

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
DEPARTAMENTO DE SISTEMAS E CONTROLE DE ENERGIA

## Estudos de Fluxo de Potência Ótimo Via Otimização Paramétrica

por: Eng. Flávio Guilherme de Melo Lima <sup>622</sup>

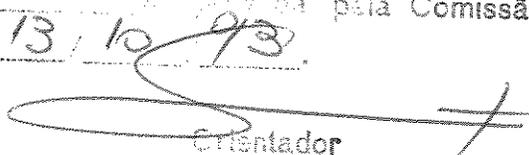
orientador: Prof. Dr. Anésio dos Santos Jr. <sup>ur r, t</sup>

co-orientador Prof. Dr. Secundino Soares Filho <sup>t</sup>

Este exemplar corresponde à redação final da tese  
defendida por FLÁVIO G. MELO LIMA

aprovada pela Comissão

Julgadora em 13/10/93

  
Orientador

Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas, para preenchimento dos pré-requisitos parciais para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

outubro 1993

À minha família

Esta pesquisa teve o suporte financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (**FAPESP**) através do Projeto Temático de Equipe: Planejamento da Operação de Sistemas de Energia Elétrica com Predominância de Geração Hidroelétrica.

# Agradecimentos

Ao prof. Anésio pela atenção, amizade e persistência no desenvolver das etapas que resultaram neste trabalho.

Ao prof. Secundino pelas inúmeras discussões a respeito da otimização paramétrica o qual através do seu contato com o Prof. Galiana, da Universidade McGill no Canadá, possibilitou uma troca de informações a respeito desta pesquisa.

Ao DT que colaborou permitindo que fosse utilizado o seu laboratório no início dos testes.

À todos os colegas que conviveram comigo durante a realização do mestrado como o Vitor, o Gélson, o Cássio, o Walcir, a Ana Cláudia, o Gustavo, a Márcia e a Bete.

Ao CNPq que financiou o primeiro ano do mestrado e à FAPESP pela apreciação dos relatórios oriundos deste trabalho bem como a seriedade no compromisso para com os bolsistas.

À minha namorada Elza que através de suas palavras de otimismo me fez chegar ao fim deste trabalho.

# Resumo

Este trabalho versa sobre o estudo de uma metodologia baseada em otimização paramétrica aplicada na resolução do problema do Fluxo de Potência Ótimo. Esta metodologia permitiu resolver uma das dificuldades encontradas na resolução deste problema: identificar o conjunto de restrições ativas na solução ótima. Isto é possível graças ao monitoramento contínuo que é realizado sobre as restrições de desigualdade durante a resolução do problema. Este monitoramento é feito a partir de uma relaxação no problema, seguido de um retorno gradual para o problema original viabilizado pela variação de um parâmetro. Através desta variação, forma-se uma sequência de problemas parametrizados cujas soluções caminham gradualmente para a solução do Fluxo de Potência Ótimo. Diversos sistemas elétricos de pequeno porte foram testados com função objetivo envolvendo despachos de ativos-reativos e somente reativos. Os resultados obtidos indicam uma metodologia robusta e eficiente para a solução do problema.

# Abstract

This work proposes a study of a methodology based in a parametric optimization applied to the solution of the Optimal Power Flow problem. This methodology allowed to solve one of this problem difficulties: to identify the set of active constraints on the optimal solution. This is possible due to the continuous control over the inequality constraints during the problem resolution. This control is done from a relaxation in problem followed by a gradual return to the original problem through the use of the variation of a parameter. By this variation a sequence of parametric problems whose solutions gradually track to the solution of the Optimal Power Flow is performed. Several small electric systems were tested with objective function involving the dispatch of both active and reactive sources and only reactive sources. The results indicate an efficient and robust methodology to the solution of the problem.

# Conteúdo

<b>AGRADECIMENTOS</b>	<b>iii</b>
<b>RESUMO</b>	<b>iv</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>v</b>
<b>CONTEÚDO</b>	<b>vi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Um Histórico sobre o Fluxo de Potência Ótimo e sua Resolução através da Otimização Paramétrica</b>	<b>3</b>
2.1 Origem do Fluxo de Potência Ótimo . . . . .	4
2.2 A Otimização Paramétrica no Fluxo de Potência Ótimo . . . . .	6
<b>3 O Método da Continuação Aplicado a um Sistema de Equações Não Lineares</b>	<b>9</b>
3.1 Conceitos Básicos . . . . .	10
3.1.1 Função Homotopia . . . . .	11
3.1.2 A Existência do Caminho . . . . .	13
3.2 O Método Preditor-Corretor . . . . .	15
3.2.1 O Passo Preditor e o Passo Corretor . . . . .	15
3.2.2 O Algoritmo . . . . .	17

<b>4</b>	<b>O Método da Continuação Aplicado ao Fluxo de Potência Ótimo</b>	<b>18</b>
4.1	Parametrização de Um Problema Não Linear de Otimização . . . . .	19
4.2	Cálculo das Condições de Kuhn-Tucker do Problema Parametrizado . . . . .	23
4.3	Fluxo de Potência Ótimo - Problema Parametrizado . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Identificação das Restrições Ativas Via Evolução do Parâmetro</b>	<b>29</b>
5.1	Evolução do Parâmetro Baseada na Análise de Sensibilidade e Factibilidade	30
5.2	Atualização do Conjunto de Restrições Ativas . . . . .	34
5.3	Algoritmo do Método da Continuação . . . . .	38
<b>6</b>	<b>Análise dos Resultados</b>	<b>40</b>
6.1	Descrições Gerais . . . . .	40
6.2	Minimização do Custo de Geração . . . . .	50
6.2.1	Inicialização do Tipo 1 . . . . .	50
6.2.2	Inicialização do Tipo 2 . . . . .	50
6.3	Minimização de Perdas Ativas . . . . .	58
6.3.1	Inicialização do Tipo 1 . . . . .	58
6.3.2	Inicialização do Tipo 2 . . . . .	58
6.4	Minimização de Desvio de Tensão . . . . .	66
6.4.1	Inicialização do Tipo 1 . . . . .	66
6.4.2	Inicialização do Tipo 2 . . . . .	66
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>74</b>
	<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>77</b>
	<b>A Função Lagrangeana</b>	<b>80</b>

<b>B</b>	<b>Derivada Primeira da Função Lagrangeana</b>	<b>83</b>
B.1	Derivada em relação ao ângulo . . . . .	84
B.2	Derivada em relação a magnitude de tensão . . . . .	85
B.3	Derivada em relação a compensação shunt . . . . .	86
B.4	Derivada em relação ao tap . . . . .	86
<b>C</b>	<b>Derivada Segunda da Função Lagrangeana</b>	<b>87</b>
C.1	Derivada ângulo x ângulo . . . . .	87
C.2	Derivada magnitude de tensão x ângulo . . . . .	88
C.3	Derivada magnitude de tensão x magnitude de tensão . . . . .	88
C.4	Derivada tap x ângulo . . . . .	89
C.5	Derivada tap x tap . . . . .	90
C.6	Derivada tap x magnitude de tensão . . . . .	90
C.7	Derivada magnitude de tensão x compensação shunt . . . . .	91
C.8	Derivada compensação shunt x compensação shunt . . . . .	91

# Capítulo 1

## Introdução

O cálculo do Fluxo de Potência Ótimo (FPO) permanece ainda hoje como um problema não totalmente resolvido apesar dos inúmeros avanços nas técnicas computacionais e de otimização. Uma técnica de otimização mais recente vem sendo estudada na resolução do FPO sendo esta a otimização paramétrica.

Na década de 80 surgiram várias pesquisas que utilizaram a otimização paramétrica como ferramenta computacional para o FPO. Esta técnica consiste em :

- (a) relaxar o problema, por meio de um parâmetro, de tal maneira que seja possível encontrar uma solução trivial;
- (b) a partir desta, seguir em busca da solução do FPO através do uso de um caminho formado por pontos que atendam as condições necessárias para um mínimo local;
- (c) adicionando a isto o monitoramento das restrições de desigualdade que ao longo do caminho vão se tornando ativas.

Neste trabalho a parametrização do FPO está presente na função objetivo, nas restrições de igualdade e nas restrições de desigualdade. É possível dar uma interpretação a este modelo, associando a parametrização nas restrições de igualdade com a indexação da carga a um parâmetro. O ponto de partida do método, considerado sobre o problema relaxado, é equivalente ao atendimento possível da carga com a solução elétrica correspondente a essa inicialização. A medida que o caminho é trilhado o nível de carga do sistema vai se aproximando do valor especificado para ser atendido e as demais variáveis do problema são atualizadas. Assim, é possível monitorar as restrições de desigualdade pois o FPO é resolvido paulatinamente o que viabiliza a identificação de violações de limites durante a sua resolução.

A otimização paramétrica aplicada no FPO tem seu início no trabalho de Dillon [1] e vem sendo estudada por alguns grupos localizados na França, Itália, Canadá e

Brasil. Este trabalho é uma continuação da linha de pesquisa que tem analisado o comportamento do FPO diante da otimização paramétrica, particularmente usando o método da continuação.

O programa computacional foi escrito no ambiente *MATLAB* onde as estratégias de resolução do FPO foram sendo desenvolvidas durante os testes computacionais.

Esta metodologia foi testada em vários sistemas, como por exemplo o AEP14 e o AEP30, sem o emprego de esparsidade e utilizando a estação de trabalho *SUN*. Os resultados obtidos são satisfatórios e demonstram que a pesquisa nesta área deve prosseguir como forma de aperfeiçoar as idéias apresentadas neste trabalho. Apresentam-se nas próximas linhas o conteúdo pertencente a cada capítulo.

No Capítulo 2 é dada uma breve introdução sobre a origem do modelo do FPO e algumas publicações a respeito da otimização paramétrica. Explica-se a análise da sensibilidade dada por Dillon [1] com o propósito de tornar mais compreensível a metodologia apresentada.

No Capítulo 3 apresenta-se o método da continuação, apontando as condições teóricas que asseguram sua aplicabilidade. São fornecidos os conceitos básicos da abordagem que serão utilizados no decorrer da apresentação deste trabalho e, explica-se a metodologia através de sua aplicação na resolução de um sistema de equações não lineares.

No Capítulo 4 é feita uma apresentação do método da continuação aplicado ao modelo de programação não linear que representa o FPO. Vários gráficos ilustram como a otimização paramétrica atua na função objetivo e nas restrições de igualdade e desigualdade. São estabelecidas as condições de Kuhn-Tucker e em seguida explica-se como resolvê-las. É apresentado o modelo do FPO parametrizado com todas as variáveis.

No Capítulo 5 é mostrada a estratégia empregada para descobrir as possíveis mudanças do conjunto de restrições ativas e, como são tratadas as violações que surgem. Por fim é apresentado o algoritmo do método da continuação voltado para o FPO.

No Capítulo 6 temos a análise dos resultados do sistema AEP30, onde são consideradas duas inicializações. Nesta parte são apreciadas várias soluções do FPO, para diferentes tipos de funções objetivo que envolvem o despacho ótimo ativo-reativo ou só reativo.

Nos Apêndices são apresentadas as expressões da função Lagrangeana e das derivadas primeira e segunda desta função, as quais fazem parte do vetor gradiente do Lagrangeano e da matriz Jacobiana deste vetor.

## Capítulo 2

# Um Histórico sobre o Fluxo de Potência Ótimo e sua Resolução através da Otimização Paramétrica

Neste capítulo é feito um breve resumo do histórico sobre o FPO. Alguns trabalhos são citados indo desde a formulação do despacho econômico, na década de 20, até o surgimento da otimização paramétrica no início dos anos 80.

Apresenta-se o trabalho feito por Dillon [1] como introdução à otimização paramétrica. É dado destaque às pesquisas desenvolvidas por um grupo do Canadá, o qual vem publicando sistematicamente artigos sobre aplicações desta técnica na resolução do FPO [17].

## 2.1 Origem do Fluxo de Potência Ótimo

O interesse na operação econômica dos sistemas de energia elétrica apareceu por volta de 1920 [2], sendo a origem do FPO associada ao modelo do despacho econômico.

O problema do despacho econômico visa alocar economicamente a carga entre as unidades térmicas com custos e características diferentes, de modo a atender a demanda global a todo instante. No início dos anos 30, Steinberg e Smith [3] demonstraram que a solução mais econômica era operar todas as unidades geradoras ao mesmo custo marginal. Esta solução é obtida resolvendo-se o seguinte problema simplificado :

$$\min \sum_{i=1}^{ng} ct_i(p_{g_i}) \quad (2.1)$$

$$s.a \sum_{i=1}^{ng} p_{g_i} = p_d \quad (\lambda) \quad (2.2)$$

onde :

- $ct_i(p_{g_i})$  - função custo de geração da unidade térmica na barra  $i$
- $p_{g_i}$  - geração ativa na barra  $i$
- $p_d$  - demanda total
- $ng$  - número de barras de geração térmica
- $\lambda$  - multiplicador de Lagrange de (2.2)

A função Lagrangeana de (2.1)-(2.2) é dada por:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{ng} [ct_i(p_{g_i}) - \lambda \cdot p_{g_i}] + \lambda \cdot p_d \quad (2.3)$$

Assim, a solução ótima do problema será dada pela condição de estacionariedade da função Lagrangeana, ou seja :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{g_i}} = \frac{\partial ct_i(p_{g_i})}{\partial p_{g_i}} - \lambda = 0 \quad i = 1, 2, \dots, ng \quad (2.4)$$

Isto nos informa que :

$$\lambda = \frac{\partial ct_i(p_{g_i})}{\partial p_{g_i}} \quad i = 1, 2, \dots, ng \quad (2.5)$$

O multiplicador de Lagrange ( $\lambda$ ) representa o custo marginal do sistema, ou seja, o custo adicional para o atendimento de 1 MW a mais na demanda. Nesta formulação, é considerado somente o atendimento da demanda global, não sendo representadas as restrições do sistema de transmissão e nem as perdas. Tal abordagem simplificada é aceitável para sistemas de pequeno porte nos quais as unidades geradoras se localizam próximas dos centros de carga.

Uma interpretação moderna do despacho econômico surgiu quando foram publicadas as condições de otimalidade de Kuhn-Tucker na programação não linear [4]. A partir deste momento diversos trabalhos foram publicados sobre o despacho econômico. Na década de 60 com o uso de computadores digitais tivemos a divulgação dos trabalhos de Squires [5] e Carpentier [6] e [7], que culminaram com o fim do período clássico do despacho econômico e deram início ao FPO. Em seguida aparecem pesquisas baseadas na formulação de Carpentier, sendo sua maior contribuição ter estabelecido de forma mais rigorosa a base matemática utilizando o teorema de Kuhn-Tucker. Isto resultou em um sistema de equações não lineares as quais foram resolvidas pelo método de Gauss-Seidl.

A diferença básica entre o despacho econômico clássico e o modelo do FPO é a substituição da equação de balanço de carga (2.2) pelas equações de fluxo de carga nas quais estão incluídas as perdas.

O método do gradiente reduzido de Dommel e Tinney [8] deu um grande avanço na resolução do FPO pois possibilitou seu uso em sistemas de grande porte graças as técnicas de esparsidade desenvolvidas em [9]. Este método trata as restrições de desigualdade funcionais que violam seus limites por penalidades e resolve as restrições de igualdade pelo método de Newton-Raphson [10]. O método de Dommel e Tinney é de primeira ordem sendo sua convergência muito sensível ao fator de aceleração usado para corrigir as variáveis de controle. Tentativas de contornar esta deficiência empregando a matriz Hessiana foram apresentadas em [11] e [12]. As restrições de segurança também foram analisadas em [13].

Em 1985 Carpentier [14] publica um artigo no qual cita diversos métodos empregados na solução do FPO, como por exemplo: técnicas de programação linear, técnicas de gradiente e técnicas quadráticas. Carpentier destaca que, apesar da existência de várias metodologias, ainda não foi obtido um algoritmo que seja confiável e rápido para aplicação on-line. Outras publicações nesta linha de revisão da literatura do FPO estão em [15], [16] e [17].

Em [18] temos uma metodologia de resolução do FPO que aplica sobre as condições de otimalidade de Kuhn-Tucker o método de Newton-Raphson. O artigo relata a grande dificuldade na determinação das restrições ativas na solução ótima.

Apesar de terem sido publicados diversos trabalhos propondo técnicas para a solução do FPO, algumas dificuldades permanecem tais como no tratamento de sistemas equivalentes ou no ajuste de variáveis discretas [19].

Mais recentemente surge uma nova técnica de otimização, chamada de programação paramétrica, onde um grupo liderado por F. D. Galiana vem se destacando com a publicação de inúmeros trabalhos [20], [21], [22], [23], [24] e [25]. Em [17] são citados alguns artigos no campo da otimização paramétrica. Em [25] é comentada a potencialidade da otimização paramétrica diante da resolução do FPO dinâmico. A metodologia utilizada por Galiana consiste em empregar o método da continuação na busca da solução do FPO. Este método tem grande aplicação na resolução de sistemas de equações não lineares e problemas de otimização, sendo seu uso verificado em várias áreas como engenharia, economia etc [26]. No trabalho [27] temos a apresentação das bases teóricas do método da continuação. Ele serve de referência para pesquisa de aplicações em áreas específicas.

## 2.2 A Otimização Paramétrica no Fluxo de Potência Ótimo

A utilização da otimização paramétrica na resolução do FPO, tem sua origem ligada na análise da sensibilidade em torno de um ponto que satisfaz as condições de Kuhn-Tucker [1]. A sensibilidade pode ser verificada em relação a diversos parâmetros como por exemplo, cargas ou as impedâncias de linhas. É utilizada a informação contida no ponto já conhecido para determinar uma nova solução após uma variação em algum parâmetro.

É apresentada aqui a análise de sensibilidade baseada na seguinte formulação parametrizada do FPO :

$$\min_x f(x, p) \quad (2.6)$$

$$s.a \quad g(x, p) = 0 \quad (\lambda) \quad (2.7)$$

$$h(x, p) \leq 0 \quad (\gamma) \quad (2.8)$$

onde  $x$  é o vetor das variáveis primais,  $\lambda$  e  $\gamma$  são os vetores das variáveis duais e  $p$  é o vetor dos parâmetros.

A função Lagrangeana deste problema é :

$$\mathcal{L} = f(x, p) + \lambda^T \cdot g(x, p) + \gamma^T \cdot h(x, p) \quad (2.9)$$

As condições necessárias de Kuhn-Tucker para um mínimo local de (2.6)-(2.8) são :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial f(x, p)}{\partial x} + \frac{\partial g^T(x, p)}{\partial x} \cdot \lambda + \frac{\partial h^T(x, p)}{\partial x} \cdot \gamma = 0 \quad (2.10)$$

$$\gamma^T \cdot h(x, p) = 0 \quad (2.11)$$

$$g(x, p) = 0 \quad (2.12)$$

$$h(x, p) \leq 0 \quad (2.13)$$

$$\gamma \geq 0 \quad (2.14)$$

A linearização das equações (2.10)-(2.12), para uma pequena variação  $\delta p$ , em torno de um ponto  $x^\circ, p^\circ, \lambda^\circ, \gamma^\circ$  fornece :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f^2(x^\circ, p^\circ)}{\partial x^2} \cdot \delta x + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left( \frac{\partial g^T(x^\circ, p^\circ)}{\partial x} \cdot \lambda^\circ \right) \cdot \delta x + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left( \frac{\partial h^T(x^\circ, p^\circ)}{\partial x} \cdot \gamma^\circ \right) \cdot \delta x + \\ & \frac{\partial g^T(x^\circ, p^\circ)}{\partial x} \cdot \delta \lambda + \frac{\partial h^T(x^\circ, p^\circ)}{\partial x} \cdot \delta \gamma + \frac{\partial f^2(x^\circ, p^\circ)}{\partial x \cdot \partial p} \cdot \delta p + \frac{\partial}{\partial p} \cdot \left( \frac{\partial g^T(x^\circ, p^\circ)}{\partial x} \cdot \lambda^\circ \right) \cdot \delta p + \\ & \frac{\partial}{\partial p} \cdot \left( \frac{\partial h^T(x^\circ, p^\circ)}{\partial x} \cdot \gamma^\circ \right) \cdot \delta p = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$h^T(x^\circ, p^\circ) \cdot \delta \gamma + \gamma^{\circ T} \frac{\partial h(x^\circ, p^\circ)}{\partial x} \cdot \delta x + \gamma^{\circ T} \frac{\partial h(x^\circ, p^\circ)}{\partial p} \cdot \delta p = 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial g(x^\circ, p^\circ)}{\partial x} \cdot \delta x + \frac{\partial g(x^\circ, p^\circ)}{\partial p} \cdot \delta p = 0 \quad (2.17)$$

Reescrevendo as equações (2.15)-(2.17) em notação matricial após algumas manipulações algébricas :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} & \frac{\partial h^T(x^\circ, p^\circ)}{\partial x} & \frac{\partial g^T(x^\circ, p^\circ)}{\partial x} \\ \gamma^{\circ T} \cdot \frac{\partial h(x^\circ, p^\circ)}{\partial x} & h^T(x^\circ, p^\circ) & 0 \\ \frac{\partial g(x^\circ, p^\circ)}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta \gamma \\ \delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \cdot \partial p} \\ \gamma^{\circ T} \cdot \frac{\partial h(x^\circ, p^\circ)}{\partial p} \\ \frac{\partial g(x^\circ, p^\circ)}{\partial p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta p \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Variações  $\delta p$  produzem mudanças no ponto  $(x^\circ, \gamma^\circ, \lambda^\circ)$ , sendo que os incrementos são dados pelo sistema (2.18). Desta forma, a sensibilidade das variáveis primais e duais em relação ao parâmetro é obtida a partir das condições de Kuhn-Tucker (2.10)-(2.12).

No capítulo seguinte é apresentado o método da continuação através da parametrização de um sistema de equações não lineares análogo as condições de igualdade de Kuhn-Tucker.

## Capítulo 3

# O Método da Continuação Aplicado a um Sistema de Equações Não Lineares

Neste capítulo é apresentado como o método da continuação pode ser utilizado na obtenção das condições de Kuhn-Tucker de um problema de otimização somente com restrições de igualdade. Neste caso, essas condições se reduzem a um sistema de equações não lineares. Nos próximos capítulos esta metodologia será empregada em um problema de otimização não linear completo.

São introduzidos os conceitos de função Homotopia e caminho. Logo em seguida, são enunciados dois teoremas fundamentais para a aplicabilidade do método da continuação. O termo parâmetro de continuação começa a ser usado ao mesmo tempo em que se diz como é estipulada a sua variação para um intervalo pré-definido. Este capítulo está baseado na referência [26].

### 3.1 Conceitos Básicos

Suponha que se deseja resolver um sistema de equações não lineares cuja solução não é trivial, mas que a partir dele seja possível construir um outro sistema que tenha uma solução óbvia. A idéia básica do método da continuação é obter um problema mais geral que envolva estes dois sistemas utilizando para isto um parâmetro.

Exemplifica-se o método da continuação através da resolução do seguinte sistema não linear :

$$\begin{cases} x_1^3 - 3x_1^2 + 8x_1 + 3x_2 - 36 = 0 \\ x_1^2 + x_2 + 4 = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Percebe-se que a solução deste sistema não é tão fácil de ser obtida. Forma-se então, um segundo sistema que contém elementos originários do sistema acima e cuja solução seja conhecida :

$$\begin{cases} x_1^3 + 8x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Uma solução óbvia do sistema (3.2) é o par  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ . Estabelece-se uma combinação entre os sistemas (3.1) e (3.2) utilizando um escalar  $c$  chamado de parâmetro de continuação. Este parâmetro terá valores compreendidos entre 0 e 1 de tal forma que em  $c = 0$ , tem-se o sistema (3.2) do qual já se conhece a solução e em  $c = 1$ , recai-se no sistema (3.1) que se pretende resolver. A combinação dos sistemas acima resulta em :

$$\begin{cases} x_1^3 + 8x_1 + 3x_2 - c(3x_1^2 + 36) = 0 \\ x_2 + c(x_1^2 + 4) = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Obtendo a expressão de  $x_2$  a partir da segunda equação do sistema (3.3) e substituindo na primeira, tem-se após algumas manipulações algébricas os valores de  $x_1$  e  $x_2$  como função do parâmetro  $c$ . Assim :

$$\begin{cases} x_1(c) = 6c \\ x_2(c) = -36c^3 - 4c \end{cases} \quad (3.4)$$

Na figura 3.1 a curva representa os pontos definidos pelas equações do sistema (3.4), a medida que o parâmetro  $c$  varia. Este parâmetro assumindo valores no intervalo

$0 \leq c \leq 1$ , criará um caminho cujas extremidades são  $(x_1(0), x_2(0)) = (0, 0)$  em  $c = 0$  e  $(x_1(1), x_2(1)) = (6, -40)$  em  $c = 1$ .

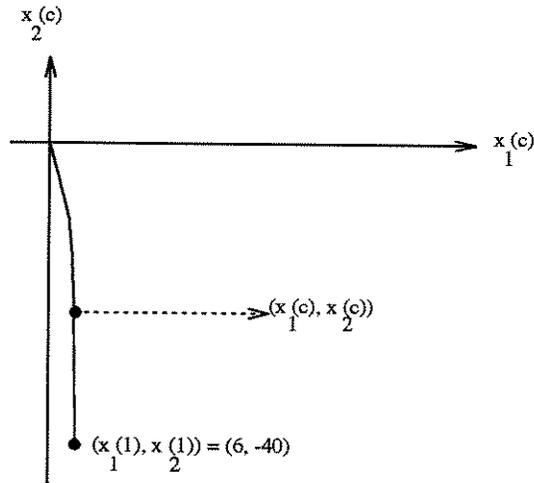


Figura 3.1: As soluções do sistema (3.3) associadas a mudança do parâmetro  $c$ .

### 3.1.1 Função Homotopia

Observe que uma generalização dessa idéia no espaço  $\mathfrak{R}^n$ , poderá ser feita através do seguinte sistema de equações não lineares :

$$F(x) = 0 \quad (3.5)$$

em que  $F: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ . Suponha  $E: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$  um sistema de equações :

$$E(x) = 0 \quad (3.6)$$

cuja solução seja conhecida. Forma-se então, uma função chamada de função Homotopia  $T(x,c)$ , em que  $T: \mathfrak{R}^{n+1} \rightarrow \mathfrak{R}^n$ , de tal forma que :

- em  $c = 0$ ,  $T(x,0) = E(x) = 0$ , cuja solução é conhecida, e
- em  $c = 1$ ,  $T(x,1) = F(x) = 0$ , cuja solução é desejada.

A construção da função Homotopia pode ser feita de diversas maneiras diferentes. A seguir são apresentadas as mais utilizadas.

### Homotopia Newton

A Homotopia Newton é formada pelas equações :

$$T(x, c) = F(x) - (1 - c).F(x^o) = 0 \quad e$$

$$E(x) = F(x) - F(x^o)$$

onde  $x^o$  é uma solução conhecida e arbitrária o que possibilita diferentes começos para o caminho. O presente trabalho faz uso da Homotopia Newton.

### Homotopia Ponto Fixo

A Homotopia ponto fixo é formada pelas equações :

$$T(x, c) = (1 - c).(x - x^o) + c.F(x) = 0 \quad e$$

$$E(x) = x - x^o$$

O ponto  $x^o$  também pode ser arbitrário nesta Homotopia.

### Homotopia Linear

Esta terceira forma de Homotopia é uma combinação linear entre as funções  $F(x)$  e  $E(x)$  ,

$$T(x, c) = c.F(x) + (1 - c).E(x) = 0$$

A Homotopia linear contém as anteriores bastando que se aplique apropriadamente a definição da função  $E(x)$  específica a cada Homotopia.

Na próxima seção é feita a explanação de dois teoremas fundamentais para a existência do caminho descrito pela função Homotopia, quando o parâmetro varia de 0 até 1.

### 3.1.2 A Existência do Caminho

O caminho gerado pela função Homotopia, quando é variado o parâmetro de 0 até 1, poderá não ser bem comportado. Ele poderá consistir de pontos isolados, bifurcações ou então de espirais infinitas conforme figura 3.2. As condições para que isso tipo de comportamento não ocorra são estabelecidos pelos teoremas da Função Implícita e do Caminho que serão mostrados a seguir.

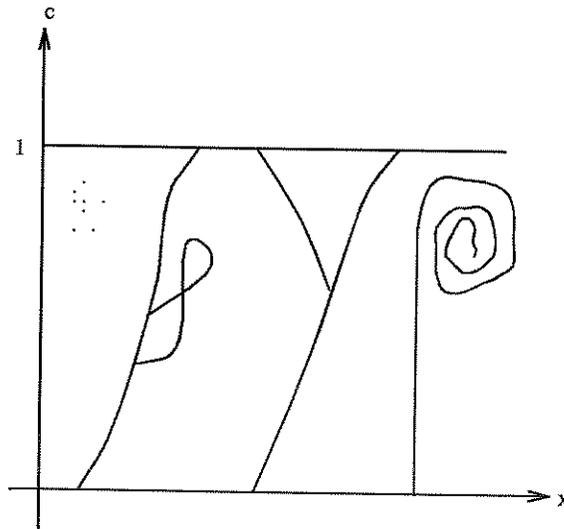


Figura 3.2: Possibilidades de caminhos  $x(c)$ .

Dada uma função Homotopia  $T: \mathfrak{R}^{n+1} \rightarrow \mathfrak{R}^n$  definiremos :

$$T^{-1} = \{(x, c) / T(x, c) = 0\} \quad (3.7)$$

como o conjunto de todos os pontos que satisfazem :

$$T(x, c) = 0 \quad (3.8)$$

A Jacobiana da função Homotopia é dada por :

$$\nabla T(x, c) = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n} & \frac{\partial T_1}{\partial c} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial T_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial T_n}{\partial x_n} & \frac{\partial T_n}{\partial c} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

ou de maneira simplificada :

$$\nabla T(x, c) = (\nabla_x T \mid \nabla_c T) \quad (3.10)$$

É usada a notação  $\nabla_{-i}T(x, c)$  para indicar a retirada da  $i$ -ésima coluna da matriz (3.9). Assim, por exemplo :

$$\nabla_x T(x, c) = \nabla_{-(n+1)}T(x, c) = \nabla_{-c}T(x, c)$$

A partir destas notações enunciam-se os Teoremas da Função Implícita e do Caminho como:

**Teorema da Função Implícita 1** *Seja  $T: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciável e contínua em um ponto  $(x_1, c_1) \in T^{-1}$  e  $\nabla_x T(x_1, c_1)$  inversível. Então, na vizinhança de  $(x_1, c_1)$  todos os pontos que satisfazem a equação (3.8) estão sobre um caminho diferenciável e contínuo que passa através de  $(x_1, c_1)$  (figura 3.3).*

O Teorema da Função Implícita expressa as condições necessárias e suficientes para a existência da função  $x(c)$ , a qual fornece para cada  $c$  em torno de  $c_1$  o valor da solução pertencente à  $T^{-1}$ . Este teorema assegura simultaneamente a existência do caminho em torno do ponto  $(x(c_1), c_1)$  e a viabilidade de expressar este caminho pelo par  $(x(c), c)$ , ou seja, parametrizado em  $c$ . Entretanto, se  $\nabla_x T(x_1, c_1)$  for singular a trajetória poderá ser obtida como função de uma outra variável  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Para isto basta que exista pelo menos um  $\nabla_{-i}T(x, c)$  não singular para a existência do caminho, neste caso expresso parametricamente em função de  $x_i$ . Este é o resultado enunciado pelo Teorema do Caminho.

**Teorema do Caminho 2** *Seja  $T: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciável e contínua. Supondo que para todo  $(x, c) \in T^{-1}$  a Jacobiana  $\nabla T(x, c)$  é de rank completo, então  $T^{-1}$  consiste de caminhos diferenciáveis e contínuos.*

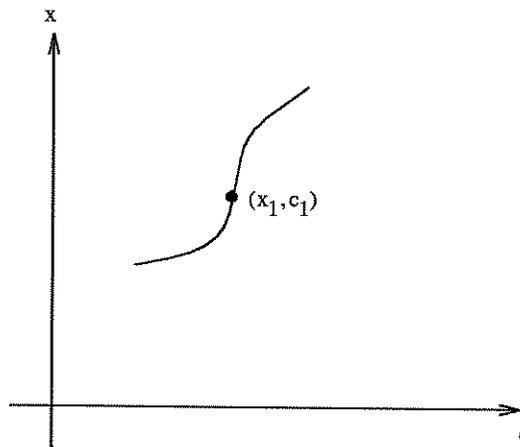


Figura 3.3: Todos os pontos vizinhos a  $(x_1, c_1)$  que satisfazem a Homotopia.

O Teorema do Caminho é mais abrangente pois admite a possibilidade de se obter vários caminhos como função de qualquer uma das  $n+1$  variáveis. Entretanto, para que estes caminhos existam é necessário que as Jacobiana relativas a estas variáveis sejam inversíveis. Isto dá uma flexibilidade pois é possível mudar de parâmetro ao longo da trajetória ao invés de se usar um parâmetro fixo. Esta idéia tem sido apresentada em [28] e [29].

Os teoremas vistos nesta seção asseguram a existência do caminho formado pelas soluções da função Homotopia. Na próxima seção será visto um dos métodos para seguir este caminho.

## 3.2 O Método Preditor-Corretor

O método da continuação faz uso de um caminho para resolver um problema. Até agora preocupou-se apenas em provar a existência do caminho, o qual constitui a parte principal desta metodologia. Nesta seção é mostrado como percorrer o caminho.

### 3.2.1 O Passo Preditor e o Passo Corretor

Suponha a existência de uma trajetória que seja a solução da função Homotopia (3.8) e nela um ponto  $x_1$  qualquer como na figura 3.4.

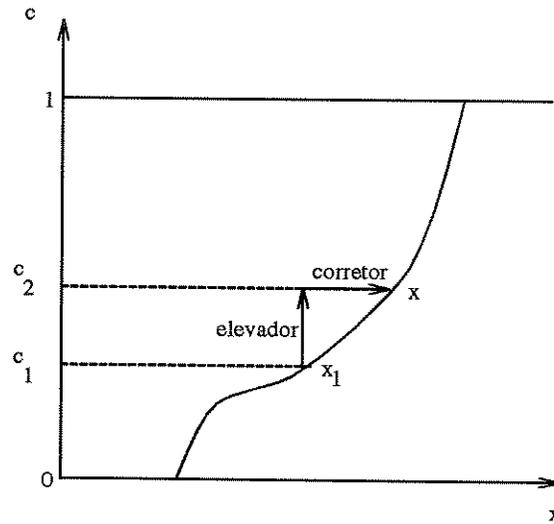


Figura 3.4: O passo elevador e o passo corretor.

O passo preditor do tipo elevador consiste em incrementar o valor do parâmetro de continuação  $c$  mantendo a variável  $x$  constante (figura 3.4). Isso dá origem a um ponto que está fora da trajetória e por conseguinte não satisfaz a equação da função Homotopia :

$$T(x_1, c_2) \neq 0$$

É necessário corrigir este ponto, ou seja, torná-lo uma solução da função Homotopia. Mantendo o parâmetro de continuação  $c$  fixo em  $c = c_2$  deve-se portanto, resolver o sistema :

$$T(x, c_2) = 0$$

A variável  $x$  sobre o caminho pode ser obtida utilizando o método de Newton-Raphson nesta igualdade, sendo a fórmula de recorrência dada por :

$$x^{i+1} = x^i - \left[ \frac{\partial T(x^i, c_2)}{\partial x} \right]^{-1} \cdot T(x^i, c_2) \quad (3.11)$$

com o ponto inicial  $x^0 = x_1$ . O procedimento recursivo acima deve ser aplicado até que seja satisfeito um critério de parada dado por :

$$\|T(x^i, c_2)\| \leq \epsilon$$

onde  $\epsilon$  é a tolerância. A seguir é apresentado o algoritmo do método preditor-corretor para obtenção do caminho solução da Homotopia (3.8).

### 3.2.2 O Algoritmo

- *Inicialização*
  - $k = 0$
  - $\epsilon =$  tolerância
  - $c_k = 0, x_k = x^o, T(x_k, c_k) = 0$
- *Passo preditor elevador*
  - manter  $x_k$  fixo, incremente  $c_k \rightarrow c_{k+1}, c_{k+1} \leq 1$
  - verifique se  $T(x_k, c_{k+1}) \leq \epsilon$
  - se for, repita o passo preditor
  - caso contrário vá para o passo corretor
- *Passo corretor*
  - calcule a variável  $x_{k+1}$  pelo método de Newton-Raphson até que  $T(x_{k+1}, c_{k+1}) \leq \epsilon$ , utilizando a equação recursiva (3.11) :

$$x_{k+1}^{i+1} = x_{k+1}^i - \left[ \frac{\partial T(x_{k+1}^i, c_{k+1})}{\partial x} \right]^{-1} \cdot T(x_{k+1}^i, c_{k+1}) \quad (3.12)$$

- Se  $c_{k+1} = 1$ , pare o processo.  $x_{k+1}$  é a solução de  $T(x_{k+1}, 1) = F(x_{k+1}) = 0$
- caso contrário faça  $k = k+1$  e volte ao passo preditor elevador.

No próximo capítulo é apresentado o modelo do FPO parametrizado e sua solução através do método da continuação.

## Capítulo 4

# O Método da Continuação Aplicado ao Fluxo de Potência Ótimo

Neste capítulo é abordado o emprego do método da continuação na resolução de um modelo de programação não linear, adotado aqui para representar o problema do FPO.

Na primeira seção é apresentada a construção do modelo parametrizado de otimização. Algumas figuras são utilizadas para ilustrar qual a interferência do parâmetro de continuação na função objetivo e nas restrições.

Nas seções seguintes são apresentadas as condições de Kuhn-Tucker, o método para resolver parte destas e finalmente é explicitado o modelo do FPO com todas as suas variáveis. O tratamento das restrições de desigualdade proposto neste trabalho é apresentado no capítulo seguinte.

## 4.1 Parametrização de Um Problema Não Linear de Otimização

Neste trabalho representa-se o FPO por um modelo não linear de otimização, com o qual se calcula a solução de regime permanente de um sistema de transmissão de energia elétrica. Com este modelo procura-se atender a carga ao mesmo tempo em que se otimiza um critério de desempenho, respeitando os limites impostos para a operacionalidade do sistema elétrico.

O problema de programação não linear é formado por uma função objetivo, que pode representar diferentes critérios de performance do sistema elétrico, restrições de igualdade, que representam as equações de atendimento da carga e as restrições de desigualdade, que determinam os limites físicos dos equipamentos elétricos. Assim, esse problema é apresentado como :

$$\min_x f(x) \quad (4.1)$$

$$s.a \quad g(x) = 0 \quad (\lambda) \quad (4.2)$$

$$h(x) \leq 0 \quad (\gamma) \quad (4.3)$$

onde:

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, m \leq n$$

$$h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$$

$$f, g, h \in C^2$$

Nas restrições de desigualdade estão incluídas as restrições funcionais e as restrições canalizadas. A dificuldade na resolução do problema (4.1)-(4.3) está na sua não linearidade associada a natureza das relações entre as variáveis elétricas. Determinar quais restrições (4.3) são ativas na solução deste problema é um dos desafios encontrados pelas técnicas aplicadas ao FPO [18]. Conhecendo-se o conjunto formado pelas desigualdades

ativas na solução de (4.1)-(4.3), o problema se reduz a solução de um sistema de equações não lineares que pode ser eficientemente resolvido pelo método de Newton-Raphson. O conjunto de restrições ativas é um subconjunto de (4.3) e identificá-las constitui um problema de natureza combinatorial.

O método da continuação é uma metodologia que contorna a dificuldade encontrada na determinação do conjunto ativo na solução de (4.1)-(4.3). Ele consiste em definir uma família de problemas parametrizados em  $c$ , que levam à solução do problema original (4.1)-(4.3). Assim, seja a seguinte família de problemas parametrizados :

$$\min_x F(x, c) \quad (4.4)$$

$$s.a \quad G(x, c) = g(x) - (1 - c).g(x^o) = 0 \quad (\lambda) \quad (4.5)$$

$$H(x, c) = h(x) - (1 - c).\Delta h \leq 0 \quad (\gamma) \quad (4.6)$$

onde:

$$F(x, c) = f(x) - (1 - c).f_o^T.x + (1 - c).\frac{1}{2}.w.\|x - x^o\|^2 \quad (4.7)$$

$$f_o = \frac{\partial f(x^o)}{\partial x} + \frac{\partial g^T(x^o)}{\partial x}.\lambda^o \quad (4.8)$$

$$\Delta h_i = \begin{cases} 0, & \text{se } h_i(x^o) \leq 0 \\ h_i(x^o) + \epsilon, & \text{se } h_i(x^o) > 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

com  $x^o$  e  $\lambda^o$  vetores arbitrariamente escolhidos,  $w$  e  $\epsilon$  valores escalares positivos.

O problema parametrizado é equivalente ao problema (4.1)-(4.3) quando  $c = 1$ . Com isso pode-se dizer que o problema original (4.1)-(4.3) é um caso particular do problema parametrizado.

É possível também verificar que a solução inicial arbitrária  $x^o$ , para  $c = 0$ , satisfaz as restrições (4.5)-(4.6) sendo portanto factível. É demonstrado adiante que esta solução satisfaz as condições de Kuhn-Tucker do problema parametrizado.

O parâmetro de folga  $\epsilon$  tem o propósito de tornar as restrições (4.6) estritamente factíveis e, portanto, o multiplicador de Lagrange  $\gamma^o$  será nulo em  $c = 0$ . Sua atuação pode ser compreendida como sendo uma relaxação das restrições de desigualdade. Assim, o

parâmetro de folga  $\epsilon$  está presente apenas nas componentes das restrições (4.3) que são infactíveis em  $x^o$  conforme (4.9). As componentes factíveis não são parametrizadas. Desta forma dividimos as restrições de desigualdade em dois grupos :

- restrições de desigualdade parametrizadas e,
- restrições de desigualdade não parametrizadas.

O valor do parâmetro de folga depende do problema que está sendo resolvido. Ele poderá assumir o mesmo valor para todas as restrições infactíveis ou valores diferentes para cada componente violada no seu limite.

Variando o parâmetro de continuação no intervalo  $0 \leq c \leq 1$  as restrições de igualdade vão sendo deslocadas bem como também as de desigualdade parametrizadas. A figura 4.1 ilustra a relaxação destas restrições e indica que algumas restrições de desigualdade são relaxadas e, portanto, são parametrizadas. Os valores que o parâmetro de continuação assume produzem uma seqüência de problemas parametrizados cujas soluções formam um caminho  $x(c)$  onde  $x(0) = x^o$  e  $x(1) = x^*$  é a solução que se procura.

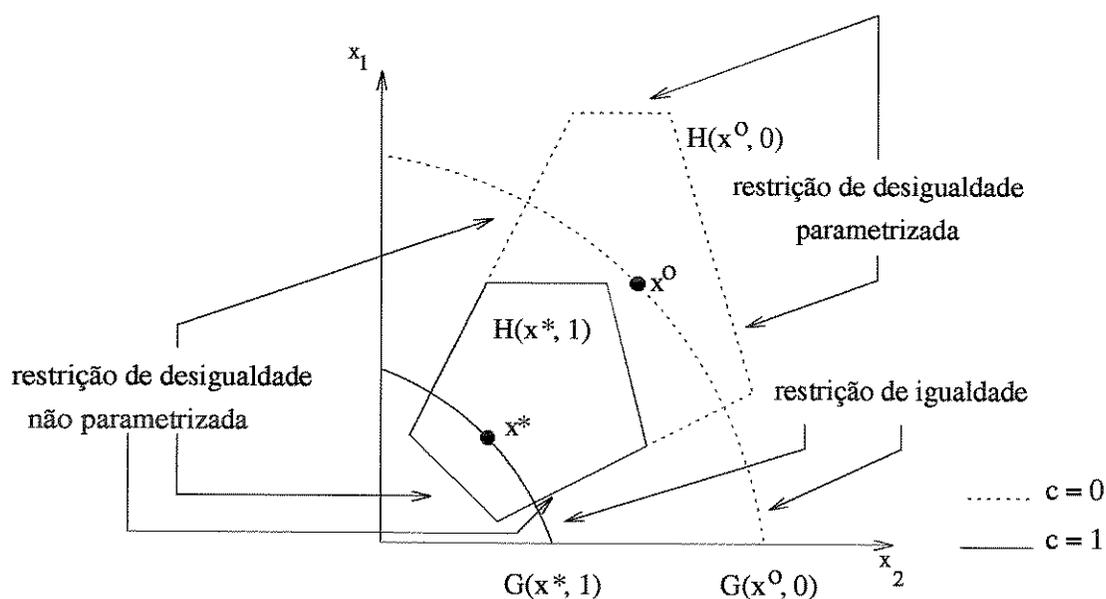


Figura 4.1: Exemplo hipotético que ilustra o processo de construção do problema parametrizado. Onde  $x^*$  é a solução do problema original e  $x^o$  é a solução do problema parametrizado para  $c = 0$ .

Para ilustrar a parametrização da função objetivo (4.7) a figura 4.2 apresenta sua hipotética evolução em função do parâmetro  $c$ . Esta função possui dois termos parame-

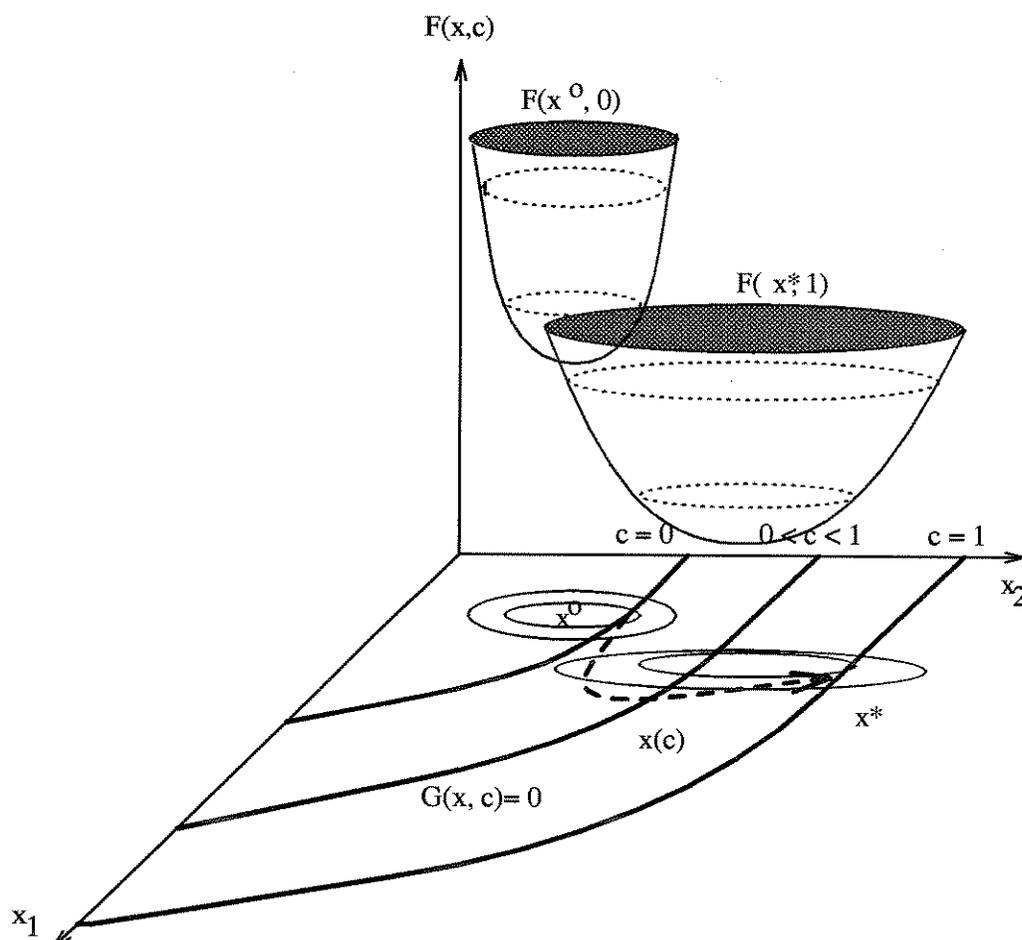


Figura 4.2: Exemplo hipotético que ilustra a parametrização simultânea da função objetivo e da restrição de igualdade. Um caminho é traçado para  $x(c)$ .

trizados em  $c$ . O termo linear provoca uma translação da função de modo a tornar a solução  $x^0$  um ponto que satisfaz as condições de Kuhn-Tucker em  $c = 0$ . O termo quadrático tem por finalidade assegurar a convexidade da função (4.7) e conseqüentemente garantir que o ponto  $x^0$  seja um mínimo local, além do que contribue para que haja um melhor comportamento numérico do método. Estes termos adicionados na função objetivo original são gradualmente eliminados com o crescimento do parâmetro de continuação, ou seja, com a

aproximação da solução do problema original.

A parametrização conforme (4.4)-(4.6) tem a interessante característica de permitir a resolução do problema (4.1)-(4.3) a partir de qualquer solução inicial, seja ela factível ou não. No caso de ser infactível a relaxação (4.9) torna possível a utilização do método.

A seguir é apresentada a formulação das condições de Kuhn-Tucker para a família de problemas parametrizados (4.4)-(4.6).

## 4.2 Cálculo das Condições de Kuhn-Tucker do Problema Parametrizado

Diversos problemas parametrizados (4.4)-(4.6) são obtidos, conforme a variação do parâmetro de continuação, e para cada um deles podem ser estabelecidas as condições de Kuhn-Tucker. Essas condições necessárias de mínimo local se caracterizam pela estacionariedade do Lagrangeano, pela factibilidade das restrições (4.5)-(4.6) e pela análise do sinal dos multiplicadores de Lagrange.

No problema parametrizado as restrições de desigualdade são particionadas em ativas e folgadas, sendo os conjuntos dos índices dados por :

$$H(x, c) \begin{cases} \text{ativa}(I) - \gamma_I \\ \text{folgada}(J) - \gamma_J \end{cases}$$

Assim, a cada valor do parâmetro de continuação são associados dois conjuntos de restrições : um ativo e um folgado. As restrições de desigualdade que foram relaxadas em  $c = 0$  poderão ficar ativas para um  $c$  qualquer no intervalo  $0 < c \leq 1$ . Neste caso, elas pertencerão ao conjunto ativo de forma parametrizada. Já as restrições de desigualdade que não foram relaxadas no início do processo de otimização e que porventura tornem-se infactíveis em  $0 < c \leq 1$ , entrarão no conjunto ativo com uma diferença, não serão parametrizadas.

Para um determinado  $c$  fixo é obtida uma solução para o problema (4.4)-(4.6) que atende as suas condições de Kuhn-Tucker. Deseja-se determinar a solução do problema parametrizado quando  $c = 1$ , ocasião em que se resolve o problema (4.1)-(4.3).

A função Lagrangeana e as condições de Kuhn-Tucker para um mínimo local do problema parametrizado, em um dado valor de  $c$ , são apresentadas a seguir.

### Função Lagrangeana

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \gamma_I) = F(x, c) + \lambda^T \cdot [g(x) - (1 - c) \cdot g(x^o)] + \gamma_I^T \cdot [h_I(x) - (1 - c) \cdot \Delta h_I] \quad (4.10)$$

A função Lagrangeana está apresentada de forma abrangente pois contém as restrições (4.6) parametrizadas e não parametrizadas, respeitando as condições (4.9).

### Condições de Kuhn-Tucker

$$\gamma_I \geq 0 \quad (4.11)$$

$$h_I(x) - (1 - c) \cdot \Delta h_I < 0 \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial F(x, c)}{\partial x} + \frac{\partial g^T(x)}{\partial x} \cdot \lambda + \frac{\partial h_I^T(x)}{\partial x} \cdot \gamma_I = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_I} = h_I(x) - (1 - c) \cdot \Delta h_I = 0 \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = g(x) - (1 - c) \cdot g(x^o) = 0 \quad (4.15)$$

Nota-se que a solução inicial  $x^o$  em  $c = 0$  é um ponto Kuhn-Tucker pois se tomada juntamente com o multiplicador de Lagrange  $\lambda^o$  satisfaz as equações (4.13) e (4.15). Como a equação (4.6) é relaxada não existirá a equação (4.14) em  $c = 0$ , e desta forma o multiplicador de Lagrange  $\gamma^o$  será nulo. Portanto, as condições (4.11)-(4.15) são plenamente satisfeitas no início processo. A seguir é apresentada a idéia geral de como se obtém a solução do problema original (4.1)-(4.3) através do método da continuação. Isso é viabilizado através da aplicação do método de Newton-Raphson na resolução de parte das condições de Kuhn-Tucker sobre a família de problemas parametrizados. As restrições de desigualdade são ajustadas transformando-se em igualdades quando se tornam ineficazes.

### Método de Newton-Raphson no Cálculo das Condições de Igualdade de Kuhn-Tucker

Para um determinado conjunto ativo associado a um problema parametrizado calculam-se as condições de igualdade de Kuhn-Tucker impondo-se :

$$\nabla \mathcal{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_I} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.16)$$

A equação acima é resolvida pelo método de Newton-Raphson através da equação de recorrência :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \cdot \partial \gamma_I} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \cdot \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \gamma_I \cdot \partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda \partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix}^i \cdot \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta \gamma_I \\ \delta \lambda \end{bmatrix}^i = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_I} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \end{bmatrix}^i \quad (4.17)$$

seguida da atualização das variáveis primais e duais :

$$x^{i+1} = x^i + \delta x^i \quad (4.18)$$

$$\gamma_I^{i+1} = \gamma_I^i + \delta \gamma_I^i \quad (4.19)$$

$$\lambda^{i+1} = \lambda^i + \delta \lambda^i \quad (4.20)$$

A dimensão do sistema (4.16) e de sua Jacobiana mudará de acordo com as alterações no conjunto de restrições ativas. Por exemplo, se ocorrer uma violação em  $x$  (variável canalizada) então tem-se a retirada de uma variável de otimização  $x_j$  e conseqüentemente a redução da dimensão do sistema (4.17). Conseqüência oposta ocorre quando uma restrição funcional  $h(x)$  viola seu limite. Nesta situação tem-se o aumento da dimensão do sistema (4.17). Na próxima seção é apresentado o modelo adotado para a representação do FPO e no próximo capítulo é apresentada a estratégia de variação do parâmetro  $c$  de 0 até 1.

### 4.3 Fluxo de Potência Ótimo - Problema Parametrizado

O FPO está dividido em dois tipos: o FPO ativo-reativo, onde se tem o despacho simultâneo de potência ativa e reativa e o FPO reativo, onde se estuda exclusivamente o despacho de potência reativa, sendo as gerações de potência ativa fixas.

Uma função objetivo associada ao despacho ativo-reativo costuma ser o custo de geração. A minimização de perdas ativas bem como a minimização de desvio de tensão são normalmente usadas como função objetivo no caso de FPO reativo.

Em todas essas funções objetivo o FPO fornece como resultado o estado do sistema o qual compreende :

a) as variáveis de controle ou variáveis independentes que são :

- as tensões nas barras de geração e barras com compensação de reativos;
- geração ativa nas barras de geração;
- geração reativa nas barras com compensação de reativos;
- tap de transformadores variáveis;
- compensação shunt;

b) as variáveis de estado ou variáveis dependentes que são :

- os ângulos em todas as barras, com exceção da barra de referência, e as tensões nas barras de carga.

A variável de otimização  $x$  é representada por  $x = [\theta \ v \ b \ a]^T$  e a função objetivo é representada a seguir.

### função objetivo

$$F(\theta, v, b, a, c) = f(\theta, v, a) - (1 - c)f_c^T \begin{bmatrix} \theta \\ v \\ b \\ a \end{bmatrix} + (1 - c) \cdot \frac{1}{2} \cdot w \|y - y^o\|^2 \quad (4.21)$$

A função  $f(\theta, v, a)$  está representando o custo de geração, as perdas ativas ou o desvio de tensão. No caso do FPO ativo-reativo, o custo de geração é minimizado, ou seja :

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{ng} ct_i(p_{g_i}) \right\} \quad (4.22)$$

No caso do FPO reativo as perdas ativas ou desvio de tensão são minimizados, ou seja :

$$\min \{p_{g_{stack}}\} \quad (4.23)$$

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{nb} (v_i - 1)^2 \right\} \quad (4.24)$$

As demais variáveis utilizadas nesta formulação são especificadas como :

- $ng, nb, y$

número de barras de geração, número de barras do sistema,  $(v, b, a)$

- $v, \theta, a, b$   
magnitude de tensão , ângulo, tap, compensação shunt
- $p_d, q_d, ct(\cdot), p_{g_{slack}}, p_{g_i}$   
carga ativa, carga reativa, função custo de geração, potência gerada na barra de referência e na barra i.

Assim, a família de problemas parametrizados associada ao FPO ativo-reativo é representada a seguir onde, no caso do FPO reativo coloca-se a restrição de igualdade :

$$p_d + p(v, \theta, a) - p_g^{esp} - (1 - c).[p_d + p(v^o, \theta^o, a^o) - p_g^{esp}] = 0 \quad (4.25)$$

correspondente as barras de geração, no lugar das equações (4.29)-(4.30) .

$$\min_{(\theta, v, b, a)} F(\theta, v, b, a, c) \quad (4.26)$$

$$p_d + p(v, \theta, a) - (1 - c).[p_d + p(v^o, \theta^o, a^o)] = 0 \quad (\alpha) \quad (4.27)$$

$$q_d + q(v, \theta, a) - b.v^2 - (1 - c).[q_d + q(v^o, \theta^o, a^o) - b^o.v^{o^2}] = 0 \quad (\beta) \quad (4.28)$$

$$p_d + p(v, \theta, a) - p_g^{min} - (1 - c).\Delta h_{p_g} \geq 0 \quad (\omega^{min}) \quad (4.29)$$

$$p_d + p(v, \theta, a) - p_g^{max} - (1 - c).\Delta h_{p_g} \leq 0 \quad (\omega^{max}) \quad (4.30)$$

$$q_d + q(v, \theta, a) - b.v^2 - q_g^{min} - (1 - c).\Delta h_{q_g} \geq 0 \quad (\rho^{min}) \quad (4.31)$$

$$q_d + q(v, \theta, a) - b.v^2 - q_g^{max} - (1 - c).\Delta h_{q_g} \leq 0 \quad (\rho^{max}) \quad (4.32)$$

$$pl(v, \theta, a) - pl^{max} - (1 - c).\Delta h_{pl} \leq 0 \quad (\xi^{max}) \quad (4.33)$$

$$v - v^{min} - (1 - c).\Delta x_v \geq 0 \quad (\lambda^{min}) \quad (4.34)$$

$$v - v^{max} - (1 - c).\Delta x_v \leq 0 \quad (\lambda^{max}) \quad (4.35)$$

$$b - b^{min} - (1 - c).\Delta x_b \geq 0 \quad (\mu^{min}) \quad (4.36)$$

$$b - b^{max} - (1 - c).\Delta x_b \leq 0 \quad (\mu^{max}) \quad (4.37)$$

$$a - a^{min} - (1 - c) \cdot \Delta x_a \geq 0 \quad (\phi^{min}) \quad (4.38)$$

$$a - a^{max} - (1 - c) \cdot \Delta x_a \leq 0 \quad (\phi^{max}) \quad (4.39)$$

onde:

- $p_g, q_g$  e  $p_g^{esp}$   
geração ativa, geração reativa, geração ativa especificada
- $p(v, \theta, a), q(v, \theta, a)$   
potência ativa e reativa calculada
- $pl(v, \theta, a)$   
fluxo nas linhas de transmissão
- equações (4.27)-(4.28) escritas para BC
- equação (4.29)-(4.30) escritas para BG  
limites de potência ativa gerada
- equações (4.31)-(4.32) escritas para BG  
limites de potência reativa gerada
- equação (4.33) escrita para todos os ramos  
limite de fluxo de potência ativa nas linhas
- equações (4.34)-(4.35) escritas para todas as barras  
limites de magnitude de tensão
- equações (4.36)-(4.37) escritas para BCR  
limites de compensação shunt
- equações (4.38)-(4.39) escritas para transformadores com tap variável  
limites dos taps  
BC - barras de carga  
BCR - barras de controle de reativos  
BG - barras de geração

A função Lagrangeana, o vetor gradiente do Lagrangeano (4.16) e as derivadas primeira e segunda são detalhadas nos Apêndices.

## Capítulo 5

# Identificação das Restrições Ativas Via Evolução do Parâmetro

O capítulo anterior introduziu a aplicação do método da continuação no FPO ressaltando como são resolvidas as condições de igualdade de Kuhn-Tucker, supondo já determinado o conjunto de restrições ativas.

Neste capítulo é apresentada uma estratégia que permite a identificação do conjunto de restrições ativas na solução do FPO. Isto é conseguido alterando o conjunto ativo dos diversos problemas parametrizados ao longo do caminho. Essa estratégia é baseada em uma heurística que, gradualmente, vai incrementando o parâmetro  $c$  e simultaneamente obtém o provável conjunto de restrições ativas do próximo problema parametrizado. Em seguida é feita a atualização do conjunto ativo.

Além disso, é apresentado o algoritmo geral de resolução do FPO pelo método da continuação incorporando a heurística proposta.

## 5.1 Evolução do Parâmetro Baseada na Análise de Sensibilidade e Factibilidade

A evolução do parâmetro se dá através de uma estratégia na qual o valor inicial do parâmetro é definido arbitrariamente. Após este, cada novo valor do parâmetro é obtido através de um procedimento heurístico que faz uso de um método de predição linear seguida da análise de (4.11)-(4.12).

Se as soluções de um problema parametrizado ( $c$ ) e o seu antecessor ( $c - \delta c$ ) apresentarem o mesmo conjunto de restrições de desigualdade ativas, então será dito que o caminho da solução é "suave" no ponto  $x^*(c)$  (figura 5.1). Caso contrário, ou seja, se houver uma alteração no conjunto ativo, de  $I$  para  $I'$  no ponto  $x^*(c)$ , será dito que há uma "quebra" nesse ponto (figura 5.2).

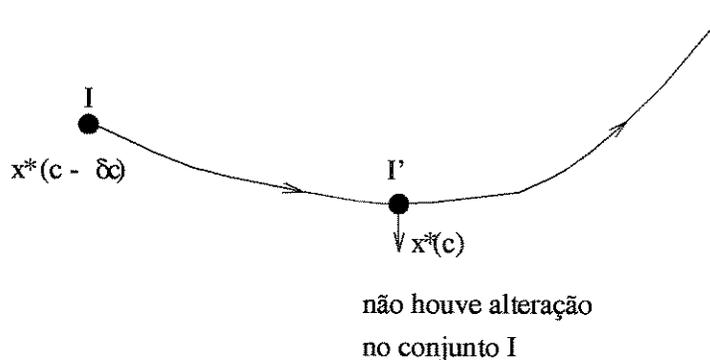


Figura 5.1: O caminho entre duas soluções sucessivas é "suave" se o conjunto ativo não muda para uma dada variação do parâmetro de continuação .

A resolução de um novo problema parametrizado pode ter sua inicialização no ponto solução do problema anterior. Entretanto, essa inicialização pode ser melhorada através de uma análise de sensibilidade entre as variáveis primais e duais e o parâmetro  $c$ .

Assim, para uma dada variação do parâmetro, obtém-se a inicialização do processo de resolução do problema parametrizado, correspondente a esta variação, através dessa análise de sensibilidade. A partir desse ponto é feita uma verificação em (4.11)-(4.12). Se nenhuma infactibilidade for verificada, adota-se uma maior variação do parâmetro ( $\delta c$ ) e assim sucessivamente, até que sejam obtidas algumas violações. Caso isso não ocorra (problema sem violações) chega-se ao parâmetro  $c = 1$ . Desta forma começa-se a resolução do

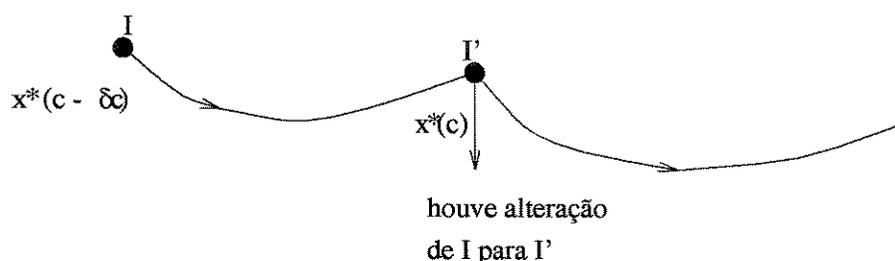


Figura 5.2: No parâmetro  $c$  temos a mudança do conjunto ativo para  $I'$ . Este ponto é chamado de ponto de quebra.

próximo problema parametrizado supondo que alguma mudança poderá ocorrer no conjunto ativo, o qual foi previamente sugerido pela análise de sensibilidade. A figura 5.3 ilustra o processo de atualização do parâmetro.

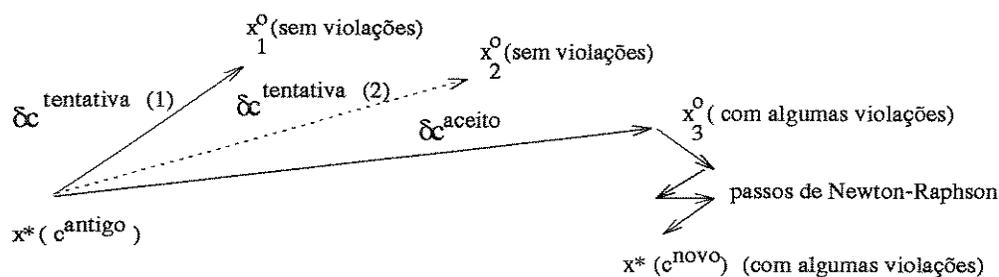


Figura 5.3: Passo  $\delta c$  onde  $c^{novo} = c^{antigo} + \delta c^{aceito}$ . As tentativas na determinação de  $\delta c^{aceito}$  são feitas até que se tenha algumas violações. O ponto  $x_3^o$  é a inicialização do novo problema parametrizado.  $\delta c^{tentativa(1)} < \delta c^{tentativa(2)} < \delta c^{aceito}$ .

A identificação das violações de um novo problema parametrizado tem o objetivo de antecipar a possível alteração no conjunto ativo. No entanto, nem todas as violações previstas pela análise de sensibilidade para a inicialização do problema novo  $x_3^o$  permanecerão na sua solução  $x^*(c^{novo})$ . Por isto, a variação para  $\delta c^{aceito}$  é dada para se obter **mais de uma** violação.

Assim, resolve-se as condições de igualdade de Kuhn-Tucker para um problema no qual se considera o conjunto ativo antigo e o parâmetro atualizado  $c^{novo}$ . A análise

de factibilidade da solução desse problema fornece o conjunto ativo a ser adotado para o problema novo que passa a ser resolvido.

A seguir é apresentado o equacionamento do método que fornece o ponto de inicialização do novo problema parametrizado denominado de Predição Linear.

### Predição Linear

O incremento do parâmetro de continuação constitui um aspecto importante da metodologia. A inicialização da resolução de cada problema parametrizado pode ser obtida através de uma análise de sensibilidade, tornando o processo de resolução deste problema computacionalmente mais eficiente. Com base nisto, foi desenvolvida uma estratégia de variação do parâmetro de continuação que fornece uma estimativa linear para a inicialização da resolução do próximo problema parametrizado. Esta estratégia altera o conjunto de restrições de desigualdade consideradas ativas e, portanto, provoca um ponto de quebra no caminho.

Através da análise de sensibilidade, a inicialização do próximo problema é procurada resolvendo-se a equação matricial :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} & \frac{\partial h_I^T(x)}{\partial x} & \frac{\partial g^T(x)}{\partial x} \\ \frac{\partial h_I(x)}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial g(x)}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta \gamma_I \\ \delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f^o - w.(x - x^o) \\ \Delta h_I \\ g(x^o) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta c \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Para uma tentativa de variação do parâmetro  $\delta c$  a atualização das variáveis primais e duais é obtida por :

$$x(c + \delta c) = x(c) + \delta x \quad (5.2)$$

$$\gamma_I(c + \delta c) = \gamma_I(c) + \delta \gamma_I \quad (5.3)$$

$$\lambda(c + \delta c) = \lambda(c) + \delta \lambda \quad (5.4)$$

Após esta atualização são avaliadas (4.11)-(4.12) . Se não houver alteração no conjunto ativo aumenta-se o  $\delta c$  e uma nova iteração tentativa é realizada. Este procedimento

prossegue até que algumas violações sejam detectadas e então, inicializa-se a resolução do novo problema sem alterar o conjunto de restrições ativas.

Uma comparação entre o preditor elevador, dado na seção 3.2 e a predição linear pode ser vista na figura 5.4. Percebemos que a diferença entre eles está em :

- o passo preditor é tomado tangente ao caminho e não mais paralelo ao eixo  $c$ , como no preditor tipo elevador;
- a inicialização da correção pelo método de Newton-Raphson é dada pela estimativa linear  $\hat{x}(c_2)$  e não mais pelo valor das variáveis do parâmetro anterior  $x(c_1)$ .

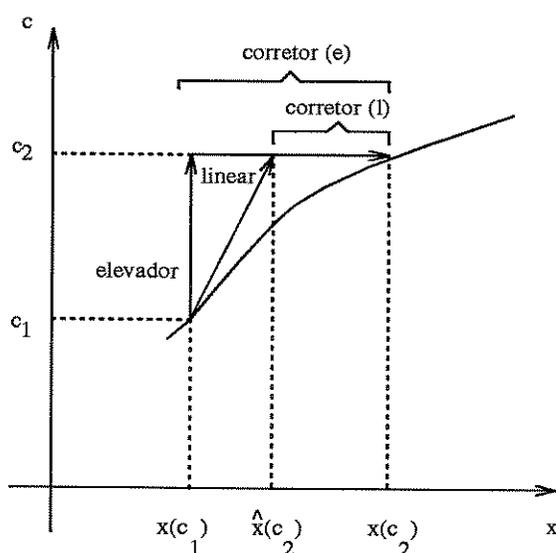


Figura 5.4: Predição linear do ponto  $\hat{x}(c_2)$ . Correção para voltar ao caminho em  $x(c_2)$ . Corretor(e) para preditor elevador e corretor(l) para predição linear.

Em [24] e [25] é adotada uma variação do parâmetro do tipo preditor elevador chamada de busca binária. Esta estratégia foi utilizada nos primeiros testes deste trabalho no entanto, optou-se pela predição linear tendo em vista a segunda comparação dada acima. Pode-se agora enumerar os passos dados pela predição linear com o objetivo de refinar a inicialização de um novo problema parametrizado.

### Algoritmo A1

Inicialmente supõe-se conhecido  $x(c^{antigo})$ .

1. Faça  $i = 1$ . Dê um incremento  $\delta c^{tentativa(i)}$ .
2. Resolva o sistema (5.1).
3. Atualize as variáveis primais e duais através de (5.2)-(5.4).
4. Verificação de (4.11)-(4.12)
  - Não existem violações.  
Faça  $i = i+1$ . Dê um incremento maior para  $\delta c^{tentativa(i+1)}$ . Vá para o passo 2.
  - Existem violações.  
O novo parâmetro é encontrado  $c^{novo} = c^{antigo} + \delta c^{tentativa(i)}$

## 5.2 Atualização do Conjunto de Restrições Ativas

O próximo passo, após a predição das violações pela análise linear, diz respeito à atualização do conjunto ativo para o novo problema, a qual é feita em duas etapas. Na primeira, aplica-se o método de Newton-Raphson, inicializado no ponto obtido pela predição linear, nas condições de igualdade de Kuhn-Tucker considerando o mesmo conjunto ativo do problema anterior. Na segunda etapa é analisada a factibilidade da solução obtida na primeira etapa e, havendo restrições de desigualdade violadas, **uma** delas é incorporada ao conjunto ativo e as condições de igualdade de Kuhn-Tucker são calculadas novamente pelo método de Newton-Raphson. Estas etapas são repetidas até que nenhuma infactibilidade ocorra.

Se a solução obtida na primeira etapa for factível, isto significa que a predição de um conjunto de violações não se concretizou e então, prossegue-se para a solução de um novo problema parametrizado sem alterar o conjunto ativo. Por outro lado, se a solução for infactível e houver **mais de uma** restrição de desigualdade violada, o objetivo passa a ser determinar qual a violação que ocorreria **primeiro** se a mudança do parâmetro fosse efetuada continuamente entre os valores  $c^{antigo}$  e  $c^{novo}$ .

Para identificar a primeira restrição a ser incorporada ao conjunto ativo é feita uma linearização das restrições violadas entre os pontos  $x(c^{antigo})$  e  $x(c^{novo})$  para o qual ocorreram as infactibilidades. Para isso, as restrições de desigualdade (4.6) são representadas de maneira implícita em função de  $c$  como :

$$r(c) = H(x(c), c) \leq 0 \quad (5.5)$$

Da análise de factibilidade dessas restrições são destacadas as inefectíveis que satisfazem a desigualdade :

$$r_j(c^{novo}) > 0 \quad (5.6)$$

Considerando que essas restrições eram factíveis em  $c^{antigo}$  a representação gráfica dessas funções implícitas é apresentada na figura 5.5.

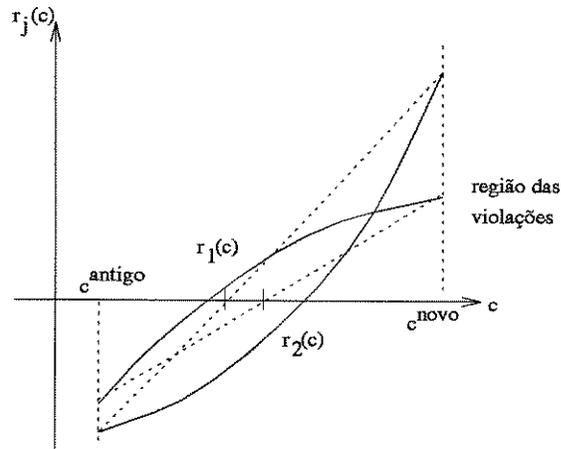


Figura 5.5: Linearização secante para as restrições violadas.

A restrição que, a partir dessa linearização, se tornar inefectível para o menor incremento  $\delta c$  no intervalo  $c^{antigo} < c < c^{novo}$ , é incorporada ao conjunto ativo.

Se houver a necessidade de retirada de restrições do conjunto ativo, isso será identificado na análise do sinal dos multiplicadores de Lagrange. Assim, a análise de entrada ou saída de restrições no conjunto ativo é feita simultaneamente. Através de um processo análogo ao descrito anteriormente, a identificação de uma restrição a sair do conjunto I é realizada através de uma linearização sobre a variação implícita com o parâmetro  $c$  do multiplicador de Lagrange  $\gamma(c)$ .

Na figura 5.6 é dado um exemplo onde  $r_1(c)$  é incorporada ao conjunto ativo e, mantendo o parâmetro fixo em  $c^{novo}$  resolve-se o problema atualizado. Na figura 5.7 é dada a ilustração de duas retas secantes para as violações da figura 5.6. Apresenta-se a seguir a formulação matemática empregada para se determinar, aproximadamente, o ponto a partir do qual a restrição fica inefectível.

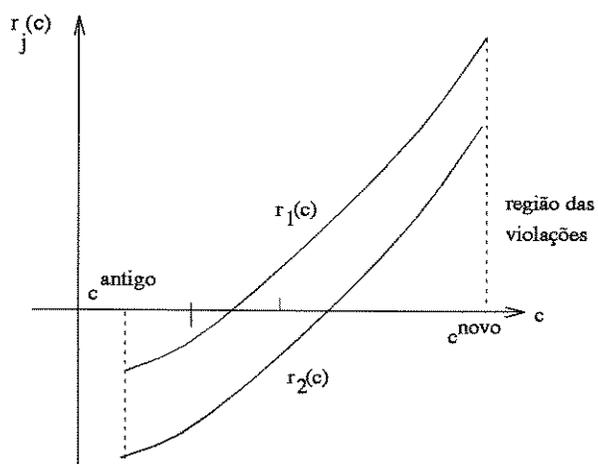


Figura 5.6: Caminhos descritos por duas restrições  $r_j(c) \leq 0$ .

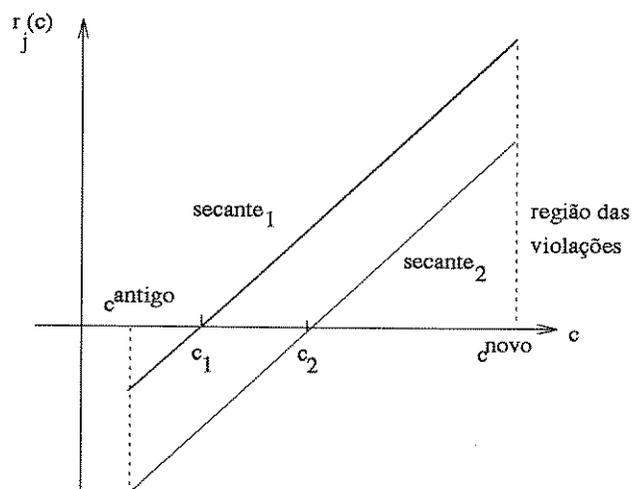


Figura 5.7: Através das secantes observamos que  $r_1(c)$  viola primeiro o limite estabelecido.

Nas figuras 5.6 e 5.7 são conhecidos os parâmetros  $c^{antigo}$  e  $c^{novo}$ . Todavia é desejado saber o valor de  $c$  para o qual a primeira violação ocorreria. Desta forma são construídas duas equações de reta que passam através do ponto comum  $r_j(c^{antigo})$  e os pontos  $r_j(c_j)$  e  $r_j(c^{novo})$ , onde  $j$  é o conjunto de índices referentes às violações. Assim a reta secante tem suas equações representadas como :

$$\frac{r_j(c^{antigo}) - r_j(c^{novo})}{(c^{antigo} - c^{novo})} = \frac{r_j(c^{antigo}) - r_j(c_j)}{(c^{antigo} - c_j)} \quad (5.7)$$

Impondo a condição limite para  $r_j(c_j)$  através de :

$$r_j(c_j) = 0 \quad (5.8)$$

obtém-se :

$$c_j = c^{antigo} - \frac{(c^{antigo} - c^{novo})r_j(c^{antigo})}{r_j(c^{antigo}) - r_j(c^{novo})} \quad (5.9)$$

É feita uma comparação entre os diversos  $c_j$  e pega-se o menor deles, em seguida incorpora-se no (ou retira-se do) conjunto ativo a violação cuja secante intercepta o limite neste valor do parâmetro de continuação.

Em [24] e [25] o tratamento para eliminação das violações é diferente. Faz-se um recuo do parâmetro de tal maneira que o novo valor de  $c$  corresponde à média aritmética entre  $c^{novo}$  e  $c^{antigo}$ . Esta estratégia pressupõe que ao recuar o parâmetro pela metade haverá diminuição no número de violações, o que nem sempre é verdade devido a natureza não linear do FPO. Apresenta-se agora um algoritmo que reúne as tarefas para atualizar o conjunto ativo quando a solução de um problema parametrizado apresenta diversas violações.

### Algoritmo A2

Supondo que a solução do problema parametrizado, em  $c^{novo}$ , apresentou várias violações, então devem ser realizados os passos seguintes para que sua solução volte a ser factível.

1. Calcule  $c_j$  para todas as violações conforme (5.9).
2. Selecione o menor deles.  
 Se o menor  $c_j$  for correspondente a  $\gamma_j < 0$  para  $j \in I$ , transfira o índice  $j$  do conjunto ativo para o conjunto folgado.  
 Se o menor  $c_j$  for correspondente  $h_j(x) - (1 - c)\Delta h_j > 0$  incorpore  $j$  ao conjunto ativo retirando-o do conjunto folgado.
3. Resolva o sistema (4.17) inicializado pelo ponto anterior mantendo o parâmetro fixo em  $c^{novo}$ .
4. Verificação de (4.11)-(4.12).
  - Existem violações. Vá para o passo 1.
  - Não existem violações.

O próximo passo, após não terem sido verificadas violações, é fazer a predição linear conforme a seção anterior a partir de  $c^{novo}$ . Na próxima seção será apresentado um algoritmo que une os passos dados nos dois algoritmos já descritos.

### 5.3 Algoritmo do Método da Continuação

O monitoramento das restrições de desigualdade consta da verificação dos conjuntos ativo e folgado estabelecidos em cada problema parametrizado. A migração de índices entre estes conjuntos dependerá das restrições (4.11)-(4.12) estarem ou não satisfeitas.

Desta forma o algoritmo do método da continuação para o problema do FPO pode ser apresentado nos seguintes passos :

1. Faça  $c = 0$ .  
 Estabeleça  $x(0) = x^o$ ;  $\lambda(0) = \lambda^o$ ;  $\gamma(0) = \gamma^o = 0$   
 Fixe  $w$  e  $\epsilon$ . Determine  $\Delta h$  por (4.9).
2. Se  $c = 0$ , faça  $c = 0.1$ . Vá para o passo 3.  
 Caso contrário faça a predição linear conforme algoritmo A1.
3. Resolva o sistema (4.17).  
 Seja  $x(c)$ ,  $\lambda(c)$ ,  $\gamma_I(c)$  a solução.
4. Monitoramento das restrições de desigualdade.  
 Caso não haja violações em (4.11)-(4.12) vá para o passo 5  
 Caso haja uma única violação em 4.11 vá para o passo 6.  
 Caso haja uma única violação em 4.12 vá para o passo 7.  
 Caso haja múltiplas violações (4.11)-(4.12) vá para o passo 8.

5. Se  $c = 1$  pare.  
A solução  $x(1)$ ,  $\lambda(1)$ ,  $\gamma_I(1)$  é a solução do problema (4.1)-(4.3).  
Se  $c < 1$  vá para o passo 2.
6. Se  $\gamma_i(c) < 0$  para  $i \in I$ , transfira o índice  $i$  do conjunto ativo para o conjunto folgado.  
Vá para o passo 3.
7. Incorpore o índice da restrição  $h_j(x) - (1 - c)\Delta h_j > 0$  violada ao conjunto ativo retirando-o do conjunto folgado. Vá para o passo 3.
8. Realize os passos dados no algoritmo A2 para eliminação das violações. Vá para o passo 5.

No passo 2 a predição linear só é utilizada a partir de  $c^{inicial} = 0.1$ . Isto porque, dependendo da inicialização, pode-se ter erros na determinação do próximo ponto de quebra se a predição for feita em  $c = 0$ . Observa-se este fato quando a solução inicial  $x^o$  ( $c = 0$ ) é a solução "flat" (magnitudes de tensão igual a 1 pu e ângulos de fase nulos) sendo esta comumente usada para resolver o problema do fluxo de carga.

No passo 4 temos a determinação da quantidade e do tipo das violações. A estratégia é mudar o conjunto ativo para uma violação por vez. É possível alterar este conjunto no caso de duas ou mais violações. Entretanto, não se investigou a fundo esta estratégia.

Observa-se que a análise da factibilidade, durante a execução deste algoritmo, é feita duas vezes, sendo uma quando a predição linear é realizada e a outra quando se testa se o ponto que satisfaz as condições de igualdade de Kuhn-Tucker é factível. A diferença está em que na predição linear ao se achar um ponto com algumas violações esta análise de factibilidade não necessita mais ser feita. No caso do ponto dado pelo sistema (4.17) ter algumas violações a análise de factibilidade é feita quantas vezes forem necessárias, após a incorporação de cada nova restrição ativa, até que não se verifique mais infactibilidades.

Nos passos 6 e 7 são feitas as mudanças do conjunto ativo para as violações do tipo sinal do multiplicador  $\gamma_I$  e restrição funcional, respectivamente. No próximo capítulo são dadas algumas características do método da continuação no FPO e os resultados com o sistema AEP30.

# Capítulo 6

## Análise dos Resultados

### 6.1 Descrições Gerais

Utiliza-se como exemplo para mostrar os resultados da solução do FPO pelo método da continuação o sistema elétrico AEP30, e para explicar as particularidades desta metodologia um sistema menor contendo 5 barras. O ponto inicial  $x^o$  foi obtido por dois diferentes modos :

*tipo 1* –  $x^o$  são os valores médios das faixas permitidas para  $(v, b, a)$  e zero para  $\theta$ ;

*tipo 2* –  $x^o$  é uma solução fornecida por um cálculo de fluxo de carga.

Tais inicializações embora produzam diferentes trajetórias levam a uma mesma solução final. Os multiplicadores de Lagrange  $\alpha^o$  e  $\beta^o$ , associados as restrições de igualdade, foram feitos arbitrariamente iguais ao custo marginal e zero respectivamente. As características do método da continuação aplicado na resolução do FPO são :

a) *O comportamento da trajetória devido a presença do fator  $w$ .*

Mostra-se o efeito do fator  $w$  sobre o comportamento das trajetórias das magnitudes de tensões para o sistema de 5 barras. Este fator influencia todas as variáveis do sistema elétrico, no entanto, ele se torna mais expressivo no caminho descrito pelas magnitudes de tensão. A escolha de  $w$  é decisiva na convergência do método da continuação. Sua existência é necessária para contornar um problema de mau condicionamento da matriz Jacobiana do vetor gradiente da função Lagrangeana (4.16). Este fator entra na diagonal desta matriz, conforme pode-se ver no Apêndice C.

Uma outra característica do fator  $w$  está no fato dele antecipar ou retardar a ocorrência de violações. Na figura 6.1 para  $w = 10$  a tensão na barra 4 é fixa no limite

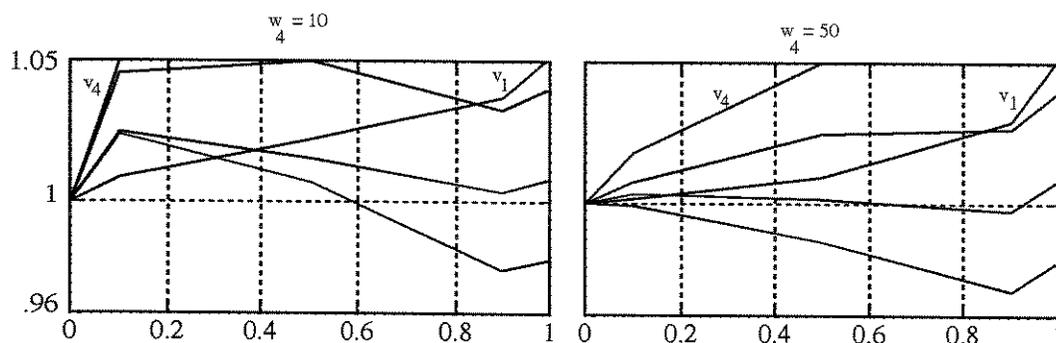


Figura 6.1: Figura mostrando as trajetórias das tensões em função do parâmetro de continuação  $c$ . O fator  $w$  altera o comportamento dessas trajetórias.

superior em  $c = 0.1$ . Já para  $w = 50$  a mesma violação ocorre em  $c = 0.5$ . As violações na barra 1 ocorrem para um mesmo  $c$ . Nota-se também que estas curvas ficam mais fechadas em torno de 1 pu quanto maior for o valor atribuído para  $w$  e a inicialização for do tipo 1. Neste caso, violações referentes às tensões acontecem próximas do valor final do parâmetro de continuação. O valor de  $w$  não muda a solução final mas somente o caminho.

b) *A relaxação das restrições de desigualdade com o uso do parâmetro de folga.*

Quando em  $c = 0$  ocorrem violações nas restrições de desigualdade relaxam-se estas restrições através da inclusão de um parâmetro de folga  $\epsilon$  nos limites das mesmas. O primeiro tipo de inicialização assegura que não será necessário relaxar as restrições canalizadas para  $c = 0$ . O mesmo não se pode dizer a respeito das restrições funcionais, uma vez que elas dependem de  $x$ . Dependendo do valor escolhido para  $\epsilon$ , as restrições relaxadas poderão ficar ativas para algum outro valor de  $c$  no intervalo  $0 < c \leq 1$ . Como exemplo do uso do parâmetro de folga, é apresentado o sistema AEP30 com o objetivo de minimizar o custo de geração e inicialização pelo fluxo de carga, o qual apresenta cinco violações em  $c=0$ . Três destas, se referem às tensões estarem abaixo do mínimo e duas, às gerações reativas estarem acima do máximo.

As tensões fornecidas pelo fluxo de carga nas barras 26, 29 e 30 estão abaixo do limite mínimo o qual é 0.95 pu. As gerações reativas nas barras 2 e 13 estão acima dos seus limites máximos, os quais são 0.5 pu e 0.24 pu respectivamente. Na figura 6.2 é mostrado o caminho das tensões e das gerações reativas nas barras citadas.

Com um parâmetro de folga  $\epsilon = 20$  aumenta-se os limites destas restrições violadas ao mesmo tempo em que elas se tornam restrições parametrizadas. O limite relaxado

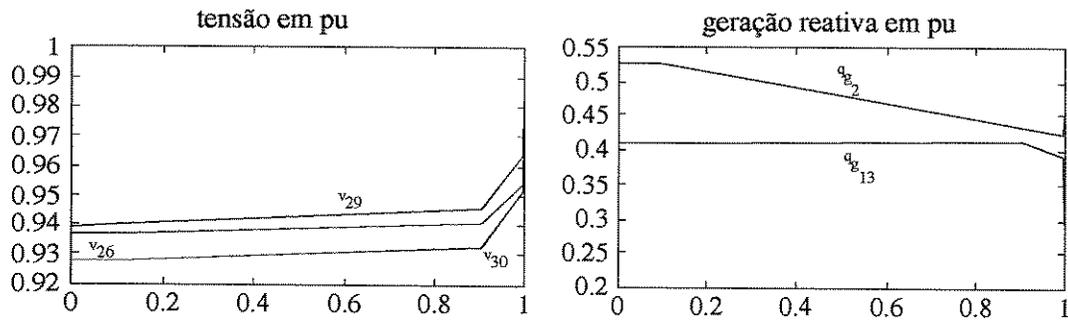


Figura 6.2: Relaxação dos limites das tensões nas barras 26, 29 e 30 e dos limites das gerações reativas nas barras 2 e 13 em  $c = 0$ .

decrece com o aumento do parâmetro de continuação de tal forma que para  $c = 1$  a restrição voltará a ter o seu limite original.

Observa-se na figura 6.2 que o sistema como um todo reage fazendo com que as tensões e gerações reativas retornem para dentro dos seus limites conforme o parâmetro de continuação aumenta. Dentre as restrições relaxadas apenas uma ficou ativa na solução do FPO, sendo esta a geração reativa na barra 13 em  $c = 1$ .

c) *A relação entre restrição de desigualdade e multiplicador de Lagrange.*

Uma outra característica que se deve mencionar é a relação entre as restrições de desigualdade e os seus multiplicadores de Lagrange. Na figura 6.3 é mostrado o caminho da tensão na barra 4 que pertence ao sistema de 5 barras. Em  $c = 0.5$  ela é fixa no limite

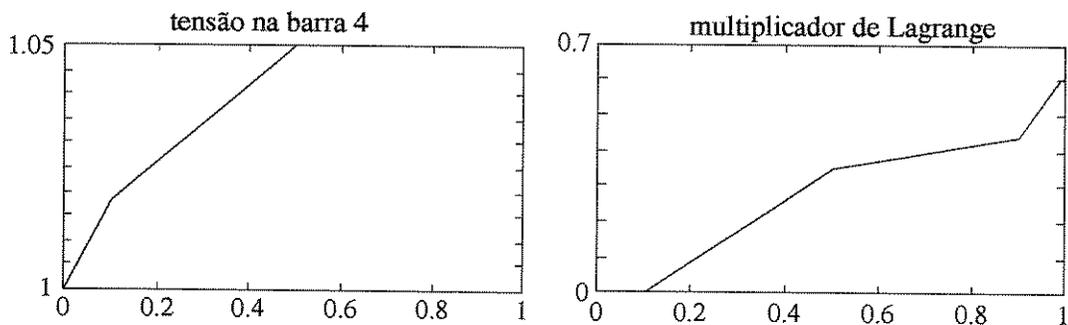


Figura 6.3: Comportamento entre a restrição ativa e seu multiplicador de Lagrange.

superior dado por 1.05 pu, neste ponto o seu multiplicador de Lagrange assume um valor

positivo, o que atende a condição de Kuhn-Tucker referente ao sinal dos multiplicadores.

d) *A visualização dos pontos de quebra e o acoplamento entre ângulo-geração ativa e tensão-geração reativa.*

Um fato que se percebe no estudo do caminho descrito pelas variáveis é que este muda sempre que uma outra variável é fixa em um dos limites. Esta característica é mais sensível entre as variáveis ângulo-geração ativa e tensão-geração reativa, o mesmo ocorrendo com seus multiplicadores de Lagrange.

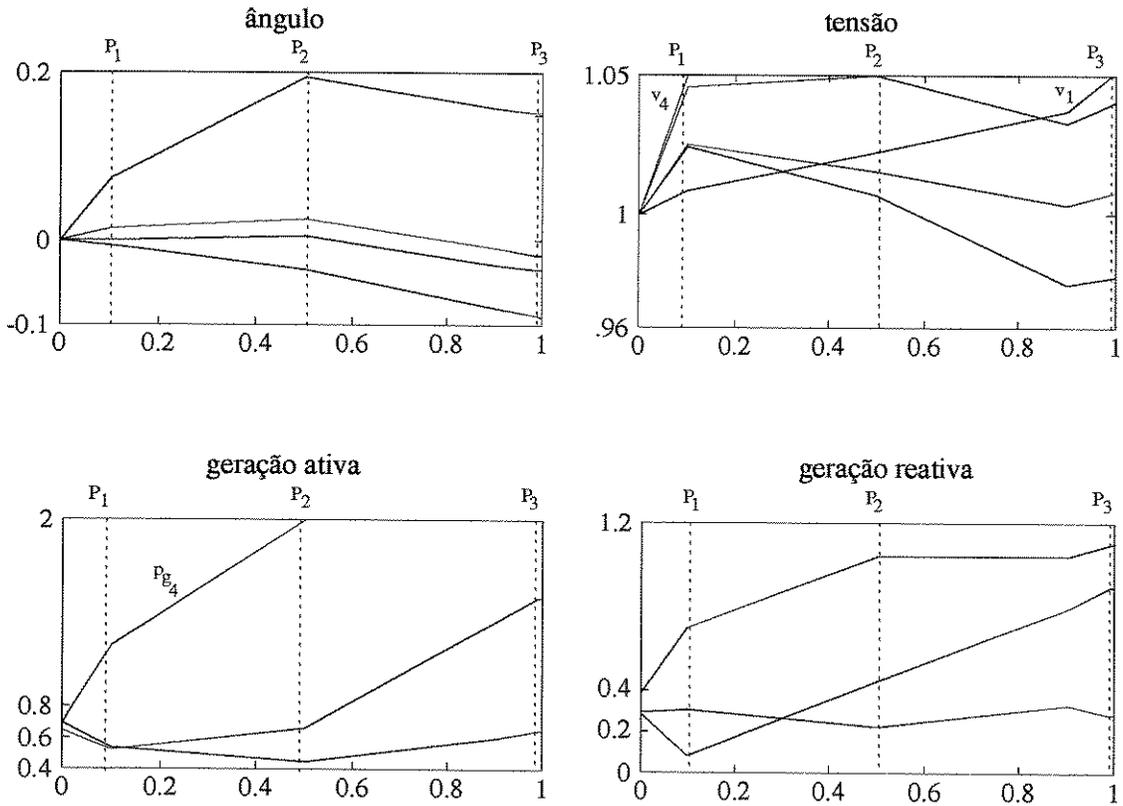


Figura 6.4: Influência mútua dos caminhos das variáveis pertencentes ao acoplamento ativo e reativo e visualização dos pontos de quebra.

Na figura 6.4 é apresentada a trajetória dos ângulos, tensões, gerações ativas e gerações reativas para o sistema de 5 barras. Neste sistema observa-se três pontos de quebra localizados em  $c = 0.1$ ,  $c = 0.5$  e  $c = 0.99$ . O primeiro ponto de quebra  $P_1$  ocorreu quando a tensão na barra 4 violou seu limite superior sendo fixa em  $c = 0.1$ . Nota-se que as trajetórias

das outras tensões mudam totalmente. As gerações reativas também são influenciadas pela fixação de  $v_4$ . Entretanto, os ângulos e as gerações ativas sofrem pouca alteração. O segundo ponto de quebra  $P_2$  ocorre devido a barra 4 ter sua geração ativa fixada no limite superior em  $c = 0.5$ . Neste ponto as trajetórias descritas pelos ângulos mudam de comportamento. Já as tensões e gerações reativas permanecem quase inalteradas. O terceiro ponto de quebra  $P_3$  ocorre em  $c = 0.99$  sendo  $v_1$  fixa no limite superior. Este último ponto de quebra não altera muito as trajetórias.

### Resultados Obtidos com o Sistema AEP30

Apresentam-se agora os resultados referentes ao sistema AEP30 (figura 6.5). Os estudos com este sistema foram realizados para os seguintes objetivos :

- minimização de custo de geração;
- minimização de perdas ativas;
- minimização de desvio de tensão.

Em cada um dos casos utilizaram-se as duas inicializações já anteriormente citadas.

A variação do parâmetro de continuação é dada pela predição linear apresentada na seção 5.1 de tal forma que se tenha pelo menos uma violação. No entanto, verificou-se através dos testes que tal estratégia de mudança do parâmetro nem sempre funciona, uma vez que a predição linear apenas se aproxima da solução que está no caminho, por isto corrigimos o ponto pelo método de Newton-Raphson. Para contornar a imprecisão da estimativa linear decidiu-se obter um ponto que tivesse não apenas uma violação mas sim, em torno de três a quatro violações. Assim, fazendo a correção deste, ter-se-ia uma possibilidade maior de ocorrer pelo menos uma violação no novo ponto.

Um exemplo do erro dado pela estimativa linear acontece quando o ponto dado por ela é inactível no sinal dos multiplicadores. Após o cálculo das condições de igualdade de Kuhn-Tucker pelo método de Newton-Raphson esta mesma inactibilidade não persiste. Fazendo a estimativa para se ter três a quatro violações consegue-se, na maioria dos casos, ter uma violação de fato após a solução do sistema (4.17).

Uma interessante característica que se deve ressaltar diz respeito a concentração das violações. Em todos os casos constatou-se que a maioria das violações estavam localizadas na faixa de  $c = 0.9$  até  $c = 1$ . Isto acontece devido a um fator  $w$  alto, sendo necessário pois pequenos valores, dependendo do problema, poderão não tornar válidas as condições de Kuhn-Tucker. Nesta faixa de variação é encontrada uma certa dificuldade em achar as restrições candidatas ao conjunto ativo pois, uma variação repentina de 0.9 para 1 poderá causar singularidade na Jacobiana do vetor gradiente do Lagrangeano (4.16) e, para pequenas variações a predição linear não detecta violações. Por isto resolveu-se manter a

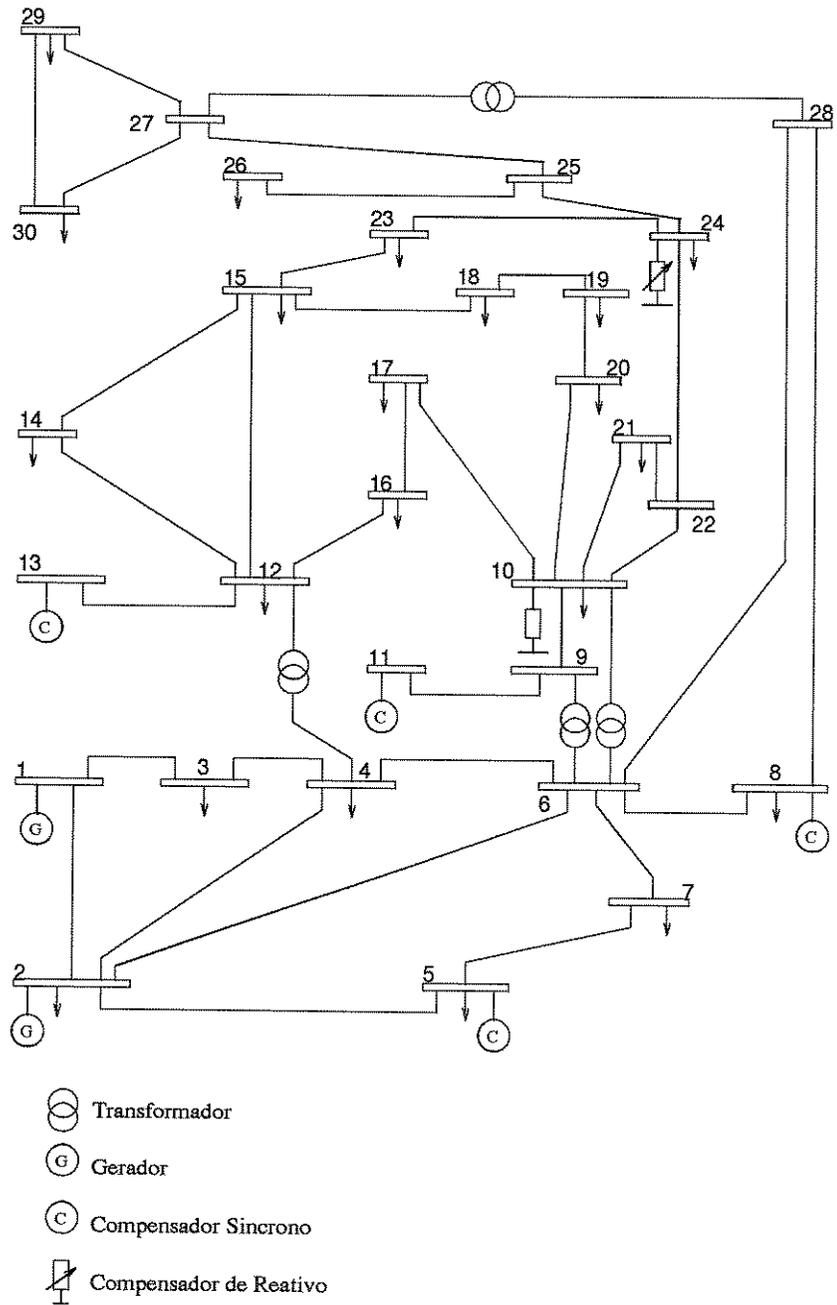


Figura 6.5: Sistema AEP30.

inicialização do problema novo pela predição linear e um incremento  $\delta c^{aceito}$  menor (seção 5.1).

Nas tabelas referentes às estatísticas das violações é mostrado o registro das violações que surgem para cada valor do parâmetro bem como também a eliminação delas. Como exemplo, apresenta-se a tabela 6.4 com inicialização do tipo 1 onde para  $c = 0.8$  obteve-se três violações. Utilizou-se o método da linearização secante, apresentado na seção 5.2, para detectar a primeira violação a ser eliminada dentre as três. Entretanto, ainda persiste uma violação que também deverá ser eliminada. O parâmetro  $c$  só muda de valor quando não há mais nenhuma violação.

As tabelas referentes às soluções finais, se comparadas entre uma mesma função objetivo, dão um mesmo valor até duas casas decimais. Isto porque usou-se como critério de convergência do sistema (4.17) uma tolerância de  $10^{-3}$ .

As tensões em todas as barras estão limitadas pelo intervalo  $0.95 < v < 1.05$  e os tap variáveis são limitados por  $0.9091 < a < 1.1111$ . Na tabela 6.1 são mostrados os limites das restrições funcionais e canalizadas usadas nos testes e, nas tabelas 6.2 e 6.3 as duas inicializações já citadas anteriormente.

linha	pl <sup>max</sup>
1 2	1.8000
1 3	1.3000
2 4	0.6500
3 4	1.3000
2 5	1.3000
2 6	0.6500
4 6	0.9000
5 7	0.7000
6 7	1.3000
6 8	0.3200
6 9	0.6500
6 10	0.3200
9 11	0.6500
9 10	0.6500
4 12	0.6500
12 13	0.6500
12 14	0.3200
12 15	0.3200
12 16	0.3200
14 15	0.1600
16 17	0.1600
15 18	0.1600
18 19	0.1600
19 20	0.3200
10 20	0.3200
10 17	0.3200
10 21	0.3200
10 22	0.3200
21 22	0.3200
15 23	0.1600
22 24	0.1600
23 24	0.1600
24 25	0.1600
25 26	0.1600
25 27	0.1600
28 27	0.6500
27 29	0.1600
27 30	0.1600
29 30	0.1600
8 28	0.3200
6 28	0.3200

barra	pg <sup>max</sup>	pg <sup>min</sup>	qg <sup>max</sup>	qg <sup>min</sup>
1	5.0	0.0	5.0	-3.0
2	0.4	0.0	0.5	-0.4
5	0.0	0.0	0.4	-0.4
8	0.0	0.0	0.4	-0.1
11	0.0	0.0	0.24	-0.06
13	0.0	0.0	0.24	-0.06

barra	b <sup>max</sup>	b <sup>min</sup>
10	0.19	-0.19
24	0.043	-0.043

$$c t(p_g) = \sum_{i=1}^{ng} a_0 + a_1 p_g + a_2 p_g^2$$

barra	a <sub>0</sub>	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>
1	0	0	1
2	0	0	2

Tabela 6.1: Limites das restrições de desigualdade e coeficientes da função custo de geração.

barra	tensão	ângulo
1	1	0
2	1	0
3	1	0
4	1	0
5	1	0
6	1	0
7	1	0
8	1	0
9	1	0
10	1	0
11	1	0
12	1	0
13	1	0
14	1	0
15	1	0
16	1	0
17	1	0
18	1	0
19	1	0
20	1	0
21	1	0
22	1	0
23	1	0
24	1	0
25	1	0
26	1	0
27	1	0
28	1	0
29	1	0
30	1	0

barra	compensação shunt
10	0
24	0

barra	geração ativa
1	0
2	0.2170

barra	geração reativa
1	-0.0468
2	0.0426
5	0.1589
8	0.2741
11	0
13	0

Nº	linha	tap
11	6-9	1.0225
12	6-10	1.0320
15	4-12	1.0730
36	28-27	1.0331

Tabela 6.2: Solução inicial do tipo 1.

barra	tensão	ângulo
1	1.0499	0
2	1.0400	-0.1003
3	1.0263	-0.1456
4	1.0208	-0.1756
5	1.0100	-0.2562
6	1.0133	-0.2044
7	1.0042	-0.2349
8	1.0100	-0.2165
9	1.0052	-0.2612
10	0.9907	-0.2925
11	1.0499	-0.2612
12	0.9952	-0.2769
13	1.0499	-0.2769
14	0.9803	-0.2943
15	0.9762	-0.2963
16	0.9856	-0.2890
17	0.9835	-0.2955
18	0.9684	-0.3086
19	0.9671	-0.3122
20	0.9722	-0.3084
21	0.9769	-0.3010
22	0.9772	-0.3007
23	0.9663	-0.3037
24	0.9619	-0.3069
25	0.9559	-0.2976
26	0.9370	-0.3059
27	0.9613	-0.2867
28	1.0093	-0.2151
29	0.9400	-0.3111
30	0.9277	-0.3287

linha	fluxo ativo
1 2	1.7939
1 3	0.8416
2 4	0.4540
3 4	0.7886
2 5	0.8284
2 6	0.6166
4 6	0.7171
5 7	0.1435
6 7	0.3767
6 8	0.2954
6 9	0.2840
6 10	0.1640
9 11	0.0000
9 10	0.2840
4 12	0.4306
12 13	0.0000
12 14	0.0769
12 15	0.1742
12 16	0.0675
14 15	0.0141
16 17	0.0320
15 18	0.0569
18 19	0.0245
19 20	0.0705
10 20	0.0938
10 17	0.0583
10 21	0.1602
10 22	0.0777
21 22	0.0161
15 23	0.0471
22 24	0.0610
23 24	0.0148
24 25	0.0119
25 26	0.0355
25 27	0.0476
28 27	0.1811
27 29	0.0621
27 30	0.0711
29 30	0.0371
8 28	0.0057
6 28	0.1873

Nº	linha	tap
11	6-9	1.0225
12	6-10	1.0320
15	4-12	1.0730
36	28-27	1.0331

barra	geração reativa
1	-0.3843
2	0.5257
5	0.3692
8	0.2849
11	0.2258
13	0.4101

barra	geração ativa
1	2.6355
2	0.3800

barra	compensação shunt
10	0.190
24	0.043

Tabela 6.3: Solução inicial do tipo 2.

## 6.2 Minimização do Custo de Geração

### 6.2.1 Inicialização do Tipo 1

A minimização do custo de geração não apresentou grande dificuldade na obtenção da solução do FPO, do ponto de vista do surgimento de violações para cada novo valor do parâmetro. Não houve necessidade de usar o parâmetro de folga pois em  $c = 0$  a solução inicial é factível. O fator quadrático é  $w = 10$  e o valor da função objetivo é 7.1479 pu.

O conjunto ativo em  $c = 1$  é formado por :

$$\begin{aligned} pg^{max} &= \{barra\ 2\} \\ qg^{max} &= \{barra\ 8, barra\ 13\} \\ v^{max} &= \{barra\ 1, barra\ 11, barra\ 13\} \\ a^{min} &= \{linha\ N^{\circ}\ 12\} \\ b^{max} &= \{barra\ 10, barra\ 24\} \end{aligned}$$

Na figura 6.6 são mostradas as trajetórias das variáveis  $x$  e das restrições  $h(x)$  e, na figura 6.8 seus respectivos multiplicadores de Lagrange.

### 6.2.2 Inicialização do Tipo 2

Comparando as figuras 6.6 e 6.7, observa-se que as trajetórias são completamente diferentes. A figura 6.7 mostra que a solução dada pelo fluxo de carga praticamente não muda até  $c = 0.9$ . O fator quadrático é  $w = 50$ . O valor inicial da função objetivo é 7.2348 pu e o valor final é 7.1480 pu. Houve a necessidade de relaxar algumas restrições de desigualdade pois são inactíveis em  $c = 0$ . Estas restrições são :

$$\begin{aligned} v^{min} &= \{barra\ 26, barra\ 29, barra\ 30\} \\ qg^{max} &= \{barra\ 2, barra\ 13\} \end{aligned}$$

O conjunto ativo na solução em  $c = 1$  é formado por :

$$\begin{aligned} pg^{max} &= \{barra\ 2\} \\ qg^{max} &= \{barra\ 8, barra\ 13\} \\ v^{max} &= \{barra\ 1, barra\ 11, barra\ 13\} \\ a^{min} &= \{linha\ N^{\circ}\ 12\} \\ b^{max} &= \{barra\ 10, barra\ 24\} \end{aligned}$$

Os caminhos de todas as variáveis com inicialização pelo fluxo de carga são apresentados na figura 6.7 e, seus multiplicadores de Lagrange na figura 6.9. Logo em seguida apresenta-se a estatística das violações e, as soluções finais das duas inicializações.

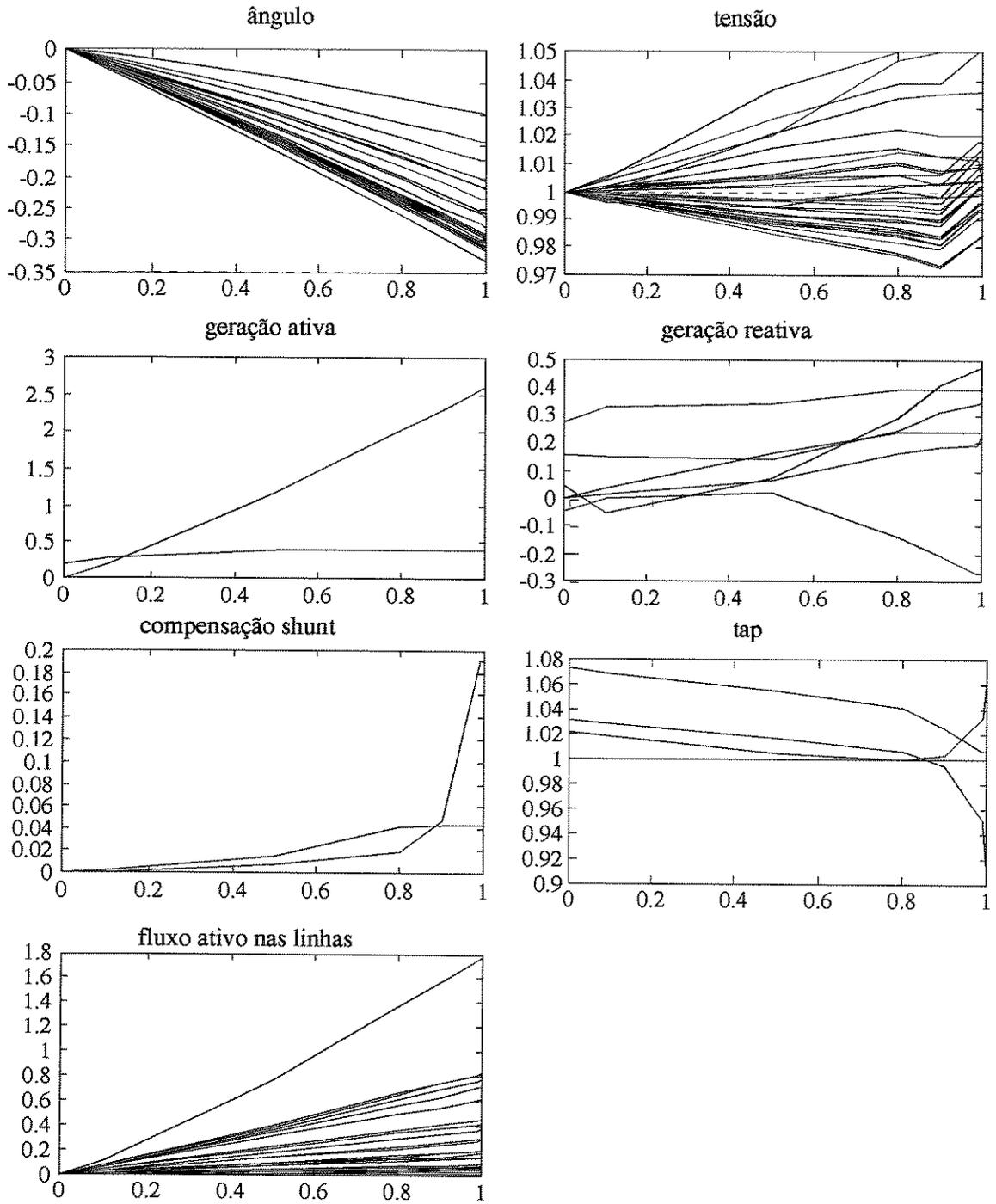


Figura 6.6: Caminhos descritos pelas variáveis do FPO para inicialização do tipo 1.

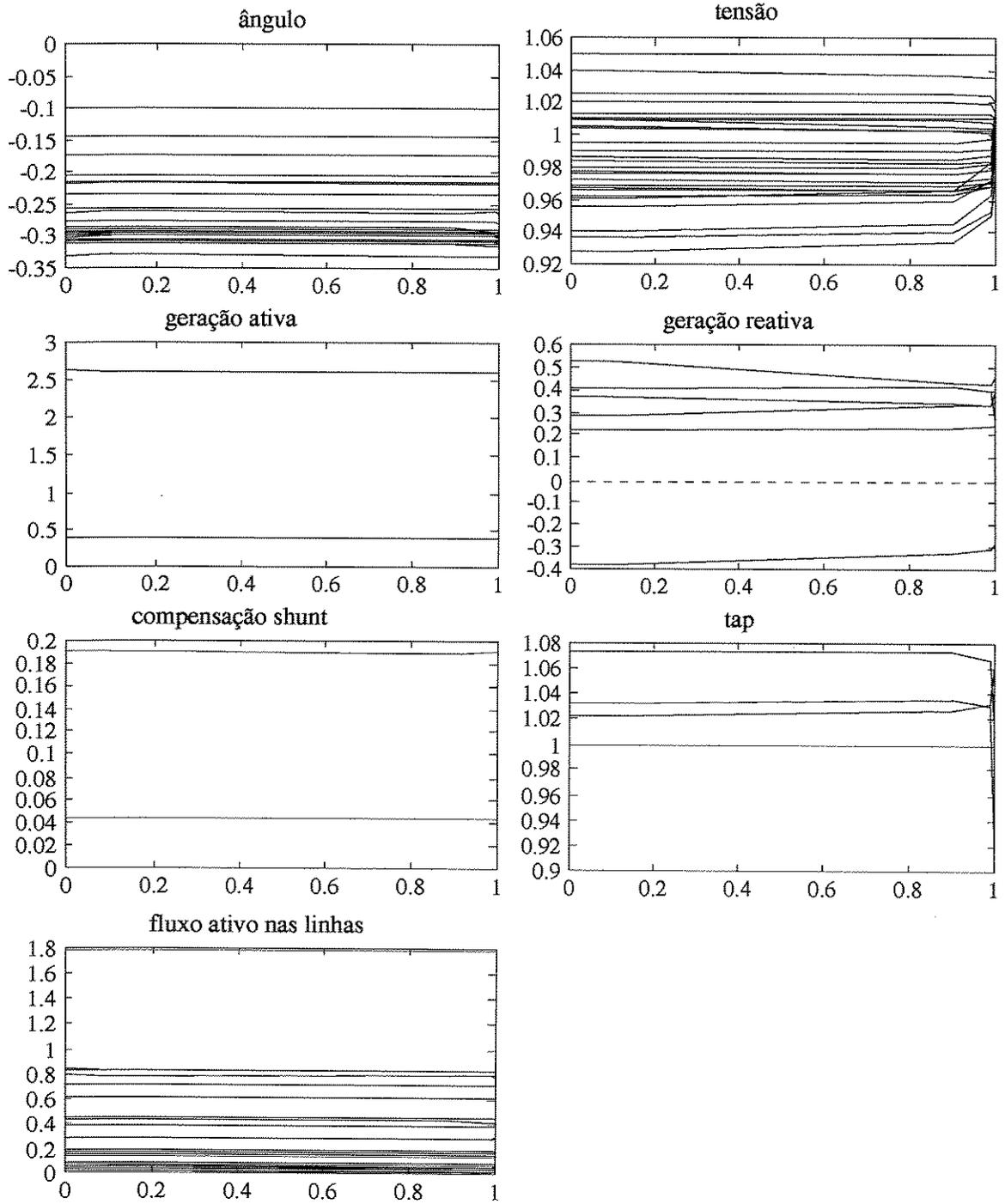


Figura 6.7: Caminhos descritos pelas variáveis do FPO para inicialização do tipo 2.

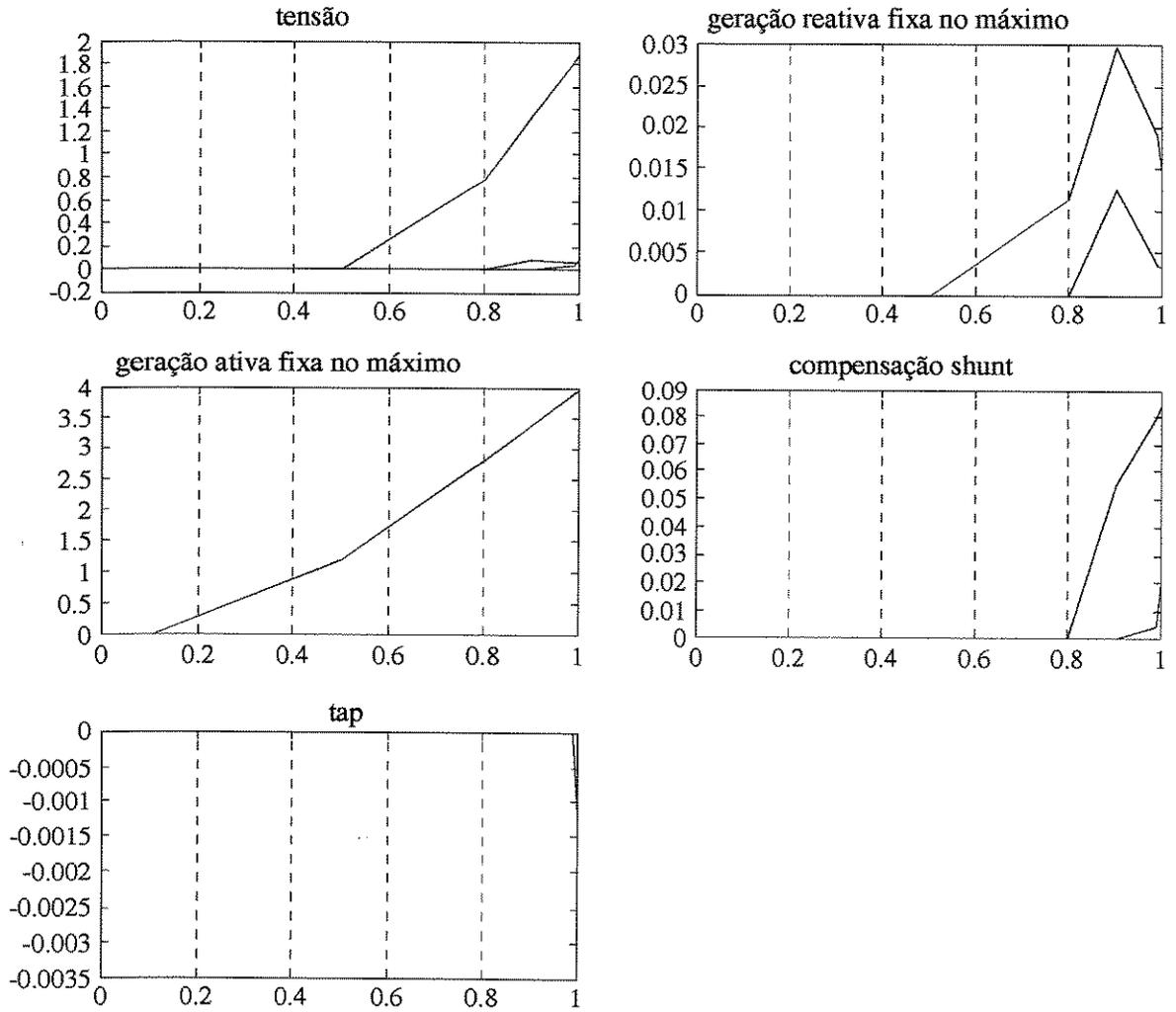


Figura 6.8: Multiplicadores de Lagrange associados as restrições descritas nos gráficos para inicialização do tipo 1 .

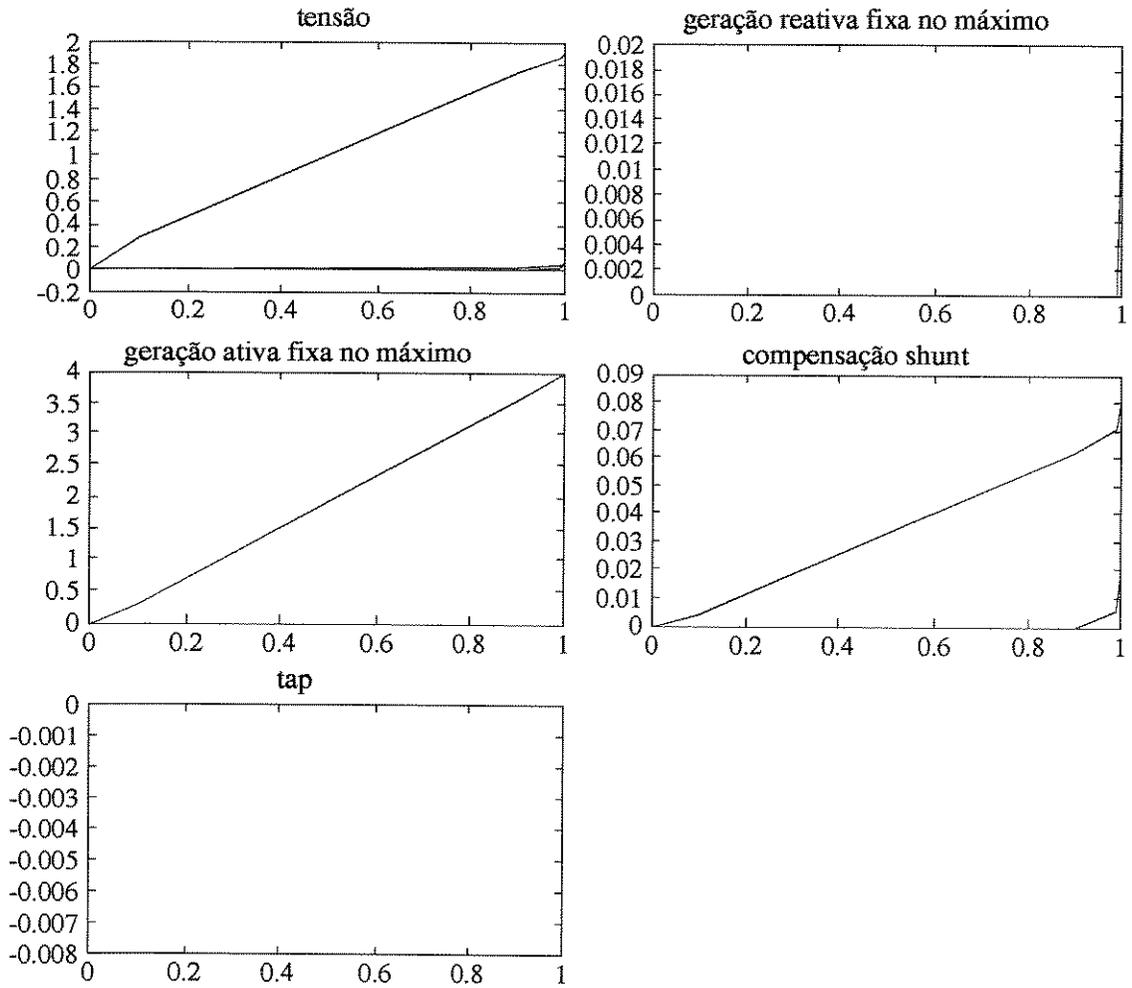


Figura 6.9: Multiplicadores de Lagrange associados as restrições descritas nos gráficos para inicialização do tipo 2.

## inicialização do tipo 1

Contador	Parâmetro	Iterações	Violações
1	0.0	0	0
2	0.1	3	0
3	0.5	5	1
4	0.5	2	0
5	0.8	5	3
6	0.8	3	1
7	0.8	2	0
8	0.9	4	3
9	0.9	3	2
10	0.9	3	1
11	0.9	2	0
12	0.99	5	2
13	0.99	3	1
14	0.99	2	0
15	0.999	3	1
16	0.999	3	0
17	0.9999	2	0
18	1.0	1	0

## inicialização do tipo 2

Contador	Parâmetro	Iterações	Violações
1	0	0	0
2	0.1	4	2
3	0.1	2	2
4	0.1	2	1
5	0.1	2	0
6	0.9	5	1
7	0.9	1	1
8	0.9	1	0
9	0.99	3	1
10	0.99	1	0
11	0.999	2	2
12	0.999	3	1
13	0.999	2	1
14	0.999	0	0
15	0.9999	2	3
16	0.9999	3	2
17	0.9999	3	1
18	0.9999	0	0
19	1	2	1
20	1	0	0

Tabela 6.4: Estatística das violações.

inicialização do tipo 1

barra	tensão	ângulo
1	1.0500	0
2	1.0360	-0.0984
3	1.0199	-0.1439
4	1.0130	-0.1736
5	1.0036	-0.2555
6	1.0088	-0.2039
7	0.9989	-0.2344
8	1.0092	-0.2173
9	1.0048	-0.2607
10	1.0130	-0.2923
11	1.0500	-0.2607
12	1.0180	-0.2784
13	1.0500	-0.2784
14	1.0040	-0.2950
15	1.0006	-0.2970
16	1.0084	-0.2895
17	1.0061	-0.2954
18	0.9924	-0.3084
19	0.9908	-0.3115
20	0.9955	-0.3078
21	1.0010	-0.3006
22	1.0018	-0.3003
23	0.9937	-0.3045
24	0.9931	-0.3079
25	1.0019	-0.3021
26	0.9839	-0.3096
27	1.0161	-0.2937
28	1.0036	-0.2149
29	0.9961	-0.3154
30	0.9845	-0.3311

barra	compensação shunt
10	0.19
24	0.043

linha	tap
6-9	1.0586
6-10	0.9091
4-12	1.0067
28-27	0.9562

barra	geração ativa
1	2.6130
2	0.4000

inicialização do tipo 2

barra	tensão	ângulo
1	1.0500	0
2	1.0360	-0.0984
3	1.0201	-0.1440
4	1.0133	-0.1737
5	1.0038	-0.2555
6	1.0094	-0.2040
7	0.9993	-0.2344
8	1.0098	-0.2174
9	1.0025	-0.2604
10	1.0116	-0.2922
11	1.0500	-0.2604
12	1.0180	-0.2788
13	1.0500	-0.2788
14	1.0038	-0.2953
15	1.0003	-0.2973
16	1.0078	-0.2897
17	1.0050	-0.2953
18	0.9917	-0.3085
19	0.9899	-0.3116
20	0.9945	-0.3078
21	0.9997	-0.3005
22	1.0005	-0.3003
23	0.9931	-0.3046
24	0.9921	-0.3079
25	1.0011	-0.3022
26	0.9831	-0.3097
27	1.0154	-0.2937
28	1.0041	-0.2150
29	0.9954	-0.3156
30	0.9839	-0.3312

barra	compensação shunt
10	0.19
24	0.043

linha	tap
6-9	1.0652
6-10	0.9091
4-12	1.0055
28-27	0.9572

barra	geração ativa
1	2.6130
2	0.4000

Tabela 6.5: Solução final.

inicialização do tipo 1			inicialização do tipo 2		
linha		fluxo ativo	linha		fluxo ativo
1	2	1.7772	1	2	1.7771
1	3	0.8358	1	3	0.8360
2	4	0.4554	2	4	0.4555
3	4	0.7831	3	4	0.7833
2	5	0.8289	2	5	0.8287
2	6	0.6199	2	6	0.6199
4	6	0.7194	4	6	0.7189
5	7	0.1434	5	7	0.1436
6	7	0.3765	6	7	0.3767
6	8	0.2987	6	8	0.2987
6	9	0.2928	6	9	0.2924
6	10	0.1476	6	10	0.1471
9	11	0.0000	9	11	0.0000
9	10	0.2928	9	10	0.2924
4	12	0.4243	4	12	0.4250
12	13	0.0000	12	13	0.0000
12	14	0.0757	12	14	0.0759
12	15	0.1707	12	15	0.1710
12	16	0.0658	12	16	0.0661
14	15	0.0130	14	15	0.0131
16	17	0.0304	16	17	0.0306
15	18	0.0565	15	18	0.0568
18	19	0.0242	18	19	0.0244
19	20	0.0709	19	20	0.0706
10	20	0.0941	10	20	0.0938
10	17	0.0599	10	17	0.0596
10	21	0.1545	10	21	0.1543
10	22	0.0739	10	22	0.0738
21	22	0.0216	21	22	0.0218
15	23	0.0431	15	23	0.0433
22	24	0.0518	22	24	0.0515
23	24	0.0109	23	24	0.0111
24	25	0.0246	24	25	0.0248
25	26	0.0355	25	26	0.0355
25	27	0.0602	25	27	0.0604
28	27	0.1936	28	27	0.1938
27	29	0.0619	27	29	0.0619
27	30	0.0709	27	30	0.0709
29	30	0.0370	29	30	0.0370
8	28	0.0025	8	28	0.0025
6	28	0.1968	6	28	0.1970

inicialização do tipo 1	
barra	geração reativa
1	-0.2706
2	0.4789
5	0.3495
8	0.4000
11	0.2282
13	0.2400

inicialização do tipo 2	
barra	geração reativa
1	-0.2726
2	0.4750
5	0.3476
8	0.4000
11	0.2400
13	0.2400

Tabela 6.6: Continuação da solução final.

## 6.3 Minimização de Perdas Ativas

### 6.3.1 Inicialização do Tipo 1

Dentre as três funções objetivo analisadas, a minimização de perdas, com inicialização do tipo 1, é a que apresenta maior ocorrência de violações durante a evolução do parâmetro. Pela tabela 6.7 pode-se comprovar este fato. Observa-se que no parâmetro  $c=0.999$  ocorrem quinze violações e quando se usa o método da reta secante para eliminá-las conseguimos reduzir para duas. Não se relaxou nenhuma restrição de desigualdade pois em  $c = 0$  a solução inicial é factível. O fator quadrático é  $w = 10$  e o valor da função objetivo é de 0.1803 pu.

O conjunto ativo em  $c = 1$  é formado por :

$$\begin{aligned} qg^{max} &= \{barra\ 8, barra\ 13\} \\ v^{max} &= \{barra\ 1, barra\ 11, barra\ 13\} \\ a^{min} &= \{linha\ N^{\circ}\ 12\} \\ b^{max} &= \{barra\ 10, barra\ 24\} \end{aligned}$$

Na figura 6.10 são mostrados os caminhos descritos pelas variáveis do FPO e na figura 6.12 os multiplicadores de Lagrange.

### 6.3.2 Inicialização do Tipo 2

Com esta inicialização as trajetórias são bem mais comportadas se comparadas com a figura 6.10. Na tabela 6.7 também é evidente que as violações são bem menores quando se utiliza o fluxo de carga para inicializar o método da continuação. O fator quadrático é  $w = 50$ . O valor inicial da função objetivo é 2.6355 pu e o valor final é 0.1803 pu. A seguir, são apresentados os resultados.

Como o fluxo de carga apresentou uma solução infactível foi necessário relaxar as restrições violadas em  $c = 0$ . Estas são :

$$\begin{aligned} v^{min} &= \{barra\ 26, barra\ 29, barra\ 30\} \\ qg^{max} &= \{barra\ 2, barra\ 13\} \end{aligned}$$

O conjunto ativo em  $c = 1$  é formado pelas restrições ativas :

$$\begin{aligned} qg^{max} &= \{barra\ 8, barra\ 13\} \\ v^{max} &= \{barra\ 1, barra\ 11, barra\ 13\} \\ a^{min} &= \{linha\ N^{\circ}\ 12\} \\ b^{max} &= \{barra\ 10, barra\ 24\} \end{aligned}$$

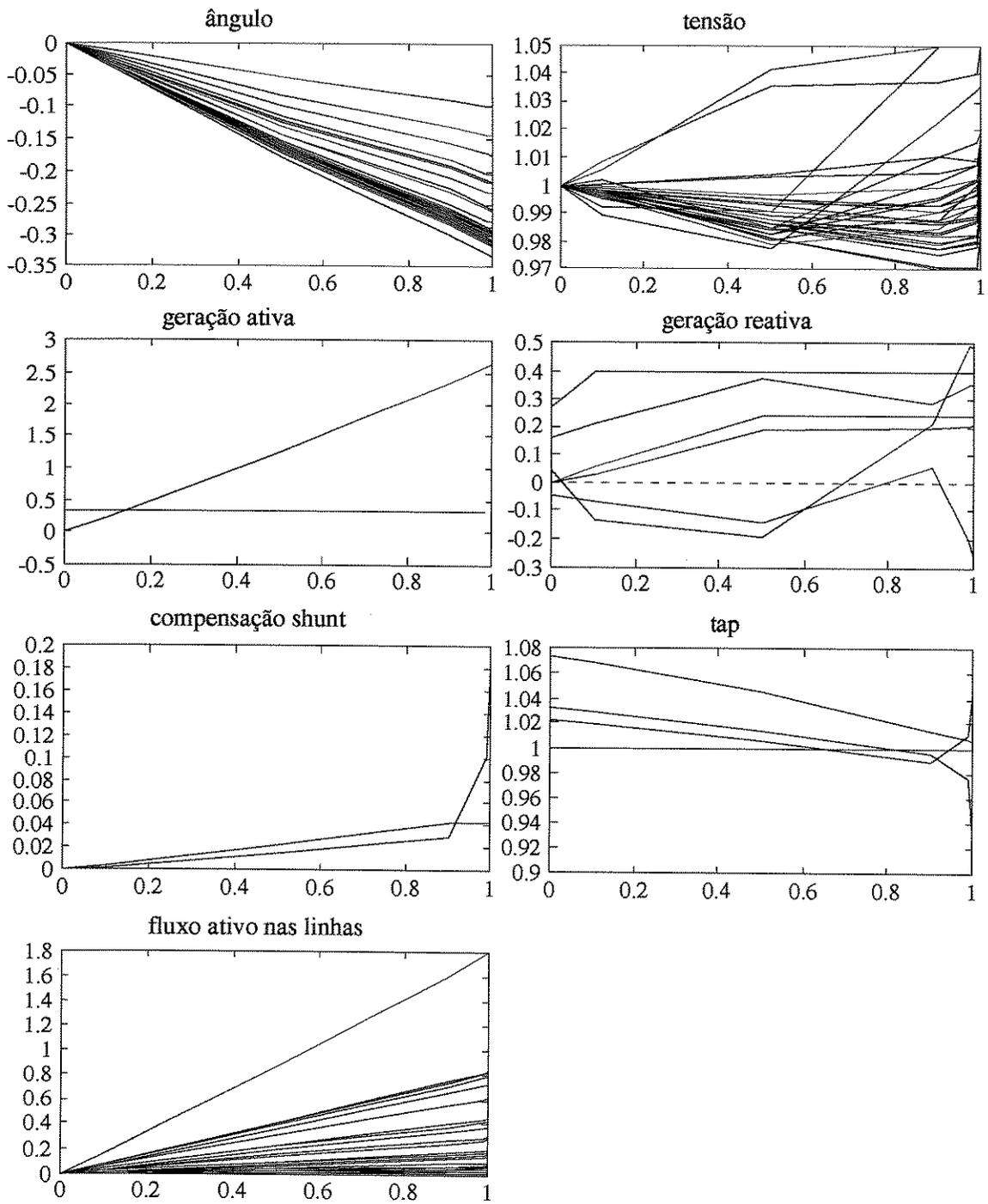


Figura 6.10: Caminhos descritos pelas variáveis do FPO para inicialização do tipo 1.

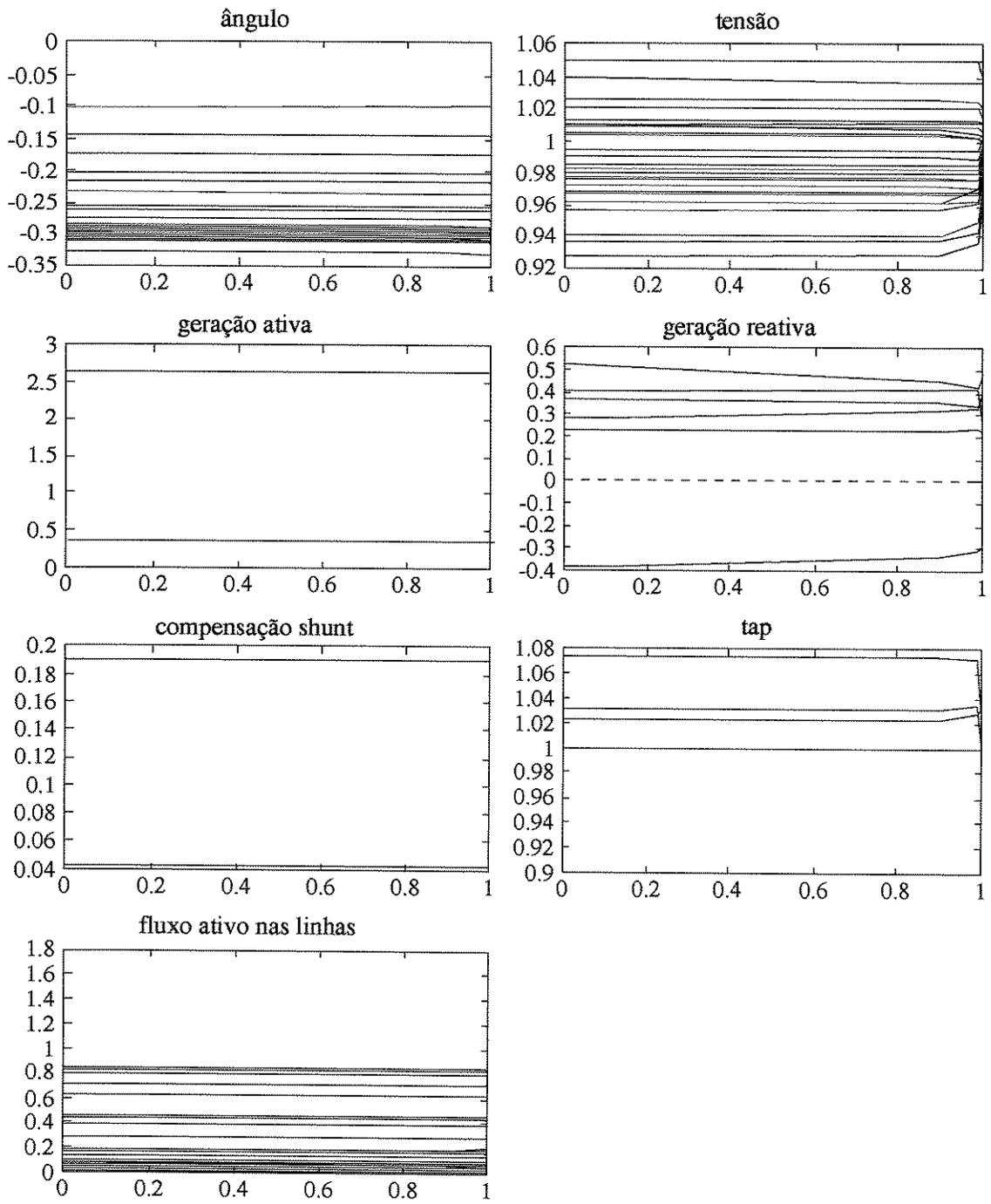


Figura 6.11: Caminhos descritos pelas variáveis do FPO para inicialização do tipo 2.

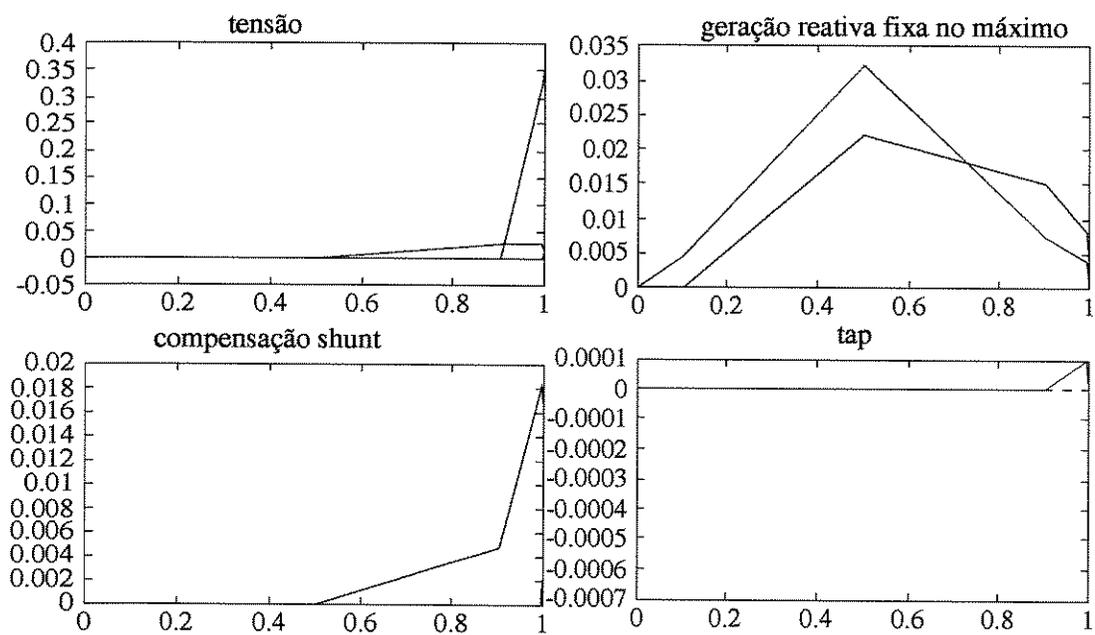


Figura 6.12: Multiplicadores de Lagrange associados as restrições descritas nos gráficos para inicialização do tipo 1.

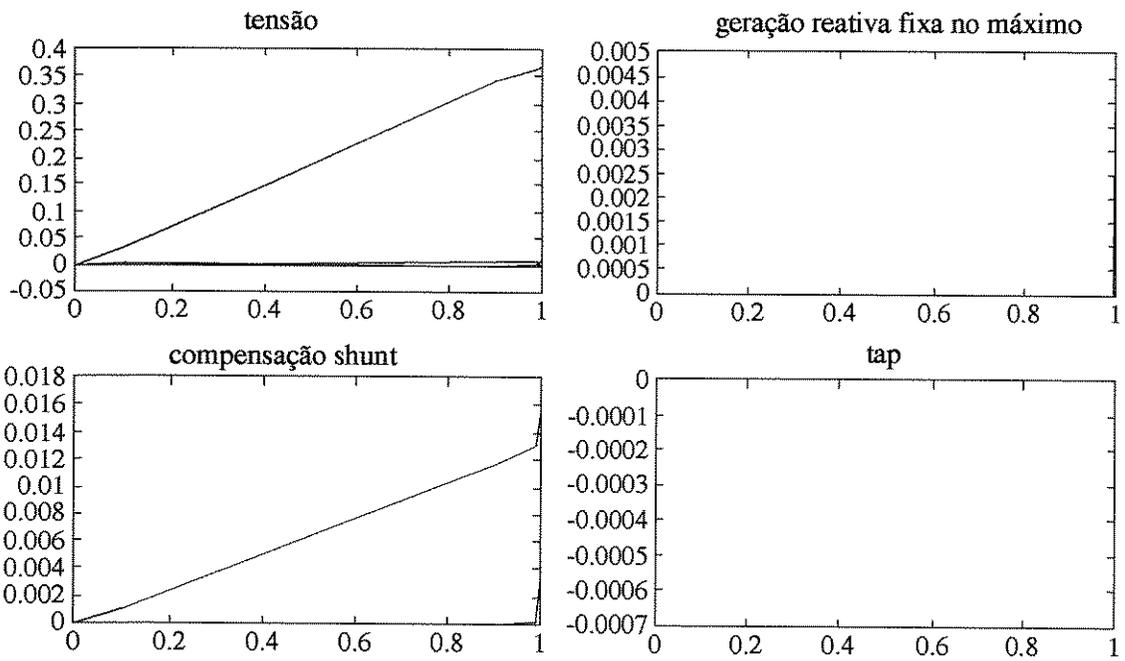


Figura 6.13: Multiplicadores de Lagrange associados as restrições descritas nos gráficos para inicialização do tipo 2.

## inicialização do tipo 1

Contador	Parâmetro	Iterações	Violações
1	0	0	0
2	0.1	2	1
3	0.1	1	0
4	0.5	3	1
5	0.5	2	0
6	0.9	4	3
7	0.9	4	1
8	0.9	1	1
9	0.9	0	0
10	0.99	2	0
11	0.999	3	15
12	0.999	3	2
13	0.999	3	0
14	0.9999	2	2
15	0.9999	3	0
16	1	1	0

## inicialização do tipo 2

Contador	Parâmetro	Iterações	Violações
1	0	0	0
2	0.1	1	2
3	0.1	1	1
4	0.1	1	0
5	0.9	2	1
6	0.9	1	0
7	0.99	2	2
8	0.99	2	1
9	0.99	0	0
10	0.999	2	1
11	0.999	2	2
12	0.999	3	0
13	0.9999	2	3
14	0.9999	3	3
15	0.9999	3	0
16	1	2	2
17	1	2	0

Tabela 6.7: Estatística das violações.

inicialização do tipo 1

barra	tensão	ângulo
1	1.0500	0.0
2	1.0357	-0.0994
3	1.0197	-0.1445
4	1.0128	-0.1744
5	1.0034	-0.2565
6	1.0086	-0.2047
7	0.9987	-0.2352
8	1.0090	-0.2181
9	1.0048	-0.2615
10	1.0130	-0.2931
11	1.0500	-0.2615
12	1.0180	-0.2792
13	1.0500	-0.2792
14	1.0040	-0.2958
15	1.0006	-0.2978
16	1.0084	-0.2903
17	1.0061	-0.2962
18	0.9924	-0.3092
19	0.9908	-0.3123
20	0.9955	-0.3086
21	1.0018	-0.3014
22	1.0018	-0.3012
23	0.9937	-0.3053
24	0.9931	-0.3087
25	1.0019	-0.3029
26	0.9839	-0.3105
27	1.0161	-0.2945
28	1.0034	-0.2158
29	0.9961	-0.3163
30	0.9845	-0.3319

inicialização do tipo 2

barra	tensão	ângulo
1	1.0500	0.0
2	1.0358	-0.0994
3	1.0197	-0.1445
4	1.0129	-0.1744
5	1.0035	-0.2565
6	1.0087	-0.2047
7	0.9988	-0.2352
8	1.0091	-0.2181
9	1.0046	-0.2615
10	1.0129	-0.2931
11	1.0500	-0.2615
12	1.0180	-0.2793
13	1.0500	-0.2793
14	1.0040	-0.2958
15	1.0006	-0.2979
16	1.0084	-0.2904
17	1.0060	-0.2962
18	0.9923	-0.3092
19	0.9907	-0.3123
20	0.9954	-0.3086
21	1.0009	-0.3014
22	1.0017	-0.3012
23	0.9936	-0.3053
24	0.9930	-0.3087
25	1.0018	-0.3029
26	0.9838	-0.3105
27	1.0160	-0.2945
28	1.0035	-0.2158
29	0.9960	-0.3163
30	0.9844	-0.3319

barra	compensação shunt
10	0.19
24	0.043

barra	compensação shunt
10	0.19
24	0.043

linha	tap
6-9	1.0583
6-10	0.9091
4-12	1.0065
28-27	0.9560

linha	tap
6-9	1.0590
6-10	0.9091
4-12	1.0064
28-27	0.9562

barra	geração ativa
1	2.6343
2	0.3800

barra	geração ativa
1	2.6343
2	0.3800

Tabela 6.8: Solução final.

inicialização do tipo 1			inicialização do tipo 2			inicialização do tipo 1	
linha		fluxo ativo	linha		fluxo ativo	barra	geração reativa
1	2	1.7951	1	2	1.7951	1	-0.2699
1	3	0.8393	1	3	0.8393	2	0.4823
2	4	0.4538	2	4	0.4538	5	0.3497
3	4	0.7863	3	4	0.7864	8	0.4000
2	5	0.8284	2	5	0.8284	11	0.2281
2	6	0.6187	2	6	0.6187	13	0.2400
4	6	0.7209	4	6	0.7209		
5	7	0.1439	5	7	0.1439		
6	7	0.3770	6	7	0.3770		
6	8	0.2987	6	8	0.2986		
6	9	0.2927	6	9	0.2927		
6	10	0.1476	6	10	0.1475		
9	11	0.0000	9	11	0.0000		
9	10	0.2927	9	10	0.2927		
4	12	0.4244	4	12	0.4244		
12	13	0.0000	12	13	0.0000		
12	14	0.0757	12	14	0.0757		
12	15	0.1708	12	15	0.1708		
12	16	0.0659	12	16	0.0659		
14	15	0.0130	14	15	0.0130		
16	17	0.0305	16	17	0.0305		
15	18	0.0566	15	18	0.0566		
18	19	0.0242	18	19	0.0242		
19	20	0.0708	19	20	0.0708		
10	20	0.0940	10	20	0.0940		
10	17	0.0598	10	17	0.0598		
10	21	0.1545	10	21	0.1545		
10	22	0.0739	10	22	0.0739		
21	22	0.0216	21	22	0.0216		
15	23	0.0431	15	23	0.0432		
22	24	0.0518	22	24	0.0518		
23	24	0.0109	23	24	0.0110		
24	25	0.0246	24	25	0.0246		
25	26	0.0355	25	26	0.0355		
25	27	0.0602	25	27	0.0602		
28	27	0.1936	28	27	0.1936		
27	29	0.0619	27	29	0.0619		
27	30	0.0709	27	30	0.0709		
29	30	0.0370	29	30	0.0370		
8	28	0.0025	8	28	0.0025		
6	28	0.1968	6	28	0.1968		

Tabela 6.9: Continuação da solução final.

## 6.4 Minimização de Desvio de Tensão

### 6.4.1 Inicialização do Tipo 1

Esta função objetivo não apresenta grande dificuldade para os sistemas elétricos usados como teste. Pelo fato de se utilizar um fator  $w = 50$  as violações foram todas levadas para o intervalo  $[0.9, 1]$ . Este valor alto se justifica pois valores pequenos, em torno de 10, poderão fazer com que as condições de Kuhn-Tucker não sejam válidas. Não houve restrições ineficazes em  $c = 0$ . O valor da função objetivo é 0.0073 pu.

O conjunto ativo em  $c = 1$  é formado por :

$$qg^{max} = \{barra\ 5, barra\ 8\}$$

$$v^{max} = \{barra\ 1\}$$

$$a^{min} = \{linha\ N^{\circ}\ 12\}$$

$$b^{max} = \{barra\ 10, barra\ 24\}$$

$$pl^{max} = \{linha\ N^{\circ}\ 1\}$$

### 6.4.2 Inicialização do Tipo 2

Pode-se ver que a solução final produzida por esta inicialização e pela anterior é igual, dentro da tolerância de 0.001. No entanto, o conjunto ativo difere em um elemento, a tensão na barra 1 deixou de ser ativa no limite máximo quando se inicializou pela solução do fluxo de carga. De qualquer modo, o valor final da função objetivo foi o mesmo. O fator quadrático é  $w = 50$ . O valor inicial da função objetivo é 0.0350 pu e o valor final é 0.0072 pu. As restrições relaxadas são :

$$v^{min} = \{barra\ 26, barra\ 29, barra\ 30\}$$

$$qg^{max} = \{barra\ 2, barra\ 13\}$$

O conjunto ativo em  $c = 1$  é formado por :

$$qg^{max} = \{barra\ 5, barra\ 8\}$$

$$a^{min} = \{linha\ N^{\circ}\ 12\}$$

$$b^{max} = \{barra\ 10, barra\ 24\}$$

$$pl^{max} = \{linha\ N^{\circ}\ 1\}$$

A seguir, são apresentados os resultados.

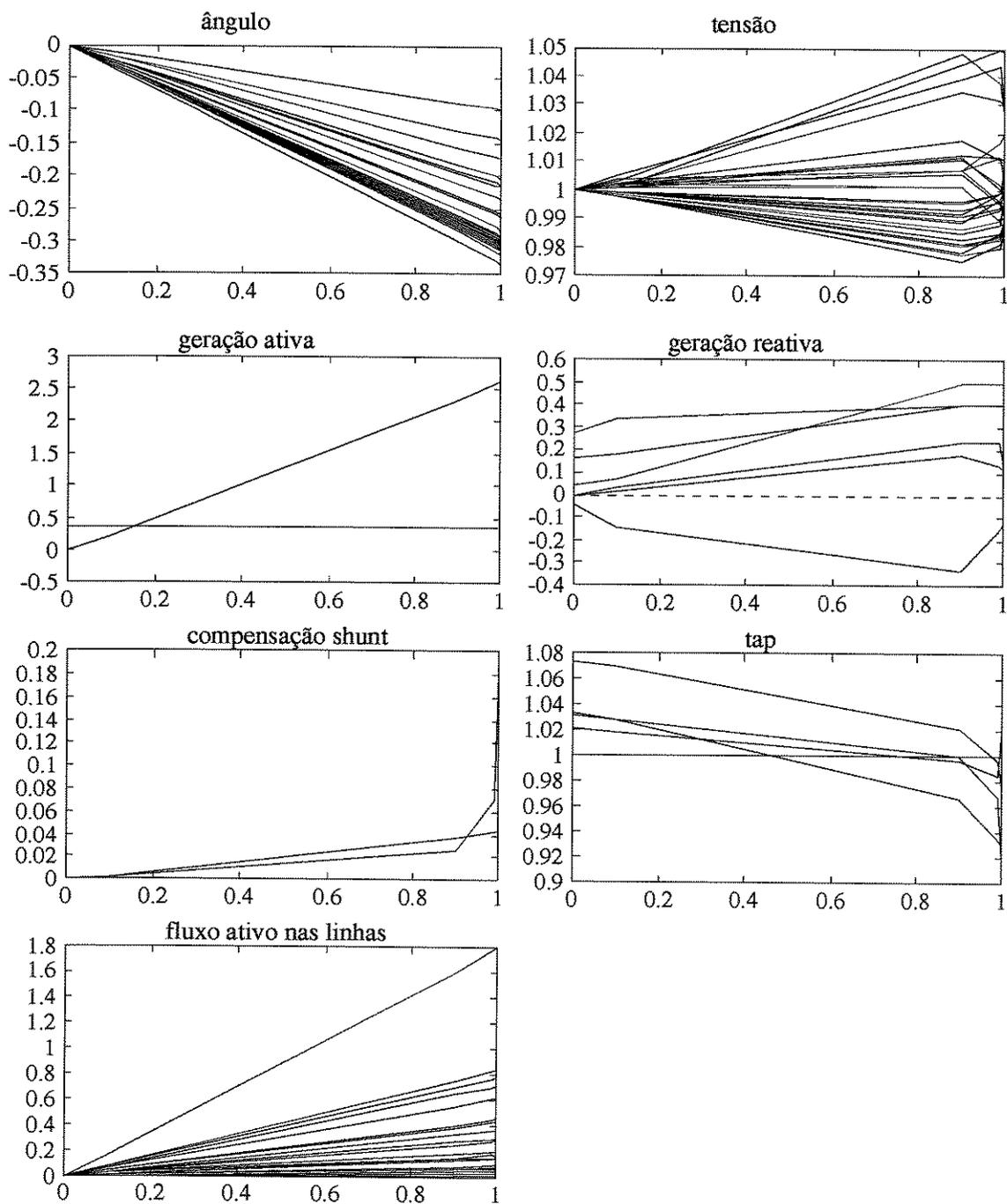


Figura 6.14: Caminhos descritos pelas variáveis do FPO para inicialização do tipo 1.

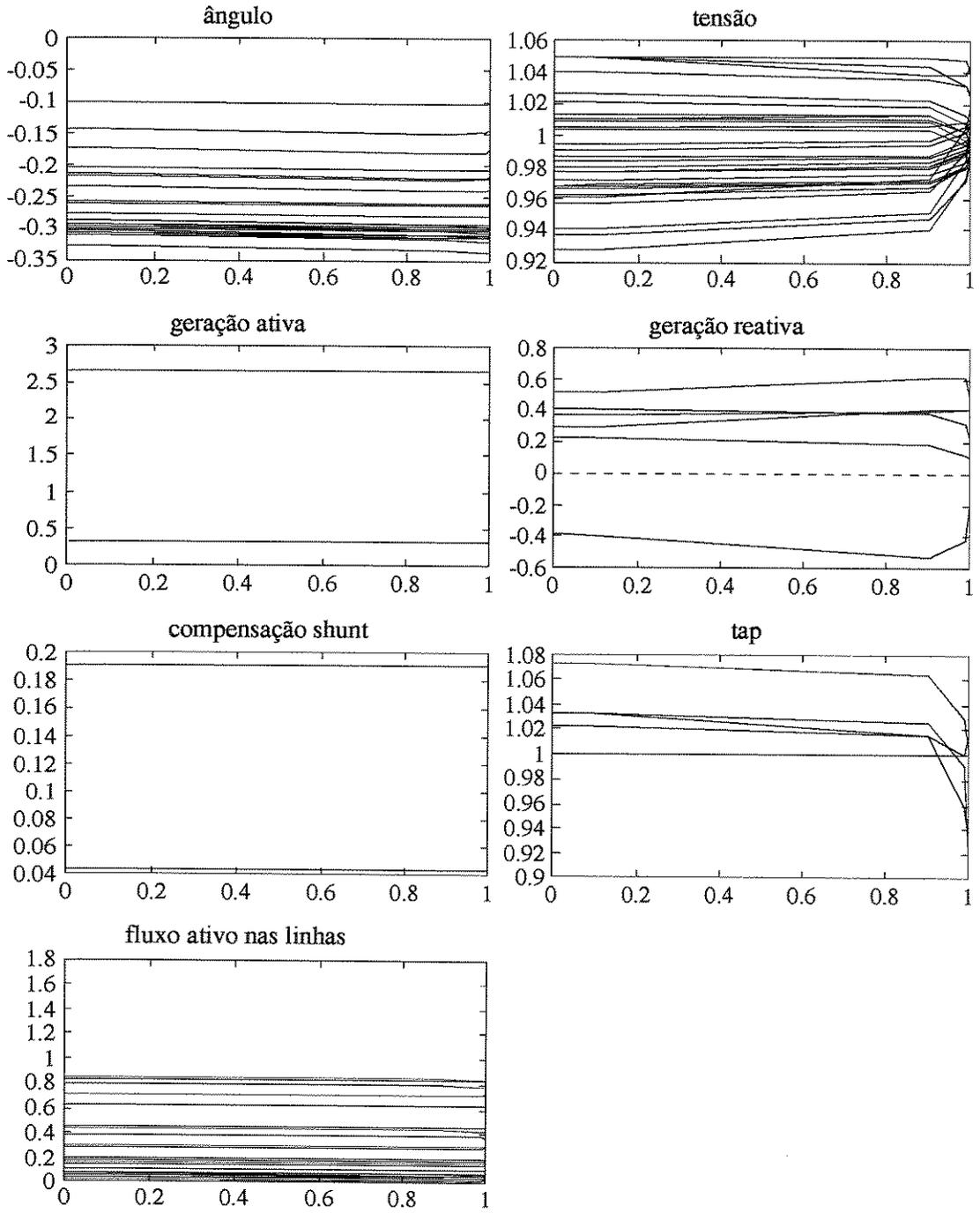


Figura 6.15: Caminhos descritos pelas variáveis do FPO para inicialização do tipo 2.

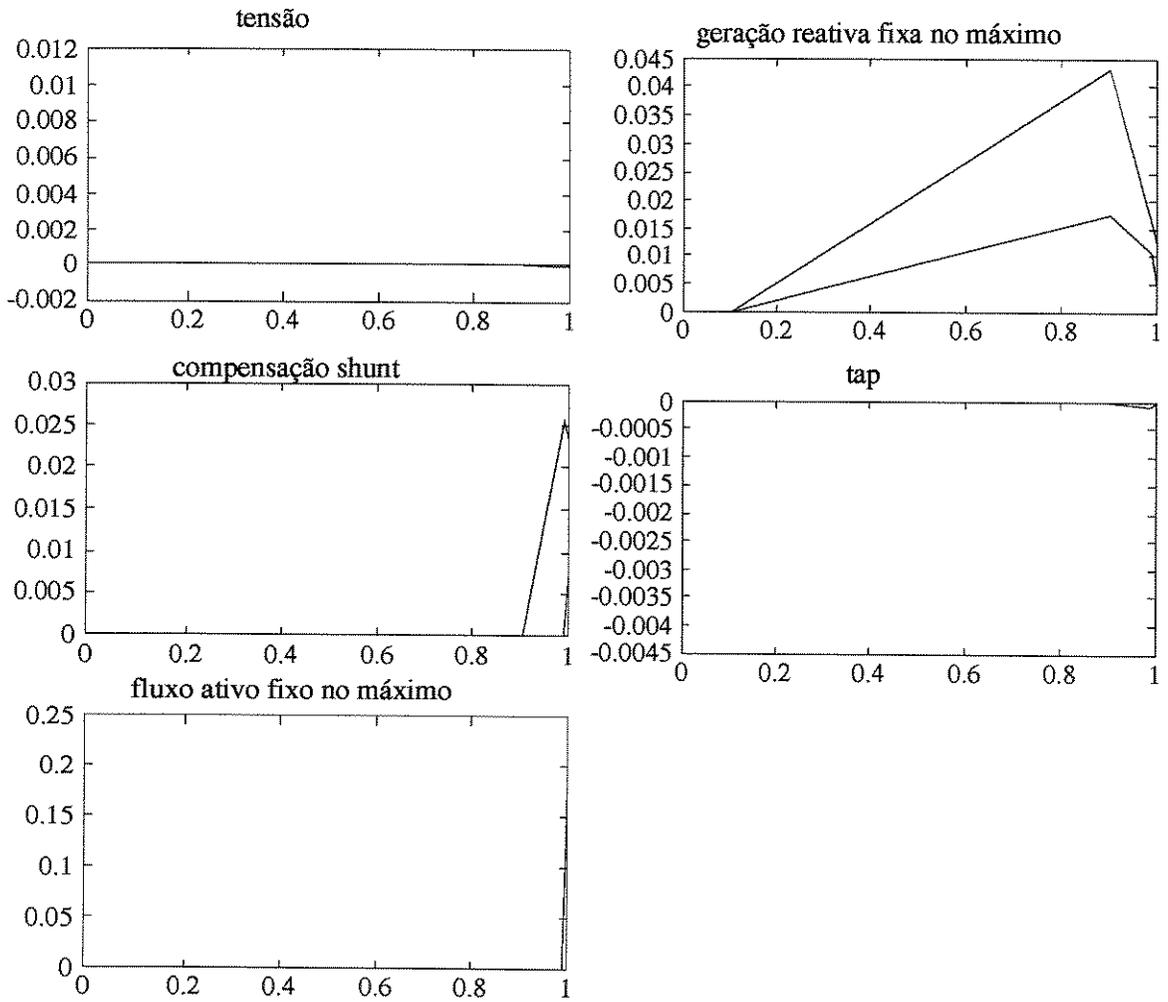


Figura 6.16: Multiplicadores de Lagrange associados as restrições descritas nos gráficos para inicialização do tipo 1.

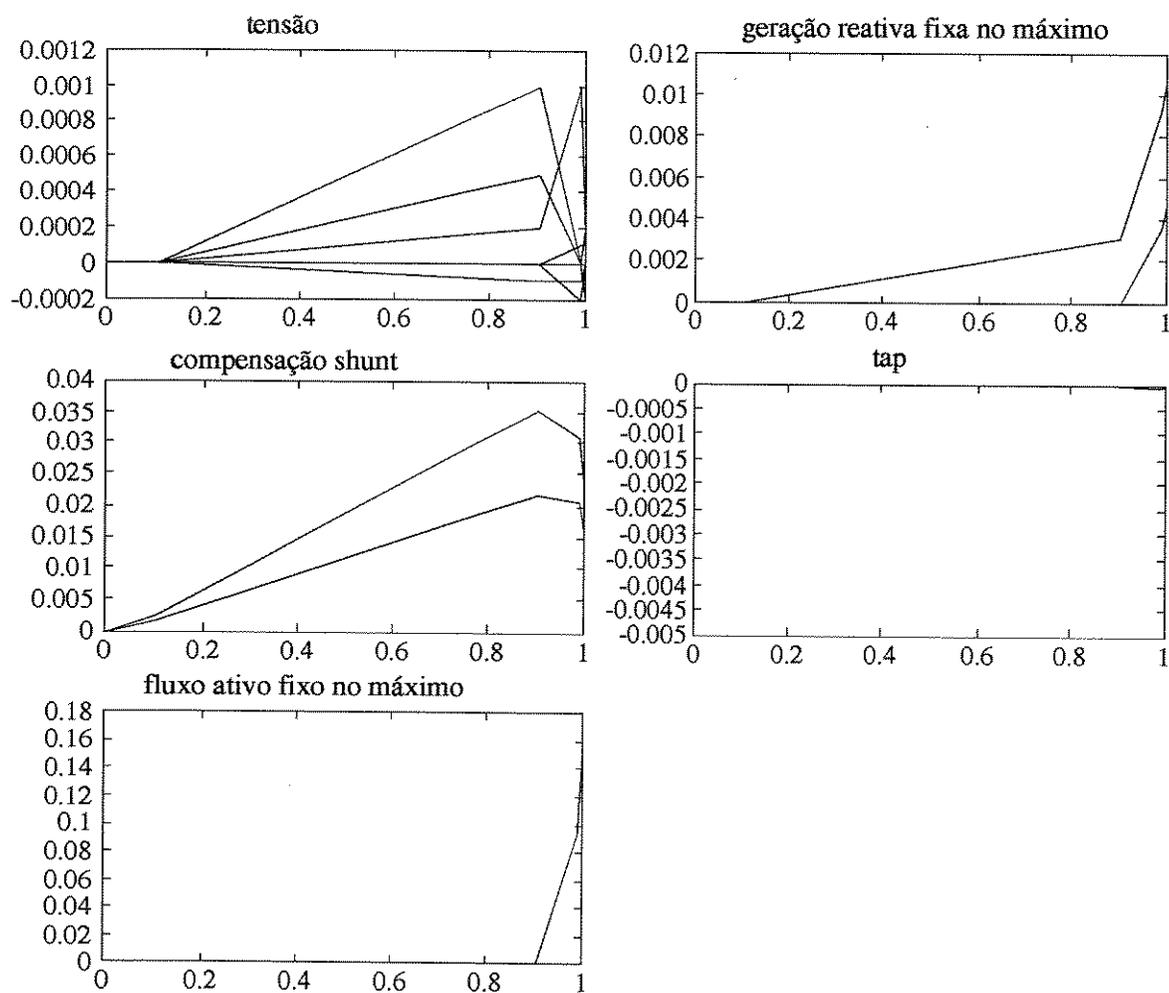


Figura 6.17: Multiplicadores de Lagrange associados as restrições descritas nos gráficos para inicialização do tipo 2.

## inicialização do tipo 1

Contador	Parâmetro	Iterações	Violações
1	0	0	0
2	0.1	2	0
3	0.9	2	3
4	0.9	4	4
5	0.9	4	3
6	0.9	4	2
7	0.9	4	0
8	0.99	3	1
9	0.99	2	1
10	0.99	0	0
11	0.999	2	3
12	0.999	3	2
13	0.999	3	2
14	0.999	3	2
15	0.999	3	1
16	0.999	2	2
17	0.999	3	1
18	0.999	0	0
19	0.9999	2	2
20	0.9999	3	1
21	0.9999	1	0
22	1	1	0

## inicialização do tipo 2

Contador	Parâmetro	Iterações	Violações
1	0	0	0
2	0.1	1	2
3	0.1	1	1
4	0.1	0	0
5	0.9	3	1
6	0.9	1	1
7	0.9	0	0
8	0.99	2	4
9	0.99	3	3
10	0.99	3	2
11	0.99	3	0
12	0.999	2	0
13	0.9999	2	1
14	0.9999	0	0
15	1	2	0

Tabela 6.10: Estatística das violações.

inicialização do tipo 1

barra	tensão	ângulo
1	1.0500	0
2	1.0273	-0.0978
3	1.0078	-0.1429
4	0.9984	-0.1725
5	0.9962	-0.2587
6	0.9936	-0.2036
7	0.9867	-0.2357
8	0.9938	-0.2174
9	1.0004	-0.2629
10	1.0074	-0.2948
11	1.0286	-0.2629
12	1.0117	-0.2815
13	1.0319	-0.2815
14	0.9979	-0.2982
15	0.9949	-0.3003
16	1.0024	-0.2924
17	1.0003	-0.2980
18	0.9866	-0.3115
19	0.9850	-0.3145
20	0.9898	-0.3107
21	0.9957	-0.3033
22	0.9967	-0.3030
23	0.9889	-0.3078
24	0.9897	-0.3112
25	1.0036	-0.3066
26	0.9857	-0.3141
27	1.0210	-0.2988
28	0.9873	-0.2150
29	1.0011	-0.3203
30	0.9896	-0.3358

inicialização do tipo 2

barra	tensão	ângulo
1	1.0455	0
2	1.0267	-0.0996
3	1.0077	-0.1447
4	0.9993	-0.1748
5	0.9957	-0.2606
6	0.9931	-0.2054
7	0.9862	-0.2375
8	0.9933	-0.2192
9	1.0017	-0.2649
10	1.0077	-0.2966
11	1.0243	-0.2649
12	1.0103	-0.2820
13	1.0386	-0.2820
14	0.9966	-0.2988
15	0.9938	-0.3011
16	1.0016	-0.2935
17	1.0003	-0.2996
18	0.9860	-0.3127
19	0.9847	-0.3159
20	0.9896	-0.3122
21	0.9960	-0.3050
22	0.9969	-0.3048
23	0.9882	-0.3089
24	0.9896	-0.3128
25	1.0037	-0.3083
26	0.9858	-0.3158
27	1.0212	-0.3006
28	0.9868	-0.2168
29	1.0013	-0.3221
30	0.9898	-0.3376

barra	compensação shunt
10	0.19
24	0.043

barra	compensação shunt
10	0.19
24	0.043

linha	tap
6-9	1.0306
6-10	0.9091
4-12	0.9777
28-27	0.9292

linha	tap
6-9	1.0218
6-10	0.9091
4-12	0.9973
28-27	0.9282

barra	geração ativa
1	2.6363
2	0.3800

barra	geração ativa
1	2.6373
2	0.3800

Tabela 6.11: Solução final.

inicialização do tipo 1			inicialização do tipo 2		
linha		fluxo ativo	linha		fluxo ativo
1	2	1.8000	1	2	1.8000
1	3	0.8363	1	3	0.8373
2	4	0.4533	2	4	0.4534
3	4	0.7833	3	4	0.7841
2	5	0.8336	2	5	0.8333
2	6	0.6195	2	6	0.6189
4	6	0.7219	4	6	0.7214
5	7	0.1395	5	7	0.1398
6	7	0.3731	6	7	0.3734
6	8	0.2997	6	8	0.2996
6	9	0.2919	6	9	0.2907
6	10	0.1490	6	10	0.1490
9	11	0.0000	9	11	0.0000
9	10	0.2919	9	10	0.2907
4	12	0.4195	4	12	0.4210
12	13	0.0000	12	13	0.0000
12	14	0.0750	12	14	0.0750
12	15	0.1685	12	15	0.1691
12	16	0.0640	12	16	0.0649
14	15	0.0123	14	15	0.0122
16	17	0.0286	16	17	0.0295
15	18	0.0556	15	18	0.0559
18	19	0.0233	18	19	0.0236
19	20	0.0718	19	20	0.0714
10	20	0.0950	10	20	0.0947
10	17	0.0617	10	17	0.0608
10	21	0.1532	10	21	0.1532
10	22	0.0731	10	22	0.0730
21	22	0.0228	21	22	0.0229
15	23	0.0412	15	23	0.0414
22	24	0.0497	22	24	0.0496
23	24	0.0090	23	24	0.0092
24	25	0.0286	24	25	0.0284
25	26	0.0355	25	26	0.0355
25	27	0.0643	25	27	0.0642
28	27	0.1979	28	27	0.1977
27	29	0.0619	27	29	0.0619
27	30	0.0709	27	30	0.0709
29	30	0.0370	29	30	0.0370
8	28	0.0015	8	28	0.0016
6	28	0.2002	6	28	0.2001

inicialização do tipo 1	
barra	geração reativa
1	-0.0551
2	0.3970
5	0.4000
8	0.4000
11	0.1395
13	0.1484

inicialização do tipo 2	
barra	geração reativa
1	-0.1487
2	0.4586
5	0.4000
8	0.4000
11	0.1113
13	0.2104

Tabela 6.12: Continuação da solução final.

# Capítulo 7

## Conclusão

A otimização paramétrica mostrou ser uma abordagem adequada no estudo do FPO, possibilitando uma boa visualização do comportamento do problema através das trajetórias de diversas variáveis ao longo da evolução do parâmetro.

Atualmente os métodos empregados para resolver o FPO contam com regras heurísticas para encontrar o conjunto ativo na solução ótima [18]. Estas regras envolvem inúmeras tentativas para a composição de um provável conjunto ativo. O método da continuação faz uma relaxação do problema original e segue paulatinamente em busca deste conjunto ativo ótimo através da variação de um parâmetro, que controla o grau de relaxação do problema original.

Apresentou-se o método da continuação e os seus conceitos básicos, os quais incluem as condições para a existência de um caminho para a solução de um sistema de equações não lineares. Mostrou-se que o passo preditor tipo elevador tem uma importância apenas didática pois, nesta pesquisa, a predição linear demonstrou ter uma melhor eficiência.

O FPO foi parametrizado mantendo a idéia original do método da continuação na solução de equações não lineares, que é dispor de uma solução trivial para o início da resolução do problema proposto. Entretanto, no caso do FPO existe uma particularidade a qual é a possibilidade de qualquer valor  $(x, \lambda)$  adotado como ponto inicial não atender as restrições de desigualdade. Nesta situação, adotou-se aqui uma outra relaxação operacionalizada através da introdução de parâmetros de folga ( $\epsilon$ ) em tais restrições. Isto possibilitou estudos com inicializações de dois tipos distintos.

Duas interpretações são dadas para a parametrização do FPO. Dependendo do ponto de partida para este problema a demanda do sistema elétrico poderá ou não estar atendida. Se é feita a inicialização do tipo 1 então, pode-se observar que o incremento

do parâmetro de continuação representa o incremento no nível de carga. Isto pode ser compreendido pela equação :

$$p_d + p(v, \theta, a) - (1 - c) \cdot [p_d + p(v^o, \theta^o, a^o)] = 0 \quad (7.1)$$

Fazendo algumas manipulações algébricas temos que :

$$p(v, \theta, a) + c \cdot p_d - p(v^o, \theta^o, a^o) + c \cdot p(v^o, \theta^o, a^o) = 0 \quad (7.2)$$

A parcela  $c \cdot p_d$  mostra a parametrização atuando na carga do sistema elétrico. Raciocínio idêntico é válido para a equação reativa.

Por outro lado, quando a inicialização é do tipo 2, ou seja, pela solução fornecida do cálculo do fluxo de carga, o termo parametrizado da equação (7.1) desaparece pois a solução do fluxo de carga atende a demanda. Dentro desta proposta, a parametrização atua somente na função objetivo e nas restrições de desigualdade parametrizadas. Assim, a evolução do parâmetro não condiciona o incremento do nível de carga pois o mesmo já está satisfeito. A variação de  $c$  percorre o hiperplano no qual a restrição de igualdade do problema parametrizado coincide com a do problema original sendo representado por :

$$g(x) = 0 \quad (7.3)$$

A mudança do conjunto ativo quando se resolve um novo problema parametrizado foi previamente obtida por uma heurística que combina as ações de análise de sensibilidade e análise de factibilidade. De modo geral esta heurística apresentou bom desempenho para as três funções objetivo testadas. A estratégia de incorporação de restrições violadas ao conjunto ativo, mediante o uso da linearização secante, apresentou uma boa performance sobretudo quando foram minimizadas perdas ativas. Estas são contribuições importantes no que diz respeito à identificação do conjunto ativo na solução do FPO.

As dificuldades encontradas com o mau condicionamento da matriz Jacobiana do vetor gradiente do Lagrangeano (4.16) foram contornadas através da calibração do fator  $w$ . A predição linear falha na determinação do próximo ponto de quebra quando o problema parametrizado se aproxima do problema original, ou seja, da solução do FPO. No entanto, sua eficiência permanece como fornecedor do ponto de inicialização do próximo problema parametrizado.

Como sugestões para a continuidade deste trabalho são indicados: o estudo da viabilidade de se incorporar mais de uma violação, ao mesmo tempo, no conjunto ativo; um

aprofundamento maior nas pesquisas acerca das causas que levam à singularidade da matriz Jacobiana do vetor gradiente do Lagrangeano (4.16); a implementação de novas heurísticas de construção do caminho e a incorporação de técnicas de esparsidade para que sistemas elétricos maiores possam ser avaliados.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] **Dillon, T.S.**, *Rescheduling, Constrained Participation Factors and Parameter Sensitivity in the Optimal Power Flow Problem*, IEEE Trans. PAS, Vol. 100, pp 2628-2634, 1981.
- [2] **Davison, G.R.**, *Dividing Load between Units*, Electrical World, Dezembro 23, 1922
- [3] **Steinberg, M.J., Smith, T.H.**, *The Theory of Incremental Rates*, Pt.1, Electrical Engineering, Março, 1934, Pt.II, Electrical Engineering, Abril, 1934.
- [4] **Kuhn, H.W., Tucker, A.W.**, *Nonlinear Programming*, Proc. of 2nd Berkeley, California Symposium on Math. Stat. and Prob., University of Cal. Press, Berkeley, California, 1951.
- [5] **Squires, R.B.**, *Economic Dispatch of Generation Directly from Power System Voltages and Admittances*, AIEE Trans. on PAS, Vol. 79, Pt. III, pp 1235-1244, 1961.
- [6] **Carpentier, J.L.**, *Contribution à l'étude du Dispatching Economique*, Bulletin de la Société Française des Electriciens, Ser. 8, Vol. 3, 1962.
- [7] **Carpentier, J.L., Siroux, J.**, *L'optimization de la Production à l'Electricité de France*, Bulletin de la Société Française des Electriciens, 1963.
- [8] **Dommel, H.W., Tinney, W.F.**, *Optimal Power Flow Solutions*, IEEE Trans. PAS, Vol. 87, pp 1866-1876, 1968.
- [9] **Tinney, W.F., Walker, J.W.**, *Direct Solutions of Sparse Network Equations by Optimally Ordered Triangular Factorization*, Proc. IEEE, Vol. 55, pp 1801-1809, 1967.
- [10] **Tinney, W.F., Hart, C.E.**, *Power Flow Solution by Newton's Method*, IEEE Trans. PAS, Vol. 86, pp 1449-1460, 1967.
- [11] **Rashed, A.M.H., Kelly, D.H.**, *Optimal Load Flow Solution Using a Lagrangian Multipliers and the Hessian Matrix*, IEEE Trans. PAS, Vol. 93, pp 1292-1297, 1974.
- [12] **Bala, J.L., Thanikachalam, A.**, *An Improved Second Order Method for Optimal Load Flow*, IEEE Trans. PAS, Vol. 97, pp 1239-1244, 1978.

- [13] **Alsac., O., Stott, B.**, *Optimal Load Flow with Steady-State Security*, IEEE Trans. PAS, Vol. 93, pp 745-751, 1974.
- [14] **Carpentier, J.L.**, *Optimal Power Flows: Uses, Methods and Developments*, Proc. I-FAC Symposium on Planning and Operation of Electric Energy Systems, Rio de Janeiro, pp 11-21, Julho, 1985.
- [15] **Happ, H.H.**, *Optimal Power Dispatching - A Comprehensive Survey*, IEEE Trans. PAS, Vol. 96, pp 841-854, 1977.
- [16] **Sasson, A.M., Merrill, H.M.**, *Some Applications of Optimization Techniques to Power System Problems*, Proc. IEEE, Vol.62, pp 959-972, 1974.
- [17] **Hunneault, M., Galiana, F.D.**, *A Survey of the Optimal Power Flow Literature*, IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 6, pp 762-770, 1991.
- [18] **Sun, D.I., Ashley, B., Brewer, B., Hughes, A., Tinney, W.F.**, *Optimal Power Flow by Newton Approach*, IEEE Trans. PAS, Vol. 103, pp 2864-2880, 1984.
- [19] **Tinney, W.F., Bright, J.M., Demaree, K.D., Hughes, B.A.**, *Some Deficiencies in Optimal Power Flow*, IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 3, pp 676-683, 1988.
- [20] **Ponrajah, R.A., Galiana, F.D.**, *The Minimum Cost Optimal Power Flow Problem Solved Via Restart Homotopy Continuation Method*, IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 4, pp 139-148, 1989.
- [21] **Hunneault, M., Galiana, F.D.**, *An Investigation of the Solution to the Optimal Power Flow Problem Incorporating Continuation Methods*, IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 5, pp 103-110, 1990.
- [22] **Hunneault, M., Fahmideh-Vojdani, A., Juman, M., Calderon, R., Galiana, F.D.**, *The Continuation Method in Power System Optimization: Applications to Economy-Security Functions*, IEEE Trans. PAS, Vol. 104, pp 114-123, 1985.
- [23] **Galiana, F.D., Fahmideh-Vojdani, A. Hunneault, M., Juman, M.**, *Optimal Power System Dispatch Through the Continuation Method : Variation of Functional Inequality Limits*, Proc. of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Calif6nia, 1983.
- [24] **Almeida, K. C., Galiana, F. D., Soares, S.**, *A General Parametric Optimal Power Flow*, Power Industry Computer Application (PICA), Phoenix, USA, Maio, 1993.
- [25] **Almeida, K. C., Galiana, F. D., Soares, S.**, *A Nonlinear Parametric Approach for Optimal Load Tracking*, Power System Computation Conference (PSCC), pp 1257-1263, Avignon, Fran7a, Setembro, 1993.
- [26] **Garcia, C.B., Zangwill, W.I.**, *Pathways to Solutions, Fixed Points and Equilibria*, Prentice Hall, 1981.

- [27] **Richter, S.L., DeCarlo, R.A.**, *Continuation Methods: Theory and Applications*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 28, pp 660-665, 1983.
- [28] **Rheinboldt, W.C., Burkardt, J.V.**, *A Locally Parametrized Continuation Process*, ACM Trans. on Mathematical Software, Vol. 9, pp 215-235, 1983.
- [29] **Den Heijer, C., Rheinboldt, W.C.**, *On Steplength Algorithms for a Class of Continuation Methods*, SIAM, J. Numer. Anal., Vol. 18, pp 925-948, 1981.
- [30] **Monticelli, A.**, *Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica*. Edgard Blücher Ltda. 1983

# Apêndice A

## Função Lagrangeana

A função Lagrangeana do problema parametrizado é dada por:

$$\mathcal{L} = F(\theta, v, b, a, c) + \sum_{i=1}^{nc} \alpha_i \cdot \{p_{d_i} + p_i(v, \theta, a) - (1 - c) \cdot [p_{d_i} + p_i(v^o, \theta^o, a^o)]\} + \quad (\text{A.1})$$

$$\sum_{i=1}^{nc} \beta_i \cdot \{q_{d_i} + q_i(v, \theta, a) - b_i \cdot v_i^2 - (1 - c) \cdot [q_{d_i} + q_i(v^o, \theta^o, a^o) - b_i^o \cdot v_i^{o^2}]\} +$$

$$\sum_{i=1}^{ipgmin} \omega_i^{min} \cdot \{p_{d_i} + p_i(v, \theta, a) - p_{g_i}^{min} - (1 - c) \cdot \Delta h_{p_{g_i}}\} +$$

$$\sum_{i=1}^{ipgmax} \omega_i^{max} \cdot \{p_{d_i} + p_i(v, \theta, a) - p_{g_i}^{max} - (1 - c) \cdot \Delta h_{p_{g_i}}\} +$$

$$\sum_{i=1}^{iqgmax} \rho_i^{max} \cdot \{q_{d_i} + q_i(v, \theta, a) - b_i \cdot v_i^2 - q_{g_i}^{max} - (1 - c) \cdot \Delta h_{q_{g_i}}\} +$$

$$\sum_{i=1}^{iqgmin} \rho_i^{min} \cdot \{q_{d_i} + q_i(v, \theta, a) - b_i \cdot v_i^2 - q_{g_i}^{min} - (1 - c) \cdot \Delta h_{q_{g_i}}\} +$$

$$\sum_{i=1}^{iplmax} \xi_i^{max} \cdot \{pl_i(v, \theta, a) - pl_i^{max} - (1 - c) \cdot \Delta h_{pl_i}\} +$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{sumin} \lambda_i^{min} \cdot \{v - v^{min} - (1 - c) \cdot \Delta x_v\} + \sum_{i=1}^{sumax} \lambda_i^{max} \cdot \{v - v^{max} - (1 - c) \cdot \Delta x_v\} + \\
& \sum_{i=1}^{sbmin} \mu_i^{min} \cdot \{b_i - b_i^{min} - (1 - c) \cdot \Delta x_{b_i}\} + \sum_{i=1}^{sbmax} \mu_i^{max} \cdot \{b_i - b_i^{max} - (1 - c) \cdot \Delta x_{b_i}\} + \\
& \sum_{i=1}^{sammin} \phi_i^{min} \cdot \{a_i - a_i^{min} - (1 - c) \cdot \Delta x_{a_i}\} + \sum_{i=1}^{sammax} \phi_i^{max} \cdot \{a_i - a_i^{max} - (1 - c) \cdot \Delta x_{a_i}\}
\end{aligned}$$

Os conjuntos dos índices das restrições (4.6) ativas são :

- $h_I(x)$  - ipgmin, ipgmax, iqgmin, iqgmax, iplmax
- $x_{max}$  - svmax, sbmax, samax
- $x_{min}$  - svmin, sbmin, samin

O sistema (4.16) escrito com as variáveis do FPO ficará como:

$$\frac{\partial^T \mathcal{L}}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial^T \mathcal{L}}{\partial \gamma_I} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_{ipgmin}^{min}} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_{iqgmin}^{min}} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_{ipgmax}^{max}} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_{iqgmax}^{max}} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_{iplmax}^{max}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial^T \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Apresentam-se as submatrizes que compõe a Jacobiana de (4.16) omitindo o símbolo de derivada parcial para melhor visualização dos elementos pertencentes a elas. Os zeros indicam ausência de derivada.

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} = \begin{bmatrix} \theta\theta & \theta v & 0 & \theta a \\ v\theta & vv & vb & va \\ 0 & bv & bb & 0 \\ a\theta & av & 0 & aa \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \cdot \partial \gamma_I} = \begin{bmatrix} \theta\omega^{min} & \theta\rho^{min} & \theta\omega^{max} & \theta\rho^{max} & \theta\xi^{max} \\ v\omega^{min} & v\rho^{min} & v\omega^{max} & v\rho^{max} & v\xi^{max} \\ 0 & b\rho^{min} & 0 & b\rho^{max} & 0 \\ a\omega^{min} & a\rho^{min} & a\omega^{max} & a\rho^{max} & a\xi^{max} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \cdot \partial \lambda} = \begin{bmatrix} \theta\alpha & \theta\beta \\ v\alpha & v\beta \\ 0 & b\beta \\ a\alpha & a\beta \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

## Apêndice B

### Derivada Primeira da Função Lagrangeana

As derivadas das injeções de potência ativa, potência reativa e fluxo ativo nas linhas de transmissão são obtidas através das expressões abaixo [30] tendo como referência a figura B.1 .

$$P_k = V_k \cdot \sum_{m \in \mathcal{U}} V_m (G_{km} \cdot \cos \theta_{km} + B_{km} \cdot \text{sen} \theta_{km}) \quad (\text{B.1})$$

$$Q_k = V_k \cdot \sum_{m \in \mathcal{U}} V_m (G_{km} \cdot \text{sen} \theta_{km} - B_{km} \cdot \cos \theta_{km}) \quad (\text{B.2})$$

$$pl_{km} = (a_{km} \cdot V_k)^2 \cdot g_{km} - (a_{km} \cdot V_k) \cdot V_m \cdot g_{km} \cos(\theta_{km}) - (a_{km} \cdot V_k) \cdot V_m \cdot b_{km} \cdot \text{sen}(\theta_{km}) \quad (\text{B.3})$$

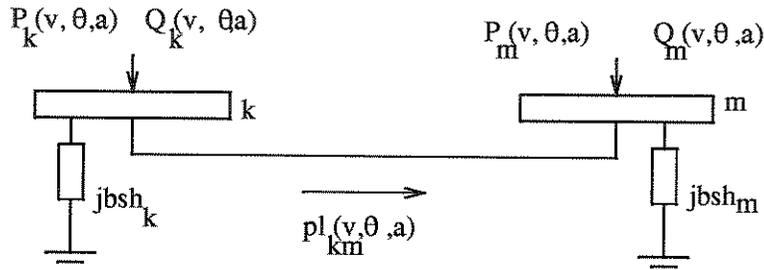


Figura B.1: Injeções de potência ativa, potência reativa e fluxo ativo nas linhas.

onde:

- $G_{km}$  e  $B_{km}$  – condutância e susceptância da matriz admitância de barra
- $g_{km}$  e  $b_{km}$  – condutância e susceptância da linha de transmissão
- $\mathcal{U}$  – conjunto de todas as barras  $m$  vizinhas a barra  $k$  mais a própria barra  $k$

Nas derivadas primeira e segunda os termos  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$  e  $w_4$  se referem aos pesos dados às funções objetivo custo de geração, perdas ativas, desvio de tensão, bem como ao termo quadrático, respectivamente. Através deles define-se qual o critério de otimização utilizado para resolver um determinado FPO. Os índices  $bb$  e  $aa$  se referem aos coeficientes quadrático e linear, respectivamente, da função custo de geração. O termo  $nc$  é usado para indicar o número de barras de carga.

## B.1 Derivada em relação ao ângulo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_k} &= \frac{\partial f(v, \theta, a)}{\partial \theta_k} - (1 - c)f_{\theta_k}^o + \sum_{i=1}^{nc} \alpha_i \cdot \frac{\partial p_i(v, \theta, a)}{\partial \theta_k} + \sum_{i=1}^{nc} \beta_i \cdot \frac{\partial q_i(v, \theta, a)}{\partial \theta_k} + \\ &\sum_{i=1}^{ipgmax} \omega_i^{max} \cdot \frac{\partial p_i(v, \theta, a)}{\partial \theta_k} + \sum_{i=1}^{ipgmin} \omega_i^{min} \cdot \frac{\partial p_i(v, \theta, a)}{\partial \theta_k} + \sum_{i=1}^{iqgmax} \rho_i^{max} \cdot \frac{\partial q_i(v, \theta, a)}{\partial \theta_k} + \\ &\sum_{i=1}^{iqgmin} \rho_i^{min} \cdot \frac{\partial q_i(v, \theta, a)}{\partial \theta_k} + \sum_{i=1}^{iplmax} \xi_i^{max} \cdot \frac{\partial pl_i(v, \theta, a)}{\partial \theta_k} \\ \frac{\partial f(v, \theta, a)}{\partial \theta_k} &= w_1 \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{ng} 2 \cdot bb_i \cdot \frac{\partial p_i(v, \theta, a)}{\partial \theta_k} \cdot [p_{d_i} + p_i(v, \theta, a)] + aa_i \cdot \frac{\partial p_i(v, \theta, a)}{\partial \theta_k} \right\} + \\ &w_2 \cdot \sum_{i=1}^{ng} \frac{\partial p_i(v, \theta, a)}{\partial \theta_k} \end{aligned}$$

$$f_{\theta_k}^o = w_1 \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{ng} 2.bb_i \cdot \frac{\partial p_i(v^o, \theta^o, a^o)}{\partial \theta_k} \cdot [p_{d_i} + p_i(v^o, \theta^o, a^o)] + aa_i \cdot \frac{\partial p_i(v^o, \theta^o, a^o)}{\partial \theta_k} \right\} +$$

$$w_2 \cdot \sum_{i=1}^{ng} \frac{\partial p_i(v^o, \theta^o, a^o)}{\partial \theta_k} + \sum_{i=1}^{nc} \alpha_i^o \cdot \frac{\partial p_i(v^o, \theta^o, a^o)}{\partial \theta_k} + \sum_{i=1}^{nc} \beta_i^o \cdot \frac{\partial q_i(v^o, \theta^o, a^o)}{\partial \theta_k}$$

## B.2 Derivada em relação a magnitude de tensão

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_k} = \frac{\partial f(v, \theta, a)}{\partial v_k} - (1-c)f_{v_k}^o + \sum_{i=1}^{nc} \alpha_i \cdot \frac{\partial p_i(v, \theta, a)}{\partial v_k} + \sum_{i=1}^{nc} \beta_i \cdot \frac{\partial q_i(v, \theta, a)}{\partial v_k} -$$

$$2 \cdot \beta_k \cdot b_k \cdot v_k + \sum_{i=1}^{ipgmax} \omega_i^{max} \cdot \frac{\partial p_i(v, \theta, a)}{\partial v_k} + \sum_{i=1}^{ipgmin} \omega_i^{min} \cdot \frac{\partial p_i(v, \theta, a)}{\partial v_k} +$$

$$\sum_{i=1}^{iqgmax} \rho_i^{max} \cdot \frac{\partial q_i(v, \theta, a)}{\partial v_k} - 2 \cdot \rho^{max} \cdot b_k \cdot v_k + \sum_{i=1}^{iqgmin} \rho_i^{min} \cdot \frac{\partial q_i(v, \theta, a)}{\partial v_k} -$$

$$2 \cdot \rho^{min} \cdot b_k \cdot v_k + \sum_{i=1}^{iplmax} \xi_i^{max} \cdot \frac{\partial p_l(v, \theta, a)}{\partial v_k}$$

$$\frac{\partial f(v, \theta, a)}{\partial v_k} = w_1 \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{ng} 2.bb_i \cdot \frac{\partial p_i(v, \theta, a)}{\partial v_k} \cdot [p_{d_i} + p_i(v, \theta, a)] + aa_i \cdot \frac{\partial p_i(v, \theta, a)}{\partial v_k} \right\} +$$

$$w_2 \cdot \sum_{i=1}^{ng} \frac{\partial p_i(v, \theta, a)}{\partial v_k} + 2 \cdot w_3 \cdot (v_k - 1) + w_4(1-c) \cdot (v_k - v_k^0)$$

$$f_{v_k}^o = w_1 \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{ng} 2.bb_i \cdot \frac{\partial p_i(v^o, \theta^o, a^o)}{\partial v_k} \cdot [p_{d_i} + p_i(v^o, \theta^o, a^o)] + aa_i \cdot \frac{\partial p_i(v^o, \theta^o, a^o)}{\partial v_k} \right\} +$$

$$w_2 \cdot \sum_{i=1}^{ng} \frac{\partial p_i(v^o, \theta^o, a^o)}{\partial v_k} + 2 \cdot w_3 \cdot (v_k^o - 1) + \sum_{i=1}^{nc} \alpha_i^o \cdot \frac{\partial p_i(v^o, \theta^o, a^o)}{\partial v_k} + \sum_{i=1}^{nc} \beta_i^o \cdot \frac{\partial q_i(v^o, \theta^o, a^o)}{\partial v_k}$$

### B.3 Derivada em relação a compensação shunt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_k} = \frac{\partial f(v, \theta, a)}{\partial b_k} - (1 - c)f_{b_k}^o - \beta_k \cdot v_k^2 - \rho_k^{max} \cdot v_k^2 - \rho_k^{min} \cdot v_k^2$$

$$\frac{\partial f(v, \theta, a)}{\partial b_k} = w_4 \cdot (1 - c) \cdot (b_k - b_k^o)$$

$$f_{b_k}^o = -\beta_k \cdot v_k^2$$

### B.4 Derivada em relação ao tap

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_k} &= \frac{\partial f(v, \theta, a)}{\partial a_k} - (1 - c)f_{a_k}^o + \sum_{i=1}^{nc} \alpha_i \cdot \frac{\partial p_i(v, \theta, a)}{\partial a_k} + \sum_{i=1}^{nc} \beta_i \cdot \frac{\partial q_i(v, \theta, a)}{\partial a_k} + \\ &\sum_{i=1}^{ipgmax} \omega_i^{max} \cdot \frac{\partial p_i(v, \theta, a)}{\partial a_k} + \sum_{i=1}^{ipgmin} \omega_i^{min} \cdot \frac{\partial p_i(v, \theta, a)}{\partial a_k} + \sum_{i=1}^{iqgmax} \rho_i^{max} \cdot \frac{\partial q_i(v, \theta, a)}{\partial a_k} + \\ &\sum_{i=1}^{iqgmin} \rho_i^{min} \cdot \frac{\partial q_i(v, \theta, a)}{\partial a_k} + \sum_{i=1}^{iplmax} \xi_i^{max} \cdot \frac{\partial p_l i(v, \theta, a)}{\partial a_k} \\ \frac{\partial f(v, \theta, a)}{\partial a_k} &= w_1 \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{ng} 2 \cdot bb_i \cdot \frac{\partial p_i(v, \theta, a)}{\partial a_k} \cdot [p_{d_i} + p_i(v, \theta, a)] + aa_i \cdot \frac{\partial p_i(v, \theta, a)}{\partial a_k} \right\} + \\ &w_2 \cdot \sum_{i=1}^{ng} \frac{\partial p_i(v, \theta, a)}{\partial a_k} + w_4 \cdot (1 - c) \cdot (a_k - a_k^o) \\ f_{a_k}^o &= w_1 \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{ng} 2 \cdot bb_i \cdot \frac{\partial p_i(v^o, \theta^o, a^o)}{\partial a_k} \cdot [p_{d_i} + p_i(v^o, \theta^o, a^o)] + aa_i \cdot \frac{\partial p_i(v^o, \theta^o, a^o)}{\partial a_k} \right\} + \\ &w_2 \cdot \sum_{i=1}^{ng} \frac{\partial p_i(v^o, \theta^o, a^o)}{\partial a_k} + \sum_{i=1}^{nc} \alpha_i^o \cdot \frac{\partial p_i(v^o, \theta^o, a^o)}{\partial a_k} + \sum_{i=1}^{nc} \beta_i^o \cdot \frac{\partial q_i(v^o, \theta^o, a^o)}{\partial a_k} \end{aligned}$$

## Apêndice C

### Derivada Segunda da Função Lagrangeana

#### C.1 Derivada ângulo x ângulo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \theta_k \partial \theta_l} &= \frac{\partial^2 f(v, \theta, a)}{\partial \theta_k \partial \theta_l} + \sum_{i=1}^{nc} \alpha_i \cdot \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial \theta_k \partial \theta_l} + \sum_{i=1}^{nc} \beta_i \cdot \frac{\partial^2 q_i(v, \theta, a)}{\partial \theta_k \partial \theta_l} + \\ &\sum_{i=1}^{ipgmax} \omega_i^{max} \cdot \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial \theta_k \partial \theta_l} + \sum_{i=1}^{ipgmin} \omega_i^{min} \cdot \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial \theta_k \partial \theta_l} + \sum_{i=1}^{iqgmax} \rho_i^{max} \cdot \frac{\partial^2 q_i(v, \theta, a)}{\partial \theta_k \partial \theta_l} + \\ &\sum_{i=1}^{iqgmin} \rho_i^{min} \cdot \frac{\partial^2 q_i(v, \theta, a)}{\partial \theta_k \partial \theta_l} + \sum_{i=1}^{iplmax} \xi_i^{max} \cdot \frac{\partial^2 pl_i(v, \theta, a)}{\partial \theta_k \partial \theta_l} \\ \frac{\partial^2 f(v, \theta, a)}{\partial \theta_k \partial \theta_l} &= w_1 \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{ng} 2 \cdot bb_i \cdot \left\{ \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial \theta_k \partial \theta_l} \cdot [p_{di} + p_i(v, \theta, a)] + \frac{\partial p_i(v, \theta, a)}{\partial \theta_l} \cdot \frac{\partial p_i(v, \theta, a)}{\partial \theta_k} \right\} \right. \\ &\left. + aa_i \cdot \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial \theta_k \partial \theta_l} \right\} + w_2 \cdot \sum_{i=1}^{ng} \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial \theta_k \partial \theta_l} \end{aligned}$$

## C.2 Derivada magnitude de tensão x ângulo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v_k \partial \theta_l} &= \frac{\partial^2 f(v, \theta, a)}{\partial v_k \partial \theta_l} + \sum_{i=1}^{nc} \alpha_i \cdot \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial v_k \partial \theta_l} + \sum_{i=1}^{nc} \beta_i \cdot \frac{\partial^2 q_i(v, \theta, a)}{\partial v_k \partial \theta_l} + \\ &\sum_{i=1}^{ipgmax} \omega_i^{max} \cdot \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial v_k \partial \theta_l} + \sum_{i=1}^{ipgmin} \omega_i^{min} \cdot \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial v_k \partial \theta_l} + \sum_{i=1}^{iqgmax} \rho_i^{max} \cdot \frac{\partial^2 q_i(v, \theta, a)}{\partial v_k \partial \theta_l} + \\ &\sum_{i=1}^{iqgmin} \rho_i^{min} \cdot \frac{\partial^2 q_i(v, \theta, a)}{\partial v_k \partial \theta_l} + \sum_{i=1}^{iplmax} \xi_i^{max} \cdot \frac{\partial^2 pl_i(v, \theta, a)}{\partial v_k \partial \theta_l} \\ \frac{\partial^2 f(v, \theta, a)}{\partial v_k \partial \theta_l} &= w_1 \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{ng} 2.bb_i \cdot \left\{ \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial v_k \partial \theta_l} \cdot [p_{d_i} + p_i(v, \theta, a)] + \frac{\partial p_i(v, \theta, a)}{\partial \theta_l} \cdot \frac{\partial p_i(v, \theta, a)}{\partial v_k} \right\} \right. \\ &\left. + aa_i \cdot \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial v_k \partial \theta_l} \right\} + w_2 \cdot \sum_{i=1}^{ng} \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial v_k \partial \theta_l} \end{aligned}$$

## C.3 Derivada magnitude de tensão x magnitude de tensão

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v_k \partial v_l} &= \frac{\partial^2 f(v, \theta, a)}{\partial v_k \partial v_l} + \sum_{i=1}^{nc} \alpha_i \cdot \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial v_k \partial v_l} + \sum_{i=1}^{nc} \beta_i \cdot \frac{\partial^2 q_i(v, \theta, a)}{\partial v_k \partial v_l} + \\ &\sum_{i=1}^{ipgmax} \omega_i^{max} \cdot \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial v_k \partial v_l} + \sum_{i=1}^{ipgmin} \omega_i^{min} \cdot \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial v_k \partial v_l} + \sum_{i=1}^{iqgmax} \rho_i^{max} \cdot \frac{\partial^2 q_i(v, \theta, a)}{\partial v_k \partial v_l} + \\ &\sum_{i=1}^{iqgmin} \rho_i^{min} \cdot \frac{\partial^2 q_i(v, \theta, a)}{\partial v_k \partial v_l} + \sum_{i=1}^{iplmax} \xi_i^{max} \cdot \frac{\partial^2 pl_i(v, \theta, a)}{\partial v_k \partial v_l} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f(v, \theta, a)}{\partial v_k \partial v_l} = w_1 \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{ng} 2 \cdot bb_i \cdot \left\{ \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial v_k \partial v_l} \cdot [p_{d_i} + p_i(v, \theta, a)] + \frac{\partial p_i(v, \theta, a)}{\partial v_l} \cdot \frac{\partial p_i(v, \theta, a)}{\partial v_k} \right\} \right. \\ \left. + aa_i \cdot \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial v_k \partial v_l} \right\} + w_2 \cdot \sum_{i=1}^{ng} \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial v_k \partial v_l}$$

Para o caso em que o índice l for igual ao índice k aparecerá o termo  $2 \cdot w_3 + w_4(1 - c)$  que será adicionado a  $\frac{\partial^2 f(v, \theta, a)}{\partial v_k \partial v_k}$ .

#### C.4 Derivada tap x ângulo

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial a_k \partial \theta_l} = \frac{\partial^2 f(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial \theta_l} + \sum_{i=1}^{nc} \alpha_i \cdot \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial \theta_l} + \sum_{i=1}^{nc} \beta_i \cdot \frac{\partial^2 q_i(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial \theta_l} + \\ \sum_{i=1}^{ipgmax} \omega_i^{max} \cdot \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial \theta_l} + \sum_{i=1}^{ipgmin} \omega_i^{min} \cdot \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial \theta_l} + \sum_{i=1}^{iqgmax} \rho_i^{max} \cdot \frac{\partial^2 q_i(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial \theta_l} + \\ \sum_{i=1}^{iqgmin} \rho_i^{min} \cdot \frac{\partial^2 q_i(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial \theta_l} + \sum_{i=1}^{iplmax} \xi_i^{max} \cdot \frac{\partial^2 p_l(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial \theta_l}$$

$$\frac{\partial^2 f(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial \theta_l} = w_1 \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{ng} 2 \cdot bb_i \cdot \left\{ \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial \theta_l} \cdot [p_{d_i} + p_i(v, \theta, a)] + \frac{\partial p_i(v, \theta, a)}{\partial \theta_l} \cdot \frac{\partial p_i(v, \theta, a)}{\partial a_k} \right\} \right. \\ \left. + aa_i \cdot \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial \theta_l} \right\} + w_2 \cdot \sum_{i=1}^{ng} \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial \theta_l}$$

## C.5 Derivada tap x tap

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial a_k \partial a_l} &= \frac{\partial^2 f(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial a_l} + \sum_{i=1}^{nc} \alpha_i \cdot \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial a_l} + \sum_{i=1}^{nc} \beta_i \cdot \frac{\partial^2 q_i(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial a_l} + \\
&\sum_{i=1}^{ipgmax} \omega_i^{max} \cdot \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial a_l} + \sum_{i=1}^{ipgmin} \omega_i^{min} \cdot \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial a_l} + \sum_{i=1}^{iqgmax} \rho_i^{max} \cdot \frac{\partial^2 q_i(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial a_l} + \\
&\sum_{i=1}^{iqgmin} \rho_i^{min} \cdot \frac{\partial^2 q_i(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial a_l} + \sum_{i=1}^{iplmax} \xi_i^{max} \cdot \frac{\partial^2 p_l(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial a_l} \\
\frac{\partial^2 f(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial a_l} &= w_1 \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{ng} 2.bb_i \cdot \left\{ \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial a_l} \cdot [p_{d_i} + p_i(v, \theta, a)] + \frac{\partial p_i(v, \theta, a)}{\partial a_l} \cdot \frac{\partial p_i(v, \theta, a)}{\partial a_k} \right\} \right. \\
&\left. + a a_i \cdot \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial a_l} \right\} + w_2 \cdot \sum_{i=1}^{ng} \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial a_l}
\end{aligned}$$

Para o caso em que o índice l for igual ao índice k aparecerá o termo  $w_4(1 - c)$  que será adicionado a  $\frac{\partial^2 f(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial a_k}$ .

## C.6 Derivada tap x magnitude de tensão

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial a_k \partial v_l} &= \frac{\partial^2 f(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial v_l} + \sum_{i=1}^{nc} \alpha_i \cdot \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial v_l} + \sum_{i=1}^{nc} \beta_i \cdot \frac{\partial^2 q_i(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial v_l} + \\
&\sum_{i=1}^{ipgmax} \omega_i^{max} \cdot \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial v_l} + \sum_{i=1}^{ipgmin} \omega_i^{min} \cdot \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial v_l} + \sum_{i=1}^{iqgmax} \rho_i^{max} \cdot \frac{\partial^2 q_i(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial v_l} + \\
&\sum_{i=1}^{iqgmin} \rho_i^{min} \cdot \frac{\partial^2 q_i(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial v_l} + \sum_{i=1}^{iplmax} \xi_i^{max} \cdot \frac{\partial^2 p_l(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial v_l}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial v_l} = w_1 \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{ng} 2 \cdot bb_i \cdot \left\{ \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial v_l} \cdot [p_{d_i} + p_i(v, \theta, a)] + \frac{\partial p_i(v, \theta, a)}{\partial v_l} \cdot \frac{\partial p_i(v, \theta, a)}{\partial a_k} \right\} \right. \\ \left. + aa_i \cdot \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial v_l} \right\} + w_2 \cdot \sum_{i=1}^{ng} \frac{\partial^2 p_i(v, \theta, a)}{\partial a_k \partial v_l}$$

### C.7 Derivada magnitude de tensão x compensação shunt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_k \partial b_l} = -2 \cdot \beta_l \cdot v_l - 2 \cdot \rho_l^{max} \cdot v_l^2 - 2 \cdot \rho_l^{min} \cdot v_l$$

### C.8 Derivada compensação shunt x compensação shunt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_k \partial b_l} = 0$$

Para o caso em que o índice l for igual ao índice k a derivada acima será igual ao termo  $w_4(1 - c)$ .