



Victor Baptista Frencl

ESTUDO DA DINÂMICA DE INDIVÍDUOS PARA RASTREAMENTO  
MULTI-ALVO UTILIZANDO CONJUNTOS ALEATÓRIOS FINITOS

Campinas  
2014





Universidade Estadual de Campinas  
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Victor Baptista Frencl

ESTUDO DA DINÂMICA DE INDIVÍDUOS PARA RASTREAMENTO MULTI-ALVO UTILIZANDO  
CONJUNTOS ALEATÓRIOS FINITOS

Tese de doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Automação.

Orientador: Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida pelo aluno Victor Baptista Frencl, e orientada pelo Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val

---

Campinas  
2014

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura  
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

F889e Frencl, Victor Baptista, 1983-  
Estudo da dinâmica de indivíduos para rastreamento multi-alvo utilizando conjuntos aleatórios finitos / Victor Baptista Frencl. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: João Bosco Ribeiro do Val.  
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Controle automático - Modelos matemáticos. 2. Filtros (matemática). 3. Rastreamento (posição). 4. Processo estocástico. I. Val, João Bosco Ribeiro do, 1955-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** A study of individuals dynamics for multi-target tracking using random finite sets

**Palavras-chave em inglês:**

Automatic control - Mathematical models

Filters (mathematics)

Tracking

Stochastic process

**Área de concentração:** Automação

**Titulação:** Doutor em Engenharia Elétrica

**Banca examinadora:**

João Bosco Ribeiro do Val [Orientador]

João Roberto Moreira Neto

Marcelo Gomes da Silva Bruno

Rafael Santos Mendes

Wagner Caradori do Amaral

**Data de defesa:** 29-05-2014

**Programa de Pós-Graduação:** Engenharia Elétrica

## COMISSÃO JULGADORA - TESE DE DOUTORADO

**Candidato:** Victor Baptista Frencl

**Data da Defesa:** 29 de maio de 2014

**Título da Tese:** "Estudo da Dinâmica de Indivíduos para Rastreamento Multi-Alvo Utilizando Conjuntos Aleatórios Finitos"

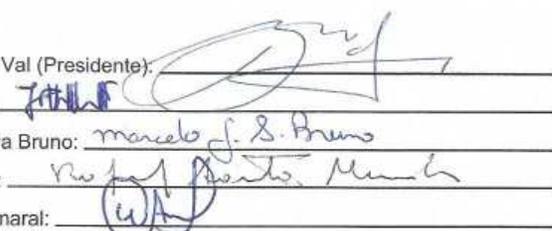
Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val (Presidente):

Dr. João Roberto Moreira Neto:

Prof. Dr. Marcelo Gomes da Silva Bruno:

Prof. Dr. Rafael Santos Mendes:

Prof. Dr. Wagner Caradori do Amaral:



The image shows five handwritten signatures in blue ink, each written over a horizontal line. The signatures are: 1. João Bosco Ribeiro do Val (President), 2. João Roberto Moreira Neto, 3. Marcelo Gomes da Silva Bruno, 4. Rafael Santos Mendes, and 5. Wagner Caradori do Amaral.



# Resumo

O problema de rastreamento de alvos é tratado de diversas formas na literatura, seja elaborando modelos matemáticos mais eficientes na reprodução da dinâmica de movimentos, seja na construção de filtros estocásticos que realizem estimativa de estados, como de posição e velocidade. Quando se trata do rastreamento em que os alvos de interesse são diversos indivíduos em movimento, a literatura não possui estudos específicos. Dessa forma, o objetivo principal da tese é aprofundar o conhecimento de rastreamento de indivíduos. Neste cenário, existe um número elevado e variável de alvos, que podem surgir de forma espontânea, agrupar-se ou separar-se, além de alarmes falsos imersos nas medidas. Estudou-se a teoria dos Conjuntos Aleatórios Finitos, cujo tratamento matemático se dá através do chamado Cálculo Multi-Alvo. Os filtros estocásticos também foram estudados sobre este ponto de vista, sendo os filtros PHD e GM-PHD os principais. Criada essa base teórica, três propostas baseadas nesse problema foram apresentadas: Modelos de Movimentação de Indivíduos, Simulador de Trajetórias de Indivíduos e Modelos Dinâmicos para Filtragem Estocástica. A primeira das propostas consiste em construir perfis probabilísticos de movimentação para cada um dos indivíduos. A segunda envolve a criação de um simulador de trajetórias de indivíduos que seja o mais verossímil possível em relação às trajetórias reais de uma pessoa, em cenários com variações de terreno, classificados pela dificuldade de locomoção. E finalmente, a terceira proposta tem como objetivo criar um modelo dinâmico combinado e modificado em relação a modelos encontrados na literatura para ser inserido no processo de filtragem estocástica. Ao final, alguns testes e simulações foram realizados, de tal forma a testar o desempenho de filtros e analisar o comportamento dos modelos matemáticos e dos perfis probabilísticos propostos.

Palavras-chave: Rastreamento Multi-Alvo, Indivíduos, Conjuntos Aleatórios Finitos, Cálculo Multi-Alvo, Filtragem Estocástica Multi-Alvo, Perfis Probabilísticos de Movimentação, Simulador de Trajetórias, Modelos Dinâmicos, Modelos de Medidas.



# Abstract

The problem of target tracking is handled in different ways in the literature, either developing more efficient mathematical models to reproduce the dynamics of movements, or building stochastic filters that perform state estimation, such as position and velocity. When it comes to target tracking where the targets of interest are many individuals in motion, the literature lacks on specific studies. Thus, the main objective of the thesis is to deepen the knowledge of individuals tracking. In this scenario, there is a large and variable number of targets, which may arise spontaneously, group together or separate, in addition to measures immersed in false alarms. A study of the Random Finite Sets theory was made, whose mathematical treatment is through the so-called Multi-Target Calculus. Stochastic filters were also studied on this point of view, where the PHD and the GM-PHD filters are the main ones. After created the theoretical basis, three proposals based on this problem were presented: Motion Models for Individuals, a Simulator for Individuals Trajectories and Dynamic Models for Stochastic Filtering. The first proposal is based on building a motion probabilistic shape for each individual. The second proposal involves the creation of a trajectory simulator for individuals to be as plausible as possible to the real movements of a person, in scenarios with variations of terrain, ranked by locomotion difficulty. And finally, the third proposal aims to create a combined and modified dynamic model from models found in the literature, to be inserted in the stochastic filters. Finally, several tests and simulations were made in such a way to test the filters performances and analyze the behavior of the proposed mathematical models and the motion probabilistic shapes.

Key-words: Multi-Target Tracking, Individuals, Random Finite Sets, Multi-Target Calculus, Multi-Target Stochastic Filtering, Motion Probabilistic Shapes, Trajectory Simulator, Dynamic Models, Measurement Models.



# Sumário

<b>Introdução Geral</b>	<b>1</b>
<b>Parte I – Modelagem e Filtragem Multi-Alvo</b>	<b>4</b>
<b>1 Modelagem Matemática via Conjuntos Aleatórios Finitos</b>	<b>7</b>
1.1 Cálculo Multi-Alvo . . . . .	8
1.1.1 Definições de um CAF . . . . .	8
1.1.2 Descritores Estatísticos de um CAF . . . . .	9
1.1.3 Integral de Conjunto . . . . .	10
1.1.4 Funcional Gerador de Probabilidade . . . . .	13
1.1.5 Derivada Funcional . . . . .	14
1.1.6 Derivadas de Conjunto . . . . .	14
1.1.7 Principais Teoremas do Cálculo Multi-Alvo . . . . .	15
1.2 Modelos de Medidas . . . . .	19
1.2.1 Modelo-Padrão de Medidas . . . . .	19
1.2.2 Modelo de Medidas via CAF . . . . .	21
1.3 Modelos Dinâmicos . . . . .	24
1.3.1 Modelo-Padrão Dinâmico . . . . .	24
1.3.2 Modelo Dinâmico via CAF . . . . .	25
1.4 Síntese de Capítulo . . . . .	26
<b>2 Estimativa de Estados via Filtragem Estocástica Multi-Alvos</b>	<b>27</b>
2.1 Filtro Bayesiano Multi-Alvo . . . . .	28
2.1.1 Preditor . . . . .	28
2.1.2 Corretor . . . . .	29
2.2 Aproximação Via Momentos para Múltiplos Alvos . . . . .	30
2.2.1 Densidade de Probabilidade por Hipótese – PHD . . . . .	30
2.2.2 Filtro PHD . . . . .	32
2.2.3 Preditor . . . . .	32
2.2.4 Corretor . . . . .	33
2.2.5 Vantagens – Filtro PHD . . . . .	35
2.2.6 Implementação . . . . .	35
2.3 Filtro GM-PHD . . . . .	36
2.3.1 Preditor . . . . .	38

2.3.2	Corretor . . . . .	40
2.3.3	Corte e fusão . . . . .	42
2.3.4	Extensão para Modelos Matemáticos Não-Lineares . . . . .	43
2.4	Algoritmos . . . . .	45
2.4.1	Filtro GM-PHD . . . . .	46
2.4.2	Filtro EK-PHD . . . . .	46
2.4.3	Filtro UK-PHD . . . . .	47
2.5	Síntese de Capítulo . . . . .	47
<b>Parte II – Modelos de Movimentação de Indivíduos: Simulação e Filtragem</b>		<b>51</b>
<b>3</b>	<b>Modelos de Movimentação de Indivíduos</b>	<b>53</b>
3.1	Perfis de Distribuição de Probabilidade . . . . .	54
3.1.1	Perfil “Gota” . . . . .	54
3.1.2	Distribuição de probabilidade – Perfil “Gota” . . . . .	54
3.1.3	Perfil “Folha” . . . . .	58
3.1.4	Distribuição de probabilidade – Perfil “Folha” . . . . .	58
3.1.5	Perfil “Balão” . . . . .	62
3.1.6	Distribuição de probabilidade – Perfil “Balão” . . . . .	62
3.2	Teste de Objetividade . . . . .	65
3.3	Síntese de Capítulo . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Simulador de Trajetórias de Indivíduos</b>	<b>73</b>
4.1	Tipos de Terrenos . . . . .	73
4.2	Simulador . . . . .	74
4.2.1	Características de Indivíduos . . . . .	75
4.2.2	Sub-destinos . . . . .	76
4.2.3	Evolução das Trajetórias para um Indivíduo . . . . .	77
4.3	Exemplo de Simulação . . . . .	79
4.4	Síntese de Capítulo . . . . .	80
<b>5</b>	<b>Modelos Dinâmicos e de Medidas para Filtragem Estocástica</b>	<b>83</b>
5.1	Modelo Dinâmico – Indivíduos . . . . .	84
5.1.1	Modelo NCSHT . . . . .	85
5.1.2	Modelo para Veículos Terrestres . . . . .	85
5.1.3	Modelo Proposto . . . . .	86
5.1.4	Mapa de Hospitalidade para Manobras (HM) . . . . .	89
5.2	Modelo de Medidas – Radar . . . . .	92
5.3	Escolha do Modelo dos Ruídos . . . . .	93
5.4	Síntese de Capítulo . . . . .	93
<b>6</b>	<b>Simulações e Testes</b>	<b>95</b>
6.1	Teste 1 – Objetividade dos perfis probabilísticos . . . . .	96
6.2	Teste 2 – Desempenho dos filtros multi-alvos . . . . .	97
6.3	Teste 3 – Comparação entre modelos dinâmicos . . . . .	103
6.4	Teste 4 – Influência do Mapa HM . . . . .	109
6.5	Síntese de Capítulo . . . . .	113

<b>7</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>115</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>119</b>
<b>A</b>	<b>Regras Básicas de Diferenciação para CAFs</b>	<b>123</b>
A.1	Regras Básicas de Diferenciação . . . . .	123
A.1.1	Regra da Constante . . . . .	123
A.1.2	Regra da Linearidade . . . . .	124
A.1.3	Regra do Monômio . . . . .	124
A.1.4	Regra da Potência . . . . .	124
A.1.5	Regra da Soma . . . . .	124
A.1.6	Regra do Produto . . . . .	125
A.1.7	Regra do Geral do Produto – 2 fatores . . . . .	125
A.1.8	Regra do Geral do Produto – $n$ fatores . . . . .	125
A.1.9	Regra do Cadeia – Versão 1 . . . . .	125
A.1.10	Regra do Cadeia – Versão 2 . . . . .	126
A.1.11	Regra do Cadeia – Versão 3 . . . . .	126



A DEUS, MEUS PAIS E ESPOSA.



# Agradecimentos

Agradeço,

ao Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val pelos oito excelentes anos de orientação impecável, onde me fez encontrar não só meu verdadeiro caminho, mas também uma grande amizade.

ao Prof. Dr. Rafael Santos Mendes pelo forte incentivo e conselhos precisos, compartilhando sua vasta experiência acadêmica à tese.

ao Dr. Yusef Cáceres Zuñiga pelos auxílios práticos e sugestões certeiras para o tema e desenvolvimento da tese.

aos alunos: Jardhel Cachola, Jonas Kienitz, Tânia Mara, Victor Hochgreb e Vinicius Lima pelo interesse e dedicação, qualidades que os levarão a um futuro brilhante.

aos colegas da empresa Bradar: Bruno Pompeo, Heraldo Alves e Gabriel Beltrão pela visão e experiência trazidos de projetos de engenharia da Bradar.

aos colegas do Departamento de Sistemas e Energia: Diego Madeira, Juliana Verga, Rafael Souto e Cristiano Agulhari pela convivência descontraída e trocas de experiências.

aos demais colegas do DSE pela ótima convivência.

aos professores da FEEC: João Marcos Romano, Paulo Valente, Fernando Von Zuben, Romis Attux e José Geromel pelos ótimos cursos oferecidos.

aos membros da banca examinadora pelos comentários, sugestões e contribuições, que ajudaram a melhorar a qualidade e a redação final do manuscrito.

à agência FAPESP pelo apoio financeiro concedido durante todo o período de doutoramento.

à empresa Bradar e ao Dr. João Moreira não só pelo apoio financeiro, mas também pela oportunidade de desenvolver uma tese de doutorado aplicada a projetos reais de engenharia.

à FEEC/UNICAMP pela ótima estrutura que oferece aos estudantes e pesquisadores.

à CAPES e ao IEEE Xplore pelos portais de periódicos eletrônicos, que permitem o acesso rápido e eficiente ao conhecimento científico.

ao Google pelo complemento que faz ao item anterior.

a todos que de alguma forma contribuíram com o meu progresso como aluno e como Ser.



# Lista de Figuras

1.1	Mapeamento de $\Omega$ a $\mathcal{U}$ . . . . .	9
2.1	Gráfico da função PHD unidimensional. . . . .	32
2.2	Sequência estrutural dos algoritmos. . . . .	45
2.3	Etapas do processo de filtragem. . . . .	46
3.1	Perfil da distribuição de probabilidade para mudança de direção – “Gota”. . . . .	54
3.2	Perfis “gota” para uma direção com diferentes objetividades. . . . .	55
3.3	Função densidade de probabilidade – Perfil “gota”. . . . .	56
3.4	Perfis da distribuição “gota”. . . . .	57
3.5	Perfil “gota”: histograma polar para o ângulo de <i>heading</i> . . . . .	58
3.6	Perfil da distribuição de probabilidade para mudança de direção – “Folha”. . . . .	59
3.7	Função densidade de probabilidade – Perfil “folha”. . . . .	60
3.8	Perfis da distribuição “folha”. . . . .	61
3.9	Perfil “folha”: histograma polar do ângulo de desvio de <i>heading</i> . . . . .	62
3.10	Perfil da distribuição de probabilidade para mudança de direção – “Balão”. . . . .	63
3.11	Função densidade de probabilidade – Perfil “balão”. . . . .	64
3.12	Perfis da distribuição “balão”. . . . .	64
3.13	Perfil “balão”: histograma polar do ângulo de desvio de <i>heading</i> . . . . .	65
3.14	Trajetória modelada por perfil “gota” ( $n = 10$ ). . . . .	66
3.15	Trajetória modelada por perfil “gota” ( $n = 100$ ). . . . .	66
3.16	Trajetória modelada por perfil “gota” – $n = 1000$ . . . . .	67
3.17	Variância para o perfil “gota”. . . . .	68
3.18	Trajetória modelada por perfil “folha” ( $\lambda = 2$ ). . . . .	68
3.19	Trajetória modelada por perfil “folha” ( $\lambda = 5$ ). . . . .	69
3.20	Variância para o perfil “folha”. . . . .	69
3.21	Trajetória modelada por perfil “balão” ( $\sigma = 0.1$ ). . . . .	70
3.22	Trajetória modelada por perfil “balão” ( $\sigma = 1.0$ ). . . . .	70
4.1	Tipos de terreno. . . . .	75
4.2	Cenário com sub-destinos (pontos em ciano). . . . .	76
4.3	Exemplo de sub-destinos acessíveis, indicados pelas setas. . . . .	77
4.4	Exemplo – Comparação vetorial para tomada de decisão. . . . .	78

4.5	Exemplo do Simulador de Trajetórias de Indivíduos – Realização 1. . . . .	80
4.6	Exemplo do Simulador de Trajetórias de Indivíduos – Realização 2. . . . .	81
5.1	Cenário simples para determinação de $\xi(x, y)$ . . . . .	90
5.2	Função $\xi(x, y)$ – Superfície em parábola. . . . .	91
6.1	Cenário para avaliação do erro RMS de posição. . . . .	99
6.2	Uma realização – Medidas, <i>clutter</i> e trajetória verdadeira. . . . .	99
6.3	Uma realização – Estimativas e trajetória verdadeira. . . . .	100
6.4	Erro RMS de posição – Filtro GM-PHD. . . . .	100
6.5	Erro RMS de posição – Filtro EK-PHD. . . . .	101
6.6	Erro RMS de posição – Filtro UK-PHD. . . . .	101
6.7	Cenário para avaliação – “Estresse” computacional. . . . .	102
6.8	Estimativa do número de indivíduos . . . . .	104
6.9	Cenário para avaliação do erro RMS de posição. . . . .	105
6.10	Uma realização – Medidas, <i>clutter</i> e trajetória verdadeira. . . . .	106
6.11	Uma realização – Estimativas e trajetória verdadeira. . . . .	106
6.12	Erro RMS de posição – Modelo CV. . . . .	107
6.13	Erro RMS de posição – Modelo NCSHT modificado. . . . .	107
6.14	Erro RMS de posição – Modelo Proposto com mapa HM. . . . .	108
6.15	Cenário para avaliação – “Estresse” computacional. . . . .	108
6.16	Estimativa do número de indivíduos . . . . .	110
6.17	Cenário para verificação da influência do mapa HM. . . . .	111
6.18	Função $\xi(x, y)$ . . . . .	111
6.19	Espalhamento de pontos de posição – 600 realizações. . . . .	112

# Lista de Tabelas

4.1	Tipo de Terreno & Cor Associada. . . . .	74
6.1	Tabela comparativa entre erros RMS médios – Teste 2. . . . .	102
6.2	Tabela comparativa entre tempos de execução – Teste 2. . . . .	103
6.3	Tabela comparativa entre erros RMS médios – Teste 3. . . . .	107
6.4	Tabela comparativa entre tempos de execução – Teste 3. . . . .	109
6.5	Tabela comparativa de números de estimativas em excesso. . . . .	113



# Lista de Acrônimos e Notação

CAF	Conjuntos Aleatórios Finitos
i.i.d	independentes e identicamente distribuídos
CV	<i>Constant Velocity</i>
CT	<i>Constant Turn</i>
NCSHT	<i>Nearly Constant Speed Horizontal Turn</i>
HM	Hospitalidade para Manobras
KF	<i>Kalman Filter</i>
EKF	<i>Extended Kalman Filter</i>
UKF	<i>Unscented Kalman Filter</i>
BLUE	<i>Best Linear Unbiased Estimator</i>
PHD	<i>Probability Hypothesis Density</i>
GM-PHD	<i>Gaussian Mixture Probability Hypothesis Density</i>
SMC-PHD	<i>Sequential Monte Carlo Probability Hypothesis Density</i>
PF-PHD	<i>Particle Filter Probability Hypothesis Density</i>
CPHD	<i>Cardinalized Probability Hypothesis Density</i>
EK-PHD	<i>Extended Kalman Probability Hypothesis Density</i>
UK-PHD	<i>Unscented Kalman Probability Hypothesis Density</i>

$\mathbb{R}^n$	conjunto dos números reais com dimensão $n$
$k$	instante de tempo discreto
$n_k$	no. de indivíduos na região de vigilância no tempo $k$
$m_k$	no. de medidas geradas na região de vigilância no tempo $k$
$\mathbf{x}'$	vetor de estados no instante de tempo $k$
$\mathbf{x}$	vetor de estados no instante de tempo $k + 1$
$\mathbf{x}_{k+1 k}$	vetor de estados predito
$\mathbf{x}_{k+1 k+1}$	vetor de estados corrigido/atualizado
$\mathbf{Y}_i$	variável aleatória no $\mathbb{R}^n$
$\Omega$	espaço amostral
$\sigma_\Omega$	$\sigma$ -álgebra gerada por $\Omega$
$f_\Psi(Y)$	função densidade de probabilidade multi-alvo
$\beta_\Psi(S)$	função massa de crença
$G_\Psi[h]$	funcional gerador de probabilidade
$D_{k k}(\mathbf{x} Z^{(k)})$	função intensidade ou PHD

$X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$	conjunto de $n$ vetores de estado em $k$
$Z = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m\}$	conjunto de $m$ vetores de medida em $k$
$Z^{(k)}$	sequência de conjuntos $Z_1, \dots, Z_k$
$f_{k+1}(Z X)$	função de verossimilhança multi-alvo
$f_{k+1 k}(X X')$	função densidade markoviana multi-alvo
$p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$	função massa de probabilidade
$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$	função densidade de probabilidade
$g_{\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$	função densidade de probabilidade conjunta
$\mathcal{N}_{\mathbf{X}}(\mu, \sigma^2)$	densidade de probabilidade gaussiana, média $\mu$ , variância $\sigma^2$
$\mathcal{U}(a, b)$	distribuição uniforme entre $a$ e $b$

# Introdução Geral

Quando o objetivo de estudo e pesquisa consiste na abordagem do problema de rastreamento de alvos, é bastante comum encontrar na literatura artigos que lidem com o rastreamento de aeronaves, embarcações marítimas e veículos terrestres. Inúmeros artigos contendo assuntos sobre rastreamento de alvos podem ser encontrados no banco de artigos do sistema *IEEE Xplore*. Ao mudar o foco o problema de rastreamento de veículos em movimento para o de rastreamento de pessoas/indivíduos, as referências encontradas sobre este tema são voltadas para o rastreamento de pessoas via imagens, como em (Andriluka, Roth & Schiele 2008), ou o rastreamento de indivíduos focado sobre os aspectos de radares UWB (*Ultra Wide Band Radar*), como em (Chang, Sharan, Wolf, Mitsumoto & Burdick 2010).

Na literatura, não se encontra o problema de rastreamento de indivíduos tratado sob o ponto de vista de modelagem matemática para dinâmica e filtragem estocástica para estimativa de estados, o que motiva o desenvolvimento de soluções para este tipo de problema. Além disso, um dos projetos da empresa Bradar – Embraer Defesa & Segurança, o Radar SENTIR M20, é utilizado em cenários de rastreamento de pessoas e de veículos terrestres, possibilitando a aplicação prática—em um radar real—das soluções elaboradas. Estes fatores motivaram o estudo descrito nesta tese: rastreamento de indivíduos com a proposta da criação de modelos dinâmicos próprios para a movimentação de pessoas e aplicação de filtros estocásticos que forneçam as estimativas de características cinemáticas de cada um dos indivíduos.

Considerando possíveis cenários de rastreamento de indivíduos, como cidades, parques etc., pode-se notar algumas características importantes como: (i) o número de indivíduos que serão rastreados é elevado; (ii) certamente haverá reflexões das ondas do radar em edifícios, postes, árvores etc., que implicam no surgimento de medidas falsas e *clutter*; (iii) as trajetórias realizadas pelos indivíduos podem eventualmente surgir e/ou sumir do campo de visão do radar, fazendo com que o número de pessoas varie com o tempo; (iv) os terrenos, em que as trajetórias se desenvolvem, determinam restrições aos movimentos dos indivíduos como edifícios, pedras, lagos etc.

Tomando como base as características (i)–(iii) citadas acima, existe uma teoria na matemática denominada Teoria dos Conjuntos Aleatórios Finitos (CAF) (Goodman, Mahler & Nguyen 1997), (Mahler 2007). Essa teoria permite realizar modelagens matemáticas através dos CAFs de tal forma a levar em consideração múltiplos alvos (característica (i)), modelagem de medidas falsas e *clutter* (característica (ii)) e variação temporal do número de indivíduos

(característica (iii)). Esta teoria possui um tratamento matemático próprio através do chamado Cálculo Multi-Alvo.

Através do Cálculo Multi-Alvo, é possível descrever estatisticamente as características dos modelos matemáticos elaborados via CAF através de funções de densidade de probabilidade multi-alvo, funções massa de crença e funcionais geradores de probabilidade. Estes descritores estatísticos são bastante importantes para a formação dos filtros multi-alvo (Mahler 2003), (Mahler 2007).

Os filtros multi-alvo são filtros estocásticos formulados com base na teoria dos CAFs e nos descritores estatísticos. A base para todos os filtros multi-alvo é o filtro bayesiano multi-alvo. Este filtro, por sua vez, possui equações de predição e correção muito complexas, que acabam necessitando de aproximações com o intuito de realizar implementações computacionais. Estas aproximações se dão através de hipóteses sobre as equações de filtragem, fazendo surgir o filtro PHD (*Probability Hypothesis Density*). O filtro PHD é o filtro multi-alvo mais conhecido e utilizado na literatura, porém é utilizado em seu formato aproximado, ainda devido à algumas complexidades de suas equações de filtragem.

Existem diversas aproximações (por hipóteses) do filtro PHD, sendo os mais conhecidos os filtros SMC-PHD (*Sequential Monte Carlo Probability Hypothesis Density*) (Vo, Singh & Doucet 2003) e o filtro GM-PHD (*Gaussian-Mixture Probability Hypothesis Density*) (Vo & Ma 2006). O primeiro deles baseia-se nas simulações sequenciais de Monte Carlo, as quais formam o filtro de partículas clássico (Ristic, Arulampalam & Gordon 2004). O segundo filtro, o GM-PHD, é uma aproximação do filtro PHD que considera modelos matemáticos lineares com ruídos aditivos modelados por distribuições gaussianas.

Com todo o problema formulado acima, esta tese apresenta três propostas baseado no problema de rastreamento de indivíduos: (a) criação de modelos de movimentação para indivíduos baseados em perfis probabilísticos e de velocidade; (b) elaboração de um simulador de trajetórias de indivíduos baseado nos modelos de movimentação para indivíduos e em tipos de terreno; e (c) criação de um modelo dinâmico para filtragem a partir de modelos encontrados na literatura. Para levar em conta as restrições relativas aos terrenos, mencionados na característica (iv), o simulador de trajetórias será construído com base nestas restrições físicas e o filtro estocástico irá incorporar algumas informações sobre os diferentes terrenos sempre que possível. Ao final, testes e simulações serão aplicados a diversas situações que envolvam as propostas feitas aqui.

A primeira das três propostas baseia-se na elaboração de modelos de movimentação para indivíduos que reproduzam, da maneira mais verossímil possível, a locomoção de um indivíduo. Estes modelos são formados através dos perfis probabilísticos, estes baseados em certas distribuições de probabilidade. Os perfis propostos são três, todos nomeados com base em seus respectivos formatos: perfil “gota”, perfil “folha” e perfil “balão”. Estes perfis possuem parâmetros próprios que definem o quão objetivo o indivíduo é em relação ao destino para o qual ele se locomove.

A segunda proposta refere-se à construção de um simulador de trajetórias de indivíduos, sendo que estas trajetórias são elaboradas com base nos perfis probabilísticos apresentados anteriormente. Além disso, este simulador cria cenários com diferentes tipos de terreno (nivelados pela dificuldade de locomoção), levando em conta trajetórias que surgem espontaneamente, que

surtem a partir de outra trajetória já presente no cenário (*spawning*) e aquelas que não aparecem mais no cenário, seja porque entrou em algum lugar, seja porque saiu do campo de visão do radar.

A terceira e última proposta consiste na elaboração de um modelo dinâmico para filtragem baseado na combinação de modelos dinâmicos encontrados na literatura, estes modificados para adequação ao problema de rastreamento de indivíduos. O modelo proposto combina dois modelos da literatura: o primeiro deles é um modelo híbrido que consiste na dinâmica de aeronaves que realizam movimentos em curva e em linha reta; e o segundo consiste na utilização de informações do cenário através do chamado mapa HM (Hospitalidade para Manobras). Realizando as adaptações adequadas em cada um destes modelos, construiu-se um modelo dinâmico que combina estes dois modelos modificados. Este modelo proposto tem o intuito de cobrir um número maior de possibilidades de movimentos realizados por cada um dos indivíduos.

Esta tese está organizada em duas partes. A Parte I, que forma a base teórica da tese, divide-se em:

1. Capítulo 1: Modelagem Matemática Via Conjuntos Aleatórios Finitos;
2. Capítulo 2: Estimativa de Estados Via Filtragem Estocástica Multi-Alvos).

A Parte II, que se refere às propostas da tese, divide-se em:

1. Capítulo 3: Modelos de Movimentação de Indivíduos;
2. Capítulo 4: Simulador de Trajetórias de Indivíduos;
3. Capítulo 5: Modelos Dinâmicos e de Medidas para Filtragem Estocástica;
4. Capítulo 6: Simulações e Testes.

Ao final, conclusões sobre o trabalho realizado são discutidas no Capítulo 7.



**Parte I**  
**Modelagem e Filtragem Multi-Alvo**



# Modelagem Matemática via Conjuntos Aleatórios Finitos

No problema de rastreamento de alvos, pode-se dizer que duas etapas são fundamentais para que sejam obtidas boas estimativas das características cinemáticas de cada um dos alvos. A primeira delas é definir um bom modelo matemático dos alvos, com o intuito de reproduzir, da melhor maneira possível, não só a dinâmica do alvo que está sendo rastreado, mas também as medidas vindas da recepção do radar. Diversos modelos de medidas e dinâmicos para alvos únicos podem ser encontrados em (Li & Jilkov 2001) e (Li & Jilkov 2003), respectivamente. A segunda etapa fundamental no rastreamento é a capacidade de obter estimativas de, por exemplo, posição e velocidade de um alvo. Isto se dá através da aplicação de filtros estocásticos, sendo o filtro de Kalman linear o mais comum e conhecido dentre os diversos tipos de filtros existentes na literatura, sendo grande parte deles uma variação do filtro de Kalman original, como o filtro estendido de Kalman (Bar-Shalom, Li & Kirubarajan 2001). Também existem filtros que possuem características próprias, como o filtro IMM (Li & Jilkov 2005), que gera estimativas através de interações entre filtros estocásticos, e o filtro de partículas (Ristic et al. 2004), que lida com modelos matemáticos não-lineares, realizando estimativas com base em simulações sequenciais de Monte Carlo.

Na literatura, é muito comum encontrar referências ligadas a modelos matemáticos voltados para alvos individuais. No entanto, o objetivo desta tese de doutorado é tratar o caso em que temos cenários envolvendo diversos alvos, mais especificamente, indivíduos. Desta maneira, o ideal é, além de construir modelos dinâmicos individuais para cada uma das pessoas, definir um modelo que consiga reproduzir todos os indivíduos simultaneamente, inclusive tratar o fato de que o número de indivíduos varia com o tempo dentro da região de vigilância (pessoas entrando e saindo de edifícios, por exemplo). Além disso, sob o ponto de vista de uma situação real, eventualmente surgirão alarmes falsos e/ou *clutter*<sup>1</sup>, que também poderiam ser modelados, tornando o modelo final mais adequado. Para poder tratar todos estes fatores simultaneamente dentro de um modelo matemático, existe uma teoria dentro da matemática que se encaixa perfeitamente nesta situação chamada Teoria dos Conjuntos Aleatórios Finitos (CAF).

A Teoria dos CAFs, tratada em (Goodman et al. 1997) e (Mahler 2007), sendo este último

---

<sup>1</sup>Medidas espúrias vindas de reflexões de rochas, vegetações, edifícios etc.

focado no problema de rastreamento de múltiplos alvos, permite definir modelos matemáticos que envolvam um número variável de indivíduos — consequentemente, um número variável de medidas — alarmes falsos e *clutter*. Para construir os modelos e obter seus descritores estatísticos (medidas de probabilidade, densidades etc.), que são essenciais para a etapa de filtragem multi-alvo, é necessário conhecer o “ferramental” matemático próprio da teoria de CAF, conhecido como Cálculo Multi-Alvo. O Cálculo Multi-Alvo possui operadores matemáticos muito semelhantes aos encontrados no cálculo clássico, como as derivadas e as integrais, porém todos aplicados sobre os CAFs, generalizando as noções de derivadas e integrais. Estes operadores são chamados de derivada de conjunto, derivada funcional e integral de conjunto.

Neste capítulo, será apresentada a definição dos CAFs e seus os principais descritores estatísticos, além dos operadores matemáticos do Cálculo Multi-Alvo — integrais e derivadas de conjunto — que servem principalmente para calcular estes descritores referentes aos modelos matemáticos construídos. Exemplos também serão mostrados para maior familiarização com tais operadores matemáticos. Após a apresentação do Cálculo Multi-Alvo, serão descritos os modelos matemáticos via CAF que serão utilizados para modelar a dinâmica e as medidas para um número  $n$  de indivíduos e um número  $m$  de medidas, sendo que o índice  $k = 0, 1, 2, \dots$  refere-se ao instante de tempo discreto.

## 1.1 Cálculo Multi-Alvo

O cálculo multi-alvo possui, dentro de sua teoria matemática, diversos operadores para executar cálculos relativos aos CAFs. Estes operadores são extensões matemáticas apropriadas àquelas encontradas na teoria de cálculo diferencial, como as integrais e as derivadas. No entanto, sob o ponto de vista dos CAFs, as integrais e derivadas passam a ser aplicadas a funções de CAF. Por esse motivo, estes operadores recebem as seguintes denominações: Integrais de Conjunto e Derivadas de Conjunto.

Antes de introduzir os conceitos e propriedades das integrais e derivadas de conjunto, é necessário apresentar a definição de um CAF.

### 1.1.1 Definições de um CAF

Antes de dar o início ao cálculo multi-alvo, é primordial definir um CAF. Com a finalidade de comparar com a teoria de probabilidade clássica, coloca-se primeiramente a definição de uma variável aleatória encontrada em (Billingsley 1995), descrita a seguir:

**Definição 1.1** *Sejam  $(\Omega, \sigma_\Omega, Pr_\Omega)$  um espaço de probabilidade e  $(\Xi, \sigma_\Xi)$  um espaço mensurável. Todo mapeamento  $\sigma_\Omega$ -mensurável do tipo*

$$\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \Xi, \tag{1.1}$$

*é definido como sendo uma variável aleatória.*

Agora, em (Vo et al. 2003) e (Nuñez-Garcia & Wolkenhauer 2002), encontra-se a definição de um CAF, descrita a seguir:

**Definição 1.2** *Sejam  $E$  um subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{F}(E)$  uma coleção finita de subconjuntos de  $E$  e  $\mathcal{U}$  um conjunto finito dos subconjuntos de  $E$ , isto é,  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}(E)$ . Um Conjunto Aleatório Finito  $\Psi$  em  $\mathcal{U}$  é definido como um mapeamento  $\sigma_\Omega$ -mensurável de um espaço de probabilidade  $(\Omega, \sigma_\Omega, Pr_\Omega)$  para um espaço mensurável  $(\mathcal{U}, \sigma_\mathcal{U})$ , isto é,*

$$\Psi : \Omega \rightarrow \mathcal{U}, \quad (1.2)$$

em que  $\Omega$  é o espaço amostral,  $\sigma_\Omega$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\Omega$ ,  $Pr_\Omega$  é a medida de probabilidade,  $\sigma_\mathcal{U}$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\mathcal{U}$ .

Note que ambas as Definições 1.1 e 1.2 assemelham-se bastante entre si, exceto pelo fato de que  $\Psi$  associa cada evento elementar  $\omega \in \Omega$  a um evento de  $\mathcal{U}$ . A Figura 1.1 ilustra muito bem a Definição 1.2, mostrando os mapeamentos aos quais se refere a relação (1.2).

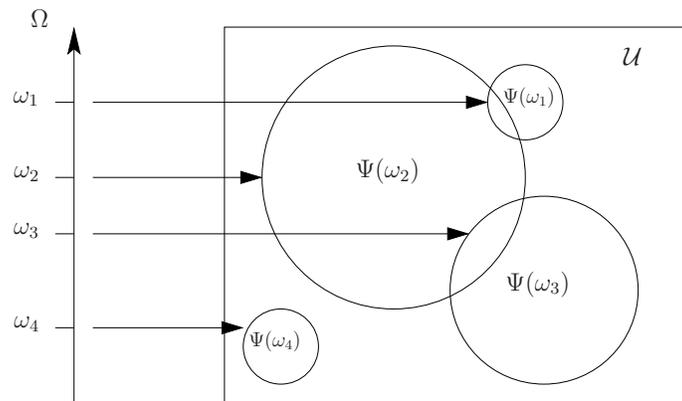


Figura 1.1: Mapeamento de  $\Omega$  a  $\mathcal{U}$ .

Em (Vo 2008), há uma definição para um CAF, descrevendo-o de forma mais direta, sem formalismos matemáticos e simples de ser compreendido. Esta definição está descrita a seguir:

**Definição 1.3** *Um CAF pode ser interpretado como uma variável aleatória que assume valores sendo conjuntos finitos. Além disso, o número de elementos constituintes de um CAF é aleatório, isto é, a cardinalidade de um CAF é uma variável aleatória, e os elementos que compõem um CAF também são aleatórios, além de distintos e não ordenados.*

Note que a Definição 1.3 descreve de uma forma simples um CAF, facilitando o entendimento desta família específica de conjuntos.

### 1.1.2 Descritores Estatísticos de um CAF

Descritos os CAFs pelas definições apresentadas na Seção 1.1.1, o próximo passo é apresentar as funções que descrevem estatisticamente os CAFs: os descritores estatísticos. Assim como na teoria de probabilidade clássica, em que existem funções que descrevem completamente uma ou várias variáveis aleatórias, tais como a função distribuição acumulada e a função densidade de probabilidade, os CAFs também podem ser descritos estatisticamente por funções específicas. Existem três tipos de descritores estatísticos (Mahler 2007) que são totalmente equivalentes sob o ponto de vista das informações sobre um dado CAF  $\Psi$ . Os três descritores estatísticos são:

- (i)  $f_\Psi(Y)$ : Função Densidade de Probabilidade Multi-Alvo;
- (ii)  $\beta_\Psi(S)$ : Função Massa de Crença;
- (iii)  $G_\Psi[h]$ : Funcional Gerador de Probabilidade.

Como cada uma delas possui as mesmas informações sobre o CAF  $\Psi$ , pode-se usar qualquer uma delas para descrever estatisticamente um CAF. Tais descritores são bastante importantes na etapa de filtragem, em que são utilizados para definir as equações de filtragem. No entanto, cada uma delas é utilizada em ocasiões diferentes, dependendo da situação em questão.

A mais utilizada é função densidade de probabilidade multi-alvo  $f_\Psi(Y)$ , a qual é utilizada nos casos para a formulação teórica de detecção, rastreamento, localização e classificação de múltiplos alvos, ou seja, a filtragem bayesiana para múltiplos alvos. Como este descritor estatístico lida diretamente na formulação dos filtros estocásticos, mais especificamente do filtro bayesiano multi-alvo, a função densidade de probabilidade multi-alvo terá uma atenção maior no texto desta tese.

No entanto, para obter a função densidade de probabilidade multi-alvo, é necessário primeiramente construir a função massa de crença  $\beta_\Psi(S)$ , cujo objetivo é obter as funções de verossimilhança através de modelos de medida para múltiplos alvos e funções densidade markovianas para múltiplos alvos através de modelos dinâmicos.

O terceiro e último descritor estatístico é o funcional gerador de probabilidade  $G_\Psi[h]$ , cuja função é, dependendo do problema em questão, transformar problemas matemáticos difíceis em problemas mais simples como, por exemplo, em problemas de predição. Na literatura, os filtros mais utilizados, como o filtro PHD (*Probability Hypothesis Density*), não utilizam os funcionais geradores de probabilidade em suas equações de predição e correção. Este descritor é apenas utilizado em demonstrações das equações do filtro PHD.

Das três funções descritas acima, a única que é possível definir neste momento é a função massa de crença, que nada mais é do que uma medida de probabilidade.

**Definição 1.4** *Seja  $\Psi$  um conjunto aleatório finito de  $\mathbb{R}^n$ . A função massa de crença é dada pela seguinte medida de probabilidade*

$$\beta_\Psi(S) \triangleq \Pr(\Psi \subseteq S) \tag{1.3}$$

em que  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ .

A função densidade de probabilidade multi-alvo  $f_\Psi(Y)$  só poderá ser definida após a introdução dos conceitos de integral de conjunto, derivadas funcionais e derivadas de conjunto nas seções a seguir.

### 1.1.3 Integral de Conjunto

A integral de conjunto possui características semelhantes à integral conhecida do cálculo clássico, porém a integral de conjunto possui características próprias. Em (Mahler 2007), a integral de conjunto é definida na seguinte forma:

**Definição 1.5** *Seja  $f(Y)$  uma função real qualquer de uma variável  $Y$ , em que  $Y$  é um conjunto finito. A integral de conjunto sobre uma região  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  é dada por*

$$\int_S f(Y) \delta Y \triangleq \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int_{\underbrace{S \times \dots \times S}_N} f(\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N\}) d\mathbf{y}_1 \dots d\mathbf{y}_N \quad (1.4)$$

$$= f(\emptyset) + \int_S f(\{\mathbf{y}\}) d\mathbf{y} + \frac{1}{2} \int_{S \times S} f(\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}) d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2 + \dots \quad (1.5)$$

Observando a integral de conjunto em (1.5), nota-se que existem potencialmente infinitas integrais a serem determinadas. No entanto, analisando sob o ponto de vista de CAFs, o número de parcelas da somatória em (1.4) torna-se finita, já que o conjunto  $Y$  possuirá um número finito de elementos. Por exemplo, no caso do rastreamento,  $Y$  poderia conter os vetores de estado de cada um dos indivíduos.

Conhecida a definição de uma integral de conjunto, podemos introduzir dois conceitos importantes que utilizam este tipo de integral como base. O primeiro deles é o estabelecimento da relação existente entre a função massa de crença  $\beta_\Psi(S)$  e a função densidade de probabilidade multi-alvo  $f_\Psi(Y)$ . Isto se dá através da seguinte definição:

**Definição 1.6** *Seja  $\Psi$  um CAF em  $\mathbb{R}^n$  e  $f_\Psi(Y)$  sua função densidade de probabilidade multi-alvo. Então, a função massa de crença pode ser definida como:*

$$\beta_\Psi(S) \triangleq \int_S f_\Psi(Y) \delta Y \quad (1.6)$$

A Definição 1.6 é bastante importante, já que traça uma relação matemática entre dois dos descritores estatísticos, sendo que esta relação também será abordada sob o ponto de vista das derivadas de conjunto. Note que a Definição 1.6 é análoga ao cálculo de probabilidade de um conjunto  $S$  dada a densidade de probabilidade  $f_{\mathbf{X}}(x)$  da variável aleatória  $\mathbf{X}(\omega)$ .

O segundo conceito importante é a distribuição de cardinalidade  $p_\Psi(n)$  em função da densidade de probabilidade multi-alvo  $f_\Psi(Y)$ , descrito no seguinte corolário:

**Corolário 1.1** *Seja  $\Psi$  um CAF em  $\mathbb{R}^n$  e  $f_\Psi(Y)$  sua respectiva função densidade de probabilidade multi-alvo. A distribuição de cardinalidade é dada pela seguinte medida de probabilidade*

$$p_\Psi(N) \triangleq Pr(|\Psi| = N) \quad (1.7)$$

*e que por sua vez pode ser reescrita como a  $N$ -ésima parcela de uma integral de conjunto*

$$Pr(|\Psi| = N) = \frac{1}{N!} \int f_\Psi(\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N\}) d\mathbf{y}_1 \dots d\mathbf{y}_N \quad (1.8)$$

Note que, no Corolário 1.1, a integral não possui a região onde está sendo calculada. Nestes casos, a integral é tomada sobre o conjunto  $\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ . Este padrão será adotado daqui para frente. Além disso, o Corolário 1.1 auxiliará no comparativo entre funções de densidade conjunta e densidade de probabilidade multi-alvo, apresentado a seguir.

**Observação:** (Relação entre densidade conjunta de uma variável aleatória e densidade de probabilidade multi-alvo de um CAF). Em relação a integral de conjunto, dada na Definição 1.5, cabem algumas observações e análises mais detalhadas em relação aos elementos que compõem a integral de conjunto. Algo que chama a atenção é o fator  $1/N!$  que multiplica a integral de conjunto na equação (1.4). Esta fração surge ao se considerar que o conjunto de  $N$  elementos do tipo  $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N\}$  deve ser distribuído igualmente sobre todos os  $N!$  vetores do tipo  $[\mathbf{y}_{\sigma_1} \cdots \mathbf{y}_{\sigma_N}]$ , em que  $\sigma_i$  refere-se a uma permutação entre os números  $1, \dots, N$ . Isto fica mais claro quando se aborda alguns conceitos da probabilidade clássica.

Considere a função distribuição de probabilidade conjunta  $g_{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ . Sua integral sobre uma região  $S \times S$  pode ser escrita de duas formas diferentes considerando as suas densidades marginais, porém ambas representando o mesmo resultado:

$$\int_{S \times S} g_{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 = \begin{cases} \int_{S \times S} g_{\mathbf{X}_2}(\mathbf{x}_2 | \mathbf{x}_1) g_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \\ \int_{S \times S} g_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2) g_{\mathbf{X}_2}(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_1 \end{cases} \quad (1.9)$$

Ao somar as duas integrais resultantes em (1.9), basta dividirmos esta soma por 2, resultando em  $\int_{S \times S} g_{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2$ , isto é:

$$\begin{aligned} \int_{S \times S} g_{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 &= \frac{1}{2} \left( \int_{S \times S} g_{\mathbf{X}_2}(\mathbf{x}_2 | \mathbf{x}_1) g_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 + \right. \\ &\quad \left. + \int_{S \times S} g_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2) g_{\mathbf{X}_2}(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_1 \right) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Realizando este procedimento para uma função distribuição de probabilidade conjunta de terceira ordem, o mesmo acontece, só que desta vez o fator multiplicativo da soma já não será mais  $1/2$ , e sim  $1/6 = 1/3!$ . Continuando o processo para funções distribuição de probabilidade conjunta de ordem maior, a soma das integrais sempre será dividida pelo fator  $1/N!$ , em que  $N!$  pode ser interpretado como um fator combinatório.

De certo modo, isto traz informações sobre a estrutura das integrais de conjunto: uma delas é que a função  $f(\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n\})$  é semelhante à função distribuição de probabilidade conjunta da teoria de probabilidade clássica, mas com algumas ressalvas. Considere a  $N$ -ésima parcela da soma descrita na Definição 1.5 para um CAF  $\Psi$ , isto é:

$$\frac{1}{N!} \int_{S \times \dots \times S} f_{\Psi}(\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N\}) d\mathbf{y}_1 \dots d\mathbf{y}_N \quad (1.11)$$

Considerando a região de integração de (1.11) para  $S = \mathbb{R}^n$ , obtém-se a distribuição de cardinalidade  $p_{\Psi}(N)$ , dada pela Definição 1.1. No entanto, se considerarmos uma função distribuição de probabilidade conjunta da teoria clássica de probabilidade, dada por  $g_{\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_N}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N)$ , e a integrarmos sobre todo o espaço  $\mathbb{R}^n$ , o resultado é unitário, diferentemente da integral de  $f_{\Psi}(\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N\})$  sobre  $\mathbb{R}^n$ , que resulta na probabilidade da cardinalidade  $p_{\Psi}(N)$  multiplicada por  $N!$ .

Portanto, ao dividir  $f_{\Psi}(\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N\})$  por  $N!p_{\Psi}(N)$ ,  $p_{\Psi}(N) \neq 0$ , e integrar esta nova função sobre todo o espaço real, chegaremos ao mesmo resultado unitário como no caso da função

distribuição de probabilidade da teoria clássica de probabilidade, isto é:

$$\int \frac{f_{\Psi}(\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N\})}{N!p_{\Psi}(N)} d\mathbf{y}_1 \dots d\mathbf{y}_N = 1 \quad (p_{\Psi}(N) \neq 0) \quad (1.12)$$

Desta forma, é possível notar que o argumento da integral em (1.8) é equivalente à função distribuição de probabilidade conjunta  $g_{\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_N}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N)$  conhecida da literatura, ou seja:

$$g_{\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_N}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N) \triangleq \frac{1}{N!p_{\Psi}(N)} f_{\Psi}(\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N\}) \quad (1.13)$$

em que  $N!$  pode ser visto como um fator combinatório, como já foi visto anteriormente. ■

Com o conceito de integral de conjunto apresentado, é possível definir um dos descritores estatísticos listados anteriormente, o funcional gerador de probabilidade.

### 1.1.4 Funcional Gerador de Probabilidade

Para descrevermos o funcional gerador de probabilidade  $G_{\Psi}[h]$ , primeiramente devemos definir um funcional  $F[h]$  da seguinte forma:

**Definição 1.7** *Um funcional  $F[h]$  é uma função real  $F$  cujo argumento é a função-teste  $h(\mathbf{y})$ . A função-teste é uma função real não-negativa de  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  e  $F$  não possui unidade de medida.*

Uma operação importante relacionada aos funcionais é a potência de  $h(\mathbf{y})$  com respeito a  $Y$ . Desta forma, temos a seguinte definição:

**Definição 1.8** *A potência de  $h(\mathbf{y})$  com respeito a  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$  é dada por:*

$$h(\mathbf{y})^Y = h^Y \triangleq \begin{cases} 1 & , \quad Y = \emptyset \\ \prod_{\mathbf{y} \in Y} h(\mathbf{y}) & , \quad \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1.14)$$

Agora, dada as Definições 1.5 e 1.7, pode-se definir o funcional gerador de probabilidade, a seguir:

**Definição 1.9** *Seja  $f_{\Psi}(Y)$  a função densidade de probabilidade multi-objeto de um CAF  $\Psi$ . Então o seu funcional gerador de probabilidade, é dado por:*

$$G_{\Psi}[h(\mathbf{y})] = G_{\Psi}[h] \triangleq \int h^Y f_{\Psi}(Y) \delta Y \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} &= f_{\Psi}(\emptyset) + \int h(\mathbf{y}) f_{\Psi}(\{\mathbf{y}\}) d\mathbf{y} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int h(\mathbf{y}_1) h(\mathbf{y}_2) f_{\Psi}(\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}) d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2 + \dots \end{aligned} \quad (1.16)$$

Observando o funcional em (1.16), nota-se que sua estrutura é bastante semelhante a do valor esperado da probabilidade clássica  $E[\cdot]$  para uma função  $b(X)$  qualquer, isto é,  $E[b(X)] = \int b(x) f(x) dx$ .

Conhecido o funcional gerador de probabilidade  $G_{\Psi}[h]$ , pode-se introduzir um novo conceito, o de derivada funcional.

### 1.1.5 Derivada Funcional

Na teoria dos filtros estocásticos baseados em CAFs, a derivada funcional é comumente aplicada em demonstrações matemáticas utilizando o funcional gerador de probabilidade, com a finalidade de determinar as equações de previsão e de correção de um filtro multi-alvo. Na literatura, é pouco comum encontrar situações onde os filtros multi-alvo possuem suas equações formuladas diretamente por funcionais geradores de probabilidade.

A derivada funcional pode ser definida da seguinte maneira:

**Definição 1.10** *Seja  $F[h]$  um funcional e seja  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ . A derivada funcional de  $F[h]$  com respeito a  $\mathbf{y}$  é dada por:*

$$\frac{\delta F}{\delta \mathbf{y}}[h] \triangleq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F[h + \varepsilon \delta \mathbf{y}] - F[h]}{\varepsilon}, \quad (1.17)$$

Desta forma, podemos definir a derivada funcional em relação a  $Y$ . Ao fazer isto, devemos calcular um número  $|Y|$  derivadas funcionais, como mostra a seguinte definição:

**Definição 1.11** *Se  $Y$  é um subconjunto finito de  $\mathbb{R}^n$ , então define-se a derivada funcional de  $F[h]$  em relação a  $Y$  como sendo:*

$$\frac{\delta F}{\delta Y}[h] \triangleq \begin{cases} F[h] & , \quad Y = \emptyset \\ \frac{\delta^N F}{\delta \mathbf{y}_N \dots \delta \mathbf{y}_1}[h] & , \quad Y = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N\} \end{cases} \quad (1.18)$$

Note que, quando a derivada funcional é calculada para  $Y \neq \emptyset$ , aplica-se  $|Y| = N$  vezes a equação (1.17), dada na Definição 1.10. Estas derivadas funcionais são tomadas de  $\mathbf{y}_1$  até  $\mathbf{y}_N$ , sequencialmente.

### 1.1.6 Derivadas de Conjunto

Assim como a derivada funcional, a derivada de conjunto também é um operador inverso ao da integral de conjunto. Antes da apresentação das definições citadas, é necessário relacionar um funcional com uma função de conjunto, através do seguinte corolário:

**Corolário 1.2** *Seja,  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ . Todo funcional dá origem a uma função de conjunto, isto é,*

$$\phi_F(S) \triangleq F[\mathbf{1}_S] \quad (1.19)$$

em que  $\mathbf{1}_S$  é a função indicadora dada por

$$\mathbf{1}_S(\mathbf{y}) \triangleq \begin{cases} 1 & , \quad \mathbf{y} \in S \\ 0 & , \quad \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1.20)$$

Utilizando a Definição 1.7 e o Corolário 1.2, pode-se definir a derivada de conjunto, através do conceito de limite:

**Definição 1.12** Dada uma função de conjunto  $\phi(S)$ , define-se sua derivada em relação a  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  como sendo o seguinte limite:

$$\frac{\delta\phi}{\delta\mathbf{y}}(S) \triangleq \lim_{\langle E_{\mathbf{y}} \rangle \rightarrow 0} \frac{\phi_F(S \cup E_{\mathbf{y}}) - \phi_F(S)}{\langle E_{\mathbf{y}} \rangle} \quad (1.21)$$

em que  $E_{\mathbf{y}}$  é um vizinhança em torno de  $\mathbf{y}$  tão pequena quanto se queira e com volume  $\langle E_{\mathbf{y}} \rangle = \varepsilon$  e  $\phi_F(S)$  é dado pelo Corolário 1.2.

Além de definir uma derivada de conjunto em relação a uma variável real, também é possível definir a derivada de conjunto de uma função de conjunto  $\phi(S)$  em relação a  $Y$ , como se segue:

**Definição 1.13** Dada uma função de conjunto  $\phi(S)$ , define-se sua derivada em relação ao conjunto  $Y$  como sendo:

$$\frac{\delta\phi}{\delta Y}(S) \triangleq \begin{cases} \phi(S) & , \quad Y = \emptyset \\ \frac{\delta^N \phi}{\delta \mathbf{y}_N \dots \delta \mathbf{y}_1}(S) & , \quad Y = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N\} \end{cases} \quad (1.22)$$

Novamente, quando a derivada funcional é calculada para  $Y \neq \emptyset$ , aplica-se  $|Y| = N$  vezes a equação (1.21), dada na Definição 1.12. Estas derivadas funcionais são tomadas de  $\mathbf{y}_1$  até  $\mathbf{y}_N$ , sequencialmente.

### 1.1.7 Principais Teoremas do Cálculo Multi-Alvo

Dentro da teoria do cálculo multi-alvo, existem alguns teoremas importantes tais como o Teorema Fundamental do Cálculo Multi-Alvo (em duas versões – conjunto e funcional) e o Teorema de Radon-Nikodým. O primeiro teorema importante do cálculo multi-alvo, o Teorema Fundamental do Cálculo Multi-Alvo, tem o intuito de mostrar que a integral de conjunto e a derivada de conjunto são operações inversas. A seguir, são apresentadas as duas versões citadas:

**Teorema 1.1** (Teorema Fundamental do Cálculo Multi-Alvo 1). Sejam  $\phi(S)$  e  $f(Y)$  funções de conjunto. A relação entre a integral de conjunto e a derivada de conjunto é dada pelas seguintes igualdades:

$$\phi(S) = \int_S \frac{\delta\phi}{\delta Y}(\emptyset) \delta Y \quad (1.23)$$

$$\left[ \frac{\delta}{\delta Y} \int_S f(W) \delta W \right]_{S=\emptyset} = f(Y) \quad (1.24)$$

**Teorema 1.2** (Teorema Fundamental do Cálculo Multi-Alvo 2). Seja  $F[h]$  um funcional e  $f(Y)$  uma função de conjunto. A relação entre a integral de conjunto e a derivada funcional é dada por:

$$F[h] = \int h^Y \frac{\delta F}{\delta Y}(0) \delta Y \quad (1.25)$$

$$\left[ \frac{\delta}{\delta Y} \int h^W f(W) \delta W \right]_{h=0} = f(Y) \quad (1.26)$$

O segundo resultado importante na teoria de cálculo multi-alvo é o Teorema de Radon-Nikodým, de onde podemos retirar uma relação importante entre a função massa de crença e a função densidade de probabilidade multi-alvo:

**Teorema 1.3** (*Teorema de Radon-Nikodým*). *Seja  $\beta_\Psi(S)$  a função massa de crença do CAF  $\Psi$ . Esta função massa de crença pode ser reescrita como a seguinte integral de conjunto*

$$\int_S \frac{\delta\beta_\Psi}{\delta Y}(\emptyset)\delta Y = \Pr(\Psi \subseteq S) = \beta_\Psi(S) \quad (1.27)$$

Os teoremas descritos acima têm suas demonstrações feitas em (Goodman et al. 1997). A partir do Teorema de Radon-Nikodým, é possível obter uma nova relação importante entre os descritores estatísticos  $f_\Psi(Y)$  e  $\beta_\Psi(S)$ , descrito no seguinte corolário:

**Corolário 1.3** *Considere a Definição 1.6 e o Teorema 1.3. A partir de ambos, conclui-se que a função densidade de probabilidade multi-alvo de um CAF  $\Psi$  pode construída a partir de derivadas sucessivas (Definição 1.13) da função massa de crença, ou seja,*

$$\left. \begin{array}{l} \text{(Def. 1.6)} \beta_\Psi(S) = \int_S f_\Psi(Y)\delta Y \\ \text{(Teo. 1.3)} \beta_\Psi(S) = \int_S \frac{\delta\beta_\Psi}{\delta Y}(\emptyset)\delta Y \end{array} \right\} \Rightarrow f_\Psi(Y) = \frac{\delta\beta_\Psi}{\delta Y}(\emptyset) \quad (1.28)$$

O Corolário 1.3 é bastante importante para a obtenção da função densidade de probabilidade multi-alvo. A função massa de crença é comumente obtida a partir de regras e teoremas de probabilidade por se tratar de uma medida de probabilidade. Calculada a função massa de crença, basta aplicar a derivada de conjunto sobre a função massa de crença, calculando-a para o conjunto vazio, isto é,  $S = \emptyset$ .

A seguir, é apresentado um exemplo de (Mahler 2007) em que são utilizadas as derivadas de conjunto para a obtenção de uma função densidade de probabilidade multi-alvo relativa a duas estrelas piscantes no céu. Como existem diversas regras de diferenciação, essenciais para a resolução de problemas como o exemplo a seguir, optou-se por colocá-las no Apêndice A para referência.

**Exemplo 1.1** (*Dois Estrelas Cintilantes*). *Considere duas estrelas em uma região  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  do céu distantes uma da outra e que ambas podem ser consideradas estatisticamente independentes. A olho nu, as estrelas aparecem e desaparecem aleatoriamente (cintilação) e sua posição varia sempre que elas estão visíveis. Seja  $1 - p_i$  a probabilidade da estrela  $i = 1, 2$  desaparecer e  $p_i$  a probabilidade da estrela  $i = 1, 2$  aparecer. O objetivo aqui é encontrar a função densidade de probabilidade multi-alvo  $f_\Psi(Y)$ .*

*Primeiramente, deve-se definir o conjunto aleatório discreto  $\emptyset^{p_i}$ .*

**Definição 1.14** *Seja um conjunto  $S \subseteq \mathbb{R}^2$ . O conjunto aleatório discreto  $\emptyset^{p_i}$  é definido pela seguinte medida de probabilidade:*

$$\Pr(\emptyset^{p_i} = S) \triangleq \begin{cases} 1 - p_i & , \quad S = \emptyset \\ p_i & , \quad S = \mathbb{R}^2 \\ 0 & , \quad \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1.29)$$

em que  $p_i \in [0, 1]$ .

A Definição 1.14 tem o seguinte significado: quando a estrela não está visível,  $Pr(\emptyset^{p_i} = S)$  vale  $1 - p_i$ . Quando ela não está visível, podemos dizer que não existe nada no espaço  $S$ , isto é,  $S = \emptyset$ . Como  $S = \emptyset$ , então  $\emptyset^{p_i} = \emptyset$  já que o evento em questão é " $\emptyset^{p_i} = S$ ".

Definido  $\emptyset^{p_i}$ , as estrelas podem ser modeladas como uma união de dois CAFs, ou seja,  $\Psi = \Psi_1 \cup \Psi_2$ , em que:

$$\Psi_1 = \emptyset^{p_1} \cap \{\mathbf{y}_1\} \quad (1.30)$$

$$\Psi_2 = \emptyset^{p_2} \cap \{\mathbf{y}_2\}, \quad (1.31)$$

$\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^2$ ,  $i = 1, 2$  é o vetor referente à posição da estrela  $i$ .

Portanto,  $\Psi_i = \emptyset^{p_i} \cap \{\mathbf{y}_i\} = \emptyset \cap \{\mathbf{y}_i\} = \emptyset$ . Este resultado faz sentido, pois a estrela não está visível a olho nu. O mesmo raciocínio pode ser repetido para o caso em que a estrela está visível. Neste caso,  $\emptyset^{p_i} = \mathbb{R}^2$ , resultando em  $\Psi_i = \emptyset^{p_i} \cap \{\mathbf{y}_i\} = \mathbb{R}^2 \cap \{\mathbf{y}_i\} = \{\mathbf{y}_i\}$ .

O segundo passo do exemplo, após obter o modelo para CAF, é calcular a função massa de crença  $\beta_\Psi(S)$ , dada por:

$$\beta_\Psi(S) = Pr(\Psi \subseteq S) = Pr(\Psi_1 \cup \Psi_2 \subseteq S) = Pr(\Psi_1 \subseteq S, \Psi_2 \subseteq S) \quad (1.32)$$

$$= \underbrace{Pr(\Psi_1 \subseteq S)Pr(\Psi_2 \subseteq S)}_{\text{independência}} \quad (1.33)$$

$$= \beta_{\Psi_1}(S)\beta_{\Psi_2}(S) \quad (1.34)$$

Agora, calculando as funções massa de crença obtidas em (1.34), tem-se, para  $i = 1, 2$ :

$$\beta_{\Psi_i}(S) = Pr(\Psi_i \subseteq S) \quad (1.35)$$

$$= \underbrace{Pr(\Psi_i \subseteq S, \Psi_i = \emptyset) + Pr(\Psi_i \subseteq S, \Psi_i \neq \emptyset)}_{\text{Lei da Probabilidade Total}} \quad (1.36)$$

$$= Pr(\Psi_i = \emptyset) + \underbrace{Pr(\Psi_i \neq \emptyset)Pr(\Psi_i \subseteq S | \Psi_i \neq \emptyset)}_{\text{Probabilidade Condicional}} \quad (1.37)$$

$$= 1 - p_i + p_i Pr(\mathbf{y}_i \in S | \Psi_i \neq \emptyset) \quad (1.38)$$

$$= 1 - p_i + p_i \underbrace{Pr(\mathbf{y}_i \in S)}_{\text{F. Massa Prob.}} \quad (1.39)$$

$$= 1 - p_i + p_i p_{\mathbf{Y}_i}(S) \quad (1.40)$$

em que  $p_{\mathbf{Y}_i}(S)$  é a função massa de probabilidade, definida pela integral da função densidade de probabilidade  $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$ :

$$p_{\mathbf{Y}}(S) = \int_S f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (1.41)$$

Portanto,

$$\beta_\Psi(S) = (1 - p_1 + p_1 p_{\mathbf{Y}_1}(S)) (1 - p_2 + p_2 p_{\mathbf{Y}_2}(S)) \quad (1.42)$$

O terceiro passo consiste em obter  $f_{\Psi}(Y)$ . Esta função pode ser obtida através do Corolário 1.3, ou seja, basta calcular as derivadas de conjunto de  $\beta_\Psi(S)$  em relação a  $Y$  para  $S = \emptyset$ . Pela equação (1.22), sabe-se que  $(\delta\beta_\Psi/\delta\emptyset)(S) = \beta_\Psi(S)$ . Então, deve-se calcular a primeira derivada de  $\beta_\Psi(S)$  em relação a  $\mathbf{y}_1$ :

$$\frac{\delta\beta_\Psi}{\delta\mathbf{y}_1}(S) = \frac{\delta}{\delta\mathbf{y}_1} ((1 - p_1 + p_1 p_{\mathbf{Y}_1}(S)) (1 - p_2 + p_2 p_{\mathbf{Y}_2}(S))) \quad (1.43)$$

Utilizando a regra do produto dada em (A.11), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \beta_{\Psi}}{\delta \mathbf{y}_1}(S) &= \left( \frac{\delta}{\delta \mathbf{y}_1} (1 - p_1 + p_1 p_{\mathbf{Y}_1}(S)) \right) (1 - p_2 + p_2 p_{\mathbf{Y}_2}(S)) + \\ &+ (1 - p_1 + p_1 p_{\mathbf{Y}_1}(S)) \left( \frac{\delta}{\delta \mathbf{y}_1} (1 - p_2 + p_2 p_{\mathbf{Y}_2}(S)) \right) \end{aligned} \quad (1.44)$$

Nas derivadas que estão do lado direito de (1.44), aplicam-se a regra da soma (A.9), a regra da constante (A.1) e a regra da linearidade (A.3). Desta forma, tem-se, para  $i = 1, 2$ :

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{y}_i} (1 - p_i + p_i p_{\mathbf{Y}_i}(S)) = p_i \frac{\delta}{\delta \mathbf{y}_1} p_{\mathbf{Y}_i}(S) = p_i f_{\mathbf{Y}_i}(\mathbf{y}_1) \quad (1.45)$$

Desta forma, a primeira derivada de  $\beta_{\Psi}(S)$  é dada por:

$$\frac{\delta \beta_{\Psi}}{\delta \mathbf{y}_1}(S) = p_1 f_{\mathbf{Y}_1}(\mathbf{y}_1) (1 - p_2 + p_2 p_{\mathbf{Y}_2}(S)) + (1 - p_1 + p_1 p_{\mathbf{Y}_1}(S)) p_2 f_{\mathbf{Y}_2}(\mathbf{y}_1) \quad (1.46)$$

Calculada a primeira derivada, notamos que esta ainda depende de  $S$  e, portanto, é possível calcularmos a segunda derivada. Com isso, utilizando novamente as regras da soma, da constante e da linearidade, tem-se que:

$$\frac{\delta^2 \beta_{\Psi}}{\delta \mathbf{y}_2 \delta \mathbf{y}_1}(S) = \frac{\delta}{\delta \mathbf{y}_2} \frac{\delta \beta_{\Psi}}{\delta \mathbf{y}_1}(S) \quad (1.47)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\delta}{\delta \mathbf{y}_2} (p_1 f_{\mathbf{Y}_1}(\mathbf{y}_1) (1 - p_2 + p_2 p_{\mathbf{Y}_2}(S)) + \\ &+ (1 - p_1 + p_1 p_{\mathbf{Y}_1}(S)) p_2 f_{\mathbf{Y}_2}(\mathbf{y}_1)) \end{aligned} \quad (1.48)$$

$$\begin{aligned} &= p_1 f_{\mathbf{Y}_1}(\mathbf{y}_1) \left( \frac{\delta}{\delta \mathbf{y}_2} (1 - p_2 + p_2 p_{\mathbf{Y}_2}(S)) \right) + \\ &+ \left( \frac{\delta}{\delta \mathbf{y}_2} (1 - p_1 + p_1 p_{\mathbf{Y}_1}(S)) \right) p_2 f_{\mathbf{Y}_2}(\mathbf{y}_1) \end{aligned} \quad (1.49)$$

$$= p_1 f_{\mathbf{Y}_1}(\mathbf{y}_1) p_2 \frac{\delta}{\delta \mathbf{y}_2} p_{\mathbf{Y}_2}(S) + p_1 \frac{\delta}{\delta \mathbf{y}_2} p_{\mathbf{Y}_1}(S) p_2 f_{\mathbf{Y}_2}(\mathbf{y}_1) \quad (1.50)$$

$$= p_1 p_2 (f_{\mathbf{Y}_1}(\mathbf{y}_1) f_{\mathbf{Y}_2}(\mathbf{y}_2) + f_{\mathbf{Y}_1}(\mathbf{y}_2) f_{\mathbf{Y}_2}(\mathbf{y}_1)) \quad (1.51)$$

Note que o resultado de (1.51) não depende mais da  $S$ , logo as derivadas de ordem superior são todas nulas. Finalmente, para obtermos  $f_{\Psi}(Y)$ , devemos calcular todas as derivadas de  $\beta_{\Psi}(S)$  obtidas em  $S = \emptyset$ . Sabendo que  $p_{\mathbf{Y}_i}(\emptyset) = \int_{\emptyset} f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 0$ , obtém-se:

$$f_{\Psi}(\emptyset) = \frac{\delta \beta_{\Psi}}{\delta \emptyset}(\emptyset) = \beta_{\Psi}(\emptyset) = (1 - p_1)(1 - p_2) \quad (1.52)$$

$$f_{\Psi}(\{\mathbf{y}_1\}) = \frac{\delta \beta_{\Psi}}{\delta \mathbf{y}_1}(\emptyset) = p_1(1 - p_2) f_{\mathbf{Y}_1}(\mathbf{y}_1) + (1 - p_1) p_2 f_{\mathbf{Y}_2}(\mathbf{y}_1) \quad (1.53)$$

$$f_{\Psi}(\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}) = \frac{\delta^2 \beta_{\Psi}}{\delta \mathbf{y}_2 \delta \mathbf{y}_1}(\emptyset) = p_1 p_2 (f_{\mathbf{Y}_1}(\mathbf{y}_1) f_{\mathbf{Y}_2}(\mathbf{y}_2) + f_{\mathbf{Y}_1}(\mathbf{y}_2) f_{\mathbf{Y}_2}(\mathbf{y}_1)) \quad (1.54)$$

$$f_{\Psi}(\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n\}) = \frac{\delta^n \beta_{\Psi}}{\delta \mathbf{y}_n \dots \delta \mathbf{y}_1}(\emptyset) = 0, \quad n \geq 3 \quad (1.55)$$

Para confirmar os resultados obtidos em (1.52)–(1.55), em (Mahler 2007) encontra-se o mesmo exemplo solucionado utilizando outros métodos mais complexos, chegando nos mesmos resultados obtidos aqui.

Nas próximas seções, serão apresentados os modelos matemáticos baseados em CAFs. Estes modelos compreendem os modelos de medidas e os modelos dinâmicos, sendo que cada um deles possui sua função densidade de probabilidade multi-alvo para ser introduzido nas equações de predição e correção do filtro multi-alvo.

## 1.2 Modelos de Medidas

Um dos objetivos desta seção é construir um modelo para o CAF  $\Sigma_{k+1}$  relativo ao conjunto de medidas  $Z$ , dado o conjunto de estados  $X$  dos alvos presentes em uma região  $S$ . O outro é obter os descritores estatísticos condicionados a  $X$  de  $\Sigma_{k+1}$ : a função massa de crença  $\beta_{\Sigma_{k+1}}(S|X) = \beta_{k+1}(S|X)$  e a função densidade de probabilidade multi-alvo  $f_{\Sigma_{k+1}}(Z|X) = f_{k+1}(Z|X)$ , que serão bastante úteis para a etapa de filtragem futuramente<sup>2</sup>.

Um destaque maior é dado à função densidade de probabilidade multi-alvo  $f_{k+1}(Z|X)$ , que também é chamada de função de verossimilhança para múltiplos alvos. Esta função tem como objetivo descrever de forma abrangente o cenário de rastreamento de um radar, incorporando não só os modelos de ruído, mas também outros tipos diferentes de comportamento, tais como:

- (i) Probabilidade de detecção;
- (ii) Campo de visão do sensor (FOV – *Field Of View*);
- (iii) Alarmes falsos;
- (iv) Desordem nas medidas (*Clutter*);
- (v) Perdas nas transmissões de dados; etc.

Para dar início à descrição dos modelos e de seus descritores estatísticos, deve-se definir primeiramente os modelos-padrão de medidas.

### 1.2.1 Modelo-Padrão de Medidas

Para construirmos os modelos de medida, além de definir o modelo do sensor com ruído associado ao  $i$ -ésimo vetor de estado  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{n_x}$ , dado por:

$$\mathbf{z}_i = \eta(\mathbf{x}_i) + \mathbf{w}_i, \quad (1.56)$$

é necessário formular algumas hipóteses, listadas a seguir:

---

<sup>2</sup>Optou-se por não determinar o funcional gerador de probabilidade  $G_{\Psi}[h]$  nesta seção, pois ele não é necessário para a etapa de filtragem. Mais detalhes podem ser encontrados em (Mahler 2007).

(i) Um radar com função de verossimilhança:

$$f_{k+1}(\mathbf{z}|\mathbf{x}) = f_{\mathbf{w}_{k+1}}(\mathbf{z} - \eta_{k+1}(\mathbf{x})) \quad (1.57)$$

em que  $\eta_{k+1}$  é o modelo do sensor com ruído  $\mathbf{w}_{k+1}$ , observa um número desconhecido de alvos desconhecidos.

(ii) A detecção de um alvo ocorre com probabilidade  $p_D(\mathbf{x})$  e uma detecção perdida ocorre com probabilidade  $1 - p_D(\mathbf{x})$ .

(iii) O processo de alarme falso  $C$  possui distribuição de Poisson com média  $\lambda$  e distribuição espacial de acordo com uma densidade arbitrária  $c(\mathbf{z})$ .

(iv) O processo de alarme falso  $C$  e o processo alvo-medida  $\Upsilon_{k+1}(X)$  são estatisticamente independentes (ambos serão definidos mais adiante).

(v) Cada alvo gera apenas uma única medida ou não gera nenhuma.

A seguir, é apresentada a equações de medida para a situação mais completa, isto é, levando em conta detecções perdidas e alarmes falsos e/ou *clutter*. Este modelo possui os seus respectivos descritores estatísticos, além de ter como base a seguinte equação padrão de medida:

$$\underbrace{\Sigma_{k+1}}_{\text{Conj. de Medidas}} = \underbrace{\Upsilon_{k+1}(X)}_{\text{Conj. de Det. de Alvos}} \cup \underbrace{C}_{\text{Det. Falsas}} \quad (1.58)$$

para um dado estado predito de múltiplos alvos  $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  e  $\Upsilon_{k+1}(X)$  com a seguinte forma:

$$\Upsilon_{k+1}(X) = \underbrace{\Upsilon_{k+1}(\mathbf{x}_1)}_{\text{Conj. de Det. p/ estado } \mathbf{x}_1} \cup \dots \cup \underbrace{\Upsilon_{k+1}(\mathbf{x}_n)}_{\text{Conj. de Det. p/ estado } \mathbf{x}_n} \quad (1.59)$$

sendo que pela hipótese (v), como cada alvo ou gera uma medida ou não gera nenhuma, então  $\Upsilon_{k+1}(\mathbf{x}_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  deve ser descrito da seguinte forma:

$$\Upsilon_{k+1}(\mathbf{x}_i) = \emptyset^{p_D(\mathbf{x})} \cap \{\mathbf{z}_i\} \quad (1.60)$$

em que  $\emptyset^{p_D(\mathbf{x})}$  é o conjunto aleatório discreto descrito na Definição 1.14.

Além disso, o conjunto  $C$ , que possui a seguinte forma:

$$C = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_M\} \quad (1.61)$$

em que  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_M$  são i.i.d. (variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas) com distribuição  $c(\mathbf{z}) = f_C(\mathbf{z})$  e  $\mathbf{M} = |C|$  é um número inteiro não-negativo e aleatório com distribuição de probabilidade dada por:

$$p_{\mathbf{M}}(m) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!} \quad (1.62)$$

### 1.2.2 Modelo de Medidas via CAF

Aqui será retratada a situação mais completa para o modelamento das medidas, pois leva em conta todos os fatores como perda de detecção e alarmes falsos e/ou *clutter*. Aqui, a equação de medida fica da seguinte forma:

$$\Sigma_{k+1} = \Upsilon_{k+1}(X) \cup C = [\Upsilon_{k+1}(\mathbf{x}_1) \cup \dots \cup \Upsilon_{k+1}(\mathbf{x}_n)] \cup C \quad (1.63)$$

e sua função de verossimilhança é dada por:

$$f_{k+1}(Z|X) = e^\lambda f_{k+1}(\emptyset|X) f_C(Z) \sum_{\theta} \prod_{i:\theta(i)>0} \frac{p_D(\mathbf{x}_i) f_{k+1}(\mathbf{z}_{\theta(i)}|\mathbf{x}_i)}{(1-p_D(\mathbf{x}_i)) \lambda_C(\mathbf{z}_{\theta(i)})} \quad (1.64)$$

sendo que a soma em  $\theta$  é tomada sobre todas as possíveis associações do tipo  $\theta : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ .

**Prova:** Para que seja obtida a função de verossimilhança na equação (1.64), é necessário obter, primeiramente, a função massa de crença  $\beta_{k+1}(S|X)$ . Para isso, devem ser definidas duas funções importantes para o desenvolvimento da prova. A obtenção destas funções não é o foco desta prova, mas a origem de cada uma delas pode ser encontrada em (Mahler 2007, p. 412, 418). As funções em questão são:

$$\beta_C(S) = e^{\lambda p_C(T) - \lambda} \quad (1.65)$$

$$f_C(Z) = e^{-\lambda} \prod_{\mathbf{z} \in Z} \lambda_C(\mathbf{z}) \quad (1.66)$$

$$f_{\Upsilon_{k+1}(X)}(W) = f_{\Upsilon_{k+1}(X)}(\emptyset) \sum_{1 \leq i_1 \neq \dots \neq i_m \leq n} \prod_{j=1}^m \frac{p_D(\mathbf{x}_{i_j}) f_{k+1}(\mathbf{w}_j|\mathbf{x}_{i_j})}{(1-p_D(\mathbf{x}_{i_j}))} \quad (1.67)$$

$$f_{\Upsilon_{k+1}(X)}(\emptyset) = \prod_{\mathbf{x} \in X} (1-p_D(\mathbf{x})) \quad (1.68)$$

em que  $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ ,  $Z = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m\}$ ,  $m \leq n$  (hipótese (v), Seção 1.2.1) e  $W = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_e\}$ ,  $e \leq n$ . Feitas as definições iniciais necessárias, é possível prosseguir com a obtenção da função massa de crença:

$$\beta_{k+1}(S|X) = \Pr(\Upsilon_{k+1}(X) \cup C \subseteq S|X) \quad (1.69)$$

$$= \Pr(\Upsilon_{k+1}(X) \subseteq S, C \subseteq S|X) \quad (1.70)$$

$$= \Pr(\Upsilon_{k+1}(X) \subseteq S|X) \Pr(C \subseteq S) \quad (1.71)$$

$$= \beta_{\Upsilon_{k+1}(X)}(S) \beta_C(S) \quad (1.72)$$

Note que o cálculo realizado leva em conta a independência entre os CAFs de alarme falso e de alvo-medida (hipótese (iv)), descrita na Seção 1.2.1. Como o cálculo de  $\beta_{k+1}(S|X)$  resulta em duas funções de conjunto, o mais adequado para calcular a derivada de conjunto é utilizar a regra geral do produto para dois fatores, dada em (A.13). Desta forma, tem-se que:

$$\frac{\delta \beta_{k+1}}{\delta Z}(S|X) = \sum_{W \subseteq Z} \frac{\delta \beta_{\Upsilon_{k+1}(X)}}{\delta W}(S) \frac{\delta \beta_C}{\delta(Z-W)}(S) \quad (1.73)$$

De acordo com o Corolário 1.3, a função de verossimilhança pode ser obtida calculando a derivada em (1.73) para  $S = \emptyset$ . Assim, calculando esta derivada para  $S = \emptyset$ , obtém-se:

$$f_{k+1}(Z|X) = \left. \frac{\delta \beta_{k+1}}{\delta Z}(S|X) \right|_{S=\emptyset} \quad (1.74)$$

$$= \sum_{W \subseteq Z} f_{\Upsilon_{k+1}(X)}(W) f_C(Z - W) \quad (1.75)$$

em que  $f_{\Upsilon_{k+1}(X)}(\cdot)$  e  $f_C(\cdot)$  são as funções densidade de probabilidade multi-alvo de  $\Upsilon_{k+1}(X)$  (equação (1.66)) e  $C$  (equação (1.67)), respectivamente.

Com o intuito de facilitar a leitura das funções a serem obtidas, recomenda-se reescrever a fórmula dada em (1.67), utilizando novas notações. Primeiramente, define-se a função de conjunto  $\tau : W \rightarrow X$  como sendo uma função linear sobre os elementos do conjunto  $X$ , isto é,  $\tau(\mathbf{w}_j) = \mathbf{x}_{i_j}, \forall j = 1, \dots, m$ . Esta função define uma  $m$ -tupla  $(i_1, \dots, i_m)$  com  $1 \leq i_1 \neq \dots \neq i_m \leq n$ . Desta maneira, a expressão em (1.67), fica da seguinte forma:

$$f_{\Upsilon_{k+1}(X)}(W) = f_{\Upsilon_{k+1}(X)}(\emptyset) \sum_{\tau:W \rightarrow X} \prod_{\mathbf{z} \in W} \frac{p_D(\tau(\mathbf{z})) f_{k+1}(\mathbf{z}|\tau(\mathbf{z}))}{1 - p_D(\tau(\mathbf{z}))} \quad (1.76)$$

sendo que a soma é calculada sobre todas as funções  $\tau : W \rightarrow X$ . Agora, substituindo (1.66) e (1.76) em (1.75), obtém-se:

$$f_{k+1}(Z|X) = \sum_{W \subseteq Z} \left( e^{-\lambda} \prod_{\mathbf{z} \in Z-W} \lambda c(\mathbf{z}) \right) \cdot \left( f_{\Upsilon_{k+1}(X)}(\emptyset) \sum_{\tau:W \rightarrow X} \prod_{\mathbf{z} \in W} \frac{p_D(\tau(\mathbf{z})) f_{k+1}(\mathbf{z}|\tau(\mathbf{z}))}{1 - p_D(\tau(\mathbf{z}))} \right) \quad (1.77)$$

$$= f_{\Upsilon_{k+1}(X)}(\emptyset) \sum_{W \subseteq Z} \left( e^{-\lambda} \prod_{\mathbf{z} \in Z-W} \lambda c(\mathbf{z}) \right) \cdot \left( \sum_{\tau:W \rightarrow X} \prod_{\mathbf{z} \in W} \frac{p_D(\tau(\mathbf{z})) f_{k+1}(\mathbf{z}|\tau(\mathbf{z}))}{1 - p_D(\tau(\mathbf{z}))} \right) \quad (1.78)$$

$$= f_{\Upsilon_{k+1}(X)}(\emptyset) \sum_{W \subseteq Z} \frac{\overbrace{e^{-\lambda} \prod_{\mathbf{z} \in Z} \lambda c(\mathbf{z})}^{f_C(Z)}}{\lambda c(\mathbf{z})} \cdot \left( \sum_{\tau:W \rightarrow X} \prod_{\mathbf{z} \in W} \frac{p_D(\tau(\mathbf{z})) f_{k+1}(\mathbf{z}|\tau(\mathbf{z}))}{1 - p_D(\tau(\mathbf{z}))} \right) \quad (1.79)$$

$$= f_{\Upsilon_{k+1}(X)}(\emptyset) f_C(Z) \sum_{W \subseteq Z} \left( \sum_{\tau:W \rightarrow X} \prod_{\mathbf{z} \in W} \frac{p_D(\tau(\mathbf{z})) f_{k+1}(\mathbf{z}|\tau(\mathbf{z}))}{1 - p_D(\tau(\mathbf{z})) \lambda c(\mathbf{z})} \right) \quad (1.80)$$

Note que a parcela  $f_{\Upsilon_{k+1}(X)}(\emptyset)$  não foi calculada. Para obtê-la, é necessário calcular  $f_{k+1}(Z|X)$  para  $Z = \emptyset$ , o qual é feito aplicando a regra geral do produto para dois fatores (equação (A.13))

sobre o produto dado pela expressão (1.72) para  $S = \emptyset$ . Utilizando o resultado do Corolário 1.3 e a equação (1.65), lembrando que  $p_C(\emptyset) = 0$  (vide eq. 1.41), tem-se:

$$f_{k+1}(\emptyset|X) = \frac{\delta}{\delta Z} (\beta_{\Upsilon_{k+1}(X)}(S)\beta_C(S)) \quad (1.81)$$

$$= \sum_{W \subseteq \emptyset} \frac{\delta \beta_{\Upsilon_{k+1}(X)}(\emptyset)}{\delta W} \frac{\delta \beta_C}{\delta(\emptyset - W)}(\emptyset) \quad (1.82)$$

$$= \frac{\delta \beta_{\Upsilon_{k+1}(X)}(\emptyset)}{\delta \emptyset} \frac{\delta \beta_C}{\delta \emptyset}(\emptyset) \quad (1.83)$$

$$= f_{\Upsilon_{k+1}}(\emptyset)\beta_C(\emptyset) \quad (1.84)$$

$$= f_{\Upsilon_{k+1}}(\emptyset)e^{-\lambda} \Rightarrow f_{\Upsilon_{k+1}}(\emptyset) = e^\lambda f_{k+1}(\emptyset|X) \quad (1.85)$$

Voltando a (1.80), tem-se:

$$f_{k+1}(Z|X) = e^\lambda f_{k+1}(\emptyset|X) f_C(Z) \sum_{W \subseteq Z} \left( \sum_{\tau: W \rightarrow X} \prod_{\mathbf{z} \in W} \frac{p_D(\tau(\mathbf{z})) f_{k+1}(\mathbf{z}|\tau(\mathbf{z}))}{1 - p_D(\tau(\mathbf{z})) \lambda c(\mathbf{z})} \right) \quad (1.86)$$

Com a finalidade de suprimir a operação de soma externa de (1.86), (Mahler 2007) sugere definir uma nova função  $\gamma$  para depois, finalmente, chegar ao formato final da função de verossimilhança.

Inicialmente, define-se a união  $Z \cup \{\rho\}$ . Então, para cada escolha de  $W$  com  $|W| \leq n$ , e para cada escolha da função  $\tau : W \rightarrow X$ , constrói-se a função  $\gamma_{W,\tau} : X \rightarrow (Z \cup \{\rho\})$  definida por  $\gamma_{W,\tau}(\mathbf{x}) = \mathbf{z}$ . Esta função é dada por  $\tau(\mathbf{z}) = \mathbf{x}$ , se existe um  $\mathbf{z}$ , e  $\tau(\mathbf{z}) = \rho$ , caso contrário. O conjunto de todas as funções  $\gamma_{W,\tau}(\mathbf{x})$  tal que  $\gamma_{W,\tau}(\mathbf{x}) \neq \rho$  é  $W$  e  $\gamma_{W,\tau}(\tau(\mathbf{z})) = \mathbf{z}$  se  $\mathbf{z} \in W$ .

Com estas definições dadas, reescreve-se (1.86) como sendo:

$$f_{k+1}(Z|X) = e^\lambda f_{k+1}(\emptyset|X) f_C(Z) \sum_{\gamma: X \rightarrow Z \cup \{\rho\}} \prod_{\mathbf{x}: \gamma(\mathbf{x}) \neq \rho} \frac{p_D(\mathbf{x}) f_{k+1}(\gamma(\mathbf{x})|\mathbf{x})}{(1 - p_D(\mathbf{x})) \lambda c(\gamma(\mathbf{x}))} \quad (1.87)$$

com a soma sendo calculada sobre todas as funções  $\gamma : X \rightarrow Z \cup \{\rho\}$ .

Observando atentamente a somatória e o produtório da equação (1.87), é possível notar que a soma é tomada sobre associações entre vetores de estado e de medida, e o produto é tomado sobre todos os vetores de estado relativos aos valores de  $\gamma(\mathbf{x})$  diferentes de  $\rho$ , ou seja, relativos às medidas. Devido a esta característica, uma função  $\theta : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$  que associa índices de vetores de estado com índices de medidas, pode substituir a função  $\gamma$ , simplificando a função dada em (1.87).

Desta forma, a função de verossimilhança final é dada por:

$$f_{k+1}(Z|X) = e^\lambda f_{k+1}(\emptyset|X) f_C(Z) \sum_{\theta} \prod_{i: \theta(i) > 0} \frac{p_D(\mathbf{x}_i) f_{k+1}(\mathbf{z}_{\theta(i)}|\mathbf{x}_i)}{(1 - p_D(\mathbf{x}_i)) \lambda c(\mathbf{z}_{\theta(i)})} \quad (1.88)$$

■

## 1.3 Modelos Dinâmicos

Modelos dinâmicos para múltiplos alvos são considerados claramente mais complexos do que os modelos para alvos únicos. O número de alvos pode variar constantemente, pois os alvos podem aparecer e desaparecer do campo de visão do radar. Novos indivíduos “surtem” ou são detectados quando, por exemplo, duas pessoas estão andando lado a lado e uma delas se separa<sup>3</sup> (o surgimento de um novo alvo também é chamado de *spawning*) e indivíduos desaparecem quando, por exemplo, algum indivíduo entra em um edifício ou se junta a outros, formando um grupo de indivíduos.

O objetivo aqui é obter modelos dinâmicos para múltiplos alvos, assim como foi feito na Seção 1.2, e também obter a função densidade markoviana,  $f_{\Xi_{k+1}|k}(X|X') = f_{k+1|k}(X|X')$ , em que o símbolo “ $\prime$ ” indica o elemento definido no instante de tempo anterior. Para obter tais densidades, basta fazermos analogias à função de verossimilhança obtida para o modelo de medidas. Isto pode ser feito pelos seguintes motivos:

- (i) Desaparecimento de um alvo é matematicamente análogo a uma detecção perdida;
- (ii) Aparecimento de um alvo é matematicamente análogo à geração de alarmes falsos independentes do estado;
- (iii) Surgimento de alvos (*spawning*) é matematicamente análogo à geração de alarmes falsos dependentes do estado.

A geração de alarmes falsos dependentes do estado não será tratada neste texto; para mais informações sobre esse tipo de caso, é aconselhável recorrer à (Mahler 2007). A seguir, apresentaremos o modelo dinâmico padrão e algumas hipóteses necessárias para a obtenção da função densidade markoviana.

### 1.3.1 Modelo-Padrão Dinâmico

Antes da descrição do modelo padrão para dinâmica, algumas hipóteses importantes serão introduzidas para melhor entendimento das funções densidade markoviana de cada um dos modelos apresentados. Tais hipóteses estão listadas, a seguir:

- (i) A verossimilhança de um alvo com vetor de estado  $\mathbf{x}$  no instante de tempo  $k + 1$ , dado que o vetor de estado no instante de tempo  $k$  é  $\mathbf{x}'$ , é descrita pela função densidade markoviana  $f_{k+1|k}(\mathbf{x}|\mathbf{x}')$ , correspondente ao modelo dinâmico para um único alvo:

$$\mathbf{x} = \varphi_k(\mathbf{x}', \boldsymbol{\nu}') = \varphi_k(\mathbf{x}') + \boldsymbol{\nu}' \quad (1.89)$$

em que  $\boldsymbol{\nu}'$  é o ruído da dinâmica.

- (ii) A probabilidade de um alvo “sobreviver” no instante de tempo  $k + 1$ , dado que o vetor de estado em  $k$  é  $\mathbf{x}'$ , é definida por:

$$p_S^{k+1|k}(\mathbf{x}') = p_S(\mathbf{x}') \quad (1.90)$$

---

<sup>3</sup>Esta separação depende da capacidade de resolução do radar.

- (iii) A densidade de probabilidade de um alvo com vetor de estado  $\mathbf{x}'$  em  $k$  “gerar” um conjunto  $X$  de novos alvos por *spawning* é dada por:

$$s_{k+1|k}(X|\mathbf{x}') = s(X|\mathbf{x}') \quad (1.91)$$

- (iv) A densidade de probabilidade de novos alvos com conjunto de estado  $X$  “surgirem espontaneamente” em  $k + 1$  é dada por:

$$b_{k+1|k}(X) = b(X) \quad (1.92)$$

- (v) Nascimento de alvos, morte de alvos e dinâmica dos alvos são condicionalmente independentes do estado previsto.

Consideradas as hipóteses acima, o modelo dinâmico padrão é descrito da seguinte forma: sejam  $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  e  $X' = \{\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_{n'}\}$  os conjuntos de estados no instante de tempo atual e no instante de tempo anterior, respectivamente. O modelo dinâmico padrão é dado por:

$$\underbrace{\Xi_{k+1|k}}_{\text{Conj. de Est. Prev.}} = \underbrace{\Gamma(X')}_{\text{Alvos Persist.}} \cup \underbrace{B(X')}_{\text{Alvos Gerados}} \cup \underbrace{B}_{\text{Alvos Espont.}} \quad (1.93)$$

em que

$$\Gamma(X') = \underbrace{\Gamma(\mathbf{x}'_1)}_{\text{Prev. de } \mathbf{x}'_1} \cup \dots \cup \underbrace{\Gamma(\mathbf{x}'_{n'})}_{\text{Prev. de } \mathbf{x}'_{n'}} \quad (1.94)$$

$$B(X') = \underbrace{B(\mathbf{x}'_1)}_{\text{Gerado por } \mathbf{x}'_1} \cup \dots \cup \underbrace{B(\mathbf{x}'_{n'})}_{\text{Gerado por } \mathbf{x}'_{n'}} \quad (1.95)$$

sendo que  $\Gamma(\mathbf{x}'_1), \dots, \Gamma(\mathbf{x}'_{n'}), B(\mathbf{x}'_1), \dots, B(\mathbf{x}'_{n'}), B$  são estatisticamente independentes.

### 1.3.2 Modelo Dinâmico via CAF

O modelo dinâmico a ser apresentado leva em consideração todos os fatores já citados anteriormente, principalmente os casos de trajetórias que surgem espontaneamente e que surgem via *spawning*, tornando-se um modelo bastante completo. Este modelo via CAF é descrito pela seguinte união:

$$\Xi_{k+1|k} = \Gamma(X') \cup B(X') \cup B \quad (1.96)$$

A função densidade markoviana do modelo descrito na equação (1.96) pode ser determinada através de analogias feitas em relação à função de verossimilhança obtida para o modelo de medidas, dada na equação (1.64). Assumindo, a partir das hipóteses consideradas nas Seções 1.2.1 e 1.3.1, que os conjuntos  $B(X')$  e  $B$  são análogos ao conjunto  $C$  de detecções falsas, que a probabilidade de detecção  $p_D$  é análoga à probabilidade de sobrevivência  $p_S$  e que a função  $s(\mathbf{x}_{\theta(i)}|X')$  pode ser considerada análoga à função  $c(\mathbf{z}_{\theta(i)})$ , então a função densidade markoviana é dada por:

$$f_{k+1|k}(X|X') = e^{\mu(X')} f_{k+1|k}(\emptyset|X') f_{B(X')}(X) \sum_{\theta} \prod_{i:\theta(i)>0} \frac{p_S(\mathbf{x}'_i) f_{k+1|k}(\mathbf{x}_{\theta(i)}|\mathbf{x}'_i)}{(1 - p_S(\mathbf{x}'_i)) \mu(X') s(\mathbf{x}_{\theta(i)}|X')} \quad (1.97)$$

em que

$$f_{k+1|k}(\emptyset|X') = e^{-\mu(X')} \prod_{\mathbf{x}' \in X'} (1 - p_S(\mathbf{x}')) \quad (1.98)$$

$$\mu(X') = \mu_0 + \mu(\mathbf{x}'_1) + \dots + \mu(\mathbf{x}'_{n'}) \quad (1.99)$$

$$s(\mathbf{x}|X') = \frac{\mu_0 s_0 + \mu(\mathbf{x}'_1) s(\mathbf{x}|\mathbf{x}'_1) + \dots + \mu(\mathbf{x}'_{n'}) s(\mathbf{x}|\mathbf{x}'_{n'})}{\mu(X')}, \quad (1.100)$$

e  $\mu_0$  é o número esperado de indivíduos nascidos espontaneamente,  $s_0(\mathbf{x})$  é sua respectiva distribuição espacial,  $\mu(\mathbf{x}'_i)$  é o número esperado de indivíduos que surgem via *spawning* a partir de um vetor de estado  $\mathbf{x}'_i$  e  $s(\mathbf{x}|\mathbf{x}'_i)$  é sua respectiva distribuição espacial. A soma em  $\theta$  é tomada sobre todas as possíveis combinações do tipo  $\theta : \{1, \dots, n'\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ . Note ainda que a analogia feita inicialmente também pode ser feita em relação à  $\mu(X')$ , que se assemelha ao  $\lambda$  da distribuição de Poisson feita nas hipóteses sobre o modelo de medidas via CAF.

A demonstração da obtenção desta função densidade markoviana é bastante semelhante àquela vista para o modelo de medidas, devido às analogias feitas anteriormente. Desta forma, optou-se por não repetir os passos da prova, os quais podem ser vistos em (Mahler 2007).

## 1.4 Síntese de Capítulo

Neste capítulo, foram introduzidos conceitos referentes à teoria de cálculo multi-alvo, tais como a integral de conjunto e as derivadas funcional e de conjunto. Estes operadores matemáticos são essenciais para a obtenção dos três descritores estatísticos apresentados, estes por sua vez são de extrema importância para a formulação das equações dos filtros estocásticos multi-alvo, principalmente o descritor função densidade de probabilidade multi-alvo  $f_\Psi(Y)$ , como será visto no próximo capítulo.

Para que os filtros multi-alvos sejam aplicados no problema de rastreamento, os quais são necessários para a realização das estimativas de estado de cada um dos indivíduos que estiverem dentro da região de vigilância, foram apresentados os modelos matemáticos formulados via CAFs. Ambos os modelos aqui apresentados englobam uma série de fatores importantes, fazendo com que tais modelos sejam apropriados à realidade de múltiplas trajetórias.

No próximo capítulo, serão feitas discussões sobre os filtros multi-alvos, com um foco maior sobre os filtros PHD e GM-PHD (*Gaussian Mixture Probability Hypothesis Density*), os quais são os filtros mais utilizados na literatura.

## Estimativa de Estados via Filtragem Estocástica Multi-Alvos

No capítulo anterior, afirmou-se que, em problemas que envolvam rastreamento de alvos (no caso, indivíduos), duas etapas são fundamentais para realizar, da melhor e mais precisa maneira possível, o acompanhamento de trajetórias destes indivíduos. A primeira delas é a construção de modelos matemáticos adequados, assunto coberto no Capítulo 1, utilizando a teoria de CAFs para definir os modelos dinâmico e de medidas.

Neste capítulo, será apresentada a segunda etapa, aquela responsável pela estimativa de estados de cada um dos indivíduos rastreados, que é a filtragem estocástica multi-alvo. Este tipo de filtragem estocástica é baseado nos conceitos do cálculo multi-alvo, principalmente nos descritores estatísticos apresentados no capítulo anterior, como a função densidade de probabilidade multi-alvo. Uma das grandes vantagens dos filtros multi-alvo é a possibilidade da eliminação da etapa de associação de dados, já que os filtros multi-alvo realizam naturalmente todas as possibilidades de combinação entre trajetória-medida.

Na filtragem estocástica multi-alvo, o principal filtro é aquele que serve de base a todos outros filtros: filtro bayesiano multi-alvo (Vo, Vo & Cantoni 2008). Este filtro possui as mesmas características do filtro bayesiano clássico, porém o filtro bayesiano multi-alvo tem suas equações de filtragem baseadas na teoria dos CAFs. Este filtro, por ser bastante complexo sob o ponto de vista matemático e computacional, impossibilitando sua implementação em *softwares*, ele serve apenas para formular os conceitos básicos de filtragem multi-alvo, além de dar origem a um outro filtro estocástico multi-alvo, que nada mais é do que uma espécie de aproximação do filtro bayesiano multi-alvo; trata-se do filtro PHD (*Probability Hypothesis Density*) (Mahler 2003), (Mahler 2007).

O filtro PHD, assim como todo filtro estocástico, é estruturado com base nas equações de predição e de correção. No entanto, seu principal objetivo está na propagação temporal da função intensidade ou função PHD, cuja integral sobre o espaço fornece o número esperado de indivíduos na região de vigilância. Mesmo sendo uma aproximação do filtro bayesiano multi-alvo, suas equações ainda envolvem expressões complexas envolvendo integrais de conjunto, o que por sua vez acaba inviabilizando uma possível implementação computacional. Por conta deste fato, métodos de implementação—ou de aproximação—são comumente aplicados na literatura. Um

dos mais utilizados é o filtro GM-PHD (*Gaussian Mixture Probability Hypothesis Density*) (Vo & Ma 2006).

Nesta aproximação do filtro PHD, através de algumas hipóteses, a função intensidade ou PHD pode ser aproximada por uma soma de distribuições gaussianas, além de exigir que os modelos matemáticos sejam lineares ou linearizados. Estas hipóteses deixam o filtro mais simples, tanto do ponto de vista matemático, quanto do ponto de vista computacional e de implementações, pois as equações passam a ter características de filtros lineares, como o filtro de Kalman e o filtro de Kalman estendido, onde os modelos matemáticos são linearizados. Outras aproximações são encontradas na literatura, como a implementação do filtro PHD via Monte Carlo, o filtro SMC-PHD (*Sequential Monte Carlo Probability Hypothesis Density*) ou PF-PHD (*Particle Filter Probability Hypothesis Density*) (Vihola 2007), porém esta abordagem faz com que o filtro fique “pesado” computacionalmente.

Existe também uma variação do filtro PHD, o chamado filtro CPHD (*Cardinalized Probability Hypothesis Density*), cuja função é, além de propagar a função PHD no tempo, propagar a distribuição de cardinalidade, vista no Capítulo 1, tornando o filtro CPHD um filtro de segunda ordem, lembrando que o filtro PHD é considerado um filtro de primeira ordem. Pelo fato ser um filtro de segunda ordem, ele possui mais informações que auxiliam a obter resultados de estimativas mais precisas, porém a carga computacional fica muito elevada. Encontram-se poucas referências na literatura que aplicam o filtro CPHD computacionalmente, como em (Vo, Vo & Cantoni 2007), onde é feita uma estudo analítico do filtro CPHD.

Este capítulo apresentará as equações do filtro bayesiano multi-alvo, PHD e GM-PHD, com um destaque maior para este último, pois tal filtro servirá de base para o rastreamento de trajetórias de indivíduos geradas pelo simulador proposto para esta tese.

## 2.1 Filtro Bayesiano Multi-Alvo

O principal filtro que serve de base para os demais filtros estocásticos multi-alvos é o filtro bayesiano multi-alvo. A proposta aqui é detalhar adequadamente as equações que compõem tal filtro, de forma a permitir a sua aplicação, principalmente para as aproximações e implementações do mesmo.

Assim, como todo filtro estocástico, o filtro bayesiano multi-alvos possui as etapas de predição e correção.

### 2.1.1 Preditor

A etapa de predição do filtro bayesiano é definida pela seguinte integral de conjunto:

$$f_{k+1|k}(X|Z^{(k)}) = \int f_{k+1|k}(X|X')f_{k|k}(X'|Z^{(k)})\delta X' \quad (2.1)$$

em que  $f_{k+1|k}(X|Z^{(k)})$  é a distribuição multi-alvo *a posteriori* predita,  $f_{k|k}(X'|Z^{(k)})$  é a distribuição multi-alvo *a posteriori* atual e  $Z^{(k)} : Z_1, \dots, Z_k$  é uma sequência de conjuntos de medidas. As distribuições  $f_{k+1|k}(X|Z^{(k)})$  e  $f_{k|k}(X'|Z^{(k)})$  também podem ser vistas como funções densidade

de probabilidade multi-alvo de um CAF  $\Psi$ .

**Observação:** A obtenção da equação de predição do filtro bayesiano multi-alvo considera a lei da probabilidade total clássica, sob o ponto de vista do cálculo multi-alvo. Em (Mahler 2007), a obtenção da lei da probabilidade total é feita através de uma analogia direta em relação à lei de probabilidade total clássica. Esta analogia resulta em:

$$f_{k+1|k}(X|Z^{(k)}) = \int f_{k+1|k}(X|X', Z^{(k)}) f_{k|k}(X'|Z^{(k)}) \delta X' \quad (2.2)$$

A seguir, com a hipótese de que o conjunto de estados atual  $X$  é independente do conjunto do histórico de observações  $Z^{(k)}$ , tem-se que:

$$f_{k+1|k}(X|X', Z^{(k)}) = f_{k+1|k}(X|X') \quad (2.3)$$

A hipótese dada pela equação (2.3) é denominada propriedade markoviana da função, em que o conjunto  $X$  depende apenas do conjunto  $X'$ , que é composto por vetores de estado do instante de tempo anterior. Trata-se de uma hipótese razoável, pois o conjunto  $X$  independe de medidas anteriores ao instante atual para ser determinado, apenas de medidas atuais.

Substituindo (2.3) em (2.2), tem-se que:

$$f_{k+1|k}(X|Z^{(k)}) = \int f_{k+1|k}(X|X') f_{k|k}(X'|Z^{(k)}) \delta X' \quad (2.4)$$

ou, sob o ponto de vista da filtragem, o preditor do filtro bayesiano. ■

## 2.1.2 Corretor

O segundo passo de filtragem para o filtro bayesiano multi-alvo consiste na etapa de correção ou atualização. Este procedimento utiliza o corretor do filtro bayesiano, dado por:

$$f_{k+1|k+1}(X|Z^{(k+1)}) = \frac{f_{k+1}(Z_{k+1}|X) f_{k+1|k}(X|Z^{(k)})}{\int f_{k+1}(Z_{k+1}|X) f_{k+1|k}(X|Z^{(k)}) \delta X} \quad (2.5)$$

**Observação:** A distribuição *a posteriori* no instante de tempo  $k+1$  pode ser obtida diretamente através da fórmula de Bayes para o cálculo multi-alvo (Mahler 2007):

$$f_{k+1|k+1}(X|Z^{(k+1)}) = \frac{f_{k+1}(Z_{k+1}|X, Z^{(k)}) f_{k+1|k}(X|Z^{(k)})}{\int f_{k+1}(Z_{k+1}|X, Z^{(k)}) f_{k+1|k}(X|Z^{(k)}) \delta X} \quad (2.6)$$

Assim como para o caso do preditor bayesiano, foram utilizadas analogias diretas em relação às fórmulas encontradas na teoria de probabilidade clássica. Neste caso, a fórmula de Bayes clássica foi utilizada.

Em seguida, considera-se que, para qualquer  $k$ , a geração do conjunto de medidas  $Z_k$  é dependente de forma exclusiva do conjunto de estados atual  $X'$ , isto é, o conjunto de medidas atual  $Z_{k+1}$  independe de todo o histórico de conjuntos de medidas  $Z^{(k)}$ .

$$f_{k+1}(Z_{k+1}|X, Z^{(k)}) = f_{k+1}(Z_{k+1}|X) \quad (2.7)$$

Esta hipótese é razoável e intuitiva, já que as medidas obtidas no instante de tempo atual de fato não dependem das medidas geradas anteriormente.

Substituindo (2.7) em (2.6), obtém-se a equação de correção do filtro Bayesiano multi-alvo:

$$f_{k+1|k+1}(X|Z^{(k+1)}) = \frac{f_{k+1}(Z_{k+1}|X)f_{k+1|k}(X|Z^{(k)})}{\int f_{k+1}(Z_{k+1}|X)f_{k+1|k}(X|Z^{(k)})\delta X} \quad (2.8)$$

■

## 2.2 Aproximação Via Momentos para Múltiplos Alvos

Observando as equações de predição e de correção para o filtro bayesiano multi-alvo, apresentadas na Seção 2.1, nota-se uma complexidade matemática bastante elevada, já que tais equações de filtragem são baseadas em integrais de conjunto (Capítulo 1), que por sua vez são baseadas em somas de diversas integrais clássicas. Isso acaba dificultando bastante o intuito de se implementar computacionalmente um filtro bayesiano multi-alvo.

Desta maneira, é necessário encontrar métodos que façam com que o filtro bayesiano multi-alvo se torne tratável do ponto de vista matemático e computacional. Com isso, em (Mahler 2003), é proposto um filtro estocástico multi-alvo que tem como objetivo diminuir a intratabilidade computacional do filtro bayesiano multi-alvo: o filtro PHD. A estratégia realizada pelo filtro PHD vai na direção oposta às abordagens convencionais, pois, primeiramente, o filtro rastreia o comportamento geral do grupo e depois detecta e rastreia alvos individuais somente quando a quantidade e a qualidade estatística dos dados permitir.

O filtro PHD, diferentemente dos filtros estocásticos clássicos, tem suas equações de predição e de atualização baseadas em uma função denominada intensidade ou PHD. Essa função possui uma característica única: ao integrá-la sobre o espaço de rastreamento em questão, o resultado fornece o número esperado de alvos naquela região. As estimativas dos vetores de estado, que são os resultados de interesse do problema de rastreamento, são indiretamente obtidas, pois tais valores compõem esta função de intensidade. A seguir, a função de intensidade será introduzida.

### 2.2.1 Densidade de Probabilidade por Hipótese – PHD

A determinação das equações de filtragem do filtro PHD deve passar primeiramente pelo conceito de função intensidade ou função PHD. Esta função pode ser caracterizada pela Definição 2.1, complementada pelo Corolário 2.1:

**Definição 2.1** *Seja  $\Xi$  um CAF e  $f_{\Xi}(X|Z^{(k)})$  sua função densidade de probabilidade multi-alvo. A sua respectiva função PHD é definida como*

$$D_{\Xi}(X|Z^{(k)}) = \int f_{\Xi}(X \cup W|Z^{(k)})\delta W \quad (2.9)$$

**Corolário 2.1** *Seja  $\Xi$  um CAF. A sua respectiva função PHD pode ser reescrita como o cálculo do momento de primeira ordem de uma soma de impulsos:*

$$D_{\Xi}(\mathbf{x}|Z^{(k)}) \triangleq E[\delta_{\Xi}(\mathbf{x})|Z^{(k)}] = \int \delta_X(\mathbf{x})f_{\Xi}(X|Z^{(k)})\delta X \quad (2.10)$$

em que:

$$\delta_X(\mathbf{x}) \triangleq \begin{cases} 0 & , X = \emptyset \\ \sum_{\mathbf{w} \in X} \delta_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) & , \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (2.11)$$

sendo  $\delta_{\mathbf{w}}(\mathbf{x})$  é a densidade do delta de Dirac concentrado em  $\mathbf{w}$ .

A integral dada em (2.10) é uma espécie de analogia feita a partir conceito de valor esperado condicional da teoria de probabilidade clássica, só que estendido para o caso de múltiplos alvos. A Definição 2.1 ainda pode ser complementada por outros dois corolários, a seguir:

**Corolário 2.2** *Seja um região  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  qualquer do espaço de estados para alvos individuais. Então, a integral:*

$$\int_S D_{\Xi}(\mathbf{x}|Z^{(k)})d\mathbf{x} \quad (2.12)$$

é o número esperado de alvos em  $S$  e  $D_{k|k}$  é definida como função intensidade ou função PHD.

**Corolário 2.3** *Se  $S = \mathbb{R}^n$  é o espaço total, então:*

$$N_{k|k} \triangleq \int D_{\Xi}(\mathbf{x}|Z^{(k)})d\mathbf{x} \quad (2.13)$$

é o número esperado total de alvos em cena.

Um exemplo bem simples, encontrado em (Mahler 2007) que utiliza a ideia da PHD encontra-se no exemplo a seguir.

**Exemplo 2.1** *Considere dois alvos localizados sobre uma reta real, cujas posições são  $x_1 = a$  e  $x_2 = b$ . A densidade de probabilidade multi-alvo é dada por:*

$$f(\{x_1, x_2\}) = \mathcal{N}_{\mathbf{X}_1}(a, \sigma^2) \cdot \mathcal{N}_{\mathbf{X}_2}(b, \sigma^2) + \mathcal{N}_{\mathbf{X}_1}(b, \sigma^2) \cdot \mathcal{N}_{\mathbf{X}_2}(a, \sigma^2) \quad (2.14)$$

A PHD para a densidade acima é dada por:

$$D(x) = \mathcal{N}_{\mathbf{X}}(a, \sigma^2) + \mathcal{N}_{\mathbf{X}}(b, \sigma^2) \quad (2.15)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \left[ \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{(x-b)^2}{2\sigma^2}\right) \right] \quad (2.16)$$

Ao plotar o resultado obtido em (2.16), surge o que se vê na Figura 2.1, para  $\sigma = 1$ ,  $a = 1$  e  $b = 4$ . Note que os picos do gráfico ocorrem exatamente nas posições  $x_1 = a$  e  $x_2 = b$ .

Para obter o número de alvos, basta aplicar a Definição 2.1, ou seja, integrar sobre o conjunto dos reais a função dada em (2.16)

$$N = \int D(x)dx = \int \mathcal{N}_{\mathbf{X}}(a, \sigma^2)dx + \int \mathcal{N}_{\mathbf{X}}(b, \sigma^2)dx \quad (2.17)$$

$$= 1 + 1 = 2 \quad (2.18)$$

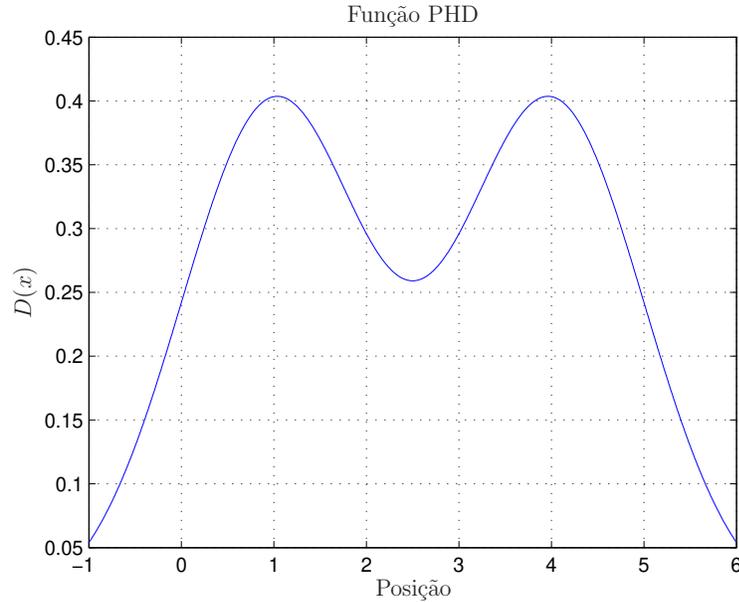


Figura 2.1: Gráfico da função PHD unidimensional.

## 2.2.2 Filtro PHD

O filtro PHD nada mais é do que uma aproximação desenvolvida para diminuir a intratabilidade computacional no filtro bayesiano multi-alvos. Este é um filtro considerado de primeira ordem, pois a determinação das equações de predição e de correção necessitam apenas da função PHD  $D_{\Xi}(\mathbf{x}|Z^{(k)})$ , descrita na Definição 2.1.

Agora, serão definidas as duas etapas básicas para a construção do filtro PHD, o preditor e o corretor, além de algumas discussões pertinentes sobre tais passos. As demonstrações das equações de predição e de correção do filtro PHD não serão abordadas aqui neste texto, pois se tratam de cálculos extremamente longos e exaustivos. Desta forma, optou-se por não apresentá-las aqui. Caso o leitor tenha interesse nas provas das equações em questão, estas se encontram em (Mahler 2003).

## 2.2.3 Preditor

Para definir o preditor do filtro PHD, é necessário, primeiramente, listar as hipóteses necessárias para a determinação das equações do filtro, que são:

- (i) Os movimentos dos indivíduos são estatisticamente independentes;
- (ii) Os indivíduos podem sumir do cenário em que estão ou do campo de visão do radar;
- (iii) Novos indivíduos podem surgir tanto a partir de pessoas que já estão em cena (*spawning*), quanto surgir independentemente daqueles que já estão em cena;
- (iv) Movimento de indivíduos é regido pela função densidade markoviana  $f_{k+1|k}(\mathbf{x}|\mathbf{x}')$ ;

- (v) Os indivíduos se mantêm em cena do instante  $k$  para o instante  $k + 1$  com probabilidade  $p_S(\mathbf{x}')$ ;
- (vi) Os indivíduos que surgem a partir de pessoas que já estão em cena (*spawning*) são caracterizados pela função  $s_{k+1|k}(X|\mathbf{x}')$ , cuja função PHD é dada por:

$$s_{k+1|k}(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \triangleq \int s_{k+1|k}(\{\mathbf{x}\} \cup W|\mathbf{x}')\delta W; \quad (2.19)$$

em que  $W$  é o conjunto de vetores de estado dos novos indivíduos que surgiram por *spawning*.

- (vii) Os indivíduos que surgem independentemente das pessoas que já estão em cena são caracterizados pela função  $b_{k+1|k}(X)$ , cuja função PHD é dada por:

$$b_{k+1|k}(\mathbf{x}) \triangleq \int b_{k+1|k}(\{\mathbf{x}\} \cup W)\delta W. \quad (2.20)$$

em que  $W$  é o conjunto de vetores de estado dos novos indivíduos que surgiram de forma espontânea.

Note que seguindo as hipóteses mencionadas acima, é possível apresentar a fórmula de predição para a PHD, dada por:

$$D_{k+1|k}(\mathbf{x}|Z^{(k)}) = b_{k+1|k}(\mathbf{x}) + \int (p_S(\mathbf{x}') \cdot f_{k+1|k}(\mathbf{x}|\mathbf{x}') + s_{k+1|k}(\mathbf{x}|\mathbf{x}')) \cdot D_{k|k}(\mathbf{x}'|Z^{(k)})d\mathbf{x}' \quad (2.21)$$

e o número esperado de alvos é dado por:

$$N_{k+1|k} = \int D_{k+1|k}(\mathbf{x}|Z^{(k)})d\mathbf{x} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} &= \int b_{k+1|k}(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int p_S^{k+1|k}(\mathbf{x}) \cdot D_{k|k}(\mathbf{x}|Z^{(k)})d\mathbf{x} + \\ &\quad + \iint s_{k+1|k}(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \cdot D_{k|k}(\mathbf{x}'|Z^{(k)})d\mathbf{x}d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (2.23)$$

### 2.2.4 Corretor

De forma semelhante àquela feita para a equação de predição do filtro PHD, é necessário listar algumas hipóteses, que são:

- (i) Nenhum indivíduo gera mais do que uma medida e cada medida é gerada por um único indivíduo;
- (ii) Todas as medidas são condicionalmente independentes do estado de indivíduo, das detecções perdidas e do processo de Poisson para alarmes falsos;
- (iii)  $L_{\mathbf{z}}(\mathbf{x}) = f_{k+1}(\mathbf{z}|\mathbf{x})$  é a função de verossimilhança do sensor;

- (iv)  $p_D(\mathbf{x}) = p_D^{k+1}(\mathbf{x})$  é a probabilidade de uma observação ser coletada de um indivíduo com estado  $\mathbf{x}$  no instante de tempo  $k + 1$ ;
- (v) No instante de tempo  $k + 1$ , o sensor coleta um número médio por unidade de tempo  $\lambda$  de alarmes falsos distribuídos de acordo com uma distribuição de Poisson e a distribuição espacial é governada pela densidade de probabilidade  $c_{k+1}(\mathbf{z})$ ;
- (vi) A distribuição espacial de alvos é dada por  $f_{k+1|k}(\mathbf{x}|Z^{(k)})$  e a densidade multi-alvo prevista é aproximadamente Poisson, dada por:

$$f_{k+1|k}(X|Z^{(k)}) \simeq e^{-\mu} \cdot \prod_{\mathbf{x} \in X} \mu f_{k+1|k}(\mathbf{x}|Z^{(k)}) \quad (2.24)$$

em que  $\mu$  é o número médio de alvos.

A última hipótese sobre a aproximação da densidade multi-alvo por Poisson surge da necessidade de serem obtidas equações fechadas, bem definidas para a etapa de correção do filtro PHD. Com as hipóteses mencionadas acima, a fórmula de correção para a PHD pode ser determinada. Do passo de previsão, obteve-se  $D_{k+1|k}(\mathbf{x}|Z^{(k)})$  como em (2.21). No instante de tempo  $k + 1$ , é coletado mais um conjunto de medidas  $Z = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m\}$  com  $m$  elementos; portanto, o objetivo é encontrar uma fórmula para  $D_{k+1|k+1}(\mathbf{x}|Z^{(k+1)})$ .

Considere o funcional gerador de probabilidade de  $D_{k+1|k}(\mathbf{x}|Z^{(k)})$  dado por:

$$D_{k+1|k}[h] = \int h(\mathbf{x}) D_{k+1|k}(\mathbf{x}|Z^{(k)}) d\mathbf{x} \quad (2.25)$$

em que  $h(\mathbf{x})$  é uma função teste. A fórmula para o passo de correção é dada por:

$$D_{k+1|k+1}(\mathbf{x}|Z^{(k+1)}) \simeq L_{Z_{k+1}}(\mathbf{x}) D_{k+1|k}(\mathbf{x}|Z^{(k)}) \quad (2.26)$$

em que, para um dado conjunto de medidas  $Z$  qualquer:

$$L_Z(\mathbf{x}) = 1 - p_D(\mathbf{x}) + p_D(\mathbf{x}) \cdot \sum_{\mathbf{z} \in Z} \frac{L_{\mathbf{z}}(\mathbf{x})}{\lambda c_{k+1}(\mathbf{z}) + D_{k+1|k}[p_D L_{\mathbf{z}}]} \quad (2.27)$$

em que  $D_{k+1|k}[p_D L_{\mathbf{z}}]$  é o funcional gerador de probabilidade de  $D_{k+1|k}(\mathbf{x}|Z^{(k)})$  calculado para o produto  $p_D(\mathbf{x}) L_{\mathbf{z}}(\mathbf{x})$ .

Note que há uma aproximação na equação de correção (2.26), vinda da sexta hipótese para o corretor do filtro PHD, em que há uma aproximação da densidade multi-alvo prevista por uma distribuição de Poisson. Além disso, o número esperado de alvos corrigidos é dado por:

$$N_{k+1|k+1} = \int D_{k+1|k+1}(\mathbf{x}|Z^{(k+1)}) d\mathbf{x} \quad (2.28)$$

$$= N_{k+1|k} - D_{k+1|k}[p_D] + \sum_{\mathbf{z} \in Z_{k+1}} \frac{D_{k+1|k}[p_D L_{\mathbf{z}}]}{\lambda c_{k+1}(\mathbf{z}) + D_{k+1|k}[p_D L_{\mathbf{z}}]} \quad (2.29)$$

### 2.2.5 Vantagens – Filtro PHD

A seguir, encontra-se uma lista de algumas das vantagens trazidas ao se utilizar o filtro PHD como um estimador de estados:

- Complexidade computacional: a qualquer momento, a ordem de complexidade é de  $O(mn)$ , em que  $m$  é o número de observações no conjuntos de medidas atual  $Z$  e  $n$  é o número de alvos.
- Admissão de modelos estatísticos explícitos para perdas de detecção, campo de visão do sensor e alarmes falsos.
- Admissão de modelos estatísticos explícitos para a dinâmica existente em um cenário multi-alvo (p. ex., “nascimento” e “morte” de indivíduos).
- Implementação via Monte Carlo e/ou Mistura Gaussiana (a seguir).
- Não necessita de procedimentos de associação medida-trajetória.
- Propriedades de rejeição de *clutter* (a estimativa  $N_{k|k}$  do número de indivíduos é obtido de forma direta dos dados).

Observando a lista acima, nota-se que o filtro PHD possui vantagens significativas em relação aos filtros estocásticos clássicos, sob o ponto de vista do problema de rastreamento. Uma das vantagens que chama a atenção é justamente a não necessidade de uma técnica específica para associação de dados, já que o próprio filtro executa o procedimento de associação entre todas as medidas e todas as trajetórias no instante de tempo  $k$ . De certa forma, isso interfere no custo computacional, pois quanto maior o número de alvos e de medidas, maior será o número de associações medida-trajetória a serem realizadas.

### 2.2.6 Implementação

Observando as equações de predição (2.21) e de correção (2.26), pode-se observar que a estrutura baseia-se principalmente em cálculos de integrais, sendo que estas integrais muitas vezes são multi-dimensionais, já que tais integrais são tomadas em relação a vetores, como o vetor de estados  $\mathbf{x}$ . Basta tomar como exemplo um vetor de estados  $\mathbf{x}$  que possua quatro elementos: posição e velocidade nas direções  $x$  e  $y$ . Neste caso, a cada instante de tempo, as integrais de dimensão quatro—(2.21) (integrais na própria equação) e (2.26) (integrais no funcional gerador de probabilidade)—serão calculadas a cada instante de tempo, gerando um alto custo computacional.

Para evitar este tipo de custo, diversas maneiras de implementação para o filtro PHD são propostas na literatura especializada. Uma dessas maneiras é a implementação via técnicas sequenciais de Monte Carlo, dando um novo nome para o filtro PHD: filtro SMC-PHD (*Sequential Monte Carlo Probability Hypothesis Density*). Assim como o filtro de partículas clássico desenvolvido em (Ristic et al. 2004), o método baseia-se na geração das chamadas partículas, que evoluem no tempo através da sobrevivência das mesmas e esta sobrevivência é ligada aos

pesos dados a cada uma destas partículas. Além disso, os modelos matemáticos podem ser não-lineares, sem a necessidade de linearização. Em (Sidenbladh & Wirkander 2003), (Clark, Ruiz, Petillot & Bell 2007), (Vihola 2005) podem ser encontrados estudos feitos utilizando a implementação via filtro SMC-PHD em situações de rastreamento de alvos manobrantos.

Apesar de ter a vantagem de ser um filtro que lida com modelos matemáticos não-lineares, o filtro SMC-PHD acaba tendo um custo computacional bastante elevado por levar em conta um número  $N_p$  de partículas para cada um dos objetos que estão sendo rastreados, ou seja, a ordem de complexidade passa a ser  $O(mnN_p)$ , o que eleva consideravelmente a carga de processamento. Com o intuito de contornar esse problema, foi proposto em (Vo & Ma 2006) um filtro que, baseado em algumas hipóteses de linearidade (ou linearização) e ruídos gaussianos, torna o filtro PHD mais simples e rápido, sem perda de performance: o filtro GM-PHD (*Gaussian Mixture Probability Hypothesis Density*).

O filtro GM-PHD aproxima as funções PHD por misturas gaussianas, que são somas de funções densidade de probabilidade gaussianas ponderadas por pesos. Ao realizar este tipo de aproximação, acabam surgindo as equações de filtragem características de um filtro de Kalman linear (KF), de um filtro de Kalman estendido (EKF) ou *unscented* (UKF), sendo estes dois últimos referentes ao caso de linearização dos modelos matemáticos. Apesar das hipóteses tomadas para a formulação deste filtro, o que o torna um filtro mais restritivo, ele possui uma vantagem de ser computacionalmente mais rápido e de ter uma estrutura baseada em filtros estocásticos clássicos, o que facilita o estudo e o desenvolvimento deste filtro com o foco sobre o problema de rastreamento de indivíduos.

Pelos motivos apresentados nos parágrafos anteriores, daqui para frente, o filtro que será estruturado, desenvolvido e discutido será o filtro GM-PHD.

## 2.3 Filtro GM-PHD

O filtro GM-PHD nada mais é do que um método que simplifica a implementação do filtro PHD, baseando-se em hipóteses de linearidade e de distribuição gaussiana nos ruídos de dinâmica e de medida. Inicialmente, a lista de hipóteses sobre o filtro GM-PHD contém os seguintes itens:

- (i) A função densidade markoviana é gaussiana:

$$f_{k+1|k}(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = \mathcal{N}_{\mathbf{X}}(F_k\mathbf{x}', Q_k) \quad (2.30)$$

em que  $F_k$  é a matriz da dinâmica do estado e  $Q_k$  é a matriz de covariância do ruído do estado;

- (ii) A probabilidade de sobrevivência  $p_S$  do indivíduo e de detecção  $p_D$  são constantes;
- (iii) A função de verossimilhança referente ao radar é gaussiana:

$$L_{\mathbf{z}}(\mathbf{x}) = f_{k+1}(\mathbf{z}|\mathbf{x}) = \mathcal{N}_{\mathbf{Z}}(H_{k+1}\mathbf{x}, R_{k+1}) \quad (2.31)$$

em que  $H_{k+1}$  é a matriz de observação das medidas e  $R_{k+1}$  é a matriz de covariância do ruído das medidas;

- (iv) As funções PHD referentes ao surgimento de novos indivíduos e ao efeito de *spawning* são misturas gaussianas:

$$b_{k+1|k}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{a_k} \beta_k^i \cdot \mathcal{N}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_b^i, B_k^i) \quad (2.32)$$

$$s_{k+1|k}(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = \sum_{i=1}^{b_k} \gamma_k^i \cdot \mathcal{N}_{\mathbf{X}}(E_k^i \mathbf{x}' + \mathbf{d}_k^i, G_k^i) \quad (2.33)$$

em que  $\mathbf{x}_b^i$  é o vetor de estados do indivíduo que surgiu espontaneamente,  $B_k^i$  é a matriz de covariância do estado referente aos indivíduos nascidos,  $G_k^i$  é a matriz de covariância do estado referente aos indivíduos que surgiram via *spawning*,  $E_k^i$  é a matriz dinâmica dos indivíduos gerados via *spawn*,  $\mathbf{d}_k^i$  é a distância entre aqueles que geraram os novos indivíduos via *spawning* e aqueles que foram gerados,  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $\beta_k^i$  e  $\gamma_k^i$  são valores pré-determinados pelo usuário para definir o formato das respectivas funções de intensidade;

- (v) As funções PHD  $D_{k|k}(\mathbf{x}|Z^{(k)})$  e  $D_{k+1|k}(\mathbf{x}|Z^{(k)})$  são misturas gaussianas:

$$D_{k|k}(\mathbf{x}|Z^{(k)}) = \sum_{i=1}^{n_{k|k}} w_{k|k}^i \cdot \mathcal{N}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_{k|k}^i, P_{k|k}^i) \quad (2.34)$$

$$D_{k+1|k}(\mathbf{x}|Z^{(k)}) = \sum_{i=1}^{n_{k+1|k}} w_{k+1|k}^i \cdot \mathcal{N}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_{k+1|k}^i, P_{k+1|k}^i) \quad (2.35)$$

em que  $n_{k|k}$  e  $n_{k+1|k}$  é o número de componentes gaussianas atualizado e previsto, respectivamente.

- (vi) Os números esperado e previsto de alvos são computados como:

$$N_{k|k} = \sum_{i=1}^{n_{k|k}} w_{k|k}^i \quad (2.36)$$

$$N_{k+1|k} = \sum_{i=1}^{n_{k+1|k}} w_{k+1|k}^i \quad (2.37)$$

A partir das hipóteses mencionadas acima, pode-se verificar três grandezas importantes sob o ponto de vista da recursão do filtro estocástico:  $w_{k|k}^i$  (pesos dos termos de distribuição gaussiana),  $\mathbf{x}_{k|k}^i$  (vetores de estado estimado/atualizado),  $P_{k|k}^i$  (matriz de covariância do erro do estado estimada/atualizada). Note que, para que sejam obtidos os vetores de estado estimados, basta que sejam calculados os parâmetros das gaussianas, isto é, suas respectivas médias e covariâncias. Mais adiante, será verificado que a obtenção de  $\mathbf{x}_{k|k}^i$  e  $P_{k|k}^i$  tem como base as equações de filtragem do KF.

Algo a ser destacado também é o que foi verificado em (Clark & Vo 2007) que o erro de estimativa do filtro PHD tenderá a zero quando o número de componentes gaussianas tender ao infinito, o que não é adequado sob o ponto de vista computacional. Devido a este fenômeno, uma

etapa extra, logo após o processo de filtragem, deverá ser introduzida. Esta etapa é chamada de corte (*pruning*) e fusão (*merging*).

Apesar da aproximação via mistura gaussiana ser mais restritiva devido às hipóteses feitas, o filtro GM-PHD possui algumas vantagens potenciais em relação a outros filtros multi-alvos, que são:

- Tal método proporciona uma solução algébrica fechada para as equações de filtragem para o filtro PHD;
- O preditor e o corretor possuem uma demanda computacional muito baixa em relação a outros filtros, como o filtro SMC-PHD;
- É mais simples para ser implementado computacionalmente;
- Resolve o problema de filtragem e associação de alvos-medidas de maneira sistemática.

### 2.3.1 Preditor

A equação do preditor da função PHD para o filtro GM-PHD baseia-se diretamente na equação de preditor do filtro PHD (2.21), ou seja, a estrutura da equação é formada por três parcelas referentes aos indivíduos nascidos, mortos e gerados via *spawn*. A predição da função PHD do filtro GM-PHD é dada por:

$$\begin{aligned}
D_{k+1|k}(\mathbf{x}|Z^{(k)}) &= \sum_{i=1}^{a_k} v_{k+1|k}^i \cdot \mathcal{N}_{\mathbf{x}}(\mathbf{b}_{k+1|k}^i, B_{k+1|k}^i) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n_{k|k}} w_{k+1|k}^i \cdot \mathcal{N}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_{k+1|k}^i, P_{k+1|k}^i) + \\
&\quad + \sum_{j=1}^{b_k} \sum_{i=1}^{n_{k|k}} w_{k+1|k}^{i,j} \cdot \mathcal{N}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_{k+1|k}^{i,j}, P_{k+1|k}^{i,j})
\end{aligned} \tag{2.38}$$

em que os termos e argumentos que compõem a equação (2.38) vêm das hipóteses do filtro GM-PHD<sup>1</sup> e são denotados por:

$$v_{k+1|k}^i = \beta_k^i \tag{2.39}$$

$$\mathbf{b}_{k+1|k}^i = \mathbf{x}_b^i \tag{2.40}$$

$$B_{k+1|k}^i = B_k^i \tag{2.41}$$

$$w_{k+1|k}^i = p_s w_k^i \tag{2.42}$$

$$w_{k+1|k}^{i,j} = \gamma_k^j w_k^i \tag{2.43}$$

$$\mathbf{x}_{k+1|k}^i = F_k \mathbf{x}_{k|k}^i \tag{2.44}$$

$$P_{k+1|k}^i = Q_k + F_k P_{k|k}^i F_k^T \tag{2.45}$$

$$\mathbf{x}_{k+1|k}^{i,j} = E_k^j \mathbf{x}_{k|k}^i + \mathbf{d}_k^i \tag{2.46}$$

$$P_{k+1|k}^{i,j} = G_k^j + E_k^i P_{k|k}^i E_k^{i,T} \tag{2.47}$$

<sup>1</sup>Vide hipóteses do filtro GM-PHD para descrições dos termos e argumentos.

Note que as equações (2.44), (2.45) e (2.47) são as mesmas equações de predição de um KF linear, como já havia sido observado anteriormente, sendo que as equações mencionadas são para os indivíduos que sobreviveram no instante de tempo anterior  $k$  para o instante de tempo atual  $k + 1$ .

**Prova:** Seja a PHD  $D_{k+1|k}(\mathbf{x}) = D_{k+1|k}(\mathbf{x}|Z^{(k)})^2$  dada pela equação (2.21), já considerando a hipótese de probabilidade de sobrevivência  $p_S$  constante:

$$D_{k+1|k}(\mathbf{x}) = \int (p_S f_{k+1|k}(\mathbf{x}|\mathbf{x}') + s_{k+1|k}(\mathbf{x}|\mathbf{x}')) \cdot D_{k|k}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' + b_{k+1|k}(\mathbf{x}) \quad (2.48)$$

Substituindo  $b_{k+1|k}(\mathbf{x})$  por (2.32),  $f_{k+1|k}(\mathbf{x}|\mathbf{x}')$  por (2.30),  $s_{k+1|k}(\mathbf{x}|\mathbf{x}')$  por (2.33) e  $D_{k|k}(\mathbf{x}')$  por (2.34), temos:

$$\begin{aligned} D_{k+1|k}(\mathbf{x}) &= p_S \cdot \int \left[ \mathcal{N}_{\mathbf{X}}(F_k \mathbf{x}', Q_k) \cdot \sum_{i=1}^{n_{k|k}} w_{k|k}^i \mathcal{N}_{\mathbf{X}'}(\mathbf{x}_{k|k}^i, P_{k|k}^i) \right] d\mathbf{x}' + \\ &+ \int \left[ \sum_{j=1}^{b_k} \gamma_k^j \cdot \mathcal{N}_{\mathbf{X}}(E_k^j \mathbf{x}' + \mathbf{d}_k^j, G_k^j) \cdot \sum_{i=1}^{n_{k|k}} w_{k|k}^i \mathcal{N}_{\mathbf{X}'}(\mathbf{x}_{k|k}^i, P_{k|k}^i) \right] d\mathbf{x}' + \\ &+ \sum_{l=1}^{a_k} \beta_k^l \cdot \mathcal{N}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_b^l, B_k^l) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Rearranjando as duas primeiras parcelas da equação (2.49), obtém-se:

$$\begin{aligned} D_{k+1|k}(\mathbf{x}) &= p_S \cdot \sum_{i=1}^{n_{k|k}} w_{k|k}^i \underbrace{\int \mathcal{N}_{\mathbf{X}}(F_k \mathbf{x}', Q_k) \cdot \mathcal{N}_{\mathbf{X}'}(\mathbf{x}_{k|k}^i, P_{k|k}^i) d\mathbf{x}'}_1 + \\ &+ \sum_{j=1}^{b_k} \sum_{i=1}^{n_{k|k}} \gamma_k^j w_{k|k}^i \underbrace{\int \mathcal{N}_{\mathbf{X}}(E_k^j \mathbf{x}' + \mathbf{d}_k^j, G_k^j) \cdot \mathcal{N}_{\mathbf{X}'}(\mathbf{x}_{k|k}^i, P_{k|k}^i) d\mathbf{x}'}_2 + \\ &+ \sum_{l=1}^{a_k} \beta_k^l \cdot \mathcal{N}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_b^l, B_k^l) \end{aligned} \quad (2.50)$$

Para resolver as integrais acima, é necessário recorrer a um resultado padrão para funções gaussianas, apresentado em (Vo & Ma 2006), uma derivação do apresentado em (Ristic et al. 2004, Seção 3.8):

**Lema 2.1** *Para  $F$ ,  $\mathbf{d}$ ,  $Q > 0$ ,  $P > 0$  e  $\mathbf{m}$  conhecidos e com dimensões apropriadas, a seguinte igualdade é válida:*

$$\int \mathcal{N}_{\mathbf{X}}(F\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{d}, Q) \cdot \mathcal{N}_{\boldsymbol{\zeta}}(\mathbf{m}, P) d\boldsymbol{\zeta} = \mathcal{N}_{\mathbf{X}}(F\mathbf{m} + \mathbf{d}, Q + FPF^T) \quad (2.51)$$

---

<sup>2</sup>Notação suprimida apenas para facilitar a demonstração.

Desta forma, as integrais assinaladas pelos números 1 e 2 ficam da seguinte forma:

$$1 \rightarrow \int \mathcal{N}_{\mathbf{X}}(F_k \mathbf{x}', Q_k) \cdot \mathcal{N}_{\mathbf{X}'}(\mathbf{x}_{k|k}^i, P_{k|k}^i) d\mathbf{x}' = \mathcal{N}_{\mathbf{X}}(F_k \mathbf{x}_{k|k}^i, Q_k + F_k P_{k|k}^i F_k^T) \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} 2 \rightarrow \int \mathcal{N}_{\mathbf{X}}(E_k^j \mathbf{x}' + \mathbf{d}_k^j, G_k^j) \cdot \mathcal{N}_{\mathbf{X}'}(\mathbf{x}_{k|k}^i, P_{k|k}^i) d\mathbf{x}' = \\ = \mathcal{N}_{\mathbf{X}}(E_k^j \mathbf{x}_{k|k}^i + \mathbf{d}_k^j, G_k^j + E_k^j P_{k|k}^i (E_k^j)^T) \end{aligned} \quad (2.53)$$

Finalmente, substituindo os resultados das integrais acima em (2.50) e associando as notações com as equações (2.39)–(2.47), chegamos ao resultado apresentado em (2.38). ■

Em (Mahler 2007), observa-se que o número de componentes gaussianas no preditor do filtro GM-PHD é dado por

$$n_{k+1|k} = a_k + (1 + b_k)n_{k|k} \quad (2.54)$$

em que  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $n_{k|k}$  e  $n_{k+1|k}$  são os limites das somas em (2.32)–(2.35). Este número cresce de forma geométrica, fazendo-se necessário os passos de corte e fusão, mencionados anteriormente.

### 2.3.2 Corretor

No instante de tempo  $k+1$ , é coletado um novo conjunto de medidas  $Z_{k+1} = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{m_{k+1}}\}$ . Com este novo conjunto de medidas, é possível construir a equação de correção da PHD, dada por:

$$\begin{aligned} D_{k+1|k+1}(\mathbf{x}|Z^{(k+1)}) &= \sum_{i=1}^{n_{k+1|k}} w_{k+1|k+1}^i \cdot \mathcal{N}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_{k+1|k+1}^i, P_{k+1|k+1}^i) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n_{k+1|k}} \sum_{j=1}^{m_{k+1}} w_{k+1|k+1}^{i,j} \cdot \mathcal{N}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_{k+1|k+1}^{i,j}, P_{k+1|k+1}^{i,j}) \end{aligned} \quad (2.55)$$

em que:

$$w_{k+1|k+1}^i = (1 - p_D) w_{k+1|k}^i \quad (2.56)$$

$$\mathbf{x}_{k+1|k+1}^{i,j} = \mathbf{x}_{k+1|k}^i + K_{k+1}^i (\mathbf{z}_j - H_{k+1} \mathbf{x}_{k+1|k}^i) \quad (2.57)$$

$$P_{k+1|k+1}^{i,j} = (I - K_{k+1}^i H_{k+1}) P_{k+1|k}^i \quad (2.58)$$

$$K_{k+1}^i = P_{k+1|k}^i H_{k+1}^T (H_{k+1} P_{k+1|k}^i H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} \quad (2.59)$$

$$w_{k+1|k+1}^{i,j} = \frac{w_{k+1|k}^i p_D \mathcal{N}_{\mathbf{Z}}(H_{k+1} \mathbf{x}_{k+1|k}^i, R_k + H_{k+1} P_{k+1|k}^i H_{k+1}^T)}{\kappa_{k+1}(\mathbf{z}_j) + p_D \sum_{\ell=1}^{n_{k+1|k}} w_{k+1|k}^\ell \mathcal{N}_{\mathbf{Z}}(H_{k+1} \mathbf{x}_{k+1|k}^\ell, R_k + H_{k+1} P_{k+1|k}^\ell H_{k+1}^T)} \quad (2.60)$$

$$\kappa_{k+1}(\mathbf{z}) = \lambda c_{k+1}(\mathbf{z}) \quad (2.61)$$

em que  $\kappa_{k+1}(\mathbf{z})$  é a função PHD do CAF referente ao *clutter* e/ou alarme falso.

**Prova:** Seja a PHD  $D_{k+1|k+1}(\mathbf{x}) = D_{k+1|k+1}(\mathbf{x}|Z^{(k+1)})^3$  dada pela equação (2.26), já levando em conta a hipótese da probabilidade de detecção ser constante. Tem-se que:

$$D_{k+1|k+1}(\mathbf{x}) = (1 - p_D) D_{k+1|k}(\mathbf{x}) + \sum_{\mathbf{z} \in Z^{(k+1)}} \frac{p_D f_{k+1}(\mathbf{z}|\mathbf{x}) D_{k+1|k}(\mathbf{x})}{\kappa_{k+1}(\mathbf{z}) + \int p_D f_{k+1}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\xi}) D_{k+1|k}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}} \quad (2.62)$$

<sup>3</sup>Notação suprimida apenas para facilitar a demonstração.

em que  $\kappa_{k+1}(\mathbf{z}) = \lambda c_{k+1}(\mathbf{z})$  é a função PHD do CAF referente ao *clutter* e/ou alarme falso e a integral no denominador do argumento da somatória é nada mais do que o funcional de  $D_{k+1|k}(\boldsymbol{\xi})$  calculado em  $h(\boldsymbol{\xi}) = p_D f_{k+1}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\xi})$ , isto é,  $D_{k+1|k}[p_D f_{k+1}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\xi})]$  (vide eq. (2.25)).

Substituindo  $D_{k+1|k}(\mathbf{x})$  por (2.35),  $f_{k+1}(\mathbf{z}|\mathbf{x})$  por (2.31), temos:

$$D_{k+1|k+1}(\mathbf{x}) = (1 - p_D) \left( \sum_{i=1}^{n_{k+1|k}} w_{k+1|k}^i \cdot \mathcal{N}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_{k+1|k}^i, P_{k+1|k}^i) \right) + \sum_{\mathbf{z} \in Z^{(k+1)}} \frac{g(\mathbf{x})}{\kappa_{k+1}(\mathbf{z}) + \int g(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}} \quad (2.63)$$

em que

$$g(\mathbf{x}) = p_D (\mathcal{N}_{\mathbf{Z}}(H_{k+1}\mathbf{x}, R_{k+1})) \left( \sum_{i=1}^{n_{k+1|k}} w_{k+1|k}^i \cdot \mathcal{N}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_{k+1|k}^i, P_{k+1|k}^i) \right) \quad (2.64)$$

Para resolver a integral que aparece no denominador da segunda parcela de (2.63), deve-se inverter o operador soma com o operador integral, juntamente com os pesos  $w_{k+1|k}^i$ . Desta forma, é possível aplicar o Lema 2.1:

$$\int g(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \int p_D (\mathcal{N}_{\mathbf{Z}}(H_{k+1}\boldsymbol{\xi}, R_{k+1})) \left( \sum_{i=1}^{n_{k+1|k}} w_{k+1|k}^i \cdot \mathcal{N}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_{k+1|k}^i, P_{k+1|k}^i) \right) d\boldsymbol{\xi} \quad (2.65)$$

$$= p_D \sum_{i=1}^{n_{k+1|k}} w_{k+1|k}^i \int \mathcal{N}_{\mathbf{Z}}(H_{k+1}\boldsymbol{\xi}, R_{k+1}) \mathcal{N}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_{k+1|k}^i, P_{k+1|k}^i) d\boldsymbol{\xi} \quad (2.66)$$

$$= p_D \sum_{i=1}^{n_{k+1|k}} w_{k+1|k}^i \mathcal{N}_{\mathbf{Z}}(H_{k+1}\mathbf{x}_{k+1|k}^i, R_{k+1} + H_{k+1}P_{k+1|k}^i H_{k+1}^T) \quad (2.67)$$

Agora, resta apenas determinar  $g(\mathbf{x})$ , dado em (2.64). Para tal, é necessário aplicar um lema encontrado em (Vo & Ma 2006) e deduzido em (Ristic et al. 2004, Seção 3.8). Este lema trata a seguinte relação:

**Lema 2.2** *Dados  $H, R > 0, P > 0$  e  $\mathbf{m}$  com dimensões apropriadas, então a seguinte igualdade é válida:*

$$\mathcal{N}_{\mathbf{Z}}(H\mathbf{x}, R) \mathcal{N}_{\mathbf{X}}(\mathbf{m}, P) = q(\mathbf{z}) \mathcal{N}_{\mathbf{X}}(\tilde{\mathbf{m}}, \tilde{P}) \quad (2.68)$$

em que

$$q(\mathbf{z}) = \mathcal{N}_{\mathbf{Z}}(H\mathbf{m}, R + HPH^T) \quad (2.69)$$

$$\tilde{\mathbf{m}} = \mathbf{m} + K(\mathbf{z} - H\mathbf{m}) \quad (2.70)$$

$$\tilde{P} = (I - KH)P \quad (2.71)$$

$$K = PH^T(HPH^T + R)^{-1} \quad (2.72)$$

Desta forma,  $g(\mathbf{x})$  pode ser descrito como:

$$g(\mathbf{x}) = p_D \mathcal{N}_{\mathbf{Z}}(H_{k+1}\mathbf{x}, R_{k+1}) \left( \sum_{i=1}^{n_{k+1|k}} w_{k+1|k}^i \cdot \mathcal{N}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_{k+1|k}^i, P_{k+1|k}^i) \right) \quad (2.73)$$

$$= p_D \sum_{i=1}^{n_{k+1|k}} w_{k+1|k}^i [\mathcal{N}_{\mathbf{Z}}(H_{k+1}\mathbf{x}, R_{k+1}) \mathcal{N}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_{k+1|k}^i, P_{k+1|k}^i)] \quad (2.74)$$

$$= p_D \sum_{i=1}^{n_{k+1|k}} w_{k+1|k}^i \mathcal{N}_{\mathbf{Z}}(H_{k+1}\mathbf{x}_{k+1|k}^i, R_{k+1} + H_{k+1}P_{k+1|k}^i H_{k+1}^T) \mathcal{N}_{\mathbf{X}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{P}) \quad (2.75)$$

em que:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{k+1|k}^i + K_{k+1}^i (\mathbf{z} - H_{k+1}\mathbf{x}_{k+1|k}^i) \quad (2.76)$$

$$\tilde{P} = (I - K_{k+1}^i H_{k+1}) P_{k+1|k}^i \quad (2.77)$$

$$K_{k+1}^i = P_{k+1|k}^i H_{k+1}^T (H_{k+1} P_{k+1|k}^i H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} \quad (2.78)$$

Finalmente, substituindo  $g(\mathbf{x})$  pelo obtido nas equações acima e trocando a soma  $\sum_{\mathbf{z} \in Z^{(k+1)}}$  pelo soma equivalente  $\sum_{i=1}^{m_{k+1}}$ , pois ambos tratam de todos vetores de medidas pertencentes ao novo conjunto de medidas do instante de tempo  $k + 1$ , chega-se ao resultado final, dado em (2.55). ■

Assim, como para o caso do preditor, em (Mahler 2007) observa-se que o número de componentes gaussianas no corretor do filtro GM-PHD é dado por:

$$n_{k+1|k+1} = n_{k+1|k}(1 + m_{k+1}) \quad (2.79)$$

e este número também cresce de forma geométrica. As técnicas de corte e fusão, mencionadas anteriormente, podem ser aplicadas aqui, eliminando as componentes de menor peso e fundindo componentes similares e, portanto, trazendo o problema para um patamar tratável.

### 2.3.3 Corte e fusão

Um dos problemas do filtro GM-PHD está no fato do número de componentes gaussianas, que aparecem nos somatórios, aumentar a cada passo do algoritmo do filtro. Desta forma, algoritmos de corte e fusão são comumente aplicados para assegurar que a complexidade do algoritmo seja mantida em um nível aceitável.

Basicamente, a etapa de corte baseia-se na introdução de um limitante para os pesos  $w_{k|k}^i$ , eliminando os termos com pesos desprezíveis e a etapa de fusão agrega as componentes gaussianas restantes do corte que possuem médias aproximadamente iguais.

Para o processo de corte, em que os termos com pesos muito pequenos são eliminados, utiliza-se a PHD dada em (2.34). Assume-se, sem qualquer perda de generalidade, que as componentes com os índices  $i = 1, \dots, N_P$  são aquelas cujos pesos  $w_{k|k}^i$  são menores do que um certo limitante  $T$ . Estas componentes são descartadas e a PHD é substituída por:

$$D_{k|k}^P(\mathbf{x}|Z^{(k)}) = \left( \frac{\sum_{i=1}^{n_{k|k}} w_{k|k}^i}{\sum_{i=N_P+1}^{n_{k|k}} w_{k|k}^i} \right) \sum_{i=N_P+1}^{n_{k|k}} w_{k|k}^i \mathcal{N}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_{k|k}^i, P_{k|k}^i) \quad (2.80)$$

em que as componentes  $i = N_P + 1, \dots, n_{k|k}$  são as componentes sobreviventes. O termo que aparece entre parênteses é um ajuste de escala para os pesos remanescentes.

Agora, para o procedimento de fusão de componentes, (Clark & Vo 2007) cita alguns métodos para realizar tal tarefa, mas o mais adequado para ser aplicado ao filtro GM-PHD é o algoritmo de agrupamento (*Clustering Algorithm*), pois a função PHD é multimodal, em que as principais componentes representam os estados estimados dos alvos.

No algoritmo de agrupamento, as componentes gaussianas que possuem os maiores pesos são escolhidas como as componentes principais para definirem os centros dos agrupamentos. Para definir aquelas componentes que serão unidas, calculamos primeiramente uma distância estatística  $\delta$  entre duas componentes  $i \in I = \{1, \dots, n_{k|k}\}$  e  $j$  (índice referente à componente de maior peso, isto é,  $j = \arg \max_i w_{k|k}^i$ ), dada por:

$$\delta = \left( \mathbf{x}_{k|k}^i - \mathbf{x}_{k|k}^j \right)^T \left( P_{k|k}^i \right)^{-1} \left( \mathbf{x}_{k|k}^i - \mathbf{x}_{k|k}^j \right) \quad (2.81)$$

Se esta distância  $\delta$  for menor ou igual a um limitante  $U$ , então o índice  $i$  referente a tal componente é incluída em um conjunto  $L$ , ou seja,  $L = \{i \in I | \delta \leq U\}$ . Este procedimento é realizado para cada componente  $i$ . Definido o conjunto  $L$ , as componentes que fazem parte de tal conjunto são fundidas em uma única, cujos novos parâmetros serão:

$$\tilde{w}_{k|k}^l = \sum_{i \in L} w_{k|k}^i \quad (2.82)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k|k}^l = \frac{1}{\tilde{w}_{k|k}^l} \sum_{i \in L} w_{k|k}^i \mathbf{x}_{k|k}^i \quad (2.83)$$

$$\tilde{P}_{k|k}^l = \frac{1}{\tilde{w}_{k|k}^l} \sum_{i \in L} w_{k|k}^i \left[ P_{k|k}^i + \left( \tilde{\mathbf{x}}_{k|k}^l - \mathbf{x}_{k|k}^i \right) \left( \tilde{\mathbf{x}}_{k|k}^l - \mathbf{x}_{k|k}^i \right)^T \right] \quad (2.84)$$

Ao final destes procedimentos, haverá  $i = 1, \dots, l$  novas componentes gaussianas, em que  $|L| \leq |I|$ . Caso ainda haja muitas componentes após esta agregação, isto é, um número de componentes maior do que um número  $J_{\max}$ , um corte é aplicado ao final do processo fazendo com que o número total de componentes gaussianas seja, no máximo,  $J_{\max}$ .

### 2.3.4 Extensão para Modelos Matemáticos Não-Lineares

Observando a lista de hipóteses feita no início da Seção 2.3, verifica-se que as funções densidade markoviana e de verossimilhança, que representam os indivíduos e o radar, respectivamente, são consideradas gaussianas e, de forma implícita, com modelos matemáticos lineares, representados pelas matrizes  $F_k$  e  $H_{k+1}$ .

Nos casos em que os modelos matemáticos são não-lineares, isto é,

$$\mathbf{x} = \varphi_k(\mathbf{x}') + \boldsymbol{\nu} \quad (2.85)$$

$$\mathbf{z} = \eta_k(\mathbf{x}) + \mathbf{w}, \quad (2.86)$$

as hipóteses mencionadas podem ser enfraquecidas, adaptando o filtro GM-PHD para acomodar estes modelos não-lineares “gaussianos”, como no EKF, por exemplo. Desta forma, é possível aplicar o filtro GM-PHD de forma aproximada por algumas modificações.

Para lidar com estes modelos matemáticos não-lineares, recomenda-se a linearização do sistema de equações ou a criação de vetores e seus respectivos pesos. O primeiro caso remete ao filtro de Kalman estendido (EKF) em (Bar-Shalom et al. 2001), em que os modelos matemáticos sofrem uma linearização sobre as funções  $\varphi_k(\mathbf{x}')$  e  $\eta_k(\mathbf{x})$ ; o segundo caso remete ao filtro de Kalman *unscented* (UKF) em (Julier & Uhlmann 2004), em que são gerados os chamados pontos *sigma*, os quais são responsáveis pela predição e correção do vetor de estados, através de somas ponderadas envolvendo os pontos *sigma*.

### Filtro EK-PHD

No caso que o procedimento escolhido para tratar a não-linearidade dos modelos matemáticos é a linearização dos modelos, a técnica do EKF é a mais adequada. Para tal, basta calcular as matrizes jacobianas das funções  $\varphi_k(\mathbf{x}')$  e  $\eta_k(\mathbf{x})$ , calculadas sobre a estimativa anterior e a previsão atual. Desta maneira, as matrizes  $F_k$  e  $H_{k+1}$  passam a ser determinadas a partir das seguintes fórmulas:

$$J_{F_k} = \left. \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{x}'} \right|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}_{k|k}} \quad (2.87)$$

$$J_{H_{k+1}} = \left. \frac{\partial \eta_k(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{k+1|k}} \quad (2.88)$$

Como se pode notar, o tratamento de modelos não-lineares via EKF no GM-PHD é bastante simples e rápido, já que bastam o cálculo das duas matrizes jacobianas do EKF para cada alvo que esteja no cenário. Se o número de indivíduos sendo rastreados for elevado, os modelos passam a ter dimensões muito elevadas, gerando um custo computacional elevado por conta dos cálculos das derivadas parciais das jacobianas.

Os detalhes de como serão introduzidas as equações (2.87) e (2.88) poderão ser encontrados nos algoritmos apresentados na Seção 2.4.

### Filtro UK-PHD

Quando o método escolhido para lidar com os modelos dinâmicos e de medidas não-lineares é através dos pontos *sigma*, as técnicas do UKF se encaixam perfeitamente. Diferentemente do caso EK-PHD, o UK-PHD exige modificações mais elaboradas no filtro GM-PHD original.

O procedimento envolve uma etapa essencial para o filtro UK-PHD que é a transformação *unscented*, cujo objetivo é gerar os pontos *sigma* e seus respectivos pesos, denotados pelo conjunto  $\{\mathcal{X}^i, W^i\}_{i=0}^{2L}$ , em que  $\mathcal{X}^i$  são os pontos *sigma* e  $W^i$  são os pesos. Para determinar estes pontos e pesos, basta seguir uma recursão simples para os pontos *sigma*:

$$\mathcal{X}^0 = \mu \quad (2.89)$$

$$\mathcal{X}^i = \mu + \left( \sqrt{(L + \lambda)C} \right)_i, \quad i = 1, \dots, L \quad (2.90)$$

$$\mathcal{X}^i = \mu - \left( \sqrt{(L + \lambda)C} \right)_{i-L}, \quad i = L + 1, \dots, 2L \quad (2.91)$$

em que  $(\sqrt{\cdot})_i$  é a  $i$ -ésima linha do resultado da raiz quadrada,  $\mu$  é a média,  $C$  é a matriz de covariância,  $\lambda$ , e para os seus respectivos pesos:

$$W^0 = \frac{\lambda}{L + \lambda} \quad (2.92)$$

$$W^i = \frac{1}{2(L + \lambda)} \quad (2.93)$$

$$\lambda = \alpha^2(L + \kappa) - L \quad (2.94)$$

em que  $\kappa$  são fatores de escala,  $\alpha$  determina o espalhamento dos pontos *sigma* no entorno de  $\mu$ . Os valores de  $\mu$  e  $C$  são pré-determinados em função das previsões e das estimativas anteriores dos vetores de estados e das suas respectivas matrizes de covariância.

A partir da determinação dos pontos *sigma*, que são calculados tanto para a etapa de predição e de correção, é possível realizar o restante dos cálculos relativos ao filtro UK-PHD. Os detalhes de todas as equações que estruturam o filtro UK-PHD serão apresentados na Seção 2.4.

## 2.4 Algoritmos

Nas seções a seguir, serão apresentados os algoritmos para cada um dos casos de modelos matemáticos, lineares e não-lineares. Antes disso, é necessário compreender a sequência estrutural dos algoritmos. Para tal, um diagrama de blocos foi construído na Figura 2.2 para facilitar o entendimento geral dos algoritmos.

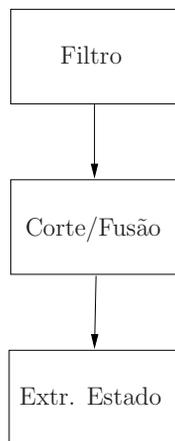


Figura 2.2: Sequência estrutural dos algoritmos.

Os dois primeiros blocos já foram apresentados nas seções anteriores, inclusive o bloco referente à técnica de corte e fusão, que foi detalhada na Seção 2.3.3. Já o terceiro bloco refere-se à técnica denominada Extração de Estado, cuja função é bastante simples: eliminar componentes que possuam um peso abaixo de um limitante  $\Delta$ , ou seja, trata-se de um método de corte mais fino, pois o resultado mantém apenas componentes que tenham pesos mais elevados.

Com a sequência descrita pela Figura 2.2, os algoritmos relativos aos filtros GM-PHD (modelos matemáticos lineares), EK-PHD e UK-PHD (modelos matemáticos não-lineares) serão detalhados a seguir.

### 2.4.1 Filtro GM-PHD

O algoritmo referente ao filtro GM-PHD é composto por quatro etapas principais:

1. Predição para indivíduos nascidos espontaneamente e via *spawn*;
2. Predição para indivíduos sobreviventes;
3. Correção das componentes da função PHD;
4. Correção para todos os indivíduos.

sendo que estas quatro etapas estão descritas no Algoritmo 1. Para um maior detalhe, outro diagrama de blocos foi construído na Figura 2.3, detalhando as quatro etapas existentes dentro do processo de filtragem.

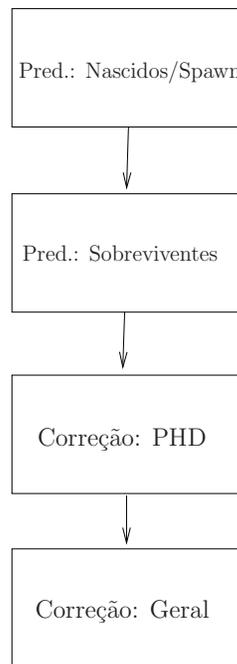


Figura 2.3: Etapas do processo de filtragem.

### 2.4.2 Filtro EK-PHD

O algoritmo referente ao filtro GM-PHD é composto pelas mesmas quatro etapas principais do filtro GM-PHD, no entanto, existem alguns pequenos detalhes que diferem do algoritmo apresentado anteriormente. Estes detalhes incluem o cálculo das matrizes jacobianas dadas nas equações (2.87) e (2.88). A seguir, encontra-se o Algoritmo 2, que detalha o filtro EK-PHD.

### 2.4.3 Filtro UK-PHD

Por último, tem-se o algoritmo do filtro UK-PHD. Este algoritmo baseia-se nos pontos *sigma* e seus respectivos pesos, descritos nos conjuntos de equações (2.89)—(2.91) e (2.92)—(2.93), respectivamente. Diferentemente do Algoritmo 2, o algoritmo para o filtro UK-PHD possui poucos passos idênticos ao do filtro GM-PHD. As etapas são estruturadas basicamente em cálculos de somas ponderadas, como se pode ver no Algoritmo 3, a seguir.

## 2.5 Síntese de Capítulo

Neste capítulo, foram apresentados os filtros estocásticos multi-alvo, formulados com base na teoria de CAF. O primeiro deles, o filtro bayesiano multi-alvo, tem como base as equações de filtragem do filtro bayesiano clássico, porém sua formulação é feita a partir das integrais de conjunto. Para evitar a complexidade das integrais de conjunto, existem aproximações—baseadas em algumas hipóteses—que fazem com que o filtro bayesiano multi-alvo seja mais simples de ser tratado matematicamente e computacionalmente.

Introduziu-se o filtro PHD que, baseado em algumas hipóteses sobre o cenário, simplifica as integrais de conjunto para as integrais clássicas multi-dimensionais. Ainda assim, sob o ponto de vista computacional, são necessárias outras aproximações com o intuito de diminuir a carga computacional de uma eventual implementação. Com isso, o filtro GM-PHD foi proposto como uma alternativa de simplificar o problema de estimativa de estados através de hipóteses de linearidade e de ruídos gaussianos de média nula.

Nos casos em que os modelos matemáticos são não-lineares, é possível relaxar algumas das hipóteses feitas em relação ao filtro GM-PHD e lidar adequadamente com este tipo de situação. O enfraquecimento das hipóteses de linearidade sobre os modelos matemáticos permite utilizar as técnicas de filtros clássicos da literatura, como o filtro de Kalman estendido e o filtro de Kalman *unscented* na forma de filtros lineares variantes no tempo, com a hipótese gaussiana mantida. Cada um deles possui uma técnica própria para tratar as não-linearidades. Ao final do capítulo, os algoritmos de cada um dos filtros foram apresentados.

---

**Algoritmo 1** Algoritmo para o Filtro GM-PHD.
 

---

**Dados de entrada:**  $w_{k|k}^i, \mathbf{x}_{k|k}^i, P_{k|k}^i, i = 1, \dots, n_{k|k}$  e  $Z_k$ .

**ETAPA 1**

$i = 0;$

**Para**  $j = 1, \dots, a_k$  **faça**

$i = i + 1;$

$$w_{k+1|k}^j = \beta_k^j, \mathbf{x}_{k+1|k}^j = \mathbf{x}_b^j, P_{k+1|k}^j = B_k^j;$$

**Fim Para**

**Para**  $j = 1, \dots, b_k$  **faça**

**Para**  $l = 1, \dots, n_{k|k}$  **faça**

$i = i + 1;$

$$w_{k+1|k}^i = w_{k+1|k}^l \gamma_k^j, \mathbf{x}_{k+1|k}^i = \mathbf{d}_k^j + E_k^j \mathbf{x}_{k|k}^l, P_{k+1|k}^i = G_k^i + E_k^j P_{k|k}^l (E_k^j)^T;$$

**Fim Para**

**Fim Para**

**ETAPA 2**

**Para**  $j = 1, \dots, n_{k|k}$  **faça**

$i = i + 1$

$$w_{k+1|k}^i = p_S w_{k|k}^j, \mathbf{x}_{k+1|k}^i = F_k \mathbf{x}_{k|k}^j, P_{k+1|k}^i = Q_k + F_k P_{k|k}^j (F_k)^T;$$

**Fim Para**

$n_{k+1|k} = i;$

**ETAPA 3**

**Para**  $j = 1, \dots, n_{k+1|k}$  **faça**

$$\mathbf{z}_{k+1|k}^j = H_{k+1} \mathbf{x}_{k+1|k}^j;$$

$$S_{k+1}^j = R_{k+1} + H_{k+1} P_{k+1|k}^j (H_{k+1})^T;$$

$$K_{k+1}^j = P_{k+1|k}^j (H_{k+1})^T (S_{k+1}^j)^{-1};$$

$$P_{k+1|k+1}^j = [I - K_{k+1}^j H_{k+1}] P_{k+1|k}^j;$$

**Fim Para**

**ETAPA 4**

**Para**  $j = 1, \dots, n_{k+1|k}$  **faça**

$$w_{k+1|k+1}^j = (1 - p_D) w_{k+1|k}^j, \mathbf{x}_{k+1|k+1}^j = \mathbf{x}_{k+1|k}^j, P_{k+1|k+1}^j = P_{k+1|k}^j;$$

**Fim Para**

$l = 0;$

**Para todo**  $\mathbf{z} \in Z_k$  **faça**

$l = l + 1;$

**Para**  $j = 1, \dots, n_{k+1|k}$  **faça**

$$w_{k+1|k+1}^{l, n_{k+1|k}+j} = p_D w_{k+1|k}^j \mathcal{N}(\mathbf{z}_{k+1|k}^j, S_{k+1}^j);$$

$$\mathbf{x}_{k+1|k+1}^{l, n_{k+1|k}+j} = \mathbf{x}_{k+1|k}^j + K_{k+1}^j (\mathbf{z} - \mathbf{z}_{k+1|k}^j);$$

$$P_{k+1|k+1}^{l, n_{k+1|k}+j} = P_{k+1|k}^j;$$

**Fim Para**

$$w_{k+1|k+1}^{l, n_{k+1|k}+j} := \frac{w_{k+1|k+1}^{l, n_{k+1|k}+j}}{\kappa_{k+1}(\mathbf{z}) + \sum_{i=1}^{n_{k+1|k}} w_{k+1|k+1}^{l, n_{k+1|k}+i}}, j = 1, \dots, n_{k+1|k};$$

**Fim Para todo**

$n_{k+1|k+1} = (l + 1)n_{k+1|k};$

**Dados de saída:**  $w_{k+1|k+1}^i, \mathbf{x}_{k+1|k+1}^i, P_{k+1|k+1}^i, i = 1, \dots, n_{k+1|k+1}$ .

---

---

**Algoritmo 2** Algoritmo para o Filtro EK-PHD.

---

**Dados de entrada:**  $w_{k|k}^i, \mathbf{x}_{k|k}^i, P_{k|k}^i, i = 1, \dots, n_{k|k}$  e  $Z_k$ .

**ETAPA 1** → Idêntica à Etapa 1 do filtro GM-PHD.

**ETAPA 2**

**Para**  $j = 1, \dots, n_{k|k}$  **faça**

$$i = i + 1$$

$$w_{k+1|k}^i = p_S w_{k|k}^j, \mathbf{x}_{k+1|k}^i = \varphi_k \left( \mathbf{x}_{k|k}^j \right), P_{k+1|k}^i = Q_k + J_{F_k}^j P_{k+1|k}^j \left( J_{F_k}^j \right)^T;$$

**Fim Para**

$$n_{k+1|k} = i;$$

**ETAPA 3**

**Para**  $j = 1, \dots, n_{k+1|k}$  **faça**

$$\mathbf{z}_{k+1|k}^j = \eta_k \left( \mathbf{x}_{k+1|k}^j \right);$$

$$S_{k+1}^j = R_{k+1} + J_{H_{k+1}}^j P_{k+1|k}^j \left( J_{H_{k+1}}^j \right)^T;$$

$$K_{k+1}^j = P_{k+1|k}^j \left( J_{H_{k+1}}^j \right)^T \left( S_{k+1}^j \right)^{-1};$$

$$P_{k+1|k+1}^j = \left[ I - K_{k+1}^j J_{H_{k+1}}^j \right] P_{k+1|k}^j;$$

**Fim Para**

**ETAPA 4** → Idêntica à Etapa 4 do filtro GM-PHD.

**Dados de saída:**  $w_{k+1|k+1}^i, \mathbf{x}_{k+1|k+1}^i, P_{k+1|k+1}^i, i = 1, \dots, n_{k+1|k+1}$ .

---

**Algoritmo 3** Algoritmo para o Filtro UK-PHD.

**Dados de entrada:**  $w_{k|k}^i$ ,  $\mathbf{x}_{k|k}^i$ ,  $P_{k|k}^i$ ,  $i = 1, \dots, n_{k|k}$  e  $Z_k$ .

**ETAPA 1** → Idêntica à Etapa 1 do filtro GM-PHD.

**ETAPA 1.1**

Para  $j = 1, \dots, i$  faça

$$\mu = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1|k}^j \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} P_{k+1|k}^j & 0 \\ 0 & R_{k+1} \end{bmatrix}$$

$$\{\mathcal{X}_k^l, W^l\}_{l=0}^{2L};$$

$$\mathcal{X}_k^l = \left[ \left( \mathbf{y}_{k+1|k}^l \right)^T, \boldsymbol{\nu}^T \right]^T;$$

$$\mathbf{z}_{k+1|k}^j = \sum_{l=0}^{2L} W^l \eta_k \left( \mathbf{y}_{k+1|k}^l \right);$$

$$S_{k+1}^j = \sum_{l=0}^{2L} W^l \left( \eta_k \left( \mathbf{y}_{k+1|k}^l \right) - \mathbf{z}_{k+1|k}^j \right) \left( \eta_k \left( \mathbf{y}_{k+1|k}^l \right) - \mathbf{z}_{k+1|k}^j \right)^T;$$

$$G_{k+1}^j = \sum_{l=0}^{2L} W^l \left( \mathbf{y}_{k+1|k}^l - \mathbf{x}_{k+1|k}^j \right) \left( \eta_k \left( \mathbf{y}_{k+1|k}^l \right) - \mathbf{z}_{k+1|k}^j \right)^T;$$

$$K_{k+1}^j = G_{k+1}^j \left( S_{k+1}^j \right)^{-1};$$

$$P_{k+1|k+1}^j = P_{k+1|k}^j - G_{k+1}^j \left( S_{k+1}^j \right)^{-1} \left( G_{k+1}^j \right)^T;$$

**Fim Para**

**ETAPA 2**

Para  $j = 1, \dots, n_{k+1|k}$  faça

$$i = i + 1;$$

$$w_{k+1|k}^i = p_S w_{k|k}^j;$$

$$\mu = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k|k}^i \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} P_{k|k}^i & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 \\ 0 & 0 & R_{k+1} \end{bmatrix}$$

$$\{\mathcal{X}_k^l, W^l\}_{l=0}^{2L};$$

$$\mathcal{X}_k^l = \left[ \left( \mathbf{y}_{k|k}^l \right)^T, \left( \mathbf{w}^l \right)^T, \boldsymbol{\nu}^T \right]^T;$$

$$\mathbf{x}_{k+1|k}^i = \sum_{l=0}^{2L} W^l \varphi_k \left( \mathbf{y}_{k|k}^l \right);$$

$$P_{k+1|k}^i = \sum_{l=0}^{2L} W^l \left( \varphi_k \left( \mathbf{y}_{k|k}^l \right) - \mathbf{x}_{k+1|k}^i \right) \left( \varphi_k \left( \mathbf{y}_{k|k}^l \right) - \mathbf{x}_{k+1|k}^i \right)^T;$$

$$\mathbf{z}_{k+1|k}^i = \sum_{l=0}^{2L} W^l \eta_k \left( \varphi_k \left( \mathbf{y}_{k|k}^l \right) \right);$$

$$S_{k+1}^i = \sum_{l=0}^{2L} W^l \left( \eta_k \left( \varphi_k \left( \mathbf{y}_{k|k}^l \right) \right) - \mathbf{z}_{k+1|k}^i \right) \left( \eta_k \left( \varphi_k \left( \mathbf{y}_{k|k}^l \right) \right) - \mathbf{z}_{k+1|k}^i \right)^T;$$

$$G_{k+1}^i = \sum_{l=0}^{2L} W^l \left( \varphi_k \left( \mathbf{y}_{k|k}^l \right) - \mathbf{x}_{k+1|k}^i \right) \left( \eta_k \left( \varphi_k \left( \mathbf{y}_{k|k}^l \right) \right) - \mathbf{z}_{k+1|k}^i \right)^T;$$

$$K_{k+1}^i = G_{k+1}^i \left( S_{k+1}^i \right)^{-1};$$

$$P_{k+1|k+1}^i = P_{k+1|k}^i - G_{k+1}^i \left( S_{k+1}^i \right)^{-1} \left( G_{k+1}^i \right)^T;$$

**Fim Para**

**ETAPA 3** → Idêntica à Etapa 4 do filtro GM-PHD.

**Dados de saída:**  $w_{k+1|k+1}^i$ ,  $\mathbf{x}_{k+1|k+1}^i$ ,  $P_{k+1|k+1}^i$ ,  $i = 1, \dots, n_{k+1|k+1}$ .

**Parte II**  
**Modelos de Movimentação de Indivíduos:**  
**Simulação e Filtragem**



## Modelos de Movimentação de Indivíduos

Em problemas de rastreamento de alvos manobrantos como aeronaves e veículos terrestres, seus respectivos comportamentos individuais de movimento são bem definidos ou categorizados. Por exemplo, um avião prestes a executar uma curva, inclina suas asas aos poucos para dentro da curva, executa o movimento e sai da trajetória curvilínea para retornar a uma trajetória retilínea, formando uma trajetória contínua e bem definida. Nos casos de veículos terrestres, também é possível observar comportamentos próprios de movimentação. Por exemplo, um veículo que vai executar uma curva à frente, na maioria das vezes, ele diminui a velocidade ao entrar na curva, executa-a e sai em uma trajetória retilínea, podendo aumentar a velocidade novamente.

Quando se passa para o ponto de vista de indivíduos caminhando ou correndo, a situação é completamente diferente, já que o comportamento de movimentação pode ser bem mais errático do que a de aeronaves e veículos terrestres. Ao observar pessoas caminhando, diversas situações podem ocorrer dentro de sua trajetória: paradas instantâneas, pequenas corridas, caminhadas em trilhas sinuosas, entre outras, pois se tratam de movimentos com menor inércia quando comparado a aeronaves e veículos terrestres.

Na literatura, não se encontra modelos de movimentação específicos para indivíduos. Desta forma, neste capítulo, serão apresentadas algumas propostas de modelos que tem como objetivo reproduzir os movimentos de pessoas da maneira mais verossímil possível. Estas propostas envolvem os denominados perfis probabilísticos. Estes perfis probabilísticos tem o objetivo de criar movimentações mais realistas aos movimentos de pessoas caminhando, correndo etc. Nesta tese, foram propostos três tipos de perfis: o perfil “gota”, o perfil “folha” e o perfil “balão”. Os nomes dos perfis vêm do fato de terem formatos semelhantes à uma gota d’água, à uma folha de planta e a um balão de ar.

Ao final deste capítulo, um teste de objetividade será aplicado a cada um dos perfis propostos, com o intuito de analisar o comportamento de cada um dos perfis propostos relacionados aos seus respectivos parâmetros. A objetividade pode classificar indivíduos mais focados em chegar a um destino e indivíduos mais dispersos, sem um objetivo definido.

## 3.1 Perfis de Distribuição de Probabilidade

Nesta seção, serão tratados os perfis do ângulo  $\alpha$  de desvio de direção ou de *heading* dos indivíduos. Este ângulo traz a informação da direção na qual o indivíduo está se movimentando. Estes perfis baseiam-se na definição das distribuições acumuladas e funções densidade de probabilidade da orientação. Os três perfis propostos aqui são os perfis “gota”, “folha” e “balão”, que serão apresentados a seguir.

### 3.1.1 Perfil “Gota”

O perfil “gota” pode ser analisado a partir do diagrama de orientação apresentado na Figura 3.1. Os vetores que têm como origem o ponto central (indivíduo), e vão em direção à linha da “gota”, representam as possíveis direções e sentidos para os quais ele poderá ir. Cada uma das magnitudes dos respectivos vetores é diretamente proporcional à probabilidade deste indivíduo se dirigir àquela direção correspondente, ou seja, quanto maior a magnitude do vetor, maior a probabilidade do indivíduo seguir para direção correspondente. A posição da gota na Figura 3.1 refere-se a uma movimentação para o norte e corresponde à direção alinhada à orientação do indivíduo no intervalo de tempo anterior.

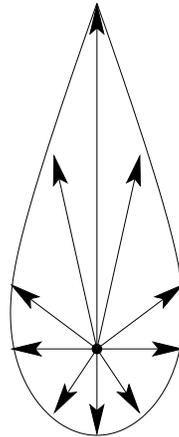


Figura 3.1: Perfil da distribuição de probabilidade para mudança de direção – “Gota”.

Além da característica do perfil “gota”, este mesmo perfil pode sofrer deformações, dependendo da objetividade com a qual o indivíduo se desloca: quanto mais objetivo é o indivíduo em relação a um destino, mais afinado fica o perfil e, conseqüentemente, as probabilidades de mudar para uma direção oposta ou muito diferente na qual a pessoa está diminuem significativamente. As deformações da gota estão bem ilustradas na Figura 3.2: quando a objetividade é nula (p. ex., indivíduo parado), caso em que o perfil “gota” se degenera, tornando-se uma circunferência, até a objetividade máxima, caso em que a gota está bastante afinada.

### 3.1.2 Distribuição de probabilidade – Perfil “Gota”

Para que seja determinada a distribuição de probabilidade do perfil “gota”, serão definidos três elementos básicos, em ordem de execução:

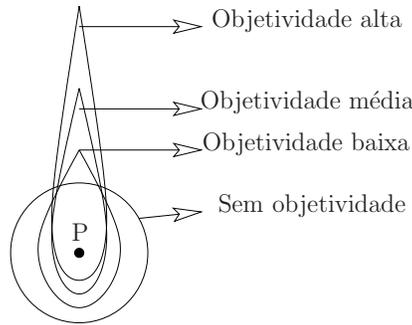


Figura 3.2: Perfis “gota’ para uma direção com diferentes objetividades.

- (i) Escolha da função densidade de probabilidade  $f_A(\alpha)$
- (ii) Determinação da função distribuição acumulada  $p_A(\alpha)$
- (iii) Obtenção do ângulo  $\alpha$  através da função inversa  $\alpha = p_A^{-1}(u)$

Dos passos listados acima, primeiramente deve-se escolher uma função densidade de probabilidade  $f_A(\alpha)$  para o ângulo de desvio de *heading* que tenha um perfil similar ao de uma gota. A escolha feita é dada pela seguinte densidade:

$$f_A(\alpha) = \frac{a}{2(a|\alpha| + 1) \ln(n)}, \quad \alpha \in [-\pi, \pi] \quad (3.1)$$

em que  $a \in \mathbb{R}$ .

Escolhida a função densidade de probabilidade, dada em (3.1), a segunda etapa deve ser executada, ou seja, obter a função distribuição acumulada  $p_A(\alpha)$  a partir da função densidade de probabilidade  $f_A(\alpha)$ . Para tal, basta calcular  $\int_{-\infty}^{\alpha} f_A(t)dt$  levando em conta os intervalos de  $\alpha$  adequados, isto é,  $\alpha \in [-\pi, 0]$  e  $\alpha \in [0, \pi]$ .

- $-\pi \leq \alpha < 0$ :

$$\int_{-\infty}^{\alpha} f_A(t)dt = \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{a}{2(a|t| + 1) \ln(n)} dt \quad (3.2)$$

$$= \int_{-\pi}^{\alpha} \frac{a}{2(-at + 1) \ln(n)} dt \quad (3.3)$$

$$= \frac{1}{2 \ln(n)} \ln(1 - at) \Big|_{\alpha}^{-\pi} \quad (3.4)$$

$$\therefore \frac{1}{2} \log_n \left( \frac{1 + a\pi}{1 - a\alpha} \right) \quad (3.5)$$

- $0 \leq \alpha \leq \pi$ :

$$\int_{-\infty}^{\alpha} f_A(t) dt = \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{a}{2(a|t| + 1) \ln(n)} dt \quad (3.6)$$

$$= \int_{-\pi}^0 \frac{a}{2(-at + 1) \ln(n)} dt + \int_0^{\alpha} \frac{a}{2(at + 1) \ln(n)} dt \quad (3.7)$$

$$= \frac{1}{2 \ln(n)} \ln(1 - at) \Big|_0^{-\pi} + \frac{1}{2 \ln(n)} \ln(1 + at) \Big|_0^{\alpha} \quad (3.8)$$

$$\therefore \frac{1}{2} \log_n ((1 + a\pi)(1 + a\alpha)) \quad (3.9)$$

Portanto:

$$p_A(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2} \log_n \left( \frac{1 + a\pi}{1 - a\alpha} \right) & , \alpha \in [-\pi, 0] \\ \frac{1}{2} \log_n ((1 + a\pi)(1 + a\alpha)) & , \alpha \in [0, \pi] \end{cases} \quad (3.10)$$

Note que ainda resta determinar a constante  $a$  em (3.10). Este cálculo é feito obtendo a distribuição acumulada  $p_A(\alpha)$  em  $\alpha = \pi$ . Neste ponto, a distribuição deverá valer 1:

$$p_A(\alpha)|_{\alpha=\pi} = 1 \quad (3.11)$$

$$\frac{1}{2} \log_n ((1 + a\pi)(1 + a\pi)) = 1 \quad (3.12)$$

$$\therefore a = \frac{n - 1}{\pi} \quad (3.13)$$

Na Figura 3.3, foi traçada a função densidade de probabilidade para quatro valores de  $n = 1.5, \pi, 5, 10$ .

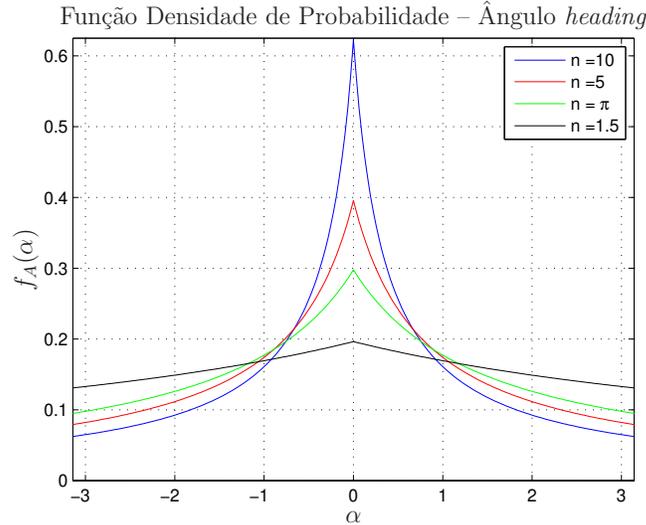


Figura 3.3: Função densidade de probabilidade – Perfil “gota”.

Para que se verifique o formato em gota da densidade dada em 3.1, é necessário inserir a função densidade de probabilidade sob o ponto de vista polar. Na Figura 3.4, encontram-se quatro perfis do tipo “gota” para os mesmos quatro valores de  $n$  anteriores.

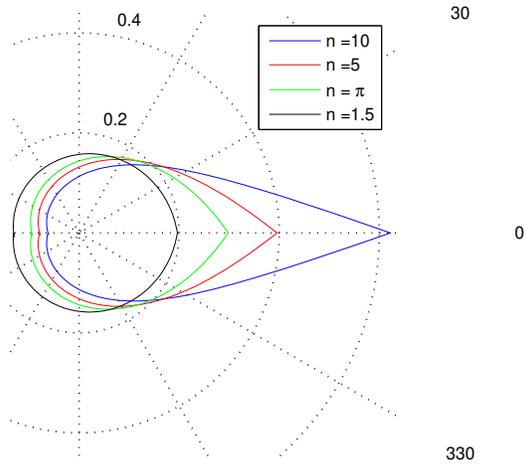


Figura 3.4: Perfis da distribuição “gota”.

Note que, para valores cada vez menores de  $n$ , o perfil se aproxima de uma circunferência. Por outro lado, quanto maior o valor de  $n$  mais alongada fica o formato da gota. Isso indica que o parâmetro  $n$  está diretamente ligado à manutenção da direção do movimento do indivíduo, como foi ilustrado na Figura 3.2.

Para a finalidade de simulação, a terceira e última etapa envolve a obtenção do ângulo  $\alpha$  através da função inversa da função distribuição acumulada  $p_A^{-1}(u) = \alpha$ , em que  $u$  é uma variável aleatória do tipo uniforme, isto é,  $\mathcal{U}(0, 1)$ . Desta forma, tem-se que:

- Se  $0 \leq u < 0.5 (\equiv -\pi \leq \alpha < 0)$ :

$$\frac{1}{2} \log_n \left( \frac{1 + a\pi}{1 - a\alpha} \right) = u \quad (3.14)$$

$$\frac{1 + a\pi}{1 - a\alpha} = n^{2u} \quad (3.15)$$

$$\text{então: } \alpha(u) = \pi \frac{1 - n^{1-2u}}{n - 1} \quad (3.16)$$

- Se  $0.5 \leq u \leq 1.0 (\equiv 0 \leq \alpha \leq \pi)$ :

$$\frac{1}{2} \log_n ((1 + a\pi)(1 + a\alpha)) = u \quad (3.17)$$

$$(1 + a\pi)(1 + a\alpha) = n^{2u} \quad (3.18)$$

$$\text{então: } \alpha(u) = \pi \frac{n^{2u-1} - 1}{n - 1} \quad (3.19)$$

Portanto:

$$\alpha(u) = \begin{cases} \pi \frac{1 - n^{1-2u}}{n - 1} & , u \in [0, 0.5) \\ \pi \frac{n^{2u-1} - 1}{n - 1} & , u \in [0.5, 1.0] \end{cases} \quad (3.20)$$

Baseado no sorteio estabelecido na equação (3.20), criou-se um histograma polar, com o intuito de observar como se comporta a incidência de valores para o ângulo de desvio de *heading*. Na Figura 3.5, encontra-se o histograma polar para o perfil “gota” para um valor  $n = 10$  e um total de 10.000 sorteios.

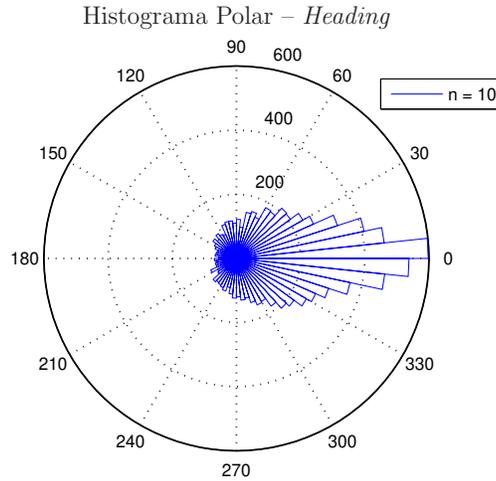


Figura 3.5: Perfil “gota”: histograma polar para o ângulo de *heading*.

Note que a incidência dos valores sorteados dos ângulos  $\alpha$  reflete o perfil gota como era de se esperar. É possível observar também que incidência destes sorteios mostra a aleatoriedade de movimentação de uma trajetória, permitida pela distribuição do tipo “gota”.

### 3.1.3 Perfil “Folha”

O perfil “folha” pode ser analisado a partir do diagrama apresentado na Figura 3.6, que refere-se a uma movimentação para o norte e corresponde à direção alinhada à orientação do indivíduo no intervalo de tempo anterior. Os vetores que têm como origem o ponto central, que representa o indivíduo, e vão em direção à linha que dá o formato à folha, assim como no perfil “gota”, representam as possíveis direções e sentidos os quais o indivíduo poderá tomar no instante atual, a partir da referência da direção no instante imediatamente anterior. Cada uma das magnitudes dos respectivos vetores é diretamente proporcional à probabilidade deste indivíduo se dirigir àquela direção correspondente, identicamente ao caso do perfil “gota”.

Além da característica do perfil “folha”, este perfil pode sofrer conformações distintas, dependendo da manutenção da direção do movimento do indivíduo (objetividade), de forma semelhante ao ilustrado pela Figura 3.2.

### 3.1.4 Distribuição de probabilidade – Perfil “Folha”

Assim como foi trabalhado para o perfil “gota”, também serão listados três passos necessários para definir adequadamente o perfil “folha”:

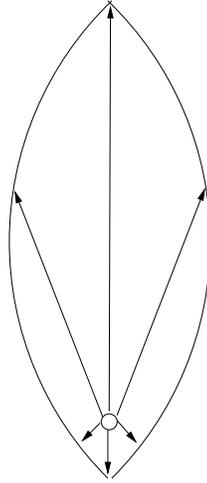


Figura 3.6: Perfil da distribuição de probabilidade para mudança de direção – “Folha”.

- (i) Escolha da função densidade de probabilidade  $f_A(\alpha)$
- (ii) Determinação da função distribuição acumulada  $p_A(\alpha)$
- (iii) Obtenção do ângulo  $\alpha$  através da função inversa  $\alpha = p_A^{-1}(u)$

Dos passos listados acima, primeiramente deve-se escolher uma função densidade de probabilidade  $f_A(\alpha)$  para o ângulo de desvio de *heading* que tenha um perfil similar ao de uma folha. A escolha feita é dada pela seguinte densidade:

$$f_A(\alpha) = c\lambda e^{-\lambda|\alpha|}, \alpha \in [-\pi, \pi] \quad (3.21)$$

Cumprida a primeira etapa, a obtenção da distribuição acumulada é o próximo passo. Esta deve ser calculada pela integral  $\int_{-\infty}^{\alpha} f_A(t)dt$  levando em conta os intervalos de  $\alpha$  adequados, isto é,  $\alpha \in [-\pi, 0]$  e  $\alpha \in [0, \pi]$ .

- $-\pi \leq \alpha < 0$ :

$$p_A(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} f_A(t)dt \quad (3.22)$$

$$= \int_{-\infty}^{\alpha} c\lambda e^{-\lambda|t|} dt = \int_{-\pi}^{\alpha} c\lambda e^{\lambda t} dt \quad (3.23)$$

$$= ce^{\lambda t} \Big|_{-\pi}^{\alpha} \quad (3.24)$$

$$\therefore p_A(\alpha) = c(e^{\lambda\alpha} - e^{-\lambda\pi}) \quad (3.25)$$

- $0 \leq \alpha \leq \pi$ :

$$p_A(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} f_A(t) dt = \int_{-\infty}^{\alpha} c\lambda e^{-\lambda|t|} dt \quad (3.26)$$

$$= \int_{-\pi}^0 c\lambda e^{\lambda t} dt + \int_0^{\alpha} c\lambda e^{-\lambda t} dt \quad (3.27)$$

$$= c \left( e^{\lambda t} \Big|_{-\pi}^0 + e^{-\lambda t} \Big|_0^{\alpha} \right) \quad (3.28)$$

$$\therefore p_A(\alpha) = c(2 - e^{-\lambda\pi} - e^{-\lambda\alpha}) \quad (3.29)$$

Portanto:

$$p_A(\alpha) = \begin{cases} c(e^{\lambda\alpha} - e^{-\lambda\pi}) & , \quad -\pi \leq \alpha < 0 \\ c(2 - e^{-\lambda\pi} - e^{-\lambda\alpha}) & , \quad 0 \leq \alpha \leq \pi \end{cases} \quad (3.30)$$

Note que ainda resta determinar a constante  $c$  em (3.30). Assim como para o perfil “gota”, este cálculo é feito determinando a distribuição acumulada  $p_A(\alpha)$  em  $\alpha = \pi$ . Neste ponto, a distribuição deverá valer 1:

$$p_A(\alpha)|_{\alpha=\pi} = 1 \quad (3.31)$$

$$c(2 - e^{-\lambda\pi} - e^{-\lambda\pi}) = 1 \quad (3.32)$$

$$\therefore c = \frac{1}{2(1 - e^{-\lambda\pi})} \quad (3.33)$$

Na Figura 3.7, foi traçada a função densidade de probabilidade dada em (3.21) para quatro valores de  $\lambda = 0.9, 1, \pi, 5$

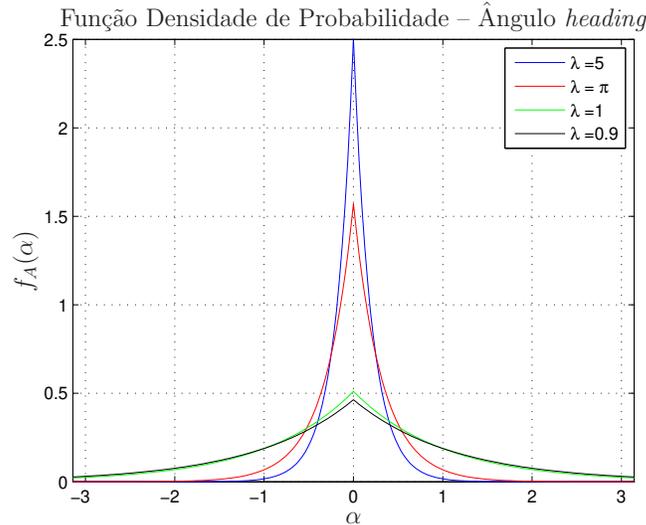


Figura 3.7: Função densidade de probabilidade – Perfil “folha”.

Note que as densidades traçadas na Figura 3.7 são semelhantes àsquelas da Figura 3.3 para o caso do perfil “gota”. Já na Figura 3.8, temos o formato polar da densidade de probabilidade, para os mesmos quatro valores de  $\lambda$ .

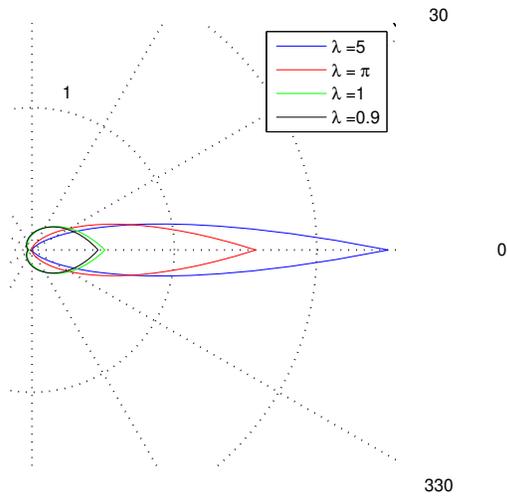


Figura 3.8: Perfis da distribuição “folha”.

Observe que o formato da função densidade de probabilidade, sob o ponto de vista polar, remete a um formato de folha. Inclusive é possível perceber que o perfil “folha” possui um formato mais alongado, o que traz uma objetividade maior ao caminhar do indivíduo. Observe também que o parâmetro  $\lambda$  tem a mesma função do parâmetro  $n$  na questão da objetividade; quanto maior o valor de  $\lambda$ , mais alongado é o perfil e vice-versa.

Para a finalidade de simulação, a terceira e última etapa envolve a obtenção do ângulo  $\alpha$  através da função inversa da função distribuição acumulada  $p_A^{-1}(u) = \alpha$ , em que  $u$  é uma variável aleatória do tipo uniforme, isto é,  $\mathcal{U}(0, 1)$ . Desta forma, considerando  $c$  dado pela equação (3.33), tem-se que:

- Se  $0 \leq u < 0.5 (\equiv -\pi \leq \alpha < 0)$ :

$$p_A(\alpha) = c(e^{\lambda\alpha} - e^{-\lambda\pi}) = u \quad (3.34)$$

$$\text{então: } \alpha(u) = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{u + ce^{-\lambda\pi}}{c} \right) \quad (3.35)$$

- Se  $0.5 \leq u \leq 1.0 (\equiv 0 \leq \alpha \leq \pi)$ :

$$p_A(\alpha) = c(2 - e^{-\lambda\pi} - e^{-\lambda\alpha}) = u \quad (3.36)$$

$$e^{-\lambda\alpha} = -\frac{u}{c} + 2 - e^{-\lambda\pi} \quad (3.37)$$

$$\text{então: } \alpha(u) = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{c}{2c - (u + ce^{-\lambda\pi})} \right) \quad (3.38)$$

sendo que a constante  $c$  é dada pela expressão em (3.33). Portanto:

$$\alpha(u) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{u + ce^{-\lambda\pi}}{c} \right) & , u \in [0, 0.5) \\ \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{c}{2c - (u + ce^{-\lambda\pi})} \right) & , u \in [0.5, 1.0] \end{cases} \quad (3.39)$$

Baseado neste sorteio uniforme estabelecido na equação (3.39), criou-se novamente um histograma polar, cujo objetivo é verificar como se dá a incidência de valores para o ângulo de desvio de *heading*. Na Figura 3.9, encontra-se o histograma polar para o perfil “folha” para um valor  $\lambda = 3$  e um total de 10.000 sorteios.

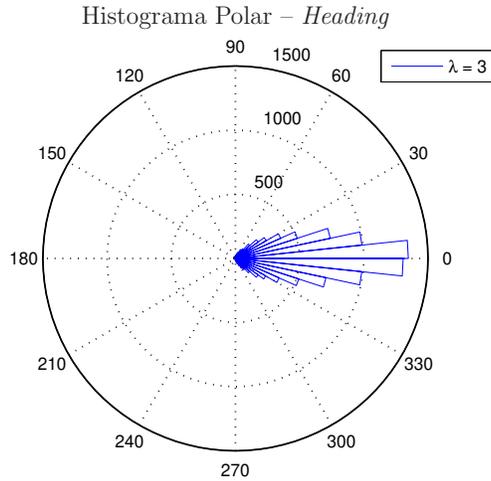


Figura 3.9: Perfil “folha”: histograma polar do ângulo de desvio de *heading*.

Observando o histograma na Figura 3.9, pode-se notar que a incidência é elevada na direção mais alongada do perfil para o valor de  $\lambda = 3$ , indicando maior objetividade do indivíduo em seguir em frente e com menos chances de alterar de direção, quando comparado ao perfil “gota”.

### 3.1.5 Perfil “Balão”

O terceiro e último perfil proposto aqui é o perfil em formato de balão. Tal perfil pode ser analisado a partir do diagrama apresentado na Figura 3.10, que refere-se a uma movimentação para o norte e corresponde à direção alinhada à orientação do indivíduo no intervalo de tempo anterior. Os vetores que têm como origem o ponto central, que representa o indivíduo, e vão em direção à linha que dá o formato ao balão. Estes vetores representam as possíveis direções e sentidos os quais o indivíduo poderá tomar no instante atual, a partir da referência da direção no instante imediatamente anterior. Cada uma das magnitudes dos respectivos vetores é diretamente proporcional à probabilidade deste indivíduo se dirigir àquela direção correspondente.

Assim como os demais perfis apresentados, este perfil pode sofrer conformações distintas, dependendo da manutenção da direção do movimento do indivíduo (objetividade), de forma semelhante ao ilustrado pela Figura 3.2.

### 3.1.6 Distribuição de probabilidade – Perfil “Balão”

Assim como foi desenvolvido para os perfis anteriores, também serão listados três passos necessários para definir adequadamente o perfil “balão”:

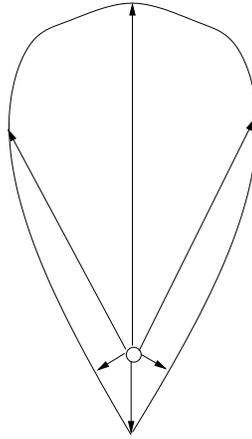


Figura 3.10: Perfil da distribuição de probabilidade para mudança de direção – “Balão”.

- (i) Escolha da função densidade de probabilidade  $f_A(\alpha)$
- (ii) Determinação da função distribuição acumulada  $p_A(\alpha)$
- (iii) Obtenção do ângulo  $\alpha$  através da função inversa  $\alpha = p_A^{-1}(u)$

Relativo às duas primeiras etapas, a função densidade de probabilidade escolhida é a densidade gaussiana, dada por:

$$f_A(\alpha) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\alpha - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.40)$$

sendo que sua função distribuição acumulada é dada por:

$$p_A(\alpha) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha - \mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right] \quad (3.41)$$

em que

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x e^{-t^2} dt \quad (3.42)$$

Na Figura 3.11, foi traçada a função densidade de probabilidade dada em (3.40) para quatro valores de variância  $\sigma = 0.45, 0.55, 0.65, 0.75$ , mantendo o valor da média nulo, isto é,  $\mu = 0$ . Já na Figura 3.12, temos o formato polar da densidade de probabilidade, para os mesmos quatro valores de  $\sigma$ .

Note que a distribuição acumulada  $p_A(\alpha)$  depende de  $\operatorname{erf}(x)$ , uma função que impede a obtenção da função inversa  $p_A^{-1}(u)$  de forma analítica. Como a terceira etapa tem a finalidade de simulação, a determinação de  $p_A^{-1}(u)$  será feita considerando as funções  $y = \operatorname{erf}(x)$  e sua inversa,  $x = \operatorname{erf}^{-1}(y)$ , as quais são comumente encontradas e implementadas em *softwares* matemáticos, como o MATLAB, e portanto podem ser calculadas numericamente em simulações. Dessa forma,

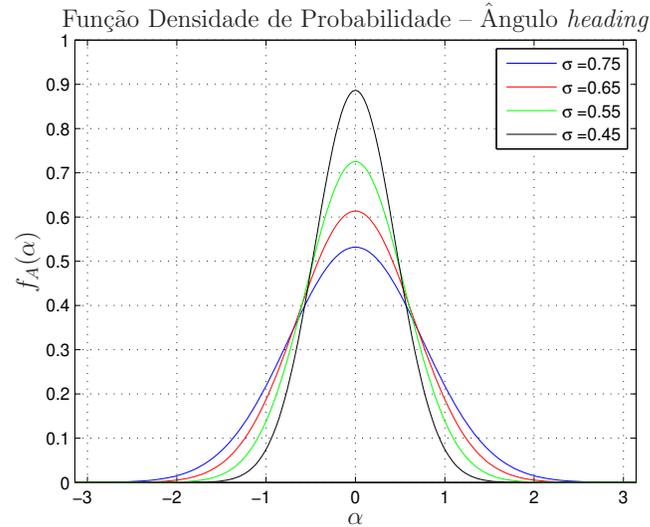


Figura 3.11: Função densidade de probabilidade – Perfil “balão”.

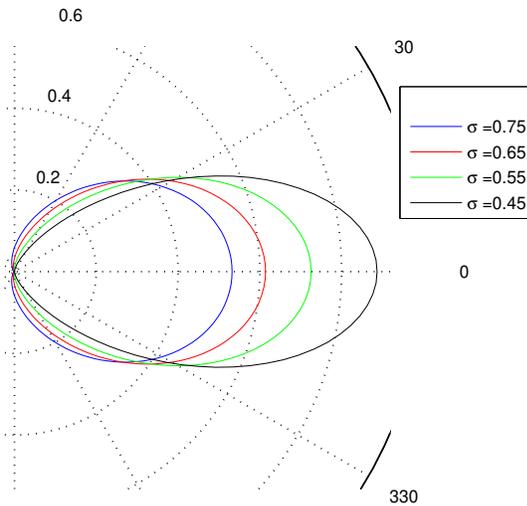


Figura 3.12: Perfis da distribuição “balão”.

tem-se:

$$p_A(\alpha) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{\alpha - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right] = u \sim \mathcal{U}(0, 1) \quad (3.43)$$

$$\operatorname{erf} \left( \frac{\alpha - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) = 2u - 1 \quad (3.44)$$

$$\therefore \alpha(u) = \operatorname{erf}^{-1}(2u - 1)\sqrt{2}\sigma + \mu \quad (3.45)$$

Baseado neste sorteio uniforme estabelecido na equação (3.45), um novo histograma polar foi obtido, verificando como se dá a incidência de valores para o ângulo de desvio de *heading*. Na Figura 3.13, encontra-se o histograma polar para o perfil “balão” para um valor  $\sigma = 1$  e um

total de 10.000 sorteios.

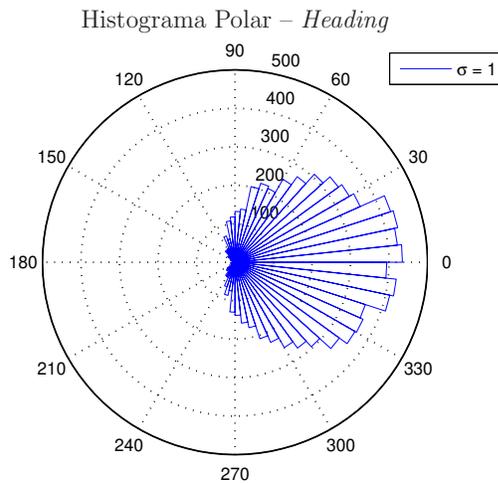


Figura 3.13: Perfil “balão”: histograma polar do ângulo de desvio de *heading*.

Note que a incidência dos ângulos de desvio de *heading* são bem mais espalhados à frente do indivíduo, conforme era esperado, devido ao formato do perfil.

## 3.2 Teste de Objetividade

Apresentadas as três propostas de perfil—“gota”, “folha” e “balão”— será aplicado um teste sobre tais perfis, com o intuito de verificar o comportamento do perfis quanto à objetividade de cada um deles, isto é, observar o quão objetivo é o indivíduo para se locomover de um destino a outro.

A característica de objetividade está diretamente ligada a cada um dos parâmetros específicos de cada um dos perfis: o parâmetro  $n$  para o perfil “gota”, o parâmetro  $\lambda$  para o perfil “folha” e o parâmetro  $\sigma$  para o perfil “balão”. Com base nestes três parâmetros, será verificado o comportamento de objetividade em uma trajetória simples.

Para realizar o teste de objetividade, será criado um cenário bidimensional bastante simples, em que apenas um indivíduo é gerado sobre um ponto na cor magenta e caminha em direção à região em preto, onde termina sua trajetória. Para os três perfis, adotou-se uma velocidade constante média com magnitude  $v = 1.5\text{m/s}$ , com um desvio padrão de  $\sigma = 0.5\text{m/s}$  em torno do valor médio.

Mais detalhes e discussões mais aprofundadas sobre os testes realizados a seguir, encontram-se nos Capítulos 4 e 6, relativo aos testes e simulações.

### Perfil “Gota”

O primeiro teste leva em conta o perfil “gota”. As Figuras 3.14 e 3.15 retratam as trajetórias para os valores  $n = 10$  e  $n = 100$ , respectivamente, sendo que as pequenas flechas azuis

representam o vetor velocidade  $e$ , conseqüentemente, contém a informação do ângulo de desvio de *heading*, além da magnitude relativa da velocidade.

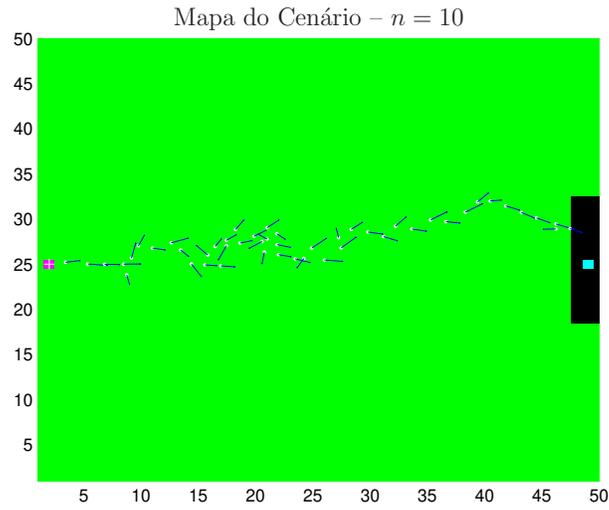


Figura 3.14: Trajetória modelada por perfil “gota” ( $n = 10$ ).

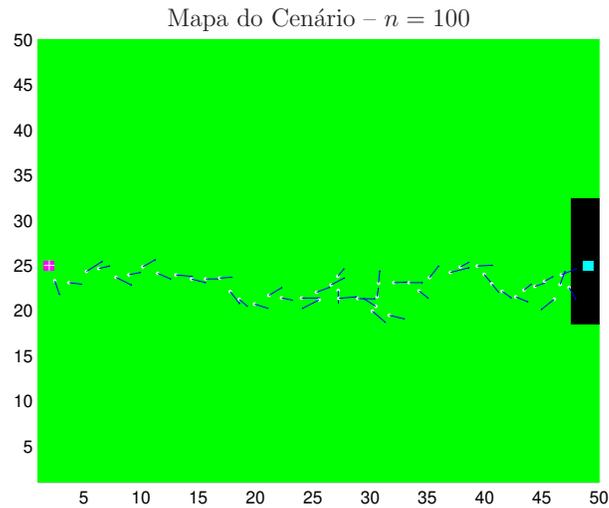


Figura 3.15: Trajetória modelada por perfil “gota” ( $n = 100$ ).

Algo interessante a ser observado é que, mesmo alterando o valor do parâmetro  $n$  em dez vezes, a trajetória do indivíduo possui aproximadamente o mesmo comportamento do ponto de vista de objetividade, não apresentando visualmente grandes diferenças. Alguns testes foram feitos para  $n = 1000$ , conforme pode ser verificado na Figura 3.16, com o intuito de verificar se realmente a variação do parâmetro  $n$  é pouco sensível com respeito à objetividade da trajetória.

Ao aumentar o valor de  $n$  para 1000, é possível notar trechos em que a trajetória torna-se mais objetiva, porém ainda nota-se uma falta de objetividade durante a trajetória. Para verificar de

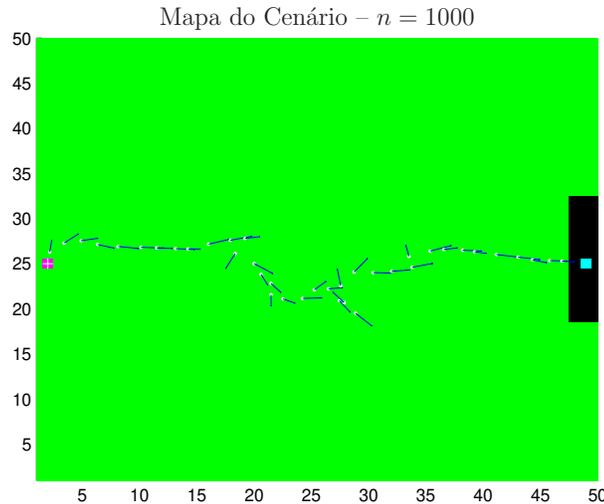


Figura 3.16: Trajetória modelada por perfil “gota” –  $n = 1000$ .

uma maneira sistemática a influência do parâmetro  $n$  na variabilidade das trajetórias, analisou-se a variância da variável aleatória do ângulo de desvio de *heading*, cuja função densidade de probabilidade  $f_A(\alpha)$  é dada na equação (3.1). Esta variância pode ser obtida pela definição clássica, supondo média nula:

$$\sigma_{\text{gota}}^2(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \alpha^2 \frac{a}{2(a|\alpha| + 1) \ln(n)} d\alpha, \quad a = \frac{n-1}{\pi} \quad (3.46)$$

Utilizou-se uma ferramenta encontrada na *internet* chamada *Wolfram Alpha*<sup>1</sup>. Esta ferramenta fornece diversos resultados matemáticos, tanto numéricos quanto analíticos. Utilizando tal ferramenta, foram obtidos dez valores de  $\sigma_{\text{gota}}^2$  para dez valores de  $n = 2, 10, 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400$ . Com estes valores, foi traçado o gráfico da variância  $\sigma_{\text{gota}}^2$  em função do parâmetro  $n$ , dado na Figura 3.17.

Observando a Figura 3.17, note que a variância praticamente não se altera para valores elevados do parâmetro  $n$ . Portanto, independentemente de aumentos consideráveis no valor do parâmetro  $n$ , a variabilidade da trajetória não se altera de forma significativa, devido à pequena variação de  $\sigma_{\text{gota}}^2$  para valores elevados de  $n$ . Isso pôde ser verificado nas Figuras 3.14–3.16.

### Perfil “Folha”

O segundo teste leva em conta o perfil “folha”. As Figuras 3.18 e 3.19 retratam as trajetórias para os valores  $\lambda = 2$  e  $\lambda = 5$ , respectivamente, sendo que as pequenas flechas azuis representam o vetor velocidade e, conseqüentemente, contém a informação do ângulo de desvio de *heading*, além da magnitude relativa da velocidade.

Diferentemente do caso do perfil “gota”, a trajetória do indivíduo possui comportamentos bem distintos. No caso em que  $\lambda = 2$ , a trajetória muda bastante de direção antes de chegar

<sup>1</sup><https://www.wolframalpha.com/>

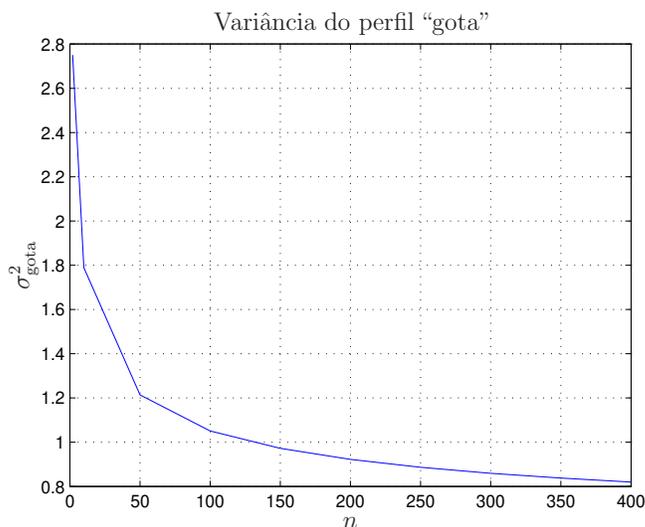


Figura 3.17: Variância para o perfil "gota".

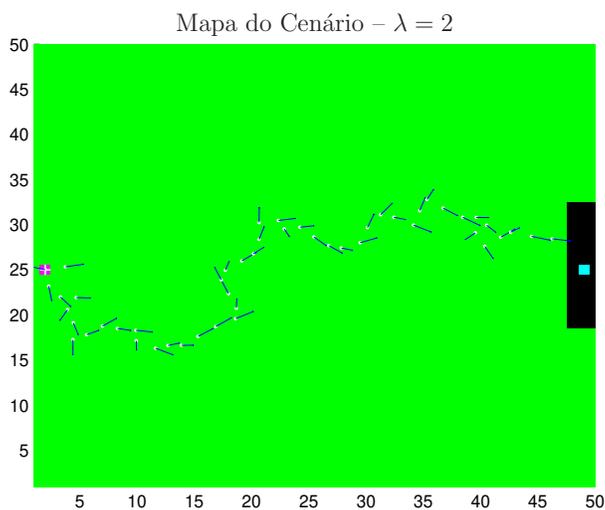


Figura 3.18: Trajetória modelada por perfil "folha" ( $\lambda = 2$ ).

ao seu destino final. Já no caso em que  $\lambda = 5$ , a trajetória apresenta um comportamento mais objetivo com relação ao movimento em direção ao destino final.

Para verificar a influência do parâmetro  $\lambda$  na variabilidade das trajetórias de um modo sistemático, analisou-se a variância da variável aleatória do ângulo de desvio de *heading*, cuja função densidade de probabilidade  $f_A(\alpha)$  é dada na equação (3.21). Esta variância pode ser obtida pela definição clássica, supondo média nula:

$$\sigma_{\text{folha}}^2(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \alpha^2 c \lambda e^{-\lambda|\alpha|} d\alpha, \quad c = \frac{1}{2(1 - e^{-\lambda\pi})} \quad (3.47)$$

Utilizando novamente a ferramenta *Wolfram Alpha*, calculou-se a integral em (3.47), obtendo

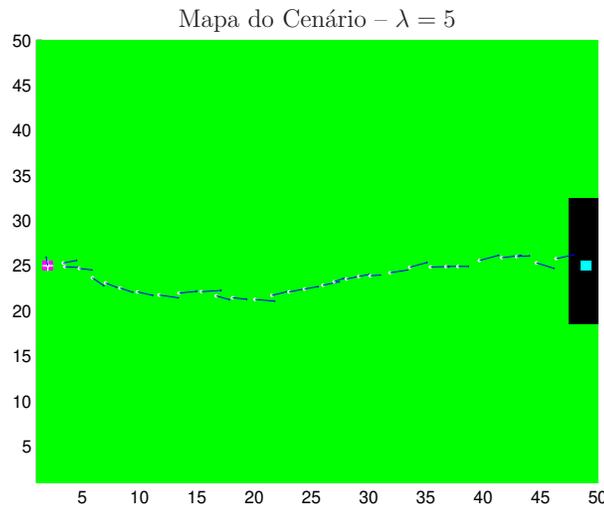


Figura 3.19: Trajetória modelada por perfil “folha” ( $\lambda = 5$ ).

o seguinte resultado, em função do parâmetro  $\lambda$ :

$$\sigma_{\text{folha}}^2(\lambda) = -\frac{\pi^2\lambda^2 + 2\pi\lambda - 2e^{\lambda\pi} + 2}{\lambda^2(e^{\lambda\pi} - 1)} \quad (3.48)$$

A partir do resultado na equação (3.48), plotou-se o gráfico da variância  $\sigma_{\text{folha}}^2$  em função do parâmetro  $\lambda$ , dado na Figura 3.20.

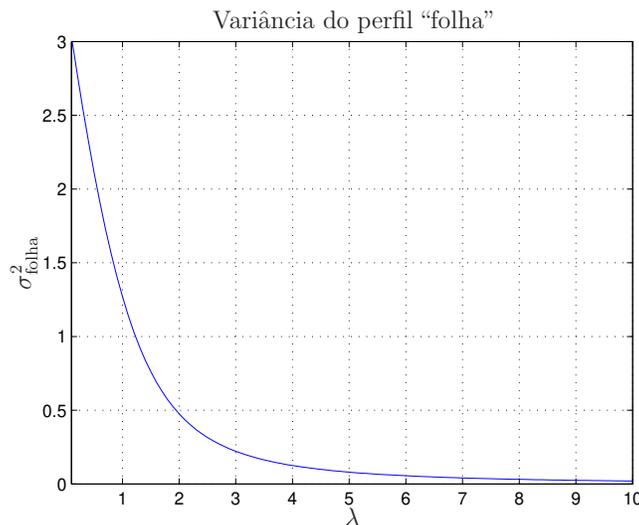


Figura 3.20: Variância para o perfil “folha”.

Observando o gráfico da Figura 3.20, note que, para valores a partir de  $\lambda = 4$ , a variância começa a se estabilizar em um valor próximo de zero. Este gráfico mostra também que o aumento do parâmetro  $\lambda$  influencia diretamente no aumento da objetividade das trajetórias,

ou seja, maior o valor de  $\lambda$ , mais objetivo é o indivíduo, e vice-versa. No entanto, a partir de  $\lambda = 4$ , o aumento desta objetividade passa a ser imperceptível, devido à estabilização de  $\sigma_{\text{folha}}^2$  em valores baixos.

### Perfil “Balão”

O terceiro e último teste leva em conta o perfil “balão”. As Figuras 3.21 e 3.22 retratam as trajetórias para os valores  $\sigma = 0.1$  e  $\sigma = 1.0$ , respectivamente, sendo que as pequenas flechas azuis representam a direção do vetor velocidade e, conseqüentemente, o ângulo de desvio de *heading*.

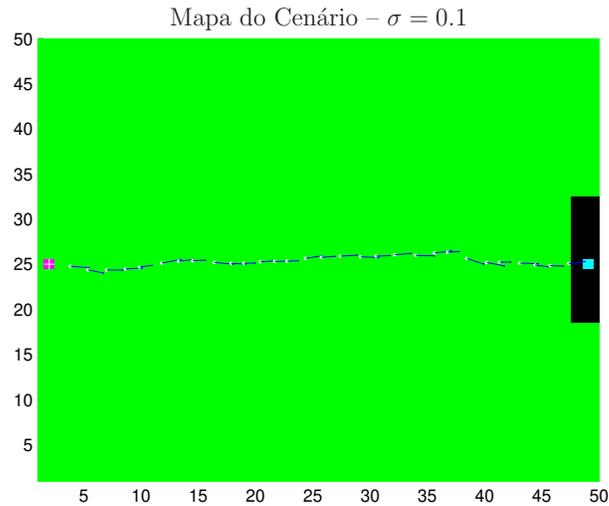


Figura 3.21: Trajetória modelada por perfil “balão” ( $\sigma = 0.1$ ).

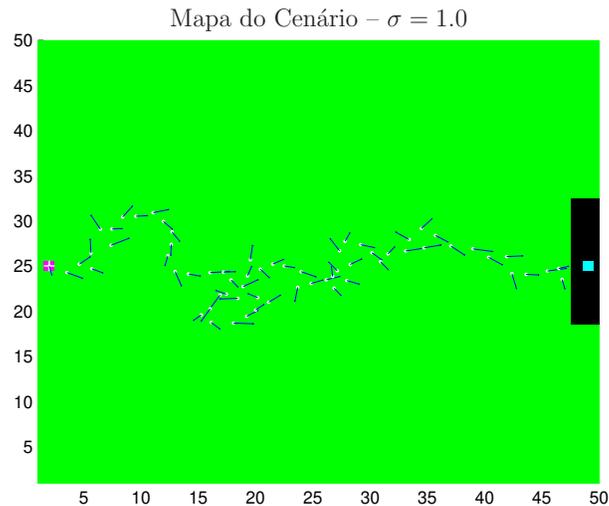


Figura 3.22: Trajetória modelada por perfil “balão” ( $\sigma = 1.0$ ).

O terceiro caso apresenta o seguinte comportamento: para um valor baixo de  $\sigma$ , a trajetória é praticamente direta em relação ao destino final, bastante objetiva; para um valor dez vezes maior, a trajetória se torna mais variante sob o ponto de vista da direção tomada. Nota-se que a objetividade do indivíduo é inversamente proporcional ao parâmetro  $\sigma$ . Este fenômeno é esperado, pois quanto maior a variância, maior a variabilidade da trajetória (menor objetividade), e vice-versa.

Dos três casos testados, pode-se dizer que os perfis “folha” e “balão” são aqueles que melhor podem reproduzir diversos tipos de trajetórias, com mais objetividade ou menos objetividade. No caso do perfil “gota”, independentemente de variações consideráveis sobre o parâmetro  $n$ , as trajetórias mostraram ter aproximadamente o mesmo comportamento. Isso pôde ser comprovado pela análise da variância determinada a partir da função densidade de probabilidade  $f_A(\alpha)$ .

O perfil “balão” tem a vantagem de poder ser modelado diretamente por uma gaussiana, trazendo um apelo especial para o ponto de vista da filtragem, algo que será discutido com mais detalhes no Capítulo 5.

### 3.3 Síntese de Capítulo

Neste capítulo, três tipos de perfis estatísticos foram propostos. Estes são perfis do ângulo  $\alpha$  de desvio de direção ou de *heading* dos indivíduos, que traz a informação da direção na qual o indivíduo está se movimentando. Estes perfis baseiam-se na definição das distribuições acumuladas e funções densidade de probabilidade da orientação. O perfil “gota”, este com uma distribuição angular mais espalhada, o perfil “folha”, com uma distribuição que dá uma característica mais objetiva para cada um dos indivíduos e o perfil “balão”, que possui um espalhamento maior dos ângulos em relação à gota. Foi observado também que os parâmetros  $n$ ,  $\lambda$  e  $\sigma$  dos perfis “gota”, “folha” e “balão”, respectivamente, são responsáveis pela objetividade do indivíduo. A objetividade é a característica do indivíduo que define como ele se dirige ao seu destino, ou de uma forma mais direta (mais objetivo) ou menos direta (menos objetivo).

Para cada um dos perfis propostos, foi realizado um teste para verificar o comportamento da objetividade de cada perfil, modificando os valores de seus respectivos parâmetros. Observaram-se características interessantes como, por exemplo, o perfil “gota” tem uma baixa sensibilidade a alterações significativas no valor de  $n$ , enquanto o perfil “balão” modifica-se consideravelmente ao ajustar minimamente o desvio-padrão  $\sigma$ . No caso do perfil “folha”, a sensibilidade é razoável, quando se modifica o valor de  $\lambda$ . A influência dos parâmetros  $n$ ,  $\lambda$  e  $\sigma$  foi verificada através da análise das variâncias relativas à variável aleatória do ângulo de desvio de *heading*, comprovando os resultados obtidos no teste de objetividade.



## Simulador de Trajetórias de Indivíduos

Em problemas que envolvam o rastreamento de trajetórias, sejam de alvos manobrantos como aviões, jatos, helicópteros, etc. ou de veículos terrestres e indivíduos, é essencial que se façam os estudos destas trajetórias sob o ponto de vista de simulação computacional para que, futuramente, esse estudo seja aplicado adequadamente em situações reais.

Em (Frencl 2010), foram feitos testes de filtros estocásticos para estimativa de estados de alvos manobrantos no espaço, em que tais trajetórias foram baseadas em um simulador cujas trajetórias resultantes eram bastante verossímeis em relação aos movimentos executados por aviões executando manobras no ar. Em (Frencl & do Val 2013), foi proposto um simulador básico para a geração de trajetórias de indivíduos, com base em cálculos mais simples, porém com bons resultados.

Nas seções a seguir, o objetivo principal é reformular e aprimorar o simulador apresentado em (Frencl & do Val 2013), criando modelos de simulação mais complexos para os movimentos dos indivíduos e, conseqüentemente, para as suas respectivas trajetórias. O simulador proposto, não só terá a introdução da influência dos terrenos em que os indivíduos se locomovem, nivelados pela dificuldade de regiões deste terreno como, por exemplo, obstáculos, edifícios etc., mas também haverá a adoção dos perfis probabilísticos para a velocidade e ângulo de *heading*, apresentados no Capítulo 3.

### 4.1 Tipos de Terrenos

Neste momento serão introduzidos os cenários nos quais serão realizadas as simulações das trajetórias de indivíduos. Cada um dos cenários será composto por certos tipos de terreno, os quais são classificados pela dificuldade para o indivíduo se locomover. Os tipos de terreno podem ser nivelados da seguinte maneira:

- obstáculo intransponível (montanhas, prédios, grades, pedras etc.)
- terreno difícil (pedregulhos, poças etc.)
- terreno fácil (ruas, calçadas etc.)
- terreno livre (gramados, praças, campo aberto etc.)

Além destes tipos de terreno, existem os geradores e sorvedouros de trajetórias, que podem ser interpretados da seguinte maneira:

- gerador de trajetórias: portas, estações etc.
- sorvedouro de trajetórias ou destino final: entrada de edifícios etc.

Cada um deles está associado a uma cor específica, além de geradores e sorvedouros de trajetórias, também definidos por cores próprias. A associação entre cores e terrenos é dada pela seguinte tabela:

Tabela 4.1: Tipo de Terreno & Cor Associada.

<i>Tipo de Terreno</i>	<i>Cor Associada</i>
Obstáculo Intransponível	Vermelho
Terreno Difícil	Amarelo
Terreno Fácil	Azul
Terreno Livre	Verde
Gerador	Magenta
Sorvedouro	Preto

A dificuldade de movimentação em cada um dos terrenos pode ser traduzida por uma característica numérica denominada “facilidade do terreno”, ou  $f_t \in [0, 1]$ . Esta característica, que é fixa para cada um dos tipos de terreno, determina a tendência do indivíduo em parar (e mudar de direção) ou continuar seu movimento, dependendo do terreno onde está sendo realizada a trajetória. O terreno verde possui  $f_t = 1$ , ou seja, neste terreno, a tendência é o indivíduo realizar sua trajetória normalmente. Nos casos de terrenos azuis e amarelos,  $0 < f_t < 1$ , isto é, as chances do indivíduo parar e trocar de direção aumentam, pelo fato do terreno ser mais dificultoso. No caso do terreno vermelho,  $f_t = 0$ ; neste caso, se o indivíduo atinge um terreno vermelho, imediatamente ele para e troca sua direção de movimentação para evitar o obstáculo intransponível.

Na Figura 4.1, é apresentado um tipo de cenário, envolvendo todos os tipos de terrenos listados acima, inclusive um gerador e alguns sorvedouros de trajetórias.

Observando a Figura 4.1, pode-se notar que o terreno em vermelho com sorvedouros de trajetórias em torno deste tipo de terreno tem o intuito de representar um local que serve como uma espécie de destino final para os indivíduos, isto é, as trajetórias que chegam a este sorvedouro são eliminadas do cenário.

## 4.2 Simulador

O simulador de trajetórias, que será proposto nesta seção, engloba os dois principais assuntos abordados no Capítulo 3 e na Seção 4.1, ou seja, os perfis “gota”, “folha” e “balão” e os terrenos por onde os indivíduos se movimentam, gerando trajetórias diversas. Algo a ser destacado é

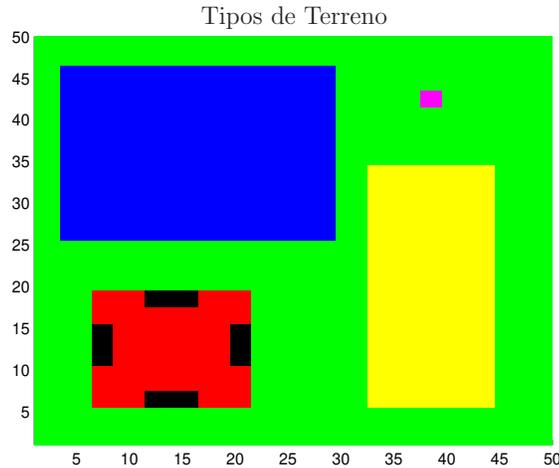


Figura 4.1: Tipos de terreno.

o fato destas trajetórias, por enquanto, não terem ruídos adicionados às medidas, nem medidas espúrias como *clutter* e alarme falso. Estes detalhes serão introduzidos no capítulo seguinte, em que serão discutidos os modelos dinâmicos individuais para cada pessoa e os modelos de medida para o radar, ambos sob o ponto de vista da filtragem estocástica multi-alvo.

Este simulador em questão tem como objetivo gerar trajetórias que sejam bastante verossímeis ao movimento de pessoas reais caminhando ou correndo. Estas trajetórias geradas seguem os três tipos de fenômenos citados anteriormente, os quais motivaram a formulação dos modelos matemáticos via CAF apresentados no Capítulo 1: trajetórias que se mantiveram ativas em relação ao instante anterior, novas trajetórias nascidas espontaneamente e novas trajetórias geradas via *spawn*.

Nas seções a seguir, serão apresentadas as etapas principais que fazem parte da estrutura do simulador de trajetórias de indivíduos: características dos indivíduos, o papel dos sub-destinos e a evolução das trajetórias para cada indivíduo.

### 4.2.1 Características de Indivíduos

Cada um dos indivíduos possui características próprias como, por exemplo, velocidade média, oscilações de velocidade em torno de um valor médio e continuidade, sendo que este último dá informações da frequência com que o indivíduo para de caminhar ou correr.

Estas três características citadas compõem o vetor de parâmetros  $\mathbf{a}_i = [\bar{v}_i \ \sigma_{v_i} \ c_i]$  do  $i$ -ésimo indivíduo, em que  $\bar{v}_i$  é a velocidade média do indivíduo,  $\sigma_{v_i}$  é o desvio de velocidade em torno de  $\bar{v}_i$  e  $c_i \in [0, 1]$  é o parâmetro de continuidade do indivíduo, sendo que 0 equivale a um indivíduo parado e 1 equivale a um indivíduo que não tem paradas durante sua trajetória.

Para cada indivíduo, são pré-definidos alguns vetores de parâmetros que caracterizam certos indivíduos e estes vetores são agrupados em um conjunto  $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ . A cada indivíduo gerado, um vetor de parâmetros do conjunto  $A$  é sorteado para aquele indivíduo específico.

Além destas características, os indivíduos, no momento em que surgem no cenário, recebem

a informação de posição do seu destino final. Essa informação é fornecida para o indivíduo através de uma escolha aleatória dentre os possíveis destinos finais disponíveis no cenário.

### 4.2.2 Sub-destinos

Para definir como as trajetórias percorrem os caminhos até o destino final, é necessário introduzir um novo tipo de terreno, que possui as mesmas características do terreno verde, porém tem uma função importante para direcionar as trajetórias geradas aos seus respectivos destinos finais, representados pela cor preta:

- **ciano**: sub-destino

O terreno “sub-destino” são pequenos pontos em ciano inseridos no cenário cuja função é auxiliar nas direções das trajetórias no cenário de tal forma a levá-las ao destino final. Cada sub-destino possui um raio de cobertura, previamente determinado pelo usuário, que serve para “alertar” à trajetória que um sub-destino foi atingido, fazendo com que um novo sub-destino seja atribuído àquela trajetória. A Figura 4.2 apresenta um exemplo de cenário que possui alguns sub-destinos entre os quadriláteros vermelhos.

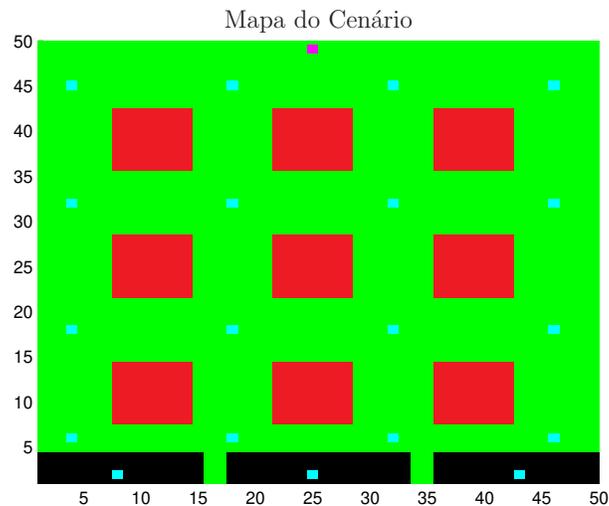


Figura 4.2: Cenário com sub-destinos (pontos em ciano).

Note que os indicadores em ciano também aparecem imersos nos terrenos em preto; o intuito dessa inserção é o mesmo dos outros sub-destinos, com a única diferença de que, ao atingir esta região, a trajetória é eliminada. Além disso, estes sub-destinos não possuem raio de cobertura, pois, por fazerem parte do destino final, não possuem sub-destinos acessíveis. Observe também que o gerador de trajetórias (magenta) também deve possuir sub-destinos acessíveis para que as trajetórias tenham uma direção inicial para percorrer.

Para que sejam determinadas as escolhas dos sub-destinos, primeiramente, com o conhecimento do mapa do cenário, são definidos previamente pelo usuário, para cada um dos sub-destinos, os sub-destinos chamados de acessíveis. Estes sub-destinos acessíveis nada mais são do

que os sub-destinos aos quais se pode alcançar a partir do sub-destino atual. Os sub-destinos, na maioria das vezes, estão posicionados em cruzamentos e encruzilhadas em que o indivíduo deve optar por uma das possíveis alternativas de caminho. Na Figura 4.3, apresenta-se um exemplo de sub-destinos acessíveis, a partir de um sub-destino específico.

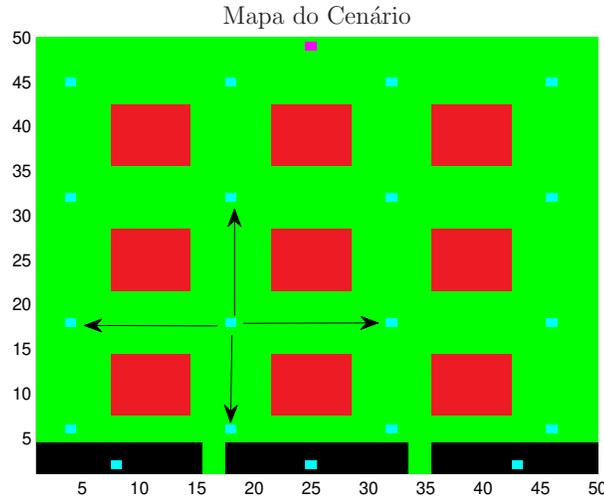


Figura 4.3: Exemplo de sub-destinos acessíveis, indicados pelas setas.

Definidas a lógica nas relações entre os sub-destinos, será apresentada uma técnica simples que realiza as interações entre as trajetórias e os sub-destinos. Definidos as posições e os raios de convergência de cada um dos sub-destinos, considere que uma trajetória foi iniciada pelo gerador. As trajetórias ao serem iniciadas, elas recebem a informação da posição, de forma aleatória, do seu destino final. A partir do momento em que o destino final foi atribuído a uma trajetória, realiza-se uma comparação vetorial entre  $n_v$  vetores, que são os formados pela posição do indivíduo e sub-destinos acessíveis e o formado pela posição do indivíduo e o destino final, exemplificada no caso de dois sub-destinos pela Figura 4.4.

Com os vetores de sub-destinos e destino final relativos à posição do indivíduo construídos (Figura 4.4), calcula-se o produto escalar entre o vetor relativo ao destino final e cada um dos vetores formados pelos sub-destinos e a posição atual. O sub-destino, cujo vetor for aquele responsável pelo maior valor dentre os produtos escalares calculados com o vetor relativo ao destino final, é o escolhido para ser o próximo sub-destino. Nos instantes de tempo seguintes, este procedimento é repetido todas as vezes em que a trajetória do indivíduo atingir o raio de cobertura do sub-destino ao qual ele está se dirigindo. Dessa forma, o indivíduo escolhe uma sequência de sub-destinos que o leva ao destino final.

### 4.2.3 Evolução das Trajetórias para um Indivíduo

Nas simulações para gerar a evolução das trajetórias dos indivíduos, a cada novo indivíduo gerado dentro do cenário (em  $k = 0$ , em  $k > 0$  ou *spawning*), são definidas suas características próprias, dadas pelo vetor  $\mathbf{a}_i$  (Seção 4.2.1), além das respectivas posições dos seus destinos finais.

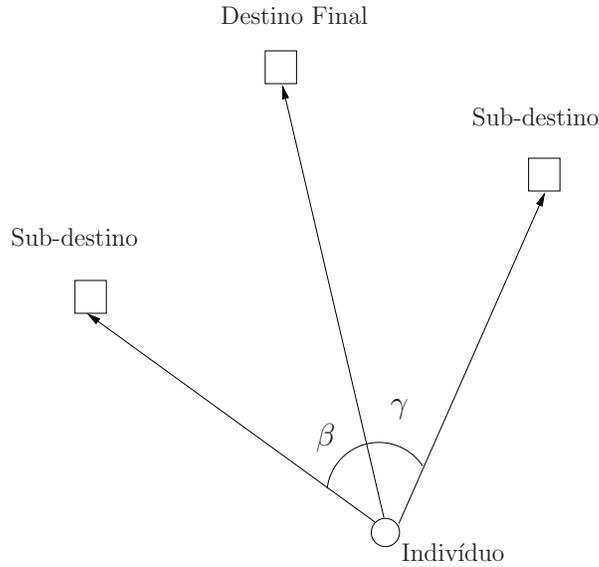


Figura 4.4: Exemplo – Comparação vetorial para tomada de decisão.

Para cada instante de tempo da simulação, é feito um teste, para cada indivíduo, relativo à característica de continuidade do indivíduo  $c_i$ . Realiza-se um sorteio de uma variável aleatória uniforme  $\mathcal{U}(0, 1)$  e compara-se o resultado deste sorteio com o valor de continuidade associado àquele indivíduo. Se a continuidade for menor do que o valor resultante do sorteio, o indivíduo é considerado parado; caso contrário, o indivíduo está em movimento e os cálculos de evolução são executados normalmente. No caso do indivíduo parar, no momento em que ele retornar à movimentação, ele inicia sua trajetória com uma nova direção.

Ao chegar a um sub-destino, um novo sub-destino é determinado através do produto escalar (Seção 4.2.2). Calculada a posição do novo sub-destino, um vetor unitário  $\mathbf{u}$  é determinado com base em uma soma ponderada de outros dois vetores unitários, o vetor velocidade atual unitário  $\mathbf{v}'_u$  e o vetor unitário da posição atual do indivíduo em relação ao próximo sub-destino  $\mathbf{d}_u$ . Essa soma ponderada é dada por:

$$\mathbf{u} = \theta \mathbf{v}'_u + (1 - \theta) \mathbf{d}_u \quad (4.1)$$

$$\theta \sim \mathcal{U}(0, 1) \quad (4.2)$$

A partir do vetor resultante em (4.1), é possível determinar o valor do ângulo de *heading* atual  $\alpha'$ , relativo a sua direção em relação ao próximo sub-destino. Este ângulo é simplesmente obtido pelo ângulo formado entre este vetor e o eixo das abscissas.

Em seguida, determina-se o valor do passo, que nada mais é o espaço percorrido pelo indivíduo entre dois instantes de tempo. Para realizar tal cálculo, é necessário primeiramente determinar o módulo da velocidade característica  $s$ , que é baseada no parâmetros  $\bar{v}_i$  e  $\sigma_{v_i}$  e é dado por:

$$s = \bar{v}_i \pm \sigma_{v_i} u_1 \quad (4.3)$$

em que  $u_1$  é uma variável aleatória que possua qualquer distribuição com média nula. Em seguida, a magnitude do deslocamento é facilmente calculado pelo produto  $s.dT$ , em que  $dT$  é

o tempo de amostragem.

Com o valor do deslocamento determinado, o passo seguinte é obter o valor de  $\alpha$  para o instante seguinte utilizando um dos sorteios dos perfis apresentados na Seção 3.1, “gota”, “folha” ou “balão”. Desta forma, o ângulo de *heading*  $\alpha'$  é atualizado na forma:

$$\alpha = \alpha' + \begin{cases} \begin{cases} \pi \frac{1 - n^{1-2u_2}}{n-1} & , u_2 \in [0, 0.5) \\ \pi \frac{n^{2u_2-1} - 1}{n-1} & , u_2 \in [0.5, 1.0] \end{cases} & , \text{Perfil "gota"} \\ \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{u_2 + ce^{-\lambda\pi}}{c} \right) & , u_2 \in [0, 0.5) \\ \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{c}{2c - (u_2 + ce^{-\lambda\pi})} \right) & , u_2 \in [0.5, 1.0] \end{cases} & , \text{Perfil "folha"} \\ \text{erf}^{-1}(2u_2 - 1)\sqrt{2}\sigma & , \text{Perfil "balão"} \end{cases} \quad (4.4)$$

lembrando que  $u_2 \sim \mathcal{U}(0, 1)$  e que  $c$  é dada pela expressão em (3.33).

Por fim, os vetores posição  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$  e velocidade  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$  são atualizados pelas seguintes expressões:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + s'dT \begin{bmatrix} \cos(\alpha') \\ \text{sen}(\alpha') \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}'}{dT} = s' \begin{bmatrix} \cos(\alpha') \\ \text{sen}(\alpha') \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Os cálculos realizados aqui são considerados para um intervalo de tempo de  $k$  ( $\alpha'$ ,  $\mathbf{p}'$ ) para  $k + 1$  ( $\alpha$ ,  $\mathbf{p}$ ). Note que o vetor velocidade do indivíduo depende da posição, que por sua vez depende do ângulo de direção. Esta dependência entre vetor velocidade e o ângulo de *heading* pode ser observada na equação (4.6), em que há uma relação direta entre estas duas grandezas.

Resumindo, pode-se reescrever as equações (4.3)–(4.6), considerando  $\mathbf{p} = [x \ y]^T$  e  $\mathbf{v} = [v_x \ v_y]^T$  na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \\ s \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha')dT & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \text{sen}(\alpha')dT & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha') & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{sen}(\alpha') & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ v'_x \\ v'_y \\ s' \\ \alpha' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{v}_i \pm \sigma_{v_i} u_1 \\ \alpha(u_2) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

### 4.3 Exemplo de Simulação

Para exemplificar os conceitos apresentados aqui sobre o simulador, um cenário com trajetórias será apresentado aqui, de tal forma a exibir o funcionamento do simulador. Aqui será

adotado apenas um único vetor  $\mathbf{a}_i = [1.5 \ 0.5 \ 1.0]$ . Quanto ao perfil probabilístico escolhido, optou-se por utilizar o perfil “balão” com  $\sigma = 0.5$ .

A Figura 4.5 mostra uma simulação de duas trajetórias geradas no topo do cenário, composto por diversos obstáculos intransponíveis, e tais trajetórias tem como destino final uma das regiões em preto na base do cenário. As setas em azul indicam a direção em que o indivíduo está se locomovendo.

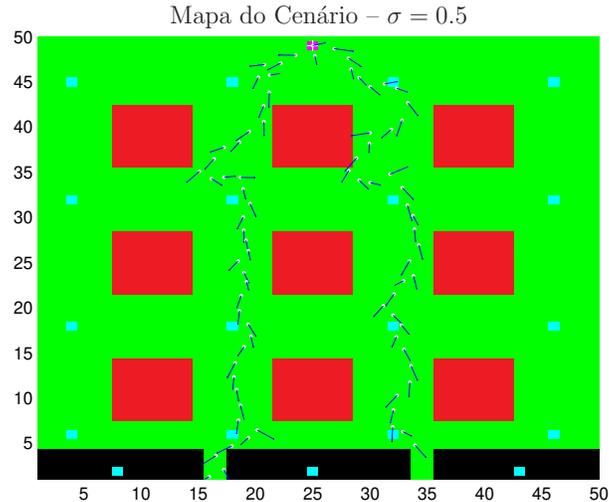


Figura 4.5: Exemplo do Simulador de Trajetórias de Indivíduos – Realização 1.

O simulador pode comportar quantas trajetórias forem necessárias, porém visualmente não se pode explorar adequadamente, já que o cenário ficaria saturado de trajetórias em um único gráfico. Para verificar o comportamento do simulador com outro valor para  $\sigma$ , foi gerada a simulação ilustrada na Figura 4.6. O valor de  $\sigma$  utilizado foi de 0.1, trazendo uma maior objetividade no movimento dos indivíduos em relação às suas tomadas de decisão quanto aos sub-destinos e destino final.

## 4.4 Síntese de Capítulo

Neste capítulo, foram discutidos os aspectos que formam o simulador de trajetórias de indivíduos proposto. Uma das principais ideias apresentadas foi relacionada aos perfis de distribuição de probabilidade que pudessem modelar o ângulo de direção ou *heading* do indivíduo.

Em seguida, foram introduzidos os tipos de terreno nos quais serão definidas as trajetórias dos indivíduos. Estes terrenos são distintos pela dificuldade de se atravessá-los, sendo que as dificuldades são definidas pelas cores atribuídas a cada um dos terrenos que fazem parte do mapa. Além dos diversos terrenos, definiu-se também os geradores e sorvedouros de trajetórias, além dos pontos indicadores dos sub-destinos.

Os indivíduos se deslocam no cenário evitando os obstáculos que impossibilitam a caminhada (terreno vermelho) ou dificultam a caminhada (terrenos amarelos e azuis). Cada um dos tipos de terreno tem a sua objetividade própria na caminhada do indivíduo em direção a um destino

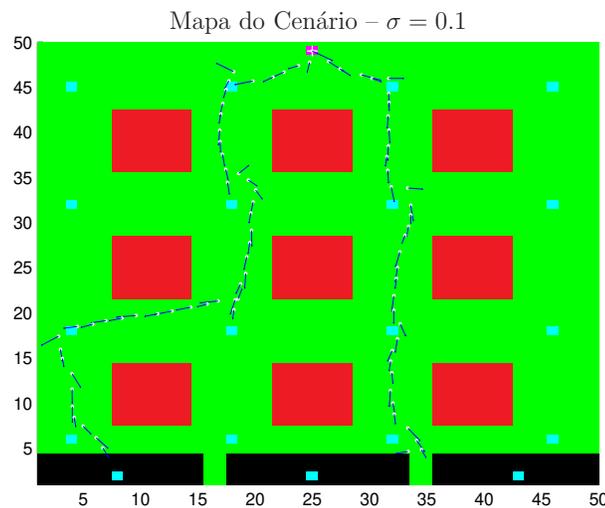


Figura 4.6: Exemplo do Simulador de Trajetórias de Indivíduos – Realização 2.

no cenário pré-determinado. Dependendo da estrutura dos obstáculos, é preciso definir os sub-destinos, escolhidos de forma a levar o indivíduo ao seu destino, sempre produzindo um caminho próprio e aleatório.

Também foram detalhadas as etapas necessárias para que os valores de posição e de velocidade para a evolução da trajetória fossem determinados. Tais passos envolvem os cálculos da determinação do ângulo de *heading*, que dá a direção de movimento do indivíduo. Este ângulo é determinado a partir do sorteio baseado nas distribuições dos perfis “gota”, “folha” ou “balão”.



## Modelos Dinâmicos e de Medidas para Filtragem Estocástica

Em todo problema de rastreamento, seja de um único alvo ou de múltiplos alvos, é primordial obter o modelo matemático individual para cada objeto e para o radar com o intuito de utilizá-los no processo de filtragem estocástica ou estimativa de estados. No caso do rastreamento de indivíduos, não é diferente.

No caso de modelos dinâmicos para alvos manobrantos (aviões, helicópteros etc.), é possível encontrar diversos tipos de modelos dinâmicos na literatura, como os apresentados em (Li & Jilkov 2003). Os modelos dinâmicos mais comuns para reproduzir matematicamente os movimentos das manobras realizadas por aviões são os modelos de velocidade constante (CV – *Constant Velocity*) e o de giro constante (CT – *Constant Turn*). O primeiro é o mais simples de todos, pois é a reprodução matemática de um movimento em linha reta, em que o alvo se move com uma velocidade aproximadamente<sup>1</sup> constante. O segundo modelo descreve as trajetórias curvas, em arcos de circunferências. Neste caso, além dos estados cinemáticos comuns (posição, velocidade, aceleração), o modelo também leva em consideração a velocidade angular ou taxa de giro  $\omega$  com a qual o alvo executa a curva.

Para o modelo do radar, é preciso adotar um modelo de medidas. Em (Li & Jilkov 2001), são discutidos os diversos tipos de modelos de medidas que são mais utilizados. Dentre tais modelos, os mais comuns são os modelos de medida em coordenadas cartesianas e coordenadas esféricas. O primeiro modelo leva em conta diretamente as posições nos eixos coordenados do alvo em questão. O segundo modelo—em coordenadas esféricas—é bastante comum, pois é como os radares obtêm as suas medidas, como o Radar SABER M60 da empresa Bradar. No entanto, na maioria das vezes, é preciso fazer a conversão de coordenadas esféricas para cartesianas, pois grande parte dos filtros estocásticos encontrados na literatura utiliza as suas equações nos modelos cartesianos.

Como se pode notar, é comum encontrar na literatura especializada modelos matemáticos para alvos manobrantos e para radares. Entretanto, modelos dinâmicos específicos para movimentos de indivíduos não foram encontrados. Desta forma, propõem-se neste capítulo alguns

---

<sup>1</sup>O termo “aproximadamente” surge do fato do ruído introduzido no modelo, que faz o papel de uma aceleração fictícia.

modelos matemáticos individuais para o problema de rastreamento de indivíduos, para descrever a dinâmica de seus movimentos do ponto de vista do radar. Note que este modelo deverá ser mais simples e grosseiro do que o modelo de movimentação estudado nos Capítulos 3 e 4, pois deve ser baseado em um número menor de informações.

Para definir o modelo dinâmico individual, serão tomados como base o modelo de velocidade constante e curvatura constante de aeronaves, estudado em (Blackman & Popoli 1999), e o modelo de veículos terrestres, apresentado em (Cui, Hong & Layne 2005). Baseados nestes dois modelos, um novo modelo será proposto. O modelo de medidas que será tratado aqui será baseado naqueles apresentados em (Li & Jilkov 2001). Os mais comuns são os modelos baseados em coordenadas cartesianas e em coordenadas esféricas.

## 5.1 Modelo Dinâmico – Indivíduos

Quando os objetos que estão sendo rastreados são aeronaves, as trajetórias realizadas por estes veículos são bem determinadas, com retas e curvas bem definidas. Alguns exemplos de trajetórias podem ser encontradas em (Frencl 2010), onde foram estudadas trajetórias retilíneas, em curva (com diversas intensidades de  $g$ 's<sup>2</sup>) e em *loop*.

Quando o objeto a ser rastreado passa a ser uma pessoa, estas trajetórias já não são tão bem definidas quanto a de aeronaves. Os movimentos de indivíduos não seguem um padrão dinâmico tão regular, pois existem possibilidades de paradas instantâneas e mudanças bruscas de direção e sentido, por exemplo. Desta forma, não é possível obter um modelo definitivo para o movimento de um indivíduo que descreva perfeitamente a família de suas trajetórias. Com isso, para que se tenha um modelo dinâmico adequado ao movimento de indivíduos, observou-se e analisou-se certos modelos dinâmicos e, a partir destes, foi proposto um novo modelo mais apropriado.

O primeiro modelo estudado é utilizado para alvos manobrantés e, de certa forma, pode ser considerado como um modelo híbrido, pois há uma espécie de mistura entre os modelos CV e CT. Este modelo é denominado de modelo de velocidade aproximadamente constante com curvas horizontais (NCSHT – *Nearly Constant Speed Horizontal Turn*) e foi proposto em (Blackman & Popoli 1999).

O segundo modelo encontrado na literatura é o modelo dinâmico para veículos terrestres não manobrantés, proposto em (Cui et al. 2005). Tal modelo baseia-se em funções de velocidade e direção preferenciais, dependendo da posição em que se encontra tal veículo. Estas preferências são definidas através de um mapa do cenário chamado Mapa de Hospitalidade para Manobras ou Mapa HM (Kastella & Kreucher 2005).

A partir destes dois modelos citados, uma proposta apropriada ao movimento de pessoas será feita.

---

<sup>2</sup>Trajcetórias em curvas são comumente medidas com base no valor da aceleração da gravidade,  $g = 9.8\text{m/s}^2$ .

### 5.1.1 Modelo NCSHT

O modelo dinâmico NCSHT (*Nearly Constant Speed Horizontal Turn*) é um modelo planar que se baseia no seguinte vetor de estados:

$$\mathbf{x} = [x \ y \ v \ \alpha \ \omega]^T \quad (5.1)$$

em que  $x$  e  $y$  são as posições do alvo no eixo das abscissas e das ordenadas, respectivamente,  $v$  é o módulo do vetor velocidade,  $\alpha$  é o ângulo de *heading* e  $\omega = \dot{\alpha}$  é a taxa de giro ou velocidade angular. O modelo dinâmico para este modelo é fortemente não-linear e é dado pelas seguintes equações:

$$x = x' + v' \left[ \cos(\alpha') \frac{\text{sen}(\omega' dT)}{\omega'} - \text{sen}(\alpha') \frac{1 - \cos(\omega' dT)}{\omega'} \right] + \nu_x \quad (5.2)$$

$$y = y' + v' \left[ \cos(\alpha') \frac{1 - \cos(\omega' dT)}{\omega'} + \text{sen}(\alpha') \frac{\text{sen}(\omega' dT)}{\omega'} \right] + \nu_y \quad (5.3)$$

$$v = v' + \nu_v \quad (5.4)$$

$$\alpha = \alpha' + \omega' dT + \nu_\alpha \quad (5.5)$$

$$\omega = \omega' + \nu_\omega \quad (5.6)$$

em que  $\nu_x$ ,  $\nu_y$ ,  $\nu_v$ ,  $\nu_\alpha$  e  $\nu_\omega$  são os ruídos de cada um dos estados, geralmente modelados por uma distribuição gaussiana.

As não-linearidades do modelo NCSHT ficam por conta das equações envolvendo as posições  $x$  e  $y$ . Sob o ponto de vista de movimentos para indivíduos, este modelo possui informações como a velocidade angular  $\omega$  que não é relevante como parte do estado de um indivíduo, já que os movimentos de pessoas não envolvem curvas com níveis consideráveis de “ $g$ ” assim como as aeronaves. Desta forma, é proposto um novo modelo, baseado em alterações sobre o modelo NCSHT, mostrado na Seção 5.1.2.

### 5.1.2 Modelo para Veículos Terrestres

Um segundo modelo que é relevante para este estudo é o proposto em (Kastella & Kreucher 2005). Em (Cui et al. 2005), é realizado um estudo comparativo entre diversos tipos de filtros estocásticos e um estudo de alguns modelos dinâmicos para veículos terrestres não-manobrantés e manobrantés. Estes modelos, principalmente os não-manobrantés, são caracterizados pela preferência de movimentação dentro de um terreno, caracterizado pelo mapa HM, que representa de forma qualitativa as preferências de velocidade e de ângulo de *heading* dos veículos, no cenário em questão. Estas preferências tentam refletir situações nas quais os motoristas tentam controlar e manter os veículos nas trilhas ou pistas sobre diferentes condições.

Com o intuito de adaptar modelos dinâmicos para os casos de movimentação de indivíduos, o foco será concentrado no modelo de veículos terrestres não-manobrantés, pois o modelo de veículos terrestres manobrantés não se adapta tão bem por levar em consideração grandezas como aceleração centrípeta na sua estrutura. O modelo dinâmico para veículos não-manobrantés, considerando o vetor de estados  $\mathbf{x} = [x \ y \ v \ \alpha]^T$  (sem a componente de velocidade angular  $\omega$ ), é

dado por:

$$\mathbf{x} = F(\mathbf{x}')\mathbf{x}' + \mathbf{g}(v_0, \alpha_0) + \boldsymbol{\nu}' \quad (5.7)$$

$$F(\mathbf{x}') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cos(\alpha')dT & 0 \\ 0 & 1 & \text{sen}(\alpha')dT & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{dT}{\tau_v(x', y')} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{dT}{\tau_\alpha(x', y')} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$$\mathbf{g}(v_0, \alpha_0) = dT \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{v_0(x', y')}{\tau_v(x', y')} & \frac{\alpha_0(x', y')}{\tau_\alpha(x', y')} \end{bmatrix}^T \quad (5.9)$$

em que  $v_0(x, y)$  e  $\alpha_0(x, y)$  são a velocidade e ângulo de *heading* preferenciais, dependentes da posição, e  $\tau_v(x, y)$  e  $\tau_\alpha(x, y)$  são as constante de tempo de sistema de 1ª ordem que modelam a correção da velocidade e ângulo de *heading* para os valores preferenciais, também dependentes de posição.

Em uma primeira análise, é possível notar que o conceito do mapa HM se assemelha razoavelmente aos tipos de terreno, apresentados na Seção 4.1. Em uma comparação rápida, observa-se que as trajetórias dos indivíduos poderiam ter uma espécie de preferência por terrenos indicados pela cor verde, pois são os terrenos livres, de fácil locomoção. Desta forma, pode-se dizer que o modelo dinâmico para veículos terrestre é naturalmente adaptável para o caso de trajetórias de indivíduos que percorram os terrenos descritos anteriormente.

### 5.1.3 Modelo Proposto

Com base nos modelos dinâmicos descritos nas Seções 5.1.1 e 5.1.2, o objetivo é propor um modelo dinâmico que seja uma composição destes dois modelos, acrescentando modificações e adaptações necessárias para o caso de modelos dinâmicos que reproduzam movimentos de indivíduos.

Primeiramente, o modelo NCSHT será analisado. Como se pode notar, o modelo NCSHT possui cinco estados que compõem o vetor  $\mathbf{x}$ , sendo um deles a velocidade angular  $\omega$ . Obviamente, movimentos de indivíduos não produzem curvas que necessitem ser modeladas por  $\omega$ . Portanto, a variável de velocidade angular pode ser descartada aqui.

Desta maneira, o modelo dinâmico adaptado do modelo NCSHT passa a utilizar o seguinte vetor de estados:

$$\mathbf{x} = [x \ y \ v \ \alpha]^T \quad (5.10)$$

e o respectivo modelo dinâmico passa a ser:

$$\mathbf{x} = F(\alpha')\mathbf{x}' + \boldsymbol{\nu}' \quad (5.11)$$

$$F(\alpha') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cos(\alpha')dT & 0 \\ 0 & 1 & \text{sen}(\alpha')dT & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Note que o modelo representado pela equação (5.11) é mais simples do que o modelo NCSHT, porém permanece não-linear. As funções trigonométricas cujo argumento é um dos estados, o ângulo de *heading*  $\alpha$ , permanecem, porém trata-se de uma não-linearidade não tão complexa quanto àquelas vistas nas equações (5.2)–(5.3).

Sob o ponto de vista de filtragem, por se tratar de um modelo dinâmico não-linear, os filtros adequados para este tipo de modelo são aqueles apresentados na Seção 2.3.4: os filtros EK-PHD e UK-PHD. No caso específico do filtro EK-PHD, é necessário obter a matriz jacobiana dada em (2.87). A matriz jacobiana referente ao modelo proposto aqui é dada por:

$$J_F = \left. \frac{\partial F(\alpha') \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}'} \right|_{\mathbf{x}' = \mathbf{x}_{k|k}} \quad (5.13)$$

$$= \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} \begin{bmatrix} x' + \cos(\alpha') v' dT \\ y' + \sin(\alpha') v' dT \\ v' \\ \alpha' \end{bmatrix} \right|_{\mathbf{x}' = \mathbf{x}_{k|k}} \quad (5.14)$$

$$= \left. \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cos(\alpha') dT & -v' \sin(\alpha') dT \\ 0 & 1 & \sin(\alpha') dT & v' \cos(\alpha') dT \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right|_{\mathbf{x}' = \mathbf{x}_{k|k}} \quad (5.15)$$

Observando o modelo dinâmico e sua matriz jacobiana, nota-se a diminuição considerável da complexidade da sua estrutura apenas pelo fato da variável de velocidade angular  $\omega$  ter sido retirada do vetor de estados.

Em seguida, o modelo para veículos terrestres apresentado em (5.7) é analisado. Este modelo difere do modelo anterior pelo fato de possuir quatro funções da posição ( $\tau_v$ ,  $\tau_\alpha$ ,  $v_0$  e  $\alpha_0$ ), além da função  $\mathbf{g}(v_0, \alpha_0)$ , referente às preferências de velocidade e de ângulo de *heading* do indivíduo. Note que cada uma destas funções depende de informações vindas de um mapa HM, para que se possam calcular a velocidade e ângulo de *heading* preferenciais.

A modificação do modelo de veículos terrestres para um modelo de movimento de indivíduos é bastante simples, já que o modelo apresentado em (5.7) possui o mesmo vetor de estados do modelo NCSHT.

Apenas algumas simplificações serão aplicadas como, por exemplo, tornar as funções  $\tau_v(x, y)$  e  $v_0(x, y)$  independentes da posição, isto é,  $\tau_v(x, y) = \tau_v$  e  $v_0(x, y) = v_0$ . Com relação às funções de preferência do ângulo de *heading*  $\alpha$ , estas serão determinadas a partir de um mapa HM, adaptado aos tipos de terreno apresentados na Seção 4.1.

Com estas primeiras adaptações e as seguintes parametrizações:

$$\rho = \frac{dT}{\tau_v} \quad (5.16)$$

$$\xi(x, y) = \frac{dT}{\tau_\alpha(x, y)} \quad (5.17)$$

o modelo modificado para indivíduos fica da seguinte forma:

$$\mathbf{x} = F(\mathbf{x}')\mathbf{x}' + \mathbf{g}(v_0, \alpha_0) + \mathbf{v}' \quad (5.18)$$

$$F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cos(\alpha')dT & 0 \\ 0 & 1 & \text{sen}(\alpha')dT & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \xi(x', y') \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

$$\mathbf{g}(v_0, \alpha_0) = [0 \ 0 \ v_0\rho \ \alpha_0(x', y')\xi(x', y')]^T \quad (5.20)$$

Sob o ponto de vista de filtragem, por se tratar de um modelo dinâmico não-linear, os filtros adequados para este tipo de modelo são aqueles apresentados na Seção 2.3.4: os filtros EK-PHD e UK-PHD. No caso específico do filtro EK-PHD, é necessário obter a matriz jacobiana dada em (2.87). A matriz jacobiana referente ao modelo proposto aqui é dada por:

$$J_F = \left. \frac{\partial F(\mathbf{x}')\mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}'} \right|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}_{k|k}} \quad (5.21)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} \begin{bmatrix} x' + \cos(\alpha')v'dT \\ y' + \text{sen}(\alpha')v'dT \\ (1 - \rho)v' \\ (1 - \xi(x', y'))\alpha' \end{bmatrix}_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}_{k|k}} \quad (5.22)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cos(\alpha')dT & -v' \text{sen}(\alpha')dT \\ 0 & 1 & \text{sen}(\alpha')dT & v' \cos(\alpha')dT \\ 0 & 0 & 1 - \rho & 0 \\ -\alpha' \frac{\partial}{\partial x'} \xi(x', y') & -\alpha' \frac{\partial}{\partial y'} \xi(x', y') & 0 & 1 - \xi(x', y') \end{bmatrix}_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}_{k|k}} \quad (5.23)$$

Os valores de  $v_0$  e  $\rho$  são pré-determinados pelo usuário, sendo que  $\tau_v < dT$ . As funções  $\alpha_0(x, y)$  e  $\xi(x, y)$  dependem do mapa HM adaptado aos tipos de terreno do simulador apresentado na Seção 4.2. A função  $\alpha_0(x, y)$  tem como objetivo retornar o valor do ângulo de *heading* preferencial referente à posição  $x$  e  $y$ . Já a função  $\xi(x, y)$  representa matematicamente o mapa HM adaptado e tem o seguinte significado: quando o tempo de ajuste do ângulo de *heading* para o ângulo preferencial é muito alto, isto é,  $\tau_\alpha(x, y) \rightarrow +\infty$ , então  $\xi(x, y) \rightarrow 0$  e o indivíduo passa a não ter um ângulo preferencial; quando  $\xi(x, y)$  passa a aumentar, então  $\tau_\alpha(x, y)$  diminui, o que significa que o indivíduo tende a corrigir seu ângulo de *heading* mais rapidamente e, portanto, corrigindo a sua trajetória original, em direção a um destino.

Com os dois modelos nas equações (5.11)–(5.12) e (5.18)–(5.20) em mãos, é possível realizar uma composição entre estas dinâmicas de tal forma a criar um novo modelo que possa reproduzir, de uma forma mais ampla, a dinâmica de um indivíduo.

Primeiramente, deve-se distinguir duas situações: casos em que é possível ter/criar um mapa HM e casos em que não é possível ter/criar.

- **Sem mapa HM:** existem casos em que não se tem a informação do mapa HM, seja pela dificuldade/complexidade em construir um mapa HM, seja pelo fato de não ter tal

mapa, seja por causa do terreno. Por exemplo, em cenários em campo aberto não é necessário obter tal mapa, já que não haveria obstáculos. Os casos sem mapa HM acabam impossibilitando a utilização do modelo para veículos terrestres adaptado para indivíduos, em (5.18)–(5.20). Dessa maneira, o mais adequado a se fazer é utilizar o modelo na expressão (5.11)–(5.12).

- **Com mapa HM (modelo proposto):** o modelo em (5.18)–(5.20) é o mais recomendado. No entanto, mesmo com mapas HM, nada impede que existam regiões em que não há direções e velocidades preferenciais. Neste caso, o modelo passa a ser o modelo dado na equação (5.11)–(5.12). Portanto, o modelo geral aqui proposto passa a ser uma composição entre as equações (5.11)–(5.12) e (5.18)–(5.20).

Para os casos em que é preciso obter o mapa HM, é necessário conhecer previamente o local em que será feito o rastreamento e construir tal mapa, com base nos tipos de terreno utilizados. Este mapa é construído basicamente em função da razão expressa por  $\xi(x, y)$  e os respectivos ângulos de *heading* preferenciais  $\alpha_0(x, y)$ , como é detalhado na seção a seguir.

#### 5.1.4 Mapa de Hospitalidade para Manobras (HM)

Para se construir o mapa de hospitalidade para manobras (HM), que é equivalente a determinar a função  $\xi(x, y)$  e os respectivos ângulos de *heading* preferenciais  $\alpha_0(x, y)$  sobre um terreno pré-determinado. Deve-se analisar os caminhos nos quais serão realizadas as trajetórias dos indivíduos e, para cada ponto do mapa, deve-se calcular o valor de  $\xi(x, y)$ . Para facilitar os cálculos, optou-se por dividir o mapa em um gradeamento quadrado de 1m de lado, sendo que cada vértice associa-se a um valor de  $\xi(x, y)$ . Como o número de valores de  $\xi(x, y)$  é finito, armazena-se esta função facilmente numa matriz. Por exemplo, para um mapa de  $n_x$  m x  $n_y$  m, tem-se uma matriz  $n_x \times n_y$ , em que cada elemento desta matriz contém um valor de  $\xi(x, y)$ .

Para ilustrar o que foi explicado até o momento, criou-se um mapa simples de 48m x 48m com quatro regiões vermelhas (obstáculos intransponíveis), cinco regiões verdes (denotadas pelos números 0–4) um gerador de trajetórias, um sub-destino e três destinos finais, como ilustrada pela Figura 5.1.

A partir do mapa apresentado na Figura 5.1, pode-se determinar a função  $\xi(x, y)$ . Esta função é definida para cada uma das regiões do cenário. No caso da Figura 5.1, são cinco regiões com terreno verde, quatro com regiões com terreno vermelho, três sorvedores de trajetórias, um gerador de trajetórias e um sub-destino. Todas as regiões do cenário podem ser interpretadas como regiões definidas por intervalos de  $x$  e  $y$ . Por exemplo, a região 0 é definida pela região  $I_x \times I_y$ , em que  $I_x \in [18, 31]$  é o intervalo em  $x$  e  $I_y \in [18, 31]$  é o intervalo em  $y$ .

Primeiramente, para os terrenos em vermelho, nos quais nenhum indivíduo irá atravessar, e nos terrenos em preto, em que se situa o destino final da trajetória,  $\xi(x, y)$  foi ajustado para um valor padrão  $\xi(x, y) = 0$ . Nas regiões de terreno verde, ciano e magenta, a função  $\xi(x, y)$

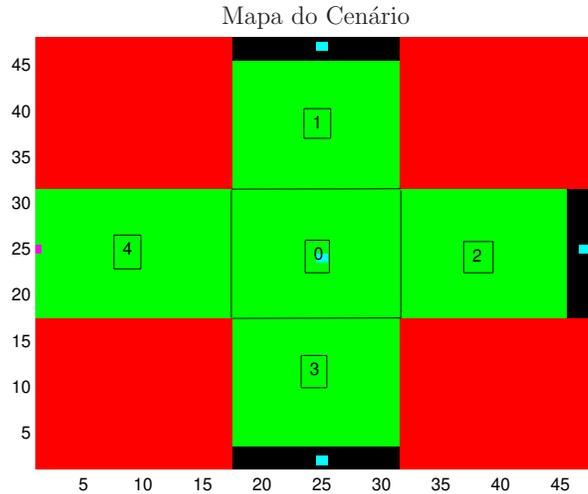


Figura 5.1: Cenário simples para determinação de  $\xi(x, y)$ .

adotada é definida da seguinte forma:

$$\xi(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{36}(x - 24)^2 & , \text{ Regiões 1 e 3} \\ \frac{1}{36}(y - 24)^2 & , \text{ Regiões 2 e 4} \end{cases} \quad (5.24)$$

A função  $\xi(x, y)$  dada pela equação (5.24) possui o seguinte significado (levando em conta as explicações dadas logo após a equação (5.23)): quanto mais próximo o indivíduo estiver de um terreno vermelho, maior será o valor de  $\xi(x, y)$  e, portanto, mais rapidamente o indivíduo retoma a sua direção preferencial; quanto mais distante o indivíduo vai ficando do terreno vermelho, menor será o valor de  $\xi(x, y)$  e, portanto, diminui a tendência pela direção preferencial.

A única exceção fica na região central do mapa (região 0), onde o terreno também é verde. Nesta região,  $\xi(x, y) = 0$ , ou seja, o indivíduo não tem uma direção preferencial. Esta escolha foi feita para que, toda vez que um indivíduo atingir esta região, ele pode escolher qualquer direção para prosseguir. Para este caso, o modelo recai naquele definido pelas equações (5.11)–(5.12), isto é, o modelo NCSHT modificado.

Para as regiões com terrenos em azul e amarelo, também podem ser representados por uma superfície expressa na equação (5.24), porém, alguns valores de  $\xi(x, y)$  são adotados, arbitrariamente, como sendo nulos. Isso pode ser interpretado como a dificuldade de locomoção do indivíduo nestes tipos de terreno.

Como a função  $\xi(x, y)$  é definida ponto a ponto, isto é,  $\xi(x_i, y_j)$  com  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, \ell$ , é possível construir uma matriz  $M_\xi(i, j) = [\xi(x_i, y_j)]$  que defina o valor de  $\xi$  em cada ponto do mapa. A Figura 5.2 mostra o resultado da função  $\xi(x, y)$  para o mapa apresentado na Figura 5.1.

Definida a função  $\xi(x, y)$ , resta definir o ângulo de direção preferencial  $\alpha_0(x, y)$ . Esta função, assim como a função  $\xi(x, y)$ , depende do mapa e de seus diversos tipos de terrenos. Recuperando

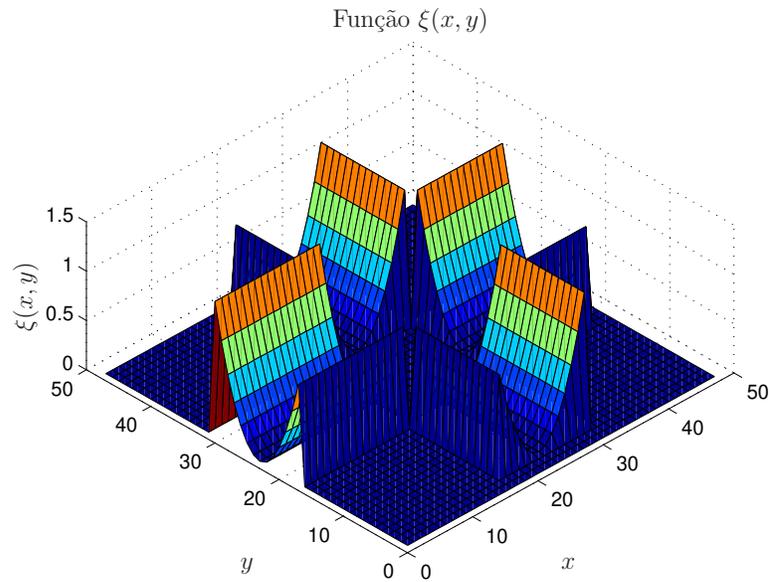


Figura 5.2: Função  $\xi(x, y)$  – Superfície em parábola.

o cenário da Figura 5.1, atribui-se números identificadores de regiões. Para entender melhor, o cenário em questão é dividido em nove regiões: 0, 1, 2, 3, 4 e quatro regiões “ $\infty$ ”. As regiões “ $\infty$ ” são representadas pelas regiões em vermelho, enquanto as demais regiões são partes dos terrenos em verde. Esta divisão de regiões pode ser interpretada com uma matriz  $M_{nslo} \in \mathbb{R}^{48 \times 48}$  da seguinte forma<sup>3</sup>:

$$M_{nslo} = \begin{bmatrix} \infty & \dots & \infty & 1 & \dots & 1 & \infty & \dots & \infty \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \infty & \dots & \infty & 1 & \dots & 1 & \infty & \dots & \infty \\ 4 & \dots & 4 & 0 & \dots & 0 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 4 & \dots & 4 & 0 & \dots & 0 & 2 & \dots & 2 \\ \infty & \dots & \infty & 3 & \dots & 3 & \infty & \dots & \infty \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \infty & \dots & \infty & 3 & \dots & 3 & \infty & \dots & \infty \end{bmatrix}_{48 \times 48} \quad (5.25)$$

Quando o indivíduo está dentro de uma mesma região, o ângulo de *heading* preferencial se mantém o mesmo. Quando este passa de uma região para outra, então um novo  $\alpha_0$  é calculado, exceto para o caso em que o indivíduo passa para a região 0, onde não há direção preferencial e, conseqüentemente, o modelo NCSHT modificado é adotado (eqs. (5.11)–(5.12)). Para o caso do cenário na Figura 5.1, as direções preferenciais ficam da seguinte forma:

- $0 \rightarrow 1 : \alpha_0 = \pi/2$
- $0 \rightarrow 2 : \alpha_0 = 0$

<sup>3</sup>O sub-índice significa “Norte-Sul-Leste-Oeste”.

- $0 \rightarrow 3 : \alpha_0 = -\pi/2$
- $0 \rightarrow 4 : \alpha_0 = \pi$
- $1 \rightarrow 0 : \text{sem direção preferencial (modelo NSCHT modificado)}$
- $2 \rightarrow 0 : \text{sem direção preferencial (modelo NSCHT modificado)}$
- $3 \rightarrow 0 : \text{sem direção preferencial (modelo NSCHT modificado)}$
- $4 \rightarrow 0 : \text{sem direção preferencial (modelo NSCHT modificado)}$

## 5.2 Modelo de Medidas – Radar

Com o modelo dinâmico definido na Seção 5.1.3, resta definir o modelo de medidas para o radar. Como já foi dito anteriormente, os modelos de medida mais utilizados para radar são os baseados em coordenadas cartesianas e em coordenadas polares.

O modelo de medidas mais simples é aquele baseado em coordenadas cartesianas, isto é, as medidas são simplesmente as posições  $x$  e  $y$  (Li & Jilkov 2001). Considerando o vetor de estados  $\mathbf{x} = [x \ y \ v \ \alpha]^T$ , tal modelo é definido como:

$$\mathbf{z} = H\mathbf{x} + \mathbf{w} \quad (5.26)$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Já o modelo de medidas utilizado em sistemas que envolvam radares é aquele baseado em coordenadas polares, ou seja, as medidas fornecidas pelo sensor são o alcance  $r$  e o ângulo de azimute  $\theta$ . Este modelo também pode ser encontrado em (Li & Jilkov 2001) e é dado por:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} r_m \\ \theta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{bmatrix} + \mathbf{w} \quad (5.28)$$

No entanto, é muito comum que as equações de filtragem sejam baseadas em coordenadas cartesianas. Dessa forma, tais medidas devem ser convertidas de coordenadas polares para coordenadas cartesianas, e o modelo de medidas fica da seguinte forma:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r + \tilde{r}) \cos(\theta + \tilde{\theta}) \\ (r + \tilde{r}) \sin(\theta + \tilde{\theta}) \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

em que  $\tilde{r}$  e  $\tilde{\theta}$  são os ruídos das medidas de alcance e de azimute. Devido à contaminação do ruído na conversão de coordenadas polares para cartesianas, técnicas de despolarização devem ser aplicadas de tal forma a evitar polarizações nas estimativas. Estas técnicas foram exploradas e utilizadas em (Frencl 2010) para os filtros EKF e BLUE (*Best Linear Unbiased Estimator*) (Zhao, Li & Jilkov 2004).

## 5.3 Escolha do Modelo dos Ruídos

Uma breve discussão a ser feita é sobre qual distribuição de probabilidade deve ser adotado para os ruídos da dinâmica  $\boldsymbol{\nu}$  e de medida  $\mathbf{w}$  nos modelos apresentados nas seções acima.

O modelo de ruído mais utilizado na literatura, tanto para modelos dinâmicos quanto para modelos de medidas, é o modelo de ruído gaussiano. A utilização deste tipo de modelagem se justifica pelo fato de filtros estocásticos como o KF, EKF, entre outros, serem formulados com base em hipóteses de ruídos gaussianos. No entanto, pode-se questionar se a hipótese da escolha de uma distribuição gaussiana faz sentido para os modelos apresentados nas Seções 5.1 e 5.2.

Considerando os estados de posição  $x$  e  $y$  e de velocidade  $v$ , é bastante razoável assumir um modelo gaussiano para os seus respectivos ruídos, tanto na dinâmica quanto nas medidas (no caso de  $x$  e  $y$ ). Já para o ângulo de *heading*  $\alpha$  já é preciso algumas considerações. A escolha de um modelo com distribuição gaussiana para o ruído é validada pelas discussões no Capítulo 3 acerca dos perfis de movimento propostos.

O perfil “balão”, que é formado a partir de uma função densidade de probabilidade gaussiana, é razoável e foi adotado nos sorteios de  $\alpha$ , com resultados plausíveis, vide Figuras 3.21 e 3.22. Note que, neste caso, a equação da dinâmica do ângulo de *heading*, dada por:

$$\alpha = \alpha' + \text{erf}^{-1}(2u - 1)\sqrt{2}\sigma, u \sim \mathcal{U}(0, 1) \quad (5.30)$$

Dessa maneira, o ruído da dinâmica  $\boldsymbol{\nu}$  passa a ter uma distribuição gaussiana, ou seja,  $\boldsymbol{\nu} \sim \mathcal{N}_V(0, Q)$ , em que  $Q$  é a matriz de covariância. Já o ruído da medida passa a ter uma distribuição gaussiana, ou seja,  $\mathbf{w} \sim \mathcal{N}_W(0, R)$ , em que  $R$  é a matriz de covariância.

Como foi apresentado aqui e verificado no Capítulo 3, pode-se assumir a distribuição gaussiana para o ruído da dinâmica, tendo como justificativa a modelagem do perfil “balão”. Esta hipótese de distribuição gaussiana no ruído da dinâmica pode se estender aos outros perfis, “gota” e “folha”, de forma aproximada, já que se tratam de perfis baseados em outros tipos de distribuições de probabilidade que não seriam tratados por filtros do tipo KF. Pode-se concluir que o perfil “balão” permite a utilização dos perfis “gota” ou “folha” no simulador apresentado no Capítulo 3, por terem características mais realistas.

Outro motivo importante para que se possa assumir a distribuição gaussiana para o ruído da dinâmica—aquí dizendo respeito também ao ruído das medidas—é o fato do filtro escolhido para utilização é o filtro GM-PHD, o qual é definido através da hipótese de ruídos de dinâmica e de medidas serem modelados por distribuições gaussianas.

## 5.4 Síntese de Capítulo

Neste capítulo, foram tratados os modelos matemáticos utilizados na etapa de filtragem. Como na literatura não se encontra quaisquer modelos dinâmicos específicos para o movimento de indivíduos, a proposta apresentada foi de combinar dois tipos de modelos dinâmicos, um para trajetórias de aeronaves em reta e curva e outro para veículos terrestres com preferências de movimentação, sendo que destes modelos obtém-se o de movimentação de indivíduos.

O primeiro modelo dinâmico, o modelo NCSHT, leva em conta trajetórias em linha reta e em curvas, estas representadas pela velocidade angular  $\omega$ . Como em trajetórias de indivíduos não

ocorrem curvas que necessitem ser descritas por velocidades angulares, este estado é eliminado na adaptação para um modelo dinâmico para indivíduos. O segundo modelo baseia-se em veículos terrestres não-manobrantés, que executam trajetórias tomando como base um mapa que indica os caminhos preferenciais para movimentação. A proposta é combinar estes dois modelos para casos em que há ou não a informação do mapa HM pela variação de parâmetros característicos do modelo.

Os modelos de medida apresentados são os modelos padrões para um problema de rastreamento: baseado em coordenadas cartesianas e baseado em coordenadas polares. O primeiro é o mais simples, pois se trata de um modelo linear. Já o modelo polar é o mais utilizado em sistemas de radares, porém, para este tipo de modelo, o problema de polarização deve ser tratado para evitar possíveis erros nas estimativas.

Finalmente, uma discussão é feita em torno da escolha dos ruídos aditivos para os modelos matemáticos. O ruído gaussiano é a escolha feita, sendo que esta escolha é plausível, dado o perfil probabilístico para movimentação do tipo “balão”, estudada no Capítulo 3, cuja estrutura baseia-se em uma distribuição gaussiana.

## Simulações e Testes

Com o objetivo de testar as propostas desenvolvidas na Parte II desta tese, foram elaboradas algumas simulações. As simulações propostas foram divididas em quatro testes. O primeiro deles leva em consideração o comportamento dos perfis probabilísticos para movimentação de indivíduos (“gota”, “folha” e “balão”).

O segundo teste prevê uma comparação de desempenhos entre três dos filtros multi-alvo abordados: GM-PHD, EK-PHD e UK-PHD. Este teste de desempenho consiste em três métodos de avaliação:

1. Erro RMS entre posição real e estimada como função do tempo & valor médio;
2. Tempo de execução;
3. Estimativa do número de alvos.

O primeiro método de avaliação é aplicado a uma única trajetória de um indivíduo (avaliada sobre um número de realizações). O motivo é que, para avaliar o desempenho dos filtros, como no primeiro teste, não é necessário avaliar  $n$  trajetórias separadas, basta uma trajetória de um indivíduo. A avaliação do erro RMS é feita baseado na diferença entre o valor verdadeiro e o valor estimado do vetor de estados, isto é:

$$\text{RMS}_k = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_k} (\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i)^2}{N_k}} \quad (6.1)$$

No entanto, mesmo aplicando os algoritmos de corte e fusão e extração de estado (Seção 2.4), podem existir instantes de tempo em que o filtro produza mais de uma estimativa para um único ponto da trajetória. Dessa forma, com o intuito de “punir” o filtro, o valor RMS naquele instante de tempo passa a ter mais parcelas na soma do numerador, ou seja:

$$\text{RMS}_k = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_k+N'} (\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i)^2}{N_k}} \quad (6.2)$$

em que  $N' \geq 1$  é o número de vetores de estado estimados a mais relativos a um ponto verdadeiro da trajetória. Por exemplo, no instante de tempo  $k$ , o filtro forneceu três estimativas do vetor

de estados relativos a um ponto da trajetória. Então, além das  $N_k$  parcelas anteriores, tem-se que  $N' = 2$ , isto é, a soma no numerador receberá duas parcelas a mais devido às estimativas extras resultantes do filtro.

O segundo e terceiro métodos são aplicados em cenários com diversas trajetórias simultâneas, com o intuito de verificar o comportamento dos filtros quando estes são explorados com um grande número de trajetórias, levando a um processamento elevado. Para a estimativa do número de indivíduos, que é obtida através da soma dos pesos (vide hipótese (vi) do filtro GM-PHD), utilizou-se a sugestão dada em (Mahler 2001) por obter o menor valor inteiro mais próximo desta soma, isto é,  $\lceil N_{k|k} \rceil$ , com o intuito de realizar comparativos com os valores reais do número de indivíduos, os quais são valores inteiros.

O terceiro teste baseia-se em uma comparação entre os modelos dinâmicos apresentados no Capítulo 5 e o modelo de velocidade constante (CV) padrão. Esta comparação será feita levando em conta os três métodos de avaliação listados acima para um mesmo tipo de filtro, justamente para avaliar diretamente o impacto do modelo.

O quarto teste tem como objetivo verificar a influência do mapa HM sobre as estimativas de um filtro estocástico. Neste teste, gráficos de espalhamento dos pontos estimados de posição  $(x, y)$  serão analisados com o intuito de verificar a variação das estimativas em torno da trajetória real.

Para informação, todas as simulações e testes foram executados em *notebook* Sony Vaio modelo VPCEA33FB, SO Windows 7 Home Premium, processador Intel® Core™i3 (1ª geração) 2.4 GHz, 4 GB de memória RAM.

## 6.1 Teste 1 – Objetividade dos perfis probabilísticos

O teste de objetividade dos três perfis probabilísticos propostos no Capítulo 3 foi realizado naquele mesmo capítulo. Neste teste, foi comparado, para uma mesma situação—trajetória retilínea horizontal simples—o comportamento de objetividade de cada um dos perfis, para diferentes valores de seus respectivos parâmetros:  $n$ ,  $\lambda$  e  $\sigma$ .

Os resultados obtidos nas Figuras 3.14—3.22 foram bastante esclarecedores. Para o perfil “gota”, o parâmetro  $n$  influencia muito pouco na objetividade de uma trajetória, mesmo alterando em cem vezes o valor inicial de  $n$ . Apesar de ter um histograma polar com um espalhamento angular adequado (vide Figura 3.5), os resultados apresentaram trajetórias com baixas objetividades.

No caso do perfil “folha”, os resultados obtidos mostraram que este perfil é razoavelmente sensível ao parâmetro  $\lambda$ , pois com um aumento de  $2.5\times$ , a trajetória do indivíduo passou a ser mais objetiva em relação ao destino final. Além disso, este perfil dá um aspecto mais realista a trajetória realizada. Pelos resultados apresentados e pelo aspecto verossímil a trajetórias reais, este perfil será o escolhido para executar os testes 2, 3 e 4 nas seções seguintes.

Por fim, no caso do perfil “balão”, os resultados foram semelhantes aos do perfil “folha”, com a diferença na influência do seu respectivo parâmetro: para valores pequenos de  $\sigma$ , as trajetórias tornam-se bastante objetivas; para valores maiores de  $\sigma$ , ocorre o contrário. Mesmo tendo um perfil interessante para ser utilizado no simulador, o ponto mais importante deste perfil é a

validação que ele oferece para que se possa escolher os ruídos de dinâmica e de medidas dos modelos matemáticos para filtragem com distribuições gaussianas. As discussões feitas na Seção 5.3 detalham esta discussão através da análise da variância de cada um dos perfis.

## 6.2 Teste 2 – Desempenho dos filtros multi-alvos

O teste de desempenho dos filtros multi-alvo será realizado usando os filtros apresentados no Capítulo 2: o GM-PHD, o EK-PHD e o UK-PHD. Cada filtro terá o seu modelo dinâmico específico. Para o filtro GM-PHD, por se tratar de um filtro baseado em hipóteses de linearidade nos modelos, o modelo dinâmico utilizado é o de velocidade constante padrão ou modelo CV, dado por:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & dT & 0 \\ 0 & 1 & 0 & dT \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

sendo que o vetor de estados é dado por:

$$\mathbf{x} = [x \ y \ v_x \ v_y]^T \quad (6.4)$$

Já os filtros EK-PHD e UK-PHD utilizam o modelo NCSHT modificado, dado nas equações (5.11)–(5.12). Note que, no caso do filtro EK-PHD, a matriz jacobiana é dada pela equação (5.15).

O modelo de medidas utilizado é o modelo baseado em coordenadas cartesianas. A escolha do modelo de medidas passa pela hipótese de que as medidas capturadas pelo radar em coordenadas polares já foram convertidas para cartesianas, além de já terem passado pelo procedimento de despolarização destas medidas. O intuito aqui não é focar sobre o fenômeno de polarização das medidas, o qual já foi bastante estudado anteriormente em (Frencl 2010).

Os valores dos parâmetros utilizados para as simulações foram os seguintes:

- Parâmetro para perfil “folha”:  $\lambda = 7$  (Seção 3.1.3)
- Extração de Estados:  $\Delta = 0.25$  (Seção 2.4)
- Corte e Fusão:  $T = 10^{-5}$ ,  $U = 4$ ,  $J_{\max} = 15$  (Seção 2.3.3)
- Probabilidades (detecção e sobrevivência):  $p_D = p_S = 0.99$
- Tempo de amostragem:  $dT = 1s$
- Tempo de Simulação:  $T_{sim} = 45s$
- Vetor característico:  $\mathbf{a} = [1.5 \ 0.5 \ 1.0]$  (Seção 4.2.1)
- Área do terreno:  $A = 50 \times 50m^2$
- Função PHD referente ao *clutter*:  $\kappa_{k+1}(\mathbf{z}) = \lambda_c A = 2.10^{-3}A$

- Peso central para transformação *unscented*:  $W^0 = 2/3$
- Função PHD de nascimento:  $b_{k+1|k}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{a_k} 0.1 \cdot \mathcal{N}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_b^i, B_k^i)$ , em que  $a_k$  é o número de trajetórias iniciadas em  $k = 0$ ,  $\mathbf{x}_b^i$  é o vetor de estados do indivíduo que acabou de surgir e:

$$B_k^i = \begin{bmatrix} 2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.36^2 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

- Função PHD de *spawn*:  $b_{k+1|k}(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = \sum_{i=1}^{b_k} 0.05 \cdot \mathcal{N}_{\mathbf{X}}(E_k^i \mathbf{x}', G_k^i)$ , em que  $E_k^i$  é a matriz dinâmica do modelo CV (6.3) e  $G_k^i = Q_k$ .
- Matrizes de covariância:

$$Q_k = \begin{bmatrix} (1/3)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1/3)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (0.18)^2 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

$$R_{k+1} = \begin{bmatrix} (0.25)^2 & 0 \\ 0 & (0.25)^2 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

em que  $\sigma_v^2 = (0.18)^2$  para o modelo CV e  $\sigma_v^2 = (\sqrt{1/12})^2$  para os outros modelos.

Para o primeiro método do teste de desempenho, isto é, a avaliação do erro RMS entre posição estimada e verdadeira, basta criar uma trajetória padrão de um indivíduo para avaliar tal erro. Desta forma, criou-se uma trajetória sobre o cenário dado na Figura 6.1 e, a partir desta trajetória, foram simuladas 300 realizações desta mesma trajetória<sup>1</sup> de tal forma a obter gráficos da evolução do erro RMS em relação ao tempo e do valor médio de erro RMS relativos às 300 realizações.

A partir do cenário na Figura 6.1, para cada uma das realizações, foram criadas medidas imersas sob alarmes falsos e *chutter*, como pode-se observar na Figura 6.2. Um exemplo de estimativas relativas a esta realização pode ser visto na Figura 6.3. Este gráfico contém estimativas resultantes do filtro GM-PHD<sup>2</sup>.

Para o filtro GM-PHD, o gráfico de erro RMS em relação ao tempo para as posições  $x$  e  $y$  com seus respectivos valores médios é ilustrado na Figura 6.4.

Observando os resultados obtidos nos gráficos da Figura 6.4, verificam-se primeiramente as “punições” sofridas no desempenho do filtro, representadas pelos saltos sofridos nos gráficos de erro RMS. Como já foi explicado anteriormente, estes saltos indicam o surgimento de estimativas extras no respectivo instante de tempo.

Para o filtro EK-PHD, o gráfico de erro RMS em relação ao tempo para as posições  $x$  e  $y$  com seus respectivos valores médios é ilustrado na Figura 6.5.

Observando os resultados nos gráficos da Figura 6.5, nota-se um resultado interessante. Em relação às “punições” no desempenho, a quantidade é praticamente a mesma, bastando olhar

<sup>1</sup>A trajetória é sempre a mesma, porém a cada realização mudam os ruídos das medidas e os alarmes falsos.

<sup>2</sup>Como os gráficos com estimativas são muito semelhantes, optou-se em mostrar apenas um deles.

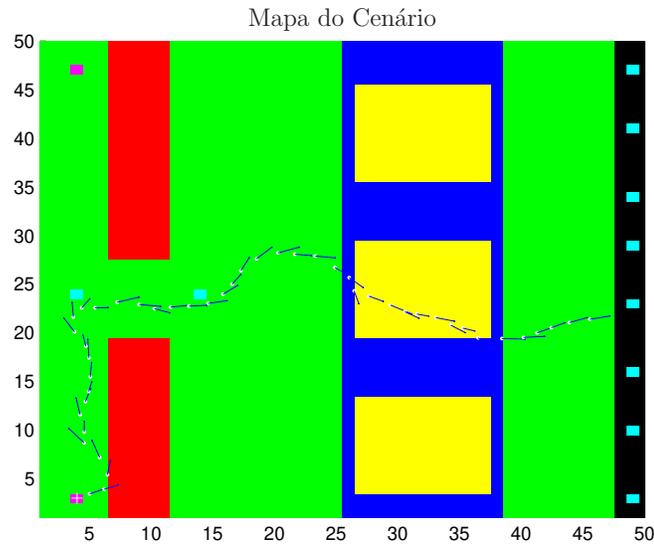


Figura 6.1: Cenário para avaliação do erro RMS de posição.

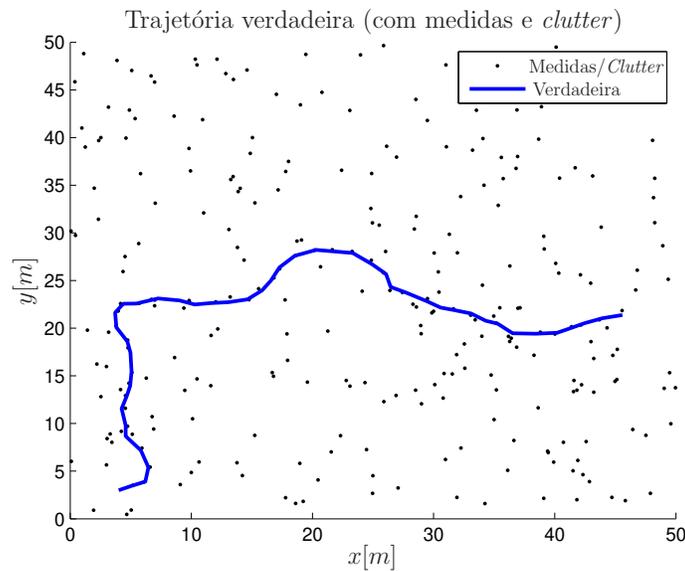


Figura 6.2: Uma realização – Medidas, clutter e trajetória verdadeira.

os saltos sofridos pelo gráfico de erro RMS. No entanto, os valores de erro RMS, inclusive os valores de RMS médios, são inferiores aos apresentados pelo filtro GM-PHD. Isso evidencia o melhor desempenho do filtro EK-PHD em relação ao filtro GM-PHD.

Finalmente, para o filtro UK-PHD, o gráfico de erro RMS em relação ao tempo para as posições  $x$  e  $y$  com seus respectivos valores médios é ilustrado na Figura 6.6.

Observando os gráficos da figura 6.6, é possível perceber uma queda de desempenho em relação os dois filtros testados anteriormente, tanto na evolução do erro RMS no tempo, quanto os valores de erros RMS médios. Portanto, dos três filtros testados, o filtro EK-PHD foi o que

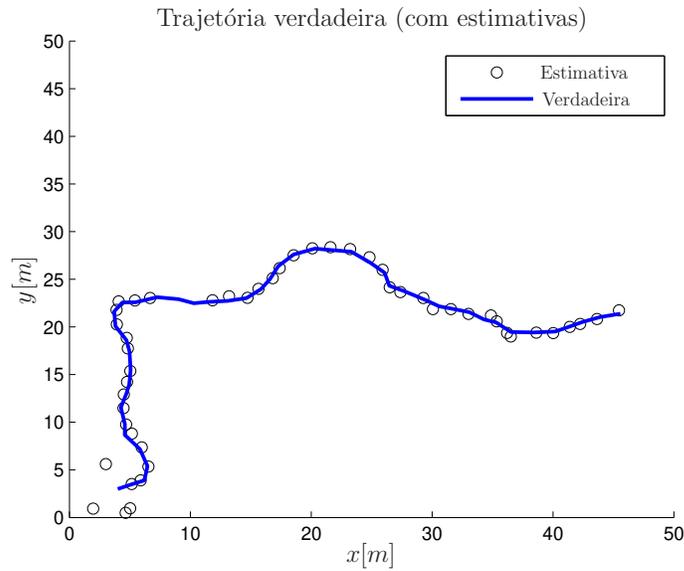


Figura 6.3: Uma realização – Estimativas e trajetória verdadeira.

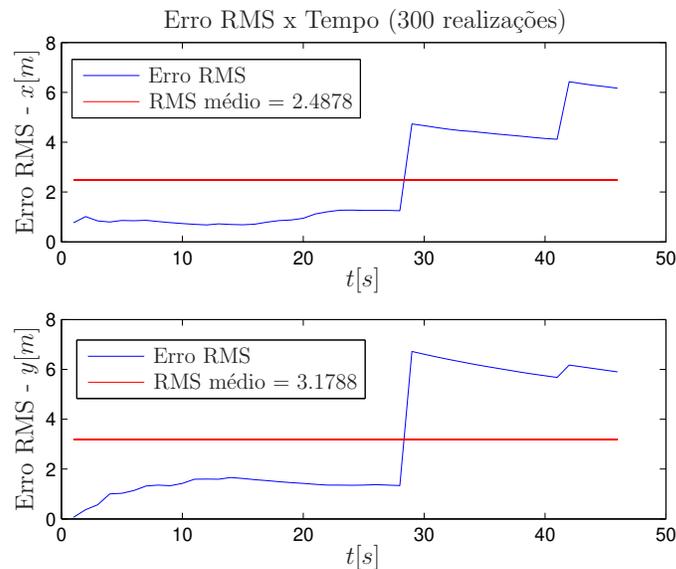


Figura 6.4: Erro RMS de posição – Filtro GM-PHD.

obteve os melhores resultados de desempenho para o método de avaliação de erro RMS.

Para confirmar o bom desempenho do filtro EK-PHD, foi calculado o erro RMS médio, relativo às estimativas de posição resultantes de cada um dos filtros, de uma maneira diferente que desconsidera a “punição” sobre o desempenho. Para isso, calculou-se a menor distância entre o ponto real da trajetória e cada ponto estimado através da equação a seguir:

$$d = \sqrt{(x - \hat{x}_i)^2 + (y - \hat{y}_i)^2} \quad (6.8)$$

A partir dos valores de distância obtidos, verifica-se o valor mínimo de distância para cada

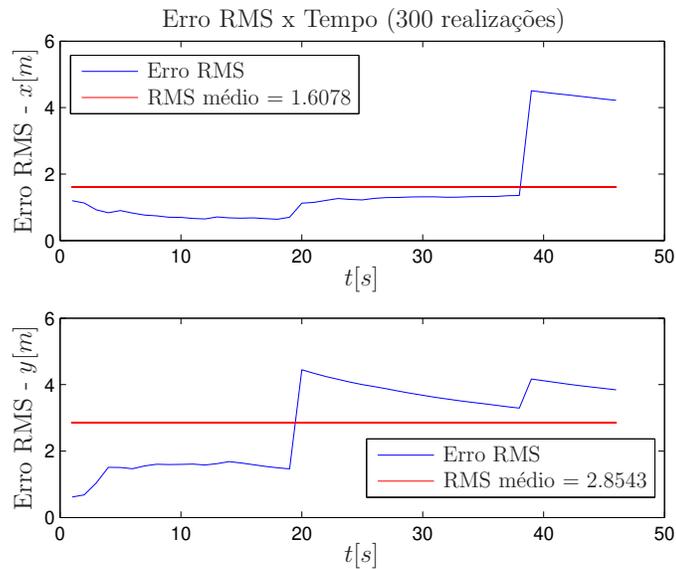


Figura 6.5: Erro RMS de posição – Filtro EK-PHD.

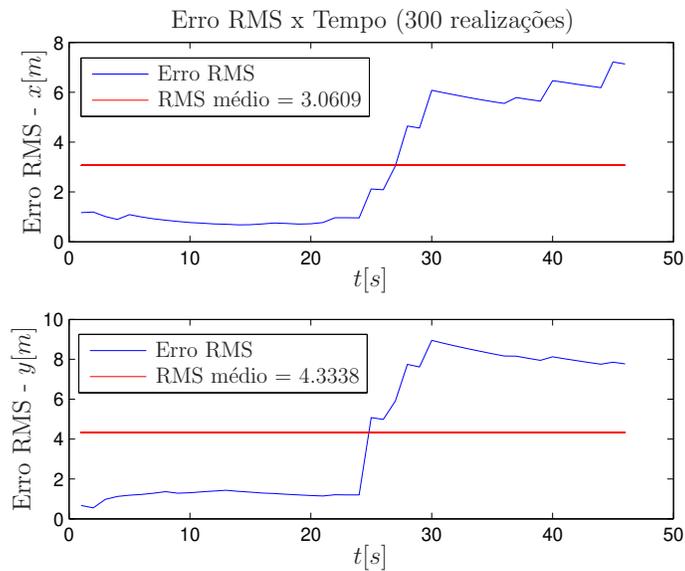


Figura 6.6: Erro RMS de posição – Filtro UK-PHD.

um dos pontos reais da trajetória, isto é,  $d_{\min} = \min(d)$ , mantendo apenas uma estimativa por ponto da trajetória verdadeira. Dessa forma, os erros RMS médios ( $\overline{\text{RMS}}$ ) foram calculados, resultando na Tabela 6.1.

Note que os valores obtidos na Tabela 6.1 são menores em relação aos obtidos com a política de “punição” no desempenho. Mesmo assim, verifica-se novamente um bom desempenho do filtro EK-PHD, em relação aos outros dois filtros testados.

Feitos estes testes, o segundo e terceiro métodos de avaliação serão aplicados para completar essa seção. Resumidamente, o segundo método avalia o tempo de execução de cada um dos

Tabela 6.1: Tabela comparativa entre erros RMS médios – Teste 2.

<i>Filtro</i>	$\overline{\text{RMS}}_x$	$\overline{\text{RMS}}_y$
GM-PHD	0.29991	0.22041
EK-PHD	0.24273	0.23515
UK-PHD	0.58314	0.39079

filtros e o terceiro método avalia o desempenho quanto às estimativas do número de indivíduos. Estes dois métodos são executados em conjunto de tal forma a verificar o comportamento de cada um dos filtros quando estes são colocados em situações computacionais “estressantes”, isto é, com diversos indivíduos locomovendo-se simultaneamente.

Para estes dois métodos de avaliação, foram consideradas 10 trajetórias iniciais, com seis trajetórias que surgem por *spawn*, além das trajetórias que surgem espontaneamente. O tempo de simulação foi aumentado para  $T_{sim} = 100s$ . Além disso, mais um vetor característico foi levado em conta, formando o conjunto  $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\} = \{[1.5 \ 0.5 \ 1.0], [2.0 \ 1.0 \ 0.75]\}$ . A adição de um novo vetor característico possibilita o surgimento de indivíduos com velocidade média mais elevada, porém com uma continuidade do movimento mais baixa. Na Figura 6.7, aparece o cenário empregado com todas as trajetórias que foram levadas em conta para as avaliações pertinentes.

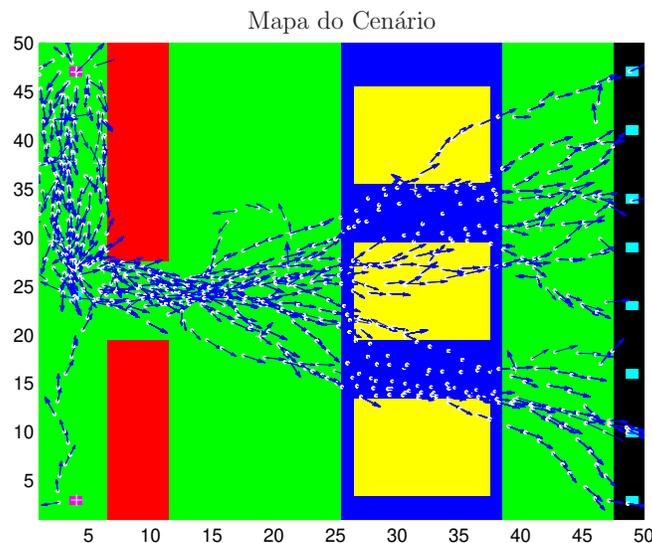


Figura 6.7: Cenário para avaliação – “Estresse” computacional.

Na Tabela 6.2, encontram-se os tempos de execução de cada um dos filtros para uma realização.

Os resultados obtidos na Tabela 6.2 deixam evidente a superioridade do filtro GM-PHD, em relação ao tempo de execução. Este resultado já era esperado pelas hipóteses de linearidade do

Tabela 6.2: Tabela comparativa entre tempos de execução – Teste 2.

<i>Filtro</i>	<i>Tempo de execução</i>
GM-PHD	28.47s
EK-PHD	53.24s
UK-PHD	71.66s

filtro já citado anteriormente. O filtro EK-PHD obteve um desempenho médio entre os três, enquanto o filtro UK-PHD foi aquele que teve o maior dos tempos de execução. A justificativa de tal resultado está na própria estrutura do filtro, como pode ser visto no Algoritmo 3. Além do tempo extra necessário para a construção dos pontos *sigma*, as equações necessárias para a obtenção das estimativas envolvem diversos somatórios que exigem um tempo adicional na definição das estimativas.

Por fim, o terceiro e último método de avaliação: a estimativa do número de indivíduos. Os gráficos obtidos, que se referem aos resultados relativos a 25 realizações, podem ser encontrados nas Figuras 6.8(a)–6.8(c).

O número escolhido para as realizações, 25, permite observar um comportamento persistente e não é mais elevado devido à alta carga computacional demandada para obter diversas realizações de um cenário com um número elevado de trajetórias presentes. Observando as Figuras 6.8(a)–6.8(c), verificam-se poucas diferenças entre as estimativas realizadas. Todas as estimativas, em geral, superestimam o número de indivíduos no cenário, comportando-se como um estimador polarizado. As estimativas feitas pelo filtro GM-PHD não são tão boas no início e ficam razoáveis depois da queda acentuada de indivíduos. Já o filtro EK-PHD parece inicialmente seguir o valor verdadeiro com uma polarização, porém há uma melhora significativa nas estimativas após a queda no número de indivíduos. Por fim, o filtro UK-PHD é aquele que aparenta ter o melhor dentre os resultados obtidos, porém no final, existem alguns picos fora dos valores reais.

Com todos os métodos de avaliação aplicados em cada um dos filtros, pode-se concluir que o filtro EK-PHD obteve bons resultados. Quando se têm em mãos modelos matemáticos lineares com ruídos gaussianos aditivos, a melhor escolha é, sem dúvida, o filtro GM-PHD. No entanto, quando há não-linearidades nos modelos matemáticos, o filtro EK-PHD cumpre muito bem seu papel, gerando resultados muito bons. Já o filtro UK-PHD, apesar de ter mostrado resultados razoáveis nas estimativas do número de indivíduos, seu desempenho se mostrou abaixo do esperado quando se observa os erros RMS e o tempo de execução computacional. Dessa maneira, o filtro EK-PHD será o escolhido para realizar os testes 3 e 4.

### 6.3 Teste 3 – Comparação entre modelos dinâmicos

O terceiro e último teste tem como objetivo verificar a influência dos modelos dinâmicos da literatura—em específico o modelo CV—e os propostos e discutidos no Capítulo 5 no desempenho da estimação de estados—os modelos NCSHT e a composição proposta entre NCSHT

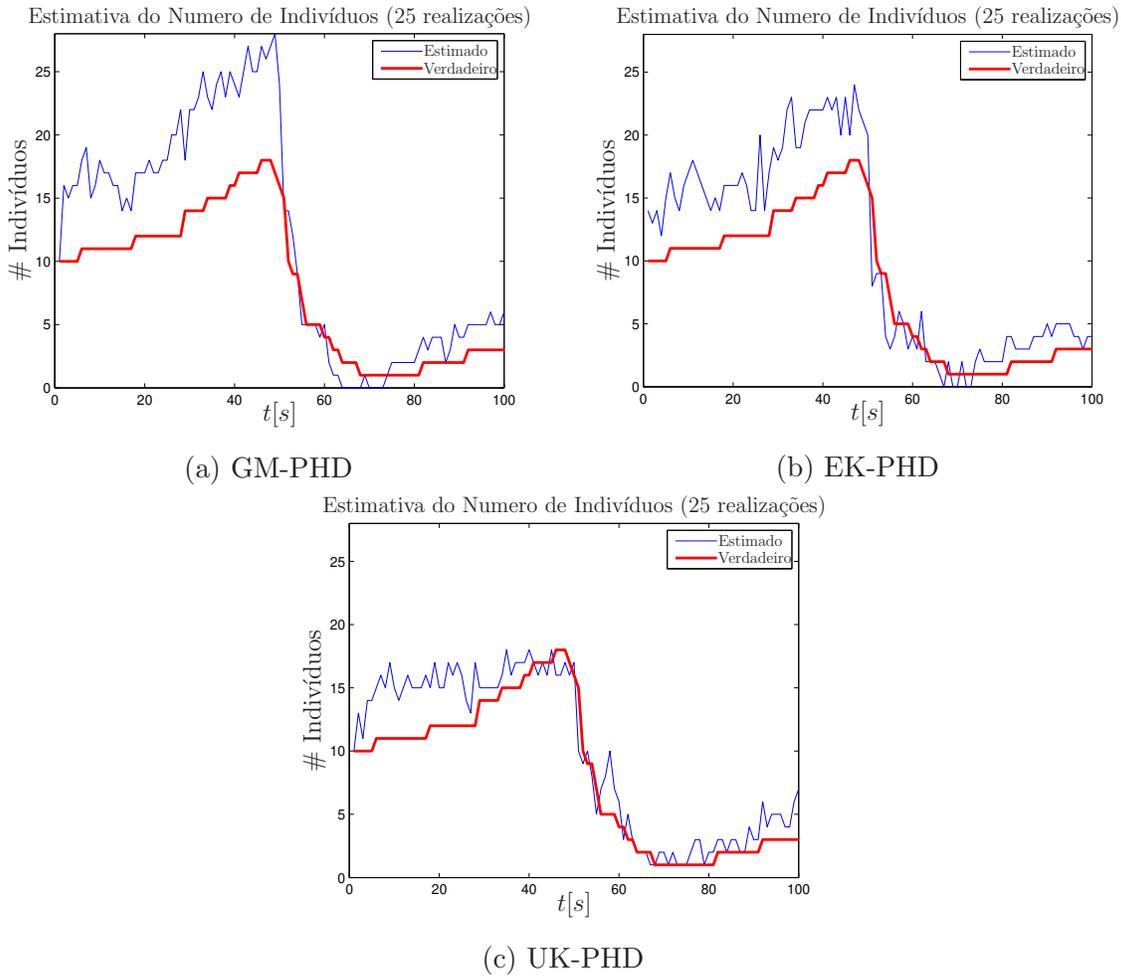


Figura 6.8: Estimativa do número de indivíduos

modificado e o de veículo terrestre modificado.

Para realizar este teste de tal forma a focar apenas nos modelos, o filtro estocástico será fixo. Com base nos resultados de desempenho obtidos na Seção 6.2, o filtro escolhido para as comparações entre os modelos dinâmicos foi o filtro EK-PHD.

Os modelos CV padrão, NCSHT modificado e de veículo terrestre modificado serão testados da seguinte forma: primeiramente, o modelo CV será testado; em seguida, o primeiro modelo proposto, NCSHT modificado, será testado; por fim, o segundo modelo proposto, NCSHT + Veículo Terrestre modificado, será testado (com mapa HM). Note que só é possível introduzir a informação do mapa HM quando se tem o modelo de veículos terrestres modificado. O modelo de medidas será novamente o modelo baseado em coordenadas cartesianas pelo mesmo motivo descrito no teste anterior.

Os parâmetros utilizados aqui são os mesmos da Seção 6.2, porém existem parâmetros extras devido ao segundo modelo proposto, além de alguns poucos parâmetros redefinidos. Tais parâmetros estão listados a seguir:

- Área do terreno:  $48 \times 48\text{m}^2$



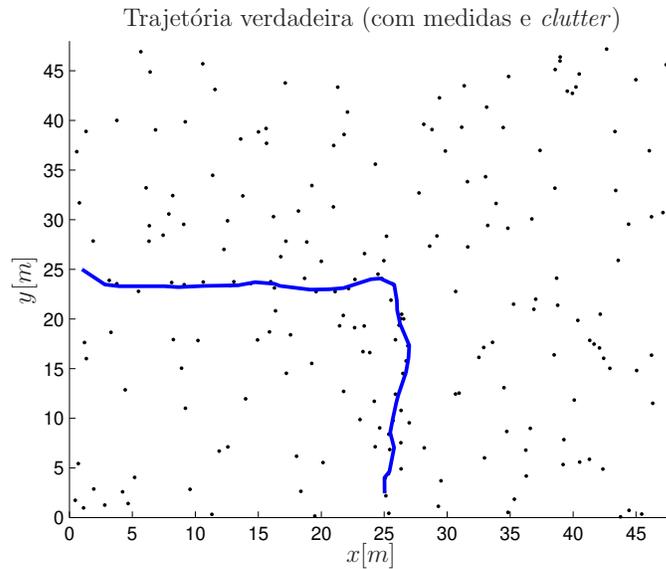


Figura 6.10: Uma realização – Medidas, *clutter* e trajetória verdadeira.

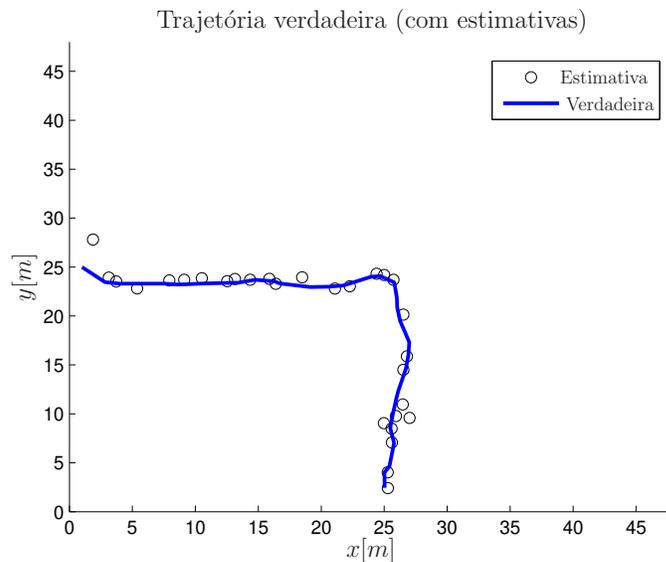


Figura 6.11: Uma realização – Estimativas e trajetória verdadeira.

Isso mostra a importância da informação do mapa HM, que acaba trazendo estimativas mais precisas por incluir informações sobre o cenário no filtro.

Assim como realizado no Teste 2, aqui também foi construída uma tabela com os valores de erro RMS médio para cada posição (Tabela 6.3), utilizando o método de distância mínima entre posição verdadeira e estimada. Note que os valores obtidos na Tabela 6.3 confirmam o bom desempenho do filtro EK-PHD utilizando o modelo proposto, que possui a informação do mapa HM.

Feitos os testes de avaliação do erro RMS, o segundo e terceiro métodos de avaliação serão

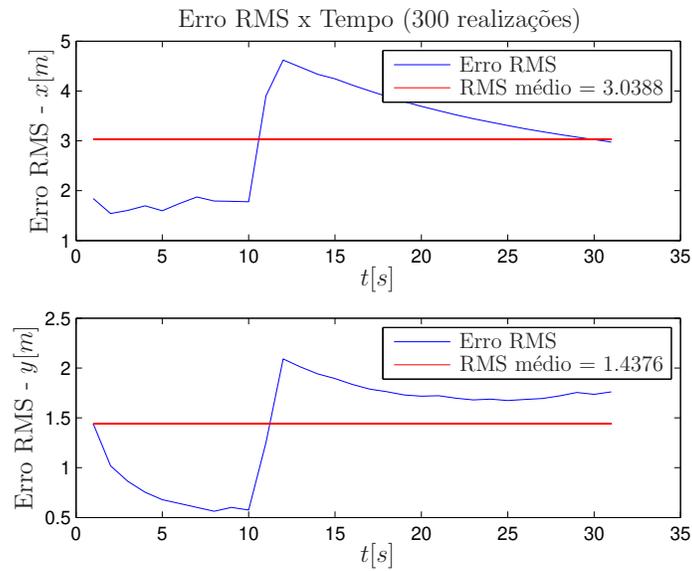


Figura 6.12: Erro RMS de posição – Modelo CV.

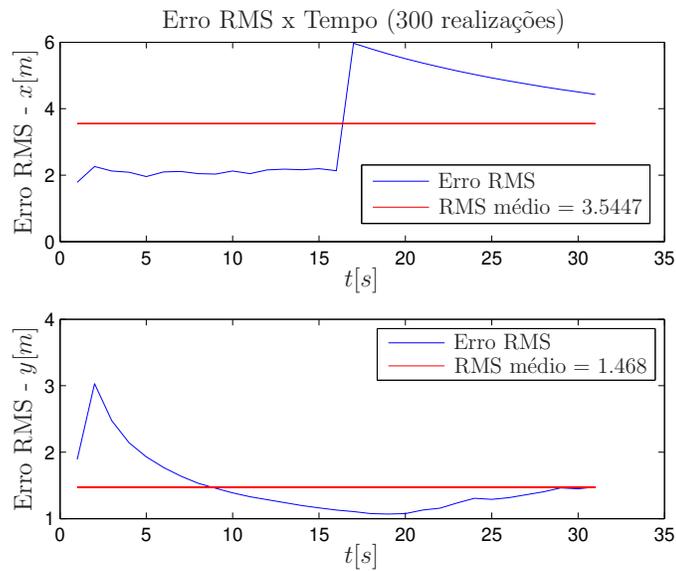


Figura 6.13: Erro RMS de posição – Modelo NCSHT modificado.

Tabela 6.3: Tabela comparativa entre erros RMS médios – Teste 3.

<i>Modelo Dinâmico</i>	$\overline{\text{RMS}}_x$	$\overline{\text{RMS}}_y$
CV padrão	0.58896	0.49007
NCSHT modificado	0.54997	0.51017
NCSHT + V. Terr. modificado	0.56209	0.44522

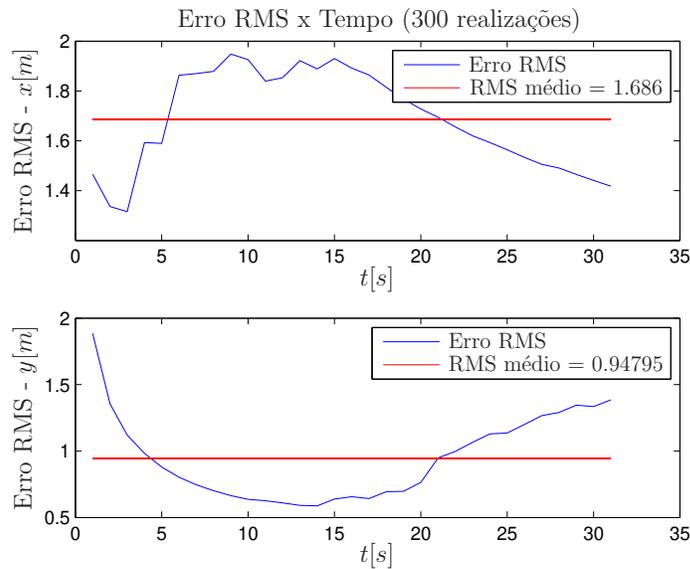


Figura 6.14: Erro RMS de posição – Modelo Proposto com mapa HM.

aplicados, de forma semelhante à realizada na seção anterior. Estes dois métodos de avaliação são feitos em conjunto de tal forma a verificar o comportamento de cada um dos filtros quando estes são colocados em situações computacionais “estressantes”.

Foram criadas 10 trajetórias iniciais, com 6 trajetórias que surgem por *spawn*, além das trajetórias que surgem espontaneamente durante a simulação. O tempo total de simulação foi de  $T_{sim} = 100s$  e o conjunto de vetores característicos é dado por  $A = \{[1.5 \ 0.5 \ 1.0], [2.0 \ 1.0 \ 0.75]\}$ . A Figura 6.15 mostra todas as trajetórias que foram levadas em conta para as avaliações pertinentes.

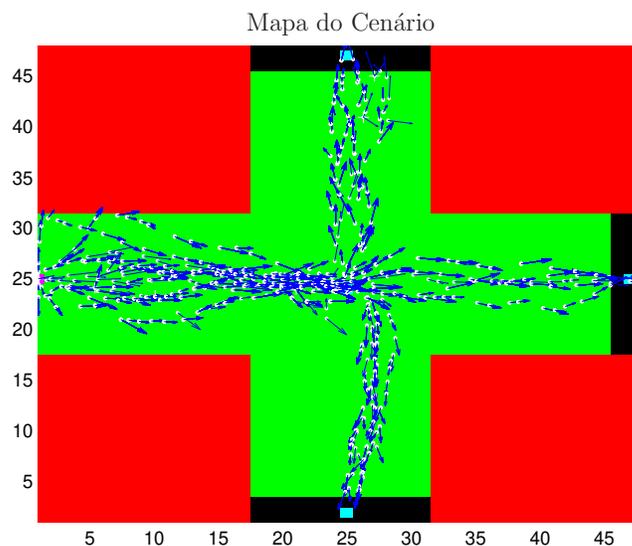


Figura 6.15: Cenário para avaliação – “Estresse” computacional.

Na Tabela 6.4, encontram-se os tempos de execução de cada um dos casos testados, lembrando que o filtro utilizado foi sempre o EK-PHD.

Tabela 6.4: Tabela comparativa entre tempos de execução – Teste 3.

<i>Modelo Dinâmico</i>	<i>Tempo de execução</i>
CV padrão	20.41s
NCSHT modificado	19.36s
NCSHT + V. Terr. modificado	21.42s

Os resultados obtidos na Tabela 6.4 indicam que o desempenho computacional do filtro são praticamente idênticas. Este resultado é bastante interessante, pois, independente de se ter ou não a informação trazida pelo mapa HM, o desempenho computacional é praticamente o mesmo.

Por fim, o terceiro e último método de avaliação: a estimativa do número de indivíduos. Os gráficos, que se referem aos resultados relativos a 25 realizações, podem ser encontrados nas Figuras 6.16(a)–6.16(c).

Observando as Figuras 6.16(a)–6.16(c), verificou-se que, dentre os casos testados, aquele com o modelo combinado (NCSHT + Veículo Terrestre modificados) foi o que apresentou resultados de estimativas melhores em relação aos outros dois modelos. Isso é notável no momento em que o número de indivíduos estabiliza-se em 1, em que as estimativas poucas vezes se distanciam do valor verdadeiro.

Com todos os métodos aplicados para cada um dos modelos apresentados, pode-se concluir que o modelo combinado proposto trouxe resultados mais satisfatórios em relação aos outros dois modelos, principalmente pelos resultados de erro RMS apresentados. Neste caso, existe a informação do mapa HM. Nos casos em que não há tal informação, o modelo NCSHT ainda pode ser uma boa escolha, pois também produziu bons resultados de desempenho.

## 6.4 Teste 4 – Influência do Mapa HM

Neste último teste, o objetivo é verificar como a informação do mapa HM pode influenciar na precisão das estimativas resultantes de um filtro estocástico multi-alvo. Para isso, criou-se um cenário, de área  $A = 100 \times 50\text{m}^2$ , composto por um longo corredor estreito de largura 9m, por onde é realizada uma trajetória simples com tempo total de  $T_{sim} = 60\text{s}$ . Esta trajetória, assim como todas as outras deste capítulo, foram geradas com base no perfil probabilístico “folha” com parâmetro  $\lambda = 7$ . Neste teste, o parâmetro  $\lambda$  será diminuído com o intuito de criar uma trajetória que seja menos objetiva em relação ao seu destino final. Com isso, o valor escolhido foi de  $\lambda = 3$ . Esta situação é ilustrada na Figura 6.17.

Para o cenário da Figura 6.17, foi construída uma função  $\xi(x, y)$  muito semelhante àquela descrita na Figura 5.2, utilizada para a realização do teste 3. Esta função, dada por:

$$\xi(x, y) = \frac{1}{25}(y - 25)^2 \quad (6.9)$$

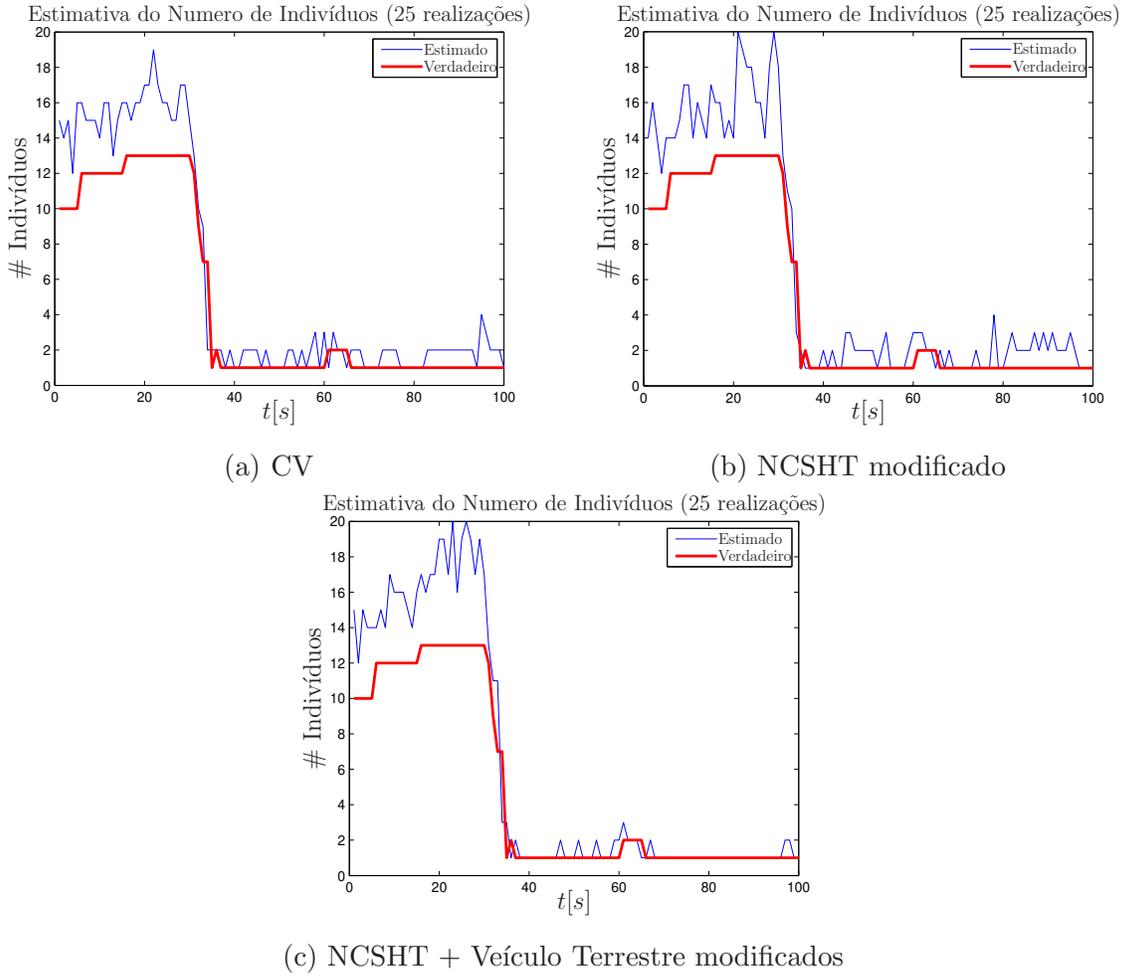


Figura 6.16: Estimativa do número de indivíduos

encontra-se descrita pela superfície em parábola da Figura 6.18.

Além da função  $\xi(x, y)$ , que define a matriz  $M_\xi(i, j)$ , é necessário construir a matriz  $M_{nslo} \in \mathbb{R}^{50 \times 100}$ , que determina a divisão de regiões do cenário e dada por:

$$M_{nslo} = \begin{bmatrix} \infty & \dots & \infty \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \infty & \dots & \infty \\ 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \\ \infty & \dots & \infty \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \infty & \dots & \infty \end{bmatrix}_{50 \times 100} \quad (6.10)$$

Por fim, é necessário definir o ângulo de direção preferencial  $\alpha_0(x, y)$ . Observando o cenário em questão (Figura 6.17), note que as trajetórias caminham apenas da esquerda para a direita, ou seja, o valor de  $\alpha_0(x, y)$  é 0. Os outros parâmetros são os mesmos utilizados para os testes

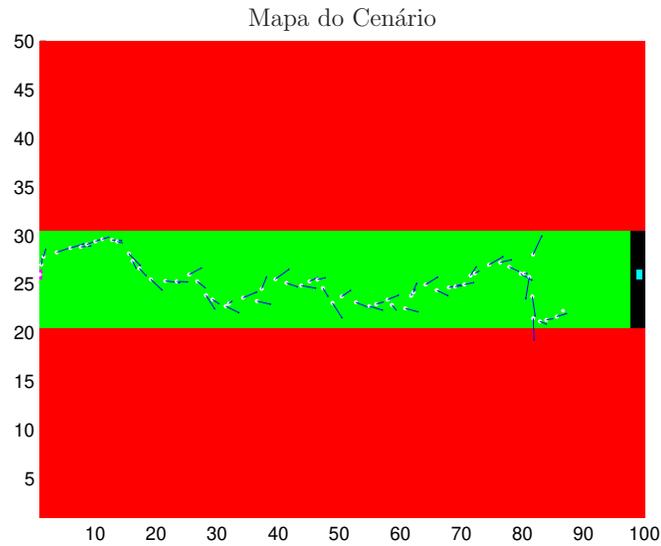


Figura 6.17: Cenário para verificação da influência do mapa HM.

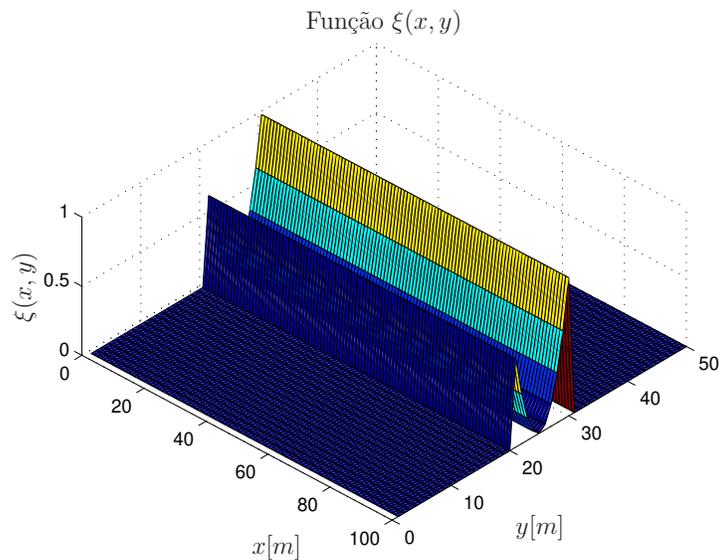


Figura 6.18: Função  $\xi(x, y)$ .

anteriores.

Desta forma, o método utilizado para verificar a influência do mapa HM sobre a precisão das estimativas é o seguinte: a partir da trajetória dada na Figura 6.17, foram criadas 600 realizações. Estas 600 realizações aplicadas ao filtro EK-PHD forneceram 600 conjuntos de estimativas de posição. Com estas estimativas, criou-se os gráficos em que se verifica o espalhamento destas estimativas através de níveis de cores. Quanto mais largos são estes níveis, mais espalhados estão os pontos estimados e vice-versa. E quanto mais avermelhada a região, maior a concentração de pontos naquela região.

Com o método definido, obteve-se os gráficos das Figuras 6.19(a) e 6.19(b).

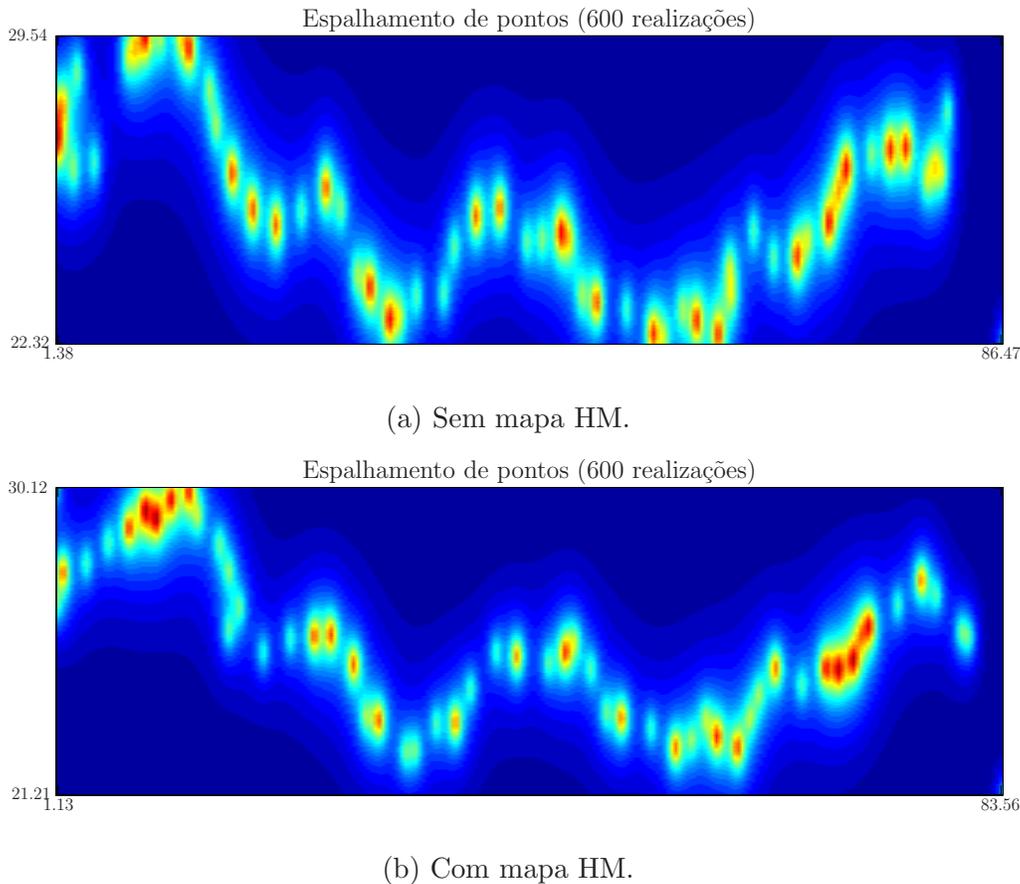


Figura 6.19: Espalhamento de pontos de posição – 600 realizações.

Note que o espalhamento de pontos na situação com mapa HM (Figura 6.19(b)) é levemente menor do que a do caso sem o mapa HM (Figura 6.19(a)). Isso mostra que o mapa HM traz uma influência positiva de tal forma a manter a trajetória dentro do caminho (ângulo de *heading*) preferencial, no caso,  $\alpha_0 = 0$ . No entanto, pode-se notar que há uma concentração de pontos maior no caso sem mapa HM do que no caso com mapa HM, o que pode conduzir a uma interpretação de que o caso sem mapa HM estaria trazendo estimativas melhores por ter um número de estimativas a mais em relação ao número de pontos da trajetória.

Para esclarecer este ponto, verificou-se o número de estimativas em excesso para os dois casos, com e sem mapa HM, para 600 realizações, com um total de 36000 pontos de trajetória verdadeiros, isto é,  $60s \times 600$  realizações. Com isso, a Tabela 6.5 foi obtida.

A Tabela 6.5 mostra que para o caso com o mapa HM, há um número menor de estimativas em excesso em relação ao caso sem mapa HM. Com este resultado, somado aos gráficos resultantes na Figura 6.19, pode-se concluir que, de fato, a maior concentração de pontos no caso sem mapa HM se dá pelo fato de existirem mais estimativas por ponto do que o caso com mapa HM e que, portanto, o espalhamento dos pontos para o caso com mapa HM é, de fato, menor do que o caso sem mapa HM. Há, assim, uma indicação que o uso do mapa HM tem o feito de manter a trajetória dentro do caminho preferencial, representado pelo corredor na figura.

Tabela 6.5: Tabela comparativa de números de estimativas em excesso.

<i>Estimativas em Excesso</i>	<i>Sem Mapa HM</i>	<i>Com Mapa HM</i>
2	19800	14400
3	1200	0
acima de 3	0	0

Com isso, conclui-se que em situações nas quais é possível incluir informações vindas de um mapa HM, acabam resultando em estimativas mais precisas.

## 6.5 Síntese de Capítulo

Neste capítulo foram apresentados diversas simulações e testes com o intuito de validar as propostas apresentadas nos Capítulos 3–5, isto é, os modelos de movimentação para indivíduos, o simulador de trajetórias de indivíduos e os modelos dinâmicos para filtragem estocástica.

Foram aplicados quatro tipos de testes de tal forma a analisar e discutir as propostas feitas nesta tese. O primeiro deles foi apresentado inicialmente no Capítulo 3 e discutido mais detalhadamente na Seção 6.1. Este teste teve o objetivo de verificar a influência dos parâmetros de cada um dos perfis probabilísticos na característica de objetividade de um indivíduo em relação ao seu destino final. Pôde-se verificar que o perfil “folha” apresentou resultados mais próximos à movimentação de um indivíduo. O perfil “balão”, baseado em uma distribuição gaussiana, também apresentou resultados satisfatórios, porém seu papel mais importante foi a possibilidade de justificar a escolha dos ruídos aditivos gaussianos para os modelos matemáticos da filtragem estocástica.

O segundo teste teve o papel de avaliar o desempenho de três dos filtros apresentados no Capítulo 2: GM-PHD, EK-PHD e UK-PHD. Pelos resultados de desempenho obtidos, o filtro EK-PHD foi aquele que obteve os resultados mais satisfatórios nos experimentos. Foi, por essa razão, o filtro escolhido para a aplicação do terceiro teste.

No teste de nº 3, os modelos propostos no Capítulo 5 foram postos à prova, através dos mesmos métodos de avaliação aplicados no teste nº 2. Dentre os modelos testados, o modelo dinâmico composto NCSHT + Veículo Terrestre modificados teve uma vantagem sobre os outros dois modelos. Isso mostra a importância das informações trazidas pelo mapa HM para obtenção de estimativas mais precisas.

Por fim, o quarto teste comprovou mais uma vez a influência positiva de se ter informações sobre o mapa HM. Através de gráficos que analisam o espalhamento e densidade de pontos em uma região, foi possível notar um espalhamento menor de pontos em torno da trajetória do indivíduo, mostrando que ter uma direção de preferência dentro de um mapa HM traz uma precisão melhor das estimativas.

Note que, nos testes 3 e 4, foram utilizadas apenas funções  $\xi(x, y)$  do tipo quadrática para a representação do mapa HM. No entanto, funções do tipo  $\xi(x, y) = c(x - x_0)^n$ ,  $n \geq 2$  também podem ser utilizadas para definir o mapa HM.



## Conclusões e Perspectivas

O trabalho realizado para esta tese de doutorado foi bastante extenso, com diversos resultados obtidos em relação aos estudos teóricos realizados e às propostas colocadas. No início do doutorado, houve dificuldade em criar uma base teórica relativa à teoria dos conjuntos aleatórios finitos, pois se trata de uma teoria bastante recente e complexa, envolvendo conceitos matemáticos próprios. No entanto, como foi visto na tese, esta teoria possui uma aplicação muito importante no problema de rastreamento de alvos, o que acabou motivando o aprofundamento teórico sobre os conjuntos aleatórios finitos. Formou-se assim uma base sólida para seguir adiante com os estudos e propostas, principalmente nos pontos de interesse da teoria de CAFs: os modelos matemáticos via CAF e os filtros estocásticos multi-alvos.

Os modelos matemáticos formulados via CAFs foram de suma importância para o tipo de problema tratado. No rastreamento de indivíduos, é muito comum encontrar cenários com diversas trajetórias, cuja quantidade varia com o tempo, além de também existirem medidas falsas. Este tipo de situação faz com que os modelos matemáticos via CAFs se ajustem perfeitamente no problema em questão.

Para realizar as estimativas de estados através de técnicas de filtragem estocástica, foram utilizados os filtros multi-alvo, formulados com base nos descritores estatísticos dos CAFs relativos aos modelos matemáticos. Mais especificamente, foram utilizados os filtros GM-PHD e seus variantes para modelos matemáticos não-lineares, EK-PHD e UK-PHD. A escolha do filtro GM-PHD para estudo e implementações computacionais foi baseada pela simplicidade (induzida pela hipótese gaussiana), tanto sob o ponto de vista teórico, quanto sob o ponto de vista computacional.

Nesta tese, foram desenvolvidas três propostas, listadas abaixo:

1. Perfis probabilísticos para movimentação de indivíduos;
2. Simulador de trajetórias de indivíduos;
3. Modelo dinâmico de indivíduos para filtragem.

Os perfis probabilísticos foram criados para trazer as características de movimentações de indivíduos para o ponto de vista de simulações computacionais. Estes perfis tentam, da maneira

mais verossímil possível, recriar características das trajetórias de pessoas como mudanças repentinas de direção, objetividade em relação aos destinos, interrupção nas trajetórias (possíveis paradas), velocidade de movimentação, entre outros.

Os três perfis propostos foram nomeados pelo formato de cada um deles: perfis “gota”, “folha” e “balão”. Cada um destes perfis tem como base distribuições e densidades de probabilidade que dão, além do formato, as informações sobre chances de possíveis mudanças de direção na trajetória. Dentre os perfis propostos, o perfil “folha”, baseado em uma densidade de probabilidade exponencial, foi o que mostrou os resultados mais satisfatórios. O perfil “balão”, baseado em uma densidade de probabilidade gaussiana, também apresentou resultados bons, mas sua importância ficou no fato de formar uma justificativa para utilização de ruídos aditivos com distribuição gaussiana nos filtros estocásticos multi-alvos, combinando assim o modelo com a hipótese gaussiana, essencial para os filtros do tipo KF.

Para aplicar os perfis probabilísticos e verificar seus comportamentos na movimentação de indivíduos, foi desenvolvido um simulador de trajetórias que reproduz situações em que há diversos indivíduos se locomovendo. Este simulador leva em conta informações sobre o tipo de terreno em que os indivíduos estão realizando as suas trajetórias. Estes terrenos são agrupados pela dificuldade, variando de “terreno livre” (dificuldade baixa) até “obstáculo intransponível” (dificuldade elevada). Este simulador reproduz trajetórias que surgem espontaneamente e que surgem via *spawn*, além de prever trajetórias já inicializadas no instante inicial.

A última das propostas teve o objetivo de propor um modelo dinâmico que conseguisse, da melhor maneira possível, representar as trajetórias do ponto de vista do filtro e fazer parte da estrutura dos filtros estocásticos multi-alvos. Para obter o modelo dinâmico, foi proposto criar um modelo combinado a partir de modelos encontrados na literatura, porém adaptados para o problema de rastreamento de indivíduos. O modelo proposto combinou o modelo NCSHT, um híbrido de velocidade constante com curvas horizontais para aeronaves, com o modelo para veículos terrestres, que possui a informação do mapa de hospitalidade de manobras (mapa HM).

Para avaliar e validar as propostas feitas nesta tese, diversas simulações e testes foram desenvolvidos. Estes testes envolveram a análise de desempenho dos perfis probabilísticos, filtros estocásticos multi-alvo e modelos dinâmicos sobre diversos aspectos. Foram avaliados a objetividade dos perfis probabilísticos e erros RMS de posição, tempo de processamento computacional e as estimativas, oferecidas pelo filtro, do número de indivíduos.

Pelos resultados obtidos no Capítulo 6, foi possível verificar o bom desempenho geral do filtro EK-PHD, além de bons resultados obtidos com a aplicação do modelo combinado proposto (NCSHT + Veículo Terrestre modificados), que possui a informação do mapa HM.

De um modo geral, o estudo feito, discutido e apresentado nos Capítulos 1 e 2, formando a base teórica da tese, as propostas definidas nos Capítulos 3–5, com conceitos e ideias não encontrados na literatura, e os resultados obtidos no Capítulo 6, relativos às propostas feitas nesta tese, forneceram um panorama adequado ao rastreamento de indivíduos. Obviamente, como o problema de rastreamento de indivíduos é um assunto muito vasto, existem diversas outras aplicações que podem ser estudadas futuramente. Algumas destas perspectivas futuras de aplicações encontram-se a seguir.

## Perspectivas

Nesta tese de doutorado foram tratados diversos assuntos, que abre um leque de novas possíveis abordagens, a serem feitas futuramente. Estas abordagens são baseadas nos estudos feitos e nos resultados obtidos na tese de doutorado.

Uma destas abordagens consiste em possíveis comparações/combinções entre os filtros estocásticos utilizados na dissertação de mestrado em (Frencl 2010)—filtro IMM (*Interactive Multiple Models*), composto por filtros BLUE, e o filtro de partículas—e os filtros SMC-PHD e GM-PHD. A possibilidade de combinações surge do fato da estrutura do filtro GM-PHD ser baseada em equações de filtragem de Kalman. As etapas de predição e correção poderiam ser substituídas por equações do filtro BLUE, do filtro IMM ou até mesmo do filtro de partículas. Esta abordagem requer um estudo mais detalhado e profundo sobre tais combinações.

Como nesta tese um dos filtros estudados foi o filtro EK-PHD com modelo de medidas cartesianas, uma perspectiva de estudo interessante é a influência do modelo de medidas polar (alcance  $r$  e ângulo de azimute  $\theta$ ), que é um modelo não-linear, no desempenho do filtro. Como já foi visto no Capítulo 2, o filtro EK-PHD depende do cálculo de jacobianas, sendo uma delas relativa ao modelo de medidas  $H_k$ . O cálculo desta jacobiana depende do estado previsto, o que pode trazer erros para os cálculos seguintes. Uma das possibilidades é utilizar a medida ao invés do estado previsto no cálculo da jacobiana.

Uma outra perspectiva de estudo relativo aos temas tratados na tese é o problema de polarização de termos gaussianos no filtro GM-PHD. Depois de um certo número de iterações do filtro GM-PHD, é possível que haja uma concentração de termos gaussianos em torno das trajetórias, o que pode acarretar em uma polarização indesejada. Existem algoritmos que evitam este tipo de problema, como a reamostragem, muito comum em filtro de partículas. Uma das possibilidades é integrar a etapa de reamostragem, existente no filtro de partículas, com o filtro GM-PHD.

Outras perspectivas que podem ser tratadas futuramente estão listadas a seguir:

- Simulador aplicado à situações de pânico (*crowd simulation*);
- Integração entre rastreamento via simulador e rastreamento via técnicas de imagens (*visual tracking*);
- Expansão do simulador para veículos terrestres;
- Inclusão de rótulos associados às trajetórias;
- Explorar o modelo com mapa HM em situações com perfis de velocidade que dependam do terreno (p. ex., subidas, descidas etc.).

Além das perspectivas listadas acima, mais artigos para revistas especializadas serão escritos a partir dos resultados obtidos nesta tese de doutorado.

## Publicações

As publicações realizadas durante o período de doutorado encontram-se na lista a seguir:

1. FRENCL, V. B. ; do Val, J. B. R. . Filtro de Partículas Aplicado ao Rastreamento de Alvos Manobrantos Utilizando a Velocidade Radial. Congresso Brasileiro de Automática, 2010, Bonito. Anais do XVIII Congresso Brasileiro de Automática, 2010. p. 1763-1770.
2. FRENCL, V. B. ; do Val, J. B. R. . Rastreamento utilizando filtro de partículas com perturbação gaussiana na estimativa e medidas de velocidade radial. XIX Congresso Brasileiro de Automática, 2012, Campina Grande. Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática, 2012. p. 4435-4442.
3. FRENCL, V. B. ; do Val, J. B. R. . Tracking with Range Rate Measurements: Turn Rate Estimation and Particle Filtering. IEEE - AESS RADARCON 2012, 2012, Atlanta. IEEE - AESS RADARCON 2012. p. 287-292.
4. FRENCL, V. B. ; do Val, J. B. R. . State Estimation using GM-PHD Filter applied to the Tracking of Individuals. 2013 IEEE Radar Conference - RadarCon, 2013, Ottawa. 2013 IEEE Radar Conference - RadarCon, 2013.

## Submissões

A submissão realizada durante o período de doutorado encontra-se a seguir

1. FRENCL, V.B. ; do Val, J. B. R. ; Mendes, R. S. ; Zuñiga, Y. C. . State Estimation using Particle Filtering and Range Rate Measurements. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2013/2014. (em revisão pelos autores).

# Bibliografia

- Andriluka, M., Roth, S. & Schiele, B. (2008). People-Tracking-by-Detection and People-Detection-by-Tracking, *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 1–8.
- Bar-Shalom, Y., Li, X.-R. & Kirubarajan, T. (2001). *Estimation with Applications to Tracking and Navigation - Algorithms and Software for Information Extraction*, Artech House.
- Billingsley, P. (1995). *Probability and Measure*, Wiley-Interscience.
- Blackman, S. & Popoli, R. (1999). *Design and Analysis of Modern Tracking Systems*, Artech House.
- Chang, S., Sharan, R., Wolf, M., Mitsumoto, N. & Burdick, J. (2010). People Tracking with UWB Radar Using a Multiple-Hypothesis Tracking of Clusters (MHTC) Method, *International Journal of Social Robotics* **2**(1): 3–18.
- Clark, D., Ruiz, I. T., Petillot, Y. & Bell, J. (2007). Particle PHD Filter Multiple Target Tracking in Sonar Image, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* **43**(1): 409–416.
- Clark, D. & Vo, B.-N. (2007). Convergence Analysis of the Gaussian Mixture PHD Filter, *IEEE Transactions on Signal Processing* **55**(4): 1204–1212.
- Cui, N., Hong, L. & Layne, J. R. (2005). A Comparison of Nonlinear Filtering Approaches with an Application to Ground Target Tracking, *Signal Processing* **85**(8): 1469–1492.
- Frencl, V. B. (2010). *Técnicas de Filtragem Utilizando Processos com Saltos Markovianos Aplicados ao Rastreamento de Alvos Móveis*, Master’s thesis, Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP.
- Frencl, V. & do Val, J. (2013). State Estimation Using GM-PHD Filter Applied to the Tracking of Individuals, *2013 IEEE Radar Conference (RADARCON)*, pp. 1–6.
- Goodman, I. R., Mahler, R. P. S. & Nguyen, H. T. (1997). *Mathematics of Data Fusion*, Kluwer Academic Publishers.

- Julier, S. & Uhlmann, J. (2004). Unscented Filtering and Nonlinear Estimation, *Proceedings of the IEEE* **92**(3): 401–422.
- Kastella, K. & Kreucher, C. (2005). Multiple Model Nonlinear Filtering for Low Signal Ground Target Applications, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* **41**(2): 549–564.
- Li, X. & Jilkov, V. (2005). Survey of maneuvering target tracking. Part V. Multiple-model methods, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* **41**(4): 1255 – 1321.
- Li, X. R. & Jilkov, V. P. (2001). Survey of Maneuvering Target Tracking: III. Measurement models, *Proc. SPIE* **4473**: 423–446.
- Li, X. R. & Jilkov, V. P. (2003). Survey of Maneuvering Target Tracking. Part I. Dynamic Models, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* **39**(4): 1333–1364.
- Mahler, R. (2001). Multitarget Moments and Their Application to Multitarget Tracking, *Workshop on Estimation, Tracking and Fusion: A Tribute to Yaakov Bar-Shalom*, pp. 134–166.
- Mahler, R. P. S. (2003). Multitarget Bayes Filtering via First-Order Multitarget Moments, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* **39**(4): 1152–1178.
- Mahler, R. P. S. (2007). *Statistical Multisource-Multitarget Information Fusion*, Artech House.
- Nuñez-Garcia, J. & Wolkenhauer, O. (2002). Random Set System Identification, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **10**: 287–296.
- Ristic, B., Arulampalam, S. & Gordon, N. (2004). *Beyond the Kalman Filter – Particle Filters for Tracking Applications*, Artech House.
- Sidenbladh, H. & Wirkander, S.-L. (2003). Multi-Target Particle Filter for the Probability Hypothesis Density, *6th International Conference on Information Fusion*, pp. 800–806.
- Vihola, M. (2005). Random Set Particle Filter for Bears Only Target Tracking, *XIV SPIE Signal Processing, Sensor Fusion, and Target Recognition* **5809**: 301–312.
- Vihola, M. (2007). Rao-blackwellised particle filtering in random set multitarget tracking, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* **43**(2): 689–705.
- Vo, B.-N. & Ma, W.-K. (2006). The Gaussian Mixture Probability Hypothesis Density Filter, *IEEE Transactions on Signal Processing* **54**(11): 4091–4104.
- Vo, B.-N., Singh, S. & Doucet, A. (2003). Sequential Monte Carlo Implementation of the PHD Filter for Multi-target Tracking, *Sixth International Conference of Information Fusion*.
- Vo, B.-T. (2008). *Random Finite Sets in Multi-Object Filtering*, PhD thesis, University of Western Australia.

- 
- Vo, B.-T., Vo, B.-N. & Cantoni, A. (2007). Analytic Implementations of the Cardinalized Probability Hypothesis Density Filter, *IEEE Transactions on Signal Processing* **55**(7): 3553–3567.
- Vo, B.-T., Vo, B.-N. & Cantoni, A. (2008). Bayesian Filtering With Random Finite Set Observations, *IEEE Transactions on Signal Processing* **56**(4): 1313–1326.
- Zhao, Z., Li, X. & Jilkov, V. (2004). Best Linear Unbiased Filtering with Nonlinear Measurements for Target Tracking, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* **40**(4): 1324–1336.



## Regras Básicas de Diferenciação para CAFs

### A.1 Regras Básicas de Diferenciação

No cálculo diferencial tradicional, existem diversas regras de diferenciação que são frequentemente utilizadas, não havendo a necessidade de utilizar os conceitos formais baseados em limite. No cálculo multi-alvo acontece o mesmo, existindo uma série de regras básicas para diferenciação. Ao todo, são onze regras com versões para derivadas funcionais e/ou para derivadas de conjunto, listadas a seguir:

- (i) Regra da constante;
- (ii) Regra da linearidade;
- (iii) Regra do monômio;
- (iv) Regra da potência;
- (v) Regra da soma;
- (vi) Regra do produto (3 versões);
- (vii) Regra da cadeia (3 versões);

Para facilitar a distinção entre as versões das derivadas, utilizaremos a seguinte notação: “DC” indica a versão para derivada de conjunto e “DF” indica a versão para derivada funcional.

#### A.1.1 Regra da Constante

(DC) Seja  $\phi(S) = K$  uma constante real. Então:

$$\frac{\delta\phi}{\delta Y}(S) = \frac{\delta}{\delta Y}K = 0 \quad (\text{A.1})$$

(DF) Seja  $F[h] = K$  uma constante real. Então:

$$\frac{\delta F}{\delta Y}[h] = \frac{\delta}{\delta Y}K = 0 \quad (\text{A.2})$$

### A.1.2 Regra da Linearidade

(DC) Seja  $g(\mathbf{y})$  uma função real de  $\mathbf{y}$  e defina a função aditiva de conjunto como sendo  $\phi_g(S) = \int_S g(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$ . Então:

$$\frac{\delta \phi_g}{\delta Y}(S) = \begin{cases} \phi_g(S) & , \quad Y = \emptyset \\ g(\mathbf{y}) & , \quad Y = \{\mathbf{y}\} \\ 0 & , \quad |Y| \geq 2 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

(DF) Defina o funcional linear de  $g(\mathbf{y})$  como sendo  $F[h] = \int h(\mathbf{y})g(\mathbf{y})d\mathbf{y}$ . Então:

$$\frac{\delta F}{\delta Y}[h] = \begin{cases} F[h] & , \quad Y = \emptyset \\ g(\mathbf{y}) & , \quad Y = \{\mathbf{y}\} \\ 0 & , \quad |Y| \geq 2 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

### A.1.3 Regra do Monômio

(DC) Seja  $\phi_g(S)$  definido como na regra de linearidade. Então, se  $|Y| = n$  e  $N \geq 0$ :

$$\frac{\delta}{\delta Y} \phi_g(S)^N = \begin{cases} \phi_g(S)^N & , \quad Y = \emptyset \\ n! C_{N,n} \phi_g(S)^{N-n} g(\mathbf{y}_1) \dots g(\mathbf{y}_n) & , \quad Y = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n\}, |Y| = n \leq N \\ 0 & , \quad |Y| > N \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

(DF) Seja  $F[h]$  definido como na regra de linearidade. Então, se  $|Y| = n$  e  $N \geq 0$ :

$$\frac{\delta}{\delta Y} F[h]^N = \begin{cases} F[h]^N & , \quad Y = \emptyset \\ n! C_{N,n} F[h]^{N-n} g(\mathbf{y}_1) \dots g(\mathbf{y}_n) & , \quad Y = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n\}, |Y| = n \leq N \\ 0 & , \quad |Y| > N \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

### A.1.4 Regra da Potência

(DC) Seja  $\phi(S)$  uma função de conjunto e  $N \geq 1$ . Então:

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{y}} \phi(S)^N = N \phi(S)^{N-1} \frac{\delta \phi}{\delta \mathbf{y}}(S) \quad (\text{A.7})$$

(DF) Seja  $F[h]$  um funcional e  $N \geq 1$ . Então:

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{y}} F[h]^N = N F[h]^{N-1} \frac{\delta F}{\delta \mathbf{y}}[h] \quad (\text{A.8})$$

### A.1.5 Regra da Soma

(DC) Sejam  $\phi_1(S)$  e  $\phi_2(S)$  funções de conjunto e  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ . Então:

$$\frac{\delta}{\delta Y} (a_1 \phi_1(S) + a_2 \phi_2(S)) = a_1 \frac{\delta \phi_1}{\delta Y}(S) + a_2 \frac{\delta \phi_2}{\delta Y}(S) \quad (\text{A.9})$$

(DF) Sejam  $F_1[h]$  e  $F_2[h]$  funcionais e  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ . Então:

$$\frac{\delta}{\delta Y} (a_1 F_1[h] + a_2 F_2[h]) = a_1 \frac{\delta F_1}{\delta Y}[h] + a_2 \frac{\delta F_2}{\delta Y}[h] \quad (\text{A.10})$$

### A.1.6 Regra do Produto

(DC) Sejam  $\phi_1(S)$  e  $\phi_2(S)$  funções de conjunto. Então:

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{y}}(\phi_1(S)\phi_2(S)) = \frac{\delta \phi_1}{\delta \mathbf{y}}(S)\phi_2(S) + \phi_1(S)\frac{\delta \phi_2}{\delta \mathbf{y}}(S) \quad (\text{A.11})$$

(DF) Sejam  $F_1[h]$  e  $F_2[h]$  funcionais. Então:

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{y}}(F_1[h]F_2[h]) = \frac{\delta F_1}{\delta \mathbf{y}}[h]F_2[h] + F_1[h]\frac{\delta F_2}{\delta \mathbf{y}}[h] \quad (\text{A.12})$$

### A.1.7 Regra do Geral do Produto – 2 fatores

(DC) Sejam  $\phi_1(S)$  e  $\phi_2(S)$  funções de conjunto. Então:

$$\frac{\delta}{\delta Y}(\phi_1(S)\phi_2(S)) = \sum_{W \subseteq Y} \frac{\delta \phi_1}{\delta W}(S) \frac{\delta \phi_2}{\delta(Y-W)}(S) \quad (\text{A.13})$$

(DF) Sejam  $F_1[h]$  e  $F_2[h]$  funcionais. Então:

$$\frac{\delta}{\delta Y}(F_1[h]F_2[h]) = \sum_{W \subseteq Y} \frac{\delta F_1}{\delta W}[h] \frac{\delta F_2}{\delta(Y-W)}[h] \quad (\text{A.14})$$

### A.1.8 Regra do Geral do Produto – $n$ fatores

(DC) Sejam  $\phi_1(S), \dots, \phi_n(S)$  funções de conjunto. Então:

$$\frac{\delta}{\delta Y}(\phi_1(S) \dots \phi_n(S)) = \sum_{W_1 \uplus \dots \uplus W_n = Y} \frac{\delta \phi_1}{\delta W_1}(S) \dots \frac{\delta \phi_n}{\delta W_n}(S) \quad (\text{A.15})$$

(DF) Sejam  $F_1[h], \dots, F_n[h]$  funcionais. Então:

$$\frac{\delta}{\delta Y}(F_1[h] \dots F_n[h]) = \sum_{W_1 \uplus \dots \uplus W_n = Y} \frac{\delta F_1}{\delta W_1}[h] \dots \frac{\delta F_n}{\delta W_n}[h] \quad (\text{A.16})$$

Note que as somas indicadas em (A.15) e (A.16) são calculadas sobre todos os subconjuntos mutuamente disjuntos  $W_1, \dots, W_n$  de  $Z$ , cuja união é  $Z$ .

### A.1.9 Regra do Cadeia – Versão 1

(DC) Sejam  $f(y_1, \dots, y_n)$  e  $f(y)$  funções reais de variáveis  $y_1, \dots, y_n$  e  $y$  reais. Seja também  $\phi_1(S), \dots, \phi_n(S)$  e  $\phi(S)$  funções de conjunto. Então:

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{y}}f(\phi_1(S), \dots, \phi_n(S)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j}(\phi_1(S), \dots, \phi_n(S)) \frac{\delta \phi_j}{\delta \mathbf{y}}(S) \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{y}}f(\phi(S)) = \frac{df}{dy}(\phi(S)) \frac{\delta \phi}{\delta \mathbf{y}}(S) \quad (\text{A.18})$$

(DF) Sejam  $f(y_1, \dots, y_n)$  e  $f(y)$  funções reais de variáveis  $y_1, \dots, y_n$  e  $y$  reais. Seja também  $F_1[h], \dots, F_n[h]$  e  $F[h]$  funcionais. Então:

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{y}} f(F_1[h], \dots, F_n[h]) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j}(F_1[h], \dots, F_n[h]) \frac{\delta F_j}{\delta \mathbf{y}}[h] \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{y}} f(F[h]) = \frac{df}{dy}(F[h]) \frac{\delta F}{\delta \mathbf{y}}[h] \quad (\text{A.20})$$

### A.1.10 Regra do Cadeia – Versão 2

Para esta versão da regra da cadeia, temos apenas a versão para os funcionais. Seja  $s(y)$  uma função real da variável real  $y$  e  $F[h]$  um funcional. Defina  $s_h(\mathbf{y}) \triangleq s(h(\mathbf{y}))$ ,  $\forall \mathbf{y}$ . Então:

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{y}} F[s_h] = \frac{\delta F}{\delta \mathbf{y}}[s_h] \frac{ds}{dy}(h(\mathbf{y})) \quad (\text{A.21})$$

### A.1.11 Regra do Cadeia – Versão 3

A última versão da regra da cadeia também é apenas definida para os funcionais. Seja  $F[h]$  um funcional,  $T[h]$  um funcional de transformação e defina:

$$\frac{\delta T}{\delta \mathbf{y}}[h](\mathbf{w}) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{T[h + \varepsilon \delta_{\mathbf{y}}](\mathbf{w}) - T[h](\mathbf{w})}{\varepsilon} \quad (\text{A.22})$$

Desta forma, a quarta regra da cadeia é dada por:

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{y}} F[T[h]] = \int \frac{\delta T}{\delta \mathbf{y}}[h](\mathbf{w}) \frac{\delta F}{\delta \mathbf{w}}[T[h]] d\mathbf{w} \quad (\text{A.23})$$