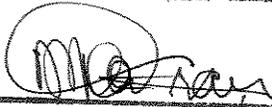


Este exemplar corresponde à redação final da tese
defendida por Paulo Daniel Bishop
da Silveira e aprovada pela Comissão
Julgadora em 11 / 12 / 1992

 Orientador

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA

Dezembro de 1992

Algoritmos para a Resolução do Problema de
Estoque e Roteamento de Veículos

Paulo Daniel Bishop da Silveira ³⁹

Orientadores : Paulo Morelato França ^t
Marcos Carneiro da Silva ^t

Tese de Mestrado apresentada à Faculdade
de Engenharia Elétrica da Universidade
Estadual de Campinas

Este trabalho contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)

Agradecimentos

Aos orientadores Paulo França e Marcos Carneiro pela amizade e apoio durante o trabalho.

Aos colegas e amigos da CPFL e da UNICAMP pela ajuda e incentivo : Aurélio, Celso, Christiano, Cintia, Felipe, Humberto, Ieda, Jurandir, Lisete, Regina, Ronaldo, Sergio, Spiti, Walcir.

Ao Chico e à Ione, pela compreensão durante o trabalho.

RESUMO

Este trabalho enfoca a resolução do problema de estoque e roteamento de veículos (PERV). O problema é modelado matematicamente como um problema de otimização combinatorial onde o problema do longo prazo é transformado em um de curto prazo, incluindo custos para representar a influência das decisões atuais no futuro. A estocasticidade da demanda dos clientes é considerada através de estoques de segurança, calculados em função da distribuição de probabilidade da demanda de cada cliente e da relação de custo entre uma entrega normal e uma entrega de emergência. São apresentadas três formulações para o problema. As duas primeiras não incluem restrições sobre a duração das rotas e estão baseadas no problema de roteamento de veículos (PRV) ou no problema do caixeiro viajante (PCV). A terceira formulação incorpora restrições sobre a duração total das rotas executadas por um veículo. A metodologia de resolução utilizada parte de uma das formulações apresentadas. Para as duas primeiras formulações basta simplificar a função objetivo para obter um problema de atribuição generalizado. Em seguida, são resolvidos os subproblemas resultantes, que podem ser PRVs ou PCVs, para obter uma solução inicial. Na terceira formulação são relaxadas as restrições de disponibilidade de atendimento dos veículos para que possa ser empregada uma solução obtida por uma das formulações anteriores. Em seguida, é utilizada uma heurística para encontrar o conjunto das rotas atendidas em cada veículo. Duas heurísticas são sugeridas para a melhoria da solução inicial: busca tabu com penalidades e trocas simultâneas. São apresentados resultados das heurísticas propostas para o problema. Também é feita a comparação entre as soluções do modelo dinâmico proposto e do modelo periódico.

ABSTRACT

This thesis focuses on the Inventory Routing Problem (IRP). It is modeled as a combinatorial optimization problem where the long-term issues are reduced to the short term with the inclusion of special costs that represent the influence of present decisions in the future. The client's demands stochastic nature are treated by safety stock levels, which are obtained by means of the demands probability distribution and the ratio between the normal and emergency delivery costs. Three problem formulations are presented. The first two do not include restrictions on the length of routes and are based on the Vehicle Routing Problem (VRP) and the Traveling Salesman Problem (TSP). In the third formulation, restrictions on the vehicles total workload are added. To solve the IRP we begin with one of the formulations. For the first two, the objective function is simplified in order to produce a Generalized Assignment Problem, then, the subproblems, VRPs or TSPs, are solved and an initial feasible solution is obtained. For the third formulation we also have to relax the restrictions on the total workload of the vehicles to obtain an initial solution using one of the earlier formulations. To assign the routes to the vehicles a heuristic algorithm is used. Two heuristics for the improvement of the initial solutions are suggested: tabu search with penalties and simultaneous exchanges. Computational results are presented for the two heuristics. Finally, we compare two approaches for the IRP, the proposed dynamic model and the periodic model.

Conteúdo

1	Introdução e Histórico	1
1.1	Introdução	1
1.2	Histórico	2
1.3	Escopo do Trabalho	6
2	Modelo Matemático	10
2.1	Características do Problema de Estoque	11
2.2	Período de Entrega	12
2.3	Período Operacional	13
2.4	Custo Futuro	14
2.5	Estoque de Segurança	17
2.5.1	Capacidade dos Veículos	19
2.6	Formulações para o Problema	20
2.6.1	Formulação baseada no PRV	21
2.6.2	Formulação baseada no PCV	24
2.6.3	Formulação Veículo-Rota	25
2.7	Custo de Entrega	27
3	Técnicas de Resolução	30
3.1	Solução Inicial	30
3.1.1	Solução inicial pela formulação PRV	31
3.1.2	Solução Inicial da Formulação PCV	37
3.1.3	Conjunto Inicial de Nós	38
3.2	Trocas de Nós	39
3.3	Trocas baseadas em Partição de Conjuntos	46
3.4	Solução para a formulação Veículo-Rota	48
3.4.1	Solução inicial para a formulação Veículo-Rota	48
3.4.2	Busca Tabu com Penalidades	51
3.5	Resumo da Metodologia de Resolução	56
4	Resultados Computacionais	58
4.1	Criação dos Problemas Teste	58
4.2	Avaliação das Heurísticas	60

4.2.1	Solução Inicial	61
4.2.2	Avaliação das heurísticas de Melhoria	65
4.3	Avaliação dos Modelos	76
5	Conclusões	80
5.1	Resultados Obtidos	80
5.2	Estudos Futuros	84
A	Estoque de Segurança	86
	Bibliografia	91

Capítulo 1

Introdução e Histórico

1.1 Introdução

O Problema de Estoque e Roteamento de Veículos (PERV), como o próprio nome diz, surge da união de dois problemas clássicos em Pesquisa Operacional. Estes problemas já foram amplamente estudados e possuem uma extensa bibliografia¹. No Problema de Estoque o objetivo é minimizar os custos relacionados à estocagem, compra e/ou produção de um determinado bem, respeitando as restrições que em geral envolvem a capacidade de estocagem e a forma de operação da empresa. No Problema de Roteamento de Veículos (PRV) o objetivo é distribuir (ou recolher) um produto de forma a minimizar um objetivo que normalmente contempla a distância percorrida e/ou o número de veículos utilizados e/ou tempo gasto na distribuição, respeitando restrições de capacidade de carga dos veículos, duração máxima das rotas, horário de atendimento, entre outras.

Em várias situações reais estes problemas estão relacionados. Na prática, quase todos os problemas de roteamento de veículos que envolvem a distribuição de produtos podem ser vistos como PERVs onde as decisões sobre a aquisição são feitas pelos clientes. O distribuidor só decide como distribuir, e no máximo dispõe de um prazo determinado para realizar a entrega.

O problema se caracteriza como um PERV quando a decisão sobre quanto e quando entregar a cada cliente é feita pelo distribuidor. Normalmente, esses problemas são tratados separadamente mesmo quando estas decisões são tomadas dentro de uma

¹Para o PRV ver [7] e para o problema de estoque [28]

mesma empresa.

No PERV temos que distribuir um produto a partir de um depósito central a clientes que dispõem de estoques locais, buscando minimizar os custos totais de distribuição e estocagem. Neste problema a decisão sobre quando e quanto entregar é feita pelo distribuidor que se responsabiliza pelo suprimento (e falta) do produto aos clientes. O PERV é mais facilmente aplicável quando o depósito central e os depósitos locais pertencem a uma mesma empresa. Na maioria das empresas nesta situação as filiais ou agências que controlam os estoques locais tomam suas decisões isoladamente, o que não permite ao distribuidor (normalmente outro órgão da empresa) aproveitar os benefícios que uma decisão conjunta poderia proporcionar. Isto, em geral, ocorre devido às dificuldades operacionais e de comunicação, e à falta de ferramentas de apoio a decisão que permitam a consideração simultânea dos diversos aspectos do problema.

1.2 Histórico

Podemos dividir os modelos que tratam o problema de estoque e roteamento de veículos em duas classes : os que se preocupam mais com a parte de estoque, considerando os custos de estocagem e a determinação de políticas de reabastecimento; e os que se preocupam mais com o problema de roteamento de veículos, tratando apenas o reabastecimento e o custo de escassez do produto no cliente. Entre os modelos que tratam mais detalhadamente o problema de estoque temos :

Burs , Hall, Blumenfeld e Daganzo [8] apresentam uma abordagem analítica ao invés da abordagem algorítmica utilizada no restante dos trabalhos discutidos. São analisadas duas estratégias conjuntas para os problemas de transporte e estoque : o transporte direto ou a utilização de rotas para atender vários clientes (roteamento). Para o caso de transporte direto, o custo de distribuição é fixo no cálculo do lote econômico no problema de estoque. No caso de roteamento, os clientes são agrupados em regiões que passam a ser consideradas como um cliente. São utilizadas fórmulas aproximadas para avaliar as distâncias percorridas dentro da região.

Federgruen e Zipkin [19] apresentam um modelo para o PERV que considera demandas estocásticas nos clientes e os custos de estocagem e de escassez do produto nos clientes. Neste enfoque o tamanho das entregas é uma variável do modelo, bem

como as rotas que serão utilizadas para a distribuição. O modelo pode ser resolvido de forma exata através da técnica de decomposição generalizada de Benders em que o problema mestre produz uma alocação de clientes às rotas. Esta alocação produz como subproblemas vários Problemas do Caixeiro Viajante (PCV) - um para cada rota - e um problema de alocação de estoque não-linear. Eles também apresentam uma heurística para realizar trocas de nós entre rotas, utilizando uma aproximação para o ganho referente ao problema de estoque. São apresentados resultados da heurística para problemas até 75 nós.

Anily e Federgruen [1], apresentam uma abordagem periódica para determinar estratégias de reabastecimento dos clientes. Neste problema os clientes são divididos em “regiões” e sempre que um cliente da “região” recebe uma entrega, todos dentro da região também recebem. Um cliente pode pertencer a mais de uma região, neste caso, cada região a qual o cliente pertence recebe uma porcentagem da sua demanda.

A maioria dos trabalhos sobre o PERV na literatura priorizam o problema de roteamento de veículos. Muitos modelos já foram testados em aplicações reais como a distribuição de propano (Golden et al [27]), o recolhimento de detritos do tratamento de esgoto (Larson [30]), a distribuição de polipropileno (Dror e Ball [15]). Estes modelos, apesar de considerarem a necessidade de reabastecimento dos estoques locais, não tratam explicitamente os custos de estocagem. Neles o problema é distribuir (ou recolher) um produto de forma que este não falte (exceda) nos estoques locais, sem considerar a disponibilidade deste nos depósitos centrais.

Em **Ball** [4] é apresentada uma revisão sobre os modelos e algoritmos para a resolução do PERV. Nesse artigo ele denomina os PERVs como problemas de alocação e roteamento, pois isto só deve ser decidida a rota pela qual os clientes serão atendidos, mas também o dia em que se fará o atendimento. Ele divide as formulações para o problema de alocação e roteamento (aqui, chamado PERV) em três classes:

(DEV) : Formulação Dinâmica com quantidades variáveis de entrega. Nessa formulação os consumidores podem ser atendidos, cada vez, através de uma rota diferente, daí o uso da palavra dinâmica para essa formulação. A quantidade a ser entregue a cada consumidor em caso de atendimento é uma das variáveis de decisão. Essa formulação modela o problema proposto por Bell e outros [6] para a distribuição de gases industriais.

(DEF) : Formulação Dinâmica com quantidades fixas de entrega. Nessa formulação a demanda dos consumidores varia conforme o período de atendimento mas tem um valor fixo para cada período. Isto simplifica o problema em relação à formulação (DVD) mas restringe as possibilidades de distribuição quando a capacidade de estoque dos consumidores está próxima a capacidade do veículo, e portanto, cada veículo pode atender a poucos consumidores. Essa formulação modela os problemas propostos por Assad e outros [2, 3], Dror e outros [15, 16, 17] e Golden e outros [27].

(P) : Formulação Periódica. Nessa formulação os consumidores são atendidos sempre utilizando as mesmas rotas. Christofides [11], em 84, foi o primeiro a abordar o PERV de forma periódica. Em 88, Larson [30] sugere um modelo periódico para tratar o problema do recolhimento de detritos do tratamento de esgotos. Seguindo o trabalho de Larson, Webb [36] sugere melhorias sobre este modelo.

O modelo dinâmico apresentado por **Bell** e outros [6] foi aplicado para a distribuição de gases industriais. Nestes problemas o número de consumidores atendidos em cada rota era pequeno, normalmente dois e no máximo quatro. Nestas condições utilizar entregas fixas restringe muito a possibilidade de otimização. Assim, foram utilizadas entregas variáveis que devem suprir o consumidor com quantidades mínimas e máximas durante o período de planejamento. O modelo matemático utiliza uma formulação de partição de conjuntos (“set partitioning”) e para ser resolvido requer a enumeração de todas as combinações possíveis de rotas. Como o número de consumidores atendidos por rota é pequeno cada consumidor estará em um conjunto reduzido de rotas, e de combinações possíveis. No entanto, a dimensão dos problemas tratados, com centenas de consumidores, produz mesmo assim, problemas com grande número de combinações.

Em **Golden** e outros [27] é apresentada uma metodologia para a resolução de um PERV aplicado à distribuição de propano. A companhia estudada atendia 110.000 clientes em 60 distritos, sendo 1500-3000 clientes atendidos por distrito. A resolução é feita para o dia corrente. São considerados para atendimento apenas os consumidores com estoque abaixo de um limite mínimo. Para decidir quais consumidores serão atendidos é utilizado um algoritmo para a solução do Problema do Caixeiro Viajante com Restrição de Tempo (PCVRT) com um lucro associado a cada cliente. Este lucro

é calculado por uma função que cresce não-linearmente conforme o estoque no cliente se aproxime de zero. As rotas são formadas utilizando uma heurística de Clark e Wright [14] para o PRV e são então assinaladas aos veículos através de uma heurística de empacotamento (“Packing”). É mostrada uma simulação do algoritmo para 3 meses que mostra um aumento de 8,4% na quantidade de galões/hora distribuídos.

Christofides e Beasley [11] apresentam um modelo para resolver o Problema de Roteamento de Veículos para um Período (PRVP). Nele os clientes devem ser atendidos durante um determinado período p . Dentro deste período cada cliente determina quantas vezes deseja ser atendido e quais as possibilidades de atendimento. Por exemplo, um cliente pode decidir se quer ser atendido 2 vezes na semana, segunda e quinta ou terça e sexta. Ou pode, simplesmente, ser atendido uma vez em qualquer dia da semana. O modelo é resolvido utilizando heurísticas, já que pela sua complexidade uma solução exata é impraticável. São apresentadas duas heurísticas para a resolução do PRVP que utilizam relaxações do problema. Na primeira é utilizada a relaxação para o problema das medianas que tem por objetivo minimizar a soma das distâncias entre os consumidores e os centros escolhidos para cada dia. Na segunda, um problema do caixeiro viajante (PCV) é resolvido para cada dia, ao invés de um PRV.

Larson [30] apresenta um modelo periódico para o PERV estratégico. O modelo foi utilizado para avaliar o número de barcas necessárias para recolher os detritos resultantes do tratamento de esgotos na cidade de Nova York. Neste problema é possível considerar que está sendo feita a distribuição de espaços vazios para os reservatórios. No seu modelo são obtidas rotas atendidas periodicamente. O período é determinado pela capacidade das barcas e pelo tempo esperado para que os depósitos das estações de tratamento fiquem cheios. Larson apresenta uma heurística para resolução baseada no algoritmo de “savings” de Clark e Wright [14].

Webb [36], apresenta uma extensão ao modelo de Larson em que são introduzidos dois novos conceitos : período e fase de reabastecimento dos clientes. Nesse modelo, um conjunto de clientes pode ser atendido por um conjunto de subrotas ao invés de uma única rota. O conjunto $\mathcal{R}_2 = \{ 0-1-2-0, 0-1-2-3-0, 0-1-2-0 \}$ mostra uma forma de atender aos clientes 1,2 e 3 através de 3 subrotas. O período determina o intervalo de atendimento do cliente em número de subrotas. O período dos consumidores 1 e 2 da rota \mathcal{R}_2 é 1 já que são atendidos em todas as subrotas; já o período do consumidor

3 é 3 pois ele será atendido apenas a cada 3 subrotas. A fase é o número de subrotas, a partir do início do conjunto, onde ocorre o primeiro atendimento. A fase dos consumidores 1 e 2 no exemplo é 1 pois eles são atendidos na primeira subrota; já a fase do consumidor 3 é 2 pois seu primeiro atendimento será feito na segunda subrota. Webb mostra resultados comparativos em que o modelo com período e fase apresenta resultados por volta de 3% melhores que os do modelo simples proposto por Larson.

Dror e Ball [15] propõem um modelo não periódico que reduz o problema de longo prazo para o curto prazo. As quantidades que serão entregues são fixas para cada período de atendimento. Para este modelo, Dror, Ball e Golden [16] propõem duas abordagens heurísticas às quais é adicionada uma fase de atribuição das rotas aos veículos para decidir as rotas atendidas em cada jornada de um veículo. Essa inclusão torna o problema semelhante ao modelado por Golden [27], onde um veículo poderia atender a mais de uma rota. Na primeira heurística um Problema de Atribuição Generalizado (PAG) é resolvido utilizando uma linearização da função objetivo para encontrar os consumidores atendidos em cada dia, em seguida é resolvido um PRV para cada dia. A segunda heurística resolve um problema que é referido como PRV Múltiplo (PRVM) que resolve o problema global sem divisão alguma considerando os aspectos temporais e espaciais simultaneamente. Em ambas as heurísticas depois de definidas as rotas é utilizada uma heurística de empacotamento para encontrar as rotas atendidas por um veículo. São comparadas as soluções obtidas pelas duas heurísticas, e o método de Atribuição/Roteamento mostrou-se aproximadamente 25% superior ao PRVM. Dror e Levy [17] apresentaram duas heurísticas para a melhoria das soluções do PERV onde são utilizadas trocas de nós entre rotas. Uma heurística “gulosa” que realiza a melhor troca existente e, outra que realiza diversas trocas simultaneamente utilizando um problema de emparelhamento (“matching”) para evitar que uma troca realizada interfira em outra.

1.3 Escopo do Trabalho

A motivação para este trabalho foi a de tratar o problema de distribuição de medidores da CPFL. A CPFL é uma empresa de distribuição de energia elétrica que atua no interior de São Paulo. A sede da empresa fica em Campinas, e ela possui diversos distritos no interior. O almoxarifado central da empresa fica em Campinas e faz a

distribuição para os almoxarifados nos distritos.

Inicialmente, o objetivo era estudar a distribuição apenas dos medidores residenciais, que é feita em separado dos outros materiais. Os medidores são distribuídos a partir da sede a aproximadamente 160 seccionais. Os medidores residenciais podem ser de 3 tipos : mono, bi e trifásicos, sendo que os dois primeiros correspondem a mais de 90% dos medidores. Atualmente as seccionais são atendidas através de 4 rotas quinzenais.

Pretendia-se com a utilização de uma abordagem dinâmica reduzir o estoque total de medidores da empresa. Isto seria atingido, principalmente, pela redução dos estoques nas seccionais. Através de um atendimento mais rápido caso ocorresse falta de medidores, as seccionais teriam maior confiança nas entregas e reduziriam seus estoques de segurança.

O trabalho apresentado aqui está relacionado mais diretamente aos trabalhos apresentados por Dror, Ball e outros [15, 16, 17]. No capítulo 2 discutiremos as características do problema e apresentaremos três modelos matemáticos para o problema. Os dois primeiros modelos são equivalentes e foram inspirados nos modelos apresentados por Dror e Ball [15] para o PERV.

Estes modelos reduzem o problema de longo prazo da distribuição para o curto prazo através de estimativas dos custos que as decisões hoje podem acarretar no futuro (chamados de custos futuros) . Assim, a antecipação de uma entrega pode representar um ganho ou um custo extra nos períodos subseqüentes, que serão modelados através dos custos futuros. O modelo matemático é determinístico e procura através de estoques de segurança considerar as características estocásticas da demanda nos consumidores.

O modelo resultante pode ser visto como um problema de roteamento de veículos (PRV) em que são adicionadas restrições para garantir que as entregas sejam feitas antes que falte produto nos consumidores e, onde existem custos diferentes conforme o dia do período de planejamento no qual o consumidor será atendido (custos futuros).

O terceiro modelo proposto incorpora também as restrições de disponibilidade dos veículos, isto é, o tempo que cada veículo pode ser utilizado para atendimento dos consumidores. A incorporação destas restrições é importante principalmente quando a frota é utilizada intensamente e cada veículo tem uma carga de trabalho próxima à sua disponibilidade.

O terceiro capítulo apresenta duas abordagens utilizadas para resolver o problema. Em ambas o problema é dividido. Na primeira, resolve-se um problema de atribuição para encontrar quais consumidores serão atendidos em cada subperíodo do período de estudo, e a seguir é resolvido um problema de roteamento. Na segunda, a atribuição dos clientes é feita diretamente dos consumidores às rotas para então resolver um problema do caixeiro viajante (PCV) para encontrar as rotas efetivas. Estas duas abordagens foram utilizadas para gerar as soluções iniciais para os modelos, a partir das quais foram empregadas heurísticas de melhoria.

São apresentadas duas heurísticas de melhoria. Na primeira, baseada na heurística de troca de nós, as avaliações das inserções e retiradas de nós levam em conta otimizações locais (Gendreau e outros [22]). São consideradas várias trocas simultâneas. Para evitar que uma troca afete outras é permitida apenas uma troca de cada vez em uma dada rota. A segunda heurística utiliza busca tabu [24, 25] para permitir ao algoritmo sair dos mínimos locais. A abordagem utilizada está baseada na heurística proposta por Gendreau e outros [23] para o PRV que através de penalizações nas restrições não atendidas, permite ao algoritmo partir de soluções infactíveis ou produzi-las durante o processo de busca. A combinação da heurística tabu com um procedimento que utiliza parâmetros variáveis de penalização confere maior flexibilidade ao algoritmo. Isto facilita ainda mais a saída dos mínimos locais tornando bastante reduzida a possibilidade de ciclagem, isto é, que as soluções obtidas fiquem se repetindo durante a busca. Permite, também, que uma grande quantidade de iterações seja feita sem grandes riscos de ciclagem.

Para resolver o modelo com restrições de disponibilidade dos veículos foi utilizado o mesmo método, já descrito, para a obtenção de da solução inicial, ao qual foi acrescentada uma fase para decidir quais as rotas atendidas para cada veículo. A solução inicial obtida desta forma pode não ser factível. Isto torna imprescindível a utilização de um procedimento de factibilização da solução. Por isso, foi empregada a busca tabu com penalidades para, simultaneamente, factibilizar e melhorar a solução.

Finalmente, no capítulo 4 são apresentados os resultados obtidos. Inicialmente são discutidos os parâmetros de geração dos problemas utilizados para testes do algoritmo. Os dados para cada problema teste foram gerados aleatoriamente. A seguir, é apresentada a metodologia para a comparação dos resultados obtidos nos testes das heurísticas testadas. São apresentadas comparações do desempenho dos algoritmos

propostos para obtenção das soluções iniciais, bem como dos algoritmos de melhoria. Para os algoritmos de melhoria são apresentados resultados comparativos para alguns dos parâmetros utilizados nos testes. Finalmente, são apresentados os resultados referentes ao modelo, obtidos através de simulações, e a comparação destes com os resultados de uma soluções periódicas (Larson [30]).

No capítulo 5 discutiremos as conclusões do trabalho e as propostas de estudos futuros.

Capítulo 2

Modelo Matemático

O Problema de Estoque e Roteamento de Veículos (PERV) consiste em encontrar a melhor forma para distribuir um produto para consumidores com estoques locais partindo de um depósito central. Esta distribuição deve ser feita de forma a evitar a falta de produto nos consumidores, e minimizar os custos totais de estocagem e distribuição. O PERV surge em situações onde o distribuidor decide quando e quanto entregar aos consumidores, ao contrário dos problemas tradicionais de distribuição em que a quantidade a ser entregue é decidida pelo cliente e no máximo o distribuidor pode decidir quando entregar (dentro de um determinado prazo).

Neste trabalho, o modelamento do PERV segue a linha do modelo apresentado por Dror e Ball [15] que reduz o período de planejamento das rotas do longo para o curto prazo, buscando com isto, reduzir e simplificar o problema além de minimizar os efeitos da estocasticidade da demanda. Neste modelo os consumidores são separados em dois grupos: os que precisam ser atendidos durante o período de planejamento e os que podem ser atendidos de acordo com a conveniência.

Os consumidores que necessitam obrigatoriamente de atendimento são determinados pela provável falta do produto e geram as restrições de atendimento, enquanto os que podem ser atendidos de acordo com a conveniência, criam as possibilidades de otimização das rotas visando a redução dos custos de longo prazo.

O PERV herda as principais características realistas do problema de estoque : demanda estocástica e dinâmica. Enquanto que o roteamento de veículos mostra-se importante do ponto de vista otimizante, isto é, na possibilidade de redução dos custos.

Neste capítulo será discutido um modelo matemático que procura levar em conta, as características do PERV associadas ao problema de estoque e, as possibilidades de otimização fornecidas pelo problema de roteamento de veículos (PRV).

A seguir, será discutida a forma pela qual estas características são tratadas no modelo. Posteriormente, serão apresentadas as formulações matemáticas utilizadas na sua resolução.

2.1 Características do Problema de Estoque

Nos problemas que envolvem estoques, conhecer a demanda futura do produto estocado é fundamental. Essa previsão pode ser feita, por exemplo, utilizando históricos da demanda. Mesmo assim, é comum haver variações na demanda prevista ao longo do tempo, pela influência exercida por fatores econômicos, tecnológicos, entre outros. Durante o ano existem períodos em que a demanda é mais acentuada, e outros em que o consumo é baixo. Esta sazonalidade da demanda depende, é claro, do produto considerado. Por exemplo, o Natal é um período de demanda alta para quase todos os itens, enquanto no dia das crianças aumenta a venda de brinquedos. A análise dos problemas que envolvem estoques de produtos é, normalmente, feita a longo prazo para permitir que a previsão das compras e datas de entrega sejam feitas com antecipação e, impedir que tomadas de decisão atuais possam comprometer o futuro. É comum nestes problemas encontrarmos o ano como período de planejamento.

Essa sazonalidade da demanda obriga que, para a utilização eficiente dos recursos da distribuição, a solução do PERV seja dinâmica. A forma de atender os consumidores deve variar durante o ano de acordo com a demanda, para aproveitar da melhor forma possível os veículos e estoques locais dos consumidores.

Mesmo considerando a sazonalidade e realizando uma boa previsão sobre a evolução da demanda, não é possível saber de antemão qual será o consumo exato a cada semana ou dia do ano. Quanto mais distante for o período considerado, maior é a probabilidade de erro na previsão. Isto dá ao problema uma característica estocástica.

Estes dois fatores levaram à opção pelo modelo proposto por Dror e Ball [15], onde o planejamento das rotas é feito para um período curto no qual cada consumidor é atendido no máximo uma vez. Isto possibilita uma melhor estimativa das demandas no período e a alteração das rotas usadas para atender os consumidores durante o

ano. Evita ainda que imprecisões na previsão da demanda sejam acumuladas, além de reduzir o tamanho e a complexidade do problema.

2.2 Período de Entrega

O período mínimo de planejamento de uma rota é chamado período de entrega (PE). A definição do PE determina também o comprimento máximo de uma rota, visto que todos os veículos devem retornar ao distribuidor até o final do PE. Também devemos considerar a possibilidade de que num PE, um mesmo veículo possa realizar mais de uma viagem (rota).

Quanto maior o PE, mais longas poderão ser as rotas executadas e maior a flexibilidade na designação das rotas aos veículos disponíveis. Aumentam assim, as alternativas de otimização da solução. Outra questão envolvida na definição do PE diz respeito à quantidade de produto entregue. Sempre que um consumidor é atendido, seu estoque é repostado ao nível máximo. A quantidade de produto que será entregue a cada consumidor é estimada para cada PE e é fixa dentro dele. No entanto, durante o PE pode ocorrer consumo do produto, o que acarreta uma diferença entre a quantidade real necessária no consumidor, no início e fim do PE. Quanto maior o PE, maior será esta diferença e, portanto, há um aumento na imprecisão da estimativa da quantidade que deverá ser entregue.

Há casos em que o período de entrega pode ser determinado pela própria forma de operação do distribuidor. Por exemplo, se o distribuidor exige que todos os veículos retornem ao final do dia, o período poderá ser no máximo de 1 dia (ou 8 horas); outra opção seria um PE de 1/2 dia. O PE mais natural em problemas que não envolvam grandes distâncias é de 1 dia.

O tamanho do PE pode, dependendo do problema modelado, ser difícil de calcular. Estes casos, exigem uma ponderação cuidadosa que devem levar em conta os fatores de otimização e precisão na estimativa da quantidade entregue. Estas situações são comuns, principalmente quando a área de atuação do distribuidor é grande (maior que 300 km de raio, por exemplo), onde as rotas dificilmente poderão ser percorridas num único dia. Isto inviabiliza a utilização de 1 dia como PE. Nestes casos, dependendo da necessidade de precisão na estimativa da quantidade entregue, o PE poderá ser de 2 dias até 1 semana (5 dias).

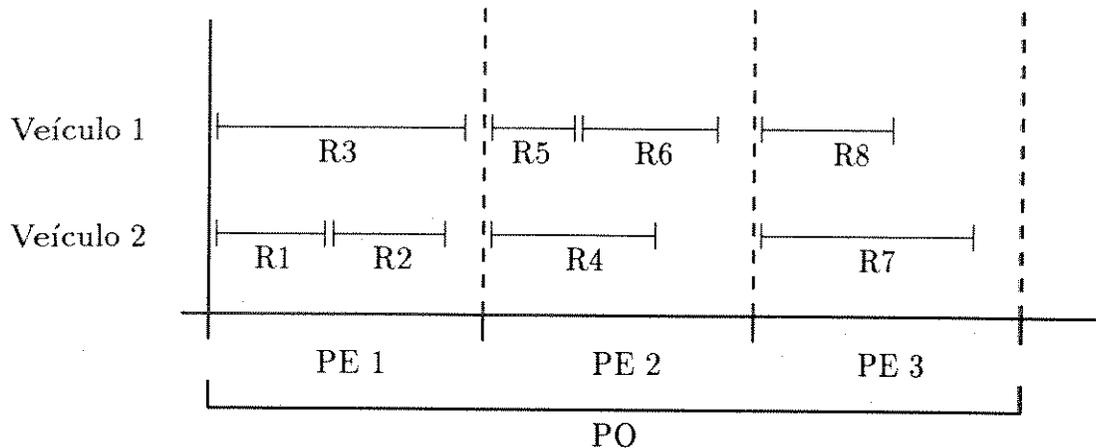


Figura 2.1: Solução Temporal do PERV

2.3 Período Operacional

O período em que as rotas são planejadas é chamado de período operacional (PO). Cada período operacional deve englobar um número inteiro de PEs. A escolha do tamanho do PO sofre o efeito de limitações impostas pelo modelo adotado e deve levar em conta as características operacionais da distribuição.

Como no caso do PE, um período operacional maior permite uma maior otimização das rotas, visto que um maior número de consumidores será considerado, mas em contrapartida, há um aumento no tamanho do problema. Além disso, maiores serão os erros acumulados devido a aleatoriedade da demanda e, portanto, maior será a probabilidade de mudanças nas rotas devido à escassez antecipada de produto nos consumidores.

A utilização de um PO curto possibilita a redução na imprecisão e no tamanho do problema, além de uma simplificação do modelo (que impõe uma limitação): durante um período operacional cada consumidor será atendido no máximo 1 vez. A limitação imposta é que o PO não pode ser maior que o tempo de duração do estoque local de cada consumidor, pois desta forma um consumidor poderia necessitar de dois ou mais reabastecimentos durante o PO.

A figura 2.1 ilustra a execução no tempo de uma solução para o PERV utilizando 2 veículos. O PO é composto por 3 PEs cuja duração é de 1 dia. Em cada PE, cada veículo pode executar qualquer número de rotas desde que estas iniciem e terminem durante o PE.

Abordagens Operacionais

Na operacionalização do modelo existem várias abordagens possíveis, entre elas :

- *Planejamento Rigoroso* : as rotas planejadas são seguidas à risca; caso algum consumidor tenha de ser atendido adiantadamente devido à escassez, ele é retirado da rota.
- *Planejamento Corretivo* : Possibilitar alterações das rotas durante o PO caso ocorram imprevistos, como escassez nos consumidores, caminhão quebrado.
- *Planejamento Encadeado* : Utilizar um PO maior que o que será efetivamente utilizado. Por exemplo, um PO de 7 dias em que apenas os 5 primeiros são utilizados, após os quais um novo planejamento é realizado.

Vale a pena observar que características operacionais podem determinar grandes alterações no problema geral. Por exemplo, o distribuidor poderia receber dos consumidores ao final de um PO informações precisas sobre a situação do estoque local e sobre a demanda para cada PE no próximo PO. O problema de curto prazo deixaria de ser estocástico e passaria a ser determinístico, visto que a demanda nos consumidores está garantida. Porém, isto não implica que o problema de longo prazo seja determinístico, pois pode ser impossível prever a demanda para os períodos operacionais subsequentes.

2.4 Custo Futuro

O custo futuro modela os efeitos da solução obtida para o PO a longo prazo. No modelo, o custo futuro refere-se à situação dos estoques ao final do PO estudado. Este custo é originado por entregas feitas antes da data limite para a entrega (PE crítico), e é calculado em função do estoque esperado em cada PE. Sempre que uma entrega é feita, o estoque do consumidor atendido é repostado.

Em função da situação em que o consumidor está sendo considerado no PO, a entrega antecipada pode representar um ganho ou custo no futuro. Caso o consumidor necessite ser atendido no PO corrente, isto é, seu PE crítico ocorre durante o PO, uma entrega antecipada implicará numa menor quantidade de produto entregue e, portanto, ao final do PO haverá uma menor quantidade de produto no consumidor e

mais entregas poderão ser necessárias no futuro. Por outro lado, se um consumidor que não necessita de entrega no PO corrente receber o produto, ao final do PO haverá maior quantidade de produto no estoque e, no futuro, serão necessárias menos entregas, o que representará um ganho. Neste último caso, haverá um custo para realizar a entrega (não necessária) no PO corrente, e portanto, do compromisso entre o custo desta entrega e o ganho futuro estimado é que se avaliará a conveniência da entrega.

Atendimento Obrigatório

Neste caso, estão os consumidores que necessitam de atendimento durante o PO (conjunto M), isto é, o prazo limite para a entrega (PE crítico) destes consumidores está dentro do PO. A antecipação da entrega para um consumidor em $i \in M$ produz ao final do PO, uma “quantidade não entregue” resultante da diferença entre a melhor entrega (capacidade total do estoque) e a entrega realizada. Esta “quantidade não entregue” é igual ao estoque existente no consumidor (ee_{ij}) no PE j da entrega. O custo futuro é obtido multiplicando-se o custo estimado para realizar uma entrega ao consumidor i (b_i) pela relação da “quantidade não entregue” e da capacidade de estoque. A figura 2.2 mostra a situação do estoque de um consumidor, cujo PE crítico é 3. Se a entrega fosse realizada neste PE, o estoque ao final do PO seria o indicado por q_3 . Caso o atendimento fosse antecipado para o início do PO atual (PE 1), o estoque ao final do PO seria q_1 . A diferença entre q_3 e q_1 é igual ao estoque existente no nó i no PE 1. O custo futuro para uma entrega no PE j pode ser determinado assim :

$$c_{ij} = \frac{ee_{ij}}{T_i} b_i \quad (2.1)$$

onde :

c_{ij} : Custo futuro para atender o nó i no PE j .

ee_{ij} : Estoque esperado do nó i no PE j .

T_i : Capacidade de estoque do nó i .

b_i : Custo estimado para atender o nó i .

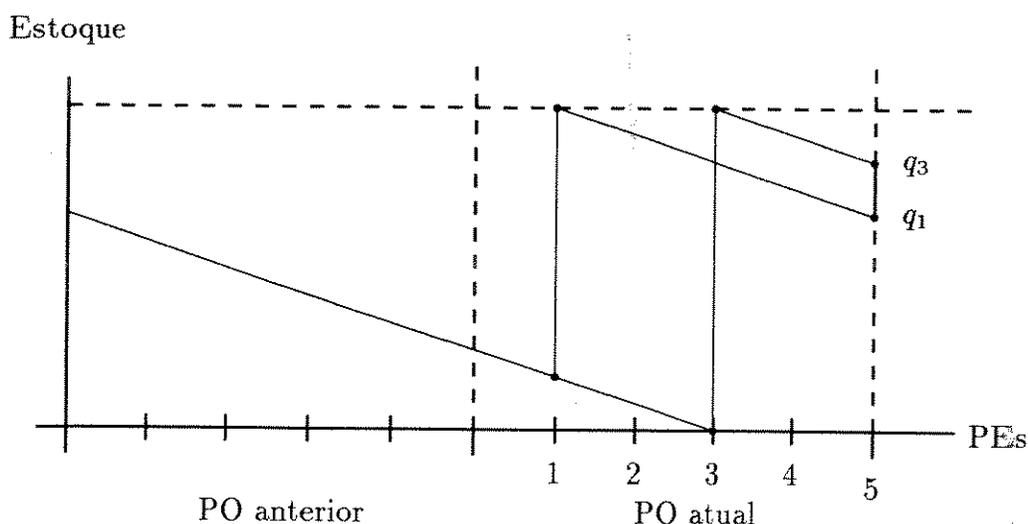


Figura 2.2: Atendimento antecipado em M

Atendimento Facultativo

Nos consumidores que podem vir a ser atendidos durante o PO (Conjunto \bar{M}), o ganho esperado para uma entrega antecipada é calculado multiplicando-se o custo de atendimento pela relação entre a quantidade entregue e a capacidade de estoque. A figura 2.3 mostra a situação do estoque de um nó i em \bar{M} . Caso ele não seja atendido, seu estoque ao final do PO será q_n e se o atendimento for feito no PE 4 seu estoque será q_4 . A diferença $q_4 - q_n$ é a quantidade entregue e representa o ganho futuro da entrega. O custo futuro (negativo), neste caso fica :

$$c_{ij} = -\frac{T_i - ee_{ij}}{T_i} b_i \quad (2.2)$$

É importante observar que o custo de entrega b_i utilizado no cálculo dos custos futuros não é óbvio para este modelo, visto que os nós podem ser atendidos cada vez por uma rota diferente. Isto é complicado ainda mais pelo fato do custo b_i também influenciar na política de entregas e assim, indiretamente, no próprio custo b_i .

Em situações práticas a demanda prevista para cada PE é constante. Para estes casos, considerando a demanda do consumidor i constante e igual a μ_i e a situação inicial do estoque como ee_{i0} , temos as seguintes fórmulas diárias para o custo futuro :

$$\text{Conjunto } M \quad c_{ij} = \frac{ee_{i0} - \mu_{ij}}{T_i} b_i \quad (2.3)$$

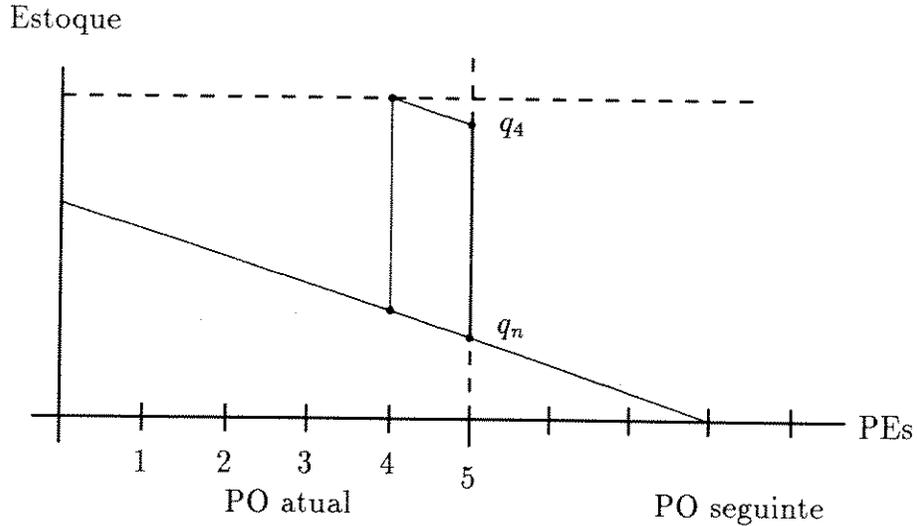


Figura 2.3: Atendimento antecipado em \bar{M}

$$\begin{aligned}
 \text{Conjunto } \bar{M} \quad c_{ij} &= - \left(\frac{T_i - ee_{i0} + \mu_i j}{T_i} \right) b_i \\
 &= - \left(1 - \frac{ee_{i0} - \mu_i j}{T_i} \right) b_i
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

2.5 Estoque de Segurança

O PERV é, em geral, estocástico. Isto é, não permite prever com precisão quando o estoque local de um consumidor irá terminar ou quanto será necessário para completar o seu estoque quando ocorrer o reabastecimento.

Se fosse utilizado um modelo rigoroso para resolver o problema, seria necessário utilizar variáveis aleatórias para representar a demanda dos consumidores em cada unidade de tempo (PE) e, a otimização deveria ser feita através da minimização do custo esperado. Isto seria computacionalmente inviável para problemas práticos.

Desta forma, optou-se pela utilização de estoques de segurança na determinação do PE limite para atendimento (PE crítico) e, de capacidades fictícias nos caminhões para reduzir a possibilidade da carga no caminhão ser insuficiente para atender todos os consumidores na rota.

A abordagem que foi adotada para o estoque de segurança e as demonstrações no apêndice A seguem aquelas apresentadas por Dror e Ball [15]. Nas equações a seguir o índice dos consumidores será omitido por simplificação. Considerando as demandas (r_t) como variáveis aleatórias com média μ , variância σ^2 e função acumulada de

distribuição $\mathcal{F}(r_i)$, temos que a demanda do consumidor durante t dias será :

$$R_t = \sum_{j=1}^t r_j \quad (2.5)$$

A probabilidade de que o estoque do cliente se esgote no PE t ($P_s(t)$) é dado por :

$$\begin{aligned} P_s(t) &= \text{Prob}[\text{Estoque do nó terminar no PE } t, \text{ caso não} \\ &\quad \text{haja entrega anterior}] \\ &= \text{Prob}[R_{t-1} < E_0 \leq R_t] \\ &= \text{Prob}[R_{t-1} \leq E_0] - \text{Prob}[R_t \leq E_0] \\ &= \mathcal{F}^{(t-1)}(E_0) - \mathcal{F}^{(t)}(E_0) \end{aligned}$$

onde :

E_0 : Estoque inicial do consumidor.

$\mathcal{F}^{(k)}(E)$: K -ésima convolução da função \mathcal{F} .

Se a única forma de conhecer a situação do estoque de um consumidor for visitando-o (realizando a entrega), o estoque inicial do consumidor E_0 será a capacidade de estoque T . Caso haja uma forma de conhecer a demanda após uma reposição de estoque, esta informação pode ser usada para reduzir o estoque de segurança.

O custo esperado para uma entrega no PE t , caso não haja escassez antes, será a soma do custo estimado para uma entrega (b) com o custo futuro c_t calculado segundo (2.3). No caso da escassez do produto ocorrer antes do PE t , digamos no dia j , teremos o custo relativo a uma entrega emergencial S^1 acrescido ao custo futuro c_j . Para cada PE até o dia j antes de t , devemos multiplicar o custo ($S + c_j$) pela probabilidade de que ocorra escassez no PE j ($P_s(j)$). Abaixo, é mostrada a fórmula para o cálculo do custo esperado :

$$CE(t) = \sum_{j=1}^{t-1} P_s(j)(S + c_j) + \left(1 - \sum_{j=1}^t P_s(j)\right) (b + c_t) \quad (2.6)$$

O fator $(1 - \sum_{j=1}^t P_s(j))$ é a probabilidade que não ocorra escassez até o PE t .

Como o objetivo do problema é entregar ao menor custo possível, uma entrega deveria ser feita no ponto de mínimo t^* da função (2.6). Se a função $CE(t)$ for

¹A S pode ser somado o custo de insatisfação do cliente.

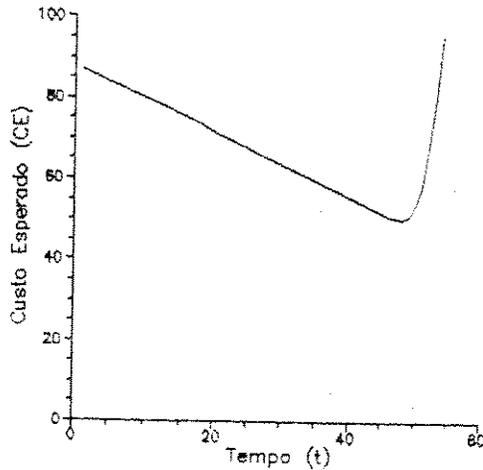


Figura 2.4: Custo Esperado

convexa, podemos garantir que as entregas posteriores a t^* serão progressivamente piores. Portanto, nesta situação faz sentido que o estoque de segurança ES seja a quantidade esperada no PE t^* . Neste caso, deve ser feita uma entrega quando o estoque do consumidor ficar abaixo de ES . O estoque de segurança pode ser calculado como :

$$\begin{aligned}
 ES &= E_0 - \mu t^* \\
 t^* &= \min_t \left\{ CE(t) : 1 \leq t \leq \frac{E_0}{\mu} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

A função $CE(t)$ é estritamente convexa, caso $P_s(t+1) > P_s(t)$. Esta condição é satisfeita para uma distribuição normal de demanda. No apêndice A são mostradas as demonstrações feitas por Dror e Ball [15] para as condições descritas acima. A figura 2.4 mostra o gráfico da função $CE(t)$ para uma distribuição normal.

Em situações reais não existe demanda negativa, o que pode ocorrer em uma distribuição normal. Neste caso, o mais certo é utilizar-se uma distribuição normal truncada. Se o desvio padrão da demanda no PE estiver longe da média, a probabilidade de ocorrência de uma demanda negativa é pequena e pode-se desprezar o efeito das soluções negativas.

2.5.1 Capacidade dos Veículos

Além dos estoques de segurança para os consumidores, é necessário considerar que a capacidade do veículo pode ser insuficiente, pois caso as demandas dos consumidores

atendidos numa rota sejam maiores que as estimadas, faltará produto para suprir o restante dos consumidores da rota. Para resolver este problema será utilizada a abordagem de Stewart e Golden [35] que utiliza capacidades artificiais reduzidas para garantir que a probabilidade de falha (veículo sem produto antes do final) na rota seja pequena. A redução na capacidade do veículo permite que haja uma sobra. Esta sobra será utilizada caso as demandas nos consumidores sejam maiores que a média esperada, para reduzir a possibilidade de um ou mais consumidores na rota não serem atendidos.

2.6 Formulações para o Problema

Existem várias formulações possíveis para o PERV. Aqui serão discutidas duas formulações equivalentes propostas por Dror e Ball. Uma tem por base o Problema de Roteamento de Veículos (PRV) e outra o Problema do Caixeiro Viajante (PCV). Será também apresentada uma terceira formulação que permite incorporar restrições sobre a utilização dos veículos na execução das rotas.

O problema pode ser modelado como um grafo não orientado, onde os consumidores representam os nós e os caminhos entre eles são as arestas. Cada nó do grafo tem atributos como a demanda, a capacidade de estocagem local, localização, etc. Os arcos, por sua vez, ligam dois nós (consumidores) x e y e são representados por um par ordenado (x, y) , podendo ter atributos como distância e duração do trajeto entre x e y . No nosso caso, o problema considerado é simétrico, isto é, $(x, y) = (y, x)$, e a duração das viagens é proporcional à distância entre os nós.

As formulações a seguir consideram o problema determinístico. O tratamento da aleatoriedade da demanda é feito previamente. Primeiro através da definição dos PEs críticos, que por sua vez devem levar em conta os estoques de segurança discutidos na seção anterior. E também, utilizando capacidades fictícias reduzidas para os veículos, o que reduz o risco de que falte produto durante a entrega. Também pode ser feito, a posteriori, um tratamento estocástico nas rotas obtidas, visando reduzir o custo esperado de entrega. As rotas podem ser refeitas levando em conta as distribuições de demanda nos clientes como discutido por Dror e outros [18].

2.6.1 Formulação baseada no PRV

Nesta formulação, o PRV é utilizado como subproblema. Ao PERV cabe “escolher” o melhor conjunto de nós para cada PE, cujo custo de roteamento é avaliado pelo PRV. As restrições relativas às rotas ficam no PRV, enquanto as restrições relativas aos dias limites de entrega ficam no PERV. O objetivo é a minimização do custo total presente e futuro.

Esta formulação será utilizada também, na obtenção de uma solução inicial para o problema, como será discutido no próximo capítulo. O PERV é modelado como um Problema de Atribuição Generalizado (PAG) com função objetivo não linear.

$$\text{Min } \sum_{j=1}^W \left\{ PRV_j(S_j) + \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij} \right\} \quad (2.8)$$

Sujeito a :

$$\sum_{j=1}^{t_i} x_{ij} = 1 \quad \text{para todo } i \in M. \quad (2.9)$$

$$\sum_{j=1}^W x_{ij} \leq 1 \quad \text{para todo } i \in \bar{M}. \quad (2.10)$$

$$\sum_{i=1}^m q_{ij} x_{ij} \leq QT \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, W. \quad (2.11)$$

$$S_j = \{i : x_{ij} = 1\} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, W. \quad (2.12)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \text{para todo } i, j. \quad (2.13)$$

Onde :

M : Conjunto dos nós que devem ser atendidos no PO.

\bar{M} : Conjunto dos nós que podem ser atendidos durante o PO.

m : número total de nós considerados ($M \cup \bar{M}$).

c_{ij} : Custo futuro caso o nó i seja atendido no PE j .

S_j : Conjunto dos nós atendidos no PE j .

t_i : PE crítico do nó i .

$PRV_j(S)$: Custo do roteamento dos clientes em S de acordo com as demandas destes no PE j .

W : Número de PEs do período operacional.

QT : Capacidade de entrega do distribuidor em cada PE.

q_{ij} : Quantidade a ser entregue caso o nó i seja atendido no PE j .

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o nó } i \text{ for atendido no PE } j. \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A função objetivo (2.8) procura minimizar os custos de distribuição no período operacional corrente $PRV_j(S_j)$ e os custos futuros, escolhendo os melhores conjuntos S_j . As restrições (2.9) garantem que todo nó i em M seja atendido uma única vez até seu PE crítico t_i , e (2.10) garante que cada nó em \bar{M} pode ser atendido no máximo uma vez. As restrições (2.11) garantem que a capacidade de atendimento da frota de veículos seja respeitada. Estas restrições poderiam estar localizadas apenas no PRV . Nesse caso, o custo $PRV_j(S_j)$ seria infinito se não houvesse capacidade suficiente para atender S_j . Porém, elas foram adicionadas ao $PERV$ porque na fase de resolução será feita uma simplificação da função objetivo que impede a utilização do PRV para limitar o atendimento. As restrições (2.12) definem o conjunto de nós que será roteado em cada PE.

Modelo para o Problema de Roteamento de Veículos (PRV)

No modelo clássico do PRV o objetivo é distribuir um produto partindo de um depósito, utilizando veículos com capacidades limitadas, a um conjunto S de consumidores com demandas conhecidas. O modelo para o PRV que apresentaremos a seguir é bastante simples, com restrições apenas sobre a capacidade dos veículos. Existem modelos mais sofisticados que incorporam restrições para o comprimento das rotas e janelas de tempo para o atendimento de cada nó. Porém, no modelo adotado estas sofisticações não são incluídas. No caso da obtenção de uma solução inicial pode-se inclusive dizer que são desnecessárias.

O modelo matemático para o PRV pode ser definido como :

$$PRV(S) = \text{Min} \sum_{k=1}^{NR} PCV(S_k) \quad (2.14)$$

Sujeito a :

$$\sum_{k=1}^{NR} x_{ik} = 1 \quad \text{para } i \in S. \quad (2.15)$$

$$\sum_{i \in S} q_i x_{ik} \leq QV \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, NR. \quad (2.16)$$

$$S_k = \{i : x_{ik} = 1\} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, NR. \quad (2.17)$$

$$x_{ik} \in \{0, 1\} \quad \text{para todo } i, k. \quad (2.18)$$

Onde :

$PCV(S_k)$: Custo da Solução do Problema do Caixeiro Viajante para a rota S_k .

NR : Número de rotas.

QV : Capacidade de carga do Veículo.

q_i : Quantidade a ser entregue ao nó i .

S : Conjunto dos nós que devem ser roteados.

S_k : Conjunto dos nós atendidos através da rota k .

$$x_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se o nó } i \text{ for atendido pelo veículo } k. \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Problema do Caixeiro Viajante

O PCV é um dos problemas mais estudados em Otimização Combinatória. Definido um grafo $G = (V, A)$ em que $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ é o conjunto de nós e $A = \{(v_i, v_j) : v_i, v_j \in V\}$ é o conjunto de arcos, com custo não negativo c_{ij} , o objetivo do PCV é encontrar o circuito que passa por todos os nós ao menor custo possível.

Existem diversas formulações matemáticas para o PCV. A principal diferença entre elas está nas restrições para a eliminação de sub-circuitos que não passam por todos os nós. Não apresentaremos nenhuma destas formulações para o PCV, já que, na resolução serão utilizadas heurísticas que não fazem uso da formulação matemática do problema.

2.6.2 Formulação baseada no PCV

Esta formulação também supõe um modelo de atribuição, mas neste caso, a atribuição é feita diretamente dos nós às rotas. O dia de entrega fica definido pela solução encontrada pela atribuição dos nós às rotas, visto que, cada rota k está prevista para ser executada em um PE específico δ_k . O número de rotas que serão percorridas em cada PE deve ser definido previamente e pode ser um múltiplo do número de veículos disponível para executar as rotas. A seguir é apresentada a formulação :

$$\text{Min} \sum_{k=1}^{NR} \left\{ PCV(S_k) + \sum_{i=1}^m c_{i\delta_k} x_{ik} \right\} \quad (2.19)$$

Sujeito a :

$$\sum_{k \in v_i} x_{ik} = 1 \quad \text{para todo } i \in M. \quad (2.20)$$

$$\sum_{k=1}^{NR} x_{ik} \leq 1 \quad \text{para todo } i \in \bar{M}. \quad (2.21)$$

$$\sum_{i=1}^m q_{i\delta_k} x_{ik} \leq QV \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, NR. \quad (2.22)$$

$$S_k = \{i : x_{ik} = 1\} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, NR. \quad (2.23)$$

$$x_{ik} \in \{0, 1\} \quad \text{para todo } i, k. \quad (2.24)$$

Onde :

δ_k : PE em que a rota k é percorrida.

c_{ij} : Custo futuro caso o nó i seja atendido no PE j .

S_k : Conjunto dos nós atendidos pela rota k .

v_i : rotas percorridas até o PE crítico do nó i .

$PCV(S)$: Custo da Solução do Problema do Caixeiro Viajante para o conjunto S .

NR : Número de rotas do período operacional.

QV : Capacidade de carga do veículo.

q_{ij} : Quantidade que será entregue caso o nó i seja atendido no PE j .

M, \overline{M} : Conjunto dos nós que devem e que podem vir a ser atendidos durante o PO, respectivamente.

$$x_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se o nó } i \text{ for atendido pela rota } k. \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

As diferenças desta formulação para a anterior (2.8) - (2.13) estão na função objetivo que ao invés de contemplar a soma dos custos dos PRVs contempla o custo das rotas pelo PCV. As restrições também são semelhantes mas, na restrição de capacidade é utilizada a capacidade do veículo ao invés da capacidade total de entrega para o PE. Esta capacidade pode ser a capacidade real ou uma capacidade ajustada.

Nesta formulação o problema principal (2.19) - (2.24) tem maior controle sobre o problema, pois a rota utilizada para atender o consumidor é decidida por ele, ao contrário da formulação anterior que só decide o PE para a entrega. O problema pode ser resolvido utilizando uma abordagem semelhante a de Fisher e Jaikumar [21] com o acréscimo dos custos futuros. A resolução do problema empregando esta formulação será discutida no capítulo 3.

2.6.3 Formulação Veículo-Rota

Nesta formulação, ao contrário das anteriores, veículos e rotas têm significados distintos. Na prática um veículo pode percorrer mais de uma rota no mesmo PE, desde que haja tempo suficiente. Nas formulações anteriores este fato não era contemplado no modelo de otimização. É claro que a partir das soluções propostas o operador poderia utilizar um veículo para atender mais de uma rota. Na aplicação de seu modelo na distribuição de polipropileno Dror e Ball [15] reportam que as rotas obtidas poderiam - “sem grandes esforços” - ser agrupadas permitindo que um veículo atendesse duas ou três rotas.

Este fato parece razoável se as quantidades entregues aos consumidores não forem demasiadamente diferentes e, não existirem “clusters” de consumidores muito distantes da garagem. Caso um destes fatos ocorra, as rotas obtidas podem ter comprimentos muito diferentes, tornando difícil a avaliação do número de rotas que um veículo pode atender. Desta forma, é sugerido um modelo onde, além da atribuição dos consumidores às rotas (formulação PCV), também é contemplada a atribuição

das rotas aos veículos. Esta formulação de dupla atribuição está descrita matematicamente a seguir :

$$Min \sum_{k=1}^{NR} \left\{ PCV(S_k) + \sum_{i=1}^m c_i \delta_k x_{ik} \right\} \quad (2.25)$$

Sujeito a :

$$\sum_{k \in v_i} x_{ik} = 1 \quad \text{para todo } i \in M. \quad (2.26)$$

$$\sum_{k=1}^{NR} x_{ik} \leq 1 \quad \text{para todo } i \in \bar{M}. \quad (2.27)$$

$$\sum_{i=1}^m q_i \delta_k x_{ik} \leq QV \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, NR. \quad (2.28)$$

$$\sum_{l \in V_{\delta_k}} y_{kl} = 1 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, NR. \quad (2.29)$$

$$\sum_{k=1}^{R_l} TPCV(S_k) y_{kl} \leq T_{MAX} \quad \text{para } l = 1, 2, \dots, NV. \quad (2.30)$$

$$S_k = \{i : x_{ik} = 1\} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, NR. \quad (2.31)$$

$$y_{kl}, x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \text{para todo } i, k, l. \quad (2.32)$$

Onde :

δ_k : PE em que a rota k é percorrida.

c_{ij} : Custo futuro caso o nó i seja atendido no PE j .

M, \bar{M} : Conjunto dos nós que devem e que podem vir a ser atendidos durante o PO, respectivamente.

NR : Número máximo de rotas para o PO.

NV : Número total de veículos para o PO. (Veículos disponíveis por dia multiplicado pelo número de PEs).

$PCV(S)$: Custo da Solução do Problema do Caixeiro Viajante para o conjunto S .

QV : Capacidade de carga do veículo (frota homogênea).

q_{ij} : Quantidade a ser entregue caso o nó i seja atendido no PE j .

R_l : Conjunto das rotas atendidas no dia em que o veículo l será empregado.

S_k : Conjunto dos nós atendidos pela rota k .

$TPCV(S)$: Tempo de duração da rota obtida pelo $PCV(S)$.

T_{MAX} : Tempo Disponível de cada veículo durante o PE.

v_i : rotas percorridas até o PE crítico do nó i .

V_j : Veículos disponíveis no PE j .

$$x_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se o nó } i \text{ for atendido pela rota } k. \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$
$$y_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{se a rota } k \text{ for atendido pelo veículo } l. \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Esta formulação é formada basicamente pela formulação PCV (2.19)-(2.24) acrescida das restrições (2.29) e (2.30), que garantem que uma rota seja atribuída a um único veículo e, que a soma das durações das rotas não exceda o tempo disponível de cada veículo.

O maior realismo desta formulação, tem como contrapartida, uma complexidade maior para encontrar a solução ótima e, dependendo do problema, mesmo uma solução factível. Na resolução desta formulação foi empregada uma heurística de busca tabu que utiliza penalidades para permitir que se parta de uma solução inicial infactível. Desta forma, ao mesmo tempo busca-se uma solução factível e melhora-se a solução de partida. Salientamos que a formulação veículo rota é uma contribuição original desta tese.

2.7 Custo de Entrega

Um dos dados necessários para efetuar o cálculo dos custos futuros é o custo de entrega b_i . Este custo seria relativamente simples de ser calculado em problemas onde as rotas são fixas, isto é, um nó é atendido utilizando-se uma única rota. Para este caso poderia ser utilizado, como estimativa razoável para o custo marginal, o valor :

$$b'_i = PCV(S) - PCV(S - i) \quad (2.33)$$

Para ser preciso, poderíamos utilizar :

$$b'_i = PRV(S) - PRV(S - i) \quad (2.34)$$

Para compactibilizar este custo com o custo de atendimento real multiplicaremos o custo marginal pela razão entre o custo total ($PRV(S)$) e a soma dos custos marginais ($B_s = \sum_{k \in S} b'_k$). Desta forma temos que:

$$b_i = b'_i \times \frac{PRV(S)}{B_s} \quad (2.35)$$

Utilizar a equação (2.35), sem dúvida, requer um elevado tempo computacional, podendo ser necessário ainda, empregar heurísticas na resolução. Mas, o importante neste caso, é que existe um meio de obter um b_i com uma precisão razoável.

No caso do PERV, como já foi discutido no ítem 2.4, um nó pode ser atendido cada vez por uma rota diferente. Além disso, o próprio custo de atendimento influencia a solução e portanto o custo de entrega. Assim, calcular este custo com exatidão é impossível, e mesmo uma estimativa razoável torna-se uma tarefa complexa.

Dror e Ball [15] sugerem uma forma de calcular o custo de entrega que utiliza algumas rotas “boas”, procurando repartir seus custos de forma justa entre os nós. Estas rotas “boas” podem ser obtidas de um histórico ou de um conjunto de nós próximos.

Aqui, sugerimos uma fórmula para avaliar o custo baseado nas distâncias do nó i ao depósito central (d_{i0}) e a um conjunto de nós próximos, e na capacidade de estoque. Esta fórmula utiliza três parâmetros :

α : Multiplicador de distância para os nós mais próximos; seu valor é menor que 1.

β : Porcentagem mínima de participação da distância do nó i ao depósito representada por d_{i0} .

N : Número de vizinhos considerados na análise.

Nesta fórmula, β representa um seguro contra a falta de produto no consumidor, que poderia ocasionar uma viagem direta. A ponderação da importância da distância

direta é feita segundo a capacidade de estocagem do consumidor, que é a maior entrega possível. As distâncias para os nós mais próximos teram maior importância. Uma potência α^j representa a participação do j -ésimo nó mais próximo na composição do custo. A fórmula para o cálculo está apresentada a seguir :

$$b_i = \min(2d_{i0}, \rho_i d_{i0} + (1 - \rho_i) * dp_{im}) \quad (2.36)$$

onde :

$$dp_{im} = \frac{\sum_{j=1}^N d_{i \text{ ord}_i(j)} \alpha^j}{\sum_{j=1}^N \alpha^j} \quad (2.37)$$

$$\rho_i = \max(1, \beta + \frac{e_i}{Q}) \quad (2.38)$$

$\text{ord}_i(j) = j$ -ésimo elemento da lista de nós em ordem crescente de distância ao nó i .

$Q =$ Capacidade de carga do veículo.

$e_i =$ Capacidade de estoque do nó i .

Os valores utilizados para o parâmetro α situam-se entre 95 e 97%, para β foi utilizado entre 5% e 10%, finalmente, para o valor de N utilizamos entre 5% e 10% do número total de nós do problema. Para avaliar melhor os parâmetros pode ser feita uma simulação para diferentes valores. Esta simulação será discutida no capítulo 4.

Capítulo 3

Técnicas de Resolução

Neste capítulo serão discutidas as técnicas e algoritmos empregados para a resolução do PERV. Está demonstrado que o PRV pertence a classe dos problemas NP-hard [32]. Como o PERV tem o PRV como caso particular, é altamente improvável que seja proposto um método exato capaz de resolvê-lo em tempo polinomial. Por este motivo optou-se por algoritmos aproximados. Isto se justifica pela grande dimensão dos problemas reais de estoque e roteamento o que inviabiliza o uso das técnicas exatas. A seguir será detalhado o enfoque heurístico utilizado.

A metodologia de resolução do problema está mostrada na figura 3. Primeiro será feita uma relaxação do problema para obter uma solução inicial. Para as formulações baseadas no PRV e no PCV a relaxação é simplesmente uma linearização da função objetivo e as soluções iniciais são factíveis. No caso da formulação Veículo-Rota, além da linearização da função objetivo também serão relaxadas as restrições de atribuição das rotas aos veículos, e portanto a solução inicial pode ser inactível. Em seguida, serão utilizadas heurísticas de trocas de nós para melhorar a solução inicial. Estas trocas podem ser realizadas uma de cada vez, ou em blocos. No caso da solução inicial ser inactível é aplicada uma heurística de busca tabu com penalidades que procura, ao mesmo tempo, encontrar uma solução factível e melhorar a solução.

3.1 Solução Inicial

A solução inicial será obtida resolvendo-se um modelo de Atribuição Generalizado gerado a partir das formulações PRV e PCV do Capítulo 2. Para tanto, faz-se uma

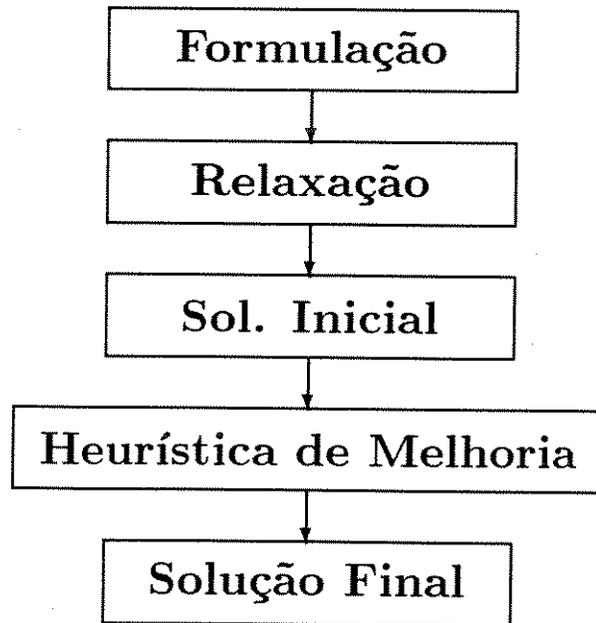


Figura 3: Metodologia de Resolução.

aproximação linear da função objetivo. Na formulação PRV a parte referente ao custo de roteamento é eliminada, e considera-se apenas o custo futuro. Na formulação PCV, além do custo futuro será utilizada uma semente para cada rota, a partir da qual será feita uma aproximação do custo de atendimento do nó. Isto garante o respeito às restrições de capacidade do problema, e portanto, à factibilidade das soluções.

3.1.1 Solução inicial pela formulação PRV

A solução inicial é obtida pela linearização da função objetivo da formulação PRV (2.8)-(2.13) do PERV mostrada no capítulo anterior. É muito difícil fazer uma estimativa da contribuição do $PRV(S_i)$ na função objetivo (2.8), pois não se pode prever por onde as rotas passarão em cada PE. Assim, esse termo será desprezado, só restando o custo futuro esperado do PE. Nestas condições, fica considerado apenas o aspecto temporal - quando entregar ? - do problema.

Para tornar a formulação mais aderente ao modelo de Atribuição Generalizado foi introduzido um PE adicional ao final do PO corrente que será utilizado para atribuir

os consumidores em \overline{M} que não forem atendidos durante o PO. Os custos futuros dos nós $c_{(W+1)j}$ para os nós $i \in \overline{M}$ será 0, pois não há ganho ou perda se estes nós não forem atendidos. Para os nós $i \in M$ os custos futuros serão infinitos para os PEs posteriores ao PE crítico, isto é $c_{ij} = \infty$ para $j > t_i$. Desta forma, as restrições (2.9) e (2.10) podem ser reescritas em um único grupo de restrições de atribuição (3.3). A formulação obtida está mostrada a seguir como um modelo de Atribuição Generalizado :

$$\text{Min} \quad \sum_{j=1}^{W+1} \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij} \quad (3.1)$$

Sujeito a :

$$\sum_{i=1}^m q_{ij} x_{ij} \leq QT_j \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, W+1. \quad (3.2)$$

$$\sum_{j=1}^{W+1} x_{ij} = 1 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.3)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \text{para todo } i, j. \quad (3.4)$$

Onde :

c_{ij} : Custo futuro caso o nó i seja atendido no PE j . Para os nós em \overline{M} o custo futuro de atendimento fora do PO é 0. E nos nós em M o custo do atendimento após t_i é infinito.

m : Número de nós em $M \cup \overline{M}$.

M, \overline{M} : Conjunto dos nós que devem e podem vir a ser atendidos durante o PO, respectivamente.

QT : Capacidade máxima de distribuição em cada PE. Número de rotas previstas multiplicado pela capacidade dos veículos.

q_{ij} : Quantidade a ser entregue caso o nó i seja atendido no PE j .

t_i : PE crítico do nó i .

W : Número de PEs no PO corrente.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o nó } i \text{ for atendido no PE } j. \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Resolução do Problema de Atribuição Generalizado

No Problema de Atribuição Generalizado (PAG) temos um conjunto de m agentes para executar m tarefas. Cada agente tem uma capacidade de atendimento. Cada tarefa i tem um custo c_{ij} para ser realizada pelo agente j , e necessita do tempo q_{ij} . A formulação (3.1) - (3.4) é um caso particular de PAG onde os agentes são os PEs e as tarefas são o atendimento aos consumidores. O algoritmo escolhido para a resolução do PAG foi o proposto por Ross e Soland [34]. Este algoritmo resolve um *Branch & Bound* que utiliza-se de uma relaxação das restrições (3.2) para obter um limitante inferior. Em cada subproblema basta encontrar para cada tarefa o melhor agente assim, $x_{ij^*} = 1$, onde $j^* = \arg \min \{c_{ij}\}$ para cada i . O restante das variáveis tem valor 0. Calcula-se a utilização total da capacidade de cada agente na solução :

$$G_j = \sum_{i=1}^m q_{ij} x_{ij} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n.$$

Se todos os agentes forem factíveis, $G_j \leq QT_j$, a solução ótima foi encontrada. Caso contrário, resolve-se um Problema da Mochila para cada restrição de atendimento infactível buscando transferir carga para os demais agentes (PEs). Para cada restrição $G_j > QT_j$, avaliamos o custo extra de executar cada tarefa i atribuída ao agente j (conjunto V_j) através do segundo melhor agente s_i . Assim, o menor custo para transferir o atendimento da tarefa i fica $p_i = c_{is_i} - c_{ij}$. O problema da mochila obtido fica :

$$PM(V_j) = \text{Min} \sum_{i \in V_j} p_i y_i \quad (3.5)$$

Sujeito a :

$$\sum_{i \in V_j} q_{ij}(1 - y_i) \leq Q_j \quad (3.6)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad \text{para } i \in V_j \quad (3.7)$$

onde :

Q_j : Capacidade do agente j .

$PM(V_j)$: o custo obtido com a resolução do problema da mochila.

$y_i = 1$: indica que a carga foi transferida do agente j para o agente s_i , e portanto faz-se $x_{ij} = 0$ e $x_{is_i} = 1$.

Novamente verifica-se a factibilidade da solução. Se esta for factível, o subproblema está resolvido. Caso contrário, se o custo da solução relaxada for maior que a melhor solução factível encontrada o subproblema está sondado. Se o subproblema não for sondado, escolhe-se uma variável e faz-se o “branch” do subproblema .

Resolução do Problema de Roteamento de Veículos

A partir da atribuição feita pelo PAG, é necessário traçar as rotas para cada PE. Isto é feito resolvendo um problema de roteamento de veículos (PRV) para os nós que serão atendidos em cada PE. Para o roteamento, podem ser utilizados algoritmos exatos [10, 29] ou algumas das diversas heurísticas [13, 12, 26, 21] que permitem considerar várias restrições adicionais sobre as rotas. O método utilizado aqui, realiza a decomposição em um problema mestre (Problema de Atribuição Generalizado - PAG) e sub-problemas (PCVs). Este método foi proposto por Fisher e Jaikumar [21] e foi escolhido pelos bons resultados nos testes apresentados e também pela facilidade de implementação, já que o algoritmo para a resolução do PAG pode ser o mesmo utilizado na resolução do modelo (3.1) - (3.4) do PERV. Este método pode ser classificado como do tipo “cluster first, route second” no sentido em que primeiro, os nós de cada rota são agrupados para depois determinar a melhor rota passando por eles (PCV).

A heurística simplifica a função objetivo da formulação substituindo a função não linear $PCV(S)$ da equação (2.14) por uma aproximação linear. Esta aproximação é feita escolhendo-se pontos de referência, chamados sementes, para construir cada rota. O resultado é um PAG que pode ser resolvido utilizando o algoritmo de Ross e Soland. Um fator determinante na qualidade da heurística de Fisher e Jaikumar é a escolha das sementes e a forma de cálculo dos custos de atribuição dos nós a estas sementes. As sementes podem se localizar em nós ou em coordenadas geográficas. Fisher e Jaikumar sugerem em seu artigo uma forma de calcular as sementes de cada “cluster” quando as distâncias são euclidianas. Estas sementes são pontos na bissetriz de cones gerados a partir do nó central e cuja distância do nó central é ponderada de acordo com os momentos das cargas.

Aqui, optamos por uma estratégia mais simples proposta por Christofides [11] para obter os centros dos “clusters”. A semente escolhida é sempre o nó mais distante do conjunto de sementes já selecionado, que será inicializado com o nó central. Várias sementes geradas por este método encontram-se em pontos extremos, bem distantes do nó central. O custo de atribuição de um nó i a uma semente s em [21] é a diferença entre uma viagem direta entre o depósito e a semente (d_{0s}) ou esta mesma viagem passando pelo nó i ($d_{0i} + d_{is}$). Para evitar que as sementes em pontos extremos tivessem um custo baixo de atribuição mesmo para nós muito distantes da semente - o que ocorreria caso o custo acima fosse utilizado - foi feita uma adaptação visando aumentar a importância da proximidade entre a semente e o nó. Isto foi feito multiplicando a diferença das distâncias ao depósito ($d_{i0} - d_{s0}$) por um parâmetro $\Theta \leq 1$. A fórmula para o cálculo da aproximação ca_{si} está mostrado a seguir :

$$ca_{si} = \min [d_{si} + \Theta(d_{i0} - d_{s0}), d_{is} + \Theta(d_{0i} - d_{0s})] \quad (3.8)$$

onde : $\Theta \leq 1$

Se o valor de Θ for 1, temos o mesmo cálculo de Fisher e Jaikumar, quanto menor o valor Θ maior será a importância da distância d_{si} . Os valores sugeridos para Θ estão entre 0.70 e 0.90.

Após a execução do PAG para o PRV, que obterá os consumidores pertencentes a cada rota resta definir as rotas. Para isto, resolve-se para cada conjunto de nós um problema do Caixeiro Viajante. Para o PCV foi empregada a heurística de Lin e Kernigham [33], que parte de uma solução inicial e através de trocas de arcos obtém uma solução 3-opt garantida. Isto quer dizer que a solução obtida não pode ser melhorada por nenhuma troca de 3 de seus arcos por quaisquer outros três arcos que formem uma solução factível. A heurística está resumidamente descrita, a seguir.

Heurística de Lin e Kernigham para o PCV

Nesta heurística um arco $x_1 = (t_1, t_2)$ da rota atual é selecionado para iniciar as trocas. A partir de t_2 busca-se o arco $y_1 = (t_2, t_3)$ que produza o maior ganho $g_1 = |x_1| - |y_1|$, onde $|x|$ representa o custo do arco x . O arco y_1 é inserido e $x_2 = (t_3, t_4)$ é retirado. Agora, dependendo da posição de t_4 na rota atual podemos ter uma situação onde a inclusão de (t_4, t_1) produz uma nova rota factível (figura 3.1),

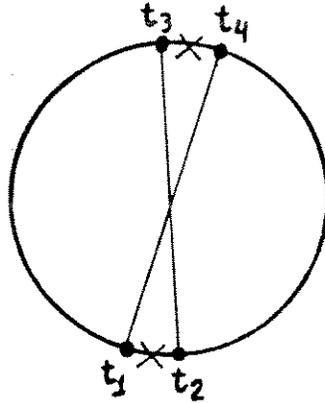


Figura 3.1: Arco (t_4, t_1) produz solução factível

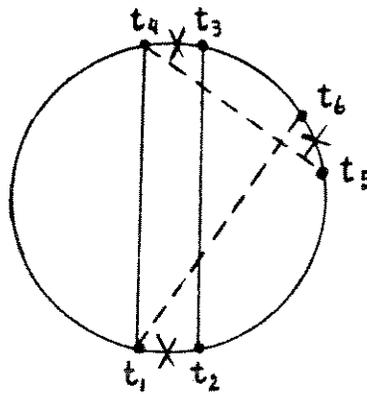


Figura 3.2: Arco (t_4, t_1) produz subrotas

ou onde a inclusão de (t_4, t_1) produz duas subrotas (figura 3.2). Neste último caso, um novo arco deve ser escolhido para retirada antes que uma solução viável seja obtida. As trocas prosseguem, sendo que a i -ésima troca envolve a retirada de um arco (t_{2i-1}, t_{2i}) e a inserção do arco (t_{2i-2}, t_{2i-1}) , enquanto a soma dos ganhos obtidos for positivo e maior que o ganho da melhor solução encontrada. Nas duas situações (figura 3.1 e figura 3.2), após a terceira iteração deve sempre ser possível obter uma solução factível ao inserir-se o arco (t_{2i}, t_1) .

Este enfoque para produzir soluções iniciais para o PERV pode fornecer soluções de má qualidade pois no modelo PAG, que atribui nós aos PEs, não é considerado o aspecto espacial do problema. Desta forma, dois clientes muito próximos podem ser

atendidos com apenas um PE de diferença. Neste caso, adiantar uma das entregas para reduzir o percurso total com um pequeno aumento no custo futuro poderia ser a melhor política.

3.1.2 Solução Inicial da Formulação PCV

A utilização da formulação PCV é, de certa forma, a união das duas etapas de resolução da formulação PRV do item anterior, ou seja, a resolução de PAG inicial para decidir quais nós serão atendidos nos PEs e a resolução do PAG do roteamento para decidir em quais rotas cada nó será atendido. Nesta formulação a decisão sobre quais nós serão atendidos em cada rota é feita conjuntamente.

Na resolução utiliza-se novamente um PAG, mas neste caso os nós são atribuídos diretamente a rotas ao invés de PEs como no item anterior. Foi utilizada a abordagem de Fisher e Jaikumar para o PRV com a linearização do custo PCV na função objetivo (2.19). A escolha das sementes que serão utilizadas para as aproximações é um fator determinante para a qualidade da solução inicial. Neste caso há uma dificuldade adicional na escolha pois, não só temos que escolher as sementes, como também, o PE em que as respectivas rotas serão realizadas.

O método de escolha leva em conta o prazo limite para o atendimento dos clientes (PE críticos) e as possibilidades de otimização. As sementes s são escolhidas entre um conjunto de nós C que possuem PE crítico nos T próximos PEs, e o critério utilizado é o da distância máxima para o conjunto das sementes já assinaladas. Este conjunto é inicializado a cada PE com as sementes do PE anterior acrescido do centro de distribuição. O conjunto de nós com PE crítico j é chamado TC_j . O algoritmo para a escolha das sementes está mostrado na figura 3.3.

A aproximação linear utilizada foi a mesma da equação (3.8). Resolvido o PAG obtemos os nós que serão atendidos em cada rota e basta agora resolver um Problema do Caixeiro Viajante para cada rota como no item anterior para obter a solução inicial.

As soluções iniciais obtidas pela formulação PCV tendem a ser melhores que as obtidas pela PRV, pois aqui são considerados também os aspectos espaciais ao invés de apenas os temporais. Mas, a dificuldade de escolher “boas” sementes e também o número adequado de rotas em cada PE pode produzir soluções iniciais ainda muito “ruins”.

$$S_0 = \emptyset$$

Para cada PE i faça :

$$\text{lim} = \min (m, i + T)$$

$$C = \cup_{j=i}^{\text{lim}} TC_j$$

$$S_i = \emptyset$$

$$SC = S_{i-1} \cup \text{Nó Distribuidor}$$

Até completar o n. de rotas para o PE i faça :

$$s = \arg_{k \in C} \max \{ \min_{l \in SC} \{ d_{kl} \} \}$$

$$SC = SC \cup s$$

$$S_i = S_i \cup s$$

Figura 3.3: Algoritmo para localização de sementes

3.1.3 Conjunto Inicial de Nós

Um aspecto que deve ser decidido antes da determinação da solução inicial é o conjunto de nós que será utilizado. Podem ser considerados somente os consumidores que devem ser atendidos (M) ou adicionados todos os consumidores que podem ser atendidos (\overline{M}). Para obter uma solução factível não faz diferença se os nós em \overline{M} serão utilizados ou não na solução. Sua inclusão pode reduzir os custos totais, mas produz, em contrapartida, um aumento das dimensões do problema.

Para saber se uma entrega antecipada proporcionará ganho, é preciso comparar o custo da entrega efetiva com o custo futuro esperado. No caso da formulação PRV, em que não foi utilizada nenhuma consideração espacial, não faz sentido incluir estes nós já que não há como avaliar o custo da entrega. Na formulação PCV, podemos utilizar uma aproximação linear (equação 3.8) para estimar o custo do atendimento antecipado do nó i através da rota com semente s (ca_{is}). Se a soma do custo futuro estimado c_{ij} com a aproximação ca_{is} for negativa podemos prever um ganho futuro, e portanto, esta entrega será considerada na solução.

As características do método de resolução do PAG dificultam bastante a obtenção de uma solução factível quando os nós em \overline{M} são utilizados. Os custos de inclusão são sempre negativos (de outra forma não haveria sentido em incluir essas possibilidades). Logo, as variáveis relacionadas aos consumidores em \overline{M} que excedem a capacidade

de atendimento durante o PO devem ser todas fixadas em 0 antes de obter-se uma solução factível.

A escolha de uma *porcentagem mínima* da capacidade de estoque para que uma entrega seja considerada é uma das formas de reduzir o número de nós em \bar{M} , sem reduzir demais as possibilidades de otimização. Assim, se a capacidade de estoque de um cliente for de 2000 unidades e tivermos uma *porcentagem mínima* de 60%, uma entrega só será considerada caso, ao menos, 1200 unidades forem entregues. A quantidade prevista para entrega será calculada para cada PE dentro do PO e, uma entrega antecipada será considerada apenas nos PEs onde a quantidade entregue atingir a *porcentagem mínima*. Neste caso, os nós em \bar{M} seriam aqueles que respeitassem a *porcentagem mínima* em ao menos um dos PEs do período operacional.

3.2 Trocas de Nós

A melhoria da solução inicial pode ser feita através de heurísticas que realizem a troca de nós entre rotas. Estas trocas devem ser realizadas, entre nós de rotas distintas, mantendo a factibilidade da solução, até que não se encontre nenhuma troca que produza melhora na solução (mínimo local foi atingido). As trocas de nós para a melhoria da solução do PERV foram sugeridas por Dror e Levy [17]. Estas trocas podem ser, basicamente, de quatro tipos :

Troca Simples : Um nó i sai da rota r_1 e entra em outra r_2 . (fig.3.4)

Troca Cruzada : Um nó i_1 da rota r_1 é inserido na rota r_2 e o nó i_2 de r_2 é inserido em r_1 . (fig.3.5)

Inserção : Um nó i que não está sendo atendido no PO corrente passa a ser atendido na rota r . (fig.3.6)

Retirada : Um nó i que não precisa ser atendido (em \bar{M}) é retirado de uma rota r , deixando de ser atendido no PO. (fig.3.7)

Para os nós pertencentes ao conjunto \bar{M} é criada uma rota fictícia para facilitar a manipulação das trocas. Dror e Levy separam as trocas envolvendo nós em dias diferentes, o que na prática não difere da troca envolvendo rotas atendidas no mesmo dia. Eles também incluem uma troca dupla onde um nó na rota fictícia é inserido em

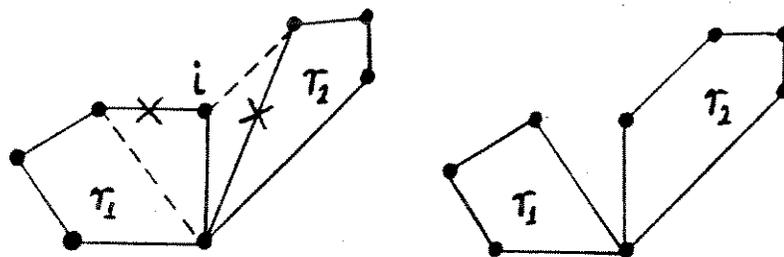


Figura 3.4: Troca Simples

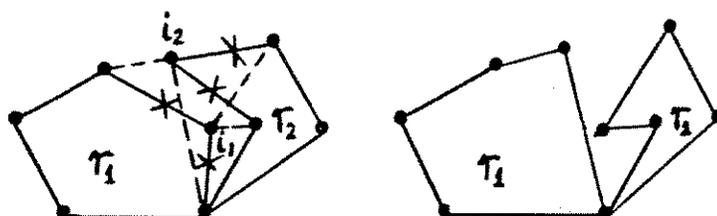


Figura 3.5: Troca Cruzada



Figura 3.6: Inserção

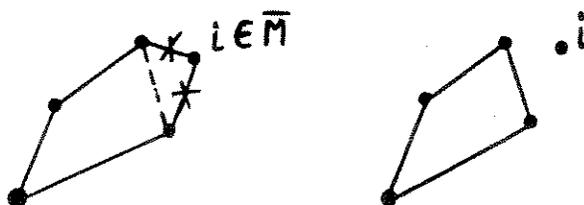


Figura 3.7: Retirada

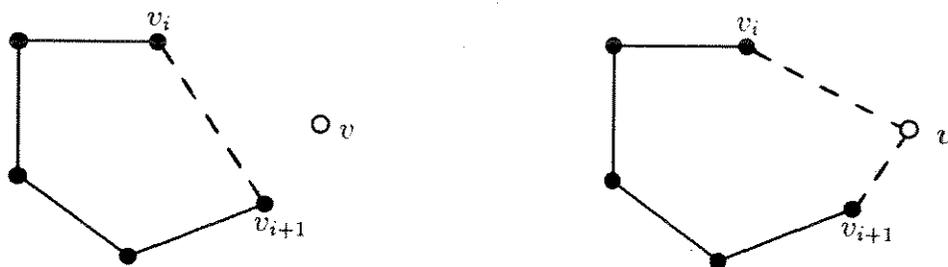


Figura 3.8: Inserção Tipo 1

uma rota e um nó desta rota é inserido na rota fictícia. Esta troca não foi incluída pois parecem ser bastante limitadas as situações onde esta troca seja imprescindível para melhorar a solução. Na maior parte das vezes, esta operação pode ser substituída por uma inserção e uma retirada. Além disso, a heurística utilizada para reduzir o número de trocas analisadas não funcionaria para este tipo de troca.

Para avaliar as trocas utilizou-se a idéia das inserções e retiradas otimizadas de Gendreau e outros [22]. Essas inserções e retiradas envolvem mais arcos que simples inserções entre nós consecutivos ou a retirada de um nó ligando os nós adjacentes na rota. Gendreau e outros apresentam dois tipos de inserções que envolvem a escolha de 3 ou 4 nós, com a retirada de 3 ou 4 arcos e inserção de 4 ou 5. No caso da escolha de 3 nós há a possibilidade dos nós escolhidos resultarem na retirada de apenas 2 arcos. Para simplificar, classificaremos as inserções e retiradas em 4 tipos, de acordo com o número de arcos retirados. As figuras (3.8) a (3.12) mostram os 4 tipos de inserção com os nós escolhidos e o resultado obtido após a inserções. Os nós escolhidos são chamados de v_i , v_j , v_k e v_l e nó inserido é o v .

Tipo 1 (Figura 3.8)

Inserção simples entre dois nós. Neste caso escolhe-se o nó v_i , retira-se o arco (v_i, v_{i+1}) e inserem-se os arcos (v_i, v) e (v, v_{i+1}) , sem nenhum segmento invertido.

Tipo 2 (Figura 3.9)

Escolhem-se dois nós (v_i e v_j) com $v_i \neq v_j$. Retiram-se os arcos (v_i, v_{i+1}) e (v_j, v_{j+1}) e inserem-se os arcos (v_i, v) e (v, v_j) e (v_{i+1}, v_{j+1}) , com o segmento $(i+1, j)$ invertido.

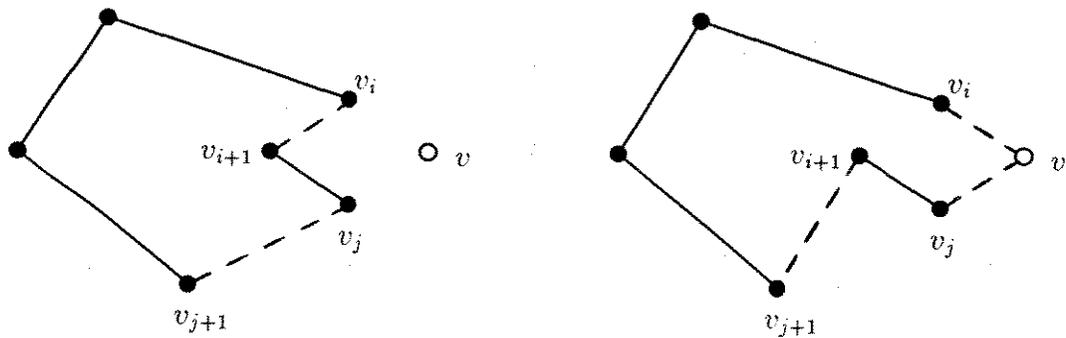


Figura 3.9: Inserção Tipo 2

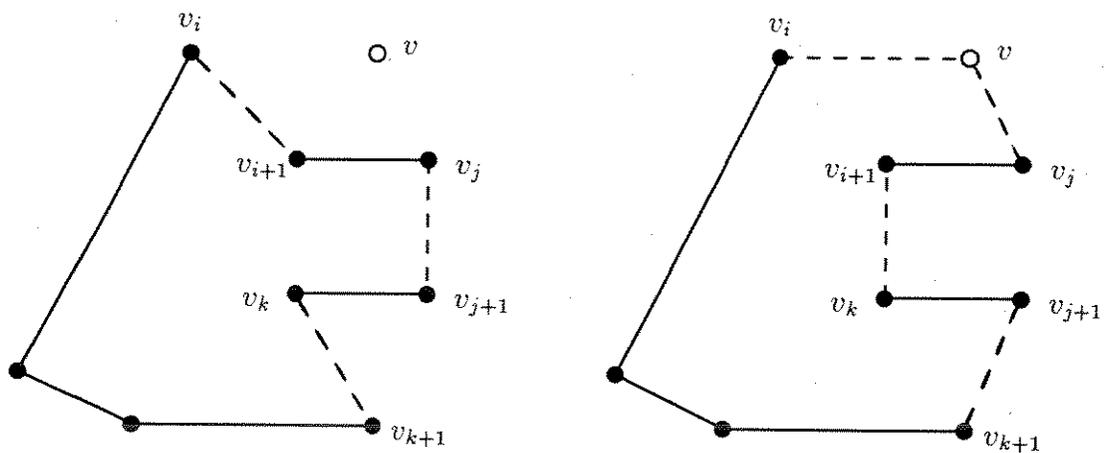


Figura 3.10: Inserção Tipo 3

É interessante notar que a inserção tipo 1 pode ser obtida fazendo $j = i + 1$.

Tipo 3 (Figura 3.10)

Escolhem-se três nós $(v_i, v_j \text{ e } v_k)$ com $v_i \neq v_j \neq v_k$, e $v_k \neq v_{i+1}$. Além disso, o nó v_k deve estar no segmento que vai do nó v_j a v_i , caso contrário uma subrota será formada (fig 3.11). Retiram-se os arcos (v_i, v_{i+1}) , (v_j, v_{j+1}) e (v_k, v_{k+1}) , e inserem-se os arcos (v_i, v) e (v, v_j) e (v_{i+1}, v_k) e (v_{j+1}, v_{k+1}) . A inserção tipo 1 pode ser obtida fazendo $j=i+1$ e $k=j+1$, e a inserção tipo 2 fazendo $k = j + 1$.

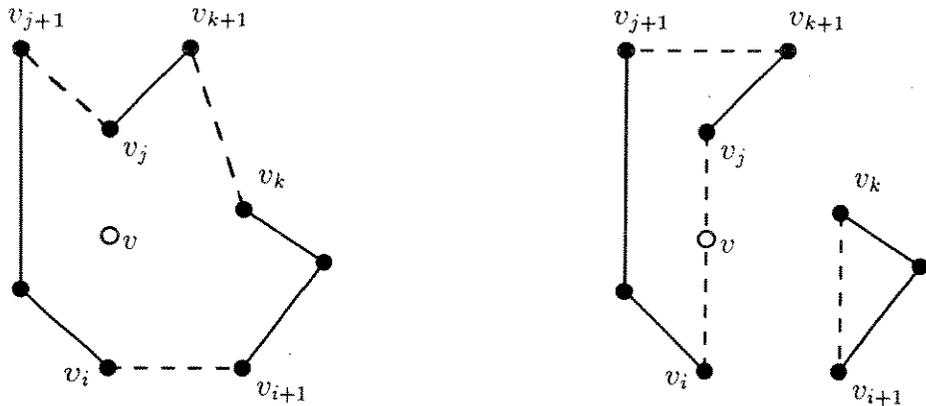


Figura 3.11: Sub-rotas produzida por inserção entre v_i e v_j

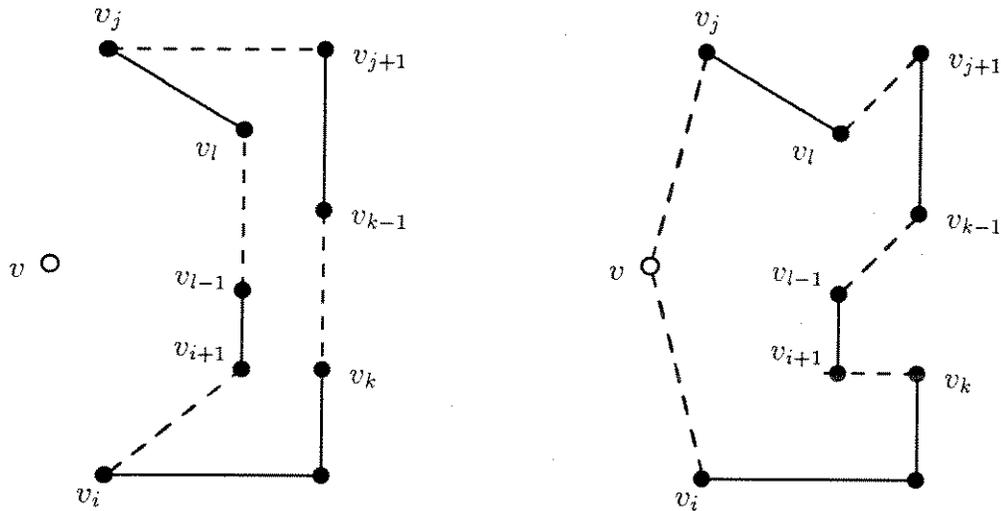


Figura 3.12: Inserção Tipo 4

Tipo 4 (Figura 3.12)

Escolhem-se quatro nós (v_i, v_j, v_k e v_l) com $v_i \neq v_k \neq v_l \neq v_{i+1} \neq v_{j+1}$. As sequências de nós : $v_i \leq v_j \neq v_l \leq v_k$ e $v_i \neq v_k \leq v_l \leq v_j$ produzem subrotas, e portanto não devem ser consideradas. Retiram-se os arcos (v_i, v_{i+1}) , (v_j, v_{j+1}) , (v_k, v_{k-1}) e (v_l, v_{l-1}) e inserem-se os arcos (v_i, v) e (v, v_j) e (v_{i+1}, v_k) , (v_{j+1}, v_l) , e (v_{k-1}, v_{l-1}) neste caso os segmentos invertidos dependem da disposição dos nós na rota. Quando $j = l$ ou $i = k$ também ocorrem casos onde são retirados apenas 3 arcos, e quando ambos são iguais, temos a inserção tipo 2 invertida.

As retiradas não serão descritas aqui pois são operações inversas as inserções onde o nó v_i é sempre o nó anterior ao nó retirado v .

As trocas factíveis são avaliadas e, se apresentarem redução do custo total, serão guardadas em uma lista. A partir daí existem três políticas possíveis :

- a) Realizar as trocas uma de cada vez até que se esgotem.
- b) Realizar várias trocas simultaneamente.
- c) Realizar apenas a melhor troca e depois recalculas as trocas.

Vamos analisar cada uma destas políticas.

Trocas Encadeadas

A melhor troca existente na lista é feita e são excluídas as trocas afetadas pela troca realizada. Esta heurística é rápida, mas não garante a realização das melhores trocas em termos globais.

Trocas Simultâneas

Nesta política é necessário saber quais trocas serão afetadas em relação a cada troca possível. Isto gera uma matriz que, acrescida das restrições para evitar que diversas trocas em uma mesma rota gerem uma rota infactível quanto a capacidade do veículo, produz um problema muito complexo e difícil de ser resolvido. O problema pode ser simplificado se considerarmos que apenas uma troca pode ser realizada envolvendo cada rota da solução. Desta forma, se cada troca gerar rotas factíveis, a solução final será factível. O problema pode ser escrito como um problema de partição, segundo a formulação :

$$MIN \sum_{i=1}^N c_i x_i \quad (3.9)$$

$$Ax \leq 1 \quad (3.10)$$

$$x_i \in \{0,1\} \text{ para todo } i. \quad (3.11)$$

onde :

A : Matriz onde as colunas são as trocas factíveis que produzem ganho e as linhas são as rotas existentes. Matriz constituída de 0s e 1s onde $A_{ji} = 1$ se a troca i envolve a rota j e $A_{ji} = 0$ caso contrário.

c_i : Custo da troca i .

N : Número de trocas analisadas.

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se a troca } i \text{ for realizada.} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A resolução do problema (3.9)-(3.11) é feita utilizando uma heurística para o problema de recobrimento proposta por Beasley [5]. Para utilizar esta heurística em um problema de partição, o custo foi acrescido de uma constante G , maior que o maior ganho de uma troca, para que todos os custos fossem positivos. Foram, também, introduzidas colunas de folga com custo igual a constante G para cada rota. Se o método de resolução fosse exato, a solução do problema modificado seria factível para o problema original. Porém, como foi utilizada uma heurística, a solução pode ser infactível, isto é, pode existir mais de uma troca sendo realizada em uma mesma rota. Daí ter sido introduzida uma função para factibilizar a solução retirando a troca repetida que produz o menor ganho.

Melhor Troca

Nesta política, a melhor troca t^* da lista é realizada. As trocas da lista que envolvem rotas alteradas por t^* são retiradas. São avaliadas novamente as trocas possíveis envolvendo as rotas alteradas pela troca t^* . Repete-se o procedimento até que não exista nenhuma troca na lista. Este é um procedimento “guloso” que consome um tempo elevado em função do recálculo das trocas.

Os testes realizados foram feitos apenas para a heurística de trocas simultâneas que pareceu a mais promissora das três, pois introduz uma componente do tipo “look ahead” ou visão de longo prazo, ausente nas demais. Isso parece compensar o maior tempo de execução.

Outro aspecto a destacar é a grande quantidade de trocas cruzadas possíveis entre duas rotas. Se tivermos, por exemplo, duas rotas com 10 nós em cada uma, haverá 100 trocas cruzadas possíveis. É claro que muitas delas serão bastante ruins, ou mesmo

infectíveis, mas para saber isto teríamos que testar todas as possibilidades. Para evitar este grande esforço computacional, que na maioria das vezes não resultará em ganho algum, foi adotada uma forma de reduzir essas comparações. Isto é feito através de uma avaliação para cada nó das melhores rotas existentes para uma inserção. Assim, avaliamos a inserção de um nó i em todas as rotas da solução que possam resultar numa solução factível, e as p melhores rotas são armazenadas no conjunto F_i . Desta forma, as trocas cruzadas envolvendo duas rotas R_1 e R_2 que serão avaliadas são determinadas pelo par :

$$(i, j) = \{i \in R_1 \mid R_1 \in F_j \text{ e } j \in R_2 \mid R_2 \in F_i\}$$

Isto reduz significativamente o número de trocas avaliadas e mantém a avaliação das trocas com melhores possibilidades para a melhoria da solução.

3.3 Trocas baseadas em Partição de Conjuntos

Para melhoria da solução foi feita uma tentativa baseada numa heurística onde seria utilizado um algoritmo de partição de conjuntos. Na heurística ao invés de utilizar trocas como na seção anterior seriam utilizadas rotas. Para garantir a factibilidade da solução basta então que todas as rotas geradas sejam factíveis e que sejam respeitadas as restrições de atendimento, cada nó do conjunto M deve obrigatoriamente ser atendido uma vez durante o PO e os nós em \overline{M} podem ser atendidos no máximo uma vez. Neste modelo cada rota é formada por um conjunto de nós que tem um determinado custo. O objetivo é atender todos os nós, cada nó através de uma única rota, através de um conjunto de rotas. Partindo de uma solução inicial *factível* com rotas R_k para $k = 1, \dots, K$, procura-se melhorar a solução através de retiradas e inserções de nós da solução. Para cada nó da solução é testada sua inserção em um grupo de rotas empregando o mesmo critério utilizado para reduzir a avaliação das trocas cruzadas na heurística de trocas. A inserção do nó é testada em todas as rotas originais R_k ou nas rotas em que um nó i foi retirado (R_{ki}). Das rotas que apresentaram solução factível escolhe-se q rotas que apresentaram menor aumento de custo. Estas rotas serão utilizadas como colunas no modelo de partição de conjuntos. Cada nó em M ou \overline{M} será uma linha. Para cada nó em \overline{M} é criada uma coluna adicional apenas com

o nó, para representar a possibilidade deste nó não ser atendido. O custo das colunas é o custo da rota. O modelo pode ser escrito matematicamente como :

$$\text{Min } \sum_{k \in Tr} cr_k x_k \quad (3.12)$$

Sujeito a :

$$Ax = 1 \quad (3.13)$$

$$x_k \in \{0, 1\} \text{ para } k \in Tr. \quad (3.14)$$

onde :

A : Matriz binária de dimensão (m, Tr) onde as colunas representam rotas (conjuntos de nós) e as linhas os nós. Em uma coluna A_k , um nó i contido na rota terá $A_{ik} = 1$. Caso o nó i não pertença a rota teremos $A_{ik} = 0$.

cr_k : Custo da rota k incluindo os custos futuros. Seja S_k o conjunto de nós da rota k , D_k a soma das distâncias percorridas na rota k , δ_k o PE em que a rota k é percorrida e c_{ij} o custo futuro de atender o nó i no PE j . Temos que $cr_k = D_k + \sum_{i \in S_k} c_{i\delta_k}$.

$$x_k = \begin{cases} 1 & \text{se a rota } k \text{ fizer parte da solução.} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para resolver este modelo, como no caso da heurística de trocas, foi utilizada uma heurística de recobrimento. No entanto a tentativa de se melhorar a solução desta forma não foi bem sucedida. Isto se deveu a utilização de uma heurística, que apesar de promissora (nos testes apresentados por Beasley em [5] alcançou soluções próximas do ótimo) não conseguiu na maioria dos problemas testados encontrar uma solução nem ao menos igual à inicial. Isto pode ter ocorrido, ou porque a redução conseguida com as trocas fosse muito pequena ou porque muitas das colunas da solução são parecidas (colunas originadas da mesma rota) e isto pode dificultar a obtenção de uma solução “boá” pelo algoritmo.

3.4 Solução para a formulação Veículo-Rota

Para resolver a formulação mais complexa (Veículo-Rota) discutida no capítulo anterior foi escolhida uma heurística que permite a utilização de uma solução inicial inactível. Assim podemos utilizar uma solução obtida pelas formulações PRV e PCV sem a consideração da disponibilidade dos veículos. Em seguida podemos utilizar uma heurística baseada no problema de seqüenciamento de multiprocessadores para alocar as rotas aos veículos. E a partir dessa solução, uma heurística busca factibilizar e otimizar a solução simultaneamente.

3.4.1 Solução inicial para a formulação Veículo-Rota

Como já observado anteriormente, a heurística tabu foi escolhida, principalmente, por possibilitar a utilização de uma solução inicial inactível. Isto é especialmente interessante no caso da formulação Veículo-Rota pois possibilita a utilização de uma solução inicial obtida sem a consideração da disponibilidade de tempo dos veículos. Nesta seção discutiremos como uma solução obtida através das formulações PRV ou PCV pode ser usada como solução inicial para a formulação Veículo-Rota.

Partindo de uma solução onde o tempo de execução das rotas foi desconsiderado, inicialmente devemos avaliar a duração de cada rota da solução. Na formulação Veículo-Rota (2.25)-(2.32) temos para cada PE uma quantidade de veículos disponível para executar as rotas, cada um com sua disponibilidade de tempo. Assim, as rotas iniciais R_h pertencentes ao PE h terão de ser alocadas aos K veículos disponíveis no PE.

Considerando que a solução pode não ser factível, temos que fixar um objetivo para este caso. Entre os objetivos possíveis temos : (1)- minimização do número de veículos inactíveis (com limite de tempo ultrapassado); (2)- minimização do tempo de utilização do veículo com maior tempo de atendimento; (3)- minimização da soma dos tempos excedidos em relação à disponibilidade de todos os veículos. Na hipótese (1) teríamos que compor a função objetivo com uma das outras hipóteses para proibir que um veículo recebesse todas as rotas, caso não houvesse solução factível. As hipóteses (2) e (3) são as mais razoáveis sendo que a (3) foi escolhida por ser a forma de penalização da função objetivo utilizada na heurística de busca tabu. A hipótese (2), no entanto, tem a vantagem de distribuir mais equitativamente o trabalho em caso

de necessidade de horas extras. O problema matemático utilizando a função objetivo (3) para o PE h fica :

$$\text{Min} \sum_{k=1}^K \max(0, \sum_{j=1}^{NR} D_j x_{jk} - T_{MAX}) \quad (3.15)$$

Sujeito a :

$$\sum_{k=1}^K x_{jk} = 1 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, NR. \quad (3.16)$$

$$x_{jk} \in \{0, 1\} \quad \text{para todo } j, k. \quad (3.17)$$

Onde :

D_j : Duração da rota j .

K : Número de veículos disponíveis no PE h .

NR : Número de rotas na solução inicial do PE h .

T_{MAX} : Tempo disponível para cada veículo.

$$x_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{se a rota } j \text{ for atendida pelo veículo } k. \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

As restrições (3.16) garantem que cada rota seja atendida por um único veículo, e (3.17) garantem a integralidade da solução. A resolução deste problema é feita através da adaptação de uma heurística para o problema de seqüenciamento de multiprocessadores ("Multiprocessor Scheduling"). Inicialmente, vamos classificar os veículos em três categorias :

Desvantajosos : O veículo não está sendo útil para melhorar a solução, mas também, não esta prejudicando diretamente.

Bons : O veículo está favorecendo a solução.

Ruins : O veículo está prejudicando a solução.

A utilização média de cada veículo pode ser calculada como : $D_m = \sum_j D(R_j) / K$. De acordo com a média D_m podemos dividir o problema em dois tipos :

$D_m \leq T_{MAX}$: A demanda média é menor que a disponibilidade dos veículos. Neste caso, podemos esperar que não seja necessário fazer horas extras em nenhum veículo. Podemos dividir os veículos, de acordo com a utilização total UT_k , em três categorias :

$UT_k > T_{MAX}$: Neste caso, o veículo está em situação *ruim* pois está havendo um custo de hora extra que não seria necessário para o limitante da melhor solução. Isto não quer dizer que a solução ótima não tenha veículos em situação *ruim*.

$D_m \leq UT_k \leq T_{MAX}$: Neste caso, o veículo está em situação *boa* pois não está ocorrendo custo extra e o veículo está atendendo no mínimo a sua parte (em média) na distribuição das rotas.

$D_m > UT_k$: Neste caso, o veículo está em situação *desvantajosa* pois apesar de não produzir um custo extra, o seu atendimento está abaixo da média.

$D_m > T_{MAX}$: A demanda média é maior que a disponibilidade dos veículos. Neste caso, podemos esperar que em cada veículo seja necessário realizar ao menos $D_m - T_{MAX}$ horas extras. Podemos classificar as rotas assim :

$UT_k < T_{MAX}$: Neste caso, o veículo está em situação *ruim* pois não está se aproveitando toda a sua disponibilidade e, em decorrência, outro veículo realizará mais horas extras, o que aumentará o custo da solução.

$T_{MAX} \leq UT_k \leq D_m$: Neste caso, o veículo está em situação *boa* pois está utilizando toda a sua disponibilidade e não está acima da média.

$UT_k > D_m$: Neste caso, o veículo está em situação *desvantajosa* pois, apesar de estar utilizando toda a sua disponibilidade, o atendimento maior que a média pode levar algum veículo a atender menos que T_{MAX} , produzindo um custo adicional.

A heurística utilizada toma as rotas uma a uma e faz sua atribuição aos veículos. Os veículos são colocados em uma lista circular de acordo com a situação em que se encontram. O primeiro veículo na lista da situação inicial é escolhido como veículo corrente. As rotas são atribuídas ao veículo corrente enquanto a atribuição não mudar a situação do veículo. Caso uma atribuição leve o veículo a uma situação *boa* ele é

retirado da lista de veículos inicial e posto na nova lista *boa*. Caso a atribuição produza outra situação (*ruim ou desvantajosa*) um novo veículo é testado. Se após um determinado número de testes não for encontrada uma atribuição favorável para a rota, a melhor entre as atribuições testadas será feita. Se forem esgotadas as rotas na situação inicial, as rotas em situação *boa* serão utilizadas para as atribuições.

3.4.2 Busca Tabu com Penalidades

A heurística utiliza um procedimento de busca tabu proposto por Glover [24, 25]. Para permitir o aparecimento de soluções infactíveis durante o processo de otimização, ou como solução inicial, foi empregada a abordagem proposta por Gendreau e outros para o PRV [23]. Esta abordagem que utiliza penalizações sobre as restrições de carga dos veículos e duração das rotas com multiplicadores variáveis. Na formulação Veículo-Rota do PERV, como não existe restrição sobre a duração das rotas, a penalização será feita sobre a restrição de tempo de utilização dos veículos.

Na busca tabu é preciso descrever os *movimentos*: operações que alteram a solução. Isto tem por objetivo identificar os estados atingidos anteriormente e assim proibir que uma solução já obtida se repita, provocando ciclagem. Aqui, um movimento será representado por um par nó-rota (x, r) que indica que o nó x entrou na rota r . A lista tabu armazenará os movimentos proibidos, que serão o reverso dos movimentos realizados. Assim se o movimento (x, r) foi realizado, retirando o nó x da rota R_1 e inserindo-o na rota r , o movimento reverso (x, R_1) entrará na lista tabu. Desta forma, o nó x não poderá voltar a rota R_1 enquanto este movimento estiver na lista tabu.

A lista tabu utilizada é bastante simples. Cada movimento fica na lista por um número aleatório de iterações. A aleatoriedade visa reduzir ainda mais a possibilidade de ciclagem. Foi utilizada uma distribuição uniforme entre N_{min} e N_{max} , garantindo que a lista não tenha mais de N_{max} elementos e que um movimento reverso não se repita antes de N_{min} iterações. A manutenção da lista é feita a cada iteração, quando os movimentos que atingiram o limite de iterações são retirados.

Não é absolutamente impossível que no decorrer da busca a mesma solução volte a se repetir mesmo com os seus movimentos proibidos. Vejamos um exemplo : partindo de duas rotas $R_1 = (0, 1, 2, 0)$ e $R_2 = (0, 3, 4, 0)$, sendo o nó 0 a origem e a trajetória definida pela seqüência dos nós. Suponhamos que o movimento $(1, R_2)$ seja o melhor

encontrado. A solução resultante será $R_1 = (0, 2, 0)$ e $R_2 = (0, 1, 3, 4, 0)$ e a lista tabu $L = \{(1, R_1)\}$.

Com a nova configuração das rotas o melhor movimento encontrado é $(3, R_1)$ e a nova solução será $R_1 = (0, 2, 3, 0)$ e $R_2 = (0, 1, 4, 0)$ e a lista tabu $L = \{(1, R_1), (3, R_2)\}$.

Realizando o movimento $(4, R_1)$, a nova solução será $R_1 = (0, 2, 4, 3, 0)$ e $R_2 = (0, 1, 0)$ e a lista tabu $L = \{(1, R_1), (3, R_2), (4, R_2)\}$.

Realizando o novo movimento $(2, R_2)$, que não está na lista tabu, temos a solução inicial, $R_1 = (0, 3, 4, 0)$ e $R_2 = (0, 1, 2, 0)$, em que apenas o nome das rotas aparece invertido. Assim, mesmo sem desprezar os movimentos proibidos foi possível retornar a uma solução anterior. Esta, no entanto, é uma situação limite difícil de ocorrer na prática. Além disso, na heurística existem outros mecanismos para evitar a ocorrência de ciclagem como o comprimento aleatório da *lista tabu*, a possibilidade de aparecimento de soluções inactíveis e os valores variáveis de α e β (multiplicadores de penalização).

A cada iteração o melhor movimento “não-proibido” é calculado utilizando a fórmula (3.18) para o custo real da solução e (3.19) para a solução penalizada. Caso a solução seja factível, não existe custo de penalidade e $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$. Para simplificar a notação, chamaremos de rota k a seqüência $R_k = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_0)$, onde $v_i \in R_k$ indica que v_i é atendido na rota R_k e $(v_i, v_j) \in R_k$ indica que o trecho de v_i a v_j é percorrido na rota R_k .

$$\mathcal{F}_1 = \sum_k \left\{ \sum_{(i,j) \in R_k} d_{ij} + \sum_{i \in R_k} c_i \delta_k \right\} \quad (3.18)$$

$$\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1 + \alpha \sum_k \left[\max(0, \sum_{i \in R_k} q_i \delta_k - QV) \right] + \beta \sum_v \left[\max(0, \sum_{k \in V_v} D_k - T_{MAX}) \right] \quad (3.19)$$

onde :

α, β : são parâmetros de penalização.

δ_k : Período de entrega da rota k .

σ_i : Tempo fixo de atendimento ao nó i .

c_{ij} : Custo futuro para atender o nó i no PE j .

D_k : Tempo gasto na execução da rota, $D_k = \sum_{(x_i, x_j) \in R_k} d_{ij} + \sum_{x_i \in R_k} \sigma_i$

d_{ij} : Distância entre os nós i e j .

QV : Capacidade de carga do veículo.

T_{MAX} : Tempo Total disponível do veículo durante o PE.

V_v : Conjunto das rotas atendidas pelo veículo v .

Os valores de α e β devem variar durante as iterações para permitir a alternância de soluções factíveis e infactíveis. Assim se as soluções ficarem infactíveis durante várias iterações, o valor dos parâmetros deve ser aumentado, favorecendo o aparecimento de soluções factíveis e vice-versa. Reduzir os valores de α e β parece um contra-senso, já que o objetivo final é uma solução factível. O que torna interessante o aparecimento de soluções infactíveis é que no processo de busca tabu seu aparecimento facilita que se escape dos mínimos locais, permitindo a exploração de novas regiões com maior facilidade.

Avaliar todas as possibilidades de inserção de um nó a cada iteração pode ser demorado e improdutivo. Para evitar isto, Gendreau e outros [23] utilizam uma lista de vizinhos próximos para identificar as rotas com melhores possibilidades para inserção (todas as rotas contendo um nó vizinho). No PERV a situação é mais complicada pois um nó pode ser atendido até o seu dia crítico e portanto não podemos avaliar efetivamente os nós vizinhos que poderiam ser utilizados. Haveria o risco de não existir nenhum nó vizinho que resultasse numa solução factível. Neste caso foram utilizadas duas técnicas para restringir as possibilidades de inserção :

- *Abertura da janela* : é o número máximo de PEs em que o atendimento de um consumidor pode variar a cada iteração. Assim, se o consumidor x_1 é atendido na solução corrente por uma rota do PE 7 e o valor da abertura da janela for 2, só serão considerados os movimentos que insiram o nó x_1 em rotas percorridas entre os PEs 5 e 9; observando-se, é claro, a restrição de atendimento até o dia crítico. A abertura da janela deverá variar no decorrer das iterações; caso não esteja sendo observada uma melhora na solução o valor da abertura deverá aumentar. Caso seja encontrada uma solução melhor, a abertura será reduzida.

- *Lista de melhores rotas* é uma adaptação da idéia da lista de vizinhos de Gendreau e outros para o PERV. A lista é calculada a cada x iterações onde são testadas todas as rotas onde um nó poderá ser inserido e as p melhores são armazenadas numa lista. A partir daí os testes de inserção serão realizados apenas sobre as p rotas da lista, até que uma nova lista seja calculada.

Um dos problemas observados durante os testes do algoritmo foi a redução do número total de rotas. Esta redução apesar de ser desejada do ponto de vista de otimização - reduz a distância total percorrida - acaba por tornar o problema permanentemente inactível. Isto ocorre, porque, na *lista de melhores inserções* a inserção de um nó em uma rota vazia dará sempre o custo mais elevado, portanto após uma rota ficar vazia ela nunca mais receberá uma inserção. Adotou-se um procedimento complementar para analisar a formação de novas rotas ou a inserção de um nó numa rota vazia como movimentos possíveis. Assim, caso a solução fique muito tempo inactível o valor de α ficará muito elevado favorecendo a criação de uma nova rota. Como o objetivo deste procedimento é a manutenção da factibilidade e, no espírito da busca tabu - evitar que as soluções se repitam após poucas iterações - o procedimento deverá ser utilizado apenas após um número razoável de iterações. O valor utilizado nos testes foi de 30 iterações.

Algoritmo de Busca Tabu com Penalidades

$IterTabu=0;$

$\alpha=\alpha_{inicio};$

$\beta=\beta_{inicio};$

$\mathcal{F}1 =$ Custo da solução inicial segundo (3.18).

Se a solução inicial é factível $\mathcal{F}2 = \mathcal{F}1$

Caso contrário calcula $\mathcal{F}2$ segundo (3.19)

$\mathcal{F}1^*=\mathcal{F}1;$

$\mathcal{F}2^*=\mathcal{F}2;$

Enquanto o número de iterações sem melhoria de $\mathcal{F}1^*$ ou $\mathcal{F}2^*$

for menor que MAX_ITER_SEM_MELHORIA faça :

Se $IterTabu$ for múltiplo de NUM_ITER_ATUALIZACAO_MELHORES

Atualiza lista das p melhores rotas para inserção LM_i para todo nó i .

Escolher aleatoriamente q nós e formar a lista L .

Para cada nó i em L faça :

Para cada rota r em LM_i faça :

$\mathcal{F}2$ = Custo da solução penalizada obtida com a inserção do nó i na rota r .

Se $\mathcal{F}1_{min} < \mathcal{F}1^*$ e $(i,r) \notin \text{ListaTabu}$ faça:

$\mathcal{F}2_{min} = \mathcal{F}2$;

$\text{mov} = (i,r)$;

Se a solução é factível (logo, $\mathcal{F}1 = \mathcal{F}2$) e $\mathcal{F}2 < \mathcal{F}1^*$ faça:

$\mathcal{F}1_{min} = \mathcal{F}2$;

$\text{mov} = (i,r)$;

Se IterTabu for múltiplo de $\text{ITER_TESTE_CRIACAO_ROTA}$ faça:

Testar a criação de uma nova rota.

Sejam os custos da melhor rota $\mathcal{F}1_{min}$ ou $\mathcal{F}2_{min}$.

Se $\mathcal{F}1_{min} < \mathcal{F}1^*$

$\mathcal{F}1^* = \mathcal{F}1_{min}$;

Caso contrário

Se $\mathcal{F}2_{min} < \mathcal{F}2^*$ fazer $\mathcal{F}2^* = \mathcal{F}2_{min}$;

Realizar o melhor movimento transferindo o nó i da rota R_k para a rota r ;

$\text{ListaTabu} = \text{ListaTabu} \cup (i, R_k, \text{IterTabu} + \text{Uniforme}[N_{min}, N_{max}])$;

$\text{IterTabu} = \text{IterTabu} + 1$;

Retirar os elementos (i, r, x) com $x < \text{IterTabu}$ da ListaTabu .

Se IterTabu for múltiplo de $\text{ITER_MUDANCA_PARAMETROS}$.

Caso todas as últimas $\text{ITER_MUDANCA_PARAMETROS}$ soluções sejam factíveis faça:

$\alpha = \alpha/2$

Caso todas sejam infactíveis fazer :

$\alpha = \alpha \times 2$.

Repetir o mesmo procedimento em relação à β .

Restaurar melhor solução encontrada.

FIM

Para analisar as inserções dos nós nas rotas podem ser utilizados diversos procedimentos : a simples avaliação da melhor inserção entre dois nós, a avaliação de trocas

com uma otimização local, métodos heurísticos para a solução do PCV, ou mesmo métodos exatos. O mesmo ocorre em relação a retirada dos nós. No caso de utilização de uma heurística simples, pode ocorrer que após várias trocas as rotas fiquem muito ruins, o que ocorreu nos casos testados no capítulo 4. Isto levou à inclusão de uma rotina para a otimização local das rotas após um determinado número de iterações.

O algoritmo de busca tabu com penalidades, acima, é executado duas vezes com valores diferentes para o número de elementos na lista de melhores rotas consideradas (p) e para o número de nós testados a cada iteração (q). Na primeira rodada procura-se encontrar uma boa solução com baixo custo computacional, utilizando valores baixos de p e q . A melhor solução encontrada é utilizada como solução inicial para a segunda execução com valores mais altos de p e q .

3.5 Resumo da Metodologia de Resolução

A figura 3.13 apresenta resumidamente a metodologia de resolução para o PERV apresentada neste capítulo. Inicialmente, simplificou-se uma das 3 formulações propostas no capítulo 2: Formulação baseada no PRV (FPRV), Formulação baseada no PCV (FPCV) e Formulação Veículo-Rota. Com simplificação das formulações obtivemos um Problema de Atribuição Generalizado (PAG), que divide o problema em subproblemas. Os subproblemas, PRVs e PCVs, são então resolvidos para obter a solução inicial para as duas primeiras formulações. Para resolver a FVR são relaxadas as restrições de atribuição das rotas aos veículos, isto permite a utilização de uma das outras duas formulações para resolver o problema relaxado. Em seguida, utiliza-se uma heurística de seqüenciamento de multiprocessadores para encontrar o conjunto de rotas atendidas em cada jornada de um veículo. Como a solução inicial desta formulação (FVR) pode não ser factível, só será utilizada a heurística de busca TABU com penalidades para, ao mesmo tempo, factibilizá-la - caso ela seja infactível - e melhorá-la. Para as formulações FPRV e FPCV pode-se utilizar qualquer uma das duas heurísticas de melhoria proposta : busca TABU ou TROCAS simultâneas.

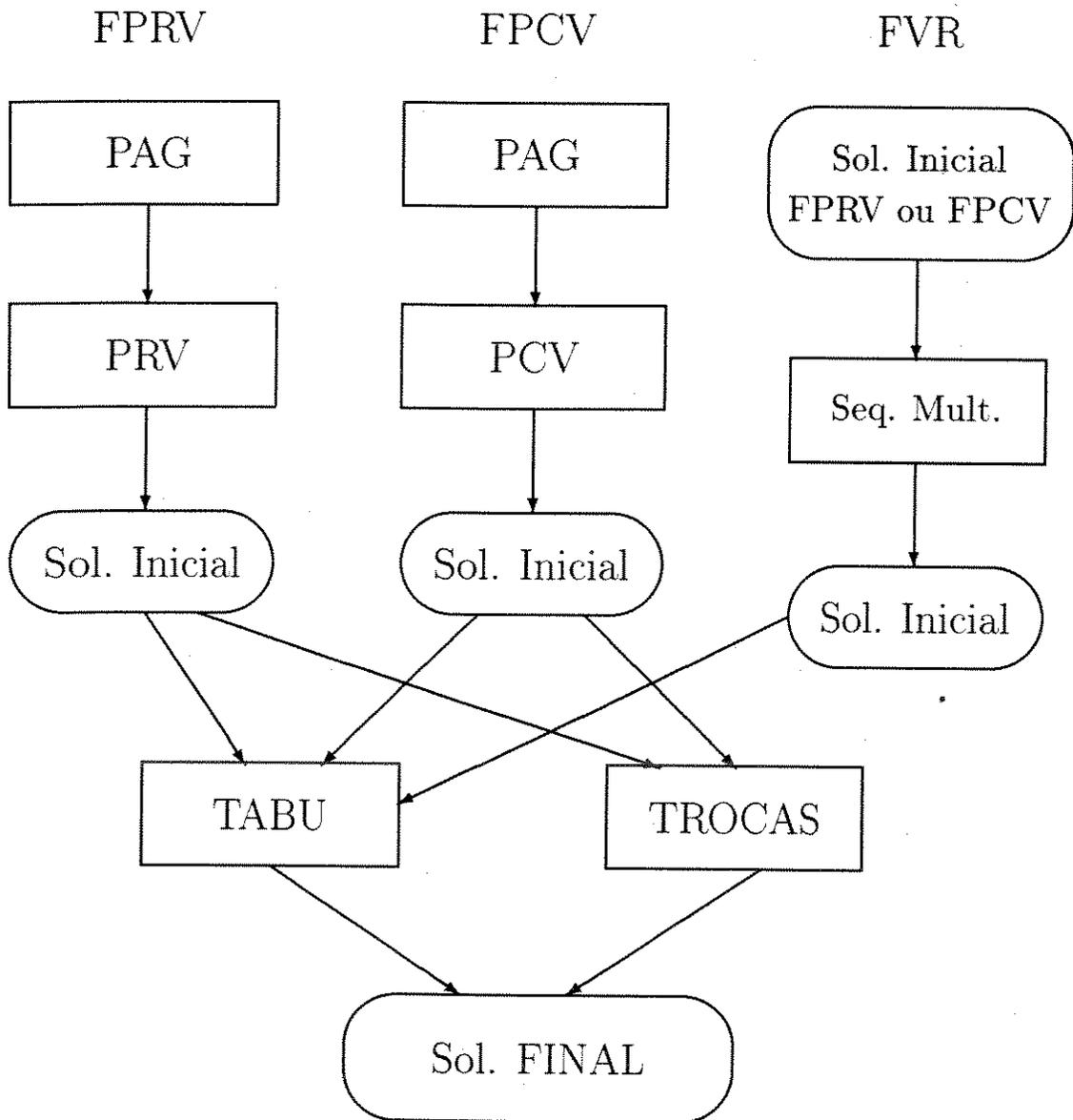


Figura 3.13: Resumo das Metodologias de Resolução

Capítulo 4

Resultados Computacionais

Os resultados dos testes realizados estão divididos em 2 partes : na primeira discutem-se os resultados numéricos dos métodos de resolução do modelo com e sem limitação de tempo de utilização dos veículos durante o PE. Na segunda parte são analisados os resultados do modelo em si, considerando os custos de entrega e as margens de segurança, tendo por objetivo analisar a aderência do mesmo. Antes porém devem ser criados os problemas que serão usados para os testes.

4.1 Criação dos Problemas Teste

Os problemas teste foram gerados aleatoriamente utilizando parâmetros de geração diferentes para cada série de problemas. Para a resolução do PERV devem ser fornecidos os seguintes dados :

Sobre os veículos : número disponível em cada PE, capacidade de carga e tempo máximo de utilização.

Sobre os consumidores (nós) : localização; demanda média, distribuição de probabilidade e variância; capacidade de estocagem e situação inicial do estoque; e finalmente, o tempo fixo necessário para o atendimento.

Nos testes realizados o tempo fixo de atendimento foi considerado igual para todos os consumidores, bem como a distribuição (Normal) . O desvio padrão θ da demanda foi calculado como um percentual fixo da demanda média μ .

Os problemas foram gerados utilizando os seguintes parâmetros :

- *Localização dos nós* : Foi utilizada uma distribuição uniforme dentro de uma

Tabela I: Características dos Problemas-Teste

Série	Área	Duração Estoque	PO	Cap. Estoques Locais (%)			
				Média	01	02	03
A	100x100	7 a 13	3	30	10 - 50	15 - 45	20 - 40
B	100x100	15 a 25	5	25	10 - 40	15 - 35	20 - 30
C	200x200	20 a 40	5	17	3 - 31	5 - 29	10 - 24

área retangular. Foram utilizadas duas áreas uma de 100x100 outra de 200x200.

- *Capacidade de Estocagem dos nós* : Distribuição uniforme entre uma porcentagem mínima e máxima de ocupação da carga do veículo utilizado na distribuição.
- *Demanda média dos nós* : Distribuição uniforme entre um valor que permita ao estoque durar entre um número máximo *MAX_DIAS* e mínimo *MIN_DIAS* de dias. Quanto maior a demanda média, menor é a duração dos estoques.
- *Situação inicial dos estoques* : Este foi o parâmetro mais difícil de ser acertado. Para a situação corrente não poderia ser utilizada simplesmente uma distribuição uniforme, pois isto levaria um grande número de nós a necessitar de atendimento no primeiro PO, tornando difícil encontrar uma solução factível e não permitindo uma melhor otimização das soluções. Para evitar isto foi utilizada uma distribuição uniforme em que foi adicionada uma porcentagem da capacidade de estocagem do nó.

A descrição das características de cada série de problemas está mostrada na tabela I. A coluna *Duração Estoque* mostra os valores de *MIN_DIAS* e *MAX_DIAS*, respectivamente. *PO* é o número de PEs que compõe o PO para os problemas. As últimas colunas trazem a porcentagem da capacidade do veículo que é ocupada por um estoque local. Existem três variações para cada problema, todas com a mesma média, com percentuais mínimos e máximos de capacidade diferentes. A lista dos problemas gerados com as respectivas características está mostrado na tabela II. A coluna *rotas* desta tabela apresenta o número de rotas que poderão ser executadas em cada PE do problema. Os problemas estão divididos em três séries A, B e C. Dentro destas séries existem problemas com diferentes números de nós, para cada um

Tabela II: Problemas-Teste Gerados

série	número de nós	problema	rotas
A	50	s050a??	2
	70	s070a??	3
	100	s100a??	4
	150	s150a??	5
B	150	s150a??	2
	200	s200a??	3
	250	s250a??	4
	300	s300a??	4
C	250	s250c??	2
	350	s350c??	3
	450	s450c??	4

existem três diferentes variações de capacidade de estocagem, todas com a mesma média e com números 01, 02, 03, respectivamente.

Os testes foram realizados em uma estação de trabalho SparcStation 1+. Os algoritmos foram implementados na linguagem C.

4.2 Avaliação das Heurísticas

A avaliação das heurísticas será feita utilizando apenas o resultado numérico obtido a partir do modelo, sem considerar os custos reais da solução. Serão utilizados os custos futuros calculados pelo modelo utilizando a estimativa dos custos de entrega discutidos no item 2.7 e os custos das rotas obtidas na resolução. Assim na avaliação das heurísticas não será discutida a qualidade dos custos futuros utilizados, a necessidade de entregas de emergência em decorrência de escassez antecipada nos consumidores, nem a incapacidade dos veículos atenderem todos os consumidores em uma rota em virtude de demandas maiores que as previstas. Considerações sobre estas questões serão feitas apenas nas simulações utilizadas para avaliar o modelo em si.

A avaliação será feita para as soluções iniciais obtidas pelas formulações PRV e PCV, e para as heurísticas de melhoria descritas no capítulo anterior. Nesta avaliação

será utilizada uma pseudo-simulação que abrange 20 POs. As demandas são sempre iguais à demanda média, para evitar a influência dos fatores estocásticos nas soluções obtidas. Uma solução padrão foi escolhida para cada PO para garantir que as soluções iniciais de cada PO sejam as mesmas. Com a mesma situação no início de cada PO podemos aplicar os métodos de resolução para medir a qualidade das soluções.

4.2.1 Solução Inicial

A avaliação da solução inicial obtida será feita sobre os dois enfoques propostos : através da formulação PRV e através da formulação PCV. Ainda, na formulação PCV serão analisadas soluções iniciais com e sem os nós em \bar{M} . Na formulação PRV, os nós em \bar{M} não foram considerados, pois só faz sentido realizar entregas nestes nós se pudermos aproveitar uma viagem a nós próximos. Como na formulação PRV não há como fazer avaliações espaciais, não faz sentido que estes nós sejam introduzidos no PAG. Mesmo assim, foram realizados alguns testes - que não serão apresentados nas comparações, - que mostraram soluções muito piores que os demais métodos, tanto em valor como em tempo de execução. Além disso, esta forma de resolução é a que apresenta a maior dificuldade para encontrar soluções factíveis.

O método utilizado para a resolução do problema de atribuição generalizado (PAG) muitas vezes encontrava dificuldade em encontrar uma solução factível. Para evitar uma demora muito grande, a execução do algoritmo de Ross e Soland para o PAG foi limitado a 40.000 iterações. Também foi utilizada uma heurística para reduzir a precisão em 0.5% a cada 1.000 iterações caso não fosse obtida uma redução no valor da melhor solução. Desta forma muitas vezes o limite de iterações foi atingido sem que se obtivesse uma solução factível. Isto ocorreu com muita frequência, nos testes realizados.

A tabela III mostra um resumo dos resultados obtidos para as soluções iniciais. As tabelas IV, V e VI mostram os resultados para as séries A,B e C, respectivamente. A coluna %C das tabelas indica a porcentagem da capacidade máxima de distribuição que foi utilizada. Este resultado é obtido dividindo-se a soma das demandas médias por PE de todos os clientes pela capacidade de distribuição em cada PE. A capacidade de distribuição é obtida multiplicando-se o número de rotas pela capacidade de carga do veículo.

Tabela III: Resumo Geral da Comparação p/ Solução Inicial

serie	nós	POs ^a	PRV			PCV			PCV com \bar{M}		
			I ^b	M% ^c	T ^d	I	M%	T	I	M%	T
A	50	47	8	6.4	14.3	6	5.4	71.0	9	0.0	194.4
	70	51	1	6.7	15.7	1	6.8	47.1	8	0.0	261.1
	100	46	10	8.6	246.1	5	9.4	226.4	9	0.0	1182
	150	11	31	7.0	882.7	26	11.9	1115	44	0.0	3948
subtotal		155	50	7.2	1158	38	8.4	1460	70	0.0	5586
B	150	28	8	28.6	101.4	11	16.7	353.9	34	0.0	2341
	200	33	5	27.6	178.2	6	16.9	300.3	25	0.0	2814
	250	29	17	19.5	983.8	3	16.3	315.1	20	0.0	4005
	300	6	30	18.5	1743	28	11.5	1758	52	0.0	8878
subtotal		94	60	23.6	3006	48	15.4	2727	131	0.0	18038
C	250	59	0	22.6	4.0	0	23.1	2.8	1	0.0	212
	350	55	0	26.2	5.3	1	27.1	39.7	5	0.0	2018
	450	47	3	27.7	98.8	1	35.7	84.7	10	0.0	3559
subtotal		161	3	25.5	108.1	2	28.6	127.2	16	0.0	5789

^aNúmero de POs em que as soluções obtidas para os 3 métodos foram factíveis.

^bNúmero de problemas infactíveis

^cPercentual médio acima da melhor das três soluções iniciais

^dTempo Total (seg)

Os resultados da tabela III mostram que as soluções obtidas pelo método PCV com \bar{M} obtiveram sempre os melhores resultados. Este método, no entanto, obteve soluções infactíveis para um número elevado de POs, muito superior aos dois outros métodos. Além disso, os tempos de execução para este método foram várias vezes superior aos tempos do PCV e PRV. Isto levou a uma opção entre o PRV e o PCV. Nos resultados obtidos o PCV e o PRV parecem equivalentes. Enquanto o PRV foi um pouco melhor para as séries A e C, o PCV foi “bem” melhor para a série B. Também nos tempos de execução os dois métodos não apresentam grandes diferenças. Já, o número de POs infactíveis para o PCV foi sempre um pouco menor que para o PRV. Isto levou-nos a escolher este método para obter as soluções iniciais para os testes seguintes.

Tabela IV: Solução Inicial Série A

prob.	rot ^a	%C	POs ^b	PRV			PCV			PCV com \bar{M}		
				I ^c	Valor ^d	T ^e	I	Valor	T	I	Valor	T
s050a01	2	73.5	15	4	15.78	0.3	2	15.65	49.9	3	14.79	62.2
s050a02	2	75.6	19	1	17.67	0.2	1	17.47	18.0	1	16.43	30.2
s050a03	2	81.0	13	3	11.27	13.8	3	11.18	3.1	5	10.73	102.0
s070a01	3	76.0	19	0	24.58	7.0	0	24.31	1.0	1	22.35	59.0
s070a02	3	74.1	15	0	19.04	3.8	1	19.25	26.4	5	18.82	133.8
s070a03	3	73.6	17	1	21.44	4.9	0	21.54	19.7	2	19.67	68.3
s100a01	4	77.4	19	1	31.42	58.3	1	32.24	41.0	1	28.91	299.3
s100a02	4	86.8	12	5	19.01	149.6	2	19.21	131.6	5	17.80	453.6
s100a03	4	85.3	15	4	25.25	38.2	2	24.88	90.8	3	22.90	429.3
s150a01	5	96.0	4	8	7.55	306.0	8	7.89	304.3	14	6.96	1145
s150a02	5	98.0	5	11	9.34	225.7	11	9.60	511.7	15	8.67	1542
s150a03	5	97.0	3	12	5.39	351.0	7	5.74	298.6	15	5.14	1261

^aNúmero máximo de rotas em cada PE.

^bNúmero de POs em que as soluções obtidas para os 3 métodos foram factíveis.

^cNúmero de problemas infactíveis

^dCusto da solução em milhares de unidades percorridas

^eTempo (seg)

Tabela V: Solução Inicial Série B

prob.	rot.	%C	POs	PRV			PCV			PCV com \bar{M}		
				I	Valor	T	I	Valor	T	I	Valor	T
s150b01	2	98.3	6	5	9.47	28.8	6	8.58	220.4	12	7.12	915.9
s150b02	2	96.1	12	0	19.45	25.8	2	17.08	40.7	12	15.25	711.2
s150b03	2	99.5	10	3	14.23	46.8	3	13.37	92.8	10	11.37	714.0
s200b01	3	88.2	11	0	23.64	16.8	3	21.91	117.2	9	18.60	1011
s200b02	3	88.1	12	0	25.89	27.0	3	23.23	99.2	8	20.67	760.8
s200b03	3	90.5	10	5	21.50	134.4	0	19.86	83.9	8	16.47	1042
s250b01	4	83.0	10	3	24.67	313.2	2	23.77	111.5	9	20.55	1449
s250b02	4	83.3	10	6	24.58	244.5	0	23.89	103.4	7	20.77	1286
s250b03	4	83.3	9	8	22.52	426.1	1	21.84	100.2	4	18.47	1270
s300b01	4	100.2	1	10	2.86	715.7	12	2.72	617.0	18	2.41	3180
s300b02	4	99.3	3	9	7.61	409.8	8	7.11	536.0	16	6.43	2573
s300b03	4	99.6	2	11	5.05	618.0	8	4.73	604.6	18	4.26	3125

Tabela VI: Solução Inicial Série C

prob.	rot.	%C	POs	PRV			PCV			PCV com \bar{M}		
				I	Valor	T	I	Valor	T	I	Valor	T
s250c01	2	76.3	20	0	52.86	0.9	0	50.49	0.9	0	40.23	36.1
s250c02	2	79.3	19	0	53.20	0.9	0	49.68	1.1	1	40.45	136.0
s250c03	2	77.2	20	0	49.16	2.2	0	48.22	0.8	0	46.86	39.9
s350c01	3	70.6	20	0	71.41	1.8	0	73.39	2.3	0	55.71	451.8
s350c02	3	74.6	17	0	61.92	1.6	1	62.11	35.2	3	46.96	1155
s350c03	3	72.0	18	0	65.99	1.9	0	65.32	2.2	2	55.71	411.0
s450c01	4	72.9	14	0	62.77	18.1	1	66.71	47.1	6	49.49	168.2
s450c02	4	73.1	17	1	80.64	44.8	0	81.92	33.4	2	62.46	1705
s450c03	4	72.0	16	2	70.55	35.9	0	75.36	4.2	2	55.54	1686

4.2.2 Avaliação das heurísticas de Melhoria

As heurísticas de melhoria serão avaliadas da mesma forma que a solução inicial. Cada problema será resolvido para 20 POs partindo de uma situação inicial, que é atualizada a cada PO utilizando a mesma solução - que também foi utilizada para os testes das soluções iniciais. Será testada a heurística de trocas discutida na seção 3.2 onde será avaliado o desempenho da heurística em relação ao tamanho da *lista de melhores rotas* utilizado. Também será avaliada a utilização do algoritmo de busca tabu com penalidades proposto para a formulação veículo-rota (seção 3.4.2) para resolver problemas das formulações mais simples.

Avaliação da Heurística de Trocas

Nesta avaliação foram comparados apenas os POs do problema onde a solução inicial obtida pela formulação PCV é factível, já que esta é uma pré-condição para a utilização da heurística. O número de POs considerados é maior que os utilizados no item anterior, onde só foram considerados os POs com soluções factíveis para os 3 métodos conjuntamente. Isto não permite uma comparação direta entre as soluções iniciais do item anterior e as soluções melhoradas. Para avaliar a melhoria da solução será incluído na comparação o valor obtido nas soluções iniciais.

A heurística de trocas utiliza um único parâmetro p que é o número de elementos na *lista de melhores rotas para inserção*. Esta lista é utilizada para verificar quais trocas cruzadas serão avaliadas. Quanto maior for p maior será o número de trocas testadas, porém é difícil prever o comportamento do número de trocas cruzadas avaliadas de acordo com o crescimento de p . Na heurística, para que uma troca cruzada envolvendo dois nós seja testada, ambos devem ter como *melhor inserção* a rota à qual o outro nó pertence. Assim, suponhamos que existam 4 rotas com 5 nós em cada. Se $p = 1$, cada nó terá apenas uma rota com a qual poderá ser feita uma troca cruzada. Podemos supor, por exemplo, que os 5 nós das rotas 1 e 3 tenham como melhor rota para inserção as rotas 2 e 4 respectivamente, e vice-versa. Neste caso teremos $5 \times 5 = 25$ avaliações para as trocas entre 1 e 3, e o mesmo para 2 e 4. Portanto teremos 50 avaliações no total. Se tivermos $p = 3$, todas as trocas cruzadas possíveis serão testadas. Como existem 6 possíveis combinações de duas rotas e em cada uma serão feitas 25 avaliações, logo, no total serão 150 avaliações. Portanto, neste caso temos

Tabela VII: Avaliação Heurística de Trocas (Série A)

prob.	%C	Ini. ^a	$p = 2$			$p = 5$			$p = 8$		
			%M ^b	Valor	T ^c	%M	Valor	T	%M	Valor	T
s050a01	76.3	18.99	15.7	16.01	48	15.7	16.01	55	15.7	16.01	59
s050a02	79.3	17.48	16.9	14.53	47	17.0	14.51	55	17.0	14.51	60
s050a03	77.2	15.51	17.0	12.88	29	17.2	12.85	31	17.2	12.85	34
s100a01	70.6	32.24	15.9	27.10	214	17.5	26.91	285	16.3	26.91	315
s100a02	74.6	30.49	11.5	26.97	133	11.5	26.99	270	11.5	26.97	168
s100a03	72.0	29.53	13.5	25.54	153	13.5	25.53	170	13.6	25.50	190
s150a01	72.9	25.99	14.3	22.28	203	14.2	22.29	225	14.2	22.29	251
s150a02	73.1	18.90	13.6	16.33	145	13.8	16.29	163	13.8	16.30	200
s150a03	72.0	28.02	10.9	24.96	219	11.4	24.83	263	11.3	24.84	303

^aValor da solução inicial

^bPorcentagem de melhoria em relação à solução inicial

^cTempo (seg)

um crescimento linear. Por outro lado, para $p = 1$ pode não existir nenhuma troca cruzada se os 5 nós da rota 1 tiverem como melhor inserção a rota 2, e os nós da rota 2 tiverem a rota 3, e assim por diante. E assim, o crescimento possível para o caso $p = 3$ acima seria infinito.

Os resultados dos testes para a heurística de trocas para as séries A, B e C de problemas estão mostrados nas tabelas VII, VIII e IX, respectivamente.

Na tabela X são apresentados resumidamente os resultados da heurística. Pode-se notar que houve uma melhoria praticamente insignificante ao aumentarmos o valor de p de 2 para 8, para todos os problemas. Também os tempos de execução sofreram um aumento (bem maior que a melhoria das soluções). Isto mostra que neste caso as soluções obtidas sofrem pequena influência do número de rotas avaliado para as trocas. Um valor razoável para p situa-se entre 2 e 5.

Avaliação da Busca Tabu com Penalidades

A busca tabu com penalidades que é utilizada para a resolução da formulação veículo-rota pode também ser utilizada para resolver o modelo mais simples. Para isto basta

Tabela VIII: Avaliação Heurística de Trocas (Série B)

prob.	%C	Ini.	$p = 2$			$p = 5$			$p = 8$		
			%M	Valor	T	%M	Valor	T	%M	Valor	T
s150b01	76.3	21.59	18.9	17.51	241	18.5	17.60	255	18.7	17.56	226
s150b02	79.3	26.89	18.5	21.92	321	18.7	21.87	361	18.7	21.87	324
s150b03	77.2	25.04	17.3	20.70	262	17.4	20.69	299	17.4	20.69	278
s200b01	70.6	35.19	18.6	28.64	564	18.5	28.69	616	18.6	28.67	595
s200b02	74.6	33.74	18.5	27.50	579	18.9	27.37	685	19.8	27.41	579
s200b03	72.0	41.54	19.9	33.70	741	19.4	33.50	862	19.4	33.48	798
s300b01	72.0	21.54	16.3	18.02	736	16.4	18.01	713	16.3	18.03	622
s300b02	73.1	32.25	13.6	27.87	977	13.5	27.89	985	13.8	27.80	973
s300b03	72.0	31.76	15.1	26.97	921	15.3	26.91	938	15.3	26.89	869

Tabela IX: Avaliação Heurística de Trocas (Série C)

prob.	%C	Ini.	$p = 2$			$p = 5$			$p = 8$		
			%M	Valor	T	%M	Valor	T	%M	Valor	T
s250c01	76.3	50.49	35.3	32.65	592	35.6	32.54	697	35.6	32.51	799
s250c02	79.3	52.77	34.0	34.83	621	33.9	34.86	730	34.0	34.83	849
s250c03	77.2	48.27	37.8	30.02	654	37.6	30.10	736	37.8	30.01	874
s350c01	70.6	73.39	37.6	45.76	1248	37.7	45.74	1414	37.7	45.74	1637
s350c02	74.6	70.61	35.3	45.65	1246	35.4	45.62	1408	35.4	45.62	1610
s350c03	72.0	73.57	35.8	47.20	1431	36.1	47.05	1707	36.1	47.00	1985
s450c01	72.9	91.63	36.1	58.53	2171	35.9	58.72	2265	35.2	58.81	2479
s450c02	73.1	98.12	31.4	67.34	2377	31.5	67.17	2465	31.6	67.13	2641
s450c03	72.0	96.80	33.8	64.12	2530	33.8	64.08	2994	33.8	64.10	3226

Tabela X: Resumo Heurística de Trocas

serie	nós	$p = 2$		$p = 5$		$p = 8$	
		%M ^a	T ^b	%M	T	%M	T
A	50	16.5	124	16.6	141	16.6	153
	100	13.6	500	13.8	609	13.9	673
	150	12.9	567	13.1	651	13.1	754
subtotal		14.3	1191	14.5	1401	14.5	1580
B	150	18.2	824	18.2	915	18.3	828
	200	18.7	1884	18.9	2163	18.9	1972
	300	15.0	2634	15.1	2636	15.1	2464
subtotal		17.3	5342	17.4	5714	17.4	5264
C	250	35.7	1867	35.7	2163	35.8	2522
	350	36.2	3925	36.4	4529	36.4	5232
	450	33.8	7078	33.7	7724	33.7	8346
subtotal		35.2	12870	35.3	14416	35.3	16100

^aPercentual médio de melhoria da solução

^bTempo Total (seg)

fazer o número máximo de rotas NR na formulação (2.25) - (2.32) igual ao número de veículos NV . E também fazer o tempo disponível para atendimento dos veículos infinito ($T_{MAX} = \infty$).

Inicialmente, a avaliação da resolução dos problemas será feita da mesma forma que para a heurística de trocas. Neste caso serão avaliados os parâmetros do número de iterações e do tamanho máximo da lista de *melhores rotas para inserção*. Em seguida, será avaliada a capacidade deste algoritmo em obter soluções factíveis partindo de soluções iniciais infactíveis.

Valores utilizados

Alguns parâmetros do algoritmo tabu mostrado na página 54 não foram estudados em maiores detalhes. Os valores escolhidos seguiram a sugestão de Gendreau e outros [22] pois não havia em nenhum dos casos motivos para esperar que sua alteração produzisse grandes melhorias na qualidade das soluções ou nos tempos de execução da heurística. A seguir serão apresentados os valores e os motivos para sua utilização.

$\alpha_{início} = \beta_{início} = 1.0$:

$ITER_MUDANCA_PARAMETROS = 10$: Valores sugeridos por Gendreau e outros.

$NUM_ITER_CRIACAO_MELHORES = 30$: O número de iterações entre os testes de criação de uma nova rota foi fixado tendo por objetivo a não repetição da criação de uma mesma rota após poucas iterações e permitir ao algoritmo sair “rapidamente” de uma situação de infactibilidade.

$NUM_ITER_ATUALIZACAO_MELHORES = 20$: Este valor foi escolhido tendo em mente o custo computacional adicional do teste de diversas inserções e a maior esperança de melhoria da solução, conseguida mantendo a lista de melhores rotas para inserção atualizada.

$N_{min} = 7, N_{max} = 13$: Estes valores foram utilizados tendo em vista que a lista deveria ser grande o bastante para impedir a ocorrência de ciclagem mas não tão grande que a lista de movimentos tabu viesse a limitar demasiadamente o processo de busca.

Inicialmente, foi testada a variação do número de elementos na *lista de melhores*

Tabela XI: Avaliação Heurística Tabu (Série A)

prob.	%C	POs	sol. Ini	$p = 3$			$p = 7$		
				%M ^a	Valor	T ^b	%M	Valor	T
s050a01	76.3	18	18.99	19.9	15.21	80	19.9	15.21	89
s050a02	79.3	19	17.48	20.6	13.87	87	20.5	13.90	96
s050a03	77.2	17	15.51	20.1	12.40	62	20.6	12.32	69
s100a01	70.6	19	32.24	19.3	26.02	213	19.5	25.95	318
s100a02	74.6	18	30.49	14.3	26.14	169	14.4	26.10	220
s100a03	72.0	18	29.53	17.0	24.51	176	16.9	24.54	271
s150a01	72.9	12	25.99	16.8	21.63	202	16.2	21.77	231
s150a02	73.1	9	18.90	14.7	16.13	118	15.2	16.03	175
s150a03	72.0	13	28.02	13.2	24.32	172	13.2	24.33	252

^aPorcentagem de melhoria em relação à solução inicial

^bTempo (seg)

rota para inserção (p) para os valores 3 e 7, para um número fixo de 600 iterações. Os resultados destes testes estão mostrados nas tabelas XI, XII e XIII.

Em seguida, foi avaliado o número de iterações. Para isto foram feitos testes com valores de 300, 600 e 1000 iterações com o parâmetro do número de elementos na lista igual a 5 ($p = 5$). Os resultados destes testes estão mostrados nas tabelas XIV, XV e XVI.

A tabela XVII apresenta os resultados comparativos dos testes realizados sobre os parâmetros de número de iterações sem melhoria i e do número p de elementos na *lista de melhores rotas para inserção*, respectivamente.

Analisando a variação de p podemos observar que os valores médios de melhoria em relação à solução inicial (%M) apresentaram resultados esperados. As soluções obtidas melhoraram e os tempos de execução aumentaram com o crescimento de p . Em alguns casos particulares, no entanto, as soluções para valores maiores de p foram piores. Por exemplo, as soluções dos problemas da série C com 250 nós foram melhores com $p = 3$ (37.7%) do que para $p = 5$ (37.2%).

Na avaliação do efeito do aumento do número de iterações i com valores fixos de p (no caso $p = 5$) também ocorreu a melhoria das soluções e aumento dos esforços

Tabela XII: Avaliação Heurística Tabu (Série B)

prob.	%C	POs	sol. Ini	$p = 3$			$p = 7$		
				%M	Valor	T	%M	Valor	T
s150b01	76.3	14	21.59	21.5	16.94	195	21.2	17.02	238
s150b02	79.3	18	26.89	21.2	21.19	240	21.6	21.07	315
s150b03	77.2	17	25.04	19.8	20.09	217	21.6	19.64	258
s200b01	70.6	17	35.19	20.1	28.12	520	20.9	27.84	676
s200b02	74.6	17	33.74	21.3	26.57	548	21.7	26.42	657
s200b03	72.0	20	41.54	20.2	33.13	514	20.6	32.98	730
s300b01	72.0	8	21.54	16.8	17.93	556	17.8	17.71	704
s300b02	73.1	12	32.25	15.5	27.24	571	16.7	27.20	757
s300b03	72.0	12	31.76	16.1	26.64	539	16.8	26.41	682

Tabela XIII: Avaliação Heurística Tabu (Série C)

prob.	%C	POs	sol. Ini	$p = 3$			$p = 7$		
				%M	Valor	T	%M	Valor	T
s250c01	76.3	20	50.49	37.5	31.58	774	37.3	31.65	814
s250c02	79.3	20	52.77	36.1	33.74	767	36.3	33.63	863
s250c03	77.2	20	48.27	39.5	29.18	613	39.6	29.15	714
s350c01	70.6	20	73.39	38.8	44.95	1297	38.4	45.21	1446
s350c02	74.6	19	70.61	36.3	44.98	1091	36.2	45.02	1377
s350c03	72.0	20	73.57	37.3	46.16	1017	37.8	45.78	1343
s450c01	72.9	19	91.63	35.1	59.49	1895	35.9	58.77	2351
s450c02	73.1	20	98.12	31.5	67.21	2430	32.3	66.44	2739
s450c03	72.0	20	96.80	34.9	63.01	2374	34.8	63.09	2541

Tabela XIV: Avaliação Heurística Tabu (Série A)

prob.	%C	Ini.	$i = 300$			$i = 600$			$i = 1000$		
			%M	Valor	T	%M	Valor	T	%M	Valor	T
s050a01	76.3	18.99	19.9	15.21	86	20.3	15.13	176	20.5	15.1	284
s050a02	79.3	17.48	20.5	13.90	94	20.8	13.84	199	20.9	13.82	283
s050a03	77.2	15.51	20.6	12.32	66	20.9	12.27	142	21.0	12.26	225
s100a01	70.6	32.24	19.5	25.96	287	19.8	25.87	538	19.9	25.82	882
s100a02	74.6	30.49	14.1	26.19	200	15.0	25.91	461	15.4	25.8	751
s100a03	72.0	29.53	16.5	24.65	225	17.6	24.32	478	18.2	24.17	792
s150a01	72.9	25.99	16.5	21.74	183	16.9	21.61	443	17.0	21.58	660
s150a02	73.1	18.90	14.8	16.10	137	16.0	15.87	318	15.8	15.92	427
s150a03	72.0	28.02	13.1	24.36	206	13.7	24.18	400	14.3	24.0	626

Tabela XV: Avaliação Heurística Tabu (Série B)

prob.	%C	Ini.	$i = 300$			$i = 600$			$i = 1000$		
			%M	Valor	T	%M	Valor	T	%M	Valor	T
s150b01	76.3	21.59	21.3	17.0	200	22.5	16.73	508	22.4	16.75	642
s150b02	79.3	26.89	21.3	21.17	263	23.1	20.69	726	23.5	20.56	979
s150b03	77.2	25.04	20.0	20.01	237	22.0	19.54	585	22.0	19.53	830
s200b01	70.6	35.19	20.7	27.90	603	21.1	27.75	1126	22.1	27.42	2077
s200b02	74.6	33.74	21.9	26.34	641	23.2	25.90	1662	23.4	25.85	2322
s200b03	72.0	41.54	20.8	32.89	648	21.7	32.54	1498	22.5	32.21	2539
s300b01	72.0	21.54	17.3	17.82	462	18.5	17.55	1000	18.7	17.52	1332
s300b02	73.1	32.25	15.3	27.32	551	16.7	26.88	1146	17.2	26.73	1929
s300b03	72.0	31.76	15.7	26.77	647	17.3	26.26	1387	17.6	26.18	2021

Tabela XVI: Avaliação Heurística Tabu (Série C)

prob.	%C	Ini.	$i = 300$			$i = 600$			$i = 1000$		
			%M	Valor	T	%M	Valor	T	%M	Valor	T
s250c01	76.3	50.49	36.8	31.89	700	39.4	30.61	1974	39.4	30.58	2653
s250c02	79.3	52.77	35.8	33.90	772	37.5	32.98	1826	38.4	32.49	2754
s250c03	77.2	48.27	39.1	29.42	583	41.2	28.38	1714	41.8	28.09	2596
s350c01	70.6	73.39	38.7	44.99	1353	40.9	43.34	3714	41.4	43.03	4977
s350c02	74.6	70.61	36.6	44.80	1171	38.4	43.50	2889	38.6	43.32	3970
s350c03	72.0	73.57	37.7	45.80	1313	39.4	44.58	2809	39.6	44.44	3758
s450c01	72.9	91.63	36.5	59.09	2174	36.7	57.98	4966	37.2	57.60	7490
s450c02	73.1	98.12	31.9	66.84	2401	33.0	65.71	5541	33.3	65.42	8331
s450c03	72.0	96.80	34.4	63.54	2102	33.9	62.06	5450	36.4	61.60	7855

Tabela XVII: Resumo Heurística Tabu com Penalidades

serie	nós	300, 3 ^a		300, 7		300, 5		600, 5		1000, 5	
		%M ^b	T ^c	%M	T	%M	T	%M	T	%M	T
A	50	20.2	229	20.5	254	20.0	246	20.7	517	20.8	792
	100	16.9	558	16.9	809	16.7	713	17.5	1477	17.8	2425
	150	14.9	492	14.9	658	14.8	526	15.5	1161	15.7	1713
subtotal		17.3	1079	17.3	1721	17.3	1238	17.9	3155	18.1	4930
B	150	20.8	652	21.5	811	20.9	700	22.5	4286	22.6	6938
	200	20.5	1582	21.1	2063	21.1	1892	22.0	3533	22.7	5282
	300	16.1	1666	17.1	2093	16.1	1660	17.5	1819	17.8	2451
subtotal		19.1	3900	19.9	4967	19.4	4252	20.7	9638	21.0	14671
C	250	37.7	2156	37.7	2391	37.2	2055	39.4	5514	39.9	8003
	350	37.4	3405	37.4	4166	37.7	3837	39.6	9412	39.9	12705
	450	33.8	6699	34.3	7631	34.3	6677	34.5	15957	35.6	23676
subtotal		36.3	12260	36.5	14188	36.4	12569	37.8	30883	38.5	44384

^acorrespondem aos valores de i e p , respectivamente

^bPercentual médio de melhoria em relação à solução inicial

^cTempo Total (seg)

computacionais conforme o valor de i aumentava. As melhorias observadas foram bem maiores para o aumento proporcional de i do que para o crescimento de p . Para as séries A, B e C a melhoria de %M com o crescimento de p de 3 para 7 foram : 0.1%, 0.8% e 0.2%, respectivamente. Enquanto que, para um aumento proporcionalmente menor para i de 300 para 600 iterações as melhorias obtidas foram : 0.6%, 1.3% e 1.2%. Em compensação os tempos de execução também aumentaram bem mais (60%, 27% e 16%) contra (155%, 127% e 146%). O que leva a concluir que para esta heurística o número de iterações e o número de elementos na lista devem ser escolhidos levando em conta o compromisso entre tempo de execução e qualidade da solução.

Avaliação Geral das Heurísticas de Melhoria

Analisando as tabelas X e XVII, que contém os resumos dos resultados da heurística de trocas e tabu com penalidades, respectivamente, podemos verificar a superioridade da heurística tabu sobre a de trocas. O pior resultado da heurística tabu obtido na série de testes para $i = 300$ e $p = 3$ (17.3%, 19.1% e 36.3%) para as melhorias médias nas séries de testes (A, B, C) são melhores que a melhor série para a heurística de trocas com $p = 8$ (14.5%, 17.4% e 35.3%). Os tempos de execução também foram melhores na heurística tabu 1079, 3900 e 12260 seg contra 1580, 5264 e 16100 seg para a heurística de trocas. Comparando a melhor solução tabu contra a melhor solução para as trocas temos que a solução tabu consegue uma maior melhoria na solução inicial. Esta melhoria foi mais de 3% acima da heurística de trocas (3.6%, 3.6% e 3.2%). Neste caso, deve ser levado em conta que uma parte desta melhoria foi obtida através de tempos de execução 3 vezes maiores. Uma outra comparação interessante resulta quando se comparam as melhorias obtidas quando são concedidos aproximadamente os mesmos tempos para as heurísticas. Neste caso, a vantagem da heurística tabu é de aproximadamente 3%.

Capacidade de Factibilização da Heurística Tabu

Os períodos onde as soluções iniciais foram infactíveis não foram utilizados para efeito de comparação entre os algoritmos de melhoria. Neste teste a heurística de busca tabu com penalidades foi utilizada nos casos em que a solução inicial foi infactível com a

Tabela XVIII: Factibilização das Soluções Iniciais

serie	nós	POs Inf. ^a	Rot Inf. ^b	TABU			
				POs Fact.	Rot Fact.	% Rotas ^c	T ^d
A	50	6	16	1	7	44	22
	100	5	30	1	8	27	93
	150	26	199	7	110	55	309
subtotal		37	245	9	125	51	424
B	150	11	47	3	24	51	92
	200	6	31	3	28	90	235
	300	28	260	1	46	18	1001
subtotal		45	338	7	98	29	1328
C	250	0	0	-	-	-	-
	350	1	5	1	5	100	80
	450	1	8	1	8	100	89
subtotal		2	13	2	13	100	169

^aNúmero de POs com soluções iniciais inactíveis.

^bTotal de rotas inactíveis para os POs

^cPercentual médio de rotas factibilizadas

^dTempo Total (seg)

finalidade de testar a sua capacidade de factibilizar tais soluções iniciais.

A tabela XVIII apresenta de forma resumida os resultados obtidos. Na coluna *POs inf.* é mostrado o número de períodos operacionais inactíveis. A coluna *Rotas inf.* mostra o total de rotas inactíveis para os POs. As colunas *POs Fact* e *Rotas Fact* mostram, respectivamente, o número de POs e rotas factibilizados pelo algoritmo. A coluna *% Rotas* mostra o percentual médio de redução no número de rotas inactíveis. Já a coluna *T* mostra o tempo total de execução em segundos.

Como pode ser observado os problemas mais restritivos (série B) são os mais difíceis de serem factibilizados. Houve redução de apenas 29% em média nas rotas inactíveis. Já, nos problemas da série C, que tem bastante folga, todas as rotas inactíveis foram factibilizadas.

4.3 Avaliação dos Modelos

Nas avaliações feitas até aqui foi medida a “performance” dos métodos e heurísticas utilizadas na resolução do modelo matemático. Aqui, faremos a avaliação da qualidade do próprio modelo para resolver o problema proposto. Como os problemas tratados são estocásticos é necessário realizar uma simulação para saber se o modelo é aderente à realidade. Já discutimos no item 2.7, que a estimativa dos custos esperados de entrega b_i de cada nó i é difícil de ser feita. Esta é outra razão para realizarmos uma simulação. Assim, podemos avaliar se os custos b_i estimados são razoáveis.

Na simulação, a solução obtida - através da resolução do PERV - para o primeiro PE é executada. Isto é, as rotas da solução são percorridas e as entregas são feitas. Como discutimos no item 2.5, as demandas estocásticas dos consumidores podem ser maiores que as esperadas e pode faltar produto no caminhão durante uma entrega. Para evitar que isto ocorra com frequência a capacidade real do veículo utilizado na distribuição é 10% superior a capacidade fictícia utilizada no PERV. Mesmo assim, ainda existe a possibilidade de que venha a faltar produto durante as entregas. Por isso, as rotas da solução são percorridas durante a simulação e a cada parada, a necessidade real do consumidor é atendida, isto é, seu estoque é repostado. Caso a carga restante no veículo seja insuficiente para atender a pelo menos 30% da necessidade estimada para o próximo consumidor da rota, o veículo passará direto ao consumidor seguinte, que também é testado para o atendimento mínimo de 30%. Caso não seja possível atender mais nenhum consumidor o veículo retornará ao distribuidor. Ao final do PE, são geradas as demandas estocásticas dos consumidores durante o PE, e atualizados os estoques locais. Em seguida, a solução para o segundo PE do PO é utilizada na simulação, e assim por diante até o final.

Este procedimento de simulação é semelhante ao utilizada por Golden e outros [27] para a distribuição de propano. Mas, neste modelo há a possibilidade de escassez antecipada no cliente. Neste caso uma entrega de emergência deverá ser realizada. O custo desta entrega é o custo de uma viagem direta de ida e volta ao consumidor acrescido de um custo de insatisfação. Além disso, é necessário considerar que na solução do PERV para os PEs seguintes pode estar previsto o atendimento “normal” deste consumidor - atendido por uma entrega de emergência - o que tornaria a entrega “normal” desnecessária. Neste caso, seria possível resolver novamente o PERV

considerando a situação atual. Porém, optou-se por manter as soluções para os PEs restantes do PO apenas alterando a rota que atenderia ao consumidor (e) já atendido. Na nova rota o veículo irá diretamente do consumidor anterior ($e - 1$) ao consumidor seguinte ($e + 1$).

Nos testes executados o objetivo era conseguir a melhor solução possível, por isso, foi empregada a heurística de busca tabu com penalidades para melhorar a solução inicial. O número de iterações sem melhoria foi fixado em 1000 e o valor de $p = 10$. O número de POs foi aumentado para 40, visando obter um resultado mais confiável dadas as características aleatórias do problema. Para permitir uma comparação razoável entre o modelo apresentado e uma solução periódica, os veículos foram dotados de tempo de utilização ilimitado.

A solução periódica foi obtida utilizando o modelo proposto por Larson [30]. O objetivo proposto por Larson era a minimização do número de barcaças utilizadas para recolher os resíduos produzidos no tratamento de esgotos. A solução é obtida por uma adaptação da heurística de “savings”. A utilização da barcaça é calculada em função do período e da duração da rota. O ganho (“savings”) representa a redução na utilização das barcaças resultante da união de duas rotas. Neste caso, foi empregado como objetivo do problema periódico a minimização da distância percorrida, que representa o custo da solução. O resultado final foi convertido em termos de custo por unidade entregue para ser comparado com a solução não-periódica simulada. Para a solução periódica também foram utilizados os mesmos estoques de segurança empregados na solução simulada.

As tabelas XIX, XX e XXI apresentam os resultados obtidos na simulação. Os valores são apresentados em custo por 1000 unidades entregues. A coluna *Sol. S* apresenta os custos totais da simulação, considerando os custos produzidos por entregas de emergência. A coluna *Sol. F* apresenta os resultados da simulação sem considerar as entregas emergenciais. A coluna *T* mostra os tempos de execução das simulações. A coluna *Period* apresenta o resultado obtido pela solução periódica. E finalmente, a última coluna (% D/P) mostra os percentuais do custo da simulação da coluna *Sol. F* sobre a solução periódica. A coluna *Sol. F* foi empregada para comparação em virtude dos custos da solução periódica também não levarem em conta as entregas emergenciais.

Como pode ser observado nas tabelas, o custo da solução não-periódica foi sempre

Tabela XIX: Simulação do Modelo (Série A)

prob.	Sol. S	Sol. F	T (min)	Period	% D/P ^a
s050a01	29.4	29.0	240	28.2	2.84
s050a02	28.7	27.8	244	26.6	4.51
s050a03	27.4	27.2	217	25.9	5.02
Subtotal					4.12
s100a01	26.4	25.6	319	24.3	5.35
s100a02	25.3	24.6	287	22.4	9.82
s100a03	25.1	24.4	278	23.4	4.27
Subtotal					6.48
s150a01	24.5	24.0	654	22.4	7.14
s150a02	24.6	23.9	670	22.3	2.69
s150a03	25.1	23.7	662	22.1	7.24
Subtotal					5.69

^a% da solução dinâmica simulada superior à periódica

Tabela XX: Simulação do Modelo (Série B)

prob.	Sol. S	Sol. F	T (min)	Period	% D/P
s150b01	43.5	43.1	130	39.2	9.95
s150b02	42.9	42.7	120	38.4	11.20
s150b03	42.7	42.3	125	38.3	10.44
Subtotal					10.53
s200b01	40.7	40.3	258	36.9	9.21
s200b02	39.4	39.0	260	35.3	10.48
s200b03	39.8	39.2	261	35.8	9.50
Subtotal					9.73
s300b01	38.1	37.9	516	33.7	12.46
s300b02	37.8	37.5	466	34.0	10.29
s300b03	37.5	37.3	485	33.6	11.01
Subtotal					11.25

Tabela XXI: Simulação do Modelo (Série C)

prob.	Sol. S	Sol. F	T (min)	Period	% D/P
s250c01	54.1	53.9	240	47.2	14.19
s250c02	52.8	52.5	244	47.3	10.99
s250c03	51.6	51.4	217	47.4	8.44
Subtotal					12.67
s350c01	52.7	52.7	319	46.8	12.07
s350c02	50.9	50.9	287	46.3	9.94
s350c03	50.7	50.6	278	46.8	8.12
Subtotal					10.04
s450c01	50.6	50.3	654	44.6	12.78
s450c02	50.0	49.8	670	44.2	12.67
s450c03	50.5	50.2	671	45.1	11.31
Subtotal					12.25

maior. Nos problemas da série A as soluções simuladas foram por volta de 5% mais caras, enquanto nas séries B e C, a diferença foi bem maior : $\cong 10\%$ e $\cong 12\%$, respectivamente. Isto pode indicar que o aumento do tempo de duração dos estoques locais torna o modelo não-periódico pior em relação o modelo periódico. Isto parece razoável já que as soluções periódicas tornam-se menos susceptíveis a estocasticidade da demanda. Por outro lado, isto pode ser provocado pela má qualidade dos custos de entrega utilizados.

De qualquer forma é preciso considerar que as soluções não-periódicas tem maior facilidade de serem colocadas em prática. Pelas características da solução periódica várias rotas podem necessitar de atendimento na mesma hora o que tornará impossível executar a solução obtida. Além disso, se a demanda dos clientes se alterar muito durante o ano, a solução periódica ou se tornará "ruim" ou terá de ser alterada. No caso da alteração haverá um custo de adaptação para a nova solução periódica. Para casos extremos, onde a demanda varia muito dentro de um único mês é improvável que uma solução periódica seja satisfatória.

Capítulo 5

Conclusões

Neste trabalho apresentamos o modelamento matemático do Problema de Estoque e Roteamento de Veículos (PERV) e alguns algoritmos capazes de resolvê-lo.

5.1 Resultados Obtidos

Foram discutidas as características do problema e como elas são tratadas no modelo. Estas características são determinadas principalmente pelo problema de estoque que envolve a previsão da demanda nos clientes. A demanda é, normalmente, estocástica e o modelo trata esta estocasticidade com o uso de estoques de segurança e capacidades reduzidas nos veículos. O estoque de segurança é avaliado do ponto de vista econômico, isto é, será o estoque no ponto de mínimo da função de custo esperado. Esta função depende da distribuição de probabilidade da demanda, e da relação entre o custo de uma entrega normal e de uma entrega de emergência.

No modelamento matemático é feita a redução do horizonte de planejamento do longo para o curto prazo. Isto reduz o tamanho do problema e permite que ele seja tratado através de uma adaptação do Problema de Roteamento de Veículos (PRV). Para não perder a visão de longo prazo, foram utilizados custos futuros para avaliar o efeito das soluções atuais no futuro.

No modelo os clientes são divididos em dois grupos : M - clientes que devem ser atendidos durante o período de planejamento, chamado de período operacional (PO), e \overline{M} - clientes que podem ou não ser atendidos dependendo da conveniência. Os clientes em M serão aqueles cujo estoque ficar abaixo do estoque de segurança

durante o PO corrente.

Foram apresentadas três formulações para o PERV. As duas primeiras são equivalentes e a terceira incorpora restrições adicionais para a alocação das rotas aos veículos. A metodologia proposta para a resolução do problema faz uma simplificação das formulações a partir da qual se obtém uma solução inicial. Em seguida, aplicam-se heurísticas de melhoria sobre as soluções iniciais para obter a solução final.

Foram apresentados dois algoritmos para a obtenção das soluções iniciais. Ambos utilizam um Problema de Atribuição Generalizado para dividir os clientes em subconjuntos, que são usados para resolver os subproblemas. No primeiro, os nós são divididos em períodos de entrega (PEs), para cada PE será resolvido um PRV. No segundo, a divisão é feita em rotas que são executadas em um determinado PE, e os subproblemas resolvidos são PCVs, utilizados para encontrar as rotas percorridas. No primeiro método o problema principal só leva em conta o aspecto temporal, isto é, o dia da entrega. Enquanto que, no segundo, os aspectos temporais e espaciais são contemplados.

Foi abordada a questão do atendimento aos clientes em \bar{M} na solução inicial. Como estes clientes poderiam ser reabastecidos antecipadamente apenas se isto fosse interessante do ponto de vista econômico, só faria sentido considerá-los se houvesse alguma forma de avaliar o custo para realizar a entrega. Para o método baseado no PRV, como só são considerados os aspectos temporais, os nós em \bar{M} não foram utilizados. Já, no caso do PCV, faz sentido utilizar estes nós pois, além do aspecto temporal, é empregada uma aproximação linear para estimar o custo de atendimento do cliente através de cada rota.

Nos testes, o método baseado no PCV que continha os nós em \bar{M} obteve as melhores soluções. No entanto, o número de POs em que as soluções obtidas pelo método foram inactíveis foi muito maior que os demais. Apesar dos bons resultados, como o principal objetivo na obtenção de uma solução inicial é a sua factibilidade, este método foi preterido. Entre as soluções que só utilizaram os nós em M , as soluções do PCV foram praticamente equivalentes às do PRV. No entanto, o número de POs com soluções inactíveis obtidas pelo PCV foi um pouco menor. Por este motivo, o método baseado no PCV foi escolhido para gerar as soluções iniciais no restante dos testes.

Foram testadas duas heurísticas para a melhoria da solução inicial : busca tabu com

penalidade e trocas. Elas conseguiram grandes melhorias sobre as soluções iniciais. A heurística tabu conseguiu, no entanto, melhorias por volta de 3% superiores à heurística de trocas, às custas, porém, de muito tempo de processamento. No caso da heurística tabu as melhorias obtidas chegaram a até 40%, e a melhoria média nos problemas testados foi de aproximadamente 25%. Isto demonstra a importância desta etapa de resolução e ressalta a impossibilidade de tratar todos os aspectos do problema na solução inicial. Outra característica muito importante da heurística tabu com penalidades é a possibilidade de utilizar soluções iniciais ineficazes. Isto facilita muito a obtenção de uma solução inicial na resolução de problemas reais onde existam diversas restrições específicas.

Esta característica da heurística tabu permitiria utilizar a formulação PCV com os nós em \bar{M} para obter uma solução inicial. Isto porque, como já foi discutido, ele obteve as melhores soluções iniciais, mas foi preterido por produzir muitas soluções ineficazes. Esta combinação de solução inicial e heurística de melhoria, no entanto, não foi testada e fica como sugestão de estudo futuro.

Pelas características estocásticas do problema, foi necessário utilizar uma simulação para melhor avaliar o modelo dinâmico proposto. Este procedimento de simulação avalia os custos da solução para 40 POs, levando em conta os custos das entregas de emergência e das rotas percorridas nas soluções propostas pelo PERV.

Nas simulações realizadas o modelo dinâmico apresentou soluções inferiores ao periódico. Nos problemas testados, a solução dinâmica foi em média 9% mais cara que a solução periódica. Apesar dos testes apresentados mostrarem que a solução periódica é melhor que a dinâmica, é interessante destacar que a solução dinâmica tem muitas características que a tornam atraente. Entre estas características podemos destacar :

- Na solução dinâmica a situação dos estoques no início do período operacional é um dado importante que é considerado pelo modelo. Já a solução periódica não considera a situação inicial, por isso ela pode não ser imediatamente implantável. Se considerarmos uma solução possível em que ao menos um cliente de cada rota esteja inicialmente com menos de 15% de sua capacidade, teremos que imediatamente atender a todas as rotas, o que seria impossível. Assim, teríamos que ter um período de transição para a solução periódica. Outra situação possível é que tenhamos numa rota 3 clientes com 10, 70 e 90% de suas capacidades de

estoque. Neste caso, na primeira entrega, que deveria ser feita com urgência, uma quantidade pequena seria entregue aos 2 últimos clientes.

- Uma situação que pode ocorrer em problemas reais é a variação freqüente da demanda média, ou ainda, que a demanda média não seja constante, como considerado nos problemas testados. As demandas diferentes fazem parte do modelo dinâmico, apenas sendo necessário incluir funções para o cálculo do estoque de segurança para a distribuição de probabilidade específica da demanda. Neste caso, no entanto, uma solução periódica torna-se difícil de ser empregada pois, ou se continua com a ineficiência provocada pela alteração das demandas ou, serão necessárias alterações constantes na solução periódica, que produzirão perdas sempre que se realizar a transição.
- Mesmo na situação ideal de demanda constante o modelo periódico apresenta algumas dificuldades operacionais que impõe perdas de vez em quando. Por exemplo, esporadicamente várias rotas com períodos diferentes podem coincidir, obrigando que uma ou mais delas sejam atendidas antecipadamente.

Além disso, mesmo na situação ideal para o modelo periódico (demanda média constante), o modelo dinâmico pode aproveitar melhor algumas características específicas do problema. Isto ocorre, por exemplo, quando o estoque local dos clientes pode ser conhecido sem que uma entrega seja feita. Neste caso, se a demanda no cliente for menor que a esperada, no modelo dinâmico podemos adiar a entrega. Já para a solução periódica, esta informação é mais difícil de ser aproveitada pois, a entrega só poderá ser adiada se isto for vantajoso na análise conjunta dos nós da rota periódica (seria necessário que vários outros nós tivessem demandas menores que as esperadas). O mesmo ocorre no caso da demanda de um cliente ser superior a esperada. Isto possibilita, ainda, que no modelo dinâmico, os estoques de segurança sejam reduzidos. Alguns resultados obtidos em testes não reportados no capítulo 4 mostram que o conhecimento prévio da situação dos estoques no início do PO reduz o custo da solução dinâmica. Em alguns casos, as soluções obtidas com este dado foram melhores que as soluções periódicas.

Finalizando, o modelo periódico parece ser definitivamente melhor apenas quando a demanda é constante e quando o problema não apresentar características que possam ser melhor aproveitadas pelo modelo dinâmico. Fora disto, teria que ser feita uma

comparação entre as soluções dos modelos para avaliar qual o melhor para resolver o problema estudado.

Em relação aos tempos de execução das simulações é preciso considerar que uma simulação - que chegou a levar 10 horas de máquina (SparcStation 1+) - só será necessária no início da operação do sistema para o ajuste de alguns parâmetros do modelo como, por exemplo, os custos de entrega. A solução de um único período operacional gastaria aproximadamente 15 minutos para os problemas de 450 nós (série C), o que não criaria nenhum empecilho à operação semanal, ou mesmo diária.

5.2 Estudos Futuros

As propostas para estudos futuros mais imediatos são divididos em duas partes : a primeira trata de ampliar as análises sobre o comportamento das soluções da simulação e, a segunda, abordar o problema tratando múltiplos produtos ou o custo de estocagem.

Entre as análises estão um estudo mais detalhado dos custos de entrega e o desenvolvimento de uma fórmula mais efetiva para o seu cálculo. Poder-se-ia também, analisar as soluções finais obtidas se fosse empregada a solução inicial PCV com \bar{M} com a melhoria desta sendo feita pela heurística tabu que, também, teria por objetivo factibilizar o grande número de soluções iniciais infactíveis. Analisar o efeito de mudanças na operação da distribuição, isto é, trocar a *política rigorosa* empregada na simulação que não permite modificar as rotas no caso do nó já ter sido atendido por uma entrega de emergência. Neste caso, poderia ser testada uma *política corretiva*, onde novas rotas seriam recalculadas. Também seria interessante fazer um estudo mais detalhado sobre o efeito do conhecimento prévio da situação dos estoques sobre as soluções do modelo dinâmico, como discutido anteriormente. Cabe ressaltar que, hoje, com as facilidades da automação, os clientes poderiam ser interligados ao distribuidor de forma a permitir que este conheça a situação dos estoques locais de cada cliente.

O problema tratado aqui aborda a questão da distribuição de um único produto. O modelo poderia ser alterado para permitir o tratamento de problemas de distribuição de vários produtos diferentes. Uma forma simplificada de tratar este problema seria alterando o cálculo dos estoques de segurança. Mas, para tratar o problema mais a

fundo seriam necessárias alterações no modelo.

O modelo proposto considera que ao atender um cliente, o estoque deste é repostado ao nível máximo. Se forem considerados os custos de estocagem, a melhor opção para o atendimento poderia não ser mais a reposição da capacidade total do estoque. Portanto, a consideração dos custos de estocagem nos clientes (ou no distribuidor) alteraria o modelo utilizado. Para incorporar os custos de estocagem ao modelo poderia ser feito um tratamento prévio, para determinar qual o nível ideal de reposição de estoque para cada cliente.

Estas propostas de estudos futuros visam incorporar ao modelo características adicionais que permitam tratar mais adequadamente o problema de distribuição de medidores discutido no capítulo 1. Como os medidores não ocupam muito espaço e as quantidades distribuídas não são grandes, não existe na prática um limite de estoque que o modelo proposto requer. Portanto, o dimensionamento deveria ser feito pelo próprio modelo, ponderando os custos de estocagem (custo financeiro e seguro) e o custo de entrega. Também seria interessante que fosse feito um tratamento multiproduto do problema, já que existem 3 tipos de medidores.

Numa pesquisa futura espera-se empregar os resultados nesta tese para resolver o caso dos medidores da CPFL

Apêndice A

Estoque de Segurança

Neste apêndice, são demonstradas as considerações feitas em relação ao custo esperado e o estoque de segurança discutidas na seção 2.5.

Considerando as demandas (r_j) como variáveis aleatórias randomicamente distribuídas, com média μ , variância σ^2 e função distribuição acumulada $\mathcal{F}(r_i)$. Temos que a demanda do consumidor durante t dias será :

$$R_t = \sum_{j=1}^t r_j \quad (\text{A.1})$$

A probabilidade de que o estoque se esgote no PE t ($P_s(t)$) é dado por :

$$\begin{aligned} P_s(t) &= \text{Prob}[\text{Estoque do nó terminar no PE } t, \text{ caso não} \\ &\quad \text{haja entrega anterior}] \\ &= \text{Prob}[R_{t-1} < E_0 \leq R_t] \\ &= \text{Prob}[R_{t-1} \leq E_0] - \text{Prob}[R_t \leq E_0] \\ &= \mathcal{F}^{(t-1)}(E_0) - \mathcal{F}^{(t)}(E_0) \end{aligned}$$

onde :

$\mathcal{F}^{(k)}(E)$: k -ésima convolução da função \mathcal{F} .

Considerando, $a_0 = E_0 b/T$ e $a = \mu b/T$ temos que $c_t = a_0 - at$. O custo esperado $CE(j)$ é dado por :

$$CE(t) = \sum_{j=1}^{t-1} (S + c_j) P_s(j) + \left(1 - \sum_{j=1}^t P_s(j) \right) (b + c_t)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{t-1} (S + a_0 - aj)P_s(j) + \left(1 - \sum_{j=1}^t P_s(j)\right) (b + a_0 - at) \\
&= (S + a_0) \sum_{j=1}^{t-1} P_s(j) - a \sum_{j=1}^{t-1} jP_s(j) + \left(1 - \sum_{j=1}^t P_s(j)\right) (b + a_0 - at) \\
&= (S + a_0)(1 - F^{(t-1)}) - a \sum_{j=1}^{t-1} (F^{(j-1)} - F^j)j + \left(1 - (1 - F^{(t-1)})\right) (b + a_0 - at) \\
&= S(1 - F^{(t-1)}) + a_0 - a_0F^{(t-1)} - a \sum_{j=1}^{t-1} (F^{(j-1)} - F^j)j + F^{(t-1)}(b + a_0 - at) \\
&= S(1 - F^{(t-1)}) + a_0 - a \left(\sum_{j=1}^{t-1} F^{(j-1)}j - \sum_{j=1}^{t-1} F^j j \right) + bF^{(t-1)} - atF^{(t-1)} \quad (A.2)
\end{aligned}$$

Para as somatórias $\sum_{j=1}^{t-1} F^{(j-1)}j - \sum_{j=1}^{t-1} F^j j$ temos :

$$\begin{aligned}
&F^0 + 2F^1 + 3F^2 + \dots + (t-1)F^{(t-2)} + 0 \\
&\quad - 1F^1 - 2F^2 - \dots - (t-2)F^{(t-2)} - (t-1)F^{(t-1)} \\
&= F^0 + F^1 + F^2 + \dots + F^{(t-2)} - (t-1)F^{(t-1)} \\
&= \sum_{j=1}^{t-2} F^j - (t-1)F^{(t-1)}
\end{aligned}$$

Assim, (A.2) fica :

$$\begin{aligned}
CE(t) &= S(1 - F^{(t-1)}) + a_0 - a \sum_{j=1}^{t-2} F^j + a(t-1)F^{(t-1)} - atF^{(t-1)} + bF^{(t-1)} \\
&= S(1 - F^{(t-1)}) + a_0 - a \sum_{j=1}^{t-2} F^j - aF^{(t-1)} + bF^{(t-1)} \\
&= S(1 - F^{(t-1)}) + a_0 - a \sum_{j=1}^{t-1} F^j + bF^{(t-1)} \quad (A.3)
\end{aligned}$$

O custo S para um atendimento de emergência de um nó deve ser maior que o custo b , caso contrário os consumidores só seriam atendidos quando o produto faltasse. Podemos fazer, $S = S' + b$, onde S' é a parte do custo de emergência maior que o custo de entrega estimado b . assim podemos simplificar a equação (A.3) :

$$\begin{aligned}
CE(t) &= (S' + b)(1 - F^{(t-1)}) + a_0 + b - a \sum_{j=1}^{t-1} F^j + bF^{(t-1)} \\
CE(t) &= S'(1 - F^{(t-1)}) + a_0 + b - a \sum_{j=1}^{t-1} F^j \quad (A.4)
\end{aligned}$$

O objetivo deste cálculo é entregar ao menor custo possível assim a entrega ao consumidor deve ser feita no ponto de mínimo t^* da função (A.4), se esta for convexa o primeiro mínimo encontrado será o melhor ponto para realizar uma entrega (t^*), e qualquer entrega posterior implicará um custo crescente desta forma o estoque esperado no PE t^* será o estoque de segurança. Neste caso, uma entrega deverá ser feita antes que o estoque do consumidor fique abaixo deste estoque de segurança (ES). Assim, o estoque de segurança pode ser calculado como :

$$ES = E_0 - \mu t^* \quad (A.5)$$

$$t^* = \min_t \left\{ CE(t) : 1 \leq t \leq \frac{E_0}{\mu} \right\}$$

TEOREMA 1 Se $P_s(t+1) > P_s(t)$ para todo $t = 1, 2, \dots, \lfloor E_0/\mu \rfloor$, então $CE(t)$ é estritamente convexa no intervalo.

Demonstração :

Definindo $\Delta(t) = CE(t-1) - CE(t)$. Para que $CE(t)$ seja estritamente convexa, temos que provar que $\Delta(t) > \Delta(t+1)$. Calculando $\Delta(t)$ temos :

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= S'(1 - F^{(t-2)}) + a_0 + b - a \sum_{j=1}^{t-2} F^j - (S'(1 - F^{(t-1)}) + a_0 + b - a \sum_{j=1}^{t-1} F^j) \\ &= -S'F^{(t-2)} - a \sum_{j=1}^{t-2} F^j + S'F^{(t-1)} - a \sum_{j=1}^{t-1} F^j \\ &= aF^{(t-1)} + S'(F^{(t-1)} - F^{(t-2)}) \end{aligned}$$

Agora mostraremos que $\Delta(t) > \Delta(t+1)$. Por hipótese $P_s(t) > P_s(t-1)$, assim multiplicando os dois lados da equação por um número positivo S' e somando um número positivo $P_s(t)$ no lado esquerdo não alteraremos a hipótese, assim segue que :

$$\begin{aligned} S'P_s(t) + aP_s(t) &> S'P_s(t-1) \Rightarrow \\ S'(F^{(t-1)} - F^{(t)}) + a(F^{(t-1)} - F^{(t)}) &> S'(F^{(t-2)} - F^{(t-1)}) \Rightarrow \\ aF^{(t-1)} + S'(F^{(t-1)} - F^{(t-2)}) &> F^{(t)} + S'(F^{(t)} - F^{(t-1)}) \Rightarrow \\ \Delta(t) &> \Delta(t+1) \end{aligned}$$

TEOREMA 2 Se F é uma distribuição normal e o coeficiente de variação $c = \sigma/\mu \leq 1$ então para $2 \leq t \leq E_0/\mu - 1$, $P_s(t+1) > P_s(t)$.

Demonstração :

Para uma distribuição normal temos que :

$$F^{(t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-x^2/2} dx,$$

onde $z = (E_0 - t\mu)/\sqrt{t\sigma}$. Logo para provar que $P_s(t)$ é crescente ($P_s(t) > P_s(t-1)$) temos que mostrar que $F^{(t-1)} - F^{(t)}$ cresce, para isto basta mostrar que $d/dt F^{(t)}$ decresce. Assim basta provar que $(d^2/dt^2)F^{(t)}$ é negativa para $0 \leq t \leq E_0/\mu - 1$. Assim :

$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-x^2/2} dx < 0 \quad (\text{A.6})$$

Definindo $g(z) = \int_{-\infty}^z e^{-x^2/2} dx$ e diferenciando $g(z)$ duas vezes em relação a t temos :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g(z) &= e^{-z^2/2} \frac{dz}{dt}, \\ \frac{d^2}{dt^2}g(z) &= -ze^{-z^2/2} \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + e^{-z^2/2} \frac{d^2z}{dt^2}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{-(E_0 + t\mu)}{2t^{3/2}\sigma}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{3E_0 + t\mu}{4t^{5/2}\sigma} \end{aligned}$$

Podemos reescrever a condição de suficiência como :

$$\frac{d^2}{dt^2}g(z) = -\frac{(E_0 + t\mu)(E_0 + t\mu)^2}{t^{1/2}\sigma \times 4t^3\mu^2} e^{-z^2/2} + \frac{3E_0 + t\mu}{4t^{5/2}\sigma} e^{-z^2/2} < 0$$

Multiplicando a inequação por $4\sigma t^{5/2}/e^{-z^2/2}$, que é um número positivo, obtemos :

$$-\frac{(E_0 + t\mu)(E_0 + t\mu)^2}{t\sigma^2} + (3E_0 + t\mu) < 0 \Rightarrow$$

$$3t\mu E_0\sigma^2 + t^2\mu\sigma^2 - (E_0^2 - t^2\mu^2)(E_0 + t\mu) < 0 \Rightarrow$$

Fazendo, $\omega = E_0/\mu - 1$, e substituindo E_0 por $\mu(\omega + 1)$ temos :

$$3t\mu(\omega + 1)\sigma^2 + t^2\mu\sigma^2 - (\mu^2(\omega + 1)^2 - t^2\mu^2)(\mu(\omega + 1) + t\mu) < 0 \Rightarrow$$

$$3t(\omega + 1)\sigma^2\mu + t^2\sigma^2\mu - (\omega + 1)^3\mu^3 - (\omega + 1)^2t\mu^3 + (\omega + 1)t^2\mu^3 + t^3\mu^3 < 0$$

Dividindo a inequação por μ^3 , que é sempre positivo, e substituindo σ/μ pelo coeficiente de variação c , temos finalmente :

$$3t(\omega + 1)c^2 + t^2c^2 - (\omega + 1)^3 - (\omega + 1)^2t + (\omega + 1)t^2 + t^3 < 0 \Rightarrow$$

$$3t\omega c^2 + 3tc^2 + t^2c^2 - \omega^3 - 3\omega^2 - 3\omega - 1 - \omega^2t - 2\omega t - t + \omega t^2 + t^2 + t^3 < 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & 3(tc^2 - \omega^2) + 3(tc^2 - \omega) + (t^2\omega - t\omega^2) + \\ & (t^2(c^2 + 1) - 2t\omega) + (t^3 - \omega^3) - (t + 1) < 0 \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Cada termo agrupado da inequação (A.7) é negativo para $t \leq \omega$ com $c \leq 1$. O limite do tempo de atendimento t esta dentro do limite estabelecido ($\omega = E_0/\mu - 1$), que representa o prazo limite para atendimento. Para atender a condição de suficiência da inequação (A.7) o desvio padrão σ não pode ser superior à média μ . Na inequação ainda resta um termo “ $-(t + 1)$ ”, negativo, de sobra.

Bibliografia

- [1] Anily, S. e Federgruen, A., "One Warehouse Multiple Retailer System with Vehicle Routing Costs", *Management Science*, Vol 36, No. 1 (1990), pg 92-114.
- [2] Assad, A., Golden, B., Dahl, L. e Dror, M., "Design of an Inventory/Routing System for a Large Propane-Distribution Firm", *Proceedings of the Southeastern TIMS Conference (1982)*, Myrtle Beach, pg 315-320.
- [3] Assad, A., Golden, B., Dahl, L. e Dror, M., "Evaluation of the Effectiveness of an Integrated System for Fuel Delivery", *Proceedings of the Southeastern TIMS Conference (1983)*, Myrtle Beach, pg 153-160.
- [4] Ball, M., "Allocation/Routing: Methods and Studies", em *Vehicle Routing : Models and algorithms*, North-Holland, 1988.
- [5] Beasley, J. E., "A Lagrangian Heuristic for Set-Covering Problems", *Naval Research Logistics*, Vol 37 (1990), pg 151-164.
- [6] Bell, W., Dalberto, L., Fisher, M., Greenfield, A., Jaikumar, R., Kedia, P., Mack, R. e Prutzman, P., "Improving the Distribution of Industrial Gases with an On-line Computerized Routing and Scheduling Optimizer", *Interfaces* 13 (1983), Vol. 6, pg. 4-23.
- [7] Bodin, L. D., B. L. Golden, A. Assad e M. Ball, "Routing and Scheduling of Vehicles and Crews. The State of the Art", *Comput. Opns. Res.* 10 (1983), pg 69-211.
- [8] Burns, L., Hall, R., Blumenfeld, D. e Daganzo, C., "Distribution Strategies that Minimize Transportation and Inventory Costs", *Operations Research*, Vol 33 (1985), No. 3, pg 469-490.

- [9] Christofides, "Vehicle Routing" em *The Traveling Salesman Problem*, Wiley, 1985.
- [10] Christofides, N. e Toth, P. "Exact Algorithms for the Vehicle Routing Problem, based on spanning tree and shortest path relaxations", *Mathematical Programming* 20 (1981), pg 255-282.
- [11] Christofides, N. e Beasley, J. E., "The Period Routing Problem", *Networks*, Vol 14 (1984), pg 237-256.
- [12] Christofides, N., A. Mingozzi e P. Toth, "The Vehicle Routing Problem", em *Combinatorial Optimization*, Wiley, New York (1979), pg 315-338.
- [13] Christofides, N. e Eilon S., "An Algorithm for the Vehicle-dispatching Problem", *Operations Research Quaterly*, Vol 20 (1969), No. 3, pg 309-318.
- [14] Clarke, G. e Wright, J. W., "Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delive points", *Operations Research*, 12 (1964), pg. 568-581.
- [15] Dror, M. e Ball, M., "Inventory/Routing: Reduction from an Annual to a Short-Period Problem", *Naval Research Logistics*, Vol 34 (1987), pg 891-905.
- [16] Dror, M., Ball, M. e Golden, B., "A Computational Comparison of Algorithms for the Inventory Routing Problem", *Annals of Operations Research* 4 (1986), pg. 3-23.
- [17] Dror, M. e Levy, L., "A Vehicle Routing Improvement Algorithm Comparition of a "Greedy" and a Matching Implementation for Inventory Routing", *Comput. & Operations Research*, Vol 13 (1986), pg 33-45.
- [18] Dror M., Laporte, G. e Trudeau, P., "Vehicle Routing with Stochastic Demands: Properties and Solution Frameworks", *Transportation Science*, Vol 23 (1989), No. 3, pg 166-176.
- [19] Ferdergruen, A. e Zipzin, P., "A Combined Vehicle Routing and Inventory Allocation Problem", *Operations Research*, Vol 32 (1984), No. 5, pg 1019-1037.
- [20] Ferdergruen, A., Prastacos, G. e Zipzin, P., "An Allocation and Distribution Model for Perishable Produts", *Opeations Research*, Vol 34 (1986), No. 1, pg 75-82.

- [21] Fisher, M., e Jaikumar, R., "A Generalized Assignment Heuristic for Vehicle Routing", *Networks*, Vol 11 (1981), pg 109-124.
- [22] Gendreau, M., Hertz, A. e Laporte, G., "New Insertation and Post-Optimization Procedures for the Traveling Salesman Problem", *Centre de Recherche sur les transports*, #708 (1990).
- [23] Gendreau, M., Hertz, A. e Laporte, G., "A Tabu Search Heuristic for the Vehicle Routing Problem", *Centre de Recherche sur les transports*, #777 (1991).
- [24] Glover, F., "Tabu Search, Part I", *ORSA Journal on Computing* 1 (1989), 190-206.
- [25] Glover, F., "Tabu Search, Part II", *ORSA Journal on Computing* 2 (1989), 4-32.
- [26] Golden, B. L., Magnanti T. L. e Nguyen, H. Q., "Implementing Vehicle Routing Algoritms", *Networks*, Vol 7 (1977), pg 113-148.
- [27] Golden, B., Assad, A. e Dahl, R., "Analysis of a large scale vehicle routing problem with an inventory component", *Large Scale Systems*, Vol 7 (1984), pg 181-190.
- [28] Hadley, G. e Whitin, T. M., *Analysis of Inventory Systems*, Prentice-Hall (1963).
- [29] Laporte, G., Nobert, G. e Desrochers, M., "Optimal Routing under Capacity and Distance Restriptions", *Operations Research*, Vol 33 (1985), pg 1050-1073.
- [30] Larson, R., "Transporting Sludge to the 106-Mile Site: An Inventory/Routing Model for Fleet Sizing and Logistics System Design", *Transportation Science*, Vol 22 (1988), No. 3, pg 186-198.
- [31] Larson, R.C., Minkoff, A. e Gregory, P., "Fleet Sizing and Dispathing for the Marine Division of the New York City Department of Sanitation", em *Vehicle Routing : Models and algorithms*, North-Holland, 1988.
- [32] Lenstra, S., e Rinnoy Kan, A., "Complexity of Vehicle Routing and Scheduling Problems", *Networks*, Vol 11 (1981), pg 221-227.
- [33] Lin, S. e Kernighan, B.W., "An Effective Heuristic Algorithm for the Traveling Salesman Problem", *Operations Research*, Vol 21 (1973), pg 498-516.

- [34] Ross, G. T. e Soland R. M., "A Branch and Bound Algorithm for the Generalized Assignment Problem", *Mathematical Programming* 8 (1975), pg 91-103.
- [35] Stewart, W. e Golden, B. L., "Stochastic Vehicle Routing: A Comprehensive Approach", *European Journal of Operations Research* 14 (1983), pg. 371-385.
- [36] Webb, Ian R., *Period and Phase of Customer Replenishment : A New Approach to Inventory/Routing Problems*, Tese de Doutorado, Massachusetts Institute of Technology (1989).