Universidade Estadual de Campinas
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA
Laboratório de Análise Convexa

Otimização H_2 com Controladores Estáveis:

Uma Abordagem por Programação Geométrica

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

por

Alex Ismael Duré Cabañas

Engenheiro Elétrico - UFJF/MG

em 09 de agosto de 1996 perante a banca examinadora

Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira	FEEC/UNICAMP - Orientador
Prof. Dr. Basílio Ernesto de Almeida Milani	FEEC/UNICAMP
Prof. Dr. Sérgio Ricardo de Souza	CEFET/MG

Esta tese corresponde à redação final da tese defendida por Alex Ismael Duré Cabañas e aprovada pela Comissão Julgadora em 09 / 08 / 1996.

UNIDADE BC
Nº CHAMADA T/UNICAMP
D933o
V _____ EX _____
TOMBO BC/ 30438
PROC 16.1203-06
C _____ D X
PREÇO R$11,00
DATA 31/10/06
BIB ID 389640

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

D933o

Duré Cabañas, Alex Ismael
Otimização H_2 com controladores estáveis : uma abordagem por programação geométrica / Alex Ismael Duré Cabañas.--Campinas, SP: [s.n.], 1996.

Orientador: Paulo Augusto Valente Ferreira.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Sistemas de controle por realimentação. 2. Controladores elétricos. 3. Programação geométrica. I. Ferreira, Paulo Augusto Valente. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

206 3763

Aos meus pais, Cecília e Alfonso.

Agradecimentos

Gostaria de expressar os meus mais sinceros agradecimentos a todas as pessoas que me apoiaram e incentivaram, permitindo a conclusão deste trabalho. Especialmente,

Ao Professor Paulo Augusto Valente Ferreira, autêntico mestre e pessoa admirável;

Aos meus pais, Cecília e Alfonso, meus primeiros tutores e amigos;

À colega Santa Clara Chaves de Sá, pela amizade inestimável;

Aos Professores Carlos Augusto Duque e Francisco José Gomes, meus orientadores no grupo PET/CAPES da UFJF, inovadores e corajosos;

Aos professores da FEE/UNICAMP;

À oportunidade oferecida pelo Governo Brasileiro, que através do CNPq financiou este trabalho.

Resumo

Neste trabalho, o problema de otimização H_2 restrita a controladores estáveis serve inicialmente de motivação para um estudo sobre propriedades geométricas das condições de Routh-Hurwitz. A partir da desigualdade aritmética-geométrica e de conceitos e resultados de programação geométrica, demonstra-se que sempre é possível obter uma representação interna convexa das condições de Routh-Hurwitz e que para sistemas de pequena dimensão a representação é exata. Este resultado viabiliza o tratamento de problemas de projeto com restrições de estabilidade através de técnicas de programação linear, gerando soluções ótimas ou sub-ótimas com baixo custo computacional. O problema de otimização H_2 restrita a controladores estáveis é então resolvido pelo método proposto e as principais conclusões do trabalho são apresentadas.

Abstract

In this work, the H_2 optimization problem constrained to stable controllers motivates a study on the geometric properties of the Routh-Hurwitz conditions. Through the arithmetic-geometric inequality and concepts and results of geometric programming, it is shown that is always possible to obtain an inner convex representation of the Routh-Hurwitz conditions and that for low order systems the representation is exact. This result allows the treatment of design problems with stability constraints through linear programming techniques and provides optimal or sub-optimal solutions with reduced computational costs. The H_2 optimization problem constrained to stable controllers is then solved by the method proposed and the main conclusions of the work are presented.

Sumário

SUMÁRIO 1

NOTAÇÃO 4

1 Introdução Geral 5

1.1 Motivação 5

1.2 Proposição da tese 6

1.3 Organização da tese 7

2 Estabilização e Estabilização Forte 8

2.1 Introdução 8

2.2 Sistema de controle padrão 8

2.3 Parametrização dos controladores estabilizantes 10

2.4 Parametrização em espaço de estados 14

2.5 Condições para estabilização forte 19

2.6 Projeto via parametrização Q: exemplo 20

2.7 Conclusão 22

3 Otimização H_2 23

3.1 Introdução 23

3.2 O problema de otimização H_2 24

3.3 Abordagem H_2 do problema LQG 25
3.4 Otimização H_2 com controladores estáveis 28
3.5 Formulação não-convexa do problema 29
3.6 Conclusão 31

4 Programação Geométrica **32**
4.1 Introdução 32
4.2 Definições e propriedades básicas 32
4.3 A desigualdade aritmética-geométrica 34
4.3.1 Condensação de posinômios 34
4.4 Um algoritmo para solução de GGP's 35
4.5 Linearização via transformações logarítmicas 37
4.6 Solução numérica via planos de corte 39
4.7 Obtenção de um ponto inicial factível 41
4.8 Conclusão 43

5 Otimização H_2 com Controladores Estáveis: Solução via Programação Geométrica **44**
5.1 Introdução 44
5.2 Propriedades posinomiais das condições de Routh-Hurwitz 45
5.3 Otimização H_2 como um GGP 48
5.3.1 Formulação GGP da função objetivo 48
5.3.2 Formulação GGP das restrições 49
5.4 Formulação geral do problema 50
5.5 Exemplos ilustrativos 51
5.5.1 Planta estabilizável em RH_∞ 51
5.5.2 Planta estabilizável em RH_∞, segundo exemplo 56
5.5.3 Controlador inicial estável 58

5.5.4 Planta não estabilizável em RH_∞ 60
5.5.5 Comparações e comentários 60

6 Conclusão **61**

Bibliografia **63**

Notação

$\mathbb{R}$	Eixo real.
$\mathbb{R}^n$	Espaço vetorial dos vetores reais com n componentes.
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números naturais.
$\mathbb{Z}^+$	Conjunto dos números naturais positivos.
$\mathbb{C}$	Plano complexo.
$\mathbb{C}^+$	Semi-plano direito aberto, $Re\ (s) > 0$.
$\bar{\mathbb{C}}^+$	Semi-plano direito fechado, $Re\ (s) \geq 0$.
$\tilde{\mathbb{C}}^+$	Semi-plano direito estendido, $\bar{\mathbb{C}}^+ \cup \{\infty\}$.
H_∞	Espaço de Hardy das funções analíticas em $\mathbb{C}^+$ e limitadas em $\tilde{\mathbb{C}}^+$, $f(s) \in H_\infty \leftrightarrow \sup_{\alpha>0} \lvert f(\alpha + j\omega)\rvert < \infty.$
RH_∞	Subconjunto das funções em H_∞ racionais e reais.
L_2	Espaço de Hilbert das funções quadraticamente integráveis sobre $j\mathbb{R}$, $f(s) \in L_2 \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f^*(j\omega) f(j\omega) d\omega < \infty$ $\lVert f(s)\rVert_2 = \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(j\omega) f(j\omega) d\omega\right]^{\frac{1}{2}}.$
H_2	Espaço de Hardy das funções analíticas em $\mathbb{C}^+$ e quadraticamente integráveis em $\tilde{\mathbb{C}}^+$, $f(s) \in H_2 \leftrightarrow \sup_{\sigma>0} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\sigma + j\omega) f(\sigma + j\omega) d\omega < \infty.$
RH_2	Subconjunto das funções em H_2 racionais e reais.
H_{2p}	Complemento ortogonal de H_2 em L_2.

Capítulo 1

Introdução Geral

1.1 Motivação

Existe um natural interesse pelo projeto de sistemas de controle que utilizam controladores estáveis (*estabilização forte*), especialmente quando a planta a ser controlada é estável. O motivo é a integridade do sistema. Se, por exemplo, um sensor ou atuador falha ou é deliberadamente desligado e, em consequência, a malha de realimentação é interrompida, a estabilidade global é mantida se a planta e o controlador são individualmente estáveis. Um outro motivo de interesse pelo projeto de controladores estáveis decorre do fato do problema de estabilização simultânea de duas plantas com um único compensador ser equivalente ao problema da estabilização forte de uma única planta (Vidyasagar e Viswanadham, 1982).

Evidencia-se assim a necessidade da concepção de métodos de projeto de controladores que, além das especificações usuais de desempenho do sistema de controle, comportem também a restrição de estabilidade do compensador.

Considerando sistemas lineares e invariantes no tempo (SLIT), uma das abordagens existentes para o projeto de controladores é fundamentada na determinação de um controlador ótimo segundo algum critério bem definido, por exemplo, em termos de uma função de custo quadrática como acontece no método de projeto LQG (Athans, 1971) ou no método de otimização H_2 (Youla *et al.*, 1976). As duas metodologias mencionadas permitem obter um controlador ótimo analiticamente (via solução de um problema de otimização irrestrito) e sempre fornecem controladores estabilizantes. Porém, não incorporam a restrição de

estabilidade sobre o controlador. Sob um outro paradigma, Boyd *et al.* (1988) implementam o projeto via solução de um *problema de otimização convexa restrito*, que representa um avanço em relação aos métodos anteriores, entre outras coisas porque o projetista não precisa traduzir as especificações de desempenho em matrizes-ponderação, embora também não assegure a estabilidade do controlador pelo fato da restrição correspondente não ser convexa na parametrização utilizada.

De maneira a projetar um controlador estável, Ganesh e Pearson (1989) modificam a técnica de otimização H_2, gerando um problema de otimização restrito. A abordagem tem duas características básicas. Primeiro, envolve funções não convexas e portanto um mínimo global não é assegurado. A metodologia permite a obtenção de controladores sub-ótimos, racionais e estáveis para casos em que o controlador H_2 ótimo *irrestrito* resulta ser instável. Segundo, exige solução numérica iterativa, diferentemente do problema de otimização H_2, que na formulação básica de Youla possui solução analítica. Esta segunda característica da abordagem de Ganesh e Pearson envolve a obtenção de uma solução inicial factível e a utilização de um algoritmo geral de programação não linear visando a obtenção de um mínimo local.

1.2 Proposição da tese

Na presente tese, o problema de otimização H_2 através de controladores estáveis serve inicialmente de motivação para um estudo sobre propriedades geométricas das condições de Routh-Hurwitz. A partir da desigualdade aritmética-geométrica e de conceitos e resultados de programação geométrica, demonstra-se que sempre é possível obter uma representação interna convexa das condições de Routh-Hurwitz e que para sistemas de pequena dimensão essa representação é exata. Este resultado permite a formulação de problemas de projeto com restrições de estabilidade como problemas de *Programação Geométrica Generalizada*, cujas soluções ótimas ou sub-ótimas podem ser obtidas com baixo custo computacional através de métodos de planos de corte (Cabañas e Ferreira, 1996). Em seguida, o problema de otimização H_2 com controladores estáveis é resolvido pelo método proposto e as principais conclusões do trabalho são apresentadas.

1.3 Organização da tese

A tese está organizada em 6 capítulos como segue:

Capítulo 1 O problema de otimização-H_2 com restrições de estabilidade é abordado como motivação do trabalho e propõe-se sua solução utilizando programação geométrica generalizada, GGP.

Capítulo 2 Descreve-se a arquitetura de controle que será considerada em exposições teóricas e exemplos de aplicação subsequentes. Introduzem-se conceitos relativos à formulação do problema de projeto, como a parametrização Q ou de Youla dos controladores que estabilizam uma planta e as condições necessárias e suficientes para estabilização de uma planta através de controladores estáveis (estabilização forte).

Capítulo 3 A metodologia de projeto H_2, na concepção devida a Youla *et al.* (1976), é revista, assim como a formulação de Ganesh e Pearson (1989) do problema H_2 com estabilização forte. Apresenta-se o método LQG como caso particular de projeto H_2.

Capítulo 4 Oferece-se uma visão geral da programação geométrica, começando com a definição do problema GGP padrão e seguindo com o necessário para uma implementação numérica da metodologia.

Capítulo 5 Discute-se genericamente a natureza posinomial das condições de Routh-Hurwitz, mostrando a factibilidade de incluí-las em aplicações do tipo GGP. Propõe-se então uma formulação GGP para o problema H_2 com estabilização forte. Exemplos de projeto demonstrando a viabilidade da abordagem via programação geométrica fecham o capítulo.

Capítulo 6 São apresentadas as conclusões gerais resultantes do desenvolvimento desta tese e sugeridos assuntos para pesquisa futura.

Capítulo 2

Estabilização e Estabilização Forte

2.1 Introdução

Este capítulo inicia-se com a apresentação da arquitetura de controle considerada no restante da tese. Esta configuração permite o tratamento de ampla variedade de problemas de controle, em relação à modelagem e especificações de desempenho. Para mais detalhes, ver Boyd e Barratt (1991). Nas duas seções seguintes expõem-se os conceitos e definições pertinentes à descrição do conjunto dos controladores que estabilizam uma planta. Esta parametrização é devida a Youla *et al.* (1976) e o tratamento aqui dado foi baseado em Boyd *et al.* (1988). A seguir, são revistas as condições necessárias e suficientes de existência de um controlador estabilizante estável, que, como será visto, dependem exclusivamente da planta (Youla *et al.*, 1974). Este tópico também é tratado em Vidyasagar (1985), onde, sob a ótica das fatorações coprimas, chega-se a uma parametrização dos controladores fortemente estabilizantes incluindo controladores irracionais. Um exemplo simples de projeto utilizando a parametrização de Youla associada às condições de estabilização forte fecha o capítulo.

2.2 Sistema de controle padrão

A planta genérica considerada é mostrada na Figura 2.1. Decompõe-se suas entradas em dois sinais, w, o *vetor de entradas exógenas*, e u, o *vetor de entradas controladas*. As

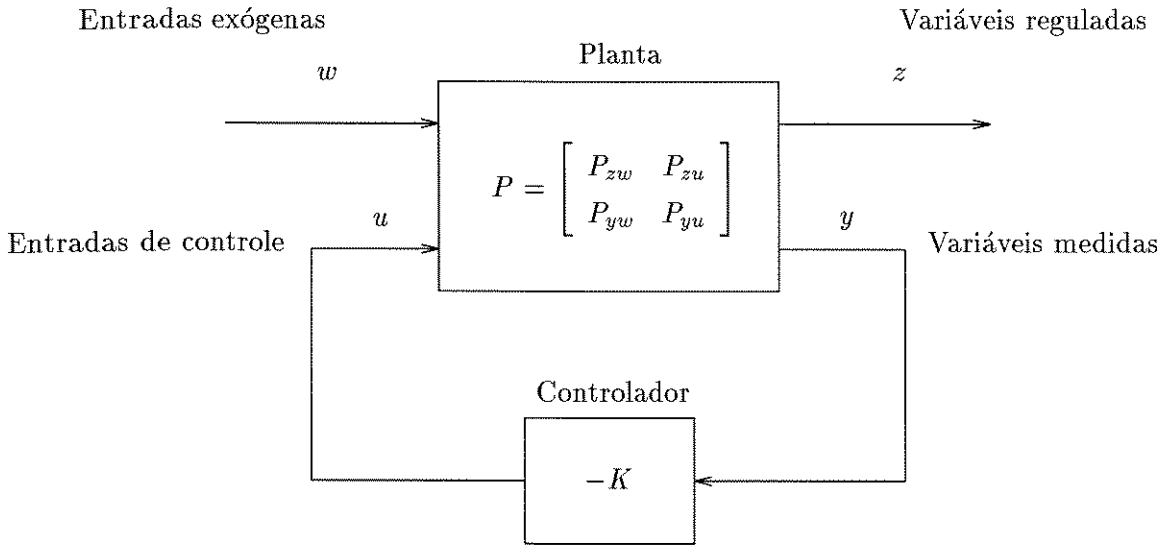

Figura 2.1: Planta genérica e controlador.

saídas são separadas em y, o *vetor de saídas medidas*, e z, o *vetor de saídas reguladas*. Por definição, o controlador somente possui entrada y e saída u e o sistema como um todo possui entrada w e saída z. O vetor y representa os sinais realmente acessíveis ao controlador K, incluindo comandos de entrada que possam também ser considerados entradas exógenas (ou seja, componentes de w). Similarmente, o sinal u representa aquelas entradas da planta que o controlador pode manipular.

A entrada exógena w inclui perturbações físicas reais ou ruídos (torques, forças) atuando sobre a planta, algum atuador ou sensor e, como já mencionado, qualquer comando de entrada. O vetor w também pode conter entradas fictícias injetadas na planta.

O vetor z contém qualquer sinal do sistema sobre o qual deseja-se expressar uma especificação, desconsiderando sua acessibilidade ao controlador. Exemplos são posição, forças, temperaturas, etc. que devam ser controladas ou reguladas. O vetor z pode incluir estados internos ou variáveis que se deseje limitar. Algumas componentes de z podem ser fictícias, por exemplo, combinações lineares de variáveis de estado, sinais filtrados e componentes de u ou y.

Assim, H, a matriz de transferência de malha fechada das entradas exógenas w para as variáveis reguladas z, contém, por definição, cada função de transferência de malha fechada

de interesse para o projetista.

2.3 Parametrização dos controladores estabilizantes

O controlador deve ser tal que estabilize a planta. Assim, a descrição do conjunto de matrizes H's correspondente aos controladores que estabilizam o sistema é essencial nas metodologias de projeto a serem tratadas. Este conjunto é uma *variedade linear*, isto é, uma traslação de um subespaço linear. Uma variedade linear $\mathcal{L}$ em um espaço vetorial $\mathcal{V}$ é frequentemente descrita como o espaço nulo ou range de um mapeamento afim de, ou para $\mathcal{V}$. Então,

$$\mathcal{L} = \{v \in \mathcal{V} | Av = b\} \tag{2.1}$$

onde A é um mapeamento linear de $\mathcal{V}$ para $\mathcal{W}$, $b \in \mathcal{W}$, e $\mathcal{W}$ é um espaço vetorial. Esta é uma descrição de $\mathcal{L}$ em termos de uma *restrição linear de igualdade*; se $\mathcal{W} = \mathbb{R}^n$, então pode-se interpretar cada linha de $Av = b$ como uma restrição funcional linear de igualdade em $\mathcal{V}$. Seja

$$\mathcal{H} = \{\ H \mid \text{o sistema é estável em malha fechada}\} \tag{2.2}$$

o conjunto factível de H's. Note que $\mathcal{H}$ define uma variedade linear pois combinações de matrizes estáveis geram sempre matrizes estáveis. Alternativamente, pode-se descrever uma variedade linear, $\mathcal{L}$, como o range de um mapeamento afim

$$\mathcal{L} = \{Cu + d \mid u \in \mathcal{U}\} \tag{2.3}$$

onde C é um mapeamento linear de algum espaço vetorial $\mathcal{U}$ para $\mathcal{V}$ e $d \in \mathcal{V}$. Tal *representação* pode ser considerada como uma *representação paramétrica livre* de $\mathcal{L}$; u é um parâmetro livre.

Uma representação paramétrica livre de $\mathcal{H}$ pode ser derivada utilizando a teoria das fatorações coprimas estáveis (Vidyasagar, 1985). De acordo com esta teoria, a representação de $\mathcal{H}$ seria

$$\mathcal{H} = \{\ T_1 - T_2 Q T_3 \mid Q \text{ é estável}\} \tag{2.4}$$

chamada parametrização Q, onde T_1, T_2 e T_3 são mapeamentos estáveis. Observe que

$$H = T_1 - T_2 Q T_3 \tag{2.5}$$

é afim em Q. Enfatize-se que Q é chamado de *parâmetro* no sentido de que (2.4) é uma *parametrização* de todos os mapeamentos de malha fechada, e não no sentido de ser um número real, como o ganho do integrador em um controlador PID.

A derivação da parametrização Q inicia-se com um controlador qualquer, K_{nom}, que estabiliza a planta e que será chamado de *controlador nominal.* Seja $K_{nom} = X_1^{-1}Y_1$ uma fatoração coprima estável à esquerda do controlador nominal e $P_{yu} = A_2^{-1}B_2$ uma fatoração coprima estável à esquerda de P_{yu}. Então cada controlador da forma

$$K = (X_1 - QB_2)^{-1}(Y_1 + QA_2), \quad Q \text{ estável} \tag{2.6}$$

estabiliza P. Reciprocamente, cada controlador que estabiliza P tem a forma (2.6) para algum Q estável (Figura 2.2). Há uma caracterização similar dos controladores estabilizantes em termos de fatorações coprimas à direita.

Desde que K_{nom} estabiliza P_{yu}, há uma fatoração coprima à direita $P_{yu} = B_1A_1^{-1}$ com $Y_1B_1 + X_1A_1 = I$ (I sendo o mapeamento identidade). Uma pequena manipulação leva à parametrização Q, equação (2.5), com

$$\begin{aligned} T_1 &= P_{zw} - P_{zu}A_1Y_1P_{yw} \\ T_2 &= P_{zu}A_1 \\ T_3 &= A_2P_{yw} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Considere os sinais v e e como definidos na Figura 2.2 e na Figura 2.3. T_1 é simplesmente a matriz H devida ao controlador nominal K_{nom}; T_2 é o mapeamento de v a z, e T_3 é o mapeamento de w a e (Figura 2.3). A chave da parametrização Q é que o mapeamento de malha fechada de v a e é *zero.*

Doyle (1984) fornece uma interpretação da parametrização Q quando o controlador nominal é baseado na realimentação do estado estimado. Neste caso, e é simplesmente a saída de predição de erro $\hat{y} - y$ do observador, e v é adicionado à saída do controlador como mostrado na Figura 2.4. Na Figura 2.4, K_{sfb} é o vetor ganho de realimentação e $y = C_yx$ onde x é o vetor de estados da planta. O controlador da Figura 2.4 é chamado *controlador baseado no observador* (OBC, *observer-based controller*). O ponto fundamental é que qualquer controlador que estabilize P pode ser realizado como um controlador baseado em observador. A parametrização Q pode ser considerada como um OBC generalizado.

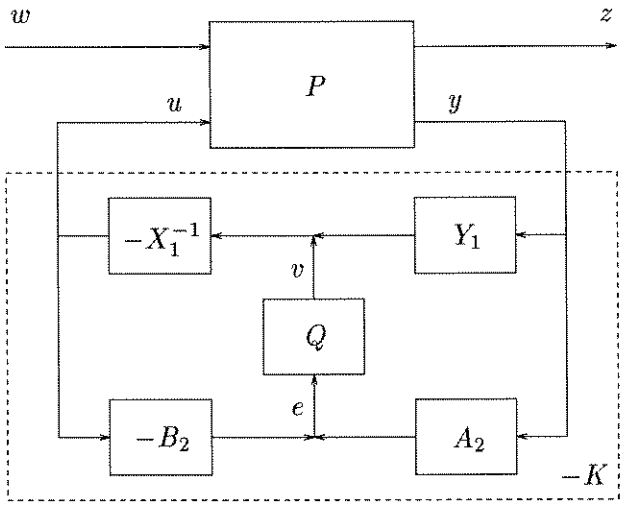

Figura 2.2: Diagrama de blocos da parametrização Q.

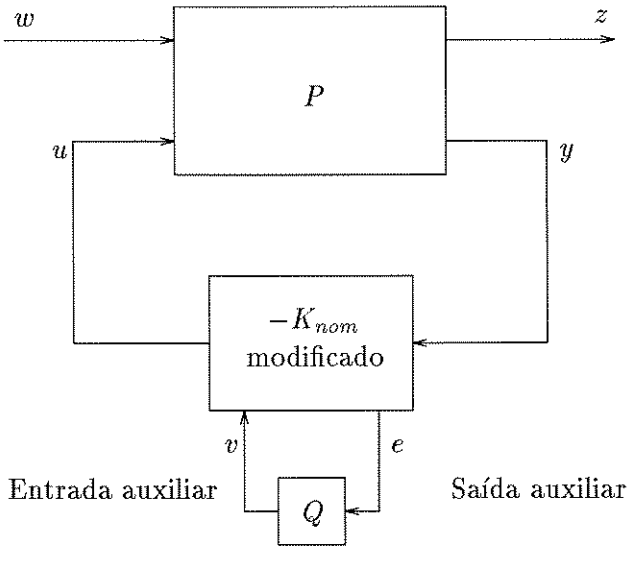

Figura 2.3: Parametrização Q como modificação do controlador nominal.

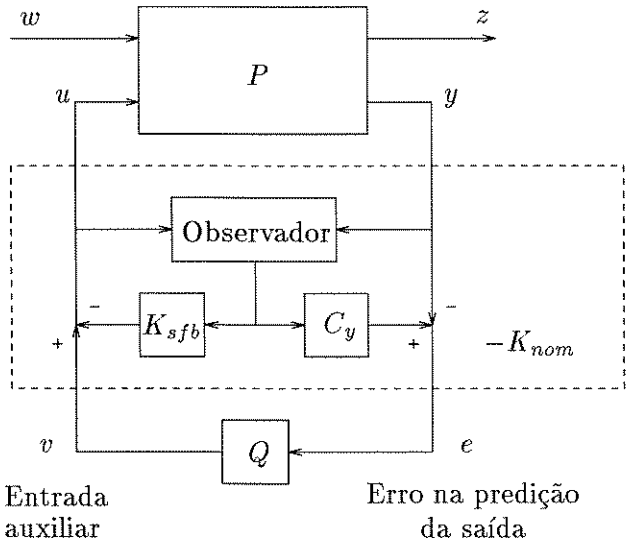

Figura 2.4: Interpretação de Doyle para a Parametrização Q.

O desenvolvimento matemático que leva à obtenção de $\mathcal{H}$ através de controladores baseados no observador de estados é apresentado formalmente a seguir. Seja a realização de estado de P dada por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_p x + B_w w + B_u u \\ y &= C_y x + D_{yw} w + D_{yu} u \\ z &= C_z x + D_{zw} w + D_{zu} u \end{aligned} \tag{2.8}$$

Então existe um controlador próprio K que estabiliza internamente P se e somente se (A_p, B_u) for estabilizável e (C_y, A_p) for detectável. Além disso sabe-se que K estabiliza o sistema em malha fechada se e somente se estabiliza P_{yu} (Francis, 1987, seção 4.3). Seja

$$P_{yu} = B_1 A_1^{-1} = A_2^{-1} B_2$$

uma fatoração racional coprima estável, e sejam X_1, Y_1, X_2, Y_2 matrizes satisfazendo a identidade de Bezout

$$\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ -B_2 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & -Y_2 \\ B_1 & X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

Veja Gu *et al.* (1993) para detalhes de um algoritmo para obtenção destas matrizes.

A parametrização Q de todos os controladores estáveis é

$$\begin{aligned} K &= [Y_2 + A_1 Q]\,[X_2 - B_1 Q]^{-1} \\ &= [X_1 - Q B_2]^{-1}\,[Y_1 + Q A_2] \end{aligned} \tag{2.10}$$

onde $Q \in RH_\infty$. Isto leva a uma caracterização afim da matriz de transferência entrada-saída

$$\begin{aligned} z &= [(P_{zw} - P_{zu} A_1 Y_1 P_{yw}) - (P_{zu} A_1) Q (A_2 P_{yw})]\, w \\ &= [T_1 - T_2 Q T_3]\, w \\ &= H\ w \end{aligned} \tag{2.11}$$

onde $T_1, T_2, T_3 \in RH_\infty$.

2.4 Parametrização em espaço de estados

Os algoritmos baseados na parametrização Q normalmente são implementados através da representação do sistema em espaço de estados. Tal representação é necessária devido a problemas numéricos inerentes à representação por matrizes de transferência, como a geração de matrizes mal-condicionadas. Por isso, neste trabalho, serão revistas as representações de estado da planta P, do controlador K e do sistema em malha fechada H.

Com $x(0) = 0$, obtém-se a matriz de transferência

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{zw}(s) & P_{zu}(s) \\ P_{yw}(s) & P_{yu}(s) \end{bmatrix} = C_p (sI - A_p)^{-1} B_p + D_p, \tag{2.12}$$

onde

$$B_p = \begin{bmatrix} B_w & B_u \end{bmatrix}, \quad C_p = \begin{bmatrix} C_z \\ C_y \end{bmatrix}, \quad D_p = \begin{bmatrix} D_{zw} & D_{zu} \\ D_{yw} & D_{yu} \end{bmatrix}$$

As fórmulas em espaço de estados para plantas estritamente próprias ($D_{yu} = 0$) são bastante simplificadas. Na explanação a seguir serão consideradas somente plantas desta natureza. Esta hipótese não compromete a utilização da técnica aqui discutida.

Suponha que o controlador possua a realização em espaço de estados

$$\dot{x}_K = A_K x_K + B_K y \tag{2.13}$$

$$-u = C_K x_K + D_K y \tag{2.14}$$

de tal forma que

$$K(s) = C_K(sI - A_K)^{-1}B_K + D_K \tag{2.15}$$

Uma realização em espaço de estados do sistema em malha fechada pode ser encontrada eliminando-se u e y em (2.8) e (2.13) a (2.15):

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (A_P - B_u D_K C_y)x - B_u C_K x_K + (B_w - B_u D_K D_{yw})w \\
\dot{x}_K &= B_K C_y x + A_K x_K + B_K D_{yw} w \\
z &= (C_z - D_{zu} D_K C_y)x - D_{zu} C_K x_K + (D_{zw} - D_{zu} D_K D_{yw})w
\end{aligned}$$

de tal forma que

$$H(s) = C_H(sI - A_H)^{-1}B_H + D_H \tag{2.16}$$

A seguir será obtida a representação do controlador.

Um método geral para se aplicar o paradigma do controlador modificado começa por um controlador nominal que é uma realimentação de estado *estimado*. O controlador por realimentação de estado estimado é dado por

$$u = -K_{sfb}\hat{x}, \tag{2.17}$$

onde K_{sfb} é uma matriz apropriada (o ganho de realimentação do estado estimado) e $\hat{x}$ é uma estimativa de x devida apenas a u, que é governada pela equação do observador

$$\dot{\hat{x}} = A_p\hat{x} + B_u u + L_{est}(y - C_y\hat{x}), \tag{2.18}$$

onde L_{est} é o ganho do estimador. A matriz de transferência deste controlador é

$$K_{nom}(s) = -K_{sfb}(sI - A_P + B_u K_{sfb} + L_{est}C_y)^{-1}L_{est}. \tag{2.19}$$

Note que K_{nom} irá estabilizar P se K_{sfb} e L_{est} forem tais que $A_P - B_u K_{sfb}$ e $A_P - L_{est}C_y$ sejam estavéis, o que será assumido a partir daqui. Para aumentar este controlador nominal de realimentação de estado estimado, incorpora-se v em u, na saída do observador, significando que (2.17) é substituida por

$$u = -K_{sfb}\hat{x} + v, \tag{2.20}$$

e por isto o sinal v não induz qualquer erro de observação. Para o sinal e, toma-se a predição do erro da saída:

$$e = y - C_y\hat{x}. \tag{2.21}$$

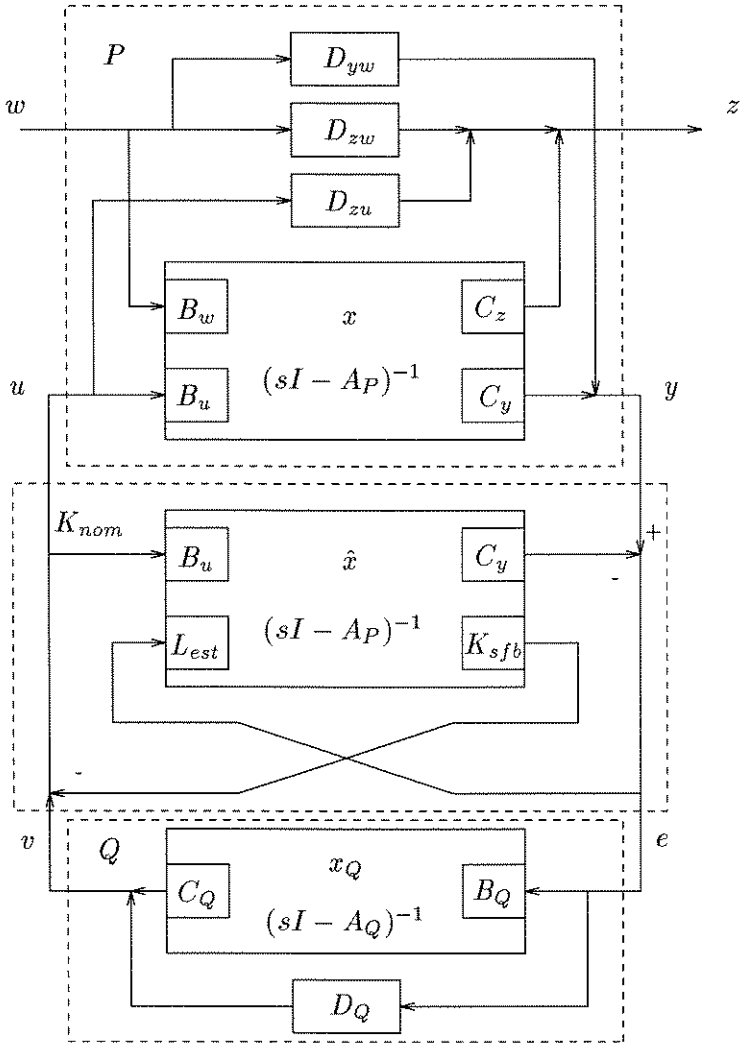

Figura 2.5: Paradigma do controlador modificado

O processo de obtenção do controlador é ilustrado na Figura (2.5).

A imposição de que a matriz de transferência em malha fechada de v para e deva ser zero é satisfeita, pois a diferença $x - \hat{x}$ não é influenciada por v, isto é, o erro $x - \hat{x}$ não é controlável a partir de v. De fato, manipulações simples levam a

$$\dot{x} - \dot{\hat{x}} = (A_P - L_{est}C_y)(x - \hat{x})$$

que não depende de v. Portanto, a matriz de transferência de v para $x - \hat{x}$ é zero. A matriz de transferência de v para e é C_y vezes esta última, isto é, zero.

A aplicação do paradigma do controlador modificado ao controlador por realimentação de estado estimado leva ao *controlador baseado no observador* mostrado na Figura (2.5). O controlador baseado no observador é apenas um controlador por realimentação de estado estimado com a predição do erro da saída processada através de uma matriz estável Q e adicionada ao sinal do atuador na saída do observador. De fato, esta adição é tal que o paradigma do controlador modificado gera todos os controladores que estabilizam a planta. Todo controlador estabilizante pode ser realizado como um controlador baseado no observador, para alguma escolha de matriz estável Q.

A partir do controlador baseado no observador pode-se obter as equações em espaço de estados para a parametrização de todos os controladores que estabilizam a planta, e todas as matrizes de transferência em malha fechada realizáveis pelos controladores que estabilizam a planta. As equações em espaço de estados para o controlador nominal aumentado são, a partir da equação (2.18),

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A_P - B_u K_{sfb} - L_{est}C_y)\hat{x} + L_{est}y + B_u v \\ u &= -K_{sfb}\hat{x} + v \\ e &= y - C_y\hat{x} \end{aligned} \tag{2.22}$$

As equações em espaço de estado para o sistema em malha fechada com o controlador aumentado são encontradas eliminando-se u e y de (2.22) e das equações da planta (2.8):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_P x - B_u K_{sfb}\hat{x} + B_w w + B_u v \\ \dot{\hat{x}} &= L_{est}C_y x + (A_P - B_u K_{sfb} - L_{est}C_y)\hat{x} + L_{est}D_{yw}w + B_u v \\ z &= C_z x - D_{zu}K_{sfb}\hat{x} + D_{zw}w + D_{zu}v \\ e &= C_y x - C_y\hat{x} + D_{yw}w \end{aligned}$$

As matrizes de transferência T_1, T_2 e T_3 podem ser realizadas como:

$$\begin{bmatrix} T_1(s) & T_2(s) \\ T_3(s) & 0 \end{bmatrix} = C_T(sI - A_T)^{-1}B_T + D_T, \tag{2.23}$$

onde:

$$A_T = \begin{bmatrix} A_P & -B_u K_{sfb} \\ L_{est}C_y & A_P - B_u K_{sfb} - L_{est}C_y \end{bmatrix},$$

$$B_T = \begin{bmatrix} B_w & B_u \\ L_{est}D_{yw} & B_u \end{bmatrix}, \quad C_T = \begin{bmatrix} C_z & -D_{zu}K_{sfb} \\ C_y & -C_y \end{bmatrix}, \quad D_T = \begin{bmatrix} D_{zw} & D_{zu} \\ D_{yw} & 0 \end{bmatrix}$$

Se Q possui a realização em espaço de estado

$$\dot{\hat{x}}_Q = A_Q x_Q + B_Q e \tag{2.24}$$

$$v = C_Q x_Q + D_Q e \tag{2.25}$$

então a realização em espaço de estados do controlador baseado no observador pode ser encontrada eliminando-se e e v das equações do controlador aumentado (2.22):

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A_P - B_u K_{sfb} + L_{est}C_y - B_u D_Q C_y)\hat{x} + B_u C_Q x_Q + (L_{est} + B_u D_Q)y \\ \dot{x} &= -B_Q C_y \hat{x} + A_Q x_Q + B_Q y \\ u &= -(K_{sfb} + D_Q C_y)\hat{x} + C_Q x_Q + D_Q y \end{aligned}$$

tal que

$$K(s) = C_K(sI - A_K)^{-1}B_K + D_K \tag{2.26}$$

onde

$$A_K = \begin{bmatrix} A_P - B_u K_{sfb} - L_{est}C_y - B_u D_Q C_y & B_u C_Q \\ -B_Q C_y & A_Q \end{bmatrix}$$

$$B_K = \begin{bmatrix} L_{est} + B_u D_Q \\ B_Q \end{bmatrix}$$

$$C_K = \begin{bmatrix} K_{sfb} + D_Q C_y & -C_Q \end{bmatrix}$$

$$D_K = -D_Q$$

Com um pouco de álgebra pode-se verificar que a matriz de transferência de malha fechada H dada por (2.16) é igual a $T_1 - T_2QT_3$.

2.5 Condições para estabilização forte

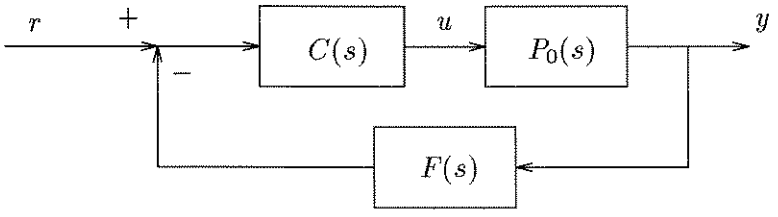

Figura 2.6: Sistema realimentado clássico.

Considere a configuração clássica de controle por realimentação mostrada na Figura 2.6, e as seguintes condições (Youla *et al.*, 1974):

(a) A planta P_0, o controlador C e o sensor F são sistemas dinâmicos lineares invariantes no tempo;

(b) Quaisquer modos escondidos da planta são assintóticamente estáveis;

(c) O controlador e o sensor são completamente observáveis e controláveis;

(d) A malha fechada é *dinâmica.*

Observe que sem a condição (b) é impossível estabilizar a planta a partir somente dos terminais de entrada e saída. É possível mostrar que a condição (d) equivale a exigir que $1 + P_{yu}(\infty)C(\infty)F(\infty) \neq 0$ (Chen, 1984). O principal resultado relativo à estabilização forte, isto é, estabilização através de um controlador estável, é enunciado a seguir para o caso de sistemas SISO. A demostração do resultado e sua extensão ao caso MIMO são abordadas em Youla *et al.* (1974).

Teorema 1 *Seja uma planta dinâmica satisfazendo (b) e possuindo a função de transferência P_0. Sejam os zeros reais distintos de P_0 em $\tilde{\mathbb{C}}^+$ denotados por $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_l$ e seja ν_i o número total de pólos reais de P_0 à direita de σ_i $(i = 1, 2, \cdots, l)$, contados levando*

em consideração a multiplicidade. Então, a planta é **fortemente estabilizável**, *isto é, existem controladores estabilizantes estáveis, se e somente se os inteiros* $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_l$ *são* **todos** *pares ou* **todos** *ímpares.*

Na maioria das aplicações práticas $P_0(\infty) = 0$, e como o número de pólos reais de P_0 à direita de $+\infty$ é zero, um inteiro par, obtém-se o seguinte importante Corolário.

Corolário 1 *Uma planta dinâmica satisfazendo (b) e* $P_0(\infty) = 0$ *é fortemente estabilizável se e somente se cada zero real de* P_0 *em* $\bar{\mathbb{C}}^+$ *fica à esquerda de um número par de pólos reais de* P_0*, estes contados considerando suas multiplicidades.*

A propriedade descrita no Teorema 1 e Corolário 1 é chamada de *pip - propriedade do entrelaçamento de pólos* - (do inglês, *parity interlacing property*). Uma planta é fortemente estabilizável se e somente se apresenta esta propriedade.

Observe que, ao se tratar o problema de controle de acordo com a representação da Figura 2.1, as condições para estabilização forte devem ser impostas à submatriz P_{yu} de P.

2.6 Projeto via parametrização Q: exemplo

Nesta seção mostra-se como obter um controlador estável para uma planta fortemente estabilizável. Trata-se de gerar um controlador que estabilize fortemente a planta, mas sem estabelecer qualquer outra restrição ou critério de otimalidade. O procedimento é baseado na parametrização de Youla e no método de construção de *unidades* descrito em Vidyasagar (1985).

O exemplo a seguir foi extraído de Doyle *et al.* (1992). Considere a planta

$$P_0(s) = \frac{s-1}{(s-2)^2} \tag{2.27}$$

e sua fatoração coprima

$$P_0 = \frac{N}{M}, \quad NX + MY = 1, \tag{2.28}$$

O controlador estabilizante será, a partir de (2.10)

$$C = \frac{X + MQ}{Y - NQ}, \quad Q \in RH_\infty. \tag{2.29}$$

Observe que P_0 tem dois pólos em $s = 2$, entre os dois zeros em $s = 1$ e ∞. Portanto P_0 é fortemente estabilizável. De maneira a obter um controlador C estabilizante e estável, precisa-se achar um Q em RH_∞ tal que a inversa de $U = Y - NQ$ pertença a RH_∞. Equivalentemente, precisa-se achar $U \in RH_\infty$ tal que $U^{-1} \in RH_\infty$ e $U = Y$ nos dois zeros de N, em $s = 1$ e $s = \infty$. Para a planta P obtém-se

$$N(s) = \frac{s-1}{(s-2)^2}, \quad M(s) = \frac{(s-2)^2}{(s+1)^2}. \tag{2.30}$$

Agora, considerando a segunda equação em (2.28) para $N = 0$

$$Y(1) = \frac{1}{M(1)} = 4, \quad Y(\infty) = \frac{1}{M(\infty)} = 1. \tag{2.31}$$

Assim sendo, o problema se reduz à construção de uma unidade $U \in RH_\infty$ tal que

$$U^{-1} \in RH_\infty, \quad U(1) = 4, \quad U(\infty) = 1. \tag{2.32}$$

Esse problema pode ser resolvido em duas etapas. Primeiro, obtém-se uma U_1 tal que

$$U_1^{-1} \in RH_\infty, \quad U_1(1) = 4. \tag{2.33}$$

A escolha mais fácil é a constante $U_1(s) = 4$. A seguir procura-se U da forma

$$U = (1 + aF)^l U_1, \tag{2.34}$$

onde a é uma constante, l um inteiro e $F \in RH_\infty$. Para garantir que $U(1) = U_1(1)$ deve-se forçar $F(1) = 0$, por exemplo,

$$F(s) = \frac{s-1}{s+1}. \tag{2.35}$$

Então, para $U(\infty) = 1$, precisa-se que $(1 + a)^l 4 = 1$, isto é,

$$a = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{l}} - 1, \tag{2.36}$$

e para $U^{-1} \in RH_\infty$ é suficiente garantir que $\|aF\|_\infty < 1$ (i.e., $|a| < 1/\|F\|_\infty = 1$). Assim, a e l podem ser convenientemente obtidos primeiramente escolhendo l grande o suficiente de tal forma que

$$\left| \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{l}} - 1 \right| < 1 \tag{2.37}$$

e então calculando a de (2.36). A escolha de $l = 1$ fornece $a = -3/4$. Neste caso

$$U(s) = \left(1 - \frac{3}{4}\frac{s-1}{s+1}\right)4 \; = \; \frac{s+7}{s+1}. \tag{2.38}$$

Finalmente, U, M, N determinam unicamente C, como segue abaixo:

$$U = Y - NQ \Rightarrow Q = \frac{Y-U}{N} \Rightarrow C = \frac{X+MQ}{Y-NQ} = \frac{1-MU}{NU}.$$

Para este exemplo obtém-se o controlador $C(s) = 27/(s+7)$. Note que não é necessário utilizar X e Y.

2.7 Conclusão

Neste capítulo, mostrou-se que o conjunto de todos os controladores que estabilizam uma planta linear invariante no tempo pode ser expresso através da Parametrização Q. Esta representação é afim, e está baseada em fatorações coprimas da planta. Obteve-se ainda uma parametrização correspondendo às matrizes de transferência de malha fechada estáveis do sistema.

A existência de controladores estáveis, capazes de estabilizar a malha fechada, depende exclusivamente do arranjo geométrico dos pólos e zeros, reais e positivos, da planta.

Com fundamento nestas propriedades mostra-se no próximo capítulo que é possível projetar sistemas fortemente estáveis, em que o controlador é obtido de forma a minimizar a perda de desempenho do sistema medida através da norma H_2.

Capítulo 3

Otimização H_2

3.1 Introdução

A metodologia da otimização H_2 ocupa-se do projeto de controladores para sistemas lineares invariantes no tempo (SLIT) multivariáveis. É fundamentada na minimização de um custo quadrático apropriadamente escolhido, sendo analítico o processo de obtenção da solução correspondente. Algumas características do método como proposto originalmente en Youla *et al.* (1976) são:

- Não há restrições sobre a matriz de transferência da planta. Esta pode ser retangular, instável, imprópria, de fase não-mínima;
- O projeto considera ruídos nos sinais de entrada, perturbações de carga, ruídos nas medições e compensação *feedforward*;
- O controlador ótimo é próprio e garante uma malha fechada assintóticamente estável, possuindo matrizes de sensibilidade tendendo à matriz identidade para $s \to \infty$;
- A malha fechada consegue rastrear entradas do tipo rampa e se recuperar de perturbações degrau com erro de estado estacionário nulo.

É possível mostrar que a estrutura da configuração de controle no método LQG é um caso especial de otimização H_2, na qual a compensação feedforward está ausente, as únicas entradas consideradas são os ruídos no processo e nos sensores, a malha é composta

simplesmente pela planta e o controlador, com densidades espectrais de potência conhecidas $G_{proc}(s) = W$ e $G_{sens}(s) = V$; W é real, constante, simétrica e semidefinida positiva e V é real, constante e definida positiva. Neste caso, as soluções fornecidas por ambas as metodologias são idênticas. Os exemplos de projeto H_2 mostrados nos próximos capítulos são do tipo LQG, devido a facilidade de implementação.

Na próxima seção deste capítulo trata-se a metodologia da otimização H_2 considerando-se a arquitetura de controle genérica descrita na Seção 2.2, com a profundidade estritamente necessária à reformulação do problema visando a estabilização forte do sistema.

3.2 O problema de otimização H_2

Nesta seção, o problema de otimização H_2 é tratado a partir de resultados sobre fatoração de matrizes de transferência. Uma discussão acessível sobre teoria de fatorações pode ser encontrada em Francis (1987), Capítulo 7.

Sejam as matrizes T_2 e T_3 da expressão (2.11) fatoradas na forma interna ("inner") e externa ("outer"): $T_2 = U_i U_o$ e $T_3 = V_o V_i$. Assume-se que T_2 e T_3 têm pôsto constante no eixo imaginário estendido. Para completa generalidade, considera-se o problema dos quatro blocos (Chu e Doyle, 1985) onde T_2 tem pôsto igual ao seu número de colunas e T_3 tem pôsto igual ao seu número de linhas.

Acham-se fatores complementares U_{ci} e V_{ci} tais que

$$[U_i \; U_{ci}] \quad e \quad \begin{bmatrix} V_i \\ V_{ci} \end{bmatrix}$$

sejam quadradas e internas e, de (2.11)

$$H = T_1 - [U_i \; U_{ci}] \begin{bmatrix} U_o \\ 0 \end{bmatrix} Q \, [V_o \; 0] \begin{bmatrix} V_i \\ V_{ci} \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

Pré-multiplicando por $\begin{bmatrix} U_i^* \\ U_{ci}^* \end{bmatrix}$ e pós-multiplicando por $[V_i^* \; V_{ci}^*]$, e calculando a norma

H_2 resultante, obtém-se

$$\begin{aligned} \|H\|_2^2 &= \left\| \begin{bmatrix} R_{11} - \overline{Q} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \right\|_2^2 \\ &= \|R_{11} - \overline{Q}\|_2^2 + \|R_{12}\|_2^2 + \|R_{21}\|_2^2 + \|R_{22}\|_2^2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde $\overline{Q} = U_o Q V_o$. Note que o produto de uma matriz por matrizes internas (unitárias) não altera o valor da norma da matriz.

Considere então o problema de otimização

$$\begin{array}{ll} \min & \|H\|_2 \\ Q \in RH_\infty & \end{array} \tag{3.3}$$

Pelo Teorema da Projeção (Luenberger, 1969), a solução é

$$\overline{Q}_0(s) = P_{H_2}(R_{11}) + \overline{Q}_c \tag{3.4}$$

onde $P_{H_2}(R_{11})$ é a projeção de R_{11} em H_2, e $\overline{Q}_c = R_{11}(\infty)$. No entanto, o controlador assim obtido pode ser instável.

3.3 Abordagem H_2 do problema LQG

Como já foi mencionado, o projeto de reguladores do tipo LQG pode ser visto como um caso especial de projeto H_2. A facilidade de implementação do LQG justifica sua utilização em exemplos ilustrativos apresentados nesta tese.

Considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + w_{proc} \\ y &= Cx + v_{sens} \end{aligned}$$

onde o ruído no processo w_{proc} e o ruído nas medições v_{sens} são independentes e têm matrizes de densidade espectral de potência W e V respectivamente. A função-custo no LQG é a soma dos valores médios quadráticos ponderados do estado x e e do sinal u, em regime;

$$J_{lqg} = \lim_{t \to \infty} E\{x(t)^T L x(t) + u(t)^T R u(t)\},$$

onde L e R são matrizes de ponderação semi-definidas positivas. O primeiro termo penaliza desvios de x de zero, e o segundo termo representa o custo da utilização do sinal do atuador. O problema LQG pode ser enquadrado de acordo com a arquitetura de controle descrita na Seção 2.2 como segue. Define-se o estado (ponderado) da planta x e o sinal do atuador u como saídas reguladas, isto é,

$$z = \begin{bmatrix} R^{\frac{1}{2}}u \\ L^{\frac{1}{2}}x \end{bmatrix}$$

A entrada exógena consiste dos ruídos no processo e de medida, que são representados como

$$\begin{bmatrix} w_{proc} \\ v_{sens} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^{\frac{1}{2}} \\ V^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} w,$$

com w sendo um sinal tipo ruído branco, ou seja, sua densidade espectral de potência é $G_w(w) = I$. A descrição em espaço de estados da planta para o problema LQG fica sendo

$$A_P = A, \quad B_w = \begin{bmatrix} W^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_u = B, \quad C_z = \begin{bmatrix} 0 \\ L^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}, \quad C_y = C,$$

$$D_{zw} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{zu} = \begin{bmatrix} R^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{yw} = \begin{bmatrix} 0 & V^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}, \quad D_{yu} = 0.$$

Observe que com estas definições, a submatriz P_{yu} é igual a P_0, onde

$$P_0(s) = C(sI - A)^{-1}B.$$

A Figura 3.1 representa a planta na forma padrão da Figura 2.1. Desde que w é um ruído branco, o custo LQG é simplesmente a variância de z, que é dada por

$$J_{lqg} = \|H\|_2^2.$$

Assume-se que a planta é controlável a partir de u e w, observável a partir de z e y. Uma ponderação positiva é usada para o sinal do atuador ($R > 0$) e o ruído no sensor satisfaz $V > 0$. Desta forma, existe um único controlador K_{lqg} que minimiza a função

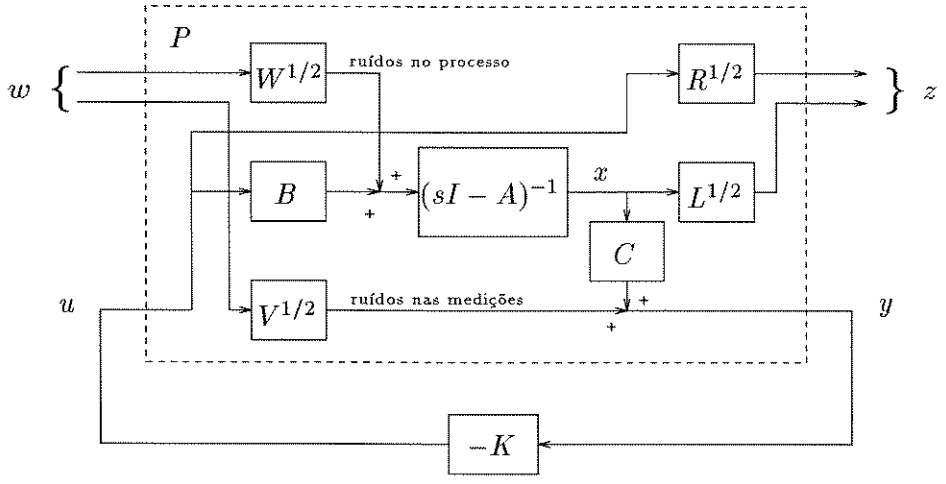

Figura 3.1: Realização considerada no problema LQG.

objetivo LQG. Este controlador tem a forma de um controlador de realimentação de estado estimado (Figuras 2.5 e 2.4 sem o parâmetro Q); os ganhos de realimentação do controlador e do estimador, K_{sfb} e L_{est}, podem ser determinados resolvendo-se duas equações de Riccati como segue. O ganho de realimentação de estado é dado por

$$K_{sfb} = R^{-1}B^T X_{lqg}$$

onde X_{lqg} é a única solução definida positiva da equação de Riccati

$$A^T X_{lqg} + X_{lqg}A - X_{lqg}BR^{-1}B^T X_{lqg} + L = 0.$$

O ganho do estimador é

$$L_{est} = Y_{lqg}C^T V^{-1},$$

onde Y_{lqg} é a única solução definida positiva de

$$AY_{lqg} + Y_{lqg}A^T - Y_{lqg}C^T V^{-1}CY_{lqg} + W = 0.$$

O controlador LQG ótimo K_{lqg} é então

$$K_{lqg}(s) = K_{sfb}(sI - A + BK_{sfb} + L_{est}C)^{-1}L_{est},$$

e o custo LQG ótimo é

$$J^*_{lqg} = Tr(X_{lqg}W + LY_{lqg} + 2X_{lqg}AY_{lqg}).$$

3.4 Otimização H_2 com controladores estáveis

A discussão a seguir baseia-se na abordagem de Ganesh e Pearson (1989). A restrição de estabilidade do controlador é incorporada a (3.3) como uma restrição adicional. O problema de otimização resultante sobre a classe restrita de controladores estáveis é

$$\begin{array}{ll} \min & \|H\|_2 \\ s.a. & K \text{ estável} \end{array} \tag{3.5}$$

Desde que $K = (Y_2 + A_1Q)(X_2 - B_1Q)^{-1}$ é uma fatoração coprima estável, (3.5) pode ser formulado como

$$\begin{array}{ll} \min & \|H\|_2 \quad s.a. \quad |X_2 - B_1Q| \neq 0, \quad \forall s \in \tilde{\mathbb{C}}^+ \\ Q \in RH_\infty & \end{array} \tag{3.6}$$

Como discutido na Seção 2.5, existe um controlador estável C que estabiliza a planta P_0 se e somente se os pólos e zeros reais de P_0 em $\tilde{\mathbb{C}}^+$ satisfazem a *p.i.p.* Esta condição é assumida verdadeira no exposto a seguir. Também assume-se que o problema foi escalonado e fatorado como na formulação em espaço de estados de Doyle (1984). Assim U_o e V_o são matrizes identidades e $\overline{Q}_o = Q_o$.

Teorema 2 (Ganesh e Pearson, 1989) *O problema de achar o controlador estável que minimiza a norma-H_2 da função de transferência estável, $\|H\|_2$, é equivalente a*

$$\begin{array}{ll} \min & \|S\|_2 \quad s.a. \quad |X_3 - B_1S| \neq 0, \quad \forall s \in \tilde{\mathbb{C}}^+ \\ S \in RH_2 & \end{array} \tag{3.7}$$

onde $X_3 = X_2 - B_1Q_o$, e Q_o é a solução H_2-ótima dentro do conjunto de todos os controladores possíveis.

Prova. Seja $Q \in RH_\infty$. Então, $Q = Q_o + Q_1$ onde $Q_1 \in RH_\infty$. Isto definido, e considerando (3.4) tem-se que

$$\begin{array}{rcl} \|R_{11} - Q\|_2 & = & \|(R_{11} - Q_o) - Q_1\|_2 \\ & = & \|P_{H_{2p}}(R_{11}) - Q_1\|_2 \end{array} \tag{3.8}$$

Mas, $Q_1 = S + k$ onde $S \in RH_2$ e $k = Q_1(\infty)$ é uma constante. Como $\|H\|_2$ deve ser finita, então $k = 0$. Em consequência, desde que $P_{H_{2p}}(R_{11})$ e S estão em espaços ortogonais, (3.8) indica que

$$\|R_{11} - Q\|_2^2 = \|P_{H_{2p}}(R_{11})\|_2^2 + \|S\|_2^2 \tag{3.9}$$

Das equações (3.2), o valor do índice de desempenho é

$$\begin{aligned} \|H\|_2^2 &= \|P_{H_{2p}}(R_{11})\|_2^2 + \|S\|_2^2 + (\|R_{12}\|_2^2 + \|R_{21}\|_2^2 + \|R_{22}\|_2^2) \\ &= \|H_0\|_2^2 + \|S\|_2^2 \end{aligned} \tag{3.10}$$

onde $\|H_0\|_2$ é o índice de desempenho ótimo sobre todos os controladores que estabilizam a planta. Assim, a questão de achar o sistema H_2-ótimo com um controlador estável reduz-se ao problema (3.7). •

3.5 Formulação não-convexa do problema

Formulou-se o seguinte problema de otimização considerando um sistema SISO. Seja

$$S_x(s) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{x_{1i}s + x_{2i}}{x_{3i}s^2 + x_{4i}s + x_{5i}} \tag{3.11}$$

onde $x_{3i} \geq 0, x_{4i}, x_{5i} > 0$ e seja

$$x' = [x_{1i}, \cdots, x_{1\mathcal{N}}, \cdots, x_{5i}, \cdots, x_{5\mathcal{N}}]$$

um vetor de parâmetros de dimensão $5\mathcal{N}$. Seja o contorno semi-circular Ω definido no eixo imaginário com raio $r \to \infty$ contendo $\bar{\mathbb{C}}^+$. Integrando ao longo de Ω e aplicando o Teorema do Resíduo de Cauchy, obtém-se

$$\begin{aligned} \|S_x\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(j\omega)S_x(j\omega)d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi j}\int_{\Omega} S_x(-s)S_x(s)ds \\ &= \sum_{j=1}^{\mathcal{N}}\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{x_{1i}x_{1j}\rho_3 + x_{2i}x_{2j}\rho_2 + \rho_1\rho_4}{\rho_2\rho_3 + \rho_4^2} = f(x) \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} \rho_1 &= x_{1i}x_{2j} - x_{2i}x_{1j}, \quad \rho_2 = x_{3i}x_{4j} + x_{4i}x_{3j} \\ \rho_3 &= x_{4i}x_{5j} + x_{5i}x_{4j}, \quad \rho_4 = x_{3i}x_{5j} - x_{5j} - x_{5i}x_{3j}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

De maneira a assegurar a estabilidade do controlador, o denominador da fatoração coprima de $K(s)$ deve ser uma unidade de RH_∞

$$\begin{aligned} X_3(s) - B_1(s)S(s) &= X_2(s) - B_1(s)Q_o - B_1(s)S_x(s) \\ &= \frac{C_{\mathcal{M}}(x)s^{\mathcal{M}} + C_{\mathcal{M}-1}(x)s^{\mathcal{M}-1} + \cdots + C_o(x)}{\Delta_x(s)} \end{aligned} \tag{3.14}$$

Portanto os coeficientes $[C_j(x)]_{j=0}^{\mathcal{M}}$ devem satisfazer

$$\begin{aligned} &C_j(x) > 0 && j = 0, 1, \cdots, \mathcal{M} \qquad e \\ &g_k[C_0(x), C_1(x), \cdots, C_{\mathcal{M}}(x)] > 0 && k = 1, 2, \cdots, \mathcal{M} - 1 \end{aligned} \tag{3.15}$$

onde $g_k(.) > 0$, $k = 1, 2, \cdots, \mathcal{M} - 1$ representam restrições sobre os parâmetros $C_j(x)$, $j = 0, 1, \cdots, \mathcal{M}$ obtidas através da regra de Routh-Hurwitz (Chen, 1984).

Lembrando de (3.10) que $\|H\|_2^2 = \|H_o\|_2^2 + \|S_x\|_2^2$, um problema de otimização restrita minimizando o índice de desempenho pode ser formulado como

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^{5\mathcal{N}}} \quad & f(x) \\ & x_{3i} \geq 0, x_{4i}, x_{5i} > 0 && i = 1, 2, \cdots, \mathcal{N} \\ & C_j(x) > 0 && j = 0, 1, 2, \cdots, \mathcal{M} \\ & g_k[C_0(x), C_1(x), \cdots, C_{\mathcal{M}}(x)] > 0 && k = 1, 2, \cdots, \mathcal{M} - 1; \end{aligned} \tag{3.16}$$

onde $f(x)$ é uma função objetivo não-linear, suave e escalar dada por (3.11); as restrições são também não-lineares.

Sendo a solução do problema (3.16) de natureza iterativa, um ponto factível inicial x^0 deve ser gerado. Em outras palavras, é requerida uma função S_{x^0} pertencente a RH_2. A função S_{x^0} pode ser obtida utilizando-se um método de interpolação de unidades como descrito em Ganesh e Pearson (1989). Este procedimento é similar ao mostrado na na Seção 2.6.

3.6 Conclusão

A otimização H_2 é uma metodologia de projeto de controladores baseada na minimização da norma H_2 da matriz de transferência de malha fechada do sistema considerado. A metodologia assume a forma de um problema de otimização irrestrito, cuja função objetivo é derivada a partir da parametrização Q. A solução de tal problema é analítica. O método LQG é um caso especial de otimização H_2.

A exigência de estabilidade do controlador pode ser adicionada ao problema H_2, resultando em um problema de otimização restrito, não-linear e não-convexo. A função objetivo deste novo problema pode ser interpretada como a distância de um controlador instável qualquer ao conjunto dos controladores estáveis. Um método iterativo deve ser empregado para sua solução, o que em geral leva à necessidade de obtenção de um ponto, na região factível, que sirva para iniciar a busca iterativa do ótimo. Na bibliografia utilizada como base do presente capítulo (Ganesh e Pearson, 1989) foi sugerido um método de interpolação de unidades como meio de geração do ponto inicial. Tal método tem como desvantagem uma elevada susceptibilidade a erros numéricos. Na Seção 4.7 desta tese propõe-se um procedimento alternativo para se obter o ponto factível inicial, que não apresenta mau-condicionamento numérico.

Capítulo 4

Programação Geométrica

4.1 Introdução

Neste capítulo é apresentada a teoria de Programação Geométrica Generalizada necessária à compreensão da abordagem ao projeto H_2 proposta neste trabalho. Um algoritmo de plano de cortes para a solução de problemas de programação geométrica é descrito. A principal fonte bibliográfica do capítulo é Avriel *et al.*, 1975.

4.2 Definições e propriedades básicas

Define-se um problema de *Programação Geométrica Generalizada*, GGP, como o seguinte problema de programação não-linear

$$\begin{array}{lll} \min & \mathcal{P}_o(x) - \mathcal{Q}_o(x) & \\ s.a. & \mathcal{P}_k(x) - \mathcal{Q}_k(x) \leq 1 & k = 1, \cdots, \mathcal{K} \\ & 0 < x_j^{LB} \leq x_j \leq x_j^{UB} & j = 1, \cdots, \mathcal{N} \end{array} \tag{4.1}$$

onde $\mathcal{P}_k(x)$ e $\mathcal{Q}_k(x)$, $k = 0, 1, \cdots, \mathcal{K}$ são *posinômios* da forma geral

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_k(x) &= \sum_{i=1}^{I_k} u_{ik} &&= \sum_{i=1}^{I_k} c_{ik} x_1^{a_{1ik}} x_2^{a_{2ik}} \cdots x_{\mathcal{N}}^{a_{\mathcal{N}ik}} \\ \mathcal{Q}_k(x) &= \sum_{l=1}^{L_k} v_{lk} &&= \sum_{l=1}^{L_k} d_{lk} x_1^{b_{1lk}} x_2^{b_{2lk}} \cdots x_{\mathcal{N}}^{b_{\mathcal{N}lk}} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Os termos

$$u_{ik} = c_{ik} \prod_{j=1}^{\mathcal{N}} x_j^{a_{jik}} \tag{4.3}$$

e

$$v_{lk} = d_{lk} \prod_{j=1}^{\mathcal{N}} x_j^{b_{jlk}} \tag{4.4}$$

são chamados *termos posinomiais*, ou *monômios*. Os expoentes a_{jik} e b_{jlk} são constantes reais arbitrárias, enquanto que os coeficientes c_{ik} e d_{lk} são números *positivos*. Note que as variáveis x_j são consideradas limitadas. É assumido também que o valor mínimo da função objetivo é positivo.

Um problema de *Programação Geométrica Regular* ou GP é definido como em (4.1) com a diferença de que posinômios $\mathcal{Q}$ não estão presentes. Um GP pode ser transformado em um programa convexo utilizando uma transformação logarítmica simples (Duffin *et al.*, 1967).

Um GGP sempre pode ser transformado em um problema equivalente, com uma função objetivo linear, através da adição de uma variável e de uma restrição ao problema original. Então pode-se considerar o seguinte problema como tendo a forma mais geral para um GGP:

$$\begin{array}{lll} \min & x_o & \\ s.a. & \mathcal{P}_k(x) - \mathcal{Q}_k(x) \leq 1 & k = 0, 1, \cdots, \mathcal{K} \\ & 0 < x_j^{LB} \leq x_j \leq x_j^{UB} & j = 0, 1, \cdots, \mathcal{N} \\ & x = (x_0, x_1, \cdots, x_{\mathcal{N}}) & \end{array} \tag{4.5}$$

onde

$$\mathcal{P}_o(x) - \mathcal{Q}_o(x) \leq x_o, \tag{4.6}$$

ou

$$\frac{\mathcal{P}_o(x)}{x_o} - \frac{\mathcal{Q}_o(x)}{x_o} \leq 1, \tag{4.7}$$

que leva a

$$\mathcal{P}_o(x) - \mathcal{Q}_o(x) \leq 1, \qquad x = (x_o, x_1, \cdots, x_{\mathcal{N}})$$

4.3 A desigualdade aritmética-geométrica

Esta desigualdade clássica estabelece que a média aritmética ponderada dos números positivos $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{\mathcal{N}}$ é maior ou igual que a média geométrica destes, e pode ser escrita como

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \lambda_i \geq \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} \left(\frac{\lambda_i}{\varepsilon_i}\right)^{\varepsilon_i} \tag{4.8}$$

onde

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \varepsilon_i = 1 \tag{4.9}$$

$$\varepsilon_i \geq 0 \qquad i = 1, \cdots, \mathcal{N}. \tag{4.10}$$

A igualdade se verifica em (4.8) se e somente se

$$\frac{\lambda_1}{\varepsilon_1} = \frac{\lambda_2}{\varepsilon_2} = \cdots = \frac{\lambda_{\mathcal{N}}}{\varepsilon_{\mathcal{N}}} \tag{4.11}$$

e a seguir uma aplicação da desigualdade é desenvolvida.

4.3.1 Condensação de posinômios

Dado um conjunto de reais não-negativos ε_i, tais que $\sum_i \varepsilon_i = 1$, e um posinômio

$$g(x) = \sum_i \lambda_i(x) = \sum_i \theta_i \prod_{j=0}^{\mathcal{N}} x_j^{\phi_{ij}} \tag{4.12}$$

define-se um posinômio condensado, formado no ponto $\tilde{x} > 0$ como

$$\begin{aligned} g(x, \tilde{x}) &= \prod_i \left(\frac{\lambda_i(x)}{\varepsilon_i(\tilde{x})}\right)^{\varepsilon_i(\tilde{x})} \\ &= \theta(\tilde{x}) \prod_{j=0}^{\mathcal{N}} x_j^{\phi_j(\tilde{x})} \end{aligned} \tag{4.13}$$

onde

$$\theta(\tilde{x}) = \prod_i \left(\frac{\theta_i}{\varepsilon_i(\tilde{x})}\right)^{\varepsilon_i(\tilde{x})} \tag{4.14}$$

e

$$\phi_j(\tilde{x}) = \sum_i \varepsilon_i(\tilde{x})\phi_{ij}. \tag{4.15}$$

Uma implicação importante da definição acima é que $g(x, \tilde{x})$ é um monômio. Para um dado $\tilde{x} > 0$ escolhe-se o conjunto de pesos

$$\varepsilon_i(\tilde{x}) = \frac{\lambda_i(\tilde{x})}{g(\tilde{x})}. \tag{4.16}$$

Estes pesos satisfazem as condições (4.9), (4.10) e portanto como consequência direta da desigualdade (4.8) tem-se

$$g(x, \tilde{x}) \leq g(x) \tag{4.17}$$

para quaisquer positivos x e $\tilde{x}$.

Substituindo (4.16) em (4.13) obtém-se

$$g(x, \tilde{x}) = \prod_i \left(\frac{\lambda_i(x)}{\lambda_i(\tilde{x})} g(\tilde{x})\right)^{\varepsilon_i(\tilde{x})} \tag{4.18}$$

Agora, para $x = \tilde{x}$ tem-se

$$g(\tilde{x}, \tilde{x}) = \prod_i g(\tilde{x})^{\varepsilon_i(\tilde{x})} = g(\tilde{x})^{\sum_i \varepsilon_i(\tilde{x})} = g(\tilde{x}). \tag{4.19}$$

Portanto, o posinômio condensado iguala o posinômio original no ponto de condensação $\tilde{x}$. Uma série de algoritmos para a solução de GGP's e GP's têm sido desenvolvidos utilizando condensação. Um destes, devido a Avriel e Williams (1970), é apresentado na próxima seção.

4.4 Um algoritmo para solução de GGP's

O algoritmo descrito aqui é devido a Avriel e Williams (1970). Referências posteriores a este algoritmo serão feitas com o nome de *Fase 2*.

Seja a k-ésima restrição de um GGP

$$\mathcal{P}_k(x) - \mathcal{Q}_k(x) \leq 1 \tag{4.20}$$

que sempre pode ser reescrita como

$$\frac{\mathcal{P}_k(x)}{1 + \mathcal{Q}_k(x)} \leq 1. \tag{4.21}$$

Seja o monômio obtido condensando o posinômio $1 + \mathcal{Q}_k(x)$ no ponto $x^{(p)}$ denotado por $\mathcal{Q}_k(x, x^{(p)})$. O seguinte problema, obtido substituindo $1 + \mathcal{Q}_k(x)$ por $\mathcal{Q}_k(x, x^{(p)})$ no GGP, será denotado por $GP^{(p)}$:

$$\begin{array}{lll} \min & x_o & \\ s.a. & \dfrac{\mathcal{P}_k(x)}{\mathcal{Q}_k(x, x^{(p)})} \leq 1 & k = 0, 1, \cdots, \mathcal{K} \\ & 0 < x_j^{LB} \leq x_j \leq x_j^{UB} & j = 0, 1, \cdots, \mathcal{N}. \end{array} \tag{4.22}$$

Este problema tem as seguintes propriedades

- $GP^{(p)}$ é um GP regular uma vez que as funções $\mathcal{P}_k(x)/\mathcal{Q}_k(x, x^{(p)})$ são posinômios, isto é, um posinômio divido por um monômio é um posinômio;
- Qualquer ponto x^F satisfazendo as restrições de $GP^{(p)}$ satisfaz as restrições de GGP. Isto pode ser notado utilizando (4.17), que leva a

$$\frac{\mathcal{P}_k(x^F)}{1 + \mathcal{Q}_k(x^F)} \leq \frac{\mathcal{P}_k(x^F)}{\mathcal{Q}_k(x^F, x^{(p)})} \leq 1. \tag{4.23}$$

- A inequação (4.23) implica em que o conjunto factível de $GP^{(p)}$ está inteiramente contido no conjunto factível de GGP e portanto que a solução ótima de $GP^{(p)}$ será um ponto factível - mas não necessariamente ótimo - de GGP.

Considera-se finalmente a sequência de problemas $GP^{(p)}$'s, onde $GP^{(0)}$ é construído utilizando um ponto factível de GGP, e $GP^{(p)}$ é montado usando a solução ótima de $GP^{(p-1)}$. Avriel e Williams (1970) demonstram que a sequência de soluções ótimas de $GP^{(p)}$, $p = 0, 1, 2, \cdots$, converge para um ponto satisfazendo as condições necessárias de Kuhn-Tucker para otimalidade do GGP, desde que as usuais condições de regularidade (Luenberger, 1984) sejam satisfeitas, como, por exemplo, que o quociente das restrições ativas sejam linearmente independentes, ou que o conjunto factível tenha um ponto interior.

4.5 Linearização via transformações logarítmicas

Nesta seção mostra-se como um GP pode ser aproximado por um programa linear LP utilizando condensação (Duffin, 1970). As restrições e a função objetivo do GP são condensadas formando monômios e, após feita uma transformação logarítmica, o problema transforma-se em um LP, passível de solução através de alguma variante do método simplex.

Seja o GP

$$\begin{array}{ll} \min & x_0 \\ s.a. & \\ & g_k(x) \leq 1 \qquad\qquad k = 0, 1, \cdots, \mathcal{K} \\ & 0 < x_j^{LB} \leq x_j \leq x_j^{UB} \quad j = 0, 1, \cdots, \mathcal{N} \end{array} \tag{4.24}$$

onde

$$g_k(x) = \sum_{i=1}^{I_k} \theta_{ik} \prod_{j=0}^{\mathcal{N}} x_j^{\phi_{ijk}} \tag{4.25}$$

Na subseção (4.3.1) foi mostrado que os posinômios $g_k(x)$ podem ser aproximados em torno de um ponto $\tilde{x}$ por *monômios* da forma

$$g_k(x, \tilde{x}) = \theta_k(\tilde{x}) \prod_{j=0}^{\mathcal{N}} x_j^{\phi_{jk}(\tilde{x})} \tag{4.26}$$

onde

$$g_k(x, \tilde{x}) \leq g_k(x), \quad \forall x > 0 \tag{4.27}$$

com a igualdade valendo se e somente se $x = \tilde{x}$.

Seja o programa condensado $\overline{GP}$

$$\begin{array}{ll} \min & x_0 \\ s.a. & \\ & g_k(x, \tilde{x}) \leq 1 \qquad\qquad k = 0, 1, \cdots, \mathcal{K} \\ & 0 < x_j^{LB} \leq x_j \leq x_j^{UB} \quad j = 0, 1, \cdots, \mathcal{N}. \end{array} \tag{4.28}$$

Da inequação (4.27), um ponto x^F satisfazendo as restrições do GP dado por (4.24) também satisfaz as restrições do $\overline{GP}$ mostrado em (4.28), isto é

$$g_k(x^F, \tilde{x}) \leq g_k(x^F) \leq 1 \quad k = 0, 1, \cdots, \mathcal{K}. \tag{4.29}$$

A recíproca será verdadeira somente quando $x^F = \tilde{x}$. Isto implica em que o conjunto factível do GP está *contido* no do $\overline{GP}$ e consequentemente a solução do $\overline{GP}$ não será, em geral, factível para o GP. Na continuação será mostrado que $\overline{GP}$ equivale a um programa linear.

A função logarítmica $ln\ y$ é monotonicamente crescente e definida para $y > 0$. Portanto, o seguinte programa será equivalente a $\overline{GP}$

$$\begin{array}{ll} \min & ln\ x_o \\ s.a. & \\ & ln\ g_k(x,\tilde{x}) = ln\ \theta_k(\tilde{x}) + \sum_{j=0}^{\mathcal{N}} \phi_{jk}(\tilde{x}) ln\ x_j \leq 0 \quad k = 0,1,\cdots,\mathcal{K} \\ & ln\ x_j^{LB} \leq ln\ x_j \leq ln\ x_j^{UB} \qquad\qquad\qquad\quad j = 0,1,\cdots,\mathcal{N}. \end{array} \tag{4.30}$$

Este problema é linear nas variáveis $ln\ x_j$, $j = 0,1,\cdots,\mathcal{N}$, porém não está em uma forma conveniente para aplicação do método simplex desde que as variáveis $ln\ x_j$ podem assumir valores negativos. Assim, definem-se novas variáveis v_j

$$v_j = ln\ x_j - ln\ x_j^{LB} \qquad j = 0,1,\cdots,\mathcal{N} \tag{4.31}$$

e

$$v_j^{UB} = ln\ x_j^{UB} - ln\ x_j^{LB} = ln(x_j^{UB}/x_j^{LB}) \qquad j = 0,1,\cdots,\mathcal{N}. \tag{4.32}$$

Substituindo em (4.30) obtém-se o problema

$$\begin{array}{ll} \min & v_0 + ln\ x_0^{LB} \\ s.a. & \\ & \overline{g}_k(v,\tilde{x}) \leq 0 \quad k = 0,1,\cdots,\mathcal{K} \\ & 0 \leq v_j \leq v_j^{UB} \quad j = 0,1,\cdots,\mathcal{N} \end{array} \tag{4.33}$$

onde

$$\overline{g}_k(v,\tilde{x}) = ln\ \theta_k(\tilde{x}) + \sum_{j=0}^{\mathcal{N}} \phi_{jk}(\tilde{x}) ln\ x_j^{LB} + \sum_{j=0}^{\mathcal{N}} \phi_{jk}(\tilde{x}) v_j. \tag{4.34}$$

Notando que

$$ln\ \theta_k(\tilde{x}) + \sum_{j=0}^{\mathcal{N}} \phi_{jk}(\tilde{x}) ln\ x_j^{LB} = ln\ g_k(x^{LB},\tilde{x}) \tag{4.35}$$

pode-se reescrever o problema anterior como

$$\begin{array}{ll} \min & v_o \\ s.a. & \\ & \sum_{j=0}^{\mathcal{N}} \phi_{jk}(\tilde{x}) v_j \leq -ln\ g_k(x^{LB}, \tilde{x}) \quad k = 0, 1, \cdots, \mathcal{K} \\ & 0 \leq v_j \leq v_j^{UB} \qquad\qquad\qquad\qquad\quad j = 0, 1, \cdots, \mathcal{N} \end{array} \tag{4.36}$$

onde $ln\ x_o^{LB}$, uma constante, é omitida da função objetivo. Este problema será referenciado como $LP(\tilde{x})$ desde que é um LP regular, com variáveis limitadas superiormente, construídas usando o ponto $\tilde{x}$.

4.6 Solução numérica via planos de corte

Seja o GP

$$\begin{array}{ll} \min & x_o \\ s.a. & \\ & g_k(x) \leq 1 \qquad\qquad\qquad k = 0, 1, \cdots, \mathcal{K} \\ & 0 < x_j^{LB} \leq x_j \leq x_j^{UB} \quad j = 0, 1, \cdots, \mathcal{N}. \end{array} \tag{4.37}$$

O algoritmo de Avriel *et al.* (1975) para a solução de GP's é apresentado a seguir. Sua combinação com o procedimento descrito na Seção (4.4) constitui-se no método adotado neste trabalho na solução dos GGP's objeto de estudos.

Passo 1. Usando um ponto arbitrário inicial x^0, lineariza-se o GP como descrito na seção precedente, formando-se $LP(x^0)$. Faz-se $m = 1$;

Passo 2. Resolve-se $LP(x^{m-1})$. Chama-se a solução de z^m e computa-se x^m através da expressão (4.31);

Passo 3. Avaliam-se as restrições do GP (4.37) em x^m. Se

$$g_k(x^m) \leq 1+\epsilon \qquad k=0,1,\cdots,\mathcal{K} \tag{4.38}$$

onde ϵ é algum número positivo pré-determinado, então x^m é ótimo. Caso contrário encontra-se

$$l = \arg \max_{0\leq k\leq \mathcal{K}} \{ g_k(x^m) \mid g_k(x^m) > 1\}.$$

Passo 4. Condensa-se $g_l(x)$ em x^m de maneira a obter-se $g_l(x,x^m)$, o qual, por sua vez, é transformado na restrição linear

$$\overline{g}_l(z,x^m) \leq 0.$$

Adiciona-se esta restrição às do $LP(x^{m-1})$ e chama-se o novo problema LP de $LP(x^m)$. Incrementa-se m e retorna-se ao Passo 2.

No Passo 1, o GP é aproximado por um problema linear $LP(x^0)$, para o qual algoritmos de solução altamente eficientes têm sido desenvolvidos. Se o ponto x^m obtido como a solução de $LP(x^{m-1})$ localiza-se fora da região descrita por $g_k \leq 1, k=0,1,\cdots,\mathcal{K}$, então o Passo 4 gera um problema LP modificado que exclui $z^m = ln\ x^m$ de sua região factível. Então, uma série de LP's com regiões factíveis cada vez menores é resolvida, até que um ponto x^m, obtido de um destes problemas, satisfaça (4.38), estágio no qual o algoritmo termina.

Este tipo de algoritmo é conhecido como *algoritmo de planos de corte* (Kelley, 1960) e as restrições geradas no Passo 4 são conhecidas como *cortes*, visto que descartam, a cada iteração, parte da região factível de uma aproximação linear do problema.

De forma a ver que estes cortes não eliminam qualquer região factível do GP, observa-se, com base em (4.29), que para qualquer ponto x^F factível do GP tem-se

$$g_l(x^F,x^m) \leq g_l(x^F) \leq 1,$$

isto é, x^F também é factível no problema aproximado.

Em cada iteração m do algoritmo acima é necessário resolver o problema de programação linear $LP(x^{m-1})$. No entanto, o problema $LP(x^m)$, solucionado na iteração $m+1$,

difere de $LP(x^{m-1})$ somente em uma restrição adicional. A utilização do método simplex dual (Luenberger, 1984) permite que a transformação de $LP(x^{m-1})$ em $LP(x^m)$ seja feita utilizando a solução ótima de $LP(x^{m-1})$ como ponto de partida para $LP(x^m)$. Assim, o esforço computacional requerido na passagem entre iterações é pequeno. Contudo, o problema pode ficar grande se muitas iterações forem necessárias para atingir a solução, uma vez que todos os *cortes* são armazenados no tableau simplex. Para contornar este problema, procedimentos de eliminação de cortes podem ser empregados para obter problemas em que o número de restrições seja igual ao número de variáveis (Luenberger, 1984).

4.7 Obtenção de um ponto inicial factível

O algoritmo referenciado como *Fase 2* na Seção 4.4 requer, como ponto de partida, uma solução factível do seguinte conjunto genérico de restrições posinomiais:

$$\frac{\mathcal{P}_k(x)}{1+\mathcal{Q}_k(x)} \leq 1 \qquad k = 0, 1, \cdots, \mathcal{K}. \tag{4.39}$$

Em muitos casos, a resolução das inequações acima, isto é, a determinação de um valor para x que satisfaz (4.39), pode ser tão difícil quanto a solução do próprio problema GGP.

Um ponto factível para um problema do tipo GGP pode ser obtido através da solução de um GGP auxiliar, cuja montagem é mostrada a seguir. Devido a similaridade deste procedimento com o método utilizado em programação linear para achar uma solução inicial factível, seus autores (Avriel *et al.*, 1975) o referenciam com o nome *Fase 1*.
Seja o seguinte problema de programação geométrica generalizada, chamado $GGP(\lambda)$, baseado no GGP definido em (4.2):

$$\begin{array}{lll}
\min & \prod_{k=0}^{\mathcal{K}} \lambda_k & \\
s.a. & & \\
& \frac{\mathcal{P}_k(x)}{1+\mathcal{Q}_k(x)} \leq \lambda_k & k = 0, 1, \cdots, \mathcal{K} \\
& \lambda_k \geq 1 & k = 0, 1, \cdots, \mathcal{K} \\
& 0 < x_j^{LB} \leq x_j \leq x_j^{UB} & j = 0, 1, \cdots, \mathcal{N}
\end{array}$$

A razão por trás da introdução de $GGP(\lambda)$ é esclarecida com o Teorema abaixo.

Teorema 3 *O ponto $x = x^*$ satisfaz as inequações (4.39) se e somente se a solução ótima de $GGP(\lambda)$ é (x^*, λ^*) onde $\prod_{k=0}^{\mathcal{K}} \lambda_k^* = 1$.*

Se cada ótimo local de $GGP(\lambda)$ é global, então a solução de $GGP(\lambda)$ usando o algoritmo descrito na Seção (4.4) garante um ponto factível para (4.39). No caso em que $GGP(\lambda)$ tem ótimos locais não globais sabe-se que a solução de (4.39) é um deles. Entretanto, a convergência a essa solução particular não é garantida. Os passos do algoritmo *Fase 1* são descritos na continuação.

Passo 1

Seja x^0 qualquer ponto satisfazendo

$$x_j^{LB} \leq x_j^0 \leq x_j^{UB} \qquad j = 0, 1, \cdots, \mathcal{N}$$

Define-se

$$\lambda_k^0 = \max\{\frac{\mathcal{P}_k(x^0)}{1 + \mathcal{Q}_k(x^0)},\ 1\} \qquad k = 0, 1, \cdots, \mathcal{K}$$

O ponto (x^0, λ^0) onde $\lambda^0 = (\lambda_0^0, \lambda_1^0, \cdots, \lambda_{\mathcal{K}}^0)$ é então uma solução factível de $GGP(\lambda)$;

Passo 2

(a) Se $\lambda_k^0 = 1$ para todo k, então a *Fase 1* termina, e x^0 é uma solução factível de (4.39);

(b) Se para pelo menos um valor de k, $\lambda_k^0 > 1$, então $GGP(\lambda)$ é resolvido utilizando o algoritmo *Fase 2* com o ponto inicial (x^0, λ^0).

Passo 3

Examina-se a solução ótima (x^*, λ^*) obtida para $GGP(\lambda)$.

(a) Se $\lambda_k^* = 1$ para todo k então x^* constitui uma solução de (4.39);

(b) Se para algum k tem-se $\lambda_k^* > 1$, então o algoritmo falhou na convergência.

Há ainda uma outra aplicação do algoritmo *Fase 1*. Suponha que no curso da solução de um GGP o algoritmo *Fase 2* tenha convergido a um mínimo local e não global do problema. Pode-se tentar uma melhora nesta solução limitando-se o valor da função objetivo a valores menores que o obtido previamente, e então resolvendo o problema resultante, usando Fase 1. Se Fase 1 converge a uma solução factível do problema restrito, esta solução pode ser usada como partida para o algoritmo *Fase 2*, que então convergiria a um mínimo local melhor.

4.8 Conclusão

Neste capítulo abordou-se a técnica de otimização utilizada para obter controladores fortemente estabilizantes. Um problema de programação geométrica regular, ou GP, tem um equivalente convexo. Um GGP - problema de programação geométrica generalizada - não apresenta tal vantagem, mas sua solução pode ser obtida através da resolução de uma sequência de GP's, gerada por condensação do GGP original em certos pontos. Cada GP desta sequência pode ser resolvido, por sua vez, através de um método de plano de cortes, baseado na solução de uma série de problemas de programação linear.

Além disso, pode-se definir sem muito custo, um GGP auxiliar, cuja solução fornece um ponto inicial factível para o GGP original.

Capítulo 5

Otimização H_2 com Controladores Estáveis: Solução via Programação Geométrica

5.1 Introdução

O problema de estabilização forte de uma planta SISO foi formulado em (3.16) como um problema de minimização restrita. A função objetivo (3.12) deste problema de otimização é claramente signomial pois pode ser expressa em função de diferenças de posinômios, seu conjunto factível é caracterizado através das condições de Routh-Hurwitz em termos de funções signomiais, e em consequência pode ser reestruturado como um problema de programação geométrica generalizado (Seção 4.2) ou GGP . Desta forma a simplicidade das técnicas discutidas no capítulo precedente pode ser utilizada na solução numérica do problema em questão.

5.2 Propriedades posinomiais das condições de Routh-Hurwitz

Considere um polinômio genérico $\mathcal{D}(s)$ de grau m - por simplicidade um número par - representado na forma

$$\mathcal{D}(s) = \mathcal{D}_1(s) + \mathcal{D}_2(s)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1(s) &= c_0^{(0)} s^m + c_1^{(0)} s^{m-2} + \cdots + c_{\frac{m}{2}-1}^{(0)} s^2 + c_{\frac{m}{2}}^{(0)}, \quad c_0^{(0)} > 0 \\ \mathcal{D}_2(s) &= c_0^{(1)} s^{m-1} + c_1^{(1)} s^{m-3} + \cdots + c_{\frac{m}{2}-1}^{(1)} s \end{aligned}$$

Os sucessivos elementos da chamada Tabela de Routh (Chen, 1984) podem ser obtidos através da recorrência

$$c_i^{(k+2)} = \frac{c_0^{(k+1)} c_{i+1}^{(k)} - c_0^{(k)} c_{i+1}^{(k+1)}}{c_0^{(k+1)}}$$

para $k = 0, 1, \cdots, m-2$. Diz-se então que o polinômio $\mathcal{D}(s)$ é *Hurwitz* se e somente se os m termos c_0^i, $i = 1, 2, \cdots, m$ da primeira coluna da tabela são todos positivos ou, de forma equivalente, se e somente se todos os termos c_j^i da tabela são positivos. Exemplo: considere o polinômio de grau $m = 4$

$$\mathcal{D}(s) = c_4 s^4 + c_3 s^3 + c_2 s^2 + c_1 s^1 + c_0$$

e os coeficientes de $\mathcal{D}_1(s)$ e $\mathcal{D}_2(s)$ definidos na forma indicada. Então $\mathcal{D}(s)$ é Hurwitz se e somente se c_0, c_1, c_2, c_3 e c_4 são números positivos e, após algumas simplificações,

$$c_2 c_3 - c_1 c_4 > 0 \tag{5.1}$$

e

$$c_1 c_2 c_3 - c_1^2 c_4 - c_0 c_3^2 > 0 \tag{5.2}$$

Entretanto, como $c_i > 0$, $i = 0, 1, \cdots, m$, verifica-se que as desigualdades (5.1)-(5.2) são redundantes e que as restrições de estabilidade se reduzem a $c_i > 0$, $i = 0, 1, \cdots, m$ e

$$g(c) = c_1 c_2^{-1} c_3^{-1} c_4 + c_0 c_1^{-1} c_2^{-1} c_3 < 1 \tag{5.3}$$

sendo esta última equivalente a (5.2). Uma transformação logarítmica simples leva a uma representação convexa desta restrição. Definindo $v_j = \ln c_j$, $j = 0, 1, \cdots, m$ e lembrando da monotonicidade da função logarítmica e da positividade da restrição, obtém-se,

$$\ln[\overline{g}(v)] < 0 \tag{5.4}$$

onde $\overline{g}(v) = \exp(v_1 - v_2 - v_3 + v_4) + \exp(v_0 - v_1 - v_2 + v_3)$ e as variáveis v_j, $j = 0, 1, \cdots, m$ não possuem sinais pré-estabelecidos. É possível mostrar (Bazaraa *et al.*, 1993) que a função $\ln[\overline{g}(v)]$ é convexa e que portanto a desigualdade (5.4) define um conjunto convexo.

Observe que a condição (5.3) se enquadra na forma geral

$$g_i(c) = \sum_{k \in J_i} \alpha_k \prod_{j=0}^{m} c_j^{\beta_{jk}} < 1, \quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{5.5}$$

onde J_i é o conjunto de índices que identifica os termos de g_i, $\alpha_k > 0$, $\forall k \in J_i$ e β_{jk} são números reais. As funções presentes nas expressões (5.5) são *posinômios* (Seção 4.2). Como discutido no capítulo anterior, problemas não-convexos que envolvam apenas funções posinomiais admitem uma formulação convexa equivalente e dão origem a um ramo da programação matemática conhecido como Programação Geométrica.

Para polinômios de ordem superior é sempre possível expressar as condições de Routh-Hurwitz como a diferença de dois posinômios, isto é,

$$g_i(c) = g_i^+(c) - g_i^-(c) \tag{5.6}$$

$$= \sum_{k \in J_i^+} \alpha_k^+ \prod_{j=0}^{m} c_j^{\beta_{jk}^+} - \sum_{k \in J_i^-} \alpha_k^- \prod_{j=0}^{m} c_j^{\beta_{jk}^-} < 1, \quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{5.7}$$

Entretanto, expressões deste tipo não possuem equivalentes convexas. Para contornar a situação, reescreve-se as desigualdades como

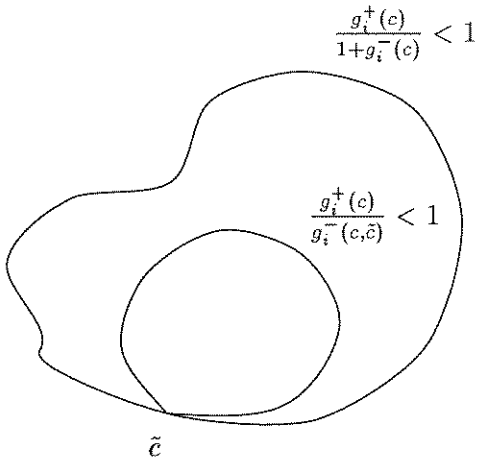

Figura 5.1: Representação interna convexa.

$$\frac{g_i^+(c)}{1+g_i^-(c)} < 1, \quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{5.8}$$

e faz-se uso da técnica de *condensação* (Seção 4.3.1).

A partir dos resultados discutidos no Capítulo 4 e da condensação em $\tilde{c} > 0$ de $1 + g_i^-(c)$ no monômio $g_i^-(c, \tilde{c})$, obtém-se

$$\frac{g_i^+(c)}{1+g_i^-(c)} \leq \frac{g_i^+(c)}{g_i^-(c,\tilde{c})} < 1, \quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{5.9}$$

As desigualdades de (5.9) expressam o fato de que qualquer ponto que satisfaça as condições de Routh-Hurwitz condensadas também satisfará as condições originais (Figura 5.1). Além disso, as condições condensadas são posinomiais - um posinômio dividido por um monômio resulta num posinômio - e portanto admitem uma representação convexa.

5.3 Otimização H_2 como um GGP

5.3.1 Formulação GGP da função objetivo

Seja a expressão (3.12)

$$\|S_x\|^2 = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{x_{1i}x_{1j}\rho_3 + x_{2i}x_{2j}\rho_2 + \rho_1\rho_4}{\rho_2\rho_3 + \rho_4^2} = f(x)$$

Definindo as variáveis x_{6i}, x_{7i}, x_{8i}, x_{9i} tais que

$$\begin{aligned} x_{6i} &> 0 \qquad & x_{7i} &> 0 \\ x_{8i} &> 0 \qquad & x_{9i} &> 0 \\ x_{1i} &= x_{6i} - x_{7i} \\ x_{2i} &= x_{8i} - x_{9i} \end{aligned} \tag{5.10}$$

e eliminando x_{1i} e x_{2i} em (3.12) pode-se expressar $\|S_x\|_2^2$ em função de variáveis positivas:

$$\|S_x\|_2^2 = \frac{\mathcal{P}_n(x) - \mathcal{Q}_n(x)}{\mathcal{P}_d(x) - \mathcal{Q}_d(x)} \tag{5.11}$$

$$\mathcal{P}_n(x) = \sum_k b_k \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} \prod_{m=3}^{9} x_{mi}^{a_{mik}} \tag{5.12}$$

$$\mathcal{Q}_n(x) = \sum_l d_l \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} \prod_{m=3}^{9} x_{mi}^{c_{mil}} \tag{5.13}$$

$$\mathcal{P}_d(x) = \sum_n f_n \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} \prod_{m=3}^{9} x_{mi}^{e_{min}} \tag{5.14}$$

$$\mathcal{Q}_d(x) = \sum_j h_j \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} \prod_{m=3}^{9} x_{mi}^{g_{mij}} \tag{5.15}$$

$$x = (x_{3i}, x_{4i}, x_{5i}, x_{6i}, x_{7i}, x_{8i}, x_{9i}) \quad i = 1, 2, \cdots, \mathcal{N} \tag{5.16}$$

$$x > 0 \tag{5.17}$$

onde os expoentes a_{mik}, c_{mil}, e_{min} e g_{mij} são constantes inteiras e os coeficientes b_k, d_l, f_n, h_j são números positivos.

5.3.2 Formulação GGP das restrições

Seja o polinômio definido na expressão (3.14)

$$C_{\mathcal{M}}(x)s^{\mathcal{M}} + C_{\mathcal{M}-1}(x)s^{\mathcal{M}-1} + \cdots + C_1(x)s + C_o(x), \tag{5.18}$$

com x definida como na Seção 5.3.1.

Os coeficientes $C_i(x)$, $i = 0, 1, \cdots, \mathcal{M}$ podem ser colocados na forma

$$\begin{aligned} C_i(x) &= \sum_k {\alpha_{ik}}^+ \prod_{j=1}^{\mathcal{N}} \prod_{m=3}^{9} x_{mj}^{{\beta_{imjk}}^+} - \sum_l {\alpha_{il}}^- \prod_{j=1}^{\mathcal{N}} \prod_{m=3}^{9} x_{mj}^{{\beta_{imjl}}^-} \\ &= \mathcal{Q}_i(x) - \mathcal{P}_i(x) \end{aligned} \tag{5.19}$$

onde

$${\alpha_{ik}}^+, {\alpha_{il}}^- \in \mathbb{R}^+$$
$${\beta_{imjk}}^+, {\beta_{imjl}}^- \in \mathbb{Z}$$

Assim, é possível reescrever as condições de Routh-Hurwitz correspondentes

$$C_i(x) > 0 \quad i = 0, 1, \cdots, \mathcal{M} \quad e \tag{5.20}$$

$$g_k[C_0(x), C_1(x), \cdots, C_{\mathcal{M}}(x)] > 0 \quad k = 1, 2, \cdots, (\mathcal{M} - 1) \tag{5.21}$$

como

$$\frac{\mathcal{P}_j(x)}{\mathcal{Q}_j(x)} < 1 \quad j = 0, \cdots, (2\mathcal{M} - 1) \tag{5.22}$$

onde $\mathcal{P}_j(x)$ e $\mathcal{Q}_j(x)$ são posinômios.

As $(\mathcal{M}+1)$ primeiras restrições representadas em (5.22) são obtidas de (5.20). As restantes $(\mathcal{M} - 1)$ restrições vêm do seguinte raciocínio. O membro à esquerda nas inequações (5.21) é um somatório de parcelas do tipo

$$\prod_i C_i(x)^{\phi_i} \quad i = 0, 1, \cdots, \mathcal{M}; \quad \phi_i \in \mathbb{Z}$$

Portanto, considerando (5.19), verifica-se que (5.21) pode ser expressa como

$$\mathcal{Q}_{(\mathcal{M}+k)}(x) - \mathcal{P}_{(\mathcal{M}+k)}(x) > 0 \quad k = 1, 2, \cdots, \mathcal{M} - 1$$

equivalente a

$$\frac{\mathcal{P}_{(\mathcal{M}+k)}(x)}{\mathcal{Q}_{(\mathcal{M}+k)}(x)} < 1 \quad k = 1, 2, \cdots, \mathcal{M}-1 \tag{5.23}$$

onde $\mathcal{P}_{(\mathcal{M}+k)}(x)$, $\mathcal{Q}_{(\mathcal{M}+k)}(x)$; $k = 1, 2, \cdots, \mathcal{M}-1$ são posinômios.

5.4 Formulação geral do problema

Dos resultados das Seções 5.3.1 e 5.3.2 conclui-se que o problema de otimização-H_2 com controladores estáveis para o caso SISO como formulado no problema (3.16), pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{\mathcal{P}_n(x) - \mathcal{Q}_n(x)}{\mathcal{P}_d(x) - \mathcal{Q}_d(x)} \\ s.a. \quad & \\ & \frac{\mathcal{P}_k(x)}{\mathcal{Q}_k(x)} < 1, \qquad k = 0, 1, \cdots, (2\mathcal{M}-1), \\ & x = (x_{3i}, x_{4i}, \cdots, x_{9i}), \quad i = 1, 2, \cdots, \mathcal{N} \\ & x > 0 \qquad . \end{aligned} \tag{5.24}$$

Criando-se uma variável auxiliar $x_0 \in \mathbb{R}^+$ e adicionando-se a restrição

$$x_0 \; > \; \frac{\mathcal{P}_n(x) - \mathcal{Q}_n(x)}{\mathcal{P}_d(x) - \mathcal{Q}_d(x)},$$

equivalente a

$$1 \; > \; \frac{\mathcal{P}_n(x) - \mathcal{Q}_n(x)}{x_0\mathcal{P}_d(x) - x_0\mathcal{Q}_d(x)} = \frac{\mathcal{P}_{2\mathcal{M}}(x)}{\mathcal{Q}_{2\mathcal{M}}(x)}, \quad x = (x_{3i}, x_{4i}, \cdots, x_{9i}, x_0), \quad i = 1, 2, \cdots, \mathcal{N},$$

ao conjunto de restrições do problema (5.24) obtém-se finalmente sua formulação GGP:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_0 \\ s.a. \quad & \\ & \frac{\mathcal{P}_k(x)}{\mathcal{Q}_k(x)} < 1, \qquad k = 0, 1, \cdots, 2\mathcal{M}, \\ & x = (x_{3i}, x_{4i}, \cdots, x_{9i}, x_0), \quad i = 1, 2, \cdots, \mathcal{N} \\ & x > 0. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Os processos de condensação e linearização realizados implicitamente durante a solução numérica do GGP têm interpretação geométrica análoga à feita na Seção 5.2 para as condições de Routh-Hurwitz.

5.5 Exemplos ilustrativos

5.5.1 Planta estabilizável em RH_∞

A metodologia proposta para a solução do problema de otimização H_2 restrita a controladores estáveis será inicialmente ilustrada com base no exemplo introduzido por Doyle e Stein (1979) e utilizado por Ganesh e Pearson (1989). Embora a discussão se mantenha em torno do exemplo considerado, as manipulações realizadas são possíveis em geral.

A planta linear invariante no tempo

$$P_0(s) = \frac{(s+2)}{(s+1)(s+3)}$$

tem a realização

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 35 \\ -61 \end{bmatrix} d = Ax + Bu + W^{\frac{1}{2}} d$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x + \eta = Cx + V^{\frac{1}{2}} \eta$$

onde $d(t)$, $\eta(t)$ são respectivamente a perturbação de estados e o ruído de entrada, de intensidades unitárias. O controlador inicial é obtido a partir da resolução do problema LQG

$$\min \; J_{lqg} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} E \left[\int_0^\tau x^T(t)(L^{\frac{1}{2}})^T(L^{\frac{1}{2}})x(t) + u^T(t)(R^{\frac{1}{2}})^T(R^{\frac{1}{2}})u(t)dt \right]$$

onde, como em Doyle e Stein (1979), considera-se $L^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{5}[\sqrt{(35)} \quad 1]$ e $R^{\frac{1}{2}} = 1$. O controlador ótimo H_2 resultante

$$K_0(s) = \frac{1000(s+2.6)}{(s^2+24s-797)}$$

é instável, com um pólo em 18.68. O valor ótimo do índice de desempenho é $\|H_0\|_2 = 493.76$ e como $Q_0 = 0$, na restrição $X_3 - B_1 S \neq 0$, $\forall s \in \mathbb{C}^+$, o membro à esquerda é reduzido a $X_2 - B_1 S$. Uma fatoração duplamente coprima da planta fornece

$$X_2(s) = \frac{s^2 + 24s - 797}{s^2 + 14s + 53}$$

e

$$B_1(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 14s + 53}$$

Ganesh e Pearson obtêm, através de um método de interpolação de unidades (Vidyasagar, 1985), o ponto factível inicial

$$(x^0)' = [\ -950 \quad -3930 \quad 1 \quad 6 \quad 8\ ] \tag{5.26}$$

para o problema de otimização na forma derivada na Seção 3.5.

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = \frac{x_1^2 x_5 + x_2^2 x_3}{2x_3 x_4 x_5}, \qquad x_3 \geq 0, x_4, x_5 > 0 \\ & c_0(x), c_1(x), c_2(x), c_3(x), c_4(x) > 0 \\ & c_1(x)c_2(x)c_3(x) - c_1^2(x)c_4(x) - c_0(x)c_3^2(x) > 0 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} c_0(x) &= -2x_2 - 797x_5 \\ c_1(x) &= -2x_1 - x_2 - 797x_4 + 24x_5 \\ c_2(x) &= -x_1 - 797x_3 + 24x_4 + x_5 \\ c_3(x) &= 24x_3 + x_4 \\ c_4(x) &= x_3 \end{aligned}$$

O valor da função objetivo no ponto inicial mencionado é $f(x^0) = 2.360927e + 05$. O problema é então colocado na forma padrão de um problema de programação geométrica generalizada, seguindo o procedimento descrito nas Seções 5.3 e 5.4. O problema assim obtido é estruturado de tal maneira a ter como variável de decisão um vetor $x \in \mathbb{R}^8$, e o ponto inicial (5.26) é transformado em

$$(\tilde{x}^0)' = [\ 1 \quad 6 \quad 8 \quad 50 \quad 1000 \quad 70 \quad 4000 \quad f(x_0)\ ]. \tag{5.27}$$

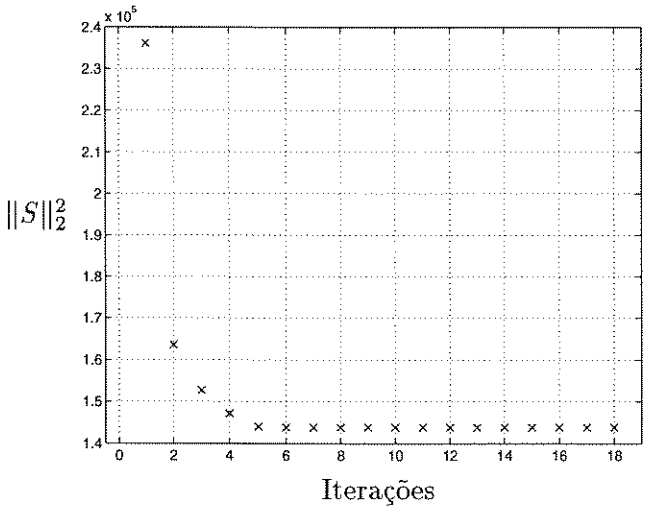

Figura 5.2: Convergência de *Fase 2*, primeiro exemplo.

O problema GGP pode ser condensado e resolvido através de inúmeros métodos de programação geométrica (Bazaraa *et al.*, 1993). Em particular, adotou-se o algoritmo *Fase 2* (Seção 4.4) de Avriel *et al.* (1975). Basicamente, este método consiste em obter um problema linear equivalente ao problema condensado através de uma transformação logarítmica e resolver o problema resultante através de um método do tipo Simplex. A solução encontrada é utilizada como novo ponto de condensação e os ciclos se repetem até que nenhuma melhora no valor da função objetivo seja observada. O método pode ser interpretado como um método de planos de corte e o algoritmo converge para um ponto satisfazendo as condições de Kuhn-Tucker do problema original (Avriel *et al.*, 1975). Utilizando este método, após 18 iterações obteve-se o vetor solução

$$(\tilde{x}^*)' = \Big[\ 0.000100e-11 \quad 0.000761e-11 \quad 0.001150e-11 \quad 0.012055e-11$$

$$0.072308e-11 \quad 0.011359e-11 \quad 0.469612e-11 \quad 1.438476e+05\ \Big],$$

resultando no valor 1.438476e+05 para a função objetivo. A Figura 5.2 mostra a convergência do método.

A função S correspondente a $\tilde{x}^*$ é

$$S(s) = \frac{[\tilde{x}_6^* - \tilde{x}_7^*]s + [\tilde{x}_8^* - \tilde{x}_9^*]}{\tilde{x}_3^* s^2 + \tilde{x}_4^* s + \tilde{x}_5^*},$$

o que implica em $\|S(\tilde{x}^*)\|_2 = 3.792721e+02$ e no controlador

$$\tilde{K}(s) = 10^4 \; \frac{0.039793s^3 + 0.322206s^2 + 1.116768s + 1.617765}{s^4 + 31.65071s^3}$$

O controlador $\tilde{K}$ possui índice de desempenho $\|H\|_2 = 622.61$ (26,1% acima do valor irrestrito) e um pólo em -31.65071, além de três pólos arbitrariamente próximos da origem. Pólos na origem são uma característica da solução restrita do problema de otimização H_2, dado que a fronteira da região de factibilidade (estabilidade) passa a ser o eixo $j\omega$. Entretanto, pode-se melhorar as características de estabilidade transladando-se o eixo imaginário para $s = -0.5$, por exemplo. Fazendo-se isso, o controlador obtido passa a ter índice $\|H\|_2 = 624.56$, menos de 1% acima da solução anterior. Os pólos de malha fechada situam-se em $-12.68180 \pm 7.739539i$, $-3.084562 \pm 3.258065i$, -3.587243, e -2.030729.

Os valores encontrados para a norma H_2 coincidem com os encontrados por Ganesh e Pearson (1989), que, a partir de simulações exaustivas, sugerem tratarem-se de valores mínimos globais. Entretanto, a abordagem de Ganesh e Pearson (1989) envolve a solução sequencial de um problema com função objetivo e restrições não-lineares, enquanto que a abordagem GGP proposta viabiliza a utilização de métodos lineares.

Com a finalidade de se ter uma referência para a avaliação do desempenho computacional do método proposto, tentou-se solucionar o problema exemplo acima discutido através da função *constr* do *Optimization Toolbox*, MATLAB *versão 4.0*. O método utilizado pela rotina *constr* é do tipo quasi-Newton, isto é, baseado em aproximações sucessivas da inversa da matriz Hessiana. O método usa uma recorrência específica para a aproximação, conhecida como BFGS (Broyden-Fletcher-Golfarb-Shanno) (Gill *et al.*, 1981). A rotina *constr* exige estruturar o problema como

$$\begin{aligned} \min \quad & g(x) \\ \text{s.a.} \quad & \\ & h(x) < 0, \quad x > 0 \end{aligned} \tag{5.28}$$

Partindo da formulação (5.24) do problema em estudo, quando colocado na forma

(5.28), fica

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{\mathcal{P}_n(x) - \mathcal{Q}_n(x)}{\mathcal{P}_d(x) - \mathcal{Q}_d(x)} \\ x > 0 & \\ s.a. & \\ & \mathcal{P}_k(x) - \mathcal{Q}_k(x) < 0, \quad k = 0, 1, \cdots, (2\mathcal{M} - 1), \\ & x = (x_3, x_4, \cdots, x_9). \end{aligned} \tag{5.29}$$

O problema (5.29) foi resolvido por *constr*, para o ponto inicial equivalente a (5.27)

$$(\hat{x}^0)' = [\ 1 \quad 6 \quad 8 \quad 50 \quad 1000 \quad 70 \quad 4000],$$

correspondendo-lhe o valor da função objetivo $2.360927e+05$. O gráfico de convergência, neste caso, é mostrado na Figura 5.3, sendo o ponto de ótimo obtido caracterizado pelo valor $1.438476e+05$ para a função objetivo, pelo vetor solução

$$(\hat{x}^*)' = 10^3 \left[\ 0.000878 \quad 0.006686 \quad 0.010108 \quad 0.294425 \quad 0.823438 \quad 0.014736 \quad 4.042687 \ \right],$$

pela função

$$S(s) = \frac{[\hat{x}_6^* - \hat{x}_7^*]s + [\hat{x}_8^* - \hat{x}_9^*]}{\hat{x}_3^* s^2 + \hat{x}_4^* s + \hat{x}_5^*},$$

com norma de valor $3.792725e+02$, e por um controlador

$$\hat{K}(s) = 10^4 \ \frac{0.039807s^3 + 0.322363s^2 + 1.117535s + 1.619223}{s^4 + 31.655865s^3},$$

que leva ao valor $\|H\|_2 = 622.61$. Observa-se que $\hat{K}$ tem um pólo em -31.655865 e 3 pólos em zero.

Foram gerados vários pontos iniciais $\tilde{x}^0$ utilizando o algoritmo *Fase 1* (Seção 4.7). Para estes pontos, o algoritmo *Fase 2* convergiu à solução acima descrita, enquanto que a rotina *constr* divergiu. A aparente falha de *constr* é explicada pelo fato de que, embora *Fase 1* convirja assintóticamente a um ponto factível, sua solução em qualquer iteração finita é, estritamente, infactível. Utilizando o algoritmo *Fase 1* de tal maneira que as restrições exijam um limite inferior positivo, não nulo, para as condições de Routh-Hurwitz, foram obtidos outros dois pontos iniciais $\tilde{x}^0$, interiores à região de factibilidade original. O algoritmo *Fase 2* convergiu nas duas experiências, mas a rotina *constr* falhou em uma.

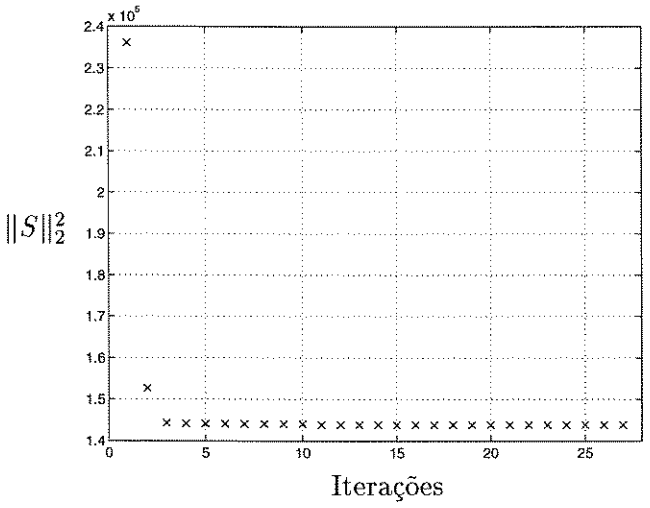

Figura 5.3: Convergência de *constr*, primeiro exemplo.

5.5.2 Planta estabilizável em RH_∞, segundo exemplo

O exemplo de projeto LQG a seguir foi considerado em Halevi *et al.* (1991), onde o problema de síntese de controladores com restrições de estabilidade e redução de ordem é abordado no caso da metodologia LQG, através da manipulação das matrizes de ponderação.

Dada a realização definida pelas matrizes de estado

$$Ap = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad Bp = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Cp = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Dp = 0,$$

e as matrizes relacionadas ao funcional e aos ruídos

$$W^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1000} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L^{\frac{1}{2}} = 100 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad V^{\frac{1}{2}} = 1, \quad R^{\frac{1}{2}} = 1,$$

o controlador ótimo LQG é

$$K_0(s) = 10^4 \frac{0.324312s^3 + 2.617769s^2 + 6.676470s + 5.329006}{s^4 + 268.8651s^3 + 1156.724s^2 - 42.41670s - 2934.729}.$$

Este controlador possui um pólo instável em 1.396931, e corresponde a $\|H_0\|_2 = 2686.195$. A formulação GGP do problema H_2 restrito, associada ao ponto factível inicial (gerado por Fase 1)

$$(x_0)' = [\ 0.01e-13 \quad 0.013960e-13 \quad 0.010265e-13 \quad 0.01e-13$$

$$0.154412e-13 \quad 0.01e-13 \quad 0.612501e-13 \quad 1342.793\ ],$$

quando abordada via algoritmo *Fase 2* tem a solução

$$(x^*)' = [\ 0.023206e-13 \quad 0.023573e-13 \quad 0.01e-13 \quad 0.035627e-13$$

$$0.606003e-13 \quad 0.012195e-13 \quad 0.599135e-13 \quad 1028.074\ ],$$

que leva a $\|S\|_2 = 32.063304$, $\|H\|_2 = 2686.386$, e

$$K^*(s) = 10^5 \frac{0.032185s^5 + 0.292011s^4 + 0.936413s^3 + 1.302787s^2 + 0.810503s + 0.223572}{s^6 + 269.8810s^5 + 1528.597s^4 + 2087.045s^3}.$$

O controlador K^* tem pólos em -264.1234, -2.257898, -3.499616, além de 3 pólos na origem. Substituindo estes últimos por -0.5, obtém-se $\|H\|_2 = 2686.386$. O deslocamento de pólos requereu uma variação no funcional $\|H\|_2$ não observável na precisão de trabalho. Estes resultados concordam com os obtidos em Halevi *et al.* (1991). A convergência de *Fase 2* para este exemplo é mostrada na Figura 5.4.

A rotina *constr* não admite x^0 como ponto inicial, pelo fato deste não ser estritamente factível (detalhe já discutido no exemplo anterior). Assim, gerou-se um ponto interior às restrições utilizando-se o algoritmo Fase 1, substituindo as restrições de Routh-Hurwitz $g(x) \geq 0$ por $g(x) > 0.01$. Obteve-se então o ponto estritamente factível

$$(\tilde{x}_0)' = [0.000511 \quad 0.000930 \quad 0.001379 \quad 0 \quad 0.009067 \quad 0 \quad 0.081164 \quad 2653.237],$$

caracterizado por $\|S\| = 51.508879$ e $\|H\|_2 = 2686.688$. A rotina *constr* não converge quando inicializada com $\tilde{x}^0$, apesar deste ponto ser factível; enquanto que *Fase 2* converge para o ponto

$$(\tilde{x}^*)' = [0.0280614e-12 \quad 0.029839e-12 \quad 0.014046e-12 \quad 0.006214e-12$$

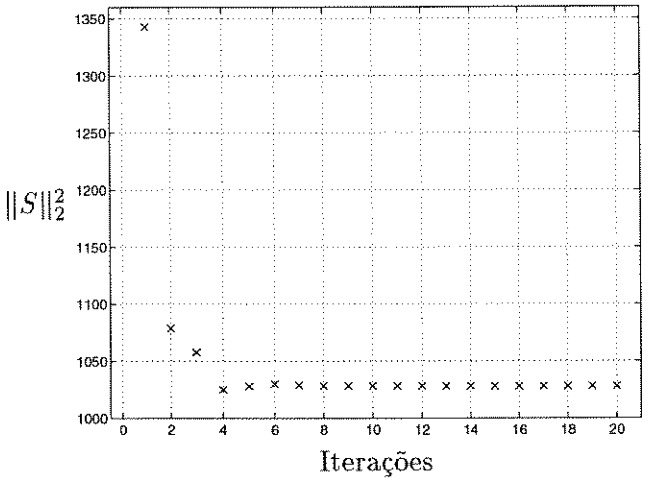

Figura 5.4: Convergência de Fase 2, segundo exemplo.

$$0.615263e-12 \qquad 0.001000e-12 \qquad 0.825429e-12 \qquad 1032.387]$$

com funcionais dados por $\|S\| = 32.130002$ e $\|H\|_2 = 2686.386$. Três pólos do controlador correspondente situam-se em zero, os restantes são -264.1669, -2.261048, e -3.500594. Isto é, a solução pode ser considerada igual à anteriormente obtida. A convergência de *Fase 2* neste caso é mostrada na Figura 5.5.

5.5.3 Controlador inicial estável

Dando sequência aos exemplos, considera-se nesta seção o caso em que o controlador H_2-ótimo, solução do problema H_2 irrestrito, já é estável. A solução do problema de otimização restrito, neste caso, é o próprio controlador H_2-ótimo, e deve corresponder a um valor nulo para o funcional minimizado, $\|S\|_2$, pois tal funcional (3.2) mede a *distância* do controlador H_2-ótimo ao conjunto de controladores estáveis. Seja então a planta

$$P_0(s) = \frac{s-1}{(s-2)^2}.$$

A solução do problema LQG associado a P_0 e às matrizes

$$L^{\frac{1}{2}} = [100 \quad 11], \qquad W^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 356 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad V^{\frac{1}{2}} = 40, \qquad R^{\frac{1}{2}} = 1,$$

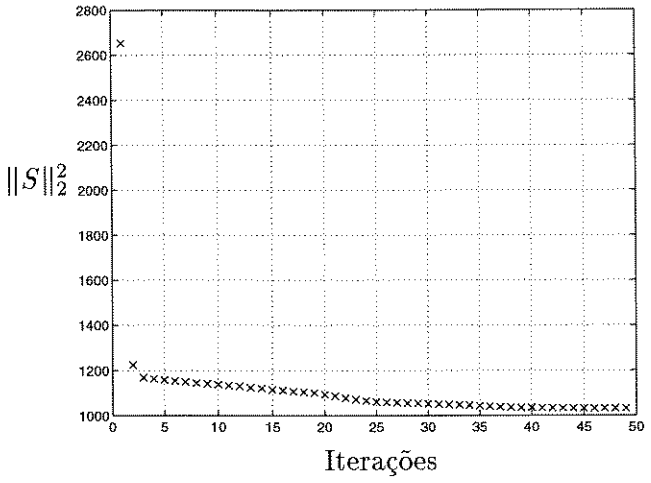

Figura 5.5: Convergência de *Fase 2*, segundo exemplo com ponto inicial interior.

é o controlador

$$K_0(s) = \frac{-0.754298s + 8.934466}{0.001000s^2 + 0.114466s + 2.262169}$$

que tem pólos em -89.06794 e -25.39824, e fornece $\|H\|_2 = 6.281826e+04$.

A seguir os detalhes da solução numérica. O vetor $x^0 \in \mathbb{R}^8$ de inicialização para *Fase 2*, fornecido pelo algoritmo *Fase 1*, é

$$\tilde{x}_0' = 250000 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

O algoritmo *Fase 2* converge para o valor ótimo do problema restrito em duas iterações, como mostrado na Figura 5.6. O valor obtido foi $\|S\|_2 = 0$, como esperado; o vetor solução correspondente é

$$(\tilde{x}^*)' = 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.000008 & 0.629931 & 0.000008 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O controlador ótimo GGP portanto é o próprio controlador inicial, K_0.

Nota-se que o controlador estável obtido para P_0 na Seção 2.6, sem pretensões de otimalidade, quando colocado no contexto das matrizes L, W, V e R definidas nesta seção, corresponde a $\|H\|_2 = 7.093278e+04$, valor 13% superior ao ótimo LQG.

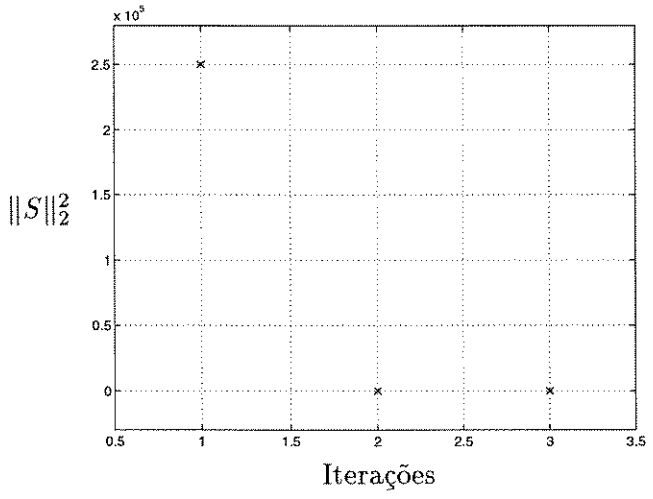

Figura 5.6: Convergência de *Fase 2*, terceiro exemplo.

5.5.4 Planta não estabilizável em RH_∞

Neste caso, o algoritmo *Fase 2* gera uma sequência de problemas condensados indefinidamente, sem convergir.

5.5.5 Comparações e comentários

O algoritmo utilizado para a solução do problema de projeto na formulação GGP foi o algoritmo *Fase 2* (Avriel e Williams, 1970). Comparado à rotina *constr* do *Optimization Toolbox, MATLAB versão 4.0*, a implementação de *Fase 2* mostrou-se menos eficiente porquanto requereu um maior esforço computacional. Este desempenho inferior pode ser amenizado através da utilização de métodos duais na resolução dos PL's gerados nos passos intermediários do algoritmo de Avriel e Williams. Por outro lado, uma maior taxa de sucesso na convergência de *Fase 2*, nos diversos casos-exemplo estudados, aponta a uma menor sensibilidade do algoritmo *Fase 2* em relação ao ponto inicial. A facilidade de implementação é outra característica favorável ao método proposto neste trabalho.

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho, o problema de se projetar um controlador estável, ótimo no sentido da norma H_2, foi enfocado dentro de uma discussão geral sobre a incorporação de restrições de estabilidade através do critério de Routh-Hurwitz. Demonstrou-se que as condições de Routh-Hurwitz podem ser representadas através de desigualdades envolvendo posinômios, que, uma vez condensadas, admitem uma representação interna convexa. Este resultado foi utilizado na solução do problema de otimização H_2 restrito a controladores estáveis. O problema de programação geométrica generalizado resultante pôde então ser resolvido por técnicas de programação linear. Uma vantagem é que a busca de um ponto factível inicial pode ser feita através da solução de um problema geométrico auxiliar, de fácil construção. Isto elimina a necessidade da utilização de métodos de interpolação de unidades, de implementação complexa e elevada sensibilidade a erros numéricos.

A eficiência das rotinas que geraram os exemplos numéricos deste trabalho pode ser incrementada, através da utilização de métodos duais na resolução dos PL's gerados nos passos intermediários dos algoritmos *Fase 1* e *Fase 2*. Isto permitiria a concorrência com outros métodos em termos de esforço computacional. Na totalidade das experiências numéricas baseadas na metodologia proposta, atingiu-se convergência.

Em termos de aplicabilidade, a metodologia proposta pode ser incorporada à obtenção de controladores através de análise convexa (parametrização de Youla ou Q), e o problema da estabilização forte aqui formulado e resolvido é equivalente ao problema de estabilização simultânea de várias plantas (Vidyasagar, 1985, Doyle *et al.*, 1992). Visando

essas aplicações, um estudo mais detalhado da convergência e propriedades gerais do GGP formulado daria continuidade natural a este trabalho.

Bibliografia

Avriel, M., A. C. Williams (1970). Complementary geometric programmming. *SIAM J. Appl. Math.*, 19, 125-141.

Avriel, M., R. Dembo and U. Passy (1975). Solution of generalized geometric programs. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 9, 149-168.

Bazaraa, M. S., H. D. Sherali and C. M. Shetty (1993). *Nonlinear programming - theory and algorithms*, 2nd edition, Wiley.

Boyd, S. P., V. Balakrishnan, C. H. Barratt, N. M. Khraishi, X. Li, D. G. Meyer and S. A. Norman (1988). A new CAD method and associated architectures for linear controllers. *IEEE Trans. Aut. Control*, 33, 268-284.

Boyd, S. P. and C. H. Barratt (1991). *Linear controller design - limits of performance*, Prentice Hall.

Cabañas, A. I. D. e P. A. V. Ferreira (1996). Otimização H_2 com controladores estáveis: uma abordagem por programação geométrica. *XI Congresso Brasileiro de Automática*, São Paulo, Brasil, aceito para apresentação.

Chen, C. T. (1984). *Linear system theory and design*, Holt, Rinehart and Winston.

Cheng, L. and J. B. Pearson (1981). Synthesis of linear multivariable systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, 26, 194-202.

Doyle, J. C., G. Stein (1979). Robustness with observers. *IEEE Trans. Aut. Control*, 24, 607-611.

Doyle, J. C. (1984). Advances in multivariable control. ONR/Honeywell Workshop, Minneapolis, Minnesota.

Doyle, J. C., B. A. Francis, A. R. Tannenbaum (1992). *Feedback Control Theory.* Macmillan.

Duffin, J. C., E. L. Peterson, C. Zener (1967). *Geometric Programming*, Wiley, New York.

Duffin, R. J. (1970). Linearizing geometric programs. *SIAM Rev.*, 12, 211-237.

Francis, B. (1987). *A course in H_∞ control theory.* Springer-Verlag.

Ganesh, C. and J. B. Pearson (1989). H_2-Optimization with stable controllers. *Automatica*, 25, 4, 629-634.

Gill, P. E., W. Murray and M. H. Wright (1981). *Practical Optimization.* Academic Press.

Gu, D. W., B. W. Choi and I. Postlethwaite (1993). Low-Order stabilizing controllers. *IEEE Trans. Auto. Control*, 38, 11, 1713-1717.

Halevi, Y., D. Bernstein and W. Haddad (1991). On stable full-order and reduced-order LQG controllers. *Optimal Control Applications & Methods*, 12, 163-172.

Kelley, J. E. (1960). The cutting-plane method for solving convex programs. *SIAM J. Appl. Math.*, 8, 703-712.

Kucera, V. (1979). *Discrete linear control.* Wiley, New York.

Luenberger, D. G. (1969). *Optimization by vector space methods.* Wiley, New York.

Luenberger, D. G. (1984). *Linear and Nonlinear Programming.* 2nd Edition, Addison-Wesley.

Vidyasagar, M. and N. Viswanadham (1982). Algebraic design techniques for reliable stabilization. *IEEE Trans. Auto. Control*, 27, 1085-1095.

Vidyasagar, M. (1985). *Control system synthesis: a factorization approach.* MIT Press, Cambridge, Mass.

Youla, D. C., J. J. Bongiorno and C. N. Lu (1974). Single-loop feedback-stabilization of linear multivariable dynamical plants. *Automatica*, 10, 159-173.

Youla, D. C., H. A. Jabr and J. J. Bongiorno (1976). Modern Weiner-Hopf design of optimal controllers - Part 2: the multivariable case. *IEEE Trans. Aut. Control*, 21, 319-338.