

Universidade Estadual de Campinas  
Faculdade de Engenharia Elétrica  
Departamento de Telemática

# CONTROLE EM $H_\infty$ DE SISTEMAS DINÂMICOS INCERTOS

Autor: Sérgio Ricardo de Souza  
Orientador: Prof. Dr. José Cláudio Geromel \*

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas – FEE-UNICAMP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Bc/9-104634

ABRIL – 1991.

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida por Sérgio Ricardo de Souza e aprovada pela Comissão Julgadora em 03 / 05 / 91.

  
Orientador

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL

A Celeste e Tiago,  
Maria Alice e Vimar,  
Mary e Kátia,  
pela espera-esperança

“Viver é negócio muito perigoso.”

(Riobaldo ao Compadre Quelemém,  
em *Grande Sertão: Veredas*, João Guimarães Rosa)

## Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos a todos os que, de alguma forma, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho. Em especial a:

- Prof. José Cláudio Geromel, pela orientação segura e exemplo de dedicação à docência e à pesquisa;
- Prof. Pedro Luís Dias Peres, pela amizade e real co-orientação deste trabalho;
- Aos professores do DT, em especial Paulo A. V. Ferreira, pela acolhida e apoio;
- Aos professores Celso Pascolli Bottura, Álvaro G. B. Palhares e Daniel Wisnivesky, que me possibilitaram iniciar este curso;
- Aos amigos Magda, Borelli, Pedoinha e Rafinha, pela hospitalidade e ajuda em todos os momentos;
- Às amigas goianienses Ana Rosa de Jesus Silva e Rita de Cássia Silva, sem as quais dificilmente este seria possível;
- Ao Departamento de Eletrônica e Sistemas da Universidade Federal de Goiás, pelo apoio e confiança manifestados na concessão da licença para a realização deste;
- Aos que, através do PICD-CAPES, financiaram este trabalho.

## Sumário

Este trabalho trata de sistemas dinâmicos lineares, modelados por variáveis de estados, com incertezas nos parâmetros dos modelos. Seu objetivo é o estudo do problema de determinar um ganho de realimentação linear e estática de estados de modo que um sistema incerto, em malha fechada, seja estável quadraticamente e possua norma  $H_\infty$  menor que um certo limitante prescrito. As incertezas consideradas são pertencentes a domínios convexos na forma de poliedros fechados. A principal propriedade a ser utilizada é a convexidade do problema tal como será proposto. Para o caso contínuo, condições necessárias e suficientes para a existência de solução são encontradas; no caso discreto, somente condições suficientes o são. Um algoritmo que implementa tais resultados é apresentado e, por último, exemplos numéricos para as duas classes de modelos discutem a validade das soluções.

## Abstract

In this work, we analyse linear dynamic models, described by state variables with uncertain parameters. The problem solved here concerns the determination of a linear static state feedback gain that guarantees quadratic stability and prescribed  $H_\infty$  norm for the uncertain closed-loop system. The uncertainties belong to polyhedral convex domains. The main property of the stated problem is its convexity. For the continuous-time case, necessary and sufficient conditions are obtained; for the discrete-time, only sufficient condition are provided. An algorithm that performs this result is developed and, finally, numerical examples concerning both the continuous and discrete-time cases validate our method.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução Geral</b>	<b>3</b>
1.1	Introdução Geral . . . . .	3
1.2	Estabilidade de Sistemas Contínuos . . . . .	6
1.3	Estabilidade de Sistemas Discretos . . . . .	9
1.4	Estabilidade de Sistemas Incertos: casos contínuo e discreto . . . . .	14
1.5	Conclusão . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Estabilidade Quadrática via Subgradiente Ótimo</b>	<b>22</b>
2.1	Introdução . . . . .	22
2.2	Formulação do Problema . . . . .	23
2.3	Método do Subgradiente Ótimo . . . . .	24
2.4	Análise Numérica . . . . .	33
2.5	Conclusão . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Otimização em <math>H_\infty</math>: Proposição do Problema e Solução Teórica</b>	<b>41</b>
3.1	Introdução . . . . .	41
3.2	Relação entre Problema Linear Quadrático e Norma $H_\infty$ . . . . .	42
3.3	Métodos de Cálculo da norma $H_\infty$ . . . . .	47
3.4	Otimização de Sistemas Contínuos em $H_\infty$ . . . . .	51
3.5	Otimização de Sistemas Discretos em $H_\infty$ . . . . .	58
3.6	Otimização de Sistemas Dinâmicos Incertos em $H_\infty$ : casos contínuo e discreto . . . . .	64
3.7	Conclusão . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Solução do Problema em <math>H_\infty</math></b>	<b>70</b>
4.1	Introdução . . . . .	70
4.2	Solução do Problema de Otimização em $H_\infty$ : caso contínuo . . . . .	72
4.3	Solução do Problema de Otimização em $H_\infty$ : caso discreto . . . . .	79
4.4	Implementação do Algoritmo . . . . .	83
4.5	Conclusão . . . . .	89

---

<b>5</b>	<b>Exemplos Numéricos</b>	<b>90</b>
5.1	Introdução . . . . .	90
5.2	Exemplos: Sistemas Contínuos . . . . .	91
5.3	Exemplos: Sistemas Discretos . . . . .	96
5.4	Conclusão . . . . .	98
<b>6</b>	<b>Conclusão Geral</b>	<b>99</b>
<b>A</b>	<b>Solução do Problema Quadrático</b>	<b>106</b>

# Capítulo 1

## Introdução Geral

### 1.1 Introdução Geral

O estudo da robustez de sistemas de controle, modelados por variáveis de estados, frente a incertezas quanto aos parâmetros destes modelos e a perturbações no sinal de entrada é o objeto deste trabalho. Tal tema é fruto dos recentes avanços no sentido de compatibilizar as análises no domínio do tempo e da frequência. Entenda-se aqui como um comando robusto aquele que permite ao sistema manter o seu desempenho mesmo quando sujeito a incertezas em sua dinâmica.

Apesar de este estudo possuir uma longa tradição dentro da Teoria de Controle, o termo “robusto” só veio a se tornar corrente nos anos 70, no sentido colocado acima. As incertezas que são consideradas na literatura podem ser de diversos tipos, mas aqui apenas aquelas que efetivamente possam afetar o desempenho do sistema serão consideradas, ou seja, variações de parâmetros de ordem apenas diferencial não serão levadas em conta. Além do mais, como o tipo básico de modelo adotado é o em variáveis de estados, apenas incertezas concernentes a esta formulação de sistemas serão investigadas. Deste modo, as do tipo não-paramétricas, associadas a modelos em função de transferência também deverão ser desprezadas. Assim, no presente trabalho estaremos interessados em incertezas do tipo paramétricas e determinísticas, na forma como mostrado abaixo com relação a uma matriz dinâmica  $A$ :

- i)* incertezas do tipo limitada em norma:  $A = A_0 + \delta A$ , para  $\|\delta A\| \leq a$ ;
- ii)* incertezas do tipo matriz intervalo:  $A = A_0 + \sum_i q_i A_i$ , para  $\underline{q}_i \leq q_i \leq \bar{q}_i$ ;
- iii)* incertezas do tipo pertencente a um domínio poliedral convexo fechado:  $A = \sum_{i=1}^l \alpha_i A_i$ , onde  $A_i$  são os vértices do poliedro e  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\sum \alpha_i = 1$ .

Como será apontado na seção 1.4, as incertezas do último tipo incorporam

as características das demais e serão, deste modo, aquelas unicamente analisadas neste trabalho.

O estudo da robustez de sistemas modelados por variáveis de estado e sujeitos a incertezas na forma acima tem origem no chamado projeto de custo garantido, publicado por Chang e Peng em 1972 (para uma boa revisão histórica quanto ao problema de robustez, veja [9]; em especial quanto à linha seguida neste trabalho, veja [26]). Trabalhos posteriores, como [4,5,16,26,30] consolidaram esta linha de pesquisa, que pode ser denominada de Análise de Robustez via Funções de Lyapunov.

O Teorema de Lyapunov esteve tradicionalmente ligado à análise de estabilidade de sistemas não-lineares. No caso de sistemas lineares, ele fornece condições necessárias e suficientes que asseguram a existência desta qualidade no sistema em estudo. Caso passemos a considerar variações no modelo do sistema, o Teorema também poderá ser utilizado para garantir condições de estabilidade, agora acrescentadas do adjetivo “robustas”, mas somente o caráter de suficiência será assegurado. No entanto, de pouca valia seria esta análise se não for possível associar uma única condição de estabilidade robusta a todo o conjunto de variações sofridas pelos parâmetros do sistema. Vem daí a idéia de se buscar uma única função de Lyapunov para todos os modelos pertencentes ao conjunto de incertezas considerado, ou seja, a questão da estabilidade quadrática (definida na seção 1.4), e também de um ganho robusto estabilizante que seja independente dos parâmetros do sistema, já que estes são passíveis de incertezas quanto aos seus valores. Tais resultados só vieram a se efetivar, para o caso de incertezas atuando sobre as matrizes  $A$  e  $B$  do modelo em variáveis de estado, por volta de 1987 [26], sendo baseados na existência de uma solução simétrica definida positiva para uma equação algébrica do tipo Riccati. Para o modelo de incertezas considerado, o Capítulo 1 apresenta uma revisão dos principais resultados e definições, mas utilizando (o que será uma constante neste trabalho) uma abordagem geométrica baseada na convexidade dos domínios de incertezas e de certas desigualdades matriciais.

A segunda parte do tema proposto, ou seja, a influência que distúrbios no sinal de entrada possam ter sobre o desempenho dos sistemas, traz consigo uma visão histórica da própria evolução de toda a teoria de controle. A tradução para o caso multivariável dos critérios de desempenho típicos da análise clássica no domínio da frequência é um dos temas que mais fortemente têm atraído os pesquisadores desta área de conhecimento. Apesar dos avanços obtidos nos anos 70, que produziram, dentre outros resultados, a versão frequencial do Problema Linear Quadrático (PLQ) [47], a análise da resposta em frequência deste problema e as generalizações dos métodos de análise característicos da formulação frequencial, como o critério de Nyquist, permanecia ainda um “gap” entre o que se produzia em termos de desenvolvimento teórico e o que efetivamente era possível realizar em termos de síntese de controladores. Ora, em 1981, George Zames observou que parte deste

problema se devia à inexistência de uma formulação matemática sistematizada para o projeto de controladores no domínio da frequência, que permanecia ainda no velho limbo da tentativa e erro. Assim, ele propôs o estabelecimento de uma metodologia que levasse à definição do projeto de compensadores como um problema de otimização. Surge, então, a abordagem em  $H_\infty$  de sistemas de controle, baseada, como apresentado na seção 3.2, numa crítica ao (PLQ) quanto a tática de minimizar a influência dos sinais de perturbação sobre o sistema. As primeiras soluções, para os casos mono e multivariável, estiveram centradas no uso maciço de técnicas de interpolação de funções do tipo Nevanlina-Pick [12,43,48]. Apesar de ainda hoje despertarem atenção, suas dificuldades de implementação computacional rapidamente se tornaram evidentes. O aumento do interesse em torno deste método de projeto só se verificou a partir da publicação das primeiras versões de trabalhos envolvendo realizações no espaço de estados, que datam de 1983-87 [13]. Os principais problemas destas versões consistem ainda na alta complexidade computacional, pois exigem a solução de um grande número de equações tipo Riccati e além disso fornecem controladores de alta ordem.

A geração mais recente busca minimizar o volume de trabalho numérico dispendido. Ela envolve a solução de apenas duas equações tipo Riccati e está elegantemente descrita em [10], onde também são derivadas relações entre as normas  $H_2$  e  $H_\infty$  e métodos de cálculo destas.

O nosso trabalho, no entanto, não tenta solucionar o problema em  $H_\infty$  na forma apresentada nas referências citadas. Desejamos encontrar um comando que ao mesmo tempo estabilize robustamente e garanta uma solução sub-ótima do problema em  $H_\infty$ , ou melhor, um valor máximo desta norma para o sistema em malha fechada. Como será discutido na seção 3.2, isto possibilitará garantir um nível mínimo de atenuação dos sinais de distúrbios que afetam o sistema. Esta formulação foi inicialmente proposta por Petersen em 1987 [31] e será convenientemente analisada no Capítulo 3 deste trabalho.

Já o Capítulo 4 é centrado na implementação adotada para solucionar o problema desenvolvido no Capítulo imediatamente anterior. Note que o problema de estabilização com norma  $H_\infty$  prescrita, definido e desenvolvido no Capítulo 3, passa a ser visto no Capítulo seguinte como um típico problema de otimização a ser solucionado utilizando técnicas de programação matemática usuais neste caso.

Qual destas técnicas adotar é a questão a ser respondida no Capítulo 2. Nele, o método do subgradiente ótimo desenvolvido para a minimização de funções não-diferenciáveis é comparado numericamente ao método de planos de corte para se estabelecer qual destes deverá ser utilizado no Capítulo 4 para a solução do problema em  $H_\infty$ .

O penúltimo Capítulo apresenta uma série de exemplos numéricos onde se discute a validade dos desenvolvimentos realizados. O principal empecilho à sua execução é a fraca disponibilidade de exemplos existentes na literatura, particu-

larmente para o caso de sistemas discretos. As conclusões e propostas de novos desdobramentos no problema em estudo finalizam este trabalho.

## 1.2 Estabilidade de Sistemas Contínuos

Considere o sistema (SC) abaixo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (\text{SC})$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados e  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de entrada de controle. As matrizes correspondentes são constantes (parâmetros completamente conhecidos e invariantes no tempo) e possuem dimensões apropriadas. O problema a ser analisado neste item é o de estabilizá-lo assintoticamente, ou seja, encontrar um ganho  $K$  de realimentação linear e constante tal que os pólos da matriz de malha fechada  $A_f = A - BK$  pertençam a  $\mathbb{C}_-$ . Iremos considerar que é possível acesso a todos os estados para efeito de medição, uma vez que estamos interessados em realimentação de estados.

Os resultados a seguir podem também ser encontrados em [16] ou [26]. Seguindo a abordagem iniciada na primeira referência, iremos sempre enfatizar as propriedades geométricas das soluções, particularmente quanto à sua convexidade.

**Teorema 1.1** ([26]) *O sistema (SC) é estabilizável se e somente se existir uma matriz  $W = W' > 0$  tal que*

$$x^*[AW + WA']x < 0, \quad \forall x \neq 0 \quad / \quad B'x = 0. \quad (1.1)$$

Existindo  $W$ , um ganho  $K$  estabilizante é dado por

$$K = R^{-1}B'W^{-1} \quad (1.2)$$

onde  $R = R' > 0$  deve ser tal que  $AW + WA' < BR^{-1}B'$   $\square$ .

prova: A demonstração se encontra na referência citada. A existência da matriz  $R$  é garantida pelo Lema de Finsler [16]  $\square$ .

**Corolário 1.1** ([16]) *Definindo o conjunto*

$$C \triangleq \{W = W' > 0 \quad / \quad x^*(AW + WA')x < 0, \quad x \neq 0 \quad / \quad B'x = 0\} \quad (1.3)$$

temos que:

1.  $C$  é convexo;
2.  $C$  é um cone, de modo que se  $W \in C \Rightarrow \lambda W \in C, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+$ ;

3.  $C \neq \emptyset$  se e somente o par  $(A, B)$  for estabilizável  $\square$ .

prova: Referência citada  $\square$ .

**Comentário 1.1** Note que este Corolário define propriedades geométricas para a solução do problema de estabilidade assintótica, utilizando a convexidade da restrição em relação à matriz  $W$   $\square$ .

A formulação a seguir foi inicialmente proposta para o caso de sistemas com parâmetros incertos. Note que os resultados anteriores não são aplicáveis caso a matriz  $B$  possua parâmetros não completamente determinados. Assim, é interessante encontrar uma transformação no modelo do sistema (SC) que leve a concentrar toda a sua dinâmica em uma única matriz, numa forma modificada de um modelo autônomo. O conceito de sistema aumentado, proposto por Barmish em 1983 [4] busca satisfazer este requisito, ao colocar todos os parâmetros do sistema original apenas na matriz  $F$ , enquanto a matriz  $G$  é uma matriz constante, dependente somente da dimensão do sistema em estudo.

**Definição 1.1** ([4]) Associado ao par  $(A, B)$  do sistema (SC) existe um sistema de dinâmica aumentada definido por:

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + Gu(t) \quad (SCA)$$

onde  $z \in \mathbb{R}^p$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $p \triangleq n + m$ , e

$$F \triangleq \begin{bmatrix} A & -B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times p}, \quad G \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times m} \quad \square.$$

O Lema a seguir, devido à [4] para o caso incerto, é aqui exposto numa versão para parâmetros conhecidos e leva à equivalência quanto a estabilidade do sistema (SC) em suas versões original e de dinâmica aumentada.

**Lema 1.1** ([4]) O sistema dinâmico dado por (SC) é estabilizável por um controle linear de realimentação de estados se e somente se o sistema aumentado dado por (SCA) também o for  $\square$ .

prova: Veja referência citada  $\square$ .

O próximo resultado estende o Teorema 1.1 para o caso do sistema aumentado. Sua formulação original é encontrada em [26] ou em [16].

**Teorema 1.2** O sistema (SC) é estabilizável por realimentação linear de estados se e somente se existir  $W = W' \in \mathbb{R}^{p \times p}$  na forma

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

onde  $W_1 = W_1' > 0$ , tal que

$$z^*[FW + WF']z < 0, \quad \forall z \neq 0 \in \mathbb{R}^p / G'z = 0. \quad (1.5)$$

Existindo  $\mathcal{W}$ , o ganho  $K$  estabilizante é dado por

$$K = W_2'W_1^{-1} \quad \square. \quad (1.6)$$

prova: Assumindo que  $(A, B)$  é estabilizável. Então, por Lyapunov, existem  $P = P' > 0$  e  $K$  tais que

$$(A - BK)'P + P(A - BK) < 0.$$

Escolhendo

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} P^{-1} & P^{-1}K' \\ KP^{-1} & ? \end{bmatrix}$$

e, como  $\forall z \neq 0 / G'z = 0$  é da forma  $z^* = [x \ : \ 0]^*$ , para  $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ , obtemos, a partir da definição do sistema aumentado, que

$$z^*[F\mathcal{W} + \mathcal{W}F']z < 0 \quad \forall z \neq 0 / G'z = 0.$$

A necessidade está provada.

Agora, iremos assumir que existe  $\mathcal{W} = \mathcal{W}'$ , particionada como em (1.4), tal que (1.5) seja satisfeita. Desenvolvendo os termos desta última:

$$(A - BW_2'W_1^{-1})'W_1^{-1} + W_1^{-1}(A - BW_2'W_1^{-1}) < 0$$

e, para  $P = W_1^{-1}$  e  $K = W_2'W_1^{-1}$ , teremos:

$$(A - BK)'P + P(A - BK) < 0$$

ou seja, o par  $(A, B)$  é estabilizável  $\square$ .

**Comentário 1.2** Apesar de nada acrescentar sob o ponto de vista de análise de estabilidade, é interessante apor ao teorema anterior a restrição  $\mathcal{W} \geq 0$ . Esta exigência irá conformar a matriz  $\mathcal{W}$  de modo que o ganho  $K$  resultante possua norma reduzida. Isto é fácil de ser verificado, desde que se  $\mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq 0$  e  $W_1 = W_1' \geq \epsilon I$  para  $\epsilon > 0$ , então:

$$\begin{aligned} W_3 - W_2'W_1^{-1}W_2 &\geq 0 \\ W_3 &\geq W_2'W_1^{-1}W_2 \\ W_3 &\geq KW_1K' \end{aligned} \quad (1.7)$$

Como  $W_1 \geq \epsilon I \Rightarrow W_3 > \epsilon KK' \Rightarrow \lambda_{\max}(W_3) > \epsilon \|K\|^2$ . Ou seja, como  $\epsilon$  é uma constante, minimizando-se  $\lambda_{\max}(W_3)$  estaremos minimizando um limitante superior da norma do ganho estabilizante  $K$ . Além disso, pela expressão (1.7) acima, é sempre possível escolher  $W_3$  de modo que  $\mathcal{W} \geq 0$  para  $W_1 \geq \epsilon I$   $\square$ .

**Corolário 1.2** *Definindo o conjunto:*

$$C_A \triangleq \left\{ \mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq 0 / z^* [F\mathcal{W} + \mathcal{W}F'] z < 0 \right. \\ \left. \forall z \neq 0 \in \mathbb{R}^p / G'z = 0 \right\} \quad (1.8)$$

teremos

1.  $C_A$  é convexo;
2.  $C_A$  é um cone, de modo que se  $\mathcal{W} \in C_A$ , então  $\lambda\mathcal{W} \in C_A, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+$ ;
3.  $C_A \neq \emptyset$  se e somente se  $(A, B)$  for estabilizável  $\square$ .

prova: Trivial, desde que este Corolário é uma extensão direta do Teorema 1.2 e Corolário 1.1  $\square$ .

Finalmente, note também que o resultado derivado no último Corolário produz um ganho que independe das matrizes do sistema (SC) em estudo. Além disso, devido à convexidade com relação a matriz  $\mathcal{W}$ , a solução do problema pode ser encontrada por quaisquer das poderosas técnicas de programação matemática que utilizam tal propriedade, como, por exemplo, o método do subgradiente ótimo ou o método de planos de corte. Tais metodologias serão convenientemente analisadas neste trabalho.

## 1.3 Estabilidade de Sistemas Discretos

A extensão dos resultados da seção anterior para a classe de sistemas discretos é o fim desta. Também como na seção anterior, especial atenção será dada aos aspectos geométricos das soluções encontradas. Considere assim o modelo de um sistema discreto como abaixo:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bx(k) \quad (\text{SD})$$

onde  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados e  $u(k) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de controle. Nesta seção trataremos apenas de sistemas com parâmetros conhecidos e sendo assim as matrizes correspondentes são constantes e possuem dimensões apropriadas. Tal como na seção anterior, o problema em questão consiste na determinação de uma lei de controle em realimentação estática de estados na forma

$$u(k) = -Kx(k) \quad (1.9)$$

que estabilize assintoticamente o sistema (SD) em malha fechada. Nossa hipótese para realimentação é considerar todos os estados acessíveis para medição, ou seja, estamos interessados em realimentação de estados. Os resultados apresentados a

seguir, derivados inicialmente em [16] e [26], levam a interessantes diferenciações entre os sistemas de tempo contínuo e de tempo discreto quanto a estabilidade assintótica.

**Teorema 1.3** *Seja o sistema discreto autônomo*

$$x(k+1) = Ax(k) \quad (1.10)$$

*Este sistema é assintoticamente estável se existir  $W = W' > 0$  tal que*

$$AWA' - W < 0 \quad \square \quad (1.11)$$

prova: Como os autovalores de  $A$  e  $A'$  são idênticos, este resultado segue diretamente da versão discreta do Teorema de Lyapunov  $\square$ .

O Lema abaixo, derivado em [16], é proposto com o fim de auxiliar na demonstração do teorema que o segue.

**Lema 1.2** *Sejam dados  $T = T' > 0$ ,  $S = S' > 0$  e a relação*

$$FTF' < S \quad (1.12)$$

*com dimensões compatíveis. Então:*

$$T^{-1} > F'S^{-1}F \quad \square. \quad (1.13)$$

prova: veja a referência citada  $\square$ .

**Teorema 1.4** *Seja agora o sistema discreto*

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (1.14)$$

*O par  $(A, B)$  é estabilizável se e somente se existir  $W = W' > 0$  tal que*

$$x^*[AWA' - W]x < 0, \quad \forall x \neq 0 / B'x = 0 \quad \square. \quad (1.15)$$

prova: Considerando que é estabilizável. Então, existem  $K$  e  $W$  tais que, pelo Teorema anterior,

$$(A - BK)W(A - BK)' - W < 0$$

Desenvolvendo e multiplicando à esquerda por  $x^*$  e à direita por  $x$ , segue que:

$$x^*AWA'x - x^*AWK'B'x - x^*BKWA'x + x^*BKWK'B'x - x^*Wx < 0$$

e portanto:

$$x^*[AWA' - W]x < 0, \quad \forall x \neq 0 / B'x = 0.$$

A necessidade está provada.

Assuma agora que exista  $W = W' > 0$  tal que (1.15) seja satisfeita. Então, pelo Teorema de Finsler [16], existe  $R = R' > 0$  tal que

$$AWA' - W < BR^{-1}B' \quad (1.16)$$

Aplicando o Lema 1.2 à expressão (1.16) e utilizando o Lema de inversão de matrizes<sup>1</sup>, vem que:

$$A'W^{-1}A - W^{-1} - A'W^{-1}B [R + B'W^{-1}B]^{-1} B'W^{-1}A < 0$$

ou seja, existe  $Q = Q' > 0$  de modo que

$$A'PA - P - A'PB [R + B'PB]^{-1} B'PA + Q = 0$$

onde  $P = W^{-1}$  resolve a equação algébrica discreta de Riccati acima e fornece o ganho estabilizante em malha fechada

$$K = (R + B'PB)^{-1} B'PA \quad (1.17)$$

Portanto,  $A_f = A - BK$  é assintoticamente estável  $\square$ .

**Comentário 1.3** Observe que, ao contrário do Teorema equivalente para o caso contínuo, o sistema discreto apresenta ganho estabilizante  $K$  dependente da matriz  $A$  do sistema. Isto inviabiliza a extensão direta deste Teorema para a abordagem de sistemas incertos  $\square$ .

**Corolário 1.3** Definindo o conjunto:

$$\mathcal{C}_D \triangleq \left\{ W = W' > 0 / x' [AWA' - W] x < 0, \right. \\ \left. \forall x \neq 0 / B'x = 0 \right\} \quad (1.18)$$

temos que

1.  $\mathcal{C}_D$  é convexo;
2.  $\mathcal{C}_D$  é um cone, de modo que se  $W \in \mathcal{C}_D$ , então  $\lambda W \in \mathcal{C}_D$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+$ ;
3.  $\mathcal{C}_D \neq \emptyset$  se e somente se o par  $(A, B)$  for estabilizável  $\square$ .

---

<sup>1</sup> $(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}$ .

prova: A demonstração é imediata, a partir da definição de um cone convexo e do Teorema 1.4  $\square$ .

Note que, tal qual seu equivalente contínuo, este Corolário agrega ao conceito de estabilizabilidade propriedades geométricas associadas à convexidade da equação (1.15) com relação à matriz  $W$  que, como aponta o Comentário anterior, não podem ser utilizadas para a solução do problema incerto como proposto. A solução para este dilema é obter uma formulação do problema de estabilização na qual o ganho resultante seja independente das matrizes de dinâmica do modelo em estudo. Como no caso contínuo, a que permite tal resultado é a de sistema de dinâmica aumentada, exposta na Definição 1.1. Sua versão para sistemas discretos é óbvia e direta, mantendo as mesmas características anteriores de conter todas as matrizes associadas à dinâmica do sistema original em uma única matriz  $F$ , além da matriz  $G$  constante e dependente apenas das dimensões do sistema em questão. Também permanece válido, *mutatis mutandis*, o Lema 1.1, que relaciona a estabilização do sistema original (no caso atual dado por SD) à do sistema aumentado.

A extensão do Teorema 1.4 para o sistema de dinâmica aumentada, mostrada a seguir, é encontrada em [26].

**Teorema 1.5** *O sistema (SD) é estabilizável por realimentação estática de estados se e somente se existir  $W = W' \geq 0 \in \mathbb{R}^{p \times p}$  na forma*

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

onde  $W_1 = W_1' > 0$  de modo que

$$v^* [FWF' - W]v < 0 \quad \forall v \neq 0 \in \mathbb{R}^p / G'v = 0. \quad (1.20)$$

Existindo  $W$ , o ganho estabilizante  $K$  é dado por

$$K = W_2'W_1^{-1} \quad \square. \quad (1.21)$$

prova: Considerando que o par  $(A, B)$  é estabilizável. Então existem  $P = P' > 0$  e  $K$  tais que

$$(A - BK)P(A - BK)' - P < 0$$

Assumindo  $W$  na forma

$$W = \begin{bmatrix} P & PK' \\ KP & KPK' \end{bmatrix} \geq 0,$$

notando que todo  $v \neq 0 / G'v = 0$  pode ser escrito como  $v^* = [x \ ; \ 0]^*$  e utilizando a definição do sistema aumentado, obtemos:

$$v^* [FWF' - W]v < 0 \quad \forall v \neq 0 / G'v = 0.$$

Portanto, a necessidade está demonstrada.

Assumindo agora que existe  $\mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq 0$  particionada como em (1.19) e tal que (1.20) seja satisfeita. Logo, desenvolvendo esta última:

$$\begin{aligned} v^* [F\mathcal{W}F' - \mathcal{W}] v &= x^* \left[ (A - BW_2'W_1^{-1}) W_1 (A - BW_2'W_1^{-1})' - W_1 \right] x + \\ &+ x^* B [W_3 - W_2'W_1^{-1}W_2] B' x \end{aligned}$$

Como

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2 & W_3 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow W_3 \geq W_2'W_1^{-1}W_2$$

para  $W_1 > 0$ , teremos finalmente que

$$x^* [(A - BK)W_1(A - BK)' - W_1] x < 0$$

onde  $K = W_2'W_1^{-1}$  é o ganho estabilizante do par  $(A, B)$   $\square$ .

**Comentário 1.4** Observe que, caso a restrição de semi-positividade de  $\mathcal{W}$  não seja satisfeita, o caráter de necessidade deste Teorema estará comprometido. Isto acontece de forma contrária ao caso contínuo, onde esta restrição nada acrescenta do ponto de vista de demonstração de resultados, ou melhor, de condicionar a análise de estabilidade à satisfação desta exigência  $\square$ .

**Corolário 1.4** *Seja o conjunto*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{DA} \triangleq \{ \mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq 0 / v^* [F\mathcal{W}F' - \mathcal{W}] v < 0, \\ \forall v \neq 0 \in \mathbb{R}^p / G'v = 0 \} \end{aligned} \quad (1.22)$$

*Então as seguintes propriedades são válidas:*

1.  $\mathcal{C}_{DA}$  é convexo;
2.  $\mathcal{C}_{DA}$  é um cone, de modo que se  $\mathcal{W} \in \mathcal{W}_{DA}$ , então  $\lambda\mathcal{W} \in \mathcal{W}_{DA}$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}_p$ ;
3.  $\mathcal{C}_{DA} \neq \emptyset$  se e somente se o par  $(A, B)$  for estabilizável  $\square$ .

prova: Direta, pelo Corolário 1.3 e Teorema anterior  $\square$ .

Note que agora, graças à formulação de sistemas de dinâmica aumentada, o ganho  $K$  obtido é completamente independente das matrizes do sistema (SD). Tal como para sistemas contínuos e devido à convexidade da solução encontrada com relação à matriz  $\mathcal{W}$ , este resultado dá margem para a utilização de técnicas de programação matemática como o método do subgradiente ótimo ou o método dos planos de corte para a determinação da matriz  $\mathcal{W}$  que produz o ganho  $K$  desejado.

## 1.4 Estabilidade de Sistemas Incertos: casos contínuo e discreto

Seja então o modelo em variáveis de estados de um sistema dinâmico incerto, dado por

$$\delta[x(t)] = Ax(t) + Bu(t) \quad (\text{SI})$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados e  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de controle. O operador  $\delta[\cdot]$  é definido por  $\delta[x(t)] \triangleq \dot{x}(t)$  para sistemas contínuos e  $\delta[x(t)] \triangleq x(t+1)$  para sistemas discretos. As matrizes de parâmetros  $A$  e  $B$  não têm seus elementos precisamente conhecidos, mas, além de terem suas dimensões definidas, pertencem a conjuntos convexos na forma

$$\mathcal{D}_A \triangleq \left\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} / A = \sum_{i=1}^I \alpha_i A_i / \sum_i \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\} \quad (1.23)$$

$$\mathcal{D}_B \triangleq \left\{ B \in \mathbb{R}^{n \times m} / B = \sum_{j=1}^J \beta_j B_j / \sum_j \beta_j = 1, \beta_j \geq 0 \right\} \quad (1.24)$$

que são politopos convexos definidos pelas matrizes-vértices  $(A_i, B_j)$ , de modo que qualquer combinação convexa entre os vértices também pertence ao respectivo politopo.

Note que estas definições são extremamente gerais com relação às possibilidades de incertezas estruturadas comumente definidas na literatura. Elas englobam, por exemplo, os importantes casos de incertezas do tipo norma limitada e tipo matrizes-intervalo, na forma de variações do modelo em torno de um ponto de operação. No entanto, quanto ao primeiro tipo citado, ou seja, incertezas do tipo norma limitada, deve-se ressaltar que irão constituir conjuntos convexos na forma de elipsóides, ou seja, politopos com um número infinito de vértices. Além destes, como já demonstrado em [16], pode-se também formular o problema de estabilizar diversos pontos de operação de um sistema através de um único ganho  $K$ .

Na verdade, este é um problema central no estudo de sistemas incertos utilizando a abordagem de equações de estados. Procura-se determinar uma única função de Lyapunov que leve à estabilidade de todo o domínio de incerteza considerado e forneça um ganho, também único, que a garanta. O objetivo desta seção é, então, obter resultados equivalentes ao das duas anteriores, agora para o caso de sistemas caracterizados como acima, ou seja, sistemas cujos parâmetros pertencem a domínios convexos de incertezas. Adotaremos, durante todo o transcórre desta, uma abordagem unificadora com relação a sistemas de tempo discreto e de tempo contínuo. Para iniciar, a seguinte definição é fundamental.

**Definição 1.2** *Um sistema incerto é quadraticamente estabilizável se admite uma mesma função de Lyapunov que garanta a estabilidade em todo o domínio de incertezas considerado  $\square$ .*

Esta Definição equivale a dizer que, para sistemas contínuos, existe uma única matriz  $W$  simétrica e definida positiva e um ganho  $K$  de modo que a equação de Lyapunov em malha fechada

$$(A - BK)'W^{-1} + W^{-1}(A - BK) < 0 \quad (1.25)$$

seja válida para quaisquer  $A$  e  $B$  pertencentes aos domínios de incertezas considerados. Para sistemas discretos, a mesma conclusão é retirada, agora para a equação de Lyapunov discreta

$$(A - BK)W(A - BK)' - W < 0 \quad (1.26)$$

Encontrar matrizes  $W$  e  $K$  que satisfaçam a esta Definição dá origem ao chamado problema de estabilizabilidade quadrática. A solução deste para a estrutura de incertezas dada passa pela utilização do conceito de sistemas de dinâmica aumentada associado a cada par  $(A, B)$  considerado, como adotado nas seções anteriores. Assim, são definidas as matrizes

$$F \triangleq \begin{bmatrix} A & -B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times p}, \quad G \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times m} \quad (1.27)$$

relativas ao sistema de dinâmica aumentada

$$\delta[z(t)] = Fz(t) + Gu(t) \quad (1.28)$$

de modo que  $G$  é uma matriz constante e  $F$  concentra todas as informações sobre a dinâmica do sistema original associado. Ora, mas  $A$  e  $B$  utilizados na definição de  $F$  pertencem aos seus respectivos domínios de incerteza dados por (1.23) e (1.24). Define-se, então, o domínio de incertezas  $\mathcal{D}_F$  como o politopo convexo

$$\mathcal{D}_F \triangleq \left\{ F \in \mathbb{R}^{p \times p} / F = \sum_{h=1}^H \lambda_h F_h / \sum_{h=1}^H \lambda_h = 1, \lambda_h \geq 0 \right\} \quad (1.29)$$

onde as matrizes  $F_h$  são matrizes-vértices relativas aos sistemas dados pelos pares-vértices  $(A_i, B_j)$ , para  $i = 1, \dots, I$  e  $j = 1, \dots, J$ . Note que  $H \triangleq I \times J$  representa aqui o número de todas as combinações possíveis entre os vértices dos politopos  $\mathcal{D}_A$  e  $\mathcal{D}_B$ .

Nos desenvolvimentos que se seguem, sempre que nos referirmos a uma matriz-vértice, iremos associar a ela somente o índice  $h$ . Deste modo, um modelo-vértice

$(A_i, B_j)$  (onde  $A_i$  é um vértice do polítopo  $\mathcal{D}_A$  e  $B_j$  um vértice do polítopo  $\mathcal{D}_B$ ) será referenciado como  $(A_i, B_j) = (A, B)_h = (A_h, B_h)$ . O exemplo abaixo torna clara tal notação.

**Exemplo 1.1:** Seja um sistema como (SI), onde os polítopos  $\mathcal{D}_A$  e  $\mathcal{D}_B$  possuem cada um dois vértices, na forma

$$\mathcal{D}_A = \left\{ A \mid A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2, \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \alpha_{1,2} \geq 0 \right\}$$

$$\mathcal{D}_B = \left\{ B \mid B = \beta_1 B_1 + \beta_2 B_2, \beta_1 + \beta_2 = 1, \beta_{1,2} \geq 0 \right\}.$$

Logo:

$$\mathcal{D}_F = \left\{ F \mid F = \sum_{h=1}^4 \lambda_h F_h, \sum_{h=1}^4 \lambda_h = 1, \lambda_h \geq 0 \right\}$$

onde

$$F_1 = \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} A_1 & -B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F_3 = \begin{bmatrix} A_2 & -B_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F_4 = \begin{bmatrix} A_2 & -B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

sendo o modelo vértice de nº 3 referenciado como  $(A, B)_3$  e as matrizes  $A$  e  $B$  deste modelo como  $A_3$  e  $B_3$ . Portanto, o único índice a ser utilizado é o associado ao polítopo  $\mathcal{D}_F$   $\square$ .

A seguir, serão apresentados resultados que permitirão o estudo da estabilidade quadrática de sistemas como (SI). Como nas seções anteriores, de suma importância será evidenciar as propriedades geométricas associadas a cada uma das soluções. Serão estas que, posteriormente, irão possibilitar a aplicação das técnicas de otimização já apontadas naquelas seções. É interessante observar, além do mais, que estes Teoremas são generalizações para o domínio convexo dos equivalentes expostos previamente.

**Teorema 1.6** *O sistema contínuo (SI) é quadraticamente estabilizável por realimentação linear de estados se e somente se existir  $\mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq 0$  particionada como*

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times p} \quad (1.30)$$

onde  $W_1 = W_1' > 0$ , de modo que

$$z^* [F_h \mathcal{W} + \mathcal{W} F_h'] z < 0, \quad \forall h = 1 \dots H \quad (1.31)$$

para todo  $z \neq 0 \in \{z \in \mathbb{R}^p \mid G'z = 0\}$ . Existindo  $\mathcal{W}$ , o ganho  $K$  estabilizante é dado por

$$K = W_2' W_1^{-1} \quad \square. \quad (1.32)$$

prova: Assuma que o sistema é estabilizável  $\forall F \in \mathcal{D}_F$ . Então, existem matrizes  $P = P' > 0$  e  $K$  tais que:

$$(A - BK)'P + P(A - BK) < 0$$

Logo, tendo  $\mathcal{W}$  dada como

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} P^{-1} & P^{-1}K' \\ KP^{-1} & ? \end{bmatrix}$$

e utilizando a definição de sistema aumentado, pode-se escrever, em particular para os  $h$  vértices, que

$$z^*[F_h \mathcal{W} + \mathcal{W} F_h']z < 0, \quad \forall h = 1 \cdots H \quad (1.33)$$

para todo  $z \in \{z \neq 0 / G'z = 0\}$ . Logo, a necessidade está demonstrada.

Assuma agora que exista  $\mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq 0$ , particionada como em (1.30), de modo que (1.31) seja satisfeita. Desenvolvendo esta última, teremos que:

$$(A_h - B_h K)W_1 + W_1(A_h - B_h K)' < 0 \quad (1.34)$$

onde  $K = W_2'W_1^{-1}$  é o ganho estabilizante.

Pela definição do domínio convexo  $\mathcal{D}_F$ , para cada  $F \in \mathcal{D}_F$ , existem  $\lambda_h \geq 0$  e  $\sum_{h=1}^H \lambda_h = 1$  de modo que o par  $(A, B)$  correspondente seja dado pela combinação convexa

$$(A, B) = \sum_{h=1}^H \lambda_h (A_h, B_h), \quad h = 1 \cdots H. \quad (1.35)$$

Assim, a partir de (1.34) e (1.35),  $\forall F \in \mathcal{D}_F$  obtemos

$$\begin{aligned} (A - BK)W_1 + W_1(A - BK)' &= \\ &= \sum_{h=1}^H \lambda_h [(A_h - B_h K)W_1 + W_1(A_h - B_h K)'] < 0 \end{aligned} \quad (1.36)$$

e o sistema é estabilizável quadraticamente  $\square$ .

**Corolário 1.5** *Defina o conjunto*

$$\begin{aligned} C_{IC} \triangleq \{ \mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq 0 \in \mathbb{R}^{p \times p} / z^*[F_h \mathcal{W} + \mathcal{W} F_h']z < 0, \\ \forall h = 1 \cdots H, \quad \forall z \neq 0 / G'z = 0 \} \end{aligned} \quad (1.37)$$

*Então as seguintes propriedades são válidas:*

1.  $C_{IC}$  é um cone convexo;
2.  $C_{IC} \neq \emptyset$  se e somente se o sistema (SI) for estabilizável quadraticamente  $\square$ .

prova: Somente será demonstrado o primeiro item, uma vez que o segundo advém diretamente do Teorema como uma visão geométrica de seu resultado. Portanto, quanto à afirmativa de que o conjunto é um cone, basta verificar que, se  $\mathcal{W} \in C_{IC}$ , então claramente  $\lambda\mathcal{W} \in C_{IC}$ , para  $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+$ . Quanto à convexidade, de maneira semelhante, tome  $\mathcal{W}^1 \in C_{IC}$  e  $\mathcal{W}^2 \in C_{IC}$ . Como as restrições que definem o conjunto são lineares em  $\mathcal{W}$ , qualquer

$$\mathcal{W} = \alpha\mathcal{W}^1 + (1 - \alpha)\mathcal{W}^2$$

pertence a  $C_{IC}$ , onde  $\alpha \in [0, 1]$  e este conjunto é portanto convexo em  $\mathcal{W}$   $\square$ .

A seguir, será feito o mesmo desenvolvimento para o caso discreto. Porém, primeiramente, iremos apresentar o Lema abaixo, devido a [16], que será utilizado na demonstração do teorema que o segue:

**Lema 1.3** *Assuma que  $\mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq 0 \in \mathbb{R}^{p \times p}$ . Então:*

$$F\mathcal{W}F' \leq \sum_{h=1}^H \lambda_h F_h \mathcal{W} F_h' \quad \forall F \in \mathcal{D}_F \quad \square. \quad (1.38)$$

prova: veja [16]  $\square$ .

**Teorema 1.7** *O sistema discreto (SI) é quadraticamente estabilizável por realimentação linear de estados para  $\forall F \in \mathcal{D}_F$  se e somente se existir  $\mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq 0$  particionada como*

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times p} \quad (1.39)$$

onde  $W_1 = W_1' > 0$ , de modo que

$$v^* [F_h \mathcal{W} F_h' - \mathcal{W}] v < 0 \quad \forall h = 1 \dots H \quad (1.40)$$

para todo  $v \neq 0 \in \{v \in \mathbb{R}^p / G'v = 0\}$ . Existindo  $\mathcal{W}$ , o ganho estabilizante  $K$  é dado por

$$K = W_2' W_1^{-1} \quad \square. \quad (1.41)$$

prova: Assuma primeiramente que o sistema é estabilizável quadraticamente  $\forall F \in \mathcal{D}_F$ . Então, existem matrizes  $P = P' > 0$  e  $K$  tais que

$$(A - BK)P(A - BK)' - P < 0$$

Para  $\mathcal{W}$  dado como

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} P & PK' \\ KP & KPK' \end{bmatrix} \geq 0$$

e utilizando a definição do sistema aumentado, pode-se escrever que

$$v^* [F\mathcal{W}F' - \mathcal{W}]v < 0 \quad (1.42)$$

para todo  $v \neq 0 / G'v = 0$  é válido, particularmente, para  $F = F_h$ . A necessidade está demonstrada.

Agora a suficiência. Assumindo que existe  $\mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq 0$ , particionada como definida em (1.39), de modo que (1.40) se estabeleça. Desenvolvendo esta última e lembrando que  $\forall v \neq 0 \in \{v \neq 0 / G'v = 0\}$  pode ser escrito como  $v^* = [x \ : \ 0]^*$ , onde  $x \in \mathfrak{R}^n$ , obtemos então que

$$\begin{aligned} & x^* [(A_h - B_h W_2' W_1^{-1}) W_1 (A_h - B_h W_2' W_1^{-1})' - W_1] x + \\ & + x^* B_h [W_3 - W_2' W_1^{-1} W_2] B_h x < 0 \end{aligned}$$

Como  $\mathcal{W}$  é tal que

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow W_3 \geq W_2' W_1^{-1} W_2 \quad (1.43)$$

para  $W_1 > 0$ , fazendo  $K = W_2' W_1^{-1}$ , teremos, portanto que

$$x^* [(A_h - B_h K) W_1 (A_h - B_h K)' - W_1] x < 0 \quad (1.44)$$

em todo  $(A_h, B_h) \in \mathcal{D}_F$ . Pela definição do domínio convexo  $\mathcal{D}_F$ , para cada  $F$  existem  $\lambda_h \geq 0$ ,  $\sum_{h=1}^H \lambda_h = 1$  de tal modo que o par  $(A, B)$  correspondente seja dado pela combinação convexa

$$(A, B) = \sum_{h=1}^H \lambda_h (A, B)_h \quad (1.45)$$

Assim, a partir de (1.44) e (1.45) e utilizando o Lema 1.3, para  $\forall F \in \mathcal{D}_F$  podemos escrever que:

$$\begin{aligned} & x^* [(A - BK) W_1 (A - BK)' - W_1] x \leq \\ & \leq \sum_{h=1}^H \lambda_h x^* [(A_h - B_h K) W_1 (A_h - B_h K)' - W_1] x < 0 \end{aligned}$$

para  $h = 1 \dots H$ . A suficiência está provada e o sistema é estabilizável quadraticamente  $\square$ .

**Corolário 1.6** *Seja o conjunto*

$$\mathcal{C}_{ID} \triangleq \left\{ \mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq 0 \in \mathbb{R}^{p \times p} / v^* [F_h \mathcal{W} F_h' - \mathcal{W}] v < 0, \right. \\ \left. \forall h = 1 \cdots H, \quad \forall v \neq 0 / G'v = 0 \right\}. \quad (1.46)$$

*As seguintes assertivas são verdadeiras:*

1.  $\mathcal{C}_{ID}$  é um cone convexo;
2.  $\mathcal{C}_{ID} \neq \emptyset$  se e somente se o sistema (SI) for estabilizável quadraticamente  $\forall F \in \mathcal{D}_F$   $\square$ .

prova: Somente será demonstrado o primeiro item, já que o segundo simplesmente re-elabora o Teorema anterior em uma forma geométrica. Portanto, sua demonstração segue diretamente deste Teorema.

Tomando  $\mathcal{W} \in \mathcal{C}_{ID}$ , então, para  $\lambda \in \mathbb{R}_+$

$$v^* [F_h(\lambda \mathcal{W}) F_h' - (\lambda \mathcal{W})] v < 0$$

para todo  $v \neq 0 / G'v = 0$ . Logo,  $\lambda \mathcal{W} \in \mathcal{C}_{ID}$  e este conjunto é um cone.

Quanto à convexidade, basta verificar que dados  $\mathcal{W}^1$  e  $\mathcal{W}^2$  pertencentes a  $\mathcal{C}_{ID}$ , então, como as restrições que definem o conjunto são lineares em  $\mathcal{W}$ , para  $\alpha \in [0, 1]$

$$\mathcal{W} = \alpha \mathcal{W}^1 + (1 - \alpha) \mathcal{W}^2 \in \mathcal{C}_{ID}.$$

e, portanto, o conjunto  $\mathcal{C}_{ID}$  é um cone convexo  $\square$ .

Observe a importância, sob o ponto de vista de procedimento numérico, dos Corolários 1.5 e 1.6 anteriores. Agora, para verificação da estabilidade quadrática de (SI), basta somente investigar se os modelos correspondentes aos vértices do poliedro de incerteza possuem tal propriedade. A convexidade do domínio  $\mathcal{D}_F$  garantirá, por outro lado, que todos os demais modelos também a possuam. Também observe que o Comentário feito na seção anterior com relação à restrição de semi-positividade da matriz  $\mathcal{W}$  para sistemas de tempo discreto permanece válido no caso incerto, como pode ser visto a partir da demonstração do Teorema 1.7, sendo esta a principal diferença entre as duas classes de tempo quanto aos resultados obtidos.

Note também que, dada as semelhanças entre estes resultados, é possível unificar os Teoremas 1.6 e 1.7 em um único, que irá fornecer condições necessárias e suficientes para a estabilidade quadrática de sistemas com parâmetros incertos pertencentes a conjuntos convexos.

**Teorema 1.8** ([29]) *O sistema (SI) é quadraticamente estabilizável por realimentação linear de estados  $\forall F \in \mathcal{D}_F$  se e somente se existir uma matriz  $\mathcal{W} = \mathcal{W}'$  tal que*

$$T' \mathcal{W} T > 0 \quad (1.47)$$

$$T' \Theta_h(\mathcal{W}) T < 0, \quad h = 1 \cdots H. \quad (1.48)$$

$$\mathcal{W} \geq 0 \quad (1.49)$$

onde  $T \in \mathbb{R}^{p \times n}$  é uma matriz geradora do espaço nulo de  $G'$  e, além disso,  $\Theta_h(\mathcal{W}) \triangleq F_h \mathcal{W} + \mathcal{W} F_h'$  para sistemas contínuos e  $\Theta_h(\mathcal{W}) \triangleq F_h \mathcal{W} F_h' - \mathcal{W}$  para sistemas discretos. Existindo  $\mathcal{W}$ , o ganho  $K$  associado é dado por

$$K = W_2' W_1^{-1} \quad \square.$$

A prova deste Teorema é feita decompondo-o nos casos contínuo e discreto e vem diretamente dos resultados anteriormente derivados. Sua importância reside em abrir margem para a utilização de um mesmo algoritmo numérico para a solução nas duas classes de tempo, bastando para tal somente alterar a função de Lyapunov associada, com as conseqüentes mudanças que tal fato irá ocasionar no método de programação matemática adotado.

## 1.5 Conclusão

Neste Capítulo, além de apresentarmos inicialmente este trabalho e abordarmos sua organização interna e objetivos a serem alcançados, apresentamos também uma série de resultados já anteriormente derivados, concernentes à estabilização quadrática de sistemas incertos modelados segundo domínios convexos. A principal conclusão é quanto à análise desta situação somente para os modelos-vértices do domínio, de modo que qualquer outro pertencente ao seu interior também terá garantida a condição de estabilização procurada. Para a solução numérica, diversos procedimentos de programação matemática podem ser adotados, graças à convexidade dos conjuntos  $\mathcal{C}_{IC}$  e  $\mathcal{C}_{ID}$ . Note que o problema de estabilização quadrática na forma proposta pode ser escrito como

$$\min \{J(\mathcal{W}) / \mathcal{W} \in \mathcal{C}_I\} \quad (1.50)$$

onde o critério  $J(\cdot)$  deve ser uma função convexa em  $\mathcal{W}$ .

No Capítulo a seguir, estaremos comparando duas implementações que solucionam o problema (1.50) acima sob um critério convexo que leva à minimização da norma do ganho  $K$  estabilizante, segundo a proposta levantada no Comentário 1.2. Aquela que se apresentar mais eficiente sob o ponto de vista numérico será posteriormente utilizada para a solução do problema de estabilização quadrática com norma  $H_\infty$  preescrita.

## Capítulo 2

# Estabilidade Quadrática via Subgradiente Ótimo

### 2.1 Introdução

Neste Capítulo passamos a estudar a metodologia de solução do problema de estabilidade quadrática. O Teorema 1.8 apresentado no Capítulo anterior soluciona o tanto para o caso contínuo quanto para o caso discreto e possibilita um ganho  $K$  que garante esta condição de projeto. Resta encontrar uma implementação numérica adequada à solução proposta. O caminho a ser seguido é o apontado pelos Corolários 1.5 e 1.6, que levam a uma abordagem geométrica do Teorema acima. Assim, como já enfatizado no Capítulo anterior, dois métodos se adequam para tal: um, é o método dos planos de corte; outro, é o método do subgradiente ótimo.

O primeiro destes dois métodos encontra-se implementado em [1], numa versão inicialmente proposta em [16]. O segundo é, portanto, objeto deste capítulo, onde pretendemos avaliar principalmente qual destes métodos será mais eficiente sob o ponto de vista numérico e, como conclusão, optar por um para posterior utilização na solução do problema em  $H_\infty$ .

Neste Capítulo não estamos preocupados em detalhar a forma como a implementação do método dos planos de corte foi realizada, nos colocando simplesmente na qualidade de usuários dos resultados ali obtidos. De todo modo, caso qualquer destes métodos venha a ser o adotado, outra implementação, utilizando as características particulares para a solução do problema em  $H_\infty$ , deverá ser realizada e só então oportunamente discutida.

O Capítulo é completamente baseado em [41]. A primeira seção apresenta a formulação do problema de otimização de funções não-diferenciáveis. A segunda discute o método do subgradiente ótimo e algumas variações deste encontradas

na literatura. Na terceira são realizadas comparações entre o comportamento numérico deste método e o do método de planos de corte. A última seção é dedicada às conclusões quanto aos resultados obtidos.

## 2.2 Formulação do Problema

Seja o problema:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) & (P) \\ \text{sujeito a} \quad & \theta_i(x) \leq 0 \\ & i \in \underline{m} = \{0, 1, 2, \dots\} \end{aligned}$$

que pode ser escrito em uma forma mais compacta como

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x) \mid \theta_i(x) \leq 0, i \in \underline{m}\}$$

onde  $f(x)$ ,  $\theta_i(x)$  são funções localmente contínuas.

Definindo:

$$\varphi(x) \triangleq \max_{i \in \underline{m}} \theta_i(x)$$

o problema (P) acima passa então a ser escrito em uma forma ainda mais simples como:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x) \mid \varphi(x) \leq 0\}. \quad (2.1)$$

A solução de problemas como (2.1) não é possível através de métodos clássicos de otimização, pois a função  $\varphi(x)$  não é necessariamente diferenciável em todos os pontos de seu domínio. Particularmente isto acontece quando  $\varphi(x)$  é assumida como:

$$\varphi(x) = \max_{i \in \underline{m}} \lambda_{\max}[\theta_i(\mathcal{W})] \quad (2.2)$$

onde  $\lambda_{\max}[\theta_i(\mathcal{W})]$  é a função autovalor máximo de  $\theta_i(\mathcal{W})$ ,  $i \in \underline{m}$ . Note que, para um certo  $\mathcal{W}$  para o qual

$$\lambda_{\max}[\theta_i(\mathcal{W})] = \lambda_{\max}[\theta_j(\mathcal{W})], \quad i \neq j$$

a função  $\varphi(x)$  não é diferenciável [32].

A solução encontrada para tais problemas é buscar uma extensão do método clássico do gradiente para o caso de funções que sejam não diferenciáveis. Mas, como apontado em [32], [45] e [39] tal generalização não garante a convergência para um ponto estacionário de (2.1). Diversas variações têm sido propostas, dando origem a dois enfoques claramente diferentes.

O primeiro, sob um ponto de vista histórico, origina-se na escola soviética, que desenvolveu métodos não-monotônicos de descida. Uma ótima referência sobre tais métodos é [39]. O segundo enfoque foi desenvolvido na escola ocidental, onde procurou-se métodos que sempre garantam a melhoria do valor da função. Referências bastante interessantes são, neste caso, [32], [3] e [24].

Neste trabalho nos deteremos, no entanto, apenas no método do subgradiente ótimo, seguindo uma linha já apontada anteriormente em [15] e abordando também modificações neste método sugeridas em [32]. O método será aplicado para a solução do problema irrestrito

$$\min_{z \in \mathbb{R}^n} \varphi(x) = \min_{z \in \mathbb{R}^n} \max_{i \in \underline{m}} \theta_i(x) \quad (2.3)$$

onde  $\theta_i(x)$  e  $\varphi(x)$  são funções convexas,  $i \in \underline{m}$ .

## 2.3 Método do Subgradiente Ótimo

Seja então o problema (2.3) no qual desejamos aplicar um método tipo “gradiente”. Como sabemos, um passo deste método para o caso de funções diferenciáveis é da forma:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k$$

onde

$$s_k = -\nabla \varphi(x_k)$$

$$\alpha_k = \left\{ \alpha = \beta^{k_i} / \varphi(x_k + \alpha s_k) - \varphi(x_k) \leq -\gamma \alpha \|s_k\|^2, \quad k_i \in \mathbb{N} \right\}$$

e estamos utilizando a regra de Armijo para a definição do tamanho do passo  $\alpha_k$ .

Todavia, no caso de funções não-diferenciáveis não será possível definir a direção de caminhada como sendo contrária à do gradiente da função no ponto  $x_k$ , pois não poderemos determiná-lo. Em seu lugar, iremos definir vetor subgradiente de  $\varphi(x)$  no ponto  $x_k = x_2$  como todo vetor  $\xi$  que satisfaça à desigualdade:

$$\varphi(x_1) \geq \varphi(x_2) + \langle \xi, (x_1 - x_2) \rangle \quad x_1, x_2 \in S \subset \mathbb{R}^n \quad (2.4)$$

onde  $S$  é um conjunto compacto, limitado e convexo. O conjunto de todos os vetores  $\xi$  que satisfazem a esta definição é conhecido, para o caso de funções convexas, como o subdiferencial de  $\varphi(x)$  no ponto  $x_k = x_2$ , sendo dado por

$$\partial \varphi(x) \triangleq \left\{ \xi / \varphi(x_1) \geq \varphi(x_2) + \langle \xi, (x_1 - x_2) \rangle, \quad x_1, x_2 \in S \subset \mathbb{R}^n \right\}$$

Observe que a definição de subgradiente dada por (2.4) está associada à idéia de hiperplanos suportes. Veja a fig. 2.3.

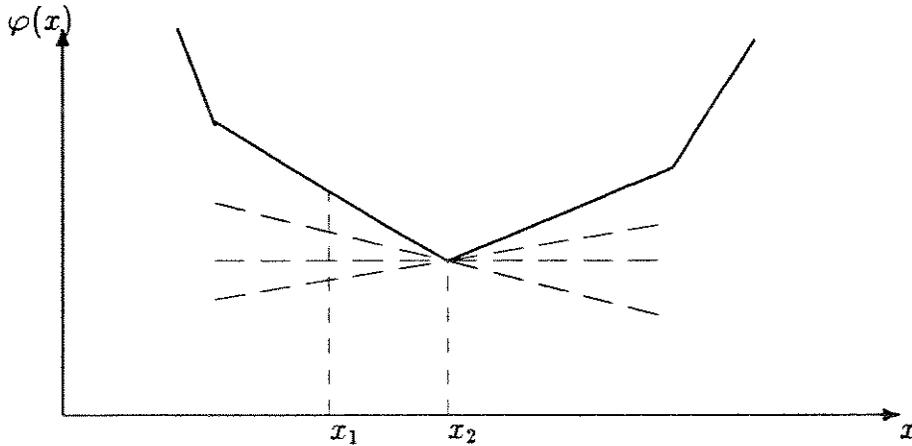


Figura 2.1: Hiperplanos suportes em um ponto não-diferenciável

Ao contrário das funções convexas diferenciáveis, no caso em estudo é possível definir um sem-número de hiperplanos suportes, cada um deles dado por

$$\langle \xi, (x_1 - x_2) \rangle = 0$$

onde  $\xi$  é um vetor subgradiente de  $\varphi(x)$ . A partir desta expressão, conclui-se, então, que todo subgradiente é normal ao hiperplano suporte que o define. Além disso, algumas propriedades do conjunto  $\partial\varphi(x)$  devem ser enfatizadas:

- (a) É um conjunto convexo, compacto, não vazio e limitado quando definido sobre conjuntos limitados;
- (b)  $\partial\varphi(x) \subset G(x) \triangleq \text{co} \{ \partial\theta_i(x) / i \in I(x) \}$  onde  $I(x) \triangleq \{ i \in \underline{m} / \theta_i(x) = \varphi(x) \}$  é o conjunto das funções  $\theta_i(x)$  ativas em  $x$  e  $\text{co}\{\cdot\}$  é o contorno convexo de  $\{\cdot\}$  ou o menor conjunto convexo que contém  $\{\cdot\}$ ;
- (c) A derivada direcional de  $\varphi(x)$  no ponto  $x$  na direção  $s$  é definida como:

$$d\varphi(x; s) \triangleq \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x + \alpha s) - \varphi(x)}{\alpha} = \max_{\xi \in \partial\varphi(x)} \langle s, \xi \rangle$$

- (d) Para o caso de  $\theta_i(x)$  diferenciável,  $i \in I(x)$ , a propriedade (c) passa a ser dada simplesmente como:

$$d\varphi(x; s) \triangleq \langle s, \nabla\theta_i(x) \rangle, \quad i \in I(x)$$

e, da mesma forma, a propriedade (b) se reduz a:

$$\partial\varphi(x) = \text{co}\{\nabla\theta_i(x)\}, \quad i \in I(x)$$

Ora, então (c) mostra que a derivada direcional de  $\varphi(x)$  é determinada por um hiperplano suporte extremo cujo subgradiente produz a maior inclinação no ponto  $x$  considerado. Além disso, por (a), o conjunto dos subgradientes determina um cone convexo no qual estará contida a direção determinada por (c). Então, qualquer  $\xi \in \partial\varphi(x)$  poderá ser escrito como

$$\xi \triangleq \sum_{i \in I(x)} \lambda_i \nabla\theta_i(x)$$

onde os multiplicadores  $\lambda_i$  são tais que

$$\sum_{i \in I(x)} \lambda_i = 1$$

$$\lambda_i \geq 0$$

A partir de (c), se  $x^*$  minimiza localmente  $\varphi(x)$ , então:

$$d\varphi(x^*; s) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \max_{\xi \in \partial\varphi(x^*)} \langle s, \xi \rangle \geq 0$$

ou seja, a condição necessária de 1ª ordem para um mínimo local é que a derivada direcional seja não negativa em todas as direções. Portanto, se  $x^*$  é uma solução local para (2.3), teremos que

$$0 \in \partial\varphi(x^*) \tag{2.5}$$

o qual generaliza a condição de 1ª ordem encontrada no caso de funções diferenciáveis, dada por  $\nabla\varphi(x^*) = 0$ . Caso  $0 \notin \partial\varphi(x)$ , então será sempre possível encontrar um hiperplano que separe a origem (ou o vetor nulo) do conjunto de subgradientes, hiperplano este dado por

$$\langle s, (x_1 - x_2) \rangle = 0$$

de modo que  $s$  satisfaz à condição

$$\max_{\xi \in \partial\varphi(x)} \langle s, \xi \rangle < 0.$$

Para o método do gradiente,  $s$  é encontrada como a solução do problema

$$s^* = \arg \min_s \{d\varphi(x; s) / \|s\| \leq 1\}$$

No caso não-diferenciável, no entanto, teremos que

$$\begin{aligned} s^* &= \arg \min_{\|s\| \leq 1} \{d\varphi(x, s) / \|s\| \leq 1\} \\ &= \arg \min_{\|s\| \leq 1} \max_{\xi \in \partial\varphi(x)} \langle s, \xi \rangle \\ &= \arg \max_{\xi \in \partial\varphi(x)} \min_{\|s\| \leq 1} \langle s, \xi \rangle \end{aligned}$$

pois  $\partial\varphi(x)$  é convexo e compacto. A minimização é solucionada por

$$s^* = -\frac{\xi^*}{\|\xi^*\|}$$

e logo

$$\begin{aligned} \xi^* &= \arg \max_{\xi \in \partial\varphi(x)} \{-\|\xi\|\} \\ &= -\arg \min_{\xi \in \partial\varphi(x)} \{\|\xi\|\} \end{aligned}$$

ou, como a minimização de uma norma é equivalente à minimização de seu quadrado:

$$\xi^* = J(x)\lambda^* \quad (2.6)$$

onde  $\lambda^*$  é a solução do problema quadrático

$$\lambda^* = -\arg \min_{\lambda \in \Lambda(x)} \lambda' Q(x) \lambda \quad (2.7)$$

e  $J(x)$ ,  $\Lambda(x)$  e  $Q(x)$  são definidos como:

$$J(x) \triangleq [\nabla\theta_i(x), \quad i \in I(x)]$$

$$\Lambda(x) \triangleq \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^r / \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0 \right\}$$

$$r \triangleq \text{card}(I(x))$$

= número de elementos do conjunto  $I(x)$

$$Q(x) \triangleq J(x)'J(x)$$

Algumas conclusões podem ser retiradas deste desenvolvimento:

(a) O vetor  $s^* = -\frac{\xi^*}{\|\xi^*\|}$  define a direção de maior descida da função  $\varphi(x)$  em  $x$ ;

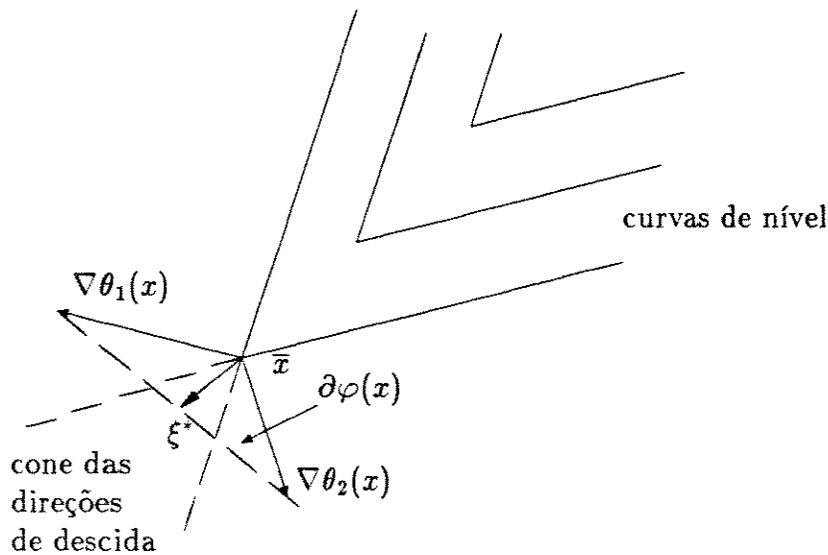


Figura 2.2: Subgradiente Ótimo: interpretação geométrica

- (b) Retornando à definição do subgradiente, notamos que  $s^*$  define também a direção de mínima inclinação;
- (c) O vetor  $\xi^*$ , como solução do problema quadrático (2.7), é chamado de subgradiente ótimo. Este subproblema também pode ser definido como

$$\arg \min \left\{ \frac{1}{2} \left\| \sum_{i \in I(x)} \lambda_i \nabla \theta_i(x) \right\|^2 / \lambda = [\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_r] \in \Lambda \right\} \quad (2.8)$$

- (d) O subproblema quadrático também pode ser visto como o problema de determinar  $s^* \in \partial\varphi(x)$  que se encontra mais próximo à origem do espaço no qual está definido o conjunto. Neste caso, sua interpretação é a de um problema de distância mínima entre um ponto e a origem do espaço de definição. Pode ser visto também como o de determinar a combinação convexa de mínima norma entre os elementos-coluna de  $J(x)$ ;
- (e) A interpretação geométrica deste resultado é mostrada na fig. 2.2, onde aparecem as curvas de nível de uma certa função  $\varphi(x)$ . No ponto  $\bar{x}$  a função não é diferenciável e são apresentados dois subgradientes extremos do conjunto  $\partial\varphi(x) = \text{co}\{\nabla\theta_i(x)\}$ . O subgradiente ótimo  $\xi^* \in \partial\varphi(x)$  pertence, como mostrado, ao cone das direções de descida.

Para finalizarmos, resta apenas dizer a respeito da regra de escolha do tamanho do passo a ser utilizada no Algoritmo mostrado a seguir. A regra adotada,

portanto, é a mesma apontada anteriormente no caso do método do gradiente, ou seja, a regra de Armijo, modificada para funções não-diferenciáveis. As razões desta opção serão posteriormente discutidas.

Deste modo, um Algoritmo que sumariza a extensão do método do gradiente para o caso não-diferenciável é dado por:

**Algoritmo 2.1** *Método do Subgradiente Ótimo*

**Dados**  $x_0 \in \mathbb{R}^n, \varepsilon, \beta, \gamma \in [0, 1]$ ; faça  $k = 1$ ,  $x_k = x_0$  e vá para o próximo passo;

**passo 1** *Determine  $s_k$  tal que*

$$s_k = - \arg \min \{ \frac{1}{2} \|\xi_i\|^2 / \xi_i \in \partial\varphi(x), i \in I(x) \}$$

onde

$$I(x) = \{ i \in \underline{m} / |\varphi(x_k) - \theta_i(x)| < \varepsilon \}$$

Se  $\|s_k\| \leq \varepsilon$ , pare; caso contrário, vá para o próximo passo.

**passo 2** *Calcule o tamanho do passo*

$$\alpha_k \triangleq \max \{ \alpha = \beta^z, z \in \mathbb{N} / \varphi(x_k + \alpha s_k) - \varphi(x_k) \leq -\alpha\gamma\|s_k\| \}$$

**passo 3** *Atualize as variáveis:*

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \alpha s_k \\ k &= k + 1 \end{aligned}$$

e retorne ao passo 1  $\square$ .

Para a solução do subproblema quadrático associado ao passo 1, duas propostas foram implementadas. A primeira, utilizando (2.6) a (2.8) e solucionando (2.6) através de seu dual, conforme apresentado no apêndice A. A segunda é a implementação da proposta de [46], que busca encontrar o ponto de um politopo mais próximo à origem. A primeira solução exige que o problema seja convexo, ou seja, a matriz  $Q$  de (2.6) deve ser definida positiva. Já a segunda não possui tal restrição, sendo insensível a  $Q$  semi-definida. Ambas, porém, são extremamente lentas quando  $Q$  possui autovalores mal-condicionados. Mas a solução  $s^*$  sempre será encontrada em um número finito de iterações, sendo aplicado qualquer um dos dois métodos.

A adoção da regra de Armijo para a seleção do tamanho do passo torna os valores de  $\alpha_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  bem comportados com relação a outras formas de seleção. Também é um processo muito mais rápido, pois requer apenas  $l + 1$  avaliações da função, onde  $l$  é o número de iterações do loop de Armijo. A fig. 2.3 demonstra como é o comportamento deste método.

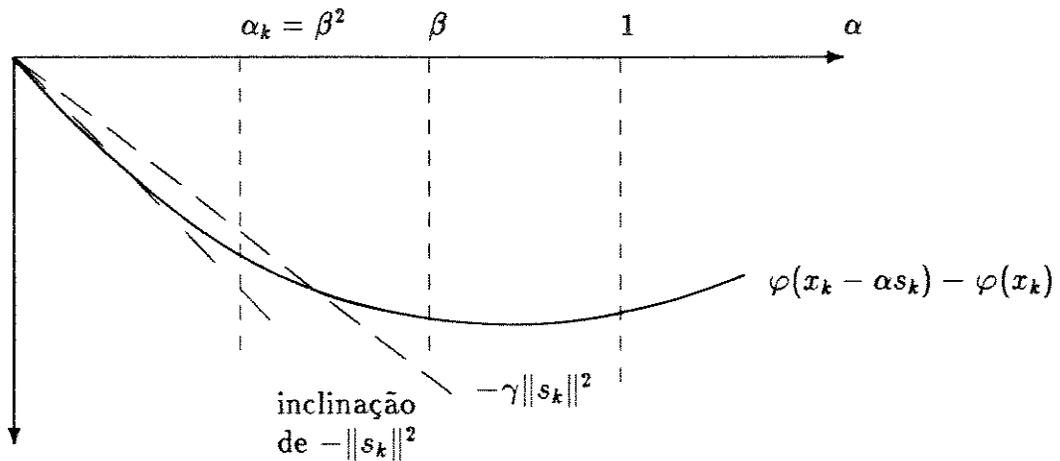


Figura 2.3: Regra de Armijo

O principal atrativo na aplicação deste Algoritmo de subgradiente ótimo está, portanto, em sua simplicidade. Mas também aí reside sua principal fraqueza. O método do subgradiente ótimo possui, como todo método tipo gradiente, convergência bastante lenta, sendo no máximo linearmente convergente. Pode apresentar problemas de zig-zag e, mais grave ainda, pode convergir para um ponto não-estacionário, como apontado por [11] e [45], ou seja, pontos onde a condição de 1ª ordem para otimalidade, dada por (2.5), não está assegurada.

A fim de solucionar este último problema devemos primeiro observar o comportamento do conjunto  $I(x)$ , que determina quais subgradientes irão compor  $\partial\varphi(x)$ . Ora, claramente a cada iteração  $k$ , este conjunto irá ter uma variação abrupta em seus elementos para  $\varepsilon \approx 0$  e normalmente todos são modificados entre uma iteração e outra. Isto leva a uma perda de continuidade em  $\partial\varphi(x)$ , ocasionando falhas na convergência, como citado.

Para tentar evitar este problema, duas propostas emergem. A primeira consiste em alterar a condição de otimalidade dada em (2.5), de modo a escrevê-la em duas equações:

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla \theta_j(x_k) = 0 \quad (2.9)$$

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j |\varphi(x_k) - \theta_j(x_k) - \varepsilon| = 0 \quad (2.10)$$

onde

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j = 1$$

e

$$\lambda_j \geq 0$$

Então, em (2.10), ou  $\lambda_j = 0$  para  $\varphi(x_k) - \theta(x_k) < \varepsilon$  ou  $\lambda_j > 0$  para  $\varphi(x_k) - \theta(x_k) \geq \varepsilon$ . Logo,

$$\forall j \in I(x) \Rightarrow \lambda_j = 0$$

Portanto, (2.9) e (2.10) estabelecem que

$$0 \in \overline{G}\varphi(x) \subset \mathfrak{R}^{n+1}$$

onde o conjunto  $\overline{G}\varphi(x)$  é dado por:

$$\overline{G}\varphi(x) \triangleq \text{co}\{\bar{\xi} \in \mathfrak{R}^{n+1} / \bar{\xi} = [\varphi(x) - \theta_i(x), \nabla\theta_i(x)] , \quad i \in \underline{m}\}$$

sendo conhecido como o conjunto dos subgradientes aumentados. Cada elemento  $\bar{\xi} \in \mathfrak{R}^n$  e este conjunto é claramente contínuo, pois não apresenta as mudanças bruscas associadas a  $\partial\varphi(x)$ . Para aplicá-lo ao Algoritmo 2.1 anteriormente definido, a única alteração necessária é no passo 1, que agora é escrito como:

**Algoritmo 2.2** *Método do Subgradiente Ótimo (modificação)*

**passo 1** *Determine  $s_k$  tal que*

$$[s_k^0, s_k] \triangleq - \arg \min\{\frac{1}{2}\|\bar{\xi}\|^2 / \bar{\xi} \in \overline{G}\varphi(x_k)\}$$

*Se  $\|s_k\| \leq \varepsilon$ , pare; caso contrário, vá para o próximo passo  $\square$ .*

A segunda forma para afastar o fantasma de uma convergência para ponto não-estacionário parte da mesma premissa, ou seja, a perda de continuidade no conjunto  $I(x)$ . Agora, no entanto, o diagnóstico é a falta de informações sobre a vizinhança dos pontos onde ocorre não-diferenciabilidade. Para alterar tal situação, propõe-se então o alargamento do conjunto  $I(x)$ , redefinindo-o como:

$$I_\varepsilon(x) = \{i / \varphi(x) - \theta(x) \leq \varepsilon(x)\} , \quad \varepsilon \geq 0$$

e definimos também o conjunto alargado dos subgradientes ou conjunto dos  $\varepsilon$ -subgradientes como:

$$G_\varepsilon\varphi(x) = \text{co}\{\nabla\theta_i(x) / i \in I_\varepsilon(x)\} , \quad \varepsilon \geq 0$$

Associada a estes conjuntos, temos uma regra de redução no valor de  $\varepsilon(x)$  de forma que, quando  $x_k \rightarrow x^*$ , então  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ . Portanto:

$$\varepsilon(x) \triangleq \max\{\varepsilon / \|s_\varepsilon\|^2 \leq \delta\nu^2 , \quad z \in \mathfrak{N}\}$$

e

$$s_\varepsilon = - \arg \min\{\frac{1}{2}\|\xi_\varepsilon\|^2 / \xi_\varepsilon \in G_\varepsilon\varphi(x)\}$$

e as modificações no Algoritmo 2.1 estão claras.

**Algoritmo 2.3** Método do  $\varepsilon$ -Subgradiente

**passo 0** Dados  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varepsilon_{\max}, \varepsilon_{\min}, \delta, \beta, \gamma \in [0, 1]$ ; faça  $\varepsilon_0 = 0$ ,  $k = 1$ ,  $x_k = x_0$  e vá para o próximo passo.

**passo 1** Determine  $s_{\varepsilon_k}$  de modo que

$$s_{\varepsilon_k} = - \arg \min \left\{ \frac{1}{2} \|\xi_{\varepsilon_k}\|^2 / \xi_{\varepsilon_k} \in G_{\varepsilon_k} \varphi(x_k) \right\}$$

Se  $\|s_{\varepsilon_k}\| \leq \varepsilon_{\min}$ , pare; caso contrário, vá para o próximo passo.

**passo 2** Se  $\|s_{\varepsilon_k}\| \leq \varepsilon_{\min}$ , então atualize o parâmetro de tolerância:

$$\varepsilon(x_k) = \max \{ \varepsilon = \delta \varepsilon_{\max}^z / \|s_{\varepsilon_k}\| \geq \delta \varepsilon_{\max}^z, z = 1, 2, \dots \}$$

e retorne ao passo 1; caso contrário, vá para o próximo passo.

**passo 3** Se  $\varepsilon_k \leq \varepsilon_{\min}$ , pare; de outro modo, continue.

**passo 4** Calcule o tamanho do passo  $\alpha_k$ , utilizando a regra de Armijo:

$$\alpha_k \triangleq \max \left\{ \alpha = \beta^z, z \in \mathbb{N} / \varphi(x_k + \alpha s_{\varepsilon_k}) - \varphi(x_k) \leq -\alpha \gamma \varepsilon(x_k) \right\}$$

**passo 5** Atualize as variáveis:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \alpha_k s_{\varepsilon_k} \\ k &= k + 1 \end{aligned}$$

e retorne ao passo 1  $\square$ .

A demonstração da convergência deste Algoritmo se encontra em [32]. Ele apresenta propriedades como:

- (a) Cada repetição do loop (passo 1- passo 2 - passo 1) significa que foi encontrada uma solução ótima local para a tolerância considerada, ou seja, que  $0 \in G_{\varepsilon_k} \varphi(x_k)$ . O ajuste em  $\varepsilon(x_k)$  leva então ao início da procura de uma nova solução. Logo, torna-se claro a necessidade do passo 4 e a modificação na regra de Armijo.
- (b) O parâmetro  $\delta$  deve ser utilizado como uma sintonia fina para a regra de ajuste da tolerância. Se for muito rápida, tornará sem sentido sua existência; se muito lenta, dificultará a convergência.
- (c) Para o caso de problemas como (2.2), a utilização do parâmetro  $\varepsilon$  de tolerância faz com que se antecipem as possibilidades de dois autovalores se igualarem ao longo do processo de otimização.

- (d) O alargamento do conjunto  $I(x)$  leva a um aumento em sua cardinalidade e, portanto, na dimensão do subproblema quadrático. Por outro lado, assegura a continuidade de  $G\varphi(x)$ , pois evita bruscas mudanças nos elementos de  $I_\varepsilon(x)$ .
- (e) Sob um ponto de vista estritamente numérico, o comportamento deste Algoritmo é superior aos anteriores, tendo convergência muito mais rápida e tamanho de passo melhor definido.
- (f) Este Algoritmo segue diretamente o método do subgradiente ótimo, exceto que, ao contrário do Algoritmo 2.1, aqui estão garantidas as propriedades adequadas de continuidade no conjunto de subgradientes.

## 2.4 Análise Numérica

Para exemplificar a aplicação destes algoritmos, vamos utilizar o Algoritmo 2.1 para a solução de um problema como (2.2), aqui repetido por conveniência:

$$\min \varphi(\mathcal{W}) = \max_{j \in \underline{m}} \lambda_{\max}[f_j(\mathcal{W})] \quad (2.11)$$

onde  $\mathcal{W} = \mathcal{W}' \in \mathbb{R}^{p \times p}$ . Problemas como este podem ser encontrados no estudo de estabilidade de sistemas incertos, como proposto por [16] e apresentado no Capítulo anterior deste trabalho. A implementação aqui realizada baseia-se na formulação geométrica proposta através do Corolário 1.5 para o caso contínuo ou pelo Corolário 1.6 no caso discreto. O objetivo do problema torna-se então obter  $\mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq 0$  tal que a função  $\varphi(\mathcal{W})$  seja estritamente negativa ou menor que um certo fator  $-\eta$ ,  $\eta > 0 \in \mathbb{R}$ . Neste tipo de problema, portanto, é essencial que a solução advinda da aplicação do Algoritmo nos forneça com bastante nitidez a informação concernente ao sinal da função  $\varphi(\mathcal{W})$ . Todas as definições quanto ao problema a ser solucionado devem ser buscadas no Capítulo 1.

Dada uma matriz  $P = P' \geq 0$  com um espectro de autovalores

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n\} \quad (2.12)$$

e as funções de  $P$ :

$$\begin{aligned} f_1(P) &= \lambda_n(P) \\ f_2(P) &= \lambda_n(PA + PA') \end{aligned}$$

onde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\lambda(\dots)$  é o autovalor de  $(\dots)$ , então

$$\begin{aligned} \frac{df_1(P)}{dP} &= xx' \\ \frac{df_2(P)}{dP} &= 2A'xx' \end{aligned}$$

Suponha agora que  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ . Se  $\lambda_i < \lambda_{i+1}$ , então as funções definidas acima serão diferenciáveis com relação a  $\lambda_i$  e, para  $f_1(\dots)$ , o gradiente será dado por  $x_i x_i'$ , onde  $x_i$  é o autovetor associado a  $\lambda_i$ ; por outro lado, se ocorrerem multiplicidades em alguns autovalores, na forma  $\lambda_j = \lambda_{j+1} = \dots = \lambda_{j+r}$  ( $r =$  multiplicidade de  $\lambda_j$ ), tais funções não serão diferenciáveis com relação a  $\lambda_j$  e iremos definir então o subgradiente de  $f(P)$  em  $P_2$  para  $\lambda_j$  como toda matriz  $\xi \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  que satisfaça

$$f(P_1) \geq f(P_2) + \xi'(P_1 - P_2) \quad \forall P_1, P_2 \in \mathfrak{R}^{n \times n} \quad (2.13)$$

O conjunto das matrizes  $\xi$  que satisfazem (2.13) é chamado de gradiente generalizado de  $f(P)$  e denominado  $\partial f(P)$ . A cada subgradiente está associado um hiperplano suporte dado por:

$$\langle \xi, (P_1 - P_2) \rangle = 0$$

que é o hiperplano suporte do conjunto convexo definido pelo epígrafo de  $f(\cdot)$  em  $P_2$ .

Obviamente, para a solução de (2.11) devemos utilizar métodos como os propostos pelos Algoritmos 2.1, 2.2 e 2.3 anteriores. Mas, na forma como está definido o problema, podem ocorrer multiplicidades internas a cada  $f_i$  relativas ao seu máximo e deste modo estas funções não serão diferenciáveis. Isso impede a aplicação de tais métodos, pois a convergência não é assegurada, podendo o Algoritmo caminhar para um ponto não-estacionário.

Redefinindo então (2.11) como:

$$\min \varphi(\mathcal{W}) = \max_{j \in \underline{m}} \lambda[f_j(\mathcal{W})] \quad (2.14)$$

onde, em lugar de calcular o máximo dos máximos, simplesmente passamos a trabalhar com todos os autovalores de todas as  $m$  funções (em um total de  $p \times m$  autovalores) e só então calcularemos o máximo. Assim, teremos encontrado, portanto, uma maneira sutil de ultrapassarmos a dificuldade exposta acima.

O problema (2.14), modificação de (2.11), se encontra, agora, em uma forma adequada à aplicação do método do subgradiente ótimo e suas variações, propostas nos Algoritmos 2 e 3.

Os exemplos que se seguem são encontrados em [26] e representam aplicações numéricas destes Algoritmos. Foram, anteriormente, solucionados em [1] através de um método tipo planos de corte segundo Algoritmo proposto inicialmente em [16]. A comparação a ser realizada entre o comportamento da solução de (2.14) pelo método de subgradiente ótimo e a encontrada em [1] servirá como base para a escolha do método a ser utilizado no caso de otimização em  $H_\infty$ , objeto principal deste trabalho. Foram selecionados para tal análise os exemplos 4.3.2 ("Comando

Robusto de um Helicóptero”) e 4.3.4 (“Dependência de parâmetros”) da referência citada. Os dados dos exemplos citados não serão apresentados por não exercerem função preponderante nas conclusões a serem obtidas.

O estudo do comando robusto de um helicóptero é um dos exemplos que justificariam o estudo de funções não-diferenciáveis. Após 214 iterações (25.79 Mflops), a solução converge para a matriz

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} 1.8839 & 1.8192 & 0.6680 & 0.5144 & 0.5498 & 0.7961 \\ 1.8192 & 3.6475 & 0.7852 & 1.5102 & -0.1776 & 1.0008 \\ 0.6680 & 0.7852 & 1.7346 & -0.5176 & -0.2033 & 0.1837 \\ 0.5144 & 1.5102 & -0.5176 & 1.6624 & -0.1135 & 0.8112 \\ 0.5498 & -0.1776 & -0.2033 & -0.1135 & 1.2674 & 0.5355 \\ 0.7961 & 1.0008 & 0.1837 & 0.8112 & 0.5355 & 1.7326 \end{bmatrix}$$

sendo o ganho estabilizante  $K$  dado por:

$$K = \begin{bmatrix} 0.7086 & -0.2934 & -0.2905 & -0.1114 \\ 0.3952 & -0.2806 & 0.2932 & 0.7119 \end{bmatrix}$$

com  $\|K\| = 1.23$ . Em [1], após 100 iterações (15.18 Mflops), o programa converge para:

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} 3.1582 & 0.1294 & 0.4680 & 0.8838 & 0.0367 & 0.3329 \\ 0.1294 & 2.4411 & -0.1964 & 0.1173 & -1.3715 & -1.0884 \\ 0.4680 & -0.1964 & 3.2110 & -0.9179 & -0.4517 & 0.0712 \\ 0.8838 & 0.1173 & -0.9179 & 1.8362 & -0.4114 & 0.6651 \\ 0.0367 & -1.3715 & -0.4517 & -0.4114 & 1.0902 & 0.3577 \\ 0.3329 & -1.0884 & 0.0712 & 0.6651 & 0.3577 & 0.7797 \end{bmatrix}$$

e o ganho  $K$  é dado por

$$K = \begin{bmatrix} 0.2140 & -0.5783 & -0.3385 & -0.4593 \\ -0.0274 & -0.4563 & 0.1329 & 0.4710 \end{bmatrix}$$

com  $\|K\| = 1.07$ .

É interessante observar que, mesmo em um problema favorável, o Algoritmo apresenta um comportamento quase-assintótico em relação a zero, pelo menos em um trecho de seu desenvolvimento, como pode ser observado no gráfico 2.1 abaixo. Tal comportamento não está presente na simulação apresentada em [1], onde (como colocado no gráfico 2.10) a função mostra-se uniformemente crescente (pois a solução é dual), não tendo trechos de inflexão que tornem duvidosa sua convergência para um certo ponto.

Nos dois outros exemplos, o primeiro infactível e o segundo factível, as deficiências do método do subgradiente ótimo com relação ao método de planos de

Variáveis	Ex. 4.3.2		Ex. 4.3.4: infac.		Ex. 4.3.4: fac.	
	SubGrad.	Pl.Cort.	SubGrad.	Pl.Cort.	SubGrad.	Pl.Cort.
$\ K\ $	1.23	1.07	–	–	7.74	12.22
it	214	100	74	9	77	28
Mflops	25.79	15.18	1.94	0.04	1.00	0.13
$\varphi(W)$	-0.2122	–	$+9E10^{-10}$	–	-0.0029	–

Tabela 2.1: Resultados dos exemplos numéricos

corde tornam-se mais evidentes. No caso infactível, o comportamento assintótico novamente se apresenta, agora, no entanto, de forma pronunciada (gráfico 2.4). Tal fato se coloca como catastrófico para o objetivo deste problema, pois, afinal, no estudo de estabilidade de um sistema, se a função de Lyapunov apresenta este comportamento, qual a conclusão que se deve chegar sobre a estabilidade? Além disso, devido à necessidade de se trabalhar com elevada precisão, somente após 74 iterações (1.94 Mflops) a solução é apontada como infactível; em [1], tal solução é determinada após apenas 9 iterações (0.03 Mflops). O mesmo se repete no último exemplo.

Os gráficos 2.1 a 2.9 representam os resultados obtidos com o método do subgradiente ótimo para os dois exemplos utilizados; os de 2.10 a 2.15 demonstram os resultados destes exemplos para a implementação feita em [1]. A tab.2.1 resume os dados com relação à norma do ganho, iterações e número de flops para os dois métodos. Observe o comportamento da norma e do tamanho do passo. No primeiro exemplo nota-se que as duas variáveis têm comportamento similar próximo ao ponto de cruzamento para a factibilidade. Já no exemplo infactível, a norma não diminui seu valor enquanto o passo tende a zero assintoticamente, tal qual o comportamento do valor da função. No terceiro exemplo, um comportamento inverso é obtido, levando, neste caso, à convergência.

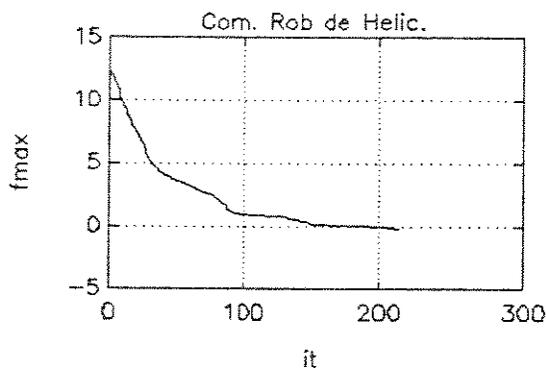


Gráfico 2.1

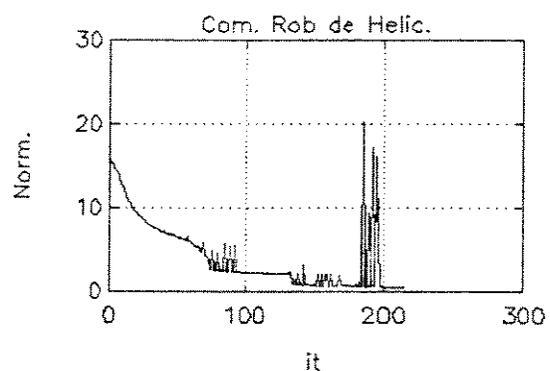


Gráfico 2.2

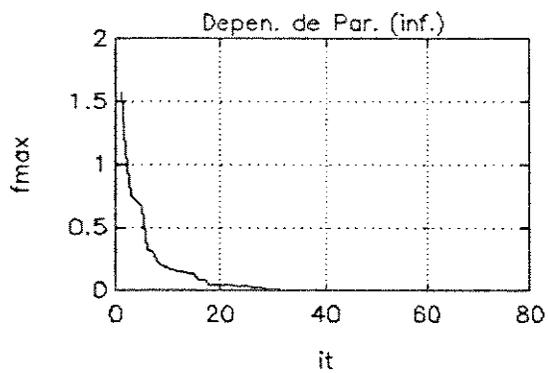


Gráfico 2.3

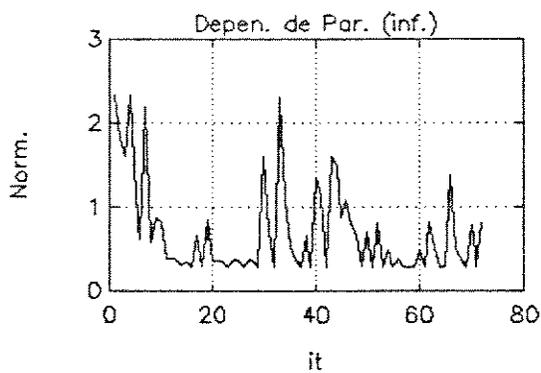


Gráfico 2.4

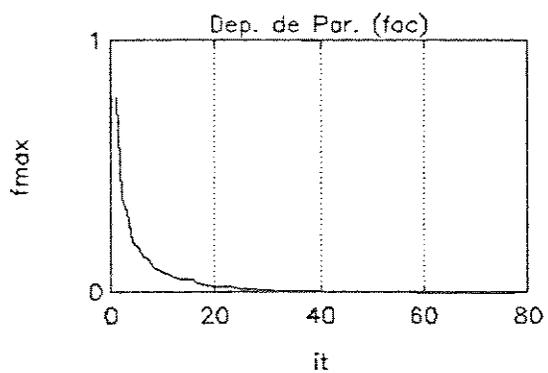


Gráfico 2.5

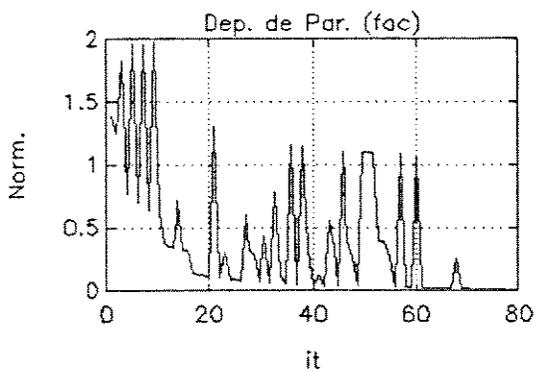


Gráfico 2.6

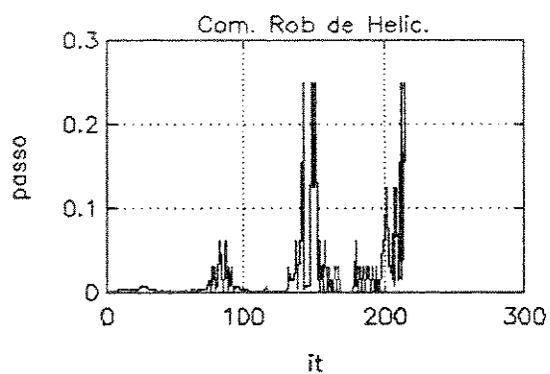


Gráfico 2.7

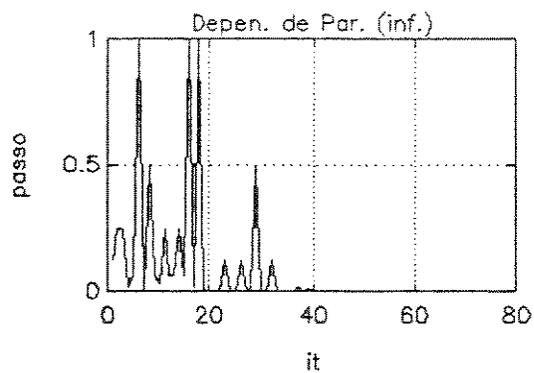


Gráfico 2.8

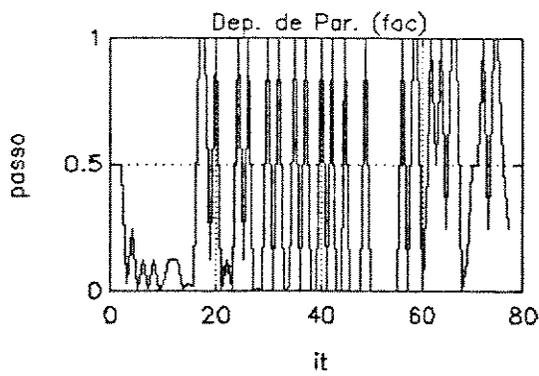


Gráfico 2.9

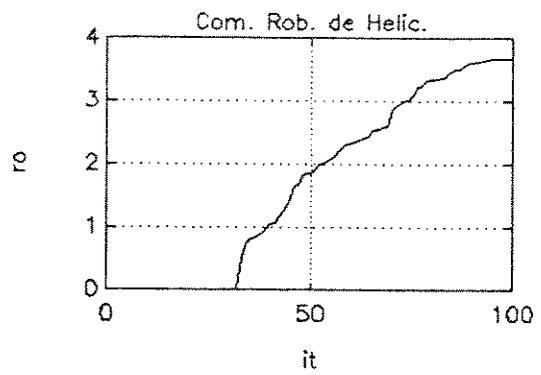


Gráfico 2.10

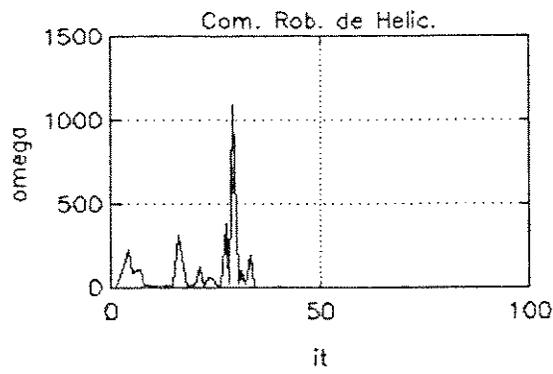


Gráfico 2.11

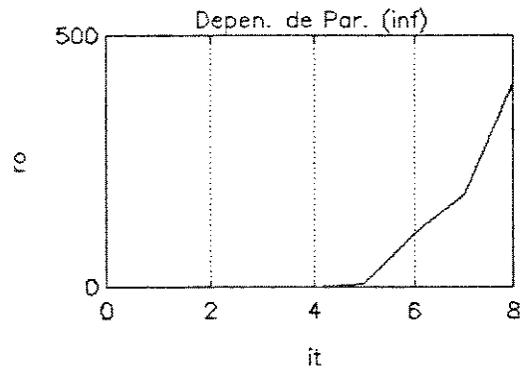


Gráfico 2.12

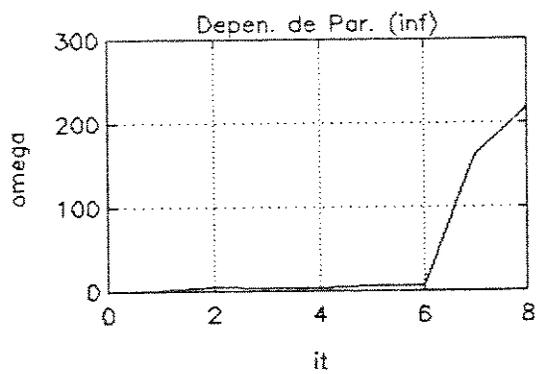


Gráfico 2.13

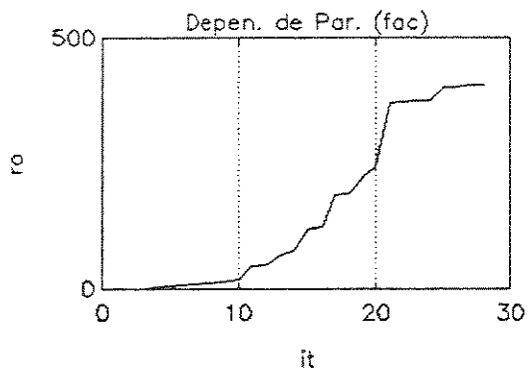


Gráfico 2.14

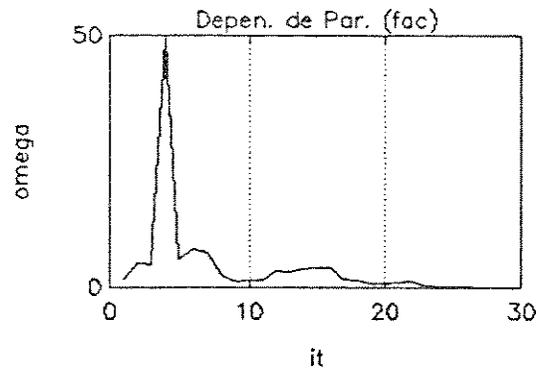


Gráfico 2.15

Após tais comparações, torna-se clara a superioridade do método adotado em [1] sobre o proposto neste Capítulo. A lenta convergência, as dificuldades associadas ao subproblema quadrático, à definição do tamanho do passo e o comportamento assintótico com relação a zero tornam este método, infelizmente, pouco competitivo com relação ao tipo planos de corte, quando aplicado à classe de problemas como (2.14) (ou (2.11)). Sendo assim, concluímos que para a continuidade de nossos estudos de robustez de sistemas incertos, particularmente para projetos envolvendo norma  $H_\infty$ , será adotado como método de otimização aquele implementado em [1].

## 2.5 Conclusão

No item anterior apresentamos a comparação entre o método do subgradiente ótimo e o proposto em [1], concluindo ser este último extremamente mais eficiente quando aplicado à classe de problemas como (2.14). Isto nos levou a optar por utilizá-lo nos desenvolvimentos que se seguem para o estudo da otimização de sistemas incertos utilizando norma  $H_\infty$ , mas não invalida a continuidade de estudos dos métodos de otimização não-diferenciável. A própria literatura citada aponta as dificuldades do método. Novos desenvolvimentos ([24],[11]) parecem apontar melhorias significativas dos resultados, particularmente quanto à convergência. Permanecem, no entanto, os problemas relacionados ao subproblema quadrático que se mostrou, em nosso desenvolvimento, o mais grave e de mais difícil solução, particularmente quando, em algumas iterações, a matriz  $Q$  (veja Apêndice A) torna-se mal condicionada. Uma questão em aberto neste Capítulo é quanto a solução do problema sujeito a restrições. Dado que nem mesmo o problema irrestrito teve comportamento adequado na solução do problema em estudo, optamos

por não implementar tal extensão. Uma boa referência neste caso é o método de duas fases, como apontado em [32]. Vale lembrar ainda que em [33], o problema em  $H_\infty$  para o caso de parâmetros determinados foi implementado utilizando-se um método de funções não-diferenciáveis baseado na penúltima referência citada.

O Capítulo a seguir se concentra em discutir o problema de otimização em  $H_\infty$ , tanto para sistemas de tempo contínuo quanto discreto, de parâmetros determinados ou incertos.

## Capítulo 3

# Otimização em $H_\infty$ : Proposição do Problema e Solução Teórica

### 3.1 Introdução

O problema de otimização via norma  $H_\infty$  foi inicialmente proposto em 1981 por George Zames em seu já clássico [48] com o objetivo de minimizar a sensibilidade associada ao máximo sinal de erro em resposta a uma entrada normalizada.

Os primeiros trabalhos apresentados (veja extensa bibliografia em [10,12,13]) estiveram ligados à busca da solução desta abordagem através de métodos utilizando teoria de operadores de variáveis complexas. As dificuldades de implementação computacional encontradas levaram à entrada em cena de resultados utilizando realizações no espaço de estados, mas que não se tornaram satisfatórios por envolverem a solução de várias equações tipo Riccati e produzirem controladores de alta ordem. Tais soluções compreendem o período 1983-87.

As soluções mais recentes estão centradas na busca da simplificação da implementação computacional, com vistas à popularização deste método de projeto. Assim, [10] exige a solução de duas equações tipo Riccati, uma associada ao problema de realimentação de estado, outra ao de estimação de estado. [35] generaliza esta solução utilizando metodologias de matriz pênsl e deslocamento de variáveis.

Neste Capítulo estamos particularmente interessados na solução do problema em  $H_\infty$  utilizando realimentação estática linear de estados, ou seja, considerando completo acesso a todos os estados a partir da entrada de controle aplicada. Além disso, o grau de informação existente sobre os parâmetros do modelo em questão não permite sua determinação precisa, mas apenas dizer que pertencem a um certo conjunto previamente estabelecido, caracterizando o que se denomina então de sistema com parâmetros incertos. Assim, soluções como em [10,22,23,31,36,37,42] e outras onde ou exige-se conhecimento preciso dos modelos do sistema em questão

(matrizes  $A$  e  $B$ ) ou a incerteza sobre seus valores é inserida de modo a simplesmente limitar sua excursão em torno de um ponto de operação ([23]) ou, ainda pior, admitem-se variações apenas na matriz  $A$  do sistema ([42]), não são aplicáveis ao problema como proposto. Ao contrário também das soluções citadas, no caso em estudo a lei de controle a ser determinada não deverá depender seja da matriz de dinâmica  $A$  seja da matriz de entrada  $B$ .

Este Capítulo é organizado como segue: a seção (3.2) relaciona o problema linear quadrático, sua versão freqüencial e o significado da abordagem em  $H_\infty$ . A seção (3.3) é concernente ao cálculo da norma de funções no espaço  $H_\infty$ . Na seção (3.4) define-se o problema de otimização para o caso de sistemas contínuos com parâmetros conhecidos, segundo a formulação de [31], [22] e [36]. A extensão para sistemas discretos é proposta na seção (3.5) e a formulação para sistemas incertos, tanto de tempo contínuo quanto de tempo discreto é objeto da última seção deste Capítulo.

## 3.2 Relação entre Problema Linear Quadrático e Norma $H_\infty$

Um dos tópicos centrais no desenvolvimento da teoria de controle utilizando variáveis de estado tem sido a otimização da performance do sistema em estudo segundo um dado índice de desempenho ou de custo, ou seja, a denominada Teoria de Controle Ótimo. O mais importante destes índices pela sua versatilidade é o índice quadrático, que deu origem ao chamado Problema Linear Quadrático (PLQ):

$$\text{Min } J = \int_0^\infty [x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t)] dt \quad (3.1)$$

$$\text{suj a } \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (3.2)$$

onde a expressão (3.2) representa o modelo do sistema em variáveis de estado (logo, restrições dinâmicas),  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de entrada de controle e as matrizes possuem dimensões compatíveis, sendo que  $Q = Q' \geq 0$  e  $R = R' > 0$  são matrizes de ponderação dos estados e da entrada de controle. A solução deste problema ([2] e [20]), considerando horizonte de tempo infinito, parâmetros invariantes no tempo e completamente determinados, é dada pela solução única  $P = P' > 0$  da conhecida equação algébrica de Riccati

$$PA + A'P - PBR^{-1}B'P + Q = 0 \quad (3.3)$$

que fornece um ganho de realimentação linear estática de estados na forma

$$\begin{aligned} u(t) &= -Kx(t) \\ &= -R^{-1}B'Px(t). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Exige-se para tal que o sistema seja de estado completamente controlável e observável. A propriedade estabilizante desta solução pode ser facilmente demonstrada, visto que em malha fechada

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \quad (3.5)$$

e podemos reescrever a equação algébrica de Riccati como

$$(A - BK)'P + P(A - BK) + PBR^{-1}B'P + Q = 0$$

ou

$$A_f'P + PA_f + Q_f = 0 \quad (3.6)$$

que é a equação de Lyapunov para o sistema em malha fechada e, portanto, a solução  $P = P' > 0$  desta é também a solução da equação de Riccati dada por (3.3). Logo, o sistema em malha fechada é assintoticamente estável.

A preocupação em estabelecer vínculos entre os projetos no domínio do tempo e da frequência levou à análise das características do PLQ numa abordagem entrada-saída. Assim, Kalman [21] demonstrou que, para sistemas tipo SISO, a solução do PLQ para realimentação estática de estados possui fortes características de robustez como margem de ganho infinita e margem de fase de  $60^\circ$ . Tal resultado foi estendido para o caso MIMO por Safonov e Athans em 1977, considerando variações em cada uma das entradas.

A versão freqüencial do PLQ foi apresentada em 1976 [47]. O modelo em estados foi redefinido de modo que

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t) \quad (3.7)$$

$$y(t) = Nx(t) \quad (3.8)$$

onde o sinal  $w(t)$  é a entrada de perturbação do sistema, contendo todos os sinais externos a ele, incluindo entrada de referência, ruídos de sensores, etc. A função de transferência entre a saída medida  $y(t)$  e a entrada de perturbação  $w(t)$  é dada por

$$G_A(s) = N(sI - A)^{-1}M \quad (3.9)$$

e iremos assumir que o sinal  $y(t)$  pertence ao espaço  $L_2[0, \infty]$  das funções vetoriais quadraticamente integráveis no intervalo  $[0, \infty]$ , tendo por norma

$$\|y(t)\|_2 = \left[ \int_0^\infty y(t)' y(t) dt \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.10)$$

Considerando realimentação estática de estados tal como anteriormente, teremos que

$$u(t) = -Kx(t) \quad (3.11)$$

e o modelo em malha fechada passa a ser dado por

$$\dot{x}(t) = A_f x(t) + M w(t) \quad (3.12)$$

$$y(t) = N x(t) \quad (3.13)$$

onde  $A_f = A - BK$  é a matriz do sistema em malha fechada de estados e a correspondente função de transferência torna-se

$$G(s) = N(s\mathbf{I} - A_f)^{-1}M. \quad (3.14)$$

Aplicando então um sinal impulso unitário à  $i$ -ésima entrada  $w_i(t)$  e considerando todas as demais nulas, obtemos a saída  $y_i(t)$  relativa apenas a esta entrada:

$$y_i(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ N(s\mathbf{I} - A)^{-1} M e_i \} \quad (3.15)$$

onde  $e_i$  é um vetor base que pondera a entrada aplicada e  $\mathcal{L}^{-1}\{\cdot\}$  é a transformada inversa de Laplace. A minimização da influência do distúrbio  $w_i(t)$  pode, portanto, ser colocada como um problema de minimizar a energia do sinal relativo a esta entrada, dada por:

$$J_i = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \|Y_i(j\omega)\|_2^2 d\omega. \quad (3.16)$$

Logo, a partir de (3.10)

$$\|y_i(t)\|_2^2 = \int_0^\infty y_i(t)' y_i(t) dt$$

e utilizando o Teorema de Parseval obtemos:

$$\int_0^\infty y_i(t)' y_i(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty Y_i(j\omega)' Y_i(j\omega) d\omega \quad (3.17)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \|Y_i(j\omega)\|_2^2 d\omega. \quad (3.18)$$

Ora, como foi aplicado um sinal impulso unitário, para  $s = j\omega$ , teremos que:

$$Y_i(j\omega) = G_i(j\omega) \quad (3.19)$$

onde  $G_i(j\omega) = N(s\mathbf{I} - A)^{-1} M e_i$ . Logo, de (3.16) - (3.19), o problema de minimizar a influência do distúrbio relativo à entrada  $w_i(t)$  passa a ser dado por:

$$\text{Min } J_i = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty G_i(j\omega)' G_i(j\omega) d\omega$$

ou seja, este índice de performance corresponde a minimizar a norma da função de transferência relativa à aplicação de uma única entrada  $w_i(t) = \delta(t) e_i$ .

Considerando a aplicação de tal sinal em todas as entradas, teremos, então, que o índice  $J$  passa a ser dado por:

$$\begin{aligned} \text{Min } J &= \sum_i J_i \\ &= \sum_i \frac{1}{\pi} \int_0^\infty G_i(j\omega)^* G_i(j\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sum_i G_i(j\omega)^* G_i(j\omega) d\omega \end{aligned}$$

e pela aplicação do Teorema de Parseval

$$\begin{aligned} \text{Min } J &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sum G_i(j\omega)^* G_i(j\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Tr} [G(j\omega)^* G(j\omega)] d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sum_i \|G_i(j\omega)\|_2^2 d\omega \\ &= \int_0^\infty \sum_i \|y_i(t)\|_2^2 dt \end{aligned} \tag{3.20}$$

ou seja, o valor do funcional  $J$  no domínio do tempo ou da frequência é o mesmo. Além disso (e este é o principal resultado), a minimização do funcional corresponde à minimização da influência sobre o sistema de cada uma das entradas de distúrbio  $w_i(t)$ . Observe também que, como:

$$Y(s) = G(s)W(s)$$

então, para  $s = j\omega$  e  $\omega$  arbitrário, mas fixo, teremos:

$$Y(j\omega) = G(j\omega)W(j\omega)$$

e logo

$$\|Y(j\omega)\|_2^2 = W^*(j\omega)G^*(j\omega)G(j\omega)W(j\omega).$$

Normalizando com relação a  $W(j\omega)$

$$\begin{aligned} \frac{\|Y(j\omega)\|_2^2}{\|W(j\omega)\|_2^2} &= \frac{W^*(j\omega)G^*(j\omega)G(j\omega)W(j\omega)}{W^*(j\omega)W(j\omega)} \\ &= \frac{\langle G(j\omega)W(j\omega), G(j\omega)W(j\omega) \rangle}{\langle W(j\omega), W(j\omega) \rangle} \\ &\leq \{\sigma_{\max}[G(j\omega)]\}^2 \end{aligned}$$

onde  $\sigma_{\max}(\cdot)$  representa o valor singular máximo da matriz  $G(j\omega)$ , dado, a partir do desenvolvimento anterior, por:

$$\sigma_{\max}[G(j\omega)] = \max_{\|W(j\omega)\|=1} \|Y(j\omega)\|_2 \quad (3.21)$$

considerando  $\omega$  fixo, porém arbitrário, como já colocado. O problema consiste então em minimizar a saída  $Y(\cdot)$  correspondente a um sinal de distúrbio  $W(\cdot)$  de espectro conhecido.

Assuma agora um problema inverso. Suponha que a única informação disponível a respeito do espectro do sinal de entrada seja que é limitado à unidade. Por exemplo, admita que seja pertencente a uma classe de sinais definida por um conjunto  $\mathcal{D}$  como

$$\mathcal{D} = \{W(j\omega) / W(j\omega) = W_2(j\omega)V(j\omega), \|V(j\omega)\|_2^2 \leq 1\}$$

sendo  $W_2(j\omega)$  interpretado como um filtro ou um gerador de entrada de distúrbios. Como agora não há um espectro de frequência conhecido, mas toda uma gama ampla de sinais, não temos como minimizar a influência do distúrbio utilizando o conhecimento do espectro e atuando através de seu sinal médio de frequência, como realizado anteriormente. Outra abordagem é necessária. Por exemplo, vamos aplicar toda a gama de sinais pertencentes à classe  $\mathcal{D}$ , em seguida verificar qual destes irá proporcionar o maior nível de distúrbios e então minimizar a influência da perturbação a partir deste sinal. Isto significará a busca do sinal mais perigoso ao sistema do ponto de vista de perturbação (ou seja, o “pior caso”) e, após, minimizar a energia associada a este sinal. Claramente, toda a influência desta classe de distúrbios aplicada será convenientemente minimizada de maneira conjunta. Em termos matemáticos, tal procedimento equivale a, considerando  $W_2(j\omega) = \mathbf{I}$ :

### 1. Busca do “pior caso”

$$J = \sup_{\|W(j\omega)\|_2 \leq 1} \max_{\omega \in \mathfrak{R}} \frac{\|Y(j\omega)\|_2}{\|W(j\omega)\|_2} \quad (3.22)$$

$$= \sup_{\omega \in \mathfrak{R}} \max \frac{\|Y(j\omega)\|_2}{\|W(j\omega)\|_2} \quad (3.23)$$

$$= \sup_{\omega \in \mathfrak{R}} \sigma_{\max}[G(j\omega)] \quad (3.24)$$

### 2. Minimização do “pior caso”

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & J \\ \text{suj a} & \text{estabilidade em malha fechada} \end{array} \quad (3.25)$$

Esta solução passou a ser conhecida na literatura como otimização via norma  $H_\infty$ , pois o item (1) anterior equivale à norma da função matricial complexa  $G(s)$  limitada no semiplano direito fechado e analítica no semiplano direito aberto, ou seja, à norma das funções  $G(s)$  assintoticamente estáveis, em uma terminologia de Teoria de Controle ou às funções  $G(s)$  pertencentes ao espaço de funções complexas  $H_\infty$ , em uma terminologia de Análise Funcional. Este problema pode ser enunciado da seguinte maneira:

“Minimizar a maior norma  $L_2[0, \infty]$  que a saída  $Y(s)$  possa ter em resposta a uma entrada  $W(s)$  correspondente ao pior sinal pertencente ao conjunto  $\mathcal{D}$  de sinais de entrada de perturbação que possa ser aplicado ao sistema em estudo.”

A restrição óbvia associada a sua solução é a estabilidade do sistema em malha fechada.

Este problema será então objeto de estudo das próximas seções deste Capítulo.

### 3.3 Métodos de Cálculo da norma $H_\infty$

Para a solução do problema de otimização em  $H_\infty$  como proposto, uma etapa fundamental é o cálculo da norma neste espaço. Dois métodos serão expostos a seguir. O primeiro faz uso direto da definição desta norma, como em (3.24). O segundo utiliza a matriz hamiltoniana associada ao sistema em estudo. Esta seção é baseada em [7], [10], e [34].

O primeiro método faz uso da definição de  $\|G(s)\|_\infty$ , aqui repetida por conveniência:

$$\|G(j\omega)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max} [G(j\omega)] \quad (3.26)$$

onde  $\sigma_{\max}(\cdot)$  é o máximo valor singular de  $(\cdot)$ . Tal valor pode ser encontrado também através do diagrama de Bode dos valores singulares máximos correspondentes a cada frequência  $\omega$ . A norma infinita será o *supremum* de todos estes valores. O algoritmo a seguir implementa este método.

**Algoritmo 3.1** *Cálculo da norma  $H_\infty$  utilizando a definição da norma*

**Dados** : Modelo do sistema em variáveis de estado:  $A, B, C$ ; ganho estabilizante  $K$ , de modo que  $A_f = (A - BK)$  seja assintoticamente estável.

**passo 1** : Determinar os limites inferior e superior de modo que

$$\begin{aligned} \omega_{\min} &= \min |\lambda(A_f)| \\ \omega_{\max} &= \max |\lambda(A_f)| \end{aligned}$$

**passo 2** : *Encontrar*

$$\|G(s)\|_\infty = \max_{\omega \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]} \sigma_{\max} \left[ G(-j\omega \mathbf{I} - A_f)' G(j\omega \mathbf{I} - A_f) \right] \quad \square.$$

A segunda solução, mais elegante, é encontrada em [10]. Ela se baseia em determinar o mínimo valor de  $\gamma$  para o qual a matriz hamiltoniana associada à equação tipo Riccati

$$A'X + XA + \gamma^{-2}XBB'X + C'C = 0 \quad (3.27)$$

não possua autovalores no eixo imaginário do plano complexo  $\mathbb{C}$ . Como será demonstrado na seção 3.4 deste capítulo, a esta equação está associado um limitante superior para a norma  $H_\infty$  da função de transferência

$$G(s) = C(s\mathbf{I} - A_f)^{-1}B \quad (3.28)$$

Para tal, exigir-se-á que o par  $(A, C)$  seja observável e que o par  $(A, B)$  seja estabilizável. O Lema a seguir unifica tais questões e dá origem ao algoritmo de cálculo apresentado logo após.

**Lema 3.1** *Seja a matriz hamiltoniana*

$$H = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2}BB' \\ -C'C & -A' \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

onde  $A$  é estável e  $\gamma > 0$ . Então, as seguintes condições são equivalentes:

1.  $\|G(j\omega)\|_\infty \leq \gamma$ .
2.  $H$  não possui autovalores no eixo imaginário.
3. A matriz  $X = X' > 0$  é solução da equação algébrica tipo Riccati dada em (3.27) associada a  $H$  se o par  $(A, C)$  for observável e o par  $(A, B)$  estabilizável  $\square$ .

**prova:** veja [10]  $\square$ .

A partir deste Lema, é possível construir um algoritmo para o cálculo da norma  $H_\infty$  de uma função complexa. Tal algoritmo é descrito abaixo.

**Algoritmo 3.2** *Cálculo da norma  $H_\infty$  utilizando a matriz hamiltoniana do sistema.*

**Dados** : Modelo do sistema em variáveis de estado:  $A, B, C$ ; ganho estabilizante  $K$ , de modo que  $(A - BK)$  seja assintoticamente estável;

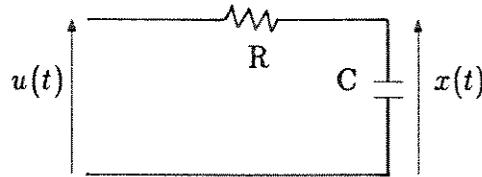


Figura 3.1: Exemplo 1

**passo 1** : Determinar limitantes inferior e superior para a norma  $H_\infty$ , de modo que  $\gamma_i \leq \|G(s)\|_\infty \leq \gamma_s$ , verificando se a matriz  $H$  possui ou não autovalores sobre o eixo imaginário.

**passo 2** : Determinar o valor máximo  $\gamma_\infty$  de modo que a matriz  $H$  não possua autovalores sobre o eixo imaginário para uma certa precisão  $\varepsilon$  pré-estabelecida; ou melhor, encontrar  $\gamma_\infty$  tal que o mínimo valor absoluto da parte real de  $H$  seja menor que  $\varepsilon$ .

**passo 3**  $\|G(s)\|_\infty = \gamma_\infty$   $\square$ .

A principal dificuldade desta implementação é a determinação dos limitantes. Os passos 1 e 2 baseiam-se em procedimentos de busca iterativa, mas, estabelecidos os limitantes (que são grosseiros), a função mínimo valor absoluto da parte real dos autovalores de  $H$  tem garantida a convergência para o ponto desejado.

A seguir serão apresentados dois exemplos, para a melhor compreensão do sentido desta norma.

**Exemplo 1:** Seja o circuito RC da figura 1, para o qual se deseja calcular a norma  $H_\infty$  da função de transferência entre a entrada  $u(t)$  e a saída  $y(t)$ . Definindo  $\tau = RC$ , o modelo em variáveis de estado passa a ser dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{1}{\tau} x(t) + \frac{1}{\tau} u(t) \\ y = x \end{cases}$$

sendo a matriz hamiltoniana dada por:

$$H = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau} & (\gamma\tau)^{-2} \\ -1 & \frac{1}{\tau} \end{bmatrix}$$

Calculando os autovalores:

$$\lambda \mathbf{I} - H = \begin{bmatrix} \lambda + \frac{1}{\tau} & -(\gamma\tau)^{-2} \\ 1 & \lambda - \frac{1}{\tau} \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda \mathbf{I} - H) = \lambda^2 - \left(\frac{1}{\tau}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) = 0$$

cujas raízes são dadas por:

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{\tau} \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$$

Logo, as seguintes situações são possíveis para  $\gamma \in \mathfrak{R}_+$ :

1.  $\gamma < 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$  e  $\Re\{\lambda_{1,2}\} = 0$
2.  $\gamma > 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} \in \mathfrak{R}$ .

Portanto, o máximo  $\gamma$  que minimiza o valor absoluto da parte real dos autovalores de  $H$  neste caso é dado por  $\gamma_\infty = 1$   $\square$ .

Exemplo 2: Considerando agora  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e o ganho estabilizante  $K$  como dados abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} -0.9896 & 17.4100 & 96.1500 \\ 0.2648 & -0.8512 & -11.3900 \\ 0 & 0 & -30.0000 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -97.78000 \\ 0 \\ 30.0000 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} -0.9411 & -1.1807 & -0.4046 \end{bmatrix}$$

teremos que  $H$  será dada por

$$H = \begin{bmatrix} (A - BK) & \gamma^{-2} B' B \\ -C' C & -(A - BK)' \end{bmatrix}$$

e utilizando o algoritmo 2 obtemos  $\gamma_\infty = 1.7799$   $\square$ .

É interessante observar que o método proposto, para o caso de sistemas com grandes dimensões, pode ser por demais trabalhoso, pois a matriz  $H$  é de ordem  $2n$ . Além disso, os limitantes  $\gamma_i$  e  $\gamma_s$  também podem se tornar críticos, fazendo o algoritmo se desenrolar de forma lenta. O primeiro método apresentado tem o inconveniente de exigir uma busca sobre  $\omega \in [0, \infty]$ .

### 3.4 Otimização de Sistemas Contínuos em $H_\infty$

Retornando agora à análise do problema em estudo, consideremos o modelo de um sistema como em (3.13), aqui repetido por conveniência:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Mw(t) \\ y(t) &= Nx(t)\end{aligned}\tag{SC}$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de entrada de controle,  $w(t) \in \mathbb{R}^l$  é o vetor de distúrbios e  $y(t) \in \mathbb{R}^r$  é a saída. As matrizes correspondentes são constantes (parâmetros completamente conhecidos e invariantes no tempo) e possuem dimensões apropriadas.

O problema padrão em  $H_\infty$  consiste em determinar uma lei de controle em realimentação de estados na forma

$$u(\cdot) = -K(s)x(\cdot)\tag{3.30}$$

(admitindo-se que todos os estados são disponíveis para realimentação) que, além de estabilizar assintoticamente em malha fechada de estados o sistema (SC) em estudo, garanta a minimização da maior norma  $\mathbf{L}_2[0, \infty]$  que a saída  $y(\cdot)$  possa ter em resposta a uma entrada de distúrbio  $w(\cdot)$  [13]. Observe, no entanto, que estamos admitindo que a saída medida seja o próprio vetor de estados (a menos de uma ponderação) e, além disso, interessados em obter o menor valor possível da norma  $H_\infty$  entre a saída  $y(\cdot)$  e a entrada  $w(\cdot)$ . Logo, uma motivação direta é a substituição da lei de realimentação dinâmica de estados como acima pela sua equivalente estática

$$u(t) = -Kx(t),\tag{3.31}$$

caso esta mudança não acarrete perdas nos objetivos prescritos pelo problema. Este resultado é estabelecido no Lema abaixo, sendo devido a [22].

**Lema 3.2** *Seja  $\gamma_d$  a mínima atenuação de distúrbios possível de ser obtida pelo sistema (SC) utilizando-se a lei de realimentação dinâmica de estados dada por (3.30); considerando-se todos os estados disponíveis para realimentação, seja então  $\gamma_e$  sua equivalente para o caso estático. Então, teremos que  $\gamma_e = \gamma_d$   $\square$ .*

A demonstração deste resultado, por demais extensa, pode ser encontrada em [22] ou [49]. Sua importância é clara, pois abre as portas da solução do problema em  $H_\infty$  utilizando-se somente realimentação estática de estados sem quaisquer perdas quanto à eficácia, desde que os estados sejam disponíveis para realimentação. Assim, este problema passa a ser definido como:

**Definição 3.1** ([31]) *O sistema (SC) é dito ser estabilizável com atenuação de distúrbios  $\gamma$  se existir uma lei de realimentação estática linear de estados como em (3.31), satisfazendo as seguintes exigências:*

1. A matriz  $A_f = A - BK$  seja estável, ou melhor, todos os autovalores desta matriz estejam em  $\mathbb{C}_-$ .
2. A matriz de função de transferência de malha fechada

$$G(s) \triangleq N(s\mathbf{I} - A_f)^{-1}M \quad (3.32)$$

deve satisfazer o limitante

$$\|G(s)\|_\infty \leq \gamma \quad (3.33)$$

sendo a norma  $H_\infty$  definida como

$$\|G(s)\|_\infty \triangleq \max_{\omega \in \mathbb{R}_+} \sigma_{\max}[G(j\omega)] \quad (3.34)$$

e  $\sigma_{\max}(\cdot)$  denota o valor singular máximo de  $G(\cdot)$ .  $\square$ .

O Lema a seguir estabelece a relação existente entre uma inequação algébrica tipo Riccati e a existência de um limitante  $\gamma$  à norma  $H_\infty$  da função de transferência  $G(s)$  dada em (3.32).

**Lema 3.3** *Seja  $\gamma > 0$  uma constante dada e considere que a desigualdade algébrica tipo Riccati a ele associada*

$$A_f'P + PA_f + \gamma^{-2}PMM'P + N'N \leq 0 \quad (3.35)$$

*admite uma solução  $P = P' > 0$  e que o par  $(A_f, N)$  é observável. Então  $A_f$  é assintoticamente estável e  $\|G(s)\|_\infty \leq \gamma$ .  $\square$ .*

prova: Primeiramente, iremos demonstrar que  $A_f = A - BK$  é estável assintoticamente. Observe que, a partir de (3.35) e fazendo

$$Q_f = \gamma^{-2}PMM'P + N'N \geq 0 \quad (3.36)$$

teremos que:

$$A_f'P + PA_f + Q_f \leq 0 \quad (3.37)$$

que é a expressão de Lyapunov em malha fechada associada a (SC). Como  $P = P' > 0$  é a solução da desigualdade dada por (3.35), também o é da expressão de Lyapunov associada. Se a matriz  $Q_f = Q_f'$  for definida positiva, então o sistema é assintoticamente estável em malha fechada; se  $Q_f$  for semidefinida positiva, considere  $x_i$  o  $i$ -ésimo autovetor de  $A_f$  associado ao autovalor  $\lambda_i$ , satisfazendo  $A_f x_i = \lambda_i x_i$ . Multiplicando (3.35) à direita por  $x_i$  e à esquerda por  $x_i^*$ , teremos:

$$x_i^* A_f' P x_i + x_i^* P A_f x_i + \gamma^{-2} x_i^* P M M' P x_i + x_i^* N' N x_i \leq 0$$

ou

$$2\Re\{\lambda_i\}x_i^*Px_i + \gamma^{-2}x_i^*PMM'Px_i + x_i^*N'Nx_i \leq 0$$

Para

$$\Re\{\lambda_i\}x_i^*Px_i = 0 \Rightarrow \gamma^{-2}x_i^*PMM'Px_i + x_i^*N'Nx_i \leq 0$$

Logo, este autovetor  $x_i$  de  $A_f$  está no espaço nulo da matriz  $N$ , ou seja,  $Nx_i = 0$ . Como o par  $(A_f, N)$  é observável, o autovalor  $\lambda_i$  correspondente à  $x_i$  é estável. Neste caso,  $\Re\{\lambda_i\} < 0$  e, portanto,  $A_f$  é assintoticamente estável.

Agora iremos demonstrar que a norma  $H_\infty$  da função de transferência de malha fechada admite um limitante superior. Para  $\omega \in \mathfrak{R}_+$ , adicione e subtraia  $j\omega P$  à equação (3.35) de modo que:

$$j\omega P - j\omega P + A_f'P + PA_f + \gamma^{-2}PMM'P + N'N \leq 0$$

ou

$$-(-j\omega\mathbf{I} - A_f)'P - P(j\omega\mathbf{I} - A_f) + \gamma^{-2}PMM'P + N'N \leq 0$$

Como  $A_f$  é assintoticamente estável, então  $(-j\omega\mathbf{I} - A_f)$  é inversível. Logo, pré-multiplicando por  $M'(-j\omega\mathbf{I} - A_f)^{-1}$  e pós-multiplicando por  $(j\omega\mathbf{I} - A_f)^{-1}M$  obtemos:

$$\begin{aligned} & -M'P(j\omega\mathbf{I} - A_f)^{-1}M - M'(-j\omega\mathbf{I} - A_f)^{-1}PM + \\ & \gamma^{-2}M'(-j\omega\mathbf{I} - A_f)^{-1}PMM'P(j\omega\mathbf{I} - A_f)^{-1}M + \\ & M'(-j\omega\mathbf{I} - A_f)^{-1}N'N(j\omega\mathbf{I} - A_f)^{-1}M \leq 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Definindo:

$$\begin{aligned} L(j\omega) & \triangleq M'P(j\omega\mathbf{I} - A_f)^{-1}M \\ L(-j\omega)' & \triangleq M'(-j\omega\mathbf{I} - A_f)^{-1}PM \end{aligned} \quad (3.39)$$

teremos, a partir de (3.32) e (3.38):

$$-L(j\omega) - L(-j\omega)' + \gamma^{-2}L(-j\omega)'L(j\omega) + G(-j\omega)'G(j\omega) \leq 0 \quad (3.40)$$

Lembrando que

$$\begin{aligned} & [\mathbf{I} - \gamma^{-2}L(-j\omega)']\gamma^2[\mathbf{I} - \gamma^{-2}L(j\omega)] = \\ & = \gamma^2\mathbf{I} - L(j\omega) - L(-j\omega)' + \gamma^{-2}L(-j\omega)'L(j\omega) \end{aligned}$$

e substituindo em (3.40)

$$G(-j\omega)'G(j\omega) \leq \gamma^2\mathbf{I} - [\mathbf{I} - \gamma^{-2}L(-j\omega)']\gamma^2[\mathbf{I} - \gamma^{-2}L(j\omega)] \quad (3.41)$$

e obtem-se

$$G(-j\omega)'G(j\omega) \leq \gamma^2 \mathbf{I} \quad (3.42)$$

Portanto:

$$\|G(j\omega)\|_\infty \leq \gamma \quad \square.$$

Já os próximos Lemas relacionam a existência de uma solução simétrica e definida positiva de uma inequação algébrica tipo Riccati e um limitante  $\gamma$  à norma  $H_\infty$  da função de transferência  $G(s)$  dada em (3.32). Primeiramente, iremos apresentar o lema abaixo, devido a [36], que será utilizado na demonstração do resultado que o segue.

**Lema 3.4** *Suponha que a matriz  $A_f$  abaixo seja estável. A desigualdade*

$$E'(-j\omega \mathbf{I} - A_f')^{-1} Q (j\omega \mathbf{I} - A_f)^{-1} E \leq \gamma^2 \mathbf{I} \quad (3.43)$$

*é verdadeira se e somente se existir uma solução  $X = X'$  da equação algébrica de Riccati*

$$A_f' X + X A_f - \gamma^{-2} X E E' X - Q = 0 \quad \square. \quad (3.44)$$

prova: Veja a referência citada e [44]  $\square$ .

**Lema 3.5** *Considere que o sistema (SC) acima é assintoticamente estável e possui  $\|G(j\omega)\|_\infty \leq \gamma$ . Então, a desigualdade algébrica tipo Riccati*

$$A_f' P + P A_f + \gamma^{-2} P M M' P + N' N \leq 0$$

*admite uma solução  $P = P' > 0$  para  $(A_f, N)$  observável  $\square$ .*

prova: A partir do Lema 3.4, conclui-se que existe  $T = T'$  solução de

$$A_f' T + T A_f = \gamma^{-2} T M M' T + N' N$$

pois  $G(s) = N(s\mathbf{I} - A_f)^{-1} M$  e a desigualdade do Lema é dada por

$$G(-j\omega)'G(j\omega) \leq \gamma^2 \mathbf{I} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M'(-j\omega \mathbf{I} - A_f')^{-1} N' N (j\omega \mathbf{I} - A_f)^{-1} M \leq \gamma^2 \mathbf{I}$$

Portanto, para  $P = -T$

$$A_f' P + P A_f + \gamma^{-2} P M M' P + N' N = 0$$

e, pela estabilidade de (SC), concluímos que  $T \leq 0 \Rightarrow P \geq 0$  e também

$$A_f' P + P A_f + \gamma^{-2} P M M' P + N' N \leq 0$$

Multiplicando à esquerda por  $x_i^*$  e à direita por  $x_i$ , sendo  $x_i$  um autovetor de  $A_f$  associado ao autovalor  $\lambda_i$  tal que  $A_f x_i = \lambda_i x_i$ , teremos:

$$x_i^* A_f' P x_i + x_i^* P A_f x_i + \gamma^{-2} x_i^* P M M' P x_i + x_i^* N' N x_i \leq 0$$

Se  $P x_i = 0 \Rightarrow N x_i = 0 \Rightarrow P A_f x_i = 0$ . Mas como o par  $(A_f, N)$  é observável, isto só será possível para  $x = 0$ . Logo,  $P$  é definida positiva  $\square$ .

**Teorema 3.1** *Seja dado  $\gamma > 0$  e considere que o par  $(A_f, N)$  é observável. Então, o sistema (SC) é assintoticamente estável com atenuação de distúrbios  $\gamma$  se e somente se a desigualdade algébrica tipo Riccati*

$$A_f W + W A_f' + W N' N W + \mu M M' \leq 0 \quad (3.45)$$

admitir uma solução  $W = W' > 0$ , onde  $\mu = \gamma^{-2}$   $\square$ .

prova: A suficiência é demonstrada utilizando o Teorema 3.3; a necessidade segue a partir do Teorema 3.5, ambos para  $W = P^{-1}$   $\square$ .

Note a importância deste resultado. Ele estabelece condições necessárias e suficientes para que um sistema como (SC) possa satisfazer a definição de estabilidade assintótica com nível prescrito de atenuação de distúrbios. Desde que seja encontrado um ganho  $K$  tal que as duas exigências da Definição 3.1 sejam satisfeitas, então o problema estará completamente solucionado. Este Corolário não aponta como determinar tal ganho. Além disso, como nosso objetivo central é o estudo de sistemas lineares com parâmetros incertos pertencentes a domínios convexos, é de extrema importância que este ganho não dependa das matrizes associadas à dinâmica do modelo em questão. Note também que este dilema é semelhante ao já colocado no Capítulo introdutório, quando revisamos os resultados de estabilidade quadrática derivados em [16]. Outras semelhanças podem ser apontadas. Veja o Teorema 1.1 daquele Capítulo. A convexidade de (3.45) com relação a  $W$  é uma delas. Do mesmo modo como no Corolário 1.1, podemos definir um conjunto, convexo, é óbvio, que sintetize em uma forma geométrica o resultado do Corolário acima. Por outro lado, observe que as expressões destes postulados são equivalentes, a menos de dois termos somados a (3.45) que levam a existência de um limitante superior à norma  $H_\infty$  de  $G(s)$ . De toda esta análise, surge então a proposta de generalizar os resultados encontrados no estudo de estabilidade quadrática, acrescidos da restrição de atenuação máxima permissível.

Assim, iremos transpor os Teoremas 3.3 e 3.5 para o caso de sistemas aumentados. Este resultado nos permitirá, como anteriormente no Capítulo 1, solucionar o problema de otimização em  $H_\infty$  para o caso de parâmetros conhecidos e, posteriormente, também para o de parâmetros incertos, uma vez que, graças à formulação aumentada adotada, o ganho a ser determinado será independente das matrizes de dinâmica do sistema.

**Teorema 3.2** *Seja dado  $\gamma > 0$ . Então o sistema (SC) é assintoticamente estabilizável com atenuação de distúrbios  $\gamma$  se e somente se a desigualdade algébrica tipo Riccati*

$$z^* [F\mathcal{W} + \mathcal{W}F' + \mathcal{W}R\mathcal{W} + \gamma^{-2}Q]z \leq 0 \quad (3.46)$$

admitir solução  $\mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq 0$  para todo  $z \neq 0 \in \{z \in \mathbb{R}^p / G'z = 0\}$ , onde

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} N'N & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} MM' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

pertencentes a  $\mathbb{R}^{p \times p}$  e  $W_1 = W_1' > 0$ . Existindo  $\mathcal{W}$ , o ganho será na forma

$$K = W_2'W_1^{-1} \quad \square \quad (3.48)$$

prova: Admitindo que existe  $\mathcal{W}$  nas condições exigidas de modo a solucionar (3.46). Desenvolvendo esta expressão obtemos:

$$AW_1 - BW_2' + W_1A' - W_2B' + W_1N'NW_1 + \gamma^{-2}MM' \leq 0$$

$$(A - BW_2'W_1^{-1})W_1 + W_1(A - BW_2'W_1^{-1})' + W_1N'NW_1 + \gamma^{-2}MM' \leq 0$$

Portanto, para  $K = W_2'W_1^{-1}$  e  $A_f = A - BK$ , vem que:

$$A_fW_1 + W_1A_f' + W_1N'NW_1 + \gamma^{-2}MM' \leq 0$$

e a partir do Teorema 3.3, para  $W_1 = W_1' > 0$ , a função de transferência de malha fechada  $G(s) = N(s\mathbf{I} - A_f)^{-1}M$  é tal que  $\|G(s)\|_\infty \leq \gamma$  e o sistema é assintoticamente estável. A suficiência está demonstrada. Admitindo-se agora que o sistema é assintoticamente estabilizável com atenuação de distúrbios  $\gamma$ . Então, para todo  $\omega \in \mathbb{R}_+$ , pelo Teorema 3.5,

$$M'(-j\omega\mathbf{I} - A_f)^{-1}N'N(j\omega\mathbf{I} - A_f)^{-1}M \leq \gamma^2\mathbf{I} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_fW_1 + W_1A_f' + W_1N'NW_1 + \gamma^{-2}MM' \leq 0$$

onde  $W_1 = W_1' > 0$ . Como  $A_f = A - BK$  teremos que

$$AW_1 - BKW_1 + W_1A' - W_1K'B' + W_1N'NW_1 + \gamma^{-2}MM' \leq 0$$

Logo, para

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} W_1 & W_1K' \\ KW_1 & ? \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times p}$$

e pela definição do sistema aumentado, além de  $R$  e  $Q$  dados em (3.47), obtemos

$$z^* [F\mathcal{W} + \mathcal{W}F' + \mathcal{W}R\mathcal{W} + \gamma^{-2}Q]z \leq 0.$$

pois todo  $z \neq 0 \in \{z \in \mathbb{R}^{p \times p} / G'z = 0\}$  é da forma  $z' = [x \ : \ 0]'$ . Finalmente, adicionando a restrição proposta pelo Comentário 1.2, a matriz  $\mathcal{W}$  deve ser tal que  $\mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq 0$ . A necessidade está concluída  $\square$ .

Observe que, como o Teorema 3.2 é uma generalização do Teorema 1.2 para o problema em  $H_\infty$ , o mesmo poderá ser realizado para o Corolário 1.2 consequência deste segundo. Ou seja, pode-se definir um conjunto  $\mathcal{C}_{A\gamma}$  das soluções de (3.46) que apresente as mesmas propriedades de  $\mathcal{C}_A$  definido no Corolário citado. Esta conclusão, de suma importância em nosso desenvolvimento, é formalizada pelo Corolário a seguir:

**Corolário 3.1** *Definindo o conjunto*

$$\mathcal{C}_{A\gamma} \triangleq \left\{ \mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq 0 / z^* \left[ F\mathcal{W} + \mathcal{W}F' + \mathcal{W}R\mathcal{W} + \gamma^{-2}Q \right] z \leq 0, \right. \\ \left. \forall z \neq 0 \in \mathbb{R}^p / G'z = 0 \right\} \quad (3.49)$$

teremos

1.  $\mathcal{C}_{A\gamma}$  é convexo;
2.  $\mathcal{C}_{A\gamma} \neq \emptyset$  se e somente se o par  $(A, B)$  for estabilizável com atenuação de distúrbios  $\gamma$   $\square$ .

prova: Para a demonstração do primeiro item, observe que todos os termos da restrição que define o conjunto são lineares em  $\mathcal{W}$ , com exceção do termo em  $R$ . Basta então provar que este é convexo com relação àquela matriz e toda a expressão o será. Sejam então  $\mathcal{W}^1$  e  $\mathcal{W}^2 \in \mathcal{C}_{D\gamma}$  e  $\mathcal{W} = \alpha\mathcal{W}^1 + (1 - \alpha)\mathcal{W}^2$ , para  $\alpha \in [0, 1]$ . Definindo  $g(\mathcal{W}) = \mathcal{W}R\mathcal{W}$ , teremos que:

$$\begin{aligned} g(\mathcal{W}) &= \mathcal{W}R\mathcal{W} \\ &= [\alpha\mathcal{W}^1 + (1 - \alpha)\mathcal{W}^2] R [\alpha\mathcal{W}^1 + (1 - \alpha)\mathcal{W}^2] \\ &\leq \alpha g(\mathcal{W}^1) + (1 - \alpha)g(\mathcal{W}^2) \end{aligned} \quad (3.50)$$

Logo,  $g(\mathcal{W})$  é convexa em  $\mathcal{W}$  e, portanto, o conjunto  $\mathcal{C}_{A\gamma}$  também o é.

O segundo item é uma visão geométrica do Teorema 3.2. Portanto, sua demonstração segue integralmente a deste Teorema  $\square$ .

Note, finalmente, que este Corolário é uma versão em dinâmica aumentada do Corolário 3.1 anterior, porém, sem que o conjunto  $\mathcal{C}_{A\gamma}$  possua a forma de um cone. O que se obtém disso é uma metodologia de cálculo do ganho  $K$  procurado, que atende aos requisitos de estabilização assintótica, atenuação máxima permissível e independência com relação às matrizes de parâmetros. A convexidade do resultado, por outro lado, abre caminho para a adoção de qualquer técnica

de programação matemática associada a esta qualidade do conjunto de restrições do problema, como, por exemplo, o já enfocado método do subgradiente ótimo ou o método dos planos de corte. O fato de não mais ser um cone nada restringe na utilização de qualquer uma destas metodologias numéricas.

### 3.5 Otimização de Sistemas Discretos em $H_\infty$

A extensão dos resultados da seção anterior para a classe de sistemas discretos é o fim desta. Tal tema muito recentemente tem sido objeto de publicações por parte de pesquisadores dedicados à solução do problema em  $H_\infty$  (veja [14,19]). Isto provavelmente se deve às dificuldades de solução deste problema, que somente há pouco foram (até certo ponto) vencidas com a utilização de métodos no espaço de estados no caso contínuo [10,35].

Considere então o modelo de um sistema discreto como abaixo:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bx(k) + Mw(k) \\y(k) &= Nx(k)\end{aligned}\tag{SD}$$

onde  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u(k) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de controle,  $w(k) \in \mathbb{R}^l$  é o vetor de distúrbios e  $y(k) \in \mathbb{R}^r$  é a saída. Como nesta seção trataremos apenas de sistemas com parâmetros conhecidos, as matrizes correspondentes são constantes e possuem dimensões apropriadas.

O problema em questão consiste em determinar uma lei de controle em realimentação estática de estados na forma

$$u(k) = -Kx(k)\tag{3.51}$$

que, além de estabilizar assintoticamente o sistema (SD) em malha fechada, garanta a minimização da maior norma  $\mathbf{L}_2[0, \infty]$  que a saída  $y(k)$  possa ter em resposta a uma entrada de distúrbios  $w(k)$ . Nossa hipótese para realimentação é considerar todos os estados acessíveis para medição, ou seja, estamos interessados em realimentação de estados.

Neste ponto, um cuidado maior deve ser tomado com relação às diferenças entre as definições de  $H_\infty$  para tempo contínuo e discreto. Para a classe de sistemas discretos,  $\mathbf{L}_2[0, \infty]$  é o espaço das funções vetoriais de somatória quadrada limitada no intervalo  $[0, \infty]$  e tendo por norma

$$\|y(k)\|_2 = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} [y(k)'y(k)] \right\}^{\frac{1}{2}}\tag{3.52}$$

O desenvolvimento realizado na seção (3.2) para demonstrar o relacionamento entre o PLQ contínuo e o problema em  $H_\infty$  torna-se então válido, *mutatis mutandis*,

sendo a norma no espaço  $H_\infty$  das funções matriciais complexas  $G(z)$  limitadas no exterior do círculo unitário fechado e analíticas no círculo unitário aberto, ou seja, das funções  $G(z)$  assintoticamente estáveis, dada por

$$\|G(z)\|_\infty = \max_{\omega \in [0, \pi]} \sigma_{\max} [G(e^{j\omega})] \quad (3.53)$$

onde  $\sigma(\cdot)$  corresponde ao valor singular máximo de  $(\cdot)$ .

Como pode-se observar, todo o desenrolar desta seção seguirá completamente a forma como realizada a anterior. Mas, infelizmente, nem todos os resultados terão uma tradução direta para a classe de sistemas discretos. A definição abaixo sintetiza os objetivos a serem alcançados para esta classe de sistemas.

**Definição 3.2** *O sistema (SD) é dito ser estabilizável com atenuação de distúrbios  $\gamma$  se existir uma lei de realimentação estática linear de estados como em (1.9), satisfazendo as seguintes exigências:*

1. A matriz  $A_f = A - BK$  seja estável, ou melhor, todos os autovalores de  $A_f$  estejam no interior do círculo unitário centrado na origem do plano complexo  $\mathbb{C}$ ;
2. A matriz de função de transferência de malha fechada

$$G(z) = N(zI - A_f)^{-1}M \quad (3.54)$$

deve satisfazer o limitante  $\|G(z)\|_\infty \leq \gamma$   $\square$ .

O Teorema a seguir é o equivalente discreto ao Teorema 3.3. Ele estabelece a relação entre uma equação algébrica tipo Riccati e um limitante  $\gamma$  à norma  $H_\infty$  da função de transferência dada em (3.54).

**Teorema 3.3** *Seja  $\gamma > 0$  uma constante dada e considere que a desigualdade algébrica tipo Riccati associada ao sistema (SD)*

$$A_f'PA_f - P + \gamma^{-2}PMM'P + N'N \leq 0 \quad (3.55)$$

*admite uma solução  $P = P' > 0$  e também que o par  $(A_f, N)$  é observável. Então  $A_f$  é assintoticamente estável e  $\|G(z)\|_\infty \leq \gamma$   $\square$ .*

prova: Primeiramente, vamos demonstrar que  $A_f = A - BK$  é estável assintoticamente. A partir de (3.55):

$$(A - BK)'P(A - BK) - P + \gamma^{-2}PMM'P + N'N \leq 0$$

Fazendo

$$Q_f = \gamma^{-2}PMM'P + N'N$$

teremos que

$$A_f'PA_f - P + Q_f \leq 0 \quad (3.56)$$

que é a expressão de Lyapunov em malha fechada associada a (SD). Como a matriz  $P = P' > 0$  é solução de (3.55), também é de (3.56). Portanto, se  $Q_f = Q_f'$  for definida positiva, então o sistema será assintoticamente estável em malha fechada; caso  $Q_f$  seja semidefinida positiva, considere  $x_i$  como sendo o  $i$ -ésimo autovetor de  $A_f$  associado ao autovalor  $\lambda_i$ , de modo que  $A_fx_i = \lambda_ix_i$ . Logo, multiplicando (3.55) à direita por  $x_i$  e à esquerda por  $x_i^*$ , obtemos:

$$x_i^*A_f'PA_fx_i - x_i^*Px_i + \gamma^{-2}x_i^*PMM'Px_i + x_i^*N'Nx_i \leq 0$$

$$(|\lambda_i|^2 - 1)x_i^*Px_i + \gamma^{-2}x_i^*PMM'Px_i + x_i^*N'Nx_i \leq 0$$

Se  $|\lambda_i| = 1$  então, para que a desigualdade seja verdadeira, teremos que:

$$\gamma^{-2}x_i^*PMM'Px_i + x_i^*N'Nx_i = 0$$

ou seja,  $Px_i = 0$  e  $Nx_i = 0$ . Logo, o autovetor se encontra no espaço nulo de  $N$ . Considerando então o par  $(A_f, N)$  observável, o autovalor  $\lambda_i$  deverá estar no interior do círculo unitário; logo, será estável e, portanto, a matriz  $A_f$  é assintoticamente estável.

A seguir iremos demonstrar que a norma  $H_\infty$  da função de transferência dada em (3.54) admite um limitante superior. Assuma então que (3.55) admite uma solução definida positiva  $P = P' > 0$  e considerando

$$z \in \mathbf{Z} \triangleq \{z = e^{j\omega}, \omega \in [0, \pi]\}$$

adicione e subtraia  $(A'Pz + z^{-1}PA)$  à (3.55) de modo que, após manipulações:

$$\begin{aligned} & -A'P(z\mathbf{I} - A) - (-z^{-1}\mathbf{I} - A)'PA - (-z^{-1}\mathbf{I} - A)'P(z\mathbf{I} - A) + \\ & + \gamma^{-2}PMM'P + N'N \leq 0 \end{aligned}$$

Multiplicando à direita por  $(z\mathbf{I} - A)^{-1}M$  e à esquerda pelo seu conjugado transposto:

$$\begin{aligned} & -M'(-z^{-1}\mathbf{I} - A')^{-1}A'PM - M'PA(z\mathbf{I} - A)^{-1}M - \\ & - M'PM + \gamma^{-2}M'(-z^{-1}\mathbf{I} - A')^{-1}PMM'P(z\mathbf{I} - A)^{-1}M + \\ & + M'(-z^{-1}\mathbf{I} - A')^{-1}N'N(z\mathbf{I} - A)^{-1}M \leq 0 \end{aligned} \quad (3.57)$$

Utilizando a identidade:

$$A(z\mathbf{I} - A)^{-1} = z(z\mathbf{I} - A)^{-1} - \mathbf{I}$$

e definindo:

$$\begin{aligned} L(z) &\triangleq zM'P(z\mathbf{I} - A)^{-1}M \\ L(-z^{-1}) &\triangleq -z^{-1}M'P(-z^{-1}\mathbf{I} - A)^{-1}M \end{aligned}$$

teremos, a partir de (3.54) e (3.57)

$$-L(-z^{-1})' + M'PM - L(z) + \gamma^{-2}L(-z^{-1})'L(z) + G(-z^{-1})'G(z) \leq 0$$

e, pela identidade

$$\begin{aligned} &[\mathbf{I} - \gamma^{-2}L(-z^{-1})]'\gamma^2[\mathbf{I} - \gamma^{-2}L(z)] = \\ &= \gamma^2\mathbf{I} - L(z) - L(-z^{-1})' + \gamma^{-2}L(-z^{-1})'L(z) \end{aligned}$$

obtemos que

$$G(-z^{-1})'G(z) \leq \gamma^2\mathbf{I} - [\mathbf{I} - \gamma^{-2}L(-z^{-1})]'\gamma^2[\mathbf{I} - \gamma^{-2}L(z)] - M'PM \quad (3.58)$$

Como  $P$  é, por hipótese, definida positiva, teremos finalmente

$$G(-z^{-1})'G(z) \leq \gamma^2\mathbf{I}$$

Definindo

$$\|G(z)\|_\infty = \max_{\omega \in [0, \pi]} \lambda_{\max} \left[ G(e^{-j\omega})'G(e^{j\omega}) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.59)$$

concluïremos que

$$\|G(z)\|_\infty \leq \gamma \quad \square.$$

Como ocorre em sistemas de tempo contínuo, este Teorema, apesar de sua significativa importância ao relacionar a existência de solução de uma desigualdade algébrica tipo Riccati e a propriedade de estabilizar com nível de atenuação prescrito um sistema discreto associado a esta expressão, não apresenta como encontrar um ganho que proporcione este resultado. Além disso, não é possível derivar no caso discreto o mapeamento reverso entre a propriedade apontada e a desigualdade, ou seja, a solução possui o caráter apenas de suficiência. Observe também que o termo desprezado em (3.58) indica uma distância mínima entre a norma  $H_\infty$  realmente encontrada e o valor  $\gamma$  desejado. Ou seja, a versão discreta do problema em  $H_\infty$  não fornece uma extensão completa tanto dos resultados anteriores para

o caso contínuo quanto, e mais interessante, dos próprios resultados para sistemas discretos considerando somente a restrição de estabilização. Lembremos que, no Capítulo introdutório, ao abordarmos a estabilização de sistemas discretos, os resultados derivados foram sempre de caráter suficiente e necessário.

De qualquer modo, há interessantes semelhanças entre os dois resultados, as mesmas já colocadas entre os Teoremas 1.2 e 3.3 e 3.5 no caso contínuo. A convexidade quanto à matriz  $W$  é seguramente a principal delas. Porém, da mesma forma como na seção anterior, passaremos a estender os resultados do Capítulo 1, de modo a formular o problema em uma versão de sistemas de dinâmica aumentada e, assim, poderemos determinar um ganho  $K$  que atenda aos requisitos de projeto desejados, quais sejam, estabilização com nível prescrito de atenuação de distúrbios e ganho independente das matrizes de parâmetros do sistema.

O Teorema a seguir representa, então o principal resultado desta seção. É uma extensão do Teorema 3.3 para a formulação em sistemas aumentados.

**Teorema 3.4** *Assuma que seja dado  $\gamma > 0$ . Então o sistema (SD) é assintoticamente estabilizável com atenuação de distúrbios  $\gamma$  se a desigualdade algébrica tipo Riccati*

$$v' [FWF' - W + WRW + \gamma^{-2}Q] v \leq 0 \quad (3.60)$$

admitir solução  $W = W' \geq 0$  para todo  $v \neq 0 \in \{v \in \mathbb{R}^p / G'v = 0\}$ , sendo  $W$  definida como

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix}$$

para  $W_1$  simétrica e estritamente definida positiva e

$$R = \begin{bmatrix} N'N & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} MM' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Existindo  $W$ , o ganho estabilizante  $K$  é dado por

$$K = W_2'W_1^{-1} \quad \square. \quad (3.62)$$

prova: Desenvolvendo (3.60) obtemos

$$A_f W_1 A_f' - W_1 + W_1 N' N W_1 + \gamma^{-2} M M' \leq 0$$

onde  $A_f = A - BK$ ,  $K = W_2'W_1^{-1}$  e as passagens intermediárias não apresentadas seguem da demonstração do Teorema 1.5. Primeiramente iremos demonstrar o caráter estabilizante da solução. Pelo Teorema 3.3, fazendo  $Q_f = W_1 N' N W_1 + \gamma^{-2} M M'$ , então  $(A, B)$  é estabilizável se  $Q_f > 0$  e  $W_1 = P^{-1} > 0$  de modo que

$$A_f' P A_f - P + Q_f \leq 0$$

Pelo Teorema 3.3, para que  $Q_f$  seja definida positiva, basta que o par  $(A_f, N)$  seja observável. A condição de nível máximo de atenuação de distúrbios segue também a partir do Teorema 3.3. Assim, para  $W_1 = W'_1 = P^{-1} > 0$ , a norma  $H_\infty$  da função de transferência  $G(z) = N(z\mathbf{I} - A)^{-1}M$  deve ser tal que  $\|G(z)\|_\infty \leq \gamma$   $\square$ .

Observe que, infelizmente e de modo diverso ao caso contínuo, as condições apresentadas por este teorema são apenas suficientes. Mas, apesar desta restrição, são extremamente poderosas, por permitirem a solução do problema discreto em  $H_\infty$  utilizando realimentação estática linear de estados tanto para a abordagem de parâmetros conhecidos quanto para parâmetros incertos, como será visto na seção seguinte.

O Corolário a seguir fecha esta seção, sendo a versão acrescentada da restrição em  $H_\infty$  do Corolário 1.4.

**Corolário 3.2** *Defina o conjunto*

$$\mathcal{C}_{DA\gamma} \triangleq \left\{ \mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq 0 / v^* [F\mathcal{W}F' - \mathcal{W} + \mathcal{W}R\mathcal{W} + \gamma^{-2}Q] v \leq 0, \right. \\ \left. \forall v \neq 0 / G'v = 0 \right\} \quad (3.63)$$

Então, as seguintes afirmativas a seu respeito são válidas:

1.  $\mathcal{C}_{DA\gamma}$  é convexo;
2. Se  $\mathcal{C}_{DA\gamma} \neq \emptyset$ , então o par  $(A, B)$  é estabilizável com atenuação de distúrbios  $\gamma$   $\square$ .

prova: O primeiro item é demonstrado a partir do Corolário 3.1, considerando-se o termo quadrático em  $\mathcal{W}$ . O segundo é uma extensão do Teorema 3.4 para uma abordagem geométrica. Portanto, sua demonstração segue diretamente da realizada para aquele resultado  $\square$ .

Note que o conjunto  $\mathcal{C}_{DA\gamma}$  acima, ao contrário do seu equivalente citado acima, é somente um conjunto convexo, não possuindo a qualidade de ser um cone devido à forma quadrática de  $\mathcal{W}$  em (3.60). Nada se perde, porém e felizmente, com relação à força deste resultado no estudo de estabilizabilidade de sistemas com nível permissível de distúrbios, mesmo no caso incerto, como na seção seguinte será apontado. Finalizando, novamente graças à utilização da forma em sistemas aumentados, foi possível derivar um ganho  $K$  que garanta os requisitos de projeto como já apontados pela definição 3.2, além da independência com relação às matrizes de parâmetros. A convexidade do resultado encontrado terá importantes desdobramentos quanto à metodologia de solução do problema. Note que esta é a principal semelhança entre as soluções do caso contínuo e do caso discreto.

A abordagem em sistemas com parâmetros incertos pertencentes a domínios convexos é objeto da seção seguinte.

### 3.6 Otimização de Sistemas Dinâmicos Incertos em $H_\infty$ : casos contínuo e discreto

Esta seção é dedicada a estender os resultados das anteriores com relação a sistemas com parâmetros precisamente conhecidos para o nosso tema central, que é a otimização de sistemas incertos em  $H_\infty$ . Ao contrário da seção 1.4, não poderemos adotar aqui uma análise única com relação aos problemas contínuo e discreto, devido às diferenças encontradas entre as soluções quanto se acrescenta a restrição de nível máximo permissível de atenuação, como já apontado particularmente na seção 3.5.

Deste modo, considere o sistema incerto (SI) anteriormente definido na seção 1.4 e repetido aqui por conveniência.

$$\begin{aligned}\delta[x(t)] &= Ax(t) + Bu(t) + Mw(t) \\ y(t) &= Nx(t)\end{aligned}\tag{SI}$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de controle,  $w(t) \in \mathbb{R}^l$  é o vetor de distúrbios e  $y(t) \in \mathbb{R}^r$  é o vetor de saída. O operador  $\delta[\cdot]$  continua sendo definido como  $\delta[x(t)] = \dot{x}(t)$  para sistemas contínuos e  $\delta[x(t)] = x(t+1)$  para sistemas discretos. As matrizes de parâmetros  $A$  e  $B$  pertencem a conjuntos convexos poliedrais fechados como os do tipo  $\mathcal{D}_A$  e  $\mathcal{D}_B$ , respectivamente, definidos por (1.23) e (1.24).

A propriedade central a ser utilizada é quanto à possibilidade de investigar somente os modelos-vértices dos domínios convexos poliedrais considerados. Neste sentido, esta seção pode ser vista como uma extensão da seção 1.4, agora com a restrição de máximo valor da norma  $H_\infty$ . O que segue também pode ser encontrado em [17].

A aplicação das técnicas de otimização para o caso incerto somente nos últimos anos (a partir de 1987) veio a se tornar possível, principalmente para a estrutura de incertezas aqui considerada, conforme apontado na introdução geral deste trabalho. Particularmente para otimização em  $H_\infty$ , poucos trabalhos foram publicados concernentes a este enfoque de modelamento. Como também já apontado, para o problema discreto, principalmente, a literatura existente é ainda incipiente. Vamos iniciar nosso desenvolvimento, estabelecendo a definição do problema em  $H_\infty$  para o caso de sistemas incertos.

**Definição 3.3** ([23]) *O sistema (SI) é dito ser estabilizável com atenuação de distúrbios  $\gamma$  se existir uma lei de realimentação estática linear de estados na forma*

$$u(t) = -Kx(t)$$

*satisfazendo as seguintes exigências:*

1. Estabilizar quadraticamente o sistema (SI).
2. A matriz de função de transferência de malha fechada

$$G(s) \triangleq N(s\mathbf{I} - A_f)M$$

deve satisfazer o limitante

$$\|G(s)\|_\infty \leq \gamma$$

para todo  $A \in \mathcal{D}_A$  e todo  $B \in \mathcal{D}_B$ , sendo  $A_f = A - BK$  a matriz do sistema em malha fechada  $\square$ .

O Teorema a seguir fornece condições necessárias e suficientes para a solução do problema na forma como definida acima, para o caso de sistemas contínuos. É o principal resultado deste trabalho para esta classe de sistemas.

**Teorema 3.5** *O sistema contínuo (SI) é estabilizável quadraticamente com atenuação de distúrbios  $\gamma$  se e somente se existir uma matriz  $\mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq 0$  que satisfaça à desigualdade*

$$z^* [F_h \mathcal{W} + \mathcal{W} F_h' + \mathcal{W} R \mathcal{W} + \gamma^{-2} Q] z \leq 0 \quad h = 1 \cdots H \quad (3.64)$$

para todo  $z \neq 0 \in \{z \in \mathbb{R}^p / G'z = 0\}$ , onde

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} N'N & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} MM' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pertencentes a  $\mathbb{R}^{p \times p}$  e  $W_1 = W_1' > 0$ . Existindo  $\mathcal{W}$ , o ganho robusto estabilizante é dado por

$$K = W_2' W_1^{-1} \quad \square.$$

prova: A necessidade vem da generalização do Teorema 3.2 para todo o domínio convexo  $\mathcal{D}_F$ , em particular para os seus  $h$  vértices. Assim, se o sistema é quadraticamente estabilizável com atenuação mínima de distúrbios  $\gamma$ , então a desigualdade (3.64) será válida para todo  $h = 1 \cdots H$ .

A suficiência é similar à demonstração realizada para o Teorema 1.6 e é uma extensão do Teorema 3.2 para o problema incerto. Assim, assumindo que existe  $\mathcal{W}$  tal que (3.64) seja verdadeira, então, pelo Teorema 3.2, cada um dos  $h$  vértices é estável assintoticamente com atenuação de distúrbios  $\gamma$ . Resta apenas generalizar este resultado para todo o domínio  $\mathcal{D}_F$ . Deste modo, desenvolvendo os termos em (3.64) para  $\mathcal{W}$  particionada como acima, obtemos

$$(A_h - B_h K)W_1 + W_1(A_h - B_h K)' + W_1 N' N W_1 + \gamma^{-2} M M' \leq 0$$

onde  $K = W_2'W_1^{-1}$  é o ganho robusto. Pela convexidade do domínio  $\mathcal{D}_F$ , qualquer par  $(A, B) \in \mathcal{D}_F$  é dado pela combinação convexa

$$(A, B) = \sum_{h=1}^H \lambda_h (A_h, B_h), \quad \sum_{h=1}^H \lambda_h = 1$$

Logo,  $\forall F \in \mathcal{D}_F$ , temos que:

$$\begin{aligned} (A - BK)W_1 + W_1(A - BK)' + W_1N'NW_1 + \gamma^{-2}MM' &= \\ &= \sum_{h=1}^H \lambda_h \left[ (A_h - B_hK)W_1 + W_1(A_h - B_hK)' + \right. \\ &\quad \left. + W_1N'NW_1 + \gamma^{-2}MM' \right] \leq 0. \end{aligned}$$

e o sistema (SI) é quadraticamente estabilizável com atenuação de distúrbios  $\gamma$   $\square$ .

**Comentário 3.1** A importância deste resultado reside no mesmo sentido já anteriormente abordado para o problema apresentado no Capítulo 1. Ou seja, em lugar de verificarmos se todos os possíveis pares  $(A, B) \in \mathcal{D}_F$  satisfazem à condição de estabilidade quadrática com atenuação de distúrbios  $\gamma$ , iremos reduzir tal investigação apenas para os  $H$  modelos-vértices do poliedro convexo determinado pelo domínio  $\mathcal{D}_F$  de incerteza. As vantagens deste procedimento são evidentes e ele significa a extensão do Teorema 1.6 para o problema em  $H_\infty$  e do Teorema 3.2 para o caso incerto  $\square$ .

O Corolário abaixo traduz o Teorema anterior em uma forma geométrica, sendo também a extensão do resultado obtido no Corolário 1.5 quanto à estabilidade quadrática, porém, agora, adicionando a restrição em  $H_\infty$ .

**Corolário 3.3** *Defina o conjunto:*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{IC\gamma} &\triangleq \left\{ \mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq 0 \ / \ z^* [F_h \mathcal{W} + \mathcal{W} F_h' + \mathcal{W} R \mathcal{W} + \gamma^{-2} Q] z \leq 0, \right. \\ &\quad \left. \forall h = 1 \dots H \ \forall z \neq 0 \in \mathbb{R}^p \ / \ G' z = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Então as seguintes propriedades se estabelecem:

1.  $\mathcal{C}_{IC\gamma}$  é convexo;
2.  $\mathcal{C}_{IC\gamma} \neq \emptyset$  se e somente se o sistema (SI) for estabilizável quadraticamente com atenuação de distúrbios  $\gamma$   $\square$ .

prova: O primeiro item segue a partir da definição de conjunto convexo. Para  $\mathcal{W}^1$  e  $\mathcal{W}^2 \in \mathcal{C}_{IC\gamma}$ , seja então  $\mathcal{W} = \alpha\mathcal{W}^1 + (1-\alpha)\mathcal{W}^2$ . Como todos os termos das restrições que definem o conjunto são lineares em  $\mathcal{W}$ , com excessão do termo em  $R$ , deveremos somente demonstrar que este define uma função convexa com relação àquela matriz. Deste modo, pela demonstração do Corolário 3.1, concluímos diretamente que o conjunto  $\mathcal{C}_{IC\gamma}$  é convexo em  $\mathcal{W}$ .

Quanto ao segundo item, basta verificar que  $\mathcal{C}_{IC\gamma}$  é o conjunto das soluções  $\mathcal{W}$  associadas ao Teorema 3.5, ou seja, representa somente uma visão geométrica deste teorema  $\square$ .

A seguir, será abordado o mesmo problema para a classe de sistemas incertos discretos e, após, serão comentadas as diferenças existentes entre as duas definições de tempo na solução deste problema.

**Teorema 3.6** *O sistema discreto (SI) é estabilizável quadraticamente com atenuação de distúrbios  $\gamma$  se existir uma matriz  $\mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq 0$  que satisfaça à desigualdade*

$$v^* [F_h \mathcal{W} F_h' - \mathcal{W} + \mathcal{W} R \mathcal{W} + \gamma^{-2} Q] v \leq 0 \quad (3.65)$$

para  $\forall v \neq 0 \in \{v \in \mathbb{R}^p / G'v = 0\}$ , todo  $h = 1 \cdots H$  e sendo

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} N'N & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} MM' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pertencentes a  $\mathbb{R}^{p \times p}$  e  $W_1 = W_1' > 0$ . Existindo  $\mathcal{W}$ , o ganho robusto é dado por

$$K = W_2' W_1^{-1} \quad \square.$$

prova: Se a desigualdade (3.65) é válida para  $\mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq 0$  em cada um dos  $h$  vértices, então estes modelos são estabilizáveis com atenuação  $\gamma$ . Logo, resta somente estender este resultado para todo o domínio convexo de incertezas. Assim, basta verificar que qualquer par  $(A, B) \in \mathcal{D}_F$  é dado pela combinação convexa dos modelos-extremos. Pelo Teorema 1.7 e Lema 1.3:

$$\begin{aligned} v^* [F \mathcal{W} F' - \mathcal{W} + \mathcal{W} R \mathcal{W} + \gamma^{-2} Q] v &\leq \\ &\leq \sum_{h=1}^H \lambda_h v^* [F_h \mathcal{W} F_h' - \mathcal{W} + \mathcal{W} R \mathcal{W} + \gamma^{-2} Q] v \\ &< 0 \end{aligned}$$

e portanto o sistema é estabilizável quadraticamente com atenuação de distúrbios  $\gamma$  se existir  $\mathcal{W}$  como proposto, tal que (3.65) se verifique  $\square$ .

**Corolário 3.4** *Seja o conjunto*

$$C_{ID\gamma} \triangleq \left\{ \mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq 0 / v^* [F_h \mathcal{W} F_h' - \mathcal{W} + \mathcal{W} R \mathcal{W} + \gamma^{-2} Q] v \leq 0, \right. \\ \left. \forall h = 1 \dots H, \quad \forall v \neq 0 \in \mathbb{R}^p / G'v = 0 \right\}.$$

*de modo que as seguintes propriedades lhe sejam inerentes:*

1.  $C_{ID\gamma}$  é convexo;
2.  $C_{ID\gamma} \neq \emptyset$  então o sistema discreto (SI) é quadraticamente estabilizável com atenuação de distúrbios  $\gamma$   $\square$ .

prova: Com relação ao primeiro item, note apenas que as restrições que definem o conjunto possuem as mesmas características de linearidade com relação a  $\mathcal{W}$  que as do Corolário 3.3. A demonstração anterior é, portanto, integralmente válida neste caso.

O segundo item é uma visualização geométrica do Teorema imediatamente acima e, deste modo,  $C_{ID\gamma}$  é o conjunto das soluções  $\mathcal{W}$  a ele associadas  $\square$ .

**Comentário 3.2** Da mesma forma como ocorre no caso contínuo, o Teorema 3.6 generaliza os resultados de seu equivalente em parâmetros determinados para todo o domínio convexo. Além disso, abre margem para verificarmos se apenas os modelos-vértices do domínio de incerteza satisfazem as propriedades exigidas de estabilidade quadrática, nível máximo permissível de atenuação de distúrbios e ganho independente das matrizes de parâmetros, garantindo, no entanto, tais resultados para todos os modelos contidos no poliedro convexo  $\mathcal{D}_F$ . Apesar de ser um resultado somente suficiente, no caso discreto e de parâmetros incertos é único, pelo menos na literatura de conhecimento do autor deste trabalho. O “gap” existente que impede o caráter de necessidade destes resultados se deve às dificuldades para o mapeamento LQ- $H_\infty$  se tornar biunívoco no caso discreto. Resultados como os apresentados em [14] não se aplicam a nossa abordagem, por apresentarem uma estrutura não-linear para a definição do ganho  $\square$ .

## 3.7 Conclusão

Assim, finalizamos este Capítulo, onde estivemos centrados na resolução do problema de otimização em  $H_\infty$ , tanto para sistemas determinados quanto incertos, de tempo contínuo ou discreto. Procurou-se demonstrar relações entre os problemas LQ e  $H_\infty$ , definindo-se este último a partir da crítica ao primeiro e buscando entender seu significado de uma forma também intuitiva, a partir da idéia de minimizar a influência do sinal mais perigoso ao sistema. Foram apresentados

dois métodos de cálculo da norma  $H_\infty$ , um baseado na própria definição desta norma, outro utilizando a matriz hamiltoniana associada ao modelo do sistema em variáveis de estado.

No caso contínuo, condições necessárias e suficientes foram derivadas e o Corolário 3.3 abre margem para a solução do problema utilizando poderosas técnicas numéricas, como a proposta em [16]. No caso discreto, onde apenas condições suficientes foram obtidas, a mesma abordagem numérica será executada, com base no Corolário 3.4. Em ambos os enfoques de tempo, a convexidade é o ponto central para o sucesso dos resultados encontrados e, particularmente no caso incerto, é o que permite generalizar para todos os modelos contidos no domínio convexo de incertezas os resultados obtidos apenas com relação aos vértices deste poliedro. Além disso, devemos ressaltar também que os ganhos  $K$  determinados são, para as duas abordagens, independentes das matrizes de parâmetros  $A$  e  $B$ .

O próximo Capítulo é dedicado à discussão do algoritmo numérico utilizado e sua implementação para solucionar o problema de otimização em  $H_\infty$ .

# Capítulo 4

## Solução do Problema em $H_\infty$

### 4.1 Introdução

Seja o sistema linear contínuo incerto (SI) dado por:

$$\begin{aligned}\delta[x(t)] &= Ax(t) + Bu(t) + Mw(t) \\ y(t) &= Nx(t)\end{aligned}\tag{SI}$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de controle,  $w(t) \in \mathbb{R}^q$  é o vetor de perturbações e  $y(t) \in \mathbb{R}^r$  é o vetor de saída. O operador  $\delta[\cdot]$  é como definido na seção 1.4. As matrizes de parâmetros  $A$  e  $B$ , como anteriormente, pertencem a domínios convexos na forma de poliedros fechados e possuem dimensões adequadas ao problema.

O objetivo deste capítulo é a solução do problema de estabilizar quadraticamente o sistema incerto acima e garantir, ao mesmo tempo, uma atenuação de distúrbios maior que uma constante positiva  $\gamma$ . Esta solução foi determinada na seção 3.6, podendo ser formulada como

$$\begin{aligned}\min \quad & J(\mathcal{W}) \\ \text{suj a } & \mathcal{W} \in \mathcal{C}_{I\gamma}\end{aligned}\tag{P1}$$

onde o critério  $J(\cdot)$  deve ser tal que mantenha a convexidade do problema e o conjunto  $\mathcal{C}_{I\gamma}$  é como definido nos Corolários 3.3 (caso contínuo) e 3.4 (caso discreto).

Note que a formulação proposta para o problema está intrinsecamente relacionada à abordagem geométrica enfatizada no Capítulo anterior. A questão é, então, como transcrevê-la em uma forma implementável por um método numérico.

Analisando os corolários citados acima, podemos escrever (P1) como:

$$\begin{aligned} \min \quad & J(\mathcal{W}) & (P2) \\ \text{suja } & T'\Theta_h(\mathcal{W})T \leq 0 & h = 1 \cdots H \\ & \mathcal{W} \geq \epsilon \mathbf{I} \end{aligned}$$

onde  $T \in \mathbb{R}^{m \times p}$  é matriz geradora do espaço nulo de  $G'$  e  $\epsilon > 0$  deve ser suficientemente pequeno.

A generalidade desta definição do problema de estabilidade quadrática com nível prescrito de atenuação, válida tanto para o caso contínuo quanto para o discreto é a primeira observação a ser feita. A definição adequada de  $\Theta_h(\mathcal{W})$  irá diferenciar as duas abordagens de tempo. Note também que realmente as expressões acima respondem plenamente à questão posta anteriormente, ao traduzir a restrição geométrica de (P1) como um conjunto de restrições convexas perfeitamente implementáveis por um método de otimização que utilize a convexidade de (P2) como uma ferramenta essencial em sua performance. Além disso, ao exigirmos que  $\mathcal{W}$  seja definida positiva, estamos diretamente associando a  $W_1$  esta definição em sinal. Por outro lado, para  $\mathcal{W}$  nesta forma,  $\mathcal{C}_{I_\gamma}$  torna-se um conjunto convexo fechado. Observe finalmente que, como apontado pelos Comentários 3.1 e 3.2, teremos necessidade de investigar apenas a validade dos resultados nos  $H$  vértices do domínio poliedral de incertezas

$$\mathcal{D}_F = \left\{ F \in \mathbb{R}^{p \times p} / F = \sum_{h=1}^H \lambda_h F_h, \sum_{h=1}^H \lambda_h = 1, \lambda_h \geq 0 \right\}$$

graças a sua convexidade.

Para a solução do problema (P2) acima, duas técnicas emergem diretamente. A primeira é a exposta no Capítulo 2 deste trabalho para o caso de estabilizabilidade quadrática. Baseado na observação de que este problema pode ser escrito como

$$\min \max f(\mathcal{W})$$

poderíamos utilizar em sua solução técnicas de minimização de funções não-diferenciáveis, como já anteriormente apontado no Capítulo citado e realizado em [33]. Mas, devido aos problemas abordados na conclusão daquele Capítulo, esta parametrização não será utilizada e, sendo assim, a metodologia a ser adotada na solução deste problema será aquela proposta em [16] e implementada com sucesso em [1] para o problema de realimentação de saída.

Utilizando ao máximo a convexidade do problema, a cada iteração é gerado (como solução de um problema linear associado às restrições) um hiperplano separador entre o conjunto  $\mathcal{C}_{I_\gamma}$  das restrições presentes e a solução atual  $\mathcal{W}_\ell$ , que irá

fornecer a nova solução  $\mathcal{W}^*$ . Se  $\mathcal{W}^* \in C_{I\gamma}$ , então a solução ótima foi encontrada; se não, nova iteração é realizada e assim sucessivamente.

Este breve sumário do algoritmo utilizado serve simplesmente para apontar a utilização da técnica de planos de cortes nesta solução. O grupo de restrições que definem o conjunto  $C_{I\gamma}$ , na forma apresentada no problema (P2), constitui a função objeto do corte. Assim, observe que estas restrições podem ser escritas como:

$$T'\Theta_h(\mathcal{W})T \leq \varepsilon \mathbf{I} \Rightarrow \rho_h = \lambda_{\max} [T'\Theta_h(\mathcal{W})T] \leq \varepsilon \quad (4.1)$$

$$\mathcal{W} \geq \varepsilon \mathbf{I} \Rightarrow \rho_{H+1} = \lambda_{\max} (-\mathcal{W}) \leq \varepsilon \quad (4.2)$$

Note que a primeira restrição deve corresponder a

$$f_\Theta(\mathcal{W}) = \max_{h=1 \dots H} \rho_h = \max_{h=1 \dots H} \lambda_{\max} [T'\Theta_h(\mathcal{W})T] \leq \varepsilon \quad (4.3)$$

ou seja,

$$f_\Theta(\mathcal{W}) = \max_{h=1 \dots H} \lambda_{\max} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_{h_{11}}(\mathcal{W}) & \Theta_{h_{12}}(\mathcal{W}) \\ \Theta_{h_{21}}(\mathcal{W}) & \Theta_{h_{22}}(\mathcal{W}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

onde  $\mathbf{I}$  é uma matriz identidade de ordem  $n$  e  $\Theta_h(\mathcal{W})$  foi particionada de modo que  $\Theta_{h_{11}}(\mathcal{W})$  possua dimensão  $n \times n$ . Logo:

$$f_\Theta(\mathcal{W}) = \max_{h=1 \dots H} \lambda_{\max} \{ \Theta_{h_{11}}(\mathcal{W}) \}$$

Portanto, o sentido de se definir a matriz  $T$  não é outro que simplesmente um artifício matemático para trabalharmos somente com a partição  $\Theta_{h_{11}}(\mathcal{W})$  da função matricial  $\Theta_h(\mathcal{W})$ , que é aquela diretamente envolvida com os objetivos de estabilizabilidade quadrática e atenuação  $\gamma$ , como pode ser concluído a partir da demonstração do Teorema 3.5.

O cálculo do hiperplano suporte será desenvolvido nas duas próximas seções, nos casos contínuo e discreto. A seção 4.4 será dedicada ao desenvolvimento do algoritmo numérico que implemente a solução apresentada e o capítulo termina com as conclusões pertinentes.

## 4.2 Solução do Problema de Otimização em $H_\infty$ : caso contínuo

Primeiramente iremos nos dedicar ao cálculo dos planos de corte para o conjunto de restrições dado por (4.1), mas utilizando a notação proposta em (4.3) pelo

seu caráter generalizante. Além disso, devemos lembrar que, no caso contínuo, a função  $\Theta_h(\mathcal{W})$  é dada por

$$\Theta_h(\mathcal{W}) = F_h \mathcal{W} + \mathcal{W} F_h' + \mathcal{W} R \mathcal{W} + \gamma^{-2} Q$$

Seja então  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_0$  tal que

$$f_\Theta(\mathcal{W}_0)z_0 = T' \Theta_{h_0}(\mathcal{W}_0) T z_0$$

onde o vértice  $h = h_0$  é aquele associado à solução de (4.3) e  $z_0$  é um autovetor arbitrário de norma unitária associado ao autovalor máximo de  $T' \Theta_{h_0}(\mathcal{W}_0) T$ . Assim, pela definição de  $f_\Theta(\mathcal{W})$ , para todo  $\mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq 0$  teremos que:

$$f_\Theta(\mathcal{W}) \geq z_0' T' \Theta_{h_0}(\mathcal{W}) T z_0$$

Logo:

$$\begin{aligned} f_\Theta(\mathcal{W}) &\geq z_0' T' [F_{h_0} \mathcal{W} + \mathcal{W} F_{h_0}' + \mathcal{W} R \mathcal{W} + \gamma^{-2} Q] T z_0 \\ &= f_\Theta(\mathcal{W}_0) + z_0' T' [F_{h_0} (\mathcal{W} - \mathcal{W}_0) + (\mathcal{W} - \mathcal{W}_0) F_{h_0}' + \\ &\quad + \mathcal{W} R \mathcal{W} - \mathcal{W}_0 R \mathcal{W}_0] T z_0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

O Lema a seguir destaca um resultado que será utilizado tanto no caso contínuo quanto no discreto.

**Lema 4.1** *Sejam  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{W}_0$  matrizes arbitrárias e de mesma definição em sinal e  $R = R' \geq 0$ . Então a seguinte relação se assegura:*

$$\mathcal{W} R \mathcal{W} - \mathcal{W}_0 R \mathcal{W}_0 \geq \mathcal{W} R \mathcal{W}_0 + \mathcal{W}_0 R \mathcal{W} - 2\mathcal{W}_0 R \mathcal{W}_0 \quad \square. \quad (4.5)$$

prova: Como  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{W}_0$  possuem a mesma definição em sinal, podemos escrever que:

$$(\mathcal{W} - \mathcal{W}_0) R (\mathcal{W} - \mathcal{W}_0) \geq 0.$$

Logo, desenvolvendo a expressão acima, e somando e subtraindo  $\mathcal{W}_0 R \mathcal{W}_0$ , obtemos a expressão exigida  $\square$ .

Deste modo, a partir de (4.4):

$$\begin{aligned} f_\Theta(\mathcal{W}) &\geq f_\Theta(\mathcal{W}_0) + z_0' T' [F_{h_0} (\mathcal{W} - \mathcal{W}_0) + (\mathcal{W} - \mathcal{W}_0) F_{h_0}' + \mathcal{W} R \mathcal{W}_0 + \\ &\quad + \mathcal{W}_0 R \mathcal{W} - 2\mathcal{W}_0 R \mathcal{W}_0] T z_0 \end{aligned}$$

Escrevendo sob a forma de traço, utilizando propriedades deste<sup>1</sup> [40] e definindo

$$\vartheta_0 \triangleq T z_0 z_0' T' \quad (4.6)$$

obtemos

$$\begin{aligned} f_{\Theta}(\mathcal{W}) &\geq f_{\Theta}(\mathcal{W}_0) + \text{Tr}\left\{\vartheta_0 F_{h_0}(\mathcal{W} - \mathcal{W}_0) + \vartheta_0(\mathcal{W} - \mathcal{W}_0) F_{h_0}' + \right. \\ &\quad \left. + \vartheta_0 \mathcal{W} R \mathcal{W}_0 + \vartheta_0 \mathcal{W}_0 R \mathcal{W} - 2\vartheta_0 \mathcal{W}_0 R \mathcal{W}_0\right\} \\ &\geq f_{\Theta}(\mathcal{W}_0) + \text{Tr}\left\{\vartheta_0 F_{h_0}(\mathcal{W} - \mathcal{W}_0) + \vartheta_0 F_{h_0}'(\mathcal{W} - \mathcal{W}_0) + \right. \\ &\quad \left. + \vartheta_0 \mathcal{W}_0 R \mathcal{W} + \vartheta_0 \mathcal{W}_0 R \mathcal{W} - 2\vartheta_0 \mathcal{W}_0 R \mathcal{W}_0\right\} \\ &\geq f_{\Theta}(\mathcal{W}_0) + \text{Tr}\left\{2\vartheta_0 F_{h_0}'(\mathcal{W} - \mathcal{W}_0) + 2\vartheta_0 \mathcal{W}_0 R(\mathcal{W} - \mathcal{W}_0)\right\} \\ &\geq f_{\Theta}(\mathcal{W}_0) + \text{Tr}\left\{2\left(F_{h_0}' + R\mathcal{W}_0\right)\vartheta_0\right\}'(\mathcal{W} - \mathcal{W}_0) \\ &\geq f_{\Theta}(\mathcal{W}_0) + \left\langle \left[2\left(F_{h_0}' + R\mathcal{W}_0\right)\vartheta_0\right], (\mathcal{W} - \mathcal{W}_0) \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Note neste ponto que o hiperplano tangente a uma função  $f(a)$  em um ponto  $a = a_0$  é dado por [25]

$$H(a) = f(a_0) + \langle \chi, (a - a_0) \rangle \quad (4.8)$$

de modo que

$$f(a) \geq H(a) \quad (4.9)$$

sendo  $\chi$  um vetor pertencente ao conjunto  $\partial\varphi(a)$  dos subgradientes desta função no ponto considerado.

Logo, por simetria, a expressão do hiperplano suporte ou plano de corte a  $f_{\Theta}(\mathcal{W})$  em  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_0$  será dada por

$$f_{\Theta}(\mathcal{W}_0) + \langle Y_{\Theta}^0, (\mathcal{W} - \mathcal{W}_0) \rangle = 0 \quad (4.10)$$

onde

$$Y_{\Theta}^0 \triangleq 2\left(F_{h_0}' + R\mathcal{W}_0\right)\vartheta_0 \quad (4.11)$$

é, portanto, o subgradiente procurado.

---

<sup>1</sup> $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$

Utilizando a condição imposta por (4.3), desenvolvendo o produto interno e assumindo por simplicidade que  $\varepsilon = 0$ , obtemos:

$$f_\Theta(\mathcal{W}_0) + \langle Y_\Theta^0, \mathcal{W} \rangle - \langle Y_\Theta^0, \mathcal{W}_0 \rangle \leq 0$$

Assim:

$$\langle Y_\Theta^0, \mathcal{W} \rangle \leq \langle Y_\Theta^0, \mathcal{W}_0 \rangle - f_\Theta(\mathcal{W}_0) \quad (4.12)$$

Vamos avaliar esta última expressão. Desdobrando o primeiro termo do segundo membro:

$$\begin{aligned} \langle Y_\Theta^0, \mathcal{W}_0 \rangle &= \langle 2F'_{h_0} \vartheta + 2R\mathcal{W}_0\vartheta, \mathcal{W}_0 \rangle \\ &= 2 \operatorname{Tr} \{ \vartheta F'_{h_0} \mathcal{W}_0 + \vartheta \mathcal{W}_0 R \mathcal{W}_0 \} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Substituindo  $\vartheta$ , dado por (4.6), teremos que:

$$\begin{aligned} \langle Y_\Theta^0, \mathcal{W}_0 \rangle &= \operatorname{Tr} \{ T z_0 z_0' T' F'_{h_0} \mathcal{W}_0 + \mathcal{W}_0 F'_{h_0} T z_0 z_0' T' + \\ &\quad + T z_0 z_0' T' \mathcal{W}_0 R \mathcal{W}_0 + \mathcal{W}_0 R \mathcal{W}_0 T z_0 z_0' T' \} \\ &= z_0' T' [ F'_{h_0} \mathcal{W}_0 + \mathcal{W}_0 F'_{h_0} + \mathcal{W}_0 R \mathcal{W}_0 + \mathcal{W}_0 R \mathcal{W}_0 ] T z_0 \\ &= z_0' T' \{ F'_{h_0} \mathcal{W}_0 + \mathcal{W}_0 F'_{h_0} + \mathcal{W}_0 R \mathcal{W}_0 + \gamma^{-2} Q \} T z_0 + \\ &\quad + z_0' T' \{ \mathcal{W}_0 R \mathcal{W}_0 - \gamma^{-2} Q \} T z_0 \\ &= f_\Theta(\mathcal{W}_0) + z_0' T' \{ \mathcal{W}_0 R \mathcal{W}_0 - \gamma^{-2} Q \} T z_0 \end{aligned}$$

Levando em (4.12):

$$\langle Y_\Theta^0, \mathcal{W} \rangle \leq z_0' T' \{ \mathcal{W}_0 R \mathcal{W}_0 - \gamma^{-2} Q \} T z_0 \quad (4.14)$$

e, finalmente, substituindo  $\mathcal{W}$  como dado a partir de sua definição, obtemos

$$\begin{aligned} \langle Y_\Theta^0, \mathcal{W} \rangle &\leq x_0' \{ W_{10} N' N W_{10} - \gamma^{-2} M M' \} x_0 \\ &\leq \delta_{k_n} \end{aligned} \quad (4.15)$$

que evidencia o corte separador entre um valor inicial  $\mathcal{W}_0$  e uma solução melhorada  $\mathcal{W}$ , para o conjunto de restrições dadas por (4.1). Observe que este cálculo foi

conduzido tendo em vista unicamente o vértice  $h_0$  que mais pesadamente viola a restrição (4.1).

Restam os cortes relativos à restrição (4.2). Note, como dito anteriormente, que esta expressão leva a

$$\mathcal{W} \geq \varepsilon \mathbf{I} \Rightarrow W_1 \geq \varepsilon \mathbf{I} \quad (4.16)$$

para  $\varepsilon > 0$  dado. Assim, pelo desenvolvimento anterior, definindo:

$$f_{\mathcal{W}}(\mathcal{W}) = \lambda_{\max}(-\mathcal{W}) \quad (4.17)$$

e assumindo a existência de  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_0$  tal que  $\mathcal{W}_0 z_0 = f_{\mathcal{W}}(\mathcal{W}_0) z_0$ , onde, como anteriormente,  $z_0$  é o autovetor associado ao autovalor máximo de  $\mathcal{W}_0$ . Aplicando as propriedades do traço, obtemos a expressão do corte:

$$\langle Y_{\mathcal{W}}^0, \mathcal{W} \rangle < -\varepsilon \quad (4.18)$$

para

$$Y_{\mathcal{W}}^0 \triangleq -z_0 z_0' \quad (4.19)$$

Como será analisado na próxima seção, dadas as características do método numérico adotado, o corte ótimo em uma certa iteração  $\ell$  é dado pelo hiperplano suporte associado à restrição mais violada, ou seja:

$$f_{\text{corte}}^\ell = \max\{f_\Theta(\mathcal{W}), f_{\mathcal{W}}(\mathcal{W})\} \quad (4.20)$$

Algumas observações devem ser levantadas com relação ao desenvolvimento realizado:

i) O problema (P2) possui um problema “master” na forma

$$\min \|G(j\omega)\|_\infty \quad (P3)$$

$$\text{sujeito a } \mathcal{W} \in \mathcal{C}_{IC\gamma}$$

Note as diferenças entre (P2) e (P3). No primeiro deseja-se, como dito anteriormente, encontrar  $K$  de modo a garantir a estabilidade quadrática com nível máximo  $\gamma$  de atenuação de distúrbios do sistema incerto (SI) em estudo. O segundo trata do problema de encontrar a solução  $\|G(j\omega)\|_{\infty \min} = \gamma_{\min}$  ótima e um ganho  $K^*$  associado que a produza. Ou seja, busca-se determinar a mínima atenuação de distúrbios (ou a mínima norma  $H_\infty$ ) associada à estabilidade quadrática que o sistema (SI) pode possuir. Portanto, (P2) é um sub-problema de (P3), sendo sua solução (proposta pelo Teorema 3.5) para um  $\gamma$  prescrito, sub-ótima para este último problema. Uma sequência  $\gamma$ -iterativa de soluções de (P2) irá encontrar  $\gamma_{\min}$  solução de (P3), podendo-se adotar para tal um procedimento de busca dicotômica com relação à variável  $\gamma$ .

ii) A função objetivo  $J(\mathcal{W})$  do problema (P2) acima deve ser tal que mantenha a convexidade deste. Um outro critério que pode ser adicionado é a minimização do ganho  $K$  associado. Pelo desenvolvimento realizado para o cálculo dos planos de corte e baseado no Comentário 1.2 do Capítulo anterior, note que a seguinte sequência de desigualdades leva à definição de uma função com tais características:

$$W_3 = G' \mathcal{W} G \geq K W_1 K' \geq \varepsilon K K'$$

Escolhendo então  $J(\mathcal{W})$  como

$$J(\mathcal{W}) = \text{Tr}(W_1) + \varepsilon \text{Tr}(W_3) \quad (4.21)$$

obteremos  $\mathcal{W}$  conformada a um mínimo  $K$ . O termo em  $W_1$  é acrescentado de modo a melhorar a estabilidade numérica do algoritmo. Outras funções de custo podem ser propostas, relacionadas a outros critérios de otimização desejados, mas sempre devem ser convexas com relação aos elementos de  $\mathcal{W}$ .

iii) O conjunto convexo  $\mathcal{C}_{IC\gamma}$ , após os desenvolvimentos realizados, passa a ser definido como:

$$\mathcal{C}_{IC\gamma} \triangleq \{ \mathcal{W} = \mathcal{W}' \in \mathbb{R}^{p \times p} / \langle Y, \mathcal{W} \rangle \leq \delta, Y \in \Sigma_{UC} \} \quad (4.22)$$

onde

$$\Sigma_{UC} \triangleq \bigcup_{h=1}^{H+1} \Sigma_h \quad (4.23)$$

$$\Sigma_h \triangleq \left\{ Y = (2F_h + R\mathcal{W}) z z' \in \mathbb{R}^{p \times p} / G' z = 0, \right. \\ \left. \|z\| = 1 \right\}, \quad h = 1 \cdots H \quad (4.24)$$

$$\Sigma_{H+1} \triangleq \{ Y = -z z' \in \mathbb{R}^{p \times p} / \|z\| = 1 \} \quad (4.25)$$

$$\delta \triangleq \begin{cases} \delta_h = z' T' (\mathcal{W} R \mathcal{W} - \gamma^{-2} Q) T z, & \text{para } h = 1 \cdots H \\ \delta_{H+1} = \varepsilon \end{cases} \quad (4.26)$$

Portanto, o seguinte Algoritmo conceitual soluciona (P2), subproblema de (P3).

**Algoritmo 4.1 (conceitual)** Solução do problema (P2) de estabilização quadrática com nível prescrito de atenuação de distúrbios.

**Dados** : Sistema (SI), nível de atenuação máximo desejado, matriz  $W_0$ .

**passo 0** : Faça  $\ell = 1$ ;  $W_\ell = W_0$ .

**passo 1** : Determinar se  $W_\ell \in C_{IC\gamma}$ . Caso afirmativo, então  $W_\ell$  é solução; caso contrário, então alguma restrição associada a este conjunto está sendo violada; próximo passo.

**passo 2** : Cálculo do hiperplano separador entre  $W_\ell$  e  $C_{IC\gamma}$ , de modo que a nova solução  $W_{\ell+1}$  seja factível para o conjunto de restrições presentes, caso seja encontrada.

**passo 3** : Faça  $W_{\ell+1} = W_\ell$ ,  $\ell = \ell + 1$  e retorne ao passo 1  $\square$ .

Passemos então a resolver o Algoritmo proposto, de modo a torná-lo implementável. O passo 1 propõe determinarmos se a solução presente pertence ao conjunto das soluções do problema. Para tal, deveremos encontrar o valor das funções-restrições e verificar se estão preenchidas as condições exigidas, dadas em (4.1)-(4.2) e resumidas aqui como

$$\lambda_{\max} \{ \Theta_h(W) \} \leq \delta_h, \quad h = 1 \dots H + 1 \quad (4.27)$$

Em caso positivo, a solução ótima do problema (P2) foi encontrada. Em caso negativo, alguma restrição associada ao conjunto  $C_{IC\gamma}^\ell$  está sendo violada e deveremos calcular o hiperplano separador entre  $W_\ell$  e  $C_{IC\gamma}^\ell$ . Ora, observe que (4.22) define um conjunto de restrições lineares sobre os elementos de  $W$ , na forma

$$\langle Y, W \rangle \leq \delta \quad (4.28)$$

Sendo assim, o cálculo do hiperplano separador (ou da nova solução  $W_{\ell+1}$ ) pode ser interpretado como um subproblema linear, cuja função objetivo seja a própria função de custo do problema-macro, dada, como já analisado, por (4.21). Como esta última pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} J(W) &= \text{Tr}(W_1) + \varepsilon \text{Tr}(W_3) \\ &= c W_V \end{aligned}$$

onde  $W_V$  significa a matriz  $W$  em uma forma vetorial, o problema linear (PL) em questão na iteração  $\ell$  é definido por:

$$\begin{aligned} \min \quad & c W_V & (PL) \\ \text{sujeito a} \quad & \langle Y_i, W_V \rangle \leq \delta_i \quad i = 1 \dots \ell \end{aligned}$$

sendo  $Y_i \in \Sigma_{UC}$  dado em (4.23) e  $\delta_i$  definido em (4.26). Observe que o corte definido na iteração  $i$  representa uma restrição para todas as demais que a seguem.

Um Algoritmo implementável ([16]) é então apresentado:

**Algoritmo 4.2** Solução do Problema (P2) de estabilização quadrática com nível prescrito de atenuação de distúrbios.

**Dados** : Sistema (SI), nível de atenuação  $\gamma$  desejado, matriz  $W_0$ .

**passo 0** : Faça  $\ell = 1$ ;  $W_\ell = W_0$ .

**passo 1** : Determinar se  $W_\ell \in C_{IC\gamma}$ . Caso sim, então  $W_\ell$  é solução ótima; caso não, vá para o próximo passo.

**passo 2** : Resolva o seguinte problema linear:

$$\begin{aligned} \min \quad & c'W_v \\ \text{sujeito a} \quad & \langle Y_i, W_v \rangle \leq \delta_i \quad i = 1 \dots \ell \end{aligned}$$

**passo 3** : Faça  $W_\ell = W_{\ell+1}$ ,  $\ell = \ell + 1$  e retorne ao passo 1  $\square$ .

Algumas considerações quanto a este Algoritmo:

- i) O passo central em sua implementação é o problema linear associado. A tática aplicada à solução deste problema será determinante nas características de convergência do Algoritmo. Note que a cada iteração um novo conjunto de restrições estará sendo incorporado ao PL. Dada a sua importância, iremos comentar a metodologia empregada em item a parte, após a seção dedicada à análise do caso discreto.
- ii) Caso o PL possua solução, então o Algoritmo retorna ao primeiro passo; caso seja infactível, então o problema (P4) não admite solução e  $C_{IC\gamma} = \emptyset$ . Ou seja, a factibilidade de (P4) será detectada através da existência de solução no PL.
- iii) A solução  $W$  produz  $K = W_2'W_1^{-1}$  que torna o sistema (SI) estável quadraticamente com atenuação de distúrbios  $\gamma$ .

### 4.3 Solução do Problema de Otimização em $H_\infty$ : caso discreto

Em todos os desenvolvimentos anteriores realizados para o problema em  $H_\infty$  como em estudo, sempre se observou a extrema similaridade entre as análises de tempo discreto e tempo contínuo. No Capítulo 3, verificou-se que a solução discreta encontrada possui um “gap” de necessidade em sua formulação, devido às dificuldades para tornar o mapeamento LQ- $H_\infty$  biunívoco nesta classe de sistemas. Ou seja, o resultado determinado limita-se a ser suficiente para a solução

do problema de estabilizabilidade quadrática aliada a um nível prescrito de atenuação de distúrbios. Esta é a principal divergência, portanto, entre as soluções contínua e discreta. Por outro lado, o problema (P2) e o algoritmo 4.2, graças à generalidade que imprimem à abordagem feita, são válidos tanto para o problema discreto quanto para o contínuo. Deste modo, o ponto central deste tópico será o cálculo do plano de corte, segundo a linha já adotada na seção anterior. Note, no entanto, que apenas o desenvolvimento relativo à restrição (4.1) será realizado, uma vez que a restrição (4.2) é comum às duas análises de tempo e já teve o plano de corte associado calculado. Além disso, todas as definições estão sendo feitas com relação aos vértices do domínio convexo  $\mathcal{D}_F$  ao qual pertence (SI) e, utilizando o Corolário 3.4, generalizadas para todos os possíveis sistemas existentes neste domínio.

Considere, portanto, que no problema (P2), a função matricial  $\Theta_h(\mathcal{W})$  para o sistema (SI) discreto em sua versão de dinâmica aumentada seja definida por:

$$\Theta_h(\mathcal{W}) = F_h \mathcal{W} F_h' - \mathcal{W} + \mathcal{W} R \mathcal{W} + \gamma^{-2} Q \quad (4.29)$$

onde  $F_h$ ,  $R$  e  $Q$  são como anteriormente. Da mesma forma como no caso contínuo, seja então:

$$f_\Theta(\mathcal{W}_0)z_0 = T' \Theta_{h_0}(\mathcal{W}_0) T z_0$$

de modo que, para todo  $\mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq 0$ , teremos

$$f_\Theta(\mathcal{W}) \geq z_0' T' \Theta_{h_0}(\mathcal{W}) T z_0$$

Logo:

$$\begin{aligned} f_\Theta(\mathcal{W}) &\geq z_0' T' [F_{h_0} \mathcal{W} F_{h_0}' - \mathcal{W} + \mathcal{W} R \mathcal{W} + \gamma^{-2} Q] T z_0 \\ &\geq f_\Theta(\mathcal{W}_0) + z_0' T' [F_{h_0} (\mathcal{W} - \mathcal{W}_0) F_{h_0}' - (\mathcal{W} - \mathcal{W}_0) + \\ &\quad + \mathcal{W} R \mathcal{W} - \mathcal{W}_0 R \mathcal{W}_0] T z_0 \end{aligned}$$

Utilizando o Lema 4.1:

$$\begin{aligned} f_\Theta(\mathcal{W}) &\geq f_\Theta(\mathcal{W}_0) + z_0' T' [F_{h_0} (\mathcal{W} - \mathcal{W}_0) F_{h_0}' - (\mathcal{W} - \mathcal{W}_0) + \mathcal{W} R \mathcal{W}_0 + \\ &\quad + \mathcal{W}_0 R \mathcal{W} - 2\mathcal{W}_0 R \mathcal{W}_0] T z_0 \end{aligned}$$

ou, colocando sob a forma de traço e tendo  $\vartheta_0$  como definido em (4.6):

$$\begin{aligned}
f_{\Theta}(\mathcal{W}) &\geq f_{\Theta}(\mathcal{W}_0) + \text{Tr}\left\{\vartheta_0 F_{h_0}'(\mathcal{W} - \mathcal{W}_0) F_{h_0}' - \vartheta_0(\mathcal{W} - \mathcal{W}_0) + \vartheta_0 \mathcal{W} R \mathcal{W}_0 + \right. \\
&\quad \left. + \vartheta_0 \mathcal{W}_0 R \mathcal{W} - 2\vartheta_0 \mathcal{W}_0 R \mathcal{W}_0\right\} \\
&\geq f_{\Theta}(\mathcal{W}_0) + \text{Tr}\left\{F_{h_0}' \vartheta_0 F_{h_0}'(\mathcal{W} - \mathcal{W}_0) - \vartheta_0(\mathcal{W} - \mathcal{W}_0) + 2\vartheta_0 \mathcal{W}_0 R \mathcal{W} + \right. \\
&\quad \left. - 2\vartheta_0 \mathcal{W}_0 R \mathcal{W}_0\right\} \\
&\geq f_{\Theta}(\mathcal{W}_0) + \text{Tr}\left\{\left[F_{h_0}' \vartheta_0 F_{h_0}' - \vartheta_0 + 2\vartheta_0 \mathcal{W}_0 R\right](\mathcal{W} - \mathcal{W}_0)\right\} \\
&\geq f_{\Theta}(\mathcal{W}_0) + \left\langle \left[F_{h_0}' \vartheta_0 F_{h_0}' - \vartheta_0 + 2R \mathcal{W}_0 \vartheta_0\right], (\mathcal{W} - \mathcal{W}_0) \right\rangle
\end{aligned}$$

ou seja, o hiperplano de corte à função  $f_{\Theta}(\mathcal{W}_0)$  em  $\mathcal{W}_0$  é dado por

$$f_{\Theta}(\mathcal{W}_0) + \left\langle Y_{\Theta}^0, (\mathcal{W} - \mathcal{W}_0) \right\rangle = 0 \quad (4.30)$$

onde

$$Y_{\Theta}^0 \triangleq F_{h_0}' \vartheta_0 F_{h_0}' - \vartheta_0 + 2R \mathcal{W}_0 \vartheta_0 \quad (4.31)$$

é o subgradiente associado.

Desenvolvendo a expressão (4.30) e adicionando a condição imposta pela restrição (4.3), obtemos:

$$\left\langle Y_{\Theta}^0, \mathcal{W} \right\rangle \leq \left\langle Y_{\Theta}^0, \mathcal{W}_0 \right\rangle - f_{\Theta}(\mathcal{W}_0) \quad (4.32)$$

Calculando o produto interno indicado no lado direito da expressão:

$$\begin{aligned}
\left\langle Y_{\Theta}^0, \mathcal{W}_0 \right\rangle &= \left\langle (F_h' \vartheta F_h - \vartheta + 2R \mathcal{W}_0 \vartheta), \mathcal{W}_0 \right\rangle \\
&= \text{Tr}\left\{F_h' \vartheta F_h \mathcal{W}_0 - \vartheta \mathcal{W}_0 + \vartheta \mathcal{W}_0 R \mathcal{W}_0 + \mathcal{W}_0 R \mathcal{W}_0 \vartheta\right\}
\end{aligned}$$

Substituindo o valor de  $\vartheta$ :

$$\begin{aligned}
\left\langle Y_{\Theta}^0, \mathcal{W}_0 \right\rangle &= \text{Tr}\left\{F' T v_0 v_0' T' F \mathcal{W}_0 - T v_0 v_0' T' \mathcal{W}_0 + \right. \\
&\quad \left. + T v_0 v_0' T' \mathcal{W}_0 R \mathcal{W}_0 G + G \mathcal{W}_0 R \mathcal{W}_0 T v_0 v_0' T'\right\}
\end{aligned}$$

Após algumas manipulações, obtemos:

$$\left\langle Y_{\Theta}^0, \mathcal{W}_0 \right\rangle = v_0' T' \left\{ F \mathcal{W}_0 F' - \mathcal{W}_0 + \mathcal{W}_0 R \mathcal{W}_0 + \gamma^{-2} Q \right\} T v_0 +$$

$$\begin{aligned}
& + v_0' T' \{ \mathcal{W}_0 R \mathcal{W}_0 - \gamma^{-2} Q \} T v_0 \\
& = f_\Theta(\mathcal{W}_0) + v_0' T' \{ \mathcal{W}_0 R \mathcal{W}_0 - \gamma^{-2} Q \} T v_0
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Substituindo em (4.32):

$$\begin{aligned}
\langle Y_\Theta^0, \mathcal{W} \rangle & \leq v_0' T' \{ \mathcal{W}_0 R \mathcal{W}_0 - \gamma^{-2} Q \} T v_0 \\
& \leq x_0' \{ W_{10} N' N W_{10} - \gamma^{-2} M M' \} x_0 \\
& \leq \delta_{h_0}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

que evidencia a expressão do corte, sendo a equivalente discreta para (4.15). Observe que, tal como esta última, a expressão (4.34) determina um conjunto de restrições lineares sobre os elementos de  $\mathcal{W}$ .

O conjunto convexo de soluções  $\mathcal{C}_{ID\gamma}$  é dado agora por:

$$\mathcal{C}_{ID\gamma} \triangleq \{ \mathcal{W} \in \mathbb{R}^{p \times p} / \langle Y, \mathcal{W} \rangle \leq \delta, Y \in \Sigma_{UD} \} \tag{4.35}$$

onde

$$\Sigma_{UD} \triangleq \bigcup_{h=1}^{H+1} \Sigma_h \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_h \triangleq \{ Y = (F_h' v v' F_h - v v' + 2R \mathcal{W} v v') \in \mathbb{R}^{p \times p} / G' v = 0, \\
\|v\| = 1 \}, \quad h = 1 \dots H
\end{aligned} \tag{4.37}$$

$$\Sigma_{H+1} \triangleq \{ Y = -v v' \in \mathbb{R}^{p \times p} / \|v\| = 1 \} \tag{4.38}$$

$$\delta \triangleq \begin{cases} \delta_h = v' T' (\mathcal{W} R \mathcal{W} - \gamma^{-2} Q) T v, & \text{para } h = 1 \dots H \\ \delta_{H+1} = \epsilon \end{cases} \tag{4.39}$$

de modo que o algoritmo-solução irá determinar se  $\mathcal{W} \in \mathcal{C}_{ID\gamma}$ .

Todo o desenvolvimento anterior, *mutatis mutandis*, novamente é válido para o caso discreto, inclusive a função objetivo dada em (4.2), os Algoritmos 4.1 e 4.2 anteriores e os respectivos Comentários. A grande restrição é o caráter apenas suficiente da solução encontrada.

## 4.4 Implementação do Algoritmo

O objetivo central desta seção é a descrição da implementação realizada para a solução do problema P2, utilizando os caminhos propostos pelo respectivo Algoritmo.

A solução apresentada se baseia na utilização de um método tipo planos de corte. Uma breve descrição deste método irá auxiliar no entendimento da implementação. Tal descrição é baseada em [25].

Seja então o problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & c'x \\ \text{sujeito a} \quad & x \in S \end{aligned} \tag{4.40}$$

onde  $S$  é um conjunto convexo fechado e considere um polítopo  $\mathcal{P}_k$  que contenha  $S$ . O Algoritmo a seguir demonstra a aplicação do método à solução do problema acima.

### Algoritmo 4.3 ([25]) *Método dos Planos de Corte*

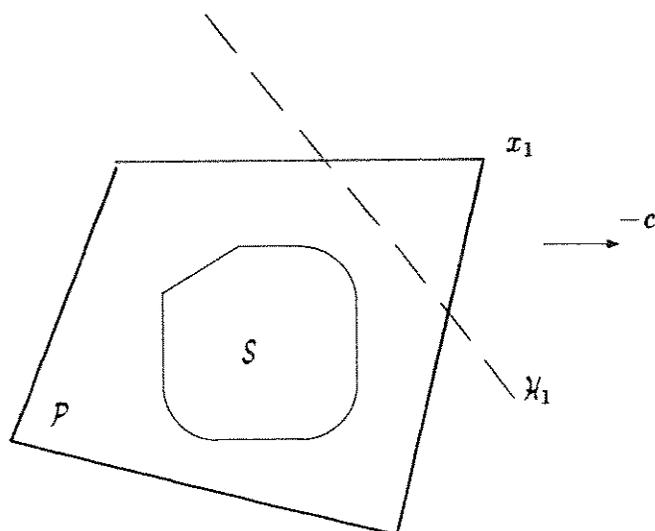
Dado :  $\mathcal{P}_k \supset S$ .

passo 1 : Minimizar  $c'x$  sobre  $\mathcal{P}_k$  obtendo um ponto  $x_k$  em  $\mathcal{P}_k$ . Se  $x_k \in S$ , então  $x_k^* = x_k$  é solução ótima; de outro modo, continue.

passo 2 : Encontre um hiperplano  $\mathcal{H}_k$  separador entre o ponto  $x_k$  e o conjunto  $S$ , ou seja, determine o hiperplano suporte ao conjunto  $S$  no ponto  $x_k$  de modo que  $S \subset \{x \mid a_k'x \leq b_k\}$  e  $x_k \in \{x \mid a_k'x > b_k\}$ , onde  $a_k$  e  $b_k$  são os coeficientes do hiperplano  $\mathcal{H}_k$ .

passo 3 : Atualize  $\mathcal{P}_k$ , incluindo o hiperplano suporte gerado no item anterior como uma nova restrição na forma  $a_k'x \leq b_k$ , de modo a obter  $\mathcal{P}_{k+1}$ . Retorne ao passo 1  $\square$ .

Observe que a cada iteração um novo conjunto de restrições determinado pelo hiperplano  $\mathcal{H}_k$  é acrescentado ao problema. Deste modo, cada nova solução  $x_{k+1}$  gerada é sempre factível e melhorada com relação às anteriores. O conjunto de soluções  $S$  ou é determinado (construído) pela intersecção de todos os hiperplanos  $\mathcal{H}_k$  gerados ou é determinado (encontrado) a partir do contínuo fatiar que cada iteração realiza sobre o polítopo  $\mathcal{P}_0$  inicial. Lembre-se que  $S$ , como um conjunto convexo, é a intersecção de todos os subespaços que o contém e, deste modo, a solução de (4.40) pode ser vista como a de um problema de programação linear tendo um conjunto infinito de restrições, os hiperplanos  $\mathcal{H}_k$  acima. Associado a

Figura 4.1: Corte relativo a  $\mathcal{H}_1$ .

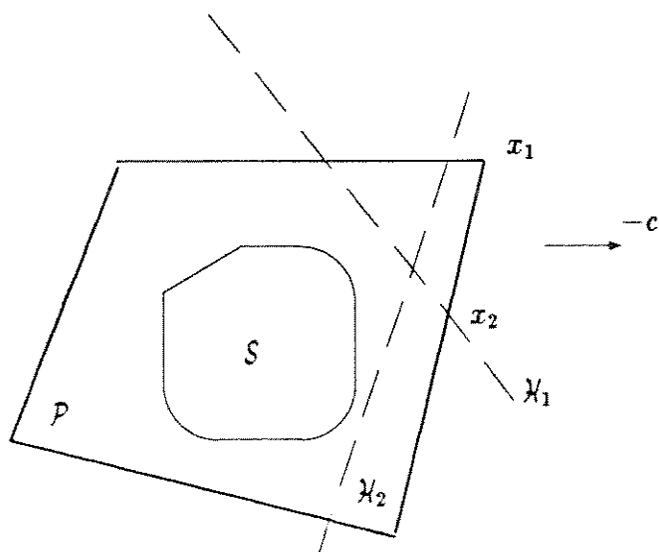
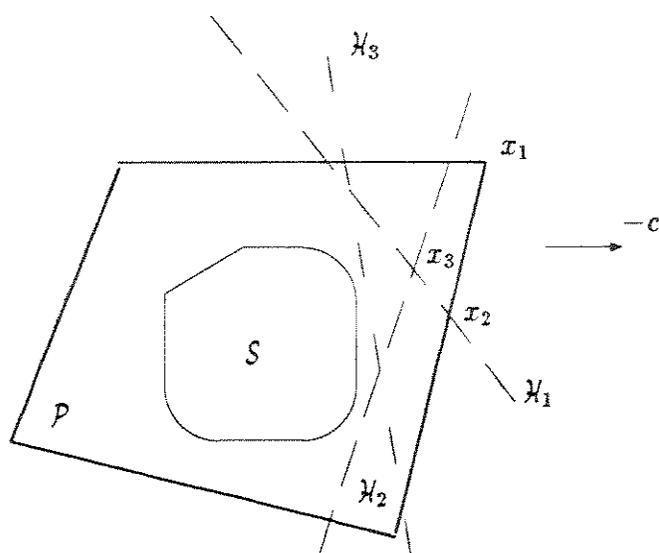
este problema linear, podemos definir um problema dual na forma

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in I} \lambda_i b_i \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{i \in I} \lambda_i a_i = c \\ & \lambda_i \geq 0 \quad i \in I \end{aligned}$$

onde  $I$  é o conjunto infinito dos índices dos subespaços  $\mathcal{H}_i$  que contém  $S = \{x \mid a_i'x \leq b_i, \quad i \in I\}$ . Um certo subconjunto finito  $I_k$  de  $I$  irá determinar o politopo  $P_k$  que contém o subconjunto  $S$  e uma solução  $\lambda_k$  factível para o problema dual acima mas não necessariamente ótima. O método dos planos de corte trabalha, portanto, em busca da otimalidade do problema dual linear associado à (4.40).

Da discussão anterior e do próprio Algoritmo apresentado na seção 4.2, note a importância do passo 2 dentro do desenrolar deste método. A determinação do hiperplano separador é o elemento fundamental no seu sucesso. A distância entre o hiperplano  $\mathcal{H}_{k+1}$  gerado e o ponto  $x_k$  corrente determina o que se denomina profundidade do corte associada a este hiperplano, ou seja, o quanto o politopo  $P_{k+1}$  irá se aproximar do conjunto de soluções  $S$  e, logicamente, qual será a velocidade de convergência do Algoritmo.

A seqüência de figuras 4.1 a 4.3 fecha este preâmbulo sobre o método dos planos de corte.

Figura 4.2: Corte relativo a  $H_2$ .Figura 4.3: Corte relativo a  $H_3$ .

Note, finalmente, que este método incorpora uma linearização implícita sobre a função convexa que determina o corte  $k$  em questão.

Após esta abordagem do método dos planos de corte, retornemos ao problema central deste trabalho, qual seja, o problema P2 da seção anterior e passemos a descrever a implementação realizada para sua solução. O Algoritmo abaixo explicita o caminho adotado. Note as relações com o anterior.

#### Algoritmo 4.4 Solução do Problema P2

Dados : Matriz  $F$  do sistema aumentado; dimensões  $n$  e  $m$  do sistema original; matrizes de ponderação do estado  $N$  e de ponderação dos distúrbios  $M$ ; nível de distúrbio  $\gamma$  máximo permitido.

passo 1 : Determinar  $Q_s$  e  $R_s$ :

$$Q_s = Q \quad e \quad R_s = \gamma^{-2}R.$$

passo 2 : Determinar a função objetivo desejada

$$J = cW_V$$

onde  $W_V$  é a matriz  $W$  transformada para uma forma vetorial.

passo 3 : Gerar um conjunto  $n_v$  de restrições, cada uma delas associada a um dos eixos do espaço de decisão dos elementos de  $W$ , sendo  $n_v$  o número de elementos diferentes desta matriz simétrica, dado, portanto, por

$$n_v = \frac{p(p+1)}{2}$$

onde  $p = n + m$  é a ordem de  $W$ .

passo 4 : Gerar, a partir do conjunto de restrições anteriores, uma base inicial factível  $V_B$  associada ao espaço dos elementos da matriz  $W$ . Isto corresponde à fase I da solução de um problema linear. Faça  $k = 1$ .

passo 5 : Solucione o problema linear abaixo:

$$\begin{aligned} \min \quad & cW_V^k \\ \text{sujeito a} \quad & LW_V^k \leq b \\ & W_V^k(1) \cdots W_V^k(r) \quad \text{irrestrito} \\ & W_V^k(r+1) \cdots W_V^k(n_v) \geq 0 \end{aligned} \tag{4.41}$$

tendo base inicial  $V_B^k$  e  $r = p(p-1)/2$  como o número de variáveis irrestritas, correspondentes aos elementos de  $\mathcal{W}$  fora da diagonal principal. O conjunto de índices-base associado à solução  $\mathcal{W}_{V_0}^k$  é a nova base  $V_B^{k+1}$  para a iteração seguinte.

passo 6 : Determine os hiperplanos de corte às restrições  $\Theta_h(\mathcal{W}^k) \leq \varepsilon$  e  $\mathcal{W}^k \geq \varepsilon$ ; de acordo com as seções anteriores, estes hiperplanos podem ser escritos como

$$\langle Y_{0_h}, \mathcal{W}^k \rangle \leq \delta_{0_h} \quad h = 1 \dots (H+1). \quad (4.42)$$

onde  $Y_{0_h}$  é o subgradiente associado às restrições em  $\mathcal{W}_0^k$  e  $\delta_{0_h}$  indica a profundidade do corte.

passo 7 : Determinar:

$$\Omega_M^k = \max_{i=1 \dots (H+1)} \langle Y_{0_i}, \mathcal{W}^k \rangle \quad (4.43)$$

passo 8 : Se  $\Omega_M^k < \varepsilon$ , pare: a solução  $\mathcal{W}^* = \mathcal{W}^k$  é ótima para o problema considerado e  $\mathcal{W}^* \in C_{I_\gamma}$ ; caso não, acrescente a restrição  $i^*$  correspondente a  $\Omega_M^k$  à matriz  $L$  de restrições e ao vetor  $b$ , faça  $k = k+1$  e retorne ao passo 5, solucionando o problema linear com base inicial  $V_B$   $\square$ .

Há uma série de pontos a serem examinados neste Algoritmo. Observe que o coração do procedimento encontra-se na seqüência iterativa de passos 5 a 8, que implementa o método dos planos de corte. Tal qual neste, a cada iteração o conjunto  $\mathcal{P}_k$  caminha na direção do conjunto solução  $C_{I_\gamma}$ , de modo que, se  $\mathcal{W}^k \in \mathcal{P}_k$  então ou  $\mathcal{W}^k \in C_{I_\gamma}$  e é a solução ótima ou  $\mathcal{W}^k \notin C_{I_\gamma}$  e pode-se escrever um hiperplano separador entre  $\mathcal{W}^k$  e  $C_{I_\gamma}$  tal que o novo conjunto  $\mathcal{P}_k$  atualizado com esta nova restrição esteja mais próximo do conjunto solução. Por isso, a base  $V_B^{k+1}$  é factível como inicial para a solução do problema linear na iteração  $k+1$  seguinte.

Outro ponto que merece destaque é quanto a profundidade do corte adotada. Observe, pelos passos 6, 7 e 8, que esta é sempre associada à restrição mais violada dentre o conjunto gerado no passo 6. Deste modo, garante-se a máxima profundidade, aumentando-se conseqüentemente a velocidade de convergência do Algoritmo.

A tática empregada na solução do problema linear apontado no passo 5 é outro ponto digno de nota e, sem dúvida, central no sucesso do Algoritmo como proposto. Primeiramente, vamos nos ater à fase I deste problema, passo 4 do Algoritmo, onde gera-se uma base inicial factível para o problema em consideração. É um problema

linear do tipo:

$$\begin{aligned}
 & \min && c\mathcal{W}_V \\
 & \text{suj a} && L\mathcal{W}_V \leq b \\
 & && \mathcal{W}_V(1) \cdots \mathcal{W}_V(r) \text{ irrestrito} \\
 & && \mathcal{W}_V(r+1) \cdots \mathcal{W}_V(n_v) \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

onde a matriz  $L$  determina restrições lineares associadas a cada um dos eixos do espaço dos elementos de  $\mathcal{W}$ . Como exemplo, para  $n = 2$  e  $m = 1$  (sistema tipo SISO de 2ª ordem):

$$L = \begin{bmatrix} -1.0 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 & 0 \\ 0 & -1.0 & 0 & -0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & -1.0 & 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0 \end{bmatrix}$$

Este problema é transformado para sua forma dual

$$\begin{aligned}
 & \min && b'\lambda \\
 & \text{suj a} && L'\lambda = c' \\
 & && \lambda \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

sendo esta solucionada por um método tipo simplex. Ou seja, o problema linear é colocado num *tableau* dual e este solucionado por um método primal. No exemplo em questão e considerando o vetor de custos como

$$c = \left[ \overbrace{0_{1 \times r} \quad 1_{1 \times p}}^{n_r} \right]$$

(ou seja, a função objetivo adotada é  $\text{Tr}\mathcal{W}$ ), a base inicial  $V_B$  a ser utilizada no passo 5 é

$$V_B = \left[ \begin{array}{cccccc} 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right]$$

Caso não seja possível encontrar  $V_B$ , o problema é então infactível, como costumeiramente ocorre na solução de um problema linear por um método simplex em duas fases.

Resta, portanto, apenas analisar o passo 5 em si. O objetivo deste é determinar uma matriz  $\mathcal{W}^k$  que atenda ao conjunto de restrições presentes dado pela matriz  $L$ , conforme deixa claro a expressão (4.41). A tática empregada para solucioná-la é a mesma já descrita no parágrafo anterior para a procura da base inicial, qual seja,

dualizá-la e posteriormente resolver o *tableau* dual por um método tipo simplex. Note, entretanto, que a cada iteração uma nova restrição é acrescentada a  $L$ , de modo a crescê-la em número de linhas. A tática de dualização, empregada na forma mostrada em (4.45), leva, assim, à solução do problema em  $L'$ , ou seja, a dimensão do vetor base será sempre a mesma e nunca maior que o número de elementos distintos da matriz simétrica  $\mathcal{W}^k$ . Isto permite utilizar como base inicial para a iteração seguinte a mesma obtida como base final na geração de  $\mathcal{W}^k$ , proporcionando, portanto, uma considerável diminuição no volume de trabalho numérico demandado pelo Algoritmo.

## 4.5 Conclusão

Neste Capítulo, o tema central foi a formalização de um procedimento numérico implementável que solucione o problema P4, central neste trabalho. Etapas importantes foram o desenvolvimento dos planos de corte para os casos contínuo e discreto realizados nas seções 4.2 e 4.3. A forma numericamente utilizável do Algoritmo foi obtida na última seção, onde detalhes como a solução do problema linear em um *tableau* dual por um método primal, proporcionando menor esforço numérico, foram devidamente enfocados.

O próximo Capítulo se concentrará na apresentação de exemplos numéricos do método proposto, tanto para as abordagens incerta quanto determinada, contínua ou discreta.

# Capítulo 5

## Exemplos Numéricos

### 5.1 Introdução

Este Capítulo é dedicado à apresentação de exemplos numéricos que buscam validar as soluções teóricas anteriormente obtidas. A implementação utilizada é baseada nos desenvolvimentos realizados no Capítulo anterior para o método dos planos de corte. Como já discutido na introdução deste trabalho, somente nos últimos três anos soluções implementáveis do problema de otimização em  $H_\infty$  começaram a surgir na literatura. Deste modo, poucos exemplos estão disponíveis com o fim de comparação dos resultados encontrados, particularmente quanto ao problema de sistemas com parâmetros incertos. Assim, os exemplos aqui apresentados serão advindos de trabalhos associados ao problema incerto e não, infelizmente, de outros que já tivessem sido publicados tratando especificamente do problema em  $H_\infty$ .

A organização desta sequência de exemplos é feita da seguinte forma: primeiramente, iremos apresentar um exemplo de sistema contínuo exatamente conhecido onde discutiremos aspectos numéricos do algoritmo implementado e também da função objetivo a ser utilizada. Isto será feito tanto para o caso de sistemas contínuos quanto sistemas discretos. A seguir, iremos apresentar, também para os casos contínuo e discreto, exemplos de sistemas incertos onde se deseja fixar um valor da norma  $H_\infty$  e garantir a estabilidade quadrática em malha fechada. Algumas variações dos resultados serão discutidas e gráficos de valores singulares máximos e nuvens de lugares de raízes ajudarão a melhor avaliar os resultados obtidos.

## 5.2 Exemplos: Sistemas Contínuos

Esta seção é dividida em duas partes: a primeira é dedicada a discutir o algoritmo para o caso de um sistema determinado; a segunda, é voltada para a aplicação do problema incerto. Na primeira, iremos abordar variações quanto à função objetivo a ser adotada (que sempre deve manter a convexidade do problema analisado), ilustraremos o desenvolvimento numérico do algoritmo e as possibilidades de fixação dos valores da norma  $H_\infty$ . Na segunda parte, iremos verificar o comportamento do problema incerto, ilustrando o resultado obtido com um diagrama dos valores singulares dos diversos sistemas contidos dentro do domínio convexo em questão.

### Sistemas Contínuos Determinados

O exemplo a ser adotado é derivado de [38], tendo já sido utilizado em [26]. É referente à estabilização do modo longitudinal de um avião de caça modelo F4E em dois pontos em torno de um ponto de operação. Aqui, apenas o sistema nominal é considerado, sendo os dados relativos ao modelo mostrados abaixo:

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0.8251 & 17.76 & 90.245 \\ 0.1734 & -0.7549 & -11.1 \\ 0 & 0 & -250 \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} -91.44 \\ 0 \\ 250 \end{bmatrix}.$$

Duas funções objetivo terão o seu comportamento avaliado a seguir. A primeira,  $c = \text{Tr}(W_3) + \varepsilon \text{Tr}(W_1)$ , foi discutida anteriormente na seção 4.4, onde foi colocado que o primeiro termo incorpora um limitante superior à norma do ganho  $K$  e o segundo garante um bom comportamento numérico ao algoritmo. A segunda,  $c = \text{Tr}(S\mathcal{W})$  garante as mesmas características, já que a matriz de ponderação  $S$  pode ser facilmente utilizada para realizar tal tarefa.

Assim, foram realizadas diversas simulações, envolvendo vários valores prescritos de  $\gamma$ , para

$$S = \mathbf{I}, \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

e  $\varepsilon = 0.001$ . O valor citado a seguir como  $\gamma_a$  é aquele para o qual exigiu-se somente que a condição de estabilidade fosse satisfeita, ou seja, é o caso para o qual teremos  $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  e  $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}'$ . Ele é tomado como referência com relação à possibilidade de alcançarmos uma norma  $H_\infty$  de valor o mais baixo possível. Ora, é óbvio que a validade de solucionarmos este problema só estará assegurada se obtivermos uma norma menor que  $\gamma_a$ . Utilizando a primeira função objetivo, encontramos  $\gamma_a = 0.1433$ ; para a segunda,  $\gamma_a = 0.3900$ . Os resultados estão nas

$\gamma$	Norma $H_\infty$	Norma $K$	it
1.00	0.0951	.1076	48
0.50	0.0924	3.2095	58
0.20	0.0877	18.5610	101
0.14	0.0821	30.4906	110
0.10	0.0707	48.7486	125
0.05	0.0439	93.0028	137
0.01	0.0045	91.0586	128

Tabela 5.1: Resultados para  $c = \text{Tr}(W_3) + \varepsilon \text{Tr}(W_1)$ .

$\gamma$	Norma $H_\infty$	Norma $K$	it
1.00	0.4210	0.5747	92
0.50	0.3226	0.5815	81
0.39	0.2724	0.5885	97
0.10	0.0793	0.9580	110
0.05	0.0441	1.5690	124
0.01	0.0053	4.0119	132

Tabela 5.2: Resultados para  $c = \text{Tr}(W)$ 

tabelas 5.1 e 5.2, que contém os valores de  $\gamma$ , norma  $H_\infty$  encontrada (calculada pelo primeiro método da seção 3.3), norma do ganho e número de iterações.

Note que ao diminuirmos os valores exigidos para  $\gamma$ , passamos a obter maiores normas de ganho e aumento no número de iterações. Isto é exatamente o que se espera quanto a resultados neste problema, já que o sistema irá dispendir um maior esforço no sentido de garantir o nível de atenuação procurado; isto obviamente torna mais difícil o desenvolvimento numérico do algoritmo em busca de  $W \in \mathcal{C}_\gamma$ . É claro, portanto, que o conjunto solução procurado  $\mathcal{C}_\gamma \subset \mathcal{C}_{\gamma_a}$  para  $\gamma < \gamma_a$ .

Comparando os dados das duas tabelas, deveremos agora definir qual será a função objetivo a ser adotada nos desenvolvimentos subseqüentes. Note que um parâmetro que seguramente deve nortear tal definição é a distância entre o valor exigido e o valor alcançado para a norma  $H_\infty$ . Este parâmetro irá indicar se os nossos resultados podem ser considerados de alguma forma conservativos. Analisando as duas tabelas, conclui-se que a segunda função utilizada se comporta de melhor forma quanto a este parâmetro. Por exemplo, para  $\gamma = 0.1$ , o erro obtido

é da ordem de 20%, enquanto para a primeira chega a 30%. Outras questões que podem contribuir nesta definição são o número de iterações e a norma do ganho  $K$  obtido. Quanto à primeira, a função em  $\text{Tr}(\mathcal{W})$  provoca um maior esforço por parte do algoritmo; quanto à segunda, chega a ser gritante a diferença entre os valores encontrados nos dois casos, de forma favorável à esta última função citada. Além disso, observou-se no transcorrer das simulações que a segunda função leva a um melhor condicionamento numérico para o desenrolar do algoritmo.

A partir das observações feitas, somos levados a concluir que a segunda função é a que melhor se adequa ao nosso estudo, particularmente pela menor distância entre a norma proposta e a efetivamente encontrada. Deste modo, a função objetivo a ser adotada em todos os desenvolvimentos posteriores é

$$J = \text{Tr}(S\mathcal{W})$$

para  $S = \mathbf{I}$ .

A seguir, ilustraremos o comportamento numérico do algoritmo e o significado da norma  $H_\infty$  no sentido aqui abordado, ou seja, associado à busca do sinal mais perigoso ao sistema e à minimização de sua influência. Os gráficos 5.1 a 5.3 demonstram o desenrolar da função objetivo, dada por  $\rho$ , da variável a ser minimizada  $\omega$  (correspondente à restrição mais violada, ou seja, ao autovalor máximo dentre as matrizes  $-\mathcal{W}$ ,  $\Theta_h(\mathcal{W})$ ,  $h = 1 \cdots H$  e  $-W_1$ ) e também o diagrama dos valores singulares máximos, para  $\gamma = 0.01 \cong -20$  dB. Note, no gráfico 5.1, a demonstração da convexidade do problema em estudo, pelo forma continuamente crescente de  $\rho$ . No gráfico 5.2, observe que, como o método dos planos de corte não garante um comportamento monotonicamente decrescente do algoritmo, a variável  $\omega$  apresenta saltos em seu desenrolar, mas com uma 'envoltória' que demonstra a convergência para os valores desejados. O último gráfico demonstra que a condição exigida de atenuação é claramente satisfeita, pois toda curva de valores singulares máximos se encontra abaixo do nível de distúrbios máximo prescrito.

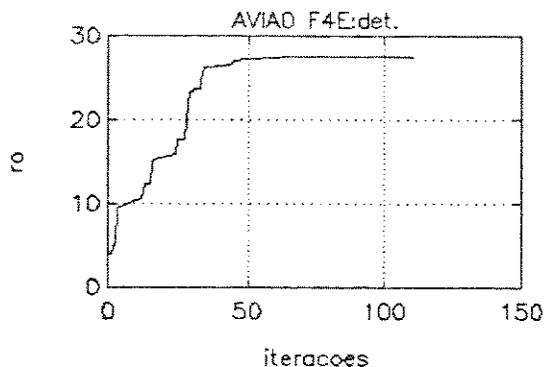


Gráfico 5.1

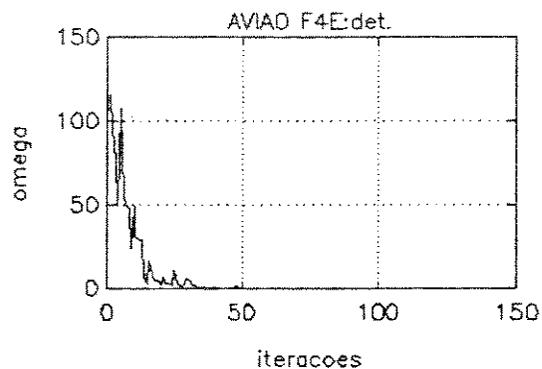


Gráfico 5.2

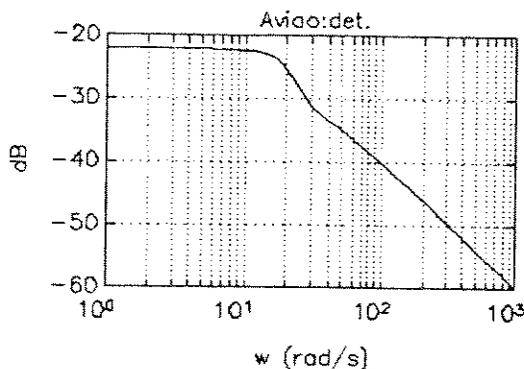


Gráfico 5.3

### Sistemas Contínuos Incertos

A seguir é analisado um exemplo do problema  $H_\infty$  contínuo incerto. Ele é retirado de [30] e também foi abordado em [16]. Refere-se ao problema de estabilizar simultaneamente um conjunto de quatro pontos de operação de um sistema linear. Na referência inicial, é proposto um ganho não-linear que efetiva tal questão. A segunda referência soluciona-o através de um ganho linear estático. Os dados a seu respeito são apresentados na tabela 5.3 e correspondem ao vértice

$$F_h = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & -b_1 \\ a_4 & a_5 & a_6 & 0 \\ 0 & 0 & -30 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{D}_F.$$

As matrizes de ponderação da entrada de perturbação e do controle são dadas respectivamente por:

$$M = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solucionando-o através do algoritmo desenvolvido neste trabalho e utilizando a função objetivo definida acima, obtemos em 70 iterações, somente para o caso quadraticamente estável,  $\gamma_a = 0.66 \cong -3.6$  dB e um ganho

$$K = \begin{bmatrix} -0.0505 & -0.7009 & -0.2314 \end{bmatrix}.$$

P.O.	1	2	3	4
$a_1$	-0.9896	-0.6607	-1.702	-0.5162
$a_2$	17.41	18.11	50.72	29.96
$a_3$	96.15	84.34	263.5	178.9
$a_4$	0.2648	0.08201	0.2201	-0.6896
$a_5$	-0.8512	-0.6587	-1.418	-1.225
$a_6$	-11.39	-10.81	-31.99	-30.38
$b_1$	-97.78	-272.2	-85.09	-175.6

Tabela 5.3: Dados para o problema dos quatro pontos de operação

Impondo agora um valor mínimo  $\gamma = 0.5 \cong -6$  dB de atenuação dos distúrbios presentes à entrada deste sistema, encontramos em 119 iterações um valor real de  $\|G(s)\|_\infty = 0.3446 \cong -9.25$  dB fornecida pelo fechamento de malha em estados com um ganho linear

$$K = \begin{bmatrix} -1.2743 & -10.8766 & 2.2512 \end{bmatrix}.$$

Os gráficos abaixo ilustram os resultados obtidos. O primeiro (gráfico 5.4) representa o diagrama dos valores singulares máximos para os quatro sistemas-vértices em malha fechada. A linha horizontal representa o valor prescrito da norma  $H_\infty$ . Claramente observa-se a validade da solução encontrada, uma vez que todas as quatro curvas estão abaixo do valor exigido.

O segundo gráfico (gráfico 5.5) é o que se denomina 'nuvem de lugares de raízes'. Representa as posições dos autovalores das matrizes  $A_f = A - BK$  de malha fechada de todas as combinações convexas tomadas dois a dois entre pares de vértices do domínio convexo  $\mathcal{D}_F$  definido por este modelo. Note, portanto, que qualquer modelo  $(A, B) \in \mathcal{D}_F$  satisfaz a exigência de estabilidade quadrática.

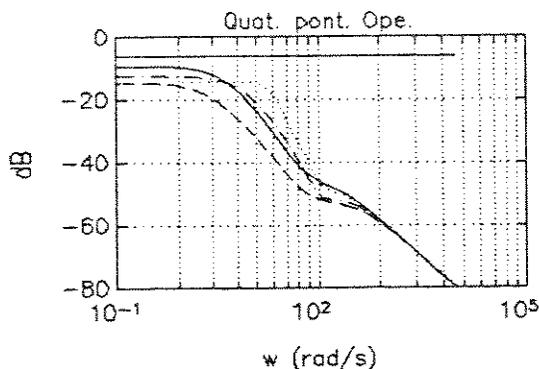


Gráfico 5.4

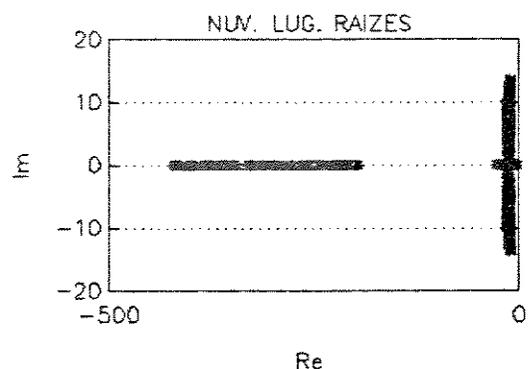


Gráfico 5.5

## 5.3 Exemplos: Sistemas Discretos

Neste item iremos simplesmente apresentar o comportamento numérico do algoritmo no caso de sistemas discretos, além do diagrama de valores singulares. Já que a solução do problema discreto apresenta uma grande similaridade com a do problema contínuo (conforme pode-se inferir a partir do Capítulo 4), as mesmas conclusões obtidas anteriormente quanto à definição da função objetivo permanecem válidas. Tal como o equivalente contínuo, separaremos as análises dos casos determinado e incerto. Na primeira, estaremos voltados para a questão numérica; na segunda, discutiremos a validade da solução encontrada e suas restrições para o problema discreto.

### Sistemas Discretos Determinados

O exemplo em questão é o mesmo anteriormente utilizado na análise do problema contínuo determinado. Portanto, os dados pertinentes estão na respectiva subseção. Aqui, no entanto, iremos discretizar este sistema de modo que

$$A_d = \exp(A_0 \Delta t)$$

$$B_d = \int_0^{\Delta t} \exp(A_0 \tau) B_0 d\tau$$

onde  $\Delta t$  é o período de amostragem considerado. Logo, para  $\Delta t = 0.01$  s, obtemos

$$A_d = \begin{bmatrix} 0.9919 & 0.1762 & 0.3245 \\ 0.0017 & 0.9926 & -0.0402 \\ 0 & 0 & 0.0821 \end{bmatrix}, \text{ e } B_d = \begin{bmatrix} -0.3462 \\ 0.0704 \\ 0.9179 \end{bmatrix}.$$

As matrizes  $M$  e  $N$  são dadas por

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } M = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A norma  $H_\infty$  para a solução simplesmente estabilizante é dada, em 25 iterações, por  $11.2554 \cong 21.03$  dB devida a um ganho  $K = \begin{bmatrix} -0.4584 & -0.8842 & -0.3437 \end{bmatrix}$ .

Impondo um valor de  $\gamma = 5 \cong 14$  dB, obtemos então, em 50 iterações:

$$K = \begin{bmatrix} -2.5581 & -1.6412 & -0.8483 \end{bmatrix}$$

que proporciona  $\|G(z)\|_\infty = 3.9439 \cong 11.9$  dB para o sistema em malha fechada. Os gráficos 5.6 e 5.7 abaixo representam o comportamento numérico do algoritmo para obter este resultado. As análises quanto a  $\rho$  e  $\omega$  seguem as já realizadas para

o caso contínuo. O diagrama de valores singulares máximos (gráfico 5.8) aponta a correção do procedimento adotado. Todas as curvas se encontram abaixo do valor exigido como nível máximo permissível de distúrbios no sistema.

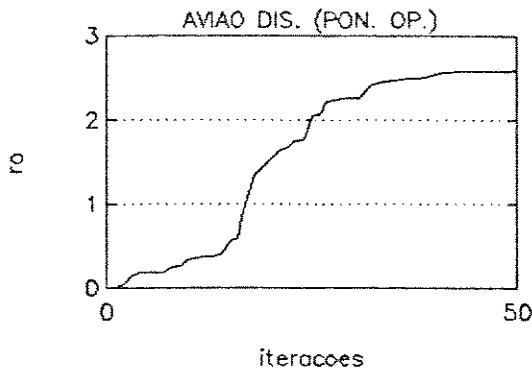


Gráfico 5.6

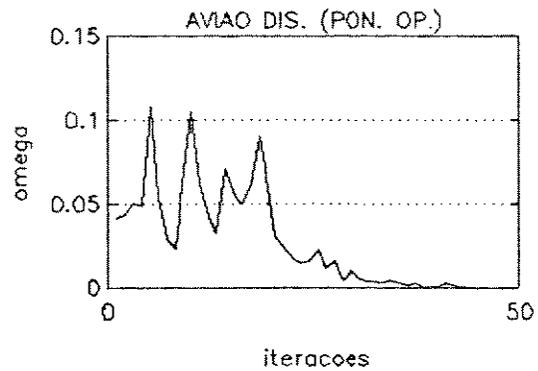


Gráfico 5.7

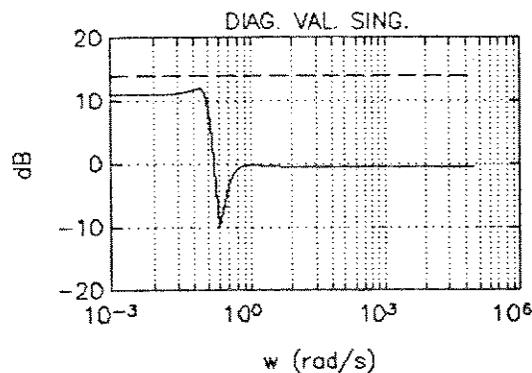


Gráfico 5.8

## Sistemas Discretos Incertos

Neste item iremos utilizar o mesmo sistema discreto obtido acima, mas considerando incertezas quanto aos valores de seus parâmetros da ordem de 10% sob o modelo  $(A_d, B_d)$ . Os mesmos valores de  $M$  e  $N$  serão utilizados, de modo que a mesma intensidade de perturbações seja aplicada ao sistema e a mesma ponderação de estados componha a sua saída. A simulação realizada a partir destes dados, para o problema de estabilização quadrática, fornece em 43 iterações  $K = [-1.6900 \quad -3.0880 \quad -0.5746]$  e  $\gamma_a = 32.3779 \cong 30$  dB. Considerando um valor máximo de perturbação  $\gamma = 30 \cong 29.5$  dB, o algoritmo agora encontra em 53 iterações

$$K = [-2.6021 \quad -3.5732 \quad -0.8548]$$

que, por sua vez, leva o nível máximo encontrado de perturbações a  $\|G(z)\|_\infty = 16.8211 \cong 24.5$  dB. Novamente o sucesso do procedimento exposto torna-se claro, particularmente a partir da visualização do gráfico 5.9, onde estão demonstrados os diagramas de valores singulares máximos de todas as combinações convexas tomadas dois a dois de modelos-vértices em malha fechada. A linha horizontal, que indica o valor exigido de norma  $H_\infty$ , se encontra acima de todos estes diagramas. A propriedade estabilizante da solução é validada através da 'nuvem de lugares de raízes' apresentada no gráfico 5.10. Lembre-se que a solução discreta encontrada é, ao contrário da contínua, de caráter somente suficiente.

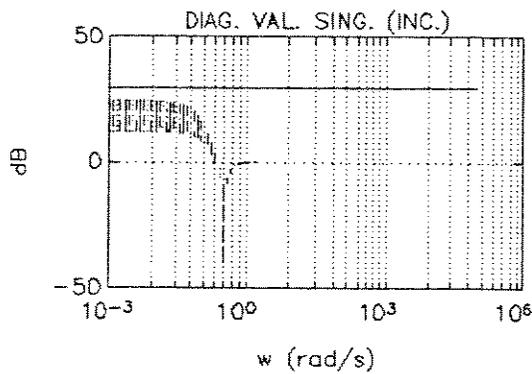


Gráfico 5.9

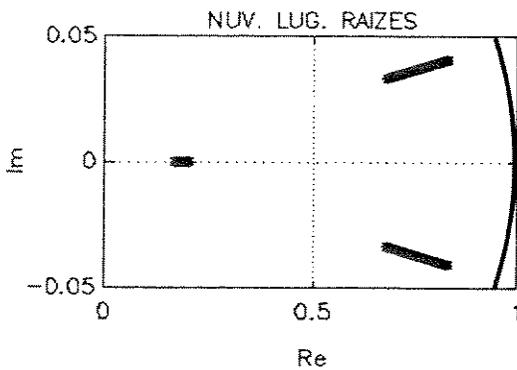


Gráfico 5.10

## 5.4 Conclusão

Os exemplos apresentados neste Capítulo demonstraram a validade de todo o procedimento anteriormente desenvolvido nos Capítulos 3 e 4. A apresentação dos diagramas de valores singulares e das nuvens de lugares de raízes dão o tom desta validade.

O caráter único do algoritmo adotado com relação aos problemas contínuo e discreto permite que os desenvolvimentos realizados no caso contínuo sejam estendidos para o discreto, como a determinação da função objetivo vista neste Capítulo. Nas simulações feitas, observou-se que o caso contínuo determinado possibilita tornar  $\gamma$  bastante reduzido com relação a  $\gamma_a$ . No caso discreto nem sempre isso será possível.

O problema incerto apresenta uma maior dificuldade de solução numérica. O aumento no número de iterações reflete diretamente tal fato. Além disso, há dificuldades para se encontrar uma solução que garanta  $\gamma \ll \gamma_a$ .

Tanto no caso incerto quanto no determinado, o problema discreto permite uma maior riqueza de análises, devido à maior complexidade inerente a sua solução.

# Capítulo 6

## Conclusão Geral

Neste trabalho estivemos centrados na solução do problema em  $H_\infty$ , numa abordagem voltada para a minimização da influência dos sinais de perturbação presentes na entrada de um sistema modelado em variáveis de estados no qual ocorrem incertezas quanto aos valores dos parâmetros que definem o modelo. Ou seja, busca-se minimizar os efeitos do sinal mais perigoso ao sistema sob o ponto de vista de distúrbios, minimizando-se conjuntamente os efeitos de todo o espectro de sinais a ele associado.

A solução apresentada para este problema pode ser vista como uma extensão de [16], acrescida da restrição quanto ao nível máximo de distúrbios. Tal como nesta referência, admitiu-se aqui que os modelos que definem o sistema em estudo são pertencentes a conjuntos convexos na forma de poliedros fechados. Esta forma geométrica de definição do sistema possibilitou a generalização para todo o domínio convexo dos resultados válidos para os modelos-extremos deste poliedro. Além do mais, graças à convexidade das desigualdades envolvidas, podemos definir conjuntos convexos de matrizes-soluções. Para sistemas contínuos, estes resultados compreendem o Teorema 3.5 e o Corolário 3.3. Para sistemas discretos, o Teorema 3.6 e o Corolário 3.4 são os principais resultados. Em ambos os casos, as condições convexas derivadas relacionam as especificações de estabilizabilidade quadrática com valor máximo permissível de distúrbios no sistema a uma matriz  $\mathcal{W}$  que fornece um ganho linear e estático de realimentação de estados independente das matrizes de parâmetros do sistema. No caso contínuo, tais condições são de caráter necessário e suficiente; porém, no caso discreto, apenas a suficiência dos resultados é garantida, devido às dificuldades de se tornar o mapeamento LQ- $H_\infty$  biunívoco nesta abordagem de tempo. Topdavia, por se tratar de aplicação da técnica em  $H_\infty$  a sistemas incertos (uma linha ainda pouco explorada desta metodologia), estes resultados se tornam extremamente importantes, particularmente para a abordagem discreta, que só muito recentemente se tornou alvo da análise dos pesquisadores dedicados a esta área, ainda assim somente em problemas de

parâmetros conhecidos.

O problema como proposto é escrito na forma

$$\min \{J(\mathcal{W}) / \mathcal{W} \in \mathcal{C}_\gamma\}.$$

onde a função objetivo deve ser convexa. Para a sua solução foi adotado o método dos planos de corte, que se adequou muito bem a esta tarefa, novamente devido à convexidade do problema e particularmente do conjunto de soluções  $\mathcal{C}_\gamma$ . A descrição da implementação realizada deste método foi feita no Capítulo 4, onde o cálculo do hiperplano separador entre o conjunto solução numa certa iteração e a matriz  $\mathcal{W}$  da iteração anterior é o principal resultado, sendo derivada para ambas as abordagens de tempo. O algoritmo 4.4 explicita de forma clara os caminhos utilizados nesta solução. Nele, o cálculo do hiperplano separador é associado à restrição mais violada do conjunto  $\mathcal{C}_\gamma$ , de modo a garantir a máxima profundidade no corte realizado. O coração de toda a metodologia desenvolvida é a solução do subproblema linear apresentado no passo 5 deste algoritmo. Detalhes desta solução são apresentados na seção 4.4.

Os exemplos numéricos demonstram a validade das soluções teóricas e a força do algoritmo desenvolvido para implementá-las. Os gráficos que ilustram tais exemplos garantem esta verificação, pois apontam que realmente os sistemas em malha fechada são estáveis e possuem atenuação de distúrbios maior que um limite pré-estabelecido.

Seguramente, a principal contribuição deste trabalho situa-se em, pela primeira vez, realizar uma análise convexa do problema em  $H_\infty$ , incluindo-se aí os modelos incertos tanto contínuos quanto discretos. É esta forma de análise que deverá nortear a continuidade das pesquisas quanto a esta metodologia de projeto. Assim, a solução deste problema utilizando realimentação de saída é o próximo alvo a ser atacado. Outro problema que resta a ser investigado é, como já apontado no Capítulo 4, o de determinar a mínima norma  $H_\infty$  e um ganho  $K^*$  associado que a garanta e leve o sistema à estabilidade. Uma terceira linha de continuidade deste trabalho é acrescentar à definição do modelo, primeiro, uma ponderação do controle e após uma ponderação da perturbação na variável de saída. Além disso, restaria buscar métodos alternativos de solução numérica mesmo do atual problema, no sentido de possibilitar a simulação de exemplos de maior porte que aqueles apresentados.

# Bibliografia

- [1] Almugla, A. M. K., **Controle de Sistemas Incertos por Realimentação de Saída**, Tese de Mestrado, DT-FEE-UNICAMP, janeiro, 1991.
- [2] Athans, M. and P. L. Falb, **Optimal Control**, McGraw Hill Inc., New York, 1966.
- [3] Balinski, M.L. and P. Wolfe (Editors), **NonDifferentiable Optimization**, Math. Programming Study 3, North-Holland, 1975.
- [4] Barmish, B. R., *Stabilization of Uncertain Systems via Linear Control*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 28, No. 8, pag. 848-850, 1983.
- [5] Barmish, B. R., *Necessary and Sufficient Conditions for Quadratic Stabilizability of an Uncertain System*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol 46, No. 4, pag. 399-408, 1985.
- [6] Bazarra, M. and C.M. Shetty, **Nonlinear Programming: Theory and Applications**, Wiley, NY, 1979.
- [7] Chang, B. C., X. P. Li, H. H. Yeh and S. S. Banda, *Computation of the  $H_\infty$  Norm of a Transfer Function*, Proceedings of the 29th American Conference on Control, San Diego, California, EUA, 1990.
- [8] Chiang, R. Y., M. G. Safonov and J. A. Tekawy,  *$H_\infty$  Flight Control Design with Large Parametric Robustness*, Proceedings of the 29th American Conference on Control, San Diego, California, EUA, 1990.
- [9] Dorato, P. (editor), **Robust Control**, IEEE Press, 1987.
- [10] Doyle, J. C., K. Glover, P. P. Khargonekar and B. Francis, *State-Space Solutions to the Standard  $H^2$  and  $H^\infty$  Control Problems*, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 34, pag. 831-847, 1989.
- [11] Fletcher, R., **Practical Methods of Optimization**, Wiley, NY, 1989.

- 
- [12] Francis, B., *A Course in  $H_\infty$  Control Theory*, Lectures Notes in Control and Information Sciences, Vol. 88, New York, Springer-Verlag, 1987.
- [13] Francis, B. A. and J. C. Doyle, *Linear Control Theory with an  $H_\infty$  Optimality Criterion*, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 25, No. 4, pag. 815-844, 1987.
- [14] Furuta, K. and S. Phoojaruenchanachai, *An Algebraic Approach to Discrete-time  $H_\infty$  Control Problems*, Proceedings of the 29th American Conference on Control, San Diego, California, EUA, 1990.
- [15] Geromel, J.C e I. S. Bonatti, *Minimização de Funções Poliedrais*, publicação FEC n.º 58/83, Unicamp, 1983.
- [16] Geromel, J. C., P. L. D. Peres and J. Bernussou, *On a Convex Parameter Space Method for Linear Control Design of Uncertain Systems*, SIAM Journal on Control and Optimization, to appear, March 1991.
- [17] Geromel, J. C., P. L. D. Peres and S. R. Souza, *Quadratic Stabilizability of Linear Uncertain Systems with Prescribed  $H_\infty$  Norm Bounds*, 1st IFAC Symposium ou Design Methods of Control Systems, September, Zurich, Switzerland, 1991.
- [18] Glover, K. *All optimal Hankel-Norm Approximations of Linear Multivariable Systems and their  $L_\infty$ -error Bounds*, International Journal of Control, Vol. 39, pag 1115-1193, 1984.
- [19] Gu, D. W., M. C. Tsai, S. D. O'Young and I. Postlethwaites, *State-Space Formulae for Discrete-Time  $H_\infty$  Optimization*, International Journal of Control, Vol. 49, No. 5, pag 1683-1723, 1989.
- [20] Kailath, T. *Linear Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1981.
- [21] Kalman, R. E., *When is a Linear Control Systems Optimal?*, Journal of Basic Engineering, Transaction of ASME, serie D, vol. 86, pag. 51-60, March 1964.
- [22] Khargonekar, P. P., I. R. Petersen and M. A. Rotea,  *$H_\infty$ -Optimal Control with State-Feedback*, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 33, No. 8, pag. 786-788, 1988.
- [23] Khargonekar, P. P., I. R. Petersen and K. Zhou, *Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems: Quadratic Stabilizability and  $H^\infty$  Control Theory*, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 35, No. 3, pag. 356-361, 1990.

- 
- [24] Kiwiel, K.C., *Methods of Descent for NonDifferentiable Optimization*, Springer Verlag, Berlin, 1985.
- [25] Luenberger, D., *Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley, 1984.
- [26] Peres, P. L. D., *Sur la Robustesse des Systèmes Linéaire : Approche par Programmation Linéaire*, Thèse de Doctorat de l'UPS-LAAS du CNRS, Toulouse, França, 1989.
- [27] Peres, P. L. D., J. C. Geromel and J. Bernussou, *Quadratic Stabilizability of Linear Uncertain Systems in Convex-Bounded Domains*, submetido para publicacao ao International Journal of Control, 1990.
- [28] Peres, P. L. D., J. C. Geromel and A. M. K. Almutlaq, *Quadratic Stabilizability of Linear Uncertain Systems by Linear Output Feedback*, 1st European Control Conference, July 2-5, Grenoble, France, 1991.
- [29] Peres, P. L. D., J. C. Geromel and S. R. Souza, *Convex Analysis of Discrete-Time Uncertain  $H_\infty$  Control Problems*, submetido à 30th Conference on Decision and Control, December 11-13, Brighton, United Kingdom, 1991.
- [30] Petersen, I. R., *A Procedure for Simultaneously Stabilizing a Collection of Single Input Linear Systems Using Non-Linear State Feedback Control*, Automatica, Vol. 23, N. 1, pag. 33-40, 1987.
- [31] Petersen, I. R., *Disturbance Attenuation and  $H^\infty$  Optimization: A Design Method Based on the Algebraic Riccati Equation*, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 32, No. 5, pag. 427-428, 1987.
- [32] Polak, E., *On the Mathematical Foundations of Nondifferentiable Optimization in Engineering Design*, SIAM Review, vol. 29,1,pag. 21-89.
- [33] Polak, E. and S. E. Salcudean, *On the Design of Linear Multivariable via Constrained Nondifferentiable Optimization in  $H_\infty$  Spaces*, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 34, No. 3, pag. 268-276, 1989.
- [34] Robel, G., *On Computing the Infinity Norm*, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 34, pag. 882-884, 1989.
- [35] Safonov, M. G., D. J. N. Limbeer and R. Y. Chiang, *Simplifying the  $H_\infty$  Theory via Loop Shaping, Matrix Pencil and Descriptor Concepts*, International Journal of Control, Vol. 50, No. 6, pag 2467-2488, 1989.

- 
- [36] Scherer, C.,  *$H_\infty$ -Control by State-Feedback: An Iterative Algorithm and characterization of High-gain Occurrence*, Systems Control and Letters, Vol. 12, pag. 383-391, 1989.
- [37] Scherer, C.,  *$H_\infty$ -Control by State-Feedback and Fast Algorithms for the Computation of Optimal  $H_\infty$ -Norms*, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 35, No. 10, pag. 1090-1099, 1990.
- [38] Schmitendorf, W. E., *Designing Stabilizing Controllers for Uncertain Systems Using Riccati Equation Approach*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 33, No. 4, pag. 376-378, 1988
- [39] Shor, N.Z., *Minimization Methods for NonDifferentiable Functions*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [40] Skelton, R., *Dynamical Systems*, Wiley, NY, 1988.
- [41] Souza, S. R., J. C. Geromel e P. L. D. Peres, *Otimização de Funções Não Diferenciáveis: Uma Aplicação ao Estudo de Sistemas Incertos*, publicação n.º 26/90, FEE-UNICAMP, 1990.
- [42] Veillette, R. J., J. V. Medanic and W. R. Perkins, *Robust Stabilization and Disturbance Rejection for Systems with Structured Uncertainty*, Proceedings of the 28th Conference on Decision and Control, Tampa, Florida, USA, 1989.
- [43] Vidyasagar, M., *Control System Synthesis: A Factorization Approach*, MIT Press, Cambridge, MA, 1985.
- [44] Willems, J. C., *Least-Squares Stationary Optimal Control and Algebraic Riccati Equation*, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 16, pag. 621-634, 1971.
- [45] Wolfe, P., *A Method of Conjugate Subgradients for Minimizing Nondifferentiable Functions*, in *NonDifferentiable Optimization*, M.L. Balinski and P. Wolfe, eds, Math. Programming Study 3, North-Holland, 1975, pag. 145-173.
- [46] Wolfe, P., *Finding the Nearest Point in a Polytope*, Math. Programming 11, 1976, pag. 128-149.
- [47] Youla, D. C., H. A. Jabr and J. J. Bongiorno, *Modern Wiener-Hopf Design of Optimal Controllers: Part II*, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 21, pag. 319-338, 1976.

- 
- [48] Zames, G., *Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms and Approximative Inverses*, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 26, No. 4, pag. 301-320, 1981.
- [49] Zhou, K. and P. P. Khargonekar, *An Algebraic Riccati Equation Approach to  $H_\infty$  Optimization*, Systems Control and Letters, Vol 11, pag. 85-91, 1988.

# Apêndice A

## Solução do Problema Quadrático

Seja o problema de programação quadrática:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \lambda' Q \lambda \\ \text{sujeito a} \quad & \lambda \in \Lambda = \{ \lambda / \sum_{i=1}^r \lambda_i, \lambda_i \geq 0 \} \end{aligned}$$

que pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \lambda' Q \lambda \\ \text{sujeito a} \quad & \lambda \geq 0 \quad (\sigma) \\ & \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1 \quad (\mu) \end{aligned}$$

Definindo:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \mu_1 \\ \vdots \\ \lambda_{r-1} = \mu_{r-1} \\ \lambda_r = \lambda_r \end{cases}$$

vem:

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1 \Rightarrow e' \mu + \lambda_r = 1$$

onde  $e = [1 \cdots 1]'_{(r-1) \times 1}$  e então

$$\lambda_r = 1 - e' \mu$$

ou

$$\lambda = \begin{bmatrix} \mu \\ 1 - e'\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ -e' \end{bmatrix} \mu = b - R\mu$$

Como, pela 1ª restrição,  $\lambda \geq 0$ , teremos que:

$$\lambda \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \mu \geq 0 \\ 1 - e'\mu \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ -e' \end{bmatrix} \mu \geq 0 \Rightarrow R\mu \leq b$$

O problema de programação quadrática então se torna:

$$\min (b - R\mu)'Q(b - R\mu)$$

$$\text{suj a } R\mu \leq b$$

ou

$$\min \frac{1}{2}\mu'H\mu + d'\mu$$

$$\text{suj a } A\mu \leq b$$

onde

$$H = 2R'QR$$

$$d' = -2b'QR$$

$$A = R$$

O lagrangeano associado é:

$$L(\mu, x) = \frac{1}{2}\mu'Hx + d'\mu + x'(Ax - b)$$

que é estritamente convexo para  $H > 0$  e possui mínimo em

$$\mu = -H^{-1}d - H^{-1}A'x$$

O problema dual associado é então

$$\begin{aligned} \max \psi(x) &= \frac{1}{2}x'Dx + x'c - \frac{1}{2}d'H^{-1}d \\ \text{suj a } x &\geq 0 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}D &= -AH^{-1}A' \\C &= -b - AH^{-1}d\end{aligned}$$

Para solucioná-lo, encontre o ponto de estacionariedade

$$\nabla\psi(x) = Dx + c = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^j D_{ij}x_j + c_j \\ \Rightarrow x_j &= -\frac{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^j D_{ij}x_j + c_j}{D_{jj}}\end{aligned}$$

e, a fim de determinar o valor de  $x^*$ , teremos que

$$x_j^* = \max\{0, x_j\}$$

Caso  $|x^{*t+1} - x^{*t}| < \text{erro}$ , pare. Caso contrário, continue e repita o procedimento.

Este método é extremamente eficiente para problemas convexos, onde  $H > 0$  e  $Q > 0$ , mas falha quando tal condição não é assegurada.