

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Departamento de Telemática

UNICAMP

BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

**Funções de Lyapunov Lineares por Partes
para Sistemas Lineares Discretos no Tempo
com Saturação ou Zona Morta nos Controles**

Alessandra Dutra Coelho

Banca Examinadora:

Basílio E. A. Milani - Orientador

Newton Geraldo Bretas

Douglas Eduardo Zampieri

Ernesto Ruppert Filho

Anésio dos Santos Jr.

Marconi Kolm Madrid

Tese apresentada à comissão de pós-graduação da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, como requisito para a obtenção do título de DOUTOR em Engenharia Elétrica.

Campinas, 09 de Abril de 2001

SP - Brasil

6470/1000

Este exemplar corresponde a redação final da tese defendida por... <u>ALESSANDRA DUTRA COELHO</u> ... e aprovada pela Comissão Julgada em... <u>09/04/2001</u> ...
<u>Basílio E. A. Milani</u> Orientador

UNICAMP

UNIDADE	Be
N.º CHAMADA:	T/ UNICAMP
	C65f
V.	Ex.
TOMBO BC/	45731
PROC.	16- 392101
C	☐
D	☒
PRECOS	R\$ 11,00
DATA	04/08/01
N.º CPD	

CM00158542-6

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

C65f Coelho, Alessandra Dutra
Funções de Lyapunov lineares por partes para sistemas lineares discretos no tempo com saturação ou zona morta nos controles / Alessandra Dutra Coelho.--Campinas, SP: [s.n.], 2001.

Orientador: Basílio E. A. Milani.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Sistemas lineares. 2. Estabilidade. 3. Lyapunov, Funções de. 4. Programação linear. I. Milani, Basílio E. A. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Resumo

Esta tese é dedicada à análise de estabilidade de sistemas lineares discretos no tempo com controles em malha fechada com saturações ou zonas mortas, com atenção especial para sistemas instáveis em malha aberta. São considerados sistemas lineares com parâmetros perfeitamente conhecidos e sistemas com parâmetros incertos restritos a um polítopo compacto. Para sistemas com saturações, o objetivo principal é a determinação de estimativas poliedrais convexas da região de estabilidade assintótica local da origem. Para sistemas com zonas mortas, o objetivo principal é a determinação de aproximações poliedrais convexas externas do mínimo conjunto de confinamento final uniforme contendo a origem, para delimitar e analisar a estabilidade de possível ciclo limite nele contido. Os problemas são tratados de acordo com o segundo método de Lyapunov através da caracterização e construção de funções de Lyapunov lineares por partes. As funções de Lyapunov são caracterizadas e construídas utilizando formulações e algoritmos de programação linear.

Abstract

This thesis is dedicated to stability analysis of linear discrete-time systems with saturation or deadzone in feedback controls, with special attention to unstable open-loop systems. Linear systems with perfectly known parameters and systems with uncertain parameters constrained to a compact polytope are considered. For systems with saturations, the main objective is determination of convex polyhedral estimates of the region of local asymptotic stability of origin. For systems with deadzones, the main objective is determination of external convex polyhedral approximations of the minimal uniform ultimate boundedness set containing origin, for delimitation and stability analysis of a possible limit cycle inside it. The problems are treated according to second method of Lyapunov via characterization and construction of piecewise-linear Lyapunov functions. The Lyapunov functions are characterized and constructed using linear programming formulations and algorithms.

Ao meu esposo Wânderson.

A minha mãe Ivanilda; e aos meus irmãos,
Alessandro, Aline e Annelise.

Agradecimentos

A Deus pela força nos momentos difíceis.

Ao meu esposo pelo seu imenso apoio durante este período.

Ao meu orientador Basílio pelo seu companheirismo, sua amizade e acima de tudo por sua orientação que no decorrer de todo este trabalho ele a executou de forma brilhante.

A todos os funcionários e amigos da faculdade de engenharia elétrica e de computação que de alguma maneira contribuíram para a realização deste trabalho.

À CAPES, pelo suporte financeiro fornecido durante parte do período de estudo para a conclusão do doutorado.

Sumário

1	Introdução Geral	1
2	Conceitos Básicos	4
2.1	Introdução	4
2.2	Estabilidade de Sistemas Dinâmicos	4
2.3	Segundo Método de Lyapunov	10
2.4	Conclusão	14
3	Sistemas com Controles Saturáveis	15
3.1	Introdução	15
3.2	Modelo de Sistema com Controles Saturáveis	18
3.3	Poliedros λ -Contrativos	24
3.3.1	Caracterização	25
3.3.2	Construção	31
3.3.3	Exemplo Numérico	36
3.4	Poliedros λ -Contrativos Robustos	38
3.4.1	Caracterização	39
3.4.2	Construção	43
3.4.3	Exemplo Numérico	46
3.5	Funções de Lyapunov Lineares por Partes	48
3.5.1	Caracterização	48
3.5.2	Construção	52
3.5.3	Exemplo Numérico	55
3.6	Funções de Lyapunov Lineares por Partes para Sistemas Incertos	58

3.6.1	Caracterização	59
3.6.2	Construção	62
3.6.3	Exemplo Numérico	65
3.7	Conclusão	66
4	Sistemas com Controles com Zonas Mortas	68
4.1	Introdução	68
4.2	Modelo de Sistema com Controles com Zonas Mortas	70
4.3	Poliedros Positivamente Invariantes	72
4.3.1	Caracterização	72
4.3.2	Construção	78
4.4	Funções de Lyapunov Lineares por Partes	79
4.4.1	Caracterização	80
4.4.2	Construção	84
4.5	Exemplo Numérico	86
4.6	Conclusão	90
5	Conclusão Geral	92

Capítulo 1

Introdução Geral

Construção de funções de Lyapunov é um dos problemas fundamentais em teoria de sistemas. Sua aplicação mais direta é a análise de estabilidade de sistemas dinâmicos. Métodos para construção de funções de Lyapunov para sistemas não lineares são muito interessantes tanto do ponto de vista prático quanto do teórico.

Saturação e zonas mortas são não linearidades muito frequentes na prática de engenharia de controle. Elas afetam significativamente a estabilidade do sistema controlado e podem ocorrer em vários de seus componentes, tais como sensores, amplificadores e atuadores.

Saturação e zonas mortas são não linearidades estáticas geralmente descritas por modelos lineares por partes. Assim sendo, sistemas lineares com controles em malha fechada contendo saturação ou zona morta são também descritos por modelos lineares por partes dentro das regiões poliedrais do espaço de estado definidas pela lei de controle em malha fechada. Do ponto de vista da estabilidade, os sistemas mais críticos são os estritamente instáveis em malha aberta. Para essa classe de sistemas, a consideração de seu comportamento não linear é fundamental para evitar resultados conservativos.

Para sistemas lineares multivariáveis com controles em malha fechada saturáveis, um problema importante de análise é a determinação da região de estabilidade as-

sintótica local da origem. Estimativas não conservativas dessa região podem evitar restrições operacionais desnecessárias e controles com especificações exageradas. Para sistemas lineares multivariáveis com controles em malha fechada com zona morta, a determinação e a análise da estabilidade de ciclos limites é um problema importante, em geral de difícil solução exata. A determinação de conjuntos de confinamento final pode ser utilizada para delimitar e analisar a estabilidade de ciclos limites.

Trabalhos recentes, [1], [2], [3], [4], [5], apresentam resultados importantes de caracterização e construção de poliedros λ -contrativos para sistemas lineares discretos no tempo com controles saturáveis em malha fechada.

Sabe-se [6], [4], [7], [8], que poliedros λ -contrativos são regiões de estabilidade assintótica local de sistemas dinâmicos, associadas a funções de Lyapunov poliedrais do tipo Minkowski:

$$\Psi(x) = \max_{1 \leq i \leq r} g_i x$$

onde: $x \in \mathbb{R}^n$, g_i é a i -ésima linha de $G \in \mathbb{R}^{r \times n}$ e o poliedro $Gx \leq 1$ é limitado.

As funções de Minkowski são um caso particular de funções lineares por partes:

$$\Psi(x) = \max_{1 \leq i \leq r} g_i x + c_i$$

onde: $x \in \mathbb{R}^n$ e g_i, c_i são as i -ésimas linhas de $G \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $c \leq 0 \in \mathbb{R}^r$, respectivamente.

É importante notar que o termo c_i confere à função linear por partes uma flexibilidade para variações radiais inexistente na função poliedral de Minkowski. Considerando que o comportamento não linear da saturação e zona morta é também predominante nas direções radiais, é natural esperar que funções de Lyapunov lineares por partes forneçam resultados melhores que os obtidos com as funções do tipo Minkowski.

Também vale a pena realçar que devido à forma poliedral das regiões do espaço de estado definidas pela lei de controle em malha fechada com saturação ou zona morta, a forma das funções lineares por partes e de Minkowski permite que a caracterização das funções de Lyapunov seja formulada como um problema de programação linear

clássico, para o qual existem ferramentas computacionais poderosas. Se por exemplo, no lugar dessas funções, são utilizadas funções quadráticas, o problema resultante é de programação quadrática com restrições quadráticas e lineares, mais difícil de tratar que o de programação linear.

Esta tese é dedicada à análise de estabilidade de sistemas lineares discretos no tempo com controles em malha fechada com saturações ou zonas mortas, com atenção especial para sistemas instáveis em malha aberta. Serão considerados sistemas lineares com parâmetros perfeitamente conhecidos e também sistemas com parâmetros incertos restritos a um politopo compacto (domínio de incerteza politópico).

Para sistemas com controles saturáveis o objetivo principal será a determinação de estimativas poliedrais convexas da região de estabilidade assintótica local da origem.

Para sistemas com controles com zonas mortas, o objetivo principal será a determinação de estimativas poliedrais convexas externas do mínimo conjunto de confinamento final uniforme contendo a origem, para delimitar e analisar a estabilidade de possível ciclo limite nele contido.

Os problemas serão tratados de acordo com o segundo método de Lyapunov, através da caracterização e construção de funções de Lyapunov lineares por partes, as quais tem como caso particular as funções de Minkowski associadas a poliedros contrativos.

A matéria está organizada da seguinte forma:

Capítulo 2: apresenta conceitos básicos e propriedades relacionados com a estabilidade de sistemas dinâmicos, possivelmente não-lineares, importantes para os capítulos seguintes.

Capítulo 3: é dedicado aos sistemas com controles em malha fechada saturáveis.

Capítulo 4: é dedicado aos sistemas com controles em malha fechada com zonas mortas.

Capítulo 5: apresenta conclusões gerais e algumas possibilidades de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Conceitos Básicos

2.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados conceitos básicos e propriedades relacionados com a estabilidade de sistemas dinâmicos, possivelmente não-lineares, importantes para os capítulos seguintes.

Inicialmente serão apresentados conceitos e propriedades sobre a estabilidade da origem de sistemas dinâmicos, sua região de atração e temas correlatos: conjuntos positivamente invariantes, conjuntos contrativos e conjuntos de confinamento final. Em seguida serão apresentados os fundamentos e propriedades do segundo método de Lyapunov para a análise de estabilidade de sistemas dinâmicos.

2.2 Estabilidade de Sistemas Dinâmicos

Considere um sistema dinâmico discreto no tempo com a seguinte forma:

$$x(k+1) = f(x(k)) \tag{2.1}$$

com $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Para uma condição inicial $x = x(0) \in \mathbb{R}^n$, a *solução* ou a *trajetória* do sistema (2.1) correspondente à $x(0)$ será denotada $\phi(k, x(0))$.

Pode-se dizer que x_e é um ponto de equilíbrio do sistema (2.1) se este satisfaz:

$$x_e = f(x_e) \quad (2.2)$$

Doravante, para simplificar, sem perda de generalidade, considera-se $x_e = 0$. Com efeito, como o sistema é autônomo pode-se transladar o ponto de equilíbrio para a origem a partir de uma mudança de variável do tipo:

$$\bar{x}_e = x - x_e \quad (2.3)$$

Assim, considerando que $f(x(k))$ satisfaz $f(0) = 0$ vamos estudar a estabilidade da origem relativa às soluções (ou trajetórias) $\phi(k, x(0))$ do sistema (2.1).

Definição 2.1: O ponto $x = 0$ para o sistema (2.1) é:

- *Estável*, se para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon)$ tal que

$$||x(0)|| < \delta \Rightarrow ||x(k)|| < \epsilon, \quad \forall k \geq 0$$

- *Assintoticamente estável*, se é estável e δ puder ser escolhido de forma a ter:

$$||x(0)|| < \delta \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = 0$$

- *Instável*, se não é estável.

Portanto, a noção de estabilidade no sentido de Lyapunov é baseada no conceito de vizinhança de um ponto. A vizinhança $U(x)$ de um ponto x é um conjunto contendo x em seu interior. Então, de acordo com a definição 2.1, a origem ($x = 0$) de um sistema dinâmico é estável se para uma vizinhança qualquer de $x = 0$, $U_1(0, \epsilon)$, existe uma vizinhança $U_2(0, \delta(\epsilon))$ tal que para toda condição inicial em $U_2(0, \delta(\epsilon))$ a trajetória

termina em $U_1(0, \epsilon)$. Em adição, se na vizinhança $U_1(0, \epsilon)$ a trajetória tende para $x = 0$ quando k tende para o infinito, a origem   dita assintoticamente estável. De outro modo, dizer que $x = 0$   instável significa que existe uma vizinhança da origem $U_1(0, \epsilon)$, tal que para toda vizinhança $U_2(0, \delta(\epsilon)) \subseteq U_1(0, \epsilon)$, existe pelo menos uma trajetória $\phi(k, x(0))$, com $x(0) \in U_2(0, \delta(\epsilon))$, que não está contida em $U_1(0, \epsilon)$.

Quando δ é finito os conceitos acima são ditos locais, por outro lado se δ tende ao infinito os conceitos são válidos para todo $\mathbb{R}^n$ e são denominados globais.

Em geral, não é suficiente determinar se a origem do sistema é assintoticamente estável. Com efeito, quando a origem   assintoticamente estável, interessa saber qual é o maior domínio no espaço de estado no qual toda trajetória que ali se inicia converge na direção da origem. Esta questão nos prepara para a definição da região de atração da origem.

Definição 2.2: *Seja $\phi(k, x(0))$ a trajetória que no instante $k = 0$ inicia no estado $x(0)$. A região de atração da origem é definida como o conjunto de todos os pontos x do espaço de estado tais que para $x = x(0)$ tem-se $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi(k, x(0)) = 0$.*

O domínio de atração da origem   portanto o conjunto:

$$R_A \triangleq \{x(0) \in \mathbb{R}^n; \phi(k, x(0)) \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty\} \quad (2.4)$$

Observe que se o sistema é globalmente assintoticamente estável, então a região de atração da origem   todo o espaço de estado, isto é, $R_A = \mathbb{R}^n$.

A determinação exata da região de atração da origem de uma forma analítica é uma tarefa em geral difícil, e até mesmo impossível [9], [10], [11]. Entretanto, pode-se determinar aproximações da região de atração, ou seja, pode-se determinar regiões do espaço de estado onde a convergência assintótica das trajetórias em direção à origem é garantida.

Definição 2.3: Uma região R_S do espaço de estado é uma região de estabilidade assintótica em relação a origem do sistema (2.1) se para toda condição inicial $x(0) \in R_S$ tem-se $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi(k, x(0)) = 0$.

Relacionados com a região atração da origem temos os conceitos de conjuntos positivamente invariantes e conjuntos contrativos.

Definição 2.4: O conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é positivamente invariante em relação ao sistema (2.1) se

$$\forall x(0) \in \Omega \Rightarrow \phi(k, x(0)) \in \Omega, \quad \forall k \geq 0.$$

Proposição 2.1: Um conjunto não vazio Ω definido no espaço de estado do sistema (2.1) é positivamente invariante com relação ao sistema (2.1) com uma taxa de contração λ se e somente se qualquer uma das seguintes condições equivalentes são válidas:

$$\lambda^{-1}\mathcal{T} \subset \Omega \quad ; \quad \Omega \subset \lambda\mathcal{Q}$$

onde $\mathcal{T}$ e $\mathcal{Q}$ são, respectivamente, o conjunto alcançável um passo à frente de Ω [12] e o conjunto admissível de um passo de Ω , com relação ao sistema (2.1), dados por:

$$\mathcal{T} = \{f(x) \in \mathbb{R}^n : x \in \Omega\}$$

$$\mathcal{Q} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in \Omega\}$$

Prova: Imediata da Definição 2.4.

◇

Proposição 2.2: Seja $\mathcal{S}$ a família de todos os conjuntos positivamente invariantes Ω com relação ao sistema (2.1) com uma taxa de contração λ , contendo um conjunto não vazio Γ . Se $\mathcal{S}$ é não vazio, ele tem um elemento mínimo dado pela solução limite da recorrência:

$$\Omega_{i+1} = \Omega_i \cup \lambda^{-1}\mathcal{T}_i \quad ; \quad \Omega_0 = \Gamma \tag{2.5}$$

onde $\mathcal{T}_i$ é o conjunto alcançável um passo à frente de Ω_i .

Prova: Dados dois conjuntos positivamente invariantes $\Omega_1 \supset \Gamma$, $\Omega_2 \supset \Gamma$, usando a definição 2.4, pode ser mostrado que o conjunto $\Omega_1 \cap \Omega_2 \supset \Gamma$ é também positivamente invariante. Portanto $\mathcal{S}$ possui um elemento mínimo formado pela interseção de todos os membros da família. Pode ser verificado que a solução limite de (2.5) é um conjunto positivamente invariante devido este ser obtido quando $\Omega_i = \Omega_i \cup \lambda^{-1}\mathcal{T}_i$, o que corresponde a $\lambda^{-1}\mathcal{T}_i \subset \Omega_i$. Dado qualquer conjunto positivamente invariante $\Omega \supset \Gamma$, pode ser verificado que: $\Omega_1 \subset \Omega$ e se $\Omega_i \subset \Omega$ então $\Omega_{i+1} \subset \Omega$. Assim, por indução, pode-se concluir que $\Omega_i \subset \Omega$ é válido para todo i e consequentemente o limite de (2.5) é o elemento mínimo de $\mathcal{S}$.

◇

Definição 2.5: Considere um sistema dinâmico discreto e autônomo $\mathcal{S}$ (2.1). Um conjunto não vazio Ω definido no espaço de estado de $\mathcal{S}$ é dito ser λ -contrativo com relação a $\mathcal{S}$ se existe um λ real $0 < \lambda < 1$ tal que se $x(k) \in \epsilon\Omega$ então $x(k+1) \in \lambda\epsilon\Omega$ para todo $0 \leq \epsilon \leq 1$.

De acordo com a definição 2.4, dizer que um conjunto Ω é positivamente invariante em relação ao sistema (2.1) significa que para toda condição inicial pertencente a Ω , toda a trajetória do sistema permanecerá confinada em Ω .

Por outro lado, de acordo com a definição 2.5, a λ -contratividade representa um caso particular da invariância positiva onde toda a trajetória do sistema (2.1) iniciada em Ω evolui sempre na direção do interior do conjunto. Em outras palavras, se no instante k , $x(k)$ pertence à fronteira de um homotético interno de Ω , isto é, $x(k) \in \epsilon\Omega$, $0 \leq \epsilon \leq 1$, no instante seguinte o estado pertencerá ao interior do conjunto, ou seja, $x(k+1) \in \lambda\epsilon\Omega$ com $0 < \lambda < 1$.

Note que o conjunto contrativo é sempre positivamente invariante, mas a recíproca não é verdadeira. A figura 2.1 esquematiza uma trajetória para um conjunto positivamente invariante e para um conjunto contrativo.

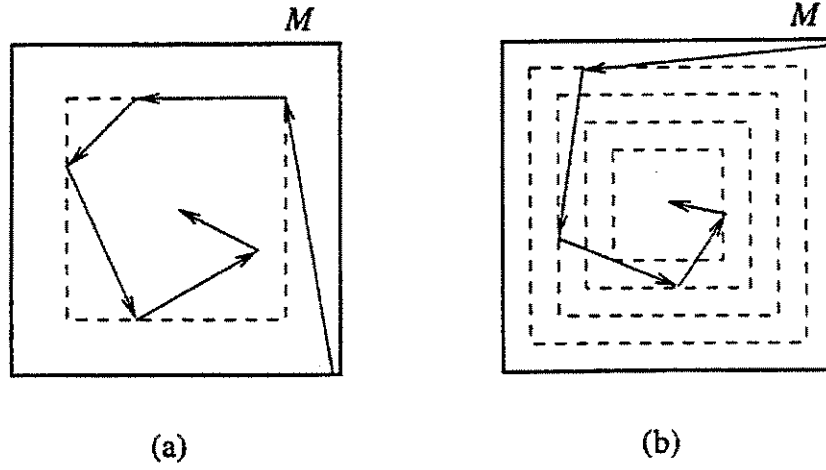


Figura 2.1: (a) Invariância Positiva; (b) Contratividade

Os conceitos sobre a estabilidade e a região de atração de um ponto de equilíbrio podem ser estendidos para um conjunto Ω contido no espaço de estado do sistema (2.1) através da noção de conjunto de confinamento final.

Definição 2.6: Um conjunto fechado Ω é um conjunto de confinamento final uniforme local em $\Omega_0 \supset \Omega$ com relação ao sistema (2.1) se para cada condição inicial $x(0) \in \Omega_0$, existe um k_0 tal que $x(k) \in \Omega$ para todo $k \geq k_0$. Para $\Omega_0 = \mathbb{R}^n$, tem-se um confinamento final uniforme global.

Proposição 2.3: Se a família de todos os conjuntos de confinamento final uniforme local em Ω_0 com relação ao sistema (2.1) é não vazia, ela tem um elemento mínimo dado pela interseção de todos os membros da família.

Prova: Similar à prova da proposição 2.2.

◊

2.3 Segundo Método de Lyapunov

O segundo método de Lyapunov permite estudar a estabilidade do sistema (2.1) sem o conhecimento explícito de sua trajetória.

Definição 2.7: Uma função contínua $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é definida positiva se

$$\Psi(0) = 0 ; \Psi(x) > 0 \text{ para } x \neq 0$$

Definição 2.8: Uma função contínua $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é radialmente não limitada se

$$\Psi(x) \rightarrow \infty \text{ quando } \|x\| \rightarrow \infty$$

em outras palavras, $\Psi(x)$ tende para o infinito quando x tende para o infinito em qualquer direção.

Considere o conjunto, possivelmente vazio,

$$\mathcal{N}[\Psi, \check{b}, \hat{b}] = \{x \in \mathbb{R}^n : \check{b} \leq \Psi(x) \leq \hat{b}\} \quad (2.6)$$

onde $0 \leq \check{b} \leq \hat{b}$.

Definição 2.9: [13] Uma função definida positiva $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Lyapunov do sistema discreto (2.1) no conjunto $\mathcal{N}[\Psi, \check{b}, \hat{b}]$ (2.6), se para todo $x \in \mathcal{N}[\Psi, 0, \hat{b}]$,

$$\Psi(f(x)) \leq \max\{\lambda \Psi(x), \check{b}\} \quad (2.7)$$

vale para $\lambda < 1$ positivo.

A seguir são feitas algumas observações oportunas [13] a respeito da definição 2.9:

As superfícies de níveis $\Psi(x) \leq b$, $\check{b} \leq b \leq \hat{b}$ são conjuntos positivamente invariantes.

Se $\check{b} = 0$, $\mathcal{N}[\Psi, 0, \hat{b}]$ é uma região de estabilidade assintótica da origem com um índice de convergência λ . A estabilidade assintótica da origem é local se $\hat{b}$ é finito e será global se $\hat{b} \rightarrow \infty$ e $\Psi(x)$ é radialmente não limitada.

Se $\check{b} > 0$, é assegurado confinamento final uniforme de (2.1) em $\mathcal{N}[\Psi, 0, \check{b}]$, com um índice de convergência λ . O confinamento final uniforme é local se $\hat{b}$ é finito e será global se $\hat{b} \rightarrow \infty$ e $\Psi(x)$ é radialmente não limitada.

Uma interpretação geométrica da função de Lyapunov é mostrada na figura (2.1).

A trajetória do sistema (2.1) evolui na direção de uma superfície de Lyapunov interior $\Psi(x) = c_{k+1}$, $c_{k+1} < c_k$. Assim, com o passar do tempo, a superfície sobre a qual está $x(k)$ se contrai na direção da origem, mostrando que o estado do sistema se aproxima assintoticamente da origem.

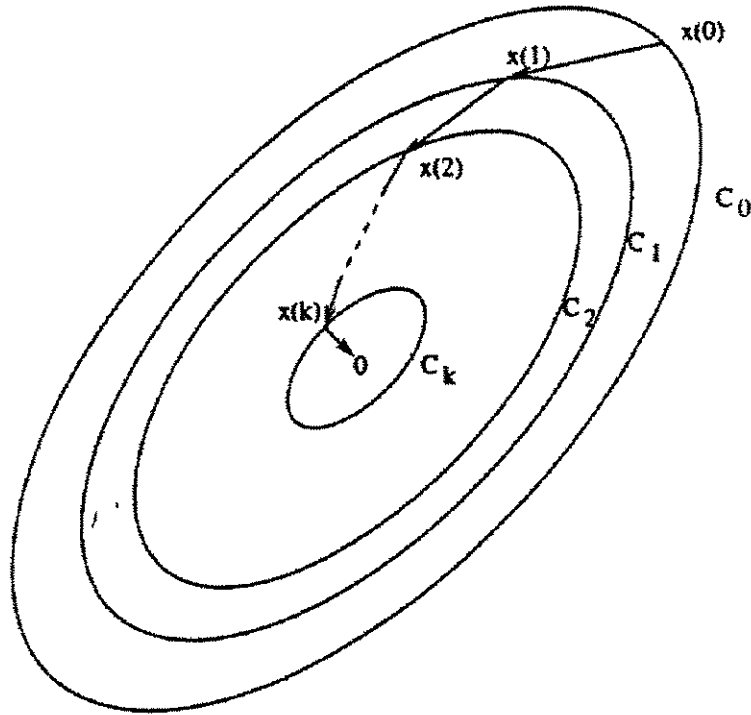


Figura 2.1: Contratividade das trajetórias

A função de Lyapunov está associada a uma distância generalizada entre o estado do sistema (2.1) para o instante k e a origem. Se esta distância não aumentar para o instante $k + 1$ então o sistema é estável. E ainda, se ela diminuir o sistema é assintoticamente estável.

É importante observar que a função de Lyapunov fornece uma condição *suficiente* para a estabilidade. Consequentemente, se não somos capazes de encontrar uma função de Lyapunov nada se pode concluir a respeito da estabilidade do sistema (2.1).

A dificuldade maior do segundo método de Lyapunov consiste na escolha de uma “boa” função. Infelizmente, não existe um método sistemático para a determinação de funções de Lyapunov. Em geral, a escolha da função requer a experiência do projetista. Em casos particulares (sistemas mecânicos e/ou elétricos, por exemplo), pode-se apelar para a interpretação física do teorema de Lyapunov e escolher as funções representantes da energia do sistema. Neste caso, se a energia é dissipada ao longo das trajetórias do sistema, a função será potencialmente uma função de Lyapunov.

Definição 2.10: [14] *O epígrafo da função $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, restrito ao conjunto imagem $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}$, é o conjunto $\mathcal{E}_\Psi \subset \mathbb{R}^{n+1}$:*

$$\mathcal{E}_\Psi = \{(x, \zeta) : x \in \mathbb{R}^n, \zeta \in \mathcal{Y}, \Psi(x) \leq \zeta\}$$

Lema 2.1: *Sejam $\Psi_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\Psi_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, funções contínuas. Então $\Psi_2(x) \leq \max\{\Psi_1(x), \check{\rho}\}$ é válida para todo $x \in \Psi_1(x) \leq \hat{\rho}$, $\hat{\rho} \geq \check{\rho}$ se seus epígrafos, restritos ao conjunto imagem $\mathcal{Y} = \{y \in \mathbb{R} : \check{\rho} \leq y \leq \hat{\rho}\}$, satisfazem $\mathcal{E}_{\Psi_1} \subset \mathcal{E}_{\Psi_2}$.*

Prova: $\Psi_2(x) \leq \max\{\Psi_1(x), \check{\rho}\}$ para todo $x \in \Psi_1(x) \leq \hat{\rho}$ pode ser estabelecido de forma equivalente como:

$$\Psi_2(x) \leq \Psi_1(x) \quad \text{se} \quad \check{\rho} \leq \Psi_1(x) \leq \hat{\rho} \tag{2.8}$$

$$\Psi_2(x) \leq \check{\rho} \quad \text{se} \quad \Psi_1(x) \leq \check{\rho} \tag{2.9}$$

Da definição 2.10, tem-se:

$$\mathcal{E}_{\Psi_1} = \{(x, \zeta) : x \in \mathbb{R}^n, \Psi_1(x) \leq \zeta, \check{\rho} \leq \zeta \leq \hat{\rho}\} \quad (2.10)$$

$$\mathcal{E}_{\Psi_2} = \{(x, \zeta) : x \in \mathbb{R}^n, \Psi_2(x) \leq \zeta, \check{\rho} \leq \zeta \leq \hat{\rho}\} \quad (2.11)$$

Suficiência: Inspeccionando (2.10), (2.11), pode ser verificado que $\mathcal{E}_{\Psi_1} \subset \mathcal{E}_{\Psi_2}$ implica em $\Psi_2(x) \leq \zeta$ para todo x tal que $\Psi_1(x) \leq \zeta, \check{\rho} \leq \zeta \leq \hat{\rho}$. Consequentemente, tomando $\zeta = \check{\rho}$ tem-se $\Psi_2(x) \leq \check{\rho}$ para $\Psi_1(x) \leq \check{\rho}$ (2.9). Tomando $\zeta = \Psi_1(x)$ tem-se $\Psi_2(x) \leq \Psi_1(x)$ para $\check{\rho} \leq \Psi_1(x) \leq \hat{\rho}$ (2.8).

Necessidade: Assuma $\Psi_2(x_1) > \Psi_1(x_1)$ para algum $x_1 \in \check{\rho} \leq \Psi_1(x) \leq \hat{\rho}$. Então, para $\zeta = \Psi_1(x_1)$ tem-se $x_1 \in \Psi_1(x) \leq \zeta$ e $x_1 \notin \Psi_2(x) \leq \zeta$, o que contradiz $\mathcal{E}_{\Psi_1} \subset \mathcal{E}_{\Psi_2}$. Agora assuma $\Psi_2(x_1) > \check{\rho}$ para algum $x_1 \in \Psi_1(x) \leq \check{\rho}$. Neste caso, $\Psi_1(x) \leq \check{\rho} \not\subset \Psi_2(x) \leq \check{\rho}$, contradizendo $\mathcal{E}_{\Psi_1} \subset \mathcal{E}_{\Psi_2}$.

◇

Corolário 2.1: *Uma função definida positiva $\Psi(x)$ é uma função de Lyapunov do sistema (2.1) no conjunto $\mathcal{N}[\Psi, \check{b}, \hat{b}]$ se existe um $\lambda < 1$ positivo tal que:*

$$\mathcal{E}_{\Psi} \subset \mathcal{E}_{\Psi_f} \quad (2.12)$$

onde $\mathcal{E}_{\Psi}$ e $\mathcal{E}_{\Psi_f}$ são respectivamente epígrafos das funções $\Psi(x)$ e $\lambda^{-1}\Psi(f(x))$, restritos ao conjunto imagem $\lambda^{-1}\check{b} \leq \Psi \leq \hat{b}$.

Prova: Imediata da definição 2.9 e do lema 2.1.

◇

2.4 Conclusão

Este capítulo foi organizado procurando evidenciar a relação existente entre os conceitos de estabilidade assintótica da origem de um sistema dinâmico e de sua região de atração, com os conceitos de conjuntos positivamente invariantes, conjuntos contrativos, conjuntos de confinamento final e funções de Lyapunov.

Ao longo da apresentação dos conceitos, através de proposições, lemas e corolários, foram apresentadas propriedades que permitem caracterizar e posteriormente construir conjuntos positivamente invariantes, conjuntos contrativos e funções de Lyapunov. Dentre essas propriedades, a Proposição 2.2 que trata da construção de um conjunto positivamente invariante mínimo, o Lema 2.1 e Corolário 2.1 que tratam da caracterização de uma função de Lyapunov através de epígrafos são resultados novos.

Capítulo 3

Sistemas com Controles Saturáveis

3.1 Introdução

A estabilidade de sistemas sujeitos a restrições de amplitude nos controles tem sido muito estudada e vários trabalhos tem sido publicados [3], [15]. Duas abordagens devem ser distinguidas. A primeira consiste em evitar a saturação do controle, forçando o sistema a trabalhar na região de comportamento linear: ver [16],[17], [18], [19],[20],[21],[6]. Na segunda abordagem, a saturação dos controles e portanto o comportamento não linear do sistema é levado em conta. Neste caso, é ainda importante distinguir entre sistemas não estritamente instáveis em malha aberta e sistemas estritamente instáveis em malha aberta. No primeiro caso, é possível determinar uma lei de controle de realimentação que estabiliza globalmente o sistema [22], [23], [24]. No segundo caso, apenas estabilidade assintótica local da origem do sistema em malha fechada saturado pode ser obtida. A determinação da região de estabilidade assintótica da origem de forma exata é ainda um problema não resolvido [10], [25].

Para sistemas dinâmicos em muitos campos da engenharia e ciência, regiões de estabilidade assintótica local da origem podem ser vistas como regiões de operação segura. Estimativas não conservativas de tais regiões podem evitar restrições operacionais desnecessárias e controles com especificações exageradas.

Trabalhos recentes, [1], [2], [3], [4], [5], apresentam resultados importantes de caracterização e construção de poliedros λ -contrativos para sistemas lineares discretos no tempo com controles saturáveis em malha fechada.

Em [2], [3], o sistema em malha fechada saturável é aproximado por um sistema linear com os parâmetros da matriz de entrada de controle incertos, restritos a um politopo compacto, dependente do “nível” de saturação das entradas de controle. Este modelo, aqui denominado modelo incerto politópico, é conveniente para projeto de controladores porque transforma o problema de controle não linear em um problema de controle robusto de sistema linear incerto, para o qual são disponíveis vários métodos de solução, apoiados por ferramentas computacionais poderosas [26], [27]. Para análise de estabilidade, mais especificamente, caracterização e construção de poliedros λ -contrativos para estimação da região de estabilidade assintótica da origem, o modelo politópico incerto é uma forma de aproximação que leva a resultados conservativos [5].

Em [1], [2], [4] e [5], o sistema em malha fechada saturável é descrito por um modelo linear por partes dentro das regiões do espaço de estado, chamadas de regiões de saturação, definidas pela lei de controle em malha fechada. Utilizando este modelo, aqui simplesmente denominado de modelo linear por partes, em [5] são apresentadas condições algébricas necessárias e suficientes para um poliedro convexo fechado ser λ -contrativo. Baseado em formulação computacional de programação linear dessas condições algébricas, é também apresentado um procedimento de expansão não homotético para construção de poliedros λ -contrativos para estimação da região de estabilidade assintótica local da origem do sistema saturado.

Sabe-se [6], [4], [7], [8], que poliedros λ -contrativos são regiões de estabilidade assintótica local de sistemas dinâmicos, associadas a funções de Lyapunov poliedrais do tipo Minkowski:

$$\Psi(x) = \max_{1 \leq i \leq r} g_i x \quad (3.1)$$

onde: $x \in \mathbb{R}^n$, g_i é a i ésima linha de $G \in \mathbb{R}^{r \times n}$ e o poliedro $Gx \leq 1$ é limitado.

As funções de Minkowski são um caso particular de funções lineares por partes (FLP):

$$\Psi(x) = \max_{1 \leq i \leq r} g_i x + c_i \quad (3.2)$$

onde: $x \in \mathbb{R}^n$ e g_i, c_i são as i ésimas linhas de $G \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $c \leq 0 \in \mathbb{R}^r$, respectivamente.

Este capítulo trata do problema de estabilidade, particularmente da questão da determinação de estimativas poliedrais convexas da região de estabilidade assintótica local da origem, de sistemas lineares invariantes discretos no tempo, com controles em malha fechada saturáveis. O capítulo está organizado da seguinte forma:

Na seção 3.2 é descrito o modelo linear por partes do sistema com controles em malha fechada saturável proposto em [2], [4].

Na seção 3.3 são descritos os resultados sobre caracterização e construção de poliedros λ -contrativos, para sistemas com parâmetros perfeitamente conhecidos, propostos em [5].

Na seção 3.4, os resultados sobre caracterização e construção de poliedros λ -contrativos da seção 3.3 são estendidos para sistemas lineares com parâmetros incertos restritos a um politopo compacto (domínio de incerteza politópico) [28], [29]. São demonstradas novas condições algébricas necessárias e suficientes para um poliedro convexo fechado ser λ -contrativo robusto. Baseado em formulação computacional de programação linear dessas condições algébricas, é proposto um procedimento de expansão não homotético para construção de poliedros λ -contrativos robustos para estimação da região de estabilidade assintótica robusta local da origem do sistema saturado.

Na seção 3.5 são apresentados resultados novos sobre caracterização e construção de funções de Lyapunov lineares por partes (3.2) para sistemas com parâmetros per-

feitamente conhecidos [30]. São demonstradas novas condições algébricas necessárias e suficientes para uma FLP definida positiva ser função de Lyapunov. Baseado em formulação computacional de programação linear dessas condições algébricas, é proposto um procedimento de expansão não homotético para construção de funções de Lyapunov lineares por partes, para estimação da região de estabilidade assintótica local da origem do sistema saturado.

Na seção 3.6, os resultados sobre caracterização e construção de funções de Lyapunov lineares por partes da seção 3.5 são estendidos para sistemas lineares com parâmetros incertos restritos a um politopo compacto (domínio de incerteza politópico).

Ao longo de todas as seções, os resultados teóricos apresentados são ilustrados e comparados entre si através de exemplos numéricos.

3.2 Modelo de Sistema com Controles Saturáveis

Seja um sistema linear, discreto no tempo, descrito pela seguinte equação:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (3.3)$$

onde $x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle, A e B são matrizes reais de dimensões $(n \times n)$ e $(n \times m)$ respectivamente.

Considere que o controle é uma função linear do estado, ou seja, o sistema é realimentado por:

$$u(k) = Fx(k) \quad (3.4)$$

com $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Se nenhuma restrição de amplitude é imposta aos estados ou controle do sistema (3.3), o sistema em malha fechada é dado pela seguinte equação linear:

$$x(k+1) = (A + BF)x(k) \quad (3.5)$$

Neste caso, a estabilidade do sistema em malha fechada é caracterizada pelos autovalores de $(A + BF)$. Se o sistema (3.3) é estabilizável, a matriz F pode ser escolhida tal que todos os autovalores de $(A + BF)$ estão contidos no círculo unitário ($(A + BF)$ é Schur). A estabilidade assintótica do sistema linear (3.5) é então garantida no sentido global.

Suponha agora que o controle $u(k)$ esteja sujeito a restrições de amplitude, ou seja, cada componente $u_{(i)}(k)$, $i = 1, \dots, m$, do vetor de controle está compreendida entre um valor máximo e um valor mínimo. Em outras palavras, a cada instante k o vetor de controle $u(k)$ deve pertencer a um conjunto poliedral Ω definido no espaço de controle por:

$$\Omega = \{u \in \mathbb{R}^m; -\check{u} \leq u \leq \hat{u}\} \quad (3.6)$$

com $\check{u}, \hat{u} > 0$, para $i = 1, \dots, m$.

A lei de controle efetivamente aplicada ao sistema (3.3) é:

$$u(k) = \text{sat}(Fx(k)) \quad (3.7)$$

onde cada um dos m componentes da lei de $\text{sat}(Fx(k))$ são dados por:

$$\text{sat}(Fx)_i = \begin{cases} -\check{u}_i & \text{se } f_i x < -\check{u}_i \\ f_i x & \text{se } -\check{u}_i \leq f_i x \leq \hat{u}_i \\ \hat{u}_i & \text{se } f_i x > \hat{u}_i \end{cases} \quad (3.8)$$

onde f_i denota a i ésima linha da matriz F e $\check{u}_i, \hat{u}_i$ denotam as i ésimas linhas dos vetores de limite inferior e superior do controle $\check{u} \geq 0, \hat{u} \geq 0$, respectivamente. A Figura 3.1 apresenta o gráfico de uma função saturação $u = \text{sat}(v)$.

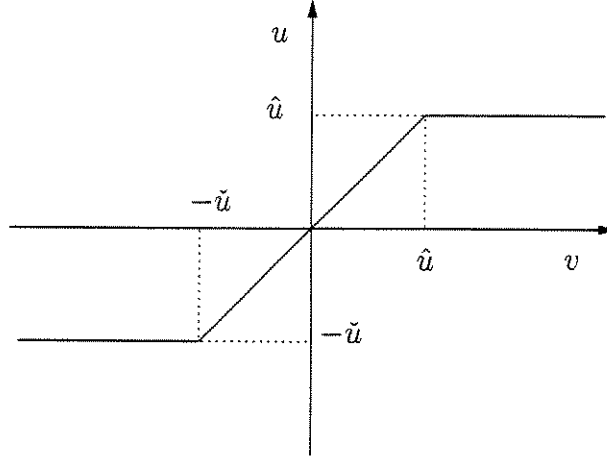


Figura 3.1: Função saturação $u = \text{sat}(v)$.

De (3.3), (3.7), o sistema em malha fechada é dado pelo modelo não linear:

$$x(k+1) = Ax(k) + B\text{sat}(Fx(k)) \quad (3.9)$$

Considerando $x \in \mathbb{R}^n$, cada uma das m componentes de (3.8) tem 3 possíveis estados: saturado no limite inferior, não saturado e saturado no limite superior. Consequentemente, $\mathbb{R}^n$ pode ser decomposto em $j = 1 : 3^m$ regiões $S(R_j, d_j) \subset \mathbb{R}^n$, chamadas de regiões de saturação [2], [4], dadas pelos poliedros:

$$S(R_j, d_j) = \{x \in \mathbb{R}^n; R_j x \leq d_j\} \quad (3.10)$$

$$R_j = \begin{bmatrix} F_{ns} \\ -F_{ns} \\ -F_{su} \\ F_{sl} \end{bmatrix} ; \quad d_j = \begin{bmatrix} \hat{u}_{ns} \\ \check{u}_{ns} \\ -\hat{u}_{su} \\ -\check{u}_{sl} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

onde F_{ns} , $\hat{u}_{ns}$, $\check{u}_{ns}$, F_{su} , $\hat{u}_{su}$, F_{sl} , $\check{u}_{sl}$, são matrizes e vetores formados apropriadamente pelas linhas de F , $\hat{u}$, $\check{u}$ e relacionadas, respectivamente, com as componentes não saturadas, saturadas no limite superior e saturadas no limite inferior, que caracterizam a região.

Dentro de cada região de saturação $S(R_j, d_j)$, pode ser verificado que o sistema de malha fechada (3.9) pode ser representado pelo modelo linear [2], [4]:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_j x(k) + p_j \\ A_j &= [A + B_{ns} F_{ns}] \\ p_j &= B_{su} \hat{u}_{su} - B_{sl} \tilde{u}_{sl} \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde B_{ns} , B_{su} e B_{sl} são matrizes apropriadamente formadas pelas colunas de B relacionadas com F_{ns} , $\hat{u}_{su}$, $\tilde{u}_{sl}$, respectivamente.

No restante deste capítulo, será designado $j = 1$ para a região de comportamento linear de $\text{sat}(F(x))$, descrita por:

$$\begin{aligned} R_1 &= \begin{bmatrix} F \\ -F \end{bmatrix} ; \quad d_1 = \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \tilde{u} \end{bmatrix} \\ A_1 &= A + BF ; \quad p_1 = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Como exemplo, considere o sistema de segunda ordem com duas entradas de controle saturáveis:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ u(k) &= \text{sat}(Fx(k)) \\ -\tilde{u} &\leq u(k) \leq \hat{u} \end{aligned}$$

Onde B e F podem ser vistas parcionadas da seguinte forma:

$$B = [B_1 \ B_2] ; \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

Região 1: $-\tilde{u}_1 \leq u_1 \leq \hat{u}_1 ; -\tilde{u}_2 \leq u_2 \leq \hat{u}_2$

$$\begin{aligned} R_1 &= \begin{bmatrix} F \\ -F \end{bmatrix} ; \quad d_1 = \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \tilde{u} \end{bmatrix} \\ A_1 &= A + BF ; \quad p_1 = 0 \end{aligned}$$

Região 2: $u_1 \geq \hat{u}_1$; $-\check{u}_2 \leq u_2 \leq \hat{u}_2$

$$R_2 = \begin{bmatrix} -f_1 \\ f_2 \\ -f_2 \end{bmatrix} ; d_2 = \begin{bmatrix} -\hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \check{u}_2 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = A + B_2 f_2 ; p_2 = B_1 \hat{u}_1$$

Região 3: $u_1 \leq -\check{u}_1$; $-\check{u}_2 \leq u_2 \leq \hat{u}_2$

$$R_3 = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ -f_2 \end{bmatrix} ; d_3 = \begin{bmatrix} -\check{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \check{u}_2 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = A + B_2 f_2 ; p_3 = -B_1 \check{u}_1$$

Região 4: $u_2 \geq \hat{u}_2$; $-\check{u}_1 \leq u_1 \leq \hat{u}_1$

$$R_4 = \begin{bmatrix} -f_2 \\ f_1 \\ -f_1 \end{bmatrix} ; d_4 = \begin{bmatrix} -\hat{u}_2 \\ \hat{u}_1 \\ \check{u}_1 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = A + B_1 f_1 ; p_4 = B_2 \hat{u}_2$$

Região 5: $u_2 \leq -\check{u}_2$; $-\check{u}_1 \leq u_1 \leq \hat{u}_1$

$$R_5 = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_1 \\ -f_1 \end{bmatrix} ; d_5 = \begin{bmatrix} -\check{u}_2 \\ \hat{u}_1 \\ \check{u}_1 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = A + B_1 f_1 ; p_5 = -B_2 \check{u}_2$$

Região 6: $u_1 \geq \hat{u}_1$; $u_2 \geq \hat{u}_2$

$$R_6 = \begin{bmatrix} -f_1 \\ -f_2 \end{bmatrix} ; d_6 = \begin{bmatrix} -\hat{u}_1 \\ -\hat{u}_2 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = A ; p_6 = B_1 \hat{u}_1 + B_2 \hat{u}_2$$

Região 7: $u_1 \geq \hat{u}_1$; $u_2 \leq -\check{u}_2$

$$R_7 = \begin{bmatrix} -f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} ; d_7 = \begin{bmatrix} -\hat{u}_1 \\ -\check{u}_2 \end{bmatrix}$$

$$A_7 = A ; p_7 = B_1 \hat{u}_1 - B_2 \check{u}_2$$

Região 8: $u_1 \leq -\check{u}_1$; $u_2 \leq -\check{u}_2$

$$R_8 = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} ; d_8 = \begin{bmatrix} -\check{u}_1 \\ -\check{u}_2 \end{bmatrix}$$

$$A_8 = A ; p_8 = -[B_1 \check{u}_1 + B_2 \check{u}_2]$$

Região 9: $u_1 \leq -\check{u}_1$; $u_2 \geq \hat{u}_2$

$$R_9 = \begin{bmatrix} f_1 \\ -f_2 \end{bmatrix} ; d_9 = \begin{bmatrix} -\check{u}_1 \\ -\hat{u}_2 \end{bmatrix}$$

$$A_9 = A ; p_9 = B_2 \hat{u}_2 - B_1 \check{u}_1$$

As regiões de saturação descritas anteriormente, são apresentadas de forma esquemática na figura 3.2.

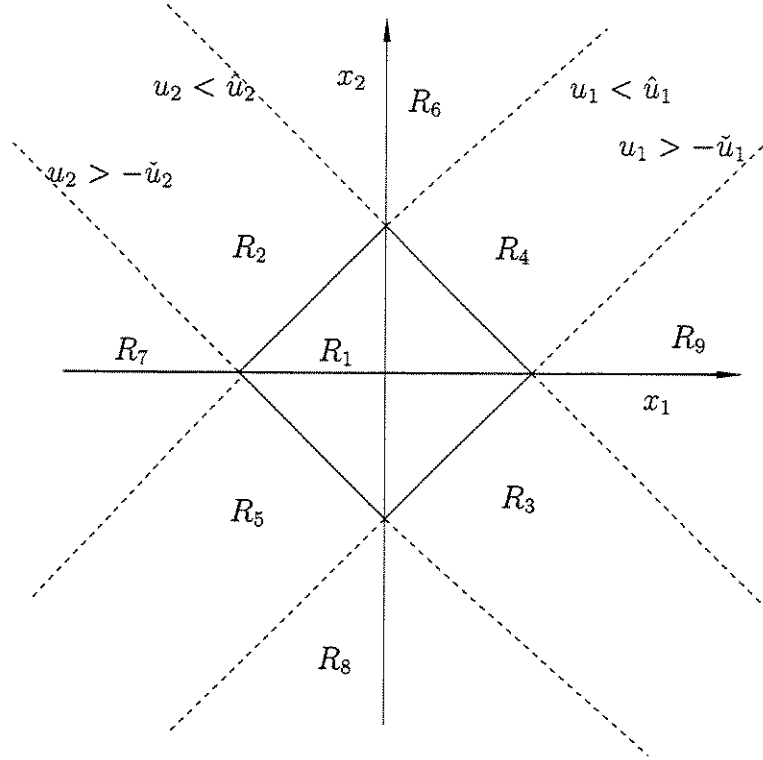


Figura 3.2: As regiões de saturação $S(R_j, d_j)$

3.3 Poliedros λ -Contrativos

Esta seção apresenta resultados propostos em [5] sobre caracterização e construção de poliedros λ -contrativos para estimação da região de estabilidade assintótica local do sistema em malha fechada com controles saturáveis (3.9).

3.3.1 Caracterização

Considere o sistema em malha fechada (3.9) e o poliedro compacto:

$$S(G, w) = \{x \in \mathbb{R}^n; Gx \leq w\} \quad (3.14)$$

onde $G \in \mathbb{R}^{r \times n}$ e $w > 0 \in \mathbb{R}^r$.

Definição 3. 1 *O poliedro $S(G, w)$ dado pela equação (3.14) é um conjunto λ -contrativo com relação ao sistema em malha fechada (3.9) se e somente se existe um número real λ , $0 < \lambda < 1$ tal que $x(k+1) \in S(G, w\epsilon\lambda)$ para todo $0 \leq \epsilon \leq 1$ e $x(k) \in S(G, w\epsilon)$.*

Considere também o conjunto admissível de um passo de $S(G, w)$ com relação ao sistema (3.9):

$$Q(G, w) = \{x \in \mathbb{R}^n; G[Ax + B\text{sat}(F(x))] \leq w\} \quad (3.15)$$

O poliedro admissível de um passo de $S(G, w)$ são todos os $x(k)$ cujos $x(k+1)$ ficam dentro de $S(G, w)$.

Proposição 3. 1 *O poliedro $S(G, w)$ dado pela equação (3.14) é um conjunto λ -contrativo com relação ao sistema em malha fechada (3.9) se e somente se existe um $0 < \lambda < 1$ real tal que:*

$$S(G, \epsilon w) \subset Q(G, \lambda \epsilon w) \quad \forall \quad 0 \leq \epsilon \leq 1 \quad (3.16)$$

Prova: Imediata da Definição 3.1

◊

Para fins computacionais, a seguir é apresentada uma formulação primal de programação linear da Proposição 3.1.

Proposição 3. 2 *O poliedro $S(G, w)$ (3.14) é um conjunto λ -contrativo com relação ao sistema em malha fechada (3.9) se e somente se existe um $0 < \lambda < 1$ real tal que:*

$$\max_{i,j} \{\sigma_j^i\} \leq 0 \quad (3.17)$$

$$1 \leq i \leq r ; 1 \leq j \leq 3^m$$

onde os σ_j^i são obtidos resolvendo-se o programa linear abaixo:

$$\sigma_j^i = \max_{x, \epsilon} (g^i A_j x - \lambda w_i \epsilon + g^i p_j)$$

sujeito a :

$$\begin{aligned} Gx - w\epsilon &\leq 0 \\ R_j x &\leq d_j \\ 0 &\leq \epsilon \leq 1 \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde g^i , w_i , são as iésimas linhas de G e w respectivamente e R_j , d_j , A_j , p_j estão relacionados às regiões de saturação e ao modelo linear por partes (3.10) a (3.12). Seja (ϵ_j^i, x_j^i) solução ótima relacionada a $\sigma_j^i > 0$. Isto indica que $x_j^i \in S(G, \epsilon_j^i w)$ está fora da iésima face de $Q(G, \epsilon_j^i w)$ na jésima região de saturação (3.18):

$$g^i A_j x - \lambda w_i \epsilon_j^i \leq -g^i p_j \quad (3.19)$$

Prova: Da proposição 3.1 temos:

$$S(G, \epsilon w) \subset Q(G, \lambda \epsilon w) \quad \forall \quad 0 \leq \epsilon \leq 1 \quad (3.20)$$

Note que as equações

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{j=3^m} S(R_j, d_j) \quad (3.21)$$

$$S(G, \epsilon w) = S(G, \epsilon w) \cap \mathbb{R}^n \quad (3.22)$$

forneecem

$$S(G, \epsilon w) = \bigcup_{j=1}^{j=3^m} S(G, \epsilon w) \cap S(R_j, d_j) \quad (3.23)$$

Consequentemente, para $j = 1 : 3^m$ pode-se verificar:

$$S(G, \epsilon w) \cap S(R_j, d_j) \subset Q(G, \lambda \epsilon w) \quad \forall \quad 0 \leq \epsilon \leq 1 \quad (3.24)$$

Para $x \in S(R_j, d_j)$, das equações (3.12) e (3.14), pode ser verificado que $Q(G, \lambda \epsilon w)$ corresponde ao poliedro

$$\begin{bmatrix} GA_j & -\lambda w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \epsilon_j \end{bmatrix} \leq -Gp_j \quad (3.25)$$

Das equações (3.10), (3.11) e (3.14) é fácil verificar que $S(G, \epsilon w) \cap S(R_j, d_j)$ corresponde ao poliedro

$$\begin{bmatrix} G & -w \\ R_j & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \epsilon \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ d_j \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

De (3.25), (3.26) verifica-se que (3.24) é válida se para $j = 1 : 3^m$, $i = 1 : r$,

$$g^i A_j x - \lambda w_i \epsilon_j \leq -g^i p_j \quad (3.27)$$

vale para todo (ϵ, x) que satisfaça (3.26). Em outras palavras,

$$\max_{x, \epsilon} (g^i A_j x - \lambda w_i \epsilon + g^i p_j) \leq 0 \quad (3.28)$$

sujeito ao conjunto de restrição (3.26), deve ser válido para $i = 1 : r$ e todo $1 \leq j \leq 3^m$ tal que (3.26) seja factível. É fácil verificar que a condição (3.28) é equivalente aos programas lineares (3.17) e (3.18). Sejam σ_j^i e (ϵ_j^i, x_j^i) , índice de desempenho ótimo e a solução ótima do programa linear (3.28), respectivamente. De (3.24) a (3.27) podemos verificar que $\sigma_j^i > 0$ indica que $x_j^i \in S(G, \epsilon_j^i w)$ está fora da iésima face de $Q(G, \epsilon_j^i w)$ o que conclui a prova.

◇

A Proposição seguinte é uma versão dual da Proposição 3.2.

Proposição 3.3 *O poliedro $S(G, w)$ (3.14) é um conjunto λ -contrativo com relação ao sistema em malha fechada (3.9) se e somente se existe um $0 < \lambda < 1$ real tal que:*

$$\max_{i,j} \{\lambda_j^i\} \leq \lambda$$

$$1 \leq i \leq r ; 1 \leq j \leq 3^m$$

onde λ_j^i são soluções do programa linear:

$$\min \lambda_j^i$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} hG + kR_j &= g^i A_j \\ hw - t &\leq \lambda_j^i w^i \\ kd_j + t &\leq -g^i p_j \\ h, k, t, \lambda_j^i &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.29}$$

onde g^i , w_i , são as i ésimas linhas de G e w respectivamente e R_j , d_j , A_j , p_j estão relacionados às regiões de saturação e ao modelo linear por partes (3.10) a (3.12). Além disso, $\lambda_j^i > \lambda$ indica que na j ésima região de saturação, o poliedro $S(G, \epsilon w)$ tem elementos fora da i ésima face de $Q(G, \epsilon w)$ (3.16):

$$g^i A_j x - \lambda w_i \epsilon \leq -g^i p_j \tag{3.30}$$

Prova: Inspecionando (3.18) e (3.17) pode-se verificar que a proposição 3.2 é satisfeita se existe $0 < \lambda < 1$ tal que para $j = 1 : 3^m$, $i = 1 : r$,

$$\begin{aligned} g^i A_j x - \lambda_j^i w_i \epsilon &\leq -g^i p_j \\ 0 &\leq \lambda_j^i \leq \lambda \end{aligned} \tag{3.31}$$

válido para todo x , ϵ , que satisfaça

$$\begin{bmatrix} G & -w \\ R_j & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \epsilon_j \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ d_j \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

Usando-se o Lema de Farkas [17] e rotineiras manipulações algébricas, pode ser verificado que o poliedro (3.32) é um subconjunto do poliedro (3.31) se existem vetores positivos h , k de dimensões apropriadas e escalares positivos t , λ_j^i , tais que:

$$\lambda_j^i \leq \lambda$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} hG + kR_j &= g^i A_j \\ kd_j + t &\leq -g^i p_j \\ hw - t &\leq \lambda_j^i w_i \end{aligned} \tag{3.33}$$

É fácil verificar que (3.33) é equivalente ao programa linear (3.29). De (3.31) e (3.32) pode-se também verificar que $\lambda_j^i > \lambda$ implica que

$$g^i A_j x - \lambda w_i \epsilon \leq -g^i p_j$$

não é satisfeito por algum (x, ϵ) no poliedro (3.32), o que conclui a prova.

◇

A seguir são feitas algumas observações sobre as proposições 3.2 e 3.3.

- A Proposição 3.2 e a Proposição 3.3 usam somente a descrição externa do poliedro $S(G, w)$ e das regiões de saturação [37], sendo eficientes computacionalmente e de fácil manuseio.

- A proposição 3.3 é mais conveniente do que a proposição 3.2 quando o objetivo é encontrar a máxima taxa de contração ($\min \lambda$) de um dado poliedro.

- A Proposição 3.2 é mais conveniente do que a Proposição 3.3 quando o objetivo é verificar se o poliedro satisfaz a taxa de contração λ conhecida a priori. Neste caso, quando o resultado é negativo, a Proposição 3.2 fornece os elementos (x, ϵ) de $S(G, \epsilon w)$ responsáveis pela falha.

O Corolário a seguir apresenta condição necessária e suficiente para um poliedro contido na região de comportamento linear do sistema em malha fechada (3.9) ser λ -contrativo. Este resultado será utilizado na construção de poliedros contrativos tratada na próxima sub-seção.

Corolário 3. 1 *O poliedro $S(G, w)$ (3.14) contido na região de comportamento linear (3.13), é um conjunto λ -contrativo com relação ao sistema em malha fechada (3.9) se e somente se existe um $0 < \lambda < 1$ real tal que:*

$$\max_i \{\lambda^i\} \leq \lambda ; \quad 1 \leq i \leq r$$

onde λ^i são escalares, os quais correspondem às soluções do programa linear abaixo:

$$\min \lambda^i$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} hG &= g^i(A + BF) \\ hw &\leq \lambda^i w^i \\ h, \lambda^i &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.34}$$

onde g^i , w_i , são respectivamente as i -ésimas linhas de G e w , e $(A + BF)$ é a matriz em malha fechada da região de comportamento linear (3.13). Além disso, $\lambda^i > \lambda$ indica que o poliedro $S(G, w)$ tem elementos fora da i -ésima face de $Q(G, w)$ (3.15):

$$g^i(A + BF)x \leq \lambda w_i$$

Prova: A região de comportamento linear (3.13) é definida por $A_1 = A + BF$, $p_1 = 0$, $d_1 = [\hat{u} \quad \tilde{u}]' > 0$. Para $p_1 = 0$, $d_1 > 0$, a desigualdade (3.29) na proposição 3.3

$$\begin{aligned} kd_j + t &\leq -g^i p_j \\ k, t &\geq 0 \end{aligned}$$

fornece $k = 0$, $t = 0$. Considerando estes resultados, a prova é imediata usando a proposição 3.3.

◇

3.3.2 Construção

Esta seção trata da construção de poliedros λ -contrativos visando obter estimativas da região de estabilidade assintótica local da origem do sistema em malha fechada (3.9). Esta estimativa será tanto melhor quanto maior for o poliedro construído.

Sabe-se que a família de todos os conjuntos poliedrais λ -contrativos com relação a um sistema linear, contidos em um dado conjunto poliedral fechado Ω , é fechado sob a operação casca convexa da união, isto é, se $S_1 \subset \Omega$, $S_2 \subset \Omega$ são conjuntos λ -contrativos, então a casca convexa de $S_1 \cup S_2$ é também λ -contrativo. Portanto, a família de todos os conjuntos poliedrais λ -contrativos contidos em Ω tem um elemento supremo, formado pela casca convexa da união de todos os conjuntos λ -contrativos em Ω , sendo portanto, fechado e convexo [19], [31].

O conjunto supremo é dado pela solução limite da recorrência [19]:

$$\mathcal{S}_{i+1} = \mathcal{Q}(\lambda \mathcal{S}_i) \cap \mathcal{S}_i ; \mathcal{S}_0 = \Omega \quad (3.35)$$

onde $\mathcal{Q}(\cdot)$ representa conjunto admissível de um passo.

Baseado na recorrência (3.35) e no Corolário 3.1, o conjunto supremo λ -contrativo, contido na região de comportamento linear do sistema (3.9), pode ser eficientemente construído usando-se o seguinte procedimento.

Procedimento 3.1:

Construção do máximo conjunto λ -contrativo $S(G, w)$ (3.14) com relação ao sistema (3.9), contido na região de comportamento linear $S_1(R_1, d_1)$ (3.13):

Passo 1 - Inicialização

- λ - taxa de contração desejada
- Fazer: $G = R_1$; $w = d_1$

Passo 2 - Verifique se $S(G, w)$ é λ -contrativo utilizando o Corolário 3.1:

- Resolva o programa linear:

$$\begin{aligned} \min \lambda^i \\ hG &= g^i(A + BF) \\ hw &\leq \lambda^i w^i \\ h, \lambda^i &\geq 0 \\ i &= 1 : r \end{aligned}$$

- Se

$$\max_i \{\lambda^i\} \leq \lambda ; \quad 1 \leq i \leq r$$

Então: $S(G, w)$ é o conjunto supremo. **Fim.**

Caso contrário: vá para o passo 3.

Passo 3 - Construção de $Q(G, \lambda w) \cap S(G, w)$

- Fazer:

$$G = \begin{bmatrix} G \\ \tilde{G} \end{bmatrix} ; \quad w = \begin{bmatrix} w \\ \tilde{w} \end{bmatrix}$$

onde as linhas da matriz $\tilde{G}$ e do vetor $\tilde{w}$ são respectivamente formadas por $g^i(A + BF)$ e λw^i tal que $\lambda^i > \lambda$.

- Vá para o passo 2.

Considere agora um poliedro convexo e fechado Ω envolvendo as regiões de comportamento não-linear do sistema (3.9). A partir da Definição 3.1, pode-se verificar que a família de todos os conjuntos poliedrais λ -contrativos com relação ao sistema (3.9), contido em Ω , é um conjunto fechado sob a operação de união. Consequentemente, esta família deve ter um conjunto supremo, formado pela união de todos os seus membros. Entretanto, devido a natureza não-linear da lei de controle saturada (3.8), a convexidade do conjunto admissível de um passo (3.15) e o fechamento sob a operação casca convexa da união não podem ser assegurados. Consequentemente, a convexidade do conjunto supremo não poderá também ser geralmente assegurada. Considerando estes obstáculos, a seguir, baseando-se nas Proposições 3.1 e 3.2, será proposto um procedimento heurístico de expansão não homotética para a construção de um conjunto

poliedral λ -contrativo convexo envolvendo as regiões de comportamento não linear do sistema (3.9).

Em termos gerais o procedimento executa recursivamente a seguinte tarefa: Dado um conjunto λ -contrativo convexo $S(G_a, w_a)$ e seu homotético expandido $S(G_a, \delta w_a)$, construir um conjunto λ -contrativo $S(G, w)$ tal que $S(G_a, w_a) \subset S(G, w) \subset S(G_a, \delta w_a)$. O conjunto $S(G, w)$ é obtido por interseção progressiva de $S(G_a, \delta w_a)$ com os planos de cortes relacionados com as faces do poliedro admissível de um passo $Q(G, \epsilon w)$ dado pela equação (3.16) que não satisfazem a proposição 3.2.

Procedimento 3.2:

Construção de um poliedro λ -contrativo $S(G, w)$ (3.14) com relação ao sistema (3.9) envolvendo regiões de comportamento não-linear.

Passo 1 - Inicialização

- Parâmetros:
 - λ - taxa de contração desejada
 - $\delta > 1$ - coeficiente de expansão
- Construir um conjunto supremo λ -contrativo $S(G, w)$ contido na região de comportamento linear $S_1(R_1, d_1)$ (**Procedimento 3.1**)

Passo 2 - Expansão homotética

Passo 2.1 - Eliminar as desigualdades redundantes em $S(G, w)$ [32].

Passo 2.2 - Fazer: $G_a = G$

Passo 2.3 - Fazer: $w_a = w$; $w = \delta w_a$

Passo 2.4 - Verificar se $S(G, w)$ é λ -contrativo utilizando a Proposição 3.2:

- Resolver o programa linear:

$$\sigma_j^i = \max_{x, \epsilon} g^i A_j x - \lambda w_i \epsilon + g^i p_j$$

$$\begin{aligned}
Gx - w\epsilon &\leq 0 \\
R_j x &\leq d_j \\
0 &\leq \epsilon \leq 1 \\
j &= 1 : 3^m ; \quad i = 1 : r
\end{aligned}$$

- Se:

$$\begin{aligned}
\max_{i,j} \{\sigma_j^i\} &\leq 0 \\
1 \leq i &\leq r ; \quad 1 \leq j \leq 3^m
\end{aligned}$$

Então: $S(G, w)$ é λ -contrativo, retornar ao passo 2.3.

Caso contrário: ir para o passo 3.

Passo 3 - Construção de um conjunto λ -contrativo $S(G, w)$ tal que

$$S(G_a, w_a) \subset S(G, w) \subset S(G_a, \delta w_a)$$

Passo 3.1 - Identificar a região de saturação que não satisfaz a proposição 3.2:

$$\epsilon^* = \min_{j,i} \epsilon_j^i \quad \text{s.a.} \quad \sigma_j^i > 0$$

$$(j^*, i^*) = \arg \min_{j,i} \epsilon_j^i \quad \text{s.a.} \quad \sigma_j^i > 0$$

Sendo ϵ^* o valor de ϵ_{min} , ou seja, a região mais interna que está sendo violada.

Já o argumento (j^*, i^*) corresponde à região e face onde ocorre o ϵ_{min} .

Passo 3.2 - Definir os planos de cortes $S(\tilde{g}, \tilde{w})$ para $S(G, w)$ relacionados a j^* , i^* :

$$\tilde{g} = g^{i^*} A_{j^*} ; \quad \tilde{w} = \lambda w_{i^*} - g^{i^*} p_{j^*}$$

Passo 3.3 - Verificar se $S(G_a, w_a) \subset S(\tilde{g}, \tilde{w})$:

- Resolver o programa linear:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \gamma \\
\text{s.t.} \quad & hG_a = \tilde{g} \\
& h\delta_m w_a \leq \gamma \tilde{w} \\
& h, \gamma \geq 0
\end{aligned}$$

- Se $\gamma \leq 1$:

Ir para o passo 3.4.

Caso contrário: $S(G_a, w_a)$ é o conjunto λ -contrativo desejado. **Fim**

Passo 3.4 - Construção de $S(\tilde{g}, \tilde{w}) \cap S(G, w)$:

$$G = \begin{bmatrix} G \\ \tilde{g} \end{bmatrix} ; \quad w = \begin{bmatrix} w \\ \tilde{w} \end{bmatrix}$$

3.5 - Verificar se $S(G, w)$ é λ -contrativo utilizando a proposição 3.2:

- Resolver o programa linear:

$$\sigma_j^i = \max_{x, \epsilon} g^i A_j x - \lambda w_i \epsilon + g^i p_j$$

$$Gx - w\epsilon \leq 0$$

$$R_j x \leq d_j$$

$$0 \leq \epsilon \leq 1$$

$$j = 1 : 3^m ; \quad i = 1 : r$$

- Se:

$$\max_{i,j} \{\sigma_j^i\} \leq 0$$

$$1 \leq i \leq r ; \quad 1 \leq j \leq 3^m$$

Então: $S(G, w)$ é λ -contrativo, retornar ao passo 2.

Caso contrário: ir para o passo 3.1.

Algumas observações sobre o Procedimento 3.2:

- A seleção da região de saturação mais interna e o teste de inclusão realizados nos passos 3.1, 3.3, são uma tentativa de evitar planos de cortes que interceptam $S(G_a, w_a)$ devido à não convexidade de $Q(G, \epsilon w)$. Ver figura 3.3;

- A eliminação das desigualdades redundantes no passo 2 é muito importante, não somente para obter uma representação concisa de $S(G, w)$, mas também para a eficiência computacional do procedimento;

- Se conveniente, qualquer poliedro λ -contrativo convexo pode ser usado como um conjunto inicial no passo 1.

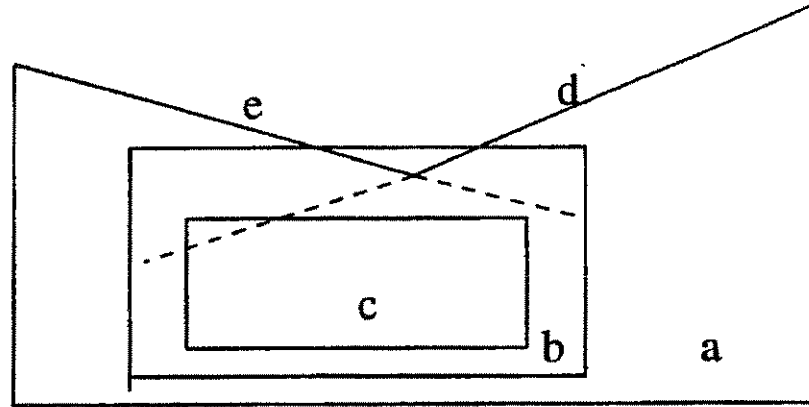


Figura 3.3: a - $Q(G, \epsilon w)$, b - $S(G, \epsilon w)$, c - $S(G_a, \epsilon w_a)$
d - Plano de corte não aceitável, e - $S(\tilde{g}, \epsilon \tilde{w})$

3.3.3 Exemplo Numérico

Considere o seguinte sistema obtido de [3], [6], com uma lei de controle saturável em malha fechada:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} -\tilde{u} &\leq u \leq \hat{u} \\ u(k) &= \text{sat}(Fx(k)) \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 \\ -0.4 & 1.2 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{u} = \hat{u} = 7.0 ; F = \begin{bmatrix} 0.2888 & -1.8350 \end{bmatrix}$$

Assuma a taxa de contração $\lambda = .998$. Com o procedimento 3.1 foi obtido o poliedro

λ -contrativo supremo contido na região de comportamento linear $S(G_l, w_l)$:

$$G_l = \begin{bmatrix} 0.2888 & -1.8350 \\ 0.4351 & 1.3096 \\ -0.2888 & 1.8350 \\ -0.4351 & -1.3096 \end{bmatrix} ; w_l = \begin{bmatrix} 7.0 \\ 6.9860 \\ 7.0 \\ 6.9860 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

O procedimento 3.2, com $\delta = 1.5$, $\delta_m = 1.1$, após 16 iterações, obteve um poliedro λ -contrativo $S(G, w)$:

$$G = \begin{bmatrix} 0.2888 & -1.8350 \\ 0.9650 & -2.0576 \\ 1.0008 & 1.7891 \\ 1.5951 & -1.9866 \\ -1.4970 & -2.0590 \\ 2.0707 & -1.5864 \\ -0.2888 & 1.8350 \\ -0.9650 & 2.0576 \\ -1.0008 & -1.7891 \\ -1.5951 & 1.9866 \\ 1.4970 & 2.0590 \\ -2.0707 & 1.5864 \end{bmatrix} ; w = \begin{bmatrix} 35.4375 \\ 48.2116 \\ 48.1152 \\ 62.5184 \\ 62.3934 \\ 76.2996 \\ 35.4375 \\ 48.2116 \\ 48.1152 \\ 62.5184 \\ 62.3934 \\ 76.2996 \end{bmatrix}$$

O procedimento proposto em [3], usando um modelo linear politópico incerto para descrever o comportamento não-linear em malha fechada dos sistemas (3.36), (3.37), obteve o poliedro λ -contrativo $S(G_p, w_p)$:

$$G_p = \begin{bmatrix} 0.2888 & -1.8350 \\ 0.4351 & 1.3096 \\ 0.6806 & -0.2501 \\ 0.6057 & 0.2865 \\ 0.5723 & 0.4991 \\ -0.2888 & 1.8350 \\ -0.4351 & -1.3096 \\ -0.6806 & 0.2501 \\ -0.6057 & -0.2865 \\ -0.5723 & -0.4991 \end{bmatrix} ; w_p = \begin{bmatrix} 13.0403 \\ 13.0273 \\ 13.0273 \\ 13.0012 \\ 13.0012 \\ 13.0403 \\ 13.0273 \\ 13.0273 \\ 13.0012 \\ 13.0012 \end{bmatrix}$$

Pode-se verificar na figura 3.4 que o poliedro $S(G, w)$ obtido com o procedimento 3.2 é bem maior que o poliedro de partida $S(G_l, w_l)$ na região de comportamento linear. O poliedro $S(G, w)$ é também maior que o poliedro $S(G_p, w_p)$ obtido em [3] o que mostra o conservadorismo do modelo politópico utilizado para descrever o comportamento não linear do sistema em malha fechada.

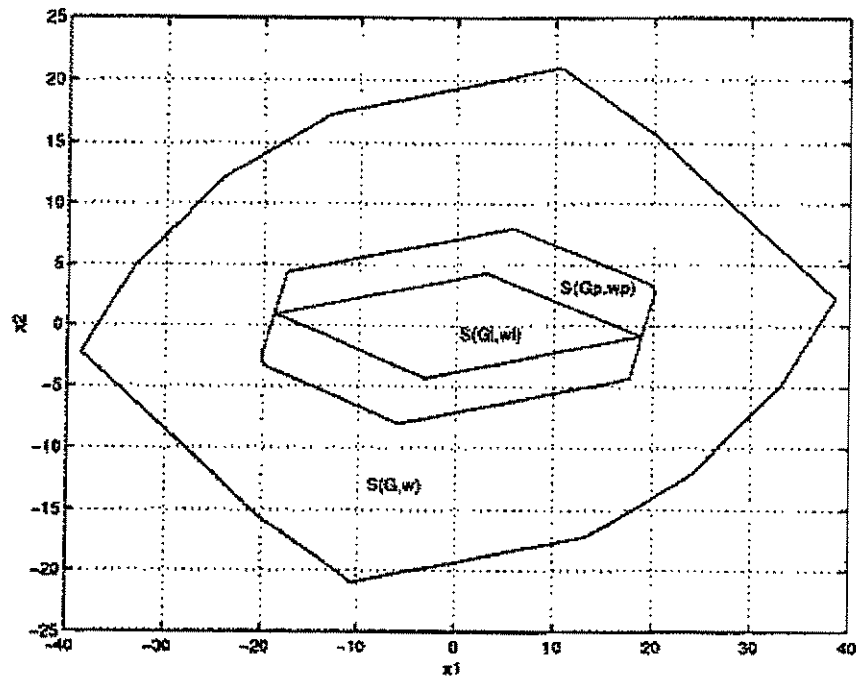


Figura 3.4: Poliedros λ -contrativos

3.4 Poliedros λ -Contrativos Robustos

Nesta seção, os resultados sobre caracterização e construção de conjuntos λ -contrativos robustos com relação ao sistema em malha fechada saturável (3.9) serão estendidos para o sistema em malha fechada saturável incerto:

$$x(k+1) = Ax(k) + B \text{sat}(Fx(k)) ; (A, B) \in \mathcal{P} \quad (3.39)$$

onde o par de matrizes (A, B) é incerto mas restrito ao conjunto $\mathcal{P} \subset (\mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m})$, aqui denominado domínio de incerteza.

3.4.1 Caracterização

Considere o poliedro compacto convexo:

$$S(G, w) = \{x \in \mathbb{R}^n; Gx \leq w\} \quad (3.40)$$

onde $G \in \mathbb{R}^{r \times n}$ e $w > 0 \in \mathbb{R}^r$.

Definição 3. 2 *O poliedro $S(G, w)$ (3.40) é um conjunto λ -contrativo robusto com relação ao sistema em malha fechada incerto (3.39) se existe um número real λ , $0 < \lambda < 1$ tal que $x(k+1) \in S(G, w\epsilon\lambda)$ para todo $0 \leq \epsilon \leq 1$, todo $x(k) \in S(G, w\epsilon)$ e todo par $(A, B) \in \mathcal{P}$.*

Definição 3. 3 *O conjunto admissível de um passo robusto para $S(G, w)$ (3.40) com relação ao sistema incerto (3.39) é dado por:*

$$Q(G, w) = \{x \in \mathbb{R}^n; G[Ax + B\text{sat}(F(x))] \leq w \quad \forall (A, B) \in \mathcal{P}\} \quad (3.41)$$

Proposição 3. 4 *O poliedro $S(G, w)$ (3.40) é um conjunto λ -contrativo robusto com relação ao sistema em malha fechada incerto (3.39) se e somente se existe um $0 < \lambda < 1$ real tal que:*

$$S(G, \epsilon w) \subset Q(G, \lambda \epsilon w) \quad \forall 0 \leq \epsilon \leq 1 \quad (3.42)$$

Prova: Imediata da Definição 3.2.

◊

Seja o domínio de incerteza $\mathcal{P}$ dado pelo politopo:

$$\mathcal{P} = \left\{ (A, B) : (A, B) = \sum_{l=1}^{l=s} \xi_l (A^l, B^l) ; \xi_l \geq 0 ; \sum_{l=1}^{l=s} \xi_l = 1 \right\} \quad (3.43)$$

onde $(A^l, B^l) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m}$ são pontos extremos.

Para $\mathcal{P}$ dado por (3.43) e notando que $G[Ax + B \text{sat}(F(x))] \leq w$ é linear em (A, B) , pode-se verificar que $Q(G, w)$ é dado por:

$$Q(G, w) = \{x \in \mathbb{R}^n; G[A^l x + B^l \text{sat}(F(x))] \leq w \quad l = 1 : s\} \quad (3.44)$$

Além disso, das equações (3.10) a (3.12), é fácil verificar que $Q(G, w)$ restrito à região de saturação $S(R_j, d_j)$ é dado por

$$Q_j(G, w) = \{x \in S(R_j, d_j); G[A_j^l x + p_j^l] \leq w \quad l = 1 : s\} \quad (3.45)$$

onde A_j^l, p_j^l , são os parâmetros do modelo linear em $S(R_j, d_j)$ relacionados ao ponto extremo (A^l, B^l) .

Baseada na Proposição 3.4 e (3.44), (3.45), a proposição seguinte fornece uma condição necessária e suficiente para um poliedro ser robustamente λ -contrativo.

Proposição 3. 5 *Considerando o domínio de incerteza (3.43), o poliedro $S(G, w)$ (3.40) é robustamente λ -contrativo com relação ao sistema em malha fechada (3.39) se e somente se para as $j = 1 : 3^m$ regiões de saturação (3.10), (3.11), (3.12) e para os $l = 1 : s$ pontos extremos de $\mathcal{P}$, existe um número real $0 < \lambda < 1$ tal que*

$$\begin{bmatrix} GA_j^l & -\lambda w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \epsilon \end{bmatrix} \leq -Gp_j^l \quad (3.46)$$

vale para todos (ϵ, x) que satisfazem:

$$\begin{bmatrix} G & -w \\ R_j & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \epsilon \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ d_j \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

ou, em outras palavras, se existe $0 < \lambda < 1$ tal que o poliedro (3.47) seja um subconjunto do poliedro (3.46).

Prova: Da proposição 3.4, $S(G, w)$ é robustamente λ -contrativo se

$$S(G, \epsilon w) \subset Q(G, \lambda \epsilon w) \quad \forall \quad 0 \leq \epsilon \leq 1 \quad (3.48)$$

Das equações

$$\mathfrak{R}^n = \bigcup_{j=1}^{j=3^m} S(R_j, d_j) \quad (3.49)$$

$$S(G, \epsilon w) = S(G, \epsilon w) \cap \mathfrak{R}^n \quad (3.50)$$

conclui-se que:

$$S(G, \epsilon w) = \bigcup_{j=1}^{j=3^m} S(G, \epsilon w) \cap S(R_j, d_j) \quad (3.51)$$

Em (3.45), (3.48), (3.51), pode-se concluir que

$$S(G, \epsilon w) \cap S(R_j, d_j) \subset Q_j(G, \lambda \epsilon w) \quad \forall \quad 0 \leq \epsilon \leq 1 \quad j = 1 : 3^m \quad (3.52)$$

Em (3.45) pode ser verificado que $Q_j(G, \lambda \epsilon w)$ é um poliedro dado pela interseção de $l = 1 : s$ poliedros:

$$\begin{bmatrix} GA_j^l & -\lambda w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \epsilon \end{bmatrix} \leq -Gp_j^l \quad (3.53)$$

Em (3.10), (3.11), (3.40) pode ser verificado que $S(G, \epsilon_j w) \cap S(R_j, d_j)$ é dado pelo poliedro:

$$\begin{bmatrix} G & -w \\ R_j & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \epsilon_j \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ d_j \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

É fácil verificar que a relação de inclusão (3.52) é válida somente se o poliedro (3.54) for um subconjunto de todos os poliedros dados pela equação (3.53), o que conclui a prova.

◇

O Corolário a seguir fornece uma formulação de programação linear para a Proposição 3.5.

Corolário 3. 2 *O poliedro $S(G, w)$ (3.40) é robustamente λ -contrativo com relação ao sistema em malha fechada (3.39) se e somente se existe um $0 < \lambda < 1$ real tal que:*

$$\max_{j,l,i} \{\sigma(j)_l^i\} \leq 0 \quad (3.55)$$

$$1 \leq j \leq 3^m ; 1 \leq l \leq s ; 1 \leq i \leq r$$

onde os $\sigma(j)_l^i$ são obtidos resolvendo-se o seguinte programa linear:

$$\sigma(j)_l^i = \max_{x,\epsilon} (g^i A_j^l x - \lambda w_i \epsilon + g^i p_j^l)$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} Gx - w\epsilon &\leq 0 \\ R_j x &\leq d_j \\ 0 &\leq \epsilon \leq 1 \end{aligned} \quad (3.56)$$

onde g^i , w_i , são as i ésimas linhas de G e w , respectivamente e R_j , d_j , A_j^l , p_j^l estão relacionados com as regiões de saturação, modelo linear por partes (3.10) a (3.12) e com o domínio de incerteza (3.43). Além disso, seja $(\epsilon(j)_l^i, x(j)_l^i)$ uma solução ótima relacionada a $\sigma(j)_l^i > 0$. Isto indica que $x(j)_l^i \in S(G, \epsilon(j)_l^i w)$ está fora da i ésima face de $Q_j(G, \lambda w \epsilon(j)_l^i)$ (3.45):

$$g^i A_j^l x - \lambda w_i \epsilon(j)_l^i \leq -g^i p_j^l \quad (3.57)$$

Prova: Inspeccionando as equações (3.46), (3.47), pode-se verificar que a Proposição 3.5 será satisfeita se

$$\begin{aligned} g^i A_j^l x - \lambda w_i \epsilon &\leq -g^i p_j^l \\ j = 1 : 3^m ; i = 1 : s ; i = 1 : r \end{aligned} \quad (3.58)$$

for válido para todo ϵ , x que satisfaz (3.47). Em outras palavras,

$$\max_{x,\epsilon} (g^i A_j^l x - \lambda w_i \epsilon + g^i p_j^l) \leq 0 \quad (3.59)$$

sujeito a:

$$\begin{bmatrix} G & -w \\ R_j & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \epsilon \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ d_j \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

deve ser válido para $j = 1 : 3^m$, $l = 1 : s$ e $i = 1 : r$. É fácil verificar que o programa linear (3.59) é equivalente aos programas lineares (3.55), (3.56). Sejam $\sigma(j)_l^i$ e $(\epsilon(j)_l^i, x(j)_l^i)$, respectivamente, os índices de desempenho ótimo e a solução ótima do programa linear (3.59). De (3.43), (3.59) pode-se verificar que $\sigma(j)_l^i > 0$ indica que $x(j)_l^i \in S(G, \epsilon(j)_l^i w)$ está fora da i -ésima face de $Q_j(G, \lambda w \epsilon(j)_l^i)$ dado pela equação (3.45), o que conclui a prova.

◊

3.4.2 Construção

O procedimento para a construção de poliedros λ -contrativos robustos, em linhas gerais é semelhante ao Procedimento 3.2, na seção 3.3.2, para construção de poliedros λ -contrativos.

Procedimento 3.3

Construção de um poliedro λ -contrativo robusto $S(G, w)$ (3.40) com relação ao sistema (3.39) com domínio de incerteza (3.43), envolvendo suas regiões de comportamento não-linear.

Passo 1 - Inicialização

Parâmetros:

λ - Taxa de contração

$\delta > 1$ - Coeficiente de expansão

Construir o poliedro λ -contrativo robusto $S(G, w)$ supremo contido na região de comportamento linear $S_1(R_1, d_1)$ [7], [31].

Passo 2

Eliminar as desigualdades redundantes em $S(G, w)$ [32].

Fazer: $G_a = G$

Passo 3 - Expansão homotética

Fazer: $w_a = w$; $w = \delta w_a$

Passo 4

Verificar se $S(G, w)$ é robustamente λ -contrativo (**Rotina 3.1**)

Se *Resposta* = *Sim* : $S(G, w)$ é λ -contrativo, retorne ao passo 3.

Passo 5 - Construção de um conjunto λ -contrativo robusto $S(G, w)$ tal que

$$S(G_a, w_a) \subset S(G, w) \subset S(G_a, \delta w_a)$$

Passo 5.1 - Definir o plano de corte $S(\tilde{g}, \tilde{w})$ para $S(G, w)$ relacionado a j^*, l^*, i^* identificados pela Rotina 3.1

$$\tilde{g} = g^{i^*} A_{j^*}^{l^*} ; \quad \tilde{w} = \lambda w_{i^*} - g^{i^*} p_{j^*}^{l^*}$$

Passo 5.2

Verificar se $S(G_a, \delta_m w_a) \subset S(\tilde{g}, \tilde{w})$ [17].

Se *Resposta* = *Não* : $S(G_a, w_a)$ é o conjunto λ -contrativo desejado. **Pare**

Passo 5.3 - Construção de $S(\tilde{g}, \tilde{w}) \cap S(G, w)$

$$G = \begin{bmatrix} G \\ \tilde{g} \end{bmatrix} ; \quad w = \begin{bmatrix} w \\ \tilde{w} \end{bmatrix}$$

Passo 5.4

Verificar se $S(G, w)$ é robustamente λ -contrativo (**Rotina 3.1**)

Se *Resposta* = *Sim*

Então: $S(G, w)$ é robustamente λ -contrativo. Retornar ao passo 2.

Caso contrário: retornar ao passo 5.1

Rotina 3.1: Verifica se $S(G, w)$ é robustamente λ -contrativo utilizando o Corolário 3.2.

- Para $j = 1 : 3^m$,

Para $l = 1 : s, i = 1 : r$, resolver o programa linear:

$$\sigma(j)_l^i = \max_{x, \epsilon} g^i A_j^l x - \lambda w_i \epsilon + g^i p_j^l$$

$$Gx - w\epsilon \leq 0$$

$$R_j x \leq d_j$$

$$0 \leq \epsilon \leq 1$$

Fazer

$$\sigma_j = \max_{l, i} \sigma(j)_l^i$$

$$(l_j, i_j) = \arg \max_{l, i} \sigma(j)_l^i$$

$$\epsilon_j = \epsilon(j)_{l_j}^{i_j}$$

- Se:

$$\max_j \{\sigma_j\} \leq 0$$

Então: Fazer $Resposta = Sim$

Caso contrário: Fazer $Resposta = Não$ e identificar a região de saturação mais interna que não satisfaz o Corolário 3.2:

$$j^* = \arg \min_j \epsilon_j \quad s.a. \quad \sigma_j > 0$$

$$l^* = l_{j^*} ; \quad i^* = i_{j^*}$$

3.4.3 Exemplo Numérico

Considere o seguinte sistema incerto com uma lei de controle saturada em malha fechada:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ -\tilde{u} &\leq u \leq \hat{u} \\ u(k) &= \text{sat}(Fx(k)) \end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0.8 + q_1 & 0.5 \\ -0.4 & 1.2 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.0 - q_2 \end{bmatrix} ; 0 \leq q_1, q_2 \leq .1 \\ \tilde{u} = \hat{u} &= 7.0 ; F = \begin{bmatrix} 0.2888 & -1.8350 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Assuma a taxa de contração $\lambda = .998$. $S(G_l, w_l)$, o supremo poliedro λ -contrativo com relação ao sistema (3.60), contido na região de comportamento linear, é dado por:

$$G_l = \begin{bmatrix} 0.2888 & -1.8350 \\ 0.5170 & 0.9729 \\ 0.4640 & 1.3096 \\ -0.2888 & 1.8350 \\ -0.5170 & -0.9729 \\ -0.4640 & -1.3096 \end{bmatrix} ; w_l = \begin{bmatrix} 7.0 \\ 6.9860 \\ 6.9860 \\ 7.0 \\ 6.9860 \\ 6.9860 \end{bmatrix} \tag{3.61}$$

A figura 3.5 apresenta os seguintes conjuntos λ -contrativos com relação ao sistema (3.60), com uma taxa de contração $\lambda = .998$:

$S(G_l, w_l)$: supremo poliedro robustamente λ -contrativo com relação ao sistema (3.60), contido na região de comportamento linear [31];

$S(G, w)$: poliedro λ -contrativo robusto com relação ao sistema (3.60), construído pelo procedimento 3.3, com $\delta = 1.5$ e conjunto inicial $S(G_l, w_l)$;

$S(G_p, w_p)$: poliedro λ -contrativo com relação ao sistema (3.60), considerando os parâmetros do sistema perfeitamente conhecidos, $(q_1 = 0, q_2 = 0)$, construído pelo procedimento 3.3, com $\delta = 1.5$.

Pode-se verificar na figura 3.5(A) que o poliedro $S(G, w)$ é bem maior que o poliedro de partida $S(G_l, w_l)$ na região de comportamento linear, mostrando a eficácia do procedimento 3.3 na construção de um poliedro λ -contrativo robusto sobre a região de comportamento não linear de um sistema em malha fechada com controles saturáveis. Como esperado, $S(G, w)$ robusto com relação ao modelo de incertezas, é um subconjunto de $S(G_p, w_p)$ o qual assume um modelo perfeitamente conhecido. A figura 3.5(B) mostra a trajetória do sistema em malha fechada incerto (3.60) partindo de um ponto extremo de $S(G, w)$.

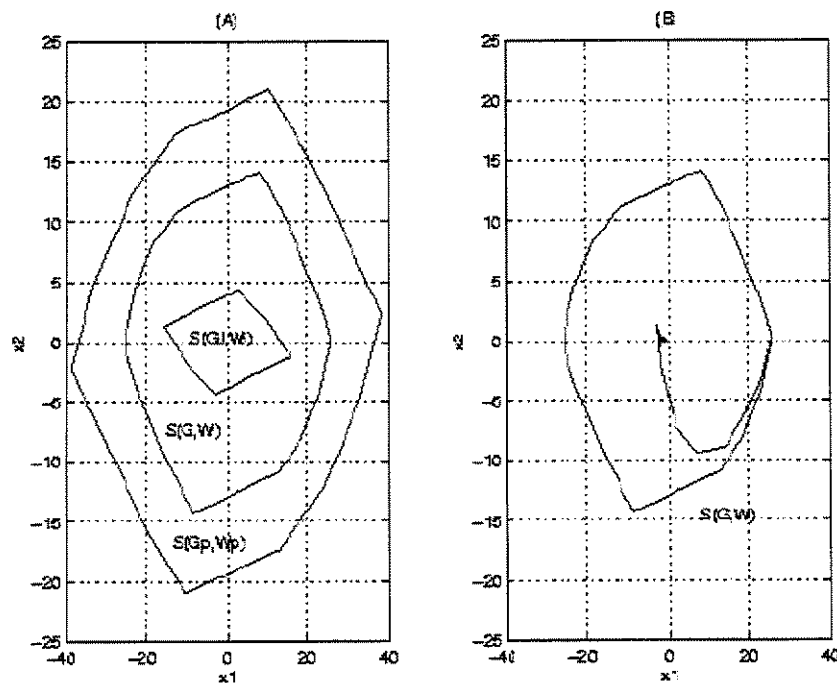


Figura 3.5: Poliedros λ -contrativos

3.5 Funções de Lyapunov Lineares por Partes

Esta seção trata da caracterização e construção de funções de Lyapunov lineares por partes para estimação da região de estabilidade assintótica da origem do sistema em malha fechada com controles saturáveis (3.9).

3.5.1 Caracterização

Seja a função linear por partes (FLP):

$$\Psi(x) = \max_{1 \leq i \leq r} w_i^{-1} \{g_i x + c_i\} \quad (3.62)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e w_i, g_i, c_i são as iésimas linhas de $w > 0 \in \mathbb{R}^r$, $G \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $c \leq 0 \in \mathbb{R}^r$, respectivamente. Pode-se verificar que a função $\Psi(x)$ (3.62) pode também ser definida como:

$$\Psi(x) = \min_{\epsilon \in \mathbb{R}} \epsilon \quad s.a. \quad Gx + c \leq w\epsilon \quad (3.63)$$

Proposição 3. 6 *A FLP $\Psi(x)$ (3.62), (3.63) é definida positiva se e somente se existe uma matriz de permutação P tal que:*

$$P \begin{bmatrix} G & c & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_1 & \tilde{c}_1 & \tilde{w}_1 \\ \tilde{G}_2 & \tilde{c}_2 & \tilde{w}_2 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

$$\tilde{c}_1 = 0 \ ; \ \tilde{c}_2 < 0$$

e o poliedro $\tilde{G}_1 x \leq \tilde{w}_1$ é limitado.

Prova: Note que permutações de linhas da matriz $\begin{bmatrix} G & c & w \end{bmatrix}$ não mudam o valor de $\Psi(x)$. Inspeccionando (3.62) pode-se verificar que $\Psi(0) = 0$ se e somente se $c \leq 0$ com pelo menos uma componente zero. Consequentemente, existe uma matriz de permutação P dando (3.64). De (3.62), (3.63), (3.64), pode ser verificado que:

$$\Psi(x) \geq \Psi_1(x)$$

$$\Psi_1(x) = \min_{\epsilon \in \mathbb{R}} \epsilon \quad s.t. \quad \tilde{G}_1 x \leq \tilde{w}_1 \epsilon \quad (3.65)$$

Notando que $\tilde{c}_2 < 0$, de (3.63), (3.64), pode ser também verificado que para um $\epsilon_1 > 0$, suficientemente pequeno, vale o seguinte:

$$\Psi(x) = \Psi_1(x) ; \quad x \in \tilde{G}_1 x \leq \tilde{w}_1 \epsilon_1 \quad (3.66)$$

De (3.65), pode ser verificado que $\Psi_1(x)$ é definida positiva se e somente se $\tilde{G}_1 x \leq \tilde{w}_1$ é limitado. De (3.65), (3.66), pode-se verificar que $\Psi(x)$ é positiva definida se e somente se $\Psi_1(x)$ é definida positiva, concluindo a prova. $\diamond$

Aplicando Definição 2.10, pode ser verificado que o epígrafo da FLP $\Psi(x)$ (3.62), definida na bola $\Psi(x) \leq 1$ é dado por:

$$\mathcal{E}(\Psi) = S(G, c, w) = \{(x, \epsilon) \in \mathbb{R}^{n+1} : Gx + c \leq w\epsilon ; \quad 0 \leq \epsilon \leq 1\} \quad (3.67)$$

Similarmente, pode ser também verificado que para o sistema de malha fechada (3.9), o epígrafo de $\lambda^{-1}\Psi(f(x))$ definido na bola $\Psi(x) \leq 1$ é dado por:

$$\mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f) = \{(x, \epsilon) \in \mathbb{R}^{n+1} : G[Ax + B\text{sat}(Fx)] + c \leq \lambda w\epsilon ; \quad 0 \leq \epsilon \leq 1\} \quad (3.68)$$

Proposição 3. 7 *Uma FLP definida positiva $\Psi(x)$ (3.62), (3.63), é uma função de Lyapunov para o sistema (3.9), na bola $\Psi(x) \leq 1$, se e somente se existe $0 < \lambda < 1$ tal que os epígrafos (3.67), (3.68), satisfazem a relação de inclusão:*

$$\mathcal{E}(\Psi) \subset \mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f) \quad (3.69)$$

Prova: Imediata aplicando Corolário 2.1. $\diamond$

Proposição 3. 8 *Uma FLP definida positiva $\Psi(x)$ (3.62), (3.63), é uma função de Lyapunov para (3.9), na bola $\Psi(x) \leq 1$, se e somente se para as $j = 1 : 3^m$ regiões de saturação (3.10), (3.11), (3.12), existe um $0 < \lambda < 1$ tal que*

$$\begin{bmatrix} GA_j & -\lambda w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \epsilon_j \end{bmatrix} \leq -Gp_j - c \quad (3.70)$$

vale para quaisquer ϵ_j , x satisfazendo:

$$\begin{bmatrix} G & -w \\ R_j & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \epsilon_j \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -c \\ d_j \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

ou, em outras palavras, se e somente se existe $0 < \lambda < 1$ tal que o poliedro (3.71) é um subconjunto do poliedro (3.70).

Prova: Da Proposição 3.7 tem-se:

$$\mathcal{E}(\Psi) \subset \mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f) \quad (3.72)$$

Notando que

$$\mathfrak{R}^n = \bigcup_{j=1}^{j=3^m} S(R_j, d_j) \quad (3.73)$$

$$\mathcal{E}(\Psi) = \mathcal{E}(\Psi) \cap \mathfrak{R}^n \quad (3.74)$$

temos

$$\mathcal{E}(\Psi) = \bigcup_{j=1}^{j=3^m} \mathcal{E}(\Psi) \cap S(R_j, d_j) \quad (3.75)$$

Portanto (3.72) vale se e somente se para $j = 1 : 3^m$ tivermos:

$$\mathcal{E}(\Psi) \cap S(R_j, d_j) \subset \mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f) \quad (3.76)$$

Para $x \in S(R_j, d_j)$, de (3.12), (3.68), pode ser verificado que $\mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f)$ corresponde ao poliedro:

$$\begin{bmatrix} GA_j & -\lambda w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \epsilon_j \end{bmatrix} \leq -Gp_j - c \quad (3.77)$$

De (3.10), (3.11), (3.67), pode-se verificar que $\mathcal{E}(\Psi) \cap S(R_j, d_j)$ corresponde ao poliedro:

$$\begin{bmatrix} G & -w \\ R_j & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \epsilon_j \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -c \\ d_j \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

concluindo a prova. ◇

O Corolário a seguir é uma formulação primal de programação linear da Proposição 3.8 [33].

Corolário 3. 3 *Uma FLP definida positiva $\Psi(x)$ (3.62), (3.63), é uma função de Lyapunov para (3.9), na bola $\Psi(x) \leq 1$, se e somente se existe $0 < \lambda < 1$ tal que:*

$$\max_{i,j} \{\sigma_j^i\} \leq 0 \quad (3.79)$$

$$1 \leq i \leq r ; 1 \leq j \leq 3^m$$

onde σ_j^i são obtidos resolvendo os seguintes programas lineares independentes factíveis:

$$\sigma_j^i = \max_{x, \epsilon} g^i A_j x - \lambda w_i \epsilon + g^i p_j + c_i$$

$$\begin{aligned} Gx - w\epsilon &\leq -c \\ R_j x &\leq d_j \\ 0 &\leq \epsilon \leq 1 \end{aligned} \quad (3.80)$$

onde g^i , c_i , w_i , são iésimas linhas de G , c , w , respectivamente e R_j , d_j , A_j , p_j são relacionadas às regiões de saturação e aos modelos lineares por partes (3.10)-(3.12). Seja ϵ_j^i , x_j^i solução ótima relacionada a um $\sigma_j^i > 0$. Isto indica que $x_j^i \in \mathcal{E}(\Psi)$ está fora da iésima face de $\mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f)$ (3.68), (3.69) na jésima região de saturação:

$$g^i A_j x - \lambda w_i \epsilon_j^i \leq -g^i p_j - c_i \quad (3.81)$$

Prova: Inspeccionando (3.70), (3.71), pode-se verificar que a Proposição 3.8 é satisfeita se e somente se

$$\begin{aligned} g^i A_j x - \lambda w_i \epsilon_j &\leq -g^i p_j - c_i \\ j &= 1 : 3^m ; \quad i = 1 : r \end{aligned} \quad (3.82)$$

vale para todos ϵ_j , x que satisfazem (3.71). Em outras palavras,

$$\max_{x, \epsilon} (g^i A_j x - \lambda w_i \epsilon + g^i p_j + c_i) \leq 0 \quad (3.83)$$

$$\begin{bmatrix} G & -w \\ R_j & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \epsilon \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -c \\ d_j \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tem que valer para $i = 1 : r$ e $j = 1 : 3^m$. Pode-se verificar que os programas lineares (3.83) são equivalentes aos programas (3.79), (3.80). Sejam σ_j^i e ϵ_j^i , x_j^i , respectivamente, índice de desempenho e soluções ótimas dos programas lineares (3.83). De (3.76), (3.83) pode-se também verificar que $\sigma_j^i > 0$ indica que $x_j^i \in \mathcal{E}(\Psi)$ está fora da i -ésima face de $\mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f)$ na j -ésima região de saturação (3.81), concluindo a prova.

◊

3.5.2 Construção

Esta seção trata da construção de funções de Lyapunov lineares por partes para obtenção de estimativas da região de estabilidade assintótica local da origem do sistema em malha fechada (3.9). Esta estimativa será tanto melhor quanto maior for a bola unitária da função de Lyapunov.

A seguir, uma FLP $\Psi(x)$ (3.62), (3.63), será representada como $\Psi[G, c, w]$.

Dentro da região de comportamento linear $S(R_1, d_1)$ (3.13) do sistema (3.9), a maior região poliedral de estabilidade assintótica local é o supremo poliedro λ -contrativo $G_l x \leq w_l$ contido em $S(R_1, d_1)$. A função de Lyapunov associada é o caso particular de FLP $\Psi[G_l, 0, w_l]$ chamada de função de Minkowski. Métodos eficientes para obtenção de poliedros λ -contrativos supremos são dados em [34].

Considere agora uma FLP definida positiva cuja bola unitária tem interseção com a região de controle não linear do sistema (3.9). De acordo com a Proposição 3.7, $\Psi[G, c, w]$ é uma função de Lyapunov para o sistema (3.9) se e somente se os epígrafos (3.67), (3.68), satisfazem a relação de inclusão $\mathcal{E}(\Psi) \subset \mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f)$ ou equivalentemente

$$\mathcal{E}(\Psi) \cap \mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f) = \mathcal{E}(\Psi) \quad (3.84)$$

Se (3.84) não for satisfeita, a próxima candidata a função de Lyapunov deveria ser a FLP derivada da interseção $\mathcal{E}(\Psi) \cap \mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f)$. Contudo, devido à não linearidade da lei de controle saturada (3.8), o epígrafo $\mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f)$ (3.68) não é convexo. Portanto, não é possível garantir a convexidade do conjunto interseção resultante, complicando a obtenção da função linear por partes. Para contornar esta dificuldade, baseado na Proposição 3.7 e Corolário 3.3, o seguinte procedimento computacional é proposto para determinação de uma função de Lyapunov linear por partes para o sistema (3.9), cuja bola unitária tem interseção com a região de controle não linear. Grosso modo, a seguinte tarefa é executada recursivamente: dada a função de Lyapunov $\Psi[G_a, c_a, w_a]$ e sua FLP “expandida” $\Psi[G_a, c_a, \delta w_a]$, obter a função de Lyapunov $\Psi[G, c, w]$ tal que $\Psi[G_a, c_a, w_a] \geq \Psi[G, c, w] \geq \Psi[G_a, c_a, \delta w_a]$. Para obtenção de $\Psi[G, c, w]$, começar com $\Psi[G, c, w] = \Psi[G_a, c_a, \delta w_a]$ e recursivamente atualizar $\Psi[G, c, w]$, fazendo a interseção de seu epígrafo $\mathcal{E}(\Psi) = S(G, c, w)$ (3.67) com planos de corte relacionados às faces do epígrafo $\mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f)$ (3.68) que não satisfazem ao Corolário 3.3. Uma descrição detalhada é apresentada no procedimento seguinte.

Procedimento 3.4

Determinação de função de Lyapunov linear por partes do sistema (3.9).

Passo 1 - Inicialização

λ : índice de convergência

$\delta > 1$: coeficiente de expansão

$\Psi[G, c = 0, w]$: função de Lyapunov inicial correspondente a $Gx \leq w$, o conjunto λ -contrativo supremo contido na região de controle linear $S_1(R_1, d_1)$ [34].

Passo 2

Eliminar desigualdades redundantes em $\mathcal{E}(\Psi) = S(G, c, w)$ (3.67) [32]

Fazer: $G_a = G$

Passo 3 - Expansão

Fazer: $w_a = w$; $c_a = c$; $w = \delta w_a$

Passo 4

Verificar se $\Psi[G, c, w]$ é uma função de Lyapunov utilizando Corolário 3.3: Sim : voltar ao passo 3;

Caso contrário: ir para o passo 5.

Passo 5 - Construção da função de Lyapunov $\Psi[G, c, w]$ tal que:

$$\Psi[G_a, c_a, w_a] \geq \Psi[G, c, w] \geq \Psi[G_a, c_a, \delta w_a]$$

Passo 5.1 - Definir o plano de corte $S(\tilde{g}, \tilde{c}, \tilde{w})$ para $S(G, c, w)$ relacionado à região de saturação mais interna j^* e aresta i^* que não satisfazem o Corolário 3.3.

$$\tilde{g} = g^{i^*} A_{j^*} ; \quad \tilde{c} = c_{i^*} + g^{i^*} p_{j^*} ; \quad \tilde{w} = \lambda w_{i^*}$$

Passo 5.2

Verificar se $S(G_a, c_a, w_a) \subset S(\tilde{g}, \tilde{c}, \tilde{w})$ [17]

Sim: ir para o passo 5.3;

Caso contrário: $\Psi[G_a, c_a, w_a]$ é a função de Lyapunov desejada. **Pare**

Passo 5.3 - Construção de $S(\tilde{g}, \tilde{c}, \tilde{w}) \cap S(G, c, w)$

$$G = \begin{bmatrix} G \\ \tilde{g} \end{bmatrix} ;$$

$$c = \begin{bmatrix} c \\ \tilde{c} \end{bmatrix} ;$$

$$w = \begin{bmatrix} w \\ \tilde{w} \end{bmatrix}$$

Passo 5.4

Verificar se $\Psi[G, c, w]$ é uma função de Lyapunov utilizando Corolário 3.3:

Sim: volte ao passo 2.

Caso contrário: volte ao passo 5.1

Inspecionando o Procedimento 3.4, pode-se verificar que o mesmo fornece uma sequência de funções de Lyapunov monotonicamente decrescente e convergente. A razão de convergência não é facilmente determinável devido à natureza não linear e não convexa do problema.

3.5.3 Exemplo Numérico

Considere o seguinte sistema com controle em malha fechada saturável, emprestado de [4]:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$-\tilde{u} \leq u \leq \hat{u}$$

$$u(k) = \text{sat}(Fx(k)) \tag{3.85}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 \\ -0.4 & 1.2 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{u} = \hat{u} = 7.0 ; F = \begin{bmatrix} 0.2888 & -1.8350 \end{bmatrix}$$

Sejam:

- $\lambda = .998$: índice de convergência;
- $\Psi[G_l, 0, w_l]$: função de Lyapunov do tipo Minkowski, associada ao supremo poliedro λ -contrativo com relação a (3.85), contido na região de controle linear;
- $\Psi[G_m, 0, w_m]$: função de Lyapunov do tipo Minkowski, obtida pelo Procedimento 3.4, com $\delta = 1.5$, começando de $\Psi[G_l, 0, w_l]$ e forçando $c = 0$;
- $\Psi[G_{pw}, c_{pw}, w_{pw}]$: função de Lyapunov linear por partes obtida pelo Procedimento 3.4, com $\delta = 1.5$, começando de $\Psi[G_l, 0, w_l]$;
- S_l , S_m e S_{pw} : regiões de estabilidade assintótica locais correspondentes às bolas unitárias das funções de Lyapunov $\Psi[G_l, 0, w_l]$, $\Psi[G_m, 0, w_m]$ e $\Psi[G_{pw}, c_{pw}, w_{pw}]$, respectivamente.

Pode ser verificado na Figura 3.6 que S_m e S_{pw} , construídas pelo Procedimento 3.4, são bem maiores que a região de partida S_l , mostrando assim a eficácia do procedimento de construção proposto. A Região S_{pw} é estritamente maior que a região S_m , mostrando que funções de Lyapunov lineares por partes podem efetivamente dar resultados menos conservativos que as funções de Minkowski. As Figuras 3.7 e 3.8 mostram as superfícies de nível das funções de Lyapunov $\Psi[G_{pw}, c_{pw}, w_{pw}]$ e $\Psi[G_m, 0, w_m]$, respectivamente. A forma variável das superfícies de nível de $\Psi[G_{pw}, c_{pw}, w_{pw}]$, comparada com a forma fixa das superfícies de $\Psi[G_m, 0, w_m]$, mostra que as FLPs são naturalmente mais flexíveis e melhor adaptadas que as funções de Minkowski, ao comportamento dinâmico radialmente variável dos sistemas com controles saturáveis. Pode também ser verificado nessas figuras que o melhor resultado da FLP é obtido às custas de representação mais complexa: a FLP $\Psi[G_{pw}, c_{pw}, w_{pw}]$ tem mais ou menos o dobro do número de faces que a função de Minkowski $\Psi[G_m, 0, w_m]$.

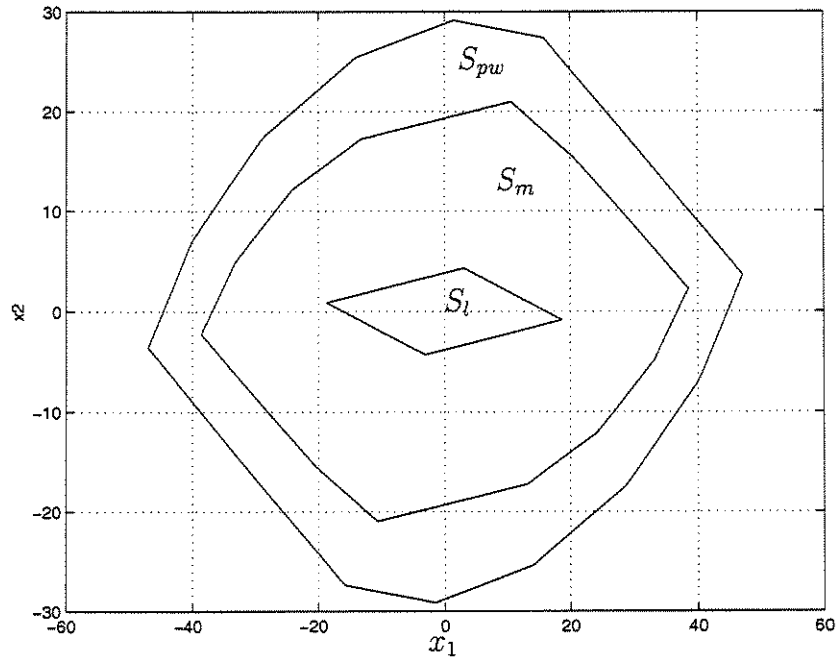


Figura 3.6: Bolas unitárias de funções de Lyapunov

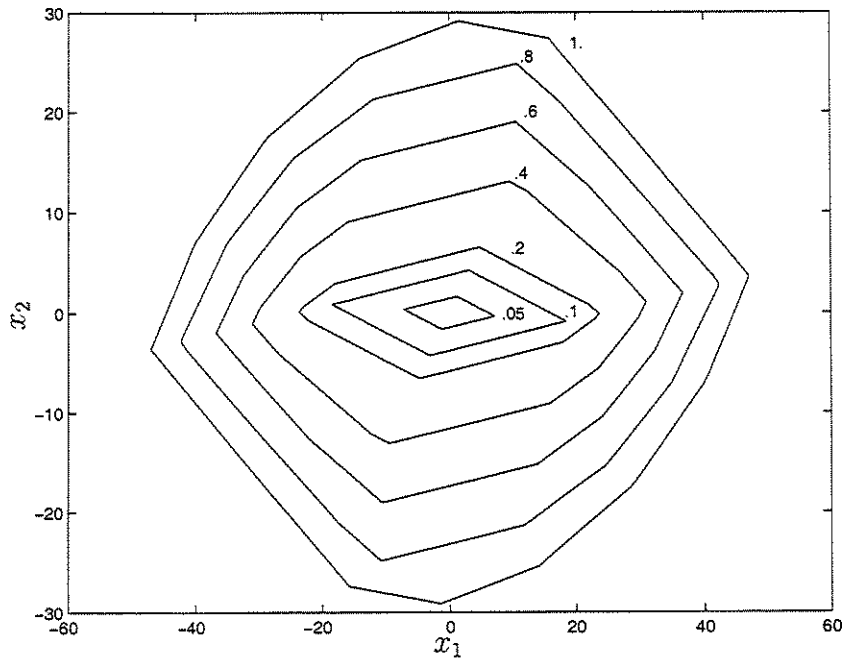


Figura 3.7: Superfícies de nível de $\Psi[G_{pw}, c_{pw}, w_{pw}]$

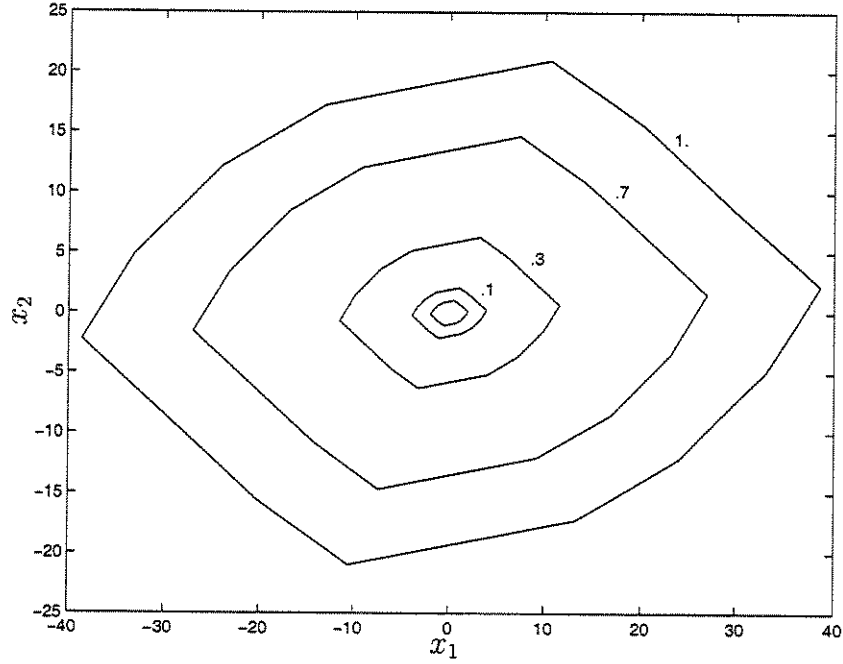


Figura 3.8: Superfícies de nível de $\Psi[G_m, 0, w_m]$

3.6 Funções de Lyapunov Lineares por Partes para Sistemas Incertos

Nesta seção, os resultados sobre caracterização e construção de funções de Lyapunov lineares por partes do sistema em malha fechada saturável (3.9) são estendidos para o sistema em malha fechada saturável incerto:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bs_{\text{sat}}(Fx(k)) ; (A, B) \in \mathcal{P} \quad (3.86)$$

onde o par de matrizes (A, B) é desconhecido mas restrito ao conjunto $\mathcal{P} \subset (\mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m})$, aqui denominado domínio de incerteza.

3.6.1 Caracterização

Seja a FLP:

$$\Psi(x) = \max_{1 \leq i \leq r} w_i^{-1} \{g_i x + c_i\} \quad (3.87)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e w_i, g_i, c_i são as iésimas linhas de $w > 0 \in \mathbb{R}^r, G \in \mathbb{R}^{r \times n}, c \leq 0 \in \mathbb{R}^r$, respectivamente.

Aplicando Definição 2.10, pode ser verificado que o epígrafo da FLP $\Psi(x)$ (3.87), definida na bola $\Psi(x) \leq 1$ é dado por:

$$\mathcal{E}(\Psi) = S(G, c, w) = \{(x, \epsilon) \in \mathbb{R}^{n+1} : Gx + c \leq w\epsilon ; 0 \leq \epsilon \leq 1\} \quad (3.88)$$

Similarmente, pode ser também verificado que para o sistema de malha fechada (3.86), o epígrafo de $\lambda^{-1}\Psi(f(x))$ definido na bola $\Psi(x) \leq 1$ é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f) &= \{(x, \epsilon) \in \mathbb{R}^{n+1} : G[Ax + B \text{sat}(Fx)] + c \leq \lambda w\epsilon \\ &0 \leq \epsilon \leq 1 \forall (A, B) \in \mathcal{P}\} \end{aligned} \quad (3.89)$$

Proposição 3.9 *Uma FLP definida positiva $\Psi(x)$ (3.87) é uma função de Lyapunov para o sistema incerto (3.86), na bola $\Psi(x) \leq 1$, se e somente se existe $0 < \lambda < 1$ tal que os epígrafos (3.88), (3.89), satisfazem a relação de inclusão:*

$$\mathcal{E}(\Psi) \subset \mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f) \quad (3.90)$$

Prova: Imediata aplicando Corolário 2.1.

Seja o domínio de incerteza $\mathcal{P}$ dado pelo politopo:

$$\mathcal{P} = \left\{ (A, B) : (A, B) = \sum_{l=1}^{l=s} \xi_l (A^l, B^l) ; \xi_l \geq 0 ; \sum_{l=1}^{l=s} \xi_l = 1 \right\} \quad (3.91)$$

onde $(A^l, B^l) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m}$ são pontos extremos.

Para $\mathcal{P}$ dado por (3.91) e notando que $G[Ax + B \text{sat}(F(x))] \leq w$ é linear em (A, B) , pode-se verificar que $\mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f)$ é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f) &= \{(x, \epsilon) \in \mathbb{R}^{n+1} : G[A^l x + B^l \text{sat}(Fx)] + c \leq \lambda w\epsilon \\ &0 \leq \epsilon \leq 1 ; l = 1 : s\} \end{aligned} \quad (3.92)$$

Além disso, das equações (3.10) a (3.12), é fácil verificar que $\mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f)$ restrito à região de saturação $S(R_j, d_j)$ é dado por

$$\mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f)_j = \{(x, \epsilon) \in (S(R_j, d_j), \mathfrak{R}) : G[A_j^l x + p_j^l] + c \leq \lambda w \epsilon \ 0 \leq \epsilon \leq 1 ; l = 1 : s\} \quad (3.93)$$

onde A_j^l, p_j^l , são os parâmetros do modelo linear em $S(R_j, d_j)$ relacionados ao ponto extremo (A^l, B^l) .

Proposição 3. 10 *Uma FLP definida positiva $\Psi(x)$ (3.87) é uma função de Lyapunov para o sistema incerto (3.86), na bola $\Psi(x) \leq 1$, se e somente se para as $j = 1 : 3^m$ regiões de saturação (3.10), (3.11), (3.12) e para os $l = 1 : s$ pontos extremos de $\mathcal{P}$, existe um $0 < \lambda < 1$ tal que*

$$\begin{bmatrix} GA_j^l & -\lambda w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \epsilon \end{bmatrix} \leq -Gp_j^l - c \quad (3.94)$$

vale para os ϵ, x que satisfazem:

$$\begin{bmatrix} G & -w \\ R_j & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \epsilon \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -c \\ d_j \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

ou, em outras palavras, se e somente se existe $0 < \lambda < 1$ tal que o poliedro (3.95) é um subconjunto do poliedro (3.94).

Prova: Da Proposição 3.9 tem-se:

$$\mathcal{E}(\Psi) \subset \mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f) \quad (3.96)$$

Notando que

$$\mathfrak{R}^n = \bigcup_{j=1}^{j=3^m} S(R_j, d_j) \quad (3.97)$$

$$\mathcal{E}(\Psi) = \mathcal{E}(\Psi) \cap \mathfrak{R}^n \quad (3.98)$$

temos

$$\mathcal{E}(\Psi) = \bigcup_{j=1}^{j=3^m} \mathcal{E}(\Psi) \cap S(R_j, d_j) \quad (3.99)$$

Portanto (3.96) vale se e somente se para $j = 1 : 3^m$ tivermos:

$$\mathcal{E}(\Psi) \cap S(R_j, d_j) \subset \mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f) \quad (3.100)$$

De (3.93) $\mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f)_j$ é um poliedro dado pela interseção de $l = 1 : s$ poliedros:

$$\begin{bmatrix} GA_j^l & -\lambda w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \epsilon \end{bmatrix} \leq -Gp_j^l - c \quad (3.101)$$

De (3.10), (3.11), (3.88), pode-se verificar que $\mathcal{E}(\Psi) \cap S(R_j, d_j)$ corresponde ao poliedro:

$$\begin{bmatrix} G & -w \\ R_j & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \epsilon \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -c \\ d_j \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

concluindo a prova. ◊

O Corolário a seguir é uma formulação primal de programação linear da Proposição 3.10 [33].

Corolário 3. 4 *Uma FLP definida positiva $\Psi(x)$ (3.87) é uma função de Lyapunov para o sistema incerto (3.86), na bola $\Psi(x) \leq 1$, se e somente se existe $0 < \lambda < 1$ tal que:*

$$\max_{i,j,l} \{\sigma(j)_i^l\} \leq 0 \quad (3.103)$$

$$1 \leq i \leq r ; 1 \leq j \leq 3^m ; 1 \leq l \leq s$$

onde $\sigma(j)_i^l$ são obtidos resolvendo os seguintes programas lineares independentes factíveis:

$$\sigma(j)_i^l = \max_{x,\epsilon} g^i A_j^l x - \lambda w_i \epsilon + g^i p_j^l + c_i$$

$$\begin{aligned} Gx - w\epsilon &\leq -c \\ R_j x &\leq d_j \\ 0 &\leq \epsilon \leq 1 \end{aligned} \quad (3.104)$$

onde g^i , c_i , w_i , são iésimas linhas de G , c , w , respectivamente e R_j , d_j , A_j^l , p_j^l são relacionadas às regiões de saturação e aos modelos lineares por partes (3.10)-(3.12) e domínio de incerteza (3.91). Seja $\epsilon(j)_i^i$, $x(j)_i^i$ solução ótima relacionada a um $\sigma(j)_i^i > 0$. Isto indica que $x(j)_i^i \in \mathcal{E}(\Psi)$ está fora da iésima face de $\mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f)$ (3.93) dado por:

$$g^i A_j^l x - \lambda w_i \epsilon(j)_i^i \leq -g^i p_j^l - c_i \quad (3.105)$$

Prova: Similar ao Corolário 3.3.

◇

3.6.2 Construção

O procedimento para a construção de funções de Lyapunov lineares por partes para sistemas incertos, em linhas gerais, é uma combinação dos Procedimentos 3.3 e 3.4 para construção de conjuntos λ -contrativos robustos e funções de Lyapunov lineares por partes, respectivamente.

Procedimento 3.5

Construção de função de Lyapunov linear por partes do sistema incerto (3.86).

Passo 1 - Inicialização

λ : índice de convergência

$\delta > 1$: coeficiente de expansão

$\Psi[G, c = 0, w]$: função de Lyapunov inicial correspondente a $Gx \leq w$, o conjunto λ -contrativo robusto supremo contido na região de controle linear $S_1(R_1, d_1)$ [34].

Passo 2

Eliminar desigualdades redundantes em $\mathcal{E}(\Psi) = S(G, c, w)$ (3.88) [32]

Fazer: $G_a = G$

Passo 3 - Expansão

Fazer: $w_a = w$; $c_a = c$; $w = \delta w_a$

Passo 4

Verificar se $\Psi[G, c, w]$ é uma função de Lyapunov de (3.86). (**Rotina 3.2**):

Sim : voltar ao passo 3;

Caso contrário: ir para o passo 5.

Passo 5 - Construção da função de Lyapunov $\Psi[G, c, w]$ tal que:

$$\Psi[G_a, c_a, w_a] \geq \Psi[G, c, w] \geq \Psi[G_a, c_a, \delta w_a]$$

Passo 5.1 - Definir o plano de corte $S(\tilde{g}, \tilde{c}, \tilde{w})$ para $S(G, c, w)$ relacionado à região j^* , ponto extremo l^* e aresta i^* , identificadas pela Rotina 3.2.

$$\tilde{g} = g^{i^*} A_{j^*} ; \quad \tilde{c} = c_{i^*} + g^{i^*} p_{j^*} ; \quad \tilde{w} = \lambda w_{i^*}$$

Passo 5.2

Verificar se $S(G_a, c_a, w_a) \subset S(\tilde{g}, \tilde{c}, \tilde{w})$ [17]

Sim: ir para o passo 5.3;

Caso contrário: $\Psi[G_a, c_a, w_a]$ é a função de Lyapunov desejada. **Pare**

Passo 5.3 - Construção de $S(\tilde{g}, \tilde{c}, \tilde{w}) \cap S(G, c, w)$

$$G = \begin{bmatrix} G \\ \tilde{g} \end{bmatrix} ;$$

$$c = \begin{bmatrix} c \\ \tilde{c} \end{bmatrix} ;$$

$$w = \begin{bmatrix} w \\ \tilde{w} \end{bmatrix}$$

Passo 5.4

Verificar se $\Psi[G, c, w]$ é uma função de Lyapunov de (3.86). (**Rotina 3.2**):

Sim: volte ao passo 2.

Caso contrário: volte ao passo 5.1

Rotina 3.2: Verifica se $\Psi[G, c, w]$ é uma função de Lyapunov de (3.86) utilizando o Corolário 3.4.

- Para $j = 1 : 3^m$,

Para $l = 1 : s, i = 1 : r$, resolver o programa linear:

$$\sigma(j)_l^i = \max_{x, \epsilon} g^i A_j^l x - \lambda w_i \epsilon + g^i p_j^l + c_i$$

$$Gx - w\epsilon \leq -c$$

$$R_j x \leq d_j$$

$$0 \leq \epsilon \leq 1$$

Fazer

$$\sigma_j = \max_{l, i} \sigma(j)_l^i$$

$$(l_j, i_j) = \arg \max_{l, i} \sigma(j)_l^i$$

$$\epsilon_j = \epsilon(j)_{l_j}^{i_j}$$

- Se:

$$\max_j \{\sigma_j\} \leq 0$$

Então: Fazer *Resposta* = *Sim*

Caso contrário: Fazer *Resposta* = *Não* e identificar a região de saturação interna que não satisfaz o Corolário 3.4:

$$j^* = \arg \min_j \epsilon_j \quad s.a. \quad \sigma_j > 0$$

$$l^* = l_{j^*} \quad ; \quad i^* = i_{j^*}$$

3.6.3 Exemplo Numérico

Considere o seguinte sistema incerto com uma lei de controle saturável em malha fechada:

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\
 -\hat{u} &\leq u \leq \hat{u} \\
 u(k) &= \text{sat}(Fx(k))
 \end{aligned} \tag{3.106}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 + q_1 & 0.5 \\ -0.4 & 1.2 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.0 - q_2 \end{bmatrix} ; \quad 0 \leq q_1, q_2 \leq .1$$

$$\hat{u} = \hat{u} = 7.0 ; \quad F = \begin{bmatrix} 0.2888 & -1.8350 \end{bmatrix}$$

Sejam:

- $\lambda = .998$: índice de convergência;
- $\Psi[G_l, 0, w_l]$: função de Lyapunov do tipo Minkowski, associada ao supremo poliedro λ -contrativo com relação a (3.106), contido na região de controle linear;
- $\Psi[G_m, 0, w_m]$: função de Lyapunov do tipo Minkowski, obtida pelo Procedimento 3.5, com parâmetros $\delta = 1.5$, $\delta_m = 1.1$, começando de $\Psi[G_l, 0, w_l]$ e forçando $c = 0$;
- $\Psi[G_{pw}, c_{pw}, w_{pw}]$: função de Lyapunov linear por partes obtida pelo Procedimento 3.5, com parâmetros $\delta = 1.5$, $\delta_m = 1.1$, começando de $\Psi[G_l, 0, w_l]$;
- S_l , S_m e S_{pw} : regiões de estabilidade assintótica robusta locais correspondentes às bolas unitárias das funções de Lyapunov $\Psi[G_l, 0, w_l]$, $\Psi[G_m, 0, w_m]$ e $\Psi[G_{pw}, c_{pw}, w_{pw}]$, respectivamente.

Pode ser verificado na Figura 3.9 que S_m e S_{pw} , construídas pelo Procedimento 3.5, são bem maiores que a região de partida S_l , mostrando assim a eficácia do procedimento de construção proposto. A Região S_{pw} é estritamente maior que a região S_m , mostrando que funções de Lyapunov do tipo FLP podem efetivamente dar resultados menos conservativos que as funções de Minkowski.

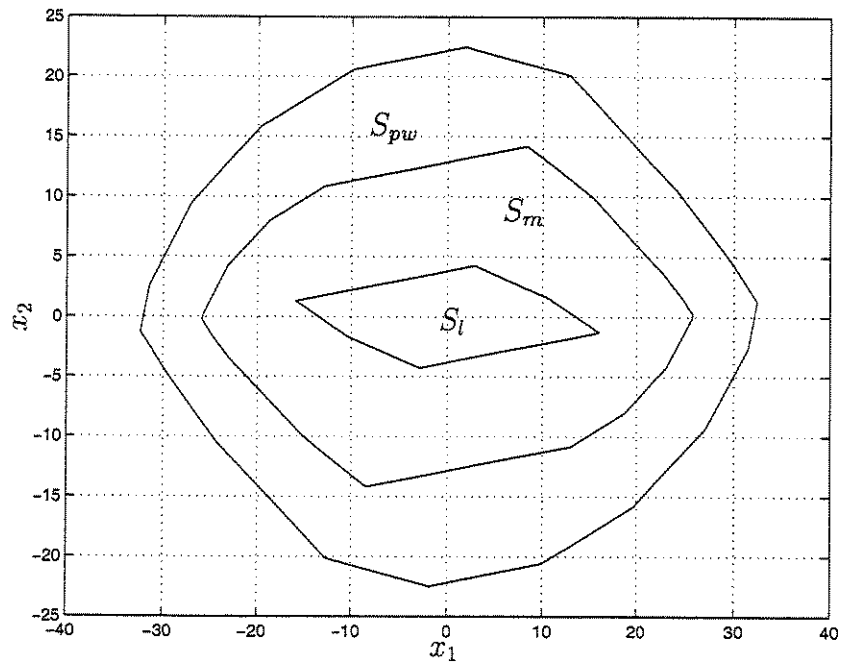


Figura 3.9: Bolas unitárias de funções de Lyapunov

3.7 Conclusão

Este capítulo tratou da caracterização e construção de poliedros λ -contrativos e funções de Lyapunov lineares por partes para obtenção de estimativas poliedrais convexas da região de estabilidade assintótica local da origem, de sistemas lineares invariantes, discretos no tempo, com controles em malha fechada saturáveis.

Os principais resultados obtidos foram:

- condições necessárias e suficientes para um poliedro convexo fechado ser λ -contrativo robusto com respeito a um sistema com parâmetros incertos restritos a um polítopo compacto (domínio de incerteza politópico). A versão de programação linear dessas condições é computacionalmente eficiente e capaz de tratar problemas de grandes dimensões.

- condições necessárias e suficientes para uma FLP ser função de Lyapunov de sistemas com parâmetros perfeitamente conhecidos e também de sistemas com parâmetros incertos restritos a um politopo compacto (domínio de incerteza politópico). As versões de programação linear dessas condições são computacionalmente eficientes e capazes de tratar problemas de grandes dimensões.
- Procedimentos de expansão não homotéticos de construção de poliedro λ -contrativo robusto e funções de Lyapunov lineares por partes para estimação da região de estabilidade assintótica local da origem do sistema saturado.

Os exemplos numéricos apresentados mostraram a efetividade dos procedimentos de expansão propostos. Eles também mostraram que as funções de Lyapunov lineares por partes, por serem mais flexíveis e melhor adaptadas para capturar a variação radial do comportamento não linear de sistemas com saturação, apresentaram resultados estritamente menos conservativos que os obtidos com poliedros λ -contrativos, correspondentes a funções de Minkowski.

Capítulo 4

Sistemas com Controles com Zonas Mortas

4.1 Introdução

Zonas mortas podem ocorrer em vários componentes de sistemas de controle, tais como sensores, amplificadores e atuadores. Possíveis efeitos indesejáveis da zona morta em sistemas de controle são a diminuição da acuidade estática e instabilidade do sistema [35]. A estabilidade de sistemas lineares invariantes no tempo com controles em malha fechada com zonas mortas tem sido largamente estudados na literatura, considerando na maioria dos casos sistemas SISO (single-input single-output) e técnicas frequenciais [32],[35], [9], [36]. Sistemas lineares com controles em malha fechada com zonas mortas são sistemas lineares por partes dentro das regiões do espaço de estado, aqui denominadas regiões da zona morta, definidas pela lei de controle em malha fechada. Estes sistemas possuem comportamento dinâmico complexo, podendo apresentar múltiplos pontos de equilíbrio e/ou ciclos limites. Em sistemas estáveis em malha fechada mas que são estritamente instáveis em malha aberta, suas trajetórias não convergem assintoticamente para a origem dentro da zona morta, mas sim para pontos de equilíbrio estáveis vizinhos ou ciclos limites. A determinação e a análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio é trivial. A determinação e a análise da estabilidade de ciclos limites para sistemas multivariáveis em geral não é fácil de ser realizada. A determinação de

conjuntos de confinamento final pode ser utilizada para delimitar e analisar a estabilidade de ciclos limites.

Este capítulo trata do problema de estabilidade de sistemas lineares, invariantes, discretos no tempo, instáveis em malha aberta, com controles em malha fechada com zonas mortas. O objetivo final é a determinação de uma aproximação poliedral convexa externa do conjunto de confinamento final uniforme (CCFU) mínimo contendo a origem, para delimitação e análise da estabilidade de possível ciclo limite nele contido. A abordagem proposta é baseada na caracterização e construção de conjuntos positivamente invariantes convexos e funções de Lyapunov lineares por partes. A matéria está organizada da seguinte forma:

Na seção 4.2 é descrito o modelo linear por partes do sistema com controles em malha fechada com zonas mortas.

Na seção 4.3 são apresentados resultados novos sobre caracterização e construção de conjuntos positivamente invariantes convexos. São demonstradas condições necessárias e suficientes para um poliedro fechado convexo ser positivamente invariante. Baseado em formulação computacional de programação linear dessas condições, é proposto um procedimento recursivo para construção de uma aproximação externa poliedral convexa do conjunto positivamente invariante mínimo contendo uma vizinhança arbitrariamente pequena da origem.

Na seção 4.4 são apresentados resultados novos sobre caracterização e construção de funções de Lyapunov lineares por partes. São demonstradas condições necessárias e suficientes para uma FLP definida positiva ser função de Lyapunov. Baseado em formulação computacional de programação linear dessas condições algébricas, é proposto um procedimento recursivo para construção de funções de Lyapunov lineares por partes garantindo confinamento final uniforme no conjunto positivamente invariante mínimo construído na seção 4.3. O resultado final é uma aproximação poliedral convexa, positivamente invariante, do mínimo CCFU, juntamente com sua região de atração.

Na seção 4.5 é apresentado um exemplo numérico ilustrativo.

4.2 Modelo de Sistema com Controles com Zonas Mortas

Considere o sistema linear discreto no tempo, representado pela seguinte equação de estado:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (4.1)$$

onde $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ são as variáveis de estado e controle respectivamente, sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Considere a lei de controle em malha fechada com zona morta:

$$u(k) = dz(Fx(k)) \quad (4.2)$$

onde $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é constante e os componentes de $dz(Fx)$ são dados por:

$$dz(Fx)_i = \begin{cases} f_i x + \tilde{u}_i & \text{se } f_i x < -\tilde{u}_i \\ 0 & \text{se } -\tilde{u}_i \leq f_i x \leq \hat{u}_i \\ f_i x - \hat{u}_i & \text{se } f_i x > \hat{u}_i \end{cases} \quad (4.3)$$

onde f_i denota a i -ésima linha da matriz F e $\tilde{u}_i$, $\hat{u}_i$ denotam as i -ésimas linhas dos vetores de limite inferior e superior da função zona morta $\tilde{u} \geq 0$, $\hat{u} \geq 0$, respectivamente. A Figura 4.1 apresenta o gráfico de uma função zona morta $u = dz(v)$.

A partir das equações (4.1) e (4.2) o sistema em malha fechada é dado pelo modelo não linear:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bdz(Fx(k)) \quad (4.4)$$

Considerando todos $x \in \mathbb{R}^n$, cada um dos m componentes da lei de controle com zona morta (4.3) possuem 3 estados possíveis: abaixo da zona-morta, interno à zona-morta e acima da zona morta. Consequentemente, $\mathbb{R}^n$ pode ser decomposto em $j = 1 : 3^m$ regiões $S(R_j, d_j) \subset \mathbb{R}^n$, denominadas regiões de zona morta as quais são dadas por um poliedro da forma:

$$S(R_j, d_j) = \{x \in \mathbb{R}^n; R_j x \leq d_j\} \quad (4.5)$$

$$R_j = \begin{bmatrix} F_{iz} \\ -F_{iz} \\ -F_{az} \\ F_{bz} \end{bmatrix} ; \quad d_j = \begin{bmatrix} \hat{u}_{iz} \\ \tilde{u}_{iz} \\ -\hat{u}_{az} \\ -\tilde{u}_{bz} \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

onde F_{iz} , $\hat{u}_{iz}$, $\check{u}_{iz}$, F_{az} , $\hat{u}_{az}$, F_{bz} , $\check{u}_{bz}$, denotam matrizes e vetores apropriadamente formados pelas linhas de F , $\hat{u}$, $\check{u}$, relacionados, respectivamente, com os componentes internos à zona morta, acima da zona morta e abaixo da zona morta, que caracterizam a região.

Dentro dos limites de cada região da zona morta $S(R_j, d_j)$, o sistema em malha fechada (4.4) pode ser representado por um modelo linear:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_j x(k) + p_j \\ A_j &= [A + B_{az} F_{az} + B_{bz} F_{bz}] \\ p_j &= -B_{az} \hat{u}_{az} + B_{bz} \check{u}_{bz} \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde B_{az} e B_{bz} denotam matrizes apropriadamente formadas pelas colunas de B relacionadas a F_{az} e F_{bz} , respectivamente. Em todo este capítulo, será designado $j = 1$ para a região de comportamento linear de $dz(F(x))$, descrita por:

$$R_1 = \begin{bmatrix} F \\ -F \end{bmatrix} ; \quad d_1 = \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \check{u} \end{bmatrix} ; \quad A_1 = A ; \quad p_1 = 0 \quad (4.8)$$

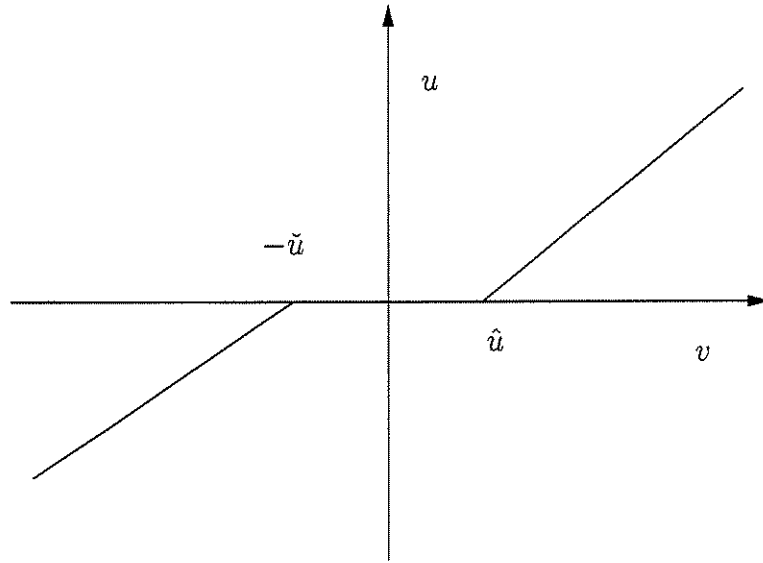


Figura 4.1: Função zona morta $u = dz(v)$.

4.3 Poliedros Positivamente Invariantes

Esta seção trata da caracterização e construção de poliedros positivamente invariantes com respeito ao sistema em malha fechada com controles com zonas mortas (4.4).

4.3.1 Caracterização

Considere o poliedro

$$S(G, w) = \{x \in \mathbb{R}^n : Gx \leq w\} \quad (4.9)$$

onde $G \in \mathbb{R}^{r \times n}$ e $w > 0 \in \mathbb{R}^r$.

Seja $Q(G, w)$ o conjunto admissível de um passo de $S(G, w)$ (4.9) com relação ao sistema (4.4):

$$Q(G, w) = \{x \in \mathbb{R}^n; G[Ax + Bdz(F(x))] \leq w\} \quad (4.10)$$

Proposição 4.1: *Considerando as $j = 1 : 3^m$ regiões da zona morta (4.5), (4.6), (4.7), o conjunto $Q(G, w)$ (4.10) dado por:*

$$Q(G, w) = \bigcup_{j=1}^{j=3^m} Q_j(G, w) \quad (4.11)$$

onde $Q_j(G, w) = Q(G, w) \cap S(R_j, d_j) :$

$$\begin{bmatrix} GA_j \\ R_j \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} \lambda w - Gp_j \\ d_j \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Prova: Observando que

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{j=3^m} S(R_j, d_j) \quad (4.13)$$

$$Q(G, w) = Q(G, w) \cap \mathbb{R}^n \quad (4.14)$$

tem-se

$$Q(G, w) = \bigcup_{j=1}^{j=3^m} Q(G, w) \cap S(R_j, d_j) \quad (4.15)$$

pode-se verificar de (4.7), (4.9), que $Q(G, w) \cap S(R_j, d_j)$:

$$\begin{bmatrix} GA_j \\ R_j \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} w - Gp_j \\ d_j \end{bmatrix}$$

o que conclui a prova. ◇

Proposição 4.2: *O poliedro $S(G, w)$ (4.9) é positivamente invariante com relação ao sistema em malha fechada (4.4) com uma taxa de contração $0 < \lambda < 1$ se e somente se para as $j = 1 : 3^m$ regiões da zona morta (4.5), (4.6), (4.7),*

$$GA_j x \leq \lambda w - Gp_j \quad (4.16)$$

é válido para todo x que satisfaça:

$$\begin{bmatrix} G \\ R_j \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} w \\ d_j \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

ou, em outras palavras, se o poliedro (4.17) é um subconjunto do poliedro (4.16).

Prova: Da proposição 3.1 temos:

$$S(G, w) \subset Q(G, \lambda w) \quad (4.18)$$

Observando que

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{j=3^m} S(R_j, d_j)$$

tem-se:

$$\begin{aligned} S(G, w) \cap \mathbb{R}^n &\subset Q(G, \lambda w) \cap \mathbb{R}^n \\ \bigcup_{j=1}^{j=3^m} S(G, w) \cap S(R_j, d_j) &\subset \bigcup_{j=1}^{j=3^m} Q(G, \lambda w) \cap S(R_j, d_j) \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$S(G, w) \cap S(R_j, d_j) \subset Q(G, \lambda w) \cap S(R_j, d_j) \quad (4.19)$$

deve ser válido para $j = 1 : 3^m$.

Da proposição 4.1, $Q(G, \lambda w) \cap S(R_j, d_j)$ corresponde ao poliedro:

$$\begin{bmatrix} GA_j \\ R_j \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} \lambda w - Gp_j \\ d_j \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

De (4.5), (4.6), (4.9) é fácil verificar que $S(G, w) \cap S(R_j, d_j)$ corresponde ao poliedro:

$$\begin{bmatrix} G \\ R_j \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} w \\ d_j \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Pode ser verificado que (4.21) contido em (4.20) é equivalente a (4.21) contido no poliedro

$$GA_j x \leq \lambda w - Gp_j$$

o que conclui a prova. ◊

Corolário 4.1: *O poliedro $S(G, w)$ (4.9) é positivamente invariante com relação ao sistema em malha fechada (4.4) com uma taxa de contração $0 < \lambda < 1$ se e somente se para as $j = 1 : 3^m$ regiões da zona morta (4.5), (4.6), (4.7):*

$$\max_{i,j} \{\sigma_j^i\} \leq 0 ; \quad 1 \leq i \leq r ; \quad 1 \leq j \leq 3^m \quad (4.22)$$

tal que σ_j^i são obtidos resolvendo-se os seguintes programas lineares factíveis independentes:

$$\begin{aligned} \sigma_j^i &= \max_x g_i A_j x + g_i p_j - \lambda w_i \\ \begin{bmatrix} G \\ R_j \end{bmatrix} x &\leq \begin{bmatrix} w \\ d_j \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde g_i , w_i , são as i ésimas linhas de G e w , respectivamente e R_j , d_j , A_j , p_j estão relacionados às regiões da zona morta e ao modelo linear por partes (4.5)-(4.7). Além disso, seja x_j^i uma solução ótima relacionada a $\sigma_j^i > 0$. Isto indica que $x_j^i \in S(G, w)$ está fora de Q_j^i , a i ésima face de $Q_j(G, \lambda w)$ (4.12), dado por:

$$Q_j^i = \{x \in \mathbb{R}^n ; \quad g_i A_j x \leq \lambda w_i - g_i p_j\} \quad (4.24)$$

Prova: Inspeccionando (4.16), (4.17), é fácil verificar que a proposição 4.2 é satisfeita se

$$\begin{aligned} g_i A_j x &\leq \lambda w_i - g_i p_j \\ j &= 1 : 3^m ; \quad i = 1 : r \end{aligned} \quad (4.25)$$

é válido para todo x que satisfaça (4.17). Em outras palavras,

$$\max_x (g_i A_j x + g_i p_j - \lambda w_i) \leq 0 \quad (4.26)$$

$$\begin{bmatrix} G \\ R_j \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} w \\ d_j \end{bmatrix}$$

deve ser válido para $i = 1 : r$ e $j = 1 : 3^m$. Pode-se verificar que programas lineares (4.26) são equivalentes aos programas lineares (4.22), (4.23). Sejam σ_j^i e x_j^i , respectivamente, os índices de desempenhos ótimos e as soluções ótimas dos programas lineares (4.26). De (4.19), (4.26) pode-se verificar que $\sigma_j^i > 0$ indica que $x_j^i \in S(G, w)$ está fora da i -ésima face de $Q_j(G, w)$, o que conclui a prova.

◇

Seja $T(G, w)$ o conjunto alcançável um passo a frente de $S(G, w)$ (4.9) com relação ao sistema (4.4), dado por:

$$T(G, w) = \{Ax + Bdz(F(x)) \in \mathbb{R}^n; x \in S(G, w)\} \quad (4.27)$$

Proposição 4.3: Considerando as $j = 1 : 3^m$ regiões da zona morta (4.5), (4.6), (4.7), o conjunto $T(G, w)$ (4.27) dado por:

$$T(G, w) = \bigcup_{j=1}^{j=3^m} T_j(G, w) \quad (4.28)$$

onde $T_j(G, w) \subset \mathbb{R}^n$ é o conjunto alcançável um passo a frente de $S(G, w) \cap S(R_j, d_j)$, dado pelo poliedro:

$$\begin{bmatrix} G \\ R_j \end{bmatrix} A_j^{-1} x \leq \begin{bmatrix} w \\ d_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ R_j \end{bmatrix} A_j^{-1} p_j \quad (4.29)$$

Prova: Observando que

$$\mathfrak{R}^n = \bigcup_{j=1}^{j=3^m} S(R_j, d_j)$$

$$S(G, w) = \bigcup_{j=1}^{j=3^m} S(G, w) \cap S(R_j, d_j)$$

de (4.27) tem-se:

$$T(G, w) = \{Ax + Bdz(F(x)) \in \mathfrak{R}^n \ ; \ x \in \bigcup_{j=1}^{j=3^m} S(G, w) \cap S(R_j, d_j)\}$$

Consequentemente, tem-se:

$$T(G, w) = \bigcup_{j=1}^{j=3^m} T_j(G, w)$$

$$T_j(G, w) = \{Ax + Bdz(F(x)) \in \mathfrak{R}^n \ ; \ x \in S(G, w) \cap S(R_j, d_j)\} \quad (4.30)$$

De (4.5), (4.6), (4.7), pode ser verificado que (4.30) corresponde ao poliedro

$$z = A_j x + p_j \ ; \ \begin{bmatrix} G \\ R_j \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} w \\ d_j \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Note que fazendo $x = A_j^{-1}z - A_j^{-1}p_j$ em (4.31) tem-se (4.29), o que completa a prova.

◇

Proposição 4.4: *O poliedro $S(G, w)$ (4.9) é positivamente invariante com relação ao sistema em malha fechada (4.4) com uma taxa de contração $0 < \lambda < 1$ se e somente se para as $j = 1 : 3^m$ regiões da zona morta (4.5), (4.6), (4.7):*

$$Gx \leq w$$

é válido para todo x que satisfaa:

$$\begin{bmatrix} G \\ R_j \end{bmatrix} A_j^{-1}x \leq \lambda^{-1} \begin{bmatrix} w \\ d_j \end{bmatrix} + \lambda^{-1} \begin{bmatrix} G \\ R_j \end{bmatrix} A_j^{-1}p_j$$

Prova: Imediata das proposições 2.1 e 4.3.

◇

O corolário seguinte fornece uma formulação de programação linear primal [33] para a proposição 4.4.

Corolário 4.2: *O poliedro $S(G, w)$ (4.9) é positivamente invariante com relação ao sistema em malha fechada (4.4) com uma taxa de contração $0 < \lambda < 1$ se para as $j = 1 : 3^m$ regiões da zona morta (4.5), (4.6), (4.7):*

$$\max_{i,j} \{\sigma_j^i\} \leq 0 ; \quad 1 \leq i \leq r ; \quad 1 \leq j \leq 3^m \quad (4.32)$$

tal que σ_j^i são obtidos resolvendo-se os seguintes programas lineares factíveis independentes:

$$\sigma_j^i = \max_x g_i x - w_i$$

$$\begin{bmatrix} G \\ R_j \end{bmatrix} A_j^{-1} x \leq \lambda^{-1} \begin{bmatrix} w \\ d_j \end{bmatrix} + \lambda^{-1} \begin{bmatrix} G \\ R_j \end{bmatrix} A_j^{-1} p_j$$

onde g_i , w_i , são as i ésimas linhas de G e w , respectivamente e R_j , d_j , A_j , p_j estão relacionados às regiões da zona-morta e ao modelo linear por partes (4.5)-(4.7). Além disso, seja x_j^i uma solução ótima relativa a $\sigma_j^i > 0$. Isto indica que $x_j^i \in \lambda^{-1} T_j(G, w)$ (4.27) está fora de S_i , a i ésima face de $S(G, w)$, dada por:

$$S_i = \{x \in \mathbb{R}^n; g_i x \leq w_i\}$$

Prova: Similar à prova do corolário 4.1.

◇

4.3.2 Construção

Conjuntos limitados positivamente invariantes com uma taxa de contração $\lambda < 1$, contidos na região de comportamento linear de (4.4), no interior da zona-morta, são regiões de estabilidade assintótica da origem $x = 0$ [13]. Quando a origem $x = 0$ é instável, mas o sistema global é estável ($A + BF$ é Schur), as trajetórias do sistema (4.4), iniciando no interior da região da zona-morta, convergem para ciclos limites ou pontos de equilíbrios estáveis nas regiões vizinhas. Neste caso, o mínimo conjunto positivamente invariante contendo $x = 0$ é um conjunto de confinamento para as trajetórias do sistema (4.4) que se iniciam próximo da origem, fornecendo um limite superior para o erro das mesmas em relação a $x = 0$.

Baseado na Proposição 2.2, o procedimento seguinte fornece uma estimativa externa do mínimo poliedro positivamente invariante convexo com relação ao sistema (4.4) contendo uma vizinhança arbitrariamente pequena de $x = 0$.

Procedimento 4.1: Estimação do mínimo poliedro positivamente invariante com relação ao sistema (4.4) contendo a origem.

1 - Inicialização

λ : Taxa de contração

$S(G, w)$: poliedro inicial pequeno, limitado e fechado contendo a origem
($w > 0$).

itmax : número máximo de iterações

Fazer: $it = 0$

2 - Iteração

2.1 - Calcular os conjuntos alcançáveis um passo a frente $\lambda^{-1}T_j(G, w)$ usando a proposição 4.3

2.2 - Verificar se $S(G, w)$ é positivamente invariante com uma taxa de contração λ usando o corolário 4.2:

Sim: **Pare** : $S(G, w)$ é o poliedro desejado

No: Fazer $it = it + 1$ se $it > itmax$ **Pare**: a convergência falhou.

2.3 - Calcule uma aproximação poliedral convexa Cvp :

$$Cvp \approx \left[\bigcup_{j=1}^{j=3^m} \lambda^{-1} T_j(G, w) \right] \cup S(G, w)$$

2.4 - Fazer $S(G, w) = Cvp$ Retornar para 2.1

A eficiência computacional e a precisão do procedimento 4.1 são fortemente dependentes da aproximação poliedral Cvp utilizada no passo 2.3. Do ponto de vista da precisão, o melhor Cvp é a casca convexa da união de poliedros a qual é sabida ser um problema computacional NP duro. Neste caso, a proposição 4.1 pode tratar somente problemas de dimensões muito pequenas.

Uma boa solução de compromisso entre a eficiência computacional e a precisão pode ser obtida tomando-se Cvp como o mínimo poliedro $S(G, \rho)$ tal que:

$$S(G, \rho) \supset \left[\bigcup_{j=1}^{j=3^m} \lambda^{-1} T_j(G, w) \right] \cup S(G, w) \quad (4.33)$$

Neste caso, o procedimento 4.1 expande progressivamente o poliedro inicial $S(G, w)$ mudando somente seu vetor à direita w . A precisão de Cvp melhora com o número de faces permitidas para $S(G, w)$. Com este tipo de Cvp , o procedimento 4.1 pode tratar problemas de grandes dimensões.

4.4 Funções de Lyapunov Lineares por Partes

Esta seção trata da caracterização e construção de funções de Lyapunov lineares por partes para estimação do conjunto de confinamento final uniforme mínimo contendo a origem do sistema em malha fechada com controles com zonas mortas (4.4).

4.4.1 Caracterização

Considere a função linear por partes (FLP):

$$\Psi(x) = \max_{1 \leq i \leq r} w_i^{-1} \{g_i x + c_i\} \quad (4.34)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e w_i, g_i, c_i são as iésimas linhas de $w > 0 \in \mathbb{R}^r$, $G \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $c \leq 0 \in \mathbb{R}^r$, respectivamente. É fácil verificar que a função $\Psi(x)$ (4.34) pode também ser definida como:

$$\Psi(x) = \min_{\epsilon \in \mathbb{R}} \epsilon \quad s.a. \quad Gx + c \leq w\epsilon \quad (4.35)$$

Proposição 4.5 *A FLP $\Psi(x)$ (4.34), (4.35) é radialmente não limitada se e somente se o poliedro $Gx \leq w$ é limitado.*

Prova: Necessidade: Se o poliedro $Gx \leq w$ não é limitado, deve existir uma direção extrema x_0 [33] tal que $G\mu x_0 \leq 0 \forall \mu \geq 0$. Consequentemente, de (4.34), (4.35), pode-se verificar que $\Psi(\mu x_0)$ não tende para o infinito quando $\|\mu x_0\| \rightarrow \infty$ e portanto, $\Psi(x)$ é radialmente limitada.

Suficiência: Se $Gx \leq w$ é limitado, não existe x tal que $G\mu x \leq 0 \forall \mu \geq 0$. Consequentemente, de (4.34), (4.35) pode ser verificado que para qualquer x , Gx tem pelo menos uma componente positiva a qual produz $\Psi(\mu x) \rightarrow \infty$ quando $\|\mu x\| \rightarrow \infty$, concluindo a prova.

◇

Corolário 4.3 *Qualquer FLP definida positiva $\Psi(x)$ (4.34), (4.35) é radialmente não limitada.*

Prova: Imediata das Proposições 3.6 e 4.5.

◇

Da definição 2.10, pode-se verificar que o epígrafo da FLP $\Psi(x)$ (4.34) restrito ao conjunto imagem $\lambda^{-1}\check{b} \leq \hat{b}$ é dado por:

$$\mathcal{E}_\Psi = \{(x, \epsilon) \in \mathbb{R}^{n+1} : Gx + c \leq w\epsilon ; \lambda^{-1}\check{b} \leq \epsilon \leq \hat{b}\} \quad (4.36)$$

Similarmente, pode-se também verificar que para o sistema em malha fechada (4.4), o epígrafo de $\lambda^{-1}\Psi(f(x))$ restrito ao conjunto imagem $\lambda^{-1}\check{b} \leq \hat{b}$ é dado por:

$$\mathcal{E}_{\Psi_f} = \{(x, \epsilon) \in \mathbb{R}^{n+1} : G[Ax + Bdz(Fx)] + c \leq \lambda w \epsilon ; \lambda^{-1}\check{b} \leq \epsilon \leq \hat{b}\} \quad (4.37)$$

Proposição 4.6 *Uma FLP definida positiva $\Psi(x)$ (4.34), (4.35) é uma função de Lyapunov do sistema em malha fechada (4.4), no conjunto $\mathcal{N}[\Psi, \check{b}, \hat{b}]$, se e somente se existe um $\lambda < 1$ positivo tal que os epígrafos (4.36), (4.37), satisfazem a relação de inclusão:*

$$\mathcal{E}_{\Psi} \subset \mathcal{E}_{\Psi_f} \quad (4.38)$$

Prova: Imediata do Corolário 2.1. ◇

Proposição 4.7 *Uma FLP definida positiva $\Psi(x)$ (4.34), (4.35), é uma função de Lyapunov do sistema em malha fechada (4.4), no conjunto $\mathcal{N}[\Psi, \check{b}, \hat{b}]$, se e somente se para as $j = 1 : 3^m$ regiões da zona morta (4.5), (4.6), (4.7), existe um $\lambda < 1$ positivo tal que*

$$\begin{bmatrix} GA_j & -\lambda w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \epsilon \end{bmatrix} \leq -Gp_j - c \quad (4.39)$$

válido para qualquer (ϵ, x) que satisfaça:

$$\begin{bmatrix} G & -w \\ R_j & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \epsilon \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -c \\ d_j \\ \hat{b} \\ -\lambda^{-1}\check{b} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

ou, em outras palavras, se existe um $\lambda < 1$ positivo tal que o poliedro (4.40) seja um subconjunto do poliedro (4.39).

Prova: A proposição 4.6 fornece:

$$\mathcal{E}_{\Psi} \subset \mathcal{E}_{\Psi_f} \quad (4.41)$$

Observando que

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{j=3^m} S(R_j, d_j) \quad (4.42)$$

$$\mathcal{E}_{\Psi} = \mathcal{E}_{\Psi} \cap \mathbb{R}^n \quad (4.43)$$

tem-se

$$\mathcal{E}_\Psi = \bigcup_{j=1}^{j=3^m} \mathcal{E}_\Psi \cap S(R_j, d_j) \quad (4.44)$$

Consequentemente, (4.41) é válido se para $j = 1 : 3^m$ tem-se:

$$\mathcal{E}_\Psi \cap S(R_j, d_j) \subset \mathcal{E}_{\Psi_f} \quad (4.45)$$

Para $x \in S(R_j, d_j)$, de (4.7), (4.37), pode-se verificar que $\mathcal{E}_{\Psi_f}$ corresponde ao poliedro:

$$\begin{bmatrix} GA_j & -\lambda w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \epsilon \end{bmatrix} \leq -Gp_j - c \quad (4.46)$$

De (4.5), (4.6), (4.36), é fácil verificar que $\mathcal{E}_\Psi \cap S(R_j, d_j)$ corresponde ao poliedro:

$$\begin{bmatrix} G & -w \\ R_j & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \epsilon \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -c \\ d_j \\ \hat{b} \\ \lambda^{-1}\check{b} \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

O que conclui a prova.

◇

O corolário seguinte fornece uma formulação de programação linear primal para a proposição 4.7.

Corolário 4.4 *Uma FLP definida positiva $\Psi(x)$ (4.34), (4.35) é uma função de Lyapunov do sistema em malha fechada (4.4), no conjunto $\mathcal{N}[\Psi, \check{b}, \hat{b}]$, se e somente se existe um $\lambda < 1$ positivo tal que:*

$$\begin{aligned} \max_{i,j} \{\sigma_j^i\} &\leq 0 \\ 1 \leq i \leq r ; 1 \leq j \leq 3^m \end{aligned} \quad (4.48)$$

onde os σ_j^i são obtidos resolvendo-se os seguintes programas lineares factíveis independentes:

$$\begin{aligned} \sigma_j^i &= \max_{x, \epsilon} g_i A_j x - \lambda w_i \epsilon + g_i p_j + c_i \\ Gx - w\epsilon &\leq -c \\ R_j x &\leq d_j \\ \lambda^{-1}\check{b} &\leq \epsilon \leq \hat{b} \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde g_i, c_i, w_i , são as i ésimas linhas de G, c, w , respectivamente e R_j, d_j, A_j, p_j estão relacionados com a região da zona morta e com o modelo linear por partes (4.5)-(4.7).

Além disso, seja (x_j^i, ϵ_j^i) uma solução ótima relacionada a um $\sigma_j^i > 0$. Isto indica que $(x_j^i, \epsilon_j^i) \in \mathcal{E}_\Psi$ está fora da i ésima face de $\mathcal{E}_{\Psi_f}$ (4.37), (4.38) na j ésima região da zona morta:

$$\mathcal{H}_j^i = \{(x, \epsilon) \in \mathbb{R}^{n+1} : g_i A_j x - \lambda w_i \epsilon \leq -g_i p_j - c_i\} \quad (4.50)$$

Prova: Inspeccionando (4.39), (4.40), é fácil verificar que a proposição 4.7 é satisfeita se

$$\begin{aligned} g_i A_j x - \lambda w_i \epsilon &\leq -g_i p_j - c_i \\ j &= 1 : 3^m ; i = 1 : r \end{aligned} \quad (4.51)$$

vale para todo (x, ϵ) que satisfaça (4.40). Em outras palavras,

$$\max_{x, \epsilon} (g_i A_j x - \lambda w_i \epsilon + g_i p_j + c_i) \leq 0 \quad (4.52)$$

$$\begin{bmatrix} G & -w \\ R_j & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \epsilon \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -c \\ d_j \\ \hat{b} \\ -\lambda^{-1} \hat{b} \end{bmatrix}$$

a equação acima deve ser válida para $i = 1 : r$ e $j = 1 : 3^m$. Verifica-se facilmente que os programas lineares (4.52) são equivalentes aos programas lineares (4.48), (4.49). Sejam σ_j^i e (ϵ_j^i, x_j^i) , respectivamente, índice de desempenho ótimo e correspondente solução ótima dos programas lineares (4.52). De (4.45), (4.52) é fácil verificar que $\sigma_j^i > 0$ indica que $(x_j^i, \epsilon_j^i) \in \mathcal{E}_\Psi$ está fora da i ésima face de $\mathcal{E}_{\Psi_f}$ na j ésima região da zona morta (4.50), o que conclui a prova.

◇

Do ponto de vista computacional, o Corolário 4.2 é muito eficiente, podendo tratar eficientemente problemas de grandes dimensões. Ele é composto por um conjunto de problemas de programação linear independentes que podem ser resolvidos através de ferramentas computacionais poderosas.

4.4.2 Construção

Para sistemas (4.4) com a origem $x = 0$ instável mas o sistema global é estável ($A + BF$ é Schur), uma importante questão é a determinação de um conjunto de confinamento final uniforme (CCFU) mínimo contendo a origem. A existência de um CCFU mínimo é garantida pela proposição 2.2. Genericamente, o CCFU mínimo não é convexo e nem mesmo conexo.

A região de atração de um poliedro positivamente invariante com relação ao sistema (4.4) pode ser eficientemente estimada construindo-se uma função de Lyapunov linear por partes garantindo o confinamento final uniforme de (4.4) no poliedro em questão. Assim sendo, o Procedimento 4.2 abaixo utiliza-se da proposição 4.7 e do corolário 4.4, para a construção de uma função de Lyapunov linear por partes que garante o confinamento final uniforme do sistema (4.4) no poliedro positivamente invariante mínimo dado pelo procedimento 4.1. Quando a casca convexa de um CCFU mínimo é também positivamente invariante, a proposição 4.2 fornece uma boa aproximação do mínimo CCFU poliedral convexo contendo $x = 0$.

A seguir, FLP $\Psi(x)$ (4.34), (4.35), o epígrafo $\mathcal{E}_\Psi$ (4.36) e as faces $\mathcal{H}_j^i$ (4.50), serão denotados de forma compacta como $\Psi[G, c, w]$, $\mathcal{E}_\Psi[G, c, w]$ e $\mathcal{H}[g_i A_j, c_i + g_i p_j, \lambda w_i]$, respectivamente.

Procedimento 4.2: Construção de uma função de Lyapunov linear por partes que garante o confinamento final uniforme do sistema (4.4) em um conjunto positivamente invariante $Gx \leq w$.

1 - Inicialização

$\Psi[G, c = 0, w]$ - candidata inicial a função de Lyapunov, correspondente a $Gx \leq w$, ou seja ao mínimo poliedro positivamente invariante contendo a origem ($w > 0$) com uma taxa de contração λ (Procedimento 4.1)

$\mathcal{N}[\Psi, \check{b} = 1, \hat{b} = \infty]$ - região de atração inicial

2 - Verificar se $\Psi[G, c, w]$ inicial é uma função de Lyapunov utilizando o corolário 4.4:

- Sim : **Pare** :

$\Psi[G, c = 0, w] \leq 1$ é o CCFU desejado;

$\mathcal{N}[\Psi, \check{b} = 1, \hat{b} = \infty]$ é a região de atração desejada

- Não : Identificar : $\mathcal{H}[g_i A_j, c_i + g_i p_j, \lambda w_i]$ - a face de $\mathcal{E}_{\Psi_f}$ com ϵ_j^i mínimo que não satisfaz o corolário 4.4

Atualizar FLP :

$$\mathcal{E}_{\Psi}[G, c, w] = \mathcal{E}_{\Psi}[G, c, w] \cap \mathcal{H}[g_i A_j, c_i + g_i p_j, \lambda w_i]$$

Fazer $\hat{b}_a = \epsilon_j^i$

3 - Iteração

3.1 - Verificar se $\Psi[G, c, w]$ é uma função de Lyapunov utilizando o corolário 4.4:

- Sim: **Pare** :

$\Psi[G, c, w] \leq 1$ é o CCFU desejado;

$\mathcal{N}[\Psi, \check{b} = 1, \infty]$ é a região de atração desejada.

- Não: Identificar: $\mathcal{H}[g_i A_j, c_i + g_i p_j, \lambda w_i]$ - a face de $\mathcal{E}_{\Psi_f}$ com ϵ_j^i mínimo que não satisfaz o corolário 4.4

3.2 Verificar se $\epsilon_j^i < \hat{b}_a$

- Sim : **Pare** :

$\Psi[G, c, w] \leq 1$ é o CCFU desejado;

$\mathcal{N}[\Psi, \check{b} = 1, \hat{b} = \hat{b}_a]$ é a região de atração desejada.

- Não :

Atualizar FLP :

$$\mathcal{E}_{\Psi}[G, c, w] = \mathcal{E}_{\Psi}[G, c, w] \cap \mathcal{H}[g_i A_j, c_i + g_i p_j, \lambda w_i]$$

Fazer : $\hat{b}_a = \epsilon_j^i$ Retornar para 3.1

4.5 Exemplo Numérico

Considere o sistema linear discreto no tempo com uma lei de controle em malha fechada com zona morta:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ u(k) &= dz(Fx(k))\end{aligned}\tag{4.53}$$

Assuma os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} 1.00 & 0.05 \\ -0.25 & 1.10 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.05 \end{bmatrix} \\ \tilde{u} = \hat{u} &= 2.0 ; \quad F = \begin{bmatrix} -1.00 & -6.00 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{4.54}$$

Pode-se verificar que: o sistema (4.53) com os parâmetros (4.54) possui um ponto de equilíbrio instável $(0, 0)$ no interior da região da zona morta, não existem pontos de equilíbrios nas regiões acima e abaixo da zona morta e a matriz $A + BF$ é Schur. Neste caso, as trajetórias do sistema (4.53) que se iniciam em $\{\mathbb{R}^2 - (0, 0)\}$ convergirão para um ciclo limite. O mínimo CCFU global de acordo com a Definição 2.6 é o conjunto formado pela união de $(0, 0)$ e o ciclo limite. Usando a aproximação poliedral convexa (4.33) e uma taxa de contração $\lambda = .998$, o mínimo poliedro positivamente invariante obtido pelo procedimento 4.1 :

$$S_1(G, w) = \{x \in \mathbb{R}^2 : -w \leq Gx \leq w\}\tag{4.55}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 \\ 0.9877 & 0.1564 \\ 0.9511 & 0.3090 \\ 0.8910 & 0.4540 \\ 0.8090 & 0.5878 \\ 0.7071 & 0.7071 \\ 0.5878 & 0.8090 \\ 0.4540 & 0.8910 \\ 0.3090 & 0.9511 \\ 0.1564 & 0.9877 \\ 0.0000 & 1.0000 \\ -0.1564 & 0.9877 \\ -0.3090 & 0.9511 \\ -0.4540 & 0.8910 \\ -0.5878 & 0.8090 \\ -0.7071 & 0.7071 \\ -0.8090 & 0.5878 \\ -0.8910 & 0.4540 \\ -0.9511 & 0.3090 \\ -0.9877 & 0.1564 \end{bmatrix} ; \quad w = \begin{bmatrix} 0.3526 \\ 0.3438 \\ 0.3582 \\ 0.3794 \\ 0.4277 \\ 0.4977 \\ 0.5733 \\ 0.6453 \\ 0.7069 \\ 0.7554 \\ 0.7889 \\ 0.8057 \\ 0.8054 \\ 0.7878 \\ 0.7537 \\ 0.7044 \\ 0.6420 \\ 0.5683 \\ 0.4901 \\ 0.4139 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

O procedimento 4.2 obteve uma função de Lyapunov $\Psi[G, 0, w]$, utilizando G , w dados em (4.56), que garante o confinamento final uniforme global do sistema (4.53) em (4.55). O poliedro positivamente invariante $S_1(G, w)$ (4.55) e algumas trajetórias do sistema (4.53), (4.54), são apresentados na figura 4.2. Pode-se verificar nessa figura que $S_1(G, w)$ pode ser considerado uma boa aproximação poliedral convexa externa do ciclo limite e do CCFU mínimo global.

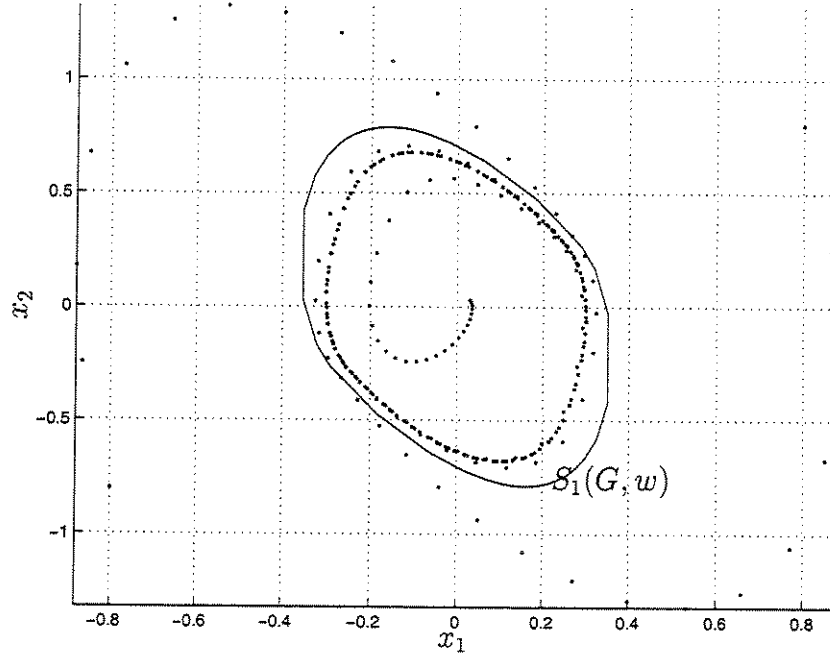


Figura 4.2: Conjunto positivamente invariante $S_1(G, w)$

Agora, assumamos os seguintes parâmetros para o sistema (4.53):

$$A = \begin{bmatrix} -0.71 & 0.80 \\ 0 & 2.96 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 2.95 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

$$\tilde{u} = \hat{u} = 3.0 ; \quad F = \begin{bmatrix} 0.11 & -0.80 \end{bmatrix}$$

Pode-se verificar que o sistema (4.53) com parâmetros (4.57) possui um ponto de equilíbrio instável $(0, 0)$ no interior da zona morta e pontos de equilíbrios assintoticamente estáveis $(-0.7619, -9.6087)$ e $(0.7619, 9.6087)$ nas regiões acima da zona morta e abaixo da zona-morta, respectivamente. Neste caso, pode ser verificado que o CCFU mínimo global de acordo com a definição 2.6

$$\{(0, 0), (-0.7619, -9.6087), (0.7619, 9.6087)\}$$

e a sua casca convexa Ch não é positivamente invariante com relação ao sistema (4.53).

$$Ch = \{x \in \mathbb{R}^2 ; x = \mu(-0.7619, -9.6087) + (1-\mu)(0.7619, 9.6087) ; 0 \leq \mu \leq 1\} \quad (4.58)$$

Usando a aproximação poliedral convexa (4.33) e a taxa de contração $\lambda = .998$, o mínimo poliedro positivamente invariante obtido pelo procedimento 4.1 :

$$S_2(G, w) = \{x \in \mathbb{R}^2 : -w \leq Gx \leq w\} \quad (4.59)$$

Onde G o mesmo apresentado em (4.56) e w dado por:

$$w^T = \begin{bmatrix} 4.2748 & 5.9678 & 9.2117 & 12.5384 & 15.5833 \\ 18.2452 & 20.4578 & 22.1667 & 23.3298 & 23.9184 \\ 23.9181 & 23.3289 & 22.1652 & 20.4557 & 18.2427 \\ 15.5807 & 12.5353 & 9.1942 & 5.6895 & 2.6107 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Pode ser facilmente verificado em (4.60) que $S_2(G, w)$, apesar de ser uma boa aproximação do mínimo conjunto poliedral positivamente invariante contendo $x = 0$, acaba sendo uma pobre aproximação poliedral da casca convexa do CCFU (4.58). O procedimento 4.2 obteve a seguinte função de Lyapunov linear por partes que garante o confinamento final uniforme global do sistema (4.53) em (4.59):

$$\Psi_2[\tilde{G}, \tilde{c}, \tilde{w}] \quad (4.61)$$

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} G & & \\ -0.6434 & -0.0939 & \\ -0.6709 & -0.1854 & \\ & -G & \\ 0.6434 & 0.0939 & \\ 0.6709 & 0.1854 & \end{bmatrix} ; \quad \tilde{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.5786 \\ -0.1184 \\ 0 \\ -1.5786 \\ -0.1184 \end{bmatrix} ; \quad \tilde{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.6054 \\ 5.6781 \\ 0 \\ 2.6054 \\ 5.6781 \end{bmatrix}$$

O poliedro positivamente invariante $S_2(G, w)$ (4.59) e algumas trajetórias do sistema (4.53), (4.57), são apresentados na figura 4.3.

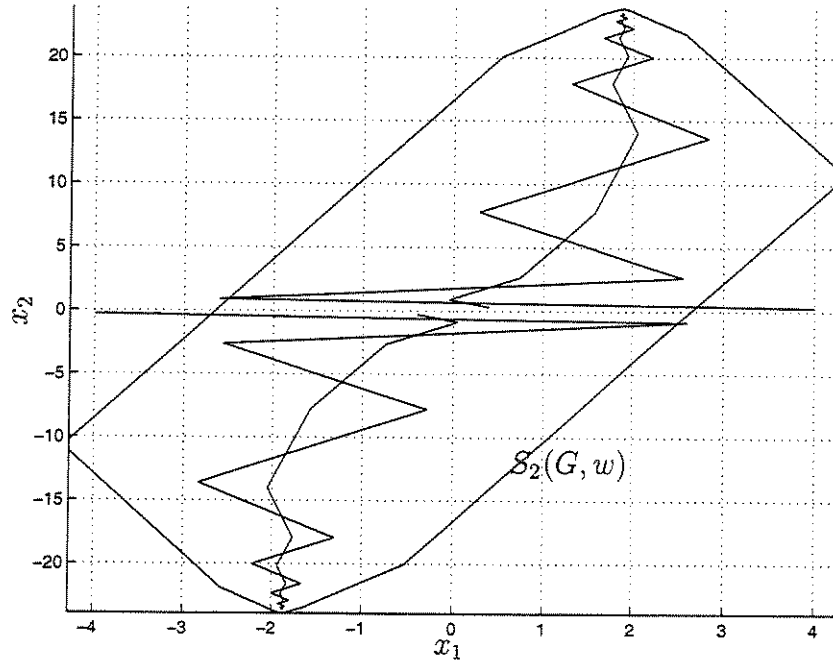


Figura 4.3: Conjunto positivamente invariante $S_2(G, w)$

4.6 Conclusão

Este capítulo tratou da caracterização e construção de conjuntos positivamente invariantes convexos e funções de Lyapunov lineares por partes de sistemas lineares, invariantes, discretos no tempo, instáveis em malha aberta, com controles em malha fechada com zonas mortas. O objetivo final foi a determinação de uma aproximação poliedral convexa externa do mínimo CCFU contendo a origem, para delimitar e analisar a estabilidade de possível ciclo limite nele contido.

Os principais resultados obtidos foram:

- Condições necessárias e suficientes para um poliedro fechado convexo ser positivamente invariante. Baseado em uma formulação de programação linear destas

condições necessárias e suficientes, um procedimento recursivo foi proposto para o cálculo de uma aproximação poliedral convexa externa do mínimo conjunto positivamente invariante contendo uma vizinhança arbitrariamente pequena da origem.

- Condições necessárias e suficientes para uma FLP ser uma função de Lyapunov. Baseado em uma formulação de programação linear destas condições, um procedimento recursivo foi proposto para a construção de uma função de Lyapunov linear por partes que garante o confinamento final uniforme em uma aproximação poliedral compacta e convexa do mínimo conjunto positivamente invariante contendo a origem. O resultado final é uma estimativa poliedral positivamente invariante convexa do CCFU mínimo, juntamente com sua região de atração.

A eficácia da abordagem utilizando invariância positiva e funções de Lyapunov para estimar o mínimo CCFU, desenvolvida neste capítulo, depende diretamente de quão bem o CCFU mínimo pode ser aproximado por um conjunto positivamente invariante. A casca convexa de um CCFU mínimo contendo um ciclo limite é naturalmente positivamente invariante. Neste caso, a abordagem aqui proposta fornece uma boa aproximação convexa externa do CCFU mínimo e, conseqüentemente, conforme ilustrado no exemplo numérico, uma boa delimitação do ciclo limite e também uma boa estimativa de sua região de atração são obtidas.

Capítulo 5

Conclusão Geral

Esta tese estudou problemas de análise de estabilidade de sistemas lineares discretos no tempo com controles em malha fechada com saturações ou zonas mortas, com atenção especial para sistemas instáveis em malha aberta. Os problemas foram tratados, de acordo com o segundo método de Lyapunov, através da caracterização e construção de funções de Lyapunov lineares por partes, as quais tem como caso particular as funções de Minkowski associadas a poliedros contrativos.

Para sistemas com controles saturáveis o objetivo maior foi a determinação de estimativas poliedrais convexas da região de estabilidade assintótica local da origem. As principais contribuições foram:

- condições necessárias e suficientes para um poliedro convexo fechado ser λ -contrativo robusto com respeito a um sistema com parâmetros incertos restritos a um politopo compacto (domínio de incerteza politópico). A versão de programação linear dessas condições é computacionalmente eficiente e capaz de tratar problemas de grandes dimensões.

- condições necessárias e suficientes para uma função linear por partes ser função de Lyapunov de sistemas com parâmetros perfeitamente conhecidos e também de sistemas com parâmetros incertos restritos a um politopo compacto (domínio de incerteza politópico). As versões de programação linear dessas condições são computacionalmente eficientes e capazes de tratar problemas de grandes dimensões.
- Procedimentos eficazes de expansão não homotéticos de construção de poliedros λ -contrativos robustos e funções de Lyapunov lineares por partes, para estimação da região de estabilidade assintótica local da origem do sistema saturado. As funções de Lyapunov lineares por partes, por serem mais flexíveis e melhor adaptadas para capturar a variação radial do comportamento não linear de sistemas com saturação, apresentaram resultados estritamente menos conservativos que os obtidos com poliedros λ -contrativos, associados a funções de Minkowski.

Para sistemas com controles com zonas mortas, o objetivo maior foi a determinação de estimativas poliedrais convexas externas do mínimo conjunto de confinamento final uniforme contendo a origem, para delimitar e analisar a estabilidade de possível ciclo limite nele contido. As principais contribuições foram:

- Condições necessárias e suficientes para um poliedro fechado convexo ser positivamente invariante. Baseado em uma formulação de programação linear destas condições necessárias e suficientes, um procedimento recursivo eficaz foi proposto para o cálculo de uma aproximação poliedral convexa externa do mínimo conjunto positivamente invariante contendo uma vizinhança arbitrariamente pequena da origem.
- Condições necessárias e suficientes para uma função linear por partes ser uma função de Lyapunov. Baseado em uma formulação de programação linear destas condições, um procedimento recursivo eficaz foi proposto para a construção de uma função de Lyapunov linear por partes, que garante o confinamento final uniforme em uma aproximação poliedral compacta e convexa do mínimo conjunto

positivamente invariante contendo a origem. O resultado final é uma estimativa poliedral, positivamente invariante, convexa, do mínimo conjunto de confinamento final uniforme. Foi mostrado que a abordagem proposta é recomendada quando o mínimo conjunto de confinamento final uniforme contém ciclo limite.

Os resultados relacionados com as funções de Lyapunov lineares por partes são os mais importantes obtidos nesta tese. Algumas extensões promissoras desses resultados são:

- tratamento de problemas de síntese de controladores com saturação ou zona morta.
- tratamento de problemas de análise e síntese de controladores com não linearidades dinâmicas tais como histerese ou folga.
- tratamento de problemas de análise e síntese de controladores para sistemas lineares por partes em geral e sistemas híbridos.

Referências Bibliográficas

- [1] Romanchuck, B.G. - "Computing Regions of Attractions with Polytopes: Planar Case". *Automatica*, **Vol.32**, No.12, pp. 1727-1732, 1996.
- [2] Silva Jr., J.M.G. - Sur la Stabilité Locale de Systèmes Linéaires avec Saturation des Commandes. PhD Thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, Report LAAS 2749, 1997.
- [3] Tarbouriech, S. and Silva Jr., J.M.G. - "Admissible Polyhedra for Discrete-Time Linear Systems with Saturating Controls". *Proceedings of 1997 American Control Conference*, Albuquerque NM, USA, 1997.
- [4] Silva Jr., J.M.G. and Tarbouriech, S. - "Polyhedral Regions of Local Asymptotic Stability for Discrete-Time Linear Systems with Saturating Controls". *IEEE Trans. on Auto. Control*, **Vol.44**, No.11, pp. 2081-2087, 1999.
- [5] Milani, B.E.A. - "Contractive Polyhedra for Discrete-time Linear Systems with Saturating Controls". *Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control*, Phoenix AZ, USA, 1999.
- [6] Vassilaki, M., Hennet, J.C. and Bitsoris, G. - "Feedback Control of Linear Discrete-Time Systems under State and Control Constraints". *International Journal of Control*, **Vol. 47**, No. 6, pp.1727-1735, 1988.
- [7] Blanchini, F. - "Ultimate Boundedness Control for Uncertain Discrete-Time Systems Via Set-Induced Lyapunov Functions". *IEEE Transactions on Automatic Control*, **Vol.39**, No.2, pp.428-433, 1994.

- [8] Kiendl, H., Adamy, J. and Stelzner, P. - "Vector Norms as Lyapunov Functions for Linear Systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, **Vol.37**, No.6, pp.839-842, 1992.
- [9] Khalil, H.K. - Nonlinear Systems. MacMillan, 1992.
- [10] Suarez, R., Alvarez-Ramirez, J. and Alvarez, J. - "Linear Systems with Single Saturated Input: Stability Analysis". In *Proc. of 30th IEEE Conference on Decision and Control (CDC'91)*, pp. 223-228, Brighton, U.K., 1991.
- [11] Chiang, H.D. and Thorp, J.S. - "Stability Regions of Nonlinear Dynamical Systems: A Constructive Methodology". *IEEE Transactions on Automatic Control*, **Vol.34**, No.12, pp.1229-1241, 1989.
- [12] Lasserre, J.B. - "Reachable, Controllable Sets and Stabilizing Control of Constrained Linear Systems," *Automatica*, **Vol. 29**, No. 2, pp. 531-536, 1993.
- [13] Blanchini, F. - "Set Invariance in Control: A Survey". *Automatica*, **Vol.35**, No.11, pp.1747-1768, 1999.
- [14] Mangasarian, O.L. - Nonlinear Programming. SIAM, Philadelphia PA.
- [15] Bernstein, D.S. - "A Chronological Bibliography on Saturating Actuators". *International Journal on Robust and Nonlinear Control*, **Vol.5**, pp. 375-380, 1995.
- [16] Bitsoris, G. - "On the positive invariance of polyhedral sets for discrete-time systems". *Systems & Control Letters*, **Vol.11**, No.4, pp. 243-248, 1988.
- [17] Hennet, J.C. - "Une Extension du Lemme de Farkas et son Application au Problème de Regulation Linéaire sous Contraintes". *C.R. Acad. Sci. Paris*, t.308, Série I, pp. 415-419, 1989.
- [18] Hennet, J.C. and Béziat, J.P. - "A Class of Invariant Regulators for the Discrete-Time Linear Constrained Regulation Problem". *Automatica*, **Vol.27**, No.3, pp.549-554, 1991.

- [19] Blanchini, F. - "Feedback Control for Linear Time-Invariant Systems with State and Control Bounds in the Presence of Disturbances". *IEEE Transactions on Automatic Control*, **Vol.35**, No.11, pp.1231-1234, 1990.
- [20] Milani, B.E.A. and Carvalho, A.N. - "Robust Linear Regulator Design for Discrete-time Systems Under Polyhedral Constraints". *Automatica*, **Vol.31**, No.10, pp.1489-1493, 1995.
- [21] Sznaier, M. - "A Set Induced Norm Approach to the Robust Control of Constrained Systems". *SIAM J. Contr. and Optim.*, **Vol. 31**, No. 3, pp. 733-746, 1993.
- [22] Sussmann, H.J. , Sontag, E.D. and Yang, Y. - " A General Result on the Stabilization of Linear Systems Using Bounded Controls". *IEEE Transactions on Automatic Control*, **Vol.39**, No.12, pp.2411-2425, 1994.
- [23] Tarbouriech, S. - Sur la Stabilité des Regulateurs à Retour d'état saturé. PhD Thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, février 1991. Rapport LAAS No. 91047.
- [24] Burgat, C. and Tarbouriech, S. - "Global Stability of a class of Linear Systems with Saturated Controls". *Int. J. of Sys.& Sci.*, **Vol.23**, No.1, pp.37-56, 1992.
- [25] Genesio, R., Tartaglia, M. and Vicino, A. - "On the Estimation os Asymptotic Stability Regions: State os the Art and New Proposals". *IEEE Transactions on Automatic Control*, **Vol.30**, No.8, pp.747-755, 1985.
- [26] Barmish, B.R. - New Tools for Robustness of Linear Systems, MacMillan Publishing Co., New York, 1994.
- [27] Boyd, S., El Ghaoui, L. and Feron, E. - Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 1994
- [28] Milani, B.E.A; Coelho, A.D. e Assis, W.O. - "Robustly Contractive Polyhedra for Uncertain Linear Systems with Saturating Controls." Anais do XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, ABCM, Aguas de Lindoia SP, 1999.

- [29] Milani, B.E.A; Coelho, A.D. e Assis, W.O. - "Polyhedral Regions of Robust Local Stability for Linear Systems with Saturating Controls." *Proceedings of 3^o IFAC Symposium on Robust Control Design*, Praga, República Tcheca, 2000.
- [30] Milani, B.E.A. e Coelho A.D. - "Funções de Lyapunov Lineares por Partes para Sistemas Lineares com Controle Saturáveis". *CBA 2000 - XIII Congresso Brasileiro de Automática*, Florianópolis/SC, Setembro, 2000.
- [31] Dorea, C.E.T. and Hennet, J.C. - "Computation of Maximal Admissible Sets of Constrained Linear Systems". *Proceedings of 4th IEEE Mediterranean Symposium on New Directions on Control and Automation*, Maleme, Greece, 1996.
- [32] Milham, C.B. - "Fast Feasibility Methods for Linear Programming". *OPSEARCH*, **Vol.13**, No.3-4, pp.198-204, 1976.
- [33] Bazaraa, M.S., Jarvis, J.J. and Sherali, H.D. - *Linear Programming and Network Flows*. Wiley, New York, 1990.
- [34] Dorea, C.E.T. and Hennet, J.C. - "(A,B) - Invariant Polyhedral Sets of Linear Discrete-Time Systems". *Journal of Optimization Theory and Applications*, **Vol.103**, No.3, pp.521-542, 1999.
- [35] Slotine, J. E. and Li, W. - *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs NJ, 1981.
- [36] Jönsson, U. - "Stability Criterion for Systems with Neutrally Stable Modes and Deadzone Nonlinearities". *CALTECH Report CDS97-007*, 1997.
- [37] Bazaraa, M.S., Shetty, C.M. - *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. Wiley, New York.
- [38] Coelho, A.D. - *Controle Adaptativo para Sistemas com Backlash*. MSC Tese, Escola Federal de Itajubá, Itajubá, Brasil, 1997.
- [39] Tao, G. and P.V. Kokotović - *Adaptive Control of Systems with Actuator and Sensor Nonlinearities*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE