

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE SISTEMAS DE ENERGIA

Comparação entre Programação Dinâmica Estocástica Primal e Dual no Planejamento da Operação Energética

Por: THAÍS GAMA DE SIQUEIRA

Orientador: PROF. DR. SECUNDINO SOARES FILHO

Banca Examinadora:

PROF. DR. SECUNDINO SOARES FILHO (**FEEC - UNICAMP**)

PROF. DR. MARINHO GOMES DE ANDRADE FILHO (**ICMC - USP**)

PROF. DR. TAKAAKI OHISHI (**FEEC - UNICAMP**)

Dissertação de Mestrado submetida à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação (FEEC) da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) para o preenchimento dos pré-requisitos parciais para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Campinas, 18 de Junho de 2003

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Si75c

Siqueira, Thaís Gama de

Comparação entre programação dinâmica estocástica primal e dual no planejamento da operação energética / Thaís Gama de Siqueira. --Campinas, SP: [s.n.], 2003.

Orientador: Secundino Soares Filho.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Sistemas de energia elétrica. 2. Otimização matemática. 3. Programação dinâmica. 4. Programação estocástica. I. Soares Filho, Secundino. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Dedico com muito carinho aos meus pais e irmãos.

Este projeto teve o suporte financeiro da CAPES.

Resumo

O objetivo do planejamento da operação energética de sistemas hidrotérmicos de geração é determinar, para cada estágio (mês) do período de planejamento (anos), a geração para cada usina do sistema de modo a atender a demanda e minimizar o valor esperado do custo de operação ao longo do período de planejamento. A forma tradicional de resolver o problema de planejamento da operação energética, adotada no setor elétrico brasileiro por várias décadas, foi a Programação Dinâmica Estocástica (PDE). Recentemente essa técnica foi substituída pela Programação Dinâmica Estocástica Dual (PDED), baseada na decomposição de Benders, que promete contornar a “maldição da dimensionalidade” associada à PDE. Este trabalho apresenta um estudo comparativo entre as técnicas da PDE e da PDED na resolução do problema de planejamento energético da operação de sistemas de energia elétrica, destacando as vantagens e desvantagens dos métodos estudados. As aplicações estudadas consideram o caso particular de sistemas formados por uma única usina hidrelétrica.

Abstract

The operation planning of hydrothermal power systems aims to determine, for each stage (month) of the planning period (years), the amount of generation for each plant of the system which attends the load demand and minimizes the expected operation cost along the planning period.

The traditional way of solving this problem, adopted in the Brazilian electrical sector for many years, was using the Stochastic Dynamic Programming (SDP) technique. Recently this technique was replaced by the Dual Stochastic Dynamic Programming (DSDP) one, based on Benders' decomposition, that promises to solve the "curse of dimensionality" associated with SDP.

This work presents a comparison between SDP and DSDP in the resolution of the operation planning of hydrothermal power systems, discussing the advantages and disadvantages of both methods. In the studied applications the particular case of systems composed by only one hydro plant has been considered.

Agradecimentos

Ao professor Secundino Soares Filho, pela oportunidade de trabalho e pela orientação.

À amiga Luciana Martinez, pela ajuda e pelo incentivo a mim dedicados ao longo deste trabalho.

À minha família, pelo carinho e por sempre acreditarem em mim.

Ao meu companheiro Marcelo, por todo o apoio e carinho.

Aos amigos do COSE, por tornarem alegres os momentos de trabalho.

Conteúdo

Resumo	iv
Abstract	v
Agradecimentos	vi
Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xi
Abreviações e Simbologia	xii
1 Introdução	1
1.1 Objetivos do Trabalho	3
1.2 Organização do Trabalho	3
2 Planejamento da Operação Energética	5
2.1 Introdução	5
2.2 Formulação do Problema	6
2.3 Resumo	11
3 Programação Dinâmica Estocástica	12
3.1 Introdução	12
3.2 Algoritmo	14
3.3 Resumo	15
4 Programação Dinâmica Determinística Dual	16
4.1 Introdução	16

4.2	Problema de Dois Estágios	16
4.3	Algoritmo da PDDD para dois estágios	20
4.4	Resumo	21
5	Programação Dinâmica Estocástica Dual	22
5.1	Introdução	22
5.2	Problema de dois estágios estocástico	22
5.3	Resumo	25
6	Programação Dinâmica Dual no Planejamento da Operação Energética	26
6.1	Introdução	26
6.2	Formulação da PDDD	26
6.3	Algoritmo da PDDD	31
6.4	Formulação da PDED	33
6.5	Resumo	36
7	Resultados	37
7.1	Introdução	37
7.2	Caso Determinístico	39
7.2.1	Estudo 1: Caso Linear	40
7.2.2	Estudo 2: Caso Quadrático	43
7.3	Comparação entre PDE e PDED	48
7.4	Resumo	58
8	Conclusões	59
	Bibliografia	61
A	Decomposição de Benders	63
B	Geração de Árvore de Cenários	69

Lista de Figuras

2.1	Esquema das variáveis envolvidas no estágio t	8
2.2	Esquema de uma usina hidrelétrica.	9
2.3	Função de custo operacional.	10
3.1	Ilustração da equação recursiva da PDE.	14
4.1	Esquema dos cortes de Benders.	20
6.1	Esquema do corte de Benders gerado em um certo estágio.	28
6.2	Esquema da formulação acaso-decisão da PDED.	34
6.3	Esquema de árvore de cenários para 4 estágios e 2 cenários.	34
7.1	Caso linear: volume, vazões afluente e defluente da usina de Barra Bonita x estágios em meses.	41
7.2	Caso linear: volume, vazões afluente e defluente da usina de Promissão x estágios em meses.	41
7.3	Caso linear: volume, vazões afluente e defluente da usina de Caconde x estágios em meses.	42
7.4	Caso linear: volume, vazões afluente e defluente da usina de Furnas x estágios em meses.	42
7.5	Caso quadrático: volume, vazões afluente e defluente da usina de Barra Bonita x estágios em meses.	44
7.6	Caso quadrático: volume, vazões afluente e defluente da usina de Promissão x estágios em meses.	45
7.7	Caso quadrático: volume, vazões afluente e defluente da usina de Caconde x estágios em meses.	45
7.8	Caso quadrático: volume, vazões afluente e defluente da usina de Furnas x estágios em meses.	46
7.9	Caso linear: limites inferior e superior da usina de Barra Bonita x iterações.	47
7.10	Caso quadrático: limites inferior e superior da usina de Barra Bonita x iterações.	47

7.11	Custo futuro esperado da PDE.	49
7.12	Aproximação da função de custo esperado futuro para o final do mês de maio considerando o período de 2 meses.	52
7.13	Aproximação da função de custo esperado futuro para o final do mês de junho considerando o período de 2 meses.	52
7.14	Aproximação da função de custo esperado futuro para o final do mês de maio considerando o período de 4 meses.	53
7.15	Aproximação da função de custo esperado futuro para o final do mês de junho considerando o período de 4 meses.	53
7.16	Aproximação da função de custo esperado futuro para o final do mês de julho considerando o período de 4 meses.	54
7.17	Aproximação da função de custo esperado futuro para o final do mês de agosto considerando o período de 4 meses.	54
7.18	Aproximação da função de custo esperado futuro para o final do mês de maio considerando o período de 6 meses.	55
7.19	Aproximação da função de custo esperado futuro para o final do mês de junho considerando o período de 6 meses.	55
7.20	Aproximação da função de custo esperado futuro para o final do mês de julho considerando o período de 6 meses.	56
7.21	Aproximação da função de custo esperado futuro para o final do mês de agosto considerando o período de 6 meses.	56
7.22	Aproximação da função de custo esperado futuro para o final do mês de setembro considerando o período de 6 meses.	57
7.23	Aproximação da função de custo esperado futuro para o final do mês de outubro considerando o período de 6 meses.	57
A.1	Interpretação geométrica da função $\alpha(x)$ através da decomposição de Benders.	65
B.1	Ilustração da função de distribuição log-normal.	70
B.2	Esquema da árvore de cenários.	71

Lista de Tabelas

7.1	Capacidade instalada e produtividade específica.	38
7.2	Volumes dos reservatórios.	38
7.3	Vazões afluentes médias mensais.	39
7.4	Características do conjunto turbina e gerador.	39
7.5	Dados operativos de Furnas.	48

Abreviações e Simbologia

Abreviações

ONS: Operador Nacional do Sistema Elétrico

POE: Planejamento da Operação Energética

PDE: Programação Dinâmica Estocástica

PDD: Programação Dinâmica Dual

PDDD: Programação Dinâmica Determinística Dual

PDED: Programação Dinâmica Estocástica Dual

MLT: Média de Longo Termo

Simbologia

MW : mega watt

\overline{MW} : mega watt médio

m^3/s : metro cúbico por segundo

hm^3 : hectômetro cúbico

T : número de estágios

τ : constante para o ajuste de unidades

$\psi_t(\cdot)$: função custo de complementação não hidráulica [\\$]

$\alpha_t(\cdot)$: função de custo futuro associado ao estado do reservatório [\\$]

ρ : produtibilidade específica da usina [$MW/(m^3/s)m$]

g_t : geração não hidráulica do sistema durante o estágio t [\overline{MW}]

p_t : geração hidrelétrica do sistema durante o estágio t [\overline{MW}]

d_t : consumo a ser atendido durante o estágio t [\overline{MW}]

y_t : vazão incremental afluyente durante o estágio t [m^3/s]

x_t : volume do reservatório no final do estágio t [hm^3]

u_t : vazão defluente durante o estágio t [m^3/s]

q_t : vazão turbinada durante o estágio t [m^3/s]

v_t : vazão vertida durante o estágio t [m^3/s]

\underline{x}_t : volume mínimo do reservatório no final do estágio t [hm^3]

\bar{x}_t : volume máximo do reservatório no final do estágio t [hm^3]

$x_{\text{útil}}$: volume útil do reservatório [hm^3]

\underline{u}_t : defluência mínima da usina no estágio t [m^3/s]

\bar{u}_t : defluência máxima da usina no estágio t [m^3/s]

\underline{q}_t : turbinagem mínima da usina no estágio t [m^3/s]

\bar{q}_t : turbinagem máxima da usina no estágio t [m^3/s]

\underline{v}_t : vertimento mínimo da usina no estágio t [m^3/s]

\bar{v}_t : vertimento máximo da usina no estágio t [m^3/s]

$pc(q)$: perda de carga hidráulica [m]

$\phi(x)$: polinômio da cota de montante do reservatório [m]

$\theta(u)$: polinômio da cota de jusante do reservatório [m]

Capítulo 1

Introdução

Com tamanho e características que permitem considerá-lo único em âmbito mundial, o sistema de produção e transmissão de energia elétrica do Brasil é um sistema hidrotérmico de grande porte, com forte predominância de usinas hidrelétricas e com múltiplos proprietários. O Sistema Interligado Nacional (SIN) é formado pelas empresas das regiões Sul, Sudeste, Centro-Oeste, Nordeste e parte da região Norte. Apenas 3,4% da capacidade de produção de eletricidade do país encontra-se fora do SIN, em pequenos sistemas isolados localizados principalmente na região amazônica.

A maior parte da capacidade instalada é composta por usinas hidrelétricas, que representam cerca 82,8% do total instalado, e se distribuem em 12 diferentes bacias hidrográficas nas diferentes regiões.

O principal consumo de energia elétrica se concentra nas regiões Centro-Sul e Sul, que são as mais industrializadas e com maior número de habitantes por quilômetro quadrado. Entretanto, todas as principais fontes de energia nessas regiões já estão sendo exploradas. No outro extremo, com menor consumo e com um menor número de usinas, estão os estados do Norte e Nordeste, esse último sem muitos recursos hídricos. Mesmo os grandes volumes de água na região Norte não são facilmente aproveitáveis devido às suas condições geográficas bastante planas.

Segundo valores dados pela ANEEL, atualmente estão em construção mais 19 usinas hidrelétricas de grande porte, tendo sido aprovadas pelo estudo de viabilidade econômica mais 29. Mas, a esses grandes empreendimentos em grandes usinas, somam-se as chamadas pequenas centrais hidrelétricas, que representam um papel cada vez mais importante no panorama gerador brasileiro. Atualmente representam apenas 1,10% da potência gerada, porém pretendem alcançar futuramente a marca de 14% do total gerado.

As usinas termelétricas ocupam o segundo lugar no volume gerado, utilizando diversas fontes de energia, escolhidas de acordo com as condições locais e localizadas mais próximas dos centros de consumo. No caso brasileiro, com o emprego desse tipo de usinas, resíduos de diversas origens, que antes eram inutilizados, passaram a ser utilizados na geração de energia elétrica.

A operação do sistema hidrotérmico é dividida nas etapas da programação e do planejamento da operação energética. A programação é responsável pelo despacho operacional do sistema em curto prazo, enquanto o planejamento energético da operação fornece metas de geração a serem despachadas de forma ótima na programação da operação, reduzindo os custos para o consumidor final.

Este trabalho se concentra no estudo de metodologias de resolução do planejamento energético da operação, considerando o caso particular de uma única usina hidrelétrica.

No planejamento de operação energética de um sistema de geração hidrotérmico o que se busca é determinar uma política de operação que, a cada estágio do período de planejamento, conhecido o estado corrente do sistema, estabeleça metas de geração para cada usina geradora. As políticas de planejamento da operação energética tradicionais visam exclusivamente à minimização do valor esperado do custo da operação, que está associado aos custos de combustível das usinas termelétricas, importação de sistemas vizinhos e penalidades pelo eventual não atendimento da demanda de energia (déficit).

A partir de 1974, surgiram as primeiras estratégias de operação energética para o sistema brasileiro, que eram calculadas através de um método determinístico denominado “Método da Curva Limite Inferior de Armazenamento”. Nesse método, baseado em uma representação agregada e em dados históricos de vazões afluentes, o sistema operava de acordo com uma curva limite, que representava o mínimo armazenamento necessário para atender o mercado do sistema, mesmo na ocorrência da pior série de vazões afluentes, registradas no histórico de vazões.

Na década de 1970, surgiu a Programação Dinâmica Estocástica (PDE), desenvolvida pela Eletrobrás juntamente com o CEPEL. A PDE foi adotada por muitos anos pelo setor elétrico brasileiro, porém apresenta como desvantagem a discretização do espaço de estados. Sendo assim, a dimensão do problema cresce exponencialmente com o número de variáveis de estados considerado, e a abordagem é limitada pela chamada “maldição da dimensionalidade” [1]. Para solucionar o problema da dimensionalidade, algumas abordagens sugerem a agregação do sistema hidrelétrico em um sistema equivalente, onde variáveis hidráulicas são transformadas em variáveis energéticas [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8].

Na década de 1980 surgiu uma abordagem alternativa, denominada Programação Dinâmica Estocástica Dual (PDED), baseada no princípio de decomposição de Benders [9], [10], [11], [12].

Nessa metodologia não é necessária a discretização do espaço de estados, o que resolveria o problema da dimensionalidade, e a aproximação da função custo futuro, associada ao problema de operação energética, é construída de forma iterativa, utilizando as variáveis duais associadas às equações de balanço no reservatório.

1.1 Objetivos do Trabalho

O objetivo deste trabalho é abordar os principais pontos da Programação Dinâmica Estocástica Primal e da Programação Dinâmica Estocástica Dual, ressaltando suas vantagens e limitações. Para isso o trabalho possui duas partes iniciais, uma que estuda a Programação Dinâmica Estocástica Primal e outra que estuda a Programação Determinística Dual, com vazões afluentes pré-estabelecidas, onde serão considerados dois tipos de função custo para a resolução do problema de operação ótimo energético: linear e quadrático. Em seguida, inicia-se um estudo sobre a Programação Dinâmica Estocástica Dual, onde será considerada a estocasticidade das vazões afluentes ao reservatório através de árvore de cenários. Para testar a eficácia do método será feita uma comparação com a Programação Dinâmica Estocástica Primal.

1.2 Organização do Trabalho

No capítulo 1 é feita uma introdução ao trabalho, onde o problema de operação energética e as técnicas de resolução do mesmo são brevemente descritas juntamente com uma revisão bibliográfica.

No capítulo 2 a formulação do planejamento da operação energética é apresentada para uma única usina hidrelétrica.

No capítulo 3 a Programação Dinâmica Estocástica Primal é apresentada, juntamente com o seu algoritmo de resolução.

No capítulo 4 a Programação Dinâmica Dual Determinística é abordada juntamente com os conceitos da decomposição de Benders. Um algoritmo de resolução é apresentado.

No capítulo 5 a Programação Dinâmica Dual é apresentada no planejamento energético da operação. As restrições do problema são explicadas e o esquema de resolução é apresentado para os casos determinístico e estocástico.

No capítulo 6 são comentados os resultados obtidos para todos os casos estudados. Uma comparação entre a Programação Dinâmica Estocástica e a Programação Dinâmica Estocástica Dual é apresentada e discutida.

No capítulo 7 são comentadas as conclusões finais sobre os resultados obtidos para as metodologias de Programação Dinâmica Estocástica e de Programação Dinâmica Dual. São apresentadas propostas de estudos futuros.

Em seguida são citadas as referências bibliográficas utilizadas no desenvolvimento do trabalho.

Ao final desta dissertação encontram-se os apêndices que esclarecem alguns conceitos envolvidos no trabalho. O primeiro deles apresenta o método de decomposição de Benders e o segundo explica o processo de geração de árvore de cenários hidrológicos.

Capítulo 2

Planejamento da Operação Energética

2.1 Introdução

O objetivo do Planejamento da Operação Energética (POE) de um sistema hidrotérmico é a obtenção, em cada estágio (mês), das decisões de geração para as unidades geradoras do sistema que minimizem o custo esperado de operação ao longo do período de planejamento (anos). O custo de operação é constituído pelos custos de combustível das unidades termelétricas, importação e penalidades por eventuais não atendimentos do consumo de energia.

O problema de operação energética em um sistema predominantemente hidráulico, como é o caso brasileiro, apresenta características complexas, podendo-se destacar alguns dos fatores que contribuem para isso:

- Devido ao fato de existirem estoques limitados de energia hidrelétrica, sob a forma de água armazenada nos reservatórios do sistema, o problema de operação hidrotérmica torna-se não-separável no tempo, pois existe uma relação entre a decisão operativa, tomada em um certo estágio, e as futuras conseqüências de se tomar esta decisão.

- Existe a presença de não-linearidade na função objetivo, pois as funções de custos de geração das usinas térmicas e as funções de produção das usinas hidráulicas não são lineares.

- Por existirem várias usinas hidrelétricas, distribuídas em cascata, existe a interdependência das decisões decorrente do acoplamento hidráulico entre as usinas.

- O problema de operação energético é estocástico, uma vez que as afluições futuras ao reservatório não são conhecidas no instante da tomada de decisão.

- O planejamento da operação ocorre dentro de um contexto dinâmico. Isso significa que o meio ambiente, para o qual está se fazendo um planejamento, está continuamente mudando de maneira que afeta o próprio sistema que se está planejando, a menos que sejam feitas retificações apropriadas. Portanto o sistema interage dinamicamente com o meio ambiente.

2.2 Formulação do Problema

O problema de otimização do planejamento da operação energética de sistemas hidrotérmicos, em sua versão determinística e no caso de uma única usina hidrelétrica, pode ser formulado como o seguinte problema de programação não linear:

$$\min \sum_{t=1}^T \psi_t(g_t) + \alpha_T(x_T) \quad (2.1)$$

sujeito a:

$$p_t + g_t = d_t \quad (2.2)$$

$$p_t = \rho [\phi(x_t) - \theta(u_t) - pc(q_t)] q_t \quad (2.3)$$

$$x_t = x_{t-1} + (y_t - u_t)\tau \quad (2.4)$$

$$u_t = q_t + v_t \quad (2.5)$$

$$\underline{x}_t \leq x_t \leq \bar{x}_t \quad (2.6)$$

$$\underline{u}_t \leq u_t \leq \bar{u}_t \quad (2.7)$$

$$\underline{q}_t \leq q_t \leq \bar{q}_t \quad (2.8)$$

$$\underline{v}_t \leq v_t \leq \bar{v}_t \quad (2.9)$$

$$x_0 \text{ dado} \quad (2.10)$$

$$\forall t, t = 1, 2, \dots, T$$

onde:

T : número de estágios;

τ : constante para o ajuste de unidades;

$\psi_t(\cdot)$: função custo de complementação não hidráulica [\\$];

$\alpha_t(\cdot)$: função de custo futuro associado ao estado do reservatório [\\$];

g_t : geração não hidráulica do sistema durante o estágio t [\overline{MW}];

p_t : geração hidrelétrica do sistema durante o estágio t [\overline{MW}];

d_t : consumo a ser atendido durante o estágio t [\overline{MW}];

x_t : volume do reservatório no final do estágio t [hm^3];

u_t : vazão defluente durante o estágio t [m^3/s];

q_t : vazão turbinada durante o estágio t [m^3/s];

v_t : vazão vertida durante o estágio t [m^3/s];

y_t : vazão incremental afluyente durante o estágio t [m^3/s];

$pc(q)$: perda de carga hidráulica [m];

ρ : produtibilidade específica da usina [$MW/(m^3/s)m$];

\underline{x}_t : volume mínimo do reservatório no final do estágio t [hm^3];

\overline{x}_t : volume máximo do reservatório no final do estágio t [hm^3];

\underline{u}_t : defluência mínima da usina no estágio t [m^3/s];

\overline{u}_t : defluência máxima da usina no estágio t [m^3/s];

\underline{q}_t : turbinagem mínima da usina no estágio t [m^3/s];

\bar{q}_t : turbinagem máxima da usina no estágio t [m^3/s];

\underline{v}_t : vertimento mínimo da usina no estágio t [m^3/s];

\bar{v}_t : vertimento máximo da usina no estágio t [m^3/s];

$\phi(x)$: polinômio da cota de montante do reservatório [m];

$\theta(u)$: polinômio da cota de jusante do reservatório [m].

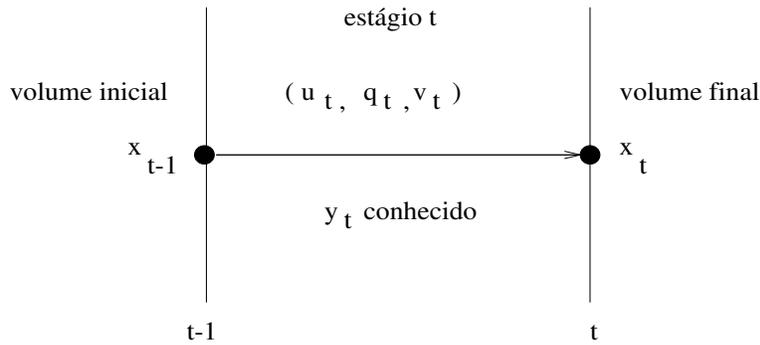


Figura 2.1: Esquema das variáveis envolvidas no estágio t .

A figura 2.1 mostra o esquema das variáveis envolvidas no estágio t , sendo x_{t-1} o armazenamento conhecido no início do estágio t e x_t o armazenamento ótimo ao final desse estágio, decorrente do conjunto de decisões durante esse estágio dadas por (u_t, q_t, v_t) . No estágio seguinte, $t+1$, x_t será o valor inicial de armazenamento e x_{t+1} a solução ótima de armazenamento desse estágio. Esse processo é repetido para todos os estágios do período de planejamento ($t = 1, \dots, T$).

As restrições (2.2) e (2.4) referem-se ao atendimento do consumo de energia e balanço de água do reservatório, respectivamente. As restrições (2.6), (2.7) e (2.8) representam os limites operativos de volume, defluência e turbinagem da usina hidrelétrica.

O fator ρ da equação (2.3) é conhecido como a produtibilidade específica da usina, sendo expresso em [$MW/(m^3/s)m$].

A potência gerada em uma usina hidrelétrica é função da vazão turbinada e da altura de queda, que, por sua vez, é uma função não linear do volume armazenado e da defluência do

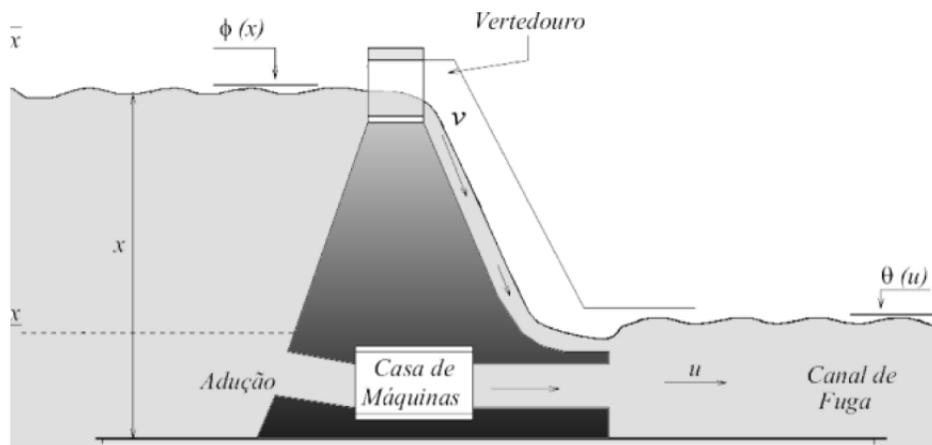


Figura 2.2: Esquema de uma usina hidrelétrica.

reservatório, de acordo com as equações (2.3) e (2.5).

O nível do reservatório, em relação ao nível do mar, é denominado cota de montante $\phi(x)$, enquanto o nível do canal de fuga é denominado cota de jusante $\theta(u)$. Essas funções são expressas por polinômios em função do volume e da defluência, respectivamente.

A função $pc(\cdot)$ representa a perda de carga hidráulica, em metros. Essa perda é associada ao atrito entre a água e as paredes da tubulação do canal de adução.

A figura 2.2 ilustra um esquema de uma usina hidrelétrica e as principais variáveis envolvidas na formulação do problema matemático.

O custo operacional $\psi_t(\cdot)$ representa o custo mínimo de geração complementar de recursos não hidráulicos, como geração térmica, importação de mercados vizinhos ou déficit de energia. Como consequência de minimização, $\psi_t(\cdot)$ é uma função convexa crescente da geração complementar e portanto decrescente da geração hidrelétrica p_t no estágio t , e depende do consumo d_t .

No sistema térmico brasileiro, como representado na modelagem adotada pela ONS, a função de custo de complementação não hidráulica $\psi(\cdot)$ é monotonicamente crescente em função da geração térmica do sistema, g , ilustrada na figura 2.3.

A função $\alpha_t(\cdot)$ representa o custo esperado futuro associado ao estado de armazenamento do reservatório no final do período de planejamento. O objetivo dessa função é equilibrar os custos operacionais decorrentes do uso da água no período de planejamento com os custos futuros após esse período.

A geração hidrelétrica da usina no estágio t é representada pela equação (2.3), sendo função não linear do volume de água armazenada no reservatório x_t e do volume de água defluente

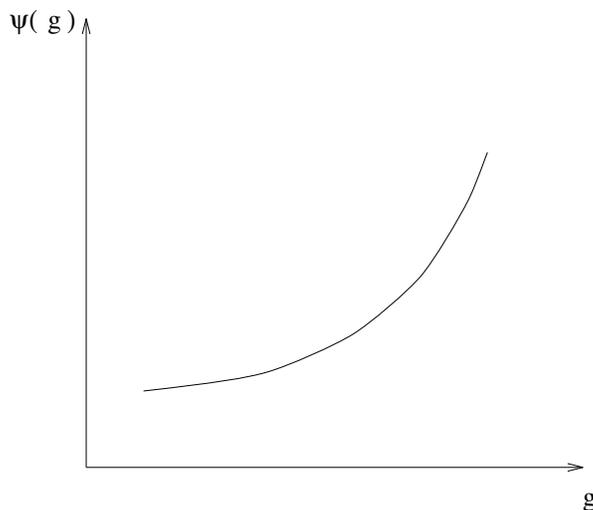


Figura 2.3: Função de custo operacional.

u_t e turbinada q_t da usina. A equação de igualdade (2.4) representa o balanço de água no reservatório. Termos referentes a evaporação e infiltração não são considerados por questão de simplicidade.

No caso estocástico, existem duas variáveis aleatórias envolvidas no problema de planejamento da operação energética: o consumo de energia e a vazão afluyente ao reservatório. A primeira, por ser fortemente ligada com as decisões do homem, não pode ser tratada de forma estocástica no problema e, portanto, é fornecida por meio de cenários no planejamento. Por outro lado, as afluências ao reservatório podem ser tratadas de maneira estocástica devido à existência de históricos de vazões e por dependerem de fenômenos físicos, existindo uma distribuição de probabilidade associada a elas. Dessa forma, a formulação do problema visa à minimização do valor esperado do custo de operação, dado pela equação (2.11).

$$\min E_y \left\{ \sum_{t=1}^T \psi_t(g_t) + \alpha_T(x_T) \right\} \quad (2.11)$$

sujeito às restrições (2.2) a (2.10), onde E_y é o valor esperado com relação à distribuição conjunta das vazões afluentes y_t , $t = 1, \dots, T$.

2.3 Resumo

Neste capítulo, a operação de sistemas hidrotérmicos de geração de energia elétrica foi matematicamente modelada. A formulação apresentada é relevante para a compreensão e a análise dos capítulos posteriores.

O capítulo apresentou inicialmente algumas características do sistema elétrico brasileiro de geração, com o objetivo de ilustrar o cenário em que este trabalho se insere. Os principais componentes que constituem um sistema hidrotérmico de geração foram apresentados.

Capítulo 3

Programação Dinâmica Estocástica

3.1 Introdução

No setor elétrico brasileiro a determinação de estratégias de operação dos sistemas interligados tem tido como base a Programação Dinâmica Estocástica (PDE) [13], [14], [15]. Essa metodologia tem como objetivo obter políticas de decisões ótimas que forneçam, a cada estágio do planejamento, a decisão ótima para cada possível estado do sistema [16], [17], [18], [1]. A PDE apresenta muitas características interessantes como, por exemplo, representar não linearidades e considerar aspectos estocásticos do problema. Porém apresenta como desvantagem a necessidade da discretização do espaço de estados, o que ocasiona o crescimento exponencial do esforço computacional com o número de variáveis de estados considerado, limitação conhecida como “maldição da dimensionalidade”.

Na PDE o problema se divide em etapas (estágios), e a melhor decisão (vazões turbinada e vertida) em cada etapa é determinada de acordo com o estado (armazenamento) em que o sistema se encontra. O processo de otimização se baseia no conhecimento prévio das possibilidades futuras e suas conseqüências, de modo a satisfazer o princípio de otimalidade de Bellman [1]. Assim, o custo total de operação é dado pela soma do custo da decisão no próprio estágio, custo presente, com o custo futuro pré-determinado a partir do estágio seguinte. Como o problema é estocástico, a decisão em cada estágio é obtida com base na distribuição de probabilidades de vazão afluente ao reservatório no estágio.

Em cada estágio as decisões são determinadas através da minimização da soma do custo presente com o custo esperado futuro, assumindo decisões ótimas para todos os estágios subsequentes. Esse custo é aditivo no sentido de que o custo ocorrido no estágio t acumula-se ao

longo do tempo.

Segundo o princípio de otimalidade de Bellman [1], se Ω_t^* , para $t = \sigma, \dots, T$, é uma política ótima estando o sistema no estado $(x_{\sigma-1})$ no estágio $t = \sigma - 1$, então Ω_t^* , para $t = \sigma + 1, \dots, T$, será uma política ótima para o estado inicial $(x_\sigma) = \phi(x_{\sigma-1}, y_\sigma, u_\sigma, q_\sigma, v_\sigma)$ no estágio $t = \sigma$, onde ϕ representa a equação de transição de estado do modelo.

Na técnica de resolução *backward*, o problema é resolvido com a busca de políticas ótimas partindo do estágio final T , onde o custo $\alpha_T(x_T)$ é conhecido, e seguindo até o estágio inicial, através da equação recursiva, dada por:

$$\alpha_{t-1}(x_{t-1}) = \min_{\Omega_t} \{ \psi_t(g_t) + E_{y_t} \alpha_t(x_t) \} \quad (3.1)$$

$$t = T, T - 1, \dots, 1$$

onde, $\alpha_t(x_t)$ representa o valor esperado mínimo do custo de operação do estágio t ao final do horizonte T , supondo que o sistema se encontra no estado (x_{t-1}) e transita para o estado (x_t) , dado um conjunto de decisões $\Omega_t = \{q_t, v_t\}$, que satisfaz as seguintes equações:

$$g_t + p_t = d_t \quad (3.2)$$

$$p_t = \rho [\phi(x_t) - \theta(u_t) - pc(q_t)] q_t \quad (3.3)$$

$$x_t = x_{t-1} + (y_t - u_t)\tau \quad (3.4)$$

$$u_t = q_t + v_t \quad (3.5)$$

$$\underline{x}_t \leq x_t \leq \bar{x}_t \quad (3.6)$$

$$\underline{u}_t \leq u_t \leq \bar{u}_t \quad (3.7)$$

$$\underline{q}_t \leq q_t \leq \bar{q}_t \quad (3.8)$$

$$\underline{v}_t \leq v_t \leq \bar{v}_t \quad (3.9)$$

Supondo conhecida a função densidade de probabilidade da variável estocástica (vazão afluente) do problema, $f(y_t)$, a equação recursiva (3.1) pode ser reescrita como:

$$\alpha_{t-1}(x_{t-1}) = \min_{\Omega_t} \left\{ \psi_t(g_t) + \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_t(x_t) \cdot f(y_t) dy_t \right\} \quad (3.10)$$

$$t = T, T - 1, \dots, 1$$

Supondo a discretização da distribuição de probabilidades das vazões, uma política ótima Ω_t^* , com $t = 1, \dots, T$, para o problema (2.1)-(2.10), pode ser obtida pela solução de:

$$\alpha_{t-1}(x_{t-1}) = \min_{\Omega_t} \left\{ \psi_t(g_t) + \sum_{k=1}^{NDy} \alpha_t(x_t^k) \cdot p_k \right\} \quad (3.11)$$

onde

$$x_t^k = x_{t-1} + (y_t^k - q_t - v_t)\tau \quad (3.12)$$

sendo NDy o número de discretizações de y e p_k a probabilidade da ocorrência da afluência y_k .

A formulação (3.11) e (3.12) é denominada formulação do tipo “decisão-acaso”, e é adotada no planejamento energético da operação do sistema elétrico brasileiro quando se utiliza a PDE convencional [12]. Nesse tipo de formulação as decisões são tomadas sem o conhecimento das vazões afluentes no próprio mês, mas em função da distribuição de probabilidade dessas vazões.

A figura 3.1 ilustra o processo de resolução “decisão-acaso” utilizado na PDE. É conveniente, para comparações futuras, observar que nesse processo de decisão primeiro a decisão Ω_t , no início do estágio t , é tomada e depois ocorre o acaso, representado pela vazão afluente no estágio [1].

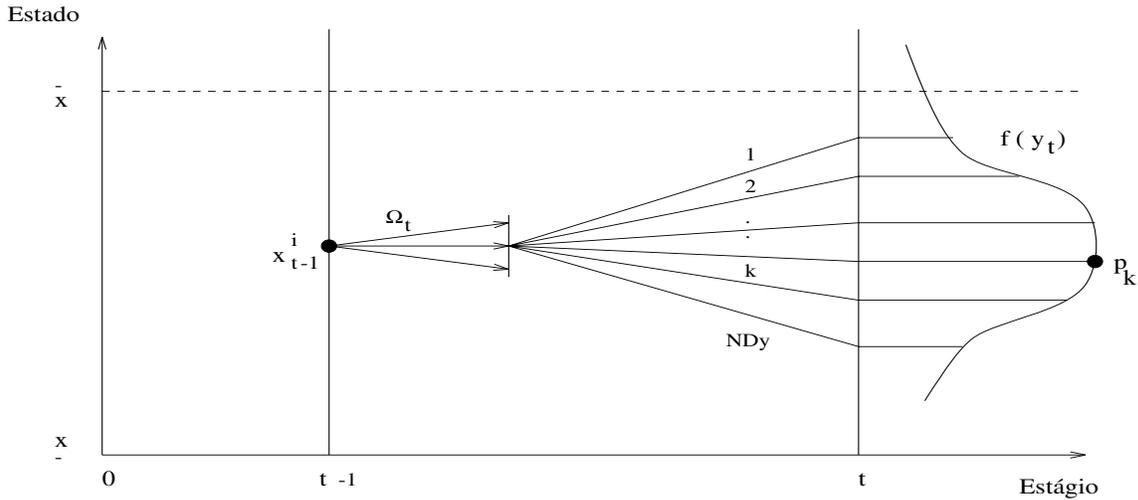


Figura 3.1: Ilustração da equação recursiva da PDE.

3.2 Algoritmo

O algoritmo da PDE obtém a função de custo futuro $\alpha_{t-1}(x_{t-1})$ através da discretização do espaço de estados x_{t-1}^i em um conjunto de valores $i = 1, \dots, NDx$, onde NDx é o número

de discretizações de x , e resolvendo a equação (3.1), para cada um dos desses valores. Valores intermediários de $\alpha_t(x_t)$ são calculados por interpolação linear dos valores vizinhos discretizados. Seja ND_Ω o número de discretização da decisão Ω . Pode-se descrever a algoritmo da PDE pelos seguintes passos:

Para $t = T, T - 1, \dots, 1$

1. Para cada valor de $x_{t-1}^i, i = 1, \dots, NDx$
2. Para cada valor de decisão $\Omega_t^j, j = 1, \dots, ND_\Omega$
3. Calcular o custo de operação:

$$w^j(x_{t-1}^i) = \psi_t(g_t^j) + \sum_{k=1}^{NDy} p_k \alpha_t(x_t^k) \quad (3.13)$$

onde

$$x_t^k = x_{t-1}^i + (y_t^k - q_t^j - v_t^j)\tau \quad (3.14)$$

4. Encontrar o custo mínimo de operação:

$$\alpha_{t-1}(x_{t-1}^i) = \min_{\Omega_t^j} w^j(x_{t-1}^i) = w^*(x_{t-1}^i) \quad (3.15)$$

O algoritmo determina decisões ótimas $\Omega_t(x_{t-1}^i)$ e para cada estado x_{t-1}^i o custo esperado mínimo $\alpha_{t-1}(x_{t-1}^i)$ até o final do período de planejamento.

3.3 Resumo

Foram apresentados nesta seção os conceitos da Programação Dinâmica Estocástica. O método foi formulado, através do princípio de otimalidade de Bellman, para os casos discreto e contínuo. Foram apresentadas as aplicações, vantagens e a desvantagem de sua aplicação quando o número de variáveis de estado é muito grande, o que resulta na maldição da dimensionalidade. Ao final o algoritmo de resolução do método foi descrito.

Capítulo 4

Programação Dinâmica Determinística Dual

4.1 Introdução

Como foi visto anteriormente, a PDE é utilizada na resolução de problemas de otimização com vários estágios, onde cada estágio é analisado separadamente, em sentido inverso, garantindo porém que a cada estágio, supondo-se o sistema em qualquer estado, a decisão a ser tomada é parte integrante da trajetória ótima a partir do ponto considerado até o final do período em estudo.

Será introduzida a seguir a formulação da Programação Dinâmica Determinística Dual (PDDD), juntamente com o conceito dos cortes de Benders, onde não é necessário discretizar o espaço de estados e a decisão ótima do problema é obtida através da resolução de um número finito de subproblemas lineares.

4.2 Problema de Dois Estágios

Seja o problema linear e determinístico para dois estágios:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{sujeito a:} \quad & \\ & A_1x_1 \geq b_1 \\ & E_1x_1 + A_2x_2 \geq b_2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Os vetores x_1 e x_2 representam as variáveis de decisão do primeiro e segundo estágios, respectivamente. O custo do primeiro estágio é representado por c_1x_1 e as restrições do sistema são dadas pelo conjunto de restrições $A_1x_1 \geq b_1$. O que se procura no processo de otimização é minimizar o custo total $c_1x_1 + c_2x_2$. Esse problema pode ser resolvido como um processo de decisão em dois estágios.

1º estágio : encontra-se uma decisão factível x_1^* tal que $Ax_1^* \geq b_1$.

2º estágio : dada a decisão x_1^* do primeiro estágio, otimiza-se o problema do 2º estágio:

$$\min c_2x_2 \quad (4.2)$$

sujeito a:

$$A_2x_2 \geq b_2 - E_1x_1^* \quad (4.3)$$

onde x_1^* é um valor conhecido e passa a ser uma constante que vai para o lado direito do conjunto de restrições do problema. O valor da solução ótima do segundo estágio é uma função da decisão do primeiro estágio, ou seja,

$$\alpha_1(x_1) = \min c_2x_2 \quad (4.4)$$

sujeito a:

$$A_2x_2 \geq b_2 - E_1x_1 \quad (4.5)$$

Como $\alpha_1(x_1)$ é a solução ótima do problema (4.4)-(4.5), pode-se reescrever o problema original (4.1) como:

$$\min c_1x_1 + \alpha_1(x_1) \quad (4.6)$$

sujeito a:

$$A_1x_1 \geq b_1 \quad (4.7)$$

Pode-se dizer então que a função $\alpha_1(x_1)$ fornece informações sobre as consequências de adotar a decisão x_1 no segundo estágio.

Através do princípio de decomposição de Benders [19] é possível obter de forma iterativa uma aproximação cada vez melhor para a função custo futuro $\alpha_1(x_1)$, levando-se em conta a solução do segundo estágio (Apêndice A).

Para problemas convexos, pode-se caracterizar a função custo futuro $\alpha_1(x_1)$ através do dual do problema do segundo estágio. No caso do problema linear (4.4)-(4.5) se obtém:

$$\alpha_1(x_1) = \max \pi_2(b_2 - E_1x_1) \quad (4.8)$$

sujeito a:

$$\pi A_2 \leq c_2 \quad (4.9)$$

onde o vetor π representa as variáveis duais associadas as restrições (4.5).

O conjunto de restrições $\pi A_2 \leq c_2$ define uma região factível para o problema (4.8)-(4.9), que não depende da decisão do primeiro estágio x_1 . Dos conceitos de programação linear [20], sabe-se que essa região é um poliedro convexo, caracterizado pelo conjunto de seus pontos extremos ou vértices, $\Pi = \{\pi^1, \pi^2, \dots, \pi^p\}$. Como a solução ótima de um problema de programação linear sempre está associada a um dos vértices da região factível, pode-se resolver o problema (4.8)-(4.9) por enumeração:

$$\alpha_1(x_1) = \max \pi^i(b_2 - E_1x_1) \quad (4.10)$$

sujeito a:

$$\pi^i \in \Pi \quad (4.11)$$

Como o máximo da função é o menor limitante superior, pode-se reescrever o problema (4.10)-(4.11) da seguinte forma:

$$\min \alpha \quad (4.12)$$

sujeito a:

$$\alpha \geq \pi^1(b_2 - E_1x_1) \quad (4.13)$$

$$\alpha \geq \pi^2(b_2 - E_1x_1) \quad (4.14)$$

\vdots

$$\alpha \geq \pi^p(b_2 - E_1x_1) \quad (4.15)$$

onde α é uma variável escalar.

Pelo teorema fundamental da Dualidade, sabe-se que em um problema de programação linear os valores ótimos das funções objetivo dos problemas primal e dual se igualam [21]. Como o problema (4.12)-(4.15) é equivalente ao problema (4.4)-(4.5), pode-se concluir que as restrições $\alpha \geq \pi^i(b_2 - E_1x_1)$ do problema (4.12)-(4.15) definem a função $\alpha_1(x_1)$ do problema original(4.1). Dessa forma, é possível reescrever este problema como:

$$\min c_1x_1 + \alpha \quad (4.16)$$

sujeito a:

$$A_1x_1 \geq b_1 \quad (4.17)$$

$$\pi^1(b_2 - E_1x_1) - \alpha \leq 0 \quad (4.18)$$

$$\pi^2(b_2 - E_1x_1) - \alpha \leq 0 \quad (4.19)$$

⋮

$$\pi^p(b_2 - E_1x_1) - \alpha \leq 0 \quad (4.20)$$

O conjunto de restrições $\pi^i(b_2 - E_1x_1) - \alpha \leq 0$, $i = 1, 2, \dots, p$ pode ter grande dimensão mas somente algumas delas devem estar ativas na solução ótima do problema. Uma forma eficiente de resolver (4.16)-(4.20) é portanto adotar a técnica de relaxação para o problema, base do algoritmo de decomposição de Benders. A idéia dessa técnica é obter, de forma iterativa, uma aproximação da função de custo futuro representada por um subconjunto desses vértices e ir construindo com precisão cada vez melhor essa função.

A figura 4.2 ilustra os cortes de Benders gerados a cada iteração. O conjunto dessas restrições define uma função linear por partes $\alpha(x)$, que é a função custo futuro.

É importante ressaltar que na primeira iteração os cortes de Benders (4.18)-(4.20) não estão presentes, ou seja, resolve-se o subproblema do primeiro estágio totalmente relaxado. A partir das iterações seguintes são inseridos os cortes de Benders, que são expressos a partir das variáveis duais associadas à restrição do problema do segundo estágio. Esses cortes vão sendo acrescentados ao problema do primeiro estágio até que se atinja uma boa aproximação da função de custo futuro.

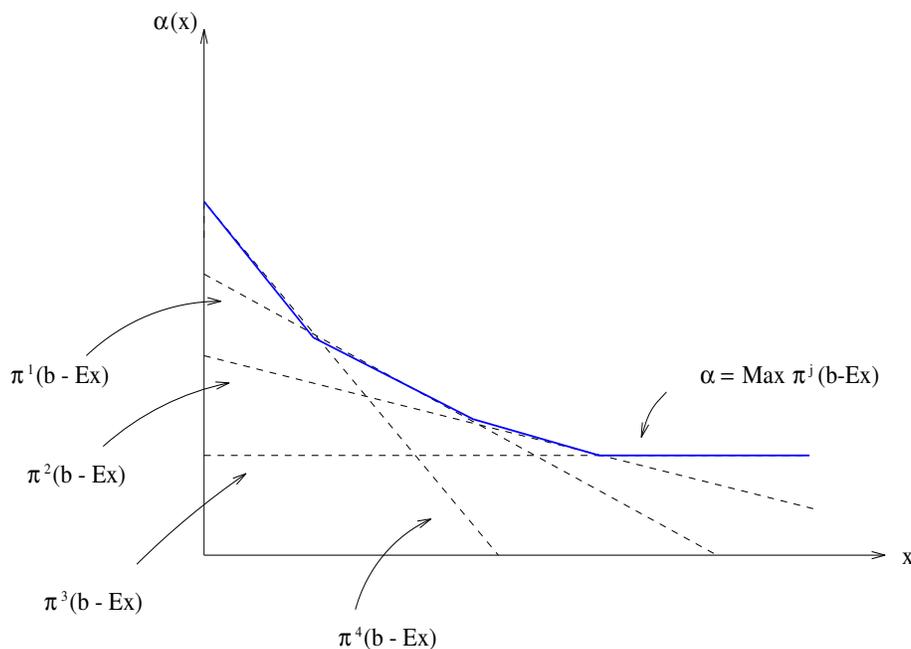


Figura 4.1: Esquema dos cortes de Benders.

4.3 Algoritmo da PDDD para dois estágios

O algoritmo da PDDD para dois estágios é descrito a seguir:

1. Inicialize $k = 0$ e $\pi^0 = 0$
2. Resolva o problema relaxado para o primeiro estágio, obtendo a solução x_1^k

$$w^k = \min c_1 x_1 + \alpha^k \quad (4.21)$$

sujeito a:

$$A_1 x_1 \geq b_1 \quad (4.22)$$

$$\alpha^k \geq \pi^j (b_2 - E_1 x_1) \quad j = 0, 1, \dots, k \quad (4.23)$$

3. Calcule o limite inferior a partir da solução ótima do primeiro estágio:

$$\underline{z}^k = c_1 x_1^k + \alpha^k \quad (4.24)$$

4. Resolva o problema do segundo estágio para a solução x_1^k do primeiro estágio:

$$\min c_2 x_2 \quad (4.25)$$

sujeito a:

$$A_2 x_2 \geq b_2 - E_1 x_1^k \quad (\pi^{k+1}) \quad (4.26)$$

obtendo a solução x_2^k e a variável dual π^{k+1} . Observe que a variável x_1^k foi para o lado direito da restrição pois já é um valor conhecido no segundo estágio e dessa forma passa a ser uma constante.

5. Calcule o limite superior:

$$\bar{z}^k = c_1 x_1^k + c_2 x_2^k \quad (4.27)$$

Observe que o par (x_1^k, x_2^k) é uma solução factível mas não necessariamente a solução ótima do problema original (4.1).

6. Se $\bar{z}^k - \underline{z}^k$ for menor que uma certa tolerância pré-estabelecida, considera-se que o problema já alcançou a solução ótima. Caso contrário, faça $k = k + 1$ e volte ao passo 2.

Note que a cada iteração um novo corte é introduzido nas restrições (4.23), melhorando a aproximação da função custo futuro $\alpha(x_1)$.

4.4 Resumo

Neste capítulo foi abordada a técnica da PDDD juntamente com a teoria da decomposição de Benders. Primeiro foi feita a introdução ao método considerando um problema linear determinístico com apenas dois estágios e em seguida foi descrito o algoritmo de resolução do problema.

Capítulo 5

Programação Dinâmica Estocástica Dual

5.1 Introdução

A Programação Dinâmica Estocástica Dual (PDED) é uma técnica alternativa à PDE que promete solucionar o problema da dimensionalidade pois não apresenta a necessidade da discretização do espaço de estados. Essa metodologia se baseia no princípio de decomposição de Benders, que é uma técnica de relaxação utilizada em problemas de grandes dimensões [22], [23].

Nesta seção será feita a extensão da Programação Dinâmica Dual para o caso estocástico em um problema de dois estágios, considerando uma distribuição de probabilidades associadas às variáveis estocásticas do problema.

5.2 Problema de dois estágios estocástico

Considere o problema linear de dois estágios da formulação (4.1). Assume-se agora o segundo estágio estocástico, ou seja, o parâmetro b_2 assume m possibilidades e associado aos valores estocásticos de $b_2 = (b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2m})$ existe uma distribuição de probabilidades p_1, p_2, \dots, p_m , com $(p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1)$. O problema consiste então em determinar a estratégia que minimiza o valor esperado do custo:

$$\min c_1 x_1 + p_1 c_2 x_{21} + \dots + p_m c_2 x_{2m} \quad (5.1)$$

sujeito a:

$$A_1 x_1 \geq b_1 \quad (5.2)$$

$$E_1 x_1 + A_2 x_{21} \geq b_{21} \quad (5.3)$$

$$E_1 x_1 + A_2 x_{22} \geq b_{22} \quad (5.4)$$

⋮

$$E_1 x_1 + A_m x_{2m} \geq b_{2m} \quad (5.5)$$

O problema (5.1)-(5.5) corresponde ao seguinte processo de decisão:

1º estágio : encontre uma decisão factível x_1^* tal que $Ax_1^* \geq b_1$.

2º estágio : dada a decisão x_1^* do primeiro estágio, encontre o vetor $(x_{21}^*, x_{22}^*, \dots, x_{2m}^*)$, que é a solução do seguinte problema:

$$\alpha(x_1^*) = \min p_1 c_2 x_{21} + p_2 c_2 x_{22} + \dots + p_m c_2 x_{2m} \quad (5.6)$$

sujeito a:

$$A_2 x_{21} \geq b_{21} - E_1 x_1^* \quad (5.7)$$

$$A_2 x_{22} \geq b_{22} - E_1 x_1^* \quad (5.8)$$

⋮

$$A_2 x_{2m} \geq b_{2m} - E_1 x_1^* \quad (5.9)$$

O problema (5.6)-(5.9) pode ser dividido em m subproblemas de otimização independentes ($j = 1, 2, \dots, m$):

$$\min c_2 x_{2j} \quad (5.10)$$

sujeito a:

$$A_2 x_{2j} \geq b_{2j} - E_1 x_1^* \quad (5.11)$$

cujas soluções ótimas x_{2j}^* estão associadas aos diferentes cenários b_{2j} com probabilidades p_j .

Semelhante ao caso determinístico, a solução de cada subproblema de 2^o estágio é uma função da decisão x_1 , do 1^o estágio. Dessa forma, o problema inicial pode ser reescrito como:

$$\min c_1 x_1 + \alpha(x_1) \quad (5.12)$$

sujeito a:

$$A_1 x_1 \geq b_1 \quad (5.13)$$

onde $c_1 x_1$ representa o custo imediato e $\alpha(x_1)$ representa o valor esperado do segundo estágio. A função $\alpha(x_1)$ é um poliedro convexo que pode ser construído a partir dos multiplicadores simplex associados a cada subproblema.

Sejam $\pi_1^*, \pi_2^*, \dots, \pi_m^*$ os multiplicadores simplex associados às restrições de cada subproblema (5.10) - (5.11) e $w_1^*, w_2^*, \dots, w_m^*$ os valores das soluções ótimas correspondentes. Pode-se expressar o corte de Benders associado ao valor esperado do problema de segundo estágio $\alpha(x_1)$ da seguinte forma (Apêndice A):

$$p_1 (w_1^* + \pi_1 E_1 (x_1^* - x_1)) + \dots + p_m (w_m^* + \pi_m E_1 (x_1^* - x_1)) \leq \alpha \quad (5.14)$$

Agrupando os termos em comum da equação (5.14) obtém-se a seguinte expressão para o corte médio de Benders:

$$\overline{w^*} + \overline{\pi} E_1 (x_1^* - x_1) \leq \alpha \quad (5.15)$$

onde

$$\overline{w^*} = p_1 w_1^* + p_2 w_2^* + \dots + p_m w_m^* \quad (5.16)$$

e

$$\overline{\pi} = p_1 \pi_1 + p_2 \pi_2 + \dots + p_m \pi_m \quad (5.17)$$

Observa-se que no caso de distribuições de probabilidades equiprováveis os valores esperados de w e π são obtidos simplesmente pelas médias aritméticas dos valores de w_j e π_j ($j = 1, 2, \dots, m$) respectivamente.

Vale notar que como a decisão ótima x_{2j}^* do segundo estágio é diferente para cada cenário b_{2j} , o processo é do tipo “acaso-decisão”.

5.3 Resumo

Foi apresentada neste capítulo a Programação Dinâmica Dual em sua versão estocástica para dois estágios. O processo de resolução é semelhante ao caso determinístico, só que desta vez o segundo estágio apresenta m possíveis valores. A cada iteração são gerados cortes médios, através dos valores esperados das variáveis duais através de uma distribuição de probabilidades, a fim de aproximar a função de custo esperado associada ao segundo estágio.

Capítulo 6

Programação Dinâmica Dual no Planejamento da Operação Energética

6.1 Introdução

Serão vistas neste capítulo as formulações da PDDD e da PDED no planejamento da operação energética. Para isso serão apresentadas e explicadas as variáveis consideradas e as restrições operativas do problema. Para finalizar, os algoritmos de resolução dos problemas são apresentados de forma detalhada.

6.2 Formulação da PDDD

Considere a modelagem geral do problema de planejamento da operação energética no caso de uma usina, dado pelo problema (2.1)-(2.10), apresentado no capítulo 2. Pelo princípio da otimalidade de Bellman [1], a solução para esse problema pode ser obtida através da resolução de sucessivos problemas de dois estágios, $t = T, T - 1, \dots, 1$, com a seguinte formulação:

$$\alpha_{t-1}(x_{t-1}) = \min \{ \psi_t(g_t) + \alpha_t(x_t) \} \quad (6.1)$$

sujeito a:

$$p_t + g_t = d_t \quad (6.2)$$

$$p_t = \rho [\phi(x_t) - \theta(u_t) - pc(q_t)] q_t \quad (6.3)$$

$$x_t = x_{t-1} + (y_t - q_t - v_t)\tau \quad (\pi_{t-1}) \quad (6.4)$$

$$u_t = q_t + v_t \quad (6.5)$$

$$\underline{x}_t \leq x_t \leq \overline{x}_t \quad (6.6)$$

$$\underline{u}_t \leq u_t \leq \overline{u}_t \quad (6.7)$$

$$\underline{q}_t \leq q_t \leq \overline{q}_t \quad (6.8)$$

$$\underline{v}_t \leq v_t \leq \overline{v}_t \quad (6.9)$$

$$x_{t-1} \text{ dado} \quad (6.10)$$

As variáveis x_{t-1} e y_t são conhecidas no início do estágio t e as variáveis de decisão do problema nesse estágio são dadas pelo conjunto $(g_t, x_t, u_t, q_t, v_t)$.

A função $\alpha_t(x_t)$ representa o custo futuro mínimo de operação do sistema do estágio t até o final do período de planejamento, supondo que o armazenamento da hidrelétrica seja x_t . Essa função resume toda a informação sobre a otimização futura do sistema. Sua otimização em conjunto com o custo presente de operação $\psi_t(g_t)$ assegura o equilíbrio ótimo entre o benefício presente do uso da água e os seus benefícios futuros, medidos em termos da redução do custo da complementação não hidráulica.

A equação (6.4) expressa o balanço de água do reservatório, onde o volume armazenado em um certo estágio t , x_t , tem que ser igual ao volume inicial do estágio anterior $t-1$, x_{t-1} , mais o volume afluente ao reservatório no mês t , $y_t \tau$ (y_t é conhecido em cada estágio), menos a vazão turbinada $q_t \tau$ e vertida $v_t \tau$. Vale lembrar que as variáveis x_t , u_t , q_t e v_t , apresentam limites mínimos e máximos.

Como já foi comentado, a cada restrição do problema de operação energética existe uma variável dual associada que, na solução ótima, mede a variação do valor ótimo do custo futuro

mínimo $\alpha_{t-1}(x_{t-1})$ em relação ao lado direito de cada restrição. No caso da equação de balanço (6.4), a variável dual da solução ótima π_{t-1}^* mede a alteração marginal do custo futuro mínimo de operação do estágio $t-1$ resultante da variação marginal a partir do seu valor inicial de armazenamento no estágio t , x_{t-1}^* . Esse multiplicador é então utilizado para adicionar um segmento linear para a aproximação da função de custo futuro mínimo do estágio $t-1$, $\alpha_{t-1}(x_{t-1})$. Esse segmento linear pode ser interpretado como uma linearização externa da função de custo futuro em torno do volume de armazenamento inicial x_{t-1}^* , o que assegura que:

$$\alpha_{t-1}(x_{t-1}) \geq \alpha_{t-1}(x_{t-1}^*) + \pi_{t-1}^*(x_{t-1} - x_{t-1}^*) \quad (6.11)$$

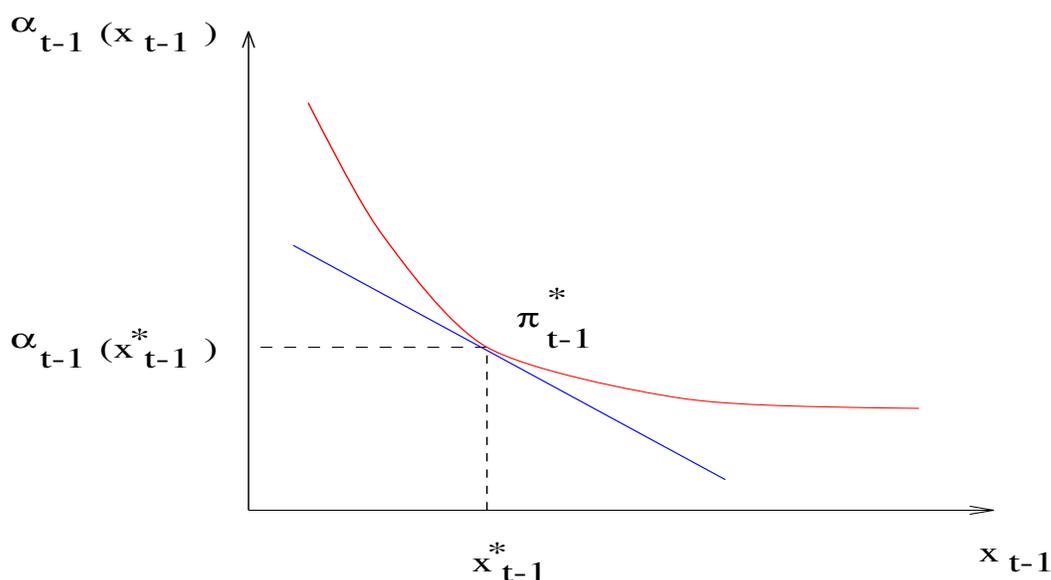


Figura 6.1: Esquema do corte de Benders gerado em um certo estágio.

A idéia central da PDDD é representar a função de custo futuro mínimo de operação por linearizações externas (cortes de Benders) que aproximem cada vez melhor o função na região da solução ótima. Os pontos onde se devem traçar as linearizações x_t^* são obtidos pela solução de (6.36)-(6.45) a partir de x_{t-1}^* dado, num procedimento iterativo iniciado com $x_0^* = x_0$, que constitui uma simulação progressiva (*forward*) do sistema. A trajetória do armazenamento x_t^* para $t = 0, 1, 2, \dots, T$ indica para onde a operação ótima está levando o reservatório, supondo a aproximação dos custos futuros mínimos corrente, sugerindo onde se deve melhorar a aproximação linear das funções $\alpha_t(x_t)$.

Uma interpretação para a função $\alpha_t(x_t)$ é exprimir as conseqüências futuras de se tomar certas decisões, fornecidas pela simulação *forward*, ao longo do período de planejamento. Por exemplo, considere que a decisão x_{t-1}^* em um certo estágio $t - 1$ e em uma iteração k seja turbinar uma grande quantidade de água de forma a esvaziar o armazenamento do reservatório, o que resultaria em um alto valor para a função de custo futuro $\alpha(x_{t-1}^*)$ ilustrada na figura 6.1. A inserção do corte de Benders no problema na iteração $k + 1$ irá incentivar o reservatório a guardar mais água, o que ocasionará uma diminuição no valor do custo futuro de operação.

A figura 6.1 ilustra o segmento linear, tangente à curva de custo futuro mínimo $\alpha_{t-1}(x_{t-1})$, para o volume ótimo armazenado x_{t-1}^* , com inclinação dada pela variável dual ótima π_{t-1}^* associada à equação de balanço de água do reservatório.

O processo de resolução do problema formulado anteriormente divide-se em duas etapas: simulação de ida, chamada *forward* e uma recursão inversa, denominada *backward*. Cada iteração é constituída por essas duas simulações. Na primeira iteração o problema é resolvido considerando as restrições referentes aos cortes de Benders relaxadas. A cada recursão inversa, o problema gera cortes de Benders para melhor aproximar as funções de custo futuro. O processo é repetido até que haja uma boa aproximação para a função de custo futuro mínimo.

A solução total, obtida ao final do processo de simulação *forward*, é um limitante superior do valor da solução ótima de (2.1)-(2.10), uma vez que as funções de custo futuro mínimo de operação utilizadas ainda não são as verdadeiras. Com as soluções obtidas em cada estágio desse problema g_t^k o limite superior é calculado pela soma dos custos de geração não hidráulica em todos os estágios.

Na simulação direta (*forward*) são calculados os volumes ao final de cada estágio ($x_t^*, t = 1, \dots, T$) em torno dos quais serão aproximadas as funções de custo futuro na recursão inversa.

Na recursão inversa (*backward*) são calculados os valores de custo futuro e custos marginais ($\alpha_{t-1}(x_{t-1})$ e π_{t-1} , $t = T, \dots, 1$), sendo esses a cada estágio calculados em torno dos valores de volumes x_{t-1}^* , definidos na simulação direta.

A variável dual π_{t-1}^k é calculada a cada estágio $T, T - 1, \dots, 1$ e utilizada na geração do corte de Benders que será acrescentado ao estágio anterior. Por exemplo, no último estágio T um corte de Benders é formulado através da expressão (6.11). Esse corte é acrescentado ao problema anterior $T - 1$ que será resolvido e uma nova variável dual será obtida, que gera um novo corte que é passado ao estágio anterior e assim sucessivamente. A idéia é que a cada iteração um novo corte de Benders seja gerado para o primeiro estágio, fornecendo uma melhor aproximação para a função de custo futuro. O valor da solução do problema do primeiro estágio, portanto, é um limitante inferior da solução ótima, uma vez que seus valores são sempre menores

que a função original de custo futuro. Esse limite é calculado através da solução $(g_1^k e \alpha_1^k)$ do primeiro estágio da volta.

É importante destacar que o valor da variável dual obtida em um certo estágio t da ida é diferente do valor fornecido na volta, onde os problemas para cada estágio são resolvidos agora com os cortes de Benders, gerados para cada estágio em cada iteração, durante o processo de otimização. Quando os valores dessas variáveis duais se igualarem é sinal que a solução já obteve a precisão desejada.

Os limites inferior e superior são utilizados no critério de parada, de acordo com uma precisão pré-estabelecida. Caso a diferença entre esses limites ultrapasse a tolerância estabelecida no início do processo de otimização, é necessário prosseguir com a recursão inversa, onde serão gerados os cortes de Benders na região da solução ótima obtida na simulação *forward*. Dessa forma, a tendência é que o gap entre os limites inferior e superior diminua a cada iteração e que após um certo número de iterações ele alcance a precisão pré-estabelecida.

6.3 Algoritmo da PDDD

A seguir serão mostrados os passos envolvidos na PDDD no planejamento da operação energética e no caso de uma única usina hidrelétrica.

1. Inicialização

- $k = 0$
- x_0 dado
- $\pi_t^0 = 0$ e $\alpha_t(x_t^0) = 0 \quad \forall t$
- $LI^k = -\infty, LS^k = +\infty$
- definir tolerância tol

2. Simulação direta (*forward*)

Para $x_0^k = x_0$ dado, resolva para $t = 1, \dots, T$ o seguinte problema:

$$\alpha_{t-1}(x_{t-1}^k) = \min \{ \psi_t(g_t) + \alpha_t \} \quad (6.12)$$

sujeito a:

$$p_t + g_t = d_t \quad (6.13)$$

$$p_t = \rho [\phi(x_t) - \theta(u_t) - pc(q_t)] q_t \quad (6.14)$$

$$x_t = x_{t-1}^k + (y_t - q_t - v_t)\tau \quad (6.15)$$

$$u_t = q_t + v_t \quad (6.16)$$

$$\underline{x}_t \leq x_t \leq \bar{x}_t \quad (6.17)$$

$$\underline{u}_t \leq u_t \leq \bar{u}_t \quad (6.18)$$

$$\underline{q}_t \leq q_t \leq \bar{q}_t \quad (6.19)$$

$$\underline{v}_t \leq v_t \leq \bar{v}_t \quad (6.20)$$

$$x_{t-1}^k \text{ dado} \quad (6.21)$$

$$\alpha_t \geq \alpha_t(x_t^i) + \pi_t^i(x_t - x_t^i), \quad i = 0, 1, \dots, k \quad (6.22)$$

Sejam x_t^k, g_t^k e α_t^k os valores das soluções ótimas de armazenamento, complementação não hidráulica e custo futuro, respectivamente.

3. Cálculo do limite superior

O limite superior é obtido pela soma dos custos de geração não hidráulica, obtidos na simulação *forward* para todos os estágios ($t = 1, \dots, T$):

$$LS^k = \sum_{t=1}^T \psi_t(g_t^k) + \alpha_T(x_T^k) \quad (6.23)$$

4. Recursão inversa (*backward*)

Para $t = T, T-1, \dots, 1$ resolver o problema:

$$\alpha_{t-1}(x_{t-1}^k) = \min \{ \psi_t(g_t) + \alpha_t \} \quad (6.24)$$

sujeito a:

$$p_t + g_t = d_t \quad (6.25)$$

$$p_t = \rho [\phi(x_t) - \theta(u_t) - pc(q_t)] q_t \quad (6.26)$$

$$x_t = x_{t-1}^k + (y_t - q_t - v_t)\tau \quad (\pi_{t-1}^{k+1}) \quad (6.27)$$

$$u_t = q_t + v_t \quad (6.28)$$

$$\underline{x}_t \leq x_t \leq \bar{x}_t \quad (6.29)$$

$$\underline{u}_t \leq u_t \leq \bar{u}_t \quad (6.30)$$

$$\underline{q}_t \leq q_t \leq \bar{q}_t \quad (6.31)$$

$$\underline{v}_t \leq v_t \leq \bar{v}_t \quad (6.32)$$

$$x_{t-1}^k \text{ dado} \quad (6.33)$$

$$\alpha_t \geq \alpha_t(x_t^i) + \pi_t^i(x_t - x_t^i), \quad i = 0, 1, \dots, k+1 \quad (6.34)$$

Sejam x_t^{k+1} , g_t^{k+1} e α_t^{k+1} , os valores ótimos de armazenamento, complementação não hidráulica e custo futuro do problema *backward*, respectivamente.

Observe que no estágio t o multiplicador ótimo da equação (6.27), π_{t-1}^{k+1} , será utilizado para gerar um corte adicional (6.34) no problema do estágio anterior $t-1$.

5. Cálculo do limite inferior

Com a solução do primeiro estágio, obtido na recursão *backward*, calcular o limite inferior:

$$LI^k = \psi_1(g_1^{k+1}) + \alpha_1^{k+1} \quad (6.35)$$

6. Verificar critério de parada

Se $(LS^k - LI^k) \leq tol$, o problema já está na solução ótima. Caso contrário, faça $k = k + 1$ e volte ao passo 2.

Na primeira iteração $k = 0$ significa que nenhum corte de Benders foi gerado inicialmente, ou seja, a partir do estado inicial do problema x_0 o problema (6.12)-(6.22) é resolvido, para todos os estágios $t = 1, \dots, T$ totalmente relaxado através da simulação *forward*. Ao final da simulação *forward* o limite superior da solução é calculado. Prossegue-se então com a recursão *backward*, onde os cortes de Benders são gerados em torno da solução obtida no procedimento *forward* e a partir da variável dual associada à equação de balanço de água no reservatório e do custo de geração. Após o término da recursão *backward* é possível calcular o limite inferior da solução. Finalmente, ao final da iteração, o teste de convergência é realizado a cada iteração da seguinte forma: caso a diferença entre os limites superior e inferior não respeitem a precisão adotada inicialmente, a solução ótima do problema (6.12)-(6.22) ainda não foi encontrada. Nesse caso, os cortes gerados na recursão *backward* são acrescentados ao problema (6.12)-(6.22) e o processo continuará até que a solução ótima seja obtida, ou seja, quando o conjunto de cortes de Benders representar uma boa aproximação para a função custo futuro do problema (6.12)-(6.22).

6.4 Formulação da PDED

A PDED é uma formulação do tipo “acaso-decisão” [12], ilustrada na figura 6.2. Nessa formulação a vazão afluyente no início do estágio t , y_t , é considerada. A distribuição log-normal das afluições é representada por um conjunto de afluições com probabilidades equiprováveis (Apêndice B). O problema é resolvido para cada afluição separadamente, resultando em diferentes decisões ótimas individuais. Com isso, para o mesmo estado, existem diferentes custos de operação. O custo total atribuído ao estado é obtido através do valor esperado, ou esperança matemática, dos custos relacionados a cada uma das afluições equiprováveis.

O processo de resolução da PDED é análogo ao caso determinístico. Na etapa direta, em vez de uma única sequência de pontos $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_T^*)$, são calculadas diversas sequências, de

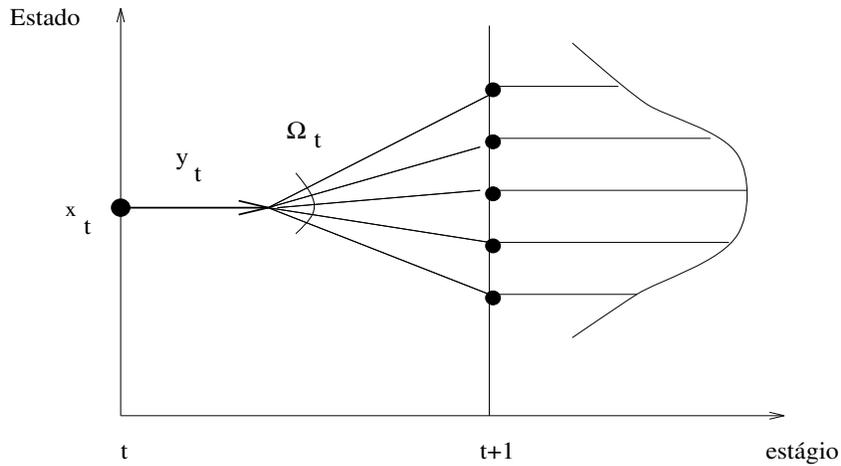


Figura 6.2: Esquema da formulação acaso-decisão da PDED.

acordo com a árvore de cenários hidrológicos (Apêndice B). São calculados também nessa etapa os limites inferior e superior para testar o critério de parada de acordo com o grau de precisão pré-estabelecido. Na recursão inversa são calculados os valores esperados dos custos futuros e dos custos marginais ponderados de acordo com a distribuição de probabilidades considerada na resolução do problema de planejamento da operação.

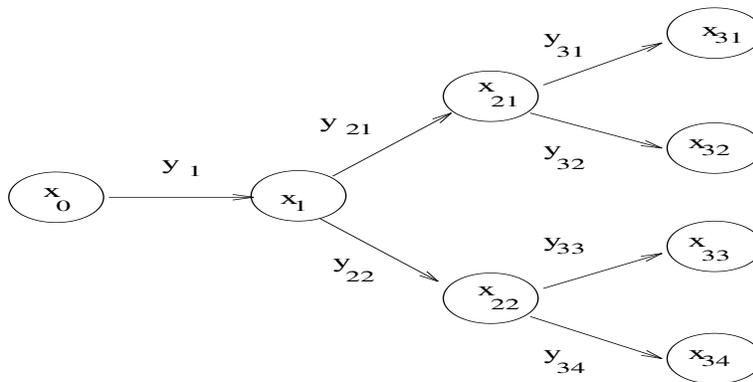


Figura 6.3: Esquema de árvore de cenários para 4 estágios e 2 cenários.

A figura 6.3 mostra o esquema de árvore de cenários gerada de acordo com o número de estágios e a quantidade de cenários estabelecida.

Seja y_{tj} a vazão afluente no estágio t ($t=1, \dots, T$) e a alternativa de cenário j ($j = 1, \dots, J$). A formulação para um certo estágio t e cenário j é dada por:

$$\alpha_{t-1}(x_{t-1,j}) = \min \{ \psi_t(g_{tj}) + \alpha_t(x_{tj}) \} \quad (6.36)$$

sujeito a:

$$p_{tj} + g_{tj} = d_t \quad (6.37)$$

$$p_{tj} = \rho [\phi(x_{tj}) - \theta(u_{tj}) - pc(q_{tj})] q_{tj} \quad (6.38)$$

$$x_{tj} = x_{t-1,j} + (y_{tj} - q_{tj} - v_{tj})\tau \quad (\pi_{t-1,j}) \quad (6.39)$$

$$u_{tj} = q_{tj} + v_{tj} \quad (6.40)$$

$$\underline{x}_{tj} \leq x_{tj} \leq \overline{x}_{tj} \quad (6.41)$$

$$\underline{u}_{tj} \leq u_{tj} \leq \overline{u}_{tj} \quad (6.42)$$

$$\underline{q}_{tj} \leq q_{tj} \leq \overline{q}_{tj} \quad (6.43)$$

$$\underline{v}_{tj} \leq v_{tj} \leq \overline{v}_{tj} \quad (6.44)$$

$$x_{t-1,j} \text{ dado} \quad (6.45)$$

No caso estocástico a solução de cada estágio t ($t = 2, \dots, T$) varia de acordo com alternativa j ($j = 1, \dots, J$). Sendo assim, em um estágio t , considerando a possibilidade de afluência j , as soluções x_{tj} , g_{tj} , q_{tj} e v_{tj} representam o armazenamento, a complementação não hidráulica e as vazões turbinada e vertida, respectivamente.

Note que no primeiro estágio o problema é determinístico, razão pela qual as variáveis ótimas g_1 e x_1 não são indexadas em j .

O limite inferior, obtido após a resolução do problema do primeiro estágio da recursão *backward*, é calculado da mesma maneira que na PDDD:

$$LI^k = \psi_1(g_1^k) + \alpha_1(x_1^k) \quad (6.46)$$

É importante observar que o método de Benders garante um limitante inferior monotonicamente crescente para o problema de minimização, ou seja, a cada iteração existe a garantia de uma melhor solução.

No caso estocástico o limite superior é calculado como o custo esperado (média aritmética) a partir das soluções obtidas para cada estágio e para cada alternativa de afluência associado ao estágio:

$$LS^k = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T \psi_t(g_{tj}^k) + \alpha_T(x_T^k) \quad (6.47)$$

onde $\psi_t(g_{tj}^k)$ representa o custo de complementação não hidráulica no estágio t para a alternativa de afluência j , $j = 1, \dots, J$ e $\alpha_T(x_T^k)$ representa o custo terminal do último estágio T .

6.5 Resumo

Neste capítulo o problema de planejamento da operação energética foi formulado dentro do contexto da PDD. Inicialmente foi considerado o caso determinístico, onde a vazão afluenta é conhecida no início de cada estágio. Foram explicadas as variáveis consideradas na resolução do problema e as restrições incluídas no mesmo. Para finalizar, o algoritmo de resolução da PDDD foi descrito detalhadamente. Nesse algoritmo foi mostrado o cálculo dos limites inferior e superior através da solução do problema. Mostrou-se também a geração dos cortes de Benders na recursão *backward*, através da variável dual associada à equação de balanço de água do reservatório.

Foram também comentados os procedimentos adotados para a resolução da PDED no POE, onde a estocasticidade das vazões afluentes é considerada através de árvore de cenários hidrológicos. O limite inferior é calculado de forma análoga à PDDD, já o limite superior leva em consideração a distribuição de probabilidades associadas às variáveis estocásticas do problema.

Capítulo 7

Resultados

7.1 Introdução

A seguir serão mostrados e discutidos os resultados decorrentes das aplicações feitas para as usinas hidrelétricas de Barra Bonita, Promissão e Caconde, pertencentes à bacia dos rios Tietê e Pardo, e a usina de Furnas. Primeiro será aplicada a PDDD linear (custo de complementação não hidráulica linear), em seguida será estudado o caso não linear (custo de complementação não hidráulica quadrático).

Para analisar os resultados da PDED serão comparadas as aproximações das funções de custo esperado futuro da usina hidrelétrica de Furnas determinadas por esse método com as obtidas pela PDE. Os testes serão feitos para os seis primeiros meses do período de planejamento.

A função geral de custo de complementação não hidráulica $\psi_t(g_t)$, utilizada em todas as aplicações, é representada pelo seguinte polinômio de segundo grau:

$$\psi_t(g_t) = a + b g_t + c g_t^2 \quad (7.1)$$

onde a , b e c são constantes não negativas ajustadas de acordo com o estudo.

Em todos os estudos foi considerada, por simplificação, a função de produção linear (produtibilidade constante) de acordo com as aplicações feitas em [9], [10], [11]. A expressão para essa função é dada por:

$$p_t = \rho_0 q_t \quad (7.2)$$

Os valores da produtividade ρ_0 em $(MW/(m^3/s))$ para as usinas de Barra Bonita, Promissão, Caconde e Furnas foram, respectivamente, 0,2, 0,2, 0,8 e 0,8.

O consumo dos mercados a serem atendidos para cada sistema foram iguais à capacidade instalada da usina hidrelétrica considerada (tabela 7.1) e adotados constantes para todos os meses do período de planejamento. Os valores de mercado (d_t) em \overline{MW} para os sistemas constituídos pelas usinas de Barra Bonita, Promissão, Caconde e Furnas foram, respectivamente, 140, 264, 80 e 1320.

Foi adotado para cada uma das usinas e em cada estudo um armazenamento inicial no reservatório igual a 100 % do volume útil. Os volumes mínimos e máximos para cada usina são visualizados na tabela 7.2.

Em todas as aplicações foram assumidas as vazões afluentes mensais obtidas a partir da vazão média dos dados históricos mensais de vazões naturais, denominada Média de Longo Termo (MLT) de cada usina hidrelétrica, que são apresentadas na tabela 7.3.

A tolerância adotada para convergência do método em todas as aplicações foi de 1%.

Tabela 7.1: Capacidade instalada e produtividade específica.

Usina	Capacidade Instalada (MW)	Produtibilidade Específica ($MW/m^3/s/m$)
Barra Bonita	140	0,008633
Promissão	264	0,008829
Caconde	80	0,08437
Furnas	1320	0,008633

Tabela 7.2: Volumes dos reservatórios.

Usinas	Volume máximo operativo (hm^3)	Volume mínimo operativo (hm^3)
Barra Bonita	3135	569
Promissão	7408	5280
Caconde	555	555
Furnas	22950	5733

Tabela 7.3: Vazões afluentes médias mensais.

Mês/Usinas	Afluências Médias Mensais (m^3/s)			
	Barra Bonita	Promissão	Caconde	Furnas
Janeiro	572	922	103	743
Fevereiro	616	1000	108	623
Março	549	937	95	516
Abril	344	617	61	431
Mai	277	488	44	447
Junho	281	477	36	532
Julho	207	370	30	748
Agosto	172	307	25	1268
Setembro	183	327	26	1719
Outubro	227	396	32	1669
Novembro	256	437	41	1518
Dezembro	417	676	75	1020

Tabela 7.4: Características do conjunto turbina e gerador.

Usinas	Nº de	Potência	Engolimento
	unidades	Efetiva	Máximo
	geradoras	(MW)	(m^3/s)
Barra Bonita	04	35	195
Promissão	03	88	374
Caconde	02	41	59,5

7.2 Caso Determinístico

Serão apresentados a seguir os estudos feitos para a PDDD considerando as vazões afluentes às usinas de Barra Bonita, Promissão, Caconde e Furnas iguais à MLT. No estudo 1 foi considerada a função custo de complementação não hidráulica linear e no estudo 2 foi utilizada a função de complementação quadrática. Os resultados das aplicações são ilustrados e comentados.

O período de planejamento considerado em todos os estudos foi de $T = 12$ meses, sendo o processo de otimização iniciado no mês de maio e finalizado no mês de abril seguinte.

A função de custo terminal, supondo que o último estágio ($t = T$) represente o próximo mês de abril, caracterizado como o início de período seco, utilizada no planejamento energético da operação, é dada por:

$$\alpha_T(x_T) = M(\bar{x} - x_T) \quad (7.3)$$

onde M é um valor positivo suficientemente grande para garantir que a função de custo terminal prevaleça sobre o restante da função objetivo. Essa função tem como objetivo incentivar o reservatório a manter elevados armazenamentos ao final do período de planejamento (mês de abril), uma vez que no caso de $\alpha_T(x_T) = 0$ a solução ao final do período de planejamento seria trivial, ou seja, o sistema incentivaria a turbinagem máxima da usina, o que resultaria em baixos armazenamentos no reservatório ao final do período de planejamento.

7.2.1 Estudo 1: Caso Linear

Primeiramente foi resolvido o problema determinístico (vazões afluentes conhecidas), considerando a função custo de complementação não hidráulica não linear. Os resultados das aplicações nas usinas de Barra Bonita, Promissão, Caconde e Furnas, serão mostrados e discutidos a seguir.

Nesta aplicação os coeficientes da função de custo de complementação não hidráulica assumem os seguintes valores: $a = 0$, $b = 0,5$, $c = 0$, o que resulta na seguinte expressão para a função custo de geração:

$$\psi_t(g_t) = 0,5 g_t \quad (7.4)$$

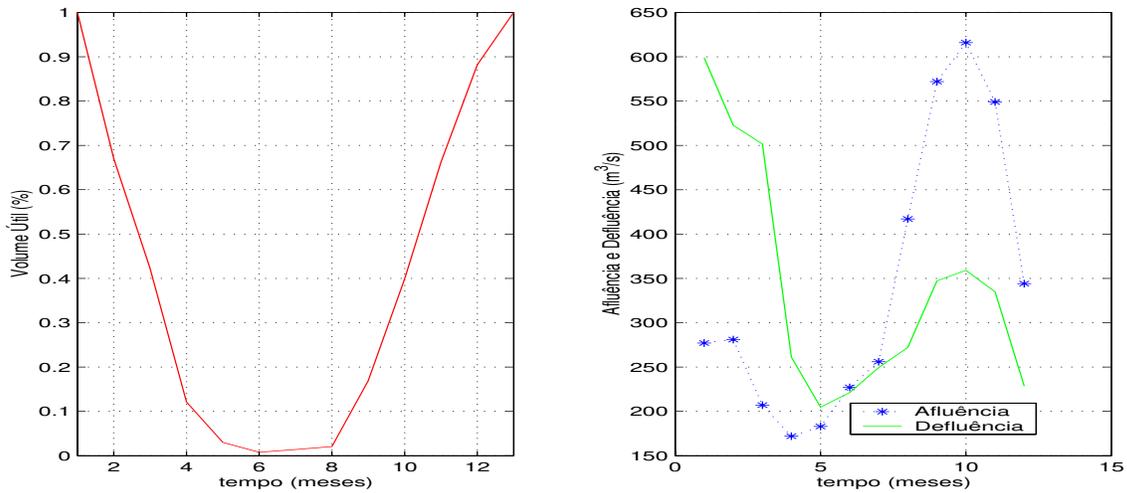


Figura 7.1: Caso linear: volume, vazões afluente e defluente da usina de Barra Bonita x estágios em meses.

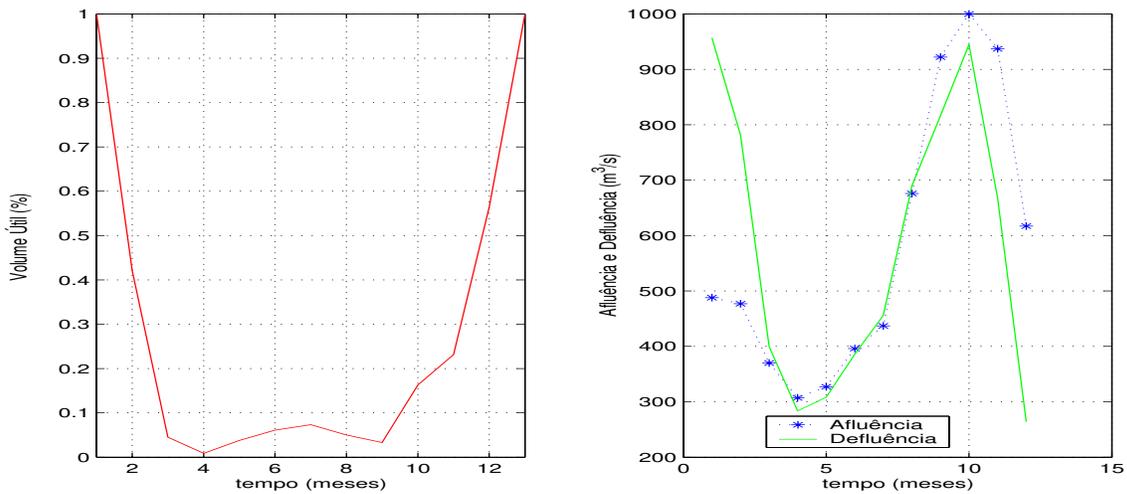


Figura 7.2: Caso linear: volume, vazões afluente e defluente da usina de Promissão x estágios em meses.

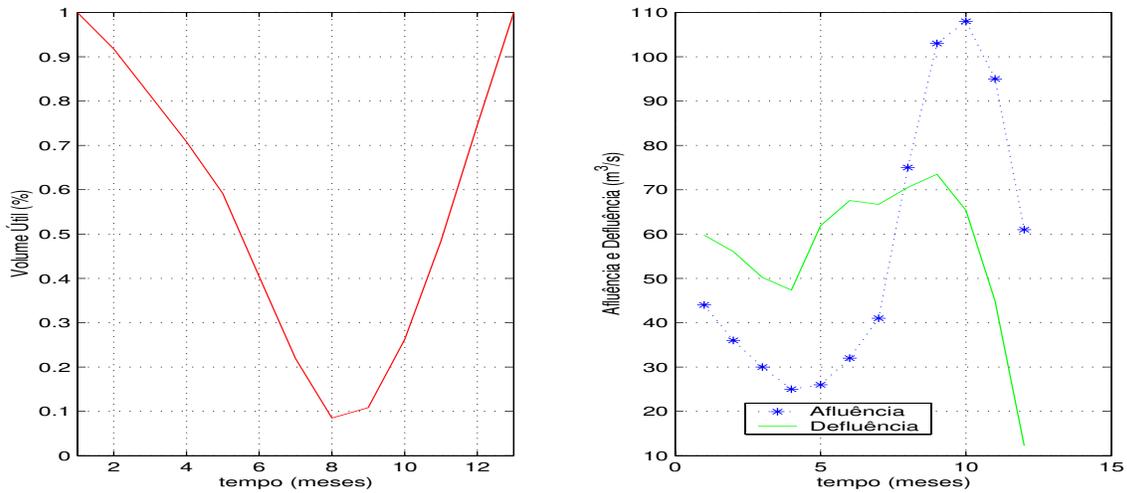


Figura 7.3: Caso linear: volume, vazões afluente e defluente da usina de Caconde x estágios em meses.

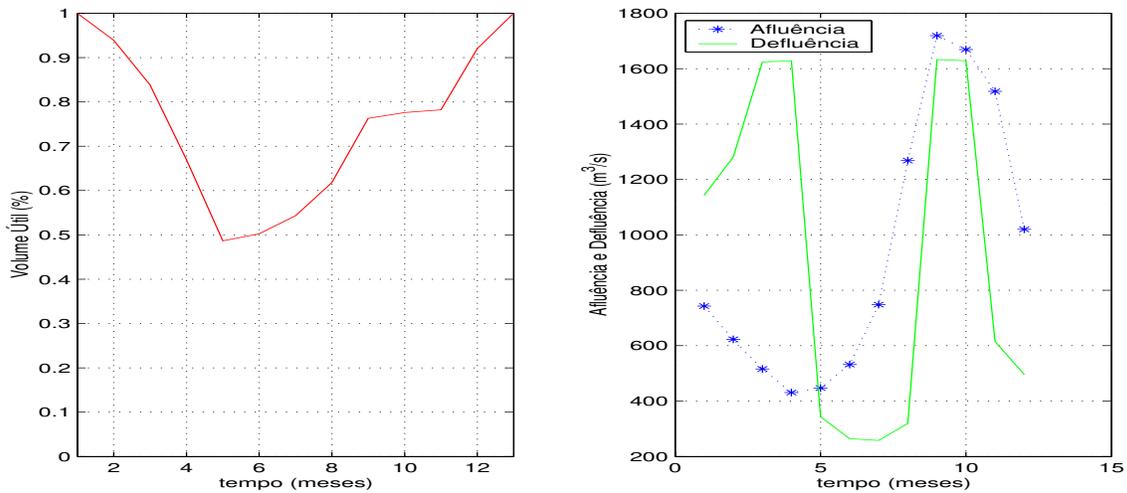


Figura 7.4: Caso linear: volume, vazões afluente e defluente da usina de Furnas x estágios em meses.

As figuras 7.1, 7.2, 7.3 e 7.4 mostram o armazenamento do reservatório (em volume útil), a vazão defluente, que nas quatro aplicações foi igual à vazão turbinada, uma vez que o sistema não apresentou vertimento, e a vazão afluente aos reservatórios das usinas hidrelétricas de Barra

Bonita, Promissão, Caconde e Furnas, ao longo do horizonte de estudo para o caso da função custo linear. É possível notar nas quatro aplicações, que o reservatório parte de um estado inicial cheio (100 % *v.u.*) e ao final do processo de otimização retorna ao patamar inicial. Isso se deve ao uso da função de custo terminal, descrita anteriormente, que estimula o reservatório a armazenar água para o futuro.

No caso particular da solução da usina de Barra Bonita, apresentada na figura 7.1, pode-se notar que a vazão turbinada até o quinto mês foi superior à vazão afluyente ao reservatório da usina, o que levou ao deplecionamento do armazenamento do reservatório até esse mês. A partir do sexto mês o sistema começou a defluir menos que a vazão afluyente ao reservatório devido à existência da função de custo futuro terminal que apresentou uma penalização associada ao volume armazenado no último mês do período de planejamento, tornando mais viável o armazenamento da água para o futuro, utilizando mais complementação não hidráulica para atender o mercado a cada estágio.

Para a verificação da solução ótima do problema de planejamento da operação, no caso particular de Barra Bonita, o mesmo problema foi resolvido com o pacote computacional de programação linear LINDO [24] e obteve-se o mesmo valor ótimo da função objetivo. Porém as trajetórias de volume e defluência foram distintas devido à existência de múltiplas soluções para esse problema, uma vez que qualquer solução que evite vertimento, atenda a demanda e assegure o enchimento do reservatório ao final do período de planejamento é considerada uma solução ótima do problema.

Através da comparação dos resultados das mesmas aplicações feitas utilizando o pacote LINDO foi possível comprovar a eficácia da metodologia PDDD aplicada a problemas com funções objetivo linear.

Para todas as aplicações realizadas nos estudos 1 foi possível observar o comportamento do limite inferior como o previsto, ou seja, o limite inferior se comportou como uma função monotonicamente não decrescente, aumentando seu valor a cada iteração até que a solução atingisse o seu valor ótimo (custo futuro de operação mínimo).

7.2.2 Estudo 2: Caso Quadrático

Em seguida realizou-se o estudo da PDDD considerando o custo da complementação não hidráulica sendo uma função quadrática. Para esse caso particular a função do custo de complementação assume os seguintes coeficientes $a = 0$, $b = 0$ e $c = 0,5$, resultando na expressão a seguir:

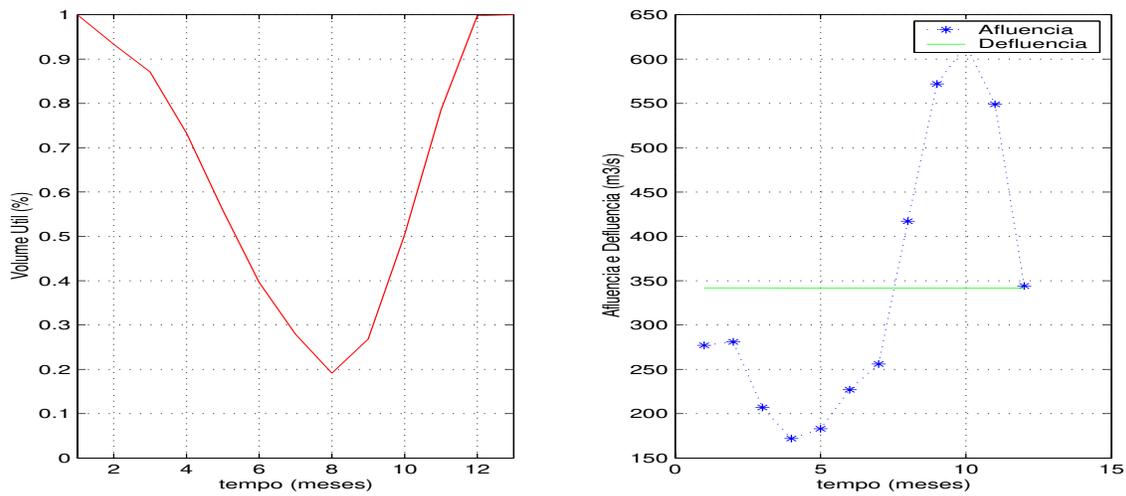


Figura 7.5: Caso quadrático: volume, vazões afluente e defluente da usina de Barra Bonita x estágios em meses.

$$\psi_t(g_t) = 0,5 g_t^2 \quad (7.5)$$

As figuras 7.5, 7.6, 7.7 e 7.8, mostram os comportamentos dos volumes e das defluências das usinas de Barra Bonita, Promissão, Caconde e Furnas, para o caso da função custo de complementação quadrática. Da mesma forma que no caso linear, nos últimos meses houve um estímulo através da função de custo terminal para que o reservatório chegasse cheio ao final da otimização. Entretanto, ao contrário do caso linear, as usinas de Barra Bonita, Caconde e Furnas apresentaram vazões turbinadas constantes ao longo do período de estudo. Isso se deve à função custo de geração, que dessa vez é quadrática. Nesse caso, por ser constante a demanda, é mais interessante para cada usina operar com geração hidráulica constante ao longo do período de planejamento, uma vez que qualquer incremento realizado na geração não hidráulica refletirá em um custo mais elevado na função de complementação não hidráulica. A usina de Promissão apresentou um comportamento distinto, com um salto entre os meses 7 e 8 na vazão turbinada e portanto não apresentou geração hidráulica constante. Isso ocorreu porque o nível de armazenamento do reservatório relativo a esse intervalo chegou a 0 % *v.u.* (reservatório vazio).

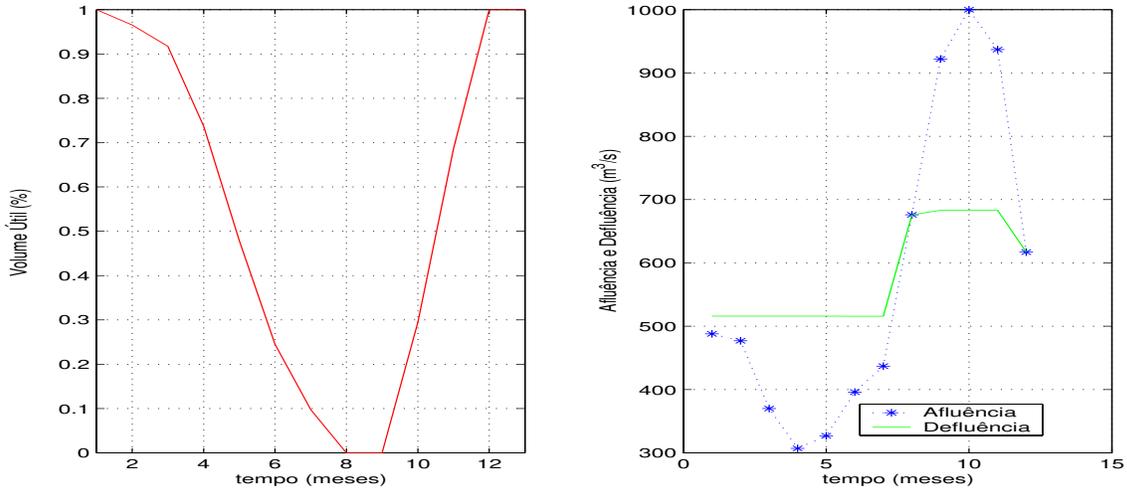


Figura 7.6: Caso quadrático: volume, vazões afluente e defluente da usina de Promissão x estágios em meses.

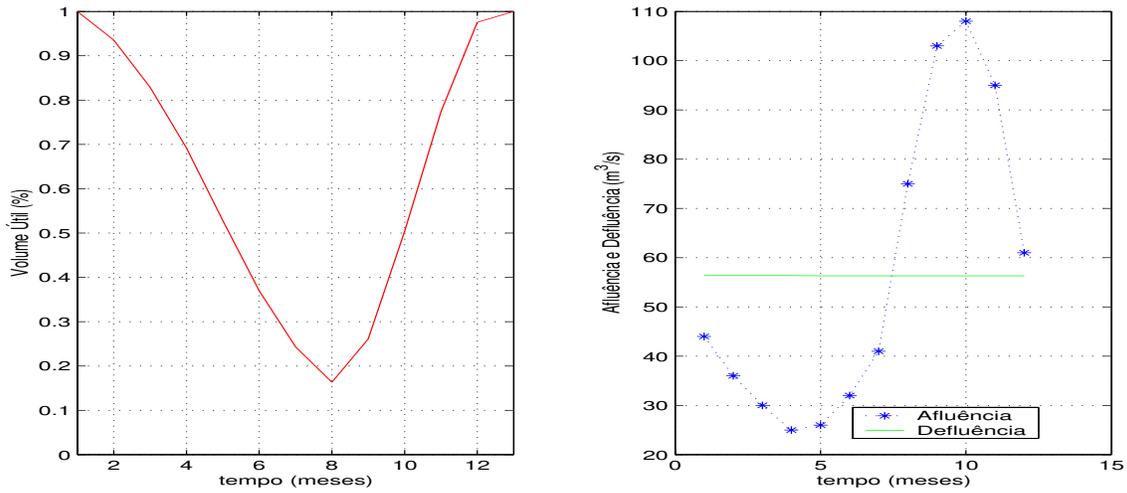


Figura 7.7: Caso quadrático: volume, vazões afluente e defluente da usina de Caconde x estágios em meses.

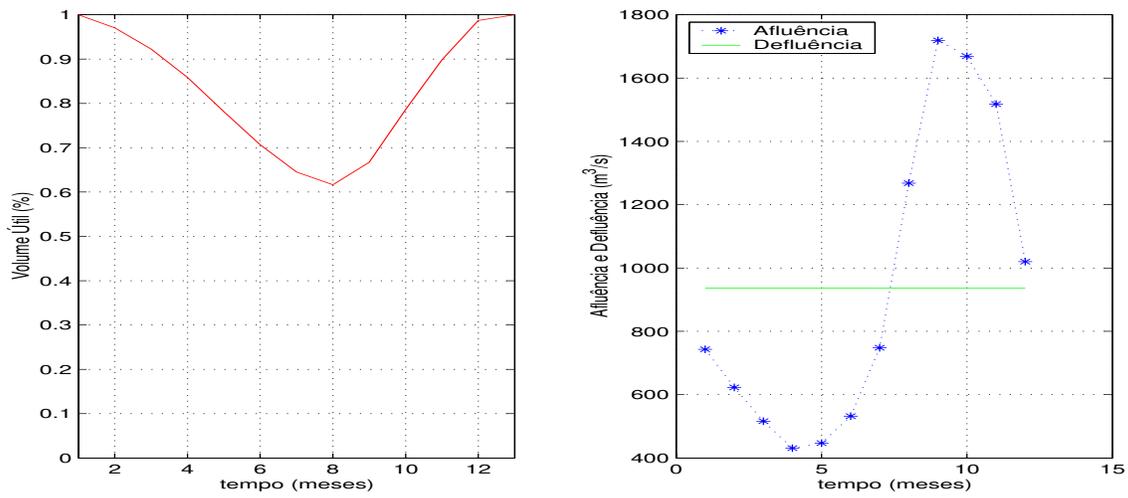


Figura 7.8: Caso quadrático: volume, vazões afluente e defluente da usina de Furnas x estágios em meses.

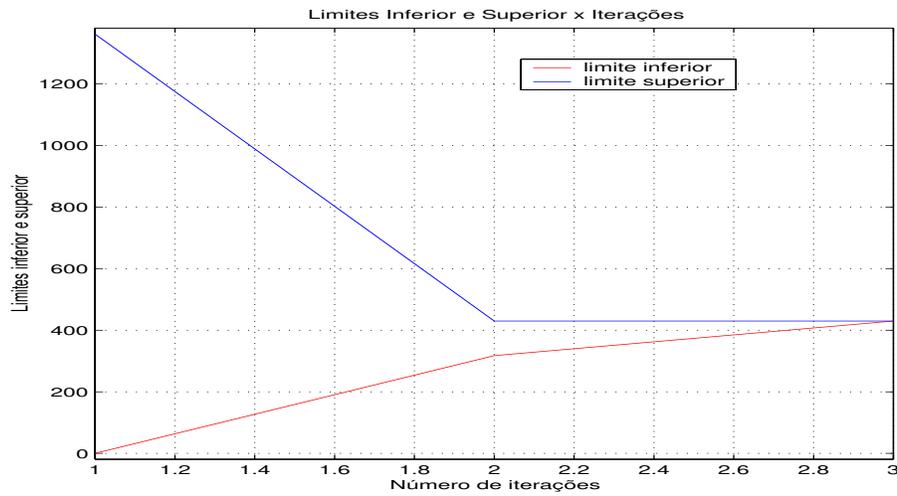


Figura 7.9: Caso linear: limites inferior e superior da usina de Barra Bonita x iterações.

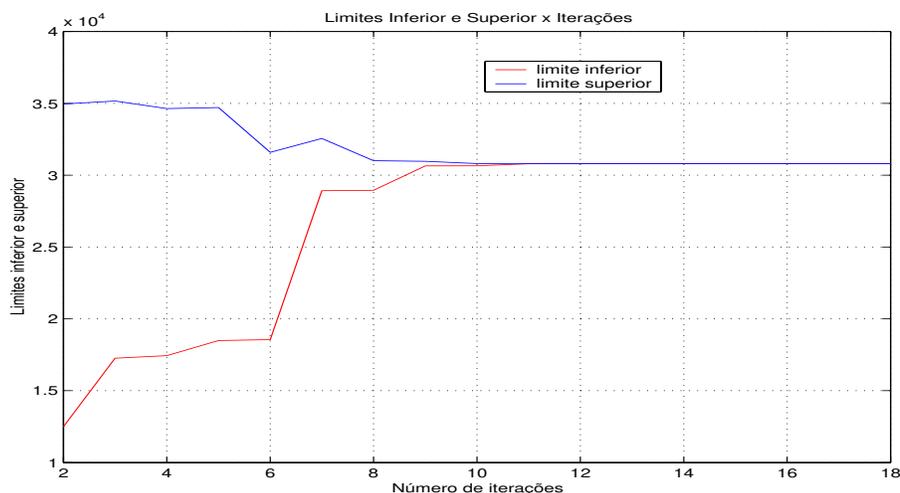


Figura 7.10: Caso quadrático: limites inferior e superior da usina de Barra Bonita x iterações.

As figuras 7.9 e 7.10 mostram o comportamento dos limites inferior e superior da solução para o caso linear e quadrático para a usina de Barra Bonita. O caso linear convergiu em 3 iterações. Já no caso quadrático a convergência foi obtida em 18 iterações.

Para verificar o desempenho do método PDDD com função custo quadrático, no caso particular da usina de Barra Bonita, foram comparados os valores das soluções ótimas utilizando a Programação Dinâmica Determinística e a metodologia PDDD. Foi constatado que ambos os métodos chegam à mesma solução ótima, o que comprova que o método da PDDD é eficiente considerando uma função de complementação não hidráulica do tipo quadrático.

7.3 Comparação entre PDE e PDED

A comparação entre as metodologias PDE e PDED foi realizada para períodos de planejamento de 2, 4 e 6 meses, considerando apenas duas possíveis alternativas de vazões afluentes (número de ramificações da árvore de cenários). Os testes foram feitos para o período de planejamento se iniciando em maio (mês seco). Isso foi feito através da comparação entre as funções de custo futuro esperado obtidas por esses dois métodos ao final de cada mês para cada período considerado. A idéia é tentar aproximar a função de custo esperado para o primeiro mês do período de planejamento, através da PDED, utilizando a função custo terminal da PDE, e compará-la com a função de custo futuro da PDE desse mês. O que se espera é que o conjunto

de cortes gerados pela PDED reproduza de forma aproximada a função de custo esperado da PDE, uma vez que foi utilizada a função de custo terminal da PDE ao final de cada período de planejamento.

A aplicação foi feita considerando os dados operativos da usina hidrelétrica de Furnas, localizada na bacia do Rio Grande. A demanda considerada foi igual à potência instalada de Furnas que é de 1312 MW e a produtividade utilizada foi de $0,8 \text{ MW}/(m^3/s)$. Os valores de volumes e vazões turbinadas mínimos e máximos aparecem na tabela 7.5.

Os estados iniciais de armazenamento dos meses de maio e novembro considerados na resolução da PDE e PDED foram iguais a 100% e 70% do volume útil, respectivamente.

Tabela 7.5: Dados operativos de Furnas.

Dados de Furnas	Valor Mínimo	Valor Máximo
Volume (hm^3)	5733	22950
Vazão Turbinada (m^3/s)	196	1692

A abordagem PDE fornece, como resultado da otimização, tabelas mensais de decisões de geração e custo futuro de operação associado a cada decisão, em função de possíveis estados correntes de volume armazenado.

Neste trabalho o ajuste da função de custo esperado futuro considera tabelas mensais de decisões fornecidas pela PDE para um período de 10 anos, a partir de 10 estados possíveis de vazão afluente e 100 estados possíveis de volume armazenado. A função ajustada aos valores de custo futuro médios é uma função quadrático, obtida através do método dos mínimos quadrados [17].

A função de custo esperado futuro da PDE será utilizada como função de custo terminal na resolução da PDED e é expressa pela seguinte função quadrática:

$$\alpha_T(x_T) = a x_T^2 + b x_T + c \quad (7.6)$$

onde x_T é o armazenamento no final do período de planejamento T e os coeficientes a , b e c variam de acordo com o mês do período de planejamento.

A figura 7.11 mostra as curvas de custo esperado futuro x volume útil para a usina de Furnas para os 6 primeiros meses do período de planejamento (maio a outubro).

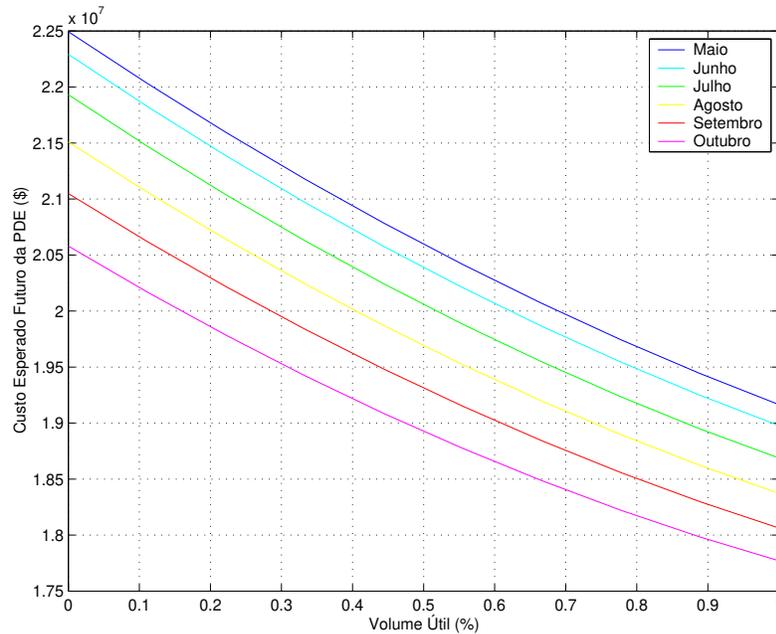


Figura 7.11: Custo futuro esperado da PDE.

No caso da PDE, as afluências foram representadas por árvore de cenários hidrológicos (Apêndice B), com duas ramificações, considerando probabilidades equiprováveis e assumindo que as vazões afluentes são variáveis aleatórias independentes.

A matriz abaixo mostra os valores possíveis de vazões afluentes para o período de 4 meses da usina de Furnas, obtidos pela geração de árvore de cenários com probabilidades equiprováveis (Apêndice B). No caso de 2 ramificações, para cada mês (coluna da matriz) tem-se $2^{(mês-1)}$ alternativas de afluências. A primeira coluna é o valor da vazão afluente do mês de maio, que é suposta conhecida (determinística).

$$\begin{pmatrix} 743,0000 & 471,6631 & 410,0633 & 340,7325 \\ 0 & 730,3832 & 597,6880 & 502,1884 \\ 0 & 0 & 410,0633 & 340,7325 \\ 0 & 0 & 597,6880 & 502,1884 \\ 0 & 0 & 0 & 340,7325 \\ 0 & 0 & 0 & 502,1884 \\ 0 & 0 & 0 & 340,7325 \\ 0 & 0 & 0 & 502,1884 \end{pmatrix}$$

O número total de cortes por iteração considerando 2 possibilidades de afluências pode ser expresso por:

$$\sum_{t=1}^T 2^t - 1 \quad (7.7)$$

Inicialmente foi feita uma aplicação considerando um período de 4 meses, o que leva à resolução de 15 subproblemas em cada uma das etapas *forward* e *backward*, totalizando, nesse caso, a resolução de 30 subproblemas por iteração. Esse problema convergiu em 5 iterações, ou seja, foi necessário o acréscimo de 15 cortes de Benders para que o problema gerasse uma aproximação para a função de custo esperado de operação.

Como já foi comentado anteriormente, na PDED o limite inferior da solução ótima é calculado de forma determinística através da solução do primeiro estágio do problema de otimização, enquanto o limite superior do problema (solução factível) é calculado de forma estocástica de acordo com a equação (6.47).

No caso particular de 4 meses o limite superior foi calculado da seguinte forma:

$$LS = \psi_1(g_{11}) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \psi_2(g_{2j}) + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 \psi_3(g_{3j}) + \frac{1}{8} \sum_{j=1}^8 \psi_4(g_{4j}) + \alpha_4(x_4) \quad (7.8)$$

onde $\psi_t(g_{tj})$ representa o custo de complementação não hidráulica no estágio t e alternativa de afluência j e $\alpha_4(x_4)$ representa o custo terminal da PDE.

A figura 7.14 apresenta a função de custo futuro esperado da PDE (curva em vermelho) e os cortes de Benders (curvas em azul) gerados em torno do armazenamento (asterisco em vermelho) obtido na simulação *forward* para cada iteração.

As aproximações das funções de custo futuro esperado, utilizando a técnica da PDED, foram obtidas, para os períodos de 2, 4 e 6 meses, em 4, 5 e 6 iterações, respectivamente.

Para o cálculo da política ótima foram consideradas, a princípio, apenas duas ramificações para a geração de árvore de cenários, o que já leva, no caso de 12 meses, à resolução de 4096 subproblemas somente no último estágio (mês 12) do período de planejamento, totalizando 8190 subproblemas de otimização resolvidos em cada etapa do processo de resolução (*forward* e *backward*). Pode-se notar que quanto maior o período de planejamento considerado, maior o número de subproblemas a serem resolvidos nas etapas *forward* e *backward*. Além disso, é grande a quantidade de restrições associadas a cada subproblema, o que resulta em um grande esforço computacional.

As figuras 7.12 e 7.13 mostram as funções de custo futuro esperado da PDE e as aproximações dessa função geradas pela PDED para os meses de maio e junho, em um período de 2 meses. As figuras 7.14, 7.15, 7.16 e 7.17 mostram as funções de custo futuro esperado da PDE e as aproximações dessas funções geradas pela PDED para os meses de maio, junho, julho e agosto, em um período de 4 meses. As figuras 7.18, 7.19, 7.20, 7.21, 7.22 e 7.23 mostram as funções de custo futuro esperado da PDE e as aproximações dessas funções geradas pela PDED para o período de planejamento de 6 meses, iniciando-se em maio e finalizando em outubro. As figuras mostram os cortes gerados pela PDED para diferentes períodos de planejamento adotados, onde cada período se inicia em maio (mês seco).

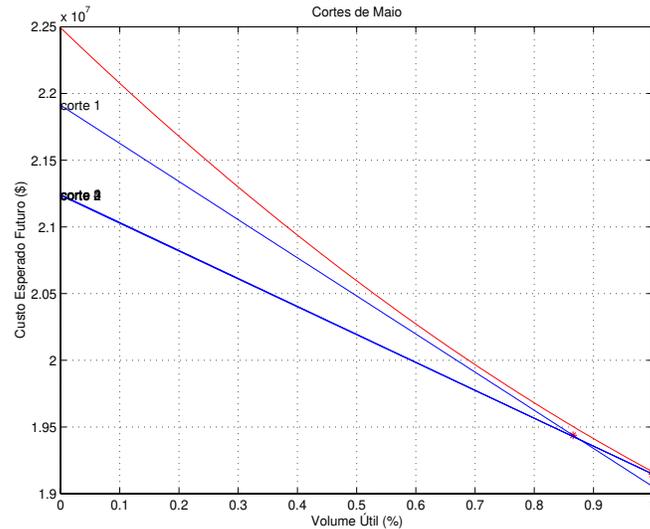


Figura 7.12: Aproximação da função de custo esperado futuro para o final do mês de maio considerando o período de 2 meses.

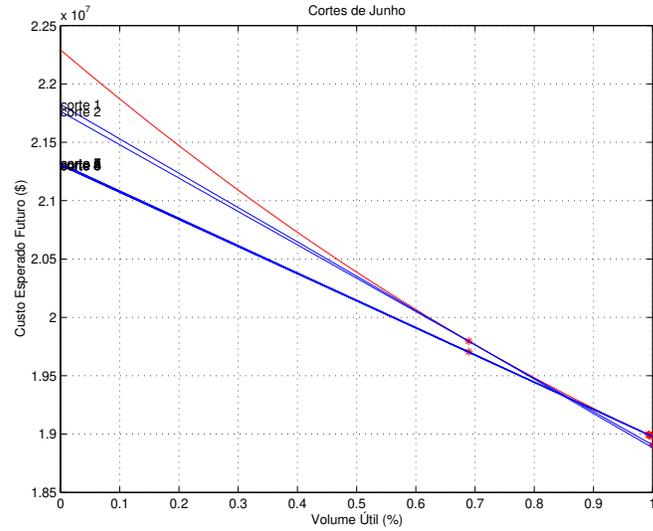


Figura 7.13: Aproximação da função de custo esperado futuro para o final do mês de junho considerando o período de 2 meses.

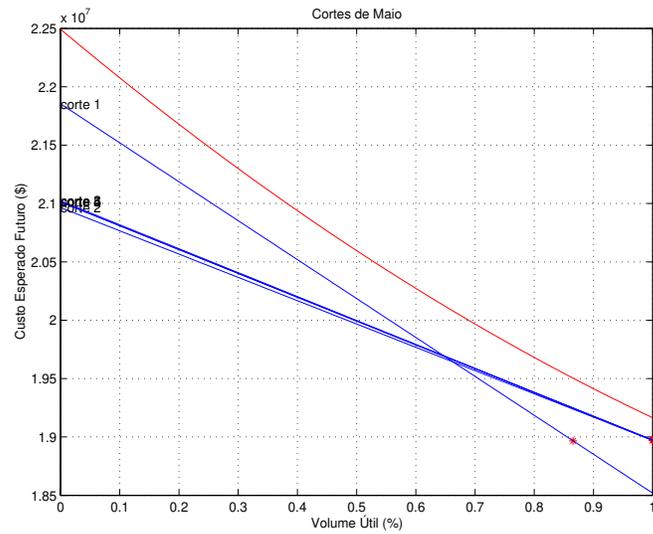


Figura 7.14: Aproximação da função de custo esperado futuro para o final do mês de maio considerando o período de 4 meses.

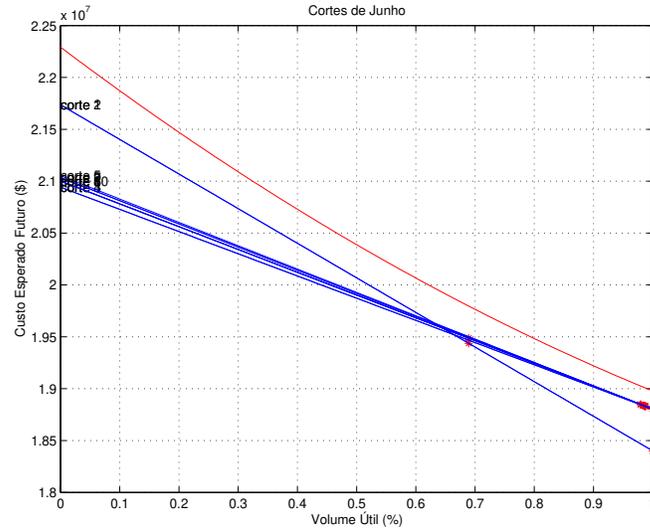


Figura 7.15: Aproximação da função de custo esperado futuro para o final do mês de junho considerando o período de 4 meses.

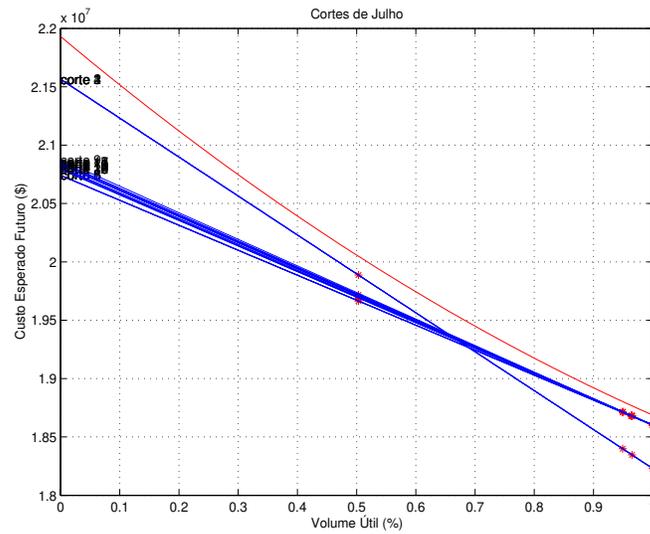


Figura 7.16: Aproximação da função de custo esperado futuro para o final do mês de julho considerando o período de 4 meses.

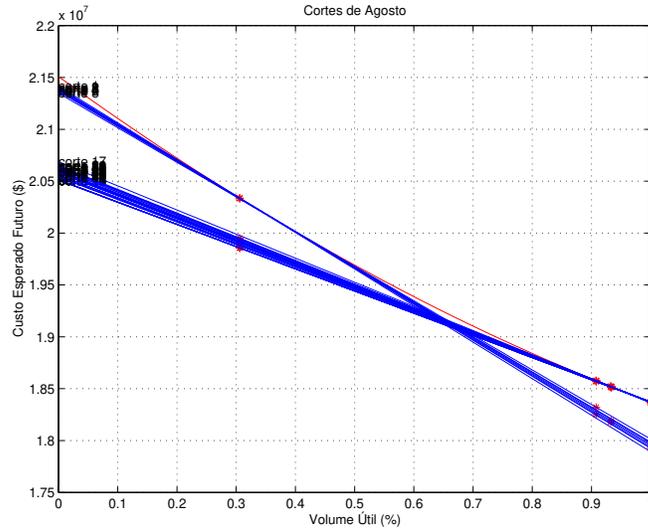


Figura 7.17: Aproximação da função de custo esperado futuro para o final do mês de agosto considerando o período de 4 meses.

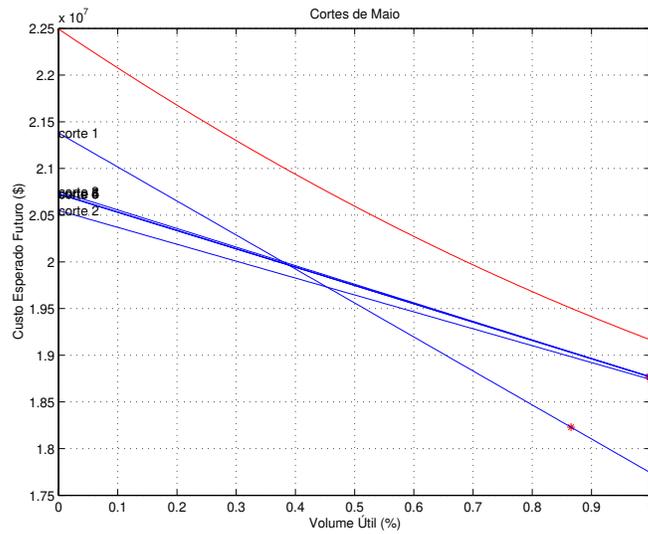


Figura 7.18: Aproximação da função de custo esperado futuro para o final do mês de maio considerando o período de 6 meses.

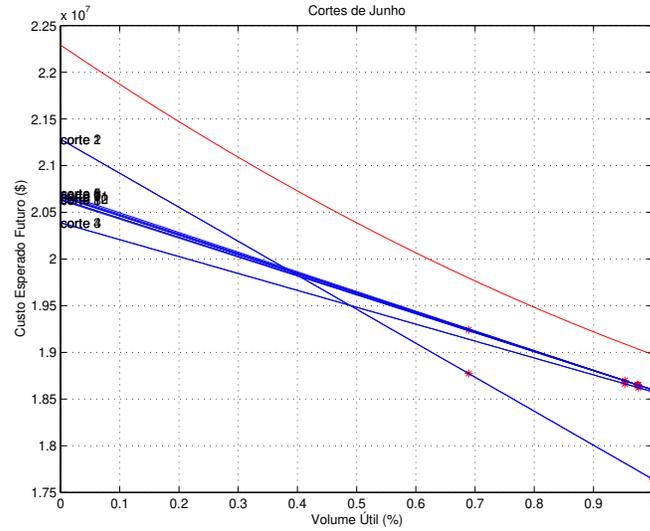


Figura 7.19: Aproximação da função de custo esperado futuro para o final do mês de junho considerando o período de 6 meses.

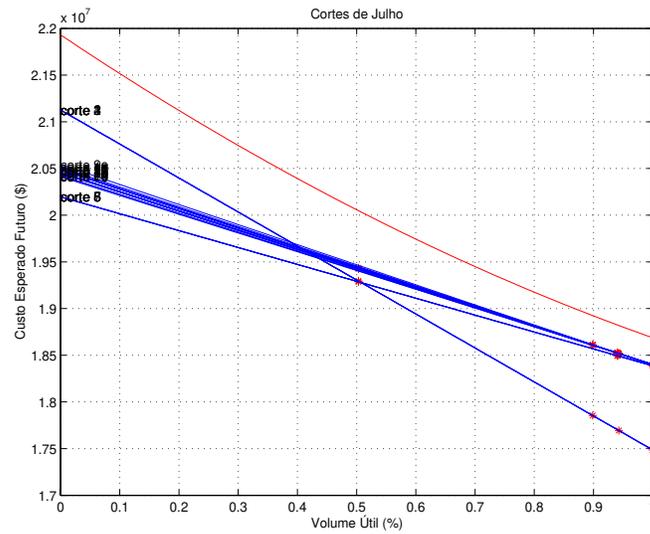


Figura 7.20: Aproximação da função de custo esperado futuro para o final do mês de julho considerando o período de 6 meses.

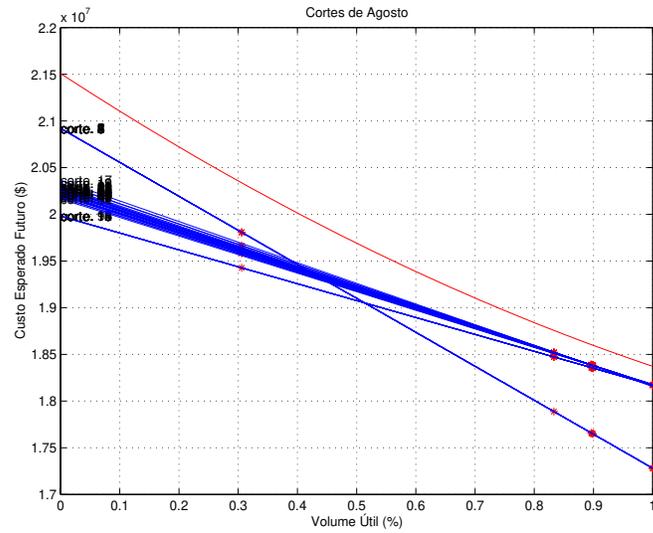


Figura 7.21: Aproximação da função de custo esperado futuro para o final do mês de agosto considerando o período de 6 meses.

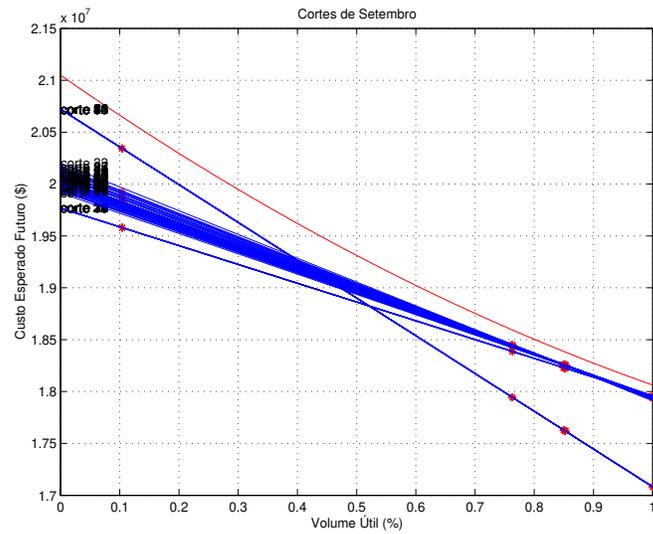


Figura 7.22: Aproximação da função de custo esperado futuro para o final do mês de setembro considerando o período de 6 meses.

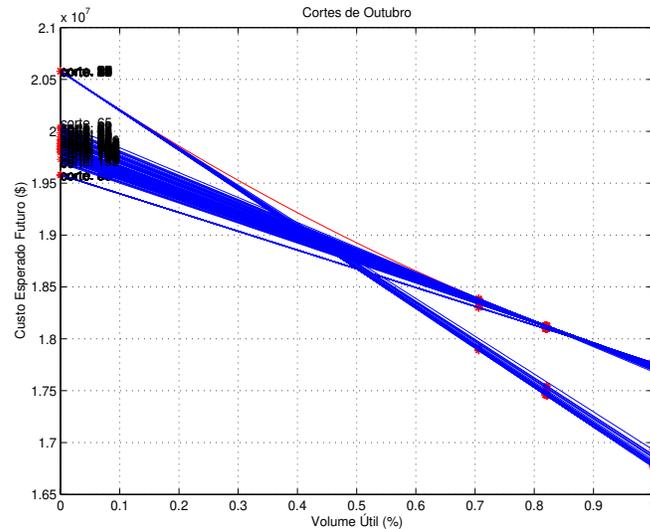


Figura 7.23: Aproximação da função de custo esperado futuro para o final do mês de outubro considerando o período de 6 meses.

Como foi utilizada a função de custo terminal da PDE, os cortes gerados na PDED aproximam bem a função de custo esperado futuro da PDE, sendo retas tangentes a essa curva no último mês de cada período de planejamento estudado, como mostram as figuras 7.13, 7.17 e 7.23. Note que, apesar da grande quantidade de cortes para esses meses, somente alguns são utilizados na aproximação da função de custo futuro.

Entretanto, não houve uma boa aproximação para os outros meses do período de planejamento, uma vez que os cortes obtidos pela PDED (retas azuis) deveriam gerar uma linearização externa da função de custo esperado da PDE (curva em vermelho) a partir dos armazenamentos da ida (ponto em asterisco), resultantes da simulação *forward* para cada mês.

A partir dos testes feitos foi possível constatar que quanto maior o período, pior a aproximação para os primeiros meses da função de custo futuro esperado fornecida pela PDED. Quanto maior o período de planejamento, maior a quantidade de restrições consideradas em cada subproblema.

Esse comportamento se deve às diferentes políticas de resolução adotadas por essas metodologias na resolução do planejamento energético da operação, uma vez que a PDE é uma formulação “decisão-acaso” e a PDED é uma formulação “acaso-decisão”.

7.4 Resumo

Neste capítulo foram apresentados os resultados das aplicações da PDDD, onde se tem conhecimento prévio das vazões afluentes (MLT), considerando funções de custo de operação linear e quadrática, para as usinas hidrelétricas pertencentes às bacias dos rios Tietê e Pardo e para a usina de Furnas. Primeiramente foi discutido o estudo da PDDD com função objetivo linear, e depois realizou-se um estudo considerando função de custo não linear.

Em seguida foram comparadas as metodologias PDE e PDED e comentados os resultados. Para representar a estocasticidade das afluições, foi construída árvore de cenários hidrológicos, baseada no histórico de vazões médias mensais da usina hidrelétrica de Furnas, considerando 2 cenários de vazões.

Capítulo 8

Conclusões

No presente trabalho foram analisadas as metodologias PDE e PDED, utilizadas no planejamento energético da operação. As aplicações foram realizadas para o caso particular de sistemas formados por uma única usina hidrelétrica.

Foram apresentados e discutidos os resultados fornecidos pela PDDD, considerando as vazões médias mensais do histórico (MLT), utilizando funções de custo linear e quadrática, para as usinas hidrelétricas pertencentes à bacia dos rios Tiête e Pardo (Barra Bonita, Caconde e Promissão) e para a usina de Furnas. Os estudos foram realizados para um período de planejamento de 12 meses, começando em maio, considerando uma função de custo terminal para incentivar um alto armazenamento ao final do processo de otimização.

Para os casos determinístico linear e quadrático, o limite inferior se comportou como uma função monotonicamente não decrescente, o que garantiu a cada iteração uma melhor aproximação para a solução do problema. Para todos os estudos realizados a convergência do problema foi alcançada, adotando-se uma baixa tolerância, em poucas iterações.

Para verificar a consistência dos resultados obtidos pela PDDD, foram comparados os valores dos custos ótimos resultantes da aplicação do método PDDD, com função de custo linear e com função de custo quadrática, com os fornecidos pelo pacote de resolução LINDO [24] e pela Programação Dinâmica Determinística para as mesmas aplicações. Pôde-se então concluir que o método PDDD funciona para o caso de vazões conhecidas (caso determinístico).

Na PDED foi utilizada uma árvore de cenários hidrológicos com duas ramificações para representar a estocasticidade das vazões afluentes ao reservatório, com base nos dados do histórico de vazões médias mensais de cada usina hidrelétrica. Nos estudos foram consideradas as probabilidades associadas às vazões afluentes equiprováveis.

Para um número reduzido de meses o problema convergiu em poucas iterações. No caso de 12 meses o esforço computacional foi notável e não se obteve uma boa aproximação para a função de custo futuro. Como critério de parada foi utilizado o erro relativo entre os limites inferior e superior. Apesar da PDED não necessitar da discretização do espaço de estados do sistema, o número de subproblemas a ser resolvido varia de acordo com o número de estágios e a quantidade de ramificações feitas em cada estágio, o que implica em um alto esforço computacional dependendo do número de estágios (meses) do período de planejamento.

Para finalizar, a comparação dos métodos PDE e PDED foi realizada, sendo que a política da PDE utiliza a formulação “decisão-acaso”, enquanto a PDED adota a política de “acaso-decisão”.

Foram comparadas as funções de custo futuro esperado fornecidas pela PDE e as aproximações das funções de custo esperado futuro obtidos pelo método PDED, onde a aproximação da função é construída iterativamente para os períodos de 2, 4 e 6 meses. Foram verificados os resultados das comparações considerando o início do período no mês de maio, caracterizado como um período seco. A comparação das funções de custo futuro esperado foi feita para cada mês pertencente ao período de planejamento. O último mês do período apresentou uma boa aproximação por considerar exatamente o custo futuro da PDE. Em ambos os testes a função de custo esperado futuro resultante da PDED não forneceu uma boa aproximação da função de custo futuro esperado da PDE.

Pôde-se observar que na medida em que o período de planejamento considerado aumenta, a aproximação da função de custo futuro se afasta da função desejada para os primeiros meses do período.

Os cortes gerados pela PDED, a cada iteração, deveriam aproximar a função de custo esperado futuro, porém não se comportaram como hiperplanos suporte à função da PDE.

Observou-se que apesar da grande quantidade de cortes para os últimos meses do período, somente alguns foram necessários para a aproximação da função de custo futuro esperado.

É importante salientar que os estudos de comparação realizados adotaram a hipótese simplificada de que a produtividade da usina hidrelétrica não depende da sua queda, condição necessária para que a técnica da PDED possa utilizar ferramentas eficientes de programação linear (ou quadrática) na solução dos subproblemas. Essa hipótese, desnecessária na técnica da PDE convencional, acarreta distorções significativas na solução obtida de modo que para atenuar esse problema a utilização da PDED tem adotado um procedimento de linearizações sucessivas. Em estudos futuros pretende-se incorporar a não linearidade à função de produção hidráulica na abordagem de PDED.

Bibliografia

- [1] R. Bellman. *Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton - N. J., 1962.
- [2] N. V. Arvanitids and J. Rosing. Composite representation of multireservoir hydroelectric power system. *IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems*, PAS-89(2):319–326, 1970.
- [3] N. V. Arvanitids and J. Rosing. Optimal operation of multireservoir system using a composite representation. *IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems*, PAS-89(2):327–335, 1970.
- [4] G. Cruz Jr. and S. Soares. Non-uniform composite representation of hydroelectric systems for long-term hydrothermal scheduling. *IEEE Transactions on Power Systems*, 11(2):701–707, 1996.
- [5] A. Turgeon. Optimal operation of multi-reservoir systems with stochastic inflows. *Water Resources Research*, 16(2):275–283, 1980.
- [6] H. Duran, C. Pueh, J. Diaz, and G. Snachez. Optimal operation of multireservoir system using an aggregation-decomposition approach. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 104(8):2086–2092, 1985.
- [7] L. A. Terry, CEPEL, DENE/DPE/Eletróbrás, and DEOP/DOS/Eletróbrás. *Modelo a Sistema Equivalente - Descrição Geral*. Relatório Técnico, CEPEL-Eletróbrás, 1980.
- [8] M. A. P. Carvalho and J. Rosenblatt. Modelo de simulação a subsistemas equivalentes. *IV Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica*, 1977.
- [9] M. V. Pereira and L. M. V. G. Pinto. Stochastic optimization of a multireservoir hydroelectric system: a decomposition approach. *Water Resources Research*, 21(6):779–792, 1985.

-
- [10] M. V. Pereira and L. M. V. G. Pinto. Optimal stochastic operation scheduling of large hydroelectric systems. *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, 11:161–169, 1989.
- [11] M. V. Pereira and L. M. V. G. Pinto. Multi-stage stochastic optimization applied to energy planning. *Mathematical Programming*, 52:359–375, 1991.
- [12] A. Kligerman. *Operação Ótima de Subsistemas Hidrotérmicos Interligados Utilizando Programação Estocástica Dual*. Dissertação de Mestrado, FEEC-Unicamp, Campinas, 1992.
- [13] L. F. C. A. Silva. *Modelo de Intercâmbio a Subsistemas Equivalentes*. Tese de Mestrado, COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, 1981.
- [14] T. Thanos and W. W-G. Yeh. Use of stochastic dynamic programming for reservoir management. *Water Resources Research*, 23(6):983–996, June 1987.
- [15] J. W. Stedinger, B. F. Sula, and D. P. Loucks. Stochastic dynamic programming models for reservoir operation optimization. *Water Resources Research*, 20(11):1499–1505, 1984.
- [16] Dimitri. P. Bertsekas. *Dynamic Programming and Stochastic Control*. Academic Press, 1976.
- [17] Dimitri. P. Bertsekas. *Dynamic Programming and Optimal Control*, volume 1. Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 1995.
- [18] G. L. Nemhauser. *Introduction to Dynamic Programming*. John Wiley, New York, 1966.
- [19] J. F. Benders. Partitioning procedure for solving mixed variables programming problems. 4:238–252, 1962.
- [20] L. S. Lasdon. *Optimization Theory for Large Systems*. The McMillan Company, 1970.
- [21] M. S. Bazaraa and H. D. Sherali J. J. Jarvis. *Linear Programming and Network Flows*. John Wiley & Sons, Canada, 1990.
- [22] J. F. Benders. Partitioning procedures for solving mixed variables programming problems. *Numeric Mathematical*, 4:238–252, 1962.
- [23] J. F. Benders. *Solution Methods for Stochastic Dynamic Linear Problems*. Stanford University, Systems Optimization Laboratory, Dept. of Operations Research, Report 80, 1980.
- [24] *LINDO*. <http://www.lindo.com>.

Apêndice A

Decomposição de Benders

O método de decomposição de Benders é uma técnica de projeção e relaxação utilizada em problemas de grandes dimensões.

Seja o problema de minimização de dois estágios determinístico:

$$\min cx + dy \tag{A.1}$$

sujeito a:

$$A x \geq b \tag{A.2}$$

$$E x + F y \geq g \tag{A.3}$$

Dada uma solução factível x^* para o primeiro estágio, pode-se resolver o problema do segundo estágio da seguinte forma:

$$\alpha(x) = \min dy \tag{A.4}$$

sujeito a:

$$F y \geq g - E x \tag{A.5}$$

Considerando as variáveis duais associadas às restrições do problema (A.4)-(A.5), pode-se escrever o problema da seguinte maneira:

$$\alpha(x) = \max \pi (g - E x) \tag{A.6}$$

sujeito a:

$$\pi F \geq d \quad (\text{A.7})$$

onde π é um vetor de multiplicadores *simplex* associado às restrições (A.5). É possível notar que região factível $\pi F \geq d$ não depende da variável do primeiro estágio x . Supondo o problema primal factível, essa região é caracterizada como um poliedro convexo, dado por um conjunto de vértices, onde cada vértice associado a esse poliedro é uma possível solução ótima do problema, de acordo com a teoria de programação linear. Seja Π o conjunto de p vértices que caracteriza a região factível do problema $\pi F \geq d$. O problema (A.6) pode ser resolvido por enumeração:

$$\max \pi (g - Ex) \quad (\text{A.8})$$

sujeito a:

$$\pi^i \in \Pi \quad (\text{A.9})$$

Pode-se então reescrever o problema como:

$$\min \alpha(x) \quad (\text{A.10})$$

sujeito a:

$$\alpha \geq \pi^1 (g - Ex) \quad (\text{A.11})$$

$$\alpha \geq \pi^2 (g - Ex) \quad (\text{A.12})$$

⋮

$$\alpha \geq \pi^p (g - Ex) \quad (\text{A.13})$$

Por ser a variável escalar α maior ou igual a cada restrição $\pi^i (g - Ex)$, ela será maior ou igual ao seu máximo valor. Mas como o objetivo é minimizar α , isso ocorre quando a restrição é posta em igualdade.

Da teoria de programação linear sabe-se que na solução ótima de uma problema de programação linear o valor da função objetivo do problema primal iguala-se ao valor do problema dual. Como o problema (A.6)-(A.7) é o dual do problema (A.4)-(A.5), pode-se concluir que as restrições do problema (A.10) definem a função $\alpha(x)$ do problema de otimização de dois estágios.

O problema de dois estágios pode então ser escrito como:

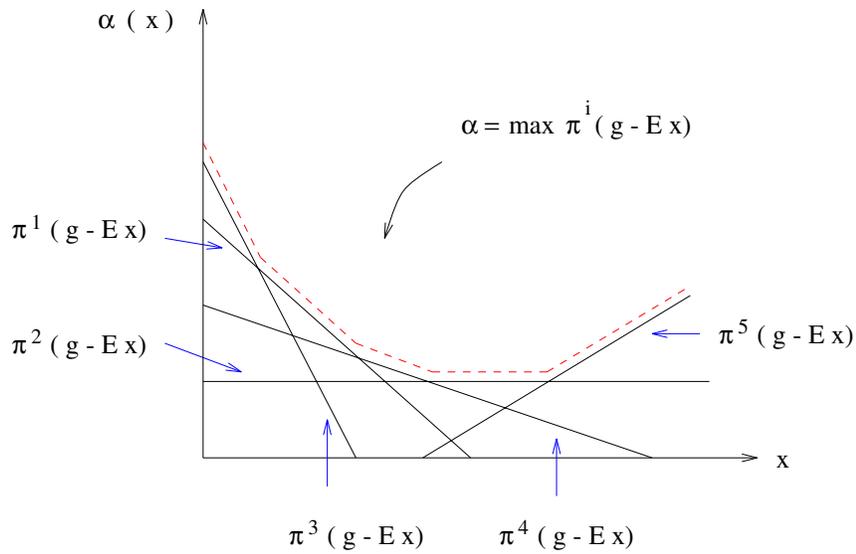


Figura A.1: Interpretação geométrica da função $\alpha(x)$ através da decomposição de Benders.

$$\min cx + \alpha \quad (\text{A.14})$$

sujeito a:

$$Ax \geq b \quad (\text{A.15})$$

$$\pi^1 (g - Ex) - \alpha \leq 0 \quad (\text{A.16})$$

$$\pi^2 (g - Ex) - \alpha \leq 0 \quad (\text{A.17})$$

\vdots

$$\pi^p (g - Ex) - \alpha \leq 0 \quad (\text{A.18})$$

Apesar de o conjunto de restrições no problema (A.14)-(A.18) ser muito grande, somente algumas restrições estarão ativas (em igualdade) na solução ótima. Sugerem-se então técnicas de relaxação para resolver o problema, onde cada restrição $\pi^i (g - Ex) - \alpha \leq 0$ é adicionada ao problema, de acordo com a necessidade, no processo iterativo de resolução. A cada iteração também são calculados os limites inferior e superior da solução, que são utilizados no critério de parada do método. A figura A.1 ilustra uma interpretação geométrica da função construída iterativamente a partir do princípio de decomposição de Benders.

Seja α^i o valor da solução ótima do problema do segundo estágio (A.4)-(A.5) para um dado valor x^i da variável do primeiro estágio. E seja π^i o vetor de variáveis duais associado ao conjunto de restrições (A.5). Da teoria de programação linear sabe-se que na solução ótima os valores ótimos das formulações primal e dual referentes a esse problema se igualam:

$$\alpha^i = \pi^i(g - Ex^i) \quad (\text{A.19})$$

Colocando em evidência $\pi^i g$, obtém-se:

$$\pi^i g = \alpha^i + \pi^i Ex^i \quad (\text{A.20})$$

Substituindo (A.20) na expressão do corte de Benders $\pi^i (g - Ex) - \alpha \leq 0$, com $\pi^i \in \Pi$, chega-se ao seguinte corte alternativo de Benders:

$$\alpha^i + \pi^i E(x^i - x) \leq \alpha \quad (\text{A.21})$$

Vale notar que a expressão (A.21) não mais depende do vetor de variáveis independentes g , sendo então recomendável para problemas estocásticos, onde a estocasticidade do problema é expressa em termos do vetor de variáveis independentes.

Suponha agora que o vetor g assuma dois valores g_1 e g_2 , com probabilidades associadas p_1 e p_2 , tais que $p_1 + p_2 = 1$. Nesse caso, segundo [9], [10] e [11], o problema de otimização é encontrar uma solução que minimize o valor do custo esperado:

$$\min cx + p_1 d y_1 + p_2 d y_2 \quad (\text{A.22})$$

sujeito a:

$$A x \geq b \quad (\text{A.23})$$

$$E x + F y_1 \geq g_1 \quad (\text{A.24})$$

$$E x + F y_2 \geq g_2 \quad (\text{A.25})$$

O problema (A.22)-(A.25) corresponde ao seguinte processo de decisão: no primeiro estágio, determine uma solução factível x^i tal que $A x^i \geq b$; no segundo estágio, encontre as soluções y_1^i e y_2^i que otimizem o seguinte problema:

$$\min p_1 d y_1 + p_2 d y_2 \quad (\text{A.26})$$

sujeito a:

$$F y_1 \geq g_1 - E x^i \quad (\text{A.27})$$

$$F y_2 \geq g_2 - E x^i \quad (\text{A.28})$$

Note que o problema (A.26)-(A.28) pode ser decomposto em dois subproblemas independentes:

$$\alpha_1^i = \min dy_1 \quad (\text{A.29})$$

sujeito a:

$$F y_1 \geq g_1 - E x^i \quad (\pi_1) \quad (\text{A.30})$$

e

$$\alpha_2^i = \min dy_2 \quad (\text{A.31})$$

sujeito a:

$$F y_2 \geq g_2 - E x^i \quad (\pi_2) \quad (\text{A.32})$$

onde as soluções de (A.29)-(A.30) e (A.31)-(A.32) são associadas às probabilidades p_1 e p_2 , respectivamente.

Como no caso determinístico, a solução de cada cenário (A.29)-(A.30) e (A.31)-(A.32) no segundo estágio é uma função da decisão x^i do primeiro estágio. Dessa forma, o problema de decisão estocástica (A.22)-(A.25) pode ser reescrito como:

$$\min cx + \bar{\alpha}(x) \quad (\text{A.33})$$

sujeito a:

$$A x \geq b \quad (\text{A.34})$$

onde $\bar{\alpha}(x)$ é o valor esperado das soluções de (A.29)-(A.30) e (A.31)-(A.32) para cada valor especificado de x .

Segundo [9], [10] e [11], através de manipulação algébrica é possível expressar o corte de Benders estocástico para a solução x^i do primeiro estágio da seguinte maneira:

$$\bar{\alpha}^i + \bar{\pi}^i E(x^i - x) \leq \alpha \tag{A.35}$$

onde $\bar{\alpha}^i = p_1 \alpha_1^i + p_2 \alpha_2^i$ é o valor esperado das soluções dos subproblemas do segundo estágio e $\bar{\pi}^i = p_1 \pi_1^i + p_2 \pi_2^i$ é o valor esperado das variáveis duais de cada subproblema.

Apêndice B

Geração de Árvore de Cenários

O processo de geração de múltiplos cenários tem como base o ajuste de uma função densidade de probabilidades aos dados históricos mensais de vazões naturais afluentes às usinas hidrelétricas do sistema.

Os cenários hidrológicos são gerados em uma estrutura em árvore de acordo com o número de ramificações especificado. Cada cenário corresponde a uma série temporal de vazão afluente ao sistema hidráulico, com duração e período coincidentes com o estudo. No conjunto de cenários cada cenário representa uma possível, mas não necessariamente a mais provável, série de vazões afluentes futuras. Para simplificação, não foi considerada a correlação temporal das variáveis aleatórias (vazão afluente).

A função densidade de probabilidade que melhor se aproxima do comportamento do histórico de vazão afluente é a log-normal, dada pela seguinte expressão:

$$\begin{cases} f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma y}} e^{-(\ln(y)-\mu)^2/2\sigma^2} & \text{para } \sigma \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

onde μ e σ representam a média e a variância dos valores da variável aleatória, respectivamente.

Considerando a função densidade de probabilidade $f(y)$, a probabilidade de a variável aleatória y estar entre dois valores a e b é dada por:

$$P[a \leq y \leq b] = \int_b^a \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma y}} e^{-(\ln(y)-\mu)^2/2\sigma^2} dy \quad (\text{B.2})$$

A partir de uma mudança de variáveis $\bar{y} = \ln(y)$ e $d\bar{y} = y^{-1}dy$ a expressão (B) pode ser escrita como:

$$P[a \leq \bar{y} \leq b] = \int_{\ln(b)}^{\ln(a)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma y}} e^{-(\bar{y}-\mu)^2/2\sigma^2} d\bar{y} \quad (\text{B.3})$$

o que é equivalente a:

$$P[a \leq \bar{y} \leq b] = F\left(\frac{\ln(b) - \mu}{\sigma}\right) - F\left(\frac{\ln(a) - \mu}{\sigma}\right) \quad (\text{B.4})$$

onde, $F(s)$ representa a probabilidade de a variável aleatória \bar{y} , com distribuição normal $N(0, 1)$, assumir valor menor ou igual a s .

A partir da função $f(y_t)$ a probabilidade da variável y_t (vazão afluyente no mês t) ser menor que \hat{y} é dada por:

$$F(\hat{y}) = P[y_t \leq \hat{y}] = \int_{-\text{inf}}^{\hat{y}} f(y_t) dy_t = \beta \quad (\text{B.5})$$

Com o valor da função densidade de probabilidade, $F(\hat{y}) = \beta$ pode-se obter o valor de \hat{y} calculando-se o valor inverso da função distribuição de probabilidade $F(\hat{y}) = \beta$,

$$\hat{y} = F^{-1}(\beta) = \{\hat{y} : F(\hat{y}) = \beta\} \quad (\text{B.6})$$

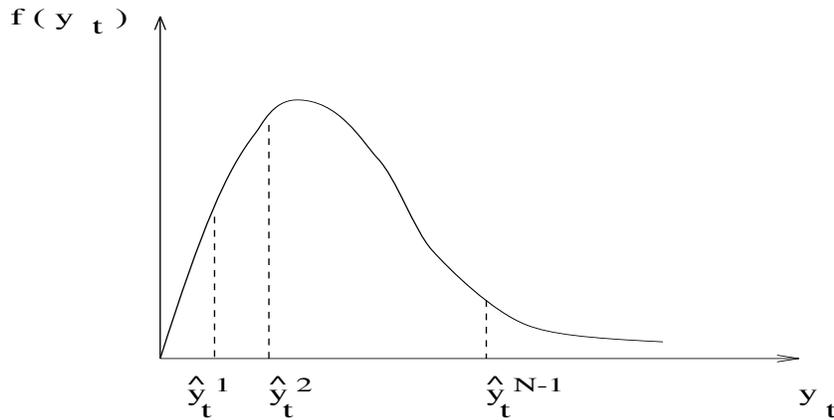


Figura B.1: Ilustração da função de distribuição log-normal.

Dividindo-se o domínio da variável y_t em N intervalos equiprováveis, o valor da área em cada intervalo, que representa a probabilidade da variável aleatória pertencer a esse intervalo, sob a função densidade de probabilidade $f(y_t)$, é dado por $\beta = 1/N$. A figura B.1 ilustra as divisões da função log-normal, onde:

$$P[y_t \leq \hat{y}_t^1] = P[\hat{y}_t^1 \leq y_t \leq \hat{y}_t^2] = \dots = P[y_t \geq \hat{y}_t^{N-1}] = \beta = 1/N \quad (\text{B.7})$$

Supondo-se o particionamento da função $f(y_t)$ em N partes equiprováveis, os valores $\hat{y}_t^1, \dots, \hat{y}_t^{N-1}$, determinados a partir da expressão (B.7), são considerados as possíveis representações da variável aleatória y_t no estágio t , possíveis cenários de vazão afluente ao sistema hidráulico nesse estágio.

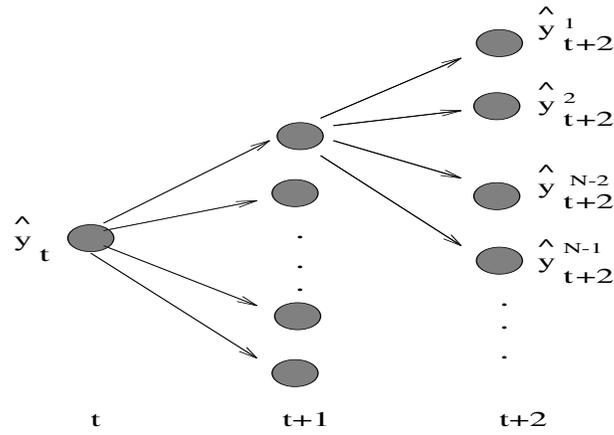


Figura B.2: Esquema da árvore de cenários.

Um esquema que representa a árvore de cenários gerada é ilustrado em B.2 para os estágios $t, t+1$ e $t+2$ e para N possibilidades de cenários.