

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Coeficientes de Correlação e Parâmetros de Coerência de Canais com Desvanecimento

Autor: José Ricardo Mendes

Orientador: Prof. Dr. Michel Daoud Yacoub

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: **Engenharia de Telecomunicações**.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Michel Daoud Yacoub (presidente) . DECOM/FEEC/Unicamp
Prof. Dr. Dalton Soares Arantes DECOM/FEEC/Unicamp
Prof. Dr. Rui Fragassi Souza DMO/FEEC/Unicamp
Prof. Dr. João Crisóstomo Weyl A. Costa DEEC/CT/Ufpa

Campinas, SP

2006

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

M522c

Mendes, José Ricardo

Coeficientes de correlação e parâmetros de coerência de canais com desvanecimento / José Ricardo Mendes. -- Campinas, SP: [s.n.], 2006.

Orientador: Michel Daoud Yacoub

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Sistema de comunicação sem fio. 2. Rádio – Transmissões transmissão – desvanecimento. 3. Correlação (Estatística). 4. Variáveis aleatórias. I. Yacoub, Michel Daoud. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Título em Inglês: Correlation Coefficients and Coherence Parameters of Fading Channels

Palavras-chave em Inglês: Coherence Bandwidth, Coherence Distance, Coherence Time, Correlation Coefficient, General Fading Model, Ricean Fading Model.

Área de concentração: Telecomunicações e Telemática

Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica

Banca examinadora: Dalton Soares Arantes, Rui Fragassi Souza, João Crisóstomo Weyl A. Costa

Data da defesa: 25/08/2006

Resumo

Esta dissertação deduz e analisa coeficientes de correlação de sinais em diversos canais com desvanecimento, bem como especifica os respectivos parâmetros de coerência — distância de coerência, tempo de coerência e largura de banda de coerência. Tais parâmetros são extraídos do coeficiente de correlação da envoltória, estatística fornecida aqui apenas para canais com desvanecimento Rice, devido à complexidade de seu cálculo. Para modelos mais abrangentes de canais com desvanecimento, provê-se o coeficiente de correlação da potência, aproximação simples e geralmente acurada daquele coeficiente. Por fim, através de resultados numéricos, discriminam-se fatores que atuam sobre os parâmetros de coerência: ondas dominantes influem fundamentalmente na distância de coerência e no tempo de coerência; desequilíbrios de potência média dos componentes aleatórios em quadratura, primordialmente na largura de banda de coerência; anisotropia do espalhamento das ondas difusas e diretividade das antenas receptoras, somente na distância de coerência e no tempo de coerência; e a não-estacionariedade do ambiente, em todos os parâmetros de coerência.

Palavras-chave: Coeficiente de Correlação; Distância de Coerência; Largura de Banda de Coerência; Modelo de Desvanecimento Rice; Modelo Geral de Desvanecimento; Tempo de Coerência.

Abstract

This dissertation derives and examines correlation coefficients of signals in many fading channels, as well as specifies the respective coherence parameters — coherence distance, coherence time, and coherence bandwidth. Such parameters are extracted from the envelope correlation coefficient, statistic calculated here only for Ricean fading channels, owing to the complexity of its deduction. For more comprehensive models of fading channels, it is provided the power correlation coefficient, simple and usually accurate approximation of that coefficient. Finally, by means of numerical results, factors that affect the coherence parameters are enumerated: dominant waves influence fundamentally on the coherence distance and on the coherence time; mean power inequalities between the quadrature random components, mainly on the coherence bandwidth; anisotropy of the diffuse waves spreading, only on the coherence distance and on the coherence time; and nonstationarity of the environment, on all coherence parameters.

Keywords: Coherence Bandwidth; Coherence Distance; Coherence Time; Correlation Coefficient; General Fading Model; Ricean Fading Model.

A meus queridos pais, Rômulo e Edina, dedico esta tese.

Agradecimentos

A meu orientador, Prof. Dr. Michel Daoud Yacoub, pela competência, solicitude e flexibilidade na orientação.

A meus pais, Rômulo e Edina, por tudo de bom que me proporcionaram ao longo de minha vida.

A meu irmão, Luiz Rômulo, pelo estímulo à realização desta tese, e a minha irmã, Valéria, pela afetuosa amizade.

A meus colegas de faculdade, em especial aos de laboratório, pelo companheirismo e solidariedade.

Aos membros da banca examinadora de minha tese, pelas valiosas críticas e sugestões.

À FAPESP, pelo auxílio financeiro.

Sumário

Lista de Figuras	xiii
Lista de Tabelas	xv
Glossário	xvii
Lista de Siglas	xvii
Lista de Símbolos	xix
Trabalhos Publicados Pelo Autor	xxiii
1 Introdução	1
1.1 Coeficientes de Correlação e Parâmetros de Coerência	1
1.1.1 Domínio do Espaço	1
1.1.2 Domínio do Tempo	2
1.1.3 Domínio da Frequência	3
1.1.4 Coeficientes de Correlação da Envoltória e da Potência	3
1.2 Modelos de Desvanecimento	4
1.2.1 Modelos de Sinais com Um <i>Cluster</i>	5
1.2.2 Modelos de Desvanecimento com Vários <i>Clusters</i>	6
1.3 Estrutura da Dissertação	7
2 Coeficiente de Correlação da Envoltória de Canais com Desvanecimento Rice	9
2.1 Diferença de Fase de Duas Ondas com Separação Espaço-Frequencial	10
2.2 Modelo do Canal	12
2.2.1 Sinais do Modelo	12
2.2.2 Equações do Modelo	12
2.2.3 Propriedades das Variáveis Aleatórias do Modelo	14
2.2.4 Considerações sobre os Ângulos de Chegada	15
2.3 Estatísticas do Sinal	16
2.3.1 Médias, Variâncias e Covariâncias das Gaussianas	16
2.3.2 Potências Médias e Fatores de Rice	20
2.3.3 Funções Densidade de Probabilidade Conjuntas	20
2.3.4 Momento Conjunto das Envoltórias	24

2.3.5	Coeficiente de Correlação das Envoltórias	25
2.4	Convertibilidade Espaço-Tempo	26
2.5	Conclusão	26
3	Coeficiente de Correlação da Potência de Canais com Desvanecimento	29
3.1	Modelo Geral de Desvanecimento	30
3.1.1	Estatísticas Marginais	30
3.1.2	Estatísticas Conjuntas	30
3.1.3	Ambientes Estacionários e Não-Estacionários	31
3.2	Momentos das Gaussianas	32
3.2.1	Momento Marginal	32
3.2.2	Momentos Conjuntos	33
3.3	Estatísticas da Potência	35
3.3.1	Momento Marginal da Potência	36
3.3.2	Momento Conjunto da Potência	37
3.3.3	Coeficiente de Correlação da Potência	39
3.3.4	Casos Particulares	40
3.4	Coeficiente de Correlação da Potência Simples	44
3.4.1	Sinais com <i>Clusters</i> Estatisticamente Idênticos	45
3.4.2	Modelo de Desvanecimento Nakagami	46
3.4.3	Modelo de Desvanecimento κ - μ	47
3.4.4	Modelo de Desvanecimento η - μ	48
3.4.5	Modelos de Desvanecimento η - κ	49
3.5	Conclusão	50
4	Resultados Numéricos	51
4.1	Aproximação do CCES pelo CCPS	52
4.2	Coeficientes de Correlação das Gaussianas	53
4.2.1	Primeira Configuração	53
4.2.2	Segunda Configuração	56
4.2.3	Modelos de Desvanecimento com Vários <i>Clusters</i>	56
4.2.4	Acurácia da Aproximação do CCES pelo CCPS	57
4.3	Coeficientes de Correlação Espaciais	57
4.3.1	Espalhamento Isotrópico e Antena Omnidirecional	57
4.3.2	Espalhamento Anisotrópico ou Antena Direcional	59
4.3.3	Modelos de Desvanecimento com Vários <i>Clusters</i>	61
4.4	Coeficientes de Correlação Temporais	61
4.5	Coeficientes de Correlação Freqüenciais	61
4.5.1	Ambientes Estacionários	61
4.5.2	Ambientes Não-Estacionários	63
4.6	Parâmetros de Coerência	63
4.6.1	Distância de Coerência	64
4.6.2	Tempo de Coerência	65
4.6.3	Largura de Banda de Coerência	65

4.6.4	Ambientes Não-Estacionários	66
4.7	Conclusão	67
5	Comentários Finais	85
5.1	Conclusão	85
5.2	Sugestões para Trabalhos Futuros	86
5.2.1	Coeficiente de Correlação da Envoltória	86
5.2.2	Coeficiente de Correlação da Potência	86
5.2.3	<i>Clusters</i> Estatisticamente Não-Idênticos	86
5.2.4	Simultaneidade da Anisotropia do Espalhamento e a Diretividade da Antena	87
	Referências bibliográficas	88
A	Estatísticas Conjuntas de Duas Envoltórias Riceanas	93
A.1	Função Densidade de Probabilidade Conjunta	93
A.2	Momento Conjunto	96
A.3	Integral	97
B	Momentos de Variáveis Aleatórias Gaussianas	99
B.1	Momento Marginal	99
B.2	Momentos Conjuntos	100
B.2.1	Duas Variáveis Aleatórias	100
B.2.2	Quatro Variáveis Aleatórias	102
C	Estatísticas de Ordem Unitária da Potência	109
C.1	Momentos das Gaussianas	109
C.1.1	Variância	109
C.1.2	Covariância	109
C.2	Momentos da Potência Simples	110
C.2.1	Variância	110
C.2.2	Covariância	110
D	Coeficientes de Correlação Freqüenciais	111
D.1	Modelo de Desvanecimento Hoyt	111
D.2	Modelos de Desvanecimento η - κ	112

Lista de Figuras

1.1	Modelos de desvanecimento.	4
2.1	Diferença de fase entre duas ondas com separação espaço-freqüencial.	11
2.2	Receptor móvel com duas antenas.	26
4.1	Coeficientes de correlação da envoltória e da potência do MD Rayleigh em função de ρ	69
4.2	Coeficientes de correlação da envoltória e da potência do MD Rice ($k_1 = k_2 = 1$) em função de ν_c , para diferentes valores de $ \nu_s $	69
4.3	Coeficientes de correlação da envoltória e da potência do MD Hoyt ($\eta_1 = \eta_2 = 0,5$) em função de ν_1 , para diferentes valores de $ \nu_2 $	70
4.4	Coeficientes de correlação da envoltória e da potência do MD η - κ Assimétrico ($\eta_1 = \eta_2 = 0,4$; $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$) em função de ν_1 , para diferentes valores de $ \nu_2 $	70
4.5	Coeficientes de correlação da envoltória e da potência do MD η - κ Simétrico ($\eta_1 = \eta_2 = 0,7$; $\kappa_1 = \kappa_2 = 3$) em função de ν_1 , para diferentes valores de $ \nu_2 $	71
4.6	Coeficientes de correlação da envoltória e da potência do MD η - κ Generalizado ($\eta_1 = \eta_2 = 0,8$; $\kappa_{X_1} = \kappa_{X_2} = 2$; $\kappa_{Y_1} = \kappa_{Y_2} = 3$) em função de ν_1 , para diferentes valores de $ \nu_2 $	71
4.7	Distribuição das ondas de chegada ou diretividade da antena receptora ($\theta_e = 30^\circ$).	72
4.8	Coeficiente de correlação $\nu_1(d)$ para $\theta_e = 90^\circ$, considerando espalhamento anisotrópico ou antena direcional.	72
4.9	Coeficiente de correlação $\nu_1(d)$ para $\theta_e = 0^\circ$, considerando espalhamento anisotrópico ou antena direcional.	73
4.10	Coeficiente de correlação $\nu_2(d)$ para $\theta_e = 0^\circ$, considerando espalhamento anisotrópico ou antena direcional.	73
4.11	Coeficientes de correlação $\nu_1(\Delta\omega)$ e $\nu_2(\Delta\omega)$ para $\theta_e = 0^\circ$	74
4.12	Coeficiente de correlação espacial da envoltória do MD Rice para $\theta_{0a} = 90^\circ$, em ambientes estacionários ($k_1 = k_2 = k$) com espalhamento isotrópico e antena omnidirecional.	74
4.13	Coeficiente de correlação espacial da envoltória do MD Rice para $\theta_{0a} = 0^\circ$, em ambientes estacionários ($k_1 = k_2 = k$) com espalhamento isotrópico e antena omnidirecional.	75

4.14	Coeficiente de correlação espacial da potência do MD η - κ Assimétrico, em ambientes estacionários ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$; $\eta_1 = \eta_2 = \eta$) com espalhamento isotrópico e antena omnidirecional. Para $\kappa = 0$ (MD Hoyt), o coeficiente de correlação independe de η (curvas coincidentes).	75
4.15	Coeficiente de correlação espacial da envoltória do MD Rice para $\theta_{0a} = 90^\circ$, em ambientes não-estacionários ($k_1 = 1$) com espalhamento isotrópico e antena omnidirecional.	76
4.16	Coeficiente de correlação espacial da potência do MD Hoyt, em ambientes não-estacionários ($\eta_1 = 2$) com espalhamento isotrópico e antena omnidirecional.	76
4.17	Coeficiente de correlação espacial da envoltória do MD Rayleigh, em ambientes estacionários com espalhamento anisotrópico ou antena direcional ($\theta_e = 90^\circ$).	77
4.18	Coeficiente de correlação espacial da envoltória do MD Rayleigh, em ambientes estacionários com espalhamento anisotrópico ou antena direcional ($\theta_e = 0^\circ$).	77
4.19	Coeficiente de correlação espacial da envoltória do MD Rice, em ambientes estacionários ($k = 1$) com espalhamento anisotrópico ou antena direcional ($\theta_{0a} = \theta_e = 90^\circ$).	78
4.20	Coeficiente de correlação espacial da envoltória do MD Rice, em ambientes estacionários ($k = 1$) com espalhamento anisotrópico ou antena direcional ($\theta_{0a} = 90^\circ$ e $\theta_e = 0^\circ$).	78
4.21	Coeficiente de correlação espacial da potência do MD Hoyt, em ambientes estacionários ($\eta = 0, 5$) com espalhamento anisotrópico ou antena direcional ($\theta_e = 0^\circ$).	79
4.22	Coeficiente de correlação espacial da potência do MD Nakagami, em ambientes não-estacionários ($\mu_1 = \mu_0$) com espalhamento isotrópico e antena omnidirecional.	79
4.23	Coeficiente de correlação freqüencial da envoltória do MD Rice, em ambientes estacionários ($k_1 = k_2 = k$).	80
4.24	Coeficiente de correlação freqüencial da envoltória do MD Hoyt, em ambientes estacionários ($\eta_1 = \eta_2 = \eta$).	80
4.25	Coeficiente de correlação freqüencial da potência do MD η - κ Assimétrico, em ambientes estacionários ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$; $\eta_1 = \eta_2 = \eta$).	81
4.26	Coeficiente de correlação freqüencial da potência do MD η - κ Simétrico, em ambientes estacionários ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$; $\eta_1 = \eta_2 = \eta$).	81
4.27	Coeficiente de correlação freqüencial da envoltória do MD Rice, em ambientes não-estacionários ($k_1 = 1$).	82
4.28	Coeficiente de correlação freqüencial da potência do MD Hoyt, em ambientes não-estacionários ($\eta_1 = 0, 5$).	82
4.29	Coeficiente de correlação freqüencial da potência do MD Nakagami, em ambientes não-estacionários ($\mu_1 = \mu_0$).	83

Lista de Tabelas

4.1	Condições para maior acurácia da aproximação do CCES pelo CCPS.	53
4.2	Distância de coerência do MD Rice para diferentes intensidades de onda dominante.	64
4.3	Distância de coerência dos MDs Rayleigh, Rice e Hoyt para diferentes graus de concentração das ondas espalhadas ou graus de diretividade da antena receptora.	65

Lista de Siglas

CCE	-	Coeficiente de Correlação da Envoltória
CCES	-	Coeficiente de Correlação da Envoltória Simples (ou Coeficiente de Correlação de Ordem Unitária da Envoltória)
CCG	-	Coeficiente de Correlação da Gaussiana
CCP	-	Coeficiente de Correlação da Potência
CCPS	-	Coeficiente de Correlação da Potência Simples (ou Coeficiente de Correlação de Ordem Unitária da Potência)
JPDF	-	Função Densidade de Probabilidade Conjunta
MD	-	Modelo de Desvanecimento
PDF	-	Função Densidade de Probabilidade
VA	-	Variável Aleatória

Lista de Símbolos

Números e Variáveis Determinísticas

a	- amplitude do sinal transmitido
a_{0i}	- amplitude da onda de linha de visada direta do sinal i
c	- velocidade da luz
d	- separação espacial (distância)
d_c	- distância de coerência
d_A	- distância entre duas antenas receptoras
$\mathbf{i}$	- unidade imaginária
t	- tempo
t_{0i}	- tempo de propagação da onda de linha de visada direta do sinal i
v	- velocidade da unidade móvel
A_i	- antena receptora i
B_c	- largura de banda de coerência, em Hz
N_i	- ordem do momento — ou do coeficiente de correlação — da variável aleatória
N	- número de ondas difusas (ou espalhadas) compondo o sinal
S_i	- sinal i
β_i	- constante de fase do sinal transmitido i
λ_i	- comprimento de onda do sinal transmitido i
θ_{0a}	- média dos ângulos de chegada das ondas de linha de visada direta de dois sinais
θ_{0d}	- metade da diferença entre os ângulos de chegada das ondas de linha de visada direta de dois sinais
θ_{0i}	- ângulo de chegada da onda de linha de visada direta do sinal i
θ_{0e}	- ângulo em torno do qual se concentram as ondas espalhadas / eixo de diretividade da antena receptora
ς	- grau de concentração das ondas espalhadas / grau de diretividade da antena receptora
τ	- separação temporal
τ_c	- tempo de coerência
ω_i	- frequência do sinal transmitido i
$\Delta\omega$	- separação frequencial
$\Delta\omega_c$	- largura de banda de coerência, em rad/s

Conjuntos

- $\mathbb{A}_{m_i, N_i}$ - conjunto de seqüências $\{n_{i,1}, \dots, n_{i,m_i}\}$ tal que $\{n_{i,1}, \dots, n_{i,m_i}\} \in \mathbb{A}_{m_i, N_i}$ se e somente se $n_{i,1}, \dots, n_{i,m_i-1}$ e n_{i,m_i} são números naturais que satisfazem $\sum_{j=1}^{m_i} n_{i,j} = N_i$
 $\mathbb{B}_{m_i, N_i}$ - conjunto de seqüências $\{n_{i,1}, \dots, n_{i,m_i}\}$ tal que $\{n_{i,1}, \dots, n_{i,m_i}\} \in \mathbb{B}_{m_i, N_i}$ se e somente se $n_{i,1}, \dots, n_{i,m_i-1}$ e n_{i,m_i} são números naturais que satisfazem, simultaneamente, $n_{i,j} \geq n_{i,l}, \forall j > l$, e $\sum_{j=1}^{m_i} n_{i,j} = N_i$
 $\mathbb{N}$ - conjunto dos números naturais ($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$)

Parâmetros de Distribuições Marginais

- a_{X_i} - média do componente em fase do sinal i
 a_{Y_i} - média do componente em quadratura do sinal i
 $a_{X_{i,j}}$ - média do componente em fase do *cluster* j do sinal i
 $a_{Y_{i,j}}$ - média do componente em quadratura do *cluster* j do sinal i
 k_i - fator de Rice do sinal i (razão de potências médias entre o componente de linha de visada direta e o componente espalhado do sinal i)
 m_0 - número de *clusters* compartilhados entre dois sinais (domínio discreto)
 m_i - número de *clusters* do sinal i , $i = 1, 2$ (domínio discreto)
 η_i - parâmetro de Hoyt do sinal i (razão de potências médias entre os componentes aleatórios em fase e em quadratura do sinal i)
 $\eta_{i,j}$ - parâmetro de Hoyt do *cluster* j do sinal i (razão de potências médias entre os componentes aleatórios em fase e em quadratura do *cluster* j do sinal i)
 κ_i - razão de potências médias entre a onda dominante e o agregado de ondas espalhadas do sinal i
 κ_{X_i} - razão de potências médias entre os componentes em fase da onda dominante e do agregado de ondas espalhadas do sinal i
 κ_{Y_i} - razão de potências médias entre os componentes em quadratura da onda dominante e do agregado de ondas espalhadas do sinal i
 $\kappa_{i,j}$ - razão de potências médias entre a onda dominante e o agregado de ondas espalhadas do *cluster* j do sinal i
 $\kappa_{X_{i,j}}$ - razão de potências médias entre os componentes em fase da onda dominante e do agregado de ondas espalhadas do *cluster* j do sinal i
 $\kappa_{Y_{i,j}}$ - razão de potências médias entre os componentes em quadratura da onda dominante e do agregado de ondas espalhadas do *cluster* j do sinal i
 μ_0 - número de *clusters* compartilhados entre dois sinais (domínio contínuo)
 μ_i - número de *clusters* do sinal i , $i = 1, 2$ (domínio contínuo)
 σ_{X_i} - desvio padrão do componente em fase do sinal i
 σ_{Y_i} - desvio padrão do componente em quadratura do sinal i
 $\sigma_{X_{i,j}}$ - desvio padrão do componente em fase do *cluster* j do sinal i
 $\sigma_{Y_{i,j}}$ - desvio padrão do componente em quadratura do *cluster* j do sinal i
 Ω_i - potência média total do sinal i
 $\Omega_{i,j}$ - potência média total do *cluster* j do sinal i

Parâmetros de Distribuições Conjuntas

- ν_1 - coeficiente de correlação dos componentes em fase de dois sinais
- ν_2 - coeficiente de correlação dos componentes em quadratura de dois sinais
- $\nu_{1,j}$ - coeficiente de correlação dos componentes em fase do *cluster* j de dois sinais
- $\nu_{2,j}$ - coeficiente de correlação dos componentes em quadratura do *cluster* j de dois sinais
- ν_c - coeficiente de correlação dos componentes em fase de dois sinais Riceanos rotacionados
- ν_s - coeficiente de correlação dos componentes em quadratura de dois sinais Riceanos rotacionados
- $\nu_{c,j}$ - coeficiente de correlação dos componentes em fase do *cluster* Riceano j de dois sinais
- $\nu_{s,j}$ - coeficiente de correlação dos componentes em quadratura do *cluster* Riceano j de dois sinais
- ρ - coeficiente de correlação dado por $\rho = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2} = \sqrt{\nu_c^2 + \nu_s^2}$
- ρ_j - coeficiente de correlação dado por $\rho_j = \sqrt{\nu_{1,j}^2 + \nu_{2,j}^2} = \sqrt{\nu_{c,j}^2 + \nu_{s,j}^2}$

Variáveis Aleatórias

- A_{ni} - amplitude normalizada da onda difusa n do sinal i
- R_i - envoltória do i -ésimo sinal
- $\hat{R}_i$ - envoltória normalizada do sinal i
- T_{ni} - tempo de propagação da onda difusa n do sinal i
- T - tempo de chegada das ondas difusas (referência: instante de chegada da onda de linha de visada direta)
- W_i - potência do sinal i
- $W_{i,j}$ - potência do *cluster* j do sinal i
- $\hat{W}_i$ - potência normalizada do sinal i
- $\hat{W}_{i,j}$ - potência normalizada do *cluster* j do sinal i
- X_i - componente em fase do sinal i
- $X_{i,j}$ - componente em fase do *cluster* j do sinal i
- $\tilde{X}$ - Gaussiana de média nula
- Y_i - componente em quadratura do sinal i
- $Y_{i,j}$ - componente em quadratura do *cluster* j do sinal i
- $\tilde{Y}$ - Gaussiana de média nula
- Θ_{ni} - ângulo de chegada da onda difusa n do sinal i
- Ψ_i - fase do sinal i

Funções e Operadores Estatísticos

$p(\cdot)$	- função densidade de probabilidade
$p(\cdot, \cdot)$	- função densidade de probabilidade conjunta
$\text{Cov}\{\cdot, \cdot\}$	- covariância das variáveis aleatórias de entrada
$E\{\cdot\}$	- valor esperado da variável aleatória de entrada
$\text{Var}\{\cdot\}$	- variância da variável aleatória de entrada
$\delta_{N_1, N_2}^E(\cdot)$	- coeficiente de correlação da envoltória, ordens N_1 e N_2
$\delta_{N_1, N_2}^P(\cdot)$	- coeficiente de correlação da potência, ordens N_1 e N_2

Funções e Operadores Determinísticos

$\arg\{\cdot\}$	- fase do número complexo de entrada ($\arg\{0\} = 0$)
$\cos(\cdot)$	- função cosseno
$\exp(\cdot)$	- função exponencial
$\text{sen}(\cdot)$	- função seno
${}_1F_1(\cdot; \cdot; \cdot)$	- função hipergeométrica confluyente de Kummer
$D(\cdot)$	- diretividade da antena receptora
$I_n(\cdot)$	- função de Bessel modificada do primeiro tipo de ordem n
$\Gamma(\cdot)$	- função gama
$\prod$	- produtório
$\sum$	- somatório
$\int$	- integral
$\lfloor \cdot \rfloor$	- maior inteiro inferior ou igual ao valor de entrada

Vetores e Matrizes

$\mathbf{a}$	- vetor média de variáveis aleatórias Gaussianas
$\mathbf{v}$	- vetor de valores de Gaussianas
$\mathbf{k}, \mathbf{k}$	- vetores de fatores de Rice de <i>clusters</i>
$\hat{\mathbf{r}}$	- vetor de valores de envoltórias normalizadas Riceanas
$\mathbf{C}$	- matriz covariância de variáveis aleatórias Gaussianas
$\mathbf{V}$	- vetor de variáveis aleatórias Gaussianas
$\hat{\mathbf{R}}$	- vetor de variáveis aleatórias das envoltórias normalizadas Riceanas
$\boldsymbol{\eta}$	- vetor de parâmetros de Hoyt de <i>clusters</i>
$\boldsymbol{\nu}$	- vetor de coeficientes de correlação de Gaussianas de <i>clusters</i>
$\boldsymbol{\psi}$	- vetor de valores de fases Riceanas
Λ	- determinante da matriz covariância
$\boldsymbol{\Psi}$	- vetor de de variáveis aleatórias das fases Riceanas
$\boldsymbol{\Omega}_i$	- vetor de potências médias dos <i>clusters</i> do sinal i

Artigos

1. José Ricardo Mendes and Michel Daoud Yacoub, “A Bivariate Ricean Model and Its Statistics”, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, aceito para publicação, prevista para Março de 2007
2. José Ricardo Mendes, Michel Daoud Yacoub, and Gustavo Frainderaich, “Closed-form Generalized Power Correlation Coefficient of the Hoyt Fading Model”, *IEEE Communications Letters*, vol. 1, no 2, 94-96, February 2006
3. José Ricardo Mendes, Michel Daoud Yacoub, and Daniel Benevides da Costa, “Closed-form Generalized Power Correlation Coefficient of the Ricean Fading Model”, *European Transactions on Communications*, aceito para publicação
4. José Ricardo Mendes and Michel Daoud Yacoub, “Closed-form Generalized Power Correlation Coefficient of Ricean Channels”, XXII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT 2005), Campinas, SP, Setembro 2005
5. José Ricardo Mendes and Michel Daoud Yacoub, “The Power Correlation Coefficient of a General Fading Model”, IEEE International Microwave and Optoelectronics Conference (IMOC 2005), Brasília, DF, Julho 2005
6. Daniel Benevides da Costa, Michel Daoud Yacoub, José Cândido Santos Filho, Gustavo Frainderaich, and José Ricardo Mendes, “Generalized Nakagami-m Phase Crossing Rate”, *IEEE Communications Letters*, vol.10, no 1, 13-15, January 2006
7. Daniel Benevides da Costa, Michel Daoud Yacoub, José Cândido Santos Filho, Gustavo Frainderaich, and José Ricardo Mendes, “Generalized Nakagami-m Phase Crossing Rate”, XXII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT 2005), Campinas, SP, Setembro 2005
8. Gustavo Frainderaich, Michel Daoud Yacoub, José Ricardo Mendes and José Cândido Silveira Santos Filho, “Level Crossing Rates and Average Fade Durations for Diversity-Combining of Non-Identical Correlated Hoyt Channels”, XXII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT 2005), Campinas, SP, Setembro 2005
9. José Cândido Silveira Santos Filho, Michel Daoud Yacoub, José Ricardo Mendes and Gustavo Frainderaich, “General Exact Level Crossing Rates and Average Fade Durations of Dual Diversity Combiners over Non-Identical Correlated Ricean Channels”, XXII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT 2005), Campinas, SP, Setembro 2005

Capítulo 1

Introdução

Em comunicações sem fio, um número muito grande de fatores afeta diretamente a qualidade do sinal recebido. Por isso, sua intensidade sofre freqüentes flutuações, ora proporcionando um sinal de boa qualidade, ora o degradando [1]. Tais flutuações são formadas por uma variação lenta da média global do sinal (desvanecimento lento), à qual se superpõem variações instantâneas (desvanecimento rápido). Essa característica de variação do sinal está fortemente associada a seu meio de propagação, tais como áreas urbanas, suburbanas ou rurais, com baixa ou alta densidade de prédios, regiões planas ou montanhosas, tipo de cobertura vegetal, dentre outros fatores, apresentam alta influência na qualidade do sinal. Isso sugere a classificação das configurações de espalhamento em tipos distintos de canais [2]. Esta dissertação estuda diversos modelos de canais com desvanecimento rápido, focalizando prioritariamente os coeficientes de correlação (espacial, temporal e freqüencial) e os parâmetros de coerência (distância de coerência, tempo de coerência e largura de banda de coerência).

1.1 Coeficientes de Correlação e Parâmetros de Coerência

Nesta seção, delineiam-se os coeficientes de correlação e parâmetros de coerência nos domínios do espaço, do tempo e da freqüência.

1.1.1 Domínio do Espaço

O desvanecimento rápido decorre do fenômeno de múltiplos percursos. Nesse fenômeno, o sinal é composto por inúmeras ondas espalhadas que, de acordo com suas fases, podem sofrer interferência construtiva, implicando sinal de melhor qualidade, ou interferência destrutiva, deteriorando o sinal. Como as fases das ondas espalhadas mudam de um ponto para outro no

espaço, o padrão de interferência daquelas ondas varia espacialmente.

Coeficiente de Correlação Espacial

O coeficiente de correlação espacial é uma estatística que indica o grau de similaridade entre dois sinais chegando a pontos diferentes do espaço, tendo-se como referências suas respectivas médias.

Distância de Coerência

A distância de coerência é a separação espacial a partir da qual dois sinais são considerados decorrelacionados. Técnicas de diversidade espacial em que o sinal é recebido em antenas distintas na unidade móvel empregam esse parâmetro como indicador da distância adequada a ser aplicada entre as antenas. Isso porque sinais recebidos a distâncias superiores ou iguais à distância de coerência sofrem desvanecimentos independentes.

1.1.2 Domínio do Tempo

Nos modelos que descrevem o desvanecimento rápido, a variação temporal da intensidade do sinal decorre da mobilidade do receptor. Assim, estatísticas e parâmetros temporais são obtidos de seus correspondentes espaciais através da transformação de distância em tempo.

Coeficiente de Correlação Temporal

O coeficiente de correlação temporal é uma estatística que indica o grau de similaridade entre dois sinais chegando ao receptor em instantes distintos, tendo-se como referências suas respectivas médias.

Tempo de Coerência

O tempo de coerência é definido como o intervalo de tempo no interior do qual as características de desvanecimento do canal permanecem inalteradas. Esse conceito é aplicado em técnicas de diversidade temporal, que consiste na transmissão de uma mesma informação em tempos distintos. Sinais transmitidos a uma separação temporal superior ao tempo de coerência sofrem desvanecimentos independentes. Logo, para a aplicação eficaz da diversidade temporal, o intervalo de tempo entre duas amostras idênticas da informação transmitida deve exceder o tempo de coerência.

1.1.3 Domínio da Frequência

A envoltória de um sinal chegando a um ponto fixo no espaço depende de sua frequência de transmissão. Isso ocorre porque as interferências (construtivas ou destrutivas) entre as várias ondas compondo o sinal recebido variam de acordo com suas fases, e estas estão diretamente relacionadas à frequência do sinal transmitido.

Coeficiente de Correlação Freqüencial

O coeficiente de correlação freqüencial é uma estatística que indica o grau de similaridade entre dois sinais transmitidos a frequências diferentes, tendo-se como referências suas respectivas médias.

Largura de Banda de Coerência

Largura de banda de coerência é a máxima separação freqüencial entre dois sinais de modo que ambos sejam considerados correlacionados [1, 3]. Ela constitui um parâmetro importante em sistemas de diversidade freqüencial. Nesse tipo de diversidade, sinais contendo a mesma informação são transmitidos por meio de portadoras com frequências distintas. A separação freqüencial entre essas portadoras deve ser suficientemente grande de modo a garantir descorrelação entre os sinais. Dessa forma, a largura de banda de coerência é usada na identificação da menor separação freqüencial entre os sinais.

Alternativamente, a largura de banda de coerência é referência na classificação de sistemas de faixa estreita ou de faixa larga. Nesse caso, ela designa o intervalo de frequência no interior do qual todos os componentes espectrais são igualmente afetados pelo desvanecimento do canal, ou seja, a resposta do canal permanece aproximadamente plana. Sistemas operando em faixas de frequência substancialmente inferiores à largura de banda de coerência são conhecidos como sistemas de faixa estreita. Em tais sistemas, o ruído multiplicativo é basicamente o mesmo ao longo de toda a faixa de frequência, caracterizando desvanecimento não-seletivo. Por outro lado, sistemas operando em faixas de frequência superiores à largura de banda de coerência são conhecidos como sistemas de faixa larga. Nesses sistemas, os componentes espectrais do sinal são diferentemente afetados pelo fenômeno de múltiplos percursos, ocorrendo então desvanecimento seletivo.

1.1.4 Coeficientes de Correlação da Envoltória e da Potência

Os parâmetros de coerência de canais com desvanecimento são determinados a partir do coeficiente de correlação de ordem unitária da envoltória. Como será visto no Capítulo 3, a

dedução desse coeficiente é bastante complexa. Por outro lado, o coeficiente de correlação de ordem unitária da potência é bem mais simples de ser calculado e geralmente constitui boa aproximação daquele coeficiente. Por isso, tal coeficiente também será utilizado na estimativa dos parâmetros de coerência para diversos canais com desvanecimento.

1.2 Modelos de Desvanecimento

Na literatura, há diversos modelos propostos para caracterizar estatisticamente um canal com desvanecimento rápido. Alguns modelos consideram o sinal formado por diversos *clusters* — ou agregados — de ondas, sendo que os atrasos temporais de propagação das ondas são próximos no interior de cada *cluster*, ao passo que o espalhamento do atraso temporal varia de um *cluster* para outro [4, 5].

A Fig. 1.1 sintetiza os MDs tratados nesta tese. Notam-se três possíveis generalizações com relação ao MD Rayleigh: onda dominante, desequilíbrio de potência dos componentes aleatórios em quadratura e *clusters*.

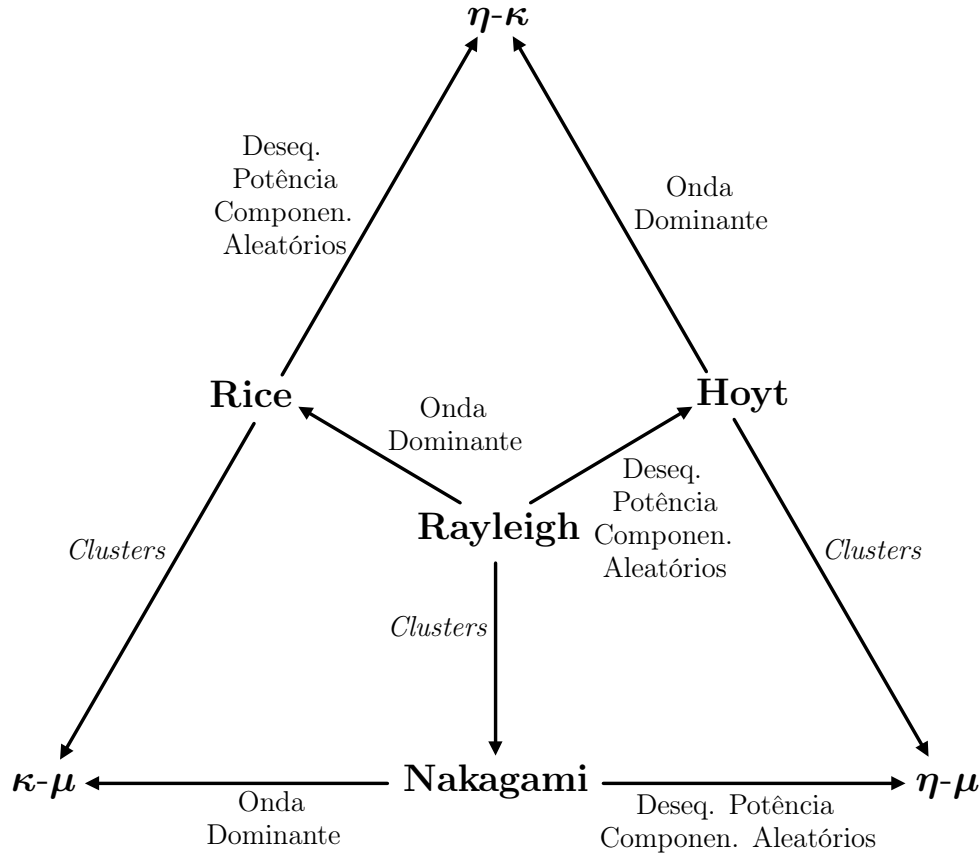


Fig. 1.1: Modelos de desvanecimento.

A seguir, é feita uma breve descrição dos MDs ilustrados na Fig. 1.1. Uma propriedade comum a todos eles é que os componentes em quadratura do sinal em um dado instante são variáveis aleatórias (VAs) independentes.

1.2.1 Modelos de Sinais com Um *Cluster*

Nos modelos de desvanecimento (MDs) em que o sinal é composto de um *cluster*, os componentes em quadratura são VAs Gaussianas.

Modelo de Desvanecimento Rayleigh

Este modelo é baseado em uma distribuição estatística apresentada no trabalho de Lord Rayleigh [6] e constitui o MD mais simples e utilizado. Nele, o sinal é composto exclusivamente de ondas espalhadas (ou difusas), e seus componentes em quadratura têm médias nulas e variâncias iguais.

Modelo de Desvanecimento Rice

Quando às ondas espalhas se sobrepõe uma onda de linha de visada direta, o sinal segue o MD Rice, em que os componentes em quadratura têm médias arbitrárias e variâncias iguais. Diversas estatísticas deste modelo foram deduzidas e estudadas por S. O. Rice [7, 8, 9].

Modelo de Desvanecimento Hoyt

No MD Hoyt, as médias dos componentes em quadratura são nulas, ao passo que suas variâncias são arbitrárias. Estatísticas marginais deste modelo foram desenvolvidas por R. S. Hoyt em [10].

Modelo de Desvanecimento η - κ Assimétrico

Como o MD Rice, este modelo [11] considera a presença de uma onda dominante, aqui responsável pela média de um dos componentes em quadratura. A média do outro componente é nula, e as variâncias de ambos os componentes são arbitrárias.

Modelo de Desvanecimento η - κ Simétrico

Novamente, além das ondas espalhadas, há uma onda dominante [12]. Neste caso, a onda dominante está presente em ambos os componentes em quadratura, implicando médias arbi-

trárias. Por outro lado, as variâncias são tomadas de modo que a razão delas seja igual ao quadrado da razão das médias.

Modelo de Desvanecimento η - κ Generalizado

Este modelo contempla todos os anteriores como casos particulares. Nele, os componentes em quadratura do sinal têm médias arbitrárias, oriundas da onda dominante, e variâncias arbitrárias, decorrentes das ondas espalhadas.

1.2.2 Modelos de Desvanecimento com Vários *Clusters*

Como já mencionado, alguns modelos consideram o sinal composto de *clusters* de ondas, no interior dos quais os componentes em quadratura são também VAs Gaussianas. Geralmente, as estatísticas marginais são idênticas para todos os *clusters* do sinal — isso ocorre nos MDs Nakagami e η - μ .

Modelo de Desvanecimento Nakagami

Este modelo considera o sinal composto de vários *clusters*, sendo que cada *cluster* segue o modelo Rayleigh. Uma análise extensiva da aplicação deste modelo na caracterização de canais com desvanecimento foi realizada por M. Nakagami em [13].

Modelo de Desvanecimento κ - μ

Generalização dos MDs Rice e Nakagami, este modelo [4] descreve o sinal como composto de *clusters* Riceanos, ou seja, *clusters* em que os componentes em quadratura têm médias arbitrárias e variâncias iguais. Uma peculiaridade deste modelo é o fato de ele não assumir propriedades estatísticas idênticas para todos os *clusters* do sinal, pois as médias dos componentes em quadratura podem variar de um *cluster* para outro.

Modelo de Desvanecimento η - μ

Neste modelo [5], cada *cluster* segue o modelo Hoyt, isto é, seus componentes em quadratura têm médias nulas e variâncias arbitrárias. Portanto, os MDs Hoyt e Nakagami são casos particulares dele.

1.3 Estrutura da Dissertação

Os demais capítulos e os apêndices desta dissertação são esboçados a seguir.

Capítulo 2

Deduz-se do coeficiente de correlação da envoltória do canal com desvanecimento Rice. O ponto de partida é o modelo físico-estatístico do canal. Desse modo, esse coeficiente é expresso em termos de parâmetros físicos do modelo.

Capítulo 3

Calcula-se o coeficiente de correlação da potência de um modelo geral de desvanecimento. O ponto de partida é o modelo estatístico do canal. Todos os MDs descritos na Seção 1.2 são casos particulares do MD tratado no Capítulo 3.

Capítulo 4

Apresentam-se os resultados numéricos das estatísticas deduzidas nos dois capítulos precedentes. Além disso, determinam-se os parâmetros de coerência dos sinais para os diversos MDs.

Capítulo 5

Realizam-se os comentários finais desta dissertação.

Apêndice A

Deduzem-se estatísticas conjuntas (função densidade de probabilidade conjunta e momento conjunto) de duas envoltórias Riceanas.

Apêndice B

Calculam-se o momento marginal e momentos conjuntos, todos de ordem inteira, de VAs Gaussianas.

Apêndice C

Deduzem-se estatísticas de ordem unitária da potência em canais que seguem o modelo geral de desvanecimento descrito no Capítulo 3.

Apêndice D

Analisa-se propriedades dos coeficientes de correlação frequenciais do MD Hoyt e dos MDs η - κ .

Capítulo 2

Coeficiente de Correlação da Envoltória de Canais com Desvanecimento Rice

O MD Rice é um dos mais importantes modelos utilizados para descrever estatisticamente um sinal propagando-se em um ambiente de comunicações sem fio. Nesse modelo, o sinal é composto de diversas ondas espalhadas, responsáveis por seu comportamento aleatório, e por uma onda de linha de visada direta. Este capítulo fornece o coeficiente de correlação da envoltória (CCE) de sinais com separação espaço-freqüencial em canais com desvanecimento Rice. Todo o tratamento e seus respectivos resultados contemplam ambientes não-estacionários, definidos aqui como ambientes em que os parâmetros do MD Rice — a potência média e o fator de Rice — diferem de um sinal para outro.

O coeficiente de correlação de ordem unitária da potência (ou envoltória quadrática) de dois sinais em canais com desvanecimento Rice foi deduzido em [14] e [15], nos quais uma formulação distinta da apresentada neste capítulo foi realizada. Em [16], a função densidade de probabilidade conjunta (JPDF) das envoltórias e das fases de dois sinais Riceanos foi calculada. O objetivo era deduzir a função densidade de probabilidade (PDF) da diferença de fase daqueles sinais; por essa razão, a JPDF das envoltórias não foi tratada. Em [17], usando a JPDF das envoltórias e da diferença de fase fornecida em [16], a JPDF das envoltórias foi obtida para ambientes não-estacionários em forma de integral. A JPDF das envoltórias deduzida neste capítulo é expressa em termos de somatório, diferindo, portanto, da apresentada em [17].

Para dois sinais Riceanos, o tratamento mais abrangente encontrado na literatura referente às estatísticas tratadas neste capítulo foi desenvolvido por Middleton em [18]. Em seu trabalho, Middleton examinou um modelo geral de portadora na presença de ruído aditivo Gaussiano. Uma vez que o desvanecimento rápido é um ruído multiplicativo, o assunto do presente capítulo difere daquele de Middleton; no entanto, sob o ponto de vista estritamente matemático, todas

as estatísticas fornecidas aqui são mais gerais do que suas contrapartidas presentes no trabalho de Middleton [18]. Em particular, o coeficiente de correlação da envoltória é mais geral do que aquele fornecido em [18] nos seguintes aspectos:

- aqui, as variâncias das Gaussianas de um sinal podem ser distintas de suas correspondentes do outro sinal (ambientes não-estacionários); em [18], elas são iguais;
- aqui, ambos os componentes em fase e em quadratura do sinal têm médias arbitrárias; em [18], um deles tem média nula;
- aqui, as médias dos sinais recebidos não estão em fase; em [18], elas são cofasadas;
- aqui, a correlação entre o componente em fase de um sinal e o componente em quadratura do outro sinal é arbitrária; em [18], ela é considerada nula; e
- aqui, o momento conjunto e o coeficiente de correlação da envoltória valem para ordens arbitrárias; em [18], elas são idênticas.

No que se refere aos parâmetros físicos do modelo, uma contribuição deste trabalho é o tratamento geral dado aos ângulos de chegada das ondas que compõem os sinais. Na obtenção da diferença entre os tempos de propagação das ondas chegando aos pontos de recepção, trabalhos anteriores [3, 19, 20] usaram uma aproximação em que os ângulos de chegada são os mesmos em ambos os pontos. De fato, isso foi feito sob a hipótese de que a distância de qualquer espalhador a qualquer ponto recepção é muito maior do que a distância entre os pontos de recepção, o que não é necessariamente verdadeiro. O presente capítulo fornece uma expressão simples e exata para a diferença entre os tempos de atraso de propagação, por meio da introdução de uma nova VA, que provém da diferença entre os ângulos de chegada de cada onda espalhada nos dois pontos de recepção.

A Seção 2.1 analisa a diferença de fase de duas ondas com separação espaço-frequencial. A Seção 2.2 descreve os sinais e as propriedades do canal. A Seção 2.3 provê diversas estatísticas do sinal. A Seção 2.4 elucida uma configuração em que a dependência espacial é estendida à dependência espaço-temporal. A Seção 2.5 conclui o capítulo.

2.1 Diferença de Fase de Duas Ondas com Separação Espaço-Frequencial

Considere duas ondas, onda 1 e onda 2, chegando a dois pontos de recepção distintos no espaço, P_1 e P_2 , como mostrado na Fig. 2.1. A frequência e o ângulo de chegada da onda i ,

$i = 1, 2$, são ω_i e θ_i , respectivamente, e a distância entre P_1 e P_2 é d . Ambas as ondas são transmitidas pela mesma antena e percorrem o mesmo caminho até atingirem um espalhador no ponto P_0 , onde sofrem algum fenômeno ondulatório (reflexão, refração, difração, dispersão) e desviam-se rumo aos pontos P_1 e P_2 .

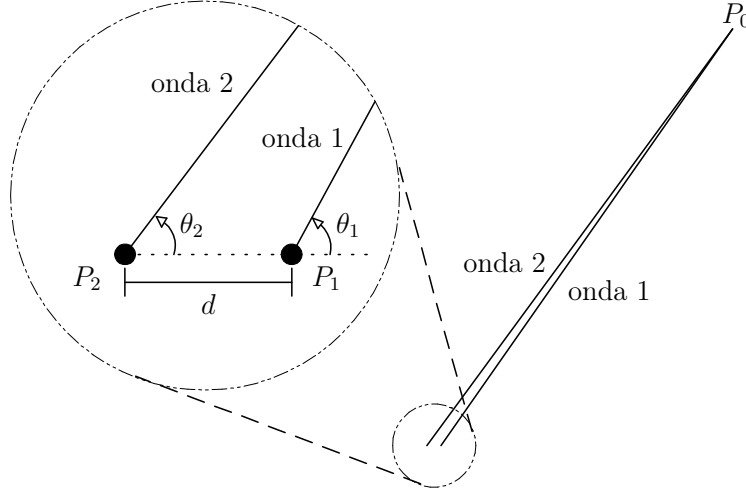


Fig. 2.1: Diferença de fase entre duas ondas com separação espaço-freqüencial.

Definindo T_i como o tempo em que a onda i se propaga do transmissor ao ponto P_i e aplicando relações geométricas e trigonométricas na Fig. 2.1, a diferença $\Delta T = T_2 - T_1$ pode ser obtida:

$$\Delta T = \frac{d \sin(\theta_1) - \sin(\theta_2)}{c \sin(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{d \cos(\theta_a)}{c \cos(\theta_d)}, \quad (2.1a)$$

em que c é a velocidade da luz,

$$\theta_a = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \quad e \quad \theta_d = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}. \quad (2.1b)$$

Tomando a fase do transmissor como referência, a fase da onda i atingindo o ponto P_i é $\omega_i T_i$. Assim, no que se refere à diferença de fase entre as duas ondas,

$$\omega_2 T_2 - \omega_1 T_1 = \omega_a \Delta T + \Delta \omega T_a, \quad (2.2a)$$

em que

$$\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1, \quad \omega_a = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad e \quad T_a = \frac{T_1 + T_2}{2}. \quad (2.2b)$$

Em (2.2a), a diferença de fase compõe-se de dois termos: o primeiro, $\omega_a(T_2 - T_1)$, provém da

distância entre os pontos de recepção e será chamado de *diferença de fase espacial*; o segundo, $(\omega_2 - \omega_1)T_a$, advém da diferença de frequência entre as ondas transmitidas e será chamado de *diferença de fase frequencial*. Quando associado ao movimento do receptor, o primeiro termo caracteriza o efeito Doppler.

2.2 Modelo do Canal

2.2.1 Sinais do Modelo

Fenômeno de Múltiplos Percursos

O sinal transmitido em um meio de propagação sem fio espalha-se no ambiente, percorrendo diversos caminhos até atingir o receptor. O sinal recebido é então composto de um número muito grande de ondas espalhadas (ou difusas), que se combinam ora construtivamente, ora destrutivamente. Os fenômenos físicos sofridos por cada onda ao longo de seu percurso de propagação são eventos incertos (ou indeterminados); conseqüentemente, a amplitude, o tempo de propagação e o ângulo de chegada de cada onda são modeladas como VAs. Como decorrência desse fenômeno, o sinal varia randomicamente ao longo do ambiente de propagação.

Componente de Linha de Visada Direta

Em algumas configurações físicas, além das ondas espalhadas, há uma onda de linha de visada direta. Esta, por sua vez, é caracterizada por propriedades (amplitude, tempo de propagação e ângulo de chegada) determinísticas.

Sinal Riceano

Da soma do componente difuso ao componente de linha de visada direta resulta um sinal cujas propriedades estatísticas de primeira e segunda ordens seguem o modelo de Rice [7].

2.2.2 Equações do Modelo

Suponha a envoltória complexa de um sinal tonal transmitido em um ambiente de comunicações sem fio,

$$Z_T(t) = a \exp(\mathbf{i}\omega t), \quad (2.3)$$

em que:

- a — amplitude do sinal transmitido;
- $\mathbf{i}$ — unidade imaginária ($\mathbf{i} = \sqrt{-1}$);
- ω — frequência do sinal transmitido; e
- t — tempo.

Como citado na subseção anterior, no modelo de Rice aplicado a comunicações móveis, o sinal atingindo o receptor possui dois componentes: um componente espalhado (ou difuso), originário do fenômeno de múltiplos percursos, e um componente de linha de visada direta. Desse modo, sendo $Z_R(t, \omega, P)$ a envoltória complexa do sinal recebido em um ponto P ,

$$Z_R(t, \omega, P) = \frac{\sigma_S}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \left[\sqrt{D(\Theta_n)} A_n \exp [\mathbf{i}(\omega t - \omega T_n)] \right] + \sqrt{D(\theta_0)} a_0 \exp [\mathbf{i}(\omega t - \omega t_0)], \quad (2.4)$$

em que:

- $D(\cdot)$ — diretividade da antena receptora;
- A_n — amplitude normalizada da onda espalhada n do sinal chegando ao receptor ($n = 1, 2, \dots, N$, VAs identicamente distribuídas);
- σ_S — constante de normalização, tomada de modo a tornar $E\{A_n^2\} = 1$, em que $E\{\cdot\}$ é o operador esperança;
- a_0 — amplitude da onda de linha de visada direta chegando ao receptor (valor determinístico);
- Θ_n — ângulo de chegada da onda espalhada n ($n = 1, 2, \dots, N$, VAs identicamente distribuídas);
- θ_0 — ângulo de chegada da onda de linha de visada direta (valor determinístico);
- T_n — tempo de propagação da onda espalhada n ($n = 1, 2, \dots, N$, VAs identicamente distribuídas);
- t_0 — tempo de propagação da onda de linha de visada direta (valor determinístico);
- e
- N — número de ondas difusas atingindo o receptor ($N \rightarrow \infty$).

Observe que, embora o efeito Doppler não apareça explicitamente nas fases dos componentes do sinal, ele está implícito no tempo de propagação de cada onda e aparece quando a diferença de fase é obtida (*diferença de fase espacial*). Além disso, como a onda de linha de visada direta percorre o caminho mais curto, ela é a primeira onda a chegar ao receptor; logo, $T_n \geq t_0 \forall n$.

Definindo $S_R(t, \omega, P)$ como a parte real de $Z_R(t, \omega, P)$, ou seja, $S_R(t, \omega, P) = \text{Re}\{Z_R(t, \omega, P)\}$, e aplicando o modelo a dois sinais,

$$S_R(t, \omega_i, P_i) = X(\omega_i, P_i) \cos(\omega_i t) + Y(\omega_i, P_i) \text{sen}(\omega_i t), \quad i = 1, 2, \quad (2.5a)$$

em que $X(\omega_i, P_i)$ e $Y(\omega_i, P_i)$ são os componentes em quadratura do sinal em banda base:

$$X(\omega_i, P_i) = \frac{\sigma_{S_i}}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \left[\sqrt{D(\Theta_{ni})} A_{ni} \cos(\omega_i T_{ni}) \right] + \sqrt{D(\theta_{0i})} a_{0i} \cos(\omega_i t_{0i}), \quad i = 1, 2, \text{ e} \quad (2.5b)$$

$$Y(\omega_i, P_i) = \frac{\sigma_{S_i}}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \left[\sqrt{D(\Theta_{ni})} A_{ni} \sin(\omega_i T_{ni}) \right] + \sqrt{D(\theta_{0i})} a_{0i} \sin(\omega_i t_{0i}), \quad i = 1, 2. \quad (2.5c)$$

Doravante, por simplicidade, as VAs $X(\omega_i, P_i)$ e $Y(\omega_i, P_i)$ serão representadas simplesmente como X_i and Y_i .

Convém salientar que o modelo descrito aqui considera ambientes não-estacionários, onde os parâmetros estatísticos σ_S e a_0 diferem de um sinal para outro.

2.2.3 Propriedades das Variáveis Aleatórias do Modelo

Nesta subseção, delineiam-se as propriedades do canal que serão úteis no cálculo das estatísticas do sinal.

1^a) Cada VA associada a uma onda espalhada é estatisticamente independente daquelas relacionadas a qualquer outra onda espalhada. Mais especificamente, sempre que $n \neq m$, as VAs A_{ni} , T_{ni} , e Θ_{ni} ($i = 1, 2$) são estatisticamente independentes das VAs A_{mj} , T_{mj} , e Θ_{mj} ($j = 1, 2$).

2^a) A amplitude A_{ni} ($i = 1, 2$) da onda espalhada n é estatisticamente independente do tempo de propagação T_{nj} e do ângulo de chegada Θ_{nj} ($j = 1, 2$) da mesma onda.

3^a) As VAs $\sin(\omega_i T_{ni})$ e $\cos(\omega_i T_{ni})$ têm médias nulas. Isso é fundamentado como segue. Uma vez que o seno e o cosseno são funções periódicas com período 2π ,

$$\sin(\omega_i T_{ni}) = \sin(\Phi_{ni}), \quad \text{e} \quad \cos(\omega_i T_{ni}) = \cos(\Phi_{ni}), \quad (2.6a)$$

em que Φ_{ni} é o resto da divisão de $\omega_i T_{ni}$ por 2π . Como, em situações práticas, ω_i é muito grande (da ordem de 10^9 ou mais), a PDF de $\omega_i T_{ni}$ é praticamente constante no interior de qualquer intervalo $2l\pi \leq \omega_i T_{ni} \leq 2(l+1)\pi$; portanto, Φ_{ni} pode ser considerado como uniformemente distribuído de 0 a 2π . Assim,

$$E\{\sin(\omega_i T_{ni})\} = E\{\sin(\Phi_{ni})\} = 0, \quad \text{e} \quad E\{\cos(\omega_i T_{ni})\} = E\{\cos(\Phi_{ni})\} = 0. \quad (2.6b)$$

4^a) As VAs $\sin(2\omega_i T_{ni})$, $\cos(2\omega_i T_{ni})$, $\sin(\omega_1 T_{n1} + \omega_2 T_{n2})$ e $\cos(\omega_1 T_{n1} + \omega_2 T_{n2})$ têm médias nulas. Isso decorre de argumentos similares aos utilizados na propriedade anterior.

5^a) Empregando as relações da Seção 2.1, a VA $\omega_2 T_{n2} - \omega_1 T_{n1}$ e o valor determinístico

$\omega_2 t_{02} - \omega_1 t_{01}$ são expressos como segue:

$$\omega_2 T_{n2} - \omega_1 T_{n1} = \beta_a d \frac{\cos(\Theta_{na})}{\cos(\Theta_{nd})} + \Delta\omega T_{na}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \text{ e} \quad (2.7a)$$

$$\omega_2 t_{02} - \omega_1 t_{01} = \beta_a d \frac{\cos(\theta_{0a})}{\cos(\theta_{0d})} + \Delta\omega t_{0a}, \quad (2.7b)$$

em que

$$\beta_a = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}, \quad \beta_i = \frac{\omega_i}{c}, \quad i = 1, 2, \quad (2.7c)$$

$$t_{0a} = \frac{t_{01} + t_{02}}{2}, \quad T_{na} = \frac{T_{n1} + T_{n2}}{2}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (2.7d)$$

$$\theta_{0a} = \frac{\theta_{01} + \theta_{02}}{2}, \quad \Theta_{na} = \frac{\Theta_{n1} + \Theta_{n2}}{2}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (2.7e)$$

$$\theta_{0d} = \frac{\theta_{01} - \theta_{02}}{2}, \quad \Theta_{nd} = \frac{\Theta_{n1} - \Theta_{n2}}{2}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (2.7f)$$

Como $T_{ni} \geq t_{0i} \forall n, i$, então $T_{na} \geq t_{0a} \forall n$.

6^a) O ângulo de chegada Θ_{ni} ($i = 1, 2$) é estatisticamente independente do tempo de propagação T_{na} . Esta propriedade é irrelevante nos seguintes casos: se a antena é isotrópica ($D(\theta) = 1$); ou se a análise é focada no sinal chegando ao receptor e não no sinal recebido, isto é, se a diretividade $D(\theta)$ é omitida. Vale observar que a independência estatística daquelas VAs tem sido usualmente assumida na literatura [3, 19, 20].

7^a) Para ambientes não-estacionários, as amplitudes normalizadas A_{n1} e A_{n2} podem ser diferentes. Por essa razão, convém definir $\rho_A(d, \Delta\omega)$ como segue:

$$\rho_A(d, \Delta\omega) = E \{A_{n1} A_{n2}\}. \quad (2.8a)$$

Aplicando a desigualdade do cosseno [21, Equação 6-169] a A_{n1} e A_{n2} ,

$$E^2 \{A_{n1} A_{n2}\} \leq E \{A_{n1}^2\} E \{A_{n2}^2\}. \quad (2.8b)$$

De (2.8b) e $E \{A_{ni}^2\} = 1, i = 1, 2$,

$$\rho_A(d, \Delta\omega) \leq 1. \quad (2.8c)$$

2.2.4 Considerações sobre os Ângulos de Chegada

Trabalhos anteriores [3, 19, 20] aproximaram o ângulo de chegada de cada onda como sendo o mesmo nos dois pontos de recepção ($\Theta_{n1} = \Theta_{n2} = \Theta_n$), resultando $\Theta_{na} = \Theta_n$, $\Theta_{nd} = 0$, e

$T_{n2} - T_{n1} = d \cos(\Theta_n)/c$. De fato, isso foi feito com base na hipótese de que a distância entre qualquer espalhador e qualquer ponto de recepção é muito maior do que a distância entre os dois pontos de recepção, o que não é necessariamente verdadeiro. Além de simples e exata, a relação $T_{n2} - T_{n1} = (d/c)(\cos(\Theta_{na})/\cos(\Theta_{nd}))$ inclui aquela aproximação como caso particular, pois a primeira pode ser usada para qualquer JPDF de Θ_{na} e Θ_{nd} , ao passo que a segunda é válida somente quando a PDF de Θ_{nd} é a função delta de Dirac na origem. Diferentemente das ondas espalhadas, a onda de linha de visada direta chega aos pontos de recepção em direções praticamente paralelas, visto que a distância entre o transmissor e cada ponto de recepção é muito maior do que a distância entre os dois pontos de recepção. Assim sendo, os ângulos de chegada θ_{01} e θ_{02} podem ser considerados iguais. Não obstante, por generalidade, o ângulo θ_{0d} será preservado ao longo de toda dedução teórica.

2.3 Estatísticas do Sinal

Quando $N \rightarrow \infty$, pelo Teorema Central do Limite, as VAs X_1, Y_1, X_2 e Y_2 são conjuntamente Gaussianas. Desse modo,

$$p_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) = \frac{1}{4\pi^2\sqrt{\Lambda}} \exp \left[-\frac{1}{2}(\mathbf{v} - \mathbf{a})^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{v} - \mathbf{a}) \right], \quad (2.9a)$$

em que

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 \end{bmatrix}^T, \quad (2.9b)$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & X_2 & Y_2 \end{bmatrix}^T, \quad (2.9c)$$

$$\mathbf{a} = E \{ \mathbf{V} \}, \quad (2.9d)$$

$$\mathbf{C} = E \left\{ (\mathbf{V} - \mathbf{a})(\mathbf{V} - \mathbf{a})^T \right\}, \text{ e} \quad (2.9e)$$

$$\Lambda = \text{determinante de } \mathbf{C}. \quad (2.9f)$$

Portanto, para expressar a JPDF daquelas VAs em termos dos parâmetros físicos do modelo, basta calcular os elementos do vetor média $\mathbf{a}$ e da matriz de covariância $\mathbf{C}$. Note que, na diagonal da matriz $\mathbf{C}$, estão as variâncias de X_1, Y_1, X_2 e Y_2 .

2.3.1 Médias, Variâncias e Covariâncias das Gaussianas

As equações e propriedades do canal fornecidas na Seção 2.2 são suficientes para encontrar as médias, variâncias, e covariâncias de X_1, Y_1, X_2 e Y_2 . Nesta subseção, são deduzidas expressões

para as estatísticas mais representativas, e, por brevidade, as demais são apresentadas sem provas.

Médias

Definindo a_{X_i} como a média de X_i , então

$$\begin{aligned}
 a_{X_i} &= E\{X_i\} \\
 &\stackrel{(a)}{=} \frac{\sigma_{S_i}}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N E\{A_{ni}\} E\left\{\sqrt{D(\Theta_{ni})} \cos(\omega_i T_{ni})\right\} + \sqrt{D(\theta_{0i})} a_{0i} \cos(\omega_i t_{0i}) \\
 &\stackrel{(b)}{=} \sqrt{D(\theta_{0i})} a_{0i} \cos(\omega_i t_{0i}), \quad i = 1, 2,
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

sendo que: (a) resulta de (2.5b) e da segunda propriedade; e (b), da terceira e sexta propriedades.

Analogamente, definindo a_{Y_i} como a média de Y_i ,

$$a_{Y_i} = \sqrt{D(\theta_{0i})} a_{0i} \sin(\omega_i t_{0i}), \quad i = 1, 2. \tag{2.11}$$

Variâncias

Denotando o operador variância como $Var\{\cdot\}$, então

$$\begin{aligned}
 Var\{X_i\} &= E\{(X_i - a_{X_i})^2\} \\
 &\stackrel{(a)}{=} \frac{\sigma_{S_i}^2}{N} E\left\{\left[\sum_{n=1}^N \sqrt{D(\Theta_{ni})} A_{ni} \cos(\omega_i T_{ni})\right]^2\right\} \\
 &\stackrel{(b)}{=} \frac{\sigma_{S_i}^2}{N} \left[\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N E\{A_{ni} A_{mi}\} E\left\{\sqrt{D(\Theta_{ni}) D(\Theta_{mi})} \cos(\omega_i T_{ni}) \cos(\omega_i T_{mi})\right\}\right] \\
 &\stackrel{(c)}{=} \frac{\sigma_{S_i}^2}{N} \sum_{n=1}^N E\{A_{ni}^2\} E\{D(\Theta_{ni}) \cos^2(\omega_i T_{ni})\} \\
 &\stackrel{(d)}{=} \frac{1}{2} E\{D(\Theta_i)\} \sigma_{S_i}^2 \quad i = 1, 2
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

sendo que: (a) decorre de (2.5b) e (2.10); (b), da primeira e segunda propriedades; (c), da primeira, terceira e sexta propriedades; e (d), de $E\{A_{ni}^2\} = 1$ e da quarta e sexta propriedades. Note que, como $E\{A_{ni}^2\}$ e $E\{D(\Theta_{ni}) \cos^2(\omega_i T_{ni})\}$ são independentes de n , ambos foram removidos do somatório. A independência de n também ocorrerá no cálculo das covariâncias;

assim, quando convier, as esperanças matemáticas envolvidas no cálculo de tais estatísticas também serão removidas do somatório.

Usando um procedimento similar ao anterior, verifica-se que a variância de Y_i é igual à de X_i . Por essa razão, esses valores são denotados simplesmente como σ_i^2 :

$$Var\{X_i\} = Var\{Y_i\} = \sigma_i^2 = \frac{1}{2}E\{D(\Theta_i)\}\sigma_{S_i}^2, \quad i = 1, 2. \quad (2.13)$$

Covariância de X_1 e X_2

Denotando o operador covariância como $Cov\{\cdot, \cdot\}$, então

$$\begin{aligned} Cov\{X_1, X_2\} &= E\{(X_1 - a_{X_1})(X_2 - a_{X_2})\} \\ &\stackrel{(a)}{=} \frac{\sigma_{S1}\sigma_{S2}}{N} E\left\{\left[\sum_{n=1}^N \sqrt{D(\Theta_{n1})} A_{n1} \cos(\omega_1 T_{n1})\right] \left[\sum_{m=1}^N \sqrt{D(\Theta_{m2})} A_{m2} \cos(\omega_2 T_{m2})\right]\right\} \\ &\stackrel{(b)}{=} \frac{\sigma_{S1}\sigma_{S2}}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N E\{A_{n1} A_{m2}\} E\left\{\sqrt{D(\Theta_{n1})D(\Theta_{m2})} \cos(\omega_1 T_{n1}) \cos(\omega_2 T_{m2})\right\} \\ &\stackrel{(c)}{=} \frac{\sigma_{S1}\sigma_{S2}}{N} \sum_{n=1}^N E\{A_{n1} A_{n2}\} E\left\{\sqrt{D(\Theta_{n1})D(\Theta_{n2})} \cos(\omega_1 T_{n1}) \cos(\omega_2 T_{n2})\right\} \\ &\stackrel{(d)}{=} \frac{\sigma_{S1}\sigma_{S2}\rho_A(d, \Delta\omega)}{N} \sum_{n=1}^N E\left\{\sqrt{D(\Theta_{n1})D(\Theta_{n2})} \cos(\omega_2 T_{n2} - \omega_1 T_{n1})\right\} \\ &\stackrel{(e)}{=} \frac{1}{2}\sigma_{S1}\sigma_{S2}\rho_A(d, \Delta\omega) E\left\{\sqrt{D(\Theta_1)D(\Theta_2)} \cos\left[\beta_a d \frac{\cos(\Theta_a)}{\cos(\Theta_d)} + \Delta\omega T_a\right]\right\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

sendo que: (a) segue de (2.5b) e (2.10); (b), da primeira e segunda propriedades; (c), da primeira, terceira e sexta propriedades; (d), da quarta, sexta e sétima propriedades; e (e), da quinta propriedade.

Definindo ν_1 como o coeficiente de correlação de X_1 e X_2 ,

$$\nu_1 = \frac{Cov\{X_1 X_2\}}{\sqrt{Var\{X_1\}Var\{X_2\}}}. \quad (2.15a)$$

Em seguida, usando (2.13),

$$Cov\{X_1, X_2\} = \nu_1 \sigma_1 \sigma_2. \quad (2.15b)$$

De (2.13), (2.14) e (2.15b),

$$\nu_1 = \frac{\rho_A(d, \Delta\omega)}{\sqrt{E\{D(\Theta_1)\}E\{D(\Theta_2)\}}} E\left\{\sqrt{D(\Theta_1)D(\Theta_2)} \cos\left[\beta_a d \frac{\cos(\Theta_a)}{\cos(\Theta_d)} + \Delta\omega T_a\right]\right\}. \quad (2.16)$$

Demais Covariâncias

Usando procedimentos similares ao anterior, obtêm-se as demais covariâncias das VAs Gaussianas:

$$\text{Cov} \{X_i, Y_i\} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.17a)$$

$$\text{Cov} \{Y_1, Y_2\} = \nu_1 \sigma_1 \sigma_2, \quad (2.17b)$$

$$\text{Cov} \{X_1, Y_2\} = \nu_2 \sigma_1 \sigma_2, \text{ e} \quad (2.17c)$$

$$\text{Cov} \{Y_1, X_2\} = -\nu_2 \sigma_1 \sigma_2, \quad (2.17d)$$

em que

$$\nu_2 = \frac{\rho_A(d, \Delta\omega)}{\sqrt{E \{D(\Theta_1)\} E \{D(\Theta_2)\}}} E \left\{ \sqrt{D(\Theta_1) D(\Theta_2)} \sin \left[\beta_a d \frac{\cos(\Theta_a)}{\cos(\Theta_d)} + \Delta\omega T_a \right] \right\}. \quad (2.17e)$$

Embora quatro VAs representando ângulos — Θ_1 , Θ_2 , Θ_a e Θ_d — apareçam em (2.16) e (2.17e), Θ_1 e Θ_2 podem ser eliminados daquelas expressões: de (2.7e) e (2.7f) segue que $\Theta_i = \Theta_a + (-1)^{i+1} \Theta_d$, $i = 1, 2$. Das expressões de ν_1 e ν_2 , tem-se que a correlação espacial está diretamente relacionada aos ângulos de chegada das ondas espalhadas, ao passo que a correlação freqüencial, aos tempos de chegada das ondas espalhadas.

Vetor Média e Matriz de Covariância

Usando as definições e os resultados desta subseção, o vetor média $\mathbf{a}$ e a matriz de covariância $\mathbf{C}$ podem ser expressos como segue:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{X_1} & a_{Y_1} & a_{X_2} & a_{Y_2} \end{bmatrix}^T, \text{ e} \quad (2.18a)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \nu_1 \sigma_1 \sigma_2 & \nu_2 \sigma_1 \sigma_2 \\ 0 & \sigma_1^2 & -\nu_2 \sigma_1 \sigma_2 & \nu_1 \sigma_1 \sigma_2 \\ \nu_1 \sigma_1 \sigma_2 & -\nu_2 \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 & 0 \\ \nu_2 \sigma_1 \sigma_2 & \nu_1 \sigma_1 \sigma_2 & 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}. \quad (2.18b)$$

Aqui, as quatro primeiras generalizações — comparativamente a [18] — mencionadas na introdução deste capítulo são evidenciadas: a primeira decorre da possibilidade de $\sigma_1 \neq \sigma_2$; a segunda, de $a_{X_i} \neq 0$ e $a_{Y_i} \neq 0$; a terceira, de $\omega_2 t_{02} - \omega_1 t_{01} \neq 2\pi l$ (l inteiro); e a quarta, de $\nu_2 \neq 0$. A primeira generalização, $\sigma_1 \neq \sigma_2$, caracteriza ambientes não-estacionários. Já com relação às demais generalizações, cada uma das igualdades $a_{X_i} = 0$, $a_{Y_i} = 0$, $\omega_2 t_{02} - \omega_1 t_{01} = 2\pi l$ (l inteiro)

e $\nu_2 = 0$ é válida, no presente modelo, somente em situações muito específicas, conforme pode ser observado nas expressões de a_{X_i} , a_{Y_i} , $\omega_2 t_{02} - \omega_1 t_{01}$ e ν_2 — respectivamente, (2.10), (2.11), (2.7b) e (2.17e).

Por fim, é importante ressaltar que, apesar de todas as estatísticas apresentadas nesta subseção não dependerem do número N de ondas difusas, a hipótese de que $N \rightarrow \infty$ é fundamental para assegurar que X_1 , Y_1 , X_2 e Y_2 são conjuntamente Gaussianas.

2.3.2 Potências Médias e Fatores de Rice

Representando a potência média do sinal chegando ao receptor por Ω_{A_i} e a potência média do sinal recebido por Ω_i , tem-se que

$$\Omega_{A_i} = a_{0i}^2 + \sigma_{S_i}^2, \quad i = 1, 2, \text{ e} \quad (2.19a)$$

$$\Omega_i = D(\theta_{0i})a_{0i}^2 + E\{D(\Theta_i)\}\sigma_{S_i}^2 \quad i = 1, 2, \quad (2.19b)$$

em que:

- a_{0i}^2 — potência do componente DC do sinal chegando ao ponto P_i ;
- $\sigma_{S_i}^2$ — potência média do componente AC do sinal chegando ao ponto P_i ;
- $D(\theta_{0i})a_{0i}^2$ — potência do componente DC do sinal recebido no ponto P_i ; e
- $E\{D(\Theta_i)\}\sigma_{S_i}^2$ — potência média do componente AC do sinal recebido no ponto P_i .

Um conhecido parâmetro do MD Rice constitui a razão da potência do componente de linha de visada direta sobre a potência média do componente espalhado. Essa razão é comumente chamada de fator de Rice e denotada por k . Para o sinal chegando ao receptor,

$$k_{A_i} = \frac{a_{0i}^2}{\sigma_{S_i}^2}, \quad i = 1, 2, \quad (2.20a)$$

e, para o sinal recebido,

$$k_i = \frac{a_{X_i}^2 + a_{Y_i}^2}{2\sigma_i^2} = \frac{D(\theta_{0i})}{E\{D(\Theta_i)\}}k_{A_i}, \quad i = 1, 2. \quad (2.20b)$$

2.3.3 Funções Densidade de Probabilidade Conjuntas

Obtidos o vetor média $\mathbf{a}$ e a matriz de covariância $\mathbf{C}$, as JPDPs podem ser calculadas.

Função Densidade de Probabilidade Conjunta das Gaussianas

De (2.18b) deduzem-se o determinante e a inversa da matriz de covariância:

$$\Lambda = \sigma_1^4 \sigma_2^4 (1 - \rho^2)^2, \quad (2.21a)$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & 0 & -\nu_1 \sigma_1 \sigma_2 & -\nu_2 \sigma_1 \sigma_2 \\ 0 & \sigma_1^2 & \nu_2 \sigma_1 \sigma_2 & -\nu_1 \sigma_1 \sigma_2 \\ -\nu_1 \sigma_1 \sigma_2 & \nu_2 \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_1^2 & 0 \\ -\nu_2 \sigma_1 \sigma_2 & -\nu_1 \sigma_1 \sigma_2 & 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}, \quad (2.21b)$$

em que

$$\rho = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}. \quad (2.21c)$$

Das substituições de (2.18a) e (2.21) em (2.9),

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) = & \frac{1}{4\pi^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - \rho^2)} \left[\frac{(x_1 - a_{X_1})^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y_1 - a_{Y_1})^2}{\sigma_1^2} \right. \right. \\ & + \frac{(x_2 - a_{X_2})^2}{\sigma_2^2} + \frac{(y_2 - a_{Y_2})^2}{\sigma_2^2} - 2\nu_1 \frac{(x_1 - a_{X_1})(x_2 - a_{X_2})}{\sigma_1 \sigma_2} - 2\nu_2 \frac{(x_1 - a_{X_1})(y_2 - a_{Y_2})}{\sigma_1 \sigma_2} \\ & \left. \left. + 2\nu_2 \frac{(y_1 - a_{Y_1})(x_2 - a_{X_2})}{\sigma_1 \sigma_2} - 2\nu_1 \frac{(y_1 - a_{Y_1})(y_2 - a_{Y_2})}{\sigma_1 \sigma_2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Função Densidade de Probabilidade Conjunta das Envolvórias Normalizadas e das Fases dos Sinais

Definindo, respectivamente, R_i e Ψ_i como a envoltória e a fase do sinal recebido em P_i , $i = 1, 2$, então

$$X_i = R_i \cos(\Psi_i), \quad \text{e} \quad Y_i = R_i \sin(\Psi_i), \quad i = 1, 2. \quad (2.23)$$

Claramente, $E\{R_i^2\} = E\{X_i^2\} + E\{Y_i^2\} = a_{X_i}^2 + a_{Y_i}^2 + 2\sigma_i^2$. Desse modo, a envoltória normalizada, $\hat{R}_i$, é expressa como segue:

$$\hat{R}_i = \frac{R_i}{\sqrt{E\{R_i^2\}}} = \frac{R_i}{\sqrt{a_{X_i}^2 + a_{Y_i}^2 + 2\sigma_i^2}}, \quad i = 1, 2. \quad (2.24)$$

De (2.23) e (2.24) resulta que

$$X_i = \sqrt{a_{X_i}^2 + a_{Y_i}^2 + 2\sigma_i^2 \hat{R}_i \cos(\Psi_i)}, \quad i = 1, 2, \text{ e} \quad (2.25a)$$

$$Y_i = \sqrt{a_{X_i}^2 + a_{Y_i}^2 + 2\sigma_i^2 \hat{R}_i \sin(\Psi_i)}, \quad i = 1, 2. \quad (2.25b)$$

Usando transformação de variáveis, pode-se obter a JPDF de $\hat{R}_1$, $\hat{R}_2$, Ψ_1 e Ψ_2 a partir de (2.22) e (2.25). Depois dessa transformação e de algumas manipulações algébricas:

$$\begin{aligned} p_{\hat{\mathbf{R}}, \Psi}(\hat{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\psi}) = & \frac{(1+k_1)(1+k_2)}{\pi^2(1-\rho^2)} \hat{r}_1 \hat{r}_2 \exp \left[-\frac{k_1+k_2-2\nu_c\sqrt{k_1k_2}+(1+k_1)\hat{r}_1^2+(1+k_2)\hat{r}_2^2}{1-\rho^2} \right] \\ & \times \exp \left[K_0 \hat{r}_1 \hat{r}_2 \cos(\psi_2 - \psi_1 - \phi_0) + \xi_1 \sqrt{K_1} \hat{r}_1 \cos(\psi_1 - \phi_1 - \omega_1 t_{01}) \right. \\ & \left. + \xi_2 \sqrt{K_2} \hat{r}_2 \cos(\psi_2 - \phi_2 - \omega_2 t_{02}) \right], \end{aligned} \quad (2.26a)$$

em que $\hat{\mathbf{R}} = [\hat{R}_1 \ \hat{R}_2]$, $\Psi = [\Psi_1 \ \Psi_2]$, $\hat{\mathbf{r}} = [\hat{r}_1 \ \hat{r}_2]$, $\boldsymbol{\psi} = [\psi_1 \ \psi_2]$,

$$K_0 = \frac{2\rho}{1-\rho^2} \sqrt{(1+k_1)(1+k_2)}, \quad (2.26b)$$

$$K_1 = k_1 + \rho^2 k_2 - 2\nu_c \sqrt{k_1 k_2}, \quad (2.26c)$$

$$K_2 = \rho^2 k_1 + k_2 - 2\nu_c \sqrt{k_1 k_2}, \quad (2.26d)$$

$$\xi_i = \frac{2\sqrt{1+k_i}}{1-\rho^2}, \quad i = 1, 2, \quad (2.26e)$$

$$\phi_0 = \arg\{\nu_1 + \mathbf{i}\nu_2\}, \quad (2.26f)$$

$$\phi_1 = \arg\left\{\sqrt{k_1} - \nu_c \sqrt{k_2} + \mathbf{i}\nu_s \sqrt{k_2}\right\}, \quad (2.26g)$$

$$\phi_2 = \arg\left\{\sqrt{k_2} - \nu_c \sqrt{k_1} - \mathbf{i}\nu_s \sqrt{k_1}\right\}, \quad (2.26h)$$

$$\arg\{\cdot\} = \text{argumento do número complexo de entrada (arg}\{0\} = 0), \quad (2.26i)$$

$$\nu_c = \frac{E \left\{ \sqrt{D(\Theta_1)D(\Theta_2)} \cos \left[\beta_a d \left(\frac{\cos(\Theta_a)}{\cos(\Theta_d)} - \frac{\cos(\theta_{0a})}{\cos(\theta_{0d})} \right) + \Delta\omega T \right] \right\}}{\sqrt{E\{D(\Theta_1)\} E\{D(\Theta_2)\}}} \rho_A(d, \Delta\omega), \quad (2.26j)$$

$$\nu_s = \frac{E \left\{ \sqrt{D(\Theta_1)D(\Theta_2)} \sin \left[\beta_a d \left(\frac{\cos(\Theta_a)}{\cos(\Theta_d)} - \frac{\cos(\theta_{0a})}{\cos(\theta_{0d})} \right) + \Delta\omega T \right] \right\}}{\sqrt{E\{D(\Theta_1)\} E\{D(\Theta_2)\}}} \rho_A(d, \Delta\omega), \text{ e} \quad (2.26k)$$

$$T = T_a - t_{0a}. \quad (2.26l)$$

Note que, tomando como referência o instante no qual a onda de linha de visada direta chega ao receptor, então T — Equação (2.26l) — é o tempo de chegada das ondas espalhadas. Ademais,

como $T_a \geq t_{0a}$, tem-se que $T \geq 0$. Por fim, das expressões de ν_1 , ν_2 , ν_c , ν_s e ρ ,

$$\rho = \sqrt{\nu_c^2 + \nu_s^2}, \quad (2.27a)$$

$$\nu_c = \cos[\phi_0 - (\omega_2 t_{02} - \omega_1 t_{01})], \text{ e} \quad (2.27b)$$

$$\nu_s = \sin[\phi_0 - (\omega_2 t_{02} - \omega_1 t_{01})]. \quad (2.27c)$$

Em particular, para o MD Rayleigh, $k_1 = k_2 = 0$. Nesse caso, $K_1 = K_2 = 0$, $\phi_1 = \phi_2 = 0$, e

$$p_{\hat{\mathbf{R}}, \Psi}(\hat{\mathbf{r}}, \psi) = \frac{\hat{r}_1 \hat{r}_2}{\pi^2(1 - \rho^2)} \exp \left[-\frac{\hat{r}_1^2 + \hat{r}_2^2 - 2\rho \hat{r}_1 \hat{r}_2 \cos(\psi_2 - \psi_1 - \phi_0)}{1 - \rho^2} \right]. \quad (2.28)$$

Os parâmetros da JPDF em (2.28), ρ e ϕ_0 , podem ser expressos em termos de ν_1 e ν_2 — equações (2.21c) e (2.26f) —, que independem de θ_{0a} , θ_{0d} e t_{0a} . Logo, as características físicas do componente de linha de visada direta — ângulo de chegada e tempo de chegada — não influem na JPDF do MD Rayleigh. Isso é coerente, pois, em tal modelo, não há componente de linha de visada direta.

Função Densidade de Probabilidade Conjunta das Envoltórias

A JPDF de $\hat{R}_1$ e $\hat{R}_2$ pode ser obtida integrando-se (2.26) com relação às fases:

$$p_{\hat{\mathbf{R}}}(\hat{\mathbf{r}}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} p_{\hat{\mathbf{R}}, \Psi}(\hat{\mathbf{r}}, \psi) d\psi_1 d\psi_2. \quad (2.29)$$

Tal integração é realizada no Apêndice A:

$$\begin{aligned} p_{\hat{\mathbf{R}}}(\hat{\mathbf{r}}) &= \frac{4(1 + k_1)(1 + k_2)}{1 - \rho^2} \hat{r}_1 \hat{r}_2 \exp \left[-\frac{k_1 + k_2 - 2\nu_c \sqrt{k_1 k_2} + (1 + k_1)\hat{r}_1^2 + (1 + k_2)\hat{r}_2^2}{1 - \rho^2} \right] \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \left[\varepsilon_n I_n(K_0 \hat{r}_1 \hat{r}_2) I_n(\xi_1 \sqrt{K_1} \hat{r}_1) I_n(\xi_2 \sqrt{K_2} \hat{r}_2) \cos(n\phi) \right], \end{aligned} \quad (2.30a)$$

em que $I_n(\cdot)$ é a função de Bessel modificada do primeiro tipo de ordem n [22, Equação 8.431.5],

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2 & n \geq 1 \end{cases}, \text{ e} \quad (2.30b)$$

$$\phi = \arg \left\{ (1 + \rho^2) \nu_c \sqrt{k_1 k_2} - \rho^2(k_1 + k_2) + \mathbf{i}(1 - \rho^2) \nu_s \sqrt{k_1 k_2} \right\}. \quad (2.30c)$$

Em particular, para o MD Rayleigh, como $K_1 = K_2 = 0$, e

$$I_n(0) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}, \quad (2.31)$$

conclui-se que apenas o primeiro termo do somatório em (2.30a) é diferente de zero. Assim,

$$p_{\hat{\mathbf{R}}}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{4\hat{r}_1\hat{r}_2}{1-\rho^2} \exp\left(-\frac{\hat{r}_1^2 + \hat{r}_2^2}{1-\rho^2}\right) I_n\left(\frac{2\rho}{1-\rho^2}\hat{r}_1\hat{r}_2\right). \quad (2.32)$$

2.3.4 Momento Conjunto das Envoltórias

Por definição,

$$E\left\{\hat{R}_1^{N_1}\hat{R}_2^{N_2}\right\} = \int_0^\infty \int_0^\infty \hat{r}_1^{N_1}\hat{r}_2^{N_2} p_{\hat{\mathbf{R}}}(\hat{\mathbf{r}}) d\hat{r}_1 d\hat{r}_2. \quad (2.33)$$

No Apêndice A, prova-se que

$$\begin{aligned} E\left\{\hat{R}_1^{N_1}\hat{R}_2^{N_2}\right\} &= \frac{(1-\rho^2)^{\frac{N_1+N_2}{2}+1}}{(1+k_1)^{\frac{N_1}{2}}(1+k_2)^{\frac{N_2}{2}}} \exp\left[-\frac{k_1+k_2-2\nu_c\sqrt{k_1k_2}}{1-\rho^2}\right] \sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^m \left[\frac{\varepsilon_n \cos(n\phi) \rho^{2m-n}}{(m-n)!m!(n!)^2} \right. \\ &\quad \times \left. \left(\frac{\sqrt{K_1K_2}}{1-\rho^2} \right)^n \prod_{i=1}^2 \left[\Gamma\left(\frac{N_i}{2} + m + 1\right) {}_1F_1\left(\frac{N_i}{2} + m + 1; n + 1; \frac{K_i}{1-\rho^2}\right) \right] \right], \end{aligned} \quad (2.34)$$

em que $\Gamma(\cdot)$ é a função gama, e ${}_1F_1(\cdot; \cdot; \cdot)$ é a função hipergeométrica [22, Equação 9.14.1].

Em específico, para o MD Rayleigh ($k_1 = k_2 = 0$), $K_1 = K_2 = 0$, e o somatório duplo em (2.34) se reduz a um somatório simples, pois seus elementos são diferentes de zero somente para $n = 0$. Com isso,

$$E\left\{\hat{R}_1^{N_1}\hat{R}_2^{N_2}\right\} = (1-\rho^2)^{(N_1+N_2)/2+1} \sum_{m=0}^\infty \left[\frac{\rho^{2m}}{(m!)^2} \prod_{i=1}^2 \left[\Gamma\left(m + \frac{N_i}{2} + 1\right) \right] \right]. \quad (2.35a)$$

Usando a definição do símbolo de Pochhammer [22, tabela xliii],

$$E\left\{\hat{R}_1^{N_1}\hat{R}_2^{N_2}\right\} = (1-\rho^2)^{(N_1+N_2)/2+1} \prod_{i=1}^2 \left[\Gamma\left(\frac{N_i}{2} + 1\right) \right] \sum_{m=0}^\infty \left[\frac{\prod_{i=1}^2 \left[\left(\frac{N_i}{2} + 1\right)_m \right]}{(1)_m} \frac{\rho^{2m}}{m!} \right]. \quad (2.35b)$$

Em seguida, aplicando a definição da função hipergeométrica [22, Equação 9.14.1],

$$E \left\{ \hat{R}_1^{N_1} \hat{R}_2^{N_2} \right\} = (1 - \rho^2)^{(N_1+N_2)/2+1} \prod_{i=1}^2 \left[\Gamma \left(\frac{N_i}{2} + 1 \right) \right] {}_2F_1 \left(\frac{N_1}{2} + 1, \frac{N_2}{2} + 1; 1; \rho^2 \right). \quad (2.35c)$$

Finalmente, empregando [22, Equação 9.131.1],

$$E \left\{ \hat{R}_1^{N_1} \hat{R}_2^{N_2} \right\} = \prod_{i=1}^2 \left[\Gamma \left(\frac{N_i}{2} + 1 \right) \right] {}_2F_1 \left(-\frac{N_1}{2}, -\frac{N_2}{2}; 1; \rho^2 \right). \quad (2.35d)$$

2.3.5 Coeficiente de Correlação das Envoltórias

Definindo δ_{N_1, N_2}^E como o coeficiente de correlação de $\hat{R}_1^{N_1}$ e $\hat{R}_2^{N_2}$,

$$\delta_{N_1, N_2}^E = \frac{Cov \left\{ \hat{R}_1^{N_1}, \hat{R}_2^{N_2} \right\}}{\sqrt{Var \left\{ \hat{R}_1^{N_1} \right\} Var \left\{ \hat{R}_2^{N_2} \right\}}}, \quad (2.36a)$$

em que

$$Cov \left\{ \hat{R}_1^{N_1}, \hat{R}_2^{N_2} \right\} = E \left\{ \hat{R}_1^{N_1} \hat{R}_2^{N_2} \right\} - E \left\{ \hat{R}_1^{N_1} \right\} E \left\{ \hat{R}_2^{N_2} \right\}, \text{ e} \quad (2.36b)$$

$$Var \left\{ \hat{R}_i^{N_i} \right\} = E \left\{ \hat{R}_i^{2N_i} \right\} - E^2 \left\{ \hat{R}_i^{N_i} \right\}, \quad i = 1, 2. \quad (2.36c)$$

Todos os momentos em (2.36), $\forall N_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, podem ser obtidos diretamente de (2.34). No entanto, para os momentos marginais, em que $N_1 = 0$ ou $N_2 = 0$, certamente é mais eficiente utilizar a expressão do momento marginal já conhecida na literatura [23, Equação 2.1.146]:

$$E \left\{ \hat{R}_i^{N_i} \right\} = \frac{\exp(-k_i)}{(1 + k_i)^{N_i/2}} \Gamma \left(\frac{N_i}{2} + 1 \right) {}_1F_1 \left(\frac{N_i}{2} + 1; 1; k_i \right). \quad (2.37)$$

Para $N_1 = N_2 = 1$, (2.36) constitui o coeficiente de correlação da envoltória simples (CCES), estatística a partir da qual os parâmetros de coerência — distância de coerência, tempo de coerência e a largura de banda de coerência — são obtidos. Por fim, observe que a quinta e última generalização mencionada na introdução deste capítulo provém da possibilidade de considerar $N_1 \neq N_2$ nas expressões de $E \left\{ \hat{R}_1^{N_1} \hat{R}_2^{N_2} \right\}$ e δ_{N_1, N_2}^E .

2.4 Convertibilidade Espaço-Tempo

Ao longo de todo este capítulo, as estatísticas do MD Rice foram deduzidas para dois pontos de recepção no domínio do espaço. Nesta seção, os resultados são estendidos ao domínio espaço-temporal. Considere a ilustração na Fig. 2.2, em que um receptor com duas antenas, A_1 e A_2 , separadas por uma distância d_A , está movendo-se a uma velocidade $\vec{v}$. O objetivo é encontrar as estatísticas conjuntas dos sinais nas antenas A_1 e A_2 , respectivamente nos instantes t_1 e t_2 . No instante t_i , A_i está no ponto P_i , $i = 1, 2$. Definindo $\tau = t_2 - t_1$, a distância entre P_1 e P_2 é obtida por simples geometria:

$$d = \sqrt{v^2\tau^2 + d_A^2 - 2v\tau d_A \cos(\theta_V)}. \quad (2.38)$$

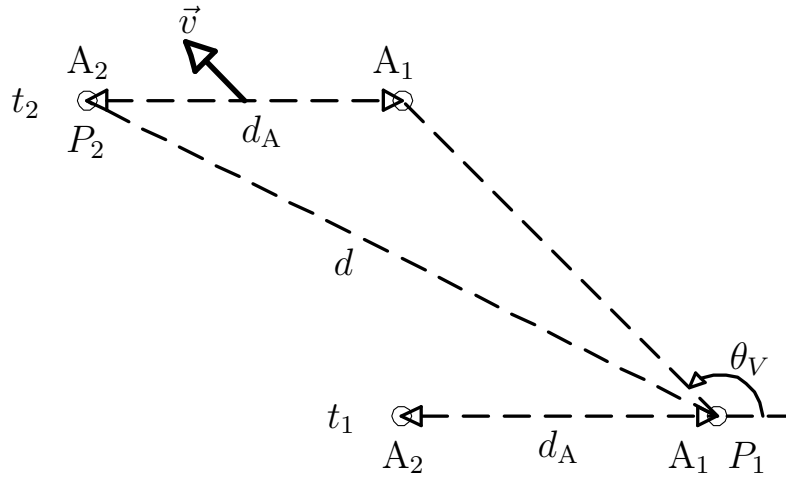


Fig. 2.2: Receptor móvel com duas antenas.

Substituindo (2.38) nas expressões de ν_1 e ν_2 — equações (2.16) e (2.17e) —, a dependência espacial das estatísticas do sinal é convertida em dependência espaço-temporal. Essa conversão inclui três situações comuns como casos especiais: uma antena móvel ($d_A = 0$), duas antenas estáticas ($v = 0$), e duas antenas móveis observadas simultaneamente ($t_1 = t_2$).

2.5 Conclusão

Este capítulo forneceu diversas estatísticas conjuntas de dois sinais com separação espaço-frequencial em canais com desvanecimento Rice. Todos os parâmetros das estatísticas deduzidas são expressos em termos de diversos parâmetros físicos: as potências médias e os fatores de

Rice do sinal chegando ao receptor; a diretividade da antena receptora; os ângulos de chegada e os tempos de propagação das ondas espalhadas (ou difusas) e da onda de linha de visada direta.

No que concerne ao coeficiente de correlação das envoltórias, foco de estudo desta dissertação, ele é expresso como um somatório duplo de um número infinito de termos, todos contendo um produto de duas funções especiais, nomeadamente a função gama e a função hipergeométrica. Isso torna muito dispendioso o cálculo computacional dos valores numéricos daquele coeficiente. Além disso, pode-se verificar que a dedução da expressão teórica daquela estatística envolve vários passos intermediários, incluindo transformação de variáveis e duas integrações duplas.

Capítulo 3

Coeficiente de Correlação da Potência de Canais com Desvanecimento

No Capítulo 2, verificou-se que, mesmo para o MD Rice, que é relativamente simples, a dedução do CCE é razoavelmente intrincada. Além disso, sua expressão possui certa complexidade, pois envolve um somatório duplo de um número infinito de termos, todos constituindo um produto de funções especiais, nomeadamente a função gama e a função hipergeométrica. Desse modo, é oportuno o uso de expressões aproximadas daquele coeficiente. O CCP, por sua vez, é uma das possíveis aproximações. Com efeito, para ordens naturais, há duas grandes vantagens em se lidar com este coeficiente. A primeira é que seu procedimento de dedução é mais simples que o do CCE. Isso possibilita que expressões do CCP sejam encontradas mesmo para MDs mais complexos e abrangentes que o MD Rice. A segunda está em sua expressão final, cujos somatórios envolvidos são todos de números finitos de termos, sendo tais termos funções simples dos parâmetros estatísticos do modelo. Isso simplifica muito o cálculo de valores numéricos do CCP.

Este capítulo apresenta o coeficiente de correlação de ordens naturais da potência de um modelo geral de desvanecimento. Tal MD considera cada sinal como composto de *clusters* de ondas, sendo que os componentes em quadratura de cada *cluster* são VAs Gaussianas com médias e variâncias arbitrárias. Portanto, o MD tratado neste capítulo contempla vários outros como casos particulares, tais como: MD Rayleigh [6], MD Rice [7, 8, 9], MD Hoyt [10], MD Nakagami [13], MD η - κ Assimétrico [11], MD η - κ Simétrico [12], MD η - κ Generalizado, MD κ - μ [4], MD η - μ [5] e outros MDs ainda não sistematizados em termos de distribuição estatística. Além disso, o modelo é válido tanto para ambientes estacionários quanto para ambientes não-estacionários.

A Seção 3.1 descreve as estatísticas marginais e conjuntas do modelo geral de desvaneci-

mento. A Seção 3.2 apresenta os momentos marginais e conjuntos de VAs Gaussianas. A Seção 3.3 deduz os momentos marginais e conjuntos, bem como os coeficientes de correlação, das potências de dois sinais. A Seção 3.3.4 trata de alguns casos particulares do CCP. A Seção 3.4 examina o CCPS. A Seção 3.5 conclui o capítulo.

3.1 Modelo Geral de Desvanecimento

Nesta seção, são descritas as estatísticas marginais e conjuntas de dois sinais, S_1 e S_2 , do modelo geral de desvanecimento tratado neste capítulo.

3.1.1 Estatísticas Marginais

Cada sinal do modelo compõe-se de *clusters* de ondas, cada *cluster* contendo uma onda dominante e diversas ondas espalhadas. A potência W_i do sinal S_i , é então expressa como segue:

$$W_i = R_i^2 = \sum_{j=1}^{m_i} [W_{i,j}], \quad i = 1, 2, \quad (3.1)$$

em que m_i é o número de *clusters* de S_i , e $W_{i,j}$ é a potência do *cluster* j de S_i . Em cada sinal, as VAs $W_{i,j}$, $j = 1, 2, \dots, m_i$, são independentes. Além disso,

$$W_{i,j} = X_{i,j}^2 + Y_{i,j}^2, \quad j = 1, 2, \dots, m_i, \quad (3.2)$$

em que $X_{i,j}$ e $Y_{i,j}$ são VAs Gaussianas independentes, correspondendo aos componentes em quadratura do *cluster* j de S_i . As VAs $X_{i,j}$ e $Y_{i,j}$ têm, respectivamente, médias $a_{X_{i,j}}$ e $a_{Y_{i,j}}$, que provêm da onda dominante do *cluster* j , e variâncias $\sigma_{X_{i,j}}^2$ e $\sigma_{Y_{i,j}}^2$, que advém das ondas espalhadas do *cluster* j . Por fim, sem perda de generalidade, será considerado que

$$m_1 \leq m_2. \quad (3.3)$$

3.1.2 Estatísticas Conjuntas

A dependência dos sinais S_1 e S_2 ocorre por meio de m_0 *clusters*, $m_0 \leq m_1$. Tais *clusters* são referidos como *clusters* compartilhados e são indexados, sem perda de generalidade, como os primeiros m_0 *clusters* de S_1 e de S_2 . Assim, para $m_0 < j \leq m_i$, $i = 1, 2$, o *cluster* j de S_i

não possui *cluster* correspondente no outro sinal. Esses *clusters* serão referidos como *clusters* não-compartilhados.

***Clusters* Compartilhados**

No *cluster* compartilhado j , $X_{1,j}$, $Y_{1,j}$, $X_{2,j}$ e $Y_{2,j}$ são VAs conjuntamente Gaussianas, tendo como coeficientes de correlação das Gaussianas (CCGs):

$$\nu_{1,j} = \frac{Cov\{X_{1,j}, X_{2,j}\}}{\sigma_{X_{1,j}}\sigma_{X_{2,j}}} = \frac{Cov\{Y_{1,j}, Y_{2,j}\}}{\sigma_{Y_{1,j}}\sigma_{Y_{2,j}}}, \text{ e} \quad (3.4a)$$

$$\nu_{2,j} = \frac{Cov\{X_{1,j}, Y_{2,j}\}}{\sigma_{X_{1,j}}\sigma_{Y_{2,j}}} = -\frac{Cov\{Y_{1,j}, X_{2,j}\}}{\sigma_{Y_{1,j}}\sigma_{X_{2,j}}}, \quad (3.4b)$$

em que $j = 1, 2, \dots, m_0$. Em ambientes com desvanecimento, como foi visto no Capítulo 2, esses coeficientes dependem da distância entre os pontos de recepção, da diferença de frequência entre os sinais transmitidos, e do comportamento estatístico dos ângulos de chegada e dos tempos de chegada das ondas espalhadas.

***Clusters* Não-Compartilhados**

Cada *cluster* não-compartilhado está presente em apenas um sinal. Portanto, para $m_0 < j \leq m_1$, o *cluster* j de S_1 é estatisticamente independente do *cluster* j de S_2 . Mais especificamente, $\forall j | m_0 < j \leq m_1$, $X_{1,j}$ e $Y_{1,j}$ são independentes de $X_{2,j}$ e $Y_{2,j}$, bem como $W_{1,j}$ é independente de $W_{2,j}$.

A inclusão de *clusters* não-compartilhados em modelos bivariáveis de desvanecimento foi originalmente empregada em [24], em que estatísticas conjuntas de dois sinais Nakagami, um com m_1 *clusters* e outro com $m_2 > m_1$ *clusters*, são deduzidas. Nesse artigo, todos os m_1 *clusters* do primeiro sinal estão presentes também no segundo sinal, ao passo que $m_2 - m_1$ *clusters* do segundo sinal não têm correspondentes no primeiro sinal.

***Clusters* com Índices Distintos**

Para *clusters* com índices j e k distintos, ou seja, $j \neq k$, $X_{1,j}$ e $Y_{1,j}$ são independentes de $X_{2,k}$ e $Y_{2,k}$; dessa forma, $W_{1,j}$ e $W_{2,k}$ são VAs independentes $\forall j \neq k$.

3.1.3 Ambientes Estacionários e Não-Estacionários

O modelo descrito acima engloba ambientes em que as estatísticas de S_1 diferem de suas correspondentes de S_2 . Esses ambientes serão referidos como não-estacionários. Por outro lado,

em ambientes estacionários, todas as estatísticas marginais de S_1 são iguais às suas correspondentes de S_2 , além de todos os *clusters* de ambos os sinais serem compartilhados:

$$m_0 = m_1 = m_2 = m, \quad (3.5a)$$

$$a_{X_{1,j}} = a_{X_{2,j}}, \quad a_{Y_{1,j}} = a_{Y_{2,j}}, \quad j = 1, \dots, m, \quad (3.5b)$$

$$\sigma_{X_{1,j}} = \sigma_{X_{2,j}}, \text{ e } \quad \sigma_{Y_{1,j}} = \sigma_{Y_{2,j}}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (3.5c)$$

3.2 Momentos das Gaussianas

Nesta seção, são apresentados os momentos das Gaussianas necessários para o cálculo do coeficiente de correlação da potência. A dedução de cada momento é desenvolvida no Apêndice B.

3.2.1 Momento Marginal

Considere a VA Gaussiana X , com média a_X e variância σ_X^2 . Definindo

$$\gamma_1(l; k_X) = \frac{E \{X^{2l}\}}{\sigma_X^{2l}}, \quad (3.6a)$$

em que

$$l \in \mathbb{N}, \text{ e } \quad (3.6b)$$

$$k_X = \frac{a_X^2}{\sigma_X^2}, \quad (3.6c)$$

é mostrado, no Apêndice B, que

$$\gamma_1(l; k_X) = \frac{(2l)!}{2^l} \sum_{j=0}^l \left[\frac{(2k_X)^j}{(2j)!(l-j)!} \right]. \quad (3.6d)$$

3.2.2 Momentos Conjuntos

Duas Variáveis Aleatórias

Considere as VAs conjuntamente Gaussianas X e Y , respectivamente com médias a_X e a_Y , variâncias σ_X^2 e σ_Y^2 , e coeficiente de correlação ν . Definindo

$$\gamma_2(\mathbf{l}; \mathbf{k}; \nu) = \frac{E \{X^{2l_1} Y^{2l_2}\}}{\sigma_X^{2l_1} \sigma_Y^{2l_2}}, \quad (3.7a)$$

em que

$$\mathbf{l} = [l_1 \ l_2] \in \mathbb{N}^2, \text{ e} \quad (3.7b)$$

$$\mathbf{k} = [k_X \ k_Y] = \left[\frac{a_X^2}{\sigma_X^2} \ \frac{a_Y^2}{\sigma_Y^2} \right], \quad (3.7c)$$

é mostrado, no Apêndice B, que

$$\gamma_2(\mathbf{l}; \mathbf{k}; \nu) = k_X^{l_1} k_Y^{l_2} \sum_{j_1=0}^{2l_1} \sum_{j_2=0}^{2l_2} \left[\binom{2l_1}{j_1} \binom{2l_2}{j_2} \frac{\varrho_2(\mathbf{j}; \nu)}{(k_X^{j_1} k_Y^{j_2})^{1/2}} \right], \quad (3.7d)$$

$$\varrho_2(\mathbf{j}; \nu) = [1 + (-1)^{j_1+j_2}] j_1! \nu^{j_1} \sum_{n=0}^{\lfloor j_1/2 \rfloor} \left[\frac{(j_1 + j_2 - 2n - 1)!!}{2^{n+1} n! (j_1 - 2n)!} \left(\frac{1 - \nu^2}{\nu^2} \right)^n \right], \quad (3.7e)$$

em que

$$\mathbf{j} = [j_1 \ j_2] \in \mathbb{N}^2, \text{ e} \quad (3.7f)$$

$$\lfloor \cdot \rfloor = \text{maior inteiro inferior ou igual ao valor de entrada.} \quad (3.7g)$$

Quatro Variáveis Aleatórias

Considere as VAs conjuntamente Gaussianas X_1, Y_1, X_2 e Y_2 , respectivamente com médias $a_{X_1}, a_{Y_1}, a_{X_2}$ e a_{Y_2} , e variâncias $\sigma_{X_1}^2, \sigma_{Y_1}^2, \sigma_{X_2}^2$ e $\sigma_{Y_2}^2$. Além disso, seja X_1 independente de Y_1 , X_2 independente de Y_2 , e os seguintes coeficientes de correlação:

$$\nu_1 = \frac{\text{Cov} \{X_1, X_2\}}{\sigma_{X_1} \sigma_{X_2}} = \frac{\text{Cov} \{Y_1, Y_2\}}{\sigma_{Y_1} \sigma_{Y_2}}, \quad (3.8a)$$

$$\nu_2 = \frac{\text{Cov} \{X_1, Y_2\}}{\sigma_{X_1} \sigma_{Y_2}} = -\frac{\text{Cov} \{Y_1, X_2\}}{\sigma_{Y_1} \sigma_{X_2}}, \text{ e} \quad (3.8b)$$

$$\rho = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}. \quad (3.8c)$$

Definindo

$$\gamma_4(\mathbf{l}; \mathbf{k}; \boldsymbol{\nu}) = \frac{E \{ X_1^{2l_1} Y_1^{2l_2} X_2^{2l_3} Y_2^{2l_4} \}}{\sigma_{X_1}^{2l_1} \sigma_{Y_1}^{2l_2} \sigma_{X_2}^{2l_3} \sigma_{Y_2}^{2l_4}}, \quad (3.9a)$$

em que

$$\mathbf{l} = [l_1 \ l_2 \ l_3 \ l_4] \in \mathbb{N}^4, \quad (3.9b)$$

$$\mathbf{k} = [k_{X_1} \ k_{Y_1} \ k_{X_2} \ k_{Y_2}] = \left[\frac{a_{X_1}^2}{\sigma_{X_1}^2} \ \frac{a_{Y_1}^2}{\sigma_{Y_1}^2} \ \frac{a_{X_2}^2}{\sigma_{X_2}^2} \ \frac{a_{Y_2}^2}{\sigma_{Y_2}^2} \right], \text{ e} \quad (3.9c)$$

$$\boldsymbol{\nu} = [\nu_1 \ \nu_2], \quad (3.9d)$$

é mostrado, no Apêndice B, que

$$\gamma_4(\mathbf{l}; \mathbf{k}; \boldsymbol{\nu}) = k_{X_1}^{l_1} k_{Y_1}^{l_2} k_{X_2}^{l_3} k_{Y_2}^{l_4} \sum_{j_1=0}^{2l_1} \sum_{j_2=0}^{2l_2} \sum_{j_3=0}^{2l_3} \sum_{j_4=0}^{2l_4} \left[\binom{2l_1}{j_1} \binom{2l_2}{j_2} \binom{2l_3}{j_3} \binom{2l_4}{j_4} \frac{\varrho_4(\mathbf{j}; \boldsymbol{\nu})}{(k_{X_1}^{j_1} k_{Y_1}^{j_2} k_{X_2}^{j_3} k_{Y_2}^{j_4})^{1/2}} \right], \quad (3.9e)$$

$$\begin{aligned} \varrho_4(\mathbf{j}; \boldsymbol{\nu}) &= [1 + (-1)^{j_1+j_2+j_3+j_4}] j_1! j_2! \nu_1^{j_2} \nu_2^{j_1} \sum_{n_1=0}^{\lfloor j_1/2 \rfloor} \sum_{n_2=0}^{\lfloor j_2/2 \rfloor} \sum_{n_3=0}^{j_1-2n_1} \sum_{n_4=0}^{j_2-2n_2} \left[\frac{[(-1)^{j_3+n_3} + (-1)^{n_4}]}{2^{n_1+n_2+2} n_1! n_2! n_3! n_4!} \right. \\ &\quad \times \frac{(j_1 + j_2 + j_4 - 2n_1 - 2n_2 - n_3 - n_4 - 1)!! (j_3 + n_3 + n_4 - 1)!!}{(j_1 - 2n_1 - n_3)! (j_2 - 2n_2 - n_4)!} \\ &\quad \left. \times \frac{(1 - \rho^2)^{n_1+n_2}}{\nu_1^{2n_2} \nu_2^{2n_1}} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2} \right)^{n_3-n_4} \right], \end{aligned} \quad (3.9f)$$

em que

$$\mathbf{j} = [j_1 \ j_2 \ j_3 \ j_4] \in \mathbb{N}^4. \quad (3.9g)$$

Casos Particulares

No cálculo dos momentos conjuntos, dois casos particulares são de especial interesse: para $\mathbf{k}_{Y0} = [k_X \ 0]$ e $\mathbf{k}_{Y0} = [k_{X_1} \ 0 \ k_{X_2} \ 0]$,

$$\gamma_2(\mathbf{l}; \mathbf{k}_{Y0}; \nu) = k_X^{l_1} \sum_{j_1=0}^{2l_1} \left[\binom{2l_1}{j_1} \frac{\varrho_2(\mathbf{j}_{Y0}; \nu)}{k_X^{j_1/2}} \right], \text{ e} \quad (3.10a)$$

$$\gamma_4(\mathbf{l}; \mathbf{k}_{Y0}; \boldsymbol{\nu}) = k_{X_1}^{l_1} k_{X_2}^{l_3} \cdot \sum_{j_1=0}^{2l_1} \sum_{j_3=0}^{2l_3} \left[\binom{2l_1}{j_1} \binom{2l_3}{j_3} \frac{\varrho_4(\mathbf{j}_{Y0}; \boldsymbol{\nu})}{(k_{X_1}^{j_1} k_{X_2}^{j_3})^{1/2}} \right], \quad (3.10b)$$

em que

$$\mathbf{j}_{Y0} = [j_1 \ 0], \text{ e} \quad (3.10c)$$

$$\mathbf{j}_{Y0} = [j_1 \ 0 \ j_3 \ 0]; \quad (3.10d)$$

e, para $\mathbf{k}_0 = [0 \ 0]$ e $\mathbf{k}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$,

$$\gamma_2(\mathbf{l}; \mathbf{k}_0; \nu) = \varrho_2(\mathbf{l}; \nu), \text{ e} \quad (3.10e)$$

$$\gamma_4(\mathbf{l}; \mathbf{k}_0; \nu) = \varrho_4(\mathbf{l}; \nu). \quad (3.10f)$$

O primeiro caso é útil para *clusters* que satisfazem o MD Rice (variâncias iguais), como será visto na subseção 3.3.4; o segundo, para *clusters* que seguem o MD Hoyt.

3.3 Estatísticas da Potência

Nesta seção, deduzem-se os momentos marginal e conjunto de ordens naturais da potência do sinal, assim como os correspondentes coeficientes de correlação. Na obtenção dos momentos, uma relação de crucial importância constitui a expressão (3.1) elevada à potência N_i , $N_i \in \mathbb{N}$:

$$W_i^{N_i} = N_i! \sum_{\mathbb{A}_{m_i, N_i}} \left[\prod_{j=1}^{m_i} \left(\frac{W_{i,j}^{n_{i,j}}}{n_{i,j}!} \right) \right] = N_i! \sum_{\mathbb{A}_{m_i, N_i}} \left[\prod_{j=1}^{m_i} \left(\frac{R_{i,j}^{2n_{i,j}}}{n_{i,j}!} \right) \right], \quad i = 1, 2, \quad (3.11a)$$

sendo que $\mathbb{A}_{m_i, N_i}$ representa todas as possibilidades em que os números naturais $n_{i,1}, n_{i,2}, \dots, n_{i,m_i-1}$ e n_{i,m_i} satisfazem $\sum_{j=1}^{m_i} n_{i,j} = N_i$. Uma forma possível de se implementar a soma sobre $\mathbb{A}_{m_i, N_i}$ é através do seguinte somatório $(m_i - 1)$ -uplo:

$$\sum_{\mathbb{A}_{m_i, N_i}} \equiv \sum_{n_{i,1}=0}^{N_i} \sum_{n_{i,2}=0}^{N_i-n_{i,1}} \cdots \sum_{n_{i,l}=0}^{N_i-\sum_{j=1}^{l-1} n_{i,j}} \cdots \sum_{n_{i,m_i-1}=0}^{N_i-\sum_{j=1}^{m_i-2} n_{i,j}}, \quad (3.11b)$$

no interior do qual

$$n_{i,m_i} = N_i - \sum_{j=1}^{m_i-1} n_{i,j}. \quad (3.11c)$$

3.3.1 Momento Marginal da Potência

De (3.11a), é direto que, para $N_i \in \mathbb{N}$,

$$E \{W_i^{N_i}\} = N_i! \sum_{\mathbb{A}_{m_i, N_i}} \left[E \left\{ \prod_{j=1}^{m_i} \left(\frac{W_{i,j}^{n_{i,j}}}{n_{i,j}!} \right) \right\} \right]. \quad (3.12)$$

Baseando-se na independência de $W_{i,j}$, $j = 1, \dots, m_i$,

$$E \{W_i^{N_i}\} = N_i! \sum_{\mathbb{A}_{m_i, N_i}} \left[\prod_{j=1}^{m_i} \left(\frac{E \{W_{i,j}^{n_{i,j}}\}}{n_{i,j}!} \right) \right]. \quad (3.13)$$

Usando (3.2) e a independência de $X_{i,j}$ e $Y_{i,j}$,

$$E \{W_{i,j}^{n_{i,j}}\} = \sum_{l=0}^{n_{i,j}} \left[\binom{n_{i,j}}{l} E \{X_{i,j}^{2l}\} E \{Y_{i,j}^{2n_{i,j}-2l}\} \right]. \quad (3.14)$$

Definindo

$$\vartheta_1(n_{i,j}; \mathbf{k}_{i,j}; \eta_{i,j}) = \frac{E \{W_{i,j}^{n_{i,j}}\}}{\Omega_{i,j}^{n_{i,j}}}, \quad (3.15a)$$

em que

$$\Omega_{i,j} = a_{X_{i,j}}^2 + a_{Y_{i,j}}^2 + \sigma_{X_{i,j}}^2 + \sigma_{Y_{i,j}}^2, \quad (3.15b)$$

$$\mathbf{k}_{i,j} = [k_{X_{i,j}} \quad k_{Y_{i,j}}] = \left[\frac{a_{X_{i,j}}^2}{\sigma_{X_{i,j}}^2} \quad \frac{a_{Y_{i,j}}^2}{\sigma_{Y_{i,j}}^2} \right], \text{ e} \quad (3.15c)$$

$$\eta_{i,j} = \sigma_{X_{i,j}}^2 / \sigma_{Y_{i,j}}^2, \quad (3.15d)$$

e empregando (3.6a) e (3.14),

$$\vartheta_1(n_{i,j}; \mathbf{k}_{i,j}; \eta_{i,j}) = \frac{1}{[(1 + k_{X_{i,j}})\eta_{i,j} + 1 + k_{Y_{i,j}}]^{n_{i,j}}} \sum_{l=0}^{n_{i,j}} \left[\binom{n_{i,j}}{l} \gamma_1(l; k_{X_{i,j}}) \gamma_1(n_{i,j} - l; k_{Y_{i,j}}) \eta_{i,j}^l \right]. \quad (3.16)$$

Retornando ao momento marginal da potência, de (3.13) e (3.15a),

$$E \{W_i^{N_i}\} = N_i! \sum_{\mathbb{A}_{m_i, N_i}} \left[\prod_{j=1}^{m_i} \left[\frac{\vartheta_1(n_{i,j}; \mathbf{k}_{i,j}; \eta_{i,j}) \Omega_{i,j}^{n_{i,j}}}{n_{i,j}!} \right] \right]. \quad (3.17)$$

Com relação ao momento da potência normalizada,

$$\hat{W}_i = \frac{W_i}{E \{W_i\}}, \quad (3.18)$$

tem-se que

$$E \{ \hat{W}_i^{N_i} \} = \sum_{\mathbb{A}_{m_i, N_i}} \left[\zeta(\mathbf{n}_i, \mathbf{\Omega}_i) \prod_{j=1}^{m_i} [\vartheta_1(n_{i,j}; \mathbf{k}_{i,j}; \eta_{i,j})] \right], \quad (3.19a)$$

$$\zeta(\mathbf{n}_i, \mathbf{\Omega}_i) = N_i! \prod_{j=1}^{m_i} \left[\frac{\Omega_{i,j}^{n_{i,j}}}{n_{i,j}!} \right] \left(\sum_{j=1}^{m_i} \Omega_{i,j} \right)^{-N_i}, \quad (3.19b)$$

em que

$$\mathbf{n}_i = [n_{i,1} \ n_{i,2} \ \cdots \ n_{i,m_i}], \text{ e} \quad (3.19c)$$

$$\mathbf{\Omega}_i = [\Omega_{i,1} \ \Omega_{i,2} \ \cdots \ \Omega_{i,m_i}]. \quad (3.19d)$$

Definindo $\hat{W}_{i,j} = W_{i,j}/\Omega_{i,j}$, então $\vartheta_1(n_{i,j}; \mathbf{k}_{i,j}; \eta_{i,j}) = E \{ \hat{W}_{i,j}^{n_{i,j}} \}$. Assim sendo, tendo em vista que

$$\sum_{\mathbb{A}_{m_i, N_i}} [\zeta(\mathbf{n}_i, \mathbf{\Omega}_i)] = 1, \quad (3.20)$$

$E \{ \hat{W}_i^{N_i} \}$ constitui a média ponderada de $\prod_{j=1}^{m_i} [E \{ \hat{W}_{i,j}^{n_{i,j}} \}]$, em que o fator de ponderação de cada termo é $\zeta(\mathbf{n}_i, \mathbf{\Omega}_i)$.

3.3.2 Momento Conjunto da Potência

De (3.11a) segue que, para $N_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$,

$$E \{W_1^{N_1} W_2^{N_2}\} = N_1! N_2! \sum_{\mathbb{A}_{m_1, N_1}} \sum_{\mathbb{A}_{m_2, N_2}} \left[E \left\{ \prod_{i=1}^2 \prod_{j=1}^{m_i} \left(\frac{W_{i,j}^{n_{i,j}}}{n_{i,j}!} \right) \right\} \right]. \quad (3.21)$$

Assim, baseando-se na independência de $W_{i,j}$, $j = 1, \dots, m_i$, na independência de W_{1,j_1} e W_{2,j_2} , $\forall j_1 \neq j_2$, e na definição de *clusters* não-compartilhados:

$$E \{W_1^{N_1} W_2^{N_2}\} = N_1! N_2! \sum_{\mathbb{A}_{m_1, N_1}} \sum_{\mathbb{A}_{m_2, N_2}} \left[\prod_{j=1}^{m_0} \left(\frac{E \{W_{1,j}^{n_{1,j}} W_{2,j}^{n_{2,j}}\}}{n_{1,j}! n_{2,j}!} \right) \prod_{i=1}^2 \prod_{j=m_0+1}^{m_i} \left(\frac{E \{W_{i,j}^{n_{i,j}}\}}{n_{i,j}!} \right) \right]. \quad (3.22)$$

Usando (3.2), para $1 \leq j \leq m_0$,

$$E \{W_{1,j}^{n_{1,j}} W_{2,j}^{n_{2,j}}\} = \sum_{l_1=0}^{n_{1,j}} \sum_{l_2=0}^{n_{2,j}} \left[\binom{n_{1,j}}{l_1} \binom{n_{2,j}}{l_2} E \{X_{1,j}^{2l_1} Y_{1,j}^{2n_{1,j}-2l_1} X_{2,j}^{2l_2} Y_{2,j}^{2n_{2,j}-2l_2}\} \right]. \quad (3.23)$$

Definindo

$$\vartheta_2(\mathbf{n}_j; \mathbf{k}_j; \boldsymbol{\eta}_j; \boldsymbol{\nu}_j) = \frac{E \{W_{1,j}^{n_{1,j}} W_{2,j}^{n_{2,j}}\}}{\Omega_{1,j}^{n_{1,j}} \Omega_{2,j}^{n_{2,j}}} \quad (3.24a)$$

em que

$$\mathbf{n}_j = [n_{1,j} \ n_{2,j}], \quad (3.24b)$$

$$\mathbf{k}_j = [k_{X_{1,j}} \ k_{Y_{1,j}} \ k_{X_{2,j}} \ k_{Y_{2,j}}] = \left[\frac{a_{X_{1,j}}^2}{\sigma_{X_{1,j}}^2} \ \frac{a_{Y_{1,j}}^2}{\sigma_{Y_{1,j}}^2} \ \frac{a_{X_{2,j}}^2}{\sigma_{X_{2,j}}^2} \ \frac{a_{Y_{2,j}}^2}{\sigma_{Y_{2,j}}^2} \right], \quad (3.24c)$$

$$\boldsymbol{\eta}_j = [\eta_{1,j} \ \eta_{2,j}] = \left[\frac{\sigma_{X_{1,j}}^2}{\sigma_{Y_{1,j}}^2} \ \frac{\sigma_{X_{2,j}}^2}{\sigma_{Y_{2,j}}^2} \right], \text{ e} \quad (3.24d)$$

$$\boldsymbol{\nu}_j = [\nu_{1,j} \ \nu_{2,j}], \quad (3.24e)$$

e usando (3.9a) e (3.23),

$$\begin{aligned} \vartheta_2(\mathbf{n}_j; \mathbf{k}_j; \boldsymbol{\eta}_j; \boldsymbol{\nu}_j) &= \frac{1}{\prod_{i=1}^2 \left[((1 + k_{X_{i,j}}) \eta_{i,j} + 1 + k_{Y_{i,j}})^{n_{i,j}} \right]} \\ &\times \sum_{l_1=0}^{n_{1,j}} \sum_{l_2=0}^{n_{2,j}} \left[\binom{n_{1,j}}{l_1} \binom{n_{2,j}}{l_2} \gamma_4(\mathbf{l}_j; \mathbf{k}_j; \boldsymbol{\nu}_j) \eta_{1,j}^{l_1} \eta_{2,j}^{l_2} \right], \end{aligned} \quad (3.25a)$$

em que

$$\mathbf{l}_j = [l_1 \ n_{1,j} - l_1 \ l_2 \ n_{2,j} - l_2]. \quad (3.25b)$$

Substituindo (3.15a) e (3.24a) em (3.22), obtém-se que

$$E \{W_1^{N_1} W_2^{N_2}\} = N_1! N_2! \sum_{\mathbb{A}_{m_1, N_1}} \sum_{\mathbb{A}_{m_2, N_2}} \left[\prod_{i=1}^2 \prod_{j=1}^{m_i} \left(\frac{\Omega_{i,j}^{n_{i,j}}}{n_{i,j}!} \right) \prod_{j=1}^{m_2} [\vartheta_0(\mathbf{n}_j; \mathbf{k}_j; \boldsymbol{\eta}_j; \boldsymbol{\nu}_j)] \right], \quad (3.26a)$$

em que

$$\vartheta_0(\mathbf{n}_j; \mathbf{k}_j; \boldsymbol{\eta}_j; \boldsymbol{\nu}_j) = \begin{cases} \vartheta_2(\mathbf{n}_j; \mathbf{k}_j; \boldsymbol{\eta}_j; \boldsymbol{\nu}_j) & 1 \leq j \leq m_0 \\ \prod_{i=1}^2 [\vartheta_1(n_{i,j}; \mathbf{k}_{i,j}; \eta_{i,j})] & m_0 < j \leq m_1 \\ \vartheta_1(n_{2,j}; \mathbf{k}_{2,j}; \eta_{1,j}) & m_1 < j \leq m_2 \end{cases}. \quad (3.26b)$$

No tocante ao momento conjunto da potência normalizada, de (3.18), (3.19b) e (3.26a),

$$E \{ \hat{W}_1^{N_1} \hat{W}_2^{N_2} \} = \sum_{\mathbb{A}_{m_1, N_1}} \sum_{\mathbb{A}_{m_2, N_2}} \left[\prod_{i=1}^2 [\zeta(\mathbf{n}_i, \boldsymbol{\Omega}_i)] \prod_{j=1}^{m_2} [\vartheta_0(\mathbf{n}_j; \mathbf{k}_j; \boldsymbol{\eta}_j; \boldsymbol{\nu}_j)] \right]. \quad (3.27)$$

Tendo em vista que

$$\sum_{\mathbb{A}_{m_1, N_1}} \sum_{\mathbb{A}_{m_2, N_2}} \left[\prod_{i=1}^2 [\zeta(\mathbf{n}_i, \boldsymbol{\Omega}_i)] \right] = \prod_{i=1}^2 \left[\sum_{\mathbb{A}_{m_i, N_i}} [\zeta(\mathbf{n}_i, \boldsymbol{\Omega}_i)] \right] = 1, \quad (3.28)$$

o momento $E \{ \hat{W}_1^{N_1} \hat{W}_2^{N_2} \}$ constitui a média ponderada de $\prod_{j=1}^{m_2} [\vartheta_0(\mathbf{n}_j; \mathbf{k}_j; \boldsymbol{\eta}_j; \boldsymbol{\nu}_j)]$, em que o fator de ponderação de cada termo é $\prod_{i=1}^2 [\zeta(\mathbf{n}_i, \boldsymbol{\Omega}_i)]$.

3.3.3 Coeficiente de Correlação da Potência

Denotando o coeficiente de correlação da potência por δ_{N_1, N_2}^P ,

$$\delta_{N_1, N_2}^P = \frac{Cov \{W_1^{N_1}, W_2^{N_2}\}}{\sqrt{Var \{W_1^{N_1}\} Var \{W_2^{N_2}\}}}, \quad (3.29a)$$

em que $N_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$,

$$Var \{W_i^{N_i}\} = E \{W_i^{2N_i}\} - E^2 \{W_i^{N_i}\}, \quad i = 1, 2, \text{ e} \quad (3.29b)$$

$$Cov \{W_1^{N_1}, W_2^{N_2}\} = E \{W_1^{N_1} W_2^{N_2}\} - E \{W_1^{N_1}\} E \{W_2^{N_2}\}. \quad (3.29c)$$

Os momentos marginal e conjunto envolvidos em (3.29) são dados em (3.17) e (3.26a), respectivamente.

Uma forma alternativa de expressar δ_{N_1, N_2}^P é em termos dos momentos da potência normalizada:

$$\delta_{N_1, N_2}^P = \frac{Cov \left\{ \hat{W}_1^{N_1}, \hat{W}_2^{N_2} \right\}}{\sqrt{Var \left\{ \hat{W}_1^{N_1} \right\} Var \left\{ \hat{W}_2^{N_2} \right\}}}, \quad (3.30a)$$

em que $N_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$,

$$Var \left\{ \hat{W}_i^{N_i} \right\} = E \left\{ \hat{W}_i^{2N_i} \right\} - E^2 \left\{ \hat{W}_i^{N_i} \right\}, \quad i = 1, 2, \text{ e} \quad (3.30b)$$

$$Cov \left\{ \hat{W}_1^{N_1}, \hat{W}_2^{N_2} \right\} = E \left\{ \hat{W}_1^{N_1} \hat{W}_2^{N_2} \right\} - E \left\{ \hat{W}_1^{N_1} \right\} E \left\{ \hat{W}_2^{N_2} \right\}. \quad (3.30c)$$

Os momentos marginal e conjunto envolvidos em (3.30) são obtidos de (3.19a) e (3.27), respectivamente.

3.3.4 Casos Particulares

Clusters Riceanos

Para *clusters* que satisfazem o MD Rice,

$$\sigma_{X_{i,j}} = \sigma_{Y_{i,j}} = \sigma_{i,j}. \quad (3.31)$$

Nesses casos, é mais apropriado definir novas VAs Gaussianas, $\tilde{X}_{i,j}$ e $\tilde{Y}_{i,j}$, obtidas a partir da rotação dos componentes em quadratura do *cluster* Riceano — $X_{i,j}$ e $Y_{i,j}$ — em torno da origem, de modo que $\tilde{Y}_{i,j}$ tenha média nula. Com esse objetivo, $\tilde{X}_{i,j}$ e $\tilde{Y}_{i,j}$ são expressos como segue:

$$\tilde{X}_{i,j} = X_{i,j} \cos(\varphi_{i,j}) + Y_{i,j} \sin(\varphi_{i,j}), \text{ e} \quad (3.32a)$$

$$\tilde{Y}_{i,j} = Y_{i,j} \cos(\varphi_{i,j}) - X_{i,j} \sin(\varphi_{i,j}), \quad (3.32b)$$

em que

$$\varphi_{i,j} = \arg \{a_{X_{i,j}} + \mathbf{i}a_{Y_{i,j}}\}. \quad (3.32c)$$

Aplicando o modelo físico do Capítulo 2 para cada *cluster* Riceano, tem-se que $\varphi_{1,j} = \omega_1 t_{01,j}$ e $\varphi_{2,j} = \omega_2 t_{02,j}$, em que ω_i é a frequência do sinal transmitido i , e $t_{0i,j}$ é o tempo de propagação do componente dominante do *cluster* j do sinal i .

Como $\tilde{X}_{i,j}$ e $\tilde{Y}_{i,j}$ são combinações lineares de $X_{i,j}$ e $Y_{i,j}$, as VAs $\tilde{X}_{1,j}$, $\tilde{Y}_{1,j}$, $\tilde{X}_{2,j}$ e $\tilde{Y}_{2,j}$ também são conjuntamente Gaussianas. Além disso, suas médias, variâncias e covariâncias são dadas por:

$$E \left\{ \tilde{X}_{i,j} \right\} = a_{i,j}, \quad j = 1, 2, \dots, m_i, \quad i = 1, 2, \quad (3.33a)$$

$$E \left\{ \tilde{Y}_{i,j} \right\} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m_i, \quad i = 1, 2, \quad (3.33b)$$

$$Var \left\{ \tilde{X}_{i,j} \right\} = Var \left\{ \tilde{Y}_{i,j} \right\} = \sigma_{i,j}^2, \quad j = 1, 2, \dots, m_i, \quad i = 1, 2, \quad (3.33c)$$

$$Cov \left\{ \tilde{X}_{i,j}, \tilde{Y}_{i,j} \right\} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m_i, \quad i = 1, 2, \quad (3.33d)$$

$$Cov \left\{ \tilde{X}_{1,j}, \tilde{X}_{2,j} \right\} = Cov \left\{ \tilde{Y}_{1,j}, \tilde{Y}_{2,j} \right\} = \nu_{c,j} \sigma_{1,j} \sigma_{2,j}, \quad j = 1, 2, \dots, m_i, \text{ e} \quad (3.33e)$$

$$Cov \left\{ \tilde{X}_{1,j}, \tilde{Y}_{2,j} \right\} = -Cov \left\{ \tilde{Y}_{1,j}, \tilde{X}_{2,j} \right\} = \nu_{s,j} \sigma_{1,j} \sigma_{2,j}, \quad j = 1, 2, \dots, m_i, \quad (3.33f)$$

em que

$$a_{i,j} = \sqrt{a_{X_{i,j}}^2 + a_{Y_{i,j}}^2}, \quad (3.33g)$$

$$\nu_{c,j} = \rho_j \cos [\phi_{0,j} - (\varphi_{2,j} - \varphi_{1,j})], \quad (3.33h)$$

$$\nu_{s,j} = \rho_j \sin [\phi_{0,j} - (\varphi_{2,j} - \varphi_{1,j})], \quad (3.33i)$$

$$\rho_j = \sqrt{\nu_{1,j}^2 + \nu_{2,j}^2} = \sqrt{\nu_{c,j}^2 + \nu_{s,j}^2}, \text{ e} \quad (3.33j)$$

$$\phi_{0,j} = \arg \{ \nu_{1,j} + \mathbf{i} \nu_{2,j} \}. \quad (3.33k)$$

No tocante à potência de um *cluster* Riceano,

$$W_{i,j} = X_{i,j}^2 + Y_{i,j}^2 = \tilde{X}_{i,j}^2 + \tilde{Y}_{i,j}^2; \quad (3.34a)$$

conseqüentemente,

$$E \left\{ W_{i,j}^{n_{i,j}} \right\} = \sum_{l=0}^{n_{i,j}} \left[\binom{n_{i,j}}{l} E \left\{ \tilde{X}_{i,j}^{2l} \right\} E \left\{ \tilde{Y}_{i,j}^{2n_{i,j}-2l} \right\} \right], \text{ e} \quad (3.34b)$$

$$E \left\{ W_{1,j}^{n_{1,j}} W_{2,j}^{n_{2,j}} \right\} = \sum_{l_1=0}^{n_{1,j}} \sum_{l_2=0}^{n_{2,j}} \left[\binom{n_{1,j}}{l_1} \binom{n_{2,j}}{l_2} E \left\{ \tilde{X}_{1,j}^{2l_1} \tilde{Y}_{1,j}^{2n_{1,j}-2l_1} \tilde{X}_{2,j}^{2l_2} \tilde{Y}_{2,j}^{2n_{2,j}-2l_2} \right\} \right]. \quad (3.34c)$$

A principal vantagem de expressarem-se os momentos das potências em termos dos momentos de $\tilde{X}_{1,j}$, $\tilde{Y}_{1,j}$, $\tilde{X}_{2,j}$ e $\tilde{Y}_{2,j}$ está no cálculo de $E \left\{ \tilde{X}_{1,j}^{2l_1} \tilde{Y}_{1,j}^{2n_{1,j}-2l_1} \tilde{X}_{2,j}^{2l_2} \tilde{Y}_{2,j}^{2n_{2,j}-2l_2} \right\}$: para $\nu_s = 0$, usa-se (3.10a) em vez de (3.7d); para $\nu_s \neq 0$, usa-se (3.10b) em vez de (3.9a).

O procedimento descrito acima pode ser empregado para qualquer *cluster* Riceano, mesmo que os demais *clusters* dos sinais não satisfaçam o MD Rice. Caso todos os *clusters* dos sinais sejam Riceanos, como ocorre no MD κ - μ , então tal procedimento é aplicável a todos eles.

Sinais com *Clusters* Estatisticamente Idênticos

Neste trabalho, usa-se o termo ‘sinais com *clusters* estatisticamente idênticos no sentido marginal’ para designar sinais cujas estatísticas marginais são idênticas para todos os *clusters*:

$$a_{X_{i,j}} = a_{X_i}, \quad a_{Y_{i,j}} = a_{Y_i}, \quad j = 1, 2, \dots, m_i, \quad (3.35a)$$

$$\sigma_{X_{i,j}} = \sigma_{X_i}, \text{ e } \sigma_{Y_{i,j}} = \sigma_{Y_i}, \quad j = 1, 2, \dots, m_i; \quad (3.35b)$$

e o termo ‘sinais com *clusters* estatisticamente idênticos no sentido conjunto’ para designar sinais cujas estatísticas conjuntas são iguais para todos os *clusters* compartilhados:

$$\nu_{1,j} = \nu_1, \text{ e } \nu_{2,j} = \nu_2, \quad j = 1, 2, \dots, m_0. \quad (3.35c)$$

Para sinais com *clusters* estatisticamente idênticos no sentido marginal,

$$k_{X_{i,j}} = k_{X_i}, \quad k_{Y_{i,j}} = k_{Y_i}, \quad j = 1, 2, \dots, m_i, \quad (3.36a)$$

$$\eta_{i,j} = \eta_i, \quad \Omega_{i,j} = \Omega_i, \quad j = 1, 2, \dots, m_i, \text{ e } \quad (3.36b)$$

$$E \{W_i\} = m_i \Omega_i, \quad i = 1, 2. \quad (3.36c)$$

Nesse caso,

$$E \left\{ \hat{W}_i^{N_i} \right\} = \frac{N_i!}{m_i^{N_i}} \sum_{\mathbb{B}_{m_i, N_i}} \left[\text{Per}(\mathbf{n}_i) \prod_{j=1}^{m_i} \left(\frac{\vartheta_1(n_{i,j}; \mathbf{k}_i; \eta_i)}{n_{i,j}!} \right) \right], \text{ e} \quad (3.37a)$$

em que

$$\mathbf{k}_i = [k_{X_i} \ k_{Y_i}], \quad (3.37b)$$

$$\text{Per}(\mathbf{n}_i) = \text{número de permutações de } \mathbf{n}_i, \text{ e} \quad (3.37c)$$

$\mathbb{B}_{m_i, N_i}$ representa todas as possibilidades em que os números naturais $n_{i,1}, n_{i,2}, \dots, n_{i,m_i-1}$, e n_{i,m_i} satisfazem, simultaneamente, $\sum_{j=1}^{m_i} n_{i,j} = N_i$ e $n_{i,j} \geq n_{i,l} \ \forall j > l$. Uma forma possível de se

implementar a soma sobre $\mathbb{B}_{m_i, N_i}$ é através do seguinte somatório $(m_i - 1)$ -uplo:

$$\sum_{\mathbb{B}_{m_i, N_i}} \equiv \sum_{n_{i,1}=0}^{\lfloor \frac{N_i}{m_i} \rfloor} \sum_{n_{i,2}=n_{i,1}}^{\lfloor \frac{N_i - n_{i,1}}{m_i - 1} \rfloor} \cdots \sum_{n_{i,l}=n_{i,(l-1)}}^{\lfloor \frac{N_i - \sum_{j=1}^{l-1} n_{i,j}}{(m_i + 1) - l} \rfloor} \cdots \sum_{n_{i,m_i-1}=n_{i,m_i-2}}^{\lfloor \frac{N_i - \sum_{j=1}^{m_i-2} n_{i,j}}{2} \rfloor}, \quad (3.38a)$$

no interior do qual

$$n_{i,m_i} = N_i - \sum_{j=1}^{m_i-1} n_{i,j}. \quad (3.38b)$$

Para sinais com *clusters* estatisticamente idênticos nos sentidos marginal e conjunto,

$$E \left\{ \hat{W}_1^{N_1} \hat{W}_2^{N_2} \right\} = \prod_{i=1}^2 \left(\frac{N_i!}{m_i^{N_i}} \right) \sum_{\mathbb{B}_{m_1, N_1}} \sum_{\mathbb{B}_{m_2, N_2}} \left[\prod_{i=1}^2 \left[\text{Per}(\mathbf{n}_i) \prod_{j=1}^{m_i} \left(\frac{\vartheta_0(\mathbf{n}_j; \mathbf{k}; \boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\nu})}{n_{i,j}!} \right) \right] \right], \quad (3.39a)$$

em que

$$\mathbf{n}_i = [n_{i,1} \ n_{i,2} \ \cdots \ n_{i,m_i}] \in \mathbb{N}^{m_i}, \quad (3.39b)$$

$$\mathbf{n}_j = [n_{1,j} \ n_{2,j}] \in \mathbb{N}^2, \quad (3.39c)$$

$$\mathbf{k} = [k_{X_1} \ k_{Y_1} \ k_{X_2} \ k_{Y_2}], \quad (3.39d)$$

$$\boldsymbol{\eta} = [\eta_1 \ \eta_2], \text{ e} \quad (3.39e)$$

$$\boldsymbol{\nu} = [\nu_1 \ \nu_2]. \quad (3.39f)$$

Os MDs Nakagami e η - μ consideram *clusters* estatisticamente idênticos no sentido marginal. Por outro lado, nem esses MDs nem o MD κ - μ são restritos a *clusters* estatisticamente idênticos no sentido conjunto, uma vez que o espalhamento do atraso temporal é variável de um *cluster* para outro — vide Capítulo 1, Seção 1.2 — e, como será visto no Capítulo 4, esse espalhamento está presente nos parâmetros dos CCGs — ν_1 e ν_2 , ou ν_c e ν_s — quando há separação freqüencial.

Sinais com Um *Cluster*

Vários MDs, tais como Rayleigh, Rice, Hoyt, η - κ Simétrica, η - κ Assimétrica e η - κ Generalizada, consideram cada sinal com um único *cluster* compartilhado e nenhum *cluster* não-compartilhado, ou seja, $m_0 = m_1 = m_2 = 1$. Nesse caso, os momentos marginal e conjunto das

potências normalizadas são simplificados:

$$E \left\{ \hat{W}_i^{N_i} \right\} = \vartheta_1(N_i; \mathbf{k}_i; \eta_i), \text{ e} \quad (3.40a)$$

$$E \left\{ \hat{W}_1^{N_1} \hat{W}_2^{N_2} \right\} = \vartheta_2(\mathbf{n}; \mathbf{k}; \boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\nu}). \quad (3.40b)$$

em que

$$\mathbf{k}_i = [k_{X_i} \ k_{Y_i}], \quad (3.40c)$$

$$\mathbf{n} = [N_1 \ N_2] \in \mathbb{N}^2, \quad (3.40d)$$

$$\mathbf{k} = [k_{X_1} \ k_{Y_1} \ k_{X_2} \ k_{Y_2}], \quad (3.40e)$$

$$\boldsymbol{\eta} = [\eta_1 \ \eta_2], \text{ e} \quad (3.40f)$$

$$\boldsymbol{\nu} = [\nu_1 \ \nu_2]. \quad (3.40g)$$

Note que (3.40) é um caso particular de (3.37)-(3.39).

3.4 Coeficiente de Correlação da Potência Simples

Para ordens unitárias das potências, ou seja, $N_1 = N_2 = 1$, é mostrado, no Apêndice C, que

$$\delta_{1,1}^P = \frac{Cov\{W_1, W_2\}}{\sqrt{Var\{W_1\}Var\{W_2\}}}, \quad (3.41a)$$

em que

$$Var\{W_i\} = \sum_{j=1}^{m_i} \left[4(a_{X_{i,j}}^2 \sigma_{X_{i,j}}^2 + a_{Y_{i,j}}^2 \sigma_{Y_{i,j}}^2) + 2(\sigma_{X_{i,j}}^4 + \sigma_{Y_{i,j}}^4) \right], \text{ e} \quad (3.41b)$$

$$\begin{aligned} Cov\{W_1, W_2\} = \sum_{j=1}^{m_0} & \left[2\nu_{1,j}^2 (\sigma_{X_{1,j}}^2 \sigma_{X_{2,j}}^2 + \sigma_{Y_{1,j}}^2 \sigma_{Y_{2,j}}^2) + 2\nu_{2,j}^2 (\sigma_{X_{1,j}}^2 \sigma_{Y_{2,j}}^2 + \sigma_{Y_{1,j}}^2 \sigma_{X_{2,j}}^2) \right. \\ & + 4\nu_{1,j} (a_{X_{1,j}} a_{X_{2,j}} \sigma_{X_{1,j}} \sigma_{X_{2,j}} + a_{Y_{1,j}} a_{Y_{2,j}} \sigma_{Y_{1,j}} \sigma_{Y_{2,j}}) \\ & \left. + 4\nu_{2,j} (a_{X_{1,j}} a_{Y_{2,j}} \sigma_{X_{1,j}} \sigma_{Y_{2,j}} - a_{Y_{1,j}} a_{X_{2,j}} \sigma_{Y_{1,j}} \sigma_{X_{2,j}}) \right]. \end{aligned} \quad (3.41c)$$

Tal estatística é designada nesta dissertação como coeficiente de correlação da potência simples (CCPS). De fato, $\delta_{1,1}^P$ constitui o coeficiente de correlação de maior importância tratado neste capítulo, pois ele pode ser empregado como aproximação de $\delta_{1,1}^E$, estatística a partir da qual são derivados os parâmetros de coerência. Por esse motivo, no restante desta subseção,

exprime-se $\delta_{1,1}^P$ para diversos MDs.

3.4.1 Sinais com *Clusters* Estatisticamente Idênticos

Para sinais com *clusters* estatisticamente idênticos no sentido marginal,

$$\begin{aligned} \delta_{1,1}^P = & \frac{m_0}{\sqrt{m_1 m_2}} \prod_{i=1}^2 \left[\left[\eta_i^2 (2k_{X_i} + 1) + 2k_{Y_i} + 1 \right]^{-1/2} \right] \times \left[2\bar{\nu}_1 \left(\eta_1 \eta_2 \sqrt{k_{X_1} k_{X_2}} + \sqrt{k_{Y_1} k_{Y_2}} \right) \right. \\ & \left. + 2\bar{\nu}_2 \left(\eta_1 \sqrt{k_{X_1} k_{Y_2}} - \eta_2 \sqrt{k_{Y_1} k_{X_2}} \right) + \hat{\nu}_1^2 (1 + \eta_1 \eta_2) + \hat{\nu}_2^2 (\eta_1 + \eta_2) \right], \end{aligned} \quad (3.42a)$$

em que

$$\bar{\nu}_i = \frac{1}{m_0} \sum_{j=1}^{m_0} [\nu_{i,j}] \quad i = 1, 2, \quad (3.42b)$$

$$\hat{\nu}_i = \sqrt{\frac{1}{m_0} \sum_{j=1}^{m_0} [\nu_{i,j}^2]} \quad i = 1, 2. \quad (3.42c)$$

Para sinais com *clusters* estatisticamente idênticos nos sentidos marginal e conjunto,

$$\begin{aligned} \delta_{1,1}^P = & \frac{\mu_0}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} \prod_{i=1}^2 \left[\left[\eta_i^2 (2k_{X_i} + 1) + 2k_{Y_i} + 1 \right]^{-1/2} \right] \times \left[2\nu_1 \left(\eta_1 \eta_2 \sqrt{k_{X_1} k_{X_2}} + \sqrt{k_{Y_1} k_{Y_2}} \right) \right. \\ & \left. + 2\nu_2 \left(\eta_1 \sqrt{k_{X_1} k_{Y_2}} - \eta_2 \sqrt{k_{Y_1} k_{X_2}} \right) + \nu_1^2 (1 + \eta_1 \eta_2) + \nu_2^2 (\eta_1 + \eta_2) \right], \end{aligned} \quad (3.43a)$$

$$\mu_i = m_i, \quad i = 0, 1, 2. \quad (3.43b)$$

Em (3.43), diferentemente do que ocorre com m_i nas expressões dos momentos para ordens superiores das potências ou para *clusters* estatisticamente diferentes, μ_i pode assumir valores não inteiros em (3.43), pois não faz parte de limite de somatório ou produtório. De fato, é prática comum na literatura [4, 5, 13] estender μ_i do domínio discreto, considerado ao longo das deduções das estatísticas de um modelo, para o domínio contínuo, assumido nas expressões finais das mesmas estatísticas.

Em (3.42), mesmo sendo m_0 um limite de um somatório, a transformação do número de *clusters* do domínio discreto para o domínio contínuo também pode ser aplicada, através de

novas definições de $\bar{\nu}_i$ e de $\hat{\nu}_i$:

$$\bar{\nu}_i = \frac{1}{\mu_0} \int_0^{\mu_0} \nu_{i,\mu} d\mu, \quad i = 1, 2, \quad (3.44a)$$

$$\hat{\nu}_i = \sqrt{\frac{1}{\mu_0} \int_0^{\mu_0} \nu_{i,\mu}^2 d\mu}, \quad i = 1, 2. \quad (3.44b)$$

3.4.2 Modelo de Desvanecimento Nakagami

Neste modelo, além de *clusters* estatisticamente idênticos no sentido marginal, assume-se que

$$a_{X_{i,j}} = a_{Y_{i,j}} = 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \dots, m_i, \text{ e} \quad (3.45a)$$

$$\sigma_{X_{i,j}} = \sigma_{Y_{i,j}} = \sigma_i, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \dots, m_i. \quad (3.45b)$$

Dadas as igualdades acima, o coeficiente de correlação torna-se bastante simples. Para o número de *clusters* no domínio discreto:

$$\delta_{1,1}^P = \frac{m_0}{\sqrt{m_1 m_2}} \hat{\rho}^2, \quad (3.46a)$$

em que

$$\hat{\rho} = \sqrt{\frac{1}{m_0} \sum_{j=1}^{m_0} [\rho_j^2]}, \text{ e} \quad (3.46b)$$

$$\rho_j = \sqrt{\nu_{1,j}^2 + \nu_{2,j}^2}. \quad (3.46c)$$

Para o número de *clusters* no domínio contínuo,

$$\delta_{1,1}^P = \frac{\mu_0}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} \hat{\rho}^2, \quad (3.47a)$$

em que

$$\hat{\rho} = \sqrt{\frac{1}{\mu_0} \int_0^{\mu_0} \rho_\mu^2 d\mu}, \text{ e} \quad (3.47b)$$

$$\rho_\mu = \sqrt{\nu_{1,\mu}^2 + \nu_{2,\mu}^2}. \quad (3.47c)$$

Modelo de Desvanecimento Rayleigh

O coeficiente de correlação do MD Rayleigh é um caso especial de (3.46) no qual $m_0 = m_1 = m_2 = 1$:

$$\delta_{1,1}^P = \rho^2, \quad (3.48a)$$

em que

$$\rho = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}. \quad (3.48b)$$

3.4.3 Modelo de Desvanecimento κ - μ

Este modelo [4] considera que

$$\sigma_{X_{i,j}} = \sigma_{Y_{i,j}} = \sigma_i, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \dots, m_i, \quad (3.49a)$$

e define o parâmetro κ_i como segue:

$$\kappa_i = \frac{\sum_{j=1}^{m_i} [a_{X_{i,j}}^2 + a_{Y_{i,j}}^2]}{2m_i\sigma_i^2}, \quad i = 1, 2. \quad (3.49b)$$

Considerando, além das especificações do modelo, *clusters* estatisticamente idênticos no sentido marginal: para o número de *clusters* no domínio discreto,

$$\delta_{1,1}^P = \frac{m_0}{\sqrt{m_1 m_2}} \frac{\hat{\rho}^2 + 2\bar{\nu}_c \sqrt{\kappa_1 \kappa_2}}{\sqrt{(1 + 2\kappa_1)(1 + 2\kappa_2)}}, \quad (3.50a)$$

em que

$$\kappa_i = \frac{a_{X_i}^2 + a_{Y_i}^2}{2\sigma_i^2}, \quad i = 1, 2, \text{ e} \quad (3.50b)$$

$$\bar{\nu}_c = \frac{1}{m_0} \sum_{j=0}^{m_0} [\nu_{c,j}]; \quad (3.50c)$$

e, para o número de *clusters* no domínio contínuo,

$$\delta_{1,1}^P = \frac{\mu_0}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} \frac{\hat{\rho}^2 + 2\bar{\nu}_c \sqrt{\kappa_1 \kappa_2}}{\sqrt{(1 + 2\kappa_1)(1 + 2\kappa_2)}}, \quad (3.51a)$$

em que

$$\bar{\nu}_c = \frac{1}{\mu_0} \int_0^{\mu_0} \nu_{c,\mu} d\mu. \quad (3.51b)$$

Modelo de Desvanecimento Rice

Para $m_0 = m_1 = m_2 = 1$, (3.50) é o coeficiente de correlação da potência simples do MD Rice:

$$\delta_{1,1}^P = \frac{\rho^2 + 2\nu_c \sqrt{\kappa_1 \kappa_2}}{\sqrt{(1 + 2\kappa_1)(1 + 2\kappa_2)}}. \quad (3.52)$$

3.4.4 Modelo de Desvanecimento η - μ

Neste modelo [5], além de *clusters* estatisticamente idênticos no sentido marginal, consideram-se nulas as médias dos componentes em fase $X_{i,j}$ e em quadratura $Y_{i,j}$ de cada *cluster*, ou seja,

$$a_{X_i} = a_{Y_i} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.53)$$

Para o número de *clusters* no domínio discreto:

$$\delta_{1,1}^P = \frac{m_0}{\sqrt{m_1 m_2}} \frac{\hat{\nu}_1^2(1 + \eta_1 \eta_2) + \hat{\nu}_2^2(\eta_1 + \eta_2)}{\sqrt{(1 + \eta_1^2)(1 + \eta_2^2)}}, \quad (3.54)$$

em que $\hat{\nu}_1$ e $\hat{\nu}_2$ são dados em (3.42c). Já para o número de *clusters* no domínio contínuo, segue que

$$\delta_{1,1}^P = \frac{\mu_0}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} \frac{\hat{\nu}_1^2(1 + \eta_1 \eta_2) + \hat{\nu}_2^2(\eta_1 + \eta_2)}{\sqrt{(1 + \eta_1^2)(1 + \eta_2^2)}}, \quad (3.55)$$

em que $\hat{\nu}_1$ e $\hat{\nu}_2$ são dados em (3.44b).

Uma propriedade importante deste modelo é que, em ambientes estacionários, onde $\eta_1 = \eta_2 = \eta$, $\delta_{1,1}^P$ é simétrico para $0 \leq \eta \leq 1$ e $1 \leq \eta \leq \infty$ ($0 \leq \eta^{-1} \leq 1$). Isso é provado substituindo ambos η_1 e η_2 por η_1^{-1} e η_2^{-1} , respectivamente, e verificando que $\delta_{1,1}^P$ permanece inalterado.

Modelo de Desvanecimento Hoyt

Para $m_0 = m_1 = m_2 = 1$, (3.54) é o coeficiente de correlação da potência simples do MD Hoyt:

$$\delta_{1,1}^P = \frac{\nu_1^2(1 + \eta_1\eta_2) + \nu_2^2(\eta_1 + \eta_2)}{\sqrt{(1 + \eta_1^2)(1 + \eta_2^2)}}. \quad (3.56)$$

3.4.5 Modelos de Desvanecimento η - κ

Os MDs η - κ consideram cada sinal composto de um *cluster*, sendo que dois dos modelos assumem restrições adicionais: no MD η - κ Assimétrico [11],

$$a_{Y_i} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (3.57a)$$

e, no MD η - κ Simétrico [12],

$$\frac{a_{X_i}^2}{a_{Y_i}^2} = \frac{\sigma_{X_i}^2}{\sigma_{Y_i}^2}, \quad i = 1, 2. \quad (3.57b)$$

Em todos os MDs η - κ , tem-se que

$$\eta_i = \frac{\sigma_{X_i}^2}{\sigma_{Y_i}^2}. \quad (3.58)$$

Quanto às definições dos parâmetros κ 's, no MD η - κ Assimétrico,

$$\kappa_i = \frac{k_{X_i}}{1 + \eta_i^{-1}} = \frac{a_{X_i}^2}{\sigma_{X_i}^2 + \sigma_{Y_i}^2}, \quad (3.59a)$$

no MD η - κ Simétrico,

$$\kappa_i = k_{X_i} = k_{Y_i} = \frac{a_{X_i}^2}{\sigma_{X_i}^2} = \frac{a_{Y_i}^2}{\sigma_{Y_i}^2}, \quad (3.59b)$$

e, no MD η - κ Generalizado,

$$\kappa_{X_i} = k_{X_i} = \frac{a_{X_i}^2}{\sigma_{X_i}^2}, \text{ e} \quad (3.59c)$$

$$\kappa_{Y_i} = k_{Y_i} = \frac{a_{Y_i}^2}{\sigma_{Y_i}^2}. \quad (3.59d)$$

Dadas as restrições e definições acima, é direto deduzir que, para o MD η - κ Assimétrico,

$$\delta_{1,1}^P = \frac{2\nu_1\sqrt{\eta_1\eta_2(1+\eta_1)(1+\eta_2)\kappa_1\kappa_2} + \nu_1^2(1+\eta_1\eta_2) + \nu_2^2(\eta_1+\eta_2)}{\prod_{i=1}^2 \left[\sqrt{\eta_i^2(1+2\kappa_i)} + 1 + 2\eta_i\kappa_i \right]}, \quad (3.60a)$$

para o MD η - κ Simétrico,

$$\delta_{1,1}^P = \frac{2[\nu_1(1+\eta_1\eta_2) + \nu_2(\eta_1-\eta_2)]\sqrt{\kappa_1\kappa_2} + \nu_1^2(1+\eta_1\eta_2) + \nu_2^2(\eta_1+\eta_2)}{\prod_{i=1}^2 \left[\sqrt{(1+\eta_i^2)(1+2\kappa_i)} \right]}, \quad (3.60b)$$

e, para o MD η - κ Generalizado,

$$\begin{aligned} \delta_{1,1}^P = & \prod_{i=1}^2 \left[\left[\eta_i^2(1+2\kappa_{X_i}) + 1 + 2\kappa_{Y_i} \right]^{-1/2} \right] \times \left[2\nu_1 \left(\eta_1\eta_2\sqrt{\kappa_{X_1}\kappa_{X_2}} + \sqrt{\kappa_{Y_1}\kappa_{Y_2}} \right) \right. \\ & \left. + 2\nu_2 \left(\eta_1\sqrt{\kappa_{X_1}\kappa_{Y_2}} - \eta_2\sqrt{\kappa_{Y_1}\kappa_{X_2}} \right) + \nu_1^2(1+\eta_1\eta_2) + \nu_2^2(\eta_1+\eta_2) \right]. \end{aligned} \quad (3.60c)$$

3.5 Conclusão

Este capítulo forneceu o CCP de um modelo geral de desvanecimento. Além de o procedimento de cálculo do CCP dispensar a dedução da JPDF das envoltórias (ou potências) e das fases, bem como da JPDF das envoltórias (ou potências), a expressão final do referido coeficiente envolve apenas somatórios de números finitos de termos. Isso torna a utilização do CCP muito mais simples que a do CCE.

Caso específico do CCP, o CCPS é a estatística mais importante deduzida neste capítulo, pois constitui uma aproximação do CCES, que é usada na obtenção dos parâmetros de coerência de um canal com desvanecimento. Por esse motivo, tal coeficiente foi particularizado para os diversos MDs mencionados na introdução deste capítulo. Nos MDs Nakagami, κ - μ e η - μ verifica-se que o comportamento variável dos CCPS de um *cluster* para outro é relevante.

Capítulo 4

Resultados Numéricos

Neste capítulo, usando-se as expressões teóricas do CCES do MD Rice e do CCPS do modelo geral de desvanecimento do Capítulo 3, realiza-se uma análise numérica dos referidos coeficientes. Inicialmente, verificam-se, para os diversos MDs, quais valores dos CCGs implicam boa aproximação do CCES pelo CCPS. Em seguida, partido de PDFs dos tempos de chegada e os ângulos de chegada dos componentes espalhados, expressam-se os CCGs como funções da distância d entre os pontos de recepção e da diferença de frequência $\Delta\omega$ entre os sinais transmitidos. Por fim, examinam-se os efeitos das separações espacial e frequencial sobre o CCES e o CCPS, e avaliam-se a distância de coerência, o tempo de coerência e a largura de banda de coerência.

Ao longo de toda a análise numérica, embora breves considerações sejam feitas para ambientes não-estacionários e para *clusters* estatisticamente diferentes no sentido conjunto, são priorizados ambientes estacionários e MDs com *clusters* estatisticamente idênticos nos sentidos marginal e conjunto. Para esta configuração, o número de *clusters* compondo o sinal tem influência muito pequena sobre o CCES — como exemplo, vide [25] — e nula sobre o CCPS — vide Capítulo 3, Seção 3.4. Desse modo, salvo os casos de ambientes não-estacionários e de *clusters* estatisticamente diferentes, as conclusões para os MDs Rayleigh, Rice e Hoyt podem ser estendidas para os MDs Nakagami, κ - μ e η - μ , respectivamente. Na obtenção dos valores numéricos do CCPS, deduzido no Capítulo 3, a associação dos CCGs aos parâmetros físicos do modelo é emprestada dos resultados do Capítulo 2.

A Seção 4.1 contrasta os coeficientes de correlação de ordens unitárias da envoltória e da potência. A Seção 4.2 fornece os CCGs em termos da separação espaço-frequencial de dois sinais. A Seção 4.3 examina os coeficientes de correlação espaciais de dois sinais. A Seção 4.5 analisa os coeficientes de correlação frequenciais de dois sinais. A Seção 4.6 investiga os parâmetros de coerência dos diversos canais com desvanecimento. A Seção 4.7 conclui o

capítulo. Por serem muitas, todas as figuras estão no final do capítulo.

4.1 Aproximação do CCES pelo CCPS

Nesta seção, o CCES ($\delta_{1,1}^E$) é confrontado graficamente com o CCPS ($\delta_{1,1}^P$) para diversos MDs em ambientes estacionários. O primeiro coeficiente é obtido por meio de simulações realizadas no software MATLAB, exceto para os MDs Rayleigh e Rice; o segundo, por meio das expressões teóricas apresentadas no Capítulo 3. Em todos os gráficos, $\delta_{1,1}^E$ é representado em linhas contínuas, ao passo que $\delta_{1,1}^P$, em linhas tracejadas.

Diferentemente do que ocorre na maioria dos MDs, no MD Rayleigh, $\delta_{1,1}^E$ e $\delta_{1,1}^P$ dependem apenas do valor de $\rho = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$, e não dos valores individuais de ν_1 e ν_2 (ou ν_c e ν_s). Por essa razão, aqueles coeficientes são exibidos diretamente em termos de ρ na Fig. 4.1. Nota-se que, nesse caso, $\delta_{1,1}^E$ e $\delta_{1,1}^P$ são bastante próximos, principalmente para valores extremos de ρ — $\rho \approx 0$ ou $\rho \approx 1$; assim, a aproximação de $\delta_{1,1}^E$ por $\delta_{1,1}^P$ é muito boa. De fato, na determinação dos parâmetros de coerência do MD Rayleigh, é freqüente o emprego de $\delta_{1,1}^P$ como aproximação de $\delta_{1,1}^E$ [1, 3, 20, 26, 27, 28].

Quanto ao MD Rice, a Fig. 4.2 ilustra $\delta_{1,1}^E$ e $\delta_{1,1}^P$ para diferentes valores de ν_s , com ν_c variando no intervalo $-\sqrt{1 - \nu_s^2} \leq \nu_c \leq \sqrt{1 - \nu_s^2}$. Como pode ser observado, quanto maior é o valor de $|\nu_s|$, pior é a aproximação de $\delta_{1,1}^E$ por $\delta_{1,1}^P$. Além disso, valores negativos de ν_c implicam perda de acurácia à medida que $|\nu_c|$ aumenta. Por outro lado, quando $\nu_c \geq -0,2$ e $|\nu_s| \leq 0,5$, a referida aproximação é bastante apropriada.

Para os demais MDs de um *cluster*, $\delta_{1,1}^E$ e $\delta_{1,1}^P$ são exibidos para diferentes valores de ν_2 , com ν_1 variando no intervalo $-\sqrt{1 - \nu_2^2} \leq \nu_1 \leq \sqrt{1 - \nu_2^2}$. No que concerne ao MD Hoyt, a condição $|\nu_s| \leq 0,6$ é suficiente para que a aproximação de $\delta_{1,1}^E$ por $\delta_{1,1}^P$ seja eficaz. Já as conclusões referentes aos MDs η - κ com relação a ν_1 e ν_2 são semelhantes àsquelas referentes ao MD Rice com relação a ν_c e ν_s .

A Tabela 4.1 resume as condições em que é mais acurada a aproximação do CCES pelo CCPS.

MD	Restrições dos CCGs
Rayleigh	Nenhuma
Rice	$\nu_c \geq -0,2$ e $ \nu_s \leq 0,5$
Hoyt	$ \nu_2 \leq 0,6$
Nakagami	Nenhuma
κ - μ	$\bar{\nu}_c \geq -0,2$; $\hat{\nu}_c \geq -0,2$ e $ \hat{\nu}_s \leq 0,5$
η - κ	$\nu_1 \geq -0,2$ e $ \nu_2 \leq 0,5$
η - μ	$ \hat{\nu}_2 \leq 0,6$

Tab. 4.1: Condições para maior acurácia da aproximação do CCES pelo CCPS.

Por fim, vale destacar:

- quanto mais próxima de uma reta passando pelos pontos $(0,0)$ e $(1,1)$ é a relação entre o módulo do CCES ou do CCPS e os módulos dos CCGs, menores serão as influências dos parâmetros dos MDs sobre o CCES e o CCPS;
- para os modelos nos quais pelo menos um dos componentes em quadratura do sinal tem média não nula (Rice, η - κ Assimétrico, η - κ Simétrico e η - κ Generalizado), $\delta_{1,1}^E$ e $\delta_{1,1}^P$ podem assumir valores negativos, enquanto que, para os modelos nos quais ambos os componentes em quadratura têm médias nulas (Rayleigh e Hoyt), $\delta_{1,1}^E$ e $\delta_{1,1}^P$ são sempre positivos.

4.2 Coeficientes de Correlação das Gaussianas

Nesta seção, para duas configurações equivalentes de espalhamento das ondas difusas e diretividade da antena receptora, os CCGs são expressos como funções das separações espacial e freqüencial.

4.2.1 Primeira Configuração

Na primeira configuração, são assumidas antenas omnidirecionais e correlação unitária entre as amplitudes normalizadas das ondas espalhadas, A_{n1} e A_{n2} , ou seja,

$$D(\theta) = D_0, \quad \theta \in [-\pi, \pi), \text{ e} \quad (4.1a)$$

$$\rho_A(d, \Delta\omega) = 1, \quad \forall d, \Delta\omega. \quad (4.1b)$$

Desse modo, (2.16), (2.17e), (2.26j) e (2.26k) são simplificados:

$$\nu_1 = E \left\{ \cos \left[\beta_a d \frac{\cos(\Theta_a)}{\cos(\Theta_d)} + \Delta\omega T_a \right] \right\}, \quad (4.2a)$$

$$\nu_2 = E \left\{ \sin \left[\beta_a d \frac{\cos(\Theta_a)}{\cos(\Theta_d)} + \Delta\omega T_a \right] \right\}, \quad (4.2b)$$

$$\nu_c = E \left\{ \cos \left[\beta_a d \left(\frac{\cos(\Theta_a)}{\cos(\Theta_d)} - \frac{\cos(\theta_{0a})}{\cos(\theta_{0d})} \right) + \Delta\omega T \right] \right\}, \text{ e} \quad (4.2c)$$

$$\nu_s = E \left\{ \sin \left[\beta_a d \left(\frac{\cos(\Theta_a)}{\cos(\Theta_d)} - \frac{\cos(\theta_{0a})}{\cos(\theta_{0d})} \right) + \Delta\omega T \right] \right\}. \quad (4.2d)$$

Note que T_a , presente em ν_1 e ν_2 , é o tempo de propagação das ondas espalhadas, ao passo que T , presente em ν_c e ν_s , é o tempo de chegada das ondas espalhadas a partir do instante em que a onda dominante atinge o receptor — no caso do MD Rice, a onda dominante é a onda de linha de visada direta. Por simplicidade, será considerado $T_a = T$.

Além de (4.1), consideram-se as VAs Θ_a , Θ_d e T independentes, ou seja,

$$p_{\Theta_a, \Theta_d, T}(\theta_a, \theta_d, t) = p_{\Theta_a}(\theta_a) p_{\Theta_d}(\theta_d) p_T(t), \quad (4.3a)$$

e as seguintes PDFs:

$$p_{\Theta_a}(\theta_a) = \frac{\exp[\varsigma \cos(\theta_a - \theta_e)]}{2\pi I_0(\varsigma)}, \quad \theta_a \in [-\pi, \pi), \quad (4.3b)$$

$$p_{\Theta_d}(\theta_d) = \delta(\theta_d), \text{ e} \quad (4.3c)$$

$$p_T(t) = \frac{1}{\bar{T}} \exp\left(-\frac{t}{\bar{T}}\right), \quad t \in [0, \infty), \quad (4.3d)$$

em que $\varsigma \geq 0$ indica o grau de concentração das ondas espalhadas, θ_e é o ângulo do eixo em torno do qual se concentram as ondas difusas, $\delta(\cdot)$ é a função delta de Dirac, e $\bar{T}$ é o espalhamento do atraso temporal (*time delay spread*) das ondas difusas. O uso de (4.3b) como PDF dos ângulos de chegada das ondas espalhadas foi originalmente proposto em [29]. Nessa PDF, $\varsigma = 0$ descreve espalhamento isotrópico — $p_{\Theta_a}(\theta_a) = 1/(2\pi)$, $\varsigma \geq 3$ representa espalhamento unidirecional —, e $\varsigma \rightarrow \infty$ exprime ausência de espalhamento — $p_{\Theta_a}(\theta_a) = \delta(\theta_a - \theta_e)$. A Fig. 4.7 exemplifica (4.3b) para $\theta_e = 30^\circ$ e diferentes valores de ς . Além da flexibilidade, tal PDF proporciona fácil manipulação matemática. A PDF (4.3c) implica Θ_d determinístico e nulo, o que é adequado para as situações em que as distâncias dos espalhadores aos dois pontos de recepção são muito maiores do que a distância entre os pontos de recepção. Por fim, (4.3d) tem sido amplamente utilizado na literatura como PDF do tempo de chegada das ondas espalhadas

[1, 2, 3, 19, 27]. O parâmetro $\bar{T}$ varia de décimos de microsegundos para áreas rurais a dezenas de microsegundos para áreas urbanas [27].

Das PDFs dos ângulos de chegada,

$$\begin{aligned} E \left\{ \cos \left[\beta_a d \frac{\cos(\Theta_a)}{\cos(\Theta_d)} \right] \right\} &= Re \left\{ E \left\{ \exp \left[\mathbf{i} \beta_a d \frac{\cos(\Theta_a)}{\cos(\Theta_d)} \right] \right\} \right\} \\ &= \frac{Re \left\{ I_0 \left(\sqrt{\varsigma^2 - \beta_a^2 d^2 + 2\mathbf{i} \beta_a d \varsigma \cos(\theta_e)} \right) \right\}}{I_0(\varsigma)}, \text{ e} \end{aligned} \quad (4.4a)$$

$$\begin{aligned} E \left\{ \sin \left[\beta_a d \frac{\cos(\Theta_a)}{\cos(\Theta_d)} \right] \right\} &= Im \left\{ E \left\{ \exp \left[\mathbf{i} \beta_a d \frac{\cos(\Theta_a)}{\cos(\Theta_d)} \right] \right\} \right\} \\ &= \frac{Im \left\{ I_0 \left(\sqrt{\varsigma^2 - \beta_a^2 d^2 + 2\mathbf{i} \beta_a d \varsigma \cos(\theta_e)} \right) \right\}}{I_0(\varsigma)}. \end{aligned} \quad (4.4b)$$

Em particular, para espalhamento isotrópico ($\varsigma = 0$),

$$E \left\{ \cos \left[\beta_a d \frac{\cos(\Theta_a)}{\cos(\Theta_d)} \right] \right\} = Re \{ I_0(\mathbf{i} \beta_a d) \} = Re \{ J_0(\beta_a d) \} = J_0(\beta_a d), \text{ e} \quad (4.4c)$$

$$E \left\{ \sin \left[\beta_a d \frac{\cos(\Theta_a)}{\cos(\Theta_d)} \right] \right\} = Im \{ I_0(\mathbf{i} \beta_a d) \} = Im \{ J_0(\beta_a d) \} = 0. \quad (4.4d)$$

e, para ausência de espalhamento ($\varsigma \rightarrow \infty$),

$$E \left\{ \cos \left[\beta_a d \frac{\cos(\Theta_a)}{\cos(\Theta_d)} \right] \right\} = \cos[\beta_a d \cos(\theta_e)], \text{ e} \quad (4.4e)$$

$$E \left\{ \sin \left[\beta_a d \frac{\cos(\Theta_a)}{\cos(\Theta_d)} \right] \right\} = \sin[\beta_a d \cos(\theta_e)]. \quad (4.4f)$$

Da PDF do tempo de chegada,

$$E \{ \cos(\Delta\omega T) \} = \frac{1}{1 + (\Delta\omega \bar{T})^2}, \text{ e} \quad (4.5a)$$

$$E \{ \sin(\Delta\omega T) \} = \frac{\Delta\omega \bar{T}}{1 + (\Delta\omega \bar{T})^2}. \quad (4.5b)$$

Por fim, analogamente ao ângulo Θ_d , será considerado que $\theta_{0d} = 0$. Aplicando essa igualdade e (4.4)-(4.5) em (4.2), ν_1 , ν_2 , ν_c e ν_s são expressos como funções de $\beta_a d$, $\Delta\omega \bar{T}$, θ_{0a} , θ_e e ς . Convém ressaltar que θ_{0a} e θ_e são ângulos tomados a partir da reta que contém os dois pontos de recepção — vide Capítulo 2, Seção 2.1.

4.2.2 Segunda Configuração

Um outro conjunto de hipóteses que conduziria aos mesmos CCGs apresentados na subseção anterior é mostrado como segue:

$$D(\theta) = D_0 \exp[\varsigma \cos(\theta - \theta_e)], \quad \theta \in [-\pi, \pi), \quad (4.6a)$$

$$\rho_A(d, \Delta\omega) = 1, \quad \forall d, \Delta\omega, \quad (4.6b)$$

$$p_{\Theta_a, \Theta_d, T}(\theta_a, \theta_d, t) = p_{\Theta_a}(\theta_a) p_{\Theta_d}(\theta_d) p_T(t), \quad (4.6c)$$

$$p_{\Theta_a}(\theta_a) = \frac{1}{2\pi}, \quad \theta_a \in [-\pi, \pi), \quad (4.6d)$$

$$p_{\Theta_d}(\theta_d) = \delta(\theta_d), \text{ e} \quad (4.6e)$$

$$p_T(t) = \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{t}{T}\right), \quad t \in [0, \infty), \quad (4.6f)$$

$$\theta_{0d} = 0 \quad (4.6g)$$

em que ς é o grau de diretividade da antena receptora, θ_e é o eixo de diretividade da antena receptora, e D_0 é uma constante. Nesse caso, o espalhamento é considerado sempre isotrópico, ao passo que a antena é direcional. Assim, no que concerne aos coeficientes de correlação de sinais, espalhamento anisotrópico e antena omnidirecional é intercambiável com espalhamento isotrópico e antena direcional.

4.2.3 Modelos de Desvanecimento com Vários *Clusters*

Como descrito no Capítulo 3, os MDs Nakagami, $\eta - \mu$ e $\kappa - \mu$ contemplam *clusters* estatisticamente distintos no sentido conjunto, visto que o espalhamento do atraso temporal $\bar{T}$ é variável de um *cluster* para outro. Em tais MDs, para o *cluster* j ,

$$p_{T_j}(t) = \frac{1}{\bar{T}_j} \exp\left(-\frac{t}{\bar{T}_j}\right), \quad t \in [0, \infty), \quad (4.7a)$$

$$E\{\cos(\Delta\omega T_j)\} = \frac{1}{1 + (\Delta\omega \bar{T}_j)^2}, \text{ e} \quad (4.7b)$$

$$E\{\sin(\Delta\omega T_j)\} = \frac{\Delta\omega \bar{T}_j}{1 + (\Delta\omega \bar{T}_j)^2}. \quad (4.7c)$$

Numa abordagem mais genérica, espalhamentos anisotrópicos com ς e θ_e específicos para cada *cluster* poderiam ser considerados.

4.2.4 Acurácia da Aproximação do CCES pelo CCPS

Para os MDs Hoyt, η - κ Assimétrico, η - κ Simétrico e η - κ Generalizado, as análises das correlações espaciais e freqüenciais dos sinais serão realizadas por meio do CCPS. Por isso, para tais MDs, verificar-se-á a acurácia da aproximação do CCES pelo CCPS a partir dos limites para ν_1 e ν_2 , dados na Seção 4.1, e dos CCGs resultantes das configurações previamente descritas.

Para $\Delta\omega = 0$, o CCPS será analisado para dois valores de θ_e : $\theta_e = 90^\circ$ e $\theta_e = 0^\circ$. No primeiro caso,

$$\nu_1(d) = \frac{\operatorname{Re}\left\{I_0\left(\sqrt{\varsigma^2 - \beta_a^2 d^2}\right)\right\}}{I_0(\varsigma)} = \frac{I_0\left(\sqrt{\varsigma^2 - \beta_a^2 d^2}\right)}{I_0(\varsigma)}, \text{ e} \quad (4.8a)$$

$$\nu_2(d) = \frac{\operatorname{Im}\left\{I_0\left(\sqrt{\varsigma^2 - \beta_a^2 d^2}\right)\right\}}{I_0(\varsigma)} = 0. \quad (4.8b)$$

Como $|\nu_2(d)| = 0$, a aproximação do CCES pelo CCPS é eficaz no MD Hoyt. No que se refere aos MDs η - κ , a Fig. 4.8 mostra que $\nu_1(d)$ — Equação (4.8a) — assume valores inferiores a $-0,2$ apenas no primeiro pico negativo, validando também a referida aproximação. Para $\theta_e = 0^\circ$, a Fig. 4.9 e a Fig. 4.10 ilustram $\nu_1(d)$ e $\nu_2(d)$, respectivamente. Nesse caso, a aproximação do CCES pelo CCPS é inapropriada para valores maiores de ς . No entanto, para $\varsigma \leq 1$, a aproximação ainda é boa, exceto no primeiro pico positivo e no primeiro pico negativo.

Para $d = 0$, $\nu_1(\Delta\omega)$ e $\nu_2(\Delta\omega)$ são apresentados na Fig. 4.11, elucidando que, nesse caso, a aproximação do CCES pelo CCPS é boa tanto para o MD Hoyt quanto para os MDs η - κ .

4.3 Coeficientes de Correlação Espaciais

Nesta seção, examinam-se os coeficientes de correlação espaciais. O coeficiente de correlação espacial da envoltória, $\delta_{1,1}^E(d)$, e o coeficiente de correlação espacial da potência, $\delta_{1,1}^P(d)$, são obtidos assumindo-se que ambos os sinais foram transmitidos à mesma freqüência, ou seja, $\Delta\omega = 0$.

4.3.1 Espalhamento Isotrópico e Antena Omnidirecional

Antena omnidirecional e espalhamento isotrópico são os mais freqüentes tipos de antena e de espalhamento usados na análise das diversas estatísticas de sinais em canais com desvanecimento [1, 3, 19, 27, 30, 31]. Por isso, atenção especial será dada a tal configuração.

Ambientes Estacionários

Para antena omnidirecional, espalhamento isotrópico e ambientes estacionários, tem-se que

$$\delta_{1,1}^P(d) = J_0^2(\beta_a d) \quad \text{para o MD Rayleigh,} \quad (4.9a)$$

$$\delta_{1,1}^P(d) = \frac{2k J_0(\beta_a d) \cos[\beta_a d \cos(\theta_{0a})] + J_0^2(\beta_a d)}{1 + 2k} \quad \text{para o MD Rice,} \quad (4.9b)$$

$$\delta_{1,1}^P(d) = J_0^2(\beta_a d) \quad \text{para o MD Hoyt,} \quad (4.9c)$$

$$\delta_{1,1}^P(d) = \frac{2\eta(1 + \eta)\kappa J_0(\beta_a d) + (1 + \eta^2)J_0^2(\beta_a d)}{\eta^2(1 + 2\kappa) + 1 + 2\eta\kappa} \quad \text{para o MD } \eta\text{-}\kappa \text{ Assimétrico,} \quad (4.9d)$$

$$\delta_{1,1}^P(d) = \frac{2\kappa J_0(\beta_a d) + J_0^2(\beta_a d)}{1 + 2\kappa} \quad \text{para o MD } \eta\text{-}\kappa \text{ Simétrico, e} \quad (4.9e)$$

$$\delta_{1,1}^P(d) = \frac{2(\eta^2\kappa_X + \kappa_Y)J_0(\beta_a d) + (1 + \eta^2)J_0^2(\beta_a d)}{\eta^2(1 + 2\kappa_X) + 1 + 2\eta\kappa_Y} \quad \text{para o MD } \eta\text{-}\kappa \text{ Generalizado.} \quad (4.9f)$$

Nesse caso, o coeficiente de correlação espacial da potência do MD Hoyt independe do parâmetro η característico do modelo, sendo, portanto, sempre igual ao do MD Rayleigh. Por outro lado, no MD Rice, tal coeficiente, bem como seu correspondente para a envoltória, é influenciado tanto por k quanto por θ_{0a} . Por isso, para diferentes valores de k , a Fig. 4.12 e a Fig. 4.13 mostram o coeficiente de correlação espacial da envoltória do MD Rice, respectivamente para $\theta_{0a} = 90^\circ$ e $\theta_{0a} = 0^\circ$. Nota-se que tal coeficiente apresenta um comportamento oscilatório de amplitudes — picos e vales — decrescentes com a distância. No que se refere ao parâmetro k : quanto maior é seu valor, maiores são os valores das amplitudes de oscilação; para $k \geq 4$, o coeficiente de correlação espacial não varia significativamente com esse parâmetro. Portanto, para propósitos práticos, $k = 4$ pode ser pensado como um limite superior. Já com relação ao ângulo θ_{0a} , é bastante perceptível sua influência no padrão de oscilação daquele coeficiente.

Os coeficientes de correlação espaciais da potência dos MDs $\eta\text{-}\kappa$ têm o mesmo comportamento que o correspondente coeficiente do MD Rice com $\theta_{0a} = 90^\circ$, sendo que os MDs $\eta\text{-}\kappa$ Assimétrico e $\eta\text{-}\kappa$ Generalizado têm maior flexibilidade que o MD Rice quanto às amplitudes de oscilação, por possuírem um (MD $\eta\text{-}\kappa$ Assimétrico) ou dois (MD $\eta\text{-}\kappa$ Generalizado) parâmetros a mais. Como exemplo, a Fig. 4.14 exibe o coeficiente de correlação espacial da potência para o MD $\eta\text{-}\kappa$ Assimétrico. Nesse MD, além do parâmetro κ , que tem papel semelhante ao do parâmetro k no MD Rice, há outro parâmetro, η , cujo aumento implica crescimento das amplitudes de oscilação. Lembrando que $\eta = 1$ no modelo MD $\eta\text{-}\kappa$ Assimétrico corresponde ao MD Rice com $\theta_{0a} = 90^\circ$, infere-se que é possível obter coeficientes de correlação espaciais da potência ainda maiores que no caso do MD Rice. Por fim, convém notar que o parâmetro η do MD $\eta\text{-}\kappa$ Simétrico não interfere em $\delta_{1,1}^P(d)$.

Ambientes Não-Estacionários

Mesmo para ambientes não-estacionários, o coeficiente de correlação espacial da potência do MD Rayleigh é expresso como em (4.9a). Para os demais MDs, a não-estacionariedade acarreta decorrelação. Como exemplos ilustrativos, a Fig. 4.15 e a Fig. 4.16 exibem, respectivamente, o coeficiente de correlação espacial da envoltória do MD Rice e o coeficiente de correlação espacial da potência do MD Hoyt. À medida que k_2 (ou η_2) se aproxima do valor de k_1 (ou η_1) o coeficiente de correlação aumenta, sendo que, $\forall k_2 \neq k_1$ (ou $\eta_2 \neq \eta_1$), o coeficiente de correlação parte de um valor inferior à unidade.

4.3.2 Espalhamento Anisotrópico ou Antena Direcional

Quando a antena é direcional ou o espalhamento é anisotrópico, $\delta_{1,1}^E(d)$ e $\delta_{1,1}^P(d)$ podem assumir comportamentos bastante diferentes dos apresentados na subseção anterior. Por isso, esta subseção analisa os coeficientes de correlação espaciais em ambientes estacionários para espalhamento anisotrópico e antena omnidirecional ou, equivalentemente, para espalhamento isotrópico e antena direcional.

Ausência de Espalhamento em Ambientes Estacionários

Embora improvável na prática, a ausência de espalhamento é a contraposição do espalhamento isotrópico. Desse modo, o estudo teórico daquela configuração facilita a compreensão da tendência de comportamento dos coeficientes de correlação espaciais à proporção que a concentração do espalhamento se intensifica.

Para $\varsigma \rightarrow \infty$ e ambientes estacionários:

$$\delta_{1,1}^E(d) = 1, \quad \text{e} \quad \delta_{1,1}^P(d) = 1 \quad (4.10a)$$

para o MD Rayleigh;

$$\delta_{1,1}^P(d) = \frac{1 + 2\kappa \cos[\beta_a d (\cos(\theta_e) - \cos(\theta_{0a}))]}{1 + 2\kappa} \quad (4.10b)$$

para o MD Rice;

$$\delta_{1,1}^P(d) = \frac{(1 + \eta)^2 + (1 - \eta)^2 \cos[2\beta_a d \cos(\theta_e)]}{2(1 + \eta^2)} \quad (4.10c)$$

para o MD Hoyt;

$$\delta_{1,1}^P(d) = \frac{(1 + \eta)^2 + 4\eta(1 + \eta)\kappa \cos [\beta_a d \cos (\theta_e)] + (1 - \eta)^2 \cos [2\beta_a d \cos (\theta_e)]}{2\eta^2(1 + 2\kappa) + 2(1 + 2\eta\kappa)} \quad (4.10d)$$

para o MD η - κ Assimétrico;

$$\delta_{1,1}^P(d) = \frac{(1 + \eta)^2 + 4(1 + \eta^2)\kappa \cos [\beta_a d \cos (\theta_e)] + (1 - \eta)^2 \cos [2\beta_a d \cos (\theta_e)]}{2(1 + \eta^2)(1 + 2\kappa)} \quad (4.10e)$$

para o MD η - κ Simétrico; e

$$\delta_{1,1}^P(d) = \frac{(1 + \eta)^2 + 4(\eta^2\kappa_X + \kappa_Y) \cos [\beta_a d \cos (\theta_e)] + (1 - \eta)^2 \cos [2\beta_a d \cos (\theta_e)]}{2\eta^2(1 + 2\kappa_X) + 2(1 + 2\kappa_Y)} \quad (4.10f)$$

para o MD η - κ Generalizado.

De (4.10), deduz-se que, para o MD Rayleigh, o MD Rice com $|\theta_{0a}| = |\theta_e|$, o MD Hoyt com $|\theta_e| = 90^\circ$ e os MDs η - κ com $|\theta_e| = 90^\circ$, o coeficiente de correlação espacial da potência é sempre unitário. Para os demais casos, o coeficiente de correlação espacial da potência dos MDs acima referidos são funções periódicas de d e oscilam em torno de um valor positivo.

Demais Espalhamentos Anisotrópicos em Ambientes Estacionários

A Fig. 4.17 e a Fig. 4.18 ilustram o coeficiente de correlação espacial da envoltória do MD Rayleigh, respectivamente para $\theta_e = 90^\circ$ e $\theta_e = 0^\circ$. Em ambos os casos, o aumento do grau de concentração das ondas intensifica o coeficiente de correlação da envoltória, sendo que, como visto anteriormente, $\delta_{1,1}^E(d)$ tende à unidade para $\varsigma \rightarrow \infty$. Além disso, na configuração em que $\theta_e = 0^\circ$, a mudança de $\delta_{1,1}^E(d)$ é significativa mesmo para valores menores de ς .

A Fig. 4.19 e a Fig. 4.20 mostram o coeficiente de correlação espacial da envoltória do MD Rice, respectivamente para $\theta_e = 90^\circ$ e $\theta_e = 0^\circ$, ambos com $\theta_{0a} = 90^\circ$ e $k = 1$. É expressiva a diferença no comportamento de $\delta_{1,1}^E(d)$ para os diferentes valores de θ_e : no primeiro caso, $\delta_{1,1}^E(d)$ tende lentamente à unidade à proporção que ς aumenta; no segundo caso, $\delta_{1,1}^E(d)$ é influenciado mais fortemente por ς e tende a uma função periódica com o crescimento de ς .

Para o MD Hoyt com $\theta_e = 90^\circ$, as curvas de $\delta_{1,1}^P(d)$ são muito semelhantes às curvas de $\delta_{1,1}^E(d)$ do MD Rayleigh com $\theta_e = 90^\circ$. No entanto, para $\theta_e = 0^\circ$ isso não ocorre; assim, coeficiente de correlação espacial da potência para o MD Hoyt com $\theta_e = 0^\circ$ é mostrado na Fig. 4.21. Nesse caso, $\delta_{1,1}^E(d)$ preserva seu caráter oscilatório mesmo para valores maiores de ς , o que não ocorre na Fig. 4.18. De fato, $\delta_{1,1}^E(d)$ é uma função periódica para $\varsigma \rightarrow \infty$.

4.3.3 Modelos de Desvanecimento com Vários *Clusters*

Os coeficientes de correlação espaciais independem do espalhamento do atraso temporal $\bar{T}$. Portanto:

- para ambientes estacionários, os MDs Nakagami, $\eta - \mu$ e $\kappa - \mu$ têm o mesmo comportamento de seus MDs correspondentes de um *cluster*;
- para ambientes não-estacionários, os MDs Nakagami, $\eta - \mu$ e $\kappa - \mu$ dependem também da razão $\mu_0/(\mu_1\mu_2)$, como ilustrado na Fig. 4.22 para $\mu_1 = \mu_0$.

4.4 Coeficientes de Correlação Temporais

Os coeficientes de correlação temporais são idênticos aos coeficientes de correlação espaciais, bastando-se fazer a transformação:

$$d = v\tau, \quad (4.11)$$

em que v é a velocidade da unidade móvel, e τ é o tempo.

4.5 Coeficientes de Correlação Freqüenciais

Como contrapartida dos coeficientes de correlação espaciais e temporais, os coeficientes de correlação freqüenciais, $\delta_{1,1}^E(\Delta\omega)$ e $\delta_{1,1}^P(\Delta\omega)$, são encontrados considerando-se o mesmo ponto de recepção para os dois sinais, isto é, $d = 0$. Nesse caso, são irrelevantes os valores dos parâmetros ς e θ_e , que exprimem o grau de concentração das ondas difusas — ou a diretividade da antena receptora — e o ângulo em que se concentram as ondas difusas — ou o ângulo de diretividade da antena receptora.

4.5.1 Ambientes Estacionários

A Fig. 4.23 mostra o coeficiente de correlação freqüencial da envoltória do MD Rice. Nota-se que é baixíssima a influência do parâmetro k sobre aquele coeficiente. De fato, para o MD Rice, o coeficiente de correlação freqüencial da potência independe de k , sendo igual ao do MD Rayleigh:

$$\delta_{1,1}^P(\Delta\omega) = \frac{1}{1 + (\Delta\omega\bar{T})^2}. \quad (4.12)$$

O coeficiente de correlação freqüencial da potência do MD Hoyt é apresentado na Fig. 4.24 e expresso como segue:

$$\delta_{1,1}^P(\Delta\omega) = \frac{1 + 2(\Delta\omega\bar{T})^2\eta + \eta^2}{\left[1 + (\Delta\omega\bar{T})^2\right]^2(1 + \eta^2)}. \quad (4.13)$$

Diferentemente do que ocorre com o parâmetro k de Rice, $\delta_{1,1}^P(\Delta\omega)$ depende de η : no Apêndice D, prova-se que, quanto mais próximo η é de 1, maior é $\delta_{1,1}^P(\Delta\omega)$. Assim, os valores extremos de $\delta_{1,1}^P(\Delta\omega)$ no MD Hoyt ocorrem para $\eta = 0$ (ou $\eta \rightarrow \infty$) e $\eta = 1$:

$$\delta_{1,1}^P(\Delta\omega) = \frac{1}{\left[1 + (\Delta\omega\bar{T})^2\right]^2}, \quad \eta = 0 \text{ (ou } \eta \rightarrow \infty), \text{ e} \quad (4.14a)$$

$$\delta_{1,1}^P(\Delta\omega) = \frac{1}{1 + (\Delta\omega\bar{T})^2}, \quad \eta = 1. \quad (4.14b)$$

Para os MDs η - κ , prova-se, no Apêndice D, que $\delta_{1,1}^P(\Delta\omega)$ é crescente com relação a κ nos MDs η - κ Assimétrico e η - κ Simétrico, e com relação a κ_X e a κ_Y no MD η - κ Generalizado. Além disso,

$$\delta_{1,1}^P(\Delta\omega) = \frac{1 + 2(\Delta\omega\bar{T})^2\eta + \eta^2}{\left[1 + (\Delta\omega\bar{T})^2\right]^2(1 + \eta^2)} \quad \kappa = 0 \text{ (ou } \kappa_X = 0 \text{ e } \kappa_Y = 0), \text{ e} \quad (4.15)$$

$$\delta_{1,1}^P(\Delta\omega) = \frac{1}{1 + (\Delta\omega\bar{T})^2} \quad \kappa \rightarrow \infty \text{ (ou } \kappa_X \rightarrow 0 \text{ e } \kappa_Y \rightarrow 0). \quad (4.16)$$

O limite inferior (4.15) é o próprio coeficiente de correlação freqüencial do Hoyt. Já o limite superior (4.15) é igual ao limite superior de $\delta_{1,1}^P(\Delta\omega)$ no MD Hoyt. Por conseguinte, o parâmetro κ dos MDs η - κ Assimétrico e η - κ Simétrico e os parâmetros κ_X e κ_Y do MD η - κ Generalizado não alteram os limites inferior e superior de $\delta_{1,1}^P(\Delta\omega)$. A Fig. 4.25 e a Fig. 4.26 exemplificam a influência de κ nos MDs η - κ Assimétrico e η - κ Simétrico, respectivamente.

No que concerne aos MDs com vários *clusters*, para os MDs Nakagami e κ - μ ,

$$\delta_{1,1}^P(\Delta\omega) = \frac{1}{m_0} \sum_{j=1}^{m_0} \left[\frac{1}{1 + (\Delta\omega\bar{T}_j)^2} \right], \quad (4.17a)$$

e, para o MD η - μ ,

$$\delta_{1,1}^P(\Delta\omega) = \frac{1}{m_0} \sum_{j=1}^{m_0} \left[\frac{1}{1 + (\Delta\omega \bar{T}_j)^2} \right]^2 + \frac{2\eta}{1 + \eta^2} \sum_{j=1}^{m_0} \left[\frac{\Delta\omega \bar{T}_j}{1 + (\Delta\omega \bar{T}_j)^2} \right]^2. \quad (4.17b)$$

Considerando, em vez do domínio discreto, o domínio contínuo: para os MDs Nakagami e κ - μ ,

$$\delta_{1,1}^P(\Delta\omega) = \frac{1}{\mu_0} \int_0^{\mu_0} \frac{1}{1 + (\Delta\omega \bar{T}_\mu)^2} d\mu, \quad (4.18a)$$

e, para o MD η - μ ,

$$\delta_{1,1}^P(\Delta\omega) = \frac{1}{\mu_0} \int_0^{\mu_0} \frac{1}{[1 + (\Delta\omega \bar{T}_\mu)^2]^2} d\mu + \frac{2\eta}{1 + \eta^2} \frac{1}{\mu_0} \int_0^{\mu_0} \frac{(\Delta\omega \bar{T}_\mu)^2}{[1 + (\Delta\omega \bar{T}_\mu)^2]^2} d\mu. \quad (4.18b)$$

Desse modo, o comportamento do CCPS, no domínio discreto, depende de m_0 e de como $\bar{T}_j$ varia com j , ao passo que, no domínio contínuo, depende de μ_0 e de como $\bar{T}_\mu$ varia com μ .

4.5.2 Ambientes Não-Estacionários

A Fig. 4.27, a Fig. 4.28 e a Fig. 4.29 ilustram, respectivamente, o coeficiente de correlação freqüencial da envoltória do MD Rice, o coeficiente de correlação freqüencial da potência do MD Hoyt e o coeficiente de correlação freqüencial da potência do MD Nakagami (assumindo *clusters* estatisticamente idênticos no sentido conjunto). No primeiro (ou terceiro) caso, quanto mais próximo k_2 (ou μ_2) é de k_1 (ou μ_1), maior é $\delta_{1,1}^E(\Delta\omega)$ (ou $\delta_{1,1}^P(\Delta\omega)$); no segundo caso, contrariando a tendência de todos os exemplos já apresentados para ambientes não-estacionários, o maior valor de $\delta_{1,1}^P(\Delta\omega)$ não ocorre quando $\eta_2 = \eta_1$, mas sim quando $\eta_2 = 1$, exceto para valores menores de $\Delta\omega$ ($\Delta\omega < 0,5$).

4.6 Parâmetros de Coerência

Nesta seção, os parâmetros de coerência são avaliados a partir dos gráficos dos coeficientes de correlação espacial e freqüencial. Para os MDs em que não se dispõe do CCES, será utilizado o CCPS na determinação dos parâmetros.

Nas três subseções que seguem, são considerados apenas ambientes estacionários.

4.6.1 Distância de Coerência

A distância de coerência d_c é a distância a partir da qual o módulo do coeficiente de correlação espacial da envoltória é sempre inferior a um valor pré-fixado.

Para o MD Rayleigh com espalhamento isotrópico e antena omnidirecional, como conhecido na literatura [1, 3], a distância de coerência é igual a meio comprimento de onda do sinal:

$$d_c = \frac{\lambda_a}{2}, \quad (4.19a)$$

$$\lambda_a = \frac{2\pi}{\beta_a} = \frac{c}{f_a}, \quad (4.19b)$$

em que λ_a é o comprimento de onda do sinal transmitido, e f_a é a frequência, em hertz, do sinal transmitido. Nesse caso, acima da distância de coerência, o coeficiente de correlação espacial está sempre abaixo de 0,2. Esse valor será considerado na especificação da distância de coerência dos demais modelos e configurações.

Espalhamento Isotrópico e Antena Omnidirecional

Para o MD Rice com $k \geq 1$, $d_c = \lambda_a/2$ é insuficiente para garantir $|\delta_{1,1}^E(d)| < 0,2 \forall d \geq d_c$. A Tabela 4.2 apresenta alguns valores de d_c do MD Rice para diferentes k .

MD Rice	$k = 0$	$k = 0,5$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 4$	$k \rightarrow \infty$
d_c	$0,5\lambda_a$	$0,75\lambda_a$	$1,25\lambda_a$	$1,25\lambda_a$	$1,75\lambda_a$	$2,25\lambda_a$

Tab. 4.2: Distância de coerência do MD Rice para diferentes intensidades de onda dominante.

Na realidade, para valores maiores de k , o mais seguro é adotar $\beta_a d_c = 4,5\pi$. Isso implica que, para assegurar razoável decorrelação entre dois sinais do MD Rice, a distância entre os pontos de recepção deve exceder $2,25\lambda_a$ — e não mais $\lambda_a/2$ como no MD Rayleigh.

No MD Hoyt, $\delta_{1,1}^P(d)$ independe do parâmetro η . Assim, a distância de coerência de tal modelo é igual à distância de coerência do MD Rayleigh, ou seja, $d_c = \lambda_a/2$. Por raciocínio análogo, conclui-se que a distância de coerência do MD η - κ Simétrico é igual à distância de coerência do MD Rice.

Para valores de η maiores que a unidade, os MDs η - κ Assimétrico e η - κ Generalizado apresentam $\delta_{1,1}^P(d)$ maior do que seu correspondente no MD Rice. No entanto, a influência daquele parâmetro sobre $\delta_{1,1}^P(d)$ é pequena — comparar $\delta_{1,1}^P(d)$ para $\eta = 1$ e $\eta = 20$ na Fig. 4.14. Portanto, também para tais MDs com κ elevado, é razoável considerar $d_c = 2,25\lambda_a$.

Espalhamento Anisotrópico ou Antena Direcional

A Fig. 4.17, a Fig. 4.18, a Fig. 4.19, 4.20 e a Fig. 4.21 evidenciam o significativo aumento da distância de coerência com a intensificação do grau de concentração das ondas espalhadas ou de diretividade da antena receptora.

A Tabela 4.3 fornece distâncias de coerência dos MDs Rayleigh, Rice e Hoyt para diferentes valores de ς .

MD	$\varsigma = 0$	$\varsigma = 1$	$\varsigma = 2$	$\varsigma = 3$	$\varsigma = 5$
Rayleigh	$0,5\lambda_a$	$0,75\lambda_a$	$1,25\lambda_a$	$2\lambda_a$	$> 3\lambda_a$
Rice ($k = 1$)	$1,25\lambda_a$	$2,25\lambda_a$	$> 3\lambda_a$	$> 3\lambda_a$	$> 3\lambda_a$
Hoyt ($\eta = 0,5$)	$0,5\lambda_a$	$0,75\lambda_a$	$1,25\lambda_a$	$2,25\lambda_a$	$> 3\lambda_a$

Tab. 4.3: Distância de coerência dos MDs Rayleigh, Rice e Hoyt para diferentes graus de concentração das ondas espalhadas ou graus de diretividade da antena receptora.

4.6.2 Tempo de Coerência

O tempo de coerência τ_c é obtido diretamente da distância de coerência através da relação

$$\tau_c = \frac{d_c}{v}, \quad (4.20)$$

em que v é a velocidade da unidade móvel.

4.6.3 Largura de Banda de Coerência

A largura de banda de coerência $\Delta\omega_c$ (em rad/s) — ou B_c (em Hz) — é a diferença de frequência a partir da qual o coeficiente de correlação freqüencial da envoltória é sempre inferior a um valor pré-fixado. A análise que segue considerará dois valores para o coeficiente de correlação freqüencial: 0,2 e 0,5. O primeiro é igual ao previamente usado para o coeficiente de correlação espacial, sendo mais apropriado para especificar a mínima diferença de frequência de sinais em sistemas com diversidade freqüencial; o segundo é igual ao usado em [1] para a obtenção da largura de banda de coerência, sendo mais adequado para classificar sistemas em de faixa estreita ou de faixa larga.

Todas as larguras de banda de coerência serão fornecidas em Hz:

$$B_c = \frac{\Delta\omega_c}{2\pi}. \quad (4.21)$$

Valor Pré-Fixado Igual a 0,2

Nesse caso, para os MDs Rayleigh e Rice,

$$B_c = \frac{1}{\pi \overline{T}}. \quad (4.22a)$$

Para o MD Hoyt e os MDs η - κ , B_c depende do(s) parâmetro(s) do modelo. Todavia, os limites inferior e superior de B_c são iguais para todos esses modelos:

$$B_c = \frac{0,55}{\pi \overline{T}} \quad \text{—} \quad \text{limite inferior, e} \quad (4.22b)$$

$$B_c = \frac{1}{\pi \overline{T}} \quad \text{—} \quad \text{limite superior.} \quad (4.22c)$$

No MD Hoyt, o limite inferior ocorre para $\eta = 0$, e o superior, para $\eta = 1$ (MD Rayleigh). Nos MDs η - κ , κ também influi em B_c ; contudo, os limites inferior e superior são iguais aos do MD Hoyt, pois os valores mínimo e máximo que o coeficiente de correlação freqüencial pode assumir independem de κ .

Valor Pré-Fixado Igual a 0,5

Nesse caso, para os MDs Rayleigh e Rice,

$$B_c = \frac{0,5}{\pi \overline{T}}; \quad (4.23)$$

e, para o MD Hoyt e os MDs η - κ ,

$$B_c = \frac{0,32}{\pi \overline{T}} \quad \text{—} \quad \text{limite inferior, e} \quad (4.24)$$

$$B_c = \frac{0,5}{\pi \overline{T}} \quad \text{—} \quad \text{limite superior.} \quad (4.25)$$

4.6.4 Ambientes Não-Estacionários

Como a não-estacionariedade do ambiente, em geral, atenua os coeficientes de correlação, ela também tende a reduzir os valores dos parâmetros de coerência.

4.7 Conclusão

Este capítulo apresentou uma análise numérica dos resultados dos dois capítulos precedentes. Inicialmente, identificaram-se os intervalos de valores dos CCGs no interior dos quais a aproximação do CCES pelo CCPS é mais acurada. Em seguida, foram obtidos os CCGs em termos da separação espaço-freqüencial de dois sinais para duas configurações distintas, porém equivalentes em termos de CCGs. Nessas configurações, assumiu-se a possibilidade de espalhamento anisotrópico ou, alternativamente, de antena direcional. Verificou-se que, para as configurações adotadas, em geral é válida a aproximação do CCES pelo CCPS.

Calculados os CCGs, avaliaram-se os comportamentos dos coeficientes de correlação espacial e freqüencial. Genericamente, há dois fatores que determinam esses comportamentos:

- os parâmetros dos MDs (estatísticas de primeira ordem), tais como k e θ_{0a} do MD Rice, η dos MDs Hoyt e η - κ 's, κ dos MDs η - κ Assimétrico e η - κ Simétrico, e κ_X e κ_Y do MD η - κ Generalizado;
- e os CCGs (estatísticas de segunda ordem), cujos comportamentos estão diretamente relacionados aos tempos de chegada e ângulos de chegada ondas espalhadas.

Com relação aos parâmetros dos MDs, para ambientes estacionários, o coeficiente de correlação espacial é afetado principalmente pelos parâmetros k , κ , κ_X e κ_Y , ao passo que o coeficiente de correlação freqüencial sofre influência essencialmente do parâmetro η . Por outro lado, a não-estacionariedade implica variação — geralmente redução — dos dois coeficientes de correlação em todos os MDs, exceto no MD Rayleigh, no qual a não-estacionariedade é indiferente. Já quanto aos CCGs, é por meio deles que se manifestam a anisotropia do espalhamento das ondas e a diretividade da antena receptora. A concentração do espalhamento das ondas e a diretividade das antenas receptoras implicam aumento significativo do coeficiente de correlação espacial, independentemente do tipo de canal com desvanecimento, e não influem no coeficiente de correlação freqüencial.

Determinaram-se também os parâmetros de coerência de diversos MDs. Verificou-se que, para ambientes estacionários, espalhamentos isotrópicos e antenas omnidirecionais, a distância de coerência vale $\lambda_a/2$ em MDs em que as Gaussianas que compõem o sinal têm médias nulas — MDs Rayleigh e Hoyt — e pode chegar a $2,25\lambda_a$ em MDs em que as Gaussianas que compõem o sinal têm médias significativas — MDs Rice e η - κ 's. Além disso, a distância de coerência aumenta com o grau de concentração do espalhamento ou com o grau de diretividade da antena receptora, podendo inclusive atingir valores maiores do que $3\lambda_a$, independentemente do MD. Com relação ao tempo de coerência é igual à distância de coerência dividida pela velocidade da

unidade móvel. Por fim, a largura de banda de coerência é igual para os MDs Rayleigh e Rice — por exemplo, $1/(\pi\bar{T})$ — e possui mesmos limitantes inferior e superior para os MDs Hoyt, η - κ Simétrico, η - κ Assimétrico e η - κ Generalizado — por exemplo, $0,55/(\pi\bar{T})$ e $1/(\pi\bar{T})$.

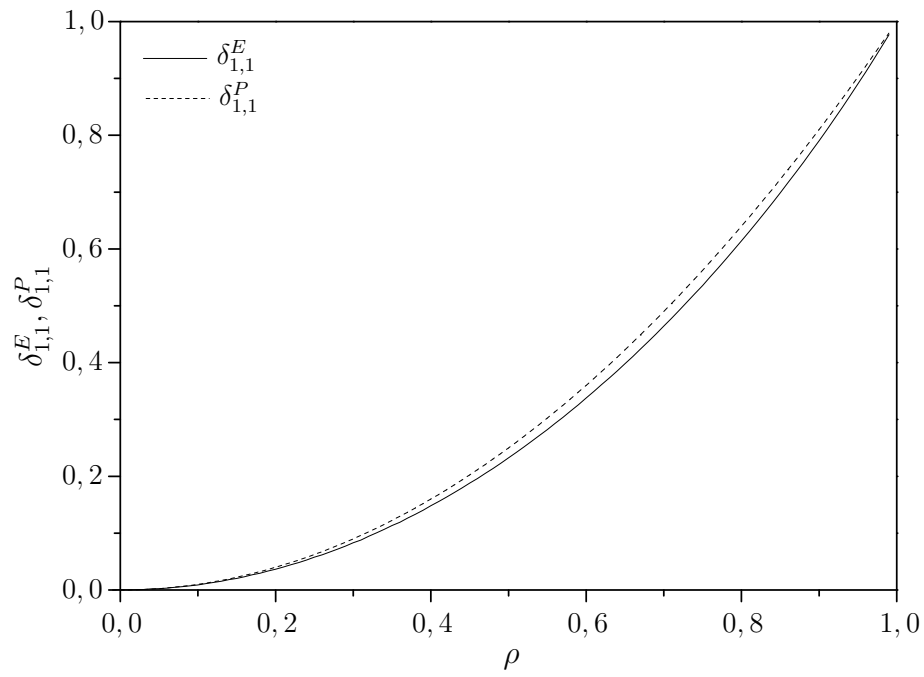


Fig. 4.1: Coeficientes de correlação da envoltória e da potência do MD Rayleigh em função de ρ .

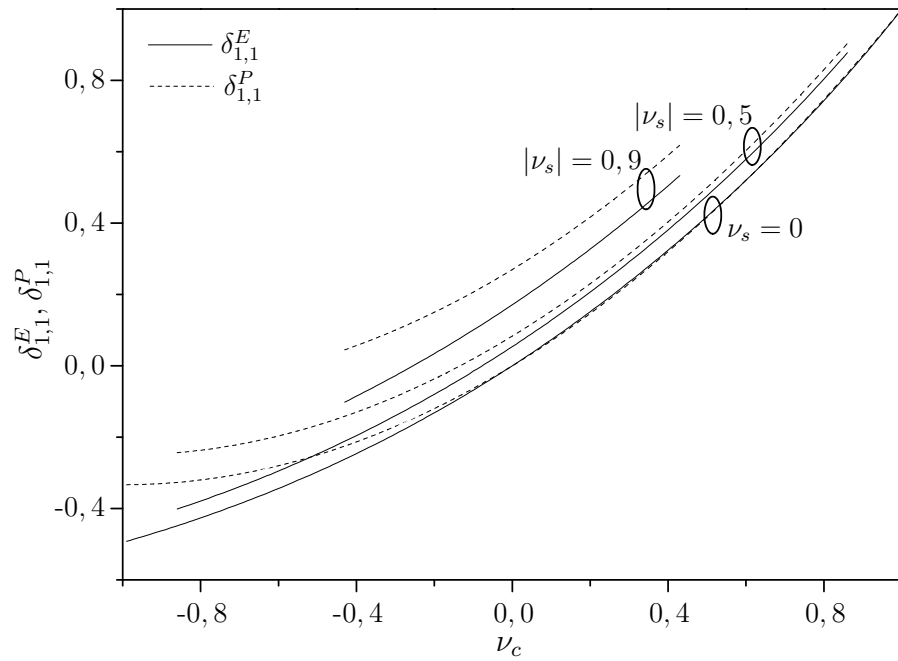


Fig. 4.2: Coeficientes de correlação da envoltória e da potência do MD Rice ($k_1 = k_2 = 1$) em função de ν_c , para diferentes valores de $|\nu_s|$.

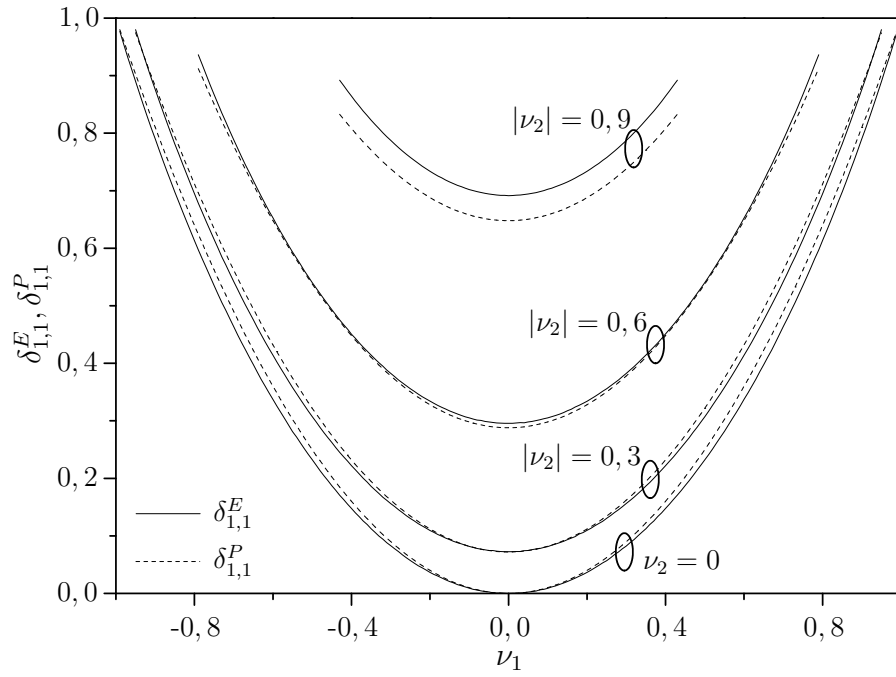


Fig. 4.3: Coeficientes de correlação da envoltória e da potência do MD Hoyt ($\eta_1 = \eta_2 = 0,5$) em função de ν_1 , para diferentes valores de $|\nu_2|$.

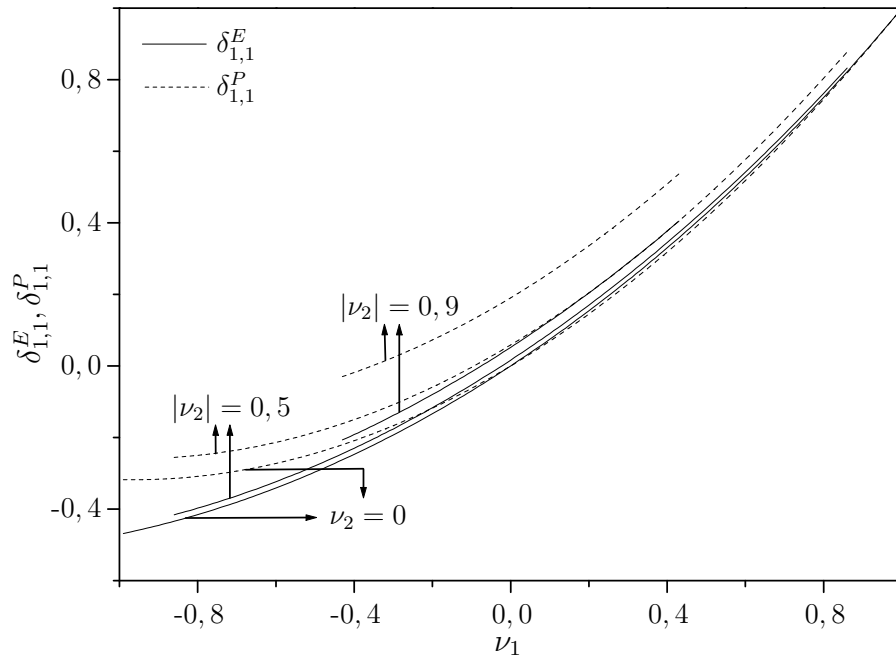
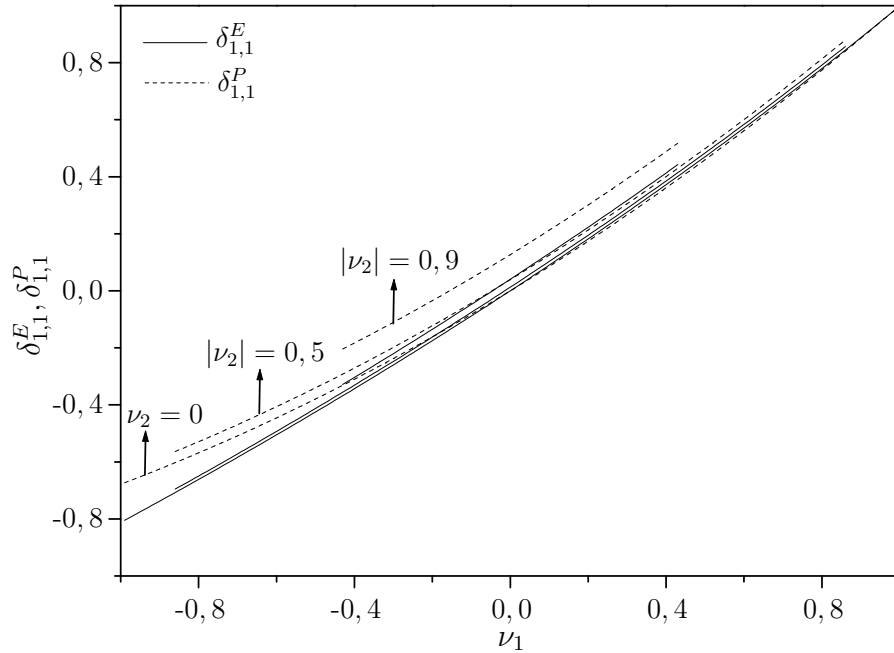
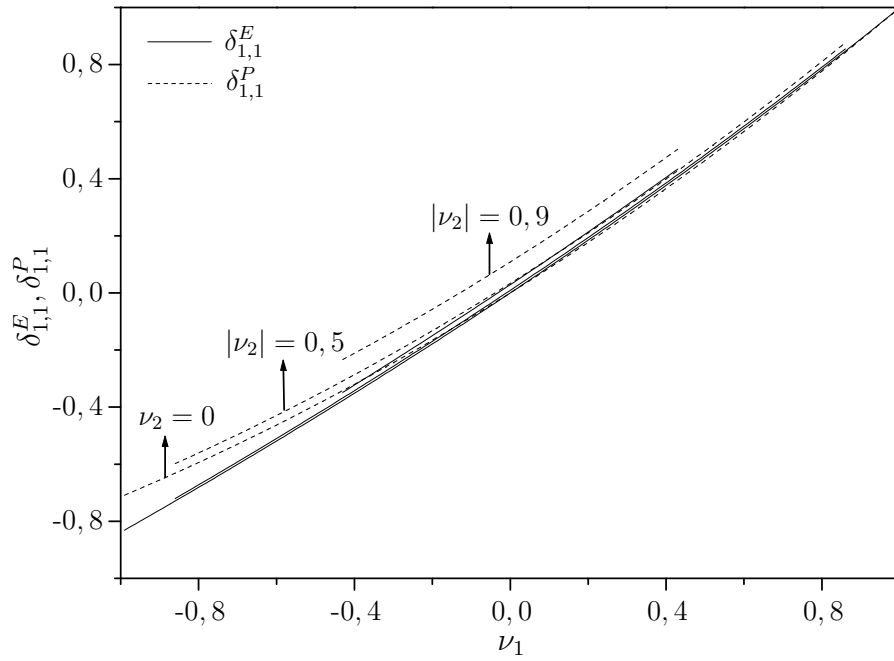


Fig. 4.4: Coeficientes de correlação da envoltória e da potência do MD η - κ Assimétrico ($\eta_1 = \eta_2 = 0,4$; $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$) em função de ν_1 , para diferentes valores de $|\nu_2|$.



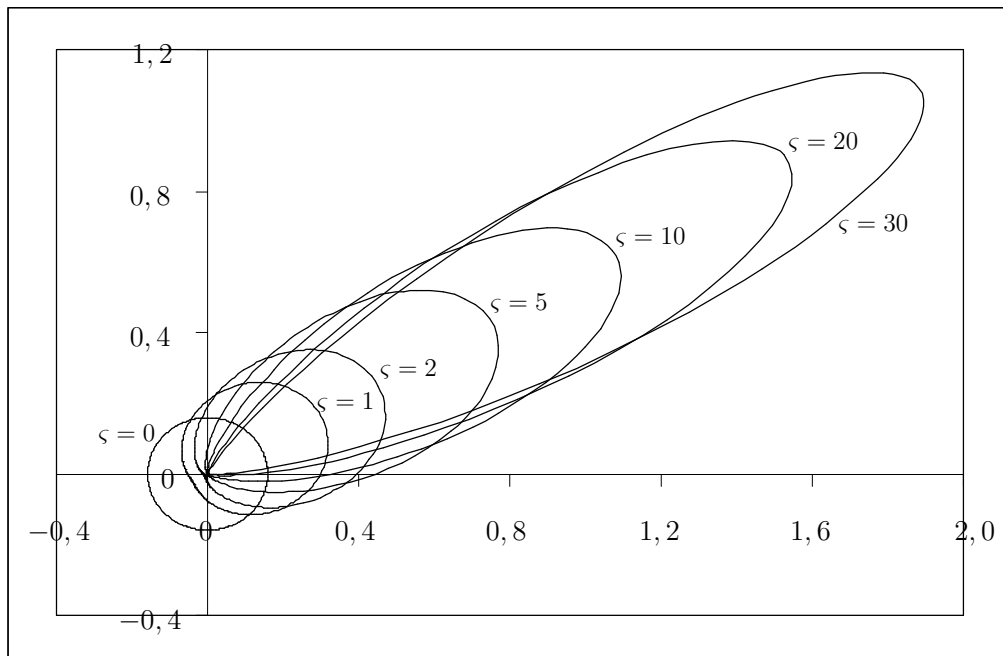


Fig. 4.7: Distribuição das ondas de chegada ou diretividade da antena receptora ($\theta_e = 30^\circ$).

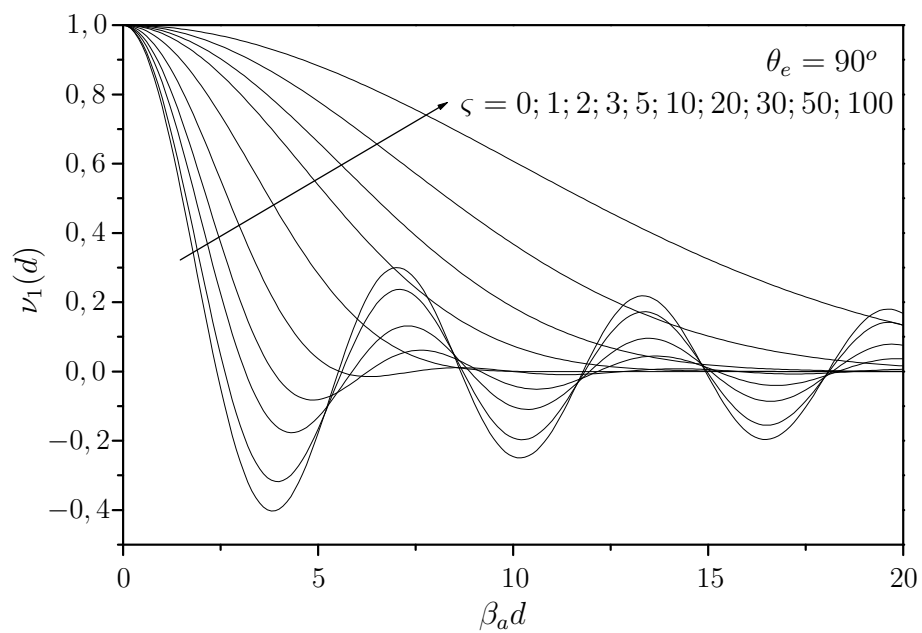


Fig. 4.8: Coeficiente de correlação $\nu_1(d)$ para $\theta_e = 90^\circ$, considerando espalhamento anisotrópico ou antena direcional.

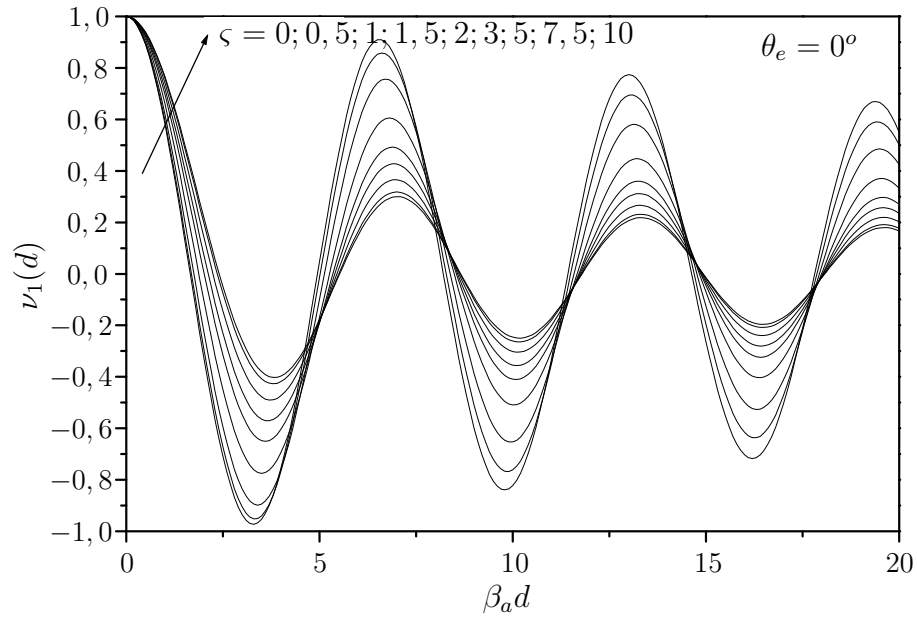


Fig. 4.9: Coeficiente de correlação $\nu_1(d)$ para $\theta_e = 0^\circ$, considerando espalhamento anisotrópico ou antena direcional.

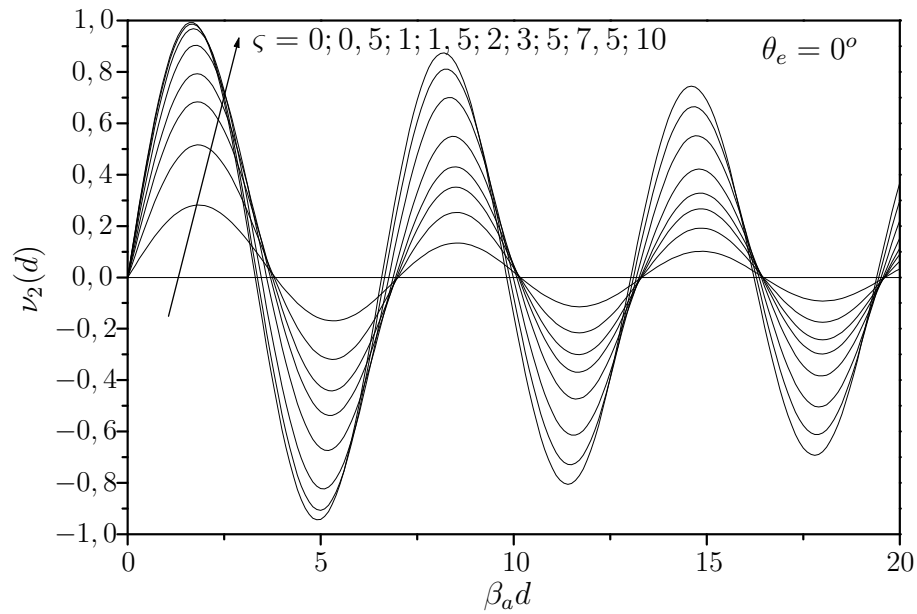


Fig. 4.10: Coeficiente de correlação $\nu_2(d)$ para $\theta_e = 0^\circ$, considerando espalhamento anisotrópico ou antena direcional.

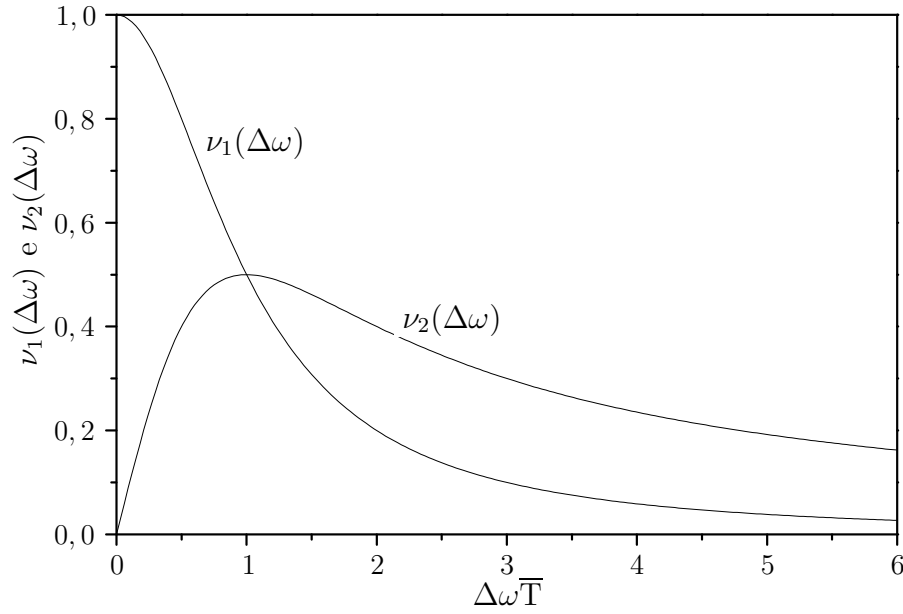


Fig. 4.11: Coeficientes de correlação $\nu_1(\Delta\omega)$ e $\nu_2(\Delta\omega)$ para $\theta_e = 0^\circ$.

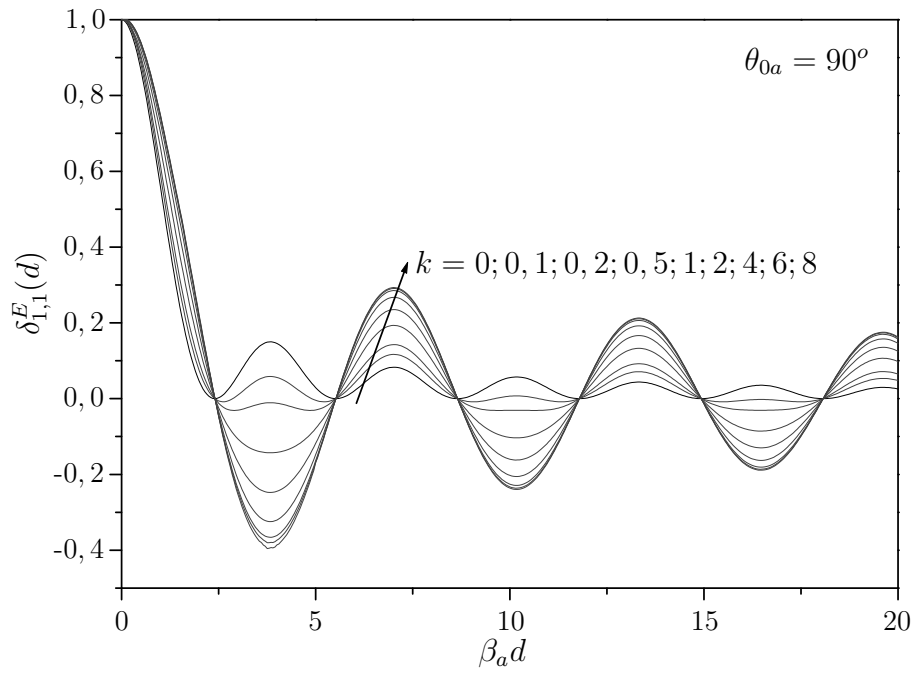


Fig. 4.12: Coeficiente de correlação espacial da envoltória do MD Rice para $\theta_{0a} = 90^\circ$, em ambientes estacionários ($k_1 = k_2 = k$) com espalhamento isotrópico e antena omnidirecional.

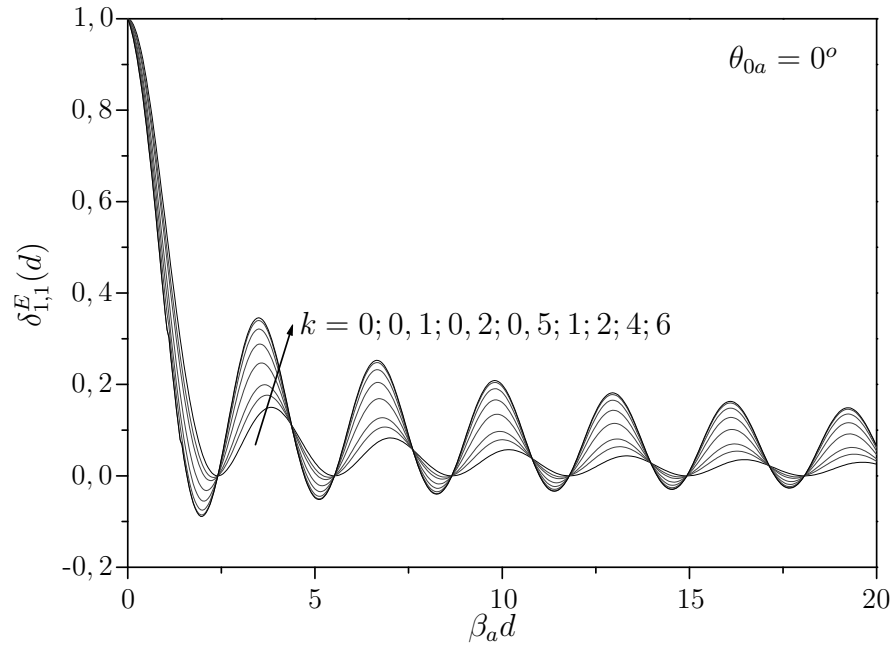


Fig. 4.13: Coeficiente de correlação espacial da envoltória do MD Rice para $\theta_{0a} = 0^\circ$, em ambientes estacionários ($k_1 = k_2 = k$) com espalhamento isotrópico e antena omnidirecional.

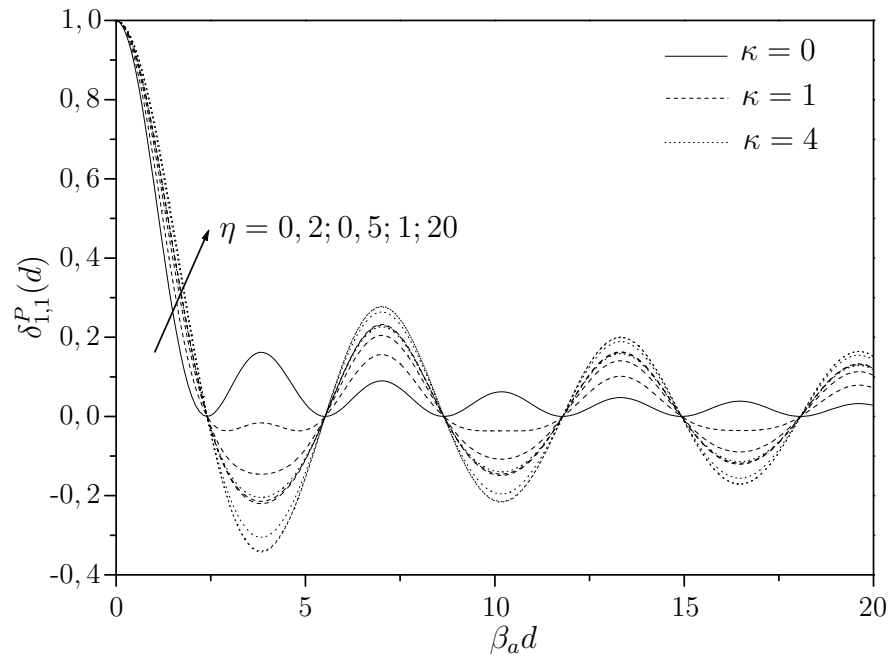


Fig. 4.14: Coeficiente de correlação espacial da potência do MD η - κ Assimétrico, em ambientes estacionários ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$; $\eta_1 = \eta_2 = \eta$) com espalhamento isotrópico e antena omnidirecional. Para $\kappa = 0$ (MD Hoyt), o coeficiente de correlação independe de η (curvas coincidentes).

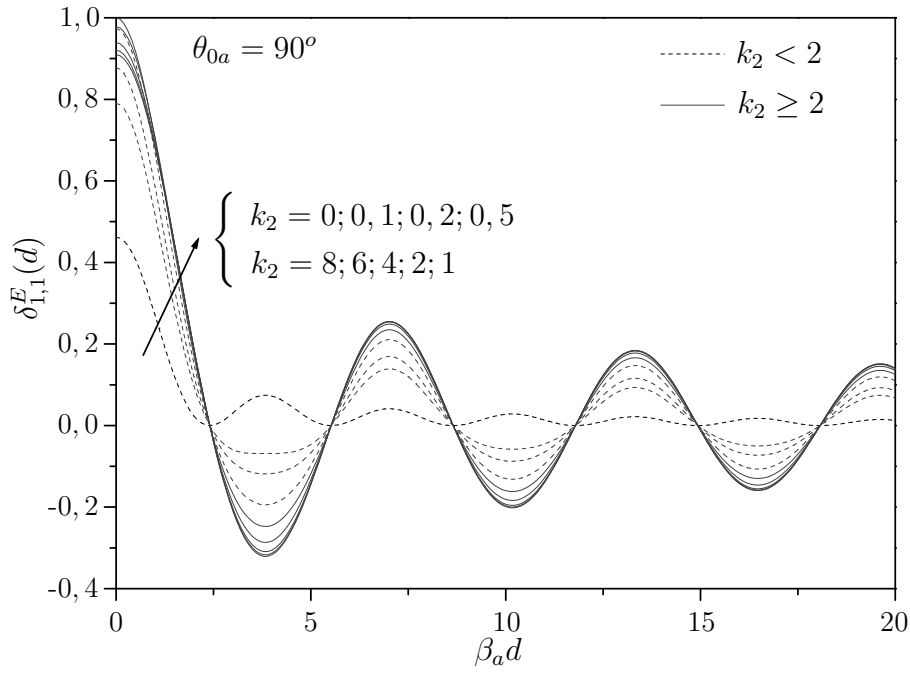


Fig. 4.15: Coeficiente de correlação espacial da envoltória do MD Rice para $\theta_{0a} = 90^\circ$, em ambientes não-estacionários ($k_1 = 1$) com espalhamento isotrópico e antena omnidirecional.

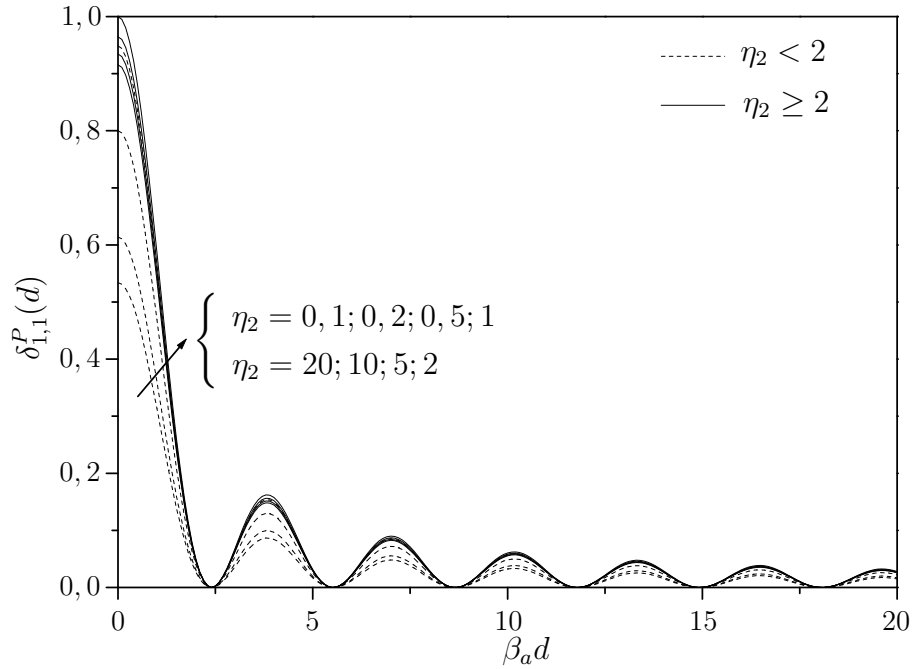


Fig. 4.16: Coeficiente de correlação espacial da potência do MD Hoyt, em ambientes não-estacionários ($\eta_1 = 2$) com espalhamento isotrópico e antena omnidirecional.

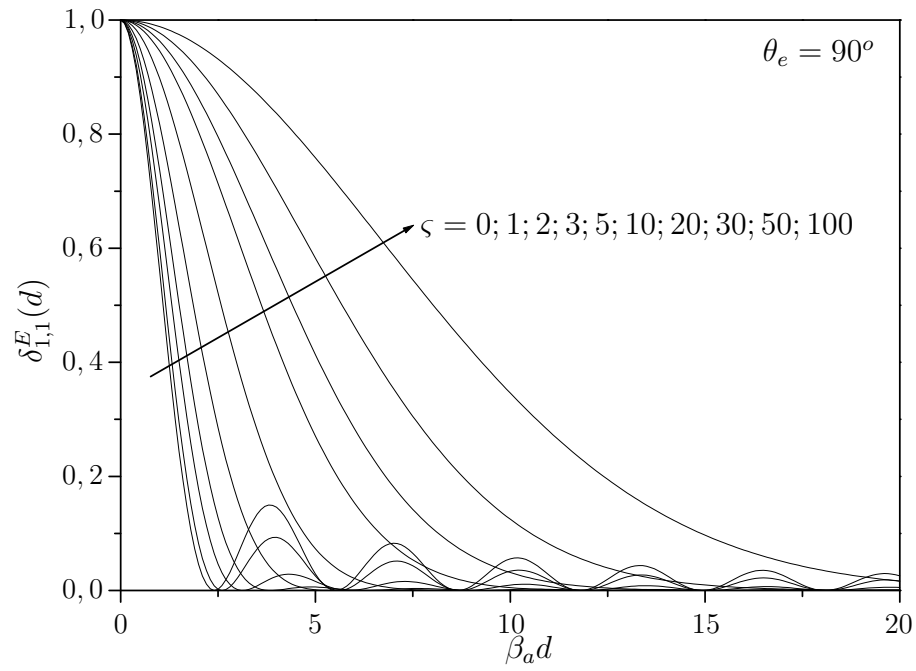


Fig. 4.17: Coeficiente de correlação espacial da envoltória do MD Rayleigh, em ambientes estacionários com espalhamento anisotrópico ou antena direcional ($\theta_e = 90^\circ$).

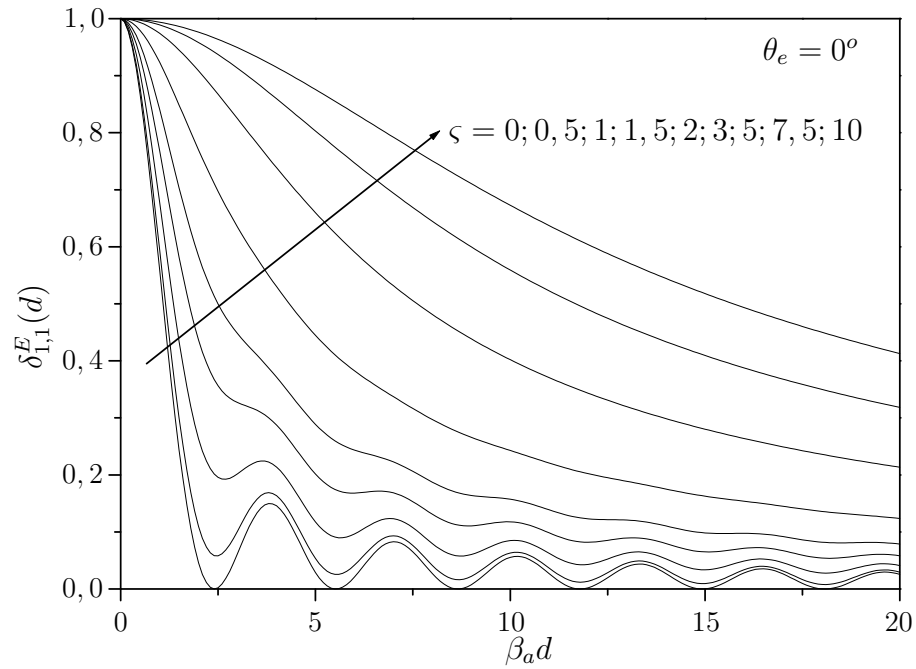


Fig. 4.18: Coeficiente de correlação espacial da envoltória do MD Rayleigh, em ambientes estacionários com espalhamento anisotrópico ou antena direcional ($\theta_e = 0^\circ$).

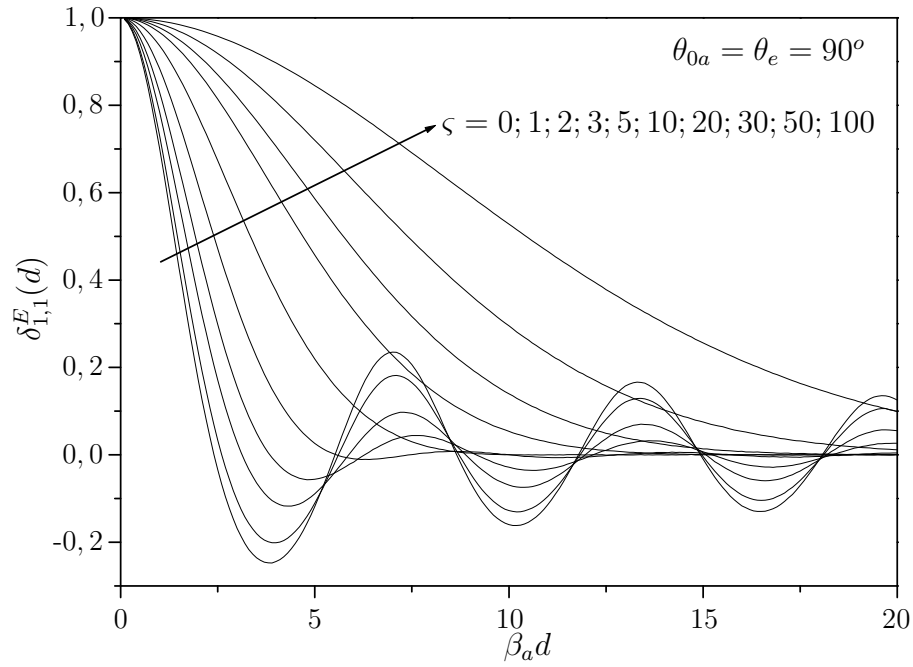


Fig. 4.19: Coeficiente de correlação espacial da envoltória do MD Rice, em ambientes estacionários ($k = 1$) com espalhamento anisotrópico ou antena direcional ($\theta_{0a} = \theta_e = 90^\circ$).

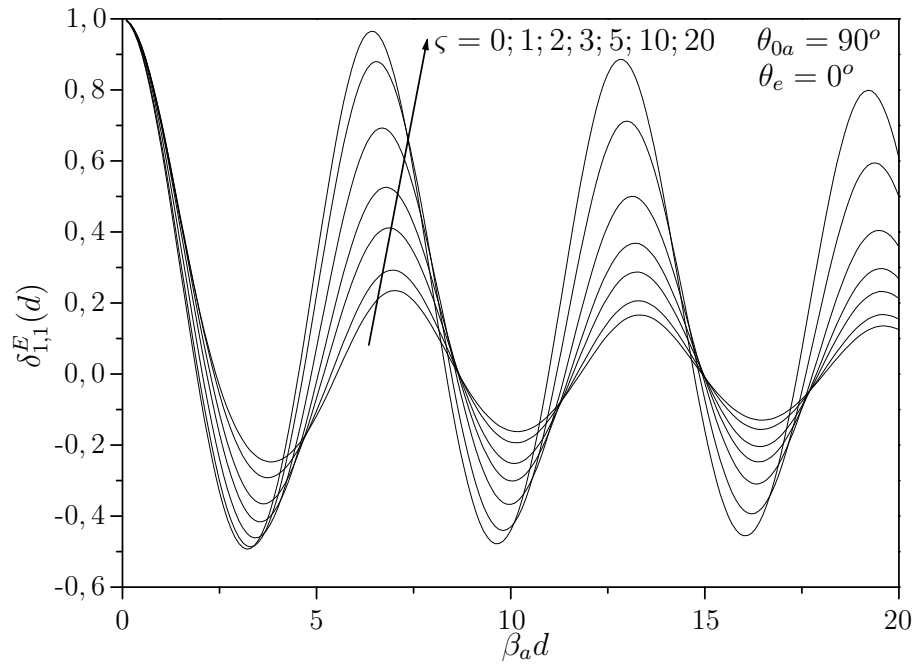


Fig. 4.20: Coeficiente de correlação espacial da envoltória do MD Rice, em ambientes estacionários ($k = 1$) com espalhamento anisotrópico ou antena direcional ($\theta_{0a} = 90^\circ$ e $\theta_e = 0^\circ$).

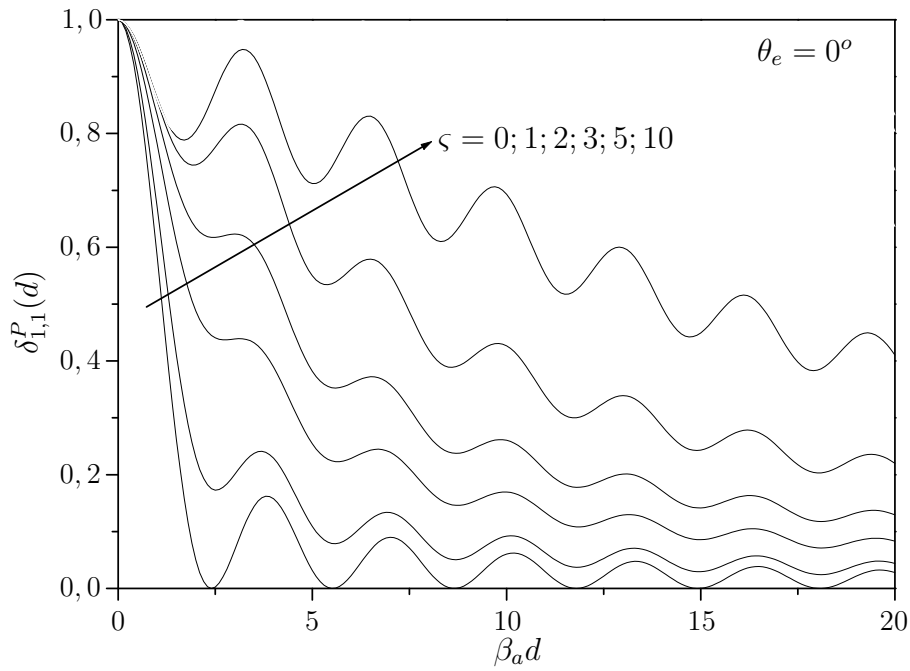


Fig. 4.21: Coeficiente de correlação espacial da potência do MD Hoyt, em ambientes estacionários ($\eta = 0,5$) com espalhamento anisotrópico ou antena direcional ($\theta_e = 0^\circ$).

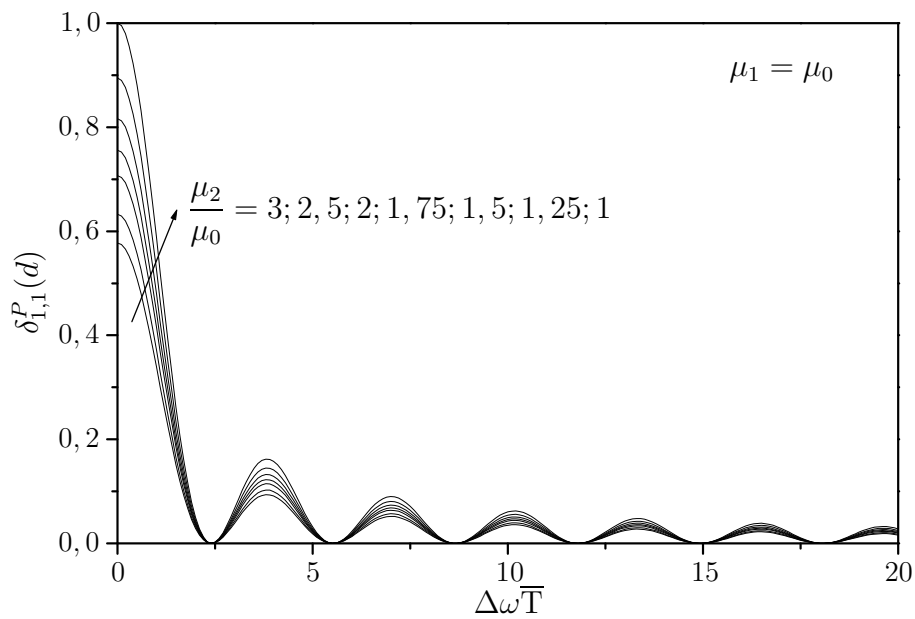


Fig. 4.22: Coeficiente de correlação espacial da potência do MD Nakagami, em ambientes não-estacionários ($\mu_1 = \mu_0$) com espalhamento isotrópico e antena omnidirecional.

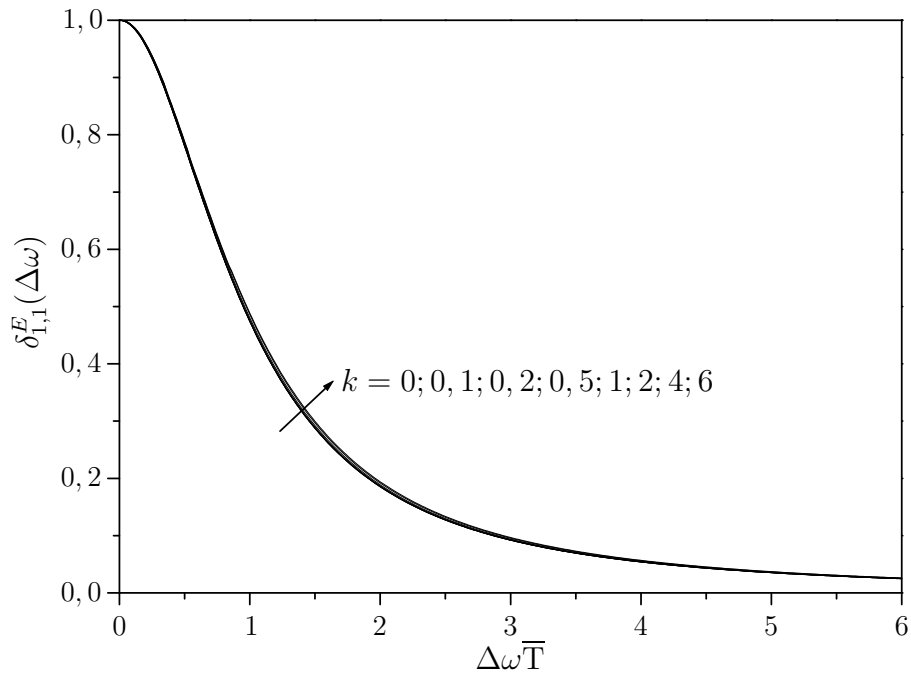


Fig. 4.23: Coeficiente de correlação freqüencial da envoltória do MD Rice, em ambientes estacionários ($k_1 = k_2 = k$).

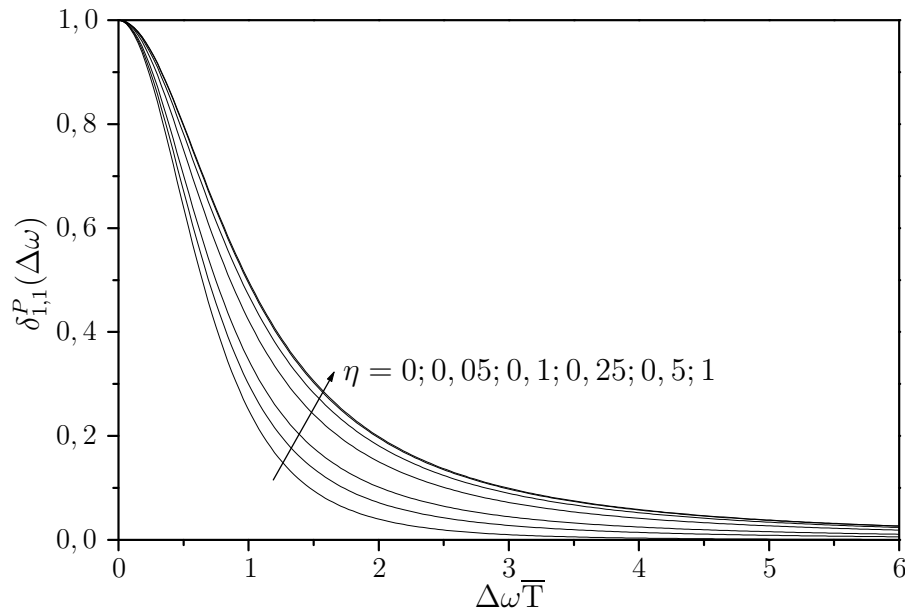


Fig. 4.24: Coeficiente de correlação freqüencial da envoltória do MD Hoyt, em ambientes estacionários ($\eta_1 = \eta_2 = \eta$).

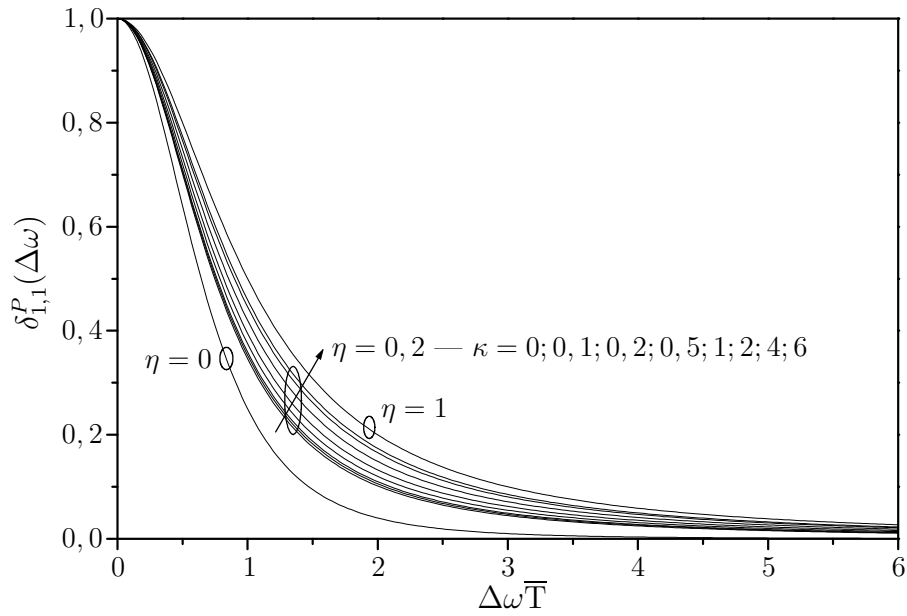


Fig. 4.25: Coeficiente de correlação freqüencial da potência do MD η - κ Assimétrico, em ambientes estacionários ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$; $\eta_1 = \eta_2 = \eta$).

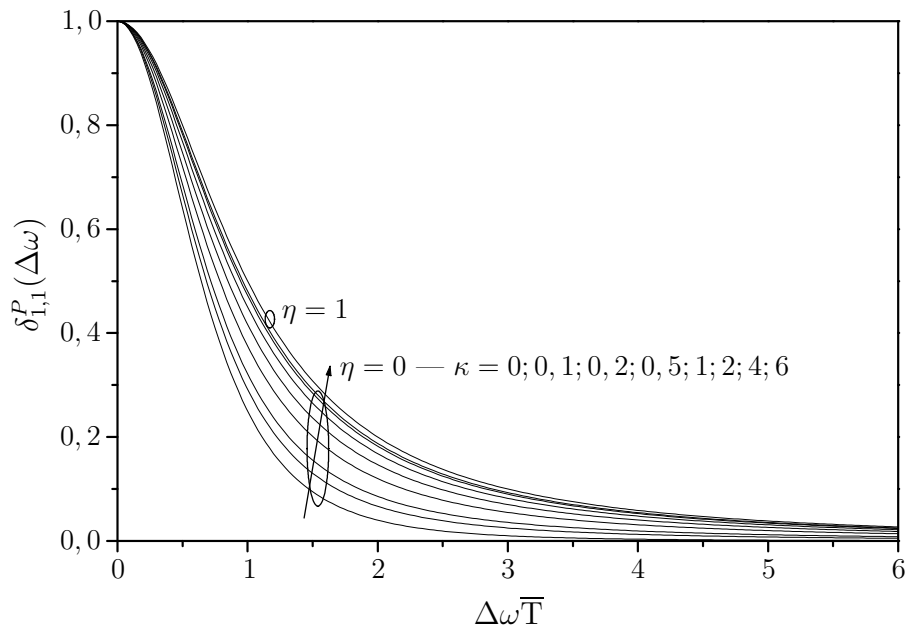


Fig. 4.26: Coeficiente de correlação freqüencial da potência do MD η - κ Simétrico, em ambientes estacionários ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$; $\eta_1 = \eta_2 = \eta$).

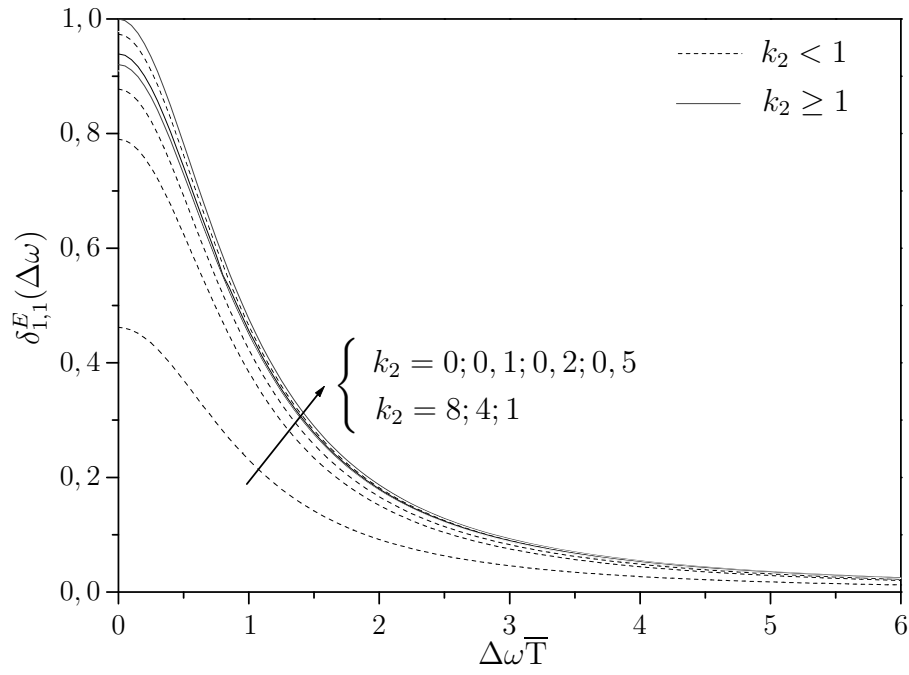


Fig. 4.27: Coeficiente de correlação freqüencial da envoltória do MD Rice, em ambientes não-estacionários ($k_1 = 1$).

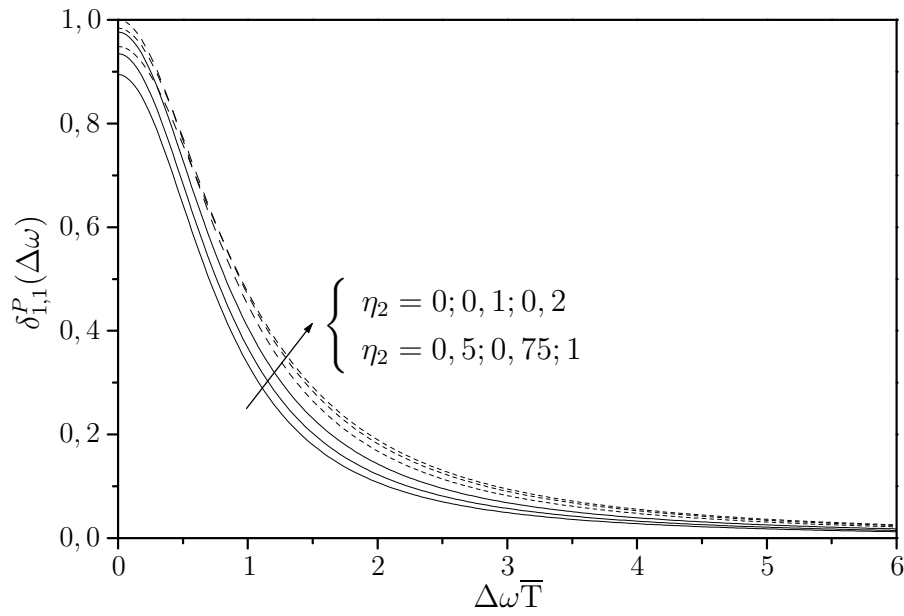


Fig. 4.28: Coeficiente de correlação freqüencial da potência do MD Hoyt, em ambientes não-estacionários ($\eta_1 = 0, 5$).

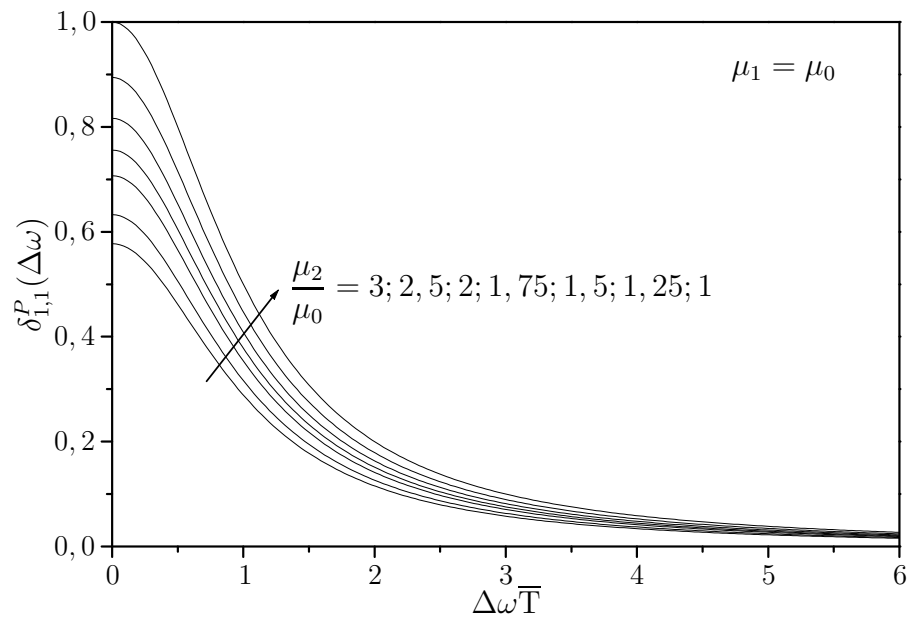


Fig. 4.29: Coeficiente de correlação freqüencial da potência do MD Nakagami, em ambientes não-estacionários ($\mu_1 = \mu_0$).

Capítulo 5

Comentários Finais

Neste capítulo, realiza-se uma breve conclusão desta tese, e sugerem-se alguns assuntos correlatos para trabalhos futuros.

5.1 Conclusão

O coeficiente de correlação da envoltória é a estatística primária para a identificação dos parâmetros de coerência. No entanto, mesmo para um modelo simples como o MD Rice, sua dedução é bastante complexa, e sua expressão final constitui um somatório duplo de infinitos termos, todos envolvendo funções especiais. Por ser de cálculo e expressão bem menos complicados e constituir boa aproximação daquele coeficiente, o coeficiente de correlação da potência foi usado na determinação dos parâmetros de coerência de diversos MDs, todos casos particulares de um modelo geral de desvanecimento.

Partindo-se do MD Rayleigh, três generalizações são necessárias para se chegar ao referido modelo geral de desvanecimento: componente de linha de visada direta ou, mais genericamente, onda dominante; desequilíbrio de potência dos componentes aleatórios em quadratura; e composição do sinal por *clusters*. A primeira generalização se manifesta matematicamente pelo parâmetro k ou pelo parâmetro κ ; a segunda, pelo parâmetro η ; a terceira, pelo parâmetro μ .

Em ambientes estacionários, a onda dominante aumenta a distância de coerência e o tempo de coerência do sinal, modificando a largura de banda de coerência apenas quando há desequilíbrio de potência média dos componentes aleatórios em quadratura. Em contrapartida, este último reduz a largura de banda de coerência, atuando levemente sobre a distância de coerência e o tempo de coerência quando da presença da onda dominante. Já o número de *clusters* do sinal só interfere nos parâmetros de coerência caso haja variações nos comportamentos dos ângulos de chegada ou dos tempos de chegada de um *cluster* para outro. Por outro lado, em

ambientes não-estacionários, todos os parâmetros de generalização — k ou κ , η e μ — têm efeito sobre os dois parâmetros de coerência. Além disso, de modo geral, a não-estacionariedade tende a atenuar os coeficientes de correlação dos sinais e, conseqüentemente, reduzir os valores dos parâmetros de coerência.

Por fim, os coeficientes de correlação dos sinais, bem como os parâmetros de coerência, são mais sensíveis às distribuições dos ângulos de chegada e dos tempos de chegada das ondas difusas do que aos tipos de canais com desvanecimento. Especificamente, os coeficientes de correlação e parâmetros de coerência espaciais e temporais estão relacionados à distribuição dos ângulos de chegada, ao passo que os coeficientes de correlação e parâmetros de coerência freqüenciais, à distribuição dos tempos de chegada. Portanto, supondo independência entre ângulos de chegada e tempos de chegada, o grau de concentração das ondas espalhadas e a diretividade da antena receptora, propriedades relacionadas aos ângulos de chegada, interferem apenas nos coeficientes e parâmetros espaciais e temporais, aumentando-os.

5.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

A seguir, listam-se sugestões para possíveis trabalhos futuros.

5.2.1 Coeficiente de Correlação da Envoltória

Dos MDs tratados nesta tese, o coeficiente de correlação da envoltória já é conhecido para os MDs Rayleigh, Rice e Nakagami. Uma possível linha de pesquisa é a obtenção de tal coeficiente para os demais modelos, tais como o MD Hoyt, os MDs $\eta - \kappa$, o MD $\kappa - \mu$ e o MD $\eta - \mu$.

5.2.2 Coeficiente de Correlação da Potência

Este coeficiente de correlação pode ser deduzido para um modelo ainda mais genérico do que aquele apresentado no Capítulo 3. Por exemplo, considerou-se que um *cluster* de um sinal pode ser correlacionado com, no máximo, um *cluster* do outro sinal; assim, uma generalização é assumir que cada *cluster* de um sinal pode ser correlacionado com vários *clusters* do outro sinal.

5.2.3 Clusters Estatisticamente Não-Idênticos

Embora a expressão do coeficiente de correlação da potência tenha sido calculada para modelos em que as estatísticas de primeira ordem e de segunda ordem são variáveis de um *cluster* para outro do sinal, tais modelos não foram numericamente contemplados.

5.2.4 Simultaneidade da Anisotropia do Espalhamento e a Diretividade da Antena

Os resultados numéricos foram mostrados para espalhamento isotrópico e antena omnidirecional, para espalhamento anisotrópico e antena omnidirecional, e para espalhamento isotrópico e antena direcional. Portanto, o efeito simultâneo da anisotropia do espalhamento e da diretividade da antena não foi examinado.

Referências Bibliográficas

- [1] M. D. Yacoub. *Foundations of Mobile Radio Engineering*. CRC Press, 1993.
- [2] A. U. H. Sheikh. *Wireless Communications Theory and Techniques*. Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [3] W. C. Jakes. *Microwave Mobile Communications*. Wiley, 1997.
- [4] M. D. Yacoub. The κ - μ distribution: a general fading distribution. In *Proc. IEEE Vehicular Technology Conference*, volume 3, pages 1427–1431, Atlantic City, NJ USA, October 2001.
- [5] M. D. Yacoub. The η - μ distribution: a general fading distribution. In *Proc. IEEE Vehicular Technology Conference*, volume 2, pages 872–877, Boston, MA USA, September 2000.
- [6] L. Rayleigh. On the resultant of a large number of vibrations of the same pitch and of arbitrary phase. *Philosph. Magazine and J. Sci.*, 10(60):73, August 1880.
- [7] S. O. Rice. Mathematical analysis of random noise. *Bell Systems Technical Journal*, 24(1):46–156, January 1945.
- [8] S. O. Rice. Statistical properties of a sine wave plus random noise. *Bell Systems Technical Journal*, 27:109–157, January 1948.
- [9] S. O. Rice. Noise in fm receivers. In M. Rosenblatt, editor, *Time Series Analysis*, chapter 25, pages 395–422. Ed. New York: Willey, Time Series Analysis.
- [10] R. S. Hoyt. Probability functions for the modulus and angle of the normal complex variate. *Bell System Technical Journal*, 26:318–359, April 1947.
- [11] M. D. Yacoub, G. Fraidenraich, H. B. Tercius, and F. C. Martins. The Assymmetrical $\eta - \kappa$ distribution. In *Proc. International Workshop on Telecommunications*, pages 89–93, August 2004.

- [12] M. D. Yacoub, G. Fraidenraich, H. B. Tercius, and F. C. Martins. The Symmetrical $\eta - \kappa$ distribution. In *Proc. IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications*, volume 4, pages 2426–2430, September 2004.
- [13] M. Nakagami. The m-distribution - a general formula of intensity distribution of rapid fading. In W. C. Hoffman, editor, *Statistical Methods in Radio Wave Propagation*, pages 3–36. Pergamon, Oxford, England, 1960.
- [14] Y. Karasawa and H. Iwai. Modeling of signal envelope correlation of line-of-sight fading with applications to frequency correlation analysis. *IEEE Trans. Commun.*, 42(6):2201–2203, June 1994.
- [15] Y. Karasawa and H. Iwai. Formulation of spatial correlation statistics in Nakagami-Rice fading environments. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 48(1):12–18, January 2000.
- [16] P. A. Bello and C. J. Boardman. Effect of multipath on ranging error for an airplane-satellite link. *IEEE Trans. Commun.*, 21(5):564–576, May 1973.
- [17] A. A. Abu-Dayya and N. C. Beaulieu. Switched diversity on microcellular Ricean channels. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 43(4):970–976, November 1994.
- [18] D. Middleton. Some general results in the theory of noise through non-linear devices. *Quart. Appl. Math.*, 5:445–498, January 1948.
- [19] R. H. Clarke. A statistical theory of mobile-radio reception. *Bell Systems Technical Journal*, 47:957–1000, July–August 1968.
- [20] W. C. Y. Lee. An extended correlation function of two random variables applied to mobile radio transmission. *Bell System Technical Journal*, 48(10):3423–3440, December 1969.
- [21] A. Papoulis and S. U. Pillai. *Probability, Random Variables and Stochastic Process*. McGraw-Hill, fourth edition, 2002.
- [22] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series and Products*. Academic Press, sixth edition, 2000.
- [23] J. G. Proakis. *Digital Communications*. McGraw-Hill Series International Editions, third edition, 1995.
- [24] J. Reig, L. Rubio, and N. Cardona. Bivariate Nakagami- m distribution with arbitrary fading parameters. *Electron. Lett.*, 38(25):1715–1717, December 2002.

- [25] J. C. S. Santos Filho, G. Fraidenraich, U. S. Dias, and M. D. Yacoub. On the Nakagami-m crosscorrelation function. In *Proc. IMOC*, Brasília, Brazil, 25–28 July 2005.
- [26] J. D. Parsons. *The Mobile Radio Propagation Channel*. Wiley, second edition, 2000.
- [27] W. C. Y. Lee. *Mobile Communications Engineering*. McGraw-Hill, 1997.
- [28] R. O. LaMaire and M. Zorzi. Effect of correlation in diversity systems with rayleigh fading, shadowing, and power capture. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 14(3):449–460, April 1996.
- [29] A. Abdi, J. A. Barger, and M. Kaveh. A parametric model for the distribution of the angle of arrival and the associated correlation function and power spectrum at the mobile station. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 51(2):425–434, May 2002.
- [30] F. Adachi, M. R. Feeney, and J. D. Parsons. Level crossing rate and average fade duration for time diversity reception in rayleigh fading conditions. In *IEEE Proceedings Radar and Signal Processing*, volume 135, pages 501–506, December 1988.
- [31] G. Park, D. Hong, and C. Kang. Level crossing rate estimation with doppler adaptive noise suppression technique in frequency domain. *IEEE 58th Vehicular Technology Conference*, 2:1192 – 1195, October 2003.

Apêndice A

Estatísticas Conjuntas de Duas Envoltórias Riceanas

Neste apêndice, deduzem-se a função densidade de probabilidade conjunta e o momento conjunto de duas envoltórias Riceanas, estatísticas essas apresentadas diretamente no Capítulo 2.

A.1 Função Densidade de Probabilidade Conjunta

Do Capítulo 2,

$$\begin{aligned} p_{\hat{\mathbf{R}}, \Psi}(\hat{\mathbf{r}}, \psi) = & \frac{(1+k_1)(1+k_2)}{\pi^2(1-\rho^2)} \hat{r}_1 \hat{r}_2 \exp \left[-\frac{k_1+k_2-2\nu_c\sqrt{k_1k_2}+(1+k_1)\hat{r}_1^2+(1+k_2)\hat{r}_2^2}{1-\rho^2} \right] \\ & \times \exp \left[K_0\hat{r}_1\hat{r}_2 \cos(\psi_2-\psi_1-\phi_0) + \xi_1\sqrt{K_1}\hat{r}_1 \cos(\psi_1-\phi_1-\omega_1t_{01}) \right. \\ & \left. + \xi_2\sqrt{K_2}\hat{r}_2 \cos(\psi_2-\phi_2-\omega_2t_{02}) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.1a})$$

em que $\hat{\mathbf{R}} = [\hat{R}_1 \ \hat{R}_2]$, $\mathbf{\Psi} = [\Psi_1 \ \Psi_2]$, $\hat{\mathbf{r}} = [\hat{r}_1 \ \hat{r}_2]$, $\mathbf{\psi} = [\psi_1 \ \psi_2]$,

$$K_0 = \frac{2\rho}{1-\rho^2} \sqrt{(1+k_1)(1+k_2)}, \quad (\text{A.1b})$$

$$K_1 = k_1 + \rho^2 k_2 - 2\nu_c \sqrt{k_1 k_2}, \quad (\text{A.1c})$$

$$K_2 = \rho^2 k_1 + k_2 - 2\nu_c \sqrt{k_1 k_2}, \quad (\text{A.1d})$$

$$\xi_i = \frac{2\sqrt{1+k_i}}{1-\rho^2}, \quad i = 1, 2, \quad (\text{A.1e})$$

$$\phi_0 = \arg \{ \nu_1 + \mathbf{i}\nu_2 \}, \quad (\text{A.1f})$$

$$\phi_1 = \arg \left\{ \sqrt{k_1} - \nu_c \sqrt{k_2} + \mathbf{i}\nu_s \sqrt{k_2} \right\}, \quad (\text{A.1g})$$

$$\phi_2 = \arg \left\{ \sqrt{k_2} - \nu_c \sqrt{k_1} - \mathbf{i}\nu_s \sqrt{k_1} \right\}, \quad (\text{A.1h})$$

$$\arg\{\cdot\} = \text{argumento do número complexo de entrada (arg}\{0\} = 0) \quad (\text{A.1i})$$

$$\nu_c = \frac{E \left\{ \sqrt{D(\Theta_1)D(\Theta_2)} \cos \left[\beta_a d \left(\frac{\cos(\Theta_a)}{\cos(\Theta_d)} - \frac{\cos(\theta_{0a})}{\cos(\theta_{0d})} \right) + \Delta\omega T \right] \right\}}{\sqrt{E \{D(\Theta_1)\} E \{D(\Theta_2)\}}} \rho_A(d, \Delta\omega), \quad (\text{A.1j})$$

$$\nu_s = \frac{E \left\{ \sqrt{D(\Theta_1)D(\Theta_2)} \text{sen} \left[\beta_a d \left(\frac{\cos(\Theta_a)}{\cos(\Theta_d)} - \frac{\cos(\theta_{0a})}{\cos(\theta_{0d})} \right) + \Delta\omega T \right] \right\}}{\sqrt{E \{D(\Theta_1)\} E \{D(\Theta_2)\}}} \rho_A(d, \Delta\omega), \text{ e} \quad (\text{A.1k})$$

$$T = T_a - t_{0a}. \quad (\text{A.1l})$$

A JPFD de $\hat{R}_1$ e $\hat{R}_2$ pode ser obtida integrando-se (A.1) com relação às fases:

$$p_{\hat{\mathbf{R}}}(\hat{\mathbf{r}}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} p_{\hat{\mathbf{R}}, \mathbf{\Psi}}(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{\psi}) d\psi_1 d\psi_2. \quad (\text{A.2})$$

De (A.1) e (A.2),

$$p_{\hat{\mathbf{R}}}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{4(1+k_1)(1+k_2)}{1-\rho^2} \hat{r}_1 \hat{r}_2 \text{Int}(\hat{\mathbf{r}}) \exp \left[-\frac{k_1 + k_2 - 2\nu_c \sqrt{k_1 k_2} + (1+k_1)\hat{r}_1^2 + (1+k_2)\hat{r}_2^2}{1-\rho^2} \right], \quad (\text{A.3})$$

em que

$$\begin{aligned} \text{Int}(\hat{\mathbf{r}}) = & \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left[K_0 \hat{r}_1 \hat{r}_2 \cos(\psi_2 - \psi_1 - \phi_0) + \xi_1 \sqrt{K_1} \hat{r}_1 \cos(\psi_1 - \phi_1 - \omega_1 t_{01}) \right. \\ & \left. + \xi_2 \sqrt{K_2} \hat{r}_2 \cos(\psi_2 - \phi_2 - \omega_2 t_{02}) \right] d\psi_1 d\psi_2. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Usando a propriedade de periodicidade da função cosseno,

$$\begin{aligned} \text{Int}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left[K_0 \hat{r}_1 \hat{r}_2 \cos(\psi_2 - \psi_1 - \phi) + \xi_1 \sqrt{K_1} \hat{r}_1 \cos(\psi_1) \right. \\ \left. + \xi_2 \sqrt{K_2} \hat{r}_2 \cos(\psi_2) \right] d\psi_1 d\psi_2, \end{aligned} \quad (\text{A.5a})$$

em que

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 - \phi_2 - (\omega_2 t_{02} - \omega_1 t_{01}). \quad (\text{A.5b})$$

Aplicando a série de Fourier em $\exp[K_0 \hat{r}_1 \hat{r}_2 \cos(\psi_2 - \psi_1 - \phi)]$,

$$\exp[K_0 \hat{r}_1 \hat{r}_2 \cos(\psi_2 - \psi_1 - \phi)] = \sum_{n=0}^{\infty} [\varepsilon_n I_n(K_0 \hat{r}_1 \hat{r}_2) \cos[n(\psi_2 - \psi_1 - \phi)]] , \quad (\text{A.6a})$$

em que $I_n(\cdot)$ é a função de Bessel modificada do primeiro tipo de ordem n [22, Equação 8.431.5], e

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2 & n \geq 1 \end{cases} . \quad (\text{A.6b})$$

Substituindo (A.6a) em (A.5a),

$$\begin{aligned} \text{Int}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\varepsilon_n I_n(K_0 \hat{r}_1 \hat{r}_2) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos[n(\psi_2 - \psi_1 - \phi)] \exp \left[\xi_1 \sqrt{K_1} \hat{r}_1 \cos(\psi_1) \right. \right. \\ \left. \left. + \xi_2 \sqrt{K_2} \hat{r}_2 \cos(\psi_2) \right] d\psi_1 d\psi_2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Em seguida, expandindo $\cos[n(\psi_2 - \psi_1 - \phi)]$ e tendo em mente que, para n inteiro,

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\psi_i) \exp \left[\xi_i \sqrt{K_i} \hat{r}_i \cos(\psi_i) \right] d\psi_i = 2\pi I_n(\xi_i \sqrt{K_i} \hat{r}_i), \quad i = 1, 2, \text{ e} \quad (\text{A.8a})$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(n\psi_i) \exp \left[\xi_i \sqrt{K_i} \hat{r}_i \cos(\psi_i) \right] d\psi_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad (\text{A.8b})$$

deduz-se que

$$\text{Int}(\hat{\mathbf{r}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\varepsilon_n I_n(K_0 \hat{r}_1 \hat{r}_2) I_n(\xi_1 \sqrt{K_1} \hat{r}_1) I_n(\xi_2 \sqrt{K_2} \hat{r}_2) \cos(n\phi) \right]. \quad (\text{A.9})$$

De (A.3) e (A.9),

$$p_{\hat{\mathbf{R}}}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{4(1+k_1)(1+k_2)}{1-\rho^2} \hat{r}_1 \hat{r}_2 \exp \left[-\frac{k_1+k_2-2\nu_c\sqrt{k_1k_2}+(1+k_1)\hat{r}_1^2+(1+k_2)\hat{r}_2^2}{1-\rho^2} \right] \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \left[\varepsilon_n I_n(K_0\hat{r}_1\hat{r}_2) I_n(\xi_1\sqrt{K_1}\hat{r}_1) I_n(\xi_2\sqrt{K_2}\hat{r}_2) \cos(n\phi) \right]. \quad (\text{A.10})$$

No tocante a ϕ , de (2.27b)-(2.27c), (A.1f)-(A.1h) e (A.5b),

$$\phi = \arg \left\{ (1+\rho^2)\nu_c\sqrt{k_1k_2} - \rho^2(k_1+k_2) + \mathbf{i}(1-\rho^2)\nu_s\sqrt{k_1k_2} \right\}. \quad (\text{A.11})$$

A.2 Momento Conjunto

Por definição,

$$E \left\{ \hat{R}_1^{N_1} \hat{R}_2^{N_2} \right\} = \int_0^\infty \int_0^\infty \hat{r}_1^{N_1} \hat{r}_2^{N_2} p_{\hat{\mathbf{R}}}(\hat{\mathbf{r}}) d\hat{r}_1 d\hat{r}_2. \quad (\text{A.12})$$

Substituindo (A.10) em (A.12),

$$E \left\{ \hat{R}_1^{N_1} \hat{R}_2^{N_2} \right\} = \frac{4(1+k_1)(1+k_2)}{1-\rho^2} \exp \left[-\frac{k_1+k_2-2\nu_c\sqrt{k_1k_2}}{1-\rho^2} \right] \sum_{n=0}^{\infty} \left[\varepsilon_n \cos(n\phi) \int_0^\infty \int_0^\infty \hat{r}_1^{N_1+1} \right. \\ \left. \times \hat{r}_2^{N_2+1} \exp \left[-\frac{(1+k_1)\hat{r}_1^2+(1+k_2)\hat{r}_2^2}{1-\rho^2} \right] I_n(K_0\hat{r}_1\hat{r}_2) I_n(\xi_1\sqrt{K_1}\hat{r}_1) I_n(\xi_2\sqrt{K_2}\hat{r}_2) d\hat{r}_1 d\hat{r}_2 \right]. \quad (\text{A.13})$$

De [22, Equação 8.445],

$$I_n(K_0\hat{r}_1\hat{r}_2) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{1}{j!\Gamma(n+j+1)} \left(\frac{K_0\hat{r}_1\hat{r}_2}{2} \right)^{n+2j} \right]. \quad (\text{A.14a})$$

Em seguida, aplicando a transformação $j = m - n$ e a relação $\Gamma(m+1) = m!$,

$$I_n(K_0\hat{r}_1\hat{r}_2) = \sum_{m=n}^{\infty} \left[\frac{1}{(m-n)!m!} \left(\frac{K_0\hat{r}_1\hat{r}_2}{2} \right)^{2m-n} \right]. \quad (\text{A.14b})$$

Substituindo (A.14b) em (A.13),

$$E \left\{ \hat{R}_1^{N_1} \hat{R}_2^{N_2} \right\} = \frac{4(1+k_1)(1+k_2)}{1-\rho^2} \exp \left[-\frac{k_1+k_2-2\nu_c\sqrt{k_1k_2}}{1-\rho^2} \right] \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} \left[\frac{\varepsilon_n \cos(n\phi)}{(m-n)!m!} \right. \\ \left. \times \left(\frac{K_0}{2} \right)^{2m-n} \prod_{i=1}^2 \left[\int_0^{\infty} \hat{r}_i^{N_i+2m-n+1} \exp \left[-\frac{(1+k_i)\hat{r}_i^2}{1-\rho^2} \right] I_n(\xi_i \sqrt{K_i} \hat{r}_i) d\hat{r}_i \right] \right]. \quad (\text{A.15})$$

Na próxima seção, demonstra-se que

$$\int_0^{\infty} \hat{r}_i^{N_i+2m-n+1} \exp \left[-\frac{(1+k_i)\hat{r}_i^2}{1-\rho^2} \right] I_n(\xi_i \sqrt{K_i} \hat{r}_i) d\hat{r}_i = \frac{(\xi_i \sqrt{K_i})^n}{2^{n+1}n!} \left(\frac{1-\rho^2}{1+k_i} \right)^{\frac{N_i}{2}+m+1} \\ \times \Gamma \left(\frac{N_i}{2} + m + 1 \right) {}_1F_1 \left(\frac{N_i}{2} + m + 1; n + 1; \frac{K_i}{1-\rho^2} \right). \quad (\text{A.16})$$

Aplicando (A.16) em (A.15) e empregando (A.1b) e (A.1e),

$$E \left\{ \hat{R}_1^{N_1} \hat{R}_2^{N_2} \right\} = \frac{(1-\rho^2)^{\frac{N_1+N_2}{2}+1}}{(1+k_1)^{\frac{N_1}{2}}(1+k_2)^{\frac{N_2}{2}}} \exp \left[-\frac{k_1+k_2-2\nu_c\sqrt{k_1k_2}}{1-\rho^2} \right] \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^m \left[\frac{\varepsilon_n \cos(n\phi) \rho^{2m-n}}{(m-n)!m!(n!)^2} \right. \\ \left. \times \left(\frac{\sqrt{K_1K_2}}{1-\rho^2} \right)^n \prod_{i=1}^2 \left[\Gamma \left(\frac{N_i}{2} + m + 1 \right) {}_1F_1 \left(\frac{N_i}{2} + m + 1; n + 1; \frac{K_i}{1-\rho^2} \right) \right] \right]. \quad (\text{A.17})$$

A.3 Integral

A integral referida na seção anterior corresponde a

$$\text{Int} = \int_0^{\infty} \hat{r}_i^{N_i+2m-n+1} \exp \left[-\frac{(1+k_i)\hat{r}_i^2}{1-\rho^2} \right] I_n(\xi_i \sqrt{K_i} \hat{r}_i) d\hat{r}_i. \quad (\text{A.18})$$

De [22, Equação 8.445],

$$I_n(\xi_i \sqrt{K_i} \hat{r}_i) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{1}{l! \Gamma(n+l+1)} \left(\frac{\xi_i \sqrt{K_i} \hat{r}_i}{2} \right)^{n+2l} \right]. \quad (\text{A.19})$$

Substituindo (A.19) em (A.18),

$$\text{Int} = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{(\xi_i \sqrt{K_i})^{n+2l}}{2^{n+2l} l! \Gamma(n+l+1)} \int_0^{\infty} \hat{r}_i^{N_i+2m+2l+1} \exp \left[-\frac{(1+k_i)\hat{r}_i^2}{1-\rho^2} \right] d\hat{r}_i \right]. \quad (\text{A.20})$$

Fazendo a transformação de variáveis $\hat{r}_i = \sqrt{(1 - \rho^2)t/(1 + k_i)}$,

$$\text{Int} = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{(\xi_i \sqrt{K_i})^{n+2l}}{2^{n+2l+1} l! \Gamma(n+l+1)} \left(\frac{1 - \rho^2}{1 + k_i} \right)^{\frac{N_i}{2} + m + l + 1} \int_0^{\infty} t^{\frac{N_i}{2} + m + l} \exp(-t) dt \right]. \quad (\text{A.21})$$

Usando a definição da função gama [22, Equação 8.310.1],

$$\text{Int} = \frac{(\xi_i \sqrt{K_i})^n}{2^{n+1}} \left(\frac{1 - \rho^2}{1 + k_i} \right)^{\frac{N_i}{2} + m + 1} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{N_i}{2} + m + l + 1\right)}{\Gamma(n+l+1) l!} \left[\frac{\xi_i^2 K_i (1 - \rho^2)}{4(1 + k_i)} \right]^l \right]. \quad (\text{A.22})$$

Aplicando o símbolo de Pochhammer [22, Tabela xliii],

$$\begin{aligned} \text{Int} &= \frac{(\xi_i \sqrt{K_i})^n}{2^{n+1} \Gamma(n+1)} \left(\frac{1 - \rho^2}{1 + k_i} \right)^{\frac{N_i}{2} + m + 1} \Gamma\left(\frac{N_i}{2} + m + 1\right) \\ &\quad \times \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{\left(\frac{N_i}{2} + m + 1\right)_l}{(n+1)_l} \frac{1}{l!} \left[\frac{\xi_i^2 K_i (1 - \rho^2)}{4(1 + k_i)} \right]^l \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Tendo em vista a relação (A.1e),

$$\begin{aligned} \text{Int} &= \frac{(\xi_i \sqrt{K_i})^n}{2^{n+1} \Gamma(n+1)} \left(\frac{1 - \rho^2}{1 + k_i} \right)^{\frac{N_i}{2} + m + 1} \Gamma\left(\frac{N_i}{2} + m + 1\right) \\ &\quad \times \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{\left(\frac{N_i}{2} + m + 1\right)_l}{(n+1)_l} \frac{1}{l!} \left(\frac{K_i}{1 - \rho^2} \right)^l \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Por fim, empregando a igualdade $\Gamma(n+1) = n!$ e a representação em série da função hipergeométrica [22, Equação 9.14.1],

$$\text{Int} = \frac{(\xi_i \sqrt{K_i})^n}{2^{n+1} n!} \left(\frac{1 - \rho^2}{1 + k_i} \right)^{\frac{N_i}{2} + m + 1} \Gamma\left(\frac{N_i}{2} + m + 1\right) {}_1F_1\left(\frac{N_i}{2} + m + 1; n + 1; \frac{K_i}{1 - \rho^2}\right). \quad (\text{A.25})$$

Apêndice B

Momentos de Variáveis Aleatórias Gaussianas

Neste apêndice, deduzem-se os momentos de ordem natural das VAs Gaussianas utilizados no Capítulo 3.

B.1 Momento Marginal

Suponha a VA Gaussianiana X , com média a_X e variância σ_X^2 , e a VA de média nula $\tilde{X} = X - a_X$. Então, dado $l \in \mathbb{N}$, segue, do Binômio de Newton, que

$$E \{X^l\} = \sum_{j=0}^l \left[\binom{l}{j} a_X^{l-j} E \{ \tilde{X}^j \} \right]. \quad (\text{B.1})$$

O valor esperado de $\tilde{X}^j$, $j \in \mathbb{N}$, é dado em [21, Equação (5-73)]:

$$E \{ \tilde{X}^j \} = \begin{cases} (j-1)!! \sigma_X^j & j \text{ par} \\ 0 & j \text{ ímpar} \end{cases}, \quad (\text{B.2a})$$

em que

$$(j-1)!! = \begin{cases} (j-1) \cdot (j-3) \cdot \dots \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 & (j-1) \text{ par} \\ (j-1) \cdot (j-3) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 & (j-1) \text{ ímpar} \end{cases}. \quad (\text{B.2b})$$

De (B.1) e (B.2),

$$E \{X^l\} = a_X^l \sum_{j=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} \left[\binom{l}{2j} \frac{(2j-1)!!}{k_X^j} \right], \quad (\text{B.3a})$$

em que $k_X = a_X^2/\sigma_X^2$, e $\lfloor \cdot \rfloor$ é o maior inteiro inferior ou igual ao valor de entrada. Alternativamente, usando $(2j-1)!! = (2j)!/(2^j j!)$, $j \in \mathbb{N}$,

$$E \{X^l\} = a_X^l l! \sum_{j=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} \left[\frac{1}{(2k_X)^j (l-2j)! j!} \right]. \quad (\text{B.3b})$$

Assim, a razão

$$\gamma_1(l; k_X) = \frac{E \{X^{2l}\}}{\sigma_X^{2l}} \quad (\text{B.4a})$$

vale

$$\gamma_1(l; k_X) = \frac{(2l)!}{2^l} \sum_{j=0}^l \left[\frac{(2k_X)^j}{(2j)! (l-j)!} \right]. \quad (\text{B.4b})$$

B.2 Momentos Conjuntos

B.2.1 Duas Variáveis Aleatórias

Suponha as VAs conjuntamente Gaussianas X e Y , respectivamente com médias a_X e a_Y , variâncias σ_X^2 e σ_Y^2 , e coeficiente de correlação ν , e também as VAs de média nula $\tilde{X} = X - a_X$ e $\tilde{Y} = Y - a_Y$. Então, dado $l_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$, segue, do Binômio de Newton, que

$$E \{X^{2l_1} Y^{2l_2}\} = \sum_{j_1=0}^{2l_1} \sum_{j_2=0}^{2l_2} \left[\binom{2l_1}{j_1} \binom{2l_2}{j_2} a_X^{2l_1-j_1} a_Y^{2l_2-j_2} E \{\tilde{X}^{j_1} \tilde{Y}^{j_2}\} \right]. \quad (\text{B.5})$$

Analogamente, as razões

$$\gamma_2(\mathbf{l}; \mathbf{k}; \nu) = \frac{E \{X^{2l_1} Y^{2l_2}\}}{\sigma_X^{2l_1} \sigma_Y^{2l_2}} \quad (\text{B.6a})$$

e

$$\varrho_2(\mathbf{j}; \nu) = \frac{E \left\{ \tilde{X}^{j_1} \tilde{Y}^{j_2} \right\}}{\sigma_X^{j_1} \sigma_Y^{j_2}}, \quad (\text{B.6b})$$

em que

$$\mathbf{l} = [l_1 \ l_2] \in \mathbb{N}^2, \quad (\text{B.6c})$$

$$\mathbf{j} = [j_1 \ j_2] \in \mathbb{N}^2, \text{ e} \quad (\text{B.6d})$$

$$\mathbf{k} = [k_X \ k_Y] = [a_X^2/\sigma_X^2 \ a_Y^2/\sigma_Y^2], \quad (\text{B.6e})$$

são relacionadas por

$$\gamma_2(\mathbf{l}; \mathbf{k}; \nu) = k_X^{l_1} k_Y^{l_2} \sum_{j_1=0}^{2l_1} \sum_{j_2=0}^{2l_2} \left[\binom{2l_1}{j_1} \binom{2l_2}{j_2} \frac{\varrho_2(\mathbf{j}; \nu)}{(k_X^{j_1} k_Y^{j_2})^{1/2}} \right]. \quad (\text{B.6f})$$

Para obter $\varrho_2(\mathbf{j}; \nu)$, parte-se da JPDP de $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$,

$$p_{\tilde{X}\tilde{Y}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\nu^2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\tilde{x}^2}{\sigma_X^2} + \frac{\tilde{y}^2}{\sigma_Y^2} - 2\nu \frac{\tilde{x}\tilde{y}}{\sigma_X\sigma_Y} \right) \right], \quad (\text{B.7a})$$

e, da definição de momento conjunto,

$$E \left\{ \tilde{X}^{j_1} \tilde{Y}^{j_2} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}^{j_1} \tilde{y}^{j_2} p_{\tilde{X}\tilde{Y}}(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y}. \quad (\text{B.7b})$$

Substituindo (B.7a) em (B.7b), usando $\varrho_2(\mathbf{j}; \nu) = E \left\{ \tilde{X}^{j_1} \tilde{Y}^{j_2} \right\} / (\sigma_X^{j_1} \sigma_Y^{j_2})$, e fazendo algumas manipulações algébricas,

$$\varrho_2(\mathbf{j}; \nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^{j_1}\sigma_Y^{j_2+1}}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}^{j_2} M_{\tilde{X}}(\tilde{y}) \exp \left(-\frac{\tilde{y}^2}{2\sigma_Y^2} \right) d\tilde{y}, \quad (\text{B.8a})$$

em que

$$M_{\tilde{X}}(\tilde{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\nu^2)\sigma_X}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}^{j_1} \exp \left[-\frac{1}{2(1-\nu^2)\sigma_X^2} \left(\tilde{x} - \nu \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \tilde{y} \right)^2 \right] d\tilde{x}. \quad (\text{B.8b})$$

Observando-se que $M_{\tilde{X}}(\tilde{y})$ é o momento de ordem $j_1 \in \mathbb{N}$ de uma VA Gaussiana com média

$\nu(\sigma_X/\sigma_Y)\tilde{y}$ e variância $(1 - \nu^2)\sigma_X^2$, e usando (B.3b),

$$M_{\tilde{X}}(\tilde{y}) = j_1! \nu^{j_1} \sigma_X^{j_1} \sum_{n=0}^{\lfloor j_1/2 \rfloor} \left[\frac{\sigma_Y^{2n-j_1} \tilde{y}^{j_1-2n}}{2^n n! (j_1 - 2n)!} \left(\frac{1 - \nu^2}{\nu^2} \right)^n \right]. \quad (\text{B.9})$$

Substituindo (B.9) em (B.8a),

$$\varrho_2(\mathbf{j}; \nu) = j_1! \nu^{j_1} \sum_{n=0}^{\lfloor j_1/2 \rfloor} \left[\frac{\sigma_Y^{2n-j_1-j_2} M_{\tilde{Y}}}{2^n n! (j_1 - 2n)!} \left(\frac{1 - \nu^2}{\nu^2} \right)^n \right], \quad (\text{B.10a})$$

em que

$$M_{\tilde{Y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}^{j_1+j_2-2n} \exp\left(-\frac{\tilde{y}^2}{2\sigma_Y^2}\right) d\tilde{y}. \quad (\text{B.10b})$$

Tendo em vista que $M_{\tilde{Y}}$ é o momento de ordem $(j_1 + j_2 - 2n) \in \mathbb{N}$ de uma VA Gaussiana de média nula e variância σ_Y , e usando (B.2),

$$M_{\tilde{Y}} = \frac{1}{2} [1 + (-1)^{j_1+j_2}] (j_1 + j_2 - 2n - 1)!! \sigma_Y^{j_1+j_2-2n}. \quad (\text{B.11})$$

Portanto, de (B.10a) e (B.11), resulta que

$$\varrho_2(\mathbf{j}; \nu) = [1 + (-1)^{j_1+j_2}] j_1! \nu^{j_1} \sum_{n=0}^{\lfloor j_1/2 \rfloor} \left[\frac{(j_1 + j_2 - 2n - 1)!!}{2^{n+1} n! (j_1 - 2n)!} \left(\frac{1 - \nu^2}{\nu^2} \right)^n \right]. \quad (\text{B.12})$$

B.2.2 Quatro Variáveis Aleatórias

Suponha as VAs conjuntamente Gaussianas X_1 , Y_1 , X_2 , e Y_2 , respectivamente com médias a_{X_1} , a_{Y_1} , a_{X_2} , e a_{Y_2} , e variâncias $\sigma_{X_1}^2$, $\sigma_{Y_1}^2$, $\sigma_{X_2}^2$, e $\sigma_{Y_2}^2$. Além disso, assuma X_i descorrelacionado de Y_i , $i = 1, 2$, e os seguintes coeficientes de correlação:

$$\nu_1 = \frac{\text{Cov}\{X_1, X_2\}}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} = \frac{\text{Cov}\{Y_1, Y_2\}}{\sigma_{Y_1}\sigma_{Y_2}}, \text{ e} \quad (\text{B.13a})$$

$$\nu_2 = \frac{\text{Cov}\{X_1, Y_2\}}{\sigma_{X_1}\sigma_{Y_2}} = -\frac{\text{Cov}\{Y_1, X_2\}}{\sigma_{Y_1}\sigma_{X_2}}. \quad (\text{B.13b})$$

Agora, considere $\tilde{X}_1 = X_1 - a_{X_1}$, $\tilde{Y}_1 = Y_1 - a_{Y_1}$, $\tilde{X}_2 = X_2 - a_{X_2}$, e $\tilde{Y}_2 = Y_2 - a_{Y_2}$. Logo,

dado $l_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, 3, 4$, segue, do Binômio de Newton, que

$$E \{ X_1^{2l_1} Y_1^{2l_2} X_2^{2l_3} Y_2^{2l_4} \} = \sum_{j_1=0}^{2l_1} \sum_{j_2=0}^{2l_2} \sum_{j_3=0}^{2l_3} \sum_{j_4=0}^{2l_4} \left[\binom{2l_1}{j_1} \binom{2l_2}{j_2} \binom{2l_3}{j_3} \binom{2l_4}{j_4} \right. \\ \left. \times a_{X_1}^{2l_1-j_1} a_{Y_1}^{2l_2-j_2} a_{X_3}^{2l_3-j_3} a_{Y_2}^{2l_4-j_4} E \left\{ \tilde{X}_1^{j_1} \tilde{Y}_1^{j_2} \tilde{X}_2^{j_3} \tilde{Y}_2^{j_4} \right\} \right]. \quad (\text{B.14})$$

Analogamente, a relação entre as razões

$$\gamma_4(\mathbf{l}; \mathbf{k}; \boldsymbol{\nu}) = \frac{E \{ X_1^{2l_1} Y_1^{2l_2} X_2^{2l_3} Y_2^{2l_4} \}}{(\sigma_{X_1}^{2l_1} \sigma_{Y_1}^{2l_2} \sigma_{X_2}^{2l_3} \sigma_{Y_2}^{2l_4})} \quad (\text{B.15a})$$

e

$$\varrho_4(\mathbf{j}; \boldsymbol{\nu}) = \frac{E \left\{ \tilde{X}_1^{j_1} \tilde{Y}_1^{j_2} \tilde{X}_2^{j_3} \tilde{Y}_2^{j_4} \right\}}{(\sigma_{X_1}^{j_1} \sigma_{Y_1}^{j_2} \sigma_{X_2}^{j_3} \sigma_{Y_2}^{j_4})}, \quad (\text{B.15b})$$

em que

$$\mathbf{l} = [l_1 \ l_2 \ l_3 \ l_4] \in \mathbb{N}^4, \quad (\text{B.15c})$$

$$\mathbf{k} = [k_{X_1} \ k_{Y_1} \ k_{X_2} \ k_{Y_2}] = [a_{X_1}^2/\sigma_{X_1}^2 \ a_{Y_1}^2/\sigma_{Y_1}^2 \ a_{X_2}^2/\sigma_{X_2}^2 \ a_{Y_2}^2/\sigma_{Y_2}^2], \quad (\text{B.15d})$$

$$\boldsymbol{\nu} = [\nu_1 \ \nu_2], \text{ e} \quad (\text{B.15e})$$

$$\mathbf{j} = [j_1 \ j_2 \ j_3 \ j_4] \in \mathbb{N}^4, \quad (\text{B.15f})$$

é dada por

$$\gamma_4(\mathbf{l}; \mathbf{k}; \boldsymbol{\nu}) = k_{X_1}^{l_1} k_{Y_1}^{l_2} k_{X_2}^{l_3} k_{Y_2}^{l_4} \sum_{j_1=0}^{2l_1} \sum_{j_2=0}^{2l_2} \sum_{j_3=0}^{2l_3} \sum_{j_4=0}^{2l_4} \left[\binom{2l_1}{j_1} \binom{2l_2}{j_2} \binom{2l_3}{j_3} \binom{2l_4}{j_4} \frac{\varrho_4(\mathbf{j}; \boldsymbol{\nu})}{(k_{X_1}^{j_1} k_{Y_1}^{j_2} k_{X_2}^{j_3} k_{Y_2}^{j_4})^{1/2}} \right]. \quad (\text{B.15g})$$

Na dedução de $\varrho_4(\mathbf{j}; \boldsymbol{\nu})$, procede-se da JPDF de $\tilde{\mathbf{X}} = [\tilde{X}_1 \ \tilde{X}_2]$ e $\tilde{\mathbf{Y}} = [\tilde{Y}_1 \ \tilde{Y}_2]$,

$$p_{\tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{Y}}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) = \frac{1}{4\pi^2 \sigma_{X_1} \sigma_{Y_1} \sigma_{X_2} \sigma_{Y_2} (1 - \rho^2)} \exp \left[-\frac{1}{2(1 - \rho^2)} \left(\frac{\tilde{x}_1^2}{\sigma_{X_1}^2} + \frac{\tilde{y}_1^2}{\sigma_{Y_1}^2} + \frac{\tilde{x}_2^2}{\sigma_{X_2}^2} + \frac{\tilde{y}_2^2}{\sigma_{Y_2}^2} \right. \right. \\ \left. \left. - 2\nu_1 \frac{\tilde{x}_1 \tilde{x}_2}{\sigma_{X_1} \sigma_{X_2}} - 2\nu_1 \frac{\tilde{y}_1 \tilde{y}_2}{\sigma_{Y_1} \sigma_{Y_2}} - 2\nu_2 \frac{\tilde{x}_1 \tilde{y}_2}{\sigma_{X_1} \sigma_{Y_2}} + 2\nu_2 \frac{\tilde{y}_1 \tilde{x}_2}{\sigma_{Y_1} \sigma_{X_2}} \right) \right], \quad (\text{B.16a})$$

em que

$$\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}_1 \ \tilde{x}_2], \quad (\text{B.16b})$$

$$\tilde{\mathbf{y}} = [\tilde{y}_1 \ \tilde{y}_2], \text{ e} \quad (\text{B.16c})$$

$$\rho = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}, \quad (\text{B.16d})$$

e da definição de momento conjunto

$$E \left\{ \tilde{X}_1^{j_1} \tilde{Y}_1^{j_2} \tilde{X}_2^{j_3} \tilde{Y}_2^{j_4} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}_1^{j_1} \tilde{y}_1^{j_2} \tilde{x}_2^{j_3} \tilde{y}_2^{j_4} p_{\tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{Y}}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) d\tilde{x}_1 d\tilde{y}_1 d\tilde{x}_2 d\tilde{y}_2. \quad (\text{B.16e})$$

Assim, substituindo (B.16a) em (B.16e), usando (B.15b), e fazendo algumas manipulações algébricas,

$$\begin{aligned} \varrho_4(\mathbf{j}; \boldsymbol{\nu}) &= \frac{(\sigma_{X_1}^{j_1} \sigma_{Y_1}^{j_2} \sigma_{X_2}^{j_3} \sigma_{Y_2}^{j_4})^{-1}}{2\pi \sigma_{X_2} \sigma_{Y_2}} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}_2^{j_3} \tilde{y}_2^{j_4} M_{\tilde{X}_1}(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2) M_{\tilde{Y}_1}(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2) \exp \left(-\frac{\tilde{x}_2^2}{\sigma_{X_2}^2} - \frac{\tilde{y}_2^2}{\sigma_{Y_2}^2} \right) d\tilde{x}_2 d\tilde{y}_2, \end{aligned} \quad (\text{B.17a})$$

em que

$$\begin{aligned} M_{\tilde{X}_1}(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\sigma_{X_1}} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}_1^{j_1} \exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_{X_1}^2} \left(\tilde{x}_1 - \nu_1 \frac{\sigma_{X_1}}{\sigma_{X_2}} \tilde{x}_2 - \nu_2 \frac{\sigma_{X_1}}{\sigma_{Y_2}} \tilde{y}_2 \right)^2 \right] d\tilde{x}_1, \text{ e} \end{aligned} \quad (\text{B.17b})$$

$$\begin{aligned} M_{\tilde{Y}_1}(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\sigma_{Y_1}} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}_1^{j_2} \exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_{Y_1}^2} \left(\tilde{y}_1 - \nu_1 \frac{\sigma_{Y_1}}{\sigma_{Y_2}} \tilde{y}_2 + \nu_2 \frac{\sigma_{Y_1}}{\sigma_{X_2}} \tilde{x}_2 \right)^2 \right] d\tilde{y}_1. \end{aligned} \quad (\text{B.17c})$$

Observe que $M_{\tilde{X}_1}(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$ e $M_{\tilde{Y}_1}(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$ são momentos, respectivamente de ordens $j_1 \in \mathbb{N}$ e $j_2 \in \mathbb{N}$, de VAs Gaussianas, respectivamente com médias $[\nu_1(\sigma_{X_1}/\sigma_{X_2})\tilde{x}_2 + \nu_2(\sigma_{X_1}/\sigma_{Y_2})\tilde{y}_2]$ e $[\nu_1(\sigma_{Y_1}/\sigma_{Y_2})\tilde{y}_2 - \nu_2(\sigma_{Y_1}/\sigma_{X_2})\tilde{x}_2]$, e variâncias $(1-\rho^2)\sigma_{X_1}^2$ e $(1-\rho^2)\sigma_{Y_1}^2$. Logo, usando (B.3b)

para $M_{\tilde{X}_1}(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$ e $M_{\tilde{Y}_1}(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$,

$$M_{\tilde{X}_1}(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2) = j_1! \sigma_{X_1}^{j_1} \sum_{n_1=0}^{\lfloor j_1/2 \rfloor} \left[\frac{(1-\rho^2)^{n_1}}{2^{n_1} n_1! (j_1 - 2n_1)!} \left(\nu_1 \frac{\tilde{x}_2}{\sigma_{X_2}} + \nu_2 \frac{\tilde{y}_2}{\sigma_{Y_2}} \right)^{j_1 - 2n_1} \right], \text{ e} \quad (\text{B.18a})$$

$$M_{\tilde{Y}_1}(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2) = j_2! \sigma_{Y_1}^{j_2} \sum_{n_2=0}^{\lfloor j_2/2 \rfloor} \left[\frac{(1-\rho^2)^{n_2}}{2^{n_2} n_2! (j_2 - 2n_2)!} \left(\nu_1 \frac{\tilde{y}_2}{\sigma_{Y_2}} - \nu_2 \frac{\tilde{x}_2}{\sigma_{X_2}} \right)^{j_2 - 2n_2} \right]. \quad (\text{B.18b})$$

Aplicando o binômio de Newton,

$$\left(\nu_1 \frac{\tilde{x}_2}{\sigma_{X_2}} + \nu_2 \frac{\tilde{y}_2}{\sigma_{Y_2}} \right)^{j_1 - 2n_1} = \sum_{n_3=0}^{j_1 - 2n_1} \left[\binom{j_1 - 2n_1}{n_3} \nu_1^{n_3} \nu_2^{j_1 - 2n_1 - n_3} \frac{\tilde{x}_2^{n_3} \tilde{y}_2^{j_1 - 2n_1 - n_3}}{\sigma_{X_2}^{n_3} \sigma_{Y_2}^{j_1 - 2n_1 - n_3}} \right], \text{ e} \quad (\text{B.19a})$$

$$\left(\nu_1 \frac{\tilde{y}_2}{\sigma_{Y_2}} - \nu_2 \frac{\tilde{x}_2}{\sigma_{X_2}} \right)^{j_2 - 2n_2} = \sum_{n_4=0}^{j_2 - 2n_2} \left[\binom{j_2 - 2n_2}{n_4} (-1)^{n_4} \nu_1^{j_2 - 2n_2 - n_4} \nu_2^{n_4} \frac{\tilde{x}_2^{n_4} \tilde{y}_2^{j_2 - 2n_2 - n_4}}{\sigma_{X_2}^{n_4} \sigma_{Y_2}^{j_2 - 2n_2 - n_4}} \right]. \quad (\text{B.19b})$$

De (B.17), (B.18), e (B.19),

$$\begin{aligned} \varrho_4(\mathbf{j}; \boldsymbol{\nu}) &= j_1! j_2! \nu_1^{j_2} \nu_2^{j_1} \sum_{n_1=0}^{\lfloor j_1/2 \rfloor} \sum_{n_2=0}^{\lfloor j_2/2 \rfloor} \sum_{n_3=0}^{j_1 - 2n_1} \sum_{n_4=0}^{j_2 - 2n_2} \left[\binom{j_1 - 2n_1}{n_3} \binom{j_2 - 2n_2}{n_4} \frac{1}{(j_1 - 2n_1)! (j_2 - 2n_2)!} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{M_{\tilde{X}_2} M_{\tilde{Y}_2}}{\sigma_{X_2}^{j_3 + n_3 + n_4} \sigma_{Y_2}^{j_1 + j_2 + j_4 - 2n_1 - 2n_2 - n_3 - n_4}} \frac{(-1)^{n_4} (1 - \rho^2)^{n_1 + n_2}}{2^{n_1 + n_2} n_1! n_2! \nu_1^{2n_2} \nu_2^{2n_1}} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2} \right)^{n_3 - n_4} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.20a})$$

em que

$$M_{\tilde{X}_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{X_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}_2^{j_3 + n_3 + n_4} \exp \left(-\frac{\tilde{x}_2^2}{\sigma_{X_2}^2} \right) d\tilde{x}_2, \text{ e} \quad (\text{B.20b})$$

$$M_{\tilde{Y}_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{Y_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}_2^{j_1 + j_2 + j_4 - 2n_1 - 2n_2 - n_3 - n_4} \exp \left(-\frac{\tilde{y}_2^2}{\sigma_{Y_2}^2} \right) d\tilde{y}_2. \quad (\text{B.20c})$$

Note que $M_{\tilde{X}_2}$ e $M_{\tilde{Y}_2}$ são momentos, respectivamente de ordens $(j_3 + n_3 + n_4) \in \mathbb{N}$ e $(j_1 + j_2 + j_4 - 2n_1 - 2n_2 - n_3 - n_4) \in \mathbb{N}$, de VAs Gaussianas de médias nulas, respectivamente

com variâncias σ_{X_2} e σ_{Y_2} . Portanto, usando (B.2) para $M_{\tilde{X}_2}$ e $M_{\tilde{Y}_2}$

$$M_{\tilde{X}_2} = \begin{cases} (j_3 + n_3 + n_4 - 1)!! \sigma_{X_2}^{j_3 + n_3 + n_4} & (j_3 + n_3 + n_4) \text{ par} \\ 0 & (j_3 + n_3 + n_4) \text{ ímpar} \end{cases}, \quad (\text{B.21a})$$

$$M_{\tilde{Y}_2} = \begin{cases} \frac{(j_1 + j_2 + j_4 - 2n_1 - 2n_2 - n_3 - n_4 - 1)!!}{\sigma_{Y_2}^{-(j_1 + j_2 + j_4 - 2n_1 - 2n_2 - n_3 - n_4)}} & (j_1 + j_2 + j_4 - n_3 - n_4) \text{ par} \\ 0 & (j_1 + j_2 + j_4 - n_3 - n_4) \text{ ímpar} \end{cases}. \quad (\text{B.21b})$$

Portanto, se ambos $(j_1 + j_2 + j_4 - n_3 - n_4)$ e $(j_3 + n_3 + n_4)$ são pares,

$$M_{\tilde{X}_2} M_{\tilde{Y}_2} = \frac{(j_3 + n_3 + n_4 - 1)!! (j_1 + j_2 + j_4 - 2n_1 - 2n_2 - n_3 - n_4 - 1)!!}{\sigma_{X_2}^{-(j_3 + n_3 + n_4)} \sigma_{Y_2}^{-(j_1 + j_2 + j_4 - 2n_1 - 2n_2 - n_3 - n_4)}}, \quad (\text{B.22a})$$

e, caso contrário,

$$M_{\tilde{X}_2} M_{\tilde{Y}_2} = 0. \quad (\text{B.22b})$$

De (B.20) e (B.22),

$$\begin{aligned} \varrho_4(\mathbf{j}; \boldsymbol{\nu}) &= j_1! j_2! \nu_1^{j_2} \nu_2^{j_1} \sum_{n_1=0}^{\lfloor j_1/2 \rfloor} \sum_{n_2=0}^{\lfloor j_2/2 \rfloor} \sum_{n_3=0}^{j_1-2n_1} \sum_{n_4=0}^{j_2-2n_2} \left[\frac{(j_1 + j_2 + j_4 - 2n_1 - 2n_2 - n_3 - n_4 - 1)!!}{(j_1 - 2n_1 - n_3)!(j_2 - 2n_2 - n_4)!} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{[(-1)^{j_3+n_3} + (-1)^{n_4}](j_3 + n_3 + n_4 - 1)!! (1 - \rho^2)^{n_1+n_2}}{2^{n_1+n_2+1} n_1! n_2! n_3! n_4!} \frac{(1 - \rho^2)^{n_1+n_2}}{\nu_1^{2n_2} \nu_2^{2n_1}} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2} \right)^{n_3-n_4} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.23a})$$

para $(j_1 + j_2 + j_3 + j_4)$ par e

$$\varrho_4(\mathbf{j}; \boldsymbol{\nu}) = 0 \quad (\text{B.23b})$$

para $(j_1 + j_2 + j_3 + j_4)$ ímpar.

Alternativamente,

$$\begin{aligned} \varrho_4(\mathbf{j}; \boldsymbol{\nu}) = & j_1! j_2! \nu_1^{j_2} \nu_2^{j_1} \sum_{n_1=0}^{\lfloor j_1/2 \rfloor} \sum_{n_2=0}^{\lfloor j_2/2 \rfloor} \sum_{n_3=0}^{j_1-2n_1} \sum_{n_4=0}^{j_2-2n_2} \left[\frac{[(-1)^{j_3+n_3} + (-1)^{n_4}]}{2^{n_1+n_2+1} n_1! n_2! n_3! n_4!} \right. \\ & \times \frac{(j_1 + j_2 + j_4 - 2n_1 - 2n_2 - n_3 - n_4 - 1)!! (j_3 + n_3 + n_4 - 1)!!}{(j_1 - 2n_1 - n_3)! (j_2 - 2n_2 - n_4)!} \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

$$\times \frac{(1 - \rho^2)^{n_1+n_2}}{\nu_1^{2n_2} \nu_2^{2n_1}} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2} \right)^{n_3-n_4} \Bigg]. \quad (\text{B.25})$$

Apêndice C

Estatísticas de Ordem Unitária da Potência

Neste apêndice, deduzem-se a variância de ordem unitária e a covariância de ordem unitária das potências de dois sinais satisfazendo o modelo geral de desvanecimento descrito no Capítulo 3.

C.1 Momentos das Gaussianas

C.1.1 Variância

Seja a VA Gaussiana X , com média a_X e variância σ_X^2 . Desse modo, de [21, Equação (5.73)],

$$Var\{X^2\} = E\{X^4\} - E\{X^2\}^2 = 4a_X^2\sigma_X^2 + 2\sigma_X^4. \quad (C.1)$$

C.1.2 Covariância

Inicialmente, considere as VAs de média nula conjuntamente Gaussianas $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$, respectivamente com variâncias σ_X^2 e σ_Y^2 , e coeficiente de correlação ν . Do Apêndice B, Equação (B.12):

$$E\{\tilde{X}, \tilde{Y}^2\} = E\{\tilde{X}^2, \tilde{Y}\} = 0 \quad (C.2)$$

Assim, sejam as VAs $X = \tilde{X} + a_X$ e $Y = \tilde{Y} + a_Y$, de (C.2) e [21, equações (5-73) e (6-199)],

$$Cov\{X^2, Y^2\} = 4\mu a_X a_Y \sigma_X \sigma_Y + 2\mu^2 \sigma_X^2 \sigma_Y^2. \quad (C.3)$$

C.2 Momentos da Potência Simples

C.2.1 Variância

Da independência de $W_{i,j}$ e $W_{i,k}$, $\forall j \neq k$,

$$Var\{W_i\} = \sum_{j=1}^{m_i} [Var\{W_{i,j}\}], \quad i = 1, 2. \quad (C.4)$$

Além disso, como $X_{i,j}$ e $Y_{i,j}$ são VAs independentes,

$$Var\{W_{i,j}\} = Var\{X_{i,j}^2\} + Var\{Y_{i,j}^2\}, \quad i = 1, 2. \quad (C.5)$$

Aplicando (C.1) a $X_{i,j}$ e a $Y_{i,j}$, e usando (C.4) e (C.5),

$$Var\{W_i\} = \sum_{j=1}^{m_i} \left[4(a_{X_i}^2 \sigma_{X_{i,j}}^2 + a_{Y_{i,j}}^2 \sigma_{Y_{i,j}}^2) + 2(\sigma_{X_{i,j}}^4 + \sigma_{Y_{i,j}}^4) \right], \quad i = 1, 2. \quad (C.6)$$

C.2.2 Covariância

Das independências de $W_{1,j}$ e $W_{2,k}$, $\forall j \neq k$, e de $W_{1,j}$ e $W_{2,j}$, $\forall j > m_0$,

$$Cov\{W_1, W_2\} = \sum_{j=1}^{m_0} [Cov\{W_{1,j}, W_{2,j}\}]. \quad (C.7)$$

A covariância de $W_{1,j}$ e $W_{2,j}$ é dada por

$$Cov\{W_{1,j}, W_{2,j}\} = Cov\{X_{1,j}^2, X_{2,j}^2\} + Cov\{X_{1,j}^2, Y_{2,j}^2\} + Cov\{Y_{1,j}^2, X_{2,j}^2\} + Cov\{Y_{1,j}^2, Y_{2,j}^2\} \quad (C.8)$$

Empregando (C.3) a cada um dos pares $(X_{1,j}, X_{2,j})$, $(X_{1,j}, Y_{2,j})$, $(Y_{1,j}, X_{2,j})$ e $(Y_{1,j}, Y_{2,j})$, e usando (C.7) e (C.8),

$$\begin{aligned} Cov\{W_1, W_2\} = \sum_{j=1}^{m_0} & \left[2\mu_{1,j}^2 (\sigma_{X_{1,j}}^2 \sigma_{X_{2,j}}^2 + \sigma_{Y_{1,j}}^2 \sigma_{Y_{2,j}}^2) + 2\mu_{2,j}^2 (\sigma_{X_{1,j}}^2 \sigma_{Y_{2,j}}^2 + \sigma_{Y_{1,j}}^2 \sigma_{X_{2,j}}^2) \right. \\ & + 4\mu_{1,j} (a_{X_{1,j}} a_{X_{2,j}} \sigma_{X_{1,j}} \sigma_{X_{2,j}} + a_{Y_{1,j}} a_{Y_{2,j}} \sigma_{Y_{1,j}} \sigma_{Y_{2,j}}) \\ & \left. + 4\mu_{2,j} (a_{X_{1,j}} a_{Y_{2,j}} \sigma_{X_{1,j}} \sigma_{Y_{2,j}} - a_{Y_{1,j}} a_{X_{2,j}} \sigma_{Y_{1,j}} \sigma_{X_{2,j}}) \right]. \quad (C.9) \end{aligned}$$

Apêndice D

Coeficientes de Correlação Freqüenciais

Neste apêndice, avaliam-se algumas propriedades dos coeficientes de correlação freqüenciais do MD Hoyt e dos MDs η - κ , em ambientes estacionários.

D.1 Modelo de Desvanecimento Hoyt

Nesta seção, prova-se que o coeficiente de correlação freqüencial do MD Hoyt em ambientes estacionários ($\eta_1 = \eta_2 = \eta$),

$$\delta_{1,1}^P(\Delta\omega) = \frac{1 + 2 (\Delta\omega\overline{T})^2 \eta + \eta^2}{\left[1 + (\Delta\omega\overline{T})^2\right]^2 (1 + \eta^2)}, \quad (\text{D.1})$$

possui valor máximo em $\eta = 1$ e valor mínimo em $\eta = 0$ e $\eta \rightarrow \infty$.

Derivando (D.1) com relação a η ,

$$\frac{\partial}{\partial\eta} [\delta_{1,1}^P(\Delta\omega)] = \frac{2 (\Delta\omega\overline{T})^2 (1 - \eta^2)}{\left[1 + (\Delta\omega\overline{T})^2\right]^2 (1 + \eta^2)^2}. \quad (\text{D.2a})$$

Dessa relação,

$$\left. \frac{\partial}{\partial\eta} [\delta_{1,1}^P(\Delta\omega)] \right|_{0 \leq \eta < 1} > 0, \quad (\text{D.2b})$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial\eta} [\delta_{1,1}^P(\Delta\omega)] \right|_{\eta=1} = 0, \text{ e} \quad (\text{D.2c})$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial\eta} [\delta_{1,1}^P(\Delta\omega)] \right|_{1 < \eta < \infty} < 0. \quad (\text{D.2d})$$

Assim, (D.1) é monotonicamente crescente no intervalo $0 \leq \eta < 1$ e monotonicamente decrescente no intervalo $1 < \eta < \infty$, tendo valor máximo em $\eta = 1$.

D.2 Modelos de Desvanecimento η - κ

Nesta seção, prova-se que, em ambientes estacionários, os coeficientes de correlação freqüenciais dos MDs η - κ são crescentes com relação a κ — ou com relação a κ_X e a κ_Y .

Em ambientes estacionários,

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta, \quad \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa, \quad (\text{D.3a})$$

$$\kappa_{X_1} = \kappa_{X_2} = \kappa_X, \quad \text{e} \quad \kappa_{Y_1} = \kappa_{Y_2} = \kappa_Y. \quad (\text{D.3b})$$

Substituindo essas igualdades nas expressões do CCPS dos MDs η - κ , apresentadas no Capítulo 3, tem-se que, para o MD η - κ Assimétrico,

$$\delta_{1,1}^P = \frac{2\nu_1\eta(1+\eta)\kappa + \nu_1^2(1+\eta^2) + 2\nu_2^2\eta}{\eta^2(1+2\kappa) + 1 + 2\eta\kappa}, \quad (\text{D.4a})$$

para o MD η - κ Simétrico,

$$\delta_{1,1}^P = \frac{2\nu_1(1+\eta^2)\kappa + \nu_1^2(1+\eta^2) + 2\nu_2^2\eta}{(1+\eta^2)(1+2\kappa)}, \quad (\text{D.4b})$$

e, para o MD η - κ Generalizado,

$$\delta_{1,1}^P = \frac{2\nu_1(\eta^2\kappa_X + \kappa_Y) + \nu_1^2(1+\eta^2) + 2\nu_2^2\eta}{\eta^2(1+2\kappa_X) + 1 + 2\kappa_Y}. \quad (\text{D.4c})$$

Do Capítulo 4, ν_1 e ν_2 valem, no domínio freqüencial,

$$\nu_1(\Delta\omega) = \frac{1}{1 + (\Delta\omega\bar{T})^2}, \quad \text{e} \quad \nu_2(\Delta\omega) = \frac{\Delta\omega\bar{T}}{1 + (\Delta\omega\bar{T})^2}. \quad (\text{D.5})$$

Aplicando (D.5) em (D.4) resulta $\delta_{1,1}^P(\Delta\omega)$. Em seguida, derivando $\delta_{1,1}^P(\Delta\omega)$ com relação a κ (ou a κ_X e a κ_Y), tem-se, no MD η - κ Assimétrico,

$$\frac{\partial}{\partial \kappa} [\delta_{1,1}^P(\Delta\omega)] = \frac{2(\Delta\omega\bar{T})^2(\eta-1)^2\eta(1+\eta)}{[1 + (\Delta\omega\bar{T})^2]^2 [\eta^2(1+2\kappa) + 1 + 2\eta\kappa]^2}; \quad (\text{D.6a})$$

no MD η - κ Simétrico,

$$\frac{\partial}{\partial \kappa} [\delta_{1,1}^P(\Delta\omega)] = \frac{2(\Delta\omega\bar{T})^2(\eta-1)^2}{[1 + (\Delta\omega\bar{T})^2]^2 (1 + \eta^2)(1 + 2\kappa)^2}; \quad (\text{D.6b})$$

e, no MD η - κ Generalizado,

$$\frac{\partial}{\partial \kappa_X} [\delta_{1,1}^P(\Delta\omega)] = \frac{2(\Delta\omega\bar{T})^2(\eta-1)^2\eta^2}{[1 + (\Delta\omega\bar{T})^2]^2 [\eta^2(1 + 2\kappa_X) + 1 + 2\kappa_Y]^2}, \text{ e} \quad (\text{D.6c})$$

$$\frac{\partial}{\partial \kappa_Y} [\delta_{1,1}^P(\Delta\omega)] = \frac{2(\Delta\omega\bar{T})^2(\eta-1)^2}{[1 + (\Delta\omega\bar{T})^2]^2 [\eta^2(1 + 2\kappa_X) + 1 + 2\kappa_Y]^2}. \quad (\text{D.6d})$$

Assim, nos MDs η - κ Assimétrico e η - κ Simétrico,

$$\left. \frac{\partial}{\partial \kappa} [\delta_{1,1}^P(\Delta\omega)] \right|_{\eta \geq 0} \geq 0, \quad (\text{D.7a})$$

e, no MD η - κ Generalizado,

$$\left. \frac{\partial}{\partial \kappa_X} [\delta_{1,1}^P(\Delta\omega)] \right|_{\eta \geq 0} \geq 0, \text{ e} \quad (\text{D.7b})$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \kappa_Y} [\delta_{1,1}^P(\Delta\omega)] \right|_{\eta \geq 0} \geq 0. \quad (\text{D.7c})$$

De (D.7), nos MDs η - κ , $\delta_{1,1}^P(\Delta\omega)$ é crescente com relação a κ — ou a κ_X e a κ_Y .