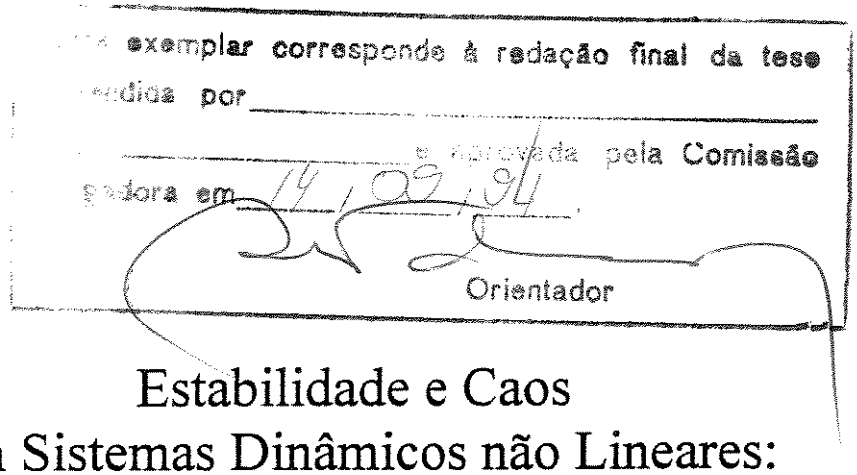
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE SISTEMAS E CONTROLE DE ENERGIA



Estabilidade e Caos em Sistemas Dinâmicos não Lineares:

Aplicação no Sistema PLL-Dual

Aluna : Adelheid Ingeborg Mahla Álvarez

Orientador : Álvaro Geraldo Badan Palhares

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título *Doutor em Engenharia Elétrica.*

Setembro de 1994

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

UNIDADE TBC
N.º CHAMADA:
T/UNICAMP
M278E
V. Ex.
TOMBO BC/ 26965
PROC. 669/96
C D
PREÇO R$ 11,00
DATA 12/3/96
N.º CPD

CM-00084581-5

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

M278a

Mahla Alvarez, Adelheid Ingeborg
Estabilidade e caos em sistemas dinâmicos não lineares : aplicação no sistema PLL-DUAL / Adelheid Ingeborg Mahla Alvarez.-- Campinas, SP: [s.n.], 1994.

Orientador: Álvaro Geraldo Badan Palhares.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica.

1. Teoria da bifurcação. 2. Comportamento caótico nos sistemas. 3. * Lyapunov, Expoentes de. 4. *Poincaré, Transformações de. 5. Motores elétricos. I. Palhares, Álvaro Geraldo Badan. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica. III. Titulo.

A Pablo

Oh, Jehová, Señor nuestro,
Cuán glorioso es tu nombre en toda la tierra!

Cuando veo tus cielos, obra de tus dedos,
La luna y las estrellas que tú formaste,
Digo: Qué es el hombre, para que tengas de él memoria,
Y el hijo del hombre, para que lo visites?

Oh, Jehová, Señor nuestro,
Cuán glorioso es tu nombre en toda la tierra!

Do Salmo 8 da Bíblia

Agradecimentos

Agradeço a valiosa contribuição das pessoas e instituições que possibilitaram o desenvolvimento desta trabalho:

Ao professor Dr. Álvaro G. Badan Palhares, orientador desta tese, pela sua dedicação, perseverância e interesse.

Aos professores Dr. Iberê Luiz Caldas, Dr. Roberto Lagos Mónaco, Dr. Yaro Burian Jr. e Dr. Jõao Bosco Ribeiro do Val, membros da banca de avaliação da tese, pela revisão e as suas sugestões.

Aos professores Dr. Christian Mira e Dr. Jean Pierre Carcassès pela sua contribuição ao desenvolvimento do modelo discreto do sistema de controle PLL e à sua caracterização qualitativa.

Ao professor Dr. Leon O. Chua, pelo seu estímulo e sugestões a respeito do modelo discreto do Circuito de Chua com não linearidade descontínua.

Aos professores Dr. Christian Mira e Dr. Leon O. Chua, pela sua hospitalidade, que possibilitou-nos a realização de uma visita de especialização ao I.N.S.A., Toulouse, e uma visita na qualidade de pesquisador associado à Universidade de California, Berkeley, respectivamente.

Aos professores Jaime Rössler e Dr. José Castilho Piqueira, pela indicação de bibliografia e discussão do tema.

Ao assessor científico do projeto de doutorado pela FAPESP, pelas suas sugestões e indicação de bibliografia.

Ao professor Dr. Celso Pascoli Bottura, e ao professor Dr. José Pissolatto, pelo acesso aos meios computacionais do Laboratorio de Sistemas Inteligentes e do Laboratorio de Alta Tensão da Faculdade de Engenharia Elétrica da UNICAMP, respectivamente.

Aos colegas da Pós-Graduação de Engenharia Elétrica, do Laboratório de Robótica e do DSCE, pelo seu auxílio e estímulo.

Aos colegas do Departamento de Engenharia Informática da Universidade de Santiago do Chile, pela sua solidariedade.

A minha familia e amigos, pela sua paciência, ajuda e estímulo.

Às seguintes instituições:

À UNICAMP, onde desenvolveu-se a tese.

À Fundação de Amparo ao Ensino e à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo suporte financieiro através da bolsa de doutorado 91-0615-4.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq-RHAE), pelo auxílio financieiro para estágios de especialização no exterior através do projeto 461351-92.7;

Ao I.N.S.A., Toulouse, França, e à Universidade de California-Berkeley pelo convite para realizar visitas relacionadas com o projeto de pesquisa do doutorado.

À Universidade de Santiago do Chile, pelo uso dos recursos computacionais do Departamento de Engenharia Informática e pela autorização para um período de visita à UNICAMP.

Indice

Introdução ***I-1***

1 Sistemas dinâmicos e estabilidade ***1-1***

1.1 Introdução 1- 1
1.2 Definições 1- 3
1.3 Soluções de equações de estado 1- 6
1.4 Estabilidade de pontos de equilíbrio en sistemas dinâmicos 1- 9
1.4.1 Segundo Método de Lyapunov 1-13
1.4.2 Segundo Método de Lyapunov para sistemas não autônomos 1-14
1.4.3 Linearização na vizinhança dos pontos de equilíbrio 1-16
1.4.4 Comportamento na vizinhança dos pontos de equilíbrio dum sistema discreto 1-20
1.4.5 Estabilidade na vizinhança dos pontos de equilíbrio 1-22
1.5 Domínios de atração e conjuntos limites 1-25
1.6 Transformação de Poincaré 1-27
1.7 Conclusões 1-31

2 Bifurcações e comportamento caótico ***2-1***

2.1 Introdução 2- 1
2.2 Estabilidade estrutural e bifurcações 2- 2
2.3 Comportamento caótico 2- 7
2.3.1 Expoentes de Lyapunov 2- 8
2.4 Dimensão dos atratores 2-14
2.4.1 Dimensão de capacidade 2-14
2.4.2 Dimensão de informação 2-16

2.4.3 Dimensão de correlação 2-16
2.4.4 Dimensões de Renyi 2-19
2.4.5 Dimensão de Lyapunov 2-21
2.4.6 Comportamento das dimensões de atratores caóticos 2-23
2.5 Conclusões 2-24

3 Transformação de Poincaré de sistemas lineares por partes

3.1 Introdução 3- 1
3.2 Circuito de Chua com uma não linearidade descontínua 3- 2
3.3 Sistema PWM de controle de motores C.C. , com controlador proporcional e realimentação de saída 3- 9
3.4 Discretização do modelo de fase de um controlador PLL periódicamente perturbado 3-16
3.5 Conclusões 3-22

4 Modelo discreto e análise de estabilidade para um motor C.C. controlado por PLL

4.1 Introdução 4- 1
4.2 Descrição do Sistema PLL-dual 4- 2
4.3 Modelo do Sistema PLL 4- 4
4.4 Análise de estabilidade local 4- 8
4.4.1 Condições de existência de pontos fixos 4- 8
4.4.2 Estabilidade do ponto fixo 4-11
4.5 Conclusões 4-20

5 Modelo discreto global: Regiões estáveis e subharmônicas no espaço de parâmetros

5.1 Introdução 5- 1
5.2 Modelo adimensional 5- 2
5.3 Descrição dos programas e resultados 5- 5
5.3.1 Descrição dos programas 5- 5
5.3.2 Resultados 5- 5
5.4 Conclusões 5-17

Apêndice A *A-1*

Referências *R-1*

ABSTRACT

The main concepts about nonlinear dynamical systems are introduced, emphasizing piecewise linear systems. Fundamentals about stability, bifurcations and chaos are explained. The Poincaré Map for piecewise linear systems is developed with some examples from Electrical Engineering. Two of this examples, discretization of the phase model of the second oder PLL control system with a periodic perturbation and the Chua's Circuit with a discontinuous nonlinearity, are original models. As a result, a method to extend the Poincaré Map includding points where the trajectory is not transverse to the Poincaré surface, and a method for obtaining the Poincaré Map of systems with a piecewise nonlinear periodic characteristic, are developed.

A DC motor controlled by PLL technique is modelled as a discrete dynamical system. This model is better than the existing continuous PLL phase model, because it includes previously unmodelled effects in the continuous model, such as discontinuities in the error signal, the phase detector dynamics, and the behavior with velocity output different from the reference velocity. Stable regions of the fixed point and subharmonical stable regions in the parameter space are obtained. The boxes-in-files bifurcation is encountered in this system.

Keywords: Boxes-in-files bifurcations, bifurcations, chaos, D. C. motor control, dynamical systems, piecewise linear systems, phase locked loop , Poincaré Map.

RESUMO

Introduz-se os principais conceitos acerca de sistemas dinámicos não lineares, com énfase em sistemas lineares por partes. Explicam-se os fundamentos de estabilidade, bifurcações e caos. A Transformação de Poincaré para sistemas lineares por partes é introduzida através de alguns exemplos de Engenharia Elétrica. Dois destes exemplos, a discretização do modelo de fase do sistema de controle PLL de segunda ordem com uma perturbação periódica, e o Circuito de Chua com uma não linearidade descontínua, são modelos originais. Como resultado, desenvolvem-se um método para estender a Transformação de Poincaré incluindo pontos onde a trajetória não é transversa à superficie de Poincaré e um método para obter a Transformação de Poincaré de sistemas com uma característica periódica não linear por partes.

Modela-se como sistema dinámico discreto um motor C.C. controlado pela técnica PLL. Este modelo é melhor que o modelo de fase continuo para o PLL já existente, porque ele inclui efeitos não modelados previamente, tais como descontinuidades no sinal de erro, a dinâmica do detetor de fase e o comportamento com uma velocidade de saída diferente da velocidade de referência. Obtém-se as regiões estáveis do ponto fixo e das subharmônicas no espaço dos parâmetros. A bifurcação caixas-em-filas é encontrada neste sistema.

Palavras-chave: Bifurcações, bifurcações caixas-em-filas, caos, controle de motores C.C., phase locked loop, sistemas dinámicos, sistemas lineales por partes, Transformação de Poincaré.

Introdução

Na área de controle, os sistemas com fortes não linearidades tem recebido pouca atenção, se considerarmos a pequena percentagem de publicações dedicadas ao tema nas revistas especializadas. Só recentemente tem aumentado o interesse por este tipo de problemas, a partir dos desenvolvimentos realizados em outras áreas, principalmente na matemática e na física.

Em geral, como resultado da formação tradicional, o engenheiro elétrico - orientado para lutar em forma prática com problemas empíricos- têm uma visão linear dos fenômenos, na qual a resistência, a capacitância, a indutância e o ganho dos amplificadores são lineares (ou deveriam sê-lo), o princípio de superposição é sempre válido e as soluções podem ser achadas utilizando a Transformada de Laplace ou a Transformada de Fourier.

Mas nos sistemas reais existem outros problemas que podem ser relevantes ou até críticos em algumas aplicações, como por exemplo: Influência da temperatura e fluxo de ar nas proximidades de componentes eletrônicos; saturação de amplificadores; efeito de perturbações periódicas tais como ruído gerado pela rede elétrica; distribuição espacial de carga e correntes no interior dos elementos; envelhecimento de componentes; efeito da sujeira e da oxidação dos condutores sobre a circulação de correntes muito pequenas; não linearidades de transdutores; etc.

No caso de projetos de controle, se as soluções complicadas de sistemas determinísticos forem erroneamente interpretadas como ruído estocástico, ou se a linearização não for uma boa aproximação para um sistema que realmente é não linear,

pode-se perder muito tempo de projeto e dinheiro tentando melhorar o desempenho por métodos de tentativa e erro. A tentação mais freqüente ante a presença de oscilações aperiódicas num circuito, é incluir filtros em todos os pontos críticos. Mas se o sistema for não linear, isto significa aumentar a ordem do sistema, o que só pode complicar os resultados, porque a origem das oscilações aparentemente aleatórias pode ser o próprio sistema determinístico em estudo.

Mas pode um sistema determinístico gerar respostas impossíveis de serem conhecidas a priori? Pode. Esta afirmação parece contradizer a lógica, mas tem base em abundante bibliografia das mais diversas áreas, relativa tanto a experiências quanto a explicações teóricas.

As conseqüências desta descoberta refletem-se em diferentes âmbitos, desde a filosofia da ciência até os custos de projeto do engenheiro e as possibilidades de aplicação tecnológica. A conseqüência conceitual é que não é mais possível esperar que a partir do conhecimento de um modelo determinístico e das suas condiçoes iniciais seja sempre possível, em teoria, prever o comportamento futuro de um sistema. O estudo destes fenômenos não lineares pode, por outro lado, ter resultados práticos positivos, tais como:

- Incremento na qualidade dos elementos e sistemas, ao eliminar efeitos indesejáveis tais como oscilações subharmônicas e comportamento pseudoaleatório, os quais podem ser considerados como ruído determinístico gerado pelo próprio sistema.

- Aumento na vida útil das componentes e sistemas, ao considerar o efeito do envelhecimento (ou mudança de parâmetros) já na etapa de projeto, evitando que com o decorrer do tempo o sistema passe a operar em regiões de comportamento pseudoaleatório ou subharmônico.

- Redução de custos ao permitir a inclusão de elementos não lineares no projeto de um sistema. O esforço dedicado a conseguir que elementos não lineares tenham um comportamento linear, ou a estender a sua região de operacão linear, eleva os custos de projeto e produção (compare-se, por exemplo, o custo de um sensor de temperatura tal como um diodo ou um termopar, com o de um resistor de platina).

- Criação de novas e melhores soluções baseadas em elementos tipicamente não lineares.

Uma das dificuldades existentes no estudo de sistemas não lineares é a grande diversidade de comportamentos e o escasso número de técnicas analíticas, o que limita o estudo aos casos mais simples, cuja estrutura adapta-se às técnicas existentes.

Por outro lado, a grande variedade de fenômenos detetados em diferentes áreas (matemáticas, física, biologia, engenharia, etc.) tem levado a uma explosão de publicações informando sobre fenômenos não lineares, descrevendo-os ou estabelecendo conexões com a teoria desenvolvida em outras áreas específicas (tais como Física Estatística ou Mecânica Quântica, Inteligência Artificial ou Otimização). Mas somente uns poucos métodos tem alcançado aceitação geral e são constantemente utilizados na literatura atual. Dentre estes métodos mais gerais escolhemos os métodos mais adequados ao nosso sistema.

Através do desenvolvimento desta tese, procuramos situar o trabalho dentro de uma visão um pouco mais ampla e interdisciplinar do que uma análise especializada orientada únicamente à solução de um problema de controle, equilibrando uma base teórica orientada à solução de problemas de engenharia, com o modelamento e estudo de um sistema de controle em particular. A tese forma parte da linha de pesquisa iniciada pelo Prof. Álvaro G. Badan Palhares, orientador da mesma, com a sua tese de doutorado sobre um sistema de controle PWM e análise das oscilações instáveis (Badan Palhares, 1980). Dentro desta linha, a tese tem recebido influência indireta de outros pesquisadores que precederam esse trabalho, entre os quais podemos citar o Prof. Yaro Burian Jr. (UNICAMP) e o Prof. Christian Mira (I.N.S.A., França).

O trabalho de I. Gumowski e C. Mira (França) tem o mérito de ter reunido conceitos e desenvolvimentos das escolas soviética, européia e americana. Ao se fazer uma revisão bibliográfica, é surpreendente verificar que alguns resultados importantes têm recebido pouca divulgação no Ocidente, ao ponto de terem sido redescobertos muito tempo depois e divulgados como originais; C. Mira chama a atenção para esse fato, bem como para as aplicações na área de controle.

Desejaria agradecer aos Profs. C. Mira e J.P. Carcassès, do I.N.S.A., França, a sua importante contribuição para esta tese. Produto da discussão do modelo que propuséramos inicialmente para o sistema de controle PLL (Badan Palhares e Mahla, 1993), o qual tinha uma restrição, desenvolvemos conjuntamente um modelo geral sem restrições. Eles introduziram dito modelo nos programas para análise qualitativa de sistemas dinâmicos anteriormente criados pelo grupo do I.N.S.A., os quais permitem caracterizar o comportamento do sistema no espaço de estado e no espaço de parâmetros. Este trabalho gerou três programas, com cujos resultados prepara-se uma publicação conjunta.

Também agradeço a colaboração do Prof. Leon Chua, da Universidade de California -Berkeley, pelo cujo estímulo publicamos um artigo referente ao Circuito de Chua no *Journal of Circuits, Systems, and Computers*, posteriormente reimpresso em *Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos*, vol. 1 da série *Nonlinear Science* de *World Scientific*. Este artigo, já citado no *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, tem dado início a uma promisória linha de

pesquisa relacionando o Circuito de Chua com sistemas de controle que incluem elementos lineares por partes e descontinuidades, os quais podem ser analisados com a metodologia utilizada nesta tese, linha que esperamos continuar desenvolvendo através de um trabalho conjunto.

Finalmente, agradeço o apoio do meu orientador, Prof. Álvaro G. Badan Palhares, o qual tem sido determinante não somente para o desenvolvimento de duas teses -mestrado e doutorado- mas para o estabelecimento de uma linha de pesquisa num tema relevante com interessantes ramificações em diferentes aplicações, e para o início de um trabalho conjunto envolvendo projetos de pesquisa e docência. A colaboração com os Profs. Mira e Chua tem sido possível através dos projetos de pesquisa coordenados pelo Prof. Badan Palhares, os quais foram essenciais para a realização das visitas que concretizaram este trabalho.

1

Sistemas dinâmicos e estabilidade

1.1 Introdução

Na nossa interação com o mundo do qual somos parte, precisamos de uma representação abstrata desse mundo e das partes que o constituem. Esta representação ou modelo é um compromisso entre a complexidade suficiente para descrever adequadamente os fenômenos relevantes para o nosso interesse, e a simplicidade necessária para apreendê-los com as limitações de nosso intelecto e as restrições decorrentes das ferramentas de análise e síntese contemporâneas à elaboração do modelo.

Quando falamos num sistema físico, consideramos uma parte do universo, a qual interage com o resto do mundo através de entradas e saídas. O comportamento do sistema, observado nas saídas, depende então, de fenômenos internos e das entradas externas. Nesta separação do sistema físico ou da sua representação abstrata, escolhemos as variáveis mais relevantes para descrever adequadamente o seu comportamento interno e a sua interação com o mundo.

Embora nosso interesse na engenharia seja o estudo de sistemas físicos, em teoria de sistemas o objeto de estudo não é o sistema físico, mas a sua representação abstrata. E, até, sistemas abstratos que não necessariamente têm realização física. Citando a Zadeh e Desoer (1963): ... " O que se trata em teoria de sistemas não é o *físico,* mas a identidade matemática dos atributos de um objeto e as relações entre eles. Assim, para um teórico de sistemas um objeto $\mathcal{R}$ é essencialmente uma entidade abstrata associada com um conjunto de atributos v_1, v_2, ... , que é caracterizada pelas relações entre esses atributos. Assim, um *objeto abstrato,* ou simplesmente um *objeto,* é um conjunto de

variáveis junto com um conjunto de relações entre elas." ... "Um *sistema abstrato*, ou, simplesmente um *sistema*, $\mathcal{S}$, é um conjunto parcialmente interconectado de objetos abstratos, $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$, ... , chamados as componentes de $\mathcal{S}$."

Por *sistema dinâmico* entenderemos uma representação matemática que permite descrever a evolução das variáveis relevantes de um sistema através do tempo.

Dentre as formulações possíveis para descrever um sistema dinâmico, escolheremos a *representação de estado.* A representação de estado é um conjunto de n equações diferenciais ordinárias de ordem 1, suficientes para descrever univocamente o comportamento das n variáveis reais linearmente independentes escolhidas como relevantes (*variáveis de estado*), conhecendo as entradas em qualquer momento a partir do instante inicial, e a condição das variáveis de estado no instante inicial. Nesta representação, as saídas são obtidas como função das variáveis de estado e das entradas.

O conjunto de variáveis de estado é conhecido como *vetor de estado.* A este vetor é associado um *espaço de estado,* normalmente IR^n , onde n é o número de variáveis de estado. A solução do conjunto de equações diferenciais, dada pela evolução do vetor de estado, é chamada de *trajetória.* O conjunto de todas as soluções possíveis a partir de diferentes condições iniciais, é o *fluxo* do sistema.

Através deste capítulo, continuaremos apresentando uma série de definições que serão a base conceitual e ao mesmo tempo a linguagem necessária para poder compreender os métodos utilizados na caracterização dos diferentes tipos de comportamento nos sistemas analisados. São incluidos, também, alguns teoremas que constituem, por eles mesmos, métodos poderosos para o estudo da estabilidade de sistemas e para a sua análise qualitativa.

Pelo número de definições e teoremas incluidos, a leitura pode parecer um pouco pesada, enquanto que o estilo aparentemente fica mais perto das abstrações matemáticas do que das aplicações práticas. Nos textos dedicados ao tema de sistemas dinâmicos, a leitura e a absorção de conceitos são amenizados com a apresentação e explicação dos métodos através de exemplos, expediente que temos reduzido ao mínimo em favor da síntese e da inclusão de todos os elementos necessários para o desenvolvimento do trabalho.

Preferimos este tipo de apresentação porquanto ela não deixa dúvidas sobre as possibilidades de aplicação, nem vazios quanto à fundamentação dos métodos e algoritmos. Os conceitos incluídos, mesmo sendo básicos, são suficientes para compreender a linguagem correntemente utilizada na literatura atual sobre sistemas dinâmicos. Uma discusão mais intuitiva de uma parte destes conceitos pode ser encontrada em (Mahla,1991). A seguir, apresentaremos algumas definições .

1.2 Definições

Definição 1.1. Sistema dinâmico discreto no tempo.

*Por **sistema dinâmico discreto no tempo**, entenderemos uma representação matemática que permite descrever a evolução das variáveis relevantes de um sistema, numa seqüência de instantes discretos de tempo.*

O tempo não é considerado aqui como uma variável contínua, mas como uma seqüência de inteiros (k = 0,1,2,...) que será chamada de *tempo discreto* (Mira , 1987).

A representação discreta, também conhecida como *recorrência, mapeamento ou transformação pontual*, pode corresponder a um processo intrinsecamente discreto, ou a uma amostragem de um processo contínuo. A seqüência de pontos definida pela solução da recorrência, a partir de um estado inicial e das entradas conhecidas para todos os instantes discretos a partir do instante inicial, é chamada de *órbita.*

A representação de estado de um sistema discreto corresponde a um conjunto de n equações de diferenças de ordem um, suficientes para descrever unívocamente o comportamento das n variáveis de estado a partir da entrada descrita para todos os instantes de tempo discretos desde o instante inicial, e do estado inicial das variáveis. Como no caso contínuo no tempo, as saídas são obtidas como função das variáveis de estado.

Definição 1.2. Forma explícita e implícita.

*As equações de estado, contínuas ou discretas, podem assumir uma forma explícita ou implícita. A **forma explícita** para sistemas contínuos é definida por equações do tipo*

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in IR^n, \quad f: U \to IR^n, \quad U \subseteq IR^n, \quad n \in IN, \tag{1.1}$$

ou

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x \in IR^n, \quad f: U \to IR^n, \quad U \subseteq IR^n, \quad n \in IN, \tag{1.2}$$

*onde a eq. (1.1) corresponde a um **sistema autônomo**, e a eq. (1.2) corresponde a um **sistema não autônomo.***

*A **forma implícita**, para sistemas contínuos, é dada por equações do tipo*

$$G(\dot{x},x)=0, \quad x\in IR^n, \quad G:U\to IR^n, \quad U\subseteq IR^n, \quad n\in IN, \tag{1.3}$$

ou

$$G(\dot{x},x,t)=0, \quad x\in IR^n, \quad G:U\to IR^n, \quad U\subseteq IR^n, \quad n\in IN, \tag{1.4}$$

onde a eq. (1.3) corresponde ao caso autônomo e a eq. (1.4) ao caso não autônomo.

Para sistemas discretos no tempo, a **forma explícita** corresponde a equações do tipo

$$x_{k+1} = f(x_k)\ , \quad x_k \in IR^n, \quad f: U\to IR^n, \quad U\subseteq IR^n; \quad k+1, n \in IN, \tag{1.5}$$

ou

$$x_{k+1} = f(x_k,k)\ , \quad x_k \in IR^n, \quad f: U\to IR^n, \quad U\subseteq IR^n; \quad k+1, n \in IN, \tag{1.6}$$

onde a eq. (1.5) representa um sistema discreto autônomo e a eq. (1.6) descreve um sistema discreto não autônomo.

A formulação **implícita** de um sistema discreto é dada por equações da forma

$$G(x_{k+1},x_k) = 0\ , \quad x_k \in IR^n, \quad G: U\to IR^n, \quad U\subseteq IR^n; \quad k+1, n \in IN, \tag{1.7}$$

ou

$$G(x_{k+1},x_k,k) = 0\ , \quad x_k \in IR^n, \quad f: U\to IR^n, \quad U\subseteq IR^n; \quad k+1, n \in IN, \tag{1.8}$$

onde a eq. (1.7) descreve um sistema autônomo e a eq. (1.8) modela um sistema não autônomo.

Notação. Na definição 1.2, nos capítulos e seções seguintes, U, V denotam subconjuntos abertos de IR^n .

Definição 1.3. Função de classe C^r.

Uma função $g : \mathrm{U}\to \mathrm{IR}$, $\mathrm{U}\subseteq \mathrm{IR}$, U *aberto, é chamada de* **classe** C^r *se ela é r-vezes continuamente diferenciável , com* $1 \le r \le \infty$.

A função de classe C^o é chamada de *contínua.* De função de classe C^∞ , diz-se que ela é *suave*.

Definição 1.4. Mapeamento de classe C^r. (Arrowsmith e Place, 1990).

Seja $G : U \rightarrow V$, $U \subseteq IR^n$, $V \subseteq IR^m$, *um mapeamento cujas funções componentes são* $g_i(x_1, x_2, \ldots x_n)$, $i = 1, \ldots, m$, *isto é,*

$$G = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \ldots x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \ldots x_n) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots x_n) \end{bmatrix}, \tag{1.9}$$

Então o mapeamento G é chamado de **classe C^r** *se* $\forall$ i *os* g_i *são de classe* C^r , $1 \leq r \leq \infty$.

O mapeamento de classe C^o é definido como um mapeamento *contínuo,* mas não diferenciável. O mapeamento de classe C^∞ é chamado de *suave.* Se o mapeamento é de classe C^r , $1 \leq r \leq \infty$, diz-se que ele é *diferenciável.*

Definição 1.5. Difeomorfismo.

G é chamado ***difeomorfismo de classe C^k,*** *se tanto G quanto* G^{-1} *são mapeamentos de classe* C^k . (Arrowsmith e Place, 1990).

Se G é um difeomorfismo de classe C^1, ele é chamado simplesmente de *difeomorfismo.* Em outras palavras, um difeomorfismo G é uma bijeção tal que tanto G quanto G^{-1} são mapeamentos diferenciáveis.

Em particular, o conceito de difeomorfismo pode ser aplicado nas transformações $\phi_t : IR^n \rightarrow IR^n$ e $F : IR^n \rightarrow IR^n$, onde ϕ_t é o fluxo de um sistema contínuo e F define uma transformação pontual T .

a) Se ϕ_t^{-1} existe , e tanto $D\phi_t$ quanto $D\phi_t^{-1}$ existem e são contínuas, então ϕ_t é um difeomorfismo. $D\phi_t$ denota a matriz Jacobiana de ϕ_t, e $D\phi_t^{-1}$ denota a matriz Jacobiana de ϕ_t^{-1} (Parker e Chua,1989).

b) Se F é contínua , T^{-1} existe e é única no domínio de definição de F , e tanto DF quanto DF^{-1} existem e são contínuas, então T é um difeomorfismo. DF denota a matriz Jacobiana de F , e DF^{-1} denota a matriz Jacobiana de F^{-1} . Se T^{-1} existe e é única no domínio de definição de F , mas F é não contínua ou não diferenciável , então T é chamada de *transformação inversível* . (Mira , 1987).

Definição 1.6. Homeomorfismo.

Chama-se ***homeomorfismo*** *a um difeomorfismo de classe* C^0 . (Guckenheimer e Holmes , 1983).

Definição 1.7. Endomorfismo. (Mira , 1987)

Seja $F : IR^n \rightarrow IR^n$ *uma transformação pontual* T . *Se* F *é tal que* T^{-1} *assume mais de um valor, ou tal que* T^{-1} *não está definida em algum domínio do espaço de fase, então a transformação* T *é não invertível, e* T *é chamada de* ***endomorfismo***.

Definição 1.8. Superfície localmente euclideana ("manifold").

Uma ***superfície localmente euclideana ("manifold") n-dimensional*** $M \subset IR^N$ *é definida como um conjunto tal que* $\forall\ x \in M\ \exists$ *uma vizinhança* U *de* x *para a qual existe um difeomorfismo de classe* C^r $\phi : IR^n \rightarrow U \quad (n \leq N,\ r \geq 1)$. (Guckenheimer e Holmes, 1983).

Se esta propriedade de ser "localmente euclideana" pode ser estendida para a superfície toda, e todos os difeomorfismos locais tiverem a mesma classe de diferenciabilidade, então diz-se que a superfície é **diferenciável** .

1.3 Soluções de equações de estado

Definição 1.9. Constante de Lipschitz.

Diz-se que uma função $f : U \rightarrow IR^n$, *onde* $U \subset IR^n$ *é um subconjunto aberto do espaço euclideano real ou uma superfície diferenciável M, tem* ***continuidade Lipschitz local*** *em relação a x, se é satisfeita a condição*

$$| f(y) - f(x) | \ \leq\ k | x - y | \qquad (1.10)$$

para cada $y \in U$ *tal que* $\| y - x \| \leq \varepsilon$, para algum $\varepsilon > 0$ e para algum $0 < k < \infty$. k *é chamada de* ***constante de Lipschitz*** *para f.* (Walker, 1980; Guckenheimer e Holmes, 1983).

Teorema 1.1. Teorema de Picard-Lindelöf ou Teorema de Existência e Unidade.

Seja $U \subset IR^n$ *aberto. Seja* $f: U \rightarrow IR^n$ *com continuidade Lipschitz local em relação a* x $\forall x \in U$, *e seja* $x_0 \in U$. *Então existe uma única solução* $\phi(x_0, \cdot)$ *que satisfaz a equação diferencial* $\dot{x} = f(x)$, *com condição inicial* $x(0) = x_0$. (Walker, 1980; Guckenheimer e Holmes, 1983).

Como a condição de continuidade Lipschitz local é menos estrita que a continuidade, f pode ser, por exemplo, uma função linear por partes , tal como no circuito de Chua (Chua, 1992) ou ainda possuir descontinuidades, como no modelo de fase para o sistema de controle PLL (Mahla, 1991; Mahla e Badan Palhares, 1992a) ou no Circuito de Chua com não linearidade descontínua (Mahla e Badan Palhares, 1993a). O teorema é somente local, devido ao fato de que qualquer solução poderia abandonar U depois de um tempo suficientemente grande. (Guckenheimer e Holmes, 1983).

Definição 1.10. Ponto de equilíbrio.

Seja o sistema descrito por

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x \in IR^n, \; f : U \rightarrow IR^n \; . \tag{1.11}$$

Diz-se que x_e *é um* ***ponto de equilíbrio*** *se ele satisfaz a condição*

$$f(x_e,t) = 0 \tag{1.12}$$

para todo t.

Definição 1.11. Ponto periódico.

Seja uma transformação pontual T, simbolizando uma recorrência explícita ou implícita de uma das formas (1.5), (1.6), (1.7) ou (1.8), as quais podem ser representadas por

$$x_{k+1} = T\,x_k \; ; \quad x_{k+1}, x_k \in IR^n \; . \tag{1.13}$$

Definindo

$$T^0\, x_k \equiv x_k \; , \tag{1.14 a}$$

$$T^{i+1} x_k \equiv T(\, T^i x_k \,), \tag{1.14 b}$$

então um ponto x_k^* *é chamado de* ***ponto periódico de período p****, se for satisfeita a condição*

$$x_k^* = T^p x_k^*, \qquad x_k^* \neq T^\ell x_k^* , \qquad \ell < p ; \qquad \ell , p , k \in IN. \tag{1.15}$$

Definição 1.12. Ponto fixo.

Define-se ***ponto fixo*** *como ponto periódico de período um da transformação T, isto é ,*

$$x_k^* = T x_k^* . \tag{1.16}$$

Definição 1.13. Ponto eventualmente periódico.

Diz-se que um ponto $y \in U \subseteq IR^n$ *é* ***eventualmente periódico*** *se* $x^* = T^m y$ *é periódico para algum inteiro positivo m.*

Definição 1.14. Ponto assintoticamente periódico.

Um ponto $z \in U \subseteq IR^n$ *é dito* ***assintoticamente periódico*** *se existe um ponto periódico* x^* *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} (T^n z - T^n x^*) = 0, \qquad n \in IN. \tag{1.17}$$

Definição 1.15. Solução periódica. (Parker e Chua , 1989).

$\phi_t (x^* , t_0)$ *é* ***solução periódica*** *de um sistema não autônomo contínuo se*

$$\phi_t (x^* , t_0) = \phi_{t+T} (x^* , t_0) \tag{1.18}$$

$\forall\ t$ *e algum período mínimo* $T > 0$.

No caso de um sistema autônomo, a condição (1.18) é substituída por $\phi_t (x^*) = \phi_{t+T} (x^*)$.

A solução periódica tem uma freqüência fundamental em $f = 1 / T$ e harmônicas em k/T, $k = 2, 3, \ldots$.

Num sistema não autônomo periodicamente perturbado, T é tipicamente um múltiplo inteiro ($k = 1, 2, \ldots$) do período da perturbação , e a solução é chamada *solução de período k* ou *subharmônica de k-ésima ordem.*

No caso autônomo, uma solução periódica isolada $\phi_t(x^*)$ (ou seja , tal que exista uma vizinhança dela que não contenha outras soluções periódicas) , é chamada *ciclo limite.*

Definição 1.16. Solução quase-periódica. (Parker e Chua, 1989).

Uma ***solução quase-periódica*** *é aquela que pode ser escrita como a soma contável de funções periódicas* $h_i(t)$

$$x(t) = \sum_i h_i(t), \tag{1.19}$$

onde h_i *tem período mínimo* T_i *e freqüência* $f_i = 1/T_i$ *, tal que existe um conjunto finito de* ***freqüências - base*** $\{ \hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_p \}$ *que satisfaz as duas condições seguintes:*

(i) O conjunto é linearmente independente no campo dos inteiros, isto é, não existe um conjunto de inteiros diferentes de zero $\{ k_1, \ldots, k_p \}$ *tais que* $k_1\hat{f}_1 + \ldots + k_p\hat{f}_p = 0$.

(ii) Forma uma ***base finita integral*** *para as* f_i *, isto é, para cada i,* $f_i = \left| k_1\hat{f}_1 + \ldots + k_p\hat{f}_p \right|$ *para alguns inteiros* $\{ k_1, \ldots, k_p \}$.

A base não é única, mas p está definido. Uma solução quase - periódica com p freqüências base é chamada ***p - periódica.***

1.4 Estabilidade de pontos de equilíbrio em sistemas dinâmicos

Nosso interesse principal será caracterizar os pontos de equilíbrio, o que permitirá obter conclusões qualitativas a respeito do comportamento do sistema para diferentes valores dos parâmetros. As definicões mais úteis no contexto do presente trabalho referem-se a *estabilidade no senso de Lyapunov,* as quais aplicam-se a sistemas nos quais a dependência do tempo é conhecida. Estas definicões utilizam-se também no caso particular de sistemas autônomos, para os quais as definicões podem ser fácilmente adaptadas.

No caso mais familiar de sistemas lineares do tipo $\dot{x} = Ax$, existe um único ponto de equilíbrio, cuja estabilidade define o comportamento global do sistema. No

caso mais geral de sistemas dinâmicos, é possível encontrar vários pontos de equilíbrio ou nenhum. O estudo da estabilidade destes pontos de equilíbrio permite analisar qualitativanente o comportamento do sistema, mas nem sempre de forma global.

Definição 1.17. Norma Euclideana.

*A **norma Euclideana de um vetor** $x \in IR^n$, denotada por $\|x\|$, é definida por*

$$\|x\| \equiv \sqrt{x'x}, \tag{1.20}$$

onde x' denota o vetor x transposto.

A norma Euclideada induzida de uma matriz $A \in IR^n \times IR^n$, denotada por $\|A\|$, é definida por

$$\|A\| \equiv [\lambda_{max}(A'A)]^{1/2} \tag{1.21}$$

onde A' denota a matriz transposta de A e $\lambda_{max}(A'A)$ denota o autovalor máximo da matriz A'A.

Definição 1.18. Ponto de equilíbrio estável no senso de Lyapunov.

*Seja $\phi_t(x_0, t_0)$ a solução de um sistema com dependência do tempo conhecida, descrito pela eq. (1.2). O ponto de equilíbrio x_e é **estável no senso de Lyapunov** se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\| x_0 - x_e \| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \| \phi_t(x_0, t_0) - x_e \| < \varepsilon \ \forall t \in IR^+$, onde $\|\cdot\|$ denota a norma Euclideana usual $\in IR^n$. Diz-se que o ponto de equilíbrio x_e é **instável** se ele não é estável . (Walker, 1980).*

A definição 1.18 é ilustrada na Fig. 1.1, e significa que uma trajetória originada numa vizinhança de um ponto de equilíbrio permanece sempre dentro de uma outra vizinhança do mesmo ponto.

Definição 1.19. Ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

*Diz-se que o ponto de equilíbrio x_e é **assintoticamente estável** se ele é estável e se existe $\gamma > 0$ tal que $\| x_0 - x_e \| < \gamma \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \| \phi_t(x_0, t_0) - x_e \| = 0$. Esta propriedade é **global** se γ pode ser eleito como $\gamma = \infty$.* (Walker, 1980).

Esta definição, ilustrada na Fig. 1.2, é equivalente a dizer que para um tempo infinitamente grande, uma trajetória originada na vizinhança de um ponto de equilíbrio, converge a esse ponto.

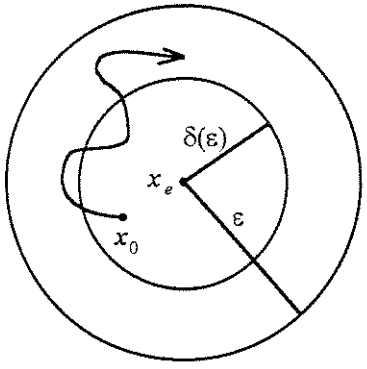


Fig 1.1 . Estabilidade no senso de Lyapunov.

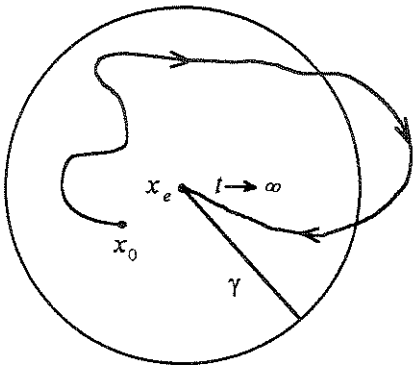


Fig. 1.2. Estabilidade assintótica.

Definição 1.20. Ponto de equilíbrio exponencialmente estável.

O ponto de equilíbrio x_e *é chamado de* ***exponencialmente estável*** *se existem* $\gamma > 0$, $\alpha > 0$, $M < \infty$ *tais que* $\| x_0 - x_e \| < \gamma \Rightarrow$

$$\| \phi_t(x_0, t_0) - x_e \| \leq M e^{-\alpha t} \| x_0 - x_e \| \qquad (1.22)$$

$\forall\, t \in IR^+$. *A propriedade é* ***global*** *se, para cada* $\gamma > 0$, *existem* $M(\gamma) < \infty$, $\alpha(\gamma) > 0$ *adequados*. (Walker, 1980).

A definição 1.20 é ilustrada na Fig. 1.3 para uma trajetória $\in IR^2 \times IR$.

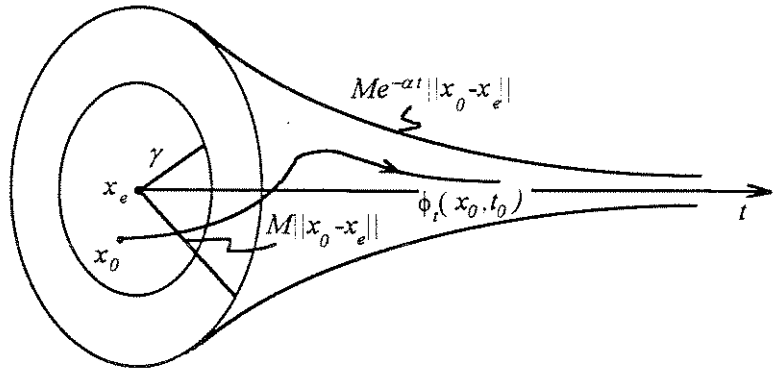


Fig. 1.3. Estabilidade exponencial.

Definição 1.21. Função definida positiva . (La Salle e Lefschetz , 1961).

Uma função $V(x), x \in IR^n$, *é dita* ***definida positiva*** *se ela satisfaz as condições seguintes:*

(i) V (x) é de classe C^1 *numa vizinhança aberta U da origem .*
(ii) V(0) = 0.
(iii) V(x)> 0 $\forall x \in U$ *tal que* $x \neq 0$.

Definição 1.22. Função de Lyapunov. (La Salle e Lefschetz , 1961).

*Chama-se **função de Lyapunov** a uma função positiva definida tal que* $\dot{V} \leq 0$ *na vizinhança aberta U referida na definição 1.21.* (La Salle e Lefschetz , 1961).

Sendo V um escalar associado a um vetor de estado, ele pode ser, por exemplo, uma norma, ou ter uma interpretação física, tal como o nível de energia de um sistema dinâmico. Intuitivamente, uma diminuição no nível de energia quando a trajetória aproxima-se a um ponto de equilíbrio , corresponde a um comportamento assintoticamente estável ($\dot{V} < 0$) ou estável ($\dot{V} \leq 0$).

Para um sistema autônomo, descrito pela eq. (1.1) , a magnitude $\dot{V}$ avaliada nas trajetórias geradas pela equação é

$$\dot{V} = f' \, grad \, V, \tag{1.23}$$

onde f' denota o vetor transposto do campo vetorial f (ou, em outras palavras, o vetor cujas componentes são a primeira derivada de cada variável em relação ao tempo), e onde *grad* V é o gradiente de V, constituido pelas derivadas parciais de V em relação a cada uma das variáveis.

Como segundo a definição 1.21, V é de classe $C^1 \in$ U, V tem primeiras derivadas parciais e portanto tem gradiente .

Para um sistema não autônomo, descrito pela eq. (1.2), $\dot{V}$ avaliada nas trajetórias é

$$\dot{V}(x,t) = \frac{\partial V}{\partial t} + f' \, grad \, V, \tag{1.24}$$

com a mesma notação de (1.23).

1.4.1 Segundo Método de Lyapunov

O Segundo Método de Lyapunov data de 1892, quando Lyapunov publicou o seu histórico artigo "Problema Geral da Estabilidade do Movimento" , que foi o ponto de referência para grande parte dos trabalhos que tratam sobre estabilidade de sistemas dinâmicos.

Apesar de que o método somente permite determinar condições suficientes para estabilidade, e apesar de que apresenta a dificuldade de não existir uma forma geral para

obter as funções de Lyapunov, o conceito é de grande simplicidade e generalidade. A força do método está no fato de que não é necessário conhecer a solução da equação de estado para obter conclusões sobre a estabilidade do sistema .

O método, chamado também de Método Direto de Lyapunov, é clássico nos textos de Sistemas Não Lineares, e portanto não apresenta elementos novos; contudo não podia ser ingorado, principalmente pela sua relevância como conceito, no desenvolvimento do presente trabalho. Incluimos ainda a versão do método para sistemas não autônomos, a qual é menos conhecida e porém não menos útil.

A seguir , inclui-se os dois teoremas que são conhecidos como "Segundo Método de Lyapunov", os quais são válidos para um sistema autônomo com um ponto de equilíbrio na origem. Os teoremas podem ser aplicados também num sistema que tem pontos de equilíbrio diferentes da origem, fazendo uma mudança de variável apropiada. Após os dois teoremas, apresenta-se a generalização para sistemas não autônomos.

Teorema 1.2. Teorema de estabilidade. (La Salle e Lefschetz, 1961).

Se existir uma função de Lyapunov V(x) em alguma vizinhança U da origem, então a origem é estável .

Teorema 1.3. Teorema de estabilidade assintótica. (La Salle e Lefschetz , 1961).

Se for satisfeita a condição estabelecida no teorema 1.2, e também - $\dot{V}$ for positiva definida em U , então a origem é assintoticamente estável .

1.4.2 Segundo Método de Lyapunov para sistemas não autônomos
(La Salle e Lefschetz, 1961).

Seja o sistema

$$\dot{x} = f(x,t) \tag{1.25}$$

tal que o teorema de existência e unicidade é válido num conjunto U : $\|x\| < \varepsilon$, e $t \geq 0$, onde assume-se que $f(0,t) = 0$ para $t \geq 0$.

Seja $W(x)$ uma função definida positiva (segundo a definição 1.21), a seguir define-se a *função definida positiva explicitamente dependente do tempo.*

Definição 1.23. Função definida positiva explicitamente dependente do tempo.
(La Salle e Lefschetz , 1961).

Diz-se que a função $V(x,t)$ *é* ***definida positiva*** *se são satisfeitas as condições seguintes :*

(i) $V(x,t)$ *está definida* $\in U \ \forall\, t \geq 0$,

(ii) $V(0,t) = 0$ *para* $t \geq 0$,

(iii) $W(x) \leq V(x,t) \ \forall\, x \in U$ *e* $\forall\, t \geq 0$, *para alguma* $W(x)$.

Definição 1.24. Função de Lyapunov para sistemas não autônomos.
(La Salle e Lefschetz , 1961).

Seja $V(x,t)$ *uma função definida positiva segundo a definição 1.23. Se* $\dot{V}(x,t) \leq 0 \in U$, *diz-se que* V *é uma* ***função de Lyapunov*** $\in U$.

Como a função V depende explicitamente do tempo, a derivada $\dot{V}(x,t)$ é dada pela expressão (1.24).

Decorrendo das definições anteriores, seguem os teoremas de estabilidade e estabilidade assintótica para sistemas não autônomos (La Salle e Lefschetz , 1961).

Teorema 1.4. Teorema de estabilidade para sistemas não autônomos.

Se existir uma função de Lyapunov $V(x,t)$ *em alguma vizinhança* U *da origem, então a origem é estável.*

Teorema 1.5. Teorema de estabilidade assintótica para sistemas não autônomos.

Se forem satisfeitas as condições seguintes:

(i) existe uma função de Lyapunov $V(x,t)$ *em alguma vizinhança* U *da origem,*

(ii) $-\dot{V}$ *é positiva definida em* U ,

(iii) $V(x,t) \leq W(x) \ \forall\, t \geq 0$, *com alguma* $W(x)$ *definida positiva,*

então a origem é assintoticamente estável.

1.4.3 Linearização na vizinhança dos pontos de equilíbrio
(Guckenheimer e Holmes, 1983).

Seja o sistema

$$\dot{x} = f(x), \qquad x \in IR^n, \quad x(0) = x_0, \tag{1.26}$$

com pontos de equilíbrio x_{eq} dados pelas soluções da equação

$$f(x_{eq}) = 0, \tag{1.27}$$

então o comportamento das soluções do sistema na vizinhança dos pontos de equilíbrio pode ser caracterizado pela estabilidade destes pontos. Uma forma simples de determinar a estabilidade dos pontos de equilíbrio é através da linearização da equação (1.26) em x_{eq} ,

$$\delta \dot{x} = Df(x_{eq})\,\delta x, \tag{1.28}$$

onde $Df = \partial f_i / \partial f_j$ é a matriz Jacobiana das primeiras derivadas parciais da função f em relação às componentes do vetor de estado, e onde $\delta x = x - x_{eq}$.

A solução da eq. (1.28) para a condição inicial δx_0, definida como $\delta x_0 = x_0 - x_{eq}$, é

$$\delta x(t) = e^{Df(x_{eq})t}\,\delta x_o , \tag{1.29}$$

que, se todos os n autovalores de $Df(x_{eq})$ forem distintos, pode ser expressa como

$$\delta x(t) = C_1 \eta_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + C_n \eta_n e^{\lambda_n t} , \tag{1.30}$$

onde $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ e $\{\eta_i\}_{i=1}^{n}$ são, respectivamente, os autovalores e autovetores de $Df(x_{eq})$ e os $\{C_i\}_{i=1}^{n}$ são constantes escalares tais que para $t = 0$ seja obtida a condição inicial.

Definição 1.25. Ponto de equilíbrio hiperbólico.

Seja x_{eq} um ponto de equilíbrio do sistema (1.26), cuja linearização é dada pela equação (1.28). Se todos os autovalores da matriz $Df(x_{eq})$ tiverem parte real diferente de zero, então o ponto x_{eq} é chamado de ***hiperbólico.***

Definição 1.26. Subespaço estável.

Define-se o ***subespaço estável*** E^s *da matriz* $Df(x_{eq})$, *como o subespaço gerado pelos* n_s *autovetores de* $Df(x_{eq})$ $\{v^1, \ldots, v^{n_s}\}$, *onde* $v^1, \ldots, v^{n_s}$ *são os autovetores correspondentes aos* n_s *autovalores com parte real negativa.*

Definição 1.27. Subespaço instável.

O ***subespaço instável*** E^u *da matriz* $Df(x_{eq})$, *é o subespaço gerado pelos* n_u *autovetores de* $Df(x_{eq})$ $\{u^1, \ldots, u^{n_u}\}$, *tais que os autovalores correspondentes têm parte real positiva.*

Definição 1.28. Subespaço central.

O ***subespaço central*** E^c *da matriz* $Df(x_{eq})$, *é definido como o subespaço gerado pelos* n_c *autovetores de* $Df(x_{eq})$ $\{w^1, \ldots, w^{n_c}\}$, *onde* $w^1, \ldots, w^{n_c}$, *são os autovetores que correspondem aos* n_c *autovalores com parte real zero.*

A relação entre o comportamento do sistema não linear (1.26) e a linearização (1.28) é estabelecida nos dois teoremas seguintes.

Teorema 1.6. Teorema de Hartman - Grobman.

Se $Df(x_{eq})$ *não tiver autovalores zero ou com parte real igual a zero (isto é, se* x_{eq} *for hiperbólico), então existe um homeomorfismo h definido em alguma vizinhança U de* $x_{eq} \in IR^n$, *levando localmente as trajetórias do fluxo não linear de (1.26), a aquelas do fluxo linear* $e^{Df(x_{eq})t}$ *de (1.28). O homeomorfismo preserva o sentido das trajetórias.*

Seja U a vizinhança do ponto de equilíbrio x_{eq}. Em forma análoga à definição de E^s e E^u para o sistema linearizado, definem-se $W^s_{loc}(x_{eq})$ e $W^u_{loc}(x_{eq})$ do sistema não linear $\dot{x} = f(x)$.

Definição 1.29. Superfície localmente estável.

Define-se como ***superfície localmente estável*** *de* x_{eq}, $W^s_{loc}(x_{eq})$, *como*

$$W^s_{loc}(x_{eq}) = \{ x \in U / \ \phi_t(x) \to x_{eq} \ \text{para} \ t \to \infty, \ e \ \phi_t(x) \in U \ \forall t \geq 0 \}. \qquad (1.31)$$

Definição 1.30. Superfície localmente instável.

*A **superfície localmente instável** de x_{eq} , $W^u_{loc}(x_{eq})$, é definida por*

$$W^u_{loc}(x_{eq}) = \{ x \in U / \ \phi_t(x) \to x_{eq} \ \text{para} \ t \to -\infty, \ e \ \phi_t(x) \in U \ \forall t \geq 0 \} \qquad (1.32)$$

O conceito de superfícies localmente estáveis e instáveis pode-se estender ao de superfícies globalmente estáveis e instáveis, como segue.

Definição 1.31. Superfície globalmente estável.

*Define-se a **superfície globalmente estável** W^s como a superfície obtida a partir da evolução dos pontos de W^s_{loc} em tempo revertido, ou seja*

$$W^s(x_{eq}) = \bigcup_{t \leq 0} \phi_t\left(W^s_{loc}(x_{eq})\right). \qquad (1.33)$$

Definição 1.32. Superfície globalmente instável.

*A **superfície globalmente instável** W^u é definida como a superfície obtida a partir da evolução dos pontos de W^u_{loc} em tempo positivo, isto é :*

$$W^u(x_{eq}) = \bigcup_{t \geq 0} \phi_t\left(W^u_{loc}(x_{eq})\right). \qquad (1.34)$$

As definições anteriores, bem como o teorema de Hartman-Grobman (Guckenheimer e Holmes, 1983) são ilustradas na Fig. 1.4.

Teorema 1.7. Teorema da superfície estável para um ponto de equilíbrio.
(Guckenheimer e Holmes, 1983).

Assuma-se que $\dot{x} = f(x)$ tem um ponto de equilíbrio hiperbólico x_{eq} . Então existem uma superfície localmente estável $W^s_{loc}(x_{eq})$, e uma superfície localmente instável $W^u_{loc}(x_{eq})$, das mesmas dimensões n_s, n_u que aquelas dos autoespaços (subespaços) E^s, E^u do sistema linearizado (1.28), e tangentes a E^s, E^u em x_{eq} .

O teorema é ilustrado na Fig. 1.5.

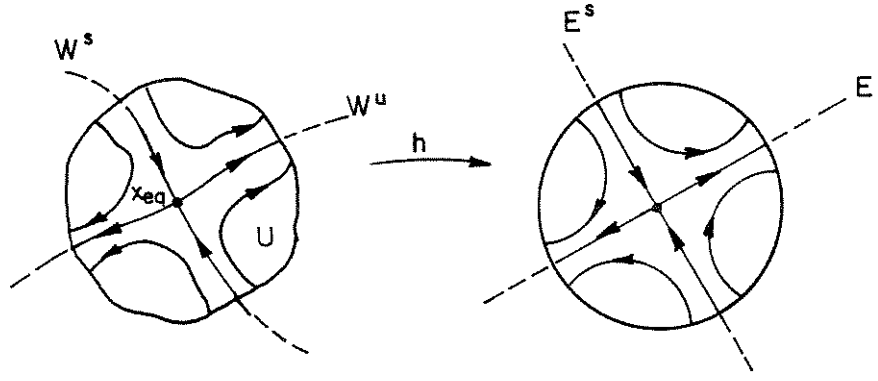


Fig. 1.4. Ilustração do teorema de Hartman-Grobman (de Guckenheimer e Holmes, 1983).

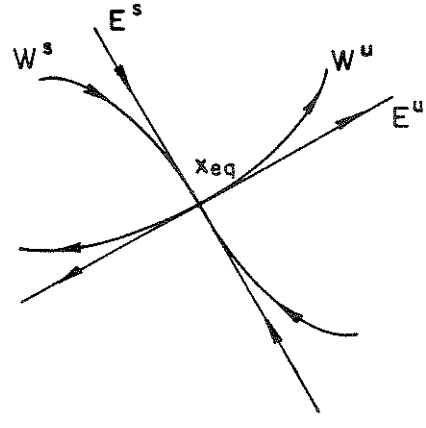


Fig. 1.5. Ilustração do teorema da superficie estável. (De Guckenheimer e Holmes, 1983).

1.4.4 Comportamento na vizinhança dos pontos de equilíbrio de um sistema discreto (Guckenheimer e Holmes, 1983).

Seja

$$\delta x_{k+1} = DP(x^*)\delta x_k \tag{1.35}$$

a linearização do sistema discreto no tempo

$$x_{k+1} = P(x_k), \tag{1.36}$$

onde $P: IR^n \to IR^n$ *e* x^* é um ponto fixo.

Analogamente ao caso em que o sistema é contínuo, definem-se os espaços estável e instável.

Definição 1.33. Subespaço estável de um ponto fixo.

Define-se E^s, o ***subespaço estável de um ponto fixo,*** *como o subespaço gerado pelos n_s autovetores de $DP(x^*)$, para os quais os autovalores têm módulo menor do que um.*

Definição 1.34. Subespaço instável de um ponto fixo.

Define-se E^u, o ***subespaço instável*** *de um ponto fixo, como o subespaço gerado pelos n_u autovetores de $DP(x^*)$, para os quais os autovalores têm módulo maior do que um.*

Teorema 1.8. Teorema de Hartman - Grobman para o caso discreto.

Seja $P: IR^n \to IR^n$ um difeomorfismo de classe C^1, com um ponto fixo hiperbólico x^*. Então existe um homeomorfismo h definido em alguma vizinhança U de x^* tal que $h(P(\zeta)) = DP(x^*)h(\zeta)\ \forall \zeta \in U$.

Pode-se definir superfícies estáveis e instáveis em forma análoga às dos sistemas contínuos, como segue.

Definição 1.35. Superfície localmente estável de um ponto fixo.

*A **superfície localmente estável** de um ponto fixo x^* é definida por*

$$W^s_{loc}(x^*)=\{x \in U / P^k(x) \to x^* \text{ para } k \to \infty, \text{ e } P^k(x) \in U, \forall k \in INU\{0\}\}, \quad (1.37)$$

onde $P^k(x)$ é a transformação $P(x)$ aplicada k vezes.

Definição 1.36. Superfície localmente instável de um ponto fixo.

*Define-se a **superfície localmente instável** de um ponto fixo x^* como*

$$W^u_{loc}(x^*)=\{x \in U / P^{-k}(x) \to x^* \text{ para } k \to \infty, \text{ e } P^{-k}(x) \in U, \forall k \in INU\{0\}\}. \quad (1.38)$$

Definição 1.37. Superfície globalmente estável de um ponto fixo.

*A **superfície globalmente estável** de um ponto fixo x^* é definida por*

$$W^s(x^*) = \bigcup_{k\geq 0} P^{-k}(W^s_{loc}(x^*)), \quad k \text{ inteiro.} \quad (1.39)$$

Definição 1.38. Superfície globalmente instável de um ponto fixo.

*Define-se a **superfície globalmente instável** de um ponto fixo x^* como*

$$W^u(x^*) = \bigcup_{k\geq 0} P^{k}(W^u_{loc}(x^*)), \quad k \text{ inteiro.} \quad (1.40)$$

Teorema 1.9. Teorema da superfície estável para um ponto fixo.

Seja $P: IR^n \to IR^n$ um difeomorfismo de classe C^1, con um ponto fixo hiperbólico x^*. Então existem superfícies localmente estável $W^s_{loc}(x^*)$ e localmente instável $W^u_{loc}(x^*)$, tangentes a os autoespaços $E^s_{x^*}$, $E^u_{x^*}$ de $DP(x^*)$ em x^*, e de dimensões correspondentes.

O teorema é ilustrado através da Fig. 1.6.

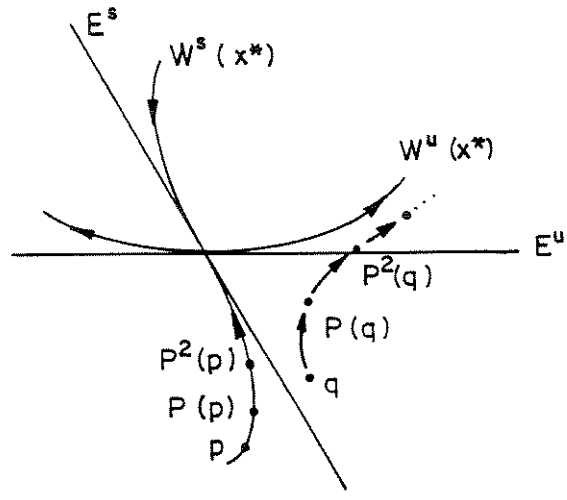


Fig. 1.6. Teorema da superfície estável para um ponto fixo de um mapeamento $P: IR^2 \rightarrow IR^2$. (De Guckenheimer e Holmes, 1983).

1.4.5 Estabilidade na vizinhança dos pontos de equilíbrio
(Parker e Chua , 1989).

Da equação (1.30), que expressa a solução de um sistema contínuo não linear na vizinhança de um ponto de equilíbrio, pode-se deduzir que um "frame" de autovetores centrado na condição inicial (origem do sistema linearizado), muda a orientação e magnitude das suas componentes com o decorrer do tempo, de forma tal que algumas destas contraem-se, outras expandem-se ou ainda outras podem permanecer inalteradas. A expansão ou a contração são quantificadas pela parte real do autovalor correspondente a cada autovetor. Se $\mathrm{Re}[\lambda_i]>0$, a parte real de λ_i da a razão de expansão na direção de η_i ; se $\mathrm{Re}[\lambda_i]<0$, a parte real de λ_i quantifica a razão de contração na direção de η_i .

Se o ponto x_{eq} for hiperbólico, a parte real dos autovalores permite classificar o ponto de equilíbrio como segue :

(i) $\mathrm{Re}[\lambda_i]<0 \quad \forall \lambda_i$ indica que x_{eq} é assintóticamente estável .
(ii) $\mathrm{Re}[\lambda_i]>0 \quad \forall \lambda_i$ corresponde a x_{eq} assintóticamente instável.
(iii) $\mathrm{Re}[\lambda_i]<0$ para alguns λ_i e $\mathrm{Re}[\lambda_i]>0$ para outros λ_i; neste caso x_{eq} é chamado de ponto de sela .

As afirmações anteriores são válidas também no caso de existirem autovalores repetidos.

Pode-se obter conclusões análogas a partir da linearização de um sistema discreto na vizinhança de um ponto fixo,

$$\delta x_{k+1} = DP(x^*)\delta x_k \tag{1.41}$$

cuja solução é

$$\delta x_k = DP(x^*)^k \, \delta x_o \,, \tag{1.42}$$

a qual, assumindo que todos os autovalores de $DP(x^*)$ sejam diferentes, pode ser expressa como

$$\delta x_k = C_1 \, \eta_1 \, m_1^k + \ldots + C_p \, \eta_p \, m_p^k \,, \tag{1.43}$$

onde $\{m_i\}_{i=1}^p$ e $\{\eta_i\}_{i=1}^p$ são os autovalores e autovetores de $DP(x^*)$, respectivamente, e $\{C_i\}_{i=1}^p$ são constantes escalares escolhidas de forma tal que seja obtida a condição inicial.

Definição 1.39. Multiplicadores característicos.

Chama-se ***multiplicadores característicos*** *aos autovalores* $\{m_i\}$ de $DP(x^*)$.

Definição 1.40. Ponto fixo hiperbólico.

Seja x^* *um ponto fixo do sistema* $x_{k+1} = P(x_k)$, *cuja linearização é dada pela equação (1.41). Se a matriz* $DP(x^*)$ *não tiver multiplicadores característicos na circunferência unitária definida por* $|mi| = 1$, *diz-se que o ponto fixo é* ***hiperbólico*** .

De (1.43) segue que o valor absoluto dos multiplicadores determina se os correspondentes autovetores expandem-se ($|m_i| > 1$) ou contraem-se ($|m_i| < 1$) ao iterar a transformação P. Se o ponto fixo for hiperbólico, pode-se classificar o ponto fixo como segue :

(i) $|m_i| < 1 \;\forall\, m_i$ significa que x^* é assintoticamente estável.
(ii) $|m_i| > 1 \;\forall\, m_i$ corresponde a um ponto fixo x^* assintoticamente instável.
(iii) Alguns $|m_i| > 1$ e outros $|m_i| < 1$; neste caso x^* é um ponto de sela.

As conclusões são válidas ainda no caso em que houverem multiplicadores característicos repetidos .

Logo, tanto no caso contínuo quanto no caso discreto, se o ponto de equilíbrio, ou ponto fixo, for hiperbólico, obtém-se conclusões sobre a estabilidade na vizinhança do ponto de equilíbrio (ou ponto fixo), partir dos autovalores (ou multiplicadores característicos) da matriz Jacobiana da linearização, avaliada em dito ponto. Assim sendo, é possível aplicar resultados da bem estabelecida teoria de sistemas lineares para caracterizar os pontos de equilíbrio de um sistema não linear, e obter resultados qualitativos a respeito da topologia (forma do fluxo) de um sistema não linear.

Uma aplicação particularmente interessante, por exemplo, é a caracterização de um ponto de equilíbrio num sistema de grande porte (que depende de muitas variáveis). Se a matriz Jacobiana é de dimensão grande, dificulta-se o cálculo rápido dos autovalores para determinar se o ponto de equilíbrio (ou ponto fixo) é estável. Pode-se então utilizar a equação de Lyapunov, como estabelece-se nos teoremas seguintes. Estes teoremas permitem evitar o cálculo explícito dos autovalores (ou multiplicadores característicos).

Teorema 1.10. Equação de Lyapunov para sistemas contínuos.

Uma condição necessária e suficiente para que o ponto de equilíbrio $\delta x = 0$ *do sistema linearizado (1.28) seja assintoticamente estável é que, dada uma matriz definida positiva simétrica real* Q*, exista uma matriz definida positiva simétrica real* R *tal que*

$$Df(x_{eq})' R + R\, Df(x_{eq}) = -Q\,, \tag{1.44}$$

onde o símbolo ' denota a transposta da matriz.

Teorema 1.11. Equação de Lyapunov para sistemas discretos.

Seja a linearização do sistema discreto definida pela equação (1.41) , onde $DP(x^*)$ *é uma Jacobiana n x n constante não singular. Uma condição necessária e suficiente para que o ponto fixo* $\delta x^* = 0$ *seja assintoticamente estável é que, dada uma matriz definida positiva simétrica real* Q*, exista uma matriz definida positiva simétrica real* R *tal que*

$$DP(x^*)'\, R\, DP(x^*) - R = -Q. \tag{1.45}$$

1.5 Domínios de atração e conjuntos limites

Num sistema dinâmico não linear, é possível encontrar uma grande diversidade de comportamentos. Numa abordagem qualitativa, é de interesse caracterizar o tipo de comportamento além do transitório, para $t \to \pm\infty$. A topologia da trajetória ou órbita permite classificar o comportamento como o de um ponto de equilíbrio, ciclo limite, pseudoaleatório, etc. O lugar geométrico da trajetória para $t \to \pm\infty$ e diferentes condições iniciais corresponde ao conceito de conjunto limite, como será estabelecido mais precisamente. Mas, dentro da riqueza de posibilidades existentes em sistemas não lineares, é possível que existam vários conjuntos limites, não necessariamente do mesmo tipo, dentro do espaço de estado de um mesmo sistema e para um conjunto de parâmetros dado.

Por exemplo, no caso de uma rede neural (modelo de Hopfield), utilizada para o reconhecimento de padrões tais como caracteres, pode-se observar esta diversidade de comportamentos. Cada caracter existente na " memória" da rede é, na verdade, um ponto de equilíbrio, ao qual converge a órbita partindo da condição inicial (o caracter a ser reconhecido). Como a " memória" guarda um conjunto de caracteres, existe um conjunto de vários pontos de equilíbrio (os caracteres possíveis) e a órbita converge a um deles dependendo da condição inicial. A qual caracter converge a órbita? Depende da condição inicial.

Outro exemplo mais próximo ao cotidiano é uma bolinha de gude numa superficie irregular, tal como a areia duma praia. Em que buraco estaciona-se finalmente a bolinha.? Assumindo velocidade inicial igual a zero, pode-se imaginar que cada buraco tem uma "bacia" de atração tal que para qualquer posição inicial dentro da bacia, a trajetória converge para esse buraco em particular.

Mas os pontos de equilíbrio dos exemplos anteriores não são a única possibilidade. No caso da rede neural, para algum conjunto de ganhos das conexões entre neurônios, a órbita pode oscilar entre dois ou mais caracteres, por exemplo: $a \to b \to c \to a \to b \to c \ \ldots$, ou simplesmente ficar vagueando sem convergir para nenhum deles, enquanto que para uma outra condição inicial, a trajetória converge para um ponto estável.

O tipo de conjunto limite caracteriza qualitativamente o tipo de comportamento determinístico, que nos exemplos anteriores pode ser classificado como ponto de equilíbrio, comportamento periódico ou comportamento pseudo-aleatório. Chamamos este último de "pseudo"- aleatório porque o comportamento é aparentemente aleatório, mas obedece a regras determinísticas.

Como observamos nos exemplos, para um conjunto dado de parâmetros, cada

conjunto limite tem o seu própio "domínio de atração" ou "bacia". As definições de *conjunto invariante*, *conjunto limite* e *domínio de atração* (Arrowsmith e Place, 1990) serão estabelecidas a seguir.

Definição 1.41. Conjunto invariante sob um difeomorfismo f .

Seja M uma superfície diferenciável. Diz-se que um conjunto $\Lambda \subseteq M$ é ***invariante*** *sob o difeomorfismo f se $f^m(x) \in \Lambda$ para cada $x \in \Lambda$ e $\forall\, m \in Z$. A invariância de Λ sob f é denotada por*

$$f^m(\Lambda) \subseteq \Lambda \qquad \forall\, m \in Z\ . \tag{1.46}$$

Definição 1.42. Conjunto invariante sob um fluxo ϕ.

Seja M uma superfície diferenciável. Um conjunto $\Lambda \subseteq M$ é dito ***invariante*** *sob o fluxo ϕ se $\phi_t(x) \in \Lambda$ para cada $x \in \Lambda$ e $\forall\, t \in IR$.* A invariância de Λ sob ϕ é denotada por

$$\phi_t(\Lambda) \subseteq \Lambda \qquad \forall\, t \in IR. \tag{1.47}$$

Definição 1.43. Ponto limite de um difeomorfismo f .

Diz-se que um ponto $y \in M$ é um ***ponto limite*** *- α da órbita de f através de x se existe uma seqüência de inteiros m_i, com $m_i \to -\infty$, tal que*

$$\lim_{i \to \infty} f^{m_i}(x) = y. \tag{1.48}$$

O ponto $y \in M$ é dito ***ponto limite*** *- ω da órbita de f através de x se existe uma seqüência de inteiros m_i, com $m_i \to +\infty$, tal que (1.48) é satisfeita.*

Definição 1.44. Ponto limite de um fluxo ϕ.

Um ponto $y \in M$ é dito um ***ponto limite*** *- α da trajetória de ϕ através de x se existe pelo menos uma seqüência $t_i \to -\infty$ tal que*

$$\lim_{i \to \infty} \phi_{t_i}(x) = y. \tag{1.49}$$

Se existir uma seqüência $t_i \to +\infty$ tal que (1.49) seja válida, diz-se que y é um

ponto limite - *ω da trajetória de ϕ através de x.*

Definição 1.45. Conjunto limite.

Define-se como ***conjunto limite*** *-α de x, ao conjunto de todos os pontos limites-α de x, denotado por $L_\alpha(x)$. O* ***conjunto limite*** *- ω de x é definido como o conjunto de todos os pontos limites - ω de x, e é denotado por $L_\omega(x)$.*

Notamos que x é o ponto inicial a partir do qual evolui a trajetória ou órbita, em tempo direto ou reverso. O conjunto limite - ω é conhecido também meramente como *conjunto limite*, denotado por $L(x)$.

Definição 1.46. Conjunto limite atrator. (Parker e Chua, 1989).

Diz-se que o conjunto limite é ***atrator*** *se existe uma vizinhança aberta U de L tal que $L(x) = L \quad \forall x \in U$.*

O conjunto limite atrator é conhecido também como **atrator**. Como existe ao menos uma vizinhança U de condições iniciais a partir das quais a trajetória ou órbita converge ao atrator, pode-se definir o *domínio de atração*, como o conjunto de condições iniciais tais que a trajetória ou órbita converge ao atrator para $t \to \infty$, ou mais formalmente como segue.

Definição 1.47. Domínio ou bacia de atração. (Parker e Chua, 1989).

Define-se o ***domínio ou bacia de atração****, denotado por $B(L)$, como a união de todos os U_i de L tais que $L(x) = L \quad \forall x \in U_i$.*

1.6 Transformação de Poincaré

Nas seções anteriores, as transformações pontuais e os fluxos têm sido considerados separadamente. Uma questão importante é: dada uma transformação pontual, existe um fluxo associado a ela? Com as mesmas propriedades? E a pergunta inversa: Dado um fluxo, existe uma transformação pontual associada que preserve as propriedades do fluxo? Ou, sintetizando ambas, que relação existe entre fluxos e transformações pontuais?

A resposta tem consequências tanto teóricas quanto práticas. Se é possível obter uma recorrência a partir de um fluxo, diminui-se drasticamente o volume de dados que é necessário calcular e armazenar (p. ex., a solução a partir de uma determinada condição inicial). A pesquisa de soluções periódicas e subharmônicas reduz-se à verificação de existência de soluções de uma equação algébrica do tipo $x^* = P^n(x^*)$, onde P é a transformaçao pontual, n é a ordem da subharmônica procurada e P^n é a transformação aplicada n vezes sobre ela mesma. E, finalmente, o tipo de solução pode ser facilmente identificado.

A seguir, define-se a Transformação de Poincaré, que permite, em muitos casos, obter uma recorrência a partir de um fluxo.

Definição 1.48. Seção global transversa. (Arrowsmith e Place, 1990).

Seja ϕ um fluxo numa variedade diferenciável M, originado por um campo vetorial f, e assuma-se que Σ é uma sub-variedade de co-dimensão um de M (isto é, se M tem dimensão n, Σ tem dimensão n - 1), tal que :

(i) cada trajetória de ϕ encontra Σ para tempos positivos e negativos arbitrariamente grandes ;

(ii) $\forall\ x \in \Sigma$, f(x) não é tangente a Σ.

*Então diz-se que Σ é uma **seção global transversa** do fluxo.*

Definição 1.49. Transformação de Poincaré. (Arrowsmith e Place, 1990).

*Seja $y \in \Sigma$ e $\tau(y)$ o menor tempo positivo para o qual $\phi_{\tau(y)} \in \Sigma$, então a **Transformação de Poincaré do primeiro retorno** é definida por*

$$P(y) = \phi_{\tau(y)}(y), \qquad y \in \Sigma. \tag{1.50}$$

A Fig. 1.7 ilustra a forma de obter a transformação, assumindo, por exemplo, que Σ é um plano e M é o espaço euclideano IR^3.

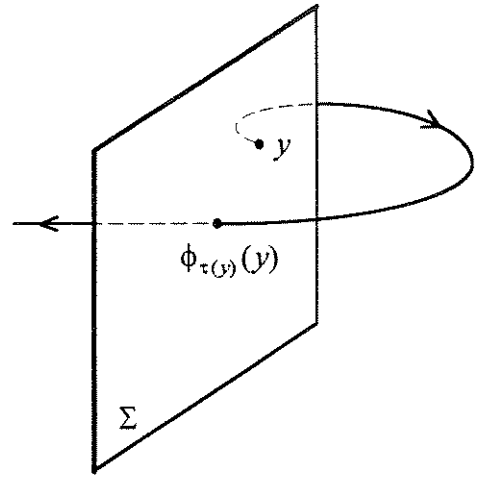


Fig. 1.7. Transformação de Poincaré do primeiro retorno.

Parker e Chua (1989) indicam uma definição mais prática. Se M for o espaço euclideano IR^n, *e* Σ for um hiperplano de codimensão um, então Σ divide IR^n em dois semiespaços, que chamaremos de Σ^+ *e* Σ^-. Escolhendo Σ de forma tal que Σ seja uma seção global transversa, então a trajetória passa repetidamente através de Σ, desde Σ^- a Σ^+ ou desde Σ^+ a Σ^-. A seqüência de pontos gerada pela passagem da trajetória por Σ no percurso de Σ^- a Σ^+ define um mapeamento, enquanto que a seqüência de pontos de passagem da trajetória desde Σ^+ e Σ^- define um outro. Então, pode-se definir a transformação de Poincaré de três formas diferentes.

Definindo

$$\Sigma^+ := \left\{x : \langle h,\, x - x_\Sigma \rangle > 0\right\} \tag{1.51}$$

e

$$\Sigma^- := \left\{x : \langle h,\, x - x_\Sigma \rangle < 0\right\}, \tag{1.52}$$

onde $h \in IR^n$ é um vetor normal a Σ, $x_\Sigma \in IR^n$ é algum ponto no hiperplano, e $\langle u\,, v\rangle$ é o produto interno de u e v, então os três mapeamentos diferentes são definidos por:

(i) $P_+ : \Sigma \to \Sigma$. $P_+(x)$ é o ponto onde $\phi_t(x)$ passa por Σ na direção de Σ^- para Σ^+ (isto é, $\langle h, f(\phi_t(x))\rangle > 0$) para $t > 0$.

(ii) $P_- : \Sigma \to \Sigma$. $P_-(x)$ é o ponto onde $\phi_t(x)$ passa pela primeira vez por Σ em direção de Σ^+para Σ^- (isto é, $\langle h, f(\phi_t(x))\rangle < 0$) para $t > 0$.

(iii) $P_{\pm}:\Sigma \to \Sigma$. $P_{\pm}(x)$ é o ponto onde $\phi_t(x)$ passa pela primeira vez por Σ em qualquer direção para $t > 0$.

P_+ e P_- são chamadas *transformações de Poincaré de um lado*, enquanto que $P_{\pm}$ é chamada *transformação de Poincaré de dois lados.* A definição de $P_{\pm}$ é a mesma da definição 1.50 (transformação de Poincaré do primeiro retorno) para uma escolha particular de M e Σ, isto é, M é o espaço IR^n e Σ é um hiperplano de dimensão n-1 .

Na Fig. 1.8., P_- é definida pela seqüência $\{x_1, x_3, x_5, \ldots\}$, P_+ é definida por $\{x_2, x_4, \ldots\}$ e $P_{\pm}$ é definida por $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots\}$, assumindo que h aponta na direção de Σ_- .

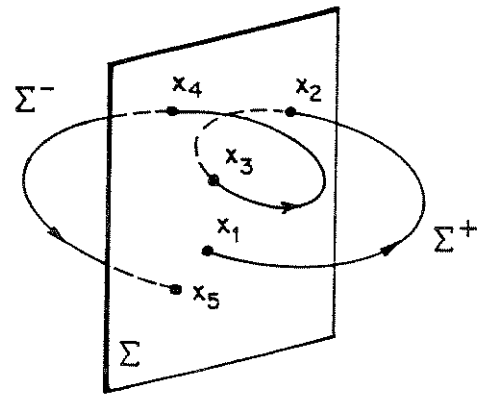


Fig. 1.8. Pontos de interseção com o plano Σ . (De Parker e Chua , 1989).

Nem sempre é possível definir uma seção global, e portanto não pode-se afirmar que todo fluxo corresponde com uma transformação pontual através de uma transformação de Poincaré. Mas é possível provar que toda transformação pontual G é a transformação de Poincaré de algum fluxo, chamado *suspensão* de G (Arrowsmith e Place, 1990). Isto significa que qualquer resultado provado para uma transformação pontual é válido para fluxos numa dimensão maior (Smale, 1967; Arrowsmith e Place, 1990). Como conseqüência, os conjuntos limites da transformação de Poincaré correspondem a conjuntos limites da suspensão (Parker e Chua, 1989).

A tabela 1.1 indica o tipo de conjunto limite atrator, para o fluxo, e o correspondente tipo de conjunto limite da transformação de Poincaré, para cada tipo de solução.

Solução em regime	**Conjunto limite atrator**	
	Fluxo (suspensão)	**Transformação de Poincaré**
Ponto de equilíbrio estável	ponto	
Periódica, de período 1	difeomórfico a um círculo	1 ponto
Subharmônica, de período n	difeomórfico a um círculo	n pontos
Quase-periódica, do tipo Bi-periódica	toróide	uma ou mais curvas fechadas
Quase-periódica, do tipo k-periódica	k-toróide	(k-1) - toróide

Tabela 1.1 Conjuntos limites da suspensão da transformação de Poincaré, para cada tipo de solução.

1.7 Conclusões

Neste capítulo foi revista suscintamente a terminologia utilizada em sistemas dinâmicos, bem como algumas ferramentas básicas para a análise de estabilidade tanto de sistemas contínuos quanto de sistemas discretos.

Sempre que foi possível, consideramos os modelos e técnicas mais gerais. Assim sendo, incluimos o Segundo Método de Lyapunov para sistemas não autônomos e chamanos a atenção para o fato de que o Plano de Poincaré comumente utilizado para obter transformações pontuais é um caso particular da seção de Poincaré, a qual em geral pode ser uma superfície diferenciável de qualquer forma. O objetivo é permitir a máxima flexibilidade para poder utilizar as técnicas no maior número de casos.

A partir dos conceitos estabelecidos neste capítulo podem ser utilizadas técnicas concretas para o estudo da estabilidade e para uma análise qualitativa e quantitativa dos diferentes tipos de comportamento. Algumas destas técnicas (Transformação de Poincaré, Segundo Método de Lyapunov, estudo de estabilidade na vizinhança dos pontos de equilíbrio), serão utilizadas nos próximos capítulos. Com estes conceitos e métodos abordaremos o estudo de bifurcações e comportamento caótico, os quais serão definidos no capítulo seguinte.

2

Bifurcações e comportamento caótico

2.1 Introdução

A temática desenvolvida no capítulo 1 pode-se resumir numa pergunta: O que acontece com a trajetória de um sistema se o ponto inicial é uma perturbação de um ponto de equilíbrio? A resposta a esta pergunta permite caracterizar qualitativamente o sistema através da classificação dos pontos de equilíbrio ou pontos fixos. A perturbação considerada foi uma perturbação *no espaço de estado*, e como tal não afetava as características essenciais do sistema; isto é, qualitativamente o sistema permanece sendo o mesmo, independentemente de qual tenha sido a perturbação definindo o estado inicial.

Neste segundo capítulo, a primeira pergunta básica é: O qué acontece com as características essenciais do sistema ante uma pequena perturbação da sua estrutura? Para alterar a estrutura, isto é, o campo vetorial, muda-se os parâmetros da equação. Associando os valores possíveis dos parâmetros a eixos de um espaço, que chamaremos de *espaço de parâmetros* do sistema, a cada conjunto de valores possíveis dos parâmetros corresponde um ponto no espaço de parâmetros. A primeira pergunta para este capítulo pode ser, então, reformulada como: Existem mudanças qualitativas no espaço de estado ante uma perturbação *no espaço de parâmetros* do sistema?

A resposta a esta pergunta relaciona-se com o conceito de *estabilidade estrutural* e *bifurcações*, que serão definidos mais adiante.

O segundo tema incluído neste capítulo, procura responder a pergunta seguinte: O que acontece quando num domínio de atração, o atrator não é um ponto, nem um ciclo limite, nem é difeomórfico a alguma figura geométrica simples, e ainda a trajetória

passeia pelo espaço de estado em forma caprichosa e imprevisível, apesar de ter sido gerada por um sistema determinístico? É possível encontrar, neste caso, características que permitam analisar o sistema? Este segundo tema, complexo e cativante como todo mistério sobre o qual conhecem-se apenas alguns indícios, tem chegado a despertar grande interesse na atualidade, principalmente porque já existem algumas formas de abordá-lo.

Para o engenheiro, a caracterização no espaço de parâmetros é essencial para o projeto de um sistema não linear. Em geral, o sistema deve-se manter dentro da região estável mesmo que existam perturbações estruturais. Quais são as regiões de comportamento indesejável , e de que forma o sistema transita de uma região a outra?

Este capítulo complementa o primeiro, na caracterização dos diferentes tipos de comportamento: enquanto no primeiro analisou-se os comportamentos estáveis, periódicos ou subharmônicos, no presente capítulo focaliza-se a transição entre estas regiões, bem como o comportanento caótico.

2.2 Estabilidade estrutural e bifurcações

Previamente à definição de estabilidade estrutural , definiremos o que é uma perturbação do campo vetorial e o que entende-se por "mudanças qualitativas" na topologia do espaço de estado. Estas definições baseiam-se em (Thompson e Stewart, 1986; Badan Palhares e Mahla, 1992b).

Definição 2.1. Perturbação do campo vetorial.

Sejam o campo vetorial f(x), $f: IR^n \to IR^n$, um ponto $x \in IR^n$, e um espaço de funções. Então diz-se que um outro campo vetorial g(x), $g: IR^n \to IR^n$, $x \in IR^n$, do mesmo espaço de funções , é uma ***perturbação de f(x) de tamanho*** ε, *se*

$$\|f(x)-g(x)\| < \varepsilon \quad \forall x . \tag{2.1}$$

A Fig. 2.1 ilustra a definição.

Definição 2.2. Equivalência Topológica.

Dois campos vetoriais f(x) e g(x) são ***topologicamente equivalentes*** *se existir um homeomorfismo que transforme o fluxo de f(x) no fluxo de g(x).*

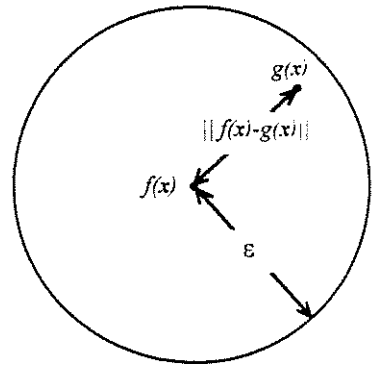


Fig. 2.1. *g(x)* é uma perturbação de *f(x)*, de tamanho ε .

Definição 2.3. Estabilidade estrutural.

Diz-se que um sistema é **estruturalmente estável** *se, para qualquer perturbação de tamanho* ε *do campo vetorial f(x), com* ε *suficientemente pequeno, o fluxo gerado pelo campo vetorial perturbado g(x) é topologicamente equivalente ao fluxo gerado pelo campo vetorial não perturbado f(x).*

Das definicões 2.2. e 2.3., um sistema é estruturalmente estável se campos vetoriais suficientemente próximos geram fluxos topologicamente equivalentes. Diremos que o sistema é *estruturalmente instável* se ele não é estruturalmente estável.

Definição 2.4. Ponto de bifurcação. (Thompson e Stewart , 1986)

Chama-se ***ponto de bifurcação*** *a um ponto do espaço de parâmetros no qual o campo vetorial é estruturalmente instável .*

Por extensão da definição de ponto de bifurcação, entende-se por *bifurcação* o fenômeno associado a um ponto de bifurcação, isto é, a mudança qualitativa no comportamento do sistema que acontece num ponto de bifurcação. Esta "mudança qualitativa", termo ambíguo freqüentemente encontrado na literatura, corresponde com o conceito de mudança na topologia do fluxo ante uma perturbação do campo vetorial.

Ilustraremos estes conceitos analisando com mais detalhe (Badan Palhares e Mahla, 1992) um exemplo -Bifurcação Fold- proporcionado em (Thompson e Stewart, 1986). Este tipo de bifurcação acontece ao mudar o parâmetro $\mu \in IR$ na equação

$$\dot{x} = \mu - x^2 . \tag{2.2}$$

Pontos de equilíbrio

Com $\dot{x} = 0$ em (2.2), temos para x_e

$$x_e^2 = \mu$$

donde

$$x_{e1} = +\sqrt{\mu}$$

$$x_{e2} = -\sqrt{\mu} .$$

Estabilidade dos pontos de equilíbrio

Para determinarmos a estabilidade dos pontos x_{e1} e x_{e2} analisamos os autovalores do campo linearizado na vizinhança desses pontos de equilíbrio.

Então, linearizando (2.2) teremos,

$$\dot{\delta x} = -2x_e \delta x ,$$

donde

$$\lambda_1 = -2x_{e1} = -2\sqrt{\mu}$$

é o autovalor associado a x_{e1} e

$$\lambda_2 = -2x_{e2} = 2\sqrt{\mu}$$

é o autovalor associado a x_{e2} .

Podemos distinguir três casos para diferentes valores do parâmetro μ :

i) $\mu < 0$

$x_e = \pm\sqrt{\mu} \in \mathbb{C}$ e portanto x_{e1} , x_{e2} não pertencem ao espaço de estado (IR). Então não existem pontos de equilíbrio.

ii) $\mu = 0$

$$x_{e1} = x_{e2} = 0 \; ; \; \lambda_1 = \lambda_2 = 0 .$$

Existe um único ponto fixo de equilíbrio marginalmente estável na origem de *IR*. A equação de estado passa a ser

$$\dot{x} = -x^2 ,$$

donde para $x_0 > 0$ $x(t)$ diminui e converge para $x_e = 0$; para $x_0 = 0$ $x(t) = 0$, mas basta uma pequena perturbação negativa para que $x(t)$ diminua indefinidamente; para $x_0 < 0$ $x(t)$ diminui indefinidamente.

iii) $\mu > 0$

$$x_{e1} > 0 , \; x_{e2} < 0 , \; \lambda_1 < 0 , \; \lambda_2 > 0 .$$

Existem dois pontos de equilíbrio: x_{e1} estável e x_{e2} instável.

Então existe uma bifurcação no espaço de parâmetros para $\mu = 0$, ponto no qual muda a topologia determinada pelos pontos de equilíbrio.

A bifurcação Fold pode ser melhor visualizada através do plano de fase da equação de estado de dimensão 2, descrita na eq. (2.3).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu - x^2 \\ \dot{y} &= -y \end{aligned} \tag{1.86}$$

que por ser desacoplada mantém o mesmo comportamento para a variável x, enquanto que para a variável y existe um ponto de equilíbrio estável $y_e = 0$. O plano de fase para $\mu < 0$, $\mu = 0$ e $\mu < 0$ é mostrado na Fig. 2.2 (Thompson e Stewart, 1986).

Observa-se claramente que para $\mu = 0$ basta uma pequena perturbação estrutural ($\mu = \pm \varepsilon$) para que os fluxos não sejam topologicamente equivalentes.

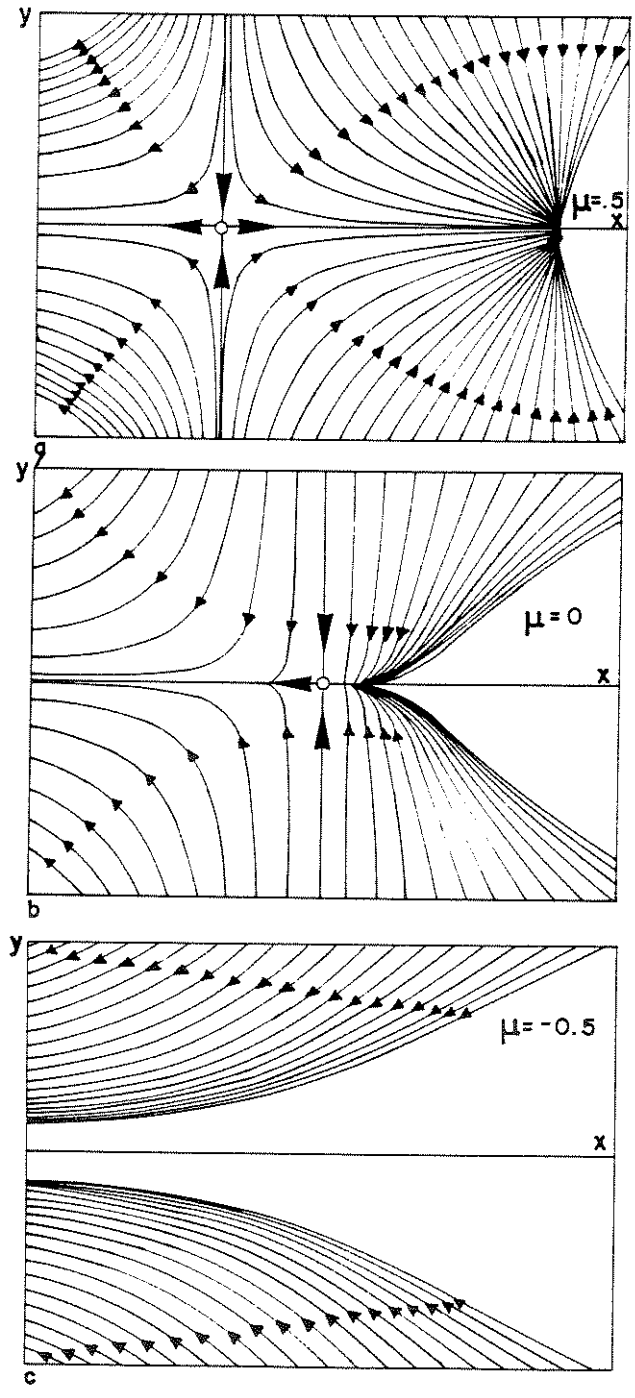


Fig. 2.2. Fluxos para a bifurcação Fold. (De Thompson e Stewart, 1986).

2.3 Comportamento caótico

A idéia de comportamento caótico está associada de "comportamento imprevisível" para um sistema determinístico. Como é possível que um sistema determinístico tenha comportamento "imprevisível"? O que entendemos por "imprevisível" num sistema determinístico?

O comportamento de um sistema dinâmico determinístico é governado, como vimos no primeiro capítulo, por uma equação diferencial ou por uma equação de diferenças, para as quais é válido o Teorema de Existência e Unicidade. Segundo este teorema, a partir de uma condição inicial pode-se ter uma única trajetória. Como é possível, então, que esta trajetória seja "imprevisível"?

O paradoxo é criado a partir da suposição seguinte: Vamos assumir que existe não uma única condição inicial, mas duas condições iniciais diferentes infinitamente próximas. Estas condições são, portanto, indistinguíveis desde um ponto de vista prático.

Mas continuando com a suposição inicial de que elas são diferentes, mesmo que muito próximas, se houver pelo menos uma direção característica definida por um autovetor cujo autovalor associado tiver parte real positiva, para uma linearização numa vizinhança ε da condição inicial, então sabemos que nessa direção as trajetórias separam-se. E se esta tendência a se separarem continuar através do espaço todo, para um tempo arbitrariamente grande já não é possível especificar onde as trajetórias estão, dentro de uma precisão dada.

Mesmo existindo outras direções nas quais as trajetórias tendem a se aproximarem, a imprecisão em relação a pelo menos uma direção característica continua a existir. Este tipo de comportamento é o que é definido como *sensibilidade às condições iniciais*. Como a sensibilidade às condições iniciais é quantificável através dos autovalores caraterísticos, a definição de *caos* como *sensibilidade às condições iniciais* é bastante útil e também é a mais comum na literatura (Eckmann e Ruelle, 1985).

O que acontece a partir da evolução de uma esfera infinitesimal, em cuja superfície assumimos que há um conjunto de condições iniciais? Num sistema linear, com direções características fixas em relação à evolução da trajetória e autovalores válidos também para o espaço todo, a esfera evolui para uma elipsóide. Mas no caso de um sistema não linear, se analisarmos o comportamento do sistema linearizado em diferentes pontos da trajetória, chegamos à conclusão de que em cada ponto desta, os autovalores e os autovetores da Jacobiana mudam. Logo, em lugar de uma elipsóide é possível obter uma superfície de forma irregular, produto de múltiplas expansões, contrações e torsões.

Smale (1967) provou que uma transformação idealizada, a *ferradura de Smale*, que possui as características de expansão, contração e torsão das trajetórias, é sensível às condições iniciais. Ele determinou condições suficientes para que um sistema tenha o mesmo comportamento da ferradura, e seja portanto sensível às condições iniciais. Uma discussão acessível a não especialistas pode ser encontrada em (Mees e Sparrow, 1987).

O comportamento caótico tem sido quantificado através de diferentes medidas, inspiradas em conceitos da física estatística e da chamada *teoria ergódica*. Estas medidas baseiam-se no fato de que o comportamento dos conjuntos limites atratores segue padrões característicos para cada sistema dinâmico e determinado conjunto de parâmetros, sendo comuns as características qualitativas destas medidas para os atratores de sistemas caóticos. Entre estas características comuns, podemos citar a sensibilidade às condições iniciais e o fato dos atratores estranhos serem conjuntos do tipo Cantor com propriedades de autosimilaridade, isto é, existem espaços vazios que nunca são atravessados pelas trajetórias e as características topológicas em nível macroscópico repetem-se em escala cada vez menor, *ad infinitum*, numa estrutura que tem sido chamada de *fractal*.

As subseções seguintes descrevem as medidas ergódicas mais conhecidas, e foram sintetizadas de (Mahla, 1991), onde estas foram analisadas com maior detalhe, estabelecendo as relações entre as diferentes definições.

2.3.1 Expoentes de Lyapunov
(Mahla, 1991)

Definição 2.5. Expoentes de Lyapunov. (Parker e Chua, 1987).

Sejam $\{m_i\}_{i=1}^{n}$ *os autovalores da matriz de transição de estado* $\Phi_t(x_0)$. *Os expoentes de Lyapunov são definidos por*

$$\lambda_i \equiv \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln|m_i(t)|. \tag{2.4}$$

Os expoentes de Lyapunov são úteis para determinar a estabilidade de qualquer tipo de solução em regime permanente, ainda as de tipo quase-periódico ou caótico. Um expoente de Lyapunov positivo indica que existe uma direção característica na qual, em média, as trajetórias tendem a se separar. Pelo contrário, um expoente negativo indica que existe uma direção característica na qual, em média, as trajetórias aproximam-se. Num conjunto limite atrator, a contração deve ser maior do que a expansão, de modo que

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i < 0 . \tag{2.5}$$

Como a dependência das condições iniciais está associada a um fluxo expansivo, a característica de um atrator caótico é a existência de pelo menos um expoente de Lyapunov positivo. Então, é possível definir um sistema caótico baseando-se no valor dos expoentes de Lyapunov.

Definição 2.6. Sistema caótico.

Sistema caótico é aquele que possui pelo menos um expoente de Lyapunov positivo.

Esta definição expressa a sensibilidade às condições iniciais, e corresponde ao uso dado atualmente à palavra caos (Eckmann e Ruelle, 1985). Uma definição diferente é a proposta por Li e Yorke (1975), a qual considera, além da sensibilidade às condições iniciais, o fato de que o conjunto limite é um atrator. É possível, também, classificar os diferentes tipos de comportamento em regime permanente, baseando-se nos expoentes de Lyapunov. A tabela 2.1 (Parker e Chua, 1987) resume os expoentes de Lyapunov que caracterizam cada tipo de comportamento em regime permanente.

Comportamento em regime permanente	**Expoentes de Lyapunov**
Ponto de equilíbrio	$0 > \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$
Periódico ou subharmônico	$\lambda_1 = 0$ $0 > \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$
Bi-periódico	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $0 > \lambda_3 \geq \cdots \geq \lambda_n$
k-periódico	$\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$ $0 > \lambda_{k+1} \geq \cdots \geq \lambda_n$
Caótico	*Pelo menos um* $\lambda_j > 0$ $\sum_i \lambda_i < 0$

Tabela 2.1. Expoentes de Lyapunov para diferentes tipos de comportamento em regime permanente.

Definimos caos como sensibilidade às condições iniciais, e portanto a existência de comportamento caótico pode ser estabelecida se o maior expoente de Lyapunov for positivo. A seguir, analisaremos o significado da definição, ilustrado com alguns exemplos. Como a sensibilidade às condições iniciais define o comportamento caótico, importa analisar a separação, no tempo, de dois pontos iniciais infinitamente próximos. Esta idéia será ilustrada através do exemplo seguinte (Eckmann e Ruelle, 1985).

Seja a equação escalar discreta

$$x(n+1) = f(x(n)), \qquad x(i) \in IR, \tag{2.6}$$

descrevendo a dinâmica de um sistema de dimensão um, onde n é o tempo discreto.

A separação de dois pontos iniciais $x(0)$ e $x(0)'$ após um tempo N é

$$x(N) - x(N') = f^N(x(0)) - f^N(x(0)'), \tag{2.7}$$

como ilustra a Fig. 2.3.

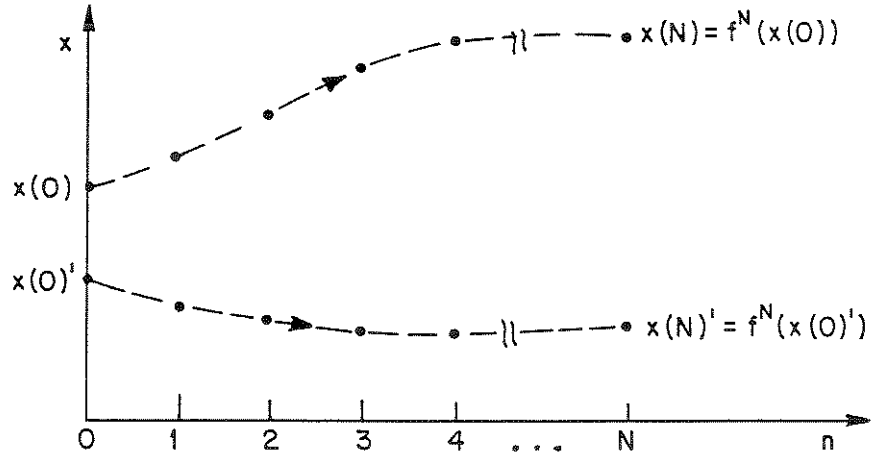


Fig. 2.3. Evolução de dois pontos inicialmente próximos. (De Mahla, 1991).

Então, como ilustra-se na Fig. 2.4,

$$\frac{f^N(x(0)') - f^N(x(0))}{x(0)' - x(0)} \cong \frac{d}{dx} f^N(x(0)) \tag{2.8}$$

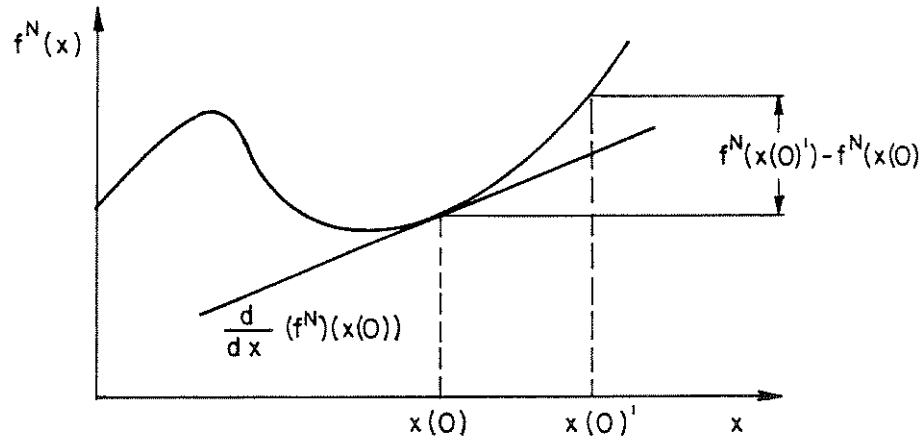


Fig. 2.4. Aproximação para $f^N(x(0)') - f^N(x(0))$. (De Mahla, 1991).

Donde

$$f^N(x(0)) - f^N(x(0)') \cong (x(0) - x(0')\frac{d}{dx} f^N(x(0)), \tag{2.9}$$

e substituindo em (2.7),

$$x(N) - x(N)' \cong (x(0) - x(0')\frac{d}{dx} f^N(x(0)) \tag{2.10}$$

onde $f^N(x) = f(f(\ldots f(x)\ldots))$, N vezes.

Pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx}(f^N)(x) = \frac{d}{dx}f(f(\ldots f(x)\ldots)) \tag{2.11}$$
$$= \left.\frac{df}{dx}\right|_{f^{N-1}(x)} \cdot \left.\frac{df}{dx}\right|_{f^{N-2}(x)} \cdot \cdots \cdot \left.\frac{df}{dx}\right|_{x}.$$

Para $x = x(0)$,

$$\frac{d}{dx}(f^N)(x(0)) = \left.\frac{d}{dx}f\right|_{f^{N-1}(x(0))} \cdot \left.\frac{d}{dx}f\right|_{f^{N-2}(x(0))} \cdot \cdots \cdot \left.\frac{d}{dx}f\right|_{x(0)} \tag{2.12}$$
$$= \left.\frac{d}{dx}f\right|_{x(N-1)} \cdot \left.\frac{d}{dx}f\right|_{x(N-2)} \cdot \cdots \cdot \left.\frac{d}{dx}f\right|_{x(0)}.$$

e portanto

$$\frac{d}{dx}(f^N)(x(0)) = \frac{d}{dx}f(x(N-1)) \cdot \frac{d}{dx}f(x(N-2)) \cdot \cdots \cdot \frac{d}{dx}f(x(0)). \tag{2.13}$$

Assumindo que todos os fatores na expressão (2.13) são de tamanho comparável, então é possível supor que df^N/dx cresce (ou decai) exponencialmente com N. Isto é válido também para $x(N)$ - $x(N)'$, como infere-se de (2.10).

Se $x \in IR^m$, $\frac{d}{dx}f$ é substituída pela matriz Jacobiana $D_x f$, onde os elementos da matriz $D_x f$ são definidos por $d_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$.

A razão média de crescimento pode ser definida como

$$\lambda = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \ln \left\| (D_{x(0)} f^N)\delta x(0) \right\|, \tag{2.14}$$

onde $D_{x(0)}f^N$ é o Jacobiano de f com relação a x, avaliado em $x(0)$, e $\delta x(0)$ é o vetor que define a separação inicial. Conseqüentemente, o valor da expansão média depende da direção da perturbação inicial $\delta x(0)$.

No caso contínuo no tempo, similarmente é possível definir

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \left\| (D_{x(0)} f^t) \delta x(0) \right\|, \tag{2.15}$$

onde $D_{x(0)} f^t$ é o Jacobiano de f^t com relação a x, avaliado no instante inicial, e $\delta x(0)$ é o vetor que define a separação inicial.

$D_{x(0)} f^N$ em (2.14) e $D_{x(0)} f^t$ em (2.15) correspondem à matriz de transição de estado $\Phi_t(x(0))$. Se $\delta x(0)$ é um autovetor normalizado $\delta x(0)_i$ da matriz $\Phi_t(x(0))$, então de (2.15)

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \left\| \Phi_t(x(0)) \delta x(0)_i \right\| \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \left\| m_i(t) \delta x(0)_i \right\|, \end{aligned} \tag{2.16}$$

onde $m_i(t)$ são os autovalores de $\Phi_t(x(0))$. Logo

$$\lambda_i \equiv \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln |m_i(t)|, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{2.17}$$

sendo $\{m_i(t)\}_{i=1}^n$ os autovalores da matriz de transição de estado $\Phi_t(x(0))$. Esta é a definição (2.4), onde por convenção

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \lambda_p,$$

onde p é a dimensão do espaço de fase.

Em geral, os expoentes dependem da eleição da condição inicial. Se eles forem os mesmos para qualquer condição inicial na base do atrator, eles são chamados de absolutos (esta propriedade não é comum, mas existem alguns casos em que os expoentes tem sido calculados teoricamente e são absolutos (Frederickson et al, 1983).

É possível assumir que quase qualquer condição inicial na base de um atrator tem os mesmos expoentes de Lyapunov. Esta conjectura é apoiada por simulações numéricas (Farmer et al, 1983). Então os expoentes de Lyapunov podem ser considerados uma propriedade do atrator analisado.

Um dos algoritmos mais conhecidos para o cálculo dos expoentes de Lyapunov positivos a partir de uma série de dados experimentais é o apresentado por

Wolf et al. (1985), que utiliza amostras discretas duma das variáveis de estado. É suficiente calcular o maior expoente para determinar se o atrator é caótico (nesse caso, o maior expoente é positivo).

O algoritmo de Wolf et al. baseia-se na técnica desenvolvida por Bennetin et al. (1980), e Shimada e Nagashima (1979), a qual permite calcular o espetro de Lyapunov a partir de um conjunto de equações diferenciais. Existem, então, técnicas que permitem calcular o maior expoente de Lyapunov a partir de dados experimentais ou a partir do modelo do sistema. Não existem - até agora - técnicas que, de forma geral, permitam calcular analiticamente os expoentes para obter uma expressão em função dos parâmetros do sistema.

2.4 Dimensão dos atratores
(Mahla, 1991; Parker e Chua, 1989; Farmer et al, 1983)

Uma forma de definir a dimensão de um atrator poderia ser a seguinte: o atrator é de dimensão n se, na vizinhança de qualquer ponto, localmente for difeomórfico a um subconjunto aberto de IR^n. Por exemplo, um ponto de equilíbrio é de dimensão zero, um ciclo limite tem dimensão 1 e um toróide-2 tem dimensão dois (Fig. 2.4).

Esta definição, útil para os atratores gerados por movimentos periódicos, quase periódicos, ou que tendem para um ponto de equilíbrio, é inadequada para sistemas que contém atratores do tipo caótico. Os atratores caóticos geralmente possuem uma estrutura que não é simples, que freqüentemente é muito desagregada, e que em geral não é uma superfície.

Existem várias definições de dimensão que permitem caracterizar diferentes propriedades dos atratores caóticos, e em geral de qualquer tipo de atrator. A seguir, definem-se algumas delas: dimensão de capacidade, dimensão de informação, dimensão de correlação, dimensões generalizadas de Renyi e dimensão de Lyapunov.

2.4.1 Dimensão de capacidade

Este conceito é aplicável a conjuntos em espaços métricos, isto é, espaços nos quais é definida uma métrica (distância). Seja o atrator A um subconjunto limitado do espaço IR^p, tal que o volume ocupado por A é V_A. Cobrindo o volume A com cubos de volume V_i e lado ε, para $\varepsilon \to 0$, a soma dos elementos de volume aproxima-se a V_A.

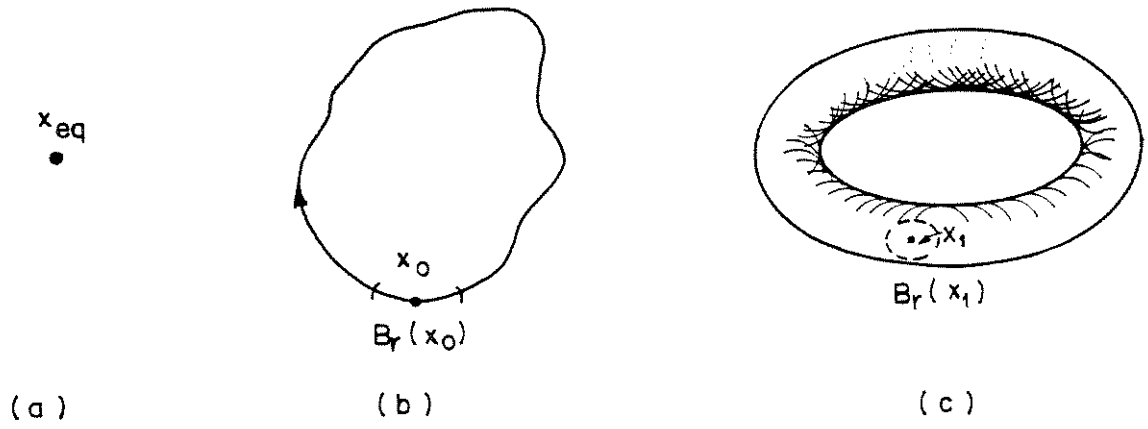


Fig. 2.4. (a) O ponto de equilíbrio, com dimensão zero. (b) O ciclo limite, na vizinhança $B_r(x_0)$ é difeomórfico a um segmento de reta (dimensão 1). (c) O toróide-2, na vizinhança $B_r(x_1)$, é difeomórfico a um subconjunto compacto, aberto, de IR^2 (dimensão 2). (De Mahla, 1991).

Seja $N(\varepsilon)$ o número mínimo de cubos de dimensão D necessários para cobrir o conjunto Λ. Se D for uma dimensão inteira, então $N(\varepsilon)$ é inversamente proporcional a ε^D para ε pequeno. Da relação

$$N(\varepsilon) = \frac{V_A}{V_i} , \tag{2.18}$$

com $V_i = \varepsilon^D$,

$$N(\varepsilon) = \frac{V_A}{\varepsilon^D} ; \tag{2.19}$$

e

$$\ln N(\varepsilon) = \ln V_A + \ln (1/\varepsilon)^D . \tag{2.20}$$

Com $\varepsilon \to 0$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \ln N(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \ln (1/\varepsilon)^D , \tag{2.21}$$

donde

$$D_{cap} \equiv D = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} . \tag{2.22}$$

A expressão (2.22) corresponde à definição de dimensão de capacidade, originalmente estabelecida por A.N. Kolmogorov (1958). Com a definição acima, as superfícies de dimensão p, com p inteiro, têm dimensão $D_{cap} = p$. A definição, quando aplicada em atratores que não são superfícies, dá como resultado uma dimensão de capacidade que usualmente é não inteira. A dimensão de capacidade é um conceito métrico somente, e não descreve o comportamento do sistema dinâmico no tempo. As definições seguintes consideram também a evolução do sistema.

2.4.2. Dimensão de informação

A dimensão de informação, originalmente definida por J. Balatoni e A. Renyi (1959), é uma generalização da dimensão de capacidade, que considera a probabilidade relativa de que uma trajetória visite cada um dos cubos usados para cobrir o volume V_A.

A dimensão de informação é definida por

$$D_I \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{S(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} , \tag{2.23}$$

com

$$S(\varepsilon) \equiv \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i \ln(1/P_i) , \tag{2.24}$$

onde P_i é a freqüência relativa com que uma trajetória entra no i-ésimo elemento de volume, $S(\varepsilon)$ é a entropia e $N(\varepsilon)$ representa o número de elementos de volume . No somatório, consideram-se somente os índices i para os quais $P_i \neq 0$. A entropia é uma medida da quantidade de informação necessária para determinar o estado do sistema; representa a quantidade de informação necessária para determinar em qual dos elementos de volume está a trajetória num determinado momento.

2.4.3. Dimensão de correlação

Considere-se agora a probabilidade de que dois pontos quaisquer x_i , x_j fiquem dentro de um mesmo elemento de volume do atrator.

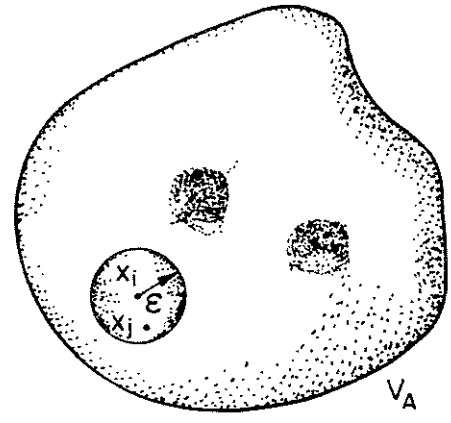


Fig. 2.5. O elemento de volume escolhido é $B_\varepsilon(x_i)$. (De Mahla, 1991).

A probabilidade de que dois pontos quaisquer x_i , x_j estejam contidos dentro de um elemento de volume arbitrário é a probabilidade conjunta $P(x_i, x_j)$. Considerando $x_i \neq x_j$, $P(x_i, x_j)$ é válida como aproximação. Como $P(x_i)$ independe de $P(x_j)$ e vice-versa, $P(x_i, x_j) = P(x_i)P(x_j)$, onde $P(x_i)$ é a probabilidade de que x_i esteja contido no elemento arbitrário e $P(x_j)$ é a probabilidade de que x_j esteja contido no elemento.

Seja $B_\varepsilon(x_i)$ o elemento de volume arbitrário. Então a probabilidade de que x_i , x_j estejam contidos em $B_\varepsilon(x_i)$ é $P(x_i)P(x_j)$. Como $P(x_i) = P(x_j) \equiv P_i$, a probabilidade $P(x_i)P(x_j) = P_i^2$. Ou, expresso de outra forma,

$$P(x_i, x_j \in B_\varepsilon(x_i)) = P_i^2 . \tag{2.25}$$

A probabilidade $C(\varepsilon)$ de que dois pontos quaisquer x_i , x_j estejam em qualquer uma das esferas $B_\varepsilon(x_i)$ usadas para preencher o volume V é (considerando agora todas as esferas),

$$C(\varepsilon) = P(x_i, x_j \in B_\varepsilon(x_1)) + P(x_i, x_j \in B_\varepsilon(x_2)) + \cdots + P(x_i, x_j \in B_\varepsilon(x_{N(\varepsilon)})) , \tag{2.26}$$

$$C(\varepsilon) = P_1^2 + P_2^2 + \cdots + P_{N(\varepsilon)}^2 , \tag{2.27}$$

$$C(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i^2 , \tag{2.28}$$

onde é possível também interpretar $C(\varepsilon)$ como a probabilidade de que dois pontos quaisquer x_i , x_j estejam a uma distância $\|x_i - x_j\| < \varepsilon$.

$C(\varepsilon)$ é a correlação, e uma forma alternativa de defini-la é

$$C(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \left[\frac{n_i}{M}\right]^2 , \tag{2.29}$$

onde M é o número total de pontos, n_i / M é a freqüência relativa (com $\lim_{M\to\infty} (n_i / M) = P_i$) e $\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} n_i^2$ é o número de pares de pontos x_i , x_j tais que $\|x_i - x_j\| < \varepsilon$.

Então

$$C(\varepsilon) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M^2} \{ \textit{número de pares de pontos tais que } \|x_i - x_j\| < \varepsilon \} . \tag{2.30}$$

Mais formalmente,

$$C(\varepsilon) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{M^2} \sum_{i,j} \theta[\varepsilon - \|x_i - x_j\|] , \tag{2.31}$$

onde $\theta(u) = (1 + \textit{sinal}(u))/2$ é a função degrau unitário. Esta é a definição proposta por Grassberger e Procaccia (1983), que é útil para calcular $C(\varepsilon)$ com um número finito de pontos. A expressão (2.31) é equivalente à Eq. (2.30), como ilustra-se na Fig. 2.6.

Com qualquer uma das expressões (2.28), (2.29) ou (2.31) para $C(\varepsilon)$, define-se a dimensão de correlação D_c como

$$D_c \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln C(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} . \tag{2.32}$$

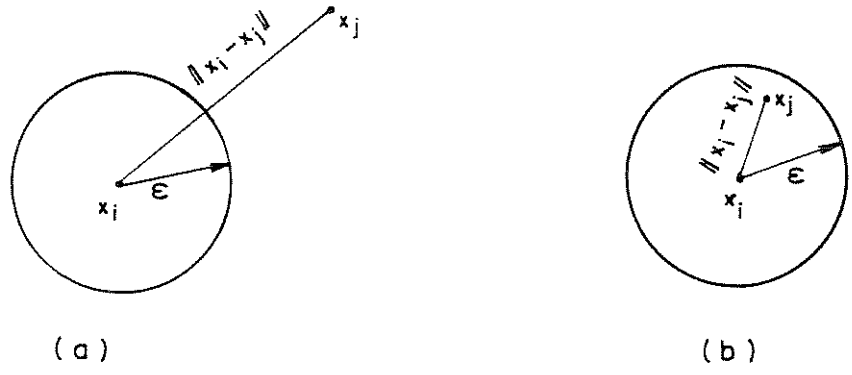


Fig. 2.6. (a) Se x_j está fora da esfera $B_\varepsilon(x_i)$, $\varepsilon - \|x_i - x_j\| < 0$, e $\theta[\varepsilon - \|x_i - x_j\|] = 0$: portanto o par (x_i, x_j) não é contabilizado na soma. (b) Se x_j está dentro da esfera $B_\varepsilon(x_i)$, isto é, se $\|x_i - x_j\| < \varepsilon$, então $\varepsilon - \|x_i - x_j\| > 0$ e $\theta[\varepsilon - \|x_i - x_j\|] = 1$, donde o par (x_i, x_j) é contabilizado na soma dos pontos tais que $\|x_i - x_j\| < \varepsilon$. (De Mahla, 1991).

A dimensão de correlação pode ser calculada diretamente a partir da definição, utilizando pontos obtidos experimentalmente ou gerados por uma simulação do sistema.

É possível provar que $D_c \leq D_I \leq D_{cap}$; uma prova mais simples que as encontradas na literatura é dada em (Mahla, 1991).

2.4.4. Dimensões de Renyi

Os conceitos de dimensão de capacidade, dimensão de informação e dimensão de correlação podem ser generalizados. A. Renyi (1970) definiu originalmente as *dimensões generalizadas* $D(q)$ como

$$D(q) \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{q-1} \frac{\ln \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i^q}{\ln \varepsilon}, \qquad q \in IR, \quad q \neq 1, \tag{2.33a}$$

e

$$D(q) \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i \ln P_i}{\ln \varepsilon} \quad , \quad q = 1; \tag{2.33b}$$

onde

$$P_i = \int_{\substack{i\text{-ésimo} \\ \text{elemento} \\ \text{de volume}}} d\rho(x) \tag{2.34}$$

e ρ é uma medida de probabilidade em um espaço de fase d-dimensional, particionado em elementos de volume ε^d. O somatório considera todos os índices i para os quais $P_i \neq 0$.

Então, com a definição (2.33), para $q = 0$ obtemos

$$D(0) = \lim_{\varepsilon \to 0} - \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} = D_{cap} \, , \tag{2.35}$$

ou seja, $D(0)$ é a dimensão de capacidade.

Com $q = 1$,

$$D(1) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i \ln P_i}{\ln \varepsilon} = D_I \quad , \tag{2.36}$$

e portanto $D(1)$ é a dimensão de informação.

Finalmente, para q = 2,

$$D(2) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i^2}{\ln \varepsilon} = D_c \quad , \tag{2.37}$$

isto é, $D(2)$ corresponde à dimensão de correlação.

Analogamente à desigualdade $D_c \leq D_I \leq D_{cap}$, temos que para as dimensões generalizadas de Renyi

$$D(q') \leq D(q), \quad q' > q \, , \tag{2.38}$$

desigualdade que pode ser considerada como uma limitante superior de $D(q')$ em termos de $D(q)$. Para a limitante inferior,

$$D(q') \geq \frac{q'}{q'-1}\frac{q-1}{q}D(q), \tag{2.39}$$

$q' > q > 1$ ou $0 > q' > q$.

A prova das desigualdades (2.38) e (2.39) é dada por C. Beck (1990). Uma propriedade importante de $D(q)$ é que usualmente ela é uma função suave (Beck, 1990).

2.4.5. Dimensão de Lyapunov

A dimensão de Lyapunov, baseada nos expoentes de Lyapunov, foi definida originalmente por J.L. Kaplan e J.A. Yorke (Frederickson et al, 1983).

Sejam $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ os expoentes de Lyapunov de um sistema dinâmico, e seja j o inteiro maior tal que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_j \geq 0$. Então a dimensão de Lyapunov D é definida por

$$D_L \equiv j + \frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_j}{|\lambda_{j+1}|}. \tag{2.40}$$

A relação da dimensão de Lyapunov com as outras dimensões definidas anteriormente não é clara ainda, e atualmente é objeto de pesquisa. Parker e Chua (1987) apresentam a seguinte interpretação da definição acima.

Dado um hiper cubo C de lado ε, e considerando as mudanças de coordenadas apropriadas, o i-ésimo lado do cubo C, evolui, em média, como $\varepsilon e^{\lambda_i t}$. Considere-se também, um cubo de referência R com todos os seus lados se contraindo à razão $\varepsilon e^{\lambda_{k+1} t}$, onde k é escolhido de forma tal que $\lambda_{k+1} < 0$. O número de cubos R, necessários para preencher o cubo C, no tempo t, é dado por

$$N(t) \equiv \frac{\varepsilon e^{\lambda_1 t}}{\varepsilon e^{\lambda_{k+1} t}} \cdots \frac{\varepsilon e^{\lambda_k t}}{\varepsilon e^{\lambda_{k+1} t}}, \tag{2.41a}$$

$$= e^{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_k - k\lambda_{k+1})t} \tag{2.41b}$$

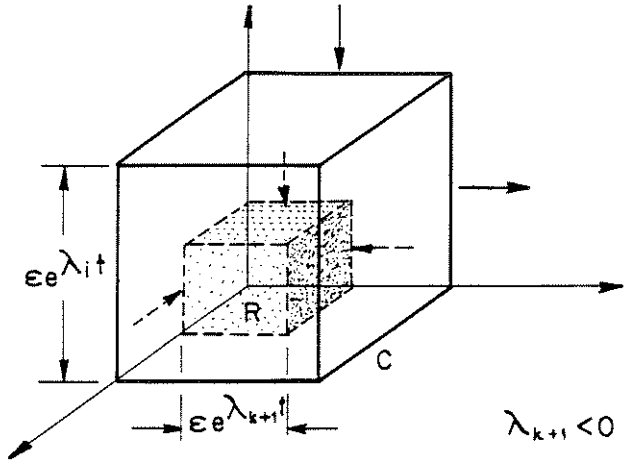


Fig. 2.7. Evolução dos hiper cubos R e C no espaço de fase. (De Mahla, 1991).

onde para $t \to \infty$ os lados de C que crescem com taxas λ_{k+2} , $\cdots$ λ_n , não precisam ser considerados já que $e^{\lambda_{k+2}t} / e^{\lambda_{k+1}t}$, $\cdots$, $\to 0$.

O valor aproximado da dimensão de capacidade é

$$D_{cap}(k) = -\lim_{t\to\infty} \frac{\ln N(t)}{\ln(\varepsilon\, e^{\lambda_{k+1}t})} \qquad (4.57)$$

$$= k - \frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_j}{\lambda_{j+1}} .$$

É possível provar (Parker e Chua, 1987) que com $k = j$ obtém-se o mínimo valor de $D(k)$, e portanto define-se

$$D_L \equiv D_{cap}(j) = j - \frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_j}{\lambda_{j+1}} \qquad (4.58a)$$

$$= j - \frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_j}{|\lambda_{j+1}|} . \qquad (4.58b)$$

2.4.6. Comportamento das dimensões de atratores caóticos

Se o conjunto limite atrator for uma superfície, as dimensões de capacidade, de informação, de correlação e de Lyapunov são inteiras. Como os atratores caóticos normalmente não são superfícies, as dimensões adotam valores que tipicamente são não inteiros (Parker e Chua, 1987; Farmer et al, 1983).

O valor da dimensão pode ser, então, utilizado para distinguir um comportamento quase-periódico ou subharmônico, de um comportamento caótico. Isto permite estabelecer comparações no comportamento de um mesmo sistema com diferentes valores dos parâmetros.

Uma outra aplicação da dimensão é a estimação do número de variáveis de estado de um sistema. A dimensão é uma limitante inferior do número de variáveis indispensável para modelar a dinâmica (Farmer et el, 1983).

2.5 Conclusões

O comportamento subharmônico e caótico pode ser reconhecido através de características qualitativas próprias de cada tipo de comportamento, que poden ser visualizadas no espaço de estado. As bifurcações apresentam-se quando existe uma mudança da topologia do fluxo, ante mudanças nos parâmetros do sistema.

O comportamento subharmônico pode ser reconhecido pela existência de ciclos periódicos estáveis; se o modelo do sistema for simples pode-se determinar analiticamente os pontos fixos e a estabilidade dos mesmos; no caso mais geral sempre é possível faze-lo através de uma rotina, para os ciclos estáveis.

O comportamento caótico pode ser reconhecido através da dimensão ou dos expoentes de Lyapunov. A dimensão do atrator caótico usualmente é não inteira, e o atrator caótico possui pelo menos um expoente de Lyapunov positivo. Existem algoritmos para calcular as dimensões e os expoentes de Lyapunov positivos a partir dos pontos do atrator, mas não existe uma forma analítica para determina-los a partir do modelo do sistema, como uma função dos parâmetros.

3

Transformação de Poincaré de sistemas lineares por partes

3.1 Introdução

Para obter numéricamente a Transformação de Poincaré a partir de equações diferenciais contínuas no tempo, a solução é simular a trajetória no espaço de estado e verificar em cada ponto da simulação $p(i)$, $i = 1, \ldots , k$, se $p(i)$ pertence à seção global transversa Σ. Este método, utilizado em casos nos quais não é possível obter teóricamente o mapeamento, é computacionalmente ineficiente devido à necessidade de se calcular a solução do sistema e decidir se a condição é satisfeita em cada ponto da trajetória, a intervalos de tempo muito pequenos (h ou Δt da simulação).

No caso de um sistema linear por partes, é possível calcular analiticamente a solução em cada uma das regiões lineares, no intervalo entre eventos consecutivos, definidos como as interseções da trajetória com a seção de Poincaré (Andronov et al, 1966). A partir da condição inicial estabelecida pelo evento anterior, a solução do sistema linear é determinada explicitamente para o segmento da trajetória onde a solução é válida, isto é, até o seguinte evento que é uma nova interseção com a seção de Poincaré.

A ocorrência do evento é determinada a partir da verificação da mesma condição que no caso não linear mais geral no qual a trajetória é obtida pela simulação do sistema. Como no caso linear por partes existe uma expressão para a solução na região linear, esta condição se transforma na solução de uma equação não linear, ou seja, na procura de um zero de uma função escalar em t. Este problema pode ser resolvido numéricamente pelo método de Newton, e o zero procurado é o mínimo valor de t para o qual a função é zero.

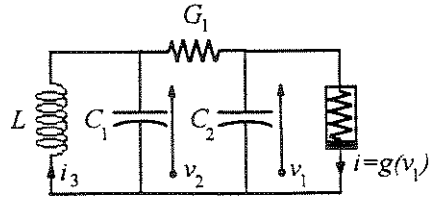
A seguir, desenvolvemos três exemplos nos quais o mapeamento é obtido a partir de sistemas contínuos que incluem descontinuidades no campo vetorial. Como estes sistemas possuem continuidade Lipschitz local, a existência e unicidade da solução é garantida pelo Teorema da Existência e Unidade.

3.2 Circuito de Chua com uma não linearidade descontínua

O circuito de Chua (Chua, 1992), foi um dos primeiros circuitos elétricos onde verificou-se o comportamento caótico. Por este motivo, e pela flexibilidade e simplicidade da implementação, tem-se gerado um grande número de publicações a respeito, e é provavelmente um dos sistemas cuja dinâmica tem sido melhor estudada, tanto nos aspectos teóricos quanto através de simulações e implementações.

O interesse do estudo deste circuito para a área de controle foi notado em (Mahla e Badan Palhares, 1993) devido a que o caso particular do circuito de Chua com uma não linearidade descontínua, do tipo linear por partes, pode ser considerado análogo a um processo de terceira ordem com um controlador do tipo on-off e referência zero. Existem estudos sobre sistemas de segunda ordem com este tipo de realimentação, cuja dinâmica pode dar origem a oscilações, mas não a comportamento de tipo caótico. Sobre sistemas de terceira ordem com este tipo de característica, aparentemente não existe bibliografia.

O circuito de Chua é mostrado na Fig. 3.1 (a). A não linearidade usual é uma característica contínua, linear por partes, de três ou cinco segmentos. Neste trabalho, assumimos a característica descontínua linear por partes da Fig. 3.1 (b).



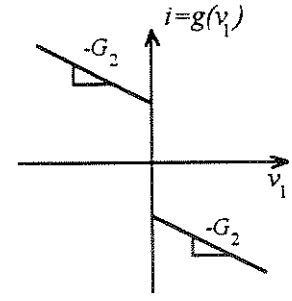


Fig. 3.1. (a) Circuito de Chua. (b) Característica descontínua linear por partes $g(v_1)$.

Uma simulação analógica, obtida com um pacote de software que simula um computador analógico, com os parâmetros $1/C_1 = 9$, $1/C_2 = 1$, $1/L = 7$, $G_1 = 0.7$, $G_2 = -0.5$, $I_0 = 1.3$. e condições iniciais $v_1(0) = 0.15264$, $v_2(0) = -0.02281$ e $i_3(0) = 0.38127$, as mesmas utilizadas em (Bartissol e Chua, 1988), indica comportamento caótico, com o atrator conhecido como "atrator de Chua de duplo rolo", mostrado na Fig. 3.2.

Sejam $x_1 = v_1$, $x_2 = v_2$, $x_3 = i_3$. Então a equação de estado para o circuito é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-(G_1+G_2)}{C_1} & \dfrac{G_1}{C_1} & 0 \\ \dfrac{G_1}{C_2} & -\dfrac{G_1}{C_2} & \dfrac{1}{C_2} \\ 0 & -\dfrac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \pm I_0 \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (3.1)$$

onde todos os parâmetros são positivos. O sinal que acompanha I_0 é positivo quando $x_1 < 0$ e é negativo quando $x_1 > 0$. Assumimos que o sinal de I_0 muda para o sinal oposto em qualquer tempo quando ocorre $x_1 = 0$. Esta suposição será justificada nos parágrafos seguintes. Mesmo existindo uma descontinuidade desde I_0 a $-I_0$, ou vice-versa, em $x_1 = 0$, esta descontinuidade não é refletida nas trajetórias da Fig. 3.2 porque o circuito atua como um filtro para todas as variáveis de estado de $x(t)$ que aparecem na Fig. 3.2.

Então, é possível definir uma seção de Poincaré com $x_1 = 0$. Os pontos da órbita gerados pela transformação podem ser escolhidos como as interseções das trajetórias do sistema com o plano $\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 = 0\}$ passando do semiespaço $\Sigma^- = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 < 0\}$ ao semiespaço $\Sigma^+ = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 > 0\}$ ou, inversamente, como as interseções das trajetórias com o plano Σ, passando de Σ^+ a Σ^-. Se a nossa suposição de uma transição de I_0 a $-I_0$, ou vice-versa, sempre que $x_1 = 0$, for falsa, então a trajetória permanecerá no semiespaço oposto durante um período de tempo igual a zero e o valor de $\pm I_0$ voltará imediatamente ao valor precedente.

A equação que governa o comportamento das variáveis em Σ^- é (3.1), onde I_0 é precedida pelo sinal (+). A mesma equação, com o sinal (-) acompanhando I_0, é válida em Σ^+. Em cada semiespaço, o sistema é do tipo $\dot{x} = Ax + bu$, isto é, um sistema linear e invariante no tempo cuja solução pode ser obtida pela Transformada de Laplace como

$$x(\hat{t}) = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}b\,u(s)\right], \qquad (3.2)$$

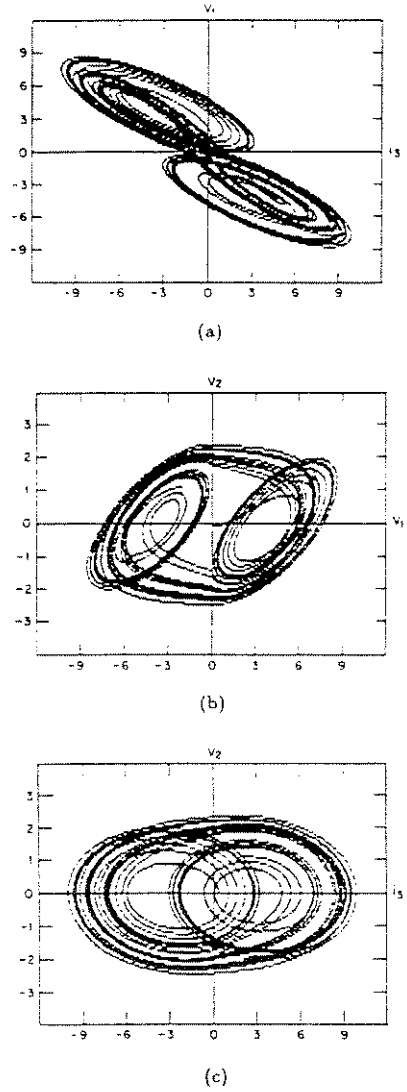


Fig. 3.2. (a) Projeção no plano (i_3, v_1). (b) Projeção no plano (v_1, v_2).
(c) Projeção no plano (i_3, v_2).

onde $\hat{t}$ é um tempo normalizado tal que $\hat{t} = 0$ na entrada de um dos semiespaços Σ^+ ou Σ^- e tal que $x(0)$ é a última interseção da trajetória com o plano Σ .

Usando (3.2) com A, b e $u(s)$ dados por (3.1) e definindo x como $x=[x_1\ x_2\ x_3]$, obtemos

$$x(s) = \frac{1}{\Delta(s)}\begin{bmatrix} \left[s^2 + \frac{G_1}{C_2} - \frac{1}{LC_2}\right] & \frac{G_1}{C_2}s & -\frac{G_1}{C_2 L} \\ \frac{G_1}{C_1}s & \left[s^2 + \frac{G_1+G_2}{C_1}s\right] & \left[-\frac{1}{L}s - \frac{G_1+G_2}{LC_1}\right] \\ \frac{G}{C_1C_2} & \left[\frac{1}{C_2}s + \frac{G_1+G_2}{C_1C_2}\right] & x_{33}(s) \end{bmatrix} x(0)$$

$$\pm\frac{I_0}{s\Delta(s)}\begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1}\left(s^2 + \frac{G_1}{C_2}s - \frac{1}{LC_2}\right) \\ -\frac{G_1}{C_1^2}s \\ -\frac{G_1}{C_1^2C_2} \end{bmatrix}, \qquad (3.3)$$

onde

$$x_{33}(s) = \left[s^2 + \left(\frac{G_1+G_2}{C_1} + \frac{G_1}{C_2}\right)s + \frac{G_1(G_1+G_2)}{C_1C_2} - \frac{G_1^2}{C_1C_2}\right],$$

e Δ (s) = det (sI-A), o polinômio característico, é

$$\Delta(s) = s^3 + \left(\frac{G_1}{C_2} + \frac{G_1}{C_1} + \frac{G_2}{C_1}\right)s^2 + \left(\frac{G_1G_2}{C_1C_2} + \frac{1}{LC_2}\right)s + \left(\frac{G_1+G_2}{LC_1C_2}\right).$$

O polinômio característico Δ (s) tem três zeros e então há duas possibilidades: um zero real e dois zeros complexos conjugados, ou três zeros reais. De (3.3), vemos que os elementos do primeiro vetor, correspondentes à solução homogênea determinada por $x(0)$, têm três polos (os três zeros de Δ (s)), e os elementos do segundo vetor, correspondentes à solução particular dependente de $\pm I_0$, têm um polo a mais na origem, com a exceção do elemento central, o qual tem somente três polos (os três zeros de Δ (s)).

Para determinar o mapeamento, escolhemos como exemplo os mesmos parâmetros de (Bartissol e Chua, 1988), utilizados na simulação. Com tais parâmetros, $\Delta(s) = s^3 + 2.5s^2 + 3.85s + 12.6$, e obtemos numéricamente o zero real $s = -2.75949$. Por divisão longa, $\Delta(s) = (s + 2.75949)(s^2 - 0.25949s + 4.5660611)$, onde os zeros do polinômio de segunda ordem são complexos-conjugados, com parte real positiva. Usando frações parciais, denotando como e_{ij} os elementos de $\mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$, e denotando como u_i os elementos de $\pm\mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}bu(s)\}$, obtemos $e_{ij}(t) = a_{ij}\, e^{\mu_1 t} + b_{ij}\, e^{\mu_2 t}\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \phi_{ij})$ e $u_i(t) = \alpha_i\, e^{\mu_1 t} + \beta_i\, e^{\mu_2 t}\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \varphi_i) + C_i$, onde os valores para a_{ij}, b_{ij} e ϕ_{ij} são dados pela Tabela 3.1 e os valores para α_i, β_i, φ_i e C_i são dados pela Tabela 3.2. Os valores μ_1, μ_2, e ω_0 são constantes; $\mu_1 = -2.75949$, $\mu_2 = 0.129745$ e $\omega_0 = 2.1328918$.

e_{ij}	a_{ij}	b_{ij}	ϕ_{ij}
e_{11}	0.1021065	1.5174429	-46.576425°
e_{12}	-0.1497756	0.1952796	50.083456°
e_{13}	-0.37993608	0.63971197	-36.435495°
e_{21}	-1.3479808	1.7575178	50.083456°
e_{22}	0.2052975	0.80240668	-82.053924°
e_{23}	0.52077839	-2.6285831	11.427121°
e_{31}	0.077537976	-0.13055347	-36.435495°
e_{32}	-0.074396912	0.37551187	11.427121°
e_{33}	-0.18872278	1.2301297	-75.091831°

Tabela 3.1. Coeficientes dos elementos da matriz $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$, na forma $e_{ij}(t) = a_{ij}\, e^{\mu_1 t} + b_{ij}\, e^{\mu_2 t}\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \phi_{ij})$, onde $\mu_1 = -2.75949$, $\mu_2 = 0.129745$ e $\omega_0 = 2.1328918$.

u_i	α_i	β_i	C_i	φ_i
u_1	-0.2664101	-5.1129784	4.0	46.904626°
u_2	-3.5171226	5.9219053	0.0	-36.435494°
u_3	1.2745553	2.7713466	-3.6	57.045585°

Tabela 3.2. Coeficientes dos elementos do vetor $\pm\mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}bu(s)\}$ na forma $u_i(t) = \alpha_i\, e^{\mu_1 t} + \beta_i\, e^{\mu_2 t}\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \varphi_i) + C_i$, onde $\mu_1 = -2.75949$, $\mu_2 = 0.129745$ e $\omega_0 = 2.1328918$.

Sejam $E(t)=\{e_{ij}(t)\}$ e $u(t)=\{u_i(t)\}$. Seja k o evento de passar através do plano de Poincaré Σ desde Σ^- a Σ^-. Seja T_1 o tempo entre k e a seguinte interseção da trajetória com Σ (onde a trajetória está passando de Σ^- a Σ^-), e seja T_1+T_2 o tempo entre k e a seguinte interseção com Σ desde Σ^- a Σ^-, tal como é ilustrado na Fig. 3.3.

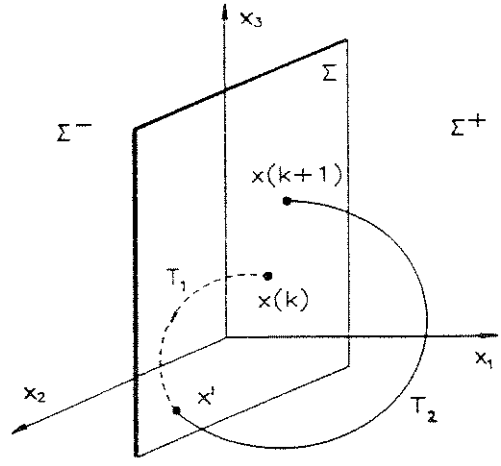


Fig. 3.3. O plano de Poincaré que define a transformação.

Então

$$x(k+1)=E(T_2)\left[E(T_1)x(k)+u(T_1)\right]-u(T_2), \tag{3.4}$$

onde T_1 e T_2 são obtidos da condição $x_1=0$. De (3.4) obtemos, para T_1, a condição

$$e_{12}(T_1)x_2(k)+e_{13}(T_1)x_3(k)+u_1(T_1)=0, \tag{3.5}$$

onde T_1 é dado na forma implícita. Considerando que $x_1 = 0$ em todas as interseções, sendo portanto invariante em Σ, então em (3.5) x pode ser redefinido como

$x = [x_2\ x_3]'$, $E(t)$ pode ser redefinido como $E = \{e_{ij} \mid i,j = 2,3\}$ e u(t) pode ser redefinido como u(t) = (u_2, u_3). Então em (3.4) $x, u \in IR^2$ *e* $E \in IR^{2\times 2}$.

Dado *x(k)*, T_1 é o mínimo $t > 0$ que satisfaz a condição (3.5). Conhecendo T_1, a seguinte interseção x' é dada por $x' = (x_2', x_3') = E(T_1)x(k) + u(T_1)$. Analogamente, T_2 é definido por

$$e_{12}(T_2)x_2' + e_{13}(T_2)x_3' - u_1(T_2) = 0 \tag{3.6}$$

onde $t = T_2$ é o mínimo t > 0 que satisfaz a condição (3.6).

É importante observar que se Δ(s) tem zeros complexos conjugados, e $\mu_1 < 0$, $\mu_2 > 0$, então para qualquer $x_2(k)$ e $x_3(k)$, sempre existem T_1 e T_2 que satisfazem (3.5) e (3.6). Este fato pode ser facilmente verificado substituindo e_{ij} e μ_i em (3.5) e (3.6). Então, a trajetória do sistema (3.1) sempre volta ao plano de Poincaré para $t \in (0, \infty)$ e a transformação está bem definida neste caso.

As equações (3.4), (3.5) e (3.6) definem a transformação de Poincaré. Esta transformação pode ser usada para estudar o comportamento subharmônico, e para provar a existência de comportamento caótico, no caso de existir um "snap-back repeller" (Marotto, 1978).

Esta metodologia (Burian Jr., Y., Bottura, C.P. e Badan Palhares, A.G. (1978); Marotto, 1978; Gumowski e Mira, 1980; Badan Palhares, 1980; Araújo, 1988; Mahla, 1991) foi utilizada em (Badan Palhares, 1980; Araújo, 1988; Badan Palhares, Bottura e Val, 1982) para analisar comportamento subharmônico e caótico num sistema de controle PWM.

Um caso particular do circuito de Chua com uma característica descontínua é $G_2 = 0$. Este caso pode ser visto como um controlador on-off com um processo de terceira ordem com referência zero, como mostra a Fig. 3.4.

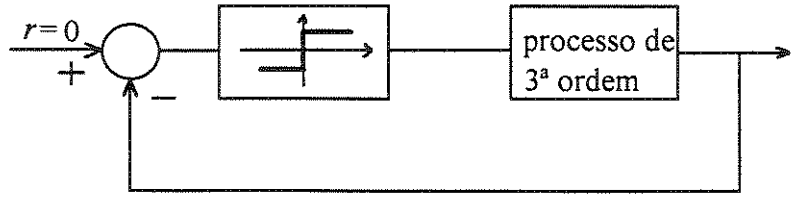


Fig. 3.4. O Circuito de Chua com uma característica descontínua.

Esta é outra possibilidade interessante para estudo futuro. O comportamento periódico em controladores on-off com dinâmica de segunda ordem e a sua análise por técnicas de plano de fase é bem conhecido. O comportamento subharmônico e caótico em controladores com processos de terceira ordem podem ser também analisados como um caso particular do extensamente estudado circuito de Chua, a partir da transformação proposta. Uma análise mais geral sobre modelamento do circuito de Chua a partir de transformações descontínuas pode ser encontrada em (Brown, 1993).

3.3 Sistema PWM de controle de motores C.C., com controlador proporcional e realimentação de saída

O sistema PWM de controle de motores C.C. , com controlador proporcional e realimentação de saída , pode ser representado (Badan Palhares, Bottura e do Val, 1982) pelo diagrama de blocos da Fig. 3.5, onde a perturbação *p(t)* e a não linearidade *f(e)* são descritas graficamente na Fig. 3.6.

Os parâmetros indicados nas Figs. 3.5 e 3.6 são os seguintes:

V_{ref} : Voltagem de referência proporcional à posição de referência para o motor.
K_C : Ganho do controlador.
K_m : Ganho do motor.
Z_m : Constante de tempo mecânica do motor.
K_t : Constante de ganho do transdutor.

As variáveis indicadas nas Figs. 3.5 e 3.6 são :

$p(t)$: Perturbação periódica conhecida, da forma indicada na fig. 3.6 (a).
$e(t)$: Sinal de erro.
$c(t)$: Sinal de atuação sobre o motor.
$\omega_0(t)$: Velocidade angular de saída do motor.
$\theta_0(t)$: Posição de saída do motor.
$v_f(t)$: Realimentação do transdutor de posição.

Assume-se que o motor é controlado pela armadura, com campo fixo. O sinal de atuação resulta ser uma seqüência de pulsos, de valor máximo $K_C \hat{f}$ e valor mínimo $-K_C \hat{f}$, que em regime e dentro da região de operação desejada, têm largura

proporcional ao erro de posição $(V_{ref} - v_f(t))$. Esta largura é definida no instante em que é satisfeita a condição $p(t) + V_{ref} - v_f(t) = 0$ (condição de comutação), na modalidade PWM conhecida como "amostragem natural".

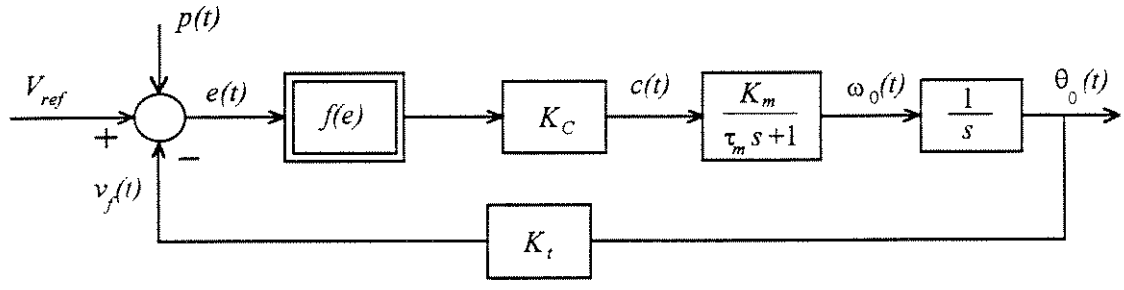
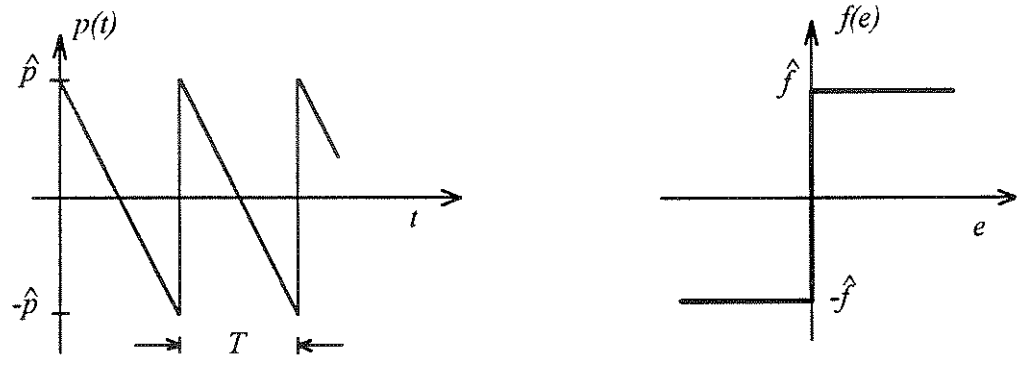


Fig. 3.5. Diagrama de blocos do sistema PWM de controle de motores C.C., com controlador proporcional e realimentação de saída.



(a) (b)

Fig. 3.6. (a) Perturbação periódica *p(t)*. (b) Não linearidade *f(e)*.

As equações que descrevem a dinâmica do sistema são as seguintes:

$$u(t) = V_{ref} - v_f(t) + p(t), \tag{3.7}$$

$$c(t) = K_C f(e(t)), \tag{3.8}$$

$$\tau_m \frac{d}{dt}\omega_0(t) + \omega_0(t) = K_m c(t), \tag{3.9}$$

$$\omega_0(t) = \frac{d}{dt}\theta_0(t), \tag{3.10}$$

$$v_f(t) = K_t \theta_0(t). \tag{3.11}$$

Definindo

$$x_1(t) = K_t\theta_0(t) - V_{ref}, \tag{3.12}$$

$$x_2(t) = \frac{dx_1}{dt} = K_t\omega_0(t), \tag{3.13}$$

$$K = \hat{f} K_C K_m K_t, \tag{3.14}$$

obtemos das eqs. (3.7) - (3.11),

$$e(t) = p(t) - x_1(t), \tag{3.15}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \tag{3.16}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{\tau_m}x_2 + \frac{K}{\tau_m} sinal(e(t)), \tag{3.17}$$

representadas gráficamente pelo diagrama de blocos da fig. 3.7, onde $x = (x_1, x_2)$.

De (3.16) e (3.17), temos que :

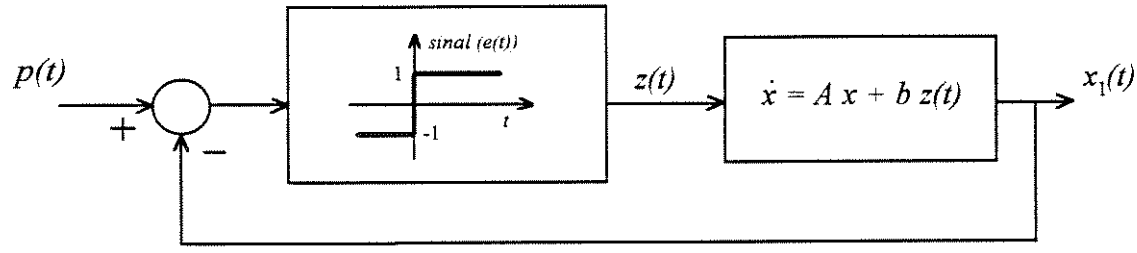


Fig. 3.7. Equivalente do diagrama de blocos do sistema PWM.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{1}{\tau_m} \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{K}{\tau_m} \end{bmatrix}, \tag{3.18}$$

e

$$z(t) = sinal\,(e(t)).$$

Utilizando a Transformada de Laplace, podemos calcular a solução $x(t)$ no bloco linear a partir de um instante inicial $t = 0$, com a expressão

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1} x(0) + z(0)\,(sI - A)^{-1} b \frac{1}{s} \right], \tag{3.19}$$

onde $z(0) = 1$ se $z(t)$ comuta de -1 a 1, e $z(0) = -1$ se $z(t)$ comuta de 1 a -1.

A inversa de $(sI - A)$ é

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s\left(s + \dfrac{1}{\tau_m}\right)} \\ 0 & \dfrac{1}{s + \dfrac{1}{\tau_m}} \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

e portanto

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s}x_1(0) + \frac{x_2(0)}{s\left(s+\frac{1}{\tau_m}\right)} \\ \frac{x_2(0)}{s+\frac{1}{\tau_m}} \end{bmatrix} + z(0)\begin{bmatrix} \frac{\frac{K}{\tau_m}}{s^2\left(s+\frac{1}{\tau_m}\right)} \\ \frac{\frac{K}{\tau_m}}{s\left(s+\frac{1}{\tau_m}\right)} \end{bmatrix} \qquad (3.21)$$

Separando em frações parciais,

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1(0)+\tau_m x_2(0)-z(0)K\tau_m)\frac{1}{s} + z(0)\frac{K}{s^2} + \frac{-x_2(0)\tau_m + z(0)K\tau_m}{\left(s+\frac{1}{\tau_m}\right)} \\ z(0)\frac{K}{s} + \frac{x_2(0)-z(0)K}{\left(s+\frac{1}{\tau_m}\right)} \end{bmatrix} \qquad (3.22)$$

donde

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0)+x_2(0)\tau_m - z(0)K\tau_m + z(0)Kt + (-x_2(0)\tau_m + z(0)K\tau_m)e^{\frac{-t}{\tau_m}} \\ z(0)K + (x_2(0)-z(0)K)e^{\frac{-t}{\tau_m}} \end{bmatrix} \qquad (3.23)$$

A Fig. 3.8 mostra a forma de $z(t)$. A largura $t_{on}(k)$ determina a solucão para $x(t)$ no intervalo (kT, $(k+1)T$), como função das condições iniciais.

Seja $\hat{t} = t - kT$, e denotando $x_1(k) \equiv x_1(t=kT) = x_1(\hat{t}=0)$ e $x_2(k) \equiv x_2(t=kT) = x_2(\hat{t}=0)$, de (3.23) temos que para $\hat{t} \in (0, t_{on}(k)]$, $z(\hat{t}=0)=1$ e

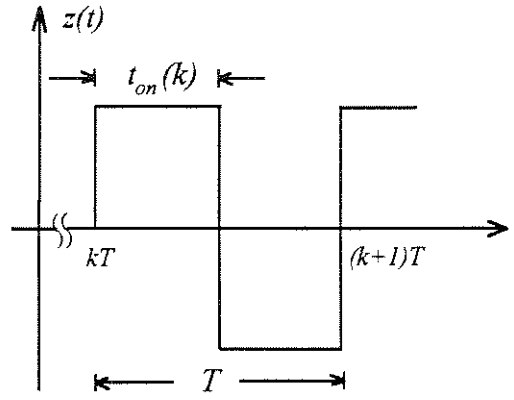


Fig.3.8. Forma do sinal pulsado $z(t)$.

$$\begin{bmatrix} x_1(\hat{t}) &= x_1(k)+x_2(k)\tau_m - K\tau_m + K\hat{t} + (-x_2(k)\tau_m + K\tau_m)e^{-\hat{t}/\tau_m} \\ x_2(\hat{t}) &= K+(x_2(k)-K)e^{-\hat{t}/\tau_m} \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

Com $\hat{t} = t_{on}(k)$,

$$\begin{bmatrix} x_1(t_{on}(k)) = x_1(k)+x_2(k)\tau_m - K\tau_m + K t_{on}(k) + (-x_2(k)\tau_m + K\tau_m)e^{-t_{on}(k)/\tau_m} \\ x_2(t_{on}(k)) = K+(x_2(k)-K)e^{-t_{on}(k)/\tau_m} \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

Utilizando $x(\ t_{on}\ (k))$ como condição inicial para o intervalo $\hat{t} \in (t_{on}(k), T]$, com $z(t_{on}(k)) = -1$,

$$\begin{bmatrix} x_1(T) = x_1(t_{on}(k)) + x_2(t_{on}(k))\tau_m + K\tau_m - K\left[T - t_{on}(k)\right] + (-x_2(t_{on}(k))\tau_m - K\tau_m)e^{-(T-t_{on}(k))/\tau_m} \\ x_2(T) = -K + (x_2(t_{on}(k)) + K)e^{-(T-t_{on}(k))/\tau_m} \end{bmatrix}$$

(3.26)

Como $\hat{t} = T \Rightarrow t = T + kT = (k+1)T$, denotamos $x_1((k+1)T) \equiv x_1(k+1)$; $x_2((k+1)T) \equiv x_2(k+1)$, donde, substituindo (3.25) em (3.26), e desenvolvendo, obtemos

$$x_1(k+1) = x_1(k) + \tau_m x_2(k) + K(\tau_m - T) + 2Kt_{on}(k) - 2K\tau_m e^{-(T-t_{on}(k))/\tau_m} - \tau_m(x_2(k) - K)e^{-T/\tau_m} \tag{3.27a}$$

$$x_2(k+1) = -K + 2Ke^{-(T-t_{on}(k))/\tau_m} + (x_2(k) - K)e^{-T/\tau_m} \tag{3.27b}$$

onde $t_{on}(k)$ é o mínimo $\hat{t}$ tal que a condição de comutação

$$p(\hat{t}) = x_1(\hat{t}) \tag{3.28}$$

é satisfeita, isto é, $t_{on}(k)$ é definido por

$$t_{on}(k) = min\left\{\hat{t} \;\middle|\; \hat{p} - \frac{2\hat{p}}{T}\hat{t} = x_1(k) + x_2(k)\tau_m - K\tau_m + K\hat{t} + (-x_2(k)\tau_m + K\tau_m)e^{-\hat{t}/\tau_m}\right\}, \tag{3.29}$$

equivalente a

$$t_{on}(k) = min\left\{\hat{t} \;\middle|\; x_1(k) + x_2(k)\tau_m - \hat{p} - K\tau_m + \left(K + \frac{2\hat{p}}{T}\right)\hat{t} + (-x_2(k)\tau_m + K\tau_m)e^{-\hat{t}/\tau_m} = 0\right\}. \tag{3.30}$$

Definindo

$$C_1(x_1(k), x_2(k)) = x_1(k) + x_2(k)\tau_m - \hat{p} - K\tau_m\,, \tag{3.31a}$$

$$C_2 = K + \frac{2\hat{p}}{T} \tag{3.31b}$$

e

$$C_3(x_2(k)) = -x_2(k)\tau_m + K\tau_m\,, \tag{3.31c}$$

a condição de comutação é

$$t_{on}(k) = min\left\{ \hat{t} \mid C_1(x_1(k), x_2(k)) + C_2\,\hat{t} + C_3(x_2(k))e^{-\hat{t}/\tau_m} = 0 \right\}. \qquad (3.32)$$

Se a equação (3.32) têm solução no intervalo $\hat{t} \in (0, T]$, então $t_{on}(k)$ é definido por (3.32). Para garantir que o sistema PWM trabalhe adequadamente em todos os casos possíveis, definimos

(i) Se $x_1(k) \geq \hat{p}$, então $t_{on}(k) = 0$.
(ii) Se $x_1(k) < \hat{p}$ e $x_1(k+1) > -\hat{p}$, então $t_{on}(k) \in (0, T]$ é definido pela eq. (25).
(iii) Se $x_1(k) < \hat{p}$ e $x_1(k+1) \leq -\hat{p}$, então $t_{on}(k) = T$.

Notamos que se a condição (ii) é satisfeita, então a equação envolvida em (3.32) sempre tem solução.

3.4 Discretização do modelo de fase de um controlador PLL periódicamente perturbado (Mahla e Badan Palhares , 1993b)

A técnica PLL é usada para melhorar a precisão no controle de velocidade de motores C.C.. Mesmo tendo sido empregada com sucesso, o seu uso tem sido restrito devido ao custo do projeto envolvido no ajuste dos parâmetros do controlador não linear (Geiger, 1981).

Uma das dificuldades observadas no projeto do sistema é a existência de uma perturbação periódica (jitter) no codificador ótico de velocidade. Esta perturbação, interagindo com a não linearidade num PLL de segunda ordem, pode produzir comportamento não estável (Prasad et al, 1985). Este comportamento (numa região do espaço de parâmetros), experimentalmente verificado por Campos (1991), tem sido identificado como caótico (Mahla, 1991; Mahla e Badan Palhares, 1992a). A região de comportamento caótico foi obtida pelo método de Melnikov, usando um modelo de fase contínuo em (Mahla, 1991; Mahla e Badan Palhares, 1992a), seguindo o método proposto por Endo e Chua (1988).

Para propósitos de controle, é também de interesse conhecer as regiões subharmônicas e periódicas. Estas regiões podem ser obtidas calculando os pontos fixos de período n da Transformação de Poincaré. A forma usual de obter a transformação em forma numérica, é simular as trajetórias do modelo contínuo e gerar a seqüência por amostragem com o mesmo período do sinal de perturbação. Mas este método não é eficiente em termos de tempo computacional.

A alternativa desenvolvida aqui, é a mesma da seção 3.2, isto é, utilizar a solução analítica do modelo nas regiões lineares, aproximação ao problema proposta por Andronov et al (1966) para sistemas lineares por partes. Começando com as condições iniciais e as soluções, determina-se o instante de transição entre as diferentes regiões lineares. Finalmente, obtém-se uma transformação discreta relacionando o estado final no instante de transição e a condição inicial na transição anterior entre as mesmas regiões.

O modelo de fase contínuo do controlador com uma perturbação periódica é (Mahla, 1991; Mahla e Badan Palhares, 1992)

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \beta\frac{d\phi}{dt} + h(\phi) = m\Omega\cos\Omega t + \beta m \operatorname{sen}\Omega t + \beta\sigma\,, \tag{3.33}$$

onde $h(\phi) = -\pi + \left[(\phi + \pi)\, módulo\, 2\pi\right]$, e onde h($\phi$) é uma característica linear por partes. Observamos que h(ϕ) = ϕ se $-\pi \le \phi \le \pi$. Definindo $x_1 = d\phi/dt$, $x_2 = \phi\,(t)$ e o vetor de estado $x = (x_1, x_2)$, $x \in IR^2$, então a equação de estado na região linear é $\dot{x} = Ax + bu$, onde

$$A = \begin{bmatrix} -\beta & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad u(t) = m\Omega\cos\Omega t + \beta m \operatorname{sen}\Omega t + \beta\sigma\,, \tag{3.34}$$

e a solução, $x(s)$, obtida aplicando a Transformada de Laplace, é

$$x(s) = (sI - A)^{-1} x_0 + (sI - A)^{-1} b\, u(s), \tag{3.35}$$

onde x_0 é o estado na transição precedente ($\phi = \pi$ ou $\phi = -\pi$).

De (3.35) obtemos

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + \beta s + 1}\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+\beta \end{bmatrix}, \tag{3.36}$$

$$(sI - A)^{-1} b = \frac{1}{s^2 + \beta s + 1}\begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{3.37}$$

e

$$u(s) = \frac{\beta\sigma}{s} + \frac{\beta m\Omega}{s^2 + \Omega^2} + \frac{m\Omega s}{s^2 + \Omega^2}; \tag{3.38}$$

de (3.36) - (3.37) obtemos a parte homogênea de (3.35) como

$$x_h(s) = (sI - A)^{-1} x_0 = \frac{1}{s^2 + \beta s + 1} \begin{bmatrix} s x_{10} - x_{20} \\ x_{10} + (\beta + s) x_{20} \end{bmatrix}, \qquad (3.39)$$

e a parte particular de (3.35) como

$$x_p(s) = (sI - A)^{-1} b\, u(s) = \frac{1}{s^2 + \beta s + 1} \left(\frac{\beta\sigma}{s} + \frac{\beta m \Omega}{s^2 + \Omega^2} + \frac{m \Omega s}{s^2 + \Omega^2} \right) \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad (3.40)$$

onde x_{10} e x_{20} são as componentes de x_0 (o estado na transição anterior).

A solução $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[x(s)] = \mathcal{L}^{-1}[x_h(s) + x_p(s)]$ é obtida separando $x(s)$ em frações parciais. Observamos que a forma da solução depende das raízes do termo $s^2 + \beta s + 1$. Temos então

$$s^2 + \beta s + 1 = (s - p_1)(s - p_2), \qquad (3.41a)$$

onde

$$p_1 = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - 1} \qquad (3.41b)$$

e

$$p_2 = -\frac{\beta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - 1} \qquad (3.41c)$$

Existem três possibilidades, isto é :

a) $\beta < 2$. p_1 e p_2 são complexos conjugados e o termo $s^2 + \beta + 1$ não é fatorável com p_1, p_2 reais.

b) $\beta > 2$. p_1 e p_2 são reais e $p_1 < 0$, $p_2 < 0$.

c) $\beta = 2$. Então $p_1 = p_2 = -\frac{\beta}{2}$.

Desenvolvendo estes três casos, obtemos a solução para cada um dos casos. Aqui omitimos os passos algébricos, os quais foram parcialmente desenvolvidos com a ajuda do pacote de software Mathematica.

a) $\beta < 2$; termo $s^2 + \beta s + 1$ não fatorável.

$$x_1(t) = e^{-\frac{\beta}{2}t} G_1(x_{10}, x_{20}) \cos(\omega t + \phi_1(x_{10}, x_{20})) + \phi_1(x_{10}, x_{20})) + K_8 \cos(\Omega t + \phi_2), \quad (3.42a)$$

$$x_2(t) = e^{-\frac{\beta}{2}t} G_2(x_{10}, x_{20}) \cos(\omega t + \phi_3(x_{10}, x_{20})) + K_9 \cos(\Omega t + \phi_4) + K_7 u_s(t), \quad (3.42b)$$

onde $u_S(t)$ é um degrau unitário e

$$G_1(x_{10}, x_{20}) = \sqrt{\left[x_{10} + K_1\right]^2 + \frac{\left[2(-x_{20} + K_2) - \beta(x_{10} + K_1)\right]^2}{4 - \beta^2}} \quad (3.42c)$$

$$G_2(x_{10}, x_{20}) = \sqrt{\left[x_{20} - K_2\right]^2 + \frac{\left[2(x_{10} + \beta x_{20} + K_5) - \beta(x_{20} - K_2)\right]^2}{4 - \beta^2}} \quad (3.42d)$$

$$\omega = \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2} \quad (3.42e)$$

$$\phi_1(x_{10}, x_{20}) = arctg\left[\frac{1}{\omega}\left(\frac{\beta}{2} + \frac{x_{20} - K_2}{x_{10} + K_1}\right)\right] \quad (3.42f)$$

$$\phi_2 = arctg\left(-\frac{K_4}{K_3 \Omega}\right), \qquad \phi_4 = arctg\left(\frac{K_1}{K_6 \Omega}\right) \quad (3.42g)$$

$$\phi_3(x_{10}, x_{20}) = arctg\left[\frac{1}{\omega}\left(\frac{\beta}{2} - \frac{x_{10} + \beta x_{20} + K_5}{x_{20} - K_2}\right)\right]. \quad (3.42h)$$

b) $\beta > 2$; p_1 e p_2 são reais e distintos.

$$x_1(t) = G_3(x_{10}, x_{20}) e^{p_1 t} + G_4(x_{10}, x_{20}) e^{p_2 t} + K_{18} \cos(\Omega t + \phi_5), \quad (3.43a)$$

$$x_2(t) = K_{14} u(t) + G_5(x_{10}, x_{20}) e^{p_1 t} + G_6(x_{10}, x_{20}) e^{p_2 t} + K_{19} \cos(\Omega t + \phi_6), \quad (3.43b)$$

com

$$G_3(x_{10},x_{20}) = \frac{p_1 x_{10} - x_{20}}{p_1 - p_2} + K_{10}\,, \tag{3.43c}$$

$$G_4(x_{10},x_{20}) = \frac{-p_2 x_{10} + x_{20}}{p_1 - p_2} + K_{11}, \tag{3.43d}$$

$$G_5(x_{10},x_{20}) = \frac{x_{10} + (\beta + p_1)x_{20}}{p_1 - p_2} + K_{15}\,, \tag{3.43e}$$

$$G_6(x_{10},x_{20}) = \frac{x_{10} + (\beta + p_2)x_{20}}{p_2 - p_1} + K_{16}\,, \tag{3.43f}$$

$$\phi_5 = arctg\left(-\frac{K_{13}}{K_{12}\Omega}\right)\,, \tag{3.43g}$$

$$\phi_6 = arctg\left(-\frac{K_{12}}{K_{17}\Omega}\right)\,. \tag{3.43h}$$

c) $\beta = 2$; $p_1 = p_2$ são reais.

$$x_1(t) = G_7(x_{10})e^{p_1 t} + G_8(x_{10},x_{20})\,t e^{p_1 t} + K_{23}\cos(\Omega t + \phi_7)\,, \tag{3.44a}$$

$$x_2(t) = K_{24}\,u_s(t) + G_9(x_{20})\,e^{p_1 t} + G_{10}(x_{10},x_{20})\,t e^{p_1 t} + K_{28}\cos(\Omega t + \phi_8)\,; \tag{3.44b}$$

onde

$$G_7(x_{10}) = x_{10} + K_{20}\,, \tag{3.44c}$$

$$G_8(x_{10},x_{20}) = p_1 x_{10} - x_{20} + K_{21}\,, \tag{3.44d}$$

$$G_9(x_{20}) = x_{20} + K_{25}\,, \tag{3.44e}$$

$$G_{10}(x_{10},x_{20}) = x_{10} + (\beta + p_1)x_{20} + K_{26}\,, \tag{3.44f}$$

$$\phi_7 = arctg\left(\frac{K_{22}}{K_{20}\Omega}\right), \tag{3.44g}$$

$$\phi_8 = arc\,tg\left(\frac{K_{20}}{K_{27}\Omega}\right). \tag{3.44h}$$

As constantes K_i são dadas no Apêndice A como função dos parâmetros.

Conhecendo a solução $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ para cada um dos casos, e lembrando que $\phi = x_2$, selecionamos a transição através do plano $x_2 = \pi$ ou $x_2 = -\pi$ para definir o instante k.

Quando $x_2(t)$ alcança o valor $x_2 = \pi$ ou $x_2 = -\pi$, a característica da dente de serra $h(\phi)$ tem uma descontinuidade, levando a saída, $h(x_2)$, a -π ou + π respectivamente. Isto é equivalente a "realocar" a variável x_2 ao valor inicial x_{20} = -π ou x_{20} = + π respectivamente. Este valor inicial será usado com o valor alcançado por x_1 (t) no tempo de transição, como a condição inicial para o seguinte período até a próxima transição.

Um pseudocódigo para o algoritmo de determinação dos pontos da transformação é o seguinte:

Começo
$x_1(0) = x_{10}$
$x_2(0) = x_{20}$
$x_1(t)$ e $x_2(t)$ *são dados pelas expressões* (3.42), (3.43) ou (3.44)
$k = 0$
Etiqueta 1 $tt\,(k+1) = 0$
Etiqueta 2 $T = min\left\{ t / |x_2(t)| = \pi \right\}$
$x_2(T) = -\pi$ *então*
$x_{10} = x_1(T)$
$x_{20} = \pi$
$tt(k+1) = tt(k+1) + T$
vá a ***Etiqueta 2***
em outro caso
$x_{10} = x_1(T)$
$x_{20} = -\pi$
$x_1(k+1) = x_1(T)$
$tt(k+1) = tt(k+1) + T$
guarde $x_1(k+1)$, $tt(k+1)$
$k = k+1$
vá a ***Etiqueta 1***

Nesta forma, é possível obter uma transformação discreta para o sistema de controle PLL com perturbação periódica, se baseando nas soluções analíticas nas regiões lineares. Esta transformação não precisa do cálculo da solução em incrementos infinitesimais de tempo, mas somente requer da solução da equação $T = min\{ t / |x_2(t)| = \pi \}$, isto é, encontrar o mínimo dos zeros da equação $|x_2(t)| = \pi$, com $x_2(t)$ conhecido.

Esta abordagem será útil para reduzir o tempo computacional na determinação das regiões estáveis, periódicas e subharmônicas, no espaço dos parâmetros.

3.5 Conclusões

Através dos exemplos para os quais obteve-se a transformação de Poincaré, descreveu-se uma metodologia bastante geral que pode ser utilizada para obter modelos discretos a partir de sistemas lineares por partes, usando a solução exata do sistema nas regiões lineares, método computacionalmente eficiente em termos do número de iterações necessárias para determinar cada ponto da órbita. Com estes modelos discretos pode-se verificar a existência e estabilidade de pontos de período p, com p arbitrário, para determinar as regiões estáveis e subharmônicas no espaço dos parâmetros.

4

Modelo discreto e análise de estabilidade para um motor C.C. controlado por PLL

4.1 Introdução

O sistema PLL-dual, proposto por Prasad et al (1985) permite melhorar a resposta transitória do controle PLL (Phase-Locked Loop) para motores C.C.. O sistema tem dois modos de operação: PLL (para alta exatidão na vizinhança do ponto de operação) e P ou PI , controladores contínuos convencionais, para erros de velocidade grandes.

No modo PLL, o sistema é não linear, e tem sido observado comportamento caótico tanto numa implementação (Campos, 1991) quanto numa simulação (Mahla, 1991; Mahla e Badan Palhares, 1992b). Este tipo de comportamento, definido no capítulo 2 como sensibilidade às condições iniciais, resulta num comportamento pseudo-aleatório das variáveis, e portanto é um fenômeno indesejável no sistema de controle.

Endo e Chua (1988) utilizaram o método de Melnikov para obter tais regiões. Seguindo a mesma metodologia, em (Mahla, 1991) e (Mahla e Badan Palhares, 1992a), utilizaram-se um modelo contínuo e o método de Melnikov, para explicar o comportamento caótico e determinar a região caótica no controle PLL de motores C.C.. Nestes trabalhos, a origem do comportamento caótico foi explicada como uma perturbação periódica senoidal interagindo com um sistema contínuo não linear de segunda ordem.

Mas a perturbação periódica não é a única fonte de comportamento pseudo-aleatório. A simulação direta baseada nos blocos do sistema (Mahla, 1991; Mahla e Badan Palhares, 1992b), e não no modelo de fase, mostra comportamento aperiódico mesmo sem a perturbação. O comportamento caótico pode acontecer num sistema

contínuo com uma perturbação periódica porque é equivalente a um sistema autônomo contínuo de terceira ordem. Mas sem a perturbação, o comportamento caótico não é possível porque um sistema contínuo de segunda ordem não pode exibir este tipo de comportamento -ver, por exemplo, Thompson e Stewart (1986)-. Logo, o modelo de fase contínuo não é apropriado para explicar o caos num PLL de segunda ordem sem perturbações. Este modelo é baseado no valor médio das variáveis, onde o erro de fase é modelado como uma variável contínua. Mas o sinal de erro de fase é realmente uma seqüência de pulsos e pode dar origem, ou contribuir, junto com outras perturbações, ao comportamento caótico.

Poderíamos considerar a influência dos pulsos no sinal de erro em duas formas: Primeira, expandindo os pulsos em série de Fourier e analisar a influência do termo à freqüência fundamental (vista como uma perturbação periódica); segunda, modelando o PLL como um sistema discreto. O primeiro método é aproximado; o segundo é mais exato.

Neste capítulo, obtém-se um modelo discreto para o controlador PLL de segunda ordem de motores C.C.. Este modelo será utilizado para determinar a região estável e as regiões subharmônicas estáveis no espaço dos parâmetros do sistema, em forma muito similar à realizada com o sistema de controle PWM, para o qual determinou-se a região estável e algumas das subharmônicas (Badan Palhares, 1980; Badan Palhares, Bottura e do Val, 1982) e provou-se comportamento caótico (Araújo, 1988; Badan Palhares e Araújo; 1990).

4.2 Descrição do Sistema PLL-dual

Considerando que o comportamento subharmônico e caótico tem origem no modo de operação PLL, este modo é descrito e modelado. O sistema PLL é mostrado na Fig. 1. Os elementos principais são descritos a seguir.

Codificador ótico (encoder)

Os elementos principais do codificador ótico são um disco ranhurado na borda e fixado no eixo do motor, uma fonte luminosa e um detetor ótico. A saída do codificador, $y_f(t)$, é uma seqüência de pulsos cuja freqüência é proporcional à velocidade angular do motor.

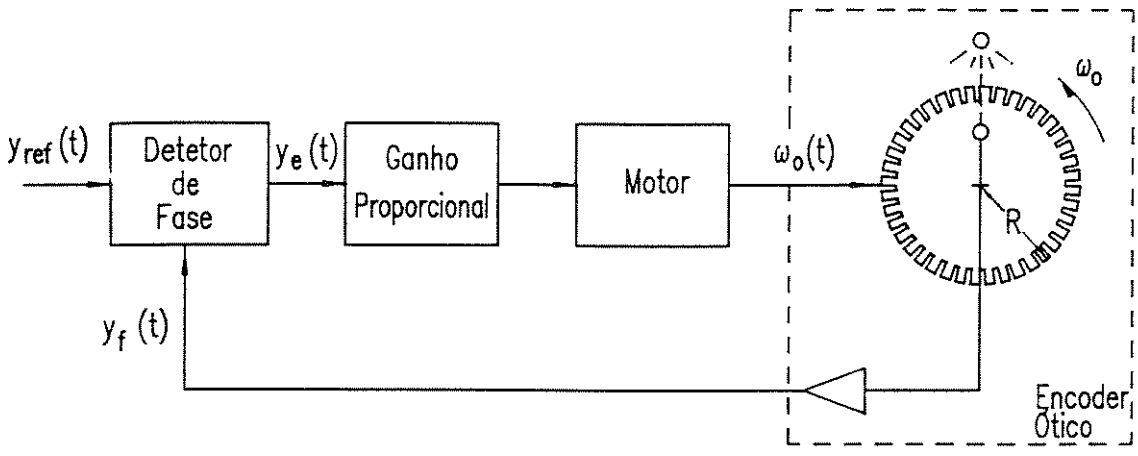


Fig. 4.1. O sistema PLL de segunda ordem para controle de motores C.C.

Detetor de fase

O detetor de fase mais adequado para controle de motores C.C. é o tipo freqüência-fase (Geiger, 1981). A saída do detetor é dada na Tabela 4.1, onde ω_f é a freqüência do sinal de realimentação $y_f(t)$ e ω_{ref} é a freqüência da referência $y_{ref}(t)$.

Condição	Saída do detetor de freqüência-fase
$\omega_f < \omega_{ref}$	1
$\omega_f > \omega_{ref}$	0
$\omega_f = \omega_{ref}$	Saída pulsada periódica com ciclo de trabalho proporcional à diferença de fase entre $y_{ref}(t)$ e $y_f(t)$.

Tabela 4.1. Saída do detetor de freqüência-fase para diferentes condições de ω_f e ω_{ref}.

A Fig. 4.2 mostra a saída do detetor de fase para a condição $\omega_f = \omega_{ref}$.

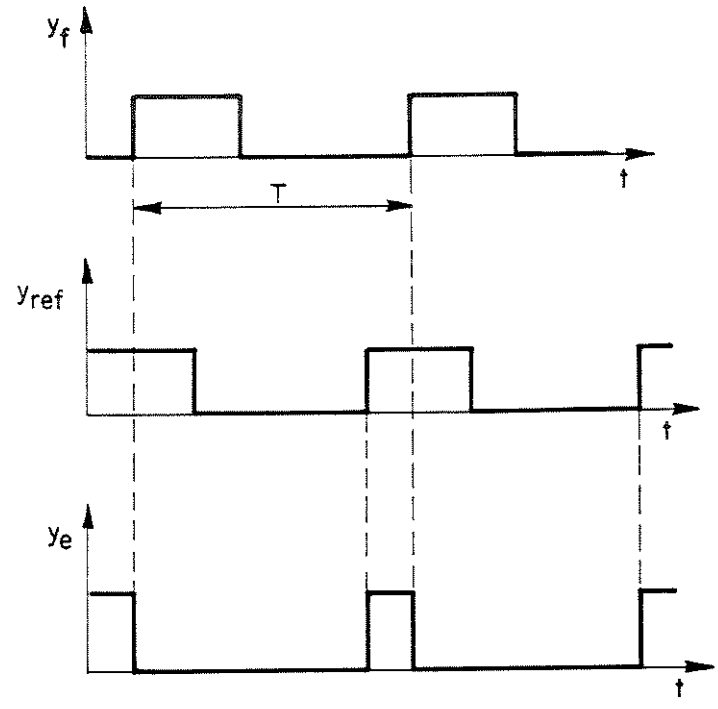


Fig. 4.2. Saída do detetor de freqüência-fase para $\omega_f = \omega_{ref}$.

Ganho proporcional e motor

A função de transferência destes dois blocos é dada por

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}; \tag{4.1}$$

onde K é o ganho do motor multiplicado pelo ganho do controlador, τ é a constante de tempo do motor e onde assume-se uma indutância desprezível no motor.

4.3 Modelo do Sistema PLL

Considerando que y_{ref} é um sinal de freqüência fixa ω_{ref} , podemos assumir a borda de subida de y_{ref} como o evento de referência para o seguinte período T, onde T é fixo e dado por $T = 2\pi / \omega_{ref}$. Os eventos no intervalo $[kT, (k+1)T)$ serão associados ao inteiro k. Assim, por exemplo, $\omega_0(k)$ será a velocidade de saída angular no instante kT e $t_{on}(k)$ será o ciclo de trabalho do sinal de erro $y_e(t)$, começando no instante kT e acabando no instante $kT + t_{on}$.

Velocidade angular de saída $\omega_0(t)$.

Seja $t = kT$ o tempo inicial. Obtemos a velocidade de saída $\omega_0(t)$ no intervalo $kT \le t \le (k+1)T$, como a resposta do bloco linear, representado por $G(s)$, ao sinal de entrada $y_e(t)$. Definindo $\hat{t} = t - kT$, a entrada é dada por $y_e(t) = A\left[u(\hat{t}) - u(\hat{t} - t_{on}(k))\right]$, onde $u(\cdot)$ é um degrau unitário. Então, por transformada de Laplace, com (4.1), obtemos

$$\omega_0(\hat{t}) = \left\{KA + \left[\omega_0(k) - KA\right]e^{-\hat{t}/\tau}\right\}u(\hat{t}) - KA\left[1 - e^{-\left[\hat{t} - t_{on}(k)\right]/\tau}\right]u(\hat{t} - t_{on}(k)), \quad (4.2)$$

como é ilustrado na Fig. 4.3.

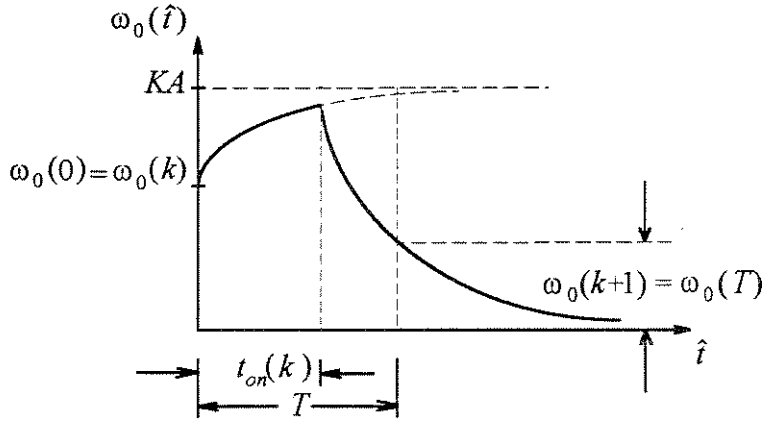


Fig. 4.3. Forma do sinal de saída.

Podemos ver na Fig. 4.3 que é necessário obter $t_{on}(k)$ antes de avaliar $\omega_0(k+1) = \omega_0(\hat{t} = T)$. $t_{on}(k)$ é obtido de *d(k)*, a distância entre o feixe de luz e a primeira borda da prôxima ranhura que passará através do feixe, no instante $t = kT$, como é mostrado na Fig. 4.4. Na mesma figura, definimos D como a distância entre duas ranhuras consecutivas, dada por $D = 2\pi R / N$, onde R é o radio do disco e N é a densidade do codificador (N = número total de ranhuras).

Se assumirmos que $t_{on}(k) < T$, isto é, que $\omega_0(t)$ não diminui abruptamente, então para $0 \le \hat{t} < t_{on}(k)$ temos que

$$d(k) = R\int_0^{t_{on}} \omega_0(\hat{t})d\hat{t} \ , \tag{4.3}$$

onde o instante inicial $\hat{t} = 0$ é marcado pela borda ascendente de $y_e(t)$, a qual define o evento k, e onde a condição inicial para ω_0 é $\omega_0(\hat{t} = 0) = \omega_0(k)$.

Substituindo (4.2) em (4.3), e desenvolvendo, obtemos

$$d(k) = RKAt_{on}(k) + \tau R\left[\omega_0(k) - KA\right]\left(1 - e^{-t_{on}(k)/\tau}\right). \tag{4.4}$$

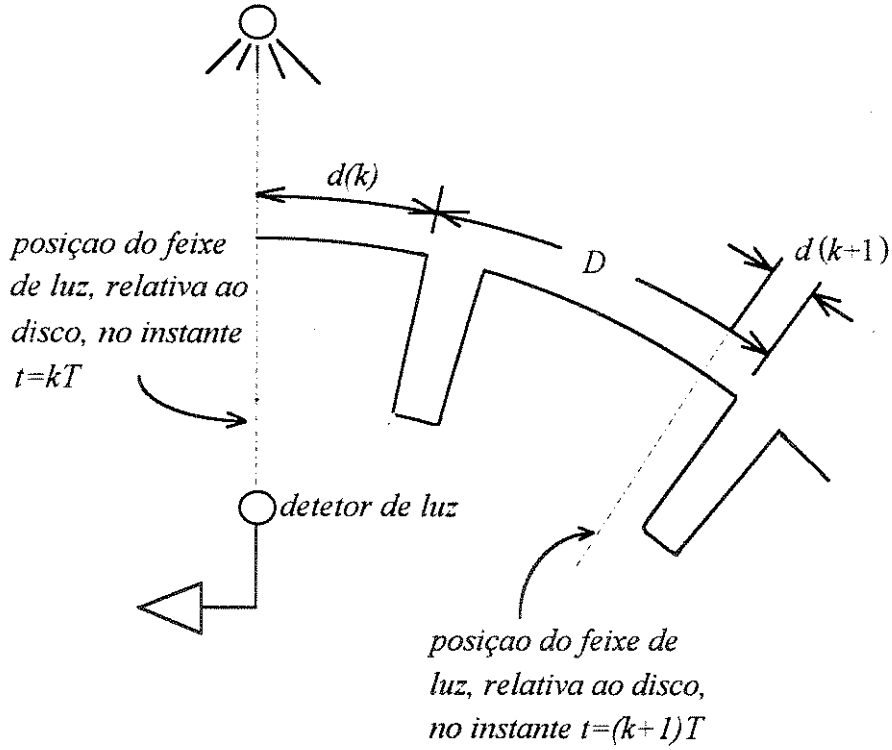


Fig. 4.4. Distâncias entre as ranhuras e as posiçoes de referência.

Então, a eq. (4.4) da $t_{on}(k)$, em forma implícita, como uma função de $d(k)$, $\omega_0(k)$. De (4.2) obtemos $\omega_0(k+1)=\omega_0(\hat{t}=T)$. Com $\hat{t}=T$ em (4.2), $u(\hat{t}=T)=1$; como assumimos $t_{on}(k)<T$, então $u(\hat{t}=T-t_{on}(k))=1$. Desenvolvendo,

$$\omega_0(k+1)=e^{-T/\tau}\left[\omega_0(k)-KA(1-e^{t_{on}(k)/\tau})\right]. \tag{4.5}$$

$D=2\pi R/N$ é dado por

$$D=R\int_{t_{on}(k)}^{T+t_{on}(k+1)}\omega_0(\hat{t})\,d\hat{t}=R\int_{t_{on}(k)}^{T}\omega_0(\hat{t})\,d\hat{t}+R\int_{T}^{T+t_{on}(k+1)}\omega_0(\hat{t})\,d\hat{t}, \tag{4.6a}$$

onde

$$d(k+1)=R\int_{T}^{T+t_{on}(k+1)}\omega_0(\hat{t})\,d\hat{t}. \tag{4.6b}$$

De (4.6) obtemos

$$d(k+1)=D-R\int_{t_{on}(k)}^{T}\omega_0(\hat{t})\,d\hat{t}. \tag{4.7}$$

Calculando esta expressão,

$$d(k+1)=D-R\left\{\tau\left[\omega_0(k)-KA\right]\left[e^{-t_{on}(k)/\tau}-e^{-T/\tau}\right]+KA\,\tau\left[1-e^{[t_{on}(k)-T]/\tau}\right]\right\}. \tag{4.8}$$

Substituindo k por $k+1$ em (4.4), incluindo a expressão resultante para $d(k+1)$ em (4.7), calculando a expressão do lado direito de (4.7) e desenvolvendo, obtemos a equação

$$\begin{aligned}2\pi/N=KAt_{on}(k+1)+\tau\Big[&-KAe^{[t_{on}(k)-T]/\tau}-e^{-T/\tau}\omega_0(k)+KAe^{-T/\tau}+KA\Big]e^{-t_{on}(k+1)/\tau}\\&+\tau\left[\omega_0(k)-KA\right]e^{-t_{on}(k)/\tau},\end{aligned} \tag{4.9}$$

proporcionando, em forma implícita, a relação entre $t_{on}(k+1)$, $t_{on}(k)$ e $\omega_0(k)$, onde $t_{on}(k+1)$ é o mínimo valor tal que (4.9) é satisfeita.

As eqs. (4.5) e (4.9) são suficientes para descrever o comportamento do sistema, resultando num sistema bi-dimensional do tipo

$$\omega_0(k+1) = f(\omega_0(k), t_{on}(k)) \tag{4.10a}$$

$$g(t_{on}(k+1), \omega_0(k), t_{on}(k)) = cte., \tag{4.10b}$$

onde $\omega_0(k+1)$ é dado explicitamente em (10a) e $t_{on}(k+1)$ é dado em forma implícita em (4.10b).

O modelo acima é válido assumindo $t_{on}(k) < T$. Se esta condição não for válida, o modelo discreto muda e uma forte não linearidade é acrescentada, caso que analisaremos mais adiante. Inicialmente, analisaremos o caso submetido a esta restrição, que por ser mais simples permite obter uma condição algébrica para estabilidade local do ponto fixo.

4.4 Análise de estabilidade local

A seguir, aborda-se a existência de um ponto fixo no sistema descrito por uma recorrência discreta, e as condições para que este ponto, que é de período um, seja estável.

4.4.1 Condições de existência de pontos fixos

De (4.5) e (4.9), as equações que descrevem o sistema são

$$\omega_0(k+1) = e^{-T/\tau}\left[\omega_0(k) - KA(1 - e^{t_{on}(k)/\tau})\right], \tag{4.11a}$$

$$\begin{aligned} 2\pi / N = {} & KAt_{on}(k+1) + \tau\left[-KAe^{[t_{on}(k)-T]/\tau} - e^{-T/\tau}\omega_0(k) + KAe^{-T/\tau} + KA\right]e^{-t_{on}(k+1)/\tau} \\ & + \tau\left[\omega_0(k) - KA\right]e^{-t_{on}(k)/\tau}, \end{aligned} \tag{4.11b}$$

onde ω_0 é a velocidade angular de saída do motor no início do k-ésimo pulso do sinal de erro e $t_{on}(k)$ é o ciclo de trabalho do k-ésimo pulso do sinal de erro; $t_{on}(k+1)$ é o mínimo valor tal que (4.11b) é satisfeita, e onde assume-se que $t_{on}(k) < T$.

Os parâmetros considerados em (4.11) são os seguintes:

T : período do sinal pulsado de referência $y_{ref}(t)$,
τ : constante de tempo do motor,
K : ganho proporcional,
A : amplitude dos pulsos do sinal de erro $y_e(t)$,
N : densidade do encoder ótico (ou número total de ranhuras).

Num ponto fixo, denotado por (ω_0^*, t_{on}^*), são satisfeitas as igualdades $\omega_0^*(k+1) = \omega_0^*(k)$ e $t_{on}^*(k+1) = t_{on}^*(k)$. De (4.11) obtemos como condições para a existência de um ponto fixo, as seguintes equações:

$$\omega_0^* = e^{-T/\tau}\left[\omega_0^* - KA(1-e^{t_{on}^*/\tau})\right], \tag{4.12a}$$

$$\begin{aligned} 2\pi / N = KAt_{on}^* + \tau\Big[-KAe^{\left[t_{on}^*-T\right]/\tau} - e^{-T/\tau}\omega_0^* + KAe^{-T/\tau} + KA\Big]e^{-t_{on}^*/\tau} \\ + \tau\left[\omega_0^* - KA\right]e^{-t_{on}^*/\tau}. \end{aligned} \tag{4.12b}$$

De (4.12a) obtém-se

$$\omega_0^* = -\frac{KAe^{-T/\tau}}{(1-e^{-T/\tau})}(1-e^{t_{on}^*/\tau}), \tag{4.13}$$

onde definindo

$$K_1 = \frac{KAe^{-T/\tau}}{(1-e^{-T/\tau})}, \tag{4.14}$$

temos que, com K, A, T, $t > 0$ então $K_1 > 0$ e

$$\omega_0^* = K_1(e^{t_{on}^*/\tau} - 1). \tag{4.15}$$

De (4.15) obtém-se

$$t_{on}^* = \tau \ln\left[1 + \frac{\omega_0^*}{K_1}\right]; \tag{4.16}$$

substituindo (4.16) em (4.12b) e desenvolvendo, para ω_0 deduz-se a expressão

$$KA\ln\left[1+\frac{\omega_0^*}{K_1}\right]+\frac{KAe^{-T/\tau}+\omega_0^*(1-e^{-T/\tau})}{\left[1+\frac{\omega_0^*}{K_1}\right]}=KAe^{-T/\tau}+\frac{2\pi}{N\tau}\,. \tag{4.17}$$

Definindo

$$x^*=1+\frac{\omega_0^*}{K_1}\,, \tag{4.18}$$

substituindo (4.18) em (4.17), definindo $K_2=(1-e^{-T/\tau})$, então $K_2>0$. Desenvolvendo,

$$\ln x^*-\left[e^{-T/\tau}-\frac{K_1K_2}{KA}\right]\frac{1}{x^*}=e^{-T/\tau}+\frac{2\pi}{KAN\tau}-\frac{K_1K_2}{KA}. \tag{4.19}$$

Como

$$\frac{K_1K_2}{KA}=e^{-T/\tau}, \tag{4.20}$$

de (4.19) obtém-se

$$\ln x^*=\frac{2\pi}{KAN\tau}\,, \tag{4.21a}$$

ou

$$x^*=e^{2\pi/KAN\tau}\,. \tag{4.21b}$$

De (4.21b) observamos que, como K, A , N , τ > 0, então $x^*>1$; com $KAN\tau\to\infty$, $x^*\to 1$, e em geral $x^*\neq 1$. (4.21b) é coerente com a interpretação fisica da eq. (4.18), segundo a qual a velocidade angular ω_0 deve ser positiva. Como $2\pi/KAN\tau$ > 0, podemos concluir então que o sistema sempre possui um único ponto fixo, definido pela eq. (4.21) e dado por

$$\begin{bmatrix}\omega_0^*\\ t_{on}^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}K_1(x^*-1)\\ \tau\ln x^*\end{bmatrix}, \tag{4.22}$$

como pode-se deduzir de (4.16) e (4.18), solução que pode-se escrever alternativamente como

$$\begin{bmatrix} \omega_0^* \\ t_{on}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1(e^{2\pi/KAN\tau} - 1) \\ \dfrac{2\pi}{KAN} \end{bmatrix}. \tag{4.23}$$

4.4.2 Estabilidade do ponto fixo

As equações (4.11a) e (4.11b) correspondem a um sistema bidimensional do tipo (4.10). Expandindo $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ em série de Taylor, e retendo somente os termos lineares, obtemos as equações variacionais

$$\delta\omega_0(k+1) = \frac{\partial f}{\partial\omega_0(k)}\delta\omega_0(k) + \frac{\partial f}{\partial t_{on}(k)}\delta t_{on}(k), \tag{4.24a}$$

$$\frac{\partial g}{\partial t_{on}(k+1)}\delta t_{on}(k+1) + \frac{\partial g}{\partial t_{on}(k)}\delta t_{on}(k) + \frac{\partial g}{\partial\omega_0(k)}\delta\omega_0(k) = 0, \tag{4.24b}$$

onde $\delta\omega_0(k+1) \equiv \omega_0(k+1) - \omega_0^*$, $\delta\omega_0(k) \equiv \omega_0(k) - \omega_0^*$, $\delta t_{on}(k+1) \equiv t_{on}(k+1) - t_{on}^*$, $\delta t_{on}(k) \equiv t_{on}(k) - t_{on}^*$, e onde todas as derivadas parciais são avaliadas no ponto fixo. Reescrevendo na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \delta\omega_0(k+1) \\ \delta t_{on}(k+1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} \dfrac{\partial f}{\partial\omega_0(k)} & \dfrac{\partial f}{\partial t_{on}(k)} \\ -\dfrac{\dfrac{\partial g}{\partial\omega_0(k)}}{\dfrac{\partial g}{\partial t_{on}(k+1)}} & -\dfrac{\dfrac{\partial g}{\partial t_{on}(k)}}{\dfrac{\partial g}{\partial t_{on}(k+1)}} \end{array} \right]_{(\omega_0^*, t_{on}^*)} \begin{bmatrix} \delta\omega_0(k) \\ \delta t_{on}(k) \end{bmatrix}, \tag{4.25}$$

ou

$$\delta(k+1) = H\,\delta(k), \tag{4.26}$$

onde

$$\delta(\cdot) = (\delta\omega_0(\cdot), \delta t_{on}(\cdot)). \tag{4.27}$$

Avaliando os elementos de H no ponto fixo (ω_0^*, t_{on}^*), obtemos, usando (4.15) e (4.18),

$$h_{11} = \left.\frac{\partial f}{\partial \omega_0(k)}\right|_{(\omega_0^*, t_{on}^*)} = e^{-T/\tau}; \tag{4.28a}$$

$$h_{12} = \left.\frac{\partial f}{\partial t_{on}(k)}\right|_{(\omega_0^*, t_{on}^*)} = \frac{KA}{\tau} e^{-T/\tau} x^*; \tag{4.28b}$$

$$h_{21} = -\left.\frac{\dfrac{\partial g}{\partial \omega_0(k)}}{\dfrac{\partial g}{\partial t_{on}(k+1)}}\right|_{(\omega_0^*, t_{on}^*)} = \frac{-K_3}{K_4(x^*-1)}; \tag{4.28c}$$

$$h_{22} = -\left.\frac{\dfrac{\partial g}{\partial t_{on}(k)}}{\dfrac{\partial g}{\partial t_{on}(k+1)}}\right|_{(\omega_0^*, t_{on}^*)} = \frac{-\dfrac{K_5}{K_4} x^* - 1}{(x^*-1)}. \tag{4.28d}$$

onde $K_3 = \tau(1-e^{-T/\tau})$, $K_4 = K_1 e^{T/\tau}$ e $K_5 = K_1(-2+e^{-T/\tau})$.

Sejam λ_1 e λ_2 os autovalores de H, e assumindo $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então existem duas possibilidades para os autovalores: ambos são reais ou λ_1 e λ_2 são complexos conjugados. Na primeira hipótese, é possível (Hirsch e Smale, 1974; Thompson e Stewart, 1986) encontrar uma transformação de similaridade de coordenadas inversível, tal que a recorrência pode-se escrever na forma desacoplada ou diagonal

$$\begin{aligned} u(k+1) &= \lambda_1 u(k) \\ v(k+1) &= \lambda_2 v(k); \end{aligned}$$

portanto, o sistema é assintoticamente estável na vizinhança do ponto fixo se $|\lambda_{1,2}| < 1$, e é instável na vizinhança do ponto fixo se λ_1 ou λ_2 é maior do que um em valor absoluto.

Se os autovalores λ_1 e λ_2 são complexos conjugados, isto é, da forma

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta ,$$

é possível encontrar (Hirsch e Smale, 1974; Thompson e Stewart, 1986) uma transformação de coordenadas invertível tal que a eq. (4.26) pode ser reescrita como

$$u(k+1) = \alpha\, u(k) - \beta\, v(k)$$

$$v(k+1) = \beta\, u(k) + \alpha\, v(k) ;$$

expressando os autovalores λ_1 e λ_2 na forma exponencial

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta = \rho e^{i\theta}$$

$$\lambda_2 = \alpha - i\beta = \rho e^{-i\theta} ,$$

pode-se provar (Thompson e Stewart, 1986) que o ponto fixo é estável se $\rho < 1$ e que é instável se $\rho > 1$. Para $\rho = 1$ a instabilidade é incipiente, e o ponto fixo é não hiperbólico (v. definição 1.40).

O critério de estabilidade para mapeamentos bidimensionais, pode-se resumir, então, a considerar a posição dos autovalores no plano complexo. O sistema é assintóticamente estável na vizinhança do ponto fixo se ambos autovalores estão dentro do círculo unitário.

Pode-se definir (Thompson e Stewart, 1986) três formas nas quais o sistema atravessa a fronteira de estabilidade:

- **Divergência ou Fold cíclica:** Os dois autovalores são reais e o círculo unitário é atravessado por um dos autovalores no ponto (1,0) do plano complexo, enquanto o outro autovalor é menor do que 1 em valor absoluto.

- **"Flip":** Os dois autovalores são reais e o círculo unitário é atravessado por um dos autovalores no ponto (-1,0) do plano complexo, enquanto que o outro autovalor é menor do que um em valor absoluto.

- **Instabilidade de Neimark:** Os dois autovalores são complexos conjugados e atravessam o círculo unitário com um ângulo $\phi \in \{\phi / \phi \neq 0, \pi\}$.

A Fig. 4.5 ilustra estes três casos.

Estes três tipos de transição para o comportamento instável podem ser caracterizados no plano dos invariantes $(\mathcal{T},\mathcal{D})$ da matriz H, onde $\mathcal{T}$ é o traço de H e $\mathcal{D}$ é o determinante de H (Thompson e Stewart, 1986) .

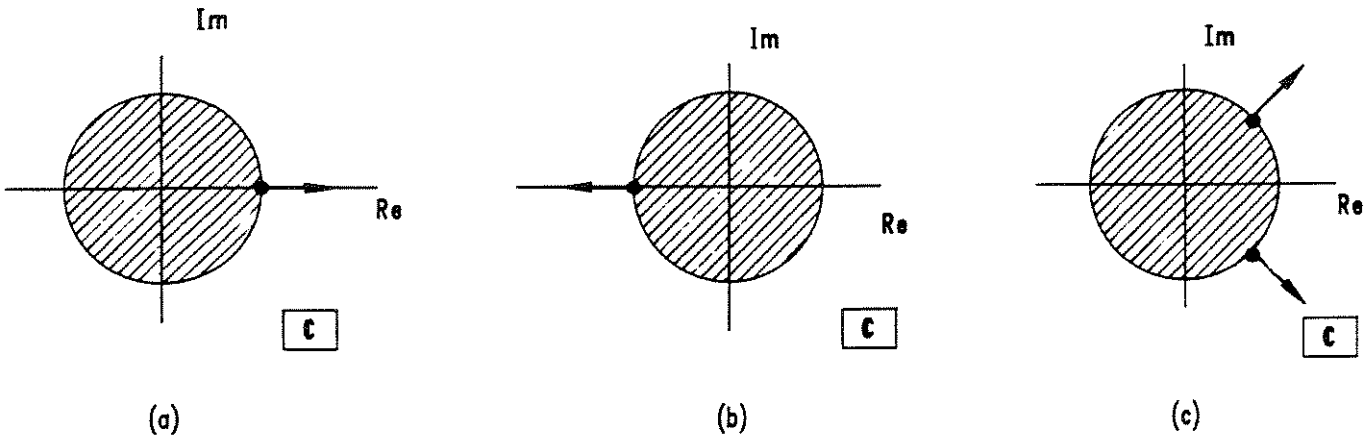


Fig. 4.5. Formas de perda de estabilidade de um ciclo numa recorrência bidimensional. (a) Divergência ou Fold cíclica. (b) "Flip". (c) Neimark.

Os autovalores de H são dados pela equação característica

$$\lambda^2 - (h_{11} + h_{22})\lambda + (h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}) = 0, \tag{4.29}$$

onde

$$\mathcal{T} = h_{11} + h_{22}$$

e

$$\mathcal{D} = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} .$$

Expressando os autovalores em termos destes invariantes,

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\mathcal{T} \pm \sqrt{\mathcal{T}^2 - 4\mathcal{D}}\right], \tag{4.30}$$

donde podemos obter as fronteiras para cada tipo de comportamento.

Divergência: λ_1 e λ_2 são reais; um deles é igual a 1. De (4.30),

$$\frac{1}{2}\left[\mathcal{T} \pm \sqrt{\mathcal{T}^2 - 4\mathcal{D}}\right] = 1,$$

donde desenvolvendo obtemos

$$\mathcal{T} - \mathcal{D} = 1 \,. \tag{4.31}$$

"Flip": λ_1 e λ_2 são reais; um deles é igual a -1. De (4.30),

$$\frac{1}{2}\left[\mathcal{T} \pm \sqrt{\mathcal{T}^2 - 4\mathcal{D}}\right] = -1 \,,$$

donde

$$\mathcal{T} + \mathcal{D} = -1 \,. \tag{4.32}$$

Neimark: λ_1 e λ_2 são complexos conjugados. Obtemos

$$\rho = 1 = \sqrt{\left[\mathrm{Re}(\lambda_{1,2})\right]^2 + \left[\mathrm{Im}(\lambda_{1,2})\right]^2} \,;$$

de (4.30),

$$\rho = \left(\frac{1}{2}\mathcal{T}\right)^2 + \left(\frac{4\mathcal{D} - \mathcal{T}^2}{4}\right) = 1 \,,$$

donde a fronteira é dada por

$$\mathcal{D} = 1. \tag{4.33}$$

As eqs. (4.31), (4.32) e (4.33) definem as fronteiras da região estável, como é ilustrado na Fig. 4.6, onde o triângulo hachurado corresponde à região de estabilidade, e a parábola constitui a fronteira entre os autovalores complexos e os autovalores reais.

De (4.28) obtemos os invariantes de H

$$\mathcal{T} = h_{11} + h_{22} = \frac{(3e^{-T/\tau} - e^{-2T/\tau})x^* - 1}{x^* - 1} \tag{4.34a}$$

$$\mathcal{D} = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = e^{-T/\tau} \tag{4.34b}$$

Da Fig. 4.6, a região estável é definida por

$$\mathcal{T} - \mathcal{D} < 1 \tag{4.35a}$$

$$\mathcal{T} + \mathcal{D} > -1 \tag{4.35b}$$

$$\mathcal{D} < 1. \tag{4.35c}$$

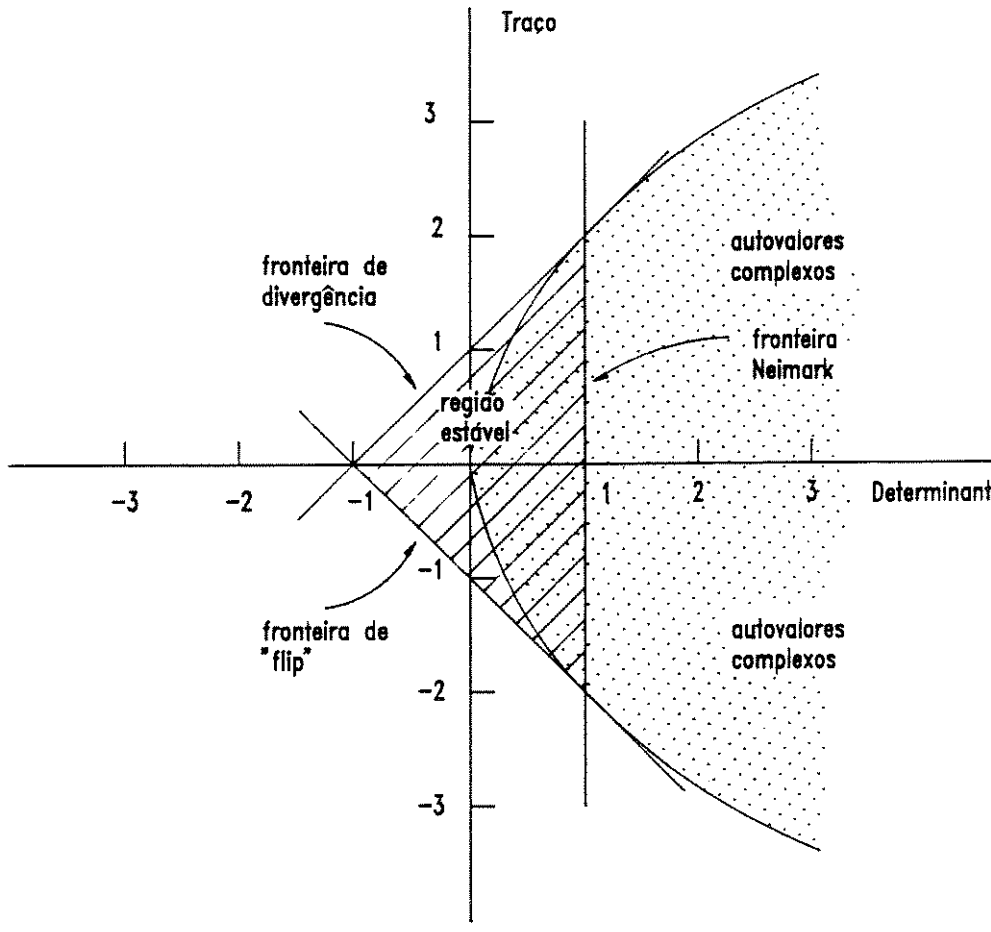


Fig. 4.6. Região estável e fronteiras de divergência, "flip" e Neimark. A parábola define a fronteira entre autovalores complexos e autovalores reais (Thompson e Stewart, 1986).

Avaliando (4.35) em termos da eq. (4.34), obtemos as condições de estabilidade

$$\frac{(3e^{-T/\tau}-e^{-2T/\tau})x^*-1}{x^*-1}-e^{-T/\tau}<1 \qquad (4.36a)$$

$$\frac{(3e^{-T/\tau}-e^{-2T/\tau})x^*-1}{x^*-1}+e^{-T/\tau}>-1 \qquad (4.36b)$$

$$e^{-T/\tau} < 1 . \tag{4.36c}$$

A desigualdade (4.36c) sempre é satisfeita. Examinamos a seguir as desigualdades (4.36a) e (4.36b). Assumimos $x^* \neq 1$, isto é, $\omega_0 \neq 0$. Multiplicando (4.36a) e (4.36b) por $(x^* - 1)$, como $x^* > 1$, a desigualdade é mantida. Desenvolvendo, obtemos

$$x^* < \frac{1}{e^{T/\tau} + e^{-T/\tau} - 2}, \tag{4.37a}$$

$$x^* > \frac{1 + 2e^{T/\tau}}{4 - e^{-T/\tau} + e^{T/\tau}} . \tag{4.37b}$$

A interseção das regiões definidas por (4.37) constituem a região estável no plano $(x^*, T/\tau)$ onde $x^* = e^{2\pi/K\Delta N\tau}$. Como a desigualdade (4.36c) sempre é satisfeita, não existe instabilidade de Neimark. A transição para a instabilidade pode ser do tipo divergência quando a fronteira é atravessada na borda da região (4.37a), ou do tipo "flip", quando a fronteira é atravessada na borda da região (4.37b).

A Fig. 4.7a mostra a região definida pelas desigualdades (4.37a) e (4.37b). A curva 1 corresponde à fronteira de (4.37b), enquanto que a curva 2 é a fronteira de (4.37a). A Fig. 4.7b é uma amplificação de 4.7a, onde ainda é incluída uma terceira restrição inerente ao sistema modelado; como vimos, $\omega_0 \geq 0$ $(\Rightarrow x^* \geq 1)$ e assumimos $x^* \neq 1$, isto é, $x^* > 1$. A reta $x^* = 1$ interseta a fronteira de estabilidade exatamente no ponto de interseção das curvas

$$x^* = \frac{1}{e^{T/\tau} + e^{-T/\tau} - 2}$$

e

$$x^* = \frac{1 + 2e^{T/\tau}}{4 - e^{-T/\tau} + e^{T/\tau}} .$$

O ponto de interseção é $T/\tau = 0.9624236$, $x^* = 1$. A Fig. 4.7b mostra a região de comportamento possível e estável. Concluimos finalmente que a transição para a instabilidade deve ser do tipo divergência.

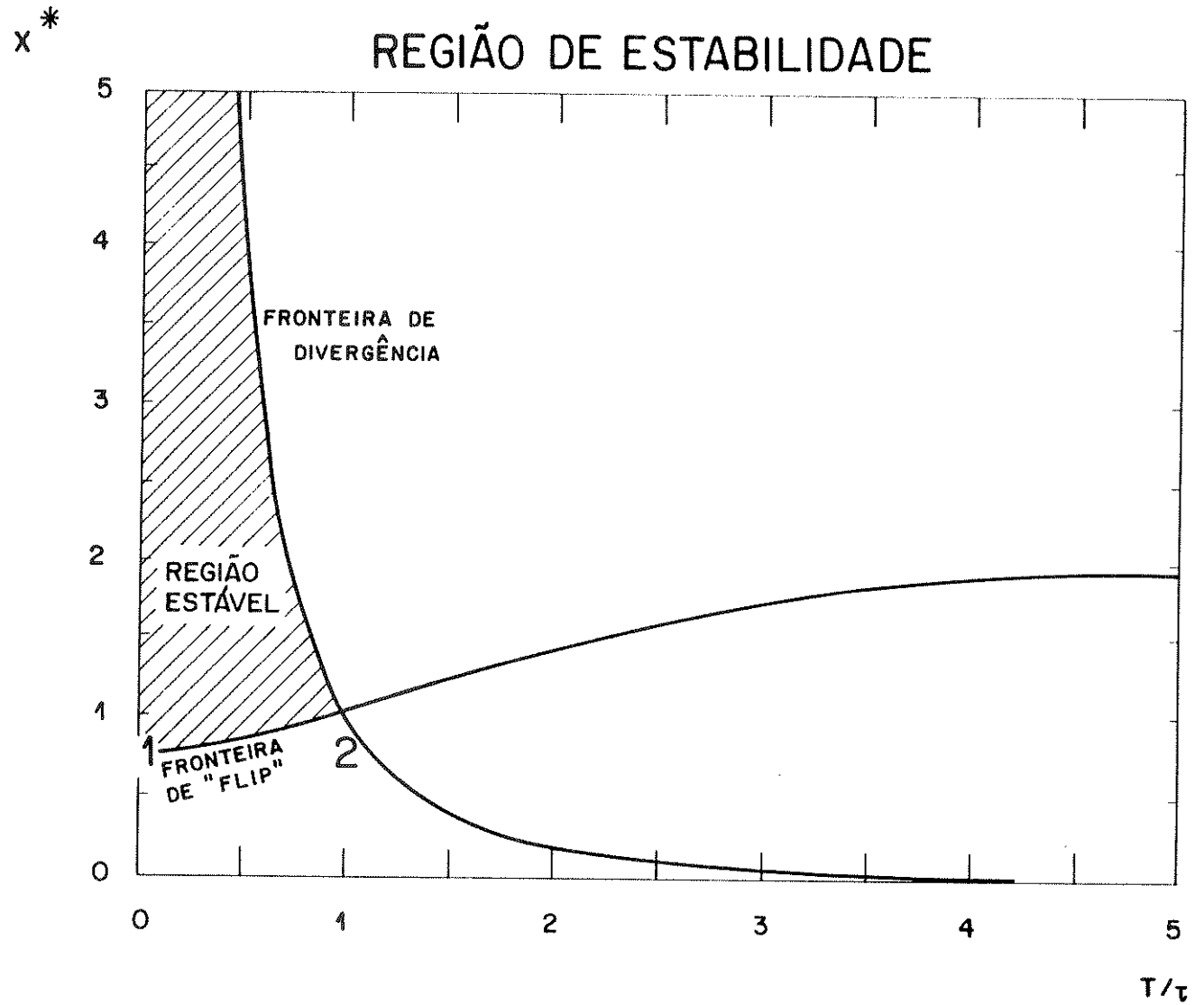


Fig. 4.7a. Região de estabilidade definida pelas desigualdades (4.37).

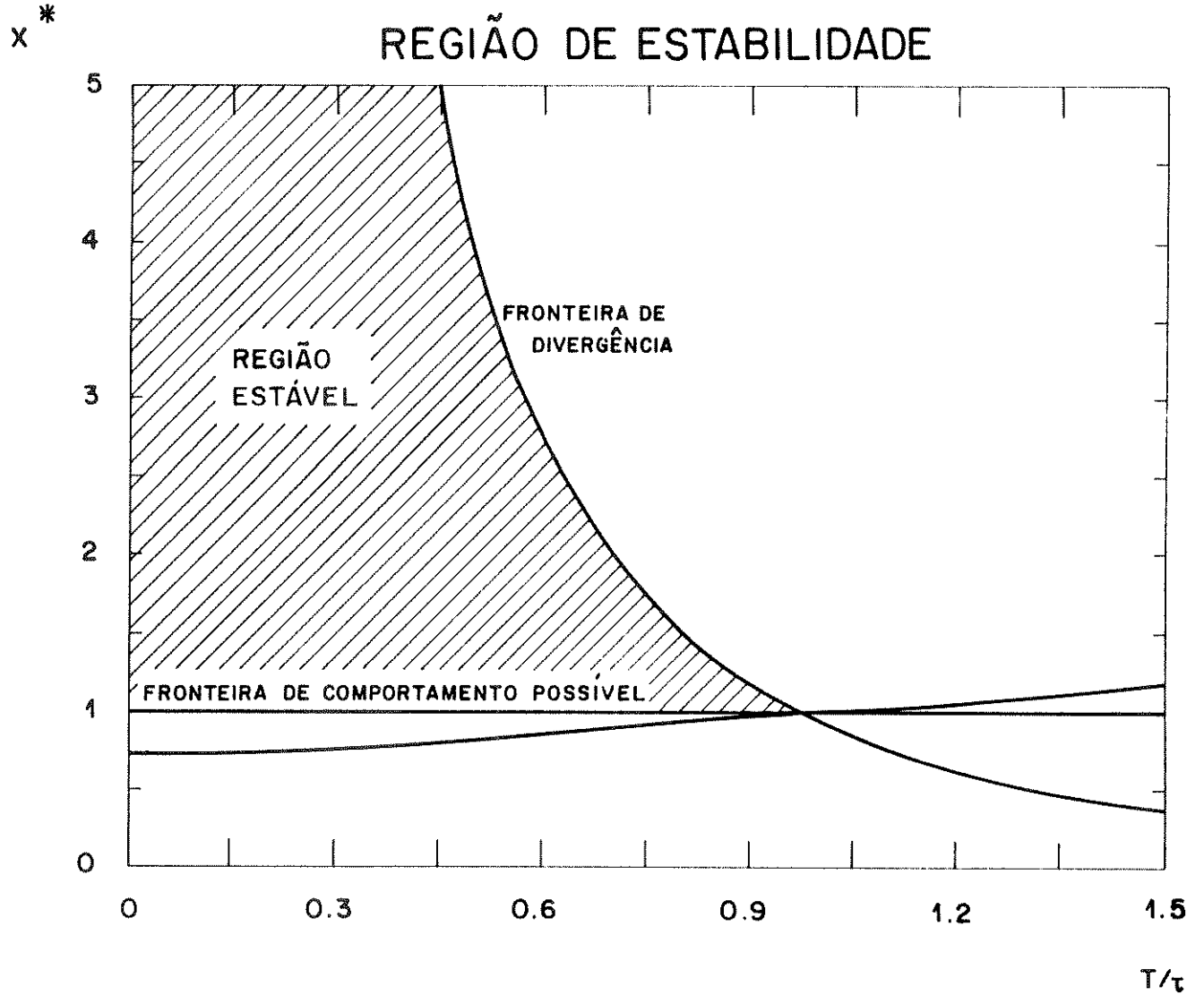


Fig. 4.7b. Região de comportamento possível e estável.

4.5. Conclusões

Podemos concluir que o sistema possui um único ponto fixo, o qual é estável na região definida por

$$1 < x^* < \frac{1}{e^{T/\tau} + e^{-T/\tau} - 2}\ , \tag{4.38}$$

onde $x^* = e^{2\pi/KAN\tau}$. Observamos que a restrição $x^* > 1$ sempre é satisfeita porque $2\pi / KAN\tau > 0$. Se T/τ > 0.9624236, o ponto fixo é sempre instável. Logo, o parâmetro T deve ser o menor possível para permitir uma maior faixa de variação para os outros parâmetros. Uma forma de melhorar o desempenho, na implementação, é aumentar N (número de ranhuras do encoder ótico). Como o custo do encoder é diretamente proporcional a N, uma forma barata de implementação é multiplicar o número de pulsos da saída, mantendo o sincronismo. Existem na literatura várias formas de implementação, sendo a mais comum o multiplicador de freqüência baseado em PLL.

5

Modelo discreto global: Regiões estáveis e subharmônicas no espaço de parâmetros

5.1 Introdução

O modelo discreto desenvolvido no capítulo 4 para o PLL com detetor de freqüência-fase (Badan Palhares e Mahla, 1993) é, até onde sabemos, o primeiro modelo discreto desenvolvido para um PLL, e também o primeiro a levar em consideração o fato de que o sinal de erro é uma seqüência de pulsos. As equações (4.11) são o suficientemente simples como para permitir determinar o ponto fixo de período um e a sua região de estabilidade, e delas obtém-se um critério para o projeto do sistema.

Contudo, o modelo tem uma restrição importante: assumiu-se que $t_{on} < T$. Esta restrição é satisfeita em regime, na condição $\omega_f = \omega_{ref}$, com $t_{on}^* < T$, ou, como infere-se da eq. (4.23), se $2\pi / KAN < T$. Portanto, a validade da análise de estabilidade é somente local. Um modelo global, obtido apartir da eq. (4.23) mas sem a restrição $t_{on} < T$, e que considera as outras duas condições possíveis para ω_{ref}, isto é, $\omega_f < \omega_{ref}$ e $\omega_f > \omega_{ref}$, foi desenvolvido por (Mira, Carcassès, Badan Palhares e Mahla, 1993). Este modelo global é um híbrido entre as expressões algébricas e a especificação do comportamento do PLL nas condições envolvidas nas restrições do modelo local.

A partir deste modelo discreto estendido, e utilizando programas anteriormente desenvolvidos pelo grupo do Prof. Mira (I.N.S.A., Toulouse, França), obtiveram-se as regiões estáveis do ponto fixo e das subharmônicas, no espaço de parâmetros do sistema.

5.1 Modelo adimensional

No modelo (4.11), definimos as variáveis adimensionais

$$r = \frac{t_{on}}{\tau} \quad , \tag{5.1}$$

onde r é o ciclo de trabalho adimensional, e

$$w = N\tau\omega_0 \ , \tag{5.2}$$

onde w é a velocidade angular adimensional: e os parâmetros adimensionais

$$\alpha = e^{-T/\tau} \tag{5.3}$$

e

$$\beta = KAN\tau \ . \tag{5.4}$$

Então, substituindo as expressões (5.1) - (5.4) em (4.11), obtemos o modelo adimensional:

$$w(k+1) = \alpha w(k) + \alpha\beta e^{r(k)} - \alpha\beta \tag{5.5a}$$

$$2\pi = \beta r(k+1) + (-\alpha\beta e^{r(k)} - \alpha w(k) + \alpha\beta + \beta)e^{-r(k+1)} + (w(k) - \beta)e^{-r(k)} \ . \tag{5.5b}$$

No sistema fisicamente realizável, existem restrições para os parâmetros α e β, a partir das restrições em K, A, N, τ, T. Considerando que todos estes parâmetros são positivos e finitos, obtemos as seguintes restrições para α e β:

$$0 < \alpha < 1 \qquad \text{e} \qquad 0 < \beta < \beta_{max} \ , \tag{5.6}$$

onde β_{max} é algum valor positivo finito determinado pelos valores máximos de K, A, N, τ.

Além das restrições fisicas (5.6), existem no modelo (5.5) as restrições para a variável $r(k)$, que provém das restrições do modelo (4.11),

$$t_{on}(k) \le T, \tag{5.7}$$

e para a variável $w(k)$, que provém da velocidade máxima

$$\omega_0 \leq KA\,. \tag{5.8}$$

Das definições (5.1) - (5.4), substituindo em (5.7) e (5.8), obtemos para $r(k)$ e $w(k)$ as restrições

$$w(k) \leq \beta \tag{5.9}$$

e

$$r(k) \leq \ln\,(1/\alpha), \tag{5.10}$$

onde o próprio sistema (ou simulação) restringe o valor de $w(k)$ na forma indicada por (5.9) e o valor de $r(k)$ deve ser controlado durante a simulação para que não exceda o limite dado por (5.10), além do qual o modelo não é válido.

Da relação $\omega_{ref} = 2\pi / NT$ obtemos uma velocidade adimensional de referência, dada por

$$w_{ref} = 2\pi\tau / T, \tag{5.11}$$

equivalente a

$$w_{ref} = \frac{2\pi}{\ln(1/\alpha)}\,, \tag{5.12}$$

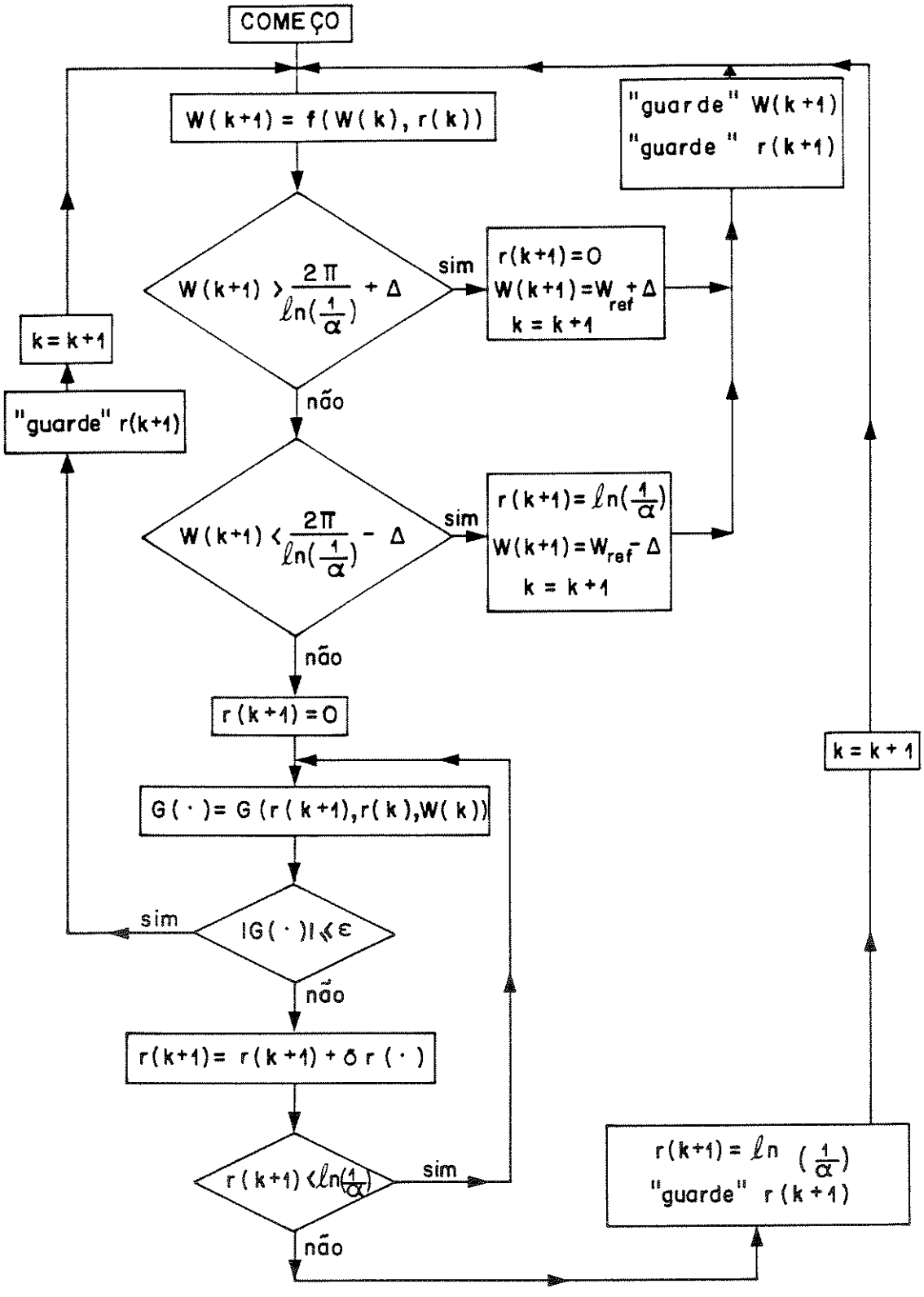
e como $w(k) \leq \beta$, w também está restrita ao valor máximo β, donde de (5.12) obtemos a restrição que relaciona os parâmetros α e β,

$$\frac{2\pi}{\ln(1/\alpha)} \leq \beta\,. \tag{5.13}$$

A restrição (5.10), equivalente a (5.7), pode ser evitada definindo $t_{on}(k+1) = T$ sempre que na rotina de solução da eq. (4.11b) deteta-se que a solução para t_{on} é superior a T, o qual pode-se verificar antes de calcular a solução, artificio que permite ao mesmo tempo considerar o retraso inicial na resposta do detetor de fase.

De forma análoga, o comportamento real do PLL para $\omega_0 > \omega_{ref} + \delta$ ou $\omega_0 < \omega_{ref} - \delta$ pode ser simulado fazendo $t_{on}(k+1) = 0$ ou $t_{on}(k+1) = T$ respectivamente.

O diagrama da Fig. 5.1 mostra a forma em que as restrições (5.7) e $\omega_0 \cong \omega_{ref}$ são evitadas. No diagrama, $\Delta = N\tau\delta$, $f(\cdot)$ denota a eq. (5.5a) e $G(\cdot)$ denota a eq. (5.5b).



$\delta\, r\,(\cdot)$: *intervalo dado pela rotina de busca de solução (zero); inclui método de Newton.*

Fig. 5.1. Modelo discreto global para o sistema PLL de controle de motores C.C.

5.2 Descrição dos programas e resultados

O modelo global, descrito através da Fig. 5.1, foi introduzido pelos Profs. Mira e Carcassès nos programas para análise de sistemas dinâmicos anteriormente criados pelo seu grupo no I.N.S.A.., os quais permitem caracterizar o comportamento do sistema no espaço de estado e no espaço de parâmetros, obtendo-se assim um conjunto de três programas, com cujos resultados prepara-se uma publicação conjunta e dos quais incluimos uma amostra representativa.

5.2.1 Descrição dos programas

- **Programa de caracterização qualitativa no espaço de parâmetros**

O programa grafa o plano (α,β) para um valor escolhido do parâmetro Δ. O plano (α,β) é subdividido em pequenos elementos retangulares, e para cada valor de (α,β) é testada a condição $x^* = T^k x$, e a estabilidade do ponto de período k, onde T é a transformação definida pela recorrência e $k = n, n+1, \ldots m$, $(n,m \in N;\ n < m)$. Para cada valor de k é atribuída uma cor diferente, se o ponto fixo for estável. Subharmônicas de ordem maior, comportamento quase-periódico e caótico são representados pela cor preta. Neste programa, o comportamento quase-periódico não é considerado separadamente do comportamento caótico porque a transformação discreta foi obtida a partir de uma transformação de Poincaré simples. Transformações de Poincaré de ordem maior, com amostragem simultânea de duas ou mais frequências base, podem ser obtidas em sistemas que têm preturbações com duas ou mais frequências base.

- **Programa para visualizar domínios de atração**

O programa grafa o domínio de atração dos pontos de equilíbrio, subdividindo o espaço de estado em pequenos elementos retangulares, e simulando a recorrência com diferentes condições iniciais, a partir das quais a solução converge para um dos pontos de equilíbrio. Às condições iniciais que convergem a um ponto com o mesmo período, é atribuida a mesma cor (os pontos da órbita convergindo ao ponto fixo são excluídos).

- **Programa para visualização de órbitas no espaço de estado**

O programa simula a recorrência a partir de um conjunto de condições iniciais diferentes, imprimindo os pontos da órbita. Isto permite visualizar a forma das órbitas no plano de fase.

5.2.2 Resultados

As Figs. 5.2 - 5.7 mostram o plano (α,β) para diferentes valores do parâmetro Δ.

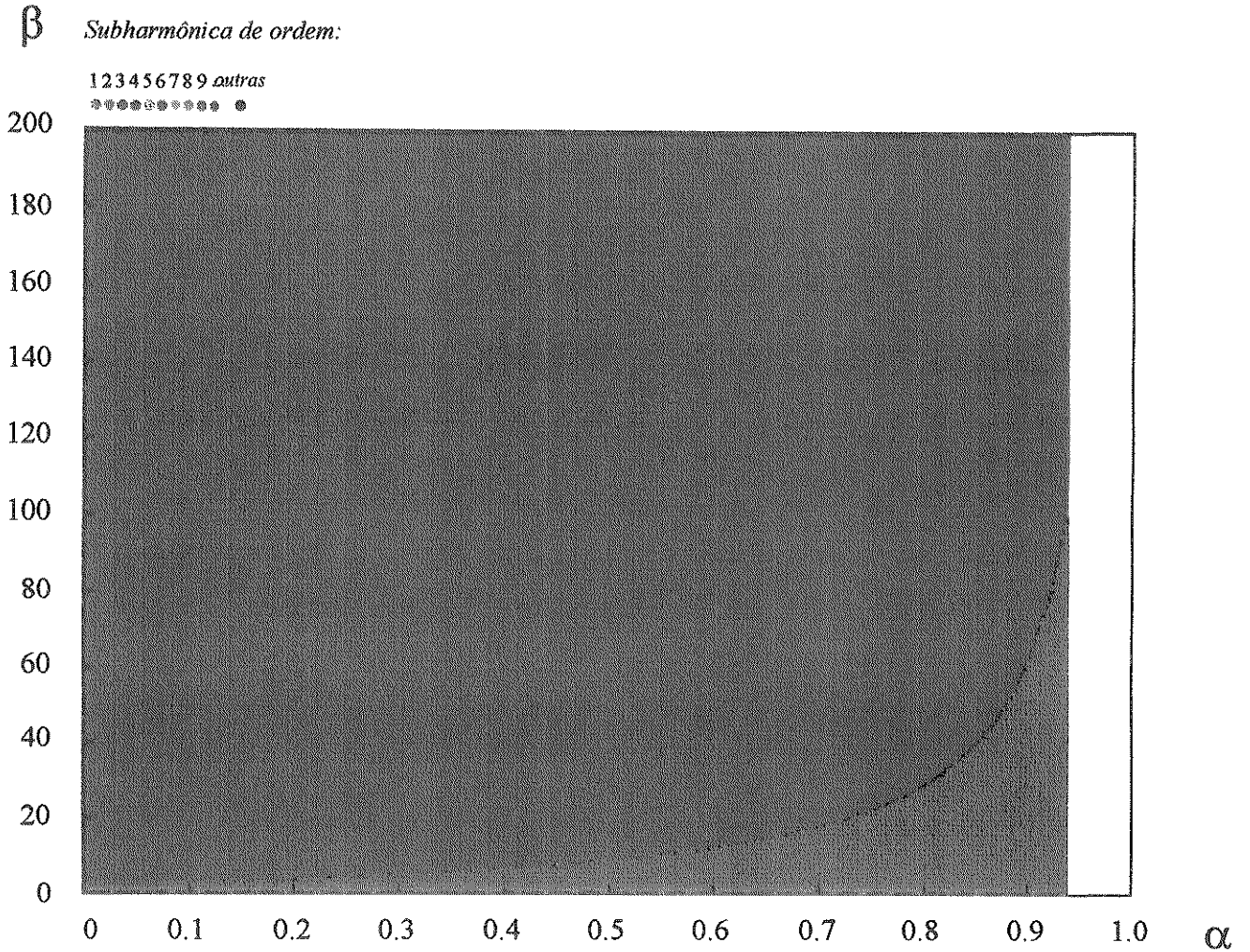


Fig. 5.2. Regiões subharmônicas estáveis no plano (α,β) para $\Delta = 0.05$.

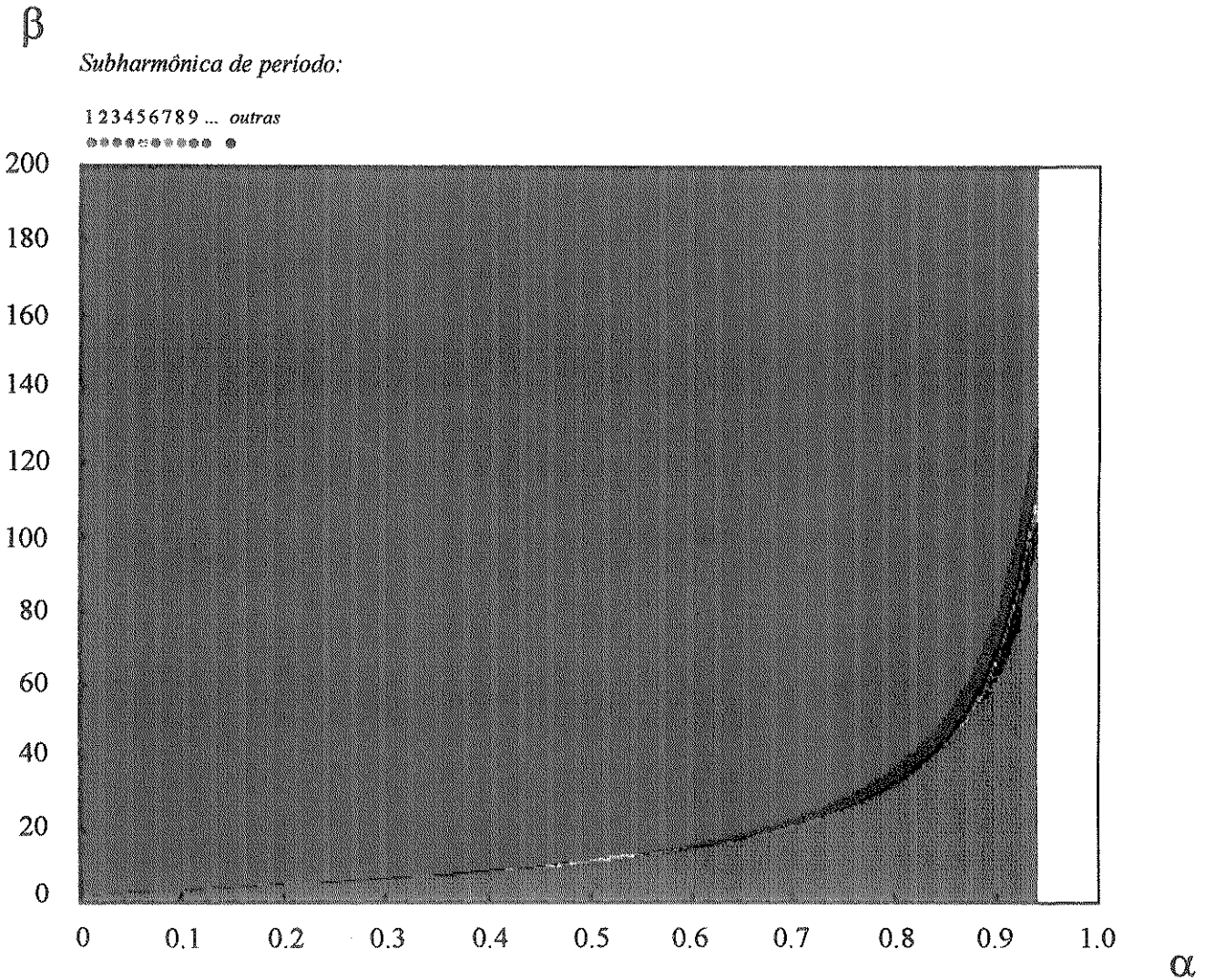


Fig. 5.3. Regiões subharmônicas estáveis no plano (α,β) para $\Delta = 1$.

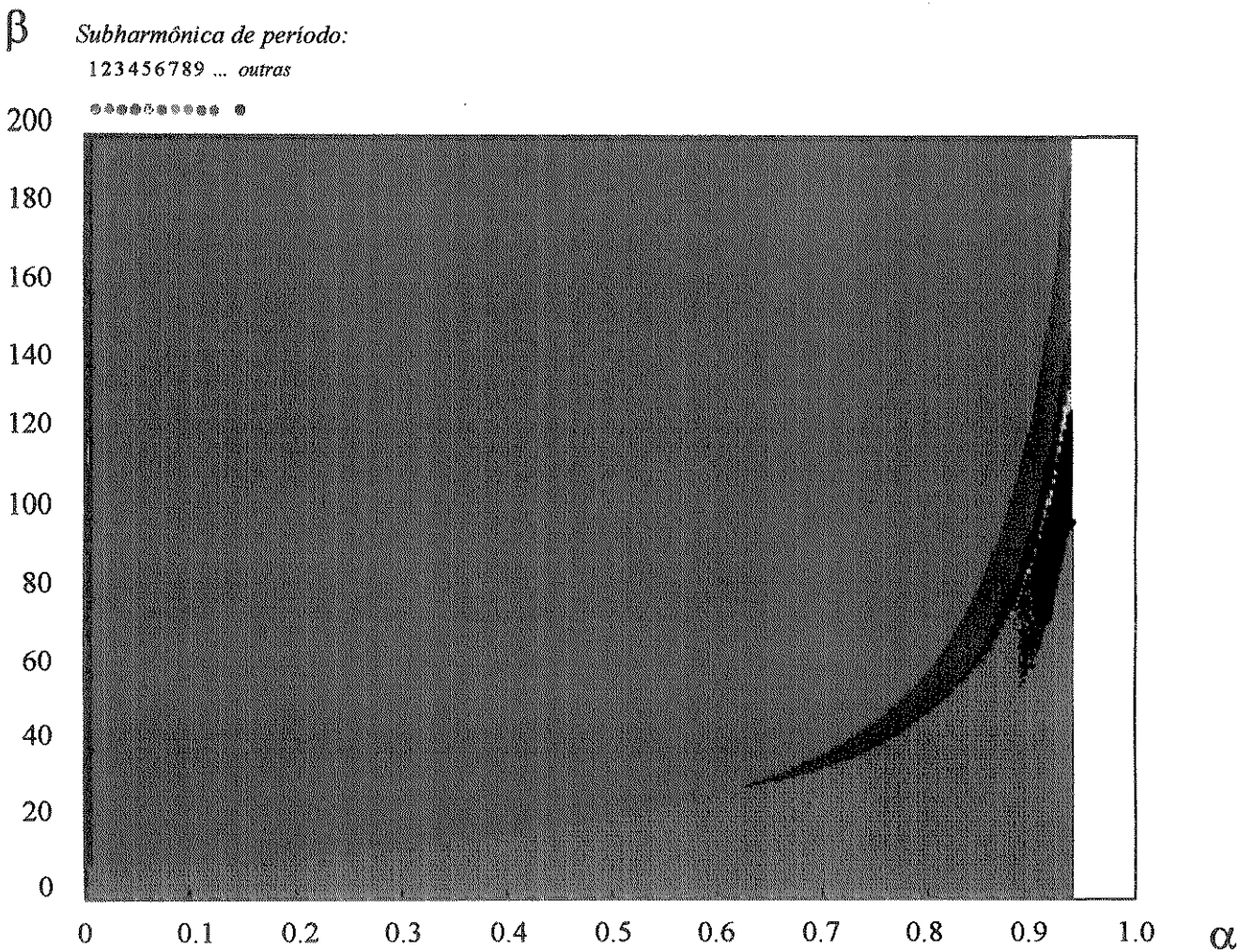


Fig. 5.4. Subharmônicas estáveis no plano (α,β) para $\Delta = 5$.

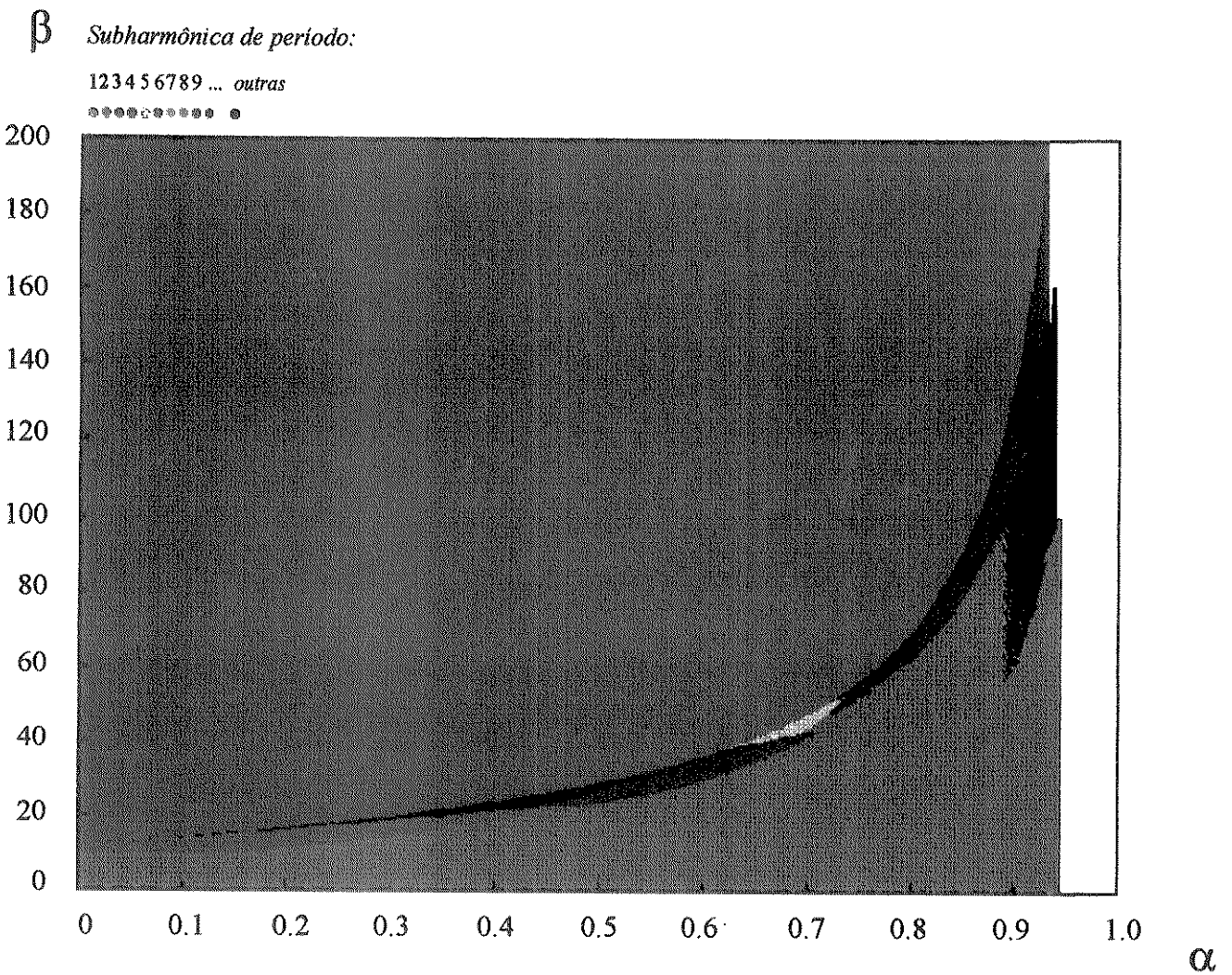


Fig. 5.5. Regiões subharmônicas estáveis no plano (α,β) para $\Delta = 10$.

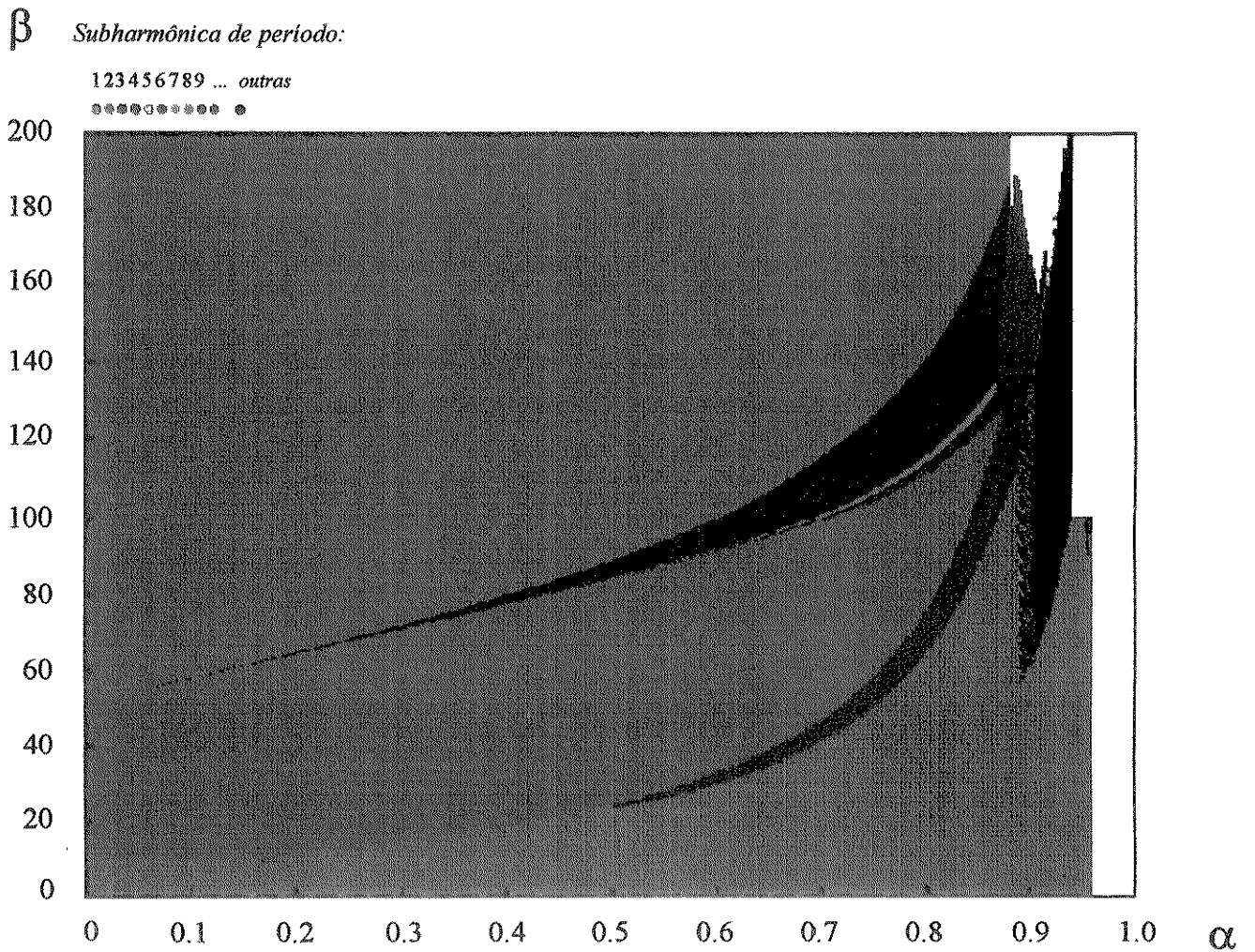


Fig. 5.6. Regiões subharmônicas estáveis no plano (α,β) para $\Delta = 50$.

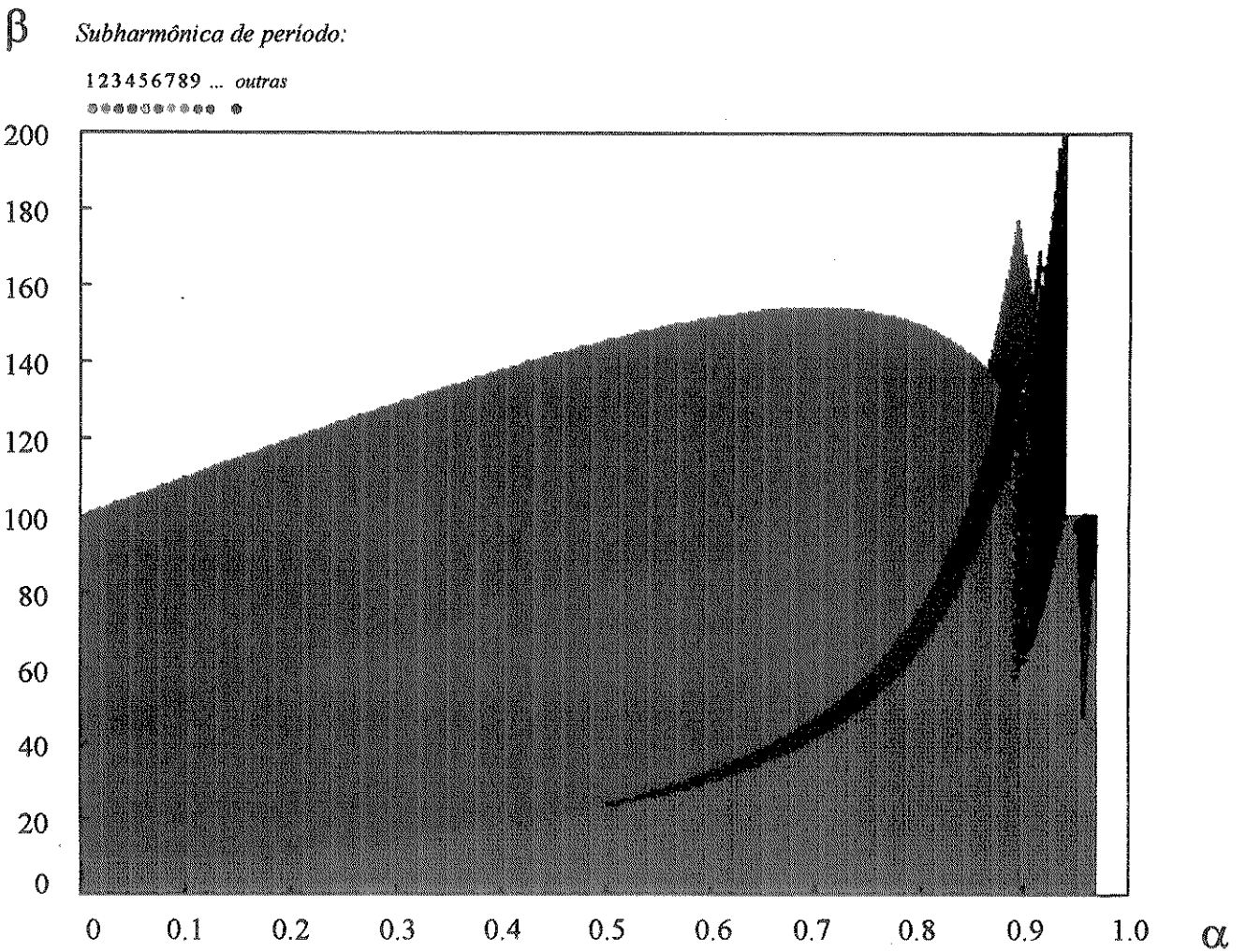


Fig. 5.7. Regiões subharmônicas estáveis no plano (α,β) para $\Delta = 100$.

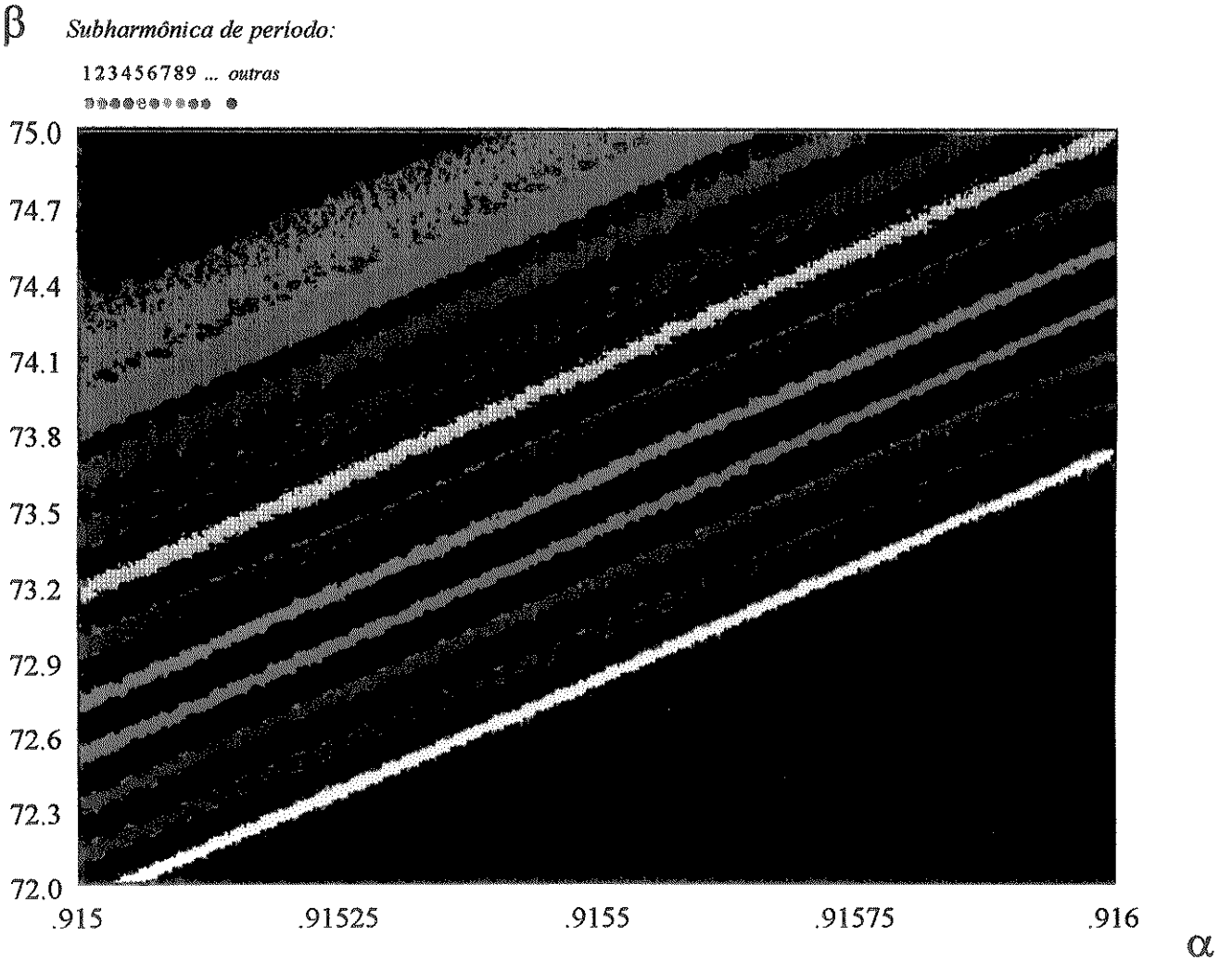


Fig. 5.8. Amplificação da região "fractal" do espaço de parâmetros, para $\Delta = 1$.

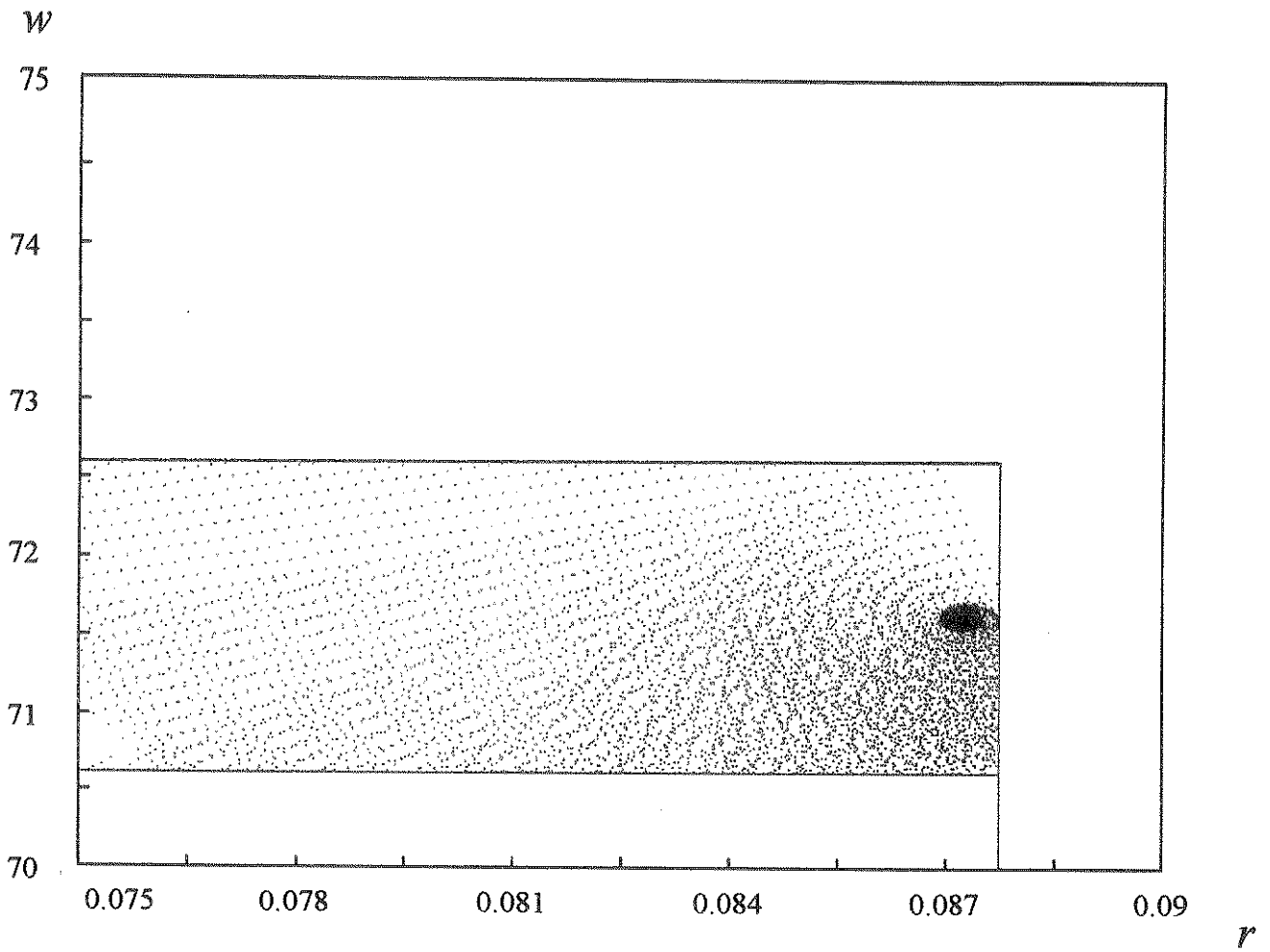


Fig. 5.9. Plano de fase mostrando um atrator na região "fractal" em negro da Fig. 5.8, onde encontram-se as subharmônicas de período maior o igual a 12, os atratores quase-periódicos e os atratores caóticos. Este atrator corresponde ao ponto $\alpha = 0.916$, $\beta = 72$, $\Delta = 1$ do espaço de parâmetros.

Cada um dos gráficos anteriores representa um plano que corta o espaço de parâmetros tridimensional. A cor verde indica a região de comportamento periódico estável de período um, isto é, a região de comportamento adequado. As outras cores indicam comportamentos estáveis para subharmônicas de período maior, e constituem regiões que devem ser evitadas no projeto do sistema.

A cor preta indica que não houve convergência à vizinhança de um ponto fixo dentro do número de iterações estimado inicialmente como suficiente para alcançar o regime e inclui subharmônicas de ordem maior o igual a 12, comportamento quase-periódico, caos e convergência muito lenta a um atrator.

A Fig. 5.8 é uma amplificação de uma pequena quadrícula ao interior da região "fractal" observada na Fig. 5.3, constituída por uma miríade de pequenas "ilhas" que amplificadas mostram a estrutura da Fig. 5.3. Este tipo de comportamento corresponde ao tipo de bifurcação descoberta por Mira (v. Mira, 1987) chamada de bifurcação "caixas em fila", e caracterizada por uma seqüência de bifurcações entre oscilações de período 1, 2, 3, ... até o infinito.

Logo, a região triangular inferior de cor preta na Fig. 5.8 não corresponde a comportamento caótico propriamente tal, mas a subharmônicas de ordem maior o igual a 12. As faixas de cor preta entre as diferentes cores correspondem a regiões de conver-gência lenta, encontradas nos pontos de bifurcação. A Fig. 5.9 mostra um conjunto de órbitas, obtidas a partir da simulação no plano de fase, num ponto do espaço de parâmetros, localizado na região triangular inferior preta na Fig. 5.8. Observou-se que a convergência é muito lenta, de acordo com os comportamentos possíveis segundo a Fig. 5.8.

Outra observação realizada durante as simulações, e verificada através da visualização dos domínios de atração, bem como utilizando diferentes conjuntos de condições iniciais ao grafar as regiões do espaço de parâmetros, é que as regiões das Figs. 5.2 - 5.7 formam "capas" superpostas, indicando que podem coexistir vários atratores de período diferente para um único conjunto de parâmetros.

A região de operação permitida é ainda menor que as regiões estáveis mostradas nas Figs. 5.2 - 5.7, já que existe a restrição (5.12), derivada da limitação física da velocidade de saída do motor e conseqüentemente da velocidade de referência, como ilustra-se na Fig. 5.10. A região de operação possível encontra-se sobre a curva da Fig. 5.10. Logo, a região de comportamento estável reduz-se a uma faixa de forma exponencial, cuja largura aumenta se o parâmetro Δ cresce, como pode-se observar nas Figs. 5.2 e 5.7. Como o parâmetro Δ é diretamente proporcional a δ, é possível aumentar a largura da faixa controlando δ no circuito do detector de fase, o que é coincidente com a experiência de laboratório; contudo, não pode aumentar excessivamente porque diminui-se o intervalo permitido para α ao se aumentar a região de

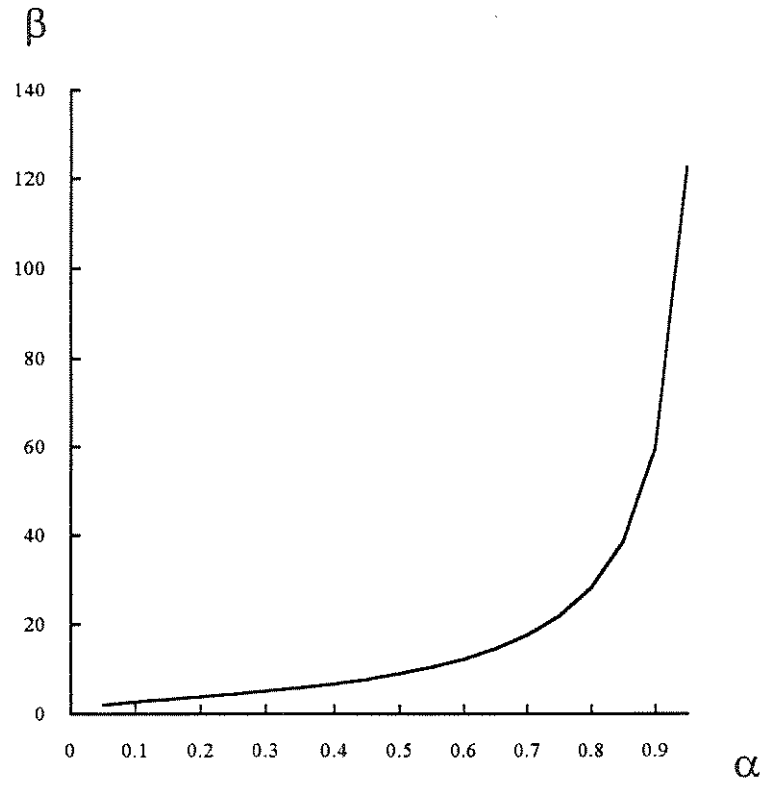


Fig. 5.10. Curva que define a fronteira do comportamento possível.

subharmônicas de período alto ou de convergência excessivamente lenta, o que é também coerente com a experiência existente sobre PLL.

Para um valor dado de β, um aumento de α, onde α varia em forma inversamente proporcional a T, estabiliza o sistema. Logo, uma diminuição do período do sinal de referência é desejável, e portanto a recomendação do capítulo 4 no mesmo sentido, ainda é válida. Esta pode ser implementada através de um multiplicador de freqüência, cuidando de diminuir o ganho K para não aumentar o ganho de malha.

O parâmetro β é representativo do ganho, e como é esperado, uma diminuição de β para um α dado estabiliza o sistema, o que coincide com os resultados obtidos através da simulação analógica direta do PLL sem perturbação (Mahla, 1991; Mahla e Badan Palhares, 1992).

Um crescimento do ganho leva a subharmônicas de ordem maior, encontrando-se comportamentos pseudo-aleatórios como os observados na simulação analógica do sistema de controle PLL (Mahla, 1991; Mahla e Badan Palhares, 1992) ou num sistema real (Campos, 1991) onde o grau de complexidade é ainda maior, e dos quais apresentamos uma amostra nas Figs. 5.11 e 5.12.

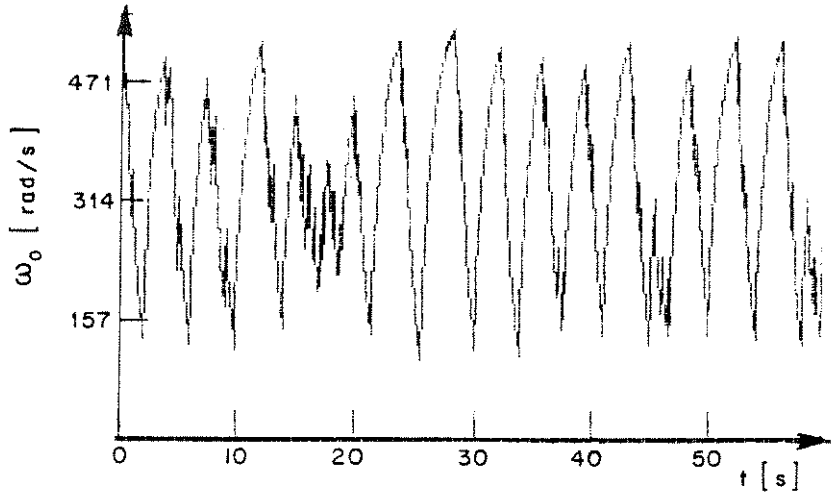


Fig. 5.11. Comportamento pseudo-aleatório na simulação de um sistema de controle PLL de segunda ordem sem perturbação. (De Mahla, 1991).

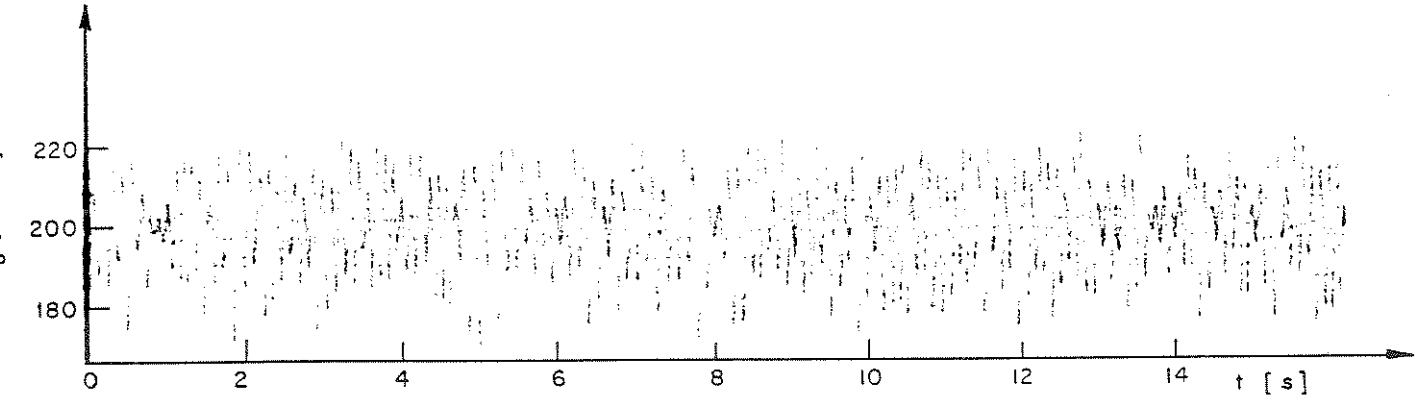


Fig. 5.12. Comportamento pseudo-aleatório num motor C.C. controlado por PLL O sistema real é de ordem maior e usualmente está submetido a perturbações.

Pode-se dizer, desde um ponto de vista prático, que as subharmônicas de grande período encontradas no PLL sem perturbação podem ser consideradas como comportamento caótico desde um ponto de vista experimental. Além disto, é suficiente uma perturbação muito pequena na estrutura do sistema para que mude o período da oscilação na região fractal.

5.3 Conclusões

O modelo discreto estendido, desenvolvido em conjunto com o grupo do Prof. Mira, tem resultado ser muito mais útil, exato e eficiente para fins de caracterização dos diferentes tipos de comportamento do sistema de controle PLL, do que o modelo de fase contínuo utilizado atualmente na literatura. As principais vantagens são as seguintes:

- **Maior exatidão.** Existe uma perturbação intrínseca, os pulsos no sinal de erro, que não é considerada no modelo contínuo, e sim no modelo discreto.

- **Maior generalidade.** O modelo de fase contínuo é válido somente na condição $\omega_0 \cong \omega_{ref}$. No modelo discreto estendido, são eliminadas as restrições $\omega_0 \cong \omega_{ref}$ e $t_{on} < T$. Este modelo discreto, além de possuir maior generalidade no espaço de estado, considera a dinâmica do detector de fase, a qual é ignorada em todas as descrições existentes na literatura, incluindo os manuais.

- **Permite uma descrição mais completa do comportamento.** O modelo contínuo permite determinar pontos de equilíbrio e o correspondente domínio de atração, bem como obter as regiões de comportamento caótico quando existe uma perturbação periódica, mas não é tão adequado quanto o modelo discreto para analisar o comportamento periódico, incluindo as subharmônicas. A determinação da transformação de Poincaré a partir da simulação de equações contínuas envolve um maior custo em termos de tempo de computação.

- **A simulação digital baseada no modelo discreto é mais eficiente e exata.** Apesar de que uma das equações do modelo está na forma implícita (e portanto para obter a solução para cada uma das variáveis requere-se a busca de um zero pelo método de Newton), a simulação não requer a integração das variáveis subdividindo cada período T em intervalos infinitesimais. Isto leva a uma economia no tempo de cálculo e evita os erros de integração.

5.4. Conclusões gerais

Os resultados mais importantes da tese foram o desenvolvimento do modelo discreto para o sistema de controle PLL com detector de freqüência-fase e a assimilação de uma metodologia para a análise de sistemas lineares por partes, incluindo características descontínuas, via Transformação de Poincaré.

O modelo discreto para o sistema de controle PLL com detector de freqüência-fase poderá ser estendido a outros tipos de PLL utilizados na área de comunicações, que tenham um detector de erro de fase com característica linear por partes, como por exemplo o "OU exclusivo" ou outras que possam ser projetadas para melhorar o desempenho do sistema.

Além dos resultados específicos em relação a um sistema em particular, como é o sistema de controle PLL, um segundo objetivo mais geral, expresso no título principal da tese, foi o de selecionar os conceitos principais e as técnicas de maior utilidade para o estudo qualitativo de sistemas dinâmicos não lineares. As maiores dificuldades que encontram-se ao iniciar uma linha de pesquisa nesta área, são o desconhecimento de quais são os conceitos mais importantes e quais são as técnicas mais efetivas para a solução de problemas de engenharia, e por outro lado a barreira lingüística do especialista, normalmente formado em outras áreas.

Estas dificuldades são superadas depois de algum tempo, tempo que pode ser menor ao se dispor de uma síntese dos conceitos mais úteis. Estes conceitos são bem mais simples do que parece numa primeira impressão, e os dois primeiros capítulos têm por objetivo entregar esses conceitos com a mesma simplicidade, fazendo uma conexão entre matemáticas, ciência e engenharia, que permita o trabalho posterior num âmbito inter disciplinar, e ao mesmo tempo facilite a introdução ao tema para o leitor não especialista.

O terceiro objetivo, foi a assimilação de uma metodologia para modelamento discreto de sistemas não lineares por partes, baseada nas idéias de Andronov e outros pesquisadores que têm seguido nessa linha, como é o caso de Mira, e que tem sido continuada também na UNICAMP, sendo o orientador desta tese um deles. No capítulo 3, além do exemplo do sistema PWM, já modelado anteriormente por (Burian, Bottura e Badan Palhares, 1978) e (Badan Palhares e Rosário, 1982), desenvolvem-se dois modelos discretos originais para sistemas com descontinuidades (modelo de fase do PLL com perturbação periódica e Circuito de Chua com não linearidade descontínua). Além do desenvolvimento dos modelos, existem contribuições teóricas originais para a obtenção da Transformação de Poincaré de sistemas com descontinuidades ou com não linearidades periódicas:

- Em (Mahla e Badan Palhares, 1993a) para obter a Transformação de Poincaré utiliza-se um artifício que permite definir, em um ponto da trajetória no plano de Poincaré, para que semiespaço continua a trajetória, mesmo se a trajetória for tangente ao plano, ou se a sua primeira derivada não for contínua ou não estiver definida no ponto. Este artifício permite, em qualquer caso mais geral, redefinir a Transformação de Poincaré incluindo os pontos nos quais a trajetória é tangente ao plano, e mais do que isso, permite obter uma expressão algébrica para a transformação, sem qualquer esforço computacional associado à decisão.

- Em (Mahla e Badan Palhares, 1993b), através do mesmo artifício, e redefinindo as condições iniciais, transforma-se a não linearidade periódica (uma dente de serra) numa única região linear, onde na fronteira da região redefinem-se as condições iniciais para o seguinte período.

O conhecimento destas técnicas abre um sem-número de posibilidades para pesquisa futura, principalmente em sistemas com fortes não linearidades e descontinuidades tanto no comportamento das variáveis quanto nas próprias não linearidades; por exemplo: sistemas de controle com histérese, região morta, saturação, sistemas chaveados, etc., com aplicações em áreas tais como robótica, redes neurais, eletrônica de potência e outras.

REFERÊNCIAS

Andronov, A.A. et al (1966). *Theory of Oscillators*. Tradução de "Teoriya Kolebanii", publicado por Gosudarstvennoye Izdatel'stvo Fiziko-Matematischeskoi Literatury, Moscow. Primeira edição. Pergamon Press, Oxford.

Araújo, A.F.R. (1988). *Caos em Sistemas de Controle com Modelos Discretos.* Tese de Mestrado, FEE-UNICAMP, Brasil.

Arrowsmith, D.K. e Place, C.M. (1990). *An Introduction to Dynamical Systems.* Cambridge University Press, Cambridge.

Badan Palhares, A.G. (1980). *Controle por Realimentação de Estado e Modulação em Largura de Pulso de um Servo-Posicionador Eletrohidráulico: Análise das Oscilações Instáveis.* Tese de Doutorado, FEE-UNICAMP, Brasil.

Badan Palhares, A.G. e Araújo, A.F.R. (1990). Chaos from PWM Electrohidraulic Servo. *Annals of 11th IFAC World Congress*, Tallinn, Estonia, **6**, 123-128.

Badan Palhares, A.G., Bottura, C.P. e do Val, J.B.R. (1982). Oscilações Caóticas e Subharmônicas em Servomecanismo Eletrohidráulico Controlado por MLP e Realimentação de Estado. *Anais do Quarto Congresso Brasileiro de Automática.* Campinas, Brasil , 406-413.

Badan Palhares, A.G. e Mahla, A.I. (1992a). A Discrete Model for Analysis of Subharmonics and Chaos in a Second Order PLL Motor Control, submetido ao *IEEE Trans. Circuits Syst. Analysis*.

Badan Palhares, A.G. e Mahla, A.I. (1992b). *Texto do curso de pós-graduação Controle por Chaveamento*, FEE-UNICAMP, Brasil.

Badan Palhares, A.G. e Rosário, J.M. (1982). Determinação das Regiões Instáveis de um Sistema de Transmissão com Engrenagens Planetárias, Controladas por MLP. *Anais do 4° Congresso Brasileiro de Automática*, Rio de Janeiro, Brasil, **2**, 414-421.

Bartissol, P. e Chua, L.O. (1988). The Double Hook. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, **35**, 1512-1522.

Beck, C. (1990). Upper and Lower Bounds on the Renyi Dimensions and the Uniformity of Multifractals. *Physica D*, **41**, 67-78.

Benettin, G. et al (1980). Lyapunov Characteristic Exponents for Smooth Dynamical Systems and for Hamiltonian Systems: A Method for Computing All of Them. *Meccanica*, **15**, 9.

Brown, R. (1993). From the Chua Circuit to the Generalized Chua Map. *Int. J. Circuits Syst. Comput.*, **3** , 11-32.

Burian Jr., Y., Bottura, C.P. e Badan Palhares, A.G. (1978), Controle Pulsado com Modulação em Largura de Pulso de Sistema Eletrohidráulico. *Anais do 2° Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, Rio de Janeiro, Brasil, C, 667-680.

Campos, P.R.B. de (1991). *Controle de Velocidade de Motor D.C. Através de um Controlador PLL-Dual.* Tese de Mestrado, FEE-UNICAMP, Brasil.

Chua, L.O. (1992). The Genesis of Chua's Circuit. *Archiv für Elektronik und Ubertragungstechnik*, **46**, 250-257.

Eckmann, J.P. e Ruelle, D. (1985). Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors. *Rev. Mod. Phys.*, **57**, 617-656.

Endo, T.S. e Chua, L.O. (1988). Chaos from Phase-Locked Loops. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, **35**, 987-1003.

Farmer, J.D. et al (1983). The Dimension of Chaotic Attractors. *Physica*, **7D**, 153-180.

Frederickson, P. et al (1983). The Lyapunov Dimension of Strange Attractors, *J. Diff. Eq.*, **49**, 185-207.

Geiger, D.F. (1981). *Phaselock Loops for DC Motor Speed Control.* Wiley and Sons, USA.

Grassberger, P.e Procaccia, I. (1983). Measuring the Strangeness of Strange Attractors. *Physica*, **D9**, 189.

Guckenheimer, J. e Holmes, P. (1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.* Springer Verlag, New York.

Gumowski, I. e Mira, C. (1980). *Dynamique Chaotique*. Cepadues Editions, Toulouse.

Hirsch, M. W. e Smale, S. (1974). *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, New York.

Kolmogorov, A.N. (1958). A New Invariant for Transitive Dynamical Systems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **119**, 861-864.

La Salle, J. e Lefschetz, S. (1961). *Stability by Lyapunov's Direct Method.* Academic Press, New York.

Li, T. e Yorke, J.A. (1975). Period Three Implies Chaos. *Am. Math. Monthly*, **82**, 985.

Lyapunov, A.M. (1907). *Probléme Général de la Stabilité du Mouvement.* Ann. de la Fac. des Sciences de Toulouse, 9, 203-391. (Primeira tradução ocidental do artigo original em russo publicado em 1892).

Mahla, A.I. (1991). *Caos em Sistemas de Controle de Motores C.C. pela Técnica PLL-Dual.* Tese de Mestrado, FEE-UNICAMP, Campinas, Brasil.

Mahla, A.I. e Badan Palhares, A.G.B. (1992a). Modelo Dinámico del Sistema PLL-Dual para Control de Motores CC: Región de Comportamiento Caótico. *Anais do V Congreso Latino-Americano de Control Automático,* Cuba, 17 a 22 de Fevereiro de 1992.

Mahla, A.I. e Badan Palhares, A.G.B. (1992b). Simulação Analógica do Sistema PLL-Dual: Evidência de Comportamento Caótico. *Anais da Conferencia Latinoamericana del IEEE,* Chile. 17 a 21 de Agosto de 1992, 298-303.

Mahla, A.I. e Badan Palhares, A.G.B. (1993a). Chua's Circuit with a Discontinuous Nonlinearity. *Int. J. Circuits Syst. Comput.,* **3**, 231-237. Reimpresso em *Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos, Series on Nonlinear Science - Series B: Special Theme Issues and Proceedings,* **1**, 622-628. Editado por R.N. Madan, World Scientific, New Jersey.

Mahla, A.I. e Badan Palhares, A.G.B. (1993b). Discretização do Modelo de Fase de um Controlador PLL Submetido a Perturbação Periódica. *Anais do Primeiro Workshop Brasileiro em Dinâmica Não Linear, Caótica e Estocástica.* UNESP, Rio Claro, Brasil, 1° a 3 de dezembro de 1993, 55-56.

Mahla, A.I. e Badan Palhares, A.G. (1993c). Discretization of the Periodically Perturbed PLL Controller Phase Model. Submetido à *Revista da Sociedade Brasileira de Computação* para formar parte de uma seleção de artigos por extenso, do *Primeiro Workshop Brasileiro em Dinâmica Não Linear, Caótica e Estocástica,* UNESP, Rio Claro, Brasil, 1993.

Mahla, A.I. e Badan Palhares, A.G. (1993d). *Relatório Técnico de Atividades Desenvolvidas Durante o Estágio de Especialização no Exterior de A.I. Mahla,* apresentado ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (RHAE-CNPq), dependente do Governo Federal do Brasil, Proc. 461351-92.7.

Mahla, A.I. e Badan Palhares, A.G. (1993e). *5° Relatório Parcial sobre Projeto de Pesquisa para Doutorado de A.I. Mahla,* apresentado à Fundação de Amparo ã Pesquisa e ao Ensino do Estado de São Paulo, Brasil, Proc. 91-0615-4.

Marotto, F.R. (1978). Snap-Back Repellers Imply Chaos in IR^n. *J. Math. Anal . Appl.,* **63**, 199-223.

Mees, A.I. e Sparrow, C. (1987). Some Tools for Analyzing Chaos. *Proc. IEEE,* **75**, 1058-1070.

Mira, C. (1987). *Chaotic Dynamics.* World Scientific, Singapore.

Mira, C., Carcassès, J.P., Badan Palhares, A.G. e Mahla, A.I. (1993), trabalho desenvolvido através de estágio de especialização de A.I. Mahla no I.N.S.A. (Toulouse, França), com o qual prepara-se uma publicação.

Parker, T.S. e Chua, L.O. (1987). Chaos: A Tutorial for Engineers. *Proc. IEEE*, **75**, 982-1008.

Parker, T.S. e Chua, L.O. (1989). *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer-Verlag , New York.

Prasad, E.S.N. et al, (1985). High Performance DC Motor Drive with Phase-Locked Loop Regulation . *IEEE Trans. Ind. Appl.*, **IA-21**, 192-201.

Renyi, A. (1959). *Acta Mathematica (Hungria)*, **10**, 193.

Renyi, A. (1970). *Probability Theory*. North-Holland, Amsterdam.

Shimada, I. e Nagashima, T. (1979). A Numerical Approach to Ergodic Problem of Dissipative Dynamical Systems. *Prog. Theor.* Phys., **61**, 1605.

Smale, S. (1967). Differential Dynamical Systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**, 747-817.

Thompson, J.M.T. e Stewart, H.B. (1986). *Nonlinear Dynamics and Chaos*. J. Wiley and Sons, Great Britain.

Walker, J.A. (1980). *Dynamical Systems and Evolution Equations: Theory and Applications*. Plenum Press, New York.

Willems, J.L. (1970). *Stability Theory of Dynamical Systems*. Thomas Nelson and Sons, London.

Wolf, A. et al (1985). Determining Lyapunov Exponents from a Time Series. *Physica*, **16D**, 285-317.

Zadeh, L.A. e Desoer, C.A. (1963). *Linear Systems Theory: The State Space Approach*. McGraw-Hill, USA.

TRABALHOS REFERENTES À TESE PUBLICADOS OU SUBMETIDOS DURANTE O PERÍODO DE ESTUDOS DO DOUTORADO

Trabalhos publicados

Mahla, A.I. e Badan Palhares, A.G.B. (1993a). Chua's Circuit with a Discontinuous Nonlinearity. *Int. J. Circuits Syst. Comput.*, **3**, 231-237. **Reimpresso em *Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos, Series on Nonlinear Science - Series B: Special Theme Issues and Proceedings,* 1, 622-628. Editado por R.N. Madan, World Scientific, New Jersey.**

Mahla, A.I. e Badan Palhares, A.G.B. (1993b). Discretização do Modelo de Fase de um Controlador PLL Submetido a Perturbação Periódica. *Anais do Primeiro Workshop Brasileiro em Dinâmica Não Linear, Caótica e Estocástica*, UNESP, Rio Claro, Brasil, 1° a 3 de dezembro de 1993, 55-56.

Mahla, A.I. e Badan Palhares, A.G.B. (1992a). Modelo Dinámico del Sistema PLL-Dual para Control de Motores CC: Región de Comportamiento Caótico. *Anais do V Congreso Latino-Americano de Control Automático*, Cuba, 17 a 22 de Fevereiro de 1992.

Mahla, A.I. e Badan Palhares, A.G.B. (1992b). Simulação Analógica do Sistema PLL-Dual: Evidência de Comportamento Caótico. *Anais da Conferencia Latinoamericana del IEEE*, Chile. 17 a 21 de Agosto de 1992, 298-303.

Trabalhos submetidos

Badan Palhares, A.G. e Mahla, A.I. (1992a). A Discrete Model for Analysis of Subharmonics and Chaos in a Second Order PLL Motor Control, submetido ao *IEEE Trans. Circuits Syst. Analysis*.

Mahla, A.I. e Badan Palhares, A.G. (1993c). Discretization of the Periodically Perturbed PLL Controller Phase Model. Submetido à *Revista da Sociedade Brasileira de Computação* para formar parte de uma seleção de artigos por extenso, do *Primeiro Workshop Brasileiro em Dinâmica Não Linear, Caótica e Estocástica*, UNESP, Rio Claro, Brasil, 1993.

PROJETOS RELACIONADOS COM O TEMA DE TESE DESENVOLVIDOS OU SUBMETIDOS DURANTE O PERIODO DE ESTUDOS DO DOUTORADO

Projetos desenvolvidos

Projeto N° 323/91 do Fundo de Apoio ao Ensino e à Pesquisa da UNICAMP
Bolsa de Doutorado I - Auxilio-ponte. (Março - Maio de 1991)

Projeto N° 91/0615-4 do Fundo de Apoio ao Ensino e à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP
Bolsas de Doutorado I e II. (Junho de 1991 - Maio de 1994)

Sub-projeto N° 461351-92.7, do Projeto N° 461351-92, do Programa de Formação de Recursos Humanos em Areas Estratégicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, dependente do Governo Federal do Brasil. (CNPq-RHAE).
Auxílio-viagem para desenvolver o sub-projeto "*Estabilidade e Caos em Sistemas Dinâmicos Não Lineares: Aplicação no Sistema PLL-Dual*", incluido no projeto "*Nucleação de um Grupo Interdisciplinar na Área de Robótica*", através de visitas ao exterior. (Abril de 1993 e Junho de 1993). Projeto coordenado pelo Prof. A.G. Badan Palhares.

Projetos submetidos

"Dinámica no Lineal y Comportamiento Caótico en Manipuladores Robóticos"
Submetido à Fundação Andes como projeto bi-nacional Brasil-Chile. (Solicitado para começar no fim de 1994).

"Dinámica no Lineal y Comportamiento Caótico en Manipuladores Robóticos"
Submetido ao Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico (FONDECYT), dependente do Governo do Chile. Participam do projeto a Universidad de Santiago de Chile, a UNICAMP, Brasil, a Universidad Católica de Valparaíso, Chile, e a Universidad Técnica Federico Santa María, Chile. (Solicitado para começar no início de 1995).

APÊNDICE A

Constantes K_i

$$K_1 = -\beta E$$

$$K_2 = EF + \beta\sigma$$

$$K_3 = -K_1$$

$$K_4 = -EF\Omega^2$$

$$K_5 = K_1(1+F) - \beta^2\sigma$$

$$K_6 = EF$$

$$K_7 = \beta\sigma$$

$$K_8 = \sqrt{K_3^2 + \left(\frac{K_4}{\Omega}\right)^2}$$

$$K_9 = \sqrt{K_6^2 + \left(\frac{K_1}{\Omega}\right)^2}$$

$$K_{10} = \frac{\beta m \Omega p_1 + m\Omega p_1^2 + \beta\Omega^2\sigma + \beta p_1^2\sigma}{\Omega^2 p_1 + p_1^3 - \Omega^2 p_2 - p_1^2 p_2}$$

$$K_{11} = \frac{-\beta m\Omega p_2 - m\Omega p_2^2 - \beta\Omega^2\sigma - \beta p_2^2\sigma}{\Omega^2 p_1 - \Omega^2 p_2 + p_1 p_2^2 - p_2^3}$$

$$K_{12} = \left(\beta\Omega^2 + \Omega^2 p_1 + \Omega^2 p_2 - \beta p_1 p_2\right)L$$

$$K_{13} = \left(-\Omega^4 + \beta\Omega^2 p_1 + \beta\Omega^2 p_2 + \beta p_1 p_2\right)L$$

$$K_{14} = \frac{\beta\sigma}{p_1 p_2}$$

$$K_{15} = \frac{\beta m\Omega p_1 + m\Omega p_1^2 + \beta\Omega^2\sigma + \beta p_1^2\sigma}{\Omega^2 p_1^2 + p_1^4 - \Omega^2 p_1 p_2 - p_1^3 p_2}$$

$$K_{16} = \frac{\beta m\Omega p_2 + m\Omega p_2^2 + \beta\Omega^2\sigma + \beta p_2^2\sigma}{-\Omega^2 p_1 p_2 + \Omega^2 p_2^2 - p_1 p_2^3 + p_2^4}$$

$$K_{17} = \left(\Omega^2 - \beta p_1 - \beta p_2 - p_1 p_2\right) L$$

$$K_{18} = \sqrt{K_{12}^2 + \left(\frac{K_{13}}{\Omega}\right)^2}$$

$$K_{19} = \sqrt{K_{17}^2 + \left(\frac{K_{12}}{\Omega}\right)^2}$$

$$K_{20} = \left(\beta\Omega^2 + 2\Omega^2 p_1 - \beta p_1^2\right) M$$

$$K_{21} = \frac{\beta m\Omega p_1 + m\Omega p_1^2 + \beta\Omega^2\sigma + \beta p_1^2\sigma}{\Omega^2 + p_1^2}$$

$$K_{22} = \left(\Omega^4 - 2\beta\Omega^2 p_1 - \Omega^2 p_1^2\right) M$$

$$K_{23} = \sqrt{K_{20}^2 + \left(\frac{K_{22}}{\Omega}\right)^2}$$

$$K_{24} = \frac{\beta\sigma}{p_1^2}$$

$$K_{25} = \frac{m\Omega^3 p_1^2 - 2\beta m\Omega p_1^3 - m\Omega p_1^4 - m\Omega p_1^4 - \beta\Omega^4\sigma - 2\beta\Omega^2 p_1^2\sigma - \beta p_1^4\sigma}{p_1^2\left(\Omega^4 + 2\Omega^2 p_1^2 + p_1^4\right)}$$

$$K_{26} = \frac{-\beta m\Omega p_1 - m\Omega p_1^2 - m\Omega^2\sigma - \beta p_1^2\sigma}{-\Omega^2 p_1 - p_1^3}$$

$$K_{27} = \left(-\Omega^2 + 2\beta p_1 + p_1 p_2\right) M$$

$$K_{28} = \sqrt{K_{27}^2 + \left(\frac{K_{20}}{\Omega}\right)^2}$$

Subconstantes

$$D = 1 - 2\Omega^2 + \beta^2\Omega^2 + \Omega^4$$

$$E = \frac{m\Omega}{D}$$

$$F = 1 - \beta^2 - \Omega^2$$

$$L = \frac{m\Omega}{-\Omega^4 - \Omega^2 p_1^2 - \Omega^2 p_2^2 - p_1^2 p_2^2}$$

$$M = \frac{m\Omega}{\Omega^4 + 2\Omega^2 p_1^2 + p_1^4}$$