

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E AUTOMAÇÃO INDUSTRIAL

"ALOCAÇÃO DE PÓLOS ROBUSTA  
COM REJEIÇÃO A PERTURBAÇÕES ESTOCÁSTICAS"

Este exemplar corresponde à versão final da tese  
defendida por ELY CARNEIRO DE PAIVA  
e aprovada pela Comissão  
Julgadora em 28 05 93.  
*Rafael Santos Mendes*  
Orientador

Autor: ELY CARNEIRO DE PAIVA 166

Orientador: PROF. DR. RAFAEL SANTOS MENDES

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da  
Universidade Estadual de Campinas - FEE/Unicamp, como parte dos  
requisitos exigidos para a obtenção do título de MESTRE EM  
ENGENHARIA ELÉTRICA.

Maio, 1993.

*A minha família,  
pelo carinho e apoio.*

"¿Através de cuántas rutas entre las estrellas debe el hombre impulsarse en la búsqueda del secreto final? El viaje es difícil, inmenso... en ocasiones imposible, pero ello no disuadirá a algunos de intentarlo... Cabe decir que en algún punto, nos hemos unido a la caravana... Viajaremos tan lejos como podamos, pero en una existencia no es posible ver todo aquello que hay que nos gustaría contemplar, o aprender todo aquello que ansiamos conocer..."

Loren Eiseley, *"The Immense Journey"* .

## AGRADECIMENTOS

Ao orientador e amigo, Rafael Santos Mendes, pelas discussões, apoio e compreensão ao longo do trabalho desenvolvido.

A Paulo Valente, pelas idéias e contribuições relevantes durante este período.

Ao Prof. Jiri Rohn, da Universidade Charles, Praga, República Tcheca, pela atenção e cordialidade dispensadas na discussão de problemas correlatos.

A todos os amigos dos laboratórios do DCA e do DT por todos os bons momentos.

Aos amigos de São Paulo, Antonio Carlos, Gerson, Cícero, Sidromar, Cris, Ageu, e com carinho especial a Dionéia e Lurdes, pela convivência agradável e construtiva ao longo de 1992.

A Kathya, pelos bons momentos e belas recordações.

Aos amigos Geraldo, Nilton, José Emílio, Francisco, Sérgio, Roberto e Raimés pela amizade e companheirismo ao longo destes anos.

A meu grande amigo Masato.

Minha gratidão especial àquelas pessoas mais que queridas que me privilegiaram com sua amizade, Humberto, Myriam, Ana Cláudia e Ritinha, que nos momentos difíceis souberam me lembrar a grandeza interior que nos acompanha - o poder de criarmos nossos próprios caminhos.

## RESUMO

Sistemas lineares discretos, invariantes no tempo, sujeitos a incertezas de parâmetros do processo, são considerados neste trabalho. Para um controlador dado, a maior região de incerteza hiperretangular no espaço de parâmetros do processo é calculada, tal que os pólos do sistema em malha fechada estejam contidos em uma região conexa desejada no círculo unitário. Isto é equivalente a determinar os intervalos máximos para os parâmetros incertos do processo, de modo que a estabilidade relativa do sistema seja assegurada. Uma medida de robustez é definida a partir desta região de incerteza, para um controlador dado.

Além do problema da robustez, considera-se também neste trabalho, a presença de perturbações estocásticas, sendo um dos objetivos do controle a minimização da variância, denotada por  $J_2$ , dos sinais de saída e controle.

Um procedimento de projeto é proposto, para a obtenção do controlador que minimiza a maior variância  $J_2$  (dentro todos os parâmetros do processo considerados), ao mesmo tempo em que assegura a robustez diante das incertezas nominais.

**Palavras-chave:** Sistemas lineares; atribuição de região de pólos; controle robusto; perturbações estocásticas; controle de mínima variância.

## ABSTRACT

Linear time-invariant discrete-time systems subject to uncertainties of plant parameters are considered in this work. For a given controller the greatest hyperrectangular region of uncertainty in the plant parameter space is calculated, so that the closed-loop system poles stay confined to a desired connected region in the unit circle. This is equivalent to determining the maximal interval bounds on the uncertainties of the plant parameters such that the relative stability of the system be invariant. A robustness measure of a given controller is defined from the structure adopted to the uncertainties. Also the presence of stochastic perturbations acting in the plant are considered and the output/control signal variances are the performance index (called  $J_2$ ) to be minimized. Finally, a design procedure, based on gradient directions, that iteratively modifies the controller parameters such that the  $J_2$  performance index is decreased under the restriction of robust D-stability, is presented.

**Keywords:** Linear systems; pole region assignment; robust control; stochastic perturbations; minimum variance control.

## SUMÁRIO

<b>1.0</b>	<b>Introdução</b>	
<b>2.0</b>	<b>Formulação do Problema</b>	
2.1	Introdução	2.1
2.2	Modelo do Processo	2.1
2.3	Estrutura Geral do Controlador	2.3
2.4	A Estabilidade Robusta	2.5
2.5	A Função de Custo $J_2$	2.10
2.6	Metodologia de Projeto	2.12
<b>3.0</b>	<b>Descrição do Problema de Robustez</b>	
3.1	Introdução	3.1
3.2	Descrição das Incertezas dos Parâmetros	3.1
3.3	A Função Medida de Robustez	3.6
3.4	O Gradiente da Função Medida de Robustez	3.13
<b>4.0</b>	<b>Descrição do Problema Estocástico : Função de Custo <math>J_2</math></b>	
4.1	Introdução	4.1
4.2	Cálculo da Variância dos Sinais de Saída e Controle	4.2
4.3	Regra Heurística Relacionada à Função $J_2$	4.5
4.4	O Gradiente da Função de Custo $J_2$	4.8
4.5	Algoritmos de Otimização Conjunta da Robustez e da Função $J_2$	4.13
	4.5.1 Algoritmo 4.1	4.13
	4.5.2 Algoritmo 4.2	4.15
4.6	Conclusão	4.17
<b>5.0</b>	<b>Aplicações</b>	
5.1	Introdução	5.1
5.2	Exemplos de Utilização do Algoritmo 4.1	5.2
	5.2.1 Sistema de Primeira Ordem	5.2
	5.2.2 Sistema de Segunda Ordem	5.10
	5.2.3 Controle de Potência de um Reator Nuclear	5.14
	5.2.4 Minimização da Variância do Sinal de Controle	5.23

5.3 Exemplo de Utilização do Algoritmo 4.2	5.30
5.4 Conclusão	5.34

## **6.0 Conclusões**

**Apêndice A: Cálculo da Variância  $J_2$**

**Apêndice B: Prova do Teorema 3.1**

**Referências Bibliográficas**

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Um dos grandes desafios da engenharia de controle atual é o projeto de controladores robustos para processos que não podem ser modelados com exatidão. Não é suficiente projetar um controlador que apresente estabilidade e desempenho adequados para um modelo nominal. Um controlador robusto garante estabilidade e desempenho para toda uma família de modelos lineares usados para representar um processo real.

O problema de análise e projeto de sistemas de controle de processos com parâmetros incertos é um problema de controle robusto extremamente amplo. Uma descrição geral das diversas abordagens existentes na área pode ser vista em Siljak (1989) e De Larminat (1989).

Numa perspectiva histórica, segundo relato de (Dorato, 1987), talvez a primeira proposta de solução para o problema tenha sido a patente de H. S. Black (Black, 1927 *apud* Dorato, 1987). Nela, Black propunha uma realimentação com ganhos altos para o projeto de um sistema (amplificador de tubo a vácuo), dadas as incertezas do processo (grandes variações nas características do tubo). Infelizmente, a maioria destes sistemas se tornava instável devido aos altos ganhos utilizados.

Somente a partir dos resultados de Nyquist em 1932 é que o compromisso entre estabilidade dinâmica e ganhos elevados pode ser analiticamente compreendido. O critério de estabilidade de Nyquist e o conceito de Black de ganhos elevados formam a base do projeto de controle robusto desenvolvido no clássico livro de Bode (Bode, 1945 *apud* Dorato, 1987). O método de Bode para o projeto de sistemas robustos foi estendido por Horowitz (Horowitz, 1963 *apud* Dorato, 1987) para plantas com variações finitas. O período de 1927 a 1960 poderia se chamar de "período clássico em sensibilidade".

O próximo grande período em teoria de sistemas de controle foi o período entre 1960 e 1975. Chama-se este período de "período de variáveis-de-estado". No começo dos anos 60 R. E. Kalman introduziu diversos

conceitos, usando variáveis de estado, como: controlabilidade, observabilidade, LQR (Linear Quadratic Regulator), estimação de estado ótima, etc. Infelizmente, com raras exceções, o problema de incerteza no processo foi bastante ignorado durante este período. Uma notável exceção foi a introdução de "Sensitivity Comparison Matrix" (Cruz and Perkins, 1964 *apud* Dorato, 1987) para a análise de sistemas MIMO.

No final dos anos 70 e começo dos anos 80 apareceu um interesse renovado no problema de incertezas paramétricas. Nesta mesma época, alguns resultados significantes foram obtidos na análise de sistemas multivariáveis no domínio da frequência. Em particular, o conceito de matrizes coprimas fracionadas para sistemas multivariáveis foi introduzido como ferramenta por Youla, Jabr e Bongiorno, dentre outros. Além disto, o critério de Nyquist foi generalizado para sistemas multivariáveis por Rosenbrock (Rosenbrock, 1974 *apud* Dorato, 1987). Esta confluência de interesses em sistemas incertos e multivariáveis levou, no corrente período, ao que foi referido de Controle Robusto Moderno.

Dentro do controle robusto moderno, um teorema extremamente importante, que gerou a publicação de inúmeros artigos, foi o teorema de Kharitonov (Kharitonov, 1979), sobre a estabilidade de uma família de polinômios, para sistemas em tempo contínuo. Uma prova simplificada deste teorema pode ser vista em Yeung and Wang (1987).

O teorema de Kharitonov fornece condições necessárias e suficientes para a estabilidade de uma família de polinômios com coeficientes incertos a partir do teste de estabilidade em apenas quatro polinômios especialmente construídos a partir das incertezas. Este teorema apresenta, contudo, duas limitações importantes: não trata a dependência entre coeficientes incertos e, na sua forma original, só é aplicável ao caso contínuo.

Entre os trabalhos que utilizaram este teorema tem-se o de Barmish (1984), o de Bialas e Garloff (1985) e o de Anderson et al. (1987) e Soh

(1989).

Extensões do teorema de Kharitonov para polinômios de sistemas em tempo discreto foram desenvolvidas em Soh et al. (1985,1987), Holot e Bartlett (1988) e ainda Bose et al. (1988).

Todos estes trabalhos contudo apresentam o inconveniente de não considerar a dependência entre os coeficientes do polinômio característico. Já que na maioria dos problemas de controle esta dependência é importante, estes trabalhos se mostram conservativos, limitando a aplicação dos resultados. Nestes casos, o teorema de Kharitonov fornece apenas uma condição suficiente.

Um resultado interessante que procura contornar estas limitações é o teorema de Bartlett-Holot-Lin, que se encontra transcrito em Bartlett e Holot (1988). Este teorema fornece condições necessárias e suficientes para verificar se as raízes de um politopo de polinômios estão contidas numa região conexa qualquer no plano complexo. Uma simplificação do teorema de Bartlett-Holot-Lin para o caso discreto é apresentada também em Bartlett e Holot (1988) e em Ackermann e Barmish (1988). Estes resultados, na prática podem ter seu uso limitado devido à explosão combinatorial que surge no teste de estabilidade, mesmo para um número moderado de parâmetros incertos (Šiljak, 1989).

Uma importante contribuição para o problema de alocação de pólos robusta foi dada por Ackermann (1980). Neste trabalho, obtém-se geometricamente o conjunto dos controladores admissíveis para um sistema dinâmico, com finitos pontos de operação, mantendo-se a estabilidade relativa. Uma grande dificuldade, contudo, neste método, está na base geométrica, e não algébrica, que é utilizada.

Outros trabalhos desenvolvidos no sentido de se reduzir o caráter conservativo do teorema de Kharitonov são Biernack et al. (1987) e Wei e Yedavalli (1987). No trabalho desenvolvido por Biernack et al. (1987), o grau de estabilidade de um regulador é associado à maior região hiperesférica de

variação paramétrica do processo tal que o sistema em malha fechada não se torne instável. O raio desta hipersfera fornece uma medida de robustez do controlador dado.

Santos-Mendes (1988) propõe um método de síntese de reguladores robustos similar ao desenvolvido por Biernacki et al. (1987). Neste trabalho, considera-se regiões de incerteza paramétrica do tipo elipsoidal. Associa-se, então, a um controlador dado uma medida de robustez correspondente à maior hiperelipse no espaço de parâmetros do processo, tal que o sistema em malha fechada mantenha seus pólos em uma região conexa qualquer no plano complexo. O problema de síntese é resolvido de maneira iterativa a partir de um controlador inicial. A cada iteração, o vetor de parâmetros do controlador é modificado segundo uma direção de crescimento da medida de robustez.

A abordagem de Araújo (1991), que é adotada aqui, segue a mesma linha de Santos-Mendes (1988). A diferença entre os dois trabalhos consiste no tipo de região de incerteza paramétrica considerada. Em Araújo (1991) os parâmetros estão sujeitos a intervalos de incerteza, o que resulta em uma região hiperretangular no espaço de parâmetros do processo.

No trabalho aqui apresentado, além do problema de robustez, leva-se em consideração também a presença de perturbações estocásticas que influenciam os sinais de controle e saída. A importância de se considerar estas perturbações em controle de sistemas foi ressaltada desde o início do desenvolvimento da teoria de controle (Åström, 1970).

Considere-se como exemplo, as dificuldades encontradas no projeto do controle de um radar aéreo durante a segunda guerra mundial, segundo relato de A. C. Hall (Hall, 1956 *apud* Åström, 1970). Hall conta que a equipe de projeto do radar se viu desencorajada após ter desenvolvido um refinado equipamento para teste, ignorando, contudo, a presença de ruído, com o resultado de que o desenvolvimento do sistema foi altamente insatisfatório, caracterizado por uma grande quantidade de "jitter". Na tentativa de encontrar uma resposta para o

problema, a equipe fez uso das técnicas de resposta em frequência conseguindo um novo sistema com resposta transitória satisfatória e uma quantidade reduzida de "jitter".

Algumas das características da teoria de controle determinístico, como a hipótese de conhecimento do valor exato dos parâmetros do processo, são altamente improváveis na prática (Åström, 1970) .

Quando a teoria de controle ótimo determinístico foi introduzida, os cientistas da área criticaram particularmente o fato de que a teoria não mostrava diferenças entre sistemas de malha aberta e malha fechada, e o fato de que não havia nenhuma dinâmica na malha de realimentação. Esta é uma das razões da famosa discussão sobre a distância entre teoria e prática de controle. Atualmente, há um consenso quanto às limitações do controle determinístico. O centro da questão é que nenhum modelo realístico para perturbações é usado na teoria de controle determinístico. Se uma certa perturbação é introduzida, esta é sempre colocada como uma função que é conhecida *a priori* (Åström, 1970).

Quando isto ocorre, e o sistema é governado por uma equação diferencial com solução única, fica claro que o conhecimento das condições iniciais permite o conhecimento do estado do sistema em um instante qualquer de tempo. Isto explica porque não há diferenças de desempenho entre um sistema de malha aberta e um de malha fechada.

Uma das principais características de perturbações práticas reside na impossibilidade de previsão exata de seus valores futuros. Portanto, é impossível modelar uma perturbação por uma função analítica. Utiliza-se, então, os conceitos estatísticos para modelagem de perturbações encontrados na teoria de processos estocásticos (Papoulis, 1989).

O trabalho aqui apresentado trata de modelos ARMAX (auto-regressivo média móvel com entrada exógena), descritos por equações a diferença lineares (ou linearizadas). Supõe-se que as perturbações estocásticas possam ser

descritas conforme o teorema da fatorização espectral (Åström, 1970), segundo o qual qualquer processo estocástico estacionário com média zero e densidade espectral racional pode ser representado como a saída de um sistema linear cuja entrada é uma sequência branca de variáveis aleatórias.

Adota-se como índice de desempenho a variância do sinal de saída (ou controle), denotada por  $J_2$ , a qual se deseja minimizar. Portanto, o problema passa a ser considerado da seguinte maneira: caso o problema de robustez apresente mais de uma solução, encontrar aquela que forneça o melhor comportamento do ponto de vista estocástico, ou, em outras palavras, encontrar um controlador que minimize o índice de desempenho  $J_2$ , considerando-se as restrições de estabilidade robusta.

O problema conjunto envolvendo robustez e desempenho estocástico, que será designado a partir daqui como problema  $J_2$ /Robusto, é resolvido através de um algoritmo iterativo que utiliza as direções dos gradientes das funções medida de robustez e  $J_2$  em relação aos parâmetros do controlador, quando estes existem. Nas situações em que o gradiente da função medida de robustez não existe, propõe-se uma direção de busca alternativa.

A contribuição deste trabalho consiste no tratamento da rejeição a perturbações estocásticas, que não é considerado no trabalho de Araújo (1991). Vale ressaltar, contudo, que os casos abordados aqui se limitam a sistemas SISO (entrada-simples, saída-simples) em tempo discreto.

Uma outra abordagem envolvendo simultaneamente a robustez em relação à estabilidade e em relação a um índice de desempenho (LQG) pode ser encontrada em (Ghaoui, 1990).

O conteúdo do trabalho aqui apresentado está organizado da seguinte maneira. O capítulo 2 descreve a formulação do problema  $J_2$ /Robusto e a metodologia adotada na solução do mesmo. O capítulo 3 descreve com detalhes o problema da estabilidade robusta, conforme desenvolvido em Araújo (1991). No capítulo 4 desenvolve-se a efetiva contribuição aqui apresentada,

tratando-se da solução do problema de minimização das variâncias dos sinais relevantes ao sistema, considerando-se o desenvolvimento do gradiente da função  $J_2$ . Apresenta-se também dois algoritmos para a solução do problema  $J_2$ /Robusto. O capítulo 5 apresenta algumas aplicações utilizando os algoritmos propostos e, finalmente, as conclusões do trabalho são apresentadas no capítulo 6.

## CAPÍTULO 2

### FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

2.1 INTRODUÇÃO

2.2 MODELO DO PROCESSO

2.3 ESTRUTURA GERAL DO CONTROLADOR

2.4 A ESTABILIDADE ROBUSTA

2.5 A FUNÇÃO DE CUSTO  $J_2$

2.6 METODOLOGIA DE PROJETO

## 2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, descreve-se as estruturas consideradas para planta e controlador, bem como as incertezas relativas aos parâmetros do processo. Descreve-se também as características gerais dos dois problemas abordados neste trabalho: o problema de robustez de desempenho diante de incertezas paramétricas e o problema de rejeição a perturbações estocásticas, além da metodologia utilizada na solução do problema conjunto.

## 2.2 MODELO DO PROCESSO

Em projetos de sistemas de controle, a consideração de incertezas no modelo da planta a ser controlada constitui um fator de extrema importância.

Neste trabalho, analisa-se a influência destas incertezas no comportamento determinístico e estocástico de sistemas de tempo discreto do tipo ARMAX (modelo auto-regressivo média móvel com entrada exógena).

Considera-se o comportamento dinâmico do processo como sendo modelado por uma equação a diferenças linear e monovariável, dada por :

$$y(t) = -\sum_{i=1}^{na} a_i y(t-i) + \sum_{i=0}^{nb} b_i u(t-d-i) + \sum_{i=0}^{nc} c_i \xi(t-i), \quad (2.1)$$

onde :

$y(t)$  é a variável de saída no instante  $t$ ;

$u(t)$  é a variável de controle no instante  $t$ ;

$a_i$  ,  $i=1,2, \dots, na$  ,

$b_i$  ,  $i=0,1, \dots, nb$  e

$c_i$  ,  $i=0,1, \dots, nc$  são os parâmetros do processo,

na, nb e nc definem os horizontes de recorrência;

d é o tempo de atraso do processo e

$\xi(t)$  é componente de uma sequência de variáveis aleatórias, de distribuição normal, não-correlacionadas, de média nula ( $E\{\xi\} = 0$ ) e variância  $E\{\xi^2\} = \text{var}\xi$ .

A equação (2.1) também pode ser escrita utilizando-se o operador atraso  $z^{-1}$ , como :

$$A(z^{-1}).y(t) = z^{-d}.B(z^{-1}).u(t) + C(z^{-1}).\xi(t) , \quad (2.2)$$

onde a variável z está associada também à transformada z, e  $A(z^{-1})$ ,  $B(z^{-1})$  e  $C(z^{-1})$  são polinômios em  $z^{-1}$ , dados por:

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{na} z^{-na} \\ B(z^{-1}) &= b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{nb} z^{-nb} \\ C(z^{-1}) &= 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_{nc} z^{-nc} . \end{aligned} \quad (2.3)$$

Assume-se que as raízes do polinômio  $C(z^{-1})$  estejam dentro do círculo unitário.

Assume-se também que a forma e a ordem das equações do modelo não variam, e que seus parâmetros são fixos, muito embora mudanças lentas em relação à dinâmica do sistema em malha fechada não representem dificuldades do ponto de vista prático.

A abordagem das incertezas paramétricas é dada com maiores detalhes no capítulo seguinte.

## 2.3 ESTRUTURA GERAL DO CONTROLADOR

Dadas as incertezas nos parâmetros do processo, deseja-se encontrar um controlador fixo que, além de assegurar a estabilidade do sistema em malha fechada, satisfaça também certos critérios de desempenho determinísticos e estocásticos. Este trabalho se limita a encontrar controladores cuja estrutura é dada, e apenas os parâmetros dos mesmos são otimizados.

Considera-se aqui que a lei de controle é linear com relação às variáveis medidas ( $u(t)$  e  $y(t)$ ) e à referência, ou seja, a cada instante a variável  $u(t)$  é calculada seguindo a equação abaixo :

$$u(t) = -\sum_{i=1}^{nh} h_i u(t-i) - \sum_{i=0}^{ng} g_i y(t-i) + \sum_{i=0}^{ne} e_i w(t-i) , \quad (2.4)$$

onde :

$u(t)$  e  $y(t)$  são as variáveis de controle e saída do processo;

$w(t)$  é a variável de referência;

$h_i$ ,  $i=1,2, \dots, nh$  ,

$g_i$ ,  $i=0,1, \dots, ng$  e

$e_i$ ,  $i=0,1, \dots, ne$  são os parâmetros do controlador e  $nh$ ,  $ng$  e  $ne$  definem as ordens do mesmo.

A equação (2.4) escrita em termos do operador atraso  $z^{-1}$  fica :

$$H(z^{-1}).u(t) = -G(z^{-1}).y(t) + E(z^{-1}).w(t) , \quad (2.5)$$

onde  $G(z^{-1})$ ,  $H(z^{-1})$  e  $E(z^{-1})$  são polinômios em  $z^{-1}$  dados por:

$$\begin{aligned}
 G(z^{-1}) &= g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2} + \dots + g_{ng} z^{-ng} \\
 H(z^{-1}) &= 1 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \dots + h_{nh} z^{-nh} \\
 E(z^{-1}) &= 1 + e_1 z^{-1} + e_2 z^{-2} + \dots + e_{ne} z^{-ne}
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Considera-se o sistema de controle linear em malha fechada dado na figura 2.1.

As funções de transferência em malha fechada para os sinais de controle e saída com relação aos sinais de referência e ruído branco são dadas por :

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \frac{A \cdot E}{A \cdot H + z^{-d} B \cdot G} w(t) - \frac{G \cdot C}{A \cdot H + z^{-d} B \cdot G} \xi(t) \\
 y(t) &= \frac{z^{-d} B \cdot E}{A \cdot H + z^{-d} B \cdot G} w(t) + \frac{H \cdot C}{A \cdot H + z^{-d} B \cdot G} \xi(t)
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

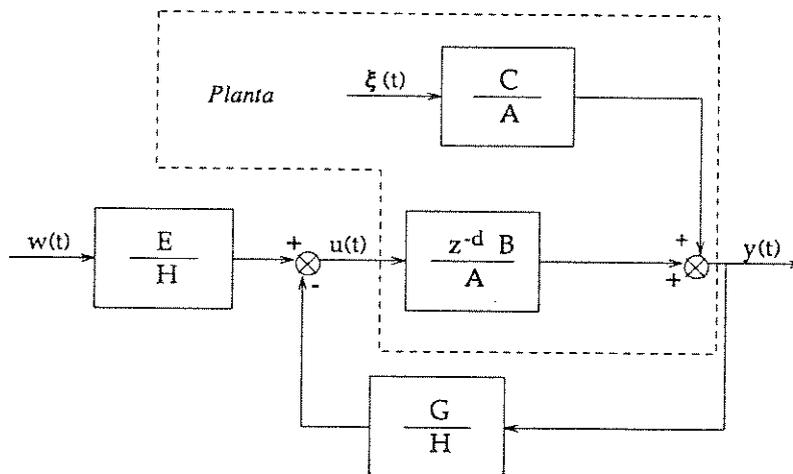


Fig. 2.1. Sistema de Controle em malha fechada.

Observa-se que existem duas componentes, uma determinística e outra estocástica. A componente estocástica determina a variância dos sinais de saída e controle, enquanto que o polinômio característico está relacionado à estabilidade robusta (localização dos pólos em malha fechada).

A seguir, os dois problemas serão descritos separadamente (robustez e estocástico) e, finalmente, a metodologia utilizada na otimização do problema conjunto será apresentada.

## 2.4 A ESTABILIDADE ROBUSTA

Para o problema de robustez, ou alocação de pólos robusta, considera-se o polinômio característico do sistema em malha fechada, definido por  $T(z^{-1})$ , com grau  $nt$ , dado por :

$$T(z^{-1}) = A(z^{-1})H(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})G(z^{-1}) \quad , \quad (2.8)$$

e  $nt$  é dado por

$$nt = \max [na + nh; d + nb + ng] \quad . \quad (2.9)$$

Somente a alocação de pólos é tratada (e não a alocação de zeros), por influir predominantemente no comportamento da resposta transitória.

Os pólos do sistema em malha fechada são obtidos pela solução da equação característica :

$$A(z^{-1})H(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})G(z^{-1}) = 0. \quad (2.10)$$

Considerando-se que os coeficientes de  $A(z^{-1})$  e  $B(z^{-1})$  estejam

dentro de uma região do espaço paramétrico conhecida *a priori*, o objetivo do projeto de um controlador robusto é obter os coeficientes dos polinômios  $G(z^{-1})$  e  $H(z^{-1})$  que, combinados com todos os possíveis valores de  $A(z^{-1})$  e  $B(z^{-1})$ , forneçam pólos localizados sempre em uma dada região  $D$  do círculo unitário, no plano complexo.

Tendo em vista os cálculos necessários à obtenção do controlador robusto, adota-se um tratamento matricial para a equação polinomial (2.8).

Sejam  $\hat{p} = [1 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{na} \ b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{nb}]^T \in \mathbb{R}^{na+nb+2}$  e  $x = [1 \ h_1 \ h_2 \ \dots \ h_{nh} \ g_0 \ g_1 \ \dots \ g_{ng}]^T \in \mathbb{R}^{ng+nh+2}$  os vetores cujas componentes são os coeficientes dos polinômios do processo,  $A(z^{-1})$  e  $B(z^{-1})$ , e do controlador,  $G(z^{-1})$  e  $H(z^{-1})$ , respectivamente (o índice superior T denota transposição).

Assim, a equação (2.8) pode ser escrita como :

$$t = X(x) \hat{p} \quad , \quad (2.11)$$

ou na sua forma dual

$$t = M(\hat{p}) x \quad . \quad (2.12)$$

onde  $t = [t_0 \ t_1 \ \dots \ t_{nt}]^T \in \mathbb{R}^{nt+1}$  é o vetor cujas componentes são os coeficientes do polinômio característico (2.8), que pode ser escrito como :

$$T(z^{-1}) = t_0 + t_1 z^{-1} + \dots + t_{nt} z^{-nt} \quad . \quad (2.13)$$

As matrizes  $X(x) \in \mathbb{R}^{(nt+1) \times (na+nb+2)}$  e  $M(\hat{p}) \in \mathbb{R}^{(nt+1) \times (ng+nh+2)}$  são dadas por:

$$X(x) = \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & & 0 \\ h_1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ h_{nh} & h_{nh} & \dots & 1 \end{matrix}}^{na+1} & \overbrace{\begin{matrix} 0 & & & 0 \\ g_0 & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ g_{ng} & & & g_0 \\ 0 & & & g_{ng} \end{matrix}}^{nb+1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}^d \quad (2.14)$$

$$M(\hat{p}) = \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & & 0 \\ a_1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{na} & a_{na} & \dots & 1 \end{matrix}}^{nh+1} & \overbrace{\begin{matrix} 0 & & & 0 \\ b_0 & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ b_{nb} & & & b_0 \\ 0 & & & b_{nb} \end{matrix}}^{ng+1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}^d \quad (2.15)$$

Observa-se então que, para um dado controlador  $x$  fixo, os coeficientes do polinômio característico são funções lineares dos parâmetros do processo, o que é fundamental na solução do problema de robustez.

Os resultados aqui apresentados referem-se a sistemas em tempo discreto com uma entrada e uma saída. Esta restrição, na verdade, se deve à inclusão do problema estocástico e será discutida mais adiante. O tratamento original de robustez abordado em Araújo (1991) abrange também sistemas contínuos e sistemas do tipo entrada-simples saída-múltipla ou entrada-múltipla saída-simples.

O problema de se encontrar o controlador robusto pode admitir várias soluções, ou, até mesmo, nenhuma. Para permitir a comparação entre controladores, define-se um critério chamado de medida de robustez.

Sendo  $p=[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{n_a} \ b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{n_b}]^T \in \mathbb{R}^{n_a+n_b+1}$  o vetor que contém os parâmetros incertos do processo e assumindo incertezas do tipo intervalo, pode-se dizer que a região que contém todos os possíveis vetores  $p$  é dada por uma região hiperretangular  $\Pi$ , contida em  $\mathbb{R}^{n_a+n_b+1}$ , e definida a partir dos limites inferior e superior de cada parâmetro.

Considerando-se o projeto de sistemas de controle com incertezas nos parâmetros do processo, é frequente a especificação de índices de desempenho em termos de intervalos aceitáveis para as características de resposta transitória. Como a resposta transitória está diretamente relacionada à localização dos pólos do sistema, estas especificações podem ser traduzidas por uma região no plano complexo onde devem estar localizadas as raízes da equação característica em malha fechada.

A figura 2.2 mostra uma região do plano complexo bastante utilizada em projetos de controladores por alocação de pólos (Ogata, 1987; Ackermann, 1985). A mesma refere-se a especificações de resposta transitória para um sistema de segunda ordem com entrada em degrau unitário, que também pode ser utilizada para sistemas de ordem superior apresentando um par de pólos dominantes. O comportamento dinâmico de sistemas de segunda-ordem pode ser descrito em termos de dois parâmetros: o coeficiente de amortecimento  $\xi$  e a frequência natural não amortecida  $\omega_n$ , tendo em vista que as outras especificações de resposta transitória podem ser obtidas a partir destes (Kuo, 1980; Franklin Powell, 1980). A região vista na figura 2.2 garante como característica de resposta transitória um amortecimento maior do que  $\xi_1$  e um tempo de acomodação  $t_s$  menor do que  $4/\sigma_1$  (critério de 2%).

Neste trabalho, supõe-se a existência de uma região conexa  $D$  qualquer, no plano complexo, interior ao círculo unitário, que represente o comportamento dinâmico desejado do sistema em malha fechada. Denota-se o contorno desta região por  $D^*$ .

Deseja-se, portanto, obter um controlador  $x$ , tal que o sistema em

malha fechada possua estabilidade relativa ou D-estabilidade (todos os pólos em  $\mathbf{D}$ ) robusta em relação às incertezas paramétricas do processo, limitadas à região  $\Pi$  definida anteriormente.

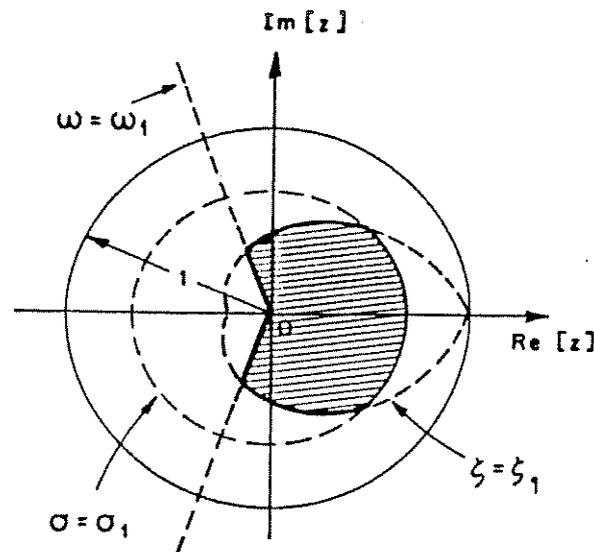


Fig.2.2- Região desejável para os pólos de malha fechada no plano  $z$ .

Um polinômio característico  $T(z^{-1})$  que possua todas as raízes na região  $\mathbf{D}$  do círculo unitário é dito polinômio D-estável.

Para um controlador dado, representado por seu vetor de parâmetros  $\mathbf{x}$ , é possível definir uma função medida de robustez associada à maior região de estabilidade relativa (dentre uma família de regiões) associada ao mesmo. A definição rigorosa desta função e a de seu domínio são apresentadas no próximo capítulo.

No projeto iterativo de controladores robustos, avalia-se inicialmente a robustez de um controlador inicial dado  $\mathbf{x}$  através da função medida de robustez. Em seguida, executa-se um algoritmo de busca do controlador que maximiza a função medida de robustez. Isto é feito através de

modificações nos parâmetros do controlador numa determinada direção. Esta direção é a do gradiente da função medida de robustez, calculado em relação aos parâmetros do controlador. Caso o gradiente não exista, outra direção de busca será proposta.

Um controlador obtido por este processo será uma solução para o problema de robustez se a região  $D$  definida no círculo unitário contiver os pólos em malha fechada tendo em vista as incertezas associadas aos parâmetros.

## 2.5 A FUNÇÃO DE CUSTO $J_2$

Como já foi dito anteriormente, a importância do tratamento estocástico em sistemas de controle está ligada à necessidade de se introduzir modelos de perturbações mais realistas que se aproximem das situações encontradas na prática.

Estas perturbações são caracterizadas por modelos estatísticos, e uma de suas principais propriedades é a impossibilidade de se prever com exatidão seus valores futuros.

Assume-se que a perturbação atuante no sistema  $\xi(t)$  pode ser descrita como a realização de um processo estocástico estacionário normal com densidade espectral racional, e que um dos objetivos do controle é minimizar a variância da saída ou do controle, denominada  $J_2$ , para os diversos valores possíveis de parâmetros do processo.

Como o tratamento para o sinal de controle  $u(t)$  é análogo ao do sinal de saída  $y(t)$ , apenas este último será abordado.

Tomando-se a componente estocástica do sinal de saída na equação (2.7), tem-se a seguinte função de transferência  $P(z^{-1})$  relacionando a saída

$y(t)$  com a perturbação estocástica  $\xi(t)$ :

$$P(z^{-1}) = \frac{H.C}{A.H + z^{-d}.B.G} \quad (2.16)$$

A variância do sinal de saída, denotada por  $J_2$ , é dada a partir desta função de transferência, e, como será demonstrado mais adiante, pode ser escrita como :

$$J_2(p,c,x) = E\{y^2\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^T \cdot V_1(p,c,\omega) \cdot x}{x^T \cdot V_2(p,c,\omega) \cdot x} d\omega, \quad (2.17)$$

onde  $p$  e  $x$  são os vetores contendo os parâmetros do processo  $(a_i, b_i)$  e do controlador  $(h_i, g_i)$ , respectivamente, definidos anteriormente;  $c$  é um vetor que contém os parâmetros do polinômio  $C(z^{-1})$ ,  $V_1$  e  $V_2$  são matrizes, e  $\omega$  é a variável de integração.

A questão que se coloca é a seguinte: supondo-se que o problema de robustez admita várias soluções, encontrar, dentre estas, aquela que forneça os menores valores para a variância  $J_2$  calculada para o pior caso dentre os valores de parâmetros incertos das regiões  $\Pi$  e  $\Pi_c$ , onde  $\Pi_c$  é a região hiperretangular que contém todos os possíveis vetores incertos  $c$ .

A estratégia utilizada para a solução deste problema consiste na utilização de uma direção de modificação de  $x$ , usada iterativamente, de forma a se minimizar o máximo da função de custo  $J_2$  dentre todos os parâmetros do processo, ou seja :

$$\min_x \max_{p,c} J_2(p,c,x) \quad (2.18)$$

Para isto, adota-se um procedimento heurístico, baseado em extensas observações do comportamento da função  $J_2(p,c,x)$  em relação a  $(p,c)$ . A função

$J_2(p,c,x)$  é convexa em relação aos parâmetros do processo na grande maioria dos casos. Assim, na prática a maximização na equação (2.18) pode ser substituída por :

$$\max_{p_i, c_i} J_2(p,c,x) \quad (2.19)$$

onde  $p_i$  ,  $c_i$  são formados pelas combinações dos extremos das regiões  $\Pi$  e  $\Pi_c$ , já que o máximo de uma função convexa, sujeita a um domínio politópico, encontra-se nos extremos do mesmo.

A direção do gradiente de  $J_2$  em relação a  $x$  (associado ao valor de  $(p,c)$  para o pior  $J_2$ ) pode ser facilmente obtida a partir de (2.17). Esta direção é então utilizada nos algoritmos propostos, juntamente com o gradiente da função medida de robustez em relação a  $x$  , a fim de se otimizar os dois critérios. Como a convexidade de  $J_2(p,c,x)$  em relação a  $(p,c)$  não é garantida, no início e no final dos algoritmos, uma rotina de otimização global é usada para assegurar os valores exatos da função de custo  $J_2$ .

## 2.6 METODOLOGIA DE PROJETO

A partir dos fatos descritos anteriormente, pode-se construir um processo iterativo que, usando as direções dos gradientes, minimiza a variância  $J_2$  ao mesmo tempo que assegura a restrição básica de alocação de pólos robusta. Uma medida da "capacidade" de alocação de pólos de um controlador diante das incertezas paramétricas é dada através da medida de robustez do mesmo, mencionada anteriormente. Dois algoritmos são apresentados para a solução do problema. Os algoritmos são executados sempre no domínio dos controladores que já satisfazem o problema da D-estabilidade robusta.

O primeiro algoritmo trabalha de uma maneira iterativa, modificando

os parâmetros do controlador segundo duas situações distintas. Quando o controlador possui uma medida de robustez acima de um certo valor "de folga", considera-se somente o gradiente da função  $J_2$  a ser minimizada. Caso a robustez do controlador se encontre abaixo deste limite, utiliza-se uma direção que combina ambos os gradientes (robustez e  $J_2$ ) de forma a minimizar  $J_2$  sem que a robustez se degrade.

Assim, obtém-se no final um controlador com um índice de robustez próximo do especificado nos dados de projeto, e com a função de custo  $J_2$  minimizada.

O segundo algoritmo trabalha com um único gradiente envolvendo uma função que pondera os dois critérios em questão, ou seja, a medida de robustez e a variância  $J_2$ . O algoritmo é inicializado com um controlador de medida de robustez máxima, e uma ponderação inicial que favorece somente a medida de robustez. A ponderação é então aumentada progressivamente, permitindo uma diminuição na variância  $J_2$ , em detrimento de uma diminuição no índice de robustez. O algoritmo termina quando se chega a um controlador com índice de robustez próximo do especificado nos dados de projeto. Este algoritmo, além de permitir variações mais suaves na medida de robustez ao longo do processo iterativo, possibilita também uma análise de compromisso entre os dois critérios, através de uma curva de otimização traçada com valores obtidos nas iterações do mesmo.

## CAPÍTULO 3

### DESCRIÇÃO DO PROBLEMA DE ROBUSTEZ

3.1 INTRODUÇÃO

3.2 DESCRIÇÃO DAS INCERTEZAS DOS PARÂMETROS

3.3 A FUNÇÃO MEDIDA DE ROBUSTEZ

3.4 O GRADIENTE DA FUNÇÃO MEDIDA DE ROBUSTEZ

### 3.1 INTRODUÇÃO

Descreve-se, neste capítulo, os resultados apresentados na dissertação de mestrado de Araújo (1991), e que constituem parte essencial do trabalho aqui desenvolvido. Analisa-se, primeiramente, a descrição das incertezas paramétricas e as transformações de coordenadas no espaço de parâmetros do processo que simplificam o tratamento matemático. Aborda-se, em seguida, a função medida de robustez  $m(x)$  associada a um dado controlador  $x$ . Esta medida de robustez está relacionada, por definição, com a maior região  $\Pi$  de estabilidade relativa, associada ao controlador dado.

Finalmente, desenvolve-se o gradiente da função medida de robustez  $m(x)$ , que permite a modificação dos parâmetros do controlador  $x$  de tal maneira que a região hiperretangular de estabilidade relativa admissível, no espaço de parâmetros do processo, seja aumentada. Esta direção de busca (gradiente) é utilizada juntamente com outro gradiente (associado à função de custo  $J_2$  que será descrita no capítulo seguinte) em dois algoritmos iterativos que se propõem a otimizar simultaneamente o índice de robustez e os efeitos da perturbação estocástica (representados na função de custo  $J_2$ ).

### 3.2 DESCRIÇÃO DAS INCERTEZAS DOS PARÂMETROS

Como já foi dito anteriormente, os parâmetros do processo, dados pelos coeficientes  $a_i$  e  $b_j$  de  $A(z^{-1})$  e  $B(z^{-1})$ , estão sujeitos a variações limitadas, formadas pelos seguintes intervalos de incerteza :

$$\begin{aligned} \underline{a}_i < a_i < \bar{a}_i & , i=1,2,\dots,na \\ \underline{b}_j < b_j < \bar{b}_j & , j=0,1,2,\dots,nb \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde os  $\underline{a}_i$  e  $\underline{b}_j$  são os limites inferiores e os  $\bar{a}_i$  e  $\bar{b}_j$  são os limites superiores, supostamente conhecidos, dos parâmetros incertos. As incertezas dos parâmetros  $c_k$  de  $C(z^{-1})$  somente influenciam o comportamento estocástico (ver equação 2.7), e, por isso, não são abordadas neste capítulo. A descrição das incertezas através de intervalos é justificada por ser esta a forma na qual se apresenta a maioria dos problemas práticos.

Sejam  $\underline{p} = [ \underline{a}_1 \ \underline{a}_2 \ \dots \ \underline{a}_{na} \ \underline{b}_0 \ \underline{b}_1 \ \dots \ \underline{b}_{nb} ]^T \in \mathbb{R}^{na+nb+1}$  e  $\bar{p} = [ \bar{a}_1 \ \bar{a}_2 \ \dots \ \bar{a}_{na} \ \bar{b}_0 \ \bar{b}_1 \ \dots \ \bar{b}_{nb} ]^T \in \mathbb{R}^{na+nb+1}$  os vetores cujas componentes são os limites inferiores e superiores, respectivamente, dos parâmetros incertos do processo. O vetor de parâmetros  $p$  pertence, então, a uma região de incerteza aberta, indicada por  $\Pi$ , que pode ser definida como:

$$\Pi = \{ p / p \in \mathbb{R}^{na+nb+1}, Q(p-p_0) < \underline{1} \} \quad , \quad (3.2)$$

onde  $Q \in \mathbb{R}^{2(na+nb+1) \times (na+nb+1)}$ ,  $p_0 \in \mathbb{R}^{na+nb+1}$  é o centro da região  $\Pi$  e  $\underline{1}$  denota o vetor  $[ 1 \ 1 \ \dots \ 1 ]^T \in \mathbb{R}^{2(na+nb+1)}$ .  $Q$  e  $p_0$  são dados por :

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ \hline -C \end{bmatrix} \quad , \quad (3.3)$$

onde  $C \in \mathbb{R}^{(na+nb+1) \times (na+nb+1)}$  é dada por

$$C = \begin{bmatrix} 2/(\bar{a}_1 - \underline{a}_1) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 2/(\bar{b}_{nb} - \underline{b}_{nb}) \end{bmatrix} \quad , \quad (3.4)$$

e

$$p_0 = \frac{p^+ + p^-}{2} \quad (3.5)$$

A região  $\Pi$  descreve um hiperretângulo aberto no espaço de parâmetros  $\mathbb{R}^{na+nb+1}$ , e representa a incerteza paramétrica definida inicialmente no projeto.

Em muitos problemas práticos pode-se encontrar uma relação de dependência linear entre os parâmetros do processo. Nestes casos, o vetor de parâmetros  $p$  pode ser escrito em função de um vetor  $q$ , que contém os parâmetros realmente incertos do processo, ou seja :

$$p = S'q + s_0 \quad (3.6)$$

onde  $q \in \mathbb{R}^{nq}$ ,  $S' \in \mathbb{R}^{n \times nq}$  e  $s_0 \in \mathbb{R}^n$  é um vetor constante, e  $n = na+nb+1$ .

A matriz  $S'$  é suposta ter posto de coluna completo, sem perda de generalidade, pois de outro modo poderia ser redefinida.

Obtém-se, nestes casos, uma simplificação do problema já que o grau de incerteza é reduzido.

Analogamente a (3.2), o vetor de parâmetros realmente incertos  $q$  pertence a uma região  $\Pi$ , definida por :

$$\Pi = \{ q / q \in \mathbb{R}^{nq}, Q(q-q_0) < \underline{1} \} \quad (3.7)$$

onde  $q_0 \in \mathbb{R}^{nq}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{2nq \times nq}$  e  $\underline{1} \in \mathbb{R}^{nq}$ .  $Q$  e  $q_0$  são obtidos de forma análoga às equações (3.3) e (3.5), respectivamente.

Utilizando-se uma transformação de coordenadas no espaço de parâmetros  $\mathbb{R}^{nq}$ , pode-se obter uma normalização das incertezas paramétricas que é extremamente útil no cálculo da função medida de robustez, a ser definida na seção 3.3 .

Considera-se a seguinte transformação de coordenadas no espaço  $\mathbb{R}^{nq}$  :

$$\mathbf{q}^* = \mathbf{R}'^{-1}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \quad , \quad (3.8)$$

onde  $\mathbf{q}^* \in \mathbb{R}^{nq}$  e  $\mathbf{R}' \in \mathbb{R}^{nq \times nq}$ .

De acordo com (3.7), tem-se que:

$$Q(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) < \underline{1} \quad . \quad (3.9)$$

Substituindo-se (3.8) em (3.9), obtém-se:

$$Q\mathbf{R}'\mathbf{q}^* < \underline{1} \quad . \quad (3.10)$$

Definindo-se, então :

$$\mathbf{R}' = \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} (\bar{q}_1 - \underline{q}_1)/2 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & (\bar{q}_{nq} - \underline{q}_{nq})/2 \end{bmatrix} \quad , \quad (3.11)$$

onde  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{nq \times nq}$  é a matriz que compõe  $\mathbf{Q}$ , segundo a equação (3.3), considerando-se apenas os parâmetros efetivamente incertos.  $\underline{q}_i$  e  $\bar{q}_i$ ,  $\forall i$ ,  $i=1,2,\dots,nq$ , são os limites dos intervalos de incerteza destes parâmetros. A equação (3.10) fica reduzida, então, a :

$$Q^* \cdot \mathbf{q}^* < \underline{1} \quad (3.12)$$

onde  $Q^* \in \mathbb{R}^{2nq \times nq}$  é dada por :

$$Q^* = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ \hline -1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & & -1 \end{bmatrix} . \quad (3.13)$$

Como  $\bar{q}_i > \underline{q}_i, \forall i$ , a matriz  $C$  será sempre inversível, o que garante, sempre, a possibilidade da transformação de coordenadas.

A partir desta transformação, as incertezas definidas em (3.7) passam a ser representadas pela região aberta, denotada por  $\mathbb{P}$ , descrita por :

$$\mathbb{P} = \{ q^* / q^* \in \mathbb{R}^{nq}, Q^* \cdot q^* < \underline{1} \} \quad (3.14)$$

Esta região  $\mathbb{P}$  representa uma região hipercúbica centrada na origem do novo sistema de coordenadas, no espaço de parâmetros efetivamente incertos  $\mathbb{R}^{nq}$ .

A representação normalizada das incertezas dos parâmetros permite, assim, o mapeamento da região  $\mathbb{II}$  na região  $\mathbb{P}$ , ou seja,  $q \in \mathbb{II} \Leftrightarrow q^* \in \mathbb{P}$ .

Substituindo-se  $q$  na equação (3.6) por  $q^*$ , utilizando-se a equação (3.8), obtém-se a relação entre o vetor de parâmetros  $p$  e o vetor de parâmetros incertos normalizados  $q^*$ , como é dada a seguir :

$$p = S'R'q^* + S'q_0 + s_0 . \quad (3.15)$$

Esta equação pode ser escrita da seguinte maneira :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \hline p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 0 \\ \hline s_0 & \vdots & S' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 0 \\ \hline q_0 & \vdots & R' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \hline q^* \end{bmatrix} . \quad (3.16)$$

Definindo-se as matrizes  $S$  e  $R$  como:

$$S = \left[ \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline s_0 & S' \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (nq+1)} \quad (3.17)$$

$$R = \left[ \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline q_0 & R' \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{(nq+1) \times (nq+1)} \quad , \quad (3.18)$$

então:

$$\left[ \begin{array}{c} 1 \\ \hline p \end{array} \right] = S^* \left[ \begin{array}{c} 1 \\ \hline q \end{array} \right] \quad , \quad (3.19)$$

com  $S^* = SR$ ,  $S^* \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (nq+1)}$ .

Nos casos em que os parâmetros do processo  $a_i$  e  $b_j$  apresentam uma dependência não-linear dos parâmetros que realmente variam, pode-se determinar uma região de incerteza hiperretangular que contenha a região de variação paramétrica real. Contudo, pode ocorrer, nestas situações, que o problema se torne demasiado conservativo.

### 3.3 A FUNÇÃO MEDIDA DE ROBUSTEZ

O problema de robustez proposto consiste na obtenção de um controlador  $x$  que aloque os pólos do sistema em uma região  $D$  pré-definida no plano complexo, considerando a região de incerteza paramétrica inicial dada. Como o problema pode admitir múltiplas soluções, a definição de uma função medida de robustez surge naturalmente como um critério que permite a

comparação entre controladores.

A função medida de robustez  $m(x)$  de um dado controlador  $x$  está relacionada à maior região  $\Pi$  de estabilidade relativa, associada ao mesmo. Portanto, dado um controlador que satisfaça certas restrições com relação ao parâmetro  $p_0$ , é sempre possível encontrar a maior região de incerteza paramétrica permissível para o processo, mantendo ainda todos os pólos do sistema na região  $D$ .

Para o cálculo da função medida de robustez, utiliza-se o conceito intermediário de medida de robustez local  $m(x,z)$ , que é calculada em um ponto  $z$  do plano complexo, pertencente à fronteira  $D^*$  da região  $D$ .

Apresenta-se, a seguir, algumas definições necessárias ao cálculo da medida de robustez local.

Considere-se a família de regiões hipercúbicas, parametrizada pela variável  $k$ , definida abaixo :

$$P(k) = \{ q^* / q^* \in \mathbb{R}^{nq}, Q^* q^* < \underline{k} \} \quad (3.20)$$

onde  $\underline{k}$  denota o vetor  $[k \ k \ \dots \ k]^T \in \mathbb{R}^{2nq}$ , com  $k \in [0, \infty)$ . Para  $k=1$  tem-se a região de incerteza definida inicialmente no projeto. O parâmetro  $k$  será utilizado na definição da função medida de robustez  $m(x)$ .

Retomando-se a equação matricial do polinômio característico (2.11), com  $p$  substituído por  $q^*$ , tem-se :

$$t = X(x) \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ p \end{bmatrix} = X(x) S^* \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ q^* \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Explicitando-se a dependência dos coeficientes do polinômio característico (dados em  $t$ ) em relação aos parâmetros do controlador  $x$  e aos parâmetros incertos representados por  $q^*$ , pode-se escrever :

$$z^{nt}T(z^{-1})= T(x,q^*,z) \quad . \quad (3.22)$$

Define-se um controlador  $x$  como sendo D-estabilizante para a região de incerteza paramétrica nominal dada, se  $\forall q^* \in \mathbb{P}$ , então  $T(x,q^*,z)=0 \Rightarrow z \in D$ .

Definição: A função  $m(x)$ , que dá a medida de robustez de um controlador  $x$  qualquer, é definida como sendo o maior valor do parâmetro  $k$  em (3.20), chamado  $k_m$ , tal que para  $\forall q^* \in \mathbb{P}(k_m)$ ,  $T(x,q^*,z)=0 \Rightarrow z \in D$ .

A medida  $m(x)= k_m$  permite determinar a maior região de incerteza  $\Pi$  de estabilidade relativa associada ao controlador  $x$ . Além disso, permite a comparação entre dois controladores, associando a noção de "mais robusto" àquele que possuir maior região de incerteza associada.

Em virtude da complexidade associada à função medida de robustez, para a qual não foi possível determinar uma expressão analítica direta, diversos conceitos intermediários são definidos para o cálculo da mesma.

Considera-se a definição do conjunto  $W$  de controladores  $x$  D-estabilizantes para o vetor de parâmetros central do processo ( $q^*=\underline{0} \Leftrightarrow p=p_0$ ), ou seja :

$$W=\{ x/x \in \mathbb{R}^{ng+nh+2}, T(x,\underline{0},z)=0 \Rightarrow z \in D \} \quad , \quad (3.23)$$

onde  $\underline{0}$  denota o vetor nulo em  $\mathbb{R}^{ng}$ .

Estabelece-se, então, a seguinte proposição :

Proposição 3.1.

Sejam  $x$  um controlador pertencente a  $W$  e  $k'$  um número real

não-negativo.

Se  $T(x, q^*, z) \neq 0$  para  $\forall q^* \in \mathbb{P}(k')$  e  $\forall z \in D^*$ ,  
então  $T(x, q^*, z) \neq 0$  para  $\forall q^* \in \mathbb{P}(k')$  e  $\forall z \in D$ .

A demonstração desta proposição é similar àquela da proposição 3.1 apresentada em Santos-Mendes (1988).

Esta proposição garante então que, na determinação de  $k_m$ , é suficiente restringir a análise aos pontos pertencentes à fronteira  $D^*$ , o que leva à definição do conceito intermediário de medida de robustez local  $m(x, z)$ , associada a um ponto  $z \in D^*$ , dada por :

$$m(x, z) = k_z \quad , \quad x \in W \quad . \quad (3.24)$$

onde  $k_z$  é o maior valor do parâmetro  $k$  em (3.20), tal que  $\forall q^* \in \mathbb{P}(k_z)$ ,  $T(x, q^*, z) \neq 0$ . Ou seja,  $k_z$  é o maior valor de  $k$  tal que qualquer vetor de parâmetros em  $\mathbb{P}(k_z)$  combinado com o controlador  $x$  não apresente  $z$  como raiz da equação característica.

A partir da proposição 3.1 e da definição da função medida de robustez local, pode-se concluir o seguinte:

Corolário 3.1.

A função medida de robustez  $m(x)$ , definida anteriormente, pode ser dada por:

$$m(x) = \min_{s.a. z \in D^*} m(x, z) \quad , \quad x \in W \quad . \quad (3.25)$$

Ou seja, o cálculo de  $m(x)$  para um controlador  $x \in W$  é determinado pela minimização da função medida de robustez local em  $z$ , com  $z$  restrito à

fronteira  $D^*$ .

A determinação da medida de robustez local  $m(x,z)$  consiste na avaliação da maior região hipercúbica de incerteza para  $q^*$  tal que  $T(x, q^*, z) \neq 0$ , com  $x \in W$  e  $z \in D^*$  dados. Para a determinação de uma expressão analítica para  $k_z$ , algumas definições são necessárias.

Considera-se, inicialmente, a matriz  $V(z) \in \mathbb{R}^{(nt+1) \times 2}$  definida como:

$$V^T(z) = \begin{bmatrix} \text{Re}(z^{nt}) & \text{Re}(z^{nt-1}) & \dots & \text{Re}(z) & 1 \\ \text{Im}(z^{nt}) & \text{Im}(z^{nt-1}) & \dots & \text{Im}(z) & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

onde  $\text{Re}(\cdot)$  e  $\text{Im}(\cdot)$  denotam, respectivamente, as partes real e imaginária de um número complexo, e  $nt$  é o grau do polinômio  $T(z^{-1})$ .

Observa-se que a construção de  $V(z)$ , como definida acima, permite a obtenção de uma importante relação, a saber :

$$V^T(z)t = \begin{bmatrix} \text{Re}[z^{nt}T(z^{-1})] \\ \text{Im}[z^{nt}T(z^{-1})] \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Substituindo-se  $t$  em (3.27) pela equação (3.21) e considerando-se a notação introduzida em (3.22), tem-se que:

$$V^T(z)X(x)S^* \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{q^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Re}[T(x, q^*, z)] \\ \text{Im}[T(x, q^*, z)] \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Definindo-se a matriz  $U(x,z) \in \mathbb{R}^{(nq+1) \times 2}$  como

$$U^T(x,z) = V^T(z)X(x)S^*, \quad (3.29)$$

e ainda, o conjunto  $v(x,z)$  abaixo :

$$v(x,z) = \left\{ q^*/q^* \in \mathbb{R}^{nq}, U^T(x,z) \begin{bmatrix} 1 \\ \text{-----} \\ q^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} . \quad (3.30)$$

Tem-se, então, que  $z$  será raiz do polinômio  $T(x,q^*,z)$  se e somente se o vetor  $[1 \ q^*]^T \in \mathbb{R}^{nq+1}$  pertencer ao espaço nulo de  $U^T(x,z)$ , ou seja :

$$T(x,q^*,z) \neq 0 \Leftrightarrow q^* \notin v(x,z) . \quad (3.31)$$

Como consequência dos resultados acima, a função medida de robustez local pode ser redefinida como :

$$m(x,z) = k_z , \quad x \in W \text{ e } z \in D^* , \quad (3.32)$$

onde  $k_z$  é o maior valor do parâmetro  $k$  em (3.20), tal que  $\mathbb{P}(k_z) \cap v(x,z) \equiv \phi$ .

Reescrevendo-se a matriz  $U(x,z)$ , definida em (3.29), como :

$$U^T(x,z) = \begin{bmatrix} a^T \\ \text{-----} \\ b^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times (nq+1)} , \quad (3.33)$$

onde  $a = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{nq}]^T \in \mathbb{R}^{nq+1}$  e  $b = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{nq}]^T \in \mathbb{R}^{nq+1}$ , a função medida de robustez local  $m(x,z)$  pode ser determinada pelo seguinte teorema:

### Teorema 3.1.

Sejam um controlador  $x \in W$ , e  $z$  um ponto qualquer da fronteira  $D^*$  de  $D$ . A função medida de robustez local  $m(x,z)$  é dada analiticamente, para duas situações possíveis, por :

a) Os vetores  $a$  e  $b$  em  $U(x,z)$  são linearmente dependentes:

$$m(x,z) = \frac{|a_0|}{\sum_{i=1}^{nq} |a_i|}, \quad (3.34)$$

b) Os vetores  $a$  e  $b$  em  $U(x,z)$  são linearmente independentes:

$$m(x,z) = \max_i \frac{|c_{0i}|}{\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{nq} |c_{ji}|}, \quad i=1,2,\dots,nq, \quad (3.35)$$

onde  $c_{ji} = a_j b_i - a_i b_j$ .

A demonstração deste teorema encontra-se no Apêndice B.

Retomando-se a equação (3.25), a função medida de robustez pode ser obtida pela minimização numérica da função medida de robustez local.

Devido à simetria da fronteira  $D^*$  em relação ao eixo real do plano complexo e à equivalência de  $m(x,z)$  para pontos  $z$  conjugados, é suficiente realizar a busca do mínimo em uma metade de  $D^*$ .

Parametrizando-se o contorno  $D^*$  por uma variável  $\theta \in [0,2\pi]$  pode-se reescrever a equação (3.25) como :

$$m(x) = \min_{\theta} m(x,\theta), \quad x \in W, \quad (3.36)$$

s. a  $0 \leq \theta \leq \pi$

A solução deste problema é dada numericamente avaliando-se ' $\theta$ ' em um número razoável de pontos no intervalo  $[0,\pi]$ . A partir de  $m(x)$ , a maior

região  $\Pi$  de estabilidade relativa, associada a  $x$  pode ser calculada. Os limites inferior e superior dos intervalos de incerteza correspondentes a esta região  $\Pi$  podem ser calculados utilizando-se a equação (3.19) com  $q^* = [-m(x) \dots -m(x)]^T \in \mathbb{R}^{nq}$  e  $q^* = [m(x) \dots m(x)]^T \in \mathbb{R}^{nq}$ , respectivamente.

Um controlador  $x$  será solução do problema inicial de robustez se e somente se  $m(x) \geq 1$ , visto que para  $k=1$  a região de incerteza normalizada representa a incerteza definida no projeto inicial.

### 3.4 O GRADIENTE DA FUNÇÃO MEDIDA DE ROBUSTEZ

Para o problema de robustez, o método de projeto de controladores robustos consiste na obtenção de um controlador  $x$  com índice de robustez  $m(x) \geq 1$ . Este é obtido a partir de um controlador inicial  $x_0 \in W$ , realizando-se sucessivas modificações nos parâmetros de  $x$ , segundo a direção do gradiente da função  $m(x)$ . O gradiente da função  $m(x)$  pode não existir para certos valores de  $x$ . Nestas situações é adotado o gradiente modificado para a determinação da nova direção de busca.

No presente trabalho, com o tratamento simultâneo de robustez e de perturbações estocásticas, o gradiente de  $m(x)$  juntamente com o gradiente da função de custo  $J_2$  definem as estratégias utilizadas nos algoritmos propostos. O gradiente é escolhido por fornecer a direção de maior taxa de variação da função.

É importante ressaltar que, em geral, este tipo de algoritmo não garante ótimos globais, e que a solução depende das condições iniciais (controlador inicial).

Considera-se a função medida de robustez dada em (3.36), reescrita da seguinte forma :

$$m(x) = m(x, \theta(x)) \quad , x \in W \quad , \quad (3.37)$$

onde  $\theta(x)$  é o valor de  $\theta \in [0, \pi]$  que minimiza a função  $m(x, \theta)$  para um controlador  $x$  dado.

A partir desta equação, tem-se que a expressão do subgradiente de  $m(x)$ , que corresponde ao gradiente no caso deste estar definido, é dada por :

$$\nabla m(x) = \frac{\partial m(x, \theta(x))}{\partial x} + \frac{\partial m(x, \theta(x))}{\partial \theta} \frac{d\theta(x)}{dx} \quad , x \in W, \quad (3.38)$$

garantida a existência das derivadas acima.

Como  $\theta = \theta(x)$  minimiza a função  $m(x, \theta)$  no ponto  $(x, \theta)$ , e como foi suposta a existência da derivada, tem-se que :

$$\frac{\partial m(x, \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad . \quad (3.39)$$

O gradiente da função medida de robustez dado em (3.38) fica reduzido, portanto, à derivada parcial da função  $m(x, \theta)$  calculada em  $(x, \theta(x))$ , ou seja :

$$\nabla m(x) = \frac{\partial m(x, \theta(x))}{\partial x} \quad . \quad (3.40)$$

Inicialmente, reescreveremos a matriz  $U(x, z)$  definida em (3.29) a fim de facilitar o cálculo da derivada parcial de  $m(x, \theta)$  em relação a  $x$ .

Considerando-se a parametrização de  $z$  por  $\theta$  na equação (3.29), tem-se :

$$U^T(x, \theta) = V^T(\theta) X(x) S^* \quad . \quad (3.41)$$

Particionando-se a matriz  $V(z)$  dada em (3.26) e parametrizada por  $\Theta$ , tem-se que :

$$V^T(\Theta) = \begin{bmatrix} V_r^T(\Theta) \\ -\frac{r}{V_c^T(\Theta)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times (nt+1)}, \quad (3.42)$$

onde  $V_r(\Theta) \in \mathbb{R}^{(nt+1) \times 1}$  e  $V_c(\Theta) \in \mathbb{R}^{(nt+1) \times 1}$  são vetores contendo, respectivamente, a primeira e a segunda colunas de  $V(z)$ .

Escrevendo-se  $S^*$  em termos de suas colunas, ou seja :

$$S^* = \begin{bmatrix} s_0^* & \vdots & s_1^* & \vdots & \dots & \vdots & s_{nq}^* \end{bmatrix}, \quad s_i^* \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad (3.43)$$

pode-se desenvolver o produto matricial  $X(x)S^*$  como :

$$X(x)S^* = \begin{bmatrix} X(x)s_0^* & \vdots & X(x)s_1^* & \vdots & \dots & \vdots & X(x)s_{nq}^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(nt+1) \times (nq+1)}. \quad (3.44)$$

Devido à dualidade observada em (2.11) e (2.12), pode-se reescrever as colunas da matriz  $X(x)S^*$  da seguinte forma :

$$X(x)s_i^* = M(s_i^*)x, \quad \forall i=0,1,\dots,nq, \quad (3.45)$$

onde  $M(s_i^*) \in \mathbb{R}^{(nt+1) \times (ng+nh+2)}$  é obtida de modo análogo à matriz (2.15), com  $\hat{p}$  substituído por  $s_i^*$ . Daqui por diante,  $M(s_i^*)$  será referida apenas por  $M_i$ .

Assim sendo,  $X(x)S^*$  pode ser reescrita como :

$$X(x)S^* = \begin{bmatrix} M_0 x & \vdots & M_1 x & \vdots & \dots & \vdots & M_{nq} x \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

Substituindo-se as equações (3.42) e (3.46) na equação (3.41), a matriz  $U(x,\Theta)$  passa a ser dada por :

$$U^T(x, \theta) = \begin{bmatrix} V_r^T(\theta)M_0x & V_r^T(\theta)M_1x & \dots & V_r^T(\theta)M_{nq}x \\ V_c^T(\theta)M_0x & V_c^T(\theta)M_1x & \dots & V_c^T(\theta)M_{nq}x \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

Assim, os elementos  $a_i$  e  $b_i$  da matriz  $U(x, \theta)$ , definidos em (3.33), são dados por :

$$\begin{cases} a_i = V_r^T(\theta)M_ix \\ b_i = V_c^T(\theta)M_ix \end{cases}, i=0,1,\dots,nq. \quad (3.48)$$

Definindo-se  $c_{ji}$  como  $c_{ji} = a_{ji}b_{ji} - a_{ij}b_{ij}$  e considerando-se as derivadas parciais das expressões acima, tem-se :

$$\begin{cases} \frac{\partial a_i}{\partial x} = M_i^T V_r^T(\theta) \\ \frac{\partial b_i}{\partial x} = M_i^T V_c^T(\theta) \end{cases}, i=0,1,\dots,nq \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial c_{ji}}{\partial x} = (M_j^T V_M^T(\theta)M_i + M_i^T V_M^T(\theta)M_j)x, i=1,2,\dots,nq \text{ e} \quad (3.50)$$

$$j=0,1,\dots,nq \quad (j \neq i)$$

onde  $V_M^T(\theta)$  é definida como

$$V_M^T(\theta) = V_r^T(\theta)V_c^T(\theta) - V_c^T(\theta)V_r^T(\theta). \quad (3.51)$$

Supondo-se a existência da derivada parcial em (3.40), e considerando-se as duas situações possíveis para o cálculo da medida de robustez local, segundo o teorema 3.1, o gradiente da função medida de

robustez  $m(x)$  é dado pelas duas expressões abaixo :

a) A função  $m(x, \theta)$  é dada por :

$$m(x, \theta) = \frac{|a_0|}{\sum_{i=1}^{nq} |a_i|} \quad (3.52)$$

Derivando-se esta equação, obtém-se o gradiente de  $m(x)$  como :

$$\nabla m(x) = \frac{M_S^T(x, \theta) V_r(\theta)}{\sum_{i=1}^{nq} |a_i|} \quad (3.53)$$

onde  $M_S(x, \theta)$  é definida por:

$$M_S^T(x, \theta) = \text{sgn}(a_0) M_0^T - m(x) \sum_{i=1}^{nq} \text{sgn}(a_i) M_i^T \quad (3.54)$$

e  $\text{sgn}(\cdot)$  é a função sinal de um número real.

b) A função  $m(x, \theta)$  é dada por :

$$m(x, \theta) = \frac{|c_{0l}|}{\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq l)}}^{nq} |c_{jl}|} \quad (3.55)$$

onde  $l \in \{1, 2, \dots, nq\}$  é o valor de  $i$  que maximiza a expressão (3.35).

Derivando-se esta equação, chega-se ao gradiente de  $m(x)$  como :

$$\nabla m(x) = \frac{[M_{SI}^T(x, \theta) V_M^T(\theta) M_I + M_I^T V_M(\theta) M_{SI}(x, \theta)] x}{\sum_{j=1}^{nq} |c_{jI}|} \quad (j \neq 1) \quad (3.56)$$

onde  $M_{SI}(x, \theta)$  é definida por:

$$M_{SI}^T(x, \theta) = \text{sgn}(c_{0I}) M_o^T - m(x) \sum_{j=1}^{nq} \text{sgn}(c_{jI}) M_j^T \quad (j \neq 1) \quad (3.57)$$

Essas relações fornecem, portanto, o gradiente da função medida de robustez para um dado controlador  $x$ , nos pontos em que o mesmo existe. A direção de busca utilizada nos algoritmos a serem apresentados é dada pelo vetor normalizado  $dx$  a partir das equações (3.53) e (3.56), respectivamente :

$$dx = \frac{M_S^T V_r}{||M_S^T V_r||} \quad (3.58)$$

$$dx = \frac{(M_{SI}^T V_M^T M_I + M_I^T V_M M_{SI})x}{|| (M_{SI}^T V_M^T M_I + M_I^T V_M M_{SI})x ||} \quad (3.59)$$

Na situação em que para um dado controlador  $x$  existe mais de um valor de  $\theta$  que minimiza a função  $m(x, \theta)$  na equação (3.36), e/ou que para o par  $(x, \theta(x))$  o valor do índice  $i$  que resolve a maximização na equação (3.35) não é único, o gradiente da função medida de robustez não existe, sendo necessário, então, definir uma nova direção de modificação neste ponto  $x$ . Uma direção de busca é proposta, baseada na definição a seguir de gradiente modificado da função  $m(x)$ .

Considera-se um ponto  $x' \in W$ , onde a situação descrita no parágrafo anterior ocorre, e sejam  $dx_1, dx_2, \dots, dx_l$  as possíveis direções obtidas pela

equação (3.58) ou (3.59), para cada  $\theta_j(x')$  ou para cada par  $(\theta_j(x'), i(\theta_j(x')))$ , respectivamente, onde  $\theta_j(x')$  são os valores de  $\theta \in [0, \pi]$  que minimizam  $m(x', \theta)$  e  $i(\theta_j(x'))$  são os valores de  $i \in \{1, 2, \dots, nq\}$  que solucionam a maximização na equação (3.35) para cada par  $(x', \theta_j(x'))$ . Define-se a matriz J como:

$$J = \begin{bmatrix} d^T x_1 \\ d^T x_2 \\ \vdots \\ d^T x_l \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{l \times (ng+nh+2)} \quad (3.60)$$

A direção de busca do controlador robusto ótimo, proposta em Araújo (1991), para os pontos onde a direção  $dx$  não é única, é dada pelo vetor  $\Gamma$ , definido como sendo o gradiente modificado da função  $m(x)$ , obtido pela resolução do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min \quad & \Gamma^T \Gamma \\ \text{s.a.} \quad & J \cdot \Gamma = \underline{1} \end{aligned} \quad (3.61)$$

onde  $\underline{1} \in \mathbb{R}^l$ .

A solução deste problema é dada por:

$$\Gamma = J^T (JJ^T)^{-1} \underline{1} \quad (3.62)$$

A justificativa para tal escolha se baseia nos seguintes fatos:

- 1)  $dx_i^T \Gamma = 1 > 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, l\}$ .

2) O vetor  $\Gamma$  forma o mesmo ângulo com todos os vetores  $dx_i$ . Este ângulo, denotado por  $\beta$ , é dado por:

$$\beta = \arccos(|\Gamma|^{-1}) \quad , \quad (3.63)$$

e, portanto, minimizado pela solução do problema (3.61).

3) Para  $i=1$  a matriz  $J$ , definida em (3.60), se reduz a:

$$J = dx_1^T \quad . \quad (3.64)$$

Substituindo-se a equação (3.64) na equação (3.62), tem-se que:

$$\Gamma = dx \quad , \quad (3.65)$$

ou seja, a direção  $\Gamma$  coincide com a direção  $dx$  obtida pela equação (3.58) ou (3.59).

A partir do último fato acima, pode-se considerar que a direção definida pela equação (3.62) é uma generalização daquela obtida pelas equações (3.58) e (3.59). Portanto, a direção  $\Gamma$  é utilizada como direção de busca para a função medida de robustez  $m(x)$ , independentemente da existência do gradiente da mesma.

## CAPÍTULO 4

### DESCRIÇÃO DO PROBLEMA ESTOCÁSTICO: FUNÇÃO DE CUSTO $J_2$

#### 4.1 INTRODUÇÃO

#### 4.2 CÁLCULO DA VARIÂNCIA DOS SINAIS DE SAÍDA E CONTROLE

#### 4.3 REGRA HEURÍSTICA RELACIONADA À FUNÇÃO $J_2$

#### 4.4 O GRADIENTE DA FUNÇÃO DE CUSTO $J_2$

#### 4.5 ALGORITMOS DE OTIMIZAÇÃO CONJUNTA DA ROBUSTEZ E DA FUNÇÃO $J_2$

##### 4.5.1 ALGORITMO 4.1

##### 4.5.2 ALGORITMO 4.2

#### 4.6 CONCLUSÃO

## 4.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta a efetiva contribuição deste trabalho, tratando do aspecto não-determinístico das perturbações presentes no sistema.

Apresenta-se, inicialmente, um método para o cálculo numérico da variância dos sinais de saída e controle em função dos parâmetros do processo e do controlador. Esta variância é designada como função de custo  $J_2$ , sendo um dos objetivos do controle a minimização da mesma.

Aborda-se, em seguida, as observações que levaram à adoção de uma regra heurística em relação à função  $J_2$ . Esta regra considera a propriedade de convexidade da função  $J_2$  em relação aos parâmetros do processo. Optou-se pela utilização desta propriedade após extensas simulações verificando a convexidade da função  $J_2(p,c)$ . Os resultados destas simulações, que são apresentados na tabela 4.1, mostram que de fato a função não é convexa. Contudo, como a ocorrência dos casos de não-convexidade é extremamente rara, optou-se pela adoção de uma regra heurística. A finalidade desta regra é obter o pior caso (máximo) da função  $J_2$  dentre os parâmetros incertos da região hiperretangular  $\Pi$  simplesmente fazendo uma busca exaustiva nos extremos da mesma, o que é válido para uma função convexa. Como garantia para a obtenção deste máximo, uma verificação global é feita no início e final dos algoritmos apresentados.

Finalmente, desenvolve-se o gradiente da função  $J_2$  em relação a  $x$ , que é aplicado iterativamente ao pior caso descrito acima, a fim de minimizar a função  $J_2$ . Este gradiente é utilizado juntamente com o gradiente modificado da função medida de robustez em dois algoritmos diferentes, que otimizam ambos os critérios. Estes algoritmos são apresentados na seção 4.5.

## 4.2 CÁLCULO DA VARIÂNCIA DOS SINAIS DE SAÍDA E CONTROLE

O desenvolvimento matemático abordado aqui se restringe à componente estocástica do sinal de saída  $y(t)$ , mas pode ser aplicado igualmente, com pequenas modificações, ao sinal de controle  $u(t)$ .

Considera-se a componente estocástica da função de transferência definida pela equação 2.7. Esta componente, denotada por  $P(z^{-1})$ , relaciona a saída  $y(t)$  com a entrada de perturbação  $\xi(t)$ , e é dada por :

$$P(z^{-1}) = \frac{N(z^{-1})}{T(z^{-1})} = \frac{H.C}{A.H + z^{-d}.B.G} \quad (4.1)$$

Além das incertezas, já apresentadas anteriormente, nos parâmetros de  $A(z^{-1})$  e  $B(z^{-1})$ , considera-se também incertezas nos parâmetros do polinômio  $C(z^{-1})$ .

Sejam  $c = [1 \ c_1 \ c_2 \ \dots \ c_{n_c}]^T \in \mathbb{R}^{n_c+1}$  um vetor composto pelos coeficientes do polinômio  $C(z^{-1})$  e  $\Pi_c$  a região hiperretangular associada (análoga à região  $\Pi$  definida no capítulo 3). Esta região descreve, então, o espaço de parâmetros do vetor incerto  $c$  :

$$\Pi_c = \left\{ \hat{c} \mid \hat{c} \in \mathbb{R}^{n_c} \ , \ Q_c \cdot (\hat{c} - \hat{c}_0) < \underline{1} \right\} \ , \ c = [1 \ \hat{c}]^T \quad (4.2)$$

com definições análogas àsquelas da equação (3.2).

O cálculo da variância do sinal de saída é feito a partir da densidade espectral de potência do sinal em questão (ver apêndice A). Esta variância é dada por :

$$\begin{aligned}
E(y_t^2) &= \frac{1}{2 \cdot \Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} S_{yy}(\omega) \cdot d\omega = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} S_{xx}(\omega) \cdot P(z^{-1}) \cdot P(z) \cdot d\omega = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} P(e^{j\omega T}) \cdot P(e^{-j\omega T}) \cdot d\omega ;
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Onde :

$P(z)$  é a função de transferência em questão;

$S_{yy}(\omega)$  é a densidade espectral da saída  $y(t)$ ;

$S_{xx}(\omega)$  é a densidade espectral da entrada ;

$\xi(t)$  é a entrada ruído branco;

$\omega$  é a variável de integração (frequência) e

$\Omega = \pi/T$ , onde  $T$  é o período de amostragem.

A última igualdade em (4.3) se deve ao fato de que a densidade espectral do ruído branco  $S_{xx}(\omega)$  é constante e numericamente igual à variância do mesmo ( $\text{var}\xi$ ), visto que a correlação do ruído branco corresponde ao impulso discreto.

A integral em (4.3) também pode ser escrita em termos de uma integral de linha sobre o círculo unitário, que equivale ao quadrado da norma  $H_2$  da função de transferência  $P(z)$ , ou seja :

$$\begin{aligned}
E\{y_t^2\} &= \frac{1}{2 \cdot \Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} P(z) \cdot P(z^{-1}) \cdot d\omega = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \oint_{|z|=1} P(z^{-1}) \cdot P(z) \cdot z^{-1} \cdot dz = \|P\|_2^2 .
\end{aligned} \tag{4.4}$$

A convergência da integral na equação (4.4) é garantida desde que todos os pólos do sistema (raízes de  $T(z^{-1})$ ) estejam dentro do círculo unitário, o que pode ser assegurado através do tratamento de robustez.

A avaliação da integral na equação (4.4) pode ser feita de três maneiras distintas :

- Integração numérica simples na variável  $\omega$  - método adotado neste trabalho .
- Método Recursivo - apresentado em Aström (1970).
- Método Analítico - desenvolvido em Jury (1974).

No método analítico avalia-se o valor exato da integral da equação (4.4) através da razão entre dois determinantes de ordem  $nt$  (ordem de  $T(z^{-1})$ ). A desvantagem deste método consiste no alto custo computacional para o cálculo de determinantes de ordem elevada.

Assume-se, então, como função de custo  $J_2$ , a ser minimizada, a variância da saída, ou seja :

$$J_2(p, c, x) = E\{y_t^2\} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(z^{-1}) \cdot P(z) \cdot d\omega . \tag{4.5}$$

Pode-se observar, então, que a função de custo  $J_2$  é função dos parâmetros do processo  $(p, c)$  e dos parâmetros do controlador  $x$ .

A idéia é encontrar uma direção de modificação de  $x$  (gradiente de

$J_2$  em relação a  $x$ , que será desenvolvido na seção 4.4) que possa ser usada iterativamente a fim de se diminuir, a cada passo, o pior valor da função  $J_2$ . Por pior valor entenda-se, para um dado controlador  $x$ , o máximo de  $J_2(p,c,x)$  em relação aos parâmetros do processo  $(p,c)$ , contidos nas regiões hiperretangulares de incerteza  $\Pi$  e  $\Pi_c$ .

Em outras palavras, deseja-se encontrar a solução do problema:

$$\text{Min}_x \text{Max}_{p,c} J_2(p,c,x) \quad (4.6)$$

Na verdade, o problema definido pela equação (4.6) deve ser resolvido juntamente com a maximização da medida de robustez  $m(x)$ .

### 4.3 REGRA HEURÍSTICA RELACIONADA À FUNÇÃO $J_2$

Considera-se o subproblema abaixo :

$$\text{Max}_{(p,c)} J_2(p,c,x) \quad (4.7)$$

Ou seja, procura-se o máximo valor de  $J_2(p,c,x)$  dentre todos os valores do processo  $(p,c)$ , contidos nas regiões hiperretangulares de incerteza  $\Pi$  e  $\Pi_c$ , para um dado controlador  $x$ .

Após a realização de um grande número de simulações (cujos resultados são apresentados mais adiante) envolvendo o comportamento da função de custo  $J_2(p,c,x)$ , levantou-se a conjectura de que a mesma seria convexa. Neste caso a solução do problema apresentado na equação (4.7) se resumiria na busca do  $\max J_2$  entre os pontos extremos das regiões  $\Pi$  e  $\Pi_c$ , já que o máximo de uma função convexa em um domínio do tipo politopo encontra-se nos extremos do mesmo.

Esta convexidade, contudo, foi descartada após a constatação de alguns raros contra-exemplos. Para se chegar a estas conclusões, realizou-se

um número razoável de simulações em sistemas de diferentes ordens, testando-se a convexidade de  $J_2(p,c,x)$  em relação a  $(p,c)$ . Os testes foram realizados da seguinte maneira. Escolhida uma certa estrutura para processo e controlador, gerou-se valores aleatórios para os parâmetros destes. Sendo sempre gerados dois vetores de parâmetros do processo,  $P_0=(a_0,b_0,c_0)$  e  $P_f=(a_f,b_f,c_f)$ , para um dado vetor  $x$  de parâmetros do controlador, de tal maneira que os pólos sempre estivessem contidos no círculo unitário.

A partir dos dois vetores de processo  $P_0$  e  $P_f$ , gerou-se a combinação convexa dos mesmos, ou seja,  $P = \alpha.P_0 + (1-\alpha).P_f$  com  $\alpha \in [0,1]$ , verificando-se o valor da função  $J_2$  nestes pontos. Para que a função seja ao menos quase-convexa é necessário que  $J_2(P) \leq \text{Max}\{J_2(P_0), J_2(P_f)\}$ , com  $P$  dado pela combinação convexa acima. Os resultados destas simulações estão resumidos na tabela (4.1).

Esta tabela (4.1) apresenta o número de casos testados, assim como o número de vezes em que a convexidade não se verificou.

na	nb	d	nh	ng	N. total	N. contra-exemplos
2	1	1	1	1	105.000	27
2	0	2	1	1	70.000	5
1	0	3	2	0	183.000	0
3	0	2	1	2	65.000	9
1	0	2	1	0	80.000	0
1	0	1	0	1	89.000	0
2	1	2	2	1	94.000	6
2	2	1	2	1	65.000	28
1	0	1	0	0	112.000	0

Tabela 4.1.

A título de ilustração, mostra-se, a seguir, um destes casos. Neste exemplo particular tem-se  $na=2$ ,  $nb=0$ ,  $nc=2$ ,  $d=2$ ,  $nh=1$  e  $ng=1$ . Os valores para

processo e controlador foram :

$$\mathbf{h} = (1 \quad -1.1294)$$

$$\mathbf{g} = (-2.6145 \quad -1.0326)$$

$$\mathbf{a}_0 = (1 \quad 1.2171 \quad 0.3458) ; \mathbf{b}_0 = -0.3898 ; \mathbf{c}_0 = (1 \quad 0.378 \quad -0.4133)$$

$$\mathbf{a}_f = (1 \quad 1.0416 \quad 0.3099) ; \mathbf{b}_f = -0.3274 ; \mathbf{c}_f = (1 \quad 0.3112 \quad -0.4795)$$

A fig. (4.1) mostra o valor da função  $J_2$  em função de  $\alpha$  para este caso. Nota-se que o máximo não se encontra nos extremos. Uma observação interessante com relação aos contra-exemplos encontrados é que todos apresentam uma variação muito pequena no valor da função  $J_2$  para uma variação em  $\alpha$  de 0 a 1. Outra observação que pode ser levantada é a ausência de contra-exemplos para os casos de primeira e segunda ordem, nos quais se supõe que a convexidade seja realmente válida.

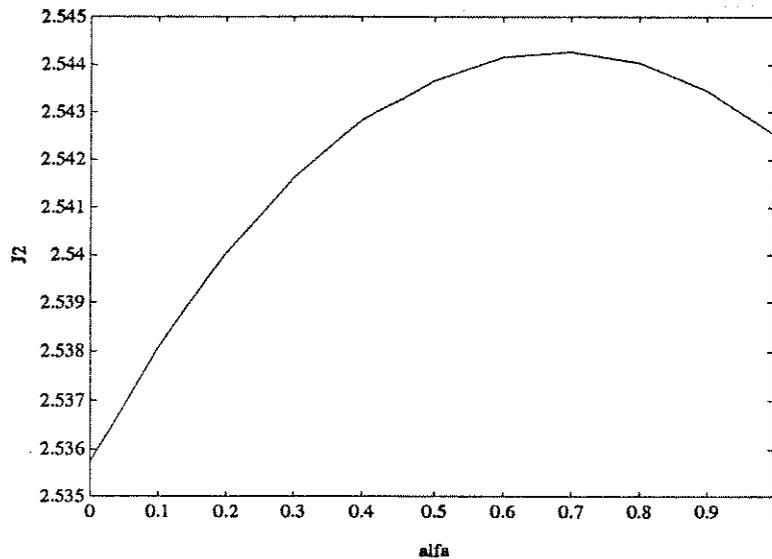


Fig. 4.1 Variância  $J_2$  em função de  $\alpha$ .

Devido ao fato de que a não-ocorrência de convexidade é um fenômeno extremamente raro, segundo o conjunto de simulações realizadas, optou-se pela utilização desta propriedade, permitindo, assim, o uso de uma regra heurística

que será adotada nos algoritmos 4.1 e 4.2.

Isto é, o subproblema :

$$\text{Min}_x \quad \text{Max}_{(p,c)} J_2(p,c,x) \quad , \quad (4.8)$$

é substituído por :

$$\text{Min}_x \quad \text{Max}_{(p_i,c_i)} J_2(p,c,x) \quad , \quad (4.9)$$

onde  $(p_i, c_i)$  são formados a partir dos extremos das regiões  $\Pi$  e  $\Pi_c$ .

Apenas no início e no final dos algoritmos é que o problema de maximização da equação (4.7) é realmente resolvido realizando-se uma busca extensiva para garantir efetivamente o máximo global.

Os resultados obtidos com a execução dos algoritmos confirmam a suposição de que a convexidade se verifica na grande maioria dos casos.

#### 4.4 O GRADIENTE DA FUNÇÃO DE CUSTO $J_2$

Esta seção trata da obtenção do gradiente da função de custo  $J_2$  em relação aos parâmetros do controlador  $x$ , para um dado valor de parâmetros do processo  $(p,c)$ . Este valor de  $(p,c)$ , como determinado na seção anterior, é aquele que fornece o máximo valor de  $J_2$  dentre os extremos das regiões hiperretangulares  $\Pi$  e  $\Pi_c$ .

A fim de se obter este gradiente, deve-se escrever o produto  $P(z).P(z^{-1})$  de tal forma que o vetor  $x$  apareça explicitamente.

Sejam os polinômios  $N(z)$  e  $T(z)$  correspondentes, respectivamente, ao numerador e denominador da função de transferência  $P(z)$  :

$$\begin{aligned}
 N(z) &= n_0 + n_1 z + n_2 z^2 + n_3 z^3 + \dots + n_{nd} z^{nd} \\
 T(z) &= t_0 + t_1 z + t_2 z^2 + t_3 z^3 + \dots + t_{nt} z^{nt}
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

onde  $nd=nh+nc$ .

Assim, pode-se escrever :

$$P(z).P(z^{-1}) = \frac{N(z)}{T(z)} \frac{N(z^{-1})}{T(z^{-1})}
 \tag{4.11}$$

Detendo-se apenas no produto  $N(z).N(z^{-1})$  :

$$\begin{aligned}
 N(z) \cdot N(z^{-1}) &= (n_0 + n_1 z + n_2 z^2 + n_3 z^3 + \dots + n_{nd} z^{nd}) \cdot \\
 &\cdot (n_0 + n_1 z^{-1} + n_2 z^{-2} + n_3 z^{-3} + \dots + n_{nd} z^{-nd}) = \\
 &= (n_0^2 + n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_{nd}^2) + \\
 &+ (n_0 n_1 + n_1 n_2 + n_2 n_3 + \dots + n_{nd} n_{nd-1}) \cdot (z + z^{-1}) + \\
 &+ (n_0 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_4 + \dots + n_{nd} n_{nd-2}) \cdot (z^2 + z^{-2}) + \\
 &+ \dots + (n_0 n_{nd}) \cdot (z^{nd} + z^{-nd}) =
 \end{aligned}
 \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
 &= (n_0^2 + n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_{nd}^2) + \\
 &+ 2 \cdot (n_0 n_1 + n_1 n_2 + n_2 n_3 + \dots + n_{nd} n_{nd-1}) \cdot \cos(\omega T) + \\
 &+ 2 \cdot (n_0 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_4 + \dots + n_{nd} n_{nd-2}) \cdot \cos(2 \cdot \omega T) + \\
 &+ \dots + 2 \cdot (n_0 n_{nd}) \cdot \cos(nd \cdot \omega T) = \\
 &= n^T \cdot K_1(\omega) \cdot n
 \end{aligned}$$

onde  $n \in \mathbb{R}^{nd+1}$  é o vetor :

$$n = [ n_0 \ n_1 \ n_2 \ \dots \ n_{nd} ]^T$$

e  $K_1(\omega) \in \mathbb{R}^{(nd+1) \times (nd+1)}$  é a matriz :

$$K_1(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\omega T) & \cos(2\omega T) & \dots & \cos(nd \cdot \omega T) \\ \cos(\omega T) & 1 & \cos(\omega T) & \dots & \cos((nd-1) \cdot \omega T) \\ \cos(2\omega T) & \cos(\omega T) & 1 & \dots & \cos((nd-2) \cdot \omega T) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(nd \cdot \omega T) & \cos((nd-1) \cdot \omega T) & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

De modo análogo, o produto  $T(z) \cdot T(z^{-1})$  pode ser escrito como :

$$T(z) \cdot T(z^{-1}) = t^T \cdot K_2(\omega) \cdot t \quad (4.14)$$

Com  $t \in \mathbb{R}^{nt+1}$ , como definido em (2.11), e  $K_2(\omega) \in \mathbb{R}^{(nt+1) \times (nt+1)}$  idêntica à matriz  $K_1(\omega)$ , exceto pelas dimensões.

Assim, pode-se escrever a função  $J_2$  como :

$$\begin{aligned} J_2(p, c, x) &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(z^{-1}) \cdot P(z) \cdot d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{n^T \cdot K_1(\omega) \cdot n}{t^T \cdot K_2(\omega) \cdot t} d\omega, \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde  $T$  (de  $\Omega = \pi/T$ , nos limites de integração) foi escolhido igual a um, já que a integral independe de seu valor.

Como  $N(z^{-1}) = H(z^{-1}) \cdot C(z^{-1})$  e

$$x = [1 \ h_1 \ h_2 \ \dots \ h_{nh} \ g_0 \ g_1 \ \dots \ g_{ng}]^T \in \mathbb{R}^{(ng+nh+2)}, \text{ observa-se}$$

facilmente que o vetor  $n$  pode ser escrito como:

$$n = C.x \quad (4.16)$$

onde a matriz  $C \in \mathbb{R}^{(nh+nc+1) \times (nh+ng+2)}$  é definida como :

$$C = \begin{bmatrix} \overbrace{1 \quad \dots \quad 1}^{nh+1} & 0 & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & 1 & & & & \\ \vdots & c_1 & \ddots & & & \\ c_{nc} & \vdots & \ddots & 1 & & \\ & c_{nc} & \ddots & c_1 & & \\ 0 & & & \vdots & & \\ & & & c_{nc} & & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Finalmente, considerando-se a relação definida pela equação (2.12), pode-se escrever a função  $J_2$  como :

$$J_2(p,c,x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^T \cdot C^T \cdot K_1(\omega) \cdot C \cdot x}{x^T \cdot M^T(\hat{p}) \cdot K_2(\omega) \cdot M(\hat{p}) \cdot x} d\omega \quad (4.18)$$

Nota-se que  $\hat{p} = [1 \ p]^T \in \mathbb{R}^{na+nb+1}$ , como definido no capítulo 2.

Definindo-se as matrizes  $V_1 \in \mathbb{R}^{(nh+ng+2) \times (nh+ng+2)}$  e  $V_2 \in \mathbb{R}^{(nh+ng+2) \times (nh+ng+2)}$  como sendo :

$$\begin{aligned} V_1(\omega) &= C^T \cdot K_1(\omega) \cdot C \\ V_2(\omega) &= M^T(\hat{p}) \cdot K_2(\omega) \cdot M(\hat{p}) \end{aligned} \quad (4.19)$$

a equação (4.18) se resume a :

$$J_2(p,c,x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^T \cdot V_1(\omega) \cdot x}{x^T \cdot V_2(\omega) \cdot x} d\omega \quad (4.20)$$

Assim, pode-se obter facilmente o gradiente de  $J_2(p,c,x)$  em relação a  $x$ , para um dado valor do processo  $(p,c)$  :

$$\nabla J_2(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{V_1 \cdot x \cdot (x^T \cdot V_2 \cdot x) - (x^T \cdot V_1 \cdot x) \cdot V_2 \cdot x}{(x^T \cdot V_2 \cdot x)^2} d\omega \quad (4.21)$$

Esta integral, que também é calculada numericamente, fornece então uma direção que permite a minimização da pior variância da saída. O sentido adotado é o oposto ao do gradiente  $(-\nabla J_2(x))$  .

Nos casos em que as matrizes  $V_1$  e  $V_2$  não são únicas, ou seja, quando os valores de  $(p,c)$  satisfazendo a maximização em (4.7) não forem únicos, o gradiente deixa de existir, sendo proposta então uma nova direção de busca alternativa de modo análogo à direção de busca proposta para a função medida de robustez apresentada anteriormente.

Caso se trabalhe com a variância do sinal de controle, ao invés do sinal de saída, a função de transferência a ser considerada é dada por :

$$Q(z^{-1}) = \frac{-G \cdot C}{A \cdot H + z^{-d} \cdot B \cdot G} \quad (4.22)$$

A única modificação do que foi exposto anteriormente é que a matriz  $C \in \mathbb{R}^{(nh+nc+1) \times (nh+ng+2)}$  na equação (4.17) é agora escrita como :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & | & 1 & & 0 \\ & & & & c_{11} & 1 & \\ & & & & \vdots & c_{1l} & \ddots \\ & & & & c_{nc} & \vdots & \ddots & 1 \\ & & & & & c_{nc} & \ddots & c_{11} \\ & & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & | & 0 & & & c_{nc} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Combinando-se o gradiente da função medida de robustez, ou o gradiente modificado desta, com o gradiente da função de custo  $J_2$  é possível construir um algoritmo que realiza a otimização conjunta dos dois critérios.

#### 4.5 ALGORITMOS DE OTIMIZAÇÃO CONJUNTA DA ROBUSTEZ E DA FUNÇÃO $J_2$

Apresenta-se aqui os algoritmos que foram desenvolvidos para a solução do problema de otimização conjunta da robustez e da função de custo  $J_2$ . A idéia consiste em encontrar, dentre os controladores com índice de robustez maior que 1, aquele que apresenta o melhor comportamento do ponto de vista estocástico, ou seja, aquele que apresenta a menor variância dos sinais relevantes ao sistema.

Em outras palavras, procura-se a solução do problema :

$$\begin{aligned} \text{Min } & \text{Max } J_2(p,c,x) \\ & x \quad (p,c) \\ \text{s.a. } & m(x) > 1 \end{aligned} \quad (4.24)$$

##### 4.5.1 - ALGORITMO 4.1

Utiliza-se, neste primeiro algoritmo, a propriedade que diz que se o

ângulo entre um certo vetor e o gradiente for menor que  $90^\circ$ , então a direção dada por este vetor é também uma direção de crescimento da função correspondente.

A estratégia utilizada aqui é a seguinte : dado um controlador  $x$ , verifica-se sua medida de robustez; caso esta seja maior que  $(1+\delta m)$ , sendo  $\delta m$  uma margem de segurança, utiliza-se apenas o gradiente da função  $J_2$  na busca do próximo controlador ; caso contrário,  $1 < m < (1+\delta m)$  utiliza-se uma direção  $\delta x$  satisfazendo simultaneamente o gradiente modificado da função medida de robustez e o gradiente (oposto) da função  $J_2$ , a fim de, simultaneamente, aumentar a robustez e diminuir a pior variância.

O algoritmo deve ser inicializado com um controlador que tenha um índice de robustez maior que 1 (um). Isto pode ser obtido através do algoritmo apresentado em Araújo (1991).

O algoritmo iterativo é o seguinte :

S1. Escolha  $x=x_0$  ( $m(x_0)>1$ ) e um escalar positivo  $\alpha_0$  ;

S2. Compute  $m(x_0)$  e  $\text{Max}_{p,c} J_2(p,c,x)$

usando uma rotina de otimização global.

Sejam  $p^*, c^*$  os valores de  $p, c$  que satisfazem o máximo.

S3. Compute as direções  $\Gamma$  e  $(-\nabla J_2(x))$  em  $p^*, c^*$  ;

S4. Se  $m(x) > (1+\delta m)$ , faça  $\delta x = (-\nabla J_2(x))$  e  $mr = 1$  ;

Caso contrário, faça  $\delta x = \{ \Gamma - (\nabla J_2(x)) \}$  e  $mr = m(x)$ .

S5. Faça  $\alpha = \alpha_0$  ;

S6. Se  $\| \alpha \cdot \delta x \| < \varepsilon$  ( $\varepsilon$  pequeno escalar positivo), então pare.

S7. Faça  $y = x + \alpha \cdot \delta x / \| \delta x \|$  ;

S8. Se  $y \in W$ , compute  $m(y)$  e  $\text{Max}_{p_i, c_i} J_2(p, c, y)$

Sejam  $p^*, c^*$  os valores de  $p_1, c_1$  que satisfazem o máximo.

Caso contrário ( $y \notin W$ ) vá para S10 ;

S9. Se  $m(y) > m_r$  e  $J_2(p^*, c^*, y) < J_2(p, c, x)$  ,

faça  $x=y$  e vá para S3 ;

S10. Faça  $\alpha=\alpha/2$  e vá para S6.

Vale ressaltar que os vetores  $\Gamma$  e  $\nabla J_2(x)$  usados no algoritmo são direções normalizadas.

Após o final do algoritmo compute  $\text{Max}_{p,c} J_2(p,c,x)$  usando uma rotina de otimização global para assegurar o pior valor de  $J_2$ .

Caso não se encontre um controlador que satisfaça as especificações desejadas, o projetista pode tentar diferentes ordens  $n_h$  e  $n_g$  para os controladores. Observa-se também que a solução final depende da escolha do controlador inicial  $x_0$ .

#### 4.5.2 - ALGORITMO 4.2

Um segundo algoritmo é proposto aqui visando a solução do problema (4.24). Este algoritmo apresenta duas diferenças básicas em relação ao algoritmo anterior. Em primeiro lugar, devido ao fato de que este algoritmo utiliza um único gradiente que pondera as duas funções objetivo (medida de robustez e função de custo  $J_2$ ), consegue-se variações menos bruscas na medida de robustez ao longo das iterações . O outro fato importante é que é possível obter-se uma curva "ótima" relacionando os dois critérios, permitindo, assim, uma análise de compromisso para a escolha do controlador ideal, ao invés da obtenção final de um controlador com índice de robustez  $m(x)=1$ , como no algoritmo anterior. Um resumo explicativo do algoritmo é dado a seguir.

Como já foi dito anteriormente, trabalha-se com uma função  $J_\lambda$  que representa uma combinação ponderada dos dois critérios, ou seja,  $J_\lambda = (1-\lambda).m(x) - \lambda.J_2$ , a qual se deseja maximizar.

Por conseguinte, trabalha-se com um único gradiente (ou direção de busca, no caso da não existência de  $\nabla m(x)$ ) para a função  $J_\lambda$ , combinando o gradiente da função  $J_2$  e o gradiente modificado da função medida de robustez.

O algoritmo é inicializado com um controlador  $x_0$  tal que  $m(x_0)$  é um máximo da função  $m(x)$ . Além disto, inicializa-se a ponderação com  $\lambda_0 = 0$ .

Uma vez definida a ponderação  $\lambda$ , procede-se à maximização da função  $J_\lambda$  em iterações sucessivas, com passos na direção do gradiente  $\nabla J_\lambda$ . Obtendo-se o controlador  $x$  que fornece o máximo de  $J_\lambda$ , registra-se sua respectiva medida de robustez e variância  $J_2$  máxima para posterior plotagem em gráfico. Este controlador, assim obtido, é usado como controlador inicial no mesmo algoritmo, tendo agora a ponderação  $\lambda$  incrementada de um pequeno valor  $\Delta\lambda$ . O processo se repete até que a medida de robustez tenha se reduzido a 1. Plotando-se os valores obtidos para  $\text{Max } J_2$  em função de  $m(x)$ , obtém-se a curva de otimização de ambos os critérios.

O algoritmo, descrito em passos, é o seguinte :

P1. Escolha  $x=x_0$  com  $m(x_0)$  máximo para  $m(x)$ . Faça  $\lambda_0 = -\Delta\lambda$  ;

P2. Calcule a ponderação  $\lambda_{i+1} = \lambda_i + \Delta\lambda$  ;

Calcule o valor da função ponderada

$$J_\lambda = (1-\lambda).m(x) - \lambda.J_2(x) ,$$

onde  $J_2(x)$  corresponde ao máximo de  $J_2$  dentre todas as incertezas paramétricas correspondentes a  $m=1$ . Guarde os valores de  $m(x)$  e  $J_2(x)$  ;

P3. Calcule

$$\nabla J_\lambda(x) = (1-\lambda).\Gamma - \lambda.\nabla J_2(x) \text{ e}$$

$$J_{\lambda} = (1-\lambda).m(x) - \lambda.J_2(x) ;$$

P4. Faça  $\alpha = \alpha_0$  ;

P5. Se  $\alpha < \epsilon$  ( $\epsilon$  pequeno escalar positivo), verifique se  $m(x) > (1+\delta m)$ . Em caso afirmativo vá para P2. Caso contrário PARE ; o controlador obtido representa a solução final ;

P6. Faça

$$x_{k+1} = x_k + \alpha \cdot \nabla J_{\lambda}(x_k) ;$$

P7. Se  $x_{k+1} \in W$  e  $m(x_{k+1}) > 1$ , calcule  $J_2(x_{k+1})$ .

Caso contrário vá para P9 ;

P8. Calcule  $J_{\lambda}(x_{k+1})$ .

Se  $J_{\lambda}(x_{k+1}) > J_{\lambda}(x_k)$ , faça  $x = x_{k+1}$  e vá para P3 ;

P9. Faça  $\alpha = \alpha/2$  e vá para P5.

É importante notar que os valores de  $\Delta\lambda$  utilizados devem ser bem pequenos, já que os valores comparativos de ambos os critérios devem ser da mesma ordem de grandeza, e normalmente os valores absolutos de  $J_2$  são maiores que os valores de  $m(x)$ .

Após a execução do algoritmo pode-se levantar a curva  $J_2$  em função de  $m(x)$ .

## 4.6 CONCLUSÃO

Apresentou-se, neste capítulo, um procedimento para o cálculo da pior variância dos sinais de saída ou controle, para um dado controlador, considerando-se uma região de incerteza paramétrica hiperretangular. Este procedimento envolve a utilização de uma regra heurística que supõe

propriedades de convexidade para a função de custo  $J_2$ . Desenvolveu-se uma direção de gradiente para esta função que, juntamente com o gradiente modificado da função medida de robustez, é utilizada em dois algoritmos para otimização de ambos os critérios.

## CAPÍTULO 5

### APLICAÇÕES

#### 5.1 INTRODUÇÃO

#### 5.2 EXEMPLOS DE UTILIZAÇÃO DO ALGORITMO 4.1.

##### 5.2.1 SISTEMA DE PRIMEIRA ORDEM

##### 5.2.2 SISTEMA DE SEGUNDA ORDEM

##### 5.2.3 CONTROLE DE POTÊNCIA DE UM REATOR NUCLEAR

##### 5.2.4 MINIMIZAÇÃO DA VARIÂNCIA DO SINAL DE CONTROLE

#### 5.3 EXEMPLO DE UTILIZAÇÃO DO ALGORITMO 4.2

#### 5.4 CONCLUSÃO

## 5.1 INTRODUÇÃO

Apresenta-se, neste capítulo, alguns exemplos de sistemas em tempo discreto com incertezas nos parâmetros do processo e presença de perturbações estocásticas, juntamente com o cálculo dos respectivos controladores. Na seção 5.2 encontram-se quatro exemplos de aplicação do algoritmo 4.1, sendo os três primeiros relacionados à variância do sinal de saída e o último à variância do sinal de controle. A seção 5.3 apresenta um exemplo de aplicação do algoritmo 4.2. Na seção 5.2.1 tem-se um modelo de primeira ordem, com a imposição de que o controlador seja PI e com uma região de alocação de pólos relacionada ao tempo de acomodação e sobre-sinal máximo da resposta transitória. Como neste caso o vetor de parâmetros do controlador é de ordem 2, além do cálculo utilizando o algoritmo 4.1, realizou-se uma busca extensiva nos parâmetros do mesmo numa tentativa de se localizar o ótimo global para o problema. Obteve-se neste caso uma confirmação do resultado encontrado com o algoritmo 4.1 anteriormente. Na seção 5.2.2 discute-se um modelo de segunda ordem com uma região de alocação de pólos circular e controladores de primeira ordem. Observou-se, neste caso, uma acentuada redução na variância da saída. Este exemplo também permite uma constatação interessante, que ocorre frequentemente, que é o deslocamento dos pólos de malha fechada (durante as iterações do programa) na direção dos zeros do polinômio  $C$ . Na seção 5.2.3 apresenta-se o modelo linearizado de um reator nuclear operando em regime permanente. Utiliza-se o algoritmo 4.1 a fim de se obter um controlador que minimize a variância da saída diante das incertezas nos parâmetros. Finalmente, compara-se o controlador apresentado em Kucera (1979) com o controlador aqui obtido para o reator, observando-se uma maior robustez frente às incertezas paramétricas no segundo caso. Na seção 5.2.4 discute-se um exemplo de minimização da variância do controle para um sistema

de primeira ordem com apenas um parâmetro incerto. O controlador utilizado neste caso é de primeira ordem com dois parâmetros, e a região para a alocação de pólos é circular. A seção 5.3 utiliza o algoritmo 4.2 para o mesmo caso tratado na seção 5.2.2, a fim de se traçar algumas comparações entre os dois algoritmos.

## 5.2 EXEMPLOS DE UTILIZAÇÃO DO ALGORITMO 4.1

### 5.2.1 SISTEMA DE PRIMEIRA ORDEM

Considere-se o sistema de primeira ordem dado pela equação abaixo :

$$y_t = \frac{z^{-1}b}{1 + a.z^{-1}} u_t + \frac{1 + c.z^{-1}}{1 + a.z^{-1}} \xi_t \quad (5.1)$$

Os parâmetros  $a, b$ , e  $c$  são conhecidos com imprecisão, podendo variar dentro dos seguintes intervalos :

$$\begin{aligned} -0.6 < a < -0.4 \\ 0.3 < b < 0.7 \\ 0.7 < c < 0.95 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Deseja-se encontrar um controlador do tipo PI, de modo a alocar os pólos do sistema em malha fechada na região D do plano complexo representada na figura 5.1. Esta região D foi obtida considerando-se o tempo de acomodação  $t_s < 0.1s$  ( $\xi\omega < 40$ ) e o sobre-sinal máximo  $M_p < 0.1$  ( $\xi > 0.6$ ), como especificações da resposta transitória.

A estrutura do controlador PI é dada pela equação seguinte :

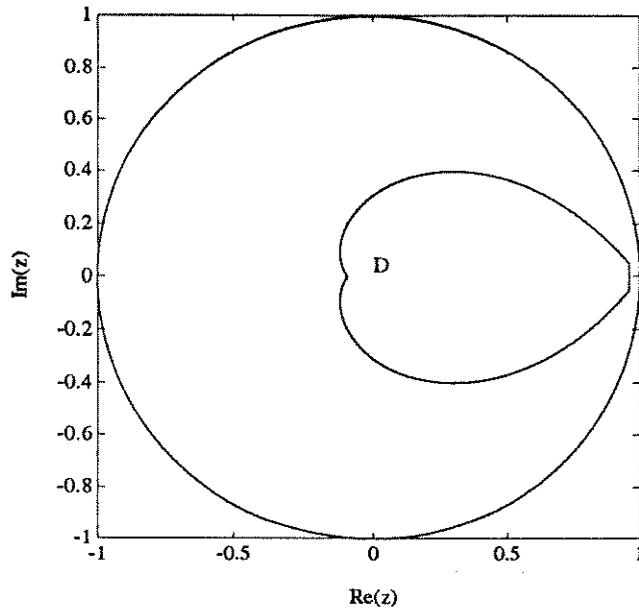


Fig. 5.1 - Região D para a alocação de pólos.

$$u_t = \frac{g_0 + g_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}} y_t + \frac{e_0}{1 - z^{-1}} w_t \quad (5.3)$$

Ou seja :

$$G(z^{-1}) = g_0 + g_1 z^{-1} \quad (5.4)$$

$$H(z^{-1}) = 1 - z^{-1}$$

$$E(z^{-1}) = e_0 = (g_0 + g_1) ;$$

Onde  $e_0$  é escolhido da forma indicada para garantir erro nulo em regime para uma entrada em degrau.

O problema consiste então na obtenção dos parâmetros  $g_0$  e  $g_1$  tais que o polinômio característico em malha fechada tenha raízes na região D da fig. 5.1, quaisquer que sejam os valores de  $a$  e  $b$  definidos em (5.2). Além disto, considerando-se também as incertezas em  $c$ , tal controlador deve apresentar uma saída com variância mínima.

Nota-se, pela equação 5.3, que o controlador PI apresenta um efeito

integral. Do ponto de vista do cálculo dos parâmetros do controlador, este integrador pode ser considerado como parte do processo, sendo incorporado na estrutura de  $A(z^{-1})$ , que passa a ser tratado como um polinômio de segunda ordem. Neste caso a expressão do vetor  $p$ , segundo a equação (3.16), pode ser escrita como :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \text{---} \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1+a \\ -a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \\ \\ b \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

A equação (5.5) permite concluir que a matriz  $S$  definida pela equação (3.17) é dada por :

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Seguindo-se a definição dada em (3.7), pode-se obter a região de incerteza hiperretangular para  $q$  (figura 5.2), como sendo :

$$\Pi = \{ q / q \in \mathbb{R}^2, Q(q-q_0) < \underline{1} \} \quad (5.7)$$

onde :

$$\underline{1} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T ;$$

$\underline{q}_0 = [-0.5 \ 0.5]^T$ , define o vetor de parâmetros central;

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ -C \end{bmatrix} \quad \text{com}$$

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} .$$

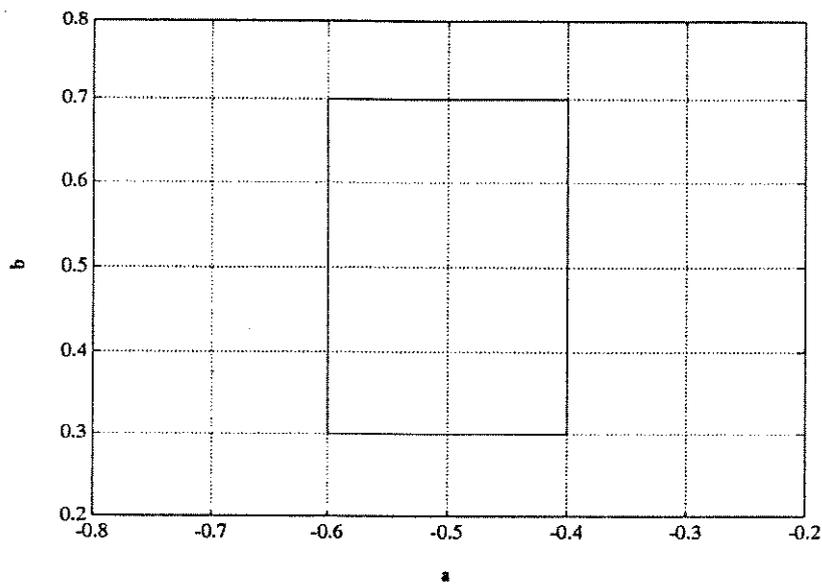


Fig. 5.2- Região II de incerteza paramétrica.

Normalizando-se a região II, utilizando-se as equações (3.8) e (3.11), obtém-se :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} \end{bmatrix} = R \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{q} \\ \frac{1}{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{q} \\ \frac{1}{q} \\ \frac{1}{q} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Logo, a matriz  $S^*$  que incorpora todas as informações sobre o

processo, é dada por :

$$S^* = S.R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1.5 & 0.1 & 0 \\ 0.5 & -0.1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} . \quad (5.9)$$

Assim, tem-se :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ p \end{bmatrix} = S^* \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ q \end{bmatrix} . \quad (5.10)$$

O vetor  $q^*$  pertence à região normalizada  $\mathbb{P}$  (figura 5.3), dada por :

$$\mathbb{P} = \{ q^* / q^* \in \mathbb{R}^2, Q^* . q^* < \underline{1} \} , \text{ com} \quad (5.11)$$

$$Q^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \quad (5.12)$$

Considere-se o seguinte controlador inicial  $x_0$  :

$$G(z^{-1}) = -0.12 + 0.19z^{-1} . \quad (5.13)$$

Este controlador apresenta índice de robustez  $m(x_0)=1.0224$ . Portanto,  $x_0$  já é uma solução para o problema robusto ( $m(x_0) > 1$ ). Considerando-se os valores admissíveis de variação dos parâmetros, dados pela equação (5.2), a pior variância da saída é dada por  $\max\{J_2(x_0)\} = 7.1216$ , para  $a=-0.6$ ,  $b=0.7$  e  $c=0.95$ .

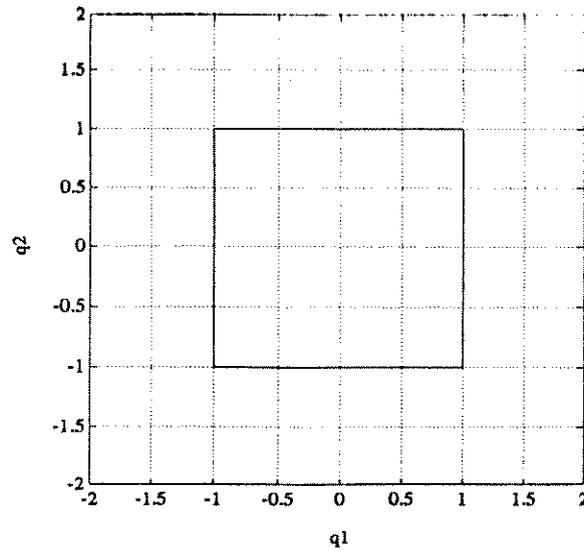


Fig. 5.3 - Região P de incerteza paramétrica normalizada.

O lugar das raízes do polinômio característico em malha fechada está contido na região D, como mostra a figura 5.4, para os seguintes intervalos das componentes do vetor de parâmetros incertos  $q$  :

$$\begin{bmatrix} -0.6022 \\ 0.2955 \end{bmatrix} < q < \begin{bmatrix} -0.3978 \\ 0.7045 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Utilizando-se o algoritmo 4.1, apresentado no capítulo anterior, com  $\delta_m=0.2$ , obtém-se o seguinte controlador  $x_f$  :

$$G(z^{-1}) = 0.8026 - 0.6977z^{-1} \quad (5.15)$$

Este controlador apresenta índice de robustez  $m(x_f)= 1.0001$ , cujas incertezas admissíveis correspondentes são dadas por :

$$\begin{bmatrix} -0.6 \\ 0.3 \end{bmatrix} < q < \begin{bmatrix} -0.4 \\ 0.7 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Considerando-se estas incertezas (5.16), a nuvem de raízes para os pólos de malha fechada é mostrada na figura 5.5. A pior variância da saída foi reduzida a  $\text{Max}\{J_2(x_f)\} = 3.1213$ , para  $a=-0.6$ ,  $b=0.3$  e  $c=0.95$ .

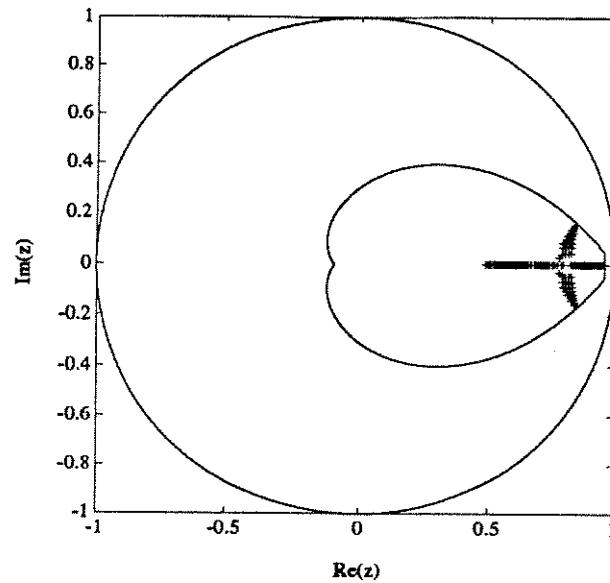


Fig. 5.4 - O lugar das raízes para o controlador  $x_0$ .

As variações na medida de robustez  $m(x)$  e em  $\text{Max}\{J_2(x)\}$ , durante as iterações do algoritmo 4.1 podem ser vistas nas figuras 5.6 e 5.7, respectivamente.

As saídas para uma entrada em degrau de amplitude  $w=30$  são vistas nas figuras 5.8 e 5.9 para os controladores inicial e final, respectivamente. Usou-se nestas simulações os seguintes valores para o processo  $a=-0.6$ ,  $b=0.7$  e  $c=0.95$ .

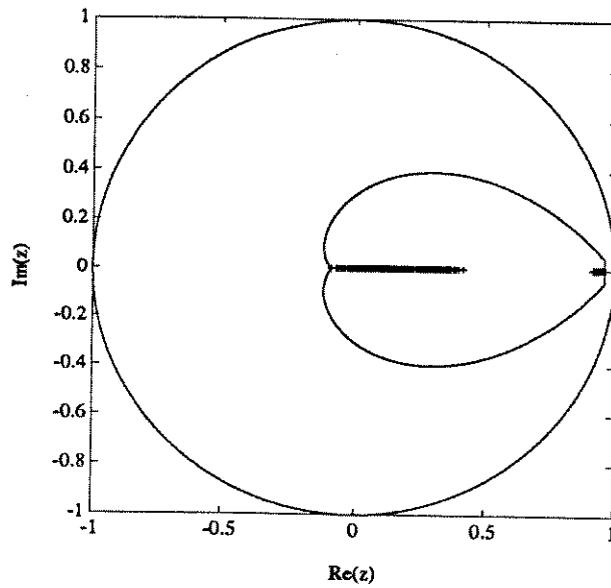


Fig. 5.5- O lugar das raízes para o controlador  $x_f$ .

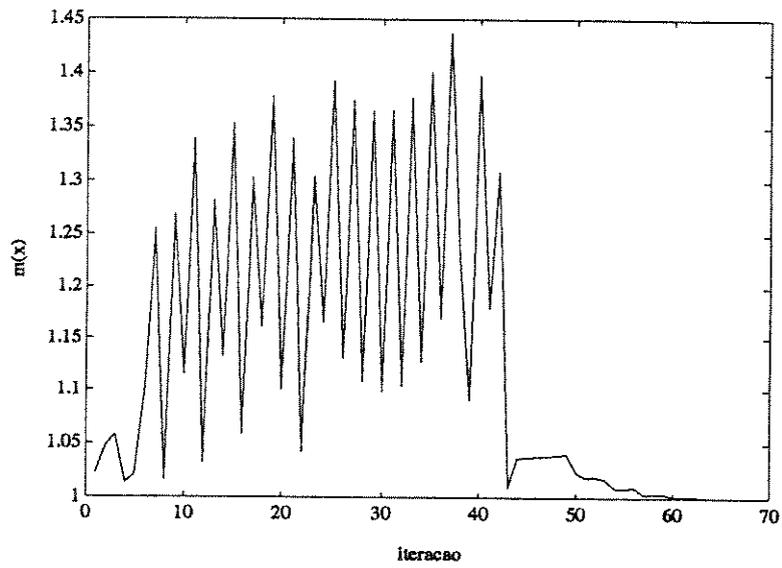


Fig. 5.6- Variações na medida de robustez durante as iterações do algoritmo 4.1.

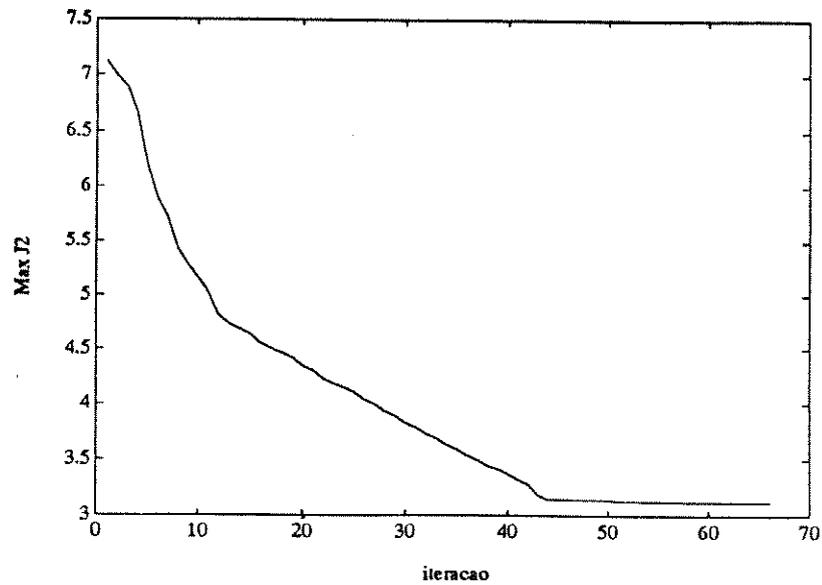


Fig. 5.7- Variações da pior variância durante as iterações do algoritmo 4.1.

Como o controlador aqui apresentado envolve apenas dois parâmetros, é fácil fazer uma varredura extensiva na busca da solução ótima, dentro de um intervalo significativo. Esta procura foi executada dentro dos intervalos  $-5.0 < g_0 < 5.0$  e  $-5.0 < g_1 < 5.0$ , e o controlador encontrado é exatamente o mesmo obtido em (5.15).

## 5.2.2 SISTEMA DE SEGUNDA ORDEM

Considera-se o processo definido pelos seguintes polinômios  $A(z^{-1})$ ,  $B(z^{-1})$  e  $C(z^{-1})$  :

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} \tag{5.17}$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}$$

Supõe-se que os valores para os coeficientes de  $B(z^{-1})$  são

conhecidos com precisão, sendo dados por :

$$b_0 = 0.7 ; b_1 = -0.5 . \quad (5.18)$$

Considera-se  $d=1$  na equação (2.2). Os valores dos parâmetros de  $A(z^{-1})$  e  $C(z^{-1})$  estão sujeitos aos seguintes intervalos de incerteza :

$$\begin{aligned} -1.37 < a_1 < -1.17 \\ 0.252 < a_2 < 0.292 \\ -1.8 < c_1 < -1.7 \\ 0.805 < c_2 < 0.905 \end{aligned} \quad (5.19)$$

Deseja-se obter um controlador do tipo PI que aloque os pólos de malha fechada do sistema na região D, apresentada na figura (5.10), considerando-se as incertezas no polinômio  $A(z^{-1})$ . D é um círculo de raio 0.8, centrado na origem. Além disto, com este controlador o sistema em malha fechada deve apresentar uma saída com variância mínima.

Supõe-se a seguinte estrutura para o controlador :

$$G(z^{-1}) = g_0 + g_1 z^{-1} ; H(z^{-1}) = 1 - z^{-1} . \quad (5.20)$$

Seja o seguinte controlador inicial  $x_0$ :

$$x_0 = [1 \quad -1 \quad 3.2626 \quad -0.0827]^T . \quad (5.21)$$

Este controlador apresenta um índice de robustez  $m(x_0)=3.4225$ , sendo portanto uma solução para o problema de alocação ( $m(x)>1$ ). Considerando-se os valores nominais de variação dos parâmetros, dados pela equação (5.19), o pior caso da variância da saída, para todas as incertezas, é dado por  $\text{Max}\{J_2(x_0)\} = 24.1875$ . O lugar das raízes para o controlador inicial, considerando-se todas as incertezas admissíveis, é mostrado na figura 5.11. Esta figura mostra também a nuvem de zeros de  $C(z^{-1})$ , para ilustrar o efeito de deslocamento dos pólos na direção da mesma, durante a busca do controlador final.

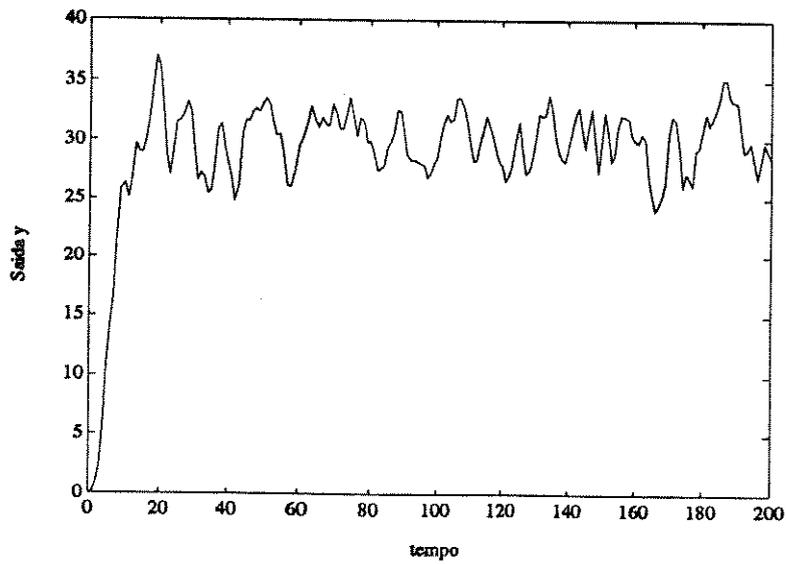


Fig. 5.8 - Sinal de saída para uma entrada em degrau de amplitude  $w=30$  (controlador inicial  $x_0$ ).

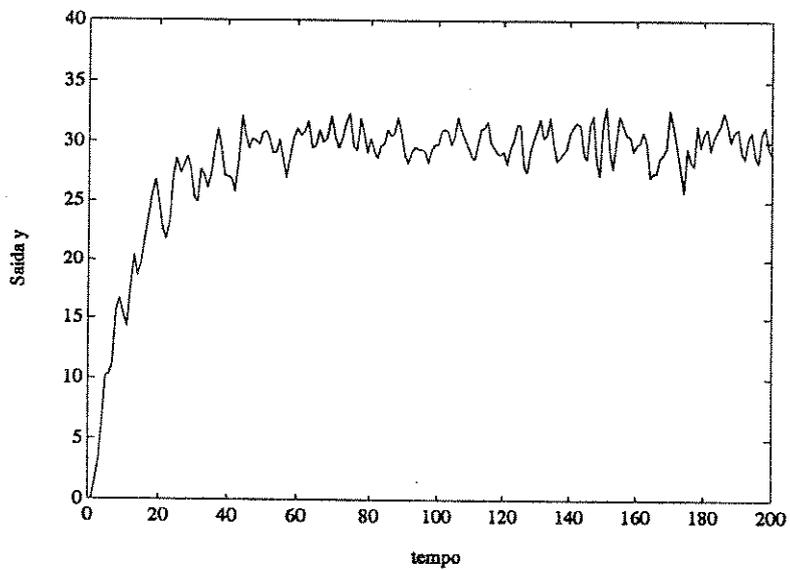


Fig. 5.9 - Sinal de saída para uma entrada em degrau de amplitude  $w=30$  (controlador final  $x_f$ ).

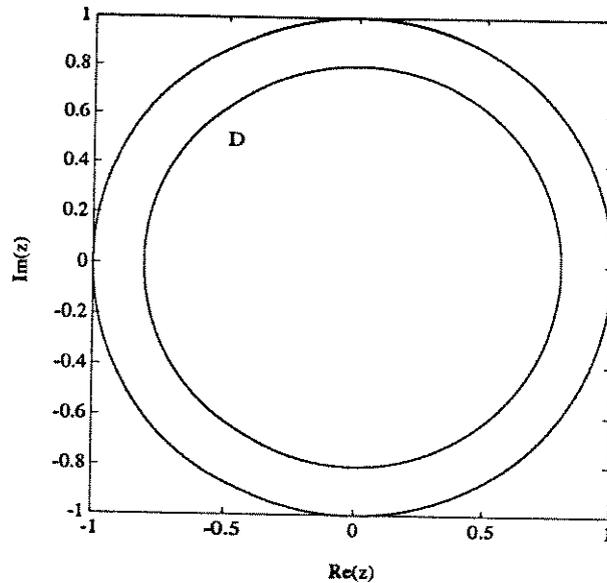


Fig. 5.10 - Região D para a alocação de pólos.

Através do algoritmo 4.1, adotando-se  $\delta_m=0.2$ , chegou-se ao seguinte controlador final :

$$x_f = [1 \quad -1 \quad 0.9853 \quad -0.1733]^T, \quad (5.22)$$

com  $m(x_f)=1.000$ , também satisfazendo o problema robusto, mas agora com  $\max\{J_2(x_f)\}=2.9017$ . Os pólos para o sistema em malha fechada para o controlador final podem ser vistos na figura 5.12. Observa-se que, em relação ao controlador inicial, houve um deslocamento dos pólos do sistema na direção dos zeros de C, numa tentativa de cancelamento (considere-se a função de transferência da equação (4.1)).

As figuras 5.13 e 5.14 mostram a saída do sistema para uma entrada em degrau de amplitude  $w=30$ , para os controladores inicial e final, respectivamente. Usou-se nestas simulações o valor central dos parâmetros da planta.

A figura 5.15 mostra a variação na medida de robustez durante as iterações do algoritmo, e a figura 5.16 mostra a variação do pior valor da função de custo  $J_2$  durante a execução do mesmo.

### 5.2.3 CONTROLE DE POTÊNCIA DE UM REATOR NUCLEAR

Um dos problemas básicos encontrados no controle de reatores nucleares consiste em se manter a potência de saída dos mesmos constante, independentemente da presença de perturbações. Em certos reatores pode-se observar perturbações aleatórias no fluxo de potência devido a resfriamentos no núcleo. A magnitude destas flutuações aumenta com o crescimento dos níveis de potência.

Para melhor compreensão do problema em questão descreveremos aqui o processo da fissão nuclear, resumido na figura 5.17, segundo Bernard e Wyant (1992). Pode-se constatar a existência de 3 caminhos diferentes de geração de nêutrons permitindo o fechamento da reação em cadeia.

Nêutrons "imediatos" são produzidos diretamente da fissão do Urânio-235 e têm tempo de vida da ordem de  $100\mu\text{s}$ . Nêutrons "atrasados" são produzidos a partir da decomposição radiativa de nuclídeos chamados "precursores". Precursores são fragmentos da fissão que passam por uma decomposição beta (nêutron convertido em próton e elétron, com a emissão do elétron) produzindo um nuclídeo filho que então emite um nêutron. Estes nêutrons são atrasados em relação à fissão inicial pelo tempo necessário para o decaimento beta. O atraso médio é de 12.2s. Foto-nêutrons são produzidos

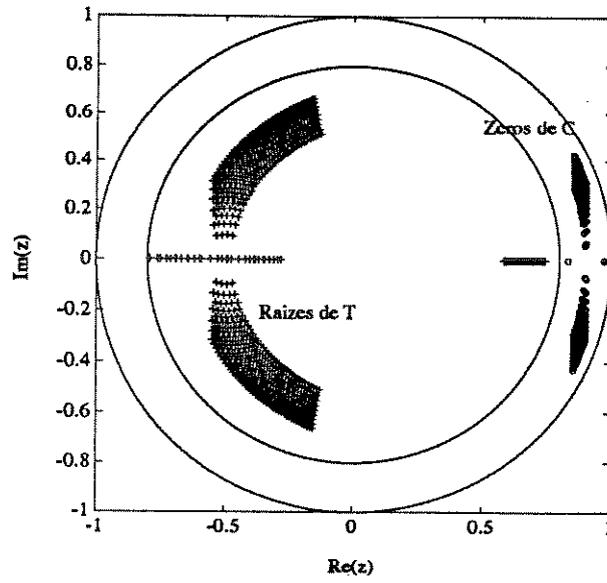


Fig. 5.11 - O lugar das raízes para o controlador inicial  $x_0$ .

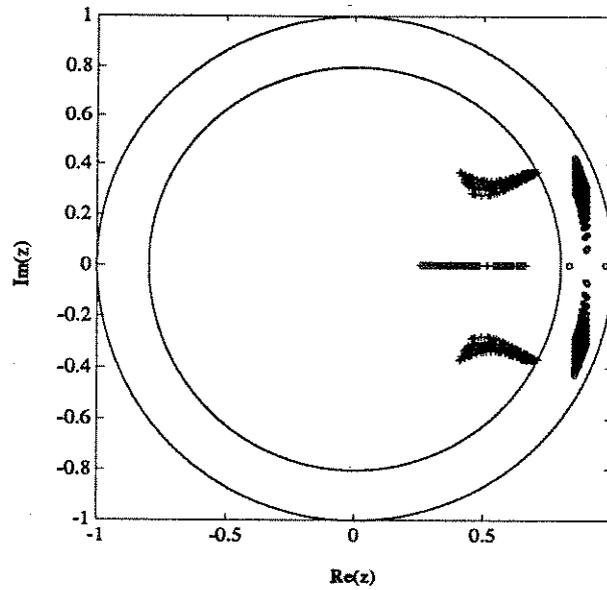


Fig. 5.12 - O lugar das raízes para o controlador final  $x_f$ .

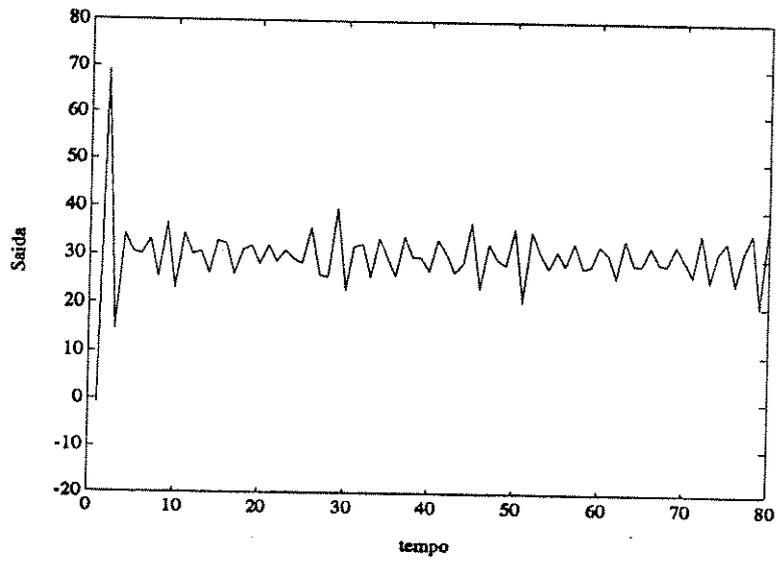


Fig. 5.13 - Sinal de saída para uma entrada em degrau de amplitude  $w=30$  (controlador inicial  $x_0$ ).

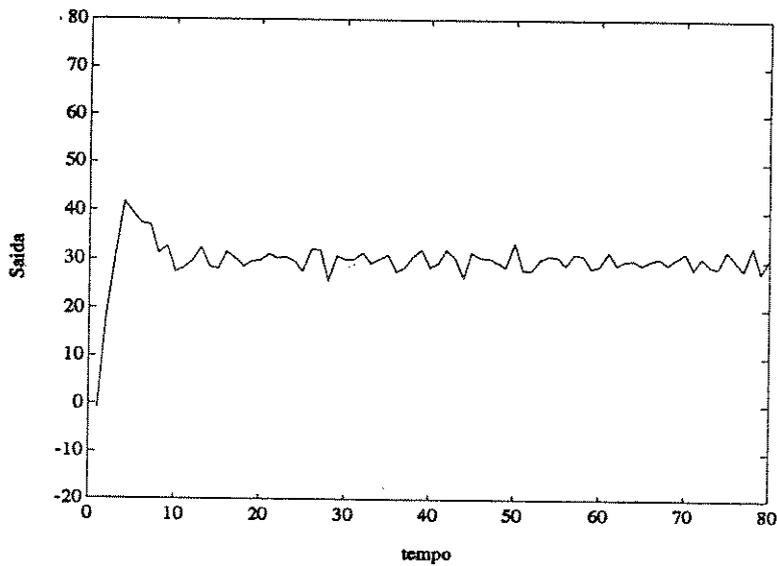


Fig. 5.14 - Sinal de saída para uma entrada em degrau de amplitude  $w=30$  (controlador final  $x_f$ ).

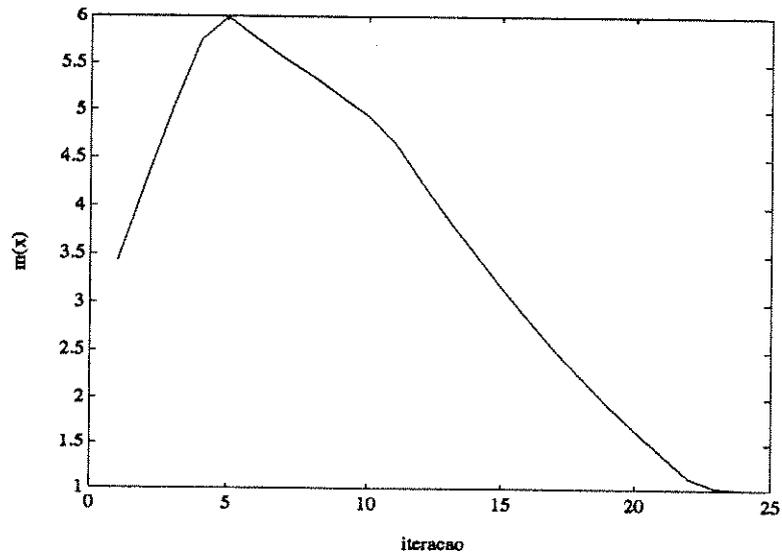


Fig. 5.15 - Variações na medida de robustez nas iterações do algoritmo.

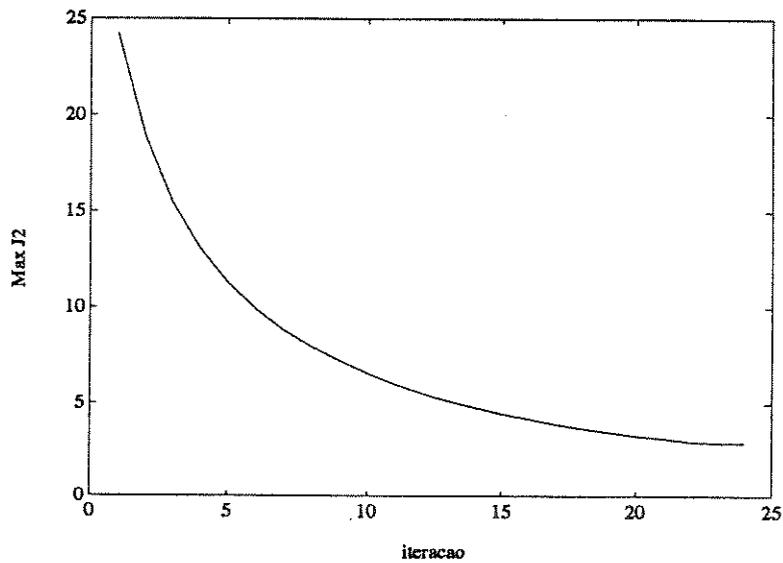


Fig. 5.16 - Variações na pior variância  $J_2$  durante as iterações do algoritmo.

pela interação de radiação gama com certos materiais moderadores como água pesada e berílio. O aparecimento destes nêutrons é retardado em relação à fissão pelo tempo requerido pelos produtos da mesma para emitir raios gama de energia apropriada.

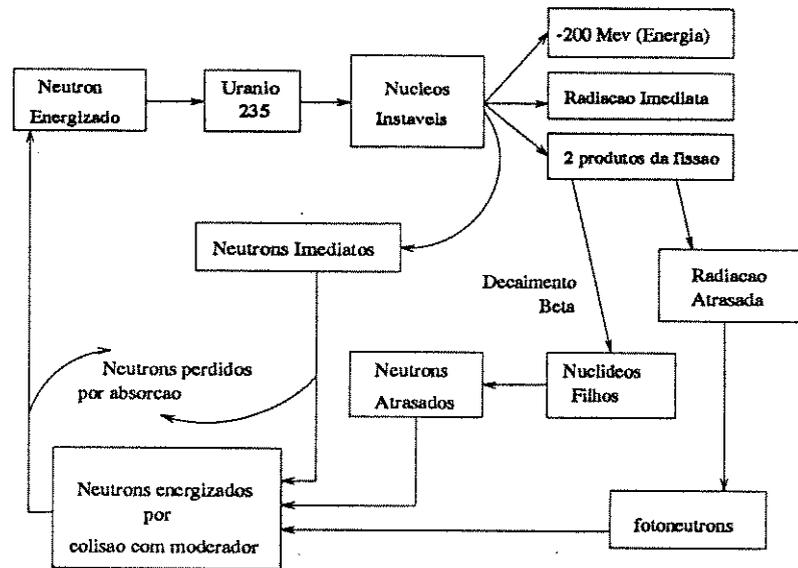


Fig. 5.17 - Processo de fissão nuclear.

A dinâmica de uma reação em cadeia de nêutrons pode ser quantificada através da definição de um fator de multiplicação do reator como sendo a relação entre os nêutrons produzidos na fissão e aqueles removidos da reação em cadeia por absorção ou escape. O reator é dito subcrítico, crítico ou supercrítico caso o fator de multiplicação seja menor, igual ou maior que a unidade. A quantidade mais importante no controle de potência de um reator nuclear é a reatividade, que é definida como o fator de multiplicação subtraído de 1 ( $\rho$ ). Uma reatividade zero corresponde, portanto, à condição crítica. Ajustes de potência em reatores são realizados através da inclusão ou retirada de elementos absorvedores de nêutrons que temporariamente alteram o fator de multiplicação.

Se um aumento de potência é desejado, um elemento absorvedor de nêutrons é retirado inserindo reatividade positiva, o que faz com que a potência cresça. Quando a potência de saída se aproxima do valor desejado, o dispositivo de controle retorna gradualmente à sua posição original a fim de reduzir a reatividade novamente a zero, e atingir a potência especificada sem sobre-sinal.

Sejam  $n$  a potência do reator e  $T$  o tempo de vida dos nêutrons imediatos da fissão. Sejam  $m$  o número de grupos de nêutrons atrasados e  $\lambda_i$  e  $\mu_i$ ,  $i=1,2,\dots,m$ , suas respectivas constantes de decaimento e fatores multiplicativos. Seja  $r$  a reatividade do reator.

A função de transferência que relaciona pequenas variações de reatividade  $\Delta r$  a pequenas variações  $\Delta n$  de um nível de potência  $N$  em um reator crítico ( $r = 0$ ) é dada, segundo Kucera (1979), por :

$$G(s) = \frac{\Delta n}{\Delta r} = \frac{N}{s.T + \sum_{i=1}^m \frac{s \cdot \mu_i}{s + \lambda_i}} \quad (5.23)$$

Assume-se que o reator opera em um nível de potência em que se pode desprezar realimentações de efeito térmico. Além disto, supõe-se que a entrada de reatividade esteja contaminada por um processo aleatório branco  $w$  de variância  $\sigma_w^2 \cdot N^2$ . O objetivo do controle é minimizar a variância da potência de saída em regime permanente, e ainda levar em conta a estabilidade robusta, considerando-se algumas incertezas nos parâmetros da planta.

Em particular, considera-se um reator térmico carregado com  $U^{235}$ , produzindo seis grupos de nêutrons atrasados, com os seguintes dados (Kucera, 1979) :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 0.0124 \text{ s}^{-1} & \mu_1 &= 0.00052 \\
\lambda_2 &= 0.0305 \text{ s}^{-1} & \mu_2 &= 0.00346 \\
\lambda_3 &= 0.111 \text{ s}^{-1} & \mu_3 &= 0.00310 \\
\lambda_4 &= 0.301 \text{ s}^{-1} & \mu_4 &= 0.00624 \\
\lambda_5 &= 1.13 \text{ s}^{-1} & \mu_5 &= 0.00182 \\
\lambda_6 &= 3.0 \text{ s}^{-1} & \mu_6 &= 0.00066
\end{aligned}
\tag{5.24}$$

Sejam o nível de potência desejado  $N=10$  MW e,

$$T = 0.001 \text{ s} \quad , \quad \sigma_w = 0.01 \quad . \tag{5.25}$$

Escolhendo-se um período de amostragem  $\tau=0.2$  s, um modelo discreto simplificado do reator pode ser dado por :

$$\Delta n = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \Delta r + \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} \xi \quad . \tag{5.26}$$

Com :

$$\begin{aligned}
A(z^{-1}) &= 1 - 1.27 z^{-1} + 0.272 z^{-2} \\
B(z^{-1}) &= 1.13 z^{-1} - 1.11 z^{-2} \\
C(z^{-1}) &= 1.13 - 1.11 z^{-1} \\
\sigma^2 &= \sigma_w^2 \cdot N^2 \quad (\text{Variância de } \xi(t)) \quad .
\end{aligned}
\tag{5.27}$$

Como  $c_0 \neq 1$ , pode-se normalizar o polinômio  $C(z^{-1})$ , fazendo  $c_0=1$ , e ajustar a variância do ruído branco, ou seja :

$$\begin{aligned}
C(z^{-1}) &= C(z^{-1})/1.13 = 1 - 0.9823 z^{-1} \\
\sigma_\xi^2 &= \sigma^2 \cdot (1.13)^2 = 0.0128
\end{aligned}
\tag{5.28}$$

Supõe-se incertezas do tipo intervalo para os parâmetros de  $A(z^{-1})$  :

$$\begin{aligned} -1.32 < a_1 < -1.22 \\ 0.262 < a_2 < 0.282 \end{aligned} \tag{5.29}$$

Definindo-se uma região D circular para alocação de pólos, com raio igual a 0.999, pode-se utilizar o algoritmo 4.1 a fim de, simultaneamente, minimizar a variância da saída ( $\sigma_n^2$ ) e aumentar a robustez do sistema diante das incertezas dadas .

Adotando-se como ordens dos controladores  $n_h=1$  e  $n_g=1$ , escolheu-se o controlador inicial  $x_0$  abaixo :

$$x_0 = [1 \quad -0.8389 \quad 2.2662 \quad 0.6218]^T, \quad x_0 \in W \tag{5.30}$$

Este controlador possui índice de robustez  $m(x_0) = 5.6947$ , e o pior caso para a variância é  $\text{Max}\{J_2(x_0)\} = 0.859 \text{ MW}^2$ , que ocorre para  $(a_1, a_2) = (-1.22 ; 0.282)$ .

Utilizando-se o algoritmo 4.1, com  $\delta_m=0.2$ , é possível diminuir sensivelmente a pior variância do sistema, sem que o índice de robustez fique menor que 1 (um).

O controlador final encontrado após 62 iterações foi o seguinte :

$$x_f = [1 \quad -0.987 \quad 0.3368 \quad -0.293]^T, \tag{5.31}$$

com índice de robustez  $m(x_f) = 1.01$  e  $\text{Max}\{J_2(x_f)\} = 0.0134 \text{ MW}^2$  para  $(a_1, a_2) = (-1.22, 0.282)$ .

As figuras 5.18 e 5.19 mostram a localização dos pólos para o controlador inicial e final, considerando as incertezas paramétricas correspondentes aos respectivos índices de robustez .

As saídas do sistema em malha fechada em regime permanente para os

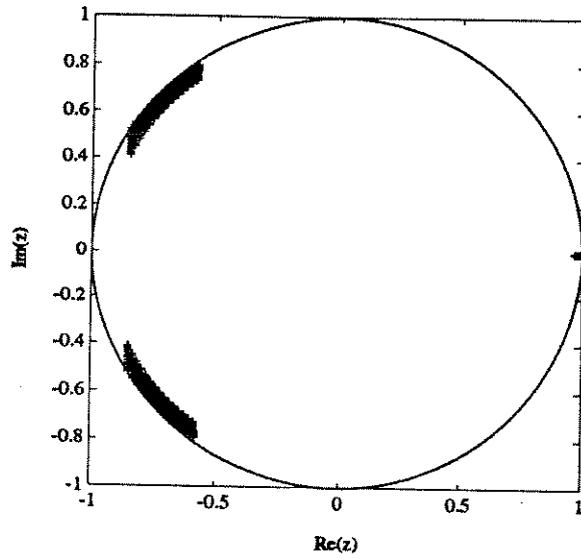


Fig. 5.18 - Lugar das raízes para o controlador  $x_0$ .

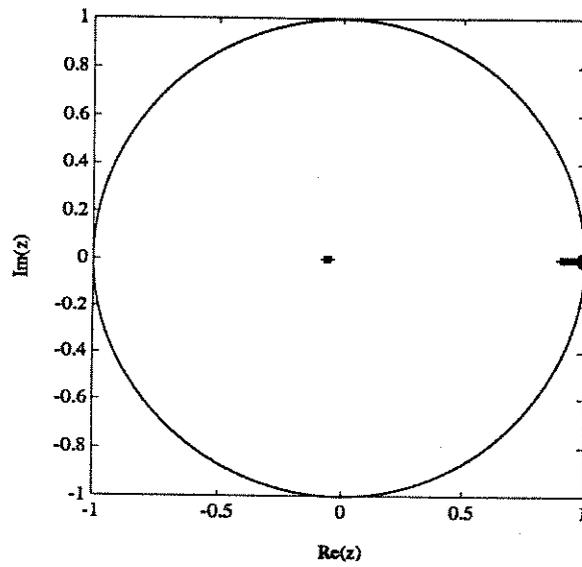


Fig. 5.19 - Lugar das raízes para o controlador  $x_f$ .

controladores inicial e final podem ser vistas nas figuras 5.20 e 5.21, respectivamente. Considerou-se nestas simulações os valores de parâmetros do processo  $(a_1 ; a_2) = (-1.22 ; 0.282)$ .

#### 5.2.4 MINIMIZAÇÃO DA VARIÂNCIA DO SINAL DE CONTROLE

Considera-se aqui um sistema de primeira ordem onde se deseja minimizar a variância do sinal de controle.

Considera-se o processo definido pelos seguintes polinômios  $A(z^{-1}), B(z^{-1})$  e  $C(z^{-1})$  :

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} \\ B(z^{-1}) &= b_0 + b_1 z^{-1} \\ C(z^{-1}) &= 1 + c_1 z^{-1} \end{aligned} \tag{5.32}$$

Os valores para os coeficientes do polinômio  $B(z^{-1})$  são :

$$b_0 = 0.6 ; b_1 = 0.8 . \tag{5.33}$$

Considera-se o atraso  $d=1$ . Os valores dos parâmetros de  $A(z^{-1})$  e  $C(z^{-1})$  estão sujeitos aos seguintes intervalos de incerteza :

$$\begin{aligned} 0.54 < a_1 < 0.66 \\ 0.8 < c_1 < 0.9 \end{aligned} \tag{5.34}$$

Deseja-se obter um controlador que aloque os pólos de malha fechada do sistema numa região  $D$  circular , considerando-se as incertezas em  $a_1$ .  $D$  é um círculo de raio 0.5, centrado em  $(0.4,0)$ . Além disto, é desejável um controlador que apresente uma variância do sinal de controle reduzida, considerando-se as incertezas em  $a_1$  e  $c_1$ .

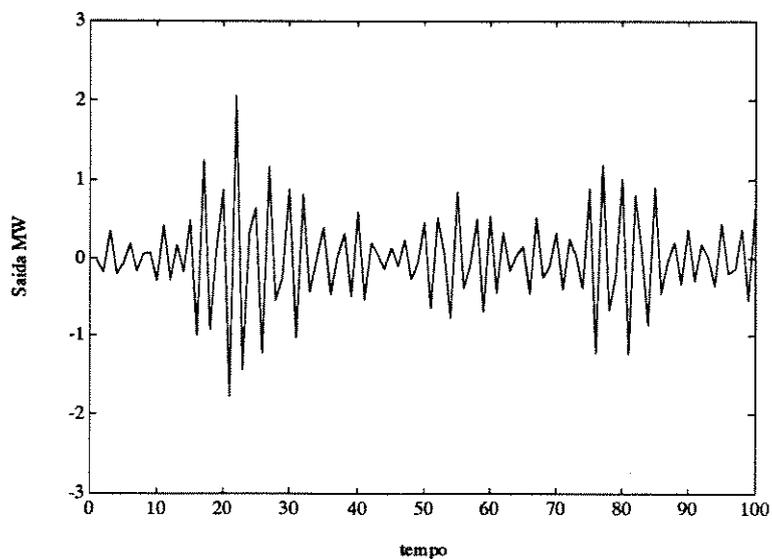


Fig.5.20 - Saída do sistema em regime permanente, considerando-se o controlador inicial  $x_0$ .

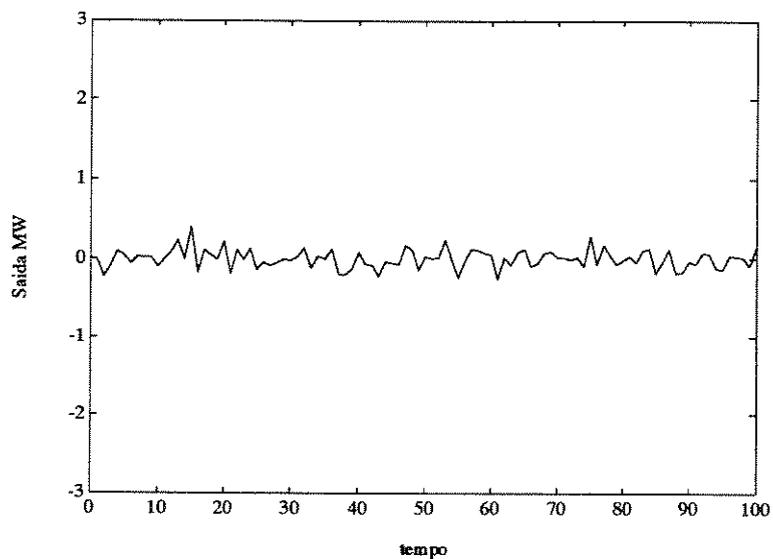


Fig. 5.21 - Saída do sistema em regime permanente, considerando-se o controlador final  $x_f$ .

Supõe-se a seguinte estrutura para o controlador :

$$G(z^{-1}) = g_0 \quad ; \quad H(z^{-1}) = 1 + h_1 z^{-1} . \quad (5.35)$$

Considera-se o seguinte controlador inicial  $x_0$ :

$$x_0 = [1 \quad -2.3045 \quad 1.8409]^T \quad (5.36)$$

Este controlador apresenta um índice de robustez  $m(x_0)=1.1081$ , sendo portanto uma solução para o problema de alocação ( $m(x)>1$ ). O pior caso da variância do controle, considerando-se todas as incertezas, é dado por  $\text{Max}\{J_2(x_0)\}=14.1817$ .

Através do algoritmo 4.1, adotando-se  $\delta_m=0.2$ , chegou-se ao seguinte controlador final :

$$x_f = [1 \quad -1.3448 \quad 1.0939]^T, \quad (5.37)$$

com  $m(x_f)=1.002$ , também satisfazendo o problema robusto, mas agora com  $\text{max}\{J_2(x_f)\}=2.5025$ . Os pólos para o sistema em malha fechada para os controladores inicial e final podem ser vistos nas figuras 5.22 e 5.23, respectivamente.

As figuras 5.24 e 5.25 mostram o sinal de controle, quando se aplica à entrada um degrau de amplitude  $w=30$ , para os controladores inicial e final, respectivamente. Os valores dos parâmetros do processo utilizados nestas simulações foram  $a_1=0.66$  e  $c_1=0.9$ . Nota-se uma acentuada redução na variância do sinal de controle. Neste exemplo, em particular, observou-se também que a variância da saída sofreu uma redução.

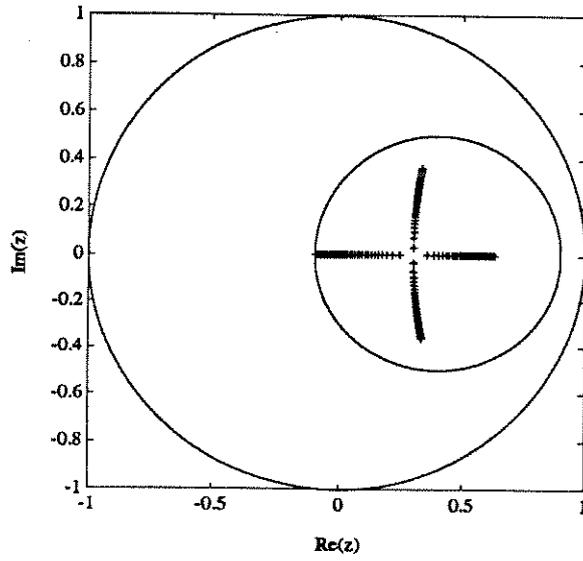


Fig.5.22- Lugar das raízes para o controlador  $x_0$ .

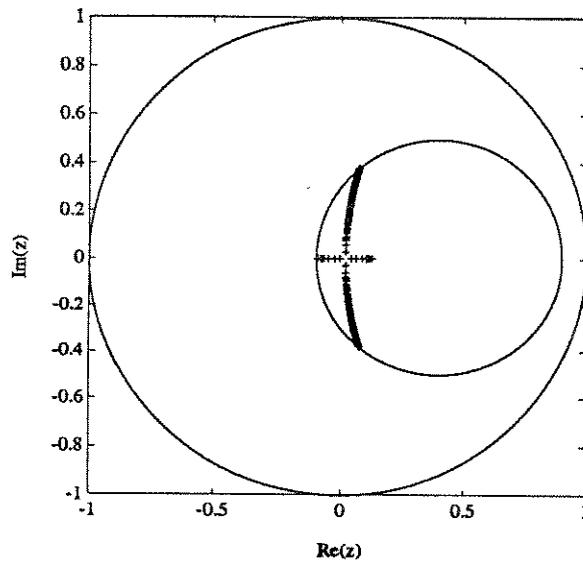


Fig. 5.23- Lugar das raízes para o controlador  $x_f$ .

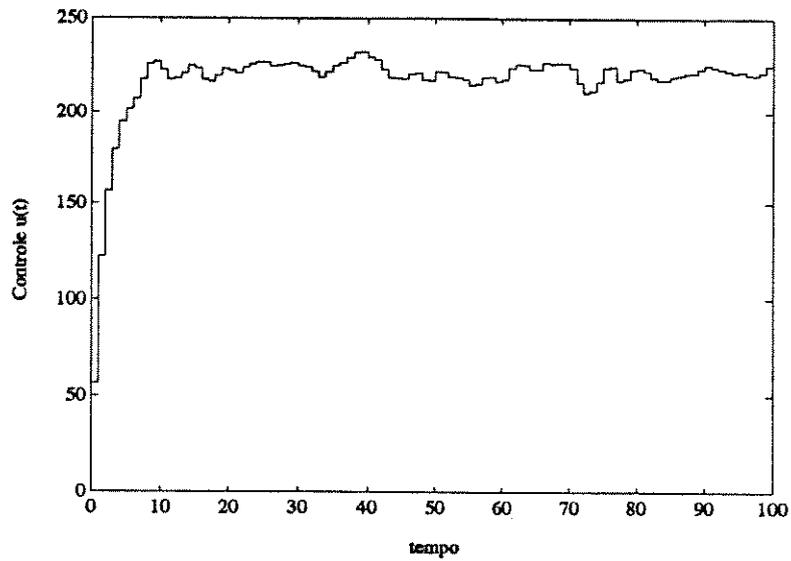


Fig. 5.24- Sinal de controle para uma entrada em degrau de amplitude  $w=30$  (controlador  $x_0$ ).

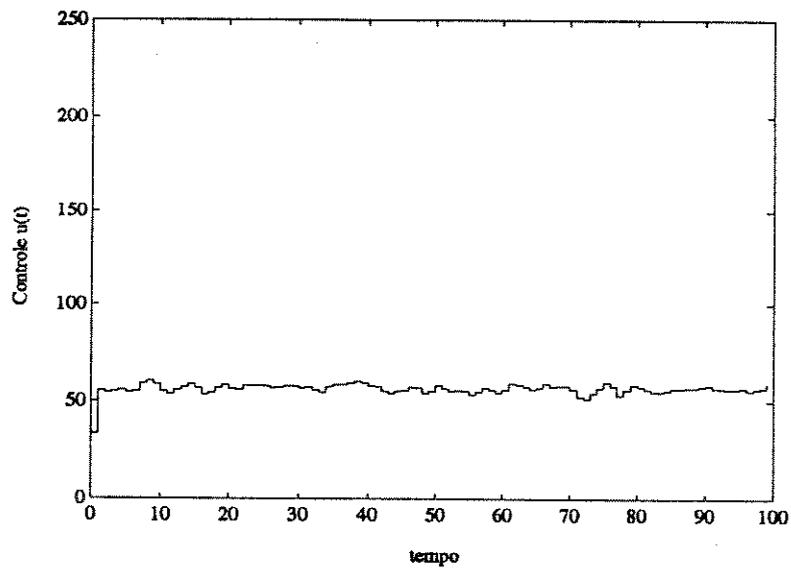


Fig. 5.25- Sinal de controle para uma entrada em degrau de amplitude  $w=30$  (controlador  $x_f$ ).

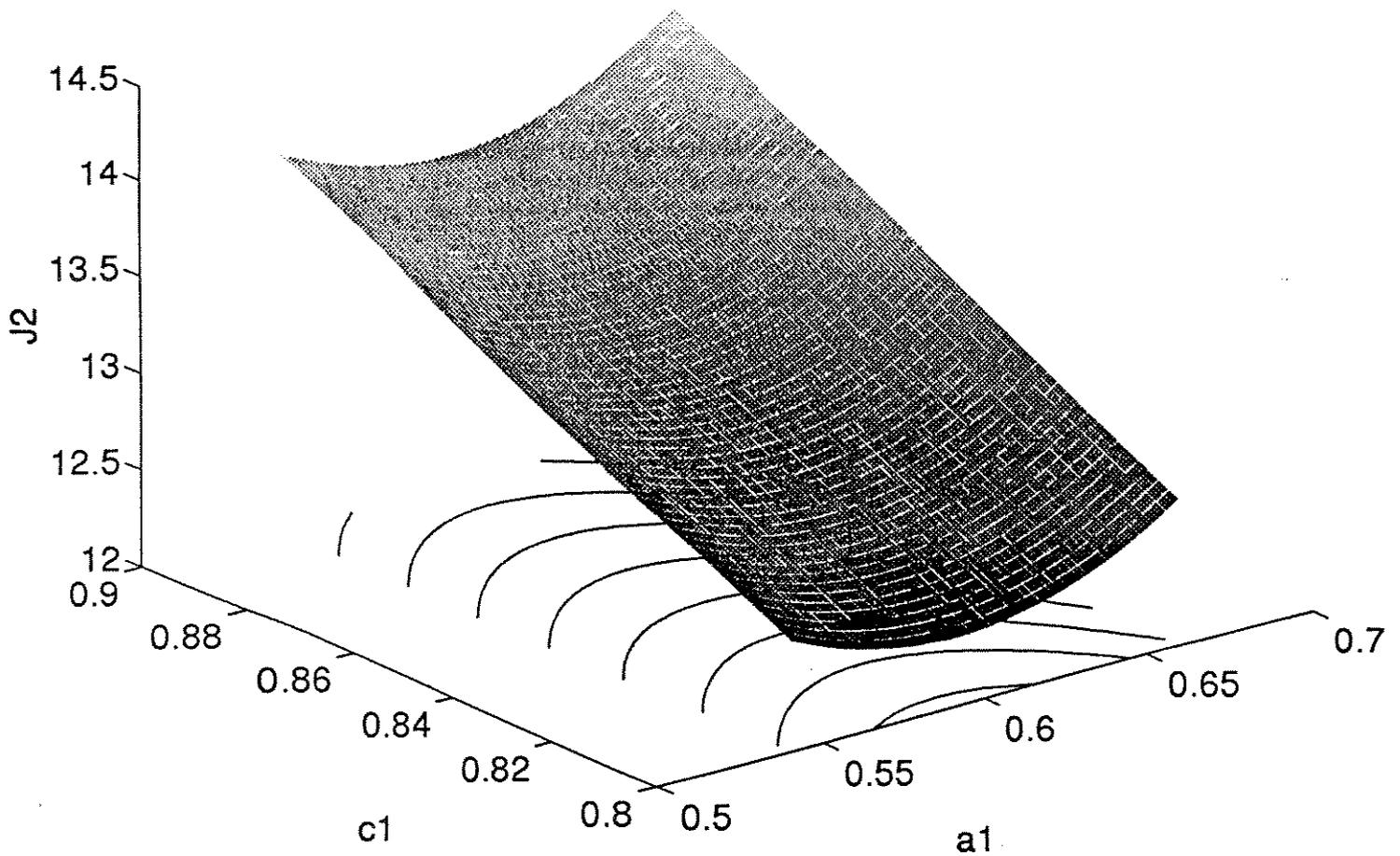


Fig. 5.26- Variância do controle em função dos parâmetros da planta  $a_1$  e  $c_1$  para o controlador  $x_0$ .

Executando-se uma varredura nos parâmetros do processo  $(p,c)$ , que para este exemplo corresponde ao retângulo definido por  $0.54 < a_1 < 0.66$  e  $0.8 < c_1 < 0.9$ , pode-se obter o gráfico tridimensional da função  $J_2(p,c)$  para os controladores  $x_0$  e  $x_f$ . Comparando-se os dois gráficos nota-se uma diminuição da variância do controle para todos os valores do processo, assim como é possível observar a característica convexa da função  $J_2(p,c)$ . A figura 5.26 mostra o gráfico de  $J_2(p,c)$  para o controlador  $x_0$ , enquanto que a figura 5.27 mostra o gráfico de  $J_2(p,c)$  para o controlador  $x_f$ .

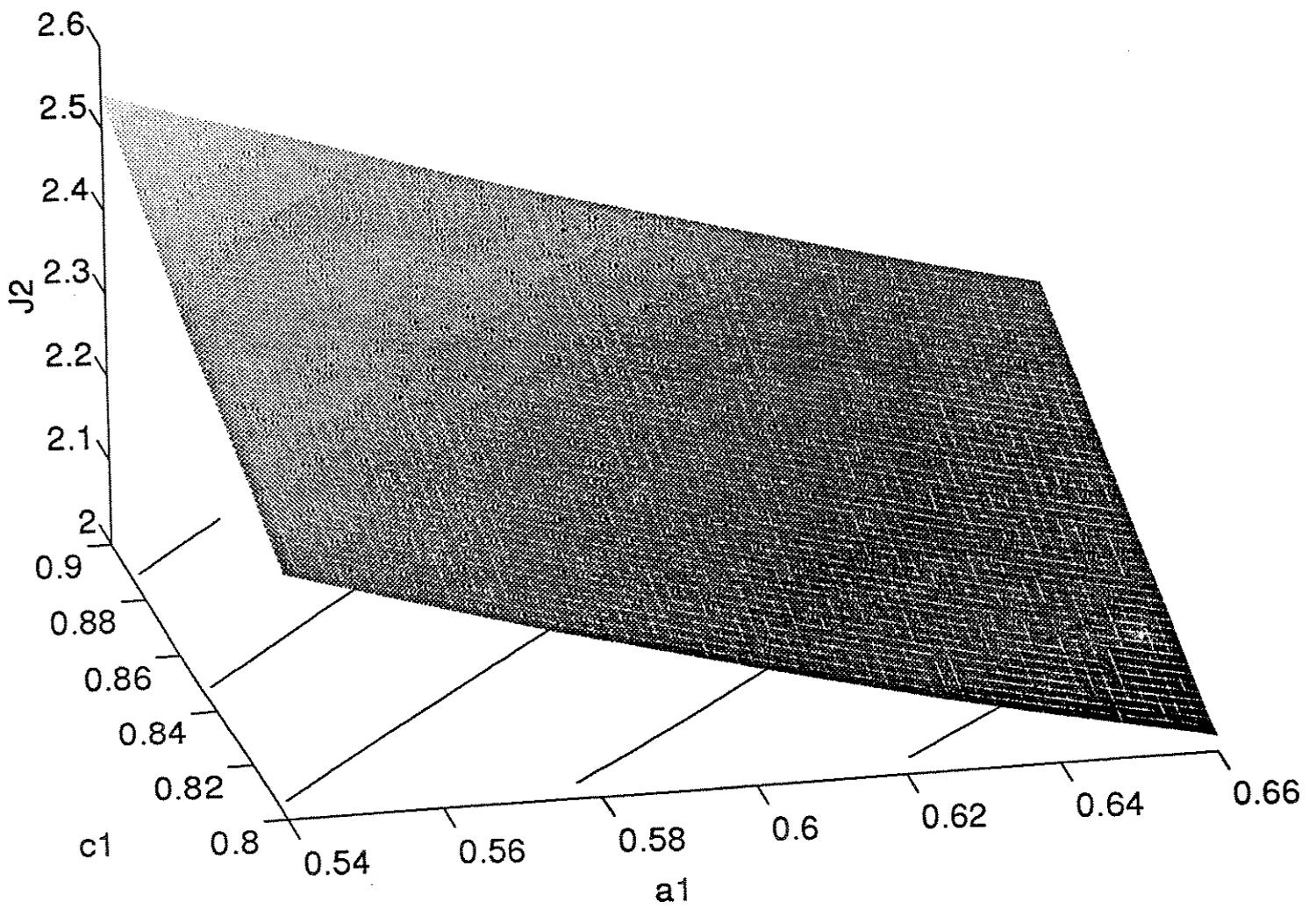


Fig. 5.27- Variância do controle em função dos parâmetros da planta  $a_1$  e  $c_1$  para o controlador  $x_f$ .

### 5.3 EXEMPLO DE UTILIZAÇÃO DO ALGORITMO 4.2

Discute-se aqui uma aplicação do algoritmo 4.2 utilizando-se o mesmo exemplo da seção 5.2.2 considerando um sistema de segunda ordem. Transcreve-se a seguir os dados referentes ao problema.

Considera-se o processo definido pelos seguintes polinômios  $A(z^{-1})$ ,  $B(z^{-1})$  e  $C(z^{-1})$  :

$$\begin{aligned}A(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \\B(z^{-1}) &= b_0 + b_1 z^{-1} \\C(z^{-1}) &= 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}\end{aligned}\tag{5.38}$$

Supõe-se que os valores para os coeficientes de  $B(z^{-1})$  são conhecidos com precisão, sendo dados por :

$$b_0 = 0.7 ; b_1 = -0.5 .\tag{5.39}$$

Considera-se  $d=1$  na equação (2.2). Os valores dos parâmetros de  $A(z^{-1})$  e  $C(z^{-1})$  estão sujeitos aos seguintes intervalos de incerteza :

$$\begin{aligned}-1.37 &< a_1 < -1.17 \\0.252 &< a_2 < 0.292 \\-1.8 &< c_1 < -1.7 \\0.805 &< c_2 < 0.905\end{aligned}\tag{5.40}$$

Deseja-se obter um controlador do tipo PI que aloque os pólos de malha fechada do sistema na região D apresentada na figura 5.10 , considerando-se as incertezas no polinômio  $A(z^{-1})$ . D é um círculo de raio 0.8, centrado na origem. Além disto, é desejável um controlador que apresente uma mínima variância de saída considerando-se as incertezas em  $A(z^{-1})$  e  $C(z^{-1})$ .

Considera-se a seguinte estrutura de controlador :

$$G(z^{-1}) = g_0 + g_1 z^{-1} ; H(z^{-1}) = 1 - z^{-1} ;\tag{5.41}$$

Utilizando-se o algoritmo apresentado em Araújo (1991) para maximização da medida de robustez encontrou-se o seguinte controlador  $x_0$  para ser usado no algoritmo 4.2

$$x_0 = [1 \quad -1 \quad 2.5495 \quad -0.1014]^T \quad (5.42)$$

Este controlador apresenta um índice de robustez  $m(x_0)=6.2886$ . O pior caso da variância da saída, considerando-se todas as incertezas correspondentes a  $m=1$  é dado por  $\text{Max } J_2\{x\} = 10.1638$ .

Utilizando-se o algoritmo 4.2 inicializado com o controlador  $x_0$ , e tendo como incremento das ponderações  $\Delta\lambda=0.01$ , obtém-se o seguinte controlador final :

$$x_f = [1 \quad -1 \quad 0.9032 \quad 0.0028]^T, \quad (5.43)$$

com  $m(x_f)=1.000$  e  $\text{Max } J_2 = 2.9224$ .

A curva que relaciona os valores de  $\text{Max } J_2$  e  $m(x)$  obtidos nas iterações do algoritmo pode ser vista na figura 5.28 . Os pólos em malha fechada para os controladores inicial e final podem ser vistos nas figuras 5.29 e 5.30, respectivamente.

Procede-se a seguir uma análise detalhada da curva da figura 5.28.

Observou-se inicialmente que o controlador inicial  $x_0$  apresentava um gradiente modificado da medida de robustez  $\Gamma$  formado a partir de duas direções de gradiente correspondentes aos pontos  $z = -0.8$  e  $z = 0.2851 + j0.7475$  no contorno da região de alocação de pólos  $D^*$  (conforme figura 5.29).

Esta direção  $\Gamma$  combinada ao gradiente negativo da função  $J_2$  fornece uma direção inicial ponderada por  $\lambda$ , dada por

$$\delta x = (1-\lambda).\Gamma - \lambda.\nabla J_2 \quad (5.44)$$

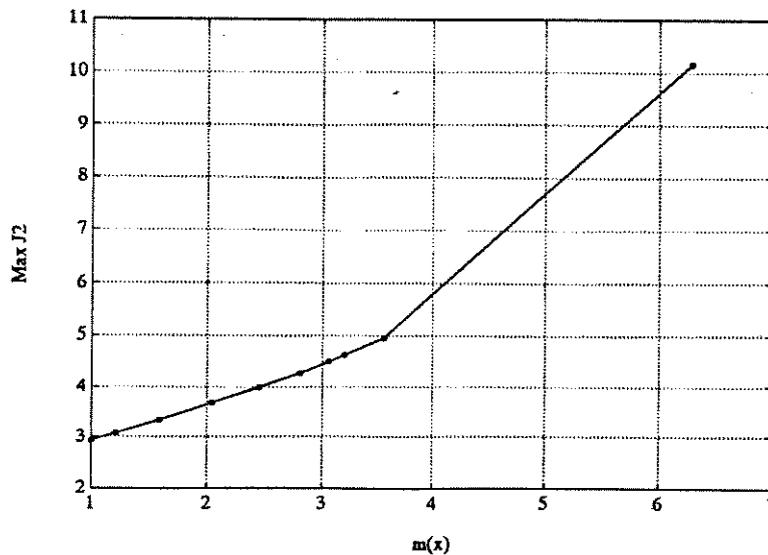


Fig. 5.28- Curva de otimização relacionando os critérios medida de robustez e variância máxima da saída.

Como a ponderação inicial  $\lambda$  é nula tem-se apenas  $\delta x = \Gamma$ , e como  $x_0$  já é um máximo para  $m(x)$  não há melhoria na função ponderada  $J_\lambda$ . Portanto,  $\lambda$  é incrementado para o mesmo controlador  $x_0$ . Observou-se que os incrementos em  $\lambda$  se sucedem até o valor  $\lambda=0.5$ , quando então a contribuição de  $\lambda \nabla J_2$  é suficiente para fornecer uma direção  $\delta x$  que modifica o controlador  $x_0$  fornecendo um novo controlador  $x$  cujo gradiente da função medida de robustez é formado a partir de um único vetor associado ao ponto  $z = 0.5843 + j0.5464$  na região de contorno  $D^*$ .

Este gradiente  $\Gamma$  combinado a  $-\nabla J_2(x)$  fornece uma nova direção que favorece bastante o crescimento da função ponderada  $J_\lambda$ , justificando a grande melhoria do primeiro para o segundo ponto na curva da figura 5.28.

A partir deste ponto a ponderação continua aumentando com sucessivas melhorias na função  $J_\lambda$  até uma ponderação final de  $\lambda=0.95$ .

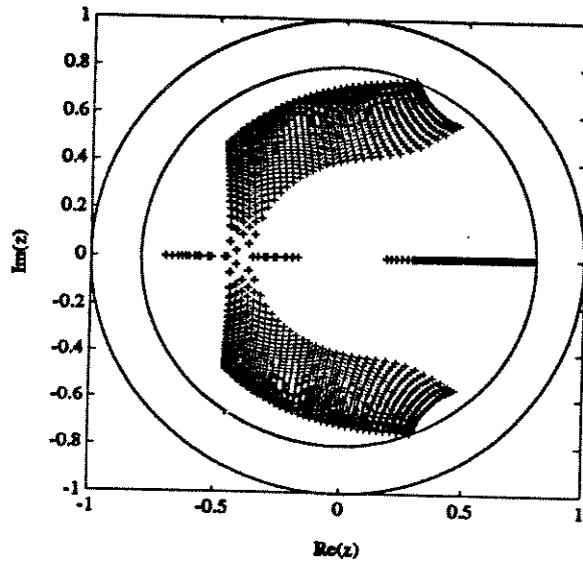


Fig. 5.29 - Lugar das raízes para o controlador  $x_0$ .

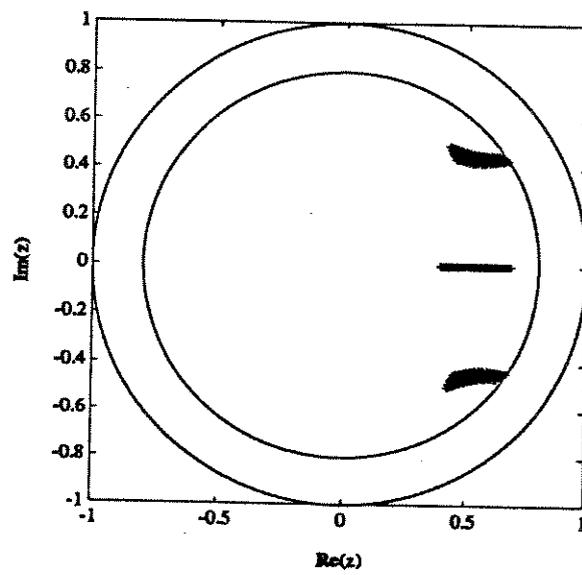


Fig. 5.30- Lugar das raízes para o controlador  $x_1$ .

Observa-se neste tipo de algoritmo, que os pontos de não-diferenciabilidade da função  $m(x)$  podem provocar situações como a descrita anteriormente, ou seja, pontos em que a melhoria da função ponderada  $J_\lambda$  é muito pequena, sendo necessário um aumento da ponderação  $\lambda$  para alterar a situação.

## 5.4 CONCLUSÃO

Apresentou-se neste capítulo cinco exemplos de aplicação dos algoritmos 4.1 e 4.2 envolvendo os problemas de robustez frente a incertezas paramétricas e de minimização das variâncias de saída e controle para os sistemas em malha fechada. Constatou-se que a utilização do algoritmo 4.1 apresenta bons resultados, embora as flutuações na medida de robustez durante as iterações do algoritmo apresente variações bruscas devido à utilização de diferentes gradientes para situações distintas do índice de robustez. Este problema já não ocorre com o algoritmo 4.2 devido à utilização de um único gradiente para a função ponderada  $J_\lambda$ . Além disto este algoritmo permite a análise de diversas situações de compromisso entre os dois objetivos otimizados. Em certas situações pode-se aceitar uma variância maior que a mínima se se deseja uma medida de robustez maior que um. Vale ressaltar aqui, que nestes casos as variâncias  $J_2$  devem ser recalculadas para as incertezas correspondentes aos respectivos índices de robustez, já que na curva de otimização da figura 5.28 os valores de  $J_2$  são sempre calculados tendo como referência as incertezas correspondentes a  $m=1$ .

Uma observação interessante pode ser feita com relação a uma situação "ideal" para a localização dos pólos dentro da região  $D$  tendo em vista a minimização da variância. Pode-se observar como regra geral que os pólos do sistema em malha fechada para uma situação de mínima variância tendem

a se aproximar dos zeros do polinômio  $C(z)$ . Isto é razoável tendo em vista que  $C(z)$  está presente como zero da função de transferência em malha fechada do sistema (equação 4.1 ), e um cancelamento entre pólos e zeros proporciona uma situação mais favorável com relação a propagação da perturbação de entrada. Uma consequência deste fato é que nos casos em que os zeros do polinômio  $C(z)$  estão muito afastados da região  $D$  de alocação de pólos a minimização da variância pode ser bastante comprometida.

## CAPÍTULO 6

## CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentada uma metodologia de projeto de controladores com desempenho robusto em relação às incertezas paramétricas. A robustez considerada envolveu dois aspectos. A estabilidade relativa, através da alocação de pólos em uma região pré-definida e a minimização de variâncias dos sinais relevantes ao sistema, através de uma função de custo  $J_2$ . As incertezas são descritas através de intervalos, conhecidos *a priori*, não havendo restrição quanto ao número de parâmetros incertos.

As características de desempenho relacionadas à estabilidade relativa são especificadas por uma região no círculo unitário, onde devem se localizar os pólos de malha fechada, para toda incerteza admissível do processo. A única restrição é que esta seja conexa. Uma função medida de robustez é utilizada para a comparação entre controladores e para a determinação dos intervalos máximos para os parâmetros incertos, associados a um controlador dado, de maneira a garantir a estabilidade relativa.

O critério de minimização das variâncias dos sinais de saída ou controle, representados pela função de custo  $J_2$ , define uma característica adicional de desempenho. Isto é, satisfeita a condição de estabilidade relativa para as incertezas nominais de projeto, procura-se um controlador que minimize o critério  $J_2$ .

O controlador ótimo é obtido através de algoritmos iterativos, que utilizam direções de gradiente das duas funções envolvidas. Com relação à função medida de robustez, pode-se obter situações em que o gradiente não existe, quando então se propõe uma direção alternativa de busca. Já a função de custo  $J_2$  possui um bom comportamento, tanto em relação aos parâmetros do controlador, sendo sempre diferenciável, como em relação aos parâmetros do processo, apresentando inclusive uma característica convexa na maioria dos casos, fato este que levou à adoção de uma regra heurística com bons resultados.

É importante ressaltar que os algoritmos apresentados não garantem a

localização de um ótimo global, devido a não convexidade da função medida de robustez.

Algumas sugestões para estudos futuros são a extensão destes resultados para sistemas em tempo contínuo, bem como para sistemas SIMO (entrada simples, saída múltipla) e MISO (entrada múltipla, saída simples).

Outra sugestão é a análise mais detalhada do comportamento da função medida de robustez, envolvendo algoritmos mais complexos, considerando a existência de subgradientes.

APÊNDICE A

CÁLCULO DA VARIÂNCIA J2

Este apêndice mostra como se obtém uma expressão analítica para a variância da saída de um sistema linear de tempo discreto, com uma entrada ruído branco, em função dos parâmetros deste sistema. Utiliza-se conceitos da teoria de probabilidades e da teoria de processos estocásticos. A referência básica utilizada aqui é dada em (Papoulis, 1989).

Seja o sinal discretizado  $x[n]$  um processo estocástico estacionário, onde  $n$  indica os instantes de tempo múltiplos do período de amostragem  $T$ . Por definição, tem-se que a função de auto-correlação  $R[m]$  deste sinal é dada por :

$$R[m] = E\{ x[n+m].x^*[n] \} \quad (A.1)$$

O sinal  $*$  indica o conjugado de um número complexo e  $E\{\cdot\}$  é o operador esperança, que é dado por  $E\{x\} = \sum_i p_i x_i$ , onde  $p_i$  é a probabilidade da variável aleatória  $x$  assumir o valor  $x_i$ .

A transformada discreta de Fourier (DFT) de  $R[m]$  é chamada de Densidade Espectral de Potência do sinal  $x[n]$ . Sendo esta designada por  $S(\omega)$ , tem-se que a mesma é uma função periódica com coeficientes  $R[m]$  na série de Fourier e período  $2\Omega = 2\pi/T$ , ou seja :

$$S(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R[m].e^{-jm\omega T} \quad (A.2)$$

Desta equação segue-se que :

$$R[m] = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} S(\omega).e^{jm\omega T} d\omega, \quad \Omega=\pi/T. \quad (A.3)$$

Supondo-se que  $x[n]$  é um sinal de média nula, pode-se determinar a

variância do mesmo a partir de (A.1) e (A.3) como sendo :

$$E\{ x[n]^2 \} = R[0] = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} S(\omega).d\omega \quad . \quad (A.4)$$

Introduzindo-se a transformada z da correlação  $R[m]$ , tem-se:

$$S(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R[m].z^{-m} \quad , \quad (A.5)$$

$$S(e^{j\omega T}) = S(\omega) \quad . \quad (A.6)$$

Em seguida será determinada a variância do sinal de saída de um sistema linear cuja entrada é um processo estocástico  $x[n]$ . Este sistema é especificado em termos de sua resposta ao impulso  $h[n]$  e função de transferência  $H(z)$ , que se relacionam através da equação :

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n].z^{-n} \quad . \quad (A.7)$$

A saída deste sistema é determinada através da convolução discreta de  $x[n]$  com  $h[n]$  :

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k].h[k] = x[n]*h[n] \quad . \quad (A.8)$$

A partir da equação (A.8) pode-se derivar as seguintes relações :

$$x[n+m].y^*[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n+m].x^*[n-k].h^*[k] \quad (A.9)$$

$$y[n].y^*[n-m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k].y^*[n-m].h[k] \quad , \quad (\text{A.10})$$

e também :

$$\begin{aligned} R_{xy}[m] &= E\{ x[n+m].y^*[n] \} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} E\{ x[n+m].x^*[n-k].h^*[k] \} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} E\{ x[n+m].x^*[n-k] \} . h^*[k] = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{xx}[k+m].h^*[k] = R_{xx}[m]*h^*[-m] \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$R_{yy}[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{xy}[m-k].h[k] = R_{xy}[m]*h[m] \quad . \quad (\text{A.12})$$

Aplicando-se a DFT em ambos os lados das equações (A.11) e (A.12),

tem-se :

$$S_{xy}(\omega) = S_{xx}(\omega).H^*(e^{j\omega T}) \quad (\text{A.13})$$

$$S_{yy}(\omega) = S_{xy}(\omega).H(e^{j\omega T}) \quad . \quad (\text{A.14})$$

A partir das equações (A.11) e (A.12), e da relação abaixo :

$$\rho[m] = h[m]*h^*[-m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[m+k].h^*[k] \quad , \quad (\text{A.15})$$

pode-se concluir que :

$$R_{yy}[m] = R_{xx}[m]*\rho[m] \quad (\text{A.16})$$

$$S_{yy}(\omega) = S_{xx}(\omega).|H(e^{j\omega T})|^2 \quad (\text{A.17})$$

Se  $h[n]$  é real, então  $\mathbf{H}^*(e^{j\omega T}) = \mathbf{H}(e^{-j\omega T})$  e a equação (A.17)

resulta em :

$$S_{yy}(z) = S_{xx}(z) \cdot \mathbf{H}(z) \cdot \mathbf{H}(z^{-1}) \quad (\text{A.18})$$

Nota-se, finalmente, que :

$$\begin{aligned} E\{y[n]^2\} &= \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} S_{yy}(\omega) \cdot d\omega = R_{yy}[0] = \\ &= \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} S_{xx}(\omega) \cdot \mathbf{H}(e^{j\omega T}) \cdot \mathbf{H}(e^{-j\omega T}) \cdot d\omega \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Para o caso particular em que a entrada  $x[n]$  é o ruído branco de variância unitária, sendo o mesmo não-correlacionado, tem-se que :

$$R_{xx}[n] = \delta[n] \quad (\text{A.20})$$

$$S_{xx}[\omega] = 1 \quad (\text{A.21})$$

Logo, a equação (A.19) resulta em :

$$E\{y[n]^2\} = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} \mathbf{H}(z) \cdot \mathbf{H}(z^{-1}) \cdot d\omega, \quad \Omega = \pi/T. \quad (\text{A.22})$$

APÊNDICE B

PROVA DO TEOREMA 3.1

Neste apêndice, demonstra-se o teorema 3.1, que determina a função medida de robustez local  $m(x,z)$ .

Considera-se o item a) do teorema 3.1 — os vetores  $a$  e  $b$  em  $U(x,z)$  são linearmente dependentes:

$$m(x,z) = k_z = \frac{|a_0|}{\sum_{i=1}^{nq} |a_i|} \quad . \quad (B.1)$$

Pela definição de  $m(x,z)$ ,  $k_z$  é o maior valor do parâmetro  $k$  tal que  $\mathbb{P}(k) \cap v(x,z) \equiv \emptyset$ . Observa-se que  $\mathbb{P}(k)$  é uma região hipercúbica, centrada na origem, com arestas de comprimento igual a  $2k$ , e  $v(x,z)$  é definido pela expressão (3.30).

Inicialmente, será provado, por contradição, que  $\mathbb{P}(k_z) \cap v(x,z) \equiv \emptyset$ . Seja  $q^*$  um vetor pertencente à interseção entre  $\mathbb{P}(k_z)$  e  $v(x,z)$  dado por:

$$q^* = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_{nq}]^T \in \mathbb{R}^{nq} \quad . \quad (B.2)$$

Como  $q^* \in \mathbb{P}(k_z)$ , então:

$$|q_i| < k_z, \forall i \in \{1, 2, \dots, nq\} \quad . \quad (B.3)$$

A relação a seguir é válida, pois  $q^* \in v(x,z)$ :

$$\sum_{i=1}^{nq} a_i q_i = -a_0 \quad . \quad (B.4)$$

Considerando-se o módulo da equação (B.4), decorre da desigualdade triangular que:

$$|-a_0| = \left| \sum_{i=1}^{nq} a_i q_i \right| \leq \sum_{i=1}^{nq} |a_i q_i| \quad . \quad (\text{B.5})$$

Logo:

$$|-a_0| \leq \sum_{i=1}^{nq} |a_i| |q_i| \quad . \quad (\text{B.6})$$

A partir da desigualdade (B.3), tem-se que:

$$\sum_{i=1}^{nq} |a_i| |q_i| < \sum_{i=1}^{nq} |a_i| k_z \quad . \quad (\text{B.7})$$

Comparando-se as equações (B.6) e (B.7), pode-se concluir que:

$$k_z > \frac{|-a_0|}{\sum_{i=1}^{nq} |a_i|} \quad . \quad (\text{B.8})$$

Este resultado é uma contradição, pois, pela equação (B.1)  $k_z$  é dado por:

$$k_z = \frac{|a_0|}{\sum_{i=1}^{nq} |a_i|} \quad . \quad (\text{B.9})$$

A interseção  $\mathbb{P}(k_z) \cap v(x,z) \equiv \emptyset$ , portanto, é vazia, devido à arbitrariedade na escolha do  $\mathbf{q}^*$ .

Em seguida, será provado que  $k_z$  é o maior valor de  $\mathbf{k}$  tal que  $\mathbb{P}(\mathbf{k}) \cap v(x,z) \equiv \emptyset$ . Seja  $k' > k_z$  tal que

$$\mathbb{P}(k') \cap v(x,z) \equiv \emptyset \quad . \quad (\text{B.10})$$

Considera-se o vetor  $\mathbf{q}^* \in \mathbb{R}^{nq}$  cujas componentes são definidas como:

$$q_i = \text{sgn}(a_i)k_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, nq\}, \quad (\text{B.11})$$

onde a função  $\text{sgn}(\cdot)$  é dada por :

$$\text{sgn}(a) = \begin{cases} +1, & \text{se } a > 0 \\ 0, & \text{se } a = 0 \\ -1, & \text{se } a < 0 \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

e  $k_i$  é dado por:

$$k_i = \frac{-a_0}{\sum_{i=1}^{nq} |a_i|} \quad (\text{B.13})$$

Será demonstrado, a seguir, que o vetor  $\mathbf{q}^*$ , definido em (B.11), pertence a  $\mathbb{P}(k')$  e a  $v(x, z)$  e que, portanto, a interseção em (B.10) não é vazia com  $k' > k_z$ .

Como  $|q_i| = |k_i| = k_z, \forall i \in \{1, 2, \dots, nq\}$ , então:

$$|q_i| < k', \forall i \quad (\text{B.14})$$

A partir da desigualdade (B.14), portanto, pode-se concluir que  $\mathbf{q}^* \in \mathbb{P}(k')$ .

Considerando-se a definição em (B.11), a seguinte relação é válida:

$$\sum_{i=1}^{nq} a_i q_i = \sum_{i=1}^{nq} a_i \text{sgn}(a_i) k_i \quad (\text{B.15})$$

A expressão (B.15) pode ser simplificada como:

$$\sum_{i=1}^{nq} a_i q_i = \sum_{i=1}^{nq} |a_i| k_i \quad (\text{B.16})$$

Substituindo-se o valor de  $k_1$ , dado pela equação (B.13), na expressão acima (B.16), tem-se que:

$$\sum_{i=1}^{nq} a_i q_i = -a_0 \quad . \quad (B.17)$$

Logo, o vetor  $q^*$  também pertence a  $v(x,z)$ . Como consequência,  $k_z$  é o maior valor de  $k$  tal que  $\mathbb{P}(k) \cap v(x,z) \equiv \emptyset$ , ou seja,  $\mathbb{P}(k_z)$  é o maior hipercubo, centrado na origem, limitado pelo hiperplano  $\sum_{i=1}^{nq} a_i q_i = -a_0$ .

Considera-se, agora, o item b) do teorema 3.1 — os vetores  $a$  e  $b$  em  $U(x,z)$  são linearmente independentes:

$$m(x,z) = k_z = \max_i \frac{|c_{0i}|}{\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{nq} |c_{ji}|}, \quad i=1,2,\dots,nq, \quad (B.18)$$

onde  $c_{ji} = a_j b_i - a_i b_j$ .

O conjunto  $v(x,z)$ , definido em (3.30), pode ser expresso pela interseção entre os seguintes hiperplanos:

$$\sum_{j=1}^{nq} a_j q_j = -a_0 \quad (B.19)$$

$$\sum_{j=1}^{nq} b_j q_j = -b_0 \quad . \quad (B.20)$$

Neste caso, o problema de determinar  $k_z$ , o maior valor do parâmetro  $k$  tal que  $\mathbb{P}(k) \cap v(x,z) \equiv \emptyset$ , pode ser dividido em vários problemas equivalentes ao do item a). Com este objetivo serão analisadas todas as projeções de  $v(x,z)$  sobre os hiperplanos ortogonais às coordenadas  $q_i$ ,  $i \in \{1,2,\dots,nq\}$ .

Obtendo-se, inicialmente, o valor de  $q_i$  em função dos  $q_j$  ( $j \neq i$ ) na equação (B.19) e, em seguida, substituindo-o na equação (B.20) (ou vice-versa), tem-se que a projeção de  $v(x,z)$  sobre o hiperplano ortogonal à coordenada  $q_i$  é dada por:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{nq} (a_{j i} b_{i j} - a_{i j} b_{j i}) q_j = -(a_{0 i} b_{i 0} - a_{i 0} b_{0 i}) \quad , \quad (B.21)$$

ou mais sucintamente:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{nq} c_{ji} q_j = -c_{0i} \quad . \quad (B.22)$$

Como demonstrado anteriormente no item a), o maior hipercubo, centrado na origem, limitado pelo hiperplano (B.22) é obtido para  $k$  igual a:

$$k = k_i = \frac{|-c_{0i}|}{\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{nq} |c_{ji}|} \quad . \quad (B.23)$$

Obviamente,  $c_{ji} = 0$  para  $j=i$ .

O maior valor do parâmetro  $k$  tal que  $P(k) \cap v(x,z) \equiv \emptyset$  é dado pela maximização de  $k_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, nq\}$ , pois todas as projeções de  $v(x,z)$  consideradas são ortogonais a cada  $q_i$ , ou seja:

$$k_z = \max_i k_i = \max_i \frac{|-c_{0i}|}{\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{nq} |c_{ji}|} \quad , i=1, 2, \dots, nq. \quad (B.24)$$

$k_z$  determina, então, o maior hipercubo, centrado na origem, limitado pela interseção entre os hiperplanos (B.19) e (B.20). Este resultado

é igual ao apresentado em (B.18). Portanto, a demonstração do teorema 3.1 está concluída.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ackermann, J. (1980). Parameter space design of robust control systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.AC-25, No.6, 1058-1072.
- Ackermann, J. (1985). *Sampled-Data Control Systems: Analysis and Synthesis, Robust System Design*. Springer-Verlag, Berlin.
- Ackermann, J. E. and B. R. Barmish (1988). Robust Schur stability of a polytope of polynomials. *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.33, No.10, 984-986.
- Anderson, B. D. O., E. I. Jury and M. Mansour (1987). On robust Hurwitz polynomials. *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.AC-32, No.10, 909-913.
- Araújo, H. X. de and R. Santos-Mendes (1991). Robust control design for linear systems with uncertain parameters. *Proceedings of the IFAC Symposium on Design Methods for Control Systems*, Zurich, Switzerland.
- Araújo, H. X. de (1991). Controladores robustos para sistemas lineares com parâmetros incertos. *Tese de Mestrado*, Unicamp, Campinas.
- Åström, K. J. (1970). *Introduction to Stochastic Control Theory*. Academic Press, New York.
- Åström, K. J. and B. Wittenmark (1973). On self-tuning regulators. *Automatica*, Vol.9, 185-199.
- Barmish, R. B. (1984). Invariance of the strict Hurwitz property for polynomials with perturbed coefficients. *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.AC-29, No.10, 935-936.
- Bartlett, A. C. and C. V. Hollot (1988). A necessary and sufficient condition for Schur invariance and generalized stability of polytopes of polynomials. *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.33, No.6, 575-578.
- Bernard, J. A. and F. J. Wyant (1992). Experiments illustrating the importance of automated reasoning. *IEEE Control Systems Magazine*, Vol.12, No.2, 1992.
- Bialas, S. and J. Garloff (1985). Stability of polynomials under coefficient perturbation. *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.AC-32, No.3, 310-312.
- Biernacki, R. M., H. Hwang and S. P. Bhattacharyya (1987). Robust stability with structured real parameter perturbations. *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.AC-32, No.6, 495-506.

- Black, H. S. (1927). Stabilized feedback amplifiers. U.S. patent no.2, 102, 671, *apud* Dorato, P. (1987). Robust Control. *IEEE Press Selected reprint series*. New York, N.Y.
- Bode, H. W. (1945). Network analysis and feedback amplifier design. Princeton, N.J., *apud* Dorato, P. (1987). Robust Control. *IEEE Press Selected reprint series*. New York, N.Y.
- Bose, N. K., E. I. Jury and E. Zeheb (1988). On robust Hurwitz and Schur polynomials. *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.33, No.12, 1166- 1168.
- Clarke, D. W. and P. J. Gawthrop (1975). Self-tuning controller. *Proc. IEE*, Vol.122, No. 9, 929-934.
- Cruz, J. B. Jr. and W. R. Perkins (1964). A new approach to the sensitivity problem in multivariable feedback systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol.AC-9 , 216-223, *apud* Dorato, P. (1987). Robust Control. *IEEE Press Selected reprint series*. New York, N.Y.
- De Larminat, P. (1989). La commande robuste: un tour d'horizon. *Journees Nationales du G. R. "Automatique"*.
- Dorato, P. (1987). Robust Control. *IEEE Press Selected reprint series*. New York, N.Y.
- Franklin, G. F. and J. D. Powell (1980). Digital Control of Dynamic Systems. Addison-Wesley Pub. Company, Inc.
- Ghaoui, L. E. (1990). Robustness of linear systems to parameter variations. *Phd Thesis*, Stanford University, USA.
- Hall, A. C. (1956). Frequency Response. Macmillan, New York, *apud* Åström, K. J. (1970). Introduction to Stochastic Control Theory. Academic Press, New York.
- Hollot, C. V. and A.C. Bartlett (1986). Some discrete-time counterparts to Kharitonov's stability criterion for uncertain systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.AC-31, No.4, 355-356.
- Horowitz, I. (1963). Synthesis of Feedback Systems. Academic Press, New York, NY., *apud* Dorato, P. (1987). Robust Control. *IEEE Press Selected reprint series*. New York, N.Y.
- Horowitz, I. and M. Sidi (1972). Synthesis of feedback systems with large plant ignorance for prescribed time-domain tolerances. *Int. Journal of Control*, Vol.16/2, 287-309.

Jury, E. I. (1974). *Inners and Stability of Dynamic Systems*. Wiley-Interscience, New York.

Kharitonov, V. L. (1979). Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations. *Differential Equations*, Vol.14, 1483-1485.

Kucera, V. (1979). *Discrete Linear Control*. Chichester. Wiley-Interscience, John Wiley.

Kuo, B. C. (1980). *Digital Control Systems*. Holt, Rinehart and Winston, Inc., NY.

Ogata, K. (1987). *Discrete-Time Control Systems*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ.

Paiva, E. C. de, R. Santos-Mendes and P. A. V. Ferreira, (1993). Optimization of robust stability and robust H2 performance for ARMAX models with uncertain parameters. In: *IFAC World Congress, 12*, Jul. 1993, Sidney, Australia. (a ser apresentado).

Papoulis, A. (1989). *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw-Hill Company, Singapore.

Rosenbrock, H. H. (1974). *Computer-Aided Control Systems Design*. Academic Press, New York, N.Y., *apud* Dorato, P. (1987). *Robust Control*. *IEEE Press Selected reprint series*. New York, N.Y.

Santos-Mendes, R. (1984). Controlador auto-ajustável para alocação de pólos e minimização de uma variância generalizada. *Tese de Mestrado*, Unicamp, Campinas.

Santos-Mendes, R. (1988). Synthèse de régulateurs robustes à placement de pôles. *Thèse de Doctorat*, Université Paul Sabatier de Toulouse, France.

Santos-Mendes, R. and J. Aguilar-Martin (1989). Robust pole placement design. *Int. Journal of Control*, Vol.50, no.1, 113-128.

Siljak, D. (1989). Parameter space methods for robust control design: a guided tour. *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.34, No.7, 674-688.

Soh, C. B., C.S. Berger and K. P. Dabke (1985). On the stability properties of polynomials with perturbed coefficients. *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.AC-30, No.10, 1033-1036.

Soh, C. B., C.S. Berger and K. P. Dabke (1987). Addendum to "On the stability properties of polynomials with perturbed coefficients". *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.AC-32, No.3, 239- 240.

Soh, Y. C. (1989). Strict Hurwitz property of polynomials under coefficient perturbation. *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.34, No.6, 629-632.

Wei, K. H. and R. K. Yedavalli (1987). Invariance of strict Hurwitz property for uncertain polynomials with dependent coefficients. *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.AC-32, No.10, 907- 909.

Yeung, K. S . and S. S. Wang (1987). A simple proof of Kharitonov's theorem. *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol.AC-32, No.9, 822-823.