

Victor Baptista Frencl

**Técnicas de Filtragem Utilizando Processos com Saltos
Markovianos Aplicados ao Rastreamento de Alvos Móveis**

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Automação.

Orientador: João Bosco Ribeiro do Val
Co-orientador: Rafael Santos Mendes

Campinas, SP
2010

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

F889t Frencl, Victor Baptista
Técnicas de filtragem utilizando processos com saltos markovianos aplicados ao rastreamento de alvos móveis / Victor Baptista Frencl. – Campinas, SP: [s.n.], 2010.

Orientadores: João Bosco Ribeiro do Val, Rafael Santos Mendes.

Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Modelos matemáticos. 2. Markov, Processos de. 3. Processos estocásticos. I. Val, João Bosco Ribeiro do. II. Mendes, Rafael Santos. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. IV. Título.

Título em Inglês: Filtering techniques using Markov jump processes applied to maneuvering target tracking

Palavras-chave em Inglês: Mathematical models, Markov processes, Stochastic processes

Área de concentração: Automação

Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica

Banca examinadora: Karl Heinz Kienitz, Wagner Caradori do Amaral

Data da defesa: 30/03/2010

Programa de Pós Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

Candidato: Victor Baptista Frencl

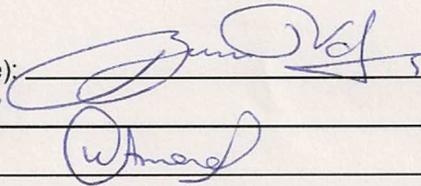
Data da Defesa: 30 de março de 2010

Título da Tese: "Técnicas de Filtragem Utilizando Processos com Saltos Markovianos Aplicados ao Rastreamento de Alvos Móveis"

Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val (Presidente):

Prof. Dr. Karl Heinz Kienitz:

Prof. Dr. Wagner Caradori do Amaral:



Resumo

Esta dissertação possui como tema o estudo do problema de rastreamento de alvos manobrantés a partir da modelagem de sistemas dinâmicos com utilização da teoria de saltos markovianos nas transições entre modelos, da utilização de filtros estocásticos recursivos e de técnicas de filtragem. Foram feitos estudos e análises de dois tipos de modelos dinâmicos, o de velocidade constante e o de giro constante. Baseados nestes modelos, elaboraram-se algumas variações em cima destes. Também foram estudados modelos de observações, propondo a inclusão da velocidade radial nas observações do alvo. Os filtros estudados foram o filtro de Kalman estendido, que lida com modelos matemáticos não-lineares, e filtro BLUE, que trata de dinâmicas lineares e modelos de observações que envolvam conversões de coordenadas. As técnicas de filtragem de modelos múltiplos interagentes, que envolve chaveamento entre filtros, e de filtro de partículas, que baseia-se em simulações de Monte Carlo, foram estudados, propondo algumas variações destas técnicas. Foi desenvolvida uma metodologia, através de simulações numéricas no *software* MATLAB, para comparar desempenhos das propostas de técnicas de filtragem baseadas nestes estudos.

Abstract

The dissertation's theme is the study of the maneuvering target tracking problem from dynamic systems modeling using markovian jumps on the transitions between models, recursive stochastic filters and filtering techniques. Surveys and analysis of two types of dynamic models were made: the constant velocity model and the constant turn model. Based on these models, some variations were prepared. Observations models were also studied, proposing the inclusion of the radial velocity in the target observations. The studied filters were the extended Kalman filter, which deals with nonlinear mathematical models, and the BLUE filter, which deals with linear dynamics and observations models which involves coordinates conversions. The filtering techniques of the interacting multiple models, which involves the switching between models, and the particle filter, which is based on Monte Carlo simulations, were studied, proposing some variation of these techniques. We developed a methodology, using numerical simulations on MATLAB software, to compare performances of some of the filtering techniques based on these studies.

Agradecimentos

A Deus, primeiramente, por pela proteção e saúde, sempre acompanhando-me a todo instante.

Ao meu orientador, Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val, e ao meu co-orientador, Prof. Dr. Rafael Santos Mendes, sou grato pela orientação, paciência e competência diante de meus pensamentos e questionamentos.

Aos meus pais, pelos incentivos e conselhos dados durante esta jornada que iluminaram e guiaram o meu trabalho.

A minha namorada, pelo seu apoio e pelo seu amor, que torna perfeitos todos os meus dias.

Aos demais colegas de pós-graduação, pelas críticas e sugestões.

À FAPESP, pelo apoio financeiro.

A Deus, meus pais e minha namorada

Sumário

Lista de Figuras	xiii
Lista de Tabelas	xv
Lista de Algoritmos	xvii
Glossário	xix
Lista de Símbolos	xxi
Trabalhos Publicados Pelo Autor	xxiii
1 Introdução	1
1.1 Processos Discretos de Saltos Markovianos	1
1.2 Modelagem	2
1.3 Filtragem	4
1.4 Estrutura da Dissertação	6
2 Modelagem	7
2.1 Modelos Dinâmicos	7
2.1.1 Modelo de Velocidade Constante — CV	8
2.1.2 Modelo de Giro Constante — CT	10
2.2 Modelos de Observação	18
2.3 Velocidade Radial como Informação Extra de Observação	21
3 Filtros Estocásticos Recursivos	23
3.1 Filtro de Kalman Estendido — EKF	24
3.1.1 Matrizes Jacobianas para o Modelo CV	27
3.1.2 Matrizes Jacobianas para o Modelo CT_{ph}	28
3.1.3 Matrizes Jacobianas para o Modelo CT_{pa}	30
3.1.4 Fluxograma para um Ciclo de EKF	32
3.2 Filtro BLUE	34
3.2.1 Procedimento de Despolarização	34
3.2.2 Equações de Filtragem — BLUE	47
3.2.3 Fluxograma para um Ciclo de Filtro BLUE	48

4	Modelos Múltiplos Interagentes	51
4.1	Chaveamento Modelado Por Saltos Markovianos	52
4.2	A Técnica de IMM	53
4.2.1	Reinicialização Condicionada por Modelo	53
4.2.2	Filtragem Condicionada por Modelo	54
4.2.3	Atualização da Probabilidade do Modo	56
4.2.4	Estimativa / Covariância Global	57
4.2.5	Estrutura da Técnica IMM	57
4.3	Três Diferentes Bancos de Filtros	58
4.3.1	Banco de Filtros Baseados nos Modelos CV, CT_{ph} e CT_{pa} — IMM_1	58
4.3.2	Banco de Filtros com Rotações Espaciais — IMM_2	58
4.3.3	Banco de Filtros com Alinhamento de Velocidade — IMM_3	62
5	Filtro de Partículas	65
5.1	Modelo Matemático	66
5.2	Amostragem por Importância	66
5.3	Amostragem Sequencial por Importância	67
5.3.1	Escolha da Distribuição por Importância	69
5.3.2	Problema de Degeneração	70
5.4	Reamostragem	71
5.5	Algoritmo para o Filtro de Partículas	72
5.6	Velocidade Radial como Informação para o Cálculo da Velocidade Angular	75
6	Testes e Resultados	81
6.1	Testes de Desempenho — EKF <i>versus</i> Filtro BLUE	82
6.1.1	Trajectoria Retilínea	84
6.1.2	Trajectoria em Curva Suave	85
6.1.3	Trajectoria Manobra	86
6.2	Testes de Desempenho — IMM <i>versus</i> PF	89
6.2.1	Trajectoria <i>Loop</i>	92
6.2.2	Trajectoria Manobra	94
6.2.3	Trajectoria Ziguezague	103
6.2.4	Trajectorias com Curvas Rápidas	112
7	Conclusões	119
	Referências bibliográficas	122
A	Matriz de Covariância R_k para o EKF com Observações Despolarizadas	127

Lista de Figuras

2.1	Posição e velocidade de um alvo em velocidade constante.	9
2.2	Geometria de um movimento em curva com velocidade angular $\vec{\omega}$	10
2.3	Sistema de coordenadas esféricas do radar.	19
2.4	Disposição espacial do vetor velocidade radial.	21
3.1	Fluxograma básico de um ciclo do filtro EKF (Os números em cada bloco referem-se às respectivas equações).	33
3.2	Fluxograma básico de um ciclo do filtro BLUE (Os números em cada bloco referem-se às respectivas equações).	48
4.1	Possíveis sequências de chaveamentos entre modelos.	53
4.2	Exemplo de um ciclo de IMM com um banco de três filtros.	57
4.3	Cálculo do ângulo θ_z a partir de \hat{v}	62
4.4	Cálculo do ângulo θ_y a partir de \hat{v}	63
5.1	Processo de reamostragem.	71
5.2	Um passo do filtro de partículas ($N = 10$).	72
5.3	Cálculo para obtenção da velocidade angular.	76
5.4	Cálculo para obtenção da velocidade angular.	77
6.1	Trajetória retilínea.	84
6.2	Curva suave.	85
6.3	Manobra.	87
6.4	Gráfico de $\ \overline{\text{RMS}}\ $ - Manobra - $(p_x^0, p_y^0) = (-30000m, -30000m)$	87
6.5	Gráfico de $\ \overline{\text{RMS}}\ $ - Manobra - $(p_x^0, p_y^0) = (0m, 30000m)$	88
6.6	Trajetória <i>Loop</i>	92
6.7	Gráficos de $\ \overline{\text{RMS}}\ $ - <i>Loop</i>	93
6.8	Trajetória Manobra.	94
6.9	Gráficos de $\ \overline{\text{RMS}}\ $ - Manobra (inclinação -60°).	95
6.10	Gráficos de $\ \overline{\text{RMS}}\ $ - Manobra (inclinação -45°).	96
6.11	Gráficos de $\ \overline{\text{RMS}}\ $ - Manobra (inclinação -30°).	97
6.12	Gráficos de $\ \overline{\text{RMS}}\ $ - Manobra (inclinação 0°).	98
6.13	Gráficos de $\ \overline{\text{RMS}}\ $ - Manobra (inclinação 30°).	99
6.14	Gráficos de $\ \overline{\text{RMS}}\ $ - Manobra (inclinação 45°).	100
6.15	Gráficos de $\ \overline{\text{RMS}}\ $ - Manobra (inclinação 60°).	101

6.16	Gráficos de $\ \overline{\text{RMS}}\ $ - Manobra (inclinação 90°).	102
6.17	Trajectoria em ziguezague.	103
6.18	Gráficos de $\ \overline{\text{RMS}}\ $ - Ziguezague (inclinação -60°).	104
6.19	Gráficos de $\ \overline{\text{RMS}}\ $ - Ziguezague (inclinação -45°).	105
6.20	Gráficos de $\ \overline{\text{RMS}}\ $ - Ziguezague (inclinação -30°).	106
6.21	Gráficos de $\ \overline{\text{RMS}}\ $ - Ziguezague (inclinação 0°).	107
6.22	Gráficos de $\ \overline{\text{RMS}}\ $ - Ziguezague (inclinação 30°).	108
6.23	Gráficos de $\ \overline{\text{RMS}}\ $ - Ziguezague (inclinação 45°).	109
6.24	Gráficos de $\ \overline{\text{RMS}}\ $ - Ziguezague (inclinação 60°).	110
6.25	Gráficos de $\ \overline{\text{RMS}}\ $ - Ziguezague (inclinação 90°).	111
6.26	Trajectoria em "S".	112
6.27	Gráficos de $\ \overline{\text{RMS}}\ $ - Trajetória em "S" com $5g$	113
6.28	Gráficos de $\ \overline{\text{RMS}}\ $ - Trajetória em "S" com $7g$	114
6.29	Gráficos de $\ \overline{\text{RMS}}\ $ - Trajetória em "S" com $9g$	115
6.30	Trecho em curva de $7g$ (a) IMM ₂ ; (b) PF (Os pontos em azul são as observações vindas do radar).	117

Lista de Tabelas

4.1	Tabela de filtros do banco IMM ₂	60
4.2	Tabela de filtros do banco IMM ₃	63
6.1	Matrizes Q para o modelo CV — caso bidimensional.	83
6.2	Matrizes Q para o modelo CT _{ph} — caso bidimensional.	83
6.3	$\overline{\text{RMS}}_{p_x}$, $\overline{\text{RMS}}_{p_y}$ e $\ \overline{\text{RMS}}\ $ — Trajetória retilínea.	84
6.4	$\overline{\text{RMS}}_{p_x}$, $\overline{\text{RMS}}_{p_y}$ e $\ \overline{\text{RMS}}\ $ — Trajetória curva suave — $(p_x^0, p_y^0) = (-30000m, -30000m)$	86
6.5	$\overline{\text{RMS}}_{p_x}$, $\overline{\text{RMS}}_{p_y}$ e $\ \overline{\text{RMS}}\ $ — Trajetória curva suave — $(p_x^0, p_y^0) = (0m, 30000m)$	86
6.6	$\overline{\text{RMS}}_{p_x}$ e $\overline{\text{RMS}}_{p_y}$ — Trajetória manobra — $(p_x^0, p_y^0) = (-30000m, -30000m)$	88
6.7	$\overline{\text{RMS}}_{p_x}$ e $\overline{\text{RMS}}_{p_y}$ — Trajetória manobra — $(p_x^0, p_y^0) = (30000m, 0m)$	89
6.8	Matrizes Q — IMM.	91
6.9	Tabela comparativa entre IMM e PF — Trajetória <i>Loop</i>	93
6.10	Tabela comparativa entre IMM e PF — Manobra (inclinação -60°).	95
6.11	Tabela comparativa entre IMM e PF — Manobra (inclinação -45°).	96
6.12	Tabela comparativa entre IMM e PF — Manobra (inclinação -30°).	97
6.13	Tabela comparativa entre IMM e PF — Manobra (inclinação 0°).	98
6.14	Tabela comparativa entre IMM e PF — Manobra (inclinação 30°).	99
6.15	Tabela comparativa entre IMM e PF — Manobra (inclinação 45°).	100
6.16	Tabela comparativa entre IMM e PF — Manobra (inclinação 60°).	101
6.17	Tabela comparativa entre IMM e PF — Manobra (inclinação 90°).	102
6.18	Tabela comparativa entre IMM e PF — Ziguezague (inclinação -60°).	104
6.19	Tabela comparativa entre IMM e PF — Ziguezague (inclinação -45°).	105
6.20	Tabela comparativa entre IMM e PF — Ziguezague (inclinação -30°).	106
6.21	Tabela comparativa entre IMM e PF — Ziguezague (inclinação 0°).	107
6.22	Tabela comparativa entre IMM e PF — Ziguezague (inclinação 30°).	108
6.23	Tabela comparativa entre IMM e PF — Ziguezague (inclinação 45°).	109
6.24	Tabela comparativa entre IMM e PF — Ziguezague (inclinação 60°).	110
6.25	Tabela comparativa entre IMM e PF — Ziguezague (inclinação 90°).	111
6.26	Tabela comparativa entre IMM e PF — Trajetória em “S” — $5g$	113
6.27	Tabela comparativa entre IMM e PF — Trajetória em “S” — $7g$	114
6.28	Tabela comparativa entre IMM e PF — Trajetória em “S” — $9g$	115
6.29	Tabela comparativa entre IMM e PF — Avaliação geral.	117

Lista de Algoritmos

5.1	Pseudo-código para Amostragem Sequencial por Importância e Reamostragem.	73
5.2	Pseudo-código para um ciclo do PF com estimativas das partículas.	74
5.3	Pseudo-código para obtenção de $A(\vec{\omega}_{k+1}^i)$ para a i -ésima partícula.	78

Glossário

BLUE — Melhor Estimador Linear Não-Polarizado

CA — Aceleração Constante

CT — Giro Constante

CV — Velocidade Constante

EKF — Filtro de Kalman Estendido

IMM — Modelos Múltiplos Interagentes

KF — Filtro de Kalman

PF — Filtro de Partículas

RMS — Valor Quadrático Médio

Lista de Símbolos

T	- Período de rotação do sensor
k	- Tempo discreto
p_x	- Posição na direção do eixo x
p_y	- Posição na direção do eixo y
p_z	- Posição na direção do eixo z
x_k	- Vetor de estados
ϵ_k	- Vetor de ruídos da dinâmica
v_x	- Velocidade na direção do eixo x
v_y	- Velocidade na direção do eixo y
v_z	- Velocidade na direção do eixo z
$\vec{\omega}$	- Vetor velocidade angular
r	- Alcance
a	- Ângulo de Azimute
e	- Ângulo de Elevação
z^k	- Conjunto de observações até o instante de tempo k
z_k	- Vetor de observações
\vec{v}_r	- Vetor velocidade radial
R	- Matriz de covariância do ruído das observações ν_k
Q	- Matriz de covariância do ruído do estado ϵ_k
A_k	- Matriz da dinâmica
H_k	- Matriz de observações
F_k	- Matriz do ruído da dinâmica
$\tilde{x}_{k k}$	- Erro de estimativa
$\tilde{x}_{k+1 k}$	- Erro de previsão
$\hat{x}_{k k}$	- Estimativa de x_k dado z^k
$P_{k k}$	- Matriz de covariância do erro da estimativa de x_k
$P_{k+1 k}$	- Matriz de covariância do erro da previsão de x_k
$\hat{x}_{k+1 k}$	- Previsão de x_{k+1} dado z^k
$\tilde{z}_{k+1 k}$	- Resíduo ou inovação

$\text{cov}(m,n)$	- Covariância entre m e n
$\mathcal{N}(\mu,\Sigma)$	- Distribuição gaussiana com média μ e variância Σ
$\mathcal{U}[0,1]$	- Distribuição uniforme entre 0 e 1
$p(x_k z^k)$	- Função densidade de probabilidade do estado x_k dado z^k
$g_{\mathcal{N},x}(\mu,\Sigma)$	- Função densidade de probabilidade gaussiana de $x \sim \mathcal{N}(\mu,\Sigma)$
$Pr\{X\}$	- Probabilidade de X
$Pr\{X Y\}$	- Probabilidade de X dado Y
$E[w]$	- Valor esperado de w
$E[w y]$	- Valor esperado de w dado y
$\text{var}(m)$	- Variância de m
\mathbb{M}	- Conjunto de M modelos matemáticos
θ_k	- Estado de Markov no instante k
$\mathbb{P} = [\mathbf{p}_{ij}]_{n \times n}$	- Matriz de transição de probabilidades de um passo
\mathbb{N}^*	- Conjunto dos números naturais não-nulos
\mathbb{R}	- Conjunto dos números reais
a_{ij}	- Elemento posicionado na linha i , coluna j da matriz A
G^{-1}	- Inversa da matriz G
$\text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$	- Matriz diagonal de dimensão n
I_n	- Matriz identidade de dimensão n
$0_{m \times n}$	- Matriz nula de dimensão $m \times n$
G^T	- Transposta da matriz G
$\frac{\partial a}{\partial b}$	- Derivada parcial de a em relação a b
\dot{a}	- Derivada temporal de a
n_a	- Dimensão de um vetor \vec{a}
$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$	- Produto escalar entre os vetores \vec{a} e \vec{b}
$\vec{a} \times \vec{b}$	- Produto vetorial entre os vetores \vec{a} e \vec{b}

Trabalhos Publicados Pelo Autor

1. V.B. Frencl, J.B.R. do Val, R.S. Mendes. “Filtragem Utilizando IMM-EKF-BLUE em Modelos de Giro Constante com Taxa de Giro Desconhecida”. *XVII Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2008)*, Juiz de Fora, Minas Gerais, Brasil, Setembro 2008.

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo introdutório, faremos a apresentação de conceitos da teoria necessária para o entendimento do problema de rastreamento de alvos manobrantés no espaço, descrevendo as principais motivações do estudo das partes que compõem o problema. Nas seções a seguir, serão descritos conceitos de sistemas sujeitos a saltos markovianos, de filtros estocásticos e de técnicas de filtragem, sempre sob o ponto de vista do cenário de rastreamento do alvos móveis no espaço.

Na Seção 1.4, descreveremos a organização dos capítulos contidos neste trabalho, destacando os pontos principais de cada um deles.

1.1 Processos Discretos de Saltos Markovianos

Os alvos manobrantés no espaço podem ter a sua dinâmica descrita baseada em uma série de variáveis que levam em conta fatores como forças atuantes no alvo, sua aerodinâmica, potência do motor, entre outros. Desta forma, acabam surgindo uma variedade de possíveis modelos dinâmicos que possam descrever o comportamento do alvo.

Quando estudamos o problema de rastreamento de alvos manobrantés no espaço, adotamos um conjunto finito de modelos dinâmicos bem definidos que possam descrever alguns dos movimentos do alvo, já que é impossível obter todos os possíveis modelos que descrevam tais movimentos. Os modelos dinâmicos comumente adotados são aqueles que descrevem trajetórias retilíneas, trajetórias em curva, trajetórias com aceleração constante etc.

Uma dúvida que surge é qual destes modelos pertencentes a este conjunto finito deve ser utilizado para descrever as trajetórias. Uma solução é utilizar um modelo estocástico que tem como objetivo chavear entre estes modelos, de acordo com algumas probabilidades de transição de um modelo para outro. Um modelo aplicado a este tipo de situação é o de saltos markovianos.

Os sistemas que são excitados por saltos markovianos, obedecem a propriedade fundamental de

um processo markoviano: apenas o estado de Markov predecessor é necessário para descrever probabilisticamente o estado atual do sistema, em que cada estado de Markov é ligado a um dos modelos dinâmicos pertencente ao conjunto finito de modelos que o alvo pode executar durante uma trajetória: por exemplo, um dos estados de Markov corresponde a um movimento circular e outro estado corresponde a um movimento retilíneo acelerado. Esta descrição probabilística entre o estado atual e o predecessor é denominado transição de estados. Em [1], é dado um exemplo de modelo de aceleração constante, em que a aceleração do alvo, definida como um ruído de média nula, é combinada a um modelo de mudanças abruptas, sendo este caracterizado por um processo discreto de Markov.

No caso do rastreamento de alvos manobrantés, a transição de estados é caracterizado pela mudança entre manobras: por exemplo, o alvo está percorrendo uma trajetória retilínea e, no instante de tempo seguinte, ele passa a executar uma curva à esquerda com uma certa aceleração. Para descrever estas transições adequadamente, é necessário organizar todas as probabilidades de transição de estados em uma matriz, desta forma, organizando todos os casos de transições possíveis entre trajetórias e manobras diferentes.

Em [2], é feito um estudo aprofundado de sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos. Em [3], os saltos markovianos modelam os chaveamentos existentes entre diferentes filtros estocásticos; esta técnica de chaveamentos utilizando saltos markovianos foi utilizada na técnica IMM, estudada neste trabalho. Em [4], estudou-se o filtro de partículas aplicado a sistemas sujeitos a saltos markovianos para transições entre modelos.

1.2 Modelagem

Muitas das técnicas de rastreamento de alvos manobrantés são descritas através de modelos, baseando-se em dois aspectos para a descrição destes modelos: um deles lida com os possíveis comportamentos do alvo, comumente na forma de um modelo dinâmico ou de movimento, descrevendo a evolução de diversas grandezas físicas como posição, velocidade etc.; o outro aspecto trata das observações do alvo através de modelos de observação. Na grande maioria das vezes, as observações possuem informações sobre a posição do alvo, podendo ser incluídas outras informações, além da posição.

Os modelos dinâmicos podem ser representados por modelos matemáticos conhecidos que sejam suficientemente precisos. Existem diversos modelos, muitos deles estudados em [1], em que são descritos resultados de modelamento de movimentos de alvos manobrantés, sem o conhecimento de seu comportamento verdadeiro. As dinâmicas são classificadas de duas formas: manobrantés e não-manobrantés. Esta última representa movimentos em velocidade constante, também classificado como movimento uniforme; todos os outros tipos de movimentos encaixam-se na primeira forma. Um

fato importante que deve ser levado em conta é a presença de perturbações (ruídos) caracterizadas por possíveis imprecisões e distúrbios imprevistos no modelo dinâmico, que devem ser incorporados ao modelo de forma adequada, já que o modelo não tem possibilidade e nem pretende descrever perfeitamente o movimento do alvo.

Há uma boa variedade de modelos dinâmicos utilizados em cenários de rastreamento, como o de velocidade constante (CV — do inglês, *Constant Velocity*), o de giro constante (CT — do inglês, *Constant Turn*), o de aceleração constante (CA — do inglês, *Constant Acceleration*), o do chamado “solavanco” (variação de aceleração), entre outros. Os modelos mais comumente utilizados são os dois primeiros, pois estes representam as trajetórias mais frequentemente realizadas por alvos manobrantos. Estes modelos citados são apresentados em [1], em que são mostrados tanto os modelos a tempo contínuo, quanto a tempo discreto (discretização dos modelos de tempo contínuo). Os modelos discretos são os mais utilizados em aplicações nos problemas de rastreamento de alvos manobrantos pelo fato das observações serem valores amostrados em instantes de tempo discreto, fazendo com que os modelos discretos sejam aqueles que melhor se adequam a este tipo de situação. Além disso, estes modelos podem ser utilizados e implementados em computadores digitais.

Os modelos de observações, estudados em [5], retratam a relação existente entre as observações capturadas de um sensor e o estado do alvo. Em casos em que há mais de um alvo a ser rastreado, é necessário lidar com o problema de associação de dados, cujo objetivo é, dadas as observações fornecidas pelo sensor, definir quais observações são referentes a quais alvos. Em [6], existem alguns exemplos de técnicas que resolvem o problema de associação de dados como, por exemplo, a técnica de *gating*, em que as observações são agrupadas em conjuntos e, através das distâncias entre as observações e as previsões dos estados do alvo, as observações são associadas aos seus respectivos alvos. Nas situações em que há apenas um alvo e um sensor, que é o caso deste trabalho, a associação é direta: a observação que chega do sensor é pertencente ao alvo que está sendo rastreado.

Assim como nos modelos dinâmicos, os modelos de observação também possuem distúrbios resultantes de imprecisões nas observações vindas do sensor, e estes distúrbios também devem ser incorporados ao modelo adequadamente. O modelo utilizado com frequência é o de observações em coordenadas cartesianas, por facilitar a aplicação dos filtros estocásticos, que, na maioria das vezes, possuem suas equações definidas para coordenadas cartesianas. No entanto, os sensores comumente utilizados para rastreamento de alvos manobrantos fornecem medidas de um alvo no sistema de coordenadas do sensor, que é descrita em coordenadas esféricas. Desta forma, é necessário realizar conversões de coordenadas esféricas para coordenadas cartesianas, surgindo um problema muito comum em rastreamento de alvos, que é o fenômeno de polarização das medidas, estudado em [7], [8] e [9]. Este fenômeno acontece pelo fato de realizar a conversão das observações ruidosas em coordenadas esféricas para coordenadas cartesianas, mas existem técnicas de despolarização que so-

lucionam este problema corretamente, perdendo-se, entretanto, a hipótese de distribuição gaussiana para as observações convertidas. Estes modelos de observação com conversões de coordenadas são não-lineares e, mesmo que os modelos dinâmicos sejam lineares, como o modelo de velocidade constante, por exemplo, o filtro estocástico ótimo, em teoria, é um filtro não-linear.

Neste trabalho, foram estudados alguns modelos (dinâmicos e de observações) dos mencionados acima e, além destes, foram elaborados variações baseadas nestes modelos, tais como inclusão da velocidade radial como observação e obtenção de modelos dinâmicos com velocidade angular — tratada tanto como um escalar, quanto como um vetor — como sendo uma componente a mais do estado do alvo, com a finalidade de obter resultados satisfatórios para a parte de modelagem do problema de rastreamento.

1.3 Filtragem

O problema de filtragem estocástica consiste basicamente em estimar, de forma sequencial, o estado de um certo sistema dinâmico a partir de observações ruidosas vindas de alguma fonte — sensores, por exemplo. No contexto de rastreamento de alvos, o estado contém informações de posição e velocidade do alvo, podendo eventualmente possuir outras informações — velocidade angular, por exemplo — e as observações capturadas (na maioria das vezes, através de radares de vigilância) vêm bastante ruidosas. Desta forma, a filtragem estocástica é considerada fundamental para a estimativa recursiva do estado do alvo, determinando de forma precisa, o comportamento do movimento realizado pelo mesmo.

A área de filtragem estocástica é extensa, porém do ponto de vista de aplicações, o mais conhecido e utilizado é o filtro de Kalman (KF — do inglês, *Kalman Filter*) [10], desenvolvido por Rudolf E. Kalman, no ano de 1960. Este filtro é restrito a problemas que envolvam sistemas lineares com ruídos gaussianos e, como veremos nos capítulos seguintes, os problemas de rastreamento possuem não-linearidades tanto no modelo dinâmico quanto no modelo de observações. Neste caso, um filtro frequentemente utilizado é o filtro de Kalman estendido (EKF — do inglês, *Extended Kalman Filter*) [11], uma variação do filtro de Kalman que trata de forma adequada as não-linearidades. Outro filtro estocástico utilizado em problemas de filtragem é o filtro BLUE (do inglês, *Best Linear Unbiased Estimator*) [9], que trata especificamente de modelos dinâmicos lineares e observações com conversões de coordenadas. Este filtro é semelhante ao EKF, mas possui algumas peculiaridades encontradas somente neste filtro, o qual é adequado ao problema de conversão de observações mencionado na seção anterior.

Estes dois filtros citados acima foram os tipos escolhidos para serem estudados e aplicados ao problema de rastreamento de alvos manobrantés. No entanto, para tratar tal problema da melhor

forma possível, é preciso tentar abranger um número infinito de trajetórias e manobras que possam ser realizadas por um alvo no espaço, mencionadas na Seção 1.2. Obviamente, é impossível cobrir infinitos tipos de manobras utilizando um número restrito de modelos existentes e apenas um filtro. Porém, é possível cobrir um número finito de trajetórias utilizando mais de um filtro, cada qual representando um modelo dinâmico particular, e obter uma boa estimativa de estado baseada nas estimativas de cada um destes filtros: este é o princípio básico da técnica de Modelos Múltiplos Interagentes (IMM — do inglês, *Interacting Multiple Models*), uma das técnicas de filtragem estudadas neste trabalho, que foi desenvolvida em [11] e [3]. As interações existentes entre os filtros estocásticos, que compõem os chamados bancos de filtros, são feitas através de chaveamentos entre eles. Isto acaba motivando o modelamento destes chaveamentos através de saltos markovianos, em que estes saltos formam a base de funcionamento do IMM.

Outra técnica que também tenta abranger um grande número de trajetórias, com o objetivo de conseguir uma boa estimativa do estado, é o filtro sequencial de Monte Carlo, também conhecido como filtro de partículas (PF — do inglês, *Particle Filter*), que é como será chamado daqui para frente neste trabalho. As ideias básicas do PF surgiram na década de 50, mas nesta época a capacidade computacional era muito baixo, não suportando as iterações envolvidas no algoritmo. Com os potentes processadores de hoje, esta técnica é implementada e aplicada sem maiores problemas, sob o ponto de vista de tempo de processamento e de execução. Esta técnica de filtragem é baseada em aproximações do filtro bayesiano através de simulações de Monte Carlo, representando a função densidade de probabilidade *a posteriori* através de partículas com pesos associados e, assim, computar as estimativas baseadas nestas partículas e pesos. O filtro de partículas pode ser implementado utilizando ou não modelos de saltos markovianos para chavear entre modelos dinâmicos. Em [2], é proposto um exemplo simples de rastreamento em duas dimensões, em que os saltos ocorrem entre três tipos de modelos dinâmicos.

Baseado nos conceitos apresentados acima, foram propostas novas ideias, como a inclusão da velocidade radial como informação extra da observação, três tipos diferentes de bancos de filtros para a técnica IMM e utilização da velocidade radial para o cálculo de velocidade angular na técnica de PF.

Estas duas técnicas de filtragem foram comparadas através de testes utilizando diversos tipos de trajetória, tendo em vista os desempenhos destas técnicas via erros RMS (do inglês, *Root Mean Square*) e erros RMS médios (utilizados, por exemplo, em [12], [13], [14]), tanto em trechos de trajetórias, quanto na trajetória por completo. Tabelas contendo comparações de melhoras/pioras relativas (percentuais) entre estas técnicas também foram feitas.

1.4 Estrutura da Dissertação

No Capítulo 2, serão apresentados os modelos dinâmicos e de observação estudados neste trabalho para o espaço tridimensional, além de mostrar a proposta da utilização da velocidade radial como uma informação extra do vetor de observações. No Capítulo 3, serão mostrados os dois filtros estocásticos recursivos utilizados, o EKF e o filtro BLUE.

No Capítulo 4, será apresentada a técnica de modelos múltiplos interagentes, com os chaveamentos entre filtros modelados por saltos markovianos, além da proposta desenvolvida, em que foram elaborados três tipos diferentes de bancos de filtros. No Capítulo 5, apresentaremos o filtro de partículas, explicando cada etapa que faz parte desta técnica de filtragem. Aqui também será mostrado a técnica proposta, em que é utilizada a informação da velocidade radial como informação para o cálculo da velocidade angular.

No Capítulo 6, os resultados de testes realizados no *software* MATLAB serão mostrados e analisados de forma adequada.

Por fim, o Capítulo 7 é dedicado a conclusões e discussões sobre possíveis trabalhos futuros.

Capítulo 2

Modelagem

Para caracterizar e descrever tanto o comportamento de um alvo em movimento no espaço, quanto as observações feitas deste alvo, é necessário elaborar o modelo matemático para a sua dinâmica e para as observações capturadas de um sensor. Para que se extraia o máximo de informações úteis sobre o estado do alvo, os modelos elaborados devem ser os mais precisos possíveis. Com um bom modelo matemático definido, o rastreamento deste alvo será melhor, e conseqüentemente, mais preciso.

Nas próximas seções, serão mostrados os modelos dinâmicos e de observações que foram estudados durante este trabalho. Os modelos tratados a seguir foram estudados em tempo discreto, já visando os testes computacionais feitos mais adiante. No caso em que os modelos são originalmente em tempo contínuo, estes serão devidamente discretizados como feito em [15, p. 263-264].

2.1 Modelos Dinâmicos

Com os modelos dinâmicos tenta-se reproduzir, da melhor forma possível, os movimentos e manobras que possam ser executados por um alvo em movimento. Para fazer o modelamento, é necessário conhecer quais as grandezas que compõem o estado do alvo, representado pelo vetor $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$, $k \in \mathbb{N}$ e $n_x \in \mathbb{N}^*$, em que n_x é a dimensão do vetor x_k . Cada um dos modelos têm o seu vetor de estados específico, que pode conter informações sobre posição do alvo, sua velocidade, sua aceleração, sua velocidade angular, entre outras grandezas.

Existem diversos tipos de modelos dinâmicos que podem representar um alvo em movimento no espaço tridimensional. Os modelos mais utilizados em cenários de rastreamento são os de velocidade constante e o de giro constante que, a partir de agora, serão chamado de modelo CV e modelo CT, respectivamente. O primeiro, como o próprio nome diz, caracteriza um alvo que esteja se movendo em velocidade constante e em linha reta, ou seja, aceleração nula em uma trajetória retilínea.

O segundo modelo trata de alvos que estejam realizando movimentos em curva, com uma certa velocidade angular $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^{n_\omega}$, $n_\omega \in \mathbb{N}^*$, em radianos por segundo (*rad/s*).

A equação geral de um modelo dinâmico a tempo discreto é dada por:

$$x_{k+1} = f_k(x_k, \epsilon_k), \quad (2.1)$$

em que f_k é uma função que pode ser linear ou não, podendo ser variante ou invariante no tempo, e $\epsilon_k \in \mathbb{R}^{n_\epsilon}$, $n_\epsilon \in \mathbb{N}^*$ é o vetor de ruídos da dinâmica, por hipótese, gaussiano, com média nula e matriz de covariância Q , isto é, $\epsilon_k \sim \mathcal{N}(0, Q)$, $Q \in \mathbb{R}^{n_\epsilon \times n_\epsilon}$. No caso específico, em que f_k é linear, a expressão (2.1) fica da seguinte forma:

$$x_{k+1} = A_k x_k + F_k \epsilon_k, \quad (2.2)$$

em que $A_k \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ é a matriz da dinâmica do estado e $F_k \in \mathbb{R}^{n_x \times n_\epsilon}$ é a matriz do ruído da dinâmica; ambas podem ser variantes ou invariantes no tempo.

A seguir, são detalhados os dois tipos de modelos citados, CV e CT, sendo que este último possui duas variações, CT_{ph} e CT_{pa}.

2.1.1 Modelo de Velocidade Constante — CV

O modelo CV, que se encaixa na classe de modelos não-manobrantés, é o que representa a dinâmica mais simples de um alvo, pois este modelo caracteriza uma trajetória retilínea. O vetor de estados x_k correspondente a este modelo é o descrito a seguir:

$$x_k = \begin{bmatrix} p_x \\ v_x \\ p_y \\ v_y \\ p_z \\ v_z \end{bmatrix}_k \quad (n_x = 6), \quad (2.3)$$

em que, $p_x, p_y, p_z \in \mathbb{R}$ são as coordenadas de posição, em metros (*m*), na direção dos eixos coordenados x, y e z , respectivamente e $v_x, v_y, v_z \in \mathbb{R}$ são as velocidades, em metros por segundo (*m/s*), na direção dos eixos coordenados x, y e z , respectivamente. A Figura 2.1 mostra de forma clara onde estão cada uma destas componentes no caso em que o alvo se move em velocidade constante; o vetor \vec{v} é simplesmente a soma vetorial dos vetores \vec{v}_x, \vec{v}_y e \vec{v}_z , e $v_x = |\vec{v}_x|$, $v_y = |\vec{v}_y|$ e $v_z = |\vec{v}_z|$.

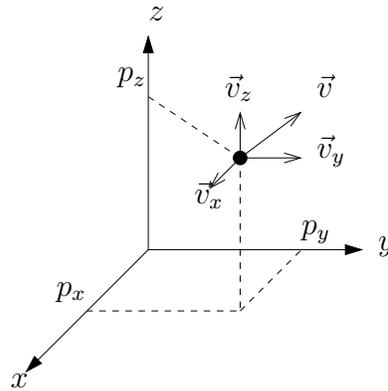


Fig. 2.1: Posição e velocidade de um alvo em velocidade constante.

Dado o vetor de estados em (2.3), as equações que caracterizam o modelo CV, a tempo discreto, são definidas pelas relações em (2.4)–(2.6):

$$p_x(k+1) = p_x(k) + v_x(k)T \quad (2.4)$$

$$p_y(k+1) = p_y(k) + v_y(k)T \quad (2.5)$$

$$p_z(k+1) = p_z(k) + v_z(k)T \quad (2.6)$$

onde T é o tempo entre a chegada da observação atual e a chegada da última observação. Note que as equações (2.4)–(2.6) podem ser colocadas na forma matricial, dando origem, assim, à matriz $A_k \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ para o modelo CV:

$$A_k = A = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Perceba que a matriz do modelo CV é bem simples, conforme foi dito anteriormente, e este modelo retrata de forma fiel o comportamento de um alvo se movendo em velocidade constante. Além disso, a matriz é invariante no tempo, ou seja, $A_k = A$.

Para completar a dinâmica de velocidade constante, é necessário definir a matriz F_k , referente ao vetor de ruídos $\epsilon_k \sim \mathcal{N}(0, Q)$, $\epsilon_k \in \mathbb{R}^3$, que representam distúrbios de imprecisões no modelo dinâmico e de acelerações desconhecidas. Por hipótese, os ruídos só afetam as velocidades v_x , v_y , v_z ,

logo, a matriz F_k fica desta forma:

$$F_k = F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Note que $F_k = F \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$, ou seja, trata-se também de uma matriz invariante no tempo. Observando as matrizes A e F , concluímos que a equação dinâmica para o modelo CV é linear, conforme a equação (2.2). Desta forma, finalizamos os cálculos necessários para a obtenção do modelo CV.

2.1.2 Modelo de Giro Constante — CT

Os alvos, além de executarem trajetórias retilíneas, como visto na Seção 2.1.1, muitas vezes executam curvas durante estas trajetórias, o que é muito comum em manobras. Nestes casos, devemos introduzir uma grandeza física essencial a este tipo de modelo, que é a velocidade angular $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^{n_\omega}$. Em [1], demonstra-se a velocidade angular sempre é perpendicular ao plano em que está ocorrendo a trajetória do alvo, logo, $\vec{\omega} \perp \vec{v}$. A Figura 2.2 ilustra esta perpendicularidade citada (\vec{a}_{cp} é a aceleração centrípeta do alvo).

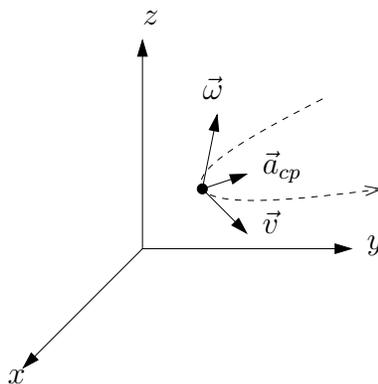


Fig. 2.2: Geometria de um movimento em curva com velocidade angular $\vec{\omega}$.

No problema de rastreamento de alvos móveis no espaço, é muito raro saber o valor correto de $\vec{\omega}$, mas precisamos deste valor para obtermos o modelo CT. Dois métodos foram empregados neste trabalho para resolver este impasse: um deles, utilizado no filtro de partículas, realizam-se sorteios de

$\vec{\omega}$, supondo $\vec{\omega}$ com distribuição gaussiana¹; o outro, utilizado na técnica de filtragem IMM, baseia-se na expansão do vetor de estados, incluindo neste vetor, a velocidade angular como um estado a mais, logo, n_x passa a valer $n_x + n_\omega$. Em [1], é proposto um modelo simples para a evolução de $\vec{\omega}$ no tempo:

$$\vec{\omega}_{k+1} = \vec{\omega}_k + \varrho_k, \quad (2.9)$$

em que $\varrho_k \in \mathbb{R}^{n_\omega}$, é o vetor de ruídos aditivos com distribuição, por hipótese, gaussiana com média nula, ou seja, $\varrho_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varrho^2 \times I_3)$. A seguir, serão tratados dois tipos de modelo CT: um, para trajetórias que ocorrem em um plano horizontal, e outro para trajetórias executadas em um plano arbitrário qualquer no espaço.

Giro Constante em um Plano Horizontal — CT_{ph}

Suponha que um alvo esteja realizando uma trajetória em curva, e esta trajetória está contida em um plano horizontal, isto é, um plano paralelo ao plano formado pelos eixos x e y . Desta forma, se observarmos a Figura 2.2, podemos concluir que o vetor $\vec{\omega}$ está paralelo ao eixo z ; logo, podemos, neste caso, tratar o vetor $\vec{\omega}$ somente através de sua componente ao longo da direção do eixo z , ou simplesmente como um escalar, ω .

Antes de expandirmos o vetor de estados x_k com um estado a mais (ω), vamos construir as matrizes A_k e F_k inicialmente com o vetor x_k visto na equação (2.3), para depois fazermos a expansão do vetor de estados e, conseqüentemente, de A_k e de F_k . Para iniciarmos os cálculos, façamos antes uma consideração: como a trajetória realizada baseada no modelo CT_{ph}, não há qualquer tipo de manobra na direção do eixo z . Desta forma, vamos supor que, na direção do eixo z , o movimento corresponde ao de velocidade constante, ou seja,

$$\begin{bmatrix} p_z \\ v_z \end{bmatrix}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_{0,z}} \begin{bmatrix} p_z \\ v_z \end{bmatrix}_k \quad (2.10)$$

Desta forma, podemos fazer os cálculos para o modelo CT_{ph} somente utilizando as informações p_x, v_x, p_y e v_y . Em [11], são descritas as equações de movimento, a tempo contínuo, em um plano paralelo ao plano xy para modelos CT:

$$\dot{v}_x = -\omega v_y \quad (2.11)$$

$$\dot{v}_y = \omega v_x \quad (2.12)$$

¹Vide Capítulo 5

Note que, a partir das equações (2.11) e (2.12), podemos construir uma matriz $M \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ que define uma relação do tipo $\dot{v} = Mv$. Esta matriz fica com o seguinte formato:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Agora, utilizando o processo de discretização apresentado em [15], basta calcular a matriz resultante $A_0 = \exp(MT) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$. A matriz resultante fica:

$$A_0 = \exp(MT) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\text{sen}(\omega T)}{\omega} & 0 & -\frac{1 - \cos(\omega T)}{\omega} \\ 0 & \cos(\omega T) & 0 & -\text{sen}(\omega T) \\ 0 & \frac{1 - \cos(\omega T)}{\omega} & 1 & \frac{\text{sen}(\omega T)}{\omega} \\ 0 & \text{sen}(\omega T) & 0 & \cos(\omega T) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Calculado A_0 , podemos agora incluir a matriz $A_{0,z}$ da equação (2.10), referente ao modelo dinâmico em z . Assim, surge a matriz $A_1 \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$, que fica desta forma:

$$A_1 = \left[\begin{array}{c|c} A_0 & 0_{4 \times 2} \\ \hline 0_{2 \times 4} & A_{0,z} \end{array} \right] \quad (2.15)$$

Com a matriz A_1 definida em (2.15), podemos, agora, fazer a expansão de x_k com a inclusão de ω , como foi proposto anteriormente. Assim, o novo vetor de estados fica desta forma:

$$x_k = \begin{bmatrix} p_x \\ v_x \\ p_y \\ v_y \\ p_z \\ v_z \\ \omega \end{bmatrix}_k \quad (n_x = 7) \quad (2.16)$$

Com a inclusão de um novo estado em x_k , a construção da matriz A_k é simples e direta. Portanto, a matriz da dinâmica referente ao modelo CT_{ph} é dada por:

$$A_k = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & 0_{6 \times 1} \\ \hline 0_{1 \times 6} & 1 \end{array} \right] \quad (2.17)$$

Note que, $A_k \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$ é uma matriz variante no tempo, pois esta depende de ω , que varia no tempo. Além disso, diferentemente da matriz do modelo CV, apresentada na equação (2.7), esta matriz possui características de não-linearidade, já que esta depende de um dos estados, ω , através de funções trigonométricas, como senos e cossenos, e relações fracionárias, como $1/\omega$.

Para completar a dinâmica de giro constante, precisamos definir a matriz F_k do vetor de ruídos $\epsilon_k \in \mathbb{R}^4$, agora com um elemento a mais, referente ao ruído de ω . Como definido antes para o modelo CV, os ruídos só afetam as velocidades v_x, v_y, v_z e, agora, ω ; logo, a matriz F_k fica desta forma:

$$F_k = F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Novamente, a matriz $F \in \mathbb{R}^{7 \times 4}$ é invariante no tempo. Como foi possível observar, este modelo encaixa-se na classe de modelos para alvos manobrantes, com características não-lineares, definidas pelo formato da matriz A . A seguir, continuaremos com o tratamento de modelos CT, porém aplicados à trajetórias que ocorrem em planos quaisquer, não paralelos ao plano xy .

Giro Constante em um Plano Arbitrário — CT_{pa}

Os modelos CT_{pa}, diferentemente dos modelos CT_{ph} que consideram trajetórias planares, baseiam-se em trajetórias que acontecem em planos inclinados no espaço. Portanto, o vetor $\vec{\omega}$ não é mais paralelo ao eixo z , logo, devemos considerar as três componentes do vetor $\vec{\omega}$, ω_x, ω_y e ω_z , para construirmos o modelo CT_{pa}. Para obter o modelo, vamos primeiramente supor que exista um sistema de coordenadas \check{p}_x, \check{p}_y e \check{p}_z , em que $\vec{\omega}$ esteja paralelo ao eixo \check{p}_z . Com isso, podemos utilizar as equações

(2.11) e (2.12), mas considerando uma componente a mais, referente a \check{p}_z . Assim, a nova relação fica:

$$\begin{bmatrix} \check{\check{p}}_x \\ \check{\check{p}}_y \\ \check{\check{p}}_z \end{bmatrix} = \omega \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Delta} \begin{bmatrix} \dot{\check{p}}_x \\ \dot{\check{p}}_y \\ \dot{\check{p}}_z \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

em que $\omega = |\vec{\omega}|$. Agora, devemos supor que exista uma matriz $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ que faça a transformação de coordenadas:

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \check{p}_x \\ \check{p}_y \\ \check{p}_z \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

e que seja ortogonal, isto é, suas colunas devem formar uma base ortonormal do \mathbb{R}^3 e deve obedecer a relação $BB^T = B^T B = I_3$ [16]. Supondo que o formato de B seja o seguinte:

$$B = \left[\vec{a} \mid \vec{b} \mid \vec{c} \right] = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

então $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0$ e $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. Fazendo a substituição adequada da relação (2.21) em (2.19), obtemos a relação:

$$B^T \begin{bmatrix} \check{\check{p}}_x \\ \check{\check{p}}_y \\ \check{\check{p}}_z \end{bmatrix} = \omega \Delta B^T \begin{bmatrix} \dot{\check{p}}_x \\ \dot{\check{p}}_y \\ \dot{\check{p}}_z \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

que, multiplicando (2.22) por B pela esquerda de ambos os lados da equação, resulta em:

$$\begin{bmatrix} \check{\check{p}}_x \\ \check{\check{p}}_y \\ \check{\check{p}}_z \end{bmatrix} = \underbrace{\omega B \Delta B^T}_{\text{matriz desejada}} \begin{bmatrix} \dot{\check{p}}_x \\ \dot{\check{p}}_y \\ \dot{\check{p}}_z \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

A matriz $\Gamma = \omega B \Delta B^T$ é aquela que estamos procurando para construirmos a matriz dinâmica M a tempo contínuo. Agora, fazendo o cálculo de $B \Delta B^T$, obtemos:

$$B \Delta B^T = \begin{bmatrix} 0 & a_2 b_1 - a_1 b_2 & a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 & 0 & a_3 b_2 - a_2 b_3 \\ a_1 b_3 - a_3 b_1 & a_2 b_3 - a_3 b_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Definindo $\vec{\omega}$ como sendo o vetor \vec{c} multiplicado por ω , isto é, $\vec{\omega} = \omega\vec{c}$, encontramos os elementos de $\vec{\omega}$ em função dos vetores \vec{a} e \vec{b} :

$$\vec{\omega} = \omega\vec{c} = \omega(\vec{a} \times \vec{b}) = \omega \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Perceba que os elementos de $\vec{\omega}$ da equação (2.25) são os mesmos dos que compõem a equação (2.24), com exceção de alguns sinais trocados. Desta forma, podemos escrever a matriz Γ em função dos elementos de $\vec{\omega}$:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Analisando as equações (2.23) e (2.26), finalmente conseguimos montar a matriz M , expandindo a matriz da equação (2.26) de tal forma que os elementos de posição p_x , p_y e p_z sejam incluídos corretamente:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_z & 0 & \omega_y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_z & 0 & 0 & 0 & -\omega_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\omega_y & 0 & \omega_x & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Agora, devemos passar para a etapa de discretização da matriz M . Utilizando o processo de discretização de [15], devemos calcular $\exp(MT)$. Entretanto, o cálculo analítico desta exponencial de matriz não é trivial, sendo necessário recorrer a aproximações. A aproximação escolhida foi por série de Taylor, como apresentado em [17]. Uma aproximação de terceira ordem permite obter um resultado bem próximo do exato. A série fica da seguinte forma:

$$\exp(MT) \simeq A_0 = I_6 + MT + \frac{1}{2}(MT)^2 + \frac{1}{6}(MT)^3 \quad (2.28)$$

e a matriz A_0 possui o formato a seguir

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^0 & 0 & a_{14}^0 & 0 & a_{16}^0 \\ 0 & a_{22}^0 & 0 & a_{24}^0 & 0 & a_{26}^0 \\ 0 & a_{32}^0 & 1 & a_{34}^0 & 0 & a_{36}^0 \\ 0 & a_{42}^0 & 0 & a_{44}^0 & 0 & a_{46}^0 \\ 0 & a_{52}^0 & 0 & a_{54}^0 & 1 & a_{56}^0 \\ 0 & a_{62}^0 & 0 & a_{64}^0 & 0 & a_{66}^0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

cujos elementos a compõem são:

$$a_{12}^0 = T - \frac{1}{6}T^3(\omega_z^2 + \omega_y^2) \quad (2.30)$$

$$a_{22}^0 = 1 - \frac{1}{2}T^2(\omega_z^2 + \omega_y^2) \quad (2.31)$$

$$a_{32}^0 = \frac{1}{2}T^2\omega_z + \frac{1}{6}T^3\omega_y\omega_x \quad (2.32)$$

$$a_{42}^0 = T\omega_z + \frac{1}{2}T^2\omega_y\omega_x - \frac{1}{6}T^3((\omega_z^2 + \omega_x^2)\omega_z + \omega_z\omega_y^2) \quad (2.33)$$

$$a_{52}^0 = -\frac{1}{2}T^2\omega_y + \frac{1}{6}T^3\omega_z\omega_x \quad (2.34)$$

$$a_{62}^0 = -T\omega_y + \frac{1}{2}T^2\omega_z\omega_x + \frac{1}{6}T^3(\omega_z^2\omega_y + (\omega_y^2 + \omega_x^2)\omega_y) \quad (2.35)$$

$$a_{14}^0 = -\frac{1}{2}T^2\omega_z + \frac{1}{6}T^3\omega_y\omega_x \quad (2.36)$$

$$a_{24}^0 = -T\omega_z + \frac{1}{2}T^2\omega_y\omega_x + \frac{1}{6}T^3((\omega_z^2 + \omega_y^2)\omega_z + \omega_z\omega_x^2) \quad (2.37)$$

$$a_{34}^0 = T - \frac{1}{6}T^3(\omega_z^2 + \omega_x^2) \quad (2.38)$$

$$a_{44}^0 = 1 - \frac{1}{2}T^2(\omega_z^2 + \omega_x^2) \quad (2.39)$$

$$a_{54}^0 = \frac{1}{2}T^2\omega_x + \frac{1}{6}T^3\omega_z\omega_y \quad (2.40)$$

$$a_{64}^0 = T\omega_x + \frac{1}{2}T^2\omega_z\omega_y - \frac{1}{6}T^3(\omega_z^2\omega_x + (\omega_y^2 + \omega_x^2)\omega_x) \quad (2.41)$$

$$a_{16}^0 = \frac{1}{2}T^2\omega_y + \frac{1}{6}T^3\omega_z\omega_x \quad (2.42)$$

$$a_{26}^0 = T\omega_y + \frac{1}{2}T^2\omega_z\omega_x - \frac{1}{6}T^3((\omega_z^2 + \omega_y^2)\omega_y + \omega_y\omega_x^2) \quad (2.43)$$

$$a_{36}^0 = -\frac{1}{2}T^2\omega_x + \frac{1}{6}T^3\omega_z\omega_y \quad (2.44)$$

$$a_{46}^0 = -T\omega_x + \frac{1}{2}T^2\omega_z\omega_y + \frac{1}{6}T^3(\omega_y^2\omega_x + (\omega_z^2 + \omega_x^2)\omega_x) \quad (2.45)$$

$$a_{56}^0 = T - \frac{1}{6}T^3(\omega_y^2 + \omega_x^2) \quad (2.46)$$

$$a_{66}^0 = 1 - \frac{1}{2}T^2(\omega_y^2 + \omega_x^2) \quad (2.47)$$

Depois de árduos cálculos, chegamos a etapa para definir a matriz A_k . Para este modelo, precisamos antes definir o vetor de estados x_k . Assim como feito para o modelo CT_{ph}, aqui também adotaremos a expansão de estados de x_k , só que desta vez estendendo para as três componentes de $\vec{\omega}$, cada uma delas caracterizada pelo modelo descrito na equação (2.9). Com isso, x_k possui a seguinte forma:

$$x_k = \begin{bmatrix} p_x \\ v_x \\ p_y \\ v_y \\ p_z \\ v_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}_k \quad (n_x = 9) \quad (2.48)$$

e a matriz A_k fica:

$$A_k = \left[\begin{array}{c|c} A_0 & 0_{6 \times 3} \\ \hline 0_{3 \times 6} & I_3 \end{array} \right] \quad (2.49)$$

Mais uma vez, a matriz $A_k \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ é variante no tempo, pois depende de ω_x , ω_y e ω_z que variam no tempo, e possui características não-lineares, já que existem funções quadráticas dos estados ω_x , ω_y e ω_z . Finalmente, resta-nos definir a matriz F_k do vetor de ruídos $\epsilon_k \in \mathbb{R}^6$, agora com três elementos a mais, referentes ao ruído de $\vec{\omega}$. Como definido antes, os ruídos só afetam as velocidades v_x , v_y , v_z

e, agora, os três elementos de $\vec{\omega}$; desta forma, a matriz F_k fica desta forma:

$$F_k = F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Note que a matriz $F_k = F \in \mathbb{R}^{9 \times 6}$ é, mais uma vez, invariante no tempo. Estes modelos desenvolvidos neste trabalho tentam capturar as características mais importantes do comportamento do alvo durante suas manobras ou movimentos de velocidade constante. Observamos também que, quanto mais preciso o modelo, mais desafiador e complexo e, muitas vezes, não-linear, ele será. Basta verificar os cálculos feitos para o modelo CT_{pa}.

Outros tipos de modelos foram estudados em [1], porém pouco utilizados em cenários de rastreamento, como os modelos de aceleração, os modelos de “solvanco” — onde ocorre a variação de aceleração, entre outros. Os modelos aqui estudados são adequados para aeronaves, podendo ser aplicados a outros tipos de alvos, por exemplo, terrestres ou aquáticos. Na seção seguinte, serão apresentados os modelos de observação referentes aos estados dos modelos dinâmicos estudados nesta seção.

2.2 Modelos de Observação

Além da necessidade da criação de um modelo matemático para caracterização do comportamento do movimento realizado por um alvo móvel no espaço, visto na Seção 2.1, é preciso também elaborar um modelo matemático que represente as observações vindas de um sensor, que neste trabalho será um radar. Em [5], são estudados alguns modelos de observação, analisando alguns modelos de rastreamento em coordenadas cartesianas e em coordenadas esféricas.

As observações, para os problemas de rastreamento de alvos manobrantes, são caracterizadas por um vetor $z_k \in \mathbb{R}^{n_z}$, $n_z \in \mathbb{N}^*$, que contém informações de alcance $\vec{r}_m \in \mathbb{R}^3$, $|\vec{r}_m| = r_m$, de ângulo de azimute $a_m \in [0, 2\pi]$ e de ângulo de elevação $e_m \in [0, \pi/2]$, referentes a coordenadas esféricas (o sub-índice m refere-se a um valor observado) e, eventualmente, de velocidade radial (\vec{v}_r), sendo este último caso tratado somente a partir da Seção 2.3. Para os chamados radares de vigilância, que

são extremamente importantes para situações de controle de tráfego aéreo e para fácil identificação do alvo através do sistema IFF (*Identification Friend or Foe*), apenas o alcance e o ângulo de azimute são fornecidos. Neste caso, o problema de rastreamento passa a ser tratado sob o ponto de vista bidimensional, bastando desconsiderar as informações referentes ao ângulo de elevação.

Estas observações vindas do radar são ruidosas e podem ser descritas, para o caso tridimensional², da seguinte forma:

$$r_m = r + \nu_r \quad (2.51)$$

$$a_m = a + \nu_a \quad (2.52)$$

$$e_m = e + \nu_e \quad (2.53)$$

e

$$r = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} \quad (2.54)$$

$$a = \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right) \quad (2.55)$$

$$e = \arctan\left(\frac{p_z}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right) \quad (2.56)$$

sendo que os ruídos ν_r , ν_a e ν_e , que farão parte do vetor de ruídos de observações ν_k , são, por hipótese, gaussianos $\nu_r \sim \mathcal{N}(0, \sigma_r^2)$, $\nu_a \sim \mathcal{N}(0, \sigma_a^2)$ e $\nu_e \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^2)$. Além disso, considera-se que r , a e e sejam independentes de ν_r , ν_a e ν_e , que por sua vez, são independentes entre si. Na Figura 2.3, é ilustrado o sistema de coordenadas esféricas do radar:

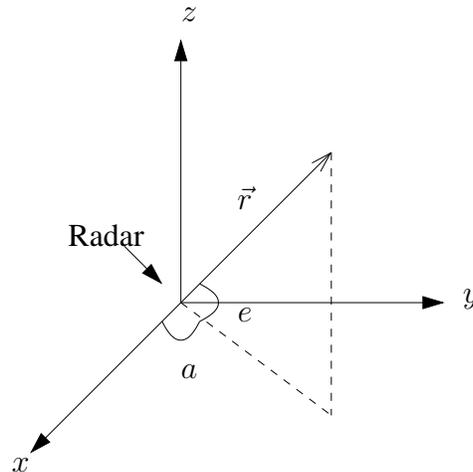


Fig. 2.3: Sistema de coordenadas esféricas do radar.

²No caso bidimensional, basta zerar as componentes referentes ao ângulo de elevação.

A equação geral de um modelo de observações a tempo discreto e que constituída pelas equações (2.51)–(2.53) é dada por:

$$z_k = h_k(x_k, \nu_k), \quad (2.57)$$

em que h_k é uma função que pode ser linear ou não, podendo ser variante ou invariante no tempo, e $\nu_k \in \mathbb{R}^{n_\nu}$, $n_\nu \in \mathbb{N}^*$ é o vetor de ruídos das observações, por hipótese, gaussiano, com média nula e matriz de covariância R , isto é, $\nu_k \sim \mathcal{N}(0, R)$, $R \in \mathbb{R}^{n_\nu \times n_\nu}$. No caso específico, em que h_k é linear, a expressão (2.57) fica da seguinte forma:

$$z_k = H_k x_k + \nu_k, \quad (2.58)$$

em que $H_k \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}$ é a matriz de observações, que pode ser variante ou invariante no tempo. O modelo de observações é em coordenadas esféricas, como já foi visto, porém é necessário fazer a conversão das observações das equações (2.51)–(2.53) para coordenadas cartesianas, como descrito a seguir:

$$p_{xm} = (r + \nu_r) \cos(a + \nu_a) \cos(e + \nu_e) \quad (2.59)$$

$$p_{ym} = (r + \nu_r) \sin(a + \nu_a) \cos(e + \nu_e) \quad (2.60)$$

$$p_{zm} = (r + \nu_r) \sin(e + \nu_e) \quad (2.61)$$

já pensando nos filtros estocásticos recursivos³, que utilizam os modelos dinâmicos em coordenadas cartesianas vistos nas seções anteriores. Portanto, daqui em diante, o vetor de observações z_k será composto por p_{xm} , p_{ym} e p_{zm} , que são as posições observadas em relação aos eixos x , y e z , respectivamente.

Com esta conversão de coordenadas, acaba surgindo um problema, que é o chamado fenômeno de polarização das observações. Para sanar este problema, existem técnicas de despolarização, que são utilizadas nos filtros estocásticos recursivos. Para cada um dos filtros estudados neste trabalho, o EKF e o filtro BLUE, existe uma maneira distinta adotada para realizar estas despolarizações, mas todas com o mesmo efeito. Estas técnicas serão tratadas com mais detalhes no Capítulo 3, Seções 3.1 e 3.2.

Além das informações de alcance, ângulo de azimute e de elevação, que são fornecidas pelo radar, existe uma outra informação que também provém do radar e que possui uma grande precisão, muito superior às observações citadas, por sinal, fazendo com que os estados estimados dos alvos fiquem melhores. A observação acrescentada é a velocidade radial, que será detalhada na seção seguinte.

³Vide Capítulo 3.

2.3 Velocidade Radial como Informação Extra de Observação

Em qualquer situação de estimação que esteja sendo estudada, quanto mais informações independentes possíveis, melhores serão as estimativas ao final. E se estas informações são bem precisas, os resultados ficarão melhores ainda. Este é o caso da velocidade radial $\vec{v}_r \in \mathbb{R}^3$, em que a precisão de seu módulo v_r é muito boa, motivando a sua utilização dentro do vetor de observações, a fim de obter uma estimativa mais precisa do estado x_k do alvo. Seu significado é reproduzir a velocidade com a qual o alvo se aproxima ou se afasta do radar, sempre na direção do alcance \vec{r} (distância entre o radar e o alvo). Sob o aspecto vetorial, a velocidade radial é a projeção do vetor velocidade \vec{v} sobre reta definida pela direção do alcance. A Figura 2.4 mostra de forma clara como é a disposição no espaço de \vec{v}_r , para um caso em que o alvo está se afastando do radar.

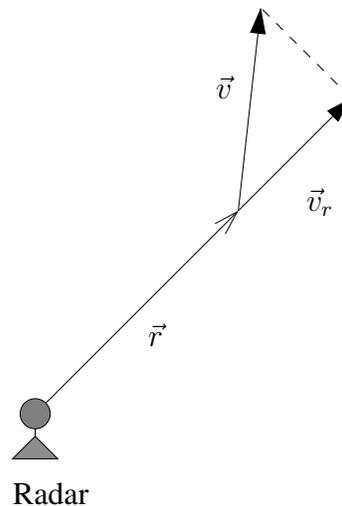


Fig. 2.4: Disposição espacial do vetor velocidade radial.

Sob o ponto de vista de equacionamento matemático, o módulo da velocidade radial $v_r = |\vec{v}_r|$ é dado por uma relação não-linear, envolvendo as posições e velocidades do alvo, descrito na equação a seguir:

$$v_r = \frac{p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}} \quad (2.62)$$

Daqui para frente, esta proposta da introdução da velocidade radial como informação extra do vetor de observações z_k será considerada. As alterações mais perceptíveis estarão presentes nas equações dos filtros estocásticos, tratados no próximo capítulo, além de ser uma informação fundamental para a técnica proposta no Capítulo 5 para o filtro de partículas.

Síntese do Capítulo

Neste capítulo foram tratados os modelos matemáticos que descrevem a dinâmica do alvo e como são feitas as observações deste mesmo alvo. Em relação aos modelos dinâmicos, foram estudados aqueles que definem as trajetórias mais comuns realizadas por alvos: o modelo CV mostrou ser o mais simples dentre os estudados; já os dois modelos CT mostraram ser um pouco mais complexos. Estes modelos CT envolvem uma grandeza física essencial para descrever trajetórias curvilíneas, a velocidade angular, só que cada um deles trata esta mesma grandeza sob aspectos diferentes: o modelo CT_{ph} , que descreve movimentos curvilíneos em planos paralelos ao plano xy , utiliza o módulo da velocidade angular; já o modelo CT_{pa} , que descreve modelos curvilíneos em qualquer plano no espaço, é baseado no vetor da velocidade angular tridimensional. Este último possui uma estrutura mais complexa, mas descreve um número maior de modelos de movimento.

O modelo de observações, que também faz parte do modelo matemático, foi tratado aqui neste capítulo. O modelo adotado é aquele utilizado em sistemas reais de rastreamento, que baseia-se em coordenadas esféricas. No entanto, para utilizarmos os modelos dinâmicos (cartesianos) aqui estudados na filtragem tratada no capítulo seguinte, é necessário converter as observações para coordenadas cartesianas. Com isso, acabam surgindo não-linearidades e o fenômeno de polarização nas observações, problema que será resolvido no próximo capítulo.

Uma proposta foi descrita neste capítulo, que foi a inclusão do módulo da velocidade radial como uma observação a mais, que é utilizada em cenários de rastreamento de alvos manobrantés. A motivação de sua utilização está na precisão com que é observada, gerando estimativas de melhor qualidade para o vetor de estados x_k .

Capítulo 3

Filtros Estocásticos Recursivos

No problema de rastreamento de alvos manobrantés, deseja-se obter precisamente o vetor de estados x_k do alvo e é necessária uma estimativa deste estado a cada instante de tempo k em que uma nova observação z_k é incorporada. Para cumprir esta tarefa, é preciso utilizar um filtro estocástico recursivo, em que não seja necessário o armazenamento de todas as informações, pois existe o processamento destas a cada instante de tempo, nem do reprocessamento das informações já existentes, quando uma nova observação estiver disponível.

Estes filtros operam basicamente com duas etapas: previsão e atualização. A primeira utiliza o modelo do sistema para prever a função densidade de probabilidade do estado, sendo esta previsão idealmente idêntica a $p(x_{k+1}|z^k)$, em que $z^k = \{z_i, i = 1, \dots, k\}$ são todas as observações disponíveis até o instante de tempo k ; esta previsão é feita um passo a frente entre uma observação e outra. Como o estado é normalmente sujeito a distúrbios (modelados pelos ruídos vistos no Capítulo 2), a previsão geralmente translada, deforma e alarga a função densidade de probabilidade do estado, constituindo uma aproximação à distribuição condicional desejada.

A etapa de atualização utiliza a última observação com o intuito de corrigir a função densidade de probabilidade do estado da etapa de previsão. Isto pode ser alcançado utilizando a fórmula de Bayes [18, p. 103-105],

$$p(x_{k+1}|z^{k+1}) = \frac{p(z_{k+1}|x_{k+1})p(x_{k+1}|z^k)}{p(z_{k+1}|z^k)} \quad (3.1)$$

$$p(z_{k+1}|z^k) = \int p(z_{k+1}|x_{k+1})p(x_{k+1}|z^k)dx_{k+1} \quad (3.2)$$

em que $p(z_{k+1}|x_{k+1})$ é a verossimilhança definida pelo modelo de observações e $p(x_{k+1}|z^k)$ é uma constante de normalização. Este é o mecanismo para a atualização do conhecimento sobre o estado do alvo baseado na nova informação recebida.

Existem diversos filtros estocásticos recursivos na literatura, sendo que dois deles serão descritos nas próximas seções: o filtro de Kalman estendido (EKF), estudado com detalhes em [11] e o filtro BLUE, desenvolvido em [9]. O EKF se enquadra na categoria de filtros não-lineares, lidando muito bem, mas de forma aproximada, com sistemas que apresentam características não-lineares tanto na dinâmica, quanto nas observações. O filtro BLUE é utilizado em casos em que o sistema dinâmico é do tipo linear — podendo tratar sistemas dinâmicos não-lineares, como será visto mais adiante — e quando as observações são convertidas de coordenadas esféricas para cartesianas. Além do tratamento destes filtros, o fenômeno de polarização das observações será abordado nas próximas seções com mais detalhes.

3.1 Filtro de Kalman Estendido — EKF

O EKF é uma derivação do KF, com um comportamento mais geral, pois trata de sistemas não-lineares, descritos pelas equações (2.1) e (2.57). Mais especificamente, podemos reescrever estas duas equações colocando os ruídos da dinâmica e das observações (considerados mutuamente independentes), $\epsilon_k \sim \mathcal{N}(0, Q)$ e $\nu_k \sim \mathcal{N}(0, R)$ respectivamente, de forma aditiva, ou seja:

$$x_{k+1} = f_k(x_k) + F\epsilon_k \quad (3.3)$$

$$z_k = h_k(x_k) + \nu_k \quad (3.4)$$

O EKF é baseado na suposição de que uma linearização local das equações (3.3) e (3.4) é suficiente para a descrição das não-linearidades. Estas aproximações são baseadas em uma série de Taylor de primeira ordem para as equações (3.3) e (3.4).

Para realizar as estimativas de estado, as distribuições condicionais são aproximadas da seguinte forma:

$$p(x_k | z^k) \simeq g_{\mathcal{N}, x_k}(\hat{x}_{k|k}, P_{k|k}) \quad (3.5)$$

$$p(x_{k+1} | z^k) \simeq g_{\mathcal{N}, x_{k+1}}(\hat{x}_{k+1|k}, P_{k+1|k}) \quad (3.6)$$

$$p(x_{k+1} | z^{k+1}) \simeq g_{\mathcal{N}, x_{k+1}}(\hat{x}_{k+1|k+1}, P_{k+1|k+1}) \quad (3.7)$$

em que $g_{\mathcal{N}, x}(\mu, \Sigma)$ é a função densidade de probabilidade gaussiana de x , dada por:

$$g_{\mathcal{N}, x}(\mu, \Sigma) = \frac{1}{\sqrt{|2\pi\Sigma|}} \exp[-0,5(x - \mu)^T \Sigma^{-1}(x - \mu)] \quad (3.8)$$

e

$$\hat{x}_{k|k} \simeq E [x_k | z^k] \quad (3.9)$$

$$\hat{x}_{k+1|k} \simeq E [x_{k+1} | z^k] \quad (3.10)$$

$$P_{k|k} \simeq E [\tilde{x}_{k|k} \tilde{x}_{k|k}^T] \quad (3.11)$$

$$P_{k+1|k} \simeq E [\tilde{x}_{k+1|k} \tilde{x}_{k+1|k}^T] \quad (3.12)$$

$$\tilde{x}_{k|k} = x_k - \hat{x}_{k|k} \quad (3.13)$$

$$\tilde{x}_{k+1|k} = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k} \quad (3.14)$$

são, respectivamente, a estimativa — equação (3.9), que representa a estimativa do vetor de estados x_k dado z^k , a previsão — equação (3.10), que representa a previsão de x_k um passo a frente dado z^k , a matriz de covariância do erro da estimativa $P_{k|k} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ — equação (3.11) — da função densidade de probabilidade $p(x_k | z^k)$, a matriz de covariância do erro da previsão de um passo a frente $P_{k+1|k} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ — equação (3.12) — da função densidade de probabilidade $p(x_{k+1} | z^k)$, o erro da estimativa em relação ao valor exato — equação (3.13) e o erro de previsão de um passo a frente em relação ao valor exato — equação (3.14).

Antes de partirmos para as equações de filtragem para o EKF, devemos tratar do fenômeno de polarização das observações, citado no Capítulo 2. Para o EKF, adotou-se a técnica de despolarização apresentada e demonstrada em [7] e [8], com a expansão para três dimensões, estudada em [19] e em [20]. A técnica de despolarização adotada — lembrando que z_k é composto por p_{xm} , p_{ym} , p_{zm} e v_r — despolariza as observações p_{xm} , p_{ym} e p_{zm} (a velocidade radial v_r é naturalmente uma observação não-polarizada, logo, não necessita de despolarização) através de constantes de despolarização, caracterizadas por exponenciais do ângulo de azimute e do ângulo de elevação, σ_a^2 e σ_e^2 . As observações despolarizadas ficam da seguinte forma:

$$z_k = \begin{bmatrix} p_{xm} \\ p_{ym} \\ p_{zm} \end{bmatrix}_{\text{despol.}} = \begin{bmatrix} r_m \cos(a_m) \cos(e_m) (1 - \exp(-\sigma_a^2 - \sigma_e^2) + \exp(-(\sigma_a^2 + \sigma_e^2)/2)) \\ r_m \sin(a_m) \cos(e_m) (1 - \exp(-\sigma_a^2 - \sigma_e^2) + \exp(-(\sigma_a^2 + \sigma_e^2)/2)) \\ r_m \sin(e_m) (1 - \exp(-\sigma_e^2) + \exp(-\sigma_e^2/2)) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Nas referências citadas sobre a técnica de despolarização de observações adotada, é proposto que, logo após feita a despolarização das observações, calcule-se uma nova matriz de covariância do ruído de observações R_k para ruídos referentes às coordenadas cartesianas, cuja apresentação é feita no Apêndice A. Note que esta matriz depende do tempo k , já que é função de elementos como r_m , a_m e e_m , que são diferentes a cada instante de tempo. Neste trabalho será adotada esta matriz de covariância R_k para o EKF.

Feitas as devidas considerações e supondo que as observações já estejam devidamente despolarizadas de acordo com a equação (3.15), podemos passar às etapas de previsão e de atualização e suas respectivas equações. Considerando que $\hat{x}_{0|0}$ e $P_{0|0}$ são conhecidos e que a evolução do instante de tempo é de k para $k + 1$, temos:

Equações de previsão:

$$\hat{x}_{k+1|k} = f_k(\hat{x}_{k|k}) \quad (3.16)$$

$$P_{k+1|k} = \mathcal{A}_k P_{k|k} \mathcal{A}_k^T + F Q F^T \quad (3.17)$$

$$S_{k+1|k} = \mathcal{H}_{k+1} P_{k+1|k} \mathcal{H}_{k+1}^T + R_k \quad (3.18)$$

Equações de atualização:

$$W_{k+1} = P_{k+1|k} \mathcal{H}_{k+1}^T S_{k+1|k}^{-1} \quad (3.19)$$

$$\hat{z}_{k+1|k} = h_k(\hat{x}_{k+1|k}) = \left[\hat{p}_{x \ k+1|k} \quad \hat{p}_{y \ k+1|k} \quad \hat{p}_{z \ k+1|k} \quad \hat{v}_{r \ k+1|k} \right]^T \quad (3.20)$$

$$\tilde{z}_{k+1|k} = z_{k+1} - \hat{z}_{k+1|k} \quad (3.21)$$

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + W_{k+1} \tilde{z}_{k+1|k} \quad (3.22)$$

$$P_{k+1|k+1} = (I_n - W_{k+1} \mathcal{H}_{k+1}) P_{k+1|k} (I_n - W_{k+1} \mathcal{H}_{k+1})^T + W_{k+1} R_k W_{k+1}^T \quad (3.23)$$

em que $\mathcal{A}_k \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ é a matriz jacobiana de $f_k(x_k)$ para $x_k = \hat{x}_{k|k}$, $\mathcal{H}_{k+1} \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}$ é a matriz jacobiana de $h_k(x_k)$ para $x_k = \hat{x}_{k+1|k}$, $S_{k+1|k} \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$ é a matriz de covariância da inovação $\tilde{z}_{k+1|k}$, $W_{k+1} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_z}$ é o ganho do filtro e $\hat{v}_{r \ k+1|k} = v_r | \hat{x}_{k+1|k}$.

A equação (3.23) é diferente daquela usualmente utilizada no EKF, dada pela relação $P_{k+1|k+1} = P_{k+1|k} - W_{k+1} S_{k+1|k} W_{k+1}^T$. A equação (3.23) é uma sugestão feita em [11] para o cálculo da atualização da matriz $P_{k+1|k}$. Esta sugestão tem a finalidade de evitar problemas numéricos e perda de simetria da matriz $P_{k+1|k+1}$; quando esta é calculada pela relação $P_{k+1|k+1} = P_{k+1|k} - W_{k+1} S_{k+1|k} W_{k+1}^T$, estes problemas citados podem fazer com que esta matriz deixe de ser definida positiva. Note ainda que a inovação $\tilde{z}_{k+1|k}$ é resultante da diferença entre dois valores despolarizados, z_{k+1} e $\hat{z}_{k+1|k}$.

Para termos o filtro completo, restam somente os cálculos das jacobianas \mathcal{A}_k e \mathcal{H}_{k+1} , que possuem características diferentes para cada um dos modelos citados no Capítulo 2. A estrutura de uma jacobiana $\mathcal{J} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dada por:

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^n} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

em que $f^i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ são funções que compõem f , e cada uma delas é função das variáveis $x^j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$. Os cálculos das jacobianas de cada um dos modelos estudados no Capítulo 2 serão apresentados nas seções a seguir.

3.1.1 Matrizes Jacobianas para o Modelo CV

Como visto no Capítulo 2, foram estudados alguns modelos dinâmicos, sendo o mais simples deles o modelo CV. Como trata-se de um modelo linear, As funções f^i que fazem parte do cálculo de \mathcal{A}_k são:

$$f^1(x_k) = p_x + T v_x \quad (3.25)$$

$$f^2(x_k) = v_x \quad (3.26)$$

$$f^3(x_k) = p_y + T v_y \quad (3.27)$$

$$f^4(x_k) = v_y \quad (3.28)$$

$$f^5(x_k) = p_z + T v_z \quad (3.29)$$

$$f^6(x_k) = v_z \quad (3.30)$$

Como as funções f^i , $i = 1, \dots, 6$ são lineares em $x_k \in \mathbb{R}^6$, a matriz jacobiana \mathcal{A}_k para $x_k = \hat{x}_{k|k}$ é facilmente obtida utilizando a equação (3.24), resultando em $\mathcal{A}_k = \mathcal{A} = A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ dada em (2.7), ou seja, a jacobiana de $f_k(x_k)$ é invariante no tempo e é a própria matriz da dinâmica A .

Diferentemente de \mathcal{A}_k , o cálculo de \mathcal{H}_{k+1} para $x_k = \hat{x}_{k+1|k}$ é um pouco mais complicado, pois o vetor de informações z_k tem a velocidade radial como informação, que é não-linear, de acordo com a equação (2.62). Assim, as funções h^i , $i = 1, \dots, 4$ que entram para o cálculo de \mathcal{H}_{k+1} são:

$$h^1(x_k) = p_x \quad (3.31)$$

$$h^2(x_k) = p_y \quad (3.32)$$

$$h^3(x_k) = p_z \quad (3.33)$$

$$h^4(x_k) = v_r = \frac{p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}} \quad (3.34)$$

Novamente utilizamos a equação (3.24), obtendo o seguinte resultado:

$$\mathcal{H}_{k+1} = \left(\underbrace{\begin{bmatrix} H x_k \\ v_r \end{bmatrix}}_h \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_k} \end{bmatrix} \right)_{x_k = \hat{x}_{k+1|k}} = \begin{bmatrix} H \\ c \end{bmatrix}_{x_k = \hat{x}_{k+1|k}} \quad (3.35)$$

em que

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

e $c^T \in \mathbb{R}^6$ é um vetor cujas componentes são:

$$c_1 = \frac{\partial v_r}{\partial p_x} = \left(\frac{v_x}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}} - \frac{p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z}{\sqrt{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^3}} p_x \right) \quad (3.37)$$

$$c_2 = \frac{\partial v_r}{\partial v_x} = \left(\frac{p_x}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}} \right) \quad (3.38)$$

$$c_3 = \frac{\partial v_r}{\partial p_y} = \left(\frac{v_y}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}} - \frac{p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z}{\sqrt{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^3}} p_y \right) \quad (3.39)$$

$$c_4 = \frac{\partial v_r}{\partial v_y} = \left(\frac{p_y}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}} \right) \quad (3.40)$$

$$c_5 = \frac{\partial v_r}{\partial p_z} = \left(\frac{v_z}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}} - \frac{p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z}{\sqrt{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^3}} p_z \right) \quad (3.41)$$

$$c_6 = \frac{\partial v_r}{\partial v_z} = \left(\frac{p_z}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}} \right) \quad (3.42)$$

Observando a equação 3.35, conclui-se que $\mathcal{H}_{k+1} \in \mathbb{R}^{4 \times 6}$ é variante no tempo, já que depende dos resultados da etapa de previsão do filtro.

3.1.2 Matrizes Jacobianas para o Modelo CT_{ph}

Diferentemente do modelo CV, o modelo CT_{ph} possui características não-lineares, como visto na equação (2.17), pois existem funções trigonométricas que são funções de ω , um dos estados de x_k . As funções f^i , $i = 1, \dots, 7$ que fazem parte do cálculo de $\mathcal{A}_k \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$ são:

$$f^1(x_k) = p_x + \frac{\text{sen}(\omega T)}{\omega} v_x - \frac{1 - \cos(\omega T)}{\omega} v_y \quad (3.43)$$

$$f^2(x_k) = \cos(\omega T) v_x - \text{sen}(\omega T) v_y \quad (3.44)$$

$$f^3(x_k) = \frac{1 - \cos(\omega T)}{\omega} v_x + p_y + \frac{\text{sen}(\omega T)}{\omega} v_y \quad (3.45)$$

$$f^4(x_k) = \text{sen}(\omega T) v_x + \cos(\omega T) v_y \quad (3.46)$$

$$f^5(x_k) = p_z + T v_z \quad (3.47)$$

$$f^6(x_k) = v_z \quad (3.48)$$

$$f^7(x_k) = \omega \quad (3.49)$$

Separando o vetor de estados em dois blocos, isto é, $x_k = [\xi \mid \omega]_k^T$, em que $\xi \in \mathbb{R}^6$ contém os elementos de posição e velocidade em x , y e z , utilizamos a equação (3.24), obtendo o seguinte resultado:

$$\mathcal{A}_k = \left(\underbrace{\begin{bmatrix} A_1 \xi \\ \omega \end{bmatrix}}_f \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \omega} \end{bmatrix} \right)_{x_k = \hat{x}_{k|k}} = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & \frac{\partial A_1}{\partial \omega} \xi \\ \hline 0_{1 \times 6} & 1 \end{array} \right]_{x_k = \hat{x}_{k|k}} = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & d \\ \hline 0_{1 \times 6} & 1 \end{array} \right]_{x_k = \hat{x}_{k|k}} \quad (3.50)$$

em que A_1 é a matriz apresentada na equação (2.15) e $d \in \mathbb{R}^6$, cujos elementos são:

$$d_1 = \frac{\partial f^1}{\partial \omega} = \frac{\cos(\omega T) T v_x}{\omega} - \frac{\text{sen}(\omega T) v_x}{\omega^2} - \frac{\text{sen}(\omega T) T v_y}{\omega} - \frac{(-1 + \cos(\omega T)) v_y}{\omega^2} \quad (3.51)$$

$$d_2 = \frac{\partial f^2}{\partial \omega} = -\text{sen}(\omega T) T v_x - \cos(\omega T) T v_y \quad (3.52)$$

$$d_3 = \frac{\partial f^3}{\partial \omega} = \frac{\text{sen}(\omega T) T v_x}{\omega} - \frac{(1 - \cos(\omega T)) v_x}{\omega^2} + \frac{\cos(\omega T) T v_y}{\omega} - \frac{\text{sen}(\omega T) v_y}{\omega^2} \quad (3.53)$$

$$d_4 = \frac{\partial f^4}{\partial \omega} = \cos(\omega T) T v_x - \text{sen}(\omega T) T v_y \quad (3.54)$$

$$d_5 = \frac{\partial f^5}{\partial \omega} = 0 \quad (3.55)$$

$$d_6 = \frac{\partial f^6}{\partial \omega} = 0 \quad (3.56)$$

Agora, resta o cálculo de \mathcal{H}_{k+1} . Neste modelo, a diferença para o modelo CV, sob o ponto de vista do vetor de estados x_k , é a inclusão de ω . Desta forma, \mathcal{H}_{k+1} resulta diretamente da expansão em uma coluna de elementos nulos da jacobiana obtida na equação (3.35). Assim, para o modelo CT_{ph},

a matriz jacobiana $\mathcal{H}_{k+1} \in \mathbb{R}^{4 \times 7}$ fica desta forma, com c_1 a c_6 definidas em (3.37)–(3.42):

$$\mathcal{H}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & 0 \end{bmatrix}_{x_k = \hat{x}_{k+1|k}} \quad (3.57)$$

3.1.3 Matrizes Jacobianas para o Modelo CTpa

Por fim, chegamos ao último modelo que necessita dos cálculos de suas respectivas matrizes jacobianas, \mathcal{A}_k e \mathcal{H}_{k+1} . Para o cálculo da primeira delas, são nove as funções f^i , $i = 1, \dots, 9$, devido ao aumento do vetor x_k . São expressões que dependem dos elementos a_{ij}^0 de A_0 da expressão (2.28), aqueles representados pelas equações em (2.30)–(2.47). As funções f^i que fazem parte do cálculo de \mathcal{A}_k são:

$$f^1(x_k) = a_{11}^0 p_x + a_{12}^0 v_x + a_{14}^0 v_y + a_{16}^0 v_z \quad (3.58)$$

$$f^2(x_k) = a_{22}^0 v_x + a_{24}^0 v_y + a_{26}^0 v_z \quad (3.59)$$

$$f^3(x_k) = a_{32}^0 v_x + a_{33}^0 p_y + a_{34}^0 v_y + a_{36}^0 v_z \quad (3.60)$$

$$f^4(x_k) = a_{42}^0 v_x + a_{44}^0 v_y + a_{46}^0 v_z \quad (3.61)$$

$$f^5(x_k) = a_{52}^0 v_x + a_{54}^0 v_y + a_{55}^0 p_z + a_{56}^0 v_z \quad (3.62)$$

$$f^6(x_k) = a_{62}^0 v_x + a_{64}^0 v_y + a_{66}^0 v_z \quad (3.63)$$

$$f^7(x_k) = \omega_x \quad (3.64)$$

$$f^8(x_k) = \omega_y \quad (3.65)$$

$$f^9(x_k) = \omega_z \quad (3.66)$$

Separando mais uma vez o vetor de estados em dois blocos, isto é, $x_k = [\xi \mid \omega]_k^T$, em que $\xi \in \mathbb{R}^6$ contém os elementos de posição e velocidade em x , y e z , o resultado para a matriz jacobiana $\mathcal{A}_k \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ fica sendo:

$$\mathcal{A}_k = \left(\underbrace{\begin{bmatrix} A_0 \xi \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}}_f \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \omega_x} & \frac{\partial}{\partial \omega_y} & \frac{\partial}{\partial \omega_z} \end{array} \right] \right)_{x_k = \hat{x}_{k|k}}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\begin{array}{c|ccc} A_0 & \frac{\partial A_0}{\partial \omega_x} \xi & \frac{\partial A_0}{\partial \omega_y} \xi & \frac{\partial A_0}{\partial \omega_z} \xi \\ \hline 0_{3 \times 6} & & I_3 & \end{array} \right]_{x_k = \hat{x}_{k|k}} \\
&= \left[\begin{array}{c|c} A_0 & D \\ \hline 0_{3 \times 6} & I_3 \end{array} \right]_{x_k = \hat{x}_{k|k}} \tag{3.67}
\end{aligned}$$

em que A_0 é a matriz descrita na equação (2.28) e $D \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$ é uma matriz cujos elementos são:

$$d_{11} = \frac{\partial f^1}{\partial \omega_x} = \frac{1}{6} T^3 (\omega_y v_y + \omega_z v_z) \tag{3.68}$$

$$d_{21} = \frac{\partial f^2}{\partial \omega_x} = \left(\frac{1}{2} T^2 \omega_y + \frac{1}{3} T^3 \omega_z \omega_x \right) v_y + \left(\frac{1}{2} T^2 \omega_z - \frac{1}{3} T^3 \omega_y \omega_x \right) v_z \tag{3.69}$$

$$d_{31} = \frac{\partial f^3}{\partial \omega_x} = \frac{1}{6} T^3 \omega_y v_x - \frac{1}{3} T^3 \omega_x v_y - \frac{1}{2} T^2 v_z \tag{3.70}$$

$$\begin{aligned}
d_{41} = \frac{\partial f^4}{\partial \omega_x} &= \left(\frac{1}{2} T^2 \omega_y - \frac{1}{3} T^3 \omega_z \omega_x \right) v_x - T^2 \omega_x v_y + \\
&+ \left(-T + \frac{1}{6} T^3 (\omega_y^2 + 3\omega_x^2 + \omega_z^2) \right) v_z \tag{3.71}
\end{aligned}$$

$$d_{51} = \frac{\partial f^5}{\partial \omega_x} = \frac{1}{6} T^3 \omega_z v_x + \frac{1}{2} T^2 v_y - \frac{1}{3} T^3 \omega_x v_z \tag{3.72}$$

$$\begin{aligned}
d_{61} = \frac{\partial f^6}{\partial \omega_x} &= \left(\frac{1}{2} T^2 \omega_z - \frac{1}{3} T^3 \omega_y \omega_x \right) v_x - T^2 \omega_x v_z + \\
&+ \left(T - \frac{1}{6} T^3 (\omega_z^2 + 3\omega_x^2 + \omega_y^2) \right) v_y \tag{3.73}
\end{aligned}$$

$$d_{12} = \frac{\partial f^1}{\partial \omega_y} = -\frac{1}{3} T^3 \omega_y v_x + \frac{1}{6} T^3 \omega_x v_y + \frac{1}{2} T^2 v_z \tag{3.74}$$

$$\begin{aligned}
d_{22} = \frac{\partial f^2}{\partial \omega_y} &= \left(\frac{1}{2} T^2 \omega_x + \frac{1}{3} T^3 \omega_z \omega_y \right) v_y - T^2 \omega_y v_x + \\
&+ \left(T - \frac{1}{6} T^3 (3\omega_y^2 + \omega_x^2 + \omega_z^2) \right) v_z \tag{3.75}
\end{aligned}$$

$$d_{32} = \frac{\partial f^3}{\partial \omega_y} = \frac{1}{6} T^3 (\omega_x v_x + \omega_z v_z) \tag{3.76}$$

$$d_{42} = \frac{\partial f^4}{\partial \omega_y} = \left(\frac{1}{2} T^2 \omega_x - \frac{1}{3} T^3 \omega_z \omega_y \right) v_x + \left(\frac{1}{2} T^2 \omega_z + \frac{1}{3} T^3 \omega_y \omega_x \right) v_z \tag{3.77}$$

$$d_{52} = \frac{\partial f^5}{\partial \omega_y} = -\frac{1}{2} T^2 v_x + \frac{1}{6} T^3 \omega_z v_y - \frac{1}{3} T^3 \omega_y v_z \tag{3.78}$$

$$d_{62} = \frac{\partial f^6}{\partial \omega_y} = \left(\frac{1}{2} T^2 \omega_z - \frac{1}{3} T^3 \omega_y \omega_x \right) v_y - T^2 \omega_y v_z +$$

$$+ \left(-T + \frac{1}{6}T^3(3\omega_y^2 + \omega_x^2 + \omega_z^2) \right) v_x \quad (3.79)$$

$$d_{13} = \frac{\partial f^1}{\partial \omega_z} = -\frac{1}{3}T^3\omega_z v_x - \frac{1}{2}T^2 v_y + \frac{1}{6}T^3\omega_x v_z \quad (3.80)$$

$$d_{23} = \frac{\partial f^2}{\partial \omega_z} = \left(\frac{1}{2}T^2\omega_x - \frac{1}{3}T^3\omega_z\omega_y \right) v_z - T^2\omega_z v_x + \left(-T + \frac{1}{6}T^3(3\omega_z^2 + \omega_x^2 + \omega_y^2) \right) v_y \quad (3.81)$$

$$d_{33} = \frac{\partial f^3}{\partial \omega_z} = \frac{1}{2}T^2 v_x - \frac{1}{3}T^3\omega_z v_y + \frac{1}{6}T^3\omega_y v_z \quad (3.82)$$

$$d_{43} = \frac{\partial f^4}{\partial \omega_z} = \left(\frac{1}{2}T^2\omega_y + \frac{1}{3}T^3\omega_z\omega_x \right) v_z - T^2\omega_z v_y + \left(T - \frac{1}{6}T^3(\omega_y^2 + \omega_x^2 + 3\omega_z^2) \right) v_x \quad (3.83)$$

$$d_{53} = \frac{\partial f^5}{\partial \omega_z} = \frac{1}{6}T^3(\omega_x v_x + \omega_y v_y) \quad (3.84)$$

$$d_{63} = \frac{\partial f^6}{\partial \omega_z} = \left(\frac{1}{2}T^2\omega_x + \frac{1}{3}T^3\omega_z\omega_y \right) v_x + \left(\frac{1}{2}T^2\omega_y - \frac{1}{3}T^3\omega_z\omega_x \right) v_y \quad (3.85)$$

Agora, resta o cálculo de $\mathcal{H}_{k+1} \in \mathbb{R}^{4 \times 9}$, que se dá da mesma maneira que foi feito para o modelo CT_{ph}, só expandindo a matriz jacobiana do modelo CV com uma matriz de dimensão 6×3 , pelo fato da inclusão de ω_x , ω_y e ω_z no vetor de estados x_k . Com isso, para o modelo CT_{ph}, a matriz jacobiana \mathcal{H}_{k+1} fica desta forma:

$$\mathcal{H}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{x_k = \hat{x}_{k+1|k}} \quad (3.86)$$

3.1.4 Fluxograma para um Ciclo de EKF

Na Figura 3.1, está representada de forma simplificada um ciclo do EKF, do instante de tempo k para $k+1$. Note que, durante a execução das equações de previsão e atualização do EKF, existem três fluxos principais, sendo eles a evolução do sistema, a estimativa do estado e o cálculo da matriz de covariância do erro da estimativa do estado. Perceba também a interação entre os blocos pertencentes a cada um destes fluxos.

Para avaliarmos o custo computacional deste filtro, foi feita uma contagem do número de operações de adição e de multiplicação, em que s equivale a uma soma e m equivale a uma multiplicação.

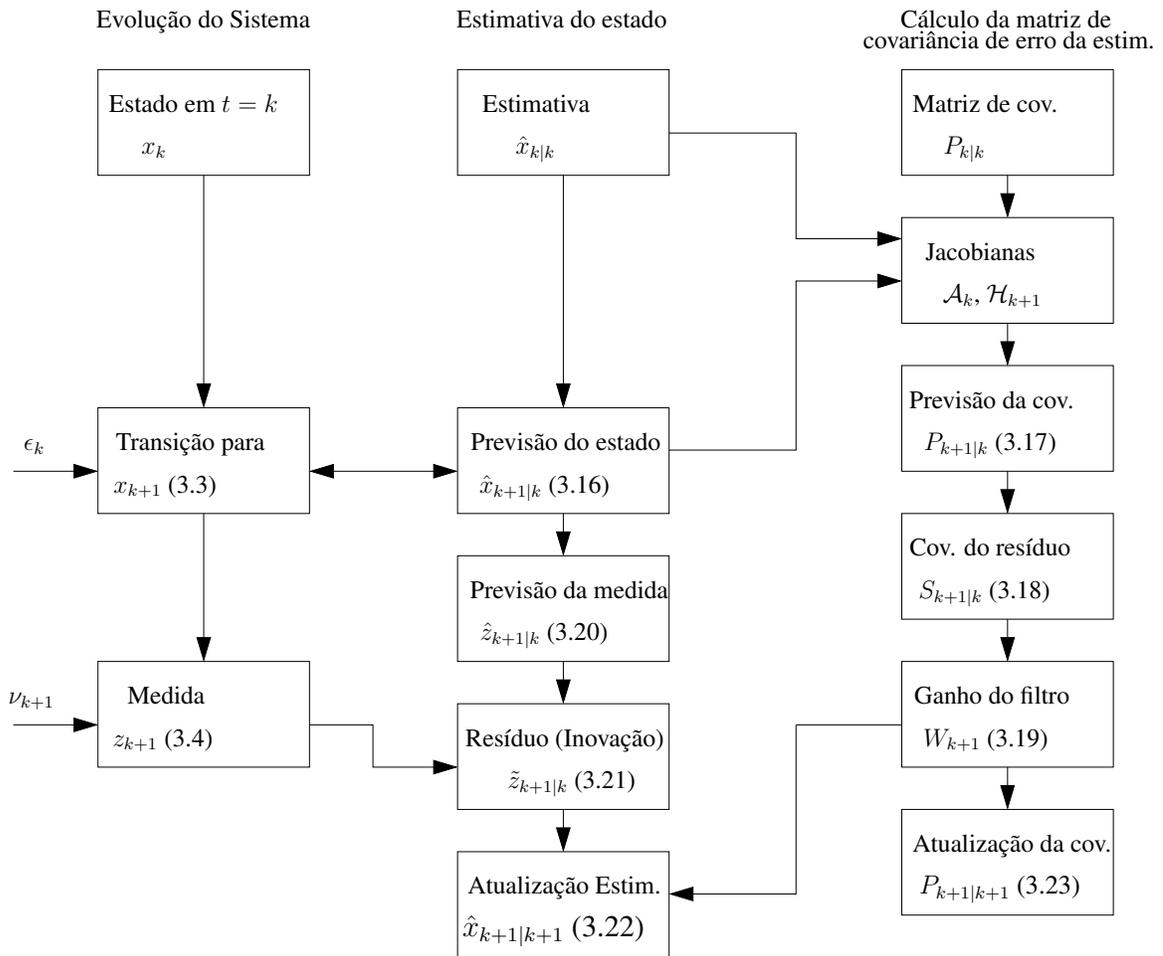


Fig. 3.1: Fluxograma básico de um ciclo do filtro EKF (Os números em cada bloco referem-se às respectivas equações).

Desta forma, o número de operações total para um ciclo do EKF é dado por $\text{Nop}_{\mathbf{K}}$ (Número de operações do EKF):

$$\begin{aligned}
 \text{Nop}_{\mathbf{K}} = & [(n_x - 1)s + n_x m] (4n_x^2 + 2n_x n_z + n_z^2 + n_x) + \\
 & [(n_z - 1)s + n_z m] (n_x + n_z + 3n_x n_z) + \\
 & 2n_\epsilon n_x [(n_\epsilon - 1)s + n_\epsilon m] + (2n_x^2 + n_x + 1 + n_z^2) s
 \end{aligned} \quad (3.87)$$

A relação obtida em (3.87) será útil para a construção do custo computacional das técnicas de filtragem que serão tratadas nos capítulos seguintes. Na seção seguinte, trataremos o outro filtro estocástico recursivo utilizado neste trabalho, o filtro BLUE.

3.2 Filtro BLUE

O filtro BLUE é utilizado em cenários de rastreamento em que a dinâmica do sistema é linear e as observações passam pelo processo de conversão de coordenadas e é baseado na ideia de construir o melhor estimador linear não polarizado (BLUE, em inglês). Para realizar esta construção, é necessário utilizar algumas aproximações, como feito em [9]. Este filtro não apresenta problemas de limitações quanto a abordagens de conversão de observações de coordenadas cartesianas para esféricas e não possui dificuldades com o fenômeno de polarização das observações, pois já estão incorporados em seus cálculos os procedimentos de despolarização.

Como já foi estudado no Capítulo 2, excetuando o modelo CV, tanto o modelo CT_{ph}, quanto o modelo CT_{pa} possuem dinâmicas não-lineares. Para lidar com esta situação, foi desenvolvido o filtro BLUE adaptado, que aplica a ideia de aproximação (linearização) através da obtenção de matrizes jacobianas, calculadas nas seções 3.1.2 e 3.1.3. Portanto, todos os cálculos vistos nas seções anteriores para as matrizes jacobianas são válidos também para o filtro BLUE.

No estudo do filtro BLUE, existem três importantes tópicos que devem ser abordados para que o entendimento deste filtro seja completo. A primeira delas é o cálculo da previsão das observações $\hat{z}_{k+1|k}$, cujo método é diferente daquele apresentado para o EKF. A segunda abordagem está no cálculo da matriz de covariância da inovação $S_{k+1|k} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ que, diferentemente do EKF, o filtro BLUE tem uma maneira própria para calculá-la, em que é obtido elemento a elemento desta matriz separadamente. A terceira, e não menos importante, é a obtenção de $C_{x,z} = \text{cov}(\tilde{x}_{k+1|k}, \tilde{z}_{k+1|k})$, que é essencial para o cálculo do ganho do filtro $W_{k+1} = C_{x,z} S_{k+1|k}^{-1} \in \mathbb{R}^{n_x}$. Estas duas últimas envolvem a aplicação do processo de despolarização das observações, que aparecem durante o desenvolvimento dos cálculos de $S_{k+1|k}$ e de W_{k+1} .

3.2.1 Procedimento de Despolarização

Assim, como no EKF, devemos tratar de forma adequada o fenômeno de polarização das observações também no filtro BLUE. As equações de conversão (2.59)–(2.61) continuam válidas aqui para o filtro BLUE.

A realização das despolarizações no filtro BLUE é executada no decorrer dos três importantes cálculos citados anteriormente ($\hat{z}_{k+1|k}$, $S_{k+1|k}$ e W_{k+1}), diferentemente do EKF, em que a despolarização é realizada diretamente nas observações, antes do processo de filtragem. O cálculo de cada uma destas matrizes vai depender do tipo de modelo envolvido, devido aos diferentes tamanhos do vetor de estados x_k para cada modelo dinâmico, alterando as dimensões e os elementos de algumas destas matrizes. Desta forma, os cálculos necessários serão separados para os três tipos de modelos estudados.

Cálculo da Previsão da Observação — Modelos CV, CT_{ph} e CT_{pa}

Esta previsão pode ser expressa da seguinte forma:

$$\hat{z}_{k+1|k} = E \left[\begin{array}{c} p_{xm \ k+1} \\ p_{ym \ k+1} \\ p_{zm \ k+1} \end{array} \middle| z^k \right] = \begin{bmatrix} E[p_{xm \ k+1}|z^k] \\ E[p_{ym \ k+1}|z^k] \\ E[p_{zm \ k+1}|z^k] \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

sendo que as observações $p_{xm \ k+1}$, $p_{ym \ k+1}$ e $p_{zm \ k+1}$ estão polarizadas. Note que a velocidade radial não entra nos cálculos de despolarização, assim como no EKF, pois o processo de conversão de observações não envolve a velocidade radial. Observando a equação (3.88), devemos calcular três valores esperados. O primeiro valor esperado é aplicado em $p_{xm \ k+1}$, como mostra o desenvolvimento abaixo:

$$\begin{aligned} E[p_{xm \ k+1}|z^k] &= E[(r + \nu_r) \cos(a + \nu_a) \cos(e + \nu_e) | z^k] \\ &= E[(r + \nu_r)(\cos(a) \cos(\nu_a) - \text{sen}(a) \text{sen}(\nu_a)) (\cos(e) \cos(\nu_e) \\ &\quad - \text{sen}(e) \text{sen}(\nu_e)) | z^k] \end{aligned} \quad (3.89)$$

Como r , a e e são independentes de ν_r , ν_a e ν_e , logo $p_x = r \cos(a) \cos(e)$, $p_y = r \text{sen}(a) \cos(e)$ e $p_z = r \text{sen}(e)$ são independentes de ν_r , ν_a e ν_e ; desta maneira, os termos cruzados envolvendo $E[\nu_r|z^k] = E[\nu_r]$ são todos nulos. Além disso, como $\text{sen}(\nu_a)$ e $\text{sen}(\nu_e)$ são funções ímpares, logo $E[\text{sen}(\nu_a)|z^k] = E[\text{sen}(\nu_a)]$ e $E[\text{sen}(\nu_e)|z^k] = E[\text{sen}(\nu_e)]$ são nulos para qualquer distribuição cuja densidade seja uma função par. Com estas considerações feitas, podemos melhorar a expressão de (3.89):

$$\begin{aligned} E[p_{xm \ k+1}|z^k] &= E[p_x | z^k] E[\cos(\nu_a)|z^k] E[\cos(\nu_e)|z^k] \\ &= \hat{p}_{x \ k+1|k} E[\cos(\nu_a)] E[\cos(\nu_e)] \\ &= \lambda_1 \mu_1 \hat{p}_{x \ k+1|k} \end{aligned} \quad (3.90)$$

em que $\lambda_1 = E[\cos(\nu_a)] = e^{-\sigma_a^2/2}$ e $\mu_1 = E[\cos(\nu_e)] = e^{-\sigma_e^2/2}$, para os quais levamos em conta a hipótese de distribuição gaussiana para o cálculo do valor esperado. Note que o resultado obtido em (3.90) é a previsão da observação da posição p_x polarizada. Se dividíssemos este resultado por $\lambda_1 \mu_1$, obteríamos a previsão da observação da posição p_x despolarizada. No entanto, o cálculo da inovação $\tilde{z}_{k+1|k}$ é obtido através da diferença entre z_{k+1} (observação polarizada) e $\hat{z}_{k+1|k}$. Desta forma, é conveniente mantermos o resultado de (3.90), pois, assim, a inovação elimina a polarização ao realizar a diferença entre duas informações polarizadas, z_{k+1} e $\hat{z}_{k+1|k}$.

Fazendo o mesmo procedimento para $p_{ym\ k+1}$, obtemos um resultado semelhante:

$$E[p_{ym\ k+1}|z^k] = \lambda_1 \mu_1 \hat{p}_{y\ k+1|k} \quad (3.91)$$

Para o caso de p_{zm} , o resultado é um pouco diferente, mas as considerações feitas para os cálculos de $E[p_{xm}|z^k]$ e $E[p_{ym}|z^k]$ também são válidas para o cálculo de $E[p_{zm}|z^k]$:

$$\begin{aligned} E[p_{zm\ k+1}|z^k] &= E[(r + \nu_r) \text{sen}(e + \nu_e)|z^k] \\ &= E[(r + \nu_r)(\text{sen}(e) \cos(\nu_e) + \cos(e) \text{sen}(\nu_e))|z^k] \\ &= E[r \text{sen}(e) \cos(\nu_e)|z^k] \\ &= E[p_{z\ k+1}|z^k] E[\cos(\nu_e)|z^k] \\ &= \hat{p}_{z\ k+1|k} E[\cos(\nu_e)] \\ &= \mu_1 \hat{p}_{z\ k+1|k} \end{aligned} \quad (3.92)$$

Substituindo (3.90), (3.91) e (3.92) na expressão (3.88), obtemos:

$$\hat{z}_{k+1|k} = \mu_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 \hat{p}_{x\ k+1|k} \\ \lambda_1 \hat{p}_{y\ k+1|k} \\ \hat{p}_{z\ k+1|k} \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

Cálculo da Matriz de Covariância da Inovação — Modelo CV

Para o cálculo da matriz $S_{k+1|k} = \text{cov}(\tilde{z}_{k+1|k})$ e, mais adiante, para a determinação do ganho do filtro W_{k+1} , adotaremos uma notação provisória, mais simples, com o intuito de facilitar o manuseio e apresentação dos resultados obtidos. As notações adotadas são as seguintes:

$$\hat{x}_{k+1|k} = E[x_{k+1}|z^k] = \bar{x} \quad (3.94)$$

$$\hat{p}_{n\ k+1|k} = E[p_{n\ k+1}|z^k] = \bar{p}_n \quad (3.95)$$

$$\hat{v}_{n\ k+1|k} = E[v_{n\ k+1}|z^k] = \bar{v}_n \quad (3.96)$$

$$\tilde{p}_{n\ k+1|k} = p_{n\ k+1} - \hat{p}_{n\ k+1|k} = p_n - \bar{p}_n = \tilde{p}_n \quad (3.97)$$

$$\tilde{v}_{n\ k+1|k} = v_{n\ k+1} - \hat{v}_{n\ k+1|k} = v_n - \bar{v}_n = \tilde{v}_n \quad (3.98)$$

$$S_{k+1|k} = S \quad (3.99)$$

$$P_{k+1|k} = P \quad (3.100)$$

$$W_{k+1} = W \quad (3.101)$$

em que

$$P = \begin{bmatrix} \text{var}(\tilde{p}_x) & \text{cov}(\tilde{p}_x, \tilde{v}_x) & \text{cov}(\tilde{p}_x, \tilde{p}_y) & \text{cov}(\tilde{p}_x, \tilde{v}_y) & \text{cov}(\tilde{p}_x, \tilde{p}_z) & \text{cov}(\tilde{p}_x, \tilde{v}_z) \\ \text{cov}(\tilde{v}_x, \tilde{p}_x) & \text{var}(\tilde{v}_x) & \text{cov}(\tilde{v}_x, \tilde{p}_y) & \text{cov}(\tilde{v}_x, \tilde{v}_y) & \text{cov}(\tilde{v}_x, \tilde{p}_z) & \text{cov}(\tilde{v}_x, \tilde{v}_z) \\ \text{cov}(\tilde{p}_y, \tilde{p}_x) & \text{cov}(\tilde{p}_y, \tilde{v}_x) & \text{var}(\tilde{p}_y) & \text{cov}(\tilde{p}_y, \tilde{v}_y) & \text{cov}(\tilde{p}_y, \tilde{p}_z) & \text{cov}(\tilde{p}_y, \tilde{v}_z) \\ \text{cov}(\tilde{v}_y, \tilde{p}_x) & \text{cov}(\tilde{v}_y, \tilde{v}_x) & \text{cov}(\tilde{v}_y, \tilde{p}_y) & \text{var}(\tilde{v}_y) & \text{cov}(\tilde{v}_y, \tilde{p}_z) & \text{cov}(\tilde{v}_y, \tilde{v}_z) \\ \text{cov}(\tilde{p}_z, \tilde{p}_x) & \text{cov}(\tilde{p}_z, \tilde{v}_x) & \text{cov}(\tilde{p}_z, \tilde{p}_y) & \text{cov}(\tilde{p}_z, \tilde{v}_y) & \text{var}(\tilde{p}_z) & \text{cov}(\tilde{p}_z, \tilde{v}_z) \\ \text{cov}(\tilde{v}_z, \tilde{p}_x) & \text{cov}(\tilde{v}_z, \tilde{v}_x) & \text{cov}(\tilde{v}_z, \tilde{p}_y) & \text{cov}(\tilde{v}_z, \tilde{v}_y) & \text{cov}(\tilde{v}_z, \tilde{p}_z) & \text{var}(\tilde{v}_z) \end{bmatrix} = P^T \quad (3.102)$$

e $n = x, y, z$ para os estados e $n = xm, ym, zm$ para as observações. A matriz S possui a seguinte estrutura:

$$S = \begin{bmatrix} \text{var}(\tilde{p}_{xm}) & \text{cov}(\tilde{p}_{xm}, \tilde{p}_{ym}) & \text{cov}(\tilde{p}_{xm}, \tilde{p}_{zm}) & \text{cov}(\tilde{p}_{xm}, \tilde{v}_r) \\ \text{cov}(\tilde{p}_{ym}, \tilde{p}_{xm}) & \text{var}(\tilde{p}_{ym}) & \text{cov}(\tilde{p}_{ym}, \tilde{p}_{zm}) & \text{cov}(\tilde{p}_{ym}, \tilde{v}_r) \\ \text{cov}(\tilde{p}_{zm}, \tilde{p}_{xm}) & \text{cov}(\tilde{p}_{zm}, \tilde{p}_{ym}) & \text{var}(\tilde{p}_{zm}) & \text{cov}(\tilde{p}_{zm}, \tilde{v}_r) \\ \text{cov}(\tilde{v}_r, \tilde{p}_{xm}) & \text{cov}(\tilde{v}_r, \tilde{p}_{ym}) & \text{cov}(\tilde{v}_r, \tilde{p}_{zm}) & \text{var}(\tilde{v}_r) \end{bmatrix} = S^T \quad (3.103)$$

sendo que as observações p_{xm} , p_{ym} e p_{zm} estão polarizadas. Para calcularmos o elemento s_{11} , por exemplo, precisamos determinar $\text{var}(\tilde{p}_{xm}) = E[p_{xm}^2] - E[\bar{p}_{xm}^2]$, sendo necessário expandir as expressões (2.59)–(2.61), apresentadas no Capítulo 2. Não é difícil verificar que as expressões resultantes para $\text{var}(\tilde{p}_{xm})$ ficam muito complexas, não sendo facilmente calculadas. Com isso optou-se utilizar a simplificação apresentada em [9], no qual são mostrados os resultados de cada um dos elementos s_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, apresentados abaixo:

$$\begin{aligned} s_{11} &= \lambda_2 \mu_2 \text{var}(\tilde{p}_x) + \lambda_3 \mu_2 \text{var}(\tilde{p}_y) + \lambda_2 \mu_2 \sigma_r^2 E \left[\frac{p_x^2}{r^2} \right] + \lambda_3 \mu_2 \sigma_r^2 E \left[\frac{p_y^2}{r^2} \right] + \\ &+ \lambda_2 \mu_3 E \left[\frac{p_x^2 p_z^2}{r_1^2} \right] + \lambda_3 \mu_3 E \left[\frac{p_y^2 p_z^2}{r_1^2} \right] + \lambda_2 \mu_3 \sigma_r^2 E \left[\frac{p_x^2 p_z^2}{r^2 r_1^2} \right] + \\ &+ \lambda_3 \mu_3 \sigma_r^2 E \left[\frac{p_y^2 p_z^2}{r^2 r_1^2} \right] + (\lambda_2 \mu_2 - \lambda_1^2 \mu_1^2) E[\bar{p}_x^2] + \lambda_3 \mu_2 E[\bar{p}_y^2] \end{aligned} \quad (3.104)$$

$$\begin{aligned} s_{22} &= \lambda_2 \mu_2 \text{var}(\tilde{p}_y) + \lambda_3 \mu_2 \text{var}(\tilde{p}_x) + \lambda_2 \mu_2 \sigma_r^2 E \left[\frac{p_y^2}{r^2} \right] + \lambda_3 \mu_2 \sigma_r^2 E \left[\frac{p_x^2}{r^2} \right] + \\ &+ \lambda_3 \mu_3 E \left[\frac{p_x^2 p_z^2}{r_1^2} \right] + \lambda_2 \mu_3 E \left[\frac{p_y^2 p_z^2}{r_1^2} \right] + \lambda_3 \mu_3 \sigma_r^2 E \left[\frac{p_x^2 p_z^2}{r^2 r_1^2} \right] + \\ &+ \lambda_2 \mu_3 \sigma_r^2 E \left[\frac{p_y^2 p_z^2}{r^2 r_1^2} \right] + (\lambda_2 \mu_2 - \lambda_1^2 \mu_1^2) E[\bar{p}_y^2] + \lambda_3 \mu_2 E[\bar{p}_x^2] \end{aligned} \quad (3.105)$$

$$s_{33} = \mu_2 \text{var}(\tilde{p}_z) + \mu_3 (\text{var}(\tilde{p}_x) + \text{var}(\tilde{p}_y)) + \mu_2 \sigma_r^2 E \left[\frac{p_z^2}{r^2} \right] + \mu_3 \sigma_r^2 E \left[\frac{r_1^2}{r^2} \right] +$$

$$+ (\mu_2 - \mu_1^2)E[\bar{p}_z] + \mu_3 E[\bar{p}_x^2 + \bar{p}_y^2] \quad (3.106)$$

$$\begin{aligned} s_{12} = s_{21} &= \mu_2(\lambda_2 - \lambda_3) \text{cov}(\tilde{p}_x, \tilde{p}_y) + \sigma_r^2 \mu_2(\lambda_2 - \lambda_3) E \left[\frac{p_x p_y}{r^2} \right] + \\ &+ \mu_3(\lambda_2 - \lambda_3) E \left[\frac{p_x p_y p_z^2}{r_1^2} \right] + \mu_3 \sigma_r^2 (\lambda_2 - \lambda_3) E \left[\frac{p_x p_y p_z^2}{r^2 r_1^2} \right] + \\ &+ (\mu_2(\lambda_2 - \lambda_3) - \lambda_1^2 \mu_1^2) E[\bar{p}_x \bar{p}_y] \end{aligned} \quad (3.107)$$

$$\begin{aligned} s_{13} = s_{31} &= \lambda_1(\mu_2 - \mu_3) \left(\text{cov}(\tilde{p}_x, \tilde{p}_z) + \sigma_r^2 E \left[\frac{p_x p_z}{r^2} \right] \right) + \\ &+ (\lambda_1(\mu_2 - \mu_3) - \lambda_1 \mu_1^2) E[\bar{p}_x \bar{p}_z] \end{aligned} \quad (3.108)$$

$$\begin{aligned} s_{23} = s_{32} &= \lambda_1(\mu_2 - \mu_3) \left(\text{cov}(\tilde{p}_y, \tilde{p}_z) + \sigma_r^2 E \left[\frac{p_y p_z}{r^2} \right] \right) + \\ &+ (\lambda_1(\mu_2 - \mu_3) - \lambda_1 \mu_1^2) E[\bar{p}_y \bar{p}_z] \end{aligned} \quad (3.109)$$

em que

$$r = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} \quad (3.110)$$

$$r_1 = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \quad (3.111)$$

$$\lambda_2 = E[\cos^2(\nu_a)] = 0,5(1 + \exp(-2\sigma_a^2)) \quad (3.112)$$

$$\lambda_3 = E[\text{sen}^2(\nu_a)] = 0,5(1 - \exp(-2\sigma_a^2)) \quad (3.113)$$

$$\mu_2 = E[\cos^2(\nu_e)] = 0,5(1 + \exp(-2\sigma_e^2)) \quad (3.114)$$

$$\mu_3 = E[\text{sen}^2(\nu_e)] = 0,5(1 - \exp(-2\sigma_e^2)) \quad (3.115)$$

As expressões de $s_{ij}, i = 1, 2, 3$ consistem de variâncias e covariâncias, que vêm diretamente dos elementos da matriz $P \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ do filtro no passo de previsão, e alguns valores esperados que não têm uma descrição analítica simples, necessitando de algumas aproximações pelo termo de ordem zero da série de Taylor, calculado em torno de $p_x = \bar{p}_x, p_y = \bar{p}_y, p_z = \bar{p}_z, r = \bar{r} = \sqrt{\bar{p}_x^2 + \bar{p}_y^2 + \bar{p}_z^2}$ e $r_1 = \bar{r}_1 = \sqrt{\bar{p}_x^2 + \bar{p}_y^2}$. Assim, os termos $s_{ij}, i, j = 1, 2, 3$ ficam:

$$s_{11} \simeq \lambda_2 \mu_2 \text{var}(\tilde{p}_x) + \lambda_3 \mu_2 \text{var}(\tilde{p}_y) + \alpha(\lambda_2 \bar{p}_x^2 + \lambda_3 \bar{p}_y^2) + \alpha_1 \quad (3.116)$$

$$s_{22} \simeq \lambda_2 \mu_2 \text{var}(\tilde{p}_y) + \lambda_3 \mu_2 \text{var}(\tilde{p}_x) + \alpha(\lambda_2 \bar{p}_y^2 + \lambda_3 \bar{p}_x^2) + \alpha_2 \quad (3.117)$$

$$s_{33} \simeq \mu_2 \text{var}(\tilde{p}_z) + \mu_3 (\text{var}(\tilde{p}_x) + \text{var}(\tilde{p}_y)) + \mu_2 \sigma_r^2 \frac{\bar{p}_z^2}{\bar{r}^2} + \mu_3 \sigma_r^2 \frac{\bar{r}_1^2}{\bar{r}^2} + \alpha_3 \quad (3.118)$$

$$s_{12} = s_{21} \simeq (\lambda_2 - \lambda_3)(\mu_2 \text{cov}(\tilde{p}_x, \tilde{p}_y) + \alpha \bar{p}_x \bar{p}_y) + \alpha_4 \quad (3.119)$$

$$s_{13} = s_{31} \simeq \lambda_1(\mu_2 - \mu_3)(\text{cov}(\tilde{p}_x, \tilde{p}_z) + \sigma_r^2 \frac{\bar{p}_x \bar{p}_z}{\bar{r}^2}) + \alpha_5 \bar{p}_x \quad (3.120)$$

$$s_{23} = s_{32} \simeq \lambda_1(\mu_2 - \mu_3)(\text{cov}(\tilde{p}_y, \tilde{p}_z) + \sigma_r^2 \frac{\bar{p}_y \bar{p}_z}{\bar{r}^2}) + \alpha_5 \bar{p}_y \quad (3.121)$$

em que

$$\alpha = \frac{\mu_2 \sigma_r^2}{\bar{r}^2} + \frac{\mu_3 \bar{p}_z^2}{\bar{r}_1^2} + \frac{\mu_3 \sigma_r^2 \bar{p}_z^2}{\bar{r}^2 \bar{r}_1^2} \quad (3.122)$$

$$\alpha_1 = (\lambda_2 \mu_2 - \lambda_1^2 \mu_1^2) \bar{p}_x^2 + \lambda_3 \mu_2 \bar{p}_y^2 \quad (3.123)$$

$$\alpha_2 = (\lambda_2 \mu_2 - \lambda_1^2 \mu_1^2) \bar{p}_y^2 + \lambda_3 \mu_2 \bar{p}_x^2 \quad (3.124)$$

$$\alpha_3 = (\mu_2 - \mu_1^2) \bar{p}_z^2 + \mu_3 (\bar{p}_x^2 + \bar{p}_y^2) \quad (3.125)$$

$$\alpha_4 = (\mu_2 (\lambda_2 - \lambda_3) - \lambda_1^2 \mu_1^2) \bar{p}_x \bar{p}_y \quad (3.126)$$

$$\alpha_5 = (\lambda_1 (\mu_2 - \mu_3) - \lambda_1 \mu_1^2) \bar{p}_z \quad (3.127)$$

Dos dezesseis termos de S , nove já foram calculados; os demais são ligados à velocidade radial v_r . Para calcular estes termos, isto é, $s_{i4} = s_{4i}$, $i = 1, 2, 3, 4$ aproximaremos v_r por uma série de Taylor de primeira ordem, que será calculada convenientemente em torno de \bar{x} , isto é, $p_x = \bar{p}_x$, $p_y = \bar{p}_y$, $p_z = \bar{p}_z$, $v_x = \bar{v}_x$, $v_y = \bar{v}_y$ e $v_z = \bar{v}_z$, para que surjam termos de forma a deixar os resultados em função de algumas variâncias e covariâncias encontradas na matriz P . A aproximação resulta em:

$$v_r = \frac{p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z}{r} + \nu_{v_r} \quad (3.128)$$

$$\begin{aligned} \simeq & \bar{v}_r + \left. \frac{\partial v_r}{\partial p_x} \right|_{\bar{x}} (p_x - \bar{p}_x) + \left. \frac{\partial v_r}{\partial v_x} \right|_{\bar{x}} (v_x - \bar{v}_x) + \left. \frac{\partial v_r}{\partial p_y} \right|_{\bar{x}} (p_y - \bar{p}_y) + \\ & + \left. \frac{\partial v_r}{\partial v_y} \right|_{\bar{x}} (v_y - \bar{v}_y) + \left. \frac{\partial v_r}{\partial p_z} \right|_{\bar{x}} (p_z - \bar{p}_z) + \left. \frac{\partial v_r}{\partial v_z} \right|_{\bar{x}} (v_z - \bar{v}_z) + \nu_{v_r} \end{aligned} \quad (3.129)$$

Perceba que existe a presença de um ruído ν_{v_r} , que, por hipótese, é gaussiano, $\nu_{v_r} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{v_r}^2)$ e independente das outras variáveis envolvidas. Isso ocorre pelo fato de v_r ser calculado a partir das previsões do estado, existindo, portanto um certo erro que, definido pela inclusão do ruído ν_{v_r} . A hipótese de ν_{v_r} possuir uma distribuição gaussiana é adequada, pois as outras observações também possuem ruído com distribuição gaussiana devido às características do próprio radar, o que faz com que a qualidade desta hipótese seja boa. Agora com a aproximação feita na equação (3.128), podemos partir para a determinação dos elementos $s_{i4} = s_{4i}$, $i = 1, 2, 3, 4$. O primeiro deles, $s_{14} = s_{41}$, é dado por:

$$s_{14} = s_{41} = \text{COV}(\tilde{p}_{xm}, \tilde{v}_r) = E[(p_{xm} - \bar{p}_{xm})(v_r - \bar{v}_r)] \quad (3.130)$$

Lembrando que p_{xm} é uma observação polarizada; para despolarizá-la, façamos com que p_{xm} seja dividida pelas constantes de despolarização e, desta forma, deixamos $s_{14} = s_{41}$ em função de p_x e \bar{p}_x :

$$\text{cov}(\tilde{p}_{xm}, \tilde{v}_r) = E \left[\underbrace{(p_{xm})}_{pol.} - \underbrace{\lambda_1 \mu_1 \bar{p}_x}_{pol.} \tilde{v}_r \right] \quad (3.131)$$

$$= E \left[\lambda_1 \mu_1 \underbrace{(p_{xm}/(\lambda_1 \mu_1))}_{despol.} - \underbrace{\bar{p}_x}_{despol.} \tilde{v}_r \right] \quad (3.132)$$

$$= \lambda_1 \mu_1 E [(p_x - \bar{p}_x) \tilde{v}_r] \quad (3.133)$$

Assim, podemos retornar a expressão (3.130) e prosseguir com os cálculos:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\tilde{p}_{xm}, \tilde{v}_r) &= \lambda_1 \mu_1 E [(p_x - \bar{p}_x)(v_r - \bar{v}_r)] \\ &= \lambda_1 \mu_1 E \left[(p_x - \bar{p}_x) \left(\frac{\partial v_r}{\partial p_x} \Big|_{\bar{x}} (p_x - \bar{p}_x) + \frac{\partial v_r}{\partial v_x} \Big|_{\bar{x}} (v_x - \bar{v}_x) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial v_r}{\partial p_y} \Big|_{\bar{x}} (p_y - \bar{p}_y) + \frac{\partial v_r}{\partial v_y} \Big|_{\bar{x}} (v_y - \bar{v}_y) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial v_r}{\partial p_z} \Big|_{\bar{x}} (p_z - \bar{p}_z) + \frac{\partial v_r}{\partial v_z} \Big|_{\bar{x}} (v_z - \bar{v}_z) + \nu_{v_r} \right) \right] \quad (3.134) \end{aligned}$$

Note que as covariâncias cruzadas com o ruído ν_{v_r} na equação (3.134) são todas nulas, podemos simplificá-la e deixá-la em função de alguns dos elementos de P , obtendo o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} s_{14} = s_{41} &= \lambda_1 \mu_1 \left(\frac{\partial v_r}{\partial p_x} \Big|_{\bar{x}} \text{var}(\tilde{p}_x) + \frac{\partial v_r}{\partial v_x} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{p}_x, \tilde{v}_x) + \frac{\partial v_r}{\partial p_y} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{p}_x, \tilde{p}_y) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial v_r}{\partial v_y} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{p}_x, \tilde{v}_y) + \frac{\partial v_r}{\partial p_z} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{p}_x, \tilde{p}_z) + \frac{\partial v_r}{\partial v_z} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{p}_x, \tilde{v}_z) \right) \quad (3.135) \end{aligned}$$

Finalizado o cálculo do termo $s_{14} = s_{41}$, obtido na equação (3.135), os elementos $s_{24} = s_{42}$ e $s_{34} = s_{43}$ são determinados de forma semelhante, inclusive com os cálculos semelhantes aos apresentados nas equações (3.131) a (3.133). Estes termos são dados por:

$$\begin{aligned} s_{24} = s_{42} &= \lambda_1 \mu_1 \left(\frac{\partial v_r}{\partial p_x} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{p}_x, \tilde{p}_y) + \frac{\partial v_r}{\partial v_x} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{p}_y, \tilde{v}_x) + \frac{\partial v_r}{\partial p_y} \Big|_{\bar{x}} \text{var}(\tilde{p}_y) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial v_r}{\partial v_y} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{p}_y, \tilde{v}_y) + \frac{\partial v_r}{\partial p_z} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{p}_y, \tilde{p}_z) + \frac{\partial v_r}{\partial v_z} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{p}_y, \tilde{v}_z) \right) \quad (3.136) \end{aligned}$$

e

$$s_{34} = s_{43} = \mu_1 \left(\frac{\partial v_r}{\partial p_x} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{p}_x, \tilde{p}_z) + \frac{\partial v_r}{\partial v_x} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{p}_z, \tilde{v}_x) + \frac{\partial v_r}{\partial p_y} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{p}_y, \tilde{p}_z) + \right. \\ \left. + \frac{\partial v_r}{\partial v_y} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{p}_z, \tilde{v}_y) + \frac{\partial v_r}{\partial p_z} \Big|_{\bar{x}} \text{var}(\tilde{p}_z) + \frac{\partial v_r}{\partial v_z} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{p}_z, \tilde{v}_z) \right) \quad (3.137)$$

O último elemento, s_{44} , possui uma peculiaridade que acaba facilitando o seu cálculo. Sua expressão é dada por:

$$\text{var}(\tilde{v}_r) = E \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial p_x} \Big|_{\bar{x}} (p_x - \bar{p}_x) + \frac{\partial v_r}{\partial v_x} \Big|_{\bar{x}} (v_x - \bar{v}_x) + \frac{\partial v_r}{\partial p_y} \Big|_{\bar{x}} (p_y - \bar{p}_y) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial v_r}{\partial v_y} \Big|_{\bar{x}} (v_y - \bar{v}_y) + \frac{\partial v_r}{\partial p_z} \Big|_{\bar{x}} (p_z - \bar{p}_z) + \frac{\partial v_r}{\partial v_z} \Big|_{\bar{x}} (v_z - \bar{v}_z) + w_{v_r} \right)^2 \right] \quad (3.138)$$

Note que, se fizermos a multiplicação termo a termo da expressão (3.138), podemos ordená-los de tal forma que fiquem com o aspecto de uma forma quadrática:

$$\text{var}(\tilde{v}_r) = \beta^T P \beta + \sigma_{v_r}^2 \quad (3.139)$$

$$\beta^T = \left[\frac{\partial v_r}{\partial p_x} \quad \frac{\partial v_r}{\partial v_x} \quad \frac{\partial v_r}{\partial p_y} \quad \frac{\partial v_r}{\partial v_y} \quad \frac{\partial v_r}{\partial p_z} \quad \frac{\partial v_r}{\partial v_z} \right] \Big|_{\bar{x}} \quad (3.140)$$

com P dado em (3.102) e $\sigma_{v_r}^2$ é a variância do ruído da velocidade radial. Por fim, restam somente os cálculos das derivadas que fazem parte de cada um dos elementos $s_{i4} = s_{4i}$, $i = 1, 2, 3, 4$ para termos a matriz S completamente definida. As derivadas tem os seguintes resultados:

$$\frac{\partial v_r}{\partial p_x} = \frac{1}{r} \left(v_x - \frac{v_r p_x}{r} \right) \quad (3.141)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial p_y} = \frac{1}{r} \left(v_y - \frac{v_r p_y}{r} \right) \quad (3.142)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial p_z} = \frac{1}{r} \left(v_z - \frac{v_r p_z}{r} \right) \quad (3.143)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial v_x} = \frac{p_x}{r} \quad (3.144)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial v_y} = \frac{p_y}{r} \quad (3.145)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial v_z} = \frac{p_z}{r} \quad (3.146)$$

Cálculo da Matriz de Covariância da Inovação — Modelo CT_{ph}

A diferença principal do cálculo de S para o modelo CT_{ph} está no aumento de dimensão da matriz $P \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$, que passa a incluir informações de ω em seus elementos. Sua estrutura é a seguinte:

$$P = \left[\begin{array}{c|c} P_{CV} & \ell \\ \hline \ell^T & \text{var}(\tilde{\omega}) \end{array} \right] = P^T \quad (3.147)$$

em que P_{CV} é a matriz dada na equação (3.102) e

$$\ell = \left[\text{cov}(\tilde{p}_x, \tilde{\omega}) \quad \text{cov}(\tilde{v}_x, \tilde{\omega}) \quad \text{cov}(\tilde{p}_y, \tilde{\omega}) \quad \text{cov}(\tilde{v}_y, \tilde{\omega}) \quad \text{cov}(\tilde{p}_z, \tilde{\omega}) \quad \text{cov}(\tilde{v}_z, \tilde{\omega}) \right]^T \quad (3.148)$$

Assim, a equação (3.139) que define o elemento s_{44} da matriz S fica da seguinte maneira:

$$\text{var}(\tilde{v}_r) = \beta^T P \beta + \sigma_{v_r}^2 \quad (3.149)$$

$$\beta^T = \left[\frac{\partial v_r}{\partial p_x} \quad \frac{\partial v_r}{\partial v_x} \quad \frac{\partial v_r}{\partial p_y} \quad \frac{\partial v_r}{\partial v_y} \quad \frac{\partial v_r}{\partial p_z} \quad \frac{\partial v_r}{\partial v_z} \quad \frac{\partial v_r}{\partial \omega} \right] \Big|_{\bar{x}} \quad (3.150)$$

em que $\partial v_r / \partial \omega = 0$, pois a velocidade radial não depende de ω .

Cálculo da Matriz de Covariância da Inovação — Modelo CT_{pa}

A diferença principal do cálculo de S para o modelo CT_{pa} está no aumento de dimensão da matriz $P \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$, que desta vez passa a incluir informações de ω_x , ω_y e ω_z em seus elementos. Sua estrutura fica assim:

$$P = \left[\begin{array}{c|c} P_{CV} & L \\ \hline L^T & G \end{array} \right] = P^T \quad (3.151)$$

em que P_{CV} é a matriz dada na equação (3.102), $L \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$ é dada por

$$L = \left[\begin{array}{cccccc} \text{cov}(\tilde{p}_x, \tilde{\omega}_x) & \text{cov}(\tilde{v}_x, \tilde{\omega}_x) & \text{cov}(\tilde{p}_y, \tilde{\omega}_x) & \text{cov}(\tilde{v}_y, \tilde{\omega}_x) & \text{cov}(\tilde{p}_z, \tilde{\omega}_x) & \text{cov}(\tilde{v}_z, \tilde{\omega}_x) \\ \text{cov}(\tilde{p}_x, \tilde{\omega}_y) & \text{cov}(\tilde{v}_x, \tilde{\omega}_y) & \text{cov}(\tilde{p}_y, \tilde{\omega}_y) & \text{cov}(\tilde{v}_y, \tilde{\omega}_y) & \text{cov}(\tilde{p}_z, \tilde{\omega}_y) & \text{cov}(\tilde{v}_z, \tilde{\omega}_y) \\ \text{cov}(\tilde{p}_x, \tilde{\omega}_z) & \text{cov}(\tilde{v}_x, \tilde{\omega}_z) & \text{cov}(\tilde{p}_y, \tilde{\omega}_z) & \text{cov}(\tilde{v}_y, \tilde{\omega}_z) & \text{cov}(\tilde{p}_z, \tilde{\omega}_z) & \text{cov}(\tilde{v}_z, \tilde{\omega}_z) \end{array} \right]^T \quad (3.152)$$

e

$$G = \left[\begin{array}{ccc} \text{var}(\tilde{\omega}_x) & \text{cov}(\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y) & \text{cov}(\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_z) \\ \text{cov}(\tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_x) & \text{var}(\tilde{\omega}_y) & \text{cov}(\tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z) \\ \text{cov}(\tilde{\omega}_z, \tilde{\omega}_x) & \text{cov}(\tilde{\omega}_z, \tilde{\omega}_y) & \text{var}(\tilde{\omega}_z) \end{array} \right] \quad (3.153)$$

Assim, a equação (3.139) que define o elemento s_{44} da matriz S fica da seguinte maneira:

$$\text{var}(\tilde{v}_r) = \beta^T P \beta + \sigma_{v_r}^2 \quad (3.154)$$

$$\beta^T = \left[\begin{array}{cccccccccc} \frac{\partial v_r}{\partial p_x} & \frac{\partial v_r}{\partial v_x} & \frac{\partial v_r}{\partial p_y} & \frac{\partial v_r}{\partial v_y} & \frac{\partial v_r}{\partial p_z} & \frac{\partial v_r}{\partial v_z} & \frac{\partial v_r}{\partial \omega_x} & \frac{\partial v_r}{\partial \omega_y} & \frac{\partial v_r}{\partial \omega_z} \end{array} \right] \Bigg|_{\bar{x}} \quad (3.155)$$

em que $\partial v_r / \partial \omega_x = \partial v_r / \partial \omega_y = \partial v_r / \partial \omega_z = 0$, pois a velocidade radial não depende de ω_x , nem de ω_y , nem de ω_z .

Com isso, chegamos ao final dos cálculos da matriz S , para os três modelos estudados no Capítulo 2. Agora, partiremos para o cálculo do ganho do filtro W da mesma forma empregada para o cálculo de S , isto é, fazendo os cálculos necessários para cada um dos modelos dinâmicos.

Cálculo do Ganho do Filtro — Modelo CV

O ganho do filtro, como foi dito no início da Seção 3.2, é um simples produto de matrizes dado por $W = C_{x,z}^0 S^{-1}$. Como já foi obtida a matriz S , basta determinar $C_{x,z}^0 = \text{cov}(\tilde{x}, \tilde{z})$. A expressão expandida de $C_{x,z}^0$ é:

$$\begin{aligned} C_{x,z}^0 &= E \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} p_x - \bar{p}_x \\ v_x - \bar{v}_x \\ p_y - \bar{p}_y \\ v_y - \bar{v}_y \\ p_z - \bar{p}_z \\ v_z - \bar{v}_z \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \underbrace{(p_{xm} - \bar{p}_{xm})}_{\lambda_1 \mu_1 (p_x - \bar{p}_x)} \quad \underbrace{(p_{ym} - \bar{p}_{ym})}_{\lambda_1 \mu_1 (p_y - \bar{p}_y)} \quad \underbrace{(p_{zm} - \bar{p}_{zm})}_{\mu_1 (p_z - \bar{p}_z)} \quad (v_r - \bar{v}_r) \end{array} \right] \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cccc} \lambda_1 \mu_1 \text{var}(\tilde{p}_x) & \lambda_1 \mu_1 \text{cov}(\tilde{p}_x, \tilde{p}_y) & \mu_1 \text{cov}(\tilde{p}_x, \tilde{p}_z) & \text{cov}(\tilde{p}_x, \tilde{v}_r) \\ \lambda_1 \mu_1 \text{cov}(\tilde{v}_x, \tilde{p}_x) & \lambda_1 \mu_1 \text{cov}(\tilde{v}_x, \tilde{p}_y) & \mu_1 \text{cov}(\tilde{v}_x, \tilde{p}_z) & \text{cov}(\tilde{v}_x, \tilde{v}_r) \\ \lambda_1 \mu_1 \text{cov}(\tilde{p}_y, \tilde{p}_x) & \lambda_1 \mu_1 \text{var}(\tilde{p}_y) & \mu_1 \text{cov}(\tilde{p}_y, \tilde{p}_z) & \text{cov}(\tilde{p}_y, \tilde{v}_r) \\ \lambda_1 \mu_1 \text{cov}(\tilde{v}_y, \tilde{p}_x) & \lambda_1 \mu_1 \text{cov}(\tilde{v}_y, \tilde{p}_y) & \mu_1 \text{cov}(\tilde{v}_y, \tilde{p}_z) & \text{cov}(\tilde{v}_y, \tilde{v}_r) \\ \lambda_1 \mu_1 \text{cov}(\tilde{p}_z, \tilde{p}_x) & \lambda_1 \mu_1 \text{cov}(\tilde{p}_z, \tilde{p}_y) & \mu_1 \text{var}(\tilde{p}_z) & \text{cov}(\tilde{p}_z, \tilde{v}_r) \\ \lambda_1 \mu_1 \text{cov}(\tilde{v}_z, \tilde{p}_x) & \lambda_1 \mu_1 \text{cov}(\tilde{v}_z, \tilde{p}_y) & \mu_1 \text{cov}(\tilde{v}_z, \tilde{p}_z) & \text{cov}(\tilde{v}_z, \tilde{v}_r) \end{array} \right] \quad (3.156) \end{aligned}$$

As três primeiras colunas possuem elementos de variância e covariância que pertencem à matriz P . Portanto, nos resta obter a última coluna de $C_{x,z}^0$, cujos elementos são:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\tilde{p}_x, \tilde{v}_r) &= E[(p_x - \bar{p}_x)(v_r - \bar{v}_r)] \\ &= \frac{\partial v_r}{\partial p_x} \Bigg|_{\bar{x}} \text{var}(\tilde{p}_x) + \frac{\partial v_r}{\partial v_x} \Bigg|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{p}_x, \tilde{v}_x) + \frac{\partial v_r}{\partial p_y} \Bigg|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{p}_x, \tilde{p}_y) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial v_r}{\partial v_y} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{p}_x, \tilde{v}_y) + \frac{\partial v_r}{\partial p_z} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{p}_x, \tilde{p}_z) + \frac{\partial v_r}{\partial v_z} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{p}_x, \tilde{v}_z) \quad (3.157)$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(\tilde{v}_x, \tilde{v}_r) &= E[(v_x - \bar{v}_x)(v_r - \bar{v}_r)] \\ &= \frac{\partial v_r}{\partial p_x} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{v}_x, \tilde{p}_x) + \frac{\partial v_r}{\partial v_x} \Big|_{\bar{x}} \text{var}(\tilde{v}_x) + \frac{\partial v_r}{\partial p_y} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{v}_x, \tilde{p}_y) + \\ &\quad + \frac{\partial v_r}{\partial v_y} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{v}_x, \tilde{v}_y) + \frac{\partial v_r}{\partial p_z} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{v}_x, \tilde{p}_z) + \frac{\partial v_r}{\partial v_z} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{v}_x, \tilde{v}_z) \end{aligned} \quad (3.158)$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(\tilde{p}_y, \tilde{v}_r) &= E[(p_y - \bar{p}_y)(v_r - \bar{v}_r)] \\ &= \frac{\partial v_r}{\partial p_x} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{p}_x, \tilde{p}_y) + \frac{\partial v_r}{\partial v_x} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{p}_y, \tilde{v}_x) + \frac{\partial v_r}{\partial p_y} \Big|_{\bar{x}} \text{var}(\tilde{p}_y) + \\ &\quad + \frac{\partial v_r}{\partial v_y} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{p}_y, \tilde{v}_y) + \frac{\partial v_r}{\partial p_z} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{p}_y, \tilde{p}_z) + \frac{\partial v_r}{\partial v_z} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{p}_y, \tilde{v}_z) \end{aligned} \quad (3.159)$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(\tilde{v}_y, \tilde{v}_r) &= E[(v_y - \bar{v}_y)(v_r - \bar{v}_r)] \\ &= \frac{\partial v_r}{\partial p_x} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{v}_y, \tilde{p}_x) + \frac{\partial v_r}{\partial v_x} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{v}_y, \tilde{v}_x) + \frac{\partial v_r}{\partial p_y} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{v}_y, \tilde{p}_y) + \\ &\quad + \frac{\partial v_r}{\partial v_y} \Big|_{\bar{x}} \text{var}(\tilde{v}_y) + \frac{\partial v_r}{\partial p_z} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{v}_y, \tilde{p}_z) + \frac{\partial v_r}{\partial v_z} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{v}_y, \tilde{v}_z) \end{aligned} \quad (3.160)$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(\tilde{p}_z, \tilde{v}_r) &= E[(p_z - \bar{p}_z)(v_r - \bar{v}_r)] \\ &= \frac{\partial v_r}{\partial p_x} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{p}_x, \tilde{p}_z) + \frac{\partial v_r}{\partial v_x} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{p}_z, \tilde{v}_x) + \frac{\partial v_r}{\partial p_y} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{p}_y, \tilde{p}_z) + \\ &\quad + \frac{\partial v_r}{\partial v_y} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{p}_z, \tilde{v}_y) + \frac{\partial v_r}{\partial p_z} \Big|_{\bar{x}} \text{var}(\tilde{p}_z) + \frac{\partial v_r}{\partial v_z} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{p}_z, \tilde{v}_z) \end{aligned} \quad (3.161)$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(\tilde{v}_z, \tilde{v}_r) &= E[(v_z - \bar{v}_z)(v_r - \bar{v}_r)] \\ &= \frac{\partial v_r}{\partial p_x} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{v}_z, \tilde{p}_x) + \frac{\partial v_r}{\partial v_x} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{v}_z, \tilde{v}_x) + \frac{\partial v_r}{\partial p_y} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{v}_z, \tilde{p}_y) + \\ &\quad + \frac{\partial v_r}{\partial v_y} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{v}_z, \tilde{v}_y) + \frac{\partial v_r}{\partial p_z} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{v}_z, \tilde{p}_z) + \frac{\partial v_r}{\partial v_z} \Big|_{\bar{x}} \text{var}(\tilde{v}_z) \end{aligned} \quad (3.162)$$

Observando a matriz P na equação (3.102) e a estrutura do ganho do filtro, que depende de $C_{x,z}^0$, podemos escrever W como uma função de alguns elementos da matriz $P \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ e da própria P da

seguinte forma:

$$W = C_{x,z}^0 S^{-1} = \left[\lambda_1 \mu_1 p_1 \mid \lambda_1 \mu_1 p_3 \mid \mu_1 p_5 \mid P\beta \right] S^{-1} \quad (3.163)$$

em que $p_i \in \mathbb{R}^6$, $i = 1, 3, 5$ são as colunas 1, 3 e 5 da matriz P e β é o vetor dado em (3.140).

Cálculo do Ganho do Filtro — Modelo CT_{ph}

As diferenças em relação ao ganho do filtro para o modelo CV começam no aumento de dimensão na matriz $C_{x,z}^1$, que fica desta forma:

$$C_{x,z}^1 = E \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} p_x - \bar{p}_x \\ v_x - \bar{v}_x \\ p_y - \bar{p}_y \\ v_y - \bar{v}_y \\ p_z - \bar{p}_z \\ v_z - \bar{v}_z \\ \omega - \bar{\omega} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \underbrace{(p_{xm} - \bar{p}_{xm})}_{\lambda_1 \mu_1 (p_x - \bar{p}_x)} \quad \underbrace{(p_{ym} - \bar{p}_{ym})}_{\lambda_1 \mu_1 (p_y - \bar{p}_y)} \quad \underbrace{(p_{zm} - \bar{p}_{zm})}_{\mu_1 (p_z - \bar{p}_z)} \quad (v_r - \bar{v}_r) \end{array} \right] \end{array} \right] \\ = \left[\frac{C_{x,z}^0}{h} \right] \quad (3.164)$$

em que

$$h = \left[\lambda_1 \mu_1 \text{cov}(\tilde{\omega}, \tilde{p}_x) \quad \lambda_1 \mu_1 \text{cov}(\tilde{\omega}, \tilde{p}_y) \quad \mu_1 \text{cov}(\tilde{\omega}, \tilde{p}_z) \quad \text{cov}(\tilde{\omega}, \tilde{v}_r) \right] \quad (3.165)$$

As covariâncias $\text{cov}(\tilde{\omega}, \tilde{p}_x)$, $\text{cov}(\tilde{\omega}, \tilde{p}_y)$ e $\text{cov}(\tilde{\omega}, \tilde{p}_z)$ vêm diretamente da matriz P na expressão (3.147). Já a expressão de $\text{cov}(\tilde{\omega}, \tilde{v}_r)$ é dada por:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\tilde{\omega}, \tilde{v}_r) &= E[(\omega - \bar{\omega})(v_r - \bar{v}_r)] \\ &= \frac{\partial v_r}{\partial p_x} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{\omega}, \tilde{p}_x) + \frac{\partial v_r}{\partial v_x} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{\omega}, \tilde{v}_x) + \frac{\partial v_r}{\partial p_y} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{\omega}, \tilde{p}_y) + \\ &\quad + \frac{\partial v_r}{\partial v_y} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{\omega}, \tilde{v}_y) + \frac{\partial v_r}{\partial p_z} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{\omega}, \tilde{p}_z) + \frac{\partial v_r}{\partial v_z} \Big|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{\omega}, \tilde{v}_z) \end{aligned} \quad (3.166)$$

Com isso, a expressão de (3.163) também é modificada, resultando em:

$$W = C_{x,z}^1 S^{-1} = \left[\lambda_1 \mu_1 p_1 \mid \lambda_1 \mu_1 p_3 \mid \mu_1 p_5 \mid P\beta \right] S^{-1} \quad (3.167)$$

em que $p_i \in \mathbb{R}^7$, $i = 1, 3, 5$ são, respectivamente as colunas 1, 3 e 5 da matriz P e o vetor β vindo da equação (3.150).

Cálculo do Ganho do Filtro — Modelo CTpa

As diferenças em relação ao ganho do filtro para o modelo CV começam no aumento de dimensão na matriz $C_{x,z}^2$, que fica desta forma:

$$\begin{aligned}
 C_{x,z}^2 &= E \left[\begin{array}{c} p_x - \bar{p}_x \\ v_x - \bar{v}_x \\ p_y - \bar{p}_y \\ v_y - \bar{v}_y \\ p_z - \bar{p}_z \\ v_z - \bar{v}_z \\ \omega_x - \bar{\omega}_x \\ \omega_y - \bar{\omega}_y \\ \omega_z - \bar{\omega}_z \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \underbrace{(p_{xm} - \bar{p}_{xm})}_{\lambda_1 \mu_1 (p_x - \bar{p}_x)} \quad \underbrace{(p_{ym} - \bar{p}_{ym})}_{\lambda_1 \mu_1 (p_y - \bar{p}_y)} \quad \underbrace{(p_{zm} - \bar{p}_{zm})}_{\mu_1 (p_z - \bar{p}_z)} \quad (v_r - \bar{v}_r) \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right] \\
 &= \left[\begin{array}{c} C_{x,z}^0 \\ \wp \end{array} \right] \tag{3.168}
 \end{aligned}$$

em que

$$\wp = \left[\begin{array}{cccc} \lambda_1 \mu_1 \text{cov}(\tilde{\omega}_x, \tilde{p}_x) & \lambda_1 \mu_1 \text{cov}(\tilde{\omega}_x, \tilde{p}_y) & \mu_1 \text{cov}(\tilde{\omega}_x, \tilde{p}_z) & \text{cov}(\tilde{\omega}_x, \tilde{v}_r) \\ \lambda_1 \mu_1 \text{cov}(\tilde{\omega}_y, \tilde{p}_x) & \lambda_1 \mu_1 \text{cov}(\tilde{\omega}_y, \tilde{p}_y) & \mu_1 \text{cov}(\tilde{\omega}_y, \tilde{p}_z) & \text{cov}(\tilde{\omega}_y, \tilde{v}_r) \\ \lambda_1 \mu_1 \text{cov}(\tilde{\omega}_z, \tilde{p}_x) & \lambda_1 \mu_1 \text{cov}(\tilde{\omega}_z, \tilde{p}_y) & \mu_1 \text{cov}(\tilde{\omega}_z, \tilde{p}_z) & \text{cov}(\tilde{\omega}_z, \tilde{v}_r) \end{array} \right] \tag{3.169}$$

As covariâncias $\text{cov}(\tilde{\omega}_n, \tilde{p}_n)$, $n = x, y, z$ vêm diretamente da matriz P encontrada na expressão (3.151). Já as expressões de $\text{cov}(\tilde{\omega}_n, \tilde{v}_r)$, $n = x, y, z$ são definidas pela relação abaixo:

$$\begin{aligned}
 \text{cov}(\tilde{\omega}_n, \tilde{v}_r) &= E[(\omega_n - \bar{\omega}_n)(v_r - \bar{v}_r)] \\
 &= \left. \frac{\partial v_r}{\partial p_x} \right|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{\omega}_n, \tilde{p}_x) + \left. \frac{\partial v_r}{\partial v_x} \right|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{\omega}_n, \tilde{v}_x) + \left. \frac{\partial v_r}{\partial p_y} \right|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{\omega}_n, \tilde{p}_y) + \\
 &\quad + \left. \frac{\partial v_r}{\partial v_y} \right|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{\omega}_n, \tilde{v}_y) + \left. \frac{\partial v_r}{\partial p_z} \right|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{\omega}_n, \tilde{p}_z) + \left. \frac{\partial v_r}{\partial v_z} \right|_{\bar{x}} \text{cov}(\tilde{\omega}_n, \tilde{v}_z) \tag{3.170}
 \end{aligned}$$

Com isso, a expressão de (3.163) novamente é modificada, resultando em:

$$W = C_{x,z}^2 S^{-1} = \left[\lambda_1 \mu_1 p_1 \mid \lambda_1 \mu_1 p_3 \mid \mu_1 p_5 \mid P\beta \right] S^{-1} \tag{3.171}$$

em que $p_i \in \mathbb{R}^9$, $i = 1, 3, 5$ são, respectivamente as colunas 1, 3 e 5 da matriz P e o vetor β vindo da equação (3.155).

3.2.2 Equações de Filtragem — BLUE

Antes de iniciarmos esta seção, uma pequena observação: a partir de agora, retornaremos às notações originais utilizadas antes dos cálculos de $S_{k+1|k}$ e W_{k+1} , isto é, retornando com os sub-índices $(\cdot)_{k+1|k}$. O filtro BLUE utilizado neste trabalho, como foi dito no início da Seção 3.2, foi o filtro BLUE estendido, ou seja, no caso da dinâmica também ser não-linear, assim como as observações, basta utilizar as linearizações através de matrizes jacobianas. No entanto, há uma diferença das equações das etapas de previsão e de atualização do filtro BLUE em relação as do EKF, além dos cálculos de $\hat{z}_{k+1|k}$, $S_{k+1|k}$ e W_{k+1} , que é a ausência da obtenção da matriz jacobiana \mathcal{H}_{k+1} , pois não há a necessidade de sua utilização nas equações de filtragem. Além disso, as relações (3.5)–(3.7), assim como no EKF, devem ser válidas.

Desta forma, considerando $\hat{x}_{0|0}$ e $P_{0|0}$ conhecidos, as equações referentes às etapas de previsão e atualização do filtro BLUE são:

Equações de previsão:

$$\hat{x}_{k+1|k} = f_k(\hat{x}_{k|k}) \quad (3.172)$$

$$P_{k+1|k} = \mathcal{A}_k P_{k|k} \mathcal{A}_k^T + F Q F^T \quad (3.173)$$

$$S_{k+1|k} \rightarrow \text{vide Seção 3.2.1, eq. (3.103)} \quad (3.174)$$

Equações de atualização:

$$W_{k+1} \rightarrow \text{vide Seção 3.2.1, eqs. (3.163), (3.167) ou (3.171)} \quad (3.175)$$

$$\hat{z}_{k+1|k} = \left[\lambda_1 \mu_1 \hat{p}_{x_{k+1|k}} \quad \lambda_1 \mu_1 \hat{p}_{y_{k+1|k}} \quad \mu_1 \hat{p}_{z_{k+1|k}} \quad \hat{v}_{r_{k+1|k}} \right]^T \quad (3.176)$$

$$\tilde{z}_{k+1|k} = z_{k+1} - \hat{z}_{k+1|k} \quad (3.177)$$

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + W_{k+1} \tilde{z}_{k+1|k} \quad (3.178)$$

$$P_{k+1|k+1} = P_{k+1|k} - W_{k+1} S_{k+1|k} W_{k+1}^T \quad (3.179)$$

Perceba que a equação (3.179) é diferente da equação (3.23) apresentada no EKF, já que não há mais o cálculo de \mathcal{H}_{k+1} , necessitando, desta forma, o cálculo usual de $P_{k+1|k+1}$. Note também a diferença no cálculo da inovação $\tilde{z}_{k+1|k}$ em relação àquela calculada no EKF. Aqui, a diferença entre informações polarizadas z_{k+1} e $\hat{z}_{k+1|k}$ elimina a polarização, fazendo com que a estimativa em (3.178) seja despolarizada.

3.2.3 Fluxograma para um Ciclo de Filtro BLUE

Na Figura 3.2, está representada de forma simplificada um ciclo do filtro BLUE, do instante de tempo k para $k + 1$. Note que, durante a execução das equações de previsão e atualização do filtro BLUE, assim como no EKF, existem três fluxos principais, sendo eles a evolução do sistema, a estimativa do estado e o cálculo da matriz de covariância do erro da estimativa do estado. Perceba novamente as interações entre os blocos pertencentes a cada um destes fluxos.

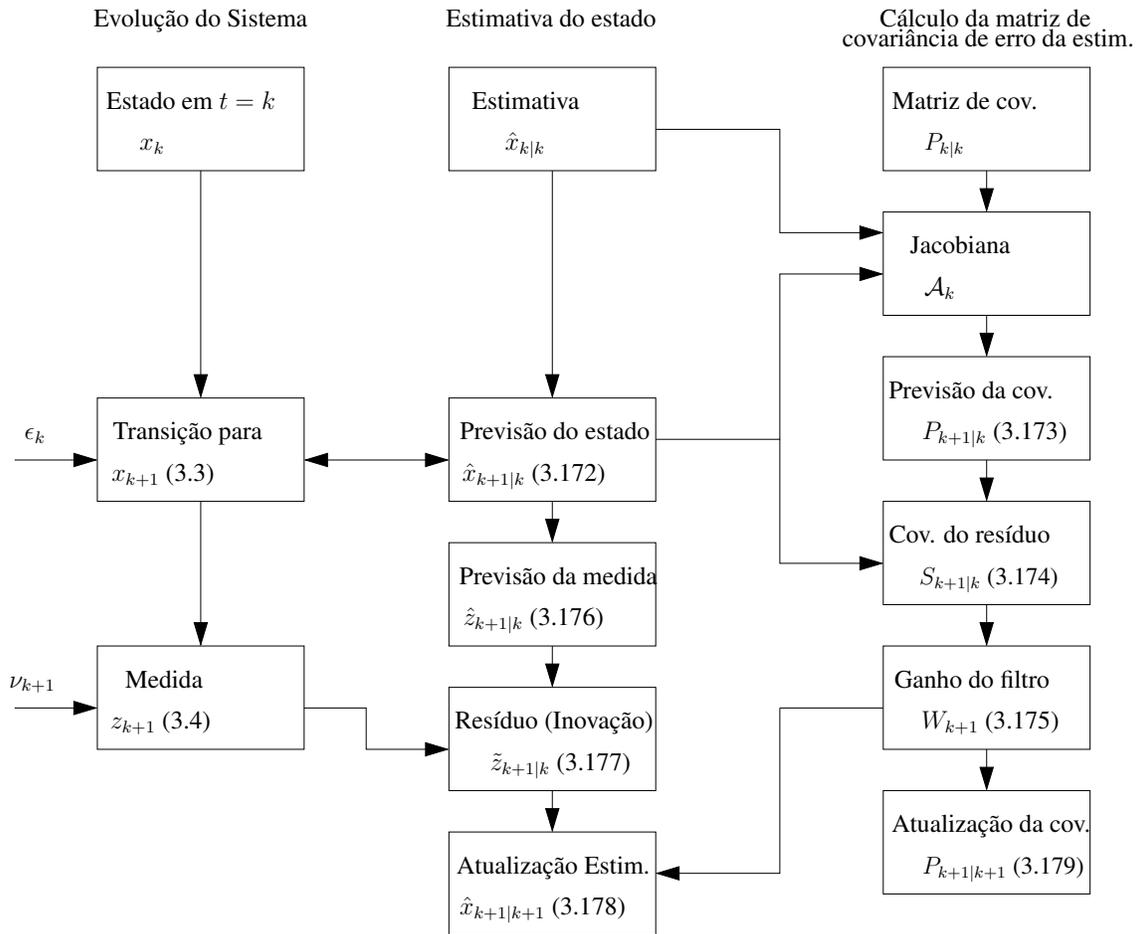


Fig. 3.2: Fluxograma básico de um ciclo do filtro BLUE (Os números em cada bloco referem-se às respectivas equações).

Assim como para o EKF, avaliamos o custo computacional do filtro BLUE através do número de somas e produtos envolvidos no processo de filtragem, durante um ciclo. Desta forma, chegamos à seguinte relação:

$$\text{Nop}_B = [(n_x - 1)s + n_x m] (2n_x^2 + n_x) +$$

$$\begin{aligned} & [(n_z - 1)s + n_z m] (n_z^2 + 3n_x n_z + 2n_x) + \\ & 2n_\epsilon n_x [(n_\epsilon - 1)s + n_\epsilon m] + (n_x + 1)^2 s + n_z m \end{aligned} \quad (3.180)$$

O filtro BLUE, como se pode ver, possui semelhanças ao filtro EKF em relação a quais valores devem ser utilizados nas equações de filtragem, como matriz de covariância da inovação, ganho de filtro etc., porém o método para se calcular alguns destes valores é o que diferencia estes dois filtros. Também foi visto as diferenças entre os meios de se aplicar os métodos de despolarização, porém ambos realizam estas despolarizações de forma correta; mesmo sendo no início (EKF) ou durante a filtragem (filtro BLUE), as despolarizações são feitas adequadamente.

Assim, concluímos o estudo dos dois filtros abordados neste trabalho, detalhando de forma clara o comportamento de cada um destes filtros, mostrando suas semelhanças e diferenças. Nos Capítulos 4 e 5 a seguir, apresentaremos as duas técnicas que utilizam estes filtros estudados, que têm como objetivo obter uma estimativa mais precisa ao final de sua aplicação.

Síntese do Capítulo

Este capítulo sobre filtros estocásticos recursivos trouxe informações de dois filtros bastante utilizados para resolver problemas de rastreamento: o EKF e o filtro BLUE. O primeiro deles lida muito bem com os casos em que o modelo matemático possui características não-lineares. No caso do filtro BLUE, ele é originalmente elaborado para tratar de problemas com modelos dinâmicos lineares e com modelos de observações com conversões de coordenadas esféricas para cartesianas. Este último modelo é perfeito para o problema que estamos tratando, pois este tipo de conversão é inevitável, dado que as observações de um radar será em coordenadas esféricas e as equações de filtragem tratam as variáveis dinâmicas em coordenadas cartesianas. Como alguns dos modelos dinâmicos utilizados neste trabalho possuem características não-lineares, o filtro BLUE foi estendido para o caso que o modelo dinâmico possua não-linearidades, bastando linearizá-lo assim como feito no EKF.

Uma das diferenças existentes entre estes dois filtros está no cálculo da jacobiana \mathcal{H}_{k+1} da função de observação, sendo que no filtro BLUE, não há a necessidade de seu cálculo, diferentemente do EKF, que necessita desta matriz em suas equações de filtragem. Outra diferença marcante do filtro BLUE em relação ao EKF, está nos cálculos das matrizes $S_{k+1|k}$ e W_{k+1} , em que os elementos destas matrizes são calculadas separadamente, com cálculos específicos. Estas matrizes são dependentes do estado (ou de sua estimativa), ao contrário do EKF usual. Com isto, ele compensa parcialmente os efeitos não-lineares induzidas pela conversão de observações. Além disso, a forma característica da matriz $S_{k+1|k}$ no filtro BLUE é função da variável alcance (r), que por sua vez é função da previsão das posição do alvo, fazendo com que esta matriz tenha variações de acordo com mudanças de alcance o alvo que está sendo rastreado, tendo uma precisão maior, isto é, maior a distância do radar

(alcance), maior o erro e vice-versa.

O problema de polarização das observações, citado no capítulo passado, é tratado por cada um dos filtros de modos diferentes — principalmente nos cálculos da previsão das observações $\hat{z}_{k+1|k}$, da matriz de covariância da inovação $S_{k+1|k}$ e do ganho do filtro W_{k+1} — mas ambos conseguindo sanar o problema da polarização das observações.

Capítulo 4

Modelos Múltiplos Interagentes

Em um cenário de rastreamento de alvos manobrantés no espaço, existem dois desafios a serem vencidos: um deles é a não-linearidade dos modelos, necessitando de filtros estocásticos recursivos que lidem de forma adequada com as não-linearidades destes modelos, tratados nos Capítulos 2 e 3; o outro é a incerteza que envolve a escolha do modelo dinâmico que esteja representando melhor o movimento ou manobra que o alvo está executando neste instante, ou seja, o padrão de comportamento do alvo, chamado de modo. Uma técnica muito utilizada para resolver este tipo de desafio é a técnica de Modelos Múltiplos Interagentes (IMM), estudado em [3]. A abordagem por IMM é geralmente considerada uma das principais dentro do rastreamento de alvos móveis, sob o ponto de vista de incertezas nos movimentos dos alvos. Neste trabalho, a utilização da técnica de IMM é baseada em filtros estocásticos recursivos, mas também é possível lidar com esta técnica baseado em lógica nebulosa (*fuzzy*), como é estudado em [21].

Uma das ideias que está no IMM é o tratamento da dificuldade encontrada devido às incertezas no modelo a ser aplicado através da utilização simultânea de mais de um modelo dinâmico para o rastreamento. Para isso, é considerado um conjunto \mathbb{M} de possíveis modelos dinâmicos que possam representar a dinâmica do alvo. Definido \mathbb{M} , deve-se estruturar um banco de filtros estocásticos recursivos, cada um destes baseado em um único modelo dinâmico que pertença ao conjunto \mathbb{M} e aplicar as equações de filtragem de cada um deles para o seu respectivo modelo. Por fim, a estimativa final é construída a partir das estimativas de cada dos filtros. Além disso, o destaque do IMM está justamente na interação destes filtros, através de combinações, que podem ser de suas estimativas atuais para definir a estimativa do estado do alvo naquele instante, como também podem ser de combinações de estimativas do instante de tempo anterior para servir de informação para previsão de cada um dos filtros.

Para descrever a incerteza na escolha do modelo, é utilizado o método de saltos markovianos para induzir os chaveamentos entre os filtros que compõem o banco. O estado de Markov no instante de

tempo k , denotado por θ_k , define qual o modelo matemático a ser adotado no instante de tempo k .

Nas próximas seções, será descrito o funcionamento da técnica IMM em conjunto com o modelamento dos chaveamentos através de saltos markovianos, as equações que regem esta técnica, além de alguns diagramas que ajudam a entendê-la.

4.1 Chaveamento Modelado Por Saltos Markovianos

Suponha que existam $|\mathbb{M}| = M \in \mathbb{R}$ modelos matemáticos possíveis dentro do conjunto $\mathbb{M} = \{m^1, m^2, \dots, m^i\}$ que possam representar o comportamento de um alvo manobrando no espaço. Também vamos adotar, por hipótese, que o modelo matemático que representa o movimento do alvo no instante de tempo $k + 1$ só depende exclusivamente do modelo adotado no instante de tempo k . Desta forma, podemos definir a transição entre estes dois modelos sob o aspecto probabilístico da seguinte maneira [22, p. 462-468]:

$$Pr \{m_{k+1} = j | m_k = i\} = Pr \{m_{k+1}^j | m_k^i\} = \mathbf{p}_{ij} \quad (4.1)$$

em que \mathbf{p}_{ij} é a probabilidade de transição para que o modelo m_j seja adotado no instante de tempo $k + 1$ dado que o modelo matemático utilizado no instante anterior k foi m_i . Agora, vamos supor que haja M modelos ao todo, que possam englobar de forma satisfatória os modelos matemáticos dos comportamentos de movimentos dos alvos. Desta forma, podemos construir a matriz de transição de probabilidades de um passo, definido por [22, p. 462-468]:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{11} & \cdots & \mathbf{p}_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{p}_{nM} & \cdots & \mathbf{p}_{MM} \end{bmatrix} = [\mathbf{p}_{ij}]_{M \times M} \quad (4.2)$$

em que $\mathbb{P} \in \mathbb{R}^{M \times M}$ e a somatória dos elementos de qualquer linha i da matriz \mathbb{P} deve ser unitária, isto é, $\sum_j \mathbf{p}_{ij} = 1$.

Considere que exista um banco de filtros estocásticos recursivos com M filtros. Cada um deles será responsável por realizar o processo de filtragem considerando um dos modelos $m_i \in \mathbb{M}$. Podemos modelar a transição de um modelo (filtro) para outro através de uma matriz \mathbb{P} . A Figura 4.1 mostra as possíveis sequências de chaveamentos entre três modelos (filtros) para quatro instantes de tempo.

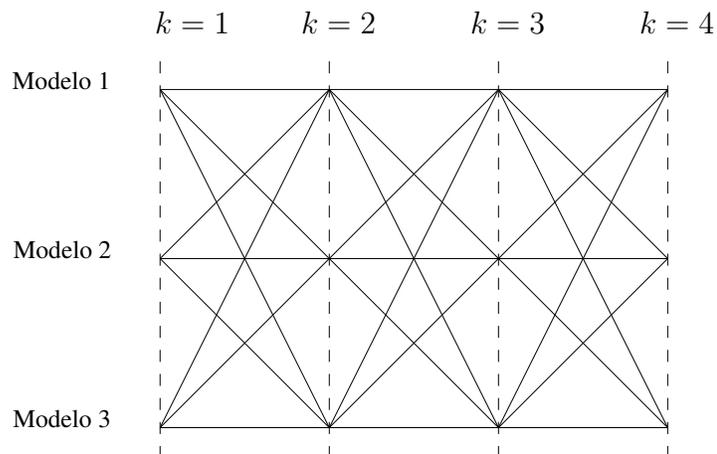


Fig. 4.1: Possíveis sequências de chaveamentos entre modelos.

4.2 A Técnica de IMM

Na técnica de IMM, a estimativa do vetor de estados x_k é computada através de combinações das estimativas resultantes de $i = 1, \dots, M$ filtros. Para obter esta estimativa, são necessários executar quatro passos fundamentais que constituem os passos do IMM. O primeiro deles trata da reinicialização condicionada por modelo que, através de misturas de estimativas anteriores resultantes de cada um dos filtros, calcula-se a entrada, ou condição inicial misturada, destes mesmos filtros para a obtenção da estimativa do instante de tempo seguinte. A segunda etapa consiste em aplicar as equações de filtragem de cada um dos M filtros que compõem o banco, vistos no Capítulo 3. Em seguida, executa-se a terceira etapa, que consiste em atualizar a probabilidade de modo, isto é, atualizar as probabilidades de ocupação de cada um dos modos, utilizando-se de informações dos filtros, como a verossimilhança de cada um deles. Por fim, temos a quarta e última etapa, que tem a finalidade de realizar o cálculo da estimativa e da matriz de covariância globais daquele instante de tempo.

A seguir, nas próximas seções, serão detalhadas cada uma destas quatro etapas citadas, descrevendo as equações e expressões que regem cada uma delas.

4.2.1 Reinicialização Condicionada por Modelo

A reinicialização condicionada por modelo tem a finalidade de obter, através de uma interação ou mistura, uma entrada baseada em cada uma das estimativas e matrizes de covariância vindas dos M filtros do banco. A reinicialização da estimativa é dada para o j -ésimo filtro, por definição:

$$\bar{x}_{k|k}^{(j)} = E [x_k | z^k, m_{k+1}^j] \quad (4.3)$$

Utilizando o teorema de valores esperados iterados no lado direito da expressão (4.3), temos:

$$E [x_k | z^k, m_{k+1}^j] = E [E [x_k | z^k, m_k^i, m_{k+1}^j] | z^k, m_{k+1}^j] \quad (4.4)$$

Podemos dizer que x_k é independente de m_{k+1}^j , já que o modelo correspondente a x_k é m_k^i e, portanto, podemos expandir o lado direito de (4.4) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} E [E [x_k | z^k, m_k^i, m_{k+1}^j] | z^k, m_{k+1}^j] &= E [E [x_k | z^k, m_k^i] | z^k, m_{k+1}^j] \\ &= \sum_{i=1}^M E [x_k | z^k, m_k^i] Pr \{m_k^i | z^k, m_{k+1}^j\} \\ \bar{x}_{k|k}^{(j)} &= \sum_{i=1}^M \hat{x}_{k|k}^{(i)} \mu_k^{i|j} \end{aligned} \quad (4.5)$$

em que $\hat{x}_{k|k}^{(i)}$ é a estimativa do i -ésimo filtro, no instante de tempo k , e $\mu_k^{i|j}$ são as probabilidades do modo correto ser i dado que a posterior será j e z^k conhecido. O cálculo de $\mu_k^{i|j}$ é dado pelos seguintes passos, utilizando-se da fórmula de Bayes em conjunto com o teorema da probabilidade total:

$$\begin{aligned} \mu_k^{i|j} = Pr \{m_k^i | m_{k+1}^j, z^k\} &= \frac{Pr \{m_{k+1}^j | m_k^i, z^k\} Pr \{m_k^i | z^k\}}{\sum_{i=1}^M Pr \{m_{k+1}^j | m_k^i, z^k\} Pr \{m_k^i | z^k\}} \\ &= \frac{\mathfrak{p}_{ij} \mu_k^i}{\sum_{i=1}^M \mathfrak{p}_{ij} \mu_k^i} \end{aligned} \quad (4.6)$$

em que μ_k^i são as probabilidades do modo correto ser i dado z^k . Agora, para completar a etapa de reinicialização, basta calcular a mistura das matrizes de covariância. Esta mistura fica da seguinte forma, para o j -ésimo filtro:

$$\bar{P}_{k|k}^{(j)} = \sum_{i=1}^M \mu_k^{i|j} \left[P_{k|k}^{(i)} + \left(\hat{x}_{k|k}^{(i)} - \bar{x}_{k|k}^{(j)} \right) \left(\hat{x}_{k|k}^{(i)} - \bar{x}_{k|k}^{(j)} \right)^T \right] \quad (4.7)$$

Definidas a reinicialização para um filtro j , agora devemos partir para o passo de filtragem, que envolve a execução das equações dos M filtros estocásticos recursivos.

4.2.2 Filtragem Condicionada por Modelo

Conhecidos $\bar{x}_{k|k}^{(j)}$ e $\bar{P}_{k|k}^{(j)}$ em (4.5) e (4.7), respectivamente, basta aplicar esta reinicialização em um filtro j . Para o EKF, as equações de filtragem passam a ter o seguinte formato:

Equações de previsão:

$$\hat{x}_{k+1|k}^{(j)} = f_k \left(\bar{x}_{k|k}^{(j)} \right) \quad (4.8)$$

$$P_{k+1|k}^{(j)} = \mathcal{A}_k^{(j)} \bar{P}_{k|k}^{(j)} \left(\mathcal{A}_k^{(j)} \right)^T + F^{(j)} Q^{(j)} \left(F^{(j)} \right)^T \quad (4.9)$$

$$S_{k+1|k}^{(j)} = \mathcal{H}_{k+1}^{(j)} P_{k+1|k}^{(j)} \left(\mathcal{H}_{k+1}^{(j)} \right)^T + R_k^{(j)} \quad (4.10)$$

Equações de atualização:

$$W_{k+1}^{(j)} = P_{k+1|k}^{(j)} \left(\mathcal{H}_{k+1}^{(j)} \right)^T \left(S_{k+1|k}^{(j)} \right)^{-1} \quad (4.11)$$

$$\hat{z}_{k+1|k}^{(j)} = h_k \left(\hat{x}_{k+1|k}^{(j)} \right) = \left[\hat{p}_{x \ k+1|k}^{(j)} \ \hat{p}_{y \ k+1|k}^{(j)} \ \hat{p}_{z \ k+1|k}^{(j)} \ \hat{v}_{r \ k+1|k}^{(j)} \right]^T \quad (4.12)$$

$$\tilde{z}_{k+1|k}^{(j)} = z_{k+1} - \hat{z}_{k+1|k}^{(j)} \quad (4.13)$$

$$\hat{x}_{k+1|k+1}^{(j)} = \hat{x}_{k+1|k}^{(j)} + W_{k+1}^{(j)} \tilde{z}_{k+1|k}^{(j)} \quad (4.14)$$

$$P_{k+1|k+1}^{(j)} = \left(I_n - W_{k+1}^{(j)} \mathcal{H}_{k+1}^{(j)} \right) P_{k+1|k}^{(j)} \left(I_n - W_{k+1}^{(j)} \mathcal{H}_{k+1}^{(j)} \right)^T + W_{k+1}^{(j)} R_k^{(j)} \left(W_{k+1}^{(j)} \right)^T \quad (4.15)$$

Para o filtro BLUE, as etapas de previsão e atualização ficam da seguinte forma:

Equações de previsão:

$$\hat{x}_{k+1|k}^{(j)} = f_k \left(\bar{x}_{k|k}^{(j)} \right) \quad (4.16)$$

$$P_{k+1|k}^{(j)} = \mathcal{A}_k^{(j)} \bar{P}_{k|k}^{(j)} \left(\mathcal{A}_k^{(j)} \right)^T + F^{(j)} Q^{(j)} \left(F^{(j)} \right)^T \quad (4.17)$$

$$S_{k+1|k}^{(j)} \rightarrow \text{vide Seção 3.2.1, eq. (3.103)} \quad (4.18)$$

Equações de atualização:

$$W_{k+1}^{(j)} \rightarrow \text{vide Seção 3.2.1, eqs. (3.163), (3.167) ou (3.171)} \quad (4.19)$$

$$\hat{z}_{k+1|k}^{(j)} = \left[\lambda_1 \mu_1 \hat{p}_{x \ k+1|k}^{(j)} \ \lambda_1 \mu_1 \hat{p}_{y \ k+1|k}^{(j)} \ \mu_1 \hat{p}_{z \ k+1|k}^{(j)} \ \hat{v}_{r \ k+1|k}^{(j)} \right]^T \quad (4.20)$$

$$\tilde{z}_{k+1|k}^{(j)} = z_{k+1} - \hat{z}_{k+1|k}^{(j)} \quad (4.21)$$

$$\hat{x}_{k+1|k+1}^{(j)} = \hat{x}_{k+1|k}^{(j)} + W_{k+1}^{(j)} \tilde{z}_{k+1|k}^{(j)} \quad (4.22)$$

$$P_{k+1|k+1}^{(j)} = P_{k+1|k}^{(j)} - W_{k+1}^{(j)} S_{k+1|k}^{(j)} \left(W_{k+1}^{(j)} \right)^T \quad (4.23)$$

As diferenças para os filtros vistos anteriormente estão nas reinicializações $\bar{x}_{k|k}^{(j)}$ e $\bar{P}_{k|k}^{(j)}$ introduzidas nas equações de previsão e nos índices j , indicando o j -ésimo filtro do banco, além do fato de que estes filtros funcionam como um banco de filtros. Além destas equações acima, é necessário obtermos a função de verossimilhança $\Lambda_{k+1}^{(j)}$, que é calculada diretamente de valores que são determinados nas equações de filtragem, a fim de realizar a atualização da probabilidade do modo, o próximo passo do ciclo do IMM. Esta verossimilhança é uma função densidade de probabilidade da inovação $\tilde{z}_{k+1|k}^{(j)}$, por hipótese, gaussiana, com média nula e matriz de covariância $S_{k+1|k}^{(j)}$, ou seja,

$$\Lambda_{k+1}^{(j)} = g_{\mathcal{N}, \tilde{z}_{k+1|k}^{(j)}}(0, S_{k+1|k}^{(j)}) \quad (4.24)$$

Calculada a função de verossimilhança da inovação, podemos avançar mais uma etapa, que trata do cálculo da atualização da probabilidade do modo.

4.2.3 Atualização da Probabilidade do Modo

Suponha um alvo movimentando-se em velocidade constante durante um tempo longo; as chances deste alvo continuar em velocidade constante no próximo instante de tempo aumenta de forma considerável, e de realizar uma curva diminuem razoavelmente. É exatamente isto que traduz a atualização da probabilidade do modo ocorrido ser correto, aumentando ou diminuindo as probabilidades de ocorrerem certos movimentos, sabendo que ele está em um determinado movimento até o instante atual.

A atualização é, por definição:

$$\mu_{k+1}^{(j)} = Pr \{m_{k+1}^j | z^{k+1}\} \quad (4.25)$$

Separando z^{k+1} em z^k e z_{k+1} , podemos expandir a expressão (4.25) utilizando a fórmula de Bayes e o teorema da probabilidade total:

$$\begin{aligned} \mu_{k+1}^{(j)} &= Pr \{m_{k+1}^j | z^{k+1}\} = Pr \{m_{k+1}^j | z_{k+1}, z^k\} \\ &= \frac{p(z_{k+1} | m_{k+1}^j, z^k) Pr \{m_{k+1}^j | z^k\}}{\sum_{j=1}^M p(z_{k+1} | m_{k+1}^j, z^k) Pr \{m_{k+1}^j | z^k\}} \\ &= \frac{p(z_{k+1} | m_{k+1}^j, z^k) \sum_{i=1}^M Pr \{m_{k+1}^j | m_k^i, z^k\} Pr \{m_k^i | z^k\}}{\sum_{j=1}^M p(z_{k+1} | m_{k+1}^j, z^k) \sum_{i=1}^M Pr \{m_{k+1}^j | m_k^i, z^k\} Pr \{m_k^i | z^k\}} \\ &= \frac{\Lambda_{k+1}^{(j)} \sum_{i=1}^M \mathbf{p}_{ij} \mu_k^i}{\sum_{j=1}^M \Lambda_{k+1}^{(j)} \sum_{i=1}^M \mathbf{p}_{ij} \mu_k^i} \end{aligned} \quad (4.26)$$

4.2.4 Estimativa / Covariância Global

Na última etapa da técnica IMM, obtém-se a estimativa global e a matriz de covariância global. A forma de obtenção destas é bem simples, bastando fazer uma combinação ponderada das estimativas e covariâncias resultantes de cada um dos M filtros, utilizando como “pesos” as probabilidades atualizadas, dada pela equação (4.26). Assim, as estimativas e matrizes de covariâncias globais são:

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \sum_{j=1}^M \hat{x}_{k+1|k+1}^{(j)} \mu_{k+1}^{(j)} \quad (4.27)$$

$$P_{k+1|k+1} = \sum_{j=1}^M \mu_{k+1}^{(j)} \left\{ P_{k+1|k+1}^{(j)} + \left[\hat{x}_{k+1|k+1}^{(j)} - \hat{x}_{k+1|k+1} \right] \left[\hat{x}_{k+1|k+1}^{(j)} - \hat{x}_{k+1|k+1} \right]^T \right\} \quad (4.28)$$

4.2.5 Estrutura da Técnica IMM

Na Figura 4.2, está estruturado um ciclo de IMM, do instante de tempo k para $k + 1$, para $M = 3$ filtros. Cada uma das quatro etapas fundamentais da técnica de IMM estão destacadas nesta figura.

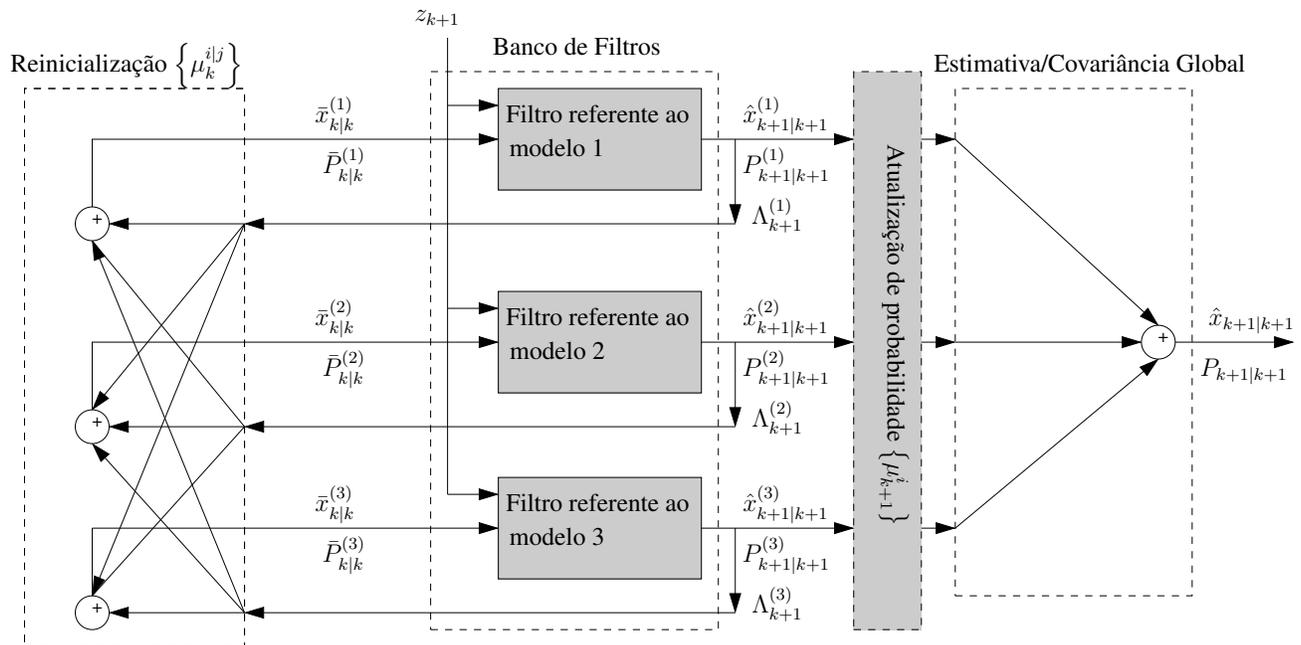


Fig. 4.2: Exemplo de um ciclo de IMM com um banco de três filtros.

Para avaliar o custo computacional de um ciclo de IMM, vamos considerar M o número de filtros que fazem parte do banco de filtros, s como sendo uma operação de soma e m como sendo uma

operação de multiplicação. Assim, obtemos a seguinte relação:

$$\text{Nop}_{\text{IMM}} = M [2n_x (s + n_x(m + 2s)) + \text{Nop}_{\text{K/B}}] \quad (4.29)$$

em que $\text{Nop}_{\text{K/B}}$ é o número de operações do EKF ou do filtro BLUE, dadas nas equações (3.87) e (3.180), respectivamente, dependendo do tipo de filtro que está sendo utilizado. Esta relação dada em (4.29) será útil na comparação do custo computacional entre a técnica de IMM e da técnica de PF.

4.3 Três Diferentes Bancos de Filtros

Baseado no que foi estudado sobre a técnica de IMM, foram propostos três bancos de filtros, cada um elaborado baseado em uma ideia diferente. O primeiro banco é simplesmente uma combinação de três filtros, em que cada um deles é responsável por um dos modelos apresentados no Capítulo 2. O segundo banco é composto por oito filtros, que representam os modelos CV e CT_{ph} , diferenciados entre si por rotações de um plano com inclinação fixa para um plano paralelo ao plano xy . E, por último, o terceiro banco é formado por cinco filtros, que também representam os modelos CV e CT_{ph} , só que estes são distintos pelo ângulo de inclinação do alvo em relação ao plano xy ; este banco utiliza-se do alinhamento do vetor velocidade para que o alvo fique paralelo ao plano xy . A estrutura de cada um destes três bancos de filtros propostos estão descritos nas seções a seguir.

4.3.1 Banco de Filtros Baseados nos Modelos CV, CT_{ph} e CT_{pa} — IMM_1

O primeiro banco de filtros, nomeado IMM_1 , é composto por três filtros: o filtro $j = 1$ corresponde ao modelo CV, o filtro $j = 2$ corresponde ao modelo CT_{ph} e o filtro $j = 3$ é responsável pelo modelo CT_{pa} . Este banco é o que utiliza-se do menor número de filtros dentre aqueles propostos neste trabalho. Em contrapartida ao número reduzido de filtros, o filtro que utiliza o modelo CT_{pa} deve utilizar as matrizes dinâmicas e de observações deste modelo, que possuem estruturas mais elaboradas e complexas. Mesmo assim, a tendência é que o desempenho deste banco IMM_1 diante de várias trajetórias seja satisfatório, pois os três modelos englobam um número muito elevado de possíveis trajetórias realizadas por alvos no espaço e, conseqüentemente, resultem em estimativas de boa qualidade.

4.3.2 Banco de Filtros com Rotações Espaciais — IMM_2

A ideia deste banco IMM_2 está em utilizar somente modelos mais simples como os modelos CV e CT_{ph} para realizar filtragens de boa qualidade. O problema surge quando existem trajetórias em

curva inclinadas, contidas em planos, em relação ao plano xy , para os quais não teríamos o modelo correto a ser utilizado pelo filtro. A solução deste problema foi encontrada utilizando conceitos de rotações no espaço: conhecido o modelo matemático de CT_{ph} e considerando que uma trajetória localizada em um plano horizontal é o resultado de uma rotação desta mesma trajetória, só que inclinada em relação ao plano xy , podemos encontrar o modelo matemático que descreve esta trajetória inclinada.

Para fazer estas rotações, é necessário definir os ângulos de rotação em torno dos eixos coordenados x , y e z : θ_x é o ângulo de rotação em torno da direção do eixo x , θ_y é o ângulo de rotação em torno da direção do eixo y e θ_z é o ângulo de rotação em torno da direção do eixo z . Com estes três ângulos, podemos definir as matrizes de rotação tridimensional que serão aplicadas futuramente sobre o vetor de estados x_k da trajetória inclinada. Estas matrizes são $Rot_x(\theta_x)$, $Rot_y(\theta_y)$, $Rot_z(\theta_z) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$, que foram expandidas das duas dimensões, apresentadas em [23], para seis dimensões, referentes às três coordenadas de posição e às três coordenadas de velocidade. Estas matrizes ficam da seguinte forma:

$$Rot_x(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta_x) & 0 & -\text{sen}(\theta_x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta_x) & 0 & -\text{sen}(\theta_x) \\ 0 & 0 & \text{sen}(\theta_x) & 0 & \cos(\theta_x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}(\theta_x) & 0 & \cos(\theta_x) \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$Rot_y(\theta_y) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_y) & 0 & 0 & 0 & \text{sen}(\theta_y) & 0 \\ 0 & \cos(\theta_y) & 0 & 0 & 0 & \text{sen}(\theta_y) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\theta_y) & 0 & 0 & 0 & \cos(\theta_y) & 0 \\ 0 & -\text{sen}(\theta_y) & 0 & 0 & 0 & \cos(\theta_y) \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$Rot_z(\theta_z) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_z) & 0 & -\text{sen}(\theta_z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_z) & 0 & -\text{sen}(\theta_z) & 0 & 0 \\ \text{sen}(\theta_z) & 0 & \cos(\theta_z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sen}(\theta_z) & 0 & \cos(\theta_z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Conhecidas as três matrizes de rotação, devemos obter a matriz de rotação geral, simplesmente multiplicando-as da seguinte forma:

$$Rot_{est} = Rot_x(\theta_x) Rot_y(\theta_y) Rot_z(\theta_z) \quad (4.33)$$

Dos oito filtros que compõem o banco IMM₂, um deles é responsável pelo modelo CV, outro pelo modelo CT_{ph} normal, e os seis restantes são baseados também no modelo CT_{ph}, mas diferenciados pelos ângulos de rotação θ_x ou θ_y (rotações em torno da direção do eixo z não são consideradas). A Tabela 4.1 mostra de forma clara como são os ângulos θ_x e θ_y que caracterizam os filtros do banco IMM₂, sempre considerando $\theta_z = 0^\circ$:

Tab. 4.1: Tabela de filtros do banco IMM₂.

Filtro	Modelo do Filtro	θ_x	θ_y
1	CV	0°	0°
2	CT _{ph}	0°	0°
3	CT _{ph}	45°	0°
4	CT _{ph}	-45°	0°
5	CT _{ph}	90°	0°
6	CT _{ph}	0°	45°
7	CT _{ph}	0°	-45°
8	CT _{ph}	0°	90°

Note que, da forma que foram estruturados cada um dos filtros, não há a necessidade de se preocupar com a ordem de multiplicação das matrizes na equação (4.33), pois cada filtro só irá depender de uma das matrizes das expressões (4.30), (4.31) e (4.32). Por exemplo, se $\theta_x = 0^\circ$, $\theta_y = 45^\circ$ e $\theta_z = 0^\circ$, $Rot_{est} = Rot_x(0^\circ) Rot_y(45^\circ) Rot_z(0^\circ) = Rot_y(45^\circ)$.

Agora, devemos analisar como é feito o processo de conversão das coordenadas para o vetor de estados para o modelo CV. No caso da dinâmica, temos a relação o vetor $x'_k = Rot_{est}x_k$, que corresponde ao vetor de estados definido para uma trajetória que obedece o modelo matemático de CT_{ph}. Aplicando esta relação à equação (2.2) para o caso do modelo CV e considerando que Rot_{est} é uma matriz não-singular, obtemos:

$$x'_{k+1} = Ax'_k + F\epsilon_k \quad (4.34)$$

$$Rot_{est}x_{k+1} = ARot_{est}x_k + F\epsilon_k \quad (4.35)$$

$$\underbrace{Rot_{est}^{-1}Rot_{est}}_{I_{n_x}} x_{k+1} = \underbrace{Rot_{est}^{-1}ARot_{est}}_{\hat{A}} x_k + \underbrace{Rot_{est}^{-1}F}_{\hat{F}} \epsilon_k \quad (4.36)$$

$$x_{k+1} = \hat{A}x_k + \hat{F}\epsilon_k \quad (4.37)$$

Portanto, as matrizes do modelo dinâmico e dos respectivos ruídos para uma trajetória inclinada são as matrizes \hat{A} e \hat{F} , respectivamente.

No caso do modelo CT_{ph}, as rotações se aplicam somente à matriz A_1 dada na equação (2.15) e à matriz F , dada na expressão (2.18), retirando a última linha e coluna desta matriz. A rotação não se aplica a componente ω do vetor de estados, pois se trata do módulo da velocidade angular e rotações não interferem em escalares puros. Desta forma, as matrizes \hat{A} e \hat{F} para o modelo CT_{ph} ficam:

$$\hat{A} = \left[\begin{array}{c|c} Rot_{est}^{-1}A_1Rot_{est} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \quad (4.38)$$

$$\hat{F} = \left[\begin{array}{c|c} Rot_{est}^{-1}F' & 0_{6 \times 1} \\ \hline 0_{1 \times 6} & 1 \end{array} \right] \quad (4.39)$$

Outra matriz que sofre alterações, por consequência, é a matriz jacobiana \mathcal{A}_k de cada um dos modelos. Para o modelo CV, como a matriz jacobiana \mathcal{A}_k é a própria matriz da dinâmica A , logo, $\hat{\mathcal{A}}_k$ é simplesmente:

$$\hat{\mathcal{A}}_k = Rot_{est}^{-1}\mathcal{A}_kRot_{est} \quad (4.40)$$

Para o modelo CT_{ph}, a matriz jacobiana $\hat{\mathcal{A}}_k$ fica da seguinte forma, considerando a separação do vetor de estados em dois blocos, isto é, $x_k = [\xi \mid \omega]_k^T$, em que $\xi \in \mathbb{R}^6$ contém os elementos de posição e velocidade em x , y e z :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}}_k &= \left(\left[\begin{array}{c|c} Rot_{est}^{-1}A_1Rot_{est}\xi & \\ \hline \omega & \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \omega} \end{array} \right] \right)_{x_k = \hat{x}_{k|k}} \\ &= \left[\begin{array}{c|c} Rot_{est}^{-1}A_1Rot_{est} & \frac{\partial Rot_{est}^{-1}A_1Rot_{est}\xi}{\partial \omega} \\ \hline 0_{1 \times 6} & 1 \end{array} \right]_{x_k = \hat{x}_{k|k}} \\ &= \left[\begin{array}{c|c} Rot_{est}^{-1}A_1Rot_{est} & Rot_{est}^{-1} \frac{\partial A_1}{\partial \omega} Rot_{est}\xi \\ \hline 0_{1 \times 6} & 1 \end{array} \right]_{x_k = \hat{x}_{k|k}} \end{aligned} \quad (4.41)$$

em que $\partial A_1 / \partial \omega$ é a derivada em relação a ω da matriz A_1 , elemento a elemento. Agora, para o caso do vetor de observações z_k não há a necessidade de realizar qualquer tipo de rotação, pois os estados, com os cálculos acima, estão no sistema de coordenadas original e as observações já estão

neste sistema referencial. Desta forma, tanto z_k quanto a matriz jacobiana \mathcal{H}_{k+1} não sofrem qualquer tipo de alteração.

4.3.3 Banco de Filtros com Alinhamento de Velocidade — IMM₃

Outra ideia de banco de filtros para a técnica IMM é semelhante à apresentada na Seção 4.3.2, utilizando novamente os modelos mais simples, os modelos CV e CT_{ph}, só que, ao invés de fixarmos os ângulos de rotação θ_x , θ_y e θ_z , calcularemos estes ângulos baseado no alinhamento do vetor velocidade resultante da filtragem $\hat{\vec{v}}_{k|k} = [\hat{v}_x \ \hat{v}_y \ \hat{v}_z]^T_{k|k}$ com um dos eixos do plano xy ¹. Desta maneira, as equações apresentadas na Seção 4.3.2 são válidas aqui também.

Para realizar o processo de alinhamento da velocidade, convencionou-se que os alinhamentos tomariam por referência a direção do eixo x . A primeira rotação a ser feita para termos o vetor $\hat{\vec{v}}$ alinhado ao eixo x necessita do cálculo do ângulo θ_z . Sendo $\hat{v}_{xy} = \sqrt{\hat{v}_x^2 + \hat{v}_y^2}$ a projeção do vetor velocidade no plano xy , temos:

$$\theta_z = \text{sen}^{-1} \left(\frac{\hat{v}_y}{\hat{v}_{xy}} \right) \quad (4.42)$$

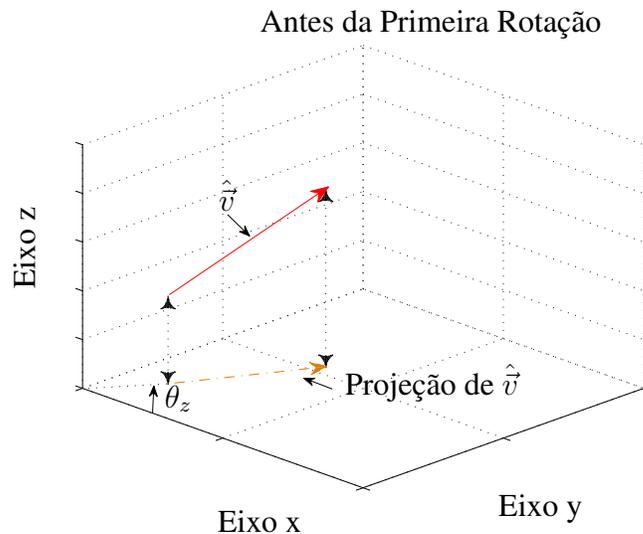


Fig. 4.3: Cálculo do ângulo θ_z a partir de $\hat{\vec{v}}$.

A Figura 4.3 ilustra bem esta primeira rotação. Agora, para que o vetor velocidade fique paralelo ao eixo x , basta calcularmos o ângulo θ_y , sendo $\hat{v}_{xyz} = \sqrt{\hat{v}_x^2 + \hat{v}_y^2 + \hat{v}_z^2}$. A Figura 4.4 ilustra como é

¹Para facilitar a notação e apresentação dos resultados, o sub-índice $k|k$ será omitido

feita a segunda rotação.

$$\theta_y = \text{sen}^{-1} \left(\frac{\hat{v}_z}{\hat{v}_{xyz}} \right) \quad (4.43)$$

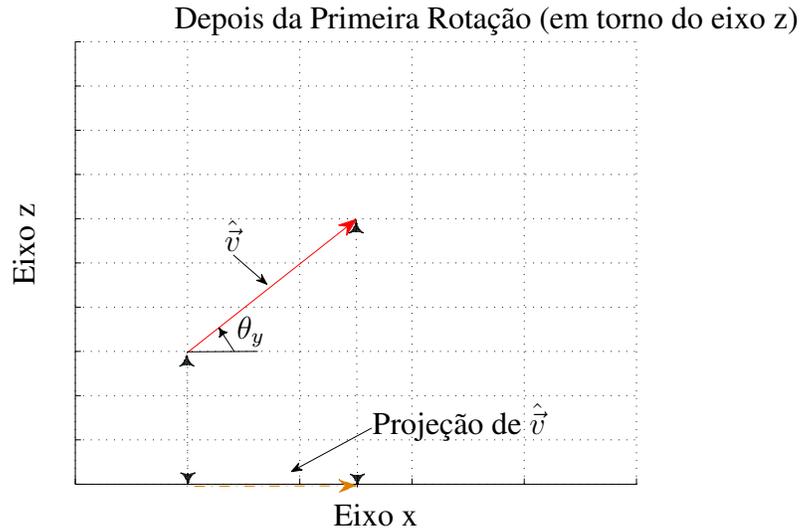


Fig. 4.4: Cálculo do ângulo θ_y a partir de \hat{v} .

Com estes dois ângulos calculados e aplicando as matrizes de rotação conforme explicado anteriormente, o vetor velocidade está alinhado e, portanto, paralelo ao eixo x . O único ângulo que resta é θ_x , mas para ter uma informação precisa deste ângulo, seria necessário algum tipo de informação sobre o ângulo em que o alvo está fazendo entre a sua horizontal e o plano das asas, no caso de um avião, por exemplo. Por isso, θ_x é quem distingue cada um dos cinco filtros que compõem o banco IMM₃, como mostra a Tabela 4.2.

Tab. 4.2: Tabela de filtros do banco IMM₃.

Filtro	Modelo do Filtro	θ_x
1	CV	0°
2	CT _{ph}	0°
3	CT _{ph}	45°
4	CT _{ph}	-45°
5	CT _{ph}	90°

Note que, agora a ordem das matrizes de rotação na equação (4.33) é importante, pois, além dos

ângulos de rotação serem não-nulos (no mínimo, dois deles), a ordem das rotações deve ser como descrito neste seção: primeiro em torno do eixo z , em seguida, em torno do eixo y e, por último, em torno do eixo x . A equação (4.33) está exatamente nesta ordem de rotação, pois a primeira matriz que realiza a rotação é Rot_z , depois Rot_y e finalizando com Rot_x .

Aqui, finalizamos o estudo sobre a técnica de IMM. No próximo capítulo, trataremos de uma outra técnica de filtragem muito utilizada no contexto de rastreamento de alvos manobrantés, o filtro de partículas.

Síntese do Capítulo

A técnica de IMM foi tratada neste capítulo por ser uma das técnicas de filtragem estocástica mais utilizadas em problemas de rastreamento de alvos manobrantés. A base de seu funcionamento está ligada ao chaveamento entre filtros estocásticos recursivos, que é modelado por saltos markovianos. Estes chaveamentos ou saltos de um filtro para outro, ou de um modelo, ou modo, para outro, já que cada um dos filtros é responsável por um modelo dinâmico, são definidas pelas probabilidades de transição de Markov, que determinam as chances de se chavear para outro filtro/modelo no instante de tempo seguinte. Esta técnica de filtragem, pelo fato de envolver vários filtros/modelos diferentes, acaba gerando estimativas mais precisas, pois com uma variedade grande de modelos, as chances de reproduzir a trajetória realizada pelo alvo com maior precisão são elevadas.

Baseada nos conceitos da técnica de IMM, foram propostos três diferentes bancos de filtros: o banco IMM_1 é o que leva o menor número de filtros em seu banco, sendo que cada filtro é responsável por um dos modelos citados no Capítulo 2. Pelo fato deste banco ter um filtro responsável pelo modelo CT_{pa} , além dos modelos CV e CT_{ph} , ele cobre um grande número de possíveis trajetórias que possam ser executadas pelo alvo, podendo gerar estimativas mais precisas.

O segundo banco, IMM_2 , possui o maior número de filtros em seu banco dentre os três bancos propostos. Ele é composto por um filtro com modelo CV, outro com modelo CT_{ph} e o restante com modelos CT_{ph} para trajetórias ocorrendo em planos inclinados. É necessário uma quantidade maior de filtros para tentar abranger o maior número possível de trajetórias. No entanto, sua vantagem está justamente em utilizar somente modelos CT_{ph} , além do modelo CV, que são modelos mais simples de serem usados.

O terceiro e último banco de filtros IMM, IMM_3 , é composto por cinco filtros, sendo um responsável pelo modelo CV, outro por modelo CT_{ph} , e os outros três são definidos pelos ângulos de rotação em torno da direção dada pela estimativa do vetor velocidade. Sua vantagem e desvantagem são as mesmas do banco IMM_2 , ressaltando-se um número menor de filtros, porém baseado na estimativa do vetor velocidade, o que pode conduzir a imprecisões.

Capítulo 5

Filtro de Partículas

O filtro sequencial de Monte Carlo, normalmente chamado de filtro de partículas (PF), é uma técnica de filtragem muito conhecida e frequentemente utilizada em problemas de rastreamento de alvos manobrantés no espaço. Esta técnica, utilizada tanto em abordagens lineares quanto em não-lineares, executa estimações sequenciais de Monte Carlo (dando origem a seu nome) baseadas em representações de funções de densidade de probabilidade através de amostras aleatórias, aqui chamadas de partículas. Por realizar simulações de Monte Carlo para compor estimativas, o PF é considerado um filtro sub-ótimo. Estas simulações consistem em aproximações de integrais do tipo

$$I = \int f(x)\pi(x)dx, \pi(x) \geq 0 \quad (5.1)$$

$$\text{e } \int \pi(x)dx = 1 \quad (5.2)$$

portanto, $\pi(x)$ é uma função densidade de probabilidade, por somatórias do tipo

$$I_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x^i) \quad (5.3)$$

em que $N \gg 1$ é o número de partículas e $\{x^i, i = 1, \dots, N\}$ são as partículas distribuídas de acordo com $\pi(x)$.

As primeiras idéias do PF foram desenvolvidas na década de 50, e raramente exploradas nas décadas de 60 e 70, pois era necessária uma capacidade computacional muito elevada em relação ao que existia na época para executar seus algoritmos de forma satisfatória. Por este motivo, sua utilização voltou a ser mais explorada a partir da década de 90, graças a evolução no processamento veloz de dados existente nos computadores atuais.

O PF é baseado em duas etapas essenciais: a amostragem sequencial por importância, baseada no

princípio da amostragem por importância, e a reamostragem. Na primeira delas, é necessário lidar com a escolha da densidade por importância para o cálculo dos pesos por importância, já a segunda etapa tem como objetivo resolver o problema de degeneração que pode ocorrer na primeira etapa. O PF, desenvolvido em [24], será apresentado nas próximas seções, explicitando e detalhando as etapas que o compõem.

5.1 Modelo Matemático

Sob o ponto de vista do problema de rastreamento de alvos manobранtes, cada uma das partículas x^i se comportam de acordo com o seguinte modelo matemático:

$$x_{k+1}^i = f_k^i(x_k^i) + F\epsilon_k^i \quad (5.4)$$

$$z_k = h_k(x_k^i) + \nu_k \quad (5.5)$$

em que f_k^i é o modelo dinâmico (linear ou não) da i -ésima partícula, F é a matriz do ruído da dinâmica e ϵ_k^i é o ruído da dinâmica da i -ésima partícula (por hipótese, gaussiano com média nula), z_k é o vetor de observações, h_k é o modelo de observações e ν_k é o ruído das observações (por hipótese, gaussiano com média nula).

Daqui em diante, para a técnica de PF, será utilizado este modelo matemático para tratar o comportamento das partículas sob o ponto de vista da dinâmica e das observações.

5.2 Amostragem por Importância

Para entender melhor como é realizada a primeira etapa do PF, a amostragem sequencial por importância, antes iremos apresentar a base desta etapa, que trata do princípio da amostragem por importância. Suponha que podemos gerar partículas somente a partir de uma função densidade de probabilidade $q(x)$, que é similar a $\pi(x)$. Com isso, uma ponderação correta do conjunto de partículas faz com que as estimativas por Monte Carlo sejam possíveis. A função $q(x)$ é chamada de densidade por importância¹ e sua similaridade com $\pi(x)$ pode ser descrita pela seguinte condição:

$$\pi(x) > 0 \Rightarrow q(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^{n_x} \quad (5.6)$$

¹A escolha da densidade $q(x)$ pode ser escolhida de uma forma ótima ou sub-ótima, vide Seção 5.3.

Esta condição é necessária para a teoria da amostragem por importância ser válida e, se é válida, qualquer integral pode ser reescrita como:

$$I = \int f(x)\pi(x)dx = \int f(x)\frac{\pi(x)}{q(x)}q(x)dx \quad (5.7)$$

Desta forma, a estimativa de Monte Carlo de I é obtida gerando $N \gg 1$ partículas independentes $\{x^i, i = 1, \dots, N\}$ distribuídas de acordo com $q(x)$, formando a soma ponderada:

$$I_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x^i)\tilde{w}(x^i) \quad (5.8)$$

em que

$$\tilde{w}(x^i) = \frac{\pi(x^i)}{q(x^i)} \quad (5.9)$$

são os pesos por importância. Se o fator de normalização da densidade desejada $\pi(x)$ é desconhecido, precisamos realizar a normalização dos pesos por importância. Desta forma, estimamos I_N :

$$I_N = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x^i)\tilde{w}(x^i)}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \tilde{w}(x^j)} = \sum_{i=1}^N f(x^i)w(x^i) \quad (5.10)$$

em que

$$w(x^i) = \frac{\tilde{w}(x^i)}{\sum_{j=1}^N \tilde{w}(x^j)} \quad (5.11)$$

Esta técnica é uma base fundamental para o entendimento da primeira etapa do PF, a amostragem sequencial por importância.

5.3 Amostragem Sequencial por Importância

A amostragem sequencial por importância é basicamente a aplicação do princípio da amostragem por importância, apresentado na Seção 5.2, aplicado em simulações de Monte Carlo para implementar um filtro bayesiano recursivo. A ideia principal nesta etapa é representar a função densidade de probabilidade *a posteriori* por um conjunto de partículas $\{X_k^i, i = 1, \dots, N\}$, em que $X_k = \{x_j, j = 0, \dots, k\}$, e cada uma delas com seu i -ésimo peso associado $\{w_k^i, i = 1, \dots, N\}$, $w_k^i \in [0, 1]$, sendo que a soma $\sum_i w_k^i$ é unitária. Com isso, pode-se computar estimativas baseadas nestas partículas e pesos. Quanto maior o número de partículas N , a aproximação da função densidade de probabilidade fica cada vez melhor e, conseqüentemente, a filtragem se aproxima cada vez mais de um estimador bayesiano ótimo.

Para obtermos a representação aproximada da função densidade de probabilidade *a posteriori*, devemos escrever $p(X_{k+1}|z^{k+1})$ da seguinte forma:

$$p(X_{k+1}|z^{k+1}) \simeq \sum_{i=1}^N w_{k+1}^i \delta(X_{k+1} - X_{k+1}^i) \quad (5.12)$$

em que $\delta(\cdot)$ é o delta de Dirac. Se o conjunto de partículas X_{k+1}^i é sorteado a partir de uma densidade por importância $q(X_{k+1}|z^{k+1})$, os pesos associados resultam em, baseados na equação (5.9):

$$w_{k+1}^i \propto \frac{p(X_{k+1}^i|z^{k+1})}{q(X_{k+1}^i|z^{k+1})} \quad (5.13)$$

Suponha que no instante de tempo k nós possuímos partículas que aproximem $p(X_k|z^k)$. Com a chegada da observação z_{k+1} no instante de tempo $k+1$, desejamos aproximar $p(X_{k+1}|z^{k+1})$ por um novo conjunto de partículas. Se a densidade por importância é escolhida da tal forma que a seguinte hipótese

$$q(X_k|z^{k+1}) = q(X_k|z^k) \quad (5.14)$$

se cumpra, então podemos construir a densidade por importância da seguinte forma:

$$\begin{aligned} q(X_{k+1}|z^{k+1}) &= q(x_{k+1}, X_k|z^{k+1}) = q(x_{k+1}|X_k, z^{k+1})q(X_k|z^{k+1}) \\ &= q(x_{k+1}|X_k, z^{k+1})q(X_k|z^k) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Agora, para determinarmos a equação de atualização dos pesos, devemos expressar $p(X_{k+1}|z^{k+1})$ em função de $p(X_k|z^k)$, $p(z_{k+1}|x_{k+1})$ e $p(x_{k+1}|x_k)$. Para isto, basta utilizar o teorema de Bayes:

$$\begin{aligned} p(X_{k+1}|z^{k+1}) &= \frac{p(z_{k+1}|X_{k+1}, z^k)p(X_{k+1}|z^k)}{p(z_{k+1}|z^k)} \\ &= \frac{p(z_{k+1}|X_{k+1}, z^k)p(x_{k+1}|X_k, z^k)p(X_k|z^k)}{p(z_{k+1}|z^k)} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Observando (5.16), podemos simplificá-la em dois pontos: sabemos da equação geral da dinâmica, dada em (2.1), que x_{k+1} depende somente de x_k e de ϵ_k e também sabemos da equação de observações, dada em (2.57), que z_k depende somente de x_k e de ν_k , logo:

$$p(x_{k+1}|X_k, z^k) = p(x_{k+1}|x_k) \quad (5.17)$$

$$p(z_{k+1}|X_{k+1}, z^k) = p(z_{k+1}|x_{k+1}) \quad (5.18)$$

Substituindo (5.17) e (5.18) em (5.16), obtemos

$$p(X_{k+1}|z^{k+1}) = \frac{p(z_{k+1}|x_{k+1})p(x_{k+1}|x_k)}{p(z_{k+1}|z^k)}p(X_k|z^k) \quad (5.19)$$

$$\propto p(z_{k+1}|x_{k+1})p(x_{k+1}|x_k)p(X_k|z^k) \quad (5.20)$$

Substituindo as equações (5.15) e (5.20) na expressão (5.13), a equação de atualização dos pesos fica da seguinte forma:

$$w_{k+1}^i \propto \frac{p(z_{k+1}|x_{k+1}^i)p(x_{k+1}^i|x_k^i)}{q(x_{k+1}^i|X_k^i, z^{k+1})} \cdot \frac{p(X_k^i|z^k)}{q(X_k^i|z^k)} \quad (5.21)$$

$$= \frac{p(z_{k+1}|x_{k+1}^i)p(x_{k+1}^i|x_k^i)}{q(x_{k+1}^i|X_k^i, z^{k+1})} w_k^i \quad (5.22)$$

A etapa da amostragem sequencial por importância, portanto, consiste em propagar os pesos por importância w_k^i e as partículas x_k^i a cada observação recebida. Note que nos resta determinar a densidade por importância $q(x_{k+1}^i|X_k^i, z^{k+1})$ para conseguirmos calcular os pesos por importância. Na seção seguinte, será explicado como é escolhida esta densidade.

5.3.1 Escolha da Distribuição por Importância

Quando observamos a equação de atualização dos pesos, apresentada na expressão (5.22), percebemos que a função $q(x_{k+1}^i|X_k^i, z^{k+1})$ é a única expressão que resta para ser definida. A escolha desta densidade por importância é algo crucial no desenvolvimento do PF. Existem duas escolhas possíveis: a ótima e a sub-ótima. A escolha ótima que minimiza a variância dos pesos por importância na equação (5.22), demonstrada em [25], é dada por:

$$\begin{aligned} q_{ot}(x_{k+1}^i|X_k^i, z^{k+1}) &= p(x_{k+1}^i|x_k^i, z_{k+1}) \\ &= \frac{p(z_{k+1}|x_{k+1}^i, x_k^i)p(x_{k+1}^i|x_k^i)}{p(z_{k+1}|x_k^i)} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Substituindo a expressão (5.23) na equação (5.22), obtemos:

$$w_{k+1}^i \propto w_k^i p(z_{k+1}|x_k^i) \quad (5.24)$$

$$p(z_{k+1}|x_k^i) = \int p(z_{k+1}|x_{k+1}^i)p(x_{k+1}^i|x_k^i)dx_{k+1}^i \quad (5.25)$$

e podemos aproximar a densidade marginal *a posteriori* $p(x_{k+1}|z^{k+1})$ da seguinte forma:

$$p(x_{k+1}|z^{k+1}) \simeq \sum_{i=1}^N w_{k+1}^i \delta(x_{k+1} - x_{k+1}^i) \quad (5.26)$$

Note que a obtenção das atualizações dos pesos pela expressão (5.24) não é direta, dificultando o cálculo destes pesos, devido ao cálculo da integral em (5.25). Por este motivo, a escolha mais utilizada para a obtenção da densidade por importância é a escolha sub-ótima. Nesta escolha, a densidade por importância é dada por:

$$q_{sub}(x_{k+1}^i|X_k^i, z^{k+1}) = p(x_{k+1}^i|x_k^i) \quad (5.27)$$

Substituindo a expressão (5.27) na equação (5.22) obtemos:

$$w_{k+1}^i \propto w_k^i p(z_{k+1}|x_{k+1}^i) \quad (5.28)$$

Observe que a função que multiplica w_k^i é a função de verossimilhança da partícula x_{k+1}^i , o que torna a recursividade dos pesos por importância mais simples do que aquela que envolve um integral, equacionada em (5.24). Esta simplicidade se dá pelo fato de, considerando o modelo matemático descrito nas equações (5.4) e (5.5) e a hipótese gaussiana dos ruídos, obtém-se a verossimilhança diretamente pela função densidade de probabilidade gaussiana do ruído de observação ν_k . Daqui em diante, a verossimilhança será denotada por $\Lambda(z_{k+1}|x_{k+1}^i) = p(z_{k+1}|x_{k+1}^i)$. Na seção seguinte, o problema de degeneração do algoritmo da amostragem sequencial por importância será tratado, além de mostrar como deve ser solucionado este problema.

5.3.2 Problema de Degeneração

Quando representamos a densidade por importância da maneira descrita na expressão (5.15), é mostrado em [25] que a variância dos pesos por importância podem somente aumentar com o tempo. Com este efeito, acaba surgindo o fenômeno de degeneração do algoritmo de amostragem sequencial por importância. Este fenômeno traz o seguinte problema: depois de um certo número de passos no algoritmo, praticamente quase todas as partículas terão pesos desprezíveis, próximos de zero, concentrando o peso em algumas poucas.

Para termos uma noção de quão degenerado está o algoritmo, existe uma medida chamada de número efetivo do número de partículas, dado por:

$$\hat{N}_{\text{eff}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (w_{k+1}^i)^2}, \quad 1 \leq \hat{N}_{\text{eff}} \leq N \quad (5.29)$$

em que w_{k+1}^i é descrita pela equação (5.22), ou, mais especificamente por (5.24), no caso da escolha ótima da densidade por importância, ou por (5.28), no caso da escolha sub-ótima da densidade por importância. Quanto menor o valor de \hat{N}_{eff} , mais degenerado está o algoritmo. Para tratar este problema de degeneração, é utilizada a reamostragem, que define a segunda etapa do PF e será descrita na seção seguinte.

5.4 Reamostragem

A etapa de reamostragem se faz necessária nos casos em que o \hat{N}_{eff} é menor que um certo valor limite N_{thr} . O valor de N_{thr} adotado é geralmente algo em torno de $2N/3$, em que N é número de partículas. A reamostragem elimina partículas com baixos pesos por importância e replica partículas com altos pesos por importância (análogo a algoritmos genéticos).

A reamostragem envolve o mapeamento de $\{x_{k+1}^i, w_{k+1}^i\}$ para $\{x_{k+1}^{i*}, N^{-1}\}$ com pesos uniformes. O novo conjunto de partículas $\{x_{k+1}^{i*}\}_{i=1}^N$ é gerada pela reamostragem realizada N vezes a partir da representação discreta de $p(x_{k+1}|z^{k+1})$ dada na equação (5.26). Desta forma, a probabilidade da nova partícula reamostrada x_{k+1}^{i*} continuar a mesma antes da reamostragem é dada pelo próprio valor do peso por importância associado, isto é, $Pr\{x_{k+1}^{i*} = x_{k+1}^j\} = w_{k+1}^j$; quanto maior o peso, maior a chance da partícula se manter para o instante de tempo seguinte, e vice-versa.

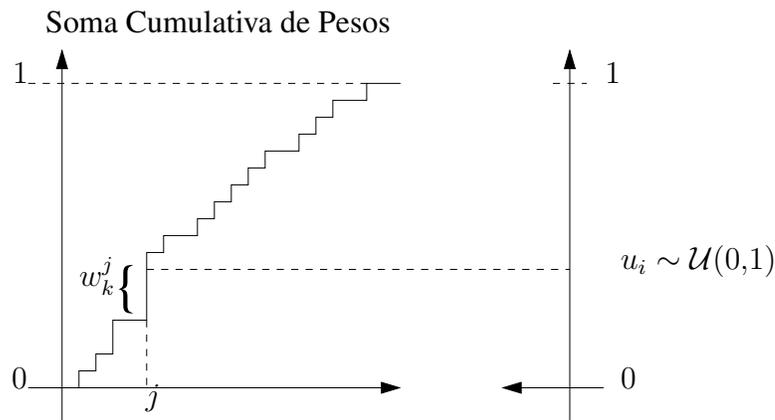


Fig. 5.1: Processo de reamostragem.

A Figura 5.1 esquematiza o processo de seleção $x_{k+1}^{i*} = x_{k+1}^i$ através de sorteios de variáveis aleatórias $u_i \sim \mathcal{U}[0,1]$. Os pesos são denotados pelo tamanho dos degraus da soma cumulativa de pesos; quanto maior o degrau, maior o valor do peso. O algoritmo que é utilizado com mais frequência para realizar a reamostragem é o chamado algoritmo de reamostragem sistemática, pois possui a vantagem de ter uma complexidade computacional baixa, de ordem $O(N)$.

A ideia da reamostragem sistemática é dividir, em relação ao eixo das ordenadas, a soma cumulativa de pesos em intervalos crescentes de tamanho $(j - 1)/N$, $j = 1, \dots, N$. Feita esta divisão, percorre-se os intervalos desta soma e, em cada um destes intervalos, realizam-se sorteios de variáveis aleatórias uniformes u_i de tal forma a determinar o valor do peso por importância associado à i -ésima partícula. No Algoritmo 5.1, mais adiante, esta ideia de caminhar pelos intervalos divididos é explicada.

5.5 Algoritmo para o Filtro de Partículas

A Figura 5.2 ilustra um ciclo do filtro de partículas ($N = 10$), dividido em cinco passos. Começando pelo topo da figura, temos a aproximação de $p(x_{k+1}|z^k)$ pelo par partícula-peso $\{x_k^i, N^{-1}\}$. Em seguida, há recebimento da observação z_{k+1} para computar os pesos de cada partícula através da verossimilhança $\Lambda(z_{k+1}|x_{k+1}^i)$, resultante da filtragem da partícula i . Com isso, o par resultante $\{x_{k+1}^i, w_{k+1}^i\}$ aproxima $p(x_{k+1}|z^{k+1})$. Se $\hat{N}_{\text{eff}} < N_{\text{thr}}$, devemos aplicar a etapa de reamostragem, resultando na aproximação novamente de $p(x_{k+1}|z^{k+1})$, só que desta vez por $\{x_{k+1}^{i*}, N^{-1}\}$. O último passo é a previsão, que resulta na aproximação de $p(x_{k+2}|z^{k+1})$ por $\{x_{k+2}^i, N^{-1}\}$, retornando para o passo inicial.

A seguir, encontra-se um pseudo-código que detalha os passos envolvidos em cada uma das etapas do PF de uma forma resumida, mostrando como estão ligadas as etapas de amostragem sequencial por importância e a etapa de reamostragem, utilizando o algoritmo de reamostragem sistemática.

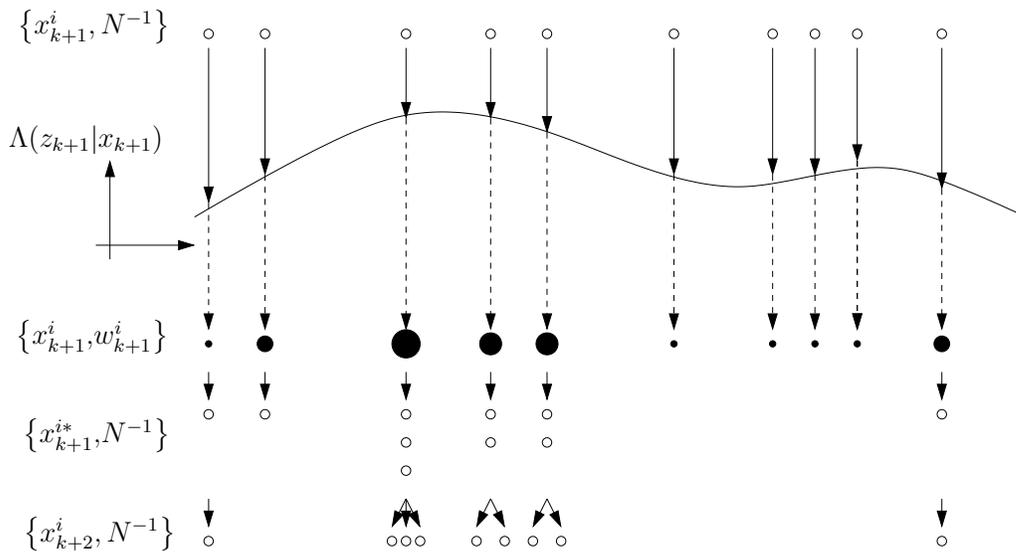


Fig. 5.2: Um passo do filtro de partículas ($N = 10$).

Dados de entrada: $\{x_{k+1}^i, w_k^i\}$ e z_{k+1}

Para $i = 1$ até N **faça**

Avalie os pesos por importância: $w_{k+1}^i = w_k^i \Lambda(z_{k+1}|x_{k+1}^i)$

Fim Para

Calcule o número efetivo de partículas: $\hat{N}_{\text{eff}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (w_{k+1}^i)^2}$

Se $\hat{N}_{\text{eff}} < N_{\text{thr}}$ **Então**

Aplique a reamostragem sistemática:

Inicialize a soma cumulativa de pesos: $c_1 = w_{k+1}^1$

Para $i = 2$ até N **faça**

Construa a soma cumulativa de pesos: $c_i = c_{i-1} + w_{k+1}^i$

Fim Para

Sorteie um ponto inicial: $u_0 \sim \mathcal{U}[0,1]$

Para $j = 1$ até N **faça**

Caminhe pela soma cumulativa de pesos: $u_j = \frac{u_0 + (j-1)}{N}$

Enquanto $u_j > c_i$ **faça**

$i = i + 1$

Fim Enquanto

Atribua a partícula reamostrada de i para j : $x_{k+1}^{j*} = x_{k+1}^i$

Atribua o novo peso por importância: $w_{k+1}^j = 1/N$

Fim Para

Fim Se

Calcule a estimativa global: eq. (5.30).

$$x_{k+2}^i = f_{k+1}^i(x_{k+1}^i) + F\epsilon_{k+1}^i$$

Alg. 5.1: Pseudo-código para Amostragem Sequencial por Importância e Reamostragem.

Ao final do ciclo do algoritmo de PF, obtém-se a estimativa global deste ciclo, fazendo a soma ponderada das partículas com os seus respectivos pesos por importância, ou seja:

$$\hat{x}_{k+1} = \sum_{i=1}^N x_{k+1}^i w_{k+1}^i \quad (5.30)$$

Em [24, p. 128], é proposto um algoritmo para a técnica de PF em cenários de rastreamento de alvos manobrantés em que, ao invés de aplicar as etapas da técnica de PF nas partículas, estas são aplicadas às estimativas das partículas, resultantes da filtragem de cada uma destas partículas. A vantagem deste algoritmo está, primeiramente, pelo fato da função de verossimilhança poder ser

calculada diretamente dos resultados de filtragem e, assim, ser utilizada para o cálculo dos pesos por importância. Uma outra vantagem está na utilização das estimativas das partículas, que aumentam a precisão da estimativa global, dada em (5.30), já que cada uma das partículas estimadas possui agora informações da observação incorporada na filtragem. O Algoritmo 5.2 mostra como é introduzido o filtro à técnica de PF.

Dados de entrada: $\hat{x}_{k|k}^i, P_{k|k}^i, w_k^i$ e z_{k+1}

Para $i = 1$ até N **faça**

Aplique a filtragem à $\hat{x}_{k|k}^i$: $\left[\hat{x}_{k+1|k+1}^i, P_{k+1|k+1}^i, \Lambda(z_{k+1} | \hat{x}_{k+1}^i) \right] = \text{Filtragem} \left(\hat{x}_{k|k}^i, P_{k|k}^i, z_{k+1} \right)$

Avalie os pesos por importância: $w_{k+1}^i = w_k^i \Lambda(z_{k+1} | \hat{x}_{k+1}^i)$

Fim Para

Calcule o número efetivo de partículas: $\hat{N}_{\text{eff}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (w_{k+1}^i)^2}$

Se $\hat{N}_{\text{eff}} < N_{\text{thr}}$ **Então**

Aplique a reamostragem sistemática (vide Algoritmo 5.1)

Fim Se

Calcule a estimativa global: $\hat{x}_{k+1|k+1} = \sum_{i=1}^N \hat{x}_{k+1|k+1}^i w_{k+1}^i$

Alg. 5.2: Pseudo-código para um ciclo do PF com estimativas das partículas.

A função “Filtragem(\cdot)”, definida no Algoritmo 5.2, aplica as equações do filtro estocástico recorrente escolhido em $\hat{x}_{k|k}^i, P_{k|k}^i$ e z_{k+1} , que pode ser o EKF ou o filtro BLUE, estudados no Capítulo 3, Seções 3.1 e 3.2, respectivamente. Neste trabalho, será adotado este último algoritmo para a técnica de PF.

Assim como para a técnica de IMM, vamos obter uma relação para o custo computacional da técnica de PF avaliando o número de operações de soma e de multiplicação. Sendo N o número de partículas, o número de operações de um ciclo de PF é dado por:

$$\text{Nop}_{\text{PF}} = N (2m + n_x s + \text{Nop}_{\text{K/B}}) \quad (5.31)$$

em que $\text{Nop}_{\text{K/B}}$ é o número de operações do EKF ou do filtro BLUE, dadas nas equações (3.87) e (3.180), respectivamente, dependendo do tipo de filtro que está sendo utilizado. Se compararmos as relações de número de operações do IMM (eq. (4.29)) e do PF (eq. (5.31)), vemos que Nop_{PF} é um valor mais elevado do que Nop_{IMM} , devido ao valor N ser muito mais elevado do que M ; N fica em torno de algumas centenas ($N = 100, N = 500$ etc.), já M não atinge, na maioria das vezes, mais que uma dezena ($M = 3, M = 8$ etc.). Desta forma, $\text{Nop}_{\text{PF}} > \text{Nop}_{\text{IMM}}$, isto é, o custo da técnica de PF é mais elevado em relação ao custo da técnica de IMM, considerando o mesmo $\text{Nop}_{\text{K/B}}$ para ambas as técnicas.

A seguir, será detalhada a proposta que utiliza a informação de velocidade radial para a obtenção da velocidade angular, com a finalidade de determinarmos o modelo dinâmico a ser aplicado no instante seguinte.

5.6 Velocidade Radial como Informação para o Cálculo da Velocidade Angular

Como vimos nas seções anteriores, a técnica do PF basicamente é utilizada para calcularmos as estimativas das partículas x_{k+1}^i , a cada instante, utilizando x_k^i , e combiná-las para obter a estimativa global $\hat{x}_{k+1|k+1}$ daquele instante. Pensando nos modelos de velocidade constante, o processo de filtragem é feito com as partículas contendo informações de posição e de velocidade do alvo somente; já para os modelos de trajetórias curvilíneas, existe a necessidade de se considerar $\vec{\omega}_k^i$ como parte do vetor de estados ampliado, como visto na Seção 2.1.2, equação (2.48). No entanto, ao invés de obter $\vec{\omega}_k^i$ através de um processo de filtragem, foi proposta uma maneira de utilizar a informação da velocidade radial para o cálculo do vetor velocidade angular em trajetórias curvilíneas que ocorrem em um plano inclinado qualquer. Para isso, vamos adotar a seguinte notação: o vetor dado em (5.32) será, nesta proposta, o novo vetor de estados:

$$\begin{bmatrix} x^i \\ \vec{\omega}^i \end{bmatrix}_k \quad (5.32)$$

em que $x_k^i \in \mathbb{R}^6$ é a partícula que contém as informações de posição e velocidade do alvo, a qual será filtrada, e $\vec{\omega}_k^i \in \mathbb{R}^3$ contém as componentes x , y e z do vetor velocidade angular, cuja determinação envolverá sorteios deste vetor velocidade angular para cada partícula, como será explicado mais adiante.

Para obtermos a velocidade angular $\vec{\omega}_{k+1}^i$, devemos tomar as informações das estimativas das velocidades do vetor de estados $x_{k+1|k+1}^i$ — resultantes do processo de filtragem do instante k para $k+1$ — e da velocidade radial vinda em $k+1$ para reposicionarmos a velocidade angular do instante k de tal forma a conseguirmos uma boa estimativa de $\vec{\omega}_{k+1}^i$. A partir da obtenção desta velocidade angular, conseguimos determinar qual o modelo dinâmico que será utilizado: se $|\vec{\omega}_{k+1}^i| = 0$, basta utilizar o modelo CV com a matriz A dada na Seção 2.1.1, equação (2.7), que define a evolução dinâmica de x_k^i para x_{k+1}^i ; caso contrário, utilizaremos o modelo CT_{pa}. Para este último modelo, a matriz $A_0 = A(\vec{\omega}_k^i)$ que define a evolução dinâmica de x_k^i para x_{k+1}^i , expressa na Seção 2.1.2, equação (2.28), será a utilizada no processo de filtragem de x_k^i .

Os passos que devem ser seguidos para chegarmos à obtenção de $\vec{\omega}_{k+1}^i$, com a finalidade de determinar da matriz dinâmica $A(\vec{\omega}_{k+1}^i)$, são os seguintes: dado $\hat{x}_{k+1|k+1}^i$, resultante da etapa de filtragem, calcula-se $\hat{v}_{r\ k+1|k+1}^i$ a partir da equação (2.62). Em seguida, verifica-se o valor absoluto da diferença entre $\hat{v}_{r\ k+1|k+1}^i$ e a observação da velocidade radial que chegou no instante $k + 1$, $v_{r\ k+1}$. Se esta diferença for maior que um certo valor δ_{min} , então deve-se rotacionar a estimativa do vetor velocidade $\hat{v}_{k+1|k+1}^i$ com o menor $\delta\theta$ possível, de forma a compatibilizar a nova projeção do vetor $\hat{v}_{k+1|k+1}^i$ com a observação $\vec{v}_{r\ k+1}$. A Figura 5.3 ilustra bem este processo de rotação de $\hat{v}_{k+1|k+1}^i$ para o vetor corrigido $\hat{v}_{k+1|k+1}^{\prime i}$, mostrando a região geométrica (cone) em que o vetor velocidade corrigido $\hat{v}_{k+1|k+1}^{\prime i}$ satisfaz a condição para que $\delta\theta$ seja o menor possível.

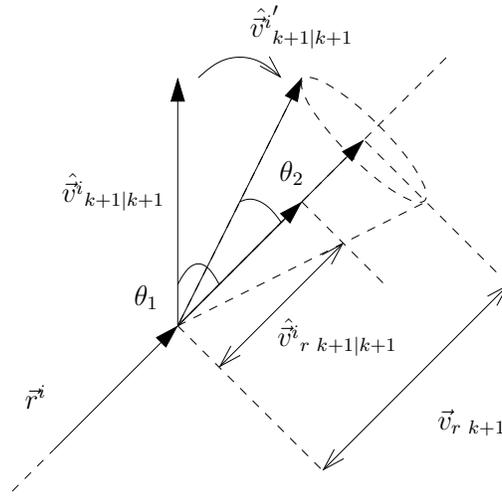


Fig. 5.3: Cálculo para obtenção da velocidade angular.

Na Figura 5.3, θ_1 é o ângulo formado entre \vec{r}^i e $\hat{v}_{k+1|k+1}^i$, dado por

$$\theta_1 = \arccos \left(\frac{\hat{v}_{r\ k+1|k+1}^i}{\hat{v}_{k+1|k+1}^i} \right) \quad (5.33)$$

e θ_2 é o ângulo formado entre \vec{r}^i e o vetor velocidade corrigido $\hat{v}_{k+1|k+1}^{\prime i}$, dado por

$$\theta_2 = \arccos \left(\frac{v_{r\ k+1}}{\hat{v}_{k+1|k+1}^i} \right) \quad (5.34)$$

A Figura 5.4 ilustra as respectivas projeções dos vetores velocidade $\hat{v}_{k+1|k+1}^i$ e $\hat{v}_{k+1|k+1}^{\prime i}$, além de mostrar a variação angular $\delta\theta$.

É possível determinar qual foi a variação de $\vec{\omega}_{k+1}^i$ durante o intervalo T entre observações k e

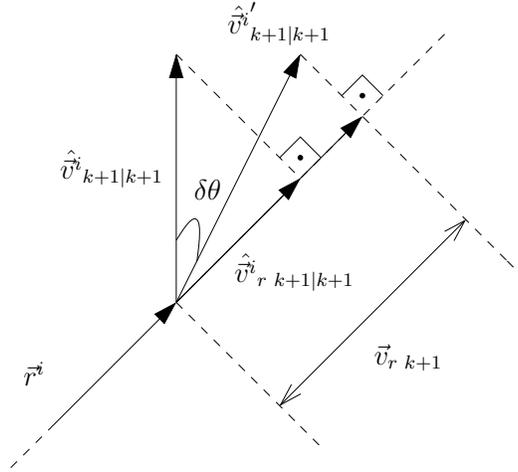


Fig. 5.4: Cálculo para obtenção da velocidade angular.

$k + 1$ verificando qual foi a variação de ângulo $\delta\theta$ neste mesmo intervalo de tempo. Desta forma, obtemos a relação a seguir:

$$\begin{aligned}\delta\omega &= \text{sinal}(\hat{v}_{r\ k+1|k+1}^i) \frac{(\theta_1 - \theta_2)}{T} \\ &= \text{sinal}(\hat{v}_{r\ k+1|k+1}^i) \frac{\delta\theta}{T}\end{aligned}\quad (5.35)$$

Note que é levado em consideração o sinal de $\hat{v}_{r\ k+1|k+1}^i$, pois a aproximação ou o afastamento do alvo do sensor modifica o sentido da velocidade radial, alterando θ_1 e θ_2 , e, conseqüentemente, $\delta\theta$. Note ainda que este ajuste, representado por $\delta\theta$, corresponde à mínima variação angular do vetor $\hat{v}_{k+1|k+1}^i$, que o torna consistente com a informação recebida de sua projeção $\vec{v}_{r\ k+1}$. Em seguida, devemos encontrar um vetor \vec{n} unitário e normal ao plano que contém os vetores $\vec{v}_{r\ k+1}$ e $\hat{v}_{k+1|k+1}^i$ e que nos dê a informação de direção e sentido de $\vec{\omega}_{k+1}^i$. Portanto, este vetor deve ser perpendicular tanto a $\vec{v}_{r\ k+1}$, quanto a $\hat{v}_{k+1|k+1}^i$. Este vetor é dado por:

$$\vec{n} = \frac{\vec{v}_{r\ k+1} \times \hat{v}_{k+1|k+1}^i}{\|\vec{v}_{r\ k+1} \times \hat{v}_{k+1|k+1}^i\|}\quad (5.36)$$

Assim, conseguimos obter $\delta\vec{\omega}^i$, que possui a variação de $\vec{\omega}_{k+1}^i$ em cada uma das componentes deste vetor, da seguinte forma:

$$\delta\vec{\omega}^i = \delta\omega^i \cdot \vec{n}\quad (5.37)$$

Em tese, se os valores obtidos não estivessem sujeitos a imprecisões teríamos o valor exato de $\vec{\omega}_{k+1}^i$ pela expressão $\vec{\omega}_{k+1}^i = \vec{\omega}_k^i + \delta\vec{\omega}^i$. Entretanto, devido a estas imprecisões, sorteamos $\vec{\omega}_{k+1}^i$ com

a hipótese de que este vetor possui uma distribuição gaussiana com média $\alpha_1 \vec{\omega}_k^i + \alpha_2 \delta \vec{\omega}^i$ e variância $\sigma_{\vec{\omega}^i}^2$, ou seja, $\vec{\omega}_{k+1}^i \sim \mathcal{N}(\alpha_1 \vec{\omega}_k^i + \alpha_2 \delta \vec{\omega}^i, \sigma_{\vec{\omega}^i}^2)$, em que $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$. As constantes α_1 e α_2 são fatores de escala que atenuam os valores obtidos de $\vec{\omega}_k^i$ no instante de tempo anterior, modificando a confiabilidade do valor de $\vec{\omega}_{k+1}^i$ sorteado. Assim, chegamos ao nosso objetivo, que é determinar a matriz $A(\vec{\omega}_{k+1}^i)$ que será utilizada no processo de filtragem da partícula i no próximo passo, de $k + 1$ para $k + 2$, podendo ser o modelo CV ou CTpa, dependendo do módulo de $\vec{\omega}_{k+1}^i$.

No Algoritmo 5.3, encontra-se um pseudo-código que explicita os passos implementados para a obtenção da matriz $A(\vec{\omega}_{k+1}^i)$, que permite calcular a estimativa de x_{k+1}^i a partir da informação de x_k^i e da informação da velocidade radial $v_{r\ k+1}$ recém-recebida.

Dados de entrada: $\hat{x}_{k|k}^i, P_{k|k}^i, w_k^i, \vec{\omega}_k^i, z_{k+1}$ e $v_{r\ k+1}$

Aplique a filtragem à $\hat{x}_{k|k}^i$: $\left[\hat{x}_{k+1|k+1}^i, P_{k+1|k+1}^i, \Lambda(z_{k+1} | \hat{x}_{k+1}^i) \right] = \text{Filtragem} \left(\hat{x}_{k|k}^i, P_{k|k}^i, z_{k+1} \right)$

Calcule a estimativa da velocidade radial a partir de $\hat{x}_{k+1|k+1}^i$: $\hat{v}_{r\ k+1|k+1}^i$

Determine a diferença: $|\hat{v}_{r\ k+1|k+1}^i - v_{r\ k+1}|$

Se $|\hat{v}_{r\ k+1|k+1}^i - v_{r\ k+1}| < \delta_{min}$ **Então**

Mantenha o valor da velocidade angular: $\vec{\omega}_{k+1}^i = \vec{\omega}_k^i$

Mantenha a matriz da dinâmica: $A(\vec{\omega}_{k+1}^i) = A(\vec{\omega}_k^i)$

Caso contrário

Calcule θ_1 , eq. (5.33)

Se $|v_{r\ k+1}| < |\hat{v}_{k+1|k+1}^i|$ **Então**

Calcule θ_2 , eq. (5.34)

Caso contrário

$\theta_2 = 0$

Fim Se

Calcule a variação: $\delta \omega$, eq. (5.35)

Calcule o vetor normal unitário: \vec{n} , eq. (5.36)

Calcule a variação de $\delta \vec{\omega}^i$, eq. (5.37)

Sorteie: $\vec{\omega}_{k+1}^i \sim \mathcal{N}(\alpha_1 \vec{\omega}_k^i + \alpha_2 \delta \vec{\omega}^i, \sigma_{\vec{\omega}^i}^2)$

Obtenha a matriz dinâmica para o intervalo seguinte: $A(\vec{\omega}_{k+1}^i)$

Fim Se

Aplique o Algoritmo 5.1

Alg. 5.3: Pseudo-código para obtenção de $A(\vec{\omega}_{k+1}^i)$ para a i -ésima partícula.

O teste feito com θ_2 no Algoritmo 5.3 tem a seguinte razão: o cosseno que define θ_2 tem como hipotenusa $\hat{v}_{k+1|k+1}^i$, que, eventualmente, pode ser menor do que o cateto definido por $v_{r\ k+1}$, pois esta é uma observação ruidosa, ou seja, está sujeita a imprecisões, assim como a estimativa $\hat{v}_{k+1|k+1}^i$. Desta forma, convencionamos que, para os casos em que $\hat{v}_{k+1|k+1}^i$ é menor do que $v_{r\ k+1}$, θ_2 será nulo, isto é, $\hat{v}_{k+1|k+1}^i$ tem o mesmo sentido de $v_{r\ k+1}$.

No próximo capítulo, serão apresentadas uma série de testes feitos no *software* MATLAB, tes-

tando as propostas apresentadas neste e no capítulo anterior. Testes de desempenho para efeitos comparativos entre filtros estocásticos recursivos e técnicas de filtragem serão apresentados.

Síntese do Capítulo

O assunto deste capítulo teve como objetivo tratar de uma outra técnica de filtragem bastante utilizada em cenários de rastreamento de alvos manobrantos, que é o filtro de partículas. Sua estrutura está baseada em determinar o vetor de estados (partícula) através da aproximação do filtro bayesiano ótimo por aproximações com simulações de Monte Carlo. As duas etapas que definem a técnica do filtro de partículas são a amostragem sequencial por importância, em que são calculados os pesos por importância, e a reamostragem, que, como o próprio nome diz, reamostra as partículas de forma a evitar a degeneração do algoritmo da técnica de PF, replicando as partículas com pesos por importância maiores e eliminando aquelas com pesos por importância baixos.

Nesta técnica, para obtermos as estimativas do vetor de estados a cada instante de tempo (chamada estimativa global), são feitas ponderações das partículas com seus respectivos pesos por importância. No entanto, foi visto que é possível utilizar a técnica de PF com as estimativas de cada uma das partículas, resultantes de uma filtragem, ao invés das próprias partículas. Desta forma, além de obtermos a função de verossimilhança de uma forma mais fácil, é possível obter uma estimativa global mais precisa, pois quando as partículas passam pelo processo de filtragem, elas incorporam informações de observação vindas do radar.

Algo a ser observado é a diferença do custo computacional de um ciclo da técnica de PF (equação (5.31)) em relação ao custo da técnica de IMM (equação (4.29)): observando as expressões obtidas, podemos dizer que elas são semelhantes, mas o que diferencia os dois custos é o número de partículas N , que é um valor bem mais elevado em relação ao número de filtros M da técnica de IMM. Desta forma, o custo computacional de um ciclo da técnica de PF é mais elevado em relação ao custo computacional da técnica de IMM.

Antes de elaborarmos a proposta de utilizar a informação da velocidade radial para a obtenção da velocidade angular, um problema que surgiu com a técnica de PF foi na sua utilização com a ideia de saltos markovianos. Testes foram feitos, utilizando um número finito de valores de $|\vec{\omega}_k^i|$ cada um representando um estado de Markov com seu respectivo modelo dinâmico. No entanto, os resultados ficaram muito aquém do esperado, com baixo desempenho, mesmo com um número razoável de estados (nove, no total), fazendo com que optássemos em não tratar a técnica do PF com saltos markovianos. A proposta atual define o vetor de velocidade angular $\vec{\omega}$ com o auxílio da informação da velocidade radial.

A proposta apresentada neste capítulo utilizando a técnica de PF, a partir do Algoritmo 5.3, é baseada em sorteios de $\vec{\omega}_k^i$ a partir da informação da velocidade radial. Nesta proposta, o valores

de $\vec{\omega}_k^i$ sorteados para cada um dos vetores de estado, a cada instante de tempo, definem os modelos dinâmicos de cada partícula válidos para o próximo intervalo. Os sorteios de $\vec{\omega}_k^i$ dependem das constantes α_1 e α_2 , que são fatores de escala que modificam a confiabilidade no sorteio de $\vec{\omega}_k^i$. Aqui estas constantes foram fixadas em certos valores, mas poderiam ser variantes da seguinte forma: incluímos uma nova variável β , que passa a multiplicar a variância de $\vec{\omega}_{k+1}^i$. Se o valor de $\vec{\omega}_{k+1}^i$ estiver ruim, diminuimos α_l , $l = 1, 2$ e aumentamos β ; caso o valor esteja bom, realizamos o processo inverso. Esta ideia poderá ser elaborada em trabalhos futuros.

Capítulo 6

Testes e Resultados

Neste capítulo serão apresentados diversos resultados de testes feitos utilizando o *software* MATLAB. Estes experimentos numéricos estão divididos em duas etapas: comparações de desempenho entre filtros e comparações de desempenho entre técnicas de filtragem.

A primeira delas consiste em comparar o desempenho de dois bancos de filtros utilizando a técnica IMM, com cada um dos bancos compostos por dois filtros. Um dos bancos é formado apenas por EKF's e o outro é formado apenas por filtros BLUE. O intuito desta comparação está em determinar, através dos bancos de filtros, quais destes filtros possuem o melhor desempenho. Assim, na etapa de comparações de desempenhos entre técnicas de filtragem, será utilizado apenas o filtro que se sair melhor deste comparativo. Em [12], foi feito um teste de desempenho semelhante comparando estes dois filtros.

A segunda etapa de comparação tem como finalidade avaliar o desempenho entre os três diferentes bancos de filtros IMM, detalhados na Seção 4.3, e a proposta referente ao PF, apresentada na Seção 5.6. Os critérios de desempenho foram baseados em dois tipos de análise: verificação de erros RMS para diferentes tipos de trajetórias realizadas por um alvo e comparativos percentuais de melhora e piora do desempenho da proposta referente ao PF em relação aos três bancos de filtros IMM, com o intuito de definir qual das técnicas de filtragem obteve o melhor desempenho no rastreamento.

Ainda nesta segunda etapa, também foram incluídas algumas comparações de desempenho entre as duas técnicas de filtragem para cenários em que alvos executam curvas com grandes acelerações centrípetas, comumente medidas em números de g — por exemplo, curvas realizadas em $5g$ — em que g é a aceleração da gravidade da Terra e vale $9,8m/s^2$.

6.1 Testes de Desempenho — EKF *versus* Filtro BLUE

A primeira etapa de testes consiste em comparar o desempenho dos filtros EKF e BLUE. Para isso, optou-se em utilizar a técnica de IMM padrão, como visto no Capítulo 4, com dois bancos de filtros formados da seguinte forma: o banco IMM_e, composto por dois EKF's e o banco IMM_b, composto por dois filtros BLUE. Para fazer esta comparação, foi escolhido testar estes bancos de filtros no caso bidimensional, isto é, com as trajetórias contidas no plano $p_z = 0$. Como estamos considerando que as trajetórias estão ocorrendo no plano xy , devemos considerar também que a velocidade na direção do eixo z , o ângulo de elevação e sua variância sejam todos nulos. O intuito é fazer um teste de desempenho simples e definir qual dos dois filtros será utilizado nos testes mais complexos, em três dimensões, na segunda etapa de testes. Desta forma, os modelos que representam cada um dos filtros são: o modelo CV e o modelo CT_{ph}, definidos no Capítulo 2, equações (2.7) e (2.17), respectivamente, ambos desconsiderando as coordenadas p_z e v_z .

O critério de desempenho adotado foi baseado em erros RMS da diferença entre o valor estimado e o valor real (sem qualquer tipo de ruído) do vetor de posições, $\hat{p}_{k|k} = [\hat{p}_x \hat{p}_y]_{k|k}^T$ e $p_k = [p_x p_y]_k^T$, respectivamente. Este critério foi aplicado da seguinte forma: calculou-se a evolução do erro RMS no tempo para cada uma das coordenadas de posição, p_x e p_y , tanto para a trajetória por completo quanto por trechos de trajetória (por exemplo, uma trajetória de dois trechos: um trecho em linha reta e outro em curva); a evolução do erro RMS no tempo para o vetor de posições p_k , tanto para trajetória completa, quanto para trechos de trajetória, é dado por:

$$\text{RMS}_k^{p_x} = \sqrt{\frac{1}{k} (\text{res}_k^x)^T \text{res}_k^x}, k = 0, \dots, n \quad (6.1)$$

$$\text{RMS}_k^{p_y} = \sqrt{\frac{1}{k} (\text{res}_k^y)^T \text{res}_k^y}, k = 0, \dots, n \quad (6.2)$$

em que $\text{RMS}_k \in \mathbb{R}$ é o erro RMS no instante de tempo k , $\text{res}_k^x, \text{res}_k^y \in \mathbb{R}^k, k = 0, \dots, n$ são vetores cujos elementos são diferenças entre a posição real e a estimativa da posição de cada componente, ou seja, $\text{res}_k^x = [p_{x0} - \hat{p}_{x0|0} \cdots p_{xk} - \hat{p}_{xk|k}]^T$ e $\text{res}_k^y = [p_{y0} - \hat{p}_{y0|0} \cdots p_{yk} - \hat{p}_{yk|k}]^T$ ¹ e n é o número de dados da trajetória ou do trecho da trajetória. A partir dos n valores obtidos de RMS_k , calculou-se o erro RMS médio para cada componente de posição por um cálculo de média simples, para trajetória completa e por trecho, da seguinte forma:

$$\overline{\text{RMS}}_{p_x} = \frac{\sum_{k=0}^n \text{RMS}_k^{p_x}}{n} \quad (6.3)$$

$$\overline{\text{RMS}}_{p_y} = \frac{\sum_{k=0}^n \text{RMS}_k^{p_y}}{n} \quad (6.4)$$

¹Note que eles aumentam de tamanho a cada instante de tempo k

Por fim, criou-se um critério para que facilite a análise de desempenho, de tal forma que seja necessário analisar apenas um valor no momento de comparações. Este critério nada mais é do que analisar a norma de $\overline{\text{RMS}}$, ou seja,

$$\|\overline{\text{RMS}}\| = \sqrt{\overline{\text{RMS}}_{p_x}^2 + \overline{\text{RMS}}_{p_y}^2} \quad (6.5)$$

sendo este o critério mais analisado durante a apresentação dos resultados.

Determinado o critério de avaliação, passemos para o dados dos testes. Como estamos lidando com a técnica de IMM, vista no Capítulo 4, precisamos definir qual é a matriz de transição de probabilidades de Markov \mathbb{P} . Nestas avaliações, foi adotada a seguinte matriz

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,05 & 0,95 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

As matrizes de covariância $Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ utilizadas foram determinadas através de testes de filtragem, tentando encontrar o melhor ajuste para o melhor desempenho de cada um dos filtros. A matriz $R_k \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, que só é utilizada no EKF como foi visto nas equações de filtragem do Capítulo 3, está definida no Apêndice A. Desta maneira, as matrizes Q para os modelos CV são (considerando $T = 4s$):

Tab. 6.1: Matrizes Q para o modelo CV — caso bidimensional.

<i>Filtro</i>	<i>Matriz Q</i>
EKF	$6T^2 I_2$
BLUE	$4T^2 I_2$

Para os filtros que são responsáveis pelo modelo CT_{ph} , as matrizes Q são:

Tab. 6.2: Matrizes Q para o modelo CT_{ph} — caso bidimensional.

<i>Filtro</i>	<i>Matriz Q</i>
EKF	$\text{diag}(6T^2 I_2, 0,01)$
BLUE	$\text{diag}(5T^2 I_2, 0,006)$

Por fim, as variâncias do alcance, do ângulo de azimute e da velocidade radial, que são dados de precisão obtidos de especificação, são $\sigma_r^2 = 75^2$, $\sigma_a^2 = 0,0175^2$ e $\sigma_{v_r}^2 = 2^2$, respectivamente. A seguir, estão os resultados de desempenho obtidos para cinco tipos de trajetórias: um retilínea, duas

em curva aberta e duas em curva fechada.

6.1.1 Trajetória Retilínea

A primeira das trajetórias testadas é trajetória retilínea, em que o alvo aproxima-se do radar, que está posicionado na origem, e depois de passar próximo do radar, o alvo se afasta deste. Esta trajetória esta representada na Figura 6.1.

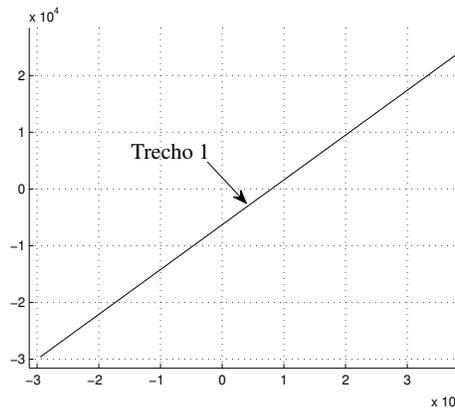


Fig. 6.1: Trajetória retilínea.

Para esta trajetória, considerou-se, para ambos os bancos, a estimativa inicial e a matriz de covariância inicial do erro de estimativa estado como sendo:

$$\hat{x}_{0|0} = [-30000m \ 196,16m/s \ -30000m \ 154,98m/s]^T \quad (6.7)$$

$$P_{0|0} = \text{diag}(1500^2, (1500^2)/4, 1500^2, (1500^2)/4) \quad (6.8)$$

A partir dos resultados de filtragem desta trajetória, foi elaborada uma tabela comparativa entre os valores de $\overline{\text{RMS}}_{p_x}$, $\overline{\text{RMS}}_{p_y}$ e $\|\overline{\text{RMS}}\|$ para cada um dos bancos, IMM_e e IMM_b . Os seus valores estão na Tabela 6.3.

Tab. 6.3: $\overline{\text{RMS}}_{p_x}$, $\overline{\text{RMS}}_{p_y}$ e $\|\overline{\text{RMS}}\|$ — Trajetória retilínea.

Banco	$\overline{\text{RMS}}_{p_x}$	$\overline{\text{RMS}}_{p_y}$	$\ \overline{\text{RMS}}\ $
IMM_e	445,8958	414,5535	608,8331
IMM_b	216,7650	207,2990	299,9332

Observando a Tabela 6.3, notamos uma superioridade do banco de filtros BLUE tanto separadamente para as posições p_x e p_y , quanto para a trajetória como um todo. Os valores obtidos para o

banco IMM_b são bem baixos em relação ao banco IMM_e . Apesar de ser uma trajetória simples, isto já dá o indício de que o banco IMM_b é melhor do que o banco IMM_e . Para continuar com a análise de desempenhos dos dois bancos, estes foram testados para uma trajetória em curva aberta, denominada curva suave.

6.1.2 Trajetória em Curva Suave

A segunda e terceira trajetórias deixam de ser retilíneas e passam a ser em curva, com um raio de curvatura elevado, por isso chamado de curva suave. Estas duas trajetórias diferenciam-se somente pela sua posição inicial, em que uma delas a curva é feita próxima do radar (posição inicial $p_x^0 = p_y^0 - 30000m$) e a outra realiza a sua curva distanciando-se do radar (posição inicial $p_x^0 = 0m$ e $p_y^0 = 30000m$). O radar novamente se encontra na origem. A Figura 6.2 mostra uma das trajetórias em curva suave.

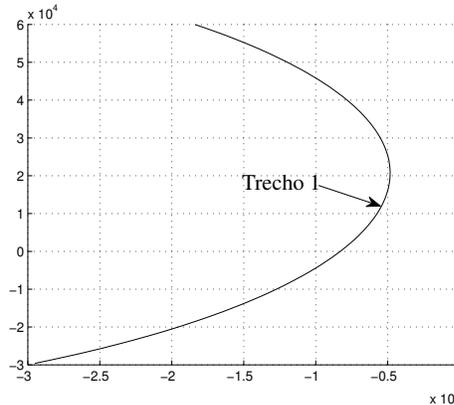


Fig. 6.2: Curva suave.

Para a curva feita próxima ao radar, considerou-se, para ambos os bancos, a estimativa inicial e a matriz de covariância inicial do erro de estimativa do estado como sendo:

$$\hat{x}_{0|0} = [-30000m \ 196,16m/s \ -30000m \ 154,98m/s]^T \quad (6.9)$$

$$P_{0|0} = \text{diag}(1500^2, (1500^2)/4, 1500^2, (1500^2)/4) \quad (6.10)$$

e para a curva feita longe do radar, considerou-se

$$\hat{x}_{0|0} = [0m \ 196,16m/s \ 30000m \ 154,98m/s]^T \quad (6.11)$$

$$P_{0|0} = \text{diag}(1500^2, (1500^2)/4, 1500^2, (1500^2)/4) \quad (6.12)$$

Mais uma vez, foram elaboradas, para estas trajetórias, as tabelas comparativas entre os valores de $\overline{\text{RMS}}_{p_x}$, $\overline{\text{RMS}}_{p_y}$ e $\|\overline{\text{RMS}}\|$ para cada um dos bancos, IMM_e e IMM_b . Os seus valores estão nas Tabelas 6.4 e 6.5.

Tab. 6.4: $\overline{\text{RMS}}_{p_x}$, $\overline{\text{RMS}}_{p_y}$ e $\|\overline{\text{RMS}}\|$ — Trajetória curva suave — $(p_x^0, p_y^0) = (-30000m, -30000m)$

<i>Banco</i>	$\overline{\text{RMS}}_{p_x}$	$\overline{\text{RMS}}_{p_y}$	$\ \overline{\text{RMS}}\ $
IMM_e	389,4559	380,0261	530,0165
IMM_b	366,5017	357,2556	511,8154

Tab. 6.5: $\overline{\text{RMS}}_{p_x}$, $\overline{\text{RMS}}_{p_y}$ e $\|\overline{\text{RMS}}\|$ — Trajetória curva suave — $(p_x^0, p_y^0) = (0m, 30000m)$

<i>Banco</i>	$\overline{\text{RMS}}_{p_x}$	$\overline{\text{RMS}}_{p_y}$	$\ \overline{\text{RMS}}\ $
IMM_e	645,1887	156,8600	663,9831
IMM_b	498,2879	131,3229	515,3024

Analisando as tabelas acima, podemos perceber que, mesmo com valores mais próximos de $\overline{\text{RMS}}_{p_x}$, $\overline{\text{RMS}}_{p_y}$ e $\|\overline{\text{RMS}}\|$, o banco IMM_b ainda possui um desempenho melhor em relação ao IMM_e . Note que a maioria dos valores apresentados na Tabela 6.5 são mais elevados do que aqueles apresentados na Tabela 6.4. Isso mostra o efeito da distância da trajetória em relação ao radar: quanto mais distante do radar, mais imprecisas são as observações e, portanto, menos corretas são as estimativas e, conseqüentemente, o desempenho cai. Mesmo assim, a superioridade do banco IMM_b é visível e, relação ao banco IMM_e . A última análise de desempenho será feita baseada em duas trajetórias em curva fechada, chamada de manobra.

6.1.3 Trajetória Manobra

As duas últimas trajetórias, diferentemente dos tipos apresentados nas seções 6.1.1 e 6.1.2, são compostas por um número maior de trechos — três, no caso — misturando as trajetórias em reta e em curva, só que esta última, desta vez, com um raio de curvatura menor. Novamente, estas duas trajetórias diferenciam-se somente pela sua posição inicial, em que uma delas a curva é feita próxima do radar (posição inicial $p_x^0 = p_y^0 = -30000m$) e a outra realiza a sua curva distanciando-se do radar (posição inicial $p_x^0 = 30000m$ e $p_y^0 = 0m$). O radar, como de costume, encontra-se na origem. A Figura 6.3 mostra uma das trajetórias em manobra.

Como estas duas trajetórias são compostas por três trechos, optou-se, além de apresentar as tabelas com valores de $\overline{\text{RMS}}_{p_x}$, $\overline{\text{RMS}}_{p_y}$ e $\|\overline{\text{RMS}}\|$, em confeccionar dois gráficos de barras para os $\|\overline{\text{RMS}}\|$,

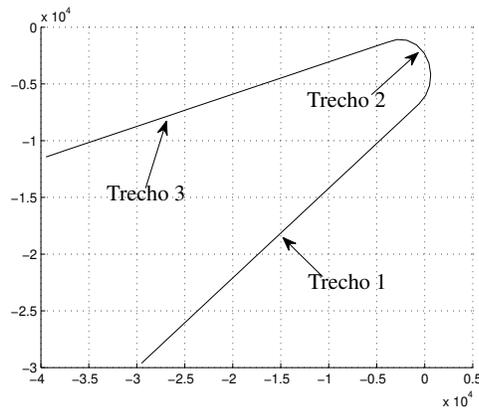
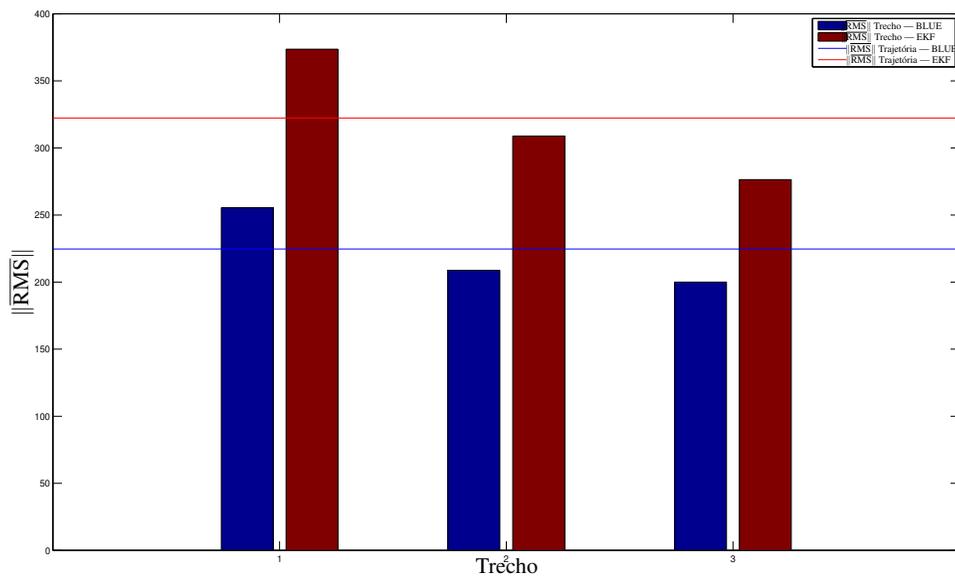


Fig. 6.3: Manobra.

facilitando a visualização de quais dos bancos de filtros se saíram melhor nos seus desempenhos frente às trajetórias. Foram consideradas para a trajetória com posição inicial em $p_x^0 = p_y^0 = -30000m$, a estimativa inicial $\hat{x}_{0|0}$ e a matriz $P_{0|0}$ dadas em (6.9) e (6.10), respectivamente. Desta forma, para a trajetória com posição inicial em $p_x^0 = p_y^0 = -30000m$, foram obtidos as tabelas e os gráficos com valores de $\|\overline{\text{RMS}}\|$, tanto para a trajetória completa (linhas horizontais) e por trecho de trajetória (barras verticais):

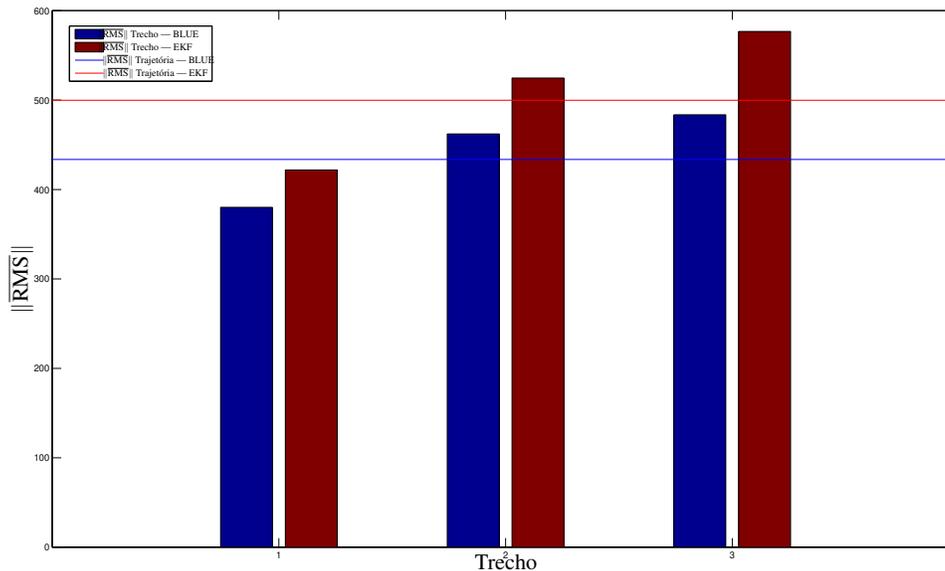
Fig. 6.4: Gráfico de $\|\overline{\text{RMS}}\|$ - Manobra - $(p_x^0, p_y^0) = (-30000m, -30000m)$.

Tab. 6.6: $\overline{\text{RMS}}_{p_x}$ e $\overline{\text{RMS}}_{p_y}$ — Trajetória manobra — $(p_x^0, p_y^0) = (-30000m, -30000m)$

Trecho	Banco	$\overline{\text{RMS}}_{p_x}$	$\overline{\text{RMS}}_{p_y}$
1	IMM _e	279,3454	248,1156
	IMM _b	187,7516	173,1332
2	IMM _e	237,2330	197,6116
	IMM _b	159,9978	134,0376
3	IMM _e	215,4830	151,4864
	IMM _b	166,9290	110,1858

Observando o gráfico 6.4, vemos mais uma vez um bom desempenho do banco formado por filtros BLUE, mesmo com os valores apresentados serem próximos um dos outros. Veja que na Figura 6.4, as barras diminuem de acordo com a mudança de trecho; isto se dá pelo fato de que no início há uma adaptação das estimativas dos filtros, que vão sendo corrigidas pelos filtros com o passar do tempo e, conseqüentemente, o desempenho vai melhorando.

Agora, para a outra trajetória manobra, foram consideradas para a trajetória com posição inicial em $p_x^0 = 30000m$ e $p_y^0 = 0m$, a estimativa inicial $\hat{x}_{0|0}$ e a matriz $P_{0|0}$ dadas em (6.11) e (6.12), respectivamente.

Fig. 6.5: Gráfico de $\|\overline{\text{RMS}}\|$ - Manobra - $(p_x^0, p_y^0) = (0m, 30000m)$.

Observando a Tabela 6.7, vemos que, para alguns poucos valores de $\overline{\text{RMS}}_{p_y}$, o banco IMM_e

Tab. 6.7: $\overline{\text{RMS}}_{p_x}$ e $\overline{\text{RMS}}_{p_y}$ — Trajetória manobra — $(p_x^0, p_y^0) = (30000m, 0m)$

Trecho	Banco	$\overline{\text{RMS}}_{p_x}$	$\overline{\text{RMS}}_{p_y}$
1	IMM _e	409,8622	99,8393
	IMM _b	367,5003	96,7870
2	IMM _e	485,3013	199,4446
	IMM _b	429,1280	171,5857
3	IMM _e	511,6211	266,2097
	IMM _b	431,7341	217,8153

supera o banco IMM_b por duas vezes, mas os valores são próximos. Entretanto, na grande maioria das vezes, novamente, o banco IMM_b supera o banco formado pelos EKF's. Este bom desempenho também pode ser notado na Figura 6.5, tanto em cada um dos trechos, quanto na trajetória total. Note um fato curioso neste mesmo gráfico: os valores de $\|\overline{\text{RMS}}\|$, apesar de apresentarem uma estabilidade, aumentam de trecho para trecho, diferentemente do visto na Figura 6.4. Isto ocorreu pelo fato do alvo estar se afastando do radar e, como foi dito anteriormente, quanto mais afastado do radar, piores ficam as estimativas, devido à diminuição da qualidade das medidas. Com isso, acabam resultando nos valores um pouco mais elevados de $\|\overline{\text{RMS}}\|$.

Uma possível razão para que o desempenho do banco IMM_b formado por dois filtros BLUE tenha sido melhor em relação ao desempenho do banco de filtros IMM_e é a forma característica da matriz $S_{k+1|k}$, presente nas equações de filtragem, cuja estrutura depende de forma significativa do alcance (r), fazendo com que esta matriz tenha variações de acordo com mudanças de alcance o alvo que está sendo rastreado, tendo uma precisão maior pelo fato de ser mais realista, isto é, maior a distância do radar (alcance), maior o erro e vice-versa.

Portanto, com base nos resultados obtidos, o filtro BLUE, é o filtro escolhido para ser utilizado nas análises de avaliações e resultados da Seção 6.2. Nesta seção, serão confrontadas as propostas apresentadas nas seções 4.3 e 5.6, envolvendo as duas técnicas de filtragem, IMM e PF.

6.2 Testes de Desempenho — IMM versus PF

Esta segunda etapa de testes tem como objetivo comparar o desempenho de duas técnicas propostas nos capítulos anteriores: três diferentes bancos de filtros com a técnica IMM diante do PF, com a utilização da velocidade radial para cálculo da velocidade angular, todos baseados em filtros BLUE, como dito na seção anterior. Uma observação deve ser feita neste momento: a técnica de PF, antes da proposta na Seção 5.6 e utilizada nas avaliações descritas nas próximas seções, foi testada para o caso de sistemas sujeitos a saltos markovianos, fazendo com que cada estado de Markov correspondesse

a um valor de velocidade angular de forma análoga ao considerado na técnica IMM. Foram feitos testes baseados nesta idéia, porém os desempenhos resultantes desta aplicação foram muito aquém do esperado, mesmo utilizando um número elevado de estados de Markov (nove estados, no total). Mesmo elevando o número de estados, o desempenho não melhorava de forma satisfatória. Desta forma, decidiu-se não tratar esta aplicação, pois todos os seus resultados não foram razoáveis.

Feitas as considerações iniciais, passemos para o critério de desempenho adotado. O critério foi o mesmo apresentado na Seção 6.1, só que desta vez considerando as informações relativas a p_z e v_z , ou seja, sob o ponto de vista tridimensional. Portanto, basta estender as equações do caso bidimensional, levando em conta as informações de z , logo:

$$\text{RMS}_k^{p_x} = \sqrt{\frac{1}{k}(\text{res}_k^x)^T \text{res}_k^x}, k = 0, \dots, n \quad (6.13)$$

$$\text{RMS}_k^{p_y} = \sqrt{\frac{1}{k}(\text{res}_k^y)^T \text{res}_k^y}, k = 0, \dots, n \quad (6.14)$$

$$\text{RMS}_k^{p_z} = \sqrt{\frac{1}{k}(\text{res}_k^z)^T \text{res}_k^z}, k = 0, \dots, n \quad (6.15)$$

$$\overline{\text{RMS}}_{p_x} = \frac{\sum_{k=0}^n \text{RMS}_k^{p_x}}{n} \quad (6.16)$$

$$\overline{\text{RMS}}_{p_y} = \frac{\sum_{k=0}^n \text{RMS}_k^{p_y}}{n} \quad (6.17)$$

$$\overline{\text{RMS}}_{p_z} = \frac{\sum_{k=0}^n \text{RMS}_k^{p_z}}{n} \quad (6.18)$$

$$\|\overline{\text{RMS}}\| = \sqrt{\overline{\text{RMS}}_{p_x}^2 + \overline{\text{RMS}}_{p_y}^2 + \overline{\text{RMS}}_{p_z}^2} \quad (6.19)$$

Baseado nestes valores, mais especificamente em $\|\overline{\text{RMS}}\|$, foi determinado um outro critério de desempenho, que visa analisar a melhora ou a piora entre as técnicas de IMM e a técnica de PF. Para isso, foi calculado o seguinte valor, tanto por trecho, quanto para a trajetória toda, que quantifica quanto a técnica de PF melhorou ou piorou em relação à técnica de IMM. Sua expressão é a seguinte

$$D = \left(1 - \frac{\|\overline{\text{RMS}}\|_{pf}}{\|\overline{\text{RMS}}\|_{imm}}\right) \times 100\% \quad (6.20)$$

em que $\|\overline{\text{RMS}}\|_{pf}$ é a norma do vetor $\|\overline{\text{RMS}}\|$ para a técnica de PF e $\|\overline{\text{RMS}}\|_{imm}$ é a norma do vetor $\|\overline{\text{RMS}}\|$ para a técnica de IMM. O valor D funciona da seguinte forma: quando $\|\overline{\text{RMS}}\|_{pf}$ menor do que $\|\overline{\text{RMS}}\|_{imm}$, ou seja, a técnica de PF teve um desempenho melhor do que a técnica de IMM, o valor $D > 0$ indica a melhora que a técnica de PF teve em relação à técnica de IMM; por exemplo, a técnica de PF teve uma melhora de 2% em relação à técnica de IMM. No caso contrário, isto é, quando a técnica de PF tiver um desempenho pior do que a técnica de IMM, o valor $D < 0$ vai

indicar a piora que a técnica de PF teve em relação à técnica de IMM; por exemplo, a técnica de PF teve uma piora de -5% em relação à técnica de IMM. A notação de sinais nos casos de melhora (+) e piora (−) facilita saber quando é uma ou outra.

Determinados os critérios de avaliação, passemos para o dados dos testes. Para a técnica de IMM, precisamos definir qual é a matriz de transição de probabilidades de Markov \mathbb{P} . Nestes testes, foi adotada a seguinte matriz, que serve para os três bancos de filtros propostos:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0,90 & 0,10/(n-1) & \cdots & 0,10/(n-1) \\ 0,10/(n-1) & 0,90 & \cdots & 0,10/(n-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0,10/(n-1) & 0,10/(n-1) & \cdots & 0,90 \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad n = 3, 5, 8. \quad (6.21)$$

Para os três bancos de filtros propostos na técnica de IMM, as matrizes de covariância utilizadas $Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ (modelo CV), $Q \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ (modelo CT_{ph}), $Q \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ (modelo CT_{pa}) foram determinadas através de testes de filtragem, tentando encontrar o melhor ajuste para o melhor desempenho de cada um dos filtros. Desta maneira, as matrizes Q para os três modelos são (considerando $T = 4s$):

Tab. 6.8: Matrizes Q — IMM.

Modelo	Matriz Q
CV	$4T^2 I_3$
CT _{ph}	$\text{diag}(5T^2 I_3, 0,006)$
CT _{pa}	$\text{diag}(7T^2 I_3, 0,0012 I_3)$

Para a técnica de PF, a matriz $Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ foi definida como sendo $Q = 7T^2 I_3$. As variâncias do alcance, do ângulo de azimute, do ângulo de elevação e da velocidade radial, que são dados de precisão obtidos de especificação, são $\sigma_r^2 = 75^2$, $\sigma_a^2 = 0,0175^2$, $\sigma_e^2 = 0,0175^2$ e $\sigma_{v_r}^2 = 2^2$, respectivamente. Além das matrizes Q e R , é preciso definir o número de partículas N , os valores das variâncias $\sigma_{\omega_x}^2$, $\sigma_{\omega_y}^2$ e $\sigma_{\omega_z}^2$ de ω_x , ω_y e ω_z , respectivamente e das constantes α_1 , α_2 e β . O número de partículas adotado foi de $N = 100$. Outras quantidades foram testadas, como $N = 50$, $N = 250$ e $N = 500$, mas nenhuma delas acrescentou melhorias nas avaliações e nos desempenhos. As variâncias foram assim definidas: $\sigma_{\omega_x}^2 = \sigma_{\omega_y}^2 = \sigma_{\omega_z}^2 = 0,008$; já os valores de α_1 e α_2 que tiveram o melhor ajuste para um bom desempenho foram $\alpha_1 = 0,4$ e $\alpha_2 = 0,8$.

Por fim, restam apenas definir $\hat{x}_{0|0}$ e $P_{0|0}$. Estes valores são adotados para ambas as técnicas e são os seguintes:

$$\hat{x}_{0|0} = [-30000m \ 196,16m/s \ -30000m \ 154,98m/s \ 600m \ 0m/s]^T \quad (6.22)$$

$$P_{0|0} = \text{diag} (1500^2, (1500^2)/4, 1500^2, (1500^2)/4, 1500^2, (1500^2)/4) \quad (6.23)$$

Nas próximas seções, apresentaremos os resultados referentes aos testes feitos com três trajetórias-base, *loop*, manobra e ziguezague, com variações em cima destas duas últimas.

6.2.1 Trajetória *Loop*

A primeira trajetória testada é a trajetória *loop*, que é formada por três trechos: uma linha reta, uma volta circular em que o alvo chega a ficar de ponta-cabeça e finaliza com uma trajetória retilínea. A Figura 6.6 ilustra a estrutura de uma trajetória *loop*.

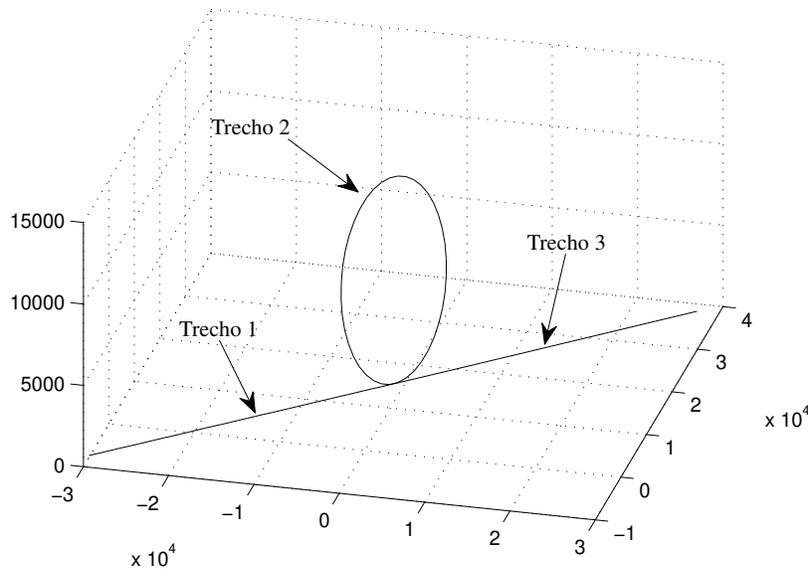
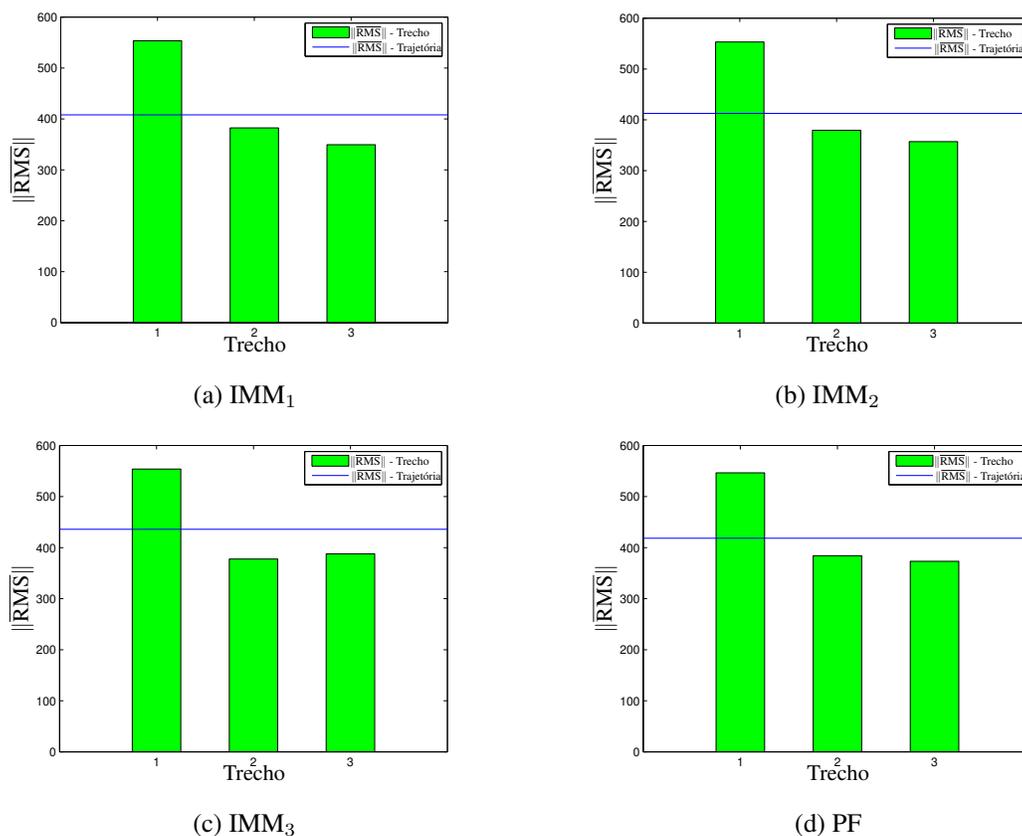


Fig. 6.6: Trajetória *Loop*.

Para esta trajetória, foram obtidos quatro gráficos que tratam dos valores de $\|\overline{\text{RMS}}\|$ para cada uma das técnicas, três para o IMM e um para o PF. Os gráficos encontram-se na Figura 6.7.

Fig. 6.7: Gráficos de $\|\overline{\text{RMS}}\|$ - Loop.

Além dos gráficos da Figura 6.7, também foi montada a Tabela 6.9, que contém os valores de D da equação (6.20). Lembrando que as melhoras (valores percentuais positivos) e pioras (valores percentuais negativos) são de técnica de PF em relação à técnica de IMM.

Tab. 6.9: Tabela comparativa entre IMM e PF — Trajetória Loop

Banco	Filtro de Partículas			
	Trecho 1	Trecho 2	Trecho 3	Trajectoria
IMM ₁	1,21%	-0,42%	-6,81%	-2,55%
IMM ₂	1,17%	-1,22%	-4,55%	-1,39%
IMM ₃	1,31%	-1,69%	3,74%	4,00%

Analisando os gráficos da Figura 6.7, vemos que as quatro propostas possuem um desempenho muito semelhante entre si, só podendo fazer a distinção de qual se saiu melhor entre a técnica de IMM

e de PF através valores da Tabela 6.9. Observando estes valores, vemos que a técnica de PF teve um desempenho um pouco pior em relação aos três bancos da técnica de IMM, pois a maioria dos valores de D são negativos, tendo o banco IMM₁ se saído melhor neste experimento.

6.2.2 Trajetória Manobra

A trajetória testada nesta seção é a trajetória manobra, idêntica à mostrada na Figura 6.3, só que ocorrendo em um plano no espaço. A Figura 6.6 ilustra como fica a trajetória da Figura 6.3 para o caso tridimensional.

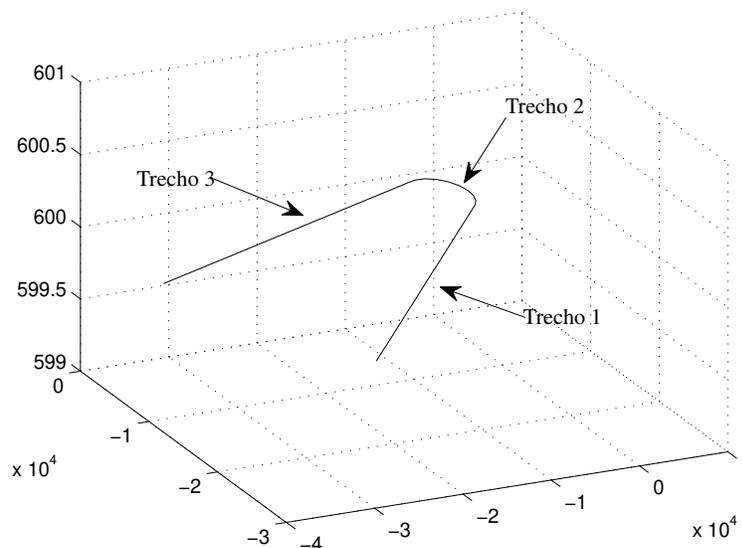
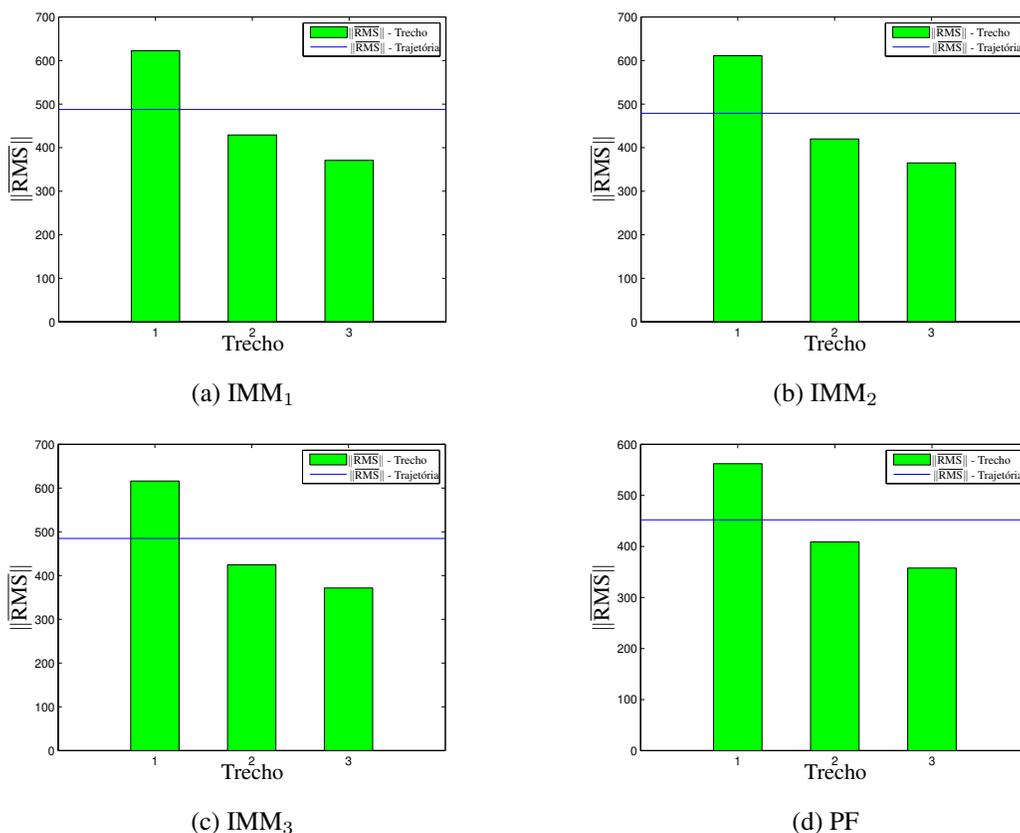


Fig. 6.8: Trajetória Manobra.

As avaliações realizadas foram feitas utilizando oito trajetórias baseadas na manobra, sendo uma delas ocorrendo em um plano paralelo ao plano xy (inclinação 0°) e as outras sete distintas pela inclinação do plano onde ocorre a trajetória. As sete inclinações testadas foram: -60° , -45° , -30° , $+30^\circ$, $+45^\circ$, $+60^\circ$ e $+90^\circ$. Para a manobra ocorrendo em um plano de inclinação de -60° , foram gerados os gráficos da Figura 6.9 e a Tabela 6.10 de valores de D .

Fig. 6.9: Gráficos de $\|\overline{\text{RMS}}\|$ - Manobra (inclinação -60°).Tab. 6.10: Tabela comparativa entre IMM e PF — Manobra (inclinação -60°)

Banco	Filtro de Partículas			
	Trecho 1	Trecho 2	Trecho 3	Trajectoria
IMM ₁	9,70%	4,70%	3,54%	7,30%
IMM ₂	8,00%	2,65%	2,00%	5,62%
IMM ₃	8,77%	3,67%	3,74%	6,73%

Para a manobra ocorrendo em um plano de inclinação de -60° , a técnica de PF obteve um desempenho muito bom, podendo ser claramente visto nos gráficos da Figura 6.9 e comprovado pelos valores que compõem a Tabela 6.10. Note também nas Figuras 6.9a, 6.9b e 6.9c, referentes aos três bancos de filtros IMM, que seus desempenhos foram muito próximos, indicando que realmente a técnica de PF teve um bom desempenho.

Agora, para a manobra ocorrendo em um plano de inclinação de -45° , foram gerados os gráficos da Figura 6.10 e a Tabela 6.11.

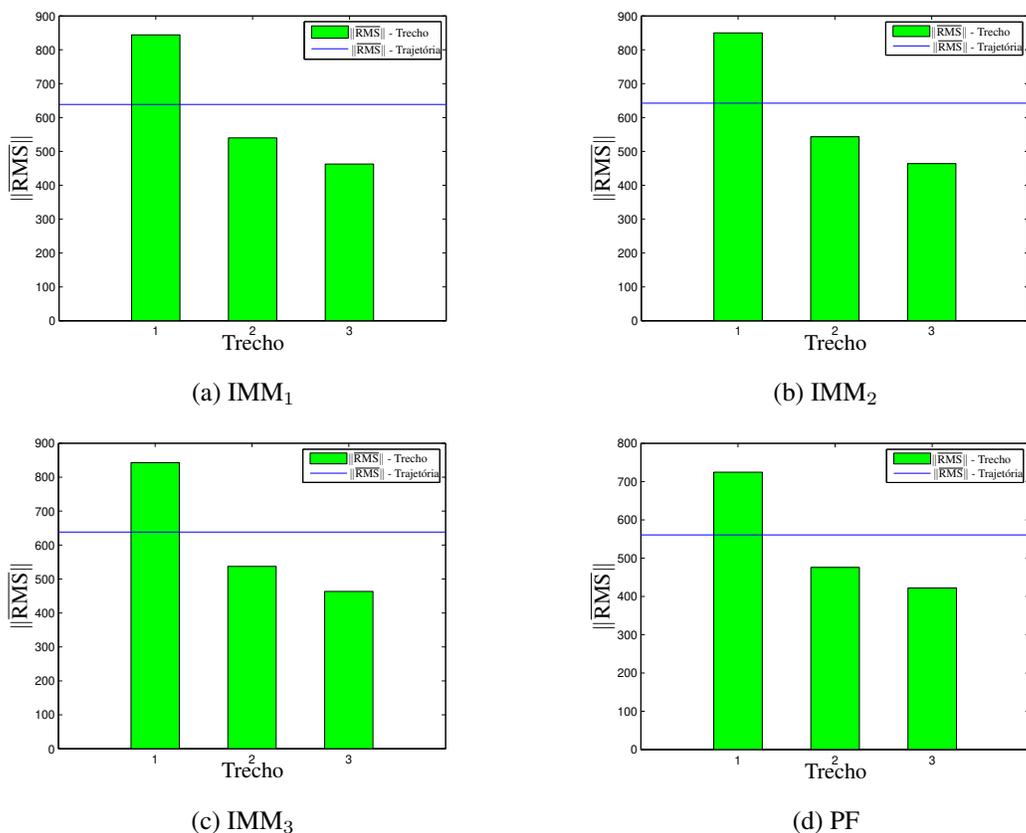


Fig. 6.10: Gráficos de $\|\overline{\text{RMS}}\|$ - Manobra (inclinação -45°).

Tab. 6.11: Tabela comparativa entre IMM e PF — Manobra (inclinação -45°)

Banco	Filtro de Partículas			
	Trecho 1	Trecho 2	Trecho 3	Trajectoria
IMM ₁	14,15%	11,87%	8,79%	12,21%
IMM ₂	14,74%	12,41%	9,05%	12,70%
IMM ₃	14,02%	11,44%	8,96%	12,15%

A técnica de PF, mais uma vez, foi superior aos três bancos IMM, e desta vez com um ótimo desempenho, comprovado pelos valores encontrados na Tabela 6.11. Perceba que, novamente, nas Figuras 6.10a, 6.10b e 6.10c, referentes aos três bancos de filtros IMM, que seus desempenhos foram

praticamente iguais, mostrando a superioridade da técnica de PF frente à técnica de IMM.

Seguindo agora para a trajetória manobra com inclinação de -30° , foram obtidos os gráficos da Figura 6.11 e a Tabela 6.12.

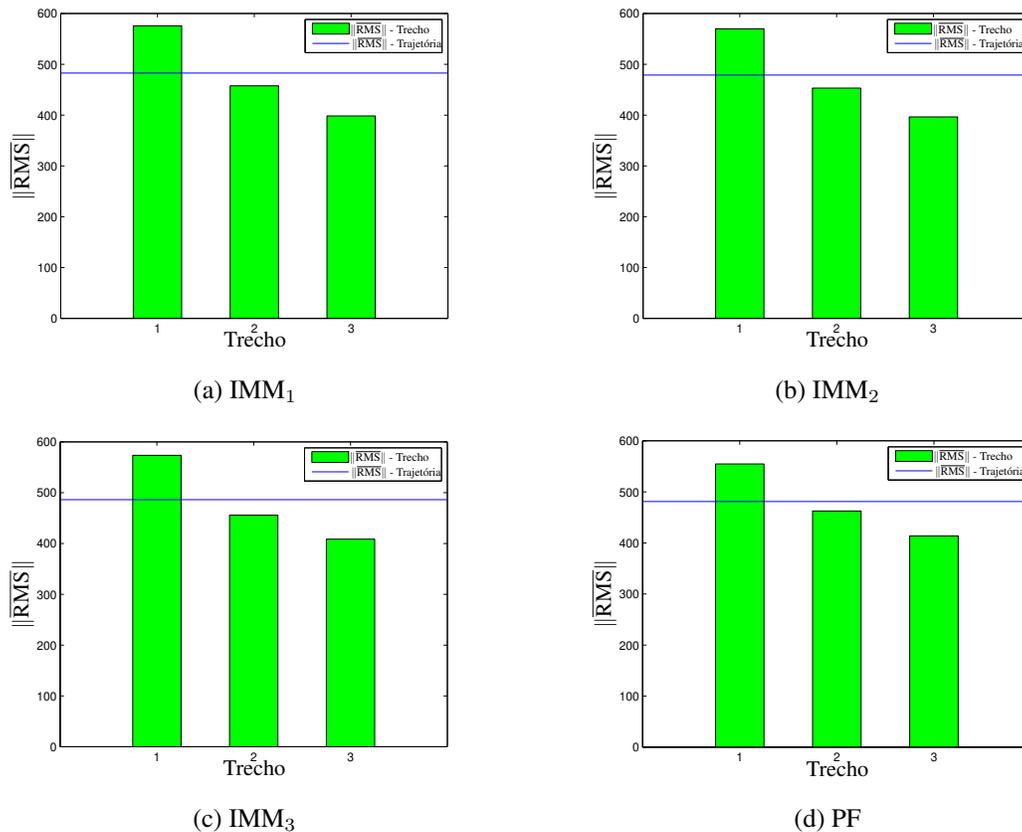


Fig. 6.11: Gráficos de $\|\overline{\text{RMS}}\|$ - Manobra (inclinação -30°).

Tab. 6.12: Tabela comparativa entre IMM e PF — Manobra (inclinação -30°)

Banco	Filtro de Partículas			
	Trecho 1	Trecho 2	Trecho 3	Trajétória
IMM ₁	3,63%	-1,09%	-3,84%	0,34%
IMM ₂	2,63%	-2,09%	-4,38%	-0,48%
IMM ₃	3,25%	-1,47%	-1,25%	1,06%

Analisando os gráficos da Figura 6.11, vemos que as quatro propostas possuem um desempenho muito semelhante entre si. No entanto, pelos valores da Tabela 6.12, em que vemos o desempenho

razoável da técnica de PF, com valores de D distribuídos em positivos e negativos, e os valores baixos mostram poucas diferenças no desempenho das técnicas.

A próxima trajetória manobra ocorre sem inclinação, isto é, 0° e obteve-se os gráficos da Figura 6.12 e a Tabela 6.13 para esta trajetória.

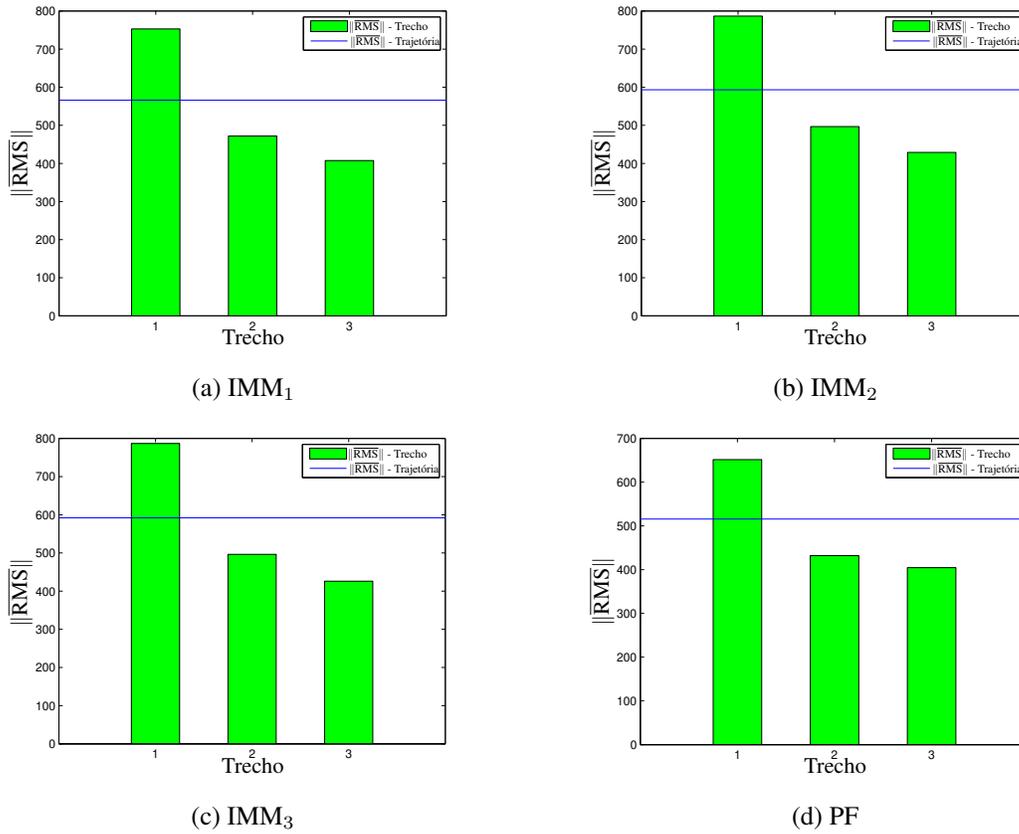


Fig. 6.12: Gráficos de $\|\overline{\text{RMS}}\|$ - Manobra (inclinação 0°).

Tab. 6.13: Tabela comparativa entre IMM e PF — Manobra (inclinação 0°)

Banco	Filtro de Partículas			
	Trecho 1	Trecho 2	Trecho 3	Trajetória
IMM ₁	13,47%	8,42%	0,68%	8,91%
IMM ₂	17,17%	13,00%	5,63%	13,07%
IMM ₃	17,17%	12,93%	5,00%	12,89%

Para a trajetória manobra sem inclinação, o desempenho da técnica de PF foi muito bom, com-

provado pelos gráficos e tabela acima. Veja que no gráfico 6.12a, dentre os bancos de filtros IMM, foi o que teve o melhor desempenho, mas não conseguindo superar a técnica de PF.

A próxima trajetória manobra ocorre com inclinação de $+30^\circ$, e, para tal trajetória, construiu-se os gráficos da Figura 6.13 e a Tabela 6.14.

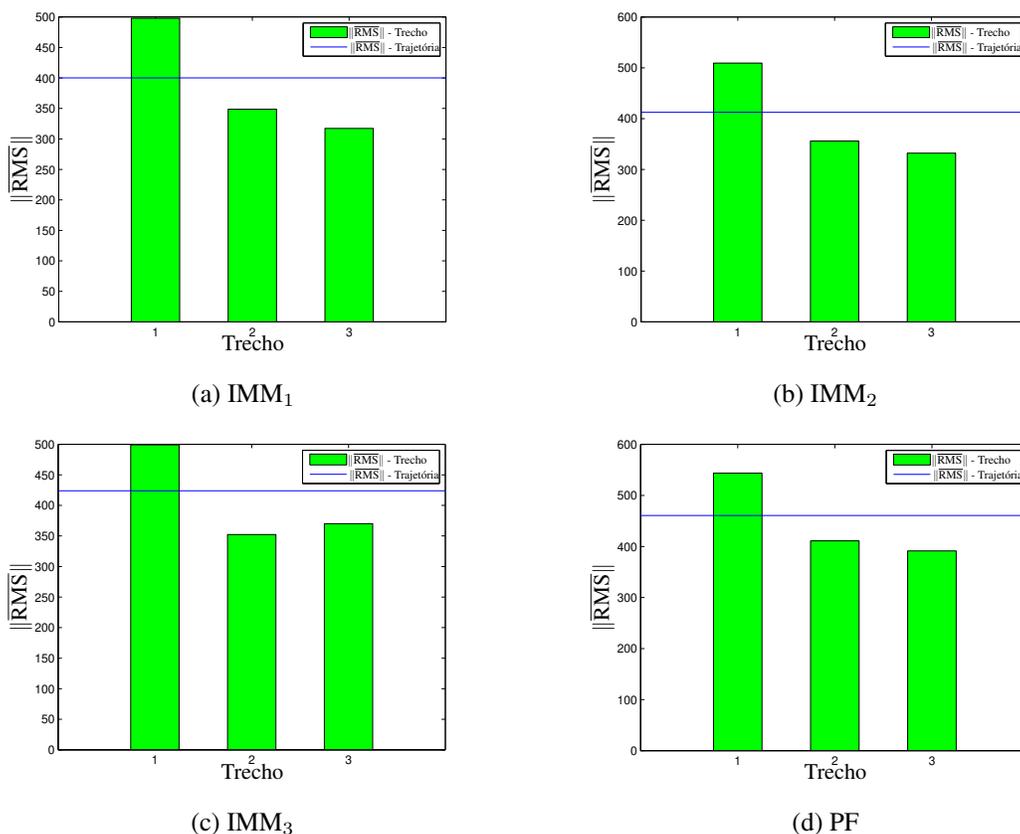


Fig. 6.13: Gráficos de $\|\overline{\text{RMS}}\|$ - Manobra (inclinação 30°).

Tab. 6.14: Tabela comparativa entre IMM e PF — Manobra (inclinação 30°)

Banco	Filtro de Partículas			
	Trecho 1	Trecho 2	Trecho 3	Trajectoria
IMM ₁	-9,17%	-17,86%	-23,33%	-15,12%
IMM ₂	-6,73%	-15,50%	-17,88%	-11,66%
IMM ₃	-8,94%	-16,66%	-5,75%	-8,63%

Pela primeira vez, a técnica do PF teve um desempenho ruim comparado aos bancos de filtros do

IMM. Observando o gráfico 6.13d, existe uma estabilidade, isto é, $\|\overline{\text{RMS}}\|$ só diminui de trecho pra trecho, mas mesmo pelo gráfico e pelos próprios valores da tabela, vemos que os três bancos de filtros foram os que tiveram desempenhos superiores desta vez.

Continuando, a seguinte trajetória manobra ocorre com inclinação de $+45^\circ$, elaborando-se os gráficos da Figura 6.14 e a Tabela 6.15.

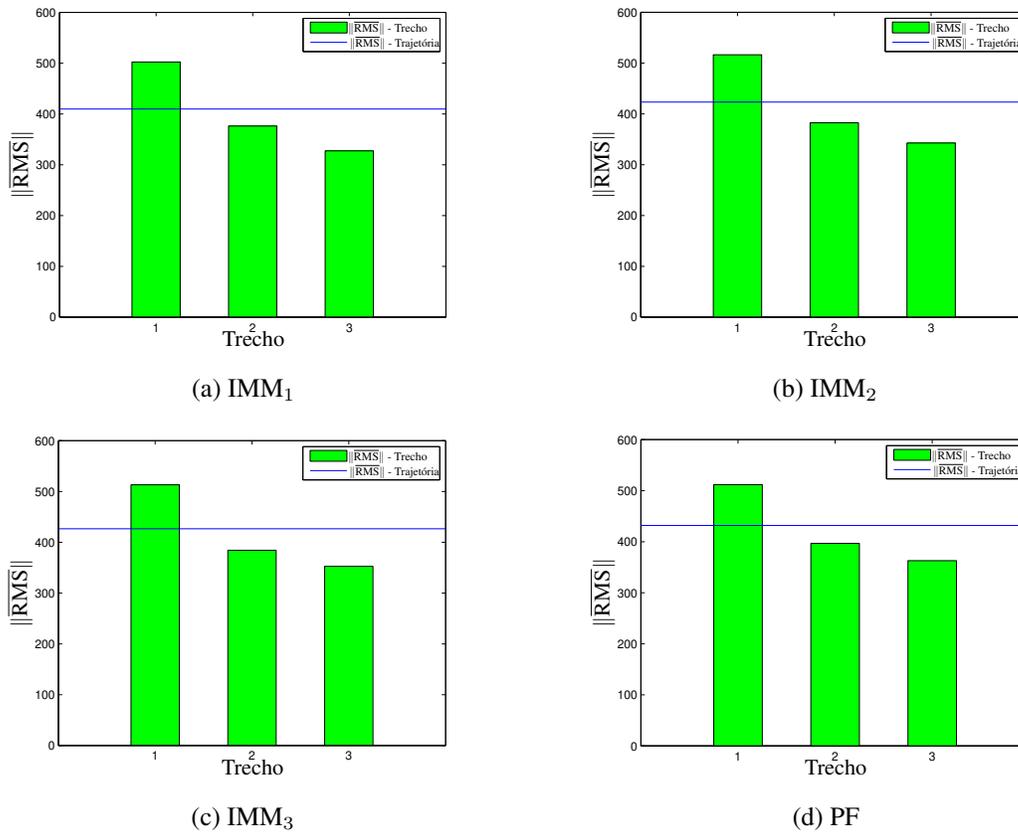


Fig. 6.14: Gráficos de $\|\overline{\text{RMS}}\|$ - Manobra (inclinação 45°).

Tab. 6.15: Tabela comparativa entre IMM e PF — Manobra (inclinação 45°)

Banco	Filtro de Partículas			
	Trecho 1	Trecho 2	Trecho 3	Trajectoria
IMM ₁	-1,88%	-5,46%	-10,86%	-5,42%
IMM ₂	0,86%	-3,75%	-5,96%	-2,02%
IMM ₃	0,23%	-3,28%	-2,98%	-1,24%

Novamente, a técnica do PF teve um desempenho não muito bom perto dos bancos de filtros do IMM, mas um pouco melhor em relação aos resultados da trajetória com inclinação de -30° . Os gráficos da Figura 6.14 mostram uma semelhança entre os desempenhos das técnicas, mas a Tabela 6.15 mostra o desempenho, aquém do esperado, da técnica do FP.

No próximo caso, a trajetória manobra ocorre com inclinação de $+60^\circ$ com seus respectivos gráficos e tabela.

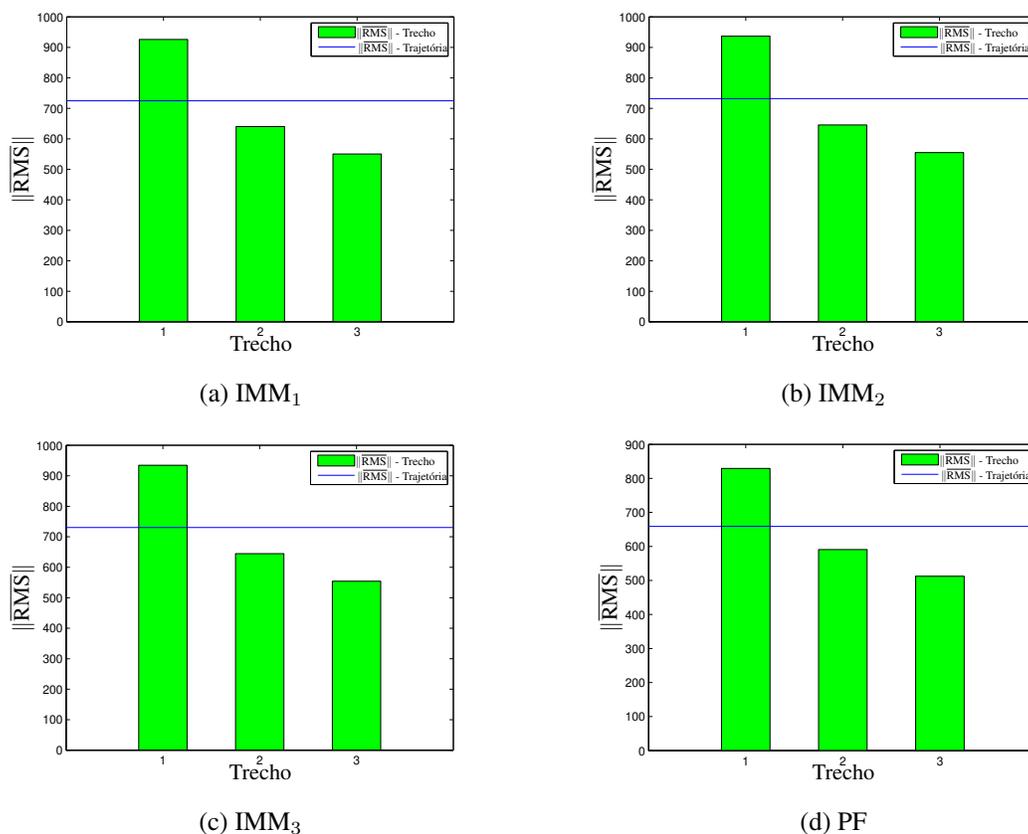


Fig. 6.15: Gráficos de $\|\overline{\text{RMS}}\|$ - Manobra (inclinação 60°).

Tab. 6.16: Tabela comparativa entre IMM e PF — Manobra (inclinação 60°)

Banco	Filtro de Partículas			
	Trecho 1	Trecho 2	Trecho 3	Trajectoria
IMM ₁	10,48%	7,75%	6,97%	9,10%
IMM ₂	11,49%	8,49%	7,71%	9,98%
IMM ₃	11,27%	8,36%	7,59%	9,79%

Nesta trajetória o desempenho da técnica de PF voltou a ser o melhor dentre os testados, comprovando claramente nos gráficos da Figura 6.15 e Tabela 6.16. Isso mostra que, os casos das trajetórias com inclinações de -30° e de $+45^\circ$ podem ser possíveis casos isolados, já que foram obtidos outras vezes resultados de desempenho muito bons.

Finalmente chegamos à última trajetória manobra, que ocorre com inclinação de $+90^\circ$, e, para tal trajetória, os gráficos da Figura 6.16 e a Tabela 6.17 foram obtidos.

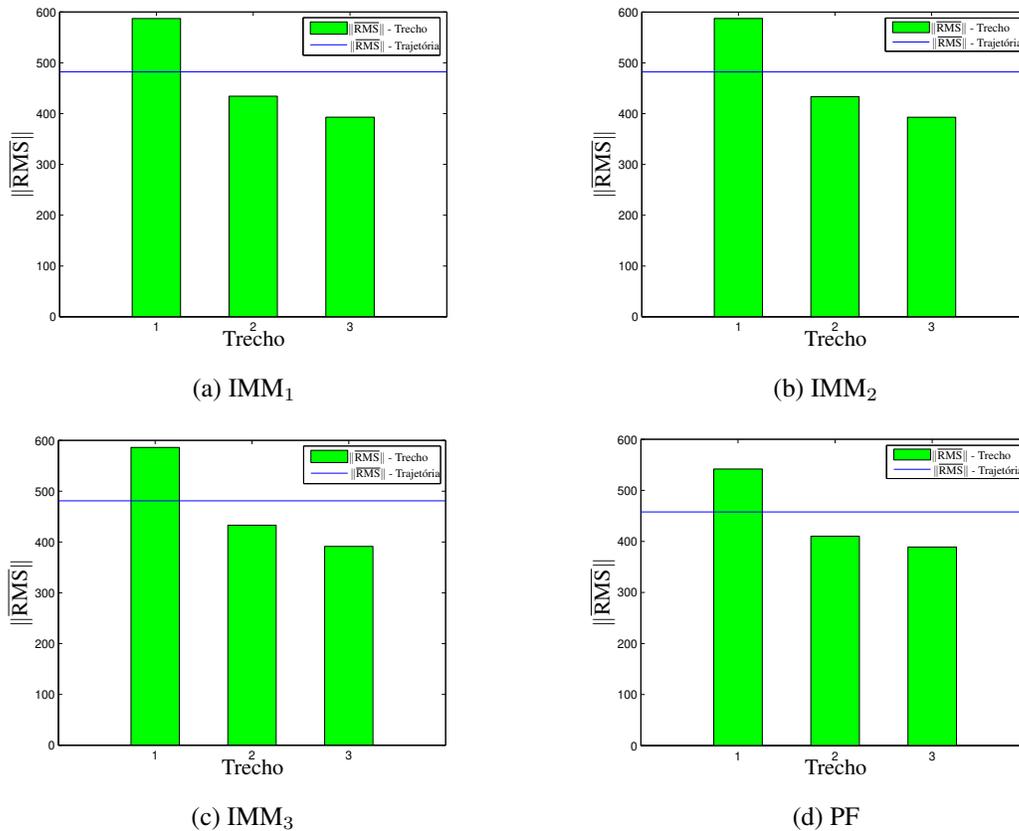


Fig. 6.16: Gráficos de $\|\overline{\text{RMS}}\|$ - Manobra (inclinação 90°).

Tab. 6.17: Tabela comparativa entre IMM e PF — Manobra (inclinação 90°)

Banco	Filtro de Partículas			
	Trecho 1	Trecho 2	Trecho 3	Trajetória
IMM ₁	7,68%	5,49%	0,96%	5,03%
IMM ₂	7,73%	5,31%	0,97%	5,05%
IMM ₃	7,55%	5,24%	0,57%	4,80%

Mais uma vez, a técnica de FP obteve sucesso em seu desempenho, diante dos três bancos de filtros IMM.

Em resumo, das oito trajetórias manobra testadas, em seis delas a técnica de FP obteve um resultado muito bom em seu desempenho, mostrando que a técnica de FP é superior à técnica de IMM, pelo menos para as trajetórias manobra. Isso era algo esperado, pois a técnica de FP proposta utiliza-se de sorteios de valores de $\vec{\omega}$ baseados na informação precisa da velocidade radial para determinar os modelos para cada partícula, a cada ciclo do algoritmo do PF e estes sorteios acabam aumentando o leque de possibilidades de modelos dinâmicos possíveis que podem ser adotados nas filtragem, tornando as estimativas mais precisas e, conseqüentemente, melhorando os desempenhos. No caso referente à trajetória manobra de inclinação $+30^\circ$, pode ser que os sorteios não tenham obtidos resultados bons, resultando na queda de qualidade do desempenho.

Na próxima seção, serão testadas mais oito novas trajetórias, chamadas ziguezague. Os mesmos testes de desempenho, com gráficos e tabelas, serão apresentados.

6.2.3 Trajetória Ziguezague

A última trajetória testada é a trajetória ziguezague, que é formada por sete trechos, iniciando e finalizando com trajetórias retilíneas, e alternando entre linhas retas e curvas idênticas às presentes nas manobras apresentadas na Seção 6.2.2. A Figura 6.17 um exemplo de trajetória ziguezague.

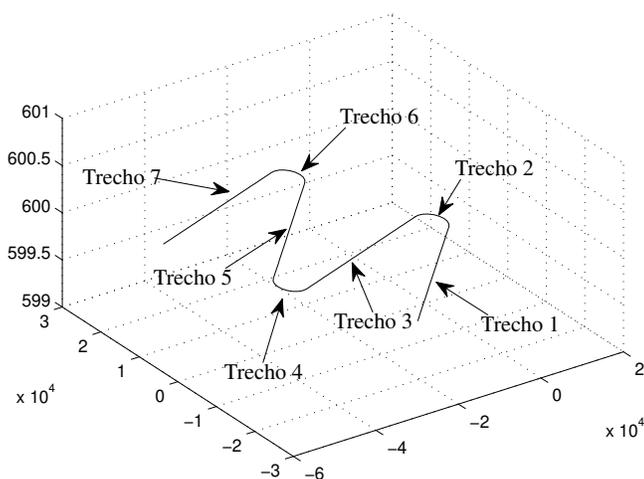


Fig. 6.17: Trajetória em ziguezague.

Assim como para o caso das trajetórias manobras com inclinações, foram feitos testes utilizando oito trajetórias baseadas no ziguezague, uma ocorrendo em um plano paralelo ao plano xy e sete

ocorrendo em planos com inclinações, as mesmas testadas para a trajetória manobra. A trajetória ziguezague no plano inclinado de -60° , os gráficos da Figura 6.18 e a Tabela 6.18 estão abaixo.

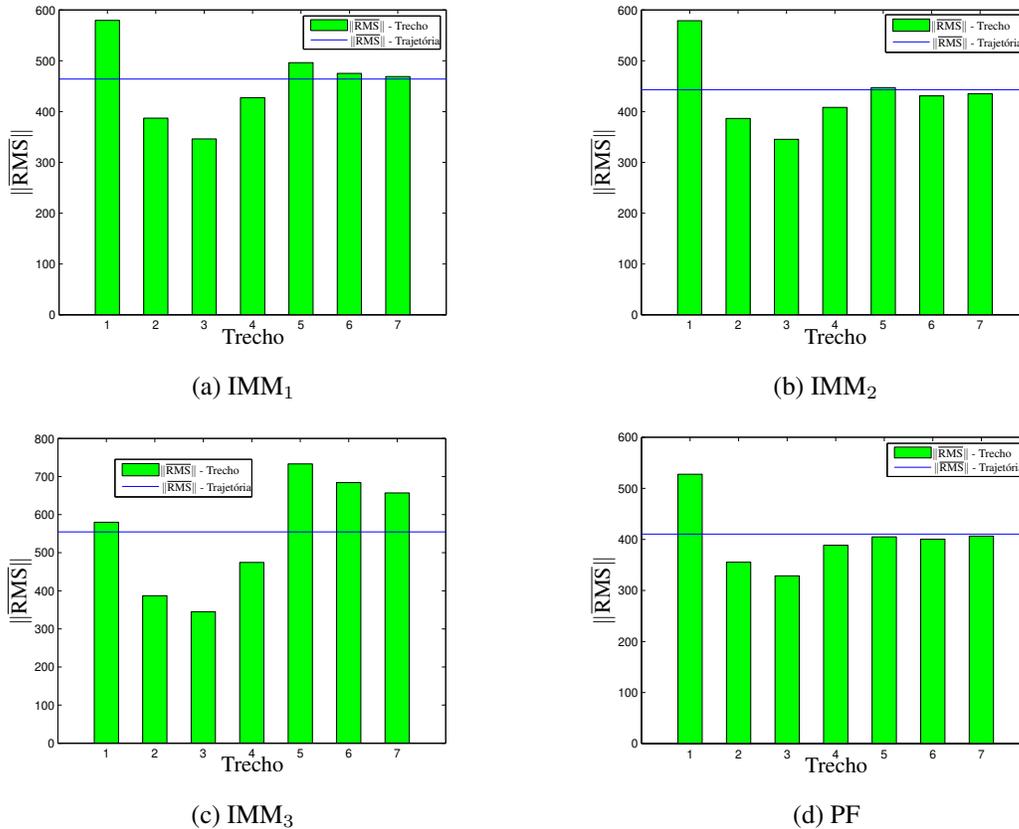


Fig. 6.18: Gráficos de $\|\overline{\text{RMS}}\|$ - Ziguezague (inclinação -60°).

Tab. 6.18: Tabela comparativa entre IMM e PF — Ziguezague (inclinação -60°)

Banco	Filtro de Partículas							Trajetória
	Trecho 1	Trecho 2	Trecho 3	Trecho 4	Trecho 5	Trecho 6	Trecho 7	
IMM ₁	8,94%	8,17%	4,99%	9,05%	18,38%	15,69%	13,26%	11,53%
IMM ₂	8,83%	8,04%	4,81%	4,77%	9,42%	7,05%	6,55%	7,33%
IMM ₃	9,01%	8,20%	4,72%	18,07%	44,76%	41,44%	38,10%	26,00%

Para a ziguezague ocorrendo em um plano de inclinação de -60° , a técnica de PF teve um desempenho excelente, podendo ser claramente visto nos gráficos da Figura 6.18 e nos valores da Tabela 6.18, onde não há uma piora sequer. A Figura 6.18c, referente ao banco IMM₃, mostra que este teve

um desempenho ruim no final da trajetória, diferentemente dos outros dois bancos.

No ziguezague ocorrendo com uma inclinação de -45° , foram feitos os gráficos da Figura 6.19 e a Tabela 6.19.

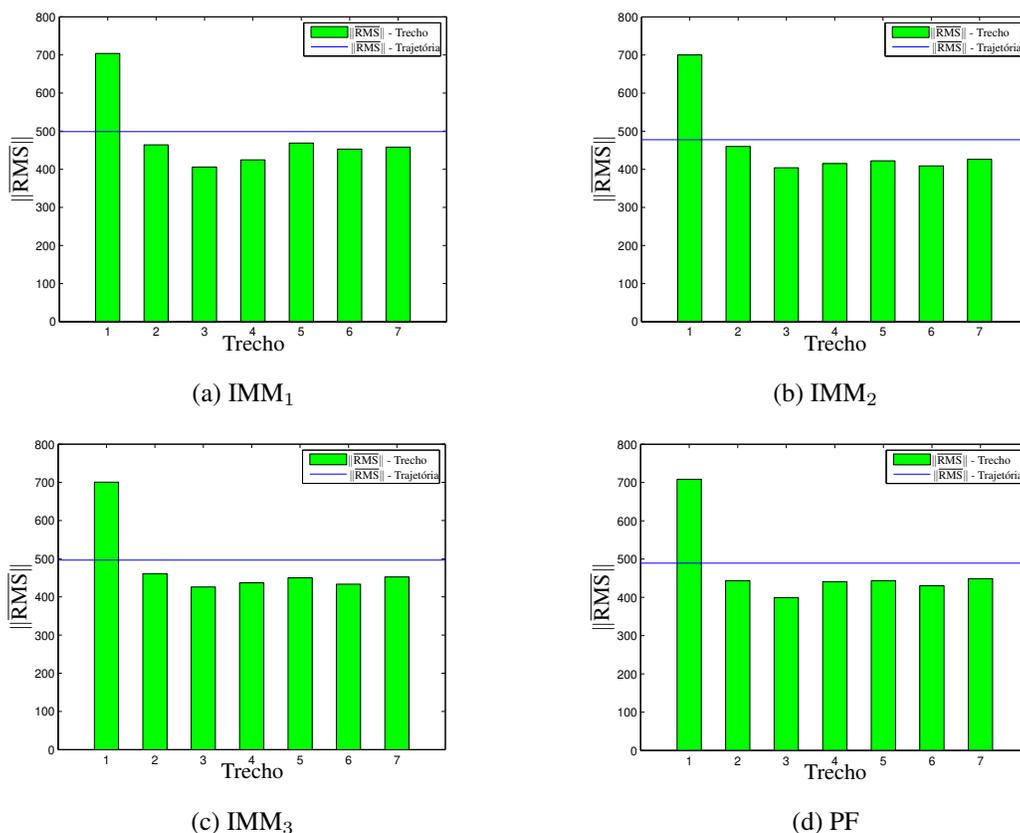


Fig. 6.19: Gráficos de $\|\overline{\text{RMS}}\|$ - Ziguezague (inclinação -45°).

Tab. 6.19: Tabela comparativa entre IMM e PF — Ziguezague (inclinação -45°)

Banco	Filtro de Partículas							
	Trecho 1	Trecho 2	Trecho 3	Trecho 4	Trecho 5	Trecho 6	Trecho 7	Trajectoria
IMM ₁	-0,66%	4,43%	1,58%	-3,85%	5,36%	5,01%	2,01%	1,92%
IMM ₂	-1,17%	3,55%	1,14%	-6,31%	-5,01%	-5,16%	-5,27%	-2,44%
IMM ₃	-1,11%	3,76%	6,23%	-0,93%	1,45%	0,71%	0,81%	1,42%

A técnica de PF, tanto observando-se os gráficos quanto a tabela, teve um desempenho equivalente ao dos bancos de filtros da técnica IMM. Houve uma distribuição uniforme de melhoras e pioras da

técnica de PF, e estes valores da Tabela 6.19 são baixos, comprovando esta semelhança nos desempenhos.

Seguindo agora para a trajetória ziguezague com inclinação de -30° , foram obtidos os gráficos da Figura 6.20 e a Tabela 6.20.

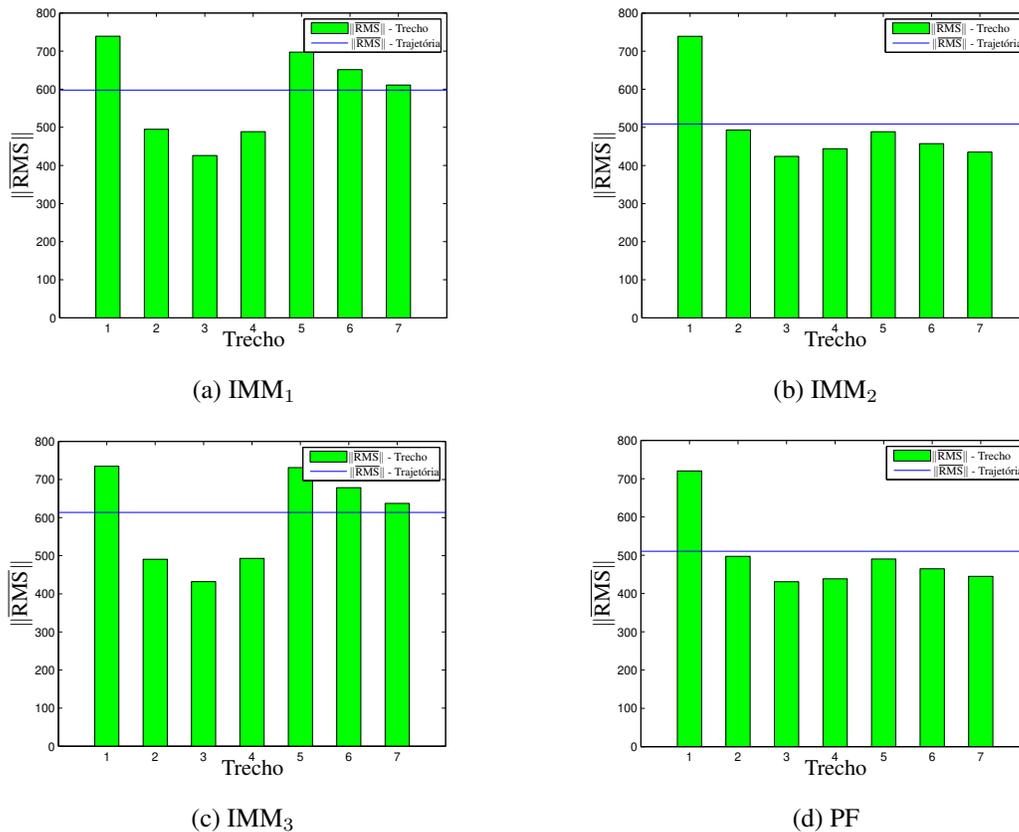


Fig. 6.20: Gráficos de $\|\overline{\text{RMS}}\|$ - Ziguezague (inclinação -30°).

Tab. 6.20: Tabela comparativa entre IMM e PF — Ziguezague (inclinação -30°)

Banco	Filtro de Partículas							Trajetória
	Trecho 1	Trecho 2	Trecho 3	Trecho 4	Trecho 5	Trecho 6	Trecho 7	
IMM ₁	2,56%	-0,40%	-1,18%	10,26%	29,73%	28,67%	27,19%	14,60%
IMM ₂	2,56%	-0,80%	-1,69%	1,23%	-0,29%	-1,63%	-2,27%	-0,26%
IMM ₃	1,99%	-1,28%	0,20%	11,07%	32,97%	31,53%	30,19%	16,81%

Analisando os gráficos da Figura 6.20, vemos uma semelhança entre os gráficos 6.20b e 6.20d,

que pôde ser confirmado na Tabela 6.20, em que os valores são muito próximos de zero. Em relação aos outros dois bancos restantes, a técnica de PF foi visivelmente superior.

A próxima trajetória ziguezague ocorre sem inclinação, isto é, 0° e obteve-se os gráficos da Figura 6.21 e a Tabela 6.21 para esta trajetória.

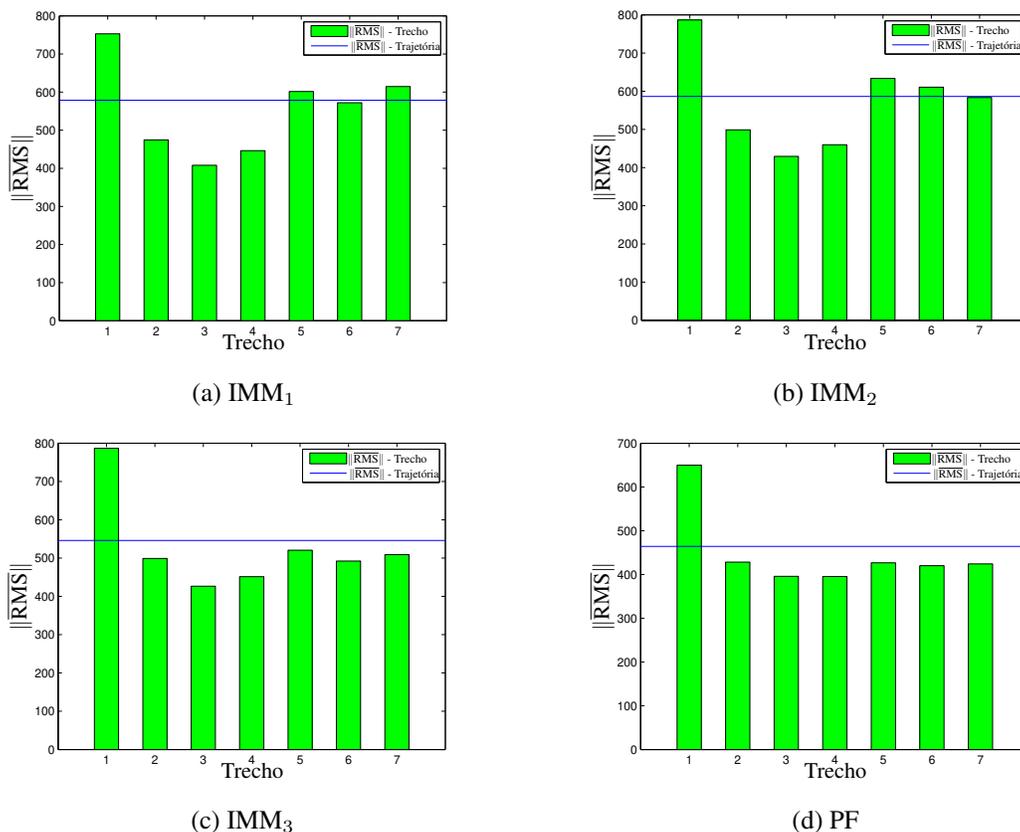


Fig. 6.21: Gráficos de $\|\overline{\text{RMS}}\|$ - Ziguezague (inclinação 0°).

Tab. 6.21: Tabela comparativa entre IMM e PF — Ziguezague (inclinação 0°)

Banco	Filtro de Partículas							Trajetória
	Trecho 1	Trecho 2	Trecho 3	Trecho 4	Trecho 5	Trecho 6	Trecho 7	
IMM ₁	13,67%	9,70%	2,93%	11,40%	29,04%	26,54%	30,95%	19,77%
IMM ₂	17,37%	14,13%	7,80%	14,02%	32,62%	31,18%	27,30%	20,82%
IMM ₃	17,36%	14,14%	7,17%	12,39%	18,01%	14,65%	16,65%	14,97%

Para a trajetória ziguezague sem inclinação, o desempenho da técnica de PF foi ótimo, compro-

vado pelos gráficos e tabela acima. Veja que no gráfico 6.21c, dentre os bancos de filtros IMM, foi o único que chegou a ficar mais próximo dos resultados de desempenho da técnica de PF, mas mesmo assim não conseguindo superá-la.

A próxima trajetória ziguezague ocorre com inclinação de $+30^\circ$, e, para tal trajetória, construiu-se os gráficos da Figura 6.22 e a Tabela 6.22.

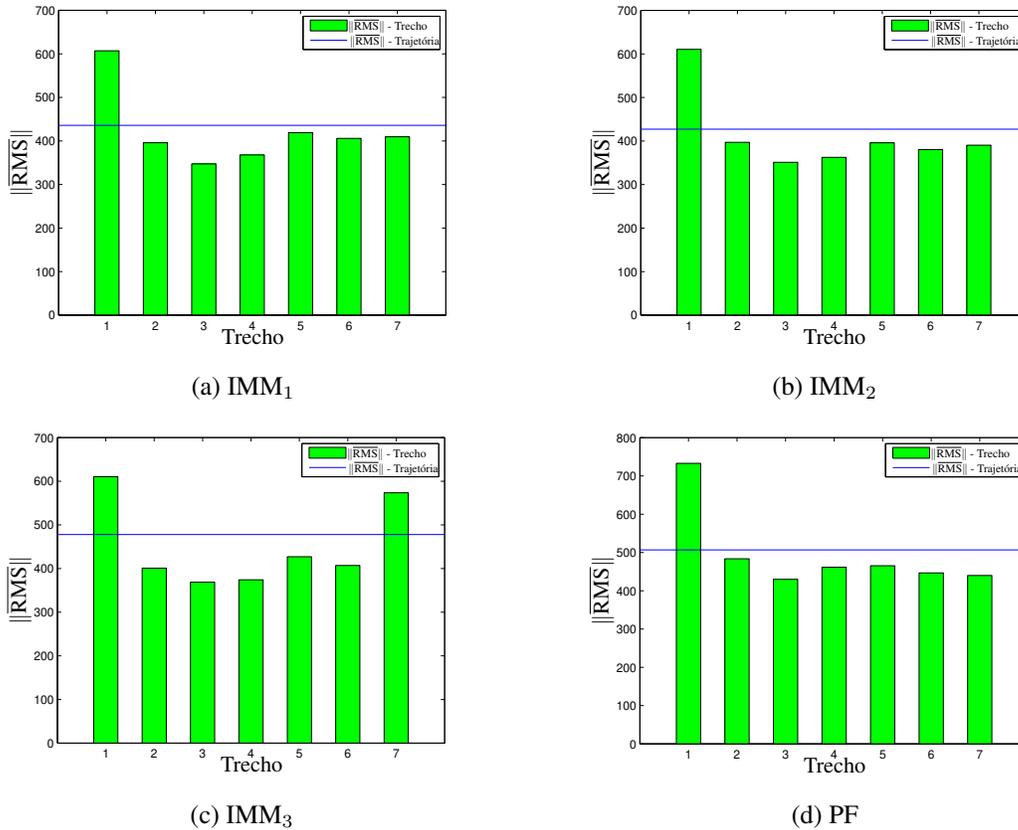


Fig. 6.22: Gráficos de $\|\overline{\text{RMS}}\|$ - Ziguezague (inclinação 30°).

Tab. 6.22: Tabela comparativa entre IMM e PF — Ziguezague (inclinação 30°)

	Filtro de Partículas							
Banco	Trecho 1	Trecho 2	Trecho 3	Trecho 4	Trecho 5	Trecho 6	Trecho 7	Trajatória
IMM ₁	-20,75%	-22,18%	-23,83%	-25,53%	-11,07%	-10,03%	-7,47%	-16,30%
IMM ₂	-20,08%	-21,83%	-22,43%	-27,34%	-17,60%	-17,43%	-12,73%	-18,66%
IMM ₃	-20,07%	-20,68%	-16,57%	-23,37%	-9,02%	-9,74%	23,27%	-6,07%

Pela segunda vez, contando com os resultados das trajetórias de manobra, a técnica do PF teve um desempenho péssimo perto dos bancos de filtros do IMM. Observando o gráfico 6.22d, notamos que os valores de $\|\overline{\text{RMS}}\|$ de trecho pra trecho diminuem, mesmo assim, podemos perceber que os três bancos de filtros foram os que tiveram desempenhos melhores.

A seguinte trajetória ziguezague ocorre com inclinação de $+45^\circ$; os gráficos da Figura 6.23 e a Tabela 6.23 são os resultados de desempenho correspondentes.

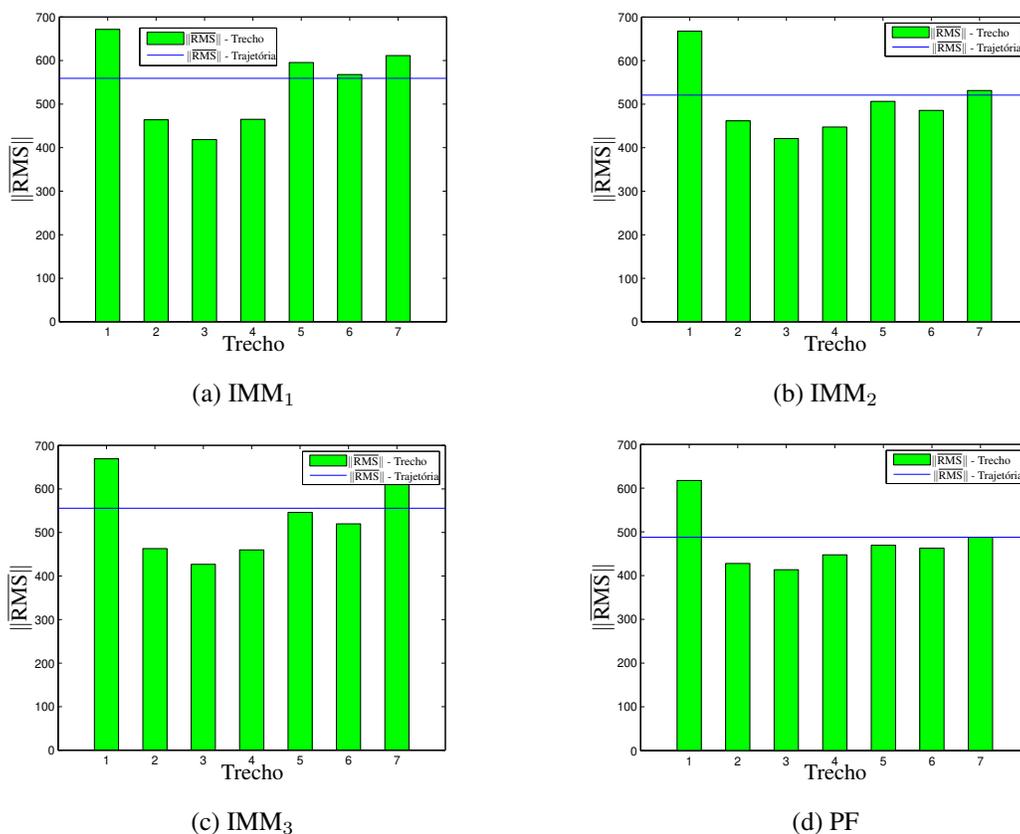


Fig. 6.23: Gráficos de $\|\overline{\text{RMS}}\|$ - Ziguezague (inclinação 45°).

Tab. 6.23: Tabela comparativa entre IMM e PF — Ziguezague (inclinação 45°)

	Filtro de Partículas							
Banco	Trecho 1	Trecho 2	Trecho 3	Trecho 4	Trecho 5	Trecho 6	Trecho 7	Trajatória
IMM ₁	8,03%	7,78%	1,16%	3,74%	21,15%	18,52%	20,26%	12,77%
IMM ₂	7,49%	7,29%	1,80%	-0,02%	7,28%	4,73%	8,19%	6,33%
IMM ₃	7,71%	7,58%	3,16%	2,70%	14,04%	10,99%	24,72%	12,24%

Aqui, a técnica do PF voltou a ter um desempenho bom perto dos bancos de filtros do IMM, sendo superior, mais uma vez, aos três bancos de filtros.

No próximo caso, a trajetória zigzague ocorre com inclinação de $+60^\circ$ com seus resultados apresentados nos gráficos da Figura 6.24 e Tabela 6.24.

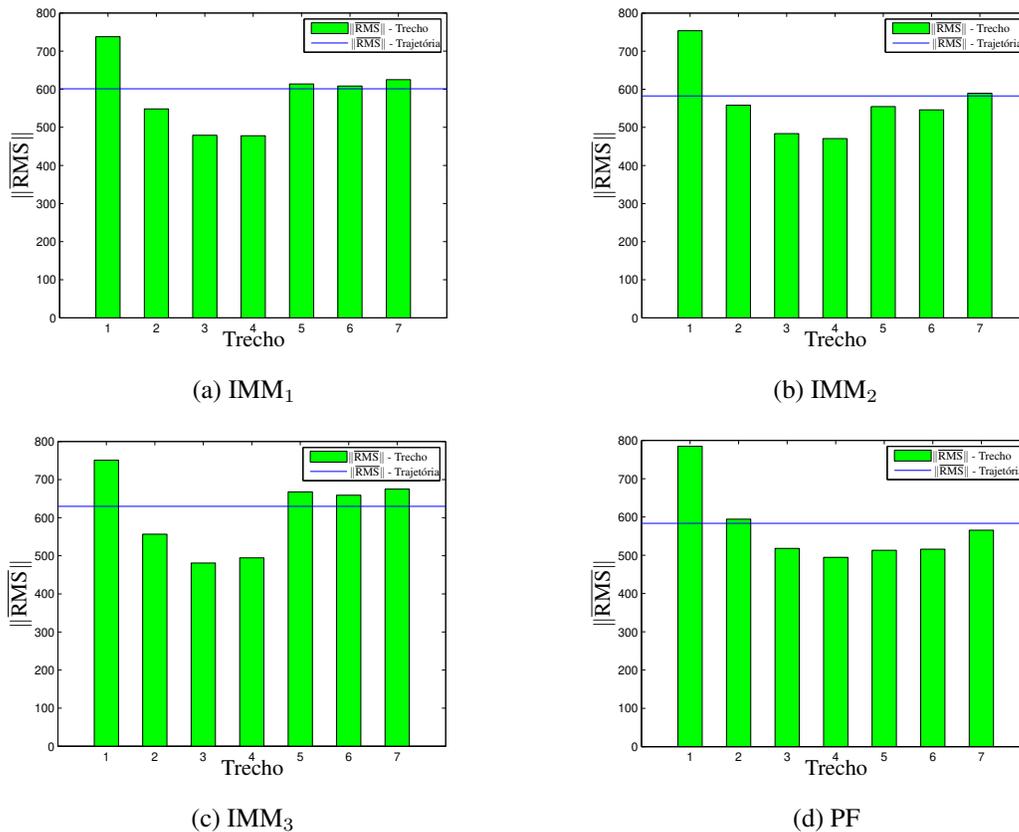


Fig. 6.24: Gráficos de $\|\overline{\text{RMS}}\|$ - Ziguezague (inclinação 60°).

Tab. 6.24: Tabela comparativa entre IMM e PF — Ziguezague (inclinação 60°)

Banco	Filtro de Partículas							Trajetória
	Trecho 1	Trecho 2	Trecho 3	Trecho 4	Trecho 5	Trecho 6	Trecho 7	
IMM ₁	-6,36%	-8,36%	-8,07%	-3,46%	16,44%	15,19%	9,57%	2,95%
IMM ₂	-4,12%	-6,44%	-7,08%	-5,07%	7,50%	5,54%	4,13%	-0,13%
IMM ₃	-4,49%	-6,73%	-7,68%	0,02%	23,17%	21,71%	16,22%	7,35%

Aqui ocorreu um fato bem curioso: o desempenho da técnica de PF estava baixo até o terceiro

trecho e a partir do quarto trecho, seu desempenho começou a melhorar bem. Isto mostra que as estimativas melhoraram sua qualidade depois de um tempo, chegando até a superar os três bancos da técnica IMM.

Finalmente chegamos à última trajetória ziguezague, que ocorre com inclinação de $+90^\circ$, e, para tal trajetória, os gráficos da Figura 6.25 e a Tabela 6.25 foram obtidos.

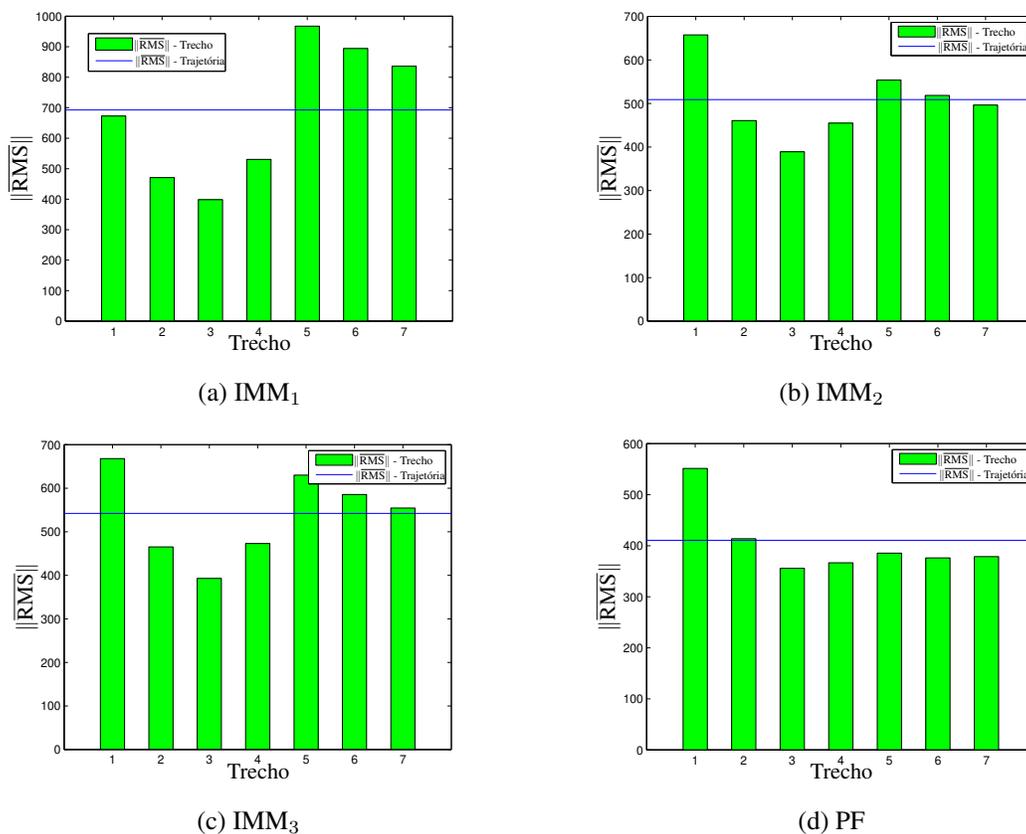


Fig. 6.25: Gráficos de $\|\overline{\text{RMS}}\|$ - Ziguezague (inclinação 90°).

Tab. 6.25: Tabela comparativa entre IMM e PF — Ziguezague (inclinação 90°)

	Filtro de Partículas							
Banco	Trecho 1	Trecho 2	Trecho 3	Trecho 4	Trecho 5	Trecho 6	Trecho 7	Trajetoória
IMM ₁	18,05%	12,11%	10,71%	30,88%	60,16%	57,93%	54,69%	40,69%
IMM ₂	16,14%	10,14%	8,55%	19,39%	30,35%	27,43%	23,67%	19,26%
IMM ₃	17,45%	11,06%	9,43%	22,51%	38,82%	35,74%	31,67%	24,23%

Desta vez, a técnica de FP mostrou um desempenho muito superior em relação aos três bancos, sem qualquer tipo de piora, chegando a ficar com uma melhora acima de 60% em um dos trechos, em relação ao banco IMM₁. Das oito trajetórias zigzague testadas, novamente em seis delas a técnica de FP obteve desempenhos satisfatórios.

6.2.4 Trajetórias com Curvas Rápidas

Um último teste comparativo de desempenho entre as técnicas de IMM e PF foi elaborado, desta vez utilizando trajetórias que se diferenciam entre si pela rapidez com que são realizadas as curvas. Esta rapidez é determinada pelo valor da aceleração centrípeta, que geralmente é colocada como valores múltiplos da aceleração da gravidade g . As trajetórias escolhidas para a realização destes testes comparativos formam três curvas em “S”, isto é, uma trajetória que tem seu formato semelhante à letra “s”. A Figura 6.26 mostra como é o comportamento desta trajetória.

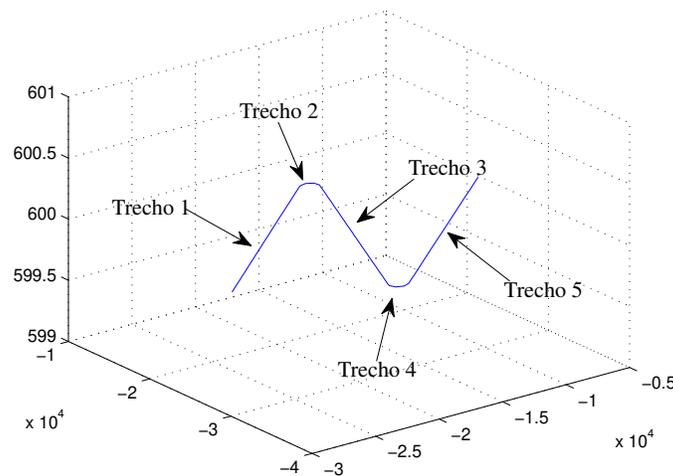


Fig. 6.26: Trajetória em “S”.

Para os testes de desempenho, foram escolhidas três trajetórias em “S”: a primeira é realizada com curvas em $5g^2$, com $\hat{v}_{0|0} = [150 \ 150 \ 0]^T m/s$, a segunda em $7g$ com $\hat{v}_{0|0} = [200 \ 200 \ 0]^T m/s$ e a terceira em $9g^3$ com $\hat{v}_{0|0} = [250 \ 250 \ 0]^T m/s$. Assim como nas seções anteriores, o critério de desempenho foi baseado em avaliações de $\|\overline{\text{RMS}}\|$, dado em (6.19), e de D dado em (6.20), sendo que para este último avaliaremos as melhoras e as pioras da técnica do PF em relação ao IMM somente para os trechos 3 e 5. Estes trechos são trajetórias retilíneas que se iniciam depois do alvo

²máxima aceleração centrípeta suportada por uma pessoa comum

³máxima aceleração centrípeta suportada por um piloto de avião supersônico

ter executado uma curva rápida. Desta forma, podemos verificar como as estimativas se comportam depois da execução de uma curva rápida. Os trechos em curva não foram comparados por D pois o número de dados durante as curvas são baixos, entre três e quatro dados, no máximo, assim não é possível obtermos uma avaliação mais precisa. Para trajetória em “S” com curvas em $5g$ foram obtidos os gráficos da Figura 6.27 e a Tabela 6.26, utilizando os mesmos dados dos testes anteriores, exceto pelas velocidades iniciais:

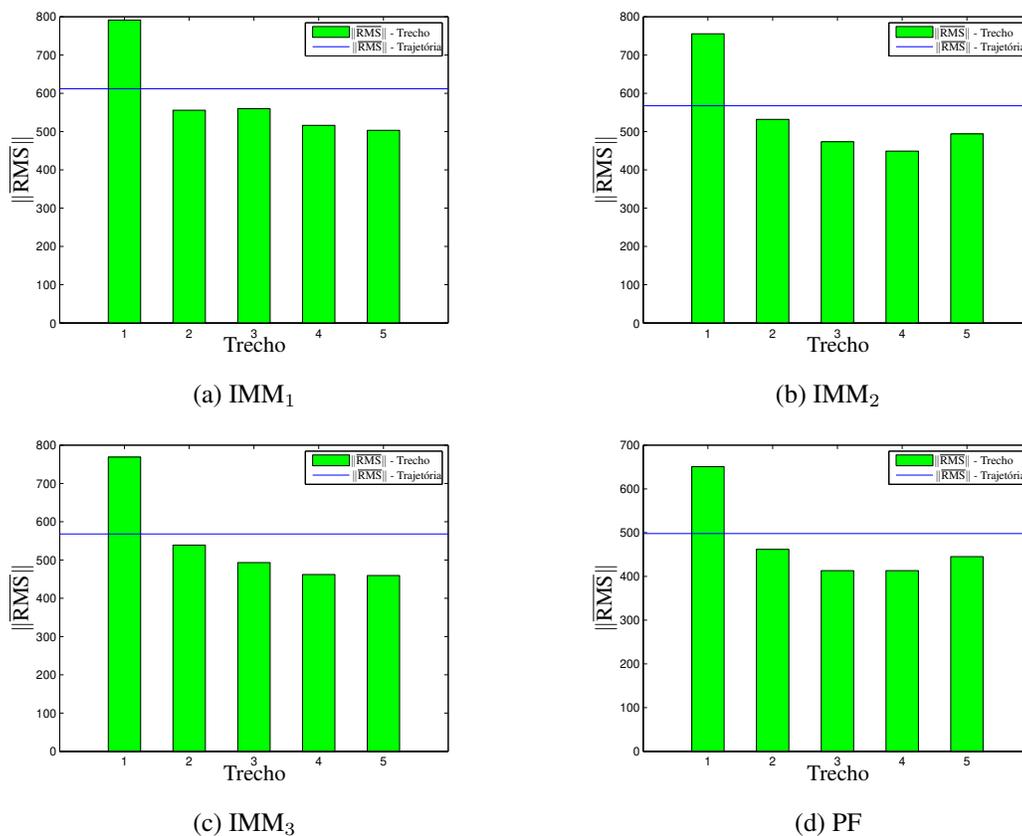


Fig. 6.27: Gráficos de $\|\overline{\text{RMS}}\|$ - Trajetória em “S” com $5g$.

Tab. 6.26: Tabela comparativa entre IMM e PF — Trajetória em “S” — $5g$.

	Filtro de Partículas	
<i>Banco</i>	<i>Trecho 3</i>	<i>Trecho 5</i>
IMM ₁	26,38%	11,68%
IMM ₂	12,93%	10,01%
IMM ₃	16,24%	3,14%

Observando os gráficos, vemos que o comportamento da evolução de $\|\overline{\text{RMS}}\|$ é a mesma e as técnicas de IMM possuem resultados bastante semelhantes, mas note que a técnica de PF possui valores mais baixos do que os três bancos de filtros. Perceba também o bom desempenho da técnica de PF através dos valores de D , com boas melhorias.

Passando agora para a trajetória com curvas em $7g$, já podemos notar diferenças visíveis entre as duas técnicas de filtragem, como mostram a Figura 6.28 e a Tabela 6.28 a seguir:

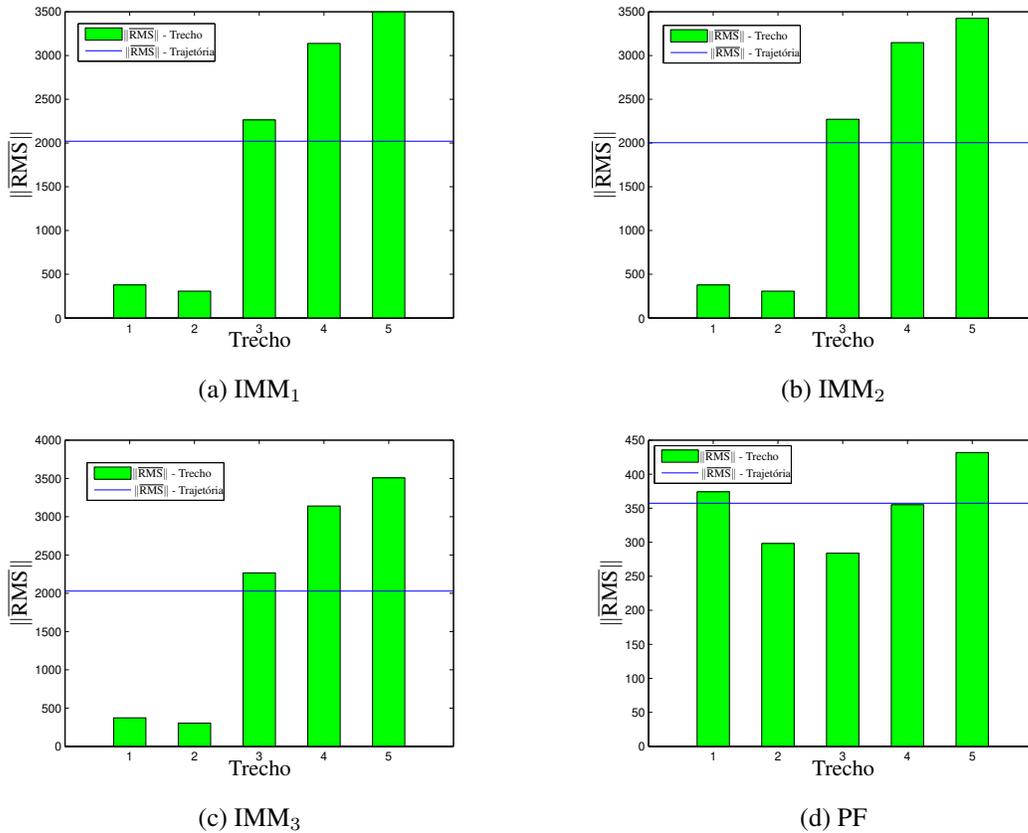


Fig. 6.28: Gráficos de $\|\overline{\text{RMS}}\|$ - Trajetória em “S” com $7g$.

Tab. 6.27: Tabela comparativa entre IMM e PF — Trajetória em “S” — $7g$.

	Filtro de Partículas	
Banco	Trecho 3	Trecho 5
IMM ₁	87,49%	87,63%
IMM ₂	87,49%	87,37%
IMM ₃	87,47%	87,66%

Note que, mais uma vez, os bancos IMM possuem resultados de desempenho bem semelhantes, porém bem ruins se comparados ao desempenho da técnica de PF, que teve um desempenho excelente, tanto pelos valores de $\|\overline{\text{RMS}}\|$ quanto pelas porcentagens de melhoria da tabela. Observe também que em todos os gráficos, houve um aumento do valor de $\|\overline{\text{RMS}}\|$ nos últimos trechos, mostrando que o retorno à trajetória retilínea depois da segunda curva é difícil para ser executado. Finalmente, chegamos à trajetória com curvas em $9g$, em que foram obtidos a Figura 6.29 e a Tabela 6.28:

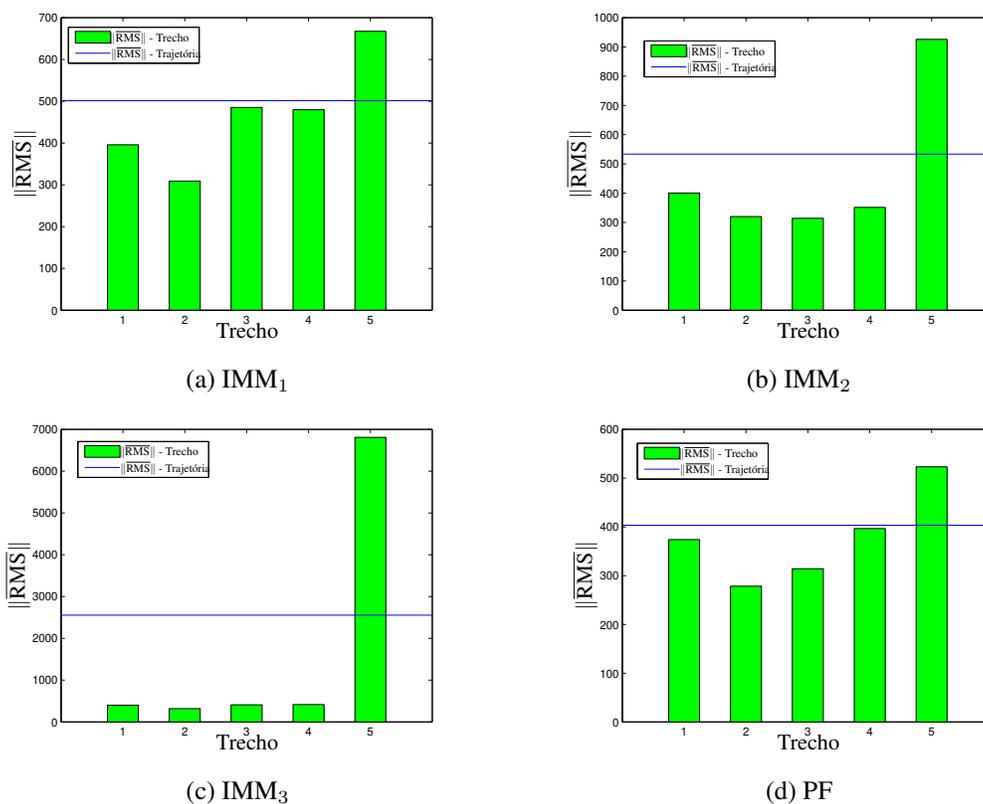


Fig. 6.29: Gráficos de $\|\overline{\text{RMS}}\|$ - Trajetória em “S” com $9g$.

Tab. 6.28: Tabela comparativa entre IMM e PF — Trajetória em “S” — $9g$.

	Filtro de Partículas	
<i>Banco</i>	<i>Trecho 3</i>	<i>Trecho 5</i>
IMM ₁	35,21%	21,63%
IMM ₂	-1,12%	43,41%
IMM ₃	24,94%	92,30%

A partir dos resultados acima, podemos perceber que o último trecho — terceira reta — é o mais crítico, para todas as técnicas testadas. Basta observar os valores elevados para o quinto trecho nos gráficos de desempenho. Note que, desta vez, cada um dos quatro resultados na Figura 6.29 foram distintos, inclusive entre os bancos de filtros da técnica de IMM; perceba o desempenho razoável do banco IMM₁ em relação aos outros dois bancos, IMM₂ e IMM₃. Mesmo assim, a técnica de PF saiu-se superior aos três bancos de filtros.

Síntese do Capítulo

Neste capítulo foram realizados testes de trajetórias divididas em duas etapas: a primeira delas teve o intuito de verificar quais dos filtros estudados, EKF ou filtro BLUE, se sairia melhor em um teste de desempenho com algumas trajetórias bidimensionais. Pelos resultados obtidos o filtro BLUE foi aquele que apresentou o melhor desempenho dos dois filtros testados. Com os resultados obtidos nestes testes, foi definido o filtro BLUE como aquele que fez parte da segunda etapa de testes.

A segunda etapa teve o intuito de realizar comparações de desempenho entre as propostas do três bancos de filtros IMM e a técnica do PF com o método para obter a velocidade angular a partir da velocidade radial, e ambas as técnicas utilizando a velocidade radial como informação extra de observação. Foram utilizadas diversas trajetórias tridimensionais, tanto em planos paralelos ao plano xy , quanto em planos inclinados. Claramente a técnica de PF obteve bons resultados de desempenho em relação aos três bancos IMM, mesmo utilizando um número de partículas relativamente baixo, $N = 100$. O bom desempenho da técnica de PF ficou claro nos testes com as trajetórias em “S” com diferentes valores de aceleração centrípeta, em que os resultados mostraram a superioridade da técnica de PF em relação aos outros bancos de filtros da técnica IMM.

Os gráficos a seguir mostram um dos casos testados⁴ com trajetórias com curvas rápidas, com curvas realizadas com aceleração de $7g$, comparando o banco IMM₂ e a técnica de PF. Observando a Figura 6.30b, é possível observar que a trajetória estimada resultante da aplicação da técnica de PF acompanha muito bem a trajetória exata; já o resultado observado na Figura 6.30a, a técnica de IMM não obteve uma estimativa da trajetória que fosse capaz de acompanhar de forma adequada a trajetória exata.

A partir dos resultados obtidos para as trajetórias testadas, elaborou-se uma tabela que mostra quais das técnicas se saiu melhor em cada trajetória, sob os pontos de vista de trecho e de trajetória. De um total de 91 trechos e de 20 trajetórias, foram obtidas as porcentagens dadas na Tabela 6.29.

⁴Para as outras trajetórias, os resultados são semelhantes. Desta forma, optou-se em mostrar apenas um dos casos.

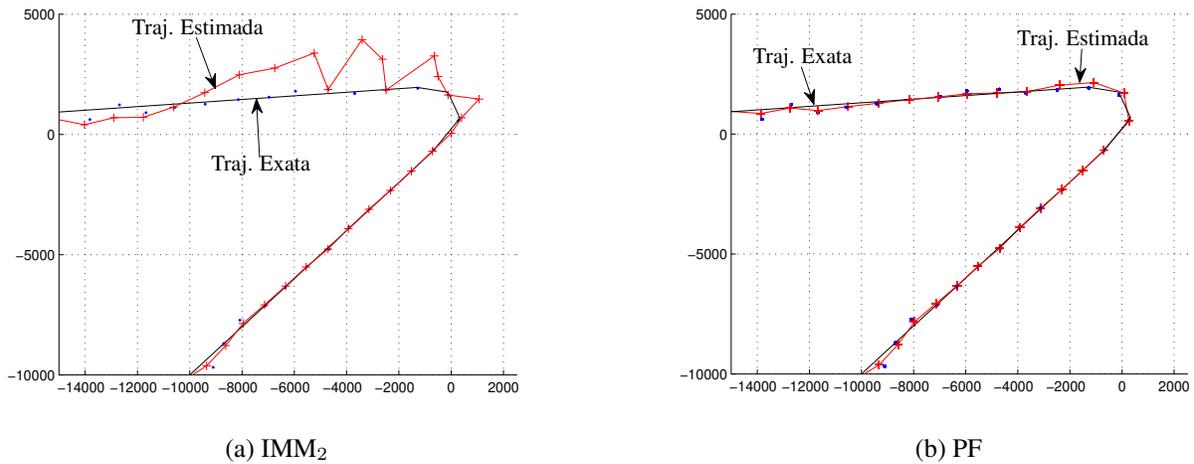


Fig. 6.30: Trecho em curva de $7g$ (a) IMM₂; (b) PF (Os pontos em azul são as observações vindas do radar).

Tab. 6.29: Tabela comparativa entre IMM e PF — Avaliação geral.

<i>Técnica</i>	<i>Trechos</i>	<i>Trajetoórias</i>	<i>Classificação</i>
PF	67%	70%	1°
IMM ₁	17,6%	15%	2°
IMM ₂	13,2%	15%	3°
IMM ₃	2,2%	0%	4°

Observando a Tabela 6.29, vemos que a técnica de PF obteve um bom desempenho na maioria das vezes, tanto para os trechos de trajetória, quanto para as trajetórias completas. Entre as técnicas de IMM, o banco IMM₁ foi o que obteve mais vezes o melhor desempenho.

Capítulo 7

Conclusões

O problema de rastreamento de alvos manobранtes trata de uma situação bastante complexa que exige diversos estudos e análises variadas e está longe de ser um assunto acabado. Nos estudos e análises feitas durante esta dissertação, primeiramente foi necessário adquirir um bom entendimento sobre o processo de modelagens matemáticas de sistemas, tanto para alguns modelos matemáticos para a dinâmica de um alvo, quanto para o modelo que descreve como as observações dos alvos se relacionam com o estado do alvo.

Dos diversos modelos dinâmicos existentes em [1], foram escolhidos os dois que melhor podem representar possíveis movimentos de um alvo manobранte, que são o modelo de velocidade constante (CV) e o modelo de giro constante (CT). Baseados nestes modelos, foram elaborados novos formatos para alguns destes modelos, como os modelos CT_{ph} e CT_{pa} , fazendo com que o número de estados dos alvos aumente com a inclusão da velocidade angular. Estes modelos escolhidos foram capazes de reproduzir adequadamente todas as trajetórias testadas no Capítulo 6. Destes modelos estudados e elaborados, o modelo CT_{pa} é um dos mais interessantes, pois ele lida com curvas que ocorrem em planos arbitrários do espaço, aumentando o número de modelos de possíveis trajetórias que podem ser executadas por um alvo.

Nas diferentes representações para modelar as observações, apresentadas em [5], a estudada e desenvolvida nesta dissertação foi aquela utilizada com mais frequência em problemas reais de rastreamento de alvos manobранtes, que lida com observações no sistema de coordenadas esféricas do radar. Adotando este sistema, verificamos que acaba surgindo o problema de polarização das observações, como tratado em [7], [8], e [19]. Este fenômeno surge na conversão das observações para coordenadas cartesianas e, para eliminá-lo, foi necessário desenvolver uma série de cálculos, todos detalhados no Capítulo 3.

Uma proposta desenvolvida nesta tese envolve o modelo de observações, em que incluímos uma informação que também é fornecida pelo radar, que é a velocidade radial. Sua precisão é bastante

grande, indicado pelo valor de variância especificado, que foi de $\sigma_{v_r}^2 = 2^2 = 4$. Este valor aplica-se a situações de rastreamento reais, com radares verdadeiros. Diante das outras variâncias, nota-se que realmente trata-se de uma informação muito precisa. Esta precisão acaba resultando na melhoria das estimativas do vetor de estados x_k .

Vistos os modelos, partimos para o estudo do filtros que têm o papel de realizar as estimativas dos estados do alvo, a partir das observações vindas do radar. Os dois filtros escolhidos para ser estudados e analisados foram o filtro de Kalman estendido (EKF) e o filtro BLUE. Para estes dois filtros, os principais cálculos foram das matrizes jacobianas, que linearizam os modelos matemáticos da dinâmica e das observações e que fazem parte das equações de filtragem de cada um deles, e, especificamente para o filtro BLUE, os cálculos da previsão das observações $\hat{z}_{k+1|k}$, da matriz $S_{k+1|k}$ e do ganho de filtro W_{k+1} . Estes cálculos trouxeram algumas dificuldades pela quantidade de termos a serem definidos, mas não houve problemas para chegar aos resultados finais de cada um deles.

Nos testes de desempenho, foi feita uma comparação entre estes dois filtros sendo utilizados com a técnica de IMM. Nas comparações apresentadas, o banco formado pelos filtros BLUE foi superior ao formado por filtros de Kalman estendido, o que pesou na escolha do filtro BLUE para fazer parte dos estudos seguintes. Um dos motivos que pode ter levado o filtro BLUE a ter um bom desempenho estão, principalmente, nos formatos da matriz de covariância da inovação $S_{k+1|k}$ e do ganho do filtro W_{k+1} , cujos elementos são calculados separadamente para o filtro BLUE. Estas matrizes são funções de previsões do vetor de estados e da variável alcance. Em relação à variável alcance, a dependência desta traz efeitos de aproximação e afastamento de um alvo. Isso acaba trazendo resultados mais condizentes com o que acontece em um sistema real de rastreamento, levando a resultados mais precisos.

Depois de estudados os filtros, foram estudadas as técnicas de filtragem que se utilizam destes filtros para realizar as estimativas necessárias, com o objetivo de conseguir estimativas melhores do que se estas fossem obtidas por um único filtro ou por conjuntos de filtros sem qualquer tipo de ligação entre si. Foi com essa motivação que estudamos duas das técnicas de filtragem mais utilizadas nos problemas de rastreamento de alvos manobrantés, o de modelos múltiplos interagentes (IMM), estudado em [3] e o de filtro de partículas (PF), em que foi desenvolvido em [24]. Baseando-se nestas duas técnicas de filtragem, elaboramos duas propostas, uma para cada técnica¹: a primeira proposta envolveu a elaboração de três bancos de filtros IMM diferentes entre si; a outra proposta envolveu a técnica de PF — baseado no Algoritmo 5.2, em que leva-se em consideração as estimativas das partículas — na qual utilizamos a observação da velocidade radial também para o cálculo da velocidade angular.

Foram baseadas nestas propostas das técnicas de filtragem que realizamos uma série de testes de desempenho, com a finalidade de determinar qual das técnicas, IMM ou PF, se sairia melhor diante

¹Em ambas as técnicas, levou-se em conta a presença da velocidade radial no vetor de observações.

de um conjunto de trajetórias criadas. De forma clara, a técnica do filtro de partículas saiu-se muito bem na grande maioria dos testes de desempenho, mesmo utilizando um baixo número de partículas ($N = 100$). Esta quantidade mostrou-se suficiente para que fosse obtido um bom desempenho nos testes. Este método que adota as partículas para a determinação das estimativas acaba criando muito mais possibilidades de representar o comportamento real do alvo durante sua trajetória, já que cada uma destas partículas corresponde a uma trajetória diferente, definidas pelos sorteios da velocidade angular $\vec{\omega}$.

Algo que pode se tornar motivo para trabalhos futuros é criar uma espécie adaptação das variáveis α_1 e α_2 , com a inclusão de β , que foram definidas no Algoritmo 5.3, à qualidade dos sorteios de $\vec{\omega}$: quando as estimativas forem boas, aumentamos os valores de α_1 e α_2 , e diminuimos o valor de β para que o sorteio tenha uma variância pequena e vice-versa.

Um outro teste realizado foi a comparação entre o desempenho das duas técnicas, IMM e PF, frente a trajetórias que possuam trechos com curvas em alta velocidade, distintas pelos valores de aceleração centrípeta (múltiplos da aceleração da gravidade). Assim como na avaliação de desempenho anterior, a técnica de PF saiu-se muito bem, dados os resultados obtidos.

Uma tabela foi criada mostrando o percentual de vezes que uma técnica se saiu melhor do que as outras. Nesta tabela, verificou-se o bom desempenho da técnica de PF através do elevado número de vezes em que esta técnica teve um bom desempenho, tanto para trechos de trajetória, quanto para trajetórias completas.

Referências Bibliográficas

- [1] Xiao Rong Li, Vesselin P. Jilkov. Survey of Maneuvering Target Tracking. Part I: Dynamic Models. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 39(4):1333–1364, Outubro 2003.
- [2] Gustavo V. L. Moisés. Filtragem via Métodos de Monte Carlo para Processos Lineares com Saltos Markovianos. Tese de mestrado, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP, Dezembro 2005.
- [3] Xiao-Rong Li, Vesselin P. Jilkov. Survey of Maneuvering Target Tracking. Part V: Multiple-Models Methods. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 41(4):1255–1321, Outubro 2005.
- [4] Arnaud Doucet, Neil J. Gordon, Vikram Krishnamurthy. Particle Filters for State Estimation of Jump Markov Linear Systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2001.
- [5] Xiao Rong Li, Vesselin P. Jilkov. Survey of Maneuvering Target Tracking. Part III: Measurement Models. In *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, volume 4473, pages 423–446, 2001.
- [6] Samuel Blackman, Robert Popoli. *Design and Analysis of Modern Tracking Systems*. Artech House, 1999.
- [7] Mo Longbin, Song Xiaoquan, Zhou Yiyu, Sun Zhong Kang, Yaakov Bar-Shalom. Unbiased Converted Measurements for Tracking. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 34(3):1023–1027, 1998.
- [8] Don Lerro, Yaakov Bar-Shalom. Tracking with Debiased Consistent Converted Measurements Versus EKF. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 29(3):1015–1022, 1993.
- [9] Zhanlue Zhao, Xiao Rong Li, Vesselin P. Jilkov. Best Linear Unbiased Filtering with Nonlinear Measurements for Target Tracking. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 40(4):1324–1336, 2004.

- [10] Greg Welch, Gary Bishop. An Introduction to the Kalman Filter. Technical report, 1995.
- [11] Yaakov Bar-Shalom, Xiao-Rong Li, Thiagalingam Kirubarajan. *Estimation with Applications to Tracking and Navigation – Algorithms and Software for Information Extraction*. Artech House, 2001.
- [12] Victor B. Frencl, João B. R. do Val, Rafael S. Mendes. Filtragem Utilizando IMM-EKF-BLUE em Modelos de Giro Constante com Taxa de Giro Desconhecida. In *XVII Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2008)*, Juiz de Fora, MG, Setembro 2008.
- [13] Jayesh H. Kotecha, Petar M. Djurić. Gaussian Particle Filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 51(10):2592–2601, 2003.
- [14] Jayesh H. Kotecha, Petar M. Djurić. Gaussian Sum Particle Filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 51(10):2602–2612, 2003.
- [15] José C. Geromel, Álvaro G. B. Palhares. *Análise Linear de Sistemas Dinâmicos*. Editora Edgard Blücher Ltda., 2004.
- [16] Carlos A. Callioli, Hygino H. Domingues, Roberto C. F. Costa. *Álgebra Linear e Aplicações*. Atual Editora, 2000.
- [17] Cleve Moler, Charles V. Loan. Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-Five Years Later. *Society for Industrial and Applied Mathematics – SIAM*, 45(1):3–49, 2003.
- [18] Athanasios Papoulis, S. Unnikrishna Pillai. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. Mc Graw Hill, 2002.
- [19] Piotr Suchomski. Explicit Expressions for Debiased Statistics of 3D Converted Measurements. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 35(1):368–370, 1999.
- [20] Julio C. B. de C. Ferreira, Jacques Waldmann. Covariance Intersection-Based Sensor Fusion for Sounding Rocket Tracking and Impact Area Prediction. *Control Engineering Practice*, 15(4):389–409, 2007.
- [21] Weiming Xu, Yanchun Liu, Xiaodong Yin. Method for Underwater Target Tracking Based on an Interacting Multiple Model. *Geo-Spatial Information Science*, 11(3):186–190, Setembro 2008.
- [22] Alberto Leon-Garcia. *Probability and Random Variables for Electrical Engineering*. Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

-
- [23] Reginaldo J. Santos. *Matrizes, Vetores e Geometria Analítica*. Imprensa Universitária da UFMG, 2002.
- [24] Branko Ristic; Sanjeev Arulampalam; Neil Gordon. *Beyond the Kalman Filter - Particle Filters for Tracking Applications*. Artech House, Setembro 2004.
- [25] Arnaud Doucet, Simon Godsill, Christophe Andrieu. On Sequential Monte Carlo Sampling Methods for Bayesian Filtering. *Statistics and Computing*, 10(3):197–208, 2000.

Apêndice A

Matriz de Covariância R_k para o EKF com Observações Despolarizadas

Quando realizamos a conversão das observações de coordenadas esféricas para cartesianas, existe o fenômeno de polarização das observações e, para resolver este problema, é utilizado a técnica de despolarização das observações. No caso do EKF, quando é aplicada esta técnica, é necessário fazer o cálculo da nova matriz de ruído das observações, R_k , cuja estrutura será descrita neste apêndice. Em [19], é apresentada dois tipos de cálculo da matriz R_k , ambas para o caso tridimensional: a primeira delas é chamada de matriz de covariância verdadeira, que fica em função dos valores reais de r , a e e . Este caso não é aplicado em testes justamente pelo fato de não termos os valores exatos de alcance, azimute e elevação, somente as observações r_m , a_m e e_m . O outro método utiliza os valores das observações, sendo o meio mais utilizado na prática para calcular R_k .

Note que a matriz R_k é função de k , ou seja, é variante no tempo, pelo fato de ser uma função das observações que, a cada instante de tempo k , possuem valores diferentes. Sua estrutura é dada da seguinte forma:

$$R_k = \begin{bmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{xy} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{xz} & R_{yz} & R_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

em que

$$R_{xx} = \left[r_m^2 \left(\tilde{\beta}_x \tilde{\beta}_{xy} - \tilde{\alpha}_x \tilde{\alpha}_{xy} \right) + \sigma_r^2 \left(2\tilde{\beta}_x \tilde{\beta}_{xy} - \tilde{\alpha}_x \tilde{\alpha}_{xy} \right) \right] e^{(-2\sigma_a^2 - 2\sigma_e^2)} \quad (\text{A.2})$$

$$R_{yy} = \left[r_m^2 \left(\tilde{\beta}_y \tilde{\beta}_{xy} - \tilde{\alpha}_y \tilde{\alpha}_{xy} \right) + \sigma_r^2 \left(2\tilde{\beta}_y \tilde{\beta}_{xy} - \tilde{\alpha}_y \tilde{\alpha}_{xy} \right) \right] e^{(-2\sigma_a^2 - 2\sigma_e^2)} \quad (\text{A.3})$$

$$R_{zz} = \left[r_m^2 \left(\tilde{\beta}_z - \tilde{\alpha}_z \right) + \sigma_r^2 \left(2\tilde{\beta}_z - \tilde{\alpha}_z \right) \right] e^{-2\sigma_e^2} \quad (\text{A.4})$$

$$R_{xy} = \left[r_m^2 \left(\tilde{\beta}_{xy} - \tilde{\alpha}_{xy} e^{\sigma_a^2} \right) + \sigma_r^2 \left(2\tilde{\beta}_{xy} - \tilde{\alpha}_{xy} e^{\sigma_a^2} \right) \right] \text{sen}(a_m) \cos(a_m) e^{(-4\sigma_a^2 - 2\sigma_e^2)} \quad (\text{A.5})$$

$$R_{xz} = \left[r_m^2 (1 - e^{\sigma_e^2}) + \sigma_r^2 (2 - e^{\sigma_e^2}) \right] \cos(a_m) \sin(e_m) \cos(e_m) e^{(-\sigma_a^2 - 4\sigma_e^2)} \quad (\text{A.6})$$

$$R_{yz} = \left[r_m^2 (1 - e^{\sigma_e^2}) + \sigma_r^2 (2 - e^{\sigma_e^2}) \right] \sin(a_m) \sin(e_m) \cos(e_m) e^{(-\sigma_a^2 - 4\sigma_e^2)} \quad (\text{A.7})$$

e

$$\tilde{\alpha}_x = \sin^2(a_m) \sinh(\sigma_a^2) + \cos^2(a_m) \cosh(\sigma_a^2) \quad (\text{A.8})$$

$$\tilde{\alpha}_y = \sin^2(a_m) \cosh(\sigma_a^2) + \cos^2(a_m) \sinh(\sigma_a^2) \quad (\text{A.9})$$

$$\tilde{\alpha}_z = \sin^2(e_m) \cosh(\sigma_e^2) + \cos^2(e_m) \sinh(\sigma_e^2) \quad (\text{A.10})$$

$$\tilde{\alpha}_{xy} = \sin^2(e_m) \sinh(\sigma_e^2) + \cos^2(e_m) \cosh(\sigma_e^2) \quad (\text{A.11})$$

$$\tilde{\beta}_x = \sin^2(a_m) \sinh(2\sigma_a^2) + \cos^2(a_m) \cosh(2\sigma_a^2) \quad (\text{A.12})$$

$$\tilde{\beta}_y = \sin^2(a_m) \cosh(2\sigma_a^2) + \cos^2(a_m) \sinh(2\sigma_a^2) \quad (\text{A.13})$$

$$\tilde{\beta}_z = \sin^2(e_m) \cosh(2\sigma_e^2) + \cos^2(e_m) \sinh(2\sigma_e^2) \quad (\text{A.14})$$

$$\tilde{\beta}_{xy} = \sin^2(e_m) \sinh(2\sigma_e^2) + \cos^2(e_m) \cosh(2\sigma_e^2) \quad (\text{A.15})$$

Note a complexidade da matriz R_k , com termos caracterizados por fortes não-linearidades, tais como potências de funções trigonométricas (normais e hiperbólicas) e exponenciais.