisfaça a condição de Shannon.*

$$A_G^5 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

*Utilizando o algoritmo de Franaszek mostrado no fluxograma da Figura 2.9, observam-se os seguintes resultados:*

- $\mathbf{u}' = [1 \ 1 \ 1]$

$$A_G^5 \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \not\approx \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{u}' = [1 \ 1 \ 0]$

$$A_G^5 \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \not\approx \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{u}' = [0 \ 1 \ 0]$

$$A_G^5 \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \not\approx \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{u}' = [2 \ 2 \ 2]$  não satisfaz a condição pois  $\mathbf{u}' = [1 \ 1 \ 1]$  não satisfaz.

- $\mathbf{u}' = [2 \ 2 \ 1]$

$$A_G^5 \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix} \not\approx \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{u}' = [1 \ 2 \ 1]$

$$A_G^5 \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} \not\approx \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{u}' = [3 \ 3 \ 3]$  não satisfaz a condição pois  $\mathbf{u}' = [1 \ 1 \ 1]$  não satisfaz.

- $\mathbf{u}' = [3 \ 3 \ 2]$

$$A_G^5 \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 11 \\ 14 \\ 8 \end{bmatrix} \not\approx \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{u}' = [2 \ 3 \ 2]$

$$A_G^5 \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix} \not\geq \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{u}' = [2 \ 3 \ 1]$

$$A_G^5 \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ 6 \end{bmatrix} \not\geq \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{u}' = [4 \ 4 \ 4]$  não satisfaz a condição pois  $\mathbf{u}' = [1 \ 1 \ 1]$  não satisfaz.

- $\mathbf{u}' = [4 \ 4 \ 3]$

$$A_G^5 \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 15 \\ 19 \\ 11 \end{bmatrix} \not\geq \begin{bmatrix} 16 \\ 16 \\ 12 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{u}' = [4 \ 4 \ 2]$

$$A_G^5 \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 14 \\ 18 \\ 10 \end{bmatrix} \not\geq \begin{bmatrix} 16 \\ 16 \\ 8 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{u}' = [3 \ 4 \ 2]$

$$A_G^5 \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 12 \\ 16 \\ 9 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 12 \\ 16 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Faz-se  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$  e ao diminuir-se o autovetor  $\mathbf{u}$  verifica-se que não há mais nenhum vetor com componentes menores que satisfaça a desigualdade. Portanto conclui-se que  $\mathbf{v}$  é um autovetor procurado, que tem as propriedades já descritas.

### 2.3.3 Divisão de Estados $\mathbf{v}$ -consistente

A divisão de estados  $\mathbf{v}$ -consistente é baseada na divisão de estados descrita anteriormente com base num autovetor aproximado  $\mathbf{v}$  obtido de alguma forma (por exemplo, pelo algoritmo de Franaszek).

Para tanto, basta que a partição de  $E_i$  satisfaça as seguintes condições :

$$\| E_i^j \| = \sum_{e \in E_i^j} w(e) \geq 2^p y_i, \quad y_i \text{ inteiro}$$

$$y_j \geq 1 \quad \forall j$$

$$\sum_j y_j = v_i$$

O novo autovetor  $\mathbf{v}'$  será da forma:

$$v'_j = \begin{cases} v_j & \text{se } j \neq i \\ y_k & \text{se } j = i_k \end{cases}$$

Portanto o FSTD  $G'$  resultante da divisão de estados  $\mathbf{v}$ -consistente terá no máximo  $k - 1$  estados a mais que  $G$ , onde

$$\bigcup_{j=1}^k E_i^j = E_i.$$

A intenção de serem feitas divisões de estados  $\mathbf{v}$ -consistente baseia-se no fato que para se obter um codificador implementável, o autovetor aproximado deverá conter apenas 0's e 1's. Então, divisões  $\mathbf{v}$ -consistentes são feitas para que as componentes de  $\mathbf{v}$  maiores que 1 sejam subdivididas até se alcançar  $\mathbf{v}$  com todas as componentes  $v_i \in \{0, 1\}$ .

Exemplo 2.4: Restrição RLL com parâmetros  $(d, k) = (1, 2)$

Para essa restrição temos

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1_0 & 0 \\ 1_1 & 0 & 1_0 \\ 1_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto:

$$A_G^5 = \begin{bmatrix} 2_{b,c} & 1_a & 1_d \\ 2_{b,f} & 2_{a,g} & 1_e \\ 1_f & 1_g & 1_e \end{bmatrix},$$

onde os rótulos subscritos correspondem as sequências:

$$a = 01010$$

$$b = 01001$$

$$c = 00101$$

$$d = 00100$$

$$e = 10100$$

$$f = 10101$$

$$g = 10010$$

Utilizando o algoritmo de Franaszek temos  $\mathbf{u}$  como autovetor aproximado de  $A_G^5$ :

$$\mathbf{u} = [3 \ 4 \ 2].$$

Os conjuntos de ramos que partem dos estados de  $A_G^5$  são

$$E_1 = \{a_4, b_3, c_3, d_2\}$$

$$E_2 = \{a_4, b_3, e_2, f_3, g_4\}$$

$$E_3 = \{e_2, f_3, g_4\}$$

onde os índices representam os pesos dos respectivos ramos. Como se sabe que o estado de maior peso tem uma divisão  $\mathbf{v}$  consistente relacionada a ele [30], verifica-se que  $y_1 = 2$  e  $y_2 = 2$  são possíveis valores para a divisão do estado 2.

As partições

$$E_2^1 = \{a_4, g_4\}$$

$$E_2^2 = \{b_3, e_2, f_3\}$$

satisfazem as condições

$$\|E_2^j\| = \sum_{e \in E_2^j} w(e) \geq 2^2 y_i, \quad \sum_{j=1}^k y_j = v_2.$$

Finalmente temos a matriz de transições de estados resultante e o autovetor aproximado dados por

$$A'_G = \begin{bmatrix} 2_{b,c} & 1_a & 1_a & 1_d \\ 0 & 2_{a,g} & 2_{a,g} & 0 \\ 2_{b,f} & 0 & 0 & 1_e \\ 1_f & 1_g & 1_g & 1_e \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = [3 \ 2 \ 2 \ 2].$$

Para se obter um vetor com componente máxima 1, são necessárias no máximo  $\sum_i (v_i - 1)$  repetições do processo de divisão de estados, chegando a um FSTD com  $\sum_i v_i$  estados.

É provado em [30] que uma divisão de estados  $\mathbf{v}$ -consistente deve ser feita sempre no estado de máximo peso, ou seja, no estado  $i \in V(G)$  com máxima componente  $v_i$ , a fim de levar garantidamente a um código de janelas deslizantes (após um número finito de divisões).

## 2.4 Fusão de Estados

A técnica de divisão de estados é necessária para se construir o codificador quando o autovetor aproximado  $\mathbf{v}$  não é constituído somente de 0's e 1's. Então deve-se buscar uma maneira de simplificar o decodificador resultante, reduzindo o número total de estados.

A fusão de estados pode ocorrer a qualquer momento após a obtenção de  $\mathbf{v}$  se as seguintes condições forem satisfeitas pelos estados  $i$  e  $j$ , que irão se fundir:

- devem ter o mesmo peso,  $v_i = v_j$
- deve haver um subconjunto  $E_i \cap E_j$  tal que:

$$\| E_i \cap E_j \| = \sum_{e \in (E_i \cap E_j)} w_e \geq 2^p v_i$$

Satisfeitas essas condições, pode-se dizer que  $i$  e  $j$  são equivalentes, ou pelo menos um subconjunto suficiente deles o é, podendo então ser fundidos de acordo com a seguinte sequência:

1. Eliminar todos os ramos que partem de  $i$  e  $j$  que não pertençam ao conjunto  $E_i \cap E_j$
2. Eliminar todos os ramos que partem de  $j$ .
3. Redirecionar para o estado  $i$  todos os ramos que terminam em  $j$ .
4. Eliminar o estado  $j$ .

As Figuras 2.11 e 2.12 mostram a situação de um FSTD  $G$  antes e depois da fusão descrita acima e aplicada no Exemplo 2.5. Este processo mantém a capacidade do FSTD maior ou igual que a taxa  $p/q$ .

Exemplo 2.5: *Deseja-se fundir os estados 1 e 2 da Figura 2.11 supondo  $p=1$  e  $\mathbf{v} = [111]$ .*

$$A_G = \begin{bmatrix} 1_a & 1_d & 1_b \\ 1_e & 1_a & 1_b \\ 1_c & 1_b & 0 \end{bmatrix}$$

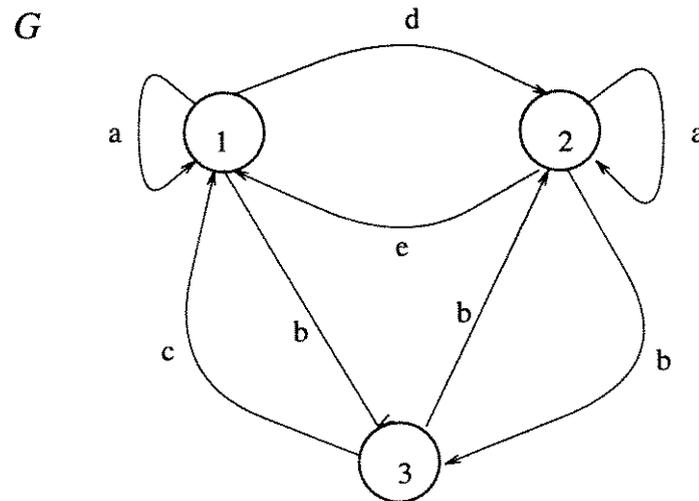


Figura 2.11: FSTD genérico

- $v_1 = v_2$
- $E_1 \cap E_2 = \{a, b\} \implies \| E_1 \cap E_2 \| = 2 \geq 2^p v_1$

1. *Passo 1:*

$$A_{G'} = \begin{bmatrix} 1_a & 0 & 1_b \\ 0 & 1_a & 1_b \\ 1_c & 1_b & 0 \end{bmatrix}$$

2. *Passo 2:*

$$A_{G'} = \begin{bmatrix} 1_a & 0 & 1_b \\ 0 & 0 & 0 \\ 1_c & 1_b & 0 \end{bmatrix}$$

3. *Passo 3:*

$$A_{G'} = \begin{bmatrix} 1_a & 0 & 1_b \\ 0 & 0 & 0 \\ 2_{b,c} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. *Passo 4:*

$$A_{G'} = \begin{bmatrix} 1_a & 1_b \\ 2_{b,c} & 0 \end{bmatrix}$$

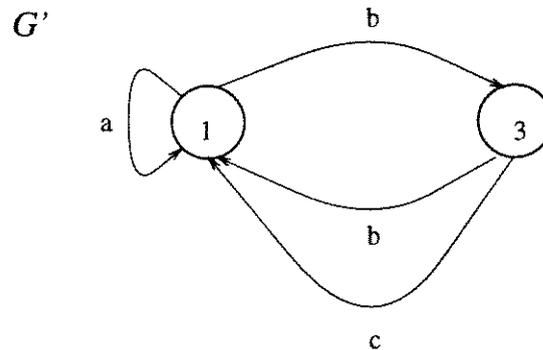


Figura 2.12: FSTD genérico após fusão  $v$ -consistente

## 2.5 Avaliação Espectral de Códigos de Bloco

Nesta Seção, ferramentas são apresentadas para a avaliação das propriedades espectrais de códigos de estados finitos. Aqui é feita uma breve descrição do algoritmo para obtenção de espectros de códigos de bloco de Cariolaro e Tronca [5]-[18].

Define-se  $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_u\}$ , em um FSTD  $G$ , como o conjunto de símbolos de entrada, e  $\mathbf{a}_u$  um vetor cujas componentes  $\{\mathbf{a}_u\}_i$  correspondem à saída de um determinado estado  $i$  caso a entrada seja  $\mathbf{b}_u$ , tal que

$$\{\mathbf{a}_u\}_i = \sum_{k=0}^q \alpha_k e^{(-j\pi f T)k}$$

onde  $\alpha_k$  é o  $k$ -ésimo símbolo de  $\{\mathbf{a}_u\}_i$ ,  $q$  é o comprimento das palavras de  $\{\mathbf{a}_u\}_i$ , e  $\mathbf{e}_u$  é a matriz de transições de estados provocadas pelo símbolo de entrada  $\mathbf{b}_u$ , isto é,

$$\mathbf{e}_u(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{se a transição } (i, j) \text{ é provocada por } \mathbf{b}_u \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como se deseja calcular em alguns casos o espectro maxentrópico ( de máxima entropia) de um sistema restrito representado por  $G$ , deve-se determinar a matriz de probabilidades de transições de estados maxentrópicas  $P$ , dada por

$$\{P\}_{i,j} = \frac{\{A\}_{i,j} v_j}{\lambda(A) v_i} \tag{2.3}$$

onde  $A$  é a matriz de transição de estados,  $\lambda(A)$  é o máximo autovetor de  $A$  e  $\mathbf{v}$  é um autovetor de  $A$ .

Chama-se  $\mathbf{p}_u$  o vetor cuja componente  $\{p_u\}_i$  é a probabilidade de ocorrência do símbolo  $\mathbf{b}_u$  estando o caminho percorrido no FSTD no estado  $i$ . Ele pode ser obtido a partir da matriz  $P$  maxentrópica, pela relação

$$\{p_u\}_i = \{P\}_{i,j}$$

onde a transição de  $i$  para  $j$  é provocada pelo símbolo  $\mathbf{b}_u$ .

$P_n$  é a matriz de probabilidade de transições em  $n$  passos no FSTD  $G$ ,

$$P_n = P^n$$

Portanto para  $n \rightarrow \infty$  tem-se  $P_\infty$  com linhas todas iguais (quando  $G$  é primitivo), as quais determinam a probabilidade de transição para um estado qualquer em regime permanente. Daí define-se  $\mathbf{\Gamma}$ , vetor de probabilidades de estados em regime igual a uma linha qualquer de  $P_\infty$ , e  $D$  é uma matriz diagonal cujas entradas  $\{D\}_{i,i} = \{\mathbf{\Gamma}\}_i$ .

Finalmente define-se a média quadrática (ou espectro de amplitude médio), dos símbolos de saída,  $c_0$ , dada por:

$$c_0 = \sum_u \langle \mathbf{p}_u \mathbf{a}_u \rangle D \mathbf{a}_u^*$$

Define-se a amplitude média em regime permanente dos símbolos de saída em cada estado,  $\mathbf{c}_1$ , por

$$\mathbf{c}_1 = \sum_u \langle \mathbf{p}_u \mathbf{a}_u \rangle D \mathbf{e}_u$$

e amplitude média dos símbolos de saída em cada estado,  $\mathbf{c}_2$ , por

$$\mathbf{c}_2 = \sum_u \langle \mathbf{p}_u \mathbf{a}_u \rangle$$

onde  $\langle \mathbf{p}_u \mathbf{a}_u \rangle$  é uma operação que resulta em um vetor  $\mathbf{x}$  cujas componentes  $\{\mathbf{x}\}_i = \{\mathbf{p}_u\}_i \{\mathbf{a}_u\}_i$ .

Segundo Cariolaro e Tronca [6], há duas componentes do espectro de potência. Uma é contínua, dada por

$$S_c(f) = c_0 + 2\Re\{\mathbf{c}_1(I - P_\infty)(e^{j2\pi f}I - (P - P_\infty))^{-1}\mathbf{c}_2'\} \quad (2.4)$$

onde  $\Re$  representa a parte real e  $I$  é a matriz identidade. A outra é discreta, dada por

$$S_d(f) = (\mathbf{1}'\mathbf{c}_2')^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_c). \quad (2.5)$$

Como a média dos símbolos de saída é sempre nula em códigos balanceados, esse tipo de código não apresentará componente discreta no espectro de potência.

Exemplo 2.6: *Código DC-free ternário com disparidade  $m=3$ , por simplicidade os símbolos de saída são representados por  $\mathbf{B} = \{+, 0, -\}$ .*

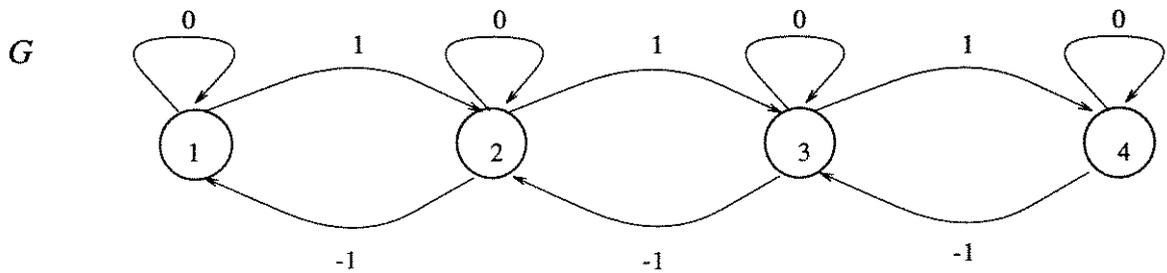


Figura 2.13: FSTD da restrição DC-free ternário com desbalanço  $m=3$

$$A_G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*Tem-se também os seguintes vetores de saídas  $\mathbf{a}_u$ :*

$$a_{b_-} = [0 \quad -1 \quad -1 \quad -1]$$

$$a_{b_0} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$a_{b_+} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0]$$

Calculando o máximo autovalor de  $A_G$  e um autovetor associado a ele, obtem-se

$$\lambda(A_G) = 2,6180$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0,3717 \\ -0,6015 \\ -0,6015 \\ -0,3717 \end{bmatrix}$$

Calculando a matriz de probabilidade de transições de estados, encontram-se

$$P = \begin{bmatrix} 0,382 & 0,618 & 0 & 0 \\ 0,2361 & 0,382 & 0,382 & 0 \\ 0 & 0,382 & 0,382 & 0,2361 \\ 0 & 0 & 0,618 & 0,382 \end{bmatrix}$$

e

$$p_{b_-} = [0 \ 0,236 \ 0,382 \ 0,618]$$

$$p_{b_0} = [0,382 \ 0,382 \ 0,382 \ 0,382]$$

$$p_{b_+} = [0,618 \ 0,382 \ 0,236 \ 0]$$

Portanto

$$P_\infty = \begin{bmatrix} 0,1382 & 0,3618 & 0,3618 & 0,1382 \\ 0,1382 & 0,3618 & 0,3618 & 0,1382 \\ 0,1382 & 0,3618 & 0,3618 & 0,1382 \\ 0,1382 & 0,3618 & 0,3618 & 0,1382 \end{bmatrix}$$

o que faz

$$\mathbf{\Gamma} = [0,1382 \ 0,3618 \ 0,3618 \ 0,1382]$$

e

$$D = \begin{bmatrix} 0,1382 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3618 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3618 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1382 \end{bmatrix}.$$

Finalmente calculam-se

$$c_0 = 0,618$$

$$c_1 = \frac{1}{6}[-0,0854 \quad -0,0528 \quad 0,0528 \quad 0,0854]$$

e

$$c_2 = \frac{1}{2}[0,618 \quad 0,146 \quad -0,146 \quad -0,618].$$

Como

$$\mathbf{\Gamma}c_2' = 0,$$

conclui-se que

$$S_d(f) = 0,$$

isto é, que só há componente contínua no espectro que é apresentado na Figura 2.14.

## 2.6 Conclusão

Neste capítulo foi mostrado que se pode obter um codificador (e seu decodificador correspondente) que utiliza a técnica de blocos deslizantes. Para tanto é necessário calcular a capacidade de Shannon  $c(S)$  da restrição desejada e a partir daí escolher uma taxa  $p : q$  tal que  $p/q \leq c(S)$ . Então determina-se a  $q$ -ésima potência de  $A$ , matriz de transição de estados do FSTD que representa a restrição. Com isso obtem-se um autovetor aproximado utilizando o Algoritmo de Franaszek. Deve-se descartar os estados de peso nulo e buscar componentes irredutíveis. Neste ponto a fusão de estados é facultativa, porém sua aplicação, quando possível, é de grande valia

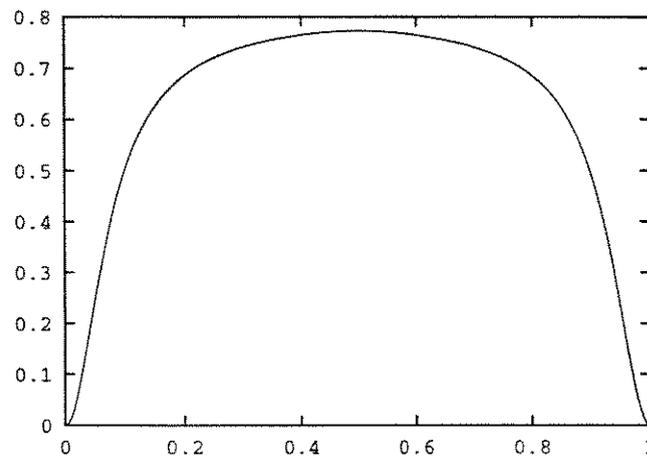


Figura 2.14: Exemplo de Espectro de Amplitude Maxentrópico

para a simplificação dos processos seguintes. Caso o autovetor aproximado não seja formado por 0's e 1's, aplica-se a divisão de estados até se obter  $\mathbf{v} = [11\dots 1]$ . Se possível aplica-se novamente a fusão de estados até não haver mais alternativa de fusões. Eliminam-se os ramos em excesso e finalmente atribuem-se rótulos ao codificador.

A distribuição espectral é importante para fazer uma avaliação do casamento do espectro do código com o do canal, que segundo [6] fornece o ganho de desempenho do sistema. O algoritmo de Cariolaro-Tronca permite o cálculo desta distribuição tanto para códigos de bloco como para o espaço maxentrópico de sequências restritas de estados finitos.

## Capítulo 3

# CÓDIGOS DE DISPARIDADE FINITA

### 3.1 Introdução

A supressão espectral em baixas frequências é obtida geralmente com o confinamento da soma digital corrida (SDC) de uma sequência digital a um número finito de estados. Isso tem o efeito de produzir um nulo na frequência  $f = 0$  na densidade espectral de potência do sinal, e um "vale" em torno desse nulo.

Para algumas aplicações, como na redução de erros causados por filtragem passa-alta indesejada, é aqui implementado um código que aprofunda e alarga o vale espectral sem necessariamente produzir um nulo espectral na componente DC. Grandes desbalanços na restrição DC-free podem gerar vales muito estreitos em torno da componente DC, que podem não ser largos o suficiente para algumas aplicações. Isso motivou a procura de procedimentos de codificação que produzissem vales espectrais com formação definida em termos de largura e profundidade, sem necessariamente produzir um nulo.

Nesse capítulo, é proposta e discutida uma restrição de estados finitos para esse propósito [16]-[18]. Ao invés de restringir a SDC da sequência, essa restrição confina a disparidade de qualquer janela da sequência, de um dado comprimento (relacionado com a largura do vale), a

um intervalo limitado.

### 3.2 Supressão Espectral na Componente DC

Considere-se um filtro passa-alta definido pela seguinte função de transferência

$$H(f) = 1 - \text{sinc} \frac{f}{f_c}, \quad (3.1)$$

onde

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

$$f_c = \frac{1}{NT} = \text{frequência de corte}$$

$$T = \text{duração do bit}$$

e

$$N = 0, 1, 2, \dots$$

Uma sequência pode ser propriamente descrita como:

$$x(t) = a_n \quad , \quad |t - nT| \leq T/2, \quad (3.2)$$

com cada  $a_n$  tomado independentemente de um alfabeto  $q$ -ário.

Em se introduzindo algum tipo de restrição na sequência  $a_n$ , deseja-se minimizar o erro produzido pela filtragem passa-alta ( 3.1) em ( 3.2), dado por

$$\eta(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{X(f)\text{sinc}(NTf)\} \cong \frac{1}{NT} \sum_{n=n_0 - \frac{N}{2}}^{n_0 + \frac{N}{2}} a_n, \quad (3.3)$$

onde  $n_0 = t/T$ .

Da Equação ( 3.3) segue que  $\eta(t)$  pode ser limitado pela imposição da seguinte restrição, daqui por diante chamada restrição  $(d, N)$ :

$$\left| \sum_{n=I}^{I+N-1} a_n \right| \leq d, \quad \forall I. \quad (3.4)$$

Impor essa restrição para todo  $N$  é equivalente a impor a restrição DC-free com desbalanço  $d$ . Substituindo-se (3.3) em (3.4), chega-se a:

$$|\eta(t)| \leq \frac{d}{NT}. \quad (3.5)$$

Isso representa uma redução de  $20 \log(d/N)dB$  do erro de pico com respeito a sequências irrestritas  $\{a_n\}$ . Como a mesma melhora é obtida com o uso da restrição DC-free com desbalanço  $d$ , pode-se concluir que a restrição DC-free é desnecessariamente forte para esse propósito.

Tanto a restrição DC-free quanto a  $(d, N)$  são também eficientes na limitação do erro *rms*, que é mais diretamente relacionado a distribuição espectral. Quando os símbolos  $\{a_n\}$  são independentes, identicamente distribuídos, e variáveis aleatórias de média zero, o erro *rms* é

$$\eta_{rms} = \frac{1}{\sqrt{NT}}, \quad (3.6)$$

para  $\{a_n\}$  irrestrito.

Em sequências restritas DC-free ou  $(d, N)$ , o erro *rms* é limitado superiormente pelo erro de pico dado pela Equação (3.6). A redução do erro *rms* dado pelas duas restrições é pelo menos  $20 \log(d/\sqrt{N})dB$ .

Em resumo, a restrição  $(d, N)$  fornece as mesmas reduções de erro causado por filtragem passa-alta indesejada que a restrição DC-free com desbalanço  $d$ , mesmo sendo uma restrição mais fraca.

### 3.3 A Restrição $(d, N)$

Seja  $L_q(d, N)$  o conjunto de todas palavras  $q$ -árias de comprimento  $N$  ( $a_1 a_2 \dots a_N$ ), tal que a disparidade  $\left[ \sum_{i=1}^N \Delta_q(a_i) \right]$ , com  $\Delta_q(\cdot)$  definido em um alfabeto  $q$ -ário, tem magnitude máxima  $d$ . O alfabeto binário é  $\{0, 1\}$ , com  $\Delta_2(x) = 2x - 1$ , e o alfabeto ternário é  $\{-1, 0, 1\}$  com

$\Delta_3(x) = x$ . Símbolos ternários são representados por  $\{-, 0, +\}$  por simplicidade. Seja  $L'_q(d, N)$  o subconjunto de  $L_q(d, N)$ , com magnitude de disparidade igual a  $d$ .

d \ N	1	3	5	7	9	11
1	2	6	20	70	252	924
3	—	8	30	112	420	1584
5	—	—	32	126	492	1914
7	—	—	—	128	510	2024
9	—	—	—	—	512	2046
11	—	—	—	—	—	2048

d \ N	2	4	6	8	10
0	2	6	20	70	252
2	4	14	50	182	672
4	—	16	62	238	912
6	—	—	64	254	1002
8	—	—	—	256	1022
10	—	—	—	—	1024

Tabela 3.1: Número de Estados para Algumas Restrições  $(d, N)$  Binárias Antes da Redução

Transições do estado  $(a_1 a_2 \dots a_N)$  são permitidas somente para estados  $(a_2 a_3 \dots a_N x)$ , onde  $x$  é o rótulo da transição. Portanto existem no máximo  $q$  transições de cada estado.

Qualquer janela de comprimento  $N$  de uma sequência restrita  $(d, N)$  é um membro de  $L(d, N)$ , e determina univocamente o conjunto de cadeias permitidas nas posições que a sucedem. Portanto uma representação de estados finitos da restrição é possível e pode ser representada pelos elementos de  $L(d, N)$ . O número desses estados, entretanto é muito grande exceto quando  $d$  ou  $(N - d)$  é pequeno. Por essa razão, aqui é apresentada a possibilidade de construir representações equivalentes de estados finitos.

### 3.3.1 Códigos Binários

Um primeiro estágio de redução do número de estados é alcançado tomando os últimos  $(N - 1)$  dígitos dos elementos de  $L_2(d, N)$ , já que eles determinam univocamente os próximos estados e

rótulos. Eles formam o conjunto  $L_2(d+1, N-1)$ . Para  $(N-d)$  par, as seguintes relações valem para o número inicial de estados  $|L_2(d, N)|$  e o número reduzido de estados  $|L_2(d+1, N-1)|$  nesse primeiro estágio:

$$|L_2(d, N)| = |L'_2(d+1, N-1)| + 2|L_2(d-1, N-1)|, \quad (3.7)$$

$$|L_2(d+1, N-1)| = |L'_2(d+1, N-1)| + |L_2(d-1, N-1)| \quad (3.8)$$

d \ N	1	3	5	7	9	11
1	1	4	14	50	182	672
3	—	1	8	36	148	590
5	—	—	1	12	66	310
7	—	—	—	1	16	104
9	—	—	—	—	1	20
11	—	—	—	—	—	1

d \ N	2	4	6	8	10
0	1	1	1	1	1
2	1	6	24	92	350
4	—	1	10	50	220
6	—	—	1	14	84
8	—	—	—	1	18
10	—	—	—	—	1

Tabela 3.2: Número de Estados para Algumas Restrições  $(d, N)$  Binárias Após Redução

Das Equações ( 3.7) e ( 3.8), segue-se que  $|L(d+1, N-1)| < |L(d, N)|$ . O conjunto reduzido  $L_2(d+1, N-1)$  é formado pela união dos sub-conjuntos disjuntos  $L'_2(d+1, N-1)$  e  $L_2(d-1, N-1)$ . No sub-conjunto  $L_2(d-1, N-1)$ , todas transições permitidas pela restrição  $(d-1, N-1)$  são também permitidas pela restrição externa  $(d, N)$ . Portanto, uma segunda redução pode ser obtida tendo os elementos de  $L_2(d-1, N-1)$  representados por seus últimos  $(N-2)$  dígitos, formando o conjunto:

$$L_2(d, N-2) = L'_2(d, N-2) \cup L_2(d-2, N-2).$$

Repetindo esse procedimento até a exaustão, o conjunto de estados reduzido  $Z_2$  será dado por:

$$Z_2 = \bigcup_{i=0}^d L_2'(i+1, N-d+i-1) \quad (3.9)$$

com número de estados dado por

$$|Z_2| = 2 \sum_{i=0}^d \binom{N-i-1}{\frac{N-d}{2}-1}. \quad (3.10)$$

A Tabela 3.1 mostra  $|L_2(d, N)|$ , ou seja, antes da redução de estados descrita, e a Tabela 3.2 mostra  $|Z_2|$  para vários valores de  $d$  e  $N$  após a redução de estados aqui descrita.

A partir desses estados, é possível se obter as matrizes de transições com as quais pode-se determinar a capacidade de Shannon da restrição,  $c(S)$ :

$$c(S_{(d,N)}) = \log_2 \lambda_{\max}(A_{G_{(d,N)}}). \quad (3.11)$$

Com isso é possível se determinar as capacidades das restrições descritas, como mostra a Tabela 3.3.

Ela sugere que quando  $N \rightarrow \infty$ , a capacidade da restrição se aproxima da capacidade da restrição DC-free com desbalanço  $m = 2d$ .

Exemplo 3.1: *Restrição  $(d, N) = (2, 4)$  binária*

*Pode-se representar a lista  $L_2(2, 4)$  por  $L_2(3, 3)$  que é formado pela união*

$$L_2(3, 3) = L_2'(3, 3) \cup L_2(1, 3).$$

*A lista  $L_2(1, 3)$  por sua vez pode ser representado por  $L_2(2, 2)$  tal que:*

$$L_2(2, 2) = L_2'(2, 2) \cup L_2(0, 2).$$

*$L_2(0, 2)$  pode ser representado por  $L_2(1, 1)$  que é igual a  $L_2'(1, 1)$ . Portanto*

$d \setminus N$	1	3	5	7	9	11	$\infty$
1	1	0,6942	0,6509	0,6374	0,6317	0,6297	0,5
3	—	1	0,9468	0,9201	0,9054	0,8965	0,8858
5	—	—	1	0,9881	0,9774	0,9693	0,95
7	—	—	—	1	0,9971	0,9933	0,972
9	—	—	—	—	1	0,9988	0,9821
11	—	—	—	—	—	1	0,9876
$\infty$	—	—	—	—	—	—	1

$d \setminus N$	2	4	6	8	10	$\infty$
0	0	0	0	0	0	0
2	1	0,8791	0,8408	0,8241	0,8155	0,7925
4	—	1	0,9752	0,9581	0,9467	0,9276
6	—	—	1	0,9942	0,9878	0,9634
8	—	—	—	1	0,9986	0,9779
10	—	—	—	—	1	0,9852
$\infty$	—	—	—	—	—	1

Tabela 3.3: Capacidade de Shannon de Várias Restrições  $(d, N)$  Binárias

$$Z_2 = L'_2(3,3) \cup L'_2(2,2) \cup L'_2(1,1)$$

e

$$|Z_2| = 2 \sum_{i=0}^2 \binom{2-i}{0} = 6.$$

Como:

$$L'_2(3,3) = \{000, 111\}$$

$$L'_2(2,2) = \{00, 11\}$$

$$L'_2(1,1) = \{0, 1\},$$

chamando 0 de estado 1, 1 de estado 2, 00 de estado 3, 11 de estado 4, 000 de estado 5 e 111 de estado 6, tem-se:

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1_1 & 1_0 & 0 & 0 & 0 \\ 1_0 & 0 & 0 & 1_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1_1 & 0 & 0 & 1_0 & 0 \\ 1_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1_1 \\ 0 & 1_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 3.3.2 Códigos Ternários

Novamente um primeiro estágio de redução é alcançado tomando-se os últimos  $(N - 1)$  dígitos dos elementos de  $L_3(d, N)$ . Eles formam o conjunto  $L_3(d + 1, N - 1)$ , e como eles determinam univocamente os próximos estados e rótulos correspondentes, eles são uma representação de estados finitos suficiente. Então

$$|L_3(d+1, N-1)| = |L'_3(d+1, N-1)| + |L'_3(d, N-1)| + |L_3(d-1, N-1)| \quad (3.12)$$

e

$$|L_3(d, N)| = |L'_3(d+1, N-1)| + |L'_3(d, N-1)| + |L_3(d, N-1)| + 2|L_3(d-1, N-1)|. \quad (3.13)$$

Comparando as Equações ( 3.13) e ( 3.16), conclui-se que:

$$|L_3(d+1, N-1)| < |L_3(d, N)|, \quad (3.14)$$

e portanto se tem redução no número de estados.

$L_3(d+1, N-1)$  é a união disjunta dos sub-conjuntos  $L'_3(d+1, N-1)$ ,  $L'_3(d, N-1)$  e  $L_3(d-1, N-1)$ . A restrição  $(d, N)$  não permite todas transições entre elementos de  $L'_3(d+1, N-1)$ . Por exemplo, a restrição  $(1, 5)$  ternária não permite  $---+$  ser seguido por  $--+-$ .

d \ N	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1
1	1	3	9	25	71	201
2	—	1	5	17	53	161
3	—	—	1	7	27	93
4	—	—	—	1	9	39
5	—	—	—	—	1	11
6	—	—	—	—	—	1

Tabela 3.4: Número de Estados Reduzido para Várias Restrições  $(d, N)$  Ternárias

Portanto a restrição não permite todas transições entre os elementos de  $L_3(d-1, N-1)$ . Porém uma segunda redução pode ser obtida representando os elementos de  $L_3(d-1, N-1)$  representados por seus últimos  $(N-2)$  dígitos, os quais formam o conjunto:

$$L_3(d, N-2) = L'_3(d, N-2) \cup L'_3(d-1, N-2) \cup L_3(d-2, N-2). \quad (3.15)$$

Iterando-se esse procedimento até a exaustão, obtem-se o seguinte conjunto reduzido de estados  $Z_3$ :

$$Z_3 = \bigcup_{i=1}^d [L'_3(d-i+2, N-i) \cup L'_3(d-i+1, N-i)] \cup L_3(0, N-d), \quad (3.16)$$

cuja dimensão é:

$$\begin{aligned} |Z_3| = & 2 \sum_{i=1}^d \left[ \sum_{j=0}^{\text{int}[\frac{N-d}{2}-1]} \binom{N-i}{d-i+2+2j} \binom{d-i+2+2j}{j} + \right. \\ & \left. + \sum_{j=0}^{\text{int}[\frac{N-d-1}{2}]} \binom{N-i}{d-i+1+2j} \binom{d-i+1+2j}{j} \right] + \sum_{j=0}^{\text{int}[\frac{N-d}{2}]} \binom{N-d}{2j} \binom{2j}{j}. \quad (3.17) \end{aligned}$$

onde  $\text{int}[x]$  representa a parte inteira de  $x$ .

A Tabela 3.4 mostra o número resultante de estados para alguns valores de  $d$  e  $N$ . Pode ser visto que mesmo após a redução, o número de estados pode ser muito grande quando  $N > 10$ .

**Exemplo 3.2:** *Restrição  $(d, N) = (2, 4)$  ternária*

*Pode-se representar a lista  $L_3(2, 4)$  por  $L_3(3, 3)$  que é formado pela união:*

$$L_3(3, 3) = L'_3(3, 3) \cup L'_3(2, 3) \cup L_3(1, 3).$$

*A lista  $L_3(1, 3)$  por sua vez pode ser representada por  $L_3(2, 2)$  tal que*

$$L_3(2, 2) = L'_3(2, 2) \cup L'_3(1, 2) \cup L_3(0, 2).$$

*Portanto*

$$Z_3 = (L'_3(3, 3) \cup L'_3(2, 3)) \cup (L'_3(2, 2) \cup L'_3(1, 2) \cup L_3(0, 2))$$

e

$$|Z_3| = 17,$$

cujos estados são:

$$L'_3(3,3) = \{- - -, + + +\}$$

$$L'_3(2,3) = \{+ + 0, + 0 +, 0 + +, - - 0, - 0 -, 0 - -\}$$

$$L'_3(2,2) = \{- -, + +\}$$

$$L'_3(1,2) = \{0 -, - 0, 0 +, + 0\}$$

$$L'_3(0,2) = \{00, + -, - +\}$$

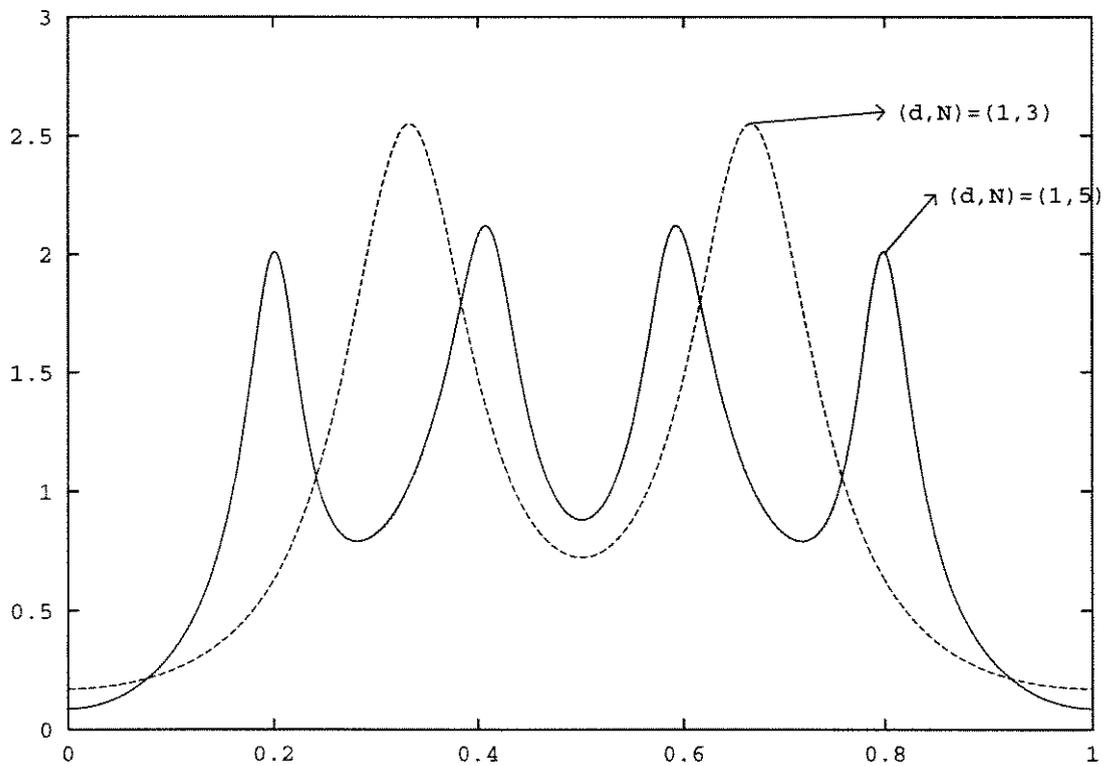


Figura 3.1: Espectro de Potência Maxentrópico da Restrição  $(d, N)$  Binária

### 3.4 Espectro Maxentrópico

Considere o espectro maxentrópico de um processo de Markov definido pela restrição  $(d, N)$ . Para demonstrar a eficácia da geração de um vale espectral aqui será obtido o espectro maxentrópico da restrição. Quando a taxa de códigos práticos (de bloco) chega perto da capacidade de Shannon da restrição, seu espectro se aproxima do espectro maxentrópico da restrição.

A representação de estados finitos obtida na secção anterior define uma matriz de adjacências, a partir da qual as probabilidades de transições maxentrópicas podem ser calculadas [2]. Essas probabilidades de transição são então usadas no algoritmo de Cariolaro-Tronca [6] para calcular o espectro maxentrópico da restrição.

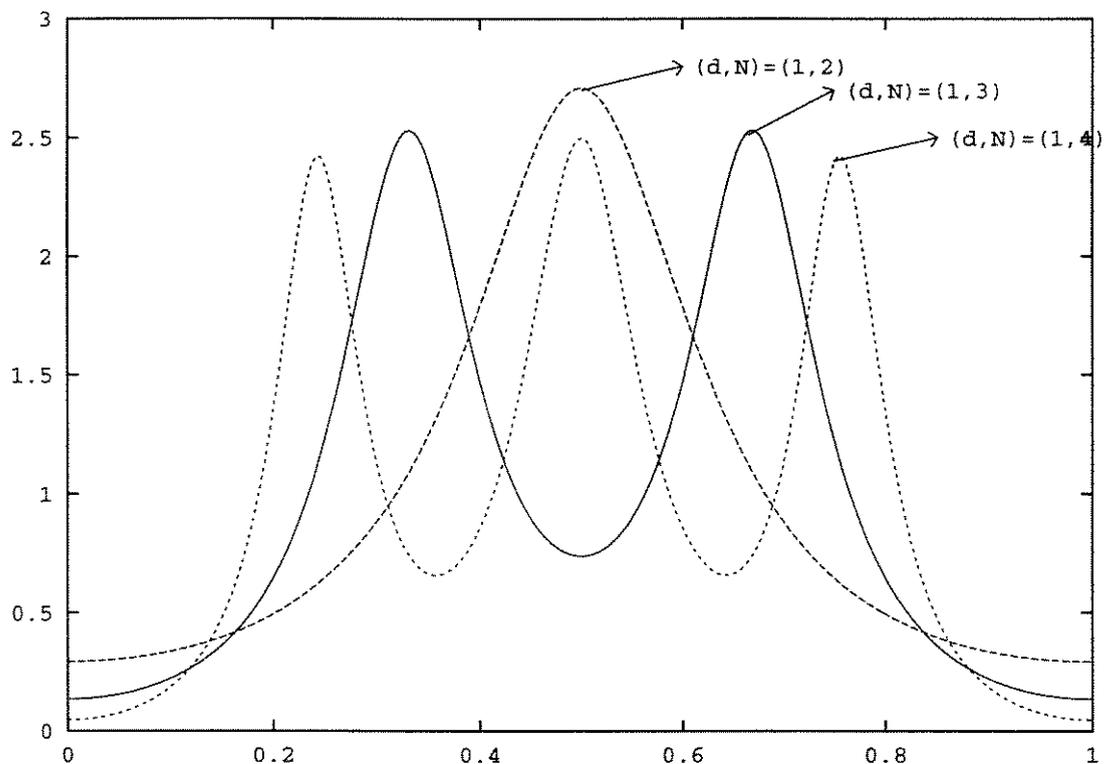


Figura 3.2: Espectro de Potência Maxentrópico da Restrição  $(d, N)$  Ternária

Começando com pequenos valores de  $d$  e  $N$ , o primeiro caso de interesse é  $(d, N) = (1, 3)$ . Nesse caso, uma restrição equivalente é aquela em que o comprimento de corridas de dígitos

iguais é menor que 3. Portanto é equivalente a restrição RLL com parâmetros  $(0, 1)$ . A Figura 3.1 mostra o espectro maxentrópico dessa restrição.

O próximo caso interessante é quando  $(d, N) = (1, 5)$ , com capacidade de Shannon  $c(S) = 0,6509$ , e 14 estados em seu FSTD reduzido. A Figura 3.1 mostra o espectro maxentrópico calculado que confirma a banda de supressão em torno de DC, e mostra um efeito *ripple* na banda passante com picos em frequências  $N^{-1} = 1/5$  e suas harmônicas, o mesmo acontecendo para  $(d, N) = (1, 3)$  em  $N^{-1} = 1/3$  e suas harmônicas. A Figura 3.2 mostra o espectro do caso ternário para alguns valores de  $N$ , com  $d = 1$ , ratificando as conclusões para o caso binário.

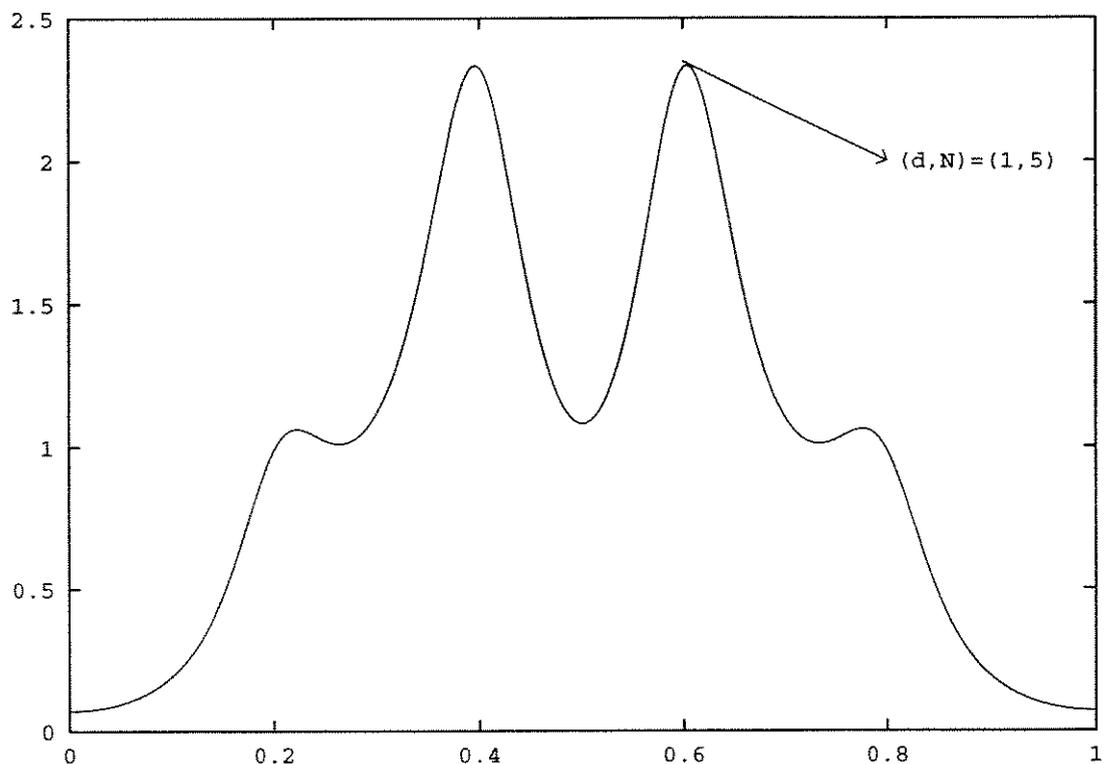


Figura 3.3: Espectro de Potência Maxentrópico da Restrição  $(d, N) = (1, 5)$  Reforçada

### 3.5 Uma Restrição Reforçada

Os espectros das Figuras 3.1 e 3.2 sugerem que um maior alargamento do vale espectral pode ser obtido eliminando o pico na frequência  $1/N$ . Uma maneira natural de se obter isso é se retirar da lista  $L(d, N)$  de cadeias de comprimento  $N$  permitidas, aquelas que levam a quase periodicidades com período  $N$  na restrição  $(d, N)$ .

Exemplo 3.3: *Restrição  $(d, N) = (1, 5)$  reforçada*

*Utilizando-se a Equação (3.9), pode-se verificar que*

$$Z_2 = L'_2(1, 3) \cup L'_2(2, 4)$$

e

$$|Z_2| = 14.$$

Como

$$L'_2(1, 3) = \{001, 010, 100, 110, 101, 011\}$$

$$L'_2(2, 4) = \{0001, 0010, 0100, 1000, 1110, 1101, 1011, 0111\},$$

*já que se deseja impedir a ocorrência das sequências 11100, 00111, 00011 e 11000, o que se deseja é impedir as sequências 000 e 111 na restrição  $(d, N) = (1, 5)$ . Portanto, deve-se retirar 1000, 0001, 0111 e 1110 da lista  $L'_2(2, 4)$ , restando 10 estados. Mais redução é alcançada fundindo-se os estados 100 e 0100 por eles serem seguidos pelo mesmo conjunto de cadeias (conjunto seguidor), e 011 com 1011 pelo mesmo motivo. Resultam portanto 8 estados,*

$$V(G) = \{001, 010, 100, 110, 101, 011, 0010, 1101\}$$

e tem-se a matriz de transição

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1_1 & 1_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_0 & 0 & 1_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1_0 & 0 & 0 & 1_1 \\ 0 & 1_0 & 0 & 0 & 0 & 1_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

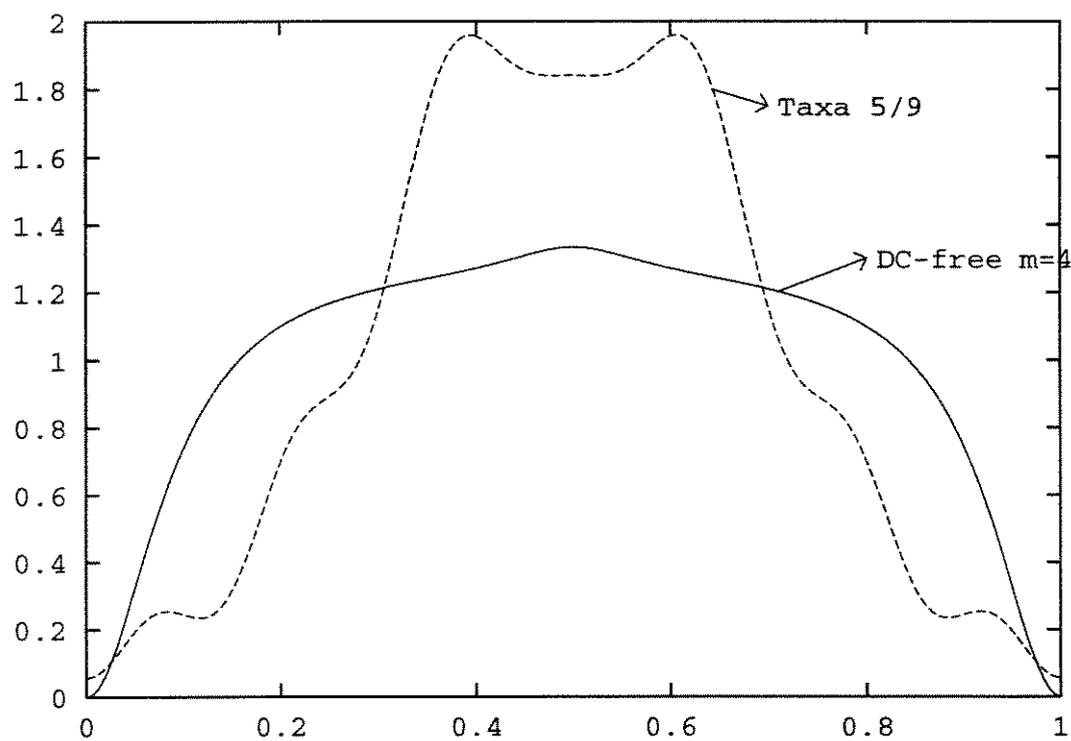


Figura 3.4: Espectro do Código  $(d, N) = (1, 5)$  Taxa 5/9

Isso tem o efeito de reduzir a capacidade de Shannon, no caso do exemplo acima para

Entrada	Saida/Próximo Estado			
	Estado A	Estado B	Estado C	Estado D
0	106 A	74 A	42 A	26 A
1	90 A	76 A	44 A	20 A
2	89 B	84 A	52 A	25 B
3	90 B	82 A	50 A	37 B
4	101 B	85 B	53 B	21 B
5	106 B	74 B	42 B	26 B
6	105 B	86 B	41 B	22 B
7	102 B	82 B	50 B	38 B
8	89 C	75 D	43 D	25 C
9	90 C	83 D	51 D	37 C
10	101 C	85 C	53 C	21 C
11	106 C	74 C	42 C	26 C
12	105 C	86 C	41 C	22 C
13	102 C	77 D	45 D	38 C
14	101 D	85 D	53 D	21 D
15	107 D	77 C	45 C	37 D

Tabela 3.5: Codificador da Restrição  $(d, N) = (1, 5)$  Reduzida com Taxa 4:7

$c(S) = 0,5973$ , e mudar o espectro maxentrópico da Figura 3.1, para a Figura 3.3, onde a supressão esperada do primeiro pico espectral é confirmada.

### 3.6 Códigos de Janelas Deslizantes

As restrições propostas nas seções anteriores são satisfeitas desde que cada sequência restrita tenha todas suas janelas de comprimento  $N$  contida em uma lista finita. Isso é uma característica de uma restrição do tipo finito. Foi provado que códigos com taxas  $p : q$ , com  $p$  e  $q$  inteiros positivos, podem ser obtidos desde que  $p/q$  não seja maior que a capacidade de Shannon da restrição. O código resultante pode necessitar de um decodificador de janelas deslizantes, onde a decodificação de uma palavra código necessita da leitura de palavras subsequentes em uma janela de decodificação de comprimento finito [28] e [30].

Nesta seção foi usado o algoritmo de divisão de estados para procurar códigos que respeitassem a restrição  $(d, N) = (1, 5)$  reforçada descrita na seção anterior. Como sua capacidade de Shannon  $c(S) = 0,5973$ , foram procurados códigos com taxas  $1/2$ ,  $5/9$  e  $4/7$ , e para a restrição original,  $(d, N) = (1, 5)$ , foi buscada a taxa  $3/5$ .

Em geral, o algoritmo possui um conjunto de soluções muito grande, pois pode haver muitas escolhas de partições que suportam divisões de estados  $v$ -consistente, e também por se ter um número excessivo de ramos a serem eliminados. Porém essa escolha pode ser guiada de tal maneira a se reduzir ao máximo o número de estados para um dado autovetor aproximado. Essa técnica foi então usada para se obter, para cada taxa  $p : q$ , um FSTD para a restrição em  $q$  blocos com grau de saída pelo menos  $2^p$  em cada estado, e com número mínimo de estados. O número de estados está relacionado com a complexidade do codificador, e o decodificador tem sua complexidade influenciada também pelo comprimento da janela de decodificação.

As Tabelas 3.5, 3.7 e 3.9 mostram os codificadores dos códigos  $(d, N) = (1, 5)$  reduzidos nas taxas  $4/7$  e  $5/9$  e da restrição original com taxa  $3/5$  respectivamente, enquanto as Tabelas 3.6 e 3.8 3.10 apresentam suas respectivas árvores de decodificação. Na Tabela 3.11 é mostrada uma árvore de decodificação genérica.

As Figuras 3.4 e 3.5 mostram comparações entre os espectros dos códigos obtidos pelo

método de janelas deslizantes com o maxentrópico da restrição DC-free com disparidade  $m = 4$ . A Figura 3.7 mostra os vales em dB. A Figura 3.6 mostra o espectro da restrição  $(d, N) = (1, 5)$  original com taxa  $3/5$ .

$$\begin{aligned} \Delta_A &= \{89, 90, 101, 102, 105, 106, 107\} \\ \Delta_B &= \{74, 75, 76, 77, 82, 83, 84, 85, 86\} \\ \Delta_C &= \{41, 42, 43, 44, 45, 50, 51, 52, 53\} \\ \Delta_D &= \{20, 21, 22, 25, 26, 37, 38\} \end{aligned}$$

90			89 25		21 53 85 101			26 42 74 106			37			38 102	
$\Delta_A$	$\Delta_B$	$\Delta_C$	$\Delta_B$	$\Delta_C$	$\Delta_B$	$\Delta_C$	$\Delta_D$	$\Delta_A$	$\Delta_B$	$\Delta_C$	$\Delta_B$	$\Delta_C$	$\Delta_D$	$\Delta_B$	$\Delta_C$
1	3	9	2	8	4	10	14	0	5	11	3	9	15	7	13

22 41 86 105				50 82		45 77		20	44 76	52 84	43 75	51 83	107
$\Delta_B$	$\Delta_C$	$\Delta_A$	$\Delta_B$	$\Delta_C$	$\Delta_D$								
6	12	3	7	15	13	1	1	2	8	9	15		

Tabela 3.6: Árvore de Decodificação da Restrição  $(d, N) = (1, 5)$  Reduzida com Taxa 4:7

Entrada	Saída/Próximo Estado				
	Estado A	Estado B	Estado C	Estado D	Estado E
0	330 B	172 A	172 A	86 B	330 B
1	342 B	178 A	178 A	90 B	342 B
2	346 B	180 A	180 A	102 B	346 B
3	358 B	358 B	154 B	154 B	202 B
4	362 B	362 B	150 B	150 B	298 B
5	406 B	204 A	204 A	106 B	214 B
6	410 B	210 A	210 A	166 B	166 B
7	422 B	212 A	212 A	170 B	170 B
8	341 C	300 A	300 A	89 C	341 C
9	345 C	306 A	306 A	101 C	345 C
10	357 C	357 C	153 C	153 C	297 C
11	361 C	361 C	149 C	149 C	213 C
12	405 C	308 A	308 A	105 C	309 C
13	409 C	332 A	332 A	165 C	165 C
14	421 C	338 A	338 A	169 C	169 C
15	425 C	340 A	340 A	181 C	181 C
16	330 E	171 D	171 D	86 E	330 E
17	342 E	173 D	173 D	90 E	342 E
18	346 E	179 D	179 D	102 E	346 E
19	358 E	358 E	154 E	154 E	202 E
20	362 E	362 E	150 E	150 E	298 E
21	406 E	203 D	203 D	106 E	214 E
22	410 E	205 D	205 D	166 E	166 E
23	422 E	211 D	211 D	170 E	170 E
24	341 E	299 D	299 D	89 E	341 E
25	345 E	301 D	301 D	101 E	345 E
26	357 E	357 E	153 E	153 E	297 E
27	361 E	361 E	149 E	149 E	213 E
28	405 E	307 D	307 D	105 E	309 E
29	409 E	331 D	331 D	165 E	165 E
30	421 E	333 D	333 D	169 E	169 E
31	425 E	339 D	339 D	181 E	181 E

Tabela 3.7: Codificador da Restrição  $(d, N) = (1, 5)$  Reduzida com Taxa 5:9

$$\Delta_{BC} = \{149, 150, 153, 154, 171, 172, 173, 178, 179, 180, 203, 204, 205, 210, 211, 212, 362, 361, 358, 357, 340, 339, 338, 333, 332, 331, 308, 307, 306, 301, 300, 299\}$$

$$\Delta_E = \{165, 166, 169, 170, 181, 202, 213, 214, 346, 345, 342, 341, 330, 309, 298, 297\}$$

86 330		90 342		102 346		154 202 358		150 298 362		106 214 406	
$\Delta_{BC}$	$\Delta_E$										
0	16	1	17	2	18	3	19	4	20	5	21

166 410		170 422		89 341		101 345		153 297 357		149 213 361	
$\Delta_{BC}$	$\Delta_E$										
6	22	7	23	8	24	9	25	10	26	11	27

105 309 405		165 409		169 421		181 425		172	178	180	204	210	212
$\Delta_{BC}$	$\Delta_E$	$\Delta_{BC}$	$\Delta_E$	$\Delta_{BC}$	$\Delta_E$	$\Delta_{BC}$	$\Delta_E$						
12	28	13	29	14	30	15	31	0	1	2	5	6	7

300	306	308	332	338	340	171	173	179	203	205	211	299	301
8	9	12	13	14	15	16	17	18	21	22	23	24	25

307	331	333	339
28	29	30	31

Tabela 3.8: Árvore de Decodificação da Restrição  $(d, N) = (1, 5)$  Reduzida com Taxa 5:9

Informação	Saída/Proximo Est.							
	Est. A	Est. B	Est. C	Est. D	Est. E	Est. F	Est. G	Est. H
0	20 A	11 B	10 B	21 A	10 B	21 A	20 A	11 B
1	20 E	11 E	10 E	21 E	10 E	21 E	20 E	11 E
2	20 F	11 F	10 F	21 F	10 F	21 F	20 F	11 F
3	12 E	19 E	25 A	6 B	6 B	25 A	12 E	19 E
4	12 F	19 F	25 C	6 D	6 D	25 C	12 F	19 F
5	18 E	13 E	24 A	7 B	22 A	9 B	24 A	7 B
6	18 F	13 F	24 C	7 D	22 E	9 E	24 C	7 D
7	28 G	3 H	26 G	5 H	26 G	5 H	28 G	3 H

Tabela 3.9: Codificador da Restrição  $(d, N) = (1, 5)$  com Taxa 3:5

$$\begin{aligned} \Delta_{AB} &= \{3, 11, 12, 13, 18, 19, 20, 28\} \\ \Delta_C &= \{10, 24, 25, 26\} \\ \Delta_D &= \{5, 6, 7, 21\} \\ \Delta_E &= \{6, 10, 22, 26\} \\ \Delta_F &= \{5, 9, 21, 25\} \end{aligned}$$

10,11,20,21			12,19		6		25		13,18		9,22		24	
$\Delta_{AB}$	$\Delta_E$	$\Delta_F$	$\Delta_E$	$\Delta_F$	$\Delta_B$	$\Delta_D$	$\Delta_A$	$\Delta_C$	$\Delta_E$	$\Delta_F$	$\Delta_A$	$\Delta_E$	$\Delta_A$	$\Delta_C$
0	1	2	3	4	3	4	3	4	5	6	5	6	5	6

7		3,5,26,28	
$\Delta_B$	$\Delta_D$	7	
5	6		

Tabela 3.10: Árvore de Decodificação da Restrição  $(d, N) = (1, 5)$  com Taxa 3:5

Símbolo Decodificado		
Próximo Símbolo	Próximo Símbolo	Próximo Símbolo
Simb. Decod.	Simb. Decod.	Simb. Decod.

Tabela 3.11: Árvore de Decodificação

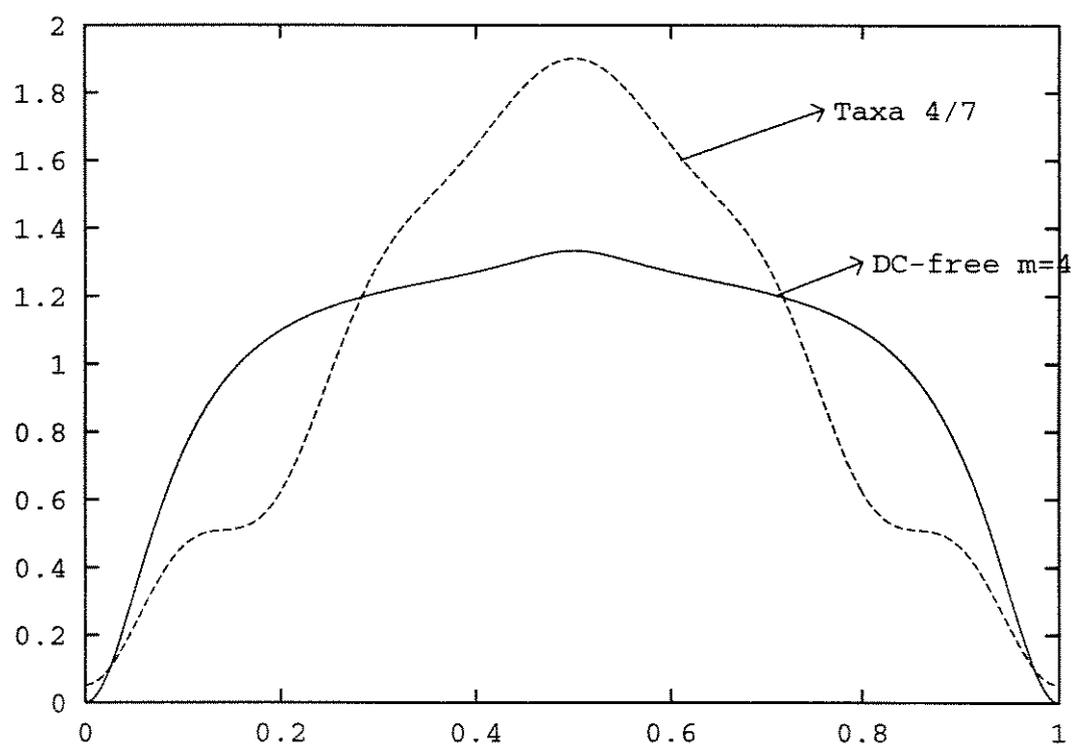


Figura 3.5: Espectro do Código  $(d, N) = (1, 5)$  Taxa 4/7

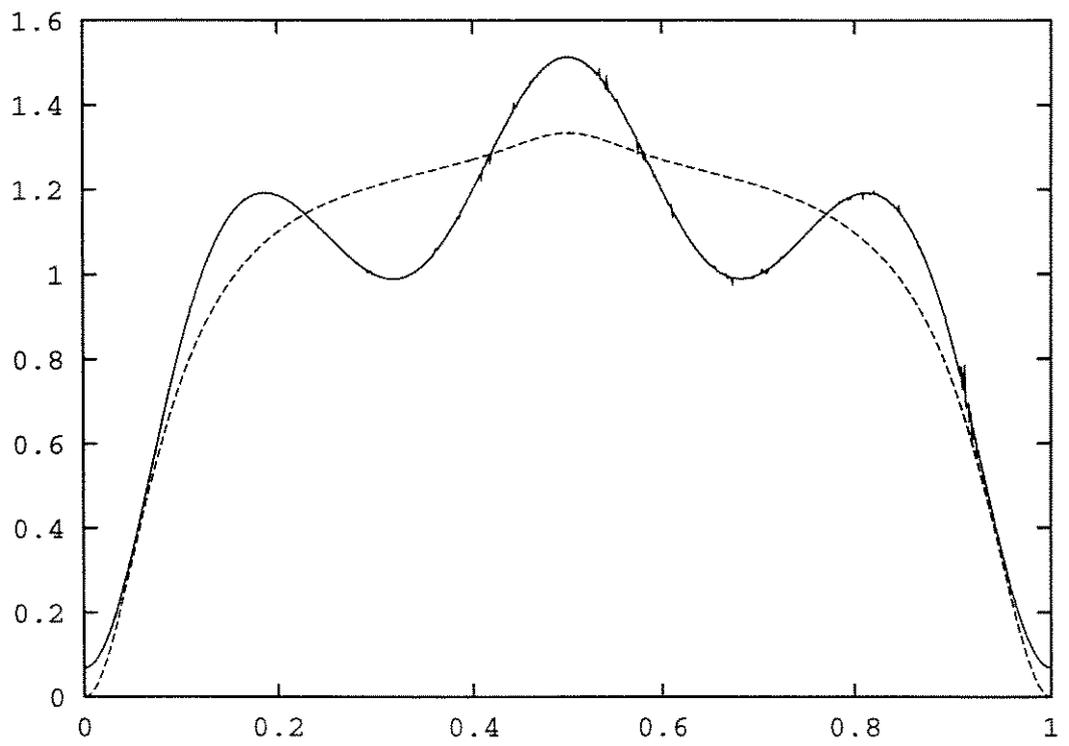


Figura 3.6: Espectro do Código  $(d, N) = (1, 5)$  Taxa  $3/5$

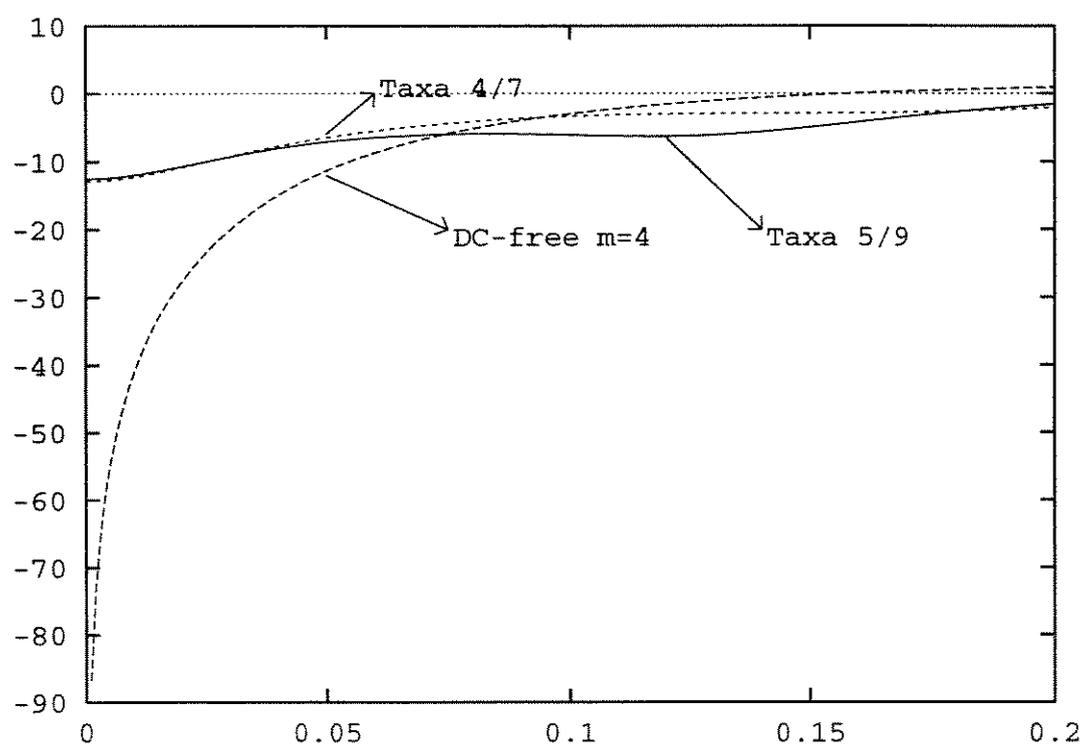


Figura 3.7: Vales Espectrais

## Capítulo 4

# LIMITANTES DA CAPACIDADE DE CORREÇÃO DE ERROS DE CÓDIGOS EM ESPAÇOS RESTRITOS

### 4.1 Introdução

Códigos para transmissão em banda-base e gravação devem ser construídos de tal forma a serem casados com o canal. Tais códigos podem ter capacidade de correção de erros, desde que seja mantida uma distância mínima de Hamming entre as palavras pertencentes ao alfabeto restrito.

As máximas taxas alcançáveis, para uma determinada distância relativa  $\delta = d/n$  onde  $d$  é a distância mínima de Hamming e  $n$  o tamanho do bloco, não são conhecidas. Daí o interesse em estudar pisos (limitantes inferiores) e tetos (limitantes superiores) para essas taxas. O piso é um valor para o qual podemos afirmar que existe pelo menos um código cuja taxa o supera. O teto é um valor para o qual se afirma não existir nenhum código com taxa que o supere.

Gilbert e Varshamov provaram, independentemente, que um limitante inferior das taxas alcançáveis a uma dada distância relativa  $R(\delta)$  poderia ser obtido do máximo volume das

esferas de Hamming restritas. O centro desta máxima esfera é a palavra  $\mathbf{x}$  cujo conjunto de palavras pertencentes ao espaço restrito com distância de Hamming menor ou igual a  $d - 1$  tem máximo número de elementos. Após isso Kolesnik e Krachkovsky [46] provaram que nessa relação poderia ser usada a esfera de volume médio, dando incentivo a outros trabalhos na área.

Limitantes superiores tem tido pouco estudo nos últimos anos. Porém em [42] há uma generalização do limitante superior de Plotkin [39] combinado com o de Hamming, que pode ser aplicada na restrição DC-free, como será visto.

## 4.2 Definições

Nessa Seção serão feitas algumas definições relativas a espaços restritos e esferas de Hamming. Tais definições foram desenvolvidas inicialmente para o espaço irrestrito, tendo sido então estendidas para o caso restrito.

Superfície esférica de Hamming (ou simplesmente superfície esférica  $\mathbf{S}_S(\mathbf{v}, d)$ ) é definida como o número de sequências de comprimento  $n$  pertencentes ao espaço restrito  $S$  cuja distância a uma palavra de referência  $\mathbf{v}$  (centro da esfera) é  $d$  (raio da superfície esférica).

A partir do conceito de superfície esférica, pode-se definir volume da esfera de Hamming  $V_S(\mathbf{v}, d)$  de raio  $d$  e centro  $\mathbf{v}$  em um espaço restrito  $S$  que é o resultado da soma de todas superfícies esféricas de raio  $r$  entre 0 e  $d$ ,

$$V_S(\mathbf{v}, d) = \sum_{r=0}^d \mathbf{S}_S(\mathbf{v}, r) \quad (4.1)$$

Portanto, volume da esfera média de Hamming é a média aritmética dos volumes de todas esferas cujos centros  $\mathbf{v}$  pertencem ao espaço restrito  $S$ ,

$$V_S^{med}(d) = |S|^{-1} \sum_{\mathbf{v} \in S} V_S(\mathbf{v}, d) \quad (4.2)$$

Definimos também as taxas assintóticas da superfície esférica e do volume da esfera, dada

uma restrição  $S$ , um centro  $\mathbf{v}$  e uma distância de Hamming relativa  $\delta = d/n$

$$\dot{\mathbf{S}}_S(\mathbf{v}, \delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{S}_S(\mathbf{v}, \delta n) \quad (4.3)$$

$$\dot{V}_S(\mathbf{v}, \delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log V_S(\mathbf{v}, \delta n), \quad (4.4)$$

onde os logaritmos são tomados na base  $q$ , que é a dimensão do alfabeto restrito correspondente.

É provado em [42] que:

$$\dot{V}_S(\mathbf{v}, \delta) = \max_{0 \leq \epsilon \leq \delta} [\dot{\mathbf{S}}_S(\mathbf{v}, \epsilon)] \quad (4.5)$$

e

$$\max_{0 \leq \delta \leq 1} [\dot{\mathbf{S}}_S(\mathbf{v}, \delta)] = c(S) \quad (4.6)$$

### 4.3 Limitantes Inferiores

Com relação a limitantes inferiores, tem-se o limitante como uma taxa  $R_S(\delta)$  na qual é possível ser obtido pelo menos um código no espaço restrito  $S$  com distância relativa  $\delta$ .

Em 1984, Ferreira [43], utilizando-se dos argumentos de Gilbert-Varshamov utilizados em espaços irrestritos, demonstrou um limitante inferior para espaços restritos dado por

$$R_S(\delta) \geq c(S) - h(\delta) \quad (4.7)$$

onde  $c(S)$  é a capacidade do espaço restrito e  $h(\delta)$  a função entropia

$$h(\delta) = -\delta \log \delta - (1 - \delta) \log(1 - \delta).$$

Apesar do limitante de Ferreira ser muito fraco, ele deu incentivo à busca do piso de Gilbert-Varshamov para espaços restritos.

### 4.3.1 O Limitante Inferior de Gilbert-Varshamov

Baseado nas definições da Seção 4.2 desse capítulo, serão aqui descritos os argumentos de Gilbert-Varshamov para a obtenção de limitantes inferiores.

Seja  $\chi_S^n$  o conjunto de todas sequências de comprimento  $n$  que satisfazem a restrição  $S$ . Se forem retirados de  $\chi_S^n$  todos os elementos da esfera  $V_S(\mathbf{x}_1, d)$  centrada num ponto  $\mathbf{x}_1 \in \chi_S^n$  obtém-se o espaço resultante  $\chi_S^n(1)$ . Repetindo esse procedimento em  $\chi_S^n(1)$  resulta  $\chi_S^n(2)$ . Quando o espaço for esgotado, ou seja  $\chi_S^n(M) \equiv \emptyset$ , então o procedimento de retirada de elementos de  $\chi_S^n$  terá sido repetido  $M$  vezes, sendo retirados  $M$  conjuntos não maiores que  $V_S^{max}(d)$  concluindo-se que

$$|\chi_S^n| = \sum_{i=1}^M V_S(\mathbf{x}_i, d) \leq M V_S^{max}(d). \quad (4.8)$$

Portanto

$$|\chi_S^n| \leq M V_S^{max}(d), \quad (4.9)$$

o que faz

$$M \geq \frac{|\chi_S^n|}{V_S^{max}(d)}, \quad (4.10)$$

a base para a obtenção do limitante inferior de Gilbert-Varshamov. Observe-se que o procedimento considerado acima resultou na formação de um código de tamanho  $M$  e distância mínima de Hamming  $d$ , formado pelos centros de todas as esferas retiradas. Com isso, se for determinada a esfera de volume máximo  $V_S^{max}(d)$  e seu centro  $\mathbf{v}$  tem-se o limitante inferior de Gilbert-Varshamov.

### 4.3.2 O Limitante Inferior de Kolesnik-Krachkovsky

Kolesnik e Krachkovsky [46] provaram que em  $\chi_S^n$ , pelo menos a metade das esferas tem volume não maior que o dobro da esfera média, ou seja, sendo  $\chi^*$  a cardinalidade de um conjunto

formado por elementos  $\mathbf{v} \in \chi_S^n$  no qual  $V_S(\mathbf{v}, d) \leq 2V_S^{med}(d)$ , tem-se que

$$\chi^* \geq \frac{1}{2} |\chi_S^n| \quad (4.11)$$

Aplicando-se os argumentos de exaustão da Seção anterior, conclui-se que nas  $M^*$  vezes que o procedimento é repetido obtém-se:

$$M^* \geq \frac{\chi^*}{V^*} \quad (4.12)$$

portanto

$$M^* \geq \frac{\chi_S^n}{4V_S^{med}(d)}. \quad (4.13)$$

Como existe  $M \geq M^*$  então:

$$M \geq \frac{\chi_S^n}{4V_S^{med}(d)} \quad (4.14)$$

que é a base para a determinação do limitante inferior de Kolesnik-Krachkovsky.

Gu e Fuja [48], utilizando-se de um algoritmo por eles chamado "altruísta", diferentemente do algoritmo de Gilbert-Varshamov dito "egoísta", provaram que:

$$M \geq \frac{\chi_S^n}{V_S^{med}(d)} \quad (4.15)$$

pode-se verificar que foi eliminado o fator de 4 no denominador do lado direito da desigualdade (4.14). Isso representa uma melhoria significativa do limitante para sequências finitas, mas não altera o caso assintótico.

O algoritmo altruísta consiste de se retirar da lista de candidatos ao código somente o centro da esfera máxima de cada vez, no lugar de toda uma esfera menos o seu centro como faz Gilbert-Varshamov. Esse processo é repetido até que todas esferas de  $\chi_S^n(i)$  tenham volume máximo  $V_S^{max}(d, i) = 1$ , ou no caso chamado abreviado, parar quando  $V_S^{max}(d, i) \leq V_S^{med}(d, i) + 0,5$ .

Supondo que após a aplicação do algoritmo altruísta abreviado, tenhamos em  $\chi_S^n(i)$

$$V_S^{max}(d, i) = V_S^{med}(d, i). \quad (4.16)$$

Então, aplicando os argumentos de Gilbert-Varshamov em  $\chi_S^n(i)$  tem-se:

$$M \geq \frac{|\chi_S^n(i)|}{V_S^{max}(d,i)} = \frac{|\chi_S^n| - i}{V_S^{med}(d,i)}. \quad (4.17)$$

Como:

$$\frac{|\chi_S^n| - i}{V_S^{med}(d,i)} \geq \frac{(|\chi_S^n| - i)(|\chi_S^n| - 1)}{(|\chi_S^n| - i - 1)V_S^{med}(d)}, \quad (4.18)$$

pois conforme demonstrado em [48] para o algoritmo abreviado

$$V_S^{med}(d) \geq \frac{|\chi_S^n| - 1}{|\chi_S^n| - i - 1} V_S^{med}(d,i) \quad (4.19)$$

Juntando as equações anteriores com

$$|\chi_S^n| \leq \frac{(|\chi_S^n| - i)(|\chi_S^n| - 1)}{(|\chi_S^n| - i - 1)}, \quad (4.20)$$

chega-se ao resultado desejado da equação 4.15. Essa prova é válida para o caso que a aplicação do algoritmo altruísta abreviado resulta em  $V_S^{max}(d,i) = V_S^{med}(d,i)$ . Quando  $V_S^{max}(d,i) > V_S^{med}(d,i)$  é provada de forma diferente a validade da Equação (4.15) [48].

Sendo  $U_{n,t}$  o número de pares em  $\chi_S^n$  com uma dada distância  $t$  e

$$U_n(z) = \sum_{t=0}^n U_{n,t} z^t \quad (4.21)$$

a função geradora de distâncias entre pares, pode ser verificado que  $U_{n,0} = U_n(0) = \chi_S^n$ . Calculando o número de pontos em todas esferas de raio  $d$  tem-se

$$\sum_{\mathbf{v} \in \chi_S^n} V_S(\mathbf{v}, d) = \sum_{t=0}^d U_{n,t}. \quad (4.22)$$

Portanto:

$$V_S^{med}(d) = \frac{\sum_{t=0}^d U_{n,t}}{U_{n,0}} \quad (4.23)$$

Sendo  $z$  tomado no intervalo  $[0, 1]$ , são válidas as desigualdades

$$U_n(z) \geq \sum_{t=0}^d U_{n,t} z^t \quad (4.24)$$

$$\sum_{t=0}^d U_{n,t} z^t \geq z^d \sum_{t=0}^d U_{n,t}, \quad (4.25)$$

Substituindo as desigualdades ( 4.24) e ( 4.25) na Equação ( 4.23) e minimizando em relação a  $z$  tem-se:

$$V_S^{med}(d) = \min_{0 \leq z \leq 1} \frac{U_n(z)}{z^d U_{n,0}} \quad (4.26)$$

Esse resultado substitui o problema de se determinar a esfera média em  $\chi_S^n$  pelo cálculo da função geradora de distância entre pares  $U_n(z)$ . O que torna a Equação ( 4.15) em

$$M \geq \frac{U_n(0)^2}{\min_{0 \leq z \leq 1} \{z^{-d} U_n(z)\}} \quad (4.27)$$

A Equação ( 4.27) representa um limitante inferior geral para o espaço  $\chi_S^n$  com distância mínima  $d$  para  $n$  suficientemente grande.

Seja  $A_G(z)$  a matriz de transição de estados cujos elementos não nulos são: 1 se o rótulo da transição for "0" e  $z$  caso o rótulo seja "1". Considera-se o seguinte exemplo.

Exemplo 4.1: *Restrição RLL com parâmetros  $(d, k) = (0, 1)$*

$$A_G(z) = \begin{bmatrix} z & 1 \\ z & 0 \end{bmatrix}$$

Define-se  $H_{G \times G}(z)$  como a matriz de transições da treliça produto dada por:

$$H_{G \times G}(z) = A_G(z) \# A_G(z) \text{ mod } (z^2 - 1) \quad (4.28)$$

onde o símbolo  $\#$  indica o produto de Kronecker, tal que se  $C = A \# B$ , a célula  $(m, n)$  de  $C$  é dada por  $\{A\}_{m,n} B$ . Por simplicidade de notação,  $H_{G \times G}(z)$  será representado por  $H(z)$ .

Exemplo 4.2: Restrição RLL com parâmetros  $(d, k) = (0, 1)$

$$H(z) = \begin{bmatrix} z & 1 \\ z & 0 \end{bmatrix} \# \begin{bmatrix} z & 1 \\ z & 0 \end{bmatrix} \text{mod}(z^2 - 1) = \begin{bmatrix} 1 & z & z & 1 \\ 1 & 0 & z & 0 \\ 1 & z & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

No exemplo apresentado, como o FSTD tem apenas 2 estados, a matriz de treliça produto tem dimensão  $2^2 \times 2^2$ . Porém, quando o FSTD cresce, a treliça produto cresce mais ainda pois tem número de estados igual ao quadrado do número de estados do FSTD original. Portanto, para facilitar o cálculo de  $U_n(z)$ , que está diretamente relacionado com a treliça produto, essa dificuldade deve ser reduzida com a introdução do conceito de classes de equivalência de estados de  $H(z)$ .

Definindo a transposição  $\pi$  do estado  $(i, j)$  da matriz de transições da treliça produto tal que

$$\pi(i, j) = (j, i),$$

tem-se um grupo formado por  $\{(i, j) \text{ e } \pi(i, j)\}$ . Esses grupos são chamados de classes de equivalência. Seus líderes podem ser escolhidos como se desejar, porém, para sistematizar o

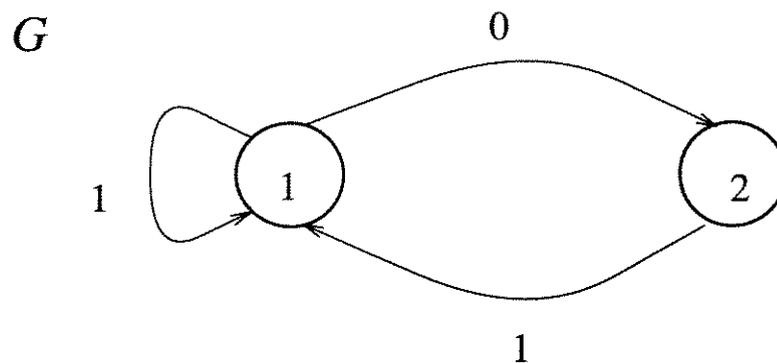


Figura 4.1: FSTD da restrição RLL (0, 1)

procedimento é preferível que sejam

$$\{(i, j) \text{ para } i \geq j\}$$

onde  $l$  é o número de estados do FSTD.

Sejam as matrizes  $C$  e  $D$  de dimensão  $(l^2 \times T)$ , onde  $T$  é o número de classes de equivalência, dadas por

$$\{C\}_{I,t} = \begin{cases} 1 & \text{se o estado } I \text{ pertence a classe } t \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\{D\}_{I,t} = \begin{cases} 1 & \text{se o estado } I \text{ é o líder da classe } t \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

É provado em [46] que a matriz de transição de estados reduzida da treliça produto  $H_r(z)$  é dada por

$$H_r(z) = D^t H(z) C \quad (4.29)$$

onde o superíndice  $t$  indica a transposição de  $D$ . Isso reduz a ordem da matriz produto de  $l^2$  para  $l(l+1)/2$ .

Exemplo 4.3: Restrição RLL com parâmetros  $(d, k) = (0, 1)$

As classes de equivalência são lideradas por

$$\{(2, 2), (2, 1), (1, 1)\}$$

sendo constituídas pelos seguintes elementos:

$$\{(2, 2)\}$$

$$\{(2, 1), (1, 2)\}$$

$$\{(1, 1)\}$$

portanto as matrizes  $C$  e  $D$  são:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$H_r(z) = D^t H(z) C = \begin{bmatrix} 1 & 2z & 1 \\ 1 & z & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

É mostrado em [46] que para  $n$  suficientemente grande,

$$\lambda(H(z))^{n-o(n)} \leq U_n(z) \leq \lambda(H(z))^{n+o(n)} \quad (4.30)$$

onde  $\lambda(H(z))$  é o máximo autovalor de  $H(z)$ , que é o mesmo de  $H_r(z)$ , e  $o(n)$  uma função que tem a seguinte restrição:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{o(n)}{n} = 0.$$

**Teorema 4.1**(Kolesnik e Krachkovsky): Seja a restrição  $S$  tal que existe um FSTD com todos estados alcançáveis, irredutível, e a matriz de transições da treliça produto  $H(z)$ , ou  $H_r(z)$  na forma reduzida. Para  $n$  grande o suficiente, existe pelo menos um código restrito com

distância mínima  $d = \delta n$  e taxa de informação  $R(\delta)$  tal que

$$R(\delta) \geq 2 \log \lambda(H(0)) - \min_{0 \leq z \leq 1} \{ \log \lambda(H(z)) - \delta \log z \} - \frac{o(n)}{n}. \quad (4.31)$$

A prova completa desse teorema é apresentada em [46].

### 4.3.3 O Limitante Inferior de Marcus-Roth

Kolesnik e Krachkovsky generalizaram o limitante de Gilbert-Varshamov estimando o volume médio de esferas em espaços restritos. Eles usaram uma função geradora da distância entre pares de palavras em sistemas restritos juntamente com o teorema de Perron-Frobenius [4] para obter um limitante inferior. Na Seção anterior, foi obtido um piso sob o limitante inferior (4.15).

Nessa Seção será apresentado o método de Marcus e Roth [47] para se obter o valor exato do limitante inferior de Kolesnik e Krachkovsky (4.15) sem a aproximação feita através do cálculo da função geradora de distância entre pares  $U_n(z)$ .

Seja  $\phi_w(e)$  uma função indicadora do ramo  $e$  relativa a um dado símbolo  $w$  tal que:

$$\phi_w(e) = \begin{cases} 1 & \text{se o rótulo de } e \text{ é igual à } w, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.32)$$

Define-se a matriz de transições de estados  $A_G(x)$  como a matriz cujos elementos  $(i, j)$  são

$$[A_G(x)]_{i,j} \triangleq \sum_{e \in E_G(i,j)} q^{-x\phi_w(e)} \quad (4.33)$$

onde  $q$  é o tamanho do alfabeto ao qual  $w$  pertence. É simples verificar que  $A_G(0)$  é a matriz de adjacências definida no Capítulo 2. Dessa forma,  $\lambda(A_G(x))$  representa o máximo autovalor de  $A_G(x)$ , ou seu raio espectral.

Sendo  $\Delta(e, e')$  a distância de Hamming entre os rótulos dos ramos  $e$  e  $e'$ , define-se a matriz de transições da treliça produto  $G \times G$ ,  $H_{G \times G}(x, z)$  ou simplesmente  $H(x, z)$ , como uma matriz cujos elementos  $((i_1, j_1), (i_2, j_2))$  são

$$[H(x, z)]_{(i_1, j_1), (i_2, j_2)} = \sum_{e_1 \in E_G(i_1, j_1), e_2 \in E_G(i_2, j_2)} q^{-x(\phi_w(e_1) + \phi_w(e_2)) - z\Delta(e_1, e_2)} \quad (4.34)$$

É interessante que seja aplicada a técnica de redução aplicada na Seção anterior para que a complexidade do cálculo do máximo autovalor de  $H(x, z)$  representado por  $\lambda(H(x, z))$ , seja reduzida .

Exemplo 4.4: Restrição RLL com parâmetros  $(d, k) = (0, 1)$

$$A_G(x) = \begin{bmatrix} 2^{-x} & 1 \\ 2^{-x} & 0 \end{bmatrix}$$

$$H(x, z) = \begin{bmatrix} 2^{-2x} & 2^{-x-z} & 2^{-x-z} & 1 \\ 2^{-2x} & 0 & 2^{-x-z} & 0 \\ 2^{-2x} & 2^{-x-z} & 0 & 0 \\ 2^{-2x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando-se a técnica de redução de classes de equivalência, tem-se

$$H_r(x, z) = \begin{bmatrix} 2^{-2x} & 2 \cdot 2^{-x-z} & 1 \\ 2^{-2x} & 2^{-x-z} & 0 \\ 2^{-2x} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Teorema 4.2**(Marcus e Roth)[47]: Seja a restrição  $S$  tal que existe um FSTD com todos estados alcançáveis, irredutível, com a matriz de transições de estados  $A_G(x)$  e a matriz de transições da treliça produto  $H(z)$ , ou  $H_r(z)$  na forma reduzida. Para  $n$  grande o suficiente, existe pelo menos um código restrito com distância mínima  $d = \delta n$  e taxa de informação  $R(\delta)$  tal que:

$$R(\delta) \geq \max_{p \in [0, 1]} \left\{ 2 \min_{x \in \mathfrak{R}} \{px + \log \lambda(A_G(x))\} - \right.$$

$$- \min_{x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^+} \{2px + \delta z + \log \lambda(H(x, z))\} - \frac{o(n)}{n}. \quad (4.35)$$

Pode ser verificado que se for feito  $x = 0$  e  $p = 0$  tem-se como resultado o limitante inferior calculado por Kolesnik e Krachkovsky. Portanto, esse limitante é superior ao calculado anteriormente.

## 4.4 Limitantes Superiores

Limitante superior, em um espaço restrito  $S$  é uma taxa  $R(\delta)$  sobre a qual se afirma que não é possível a obtenção de nenhum código em  $S$  com taxa maior que  $R(\delta)$  satisfazendo a condição de distância mínima  $d = \delta n$  para  $n$  suficientemente grande.

### 4.4.1 O Limitante Superior de Plotkin

Seja  $S$  um espaço restrito e  $\chi_S^n$  o conjunto de seqüências em  $S$  de tamanho  $n$ . Definindo  $M$  como o número máximo de palavras de comprimento  $n$  e distância de Hamming mínima  $d$  em  $S$ ,  $M = |\chi_S^{n,d}|$ , tem-se  $R(\delta)$  como a taxa de informação relacionada a uma distância relativa de Hamming mínima  $\delta = d/n$ , dada por

$$R(\delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M. \quad (4.36)$$

Sendo  $c(S)$  a capacidade de Shannon da restrição  $S$ , dada por

$$c(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\chi_S^{n,1}| = \log \lambda, \quad (4.37)$$

e  $K$  o conjunto de todas seqüências de tamanho  $k$  em  $\chi_S^{n,d}$ . O conjunto de palavras código  $\chi_{S,y}^{n,d}$ , que contém a seqüência  $y$  de tamanho  $k$ , tem tamanho  $m(y) = |\chi_{S,y}^{n,d}|$ . Portanto

$$M = \sum_{y \in K} m(y). \quad (4.38)$$

Considerando que

$$|K| = \lambda^{k+o(k)}, \quad (4.39)$$

segue que para algum  $\mathbf{Y} \in K$

$$m(\mathbf{Y}) = \max_{\mathbf{y} \in K} m(\mathbf{y}) \geq \frac{M}{\lambda^{k+o(k)}}. \quad (4.40)$$

Seja  $R^*(d/(n-k))$  a taxa do código de maior tamanho em  $\chi_S^{n-k,d}$ , que é construído com a redução do código  $\chi_S^{n,d}$  através da retirada das sequências  $\mathbf{Y}$  de todas palavras código. Pode-se então dizer que:

$$\begin{aligned} R^* \left( \frac{d}{n-k} \right) &= \lim_{(n-k) \rightarrow \infty} \frac{1}{n-k} \log m(\mathbf{Y}) \geq \\ &\geq \lim_{(n-k) \rightarrow \infty} \frac{1}{n-k} \log \frac{M}{\lambda^{k+o(k)}} = \frac{n}{n-k} \left[ R \left( \frac{d}{n} \right) - \frac{k}{n} c(S) \right]. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Plotkin [39] mostrou que  $R(1/2) = 0$  para sequências binárias em espaços irrestritos. Portanto no caso de sequências binárias para espaços restritos também é válida a relação demonstrada por Plotkin. Fazendo na Equação (4.41)  $d = (n-k)/2$ , tem-se

$$0 = R^*(1/2) \geq \frac{n}{2d} \left[ R \left( \frac{d}{n} \right) - \left( 1 - \frac{2d}{n} \right) c(S) \right] \quad (4.42)$$

e portanto:

$$R(\delta) \leq (1-2\delta)c(S), \quad \text{para } 0 \leq \delta \leq 1/2, \quad (4.43)$$

que é o limitante superior de Plotkin generalizado para espaços restritos. Para espaços irrestritos,  $c(S) = 1$  resultando no limitante superior de Plotkin clássico.

#### 4.4.2 O Limitante Superior de Hamming

Seja  $\chi_S^n$  o conjunto de todas sequências de comprimento  $n$  que satisfazem a restrição  $S$ . Seja também a existência de um código  $\chi_S^{n,d}$  com  $M$  palavras, sendo  $M$  o máximo valor possível de ser alcançado com distância mínima  $d$  em  $\chi_S^n$ . As esferas de volume  $V_S(\mathbf{v}, d/2)$  com  $\mathbf{v} \in \chi_S^{n,d}$

são todas disjuntas. Portanto

$$MV_S^{min}(d/2) \leq \sum_{\mathbf{v} \in \chi_S^{n,d}} V_S(\mathbf{v}, d/2) \leq |\chi_S^n|, \quad (4.44)$$

onde

$$V_S^{min}(d) = \min_{\mathbf{v} \in \chi_S^n} V_S(\mathbf{v}, d). \quad (4.45)$$

Consequentemente,

$$M \leq \frac{|\chi_S^n|}{V_S^{min}(d/2)}, \quad (4.46)$$

que é o limitante superior de Hamming baseado em argumentos de empacotamento.

### 4.4.3 O Limitante Superior de Hamming-Plotkin

Considere-se a esfera  $V_S(\mathbf{y}, \gamma)$  de todas sequências de tamanho  $k$  a uma distância de Hamming de no máximo  $\gamma k < d/2$  de  $\mathbf{y}$ , e o conjunto  $\chi_{S,\mathbf{y}}^n$  de todas palavras de um código  $\chi_S^n$  com segmentos de tamanho  $k$  em  $V_S(\mathbf{y}, \gamma)$ . Então:

$$\sum_{\mathbf{y} \in K} |\chi_{S,\mathbf{y}}^n| = \sum_{\mathbf{y} \in K} m(\mathbf{y}) |V_S(\mathbf{y}, \gamma)| \geq MV_S^{min}(\gamma), \quad (4.47)$$

onde

$$V_S^{min}(\gamma) = \min_{\mathbf{y} \in K} V_S(\mathbf{y}, \gamma) \quad (4.48)$$

e  $M$  como definido em ( 4.38).

Para

$$|\chi_{S,\mathbf{Y}}^n| = \max_{\mathbf{y} \in K} |\chi_{S,\mathbf{y}}^n|, \quad (4.49)$$

tem-se

$$|\chi_{S,\mathbf{Y}}^n| \geq \frac{MV_S^{min}(\gamma)}{\lambda^{k+o(k)}}. \quad (4.50)$$

Como todas sequências de tamanho  $k$  em  $\chi_{S,\mathbf{Y}}^n$  tem distância no máximo  $\gamma k$  de  $\mathbf{Y}$ , então elas podem ter no máximo distância de  $2\gamma k$  entre si. Retirando os segmentos de tamanho  $k$

das palavras em  $\chi_{S,Y}^n$  é então construído um código com palavras de tamanho  $n - k$ , distância mínima  $d - 2\gamma k$  e com  $|\chi_{S,Y}^n|$  palavras. Da Equação ( 4.50), a seguinte desigualdade se aplica a taxa  $R'$  desse código

$$R' \left( \frac{d - 2\gamma k}{n - k} \right) \geq \frac{n}{n - k} \left[ R \left( \frac{d}{n} \right) - \frac{k}{n} [c(S) - \dot{V}_S^{min}(\gamma)] \right], \quad (4.51)$$

onde

$$\dot{V}_S^{min}(\gamma) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log V_S^{min}(\gamma). \quad (4.52)$$

Fazendo  $d - 2\gamma k = (n - k)/2$  tem-se  $R'(1/2)$ , que é igual a 0.

Portanto,

$$R(\delta) \leq \frac{1 - 2\delta}{1 - 4\gamma} R_H(2\gamma), \quad \text{para } 0 \leq \gamma \leq \delta/2, \quad (4.53)$$

onde

$$R_H(\gamma) = c(S) - \dot{V}_S^{min}(\gamma/2) \quad (4.54)$$

é o limitante superior de Hamming. Da Equação ( 4.54) pode-se escrever:

$$R(\delta) \leq (1 - 2\delta) \min_{0 \leq \gamma \leq \delta/2} \left[ \frac{R_H(2\gamma)}{1 - 4\gamma} \right]. \quad (4.55)$$

Considerando  $\Gamma(\delta)$  a reta que passa pelo ponto  $R(1/2) = 0$  e é tangente em  $\delta = \delta_T$  ao limitante superior de Hamming,  $R_H(\delta)$  (que é côncavo), a Equação ( 4.54) pode ser reescrita como

$$R(\delta) \leq R_H(\delta), \quad \delta \leq \delta_T$$

$$R(\delta) \leq \Gamma(\delta), \quad \delta \geq \delta_T. \quad (4.56)$$

## 4.5 Conclusões

Apesar de no caso não assintótico o limitante inferior de Kolesnik e Krachkovsky [46] como definido originalmente não superar o limitante inferior de Gilbert e Varshamov [45], quando

feitas as melhorias apresentadas por Gu e Fuja [48] ele supera Gilbert e Varshamov. No caso assintótico, o fator 4 eliminado pelo algoritmo altruísta de Gu e Fuja, nada interfere pois:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log 4 = 0.$$

Foram comparadas as técnicas de redução de estados da matriz de transições da treliça produto de [46] e a técnica de fusão de estados (apresentada no Capítulo 2), verificando-se que são similares.

O cálculo do limitante inferior apresentado por Marcus e Roth [47] supera o de Kolesnik e Krachkovsky por desenvolver um cálculo exato e não uma aproximação.

Quanto a limitantes superiores, os de Plotkin e Hamming tiveram seus desenvolvimentos independentes. Porém, recentemente, Waldman e Nisenbaum [42] provaram a existência de uma combinação entre os dois, o limitante superior de Hamming-Plotkin, que provê uma melhora em relação aos anteriores.

## Capítulo 5

# TAXAS ASSINTÓTICAS E LIMITANTES

### 5.1 Introdução

Nesse capítulo são apresentados os cálculos dos limitantes inferiores e superiores de algumas restrições DC-free e RLL.

Na Seção 5.2 são determinadas esferas de restrições RLL com parâmetros  $(d, k) = (0, 1)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(1, 3)$  e  $(2, 4)$  com centros periódicos.

Na Seção 5.3 são calculados os limitantes da restrição RLL com parâmetros  $(d, k) = (0, 1)$ .

Na Subseção 5.4.1 é apresentada uma tentativa de se obter melhores limitantes inferiores com o reforço da restrição original, no caso a DC-free com desbalanço  $m = 3$ . Na Subseção 5.4.2 é feito o cálculo do limitante inferior de Gilbert e Varshamov [45] para a mesma restrição DC-free anterior. Os cálculos dos limitantes inferiores de Kolesnik e Krachkovsky das restrições DC-free com desbalanços  $m = 3$  e  $4$  são mostrados na Subseção 5.4.3. Para finalizar, na Subseção 5.4.4, é feito o cálculo do limitante inferior de Marcus e Roth das restrições DC-free com desbalanço  $m = 3$  e  $5$ .

## 5.2 Método Combinatório para Cálculo de Taxas Assintóticas

Nessa Seção será apresentado um método para se determinar taxas assintóticas do tamanho de esferas para alguns centros periódicos de período pequeno. Pode-se verificar esses resultados através da distância típica ao centro considerado, sendo que distância típica é a distância relativa  $\delta$  em que  $\dot{S}(\mathbf{x}, \delta) = c(S)$  que dá a taxa na qual os dígitos de uma sequência típica em  $S$  são diferentes de  $\mathbf{x}$ .

Portanto a partir dos símbolos menos e mais prováveis e suas taxas no centro obtemos os centros das esferas com distância típica mínima e máxima cujas taxas buscamos determinar.

**Teorema 5.1** Para restrições RLL com parâmetro  $d = 0$  o símbolo menos provável é 0.

*Prova:* A matriz de transições de estados de uma restrição do RLL com parâmetro  $d = 0$  é do tipo:

$$A_G = \begin{bmatrix} 1_1 & 1_0 & 0 & \dots & 0 \\ 1_1 & 0 & 1_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1_1 & 0 & 0 & \dots & 1_0 \\ 1_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Para provar que o símbolo 0 é menos provável, basta provar que em um estado qualquer, a probabilidade maxentrópica da transição cuja saída é o símbolo 0 é menor que 1/2.

Como visto anteriormente, a matriz de probabilidades de transições maxentrópicas  $P$  tem elementos

$$\{P\}_{i,j} = \frac{\{A_G\}_{i,j} v_j}{\lambda(A_G) v_i}$$

onde  $v_l$  é o elemento  $l$  de um autovetor de  $A_G$  e  $\lambda(A_G)$  (a partir de agora denotado somente

por  $\lambda$ ), é o máximo autovalor de  $A_G$ . Portanto a matriz  $P$  é de tipo:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{v_1}{\lambda v_1} & \frac{v_2}{\lambda v_1} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{v_1}{\lambda v_2} & 0 & \frac{v_3}{\lambda v_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{v_1}{\lambda v_k} & 0 & 0 & \dots & \frac{v_{k+1}}{\lambda v_k} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Como as somas dos elementos de uma linha da matriz de probabilidades de transição tem que ser igual a 1, verifica-se que:

$$v_1 + v_2 = \lambda v_1 \rightarrow v_2 = \lambda v_1 - v_1$$

$$v_1 + v_3 = \lambda v_2 \rightarrow v_3 = \lambda v_2 - v_1$$

$$v_1 + v_4 = \lambda v_3 \rightarrow v_4 = \lambda v_3 - v_1$$

...

$$v_1 + v_i = \lambda v_{i-1} \rightarrow v_i = \lambda v_{i-1} - v_1$$

para  $i = 2, 3, 4, \dots, k + 1$ . Retirando dessas equações,  $v_i$ , se obtém:

$$v_i = v_1(\lambda^{i-1} - \lambda^{i-2} - \lambda^{i-3} - \dots - \lambda - 1). \quad (5.1)$$

O que se deseja provar é que

$$\frac{v_1}{\lambda v_i} > \frac{1}{2}. \quad (5.2)$$

Substituindo a Equação (5.1) na desigualdade (5.2), verifica-se que ela é válida para  $1 < \lambda < 2$ , que é a faixa de valores possíveis de  $\lambda$ . Assim conclui-se a prova.

**Teorema 5.2** Para restrições RLL com parâmetro  $d \neq 0$  o símbolo menos provável é 1.

*Prova:* Da simples observação desse tipo de sequência  $(d, k)$ , verifica-se que para a ocorrência de um símbolo 1 ocorrem pelo menos  $d$  0's.

### 5.2.1 Taxas Assintóticas de Esferas com Centros de Distância Típica Máxima

**Restrição RLL com parâmetros  $(d, k) = (0, 1)$**

Como verificado na Seção 5.2, o centro da esfera cuja distância típica é máxima é aquele que possui maior densidade de 0's

$$\mathbf{x} = (01)^{\frac{n}{2}} \quad (5.3)$$

onde o superíndice representa o número de repetições da sequência. Na Figura 5.1 é apresentada a treliça da restrição com a sequência central e seus símbolos de imitação em negritolinha cheia. Os símbolos de imitação são aqueles que não produzem erro, mesmo sem pertencer à sequência-centro.

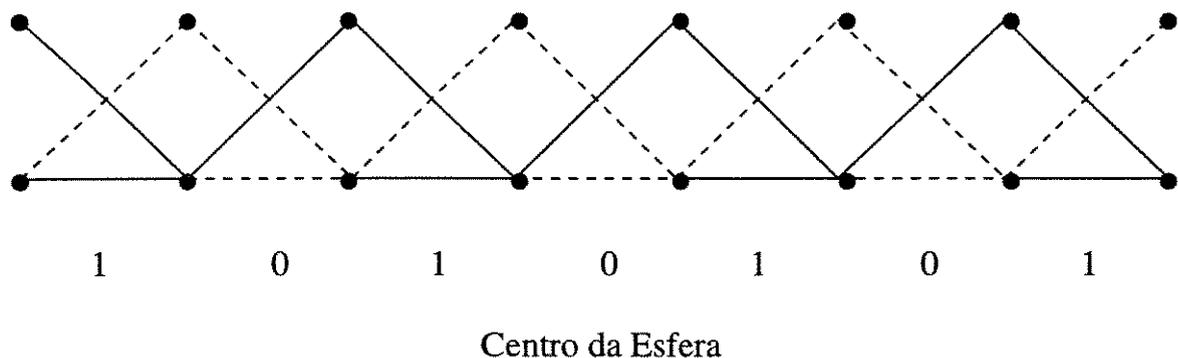


Figura 5.1: Treliça Representando Centro  $\mathbf{x} = (01)^{\frac{n}{2}}$  da Restrição RLL  $(0, 1)$

Um evento de erro, ou seja, uma sequência que em determinado momento se separa do caminho da esfera central na treliça, sempre inicia quando no lugar de 0 ocorre o símbolo 1, e termina quando ocorrem dois 1's consecutivos. Podendo ser do tipo:

$$(2)^i 1$$

onde  $(2)^i$  representa a ocorrência de  $i$  células com dois erros do tipo 10, e 1 representa a célula

de um erro do tipo 11. Portanto denominamos

$$\begin{cases} n_0 = \text{número de células sem erros} \\ n_1 = \text{número de células com 1 erro} \\ n_2 = \text{número total de células com 2 erros} \end{cases}$$

Como todo evento de erro termina com uma célula de um erro então  $n_1$  é igual ao número de eventos de erro. A distância total de uma sequência qualquer até o centro é dada por:

$$d = n_1 + 2n_2, \quad (5.4)$$

em um comprimento total de

$$n = 2(n_0 + n_1 + n_2). \quad (5.5)$$

Os  $n_1$  eventos de erro e  $n_0$  células sem erro podem se distribuir de

$$\begin{pmatrix} n_0 + n_1 \\ n_1 \end{pmatrix}$$

formas diferentes. Distribuindo as  $n_2$  células de dois erros e os  $n_1 - 1$  intervalos entre eventos resultam

$$\begin{pmatrix} n_2 + n_1 - 1 \\ n_1 - 1 \end{pmatrix}$$

possibilidades. Do que foi mostrado até agora, verifica-se que nesse caso existem três incógnitas ( $n_0$ ,  $n_1$  e  $n_2$ ) e duas equações. Portanto, uma esfera de raio  $d$  tem um total de possibilidades dado por

$$S(d) = \sum_{n_1=1}^d \begin{pmatrix} n_0 + n_1 \\ n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_2 + n_1 - 1 \\ n_1 - 1 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

sob as restrições das Equações ( 5.4) e ( 5.5). Substituindo essas restrições se obtém

$$S(d) = \sum_{n_1=1}^d \binom{\frac{n}{2} - \frac{d}{2} + \frac{n_1}{2}}{n_1} \binom{\frac{d}{2} + \frac{n_1}{2} - 1}{\frac{d}{2} - \frac{n_1}{2}} \quad (5.7)$$

No limite, tem-se

$$\dot{S}(\delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log S(d). \quad (5.8)$$

Com  $\delta = d/n$  resulta a esfera mínima assintótica,

$$\begin{aligned} \dot{S}(\delta) = \max_{0 < \mu < \delta} \left\{ \left( \frac{1}{2} - \frac{\delta}{2} + \frac{\mu}{2} \right) \log \left( \frac{1}{2} - \frac{\delta}{2} + \frac{\mu}{2} \right) + \left( \frac{\delta}{2} + \frac{\mu}{2} \right) \log \left( \frac{\delta}{2} + \frac{\mu}{2} \right) - \right. \\ \left. - \left( \frac{1}{2} - \frac{\delta}{2} - \frac{\mu}{2} \right) \log \left( \frac{1}{2} - \frac{\delta}{2} - \frac{\mu}{2} \right) - \left( \frac{\delta}{2} - \frac{\mu}{2} \right) \log \left( \frac{\delta}{2} - \frac{\mu}{2} \right) - 2\mu \log \mu \right\}, \quad (5.9) \end{aligned}$$

onde  $\mu = n_1/n$ .

**Restrição RLL com parâmetros  $(d, k) = (1, 2)$**

Na Figura 2.10 é visto o FSTD dessa restrição . Existem duas palavras que começam e terminam no mesmo estado (1)

$$\{01, 001\}$$

de comprimentos 2 e 3. O centro da esfera cuja distância típica é máxima será aquele que contém maior densidade de 1's, ou seja

$$\mathbf{x} = (01)^{\frac{n}{2}}.$$

Pode ocorrer um único tipo de evento de erro, que é constituído por duas palavras de comprimento 3 seguidas. Entre essas palavras, nos interstícios, pode ocorrer um número qualquer de palavras de comprimento 2.

Sendo  $n_2$  e  $n_3$  o número total de palavras de comprimento 2 e 3, respetivamente, e  $I_2$  o número total de palavras de comprimento 2 nos interstícios, pode-se dizer que o número total

de eventos de erro é  $n_3/2$ . Como há um interstício por evento, o total de interstícios também é  $n_3/2$ . Os erros em um evento, de acordo com as Figuras 5.2, 5.3 e 5.4, são  $3 + 2i_2$ , onde  $i_2$  é o número de palavras de comprimento 2 no evento. Isto resulta num total de  $\frac{3n_3}{2} + 2I_2$  erros. Portanto

$$d = \frac{3n_3}{2} + 2I_2 \tag{5.10}$$

e o comprimento total é

$$n = 2n_2 + 3n_3 \tag{5.11}$$

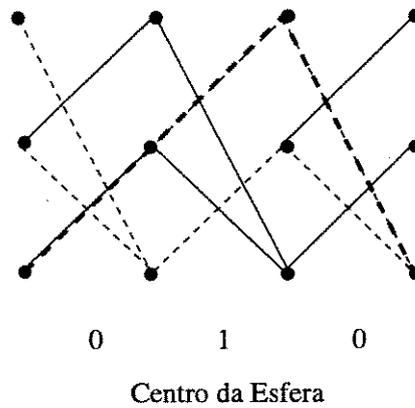


Figura 5.2: Início de um Evento de Erro com Centro  $x = (01)^{\frac{n}{2}}$  da Restrição RLL (1, 2)

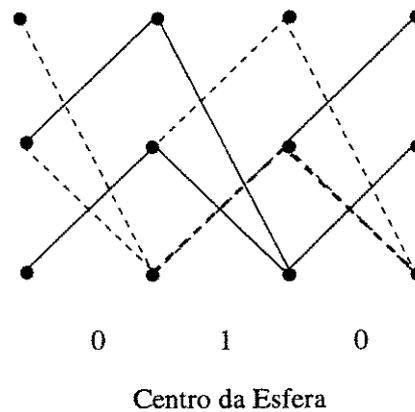


Figura 5.3: Interstício em um Evento de Erro com Centro  $x = (01)^{\frac{n}{2}}$  da Restrição RLL (1, 2)

Distribuindo os  $n_3/2$  eventos em  $(n_2 - I_2 + 1)$  posições, onde  $(n_2 - I_2)$  é o total de palavras

de comprimento 2 fora dos interstícios, resultam

$$\begin{pmatrix} \frac{n_3}{2} + n_2 - I_2 \\ \frac{n_3}{2} \end{pmatrix}$$

possibilidades.

Distribuindo as  $I_2$  palavras de comprimento 2, que ocorrem dentro de interstícios nos  $n_3/2$  interstícios, são obtidas

$$\begin{pmatrix} I_2 + \frac{n_3}{2} - 1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

possibilidades.

Como se tem três incógnitas ( $n_2$ ,  $n_3$  e  $I_2$ ) e apenas duas Equações ( 5.10) e ( 5.11), na expressão das esferas  $S(d)$  deverá haver uma somatória, tendo um total de possibilidades:

$$S(d) = \sum_{n_3=0}^{\frac{2d}{3}} \begin{pmatrix} \frac{n_3}{2} + n_2 - I_2 \\ \frac{n_3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 + \frac{n_3}{2} - 1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Substituindo as Equações ( 5.10) e ( 5.11) em ( 5.12), resulta:

$$S(d) = \sum_{n_3=0}^{\frac{2d}{3}} \begin{pmatrix} \frac{n}{2} - \frac{d}{2} - \frac{n_3}{4} \\ \frac{n_3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d}{2} - \frac{n_3}{4} - 1 \\ \frac{d}{2} - \frac{3n_3}{4} \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

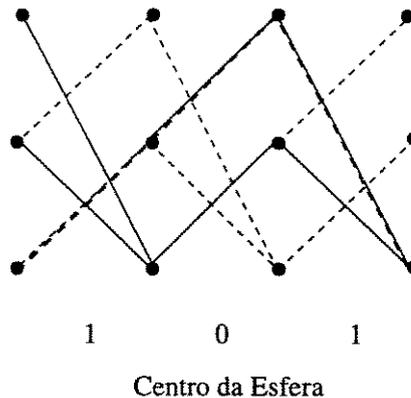


Figura 5.4: Fim de um Evento de Erro com Centro  $\mathbf{x} = (01)^{\frac{n}{2}}$  da Restrição RLL (1,2)

Portanto:

$$S(d) = \sum_{n_3=0}^{\frac{2d}{3}} \frac{\binom{\frac{n}{2} - \frac{d}{2} - \frac{n_3}{4}}!}{\frac{n_3}{2}! \binom{\frac{n}{2} - \frac{d}{2} - \frac{3n_3}{4}}!} \frac{\binom{\frac{d}{2} - \frac{n_3}{4} - 1}!}{\left(\frac{d}{2} - \frac{3n_3}{4}\right)! \left(\frac{n_3}{2} - 1\right)!} \quad (5.14)$$

Fazendo  $\delta = d/n$  e  $\mu_3 = n_3/n$ , no limite quando  $n \rightarrow \infty$ , se obtém a esfera assintótica

$$\begin{aligned} \dot{S}(\delta) = \max_{0 < \mu_3 < 2\delta/3} & \left\{ \left( \frac{1}{2} - \frac{\delta}{2} - \frac{\mu_3}{4} \right) \log \left( \frac{1}{2} - \frac{\delta}{2} - \frac{\mu_3}{4} \right) + \left( \frac{\delta}{2} - \frac{\mu_3}{4} \right) \log \left( \frac{\delta}{2} - \frac{\mu_3}{4} \right) - \right. \\ & \left. - \left( \frac{1}{2} - \frac{\delta}{2} - \frac{3\mu_3}{4} \right) \log \left( \frac{1}{2} - \frac{\delta}{2} - \frac{3\mu_3}{4} \right) - \left( \frac{\delta}{2} - \frac{3\mu_3}{4} \right) \log \left( \frac{\delta}{2} - \frac{3\mu_3}{4} \right) - \mu_3 \log \frac{\mu_3}{2} \right\} \quad (5.15) \end{aligned}$$

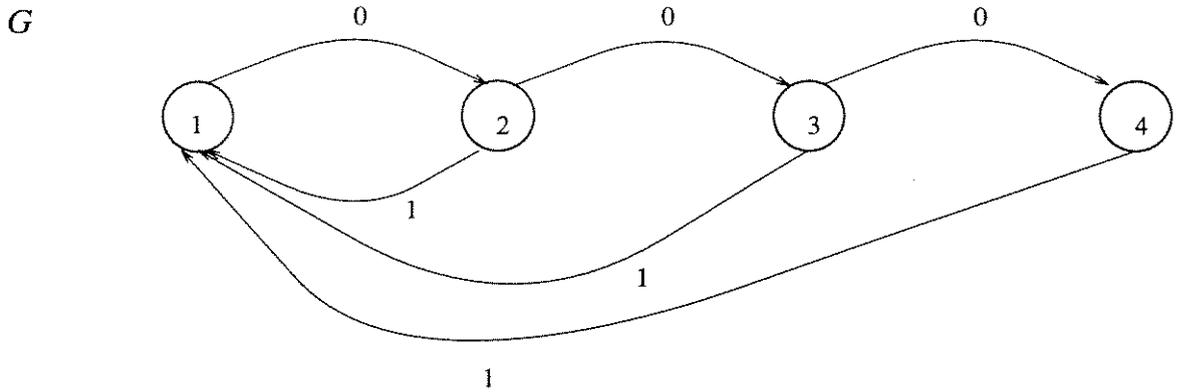


Figura 5.5: FSTD da Restrição RLL (1, 3)

**Restrição RLL com parâmetros  $(d, k) = (1, 3)$**

A Figura 5.5 apresenta o FSTD dessa restrição RLL. Nesse caso, existem somente três sequências que começam e terminam no estado (1). São elas

$$\{01, 001, 0001\}$$

de comprimento 2, 3 e 4. A partir de agora as sequências que começam e terminam no estado 1 serão referidas pelo seu comprimento. O número total de ocorrências é  $n_2, n_3$  e  $n_4$ . O centro da esfera cuja distância típica é máxima será aquele com maior densidade de 1's (como apresentado na Seção 5.2), ou seja:

$$\mathbf{x} = (01)^{\frac{n}{2}} \quad (5.16)$$

Aqui podem ocorrer dois tipos de eventos de erro. O primeiro é constituído de simplesmente uma palavra de comprimento 4, como se vê na Figura 5.6. O outro é iniciado por uma palavra de comprimento 3, seguido por um número qualquer de palavras de comprimento 2 e 4 em qualquer ordem, e terminado por outra palavra de comprimento 3. As Figuras 5.7, 5.8, 5.9 e 5.10 mostram o início desse evento de erro, a ocorrência de palavras de comprimento 2, de comprimento 4, e seu fim.

Sejam interstícios, momentos dentro de eventos de erro nos quais podem ocorrer palavras de comprimento 2. No evento do tipo 1 não existem interstícios pois ele começa e termina com uma única palavra. Já o evento do tipo 2 possui  $i_4 + 1$  interstícios, onde  $i_4$  é o número de palavras de comprimento 4 no referido evento, pois existem  $i_4 + 1$  fronteiras entre palavras dentro do evento.

Definindo  $I_4$  e  $I_2$  como o número total de palavras de comprimento 4 e 2 respectivamente, que aparecem nos eventos do tipo 2, verifica-se que o número total de eventos do tipo 1 é  $n_4 - I_4$  e do tipo 2 é  $n_3/2$ . O número de erros nos eventos fora os interstícios é 1 nos eventos do tipo 1, e  $3 + 3i_4$  em eventos do tipo 2. A Tabela 5.1 mostra os valores apresentados e seus totais.

A distância total de uma sequência qualquer até o centro é dada por

$$d = 2I_2 + n_4 - I_4 + \frac{3n_3}{2} + 3I_4$$

$$d = \frac{3n_3}{2} + n_4 + 2I_2 + 2I_4 \quad (5.17)$$

e o comprimento total

$$n = n_2 + n_3 + n_4 \quad (5.18)$$

Arranjando os  $n_4 - I_4$  eventos do tipo 1, os  $\frac{n_3}{2}$  eventos do tipo 2, e as  $n_2 - I_2$  palavras de

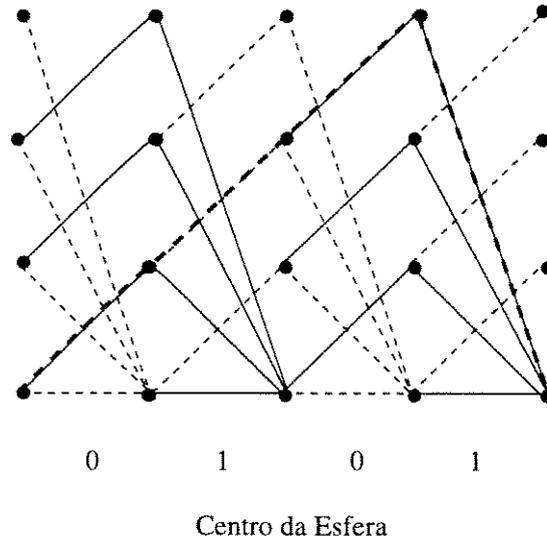


Figura 5.6: Evento de Erro do Tipo 1 para a Restrição RLL (1, 3)

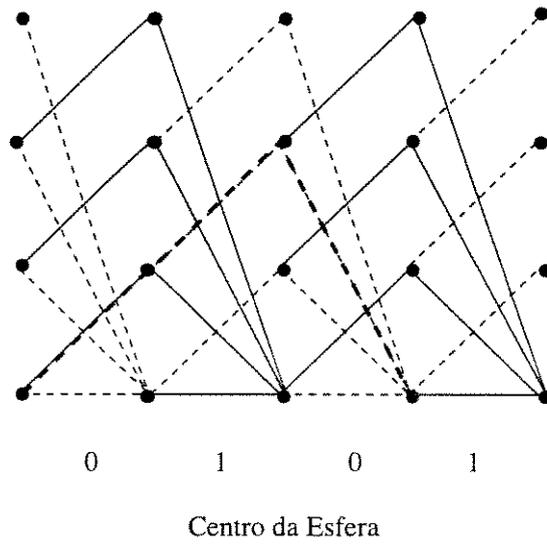


Figura 5.7: Início de Um Evento de Erro do Tipo 2 da Restrição RLL (1, 3)

Tipo	Número	Interstícios	Erros	Comprimento
1	$n_4 - I_4$	0	1	$4(n_4 - I_4)$
2	$\frac{n_3}{2}$	$i_4 + 1$	$3 + 3i_4$	$4I_4 + 3n_3$
Total	$\frac{n_3}{2} + n_4 - I_4$	$\frac{n_3}{2} + I_4$	$\frac{3n_3}{2} + 3I_4 + n_4 - I_4 + 2I_2$	$3n_3 + 4n_4$

Tabela 5.1: Valores Relativos a Esfera com Centro  $\mathbf{x} = (01)^{\frac{n}{2}}$  da Restrição RLL (1, 3)

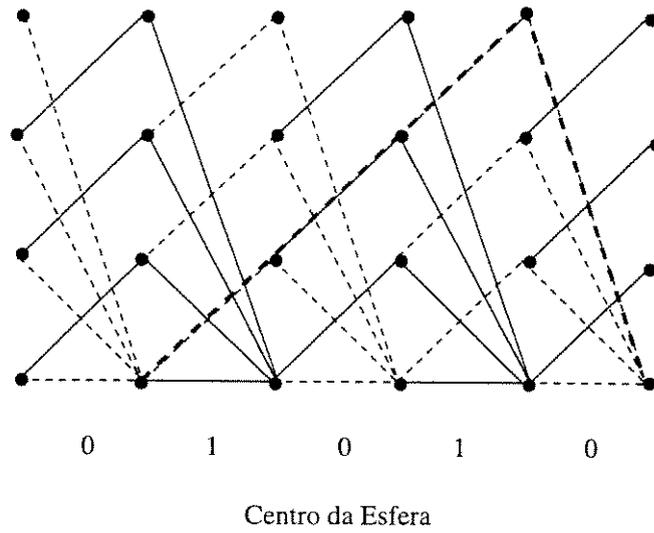


Figura 5.8: Ocorrência de 0001 em Um Evento de Erro do Tipo 2 na Restrição RLL (1,3)

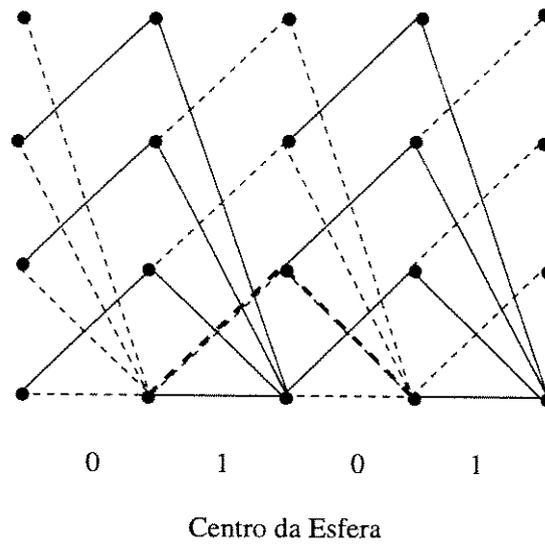


Figura 5.9: Ocorrência de 01 em Um Evento de Erro do Tipo 2 na Restrição RLL (1,3)

comprimento 2 fora de eventos de erro, em qualquer ordem, se encontram

$$\frac{(n_2 - I_2 + n_4 - I_4 + \frac{n_3}{2})!}{(n_4 - I_4)! (\frac{n_3}{2})! (n_2 - I_2)!} \quad (5.19)$$

possibilidades.

Distribuindo as  $I_4$  células de comprimento 4 participantes de eventos de erro do tipo 2 entre os  $\frac{n_3}{2}$  eventos do tipo 2, resultam

$$\binom{I_4 + \frac{n_3}{2} - 1}{I_4} \quad (5.20)$$

possibilidades.

Distribuindo as  $I_2$  células de comprimento 2 participantes de eventos do tipo 2, entre os  $\frac{n_3}{2} + I_4$  interstícios resultam

$$\binom{I_2 + I_4 + \frac{n_3}{2} - 1}{I_2} \quad (5.21)$$

possibilidades.

Como se tem cinco incógnitas ( $n_2, n_3, n_4, I_2$  e  $I_4$ ) e apenas duas equações ( 5.17 e 5.18), na expressão das esferas  $S(d)$  deverão ter três somatórias. Portanto, uma esfera de raio  $d$  tem um total de possibilidades dado por

$$S(d) = \sum_{n_3=0}^{\frac{2d}{3}} \sum_{n_4=0}^{d-3\frac{n_3}{2}-\frac{d}{2}-\frac{3n_3}{4}-\frac{n_4}{2}} \sum_{n_4=0}^{\frac{d}{2}-\frac{3n_3}{4}-\frac{n_4}{2}} \binom{I_4 + \frac{n_3}{2} - 1}{I_4} \binom{I_2 + I_4 + \frac{n_3}{2} - 1}{I_2} \frac{(n_2 - I_2 + n_4 - I_4 + \frac{n_3}{2})!}{(n_4 - I_4)! (\frac{n_3}{2})! (n_2 - I_2)!} \quad (5.22)$$

Substituindo ( 5.17) e ( 5.18) e desenvolvendo os binômios de ( 5.22)

$$S(d) = \sum_{n_3=0}^{\frac{2d}{3}} \sum_{n_4=0}^{d-3\frac{n_3}{2}-\frac{d}{2}-\frac{3n_3}{4}-\frac{n_4}{2}} \sum_{n_4=0}^{\frac{d}{2}-\frac{3n_3}{4}-\frac{n_4}{2}} \frac{\binom{\frac{n}{2} - \frac{d}{2} - \frac{n_3}{4} - \frac{n_4}{2}}!}{\binom{\frac{n}{2} - \frac{d}{2} - \frac{3n_3}{4} - \frac{3n_4}{2} + I_4}! (n_4 - I_4)! (\frac{n_3}{2})!}$$

$$\frac{\left(\frac{d}{2} - \frac{n_3}{4} - \frac{n_4}{2}\right)!}{(I_4)! \left(\frac{n_3}{2} - 1\right)! \left(\frac{d}{2} - \frac{3n_3}{4} - \frac{n_4}{2} - I_4\right)!} \quad (5.23)$$

Fazendo  $\delta = d/n$ ,  $\mu_3 = n_3/n$ ,  $\mu_4 = n_4/n$  e  $\nu = I_4/n$ , no limite quando  $n \rightarrow \infty$ , se obtém a esfera assintótica

$$\begin{aligned} \dot{S}(\delta) = \max_{0 < \mu_3 < \frac{2\delta}{3}} \left\{ \max_{0 < \mu_4 < \delta - \frac{3\mu_3}{2}} \left\{ \max_{0 < \nu < \frac{\delta}{2} - \frac{3\mu_3}{4} - \frac{\mu_4}{2}} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{2} - \frac{\mu_3}{4} - \frac{\mu_4}{2}\right) \log \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{2} - \frac{\mu_3}{4} - \frac{\mu_4}{2}\right) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \left(\frac{\delta}{2} - \frac{\mu_3}{4} - \frac{\mu_4}{2}\right) \log \left(\frac{\delta}{2} - \frac{\mu_3}{4} - \frac{\mu_4}{2}\right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{2} - \frac{3\mu_3}{4} - \frac{3\mu_4}{2} + \nu\right) \log \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{2} - \frac{3\mu_3}{4} - \frac{3\mu_4}{2} + \nu\right) - (\mu_4 - \nu) \log(\mu_4 - \nu) - \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \mu_3 \log \left(\frac{\mu_3}{2}\right) - \nu \log \nu - \left(\frac{\delta}{2} - \frac{3\mu_3}{4} - \frac{\mu_4}{2} - \nu\right) \log \left(\frac{\delta}{2} - \frac{3\mu_3}{4} - \frac{\mu_4}{2} - \nu\right) \right\} \right\} \right\} \quad (5.24) \end{aligned}$$

Tipo	Número	Possibilidades	Interstícios	Erros	Comprimento
1	$K_1$	$2^{K_1}$	$2i + 1$	$3 + 5i$	$9 + 9i$
2	$K_2$	1	$2i + 2$	$5 + 5i$	$12 + 9i$
3	$K_3$	1	$2i + 2$	$6 + 5i$	$15 + 9i$
Total	$K_1 + K_2 + K_3$	$2^{K_1}$	$K_1 + 2K_2 + 2K_3 + 2I$	$3K_1 + 5K_2 + 6K_3 + 5I + 2J$	$9K_1 + 12K_2 + 15K_3 + 9I$

Tabela 5.2: Valores Relativos à Esfera com Centro  $\mathbf{x} = (01)^{\frac{3}{2}}$  da Restrição RLL (2, 4)

**Restrição RLL com parâmetros  $(d, k) = (2, 4)$**

No caso da restrição RLL com parâmetros  $(d, k) = (2, 4)$ , as seqüências que começam e terminam no mesmo estado (1) são três:

$$\{001, 0001, 00001\}$$

de comprimentos 3, 4 e 5. Como já foi visto, o centro da esfera cuja distância típica é máxima

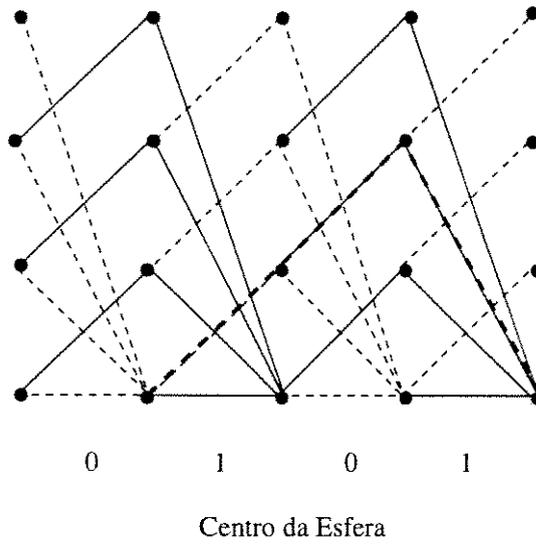


Figura 5.10: Fim de Um Evento de Erro do Tipo 2 da Restrição RLL (1,3)

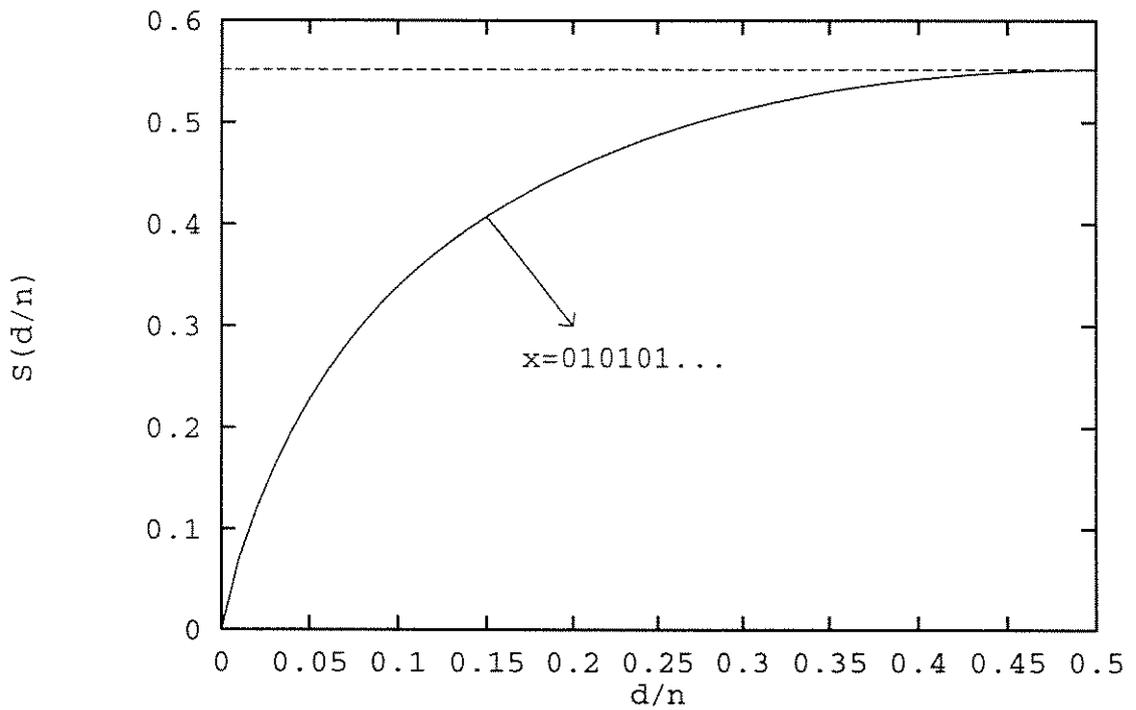


Figura 5.11: Superfícies Esféricas da Restrição RLL (1,3) com Centro  $x = 010101\dots$

é aquele que possui maior densidade de símbolos 1. Portanto:

$$\mathbf{x} = (001)^{\frac{n}{3}} \quad (5.25)$$

Podem ocorrer três tipos de eventos de erro distintos:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4, (4, 5)^i, 5 \quad \text{ou} \quad 5, (5, 4)^i, 4 \\ 4, (4, 5)^i, 4, 4 \\ 5, (4, 5)^i, 5, 5 \end{array} \right.$$

onde 4 e 5 representam as palavras de comprimento 4 e 5 respectivamente, e a potência  $i$  indica que a célula se repete  $i$  vezes.

Enumerando os eventos de erro em tipo 1, 2 e 3, e chamando  $K_1$ ,  $K_2$  e  $K_3$  o número total de ocorrências desses eventos, verifica-se que os eventos do tipo 1 podem se ordenar de  $2^{K_1}$  formas pois são duas as formas dele se apresentar. Já os eventos do tipo 2 e 3 só podem se ordenar de uma única forma pois cada tipo só tem um formato.

Os eventos do tipo 1 apresentam  $2i + 1$  interstícios e os do tipo 2 e 3  $2i + 2$  interstícios cada. Na Tabela 5.2 é apresentado um resumo das características dos eventos de erro e seus totais, sendo que  $I$  é o número total de células (4, 5) ou (5, 4) nos eventos e  $J$  é o número de palavras de comprimento 3 que se distribuem entre os interstícios.

Sendo  $n_3$ ,  $n_4$  e  $n_5$  o número total de palavras de comprimento 3, 4 e 5 verifica-se

$$n = 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 \quad (5.26)$$

e a distância total

$$d = 3K_1 + 5K_2 + 6K_3 + 5I + 2J \quad (5.27)$$

e também

$$n_4 = I + K_1 + 3K_2 \quad (5.28)$$

$$n_5 = I + K_1 + 3K_3 \quad (5.29)$$

Arranjando as  $n_3 - J$  palavras de comprimento 3 fora dos interstícios, os  $K_1$  eventos do tipo 1, os  $K_2$  eventos do tipo 2, e os  $K_3$  eventos do tipo 3 resultam

$$\frac{(n_3 - J + K_1 + K_2 + K_3)!}{(n_3 - J)!K_1!K_2!K_3!}$$

possibilidades.

Arranjando as  $I$  células (4, 5) ou (5, 4) entre os eventos de erro se obtém

$$\frac{(I + K_1 + K_2 + K_3 - 1)!}{I!(K_1 + K_2 + K_3 - 1)!}$$

possibilidades.

Finalmente, arranjando as  $J$  palavras de comprimento 3 em todos interstícios, chega-se a

$$\frac{(J + K_1 + 2K_2 + 2K_3 + 2I - 1)!}{J!(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + 2I - 1)!}$$

possibilidades.

Como se tem oito incógnitas ( $n_3, n_4, n_5, K_1, K_2, K_3, I$  e  $J$ ) e apenas quatro equações ( 5.26), ( 5.27), ( 5.28) e ( 5.29),  $S(d)$  é dado por uma somatória quádrupla:

$$S(d) = \sum_{K_1=0}^{d/3} \sum_{K_2=0}^{\frac{d-3K_1}{5}} \sum_{K_3=0}^{\frac{d-3K_1-5K_2}{6}} \sum_{I=0}^{\frac{d-3K_1-5K_2-6K_3}{5}} 2^{K_1} \frac{(n_3 - J + K_1 + K_2 + K_3)!}{(n_3 - J)!K_1!K_2!K_3!} \frac{(I + K_1 + K_2 + K_3 - 1)!}{I!(K_1 + K_2 + K_3 - 1)!} \frac{(J + K_1 + 2K_2 + 2K_3 + 2I - 1)!}{J!(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + 2I - 1)!} \quad (5.30)$$

Substituindo as Equações ( 5.26), ( 5.27), ( 5.28) e ( 5.29) de forma a eliminar  $n_3, n_4, n_5$  e  $J$  se obtém:

$$S(d) = \sum_{K_1=0}^{d/3} \sum_{K_2=0}^{\frac{d-3K_1}{5}} \sum_{K_3=0}^{\frac{d-3K_1-5K_2}{6}} \sum_{I=0}^{\frac{d-3K_1-5K_2-6K_3}{5}} 2^{K_1} \frac{\left(\frac{n}{3} - \frac{d}{2} - \frac{I}{2} - \frac{K_1}{2} - \frac{K_2}{2} - K_3\right)!}{\left(\frac{n}{3} - \frac{d}{2} - \frac{I}{2} - \frac{3K_1}{2} - \frac{3K_2}{2} - 2K_3\right)!K_1!K_2!K_3!} \frac{(I + K_1 + K_2 + K_3 - 1)!}{I!(K_1 + K_2 + K_3 - 1)!}$$



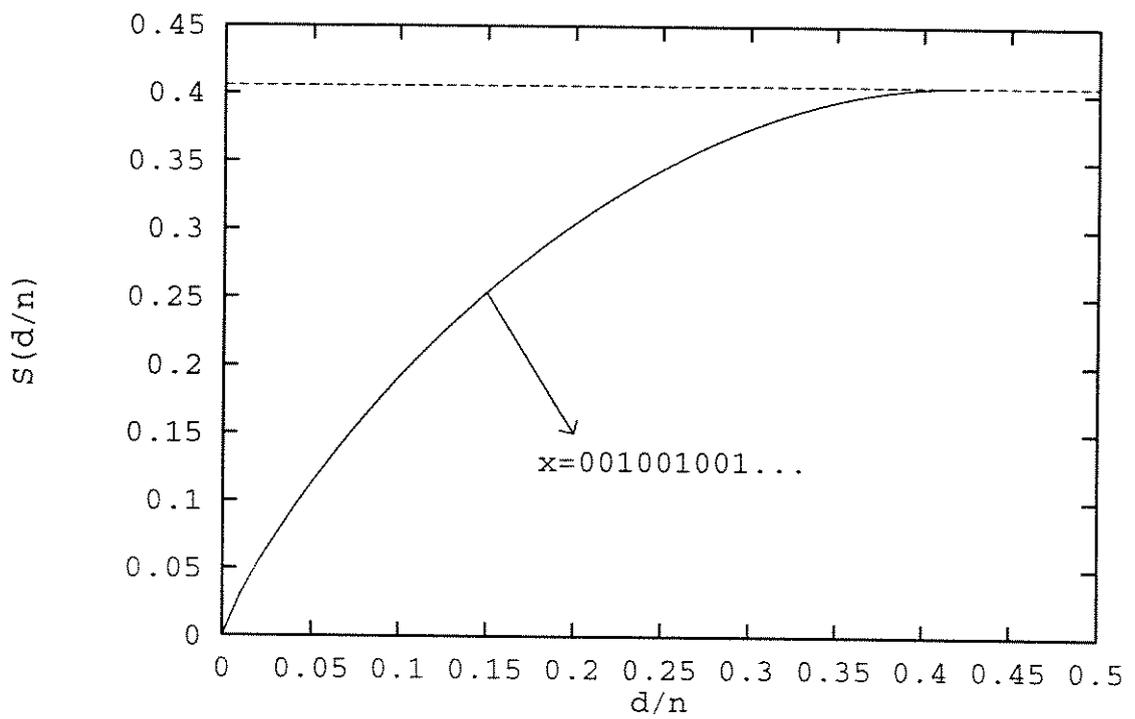


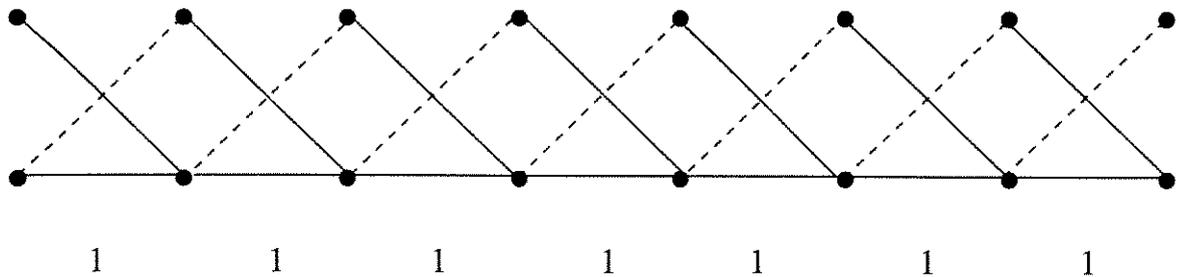
Figura 5.12: Superfícies Esféricas da Restrição RLL (2,4) com Centro  $x = 001001001\dots$

que o número total de eventos de erro é  $n_2$ , com um total de  $n_2$  erros. Portanto

$$n = n_1 + 2n_2 \tag{5.33}$$

e

$$d = n_2. \tag{5.34}$$



Centro da Esfera

Figura 5.13: Treliça Representando Centro  $\mathbf{x} = (01)^{\frac{n}{2}}$  da Restrição RLL  $(0, 1)$

Distribuindo os  $n_2$  eventos de erro nas  $n_1 + 1$  posições resultam:

$$S(d) = \binom{n_1 + n_2}{n_2}. \tag{5.35}$$

Substituindo as Equações ( 5.33) e ( 5.34) em ( 5.35), obtem-se

$$S(d) = \binom{n - d}{d} = \frac{(n - d)!}{d!(n - 2d)!}. \tag{5.36}$$

Dessa forma, a esfera assintótica será

$$\dot{S}(\delta) = (1 - \delta) \log(1 - \delta) - \delta \log \delta - (1 - 2\delta) \log(1 - 2\delta). \tag{5.37}$$

**Restrição RLL com parâmetros  $(d, k) = (1, 2)$**

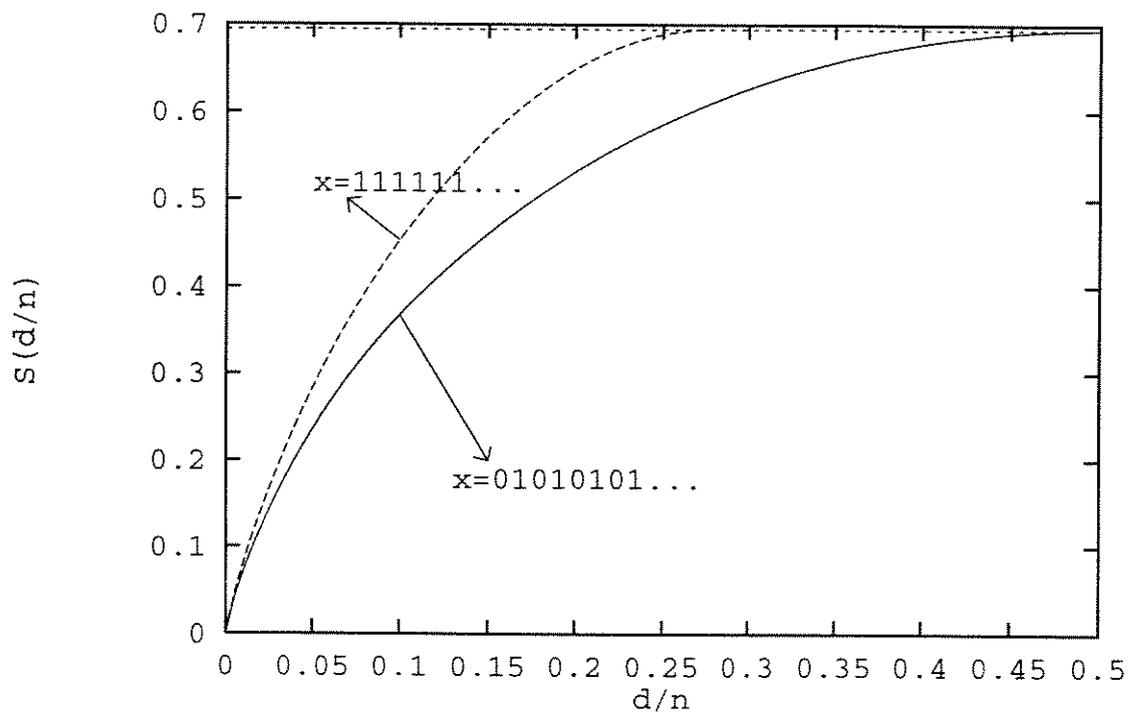


Figura 5.14: Superfícies Esféricas da Restrição RLL (0,1) com Centros  $\mathbf{x} = 010101\dots$  e  $\mathbf{x} = 111\dots$

Na Figura 2.10 é visto o FSTD dessa restrição . Existem duas palavras que começam e terminam no mesmo estado (1):

$$\{01, 001\},$$

de comprimentos 2 e 3. O centro da esfera cuja distância típica é mínima será aquele que contém menor densidade de 1's, ou seja,

$$\mathbf{x} = (001)^{\frac{n}{3}}$$

Pode ocorrer um único tipo de evento de erro, que é constituído por três palavras de comprimento 2 seguidas. Entre essas palavras, nos interstícios, pode ocorrer um número qualquer de palavras de comprimento 3.

Sendo  $n_2$  e  $n_3$  o número total de palavras de comprimento 2 e 3 respetivamente, e  $I_3$  o número total de palavras de comprimento 3 nos interstícios, pode-se dizer que o número total de eventos de erro é  $n_2/3$ . Como são encontrados 2 interstícios por evento, o total de interstícios é  $2n_2/3$ . Os erros em um evento, de acordo com as Figuras 5.15, 5.16, 5.17, 5.18 e 5.19, são  $3 + 2i_3$ , onde  $i_3$  é o número de palavras de comprimento 3 nos interstícios do determinado evento, o que resulta num total de  $n_2 + 2I_3$  erros. Portanto

$$d = n_2 + 2I_3 \quad (5.38)$$

e o comprimento total é

$$n = 2n_2 + 3n_3 \quad (5.39)$$

Distribuindo os  $n_2/3$  eventos em  $(n_3 - I_3 + 1)$  posições, onde  $(n_3 - I_3)$  é o total de palavras de comprimento 3 fora dos interstícios, resultam

$$\left( \begin{array}{c} \frac{n_2}{3} + n_3 - I_3 \\ \frac{n_2}{3} \end{array} \right)$$

possibilidades.

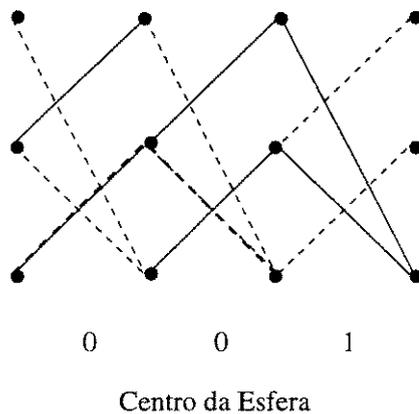


Figura 5.15: Início de um Evento de Erro com Centro  $\mathbf{x} = (001)^{\frac{n}{3}}$  da Restrição RLL (1,2)

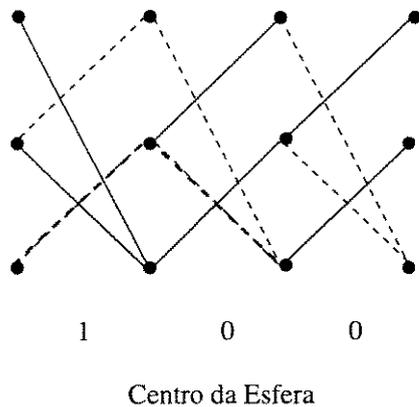


Figura 5.16: Segunda Palavra 01 em um Evento de Erro com Centro  $\mathbf{x} = (001)^{\frac{n}{3}}$  da Restrição RLL (1,2)

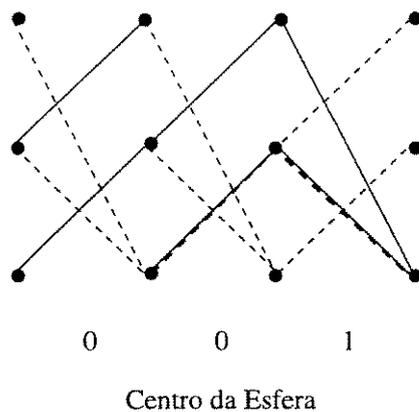


Figura 5.17: Fim de um Evento de Erro com Centro  $\mathbf{x} = (001)^{\frac{n}{3}}$  da Restrição RLL (1,2)

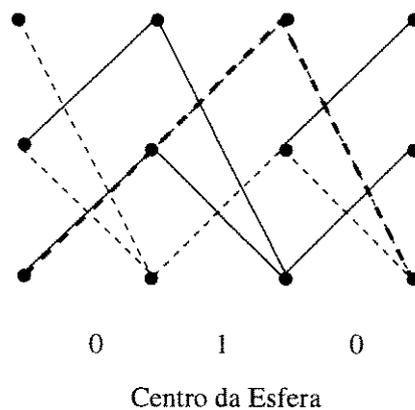


Figura 5.18: Erros a Partir do Centro  $x = (001)^{\frac{n}{3}}$  na Restrição RLL (1,2), no Primeiro Interstício

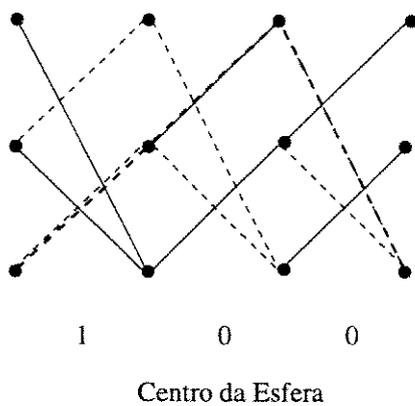


Figura 5.19: Erros a Partir do Centro  $x = (001)^{\frac{n}{3}}$  na Restrição RLL (1,2), no Segundo Interstício

Distribuindo as  $I_3$  palavras de comprimento 3, que ocorrem dentro de interstícios nos  $2n_2/3$  interstícios, são obtidas:

$$\binom{I_3 + \frac{2n_2}{3} - 1}{I_3}$$

possibilidades.

Como se tem três incógnitas ( $n_2$ ,  $n_3$  e  $I_3$ ) e apenas duas equações ( 5.38) e ( 5.39), na expressão das esferas  $S(d)$  deverá haver uma somatória, com um total de possibilidades dado por

$$S(d) = \sum_{n_2=0}^d \binom{\frac{n_2}{3} + n_3 - I_3}{\frac{n_2}{3}} \binom{I_3 + \frac{2n_2}{3} - 1}{I_3} \quad (5.40)$$

Substituindo as Equações ( 5.38) e ( 5.39) em ( 5.40), resulta

$$S(d) = \sum_{n_2=0}^d \binom{\frac{n}{3} - \frac{d}{2} + \frac{n_2}{6}}{\frac{n_2}{3}} \binom{\frac{d}{2} + \frac{n_2}{6} - 1}{\frac{d}{2} - \frac{n_2}{2}}, \quad (5.41)$$

e portanto

$$S(d) = \sum_{n_2=0}^{\frac{2d}{3}} \frac{\left(\frac{n}{3} - \frac{d}{2} + \frac{n_2}{6}\right)!}{\frac{n_2}{3}! \left(\frac{n}{3} - \frac{d}{2} - \frac{n_2}{6}\right)!} \frac{\left(\frac{d}{2} + \frac{n_2}{6} - 1\right)!}{\left(\frac{d}{2} - \frac{n_2}{2}\right)! \left(\frac{2n_2}{3} - 1\right)!} \quad (5.42)$$

Fazendo  $\delta = d/n$  e  $\mu_2 = n_2/n$ , no limite quando  $n \rightarrow \infty$ , se obtém a esfera assintótica

$$\begin{aligned} \dot{S}(\delta) = \max_{0 < \mu_2 < \delta} & \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{\delta}{2} + \frac{\mu_2}{6}\right) \log \left(\frac{1}{3} - \frac{\delta}{2} + \frac{\mu_2}{6}\right) + \left(\frac{\delta}{2} + \frac{\mu_2}{6}\right) \log \left(\frac{\delta}{2} + \frac{\mu_2}{6}\right) - \right. \\ & - \left(\frac{1}{3} - \frac{\delta}{2} - \frac{\mu_2}{6}\right) \log \left(\frac{1}{3} - \frac{\delta}{2} - \frac{\mu_2}{6}\right) - \left(\frac{\delta}{2} - \frac{\mu_2}{2}\right) \log \left(\frac{\delta}{2} - \frac{\mu_2}{2}\right) - \\ & \left. - \frac{\mu_2}{3} \log \frac{\mu_2}{3} - \frac{2\mu_2}{3} \log \frac{2\mu_2}{3} \right\}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

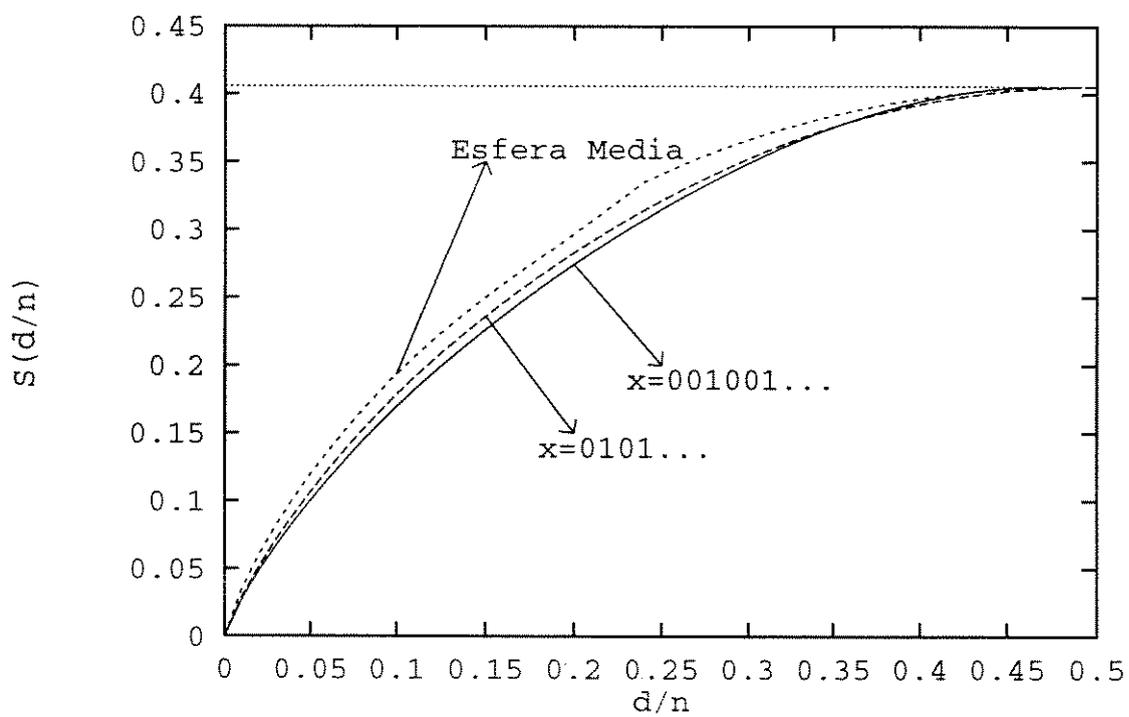


Figura 5.20: Superfícies Esféricas da Restrição RLL (1,2) com Centros  $\mathbf{x} = 010101\dots$  e  $\mathbf{x} = 001001001\dots$

### 5.3 Limitantes para a Restrição $(d, k) = (0, 1)$

Nesta Seção será provado que na restrição  $(d, k) = (0, 1)$  esferas com centro em  $\mathbf{x} = (1)^n$  tem volume máxima para qualquer raio  $d$  e comprimento  $n$ , e que o centro da esfera de volume mínimo é  $(101)^{\frac{n}{3}}$  para raio 1, e  $(01)^{\frac{n}{2}}$  para  $r = \frac{n}{2} - k$  com  $n$  suficientemente grande.

**Teorema 5.3:** Para a restrição RLL com parâmetros  $(d, k) = (0, 1)$ , a esfera de raio  $d \leq n$  ( $n$  é o comprimento das sequências) cujo centro é  $\mathbf{x} = (1)^n$  tem volume máximo.

*Prova:* Seja  $V_i(r, q)$  o volume das esferas de espaços de comprimento  $q \leq n$  das sequências que terminam no estado  $i$  com distância no máximo  $r$  de uma sequência restrita  $\mathbf{x}$ .

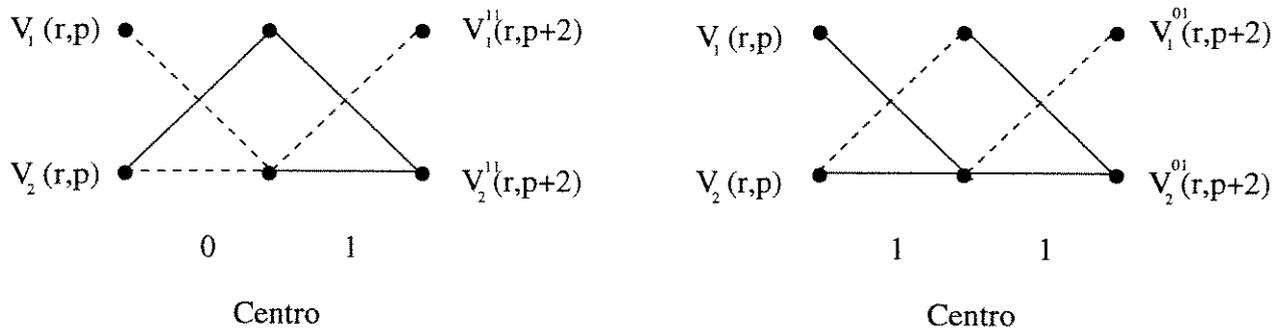


Figura 5.21: Passos de Tamanho 2 na Treliça da Restrição RLL  $(0, 1)$

Através da Figura 5.21 pode ser constatado que:

$$V_1^{11}(r, p + 2) = V_1(r - 1, p) + V_2(r - 1, p) \tag{5.44}$$

$$V_2^{11}(r, p + 2) = V_1(r, p) + V_2(r, p) + V_2(r - 1, p), \tag{5.45}$$

e

$$V_1^{01}(r, p + 2) = V_1(r - 2, p) + V_2(r - 2, p) \tag{5.46}$$

$$V_2^{01}(r, p + 2) = V_1(r - 1, p) + V_2(r, p) + V_2(r - 1, p). \tag{5.47}$$

Como

$$V_1(r, p) \geq V_1(r - 1, p) \geq V_1(r - 2, p) \tag{5.48}$$

$\epsilon$

$$V_2(r-1, p) \geq V_2(r-2, p), \quad (5.49)$$

então

$$V_1^{11}(r, p+2) \geq V_1^{01}(r, p+2), \quad (5.50)$$

$$V_2^{11}(r, p+2) \geq V_2^{01}(r, p+2). \quad (5.51)$$

Portanto a substituição de 01 por 11 no centro da esfera sempre aumenta seu volume, o que conclui a prova.

**Teorema 5.4:** A restrição RLL  $(0, 1)$  tem volume mínimo de esfera de raio 1 se o centro for  $\mathbf{x} = 101101101101\dots$

*Prova:* O volume da esfera de raio 1 é dado por 1 mais o número de sequências restritas que diferem do centro em apenas 1 dígito. Na sequência  $\mathbf{x} = 101101101101\dots 101$ , nenhum 1 pode ser convertido em 0 sem violar a restrição. Qualquer sequência com mais 1's teria que ter trios 111 onde o dígito central poderia ser mudado sem violar a restrição. Portanto, a sequência  $\mathbf{x}$  é o centro da esfera mínima de raio 1, com  $V_{\min}(1) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ .

**Teorema 5.5:** No espaço restrito das sequências RLL  $(0, 1)$  com  $n \rightarrow \infty$ ,  $\hat{V}(\mathbf{x}, 0, 5-\epsilon)$  é minimizado por  $\mathbf{x} = 010101\dots$  para algum  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno.

*Prova:* Conforme provado no início deste capítulo, o dígito 1 é o mais provável em sequências  $(0, k)$ ,  $k \geq 1$ . Por isso, como  $\mathbf{x} = 010101\dots$  é a sequência de menor taxa de ocorrência de 1's no espaço RLL  $(0, 1)$ , ela é também a de maior distância típica às outras sequências deste espaço.

Como todas as taxas de esferas alcançam a capacidade da restrição na distância típica dos respectivos centros, resulta que em  $\delta = (0, 5-\epsilon)$ , para  $\epsilon$  suficientemente pequeno, o centro  $\mathbf{x}$  será o único cuja esfera ainda terá uma taxa abaixo da capacidade.

Estes dois teoremas evidenciam que não existe um centro uniformemente minimizante do tamanho das esferas no espaço RLL  $(0, 1)$ . Dependendo do raio considerado, o centro minimizante poderá ser um ou outro. A Tabela 5.3, feita para  $n = 6$ , ilustra a situação. Podemos observar que 101101 é o centro da menor esfera de raio 1, enquanto 101010 e 010101 são centros minimizantes para  $3 \leq r \leq 6$  (para  $r = 2$ , as três são minimizantes).

$\mathbf{x}$		$\{S(\mathbf{x}, d = 1, 2, \dots, 6)\}$	-	$\{V(\mathbf{x}, r = 1, 2, \dots, 6)\}$
111111		(1,6,10,4,0,0,0)		(1,7,17,21,21,21,21)
111110		(1,5,8,6,1,0,0)		(1,6,14,20,21,21,21)
111101		(1,4,6,7,3,0,0)		(1,5,11,18,21,21,21)
111011		(1,4,7,7,2,0,0)		(1,5,12,19,21,21,21)
110111		(1,4,7,7,2,0,0)		(1,5,12,19,21,21,21)
101111		(1,4,6,7,3,0,0)		(1,5,11,18,21,21,21)
011111		(1,5,8,6,1,0,0)		(1,6,14,20,21,21,21)
111010		(1,4,6,5,4,1,0)		(1,5,11,16,20,21,21)
110110		(1,3,6,7,4,0,0)		(1,4,10,17,21,21,21)
101110		(1,3,6,6,4,1,0)		(1,4,10,16,20,21,21)
011110		(1,4,7,6,3,0,0)		(1,5,12,18,21,21,21)
110101		(1,3,5,5,5,2,0)		(1,4,9,14,19,21,21)
101101	→	(1,2,5,6,5,2,0)	→	(1,3,8,14,19,21,21)
011101		(1,3,6,6,4,1,0)		(1,4,10,16,20,21,21)
101011		(1,3,5,5,5,2,0)		(1,4,9,14,19,21,21)
011011		(1,3,6,7,4,0,0)		(1,4,10,17,21,21,21)
010111		(1,4,6,5,4,1,0)		(1,5,11,16,20,21,21)
101010	→	(1,3,4,4,5,3,1)	→	(1,4,8,12,17,,20,21)
011010		(1,3,5,5,4,3,0)		(1,4,9,14,18,21,21)
010110		(1,3,5,5,4,3,0)		(1,4,9,14,18,21,21)
010101	→	(1,3,4,4,5,3,1)	→	(1,4,8,12,17,20,21)

Tabela 5.3: Exemplo de Esferas de Raio Não Assintótico

O último teorema pode ser estendido para qualquer  $(d, k)$ , mostrando que a sequência de maior distância típica é o centro da esfera mínima na máxima distância assintótica típica. Para raios genéricos, porém, o problema da identificação do centro da esfera mínima no espaço RLL  $(d, k)$  (para  $(d, k)$  qualquer) permanece aberto, impedindo o cálculo do limitante de Hamming-Plotkin no caso geral. Para o caso  $(d, k) = (0, 1)$ , porém, o próximo teorema resolve este problema para raios assintóticos  $d = \delta n$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $0 < \delta < 1$ .

**Teorema 5.6:** No espaço restrito das sequências RLL  $(0, 1)$  com  $n \rightarrow \infty$ ,  $\dot{V}(\mathbf{x}, \delta)$  é minimizado por  $\mathbf{x} = \dots 010101\dots$  para qualquer  $\delta > 0$ .

*Prova:* Considere a máquina de estados finitos que gera sequências RLL  $(0, 1)$ , e o processo de geração de erros por essa máquina a partir de um centro  $\mathbf{c}$ . Toda vez que o centro apresentar um dígito 0, a máquina é livre para iniciar um evento de erros, e é obrigada a continuar um evento que já estiver em andamento. Quando o centro apresentar 1 após 0, a máquina é proibida de iniciar um evento, mas é livre para continuar ou interromper um evento em andamento. Quando o centro apresentar 1 após 1, a máquina é obrigada a interromper um evento em andamento, mas pode iniciar um evento novo, se não gerou erro no dígito anterior.

Portanto, em uma sequência 010101... do centro, cada par 01 representa uma oportunidade de iniciar um evento (no 0) e uma oportunidade (sem obrigação) de interrompê-lo (no 1). Entretanto, se aparecer um par 11 no centro, o evento precisa ser interrompido no segundo 1, a não ser que já tenha sido interrompido no primeiro (dois 1's seguidos no centro não estão disponíveis para erro ao mesmo tempo).

Portanto, se o centro não apresentar nenhum par 11, a máquina nunca será obrigada a interromper um evento de erros. Nessas condições, ela produzirá erros numa taxa máxima, e terá o máximo número de possibilidades de produzir sequências com mais que  $\delta n$  erros em  $n$  dígitos, quando  $n \rightarrow \infty$ . Consequentemente, a esfera de raio  $\delta n$  em torno deste centro terá tamanho mínimo.

Este teorema não pode ser estendido para as restrições RLL  $(0, k)$  com  $k > 1$ , pois nesse caso existem mais que um centro com a propriedade de não seccionar os eventos de erros. Por outro lado, quando  $d > 1$ , não existe nenhum centro com esta propriedade. No caso particular da restrição RLL  $(1, 2)$ , a comparação entre as Equações (5.15) e (5.43) mostra que 010101...

não é centro da esfera mínima para  $\delta < .355$ , apesar de sê-lo pelo menos na vizinhança esquerda de  $\delta = 1/2$  (distância típica máxima), conforme já discutido.

Dessa forma, as esferas da restrição RLL  $(0, 1)$  apresentadas na Seção anterior são extremas, tendo volume máximo e mínimo. Portanto a partir delas podem ser determinados o limitante inferior de Gilbert e Varshamov e o limitante superior de Hamming-Plotkin.

Para a determinação do limitante inferior de Kolesnik e Krachkovsky, utiliza-se a matriz

$$A_G(z) = \begin{bmatrix} z & 1 \\ z & 0 \end{bmatrix}$$

para chegar-se a

$$H(z) = \begin{bmatrix} 1 & z & z & 1 \\ 1 & 0 & z & 0 \\ 1 & z & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e portanto

$$H_r(z) = \begin{bmatrix} 1 & 2z & 1 \\ 1 & z & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

como apresentado anteriormente.

Pode-se então calcular o limitante inferior através da expressão

$$R(\delta) \geq 2 \log \lambda(H(0)) - \min_{0 \leq z \leq 1} \{ \log \lambda(H(z)) - \delta \log z \} - \frac{o(n)}{n}. \quad (5.52)$$

Para a determinação do limitante inferior de Marcus e Roth, tem-se a matriz

$$A_G(x) = \begin{bmatrix} 2^{-x} & 1 \\ 2^{-x} & 0 \end{bmatrix},$$

e chega-se a

$$H(x, z) = \begin{bmatrix} 2^{-2x} & 2^{-x-z} & 2^{-x-z} & 1 \\ 2^{-2x} & 0 & 2^{-x-z} & 0 \\ 2^{-2x} & 2^{-x-z} & 0 & 0 \\ 2^{-2x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto:

$$H_r(x, z) = \begin{bmatrix} 2^{-2x} & 2 \cdot 2^{-x-z} & 1 \\ 2^{-2x} & 2^{-x-z} & 0 \\ 2^{-2x} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

como apresentado anteriormente.

Calcula-se então o limitante inferior através da expressão (4.35).

Com a esfera mínima determinada, determina-se o limitante de Hamming e consequentemente o de Hamming-Plotkin. O limitante superior de Plotkin não terá abordagem prática nesse capítulo pois seu cálculo já foi descrito no capítulo anterior.

A partir das esferas mínimas determinadas na Seção anterior e dos argumentos de empacotamento se determina o limitante superior de Hamming, que é dado por

$$M \leq \frac{|\chi_S^n|}{V_S^{\min}(d/2)}. \quad (5.53)$$

No caso assintótico, ele é escrito [42] por

$$R(\delta) \leq c(S) - \dot{V}_S^{\min}(\delta/2) = c(S) - \dot{S}_S^{\min}(\delta/2). \quad (5.54)$$

O limitante superior de Hamming-Plotkin é determinado diretamente do limitante de Hamming, através da reta que passa pelo ponto  $R(1/2) = 0$  e é tangente ao limitante.

## 5.4 Outros Limitantes Inferiores

O cálculo de limitantes inferiores já foi descrito totalmente no capítulo anterior. Nesse capítulo serão feitos cálculos práticos sem entrar em detalhes de técnicas. No caso da técnica de Marcus

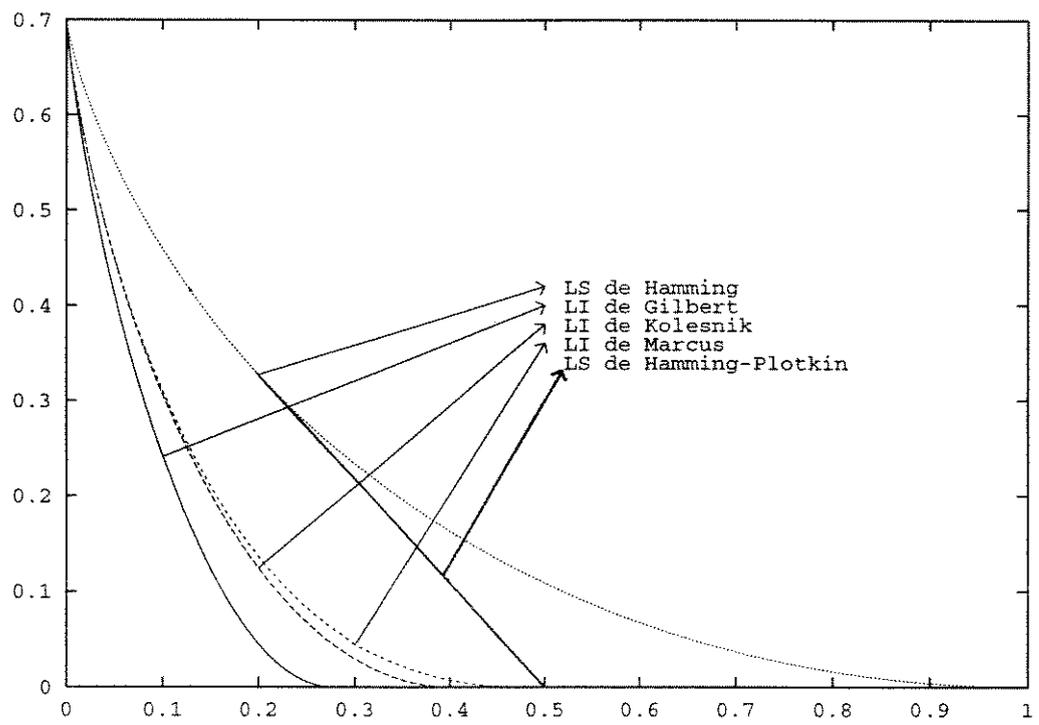


Figura 5.22: Limitantes Inferiores e Superiores da Restrição RLL (0, 1)

e Roth, parte-se do princípio de que a restrição é primitiva. Como se sabe, a restrição DC-free não é primitiva. Portanto será agora descrita uma técnica de obter restrições equivalentes primitivas nos casos de desbalanço ímpar.

A partir de  $t = 0$  é considerada como uma sequência central  $\mathbf{x} = (10101..)$ , começando no estado de  $SDC = 0$ . Chamando símbolo de imitação  $i$  aquele que é igual à sequência central e de não-imitação  $n$  aqueles que diferem. Obtém-se a matriz de transições de estados  $A_G$

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1_n & 0 & 0 \\ 1_n & 0 & 1_i & 0 \\ 0 & 1_i & 0 & 1_n \\ 0 & 0 & 1_n & 0 \end{bmatrix} \tag{5.55}$$

onde os subíndices  $i$  e  $n$  são símbolos de imitação e não-imitação, respectivamente. Os estados de  $SDC = 1$  e  $SDC = 0$ , e os estados de  $SDC = 2$  e  $SDC = -1$  podem ser fundidos se os símbolos  $i$  e  $n$  forem usados no lugar de 0 e 1, o que constitui uma transformação preservadora de distâncias. A primeira fusão resulta em um estado chamado *interno* ( $I$ ) e a outra em um estado chamado *externo* ( $E$ ). Na Figura 5.23 é possível se ver o FSTD resultante, que não é mais periódico. A matriz de transições resultante é

$$A_G = \begin{bmatrix} 1_i & 1_n \\ 1_n & 0 \end{bmatrix} \tag{5.56}$$

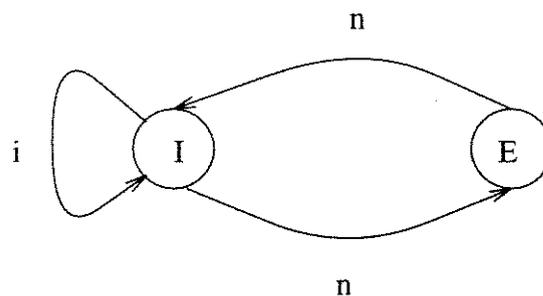


Figura 5.23: FSTD da Restrição DC-free com Desbalanço  $m = 3$ , Primitivo

Esse procedimento pode ser generalizado para qualquer desbalanço  $m$  ímpar, tornando a restrição DC-free primitiva, e reduzindo seu número de estados para  $\frac{m+1}{2}$ .

No caso de desbalanço  $m = 5$

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1_i & 0 & 1_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_n & 0 & 1_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_i & 0 & 1_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_n & 0 & 1_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1_i & 0 \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

Fundindo os estados de  $SDC = 0$  com  $SDC = 1$ ,  $SDC = 2$  com  $SDC = -1$  e  $SDC = 3$  com  $SDC = -2$ , resultam três estados, um *interno* ( $I$ ), outro *médio* ( $M$ ) e outro *externo* ( $E$ ) e a matriz de transições resultante é dada por

$$A_G = \begin{bmatrix} 1_i & 1_n & 0 \\ 1_n & 0 & 1_i \\ 0 & 1_i & 0 \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

A Figura 5.24 mostra o FSTD resultante.

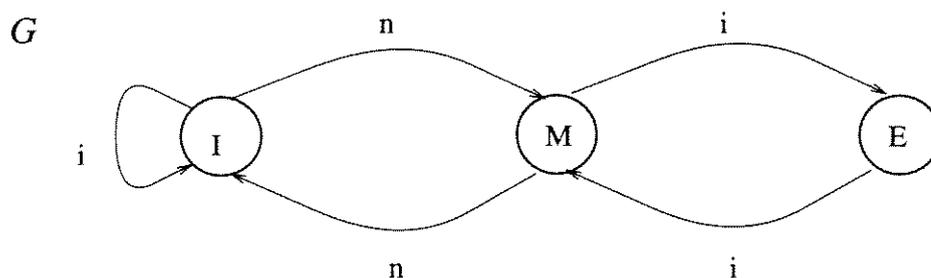


Figura 5.24: FSTD da Restrição DC-free com Desbalanço  $m = 5$ , Primitivo

### 5.4.1 Reforçando Restrições

Seja  $\chi_S^n$  um conjunto de palavras de comprimento  $n$  de um espaço restrito  $S$ , e  $\chi$  um subconjunto seu tal que  $\chi \subseteq \chi_S^n$ . Dessa forma, qualquer limitante inferior de  $\chi$  também será válido para  $\chi_S^n$ . Com isso, e com os argumentos de Gilbert e Varshamov, e de Kolesnik e Krachkovsky, podem

ser procurados novos limitantes inferiores. Aqui será exemplificado o caso da restrição DC-free [49] com desbalanço  $m = 3$ .

A Figura 5.25 representa a treliça da restrição DC-free com desbalanço  $m = 3$ . Excluindo-se alguns pontos da treliça dessa restrição, tal que as sequências comecem e terminem no mesmo estado (SDC=0), são obtidas células de comprimento  $N$ , com  $N$  par. A Figura 5.26 mostra células de comprimento 4 e 6.

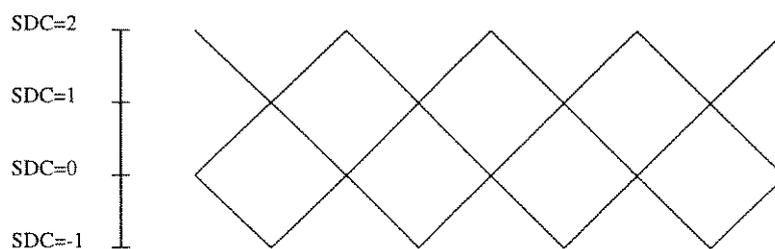


Figura 5.25: Treliça da Restrição  $m=3$  DC-Free

Seja  $B(\mathbf{x}, z)$  a função distribuição de distâncias das esferas com centro em  $\mathbf{x}$  e  $P(z)$  a sequência de  $n/N$  células consecutivas. Então

$$P(z) = \prod_{i=1}^{n/N} B(\mathbf{x}_i, z) \quad (5.59)$$

No caso do limitante inferior de Gilbert e Varshamov,  $\mathbf{x}$  é o centro da esfera máxima

$$\mathbf{x} = 1(10)^{\frac{N}{2}-1}0 \quad (5.60)$$

onde o expoente  $\frac{N}{2} - 1$  indica o número de repetições da sequência 10.

Para se determinar o limitante inferior de Kolesnik e Krachkovsky, deve-se calcular a média das distribuições das esferas

$$\overline{B}(z) = \frac{\sum_{i=0}^{F_N} B(\mathbf{x}_i, z)}{F_N}, \quad (5.61)$$

onde  $F_N$  é o  $N$ -ésimo número de Fibonacci. Pode-se verificar na Figura 5.26 que o número de sequências das células de comprimento  $N$  é igual ao  $N$ -ésimo número de Fibonacci e a

capacidade correspondente a restrição  $S$  é

$$c(S) = \frac{1}{N} \log F_N. \tag{5.62}$$

A Tabela 5.4 mostra os polinômios de distribuição de distâncias das esferas dado o centro da esfera máxima  $B(\mathbf{x}, z)$ , o polinômio da esfera média  $\bar{B}(z)$ , o número de Fibonacci correspondente ao tamanho da célula  $F_N$  e a capacidade  $c(S)$ , para  $N = 2, 4, 6, 8$  e  $10$ .

N	$B(\mathbf{x}, z)$	$\bar{B}(z)$	C	$F_N$
2	$1 + z^2$	$1 + z^2$	.5	2
4	$1 + 4z^2$	$1 + \frac{16}{5}z^2 + \frac{4}{5}z^4$	.58048	5
6	$1 + 8z^2 + 4z^4$	$1 + \frac{76}{13}z^2 + \frac{72}{13}z^4 + \frac{8}{13}z^6$	.61674	13
8	$1 + 13z^2 + 16z^4 + 4z^6$	$1 + \frac{294}{34}z^2 + \frac{556}{34}z^4 + \frac{256}{34}z^6 + \frac{16}{34}z^8$	.63593	34
10	$1 + 19z^2 + 41z^4 + 24z^6 + 4z^8$	$1 + \frac{1024}{89}z^2 + \frac{3064}{89}z^4 + \frac{2912}{89}z^6 + \frac{800}{89}z^8 + \frac{32}{89}z^{10}$	.64757	89

Tabela 5.4: Polinômios de Distribuições de Distâncias

Sendo  $P(z)$  a distribuição de distâncias de  $n/N$  células, pode ser visto que

$$P(z) = \sum_{d=0}^n S(d)z^d \tag{5.63}$$

onde  $S(d)$  é a superfície esférica de raio  $d$ , máxima ou média, dependente do polinômio  $B$  utilizado. Esse polinômio  $B(z) = \sum_{j=0}^N b_j z^j$  é a distribuição de distâncias em uma célula.

Supondo a existência de  $n/N$  células, podem ocorrer:

$$\left\{ \begin{array}{ll} i_1 & \text{células de 4 erros} \\ i_2 & \text{células de 6 erros} \\ \dots & \dots \\ i_{q-1} & \text{células de } 2q \text{ erros} \\ \frac{d-4i_1-6i_2-\dots-2qi_{q-1}}{2} & \text{células de 2 erros.} \end{array} \right.$$

Obtem-se  $S(d)$  a partir da combinatória dos elementos  $b_j$  de  $B$  e dos números de erros por células  $i_k$ , onde os polinômios  $B$  são apresentados na Tabela 5.4:

$$S(d) = \sum_{i_1=0}^{d/4} \sum_{i_2=0}^{\frac{d-4i_1}{6}} \dots \sum_{i_{q-1}=0}^{\frac{d-4i_1-6i_2-\dots-2(q-1)i_{q-2}}{2q}} \binom{n/N}{i_1} \binom{n/N-i_1}{i_2} \dots$$

$$\binom{n/N-\sum_{j=1}^{q-1} i_j}{\frac{d-4i_1-\dots-2qi_{q-1}}{2}} b_2^{\frac{d-4i_1-\dots-2qi_{q-1}}{2}} \prod_{j=1}^{q-1} b_{2j+2}^{i_j}, \quad (5.64)$$

onde  $q = \frac{N}{2} - 1$  no caso do limitante inferior de Gilbert e Varshamov, e  $q = \frac{N}{2}$  no caso do limitante de Kolesnik e Krachkovsky. Fazendo

$$\dot{S}(\delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log S(d), \quad (5.65)$$

onde  $\delta = d/n$ , tem-se

$$\dot{S}(\delta) = \max_{0 \leq \mu_1 \leq d/4} \max_{0 \leq \mu_2 \leq \frac{d-4\mu_1}{6}} \dots \max_{0 \leq \mu_{q-1} \leq \frac{d-4\mu_1-6\mu_2-\dots-2(q-1)\mu_{q-2}}{2q}} \left\{ \frac{1}{N} \log(N) + \sum_{j=1}^{q-1} \mu_j \log \left( \frac{b_{2j+2}}{\mu_j} \right) + \right.$$

$$\left. r_1(\delta, \mu) \log \left( \frac{b_2}{r_1(\delta, \mu)} \right) - r_2(\delta, \mu) \log(r_2(\delta, \mu)) \right\}, \quad (5.66)$$

em que

$$r_1(\delta, \mu) = \frac{\delta}{2} - \sum_{j=1}^{q-1} (j+1)\mu_j,$$

$$r_2(\delta, \mu) = \frac{1}{N} - \frac{\delta}{2} + \sum_{j=1}^{q-1} j\mu_j,$$

e

$$\mu_j = i_j/n.$$

Maximizando a função convexa da Equação ( 5.4.1) é achado o limitante inferior [42]

$$R(\delta) \geq c(S) - \dot{V}_s^{max} = c(S) - \dot{S}(\delta). \quad (5.67)$$

$\dot{S}(\delta)$ , no caso do limitante inferior de Gilbert e Varshamov, é a esfera máxima calculada a partir do polinômio  $B(\mathbf{x}, z)$  com  $\mathbf{x}$  centro da esfera máxima. No caso do limitante inferior de Kolesnik e Krachkovsky,  $\dot{S}(\delta)$  é a esfera média, calculada a partir do polinômio  $\bar{B}(z)$ .

### 5.4.2 O Limitante Inferior de Gilbert e Varshamov

No caso do limitante inferior de Gilbert e Varshamov da restrição DC-free, há uma descrição completa de como eles podem ser obtidos, proposta por Cohen e Litsyn em [45]. Aqui, para efeito de comparação, é simplesmente listado o valor do limitante descrito da restrição DC-free com desbalanço  $m = 3$ , que é dado por:

$$R(\delta) \geq c(S) - \frac{1 + \delta}{2} h\left(\frac{2\delta}{1 + \delta}\right), \quad (5.68)$$

onde

$$h(x) = -x \log_2 x - (1 - x) \log_2 (1 - x).$$

### 5.4.3 O Limitante Inferior de Kolesnik e Krachkovsky

Seja  $A_G(z)$  a matriz de transição de estados, e  $H(z)$  a matriz de transições da treliça produto, como descritas no capítulo anterior.

Para a restrição DC-free com desbalanço  $m = 3$  tem-se

$$A_G(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ z & 0 & 1 & 0 \\ 0 & z & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$H(z) = \begin{bmatrix} 0 & A_G(z) & 0 & 0 \\ Q(z) & 0 & A_G(z) & 0 \\ 0 & Q(z) & 0 & A_G(z) \\ 0 & 0 & Q(z) & 0 \end{bmatrix},$$

onde

$$Q(z) = \begin{bmatrix} 0 & z & 0 & 0 \\ 1 & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, aplicando a técnica de redução descrita anteriormente, tem-se

$$H_r(z) = \begin{bmatrix} z & 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2z & 0 \\ 2 & 0 & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & z & 0 & 1 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para a restrição DC-free com desbalanço  $m = 4$  tem-se

$$A_G(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & z & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$H(z) = \begin{bmatrix} 0 & A_G(z) & 0 & 0 & 0 \\ Q(z) & 0 & A_G(z) & 0 & 0 \\ 0 & Q(z) & 0 & A_G(z) & 0 \\ 0 & 0 & Q(z) & 0 & A_G(z) \\ 0 & 0 & 0 & Q(z) & 0 \end{bmatrix},$$

onde

$$Q(z) = \begin{bmatrix} 0 & z & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pode-se então calcular o limitante inferior através da expressão

$$R(\delta) \geq 2 \log \lambda(H(0)) - \min_{0 \leq z \leq 1} \{ \log \lambda(H(z)) - \delta \log z \} - \frac{o(n)}{n}. \quad (5.69)$$

#### 5.4.4 O Limitante Inferior de Marcus e Roth

Utilizamos a visualização da restrição DC-free com desbalanço  $m$  ímpar, que a torna primitiva, admitindo portanto a utilização da técnica de determinação de limitantes inferiores de Marcus e Roth. Considerando os símbolos de imitação como 1 e o outro como 0, para a restrição DC-free com desbalanço  $m = 3$  tem-se

$$A_G(x) = \begin{bmatrix} 2^{-x} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H(x, z) = \begin{bmatrix} 2^{-2x} & 2^{-x-z} & 2^{-x-z} & 1 \\ 2^{-x-z} & 0 & 1 & 0 \\ 2^{-x-z} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Através da técnica de redução de estados, obtem-se

$$H_r(x, z) = \begin{bmatrix} 2^{-2x} & 2 \cdot 2^{-x-z} & 1 \\ 2^{-x-z} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Fazendo-se as mesmas considerações para a restrição DC-free com desbalanço  $m = 5$ , encontram-se

$$A_G(x) = \begin{bmatrix} 2^{-x} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2^{-x} \\ 0 & 2^{-x} & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$H(x, z) = \begin{bmatrix} 2^{-2x} & 2^{-x-z} & 0 & 2^{-x-z} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2^{-x-z} & 0 & 2^{-2x} & 1 & 0 & 2^{-x-z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-2x} & 0 & 0 & 2^{-x-z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2^{-x-z} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2^{-2x} & 2^{-x-z} & 0 \\ 1 & 0 & 2^{-x-z} & 0 & 0 & 0 & 2^{-x-z} & 0 & 2^{-2x} \\ 0 & 2^{-x-z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2^{-2x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{-2x} & 2^{-x-z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{-x-z} & 0 & 2^{-2x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2^{-2x} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Através da técnica de redução de estados, efetua-se a simplificação

$$H_r(x, z) = \begin{bmatrix} 2^{-2x} & 2 \cdot 2^{-x-z} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2^{-x-z} & 1 & 2^{-2x} & 0 & 2^{-x-z} & 0 \\ 0 & 2^{-2x} & 0 & 2^{-x-z} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \cdot 2^{-x-z} & 0 & 0 & 2^{-2x} \\ 0 & 2^{-x-z} & 0 & 0 & 2^{-2x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{-2x} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pode-se então calcular o limitante inferior através da expressão (4.35).

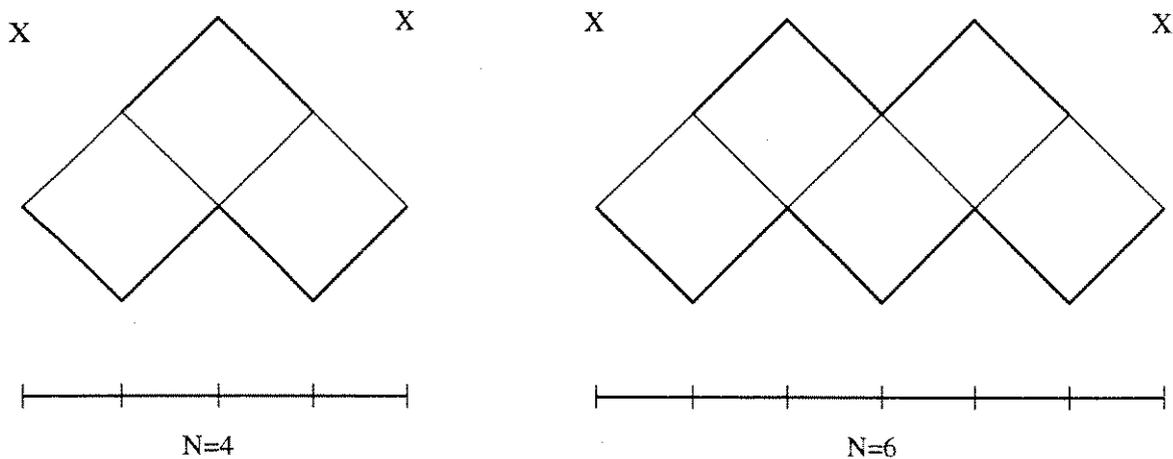


Figura 5.26: Células da Restrição DC-free com  $m=3$  Reforçada de Tamanho  $N=4$  e  $N=6$

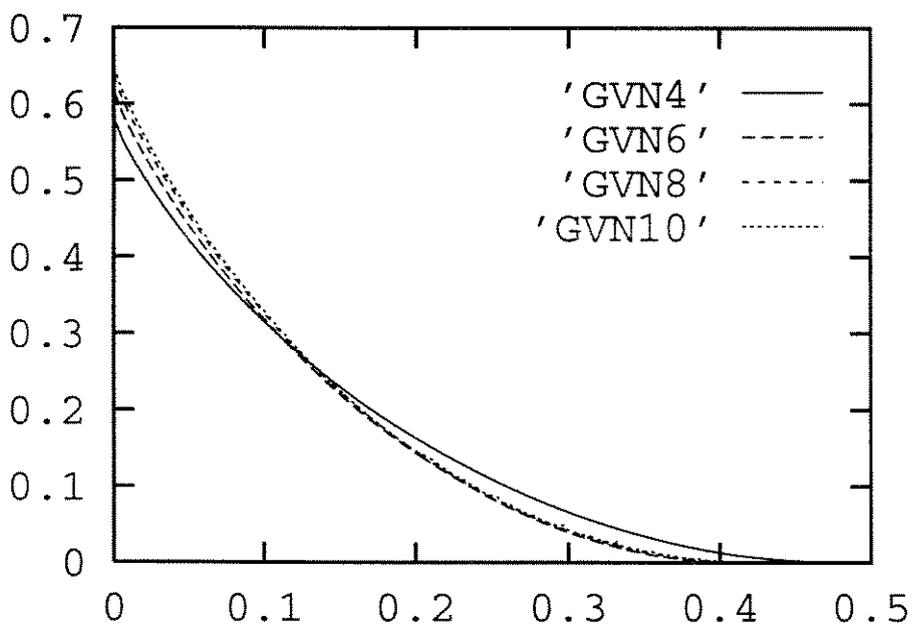


Figura 5.27: Limitantes Inferiores de Gilbert e Varshamov da Restrição DC-free com  $m = 3$ . Reforçada com Células de Comprimento 4, 6, 8 e 10

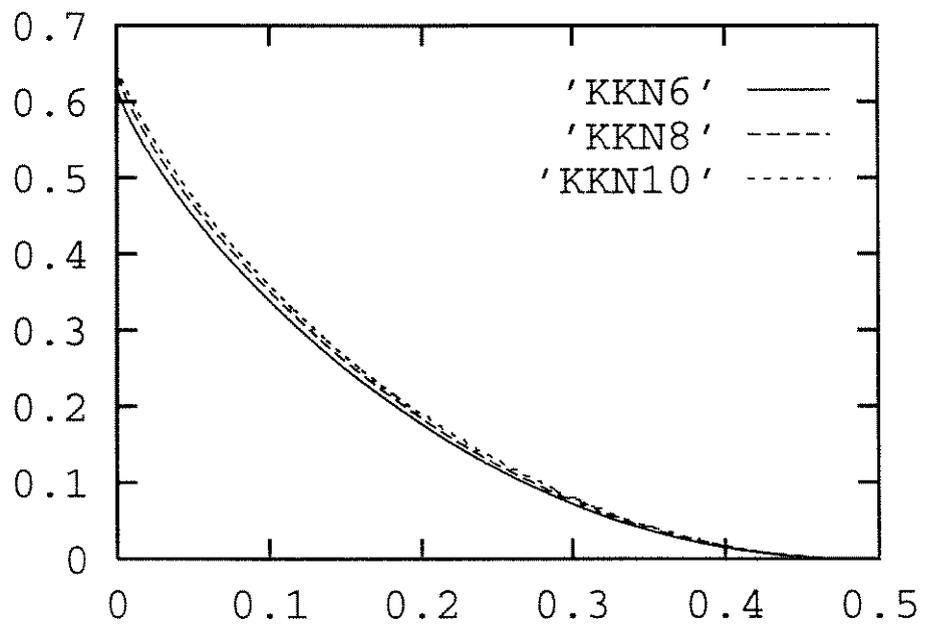


Figura 5.28: Limitantes Inferiores de Kolesnik e Krachkovsky da Restrição DC-free com  $m = 3$ . Reforçada com Células de Comprimento 6, 8 e 10

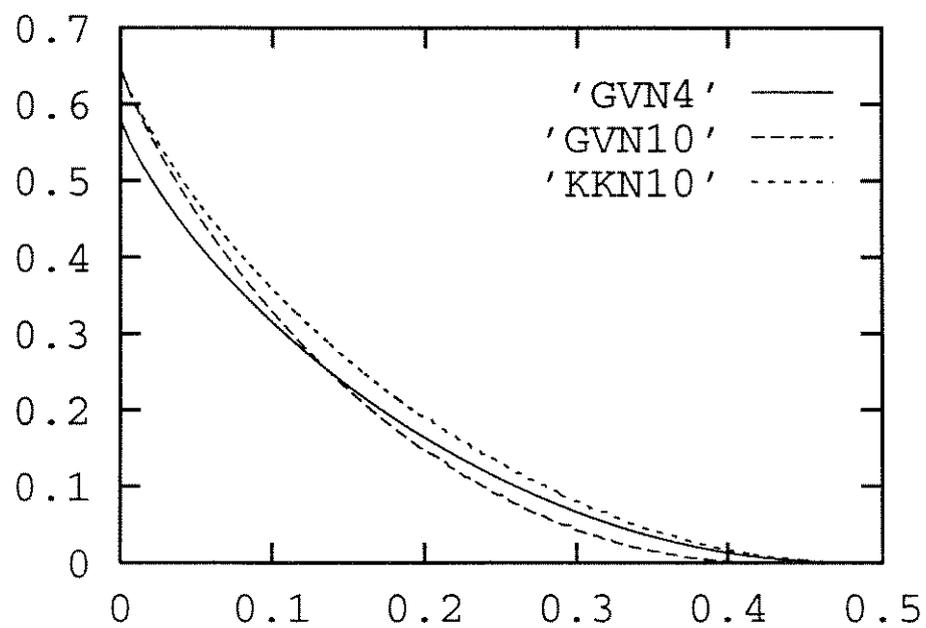


Figura 5.29: Melhores Limitantes Inferiores de Esferas Reforçadas da Restrição DC-free com  $m = 3$

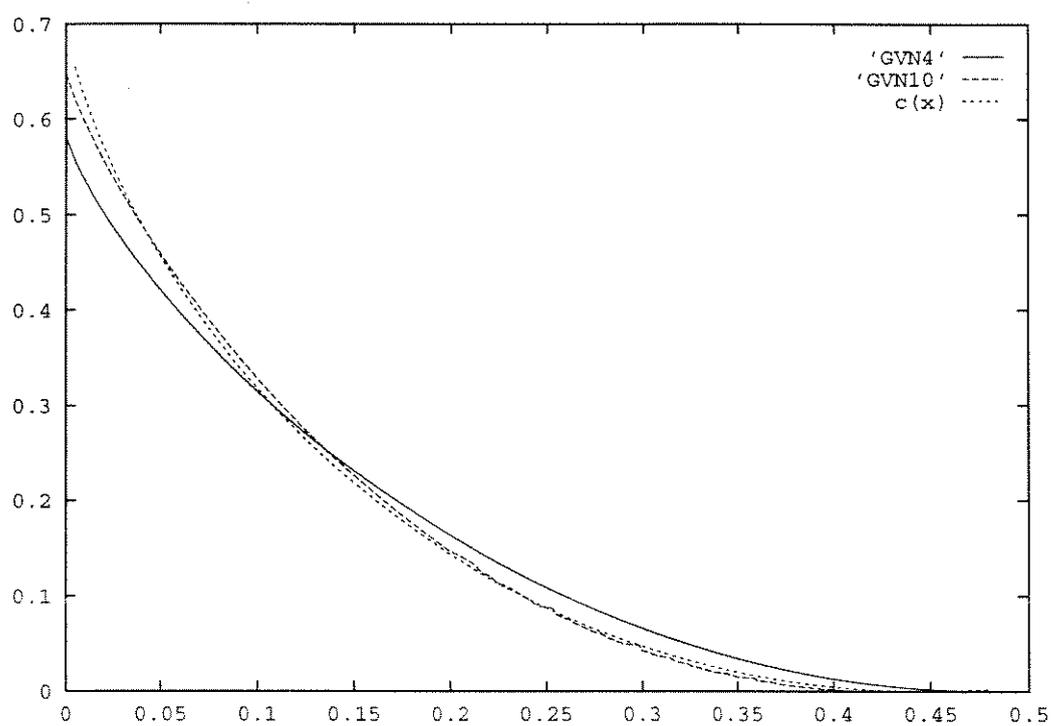


Figura 5.30: Melhores Limitantes Inferiores de Gilbert e Varshamov da Restrição DC-free com  $m = 3$

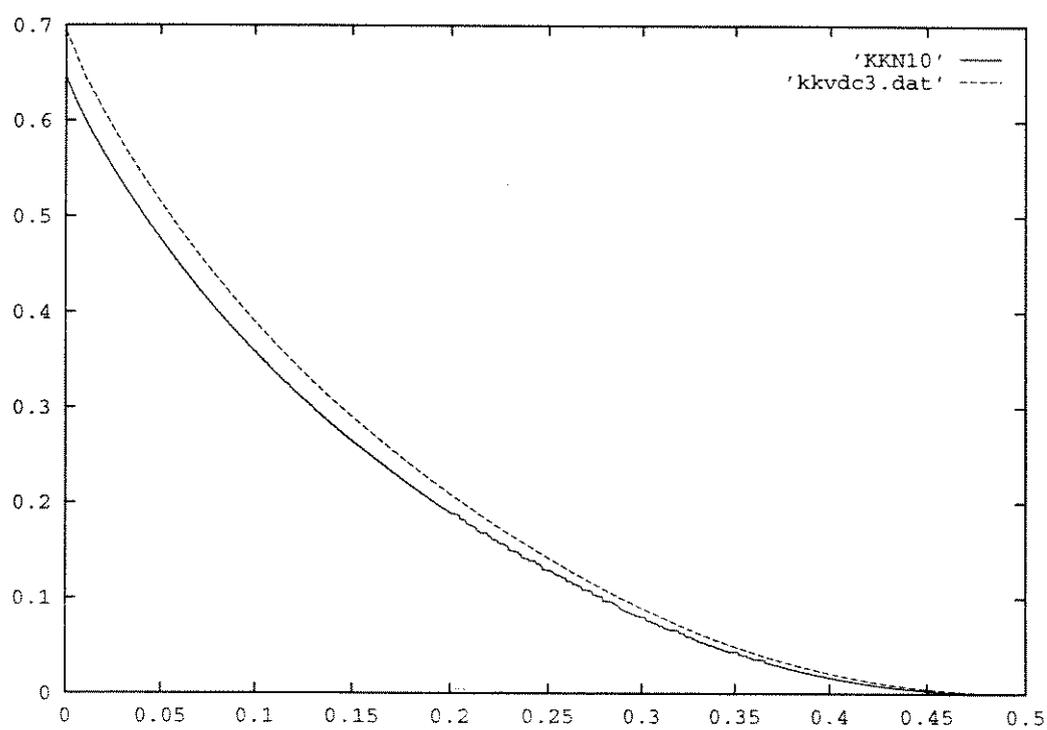


Figura 5.31: Melhores Limitantes Inferiores de Kolesnik e Krachkovsky da Restrição DC-free com  $m = 3$

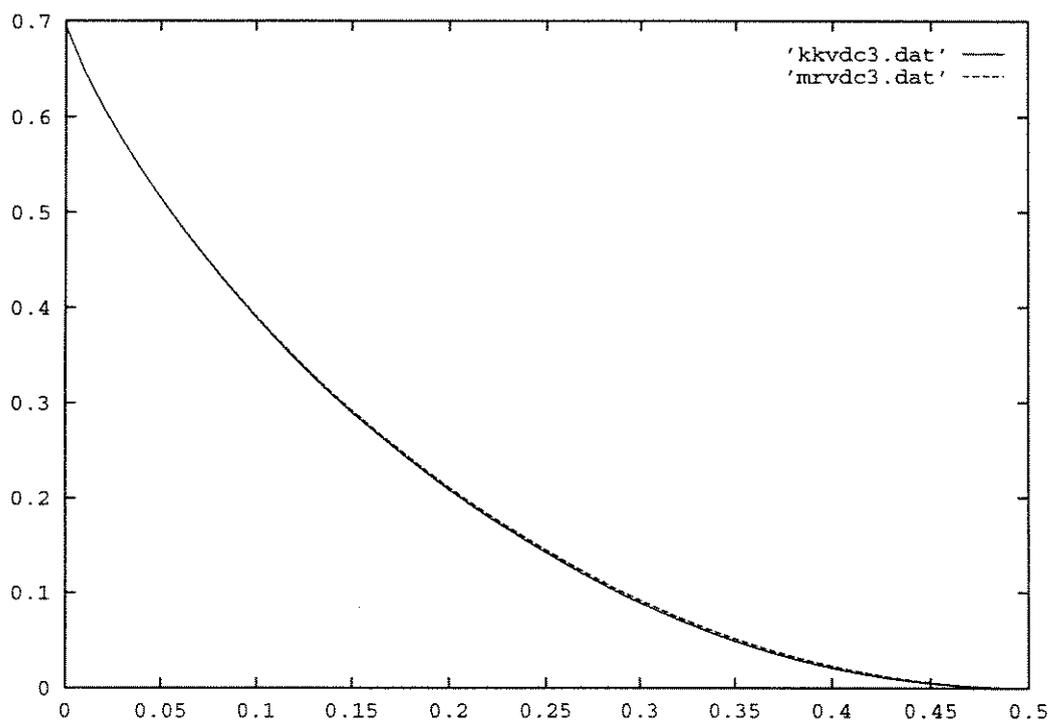


Figura 5.32: Melhores Limitantes Inferiores da Restrição DC-free com  $m = 3$

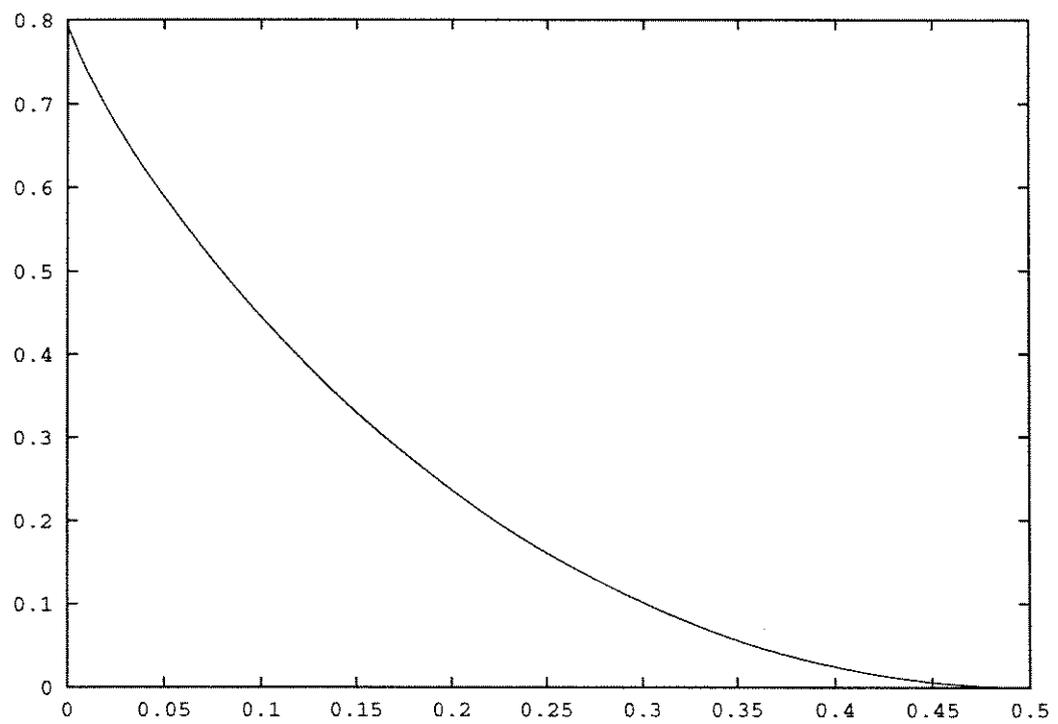


Figura 5.33: Limitante Inferior de Kolesnik e Krachkovsky da Restrição DC-free com  $m = 4$

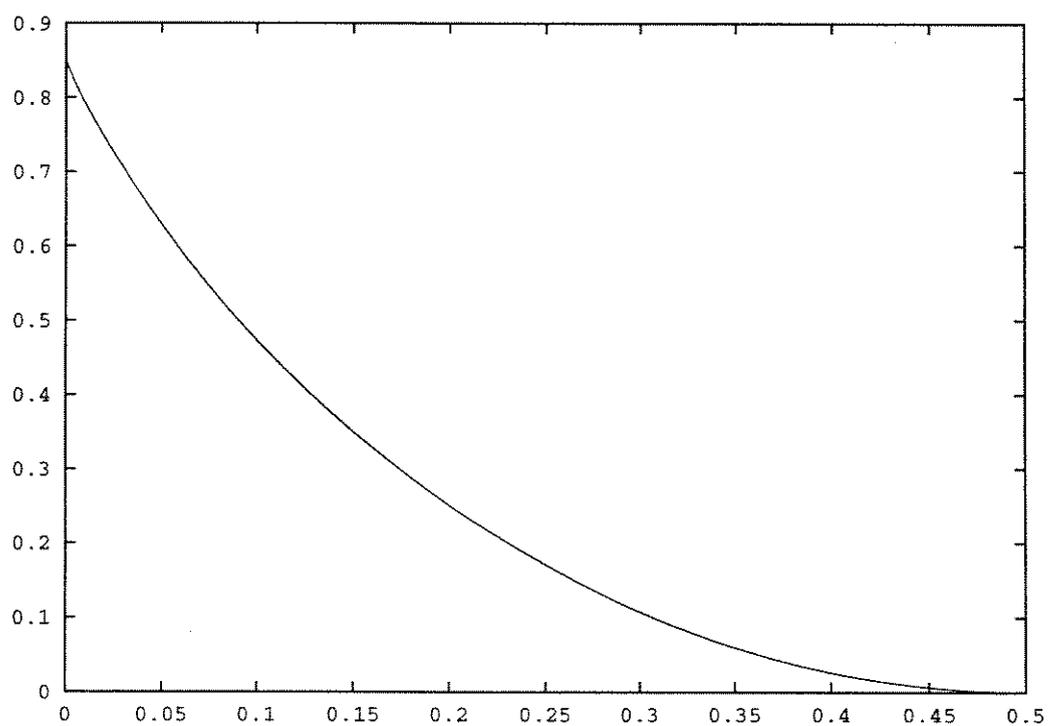


Figura 5.34: Limitante Inferior de Marcus e Roth da Restrição DC-free com  $m = 5$

## Capítulo 6

# CONCLUSÃO

O algoritmo dos blocos deslizantes garante a obtenção de um código de bloco de taxa  $p/q \leq c(S)$  satisfazendo a restrição  $S$ . Tendo sido aplicado na restrição  $(d, N)$  com  $(d, N) = (1, 5)$ , esse algoritmo auxiliou na obtenção de códigos de blocos de janelas deslizantes com taxas  $4/7$ ,  $5/9$  e  $3/5$ .

A aplicação do algoritmo original de Franaszek [23]-[26] garante a obtenção de um autovetor aproximado. A versão modificada descrita nesse trabalho [27] garante a obtenção de um autovetor aproximado de mínima componente máxima e com somatória dos pesos minimizada (dada tal componente máxima).

A técnica de determinação do espectro de códigos de bloco de Cariolaro e Tronca [6] foi aqui aplicada também para a obtenção do espectro maxentrópico de restrições  $(d, N)$ .

Os códigos  $(d, N)$ , apesar de apresentarem teoricamente flutuação de semelhante a da restrição DC-free com desbalanço  $d$ , proporcionam uma maior eficiência na utilização do canal com uma maior taxa. Porém há um aumento nas complexidades do codificador e do decodificador.

Tendo em vista o comportamento do limitante inferior de Gilbert e Varshamov, foi investigada a ocorrência de melhorias no limitante inferior de Kolesnik e Krachkovsky quando se aplica reforço da restrição DC-free com desbalanço  $m = 3$ . Porém não foi encontrado um reforço que gerasse essa melhoria.

O limitante inferior de Marcus e Roth [47] não é facilmente calculável para o caso de

restrições não-primitivas. Foi no entanto verificado que é provedor do melhor limitante inferior para restrições primitivas.

Foi apresentada uma técnica para a obtenção de taxas assintóticas dado um centro notável  $x$ .

Conjecturou-se que curvas de esferas de centros distintos  $x_1$  e  $x_2$  não se cruzassem, implicando que curvas de esferas de centro de máxima distância típica sempre fossem esferas mínimas, e que esferas cujo centro tivesse mínima distância típica fossem esferas máximas para todo  $\delta$ . Porém a Figura 5.20 invalidou tal conjectura, mostrando que os centros de esferas mínimas e máximas podem ser alterados dependendo da distância relativa mínima  $\delta$ .

Foi mostrada a evolução dos limitantes inferiores e superiores da restrição RLL  $(0, 1)$ . Para o cálculo desses limitantes, foram utilizadas as esferas determinadas pela técnica combinatória para o cálculo de taxas assintóticas.

Como proposta para futuros trabalhos tem-se um maior estudo das restrições  $(d, N)$  com a determinação das probabilidades de erro dos códigos  $(d, N)$  aqui obtidos e uma comparação com a restrição DC-free.

Seria interessante provar a suposição de que uma restrição  $(d, N)$  com  $N \rightarrow \infty$  tem capacidade igual à restrição DC-free com desbalanço  $m = 2d$ .

A determinação de centros de esferas mínimas para restrições RLL e a utilização da técnica combinatória para o cálculo de taxas assintóticas para a determinação do limitante superior de Hamming-Plotkin consiste de uma interessante proposta para futuros trabalhos.

Finalmente, a busca a partir dos limitantes superior e inferior, de códigos em espaços restritos com capacidade de correção de erros é de grande valia.

# Bibliografia

- [1] R. Bellman, *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw Hill, 1960.
- [2] R. B. Ash, *Information Theory*, New York: Interscience Publishers, 1965.
- [3] C. E. Shannon, *A Mathematical Theory of Communication*, Bell System Technical Journal, vol. 27, pp. 379-423, 623-656, 1948.
- [4] E. Seneta, *Non-negative Matrices and Markov Chains*, Springer Series in Statistics, 2<sup>nd</sup> Edition, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [5] S. Benedetto, E. Biglieri and V. Castelani, *Digital Transmission Theory*, Prentice Hall, New Jersey, 1987.
- [6] G. L. Cariolaro and G. P. Tronca, *Spectra of Block Coded Digital Signals*, IEEE Transactions on Communications, vol. COM-22, pp. 1555-1563, 1974.
- [7] R. Karabed and P. Siegel, *Matched Spectral-Null Codes for Partial-Response Channels*, IEEE Transactions on Information Theory, vol. 37, N° 3, pp. 818-855, 1991.
- [8] A. Kokkos, A. Popplewell, and J.J. O'Reilly, *A Power Efficient Coding Scheme for Low-Frequency Spectral Suppression*, IEEE Transactions on Communications, vol. 41, N° 11, pp. 1598-1601, 1993.
- [9] J. K. Cavers and R. F. Marchetto, *A New Coding for Spectral Shaping of Data*, IEEE Transactions on Communications, vol. 40, N° 9, pp. 1418-1422, 1992.

- [10] B. H. Marcus and P. H. Siegel, *On Codes with Spectral Nulls at Rational Submultiples of the Symbol Frequency*, IEEE Transactions on Information Theory, vol. IT-33, N° 4, pp. 557-568, 1987.
- [11] C. M. Monti and G. L. Pierobon, *Codes with a Multiple Spectral Null at Zero Frequency*, IEEE Transactions on Information Theory, vol. 35, N° 2, pp. 463-472, 1989.
- [12] G. Bilardi, R. Padovani, and G. L. Pierobon, *Spectral Analysis of Functions of Markov Chains with Applications*, IEEE Transactions on Communications, vol. com-31, N° 7, pp. 853-860, 1983.
- [13] G. L. Cariolaro, G. L. Pierobon, and G. P. Tronca, *Analysis of Codes and Spectra Calculations*, International Journal of Electronics, vol. 55, N° 1, pp 35-80, 1983.
- [14] P. Galko and S. Pasupathy, *The Mean Power Spectral Density of Markov Chain Driven Signals*, IEEE Transactions on Information Theory, vol. IT-27, N° 6, pp. 746-754, 1981.
- [15] R. D. Cideciyan, F. Dolivo, R. Hermann, W. Hirt, and W. Schott, *A PRML System for Digital Magnetic Recording*, IEEE Journal on Selected Areas in Communications, vol. 10, N° 1, pp. 38-56, 1992.
- [16] H. Waldman and C. A. Pingarilho, *Spectral Shaping Codes*, 1994 IEEE ISIT, Trondheim-Norway, june 1994.
- [17] H. Waldman and C. A. Pingarilho, *Finite Disparity Codes*, 1994 IEEE IWIT, Moscow, july 1994.
- [18] H. Waldman and C. A. Pingarilho, *Coding for Spectral Shaping*, 1994 IEEE GLOBECOM, San Francisco, november 1994.
- [19] H. Kobayashi, *A Survey of Coding Schemes for Transmission or Recording of Digital Data*, IEEE Transactions on Communication Technology, vol. COM-19, N° 6, pp. 1087-1100, 1971.

- [20] L. J. Fredrickson, *On the Shannon Capacity of DC and Nyquist-free Codes*, IEEE Transactions on Information Theory, vol. IT-37, pp. 918-927, 1991.
- [21] P. H. Siegel and J. K. Wolf, *Modulation and Coding for Data Storage*, IEEE Communications Magazine, pp. 68-86, december 1991.
- [22] K. A. Immink, *Runlength-Limited Sequences*, Proceedings of the IEEE, vol. 78, N° 11, pp. 1745-1759, 1990.
- [23] P. A. Franaszek, *Sequence-State Coding for Digital Transmission*, The Bell System Technical Journal, pp. 143-157, january 1968.
- [24] P. A. Franaszek, *On Future-Dependent Block Coding for Input-Restricted Channels*, IBM J. Res. Develop., vol. 23, N° 1, pp. 75-81, 1979.
- [25] P. A. Franaszek, *Synchronous Bounded Delay Coding for Input Restricted Channels*, IBM J. Res. Develop., vol. 24, N° 1, pp. 43-48, 1980.
- [26] P. A. Franaszek, *A General Method for Channel Coding*, IBM J. Res. Develop., vol. 24, N° 5, pp. 638-641, 1980.
- [27] R. T. Costa, *Software para a Geração de Códigos RLL Empregando o Algoritmo dos Blocos Deslizantes*, Tese de Mestrado, UNICAMP, Brasil, junho de 1994.
- [28] R. L. Adler, D. Coppersmith, and M. Hassner, *Algorithms for Sliding Block Codes - An Application of Symbolic Dynamics to Information Theory*, IEEE Transactions on Information Theory, vol. IT-29, N° 1, pp. 5-22, 1983.
- [29] B. H. Marcus and R. Roth, *Bounds on the Number of States in Encoder Graphs for Input-Constrained Channels*, IEEE Transactions on Information Theory, vol. 37, N° 3, pp. 742-758, 1991.
- [30] B. H. Marcus, P. H. Siegel, and J. K. Wolf, *Finite-State Modulation Codes for Data Storage*, IEEE Journal on Selected Areas in Communications, vol. 10, N° 1, pp. 5-37, 1992.

- [31] C. D. Heegard, B. H. Marcus, and P. H. Siegel, *Variable Length State Splitting with Applications to Average Runlength-Constrained (ARC) Codes*, IEEE Transactions on Information Theory, vol. 37, N<sup>o</sup> 3, pp. 759-777, 1991.
- [32] M. W. Marcellin and H. J. Weber, *Two-dimensional Modulation Codes*, IEEE Journal on Selected Areas in Communications, vol. 10, N<sup>o</sup> 1, pp. 254-265, 1992.
- [33] H. Waldman e M. A. C. Baptista, *Códigos de Linha para Sistemas Ópticos de Alta Velocidade*, TELEMO 92, Brasília, julho de 1992.
- [34] K. W. Cattermole, *Principles of Digital Line Coding*, International Journal of Electronics, vol. 55, N<sup>o</sup> 1, pp 3-34, 1983.
- [35] R. M. Brooks and A. Jessop, *Line Coding for Optical Fibre Systems*, International Journal of Electronics, vol. 55, N<sup>o</sup> 1, pp 81-120, 1983.
- [36] J. M. Cioffi, W. L. Abbott, H. K. Thapar, C. M. Melas, and K. D. Fisher, *Adaptative Equalization in Magnetic-Disk Storage Channels*, IEEE Communications Magazine, pp. 14-29, february 1990.
- [37] J. W. Lechleider, *Line Codes for Digital Subscriber Lines*, IEEE Communications Magazine, pp. 25-32, september 1989.
- [38] P. Kabal and S. Pasupathy, *Partial-Response Signaling*, IEEE Transactions on Communications, vol. com-23, N<sup>o</sup> 9, pp. 921-934, 1975.
- [39] M. Plotkin, *Binary Codes with Specified Minimum Distance*, IRE Transactions on Information Theory, vol. IT-6, pp. 445-450, 1960.
- [40] Ta-Mu Chien, *Upper Bound on the Efficiency of DC-constrained Codes*, Bell System Technical Journal, pp. 2267-2287, november 1970.
- [41] R. J. McEliece, E. R. Rodemich, H. Rumsey Jr, L. R. Welch, *New Upper Bounds on the Rate of a Code via the Delsarte-MacWilliams Inequalities*, IEEE Transactions on Information Theory, vol. IT-23, N<sup>o</sup> 2, pp. 157-166, 1977.

- [42] H. Waldman and E. Nisenbaum, *Upper Bounds and Hamming Spheres under the DC-Constraint*, IEEE Transactions on Information Theory, a ser publicado.
- [43] H. C. Ferreira, *Lower Bounds on the Minimum Hamming Distance Achievable with Run-length Constrained or DC-free Block Codes and the Syntesis of (16,8)  $D_{min} = 4$  DC-free Block Code*, IEEE Transactions on Magnetics, vol MAG-20, pp. 881-883, 1984.
- [44] S. N. Litsyn and M. A. Tsfasman, *A Note on Lower Bounds*, IEEE Transactions on Information Theory, vol. IT-32, pp. 705-706, 1986.
- [45] G. D. Cohen and S. N. Litsyn, *DC-constrained Error-correcting Codes with Small Running Digital Sum*, IEEE Transactions on Information Theory, vol. 37, pp. 949-955, 1991.
- [46] V. D. Kolesnik and V. Y. Krachkovsky, *Generating Functions and Lower Bounds on Rates for Limited Error-correcting Codes*, IEEE Transactions on Information Theory, vol. 37, pp. 778-788, 1991.
- [47] B. H. Marcus and R. M. Roth, *Improved Gilbert-Varshamov Bounds for Constrained Systems*, IEEE Transactions on Information Theory, vol. 38, pp. 1213-1221, 1992.
- [48] J. Gu and T. Fuja, *A Generalized Gilbert-Varshamov Bound Derived via Analysis of a Code-Search Algorithm*, IEEE Transactions on Information Theory, vol. 39, pp. 1089-1093, 1993.
- [49] C. A. Pingarilho and H. Waldman, *Lower Bounds on the Attainable Rates of DC-free Error-correcting Codes with Imbalance 3*, ITS 94, Rio de Janeiro, september 1994.