

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE COMUNICAÇÕES

17 DE JUNHO DE 1988

*Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida por
Roberto Silva Lucatelli Araújo e aprovada pela Comissão Julgadora
em 17 de Junho de 1988*

Fábio Violaro
05/09/88

EQUALIZAÇÃO ADAPTATIVA PARA
MODEMS DE DADOS

Roberto Silva Lucatelli Araújo

Orientador- Prof. Dr. Fábio Violaro

Tese apresentada à Faculdade de
Engenharia Elétrica, da Univer
sidade Estadual de Campinas -
UNICAMP, como parte dos requi-
sitos exigidos para obtenção do
título de MESTRE EM ENGENHARIA
ELÉTRICA.

UNICAMP
BIBLIOTECA

Agradecimentos

Gostaria de prestar meus sinceros agradecimentos ao professor Fábio Violaro pela atenção e dedicação demonstradas durante todo o trabalho. Agradeço também aos professores Amauri Lopes e Wagner Caradori do Amaral a colaboração prestada.

Sou grato aos amigos Wilmar Lima, pela ajuda no decorrer do curso, e Luis Meloni pelas discussões sobre as simulações.

Finalmente, agradeço ao amigo e professor Domingos Alves da Costa o incentivo de sempre.

Dedico este trabalho aos meus
pais e à minha esposa Elaine

RESUMO

Neste trabalho estudam-se os sistemas de comunicação de dados em canais telefônicos na faixa de voz (modems de dados).

As principais contribuições são a apresentação detalhada da teoria de equalização adaptativa e dos algoritmos de sincronismo de símbolos e de portadora, a verificação da análise teórica através de simulações realizadas com sistemas práticos (linhas telefônicas reais), e uma modificação no algoritmo de ajuste dos coeficientes do equalizador transversal (algoritmo do gradiente modificado), com a qual se obtém um aumento significativo na velocidade de convergência em relação ao algoritmo convencional.

Lista de Símbolos e Convenções

$\sum_n$ = Somatória para todo n ($-\infty$ a $+\infty$)

$*$ = Operador de Convolução

$| |$ = Valor Absoluto

$()'$ = Transposição

$()^*$ = Complexo Conjugado

$()'' = ()'^* =$ Transposição Hermitiana

$E[]$ = Média Estatística

$\text{Re}(x)$ = Parte Real de x

$\text{Im}(x)$ = Parte Imaginária de x

$\delta(t)$ = Impulso em $t=0$

$1/T$ = Taxa de Transmissão de Símbolos

α = Excesso de Faixa

f_c = Frequência da Portadora

$h(n)$ = Resposta Impulsiva Discreta do Canal Equivalente

$a(n)$ = sequência de símbolos

$y(n)$ = Sinal na Saída do Equalizador

$e(n) = y(n) - a(n)$ = Sinal de erro

MSE = Mean Square Error (Erro Quadrático Médio)

$M = 2N + 1$ = Número de Coeficientes (Taps) do Equalizador

$u(n)$ = Amostras na Linha de Atraso do Equalizador

$\mathbf{u}(n)$ = Vetor com Elementos $u(n)$ ($M \times 1$)

$c(k)$ = Coeficiente do Equalizador na Posição k ($k=-N$ a N)

$\mathbf{c}(n)$ = Vetor de Coeficientes no Instante n ($M \times 1$)

$\mathbf{R}$ = Matriz de Autocorrelação do Canal ($M \times M$)

$\text{Tr}(\mathbf{R})$ = Traço de $\mathbf{R}$ (Soma dos Elementos da Diagonal Principal de $\mathbf{R}$)

λ_i = i-ésimo Autovalor da Matriz R ($i=1$ a M)
 $\lambda_{\max}$ = Maior Autovalor de R
 $\lambda_{\min}$ = Menor Autovalor de R
 $S_a = E[a(n)a^*(n)]$ = Variância da Sequência de Símbolos
 S_n = Variância do Ruído
 $NSR = S_n/S_a$, $SNR = S_a/S_n$
 SDA = Steepest Descent Algorithm (Algoritmo da Máxima Declividade)
 $J_{\min}$ = MSE Mínimo
 μ = Passo de Adaptação ($\mu > 0$)
 AGC = Algoritmo do Gradiente Convencional
 AGM = Algoritmo do Gradiente Modificado
 DFE = Decision Feedback Equalizer (Equaliz. com Decis. Realimentada)
 t_0 = Fase de Amostragem
 FKA = Fast Kalman Algorithm (Algoritmo Rápido de Kalman)
 $LSLA$ = Least Square Lattice Algorithm (Algoritmo em Treliza)
 QAM = Quadrature Amplitude Modulation

Índice

Capítulo I – Introdução.....	1
Capítulo II – Modelamento do Sistema	
II.1 – Introdução.....	4
II.2 – Interferência Intersimbólica.....	4
II.3 – Modelo Equivalente em Banda Base.....	8
II.4 – Sistema QAM.....	11
II.4.1 – Banda Base Equivalente.....	15
II.4.2 – Dimensionamento do Sistema.....	19
II.5 – Conclusão.....	21
Capítulo III – Equalização Adaptativa	
III.1 – Introdução.....	22
III.2 – Equalizador Transversal.....	22
III.3 – Critérios de Otimização.....	25
III.4 – Coeficientes Ótimos.....	26
III.5 – Análise no Domínio da Frequência.....	32
III.6 – Algoritmo da Máxima Declividade (SDA).....	35
III.6.1 – Condições de Estabilidade e Convergência.....	37
III.6.2 – Tempo de Convergência.....	37
III.6.3 – Algoritmo Estocástico do Gradiente.....	45
III.6.4 – Convergência do Algoritmo.....	47
III.7 – Posição do Tap de Referência.....	52
III.8 – Técnicas Para a Aceleração da Convergência.....	54
III.8.1 – Algoritmo do Gradiente Modificado.....	54
III.8.2 – Equalização Cíclica.....	58
III.8.3 – Equalização no Domínio da Frequência.....	62
III.8.4 – Outras Técnicas.....	64

III.9 - Sensibilidade à Aritmética Finita.....	64
III.10 - Conclusão.....	67

Capítulo IV - Outros Tipos de Equalizador e de Algoritmos de Convergência Rápida

IV.1 - Introdução.....	68
IV.2 - Equalizador com Decisão Realimentada.....	68
IV.2.1 - Coeficientes Ótimos.....	71
IV.2.2 - Algoritmo do Gradiente.....	73
IV.2.3 - Convergência.....	73
IV.2.4 - Desempenho.....	74
IV.3 - Equalizador com Espaçamento Fracional.....	74
IV.3.1 - Sensibilidade à Fase de Amostragem.....	75
IV.3.2 - Coeficientes Ótimos e MSE Mínimo.....	78
IV.3.3 - Algoritmo do Gradiente.....	81
IV.4 - Equalizadores de Convergência Rápida.....	83
IV.4.1 - Algoritmo Rápido de Kalman.....	84
IV.4.2 - Algoritmo em Treliza (Lattice).....	87
IV.5 - Conclusão.....	92

Capítulo V - Simulações por Computador

V.1 - Introdução.....	94
V.2 - Observações Sobre as Simulações.....	94
V.2.1 - Canais Utilizados.....	94
V.2.2 - Sequência de Treinamento.....	94
V.2.3 - Geração do Ruído.....	95
V.2.4 - Medida do Erro Quadrático Médio (MSE).....	98

V.2.5 - Inicialização do Vetor de Coeficientes.....	99
V.2.6 - Programas Utilizados.....	99
V.3 - Algoritmo da Máxima Declividade (SDA).....	100
V.3.1 - Algoritmo do Gradiente.....	100
V.4 - Métodos para Aceleração da Convergência.....	104
V.4.1 - Algoritmo do Gradiente Modificado.....	104
V.4.2 - Equalização Cíclica.....	107
V.5 - Equalizador com Decisão Realimentada.....	109
V.6 - Equalizador com Espaçamento Fracional.....	111
V.7 - Algoritmo Rápido de Kalman.....	118
V.8 - Algoritmo em Treliza.....	119
V.9 - Conclusão.....	120

Capítulo VI - Sistema de Transmissão de Dados a 9600 bits/segundo

VI.1 - Introdução.....	147
VI.2 - Estrutura do Sistema.....	147
VI.2.1 - Transmissor.....	147
VI.2.2 - Receptor.....	150
VI.3 - Algoritmo de Recuperação de Relógio.....	153
VI.3.1 - Circuito de Extração da Informação de Sincronismo.....	156
VI.3.1.1 - Implementação do Circuito.....	158
VI.3.2 - Sincronismo Rápido.....	160
VI.4 - Algoritmo de Recuperação de Portadora.....	162
VI.4.1 - Sincronismo Rápido.....	168
VI.5 - Conclusão.....	171

VII - Conclusão.....	177
-----------------------------	------------

Apêndice A - Caracterização do Canal Telefônico.....	179
Apêndice B - Descrição dos Programas Simuladores.....	199
Referências Bibliográficas.....	206

Capítulo I - Introdução

O objetivo deste trabalho é apresentar as técnicas utilizadas na implementação de modems (MODulador/DEModulador) de alta velocidade (acima de 4800 bits/segundo). É dada grande ênfase aos algoritmos de equalização adaptativa e, em segundo plano, aos algoritmos de recuperação de relógio e portadora.

O trabalho teve início com uma extensa pesquisa bibliográfica que procurou reunir subsídios para um direcionamento mais exato do estudo. Os principais artigos foram selecionados e examinados, partindo-se em seguida para a realização das primeiras simulações, visando um melhor entendimento dos aspectos teóricos de maior interesse. Os sistemas inicialmente simulados foram os mais simples possíveis e levaram em conta apenas uma sequência binária transmitida através de um canal arbitrário. Entretanto, após uma análise criteriosa dos resultados obtidos, chegou-se à conclusão que para dar maior validade prática ao estudo, seria necessária a simulação de sistemas reais, envolvendo os processos de modulação/demodulação, aquisição de sincronismo, e adequação às padronizações do CCITT. Além disso houve a preocupação de modelar o canal de comunicação de acordo com as características realmente encontradas nas linhas telefônicas nas quais os equipamentos devem operar. Isto causou um significativo aumento na complexidade dos programas simuladores, mas gerou em contra partida uma grande aplicabilidade dos resultados.

Os recentes avanços da microeletrônica na fabricação de processadores rápidos e de baixo custo, são uma forte motivação para o trabalho, pois eles permitem a implementação de algoritmos como a

equalização cíclica, que há poucos anos eram inviáveis do ponto de vista econômico.

O estudo é de grande abrangência teórica. Apresenta-se material tutorial sobre teoria de comunicações, probabilidade e estatística, filtragem digital, transformada rápida de Fourier, etc, possibilitando assim um fácil entendimento de outros assuntos, como cancelamento de eco, rádio digital e algoritmos de processamento de sinais em geral.

O capítulo II é dedicado ao modelamento do sistema e à análise dos problemas que afetam a transmissão de dados em linhas telefônicas.

No capítulo III é apresentada de forma minuciosa a teoria de equalização adaptativa. O algoritmo do gradiente é derivado e são estabelecidas as condições de estabilidade e convergência em função dos parâmetros disponíveis no receptor. É proposta uma modificação no algoritmo do gradiente com a qual se obtém uma convergência mais rápida, a um custo computacional adicional relativamente baixo. É apresentada também a técnica da equalização cíclica, onde a sequência de treinamento é periódica, permitindo assim o cálculo dos coeficientes do equalizador no domínio da frequência através da transformada discreta de Fourier, o que acelera bastante a convergência inicial. Por fim, os problemas relativos à implementação com aritmética de precisão finita são discutidos e é mostrado que, com uma palavra de 12 bits, a degradação em relação à aritmética de precisão infinita é pequena.

O capítulo IV se ocupa de outros tipos de equalizador, como o equalizador com decisão realimentada, que é um sistema não linear, e o equalizador com espaçamento fracional, que é praticamente

insensível à fase de amostragem. São ainda discutidos dois algoritmos baseados no critério dos mínimos quadrados: o algoritmo rápido de Kalman, e o algoritmo em treliça (lattice algorithm).

No capítulo V são realizadas simulações que objetivam comprovar as análises teóricas dos capítulos anteriores, bem como estabelecer relações entre os desempenhos dos diversos algoritmos e equalizadores estudados.

Finalmente, no capítulo VI é detalhado o funcionamento de um sistema de transmissão de dados operando a 9600 bits/segundo, com ênfase nos algoritmos de recuperação de relógio e portadora, e em sua rápida aquisição de sincronismo, fator importante em redes multiponto.

Capítulo II - Modelamento do Sistema

II.1 - Introdução

Neste capítulo é apresentado um resumo da teoria básica de transmissão digital. Discutem-se os problemas das distorções introduzidas pelo canal telefônico e como é possível minimizá-las. Por fim, é apresentado um sistema de transmissão QAM (Quadrature Amplitude Modulation) e seu respectivo modelo equivalente em banda base.

II.2 - Interferência Intersimbólica

Um sistema simplificado para transmitir um sinal digital através de um canal telefônico pode ser modelado como na fig.II.1. O sinal transmitido é constituído por uma sequência de pulsos $p(t)$ modulados em amplitude pela sequência de símbolos $a(nT)$, que são gerados a uma taxa de $1/T$ símbolos/segundo. No receptor o sinal é

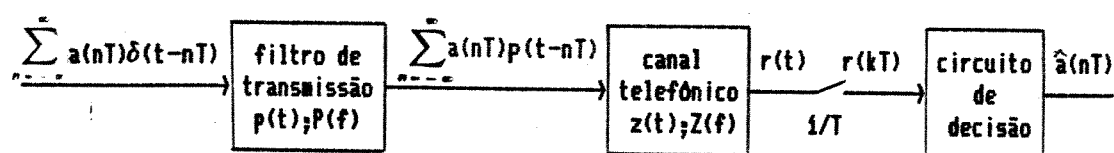


Fig.II.1 - Sistema simplificado de transmissão digital.

amostrado na mesma taxa e entregue ao circuito de decisão, que compara essa amostra com limiares pré-estabelecidos, e selecciona o símbolo recebido $\hat{a}(nT)$, que é uma estimativa de $a(nT)$. Um sistema ótimo é definido como aquele onde a probabilidade do símbolo recebido ser igual ao símbolo transmitido é máxima ou,

equivalentemente, a probabilidade de erro é mínima.

Pela fig.II.1 observa-se que o sinal recebido é dado por

$$r(t) = \sum_n a(nT)x(t-nT) \quad (II.1)$$

onde $a(nT)$ = sequência de símbolos transmitida,
 $p(t)$ = forma de onda dos pulsos transmitidos,
 $z(t)$ = resposta impulsiva do canal,
 $x(t) = p(t) * z(t)$
 $*$ denota o operador de convolução.

O sinal recebido é amostrado em instantes $t=kT$, resultando

$$r(kT) = \sum_n a(nT)x((k-n)T) \quad (II.2)$$

Normalizando a frequência de amostragem ($T=1$) e retirando da soma o termo $n=k$, a eq.(II.2) pode ser escrita como

$$r(k) = a(k)x(0) + \sum_{\substack{n \\ n \neq k}} a(n)x(k-n) \quad (II.3)$$

Na eq.(II.3), o primeiro termo é proporcional ao símbolo transmitido $a(k)$. O segundo termo é indesejável e idealmente seria nulo. A fig.II.2 ilustra a eq.(II.3) para o instante de amostragem (IA) $t = kT$. Observe que as caudas dos pulsos seguintes e anteriores ao IA de interesse interferem no valor de $r(k)$, daí a soma da eq.(II.3) ser conhecida como interferência intersimbólica (IIS). É fácil concluir através da fig.II.2 que, dependendo dos valores de $a(k+1)$, $a(k-1)$, etc, o sinal $r(k)$ pode mudar significativamente e causar uma decisão errada. Idealmente o segundo termo da eq.(II.3) deve ser nulo, ou seja, a resposta impulsiva $x(t)$ deve ser zero para

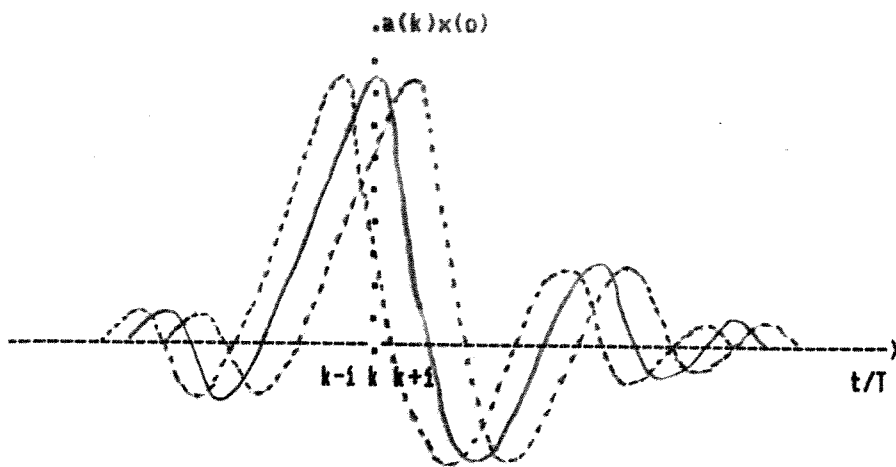


Fig.II.2 - Ilustração da eq.(II.3).

$t=kT$, para todo $k \neq 0$. Isto pode ser escrito como

$$x(t) \sum_n \delta(t-nT) = x(0) \delta(t) \quad (II.4)$$

onde $\delta(t)$ = impulso em $t=0$.

Tomando-se a transformada de Fourier da eq.(II.4), obtém-se

$$X(f) * \left(\frac{1}{T} \sum_n \delta(f-n/T) \right) = x(0)$$

ou
$$\sum_n X(f-n/T) = x(0)T \quad (II.5)$$

onde $X(f)$ = transformada de Fourier de $x(t)$.

A eq.(II.5) estabelece que a somatória do espectro $X(f)$ com suas réplicas deslocadas de n/T no eixo f , deve ser constante. A fig.II.3 ilustra o processo para uma característica $X(f)$ real. Observe ainda que a somatória da eq.(II.5) é uma função periódica com período $1/T$. Portanto, para que a somatória seja constante para todo f , basta ela ser constante no intervalo $-1/2T$ a $1/2T$. A partir deste fato pode-se concluir que a faixa mínima

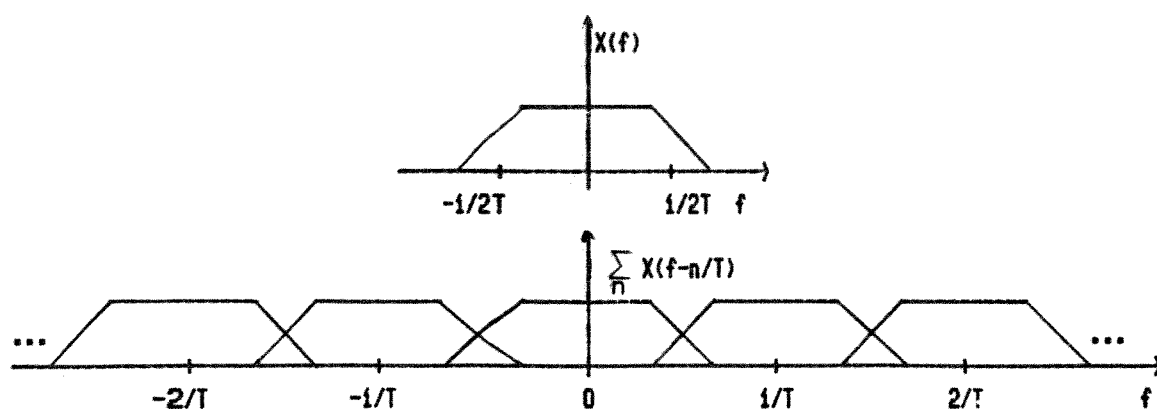


Fig.II.3 - Ilustração da eq.(II.5).

necessária para uma transmissão a $1/T$ símbolos/segundo é de $1/2T$ Hz.

As equações (II.4) e (II.5) são conhecidas como critério de Nyquist para eliminação da IIS nos IA's. O canal ideal de Nyquist é um filtro passa-baixas ideal com frequência de corte em $1/2T$ Hz e cuja resposta impulsiva é $\text{sinc}(t/T)$, onde $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x) / (\pi x)$. Retirando-se a restrição de que o canal seja de faixa mínima é fácil mostrar que existem infinitos canais que atendem ao critério de Nyquist. Uma classe desses canais é a do cosseno-levantado (com excesso de faixa α), dada pelas equações

$$X(f) = \begin{cases} T & ; 0 \leq |f| \leq (1-\alpha)/2T \\ \frac{T}{2} (1 + \cos(\pi T/\alpha (|f| - \frac{1-\alpha}{2T}))) & ; \frac{1-\alpha}{2T} < |f| < \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0 & ; |f| > (1+\alpha)/2T \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

e

$$x(t) = \text{sinc}(t/T) \frac{\cos(\alpha\pi t/T)}{1 - (2\alpha t/T)^2} \quad (\text{II.7})$$

onde $0 < \alpha < 1$.

Este importante canal será bastante utilizado nos capítulos seguintes.

II.3 - Modelo Equivalente em Banda Base.

No sistema da fig.II.1 o canal telefônico $Z(f)$ não satisfaz ao critério de Nyquist por duas razões. Em primeiro lugar porque não é um filtro passa-baixas e sim um passa faixa com frequências de corte em aproximadamente 300 e 3400 Hz. Em segundo lugar por apresentar, em alguns casos, fortes distorções de amplitude e fase na faixa de interesse. Portanto, a IIS da eq.(II.3) existirá e, dependendo da taxa de símbolos, a probabilidade de erro se tornará proibitivamente alta.

Estas dificuldades podem ser contornadas se o sistema da fig.II.1 for substituído pelo da fig.II.4. O ruído do canal $n_c(t)$ é suposto gaussiano e branco, com densidade espectral de potência representada por $N_c(f)$. No transmissor, o filtro $P(f)$ modela

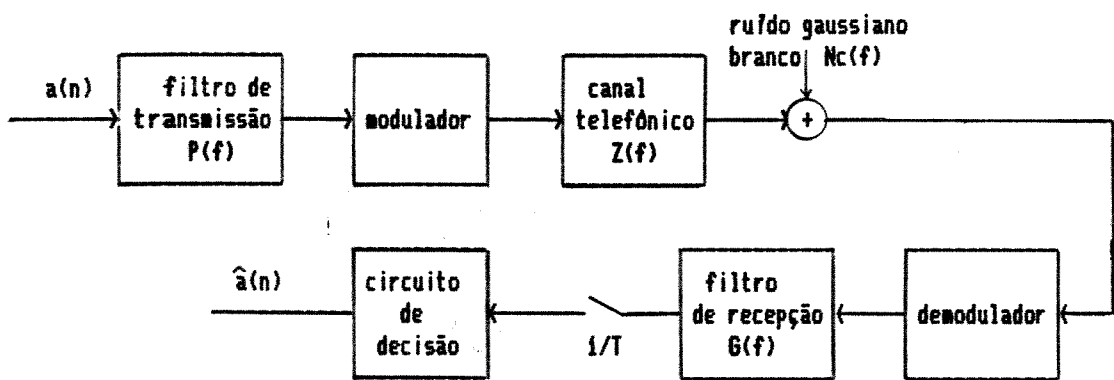


Fig.II.4 - Sistema completo de transmissão digital.

o espectro do sinal de entrada de acordo com alguma característica desejada (normalmente raiz quadrada do cosseno-levantado, como será mostrado adiante) e o modulador desloca o espectro do sinal para a banda passante do canal $Z(f)$. No receptor

aparecem o demodulador, que translada o sinal à sua faixa de frequências original, e o filtro de recepção, que deve ser projetado de modo a minimizar a probabilidade de erro.

A análise do sistema da fig.II.4 é dificultada pelos processos de modulação e demodulação. Para evitar esta complicação se faz necessária a utilização do modelo em banda base equivalente como mostrado na fig.II.5, onde $Q(f)$ engloba as características do canal telefônico $Z(f)$ e os processos de modulação e demodulação. Na seção II.4 $Q(f)$ será calculado explicitamente para um sistema QAM. O ruído $N_o(f)$ corresponde ao ruído $N_c(f)$ transladado para a origem por ação do demodulador.

Agora, de posse do sistema em banda base equivalente da fig.II.5, é preciso determinar os filtros de transmissão e recepção que minimizam a probabilidade de erro. Como é mostrado em /1/, há

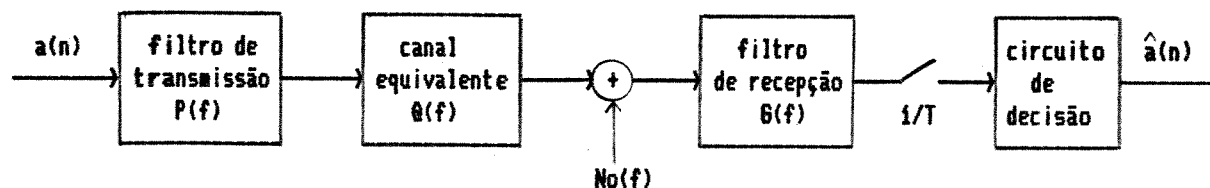


Fig.II.5 - Sistema em banda base equivalente.

vários critérios de otimização possíveis. Considerando-se que nos canais telefônicos a relação sinal/ruído é relativamente alta (tipicamente 24 dB /2/), é comum se impor a priori uma dada característica de Nyquist ao sistema, de modo a cancelar a IIS. Em seguida é efetuada uma otimização conjunta dos filtros de transmissão e recepção de forma a maximizar a relação sinal/ruído no instante de amostragem e, conseqüentemente, minimizar a

probabilidade de erro. Nesse caso resulta

$$P(f)Q(f)G(f) = X(f)$$

onde $X(f)$ = característica de Nyquist.

Os filtros ótimos são dados por /1/

$$|P(f)| = \frac{[N_0(f)]^{1/4}}{K} \left\{ \frac{|X(f)|}{|Q(f)|} \right\}^{1/2}$$

$$|G(f)| = \frac{K}{[N_0(f)]^{1/4}} \left\{ \frac{|X(f)|}{|Q(f)|} \right\}^{1/2}$$

$$\text{Arg}(P(f)) + \text{Arg}(Q(f)) + \text{Arg}(G(f)) = \text{Arg}(X(f)). \quad (\text{II.8})$$

Portanto, para um canal equivalente ideal e ruído branco ($Q(f)$ e $N_0(f)$ constantes), a amplitude da característica de Nyquist deve ser distribuída igualmente entre o transmissor e o receptor. Deste modo, a menos de uma constante, resulta

$$|P(f)| = |G(f)| = \sqrt{|X(f)|}$$

$$\text{Arg}(P(f)) + \text{Arg}(G(f)) = \text{Arg}(X(f)) \quad (\text{II.9})$$

Na prática o canal $Q(f)$ não é ideal e, no caso de linhas comutadas, ele pode variar a cada conexão telefônica. Uma solução de compromisso é supor que $Q(f)$ apresente, em média, uma característica próxima da ideal, e dimensionar os filtros $P(f)$ e $G(f)$ segundo a eq.(II.9). No caso do canal apresentar distorções de amplitude e/ou de fase, a IIS não será nula. Para atenuar a amplitude da IIS causada pelas distorções de $Q(f)$, utiliza-se, em cascata com $G(f)$,

um filtro digital $E(f)$, comumente denominado equalizador. Para que esse filtro seja eficaz diante das mudanças do canal (comutação de linha) ou de variações lentas das condições de transmissão, ele deve ser do tipo adaptativo, com os coeficientes (taps) sendo ajustados contínua e automaticamente.

A fig.II.6 mostra o modelo final do sistema obtido a partir das considerações tecidas acima.

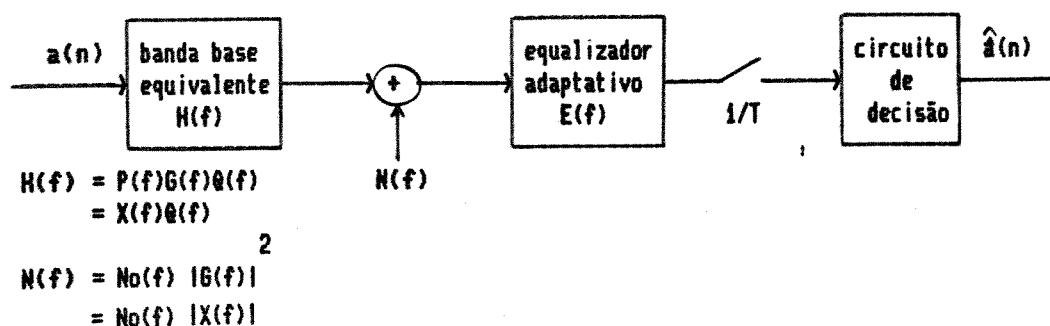


Fig.II.6 - Sistema equivalente final.

Nos capítulos seguintes serão estudadas estruturas e algoritmos utilizados na implementação do equalizador adaptativo $E(f)$.

II.4 - Sistema QAM

Como visto na seção anterior, um sistema adequado para a transmissão de dados num canal telefônico é como mostrado na fig.II.4. Nesta seção serão discutidos os tipos de modulação que podem ser empregados na implementação deste sistema.

A primeira idéia é a utilização da modulação em amplitude como mostrado na fig.II.7.

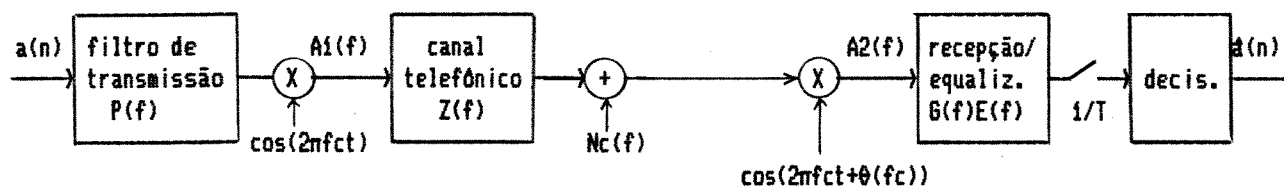


Fig.II.7 - Sistema AM.

Sejam $A_1(f)$ e $A_2(f)$ os espectros dos sinais nas saídas do modulador e do demodulador respectivamente. A fig.II.8 ilustra a relação entre $A_1(f)$ e $A_2(f)$ para um canal $Z(f)$ arbitrário.

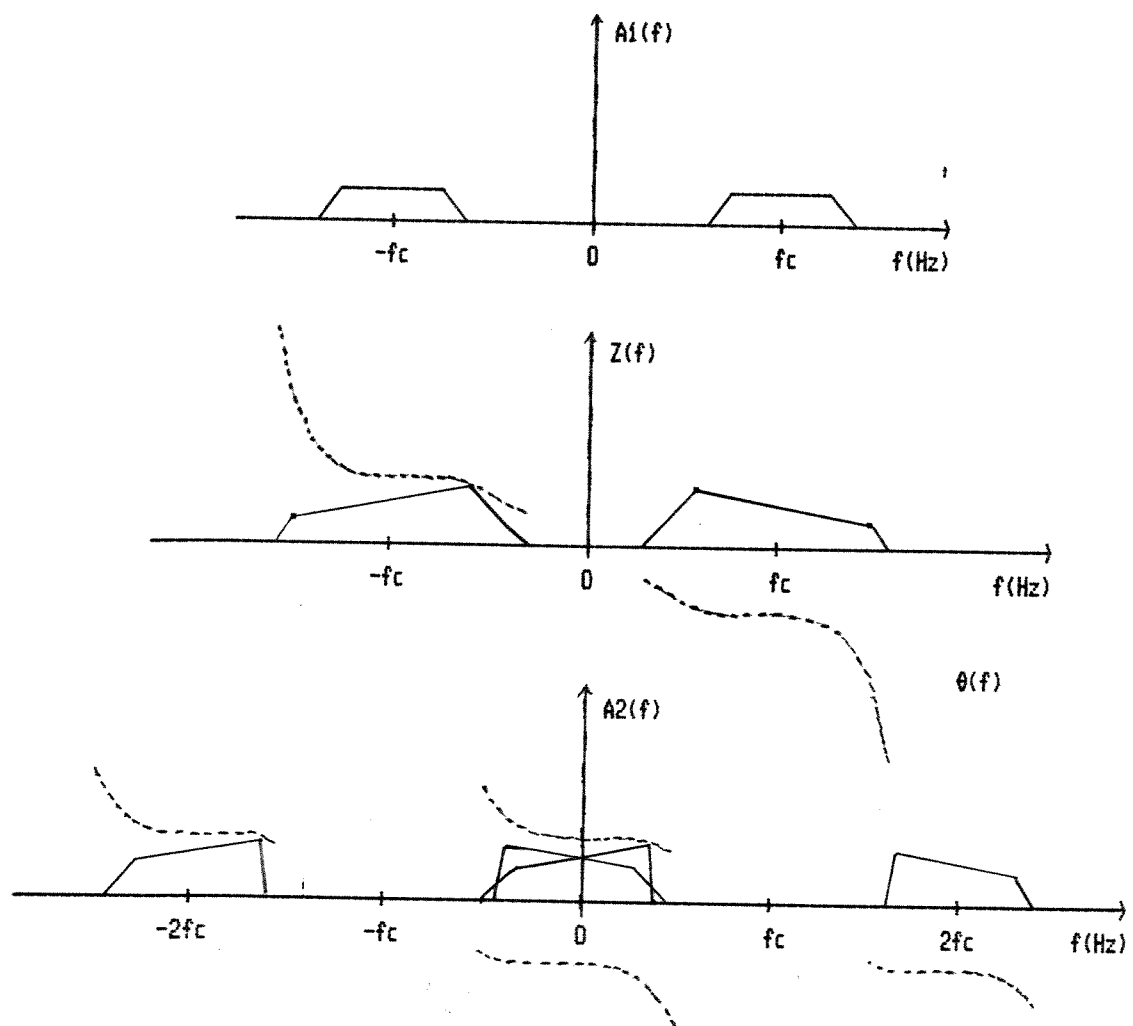


Fig.II.8 - Relação entre $A_1(f)$ e $A_2(f)$ para $Z(f)$ arbitrário.

$A_2(f)$ é dado por

$$\begin{aligned} A_2(f) &= 0,5 \left(Z'(f-f_c) e^{j\theta(f_c)} + Z'(f+f_c) e^{-j\theta(f_c)} \right) \\ &= 0,5 |Z'(f-f_c)| e^{j\theta_x(f)} + 0,5 |Z'(f+f_c)| e^{j\theta_y(f)} \end{aligned}$$

onde $Z'(f) = A_1(f)Z(f)$

$\theta(f)$ = Característica de fase de $Z'(f)$

$\theta_x(f) = \theta(f-f_c) + \theta(f_c)$

$\theta_y(f) = \theta(f+f_c) - \theta(f_c)$

f_c = frequência da portadora.

O módulo de $A_2(f)$ é dado por

$$|A_2(f)|^2 = X^2 + Y^2 + 2XY \cos(\theta_x(f) - \theta_y(f)) \quad (\text{II.10})$$

onde $X = 0,5 |Z'(f-f_c)|$

$Y = 0,5 |Z'(f+f_c)|$

Pela eq.(II.10) observa-se que, se a fase $\theta(f)$ for linear em torno da frequência da portadora f_c , isto é

$$\theta(f) = \begin{cases} \theta(f_c) - k(f-f_c) & \text{para } f > 0 \\ -\theta(f_c) - k(f+f_c) & \text{para } f < 0 \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

então, para $|f| < f_c$, $\theta_x(f) = \theta_y(f) = -kf$ e $|A_2(f)| = X+Y$, ou seja, os dois espectros de amplitude se somam em fase.

Nos canais telefônicos a condição de linearidade de fase nem sempre é satisfeita. Um parâmetro do canal que mede o quanto a fase se aproxima ou se afasta da linearidade é o atraso de grupo,

definido como

$$\tau_g(f) = - \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(f)}{df} \quad (\text{II.12})$$

Na região onde a fase é linear o atraso de grupo é constante. Entretanto, em alguns canais, o atraso de grupo pode apresentar variações elevadas, principalmente nos extremos da faixa. Neste caso pode ocorrer que, num determinado intervalo de frequências, os espectros se superponham em oposição de fase, causando um vale, ou mesmo um nulo espectral. Como consequência resulta uma forte IIS que dificilmente será compensada pelo equalizador.

Como foi visto na seção II.2, a largura de faixa de $A_1(f)$ é determinada pela taxa de símbolos. Assim, para uma taxa de 2400 bauds, por exemplo, a faixa mínima seria de 1200 Hz. Neste caso, algumas simulações realizadas com canais típicos (apêndice A), mostram que o nulo pode aparecer entre 800 e 1100 Hz, e portanto, dentro da faixa de interesse.

Qualitativamente, a superposição inerente ao processo de demodulação é a responsável pelo surgimento do nulo espectral. Assim, se esta superposição puder ser evitada, o problema estará resolvido. As modulações em banda lateral única (SSB) ou banda lateral residual (VSB) podem ser usadas /3/, uma vez que minimizam a superposição. Para altas taxas, entretanto, a modulação em amplitude com portadoras em quadratura (Quadrature Amplitude Modulation - QAM), é mais eficiente /4/ e é a recomendada pelo CCITT /5/. Neste caso o problema da superposição dos espectros é evitado empregando-se uma demodulação complexa, gerando em

correspondência uma banda base equivalente complexa.

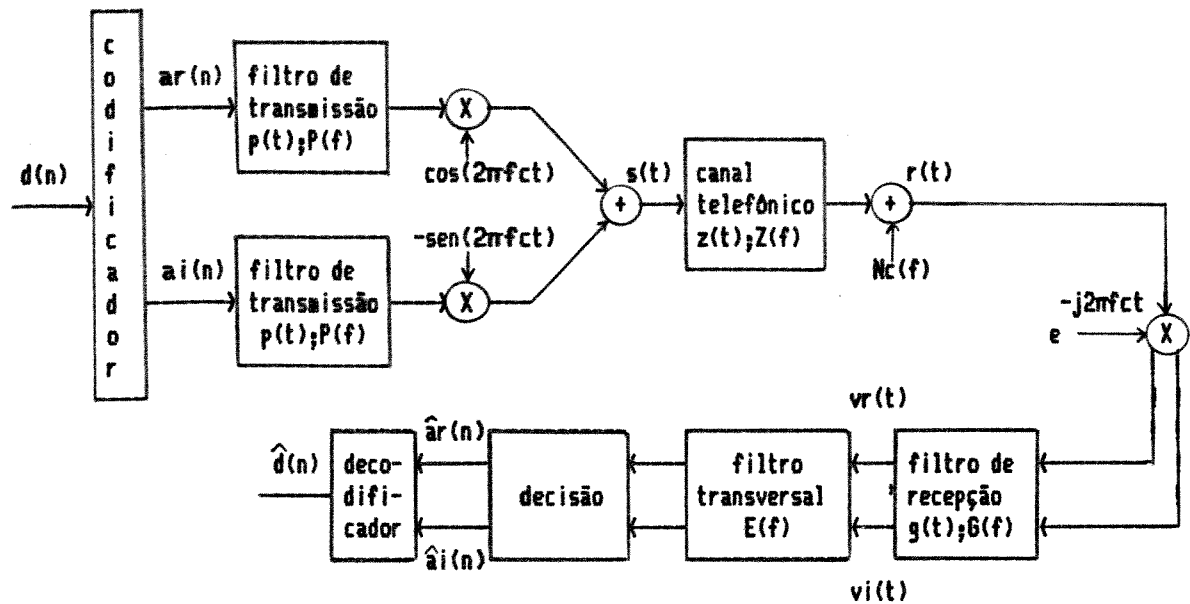


Fig.II.9 - Sistema QAM.

Um sistema QAM típico é mostrado na fig.II.9. Neste sistema, a sequência binária $d(n)$ passa pelo codificador, onde é transformada em dois sinais $a_r(n)$ e $a_i(n)$, que representam as coordenadas (parte real e imaginária) do símbolo a ser transmitido. No receptor, o decodificador realiza o processo inverso e recupera a sequência original. Os outros blocos da fig.II.9 já foram analisados na seção II.3, enquanto o codificador e o decodificador serão descritos posteriormente.

II.4.1. - Banda Base Equivalente

O objetivo aqui é determinar a banda base equivalente $H(f)$ (ver fig.II.6) para o sistema QAM da fig.II.9.

Na fig.II.9 o sinal de linha $s(t)$ é dado por

$$s(t) = \text{Re} \left[\sum_n a(n) p(t-nT) e^{j2\pi f_c t} \right] \quad (\text{II.13})$$

onde $a(n) = a_r(n) + j a_i(n)$ = sequência complexa de transmissão
 $p(t)$ = resposta impulsiva do filtro de transmissão.

Na entrada do receptor tem-se

$$r(t) = s(t) * z(t) + n_c(t) \quad (\text{II.14})$$

onde $z(t)$ = resposta impulsiva do canal telefônico
 $n_c(t)$ = ruído gaussiano branco

O sinal $v(t)$, após a demodulação, é dado por

$$v(t) = g(t) * \left[r(t) e^{-j2\pi f_c t} \right] \quad (\text{II.15})$$

onde $g(t)$ = resposta impulsiva do filtro de recepção.

Tomando-se a transformada de Fourier da eq.(II.15), obtém-se

$$\begin{aligned} V(f) &= G(f)R(f+f_c) \\ &= G(f).S(f+f_c).Z(f+f_c) + G(f).N_c(f+f_c) \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

Desprezando-se o efeito do ruído, a eq.(II.16) pode ser mais facilmente interpretada graficamente, como mostrado na fig.II.10. Observe que $V(f)$ não é simétrico, demonstrando assim o caráter complexo da banda base equivalente. Admitindo-se que $G(f)$ remove completamente as componentes centradas em $-2f_c$ e levando-se em conta as equações (II.13), (II.15) e a fig.II.10, pode-se concluir que a

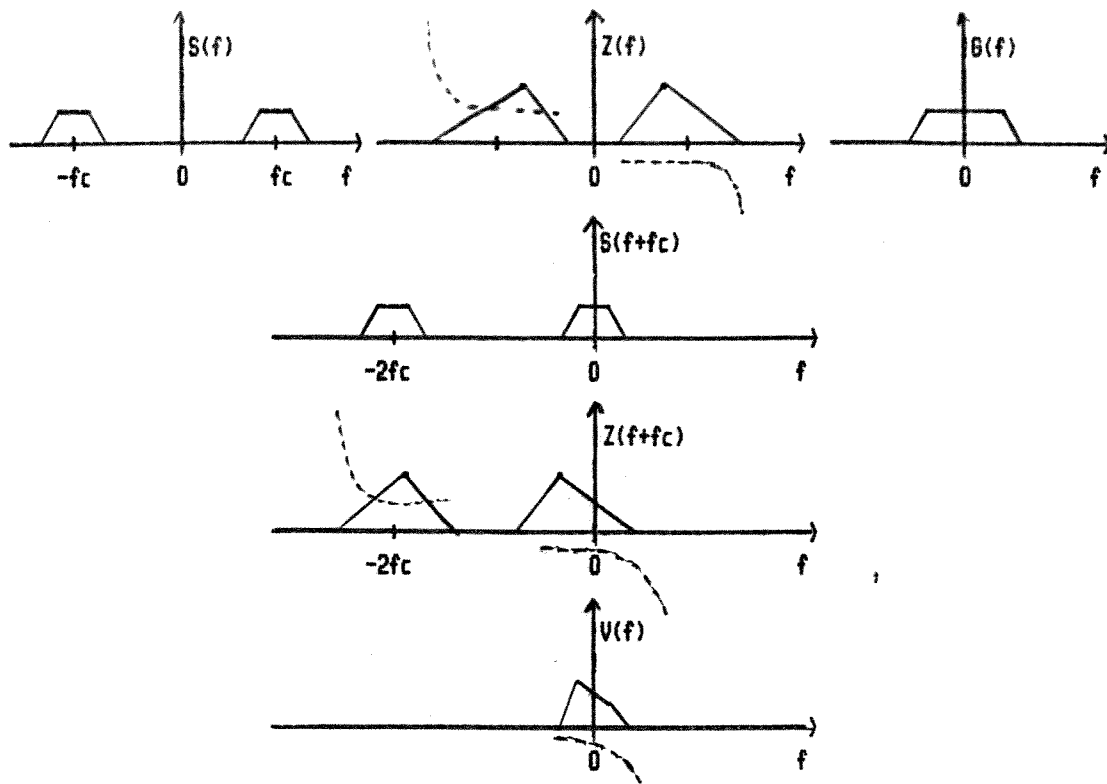


Fig.II.10 - Ilustração da eq.(II.16)

banda base equivalente é dada, a menos de uma constante, por

$$h(t) = p(t) * q(t) * g(t) \quad (II.17)$$

onde $q(t) = z(t) e^{-j2\pi fct}$ (II.18)

A eq.(II.18) estabelece que $q(t)$ é a resposta impulsiva do espectro de $Z(f)$ transladado de $-fc$. Em algumas publicações /4/ $q(t)$ é definido através da equação

$$z(t) = 2\text{Re} \left[q(t) e^{j2\pi fct} \right] \quad (II.19)$$

ou, de maneira equivalente,

$$q(t) = 0,5 (z(t) + j z_h(t)) e^{-j2\pi fct} \quad (II.20)$$

onde $zh(t)$ = transformada de Hilbert de $z(t)$.

Neste caso, $q(t)$ é a resposta impulsiva da parte positiva ($f > 0$) do espectro de $Z(f)$ transladada de $-f_c$. Desde que $G(f)$ remova totalmente as componentes centradas em $2f_c$, as equações (II.18) e (II.20) podem ser empregadas indistintamente, sendo que a expressão (II.18) é mais simples de ser simulada.

Com $h(t)$ dado pela eq.(II.17), pode-se escrever $v(t)$ como

$$v(t) = \sum_n a(n)h(t-nT) + n(t) \quad (II.21)$$

onde $a(n) = a_r(n) + j a_i(n) \quad (II.22)$

$$h(t) = h_r(t) + j h_i(t) \quad (II.23)$$

$$\begin{aligned} n(t) &= n_r(t) + j n_i(t) \\ &= (n_c(t)e^{-j2\pi f_c t}) * g(t) \end{aligned} \quad (II.24)$$

A fig.II.11 representa o modelo equivalente em banda base para o sistema QAM.

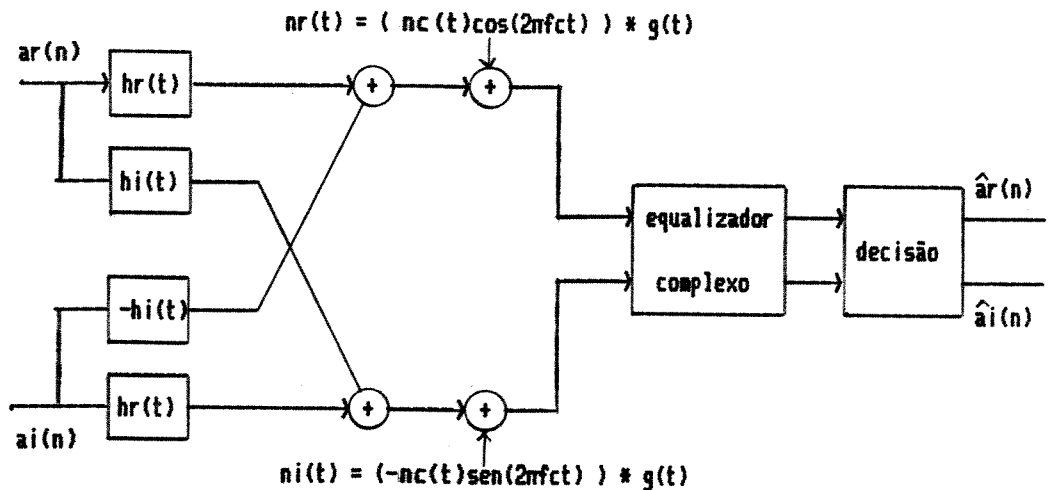


Fig.II.11 - Sistema Equivalente em Banda Base.

O ponto importante a ser observado aqui é que, como o demodulador atua somente nas frequências positivas do sinal de

entrada, não haverá superposição de espectros e, portanto, não ocorrerão os nulos espectrais indesejáveis.

II.4.2. - Dimensionamento do Sistema

O sistema escolhido para as simulações dos próximos capítulos opera a 9600 bits/s, com taxa de símbolos de 2400 baud, conforme a recomendação V.29 do CCITT /5/. Neste sistema a sequência binária de transmissão é subdividida em grupos de quatro bits consecutivos denominados quadbits. A cada quadbit corresponde um ponto na constelação de símbolos que possui portanto 16 pontos, distribuídos conforme mostrado na fig.II.12.

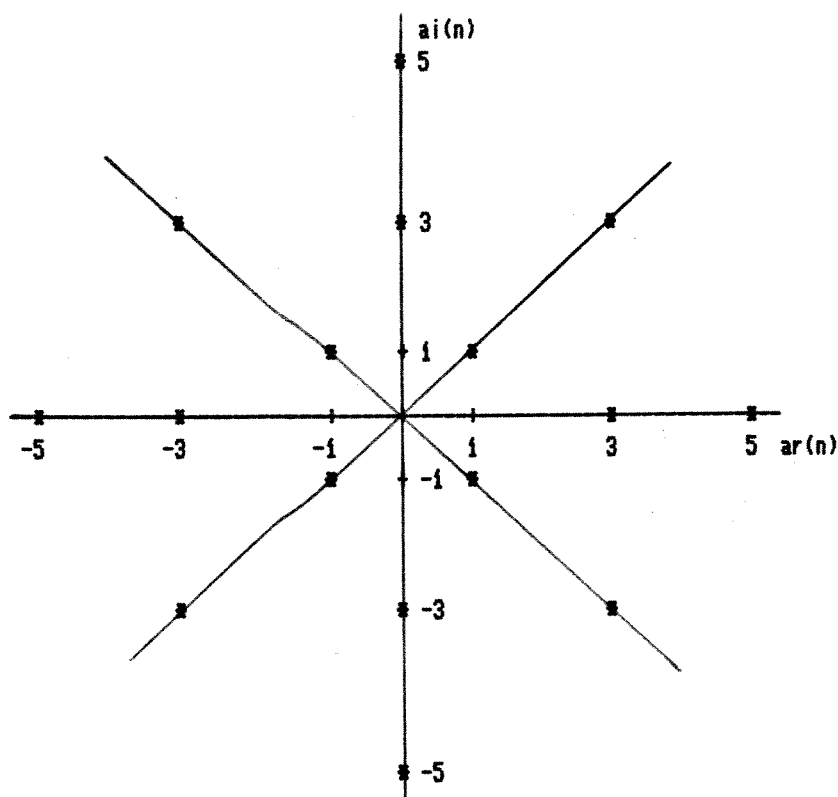


Fig.II.12 - Constelação de símbolos V.29.

Um parâmetro importante relacionado à constelação é a sua variância, que é definida por

$$S_a = \sum_i^2 M(i)P(i) \quad (II.25)$$

onde $M(i)$ = módulo do i-ésimo ponto

$P(i)$ = probabilidade de ocorrência do i-ésimo ponto.

Levando-se em conta a fig.II.12 e o fato de que os 16 pontos são equiprováveis, a variância pode ser calculada como

$$\begin{aligned} S_a &= 4 \left[(3)^2 + (5)^2 + (\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 \right] 1/16 \\ &= 13,5 \end{aligned} \quad (II.26)$$

Este valor é importante para o cálculo da variância do ruído que deve ser gerado para a obtenção de uma determinada relação sinal/ruído.

Os filtros de transmissão e recepção foram dimensionados de modo a atender a eq.(II.9), isto é

$$|P(f)| = |G(f)| = \sqrt{|X(f)|} \quad (II.27)$$

onde $X(f)$ = cosseno-levantado com excesso de faixa $\alpha = 0,12$.

Assim, pela eq.(II.17), tem-se

$$\begin{aligned} H(f) &= P(f)Q(f)G(f) \\ &= X(f)Q(f) \end{aligned}$$

ou $h(t) = h_r(t) + j h_i(t)$

$$= x(t) * q(t)$$

$$= x(t) * (q_r(t) + j q_i(t)). \quad (II.28)$$

No apêndice A são apresentados os cálculos para a obtenção de $h(t)$, bem como uma lista com as características de todos os canais usados nas simulações.

II.5 - Conclusão

A interferência intersimbólica causada pelos canais telefônicos é a principal responsável pela degradação no desempenho (probabilidade de erro) nos sistemas de comunicação digital. O estudo deste problema leva a um sistema que possui como componente mais importante um equalizador adaptativo, cujos coeficientes devem ser ajustados de modo a minimizar funções de custo como a probabilidade de erro ou a distorção quadrática média.

A análise de sistemas modulados lineares é bastante facilitada pelo uso do conceito de banda base equivalente. Neste capítulo foi calculado o canal equivalente para um sistema QAM operando na presença de ruído. Estes resultados serão utilizados nos capítulos seguintes, tanto no estudo teórico do equalizador adaptativo, quanto nas simulações.

Capítulo III - Equalização Adaptativa

III.1 - Introdução

Este capítulo é dedicado ao estudo do equalizador transversal e aos problemas referentes à sua implementação prática. São analisados dois critérios de otimização dos coeficientes, um baseado na distorção de pico e outro no erro quadrático médio. É mostrado que este último é mais adequado para a comunicação em canais telefônicos e, por isto, a questão da convergência é tratada com alguma profundidade. São vistos também alguns métodos para a aceleração da convergência inicial, como o algoritmo do gradiente modificado e a equalização cíclica, que utiliza uma sequência periódica na fase de treinamento. Finalmente são discutidos os problemas relativos à implementação digital, como os erros de quantização e arredondamento.

III.2 - Equalizador Transversal

O filtro linear mais comumente usado na transmissão de dados é o equalizador transversal. A fig.III.1 mostra a estrutura deste filtro no ambiente QAM, onde todos os sinais são complexos. O sinal equalizado $y(n)$ é obtido através da soma ponderada das $2N+1$ amostras do sinal recebido, onde os pesos são os coeficientes (taps) do equalizador. Estes taps são atualizados periodicamente pelo algoritmo de controle, que opera baseado no sinal de erro entre o sinal equalizado e o sinal decidido. Há no entanto um problema: no início da comunicação as decisões são em geral erradas, gerando desse modo um sinal de erro inadequado. Para evitar isto é necessário que haja um período de treinamento no qual uma sequência

previamente determinada seja transmitida. No receptor, um gerador local fornece esta mesma sequência, em sincronismo com o transmissor, para a formação do sinal de erro, garantindo assim uma operação correta do algoritmo de controle. Portanto, no início da comunicação, a chave da fig.III.1 está na posição 1. Terminado o treinamento, ela passa para posição 2, que corresponde à sequência de dados propriamente dita.

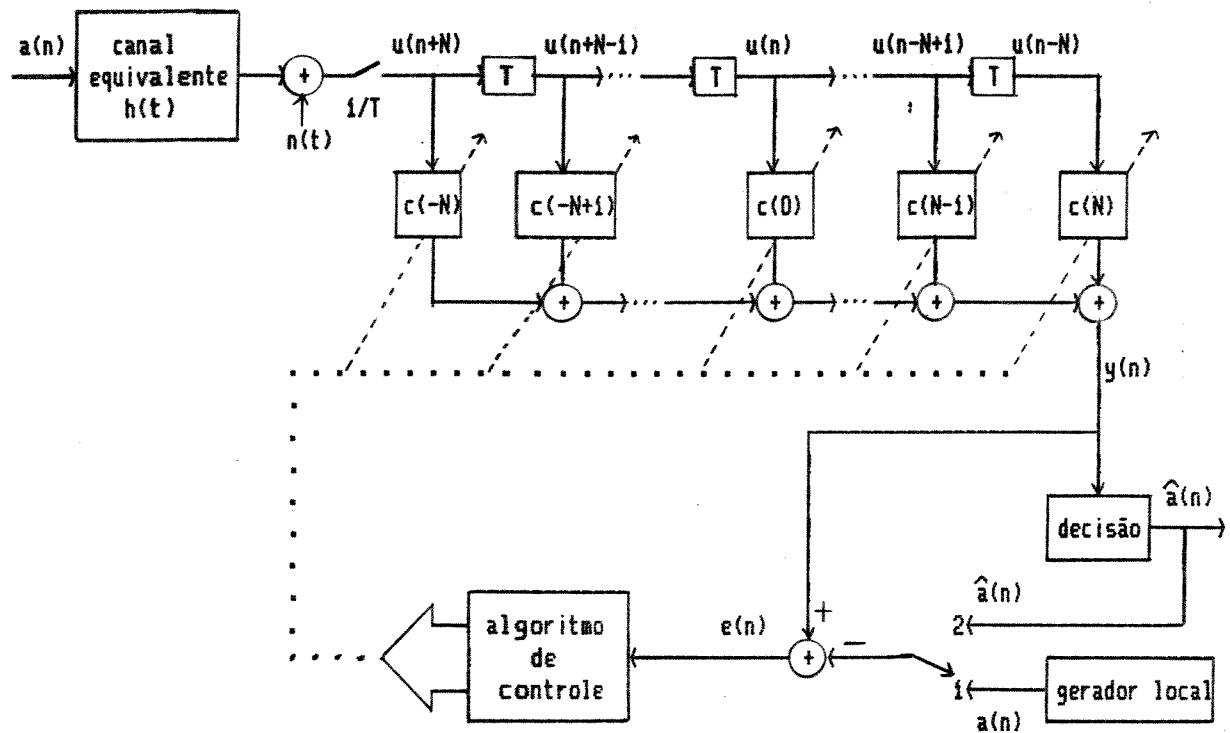


Fig.III.1 - Equalizador Transversal

Pela fig.III.1 tem-se

$$y(n) = \sum_{j=-N}^N c(j)u(n-j) \quad (\text{III.1})$$

onde $u(n) = \sum_j a(j)h(n-j) + n(n) \quad (\text{III.2})$

$c(n)$ = resposta impulsiva do filtro transversal

$n(n)$ = ruído gaussiano complexo com amostras independentes

da sequência de símbolos (pela fig.II.9 e pela eq.(II.24), considerando-se $N_c(f)=N_0$ e $|G(f)|=\sqrt{|X(f)|}$, então as amostras de $n(t)$ são independentes).

O erro entre o sinal equalizado e o sinal decidido é dado por

$$e(n) = y(n) - a(n) \quad (\text{III.3})$$

Na expressão acima admite-se que a sequência recebida é correta. Esta hipótese está apoiada no procedimento de treinamento descrito anteriormente e no fato de que, após este período, o algoritmo de controle já tenha atuado de forma a garantir decisões corretas na maioria das vezes.

Na análise que se segue é conveniente a utilização da notação matricial. O vetor de coeficientes no instante nT é definido por

$$c'(n) = [c(-N), c(-N+1), \dots, c(0), \dots, c(N)] \quad (\text{III.4a})$$

onde $[]'$ denota operação de transposição.

O vetor de entrada é

$$u'(n) = [u(n+N), u(n+N-1), \dots, u(n), \dots, u(n-N)] \quad (\text{III.4b})$$

Com estas definições as equações (III.1) e (III.3) podem ser escritas como

$$\begin{aligned} y(n) &= c'(n)u(n) \\ &= u'(n)c(n) \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

$$\begin{aligned} e(n) &= y(n) - a(n) \\ &= u'(n)c(n) - a(n) \end{aligned} \quad (\text{III.6a})$$

$$\text{assim} \quad e^*(n) = c^*(n)u^*(n) - a^*(n) \quad (\text{III.6b})$$

onde $*$ = complexo conjugado

$()^* = ()^T$ = transposição hermitiana

As equações (III.5) e (III.6) definem, para cada instante n , a saída $y(n)$ e o erro $e(n)$ em função do sinal de entrada e dos taps do equalizador. O algoritmo de controle, que atua diretamente nos taps, deve modificar $y(n)$ de tal forma que as decisões sejam corretas. As próximas seções são dedicadas ao estudo de diversos algoritmos e de suas propriedades.

III.3 - Critérios de Otimização

Como foi dito no cap.II, um sistema ótimo é aquele onde a probabilidade de erro (P_e) é mínima. Portanto, seria desejável que o algoritmo de controle pudesse gerar um conjunto de taps que minimizasse a P_e . Entretanto, a relação entre a P_e e os coeficientes é uma função não linear, impossibilitando a obtenção de uma expressão de atualização dos taps em função de medidas de P_e .

Para contornar esta dificuldade dois outros critérios têm sido usados mais frequentemente. Um deles consiste na minimização da distorção de pico, definida por

$$D = \frac{1}{x(0)} \sum_{n \neq 0} |x(n)| \quad (\text{III.7})$$

onde $x(n) = h(n) * c(n)$

Pode-se mostrar /1/ que se a distorção de pico é inicialmente menor que 1, os taps devem ser escolhidos de tal forma que $x(n)$ seja nulo para o maior número de pontos possível. Como existem apenas $2N+1$

taps, será possível forçar apenas $2N$ zeros. Observe que nada pode ser dito sobre o comportamento de $x(n)$ para $|n| > N$. De fato, em alguns casos, estas amostras podem causar erros iguais ou maiores que aqueles causados na ausência da equalização. Como é mostrado em /6/, o algoritmo de atualização dos taps é dado por

$$c(n) = c(n-1) + \mu e(n) a^v(n-1) \quad (\text{III.8})$$

onde μ = fator de escala que controla a convergência do algoritmo

$$a^v(n) = [a(n-M), a(n-M+1), \dots, a(n-1)]$$

$$M = 2N + 1 = \text{número de taps}$$

Este algoritmo é conhecido como "zero-forcing" e sua convergência é garantida apenas se a distorção de pico inicial for menor que um /6/. Em geral, nos canais telefônicos, esta condição não é atendida, de maneira que o algoritmo não tem sua convergência assegurada.

O outro critério consiste na minimização do erro quadrático médio (Mean-Square-Error - MSE) definido como

$$J(c) = E [e(n)e^v(n)] \quad (\text{III.9})$$

onde $E []$ = média estatística.

III.4 - Coeficientes Ótimos

O desenvolvimento da eq.(III.9) para explicitar a relação entre o vetor de coeficientes $c(n)$ e o MSE é apresentado em /7/ para o caso geral de filtragem adaptativa. Este desenvolvimento é repetido aqui no contexto da equalização adaptativa na transmissão de dados.

A substituição da eq.(III.6) na eq.(III.9) resulta

$$J(c) = E \left[(c''(n)u^v(n) - a^v(n)) (u'(n)c(n) - a(n)) \right] \quad (III.10)$$

Expandindo-se o lado direito da eq.(III.10) e considerando o vetor $c(n)$ fixo (ausência de adaptação), pode-se escrever

$$J(c) = c''(n)E[u^v(n)u'(n)]c(n) - c''(n)E[u^v(n)a(n)] - E[a^v(n)u'(n)]c(n) + E[a(n)a^v(n)] \quad (III.11)$$

Assumindo-se que a sequência de símbolos $a(n)$ tem média zero e é composta por elementos incorrelatos, a eq.(III.11) pode ser escrita como

$$J(c) = c''(n)Rc(n) - c''(n)p - p''c(n) + S_a \quad (III.12)$$

onde 1 - A variância da sequência de símbolos é

$$S_a = E[a(n)a^v(n)] \quad (III.13)$$

2 - p é um vetor $M \times 1$ representando a correlação cruzada entre o vetor de entrada $u(n)$ e a sequência de símbolos $a(n)$. Assim

$$p = E[u^v(n)a(n)] \quad (III.14)$$

Pela eq.(III.2)

$$u(n) = \sum_j a(j)h(n-j) + n(n) \quad (III.15)$$

logo, cada elemento de p é dado por

$$E[u^v(n)a(n)] = \sum_j h^v(n-j)E[a^v(j)a(n)] + E[n(n)a(n)] \quad (III.16)$$

mas

$$E[a^*(j)a(n)] = \begin{cases} S_a & \text{se } j = n \\ 0 & \text{se } j \neq n \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

e $E[n(n)a(n)] = 0$ pois $a(j)$ e $n(j)$ são independentes.

Assim

$$p' = S_a [h^*(N), \dots, h^*(0), \dots, h^*(-N)] \quad (\text{III.18})$$

Observe que

$$E[a^*(n)u'(n)] = \left[E[u^*(n)a(n)] \right]^* = p'' \quad (\text{III.19})$$

3 - R ($M \times M$) é a matriz de correlação do canal definida por

$$R = E[u^*(n)u'(n)] = \begin{bmatrix} r(-N, -N) & \dots & r(-N, N) \\ \vdots & & \vdots \\ r(N, -N) & \dots & r(N, N) \end{bmatrix} \quad (\text{III.20})$$

onde

$$r(i, m) = E[u^*(n-i)u(n-m)], \text{ para } i, m = -N, \dots, N$$

Pela eq. (III.2) tem-se

$$\begin{aligned} r(i, m) &= E\left[\left(\sum_j a^*(j)h^*(n-i-j) + n^*(n-i)\right)\left(\sum_k a(k)h(n-m-k) + n(n-m)\right)\right] \\ &= \sum_j \sum_k h^*(n-i-j)h(n-m-k)E[a^*(j)a(k)] + E[n^*(n-i)n(n-m)] \\ &= S_a \sum_j h^*(n-i-j)h(n-m-j) + S_n \delta(i-m) \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

$$\text{onde } S_n = E[n(k)n^*(k)] \quad (\text{III.22})$$

Fazendo $k = n - j$ e pondo S_a em evidência, resulta

$$r(i, m) = S_a \left[\sum_k h^*(k-i) h(k-m) + NSR \delta(i-m) \right] \quad (\text{III.23})$$

onde $NSR = S_n / S_a$

Observe que, pela eq.(III.21)

$$r(m, i) = r^*(i, m) \quad (\text{III.24})$$

isto é, a matriz R é hermitiana.

Pela eq.(III.12) nota-se que o MSE $J(c)$ é uma função quadrática do vetor de coeficientes $c(n)$. Para observar mais claramente este ponto, suponha que o equalizador da fig.III.1 seja real e composto por 2 taps. Assim

$$c'(n) = [c(1) \ c(2)]$$

Então, pela eq.(III.12), tem-se

$$J(c) = [c(1) \ c(2)] \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ r_2 & r_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c(1) \\ c(2) \end{bmatrix} - [c(1) \ c(2)] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c(1) \\ c(2) \end{bmatrix} + S_a$$

$$\Rightarrow J(c(1)) = A c(1)^2 + B c(1) + D \quad (\text{III.25})$$

onde $A = r_1$

$$B = 2(c(2) r_2) - 2p_1$$

$$D = c(2)^2 r_1 - 2 c(2) p_2 + S_a$$

A eq.(III.25) expressa o MSE em função do tap $c(1)$ supondo $c(2)$ constante. A fig.III.2 mostra o comportamento de $J(c(1))$.

Evidentemente, a eq.(III.25) possui apenas um mínimo correspondendo a $c(1) = c(1)_{ot}$. Este raciocínio pode ser estendido para M taps e, nesse caso, a função $J(c)$ da eq.(III.12) será uma superfície convexa no espaço de dimensão M, tendo portanto, um único ponto de mínimo.

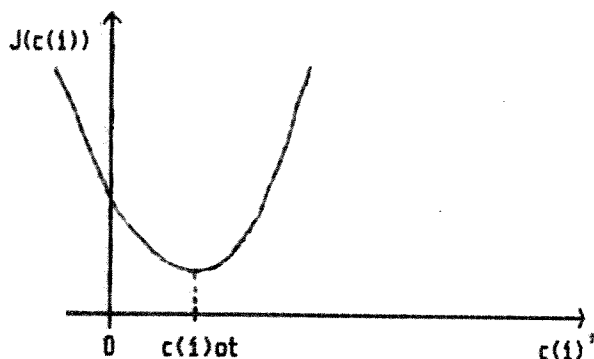


Fig.III.2- Comportamento do MSE em função de um tap.

Neste ponto o vetor de coeficientes $c(n)$ é ótimo e é denotado por $\hat{c}$.

Para determinar o vetor $\hat{c}$ basta diferenciar a eq.(III.12) com relação a $c(n)$ e igualar o resultado a zero. Antes disto, porém, é necessário definir a operação de diferenciação de um escalar com respeito a um vetor com componentes complexas [7]. Assim, seja g um escalar que é função de um vetor complexo c de dimensão $M \times 1$. Então

$$\frac{dg}{dc} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial a(-N)} + j \frac{\partial g}{\partial b(-N)} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial a(0)} + j \frac{\partial g}{\partial b(0)} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial a(N)} + j \frac{\partial g}{\partial b(N)} \end{bmatrix} \quad (III.26)$$

onde os elementos do vetor c são dados por

$$c(k) = a(k) + jb(k) \quad k = -N, \dots, 0, \dots, N$$

De posse da definição (III.26), a diferenciação de cada termo da eq.(III.12) resulta

$$\frac{d}{dc(n)} [c''(n)Rc(n)] = 2Rc(n)$$

$$\frac{d}{dc(n)} [c''(n)p] = 2p$$

$$\frac{d}{dc(n)} [p''c(n)] = 0$$

logo

$$\frac{dJ(c)}{dc(n)} = 2Rc(n) - 2p \quad (\text{III.27})$$

Portanto, o vetor de coeficientes ótimo $\dot{c}$ será solução da equação

$$2R\dot{c} - 2p = 0$$

$$\text{ou} \quad R\dot{c} = p \quad (\text{III.28})$$

A eq.(III.28) representa um sistema linear com M equações e M incógnitas e é conhecida como equação de Wiener-Hopf. A solução $\dot{c}$ pode ser encontrada multiplicando-se ambos os lados da eq.(III.28) pela matriz inversa de R . Então

$$\dot{c} = R^{-1} p \quad (\text{III.29})$$

O valor do MSE mínimo ($J_{\min}$) pode agora ser obtido substituindo-se o vetor $\dot{c}$, dado pela eq.(III.29), na eq.(III.12). O resultado é

$$J_{\min} = \dot{\mathbf{c}}^T \mathbf{R} \dot{\mathbf{c}} - \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{c}} - \dot{\mathbf{c}}^T \mathbf{p} + S_a$$

mas $\dot{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{c}} = \mathbf{p}$

assim tem-se

$$J_{\min} = S_a - \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{c}} \quad (\text{III.30})$$

ou $J_{\min} = S_a - \mathbf{p}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p} \quad (\text{III.31})$

Concluindo esta seção, pode-se dizer que a minimização do MSE conduz a um sistema de equações lineares. Portanto, o equalizador é um circuito que resolve este sistema e mantém o receptor operando numa condição de erro quadrático médio mínimo.

III.5 - Análise no Domínio da Frequência

A eq.(III.28) estabelece os coeficientes ótimos que minimizam o MSE para um dado canal cujas características estão embutidas nas matrizes $\mathbf{R}$ e $\mathbf{p}$. Entretanto, o significado físico da eq.(III.28) fica mais claro no domínio da frequência. Para tal basta expandir a eq.(III.28) e tomar a transformada Z de ambos os lados. Assim, supondo que o equalizador é de comprimento infinito, isto é, possui infinitos taps, tem-se

$$\sum_i \sum_m \left[\sum_k h^*(k-i) h(k-m) + \text{NSR} \delta(i-m) \right] c(m) Z^{-i} = \sum_i h^*(-i) Z^{-i}$$

Invertendo-se a ordem das somatórias em m e i , e reconhecendo o termo do lado direito como $H^*(1/Z^*)$, resulta

$$\sum_m \left[\sum_i \sum_k h^*(k-i) h(k-m) Z^{-i} \right] c(m) +$$

$$\text{NSR} \sum_i \sum_m c(m) \delta(i-m) Z^{-i} = H^*(1/Z^*)$$

Após algumas mudanças de variável chega-se facilmente a

$$H^*(1/Z^*) H(Z) C(Z) + \text{NSR} C(Z) = H^*(1/Z^*)$$

ou
$$C(Z) = \frac{H^*(1/Z^*)}{H(Z) H^*(1/Z^*) + \text{NSR}} \quad (\text{III.32})$$

Fazendo $Z = e^{j\omega T}$, obtém-se

$$C(e^{j\omega T}) = \frac{H^*(e^{j\omega T})}{H(e^{j\omega T}) H^*(e^{j\omega T}) + \text{NSR}} \quad (\text{III.33})$$

onde
$$H(e^{j\omega T}) = 1/T \sum_n H(\omega + 2n\pi/T)$$

Pela eq.(III.33) pode-se observar que, na ausência de ruído (NSR=0), a resposta em frequência do equalizador com infinitos taps é

$$C(e^{j\omega T}) = 1 / H(e^{j\omega T}) \quad (\text{III.34})$$

Isto é, o equalizador modela a resposta inversa do canal equivalente. Desta forma, a característica espectral na saída do equalizador é plana e a IIS é totalmente eliminada, de modo que o receptor é ótimo no sentido de mínima probabilidade de erro ($P_e=0$). Já quando o ruído não é nulo, o equalizador não é o filtro ótimo (ver seção IV.3.2), devido à superposição de espectros na faixa de transição.

Outro ponto ilustrativo é a expressão para J_{min} em função da resposta em frequência do canal equivalente. Este desenvolvimento é realizado a seguir.

Pela eq.(III.30) tem-se

$$\begin{aligned} J_{min} &= S_a - p''c \\ &= S_a \left(1 - \sum_i c(i)h(-i) \right) \end{aligned} \quad (III.35)$$

Definindo

$$\begin{aligned} b(j) &= c(j) * h(j) \\ &= \sum_i c(i)h(j-i) \end{aligned} \quad (III.36)$$

então, a eq.(III.35) pode ser escrita como

$$J_{min} = S_a \left(1 - b(0) \right) \quad (III.37)$$

Tomando-se a transformada Z da eq.(III.36), para $Z = e^{j\omega T}$, resulta

$$B(e^{j\omega T}) = C(e^{j\omega T})H(e^{j\omega T}) \quad (III.38)$$

Substituindo-se a eq.(III.33) na eq.(III.38), obtém-se

$$B(e^{j\omega T}) = \frac{X_1(e^{j\omega T})}{X_1(e^{j\omega T}) + NSR} \quad (III.39)$$

$$\text{onde } X_1(e^{j\omega T}) = |H(e^{j\omega T})|^2 \quad (III.40)$$

A sequência $b(n)$ pode ser escrita como /8/

$$b(n) = T/2\pi \int_{-\pi/T}^{\pi/T} B(e^{j\omega T}) e^{j\omega nT} d\omega \quad (III.41)$$

Então

$$b(D) = T/2\pi \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left[X_1(e^{j\omega T}) / [X_1(e^{j\omega T}) + \text{NSR}] \right] d\omega \quad (\text{III.42})$$

Logo

$$J_{\min} = S_a \left[T/2\pi \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{\text{NSR}}{|H(e^{j\omega T})|^2 + \text{NSR}} d\omega \right] \quad (\text{III.43})$$

Observe pela eq.(III.43) que, se houver alguma faixa de frequências para a qual $H(e^{j\omega T})$ se aproxima de zero, o integrando cresce e, conseqüentemente, $J_{\min}$ aumenta. Este fato reflete a incapacidade do equalizador transversal em compensar nulos espectrais sem um excessivo aumento de ruído. Como será mostrado no capítulo IV, tais nulos estão relacionados à fase de amostragem na entrada do receptor, tornando assim o desempenho do equalizador altamente sensível a este parâmetro. Note também que $J_{\min} \geq 0$, sendo que a igualdade só se verifica quando o ruído é nulo (neste caso a probabilidade de erro (P_e) é nula). Quando o ruído está presente, não existe uma relação simples entre o MSE e a P_e correspondente e, neste caso, são necessárias várias aproximações para se obter uma estimativa de P_e /6/. No presente estudo o desempenho do sistema sempre será medido através do índice $J(c)$.

III.6 - Algoritmo da Máxima Declividade (SDA)

Como foi mostrado na seção III.4, o equalizador adaptativo deve encontrar a solução do sistema linear de equações descrito pela eq.(III.28). Um método direto seria a inversão da matriz R como indicado em (III.29). Entretanto, este procedimento apresenta uma grande complexidade computacional, com um número de operações

proporcional ao quadrado do número de taps. Isto, na prática, torna o processo inviável, principalmente em altas taxas de símbolos, onde o intervalo de tempo entre amostras é curto e o número de taps é grande (da ordem de 30 taps para um sistema com taxa de 2400 baud e 9600 bps). Para contornar esta dificuldade são utilizados processos iterativos onde, normalmente, o número de operações a cada iteração é proporcional ao número de taps M . Um destes métodos, conhecido como algoritmo da máxima declividade (Steepest Descent Algorithm - SDA), usa o vetor gradiente da função $J(c)$ como informação para as correções a cada iteração.

Como se sabe, o gradiente é um vetor cujo sentido é o de crescimento máximo da função. Como o objetivo é encontrar o ponto de mínimo, as correções devem ser feitas em sentido oposto ao gradiente. Desse modo, o SDA pode ser estabelecido como /9/

$$c(n+1) = c(n) - 0,5\mu \text{grad}(J(c)) \quad (\text{III.44})$$

onde

$$\begin{aligned} \text{grad}(J(c)) &= \frac{dJ(c)}{dc(n)} \\ &= 2Rc(n) - 2p \quad [\text{vide eq. (III.27)}] \end{aligned} \quad (\text{III.45})$$

μ = constante de adaptação.

Logo,

$$c(n+1) = c(n) - \mu [Rc(n) - p] \quad (\text{III.46})$$

A eq.(III.46) pode ser visualizada através do fluxograma mostrado na fig.III.3. Pelo diagrama, nota-se que há uma malha de realimentação e, portanto, o sistema pode se tornar instável dependendo de R e μ .

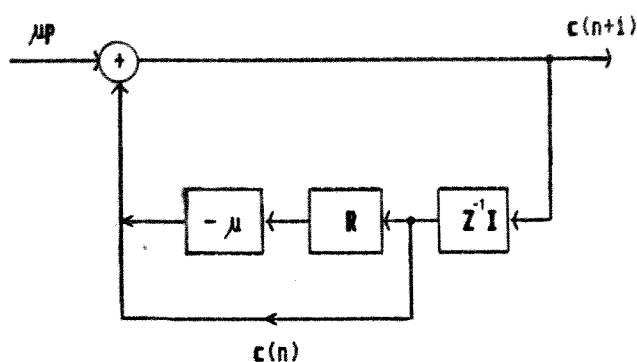


Fig.III.3 - Fluxograma da eq.(III.46)

III.6.1 - Condições de Estabilidade e Convergência

Intuitivamente, é fácil perceber que o algoritmo em (III.46) sempre leva à solução ótima de (III.29), desde que a constante de atualização μ tenha um valor suficientemente pequeno. Entretanto, é importante que o valor de μ seja o maior possível, para que o vetor ótimo seja rapidamente atingido. Evidentemente, um valor muito elevado de μ pode tornar o sistema instável, uma vez que as correções serão muito abruptas.

A faixa de valores de μ que garante que o algoritmo opere numa condição estável, pode ser mais facilmente determinada se forem realizadas algumas transformações de coordenadas. Estas transformações, bem como a análise dos resultados obtidos, fazem uso de algumas propriedades da matriz R que são listadas a seguir.

1 - A matriz R é Hermitiana, isto é

$$R^H = R$$

2 - R é uma matriz de Toeplitz, isto é, os elementos da diagonal principal e das diagonais paralelas a esta são iguais, ou seja

$$r(i, m) = r(i+k, m+k)$$

3 - R é positiva definida, isto é

$$x''Rx > 0, \text{ para todo } x \neq 0$$

4 - Os autovalores λ_i de R são todos reais e positivos. Assim,

$$\lambda_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

5 - Os autovetores $q_1, q_2, \dots, q_M$ associados aos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$ são ortogonais entre si, isto é, formam uma base no espaço de dimensão M . Dessa forma,

$$q_i''q_j = \delta(i-j)$$

Definindo-se a matriz Q como

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_M \end{bmatrix}$$

então pela propriedade acima resulta

$$Q''Q = I \implies Q^{-1} = Q''$$

ou seja, Q é uma matriz unitária.

6 - R pode ser escrita como

$$R = Q\Lambda Q''$$

onde Λ = matriz diagonal $M \times M$ cujos elementos são os autovalores de R .

7 - A matriz R é não singular, isto é, possui inversa.

$$R = (Q\Lambda Q'') \implies$$

$$R^{-1} = Q\Lambda^{-1}Q''$$

pois, pela propriedade 4, $\det(\Lambda) \neq 0$.

B - O traço (soma dos elementos da diagonal principal) da matriz R é igual à soma dos seus autovalores

$$\text{Tr}(R) = \sum_{i=1}^M \lambda_i$$

Definindo-se o vetor

$$v(n) = c(n) - \dot{c} \quad (\text{III.47})$$

onde $\dot{c}$ é o vetor dtimo dado pela eq.(III.29), então a eq.(III.46) pode ser escrita como

$$v(n+1) = v(n) - \mu [R(v(n) + \dot{c}) - p]$$

Mas, pela eq.(III.28), $R\dot{c} = p$. Logo

$$\begin{aligned} v(n+1) &= v(n) - \mu R v(n) \\ &= (I - \mu R) v(n) \end{aligned} \quad (\text{III.48})$$

onde I = matriz identidade.

Pela propriedade 6, a matriz R pode ser escrita como

$$R = Q\Lambda Q'' \quad (\text{III.49})$$

Substituindo-se a eq.(III.49) em (III.48), obtém-se

$$v(n+1) = (I - \mu Q\Lambda Q'') v(n) \quad (\text{III.50})$$

Multiplicando-se (III.50) por Q'' vem

$$z(n+1) = (I - \mu Q'' Q \Lambda) z(n) \quad (\text{III.51})$$

$$\begin{aligned} \text{onde } z(n) &= Q''v(n) \\ &= Q''(c(n) - \dot{c}) \end{aligned} \quad (\text{III.52})$$

Pela propriedade 5, $Q''Q=I$. Logo, (III.51) torna-se

$$z(n+1) = (I - \mu\Lambda)z(n) \quad (\text{III.53})$$

Pela eq.(III.53), é fácil ver que cada componente do vetor $z(n)$ é dada por

$$z_k(n+1) = (1 - \mu\lambda_k)z_k(n) \quad (\text{III.54})$$

onde $\lambda_k = k$ -ésimo autovalor de R .

Expandindo-se a eq.(III.54) para $n=0,1,2,\dots$, obtém-se

$$\begin{aligned} z_k(1) &= (1 - \mu\lambda_k)z_k(0) \\ z_k(2) &= (1 - \mu\lambda_k)z_k(1) = (1 - \mu\lambda_k)^2 z_k(0) \\ &\vdots \\ z_k(n) &= (1 - \mu\lambda_k)^n z_k(0) \end{aligned} \quad (\text{III.55})$$

onde, pelas eqs.(III.47) e (III.52)

$$\begin{aligned} z(0) &= Q''(c(0) - \dot{c}) \\ &= -Q''\dot{c}, \text{ assumindo-se } c(0) = 0 \end{aligned}$$

e $z_k(0) = k$ -ésima componente de $z(0)$.

Note que a eq.(III.55) representa uma série geométrica com razão $(1-\mu\lambda_k)$. Portanto, a série é convergente ou, equivalentemente, o sistema é estável se e somente se

$$-1 < 1 - \mu\lambda_k < 1, \text{ para todo } k. \quad (\text{III.56})$$

Assim, quando o número de iterações n tender a infinito, $z(n)$ tenderá a zero e, pela eq.(III.52)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c(n) = \bar{c}$$

isto é, o vetor de coeficientes terá atingido seu valor ótimo.

A partir da eq.(III.56) pode-se chegar a um limite superior para μ no qual a estabilidade é garantida. Este limite é dado por

$$0 < \mu < 2 / \lambda_{\max} \quad (\text{III.57})$$

onde $\lambda_{\max}$ = maior autovalor de R .

Para evitar o cálculo dos autovalores de R , pode-se fazer uso das propriedades 4 e 8 e impor um limitante superior mais restritivo. Assim,

$$0 < \mu < 2 / \text{Tr}(R) \quad (\text{III.58})$$

onde $\text{Tr}(R)$ = traço da matriz R

Como a condição em (III.58) é mais restritiva que em (III.57), a convergência é garantida.

III.6.2 - Tempo de Convergência

Admitindo-se que a constante de adaptação μ esteja dentro dos limites impostos pela eq.(III.57), pode-se dizer que cada $z_k(n)$ na eq.(III.55) tenderá a zero quando n for para infinito. Supondo-se que a unidade de tempo seja a duração entre cada iteração e que a queda da curva $z_k(n) \times n$ seja exponencial, pode-se escolher uma constante de tempo normalizada τ_k tal que

$$|1 - \mu \lambda_k| = e^{-1/\tau_k}$$

$$\text{logo, } \tau_k = -1 / \ln |1 - \mu \lambda_k| \quad (\text{III.59})$$

A constante de tempo τ_k define o tempo necessário para que a amplitude de $z_k(n)$ caia para $1/e$ do seu valor inicial $z_k(0)$. A fig.III.4a ilustra a eq.(III.59). Note que, para um dado λ_k , o valor

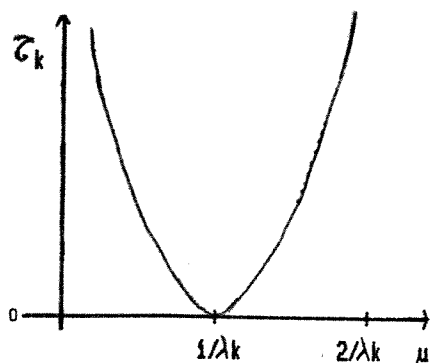


Fig.III.4a - Tempo de convergência do modo k.

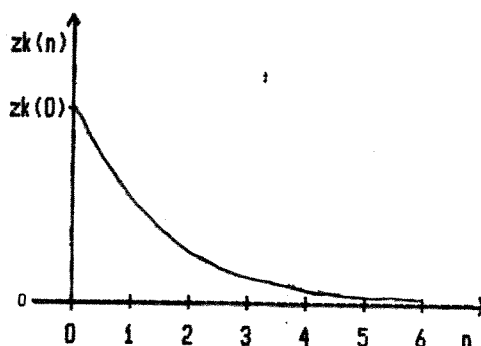


Fig.III.4b - Convergência do erro $z_k(n)$.

ótimo de μ é $1/\lambda_k$ e, além disso, para μ tendendo a zero ou a $2/\lambda_k$, τ_k tende a infinito, indicando uma convergência extremamente lenta. Restringindo-se o valor de μ à faixa

$$0 < \mu < 1/\lambda_{\max} \quad (\text{III.60})$$

então $0 < 1 - \mu \lambda_k < 1$, para todo k

nesse caso, como a razão da progressão geométrica é positiva, a convergência se processa sem oscilações como é mostrado na fig.III.4b. Com a condição (III.60), a eq.(III.59) pode ser escrita sem módulo, isto é

$$\tau_k = -1 / \ln(1 - \mu \lambda_k) \quad (\text{III.61})$$

A seguir o comportamento transiente do vetor de coeficientes $c(n)$ é estudado. Multiplicando ambos os lados de (III.52) por Q , usando a propriedade $Q(Q^T = I)$, e resolvendo para $c(n)$, obtém-se

$$\begin{aligned} c(n) &= \dot{c} + Qz(n) \\ &= \dot{c} + \sum_{k=-N}^N q_k z_k(n) \end{aligned} \quad (\text{III.62})$$

onde q_k = autovetores associados a λ_k .

Substituindo-se o valor de $z_k(n)$ de (III.55) em (III.62), obtém-se para cada tap

$$c_i(n) = \dot{c}_i + \sum_{k=-N}^N q_{ik} z_k(0) (1 - \mu \lambda_k)^n, \quad i = -N, \dots, N \quad (\text{III.63})$$

onde $\dot{c}_i$ = valor dtimo do i -ésimo tap.

q_{ik} = componente da i -ésima linha e k -ésima coluna da matriz Q .

O tempo τ_k necessário para que cada termo da somatória em (III.63) atinja $1/e$ do seu valor inicial é dado em (III.61). Entretanto, o tempo total τ_a , definido como o tempo necessário para que a somatória caia a $1/e$ do seu valor inicial, não pode ser expresso de forma simples. Contudo, a convergência mais lenta ocorre quando o fator $q_{ik} z_k(0)$ é zero para todo k , exceto para aquele correspondente ao menor autovalor $\lambda_{\min}$ da matriz R . Então, um limite superior para τ_a é definido por

$$\tau_a < -1 / \ln(1 - \mu \lambda_{\min}) \quad (\text{III.64a})$$

O limite inferior, que corresponde à convergência mais rápida

possível, ocorre quando todos os termos $q_{ik} z_k(0)$ são zero, exceto aquele que corresponde ao maior autovalor $\lambda_{\max}$, e é dado por

$$\tau_0 > -1 / \ln(1 - \mu \lambda_{\max}) \quad (\text{III.64b})$$

A combinação das equações (III.64a) e (III.64b) resulta

$$\frac{-1}{\ln(1 - \mu \lambda_{\max})} < \tau_0 < \frac{-1}{\ln(1 - \mu \lambda_{\min})} \quad (\text{III.64c})$$

que define os limites de τ_0 em função dos autovalores máximo e mínimo. Pela condição em (III.60), tem-se

$$\mu = a / \lambda_{\max}$$

onde $0 < a < 1$.

Substituindo-se o valor de μ acima na eq.(III.64c), obtém-se

$$\frac{-1}{\ln(1 - a)} < \tau_0 < \frac{-1}{\ln(1 - a \lambda_{\min} / \lambda_{\max})} \quad (\text{III.64d})$$

Pela equação acima fica evidente que, quanto maior for a relação $\lambda_{\max} / \lambda_{\min}$, maior será o limitante superior do tempo τ_0 e, conseqüentemente, menor a velocidade de convergência do SDA.

Matematicamente, uma relação $\lambda_{\max} / \lambda_{\min}$ elevada, indica que a matriz R não é bem condicionada ("ill conditioned"), isto é, a matriz inversa terá elementos com valores muito altos, o que explica a dificuldade do SDA em resolver o sistema da eq.(III.28). Além disso, observe que a convergência é mais rápida quando $(1 - \mu \lambda_k)$ é pequeno para todo k . Evidentemente, se a razão $\lambda_{\max} / \lambda_{\min}$ for muito alta, mesmo que μ seja escolhido como limite superior (III.60), o fator $(1 - \mu \lambda_{\min})$ não será tão pequeno. Deste modo, a velocidade de

convergência será determinada por $\lambda_{\min}$.

Outra interpretação do espalhamento dos autovalores de R pode ser dada em termos da densidade espectral de potência do sinal na entrada do equalizador. Como é mostrado em /7/, a razão $\lambda_{\max} / \lambda_{\min}$ tem limite superior dado por

$$\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} < \frac{S_{\max}}{S_{\min}} \quad (\text{III.65})$$

onde $S_{\max}$ e $S_{\min}$ são os valores absolutos máximo e mínimo da densidade espectral de potência do sinal.

Assim, se o sinal na entrada do equalizador apresentar um vale ou um nulo espectral, o espalhamento dos autovalores de R será alto e o SDA convergirá mais lentamente. Intuitivamente, isto pode ser visto como uma dificuldade do equalizador em compensar o nulo ou vale espectral (veja eq.(III.33)).

III.6.3 - Algoritmo Estocástico do Gradiente

O algoritmo da máxima declividade (SDA), descrito pela eq.(III.46), usa o vetor gradiente do erro como parâmetro para as correções impostas ao vetor de coeficientes, com o objetivo de minimizar o MSE definido em (III.9). O principal problema relativo à implementação prática do SDA, é o desconhecimento do vetor gradiente, que depende da matriz R e do vetor p (veja eq.(III.45)). Por sua vez, R e p dependem do canal equivalente $h(t)$ e do ruído aditivo, ambos desconhecidos no receptor da fig.III.1. Para contornar esta dificuldade, estimativas do vetor gradiente devem ser usadas.

Pela eq. (III.45), tem-se

$$\begin{aligned}
 \text{grad}(J(c)) &= 2Rc(n) - 2p \\
 &= 2 E[u^v(n)u'(n)]c(n) - 2 E[u^v(n)a(n)] \\
 &= 2 E[u^v(n) (u'(n)c(n) - a(n))] \\
 &= 2 E[u^v(n) (y(n) - a(n))] \\
 &= 2 E[u^v(n)e(n)]
 \end{aligned} \tag{III.66}$$

Uma estimativa possível para o vetor gradiente da eq. (III.66) é simplesmente

$$\widehat{\text{grad}}(J(c)) = 2u^v(n)e(n) \tag{III.67}$$

Esta estimativa é não polarizada, isto é

$$E[\widehat{\text{grad}}(J(c))] = \text{grad}(J(c)) \tag{III.68}$$

Além disso, toda a informação necessária para o cálculo em (III.67) encontra-se disponível no receptor da fig. III.1.

Com este desenvolvimento, o algoritmo de ajuste dos coeficientes pode ser estabelecido como

$$c(n+1) = c(n) - \mu u^v(n)e(n) \tag{III.69}$$

O algoritmo descrito em (III.69) é conhecido como algoritmo estocástico do gradiente ou, simplesmente, algoritmo do gradiente.

É importante salientar que a estimativa de (III.67) tem uma variância relativamente elevada. À primeira vista, isto poderia levar à conclusão de que o algoritmo do gradiente terá um desempenho bastante inferior ao SDA. Entretanto, pelo caráter inerentemente recursivo do algoritmo, a correção dos taps, na média, se processa na direção correta. Em outras palavras, o algoritmo substitui, de

certa forma, a média estatística pela média temporal.

III.6.4 - Convergência do Algoritmo

O algoritmo dado pela eq.(III.69) usa estimativas do verdadeiro vetor gradiente. Com isto, duas questões fundamentais se colocam:

1 - O algoritmo do gradiente converge para a solução ótima ? E, em caso afirmativo, a velocidade de convergência é a mesma do SDA ?

2 - O valor final do MSE atingido pelo algoritmo do gradiente é o mesmo que aquele atingido pelo SDA ?

Para responder a estas questões, é necessária uma análise estatística do algoritmo. Esta análise é realizada em /7/ através de uma série de aproximações, e os principais resultados são listados e comentados nos parágrafos seguintes.

Definindo-se o vetor

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{c}(n) - \hat{\mathbf{c}} \quad (\text{III.70})$$

é mostrado em /7/ que

$$E[\mathbf{v}(n+1)] = (\mathbf{I} - \mu \mathbf{R})E[\mathbf{v}(n)] \quad (\text{III.71})$$

Observando a eq.(III.71), percebe-se que esta tem a mesma forma matemática da eq.(III.48), a menos do fato de que, em (III.71), o vetor $\mathbf{v}(n)$ foi substituído por seu valor médio. Então, a partir do estudo realizado para o SDA, pode-se concluir que, quando o número de iterações n tende a infinito, a média de $\mathbf{v}(n)$ vai para zero e, portanto, o vetor de coeficientes tende a seu valor ótimo. Como é mostrado em /10/, a condição imposta à constante de adaptação μ é a

mesma que em (III.57), isto é

$$0 < \mu < 2 / \lambda_{\max} \quad (\text{III.72})$$

Assim, respondendo à primeira questão, pode-se dizer que o algoritmo do gradiente conduz a um vetor cuja média é o vetor de coeficientes ótimo, com uma velocidade de convergência que, na média, é a mesma do SDA.

A análise da segunda questão pode ser iniciada através da equação para o MSE $J(c)$ dada em (III.12), e repetida aqui por conveniência

$$J(n) = c''(n)Rc(n) - c''(n)p - p''c(n) + S_a$$

Escrevendo-se $c(n)$ em termos de $v(n)$ (eq.(III.70)) e levando-se em conta que, pela eq.(III.24) $c''(n)R = [Rc(n)]''$, obtém-se

$$J(n) = v''(n)Rv(n) + v''(n)[\dot{R}\dot{c} - p] + \dot{c}''[\dot{R}\dot{c} - p] + [\dot{R}\dot{c} - p]''v(n) - p''\dot{c} + S_a \quad (\text{III.73})$$

Lembrando que

$$R\dot{c} = p$$

$$e \quad J_{\min} = S_a - p''\dot{c},$$

a eq.(III.73) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} J(n) &= J_{\min} + v''(n)Rv(n) \\ &= J_{\min} + (c(n) - \dot{c})''R(c(n) - \dot{c}) \end{aligned} \quad (\text{III.74})$$

Na eq.(III.74), devido ao fato de R ser positiva definida, o segundo termo é sempre não negativo e, portanto, $J(n) \geq J_{\min}$. Como o

algoritmo da eq.(III.69) usa apenas estimativas do vetor gradiente (e não o valor exato como no SDA), o vetor de coeficientes $c(n)$ se aproxima do vetor ótimo na fase de convergência inicial e permanece flutuando em torno deste no estado estacionário.

Uma análise mais apurada do comportamento de $J(n)$ pode ser feita tomando-se a média estatística da eq.(III.74). O desenvolvimento seguinte é complexo e não será realizado aqui (o leitor interessado poderá encontrá-lo em /7/ ou em /10/). O resultado final é o seguinte :

$$E[J(n)] = \sum_{i=1}^M \gamma_i \alpha_i^n + \frac{2J_{\min}}{2 - \mu \sum_{i=1}^M \lambda_i} \quad (\text{III.75})$$

onde γ_i = coeficientes constantes que são função das condições iniciais e dos autovalores de R .

α_i = autovalores de uma matriz A ($M \times M$) cujos elementos são definidos por

$$a_{ij} = \begin{cases} (1 - \mu \lambda_i)^2 & , i = j \\ \mu \lambda_i \lambda_j & , i \neq j \end{cases}$$

λ_i = autovalores de R .

A interpretação da eq.(III.75) pode ser sintetizada em três pontos principais.

1 - A curva $E[J(n)]$ versus n consiste apenas de exponenciais. Entretanto, a curva $J(n)$ versus n , apresentará variações aleatórias em torno do valor $E[J(n)]$.

2 - No estado estacionário (n tendendo a infinito), o primeiro termo se anulará se e somente se

$$-1 < \alpha_i < 1, \text{ para todo } i \quad (\text{III.76})$$

Em /10/ é mostrado que isto ocorre se e somente se

$$0 < \mu < 2 / \sum_{i=1}^M \lambda_i \quad (\text{III.77})$$

Assim, com μ dentro da faixa acima, pela eq.(III.75)

$$E[J(\infty)] > J_{\min}.$$

Portanto, pode-se concluir que o MSE final atingido pelo algoritmo do gradiente será maior que aquele atingido pelo SDA, sendo a constante μ responsável pela diferença. Isto é, quanto maior o valor de μ , maior será a diferença e, quando μ tende a zero, $J(\infty)$ tende a $J_{\min}$. Deve-se ressaltar aqui que esta condição ($\mu \rightarrow 0$) não pode ser aplicada na prática pois o canal telefônico é variante no tempo e o valor de μ deve ser suficientemente elevado para que o algoritmo possa rastrear estas variações. Outra conclusão importante pode ser tirada a partir da condição (III.77), que pode ser reescrita como

$$0 < \mu < 2 / \text{Tr}(\mathbf{R}) \quad (\text{III.78})$$

Pela propriedade 8 e eq.(III.23)

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathbf{R}) &= M S_a \left[\sum_k |h(k)|^2 + \text{NSR} \right] \\ &= M \left[S_a \sum_k |h(k)|^2 + S_n \right] \end{aligned} \quad (\text{III.79})$$

onde M = número de taps do equalizador

$h(k)$ = resposta impulsiva do canal equivalente.

Portanto, o valor de μ dependerá, em última análise, da potência do sinal de entrada (termo entre colchetes em (III.79)) e do número de taps do equalizador. Na prática, esta potência é mantida constante através de um controle automático de ganho, de modo que μ pode ter um valor fixo que sempre atenderá a (III.78), garantindo assim a estabilidade do sistema no estado estacionário. Observe que as equações (III.77) ou (III.78) são mais restritivas que (III.72), na verdade, se esta última for usada, o vetor de coeficientes será, na média, igual ao vetor ótimo, mas o MSE poderá não convergir.

- 3 - Quando um autovalor de R tende a zero, um autovalor de A tende a 1 e, conseqüentemente, a velocidade de convergência cai.

Todos os resultados listados neste ítem se baseiam em algumas hipóteses de independência estatística entre as variáveis envolvidas. No entanto, estas hipóteses não são exatamente corretas. Por exemplo, os vetores $u(n)$ e $u(n+1)$ são na verdade dependentes pois, com a chegada de uma nova amostra do lado esquerdo do equalizador (veja fig.III.1), a amostra mais antiga no extremo direito é descartada e as restantes são apenas deslocadas. Uma análise rigorosa, que leva em conta esta dependência, é feita em /11/. Entretanto, na maioria dos casos, os resultados obtidos ali estão em acordo com aqueles derivados neste ítem. Além disso, as simulações que serão realizadas em capítulos posteriores, comprovarão a validade desta análise.

III.7 - Posição do Tap de Referência

Ao longo de toda a análise realizada até aqui, é assumido que o tap de referência $c(0)$ ocupa a posição central do equalizador. Isto pode ser mais claramente observado pelas definições dos vetores $c(n)$ e $u(n)$

$$c'(n) = [c(-N), \dots, c(0), \dots, c(N)] \quad (\text{III.80})$$

$$u'(n) = [u(n+N), \dots, u(n), \dots, u(n-N)] \quad (\text{III.81})$$

Uma interpretação mais adequada do significado do tap de referência pode ser dada em termos da diferença entre o instante de amostragem na entrada do equalizador e o instante de decisão. Mais especificamente, suponha que a amostragem na entrada do equalizador seja feita de forma a detetar o pico da resposta impulsiva do sistema equivalente. Se a decisão for tomada L segundos após este instante, então o tap de referência estará na posição L (a posição zero corresponde ao tap mais à esquerda).

Portanto, de maneira geral, a saída do equalizador $y(n)$ pode ser escrita como

$$y(n) = \sum_{j=-L}^{2N-L} c(j)u(n-j) \quad (\text{III.82})$$

e os vetores $c(n)$ e $u(n)$ como

$$c'(n) = [c(-L), \dots, c(0), \dots, c(2N-L)] \quad (\text{III.83})$$

$$e \quad u'(n) = [u(n+L), \dots, u(n), \dots, u(n-2N+L)] \quad (\text{III.84})$$

onde L = posição do tap de referência.

Com estas definições, todas as equações apresentadas nas seções anteriores permanecem válidas. Em particular, a função $J(c)$, que agora é uma função também de L .

Como é mostrado em /12/, a relação entre a posição ótima do tap de referência e o MSE mínimo não é simples. Não obstante, os resultados das simulações ali realizadas indicam que a posição central, $L = N$, em geral não é ótima. A fig.III.5, extraída de /12/, mostra a variação do MSE mínimo com a posição do tap de referência para um canal telefônico típico e um equalizador com 17 taps. A curva 1 foi traçada para uma fase de amostragem correspondendo ao

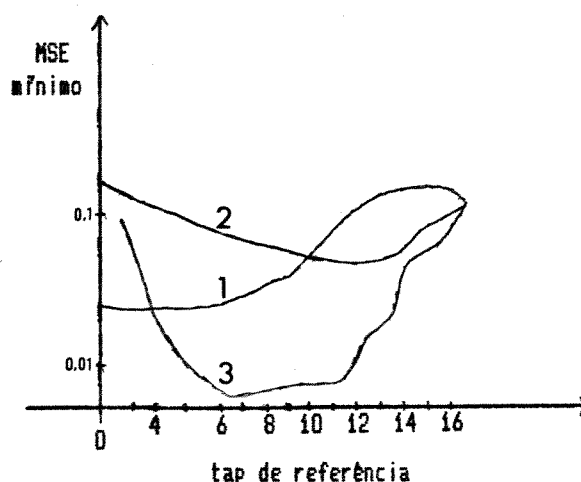


Fig.III.5 - Variação do MSE mínimo com a posição do tap de referência.

pico da resposta impulsiva, a curva 2 para uma fase de amostragem deslocada de $-T/4$, e a curva 3 para uma fase de amostragem deslocada de $+T/2$ em relação ao pico. Observe que a posição ótima para a curva 1 é a posição $L=2$, para a curva 2 é a posição $L=12$ e para a curva 3 a posição $L=7$. Assim, para se chegar a um mínimo global, deve ser realizada uma otimização conjunta da posição do tap de referência e da fase de amostragem. Ainda em /12/, é apresentado um algoritmo de otimização de L para uma determinada fase de amostragem. Contudo,

como o MSE não é uma função convexa de L , a convergência do algoritmo para o mínimo global não é garantida. Além disso, o algoritmo descrito permite flutuações contínuas à esquerda e à direita da posição ótima, de modo que equalizador não alcança o seu melhor desempenho.

Na prática, é comum se manter o tap de referência na posição central e realizar uma otimização da fase de amostragem (este estudo será realizado em capítulo posterior). Evidentemente, isto não conduz a um mínimo global, mas o MSE atingido dessa forma é suficiente para uma comunicação confiável.

III.8 - Técnicas Para a Aceleração da Convergência

Em redes multiponto, o fluxo efetivo de dados é em grande parte dependente do tempo de inicialização requerido pelos modems que a integram. Muitos destes sistemas operam em alta velocidade e transmitem blocos de dados de curta duração (polling). Portanto, é interessante que o tempo necessário para o condicionamento ou treinamento do modem seja curto em relação à duração média de um bloco de dados. Em princípio, o condicionamento pode ser dividido em três segmentos principais: recuperação de portadora, recuperação de relógio e equalização inicial. Os dois primeiros serão estudados mais adiante e o terceiro, que é o que consome maior tempo durante o treinamento, será analisado a seguir.

III.8.1 - Algoritmo do Gradiente Modificado

Várias tentativas têm sido feitas no sentido de aumentar a velocidade de convergência do algoritmo do gradiente [13]. Neste item é proposta uma modificação que, como será mostrado no cap. V,

pode acelerar substancialmente a convergência inicial.

Como foi mostrado na seção III.6, o algoritmo da máxima declividade (SDA) pode ser estabelecido como

$$c(n+1) = c(n) - \mu [Rc(n) - p] \quad (\text{III.85a})$$

Sejam

$c(k,n)$ = k-ésimo elemento do vetor $c(n)$; $k=-N$ a N

$L(i)$ = i-ésima linha da matriz R ; $i=1$ a $2N+1$

$p(k)$ = k-ésimo elemento do vetor p .

Então, pela eq.(III.85a), o k-ésimo tap é atualizado por

$$c(k,n+1) = c(k,n) - \mu [L(k+N+1)c(n) - p(k)] \quad (\text{III.85b})$$

$$c'(n) = [c(-N,n), \dots, c(0,n), \dots, c(N,n)] \quad (\text{III.85c})$$

Observe que o vetor $c(n)$ acima não depende de k , isto é, todos os os taps $c(k,n)$ na eq.(III.85b) são atualizados a partir do mesmo vetor $c(n)$. A idéia contida no novo algoritmo é a substituição de $c(n)$ por um outro vetor $ck(n)$ que seja atualizado após o cálculo de cada tap. Assim, o SDA modificado pode ser escrito como

$$c(k,n+1) = c(k,n) - \mu [L(k+N+1)ck(n) - p(k)] \quad (\text{III.85d})$$

A ordem em que é feita a atualização dos taps influi no desempenho do algoritmo. Para facilitar a apresentação, suponha que a atualização é feita na sequência $k=-N, -N+1, \dots, N$. Assim sendo, o vetor $ck(n)$ em (III.85d) é dado por

$$ck'(n) = [c(-N,n+1), \dots, c(k-1,n+1), c(k,n), \dots, c(N,n)] \quad (\text{III.85e})$$

O algoritmo das eqs.(III.85d) e (III.85e) encontra-se representado no fluxograma da fig.III.5a.

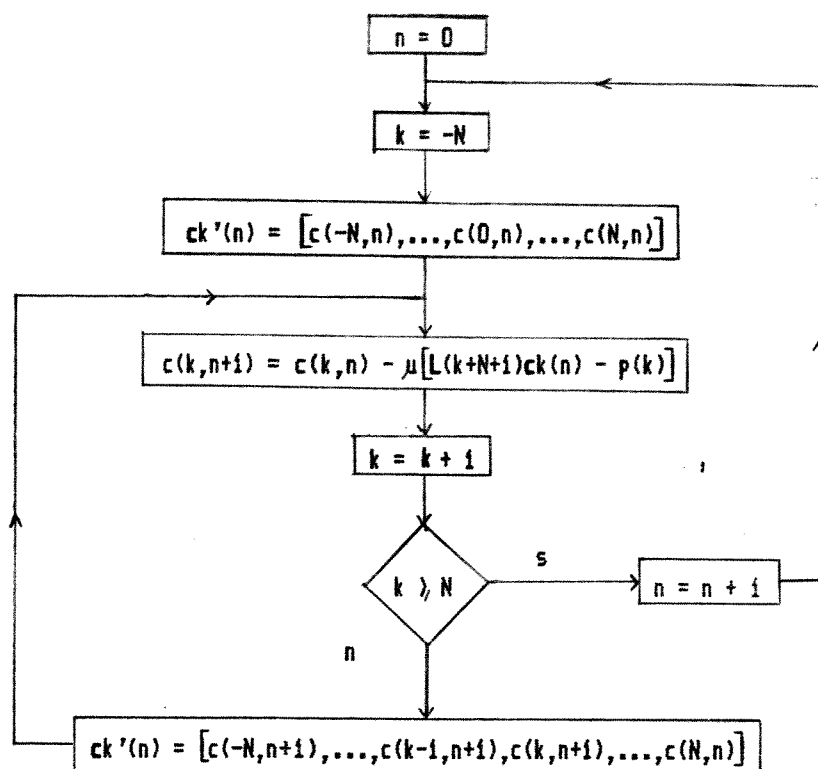


Fig.III.5a - Fluxograma para o SDA modificado

A análise matemática do algoritmo para o estabelecimento das condições de estabilidade e convergência não é simples, uma vez que agora os taps estão acoplados tanto através da matriz R (problema que foi resolvido anteriormente escrevendo-se $R = Q\Lambda Q'$ - ver eq.(III.49)) como também através do vetor $ck(n)$. Uma saída é utilização de simulações. Isto é feito no capítulo V, de onde pode-se concluir que

1 - O algoritmo é estável, e converge para a solução ótima dada pela eq.(III.29) se

$$\mu < 2 / r(i,i) \quad (III.85f)$$

onde $r(i,i) = S_a \sum_k |h(k)|^2 + S_n$ (ver eq.(III.23))
 = potência do sinal na entrada do equalizador.

2 - O valor ótimo de μ é dado por

$$\mu_{ot} = 1 / r(i,i) \quad (III.85g)$$

A extensão da eq.(III.85d) para o caso do algoritmo do gradiente é imediata. Levando-se em conta a eq.(III.69) e as definições de $c(k,n)$, $p(k)$ e $ck(n)$, o algoritmo do gradiente modificado é dado por

$$c(k,n+1) = c(k,n) - \mu u^*(n-k)e(k,n) \quad (III.85h)$$

onde $e(k,n) = u^*(n)ck(n) - a(n) \quad (III.85i)$

$u(n)$ e $u^*(n)$ são dados pelas equações (III.2) e (III.4b) respectivamente.

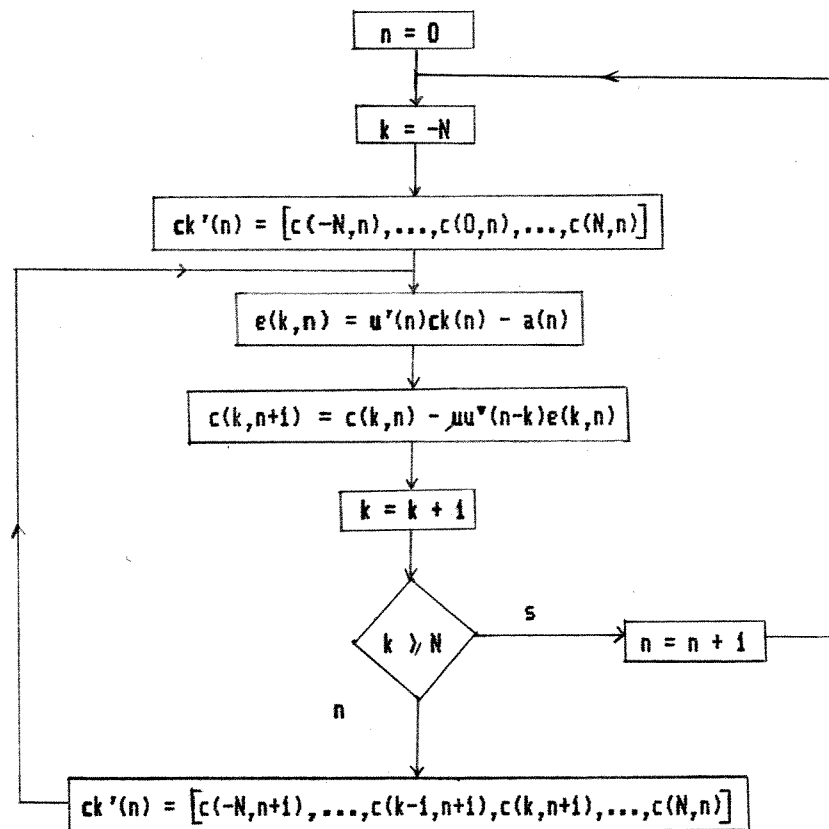


Fig.III.5b - Fluxograma para o algoritmo do gradiente modificado.

O fluxograma ilustrando as eqs.(III.85h) e (III.86i) é mostrado na fig.III.5b.

Evidentemente a modificação introduzida gera um aumento na complexidade computacional em relação ao algoritmo convencional. A tabela da fig.III.5c compara os dois algoritmos. Note que se μ puder ser uma potência de 2 a complexidade do algoritmo modificado é significativamente reduzida (aproximadamente 17% para M=31 taps).

	! Algoritmo do gradiente ! ! convencional		! Algoritmo do gradiente ! ! modificado	
	! $\mu \neq 2^k$	! $\mu = 2^k$	! $\mu \neq 2^k$	! $\mu = 2^k$
Multip. Reais	! 8M + 2	! 8M	! 14M - 4	! 12M - 4
Somas Reais	! 8M - 6	! 8M - 6	! 18M - 10	! 18M - 10

Fig.III.5c - Complexidade Computacional

As demais características do algoritmo, como a sensibilidade às variações de μ e o erro residual no estado estacionário, serão discutidas no capítulo V.

III.8.2 - Equalização Cíclica

A sequência de treinamento da recomendação V.29 do CCITT /5/ é gerada pelo polinômio

$$P(X) = 1 + X^6 + X^7 \tag{III.86}$$

Este polinômio é irredutível e primitivo no campo binário, isto é, não possui divisores de grau menor que 7, e só é divisor de polinômios do tipo $X^n - 1$, para n maior ou igual a 127. Portanto, a sequência gerada por ele é de comprimento máximo /14/, isto é,

possui período igual a 127, que é o máximo comprimento possível para uma sequência gerada por um polinômio de grau 7. Pelas propriedades da transformada discreta de Fourier (DFT) /8/, pode-se afirmar que esta sequência apresentará raias espectrais igualmente espaçadas, localizadas em

$$\frac{k}{T \cdot 127} = \frac{k \cdot 2400}{127} = k \cdot 19 \text{ Hz}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{III.87})$$

Assim, com a utilização dessa sequência e após o período de treinamento (384 símbolos), o equalizador terá convergido para o MSE mínimo, pelo menos nas frequências espaçadas de 19 Hz. Como este espaçamento é pequeno em relação à largura de faixa de 1200 Hz, o MSE nas frequências adjacentes também estará próximo do seu valor ótimo. Assim, quando a sequência de dados propriamente dita é transmitida, o equalizador já garante uma decisão com baixa taxa de erros e o algoritmo do gradiente realiza o ajuste fino no vetor de coeficientes. Convém lembrar que a sequência de dados tem, teoricamente, período infinito, de modo que após o ajuste fino, o sistema estará equalizado em toda faixa de frequências do sinal recebido.

É intuitivo o fato de que se a sequência de treinamento tiver um período mais curto, o equalizador convergirá mais rapidamente, uma vez que terá de compensar as distorções introduzidas pelo canal num menor número de frequências. Este período é limitado por dois fatores. Em primeiro lugar, deve-se observar que, se o número de raias for muito pequeno, o espaçamento entre elas será grande e, nesse caso, a equalização pode se revelar inadequada nas frequências intermediárias. Em segundo lugar, se o período for menor que a

duração da resposta impulsiva do equalizador, o vetor de entrada terá elementos iguais e, portanto, linearmente dependentes. Com isto, a matriz de correlação R será singular e, conseqüentemente, não existirá uma solução única para o vetor ótimo de coeficientes. No limite, a sequência de treinamento deve ter um período igual ao número de taps M do equalizador. Como será mostrado nos parágrafos seguintes, esta escolha é bastante vantajosa. Outra condição importante que deve ser obedecida é que as raias espectrais da sequência de treinamento tenham a mesma amplitude. Com isto, pode ser mostrado /15/ que, para sistemas com pequeno excesso de faixa (como é o caso para a transmissão a 2400 baud, onde o excesso de faixa é da ordem de 10%), os autovalores da matriz R são independentes da fase da portadora local e da fase de amostragem.

Considerando-se que a sequência de treinamento é periódica com período igual ao número de taps do equalizador, conclui-se que o sinal recebido é também periódico (se o efeito do ruído for desprezado), e que um período completo está sempre armazenado no equalizador. Assim, qualquer deslocamento entre a sequência recebida e a sequência de treinamento gerada localmente, causará apenas um deslocamento correspondente na posição do tap de referência. Portanto, não é necessário que os geradores local e remoto da sequência de treinamento estejam sincronizados, como ocorre no caso da sequência convencional especificada pelo CCITT. Ao final do período de treinamento, os taps são deslocados ciclicamente até que o tap com maior valor absoluto esteja no centro de equalizador ou até que os taps com menor valor absoluto ocorram nas extremidades como é sugerido em /16/.

Um esquema típico para o equalizador cíclico com $M = 5$ e os taps

sendo ajustados pelo algoritmo do gradiente é mostrado na fig.III.6. Quando todas as chaves estão na posição 1, o equalizador

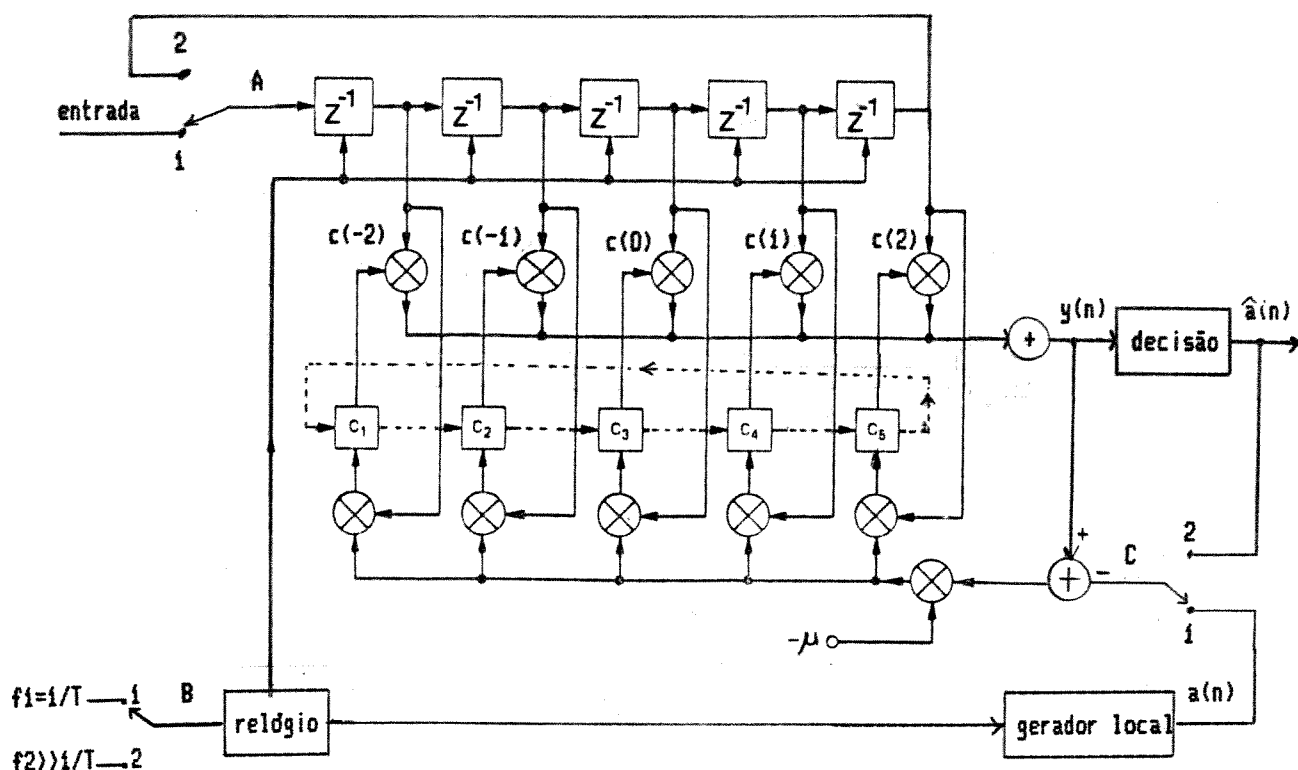


Fig.III.6 - Equalizador Cíclico.

funciona como descrito anteriormente. Admitindo-se que já se passou tempo suficiente para que no equalizador esteja armazenado um período completo da sequência recebida, as chaves A e B podem passar para a posição 2. Como indicado na figura, nesta situação o sistema operará com uma frequência muito maior que $1/T$, limitada apenas pela velocidade do processador utilizado. Portanto, a convergência será praticamente instantânea. Feito isto, os taps são deslocados ciclicamente como indicado na figura, as chaves A e B voltam para a posição 1 e a chave C passa para a posição, 2 dando assim início à recepção da sequência de dados propriamente dita. A partir deste instante diz-se que o equalizador está no modo

III.8.3 - Equalização no Domínio da Frequência

Na seção precedente, a equalização inicial é conseguida através da transmissão de uma sequência de treinamento periódica com período igual ao número de taps. Os ajustes são realizados pelo algoritmo do gradiente e, pelas propriedades da sequência periódica, pode-se mostrar /15/ que a convergência é bem mais rápida que aquela conseguida com sequências aleatórias. Neste contexto, surge uma outra alternativa baseada na transformada discreta de Fourier.

Sejam $A(k)$ e $U(k)$ as transformadas discretas de Fourier da sequência periódica de transmissão $a(n)$ e do sinal recebido $u(n)$, respectivamente, isto é,

$$A(k) = \sum_{i=0}^{M-1} a(i) e^{-j2\pi i k / M}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (\text{III.88})$$

$$e \quad U(k) = \sum_{i=-N}^N u(n-i) e^{-j2\pi i k / M}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (\text{III.89})$$

onde $M = 2N+1$

= número de taps do equalizador

= período da sequência de treinamento.

A sequência $u(n)$ é afetada pelo ruído e pelo desvio de frequência entre as portadoras local e recebida. Estes fatos podem tornar $u(n)$ não periódica e, nesse caso, a eq.(III.89) não será válida. O efeito do ruído pode ser desprezado se a sequência de treinamento não apresentar raias de baixa amplitude nas frequências de interesse. Isto pode ser conseguido com sequências que possuam autocorrelação nula (ZAC - zero autocorrelation). Dessa forma, todas

as raíais espectrais terão a mesma amplitude. O desvio de frequência, que é no máximo de 7 Hz /5/, faz com que as componentes adjacentes interfiram no cálculo da DFT de $u(n)$. O efeito dessa interferência pode ser minimizado através da multiplicação da sequência $u(n)$, com um comprimento maior que M , por uma função janela antes do cálculo da DFT /16/, de modo que haja uma mediação dos interferentes. Com isto, o espectro da sequência modificada pode ser calculado por

$$U_0(k) = \sum_{i=-(N+m)}^{N+m+1} w(i)u(n-i) e^{-j2\pi ik/M}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \quad (\text{III.90})$$

onde $w(i)$ = função janela

$M + 2m + 1$ = comprimento da janela.

Em /16/ é sugerida a seguinte forma para $w(i)$ com $m=3$:

$$w(i) + w(i+N+1) = 1, \quad \text{para } -m < i < m$$

$$w(i) = 1, \quad \text{para } m < i < N+1-m.$$

No capítulo VI é descrito outro método para minimizar o desvio de frequência que afeta a periodicidade da sequência $u(n)$.

Lembrando que a sequência $a(n)$ está disponível no receptor, a DFT da resposta impulsiva do equalizador pode ser calculada como

$$\begin{aligned} C(k) &= A(k) / U_0(k) \\ &= A(k) U_0^*(k) / |U_0(k)|^2 \end{aligned} \quad (\text{III.91})$$

Aplicando-se a DFT inversa à eq.(III.91), obtém-se

$$c(i) = 1/M \sum_{k=0}^{M-1} C(k) e^{j2\pi(i+N)k/M}, \quad i = -N, \dots, N \quad (\text{III.92})$$

Finalmente, após o cálculo em (III.92) os taps são ciclicamente deslocados como descrito anteriormente.

Esta técnica é superior àquela da seção anterior porque o cálculo realizado em (III.92) é exato de modo que a equalização nas frequências espaçadas de $1/MT$ será perfeita, equanto que, na seção anterior, o vetor gradiente é apenas uma estimativa do vetor correto, estando portanto sujeito a erros. Além disso, o cálculo em (III.92) pode ser bastante agilizado através do uso da transformada rápida de Fourier (FFT) /8/, de modo que a convergência é essencialmente conseguida em uma iteração.

Nos dois métodos portanto, o fator limitante é o tempo necessário para que o equalizador seja preenchido com um período da sequência recebida. Evidentemente, este tempo depende apenas do número de taps e não pode ser diminuído.

III.8.4 - Outras Técnicas

Existem ainda outros métodos que podem aumentar a velocidade de convergência. Entretanto o aumento na complexidade computacional é bastante expressivo. No capítulo IV são discutidos dois destes métodos. O algoritmo rápido de Kalman, que é aplicado ao mesmo equalizador transversal da fig.III.1, e o algoritmo em treliça (lattice algorithm), que se aplica numa estrutura significativamente diferente.

III.9 - Sensibilidade à Aritmética Finita

Na implementação digital do algoritmo do gradiente, todas as variáveis envolvidas na computação de (III.69) devem ser quantizadas. Isto produz um novo tipo de erro, denominado erro de

quantização, que está diretamente relacionado ao número de bits utilizado na manipulação dos dados.

Pela eq.(III.69), nota-se que os coeficientes são incrementados através de um termo proporcional ao produto do erro instantâneo na saída do equalizador pelo elemento correspondente armazenado na linha de atraso (ver fig.III.1). Quando este termo é menor que metade do nível de quantização, o algoritmo deixa de efetuar as correções, podendo degradar sensivelmente o desempenho do algoritmo. Portanto, para que um determinado desempenho (MSE mínimo) seja atingido, é necessário que o número de bits seja suficiente.

Uma análise detalhada do problema da quantização é realizada em /17/. Após algumas aproximações, é mostrado que, para operação com aritmética de ponto fixo e o sinal excursionando entre -1 e 1, o número de bits B pode ser estimado através da seguinte expressão:

$$2^{-B} < \sqrt{2} \frac{\bar{\lambda}}{\lambda_{\max}} \frac{D_g - 1}{D_g} \frac{1}{M} \sqrt{\frac{J_{\min}}{\text{Tr}(\mathbf{R})}} \quad (\text{III.93})$$

onde B = número de bits

$\bar{\lambda}$ = valor RMS (Root Mean Square) dos autovalores

$$\bar{\lambda} = \left[\sum_{i=1}^M \lambda_i^2 / M \right]^{1/2}$$

$\lambda_{\max}$ = maior autovalor de R

D_g = degradação em relação a $J_{\min}$ com precisão infinita

$$D_g = 10^{\frac{\text{degradação desejada (dB)}}{10}}$$

$\text{Tr}(\mathbf{R})$ = traço de R ou, pela eq.(III.79), M vezes a potência na entrada do equalizador.

$J_{\min}$ = MSE mínimo desejado.

Um exame de (III.93) mostra que a precisão requerida aumenta em 1 bit para cada vez que o número de taps M dobra, e para cada redução de 6 dB no MSE mínimo $J_{\min}$. Adicionalmente, cada redução de 6 dB no nível de degradação requer o aumento de 2 bits.

Como um exemplo, considere um sistema operando a 9600 bps num canal apresentando fortes distorções de amplitude e fase. Neste caso, os dados típicos são os seguintes /17/:

$\bar{\lambda} / \lambda_{\max} = 0,5$ (representa as características do canal)

$D_g = 1,26$ (corresponde a uma degradação de 1 dB)

$M = 32$ (número típico para operação a 9600 bps)

$J_{\min} = 0,004$ (MSE mínimo desejado. Corresponde a -24 dB)

$Tr(R) = 1$ (M vezes a potência na entrada do equalizador.

Este parâmetro pode ser normalizado por um CAG).

Com estes dados, o cálculo de (III.93) mostra que o número de bits necessário é $B = 12$.

Atualmente existem processadores de sinais comerciais que trabalham com palavras de 16 bits, como a família TMS320 da Texas Instruments por exemplo, de modo que a precisão não representa um problema sério. Os principais cuidados que devem ser tomados na implementação dizem respeito à faixa dinâmica do sinal e ao "overflow" nas operações de soma.

Com relação ao ruído produzido pelo arredondamento dos produtos, pode-se dizer que ele é desprezível em relação ao MSE mínimo típico, desde que μ tenha um valor elevado o suficiente para evitar a "parada" do algoritmo /4/.

III.10 - Conclusão

A minimização do erro quadrático médio na saída do equalizador, conduz a um sistema linear de equações cuja solução pode ser encontrada através de um algoritmo baseado em estimativas do gradiente deste erro. Este algoritmo é iterativo e converge para o conjunto de coeficientes ótimo sempre que a constante de adaptação estiver dentro de certos limites impostos a partir das características do canal equivalente. A velocidade de convergência do algoritmo é limitada pelo espalhamento dos autovalores da matriz de correlação do canal, isto é, quanto maior a relação $\lambda_{\max} / \lambda_{\min}$, menor será a velocidade de convergência. Um artifício empregado para acelerar a convergência, e que praticamente independe das características do canal, faz uso de uma sequência de treinamento periódica, com período igual ao número de taps e com autocorrelação nula. Esta sequência apresenta raias espectrais igualmente espaçadas e com amplitude constante. Com isto, o algoritmo consegue compensar as distorções introduzidas pelo canal nestas frequências, em um número de iterações pouco maior que o número de taps. Uma sofisticação adicional lança mão da transformada de Fourier (DFT, ou FFT se possível), permitindo uma equalização exata, pelo menos nas frequências espaçadas de $1/MT$ Hz.

A implementação digital do algoritmo do gradiente com um número finito de bits, introduz uma nova fonte de ruído. Entretanto, para uma palavra de 11 ou 12 bits, os erros de quantização e de arredondamento permanecem dentro de limites aceitáveis para um sistema operando a 9600 bps. Como os processadores atualmente disponíveis trabalham com palavras de 16 bits, a precisão não é um problema crítico.

Capítulo IV – Outros Tipos de Equalizador e de Algoritmos de Convergência Rápida

IV.1 – Introdução

O equalizador transversal, tendo os taps ajustados pelo algoritmo do gradiente, foi a solução adotada no capítulo precedente para minimizar o erro quadrático médio (IIS+ruído). Há no entanto outras técnicas que, sob alguns aspectos, são mais eficientes. Neste capítulo são apresentados quatro diferentes tipos de equalizador. Na seção IV.2 é estudado o equalizador com decisão realimentada. A seção IV.3 trata do equalizador transversal com espaçamento entre os taps menor que T , mostrando que este tem seu desempenho independente da fase de amostragem, o que não acontece no equalizador convencional (espaçamento T). Finalmente, na seção IV.4 é discutido outro critério de otimização, o critério dos mínimos quadrados, que dá origem ao algoritmo rápido de Kalman, e ao algoritmo em treliça, sendo que o primeiro é aplicado a um filtro transversal, e o segundo a uma estrutura em treliça.

IV.2 – Equalizador Com Decisão Realimentada

No capítulo III a minimização do MSE foi efetuada através de um filtro transversal linear. Uma alternativa para o problema é a utilização do circuito mostrado na fig.IV.1, onde o dispositivo de decisão está inserido na malha de realimentação, tornando assim o sistema não linear. Esta estrutura é conhecida como equalizador com decisão realimentada (Decision Feedback Equalizer - DFE) /18/, /19/, /20/, /21/, /22/.

A sequência de entrada do DFE é processada por um filtro

transversal com $N+1$ taps $cf(n)$, denominado filtro direto, enquanto a

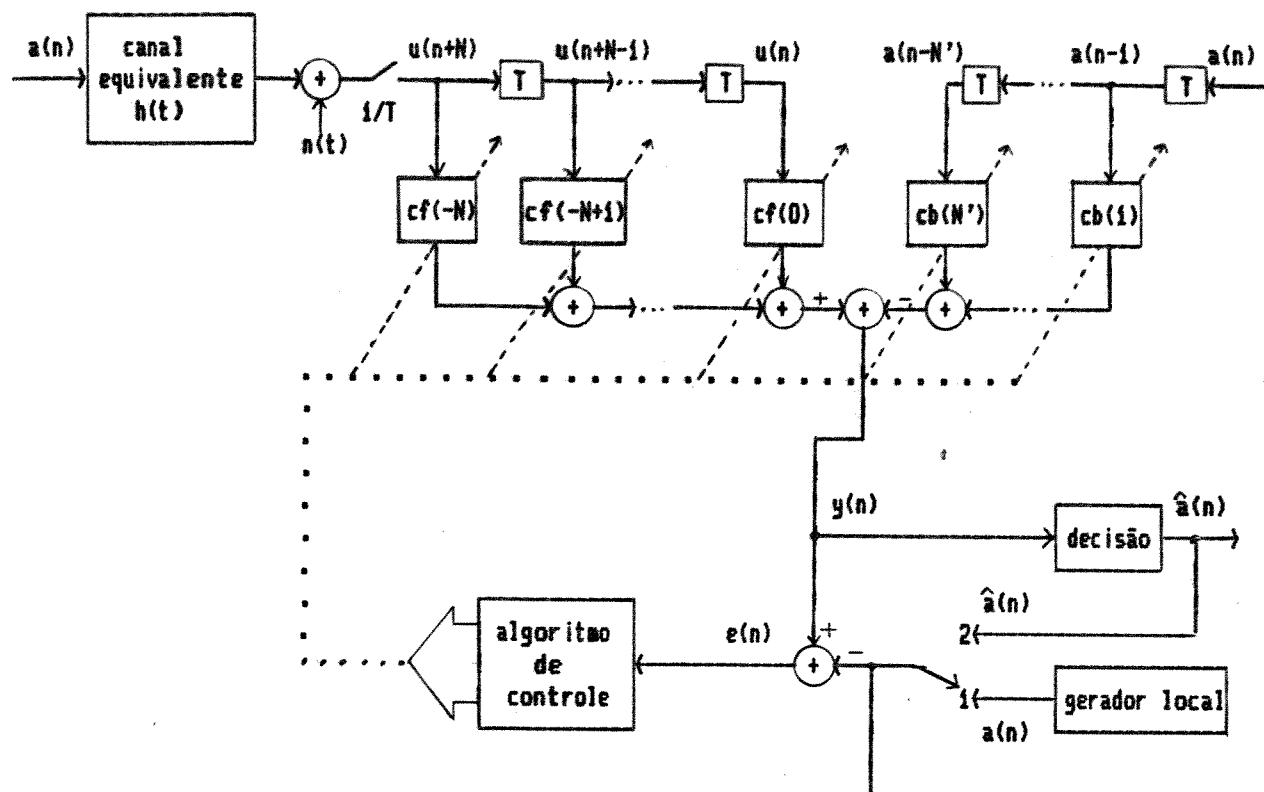


Fig.IV.1 - Equalizador com Decisão Realimentada.

sequência decidida é entregue a outro filtro do mesmo tipo com N' taps $cb(n)$, denominado filtro reverso (o número de taps do DFE é definido como sendo a soma $M=N+1+N'$). A diferença entre as saídas dos dois filtros constitui o sinal equalizado.

A motivação para a introdução do filtro reverso é o fato de que, se os símbolos detetados estão corretos, então a IIS causada por estes pode ser completamente cancelada, subtraindo-se da saída do filtro direto um termo formado pela soma ponderada da sequência de símbolos decididos, cujos pesos (coeficientes do filtro reverso) são as amostras da cauda da resposta impulsiva do conjunto canal equivalente-filtro direto. Neste sentido, o filtro reverso pode ser

visto como um estimador de parte da resposta impulsiva do conjunto canal equivalente-filtro direto. Observe que este processo não causa nenhum impacto sobre o ruído, uma vez que o filtro reverso opera com níveis fixos e bem definidos. Portanto, em princípio, o DFE possui melhor desempenho que o equalizador transversal em canais onde as distorções de amplitude são predominantes em relação às distorções de fase. Isto porque, no equalizador transversal, a compensação das distorções de amplitude também atua sobre o ruído.

No DFE há sempre a possibilidade de propagação de erro. Este fato ocorre quando uma decisão errada é introduzida no filtro reverso, que por sua vez subtrai uma quantidade incorreta da saída do filtro direto, gerando assim um sinal equalizado que pode gerar uma nova decisão errada. Este mecanismo tende a se repetir, e o tempo de recuperação (tempo necessário para que termine o ciclo) pode ser extremamente elevado em alguns canais [19]. Como a propagação de erro resulta de um processo não linear, a análise matemática empregada para se chegar ao conjunto de coeficientes ótimos se torna bastante complexa. Contudo, assumindo-se que as decisões sejam sempre corretas (ver seção III.2), o problema é simplificado e pode ser tratado no mesmo estilo do cap.III.

Pela fig.IV.1, a saída do equalizador $y(n)$ pode ser escrita como

$$y(n) = \sum_{k=-N}^0 c_f(k)u(n-k) - \sum_{k=1}^{N'} c_b(k)a(n-k) \quad (IV.1)$$

onde $u(n)$ é definido na eq.(III.2).

O erro entre o sinal equalizado e o sinal decidido é dado por

$$e(n) = y(n) - a(n) \quad (IV.2)$$

e, definindo-se os vetores

$$c'(n) = [cf(-N), \dots, cf(0), cb(1), \dots, cb(N')] \quad (IV.3)$$

$$e \quad u'(n) = [u(n+N), \dots, u(n), -a(n-1), \dots, -a(n-N')] \quad (IV.4)$$

as equações (III.5) e (III.6) permanecem válidas.

Os coeficientes do equalizador serão ótimos quando o erro quadrático médio

$$J(c) = E[e(n) e^*(n)] \quad (IV.5)$$

for mínimo.

IV.2.1 - Coeficientes Ótimos

A eq.(IV.5) pode ser desenvolvida de maneira análoga àquela da seção III.2, e o resultado é o mesmo da eq.(III.12), isto é

$$J(c) = c''(n)Rc(n) - c''(n)p - p''c(n) + Sa \quad (IV.6)$$

onde $1 - p$ é um vetor $M \times 1$ ($M=N+1+N'$), e

$$\begin{aligned} p' &= E[u''(n)a(n)] \\ &= Sa[h^*(N), h^*(N-1), \dots, h^*(0), \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{N' \text{ zeros}}] \end{aligned} \quad (IV.7)$$

2 - R é uma matriz $M \times M$, definida por

$$\begin{aligned} R &= E[u''(n)u'(n)] \\ &= \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ \hline R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (IV.8)$$

onde R_{11} é uma matriz $(N+1) \times (N+1)$, com elementos

$$r_{11}(i,m) = S_a \left[\sum_k h^*(k-i)h(k-m) + NSR \delta(i-m) \right] \quad (IV.8a)$$

para $i, m = -N, \dots, 0$.

R_{12} é uma matriz $(N+1) \times N'$, com elementos

$$r_{12}(i,m) = -S_a h^*(m-i) \quad (IV.8b)$$

para $i = -N, \dots, 0$ e $m = 1, \dots, N'$

R_{21} é uma matriz $N' \times (N+1)$ e $R_{21} = R_{12}^*$. Assim,

$$r_{21}(i,m) = -S_a h(i-m) \quad (IV.8c)$$

para $i = 1, \dots, N'$ e $m = -N, \dots, 0$

R_{22} é S_a vezes uma matriz identidade $N' \times N'$. Então

$$r_{22}(i,m) = \begin{cases} S_a & \text{se } i = m; \\ 0 & \text{se } i \neq m \end{cases} \quad (IV.8d)$$

para $i, m = 1, \dots, N'$

A minimização de (IV.6) conduz à seguinte equação:

$$Rc - p = 0 \quad (IV.9)$$

Portanto, o vetor de coeficientes ótimo é

$$\hat{c} = R^{-1} p \quad (IV.10)$$

Expandindo-se a eq.(IV.9), os coeficientes ótimos do filtro reverso podem ser explicitados como

$$\hat{c}_b(k) = \sum_{n=-N}^0 \hat{c}_f(n)h(k-n), \quad k = 1, \dots, N' \quad (IV.11)$$

onde $\hat{c}_f(n)$ são os coeficientes ótimos do filtro direto.

A eq.(IV.11) representa a convolução do canal equivalente com o

conjunto de coeficientes do filtro direto. Isto valida as afirmações feitas no final do terceiro parágrafo da seção IV.2.

IV.2.2 - Algoritmo do Gradiente

O algoritmo do gradiente para o DFE tem a mesma forma da eq.(III.69), isto é

$$c(n+1) = c(n) - \mu u^v(n)e(n) \quad (IV.12)$$

Substituindo-se o vetor $u(n)$ da eq.(IV.4) em (IV.12), obtém-se

$$cf(n+1) = cf(n) - \mu uf^v(n)e(n) \quad (IV.13)$$

$$\text{onde } uf^v(n) = [u(n+N), \dots, u(n)] \quad (IV.13a)$$

$$cf^v(n) = [cf(-N), \dots, cf(0)] \quad (IV.13b)$$

para o filtro direto, e

$$cb(n+1) = cb(n) + \mu ub^v(n)e(n) \quad (IV.14)$$

$$\text{onde } ub^v(n) = [a(n-1), a(n-2), \dots, a(n-N')] \quad (IV.14a)$$

$$cb^v(n) = [cb(1), cb(2), \dots, cb(N')] \quad (IV.14b)$$

para o filtro reverso.

IV.2.3 - Convergência

Pela definição da matriz de correlação R dada em (IV.8), pode-se mostrar que R é hermitiana, isto é

$$R'' = R$$

Portanto, toda a análise realizada na seção III.6.4 permanece

válida, e algoritmo em (IV.12) tem convergência garantida se /21/

$$0 < \mu < 2 / \text{Tr}(\mathbf{R}) \quad (\text{IV.15})$$

onde
$$\text{Tr}(\mathbf{R}) = (N+1)S_a \left\{ \left[\sum_k |h(k)|^2 + \text{NSR} \right] + N' \right\} \quad (\text{IV.15a})$$

IV.2.4 - Desempenho

A comparação entre o desempenho (MSE mínimo) do DFE e do equalizador transversal (ambos com o mesmo número de taps) tem sido uma questão interessante. Em /4/ Qureshi afirma que esta questão não tem uma resposta definitiva. Em /20/ Falconer conclui, através de simulações, que o DFE apresenta desempenho superior. Entretanto em /3/, Guidoux apresenta resultados que comprovam que, para canais telefônicos, o desempenho do DFE é levemente inferior ao equalizador transversal. Na verdade, o desempenho de cada tipo de equalizador depende das características do canal que está sendo utilizado, da fase de amostragem e da posição do tap de referência. Por isto, uma análise matemática do problema se torna bastante complexa. No capítulo V serão apresentadas várias simulações, e esta questão voltará a ser discutida.

IV.3 - Equalizador com Espaçamento Fracional

Nas seções III.5 e III.7 (eq.(III.43) e fig.III.5 respectivamente), foi levantado o problema da dependência entre $J_{\min}$ (MSE mínimo na saída do equalizador) e a fase de amostragem. Na seção seguinte esta dependência é explicitada e é mostrado que, enquanto no equalizador transversal, com os taps espaçados de T segundos (equalizador convencional), a fase de amostragem tem forte

influência no valor de $J_{\min}$, para um equalizador com espaçamento $T' < T$ isto não ocorre.

IV.3.1 - Sensibilidade à Fase de Amostragem

Até aqui tem-se admitido que a resposta impulsiva do canal equivalente $h(t)$ é amostrada de tal forma que $h(0)$ corresponda ao pico de $h(t)$ (como $h(t)$ é complexo, o pico é definido como sendo o instante em que $|h(t)|$ é máximo). Para uma fase genérica em que a amostragem pode se deslocar de t_0 em relação ao instante de ocorrência do pico de $h(t)$, pode-se escrever

$$H'(f) = H(f) e^{-j2\pi f t_0} \quad (IV.16)$$

onde $H(f)$ é transformada de Fourier de $h(t)$.

Assim, a eq. (III.43) pode ser escrita como

$$J_{\min} = S_a T \int_{-1/2T}^{1/2T} \frac{NSR}{\left| \left(\frac{1}{T} \right) \sum_n H'(f - n/T) \right|^2 + NSR} df \quad (IV.17)$$

Para o desenvolvimento de (IV.17), considere a fig.IV.2, onde é

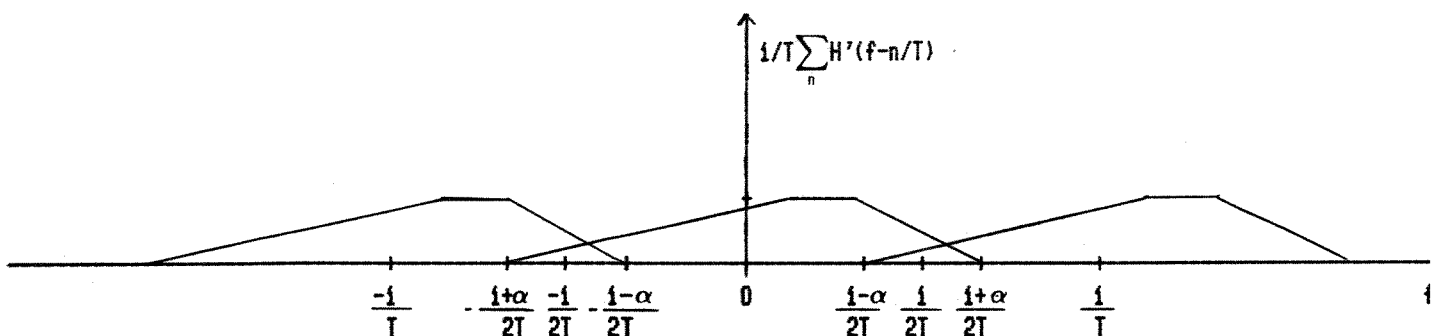


Fig.IV.2 - Espectro na entrada do equalizador.

representado o espectro do sinal na entrada do equalizador, para um sistema equivalente com excesso de faixa α . Então a eq.(IV.17) pode ser escrita como

$$J_{\min} = S_a T \left[\int_{-1/2T}^{-(1-\alpha)/2T} \frac{NSR}{\left[(1/T) |H(f) + H(f+1/T) \exp(-j2\pi f t_0/T)| \right]^2 + NSR} df + \right. \\ \left. \int_{-(1-\alpha)/2T}^{(1-\alpha)/2T} \frac{NSR}{|(1/T)H(f)|^2 + NSR} df + \right. \\ \left. \int_{(1-\alpha)/2T}^{1/2T} \frac{NSR}{\left[(1/T) |H(f) + H(f-1/T) \exp(j2\pi f t_0/T)| \right]^2 + NSR} df \right] \quad (IV.18)$$

Observe que o segundo termo de (IV.18) não depende de t_0 nem da fase de $H(f)$ pois, na faixa $|f| < (1-\alpha)/2T$, não há superposição de espectros. Nos segundo e terceiro termos a soma

$$H(f) + H(f \pm 1/T) \exp(\mp 2\pi f t_0/T)$$

pode se tornar muito pequena ou se anular, dependendo do valor de t_0 e da fase de $H(f)$. Neste caso o integrando aumenta e, em consequência, $J_{\min}$ cresce. Em geral, para canais com fortes distorções de fase e excesso de faixa da ordem de 50%, ainda que t_0 seja otimizado [23], o valor de $J_{\min}$ não é satisfatório. Portanto, pode-se concluir que a região de superposição de espectros em torno da frequência $1/2T$ Hz é a responsável pela forte sensibilidade do

equalizador convencional à fase de amostragem. Logo, uma maneira natural de se corrigir o problema é aumentar a taxa de amostragem para $1/T' > 1/T$ de forma a evitar a superposição. Pela fig.IV.2, nota-se que taxa mínima para que isto ocorra é

$$\frac{1}{T'} > \frac{1+\alpha}{T} \quad (\text{IV.19})$$

Nesta situação o espaçamento entre os taps do equalizador também passa a ser T' e, para facilitar a implementação digital, T' deve ser escolhido como uma fração racional de T , isto é,

$$T' = KT / L$$

onde K e L são inteiros primos entre si, e $K/L < 1/(1+\alpha)$.

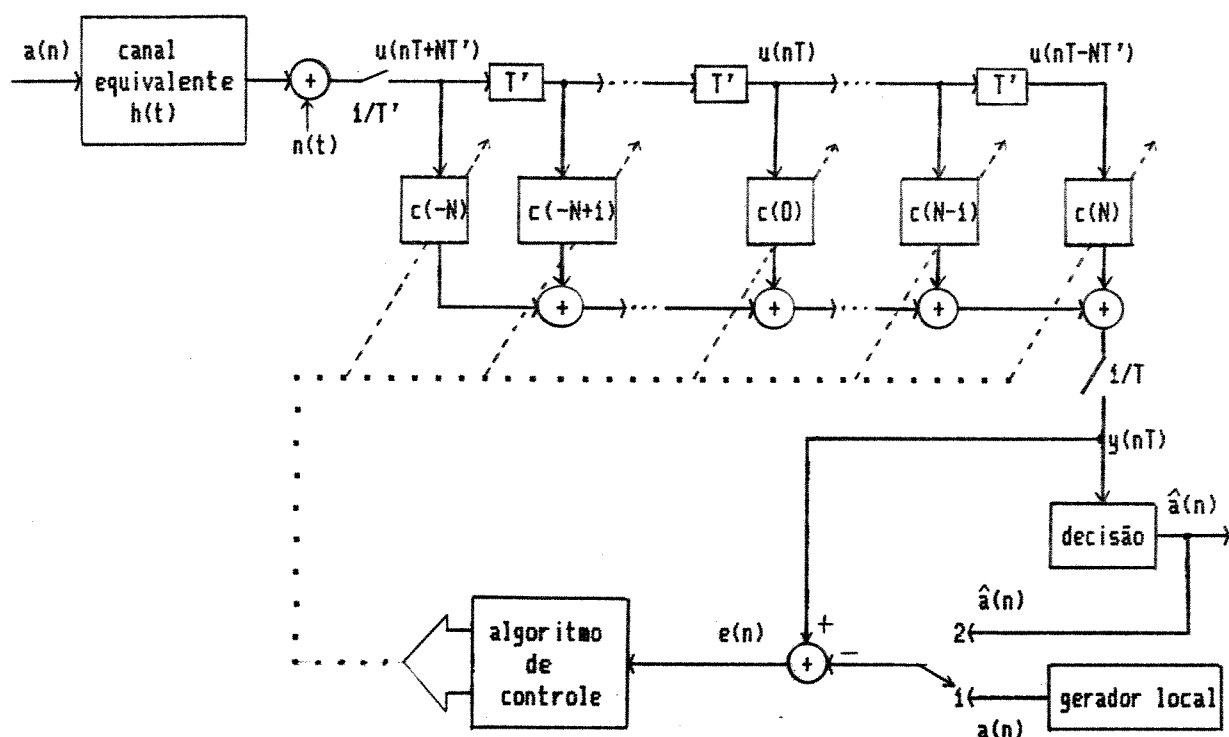


Fig.IV.3 - Equalizador com Espaçamento Fracional.

Por este motivo, este sistema é denominado equalizador com espaçamento fracional (Fractionally-Spaced Equalizer - FSE). A fig.IV.3 mostra um FSE com $M=2N+1$ taps. Note que o sinal recebido é amostrado à taxa $1/T'$ Hz, porém a saída só é computada a cada T segundos, que é o período de geração de símbolos.

Resumindo, num FSE a região de transição $(1-\alpha)/2T < f < (1+\alpha)/2T$ não sofre o efeito da superposição de espectros. Consequentemente, não há a formação de vales ou nulos espectrais na entrada do equalizador, tornando-o assim insensível à fase de amostragem.

IV.3.2 - Coeficientes Ótimos e MSE Mínimo

O conjunto de coeficientes que minimiza o MSE na saída do FSE pode ser encontrado da mesma forma que na seção III.4. Pela fig.IV.3, o sinal $y(nT)$ na saída do equalizador é dado por

$$y(nT) = \sum_{j=-N}^N c(j)u(nT-jT') \quad (IV.20)$$

onde $u(nT') = \sum_j a(j)h(nT'-jT) + n(nT')$ (IV.21)

Observe por (IV.20) que a saída só é computada a cada T segundos. O erro quadrático médio entre o sinal de saída $y(nT)$ e o sinal desejado $a(n)$, pode ser escrito como

$$J(c) = E \left[(c''(n)u'(n) - a'(n)) (u'(n)c(n) - a(n)) \right] \quad (IV.22)$$

onde $c'(n) = [c(-N), \dots, c(N)]$ (IV.23)

$$u'(n) = [u(nT+NT'), \dots, u(nT'), \dots, u(nT-NT')] \quad (IV.24)$$

$c(n)$ é vetor de coeficientes e $u(n)$ o vetor de entrada.

Desenvolvendo o lado direito da eq.(IV.22), chega-se a

$$J(\mathbf{c}) = \mathbf{c}''(n)R\mathbf{c}(n) - \mathbf{c}''(n)\mathbf{p} - \mathbf{p}''\mathbf{c}(n) + S_a \quad (\text{IV.25})$$

onde $S_a = E[a(n)a^*(n)]$ (IV.25a)

R é uma matriz $M \times M$, definida por $R = E[u^*(n)u'(n)]$, cujos elementos são (ver eq.(III.23) :

$$r(i, m) = S_a \sum_k h^*(kT - iT')h(kT - mT') + E[n^*(nT - iT')n(nT - mT')] \quad (\text{IV.25b})$$

para $i, m = -N, \dots, N$

$\mathbf{p} = E[u^*(n)a(n)]$ é um vetor de dimensão M , dado por

$$\mathbf{p}' = S_a [h^*(NT'), \dots, h^*(0), \dots, h^*(-NT')] \quad (\text{IV.25c})$$

A eq.(IV.25) atinge seu valor mínimo quando

$$R\mathbf{c}(n) - \mathbf{p} = 0 \quad (\text{IV.26})$$

Portanto, o vetor ótimo de coeficientes é dado por

$$\mathbf{c} = R^{-1} \mathbf{p} \quad (\text{IV.27})$$

e o MSE correspondente é

$$J_{\min} = S_a - \mathbf{p}''\mathbf{c} \quad (\text{IV.28})$$

Supondo que as amostras do ruído espaçadas de kT' , $k \neq 0$, são incorrelatas entre si (o que não é verdade para o sistema da fig.II.6), e definindo

$$S_n = E[n(kT')n^*(kT')] \quad (\text{IV.29a})$$

e $NSR = S_n/S_a$,

a eq.(IV.25b) pode ser reescrita como

$$r(i, m) = S_a \left[\sum_k h^*(kT - iT') h(kT - mT') + NSR \delta(i - m) \right] \quad (IV.29b)$$

Com essas considerações, é mostrado em /24/ que a resposta em frequência para uma FSE com infinitos taps é dada por

$$C(f) = \frac{H^*(f)}{(1/T) \sum_k |H(f - k/T)|^2 + NSR}, \quad |f| < 1/T' \quad (IV.30a)$$

Com $C(f)$ acima, o MSE mínimo pode ser escrito como

$$J_{min} = S_a \left[1 - \int_{-1/2T}^{1/2T} \frac{\sum_k |H(f - k/T)|^2}{(1/T) \sum_n |H(f - n/T)|^2 + NSR} df \right] \quad (IV.30b)$$

Duas conclusões importantes podem ser tiradas a partir das expressões para $C(f)$ e J_{min} acima :

- 1 - A eq.(IV.30a) representa a associação em cascata entre um filtro casado com o canal equivalente, e um filtro transversal de comprimento infinito e com espaçamento T entre os taps.
- 2 - A eq.(IV.30b) mostra que a fase de amostragem e a resposta de fase do canal equivalente não influenciam no cálculo de J_{min} . Assim, o desempenho do sistema no estado estacionário é independente destas características. Observe que o mesmo não acontece para o equalizador convencional, onde J_{min} é extremamente dependente destes fatores (ver eq.(IV.18).

IV.3.3 - Algoritmo do Gradiente

Como no caso do equalizador convencional, o ajuste dos taps no FSE faz uso de estimativas do gradiente do erro. Assim,

$$c(n+1) = c(n) - \mu \nabla(n) e(n) \quad (\text{IV.31})$$

Note que o algoritmo acima só deve ser atualizado a cada T segundos, pois $e(n)$ só é calculado com este período.

A análise da convergência do algoritmo em (IV.31) é semelhante àquela realizada no capítulo III. Assim, se a constante de adaptação μ estiver dentro dos limites impostos pela eq.(III.78), a convergência é garantida e, como é mostrado em /25/, ocorre com a mesma velocidade do equalizador convencional com KM/L taps.

Um sério problema associado ao FSE é a unicidade da solução em (IV.27). Observe pela fig.IV.4 que para $(1+\alpha)/2T < f < 1/2T'$, apenas o ruído está presente. Assim, se o ruído for muito baixo ou nulo,

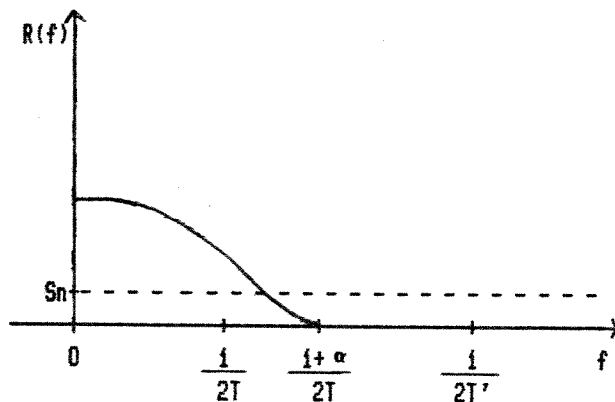


Fig.IV.4 - Espectro na entrada do FSE. S_n é o ruído presente.

aparentemente (ver eq.(III.34)) a característica espectral do FSE nesta região poderia assumir infinitas formas, isto é, a matriz R seria singular. Entretanto, pode-se mostrar matematicamente /24/ que, para sistemas com excesso de faixa menor que 100%, R é não

singular e, conseqüentemente, o vetor ótimo de coeficientes é único. Na verdade, quando o ruído é baixo, $M(L-K)/L$ autovalores de R são praticamente nulos /26/, tornando assim a matriz R quase singular (ill-conditioned). Com isto existem muitos conjuntos de coeficientes que produzem essencialmente o mesmo MSE, alguns dos quais podem ser compostos por elementos com valores elevados, e causar a saturação dos registros, quando o algoritmo é implementado digitalmente, com aritmética de ponto fixo. Evidentemente, nesse caso, haverá uma forte degradação no desempenho. Em /26/ e /27/, são descritos algoritmos que procuram manter os taps dentro de limites que evitem a saturação. A idéia é a injeção de ruído, controlada pelo próprio algoritmo do gradiente, de forma a reforçar a não singularidade da matriz R . Claro que isto também aumenta o MSE, porém a degradação é bem menor que quando ocorre saturação. Em particular, o algoritmo apresentado em /27/ injeta ruído apenas na faixa $(1+\alpha)/2T < f < 1/2T$, reduzindo assim ainda mais o efeito sobre o MSE.

Outra desvantagem do FSE é aumento na complexidade computacional. Para gerar uma resposta impulsiva de mesmo comprimento que a gerada pelo equalizador convencional, o FSE precisa de um número de taps L/K vezes maior. No entanto, como os processadores de sinais disponíveis atualmente são bastante potentes, isto não representa um sério problema.

A exemplo do equalizador convencional, o FSE também pode ter sua convergência acelerada pelos mesmos métodos descritos na seção III.8. Em especial, a equalização cíclica com auxílio da FFT pode ser usada com excelentes resultados /28/.

No capítulo V será feita uma análise comparativa entre o

desempenho dos equalizadores fracional e convencional para várias situações, de modo que os aspectos discutidos nesta seção poderão ser investigados do ponto de vista prático.

IV.4 - Equalizadores de Convergência Rápida

O algoritmo do gradiente, derivado a partir da minimização do erro quadrático médio na saída do equalizador, tem seu desempenho diretamente relacionado às características do canal equivalente e da constante de adaptação μ . Na seção III.8 foram apresentadas algumas técnicas para tornar o algoritmo mais rápido e independente do canal. Entretanto, estas técnicas só podem ser usadas no início do processo de equalização pois, como foi mostrado, é necessário a utilização de uma sequência de treinamento previamente estabelecida e conhecida no receptor. Assim, para rastrear possíveis variações nas características do canal (que podem ser rápidas como no caso de canais de microondas), estas técnicas não se aplicam. Uma alternativa é a aplicação de uma outra classe de algoritmos, conhecidos como algoritmos dos mínimos quadrados (Least-Squares Algorithms - LSA) que além de terem a capacidade de acompanhar as variações rápidas do canal, também se caracterizam por uma convergência inicial extremamente rápida.

Existem vários algoritmos baseados no critério dos mínimos quadrados [4], [6]. Nesta seção serão apresentados dois deles, possivelmente os mais utilizados em equalizadores adaptativos: o algoritmo rápido de Kalman (Fast Kalman algorithm - FKA) e o algoritmo em treliça (Least-Squares Lattice Algorithm - LSLA). Ambos minimizam a mesma função, diferindo pela maneira e a complexidade com as quais cada um atinge este objetivo.

IV.4.1 - Algoritmo Rápido de Kalman

O objetivo dos LSA é gerar um vetor de coeficientes $c(n)$ que minimize a função

$$\hat{E}(n) = \sum_{k=0}^n \xi^{n-k} |a(k) - c'(n)u(k)|^2 \quad (\text{IV.32})$$

onde $c(n)$ e $u(n)$ são definidos em (III.4a) e (III.4b) respectivamente

e ξ é um número real entre 0 e 1.

A constante ξ é denominada fator de esquecimento pois, quando $\xi < 1$, os termos anteriores ao instante n são atenuados geometricamente e, em consequência, o presente tem uma influência maior que o passado. É esta característica que possibilita a equalização de canais variantes no tempo.

Como é mostrado em /29/, o vetor de coeficientes $c(n)$ que minimiza (IV.32) é tal que

$$c(n) = c(n-1) + A^{-1}(n)u^T e(n) \quad (\text{IV.33})$$

onde
$$e(n) = a(n) - c'(n)u(n) \quad (\text{IV.33a})$$

$$A(n) = \sum_k \xi^{n-k} u(k)u^T(k) + \xi^n \delta I \quad (\text{IV.33b})$$

I = matriz identidade $M \times M$

M = número de taps

$0 < \delta \ll 1$ (valor inicial da diagonal principal da matriz A)

Observe que a principal diferença entre o algoritmo em (IV.33) e algoritmo do gradiente em (III.69), é que a constante μ foi

substituída pela matriz inversa de $A(n)$. Pode-se mostrar /7/ que esta substituição gera as seguintes vantagens:

1 - A convergência é rápida e independe das características do canal.

2 - Quando o número de iterações tende a infinito, o vetor de coeficientes atinge seu valor ótimo (no sentido de mínimo MSE), e $J(n)=J_{min}$, isto é, não há flutuações em torno do valor ótimo (compare com a eq.(III.75)).

3 - O algoritmo é inerentemente estável.

Na computação de (IV.33) é necessária a inversão da matriz $A(n)$. Isto pode ser feito recursivamente através do algoritmo de Kalman /6/,/29/. Entretanto, o número de operações é proporcional ao quadrado do número de taps M , tornando o algoritmo inviável quando M é elevado. Explorando o fato de que, a cada iteração, somente as amostras nas extremidades do filtro transversal mudam (as restantes são apenas deslocadas), pode-se reduzir a complexidade computacional a um número proporcional a M . Este método é conhecido como algoritmo rápido de Kalman. A idéia básica do algoritmo é o uso de um preditor linear para estimar a nova amostra que entra pelo lado esquerdo do filtro transversal (forward predictor) e a amostra mais antiga a ser descartada no extremo direito (backward predictor). Uma derivação detalhada do FKA pode ser encontrada em /6/ ou /30/. Aqui serão apresentadas apenas as equações que compõem o algoritmo e que serão usadas nas simulações do capítulo V.

- Algoritmo Rápido de Kalman -

$$f(n) = u(n+N) - F'(n-1)u(n-1) \quad (\text{IV.34a})$$

$$F(n) = F(n-1) + K(n-1)f(n) \quad (\text{IV.34b})$$

$$f_1(n) = u(n+N) - F'(n)u(n-1) \quad (\text{IV.34c})$$

$$E(n) = \xi E(n-1) + f_1^T(n)f_1(n) \quad (\text{IV.34d})$$

$$\left[\frac{K_1(n)}{\mu(n)} \right] = \left[\frac{f_1^T(n) / E(n)}{K(n-1) - F(n)f_1^T(n) / E(n)} \right] \quad (\text{IV.34e})$$

$$b(n) = u(n-N) - B'(n-1)u(n) \quad (\text{IV.34f})$$

$$B(n) = [B(n-1) + K_1(n)b(n)] / (1 - \mu(n)b(n)) \quad (\text{IV.34g})$$

$$K(n) = K_1(n) + B(n)\mu(n) \quad (\text{IV.34h})$$

$$y(n) = c'(n-1)u(n) \quad (\text{IV.34i})$$

$$e(n) = a(n) - y(n) \quad (\text{IV.34j})$$

$$c(n) = c(n-1) + K(n)e(n) \quad (\text{IV.34k})$$

- Inicialização -

- 1 - O algoritmo é inicializado a partir da iteração $n=1$.
- 2 - Todos os vetores (variáveis em negrito) são nulos para $n=0$.
- 3 - $E(0) = \delta$, onde δ é real e $0 < \delta \ll 1$.

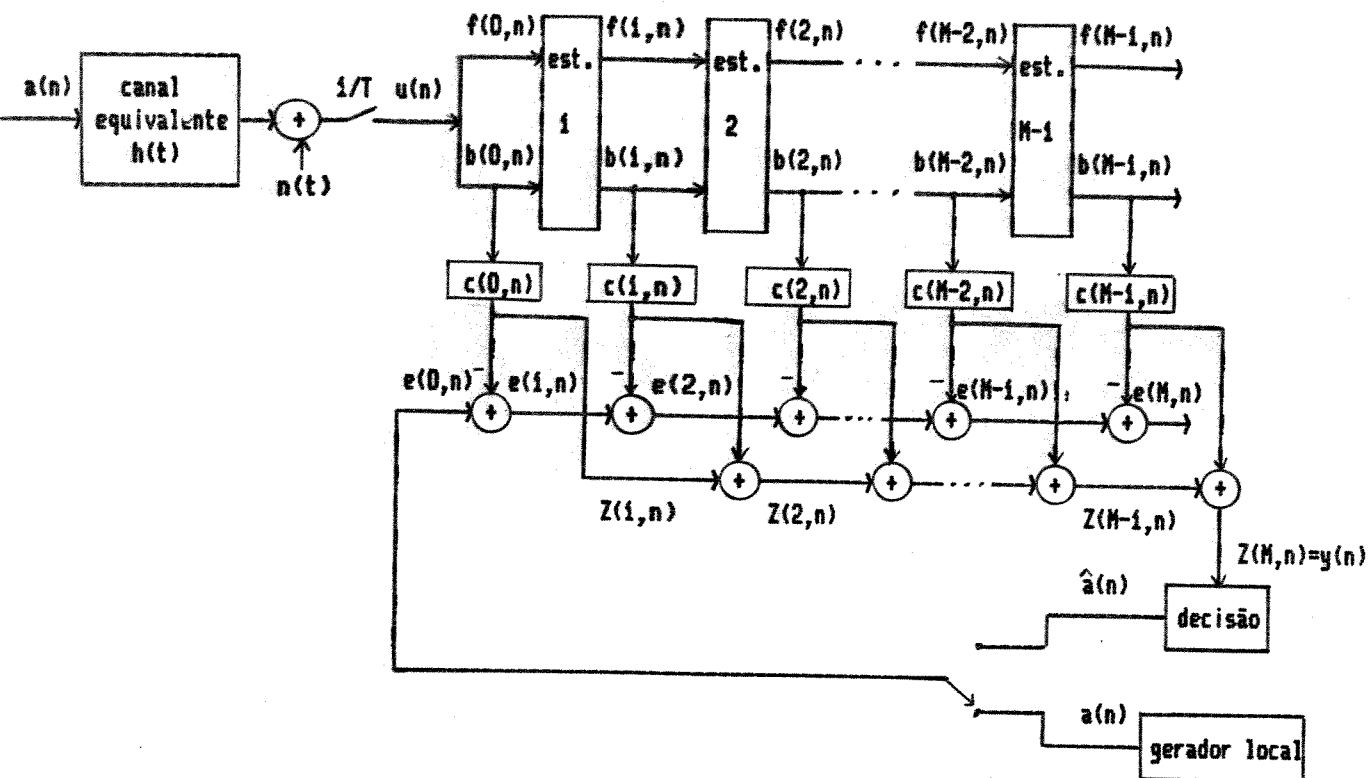
Como é mostrado em /7/ e /31/, após 2M iterações o conjunto de coeficientes gerado pelo FKA já está bastante próximo do seu valor ótimo. Entretanto, em /32/ verificou-se que, quando implementado com precisão finita e após um grande número de iterações, o algoritmo se torna instável. O problema ocorre quando algumas quantidades, teoricamente positivas, se tornam negativas em consequência dos erros de arredondamento. Isto pode ser contornado através da reinicialização periódica do algoritmo como sugerido em /7/, /32/ e

/33/. Durante o processo de reinicialização o equalizador opera com o algoritmo do gradiente, de modo que o fluxo de dados não é interrompido e a degradação não é significativa. Com este procedimento o FKA é aplicável à equalização adaptativa na transmissão de dados.

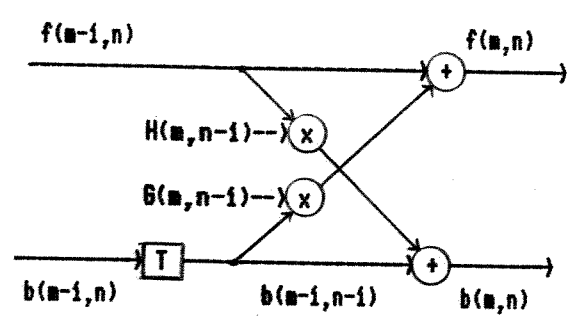
O algoritmo descrito aqui se aplica ao equalizador transversal com espaçamento T mas, com algumas modificações, pode também ser usado no FSE /30/ e no DFE /34/.

IV.4.2 - Algoritmo em Treliça

Na seção IV.4.1 o problema dos mínimos quadrados foi resolvido através da aplicação do algoritmo rápido de Kalman num equalizador transversal. Uma alternativa que oferece algumas vantagens é a estrutura em treliça mostrada na fig.IV.5a, onde cada variável está relacionada ao estágio m no instante n . Nesta estrutura a associação em cascata dos estágios de 1 a $M-1$, forma um preditor linear de ordem $M-1$ /7/. Assim, um equalizador com M taps utiliza $M-1$ estágios como os da fig.IV.5b. A cada T segundos uma nova amostra $u(n)$ é injetada no estágio 1. O m -ésimo estágio produz dois sinais, $f(m,n)$ e $b(m,n)$, que correspondem respectivamente aos erros direto e reverso (forward and backward errors), e que são as entradas do estágio $m+1$. A quantidade $G(m,n)$ tem a forma de uma correlação cruzada entre os erros direto e reverso, e $H(m,n)$ é conhecido como coeficiente de reflexão. A saída $Z(m+1,n)$ de cada estágio é obtida multiplicando-se o tap correspondente $c(m,n)$ pelo erro reverso $b(m,n)$, sendo que o sinal equalizado é dado por $Z(M,n)$. Finalmente é formado o sinal $e(m,n)$, que representa o erro entre o sinal na saída de cada estágio $Z(m,n)$ e o símbolo decidido $\hat{a}(n)$ (ou



(a)



(b) - m -ésimo estágio

Fig.IV.5 - Equalizador em Treliza.

$a(n)$ no período de treinamento), e que é utilizado como informação para ajuste dos taps no instante $n+1$.

O LSLA deve gerar um conjunto de taps $c(n)$ que minimize a função

$$\hat{\epsilon}(n) = \sum_{k=0}^n \xi^{n-k} |a(k) - c'(n)b(k)|^2 \quad (\text{IV.35})$$

onde $c'(n) = [c(0,n), c(1,n), \dots, c(M-1,n)]$ (IV.36)

$b'(n) = [b(0,n), b(1,n), \dots, b(M-1,n)]$ (IV.37)

A derivação do LSLA pode ser encontrada em /6/, /7/ ou /30/ e não será apresentada aqui. As equações são as seguintes:

- Least-Square Lattice Algorithm -

$$f(m,n) = f(m-1,n) - G(m,n-1)b(m-1,n-1) \quad (\text{IV.38a})$$

$$b(m,n) = b(m-1,n-1) - H(m,n-1)f(m-1,n) \quad (\text{IV.38b})$$

$$K(m,n) = \xi K(m,n-1) + t(m,n-1)f(m-1,n) \quad (\text{IV.38c})$$

$$G(m,n) = K(m,n) / Eb(m-1,n-1) \quad (\text{IV.38d})$$

$$H(m,n) = K^*(m,n) / Ef(m-1,n) \quad (\text{IV.38e})$$

$$Ef(m,n) = Ef(m-1,n) - G(m,n)K^*(m,n) \quad (\text{IV.38f})$$

$$Eb(m,n) = Eb(m-1,n-1) - H(m,n)K(m,n) \quad (\text{IV.38g})$$

$$t(m,n) = (1 - V(m-1,n)) b^*(m-1,n) \quad (\text{IV.38h})$$

$$V(m,n) = V(m-1,n) + |t(m,n)|^2 / Eb(m-1,n) \quad (\text{IV.38i})$$

$$Z(m,n) = Z(m-1,n) + [c(m,n-1)/Eb(m-1,n-1)]b(m-1,n) \quad (\text{IV.38j})$$

$$e(m,n) = a(n) - Z(m,n) \quad (\text{IV.38k})$$

onde $m = 1, 2, \dots, M-1$ e $n = 1, 2, \dots$

Os coeficientes e a saída do equalizador são atualizados respectivamente por

$$c(m,n) = c(m,n-1) + t(m,n)e(m-1,n); \quad m=0,\dots,M-1 \quad (\text{IV.38l})$$

$$y(n) = Z(M,n); \quad n=0,1,2,\dots \quad (\text{IV.38m})$$

- Inicialização -

$$G(m,0) = H(m,0) = K(m,0) = t(m,0) = c(m,0) = 0 \quad (\text{IV.38n})$$

$$f(0,n) = b(0,n) = u(n) \quad (\text{IV.38o})$$

$$Ef(0,n) = Eb(0,n) = Ef(0,n-1) + u(n)u^*(n) \quad (\text{IV.38p})$$

$$e(0,n) = a(n) \quad (\text{IV.38q})$$

$$Z(0,n) = V(0,n) = 0 \quad (\text{IV.38r})$$

Note que as equações de (IV.38o) a (IV.38r) são utilizadas a cada iteração.

Algumas observações importantes podem ser feitas sobre o LSLA:

a) Para um canal equivalente $h(t)$ não ideal, a sequência $u(n), u(n-1), \dots$, apresenta uma correlação proporcional à IIS causada pelo canal (ver eqs. (III.20) e (III.23)). Quanto maior a IIS, maior será a correlação, maior o espalhamento dos autovalores da matriz R e, em consequência, menor a velocidade de convergência.

No equalizador em treliça, os taps operam sobre uma sequência $b(0,n), b(1,n), \dots, b(M-1,n)$, obtida através de uma transformação aplicada à sequência original de entrada (ver fig.IV.5a). Pode-se mostrar /7/ que esta transformação é tal que a sequência obtida contém a mesma quantidade de informação que a sequência de entrada e, o mais importante, seus termos são incorrelatos. Portanto, a matriz de correlação associada a esta sequência é diagonal, sendo por isto facilmente inversível. Em consequência, o LSLA converge para a solução ótima bem mais rapidamente que o algoritmo do gradiente, e de forma independente das características de $h(t)$.

Definindo-se o MSE na saída do equalizador como

$$J(n) = E \left[|a(n) - y(n)|^2 \right] \quad (\text{IV.39})$$

então, admitindo-se que o equalizador opera num ambiente estacionário e que $\xi = 1$, pode-se mostrar que //

$$E[J(n)] = J_{\min} \left(1 + \frac{M}{n-1} \right) \quad (\text{IV.40})$$

onde $J_{\min}$ é o MSE mínimo. Observando a eq.(IV.40), pode-se afirmar que:

- 1 - Na média, o LSLA converge (dentro de 2dB) para $J_{\min}$ em aproximadamente $2M$ iterações.
- 2 - A velocidade de convergência não depende do espalhamento dos autovalores.
- 3 - Quando o número de iterações n tende infinito, $J(n) = J_{\min}$, isto é, não há excesso como no caso do algoritmo do gradiente (ver eq.(III.75).

b) O LSLA é recursivo no tempo e na ordem. A recursividade na ordem permite a incorporação ou a retirada de estágios no extremo direito da fig.IV.5a, sem afetar os parâmetros já calculados nos demais estágios. Esta propriedade se deve essencialmente à ortogonalidade da sequência transformada, sendo útil quando não se sabe a priori qual o grau do preditor a ser utilizado.

c) A estrutura em treliça exibe menor sensibilidade aos erros de quantização e arredondamento que o equalizador transversal, de modo que a instabilidade verificada no FKA não ocorre no LSLA.

d) O LSLA é matematicamente equivalente ao FKA, isto é, apresenta as mesmas características de convergência, com as vantagens adicionais dos itens b e c. O preço pago é o aumento da complexidade computacional. Na tabela IV.1 é mostrado o número de operações realizadas para que cada algoritmo gere o sinal equalizado $y(n)$.

Algoritmo	Número de multi- plicações reais	Número de divi- sões reais
Gradiente	$8M + 2$	0
FKA	$40M + 18$	4
LSLA	$55M - 51$	$8M - 8$

Tabela IV.1 - Complexidade computacional

A complexidade computacional do LSLA pode ser reduzida através da aplicação do algoritmo do gradiente para o ajuste dos taps do equalizador em treliça /6/. A redução conseguida é significativa mas a velocidade de convergência cai.

e) A generalização do LSLA, para aplicação no FSE e no DFE, pode ser encontrada nas referências /30/ e /35-36/ respectivamente.

Além das referências citadas, em /37/, /38/ e /39/ são apresentadas análises detalhadas dos tópicos discutidos nesta seção. Em particular, em /39/ , a derivação dos algoritmos é realizada geometricamente.

IV.5 - Conclusão

Neste capítulo foram estudados quatro tipos de equalizadores, que apresentam características diferentes em relação ao equalizador do capítulo III. O equalizador com decisão realimentada é formado

por uma estrutura não linear, que utiliza os símbolos já decididos com o objetivo de cancelar a IIS causada por estes sobre os símbolos futuros. Como foi mostrado, as vantagens sobre o equalizador transversal são discutíveis, de modo que somente no capítulo seguinte, de posse dos resultados das simulações, é que uma comparação mais efetiva poderá ser feita.

Outra questão importante abordada neste capítulo, foi a de como a fase de amostragem interfere no desempenho do sistema. Foi mostrado que o equalizador convencional é extremamente sensível à fase de amostragem, principalmente para canais com fortes distorções de fase onde, mesmo para a fase de amostragem ótima, o desempenho é ruim. No equalizador com espaçamento fracional, a taxa de amostragem é aumentada até um valor onde as superposições de espectros não ocorram e, neste caso, mostrou-se que J_{min} independe de t_0 e da fase do canal equivalente.

Na última seção, foram apresentados o critério de otimização baseado nos mínimos quadrados, e os algoritmos decorrentes da sua aplicação: o algoritmo rápido de Kalman, para o filtro transversal, e o algoritmo em treliça, que é implementado numa estrutura em forma de treliça. Estes algoritmos convergem rapidamente e independentemente das características do canal, o que não ocorre com o algoritmo do gradiente. A desvantagem é que, comparativamente, há um aumento significativo na complexidade computacional.

Capítulo V - Simulações por Computador

V.1 - Introdução

Neste capítulo são apresentadas várias simulações que objetivam comprovar as análises efetuadas nos capítulos anteriores. As simulações são realizadas com canais telefônicos típicos, de modo que os resultados obtidos podem ser imediatamente aplicados na prática.

Na seção V.2 são feitas algumas observações, concernentes aos aspectos gerais das simulações. Nas seções seguintes são apresentados os resultados das simulações referentes aos diversos tópicos estudados nos capítulos III e IV.

V.2 - Observações sobre as simulações

V.2.1 - Canais Utilizados

Como o objetivo do trabalho é analisar o desempenho dos vários algoritmos estudados nos capítulos precedentes em situações reais, os canais utilizados são modelados de acordo com as características típicas das linhas telefônicas. No apêndice A estes canais são caracterizados, e os métodos usados para o cálculo da resposta impulsiva são descritos.

V.2.2 - Sequência de Treinamento

Em todas as simulações (exceto no caso da equalização cíclica), a sequência de treinamento é a padronizada pelo CCITT. O polinômio gerador é dado por

$$P(X) = 1 + X^6 + X^7 \quad (V.1)$$

e a associação entre a sequência binária gerada por $P(X)$ e a constelação de símbolos é a seguinte:

bit 0 ==> símbolo com coordenadas 3 e 0

bit 1 ==> símbolo com coordenadas -3 e 3

Observe que, com estes símbolos, a variância do sinal durante o treinamento é

$$\begin{aligned} S_a(\text{treino}) &= 0,5 (3)^2 + 0,5 (3\sqrt{2})^2 \\ &= 13,5. \end{aligned}$$

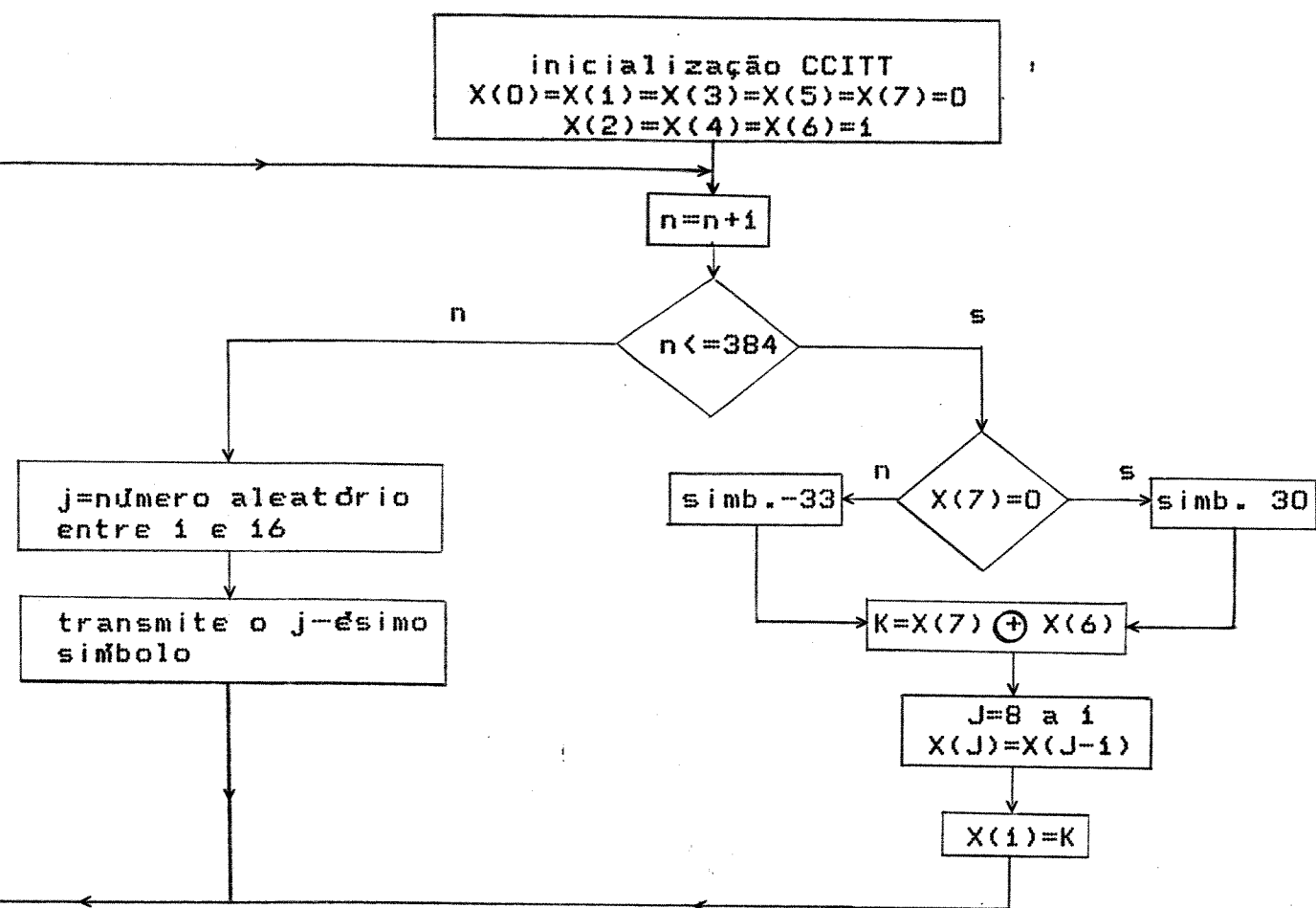
e portanto igual à variância do sinal quando toda a constelação é transmitida (ver eq.(II.26)). Isto evita uma mudança brusca no nível do sinal recebido, o que pode prejudicar o desempenho do sistema.

A sequência de treinamento é transmitida durante as primeiras 384 iterações (norma V.29 - CCITT). Após este período, todos os símbolos são transmitidos de forma aleatória, com o objetivo de simular uma sequência de dados do usuário após passagem pelo embaralhador.

O algoritmo utilizado nos programas simuladores é mostrado na página seguinte.

V.2.3 - Geração do Ruído

Como a relação sinal/ruído tipicamente encontrada em linhas telefônicas é de 24dB, este valor será usado nas simulações. O ruído na entrada do equalizador é modelado como sendo gaussiano e branco. Na verdade isto não é exato, pois o filtro de recepção $g(t)$ (ver fig.II.9) é um passa-baixas, e portanto o ruído na sua saída não é



- Algoritmo utilizado para geração da sequência de transmissão.

branco. Entretanto, como o filtro $g(t)$ possui uma característica de amplitude dada pela raiz quadrada do cosseno-levantado, as amostras do ruído tomadas a cada T segundos são incorrelatas, de modo que o ruído amostrado $n(nT)$ pode ser considerado branco. Para o equalizador com espaçamento fracional, as amostras do ruído são tomadas a cada $T' < T$ segundos, e apresentam correlação não nula. No entanto, mesmo neste caso, é comum na literatura a realização de simulações supondo-se $n(nT')$ ruído branco, prática que também será adotada neste trabalho.

A geração do ruído é realizada da forma descrita a seguir. Conhecendo-se a resposta impulsiva do canal $h(t)$, a variância do sinal S_a , e a relação sinal/ruído SNR(dB) na entrada do equalizador, a variância do ruído S_n é dada por

$$S_n = \left[S_a \sum_n |h(n)|^2 \right] 10^{-\text{SNR}/10} \quad (\text{V.2})$$

Seja agora x uma variável aleatória uniformemente distribuída (v.a.u) entre 0 e Δ . Então a variância S_x , e a média m_x desta variável são dadas por

$$S_x = \frac{\Delta^2}{12} \quad (\text{V.3})$$

$$m_x = \Delta / 2 \quad (\text{V.4})$$

Considerando-se o teorema do Limite Central, pode-se admitir que, com razoável precisão, a soma de 12 v.a.u entre 0 e Δ , resultará numa distribuição gaussiana de média 6Δ e variância Δ^2 . Assim, a cada iteração n , uma amostra $n(n)$ de um ruído gaussiano branco de média zero e variância Δ^2 pode ser gerada por

$$n(n) = x_1 + x_2 + \dots + x_{12} - 6\Delta \quad (V.5)$$

onde $x_i = \text{v.a.u entre } 0 \text{ e } \Delta$

e, para a SNR desejada, $\Delta^2 = S_n$.

O trecho de programa em linguagem PASCAL que simula o ruído é o seguinte:

```
ruído = 0;
for i=1 to 12 do
    ruído = ruído +  $\Delta$ random;
ruído = ruído -  $6\Delta$  ;
```

onde $\text{random} = \text{v.a.u entre } 0 \text{ e } 1$, disponível no PASCAL.

Existem métodos mais robustos para se produzir uma distribuição gaussiana /40/, mas a complexidade computacional adicional é significativa, o que torna estes algoritmos lentos. O algoritmo descrito acima foi testado através de simulações e os resultados obtidos comprovaram sua eficiência na aplicação em questão.

V.2.4 - Medida do Erro Quadrático Médio (MSE)

Com o objetivo de minimizar o trabalho computacional nas simulações, o MSE na saída do equalizador foi calculado a cada iteração através da eq.(III.12). Na verdade a maneira mais correta de se medir o MSE seria realizar o experimento várias vezes (pelo menos 50) com diferentes sequências, calcular o MSE para cada uma delas, e então tirar o comportamento médio. Contudo, como na prática a sequência de treinamento é sempre a mesma (CCITT), o MSE calculado pela eq.(III.12) representa o comportamento médio do

sistema a menos do ruído, que é pequeno e não chega a comprometer a medida.

Nas simulações que se seguem o MSE é normalizado em relação à variância do sinal S_a e expresso em dB, isto é

$$\text{MSE} = 10 \log(J(c)/S_a) \quad (\text{V.6})$$

onde $J(c)$ é dado pela eq.(III.12)

$$S_a = 13,5.$$

V.2.5 - Inicialização do Vetor de Coeficientes ,

Pelas características dos canais telefônicos, uma boa escolha para a inicialização do vetor de coeficientes é fazer todos o taps iguais a zero exceto a parte real do tap central, que é feita igual a 1. Observe pelas figuras das seções seguintes que, em todos os casos, o MSE parte de um nível menor que 0dB (ponto de partida com todos os taps nulos), chegando em alguns casos a alcançar até -2dB. Por isto esta escolha é comumente utilizada na prática, e será também usada em todas as simulações, exceto nos casos da equalização cíclica, algoritmo rápido de Kalman, e algoritmo em treliça, onde todos os taps são inicialmente nulos.

A escolha do número de taps do equalizador obedece, em geral, ao seguinte critério: quando a característica de interesse na simulação não depende do comprimento do equalizador, foram usados 15 taps e, em caso contrário, 31 taps (número usado na prática para modems de 9600 bps).

V.2.6 - Programas Utilizados

As simulações e os resultados apresentados a seguir foram

gerados através de um conjunto de programas escritos na linguagem TURBO PASCAL. No apêndice B é apresentada uma descrição sumária dos principais programas utilizados nas simulações.

V.3 - Algoritmo da Máxima Declividade (SDA)

-Figura V.1: Mostra o comportamento do SDA (Steepest Descent Algorithm) para diferentes valores de μ . A curva 1 foi traçada para o valor ótimo de μ . Na curva 2 as primeiras 50 iterações foram realizadas com um valor de μ maior que o valor ótimo, e a velocidade de convergência caiu. Nas 50 iterações seguintes μ foi aumentado para um valor acima de $2/\lambda_{\max}$ e o algoritmo divergiu, confirmando assim a eq.(III.57).

-Figura V.2: Mostra a sensibilidade do SDA ao espalhamento do autovalores da matriz R. A curva 1 foi traçada para um canal telefônico típico, e as curvas 2 e 3 para canais com distorções de amplitude e fase mais moderadas. Note que, à medida que a relação $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ diminui, a convergência é mais rápida, o que está de acordo com eq.(III.64d).

V.3.1 - Algoritmo do Gradiente

-Figuras V.3, V.4 e V.5: Nestas figuras pode-se observar o comportamento do algoritmo do gradiente para diferentes valores de μ . Na fig.V.3, a curva 1 foi traçada para $\mu=1/\text{Tr}(R)$ que, como é mostrado em /10/, é o valor ótimo. Neste caso, como previsto pela eq.(III.75), o valor final do MSE (-14dB) é aproximadamente 3dB maior que o valor mínimo (-17dB). Para um valor menor de μ , curva 2 da fig.V.3, a convergência é mais lenta, mas o MSE final (não

mostrado na figura) é menor, cerca de -16dB. A fig.V.4 foi traçada para μ compreendido entre $1/\text{Tr}(\mathbf{R})$ e $2/\text{Tr}(\mathbf{R})$. Pode-se notar que a curva é bem mais "ruidosa" que aquela para $\mu=1/\text{Tr}(\mathbf{R})$, que não há aumento na velocidade de convergência, e que o MSE final atingido é maior. Na fig.V.5 tem-se μ ligeiramente menor que $2/\text{Tr}(\mathbf{R})$, isto é, μ está próximo ao limite máximo permitido, e o algoritmo diverge após 375 iterações. Neste caso a eq.(III.75) falha, pois prevê que o algoritmo seria estável. Esta contradição pode ser creditada às aproximações e às hipóteses de independência estatística utilizadas na obtenção de (III.75).

Todos estes fatores mostram que a estimativa do vetor gradiente (eq.(III.67)) não é precisa, e por isto correções muito fortes (valores elevados de μ) não podem ser aplicadas. Uma maneira de se melhorar isto é fazer uma mediação entre várias estimativas, e só depois atualizar os taps (com um valor maior de μ). Contudo, neste caso, as simulações mostram que o tempo perdido para o cálculo da média não é compensado com um aumento na velocidade de convergência. As simulações mostraram ainda que algoritmos como o proposto em /41/, onde o valor de μ é inicialmente elevado ($\mu > 1/\text{Tr}(\mathbf{R})$) e cai gradativamente com o decorrer do processo, não apresentam desempenho substancialmente diferente daquele mostrado na fig.V.3 (curva 1), principalmente no que diz respeito à velocidade de convergência inicial.

Do exposto acima pode-se concluir que a única estratégia possível para se melhorar o comportamento global do algoritmo do gradiente, é fazer $\mu=1/\text{Tr}(\mathbf{R})$ no período de treinamento (384 símbolos) e em seguida baixar este valor para um limite que minimize o MSE residual, mas que permita ao equalizador acompanhar as

variações das características do canal.

A título de ilustração, a tabela V.1 mostra o conjunto de coeficientes ótimo, obtido a partir da solução da eq.(III.29), e também o conjunto obtido pelo algoritmo do gradiente após 1000 iterações para dois valores diferentes de μ . A tabela mostra ainda a distribuição dos autovalores da matriz R para o canal C8444.

! Coef. ótimos ! ! eq.(III.29) !		! Alg. Gradiente ! ! $\mu = 0,02$!		! Alg. Gradiente ! ! $\mu = 0,008$!		! Autovalores ! ! da Matriz R !
! real !		! imag. !		! real !		! imag. !
						! (Sa=13,5) !
! 0,091 !	! 0,215 !	! 0,246 !	! 0,225 !	! 0,123 !	! 0,192 !	! 0,6823 !
! -0,360 !	! -0,267 !	! -0,436 !	! -0,263 !	! -0,374 !	! -0,231 !	! 0,6057 !
! 0,694 !	! 0,218 !	! 0,736 !	! 0,185 !	! 0,671 !	! 0,194 !	! 0,5151 !
! -1,045 !	! 0,005 !	! -1,062 !	! 0,028 !	! -1,041 !	! 0,038 !	! 0,4341 !
! 1,162 !	! -0,466 !	! 1,144 !	! -0,477 !	! 1,155 !	! -0,494 !	! 0,3530 !
! -0,556 !	! 1,026 !	! -0,535 !	! 1,015 !	! -0,517 !	! 1,009 !	! 0,2807 !
! -0,942 !	! -0,957 !	! -1,005 !	! -0,964 !	! -0,975 !	! -0,961 !	! 0,2208 !
! 1,621 !	! -0,237 !	! 1,681 !	! -0,205 !	! 1,656 !	! -0,256 !	! 0,1741 !
! 1,165 !	! 0,117 !	! 1,122 !	! 0,111 !	! 1,179 !	! 0,120 !	! 0,1385 !
! 0,615 !	! 0,196 !	! 0,655 !	! 0,207 !	! 0,622 !	! 0,189 !	! 0,1067 !
! -0,068 !	! 0,026 !	! -0,101 !	! 0,067 !	! -0,031 !	! 0,019 !	! 0,0820 !
! 0,123 !	! -0,028 !	! 0,172 !	! -0,022 !	! 0,118 !	! 0,032 !	! 0,0625 !
! -0,089 !	! 0,054 !	! -0,075 !	! 0,066 !	! -0,094 !	! 0,036 !	! 0,0471 !
! 0,042 !	! -0,073 !	! 0,083 !	! -0,083 !	! 0,033 !	! -0,074 !	! 0,0355 !
! 0,007 !	! 0,057 !	! -0,074 !	! 0,064 !	! -0,014 !	! 0,027 !	! 0,0264 !
! MSEmin=-17,0dB !		! MSEmin=-14,3dB !		! MSEmin=-16,6dB !		! $\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}=25,86$!

Tabela V.1 - Canal C8444, 15 taps, SNR=24dB.

-Figura V.6: Mostra o desempenho do algoritmo do gradiente para um canal com um espalhamento dos autovalores bem inferior em relação ao canal considerado nas figuras V.3 e V.5. Pode-se observar que, como anteriormente, o valor de μ tem forte influência no comportamento do algoritmo. Além disso, como agora a relação $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ é menor, a comparação da curva 1 da fig.V.6 com curva 1 da fig.V.3 mostra uma

significativa diferença no tempo de convergência. Enquanto que para o canal C444 da fig.V.6 o algoritmo converge em aproximadamente 150 iterações, para o canal da C8444 da fig.V.3 são necessárias aproximadamente 300 iterações. Isto confirma a sensibilidade do algoritmo do gradiente ao espalhamento dos autovalores da matriz R .

-Figuras V.7, V.8 e V.9: Mostram o efeito do ruído sobre o desempenho do algoritmo do gradiente. Pela fig.V.7 nota-se que há um ganho de mais de 4dB no MSE mínimo quando a relação sinal/ruído sobe de 24dB para infinito. Observe que a velocidade de convergência não é afetada, o que indica que a influência do ruído sobre o espalhamento dos autovalores é desprezível. A fig.V.8 mostra o efeito do ruído sobre a constelação de pontos na saída do equalizador. A dispersão causada pelo ruído é aparente, tanto na fase de treinamento (lado esquerdo da figura), como no estado estacionário (lado direito). A fig.V.9 ilustra o efeito do ruído sobre o MSE mínimo para dois canais diferentes. É interessante notar que para relações sinal/ruído baixas (10 a 20dB), o MSE cai linearmente com a SNR, indicando que o ruído é o principal responsável pela degradação no desempenho do sistema. Para relações sinal/ruído mais elevadas, o sistema satura, isto é, o MSE mínimo é determinado pela IIS que depende apenas do canal e do número de taps do equalizador. Observe que para a curva 2 (canal C8444), a saturação começa para uma SNR da ordem de 28dB, enquanto que para a curva 1 (canal C444) a saturação começa para uma SNR da ordem de 31dB, o que mostra que o canal C8444 causa mais IIS que o canal C444.

V.4 - Métodos para Aceleração da Convergência

V.4.1 - Algoritmo do Gradiente Modificado

-Figuras V.10a e V.10b: Estas figuras comparam o desempenho dos algoritmos SDA e SDA modificado para dois canais com diferentes dispersões dos autovalores, e também ilustram as condições de estabilidade e convergência para o SDA modificado. As duas curvas inferiores (1 e 2) mostram claramente que o SDA modificado converge mais rapidamente que o SDA convencional (em ambos os algoritmos a constante μ assumiu o seu valor ótimo, isto é, $\mu = 2/(\lambda_{\max} + \lambda_{\min})$ para o SDA convencional, e $\mu = 1/r(i,i)$ para o SDA modificado). No caso do SDA modificado, a atualização dos taps foi feita na seguinte ordem (ver eq.(III.85d)): $k=0,1,-1,2,-2,\dots,-N,N$. As simulações mostraram que, com esta sequência de atualização, a convergência é mais rápida que com a sequência de atualização iniciada pelo tap mais à esquerda: $k=-N,-N+1,\dots,N$. Aparentemente isto se deve ao fato de que, para canais telefônicos, o tap central é, em geral, o de maior valor absoluto, e portanto deve sofrer as correções mais fortes. Observe que, à medida em que os taps vão sendo atualizados (dentro de uma mesma iteração), o termo entre colchetes na eq.(III.85d) vai se tornando menor e os taps à direita e à esquerda do tap central vão sofrendo correções cada vez mais fracas. Uma consequência disto é que o valor de μ para o SDA modificado pode ser maior (em geral pode até ser maior que $2/\lambda_{\max}$) que para o SDA convencional.

As curvas 3 das figuras V.10a e V.10b confirmam a validade dos valores ótimo e máximo de μ das equações (III.85g) e (III.85f) respectivamente. Nas primeiras 25 (15) iterações da fig.10a (fig.10b) o valor de μ esteve acima de $1/r(i,i)$, e a convergência é

mais lenta. Em seguida μ ultrapassa o valor $2/r(i,i)$ e o algoritmo diverge.

Um fato interessante observado nas simulações foi que para μ exatamente igual ao seu valor máximo, isto é, $\mu=2/\lambda_{\max}$ para o SDA convencional e $\mu=2/r(i,i)$ para SDA modificado, o SDA convencional convergiu lentamente para um MSE acima do valor mínimo, permanecendo indefinidamente neste valor, enquanto o SDA modificado permanece estável no MSE inicial, que depende da condição inicial do vetor de coeficientes. Observou-se ainda que, mesmo neste caso, o vetor de coeficientes varia a cada iteração, isto é, parece que o sistema gira em torno de uma mesma latitude na superfície construída num espaço de dimensão M que representa o MSE em função do vetor de coeficientes.

Finalmente, comparando-se as curvas 2 das figuras V.10 e V.10b, pode-se afirmar que o SDA modificado também é sensível às variações na relação $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$. Enquanto na fig.10a o algoritmo converge para o valor final em aproximadamente 35 iterações, na fig.V10b são necessárias apenas 12 iterações.

-Figuras V.11a a V.11e: Mostram o desempenho do algoritmo do gradiente modificado (AGM) e do algoritmo do gradiente convencional (AGC) para diversos canais telefônicos típicos, com a relação $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ variando de 34,2 a 1,79. No AGC o valor de μ foi mantido constante e igual a $1/\text{Tr}(\mathbf{R})$ que, como já foi dito, é o valor que otimiza a convergência inicial. No AGM o valor de μ foi inicialmente 0,07 e, com o decorrer do processo, foi reduzido gradativamente para 0,001. Estes valores, bem como a taxa de redução, foram obtidos experimentalmente. A redução no valor de μ foi feita medindo-se a

relação $S = |e(0,n)|^2 / |e(15,n)|^2$ e comparando-a com um certo limiar X , de modo que, para $S > X$, μ é dividido por 1,05, e em caso contrário permanece constante. Cabe observar que, como no caso do SDA modificado, o valor inicial de μ está bem acima do limite máximo permitido para o AGC, que neste caso é $2/\text{Tr}(R)=0,0192$. Outras simulações mostraram ainda que, como no caso do AGC, o valor máximo de μ para o qual o algoritmo não diverge (por volta de 0,1), ficou bem abaixo do valor máximo permitido para o SDA modificado (0,59). Novamente isto se deve aos erros nas estimativas do vetor gradiente. Finalmente notou-se que a MSE residual para o AGM não obedece a eq.(III.75), e que para um dado valor de μ o erro residual ficou sempre abaixo do valor previsto por esta equação. Este comportamento se deve à diminuição das correções aplicadas aos taps mais distantes do tap central.

Uma análise das figuras V.11a a V.11e mostra que em todos os casos o AGM é superior ao AGC. Em particular, para canais para os quais a relação $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ assume valores elevados, esta vantagem é mais pronunciada. Por exemplo, para o canal C8444, e supondo-se que um MSE de -16 dB seja razoável para uma operação com baixa taxa de erros (isto foi verificado pelas simulações), a fig.V.11a mostra que o AGM converge em aproximadamente 150 iterações, enquanto o AGC consome cerca de 450 iterações para atingir o mesmo valor (-16dB). Este comportamento também ocorre na fig.V.11b para o canal C8004. Para os outros canais, figs.V.11c a V.11e, a convergência já é relativamente rápida, e o limite de -16dB é sempre atingido antes de 150 iterações.

V.4.2 - Equalização Cíclica

-Figuras V.12a e V.12b: Nestas figuras as curvas de número 2 são produzidas pelo processo de equalização cíclica (EC) descrito na seção III.8.2, e as curvas de número 1, pelo algoritmo do gradiente convencional (AGC). Na EC é inicialmente transmitida uma sequência periódica de comprimento máximo, com período igual ao número de taps do equalizador (no caso 15), gerada pelo polinômio

$$P(X) = 1 + X + X^4 \quad (V.7)$$

A associação entre a sequência binária gerada por $P(X)$ e a constelação de símbolos V.29 (ver fig.II.12) é a seguinte:

bit 0 ==> símbolo de coordenadas 3 e -3
bit 1 ==> símbolo de coordenadas -3 e 3

Pelas figuras V.12a e V.12b observa-se que após o cálculo da DFT (30 iterações), o MSE é menor que aquele produzido pelo AGC. Entretanto, em ambos os casos, o desempenho global dos dois algoritmos é semelhante. Isto é, após a fase de treinamento com a sequência periódica, as curvas 1 e 2 não apresentam um comportamento significativamente diferente, a ponto de justificar o custo computacional envolvido no cálculo da DFT. Isto ocorre porque o número de taps do equalizador (15) não é suficientemente elevado, e como resultado, a sequência $U(k)$ utilizada para o cálculo da DFT na eq.(III.91) não é representativa do canal, de modo que o vetor de coeficientes calculado pela eq.(III.92) não está próximo do seu valor ótimo. Como se verá a seguir, num equalizador com 31 taps, a EC é bem mais eficiente que o AGC. Cabe lembrar que, como não há

desvio de frequência, a função janela utilizada nas simulações é retangular com comprimento M, de modo que $U(k)=U_0(k)$.

-Figura V.13: Compara o desempenho da EC com o AGC para um equalizador com 31 taps. Neste caso a sequência periódica de comprimento máximo foi gerada pelo polinômio

$$P(X) = 1 + X^2 + X^5 \quad (V.8)$$

Pela figura nota-se que, após o cálculo da DFT (35 iterações), o MSE produzido pela EC já se encontra próximo do seu valor mínimo, proporcionando assim um aumento considerável na velocidade de convergência em relação ao AGC.

-Figuras V.14, V.15 e V.16: Ilustram o efeito do ruído na EC para três situações diferentes. As figuras V.14 e V.16 mostram várias realizações do experimento para o canal C8444, sendo que na primeira o equalizador tem 15 taps e na segunda 31 taps. A sequência periódica é sempre a mesma, mas a sequência de ruído (SNR=24dB) é aleatória. Observe que em ambas as figuras a diferença entre o pior e o melhor caso é menor que 3dB, o que indica que, apesar do ruído afetar a periodicidade da sequência recebida, o resultado final é bastante satisfatório. Um cálculo do espectro da sequência de comprimento máximo mostrou que esta possui uma raia espectral localizada em 0Hz cuja amplitude é $\sqrt{M+1}$ vezes menor que as demais, sendo portanto mais afetada pelo ruído.

A fig.V.16 foi traçada para o canal C8040 cuja relação $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ é bem menor que para o canal das figs.V.15 e V.14. O resultado é bastante semelhante aos anteriores, o que mostra que o processo de equalização cíclica é imune à dispersão dos autovalores da matriz R.

V.5 - Equalizador com Decisão Realimentada

-Figuras V.17 a V.20: Estas figuras mostram o desempenho do equalizador com decisão realimentada (DFE) e também, para efeito de comparação, do equalizador transversal. As curvas foram traçadas para diversos canais telefônicos, com $\mu = 1/\text{Tr}(\mathbf{R})$ para ambos os equalizadores. A análise dos gráficos revela que para os três primeiros canais, o desempenho do DFE é levemente superior, situação que se inverte na fig.V.20, onde o canal utilizado só apresenta distorções de fase. Pode-se observar ainda que a velocidade de convergência para os dois equalizadores é praticamente a mesma em todos os casos. Em particular, nos canais das figuras V.19 e V.20, onde a relação $\lambda_{\text{max}}/\lambda_{\text{min}}$ para o DFE é muito alta (628 e 162 respectivamente), não houve queda da velocidade de convergência em relação ao equalizador transversal. Na verdade esta relação elevada não representa um nulo espectral como no caso do equalizador transversal; ela se deve à matriz identidade que integra a matriz $\mathbf{R}$ (ver eqs.(IV.8) e (IV.8d)) e que altera a dispersão dos seus autovalores.

-Figura V.21: Mostra o desempenho do DFE para dois canais distintos. A curva 1 foi traçada para o canal C8444, que apresenta distorções de amplitude e fase, e a curva 2 corresponde ao canal C8004, onde há apenas distorções de amplitude. O MSE mínimo é de -18,31dB para o canal C8444 e de -20,38dB para o canal C8004. Há portanto uma degradação de aproximadamente 2dB entre os dois casos. Para o equalizador transversal esta degradação é da mesma ordem. Como observado anteriormente, as curvas de convergência do MSE para o DFE e para o equalizador transversal quase se superpoem, o que leva à

conclusão de que, para canais telefônicos típicos, onde a distorção de amplitude é moderada, o desempenho dos dois equalizadores é similar.

-Figuras V.22 e V.23: OS gráficos da fig.V.22 foram traçados para o canal C8040, para duas fases de amostragem distintas. Observe que o MSE mínimo para os dois casos é aproximadamente o mesmo, mas a relação $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ varia sensivelmente. Para a curva 1 ($\lambda_{\max}/\lambda_{\min}=11,44$) a convergência é mais rápida, mas não traduz uma grande diferença em relação à curva 2 ($\lambda_{\max}/\lambda_{\min}=156,73$). Na fig.V.23, traçada para o canal C300, observa-se uma situação diferente. A curva 1 ($\lambda_{\max}/\lambda_{\min}=162$) converge mais rapidamente que a curva 2 ($\lambda_{\max}/\lambda_{\min}=9,95$). Portanto, pode-se concluir que a dispersão dos autovalores da matriz R correspondente ao DFE não exerce o mesmo impacto sobre a velocidade de convergência, como ocorre no caso do equalizador transversal. Esta aparente contradição com o que foi estabelecido na seção III.6.2 pode ser atribuída tanto à forma diferente que a matriz R assume para o DFE, como também à possibilidade de que os coeficientes γ_i da eq.(III.75) se aproximem de zero para os autovalores λ_i de menor valor, de modo que a velocidade de convergência não sofre grande influência destes.

-Figuras V.24 e V.25: Uma última comparação entre o DFE e o equalizador transversal é mostrada nestas figuras. Para dois canais diferentes e uma relação sinal/ruído muito baixa, novamente o desempenho dos dois equalizadores foi bastante semelhante, tanto no que diz respeito à velocidade de convergência, como também em relação ao MSE mínimo.

Os resultados acima estão de acordo com aqueles apresentados em /3/. Isto é, para canais telefônicos, o equalizador transversal é uma opção mais interessante que o DFE uma vez que, no segundo, a propagação de erros, que não foi considerada nas simulações aqui realizadas, degrada sensivelmente o seu desempenho.

V.6 - Equalizador com Espaçamento Fracional

-Figura V.26: Mostra as variações no MSE mínimo quando a fase de amostragem varia de $\pm T/2$ em relação à fase ótima. Como previsto pela eq.(III.18), o equalizador com espaçamento T (ET) é bastante sensível às variações na fase de amostragem. Já o DFE suporta melhor estas variações, e a razão para isto é a sua maior capacidade em compensar nulos espectrais sem um aumento excessivo do ruído. O equalizador fracional (EF) por sua vez, se mostra praticamente insensível às variações na fase de amostragem, confirmando assim a análise da seção IV.3.1.

-Figura V.27: Desempenho do SDA modificado para o ET e para o EF. O ET é composto por 15 taps e o EF por 30 taps, de modo que a resposta impulsiva de ambos tem a mesma duração. Para o EF foram traçados gráficos utilizando o SDA convencional (curva 1), e também o SDA modificado (curva 2). O SDA modificado foi empregado com o objetivo de testar se as condições de estabilidade e convergência permanecem as mesmas para o EF, cuja matriz R é hermitiana mas não de Toeplitz. A constante de adaptação μ assumiu o seu valor ótimo nos três casos, isto é, $\mu=2/(\lambda_{\max}+\lambda_{\min})$ para o SDA convencional, e $\mu=1/r(i,i)$ para o SDA modificado, e a relação sinal/ruído foi de 24dB. Pela figura observa-se que o SDA modificado (curva 2) converge mais rapidamente

que o SDA convencional (curva 1). Para o ET, o MSE mínimo é atingido em aproximadamente 40 iterações, já o EF necessita de 150 iterações. Isto se deve aos pequenos autovalores da matriz R que, como foi dito na seção IV.3.3, são gerados pela região compreendida entre $(1+\alpha)/2T$ e $1/2T'$, onde apenas o ruído está presente. A tabela V.2 mostra os autovalores da matriz R (normalizados em relação a S_a) para os dois equalizadores. Note que os primeiros 15 autovalores da matriz R correspondentes ao EF, estão muito próximos dos autovalores da matriz R correspondente ao ET. Isto explica a semelhança na convergência inicial (curvas 1 e 3). Os autovalores restantes (16 a 30) são pequenos, principalmente os últimos 10, o que aumenta o número de iterações que o EF gasta para atingir o MSE mínimo.

A tabela V.3 mostra três conjuntos de coeficientes obtidos de três formas diferentes. A coluna da esquerda representa o vetor de coeficientes ótimo obtido através da eq.(III.27). A coluna do meio é resultante da aplicação do SDA modificado por 500 iterações. À direita estão os taps obtidos pelo algoritmo do gradiente após 25000 iterações. Note que o MSE nos três casos é praticamente o mesmo (diferença $< 0,16\text{dB}$), mas o conjunto de coeficientes apresenta diferenças significativas. Por exemplo, a parte real do tap número 15 (1,4127) da terceira coluna, é cerca de 40% maior que o valor ótimo da primeira coluna. Isto mostra que a quase singularidade da matriz R gera conjuntos de coeficientes distintos que produzem aproximadamente o mesmo MSE.

	!Equalizador !Transversal-T!	!Equalizador !Fracional-T/2!
1	0,682369	0,684680
2	0,605757	0,606160
3	0,515117	0,513721
4	0,434052	0,431446
5	0,353048	0,349407
6	0,280716	0,276742
7	0,220829	0,217272
8	0,174159	0,171348
9	0,138496	0,136241
10	0,106766	0,104856
11	0,082036	0,080640
12	0,062552	0,061568
13	0,047114	0,046620
14	0,035536	0,035483
15	0,026378	0,026661
16	-	0,019899
17	-	0,003097
18	-	0,002042
19	-	0,001019
20	-	0,001000
21	-	0,000996
22	-	0,000996
23	-	0,000995
24	-	0,000995
25	-	0,000995
26	-	0,000995
27	-	0,000995
28	-	0,000995
29	-	0,000995
30	-	0,000995

Tabela V.2 - Autovalores, Canal C8444, SNR=24dB.

	Coef. dtimos eq.(III.29)		SDA Modificado 500 iterações		Alg. Gradiente 25000 iterações	
	real	imag.	real	imag.	real	imag.
1	0,024	0,031	0,018	0,028	-0,007	0,065
2	0,393	0,206	0,409	0,212	0,428	0,175
3	-0,821	-0,167	-0,839	-0,174	-0,849	-0,190
4	0,002	-0,187	0,004	-0,180	-0,002	-0,155
5	1,050	0,028	1,065	0,025	1,090	0,034
6	-0,064	0,344	-0,077	0,341	-0,074	0,316
7	-1,224	0,208	-1,231	0,216	-1,267	0,224
8	-0,193	-0,506	-0,177	-0,511	-0,173	-0,497
9	1,219	-0,582	1,216	-0,589	1,253	-0,604
10	0,745	0,468	0,733	0,480	0,726	0,452
11	-0,698	1,002	-0,691	1,002	-0,723	1,030
12	-1,153	0,010	-1,150	-0,005	-1,101	0,049
13	-0,443	-0,957	-0,449	-0,948	-0,436	-0,980
14	0,477	-0,582	0,487	-0,569	0,223	-0,648
15	0,992	0,108	0,968	0,014	1,413	0,118
16	1,064	0,018	1,095	0,024	0,806	0,081
17	0,908	-0,171	0,894	-0,168	0,928	-0,197
18	0,703	0,166	0,695	0,170	0,778	0,135
19	0,392	0,368	0,402	0,359	0,383	0,384
20	0,032	0,034	0,033	0,031	-0,005	0,080
21	-0,042	-0,185	-0,048	-0,173	-0,036	-0,208
22	0,139	0,026	0,140	0,026	0,152	-0,018
23	0,103	0,154	0,104	0,142	0,100	0,183
24	-0,139	-0,012	-0,138	-0,007	-0,133	0,021
25	-0,088	-0,112	-0,086	-0,103	-0,095	-0,141
26	0,150	-0,007	0,146	-0,014	0,137	-0,034
27	0,046	0,080	0,044	0,076	0,068	0,110
28	-0,153	0,024	-0,143	0,031	-0,126	0,039
29	0,041	-0,088	0,032	-0,091	-0,021	-0,112
30	0,034	0,024	0,036	0,023	0,069	0,029
MSEmin	-17,6346dB		-17,6331dB		-17,4806dB	

Tabela V.3 - Coficientes para o EF Obtidos de 3 Formas Diferentes.

Figura V.28: Compara o desempenho dos dois equalizadores (ET e EF) para um canal com relação sinal/ruído infinita. O objetivo é comprovar a não singularidade da matriz R e o efeito dos seus autovalores na convergência do algoritmo. A tabela V.4 mostra a distribuição dos autovalores de R para o ET e para o EF. Observe que

a matriz correspondente ao EF possui vários autovalores muito pequenos, o que deve aumentar consideravelmente o número de iterações necessário para que o algoritmo alcance o MSE mínimo. A medida em que o número de taps M aumenta, os autovalores se tornam cada vez menores. No limite, quando M tende a infinito, metade dos autovalores são nulos [17], e a matriz R se torna singular.

A curva 2 da fig.V.28 mostra que após 500 iterações o MSE é de -41dB. Entretanto, deixando-se o algoritmo operando até 7000 iterações, o erro baixa para apenas -43,4dB, o que indica a extrema dificuldade do algoritmo em atingir o MSE mínimo (-49dB). No caso estocástico (fig.V.30), onde o gradiente é apenas estimado, o algoritmo convergirá para um MSE próximo de -20,75dB, que é o valor atingido pelo ET na curva 1 na fig.V.28. Portanto pode-se concluir que os autovalores maiores é que determinam o comportamento inicial do algoritmo, e que, como eles são próximos aos autovalores da matriz R correspondente ao ET, o desempenho dos dois equalizadores é semelhante.

-Figura V.29: Nesta figura o canal utilizado, C300, apresenta apenas distorções de fase moderadas e, como consequência, a relação $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ é próxima de 1 e a convergência é bastante rápida. Analogamente à fig.V.28, os dois equalizadores se comportam inicialmente de forma semelhante, caracterizando assim a proximidade entre os autovalores das respectivas matrizes R , e em seguida o EF converge lentamente para o MSE mínimo de -22,85dB. A tabela V.5 lista os autovalores de ambas as matrizes. Observe que os últimos 10 autovalores da matriz R correspondente ao EF assumem praticamente o mesmo valor que aqueles listados na tabela V.2. Isto caracteriza a

região compreendida entre $(1+\alpha)/2T$ e $1/2T'$, onde, em ambos os casos, somente o ruído correspondente a uma SNR de 24dB está presente.

	!Equalizador !Transversal-T!	!Equalizador !Fracional-T/2!
! 1	! 0,681374	! 0,683685
! 2	! 0,604762	! 0,605164
! 3	! 0,514122	! 0,512725
! 4	! 0,433057	! 0,430451
! 5	! 0,352053	! 0,348412
! 6	! 0,279721	! 0,275747
! 7	! 0,219834	! 0,216276
! 8	! 0,173164	! 0,170353
! 9	! 0,137500	! 0,135245
! 10	! 0,105771	! 0,103861
! 11	! 0,081040	! 0,079644
! 12	! 0,061556	! 0,060573
! 13	! 0,046118	! 0,045625
! 14	! 0,034541	! 0,034488
! 15	! 0,025383	! 0,025665
! 16	! -	! 0,018904
! 17	! -	! 0,002101
! 18	! -	! 0,001046
! 19	! -	! 2,348E-5
! 20	! -	! 4,854E-6
! 21	! -	! 7,634E-7
! 22	! -	! 2,898E-7
! 23	! -	! 2,155E-7
! 24	! -	! 2,064E-7
! 25	! -	! 1,882E-7
! 26	! -	! 1,745E-7
! 27	! -	! 1,208E-7
! 28	! -	! 7,075E-8
! 29	! -	! 5,398E-8
! 30	! -	! 3,668E-8

Tabela V.4 - Autovalores, Canal C8444, SNR= ∞ .

	Equalizador Transversal-T	Equalizador Fracional-T/2
1	0,257988	0,260170
2	0,257802	0,260079
3	0,257724	0,259567
4	0,257436	0,259476
5	0,257102	0,259344
6	0,257056	0,259284
7	0,257035	0,258985
8	0,256935	0,258944
9	0,256725	0,258680
10	0,256354	0,258281
11	0,256136	0,257731
12	0,256014	0,256305
13	0,255360	0,244688
14	0,244571	0,206888
15	0,180688	0,117328
16	-	0,081070
17	-	0,006893
18	-	0,004082
19	-	0,001071
20	-	0,001034
21	-	0,000998
22	-	0,000997
23	-	0,000996
24	-	0,000995
25	-	0,000995
26	-	0,000995
27	-	0,000995
28	-	0,000995
29	-	0,000995
30	-	0,000995

Tabela V.5 - Autovalores, Canal C300, SNR=24dB.

-Figuras V.30, V.31 e V.32: Mostram o desempenho do algoritmo do gradiente (convencional) para as mesmas condições da figuras V.27, V.28 e V.29 respectivamente. Em todas as figuras o valor de μ foi diminuindo durante o processo com o objetivo de se conseguir um MSE residual próximo do MSE mínimo. Na fig.V.30, após 1000 iterações, o MSE é de aproximadamente -16,7dB para o ET e -16dB para o EF. Na fig.V.32, como o canal C300 possui uma relação $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ bem mais

baixa que o canal da fig.V.30, a convergência é mais rápida, e após aproximadamente 550 iterações, o MSE é de -19dB para o ET e -21,8dB para o EF. Observe que, como no caso do SDA, a convergência inicial para os dois equalizadores é semelhante, mas o EF necessita de um maior número de iterações para atingir o MSE mínimo, refletindo assim o maior espalhamento dos autovalores da matriz R correspondente.

A fig.V.31 foi traçada para uma SNR infinita, e novamente os dois equalizadores se comportam de maneira semelhante. Neste caso entretanto, como a matriz R correspondente ao EF possui autovalores muito baixos, a convergência até o MSE mínimo é extremamente lenta. As simulações mostraram que após 20000 iterações o MSE caiu para -29dB, portanto 20dB acima do MSE mínimo.

V.7 - Algoritmo Rápido de Kalman

-Figuras V.33 a V.37: Mostram o desempenho do FKA (Fast Kalman Algorithm) para vários canais telefônicos típicos. O fator de esquecimento foi $\xi=1$ já que os canais são invariantes no tempo, e a constante de inicialização δ assumiu dois valores distintos em cada figura, $\delta=0,01$ (exceto na fig.V.35 onde $\delta=0,0001$) e $\delta=0,1$, correspondendo às curvas 3 e 4 respectivamente. Foram traçados também os gráficos para o AGC e para o AGM, curvas 1 e 2 respectivamente. Pelas figuras observa-se que, após 40 iterações, o FKA apresenta um MSE próximo do MSE mínimo, independentemente da constante δ , e do canal utilizado. Portanto, como estudado na seção IV.4.1, a velocidade de convergência do algoritmo não é afetada pela relação $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$.

As curvas 1 e 2 foram traçadas para efeito de comparação da velocidade de convergência dos três algoritmos em questão (FKA, AGC e AGM). Observe que o AGM apresenta um desempenho intermediário entre o FKA e o AGC. Por exemplo, para a fig.V.33, após 50 iterações o MSE é de -17dB, -10dB e -5,5dB para o FKA, AGM e AGC respectivamente. Apesar da maior velocidade do FKA em relação ao AGM, deve-se lembrar que o primeiro apresenta problemas de instabilidade numérica em aritmética de precisão finita, e que é computacionalmente mais complexo. Por exemplo, para um equalizador com 31 taps complexos, o FKA executa 1258 multiplicações reais a cada iteração, enquanto o AGM executa apenas 430. Portanto o FKA necessita de uma potência computacional 3 vezes maior.

V.8 - Algoritmo em Treliza

-Figuras V.38 e V.39: Mostram o comportamento do algoritmo em Treliza (Least Squares Lattice Algorithm-LSLA) e também, para efeito de comparação, do FKA, curvas 2 e 1 respectivamente. Para o LSLA o MSE foi obtido através da medida do erro quadrático na saída do equalizador, e uma posterior mediação sobre 100 realizações do experimento. Note que o desempenho dos dois algoritmos é semelhante, o que era de se esperar, pois eles são matematicamente equivalentes. Observe ainda que a relação $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$, que vale 34,2 para o canal da fig.V.38 e 1,79 para o da fig.V.39, não afeta a velocidade de convergência do LSLA. Isto confirma a ortogonalidade da sequência transformada, como discutido na seção IV.4.2.

V.9 - Conclusão

As simulações realizadas neste capítulo tentaram cobrir alguns aspectos importantes referentes à equalização adaptativa. A análise dos resultados obtidos leva a várias conclusões cujos principais pontos são listados a seguir.

1) A relação $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ afeta a velocidade de convergência do algoritmo do gradiente. Quanto maior o valor de $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ mais lenta é a convergência. Contudo, as simulações mostraram que a dependência entre velocidade de convergência e relação $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ não é linear ou simples. Por exemplo, para dois canais onde esta relação vale 25,8 e 3,9, a convergência inicial se dá após 300 e 150 iterações respectivamente. Isto mostra que quando a matriz R possui um autovalor λ_i pequeno, a probabilidade de que o fator γ_i correspondente na eq.(III.75) seja também pequeno, é relativamente elevada.

2) O ruído tende a dispersar a constelação de pontos em torno dos seus valores ótimos, aumentando assim a probabilidade de uma decisão errada. Apesar deste efeito, constatou-se que a principal fonte de degradação nos canais telefônicos, são as distorções de amplitude e fase introduzidas pelos próprios canais.

3) O algoritmo do gradiente modificado, proposto na seção III.8.1, se mostrou uma alternativa interessante para a aceleração da convergência inicial. O algoritmo opera com a mesma sequência de treinamento que o algoritmo convencional, o aumento na complexidade computacional é aceitável (70% para 31 taps), e o ganho conseguido na região inicial da curva de convergência do MSE pode chegar a 6dB,

para canais onde a relação $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ é mais elevada.

4) A aceleração da convergência inicial através de sequências periódicas, empregando o processo de equalização cíclica, se mostrou bastante eficaz. Apesar do custo computacional adicional requerido para o cálculo da DFT (ou FFT), o ganho conseguido é substancial e o método deve ser utilizado quando há flexibilidade quanto à escolha da sequência de treinamento.

5) O equalizador com decisão realimentada teve seu desempenho comparado ao do equalizador transversal, e chegou-se a conclusão de que, para canais telefônicos típicos, ambos se comportam de maneira semelhante, sendo que o DFE ainda apresenta o problema da propagação de erros que não foi considerado nas simulações. Assim, num projeto atendendo às normas V.29-CCITT, o equalizador transversal é mais adequado.

6) O equalizador com espaçamento fracional é uma alternativa eficiente para resolver o problema da sensibilidade à fase de amostragem, pois seu desempenho praticamente independe deste parâmetro. A desvantagem é que, para se conseguir o mesmo nível de MSE que o equalizador convencional, o número de taps deve ser aumentado proporcionalmente à taxa de amostragem. Por exemplo, no equalizador com espaçamento $T/2$, o número de taps ser dobrado para se atingir o mesmo MSE que no equalizador com espaçamento T .

7) Para os algoritmos de convergência rápida, algoritmo rápido de Kalman (FKA) e algoritmo em treliça (LSLA), as simulações confirmaram as análises das seções IV.4.1 e IV.4.2. Realmente os algoritmos convergem rapidamente e independentemente das

características do canal. As principais desvantagens são o excessivo aumento na complexidade computacional, e a instabilidade numérica no caso do FKA.

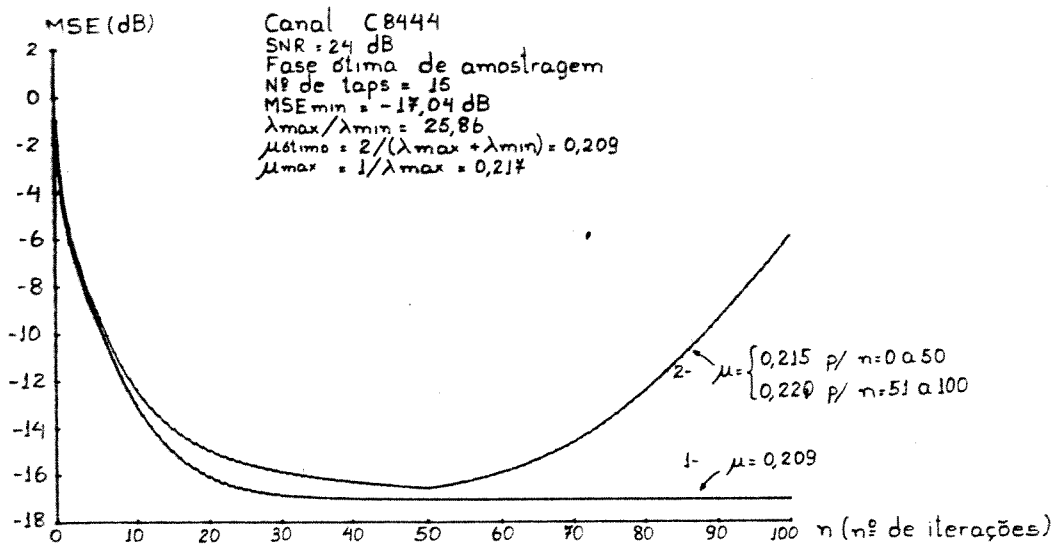


Fig. V.1 - Curvas de convergência para o SDA

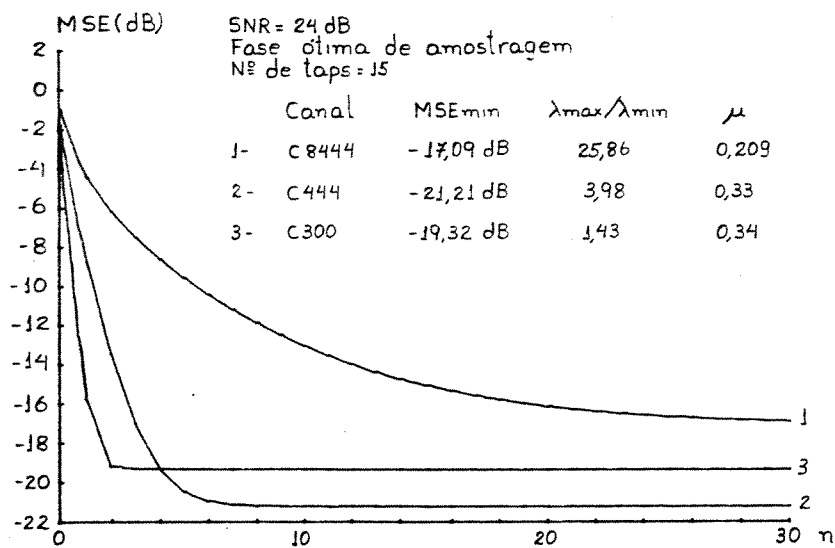


Fig. V.2 - Desempenho do SDA para canais com diferentes relações $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$

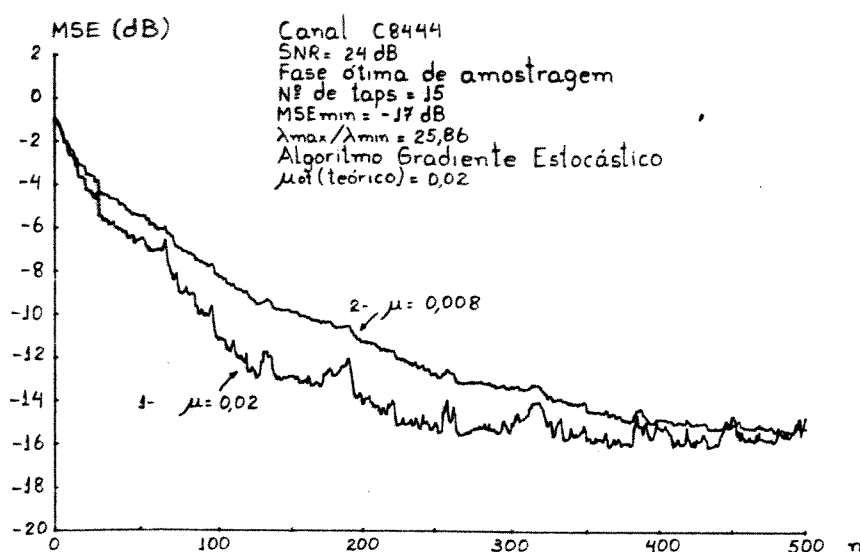


Fig. V.3 - Comportamento do algoritmo do gradiente para diferentes valores de μ ($\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 25,86$)

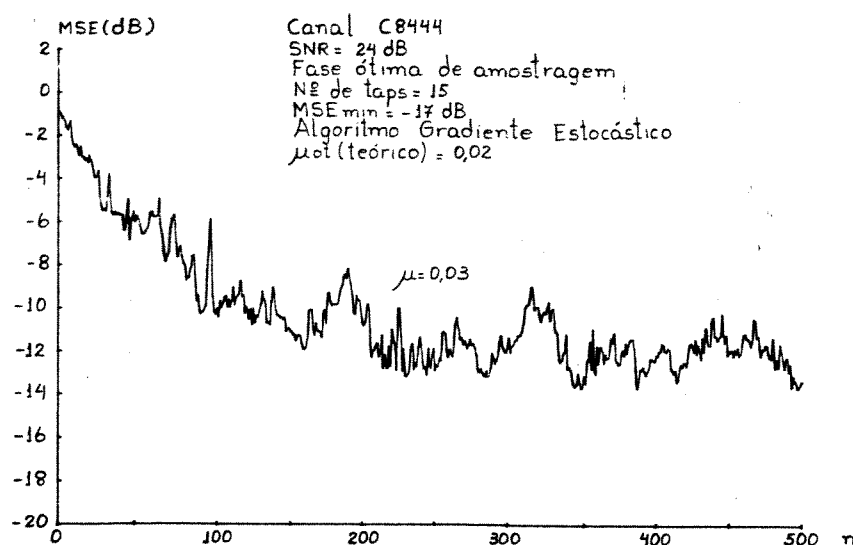


Fig. V.4 - Algoritmo do gradiente com $\mu > \mu_{\text{ótimo}}$

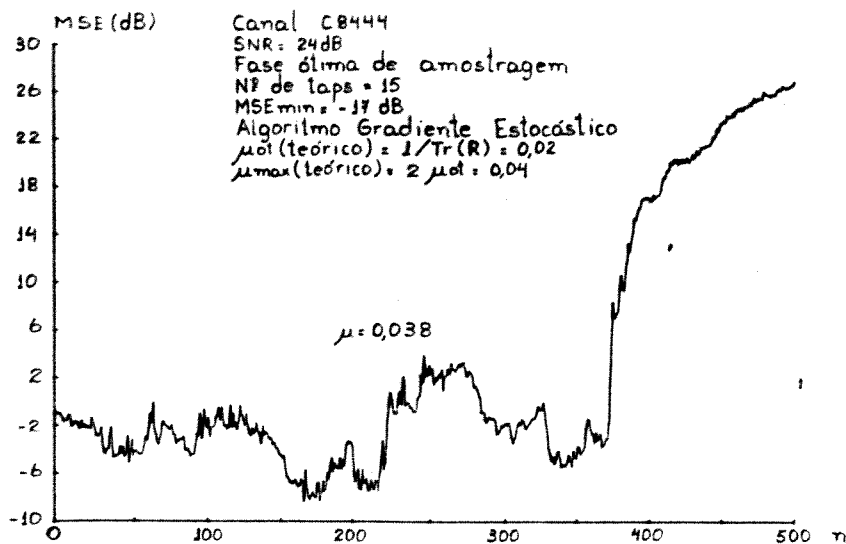


Fig V.5- Algoritmo do gradiente com $\mu \approx \mu_{\max}$

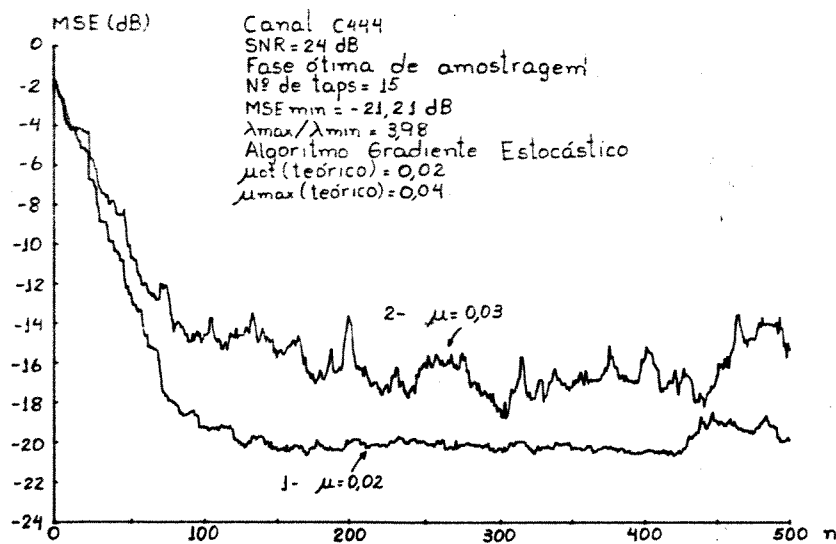


Fig. V.6 - Comportamento do algoritmo do gradiente para diferentes valores de μ ($\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 3,98$)

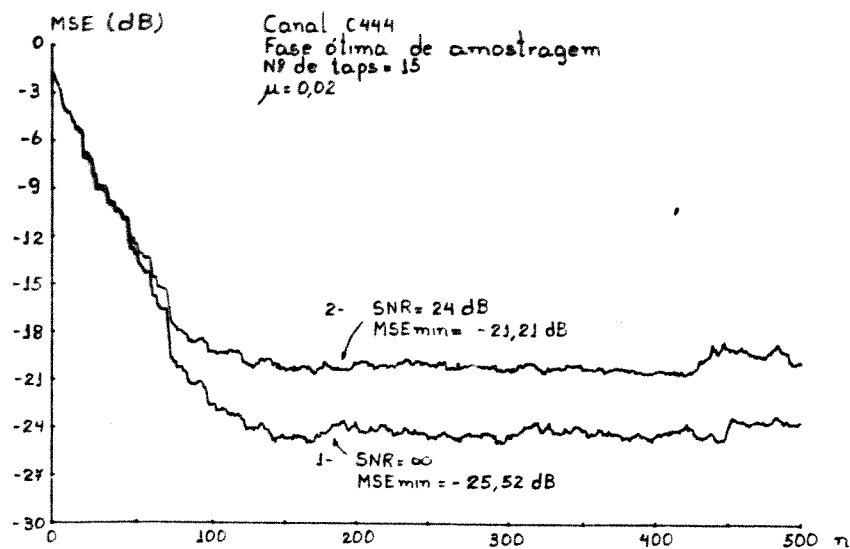


Fig. V.7 - Comportamento do algoritmo do gradiente para diferentes valores da SNR

Canal C444
 Fase ótima de amostragem
 N° de taps = 15
 $\mu = 0,02$
 treinamento CCITT

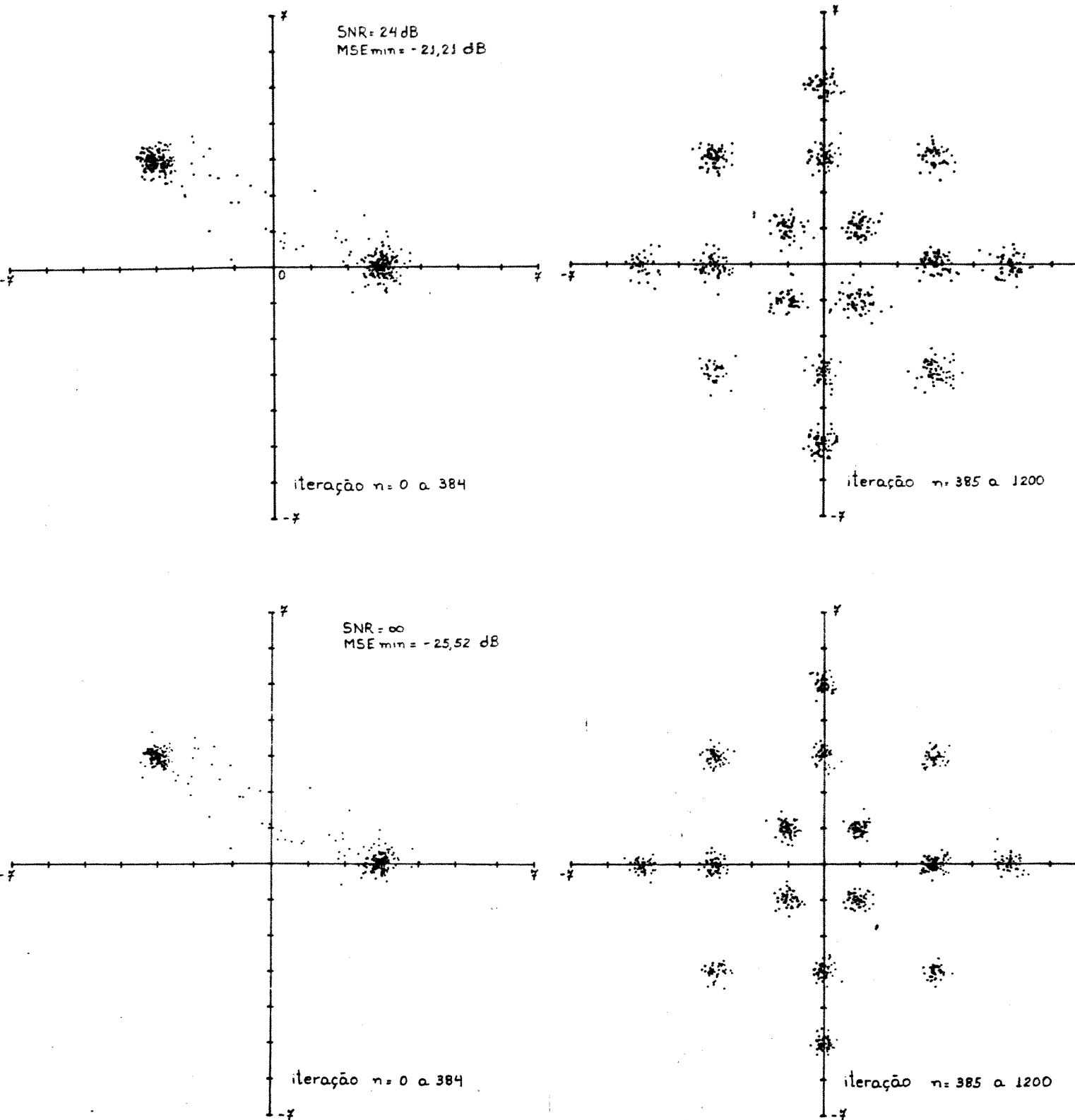


Fig. V.8 - Efeito do ruído sobre a constelação

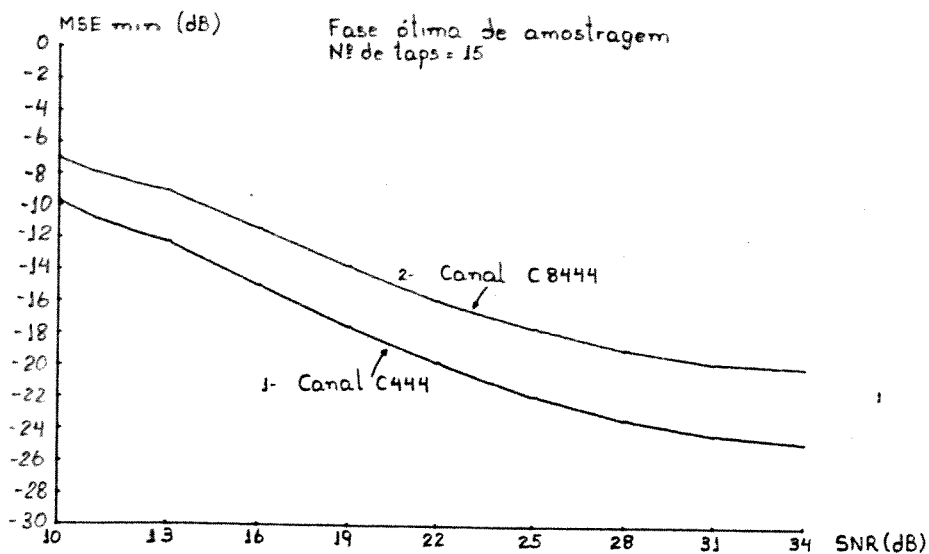


Fig.V.9 - Efeito do ruído sobre o valor do MSE mínimo

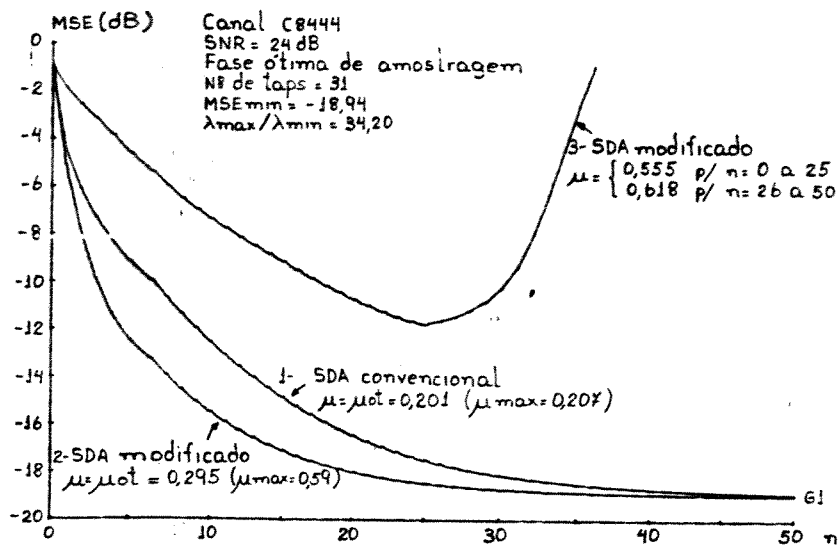


Fig.V.10.a - Comparação entre os algoritmos SDA e SDA modificado ($\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 34,20$).

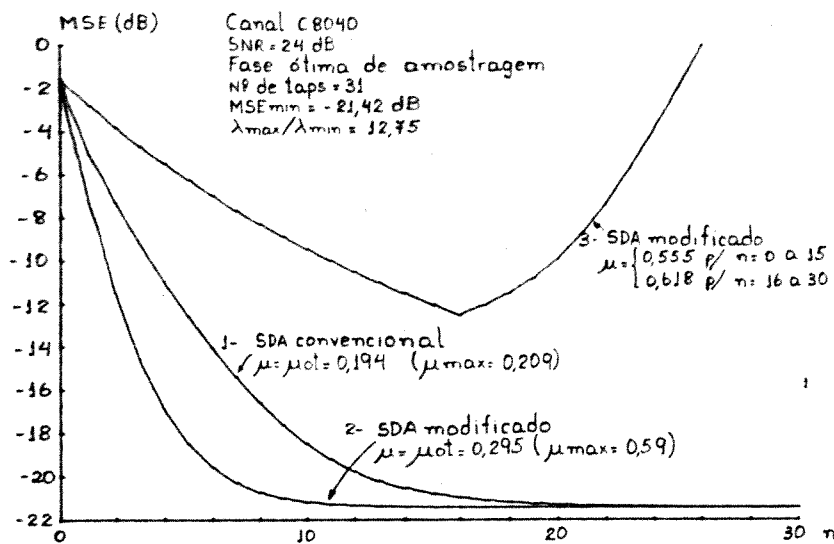


Fig. V.10.b - Comparação entre os algoritmos SDA e SDA modificado
 ($\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 12,75$)

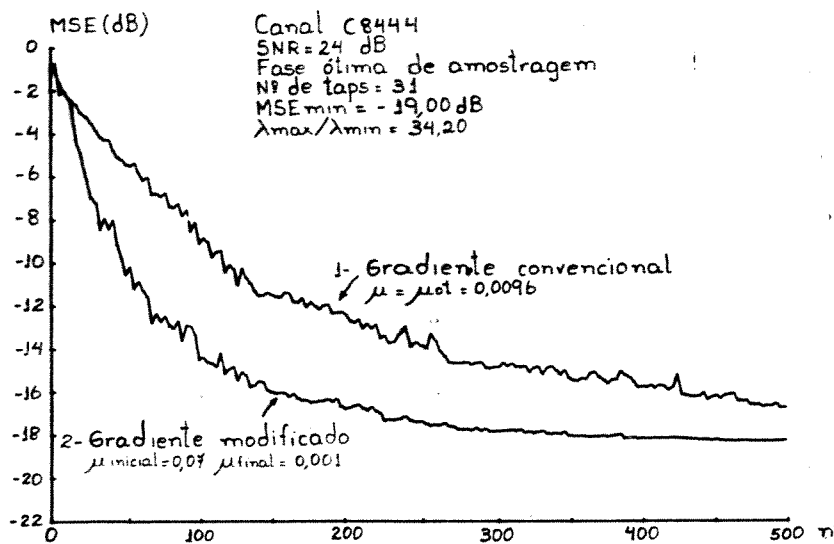


Fig. V.11.a - Gradiente convencional x gradiente modificado
 ($\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 34,20$)

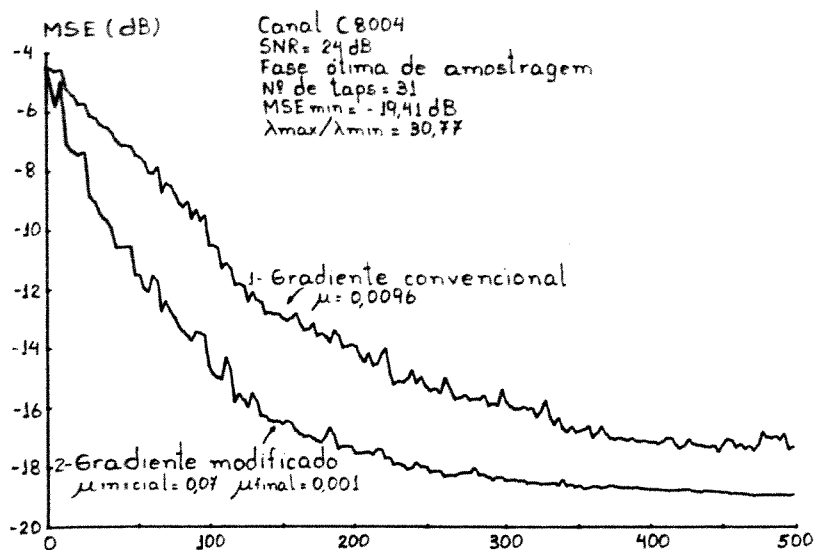


Fig. V.11.b - Gradiente convencional x gradiente modificado
 ($\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 30,77$)

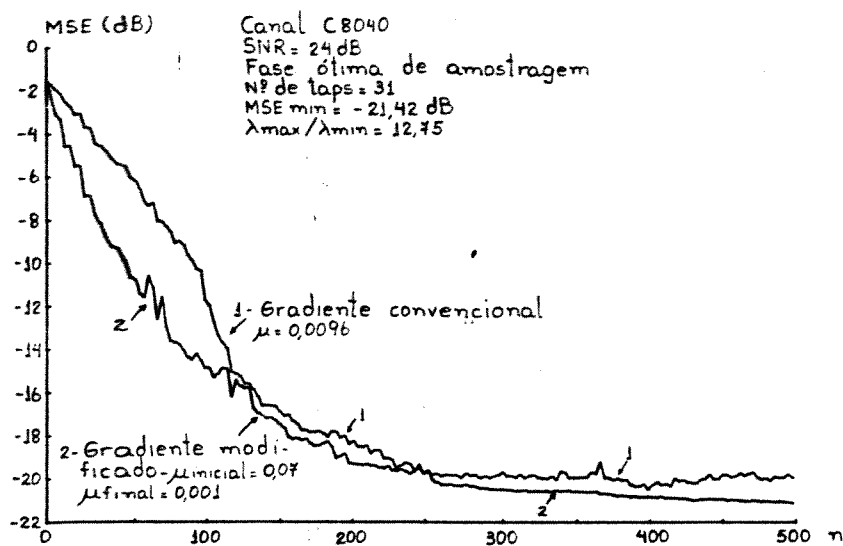


Fig. V.11.c - Gradiente convencional x gradiente modificado
 ($\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 12,75$)

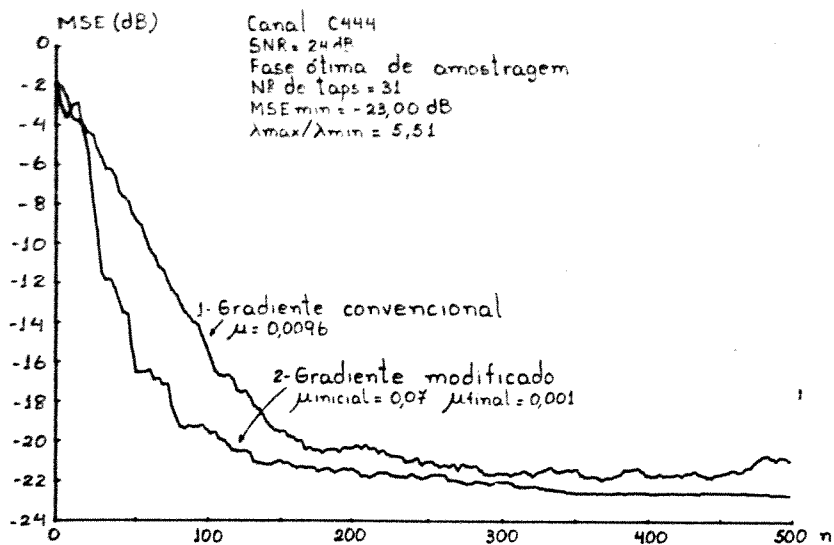


Fig V.11.d - Gradiente convencional x gradiente modificado
 ($\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 5,51$)

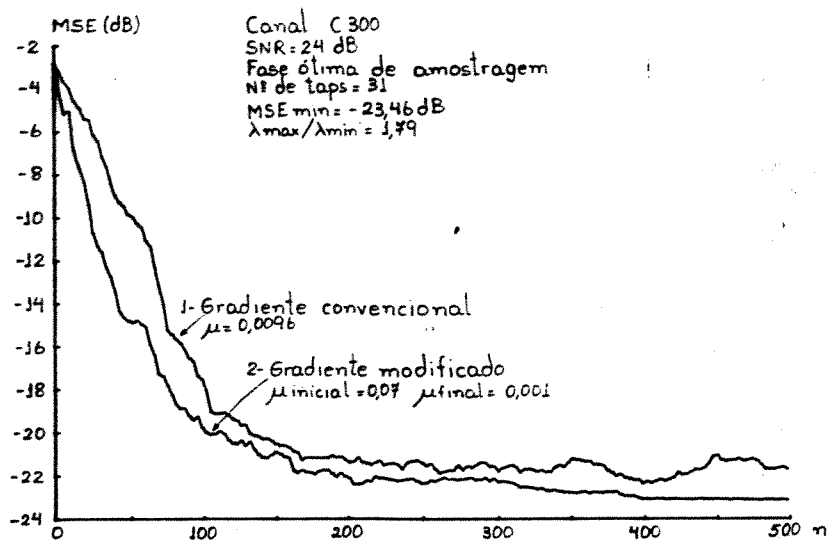


Fig V.11.e - Gradiente convencional x gradiente modificado
 ($\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 1,79$)

Canal CB444
 SNR: ∞
 Fase ótima de amostragem
 Nº de taps = 15
 MSE min = -20,75 dB

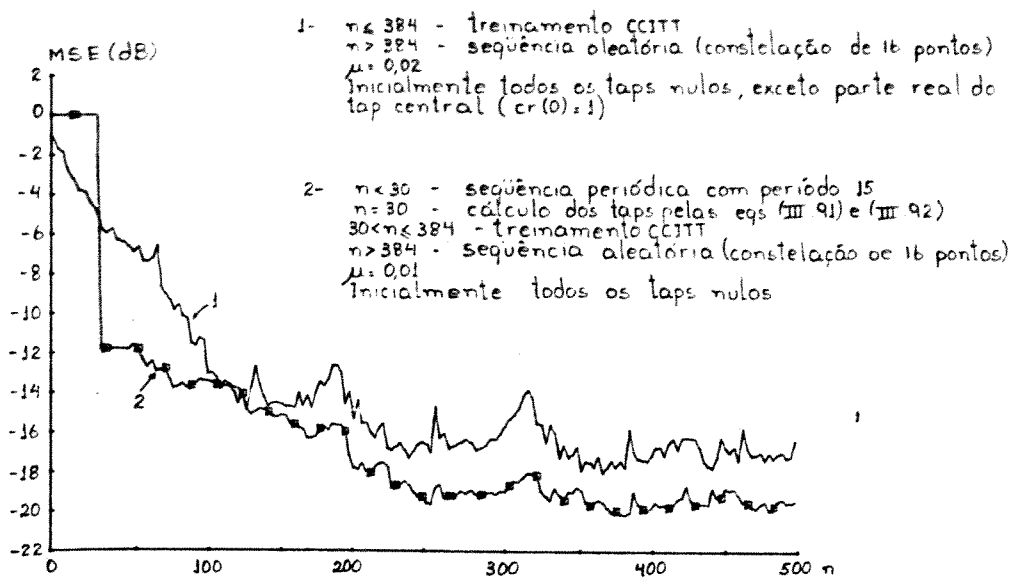


Fig. V.12.a - Equalização cíclica x treinamento CCITT
 (15 taps / SNR = ∞)

Canal CB444
 SNR: 24 dB
 Fase ótima de amostragem
 Nº de taps = 15
 MSE min = -17,04 dB

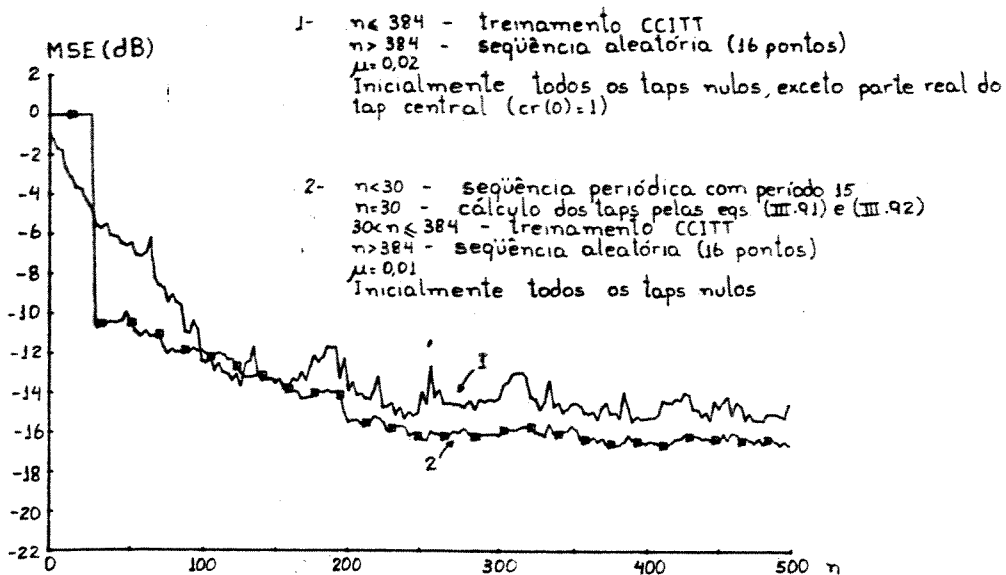


Fig. V.12.b - Equalização cíclica x treinamento CCITT
 (15 taps / SNR = 24 dB)

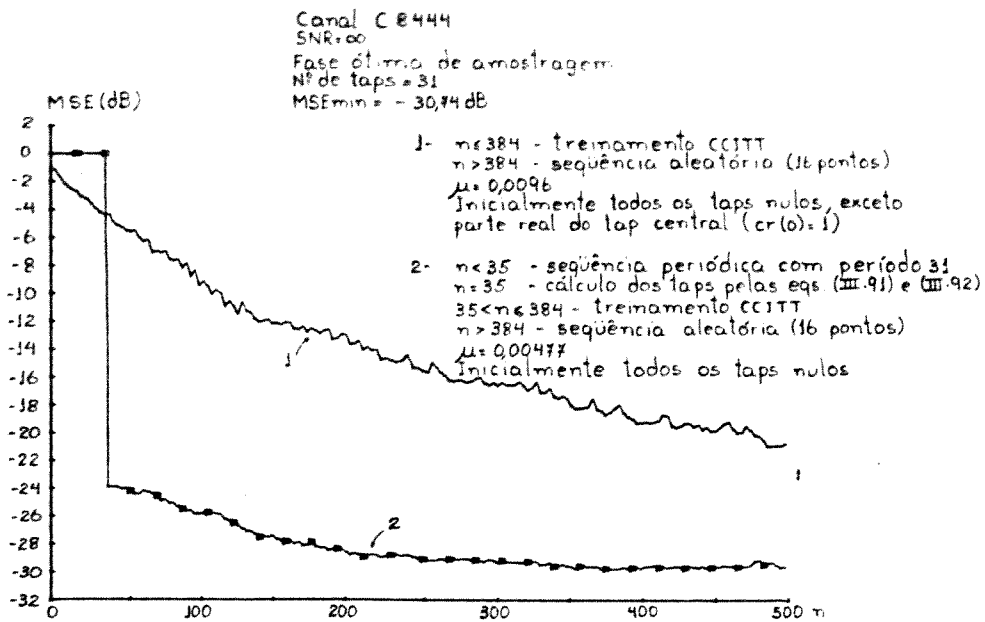


Fig. V.13 - Equalização cíclica x treinamento CCITT
 (31 taps / SNR = ∞)

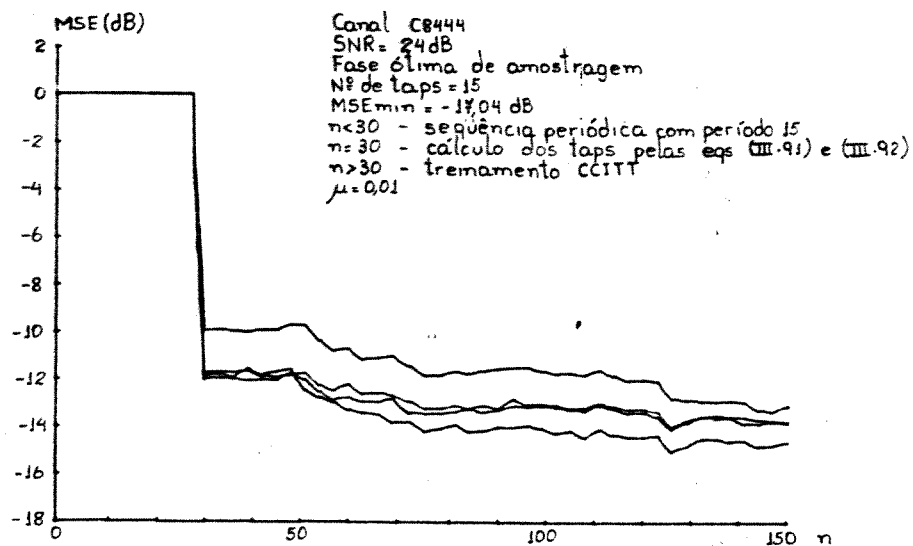


Fig. V.14 - Várias realizações do experimento com 15 taps
 e SNR = 24 dB

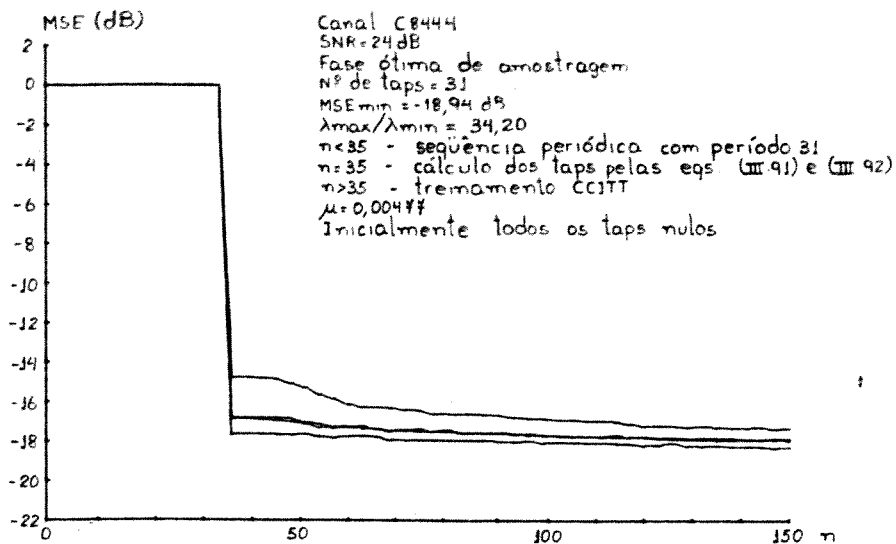


Fig. V.15 - Várias realizações do experimento com SNR = 24 dB
 (31 taps, $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 34,20$)

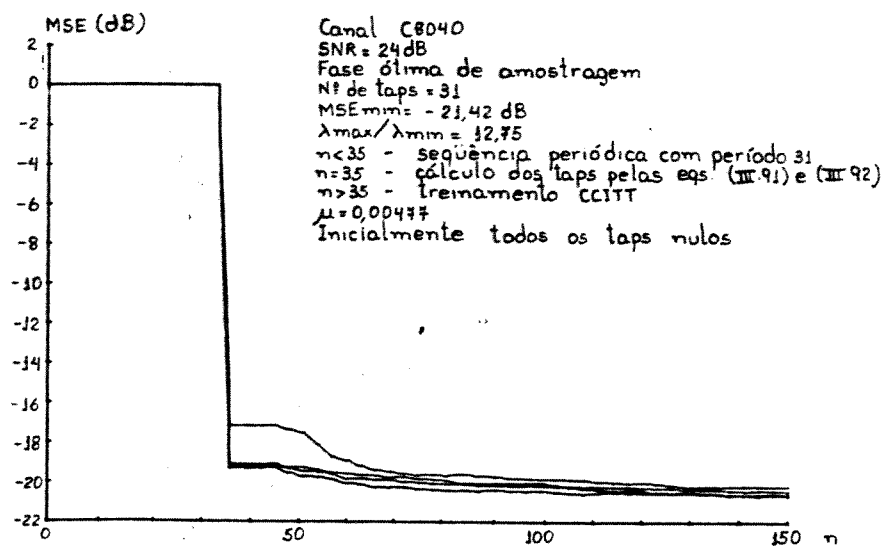


Fig. V.16 - Várias realizações do experimento com SNR = 24 dB
 (31 taps, $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 12,75$)

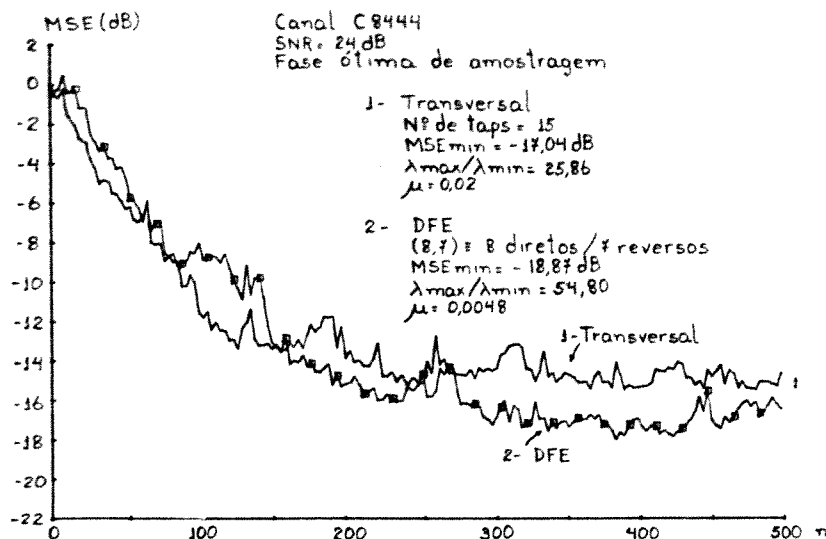


Fig.V.17 - Desempenho dos equalizadores transversal e com decisão realimentada (canal C8444)

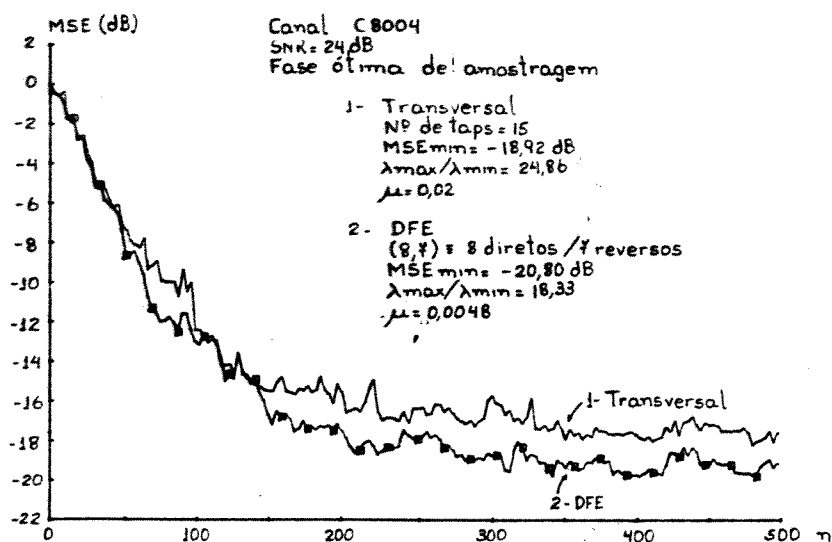


Fig.V.18 - Desempenho dos equalizadores transversal e com decisão realimentada (canal C8004)

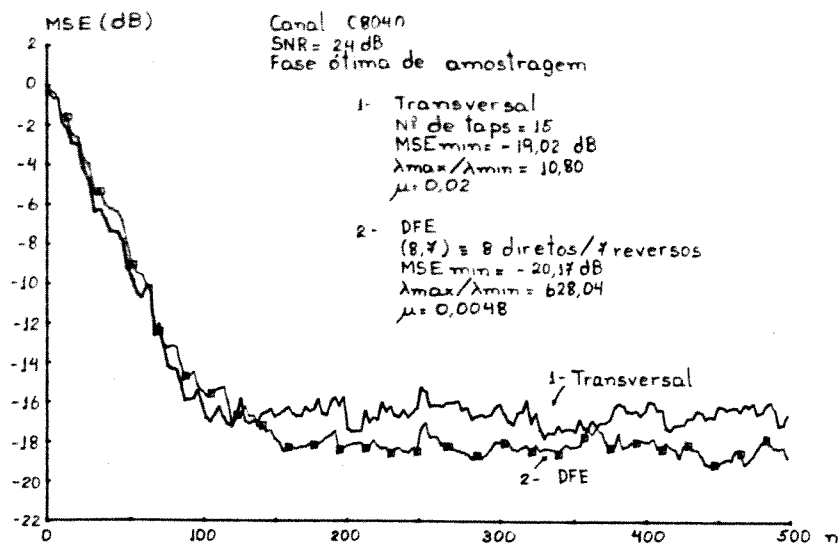


Fig. V.19- Desempenho dos equalizadores transversal e com decisão realimentada (canal C8040)

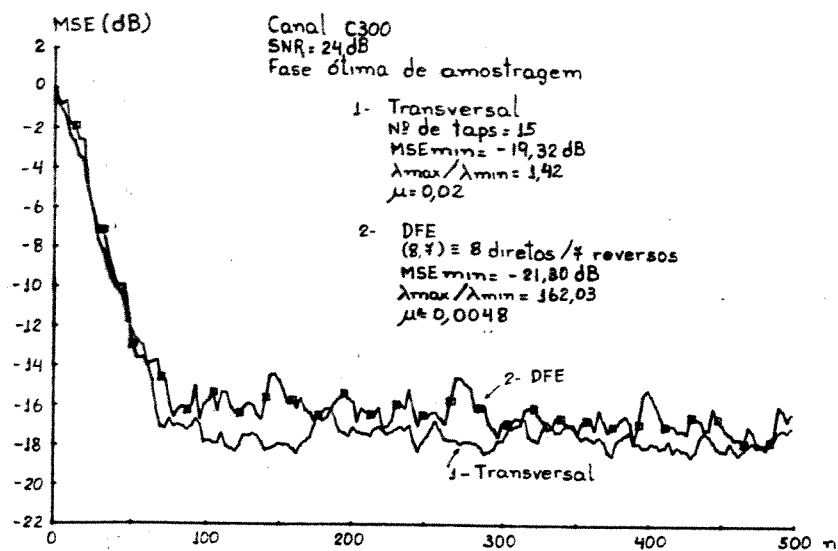


Fig. V.20- Desempenho dos equalizadores transversal e com decisão realimentada (canal C300)

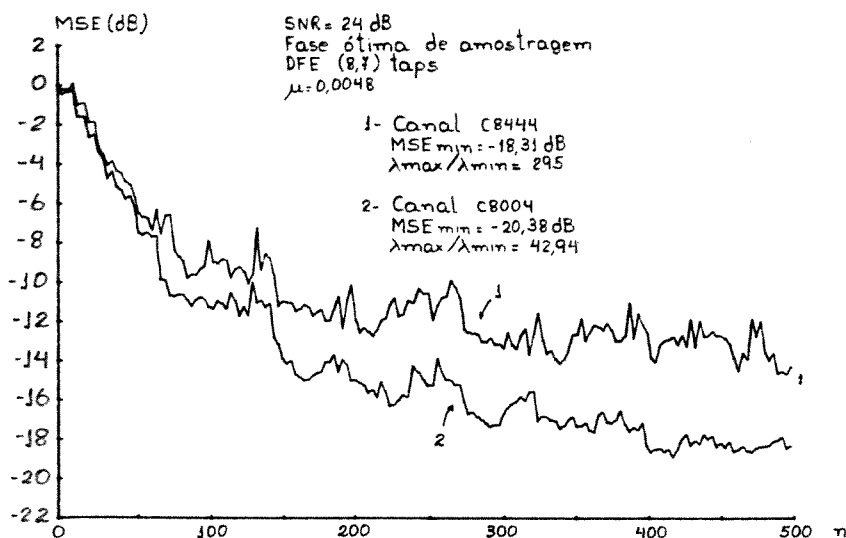


Fig. V.21 - Desempenho do DFE para canais com (C8444) e sem (C8004) distorção de fase

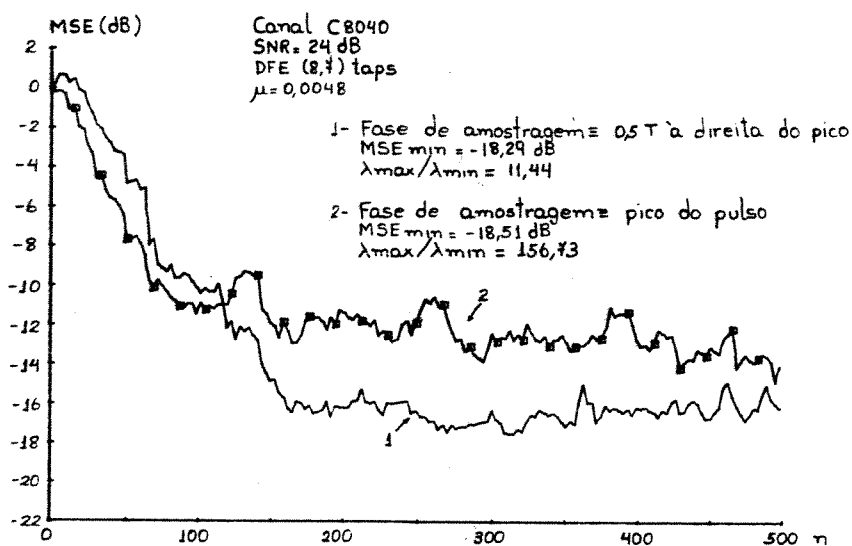


Fig. V.22 - Desempenho do DFE para diferentes fases de amostragem (canal C8040)

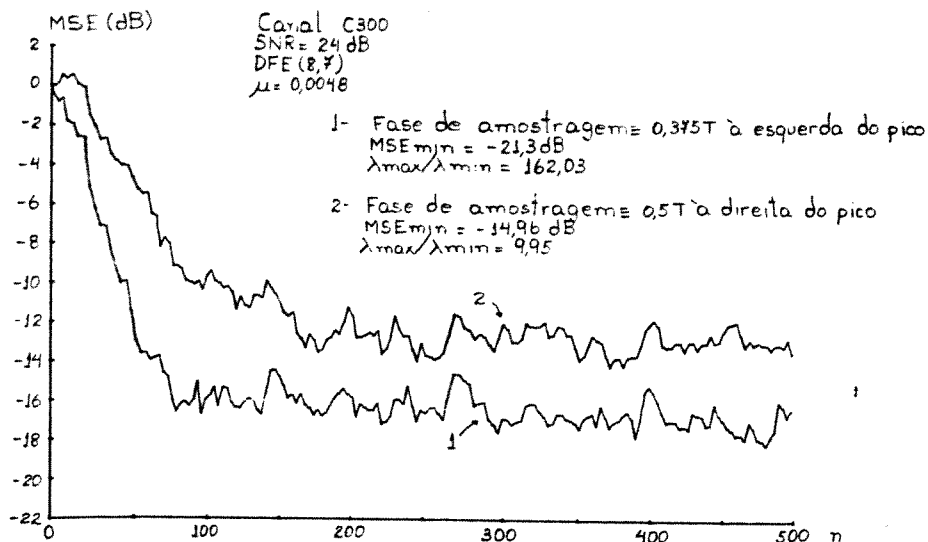


Fig.V. 23 - Desempenho do DFE para diferentes fases de amostragem (canal C300)

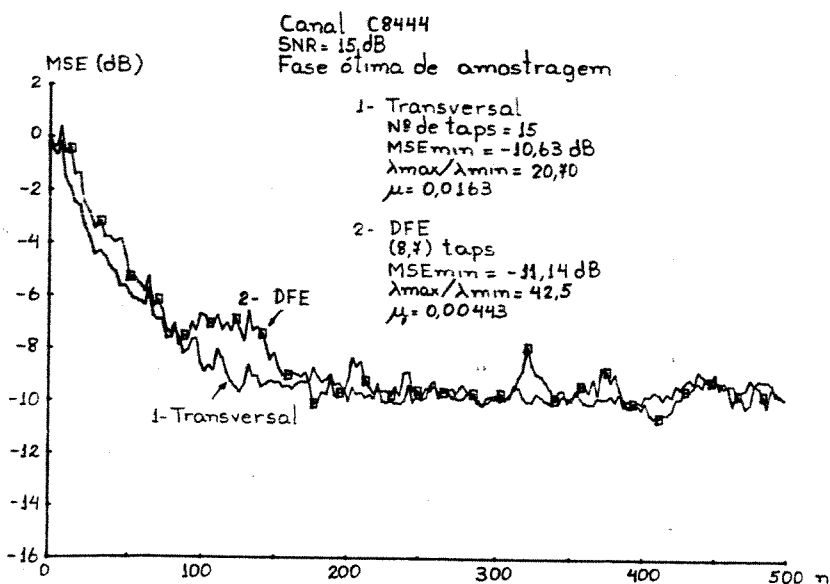


Fig.V.24 - Desempenho dos equalizadores transversal e com decisão realimentada num ambiente altamente ruidoso (canal C8444)

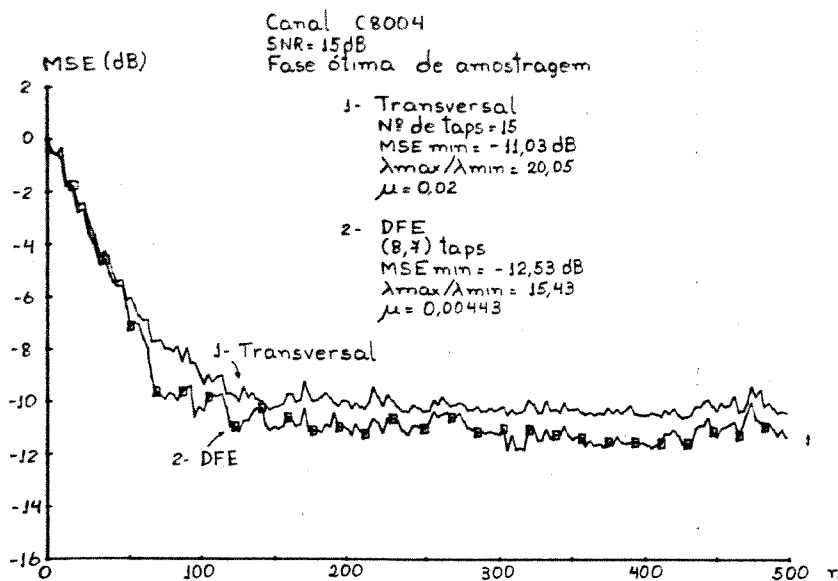


Fig. V.25 - Desempenho dos equalizadores transversal e com decisão realimentada num ambiente altamente ruidoso (canal C8004)

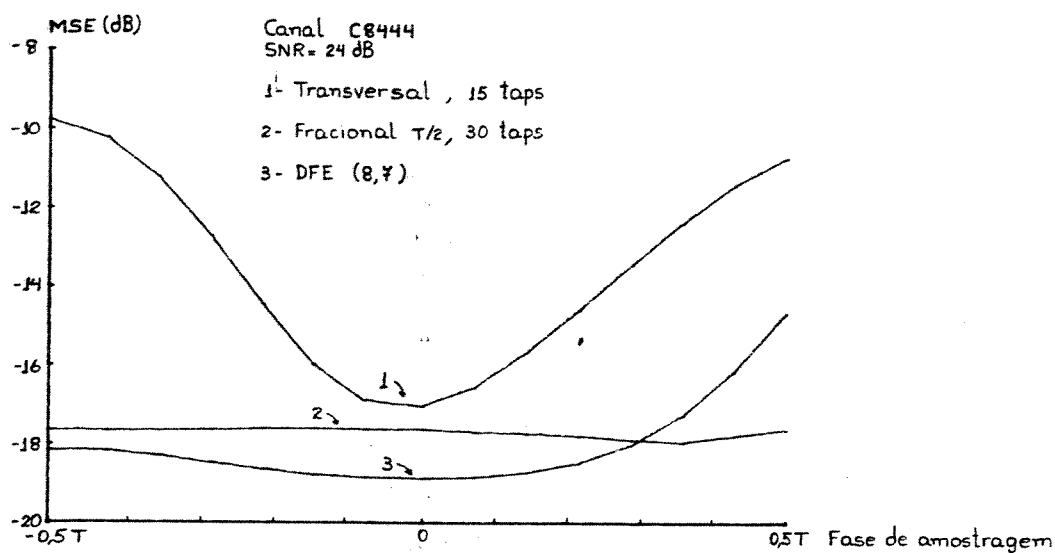


Fig. V.26 - Sensibilidade do MSE às variações na fase de amostragem para 3 tipos de equalizador

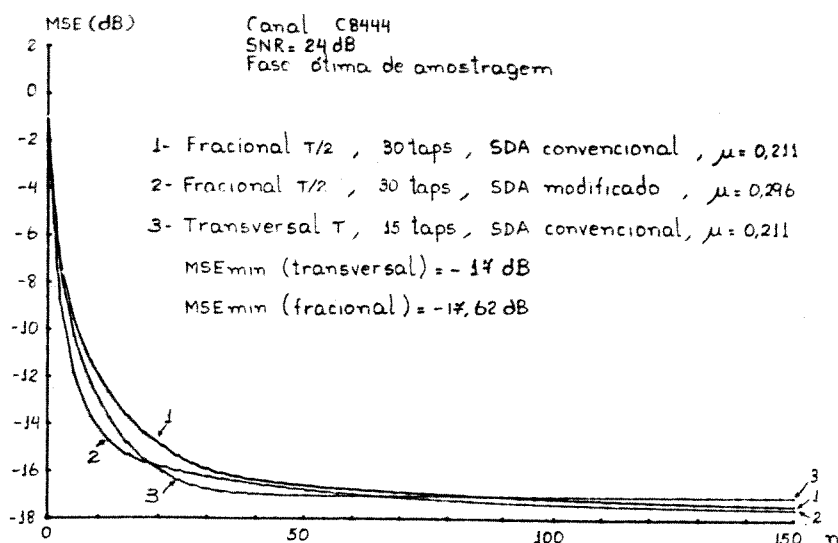


Fig. V.27 - Desempenho do SDA convencional e modificado para os equalizadores transversal-T e fracional- $T/2$ (SNR = 24 dB)

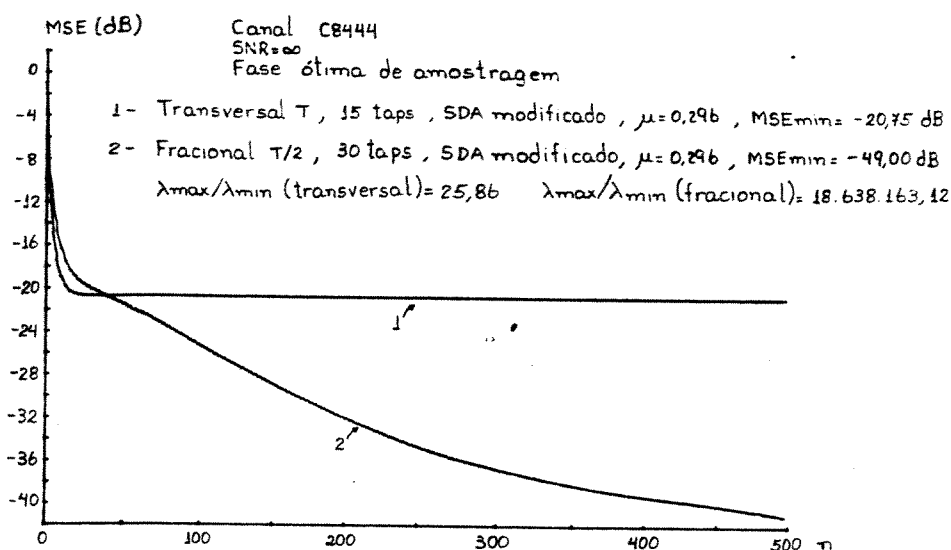


Fig. V.28 - Desempenho do SDA modificado aplicado aos equalizadores transversal-T e fracional- $T/2$ num canal com SNR = ∞ .

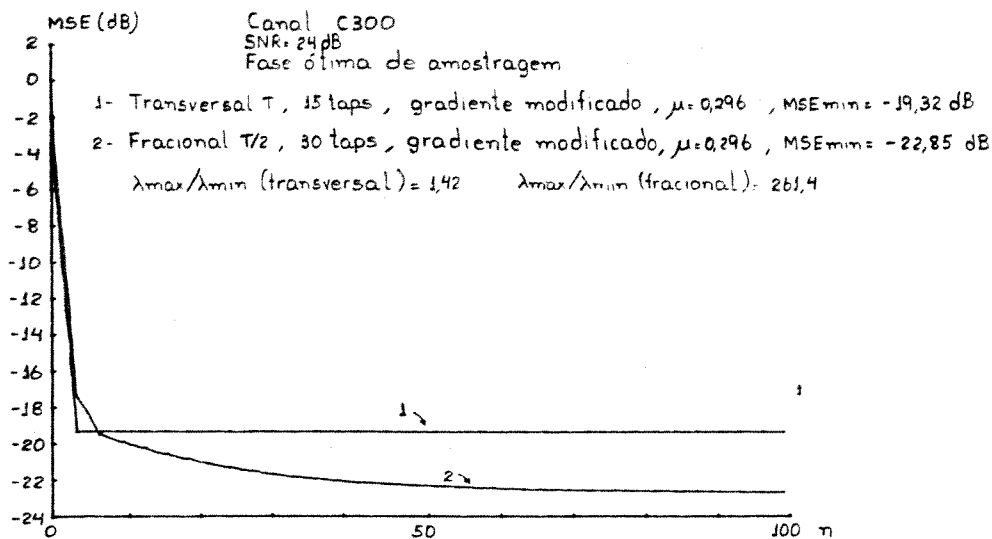


Fig. V. 29- Desempenho do SDA modificado aplicado aos equalizadores transversal-T e fracional-T/2 num canal com baixa relação $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$

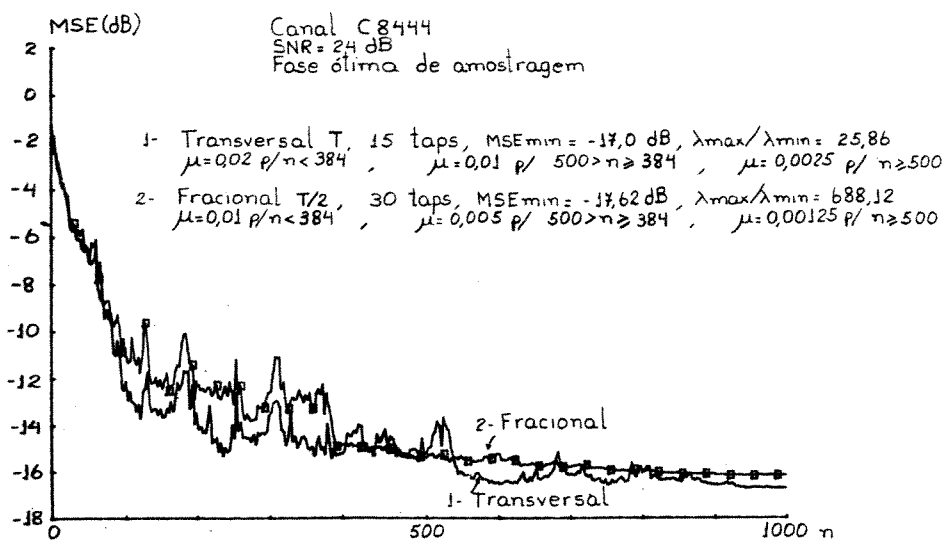


Fig. V. 30- Desempenho dos equalizadores transversal-T e fracional-T/2 (SNR = 24 dB)

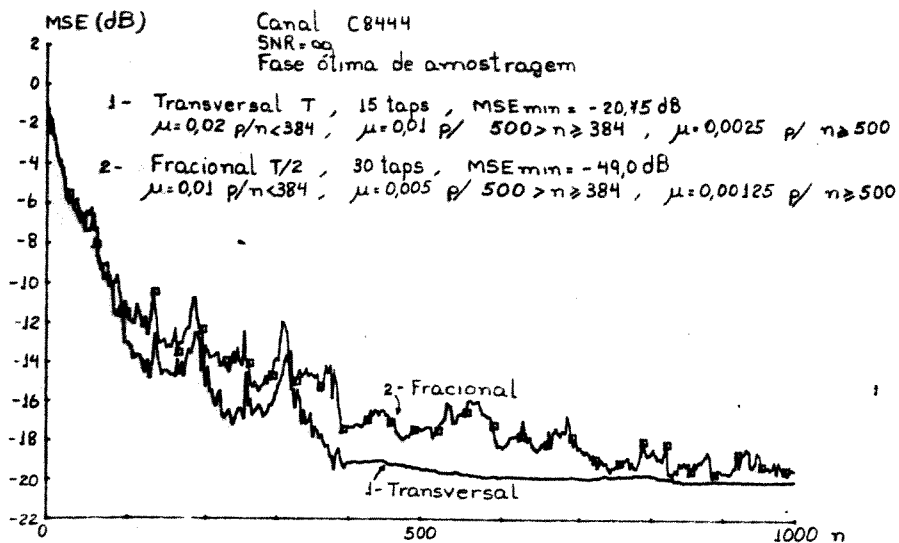


Fig. V.31 - Desempenho dos equalizadores transversal-T e fracional-T/2
(SNR = ∞)

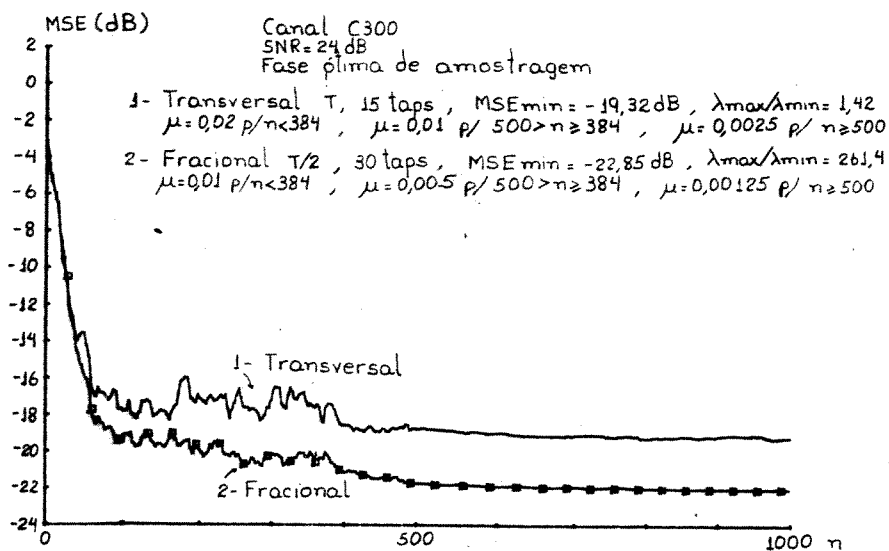


Fig. V.32 - Desempenho dos equalizadores transversal-T e fracional-T/2
(SNR = 24 dB)

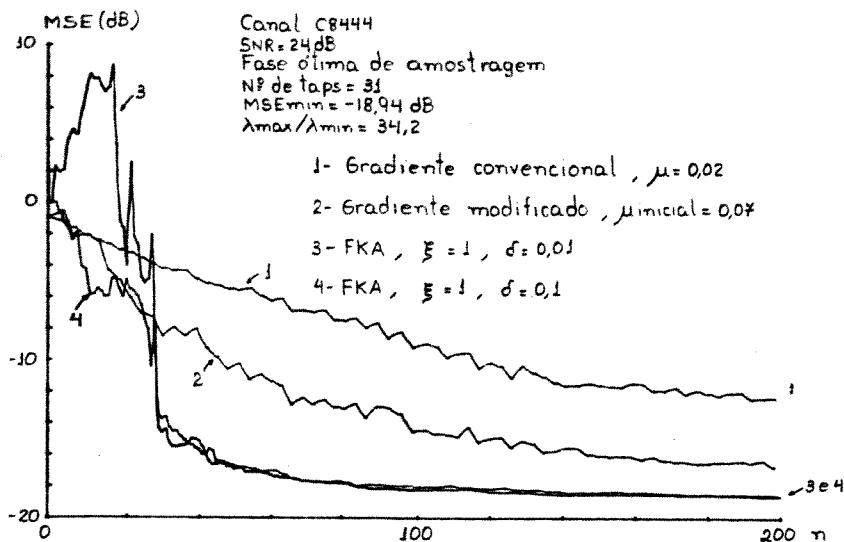


Fig. V.33 - Efeito da inicialização no FKA e comparação entre os algoritmos do gradiente convencional e modificado ($\lambda_{\max}/\lambda_{\min}=34,2$)

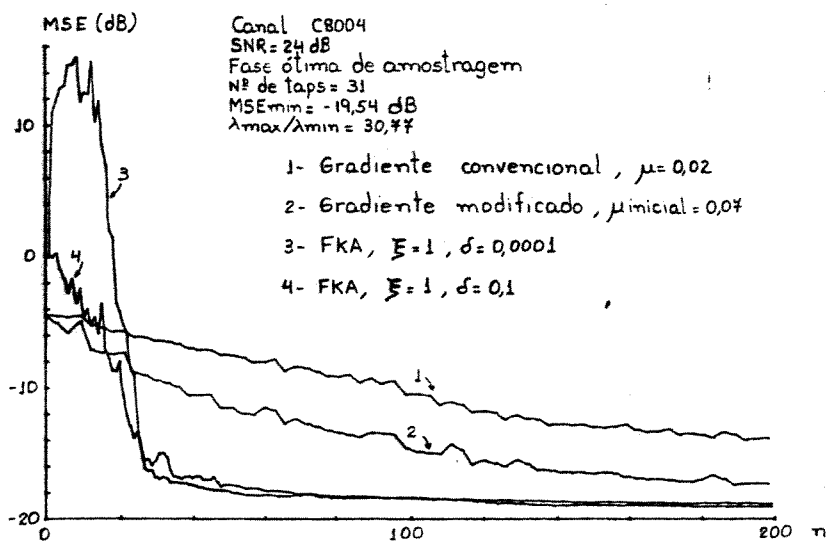


Fig. V.34 - Efeito da inicialização no FKA e comparação entre os algoritmos do gradiente convencional e modificado ($\lambda_{\max}/\lambda_{\min}=30,77$)

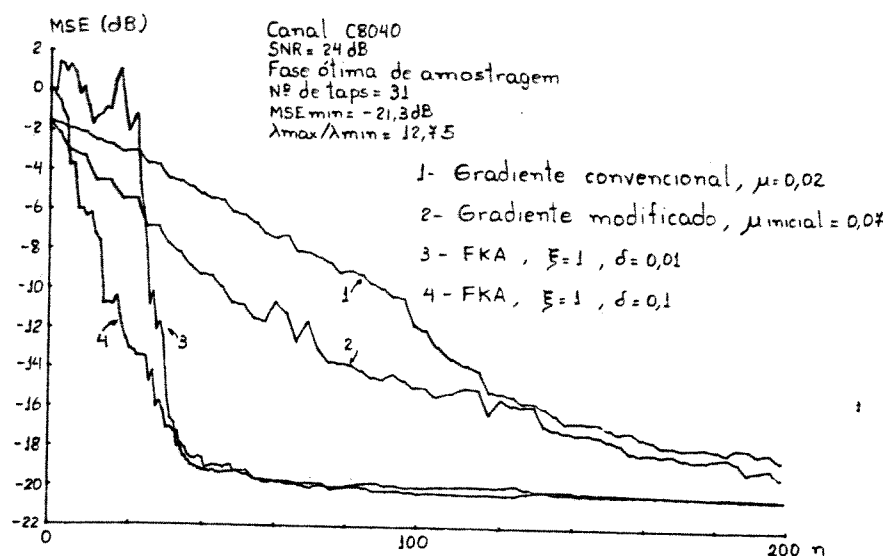


Fig.V.35 - Efeito da inicialização no FKA e comparação com os algoritmos do gradiente convencional e modificado ($\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 12,75$)

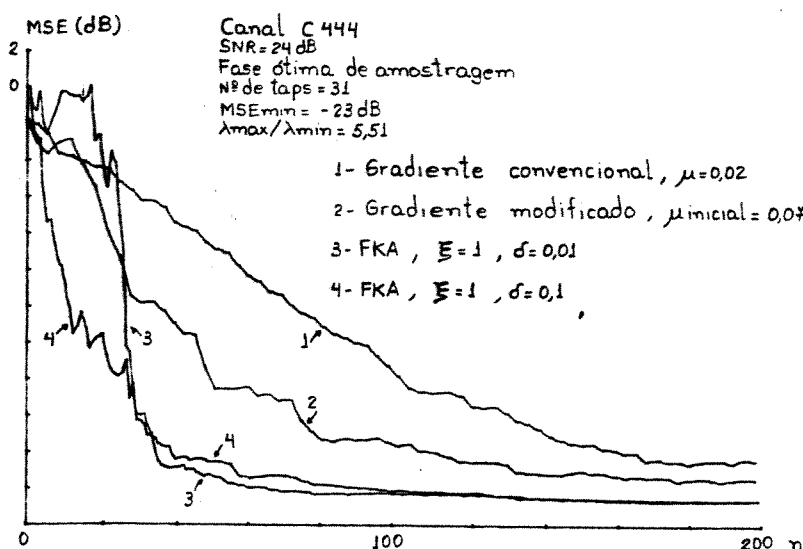


Fig.V.36 - Efeito da inicialização no FKA e comparação com os algoritmos do gradiente convencional e modificado ($\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 5,51$)

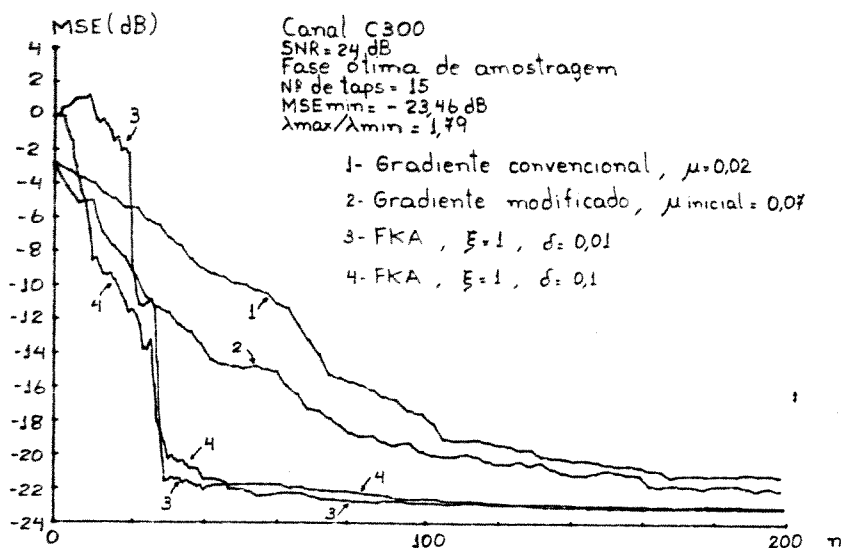


Fig. V.37 - Efeito da inicialização no FKA e comparação com os algoritmos do gradiente convencional e modificado ($\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 1,79$)

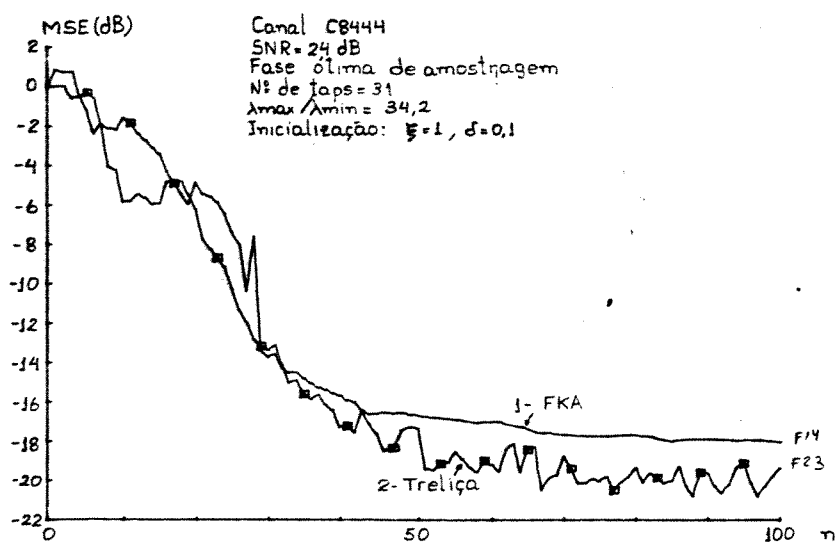


Fig. V.38 - Convergência do algoritmo em treliça ($\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 34,2$) e comparação com o FKA

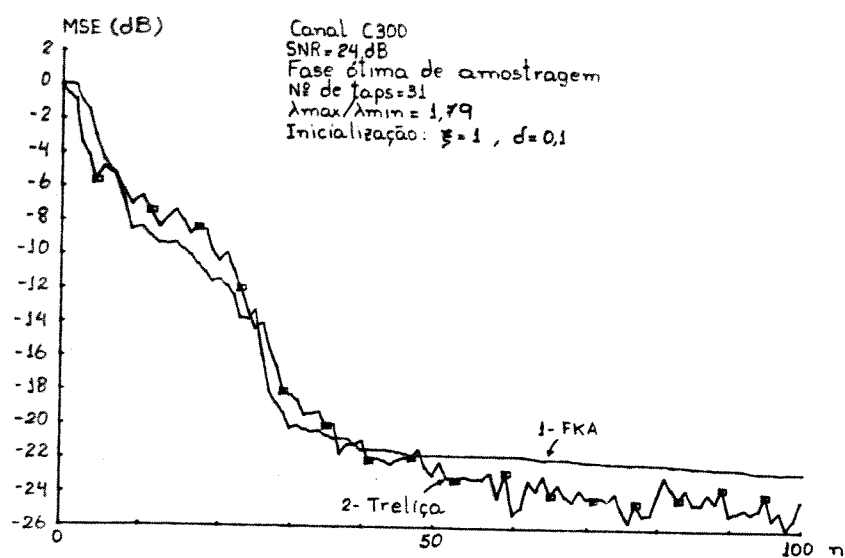


Fig. V.39 - Convergência do algoritmo em treliça ($\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 1,79$) e comparação com o FKA

VI.1 - Introdução

Neste capítulo são estudadas as principais características de um sistema de transmissão de dados operando a 9600 bits/segundo (bps). São apresentados os algoritmos de recuperação de relógio e portadora, bem como métodos para se obter uma rápida aquisição de sincronismo. Os efeitos do desvio de frequência entre as portadoras local e remota, e também do tremor (jitter), de fase sobre o equalizador adaptativo, são analisados. É mostrado, através de simulações, como o algoritmo de recuperação de portadora minimiza estes efeitos.

VI.2 - Estrutura do sistema

As figuras VI.1 e VI.2 mostram os diagramas em blocos dos circuitos de transmissão e recepção respectivamente. O sistema opera a 9600 bps, com taxa de modulação de 2400 baud. Os circuitos de embaralhamento (scrambler/descrambler), codificação de símbolos e gerador de treinamento, são projetados de acordo com a recomendação V.29 do CCITT /5/.

VI.2.1 - Transmissor

Considere o diagrama em blocos do transmissor mostrado na fig.VI.1. Em resposta à requisição para transmitir (Request To Send-RTS) solicitada pelo terminal de dados à interface V.24 (CCITT), o gerador de treinamento começa a enviar os símbolos previamente determinados numa taxa de $1/T$ símbolos/segundo (2400 baud). Os

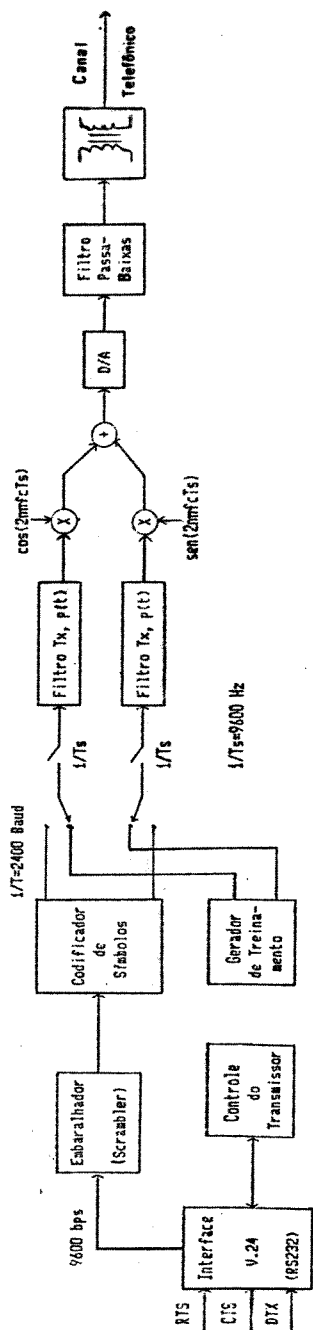


Fig.VI.1 - Diagrama em Blocos do Transmissor

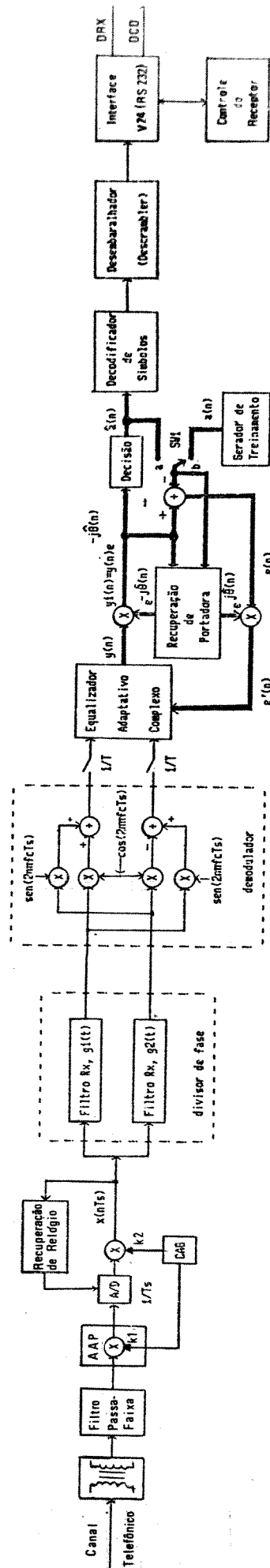


Fig.VI.2 - Diagrama em Blocos do Receptor

símbolos, parte real e imaginária, são passados através do filtro de transmissão $p(t)$, cuja característica de amplitude é a raiz quadrada do cosseno-levantado com excesso de faixa 12%. Este filtro é implementado sob forma digital e, por causa do excesso de faixa, deve processar as amostras de entrada a uma taxa superior a 2400 Hz, de forma a evitar a superposição de espectros. A taxa escolhida é de $1/T_s=9600$ Hz, o que gera um fator de interpolação de 4 vezes, isto é, para cada símbolo transmitido, são inseridos 3 zeros na sequência de entrada do filtro. A resposta impulsiva do filtro pode ser calculada através de transformada inversa de Fourier. Este cálculo foi realizado utilizando-se uma FFT com 2048 pontos, e chegou-se à conclusão que um filtro FIR (Finite duration Impulse Response) com 120 taps pode implementar a resposta desejada com um erro menor que 0,5dB dentro da faixa (0 a 1344 Hz), e uma atenuação maior que 40dB fora da faixa. Observe que, devido ao fator de interpolação, a cada iteração (correspondendo a T_s segundos) são necessárias apenas 30 multiplicações para se obter a amostra de saída. O sinal complexo na saída do filtro tem suas partes real e imaginária multiplicadas por $\cos(2\pi f_c T_s)$ e $-\sin(2\pi f_c T_s)$ respectivamente, com $f_c=1700$ Hz. Deste modo o espectro do sinal é deslocado para a banda passante do canal telefônico (300 a 3400 Hz). Em seguida o sinal digital é convertido para a forma analógica através do conversor D/A, submetido a uma filtragem passa-baixas e entregue ao canal telefônico através do transformador de linha.

Imediatamente após o período de treinamento, o circuito de controle informa ao terminal, através do sinal CTS (Clear To Send), que o transmissor está apto para receber a sequência de dados propriamente dita. O terminal por sua vez dá início à transmissão

através da linha DTX (Transmitted Data). A sequência de dados passa então pelo scrambler, cuja função é tornar a sequência de saída pseudo-aleatória, de forma que a hipótese sobre símbolos incorrelatos, usada na teoria de equalização adaptativa e algoritmos de sincronismo, seja válida. No receptor o descrambler realiza o processo inverso, e entrega ao terminal remoto a sequência de dados originalmente transmitida. O polinômio gerador do scrambler é padronizado pela recomendação V.29 do CCITT e é dado por

$$P(X) = 1 + X^{18} + X^{23} \quad (VI.1)$$

Este polinômio é irredutível e primitivo /14/, de modo que, como é mostrado em /41/, uma sequência periódica de entrada terá seu período multiplicado por $2^{23} - 1$, tornando-se assim praticamente aleatória.

A sequência de saída do scrambler é entregue ao codificador de símbolos que, a cada 4 bits gera, um símbolo da constelação, sendo que o primeiro bit determina a amplitude, e os três restantes a mudança de fase em relação ao símbolo anterior (modulação DPSK). O mapeamento entre as sequências binária e de símbolos é padronizado e pode ser encontrado em /5/. A sequência de símbolos na saída do codificador segue o mesmo caminho percorrido pela sequência de treinamento já descrito acima.

VI.2.2 - Receptor

A fig.VI.2 mostra o diagrama em blocos do receptor. O sinal analógico proveniente do canal telefônico passa primeiro por um

filtro passa-faixa, centrado na frequência de 1700 Hz, que objetiva limitar o ruído à faixa do sinal e minimizar as componentes de alta frequência para evitar superposição de espectros na conversão A/D. O controle automático de ganho (CAG), a partir da monitoração dos níveis do sinal na saída do A/D e nas linhas de atraso dos filtros de recepção e do equalizador adaptativo, ajusta o ganho K_1 do amplificador analógico programável (AAP), e o ganho K_2 aplicado ao sinal já digitalizado, de modo que estes níveis permaneçam dentro de limites convenientes às operações de conversão e filtragem. Um possível algoritmo para o CAG é proposto em /28/.

O algoritmo de recuperação de relógio, a ser analisado detalhadamente na seção VI.3, trabalha no sentido de fornecer uma fase de amostragem que evite a formação de nulos espectrais que, como foi mostrado nos capítulos anteriores, degrada sensivelmente o desempenho do equalizador adaptativo.

Os dois blocos seguintes, divisor de fase e demodulador, atuam conjuntamente com o objetivo de deslocar o espectro do sinal recebido de volta à banda base. O divisor de fase é composto por dois filtros passa-faixa com características de amplitude idênticas às do filtro de transmissão transladado para $f_c=1700$ Hz, e as fases defasadas de 90 graus entre si. As respostas impulsivas destes filtros $g_1(nT_s)$ e $g_2(nT_s)$ podem ser facilmente obtidas a partir da resposta impulsiva do filtro de transmissão $p(nT_s)$ através das seguintes equações:

$$g_1(nT_s) = p(nT_s)\cos(2\pi n f_c T_s) \quad (\text{VI.2a})$$

$$g_2(nT_s) = p(nT_s)\sin(2\pi n f_c T_s) \quad (\text{VI.2b})$$

A estrutura do demodulador corresponde à multiplicação da saída do divisor de fase por $\exp(-j2\pi f_c T_s)$. Pode-se mostrar /43/ que, com as estruturas do filtro de recepção e do demodulador descritas acima, os termos em $\pm 2f_c$ são totalmente eliminados, não havendo portanto a necessidade de um filtro passa-baixas como no caso do demodulador convencional (multiplicação por $\exp(-j2\pi f_c T_s)$ + filtragem passa-baixas).

O equalizador adaptativo atua no sinal demodulado atenuando a IIS, bem como a interferência entre as componentes real e imaginária. O circuito de recuperação de portadora, que trabalha diretamente sobre o sinal equalizado, compensa o desvio de frequência entre as portadoras local e remota, e o jitter de fase (ver seção VI.4). Como é mostrado em /44/, esta estrutura é equivalente à implementação utilizando o equalizador em banda passante seguido dos circuitos de demodulação e recuperação de portadora, de modo que não há atraso entre a detecção do erro de fase e a aplicação da correção correspondente. Outro aspecto importante é que, mesmo operando conjuntamente, a interação com o algoritmo de equalização não chega a prejudicar o desempenho do sistema. Como é mostrado em /45/, a velocidade de convergência do algoritmo de atualização dos taps é praticamente a mesma que quando ele opera isoladamente.

Após o período de treinamento, a chave SW1 passa para a posição "a", os símbolos decididos são entregues aos circuitos de decodificação e desembaralhamento (descrambler), e o sinal DCD (Data Channel Line Received Detector) é ativado, indicando para o terminal que a sequência binária recebida já se encontra disponível na linha DRX (Received Data).

VI.3 - Algoritmo de Recuperação de Relógio

Como foi mostrado nos capítulos IV e V, o equalizador transversal com espaçamento T , tem seu desempenho fortemente dependente da fase de amostragem. Vários algoritmos têm sido propostos no sentido de amostrar o sinal recebido com uma fase adequada à operação do equalizador. Adotando o critério de mínimo MSE na saída do equalizador, em /46/ é apresentado um algoritmo, baseado em estimativas do gradiente do erro de fase obtidas a partir dos símbolos decididos, que atinge a fase ótima de amostragem. Este algoritmo, no entanto, requer o processamento de derivadas temporais do sinal equalizado e é portanto difícil de ser implementado na prática, onde o equalizador é totalmente digital. Em /47/ é proposto um algoritmo onde o cálculo da derivada é evitado, mas a convergência é lenta para aplicação em modems que devem operar em sistemas multiponto. Em geral, equalizadores com muitos taps excluem o uso de algoritmos baseados nos símbolos decididos, como o proposto em /48/, devido à dificuldade em compensar o jitter em malhas de realimentação com grandes atrasos. Além disso, a interação com algoritmos de equalização e recuperação de portadora, torna estes algoritmos lentos. Por estes motivos, os algoritmos normalmente utilizados, extraem o relógio a partir do processamento da envoltória do sinal recebido em banda passante, eliminando assim a interação com o equalizador e minimizando o atraso na malha de realimentação. Este método não minimiza o MSE, mas a fase de amostragem por ele gerada não está muito distante da fase ótima /49/.

Nesta seção é estudado o algoritmo proposto em /50/, onde a fase

de amostragem é ajustada de modo que a energia do sinal recebido, quando amostrado a $1/T$ Hz, seja máxima.

A partir das eqs.(II.21) e (IV.16), e desprezando-se o ruído, pode-se mostrar que o espectro do sinal na entrada do equalizador é dado por

$$V(f, t_0) = (1/T) \sum_n a(n) e^{j2\pi n f T} \cdot \sum_k H(f - k/T) e^{-j2\pi(f - k/T)t_0} \quad (VI.3)$$

onde t_0 = fase de amostragem (deslocamento do instante de amostragem).

$H(f)$ = resposta em frequência do canal equivalente $h(t)$.

A grosso modo pode-se dizer que a resposta em frequência do equalizador, $C(f)$, é ajustada de modo a aproximar o recíproco da somatória (ver eq.(III.33))

$$V_s(f, t_0) = (1/T) \sum_k H(f - k/T) e^{-j2\pi(f - k/T)t_0} \quad (VI.4)$$

Pelas eq.(IV.18), observa-se que existem certos valores de t_0 que podem causar vales espectrais em $V_s(f, t_0)$ nas frequências compreendidas entre $(1-\alpha)/2T$ e $(1+\alpha)/2T$, onde há superposição de espectros, e em consequência aumentar o MSE na saída do equalizador. Portanto, um critério possível para se ajustar t_0 , é maximizar a energia

$$Eng(t_0) = T \int_0^{1/T} |V_s(f, t_0)|^2 df \quad (VI.5)$$

não permitindo assim a formação dos vales espectrais indesejáveis. Como é mostrado em /50/, a diferença entre o MSE mínimo (fase ótima)

e o MSE conseguido com o critério acima, é menor que 0,5 dB para canais típicos.

Substituindo-se (VI.4) em (VI.5) e mantendo-se apenas os termos dependentes de t_0 , obtém-se

$$\Delta \text{Eng}(t_0) = (2/T) \text{Re} \left[\int_{1/2T - \Delta f}^{1/2T + \Delta f} H(f) H^*(f - 1/T) e^{-j2\pi t_0/T} df \right] \quad (\text{VI.6})$$

onde $\Delta f = \alpha / 2T$ Hz (excesso de faixa) (VI.7)

$\text{Re}(\) =$ parte real

Definindo-se como $A(f)$ e $\phi(f)$ a amplitude e a fase de $H(f)$ respectivamente, e mudando-se a variável de integração para $f' = f - 1/2T$, a eq.(VI.6) pode ser escrita como

$$\Delta \text{Eng}(t_0) = (2/T) \int_{-\Delta f}^{\Delta f} [A(f - 1/2T) A(f + 1/2T)] \cos[2\pi t_0/T + \phi(f - 1/2T) - \phi(f + 1/2T)] df \quad (\text{VI.8})$$

A eq.(VI.8) indica que $\Delta \text{Eng}(t_0)$, considerado como uma função da fase de amostragem t_0 , é uma função senoidal de t_0 com frequência $1/T$ Hz e consequentemente possui apenas um máximo local quando t_0 varia num intervalo de duração T . Assim, o algoritmo do gradiente para a busca do valor ótimo de t_0 (energia máxima) pode ser estabelecido como

$$t_0(n+1) = t_0(n) + \mu \left[\frac{\partial}{\partial t_0} \Delta \text{Eng}(t_0) \right]_{t_0=t_0(n)} \quad (\text{VI.9})$$

onde $\mu > 0$ é o passo de adaptação.

Finalmente, substituindo-se (VI.8) em (VI.9), obtém-se

$$\begin{aligned}
 t_o(n+1) = t_o(n) - (\mu 4\pi/T) \int_{-\Delta f}^{\Delta f} A(f-1/2T)A(f+1/2T) \\
 \qquad \qquad \qquad \text{sen}[2\pi t_o/T + \phi(f-1/2T) - \phi(f+1/2T)]df \qquad (VI.10)
 \end{aligned}$$

VI.3.1 - Circuito de Extração da Informação de Sincronismo

Neste ítem é descrito um circuito prático que permite a implementação do algoritmo em (VI.10).

Sejam B(f) um filtro passa-baixas com resposta impulsiva b(t), e b1(t) e b2(t) dois filtros passa-faixa tais que

$$B_1(f) = B(f-f_1) \qquad (VI.11a)$$

$$B_2(f) = B(f-f_2) \qquad (VI.11b)$$

onde $f_1 = f_c - 1/2T$ e $f_2 = f_c + 1/2T$

e com resposta impulsiva complexa dada por

$$b_i(t) = b(t)e^{j2\pi f_i t}, \quad i=1,2 \qquad (VI.12)$$

Admitindo-se que os filtros b1(t) e b2(t) sejam excitados pelo sinal x(nTs) após o conversor A/D da fig.VI.2, e definindo-se as respectivas saídas por q1(t) e q2(t), pode-se mostrar /50/ que o sinal q(t) dado por

$$q(t) = q_1^*(t)q_2(t) \qquad (VI.13)$$

tem valor médio $E[q(t)]$ dado por

$$E[q(t)] = (S_a/T) \int_{-\infty}^{\infty} |B(f)|^2 H^*(f-1/2T) H(f+1/2T) e^{j2\pi t/T} df \quad (VI.14)$$

Assim, para $B(f)$ ideal, isto é

$$B(f) = \begin{cases} 1, & f < \Delta f \\ 0, & \text{em caso contrário,} \end{cases}$$

o gradiente da energia (ver eq.(VI.10)), a menos de uma constante, está relacionado com $E[q(t)]$ por

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_0} \Delta \text{Eng}(t_0) \right] = \text{Im} \left[E[q(t)] \right] \Big|_{t=nT-t_0} \quad (VI.15)$$

e portanto, uma estimativa não polarizada do gradiente é

$$\begin{aligned} q_T(n) &= \text{Im}[q(t)] \Big|_{t=nT-t_0} \\ &= \left[\text{Re}(q_1(t)) \text{Im}(q_2(t)) - \text{Im}(q_1(t)) \text{Re}(q_2(t)) \right] \Big|_{t=nT-t_0} \end{aligned} \quad (VI.16)$$

Logo, o algoritmo em (VI.10) tem sua versão estocástica escrita como

$$t_0(n+1) = t_0(n) + \mu q_T(n) \quad (VI.17)$$

Para compensar adicionalmente o desvio de frequência entre os osciladores local e remoto, pode-se fazer

$$t_0(n+1) = t_0(n) + \mu_1 q_T(n) + \mu_2 \sum_{k=1}^n q_T(k) \quad (VI.18)$$

que é a equação de um PLL (Phase Lock Loop) de segunda ordem. Na

prática o desvio de frequência é muito pequeno, de modo que $\mu_1 \gg \mu_2$ e, como é mostrado em /51/, o valor μ_1 que maximiza a velocidade de convergência, é dado por

$$\mu_1 = T/2\pi K \tag{VI.19}$$

onde
$$K = E\left[|g(nT-t_0)|\right] \tag{VI.20}$$

VI.3.1.1 - Implementação do Circuito

Do ponto de vista de implementação, a escolha mais simples para $B(f)$ é um filtro digital passa-baixas de primeira ordem, isto é

$$B(f) = 1/(1-re^{-j2\pi fTs}) \tag{VI.21a}$$

e
$$b(nTs) = r^n d(n) \tag{VI.21b}$$

onde $d(n)$ é a função degrau unitário,
$$\begin{cases} d(n)=0 & \text{para } n < 0 \\ d(n)=1 & \text{para } n \geq 0 \end{cases}$$

$T_s = T/4$ (período de amostragem do conversor A/D)

$0 < r < 1$, constante que determina a largura de faixa de $B(f)$.

Assim, os filtros passa-faixa $b_1(nTs)$ e $b_2(nTs)$ serão dados por

$$b_i(nTs) = r^n e^{j2\pi f_i Ts} d(n), \quad i=1,2 \tag{VI.22}$$

Pela definição dos sinais $q_1(t)$ e $q_2(t)$, tem-se

$$\begin{aligned} \text{Re}[q_i(nTs)] &= \text{Re}[x(nTs)*b_i(nTs)] \\ &= x(nTs)*r^n \cos(2\pi f_i Ts)d(n), \quad i=1,2 \end{aligned} \tag{VI.23a}$$

$$\begin{aligned}
e \quad \text{Im}[q_i(nTs)] &= \text{Im}[x(nTs)*b_i(nTs)] \\
&= x(nTs)*r^n \text{sen}(2\pi f_i Ts)d(n), \quad i=1,2 \quad (\text{VI.23b})
\end{aligned}$$

onde $x(nTs)$ = sequência real na saída do conversor A/D.

Definindo-se as funções de transferência

$$H_{Ri}(Z) = \frac{\text{Transformada Z de Re}[q_i(nTs)]}{\text{Transformada Z de } x(nTs)}, \quad i=1,2 \quad (\text{VI.24a})$$

$$\begin{aligned}
e \quad H_{Ii}(Z) &= \frac{\text{Transformada Z de Im}[q_i(nTs)]}{\text{Transformada Z de } x(nTs)}, \quad i=1,2 \quad (\text{VI.24b})
\end{aligned}$$

então, para $Z=\exp(j2\pi fTs)$ e pelas eqs.(VI.23) e (VI.24), tem-se

$$H_{Ri}(Z) = \frac{1 - r\cos(2\pi f_i Ts)Z^{-1}}{1 - 2r\cos(2\pi f_i Ts)Z^{-1} + r^2 Z^{-2}}, \quad i=1,2 \quad (\text{VI.25a})$$

$$\begin{aligned}
e \quad H_{Ii}(Z) &= \frac{r\text{sen}(2\pi f_i Ts)Z^{-1}}{1 - 2r\cos(2\pi f_i Ts)Z^{-1} + r^2 Z^{-2}}, \quad i=1,2 \quad (\text{VI.25b})
\end{aligned}$$

De posse das equações (VI.16), (VI.18) e (VI.25), o circuito de recuperação de relógio pode ser construído como mostrado na fig.VI.3, onde a estrutura utilizada contém um número mínimo de atrasadores /8/.

Na prática, para minimizar o jitter de fase, os filtros $B_1(f)$ e $B_2(f)$ devem ser de faixa estreita, isto é $r \rightarrow 1$. Neste caso o circuito da fig.VI.3 opera de maneira tal que os instantes de amostragem ocorrem quando as fases do canal nas frequências $f_c+1/2T$

e $\omega_c - 1/2T$ são iguais a menos de múltiplos de 2π . Como é mostrado em /52/, esta é uma boa aproximação da fase ótima. Este fato será usado na seção seguinte para a obtenção do sincronismo rápido.

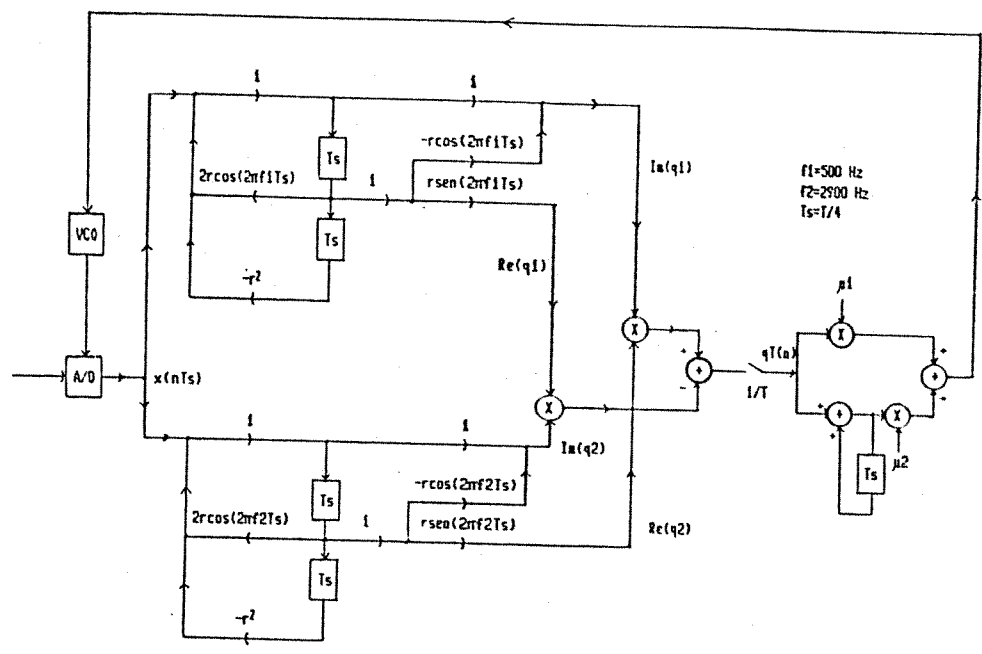


Fig.VI.3 - Circuito de Recuperação de Relógio

VI.3.2 - Sincronismo Rápido

Como mencionado na seção III.8, a eficiência de uma rede multiponto é em grande parte dependente do tempo de inicialização dos modems que a integram. O algoritmo descrito na seção anterior se presta à manutenção do sincronismo de símbolos no estado estacionário mas, para uma aquisição inicial rápida, que deve ocorrer antes que o equalizador adaptativo entre em funcionamento, um outro algoritmo deve ser utilizado. Considerando-se que o primeiro segmento da sequência de treinamento padronizada pelo CCITT

é composto de dois símbolos $(-3,0$ e $3,-3)$ que ocorrem alternadamente, o sinal na saída do filtro de transmissão é dado por

$$s_1(t) = p(t) * \sum_k a(k) \delta(t-kT) \quad (\text{VI.26})$$

onde $p(t)$ = resposta impulsiva do filtro de transmissão

$$e \quad a(k) = 3 \left[(-1)^k - j \left(1 + (-1)^k \right) / 2 \right] \quad (\text{treinamento}) \quad (\text{VI.27})$$

Tomando-se a transformada de Fourier da eq.(VI.26) para a sequência $a(k)$ dada em (VI.27), e levando-se em conta que $P(f)$ é limitado em frequência a um valor $(1+\alpha)/2T < 1/T$, obtém-se

$$|S_1(f)|^2 = (3/2T)^2 |P(f)|^2 \left[5\delta(f-1/2T) + 5\delta(f+1/2T) + \delta(f) \right] \quad (\text{VI.28})$$

Portanto, após a modulação (portadora em $f_c=1700$ Hz) e passagem pelo canal telefônico $Z(f)$, o sinal na saída do A/D, $x(nT_s)$, terá raias espectrais nas frequências 500, 1700 e 2900 Hz. Passando-se este sinal por um filtro tendo um nulo em 1700 Hz (notch) e fase nula, obtém-se

$$x'(nT_s) = A \cos(2\pi 500nT_s + \phi_1) + B \sin(2\pi 2900nT_s + \phi_2) \quad (\text{VI.29})$$

onde A e B são constantes que dependem do canal, e

ϕ_1 e ϕ_2 são fases do canal nas frequências 500 e 2900 Hz respectivamente.

Como discutido no final da seção anterior, uma boa aproximação da fase ótima é conseguida quando $\phi_1=\phi_2$. Para isto, pela propriedade do deslocamento temporal da transformada de Fourier, to deve ser dado

por

$$t_0 = - \frac{\phi_2 - \phi_1}{2\pi(2900-500)} \tag{VI.30}$$

O ângulo $\phi_2 - \phi_1$ pode ser obtido por um processamento não linear. Passando-se o sinal $x'(nT_s)$ da eq.(VI.29) por um retificador de onda completa, a não linearidade do circuito provoca o surgimento de uma raia espectral em $1/T$ Hz ($2400=2900-500$) com fase dada por $\phi_2 - \phi_1$. Considerando-se que o sinal retificado é periódico com período $n=48$, resulta:

$$\phi_2 - \phi_1 = \text{Arg} \left[\sum_{n=0}^{47} |x'(nT_s)| e^{-j2\pi 2400 n T_s / 48} \right] \tag{VI.31}$$

onde $\text{Arg}(x) =$ argumento de x
 $T_s = T/4 = 1/9600$ s.

Considerando-se que o cálculo em (VI.31) requer uma sequência de 12 símbolos ($48/4$), e que o CAG pode produzir um ganho adequado em 2,5ms (6 símbolos), a aquisição inicial é obtida em 7,5ms (18 símbolos). Após este período o sincronismo de símbolos é controlado pelo algoritmo em (VI.18), situação que perdura até o final da comunicação.

VI.4 - Algoritmo de Recuperação de Portadora

O processo de demodulação é afetado por vários tipos de distorção. Os dois principais são o desvio de frequência Δf entre as portadoras local e recebida, e o jitter de fase. Assim, a fase da portadora recebida é variante no tempo, e pode ser escrita como

$$\theta(n) = \theta_0 + 2\pi n \Delta f T + \psi(n) \quad (\text{VI.32})$$

onde θ_0 = defasagem constante introduzida pelo canal

$\psi(n)$ = jitter de fase

O primeiro termo de (VI.32) é constante e pode ser incorporado à resposta impulsiva complexa do canal equivalente, causando assim uma rotação de $-\theta_0$ rad no vetor de coeficientes. O segundo termo é causado pela diferença de frequência entre os osciladores local e remoto, que está na faixa de ± 1 Hz, e pelos processos de modulação/demodulação (multiplex) que ocorrem num canal telefônico, que pode estar na faixa de ± 6 Hz. Portanto o desvio máximo chega a ± 7 Hz, o que corresponde a uma rotação de fase de aproximadamente ± 1 grau/símbolo para $1/T=2400$ Hz. Para compensar esta rotação os taps do equalizador têm que girar em sentido oposto e com a mesma velocidade. Isto causa uma forte degradação no desempenho para desvios maiores que 0,5 Hz, pois o valor de μ no algoritmo do gradiente tem que ser excessivamente elevado. Por este motivo a compensação do desvio de frequência deve ser realizada pelo circuito de recuperação de portadora descrito adiante. O terceiro termo de (VI.32) representa o jitter de fase causado pela rede elétrica nos equipamentos responsáveis pela comunicação telefônica, e é essencialmente uma senóide com frequência 60 Hz e amplitude típica de 20 graus pico-a-pico (p-p), isto é

$$\psi(n) = 20 \sin(2\pi n 60 T) \quad (\text{VI.33})$$

Um modelo mais completo para o jitter de fase deveria levar em conta as harmônicas de ordem superior, e a característica aleatória do processo. Como é mostrado em /53/, este modelo pode ser escrito

como

$$\psi(n) = \sum_{j=1}^p A(j) \sin(2\pi \Delta \omega_j T + B(j)) + \theta_r(n) \quad (\text{VI.34})$$

onde $A(j)$ = amplitude em radianos que decresce rapidamente com j
 $B(j)$ = fase arbitrária uniformemente distribuída entre
0 e 2π
 $\theta_r(n)$ = variável aleatória gaussiana, de média zero, e com
variância $\ll 1$.

Considerando-se que $A(2)$ é cerca de 12 dB menor que $A(1)$ /53/, e que a variância do segundo termo em (VI.34) é muito pequena, a aproximação em (VI.33) é razoável e será usada nas simulações deste capítulo.

O circuito de recuperação de portadora é formado por um detector de fase (Phase Detector Circuit-PDC), seguido de um PLL de segunda ordem. O algoritmo de detecção de fase é derivado de maneira simplificada a seguir. Uma derivação mais rigorosa pode ser encontrada em /44/. Supondo-se que o sistema esteja idealmente equalizado e o ruído seja nulo, o sinal na saída do equalizador é dado por

$$y(n) = a(n)e^{j\theta(n)} \quad (\text{VI.35})$$

onde $\theta(n)$ é dado em (VI.32).

Assumindo-se decisões corretas, o sinal de erro $e(n)$ pode ser escrito como (ver fig.(VI.2))

$$\begin{aligned}
e(n) &= y_i(n) - a(n) \\
&= y(n)e^{-j\hat{\theta}(n)} - a(n) \\
&= a(n)e^{j(\theta(n)-\hat{\theta}(n))} - a(n)
\end{aligned} \tag{VI.36a}$$

onde $\hat{\theta}(n)$ = fase estimada pelo PDC.

Para $\theta(n)-\hat{\theta}(n) \ll 1$, a exponencial em (VI.36a) pode ser expandida pelos termos de primeira ordem da série de Taylor, resultando

$$e(n) = a(n)j(\theta(n)-\hat{\theta}(n)) \tag{VI.36b}$$

Seja $\Delta\theta(n)=\theta(n)-\hat{\theta}(n)$, o erro de fase na iteração n . Então, pela eq.(VI.36b), obtém-se

$$\begin{aligned}
\Delta\theta(n) &= e(n)/(ja(n)) \\
&= (y_i(n) - a(n))/(ja(n))
\end{aligned} \tag{VI.37a}$$

Decompondo-se $y_i(n)$ e $a(n)$ em parte real e imaginária, tem-se

$$y_i(n) = y_{ir}(n) + j y_{ii}(n) \tag{VI.37b}$$

$$a(n) = a_r(n) + j a_i(n) \tag{VI.37c}$$

Substituindo-se (VI.37b) e (VI.37c) em (VI.37a) e levando-se em conta que $\theta(n)-\hat{\theta}(n) \ll 1$, de modo que a parte imaginária se anule, resulta

$$\Delta\theta(n) = \left[y_{ii}(n)a_r(n) - y_{ir}(n)a_i(n) \right] / |a(n)|^2 \tag{VI.38}$$

Na situação ideal, $y_i(n)=a(n)$ e $\Delta\theta(n)=0$. Quando $y_i(n) \neq a(n)$, o numerador de (VI.38) é a diferença entre duas áreas A_1 e A_2 como mostrado na fig VI.4. Assim, para a mesma fase $\theta(n)$ na saída do

equalizador, o cálculo em (VI. 38) resulta em diferentes valores, dependendo do símbolo recebido. Para minimizar este efeito, que equivale a um "ruído" sobre a informação desejada, a correção de fase $\hat{\theta}(n)$ deve ser dada por /54/

$$\hat{\theta}(n+1) = \hat{\theta}(n) + \beta_1 \Delta\theta(n) + \beta_2 \sum_{i=1}^n \Delta\theta(n-i) \quad (\text{VI.39})$$

onde $\beta_1 > \beta_2 > 0$ (constantes reais)

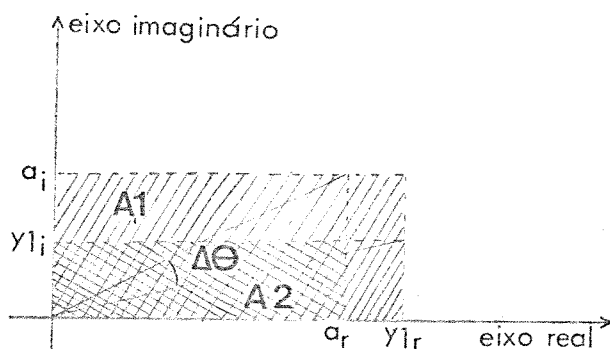


Fig.VI.4 - Ilustração do Erro de Fase

A eq.(VI.39) representa um PLL de segunda ordem e, como tal, pode corrigir desvios de frequência e jitter de fase, dependendo das constantes β_1 e β_2 , que também determinam as condições de estabilidade e velocidade de convergência /51/. Note que, com a operação do algoritmo de recuperação de portadora, o sinal de erro utilizado pelo algoritmo do gradiente deve sofrer uma rotação de $-\hat{\theta}(n)$ rad para compensar a rotação de $\hat{\theta}(n)$ rad aplicada ao sinal $y(n)$ na saída do equalizador. Assim, o algoritmo do gradiente deve ser escrito como

$$c(n+1) = c(n) - \mu u^*(n) e(n) e^{-j\hat{\theta}(n)} \quad (\text{VI.40})$$

Pelas equações (VI.39) e (VI.40), percebe-se que os dois algoritmos são mutuamente dependentes. Nas simulações apresentadas a seguir os

efeitos desta dependência podem ser observados.

As figuras VI.5a a VI.5d mostram o efeito do algoritmo em (VI.39) sobre a constelação de pontos para uma relação sinal/ruído infinita, um desvio de frequência de +7Hz, e na ausência de jitter de fase. As figuras VI.5a e VI.5b mostram respectivamente o sinal $y(n)$ na saída do equalizador, e $y_1(n)$ após a rotação de fase, durante o período de treinamento (símbolos 3,0 e -3,3). As figuras VI.5c e VI.5d mostram os mesmos sinais para uma sequência aleatória de 16 pontos (ver fig.II.12) após o treinamento. Observe que o sinal $y(n)$ gira, formando círculos concêntricos como consequência do desvio de frequência. O sinal $y_1(n)$ no entanto permanece fixo por efeito da rotação de fase imposta pelo algoritmo de recuperação de portadora. Para avaliar a interação entre os algoritmos de equalização (gradiente) e de recuperação de portadora, as constelações das figuras VI.5b e VI.5d foram comparadas com as constelações geradas pelo algoritmo do gradiente operando isoladamente num sistema com desvio de frequência nulo, e observou-se que elas são bastante semelhantes, tanto no período de treinamento (fig.VI.5b), como no estado estacionário (fig.VI.5d). Isto mostra que a interação entre os dois algoritmos não afeta significativamente nem a velocidade de convergência, nem o MSE residual no estado estacionário.

As figuras VI.6a e VI.6b mostram o efeito do ruído (SNR=24dB) sobre os sinais $y(n)$ e $y_1(n)$ respectivamente. Os pontos tendem a se dispersar em torno das suas coordenadas ótimas, com uma intensidade praticamente igual àquela produzida pelo algoritmo do gradiente operando isoladamente.

Nas figuras VI.7a, VI.7b e VI.8, o desvio de frequência é nulo, a

relação sinal/ruído é infinita, e o jitter de fase é senoidal com frequência de 60 Hz e 30 graus p-p. Pelas figuras VI.7a e VI.7b, que correspondem aos sinais $y(n)$ e $y_1(n)$ respectivamente, observa-se que o jitter de fase produz uma dispersão de forma circular ao longo da circunferência que passa pelas coordenadas do ponto ótimo, sendo que o algoritmo de recuperação de portadora atua no sentido de minimizar o ângulo desta dispersão (fig.VI.7b). Finalmente, a fig.VI.8 mostra a constelação na saída do equalizador quando apenas o algoritmo do gradiente está operando. Neste caso o jitter de fase degrada sensivelmente o desempenho do sistema, gerando uma dispersão tal que as regiões onde os símbolos recebidos ocorrem chegam a se superpor, o que eleva bastante a taxa de erros.

VI.4.1 - Sincronismo Rápido

Considerando-se que a constante θ_0 na eq.(VI.32) pode ser incluída na característica de fase do canal equivalente, e que o jitter de fase na maioria das linhas telefônicas é menor que 10 graus p-p /2/, se de alguma forma o desvio de frequência puder ser determinado, então ele será uma boa estimativa inicial do comportamento da fase $\theta(n)$ da portadora recebida, e o algoritmo em (VI.39) convergirá rapidamente. Em /28/ é mostrado que, transmitindo-se uma sequência periódica com período igual ao número de taps do equalizador ($M=2N+1$), a melhor estimativa do desvio de frequência é dada por

$$\Delta f = (1/2\pi MT) \text{Arg} \left[\sum_{i=0}^{W-1} u(n+N-i)u^*(n-N-1-i) \right] \quad (\text{VI.41})$$

onde W = comprimento da janela de tempo retangular

e $u(k)$ = k-ésima amostra na linha de atraso do equalizador
(ver fig.III.1).

Expandindo-se o lado direito da eq.(VI.41), obtém-se

$$\hat{\Delta f} = (1/2\pi MT) \text{Arctg} \left[\frac{\sum_{i=0}^{W-1} \text{Im}(A(i))}{\sum_{i=0}^{W-1} \text{Re}(A(i))} \right] \quad (\text{VI.42})$$

onde $\text{Arctg}(x)$ = arco cuja tangente é x

$$A(i) = u(n+N-i)u^*(n-N-1-i).$$

Observe que para cada valor de i , $A(i)$ representa o produto entre a amostra atual (lado esquerdo do equalizador), e o conjugado da amostra imediatamente seguinte à posição mais à direita do equalizador, e como a sequência recebida também é periódica com período igual ao comprimento do equalizador, a menos do desvio de frequência, e desprezando-se o jitter de fase e o ruído, este produto é real, de modo que a medida em (VI.42) é consistente. A janela W força uma mediação na estimativa de Δf . Para uma relação sinal/ruído de 24 dB, e um jitter de fase senoidal de 60 Hz e 5 graus p-p, as simulações mostram que uma janela de comprimento $W=8$ é suficiente para se obter estimativas com erros máximos da ordem de 10%.

Com o valor do desvio de frequência estimado, o algoritmo de recuperação de portadora da eq.(VI.39) é inicializado com

$$\Delta\theta(-1) = 2\pi\hat{\Delta f}T / \beta^2 \quad (\text{VI.43a})$$

$$\text{e} \quad \Delta\theta(0) = 0 \quad (\text{VI.43b})$$

Após a sincronização de relógio e a estimativa do desvio de frequência da portadora, é iniciado o ajuste dos taps do equalizador adaptativo. Para que este ajuste se proceda rapidamente, pode-se fazer uso da equalização cíclica, como mostrado na seção III.8.3. Com a estimativa $\hat{\Delta f}$ obtida anteriormente, o desvio de frequência pode ser compensado multiplicando-se a sequência $u(n)$ por $\exp(j2n\hat{\Delta f}nT)$, o que gera a sequência $u_0(n)$ dada por

$$u_0(n-i) = u(n-i)e^{j2n\hat{\Delta f}T(i+N)}, \quad i = -N \text{ a } N \quad (\text{VI.44})$$

A DFT de $u_0(n)$, $U_0(k)$, é calculada por

$$U_0(k) = \sum_{m=-N}^N u_0(n-m)e^{-j2\pi mk/M}, \quad k=0,1,\dots,M-1 \quad (\text{VI.45})$$

Os taps $c(i)$ são calculados pelas eqs. (III.91) e (III.92), e em seguida são deslocados ciclicamente em S posições até que o tap com maior módulo esteja na posição central. Finalmente, os taps deslocados $c(m)$, são multiplicados por $\exp(j2\pi\hat{\Delta f}T(m+N))$, $m=-N$ a N , para compensar a rotação de fase sofrida pela sequência original $u(n)$. O deslocamento cíclico é compensado pela inicialização de $\hat{\theta}(n)$, isto é

$$\hat{\theta}(0) = S \cdot 2\pi\hat{\Delta f}T \quad (\text{VI.46})$$

Os algoritmos para inicialização rápida descritos nesta seção foram testados através de simulações, e chegou-se à conclusão que para um equalizador com 31 taps complexos, uma sequência de comprimento igual a 45 símbolos é suficiente para uma boa inicialização do equalizador e do algoritmo de recuperação de

portadora. A sequência utilizada é periódica, de comprimento máximo, com período 31. O comprimento da sequência, 45 símbolos, refere-se a 31 símbolos que constituem um período, 8 símbolos para levar em conta o comprimento da janela utilizada na estimativa $\hat{\Delta f}$ e mais 6 símbolos adicionais (número determinado empiricamente). Portanto, como o algoritmo de recuperação de relógio necessita de 18 símbolos para ser inicializado, o tempo total requerido no treinamento é de apenas 26,25 ms (63 símbolos), o que é razoável para operação numa rede multiponto. Este tempo pode ser ainda levemente reduzido, diminuindo-se o comprimento W da janela utilizada na estimativa do desvio de frequência (8 símbolos), e o tempo de inicialização do CAG (6 símbolos), mas a degradação resultante pode comprometer o desempenho do sistema.

VI.5 - Conclusão

Neste capítulo foi estudado um sistema de transmissão de dados operando a 9600 bps. Foram descritos os algoritmos de recuperação de relógio e portadora, e métodos para se obter uma rápida inicialização do sistema. As simulações mostraram que, com estes métodos, o período de treinamento pode ser reduzido para tempos da ordem de 26 ms.

Um ponto importante é que todos os algoritmos apresentados podem ser facilmente implementados com os processadores de sinais atualmente disponíveis, e portanto a sua utilidade prática é imediata.

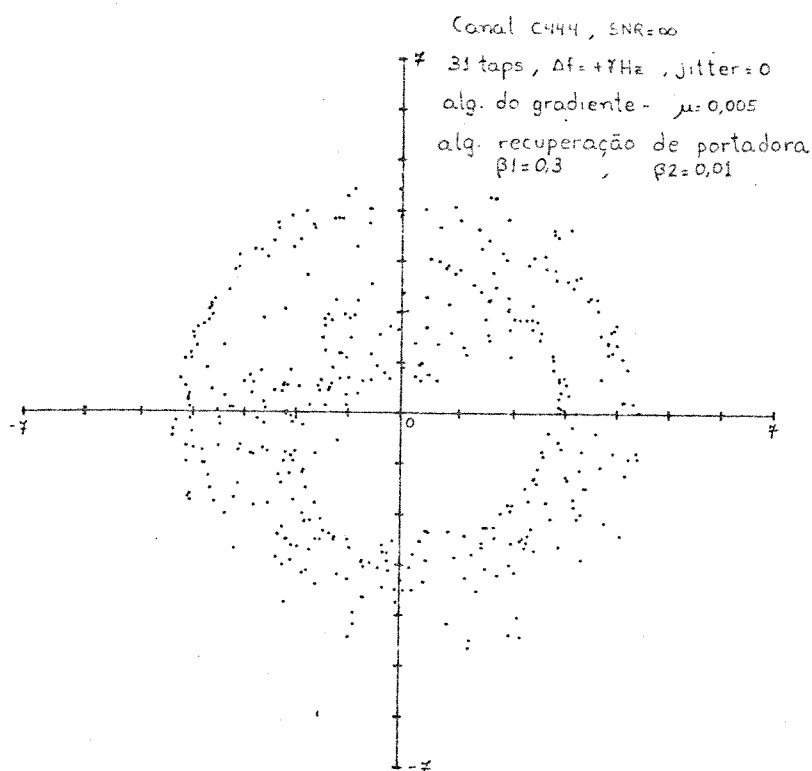


Fig. VI.5.a - Constelação do sinal $y(n)$ - treinamento

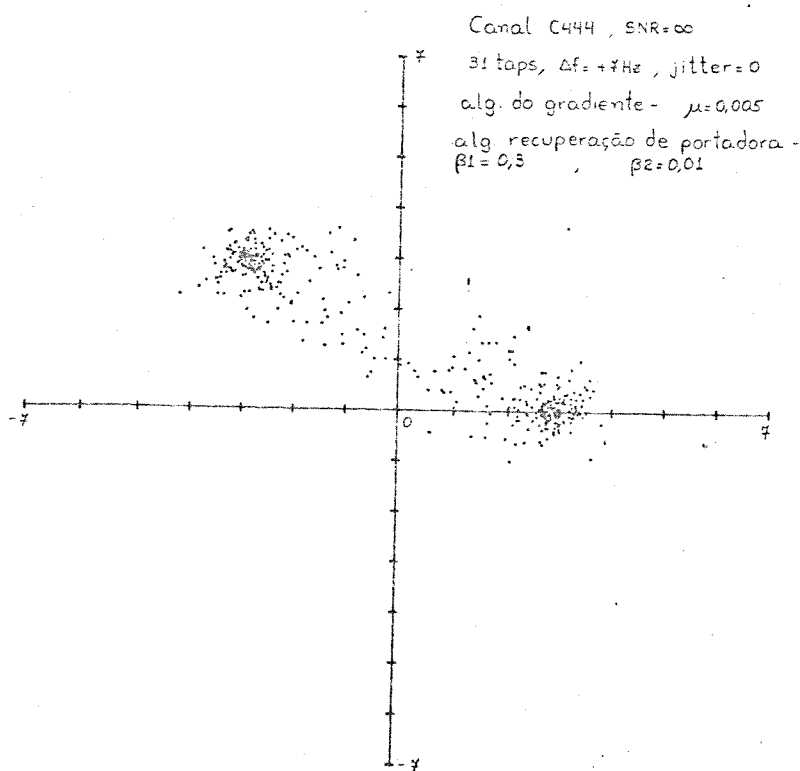


Fig. VI.5.b - Constelação do sinal $y_1(n)$ - treinamento

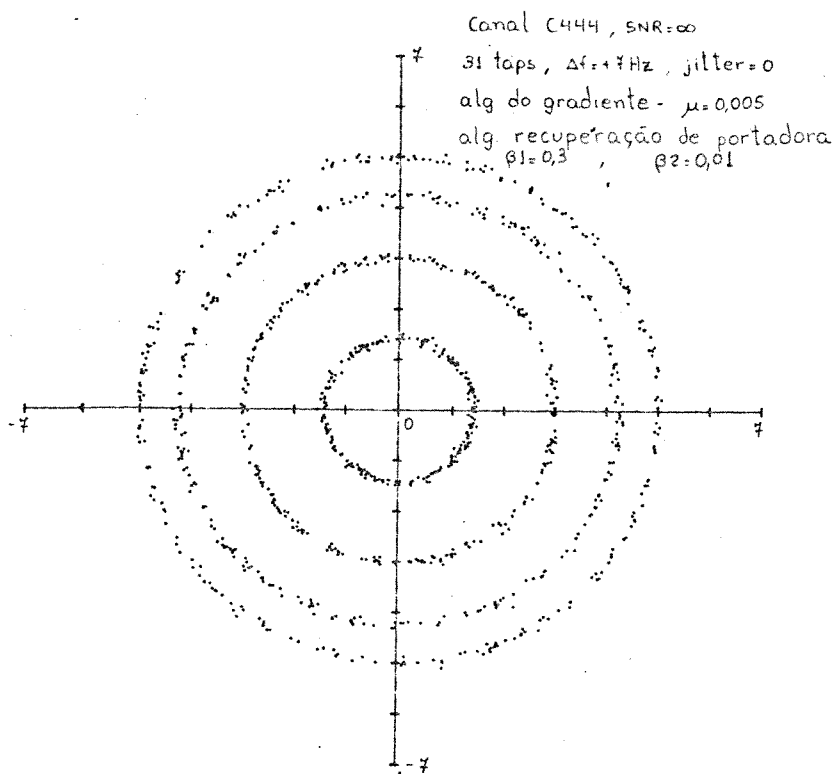


Fig. VI.5.c - Constelação do sinal $y(n)$ - estacionário

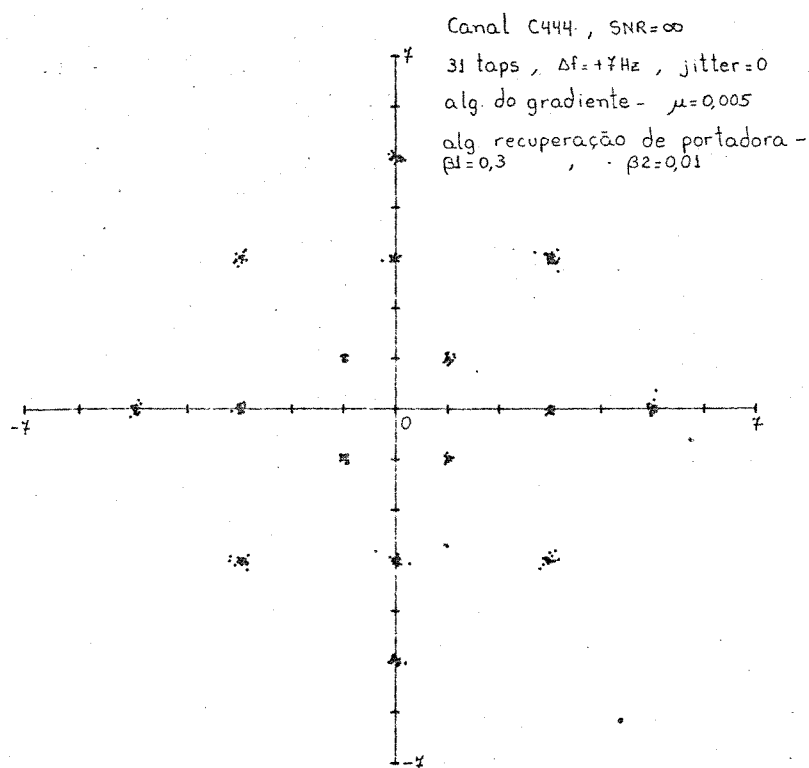


Fig. VI.5.d - Constelação do sinal $y_1(n)$ - estacionário

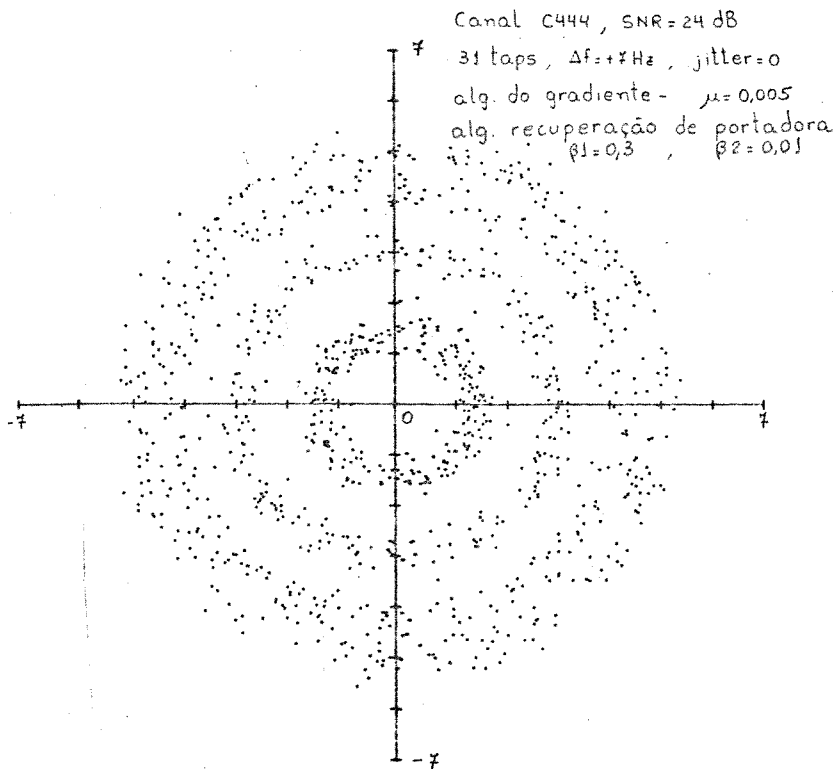


Fig. VI.6.a- Constelação do sinal $y(n)$

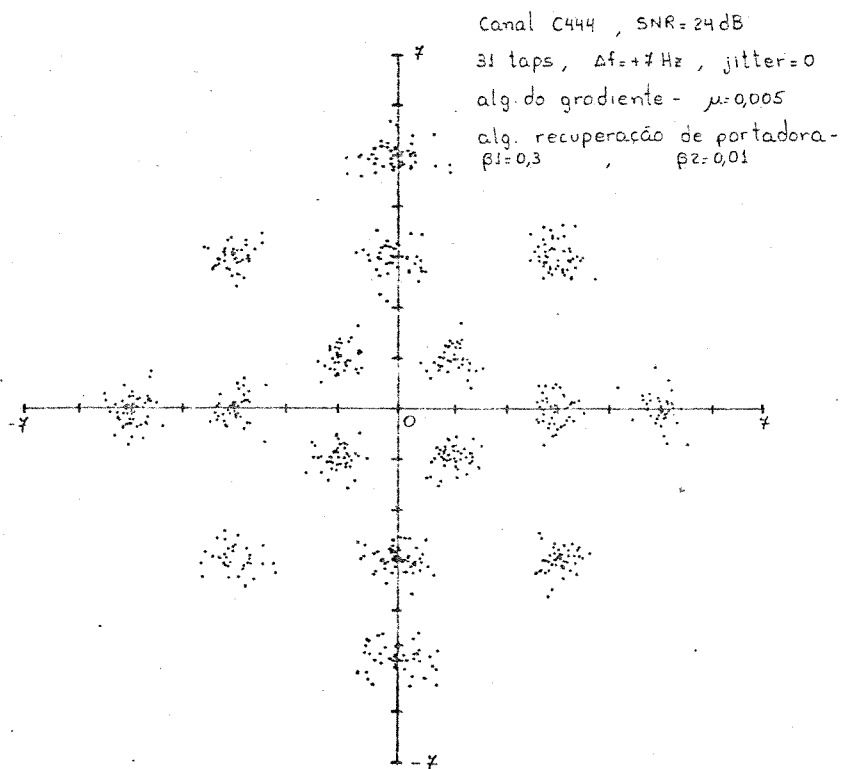


Fig. VI.6.b- Constelação do sinal $y_1(n)$

Efeito do ruído no algoritmo de recuperação de portadora

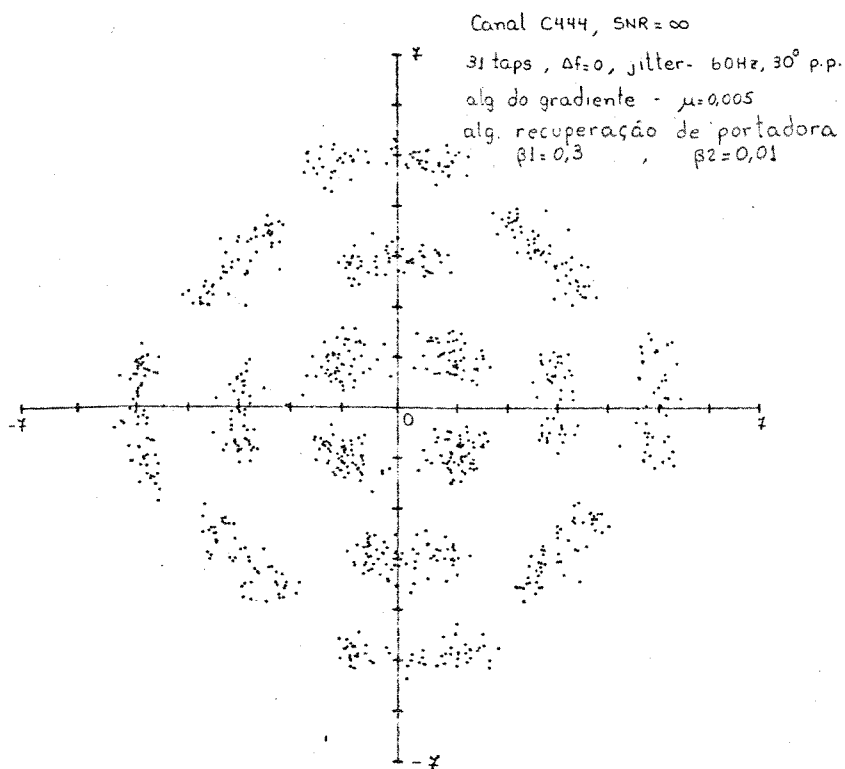


Fig. VI.7.a - Constelação do sinal $y(n)$

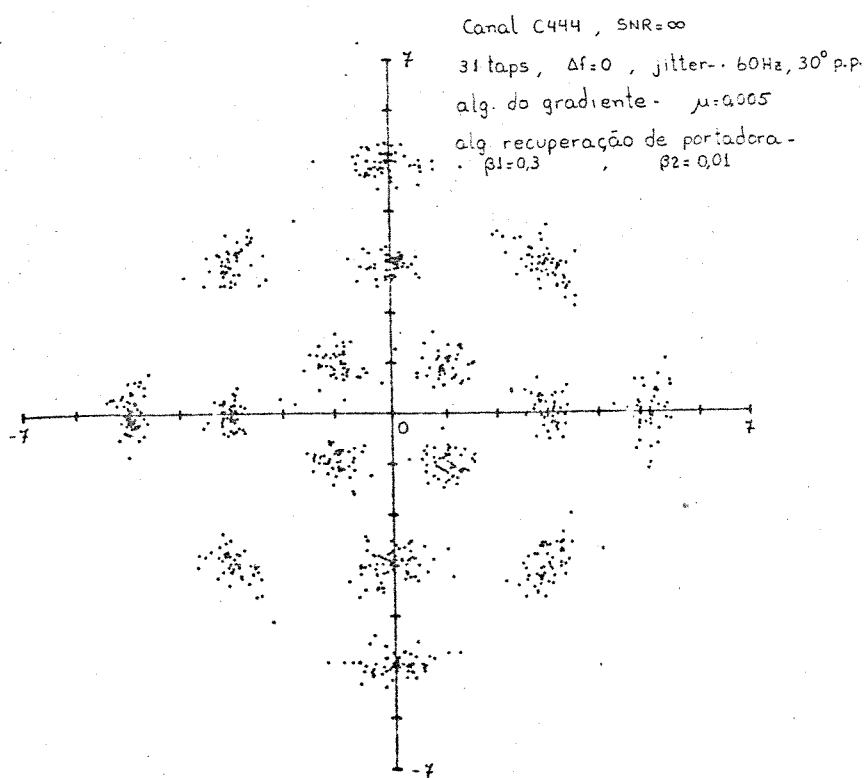


Fig. VI.7.b - Constelação do sinal $y_1(n)$

Efeito do jitter de fase sobre a constelação com os algoritmos do gradiente e de recuperação de portadora operando conjuntamente

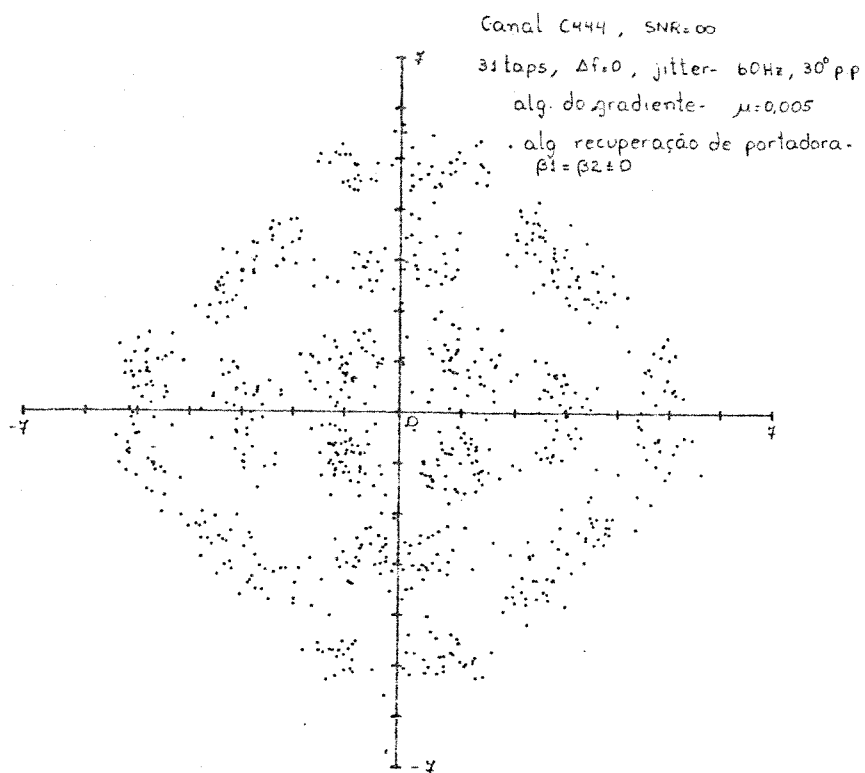


Fig. VI.8 - Constelação da saída do equalizador, com o algoritmo do gradiente operando isoladamente na presença de jitter de fase

VII - Conclusão

Num sistema de transmissão de dados, a interferência intersimbólica, gerada pelas distorções de amplitude e fase do canal telefônico, é o principal fator de degradação. Para atenuar este efeito, o receptor dispõe de um equalizador adaptativo, capaz de se ajustar aos diversos tipos de canais. Neste trabalho foram estudadas várias estruturas e algoritmos para o equalizador. As simulações efetuadas permitiram observar e comparar vários aspectos de interesse, como a velocidade de convergência, a sensibilidade ao ruído e à fase de amostragem, e a interação que ocorre quando os algoritmos de equalização e sincronismo operam conjuntamente. Uma característica importante do trabalho é que as simulações foram realizadas levando-se em conta os canais e parâmetros encontrados na prática, o que dá maior validade aos resultados obtidos.

Uma sequência imediata do trabalho consistirá na análise matemática do algoritmo modificado proposto no cap.III, com o objetivo de estabelecer as condições de estabilidade e convergência e, principalmente, a sequência de valores do passo de adaptação que maximiza a velocidade de convergência (estes parâmetros foram obtidos de maneira empírica até aqui). Paralelamente pode-se direcionar o estudo para canceladores de eco, dispositivos essenciais na comunicação bidirecional e simultânea a dois fios ("full-duplex"), pois como é constatado em recente trabalho /55/, apesar do advento da RDSI /56/ (Rede Digital de Serviços Integrados), a demanda por modems 9600 bps full-duplex é crescente. Além disso há interesse também em modems de mais altas velocidades

como 14400, 16800 e 19200 bps, para os quais o trabalho aqui realizado pode servir de subs7dio.

Apêndice A - Caracterização do Canal Telefônico

Um canal telefônico ligando dois pontos distantes pode ser dividido em três segmentos distintos: par de fios sem condicionamento, par de fios com condicionamento ("pupinização"), e ligação via rádio, que inclui os processos de multiplexação e demultiplexação. As características mais importantes destes canais, isto é, aquelas que afetam a transmissão de dados, são as distorções de amplitude e de atraso de grupo. Vários outros tipos de distorção, como ruído aditivo e distorções não lineares, também influenciam, com menor intensidade, o desempenho dos sistema de comunicação de dados /57/. Este apêndice se preocupa em modelar o canal telefônico levando em conta apenas as distorções de amplitude e atraso de grupo.

Os canais aqui modelados são identificados pelos seguintes códigos:

CAXYZ

ou

CXYZ

onde

A = comprimento em Km do cabo não condicionado (fio bitola 26 AWG). Nos canais utilizados neste trabalho, A=8 representando um comprimento de 8 Km. Para linhas curtas, A=0, e o parâmetro A é omitido no código de representação do canal. Nas linhas não condicionadas o atraso de grupo é desprezível, e a atenuação é aproximadamente linear com a frequência como mostrado na fig.A.1.

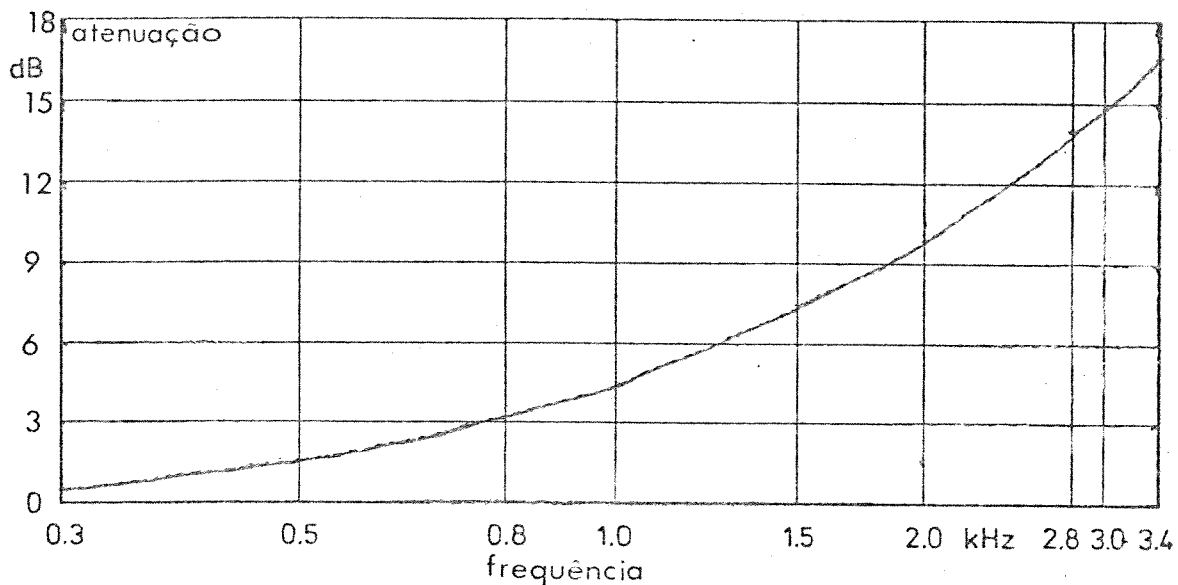


Fig.A.1 - Característica de Atenuação para 8 Km de Fio # 26

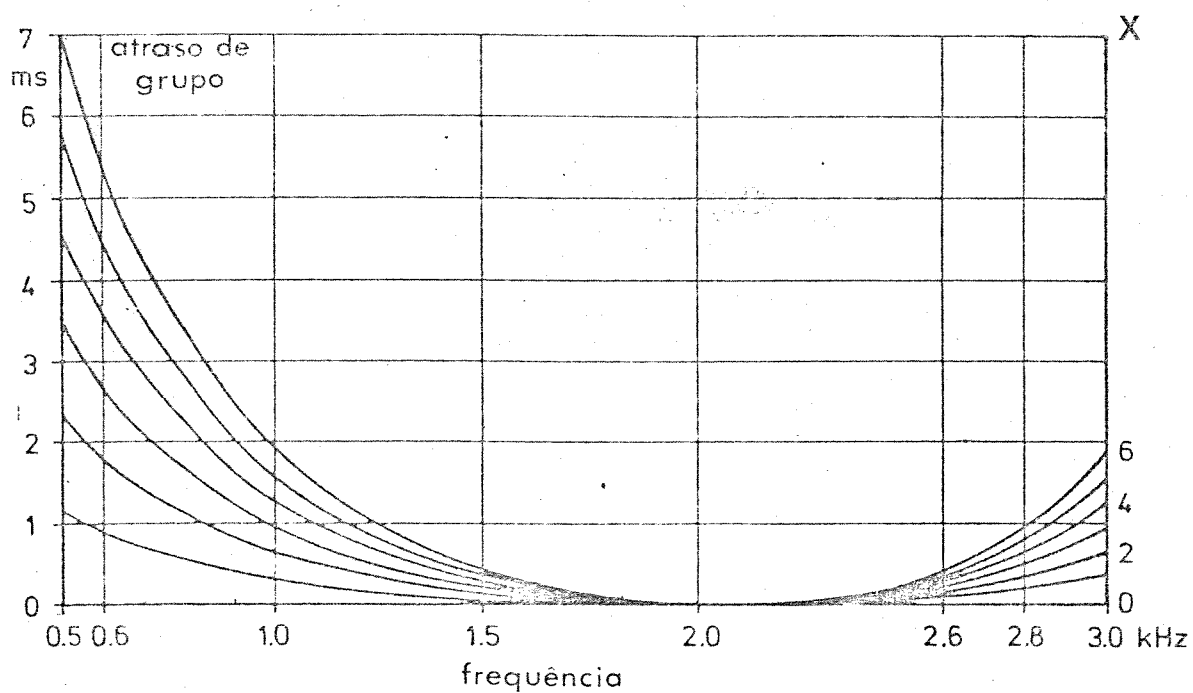


Fig.A.2 - Atraso de Grupo Causado por Seções Multiplex-Rádio-Demultiplex

X = número de seções do tipo: Multiplex-Rádio-Demultiplex (MRD). Estas seções geram uma característica de atraso de grupo parabólica, com o mínimo ocorrendo em 2 KHz, e em 500 Hz subindo para 1,16 ms (para X=1). Assim, para X=3 por exemplo, o atraso de grupo em 500 Hz será de $3 \times 1,16 = 3,48$ ms. A fig.A.2 mostra o comportamento do atraso de grupo para as seções MRD em função da frequência e do valor de X.

Y = número de seções de linhas condicionadas. Estas seções geram uma característica de atraso de grupo crescente nas altas frequências, uma vez que a pupinização causa uma atenuação elevada acima da faixa de voz. Cada seção pode ser interpretada como:

- 50 Km de linha com condicionamento de 80 mH a cada 1,7 Km (condicionamento leve), ou
- 17 Km de linha com condicionamento de 140 mH a cada 1,7 Km (condicionamento médio), ou
- 8,5Km de linha com condicionamento de 200 mH a cada 1,7 Km (condicionamento forte).

A fig.A.3 mostra a variação do atraso de grupo em função da frequência e do valor de Y.

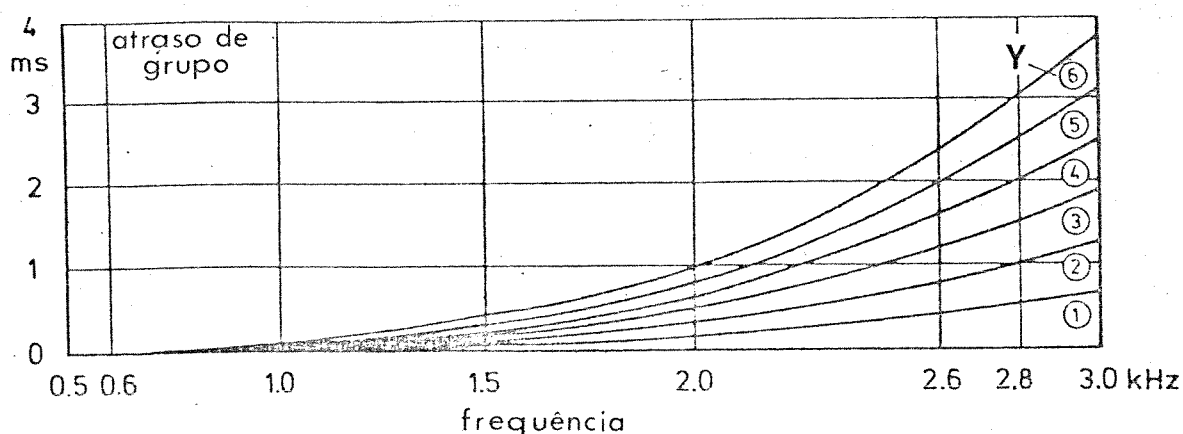


Fig.A.3 - Atraso de Grupo Causado por Seções Pupinizadas

Z = caracteriza o comportamento da distorção de amplitude gerada pelas seções X e Y. A fig.A4 mostra as curvas de atenuação em função da frequência e do valor de Z.

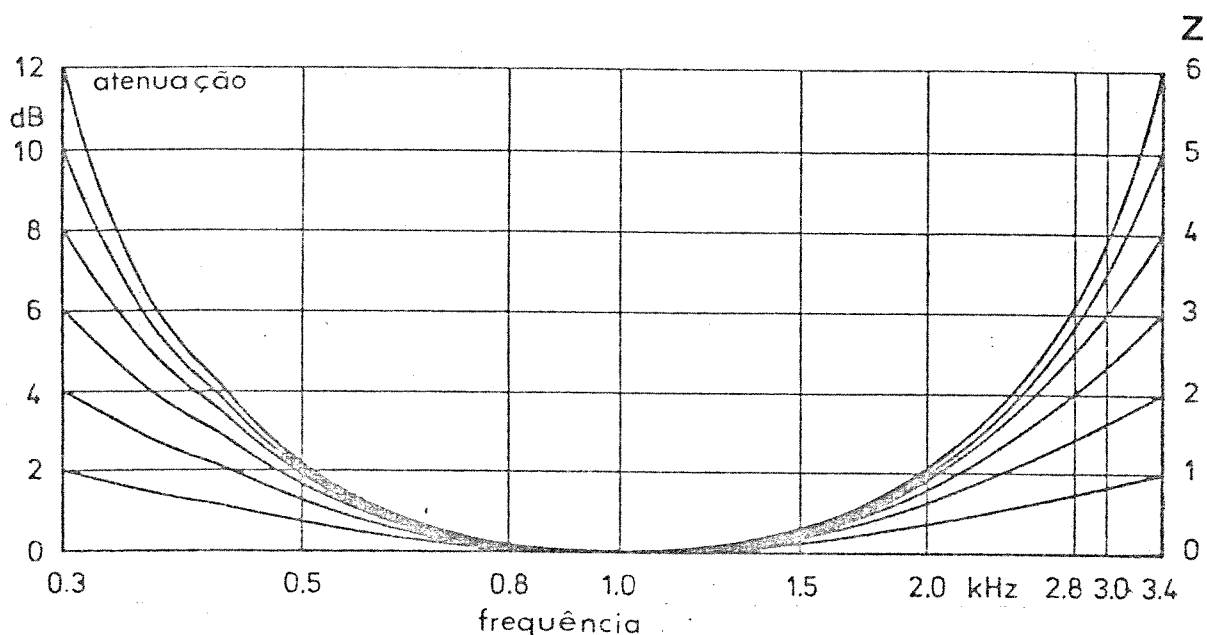


Fig.A.4 - Característica de Atenuação das Seções X e Y.

Neste trabalho são utilizados 5 canais diferentes, que representam as características típicas das linhas brasileiras segundo padronização da EMBRATEL para testes em equipamentos de transmissão de dados. São eles:

C8444

C8040

C8004

C444

C300

Os canais C8004 e C300 possuem apenas distorções de amplitude e atraso de grupo respectivamente, e são úteis na avaliação da

sensibilidade dos sistemas a estas características de forma isolada. Observe que nos outros canais, as distorções de amplitude e atraso de grupo são dadas pelas somas das curvas correspondentes aos valores de A & Z e X & Y respectivamente.

As figuras a seguir mostram as curvas de amplitude, atraso de grupo, e resposta impulsiva. Para cada canal as curvas aparecem na seguinte ordem:

- a) Amplitude e atraso de grupo do canal em banda passante.
- b) Resposta impulsiva associada ao item (a).
- c) Resposta impulsiva associada ao conjunto filtro de transmissão-canal em banda passante-filtro de recepção. Observe que as variações rápidas na curva do item (b) (altas frequências) são atenuadas nesta curva por efeito dos filtros.
- d) Amplitude e atraso de grupo do canal em banda base equivalente.
- e) Resposta impulsiva complexa associada ao canal em banda base equivalente.

As curvas foram obtidas através do programa P1 descrito no apêndice B.

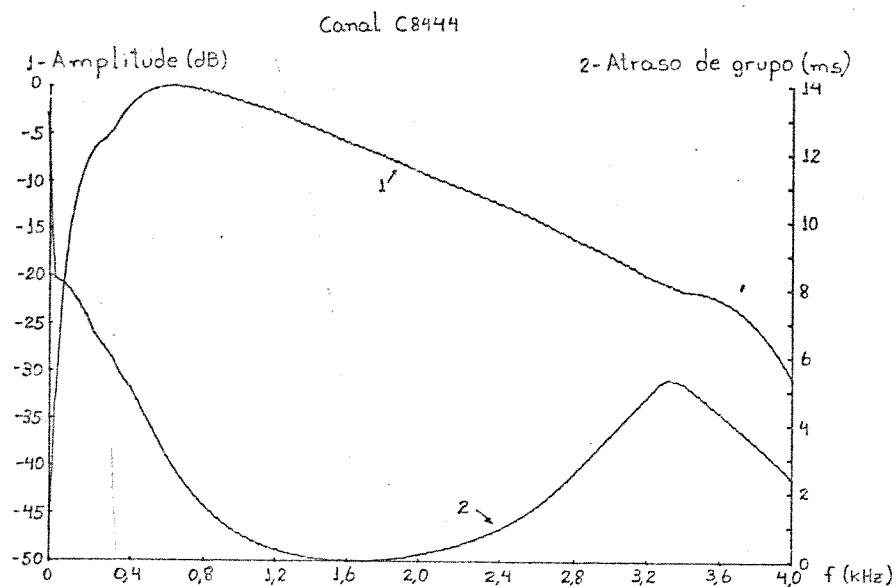


Fig. A.5.a - Resposta em freqüência (banda passante) para o canal C8444

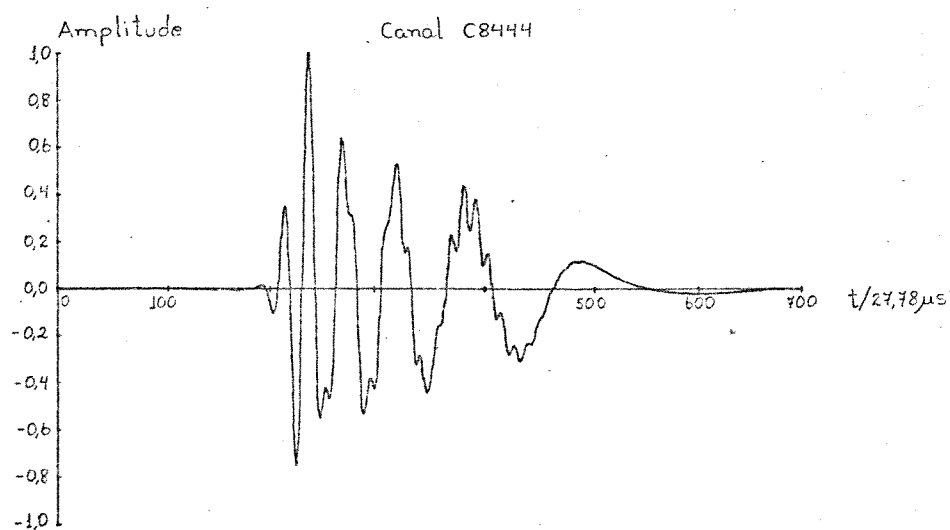


Fig. A.5.b - Resposta impulsiva associada à Fig. A.5.a

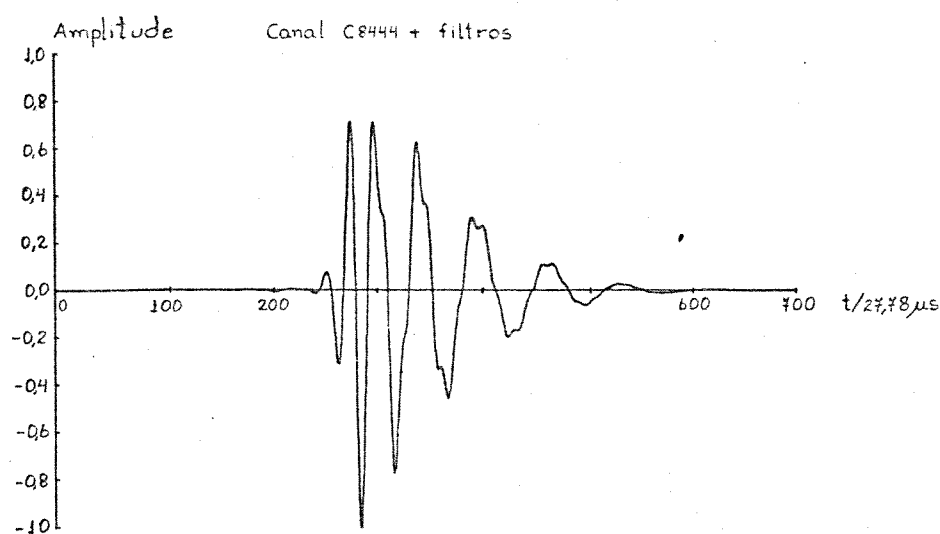


Fig. A.5.c - Resposta impulsiva do canal C8444 com os filtros

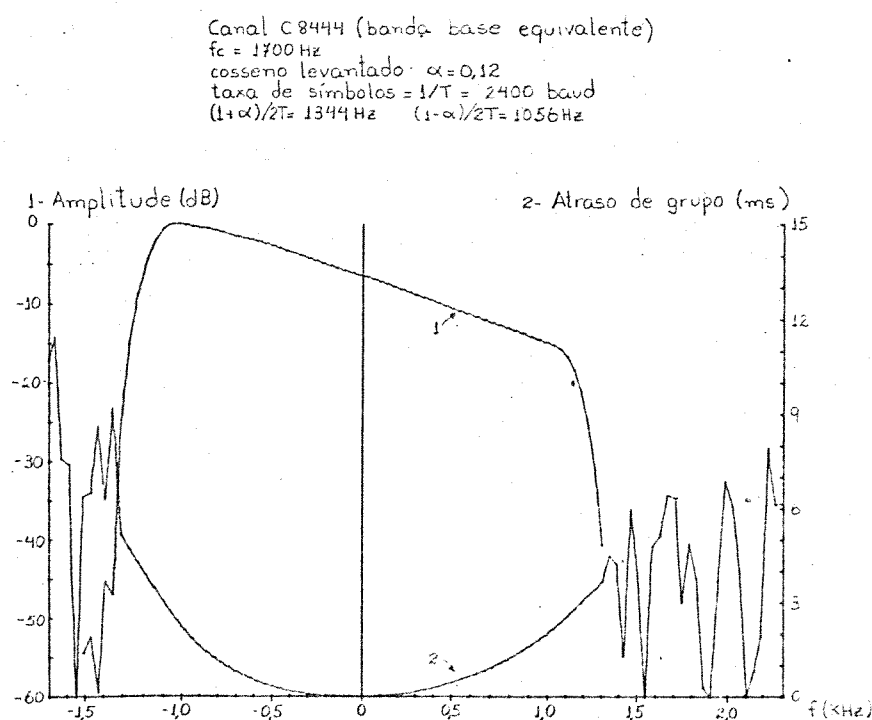


Fig. A.5.d - Resposta em frequência (banda base equivalente) do canal C8444

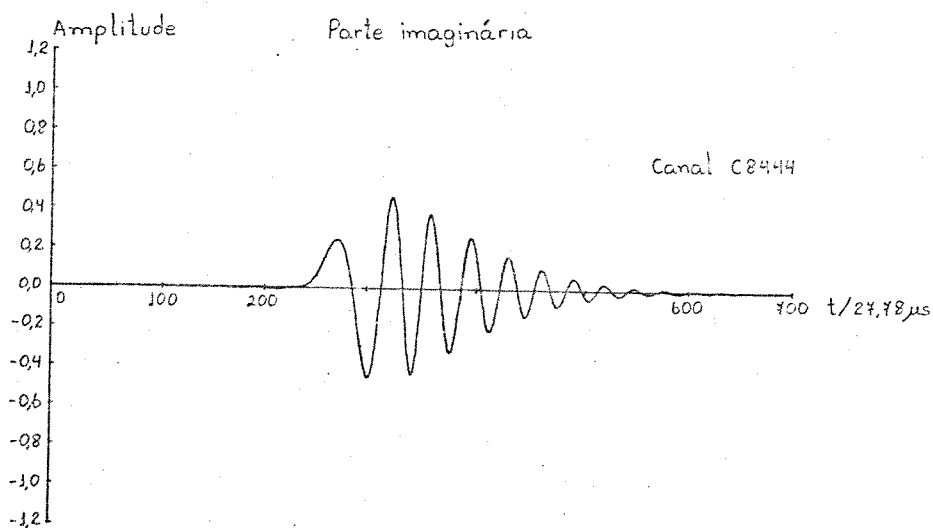
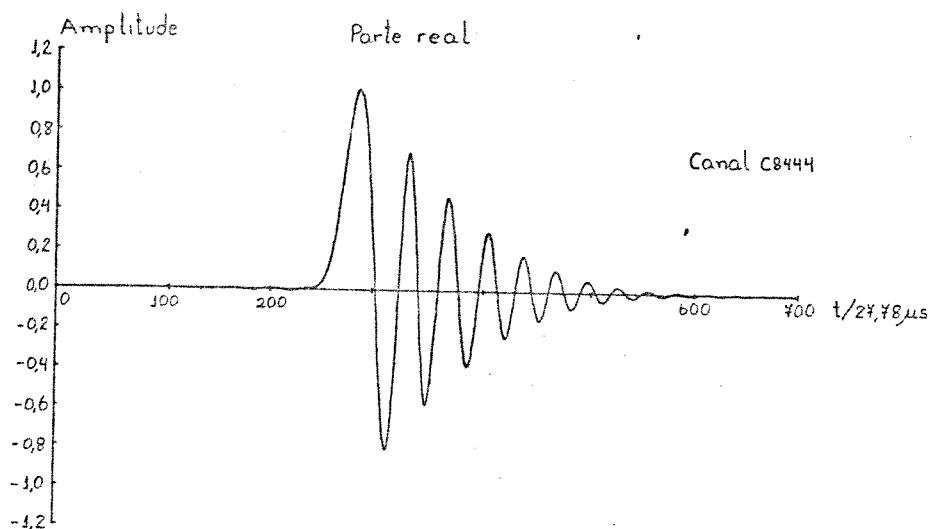


Fig. A.5.e - Resposta impulsiva complexa (banda base equivalente) para o canal C8444

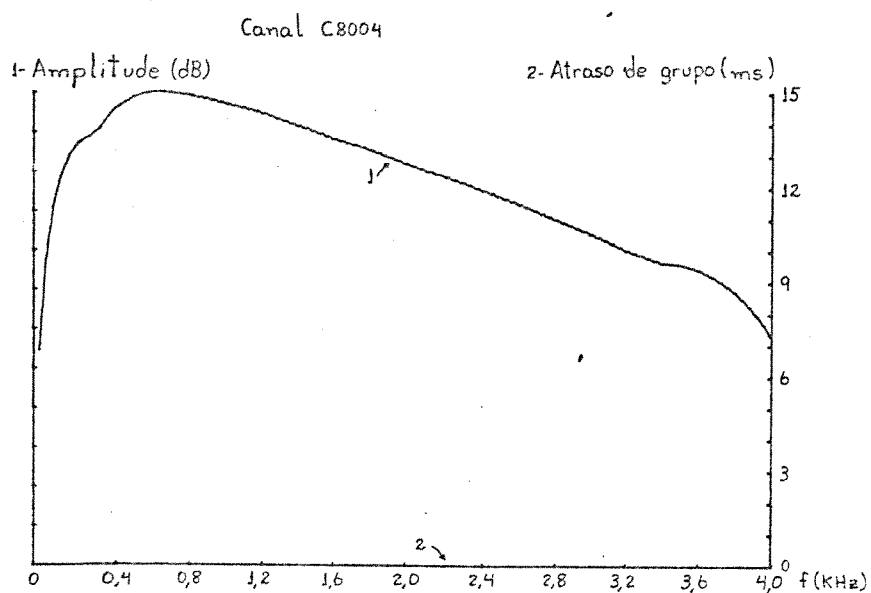


Fig. A.6.a - Resposta em frequência (banda passante) para o canal C8004

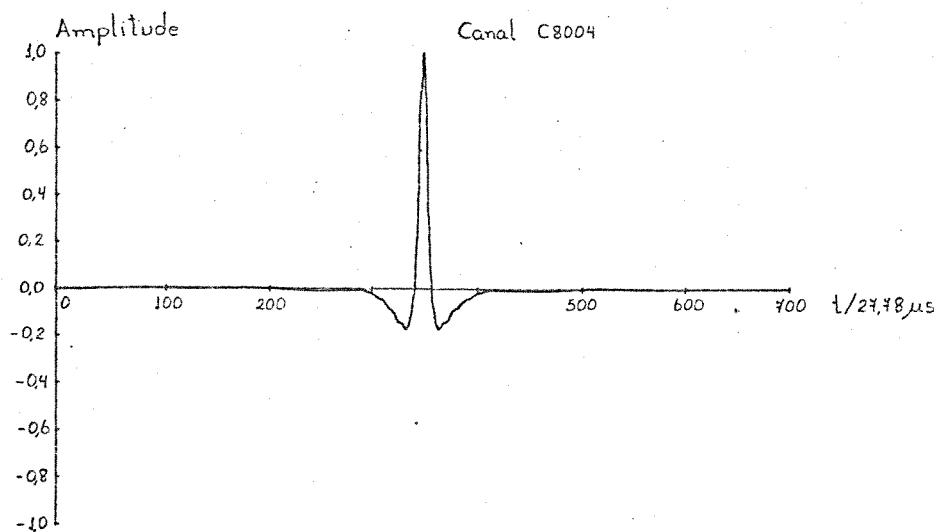


Fig. A.6.b - Resposta impulsiva associada à Fig. A.6.a

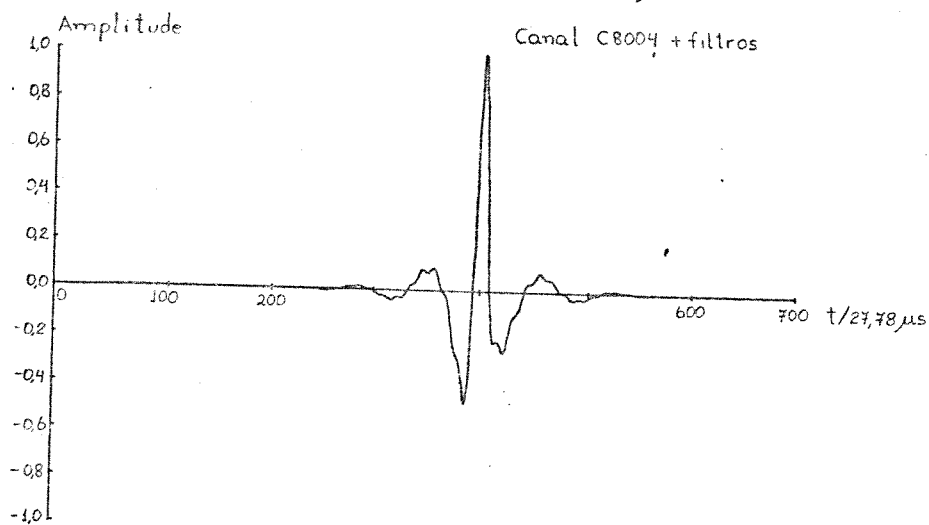


Fig. A.b.c - Resposta impulsiva do canal C8004 com os filtros

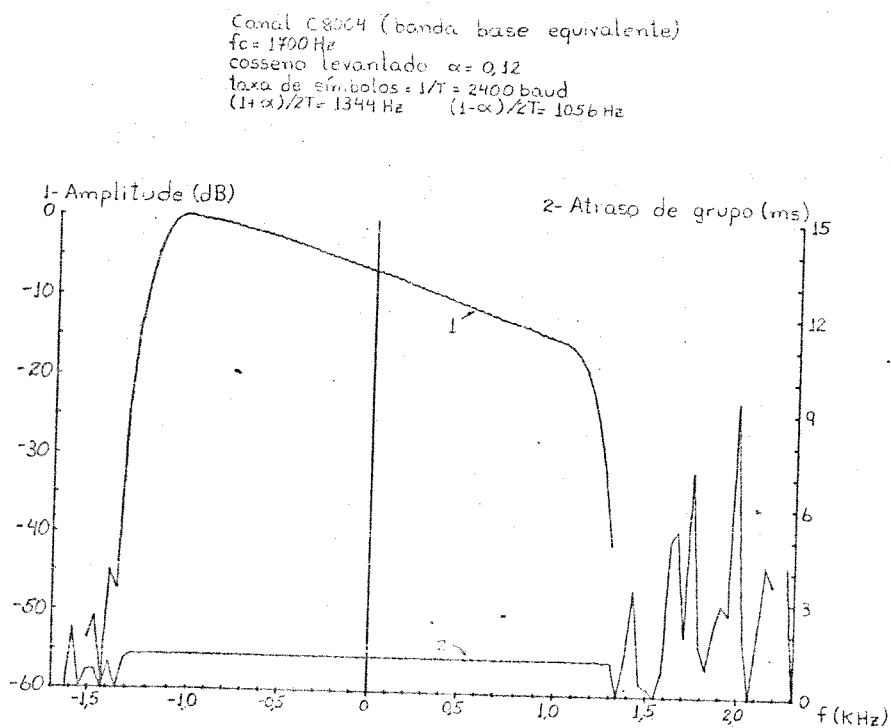


Fig. A.b.d - Resposta em frequência (banda base equivalente) do canal C8004

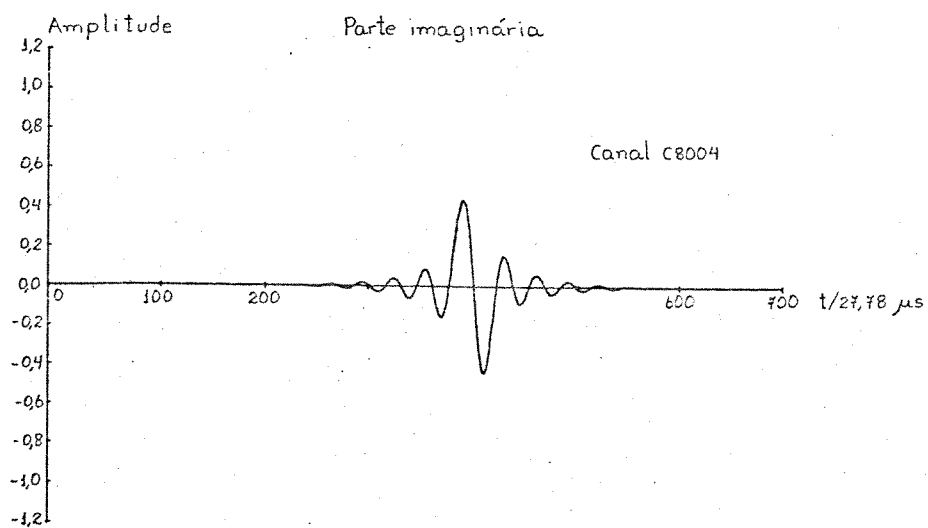
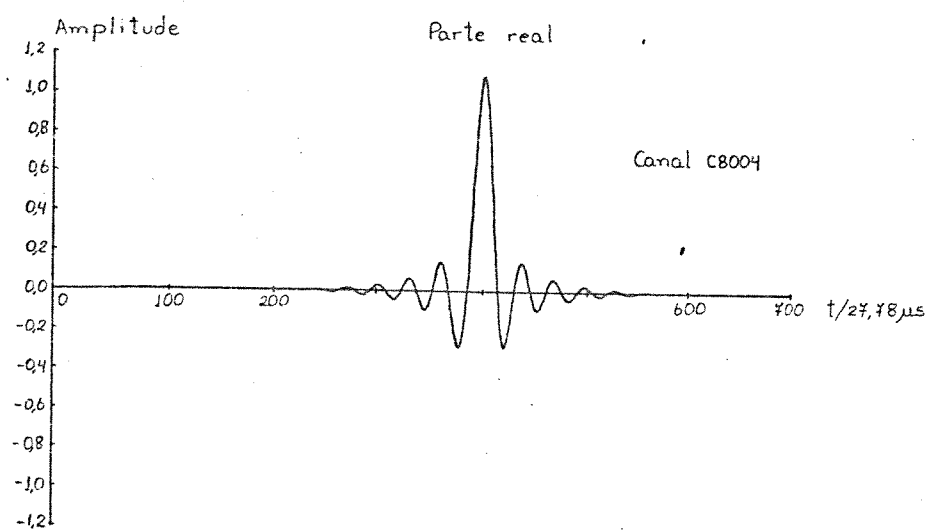


Fig. A.6.e - Resposta impulsiva complexa (banda base equivalente) para o canal C8004

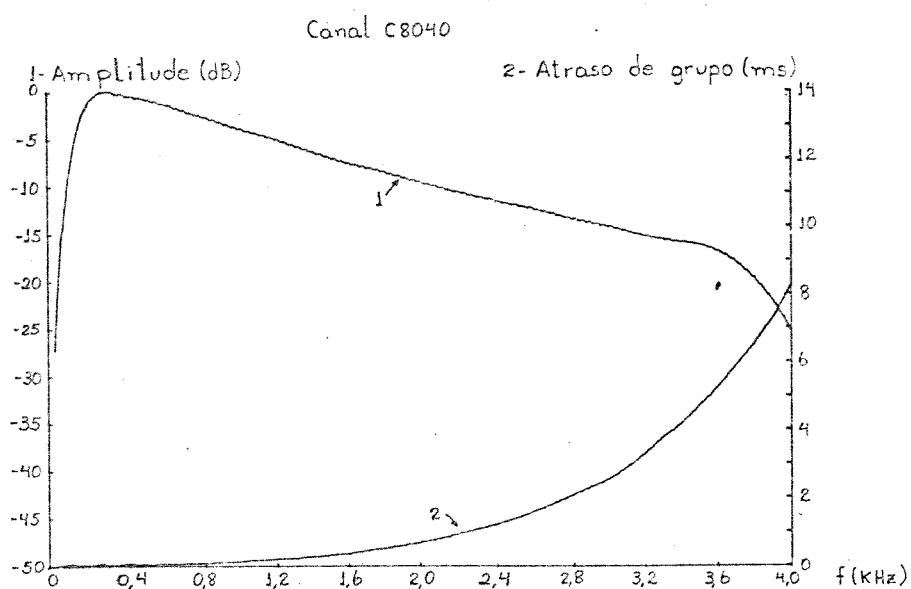


Fig. A.7.a - Resposta em frequência (banda passante) para o canal C8040

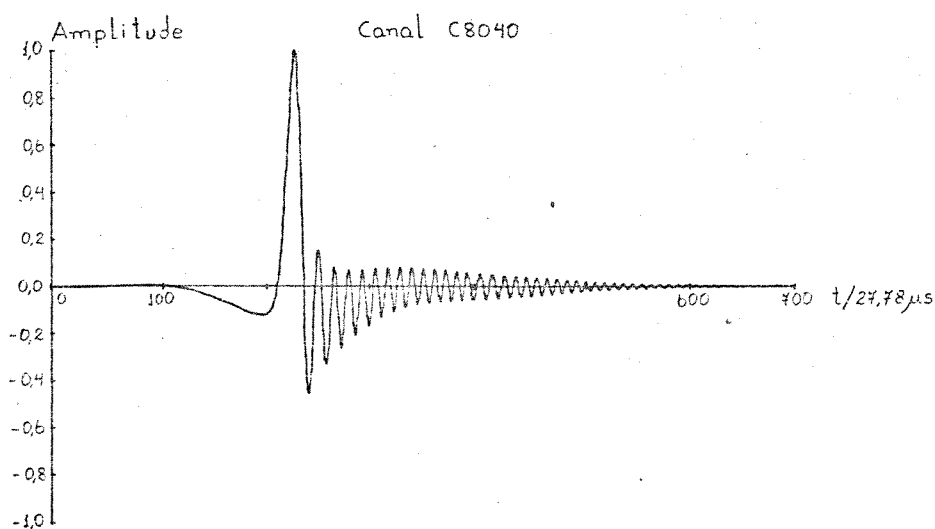


Fig. A.7.b - Resposta impulsiva associada à Fig. A.7.a

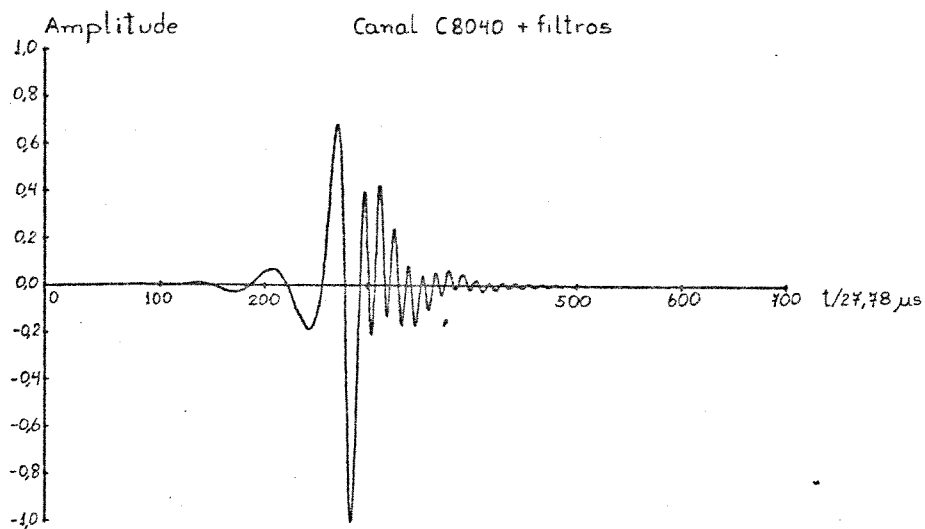


Fig. A.7.c - Resposta impulsiva do canal C8040 com os filtros

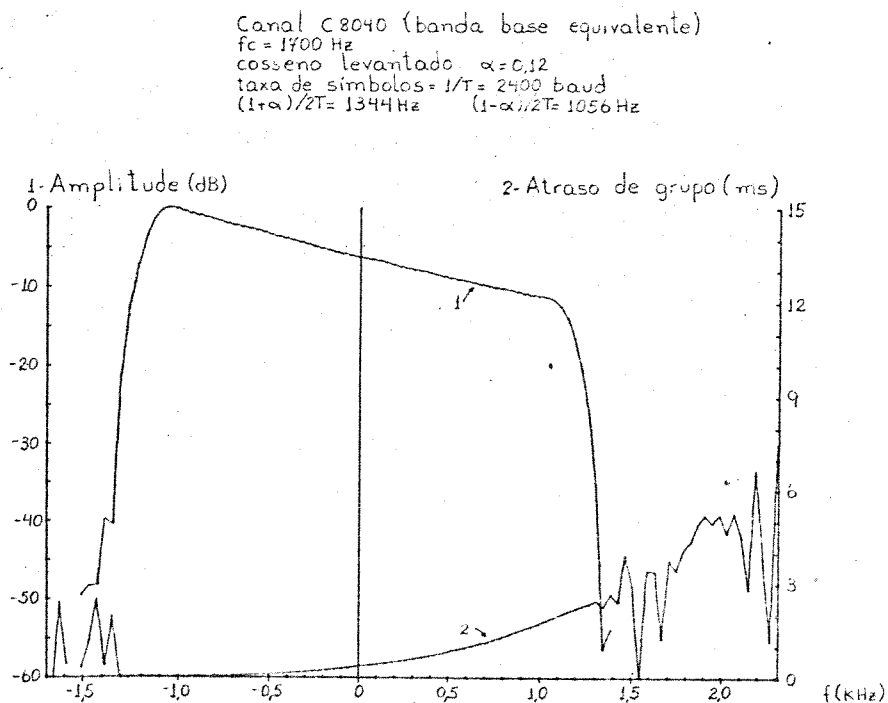


Fig. A.7.d - Resposta em frequência (banda base equivalente) do canal C8040

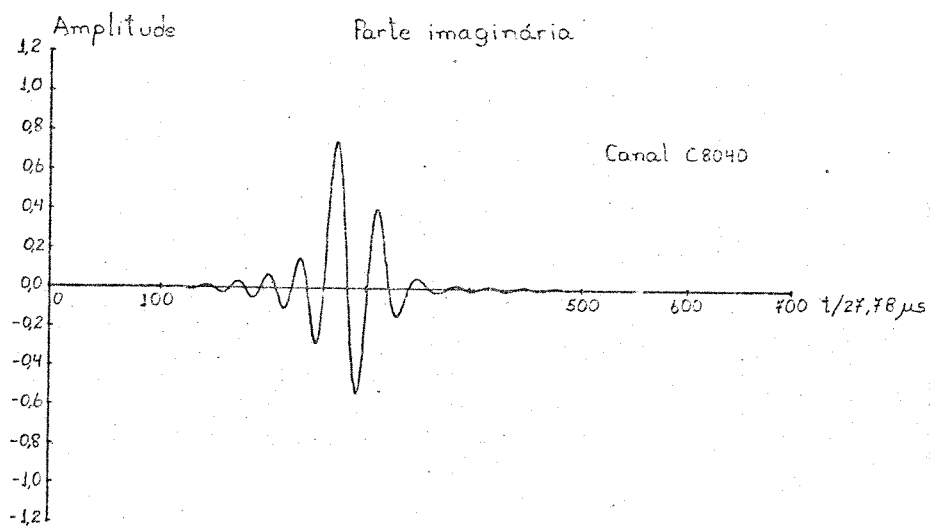
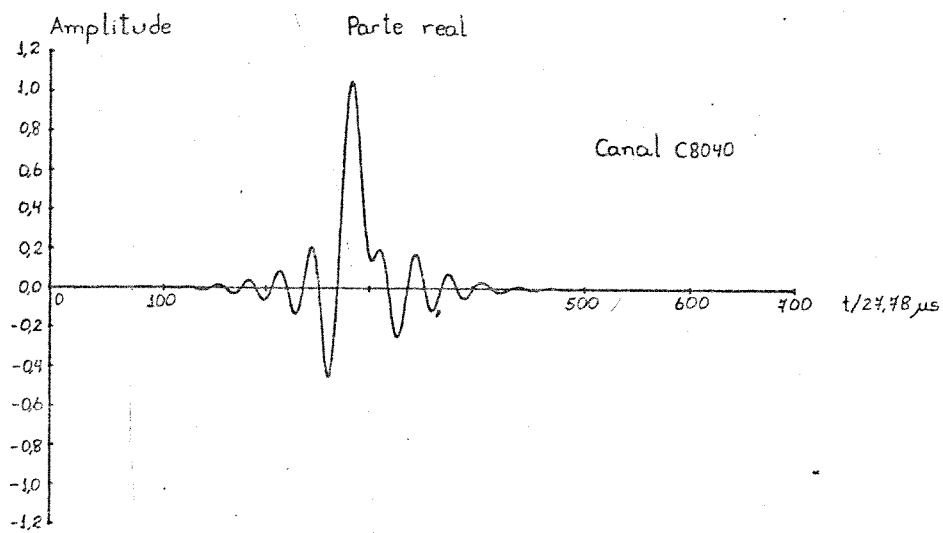


Fig. A.7.e - Resposta impulsiva complexa (banda base equivalente)
para o canal C8040

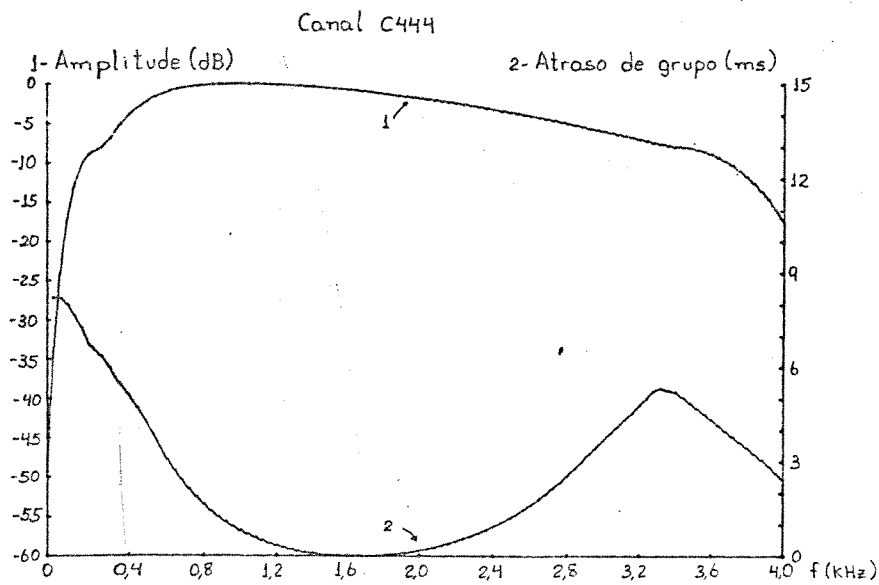


Fig. A.8.a - Resposta em frequência (banda passante) para o canal C444

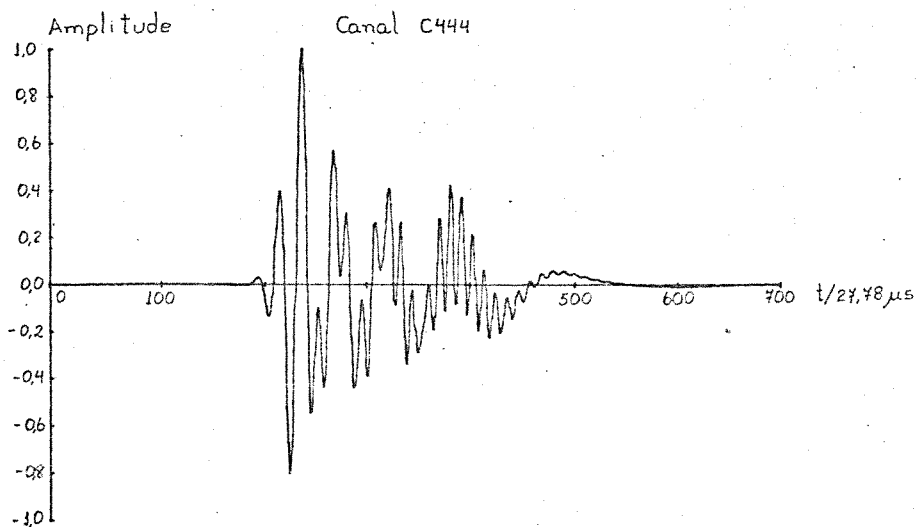


Fig. A.8.b - Resposta impulsiva associada à Fig. A.8.a

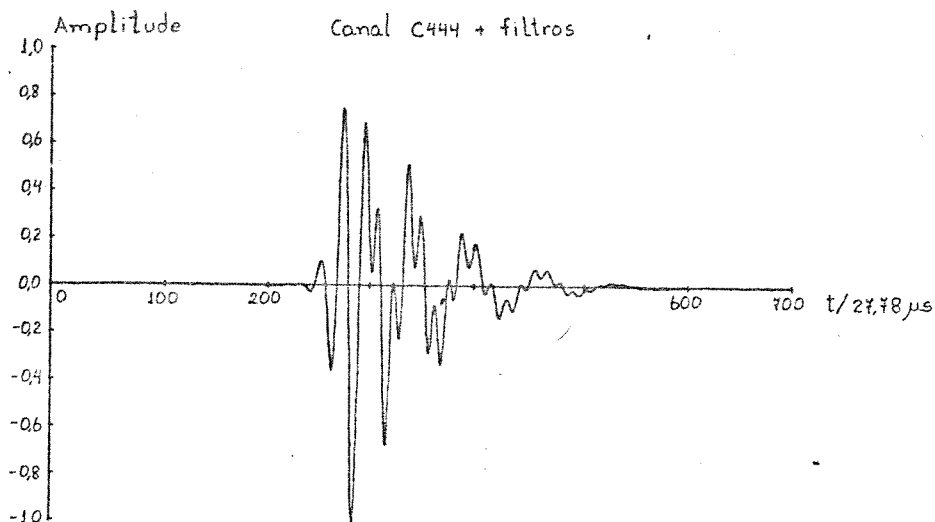


Fig. A.8.c - Resposta impulsiva do canal C444 com os filtros

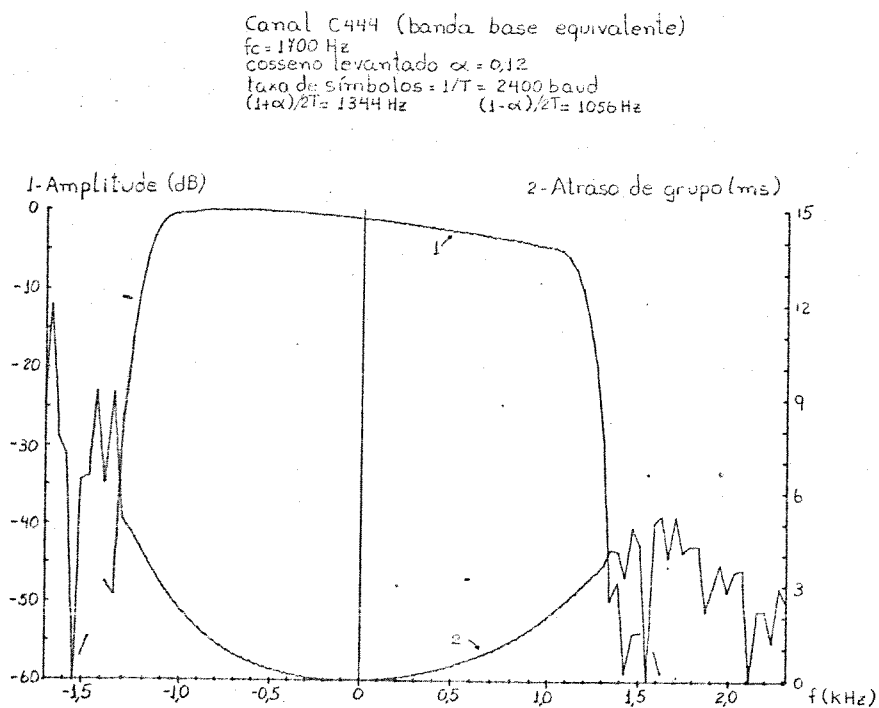


Fig. A.8.d - Resposta em frequência (banda base equivalente) do canal C444

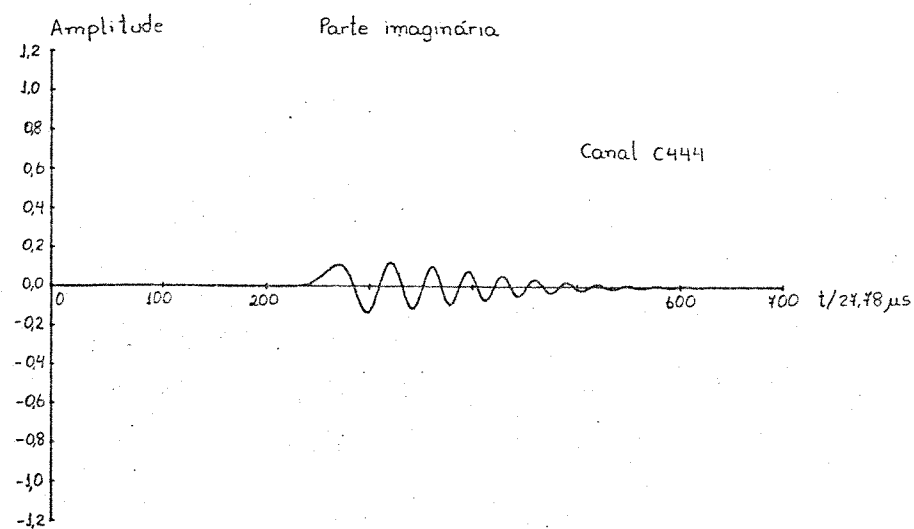
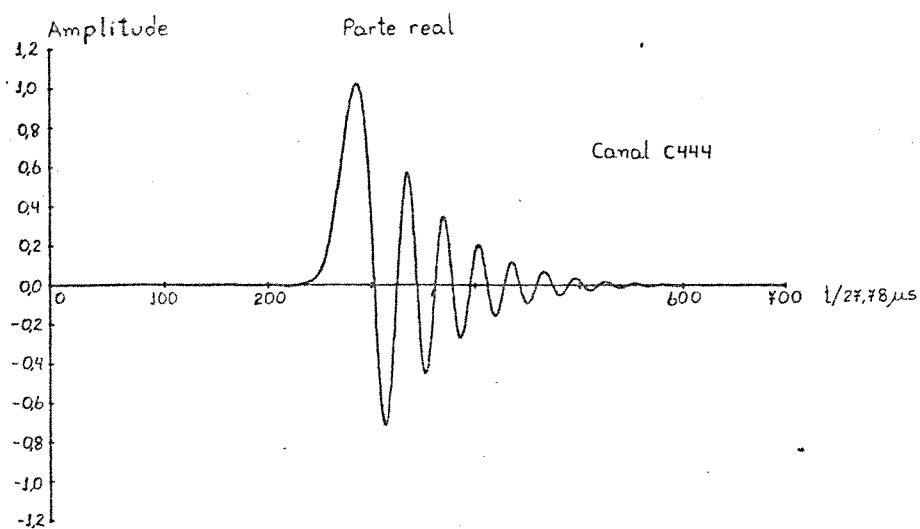


Fig. A.8.e - Resposta impulsiva complexa (banda base equivalente)
para o canal C444

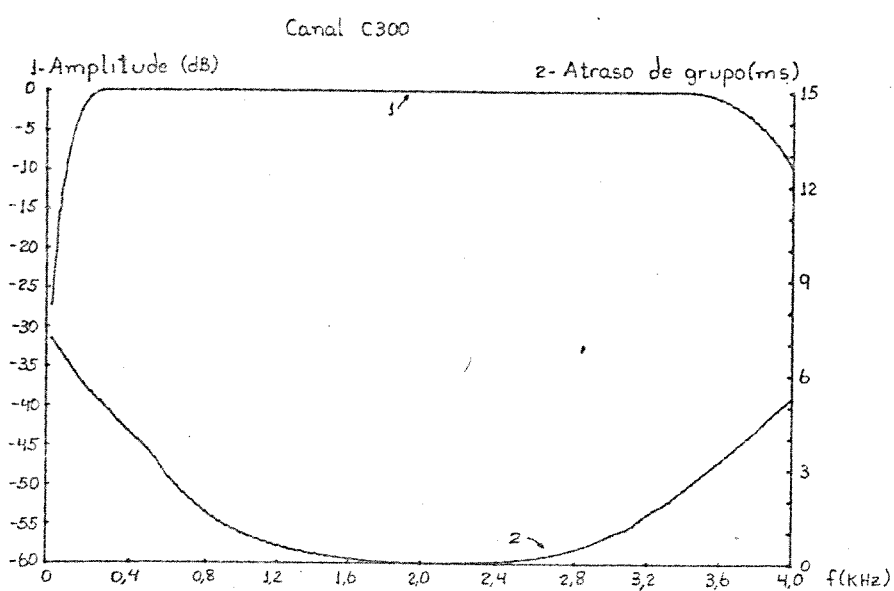


Fig. A.9.a- Resposta em frequência (banda passante) para o canal C300

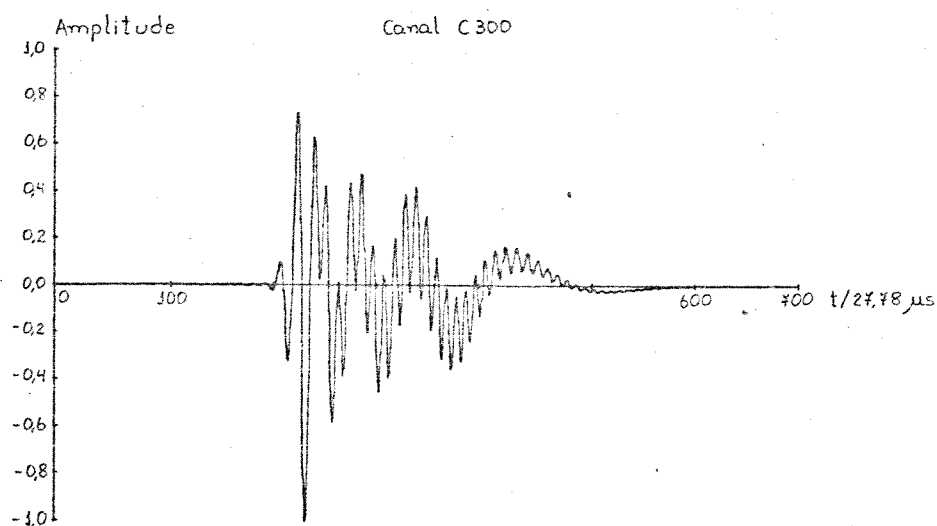


Fig. A.9.b- Resposta impulsiva associada à Fig. A.9.a

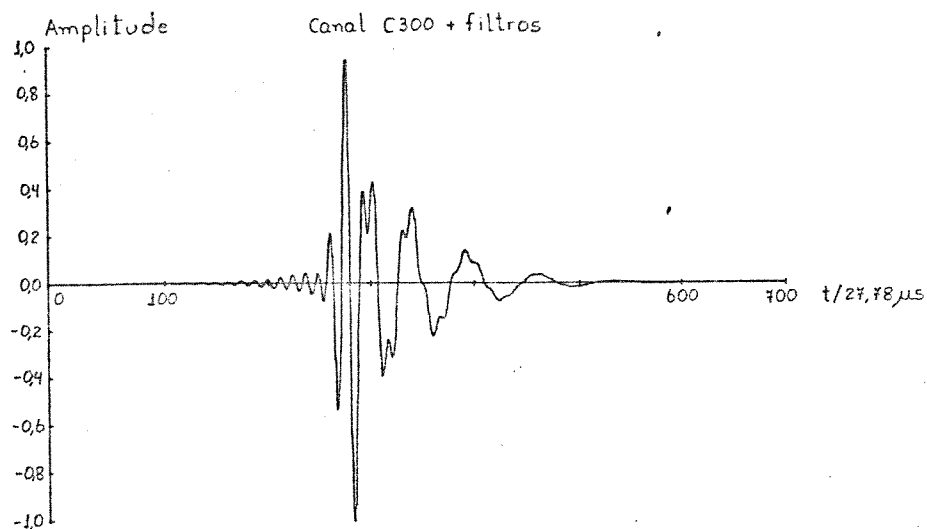


Fig. A.9.c - Resposta impulsiva do canal C300 com os filtros

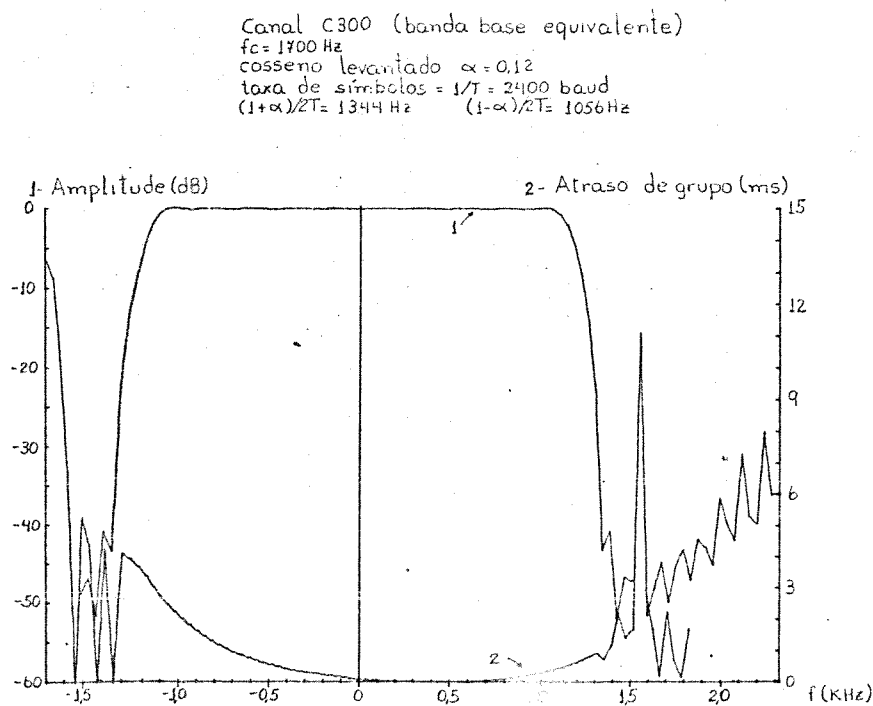


Fig. A.9.d - Resposta em frequência (banda base equivalente) do canal C300

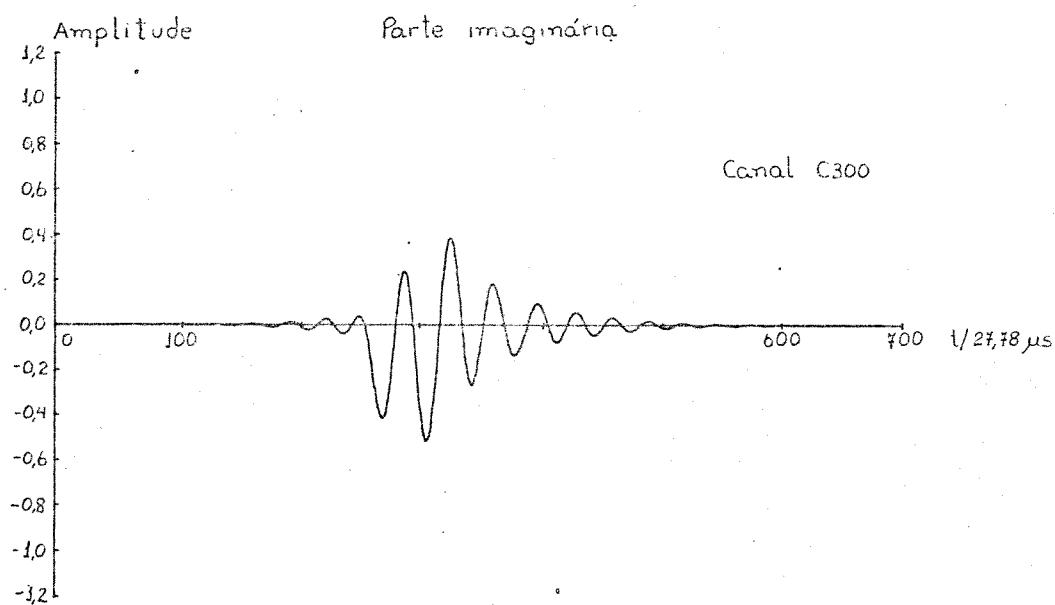
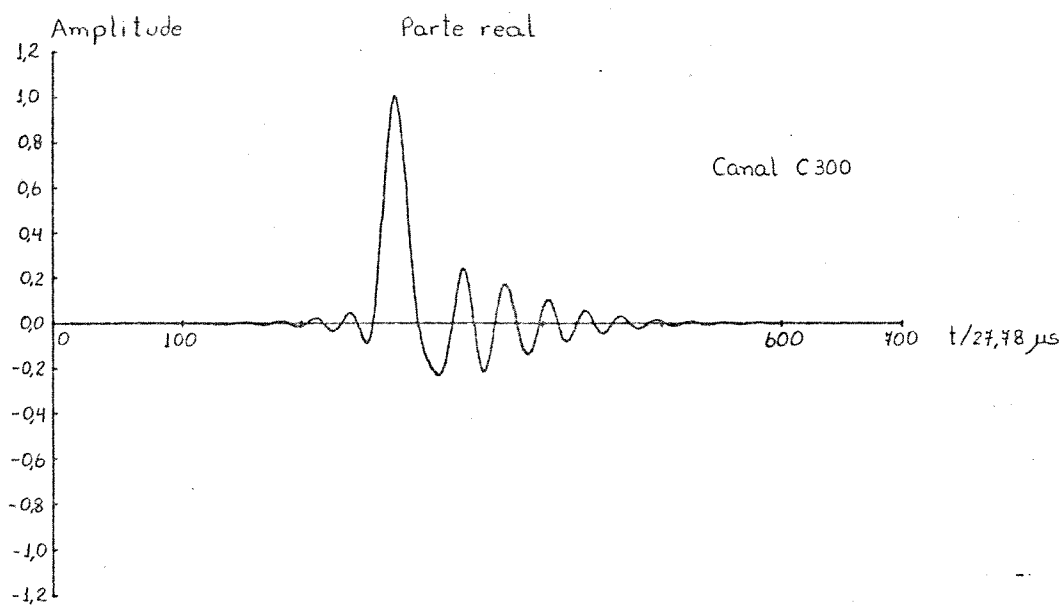


Fig. A.9.e - Resposta impulsiva complexa (banda base equivalente)
para o canal C300

Apêndice B - Descrição dos Programas Simuladores

Na obtenção dos resultados listados no trabalho foram utilizados vários programas escritos na linguagem TURBO PASCAL, e executados num microcomputador de 8 bits. A seguir é feita uma descrição sumária das principais rotinas contidas nos programas mais importantes, e dos dados de entrada e saída de cada um deles.

- Programa P1 ==> Cálculo da resposta impulsiva do canal em banda base equivalente.

Entrada:

1) resposta de amplitude e atraso de grupo do canal telefônico em banda passante.

Processamentos:

1) Integração numérica do atraso de grupo para obtenção da resposta de fase.

2) FFT inversa com 2048 pontos para obtenção da resposta impulsiva do canal em banda passante (a frequência de amostragem utilizada é $f_s=36$ KHz, o que dá uma resolução de $36K/2048=17,578$ Hz).

3) Multiplicação por $\exp(-j2\pi f_c T_s)$, onde $T_s=1/f_s$ e $f_c=1700$ Hz, e convolução com o cosseno-levantado com excesso de faixa de 12%.

Saídas:

1) Resposta de amplitude e atraso de grupo dos canais em banda passante e banda base equivalente.

2) Respostas impulsivas associadas a cada um deles.

- Programa P2 ==> Geração da matriz de correlação R e do vetor p .

Entradas:

- 1) Canal a ser utilizado (resposta impulsiva em banda base equivalente).
- 2) Fase de amostragem (o programa calcula o pico da resposta impulsiva, e neste item pode-se deslocar a fase de amostragem para direita ou esquerda em relação ao pico, com uma resolução de $27,78\mu s$).
- 3) Relação sinal/ruído (dB).
- 4) Tipo de equalizador: Transversal-T, Fracional-T/2 ou DFE.
- 5) Número de taps do equalizador.

Processamentos:

- 1) Cálculo de $r(i,m)$ pelas eqs.(III.23) para o equalizador transversal-T, (IV.8a) a (IV.8d) para o DFE e (IV.25b) para o fracional-T/2.
- 2) Cálculo de $p(k)$ pelas eqs.(III.19) para o equalizador transversal-T, (IV.7) para o DFE e (IV.25d) para o fracional-T/2.

Saída:

- 1) Arquivo em disco com a matriz R e o vetor p (ambos complexos).

- Programa P3 ==> Cálculo dos autovalores da matriz R .

Entrada:

- 1) Arquivo com os elementos da matriz R .

Processamento:

- 1) Cálculo dos autovalores pelo método descrito em /58/. Como a matriz R é complexa, é necessária a geração de uma outra matriz real R_1 dada por

$$R_1 = \begin{bmatrix} R_r & | & -R_i \\ \hline R_i & | & R_r \end{bmatrix}$$

onde $R = R_r + j R_i$

que é simétrica, pois R é Hermitiana. Em seguida R_1 é tridiagonalizada pelo algoritmo "Tred1" (pag. 213 de /58/), e finalmente os autovalores são calculados pelo algoritmo "Tql1" (pag. 232 de /58/).

Saídas:

- 1) Listagem dos autovalores de R .
- 2) Relação $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$.
- 3) Valores máximo e mínimo do passo de adaptação μ .

Programa P4 ==> Cálculo do vetor ótimo de coeficientes e do MSE mínimo.

Entrada:

- 1) Arquivo com a matriz R e o vetor p .

Processamentos:

- 1) Cálculo do vetor ótimo pela eq.(III.29).
- 2) Cálculo do MSE mínimo pela eq.(III.30).

Saídas:

- 1) Listagem dos coeficientes ótimos (complexos).
- 2) Valor do MSE mínimo.

Programa P5 ==> Geração das curvas de convergência para os algoritmos SDA e SDA modificado.

Entradas:

- 1) Arquivo com a matriz R e o vetor p .
- 2) Valor do passo de adaptação μ .

Processamentos:

- 1) Atualização dos coeficientes pelas equações
(III.46) para o SDA
e (III.85d) e (III.85e) para o SDA modificado.
- 2) Cálculo do MSE a cada iteração pela eq.(III.12).

Saídas:

- 1) Listagem dos coeficientes obtidos até a iteração mais atual.
- 2) Arquivo com os valores do MSE em função do número de iterações (geração dos gráficos do cap V).

Programa P6 ==> Geração das curvas de convergência e constelação de símbolos para os algoritmos estocásticos.

Entradas:

- 1) Canal a ser utilizado (resposta impulsiva em banda base equivalente).
- 2) Fase de amostragem.
- 3) Relação sinal/ruído (dB).
- 4) Tipo de equalizador

4.1) Transversal-T / Algoritmo de atualização dos taps:

- a) Gradiente convencional (AGC) e valor de μ , ou
- b) Gradiente modificado (AGM) e valor de μ , ou
- c) Kalman (FKA) e valores de δ e ξ , ou
- d) Treliza (LSLA) e valor de ξ .

4.2) Fracional-T/2 (somente AGC).

4.3) DFE (somente AGC).

5) Número de taps do equalizador.

6) Arquivo com a matriz R e vetor p correspondentes ao equalizador escolhido no item (4) (exceto no caso do LSLA).

Processamentos:

1) Geração do símbolo a ser transmitido.

2) Cálculo da amostra recebida através da convolução da sequência transmitida com a resposta impulsiva do canal em banda base equivalente.

3) Geração e adição de ruído conforme a SNR desejada.

4) Atualização dos taps e cálculo do sinal equalizado de acordo com algoritmo escolhido no item (4).

5) Decisão e comparação com o símbolo transmitido para contagem de erros.

6) Cálculo do MSE pela eq. (III.12), exceto para o LSLA, onde o MSE é calculado através de várias realizações do experimento, seguida de uma mediação correspondente.

Saídas:

1) A cada iteração imprime na tela a situação do símbolo decidido (certo ou errado) e o valor corrente do MSE.

2) Arquivos com o MSE e com a constelação de símbolos em função do número de iterações (gráficos do cap V).

3) Listagem dos coeficientes obtidos até a iteração mais atual.

Programa P7 ==> Análise do algoritmo de recuperação de portadora com sincronismo rápido.

Entradas:

1) Canal a ser utilizado (resposta impulsiva em banda base equivalente).

- 2) Fase de amostragem.
- 3) Relação sinal/ruído (dB).
- 4) Número de taps do equalizador.
- 5) Valor do desvio de frequência.
- 6) Amplitude e frequência do jitter de fase.
- 7) Valor de μ para o algoritmo do gradiente.
- 8) Valores de β_1 e β_2 para o algoritmo de recuperação de portadora.

Processamentos:

- 1) Geração da sequência periódica de comprimento máximo na fase de treinamento.
- 2) Geração da sequência aleatória no estado estacionário.
- 3) Cálculo do sinal recebido através da convolução da sequência de transmissão com a resposta impulsiva do canal em banda base equivalente.
- 4) Rotação de fase do sinal recebido para simular o desvio de frequência e o jitter de fase.
- 5) Estimativa do desvio de frequência pela eq(VI.42).
- 6) Cálculo dos coeficientes do equalizador pelo processo de equalização cíclica descrito na seção VI.4.1.
- 8) Inicialização do algoritmo de recuperação de portadora.
- 9) Chaveamento para o algoritmo do gradiente convencional.
- 10) Rotação de fase do sinal equalizado para compensação do desvio de frequência e do jitter de fase.
- 11) Decisão e comparação com a sequência transmitida para contagem de erros.
- 12) Rotação do sinal de erro e ajuste dos taps do equalizador a cada iteração no modo decisão-dirigida.

Saídas:

- 1) Estimativa do desvio de frequência.
- 2) Arquivo com a constelação de símbolos em função do número de iterações (gráficos cap. VI).

Referências Bibliográficas

- / 01 / - Lucky, R.W., Salz, J., and Weldon, E.J., Jr., "Principles of Data Communication", McGraw-Hill, New York, 1968.
- / 02 / - Duffy, F.P. and Tratcher, T.W., "Analog Transmission Performance on the Switched Telecommunications Network", B.S.T.J., vol.50, pp. 1311-1347, April 1971.
- / 03 / - Guidoux, L., "Egalisation Autoadaptive des Lignes Telephoniques", Philips Research Reports Supplements, No 7, 1976.
- / 04 / - Qureshi, S.U.H., "Adaptive Equalization", Proceedings of the IEEE, vol.73, No 9, pp. 1349-1387, September 1985.
- / 05 / - CCITT Yellow Book, "Data Communication Over the Telephone Network", vol.III.1, International Telecommunications Union, November 1980.
- / 06 / - Proakis, J.G., "Digital Communications", McGraw-Hill, New York, 1983.
- / 07 / - Haykin, S., "Adaptive Filter Theory", Prentice-Hall, New Jersey, 1986.
- / 08 / - Oppenheim, A.V. and Schaffer, R.W., "Digital Signal Processing", Prentice-Hall, New Jersey, 1975.
- / 09 / - Widrow, B. and Hoff, M.E., "Adaptive Switching Circuits", IRE WESCOM Conv. Record, pp. 96-104, 1960.
- / 10 / - Ungerboeck, G., "Theory on the Speed of Convergence in Adaptive Equalizers for Digital Communication", IBM J. Res. Devel., vol.16, pp. 546-555, November, 1972.
- / 11 / - Mazo, J.E., "On the Independence Theory of Equalizer Convergence", B.S.T.J., vol.58, pp. 963-993, January 1975.
- / 12 / - Qureshi, S.U.H., "Adjustment of the Position of the Reference Tap of an Adaptive Equalizer", IEEE Trans. on Communications, pp. 1046-1051, September 1976.
- / 13 / - Farhang-Boroujeny, B. and Turner, L.F., "Fast Converging Stochastic Gradient Algorithm", IEE Proc., vol.128, No 5, pp.271-274, October 1981.
- / 14 / - Peterson, W.W. and Weldon, E.J., "Error-Correcting Codes", The MIT Press, 1972.
- / 15 / - Mueller, K.H. and Spaulding, D.A., "Cyclic Equalization - a New Rapidly Converging Equalization Technique for

Synchronous Data Communication", B.S.T.J., pp. 369-406, February 1975.

- / 16 / - Godard, D.N., "A 9600 bit/s Modem for Multipoint Communications Systems", National Telecommunications Conference Record, pp. B3.3.1-B3.3.5, 1981.
- / 17 / - Gitlin, R.D. and Weinstein, S.B., "On the Required Tap-Weight Precision for Digitally Implemented, Adaptive, Mean-Squared Equalizers", B.S.T.J., pp. 301-321, February 1979.
- / 18 / - Salz, J., "Optimum Mean-Square Decision Feedback Equalization", B.S.T.J., pp. 1341-1373, October 1973.
- / 19 / - Kennedy, R.A. and Anderson, B.D.O., "Recovery Times of Decision Feedback Equalizers on Noiseless Channels", IEEE Trans. on Communications, pp. 1012-1021, October 1987.
- / 20 / - Falconer, D.D., "Application of Passband Decision Feedback Equalization in Two-Dimensional Data Communication Systems", IEEE Trans. on Communications, pp. 1159-1166, October 1976.
- / 21 / - George, D.A., Bowen, R.R. and Storey, J.R., "An Adaptive Decision Feedback Equalizer", IEEE Trans. on Communications, pp. 281-293, June 1971.
- / 22 / - Salz, J., "On Mean-Square Decision Feedback Equalization and Timing Phase", IEEE Trans. on Communications, pp. 1471-1476, December 1977.
- / 23 / - Mazo, J.E., "Optimum Timing Phase for an Infinite Equalizer", B.S.T.J., pp. 189-201, January 1975.
- / 24 / - Gitlin, R.D. and Weinstein, S.B., "Fractionally-Spaced Equalization: An Improved Digital Transversal Equalizer", B.S.T.J., pp. 275-296, February 1981.
- / 25 / - Ungerboeck, G., "Fractionally Tap-Spaced Equalizer and Consequences for Clock Recovery in Data Modems", IEEE Trans. on Communications, pp. 856-864, August 1976.
- / 26 / - Gitlin, R.D., Meadors, H.C. and Weinstein, S.B., "The Tap-Leakage Algorithm: An Algorithm for Stable Operation of a Digitally Implemented, Fractionally Spaced Adaptive Equalizer", B.S.T.J., pp. 1817-1839, October 1982.
- / 27 / - Uyematsu, T. and Sakaniwa, K., "A New Tap-Adjustment Algorithm for Fractionally Spaced Equalizer", GLOBECOM'85, pp. 46.3.1-46.3.4, 1985.
- / 28 / - Chevillat, P.R., Maiwald, D. and Ungerboeck, G., "Rapid Training of a Voiceband Data-Modem Receiver Employing an Equalizer with Fractional-T Spaced Coefficients", IEEE Trans. on Communications, pp. 869-876, September 1987.

- / 29 / - Falconer, D.D., "Application of Fast Kalman Estimation to Adaptive Equalization", IEEE Trans. on Communications, pp. 1439-1446, October 1978.
- / 30 / - Mueller, M.S., "Least-Squares Algorithms for Adaptive Equalizers", B.S.T.J., pp. 1905-1925, October 1981.
- / 31 / - Mueller, M.S., "On the Rapid Initial Convergence of Least-Squares Equalizer Adjustment Algorithms", B.S.T.J., pp. 2345-2358, December 1981.
- / 32 / - Lin, D.W., "On Digital Implementation of the Fast Kalman Algorithms", IEEE Trans. on ASSP, pp. 998-1005, October 1985.
- / 33 / - Cioffi, J.M. and Kalkath, T., "Fast, Recursive-Least-Squares Transversal Filters for Adaptive Filtering", IEEE Trans. on ASSP, pp. 304-337, April 1984.
- / 34 / - Proakis, J.G. and Ling, F., "Recursive Least Squares Algorithms for Adaptive Equalization of Time-Variant Multipath Channels", International Conference on Communications Record, pp. 1250-1254, 1984.
- / 35 / - Ling, F. and Proakis, J.G., "Adaptive Lattice Decision-Feedback Equalizers - Their Performance and Application to Time-Variant Multipath Channels", IEEE Trans. on Communications, pp. 348-356, April 1985.
- / 36 / - Fagan, A.D. and O'Higgins, N.M., "New Gradient Decision Feedback Equaliser Algorithm", Electronics Letters, pp. 83-84, January 1986.
- / 37 / - Satourious, E.H. and Pack, T.D., "Application of Least Squares Lattice Algorithms to Adaptive Equalization", IEEE Trans. on Communications, pp. 136-142, February 1981.
- / 38 / - Cowan, C.F.N. and Grant, P.M., "Adaptive Filters", Prentice-Hall, New Jersey 1985.
- / 39 / - Honig, M.L. and Messerschmitt, D.G., "Adaptive Filters: Structures, Algorithms, and Applications", Kluwer Academic Publishers, Boston 1984.
- / 40 / - Kennedy, W.J. and Gentle, J.E., "Statistical Computing", pp. 200-216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1980.
- / 41 / - Harris, R.W., Chabries, D.M. and Bishop, F.A., "A Variable Step (VS) Adaptive Filter Algorithm", IEEE Trans. on ASSP, pp. 309-316, April 1986.
- / 42 / - Gitlin, R.D. and Hayes, J.F., "Timing Recovery and Scramblers in Data Transmission", B.S.T.J., pp. 569-593, March 1975.

- / 43 / - Van Gerwen, P.J., Verhoecky, N.A.M., Van Essen, A.A. and Snijders, F.A.M., "Microprocessor Implementation of High-Speed Data Modems", IEEE Trans. on Communications, pp. 238-250, February 1977.
- / 44 / - Falconer, D.D., "Jointly Adaptive Equalization and Carrier Recovery in Two-Dimensional Digital Communication Systems", B.S.T.J., pp. 317-334, March 1976.
- / 45 / - Falconer, D.D., "Analysis of a Gradient Algorithm for Simultaneous Passband Equalization and Carrier Phase Recovery", B.S.T.J., pp. 409-428, April 1976.
- / 46 / - Kobayash, H., "Simultaneous Adaptive Estimation and Decision Algorithm for Carrier-Modulated Data Transmission Systems", IEEE Trans. on Communications, pp. 268-280, June 1971.
- / 47 / - Sari, H., Desperben, L. and Moridi, S., "Minimum Mean-Square Error Timing Recovery Schemes for Digital Equalizers", IEEE Trans. on Communications, pp. 694-702, July 1986.
- / 48 / - Mueller, K.H. and Muller, M., "Timing Recovery in Digital Synchronous Data Receivers", IEEE Trans. on Communications, pp. 516-531, May 1976.
- / 49 / - Lyon, D.L., "Envelope Derived Timing Recovery in QAM and SQAM Systems", IEEE Trans. on Communications, pp. 1327-1331, November 1975.
- / 50 / - Godard, D.N., "Passband Timing Recovery in All-Digital Modem Receiver", IEEE Trans. on Communications, pp. 517-523, May 1978.
- / 51 / - Weinberg, A. and Liu, B., "Discrete Time Analysis of Nonuniform Sampling First- and Second-Order Digital Phase Lock Loops", IEEE Trans. on Communications, pp. 123-137, February 1974.
- / 52 / - Ungerboeck, G., "Adaptive Maximum Likelihood Receiver for Carrier Modulated Data Transmission Systems", IEEE Trans. on Communications, pp. 624-636, May 1974.
- / 53 / - Levy, M., "Elimination Conjointe des Interferences Intersymboles et des Ecart de Phase Dans les Systemes de Transmission de Donnees", Tese de Doutorado, Universidade de Paris, Franca 1977.
- / 54 / - Itoh, Y., Unagami, S. and Fujimura, N., "Carrier Recovery Loop for Baseband Automatic Equalizer and Its Application to Voice Band Modem", National Telecommunication Conference, pp. 14.5.1-14.5.6, 1979..
- / 55 / - Pahlava, K. and Holsinger, J.L., "Voice-Band Data Communication Modems - A Historical Review: 1919-1987", IEEE Communications Magazine, pp. 16-27, January 1988.

- / 56 / - Vários Autores, "ISDN: A Means Towards a Global Information Society", IEEE Communications Magazine, December 1987.
- / 57 / - Clark, A.P., "Principles of Digital Data Transmission", caps. II e III, John Wiley & Sons, Inc., New York 1983.
- / 58 / - Wilkinson, J.H. and Reinsch, C., "Handbook for Automatic Computation", Springer-Verlag, New York/Heidelberg Berlin 1971.

DE	BC
AD. PRECO ES.	
INVOI	
28.11.88	