

Marilda Solon Teixeira Bottesi
Engenheira Eletricista
Escola de Engenharia de Lins, 1977

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida por Marilda Solon Teixeira Bottesi, e aprovada pela comissão julgadora no dia 8 de agosto de 1986.

Marilda

ESTUDO DA SENSIBILIDADE DE FILTROS ATIVOS
RC DE 2ª ORDEM USANDO VCVS

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da UNICAMP como requisito parcial para a obtenção do título de "Mestre em Engenharia Elétrica".

Orientador: Prof. Dr. Helio Drago Romano

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica
Laboratório de Eletrônica e Dispositivos

Julho de 1986

UNICAMP

Aos meus pais Paulo e Edna.

Ao meu marido Carlos.

Aos meus filhos Pedro e Beatriz.

Agradecimentos:

Ao Professor Helio Drago Romano pelo trabalho de orientação,

Aos colegas, Oséas, Kretly, José Antonio, Álvaro e Carlos pelas inúmeras e produtivas discussões,

À Irene e Dodô pelos trabalhos de datilografia e desenhos,

A todos aqueles que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Este trabalho contou com o apoio financeiro do CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos inicialmente as figuras de Sensibilidade através das quais foi possível calcular a sensibilidade dos filtros ativos RC de 2ª Ordem sob vários aspectos. Para tanto foram mostradas as principais estruturas elementares de filtros ativos e os elementos ativos que as compõem. A partir dessa visão global, particularizamos o estudo para filtros com fontes controladas (VCVS), mostrando como sintetizar estruturas elementares através das Funções de Transferência e de Driving-Point e finalmente calculando as Figuras de Sensibilidade para cada estrutura apresentada. Os resultados obtidos foram colocados em uma tabela de maneira que um projetista por exemplo, possa calcular a sensibilidade de um determinado filtro apenas por substituição dos valores de seus parâmetros.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	01
1. FIGURAS DE SENSIBILIDADE	02
1.1. Sensibilidade da Função	03
1.2. Sensibilidade do Fator de Qualidade e da Frequência ...	06
1.3. Sensibilidade da Raiz	11
1.4. Sensibilidade do Ganho e Sensibilidade da Fase	15
1.5. Sensibilidade do Polinômio	17
1.6. Sensibilidade do Coeficiente	18
2. FILTROS ATIVOS DE 2ª ORDEM	19
2.1. Principais Elementos Ativos Utilizados em Filtro de 2ª Ordem	19
2.2. Principais Filtros Elementares Passa Baixas de 2ª Ordem	31
2.3. Principais Filtros Elementares Passa Altas de 2ª Ordem	47
2.4. Principais Filtros Elementares Passa Faixa de 2ª Ordem	47
2.5. Filtros Elementares de 2ª Ordem com um Zero de Transmissão	49
3. SÍNTESE DE FILTROS ATIVOS RC DE 2ª ORDEM USANDO VCVSS	58
3.1. Síntese de Funções de Transferência	58
3.2. Síntese de Funções de Driving-Point	88
4. SENSIBILIDADE	94
4.1. Sensibilidade de Filtros Passa Baixas de Ganho Positivo	94
4.2. Sensibilidade de Filtros Passa Altas de Ganho Positivo	101
4.3. Sensibilidade de Filtros Passa Faixa de Ganho Positivo	108

4.4. Sensibilidade de Filtros Passa Baixas de Ganho	
Negativo	113
4.5. Sensibilidade de Filtros Passa Altas de Ganho	
Negativo	118
4.6. Sensibilidade de Filtro Passa Faixa de Ganho	
Negativo	124

INTRODUÇÃO

Um filtro é, de maneira geral, um circuito que proporciona uma modificação da amplitude e da fase das componentes do espectro de frequências de um sinal.

Essa modificação deve ser bem conhecida de maneira que o projetista tenha total controle sobre ela. Para tanto, a estrutura do filtro deve proporcionar estabilidade e confiabilidade da resposta, ou seja, deve-se conhecer o comportamento de cada parâmetro do filtro e assim poder prever o efeito, sobre a resposta, de variações em cada um desses parâmetros.

Em particular, os filtros ativos têm a característica de ter estabilidade limitada em relação à frequência. Com o aumento da frequência, o comportamento do elemento ativo do filtro muda consideravelmente, assim o grau de sensibilidade do filtro depende, entre outros fatores, da faixa de frequência de trabalho.

Portanto é fundamental um estudo detalhado da "sensibili-
dade" do filtro em relação a variações em seus parâmetros.

Este trabalho se propõe a fazer o estudo da sensibilidade, e mais, de colocá-lo de maneira a facilitar a consulta por estudantes ou projetistas de filtros ativos.

É um trabalho montado de maneira que possa ser continuado para filtros que utilizam outros elementos ativos que não as Voltage Controlled Voltage Sources (VCVS) aqui abordadas.

Todos os filtros analisados possuem estruturas elementares de 2ª Ordem que, associados em cascata, podem resultar em filtros de complexidade bem maior.

CAPÍTULO I

FIGURAS DE SENSIBILIDADE

Os sistemas ativos e passivos são sensíveis a pequenas alterações em seus parâmetros, como por exemplo, no ganho de um amplificador, no valor de um capacitor ou resistor, etc. As causas dessas alterações podem ser tanto internas quanto externas. Uma pequena variação de temperatura pode acarretar grandes variações nos parâmetros de um sistema e conseqüentemente, grandes variações em sua resposta. Portanto é fundamental conhecer a natureza da instabilidade e qual pode ser sua influência na resposta do sistema.

Podemos estimar o efeito de variações nos parâmetros de sistemas através das "Figuras de Sensibilidade", que são:

- Sensibilidade da Função ($S_K^T(S)$) - é a sensibilidade da função de sistema $T(S,K)$ quando ocorrer uma variação no parâmetro K do sistema.
- Sensibilidade do fator de qualidade $Q(S_K^Q)$ e Sensibilidade da frequência ω_n ($S_K^{\omega_n}$) - é a sensibilidade do par de polos Q de um sistema à variação num parâmetro K do sistema; e a sensibilidade da frequência ω_n em relação a uma variação do parâmetro K .
- Sensibilidade de polos e zeros (δ_K^{Si}) - é a sensibilidade dos polos (ou zeros) da função de transferência do sistema, quando ocorrer uma variação no parâmetro K .
- Sensibilidade do ganho ($\delta_K^{\alpha(\omega)}$) e Sensibilidade da fase ($\delta_K^{\beta(\omega)}$) - são sensibilidades da função ganho e da função fase em relação a uma variação no parâmetro K do sistema.
- Sensibilidade do Polinômio ($S_K^Q(S,K)$) - é a sensibilidade do polinômio "numerador" ou "denominador" da função de transferência do sistema em relação à variação do parâmetro K .
- Sensibilidade do coeficiente ($\hat{S}_K^{\beta i}$) - é a sensibilidade dos coeficientes dos polinômios numerador e denominador da função de sistema em relação a variação do parâmetro K .

Nesse capítulo serão analisadas todas as figuras de sensibilidade, suas definições, suas influências na resposta do sistema e a forma de calculá-las.

1.1. Sensibilidade da Função $S_K^T(S,K)$.

Normalmente, define-se a sensibilidade da função de sistema devido a uma variação incremental de um parâmetro simples por:

$$S_K^T(S,K) \triangleq \frac{d(\ln T(S,K))}{d(\ln K)} = \frac{dT(S,K)/T(S,K)}{dK/K} \quad (1.1a)$$

$$S_K^T(S,K) \triangleq \frac{K}{T(S,K)} \frac{dT(S,K)}{dK} \quad (1.1b)$$

As equações (1.1a) e (1.1b) indicam que $S_K^T(S,K)$ é igual a porcentagem de variação em $T(S,K)$ dividida pela porcentagem de variação em K , assumindo que todas as variações são incrementais. Por exemplo, se $S_K^T(S,K) = 2$, então 1% de variação no parâmetro K acarretará 2% de variação em $T(S,K)$. Essa variação será a maior variação que se manifestará na curva de resposta do sistema. É evidente que, para que um sistema seja estável, $S_K^T(S,K)$ deve ser o menor possível e, idealmente, igual a zero.

Para calcular a função sensibilidade é conveniente escrevê-la na forma bilinear [1].

$$S_K^T(S,K) = \frac{D_1(S)}{D(S,K)} - \frac{N_1(S)}{N(S,K)} = K \left[\frac{N_2(S)}{N(S,K)} - \frac{D_2(S)}{D(S,K)} \right]$$

onde

(1.2)

$$D_1(S) = D(S,K) - KD_2(S)$$

$$N_1(S) = N(S,K) - KN_2(S)$$

e para $S = j\omega$,

$$S_K^T(j\omega) = \frac{D_1(j\omega)}{D(j\omega, K)} - \frac{N_1(j\omega)}{N(j\omega, K)} = K \left[\frac{D_2(j\omega)}{D(j\omega, K)} - \frac{N_1(j\omega)}{N(j\omega, K)} \right] \quad (1.3)$$

Exemplo 1.1 - A razão de transferência de tensão do amplificador inversor da figura 1.1 é:

$$T(S) = \frac{-\mu R_2}{R_1 + R_2 + \mu R_1}$$

Analisando $T(S)$, pode-se observar que:

$$N_1 = 0, \quad N_2 = -R_2, \quad D_1 = R_1 + R_2 \quad \text{e} \quad D_2 = R_1 \quad (1.5)$$

Substituindo (1.5) em (1.2), tem-se:

$$S_\mu^T(S) = \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + \mu R_1} \quad (1.6)$$

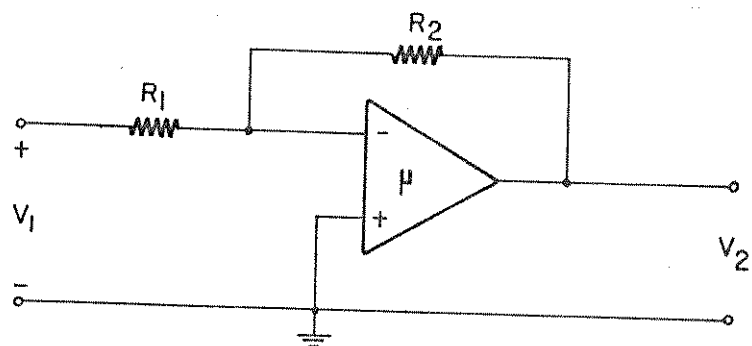
Para calcular $S_{R_1}^T(S)$, tem-se:

$$N_1 = -\mu R_2, \quad N_2 = 0, \quad D_1 = R_2 \quad \text{e} \quad D_2 = \mu + 1$$

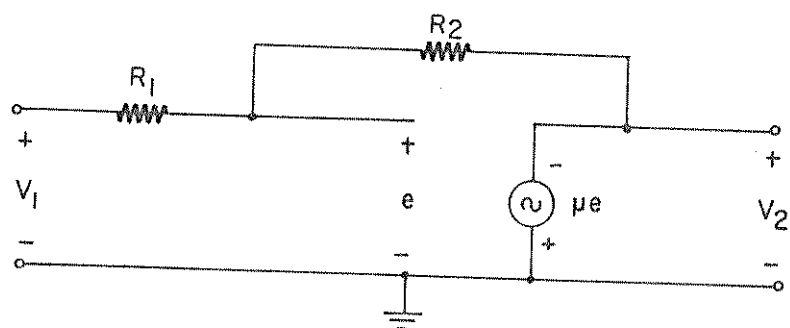
então, pela equação (1.2),

$$S_{R_1}^T(S) = R_1 \left[\frac{-(\mu + 1)}{R_1 + R_2 + \mu R_1} \right]$$

$$S_{R_1}^T(S) = \frac{-(\mu + 1) R_1}{R_1 + R_2 + \mu R_1} \quad (1.7)$$



(a)



(b)

Figura 1.1 - Amplificador inversor de tensão.

Para calcular $S_{R_2}^{T(S)}$, tem-se:

$$N_1 = 0, \quad N_2 = -\mu, \quad D_1 = (\mu + 1)R_1, \quad D_2 = 1$$

e, portanto,

$$S_{R_2}^{T(S)} = \frac{(\mu + 1)R_1}{R_1 + R_2 + \mu R_1} \quad (1.8)$$

$$\text{assim, } S_{R_1}^{T(S)} = -S_{R_2}^{T(S)} \quad (1.9)$$

O gráfico da figura 1.2, que é a variação das sensibilidades $S_{\mu}^{T(S)}$, $S_{R_1}^{T(S)}$ e $S_{R_2}^{T(S)}$ em relação a μ , para $R_1 = R_2$, mostra que $|S_{R_1}^{T(S)}|$ é 1 (valor máximo) quando μ tende ao infinito.

Analisando a equação (1.6), pode-se observar que, se o amplificador tem um ganho muito grande, a razão de transferência da tensão torna-se praticamente insensível em relação a variação do ganho μ do amplificador. Assim, se $\mu \rightarrow \infty$, a razão de transferência de tensão tende a $-R_2/R_1$, ou seja, depende somente dos valores dos resistores.

As equações (1.7) e (1.8) nos mostram que o mínimo valor de $|S_{R_1}^{T(S)}|$ é 0.5 (quando $\mu = 0$) então $|S_{R_1}^{T(S)}| = 1$ significa que 0.5% de variação nos valores dos resistores acarretam 1% de variação na razão de transferência de tensão, no pior caso, isto é, quando o ganho do amplificador é infinitamente grande.

1.2. Sensibilidade do Fator de Qualidade $Q(S_K^Q)$ e Sensibilidade da Frequência ω_0 ($S_K^{\omega_0}$)

A variação de um parâmetro qualquer K de um sistema, acarreta uma dupla variação na sua curva de resposta, conforme figura 1.3.

A primeira variação, é a da frequência f_m , para a qual a amplitude é máxima. Essa variação é geralmente pequena e in-

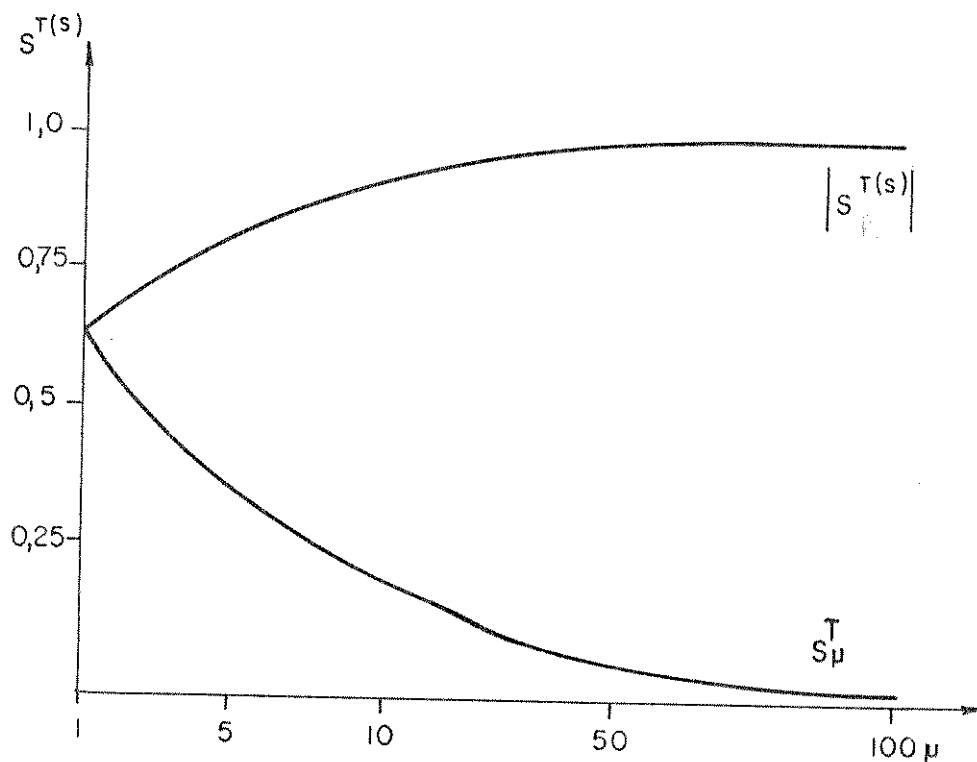


Figura 1.2 - Sensibilidade para $R_1 = R_2$.

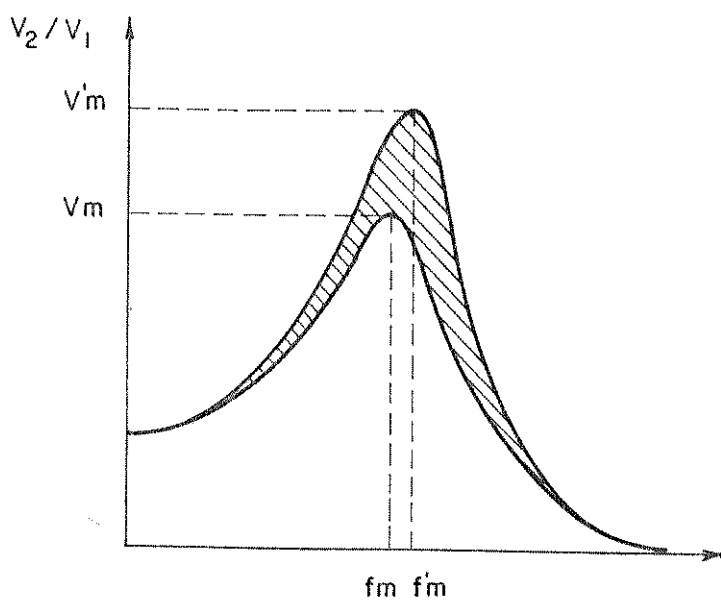


Figura 1.3 - Deformação da curva de resposta de um filtro passa baixas de 2ª ordem.

flui pouco sobre a forma da curva de resposta total.

A segunda, é a da amplitude V_m , cuja importância aumenta, conforme ela se distancia do máximo da curva original. Portanto, quando o coeficiente de sobretensão é alto, a menor variação pode originar grandes modificações na amplitude máxima.



UNICAMP

Faculdade de Engenharia de Campinas
Comissão de Pós - Graduação

liando a variação
para a qual a am

Modelo do parecer final dado pelo Orientador na
página de rosto, após a defesa.

de polos $Q = \frac{\sqrt{\beta_0}}{\beta_1}$
xima como

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA PORE APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM//..../1984.

), em relação a
la como: |2|

Assinatura do Orientador

(1.10)

olo frequência

ORR: Este parecer deverá ser feito manuscrito.

(1.11)


VERA LUCIA DE F. PONTES
Secretária CPG/FEC
UNICAMP

filtro passa

Universidade Estadual de Campinas
Caixa Postal 1170
13100 Campinas SP - Brasil

Telefone PABX (0192) 39-1301
Telex (019) 1150

dade do filtro

$$V_1 = R_1 + sL + \frac{1}{G_2 + sC} I$$

$$V_2 = \frac{1}{G_2 + sC} \cdot I$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1/LC}{s^2 + \left(\frac{R_1}{L} + \frac{G_2}{C}\right)s + \frac{R_1 G_2 + 1}{LC}} \quad (1.12)$$

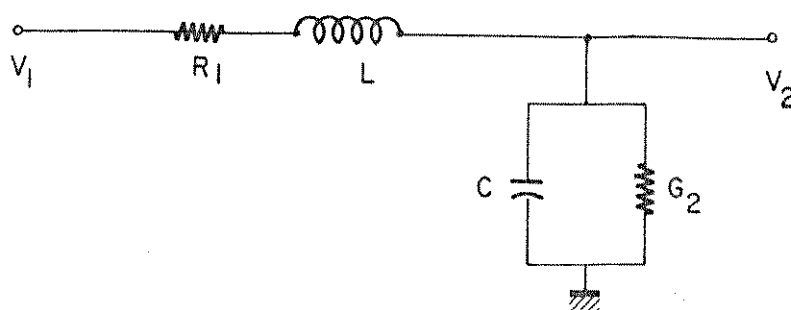


Figura 1.4 - Filtro passa baixas de 2ª ordem.

À partir da equação (1.12), identificamos os coeficientes do denominador:

$$\beta_1 = \frac{R_1}{L} + \frac{G_2}{C} \quad \text{e} \quad \beta_0 = \frac{R_1 G_2 + 1}{LC}$$

assim:

$$Q = \frac{\sqrt{LC(R_1 G_2 + 1)}}{LG_2 + R_1 C} \quad (1.13a)$$

$$\text{e } \omega_0 = \sqrt{\frac{R_1 G_2 + 1}{LC}} \quad (1.13b)$$

Substituindo (1.13a) em (1.10) obtemos as sensibilidades de Q para variações em cada um dos parâmetros do filtro em questão.

$$S_L^Q = -S_C^Q = \frac{LdQ}{QdL} = \frac{L(LG_2 + R_1C)}{\sqrt{LC(R_1G_2 + 1)}} \frac{dQ}{dL}$$

$$S_L^Q = \frac{L(LG_2 + R_1C)}{\sqrt{LC(R_1G_2 + 1)}} \cdot \left[\frac{(LG_2 + R_1C)C(R_1G_2 + 1)}{2\sqrt{LC(R_1G_2 + 1)}} - \sqrt{LC(R_1G_2 + 1)} \cdot G_2 \right] \cdot \frac{1}{(LG_2 + R_1C)^2}$$

$$S_L^Q = \frac{R_1C - LG_2}{2(LG_2 + R_1C)} < \frac{1}{2} \quad (1.14a)$$

de maneira análoga,

$$S_{R_1}^Q = \frac{R_1dQ}{QdR_1}$$

$$S_{R_1}^Q = \frac{1}{2} \left| \frac{R_1G_2}{R_1G_2 + 1} - \frac{2R_1C}{LG_2 + R_1C} \right| < 1 \quad (1.14b)$$

e

$$S_{G_2}^Q = \frac{G_2dQ}{QdG_2}$$

$$S_{G_2}^Q = \frac{1}{2} \left| \frac{R_1G_2}{R_1G_2 + 1} - \frac{2LG_2}{LG_2 + R_1C} \right| < 1 \quad (1.14c)$$

(1.11) Para o polo frequência temos, à partir da equação

$$S_L^{\omega_0} = S_C^{\omega_0} = \frac{Ld\omega_0}{\omega_0dL}$$

$$S_L^{\omega_0} = \frac{L}{\sqrt{\frac{R_1 G_2 + 1}{LC}}} \cdot \sqrt{\frac{R_1 G_2 + 1}{C}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{L^3}} = \sqrt{L^3} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{L^3}}$$

$$S_L^{\omega_0} = S_C^{\omega_0} = -\frac{1}{2} \quad (1.15a)$$

$$S_{R_1}^{\omega_0} = S_{G_2}^{\omega_0} = \frac{R_1 d\omega_n}{\omega_n dR_1}$$

$$S_{R_1}^{\omega_0} = \frac{R_1}{\sqrt{\frac{R_1 G_2 + 1}{LC}}} \cdot \frac{G_2}{2LC} \sqrt{\frac{LC}{R_1 G_2 + 1}}$$

$$S_{R_1}^{\omega_0} = S_{G_2}^{\omega_0} = \frac{R_1 G_2}{2(R_1 G_2 + 1)} < 1/2 \quad (1.15b)$$

Analisando as equações (1.14) e (1.15) observamos que, independentemente dos valores dos elementos do sistema, as figuras da sensibilidade são sempre muito pequenas.

1.3. Sensibilidade da Raiz $\delta_K^{S_i}$

Em algumas situações, um ou mais polos ou podem ser de interesse na análise de um sistema e, portanto, a medida de seus deslocamentos devido a variação em um determinado parâmetro do sistema será bastante útil.

Assim, a "Sensibilidade da Raiz" (polo ou zero) do polinômio $T(S,K)$ é a estimativa da variação na localização dos polos ou zeros e é dada por:

$$\delta_K^{S_i} = \frac{dS_i}{dK/K} \quad (1.16)$$

onde $S = S_i$ é a raiz do polinômio $T(S, K)$.

Se $S = S_i$ é um zero de $T(S, K)$, então $\delta_K^{S_i}$ é a sensibilidade da raiz de $N(S, K)$ e, analogamente, se $S = S_i$ é um polo de $T(S, K)$, então $\delta_K^{S_i}$ define a sensibilidade da raiz de $D(S, K)$, onde $N(S, K)$ é o numerador de $T(S, K)$ e $D(S, K)$ é o denominador de $T(S, K)$.

$\delta_K^{S_i}$ é geralmente um número complexo. Nesse caso:

$$\delta_K^{S_i*} = (\delta_K^{S_i})^* \quad (1.17)$$

Fazendo $S_i = \sigma_i + j\omega_i$, podemos escrever, para K real, que:

$$\delta_K^{S_i} = \delta_K^{\sigma_i} + j \delta_K^{\omega_i} \quad (1.18)$$

onde

$$\delta_K^{\sigma_i} = \frac{d\sigma_i}{dK/K} \quad \text{e} \quad \delta_K^{\omega_i} = \frac{d\omega_i}{dK/K}$$

A expressão para cálculo de $\delta_K^{S_i}$ é baseada no fato de podermos escrever os polinômios $N(S)$ e $D(S)$ como: $|1|$

$$N(S) = N_1(S) + KN_2(S) \quad (1.19)$$

$$D(S) = D_1(S) + KD_2(S)$$

onde os polinômios de índices (1) e (2) são independentes de K .

Se $S = S_i$ é um zero simples de $D(S)$, então

$$\delta_K^{S_i} = \left. \frac{(S - S_i) D_1(S)}{D(S)} \right|_{S=S_i} \quad (1.20a)$$

$$\delta_{K}^{S_i} = \left. \frac{-K(S-S_i)D_2(S)}{D(S)} \right|_{S=S_i} \quad (1.20b)$$

Exemplo 1.3 - Consideremos o filtro da figura 1.5 no qual o valor nominal de K é 2 e cuja razão de transferência de tensão é

$$t_A(S) = \frac{3K}{S^2 + (5 - \frac{3}{2}K)S + 3}$$

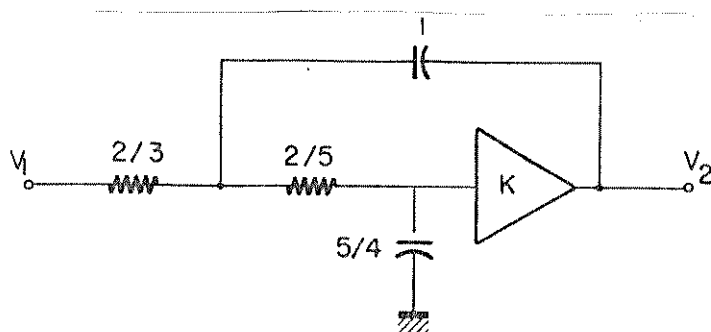


Figura 1.5 - Filtro passa baixas de ganho 2.

A partir da equação (1.19) identificamos:

$$D(S) = (S^2 + 5S + 3) - K \frac{3}{2} S = S^2 + 2S + 3$$

assim:

$$D_1(S) = S^2 + 5S + 3, \quad D_2(S) = \frac{3}{2}S$$

e

$$S = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} \quad S_1 = -1 + j\sqrt{2} \quad \text{e} \quad S_1^* = -1 - j\sqrt{2}$$

usando (1.20a) obtemos:

$$\delta_{K}^{S_i} = \left. \frac{(S + 1 - j\sqrt{2})(S^2 + 5S + 3)}{S^2 + 2S + 3} \right|_{S=-1+j\sqrt{2}}$$

$$\delta_K^{S_i} = \frac{-3 + 3j\sqrt{2}}{2j\sqrt{2}} = 1.5 \frac{-1.5}{j1.414}$$

Convenientemente, podemos escrever $T(S,K)$ como:

$$T(S,K) = H \cdot \frac{\prod_{i=1}^n (S - Z_i)}{\prod_{j=1}^n (S - p_j)} \quad (1.21)$$

onde Z_i e p_j são zeros e polos de $T(S,K)$ respectivamente e H , Z_i e p_j são funções implícitas de K .

Assumindo que Z_i e p_j são zeros e polos simples e aplicando o logarítmo em ambos os membros de (1.21), temos: [3]

$$\ln(T(S,K)) = \ln H + \sum_{i=1}^m \ln(S - Z_i) - \sum_{j=1}^n \ln(S - p_j)$$

e

$$\frac{dT(S,K)}{T(S,K)} = dK \left[\frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial K} - \sum_{i=1}^m \frac{\partial Z_i / \partial K}{(S - Z_i)} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial p_j / \partial K}{(S - p_j)} \right]$$

assim:

$$S_K^{T(S,K)} = S_K^H - \sum_{i=1}^m \frac{\delta_K^{Z_i}}{(S - Z_i)} + \sum_{j=1}^n \frac{\delta_K^{p_j}}{(S - p_j)} \quad (1.22)$$

onde

$$\delta_K^{Z_i} = \frac{dz_i}{dK/K}$$

$$\delta_K^{p_j} = \frac{dp_j}{dK/K}$$

e

$$S_K^H = \frac{1}{H} \delta_K^H = \frac{dH/H}{dK/K}$$

$\delta_K^{z_i}$ $\delta_K^{p_j}$ fornecem a medida da variação na localização dos zeros e polos no plano S , causada pela variação num elemento K do sistema e podemos então interpretá-los como definindo funções para sensibilidade de polos e zeros.

Com as definições acima e tendo em mente que estamos considerando apenas polos e zeros simples, a sensibilidade total da função de transmissão do sistema, para variações diferencialmente pequenas do elemento K , dada pela operação (1.22) pode ser interpretada como uma expansão em frações parciais em que todas as frequências críticas do sistema tornam-se polos e os resíduos são as sensibilidades dos polos e zeros. Assim, desde que polos e zeros representam características de transmissão, a sensibilidade de polos e zeros determinam a sensibilidade de transmissão do sistema (acrescentando a constante determinada pela sensibilidade do multiplicador H , que geralmente é de pequena importância).

1.4. Sensibilidade do Ganho $\delta_K^{\alpha(\omega)}$ e Sensibilidade da Fase $\delta_K^{\beta(\omega)}$

A "Função Sensibilidade" está relacionada com a variação na função de sistema $T(S)$, como um todo. Ocasionalmente, torna-se útil analisar partes dessa variação. No caso de entradas senoidais, pode-se relacionar variações de $T(j\omega)$ com variações do parâmetro K .

Dessa maneira, a partir da equação (1.1a),

$$S_K^{T(j\omega)} = \frac{d(\ln T(j\omega))}{d(\ln K)} = \frac{K}{T(j\omega)} \cdot \frac{dT(j\omega)}{dK} \quad (1.23)$$

mas, sabemos que:

$$T(j\omega) = |T(j\omega)| e^{j \arg T(j\omega)} \quad (1.24)$$

e, aplicando o logaritmo em ambos os membros de (1.24), temos:

$$\ln T(j\omega) = \ln |T(j\omega)| + j \arg T(j\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega) \quad (1.25)$$

onde:

$\alpha(\omega)$ é a função ganho e

$\beta(\omega)$ é a função fase.

Define-se "Sensibilidade do Ganho" $\delta_K^{\alpha(\omega)}$ e "Sensibilidade da Fase" $\delta_K^{\beta(\omega)}$, como:

$$\delta_K^{\alpha(\omega)} \triangleq \frac{d\alpha(\omega)}{dK/K} \quad (1.26)$$

$$\delta_K^{\beta(\omega)} \triangleq \frac{d\beta(\omega)}{dK/K} \quad (1.27)$$

Essas figuras de sensibilidade representam a parte real e a parte imaginária da Função Sensibilidade $S_K^T(j\omega)$.

A partir das equações (1.23) e (1.25) temos:

$$S_K^T(j\omega) = \frac{d[\alpha(\omega) + j\beta(\omega)]}{dK/K} = \frac{d\alpha(\omega)}{dK/K} + \frac{j d\beta(\omega)}{dK/K} \quad (1.28)$$

Comparando a equação (1.28) com as equações (1.26) e (1.27), e assumindo K real, podemos escrever que:

$$\delta_K^\alpha(\omega) = \operatorname{Re} S_K^T(j\omega) \quad \text{e} \quad \delta_K^\beta(\omega) = \operatorname{Im} S_K^T(j\omega)$$

(1.29a)
(1.29b)

e, portanto,

$$\operatorname{Re} S_K^R(j\omega) = E_v \left[S_K^T(S) \right] \Big|_{S=j\omega}$$

$$\operatorname{Im} S_K^T(j\omega) = \frac{1}{j} \operatorname{od} \left[S_K^T(S) \right] \Big|_{S=j\omega}$$

assim,

$$\delta_K^\alpha(\omega) = S_K^{|T(j\omega)|} \quad (1.30a)$$

e

$$\delta_K^\beta(\omega) = S_K^{\exp.\beta(\omega)}, \text{ ambas funções de } \omega \quad (1.30b)$$

1.5. SENSIBILIDADE DO POLINÔMIO $S_K^P(S, K)$

Em muitas aplicações é interessante analisar a performance do sistema sobre uma banda específica de frequência. O polinômio denominador da Função de Transferência de filtros, normalmente determina a banda passante da resposta e em alguns casos, o polinômio numerador determina o comportamento do sistema em torno de frequências características (Filtro Notch, por exemplo).

Torna-se então necessário analisar a sensibilidade do polinômio numerador ou denominador às variações nos parâmetros de

sistema.

Define-se "Polinômio Sensibilidade" de um polinômio $P(S,K)$ em relação a uma variação do parâmetro K como:

$$S_K^P(S,K) \triangleq \frac{d[\ln P(S,K)]}{d(\ln K)} \quad (1.31)$$

e, para entradas senoidais,

$$S_K^P(j\omega, K) \triangleq \frac{d[\ln P(j\omega, K)]}{d(\ln K)} = \frac{dP(j\omega, K) / (P(j\omega, K))}{dK/K} \quad (1.32)$$

1.6. Sensibilidade do Coeficiente ($\hat{S}_K^{\beta i}$)

Os coeficiente dos polinômio numerador $N(S)$ e denominador $D(S)$ das funções de sistemas $T(S,K)$, são funções implícitas do parâmetro variável K . Assim, a estimativa da variação desses coeficientes devido a uma variação no parâmetro K é a figura de sensibilidade $\hat{S}_K^{\beta i}$.

Seja:

$$D(S,K) = \sum_{i=0}^n \beta_i S^i \quad (1.33)$$

o polinômio denominador da função de sistema analisada.

A "Sensibilidade do Coeficiente" pode então ser definido como:

$$\hat{S}_K^{\beta i} \triangleq \frac{d(\ln \beta_i)}{d \ln K} = \frac{K d \beta_i}{\beta_i dK} \quad (1.34)$$

A Sensibilidade do Coeficiente não é uma quantidade fisicamente mensurável, porém pode ser usada para calcular ou minimizar outras figuras de sensibilidade.

CAPÍTULO II

FILTROS ATIVOS DE 2ª ORDEM

Neste capítulo serão estudados os filtros ativos de 2ª ordem combinados com resistores e capacitores, sua função de transferência e os elementos ativos que podem ser utilizados em sua construção. Serão analisados alguns circuitos elementares de 2ª ordem contendo os principais elementos ativos, porém cada circuito elementar terá apenas um elemento ativo combinado com uma rede de resistores e capacitores. Para cada circuito elementar, será obtida sua função de transferência e os parâmetros característicos Q e ω_0 .

2.1. Principais Elementos Ativos Utilizados em Filtros de 2ª Ordem

- Amplificadores Operacionais

O amplificador Operacional ideal é um quadripolo ativo que possui impedância de entrada infinita, impedância de saída nula e ganho infinito.

Seu símbolo está representado na figura 2.1.

Se a tensão de saída de um amplificador operacional tem um valor finito, o que sempre ocorre na prática, sua tensão de entrada é nula, já que seu ganho é infinito.

Este circuito é muito utilizado, visto que as características de sua realização prática se aproximam muito das do circuito ideal. Por exemplo, existem amplificadores operacionais com impedância de entrada de $10^{11} \Omega$, impedância de saída menor que 100Ω e ganho em baixas frequências de 10^6 ou seja 120 dB que são características que se aproximam muito das características ideais.

O grande problema dos amplificadores operacionais é que seu ganho diminui rapidamente com a frequência. A figura 2.2 representa a curva de resposta de um amplificador operacional em função da frequência; nela podemos observar que o ganho na origem é de 100 dB, ou seja, 100.000, porém em 1 KHz é de 1000 e em 10 KHz é de apenas 100.

Assim, para frequências superiores a 10^4 Hz o emprego do amplificador operacional deixa muito a desejar, porém nesse campo de frequências os filtros ativos são pouco utilizados.

- Conversores de Impedância Negativa (NIC)

São elementos ativos que tem a propriedade de apresentar uma impedância de entrada com sinal contrário ao da impedância de carga, isto é,

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = -K \cdot Z_2 \quad \text{com} \quad K > 0$$

A matriz de um NIC é:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$\text{Com } K = \frac{K_1}{K_2} = \text{constante.}$$

Se K_1 e K_2 são positivos o sistema é um conversor de impedância negativa com inversão de corrente (CNIC).

Se K_1 e K_2 são negativos, o sistema é um NIC com inversão de tensão (VNIC).

O símbolo de um NIC está representado na figura 2.3.

Os principais esquemas de realização prática de NICs utilizam amplificadores operacionais como elemento básico, visto

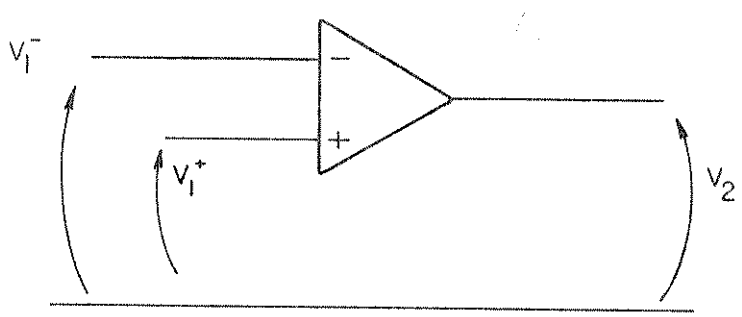


Fig. 2.1 - Amplificador Operacional.

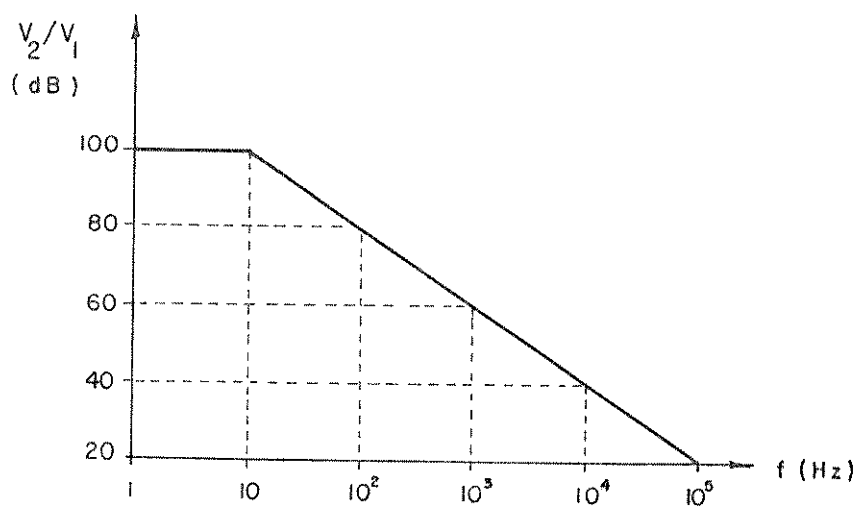


Fig. 2.2 - Curva de resposta em amplitude de um Amplificador Operacional.

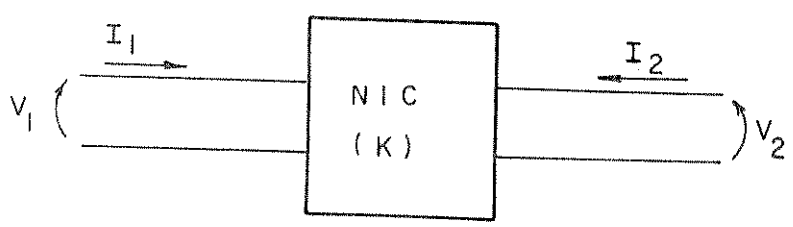


Fig. 2.3 - Conversor de Impedância Negativa.

que, a realização com transistores apresenta dificuldades na polarização.

Em um conversor de impedância negativa com inversão de corrente, a tensão de entrada é igual à tensão de saída e a corrente de saída é oposta à corrente de entrada através do fator de conversão K .

A figura 2.4 representa um esquema composto por um amplificador operacional e dois resistores R_1 e R_2 . Nesse caso, pelo teorema da massa virtual temos que:

$$V_1 = V_2 \quad \text{e} \quad v = V_1 - R_1 I_1$$

$$I_2 = \frac{V_1 - v}{R_2} = \frac{R_1}{R_2} I_1$$

$$I_2 = K I_1 \quad \text{para } K = \frac{R_1}{R_2} \quad (2.2)$$

Isso mostra que na realidade há uma inversão de corrente em relação ao sentido adotado convencionalmente.

O esquema apresentado na figura 2.4 tem propriedades que se aproximam bastante das propriedades de um NIC ideal, porém deve-se levar em conta as limitações devido ao comportamento do sistema em altas frequências.

Uma maneira de garantir a estabilidade do NIC é a montagem mostrada na figura 2.5 com

$$R_g \cdot R_2 > R_L \cdot R_1 \quad (2.3)$$

A relação (2.3) está baseada no fato de que, apesar de R_1 introduzir uma realimentação negativa, R_2 introduz uma positiva. Essa realimentação positiva introduzida por R_2 deve ser menor que a introduzida por R_1 . Sendo R_g a resistência do gerador

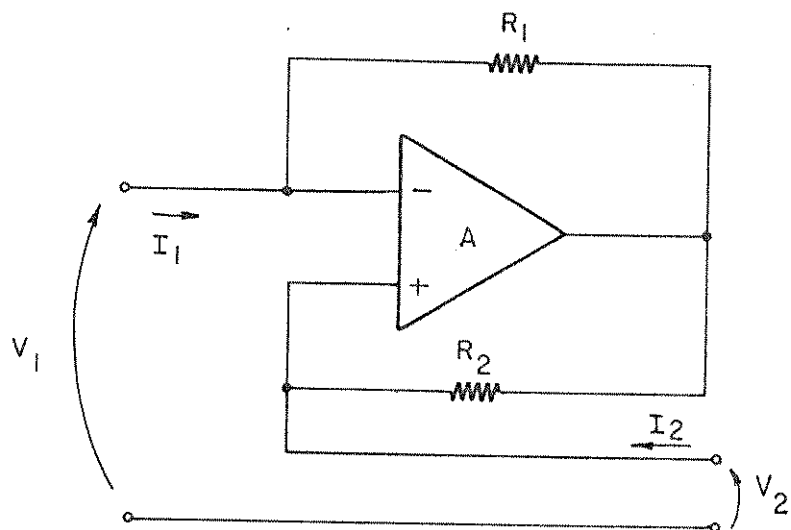


Fig. 2.4 - NIC utilizando um Amplificador Operacional.

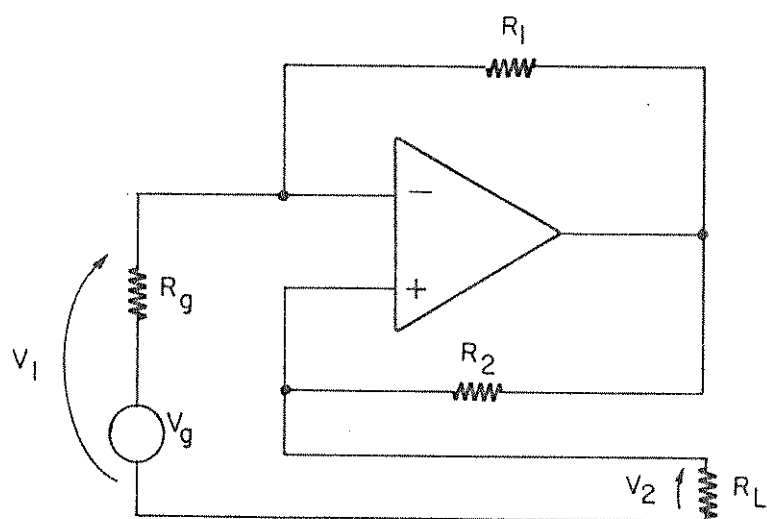


Fig. 2.5 - NIC estável.

24

e R_L a resistência da carga, podemos escrever que:

$$\beta_n = \frac{R_g}{R_g + R_1} \quad \text{e} \quad \beta_p = \frac{R_L}{R_L + R_2} \quad (2.4)$$

onde β_n é a realimentação negativa e β_p a realimentação positiva.

Para que o sistema seja estável, $\beta_n > \beta_p$, portanto

$$\frac{R_g}{R_g + R_1} > \frac{R_L}{R_L + R_2} \quad (2.5)$$

assim $R_g R_2 > R_L R_1$ que é a equação (2.3).

Para $R_1 = R_2$ a equação (2.3) fica:

$$R_g > R_L$$

ou seja, a resistência interna do gerador deve ser maior que a resistência da carga.

- Gyration

É um sistema ativo não recíproco com dois pares de terminais, de baixa perda, que tem a propriedade de apresentar uma impedância de entrada proporcional ao inverso da impedância de carga. É chamado também de inversor de impedância positiva e é definido por:

$$Z_{11} = Z_{22} = 0 \quad Z_{12} = -r_1 \quad \text{e} \quad Z_{21} = r_2 \quad (2.6)$$

onde r_1 e r_2 são números reais positivos e $Z_{12} \neq Z_{21}$.

Com relação às variáveis de entrada e saída, o gyrator pode ser descrito por:

$$V_1 = -r_1 I_2 \quad \text{e} \quad V_2 = r_2 I_1 \quad (2.7)$$

e a potência total é:

$$V_1 I_1 + V_2 I_2 = (r_2 - r_1) I_1 I_2$$

Se $r_1 = r_2$, a potência total é nula e portanto o dispositivo é passivo e o gyrator é ideal. Assim o gyrator ideal é caracterizado pela matriz impedância de circuito aberto.

$$\begin{bmatrix} Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -r \\ r & 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

A representação simbólica de gyrator ativo e do gyrator ideal é dada pela figura 2.6a e 2.6b respectivamente.

Para se realizar um gyrator é necessário o uso de amplificadores operacionais ou NICs.

Como exemplo, a figura 2.7 representa o esquema de um gyrator empregando um NIC.

Neste caso, a impedância de saída do sistema vale

$$Z = r - \frac{(r + Z_L) \cdot r}{Z_L} = \frac{-r^2}{Z_L} \quad (2.9)$$

e, portanto a impedância de entrada é:

$$Z_1 = \frac{K \cdot r^2}{Z_L}$$

obs.: a resistência negativa é obtida através da utilização de um segundo NIC.

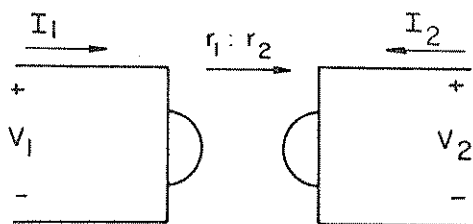


Fig. 2.6a - Gyrator Ativo.

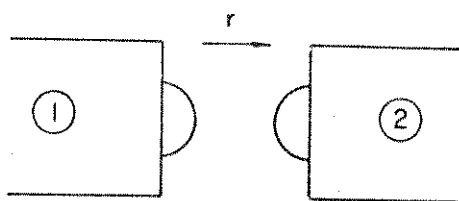


Fig. 2.6b - Gyrator Ideal.

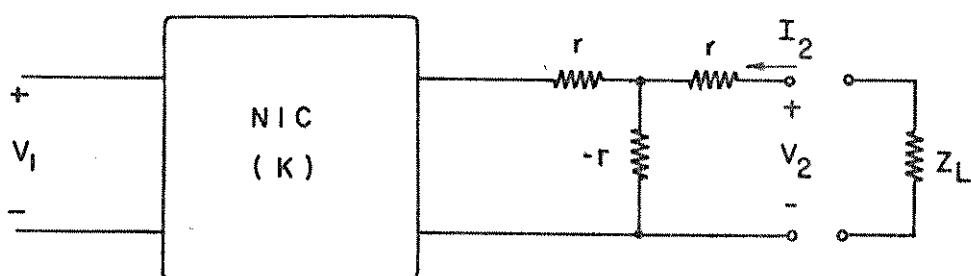


Fig. 2.7 - Gyrator utilizando um NIC.

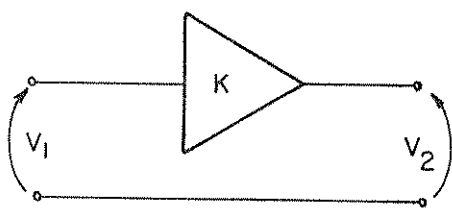


Fig. 2.8a - Fontes controladas à Tensão (VCVS).

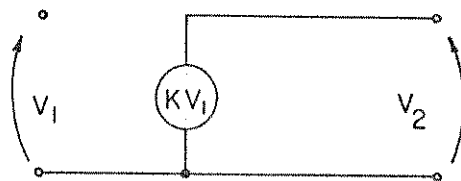


Fig. 2.8b - Fontes controladas à Tensão (VCVS).

- Fontes Controlados à Tensão (VCVS)

São elementos ativos cuja tensão de saída é proporcional à tensão de entrada e se caracterizam pelas seguintes propriedades:

- impedância de entrada infinita.
- impedância de saída nula.
- ganho de tensão V_2/V_1 de valor finito e perfeitamente estável em função da variação de frequência ou de outras variações.

Os símbolos das VCVSs estão representados nas figuras 2.8a e 2.8b.

Uma maneira de realizar uma VCVS de ganho superior à unidade, de maneira que se aproxime muito do elemento ideal é combinar um amplificador operacional com dois resistores conforme figura 2.9.

A impedância de entrada do sistema é a mesma do amplifi-cador operacional e portanto muito elevada.

A partir da figura 2.10 pode-se determinar o ganho da VCVS da figura 2.9 da seguinte forma: |4|

$$V_2 = (R_1 + R_2)i = A.v$$

$$i = \frac{V_1 + v}{R_1}$$

$$Av = \frac{R_1 + R_2}{R_1} V_1 + \frac{R_1 + R_2}{R_1} v \quad (2.10)$$

$$\frac{R_1 + R_2}{R_1} V_1 = v \cdot \left(A - \frac{R_1 + R_2}{R_1} \right) = A.v \left(1 - \frac{R_1 + R_2}{AR_1} \right)$$

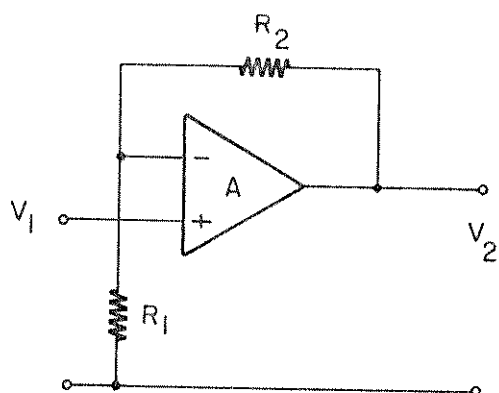


Fig. 2.9 - VCVS utilizando um Amplificador Operacional.

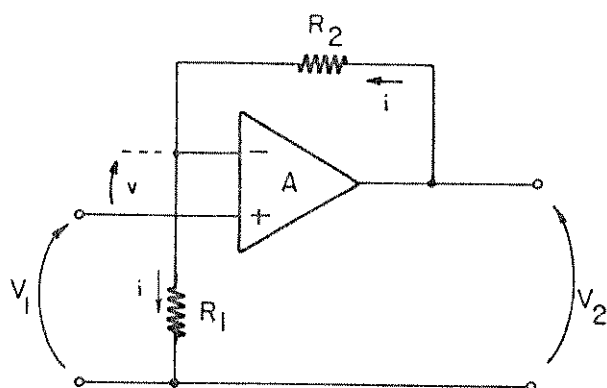


Fig. 2.10 - Determinação do ganho da VCVS.

$$V_2 \left(1 - \frac{R_1 + R_2}{AR_1} \right) = \frac{R_1 + R_2}{R_1} V_1 \quad (2.11)$$

ou seja

$$A = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{R_1 + R_2}{AR_1}}$$

$$A \approx \frac{R_1 + R_2}{R_1} \left(1 + \frac{R_1 + R_2}{AR_1} \right) \quad (2.12)$$

Pela equação (2.12) podemos dizer que A é sempre negativo até que o ganho real seja inferior a $(R_1 + R_2)/R_1$.

Este valor, que é independente de A , é uma aproximação aceitável se $A \gg \frac{R_1 + R_2}{R_1}$, isto é, o ganho do conjunto será muito inferior ao ganho de malha aberta do amplificador operacional.

Nas aplicações práticas esta relação permite avaliar até que ponto a fonte de tensão construída pode ser considerada perfeita.

A fonte em questão (figura 2.9) é de excelente qualidade, prática e portanto muito utilizada na construção de filtros ativos; com ela podemos conseguir ganhos positivos e maiores que 1.

Quando se precisar de VCVSS com ganhos menores que 1 podemos utilizar o sistema da figura 2.11 que possui um atenuador, intercalado entre os dois amplificadores operacionais montados separadamente.

No caso de ganhos negativos, pode-se utilizar amplificadores operacionais montados em cascata conforme a figura 2.12.

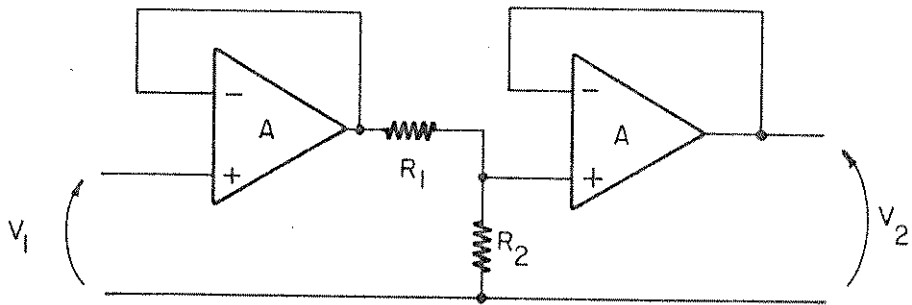


Fig. 2.11 - VCVS com ganho menor que 1.

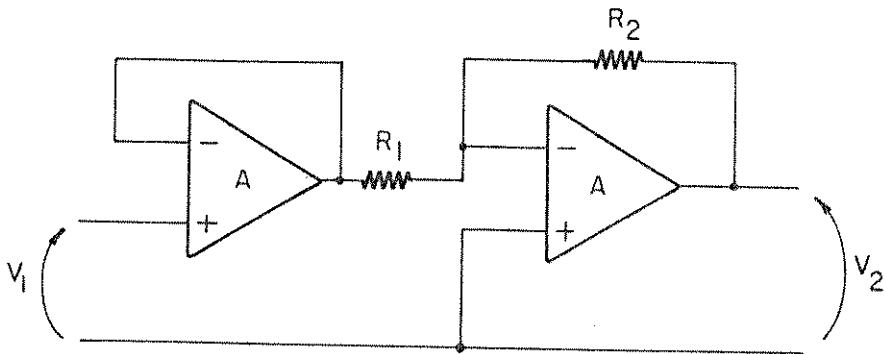


Fig. 2.12 - VCVS com ganho negativo.

Calcula-se o ganho, neste caso, da seguinte maneira:

$$V_2 = R_2 \cdot i = R_2 \left(\frac{V - V_1}{R_1} \right) \quad \text{e} \quad V_2 = Av \quad (2.13)$$

$$V_2 = \frac{R_2}{R_1} \left(\frac{V_2}{A} - V_1 \right)$$

$$V_2 \left(1 - \frac{R_2}{R_1 A} \right) = \frac{-R_2}{R_1} V_1$$

assim, para o ganho, obtemos:

$$\frac{V_2}{V_1} = - \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{\frac{-R_2}{R_1 A}} \approx \frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{R_2}{AR_1} \right) \quad \text{para } A < 0 \quad (2.14)$$

2.2. Principais Filtros Elementares Passa Baixas de 2ª Ordem

Estes circuitos apresentam função de transferência da forma

$$T(s) = \frac{K}{s^2 + \beta_1 s + \beta_0} \quad (2.15)$$

e os parâmetros característicos são:

$$Q = \frac{\sqrt{\beta_0}}{\beta_1} \quad \text{e} \quad \omega_0 = \sqrt{\beta_0}$$

Nesta secção serão mostrados filtros passa baixas de 2ª ordem que utilizam os quatro elementos ativos analisados na secção anterior.

2.2.1. Circuitos que Utilizam o Amplificador Operacional como Elemento Ativo

A figura 2.13 representa o esquema de um circuito combinado com amplificador operacional com dois circuitos RC de dois pares de terminais (2pt).

Estes dois circuitos RC de 2pt estão montados com realimentação negativa simples e podem ser definidos por seus parâmetros admitância.

Sendo nulas a corrente e a tensão de entrada do amplificador operacional, podemos escrever que:

$$i = Y_{21a} \cdot V_1 = -Y_{21b} \cdot V_2$$

$$\text{e assim } \frac{V_2}{V_1} = - \frac{Y_{21b}}{Y_{21a}} \quad (2.16)$$

onde Y_{21a} é a admitância de transferência do 2pt_a e vale (vide figura 2.14):

$$Y_{21a} = \frac{I_2}{V_1} = \frac{-1}{KR(2 + RC_1S)} \quad (2.17)$$

e Y_{21b} é a admitância de transferência do 2pt_b e vale (vide figura 2.15):

$$Y_{21b} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} = Y_{21a} - C_2 \cdot S$$

$$Y_{21b} = - \frac{1 + 2RC_2S + R^2C_1C_2S^2}{R(2 + RC_1S)} \quad (2.18)$$

Substituindo (2.17) e (2.18) em (2.16), obtemos a função de transferência do sistema:

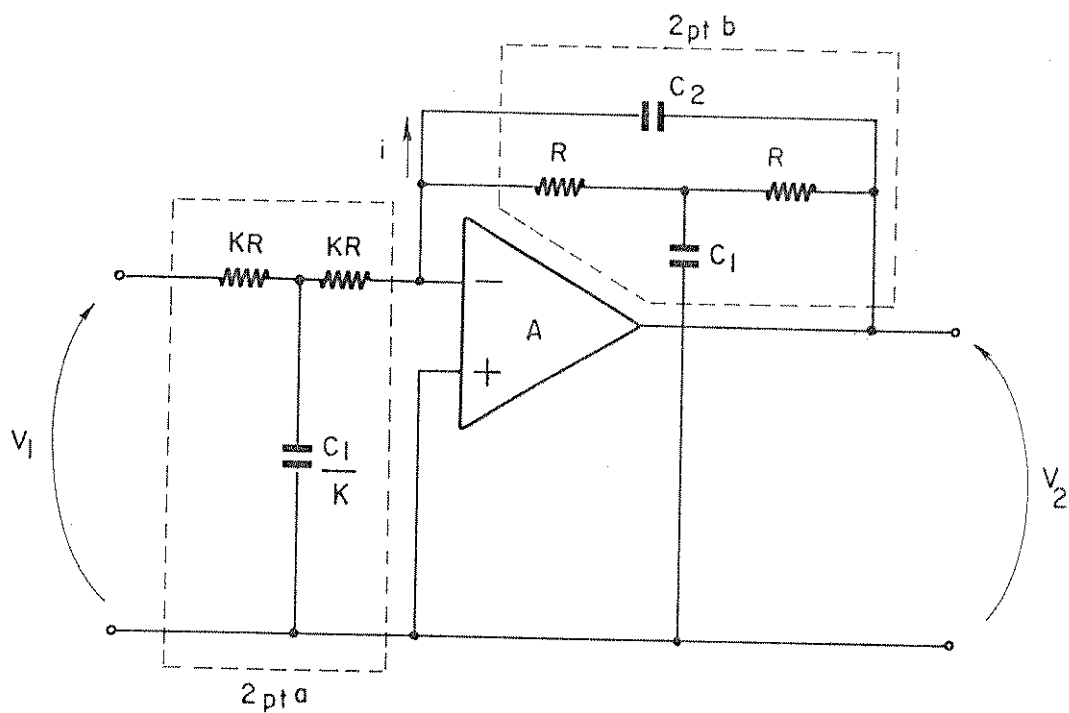


Fig. 2.13 - Filtro P.B. combinando um Amplificador Operacional com dois circuitos RC de 2pt.

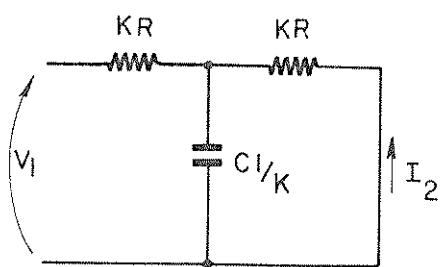


Fig. 2.14 - Determinação de y_{21a} .

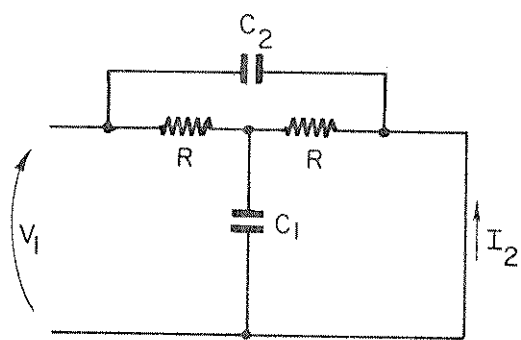


Fig. 2.15 - Determinação de y_{21b} .

$$T(S) = \frac{1/K}{R^2 C_1 C_2 S^2 + 2RC_2 S + 1}$$

$$T(S) = \frac{R^2 C_1 C_2 / K}{S^2 + \frac{2}{RC_1} S + \frac{1}{R^2 C_1 C_2}} \quad (2.19)$$

que é uma função de transferência na forma da equação (2.15).

Assim, à partir de (2.19) obtemos a frequência ω_0 e o fator de qualidade Q .

$$Q = \frac{\sqrt{1/R^2 C_1 C_2}}{2/RC_1} = \frac{RC_1}{2R} \sqrt{1/C_1 C_2}$$

$$Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \quad \text{e} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{R^2 C_1 C_2}} \quad (2.20)$$

A figura 2.16 representa um filtro passa baixas combinando com amplificador operacional com dois circuitos RC de um par de terminais (lpt), com realimentação negativa múltipla.

Podemos obter a função de transferência do referido filtro a partir das equações:

$$v(Y_2 + Y_3 + Y_1 + Y_4) - Y_1 V_1 - Y_4 V_2 = 0 \quad \text{no nó A}$$

e

$$vY_3 + V_2 Y_5 = 0 \quad \text{no nó B}$$

assim

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{-Y_1 Y_3}{Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_3 Y_4} \quad (2.21)$$

onde $Y_1 = 1/R$ $Y_2 = SC_1$ $Y_3 = 1/KR$ $Y_4 = K/R$ e $Y_5 = SC_2$

então

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{-1/KR^2}{SC_2 \left(\frac{1}{R} + SC_1 + \frac{1}{KR} + \frac{K}{R} \right) + \frac{1}{R^2}} = \frac{-1/KR^2}{\frac{SC_2}{R^2} \left(R + R^2 C_1 S + \frac{R}{K} + KR \right) + \frac{1}{R^2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{V_1} &= \frac{-1}{KC_2 S \left(R + R^2 C_1 S + \frac{R}{K} + KR \right) + K} = \\ &= \frac{-1}{KR^2 C_1 C_2 S^2 + (KRC_2 + RC_2 + K^2 RC_2) S + K} \end{aligned}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{-1}{KR^2 C_1 C_2 S^2 + KRC_2 S \left(K + 1 + \frac{1}{K} \right) + K}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{-1/KR^2 C_1 C_2}{S^2 + \frac{1}{RC_1} (K + 1 + 1/K) S + \frac{1}{R^2 C_1 C_2}}$$

para $K = 1$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{-1/R^2 C_1 C_2}{S^2 + \frac{3}{RC_1} S + \frac{1}{R^2 C_1 C_2}} \quad (2.22)$$

assim,

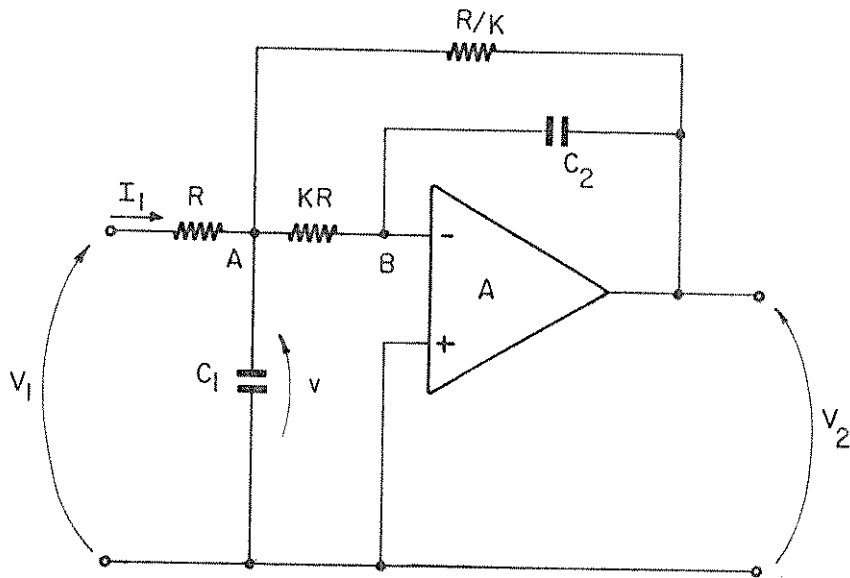


Fig. 2.16 - Filtro P.B. combinando um Amplificador Operacional com dois circuitos RC de 1^{pt}.

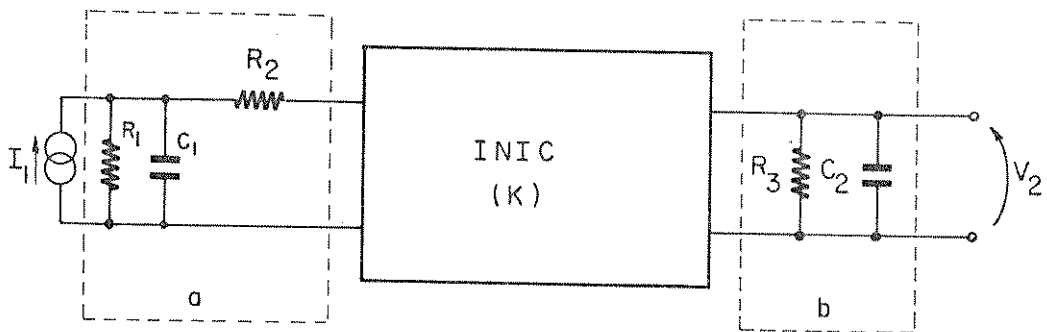


Fig. 2.17 - Filtro P.B. com estrutura de Linvill.

$$Q = \frac{\sqrt{1/RC_1C_2}}{3/R^2C_1} = \frac{\sqrt{R^2C_1^2/RC_1C_2}}{3}$$

$$Q = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \quad \text{e} \quad \omega_0 = \frac{1}{R \sqrt{C_1C_2}}$$

2.2.2. Circuitos que Utilizam um NIC como Elemento Ativo

Nesta secção serão analisados esquemas baseados nos métodos de síntese de Linvill e Yanagisawa.

A figura 2.17 representa um filtro de 2ª ordem que tem uma estrutura de Linvill cuja função de transferência é: [5]

$$T(S) = \frac{V_2}{I_1} = \frac{KZ_{21a} Z_{21b}}{KZ_{21b} - Z_{22a}} \quad (2.23)$$

onde

$$Z_{21a} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{R_1}{1 + R_1C_1S}$$

$$Z_{21b} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} = \frac{R_3}{1 + R_3C_2S}$$

$$Z_{11b} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{R_3}{1 + R_3C_2S}$$

$$Z_{22a} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = \frac{R_1 + R_2 + R_1R_2C_1S}{1 + R_1C_1S}$$

e para $R_1 = R_2 = R_3 = R$

$$\frac{V_2}{I_1} = \frac{KR}{K + 2RC_2S + R^2C_1C_2S^2}$$

$$\frac{V_2}{I_1} = \frac{KR}{S^2 + \frac{2}{RC_1}S + \frac{K}{R^2C_1C_2}} \quad (2.24)$$

assim

$$Q = \frac{\sqrt{1/R^2C_1C_2}}{2/RC_1} \quad Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$$

e

$$\omega_0 = \frac{1}{R \sqrt{C_1C_2}}$$

A figura 2.18 representa um filtro de 2ª ordem que tem a estrutura de Yanagisawa. Sua função de transferência se expressa segundo a equação: |6|

$$T(S) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{Y_{1b} - KY_{1a}}{Y_{1b} - KY_{1a} + Y_{2b} - KY_{2a}} \quad (2.25)$$

onde

$$Y_{1b} = \frac{1}{R_3} \quad Y_{1a} = \frac{C_1S}{1 + R_1C_1S}$$

$$Y_{2b} = C_2S \quad Y_{2a} = \frac{1}{R_2}$$

são as admitâncias dos quatro bipolos associados ao INIC.

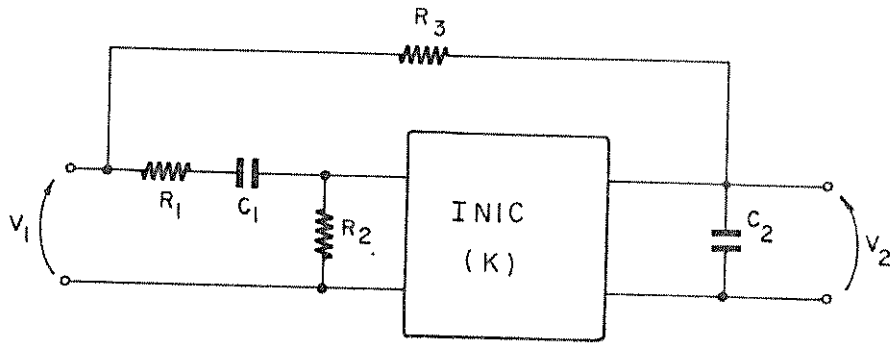


Fig. 2.18 - Filtro P.B. com estrutura de Vanagisawa.

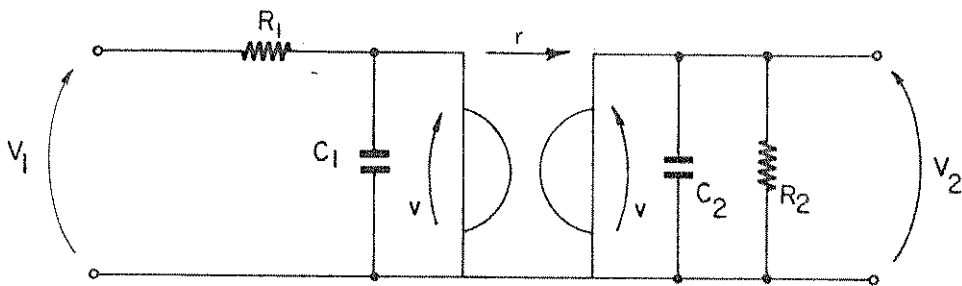


Fig. 2.19 - Filtro P.B. combinando um Gyrator com dois circuitos RC de 2pt.

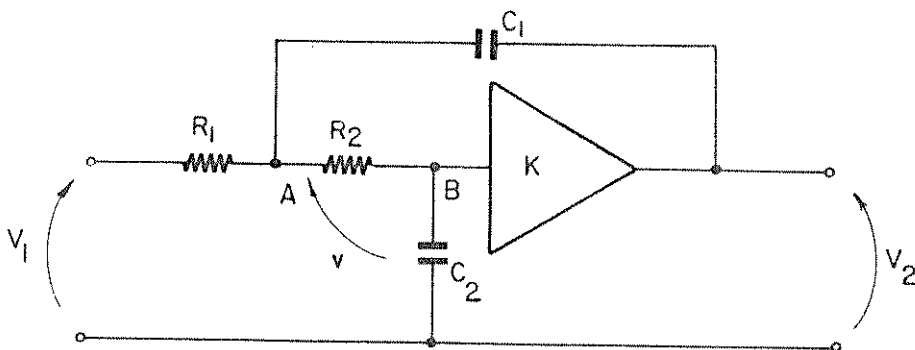


Fig. 2.20 - Filtro P.B. combinando uma VCVS de ganho positivo com quatro elementos passivos.

assim,

$$T(S) = \frac{1 + C_1 S (R_1 - K R_3)}{1 - \frac{K R_3}{R_2} + \left[R_1 - K R_3 - \frac{R_1 R_3 K}{R_2} C_1 + R_3 C_2 \right] S + R_1 R_3 C_1 C_2 S^2}$$

e para $R_3 = \frac{R_1}{K} = R$ e $K = 1$, temos:

$$T(S) = \frac{1}{1 - \frac{R}{R_2} + R \left(C_2 - \frac{R}{R_2} C_1 \right) S + R^2 C_1 C_2 S^2}$$

$$T(S) = \frac{1/R^2 C_1 C_2}{S^2 + \frac{1}{R C_1 C_2} \left(C_2 - \frac{R}{R_2} C_1 \right) S + R^2 C_1 C_2 S}$$

$$T(S) = \frac{1/R^2 C_1 C_2}{S^2 + \left(\frac{1}{R C_1} - \frac{1}{R_2 C_2} \right) S + \frac{R_2 - R}{R_2 R^2 C_1 C_2}} \quad (2.26)$$

portanto

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{R^2 - R_1}{R_2 R^2 C_1 C_2}}}{\frac{R_2 C_2 - R C_1}{R_2 R C_1 C_2}} = \sqrt{\frac{R_2^2 R^2 C_1^2 C_2^2 \cdot (R_2 - R_1)}{R_2 R^2 C_1 C_2 (R_2 C_2 - R C_1)}}$$

$$Q = \frac{\sqrt{R_2 C_1 C_2 (R_2 - R_1)}}{R_2 C_2 - R C_1}$$

e

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R_2 - R}{R_2 R^2 C_1 C_2}} \quad \omega_0 = \frac{1}{R \sqrt{C_1 C_2}} \sqrt{\frac{R_2 - R}{R_2}}$$

Se considerarmos $R_2 = \infty$, isto é, se suprimirmos a resistência shunt da entrada do INIC, o sistema é bastante simplificado e a função de transferência ficará:

$$T(S) = \frac{1/R^2 C_1 C_2}{S^2 + \frac{1}{RC} S + \frac{1}{R^2 C_1 C_2}} \quad (2.27)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{R \sqrt{C_1 C_2}} \quad \text{e} \quad Q = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$$

2.2.3. Circuitos que utilizam Gyrator como Elemento Ativo

A figura 2.19 representa um filtro passa-baixa de 2ª ordem composto por um gyrator e dois circuitos RC de 2 pts.

Para que se possa calcular a função de transferência do conjunto, deve-se considerar que a impedância de entrada do 2pt que serve de carga para o gyrator, tem um valor Z_{11b} , por que esse 2pt está em circuito aberto. A impedância do 2pt de entrada é $\frac{r^2}{Z_{11b}} |2|$.

A tensão v de entrada do gyrator vale:

$$v = \frac{-Y_{21a} \frac{r^2}{Z_{11b}} V_1}{1 + Y_{22} \frac{r^2}{Z_{11b}}}$$

$$v = \frac{-Y_{21a} - r^2 V_1}{Z_{11b} + Y_{22} r^2} \quad (2.28)$$

A tensão v' de entrada do 2pt de carga do gyrator é obtida através da matriz de impedância do gyrator que é:

$$\begin{bmatrix} v \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -r \\ r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_1' \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$\text{onde: } i_1' = \frac{-v'}{z_{11b}} \quad \text{e} \quad v' = z_{11a} i_1' = \frac{-z_{11b} y_{21a} r^2}{z_{11b} + y_{22} r^2}$$

então

$$v_1 = \frac{-v' (z_{11b} + y_{22} r^2)}{z_{11b} y_{21a} r^2} \quad (2.30)$$

Como o 2º pt de saída está em circuito aberto, sua função de transferência será:

$$\frac{v_2}{v'} = \frac{z_{21b}}{z_{11b}} = \frac{-v_2}{v_1} \frac{(z_{11b} + y_{22a} r^2)}{z_{11b} y_{21a} r^2} \quad (2.31)$$

A partir de (2.31) podemos escrever a função de transferência do conjunto que é:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{-z_{21b} (z_{11b} y_{21b} r^2)}{z_{11b} (z_{11b} + y_{22a} r^2)} = \frac{-z_{21b} y_{21a} r^2}{z_{11b} + y_{22a} r^2} \quad (2.32)$$

sendo

$$y_{12a} = \left. \frac{i_2}{v_1} \right|_{v_2=0} = \frac{-1}{R_1} \quad \text{e} \quad y_{22a} = \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{r_1=0} = \frac{1 + R_1 C_1 S}{R_1}$$

$$z_{11b} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{i_2=0} = \frac{R_2}{1 + R_2 C_2 S}$$

$$\text{e} \quad z_{12b} = \left. \frac{v_2}{i_1} \right|_{i_2=0} = \frac{R_2}{1 + R_2 C_2 S} = z_{11b}$$

Substituindo estes valores na equação (2.32), a função de transferência do conjunto fica:

$$T(S) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{r/R_1}{r^2 C_1 C_2 S^2 + r^2 \left(\frac{C_1}{R_2} + \frac{C_2}{R_1} \right) S + 1}$$

$$T(S) = \frac{1/r R_1 C_1 C_2}{S^2 + \left(\frac{1}{C_2 R_2} + \frac{1}{C_1 R_1} \right) S + \frac{1}{r^2 C_1 C_2}} \quad (2.33)$$

de (2.33), obtemos os parâmetros ω_0 e Q do conjunto

$$Q = \frac{\sqrt{1/r^2 C_1 C_2}}{\frac{C_1 R_1 + C_2 R_2}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad Q = \frac{\sqrt{C_1 C_2}}{r \left(\frac{C_1}{R_2} + \frac{C_2}{R_1} \right)}$$

e

$$\omega_0 = \frac{1}{r \sqrt{C_1 C_2}}$$

Pode-se observar que tanto ω_0 quanto Q dependem do valor da resistência r de inversão que portanto, deve ser bastante preciso e estável.

2.2.4. Filtros que Utilizam Fontes Controladas como Elemento Ativo

Nesta seção serão analisados sistemas com dois tipos de fontes controladas, uma com ganho positivo e outra com ganho negativo.

Nos capítulos III e IV serão feitas análises mais detalhadas deste tipo de filtros.

A figura 2.20 representa um filtro passa baixas de 2ª ordem com fonte controlada de ganho positivo e quatro elementos passivos [4].

A função de transferência do conjunto é obtida através da 1ª lei de Kirchhoff aplicada aos nós A e B; assim:

$$\begin{cases} \frac{V_1 - v}{R_1} + \frac{V_2/K - v}{R_2} + (V_2 - v) C_1 S = 0 \\ \frac{V_2}{K} C_2 S + \frac{V_2/K - v}{R_2} = 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

$$T(S) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{K}{R_1 R_2 C_1 C_2 S^2 + [R_1 C_2 + R_2 C_2 + (1-K) R_1 C_1] S + 1}$$

fazendo $R_1 = R_2 = R$, obtemos,

$$T(S) = \frac{K/R^2 C_1 C_2}{S^2 + \frac{2RC_2 + (1-K)RC_1}{R^2 C_1 C_2} S + \frac{1}{R^2 C_1 C_2}}$$

$$T(S) = \frac{K/R^2 C_1 C_2}{S^2 + \left(\frac{2}{RC_1} + \frac{1-K}{RC_2} \right) S + \frac{1}{R^2 C_1 C_2}} \quad (2.35)$$

assim,

$$Q = \frac{\sqrt{1/R^2 C_1 C_2}}{\frac{2RC_2 + (1-K)RC_1}{R^2 C_1 C_2}} \quad Q = \frac{\sqrt{C_1 C_2}}{2C_2 + (1-K)C_1}$$

e

$$\omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}}$$

onde $1 - K = \epsilon$ é um valor que pode ser ajustado de maneira a regular o valor do ganho da fonte controlada em torno da unidade, ou seja, pode-se controlar o valor do fator de qualidade Q do filtro sem que isso interfira em ω_0 .

A figura 2.21 representa um filtro passa baixas de 2ª ordem com VCVS do ganho negativo.

Com raciocínio análogo ao filtro anterior (figura 2.20), pode-se escrever que:

$$\begin{cases} \frac{V_1 - v}{R_1} + \frac{V_2 - v}{R_3} - v C_1 S + \frac{V_2/K - v}{R_2} = 0 \\ \frac{V_2/K - v}{R_2} + \frac{V_2 C_2 S}{K} = 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

e

$$T(S) = \frac{-K}{R_1 R_2 C_1 C_2 S^2 + \left[R_1 C_1 + R_2 C_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3} C_2 \right] S + \frac{R_1}{R_3} (K+1) + 1}$$

fazendo $R_1 = R_2 = R_3 = R$

$$T(S) = \frac{-K/R^2 C_1 C_2}{S^2 + \frac{C_1 + 2C_2}{RC_1 C_2} S + \frac{K+2}{R^2 C_1 C_2}} \quad (2.37)$$

portanto,

$$Q = \frac{\sqrt{K + 2/R^2 C_1 C_2}}{\frac{C_1 + 2C_2}{RC_1 C_2}} \quad Q = \frac{\sqrt{(K+2) C_1 C_2}}{C_1 + 2C_2}$$

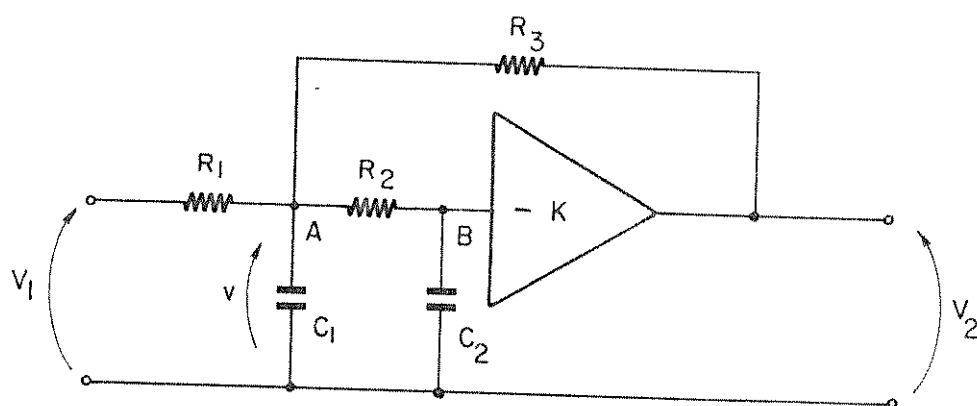


Fig. 2.21 - Filtro P.B. utilizando VCVS de ganho negativo.

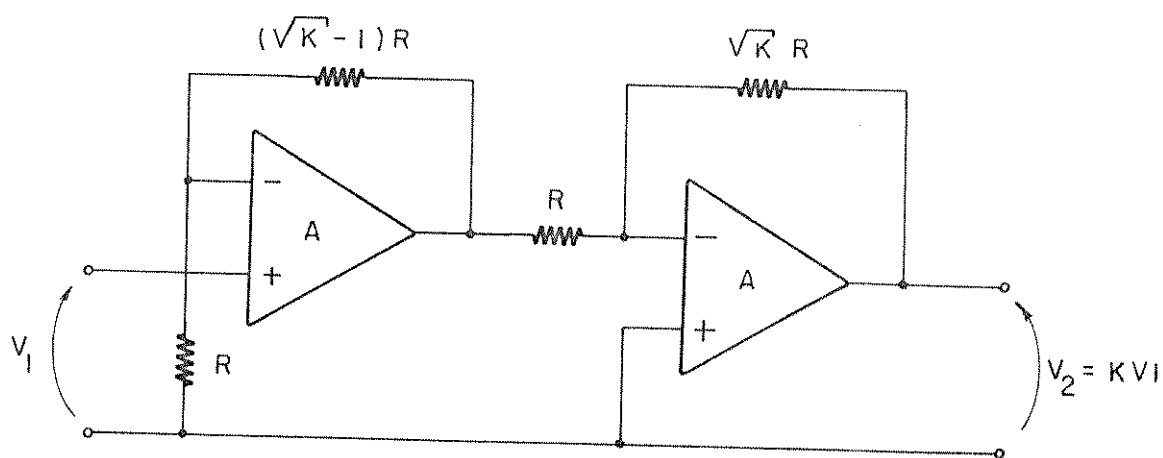


Fig. 2.22 - Filtro P.B. utilizando VCVS de alto ganho.

$$\omega_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{K+2}{C_1 C_2}}$$

Observamos então que para se conseguir altos valores para Q , é necessário que o ganho K seja alto. Para tanto pode-se usar VCVS com dois amplificadores operacionais, repartindo o ganho entre os dois elementos, conforme a figura 2.22.

2.3. Principais Filtros Elementares Passa Altas de 2ª Ordem

Esses circuitos apresentam funções da transferência da forma

$$T(S) = \frac{KS^2}{S^2 + \beta_1 S + \beta_0} \quad (2.38)$$

e parâmetros característicos.

$$\omega_0 = \sqrt{\beta_0} \quad \text{e} \quad Q = \frac{\sqrt{\beta_0}}{\beta_1}$$

Podemos obter a maioria desses filtros, apenas substituindo as resistências por capacitâncias e vice-versa nos filtros passa baixas e portanto, os cálculos para obtermos as funções de transferência e os parâmetros característicos Q e ω_0 desses filtros, são os mesmos utilizados na secção 2.2, exceto para os filtros passa alta com estruturas de Linvill e Yanagisawa [7].

A tabela 2.1 mostra os esquemas, as funções de transferência e os parâmetros característicos Q e ω_0 que se obtêm nos filtros ativos passa altas.

2.4. Principais Filtros Elementares Passa Faixa de 2ª Ordem

A função de transferência destes filtros é da forma

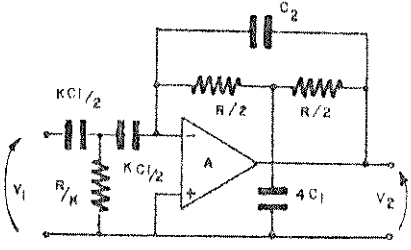
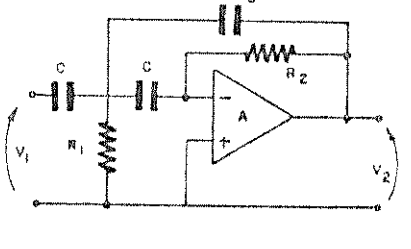
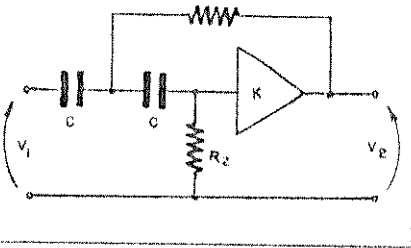
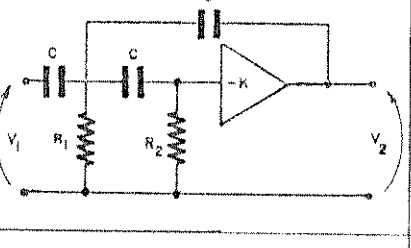
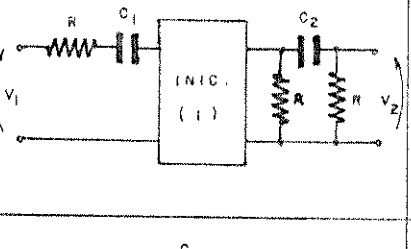
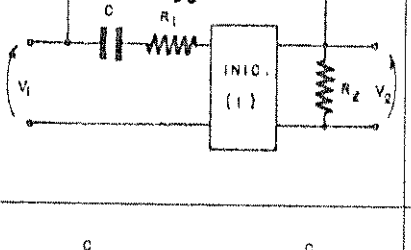
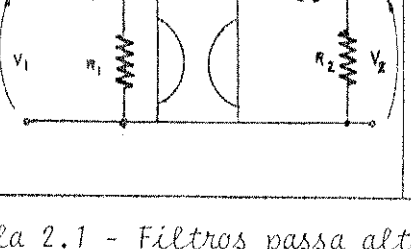
PARÂMETROS	ESQUEMAS	FUNC.DE TRANSF.(V ₂ / V ₁)
$\omega_0 = \frac{1}{R \sqrt{C_1 C_2}}$ $Q = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$		$\frac{-4C_2}{C_1} \cdot \frac{S^2}{S^2 + \frac{1}{RC_1}S + \frac{1}{R^2 C_1 C_2}}$
$\omega_0 = \frac{1}{C \sqrt{R_1 R_2}}$ $Q = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$		$\frac{-S^2}{S^2 + \frac{3}{R_2 C}S + \frac{1}{C^2 R_1 R_2}}$
$\omega_0 = \frac{1}{C \sqrt{R_1 R_2}}$ $Q = \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{R_1 + R_2 (1 - K)}$		$\frac{KS^2}{S^2 + \frac{2R_1 + R_2(1-K)}{R_1 R_2 C}S + 1}$
$\omega_0 = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{1}{(k+2)R_1 R_2}}$ $Q = \frac{\sqrt{(k+2)R_1 R_2}}{R_2 + 2R_1}$		$\frac{-S^2 (k/k+2)}{S^2 + \frac{R_2 + 2R_1}{(k+2)R_1 R_2 C}S + \frac{1}{(k+2)R_1 R_2 C^2}}$
$\omega_0 = \frac{1}{C \sqrt{R_1 R_2}}$ $Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}$		$\frac{S^2}{S^2 + \frac{2}{RC_1}S + \frac{1}{R^2 C_1 C_2}}$
$\omega_0 = \frac{1}{C \sqrt{R_1 R_2}}$ $Q = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$		$\frac{S^2}{S^2 + \frac{1}{R_2 C^2}S + \frac{1}{R_1 R_2 C^2}}$
$\omega_0 = \frac{1}{rC}$ $Q = \frac{r \cdot R_1}{R_1 R_2 + r^2}$		$\frac{r}{R_2} \cdot \frac{S^2}{S^2 + \left(\frac{R_2}{r^2} + \frac{1}{R_1}\right) \frac{S}{C^2} + \frac{1}{r^2 C_2}}$

Tabela 2.1 - Filtros passa altás

$$T(S) = \frac{KS}{S^2 + \beta_1 S + \beta_0} \quad (2.39)$$

e os parâmetros característicos são

$$\omega_0 = \sqrt{\beta_0} \quad \text{e} \quad Q = \frac{\sqrt{\beta_0}}{\beta_1}$$

A obtenção destes filtros é também muito semelhante à dos filtros passa baixas e portanto, nesta secção apresentamos a penas uma tabela contendo os esquemas de filtros passa faixa, suas funções de transferência e seus parâmetros característicos |7|.

2.5. Filtros Elementares da 2ª Ordem com um Zero de Transmissão

Estes filtro são utilizados para a realização dos fil tros de Cauer e dos filtros recortadores de banda |1|.

Sua função de transferência é da forma

$$T(S) = \frac{S^2 \omega_\infty^{-2} + 1}{S^2 + \beta_1 S + \beta_0} \quad (2.40)$$

e os parâmetros característicos são:

$$\omega_\infty, \quad \omega_0 = \sqrt{\beta_0} \quad \text{e} \quad Q = \frac{\sqrt{\beta_0}}{\beta_1}$$

A frequência de atenuação infinita, ω_∞ , e a frequência própria do filtro, ω_0 , podem estar localizadas de duas maneiras di ferentes:

- $\omega_0 > \omega_\infty$ neste caso a amplitude em altas frequências será maior que nas baixas, e a resposta terá a forma representada na figu ra 2.23. Portanto, neste caso, teremos um filtro passa altas.
- $\omega_0 < \omega_\infty$, neste caso a amplitude em frequências muito altas se rá menor que nas baixas, resultando uma curva de resposta mos-

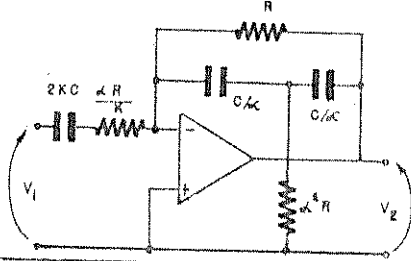
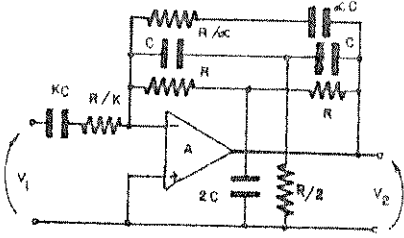
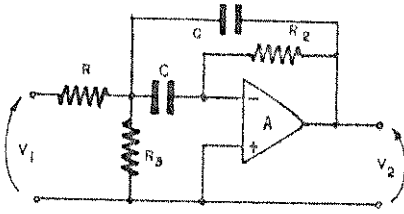
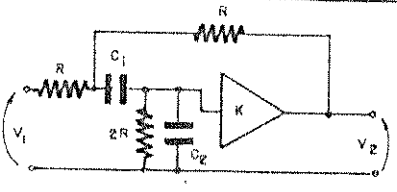
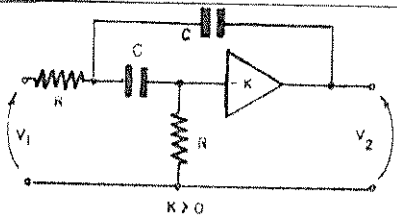
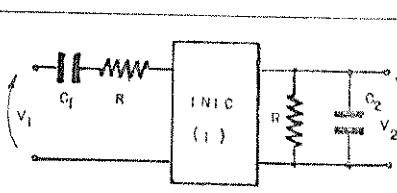
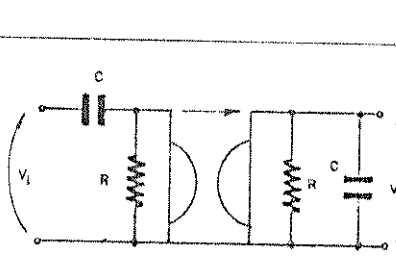
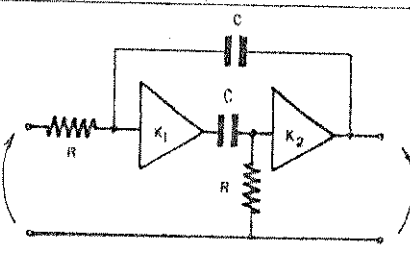
PARÂMETROS	ESQUEMAS	FUNC. DE TRANSF.(V ₂ /V ₁)
$\omega_0 = \frac{1}{RC}$ $Q = \frac{1}{2\alpha}$		$\frac{(-2k/RC)S}{S^2 + \frac{2\alpha}{RC}S + \frac{1}{R^2C^2}}$
$\omega_0 = \frac{1}{RC}$ $Q = \frac{1}{2\alpha}$		$\frac{(-2k/RC)S}{S^2 + \frac{2\alpha}{RC}S + \frac{1}{R^2C^2}}$
$\omega_0 = \frac{\sqrt{1+R_1/R_3}}{C\sqrt{R_1R_2}}$ $Q = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}\left(1+\frac{R_1}{R_3}\right)}$		$\frac{(-R_1/C)S}{S^2 + \frac{2}{R_2C}S + \frac{1}{R_2C^2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right)}$
$\omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1C_2}}$ $Q = \frac{\sqrt{C_1C_2}}{2C_2 + C_1(2,5-k)}$		$\frac{(k/RC_2)S}{S^2 + \frac{2C_2 + (2,5-k)C_1}{RC_1C_2}S + \frac{1}{R^2C_1C_2}}$
$\omega_0 = \frac{1}{RC\sqrt{k+1}}$ $Q = \frac{1}{3}\sqrt{k+1}$		$\frac{(k/(k+1)RC)S}{S^2 + \frac{3}{(k+1)RC}S + \frac{1}{(k+1)R^2C^2}}$
$\omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1C_2}}$ $Q = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}$		$\frac{S/RC_2}{S^2 + \frac{1}{RC_1}S + \frac{1}{R^2C_1C_2}}$
$\omega_0 = \frac{RrC}{\sqrt{r^2 + R^2}}$ $Q = \frac{\sqrt{r^2 + R^2}}{2r}$		$\frac{R}{r} \cdot \frac{S/RC}{S^2 + \frac{2}{RC}S + \frac{1}{C^2}\left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2}\right)}$
$\omega_0 = \frac{1}{RC\sqrt{1+k_1k_2}}$ $Q = \frac{1}{2}\sqrt{1+k_1k_2}$		$\frac{-k_1k_2/(1+k_1k_2)RC}{S^2 + \frac{2}{(1+k_1k_2)RC}S + \frac{1}{(1+k_1k_2)R^2C^2}}$

Tabela 2.2 - Filtros passa faixa.

trada na figura 2.24 e que corresponde a um filtro passa baixas.

2.5.1. Circuitos que Utilizam um Amplificador Operacional como Elemento Ativo

A figura 2.25 representa um filtro deste tipo que emprega um amplificador operacional, um circuito RC de 2^o em duplo T e um circuito RC de 2^o em T com realimentação.

As admitâncias de transferência desses quadripolos, de acordo com os valores mostrados na figura 2.25 serão:

$$Y_{21a} = - \frac{1 + \alpha R^2 C^2 S^2}{R(1 + 2\epsilon RC.S)}$$

e

$$Y_{21b} = \frac{1 + R^2 C^2 S^2 + 2\epsilon RCS}{R(1 + 2\epsilon RCS)}$$

Assim, a função de transferência do conjunto será:

$$T(S) = - \frac{Y_{21a}}{Y_{21b}} = \frac{1 + \alpha R^2 C^2 S^2}{1 + 2\epsilon RCS + R^2 C^2 S^2} \quad (2.41)$$

Os parâmetros característicos serão:

$$\omega_{\infty} = \frac{1}{\sqrt{\alpha} RC} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\alpha}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$Q = \frac{1}{2\epsilon}$$

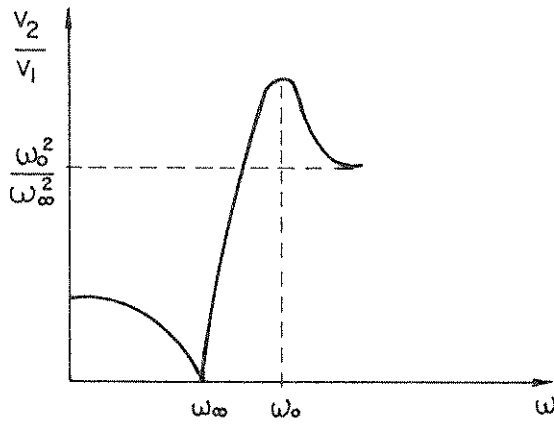


Fig. 2.23 - $\omega_0 > \omega_\infty$.

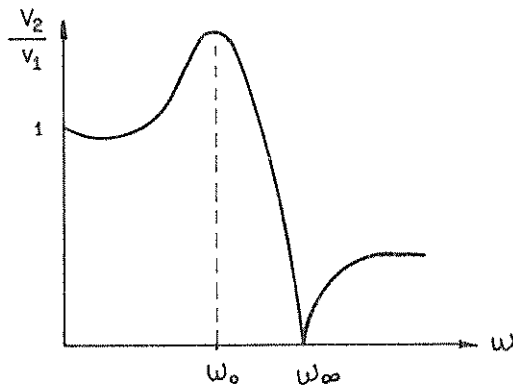


Fig. 2.24 - $\omega_0 < \omega_\infty$.

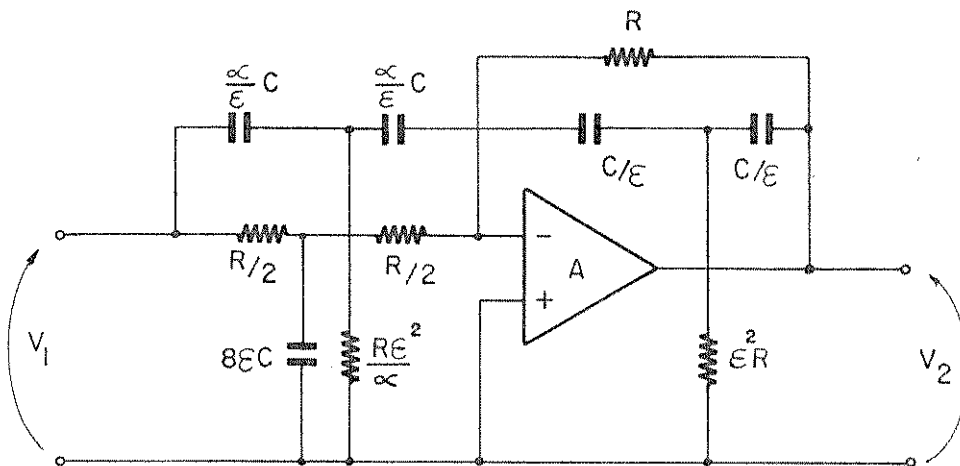


Fig. 2.25 - Filtro com Zero de Transmissão utilizando um Amplificador Operacional

Estas expressões mostram que, dependendo do valor do parâmetro α , o filtro pode ser de passa altas ou passa baixas.

Por outro lado, se se quiser obter curvas de resposta que apresentem um corte abrupto, este filtro utiliza dez elementos passivos combinados com um amplificador de alta qualidade.

2.5.2. Circuitos que Utilizam um Conversor de Impedância Negativa como Elemento Ativo

A figura 2.26 representa um filtro deste tipo com estrutura de Yanagisawa. Os valores das admitâncias dos quatro circuitos RC de 1pt associados ao NIC são:

$$Y_{1a} = \frac{1 + R_1 C_1 S}{R_1} \quad Y_{1b} = \frac{C_2 S}{1 + R_2 C_2 S}$$

$$Y_{2a} = C_3 S \quad Y_{2b} = \frac{C_2 S}{1 + R_2 C_2 S}$$

Substituindo esses valores na equação (2.25), podemos obter a função de transferência do conjunto, considerando $R_2 C_2 = R_4 C_4$ e $K = 1$. Assim:

$$T(S) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 - R_1 C_2) S + R_1 C_1 R_2 C_2 S^2}{1 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 - R_1 C_2 - R_1 C_4 + R_1 C_3) S + R_1 R_2 (C_1 + C_3) C_2 S^2} \quad (2.42)$$

Se fizermos $R_1 C_1 + R_2 C_2 = R_1 C_2$, a expressão se simplifica, de maneira que:

$$T(S) = \frac{1 + R_1 R_2 C_1 C_2 S^2}{1 + R_1 (C_3 - C_4) S + R_1 R_2 C_2 (C_3 + C_1) S^2} \quad (2.43)$$

Para os parâmetros característicos temos, a partir de

(2.43).

$$\omega_{\infty} = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad , \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_2 (C_1 + C_3)}} < \omega_{\infty} \quad e$$

$$Q = \frac{\sqrt{R_2 C_2 (C_1 + C_2)}}{(C_3 - C_4) \sqrt{R_1}}$$

Este esquema não é conveniente se $\omega_{\infty} > \omega_0$. Com uma ligeira modificação (substituir C_3 por uma resistência R_4 por exemplo), obtemos, mediante cálculo análogo ao anterior: |8|

$$T(s) = \frac{1 + R_1 R_2 C_1 C_2 s^2}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + R_1 \left(\frac{R_2 C_2}{R_3} - C_4 \right) s + \frac{R_1}{R_3} + 1} \quad (2.44)$$

Observamos que não há modificação no zero de transmissão, mas ω_{∞} e Q tornam-se:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R_1 + R_3}{R_3 R_1 R_2 C_1 C_2}} > \omega_{\infty}$$

e

$$Q = \sqrt{\frac{R_2 R_3 C_1 C_2 (R_1 + R_3)}{R_1 (R_2 C_2 - R_3 C_4)^2}}$$

2.5.3. Circuitos que Utilizam uma Fonte Controlada com Elemento Ativo

A figura 2.27 representa um filtro que utiliza um circuito RC de 2pt em duplo T, carregado com uma capacitância cuja admitância vale $Y = mCS$, combinado com uma VCVS de ganho positivo. Para determinarmos a função de transferência do conjunto, chamamos de v_1 e v_2 às tensões de entrada e saída do duplo T, respectiu

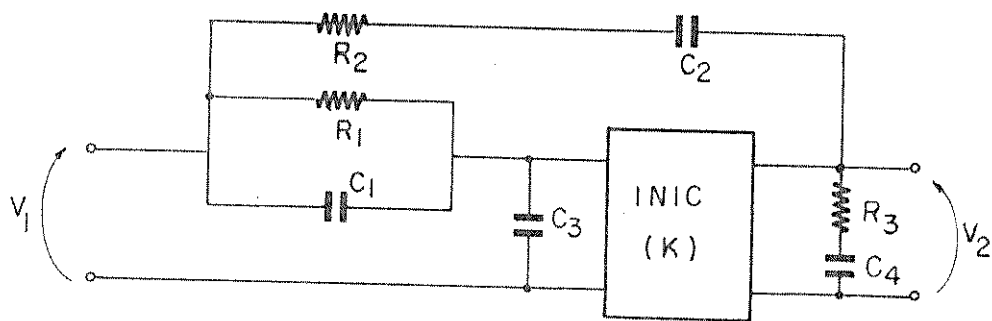


Fig. 2.26 - Filtro com Zero de Transmissão utilizando um NIC.

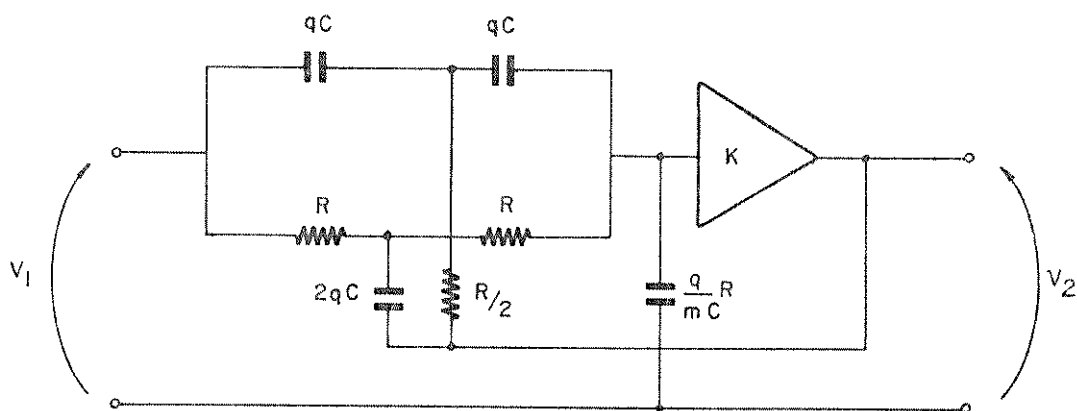


Fig. 2.27 - Filtro P.B. com Zero de Transmissão utilizando uma VCVS.

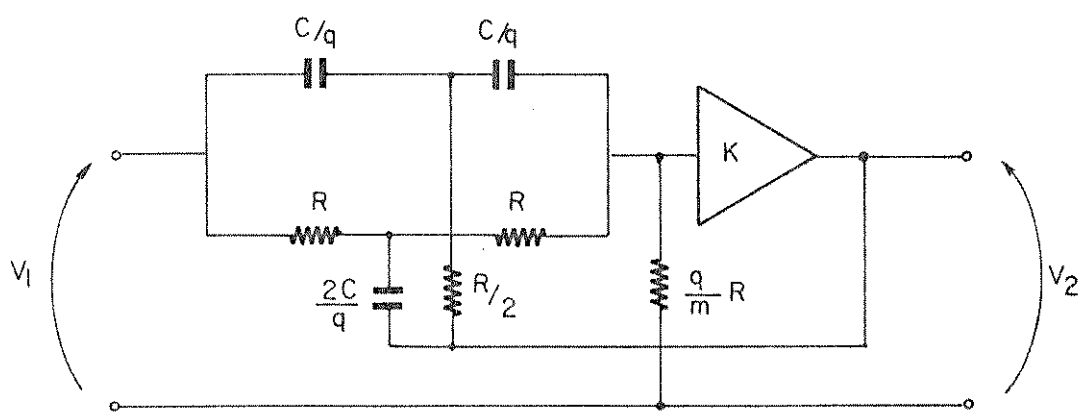


Fig. 2.28 - Filtro P.A. com Zero de Transmissão utilizando uma VCVS.

vamente, assim podemos escrever que: |8|

$$\begin{cases} v_1 = v_2 + v_1 \\ v_2 = \frac{v_2}{K} - v_2 = v_2 \left(\frac{1-K}{K} \right) \\ i_2 = Y_{21}v_1 + Y_{11}v_2 = \frac{v_2 Y}{K} \end{cases} \quad (2.45)$$

Resolvendo o sistema de equações (2.45) obtemos a função de transferência:

$$T(S) = \frac{v_2}{v_1} = \frac{Y_{21}}{Y_{21} - \left(\frac{1-K}{K} \right) Y_{11} - \frac{Y}{K}} \quad (2.46)$$

com

$$Y_{21} = \frac{1 + q^2 R^2 C^2 S^2}{2R(qRC + 1)}$$

e

$$Y_{11} = \frac{1 + 4qRCS + q^2 R^2 C^2 S^2}{2(1 + qRCS)}$$

que substituindo na equação (2.46) nos fornecem:

$$T(S) = \frac{K(1 + q^2 R^2 C^2 S^2)}{R^2 C^2 S^2 (q^2 + 2mq) + 2RC [m + 2q(1 - K)]S + 1} \quad (2.47)$$

Na equação (2.47) identificamos os parâmetros caracterís-
ticos

$$\omega_\infty = \frac{1}{qRC} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC \sqrt{q^2 + 2mp}} < \omega_\infty$$

e

$$Q = \frac{\sqrt{q^2 + 2mq}}{2[m + 2q(1 - K)]}$$

Observamos que como $\omega_0 < \omega_\infty$ o filtro da figura 2.27 é um filtro passa baixas. Se aplicarmos a transformação $S \rightarrow 1/S$ na função de transferência do filtro em questão (eq. 2.47), obtemos a função de transferência de um filtro passa altas, ou seja:

$$T(S) = \frac{K(S^2 + q^2 R^2 C^2)}{S^2 + 2RCS[m + 2q(1 - K)] + R^2 C^2 (q^2 + 2m)} \quad (2.48)$$

E os valores dos parâmetros característicos são:

$$\omega_\infty' = \frac{1}{\omega_\infty} = qRC \quad \text{e} \quad \omega_0' = \frac{1}{\omega_0} = RC \sqrt{q^2 + 2m} > \omega_\infty'$$

e

$$Q' = Q = \frac{\sqrt{q^2 + 2m}}{2[m + 2q(1 - K)]}$$

O filtro correspondente a esta função de transferência (eq. 2.48) está representado na figura 2.28, e é obtido substituindo a capacitância mC por uma resistência q/mR e trocando q por $1/q$ nos valores das capacitâncias do duplo T [7].

CAPÍTULO III

SÍNTESE DE FILTROS ATIVOS RC DE 2ª ORDEM USANDO VCVSS

Neste capítulo serão analisados os diversos tipos de sínteses de funções de transferência e de driving point de filtros ativos RC de 2ª ordem usando VCVS.

Serão analisadas várias estruturas, cujas configurações são escolhidas de maneira que a saída do sistema seja a saída da fonte (VCVS). Assim pode-se fazer conexões em cascata desses sistemas sem que seja necessário o uso de amplificadores de isolamento, já que as VCVSs evitam que haja interação entre os sistemas individuais. Essa é a principal vantagem das VCVSs em relação aos outros tipos de fontes controladas. Eventualmente aparecerão fontes de corrente que sempre poderão ser transformadas em fontes de tensão pois estarão acompanhadas de uma impedância em paralelo.

Para a realização de sistemas deste tipo, usaremos vários tipos de circuitos RC com um ou dois pares de terminais. A síntese das admitâncias de transferência de curto-circuito ($-y_{21}$) destes circuitos RC não serão feitas neste trabalho, mas apenas indicadas na tabela 3.1 [7].

3.1. Síntese de Funções de Transferência

Existem vários métodos de síntese de funções de transferência e nesta seção analisaremos os principais.

Primeiramente será estudada a realização de impedância de transferência contendo polos complexos em algum lugar do plano S e transmissão real negativa de zeros. A figura 3.1 mostra uma configuração deste tipo.

A impedância de transferência $Z_{21}(s)$ será:

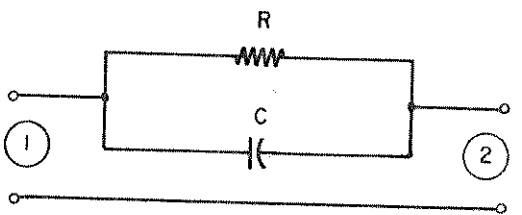
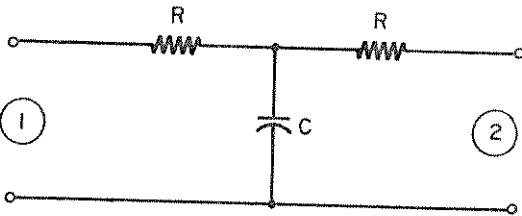
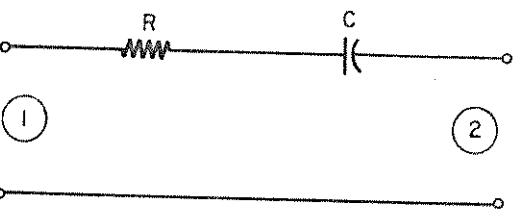
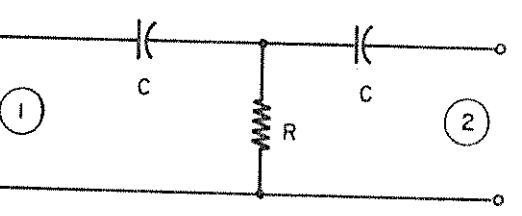
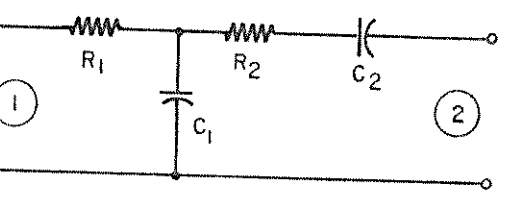
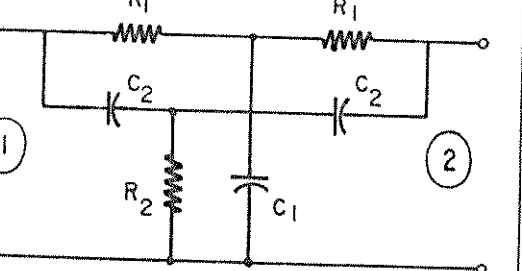
Tipo	$-Y_{21}$	Realização	Valores dos elementos
1	$(S + a_0)$		$R = 1/a_0$ $C = 1$
2	$\frac{1}{S + p_1}$		$R = p_1/2$ $C = 4/p_1^2$
3	$\frac{S}{S + p_1}$		$R = 1$ $C = 1/p_1$
4	$\frac{S^2}{S + p_1}$		$R = 1/4p_1$ $C = 1$
5	$\frac{S}{(S + p_1)(S + p_2)}$		$R_1 = (p_1 + p_2) \cdot 2R_2$ $R_2 = \sqrt{p_1 p_2}$ $C_1 = C_2 R_2 / R_1$ $C_2 = 1/p_1 p_2$
6	$\frac{S^2 + C_0}{S + p_1}$		$R_1 = p_1/a_0$ $R_2 = 1/4p_1$ $C_1 = 4a_0/p_1^2$ $C_2 = 2$

Tabela 3.1

$$Z_{21}(S) = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{\mu}{Y_1 - (\mu - 1)Y_2} \quad (3.1)$$

onde μ é o ganho do amplificador de tensão não inversor,

A função especificada $Z_{21}(S) = \frac{N(S)}{D(S)}$ pode ser realizada , segundo um teorema que diz:

Teorema 3.1 - Seja $N(S)$ um polinômio específico e $Q(S)$ um polinômio arbitrado somente com raízes reais negativas. Então $N(S)/Q(S)$ pode ser expresso pelas formas abaixo: [8]

$$\frac{N(S)}{Q(S)} = Z_{RC}^A - Z_{RC}^B \quad \text{se} \quad N(S)^0 \leq Q(S)^0$$

e

$$\frac{N(S)}{Q(S)} = Y_{RC}^A - Y_{RC}^B \quad \text{se} \quad N(S)^0 \leq Q(S)^0 + 1$$

onde:

$Z_{RC}^A (Z_{RC}^B)$ é uma impedância RC de driving point e

$Y_{RC}^A (Y_{RC}^B)$ é uma admitância RC de driving point.

Se $N(S)^0 \geq D(S)^0 - 1$, então

$$Y_{21}(S) = \frac{D(S)}{N(S)} = Y_{RC}^A - Y_{RC}^B \quad (3.2)$$

Fazendo a identificação de (3.2) com (3.1), obtemos:

$$Y_1 = \mu Y_{RC}^A \quad \text{e} \quad Y_2 = \frac{\mu Y_{RC}^B}{(\mu - 1)} \quad \text{para } \mu > 1$$

O circuito da figura 3.1 é chamado de "Secção Polo Básica".

Pode-se realizar uma admitância de transferência com zeros complexos e polos reais negativos se usarmos um amplificador de tensão inversor.

A figura 3.2 representa uma estrutura desse tipo e sua admitância de transferência será:

$$Y_{21}(S) = - \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} = \frac{P(S)}{Q(S)} = Y_3 - \mu Y_4 \quad (3.3)$$

onde

- μ é o ganho do amplificador.

Pelo teorema 3.1, a função admitância de transferência especificada $\frac{P(S)}{Q(S)}$ pode ser realizada na forma da figura 3.2 com Y_3 e Y_4 como admitância RC desde que $Q(S)^0 \geq P(S)^0 - 1$.

O uso de estruturas ativas de 2 pares de terminais (2pt) como a mostrada na figura 3.2 tem uma vantagem: as transmissões de zeros podem ser controladas ajustando-se o ganho dos amplificadores.

O circuito da figura 3.2 é chamado de "Secção Zero Básica".

"Secção Polo Básica" e "Secção Zero Básica" são circuitos que podem ser usados para construir os tipos mais gerais de configurações ativas RC.

Um método importante de síntese de função de transferência é o Método de Kuh que propõe uma estrutura obtida pela associação em cascata de um sistema RC de 2pt com uma "Secção Polo Básica" (figura 3.1) como mostrado na figura 3.3. A razão de transferência de tensão da estrutura é dada por: |9|

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{-Y_{21}}{Y_{22} + Y_1 - (\mu - 1)Y_2} \quad (3.4)$$

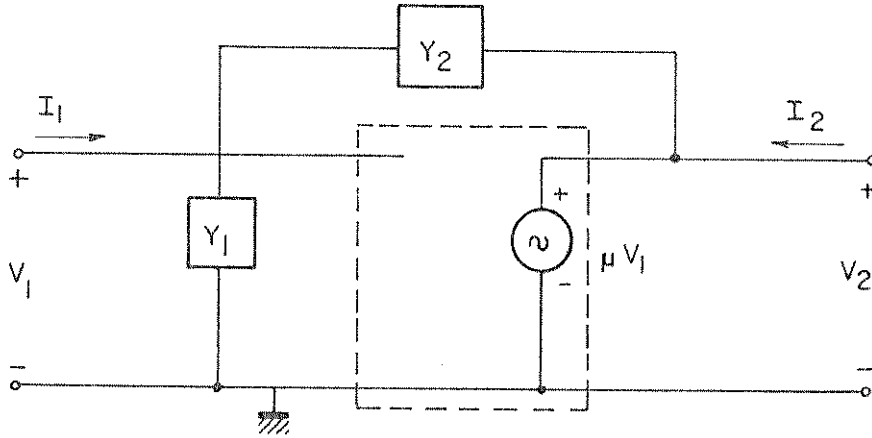


Figura 3.1 - "Secção Polo Básica".

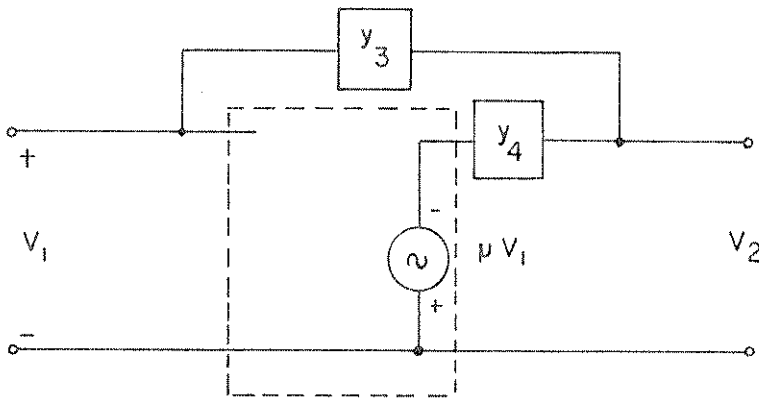


Figura 3.2 - "Secção Zero Básica".

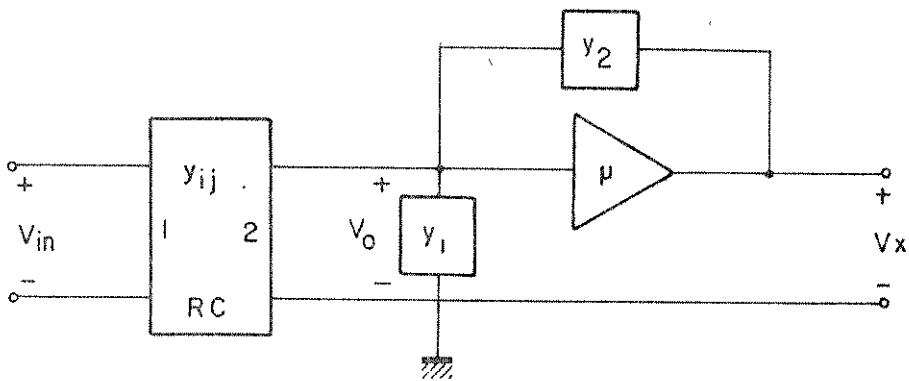


Figura 3.3 - Estrutura de Kuh.

onde

Y_{21} e Y_{22} são admitâncias de curto circuito do RC de 2pt e Y_1 e Y_2 devem ser circuitos RC de 1pt (um par de terminais).

Devemos considerar que a impedância de entrada do amplificador $Y_1(0)$ deve ser uma constante diferente de zero. A realimentação e a impedância de saída podem ser incluídas em Y_2 contanto que $Y_2(0)$ e $Y_2(\infty)$ sejam finitas.

O procedimento de síntese é o seguinte:

- Assume-se $Y_1 = 1$ (normalizado). Seja $N(S)/D(S)$ uma razão de transferência de tensão especificada.
- Escolhe-se o polinômio $Q(S)$ com raízes reais distintas negativas e com grau satisfazendo a seguinte relação:

$$Q(S)^0 + 1 \geq \max(N(S)^0, D(S)^0)$$

- Faz-se a decomposição em frações parciais de $D(S)/Q(S)$ e obtém-se

$$\frac{D(S)}{Q(S)} = K_0 + K_\infty S + \sum_i \frac{K_i S}{(S + \sigma_i)} - \sum_j \frac{h_j S}{(S + \delta_j)} \quad (3.5)$$

onde

K_i e h_j são números reais e não negativos.

Comparando a equação (3.5) com o denominador da equação (3.4), temos:

$$\begin{aligned} \frac{D(S)}{Q(S)} &= Y_{22} + 1 - (\mu - 1)Y_2 = K_0 + K_\infty S + \sum_j \frac{K_i S}{(S + \sigma_i)} - \\ &\quad - \sum_j \frac{h_j S}{(S + \delta_j)} \end{aligned}$$

e podemos então escolher:

$$(\mu - 1)Y_2 = K'_0 + \sum_j \frac{h'_j S}{(S + \delta_j)} \quad (3.6)$$

e assim:

$$Y_{22} = K''_0 + K_\infty S + \sum_i \frac{K_i S}{S + \sigma_i} + \sum_j \frac{h''_j S}{S + \delta_i} \quad (3.7)$$

onde

$$K_0 = K''_0 - K'_0 + 1 \quad \text{e} \quad h''_j = h'_j - h_j > 0$$

E o numerador é

$$- Y_{21} = \frac{N(S)}{D(S)}$$

Exemplo 3.1 - Considere a realização do filtro de Bessel de 2ª ordem com razão de transferência de tensão:

$$t_v = \frac{N(S)}{D(S)} = \frac{H}{S^2 + 3S + 3}$$

e VCVS com ganho $\mu = 2$.

Para $Q(S) = S + 1$, temos:

$$\frac{D(S)}{SQ(S)} = \frac{S^2 + 3S + 3}{S(S + 1)} = 1 + \frac{3}{S} - \frac{1}{S + 1}$$

portanto

$$\frac{D(S)}{Q(S)} = S + 3 - \frac{S}{S + 1}$$

Selecionando $K'_0 = 1$ e $h''_j = 1$,

$$K_0'' = K_0 + K_0' - 1 = 3 \quad \text{e} \quad h_j' = h_j + h_j'' = 2$$

Então, para a equação (3.6), temos:

$$(\mu - 1)Y_2 = Y_2 = 1 + \frac{2S}{S + 1} = \frac{3S + 1}{S + 1}$$

e para a equação (3.7),

$$Y_{22} = 3 + S + \frac{S}{S + 1} = \frac{3S + 3 + S^2 + S + S}{S + 1} = \frac{S^2 + 5S + 3}{S + 1}$$

$$-Y_{21} = \frac{H}{S + 1}$$

O circuito RC de 2pt pode ser realizado fazendo uma expansão em frações contínuas de Y_{22} .

$$\underline{S + 1} \mid S^2 + 5S + 3 = S$$

$$\underline{4S + 3} \mid S + 1 = 1/4$$

$$\underline{1/4} \mid 4S + 3 = 16S$$

$$\underline{3} \mid 1/4 = 1/12$$

0

que resulta no circuito mostrado na figura 3.4.

Para fazer a impedância de saída da VCVS podemos extrair de Y_2 uma resistência série, fazendo a decomposição em frações parciais a seguir:

$$Y_2 = \frac{3S + 1}{S + 1} \rightarrow Z_2 = \frac{S + 1}{3S + 1}$$

$$Z_2 = \frac{1}{3} + \frac{2/3}{3S + 1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{9}{2}S + \frac{3}{2}}$$

Assim obtemos para Y_2 , o circuito mostrado na figura 3.5 onde a resistência de $1/3$ é a resistência de saída da VCVS.

A figura 3.6 mostra a realização final do filtro em questão com $Y_1 = 1$ e $\mu = 2$.

Exemplo 3.2 - Considere a realização do filtro elíptico de segunda ordem com razão de transferência de tensão.

$$t_v = \frac{N(S)}{D(S)} = \frac{H(S^2 + 2)}{S^2 + S + 1}$$

Escolhendo $Q(S) = (S + 1)$ e $\mu = 2$, temos:

$$\frac{D(S)}{SQ(S)} = \frac{S^2 + S + 1}{S(S + 1)} = 1 + \frac{1}{S} - \frac{1}{S + 1}$$

$$\frac{D(S)}{Q(S)} = S + 1 - \frac{S}{S + 1}$$

Selecionando $K'_0 = 1$ e $h''_j = 1$, temos:

$$K''_0 = K_0 + K'_0 - 1 = 1 + 1 - 1 = 1 \quad \text{e} \quad h'_j = h_j + h''_j = 1 + 1 = 2$$

então

$$(\mu - 1)Y_2 = Y_2 = 1 + \frac{2S}{S + 1} = \frac{3S + 1}{S + 1}$$

$$Y_{22} = 1 + S + \frac{S}{S + 1} = \frac{S^2 + 3S + 1}{S + 1}$$

e

$$-y_{21} = \frac{H(S^2 + 2)}{S + 1}$$

A realização de Y_2 é idêntica à do exemplo 3.1 e é mostrada na figura 3.5.

A admitância de transferência de curto circuito $-y_{21}$ po

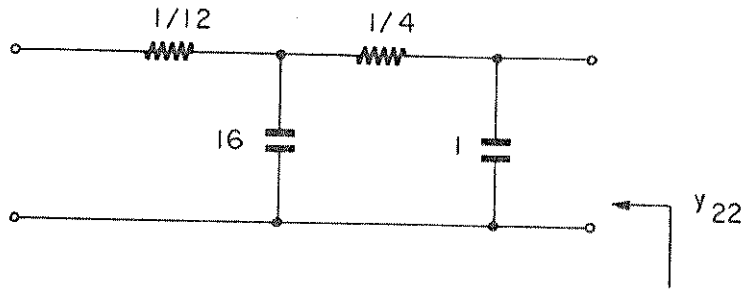


Figura 3.4 - Circuito RC de 2pt obtido através da expansão em frações contínuas de y_{22} .

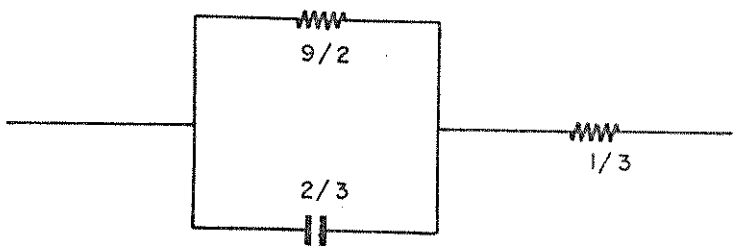


Figura 3.5 - Admitância y_2 de saída.

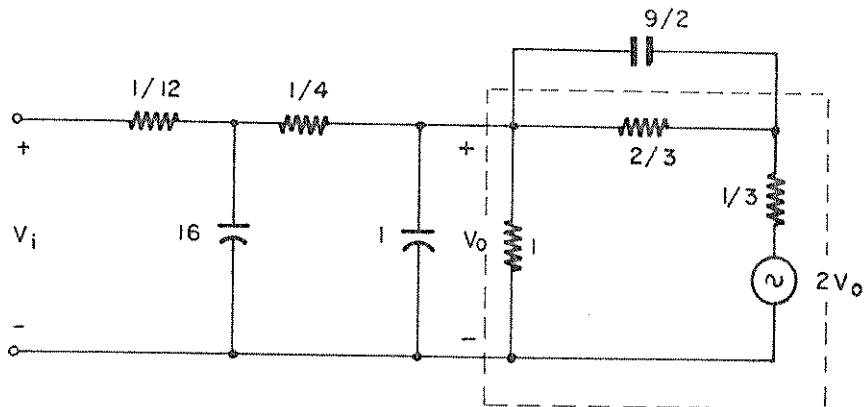


Figura 3.6 - Realização final do filtro de Bessel (exemplo 31).

de ser realizada mediante comparação com a tabela 3.1. Então, a equação $-Y_{21} = \frac{S+2}{S+1}$, corresponde o circuito da figura 3.7 onde

$$R_1 = \frac{p_1}{2a_0} = 1/4$$

$$R_2 = \frac{1}{4p_1} = 1/4$$

$$C_1 = \frac{4a_0}{p_1} = 8$$

$$C_2 = 2$$

A realização final do filtro em questão está mostrada na figura 3.8.

Hankim propõe um método de realização de sistema baseado em uma estrutura obtida através da conexão em cascata de uma "Seção Polo Básica" indicada na figura 3.1 com um circuito RC 2pt, como indica a figura 3.9 [10].

A razão de transferência de corrente da estrutura é:

$$t_I = \frac{I_0}{I_{in}} = \frac{-\mu Y_{21}}{Y_1 - (\mu - 1)Y_2} \quad (3.8)$$

Se $t_I = \frac{N(S)}{D(S)}$ é uma função especificada, escolhemos o polinômio $Q(S)$ com raízes reais negativas distintas e com um grau tal que:

$$Q(S)^0 + 1 \geq \max(N(S)^0, D(S)^0)$$

Pelo teorema 3.1 podemos escrever que:

$$\frac{D(S)}{Q(S)} = Y_{RC}^A - Y_{RC}^B \quad (3.9)$$

Comparando o denominador de (3.8) com a equação (3.9),

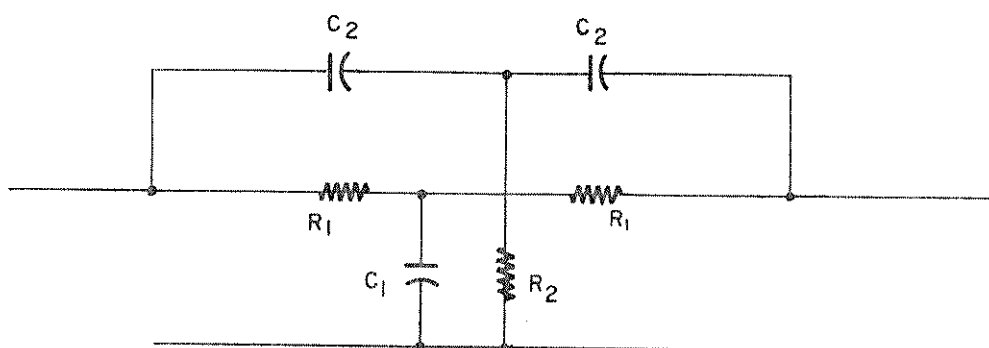


Figura 3.7 - Admitância de transferência de curto-circuito (exemplo 3.2).

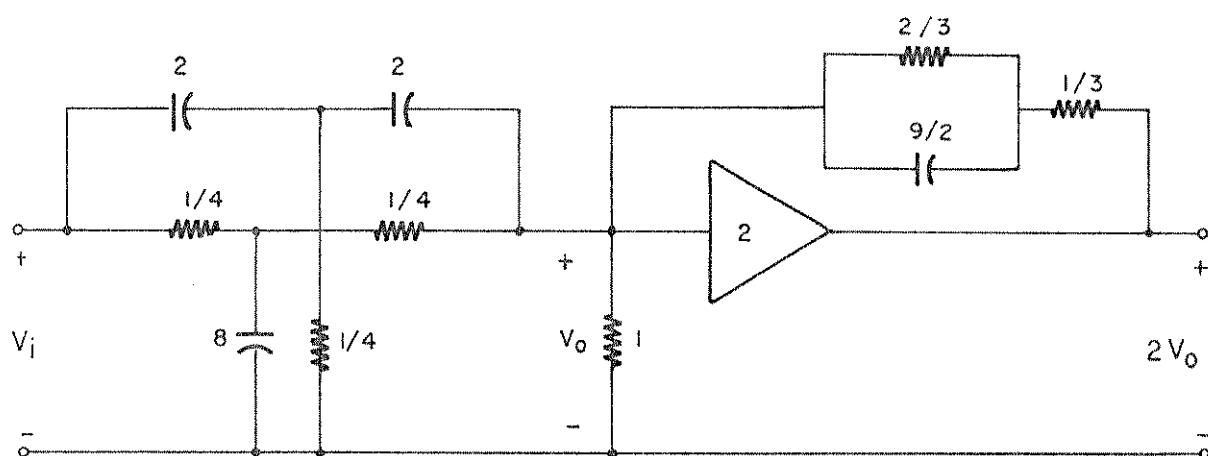


Figura 3.8 - Realização final do filtro elíptico do exemplo 3.2.

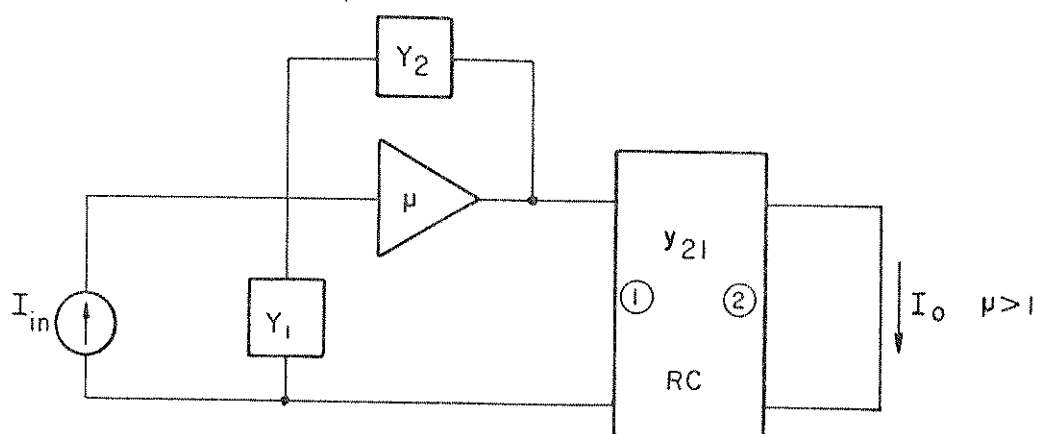


Figura 3.9 - Estrutura de Hankim.

identificamos:

$$Y_1 = Y_{RC}^A \quad \text{e} \quad Y_2 = \frac{Y_{RC}^B}{\mu - 1} \quad (3.10)$$

e o circuito RC de 2pt é descrito por:

$$-Y_{21} = \frac{N(S)}{Q(S)} \quad (3.11)$$

Para realizarmos o RC de 2pt, devemos selecionar um Y_{22} (ou Y_{11}) que seja desenvolvido observando as características de Y_{21} , ou seja, os polos da função admitância de driving-point devem ser os polos da admitância de transferência, assim, os polos de $-Y_{21}$, devem ser simples e estar no eixo real negativo, excluindo a origem e incluindo o infinito.

Exemplo 3.3 - Considere a realização da razão de transferência de corrente abaixo:

$$t_I = \frac{N(S)}{D(S)} = \frac{H}{S^2 + 3S + 3}$$

Escolhendo $Q(S) = S + 1$ temos:

$$\frac{D(S)}{Q(S)} = \frac{S^2 + 3S + 3}{S + 1}$$

A expansão em funções parciais resulta para $\frac{D(S)}{Q(S)}$, na relação:

$$\frac{D(S)}{Q(S)} = (S + 3) - \frac{S}{S + 1} \quad (3.12)$$

Assumindo $\mu = 2$ e identificando os termos da equação (3.12) com a equação (3.8), temos:

$$Y_1 = S + 3 \quad \text{e} \quad Y_2 = \frac{S}{S + 1}$$

e

$$-Y_{21} = \frac{N(S)}{Q(S)} = \frac{H}{S + 1} \quad (3.13)$$

Um Y_{22} conveniente seria, por exemplo:

$$Y_{22} = \frac{25 + 1}{S + 1}$$

A estabilidade do sistema é garantida para $\mu < 5$ pois substituindo os valores de Y_{22} e Y_2 no polinômio denominador da equação (3.4), concluimos que o polo da equação só estará no semi-plano esquerdo quando o ganho for menor que 5.

A realização final do RC de 2pt é conseguida comparando $-Y_{21}$ (equação 3.13) com a tabela 3.1. Dessa comparação resulta o circuito RC indicado na figura 3.10.

A figura 3.11 representa a realização completa do filtro em questão.

O fato de $Y_1(0)$ ser positivo e diferente de zero garante a compensação da resistência de entrada do amplificador. A configuração sugerida não permite porém, compensação simultânea da realimentação e da resistência de saída do amplificador.

Exemplo 3.4 - Consideremos a realização do filtro elíptico com razão de transferência de corrente.

$$t_I = \frac{4(S^2 + 2)}{S^2 + S + 1}$$

pelo método da Hankim.

Escolhendo $Q(S) = S + 1$ e $\mu = 2$ temos;

$$-Y_{21} = \frac{N(S)}{Q(S)} = \frac{4(S^2 + 2)}{S + 1} \quad (3.14)$$

como $\mu = 2$, o denominador da equação (3.8) é $Y_1 - Y_2$, portanto:

$$\frac{D(S)}{Q(S)} = \frac{S^2 + S + 1}{S + 1} = Y_1 - Y_2$$

A expansão em frações parciais de $\frac{D(S)}{SQ(S)}$ resulta em:

$$\frac{D(S)}{SQ(S)} = 1 + \frac{1}{S} - \frac{1}{S + 1}$$

então:

$$Y_1 - Y_2 = (S + 1) - \frac{S}{S + 1}$$

ou seja

$$Y_1 = S + 1 \quad \text{e} \quad Y_2 = \frac{S}{S + 1} \quad (3.15)$$

A admitância de transferência de curto circuito $-Y_{21}$ é realizada comparando a equação (3.14) com a tabela 3.1. Dessa maneira, considerando o fator 4 o nível da admitância, obtemos a estrutura da figura 3.7 onde:

$$R_1 = \frac{P_1}{2a_0} = \frac{1}{16}$$

$$R_2 = \frac{1}{4p_1} = \frac{1}{16}$$

$$C_1 = \frac{4a_0}{P_1^2} = 32$$

$$C_2 = 8$$

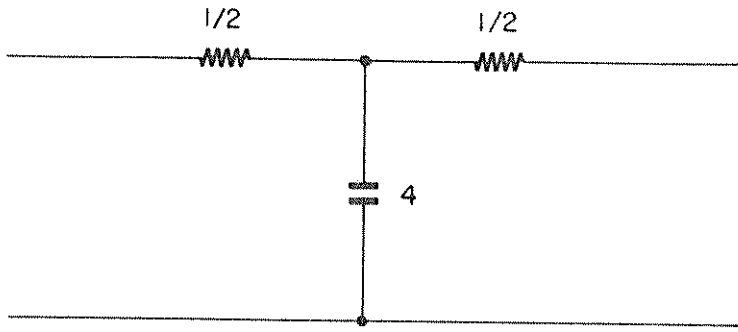


Figura 3.10 - Admitância de transferência de curto circuito (exemplo 3.3).

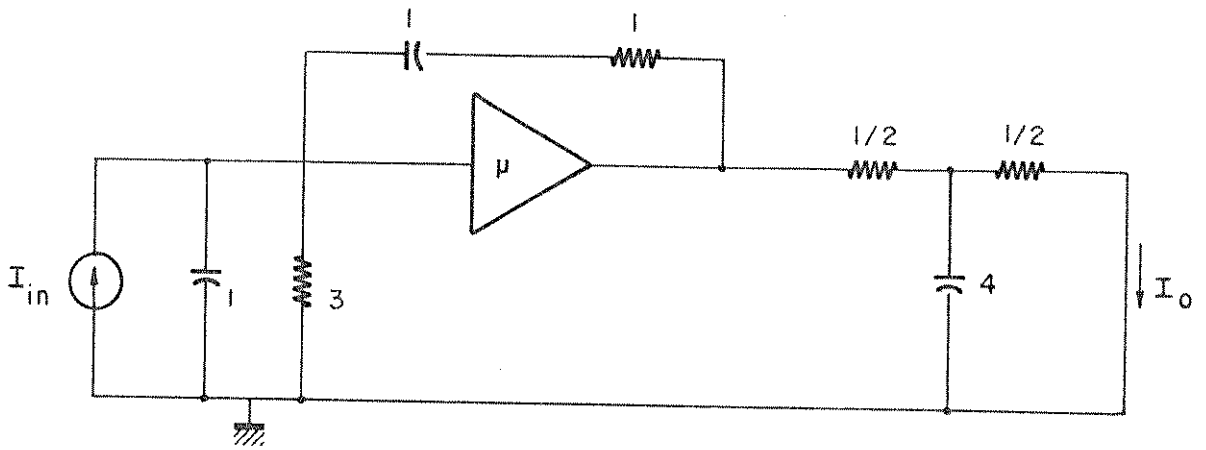


Figura 3.11 - Realização final do filtro do exemplo 3.3.

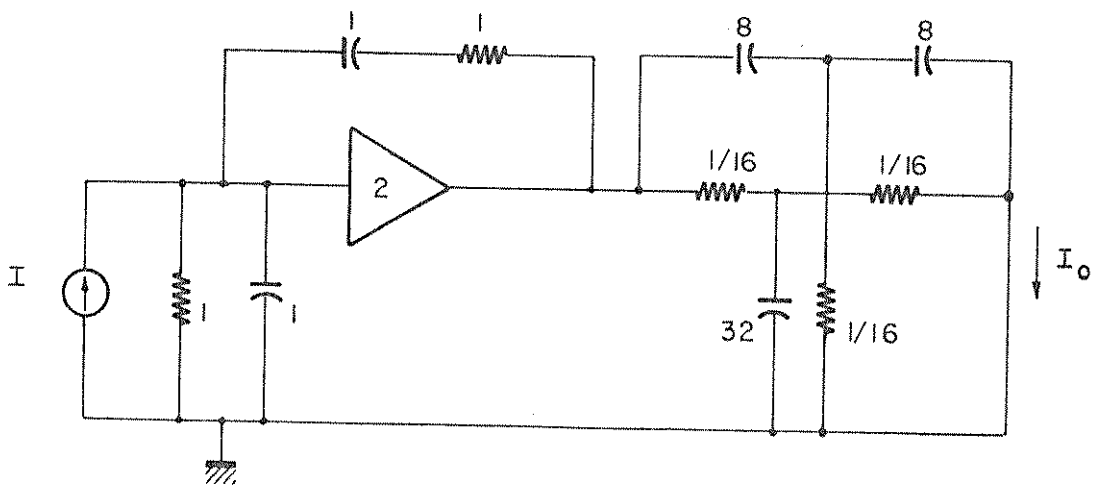


Figura 3.12 - Realização final do filtro elíptico do exemplo 3.4.

Nas equações (3.15), observamos que Y_1 é uma associação paralela de um resistor de 1Ω com um capacitor de $1F$ e Y_2 é uma associação série de um resistor de 1Ω com um capacitor de $1F$.

Assim a realização final do filtro em questão está representada na figura 3.12.

Podemos realizar síntese de função de transferência utilizando estruturas com dois amplificadores e alguns circuitos RC de 1pt.

A figura 3.13 mostra uma estrutura deste tipo, formada pela conexão em cascata de uma "Secção Polo Básica" com uma "Secção Zero Básica" (figuras 3.1 e 3.2 respectivamente) resultando num sistema RC ativo de 2pt conveniente para a realização da razão de transferência de corrente que é dada por:

$$t_I = \frac{I_0}{I_{in}} = \frac{\alpha(Y_3 - \mu Y_4)}{Y_1 - (\alpha - 1)Y_2} \quad (3.16)$$

Os dois amplificadores da figura 3.13 podem ser combinados em um único amplificador com saída diferencial conforme indicado na figura 3.14.

Neste caso a razão de transferência de corrente será:

$$t_I = \frac{A(Y_3 - Y_4)}{Y_1 - (A - 1)Y_2} \quad (3.17)$$

A figura 3.15 representa uma configuração alternativa que é conseguida através da conexão em paralelo dos terminais de entrada dos circuitos básicos e cuja razão de transferência de corrente é,

$$t_I = \frac{I_{in}}{I_{out}} = \frac{Y_3 - \mu Y_4}{Y_1 + Y_3 - (\alpha - 1)Y_2} \quad (3.18)$$

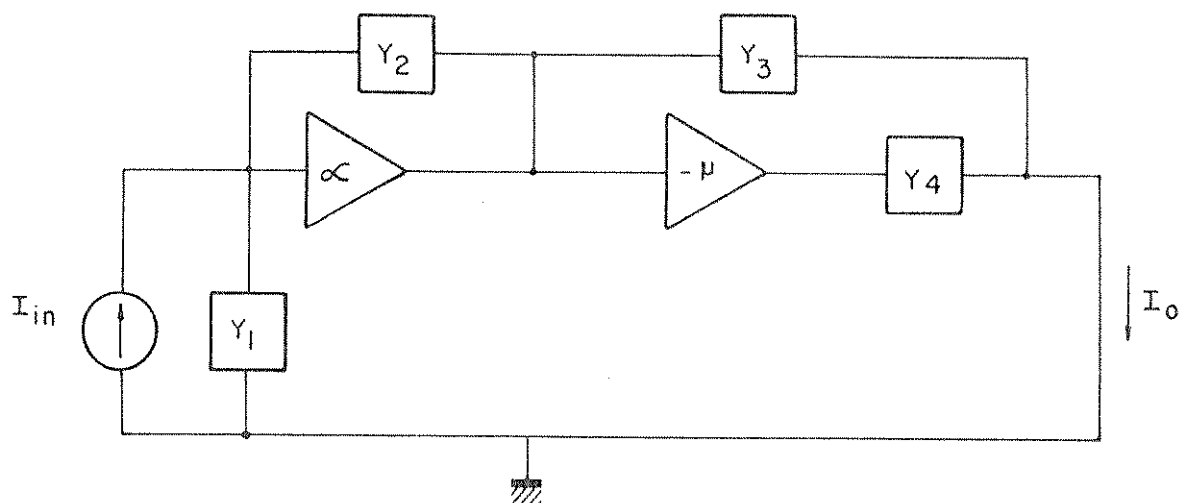


Figura 3.13 - Conexão em cascata de "Secção Polo Básica" com "Secção Zero Básica".

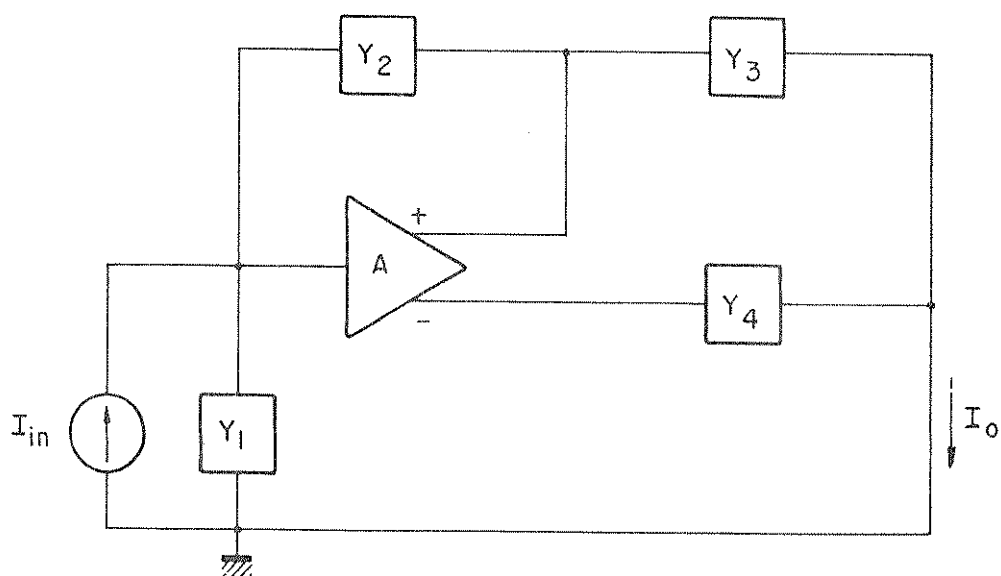


Figura 3.14 - Estrutura utilizando um amplificador com saída diferencial.

Para realizarmos a razão de transferência de corrente especificada $\frac{N(S)}{D(S)}$ na forma da figura 3.15, selecionamos um polinômio $Q(S)$ com raízes reais negativas distintas e com grau tal que

$$Q(S)^0 + 1 \geq \max (N(S)^0, D(S)^0)$$

Pelo teorema 3.1, podemos escrever:

$$\frac{N(S)}{D(S)} = Y_{RC}^A - Y_{RC}^B \quad e \quad \frac{D(S)}{Q(S)} = Y_{RC}^C - Y_{RC}^D \quad (3.19)$$

Comparando (3.19) com (3.18) identificamos:

$$Y_3 = Y_{RC}^A \quad Y_4 = \frac{Y_{RC}^B}{\mu}$$

$$Y_1 = Y_{RC}^C \quad Y_2 = \frac{1}{\alpha - 1} (Y_{RC}^D + Y_{RC}^A)$$

Esta estrutura pode ser modificada usando um amplificador com saída diferencial ao invés dos dois amplificadores como mostra a figura 3.16. Neste caso a razão de transferência de corrente ê:

$$t_I = \frac{Y_3 - AY_4}{Y_1 + Y_3 - (A - 1)Y_2} \quad (3.20)$$

No caso de realização da razão de transferência de tensão podemos usar a estrutura da figura 3.17 que pode ser obtida as sociando-se duas "Secções Básicas" em cascata. A função de site-ma pertinente ê:

$$t_v = \frac{V_0}{V_{in}} = \frac{Y_3 - \mu Y_4}{Y_1 + Y_3 + Y_4 - (\alpha - 1)Y_2} \quad (3.21)$$

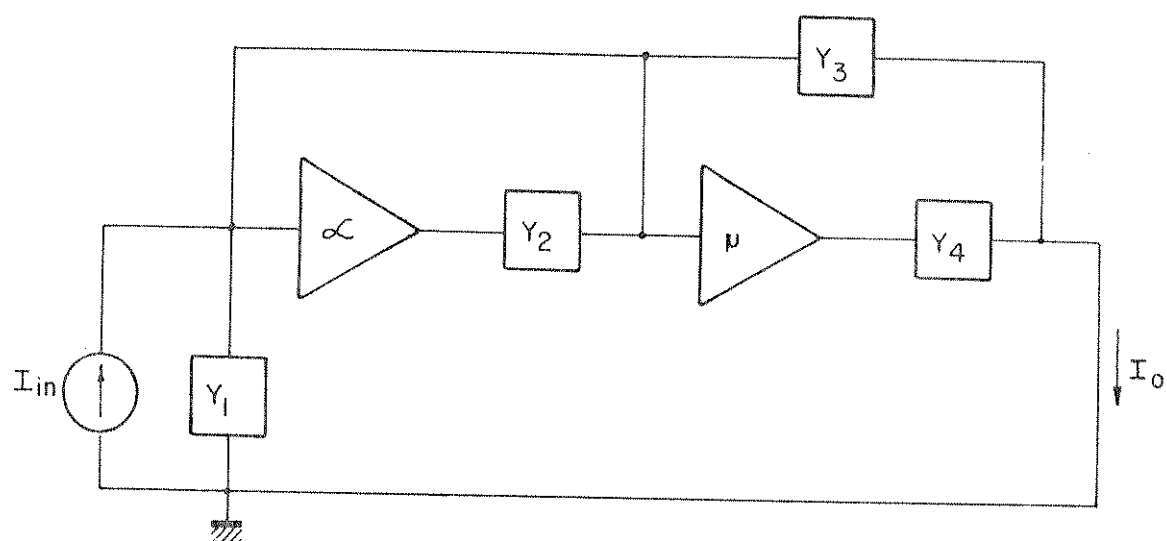


Figura 3.15 - Configuração alternativa do circuito da fig. 3.14.

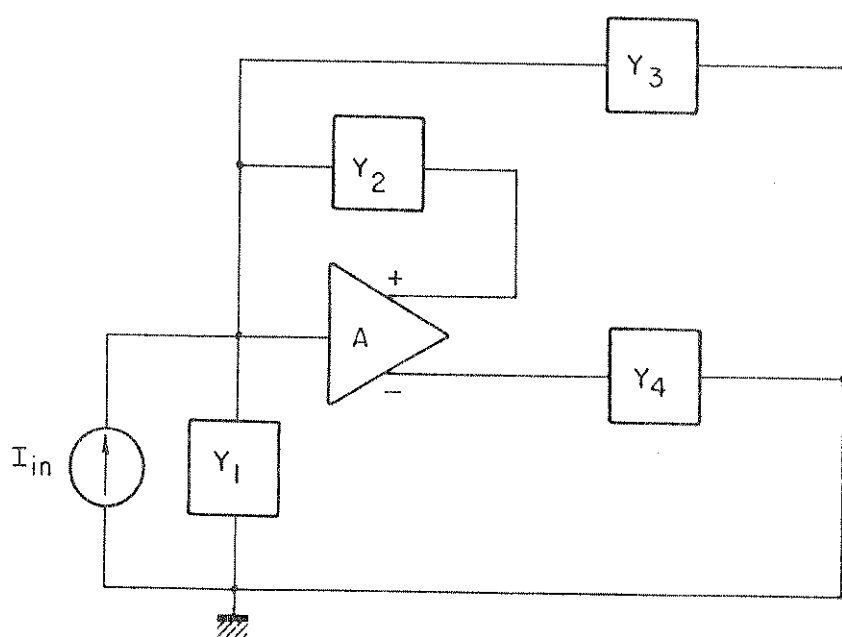


Figura 3.16 - Realização da razão de transferência de corrente utilizando um amplificador com saída diferencial.

Neste caso os passos de síntese serão ilustrados por meio de um exemplo.

Exemplo 3.5 - O procedimento para realização da razão de transferência de tensão

$$t_v = \frac{N(S)}{D(S)} = \frac{S^2 - S + 1}{S^2 + S + 1}$$

é:

Escolhe-se um $Q(S) = S + 1$,

assim,

$$t_v = \frac{\frac{N(S)}{Q(S)}}{\frac{D(S)}{Q(S)}} = \frac{(S + 1) - \frac{3S}{S + 1}}{(S + 1) - \frac{S}{S + 1}} \quad (3.22)$$

Para $\mu = 1$ e $\alpha = 2$ e comparando as equações (3.21) e (3.22) identifica-se:

$$Y_3 = S + 1$$

$$Y_4 = \frac{3S}{S + 1}$$

$$Y_1 = 0$$

$$(\alpha - 1)Y_2 - Y_4 = \frac{S}{S + 1}$$

$$\therefore Y_2 = \frac{4S}{S + 1}$$

Desta maneira, como $V_1 = 0$, não é possível a compensação

para a impedância de entrada do amplificador não inversor. Para que essa compensação seja possível e também para justificar a impedância de carga, podemos fazer Y_1 igual a uma constante e adicionar esta constante em Y_2 . Assim, fazendo $Y_1 = 2$, então

$$Y_2 = \frac{4S}{S+1} + 2 = \frac{6S+2}{S+1}$$

Os circuitos RC de 1pt serão:

$$Y_3 = S + 1$$

$$Y_4 = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3S}}$$

$$Y_1 = 2$$

$$Y_2 = \frac{6S+2}{S+1}$$

A realização final é mostrada na figura 3.18.

A impedância de entrada do amplificador não inversor não terá efeito sobre a função de transferência total se a fonte de entrada V_{in} for uma fonte de baixa impedância.

Outra maneira de sintetizar funções de transferência é fazer a "correspondência de coeficientes", ou seja, a partir dos coeficientes dos polinômios numerador e denominador da função de transferência pode-se identificar os elementos do sistema.

A razão de transferência de tensão do filtro RC ativo de segunda ordem analisado na figura 2.20 da secção 2.1.4 é:

$$t_v = \frac{V_2}{V_1} = \frac{K/R_1 R_2 C_1 C_2}{s^2 + \left[\frac{1-K}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_1 C_1} \right] s + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (3.23)$$

A forma geral da razão da transferência de tensão para esse tipo de filtro é

$$t_v = \frac{H}{s^2 + \beta_1 s + \beta_0} \quad (3.24)$$

Comparando as equações (3.23) e (3.24) identificamos os coeficientes como:

$$\begin{cases} H = K/R_1 R_2 C_1 C_2 \\ \beta_1 = \frac{1-K}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} \\ \beta_0 = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \end{cases} \quad (3.25)$$

O número de incógnitas das equações (3.25) é maior que o número de equações, portanto, para que possamos resolvê-las devemos fixar valores para alguns elementos e assim obtermos os valores das restantes. Por exemplo, se fizermos $C_1 = C_2 = 1$ e $K = 2$, as equações 3.25 ficam resolvidas, ou seja,

$$H = 2/R_1 R_2$$

$$\beta_1 = \frac{-1}{R_2} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\beta_0 = 1/R_1 R_2$$

então,

$$R_1 = \frac{1}{\beta_1}, \quad R_2 = \frac{\beta_1}{\beta_0} \quad \text{e} \quad H = 2\beta_0 \quad (3.26)$$

Exemplo 3.6 - Realize o filtro da Buterworth passa baixas da 2ª ordem.

$$t_v = \frac{H}{s^2 + 4s + 2}$$

Da equação 3.26 temos:

$$R_1 = \frac{1}{4}, \quad R_2 = 2 \quad \text{e} \quad H = 4 \quad \text{para} \quad C_1 = C_2 = 1 \quad \text{e} \quad K = 2.$$

A figura (3.19) representa a realização final do filtro em questão.

No caso de filtro passa altas, basta fazermos uma transformação passa alta para passa baixas, isto é, fazer $s \rightarrow 1/s$, resolvemos o sistema como se fosse um filtro passa baixas e no final, fazemos uma transformação RC:CR.

Exemplo 3.7 - Realize o filtro ativo de 2ª ordem, passa altas:

$$t_v = \frac{HS^2}{S^2 + S + 2}$$

Fazendo $s \rightarrow 1/s$, temos

$$t'_v = \frac{H \cdot 1/s^2}{1/s^2 + 1/s + 2} = \frac{H}{1 + s + 2s^2}$$

$$t'_v = \frac{H/2}{s^2 + s/2 + 1/2}$$

De acordo com as equações (3.26) e para $C_1 = C_2 = 1$ e $K = 2$, temos:

$$R_1 = 2, \quad R_2 = 1 \quad \text{e} \quad \frac{H}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \quad \therefore \quad H = 2$$

A figura 3.20 representa a realização do filtro, após a transformação RC:CR.

Para filtros passa faixa que tem razão de transferência de tensão da forma:

$$t_v = \frac{HS}{s^2 + \beta_1 s + \beta_0} \quad , \quad (3.27)$$

uma realização possível está representada na figura 3.21.

Sua função de transferência será:

$$t_v = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\mu s / R_1 C_1}{s^2 + \left[\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_3 C_2} + \frac{1}{R_3 C_1} - \frac{\mu}{R_1 C_1} \right] s + \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}} \quad (3.28)$$

Comparando as equações (3.27) e (3.28), identificamos:

$$H = \mu / R_1 C_1$$

$$\beta_1 = \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_3 C_1} + \frac{1}{R_3 C_2} - \frac{\mu}{R_2 C_1} \quad (3.29)$$

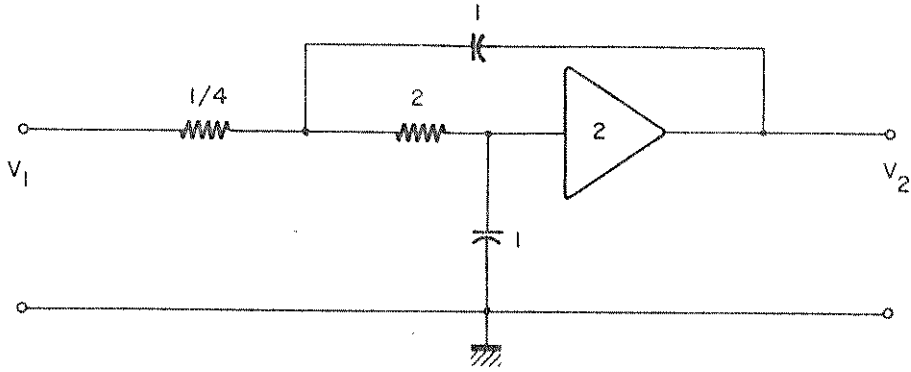


Figura 3.19 - Filtro de Buterworth do exemplo 3.6.

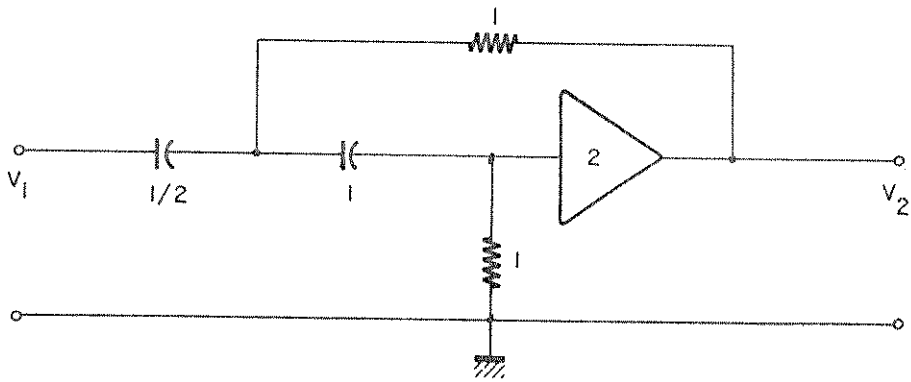


Figura 3.20 - Filtro do exemplo 3.7 após transformação RC:CR.

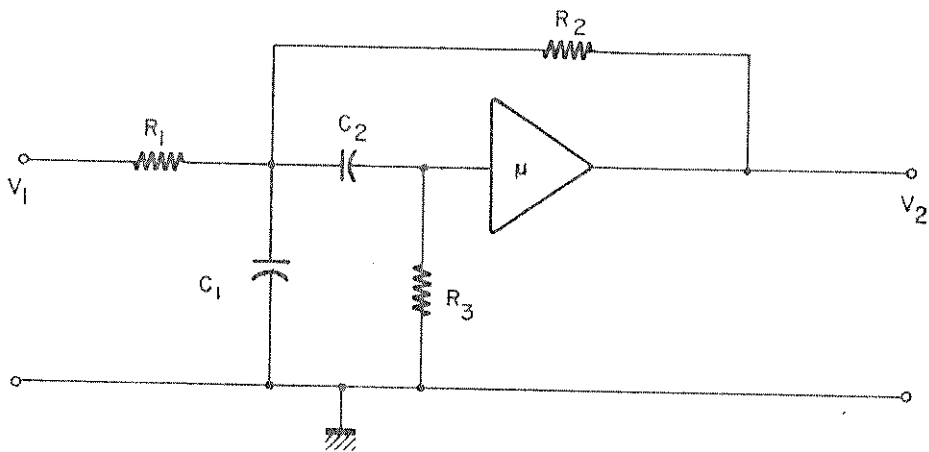


Figura 3.21 - Filtro passa faixa com razão de transferência de tensão na forma da equação (3.27).

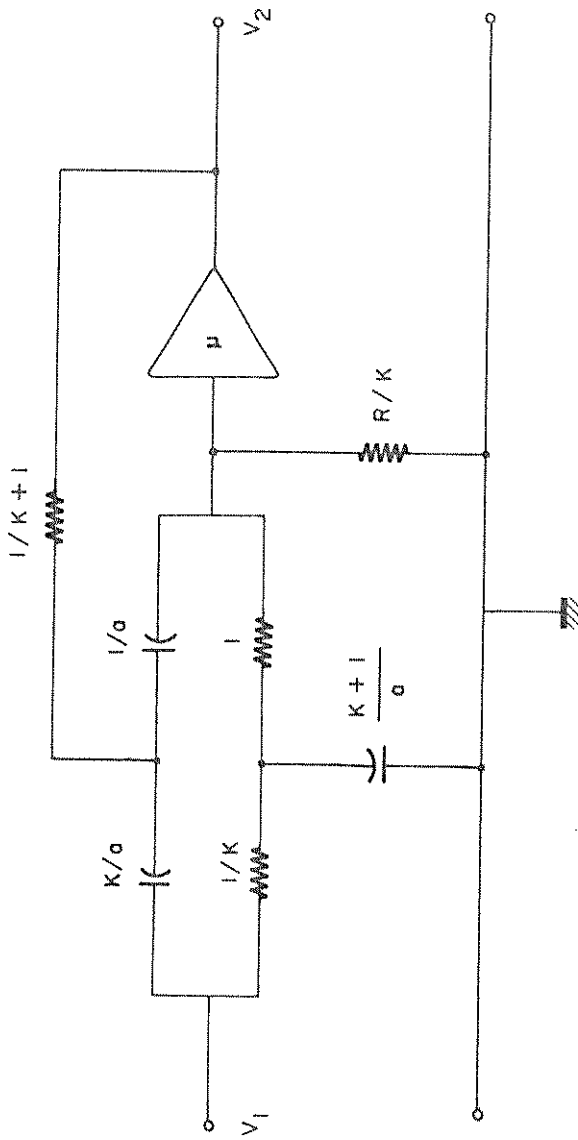


Figura 3.22 - Estrutura ativa que realiza a função de transferência em que $\alpha < \beta_0$.

$$\beta_0 = \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}$$

Podemos então fixar valores para alguns elementos como por exemplo, $C_1 = C_2 = 1$ e $R_1 = R_2 = 1$ e, através das equações (3.29), calcular os outros valores, ou seja,

$$H = \mu$$

$$\beta_0 = 2/R_3 \rightarrow R_3 = 2/\beta_0$$

$$\beta_1 = 2 - \mu + \frac{2}{2/\beta_0} \rightarrow \mu = 2 - \beta_1 + \beta_0$$

No caso de filtros ativos RC contendo um par de zeros no eixo $j\omega$, a função de transferência é uma função elíptica da forma:

$$t_v = \frac{V_2}{V_1} = \frac{H(S^2 + \alpha)}{S^2 + \beta_1 S + \beta_0} \quad (3.30)$$

Para a realização deste filtro, devemos considerar três situações possíveis:

$$\alpha < \beta_0 ,$$

$$\alpha > \beta_0 \quad e$$

$$\alpha = \beta_0$$

No primeiro caso ($\alpha < \beta_0$), realizamos a função de transferência (3.30) por meio de um sistema ativo RC indicado na figura 3.22 [11].

A razão de transferência de tensão para esta configuração será:

$$t_v = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\mu (S^2 + a^2)}{S^2 + (K+1)a \left[\frac{1}{R} + \frac{2-\mu}{K} \right] S + \left[1 + \frac{K+1}{R} \right] a^2} \quad (3.31)$$

Através da comparação entre as equações (3.30) e (3.31), identificamos:

$$H = \mu$$

$$a = \sqrt{\alpha}$$

$$\beta_1 = (K+1)a \left[\frac{1}{R} + \frac{2-\mu}{K} \right] \quad (3.32)$$

$$\beta_0 = \left[1 + \frac{K+1}{R} \right] a^2$$

$$R = \frac{(K+1)a^2}{\beta_0 - a^2}$$

$$R = \frac{K+1}{\frac{\beta_0}{\alpha} - 1}$$

$$\mu = \frac{-K\beta_1}{(K+1)a} + \frac{K}{R} + 2 = (2-K) \left[\frac{\beta_1}{(K+1)a} - \frac{1}{R} \right]$$

Para $\alpha > \beta_0$ podemos fazer uma transformação passa baixas para passa alta ($S \rightarrow 1/S$) na função de transferência do caso anterior (equação (3.31)), conseguindo assim que α fique menor que β_0 e em seguida, uma transformação RC:CR no sistema da figura 3.22.

Exemplo 3.8 - Considere a realização da razão de transferência de tensão:

$$t_v = \frac{H_1 (S^2 + 4)}{S^2 + 2S + 2}$$

então:

$$t'_v = \frac{H_1(1/S^2 + 4)}{1/S^2 + 2/S + 2} = \frac{H_1(1 + 4S^2)}{1 + 2S + 2S^2}$$

$$t'_v = \frac{2H_1(S^2 + 1/4)}{S^2 + S + 1/2}$$

os coeficientes serão:

$$H = 2H_1, \alpha = 1/4, \beta_1 = 1 \text{ e } \beta_0 = 1/2$$

que identificados com as equações (3.32), resultam:

$$a = 1/2$$

$$R = K + 1$$

$$\mu = \frac{2 - K}{K + 1}$$

$$H_1 = 1/2 H = \frac{1}{2} \mu$$

$$\text{Para } K = 1/2, \text{ temos que } R = \frac{3}{2} \text{ e } \mu = 1.$$

A figura 3.23a representa o sistema resultante e a fig. 3.23b representa a realização final do sistema, isto é, após a transformação RC:CR, que é um filtro passa altas.

Análise análoga à anterior nos leva a concluir que quando $\alpha = \beta_0$ o sistema resultante será um filtro corta faixa.

Os diagramas de Bode das figuras 3.24a, 3.24b e 3.24c, indicam 1º, 2º e 3º casos respectivamente.

3.2. Síntese de Funções de Driving-point

A solução para a realização de funções de driving-point, usando VCVS se baseia em uma estrutura com duas VCVSs ideais e quatro sistemas RC de um par de terminais como mostra a figura 3.25.

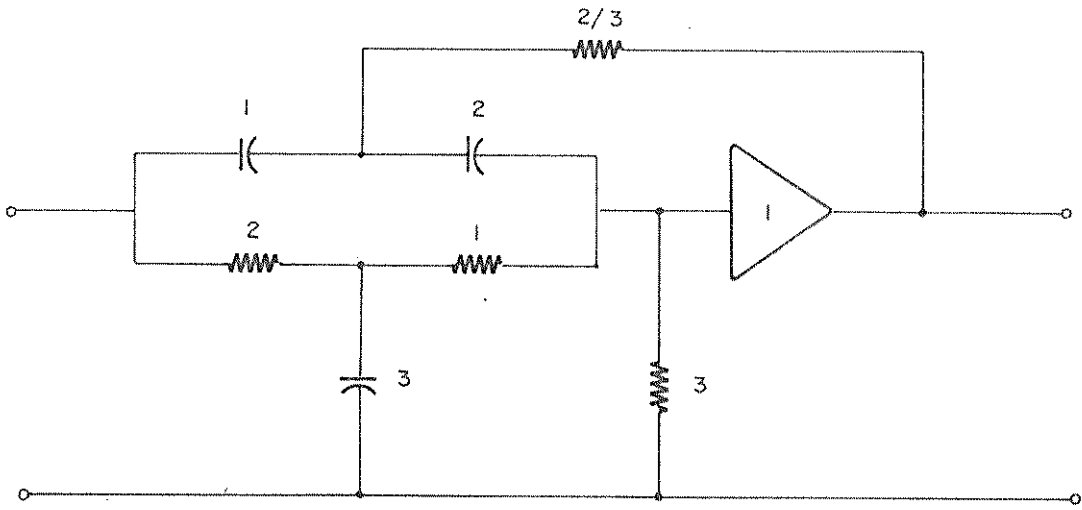


Figura 3.23a - Filtro do exemplo 3.8.

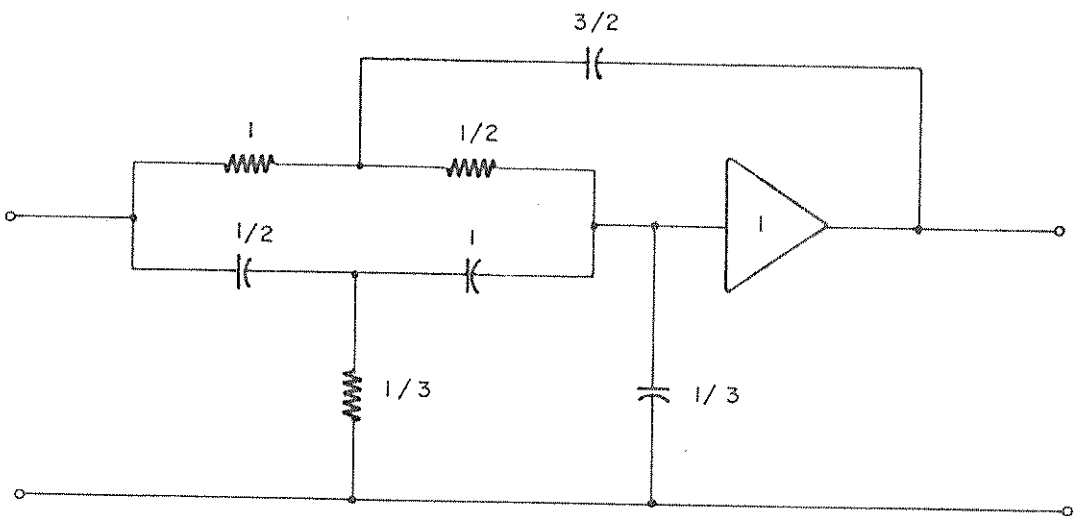
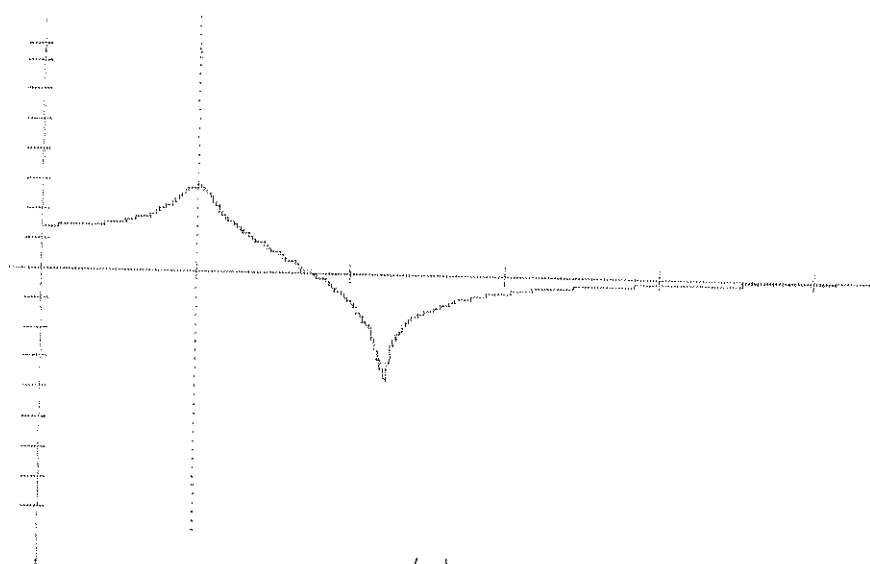
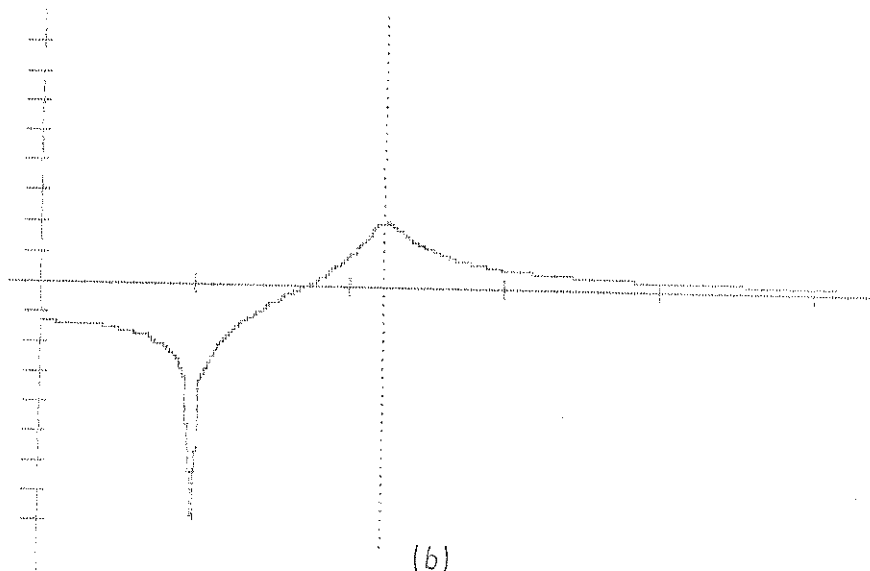


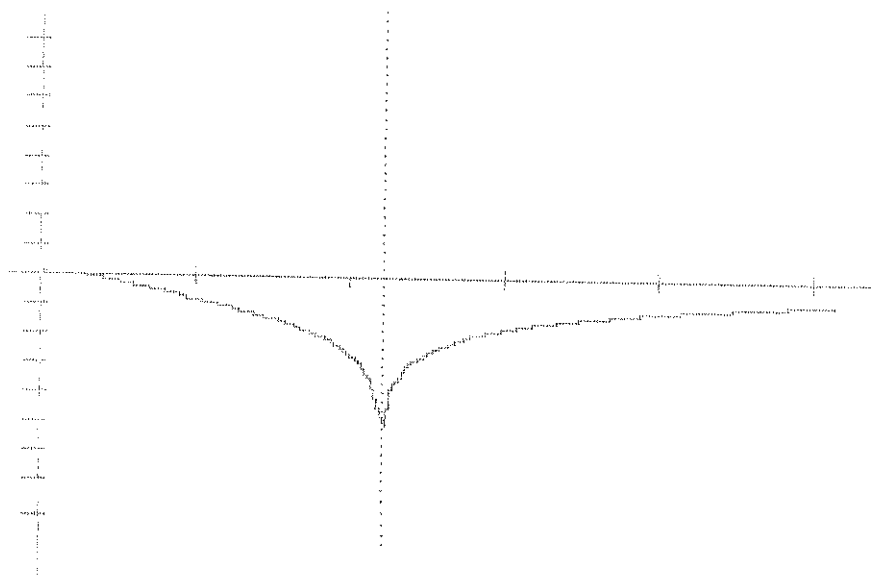
Figura 3.23b - Filtro do exemplo 3.8 após transformação RC:CR.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.24 - Diagramas de Bode.

A impedância de entrada do sistema é:

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} = 1 + \frac{Y_4 - Y_3}{Y_2 - Y_1} \quad (3.34)$$

mas

$$Z_{11} = \frac{N(S)}{D(S)}$$

pode ser escrita nos moldes da equação (3.34) ou seja,

$$Z_{11} = 1 + \frac{N(S) - D(S)}{D(S)} \quad (3.35)$$

Se arbitrarmos um polinômio $Q(S)$ com raízes reais negativas distintas e cujo grau obedeça a expressão (3.36),

$$Q(S)^0 + 1 \geq \max [N(S)^0, D(S)^0] \quad (3.36)$$

podemos então escrever que:

$$Z_{11} = 1 + \frac{\frac{N(S) - D(S)}{Q(S)}}{D(S) / Q(S)} \quad (3.37)$$

Com base no teorema 3.1, identificamos:

$$\frac{N(S) - D(S)}{Q(S)} = Y_{RC}^A - Y_{RC}^B$$

e

$$\frac{D(S)}{Q(S)} = Y_{RC}^C - Y_{RC}^D \quad (3.38)$$

Assim, comparando as equações (3.35), (3.37) e (3.38) com a equação (3.34), obtemos:

$$Y_1 = Y_{RC}^D, \quad Y_2 = Y_{RC}^C, \quad Y_3 = Y_{RC}^B \quad \text{e} \quad Y_4 = Y_{RC}^A \quad (3.39)$$

podendo-se evidentemente trocar Y_1 por Y_2 e Y_3 por Y_4 .

Exemplo 3.9 - Considere a realização da impedância de driving-point, real e não positiva,

$$Z_{11} = \frac{N(S)}{D(S)} = S^2$$

Escolhendo $Q(S) = (S + 1)$ e fazendo uma expansão em frações parciais de $\frac{N(S) - D(S)}{SQ(S)}$ e $\frac{D(S)}{SQ(S)}$, temos:

$$\frac{N(S) - D(S)}{SQ(S)} = \frac{S^2 - 1}{S(S + 1)} = 1 - 1/S$$

$$\frac{D(S)}{SQ(S)} = \frac{1}{S(S + 1)} = \frac{1}{S} - \frac{1}{S + 1}$$

e portanto:

$$\frac{N(S) - D(S)}{Q(S)} = \frac{S^2 - 1}{S + 1} = S - 1$$

$$\frac{D(S)}{Q(S)} = \frac{1}{S + 1} = 1 - \frac{S}{S + 1}$$

Identificando esses termos com as equações (3.38) e (3.39) obtemos:

$$Y_4 = S, \quad Y_3 = 1, \quad Y_2 = 1 \quad \text{e} \quad Y_1 = \frac{S}{S + 1}$$

A figura 3.26 representa a realização final da estrutura.

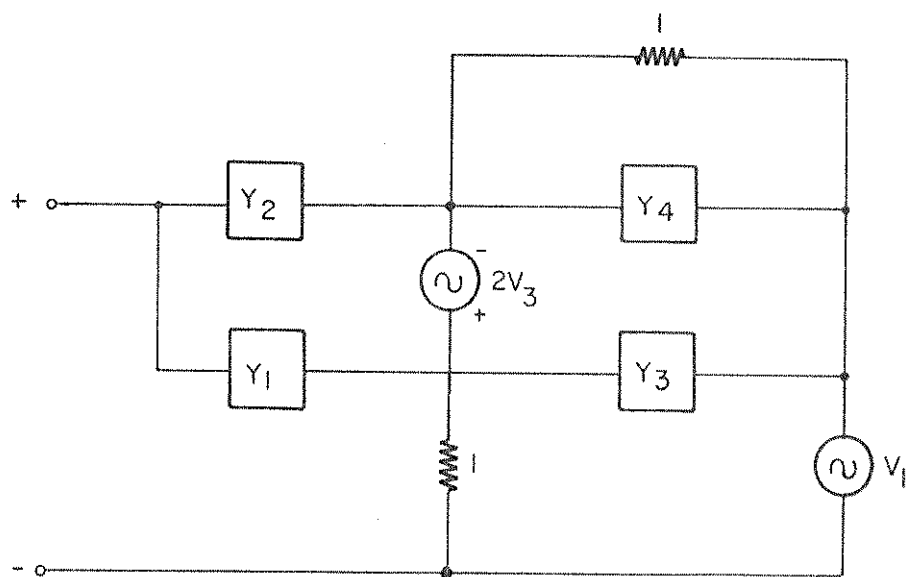


Figura 3.25 - Estrutura para realização de funções de driving-point com duas VCVS's ideais.

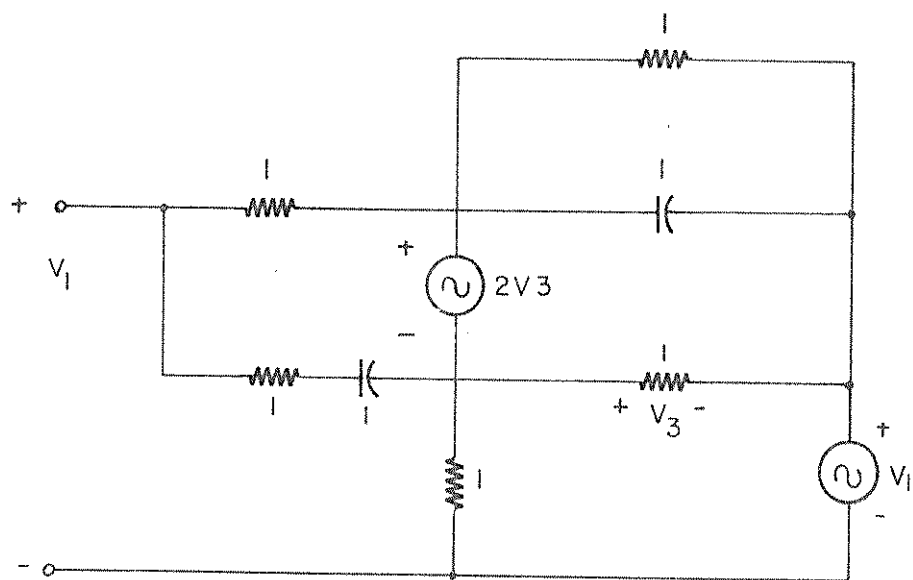


Figura 3.26 - Realização final do filtro do exemplo 3.9.

CAPÍTULO IV

SENSIBILIDADE

Neste capítulo vamos analisar a sensibilidade dos principais filtros ativos elementares de segunda ordem usando VCVS, através do cálculo das principais figuras de sensibilidade mostradas no capítulo I. Assim analisaremos o comportamento dos filtros devido a variações em cada um de seus parâmetros.

Por facilidade de análise, consideraremos todos os parâmetros, unitários, exceto aquele para o qual estaremos calculando a sensibilidade.

4.1. Sensibilidade de Filtros Passa Baixas de Ganho Positivo

A figura 4.1 representa a estrutura de um filtro elementar deste tipo, conforme mostrado no Capítulo II.

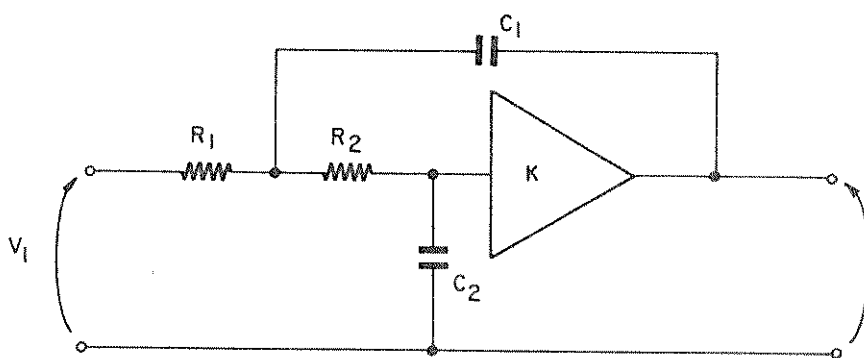


Fig. 4.1 - Filtro Passa Baixas de Ganho Positivo.

Sua função de transferência é da forma:

$$T(S) = \frac{K/R_1 R_2 C_1 C_2}{S^2 + \left(\frac{1-K}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_1 C_1} \right) S + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (4.1)$$

O fator de qualidade vale

$$Q = \frac{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}{(1 - K) R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2} \quad (4.2)$$

e a frequência central

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (4.3)$$

4.1.1. Sensibilidade da Função $(S^{T(S)})$

A sensibilidade da função de transferência $T(S)$ em relação a variações incrementais em cada um dos parâmetros do circuito, de acordo com a equação 1.1b, será:

$$S_{R_1}^{T(S)} = \frac{-R_1 S(S+1)}{R_1 S^2 + (R_1 + 1)S + 1} \quad (4.4a)$$

$$S_{R_2}^{T(S)} = \frac{-R_2 S(S+1)}{R_2 S^2 + (R_2 + 1)S + 1} \quad (4.4b)$$

$$S_{C_1}^{T(S)} = \frac{-C_1 S^2}{C_1 S^2 + 2S + 1} \quad (4.4c)$$

$$S_{C_2}^{T(S)} = \frac{-C_2 S(S+2)}{C_2 S^2 + 2C_2 S + 1} \quad (4.4d)$$

$$S_K^T(S) = \frac{S^2 + 3S + 1}{S^2 + (3 - K)S + 1} \quad (4.4e)$$

Na frequência central e para o caso em que o parâmetro analisado assumo valor 1 (um), temos:

$$S_{R_1}^T(j\omega) = \frac{-\sqrt{R_1}}{R_1 + 1} (j + \sqrt{R_1}) \quad e \quad |S_{R_1}^T(j\omega)| = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4.5a)$$

$$S_{R_2}^T(j\omega) = \frac{-\sqrt{R_2}}{R_2 + 1} (j + \sqrt{R_2}) \quad e \quad |S_{R_2}^T(j\omega)| = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4.5b)$$

$$S_{C_1}^T(j\omega) = -j \frac{\sqrt{C_1}}{2} \quad e \quad |S_{C_1}^T(j\omega)| = \frac{1}{2} \quad (4.5c)$$

$$S_{C_2}^T(j\omega) = -(1 + j \frac{\sqrt{C_2}}{2C_2}) \quad e \quad |S_{C_2}^T(j\omega)| = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad (4.5d)$$

$$S_K^T(j\omega) = \frac{3}{3 - K} \quad e \quad |S_K^T(j\omega)| = \frac{3}{2} \quad (4.5e)$$

Os valores obtidos para os módulos das sensibilidades re apresentam a porcentagem de variação na função de transferência de vida a variações incrementais nos parâmetros do sistema.

4.1.2. Sensibilidade do Fator de Qualidade (S_Q) e da Frequência (S^{ω_0})

Considerando as equações (4.2) e (4.3), que representam respectivamente o fator de qualidade e a frequência central do sistema e as equações (1.10) e (1.11), calculamos S_Q e S^{ω_0} :

$$S_{R_1}^Q = \frac{1 - R_1}{2(1 + R_1)} \quad (4.6a)$$

$$S_{R_2}^Q = \frac{1 - R_2}{2(1 + R_2)} \quad (4.6b)$$

$$S_{C_1}^Q = \frac{1}{2} \quad (4.6c)$$

$$S_{C_2}^Q = -\frac{1}{2} \quad (4.6d)$$

$$S_K^Q = \frac{K}{3 - K} \quad (4.6e)$$

e

$$S_{R_1}^{\omega_0} = S_{R_2}^{\omega_0} = S_{C_1}^{\omega_0} = S_{C_2}^{\omega_0} = -\frac{1}{2} \quad (4.7)$$

$$S_K^{\omega_0} = 0$$

4.1.3 - Sensibilidade da Raiz (δS_i)

Consideremos o denominador de $T(S)$, na equação (4.1), escrito na forma:

$$P(S) = R_1 R_2 C_1 C_2 S^2 + [(1 - k) R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2] S + 1 \quad (4.8)$$

Quando R_1 é o parâmetro analisado temos:

$$P_1(S) = R_1 S^2 + (1 + R_1) S + 1$$

Os polos de $P_1(S)$ são:

$$S_1 = \frac{-1}{R_1} \quad \text{e} \quad S_2 = -1$$

Assim, pela equação (1.16), as sensibilidades dos polos em relação a variações em R_1 são:

$$\delta_{R_1}^{S_1} = \frac{1}{R_1} \quad e \quad \delta_{R_1}^{S_2} = 0 \quad (4.9a)$$

e para $R_1 = 1\Omega$, $\delta_{R_1}^{S_1} = 1$

Para variações em R_2 ,

$$P_2(S) = R_2 S^2 + (1 + R_2)S + 1$$

Os polos de $P_2(S)$ são:

$$S_1 = \frac{-1}{R_2} \quad e \quad S_2 = -1$$

e as sensibilidades:

$$\delta_{R_2}^{S_1} = \frac{1}{R_2} \quad e \quad \delta_{R_2}^{S_2} = 0 \quad (4.9b)$$

Para $R_2 = 1\Omega$, $\delta_{R_2}^{S_1} = 1$

Para variações em C_1 :

$$P_3(S) = C_1 S^2 + 2S + 1 \quad e$$

$$S = \frac{-1 \pm j\sqrt{C_1 - 1}}{C_1}$$

Sendo $\tau_i = \frac{-1}{C_1}$ a parte real do polo e $\omega_i = \frac{\sqrt{C_1 - 1}}{C_1}$, a parte imaginária.

Assim,

$$\delta_{C_1}^{\tau_i} = \frac{1}{C_1} \quad e \quad \delta_{C_1}^{\omega_i} = \frac{2 - C_1}{2C_1 \sqrt{C_1 - 1}}$$

e pela equação (1.18),

$$\delta \frac{S_i}{C_1} = \frac{1}{C_1} \pm j \frac{2 - C_1}{2C_1 \sqrt{C_1 - 1}} \quad (4.9c)$$

Quando C_2 é o parâmetro analisado:

$$P_4(S) = C_2 S^2 + 2C_2 S + 1$$

$$S_i = \frac{-C_2 \pm \sqrt{C_2(C_2 - 1)}}{C_2}$$

$$\delta \frac{S_i}{C_2} = \frac{\pm 1}{2\sqrt{C_2(C_2 - 1)}} \quad (4.9d)$$

Analisando variações no ganho da VCVS, temos:

$$P_5(S) = S^2 + (3 - K)S + 1$$

$$S_i = \frac{-(3 - K) \pm j\sqrt{4 - (3 - K)^2}}{2}$$

$$\text{sendo } \tau_i = \frac{K - 3}{2} \quad \text{e} \quad \omega_i = \frac{\sqrt{4 - (3 - K)^2}}{2}$$

então

$$\delta_K^{\tau_i} = \frac{K}{2} \quad \text{e} \quad \delta_K^{\omega_i} = \frac{K(3 - K)}{2\sqrt{4 - (3 - K)^2}}$$

portanto

$$\delta_K^{\frac{S_i}{C_2}} = \frac{K}{2} \pm j \frac{K(3 - K)}{2\sqrt{4 - (3 - K)^2}} \quad (4.9e)$$

4.1.4 - Sensibilidade do Polinômio $S^P(S)$

O polinômio denominador da função de transferência do filtro em questão é:

$$P(S) = R_1 R_2 C_1 C_2 S^2 + [(1 - K) R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2] S + 1$$

De acordo com as equações (1.31) e (1.32) e considerando variações em cada um dos parâmetros do filtro, temos:

$$P_1(S) = R_1 S^2 + (R_1 + 1) S + 1$$

$$S_{R_1}^{P_1(S)} = \frac{R_1 S(S + 1)}{R_1 S^2 + (R_1 + 1) S + 1} \quad (4.10a)$$

$$P_2(S) = R_2 S^2 + (R_2 + 1) S + 1$$

$$S_{R_2}^{P_2(S)} = \frac{R_2 S(S + 1)}{R_2 S^2 + (R_2 + 1) S + 1} \quad (4.10b)$$

$$P_3(S) = C_1 S^2 + 2S + 1$$

$$S_{C_1}^{P_3(S)} = \frac{C_1 S^2}{C_1 S^2 + 2S + 1} \quad (4.10c)$$

$$P_4(S) = C_2 S^2 + 2C_2 S + 1$$

$$S_{C_2}^{P_4(S)} = \frac{C_2 S(S + 2)}{C_2 S^2 + 2C_2 S + 1} \quad (4.10d)$$

$$P_5(S) = S^2 + (3 - K)S + 1$$

$$S_K^{P_5(S)} = \frac{-KS}{S^2 + (3 - K)S + 1} \quad (4.10e)$$

Podemos escrever as equações 4.10, na frequência central com o parâmetro analisado igual a um, desta forma temos:

$$S_{R_1}^{P(j\omega)} = \frac{1}{R_1 + 1} + j \frac{\sqrt{R_1}}{R_1 + 1} \quad e \quad |S_{R_1=1}^{P(j\omega)}| = 0.71 \quad (4.11a)$$

$$S_{R_2}^{P(j\omega)} = \frac{1}{R_2 + 1} + j \frac{\sqrt{R_2}}{R_1 + 1} \quad e \quad |S_{R_2}^{P(j\omega)}| = 0.71 \quad (4.11b)$$

$$S_{C_1}^{P(j\omega)} = j \frac{\sqrt{C_1}}{2} \quad e \quad |S_{C_1=1}^{P(j\omega)}| = 0.5 \quad (4.11c)$$

$$S_{C_2}^{P(j\omega)} = 1 + j \frac{\sqrt{C_2}}{2C_2} \quad e \quad |S_{C_2=1}^{P(j\omega)}| = 1.12 \quad (4.11d)$$

$$S_K^{P(j)} = \frac{-K}{3 - K} \quad e \quad |S_K^{P(j\omega)}| = 0.5 \quad (4.11e)$$

4.2 - Sensibilidade de Filtros Passa Altas de Ganho Positivo

Neste caso, como já mostrado no capítulo III, a estrutura do filtro é obtida fazendo-se uma transformação RC:CR no filtro passa baixas, resultando na estrutura da figura 4.2 e na função de transferência.

$$T(S) = \frac{KS^2}{S^2 + [(1 - K)R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2]S + R_1R_2C_1C_2} \quad (4.12)$$

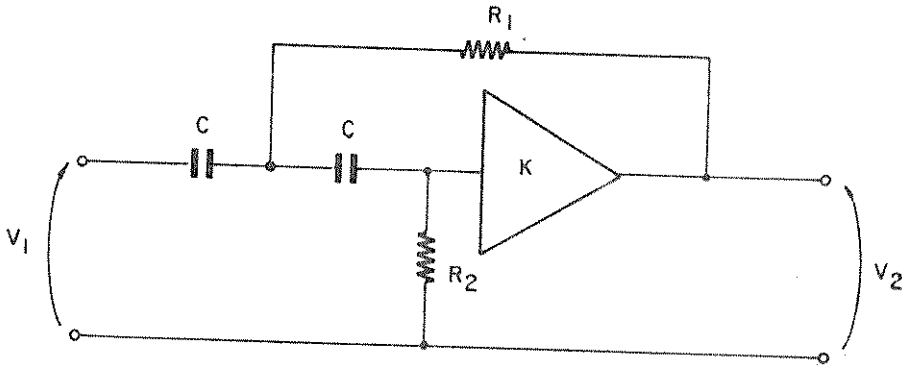


Fig. 4.2 - Filtro Passa Altas de Ganho Positivo.

O fator de qualidade vale

$$Q = \frac{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}{(1 - K) R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2} \quad (4.13)$$

e a frequência central

$$\omega_0 = \sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2} \quad (4.14)$$

4.2.1. Sensibilidade da Função $S^T(S)$

Analizando variações em cada parâmetro vamos obter:

$$T_1(S) = \frac{S^2}{S^2 + (1 + R_1)S + R_1}$$

$$\frac{T_1(S)}{S_{R_1}} = \frac{-R_1(S + 1)}{S^2 + (1 + R_1)S + R_1} \quad (4.15a)$$

$$T_2(S) = \frac{S^2}{S^2 + (1 + R_2)S + R_2}$$

$$S_{R_2}^{T_2(s)} = \frac{-R_2(s+1)}{s^2 + (1+R_2)s + R_2} \quad (4.15b)$$

$$T_3(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2s + C_1}$$

$$S_{C_1}^{T_3(s)} = \frac{-C_1}{s^2 + 2s + C_1} \quad (4.15c)$$

$$T_4(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2C_2s + C_2}$$

$$S_{C_2}^{T_4(s)} = \frac{-C_2(2s+1)}{s^2 + 2C_2s + C_2} \quad (4.15d)$$

$$T_5(s) = \frac{KS^2}{s^2 + (3-K)s + 1}$$

$$S_K^{T_5(s)} = \frac{s^2 + 3s + 1}{s^2 + (3-K)s + 1} \quad (4.15e)$$

Na frequência central, quando o valor do parâmetro analisado é um (1),

$$S_{R_1}^{T(j\omega)} = \frac{-R_1 + j\sqrt{R_1}}{1 + R_1} \quad |S_{R_1}^{T(j\omega)}| = 0.71 \quad (4.16a)$$

$$S_{R_2}^{T(j\omega)} = \frac{-R_2 + j\sqrt{R_2}}{1 + R_2} \quad |S_{R_2}^{T(j\omega)}| = 0.71 \quad (4.16b)$$

$$S_{C_1}^{T(j\omega)} = j \frac{\sqrt{C_1}}{2} \quad |S_{C_1}^{T(j\omega)}| = 0.5 \quad (4.16c)$$

$$S_{C_2}^T(j\omega) = -1 + j \frac{\sqrt{C_2}}{2C_2} \quad |S^T(j\omega)| = 1,12 \quad (4.16d)$$

$$S_K^T(j\omega) = \frac{3}{3-K} \quad |S_K^T(j\omega)| = 1,5 \quad (4.16e)$$

4.2.2. Sensibilidade do Fator de Qualidade S^Q , e da Frequência, S^{ω_O} .

Considerando as equações (4.13) e (4.14)

$$S_{R_1}^Q = \frac{1 - R_1}{2(1 + R_1)} \quad (4.17a)$$

$$S_{R_2}^Q = \frac{1 - R_2}{2(1 + R_2)} \quad (4.17b)$$

$$S_{C_1}^Q = \frac{1}{2} \quad (4.17c)$$

$$S_{C_2}^Q = \frac{-1}{2} \quad (4.17d)$$

$$S_K^Q = \frac{K}{3-K} \quad (4.17e)$$

e

$$S_{R_1}^{\omega_O} = S_{R_2}^{\omega_O} = S_{C_1}^{\omega_O} = S_{C_2}^{\omega_O} = \frac{1}{2} \quad (4.18)$$

$$S_K^{\omega_O} = 0$$

4.2.3. Sensibilidade da Raiz (δ^{S_1})

Consideremos o polinômio denominador de $T(S)$ na equação (4.12).

$$P(S) = S^2 + [1 - K)R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2]S + R_1R_2C_1C_2 \quad (4.19)$$

De forma análoga à seção 4.1.4, obtemos os deslocamentos dos polos de $P(S)$ devido a variações incrementais em seus parâmetros; assim,

$$P_1(S) = S^2 + (1 + R_1)S + R_1$$

$$S = \frac{-(1 + R_1) \pm (1 - R_1)}{2} \rightarrow S_1 = -R_1 \quad e \quad S_2 = 1$$

Portanto $\delta_{R_1}^{S_1} = -R_1 \quad e \quad \delta_{R_2}^{S_2} = 0 \quad (4.20a)$

$$P_2(S) = S^2 + (1 + R_2)S + R_2$$

$$S_1 = -R_2 \quad e \quad S_2 = 1$$

$$\delta_{R_2}^{S_1} = -R_2 \quad e \quad \delta_{R_2}^{S_2} = 0 \quad (4.20b)$$

$$P_3(S) = S^2 + 2S + C_1$$

$$S = -1 \pm j\sqrt{C_1 - 1}$$

$$\delta_{C_1}^{S_i} = \pm j \frac{C_1}{2\sqrt{C_1 - 1}} \quad (4.20c)$$

$$P_4(S) = S^2 + 2C_2S + C_2$$

$$S_i = -C_2 \pm \sqrt{C_2(C_2 - 1)}$$

$$\delta \frac{S_i}{C_2} = -1 \pm j \frac{2C_2 - 1}{2\sqrt{C_2(C_2 - 1)}} \quad (4.20d)$$

$$P_5(S) = S^2 + (3 - K)S + 1$$

$$S_i = \frac{-(3 - K) \pm j \sqrt{4 - (3 - K)^2}}{2}$$

$$\delta \frac{S_i}{K} = \frac{K}{2} \pm j \frac{K(3 - K)}{2\sqrt{4 - (3 - K)^2}} \quad (4.20e)$$

4.2.4. Sensibilidade do Polinômio $S^P(S)$

Ainda considerando o polinômio denominador da equação (4.12) e as equações (1.31) e (1.32), temos:

$$P_1(S) = S^2 + (1 + R_1)S + R_1$$

$$S_{R_1}^{P_1(S)} = \frac{R_1(S + 1)}{S^2 + (1 + R_1)S + R_1} \quad (4.21a)$$

$$P_2(S) = S^2 + (1 + R_2)S + R_2$$

$$S_{R_2}^{P_2(S)} = \frac{R_2(S + 1)}{S^2 + (1 + R_2)S + R_2} \quad (4.21b)$$

$$P_3(S) = S^2 + 2S + C_1$$

$$\frac{P_3(S)}{S_{C_1}} = \frac{C_1}{S^2 + 2S + C_1} \quad (4.21c)$$

$$P_4(S) = S^2 + 2C_2S + C_2$$

$$\frac{P_4(S)}{S_{C_2}} = \frac{C_2(2S + 1)}{S^2 + 2C_2S + C_2} \quad (4.21d)$$

$$P_5(S) = S^2 + (3 - K)S + 1$$

$$\frac{P_5(S)}{S_K} = \frac{-KS}{S^2 + (3 - K)S + 1} \quad (4.21e)$$

Na frequência central e para o parâmetro analisado de valor unitário, temos:

$$S_{R_1}^P(j\omega) = \frac{R_1 - j\sqrt{R_1}}{1 + R_1} \quad |S_{R_1}^P(j\omega)| = 0.71 \quad (4.22a)$$

$$S_{R_2}^P(j\omega) = \frac{R_2 - j\sqrt{R_2}}{1 + R_2} \quad |S_{R_2}^P(j\omega)| = 0.71 \quad (4.22b)$$

$$S_{C_1}^P(j) = -j \frac{\sqrt{C_1}}{2} \quad e \quad |S_{C_1}^P(j\omega)| = +0.5 \quad (4.22c)$$

$$S_{C_2}^P(j) = 1 - j \frac{\sqrt{C_2}}{2C_2} \quad e \quad |S_{C_2}^P(j\omega)| = 1.12 \quad (4.22d)$$

$$S_K^P(j) = \frac{-K}{3 - K} \quad e \quad |S_K^P(j\omega)| = +0.5 \quad (4.22e)$$

4.3 - Sensibilidade de Filtros Passa Faixa de Ganho Positivo

Filtros com estas características foram citados no capítulo II. A figura 4.3 mostra a configuração básica dos mesmos que têm como função de transferência:

$$T(S) = \frac{KS/RC_2}{S^2 + \frac{2C_2 + (2,5 - K)C_1}{RC_1C_2}S + \frac{1}{R_2C_1C_2}} \quad (4.23)$$

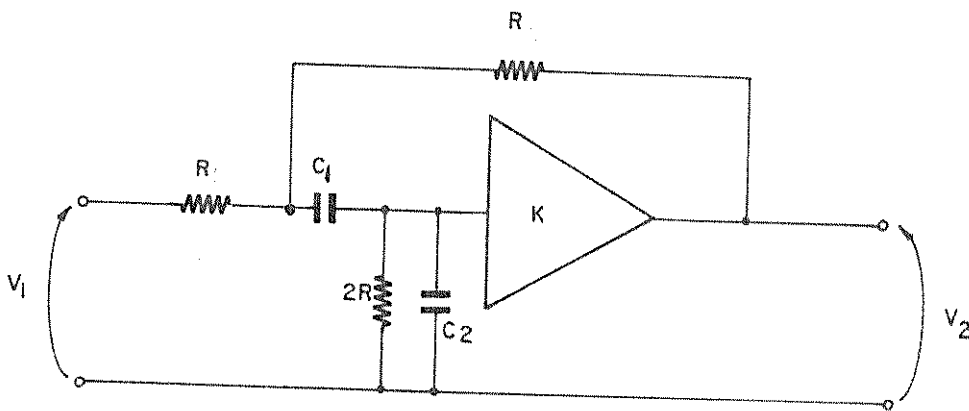


Fig. 4.3 - Filtros Passa Faixa de Ganho Positivo.

Neste caso, o fator de qualidade é:

$$Q = \frac{\sqrt{C_1C_2}}{2C_2 + C_1(2,5 - K)} \quad (4.24)$$

e a frequência central:

$$\omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1C_2}} \quad (4.25)$$

4.3.1. Sensibilidade da Função $S^T(S)$

Pela equação (1.1b) temos que:

$$S_R^{T(S)} = \frac{1 - R^2 S^2}{R^2 S^2 + 3.5RS + 1} \quad (4.26a)$$

$$S_{C_1}^{T(S)} = \frac{2S + 1}{C_1 S^2 + (2 + 1.5C_1)S + 1} \quad (4.26b)$$

$$S_{C_2}^{T(S)} = \frac{C_2 S(S + 2)}{C_2 S^2 + (2C_2 + 1.5)S + 1} \quad (4.26c)$$

$$S_K^{T(S)} = \frac{S^2 + (5.5 - K)S + 1}{S^2 + (4.5 - K)S + 1} \quad (4.26d)$$

Na frequência central

$$S_R^{T(j\omega)} = -j 0.57 \quad e \quad |S_{R=1}^{T(j\omega)}| = 0.57 \quad (4.27a)$$

$$S_{C_1}^{T(j\omega)} = \frac{2 - j\sqrt{C_1}}{(1.5C_1 + 2)} \quad e \quad |S_{C_1=1}^{T(j\omega)}| = 0.64 \quad (4.27b)$$

$$S_{C_2}^{T(j\omega)} = \frac{2C_2 + j\sqrt{C_2}}{(2C_2 + 1.5)} \quad e \quad |S_{C_2}^{T(j\omega)}| = 0.64 \quad (4.27c)$$

$$S_K^{T(j\omega)} = \frac{5.5 - K}{4.5 - K} \quad e \quad |S_{K=1}^{T(j\omega)}| = 1.29 \quad (4.27d)$$

4.3.2. Sensibilidade do Fator de Qualidade S^Q e da Frequência S^ω

Pela equação (4.24) podemos concluir que a sensibilidade de Q para variações incrementais em R é nula pois Q não depen

de de R, portanto

$$s_R^Q = 0 \quad (4.28a)$$

$$s_{C_1}^Q = \frac{2 - 1.5C_1}{2(2 + 1.5C_1)} \quad (4.28b)$$

$$s_{C_2}^Q = \frac{1.5 - 2C_2}{2(1.5 + 2C_2)} \quad (4.28c)$$

$$s_K^Q = \frac{K}{4.5 - K} \quad (4.28d)$$

Para a frequência central, dada pela equação (4.24), temos:

$$s_R^{\omega_0} = -1$$

$$s_{C_1}^{\omega_0} = s_{C_2}^{\omega_0} = -\frac{1}{2} \quad (4.29)$$

$$s_K^{\omega_0} = 0$$

4.3.3 - Sensibilidade da Raiz (δ^{S_i})

Considerando o polinômio denominador de T(S) na equação (4.23),

$$P(S) = R^2 C_1 C_2 S^2 + [2RC_2 + (2.5 - K)RC_1]S + 1 \quad (4.30)$$

temos, para os polos de T(S):

$$P_1(S) = R^2 S^2 + 3.5RS + 1$$

$$S_1 = \frac{-3.19}{R} \quad e \quad S_2 = \frac{-0.32}{R}$$

então,

$$\delta_R^{S_i} = \frac{3.19}{R} \quad e \quad \delta_R^{S_2} = \frac{0.32}{R} \quad (4.31a)$$

$$P_2(S) = C_1 S^2 + (2 + 1.5C_1)S + 1$$

$$S = \frac{-(2 + 1.5C_1)}{2C_1} \pm j \frac{\sqrt{4C_1 - (2 + 1.5C_1)^2}}{2C_1}$$

$$\delta_{C_1}^{\tau_i} = \frac{1}{C_1} \quad e \quad \delta_{C_1}^{\omega_i} = \frac{C_1 - 2}{C_1 \sqrt{(2 + 1.5C_1)^2 - 4C_1}}$$

e

$$\delta_{C_1}^{S_i} = \frac{1}{C_1} \pm j \frac{C_1 - 2}{C_1 \sqrt{(2 + 1.5C_1)^2 - 4C_1}} \quad (4.31b)$$

$$P_3(S) = C_2 S^2 + (2C_2 + 1.5)S + 1$$

$$S = \frac{-(2C_2 + 1.5)}{2C_2} \pm j \frac{\sqrt{4C_2 - (2C_2 + 1.5)^2}}{2C_2}$$

$$\delta_{C_2}^{\tau_i} = \frac{3}{4C_2} \quad e \quad \delta_{C_2}^{\omega_i} = \frac{2C_2 + 4,5}{4C_2 \sqrt{4C_2 - (2C_2 + 1.5)^2}}$$

$$\delta_{C_2}^{S_i} = \frac{3}{4C_2} \pm j \frac{2C_2 + 4,5}{4C_2 \sqrt{4C_2 - (2C_2 + 1.5)^2}} \quad (4.31c)$$

$$P_4(S) = S^2 + (3,5 - K)S + 1$$

$$S = \frac{-(3,5 - K)}{2} \pm j \frac{\sqrt{4 - (3,5 - K)^2}}{2}$$

$$\delta_K^{\tau i} = \frac{K}{2} \quad e \quad \delta_K^{\omega i} = \frac{3,5 - K}{2\sqrt{4 - (3,5 - K)^2}}$$

$$\delta_K^{Si} = \frac{K}{2} \pm j \frac{3,5 - K}{2\sqrt{4 - (3,5 - K)^2}} \quad (4.31d)$$

4.3.4. Sensibilidade do Polinômio $S^P(S)$

Considerando as equações (4.30), (1.31) e (1.32) temos:

$$\frac{P_1(S)}{S_R} = \frac{RS(2RS + 3,5)}{R^2S^2 + 3,5RS + 1} \quad (4.32a)$$

$$\frac{P_2(S)}{S_{C_1}} = \frac{C_1S(S + 1,5)}{C_1S^2 + (2 + 1,5C_1)S + 1} \quad (4.32b)$$

$$\frac{P_3(S)}{S_{C_2}} = \frac{C_2S(S + 2)}{C_2S^2 + (2C_2 + 1,5)S + 1} \quad (4.32c)$$

$$\frac{P_4(S)}{S_K} = \frac{-KS}{S^2 + (3,5 - K)S + 1} \quad (4.32d)$$

E na frequência central:

$$S_R^P(j\omega) = 1 + 0,57j \quad e \quad |S_R^P(j\omega)| = 1,15 \quad (4.33a)$$

$$S_{C_1}^P(j\omega) = \frac{1,5C_1 + j\sqrt{C_1}}{1,5C_1 + 2} \quad e \quad |S_{C_1=1}^P(j\omega)| = 0,52 \quad (4.33b)$$

$$S_{C_2}^P(j\omega) = \frac{2C_2 + j\sqrt{C_2}}{2C_2 + 1.5} \quad e \quad |S_{C_2=1}^P(j\omega)| = 0.64 \quad (4.33c)$$

$$S_K^P(j\omega) = \frac{-K}{3.5 - K} \quad e \quad |S_{K=1}^P(j\omega)| = 0.4 \quad (4.33d)$$

4.4. Sensibilidade de Filtros Passa Baixas de Ganho Negativo

No caso de ganhos negativos, um circuito elementar está mostrado na figura 4.4. De acordo com as equações (2.36) e (2.37) a Função de Transferência do filtro em questão será:

$$T(S) = \frac{-K}{R^2 C_1 C_2 S^2 + R(C_1 + 2C_2)S + K + 2} \quad (4.34)$$

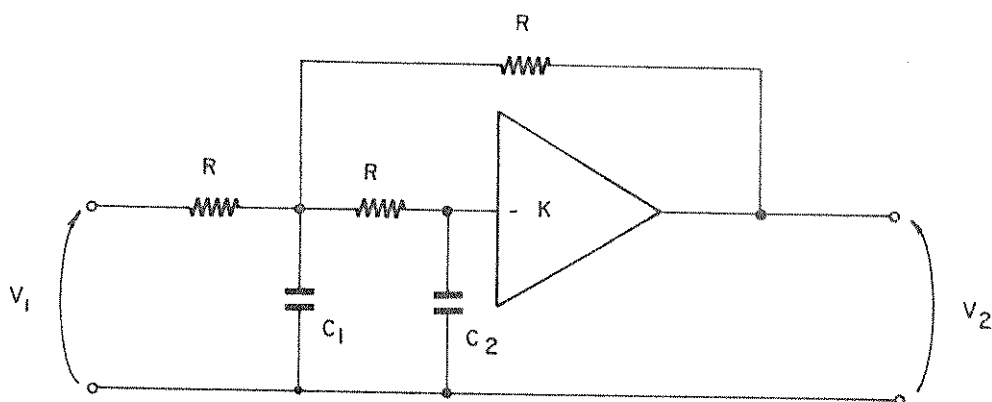


Fig. 4.4 - Filtro Passa Baixas de Ganho Negativo.

O Fator de Qualidade e a Frequência Central serão, respectivamente:

$$Q = \frac{\sqrt{C_1 C_2 (K + 2)}}{C_1 + 2C_2} \quad (4.35)$$

$$e \quad \omega_o = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{K+2}{C_1 C_2}} \quad (4.36)$$

4.4.1. Sensibilidade da Função

Para variações em cada um dos parâmetros temos:

$$S_R^{T(S)} = \frac{RS(2S+3)}{R^2S^2 + 3RS + 3} \quad (4.37a)$$

$$S_{C_1}^{T(S)} = \frac{-C_1S(S+1)}{C_1S^2 + (2+C_1)S + 3} \quad (4.37a)$$

$$S_{C_2}^{T(S)} = \frac{-C_2S(S+2)}{C_2S^2 + (1+2C_2)S + 3} \quad (4.37c)$$

$$S_K^{T(S)} = \frac{S^2 + 3S + 2}{S^2 + 3S + K + 2} \quad (4.37d)$$

Na frequência central e para o parâmetro analisado igual a um temos:

$$S_R^{T(j\omega)} = 1 + j \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad e \quad |S_R^{T(j\omega)}| = 1.53 \quad (4.38a)$$

$$S_{C_1}^{T(j\omega)} = -\frac{C_1 + j\sqrt{3C_1}}{2 + C_1} \quad e \quad |S_{C_1}^{T(j\omega)}| = 0.67 \quad (4.38b)$$

$$S_{C_2}^{T(j\omega)} = -\frac{2C_2 + j\sqrt{3C_2}}{1 + 2C_2} \quad e \quad |S_{C_2}^{T(j\omega)}| = 0.88 \quad (4.38d)$$

$$S_K^{T(j\omega)} = 1 + j \frac{K\sqrt{K+2}}{3(K+2)} \quad e \quad |S_K^{T(j\omega)}| = 1.02 \quad (4.38e)$$

4.4.2. Sensibilidade do Fator de Qualidade e da Frequência

Neste caso, o fator de qualidade não depende de R, assim:

$$S_R^Q = 0$$

Para os outros parâmetros temos:

$$S_{C_1}^Q = \frac{2 - C_1}{2(2 + C_1)} \quad (4.39b)$$

$$S_{C_2}^Q = \frac{1 - 2C_2}{2(1 + 2C_2)} \quad (4.39c)$$

$$S_K^Q = \frac{K}{2(K + 2)} \quad (4.39d)$$

E para a frequência:

$$S_R^{\omega_O} = -1 \quad (4.40a)$$

$$S_{C_1}^{\omega_O} = -\frac{1}{2} \quad (4.40b)$$

$$S_{C_2}^{\omega_O} = -\frac{1}{2} \quad (4.40c)$$

$$S_K^{\omega_O} = \frac{K}{2(K + 2)} \quad (4.40d)$$

4.4.3. Sensibilidade da Raiz

Sendo:

$$P(S) = R^2 C_1 C_2 S^2 + R(C_1 + 2C_2)S + K + 2 \quad (4.41)$$

O polinômio denominador da equação (4.34), as sensibilidades de seus polos devido a variações em cada um dos parâmetros serão:

$$P_1(S) = R^2 S^2 + 3RS + 3$$

$$s_i = \frac{3}{2R} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2R}$$

$$\delta_R^{\tau_i} = \frac{-3}{2R} \quad \delta_R^{\omega_i} = \frac{-\sqrt{3}}{2R}$$

$$\delta_R^{s_i} = \frac{-3}{2R} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2R} \quad (4.42a)$$

$$P_2(S) = C_1 S^2 + (C_1 + 2)S + 3$$

$$s_i = \frac{-(C_1 + 2)}{2C_1} \pm j \frac{\sqrt{12C_1 - (C_1 + 2)^2}}{2C_1}$$

$$\delta_{C_1}^{\tau_i} = \frac{1}{2C_1} \quad \delta_{C_1}^{\omega_i} = \frac{2 - 2C_1}{C_1 \sqrt{12C_1 - (C_1 + 2)^2}}$$

$$\delta_{C_1}^{s_i} = \frac{1}{2C_1} \pm j \frac{2 - 2C_1}{C_1 \sqrt{12C_1 - (C_1 + 2)^2}} \quad (4.42b)$$

$$P_3(S) = C_2 S^2 + (2C_2 + 1)S + 3$$

$$s = \frac{2C_2 + 1}{2C_2} \pm j \frac{\sqrt{12C_2 - (2C_2 + 1)^2}}{2C_2}$$

$$\delta_{C_2}^{\tau_i} = \frac{1}{2C_2} \quad \text{e} \quad \delta_{C_2}^{\omega_i} = \frac{1 - 12C_2}{2C_2 \sqrt{12C_2 - (2C_2 + 1)^2}}$$

$$\delta_{C_2}^{S_i} = \frac{1}{2C_2} \pm j \frac{1 - 12C_2}{2C_2 \sqrt{12C_2 - (2C_2 + 1)^2}} \quad (4.42c)$$

$$P_4(S) = S^2 + 3S + K + 2$$

$$S_L = \frac{-3}{2} \pm j \frac{\sqrt{4K - 1}}{2}$$

$$\delta_K^{\tau_i} = 0 \quad \text{e} \quad \delta_K^{\omega_i} = \frac{K}{\sqrt{4K - 1}}$$

$$\delta_K^{S_i} = \pm j \frac{K}{\sqrt{4K - 1}} \quad (4.42d)$$

4.4.4. Sensibilidade do Polinômio

Considerando as equações (4.41) , (1.31) e (1.32) , temos:

$$P_1(S) = R^2 S^2 + 3RS + 3$$

$$S_R^{P_1(S)} = \frac{RS(2RS + 3)}{R^2 S^2 + 3RS + 3} \quad (4.43a)$$

$$P_2(S) = C_1 S^2 + (C_1 + 2)S + 3$$

$$S_{C_1}^{P_1(S)} = \frac{C_1 S(S + 1)}{C_1 S^2 + (C_1 + 2)S + 3} \quad (4.43b)$$

$$P_3(S) = C_2 S^2 + (2C_2 + 1)S + 3$$

$$S_{C_2}^{P_3(S)} = \frac{C_2 S(S+2)}{C_2 S^2 + (2C_2 + 1)S + 3} \quad (4.43c)$$

$$P_4(S) = S^2 + 3S + K + 2$$

$$S_K^{P_4(S)} = \frac{K}{S^2 + 3S - K + 2} \quad (4.43d)$$

E na frequência central

$$S_R^{P(j\omega)} = 1 + j 2 \frac{\sqrt{3}}{3} \quad |S_R^{P(j\omega)}| = 1,53 \quad (4.44a)$$

$$S_{C_1}^{P(j\omega)} = \frac{C_1}{C_1 + 2} \left(1 + j \sqrt{\frac{3}{C_1}}\right) \quad |S_{C_1=1}^{P(j\omega)}| = 0.67 \quad (4.44b)$$

$$S_{C_2}^{P(j\omega)} = \frac{C_2}{2C_2 + 1} \left(2 + j \sqrt{\frac{3}{C_2}}\right) \quad |S_{C_2=1}^{P(j\omega)}| = 0.88 \quad (4.44c)$$

$$S_K^{P(j\omega)} = -j \frac{K}{3\sqrt{K+2}} \quad |S_{K=1}^{P(j\omega)}| = 0.11 \quad (4.44d)$$

4.5. Sensibilidade de Filtro Passa Altas de Ganho Negativo

De acordo com a tabela 2.1, um filtro passa altas de ganho negativo tem a estrutura da figura 4.5 e sua função de transferência é:

$$T(S) = \frac{-(K/K+2)S^2}{S^2 + \frac{R_2 + 2R_1}{(K+2)R_1R_2C}S + \frac{1}{(K+2)R_1R_2C^2}} \quad (4.45)$$

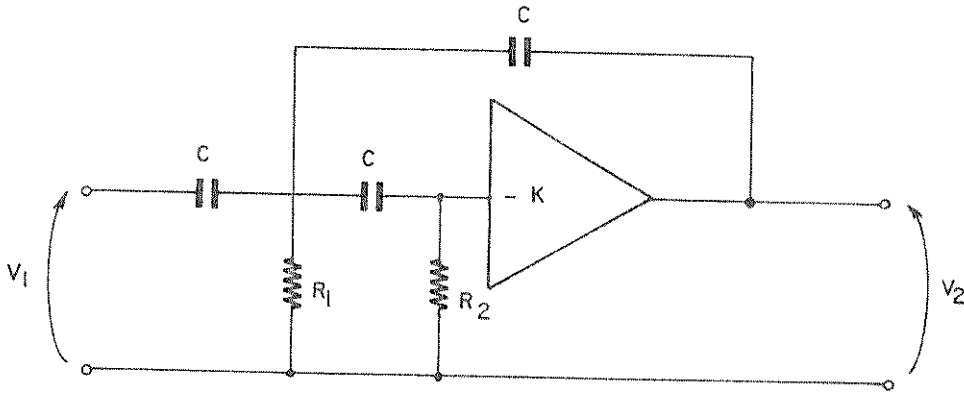


Fig. 4.5 - Filtro Passa Altas de Ganho Negativo.

O Fator de Qualidade e a Frequência Central são respectivamente:

$$Q = \frac{\sqrt{(K+2)R_1R_2}}{R_2 + 2R_1} \quad (4.46)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{C\sqrt{(K+2)R_1R_2}} \quad (4.47)$$

4.5.1. Sensibilidade da Função

Considerando a equação (4.45) escrita na forma

$$T(S) = \frac{-KR_1R_2C_2S^2}{(K+2)R_1R_2C_2S^2 + C(R_2 + 2R_1)S + 1}$$

temos:

$$S_{R_1}^{T(S)} = \frac{S + 1}{3R_1S^2 + (1 + 2R_1)S + 1} \quad (4.48a)$$

$$S_{R_2}^T(S) = \frac{2S + 1}{3R_2 S^2 + (R_2 + 2)S + 1} \quad (4.48b)$$

$$S_C^T(S) = \frac{3CS + 2}{3C^2 S^2 + 3CS + 1} \quad (4.48c)$$

$$S_K^T(S) = \frac{2S^2 + 3S + 1}{(K + 2)S^2 + 3S + 1} \quad (4.48d)$$

Na frequência central,

$$S_{R_1}^T(j\omega) = \frac{1}{2R_1 + 1} - j \frac{\sqrt{3R_1}}{2R_1 + 1} \quad e \quad |S_{R_1=1}^T(j\omega)| = 0.67 \quad (4.49a)$$

$$S_{R_2}^T(j\omega) = \frac{2}{R_2 + 2} - j \frac{\sqrt{3R_2}}{R_2 + 2} \quad e \quad |S_{R_2=1}^T(j\omega)| = 0.88 \quad (4.49b)$$

$$S_C^T(j\omega) = 1 - j \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad e \quad |S_{C=1}^T(j\omega)| = 1.53 \quad (4.49c)$$

$$S_K^T(j\omega) = 1 - j \frac{K\sqrt{K+2}}{3(K+2)} \quad e \quad |S_{K=1}^T(j\omega)| = 1.02 \quad (4.49d)$$

4.5.2. Sensibilidade do Fator de Qualidade e da Frequência

A partir das equações (4.46) e (4.47) temos:

$$S_{R_1}^Q = \frac{R_1(1 - 10R_1)}{2(1 + 2R_1)} \quad (4.50a)$$

$$S_{R_2}^Q = \frac{R_2 (2 - 5R_2)}{2 (R_2 + 2)} \quad (4.50b)$$

$$S_C^Q = 0 \quad (4.50c)$$

$$S_K^Q = \frac{K}{2 (K + 2)} \quad (4.50d)$$

e

$$S_{R_1}^{\omega_0} = -\frac{1}{2} \quad (4.51a)$$

$$S_{R_2}^{\omega_0} = -\frac{1}{2} \quad (4.51b)$$

$$S_C^{\omega_0} = -1 \quad (4.51c)$$

$$S_K^{\omega_0} = -\frac{K}{K + 2} \quad (4.51d)$$

4.5.3. Sensibilidade da Raiz

Consideremos o denominador da equação (4.45) escrito na forma:

$$P(S) = (K + 2) R_1 R_2 C^2 S^2 + (R_2 + 2R_1) CS + 1$$

Assim:

$$P_1(S) = 3R_1 S^2 + (1 + 2R_1) S + 1$$

$$S_i = \frac{-(1 + 2R_1)}{6R_1} \pm j \frac{\sqrt{4R_1 - (1 + 2R_1)^2}}{6R_1}$$

$$\delta_{R_1}^{\tau_i} = \frac{1}{6R_1} \quad e \quad \delta_{R_1}^{\omega_i} = \frac{1 - 4R_1}{6R_1 \sqrt{4R_1 - (1 - 2R_1)^2}}$$

$$\delta_{R_1}^{S_i} = \frac{1}{6R_1} \pm j \frac{1 - 4R_1}{6R_1 \sqrt{4R_1 - (1 - 2R_1)^2}} \quad (4.52a)$$

$$P_2(S) = 3R_2 S^2 + (R_2 + 2)S + 1$$

$$S_i = \frac{(R_2 + 2)}{6R_2} \pm j \frac{\sqrt{4R_2 - (R_2 - 2)^2}}{6R_2}$$

$$\delta_{R_2}^{\tau_i} = \frac{1}{3R_2} \quad e \quad \delta_{R_2}^{\omega_i} = \frac{2(1 - R_2)}{3R_2 \sqrt{4R_2 - (R_2 - 2)^2}}$$

$$\delta_{R_2}^{S_i} = \frac{1}{3R_2} \pm j \frac{2(1 - R_2)}{3R_2 \sqrt{4R_2 - (R_2 - 2)^2}} \quad (4.51b)$$

$$P_3(S) = 3C^2 S^2 + 3CS + 1$$

$$S_i = \frac{-1}{2C} \pm j \frac{\sqrt{3}}{6C}$$

$$\delta_C^{\tau_i} = \frac{1}{2C} \quad e \quad \delta_C^{\omega_i} = - \frac{\sqrt{3}}{6C}$$

$$\delta_C^{S_i} = \frac{1}{2C} \pm j \frac{\sqrt{3}}{6C} \quad (4.51c)$$

$$P_4(S) = (K + 2)S^2 + 3S + 1$$

$$S = \frac{-3}{2(K+2)} \pm j \frac{\sqrt{4K-1}}{2(K+2)}$$

$$\delta_K^{\tau_i} = \frac{3K}{2(K+2)^2} \quad \delta_K^{\omega_i} = \frac{K(1-2K)}{(K+2)^2 \sqrt{4K-1}}$$

$$\delta_K^{S_i} = \frac{3K}{2(K+2)^2} \pm j \frac{K(1-2K)}{(K+2)^2 \sqrt{4K-1}} \quad (4.52d)$$

4.5.4. Sensibilidade do Polinômio

Ainda considerando o denominador da equação (4.45), temos:

$$S_{R_1}^P(S) = \frac{R_1 S(3S+2)}{3R_1 S^2 + (1+2R_1)S+1} \quad (4.53a)$$

$$S_{R_2}^P(S) = \frac{R_2 S(3S+1)}{3R_2 S^2 + (R_2+2)S+1} \quad (4.53b)$$

$$S_C^P(S) = \frac{3CS(2CS+1)}{3C^2 S^2 + 3CS+1} \quad (4.53c)$$

$$S_K^P(S) = \frac{KS^2}{(K+2)S^2 + 3S+1} \quad (4.53d)$$

então, na frequência central,

$$S_{R_1}^P(j\omega) = \frac{2R_1}{1+2R_1} + j \frac{\sqrt{3R_1}}{1+2R_1} \quad e \quad |S_{R_1=1}^P(j\omega)| = 0.88 \quad (4.54a)$$

$$S_{R_2}^P(j\omega) = \frac{R_2}{R_2+2} + j \frac{\sqrt{3R_2}}{R_2+2} \quad e \quad |S_{R_2=1}^P(j\omega)| = 0.67 \quad (4.54b)$$

$$S_C^P(j\omega) = 1 + j \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{e} \quad |S_{C=1}^P(j\omega)| = 1.53 \quad (4.54c)$$

$$S_K^P(j\omega) = j \frac{K}{3\sqrt{K+2}} \quad \text{e} \quad |S_{K=1}^P(j\omega)| = 0.19 \quad (4.54d)$$

4.6. Sensibilidade de Filtros Passa Faixa de Ganho Negativo

Na tabela 2.2, observamos que um filtro deste tipo tem estrutura conforme a mostrada na figura 4.6 e função de transferência:

$$T(S) = \frac{[K/(K+1)RC]S}{S^2 + \frac{3}{(K+1)RC}S + \frac{1}{(K+1)R^2C^2}} \quad (4.55)$$

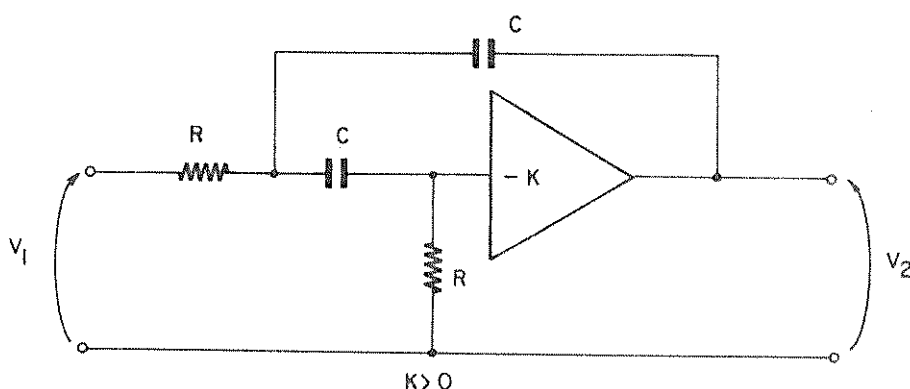


Fig. 4.6 - Filtro Passa Faixa de Ganho Negativo.

O Fator de Qualidade será:

$$Q = \frac{1}{3} \sqrt{K+1} \quad (4.56)$$

E a Frequência Central:

$$\omega_o = \frac{1}{RC \sqrt{K+1}} \quad (4.57)$$

4.6.1. Sensibilidade da Função

Para a Função de Transferência da equação (4.55), temos:

$$S_R^T(S) = \frac{1 - 2R^2S^2}{2R^2S^2 + 3RS + 1} \quad (4.58a)$$

$$S_C^T(S) = \frac{1 - 2C^2S^2}{2C^2S^2 + 3CS + 1} \quad (4.58b)$$

$$S_K^T(S) = \frac{S^2 + 3S + 1}{(K+1)S^2 + 3S + 1} \quad (4.58c)$$

Na frequência central,

$$S_R^T(j\omega) = -j \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad e \quad |S_R^T(j\omega)| = 0.94 \quad (4.59a)$$

$$S_C^T(j\omega) = -j \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad e \quad |S_C^T(j\omega)| = 0.94 \quad (4.59b)$$

$$S_K^T(j\omega) = 1 - j \frac{K\sqrt{K+1}}{3(K+1)} \quad e \quad |S_{K=1}^T(j\omega)| = 1.03 \quad (4.59c)$$

4.6.2. Sensibilidade do Fator de Qualidade e da Frequência

Neste caso, conforme equação (4.56), o fator de qualidade Q depende de K , portanto:

$$S_R^Q = S_C^Q = 0 \quad (4.60a)$$

e

$$S_K^Q = \frac{K}{2(K+1)} \quad (4.60b)$$

Para a frequência,

$$S_R^{\omega_O} = S_C^{\omega_O} = -1 \quad (4.61a)$$

e

$$S_K^{\omega_O} = \frac{-K}{2(K+1)} \quad (4.61b)$$

4.6.3. Sensibilidade da Raiz

Para os polos de $T(S)$ na equação (4.55), temos:

$$P_1(S) = 2R^2S^2 + 3RS + 1$$

$$S_1 = -\frac{1}{2R} \quad e \quad S_2 = -\frac{1}{R}$$

$$\delta_R^{S_1} = \frac{1}{2R} \quad e \quad \delta_R^{S_2} = \frac{1}{R} \quad (4.62a)$$

$$P_2(S) = 2C^2S^2 + 3CS + 1$$

$$S_1 = -\frac{1}{2C} \quad e \quad S_2 = -\frac{1}{C}$$

$$\delta_C^{S_1} = \frac{1}{2C} \quad e \quad \delta_C^{S_2} = \frac{1}{C} \quad (4.62b)$$

$$P_3(S) = (K+1)S^2 + 3S + 1$$

$$S_i = \frac{-3}{2(K+1)} \pm j \frac{\sqrt{4K-5}}{2(K+1)}$$

$$\delta_K^{\tau i} = \frac{3K}{2(K+1)^2} \quad e \quad \delta_K^{\omega i} = \frac{(3-2K)K}{2(K+1)^2 \sqrt{4K-5}}$$

$$\delta_K^{S_i} = \frac{3K}{2(K+1)^2} \pm j \frac{K(3-2K)}{2(K+1)^2 \sqrt{4K-5}} \quad (4.62c)$$

4.6.4. Sensibilidade do Polinômio

Considerando o denominador da equação (4.55) temos:

$$S_R^{P_1(S)} = \frac{RS(2RS+3)}{2R^2S^2+3RS+1} \quad (4.63a)$$

$$S_C^{P_2(S)} = \frac{CS(2CS+3)}{2C^2S^2+3CS+1} \quad (4.63b)$$

$$S_K^{P_3(S)} = \frac{KS^2}{(K+1)S^2+3S+1} \quad (4.63c)$$

e na frequência central,

$$S_R^{P_1(j\omega)} = S_C^{P_2(j\omega)} = \frac{2}{3} - j\sqrt{2} \quad e \quad |S_R^{P_1(j\omega)}| = |S_C^{P_2(j\omega)}| = 1.56 \quad (4.64a)$$

$$S_K^{P_3(j\omega)} = j \frac{K}{\sqrt{K+1}} \quad e \quad |S_K^{P_3(j\omega)}| = 0.24 \quad (4.64b)$$

4.7. Análise dos Resultados

A tabela 4.1 reúne todos os resultados obtidos neste capítulo de maneira a facilitar a análise da sensibilidade de um ti

po de filtro em relação a outro e também de cada um desses filtros individualmente.

Por exemplo, uma rápida consulta à tabela nos permite dizer que tanto o filtro Passa Faixa de ganho positivo como o de ganho negativo, neste caso, não são sensíveis a variações incrementais no valor de seus resistores quando os mesmos forem de 1Ω .

Podemos observar também que o deslocamento dos polos de um filtro Passa Baixas de ganho positivo, provocado por variações incrementais no valor do capacitor C_1 é maior que o provocado pelas mesmas variações no capacitor C_1 do filtro Passa Baixas de ganho negativo.

Ou ainda que o comportamento da "Sensibilidade da Frequência" nos filtros Passa Altas de ganho positivo é idêntico ao dos filtros Passa Baixas de ganho positivo, independentemente do valor de seus componentes.

Assim, podemos dizer que tabelas deste tipo fornecem dados importantes tanto para um projetista como para um estudioso de filtros ativos. Basta que o interessado substitua os valores dos parâmetros do filtro que está sendo analisado em cada secção deste capítulo.

FILTRO BANCO METRO	PASSA BAIXAS		PASSA ALTAS		PASSA FAIXA	
	Positivo	Negativo	Positivo	Negativo	Positivo	Negativo
R_1	$\frac{R_1}{R_1+1}(j + \sqrt{R_1})$	$-(1 + j \frac{2\sqrt{3}}{3})$	$\frac{1}{R_1+1}(-R_1 + j \sqrt{R_1})$	$\frac{1}{2R_1+1}(1 - j \sqrt{3R_1})$	$-j 0.57$	$-j 0.94$
R_2	$\frac{R_2}{R_2+1}(j + \sqrt{R_2})$	$(1 + j \frac{2\sqrt{3}}{3})$	$\frac{1}{R_2+1}(-R_2 + j \sqrt{R_2})$	$\frac{1}{R_2+2}(2 - j \sqrt{3R_2})$	$-j 0.57$	$-j 0.94$
C_1	$-j \frac{\sqrt{C_1}}{2}$	$-\frac{C_1 + j \sqrt{3C_1}}{2 + C_1}$	$j \frac{\sqrt{C_1}}{2}$	$1 - j \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2 - j \sqrt{C_1}}{(1.5C_1 + 2)}$	$-j 0.94$
C_2	$-(1 + j \frac{\sqrt{C_2}}{2C_2})$	$-\frac{2C_2 + j \sqrt{3C_2}}{1 + 2C_2}$	$-1 + j \frac{\sqrt{C_2}}{2C_2}$	$1 - j \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2C_2 + j \sqrt{C_2}}{(2C_2 + 1.5)}$	$-j 0.94$
K	$\frac{3}{3-K}$	$1 + j \frac{K\sqrt{K+2}}{3(K+2)}$	$\frac{3}{3-K}$	$1 - j \frac{K\sqrt{K+2}}{3(K+2)}$	$\frac{5.5-K}{4.5-K}$	$1 - j \frac{K\sqrt{K+1}}{3(K+1)}$
R_1	$\frac{(1-R_1)}{2(1+R_1)}$	0	$\frac{(1-R_1)}{2(1+R_1)}$	$\frac{R_1(1-10R_1)}{2(1+2R_1)}$	0	0
R_2	$\frac{(1-R_2)}{2(1+R_2)}$	0	$\frac{(1-R_2)}{2(1+R_2)}$	$\frac{R_2(2-5R_2)}{2(2+R_2)}$	0	0
C_1	-1/2	$\frac{2-C_1}{2(2+C_1)}$	1/2	0	$\frac{2-1.5C_1}{2(2+1.5C_1)}$	0
C_2	-1/2	$\frac{1-2C_2}{2(1+2C_2)}$	-1/2	0	$\frac{1.5-2C_2}{2(1.5+2C_2)}$	0
K	$\frac{K}{3-K}$	$\frac{K}{2(K+2)}$	$\frac{K}{3-K}$	$\frac{K}{2(2+K)}$	$\frac{K}{4.5-K}$	$\frac{K}{2(1+K)}$
R_1	-1/2	-1	1/2	-1/6	-1	-1
R_2	-1/2	-1/2	1/2	-1/6	-1	-1
C_1	-1/2	-1/2	1/2	-1	-1/2	-1
C_2	-1/2	-1/2	1/2	-1	-1/2	-1
K	0	$\frac{K}{2(K+2)}$	0	$-\frac{K}{K+2}$	0	$-\frac{K}{2(K+1)}$
R_1	$S_1 = \frac{1}{R_1} \quad S_2 = 0$	$\frac{1}{2R}(-3 \pm j\sqrt{3})$	$S_1 = -R_1 \quad S_2 = 0$	$\frac{1}{6R_1} \left[1 \pm \frac{j(1-4R_1)}{2\sqrt{R_1-(\frac{1}{2}-R_1)^2}} \right]$	$S_1 = \frac{3.19}{R} \quad S_2 = \frac{0.32}{R}$	$S_1 = 1/2R \quad S_2 = 1/R$
R_2	$S_1 = 1/R_2 \quad S_2 = 0$	$\frac{1}{2R}(-3 \pm j\sqrt{3})$	$S_1 = -R_2 \quad S_2 = 0$	$\frac{1}{3R_2} \left[1 \pm \frac{j2(1-R_2)}{\sqrt{4R_2-(R_2-2)^2}} \right]$	$S_1 = \frac{3.19}{R} \quad S_2 = \frac{0.32}{R}$	$S_1 = 1/2R \quad S_2 = 1/R$
C_1	$\frac{1}{C_1} \pm j \frac{2-C_1}{2C_1\sqrt{C_1-1}}$	$\frac{1}{C_1} \left[\frac{1}{2} \pm \frac{j2(1-C_1)}{\sqrt{12C_1-(C_1+2)^2}} \right]$	$\pm j \frac{C_1}{2\sqrt{C_1-1}}$	$\frac{1}{2C} \pm j \frac{\sqrt{3}}{6C}$	$\frac{1}{C_1} \left[1 \pm \frac{j(C_1-2)}{\sqrt{(2+\frac{1}{2}C_1)^2-4C_1}} \right]$	$S_1 = 1/2C \quad S_2 = 1/R$
C_2	$\pm j \frac{1}{2\sqrt{C_2}(C_2-1)}$	$\frac{1}{2C_2} \left[1 \pm \frac{j2(1-12C_2)}{\sqrt{3C_2-(C_2+\frac{1}{2})^2}} \right]$	$-1 \pm j \frac{2C_2-1}{2\sqrt{C_2}(C_2-1)}$	$\frac{1}{2C} \pm j \frac{\sqrt{3}}{6C}$	$\frac{3}{4C_2} \left[1 \pm \frac{j(2C_2+4.5)}{2\sqrt{C_2-(C_2+\frac{3}{4})^2}} \right]$	$S_1 = 1/2C \quad S_2 = 1/R$
K	$\frac{K}{2} (1 \pm j \frac{(3-K)}{\sqrt{4-(3-K)^2}})$	$\pm j \frac{K}{\sqrt{4-1}}$	$\frac{K}{2} (1 \pm j \frac{(3-K)}{\sqrt{4-(3-K)^2}})$	$\frac{K}{(K+2)^2} (\frac{3}{2} \pm j \frac{1-2K}{\sqrt{4K-1}})$	$\frac{K}{2} \pm j \frac{3.5-K}{2\sqrt{4-(3.5-K)^2}}$	$\frac{K}{2(K+1)} (3 \pm j \frac{3-2K}{\sqrt{4K-5}})$
R_1	$\frac{1}{R_1+1}(1 + j \sqrt{R_1})$	$1 + j \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1}{R_1+1}(R_1 - j \sqrt{R_1})$	$\frac{1}{2R_1+1}(2R_1 + j \sqrt{3R_1})$	$1 + j 0.57$	$0.67 - j \sqrt{2}$
R_2	$\frac{1}{R_2+1}(1 + j \sqrt{R_2})$	$1 + j \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1}{R_2+1}(R_2 - j \sqrt{R_2})$	$\frac{1}{R_2+2}(R_2 + j \sqrt{3R_2})$	$1 + j 0.57$	$0.67 - j \sqrt{2}$
C_1	$j \frac{\sqrt{C_1}}{2}$	$\frac{C_1}{C_1+2}(1 + j \frac{\sqrt{3}}{C_1})$	$-j \frac{\sqrt{C_1}}{2}$	$1 + j \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1.5C_1 + j \sqrt{C_1}}{1.5C_1 + 2}$	$0.67 - j \sqrt{2}$
C_2	$1 + j \frac{\sqrt{C_2}}{2C_2}$	$\frac{C_2}{2C_2+1}(2 + j \frac{\sqrt{3}}{C_2})$	$1 - j \frac{\sqrt{C_2}}{2C_2}$	$1 + j \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2C_2 + j \sqrt{C_2}}{2C_2 + 1.5}$	$0.67 - j \sqrt{2}$
K	$\frac{K}{K-3}$	$-j \frac{K}{3\sqrt{K+2}}$	$\frac{K}{K-3}$	$j \frac{K}{3\sqrt{K+2}}$	$\frac{K}{K-3.5}$	$j \frac{K}{\sqrt{K+1}}$

Tabela 4.1 - Resultados.

CONCLUSÃO

Com o avanço tecnológico, o emprego de filtros vem aumentando cada vez mais e, cada vez mais estão sendo utilizados os "Filtros Ativos", que hoje são empregados em Comunicações, Instrumentação Eletrônica, Instrumentação Médica, enfim, na grande maioria dos circuitos eletrônicos de precisão. Podem ser feitos com componentes discretos porém, frequentemente são implementados em circuitos integrados.

Fica claro portanto, que o grau de sensibilidade desses filtros é um fator extremamente importante e que deve sempre fazer parte de estudos ou projetos de filtros.

Existem programas de computador que fazem a análise da sensibilidade de filtros ativos de forma global, ou seja, a partir da estrutura do filtro simula-se variações em seus parâmetros e obtém-se a variação na Função de Transferência do mesmo e isto corresponde apenas à primeira "Figura de Sensibilidade" (Sensibilidade da Função) mostrada no capítulo I. Todas as outras figuras não são analisadas pelo computador, sua análise é feita através de pesquisa em bibliografia disponível.

Porém, a sensibilidade de filtro não tem sido objeto de muitas publicações nos últimos 15 anos. No caso de filtros ativos isso se torna problemático pois esse tipo de filtro em particular tem muitos problemas com a sensibilidade; seu comportamento muda consideravelmente com a frequência ou com outros fatores que alterem seus parâmetros, assim seria importante uma análise detalhada da sensibilidade dos mesmos a essas variações e para tanto seria necessária bibliografia específica do assunto.

Este trabalho não tem a pretensão de suprir esta falha mas se propõe a fornecer ao aluno de graduação, ao projetista ou ao estudante de filtros, material de consulta que proporcione a solução rápida do problema de sensibilidade. É apenas o início de uma fonte de consulta específica visto que só analisa a sensi-

bilidade de filtros ativos RC de 2ª Ordem usando VCVS.

Fica como sugestão para a continuidade do trabalho, fazer os capítulos III e IV para cada elemento ativo citado no capítulo II e assim obter mais três tabelas semelhantes à tabela 4.1.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- |1| S.K. Mitra - "Analysis and Synthesis of Linear Active Networks", 1969, John Wiley & Sons.
- |2| P. Bildstein - "Filtres Actifs", 1977 Editons Radio.
- |3| G.S. Moschytz - "Linear Integrated Networks. Fundamentals", 1974, VNR.
- |4| L.P. Huelsman - "Active Filters: Lumped, Distributed, Integrated, Digital and Parametric", 1970 McGraw Hill.
- |5| I.G. Linvill - "RC Active Filters", Proc. I.R.E., março 1954.
- |6| T. Yanagisawa - "RC Active Network Using Current Inversion Type Negative Impedance Converters", I.R.E. Trans. Circuit Teory, CT 4, setembro 1957.
- |7| E.A. Guillemin - "Synthesis of Passive Networks", 1957, Wiley.
- |8| Gabor C. Temes e S.K. Mitra - "Modern Filter - Theory and Design", 1970, John Wiley & Sons.
- |9| E.S. Kuh - "Transfer Function Synthesis of Active RC Networks", I.R.E. International Convention Reads, Vol. 8, 1960.
- |10| S.S. Hankim - "RC Active Filters Using an Amplifier as the Active Element", Proc. I.R.E., maio 1965.
- |11| L.P. Huelsman - "Theory and Design of Active RC Circuits", 1968, McGraw-Hill

BIBLIOGRAFIA ADICIONAL

- A. Netushil - "Theory of Automatic Control", 1972, Mir Publishers.
- G.S. Moschytz - "Second-Order Pole-Zero Pair Selection for nth Order Minimum Sensitivity Networks", IEEE Transactions on Circuit Theory, março 1955.
- J. Tow - "A Step-by-Step Active Filters Design", IEEE Spectrum, dezembro 1969.
- M.S. Ghausi - "Principles and Design of Linear Active Circuits", 1965, McGraw-Hill.
- R. Tarmy e M.S. Ghausi - "Very High-Q Insensitive Active RC Networks", IEEE Transactions on Circuit Theory, agosto 1970.
- S.K. Mitra - "Synthesizing Active Filters", IEEE Spectrum, janeiro 1969.
- W.G. Kerwin, L.P. Huelsman e R.W. Newcomb - "State-Variable Synthesis for Insensitive Integrated Circuit Transfer Functions", IEEE Journal of Solid-State Circuits, setembro 1967.