

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA

DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA

FILTROS ADAPTATIVOS COM RESPOSTA IMPULSIVA INFINITA:
COMPARAÇÕES E ESQUEMA DE ESTABILIZAÇÃO

Por: Yoichi Tsukamoto 789

Orientador : Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val

Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia Elétrica da UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida por Yoichi Tsukamoto

e aprovada pela Comissão

Julgadora em 16/10/92

Orientador

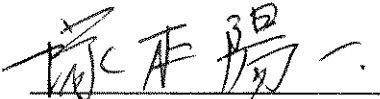
Campinas, setembro de 1992

AGRADECIMENTOS

Ao professor Dr. João Bosco Ribeiro do Val, meu orientador pelo apoio, paciência, ensinamento e incentivo que recebi para a realização desta tese.

Aos professores, alunos e funcionários da FEE/UNICAMP pelo apoio.

Campinas, setembro de 1992


Yoichi Tsukamoto

ÍNDICE

	pág.
INTRODUÇÃO	1.1
Descrição da Tese	1.5
 CAPÍTULO 1. Algoritmos para Equalizadores Adaptativos	 1.1
1.1. Equalizador Adaptativo de Wiener do tipo IIR	1.2
1.2. Técnicas baseados na Teoria de Estabilidade Nonlinear	1.5
1.2.1. A Estrutura HARF	1.5
1.2.2. Hiperestabilidade e o Filtro Adaptativo	1.7
1.2.3. SHARF (Simple Hyperstable Recursive Filter)	1.12
1.3. Técnica de Prefiltragem	1.16
1.3.1. Algoritmos de PF (PreFiltering)	1.16
1.3.2. Algoritmos de PF em Identificação	1.16
1.4. Equalizador Adaptativo de Kalman	1.25
1.4.1. Identificação do Canal	1.34
1.4.2. Estimação Recursiva da Variância do Ruído	1.35
1.5. Filtragem Adaptativa no Domínio da Frequência	1.38
1.5.1. Estrutura de FADF IIR real	1.39
1.5.2. Algoritmos de Adaptação	1.40
1.5.3. Simplificação do Algoritmo de Adaptação	1.42
1.6. Algoritmo de Gradiente Estocástico (FIR)	1.45
1.7. Características dos Filtros Adaptativos IIR	1.48
 CAPÍTULO 2. Simulador de Equalizadores Adaptativos	 2.1
2.1. Procedimento para definição de Intervalo de Confiança	2.8

CAPÍTULO 3. Resultados e Considerações	3.1
3.1. A Influência do Atraso δ do Sinal Desejado, sobre o desempenho do Equalizador Adaptativo de AFM	3.2
3.2. Comparações entre os algoritmos	3.10
3.3. A Influência da Relação Sinal/Ruído, SNR , sobre o Erro Médio Quadrático em regime dos Equalizadores Adaptativos	3.25
3.4. A Influência da Ordem M da Parte Transversal do Filtro Equalizador sobre o Erro Médio Quadrático em regime dos Equalizadores Adaptativos de SHARF e AFM	3.33
3.5. A Influência da Ordem N da Parte Realimentada do Filtro Equalizador sobre o Erro Médio Quadrático em regime dos Equalizadores Adaptativos de AFM e Kalman	3.36
3.6. A Resposta Impulsiva dos Canais Equalizados	3.45
3.7. Sumário do Capítulo	3.47
 CAPÍTULO 4. Algoritmo de AFM com Esquema de Estabilização	4.1
4.1. Algoritmo de AFM com Esquema de Estabilização	4.2
4.2. Resultados das Simulações	4.9
4.2.1. Equalização dos Canais com os Zeros próximos ao C.R.U.	4.9
4.2.2. Equalização Rápida com Passo Variável	4.23
 CAPÍTULO 5. Conclusões	5.1
 APÊNDICE 1. Cálculos de $R_{xx}(z)$ e $R_{dx}(z)$	A.1.1
APÊNDICE 2. Prova da (cond.2) para o Sistema na Fig.1.2.6	A.2.1
APÊNDICE 3. Intervalo de Confiança para Erro Médio Quadrático	A.3.1
REFERÊNCIAS	R.1

INTRODUÇÃO

O termo "filtro" é usado frequentemente para descrever dispositivos, na forma de hardware ou software, que se aplicam a conjuntos de dados observados em presença de ruído, com o objetivo de se obter informações sobre uma quantidade de interesse correlacionada à estas observações. O "Filtro Linear" produz estimativas sobre a quantidade de interesse, como uma função linear dos dados observados aplicadas à sua entrada.

Numa abordagem estatística da solução do problema de filtragem linear, a idéia é conseguir um filtro linear tendo os dados ruidosos como entrada, que por si tenha o propósito de minimizar os efeitos do ruído na sua saída, submetido a algum critério estatístico. Se temos o conhecimento sobre certos parâmetros estatísticos (média e funções de correlação) do sinal e do ruído e, este é aditivo, a abordagem prática consiste em minimizar o valor médio quadrático do erro do sinal, que é definido como a diferença entre o sinal desejado e a saída do filtro. Para entradas estacionárias, a solução resultante é conhecida como "Filtro de Wiener", e este é ótimo no sentido médio quadrático. Para entradas não-estacionárias, o filtro ótimo deve ser também variante no tempo e uma solução para estes casos é obtida com o "Filtro de Kalman".

O projeto de um filtro de Wiener requer previamente as informações sobre a estatística dos dados processados, no entanto, essas informações em geral não são disponíveis. Neste caso, uma solução eficiente para operação em tempo real consiste na utilização do "Filtro Adaptativo" [1]. Este filtro adota um algoritmo recursivo e tem a capacidade de se autoprojetar. O algoritmo é inicializado por um conjunto determinado de dados, conhecidos previamente. Num ambiente estacionário, o filtro idealmente deve convergir para a solução ótima de Wiener depois de sucessivas iterações. Em um ambiente não-estacionário, o algo-

ritmo manifesta a capacidade de rastreamento (tracking) se as variações das estatísticas dos dados de entrada são suficientemente lentas. Como consequência direta da aplicação do algoritmo recursivo, um filtro adaptativo é um dispositivo não-linear.

Diversos algoritmos foram propostos na literatura e este estudo continua de forma intensa. O desempenho dos algoritmos recursivos é avaliado através de certos parâmetros tais como:

- **velocidade de convergência** - o número de iterações necessárias para o algoritmo atingir um valor suficientemente próximo ao da solução ótima de Wiener, em resposta à entradas estacionárias.
- **desajuste** - a diferença entre o valor final do erro médio quadrático do filtro adaptativo e o mínimo erro médio quadrático do filtro de Wiener.
- **robustez** - a habilidade do algoritmo para operar satisfatoriamente com dados de entrada mal condicionados.
- **requerimento computacional** - o número de operações aritméticas necessárias para executar uma iteração completa do algoritmo, o tamanho de memória necessária para armazenar os dados e o programa, e o investimento necessário para programar tal algoritmo num computador.
- **propriedades numéricas** - o efeito dos erros de arredondamento e quantização.
- **estrutura de fluxo de informação do algoritmo** - podem facilitar a escolha de arquiteturas específicas de alto desempenho.

No ajuste do filtro adaptativo leva-se em conta o sinal de entrada do filtro $x(n)$, o sinal de saída do filtro $y(n)$, e o sinal desejado $d(n)$. Usando o sinal de erro, formado pela diferença entre $d(n)$ e $y(n)$, um algoritmo recursivo de adaptação ajusta os coeficientes do filtro para minimizar a medida do erro, como na Fig.1. Em alguns casos uma versão filtrada da medida é alternativamente

empregada. O valor médio do erro quadrático ξ , definido abaixo, é no geral usado como medida do erro a ser minimizado.

$$\xi = E[e^2(n)] \quad \text{onde} \quad e(n) = d(n) - y(n)$$

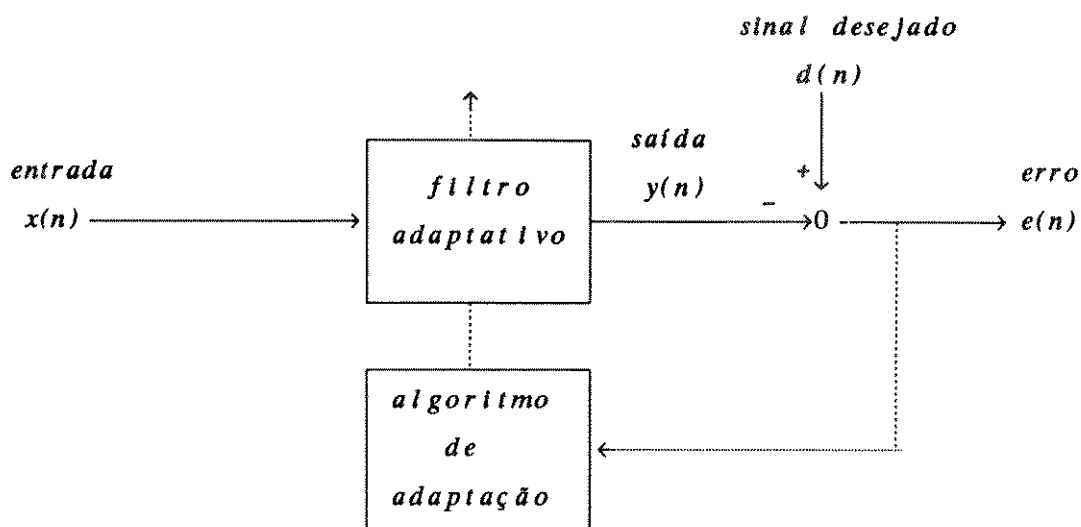


Fig.1 - Filtragem Adaptativa

Definindo o sinal desejado $d(n)$ nas diversas situações de aplicação, o filtro adaptativo pode ser utilizado em diferentes aplicações tais como: identificação de sistemas, controle, comunicações em geral, radares, sonares, processamento de imagens, etc.

Na aplicação de equalização ou modelamento inverso como na Fig.2, o filtro adaptativo tenta recuperar uma versão atrasada do sinal $s(n)$, o qual se supõe alterado pela planta e somado a ruído. O atraso na Fig.2 é para compensar aquele introduzido pela planta e o filtro adaptativo.

Uma aplicação típica desta configuração é na equalização de um canal de comunicações. Tais aplicações são realizadas classicamente através de filtros adaptativos do tipo FIR (Finite Impulse Response). No entanto, a característica não recursiva de filtro FIR frequentemente exige um número excessivo de elemen-

tos (taps) do filtro, o que o torna mais sensível a ruídos. Visto que o canal de transmissão entre transmissor e receptor pode ser bem representado em geral como um filtro FIR [2], podemos esperar que o filtro ótimo de correção seja do tipo IIR (Infinite Impulse Response) para modelar os pólos que irão cancelar os zeros do canal de transmissão. Por essas razões, nos anos recentes, a pesquisa sobre filtros adaptativos IIR tem sido intensa. Nas seções 1.2, 1.3, 1.4 e 1.5 do CAPÍTULO 1, apresentamos algumas das técnicas difundidas na literatura.

A recompensa imediata por se adotar filtros adaptativos IIR é a diminuição substancial de computação devido à forma realimentada do filtro. Pelas razões já expostas, a realimentação permite obter um filtro de ordem muito mais baixa para uma resposta impulsiva de duração muito longa, dando origem a uma característica de resposta em frequência mais precisa. Porém, a presença de realimentação compromete a estabilidade do filtro e pode afetar adversamente a sensibilidade numérica geral do filtro. As superfícies do erro quadrático, além disso, nem sempre são unimodais e o equalizador pode convergir a um mínimo local. Ainda assim, o maior obstáculo para o uso amplo de filtros adaptativos IIR é a falta de algoritmos robustos e bem entendidos para ajuste dos parâmetros do filtro.

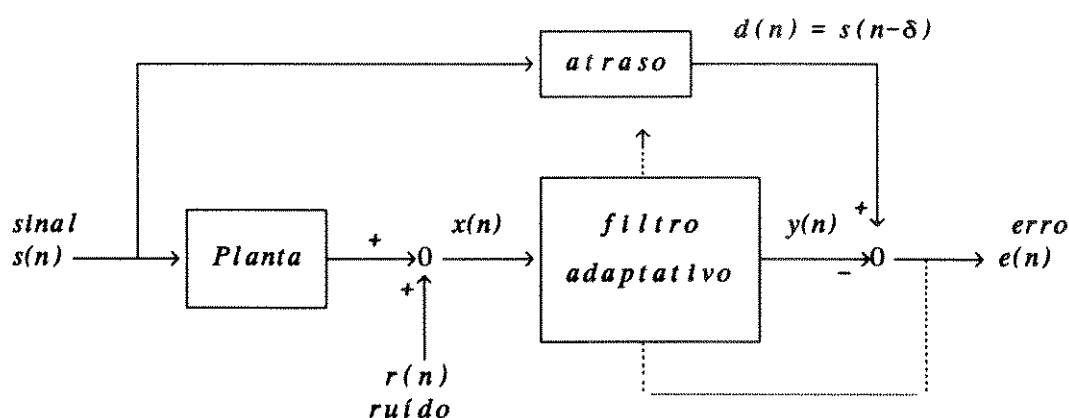


Fig.2 - Aplicação de Equalização

DESCRIÇÃO DA TESE

No **CAPÍTULO 1**, apresentamos primeiramente a estrutura do equalizador de Wiener do tipo IIR. Na sequência, são abordados vários algoritmos de filtros adaptativos do tipo IIR que foram propostos recentemente :

- SHARF (Simple Hyperstable Adaptive Recursive Filter) [3] ;
- AFM (Adaptive Filtering Mode) [4] ;
- Kalman [5] ;
- FADF IIR real simplificado (Filtragem Adaptativa no Domínio da Frequência) [6] .

Para comparação posterior com um filtro adaptativo do tipo FIR clássico, abordamos também o algoritmo de Gradiente Estocástico ou LMS (Least Mean Square) [7] .

Como cada técnica é apresentada com méritos próprios na literatura, se faz necessário uma comparação entre elas. Na tese escolheu-se comparar as técnicas em evidência (SHARF, AFM, Kalman, FADF IIR real simplificado) em equalização de canais telefônicos, como uma contribuição ao estudo de RSDI. Exceto o filtro equalizador de Kalman que possui resultados analíticos (ainda que aproximados), as outras estruturas não permitem uma análise do seu comportamento quando aplicados a canais genéricos. Por esta razão optou-se nesta tese pela abordagem de simulação comparativa entre os filtros aplicados a canais telefônicos. Descrevemos o simulador de equalizadores adaptativos no **CAPÍTULO 2**.

As comparações sobre os seguintes parâmetros de desempenho foram realizadas :

- erro médio quadrático em regime ;
- número global de multiplicações em cada iteração ;
- número de iterações para se atingir a convergência ;
- número global de multiplicações para se atingir convergência.

Comparamos os resultados obtidos para os equalizadores adaptativos IIR entre si

e com o de LMS, e apresentamos os resultados das simulações no **CAPÍTULO 3**. Para analisar os resultados das simulações apropriadamente, quanto a sua significância estatística, construímos intervalos de confiança para erro médio quadrático em regime dos equalizadores nos diversos canais. O procedimento apresentado no **APÊNDICE 3** foi empregado, que é uma extensão do procedimento proposto por Law e Carson [8] .

Através dos resultados das simulações, observamos que os equalizadores adaptativos IIR ajustam-se aos canais de fase não-mínima utilizando-se um passo de adaptação suficientemente pequeno para ajuste dos parâmetros. O equalizador adaptativo de Kalman apresenta de forma sistemática o menor erro quadrático em regime, com o menor número de iterações para atingir a convergência, com a inconveniência de possuir também, a maior complexidade computacional dentre os equalizadores adaptativos analisados. O equalizador adaptativo de AFM sempre apresenta menor erro médio quadrático em regime que os equalizadores adaptativos de SHARF e LMS quando a relação sinal/ruído é baixa. O equalizador adaptativo de AFM, mesmo com a ordem do filtro insuficiente frente ao canal, demonstra degradação pequena com respeito ao erro médio quadrático em regime, e promete ser uma boa alternativa para equalização adaptativa mesmo porque o problema da instabilidade pode ser tratado.

No **CAPÍTULO 4**, propomos um esquema de estabilização para o filtro adaptativo do tipo IIR na forma direta. Aplicando este esquema, desenvolvemos um algoritmo modificado para resolver o problema da instabilidade do algoritmo de AFM. Através das simulações verificamos que este algoritmo com esquema de estabilização é capaz de manter os pólos dentro do círculo raio unitário (C.R.U.) e portanto, estabilizar o equalizador adaptativo, abrindo caminho para a equalização dos canais com zeros isolados próximo ao C.R.U., e a aceleração da adaptação utilizando passo de adaptação variável. Na fase inicial pode-se utilizar passos de adaptação grandes para se conseguir transitórios de adaptação rápi-

dos, já que a estabilidade está assegurada. Numa fase posterior utiliza-se então passo pequeno para se atingir maior precisão.

CAPÍTULO 1. ALGORITMOS PARA EQUALIZADORES ADAPTATIVOS

Neste capítulo, apresentamos primeiramente a estrutura do equalizador de Wiener do tipo IIR como um paradigma de filtros. Abordamos a seguir, a análise de quatro dos mais representativos algoritmos de filtros adaptativos do tipo IIR propostos recentemente: SHARF (Simple Hyperstable Adaptive Recursive Filter), AFM (Adaptive Filtering Mode), Kalman e FADF IIR real simplificado (Filtragem Adaptativa no Domínio da Frequência). Devido à sua ampla utilização, e com o objetivo de servir a comparação com os algoritmos adaptativos do tipo IIR, abordamos também o algoritmo de Gradiente Estocástico ou LMS (Least Mean Square), para estrutura do tipo FIR. Na seção final, discutimos as principais características dos filtros adaptativos do tipo IIR abordados neste capítulo.

1.1. Equalizador de Wiener do tipo IIR

O canal de comunicação digital com interferência intersimbólica pode ser modelado aproximadamente por um filtro FIR discreto com ruído branco aditivo [9] . Assim, a saída do canal $x(n)$ pode ser escrita em termos das entradas do canal $s(n)$ e o ruído $r(n)$, na forma seguinte :

$$x(n) = \mathbf{H}^T \mathbf{S}(n) + r(n) = \sum_{l=0}^{Mc-1} h_l s(n-l) + r(n) \quad (1.1.1)$$

onde $\mathbf{H}$ é o vetor da resposta impulsiva do canal : Mc é o número de taps do canal e

$$\mathbf{H}^T = [h_0, h_1, \dots, h_{Mc-2}, h_{Mc-1}]$$

O vetor $\mathbf{S}(n)$ é formado pelos Mc entradas do canal

$$\mathbf{S}^T(n) = [s(n), s(n-1), \dots, s(n-Mc+2), s(n-Mc+1)]$$

O filtro equalizador deve minimizar o erro médio quadrático entre a sua saída e o sinal desejado $d(n) = s(n-\delta)$, onde δ é um atraso. O equalizador ótimo do tipo IIR é definido em termos da sua função de transferência na transformada $\mathbb{Z}$, $G(z)$ como [10] :

$$G(z) = \frac{1}{R_{xx}^+(z)} \left(\frac{R_{dx}(z)}{R_{xx}^-(z)} \right)^+ \quad (1.1.2)$$

onde todos pólos e zeros de $[]^+$ estão dentro do círculo raio unitário (C.R.U.) e $R_{xx}(z)$ e $R_{dx}(z)$ são dados respectivamente por

$$R_{xx}(z) = \mathbb{Z} [\phi_{xx}(l)]$$

$$R_{dx}(z) = \mathbb{Z} [\phi_{dx}(l)]$$

onde $\phi_{xx}(l)$ e $\phi_{dx}(l)$ são as funções de autocorrelação de $x(n)$ e correlação cruzada entre $x(n)$ e $d(n)$ dados por:

$$\phi_{xx}(l) = E[x(n+l)x(n)]$$

$$\phi_{dx}(l) = E[d(n+l)x(n)]$$

$R_{xx}(z)$ é o espectro de potência de $x(n)$ e pode ser fatorado como

$$R_{xx}(z) = R_{xx}^+(z) R_{xx}^-(z) \quad (1.1.3)$$

$R_{xx}^+(z)$ tem todos os pólos dentro do C.R.U. e $R_{xx}^-(z)$ tem todos os pólos fora do C.R.U.. Da expressão desenvolvida no APÊNDICE 1, o espectro de potência $R_{xx}(z)$ pode ser escrito de forma equivalente por

$$R_{xx}(z) = H(z)H(z^{-1}) \sigma_s^2 + \sigma_r^2 \quad (1.1.4)$$

Visto que a função de autocorrelação, $\phi_{xx}(l)$, é simétrica com respeito à origem (função par), os zeros do $R_{xx}(z)$ terão também simetria. Em particular, se $R_{xx}(z)$ tem um zero em $z = z_l$, então $R_{xx}(z)$ terá um zero também em $z = 1/z_l$. Portanto, $R_{xx}(z)$ pode ser fatorado em termos de $R_{xx}^+(z)$ e $R_{xx}^-(z)$, com cada polinômio tendo ordem $(Mc-1)$.

Da expressão desenvolvida no APÊNDICE 1, obtemos

$$R_{dx}(z) = \sigma_s^2 z^{-\delta} H(z^{-1}) \quad (1.1.5)$$

Usando (1.1.5), (1.1.2) pode ser reescrita como

$$G(z) = W(z) [B(z)]^+ \quad (1.1.6)$$

onde

$$W(z) = \frac{1}{R_{xx}^+(z)} \quad B(z) = \frac{\sigma_s^2 z^{-\delta} H(z^{-1})}{R_{xx}^-(z)}$$

Como a função de transferência $R_{xx}^+(z)$ é um filtro FIR de ordem $(Mc-1)$, $W(z)$ é um filtro autoregressivo estável de ordem $(Mc-1)$. $B(z)$ tem δ pólos na origem e $(Mc-1)$ pólos fora do C.R.U.. Pela definição [11] , obtemos

$$[B(z)]^+ = \sum_{k=0}^{\infty} \sum [\text{resíduos de } B(z)z^{k-1} \text{ nos pólos na origem}] z^{-k} \quad (1.1.7)$$

$B(z)z^{k-1}$ tem pólos na origem se $k \leq \delta$ e (1.1.7) é simplificada como

$$[B(z)]^+ = \sum_{k=0}^{\delta} \sum [\text{resíduos de } B(z)z^{k-1} \text{ nos pólos na origem}] z^{-k} \quad (1.1.8)$$

De (1.1.8), podemos saber que a função de transferência $[B(z)]^+$ representa um filtro FIR de ordem δ .

Portanto o equalizador de Wiener do tipo IIR é a composição em cascata de um filtro autoregressivo de ordem $(Mc-1)$ e um filtro FIR de ordem δ .

No caso do equalizador adaptativo do tipo FIR, Widrow [12] recomenda que o atraso δ seja a metade do número de taps do filtro transversal, e a melhor escolha do atraso δ não é bem clara. Porém, no caso do equalizador adaptativo do tipo IIR, podemos determinar diretamente o atraso apropriado a partir da ordem do numerador do equalizador adaptativo do tipo IIR como consideramos acima, i.e. atraso = ordem do numerador do equalizador adaptativo (não estamos levando em conta aqui o atraso de propagação). Desta forma a amostra mais significativa do canal equalizado (canal + filtro adaptativo) irá correr após um atraso de $(\delta + l_o)$, onde l_o é tal que para os amostras h_l do canal:

$$|h_{l_o}| \geq |h_l| \quad (l = 0, 1, \dots, M_c - 2, M_c - 1) \quad (1.1.9)$$

Este aspecto também constitui uma das vantagens do equalizador adaptativo do tipo IIR sobre equalizador adaptativo do tipo FIR.

1.2. Técnicas baseadas na Teoria de Estabilidade Nonlinear

1.2.1. A Estrutura HARF

Landau [13] foi quem primeiro introduziu o procedimento de erro de saída não-polarizado para a obtenção de estimativas de parâmetros de uma planta ARMA, denominado identificador hiperestável de erro de saída. Baseado neste método, Johnson [14] desenvolveu um algoritmo de filtro adaptativo IIR, chamado HARF (Hyperstable Adaptive Recursive Filter).

O algoritmo de HARF representa a primeira técnica proposta para filtros adaptativos IIR que tem propriedade comprovada de convergência, observadas certas restrições. Apesar da complexidade computacional moderada, um estudo cuidadoso do comportamento do HARF permite a simplificação do algoritmo, ainda que a maior parte das propriedades desejadas do HARF não sejam preservadas.

A implementação do algoritmo de HARF é mostrada na Fig.1.2.1, e é discutido a seguir.

Note da Fig.1.2.1 que existe um processo auxiliar $f(n)$ gerado pela equação (1.2.1) abaixo, além do filtro principal adaptativo que forma a saída $y(n)$.

$$f(n) = \sum_{l=1}^N \hat{a}_l(n+1)f(n-l) + \sum_{j=0}^M \hat{b}_j(n+1)x(n-j) \quad (1.2.1)$$

$$y(n) = \sum_{l=1}^N \hat{a}_l(n)f(n-l) + \sum_{j=0}^M \hat{b}_j(n)x(n-j) \quad (1.2.2)$$

Os coeficientes nestas duas equações são separados em tempo por uma amostra. Se a convergência deve ocorrer, então $\hat{a}_l(n) = \hat{a}_l(n+1)$ e $\hat{b}_j(n) = \hat{b}_j(n+1)$, e $y(n)$ converge assintoticamente a $f(n)$. No entanto, no período transitório de adaptação, a distinção entre $y(n)$ e $f(n)$ é necessária.

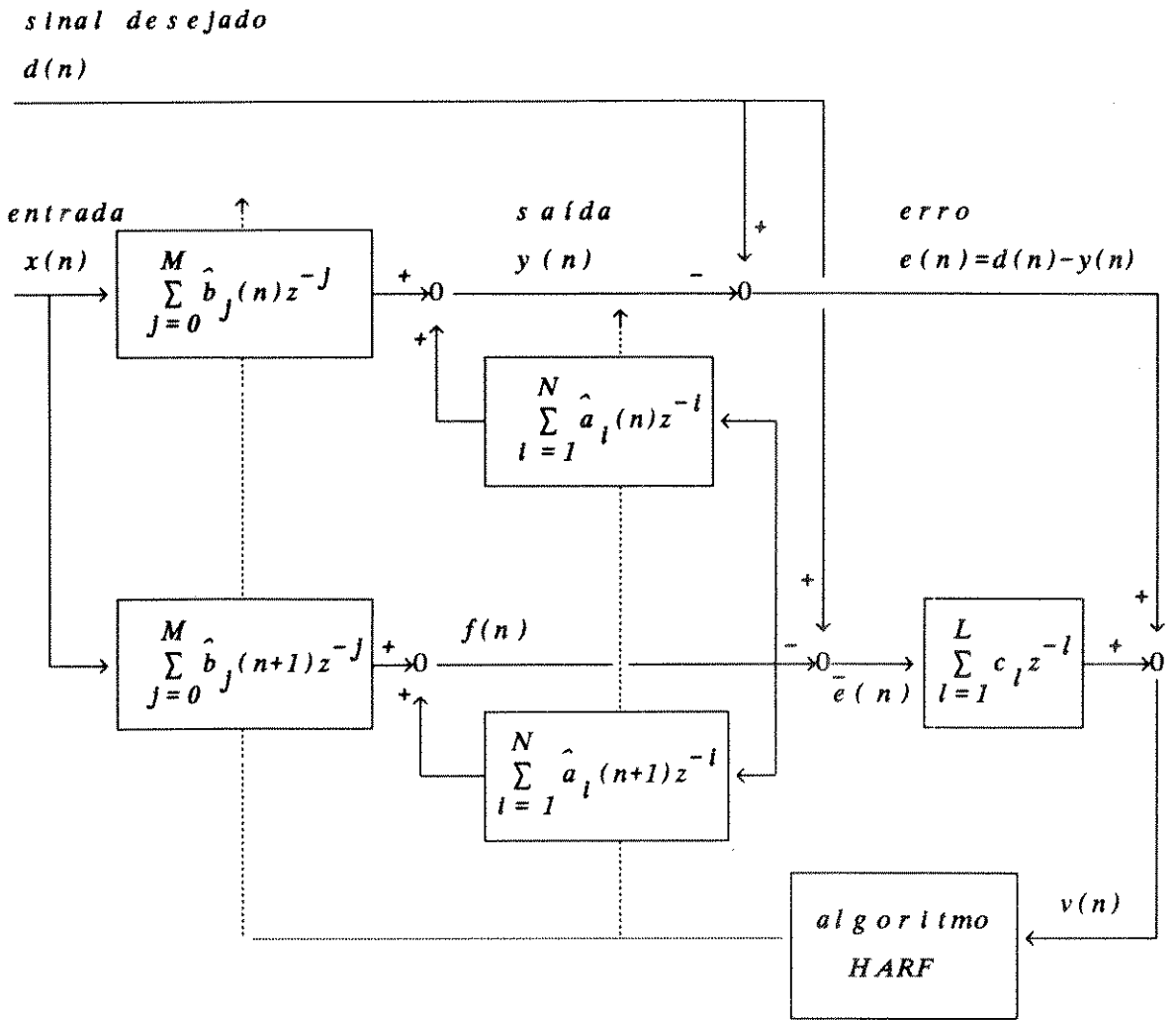


Fig.1.2.1 – Implementação de HARF

Suponhamos que em cada amostra os coeficientes do filtro adaptativo são ajustados segundo as fórmulas seguintes [14] :

$$\hat{a}_l(n) = \hat{a}_l(n-1) + \frac{\mu_l}{q(n)} f(n-l-1) v(n-1) \quad 1 \leq l \leq N \quad (1.2.3)$$

$$b_j(n) = b_j(n-1) + \frac{\rho_j}{q(n)} x(n-l-1) v(n-1) \quad 0 \leq j \leq M \quad (1.2.4)$$

onde $q(n)$ é um fator de normalização maior que um :

$$q(n) = 1 + \sum_{l=1}^N \mu_l f^2(n-l-1) + \sum_{l=0}^M \rho_l x^2(n-l-1) \quad (1.2.5)$$

$$v(n) = \{d(n) - y(n)\} + \sum_{l=1}^L c_l \{d(n-l) - f(n-l)\} \quad (1.2.6)$$

e μ_l e ρ_j são constantes positivas arbitrárias. Além disso, as L constantes c_l do filtro cuja entrada é $\bar{e}(n)$, são escolhidas para que a função de transferência discreta

$$G(z) = \frac{1 + \sum_{l=1}^L c_l z^{-l}}{1 - \sum_{l=0}^N a_l z^{-l}} \quad (1.2.7)$$

seja real estritamente positiva (SPR) ou seja $Re[G(e^{j\theta})] > 0$, $\forall \theta$ [15]. Os coeficientes a_l ($l=1,2,\dots,N$) são da parte realimentada da função de transferência entre o sinal de entrada $x(n)$ e o sinal desejado $d(n)$ como em (1.2.12). As implicações desta restrição serão discutidas na seção 1.2.2. Sob estas condições, pode se provar que a sequência $v(n)$ converge a zero e como resultado

$$y(n) \Rightarrow f(n) \Rightarrow d(n) \quad (1.2.8)$$

que é o desempenho desejado [14].

1.2.2. Hiperestabilidade e o Filtro Adaptativo

O conceito de hiperestabilidade de sistemas, sob o qual este algoritmo de filtro adaptativo IIR é baseado, foi desenvolvido por Popov [16] e estabelece uma descrição generalizada de estabilidade de saída em casos de sistemas não-lineares ou variantes no tempo. Nesta seção, o teorema de hiperestabilidade é apresentado, a descrição das condições e as implicações são discutidas. Além disso, a relação com algoritmos de filtros adaptativos é explorada.

• **Definição de Hiperestabilidade** : Seja $G(z)$ uma função de transferência racional escalar de um sistema linear invariante no tempo, com uma entrada $u(n)$ e uma saída $y(n)$. O sistema é chamado hiperestável [17] , se o vetor de estados do sistema permanece limitado ao longo do tempo para toda a entrada $u(n)$ satisfazendo juntamente com a saída $y(n)$:

$$\sum_{l=0}^{N_0} u(l)y(l) < K^2 \quad \forall N_0 \quad (1.2.9)$$

Para ser hiperestável assintoticamente, requer-se também que:

$$y(n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

1.2.2.1. Sistema com Realimentação Não-linear Variante no Tempo

Agora, podemos analisar um sistema com realimentação nonlinear variante no tempo representada pela função F na Fig.1.2.2. Note que o elemento de realimentação F tem $v(n)$ como entrada e responde com $w(n) = -u(n)$.

• **Teorema de Hiperestabilidade** [14]: Se

- (cond.1) $G(z)$ é SPR
- (cond.2) a entrada $v(n)$ e a saída $w(n)$ do elemento de realimentação não-linear variante no tempo F obedecem a restrição:

$$\sum_{l=0}^{N_0} v(l)w(l) \geq -\gamma_0^2 \quad \forall N_0 > 0 \quad (1.2.10)$$

Então

$$\sum_{l=0}^{N_0} u(l)v(l) \leq \gamma_0^2 \quad \forall N_0 > 0 \quad (1.2.11)$$

e este sistema é hiperestável assintoticamente, assim $v(n) \Rightarrow 0$ ($n \Rightarrow \infty$).

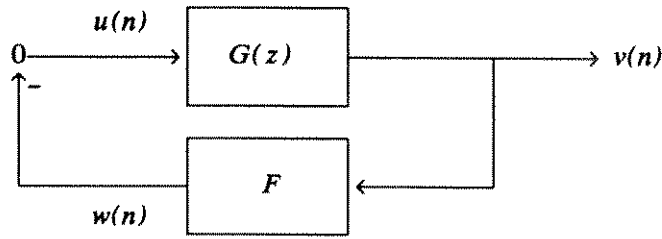


Fig.1.2.2 – Sistema Linear $G(z)$ com Realimentação F genérica

1.2.2.2. Relação da Hiperestabilidade com Filtros Adaptativos

Seja $d(n)$ na Fig.1.2.1 o processo com $x(n)$ por entrada

$$d(n) = \sum_{l=1}^{N_d} a_l d(n-l) + \sum_{j=0}^{M_d} b_j x(n-j) \quad (1.2.12)$$

onde a_l e b_j são constantes. Suponhamos que $M = M_d$ e $N = N_d$. De (1.2.12) e (1.2.2), o erro $e(n)$ na Fig.1.2.1 é

$$e(n) = d(n) - y(n)$$

$$= \sum_{j=0}^M \{b_j - \hat{b}_j(n)\} x(n-j) + \sum_{l=1}^N \{a_l d(n-l) - \hat{a}_l(n) f(n-l)\} \quad (1.2.13)$$

Definimos o erro auxiliar $\bar{e}(n)$ na Fig.1.2.1 como

$$\bar{e}(n) \equiv d(n) - f(n) \quad (1.2.14)$$

Usando (1.2.1) e (1.2.12), obtemos

$$\bar{e}(n) = \sum_{j=0}^M \{b_j - \hat{b}_j(n+1)\} x(n-j) + \sum_{l=1}^N \{a_l d(n-l) - \hat{a}_l(n+1) f(n-l)\} \quad (1.2.15)$$

Por somar e subtrair o termo $\sum_{l=1}^N a_l f(n-l)$ a (1.2.15), obtemos

$$\begin{aligned} \bar{e}(n) = & \sum_{l=1}^N a_l \{d(n-l) - f(n-l)\} \\ & + \sum_{l=1}^N \{a_l - \hat{a}_l(n+1)\} f(n-l) + \sum_{j=0}^M \{b_j - \hat{b}_j(n+1)\} x(n-j) \end{aligned}$$

Usando (1.2.14), temos

$$\bar{e}(n) = \sum_{l=1}^N a_l \bar{e}(n-l) - w(n) \quad (1.2.16)$$

onde

$$w(n) = - \left(\sum_{l=1}^N \{a_l - \hat{a}_l(n+1)\} f(n-l) + \sum_{j=0}^M \{b_j - \hat{b}_j(n+1)\} x(n-j) \right) \quad (1.2.17)$$

De (1.2.16), sabemos que $\bar{e}(n)$ é o processo AR de ordem N , cujos pólos são idênticos aos pólos do processo $d(n)$. Esta relação é mostrada esquematicamente na Fig.1.2.3. No caso adaptativo, as estimativas dos parametros $\hat{a}_l(n)$ e $\hat{b}_j(n)$ são ajustadas usando a realimentação F , que é geralmente não-linear e variante no tempo, como na Fig.1.2.4.

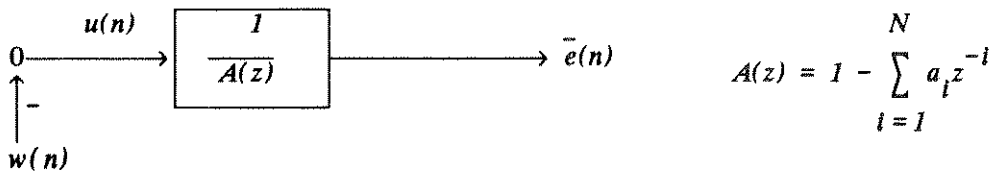


Fig.1.2.3 – Sistema Linear de Malha Aberta

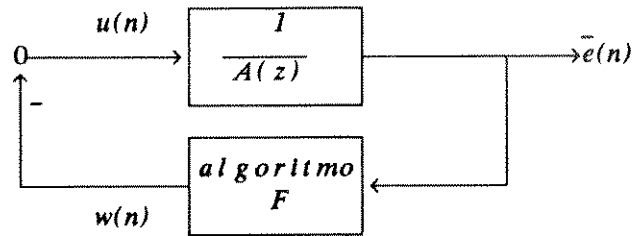


Fig.1.2.4 – Sistema Linear de Malha Fechada

Para satisfazer as condições de hiperestabilidade, o elemento $1/A(z)$ tem que ser SPR e, em geral, a forma simples $1/A(z)$ não será suficiente. Uma maneira de garantir que este elemento seja SPR é separar F em um filtro linear $C(z)$ seguido por um elemento geral, como na Fig.1.2.5. A saída do filtro $C(z)$ é dada por:

$$\bar{v}(n) = \bar{e}(n) + \sum_{l=1}^L c_l \bar{e}(n-l) \quad (1.2.18)$$

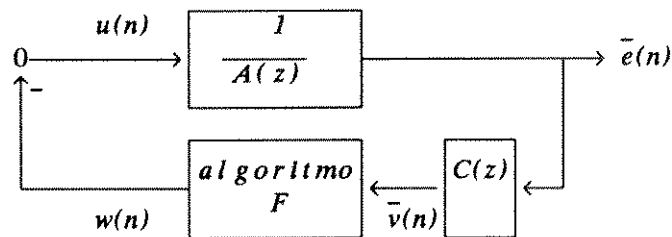


Fig.1.2.5 – Sistema Linear de Malha Fechada com Elemento Linear $C(z)$

Reorganizando os blocos do sistema, obtemos a Fig.1.2.6 com um elemento linear $G(z)$:

$$G(z) = \frac{C(z)}{A(z)} = \frac{1 + \sum_{l=1}^L c_l z^{-l}}{1 - \sum_{l=0}^N a_l z^{-l}} \quad (1.2.19)$$

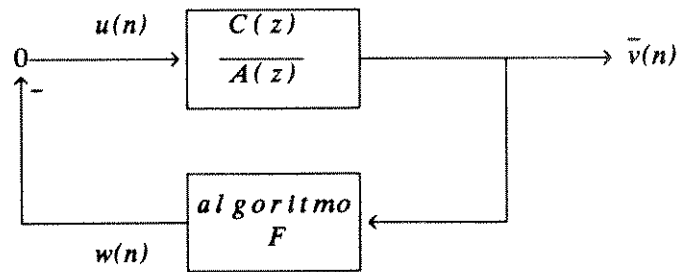


Fig.1.2.6 – Sistema Linear $C(z)/A(z)$ com Realimentação F genérica

Conforme o teorema de hiperestabilidade da seção 1.2.2.1, para satisfazer a (cond.1) os valores c_i serão escolhidos para garantir que $G(z)$ seja SPR, enquanto a (cond.2) será sujeita se a entrada $\bar{v}(n)$ e a saída $w(n)$ do elemento de realimentação não-linear variante no tempo obedecer (1.2.10). Segue então que o sistema na Fig.1.2.6 é hiperestável e $\bar{v}(n)$ converge a zero ; $\bar{e}(n)$ que é uma variável de estado de $G(z)$, também tem que convergir a zero.

De (1.2.7), o algoritmo de HARF satisfaz (cond.1). No APÊNDICE 2, verificamos que o algoritmo de HARF satisfaz (cond.2). Portanto, o algoritmo de HARF realmente tem propriedade comprovada de convergência sob as condições que foram estabelecidas na seção 1.2.1.

1.2.3. SHARF (Simple Hyperstable Recursive Filter)

Ainda que a formulação de hiperestabilidade para filtro adaptativo IIR se mostre como uma perspectiva útil para aplicações, o algoritmo de HARF possui dois problemas significativos de complexidade computacional. Primeiro, as equações (1.2.3) a (1.2.6) indicam que o processo auxiliar ARMA $f(n)$ é necessário para calcular não só a saída do filtro, mas também o ajuste de coeficientes. Segundo, o algoritmo de HARF inclui o fator de normalização $q(n)$, para cada iteração.

Para tornar o algoritmo de HARF tratável no processamento a tempo real, uma simplificação razoável pode ser feita. Suponhamos que μ_i e ρ_j nas equações

(1.2.3) e (1.2.4) sejam suficientemente pequenos, de forma que os coeficientes variem muito pouco de iteração para iteração.

$$\hat{a}_i(n+1) \cong \hat{a}_i(n) \quad (1.2.20)$$

$$\hat{b}_j(n+1) \cong \hat{b}_j(n) \quad (1.2.21)$$

A comparação de (1.2.1) e (1.2.2) indica que

$$f(n) \cong y(n) \quad (1.2.22)$$

Assim, (1.2.2), (1.2.6) e (1.2.5) tornam-se respectivamente

$$y(n) \cong \sum_{i=1}^N \hat{a}_i(n)y(n-i) + \sum_{j=0}^M \hat{b}_j(n)x(n-j) \quad (1.2.23)$$

$$\begin{aligned} v(n) &\cong \{d(n)-y(n)\} + \sum_{l=1}^L c_l \{d(n-l)-y(n-l)\} \\ &= e(n) + \sum_{l=1}^L c_l e(n-l) \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

$$q(n) \cong 1 \quad (1.2.25)$$

Usando estas aproximações, (1.2.3) e (1.2.4) tornam-se

$$\hat{a}_i(n) = \hat{a}_i(n-1) + \mu_i y(n-1-i)v(n-1) \quad 1 \leq i \leq N \quad (1.2.26)$$

$$\hat{b}_j(n) = \hat{b}_j(n-1) + \rho_j x(n-1-j)v(n-1) \quad 0 \leq j \leq M \quad (1.2.27)$$

As equações (1.2.23), (1.2.24), (1.2.26) e (1.2.27) constituem o algoritmo de SHARF (Simple Hyperstable Recursive Filter). [3]

Nota-se em (1.2.26) e (1.2.27), que o ajuste de cada coeficiente necessita somente do conhecimento do processo $v(n)$ e eliminou-se o processo auxiliar $f(n)$. Esta economia computacional foi obtida às custas do algoritmo de SHARF não mais satisfazer rigorosamente a condição (1.2.10). Portanto, convergência não é mais garantida para quaisquer constantes positivas μ_i e ρ_j . Mas, para fins práticos, usando adaptação lenta, a estrutura deverá manter um comportamento similar ao da estrutura com a propriedade de hiperestabilidade.

O algoritmo de SHARF dá origem a um filtro IIR, que é adaptado através de dois algoritmos do tipo Gradiente Estocástico, associando parâmetros da parte realimentada à saída e ao erro filtrado e parâmetros da parte transversal à entrada e ao erro filtrado. O filtro que define o erro filtrado é arbitrário, estando a cargo de quem o projeta. O algoritmo de SHARF utilizado neste trabalho, é resumido na Fig.1.2.7 e na Tab.1.2.1.

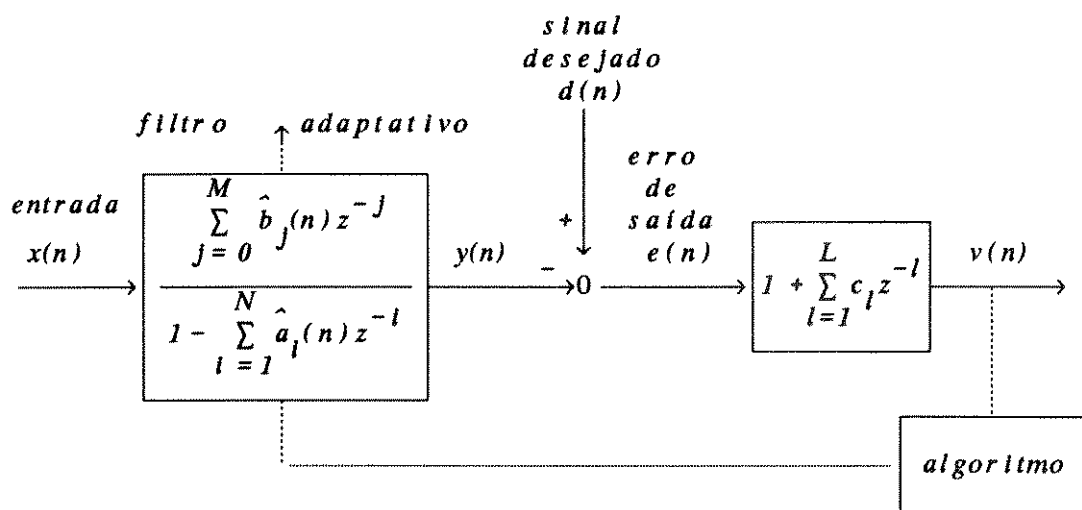


Fig.1.2.7 – Algoritmo de SHARF

Tab.1.2.1 - Algoritmo de SHARF

Condições Iniciais

$$\hat{a}_l(0) = 0 \quad (l = 1 \text{ até } N)$$

$$\hat{b}_j(0) = 0 \quad (j = 0 \text{ até } M)$$

$$y(-l) = 0 \quad (l = 1 \text{ até } N)$$

Para cada nova entrada $x(n)$, $d(n)$; $n \geq 0$, calcular :

$$y(n) = \sum_{l=1}^N \hat{a}_l(n) y(n-l) + \sum_{j=0}^M \hat{b}_j(n) x(n-j)$$

$$e(n) = d(n) - y(n)$$

$$v(n) = e(n) + \sum_{l=1}^L c_l e(n-l)$$

$$\hat{a}_l(n+1) = \hat{a}_l(n) + \rho y(n-l) v(n) \quad 1 \leq l \leq N$$

$$\hat{b}_j(n+1) = \hat{b}_j(n) + \rho x(n-j) v(n) \quad 0 \leq j \leq M$$

1.3. Técnica de Prefiltragem

1.3.1. Algoritmos de PF (PreFiltering)

Em 1965, Steiglitz e McBride [18] propuseram um esquema de identificação. Depois, Stoica e Soderstrom [19] analisaram este esquema e propuseram uma versão "on-line" deste. Recentemente, Fan e Jenkins [4] desenvolveram outra família de algoritmos adaptativos IIR, chamados algoritmos de PF (PreFiltering), a partir da versão "on-line" do algoritmo de identificação de Steiglitz-McBride.

O comportamento assintótico de algoritmos de PF é semelhante ao comportamento do algoritmo de Steiglitz-McBride, sendo que se aplicam especificamente aos problemas de filtragem adaptativa. Os algoritmos de PF têm varias vantagens tais como; (a) são computacionalmente simples. (b) têm ganho de adaptação que não se anula durante o processo de convergência permitindo que os algoritmos fiquem ativos e acompanhem sistemas variantes no tempo. (c) diferentemente do algoritmo de HARF, não requer a condição de SPR para sua operação, o que implica no conhecimento prévio do canal desconhecido. Porém, os algoritmos de PF não podem assegurar estabilidade ao filtro, contrário ao algoritmo de HARF.

1.3.2. Algoritmos de PF em Identificação

A forma de identificação de um sistema através de um filtro adaptativo IIR é mostrado na Fig.1.3.1, e possui as seguintes relações de definição :

$$w(n) = \sum_{i=1}^N a_i w(n-i) + \sum_{j=0}^M b_j x(n-j) \quad (1.3.1)$$

$$y(n) = w(n) + v(n) \quad (1.3.2)$$

$$\hat{y}(n) = \sum_{i=1}^N \hat{a}_i(n) \hat{y}(n-i) + \sum_{j=0}^M \hat{b}_j(n) x(n-j) \quad (1.3.3)$$

$$e(n) = y(n) - \hat{y}(n) \quad (1.3.4)$$

onde

$x(n)$: entrada da planta dinâmica e do filtro adaptativo

$w(n)$: saída ideal da planta dinâmica

$v(n)$: perturbação da planta dinâmica

$y(n)$: saída real da planta dinâmica

$\hat{y}(n)$: saída do filtro adaptativo

$e(n)$: erro de saída

Suponha que todos os pólos da planta dinâmica estejam dentro do círculo raio unitário (C.R.U.).

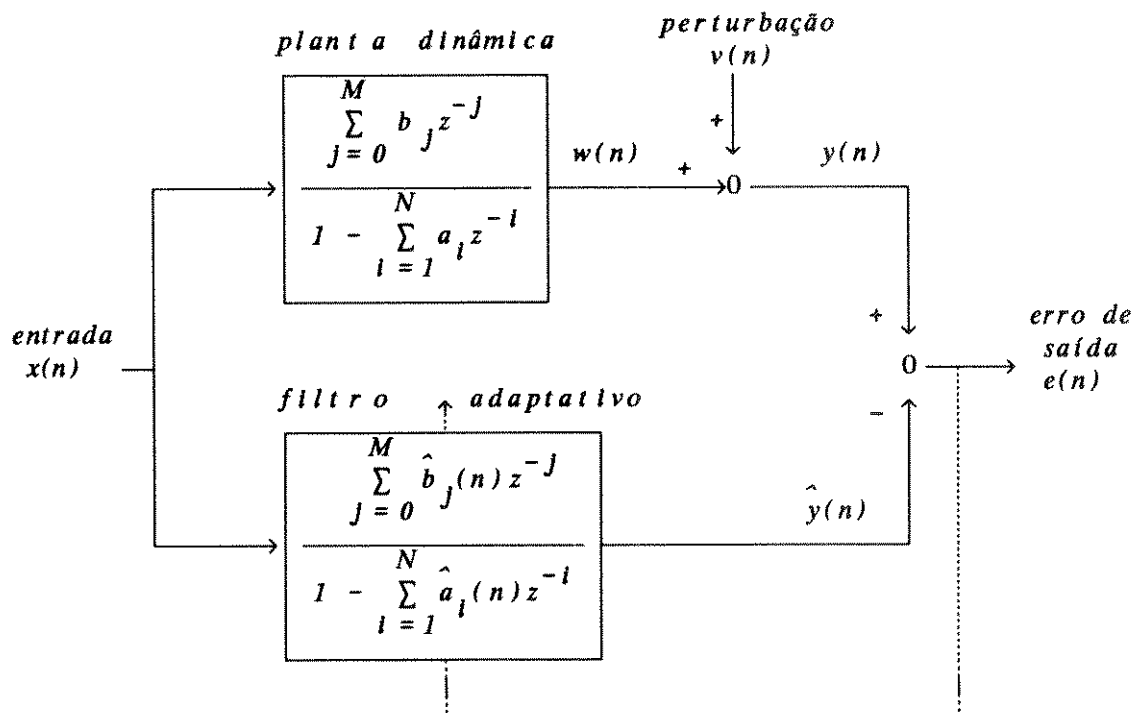


Fig.1.3.1 – Identificação de Sistemas por um Filtro Adaptativo IIR

Devido à recursão de $w(n)$ e $\hat{y}(n)$, a derivada de $E[e^2(n)]$ com respeito a cada um dos coeficientes do filtro não é uma função unimodal. Este problema é tratado nesta abordagem filtrando-se o erro de saída através de um filtro MA (Moving Average) idêntico ao denominador do filtro adaptativo de maneira que o erro filtrado de saída ("equation error") seja linear com respeito a cada um dos parâmetros $\hat{a}_l(n)$ e $\hat{b}_j(n)$. Por exemplo, se considerarmos $xf(n)$ como entrada, $ef(n)$ como erro de saída, e $vf(n)$ como perturbação na Fig.1.3.2, $e(n)$ então se torna "equation error" e pode ser escrita como

$$e(n) = ef(n) - \sum_{l=1}^N \hat{a}_l(n)ef(n-l) \quad (1.3.5)$$

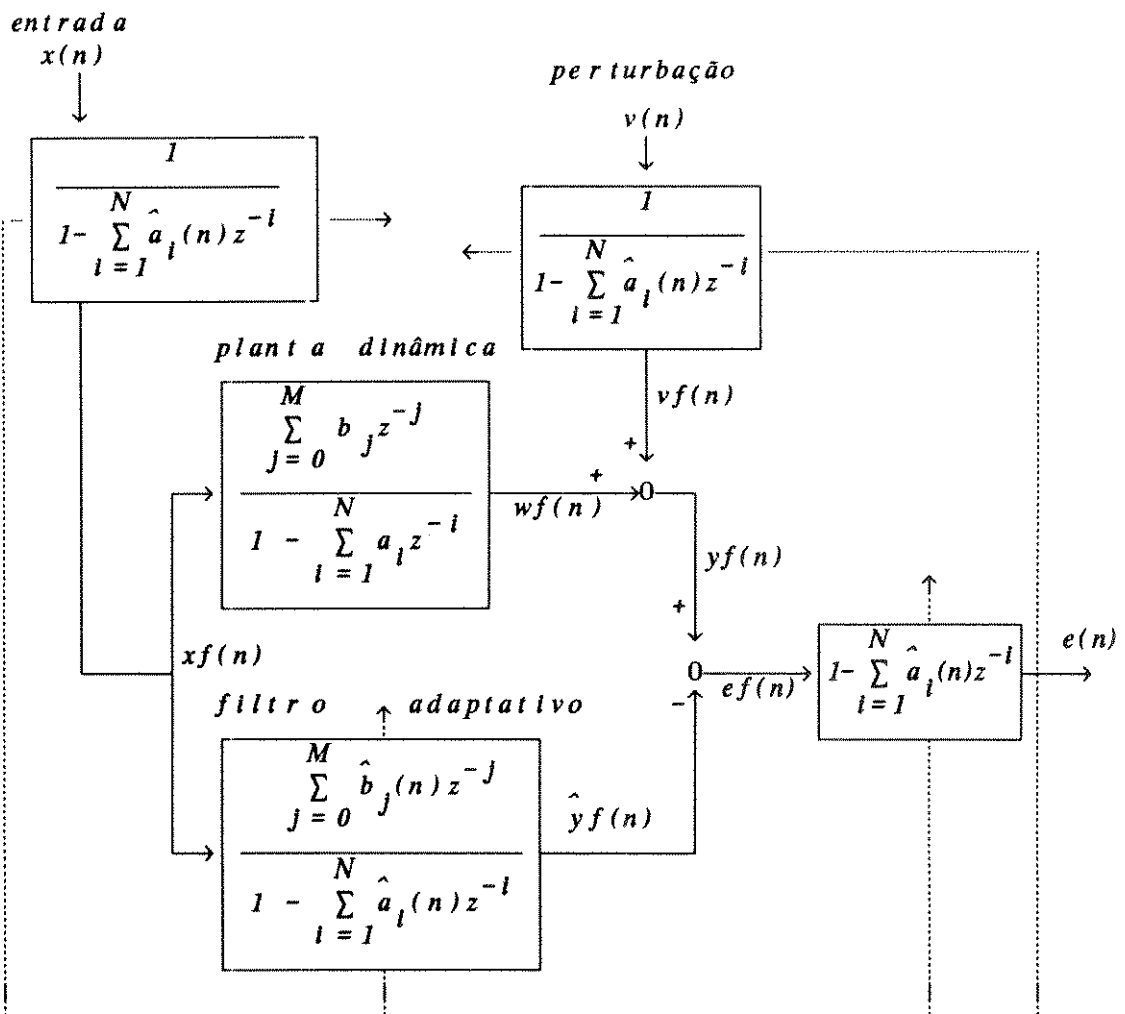


Fig.1.3.2 – Algoritmo de SIM

Usando (1.3.8), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{a}_l(n)} e(n) &= \frac{\partial}{\partial \hat{a}_l(n)} \left(wf(n) + vf(n) \right) \\ &\quad - \sum_{j=1, j \neq l}^N \hat{a}_j(n) \frac{\partial yf(n-j)}{\partial \hat{a}_l(n)} - yf(n-l) \\ &\quad - \sum_{j=0}^M \hat{b}_j(n) \frac{\partial xf(n-j)}{\partial \hat{a}_l(n)} \end{aligned}$$

Usando (1.3.7), (1.3.8) e (1.3.9), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{a}_l(n)} e(n) &= \sum_{j=1}^N a_j \frac{\partial wf(n-j)}{\partial \hat{a}_l(n)} + \sum_{j=0}^M b_j \frac{\partial xf(n-j)}{\partial \hat{a}_l(n)} \\ &\quad + \sum_{j=1, j \neq l}^N \hat{a}_j(n) \frac{\partial vf(n-j)}{\partial \hat{a}_l(n)} + vf(n-l) \\ &\quad - \sum_{j=1, j \neq l}^N \hat{a}_j(n) \frac{\partial}{\partial \hat{a}_l(n)} \left(wf(n-j) + vf(n-j) \right) - yf(n-l) \\ &\quad - \sum_{j=0}^M \hat{b}_j(n) \frac{\partial xf(n-j)}{\partial \hat{a}_l(n)} \\ &= \sum_{j=1, j \neq l}^N [a_j - \hat{a}_j(n)] \frac{\partial}{\partial \hat{a}_l(n)} wf(n-j) \\ &\quad + \sum_{j=0}^M [b_j - \hat{b}_j(n)] \frac{\partial}{\partial \hat{a}_l(n)} xf(n-j) - wf(n-l) \\ &\cong -wf(n-l) \qquad \qquad \qquad 1 \leq l \leq N \end{aligned} \tag{1.3.16}$$

onde

$$ef(n) = yf(n) - \hat{y}f(n) \quad (1.3.6)$$

$$wf(n) = \sum_{l=1}^N a_l wf(n-l) + \sum_{j=0}^M b_j xf(n-j) \quad (1.3.7)$$

$$yf(n) = wf(n) + vf(n) \quad (1.3.8)$$

$$vf(n) = v(n) + \sum_{l=1}^N \hat{a}_l(n) vf(n-l) \quad (1.3.9)$$

$$\hat{y}f(n) = \sum_{l=1}^N \hat{a}_l(n) \hat{y}f(n-l) + \sum_{j=0}^M \hat{b}_j(n) xf(n-j) \quad (1.3.10)$$

Substituindo (1.3.6) e (1.3.10) em (1.3.5), obtemos

$$\begin{aligned} e(n) &= yf(n) - \hat{y}f(n) - \sum_{l=1}^N \hat{a}_l(n) \{yf(n-l) - \hat{y}f(n-l)\} \\ &= yf(n) - \sum_{l=1}^N \hat{a}_l(n) yf(n-l) - \left(\hat{y}f(n) - \sum_{l=1}^N \hat{a}_l(n) \hat{y}f(n-l) \right) \\ &= yf(n) - \sum_{l=1}^N \hat{a}_l(n) yf(n-l) - \sum_{j=0}^M \hat{b}_j(n) xf(n-j) \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

A equação (1.3.11) mostra que $e(n)$ é linear com respeito a cada um dos $\hat{a}_l(n)$ e $\hat{b}_j(n)$, se $yf(n-l)$ ($l=1,2,\dots,N$) e $xf(n-j)$ ($j=0,1,\dots,M$) forem independentes destes coeficientes adaptativos. Supondo que esta hipótese seja válida, de (1.3.11), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{a}_l(n)} E[e^2(n)] &\cong 2e(n) \frac{\partial e(n)}{\partial \hat{a}_l(n)} \\ &= -2e(n) yf(n-l) \quad 1 \leq l \leq N \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{b}_j(n)} E[e^2(n)] &\cong 2e(n) \frac{\partial e(n)}{\partial \hat{b}_j(n)} \\ &= -2e(n)xf(n-j) \quad 0 \leq j \leq M \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

Substituindo (1.3.12) e (1.3.13) em (1.6.3), obtemos

$$\hat{a}_l(n+1) = \hat{a}_l(n) + \rho e(n) yf(n-l) \quad 1 \leq l \leq N \quad (1.3.14)$$

$$\hat{b}_j(n+1) = \hat{b}_j(n) + \rho e(n)xf(n-j) \quad 0 \leq j \leq M \quad (1.3.15)$$

onde ρ é uma constante positiva. Este método é chamado de algoritmo LMSEE (Least Mean Square Equation Error), pois não é um algoritmo LMS (Least Mean Square) padrão, devido a definição do erro $e(n)$.

Minimização de $e^2(n)$ não necessariamente significa minimização do erro quadrático de saída ($=(\text{desejado} - \text{estimativa})^2$), a menos que o valor esperado mínimo do erro quadrático de saída seja zero, ou seja, se o filtro adaptativo é de ordem suficiente e se $v(n) = 0$ [4] . Note que a função de transferência entre $x(n)$ e $e(n)$ da Fig.1.3.2 não é igual à da Fig.1.3.1 devido aos filtros variantes no tempo na entrada e na saída. Mas, para adaptação lenta este esquema representa uma boa aproximação do sistema na Fig.1.3.1, baseando no diagrama de blocos da Fig.1.3.2. Na convergência, estes dois sistemas tornam-se exatamente iguais, pois, $e(n)$ com respeito a $x(n)$ na Fig.1.3.2, pode ser considerado como erro de saída $e(n)$ para $x(n)$ na Fig.1.3.1. Portanto, o algoritmo obtido das equações (1.3.5) a (1.3.11) com a atualização de parâmetros dada por (1.3.14) e (1.3.15), pode ser aplicado se $xf(n)$ e $yf(n)$ são independentes de $\hat{a}_l(n)$ e $\hat{b}_j(n)$. Por causa da prefiltragem, isto não é completamente verdadeiro. Mas, (1.3.13) é válido porque $xf(n)$ e $yf(n)$ são independentes de $\hat{b}_j(n)$. Agora, de (1.3.11) temos

$$\frac{\partial}{\partial \hat{a}_l(n)} e(n) = \frac{\partial}{\partial \hat{a}_l(n)} \left(yf(n) - \sum_{j=1}^N \hat{a}_j(n)yf(n-j) - \sum_{j=0}^M \hat{b}_j(n)xf(n-j) \right)$$

Comparando (1.3.16) e (1.3.12), podemos dizer que a derivada de $e(n)$ com respeito a $\hat{a}_l(n)$ em (1.3.12) é uma aproximação de (1.3.16), onde $wf(n-l)$ é substituído por $yf(n-l)$ e os dois termos da somatória de (1.3.16) são ignorados. Note que esta aproximação é razoável, pois os dois termos de somatória realmente tendem a zero perto da convergência no caso de ordem suficiente. Também, visto que $v(n)$ não é acessível para medidas, é impossível saber o valor exato de $wf(n-l)$. As expressões (1.3.5) a (1.3.10), (1.3.14) e (1.3.15) com

$$xf(n) = x(n) + \sum_{l=1}^N \hat{a}_l(n)xf(n-l) \quad (1.3.17)$$

formam uma versão de algoritmo do tipo PF, chamado algoritmo de SIM (System Identification Mode). Visto que $v(n)$ não é acessível para medidas, (1.3.9) não é realizável. Por isso, o algoritmo de SIM é realizável somente se $v(n)=0$.

Assim também, o algoritmo de SIM não é aplicável para filtro adaptativo, onde $y(n)$ é a resposta desejada, pois $yf(n)$ não pode ser obtido através de (1.3.7) a (1.3.9). Neste caso, outra versão do algoritmo do tipo PF é proposta que combina (1.3.3), (1.3.4), (1.3.14), (1.3.15), (1.3.17) e

$$df(n) = d(n) + \sum_{i=1}^N a_i(n)df(n-i) \quad (1.3.18)$$

onde $y(n)$ e $yf(n)$ foram substituídos por sinal desejado $d(n)$ e o sinal desejado filtrado $df(n)$, respectivamente. Este algoritmo é chamado de AFM (Adaptive Filtering Mode); é mostrado na Fig.1.3.3.

Na operação do algoritmo, o erro não é mais filtrado mas tem-se as quantidades filtradas da entrada $xf(n)$ e do sinal desejado $df(n)$. Prevê-se o uso de passo pequeno para boa operação, a não ser que se introduza o monitoramento de estabilidade.

Embora estes dois algoritmos sejam diferentes, tem sido observado na prática [4] que eles têm comportamentos quase idênticos para adaptação lenta.

Finalmente, o algoritmo de AFM utilizado neste trabalho, é resumido na Tab.1.3.1.

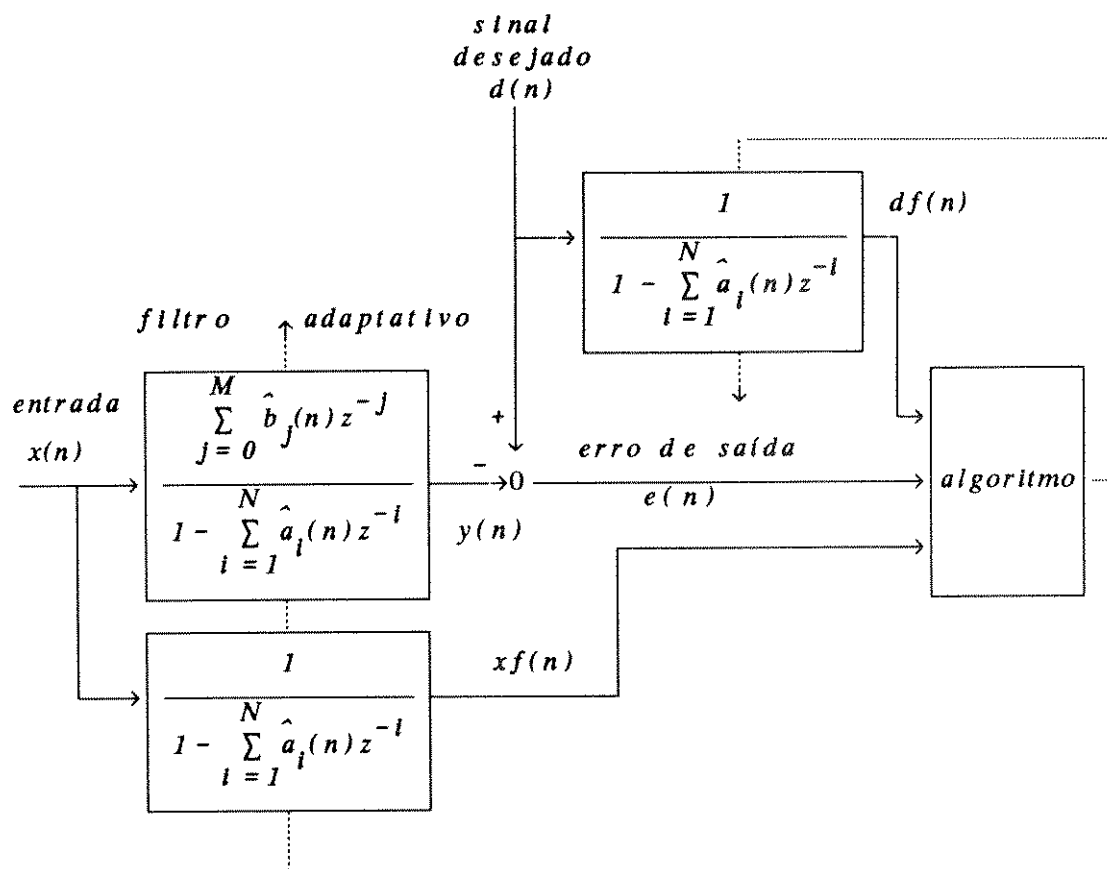


Fig.1.3.3 – Algoritmo de AFM

Tab.1.3.1 – Algoritmo de AFM

Condições Iniciais

$$\hat{a}_l(0) = 0 \quad (l = 1 \text{ até } N)$$

$$\hat{b}_j(0) = 0 \quad (j = 0 \text{ até } M)$$

$$y(-l) = 0 \quad (l = 1 \text{ até } N)$$

$$xf(-l) = 0 \quad (l = 1 \text{ até } N)$$

$$df(-l) = 0 \quad (l = 1 \text{ até } N)$$

Para cada nova entrada $x(n)$, $d(n)$; $n \geq 0$, calcular

$$xf(n) = x(n) + \sum_{l=1}^N \hat{a}_l(n) xf(n-l)$$

$$df(n) = d(n) + \sum_{l=1}^N \hat{a}_l(n) df(n-l)$$

$$y(n) = \sum_{l=1}^N \hat{a}_l(n) y(n-l) + \sum_{j=0}^M \hat{b}_j(n) x(n-j)$$

$$e(n) = d(n) - y(n)$$

$$\hat{a}_l(n+1) = \hat{a}_l(n) + \rho e(n) df(n-l) \quad 1 \leq l \leq N$$

$$\hat{b}_j(n+1) = \hat{b}_j(n) + \rho e(n) xf(n-j) \quad 0 \leq j \leq M$$

1.4. Equalizador Adaptativo de Kalman

Como em (1.1.2), a saída do canal $x(n)$ é modelada por

$$x(n) = \mathbf{H}^T \mathbf{S}(n) + r(n) \quad (1.4.1)$$

onde

$$\mathbf{H}^T = [h_0 \ h_1 \ \dots h_{Mc-2} \ h_{Mc-1}]$$

$$\mathbf{S}^T(n) \equiv [s(n) \ s(n-1) \ \dots \ s(n-Mc+2) \ s(n-Mc+1)]$$

Supomos que $s(n)$ e $r(n)$ sejam independentes. A entrada do canal $s(n)$ é distribuída aleatoriamente com média nula, e o modelo de geração do sinal é representado por um mecanismo de deslocamentos:

$$\mathbf{S}(n) = \mathbf{A}\mathbf{S}(n-1) + \mathbf{F}s(n) \quad (1.4.2)$$

onde

$$\mathbf{A} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Seja $\hat{x}(n/n-1)$ o valor do estimador de mínimos quadrados médio de $x(n)$ dado todos os valores passados de $x(i)$ ($i=1,2,\dots, n-1$). Definimos o erro de estimação $\alpha(n)$ como

$$\alpha(n) \equiv x(n) - \hat{x}(n/n-1) \quad (1.4.3)$$

Observamos que as variáveis $\alpha(n)$ são ortogonais entre si, isto é :

$$E[\alpha(n)\alpha(k)] = 0 \quad (0 \leq k \leq n-1)$$

De (1.4.2), obtemos

$$\mathbf{S}(n) = \mathbf{A}^n \mathbf{S}(0) + \sum_{l=1}^n \mathbf{A}^{n-l} \mathbf{F} s(l) \quad (1.4.4)$$

Pela hipótese, $r(n)$ não é correlacionado com $\mathbf{S}(0)$ e $s(i)$ ($i=1,2,\dots,n$). Pós-multiplicando (1.4.4) por $r(n)$ e tomando a esperança, temos

$$E[\mathbf{S}(k)r(n)] = 0 \quad (1.4.5)$$

De (1.4.1), usando (1.4.5)

$$\begin{aligned} E[x(k)r(n)] &= E[\mathbf{H}^T \mathbf{S}(k)r(n)] + E[r(k)r(n)] \\ &= \mathbf{H}^T E[\mathbf{S}(k)r(n)] + E[r(k)r(n)] = 0 \quad (0 \leq k \leq n-1) \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

Dada as observações passadas $x(i)$ ($i=1,2,\dots, n-1$), de (1.4.1) obtemos

$$\hat{x}(n/n-1) = \mathbf{H}^T \hat{\mathbf{S}}(n/n-1) + \hat{r}(n/n-1)$$

Porém, o estimador $\hat{r}(n/n-1)$ é zero porque o ruído aditivo, no instante n , é ortogonal com relação às observações $x(i)$ ($i=1,2,\dots, n-1$), pois são independentes entre si e $r(n)$ tem média nula. Portanto,

$$\hat{x}(n/n-1) = \mathbf{H}^T \hat{\mathbf{S}}(n/n-1) \quad (1.4.7)$$

Substituindo (1.4.7) em (1.4.3), obtemos

$$\alpha(n) = x(n) - \mathbf{H}^T \hat{\mathbf{S}}(n/n-1) \quad (1.4.8)$$

De (1.4.2)

$$\hat{\mathbf{S}}(n/n-1) = \mathbf{A} \hat{\mathbf{S}}(n-1/n-1) + \mathbf{F} \hat{s}(n/n-1)$$

Visto que $\mathbf{F}s(n)$ é ortogonal à $x(i)$ ($i=1,2,\dots, n-1$), o valor do estimador de mínimos quadrados médio $\hat{\mathbf{F}}s(n/n-1)$ é zero, assim

$$\hat{\mathbf{S}}(n/n-1) = \mathbf{A} \hat{\mathbf{S}}(n-1/n-1) \quad (1.4.9)$$

Substituindo (1.4.9) em (1.4.8)

$$\alpha(n) = x(n) - \mathbf{H}^T \hat{\mathbf{S}}(n-1/n-1) \quad (1.4.10)$$

O estimador $\hat{\mathbf{S}}(l/n)$ pode ser escrito como uma combinação linear do conjunto $\alpha(k)$ ($k=1,2,\dots, n$) [1] :

$$\hat{\mathbf{S}}(l/n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{B}_l(k) \alpha(k) \quad (1.4.11)$$

onde $\mathbb{B}_l(k)$ ($l=1,2,\dots, n$) são coeficientes a determinar. De acordo com o princípio de ortogonalidade [1] temos

$$E[(\mathbf{S}(l) - \hat{\mathbf{S}}(l/n))\alpha(m)] = 0 \quad (m=1,2,\dots, n) \quad (1.4.12)$$

Substituindo (1.4.11) em (1.4.12) e usando a propriedade de ortogonalidade dos erros de estimação $\alpha(n)$, obtemos

$$\begin{aligned} E[\mathbf{S}(l)\alpha(m)] &= E[\hat{\mathbf{S}}(l/n)\alpha(m)] = E\left[\sum_{k=1}^n \mathbb{B}_l(k) \alpha(k) \alpha(m)\right] \\ &= \mathbb{B}_l(m) E[\alpha^2(m)] = \mathbb{B}_l(m) \sum(m) \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

onde

$$\sum(m) \equiv E[\alpha^2(m)]$$

Posmultiplicando (1.4.13) por $\sum^{-1}(m)$, temos

$$\mathbb{B}_l(m) = E[\mathbf{S}(l)\alpha(m)] \sum^{-1}(m) \quad (1.4.14)$$

Substituindo (1.4.14) em (1.4.11), temos

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}}(l/n) &= \sum_{k=1}^n E[\mathbf{S}(l)\alpha(k)] \sum^{-1}(k) \alpha(k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} E[\mathbf{S}(l)\alpha(k)] \sum^{-1}(k) \alpha(k) + E[\mathbf{S}(l)\alpha(n)] \sum^{-1}(n) \alpha(n) \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

Para $l = n+1$ em (1.4.15), temos

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{S}}(n+1/n) &= \sum_{k=1}^{n-1} E[\mathbf{S}(n+1)\alpha(k)] \sum^{-1}(k)\alpha(k) \\ &\quad + E[\mathbf{S}(n+1)\alpha(n)] \sum^{-1}(n)\alpha(n)\end{aligned}\quad (1.4.16)$$

De (1.4.2), e considerando o fato de que $s(n)$ e $\alpha(k)$ são ortogonais para $0 \leq k \leq n$

$$\begin{aligned}E[\mathbf{S}(n+1)\alpha(k)] &= E[\mathbb{A}\mathbf{S}(n)\alpha(k)] + E[\mathbb{F}s(n+1)\alpha(k)] \\ &= \mathbb{A}E[\mathbf{S}(n)\alpha(k)]\end{aligned}\quad (1.4.17)$$

e de (1.4.15) com $l = n$ e $n = n-1$

$$\hat{\mathbf{S}}(n/n-1) = \sum_{k=1}^{n-1} E[\mathbf{S}(n)\alpha(k)] \sum^{-1}(k)\alpha(k) \quad (1.4.18)$$

Substituindo (1.4.17) em (1.4.16), temos

$$\hat{\mathbf{S}}(n+1/n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{A}E[\mathbf{S}(n)\alpha(k)] \sum^{-1}(k)\alpha(k) + E[\mathbf{S}(n+1)\alpha(n)] \sum^{-1}(n)\alpha(n)$$

Usando (1.4.18), obtemos

$$\hat{\mathbf{S}}(n+1/n) = \mathbb{A}\hat{\mathbf{S}}(n/n-1) + \mathbb{K}(n)\alpha(n) \quad (1.4.19)$$

onde

$$\mathbb{K}(n) \equiv E[\mathbf{S}(n+1)\alpha(n)] \sum^{-1}(n) \quad (1.4.20)$$

Substituindo (1.4.9) em (1.4.19)

$$\mathbb{A}\hat{\mathbf{S}}(n/n) = \mathbb{A}^2\hat{\mathbf{S}}(n-1/n-1) + \mathbb{K}(n)\alpha(n)$$

ou

$$\hat{\mathbf{S}}(n/n) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{S}}(n-1/n-1) + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{K}(n)\alpha(n) \quad (1.4.21)$$

Substituindo (1.4.1) em (1.4.8)

$$\begin{aligned} \alpha(n) &= \mathbf{H}^T \mathbf{S}(n) + r(n) - \mathbf{H}^T \hat{\mathbf{S}}(n/n-1) \\ &= \mathbf{H}^T \boldsymbol{\varepsilon}(n, n-1) + r(n) \end{aligned} \quad (1.4.22)$$

onde

$$\boldsymbol{\varepsilon}(n, n-1) \equiv \mathbf{S}(n) - \hat{\mathbf{S}}(n/n-1)$$

De (1.4.17) e (1.4.22) para $k = n$, temos

$$\begin{aligned} E[\mathbf{S}(n+1)\alpha(n)] &= \mathbf{A}E[\mathbf{S}(n)\alpha(n)] \\ &= \mathbf{A}E[\mathbf{S}(n)\{\mathbf{H}^T \boldsymbol{\varepsilon}(n, n-1) + r(n)\}] \\ &= \mathbf{A}E[\mathbf{S}(n)\mathbf{H}^T \boldsymbol{\varepsilon}(n, n-1)] \\ &= \mathbf{A}E[\mathbf{S}(n)\boldsymbol{\varepsilon}^T(n, n-1)]\mathbf{H} \end{aligned} \quad (1.4.23)$$

Visto que $\boldsymbol{\varepsilon}(n, n-1)$ é ortogonal a $\hat{\mathbf{S}}(n/n-1)$, de (1.4.22) e a definição de $\boldsymbol{\varepsilon}(n, n-1)$

$$\begin{aligned} E[\mathbf{S}(n+1)\alpha(n)] &= \mathbf{A}E[\boldsymbol{\varepsilon}(n, n-1)\boldsymbol{\varepsilon}^T(n, n-1)]\mathbf{H} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{P}_f(n)\mathbf{H} \end{aligned} \quad (1.4.24)$$

onde $\mathbf{P}_f(n)$ é a matriz de correlação de erro de predição do estado.

$$\mathbf{P}_f(n) \equiv E[\boldsymbol{\varepsilon}(n, n-1)\boldsymbol{\varepsilon}^T(n, n-1)] \quad (1.4.25)$$

Substituindo (1.4.24) em (1.4.20)

$$\mathbf{K}(n) = \mathbf{A}\mathbf{P}_f(n)\mathbf{H} \Sigma^{-1}(n) \quad (1.4.26)$$

Substituindo (1.4.22) em $\Sigma(m)$ de (1.4.13), temos

$$\begin{aligned}
 \Sigma(n) &= E[\alpha^2(n)] \\
 &= E\{[\mathbf{H}^T \boldsymbol{\varepsilon}(n, n-1) + r(n)]\{\boldsymbol{\varepsilon}^T(n, n-1)\mathbf{H} + r(n)\}\} \\
 &= \mathbf{H}^T E[\boldsymbol{\varepsilon}(n, n-1)\boldsymbol{\varepsilon}^T(n, n-1)]\mathbf{H} + E[r^2(n)] \\
 &= \mathbf{H}^T \mathbb{P}_f(n)\mathbf{H} + E[r^2(n)]
 \end{aligned} \tag{1.4.27}$$

Substituindo (1.4.27) em (1.4.26) e definindo $\sigma_r^2 = E[r^2(n)]$, temos

$$\mathbf{K}(n) = \mathbf{A}\mathbb{P}_f(n)\mathbf{H} \{\mathbf{H}^T \mathbb{P}_f(n)\mathbf{H} + \sigma_r^2\}^{-1} \tag{1.4.28}$$

A equação (1.4.28) não é conveniente porque requer o conhecimento da matriz de correlação do erro de predição do estado $\mathbb{P}_f(n)$. Para contornar este problema, derivamos a formula recursiva para calcular $\mathbb{P}_f(n-1)$.

Pela definição de $\boldsymbol{\varepsilon}(n, n-1)$, temos

$$\boldsymbol{\varepsilon}(n+1, n) = \mathbf{S}(n+1) - \hat{\mathbf{S}}(n+1/n) \tag{1.4.29}$$

Substituindo (1.4.2) e (1.4.19) em (1.4.29), obtemos usando (1.4.8)

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon}(n+1, n) &= \mathbf{A}\mathbf{S}(n) + \mathbf{F}s(n+1) - \mathbf{A}\hat{\mathbf{S}}(n/n-1) - \mathbf{K}(n)\alpha(n) \\
 &= \mathbf{A}\{\mathbf{S}(n) - \hat{\mathbf{S}}(n/n-1)\} - \mathbf{K}(n)\{x(n) - \mathbf{H}^T \hat{\mathbf{S}}(n/n-1)\} + \mathbf{F}s(n+1)
 \end{aligned} \tag{1.4.30}$$

Substituindo (1.4.1) em (1.4.30)

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon}(n+1, n) &= \mathbf{A}\{\mathbf{S}(n) - \hat{\mathbf{S}}(n/n-1)\} - \mathbf{K}(n)\{\mathbf{H}^T \mathbf{S}(n) + r(n) - \mathbf{H}^T \hat{\mathbf{S}}(n/n-1)\} + \mathbf{F}s(n+1) \\
 &= \{\mathbf{A} - \mathbf{K}(n)\mathbf{H}^T\}\boldsymbol{\varepsilon}(n, n-1) + \mathbf{F}s(n+1) - \mathbf{K}(n)r(n)
 \end{aligned} \tag{1.4.31}$$

De (1.4.25)

$$\mathbb{P}_f(n+1) = E[\boldsymbol{\varepsilon}(n+1, n)\boldsymbol{\varepsilon}^T(n+1, n)] \tag{1.4.32}$$

Substituindo (1.4.31) em (1.4.32), e considerando o fato de que $\boldsymbol{\varepsilon}(n, n-1)$, $s(n+1)$ e $r(n)$ são mutuamente não correlacionados e $E[s^2(n)] = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} P_I(n+1) &= (A - K(n)H^T)P_I(n)(A - K(n)H^T)^T + E[s^2(n)]FF^T + K(n)E[r^2(n)]K^T(n) \\ P_I(n+1) &= (A - K(n)H^T)P_I(n)(A - K(n)H^T)^T + FF^T + K(n)\sigma_r^2 K^T(n) \end{aligned} \quad (1.4.33)$$

Expandimos a equação (1.4.33), temos

$$\begin{aligned} P_I(n+1) &= (AP_I(n) - K(n)H^T P_I(n))(A^T - HK^T(n)) + FF^T + K(n)\sigma_r^2 K^T(n) \\ &= AP_I(n)A^T - K(n)H^T P_I(n)A^T - AP_I(n)HK^T(n) + K(n)H^T P_I(n)HK^T(n) \\ &\quad + FF^T + K(n)\sigma_r^2 K^T(n) \\ &= AP_I(n)A^T - K(n)H^T P_I(n)A^T - AP_I(n)HK^T(n) + FF^T + K(n)\Sigma(n)K^T(n) \end{aligned}$$

De (1.4.26), $K(n)\Sigma(n) = AP_I(n)H$ e obtemos

$$\begin{aligned} P(n+1) &= AP_I(n)A^T - K(n)H^T P_I(n)A^T + FF^T \\ &= A(P_I(n) - A^{-1}K(n)H^T P_I(n))A^T + FF^T \end{aligned}$$

Portanto

$$P_I(n+1) = AP(n)A^T + FF^T \quad (1.4.34)$$

$$P(n) = P_I(n) - A^{-1}K(n)H^T P_I(n) \quad (1.4.35)$$

De (1.4.28), (1.4.21), (1.4.10), (1.4.35) e (1.4.34), formamos o algoritmo de filtro de Kalman;

$$K(n) = AP_I(n)H (H^T P_I(n)H + \sigma_r^2)^{-1}$$

$$\alpha(n) = x(n) - H^T \hat{A}\hat{S}(n-1)$$

$$\hat{S}(n) = A\hat{S}(n-1) + A^{-1}K(n)\alpha(n)$$

$$P(n) = P_I(n) - A^{-1}K(n)H^T P_I(n)$$

$$P_I(n+1) = AP(n)A^T + FF^T$$

Reformulando estas equações, obtemos o algoritmo final como

$$\mathbf{K}(n) = \mathbf{P}_f(n)\mathbf{H} \{ \mathbf{H}^T \mathbf{P}_f(n)\mathbf{H} + \sigma_r^2 \}^{-1} \quad (1.4.36)$$

$$\hat{\mathbf{S}}(n) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{S}}(n-1) + \mathbf{K}(n)\{x(n) - \mathbf{H}^T \mathbf{A}\hat{\mathbf{S}}(n-1)\} \quad (1.4.37)$$

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}_f(n) - \mathbf{K}(n)\mathbf{H}^T \mathbf{P}_f(n) \quad (1.4.38)$$

$$\mathbf{P}_f(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{P}(n)\mathbf{A}^T + \mathbf{F}\mathbf{F}^T \quad (1.4.39)$$

Como condição inicial, tomamos costumeiramente

$$\hat{\mathbf{S}}(0) = \mathbf{0} \quad (1.4.40)$$

e de (1.4.25) e (1.4.22) obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_f(0) &= E[\mathbf{S}(0)\mathbf{S}^T(0)] \\ &= E \begin{bmatrix} s^2(0) & s(0)s(-1) & s(0)s(-N+1) \\ s(-1)s(0) & s^2(-1) & \\ s(-N+1)s(0) & & s^2(-N+1) \end{bmatrix} = \mathbb{I} \end{aligned} \quad (1.4.41)$$

onde supomos que o canal a ser identificado tenha N taps e consequentemente $(N-1)$ é a ordem do equalizador adaptativo de Kalman.

Como observamos no algoritmo final de (1.4.36) a (1.4.39), essas equações contém dois argumentos que em geral não são disponíveis previamente : o vetor da resposta impulsiva do canal $\mathbf{H}$ e a variância do ruído aditivo σ_r^2 . Mulgrew e Cowan [5] sugerem uma técnica para estimar recursivamente estes dois argumentos. Para a resposta impulsiva do canal $\mathbf{H}$, utiliza-se um algoritmo de identificação do canal operando em paralelo com o equalizador de Kalman como explicado a seguir na seção 1.4.1 e para a estimativa recursiva da variância do ruído a técnica apresentada na seção 1.4.2. Assim, a estrutura deste equalizador torna-se plenamente adaptativo uma vez que o conhecimento prévio destes dois argumentos não é mais essencial. Apesar da maior complexidade computacional comparado com os algoritmos de SHARF e AFM, o equalizador adaptativo de Kalman sugerido por Mulgrew e Cowan tem várias vantagens tais como : (a) é estável (b) pode

equalizar canais de fase não-mínima e não-estacionário.

Este equalizador adaptativo opera da seguinte maneira. Durante o período de treinamento, uma sequência predeterminada é transmitida e o algoritmo de identificação do canal forma o vetor estimado $\hat{\mathbf{H}}$ da resposta impulsiva do canal $\mathbf{H}$. Este vetor $\hat{\mathbf{H}}$ é passado para o equalizador de Kalman, que então inicia sua fase de treinamento, como mostrado na Fig.1.4.1. Durante a transmissão de dados é possível operar o equalizador adaptativo em "Decision Directed Mode". Neste período, a saída do quantizador é usada como uma entrada para o algoritmo de identificação do canal como mostrado na Fig.1.4.2.

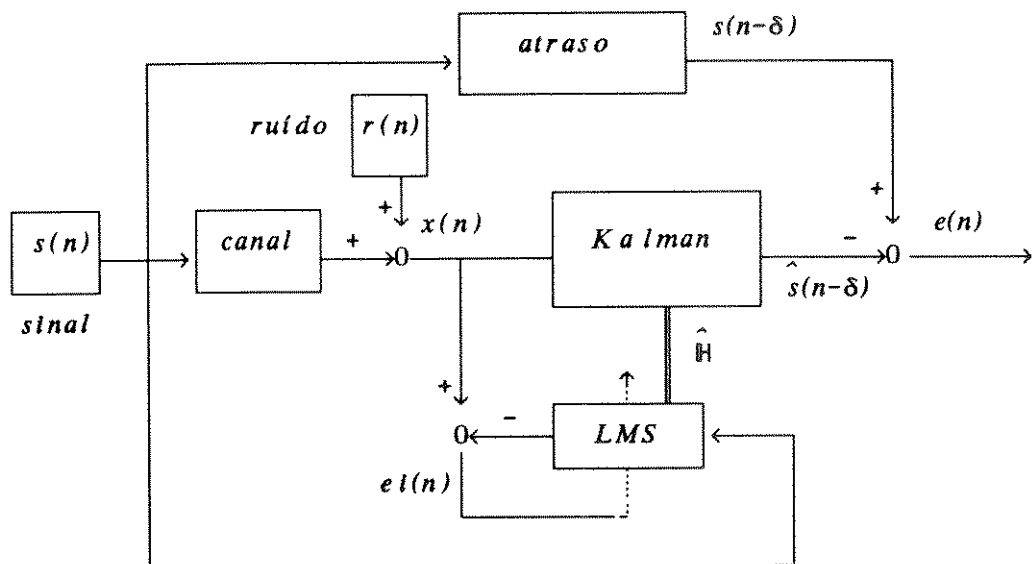


Fig.1.4.1 - Equalizador Adaptativo de Kalman (Training Mode)

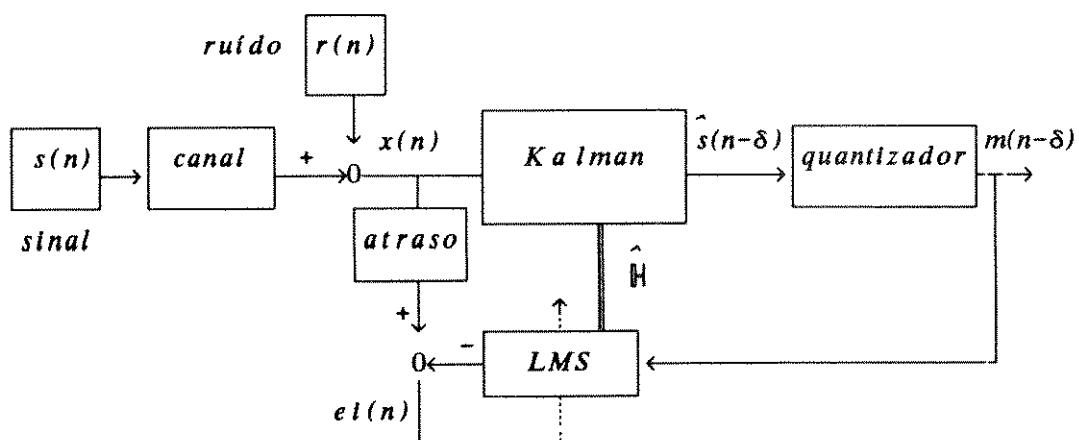


Fig.1.4.2 - Equalizador Adaptativo de Kalman (Decision Directed Mode)

1.4.1. Identificação do Canal

Supomos que o canal a ser identificado tenha N taps. Adotamos o algoritmo de LMS para identificação do canal porque este algoritmo tem menos complexidade computacional do que o algoritmo de RLS (Recursive Least Squares) e atinge melhor desempenho quando o sinal da entrada do filtro $s(n)$ é branco [5]. Usando (1.6.9) e (1.6.10), o algoritmo de LMS é descrito como

$$\hat{\mathbf{H}}(n+1) = \hat{\mathbf{H}}(n) + \rho \mathbf{S}(n) e_f(n) \quad (1.4.42)$$

$$e_f(n) = x(n) - \hat{\mathbf{H}}(n) \mathbf{S}(n) \quad (1.4.43)$$

onde ρ é o passo de adaptação e a condição inicial de $\hat{\mathbf{H}}(n)$ é

$$\hat{\mathbf{H}}(0) = \mathbf{0} \quad (1.4.44)$$

Para identificação de sistemas, o parâmetro de desempenho é geralmente definido como

$$\beta(n) \equiv E[\{\hat{\mathbf{H}}(n) - \mathbf{H}\}^T \{\hat{\mathbf{H}}(n) - \mathbf{H}\}] \quad (1.4.45)$$

Quando o sinal de entrada é branco, a análise teórica do algoritmo de LMS [20] [21] gera as seguintes equações para $0 \leq \rho \leq \frac{1}{N\sigma_s^2}$

$$E[e_f^2(n+1)] = (1 - 4\rho\sigma_s^2 + 4\rho^2\sigma_s^4N) E[e_f^2(n)] + 4\rho\sigma_s^2\sigma_r^2 \quad (1.4.46)$$

$$E[e_f^2(n+1)] = \sigma_s^2 \beta(n) + \sigma_r^2 \quad (1.4.47)$$

Substituindo (1.4.47) em (1.4.46), obtemos uma forma recursiva para $\beta(n)$.

$$\beta(n) = (1 - 4\rho\sigma_s^2 + 4\rho^2\sigma_s^4N) \beta(n-1) + 4\rho^2\sigma_s^2\sigma_r^2N \quad (1.4.48)$$

Para atingir convergência rápida, escolhemos ρ como

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \{1 - 4\rho\sigma_s^2 + 4\rho^2\sigma_s^4N\} = 0$$

$$\rho = \frac{1}{2N\sigma_s^2} \quad (1.4.49)$$

Se $\sigma_s^2 = 1$, (1.4.48) torna-se

$$\beta(n) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \beta(n-1) + \frac{\sigma_r^2}{N} \quad (1.4.50)$$

Definimos $L \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \beta(n)$ e de (1.4.50)

$$L = \left(1 - \frac{1}{N}\right) L + \frac{\sigma_r^2}{N}$$

$$L \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \beta(n) = \sigma_r^2 \quad (1.4.51)$$

Iniciamos a operação do algoritmo de Kalman de (1.4.36) a (1.4.39) quando o algoritmo de LMS para identificação do canal converge, ou seja depois de $20N$ iterações [1].

1.4.2. Estimação Recursiva da Variância do Ruído

De (1.4.1) e (1.4.43) obtemos

$$\begin{aligned} x(n) &= \mathbf{H} \mathbf{S}(n) + r(n) \\ &= \hat{\mathbf{H}}(n) \mathbf{S}(n) + e_f(n) \end{aligned} \quad (1.4.52)$$

Se $\{e_f(n)\}$ é considerado como ruído branco, (1.4.52) fornece outra interpretação de como a sequência de observações $\{x(n)\}$ foi formada. Sob esta hipótese, (1.4.47) torna-se

$$\sigma_e^2 = \sigma_s^2 \beta(n) + \sigma_r^2 \quad \text{onde } \sigma_e^2 = E[e_f^2(n)] \quad (1.4.53)$$

Quando $n \rightarrow \infty$, obtemos de (1.4.51) e (1.4.53)

$$\sigma_r^2 = \sigma_e^2 / 2 \quad (1.4.54)$$

Visto que σ_e^2 é estimada pela saída de um processo com uma constante de tempo determinada por $(1 - 1/N)$ como (1.4.50) indica, obtemos uma estimação recursiva de σ_e^2

$$\hat{\sigma}_e^2(n) = \left(1 - \frac{1}{N} \right) \hat{\sigma}_e^2(n-1) + \frac{e_i^2(n)}{N} \quad (1.4.55)$$

Usando (1.4.55) e (1.4.54), obtemos a variância estimada do ruído aditivo σ_r^2 para o algoritmo de Kalman.

Resumimos todas as equações utilizadas para equalizador adaptativo de Kalman na Tab.1.4.1.

Tab.1.4.1 - Equalizador Adaptativo de Kalman

Definições

$$\mathbf{A} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{H}}(n) \equiv [\hat{h}(-1) \hat{h}(0) \hat{h}(1) \hat{h}(2) \dots \hat{h}(N-3) \hat{h}(N-2)]$$

$$\rho = \frac{1}{2N\sigma_s^2}$$

Condições Iniciais

$$\hat{\mathbf{H}}(0) = \mathbf{0}$$

$$\hat{\mathbf{S}}(0) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{P}_I(0) = \mathbf{I}$$

$$\hat{\sigma}_r^2(n) = 0$$

Para cada nova entrada $x(n)$; $n \geq 0$, calcular

$$e_I(n) = x(n) - \hat{\mathbf{H}}(n) \mathbf{S}(n)$$

$$\hat{\mathbf{H}}(n+1) = \hat{\mathbf{H}}(n) + \rho \mathbf{S}(n) e_I(n)$$

$$\hat{\sigma}_r^2(n) = \left\{ 1 - \frac{1}{N} \right\} \hat{\sigma}_r^2(n-1) + \frac{e_I^2(n)}{2N}$$

Se $n \geq 20N$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}(n) = \mathbf{P}_I(n) \hat{\mathbf{H}}(n) \{ \hat{\mathbf{H}}^T(n) \mathbf{P}_I(n) \hat{\mathbf{H}}(n) + \hat{\sigma}_r^2 \}^{-1} \\ \hat{\mathbf{S}}(n) = \mathbf{A} \hat{\mathbf{S}}(n-1) + \mathbf{K}(n) \{ x(n) - \hat{\mathbf{H}}^T(n) \mathbf{A} \hat{\mathbf{S}}(n-1) \} \\ \mathbf{P}(n) = \mathbf{P}_I(n) - \mathbf{K}(n) \hat{\mathbf{H}}^T(n) \mathbf{P}_I(n) \\ \mathbf{P}_I(n+1) = \mathbf{A} \mathbf{P}(n) \mathbf{A}^T + \mathbf{F} \mathbf{F}^T \end{array} \right.$$

1.5. Filtragem Adaptativa no Domínio da Frequência

O filtro adaptativo IIR no domínio da frequência foi inicialmente proposto por Shynk [22] . Esta estrutura permite maior facilidade de monitoramento dos pólos do filtro durante adaptação para garantir estabilidade e menor sensibilidade com respeito à quantização dos coeficientes, se comparado com a realização na forma direta, sendo apropriado para implementação de hardware modular. Porém, devido a aritmética de números complexos necessária nos coeficientes do filtro e no algoritmo de adaptação, esta estrutura apresenta maior complexidade computacional.

Para resolver esta questão, Diniz e Cousseau [6] propuseram uma nova estrutura, que é mostrada na Fig.1.5.1, denominada Filtragem Adaptativa no Domínio da Frequência (FADF) IIR real.

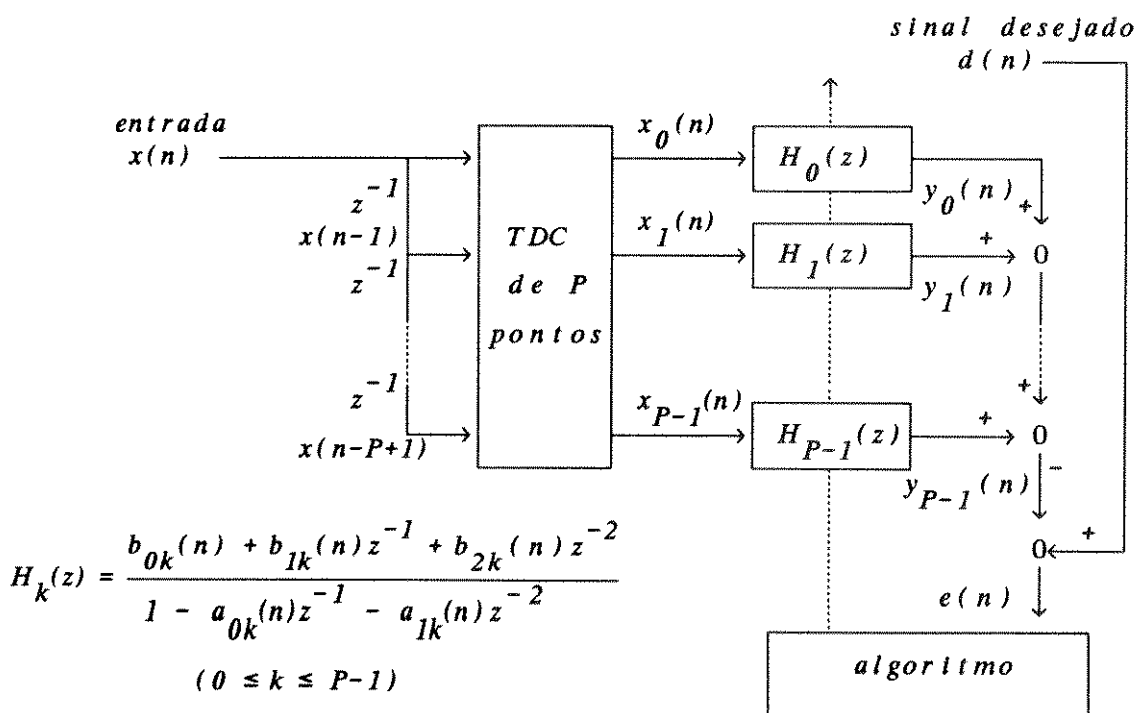


Fig.1.5.1 - Filtro Adaptativo de FADF IIR real

As mudanças básicas na estrutura com relação a [22] residem no pré-processamento, que no caso [10] é a transformada discreta de cossenos (TDC) e no caso [22] é a transformada discreta de Fourier, e nos subfiltros, que são de segunda ordem de 5 coeficientes reais no caso [10] e são de primeira ordem de 3 coeficientes complexos no caso [22]. Para melhorar a propriedade de convergência do algoritmo de Gauss-Newton, que é utilizado nessa estrutura, e simplificar a matriz Hessiana neste algoritmo, é necessário que as entradas dos subfiltros sejam suficientemente não-correlacionados; por esta razão se introduz transformação de ortogonalização de sinais como um pré-processamento ao banco de filtros paralelos. A mesma idéia de pré-processamento através da transformada discreta de cossenos aparece no trabalho de Perez e Tsujii [23] onde se utilizam subfiltros de primeira e segunda ordem reais com numeradores de segunda e terceira ordem, respectivamente. Foram feitas algumas simulações baseadas neste esquema, porém os resultados não foram satisfatórios, observando-se instabilidade persistente nos casos examinados. Optamos por dar continuidade ao estudo de filtro paralelo, empregando o esquema proposto por Diniz e Cousseau.

1.5.1. Estrutura de FADF IIR real

A função de transferência entre a entrada $x(n)$ e a entrada de cada subfiltro $x_k(n)$ é obtida através da transformada discreta de cossenos é dado por

$$X_k(z) = \frac{(1 - z^{-1})(1 - (-1)^k z^{-P})}{1 - 2 \cos(\pi k/P) z^{-1} + z^{-2}} X(z) \quad (1.5.1)$$

onde P é o número de subfiltros em paralelo. A função de transferência em cada subfiltro é dada por

$$Y_k(z) = \frac{b_{0k}(n) + b_{1k}(n)z^{-1} + b_{2k}(n)z^{-2}}{1 - a_{0k}(n)z^{-1} - a_{1k}(n)z^{-2}} X_k(z) \quad (1.5.2)$$

onde $a_{0k}(n)$, $a_{1k}(n)$, $b_{0k}(n)$, $b_{1k}(n)$ e $b_{2k}(n)$ são os coeficientes reais adapta-

tivos e $1 \leq k \leq P$. O erro é definido como

$$e(n) = d(n) - \sum_{k=1}^P y_k(n) = d(n) - \theta^T(n)\phi(n) \quad (1.5.3)$$

onde $d(n)$ é o sinal desejado, $\theta(n)$ e $\phi(n)$ são o conjunto de coeficientes e o conjunto de estados, respectivamente:

$$\theta^T(n) = [\theta_1^T(n) \mid \theta_2^T(n) \mid \dots \mid \theta_P^T(n)] \quad (1.5.4)$$

$$\phi^T(n) = [\phi_1^T(n) \mid \phi_2^T(n) \mid \dots \mid \phi_P^T(n)] \quad (1.5.5)$$

sendo que

$$\theta_k^T(n) = [a_{0k}(n), a_{1k}(n), b_{0k}(n), b_{1k}(n), b_{2k}(n)] \quad (1.5.6)$$

$$\phi_k^T(n) = [y_k(n-1), y_k(n-2), x_k(n), x_k(n-1), x_k(n-2)] \quad (1.5.7)$$

O monitoramento da estabilidade dos pólos de cada subfiltro é simples, pois basta verificar se cada par de coeficientes $a_{0k}(n)$ e $a_{1k}(n)$ fica dentro do triângulo de estabilidade [12], ou seja, o subfiltro k associado a estes coeficientes será instável se

$$1 + a_{0k}(n) + a_{1k}(n) < 0 \quad (1.5.8)$$

$$\text{ou} \quad 1 - a_{0k}(n) - a_{1k}(n) < 0 \quad (1.5.9)$$

$$\text{ou} \quad |a_{1k}(n)| \geq 1 \quad (1.5.10)$$

No caso deste teste resultar positivo, os valores dos coeficientes deste subfiltro são simplesmente mantidos nos valores anteriores.

1.5.2. Algoritmo de Adaptação

O algoritmo de adaptação ajusta os coeficientes do filtro $\theta(n)$ para minimizar a função de erro médio quadrático ξ definido por

$$\xi = E[e^2(n)] \quad (1.5.11)$$

Como algoritmo de adaptação do vetor de coeficientes $\theta(n)$, é conveniente usar o algoritmo de Gauss-Newton [24] que tem a forma

$$\mathbb{R}(n+1) = \lambda \mathbb{R}(n) + \alpha \psi(n) \psi^T(n) \quad (1.5.12)$$

$$\theta(n+1) = \theta(n) + \alpha \mathbb{R}^{-1}(n+1) \psi(n) e(n) \quad (1.5.13)$$

O escalar α ($\alpha > 0$) é o fator de convergência e λ ($1 > \lambda > 0$) é o fator de esquecimento exponencial na estimativa de $\mathbb{R}(n)$. Tipicamente, nas aplicações de filtragem adaptativa adota-se $\lambda = 1 - \alpha$. Em (1.5.12) e (1.5.13), $\psi(n)$ é vetor formado pelo conjunto de gradientes definidos por

$$\psi^T(n) = [\psi_1^T(n) \mid \psi_2^T(n) \mid \dots \mid \psi_P^T(n)] \quad (1.5.14)$$

$$\begin{aligned} \psi^T(n) &= [y_k^f(n-1), y_k^f(n-2), x_k^f(n), x_k^f(n-1), x_k^f(n-2)] \\ &= [\frac{\partial y_k(n)}{\partial a_{0k}(n)}, \frac{\partial y_k(n)}{\partial a_{1k}(n)}, \frac{\partial y_k(n)}{\partial b_{0k}(n)}, \frac{\partial y_k(n)}{\partial b_{1k}(n)}, \frac{\partial y_k(n)}{\partial b_{2k}(n)}] \end{aligned} \quad (1.5.15)$$

Cada elemento do vetor $\psi_k(n)$ é calculado recursivamente [6] como

$$y_k^f(n-l) = y_k(n-l) + a_{0k}(n) y_k^f(n-l-1) + a_{1k}(n) y_k^f(n-l-2) \quad (1.5.16)$$

$$x_k^f(n-j) = x_k(n-j) + a_{0k}(n) x_k^f(n-j-1) + a_{1k}(n) x_k^f(n-j-2) \quad (1.5.17)$$

onde $l=1,2$ e $j=0,1,2$. Como o cálculo de $\mathbb{R}^{-1}(n)$ exige maior esforço computacional, é melhor estimar $\mathbb{P}(n) = \mathbb{R}^{-1}(n)$ aplicando o Lema de Inversão de Matrizes [24].

$$\mathbb{P}(n+1) = \frac{1}{\lambda} \left[\mathbb{P}(n) - \frac{\mathbb{P}(n) \psi(n) \psi^T(n) \mathbb{P}(n)}{\lambda/\alpha + \psi^T(n) \mathbb{P}(n) \psi(n)} \right] \quad (1.5.18)$$

$\mathbb{R}(0)$ tem que ser positiva definida a fim de garantir a convergência [24]. Para isso, tomamos $\mathbb{P}(0) = \mathbb{I}/\Delta$, onde Δ é uma estimativa da potência da entrada $x(n)$.

O algoritmo de FADF IIR real completo é mostrado na Tab.1.5.1.

1.5.3. Simplificação do Algoritmo de Adaptação

Supondo que as entradas dos subfiltros $x_k(n)$ sejam aproximadamente não-correlacionadas, é possível simplificar o cálculo da matriz $R(n)$ (ou em forma equivalente em $P(n)$).

A matriz $R(n)$ tem estrutura seguinte :

$$R(n) = \begin{pmatrix} R_{11}(n) & R_{12}(n) & \dots & R_{1P}(n) \\ R_{21}(n) & R_{22}(n) & \dots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{P1}(n) & \dots & \dots & R_{PP}(n) \end{pmatrix} \quad (1.5.19)$$

onde

$$R_{ij}(n) = E[\psi_i(n)\psi_j(n)] \quad (1.5.20)$$

Se as entradas dos subfiltros forem suficientemente não -correlacionadas, sabemos de (1.5.20) que $R_{ij}(n) \approx 0$ para $i \neq j$. Portanto, é possível usar a seguinte aproximação para $R(n)$:

$$R(n) \cong \begin{pmatrix} R_{11}(n) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_{22}(n) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & R_{PP}(n) \end{pmatrix} \quad (1.5.21)$$

O algoritmo de FADF IIR real simplificado obtido assim desta maneira, é mostrado na Tab.1.5.2.

Tab.1.5.1 Algoritmo de FADF IIR real completo

Definições

$$\theta_k^T(n) = [a_{0k}(n), a_{1k}(n), b_{0k}(n), b_{1k}(n), b_{2k}(n)]$$

$$\theta^T(n) = [\theta_1^T(n) \parallel \theta_2^T(n) \parallel \dots \parallel \theta_P^T(n)]$$

$$\phi_k^T(n) = [y_k(n-1), y_k(n-2), x_k(n), x_k(n-1), x_k(n-2)]$$

$$\phi^T(n) = [\phi_1^T(n) \parallel \phi_2^T(n) \parallel \dots \parallel \phi_P^T(n)]$$

$$\psi_k^T(n) = [y_k^f(n-1), y_k^f(n-2), x_k^f(n), x_k^f(n-1), x_k^f(n-2)]$$

$$\psi^T(n) = [\psi_1^T(n) \parallel \psi_2^T(n) \parallel \dots \parallel \psi_P^T(n)]$$

Condições Iniciais

$$\mathbb{P}(0) = \mathbb{I} / \Delta \quad (\Delta \text{ é uma estimativa da potência de } x(n))$$

$$\theta^T(0) = \phi^T(0) = \psi^T(0) = 0$$

Para cada nova entrada $x(n), d(n); n \geq 0$, calcular

$$x_k(n) = TDC[x(n), \dots, x(n-P+1)]$$

Para $k=1$ até P

$$\left\{ \begin{array}{l} x_k^f(n) = x_k(n) + a_{0k}(n)x_k^f(n-1) + a_{1k}(n)x_k^f(n-2) \\ y_k(n) = \theta_k^T(n)\phi_k(n) \\ y_k^f(n) = y_k(n) + a_{0k}(n)y_k^f(n-1) + a_{1k}(n)y_k^f(n-2) \end{array} \right.$$

$$e(n) = d(n) - \sum_{k=1}^P y_k(n)$$

$$\mathbf{S}(n) = \mathbb{P}(n)\psi(n)$$

$$\mathbb{P}(n+1) = [\mathbb{P}(n) - \frac{\mathbf{S}(n)\mathbf{S}^T(n)}{\lambda/\alpha + \mathbf{S}^T(n)\psi(n)}](1/\lambda)$$

$$\theta(n+1) = \theta(n) + \alpha \mathbb{P}(n+1) \psi(n) e(n)$$

Tab.1.5.2 - Algoritmo de FADF IIR real simplificado

Definições

$$\theta_k^T(n) = [a_{0k}(n), a_{1k}(n), b_{0k}(n), b_{1k}(n), b_{2k}(n)]$$

$$\phi_k^T(n) = [y_k(n-1), y_k(n-2), x_k(n), x_k(n-1), x_k(n-2)]$$

$$\psi_k^T(n) = [y_k^f(n-1), y_k^f(n-2), x_k^f(n), x_k^f(n-1), x_k^f(n-2)]$$

Condições Iniciais

$$\theta_k^T(0) = \phi_k^T(0) = \psi_k^T(0) = 0 \quad (k = 1 \text{ até } P)$$

$$P_k(0) = 1 / \Delta \quad (k = 1 \text{ até } P, \Delta \text{ é uma estimativa da potência de } x(n))$$

Para cada nova entrada $x(n), d(n); n \geq 0$, calcular

$$x_k(n) = TDC[x(n), \dots, x(n-P+1)]$$

Para $k=1$ até P

$$\left(\begin{array}{l} x_k^f(n) = x_k(n) + a_{0k}(n)x_k^f(n-1) + a_{1k}(n)x_k^f(n-2) \\ y_k(n) = \theta_k^T(n)\phi_k(n) \\ y_k^f(n) = y_k(n) + a_{0k}(n)y_k^f(n-1) + a_{1k}(n)y_k^f(n-2) \end{array} \right.$$

$$e(n) = d(n) - \sum_{k=1}^P y_k(n)$$

Para $k=1$ até P

$$\left(\begin{array}{l} S_k(n) = P_k(n)\psi_k(n) \\ P_k(n+1) = [P_k(n) - \frac{S_k(n)S_k^T(n)}{\lambda/\alpha + S_k^T(n)\psi_k(n)}](1/\lambda) \\ \theta_k(n+1) = \theta_k(n) + \alpha P_k(n+1)\psi_k(n)e(n) \end{array} \right.$$

1.6. Algoritmo de Gradiente Estocástico (FIR)

O algoritmo de Gradiente Estocástico ("Least Mean Square", LMS) do tipo FIR foi proposto por Widrow e Hoff [7] em 1960. Devido à simplicidade deste algoritmo, que não requer os cálculos da função de correlação e de inversão de matriz, ele se tornou amplamente utilizado. Nesta seção, descrevemos brevemente a dedução do algoritmo de LMS, segundo Haykin [1] .

A saída do filtro adaptativo do tipo FIR (Finite Impulse Response) na Fig.1.6.1 é obtida como

$$y(n) = \sum_{l=0}^{M-1} \hat{W}_l(n)x(n-l) = \hat{\mathbf{W}}^T(n)\mathbf{X}(n) \quad (1.6.1)$$

onde M , $\hat{W}_l(n)$ e $x(n-l)$ são : o número de coeficientes, o valor do l -ésimo coeficiente do filtro no instante n e a entrada do filtro no instante $(n-l)$, respectivamente. Os vetores $\hat{\mathbf{W}}(n)$ e $\mathbf{X}(n)$ são definidos como

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{W}}^T(n) &= [\hat{W}_0(n), \hat{W}_1(n), \dots, \hat{W}_{M-2}(n), \hat{W}_{M-1}(n)] \\ \mathbf{X}^T(n) &= [x(n), x(n-1), \dots, x(n-M+2), x(n-M+1)] \end{aligned}$$

Usando (1.6.1), obtemos o erro médio quadrático do filtro no instante n , $\xi(n)$ como

$$\begin{aligned} \xi(n) &\equiv E[e^2(n)] \\ &= E[\{d(n) - y(n)\}^2] \\ &= E[\{d(n) - \hat{\mathbf{W}}^T(n)\mathbf{X}(n)\}^2] \\ &= E[d^2(n) - 2d(n)\hat{\mathbf{W}}^T(n)\mathbf{X}(n) + \hat{\mathbf{W}}^T(n)\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n)\hat{\mathbf{W}}(n)] \\ \xi(n) &= E[d^2(n)] - 2 \hat{\mathbf{W}}^T(n) \mathbf{P} + \hat{\mathbf{W}}^T(n) \mathbf{R} \hat{\mathbf{W}}(n) \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

onde

$$\mathbf{P} = E[d(n)\mathbf{x}(n)]$$

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]$$

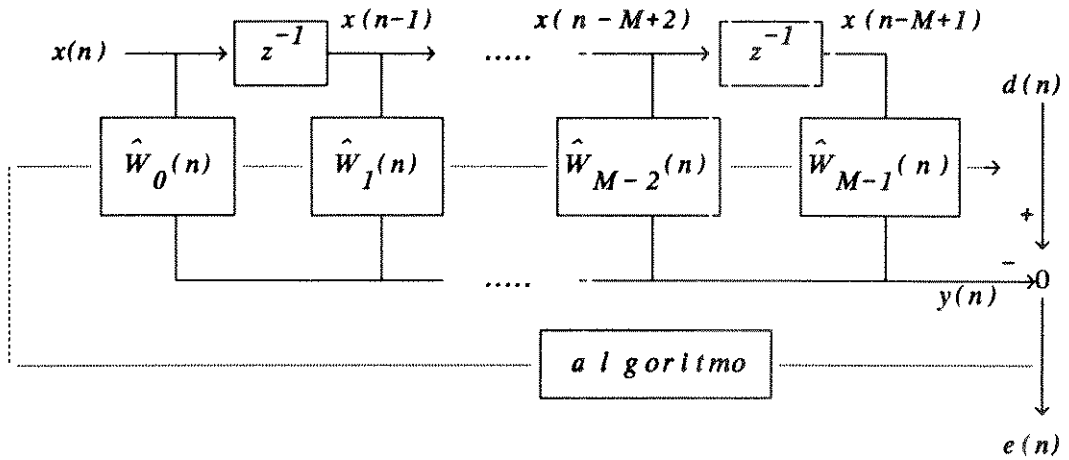


Fig.1.6.1 – Filtro Adaptativo do Tipo FIR

Seja $\nabla \xi(n)$ o vetor gradiente do erro médio quadrático do filtro $\xi(n)$ no instante n . Conforme o método de "Steepest Descent" [1], o valor atualizado do vetor dos coeficientes do filtro $\hat{\mathbf{W}}(n+1)$ no instante $(n+1)$ é calculado por

$$\hat{\mathbf{W}}(n+1) = \hat{\mathbf{W}}(n) + \frac{1}{2} \rho [-\nabla \xi(n)] \quad (1.6.3)$$

onde ρ é uma constante positiva. $\nabla \xi(n)$ é obtido usando (1.6.2)

$$\nabla \xi(n) = \frac{\partial \xi(n)}{\partial \mathbf{W}(n)} = -2 \mathbf{P} + 2 \mathbf{R} \hat{\mathbf{W}}(n) \quad (1.6.4)$$

Para aplicação do método de "Steepest Descent", assumimos que o vetor de correlação cruzada $\mathbf{P}$ e a matriz de correlação $\mathbf{R}$ sejam conhecidos previamente. Porém, estas quantidades geralmente não são disponíveis antes da adaptação, e o vetor de gradiente $\nabla \xi(n)$ tem que ser estimado usando os dados conhecidos. No algoritmo de LMS, utiliza-se os estimadores instantâneos para $\mathbf{P}$ e $\mathbf{R}$ na forma

$$\hat{\mathbf{P}}(n) = d(n)\mathbf{X}(n) \quad (1.6.5)$$

$$\hat{\mathbf{R}}(n) = \mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n) \quad (1.6.6)$$

Substituindo (1.6.5) e (1.6.6) em (1.6.4), obtemos o estimador instantâneo de $\nabla \xi(n)$.

$$\hat{\nabla} \xi(n) = -2 d(n)\mathbf{X}(n) + 2 \mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n)\hat{\mathbf{W}}(n) \quad (1.6.7)$$

Substituindo (1.6.7) em (1.6.3), obtemos

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{W}}(n+1) &= \hat{\mathbf{W}}(n) + \rho \{ d(n)\mathbf{X}(n) - \mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n)\hat{\mathbf{W}}(n) \} \\ &= \hat{\mathbf{W}}(n) + \rho \mathbf{X}(n) \{ d(n) - \mathbf{X}^T(n)\hat{\mathbf{W}}(n) \} \end{aligned} \quad (1.6.8)$$

Podemos reescrever (1.6.8) na forma equivalente como

$$\hat{\mathbf{W}}(n+1) = \hat{\mathbf{W}}(n) + \rho \mathbf{X}(n) e(n) \quad (1.6.9)$$

$$e(n) = d(n) - \hat{\mathbf{W}}^T(n) \mathbf{X}(n) \quad (1.6.10)$$

(1.6.9) e (1.6.10) formam o algoritmo de LMS. Este algoritmo pode ser visto como uma aproximação do método de "Steepest Descent" usando estimadores instantâneos para $\mathbf{P}$ e $\mathbf{R}$.

1.7. Características dos Filtros Adaptativos IIR

Nesta seção, discutimos as principais características dos filtros adaptativos do tipo IIR já abordados neste capítulo (SHARF, AFM, Kalman e FADF IIR real simplificado) com respeito a complexidade computacional, estabilidade, equalização do canal de fase não-mínima, precisão e comparação com os equalizadores adaptativos do tipo FIR:

- **Complexidade Computacional** : A Tab.1.7.1 mostra a comparação da complexidade computacional de cada algoritmo analisado. Em geral, observamos a seguinte relação :

$$SHARF < AFM < FADF \ll Kalman$$

LMS (FIR)	2 M
SHARF (IIR)	2 N + 2 M + 3
AFM (IIR)	4 N + 2 M + 2
KALMAN (IIR)	$N^3 + 3 N^2 + 4 N + 3$
FADF (IIR)	148 P

Tab.1.7.1 O número global de multiplicações por iteração dos Algoritmos de LMS, SHARF, AFM, KALMAN e FADF IIR real simplificado

- **Estabilidade** : Foi relatado na literatura [5] que somente o Equalizador Adaptativo de Kalman é sempre estável, e é sugerido o uso de passo de adaptação suficientemente pequeno para os demais algoritmos. O esquema de FADF tem o monitoramento de estabilidade feito de forma bastante sim-

ples, sendo sua estrutura imposta para este fim. Posteriormente no CAPÍTULO 4, propomos um esquema simples de estabilização para filtro adaptativo do tipo IIR na forma direta.

- **Equalização de Canais de Fase Não-Mínima** : Pela análise dos equalizadores, deduz-se que o único esquema apropriado à equalização de canais de fase não-mínima é o de Kalman, por ser imune a questão de instabilidade. No entanto, observamos dos resultados apresentados no CAPÍTULO 3 que os outros esquemas podem vir a se ajustar a canais deste tipo.
- **Precisão** : O fato do filtro de Kalman de ordem suficiente ser idêntico ao filtro de Wiener do tipo IIR quando todos os processos são estacionários e o ruído de observação é branco [26] leva a crer que ele seja o mais preciso, ou seja, este filtro deverá apresentar o menor erro quadrático médio em regime (verificado no CAPÍTULO 3) .
- **Comparações com os Equalizadores Adaptativos do Tipo FIR** : A escolha do atraso apropriado dos equalizadores adaptativos do tipo IIR (atraso = ordem do numerador do equalizador adaptativo do tipo IIR) é simples, quando comparado aos equalizadores adaptativos do tipo FIR, como foi apresentado na seção 1.1.

A derivada de $E[e^2(n)]$ com respeito a cada um dos coeficientes do filtro do tipo IIR não é a princípio unimodal. No algoritmo de AFM, este problema é tratado filtrando-se o erro de saída através de um filtro FIR idêntico ao denominador do filtro adaptativo para que o erro filtrado de saída seja linear com respeito a cada um dos coeficientes.

Apesar da sua propriedade comprovada de convergência, o algoritmo de HARF (ou a versão mais simplificada, SHARF) requer a condição de SPR para sua

operação, o que implica no conhecimento prévio do canal, ou pelo menos uma família de canais específicos.

O equalizador adaptativo de Kalman não utiliza a medida do erro entre o sinal desejado e a saída do filtro para ajuste dos parâmetros do filtro de Kalman, diferentemente da filtragem adaptativa convencional. Porém, este equalizador é adaptativo devido ao algoritmo de identificação do canal operando em paralelo com o filtro de Kalman, e a medida de erro utilizada é o erro de predição da saída do canal. Já o algoritmo de adaptação para FADF IIR real simplificado minimiza $E[e^2(n)]$ e utiliza o algoritmo de Gauss-Newton, devido a estrutura imposta.

CAPÍTULO 2. SIMULADOR DE EQUALIZADORES ADAPTATIVOS

A Fig.2.1 mostra o esquema geral do equalizador adaptativo. As Fig.2.2–Fig.2.6 mostram os diagramas de bloco dos equalizadores adaptativos de LMS, SHARF, AFM, Kalman e FADF IIR real simplificado, respectivamente. Um gerador de números aleatórios provê o sinal de teste $\{s(n)\}$ aplicado na entrada do canal, ao passo que outro gerador de números aleatórios serve como fonte de ruído branco aditivo gaussiano $\{r(n)\}$ que contamina a saída do canal. Estes dois geradores são independentes entre si. O equalizador adaptativo tem a tarefa de corrigir a distorção causada pelo canal na presença do ruído branco aditivo. O gerador da sequência aleatório $\{s(n)\}$ também fornece o sinal desejado para o equalizador adaptativo depois de passar pelo elemento de atraso de valor δ . A sequência aleatória $\{s(n)\}$ é na forma polar com $s(n) \in \{ +1, -1 \}$, com média nula. A sequência do ruído $\{r(n)\}$ é gaussiana e tem média nula e variância σ_r^2 , esta determinada pela relação sinal/ruído (SNR) e calculada como

$$SNR = -10 \log_{10} \sigma_r^2 \quad (2.1)$$

Os canais são representados pelo vetor $\mathbb{H}$, que é definido como

$$\mathbb{H} \equiv [h(0) \ h(1) \ h(2) \ \dots \ h(31)] \quad (2.2)$$

A saída do canal $x(n)$ pode ser calculada segundo

$$x(n) = \sum_{l=0}^{31} h(l) s(n-l) + r(n) \quad (2.3)$$

o erro $e(n)$ é calculado usando o sinal desejado $s(n-\delta)$ e a saída do equalizador $y(n)$

$$e(n) = s(n-\delta) - y(n) \quad (2.4)$$

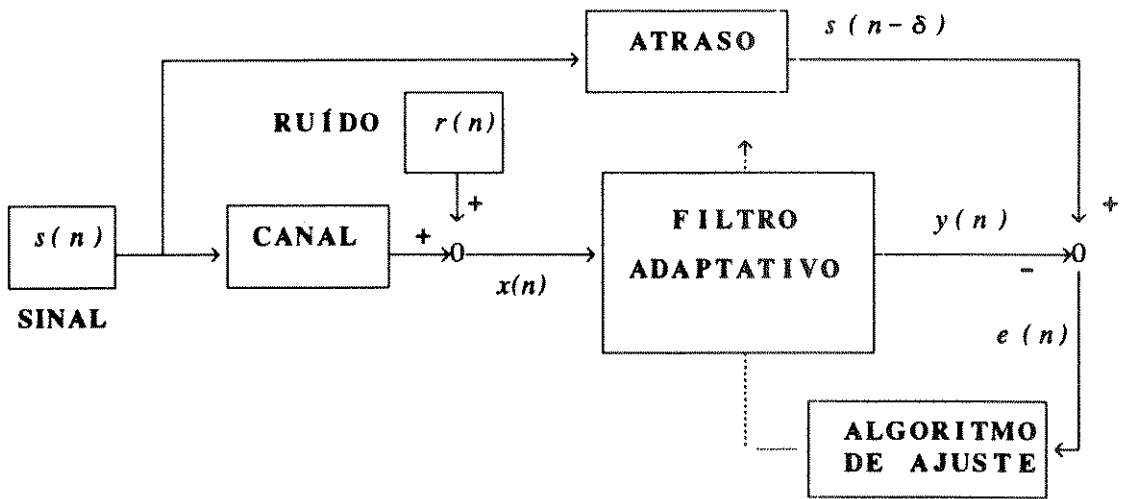


Fig.2.1 - Esquema Geral do Equalizador Adaptativo

Na Fig.2.2, $y(n)$ é calculado como

$$y(n) = \sum_{l=1}^M \hat{W}_l(n) x(n-l) \quad (2.5)$$

onde M e $\hat{W}_l$ são o número de coeficientes e o valor do l -ésimo coeficiente do filtro, respectivamente.

A atualização dos coeficientes do equalizador adaptativo de LMS na Fig.2.2 é feita como

$$\hat{W}_l(n+1) = \hat{W}_l(n) + \rho x(n-l) e(n) \quad 0 \leq l \leq M-1 \quad (2.6)$$

onde ρ é o tamanho de passo.

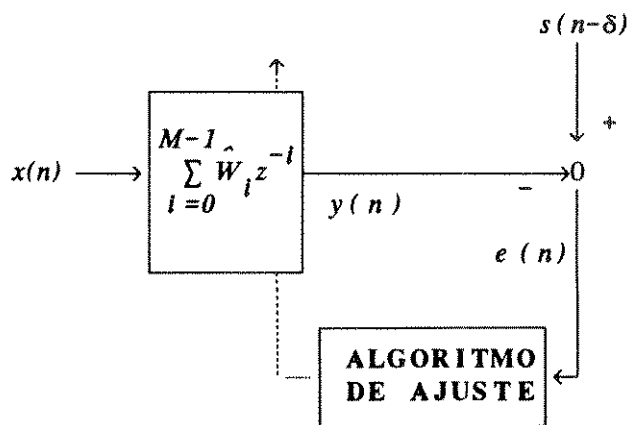


Fig.2.2 - Equalizador Adaptativo de LMS

Nas Fig.2.3 e Fig.2.4, a saída do filtro $y(n)$ é calculado como

$$y(n) = \sum_{l=1}^N \hat{a}_l(n) y(n-l) + \sum_{j=0}^M \hat{b}_j(n) x(n-j) \quad (2.7)$$

onde N e M são os números de coeficientes da parte realimentada e da parte transversal, respectivamente, e $\hat{a}_l(n)$ e $\hat{b}_j(n)$ são os coeficientes correspondentes.

A atualização dos coeficientes do equalizador adaptativo de SHARF na Fig.2.3 é feita como

$$\hat{a}_l(n+1) = \hat{a}_l(n) + \rho y(n-l) v(n) \quad 1 \leq l \leq N \quad (2.8)$$

$$\hat{b}_j(n+1) = \hat{b}_j(n) + \rho x(n-j) v(n) \quad 0 \leq j \leq M \quad (2.9)$$

onde ρ é o tamanho de passo e $v(n)$ é o erro filtrado definido como

$$v(n) = e(n) + \sum_{l=1}^L c_l e(n-l) \quad (2.10)$$

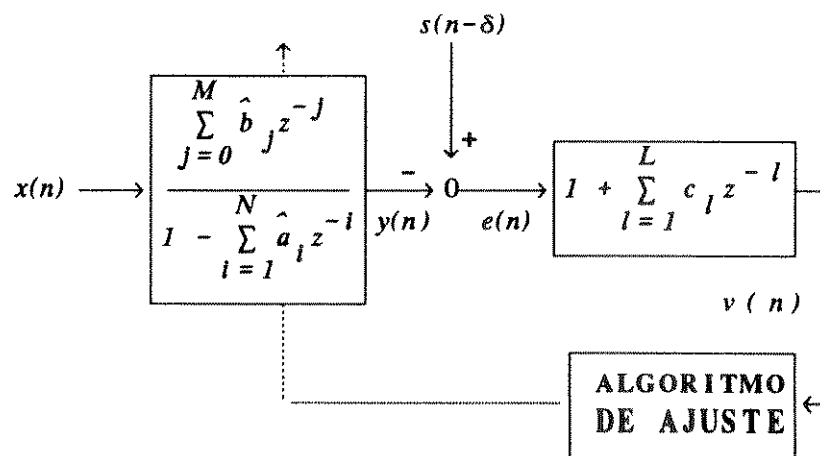


Fig.2.3 - Equalizador Adaptativo de SHARF

A atualização dos coeficientes do equalizador adaptativo de AFM na Fig.2.4 é feita como

$$\hat{a}_l(n+1) = \hat{a}_l(n) + \rho e(n) df(n-l) \quad 1 \leq l \leq N \quad (2.11)$$

$$\hat{b}_j(n+1) = \hat{b}_j(n) + \rho e(n) xf(n-j) \quad 0 \leq j \leq M \quad (2.12)$$

onde ρ é o tamanho de passo e $xf(n)$ e $df(n)$ são definidos como

$$xf(n) = x(n) + \sum_{l=1}^N \hat{a}_l(n) xf(n-l) \quad (2.13)$$

$$df(n) = d(n) + \sum_{l=1}^N \hat{a}_l(n) df(n-l) \quad (2.14)$$

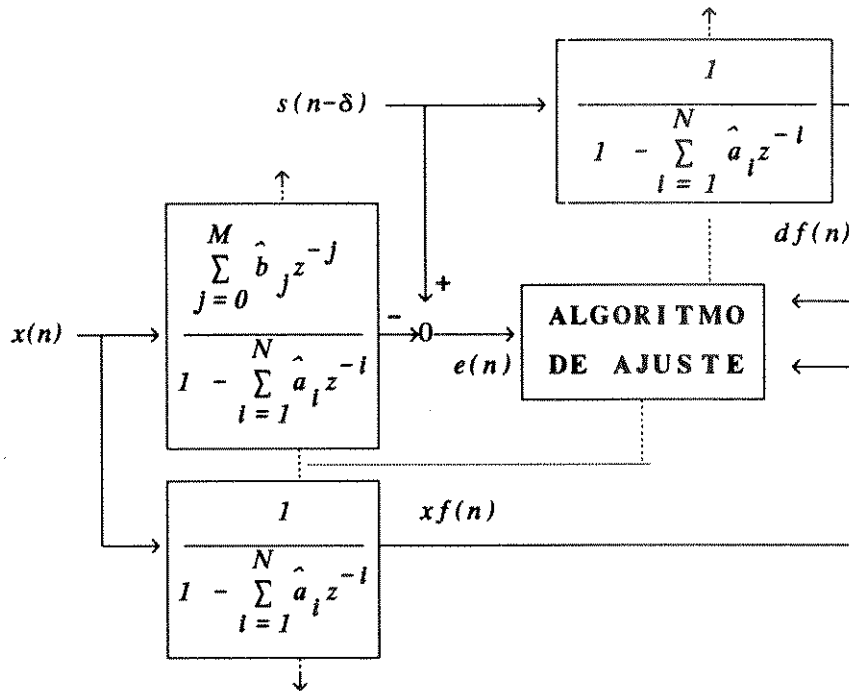


Fig.2.4 - Equalizador Adaptativo de AFM

O algoritmo de filtro de Kalman é

$$\mathbb{K}(n) = \mathbb{P}_I(n) \hat{\mathbb{H}} \{ \hat{\mathbb{H}}^T \mathbb{P}_I(n) \hat{\mathbb{H}} + \hat{\sigma}_r^2 \}^{-1} \quad (2.15)$$

$$\hat{\mathbf{S}}(n) = \mathbf{A} \hat{\mathbf{S}}(n-1) + \mathbf{K}(n) \{x(n) - \hat{\mathbf{H}}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{S}}(n-1)\} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}_I(n) - \mathbf{K}(n) \hat{\mathbf{H}}^T \mathbf{P}_I(n) \quad (2.17)$$

$$\mathbf{P}_I(n+1) = \mathbf{A} \mathbf{P}(n) \mathbf{A}^T + \mathbf{F} \mathbf{F}^T \quad (2.18)$$

onde

$$\hat{\mathbf{H}} \equiv [\hat{h}(0) \ \hat{h}(1) \ \hat{h}(2) \ \dots \ \hat{h}(N-2) \ \hat{h}(N-1)]$$

$$\mathbf{A} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & \dots & 1 \\ & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

As condições iniciais são costumeiramente $\hat{\mathbf{S}}(0) = \mathbf{0}$ e $\mathbf{P}_I(0) = \mathbf{I}$. Como observamos no algoritmo acima, as equações contêm as estimativas do vetor da resposta impulsiva do canal $\hat{\mathbf{H}}$ e a variância do ruído aditivo $\hat{\sigma}_r^2$. Para identificar a resposta impulsiva do canal $\mathbf{H}$, utiliza-se o algoritmo de LMS operando em paralelo com o equalizador de Kalman. O algoritmo de LMS é descrito como

$$e_I(n) = x(n) - \hat{\mathbf{H}}(n)^T \mathbf{S}(n) \quad (2.19)$$

$$\hat{\mathbf{H}}(n+1) = \hat{\mathbf{H}}(n) + \rho \mathbf{S}(n) e_I(n) \quad (2.20)$$

onde ρ é o tamanho de passo e $\hat{\mathbf{H}}(0) = \mathbf{0}$. Para convergência rápida da (1.4.49), o tamanho de passo é

$$\rho = \frac{1}{2N\sigma_s^2} = \frac{1}{2N}$$

A estimação recursiva de σ_r^2 é feita usando

$$\hat{\sigma}_r^2(n) = \left\{ 1 - \frac{1}{N} \right\} \hat{\sigma}_r^2(n-1) + \frac{e_I^2(n)}{2N} \quad (2.21)$$

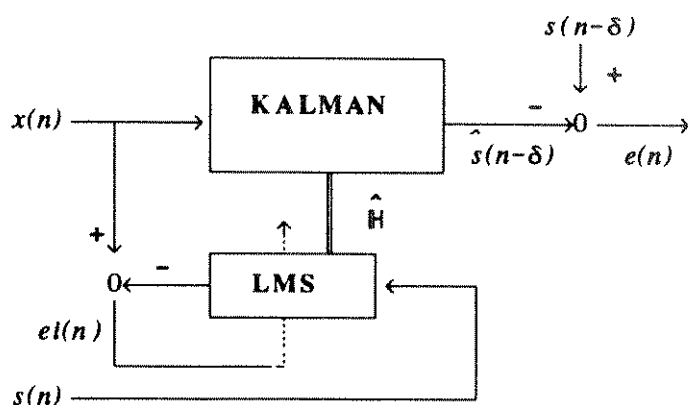
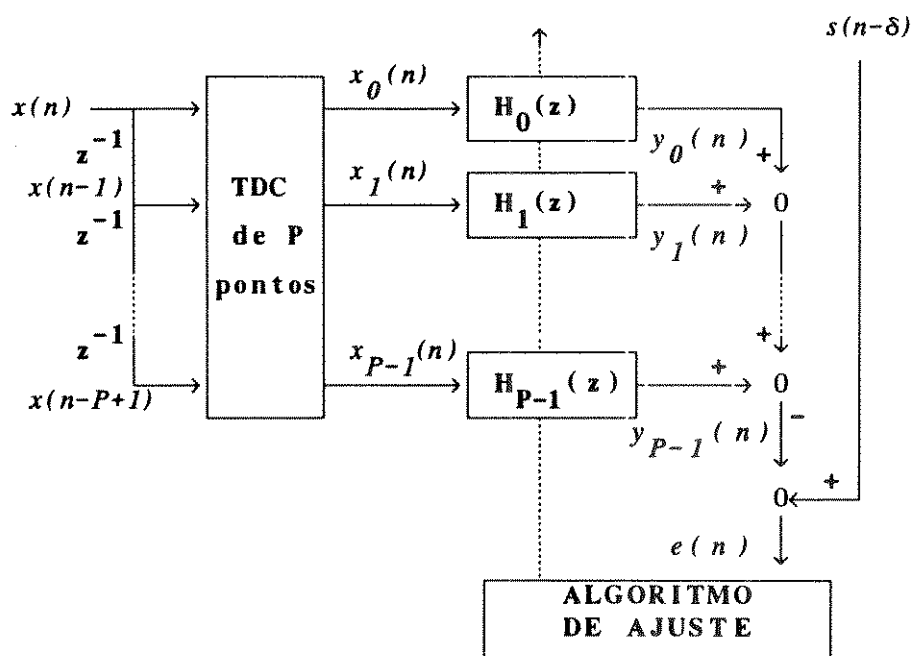


Fig.2.5 - Equalizador Adaptativo de Kalman

A atualização dos coeficientes do equalizador adaptativo de FADF IIR real simplificado é feita conforme o algoritmo de FADF IIR real simplificado, mostrado na Tab.1.5.2. da seção 1.5.



$$H_k(z) = \frac{b_{0k}(n) + b_{1k}(n)z^{-1} + b_{2k}(n)z^{-2}}{1 - a_{0k}(n)z^{-1} - a_{1k}(n)z^{-2}} \quad (0 \leq k \leq P-1)$$

Fig.2.6 - Equalizador Adaptativo de FADF IIR real simplificado

Os três canais padrões utilizados têm resposta impulsiva do tipo FIR de ordem 31 (32 parâmetros de amostra) e são apresentados na Fig.2.7. A taxa de amostragem equivalente foi 80 KHz. A Fig.2.8 mostra os zeros destes canais e notamos que os três canais são de fase não-mínima visto que o canal H20 tem dois zeros fora do círculo raio unitário (C.R.U.) e os canais H30 e H40 têm um zero fora do C.R.U. cada um.

O simulador foi implementado através da linguagem MATLAB, e as comparações entre os equalizadores adaptativos com respeito ao erro médio quadrático em regime, número global de multiplicações em cada iteração, número de iterações necessário para convergência e número global de multiplicações necessário para convergência foram realizadas.

2.1. Procedimento para definição de Intervalo de Confiança

Para analisar os resultados das simulações apropriadamente, construímos intervalos de confiança para erro o médio quadrático em regime. O procedimento empregado para construir intervalos de confiança para erro quadrático em regime é mostrado em detalhes no APENDICE 3. Descrevemos a seguir brevemente este procedimento.

Suponha que temos n observações do erro do equalizador adaptativo, x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) depois que o equalizador adaptativo entrou em regime. Dividimos estas n observações em k lotes de tamanho m ($n = k * m$). Seja $y(j)$ ($j = 1, 2, \dots, k$) a média das m observações agrupados no j -ésimo lote e sejam $\bar{x}$ e $\bar{y}$ as médias das n observações e k lotes, respectivamente. Assim temos :

$$y(j) = \frac{1}{m} \sum_{i=S1}^{S2} x_i \quad (j=1 \ 2 \ \dots \ k) \quad (2.22)$$

$$\bar{x} = \bar{y} \quad (2.23)$$

onde $S1 = m*(j-1)+1$ e $S2 = m*j$. Estimamos a variância dos k lotes por :

$$S^2 = \hat{\sigma}_y^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^k \{y(j) - \bar{y}\}^2 \quad (2.24)$$

Se escolhermos m suficientemente grande para que os $y(j)$ ($j=1, 2, \dots, k$) tenham distribuição aproximadamente normal, e sejam não correlacionadas, construímos o intervalo de confiança de $100(1-\alpha)\%$ para média das observações μ .

$$P\left(\bar{y} - t_{k-1, 1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{k}} \leq \mu \leq \bar{y} + t_{k-1, 1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{k}} \right) = 1-\alpha \quad (2.25)$$

onde $t_{k-1, 1-\alpha/2}$ é o valor que uma distribuição t com o grau de liberdade $(k-1)$ avaliado no ponto $(1-\alpha/2)$.

Para garantir que $y(j)$ ($j=1,2,\dots k$) sejam não correlacionadas, fixamos k e incrementamos m até que a correlação de "lag one" estimado entre os $y(j)$ ($j=1,2,\dots k$) seja pequena. Usamos o estimador "jackknifed" $\hat{p}_j$ para a correlação de "lag one".

Usando $y(j)$ ($j=1,2,\dots k$) com distribuição normal e pequena correlação de "lag one", construímos o intervalo de confiança de $100(1-\alpha)\%$ para variância dos lotes σ_y^2 :

$$P\left(\frac{(k-1)S^2}{q_{k-1,1-\alpha/2}} \leq \sigma_y^2 \leq \frac{(k-1)S^2}{q_{k-1,\alpha/2}} \right) = 1-\alpha \quad (2.26)$$

onde $q_{k-1,\alpha/2}$ e $q_{k-1,1-\alpha/2}$ são os valores de uma distribuição chi-quadrada com o grau de liberdade $(k-1)$, avaliados nos pontos $(\alpha/2)$ e $(1-\alpha/2)$, respectivamente.

A relação entre $\hat{\sigma}_x^2$ e $\hat{\sigma}_y^2$ é descrita por :

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{(k-1)m^2}{n-1} \hat{\sigma}_y^2 - \frac{1}{n-1} TC \quad (2.27)$$

onde

$$TC = 2 \sum_{l=1}^k \sum_{i=(l-1)m+1}^{lm} \sum_{j=i+1}^{lm} (x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x})$$

Usando (2.27), podemos construir o intervalo de confiança de $100(1-\alpha)\%$ para σ_x^2 :

$$P\left(\frac{(k-1)^2 m^2 S^2}{(n-1)q_{k-1,1-\alpha/2}} - \frac{TC}{n-1} \leq \sigma_x^2 \leq \frac{(k-1)^2 m^2 S^2}{(n-1)q_{k-1,\alpha/2}} - \frac{TC}{n-1} \right) = 1-\alpha \quad (2.28)$$

A relação $E[x_i^2] = \sigma_x^2 + \mu^2$ mostra que teremos o intervalo de confiança para $E[x_i^2]$ se conseguirmos os intervalos de confiança para σ_x^2 e μ^2 . Já temos o intervalo de confiança para σ_x^2 como em (2.28), e obteremos o intervalo de confiança

para μ^2 através de (2.25), e das relações (A.3.17), (A.3.18) e (A.3.19) no APENDICE 3. Podemos expressar os intervalos de confiança para σ_x^2 e μ^2 como

$$P (MIN1 \leq \sigma_x^2 \leq MAX1) = 1 - \alpha \quad (2.29)$$

$$P (MIN3 \leq \mu^2 \leq MAX3) = 1 - \alpha \quad (2.30)$$

Finalmente obtemos o intervalo de confiança para $E[x_l^2]$ de $100(1-2\alpha) \%$, utilizando a Proposição no APÊNDICE 3, como

$$P (MIN1 + MIN3 \leq E[x_l^2] \leq MAX1 + MAX3) = 1 - 2\alpha \quad (2.31)$$

O número de lotes, k , foi escolhido igual a 100 e construímos os intervalos de confiança de 90% para erro médio quadrático em regime dos equalizadores adaptativos.

As Fig.2.9-Fig.2.10 mostram dois exemplos dos resultados das simulações utilizando este procedimento para construir intervalo de confiança para erro médio quadrático em regime. Incrementamos o tamanho de lote, m , até que a correlação de "lag one" estimado entre lotes como nas Fig.2.9(a) e Fig.2.10(a) seja suficientemente pequena, ou seja, até que o valor do estimador de correlação de "lag one" fique na faixa pontilhada, que é o limite de confiança de 95%. Os extremos desta faixa são definidos [27] como

$$-1/k \pm 2/\sqrt{k} \quad (2.32)$$

e determinamos os valores máximo e mínimo do intervalo de confiança utilizando as figuras. Quando o valor mínimo do intervalo de confiança ficou negativo como na Fig.2.10(b), fizemos este valor igual a zero. É importante notar que no caso da Fig.2.10(b) o intervalo de confiança para erro médio quadrático em regime não diminui a medida que o tamanho de lote aumenta, e observamos o mesmo comportamento especialmente quando o canal H20 foi utilizado.

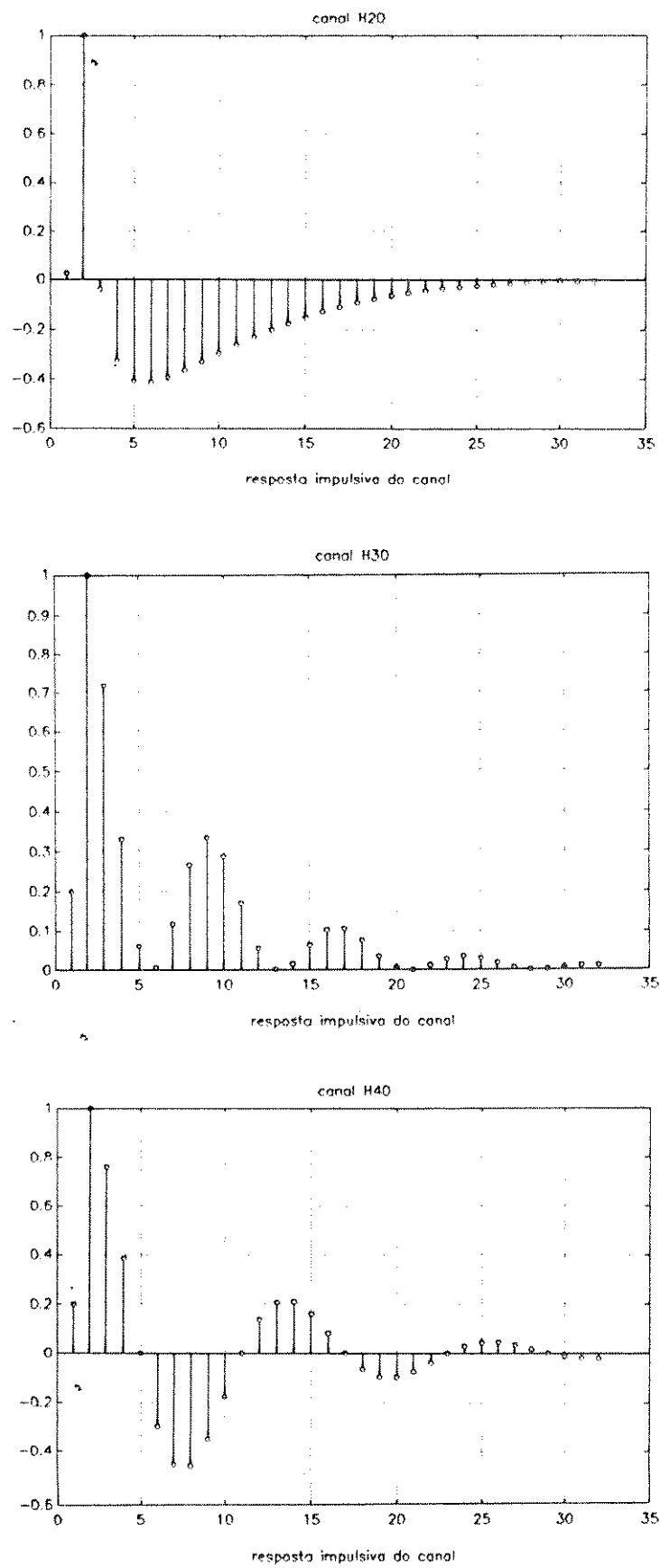


Fig.2.7 A resposta impulsiva dos Canais H20, H30 e H40.

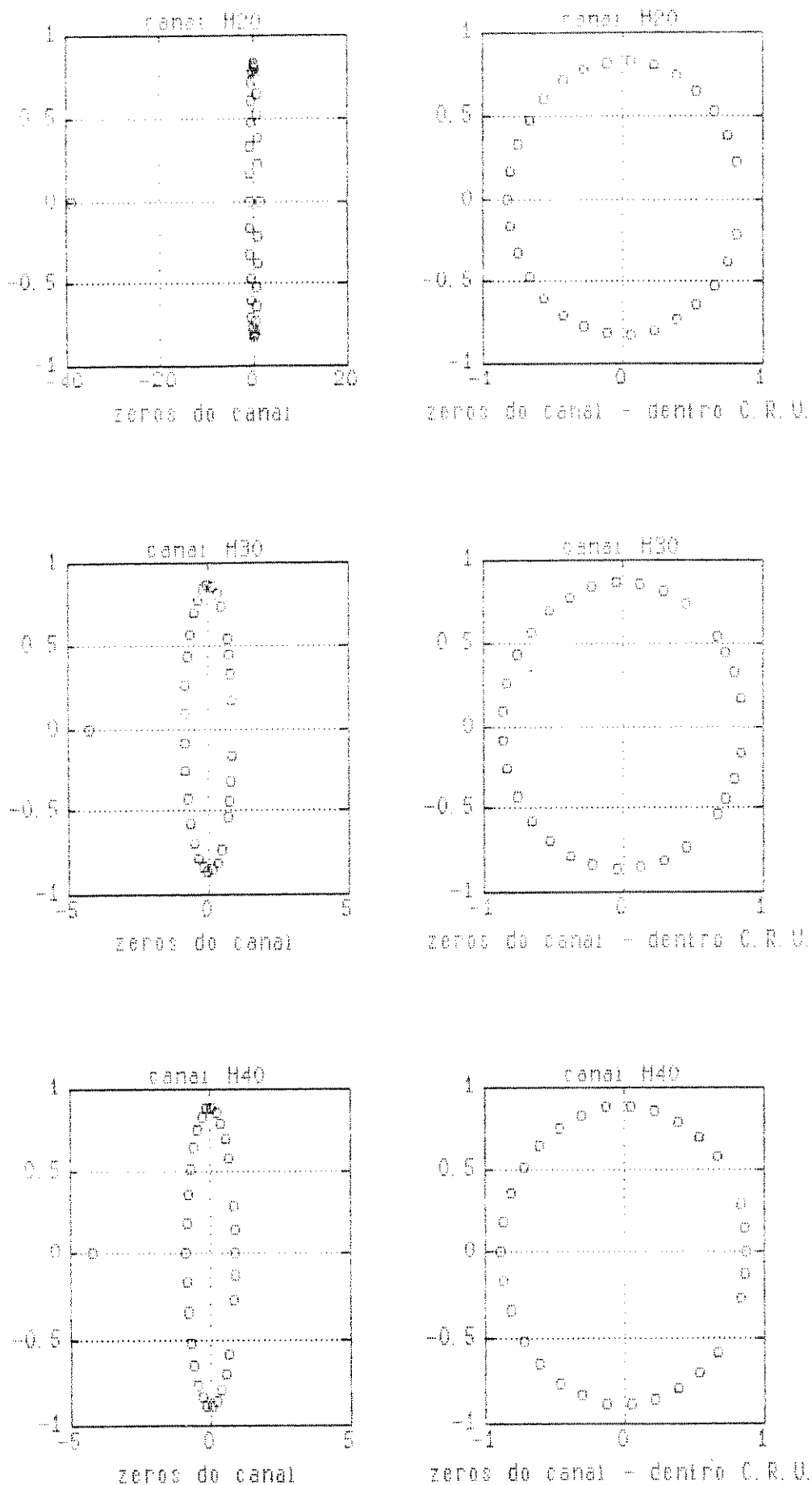


Fig.2.8 Os zeros dos canais H20, H30 e H40.

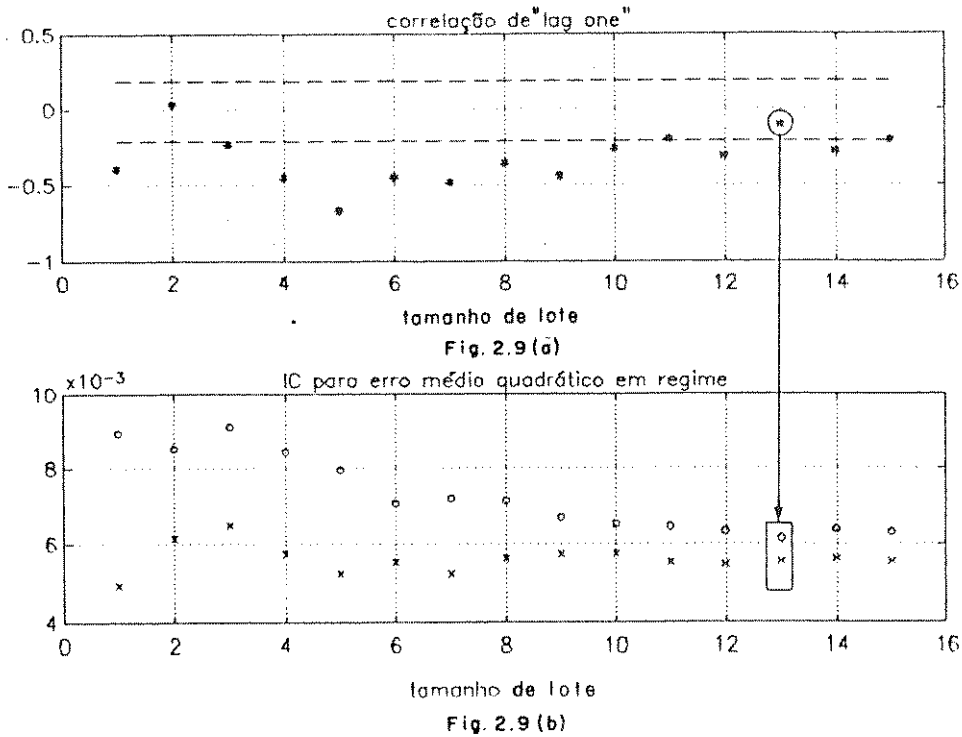


Fig.2.9 A influência do tamanho de lote sobre a correlação de "Lag One" e o intervalo de confiança para erro médio quadrático em regime do equalizador adaptativo de AFM ($N = 31$, $M = 9$, $\delta = 9$, $SNR = 30$, $\rho = 0,006$, canal H40)

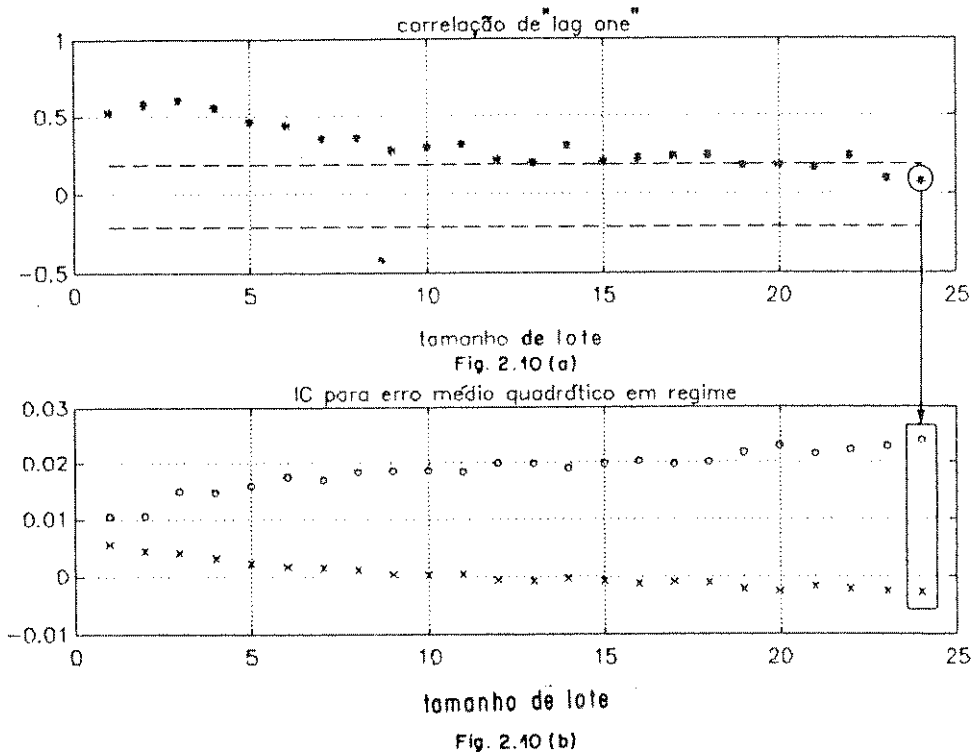


Fig.2.10 A influência do tamanho de lote sobre a correlação de "Lag One" e o intervalo de confiança para erro médio quadrático em regime do equalizador adaptativo de AFM ($N = 31$, $M = 9$, $\delta = 9$, $SNR = 30$, $\rho = 0,01$, canal H20)

CAPÍTULO 3. RESULTADOS E CONSIDERAÇÕES

Neste capítulo, apresentamos os resultados e considerações sobre as simulações dos equalizadores adaptativos IIR descritos anteriormente. Os algoritmos testados são de SHARF, AFM, Kalman e FADF IIR real simplificado. Também, realizamos simulações do equalizador adaptativo FIR usando o algoritmo de LMS para comparações.

O tamanho do passo utilizado nas simulações foram escolhidos iguais (0,01) exceto quando explicitamente indicados. A escolha geral da ordem da parte transversal, M , dos equalizadores adaptativos de SHARF e AFM foi 9. Para simplificar a escolha dos coeficientes c_l ($l=1,2,...,L$) na seção 1.2.1, o número destes coeficientes, L , foi escolhido igual a um e $c_1 = -0,5$ foi utilizado em todas as simulações do algoritmo de SHARF.

O número de iterações necessárias para convergência dos equalizadores adaptativos foi determinado não somente pela evolução do erro mas também pela evolução dos coeficientes dos equalizadores adaptativos. O número global de multiplicações necessários para convergência dos equalizadores adaptativos foi calculados pela Tab.1.7.1 e pelo número de iterações necessárias para convergência dos equalizadores adaptativos.

3.1. A Influência do Atraso δ do Sinal Desejado, sobre o desempenho do Equalizador Adaptativo de AFM

A Fig.3.1 mostra a influência do atraso δ do sinal desejado sobre erro médio quadrático em regime do equalizador adaptativo de AFM. As Fig.3.2-Fig.3.4 mostram os pólos e zeros do equalizadores depois da adaptação, a evolução do erro e dos coeficientes dos equalizadores adaptativos de AFM com atraso δ de 6, 7, 8, respectivamente. Estes equalizadores adaptativos são de ordem suficiente ($N = 31$) .

Da Fig.3.1, podemos observar que o equalizador adaptativo de AFM com atraso $\delta = 9$, que é igual à ordem do numerador do equalizador, apresenta o menor erro médio quadrático em regime. Notamos das Fig.3.2-Fig.3.4 que alguns coeficientes da parte realimentada dos equalizadores adaptativos de AFM com atraso $\delta = 6, 7, 8$ não convergem. Também, é importante destacar que estes equalizadores divergem com atraso $\delta > 9$ ou $\delta < 6$. Na seção 1.1, afirmamos que o atraso apropriado do equalizador adaptativo do tipo IIR é igual à ordem do numerador do equalizador, e confirmamos isto através das considerações acima. Nas simulações a seguir, usamos o atraso igual à ordem do numerador do equalizador para os equalizadores adaptativos do tipo IIR na forma direta.

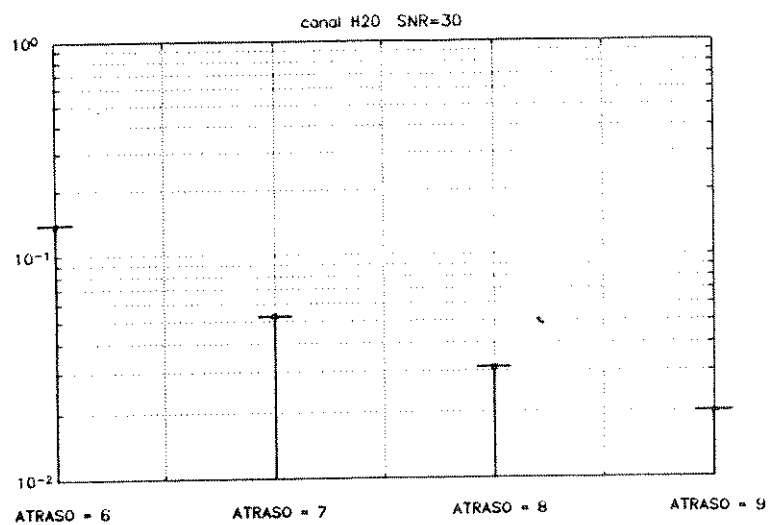


Fig.3.1 A influência do atraso δ do sinal desejado, sobre o erro médio quadrático em regime do equalizador adaptativo AFM
($N = 31$, $M = 9$, $\rho = 0,01$)

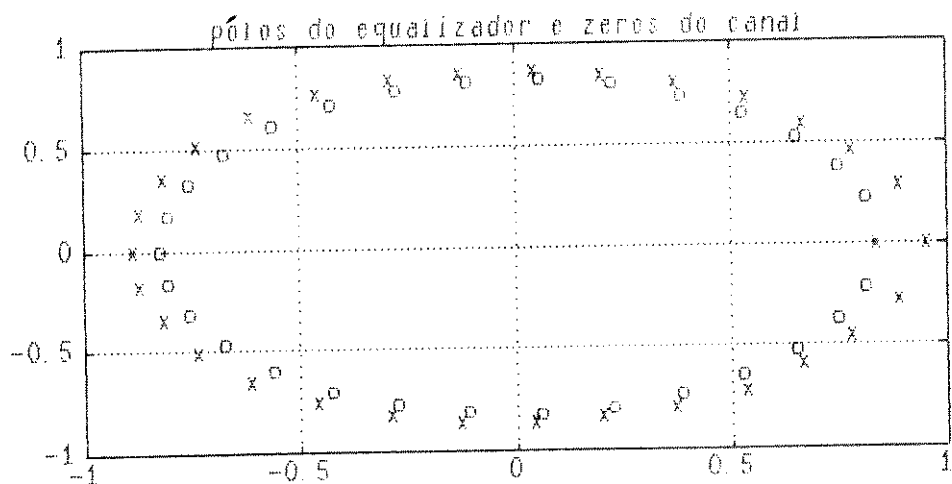


FIG.3.2(A) o : OS ZEROS
 x : OS PÓLOS

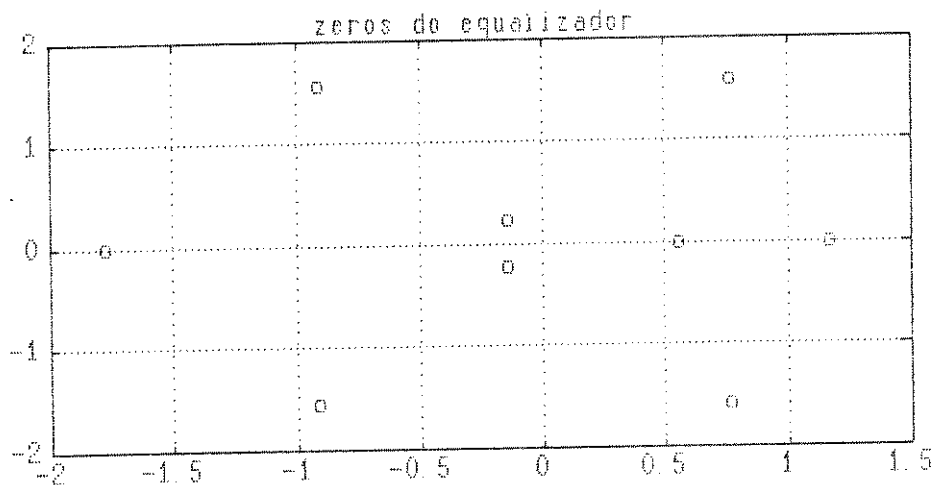


FIG.3.2(B)

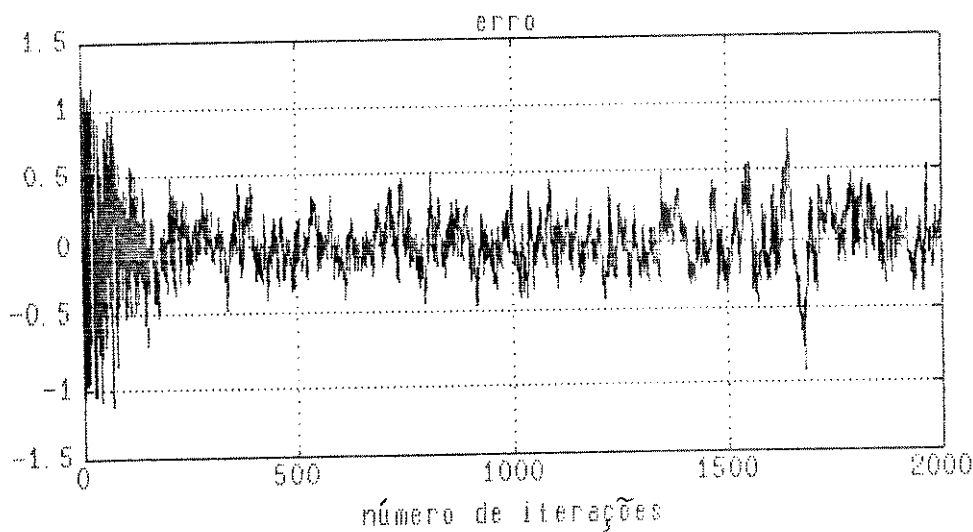


FIG.3.2(C)

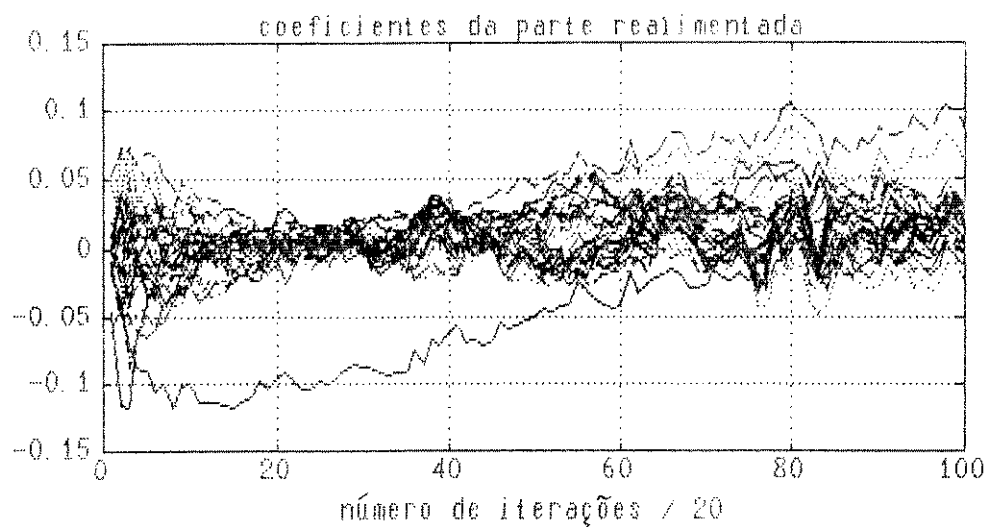


FIG.3.2(D)

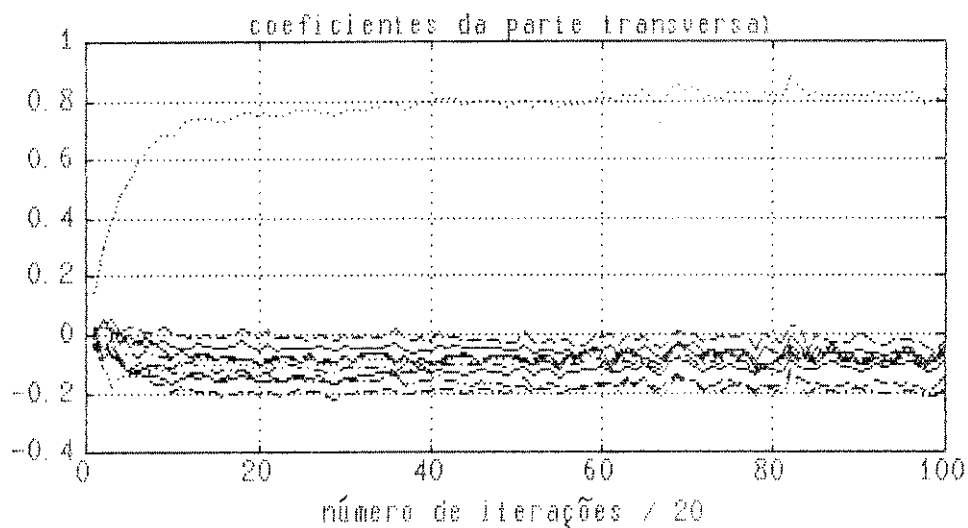


FIG.3.2(E)

Fig.3.2 Os pólos e zeros do equalizador depois da adaptação, a evolução do erro e dos coeficientes do equalizador adaptativo de AFM com atraso $\delta = 6$.

($N = 31$, $M = 9$, $SNR = 30$, $\rho = 0,01$, canal H20)

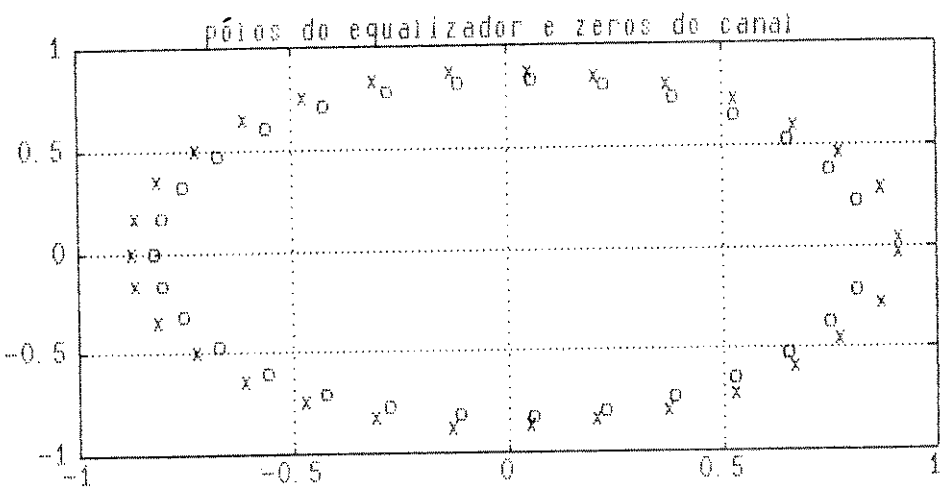


FIG.3.3(A) o : OS ZEROS
 x : OS PÓLOS

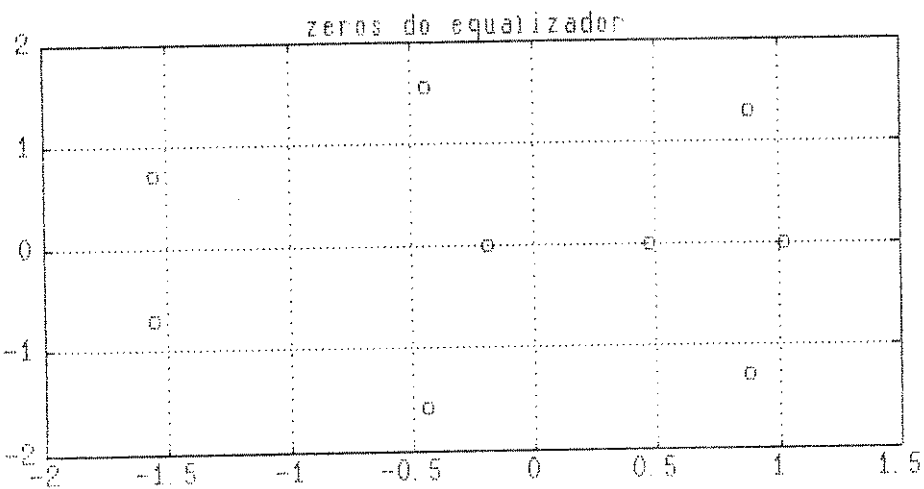


FIG.3.3(B)

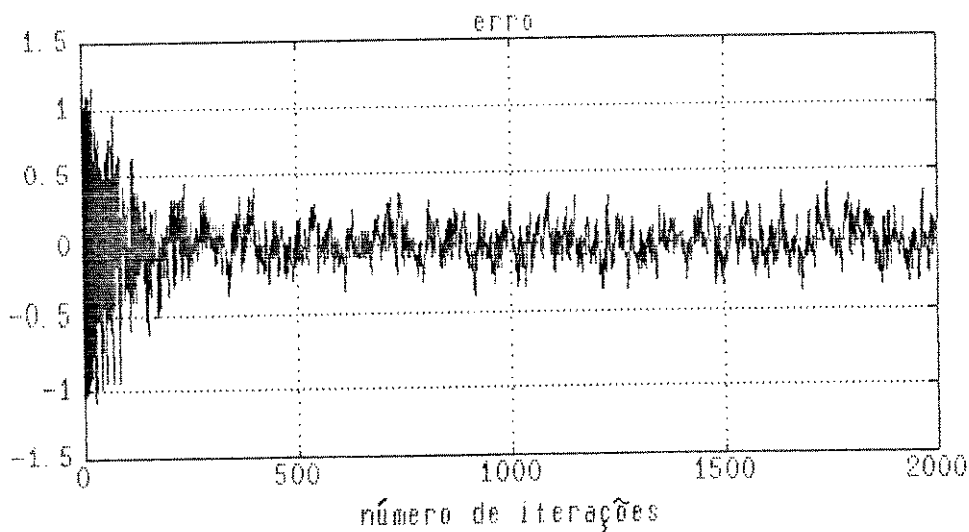


FIG.3.3(C)

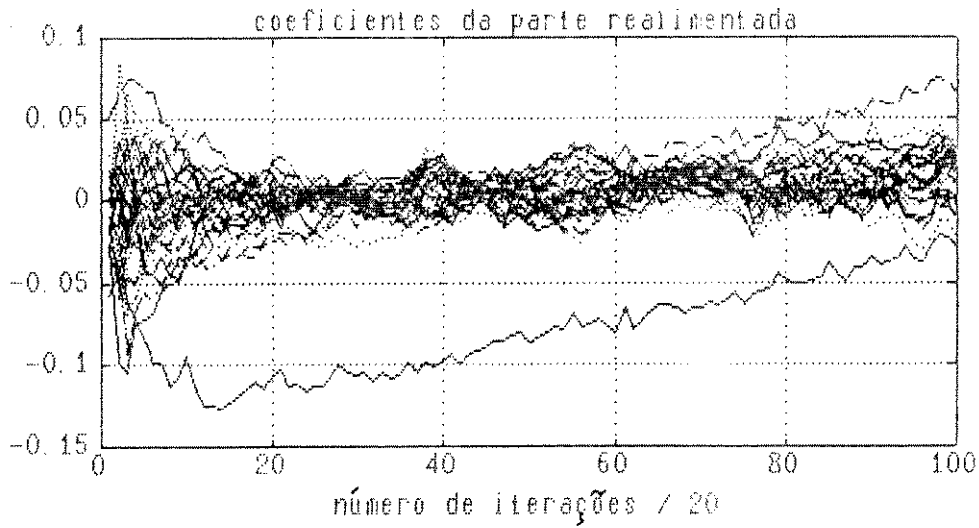


FIG.3.3(D)

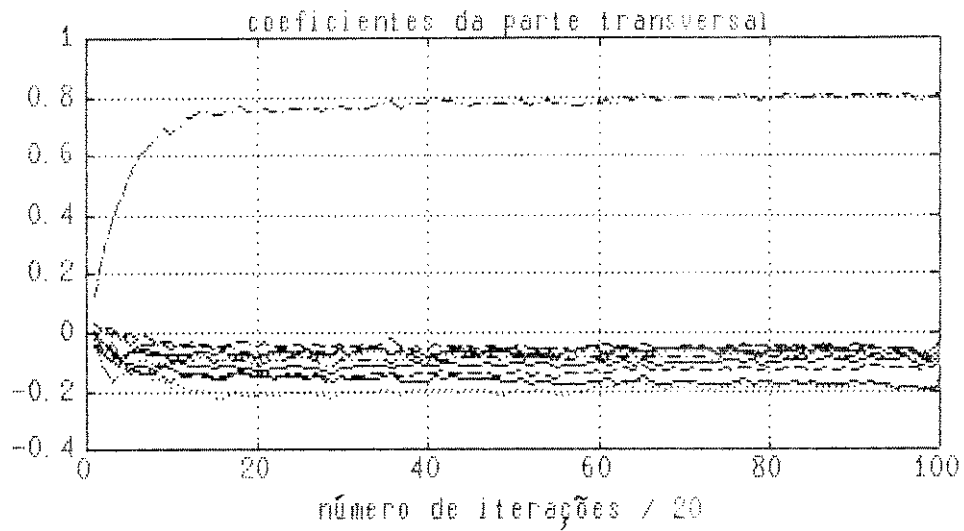


FIG.3.3(E)

Fig.3.3 Os pólos e zeros do equalizador depois da adaptação, a evolução do erro e dos coeficientes do equalizador adaptativo de AFM com atraso $\delta = 7$
($N = 31$, $M = 9$, $SNR = 30$, $\rho = 0,01$, canal H20)

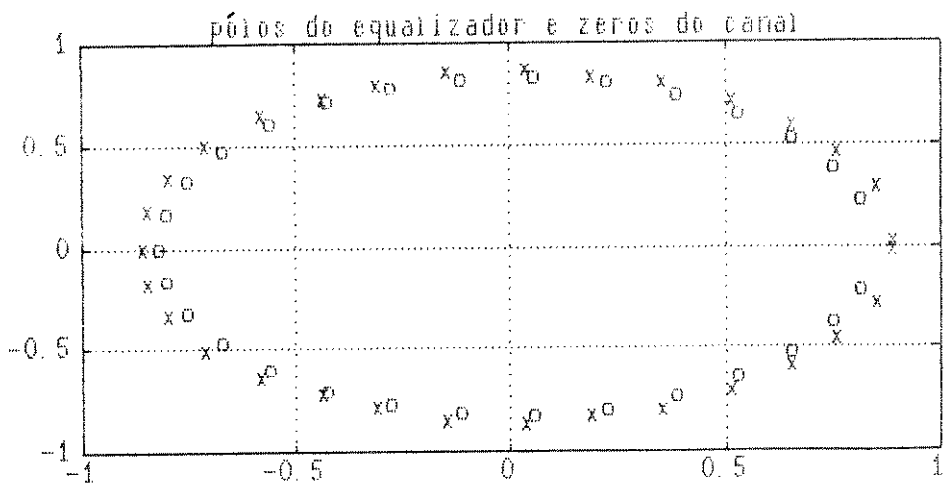


FIG.3.4(A) o : OS ZEROS
 x : OS PÓLOS

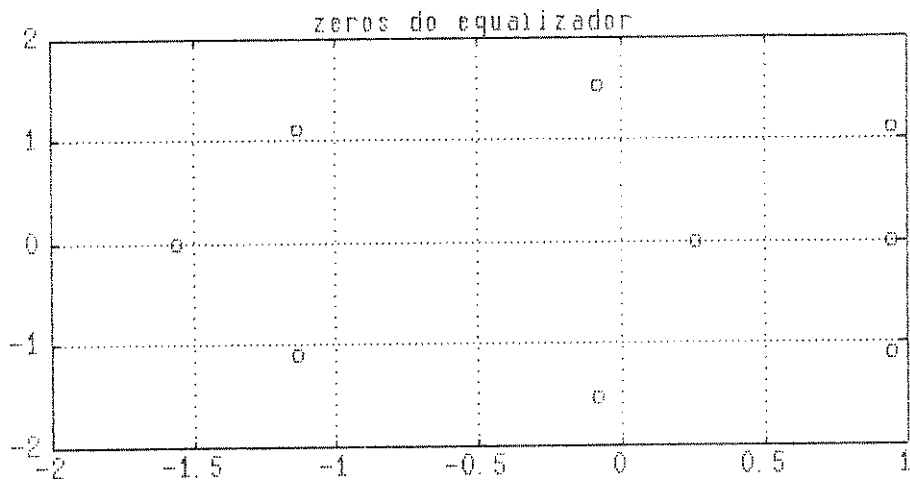


FIG.3.4(B)

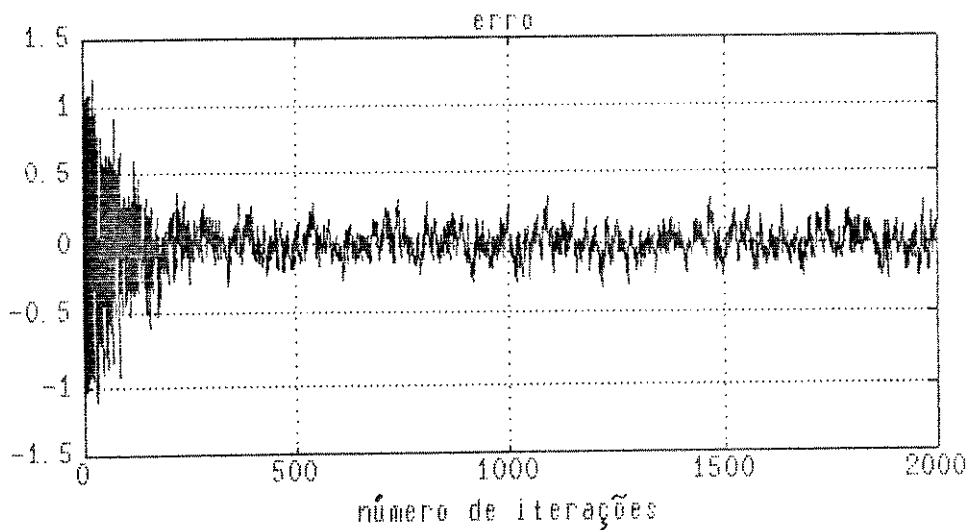


FIG.3.4(C)

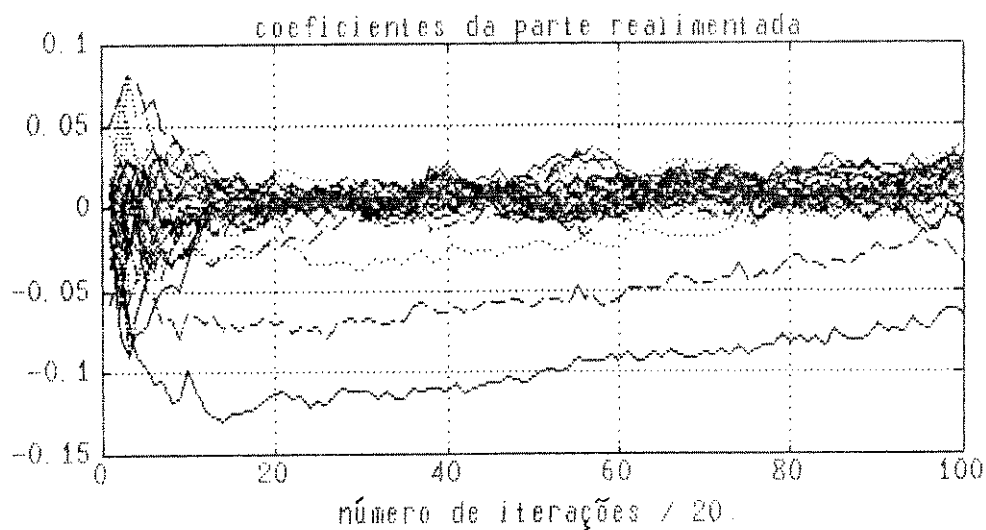


FIG.3.4(D)

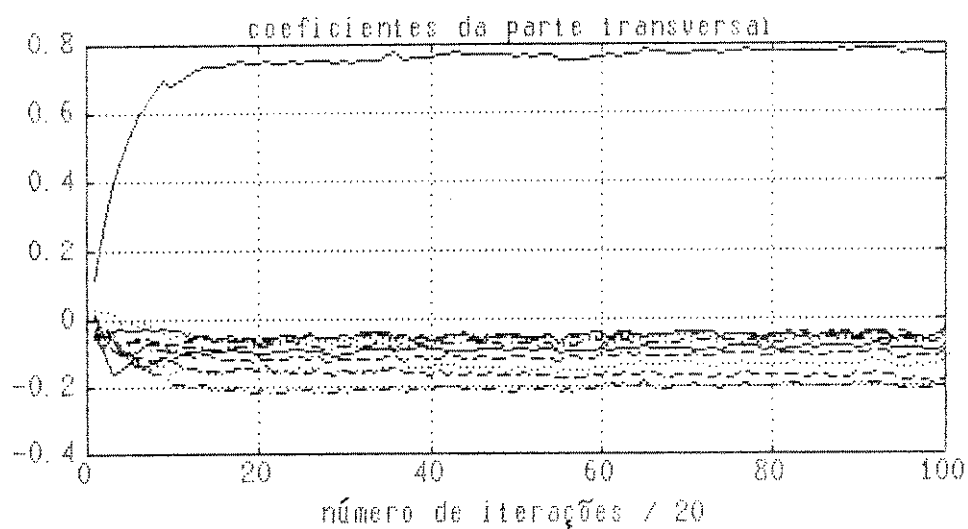


FIG.3.4(E)

Fig.3.4 Os pólos e zeros do equalizador depois da adaptação, a evolução do erro e dos coeficientes do equalizador adaptativo de AFM com atraso $\delta = 8$

($N = 31$, $M = 9$, $SNR = 30$, $\rho = 0,01$, canal H20)

3.2. Comparações entre os algoritmos

A Fig.3.5 mostra a evolução dos coeficientes e do erro do equalizador adaptativo de LMS. As Fig.3.6 e Fig.3.7 mostram os pólos e zeros dos equalizadores depois da adaptação, a evolução do erro e dos coeficientes dos equalizadores adaptativos de SHARF e AFM, respectivamente. A Fig.3.8 mostra a evolução dos coeficientes e do erro de identificação do canal, valor estimado da variância do ruído, erro e erro quadrático do equalizador adaptativo de Kalman. A Fig.3.9 mostra a evolução dos coeficientes, do erro e do erro quadrático do equalizador adaptativo de FADF IIR real simplificado.

A Fig.3.10 faz uma síntese destes resultados mostrando os intervalos de confiança para erro médio quadrático em regime dos equalizadores adaptativos de LMS, SHARF, AFM, Kalman e FADF IIR real simplificado usando vários canais. "NM" nas figuras significa o número global de multiplicações por iteração de cada algoritmo. Como mostrado na seção 2.1, alguns intervalos de confiança, especialmente as simulações para o canal H20, não se estreitaram a medida em que o tamanho de lote aumenta. Fig.3.11 mostra o número de iterações e o número global de multiplicações necessárias para convergência destes equalizadores. Os equalizadores adaptativos do tipo IIR são de ordem suficiente ($N=31$ para SHARF e AFM, $N=32$ para Kalman, $P=16$ para FADF IIR real simplificado). Os números de taps dos equalizadores adaptativos de LMS são 43 e 72 e os atrasos do sinal desejado destes equalizadores adaptativos são 8 e 14, respectivamente.

Das Fig.3.10 e Fig.3.11, notamos que o equalizador adaptativo de Kalman sempre apresenta o menor erro médio quadrático em regime aproximando-se da potência do ruído do canal ($= 10^{-3}$) com o menor número de iterações para atingir convergência. O fato do filtro de Kalman ser idêntico ao filtro de Wiener do tipo IIR quando todos os processos são estacionários e o ruído de observação é branco [26] explicam estes resultados. A desvantagem é a maior complexidade computacional do equalizador adaptativo de Kalman exigindo um grande número de

multiplicações por iteração como indicado na Tab.1.7.1. Assim, o equalizador adaptativo de Kalman deve ser aplicado quando deseja-se alta precisão (quase atinge o "noise floor", se é de ordem suficiente) e rapidez (converge em 10, 15, 20 iterações para os canais H20, H30 e H40, respectivamente.) O custo deste alto desempenho está na sua complexidade computacional, exigindo um grande número de operações para cada iteração. Note porém que devido a sua rápida convergência, o número global de multiplicações para se atingir a convergência é comparável aos dos outros equalizadores. Isto permite imaginar que se a atualização do filtro não for necessária a cada iteração, ele pode ter um desempenho totalmente compatível com os equalizadores mais simples com um tempo equivalente para o período de aprendizagem.

O equalizador adaptativo de FADF IIR real simplificado apresenta menor erro médio quadrático em regime para o canal H20, porém o número global de multiplicações necessárias para convergência deste equalizador é muito maior do que dos demais equalizadores, dificultando sua aplicação em tempo real, além de não manter o mesmo desempenho para os canais H30 e H40.

O equalizador adaptativo de AFM sempre apresenta menor erro médio quadrático em regime do que os equalizadores adaptativos de LMS e SHARF mais acentuadamente nos canais H30 e H40 às custas de um pequeno aumento na complexidade computacional. No entanto, o equalizador de AFM tornou-se instável várias vezes durante as simulações. Indicamos a baixa relação sinal/ruído ($SNR = 20dB$), o tamanho grande do passo de adaptação e o número inadequado de coeficientes da ordem da parte transversal, M , como as possíveis causas de instabilidade. O erro médio quadrático em regime do equalizador adaptativo de SHARF é igual ou até mesmo pior do que o do equalizador adaptativo de LMS de mesma complexidade computacional. Como será discutido na seção 3.4, o desempenho dos equalizadores adaptativos de SHARF e AFM com respeito ao erro médio quadrático em regime pode ser melhorado variando a ordem da parte transversal, M .

Embora a incapacidade de equalização de canais de fase não-mínima usando

filtro adaptativo do tipo IIR, tenha sido mencionada na literatura [25] , é importante observar através das simulações que os equalizadores adaptativos de SHARF e AFM do tipo IIR convergem mesmo com a presença dos zeros fora do círculo raio unitário (C.R.U.) do canal de fase não-mínima. Neste caso, os pólos destes equalizadores modelam de forma mais precisa somente os zeros que ficam dentro do C.R.U. do canal de fase não-mínima como veremos na seção 3.3. Para os zeros fora do C.R.U. os pólos restantes ajustam-se de modo a compensar o módulo, isto é tendem a ter um módulo de valor inverso ao do zero, fazendo assim a compensação somente do módulo e resultando assim numa distorção na fase.

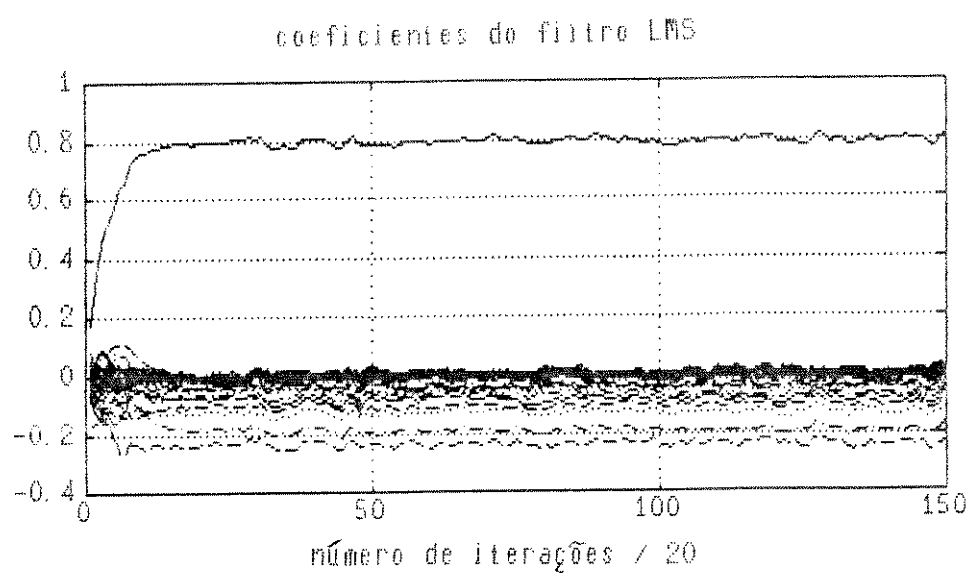


FIG.3.5(A)

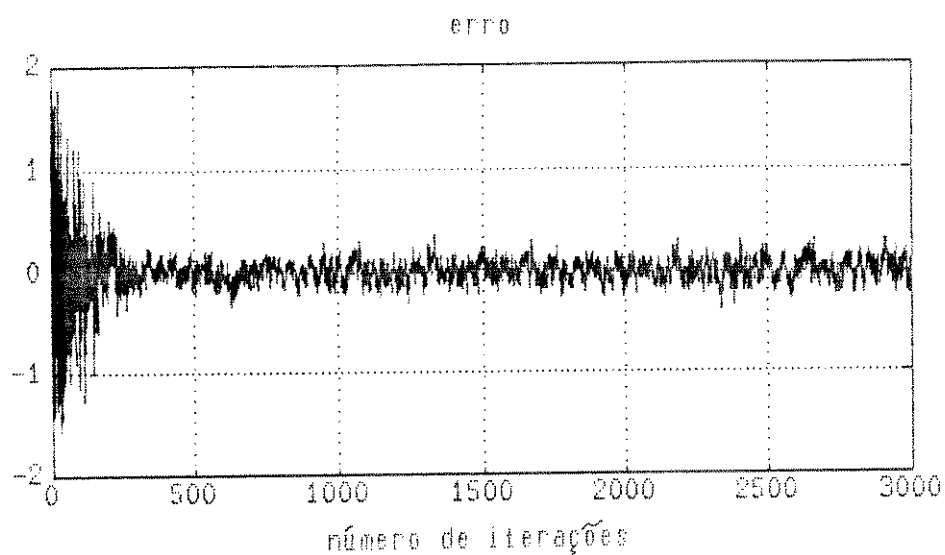


FIG.3.5(B)

Fig.3.5 A evolução dos coeficientes e do erro do equalizador adaptativo de LMS
($M = 43$, $\delta = 8$, $\text{SNR} = 30$, $\rho = 0,01$, canal H20)

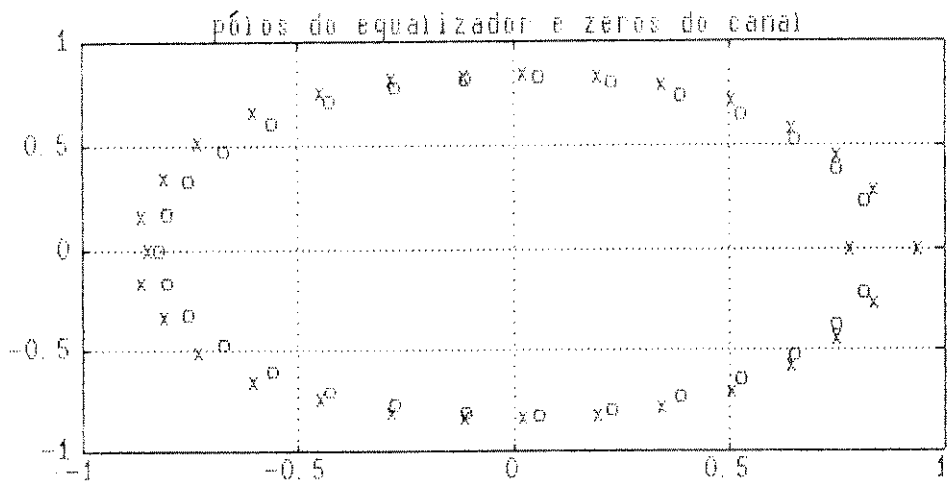


FIG.3.6(A)

o : OS ZEROS
x : OS PÓLOS

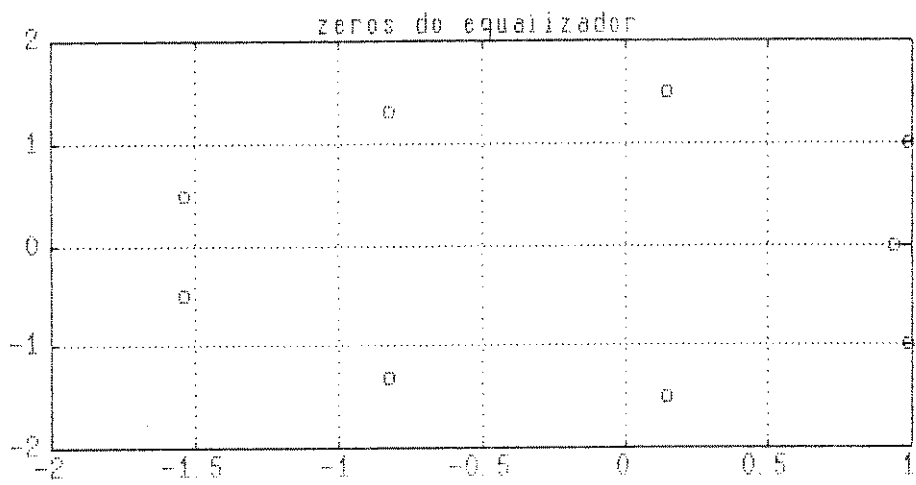


FIG.3.6(B)

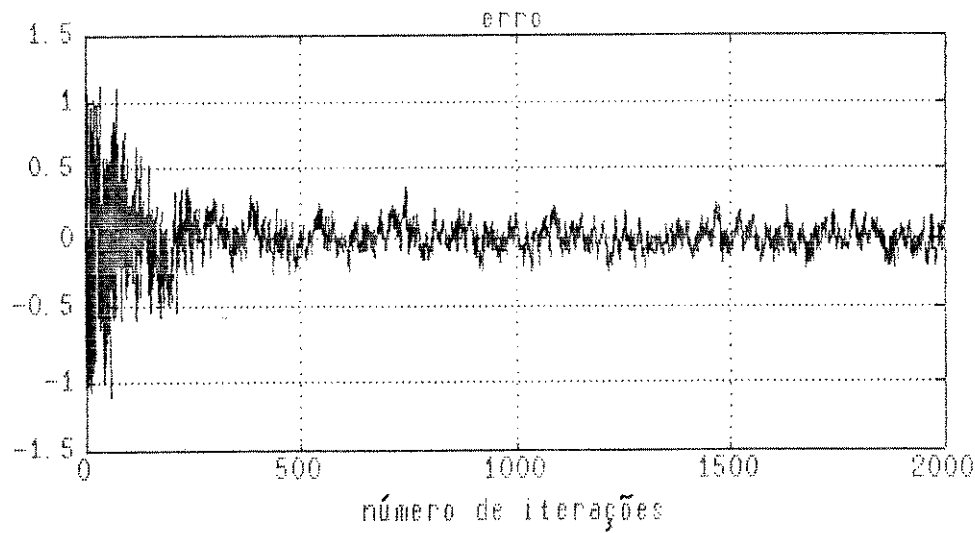


FIG.3.6(C)

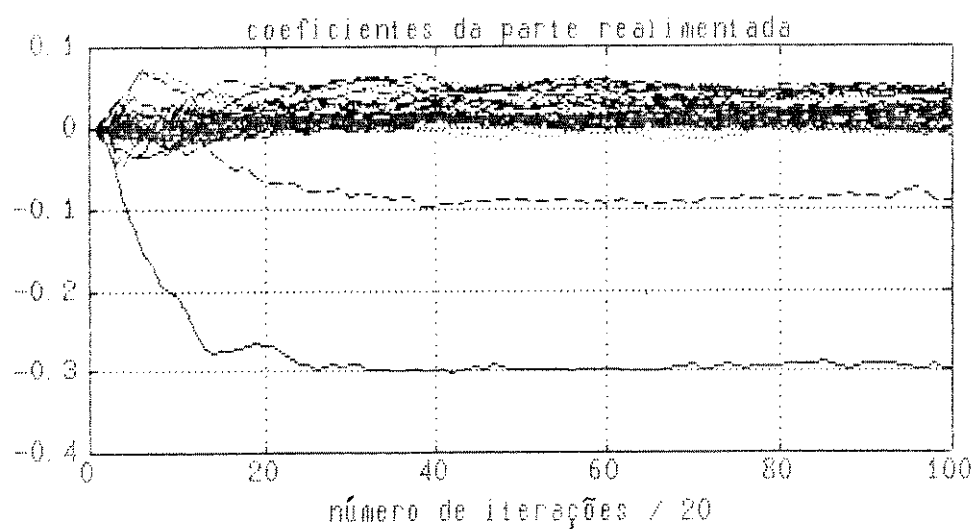


FIG.3.6(D)

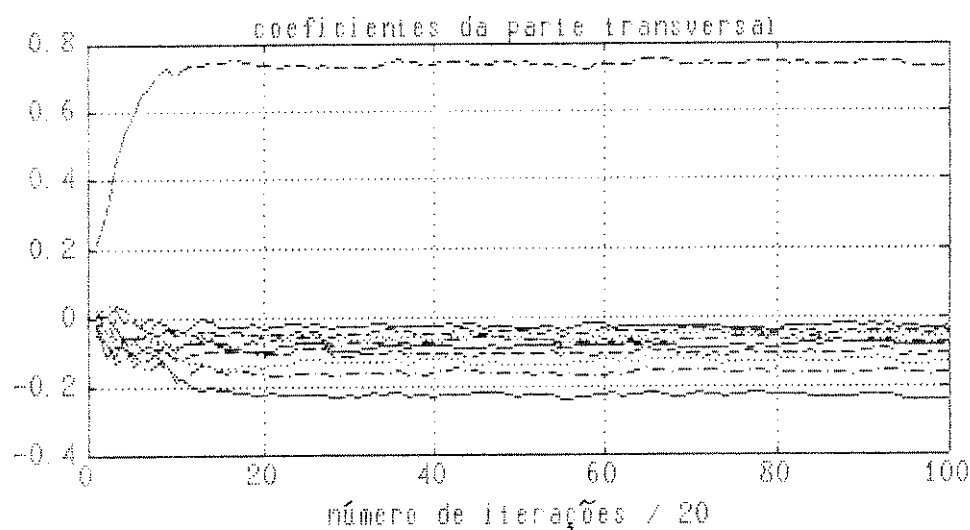


FIG.3.6(E)

Fig.3.6 Os pólos e zeros do equalizador depois da adaptação, a evolução do erro e dos coeficientes do equalizador adaptativo de SHARF ($N = 31$, $M = 9$, $\delta = 9$, $SNR = 30$, $\rho = 0,01$, canal H20)

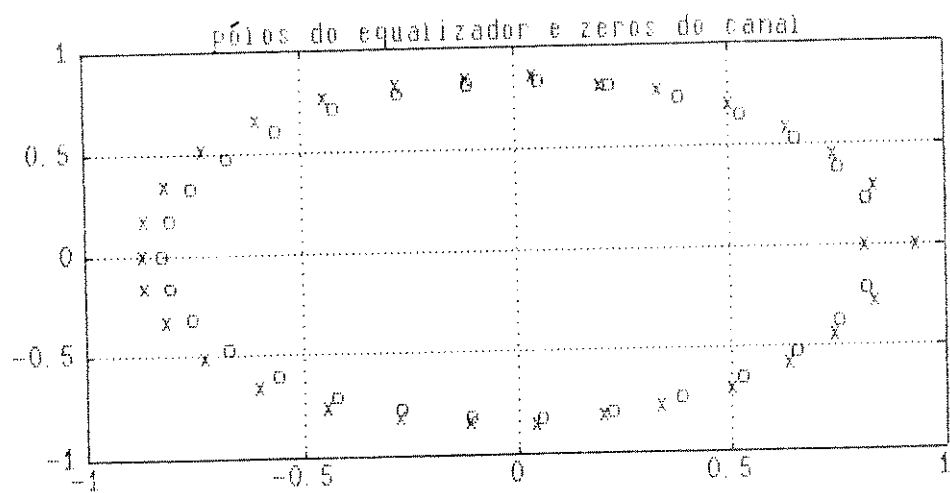


FIG.3.7(A)

o : OS ZEROS
x : OS PÓLOS

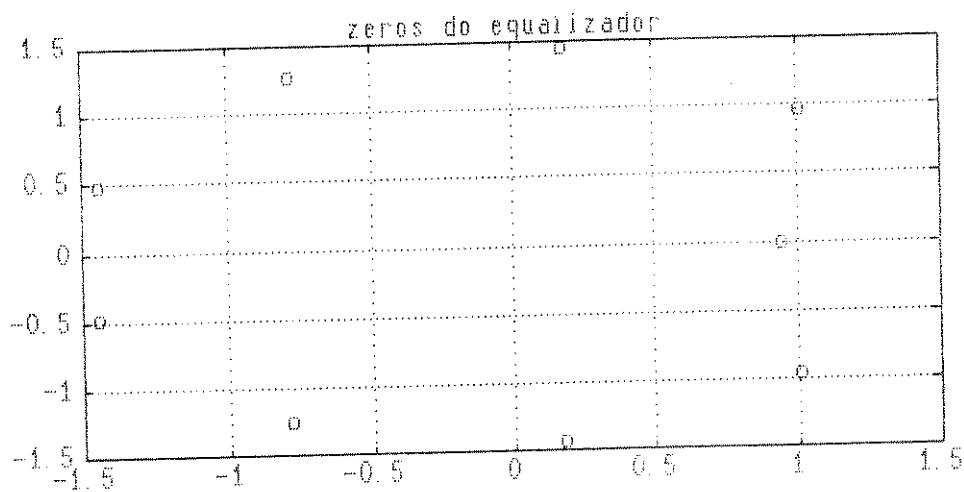


FIG.3.7(B)

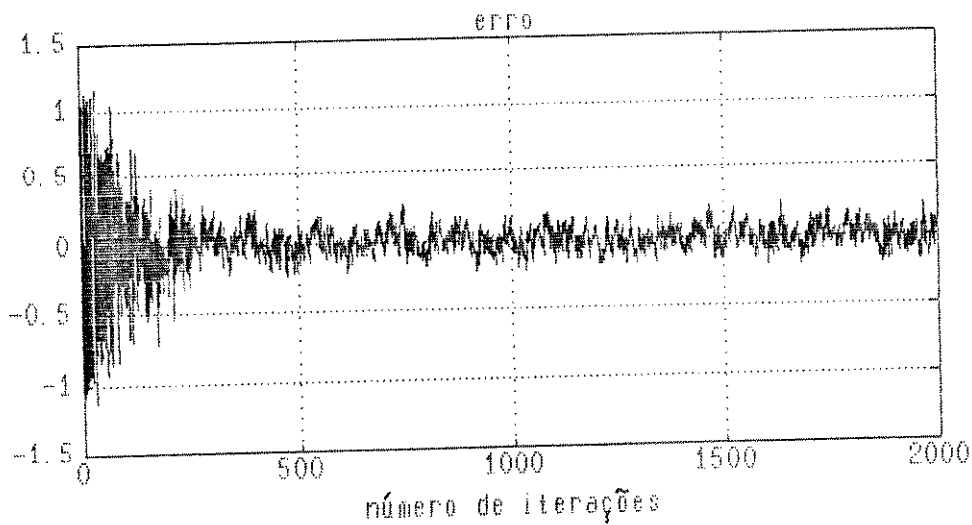


FIG.3.7(C)

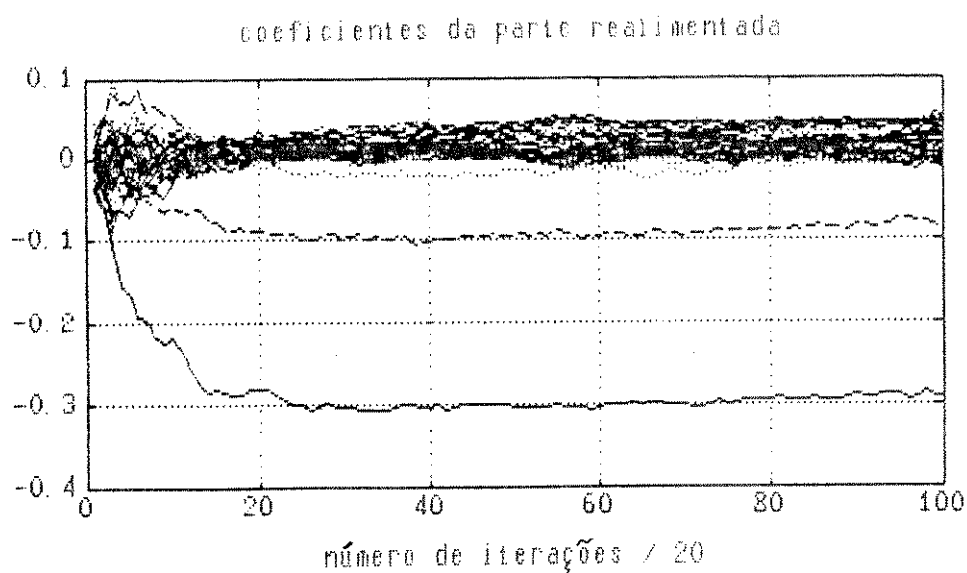


FIG.3.7(D)

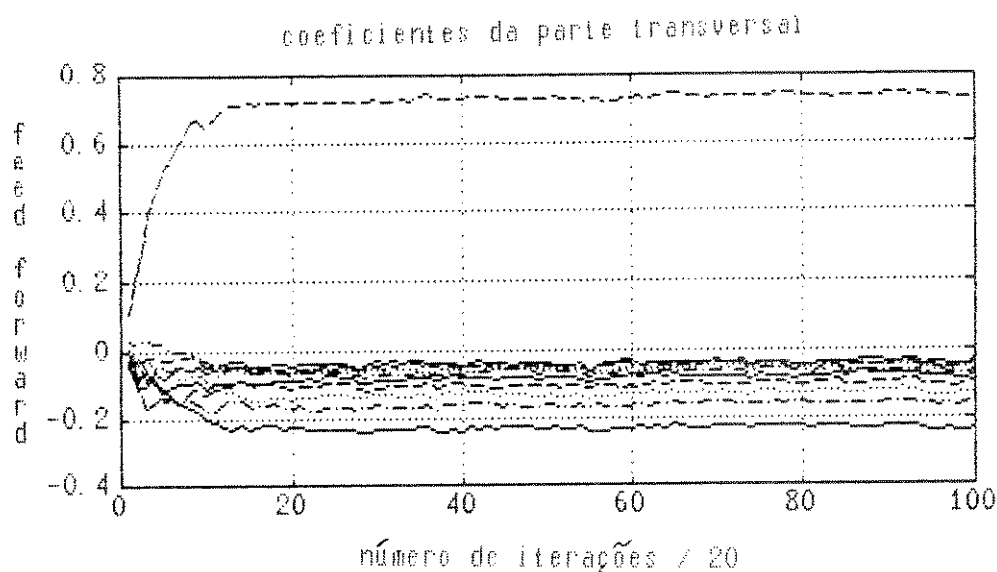


FIG.3.7(E)

Fig.3.7 Os pólos e zeros do equalizador depois da adaptação, a evolução do erro e dos coeficientes do equalizador adaptativo de AFM ($N = 31$, $M = 9$, $\delta = 9$, $SNR = 30$, $\rho = 0,01$, canal H20)

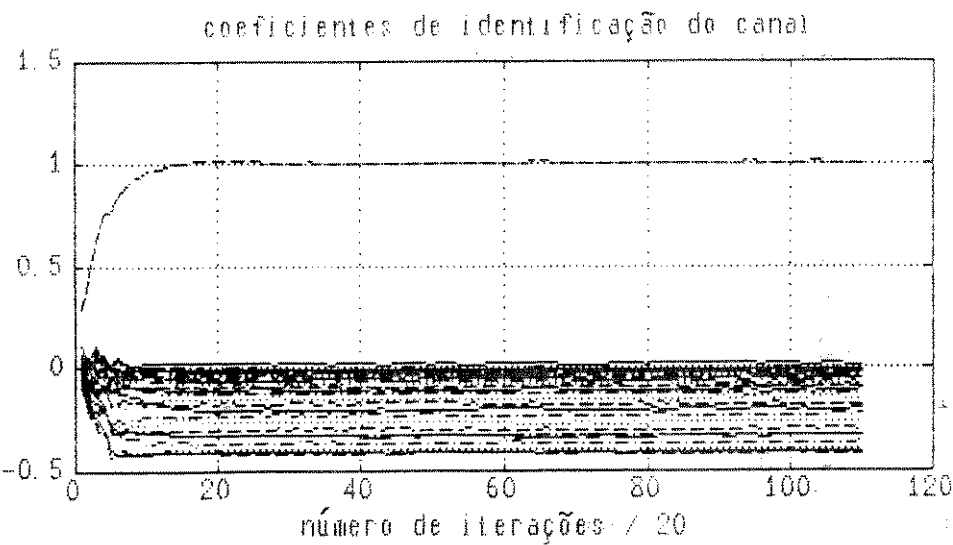


FIG.3.8(A)

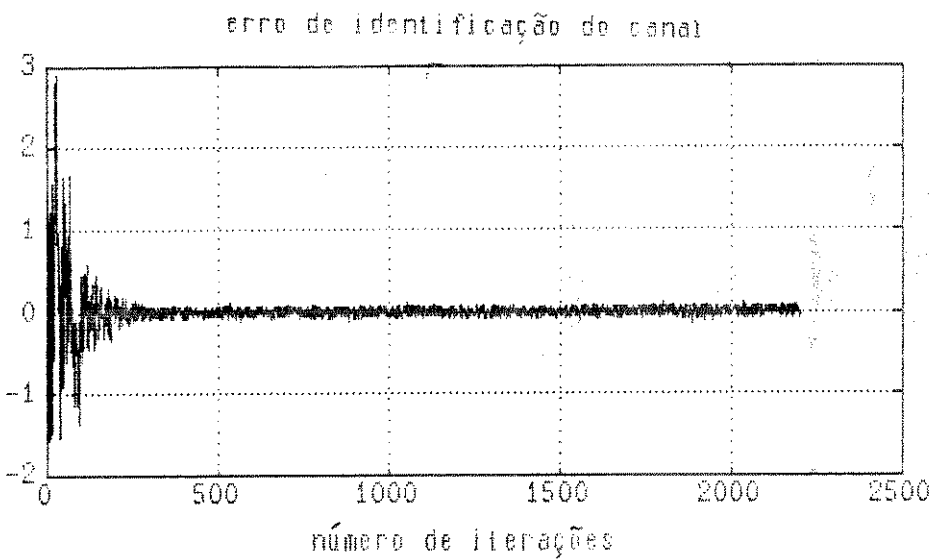


FIG.3.8(B)

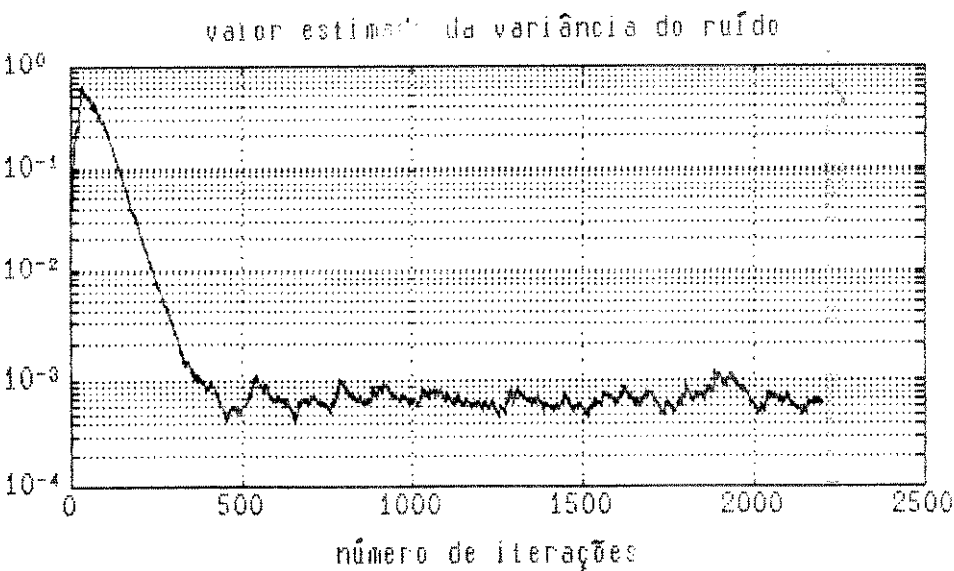


FIG.3.8(C)

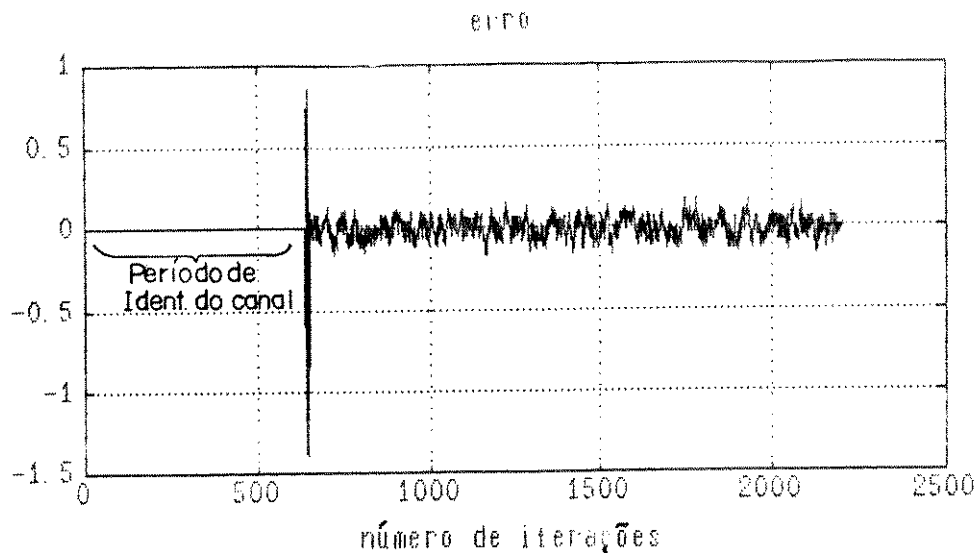


FIG.3.8(D)

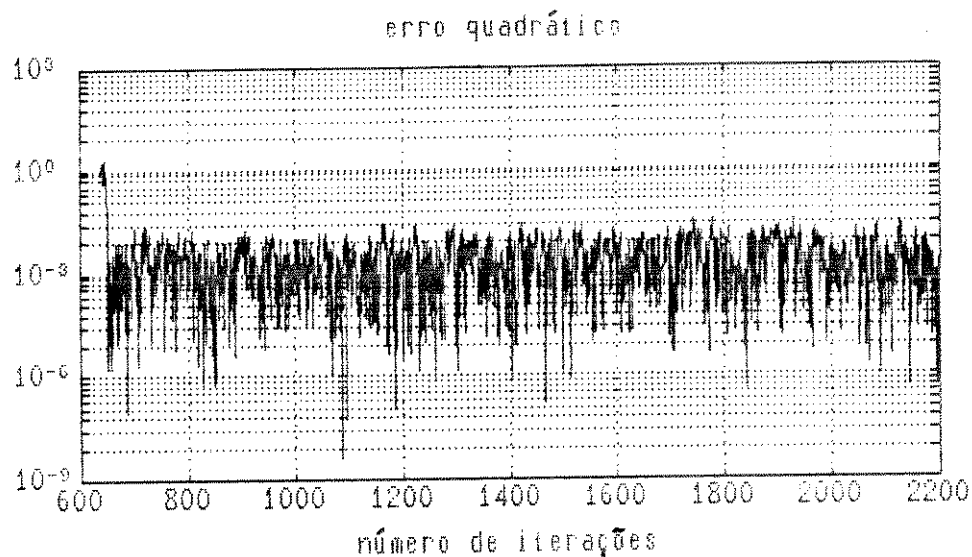


FIG.3.8(E)

Fig.3.8 A evolução dos coeficientes e erro de identificação do canal, valor estimado da variância do ruído, erro e erro quadrático do equalizador adaptativo de Kalman

($N = 32$, $\delta = 10$, $SNR = 30$, canal H20)

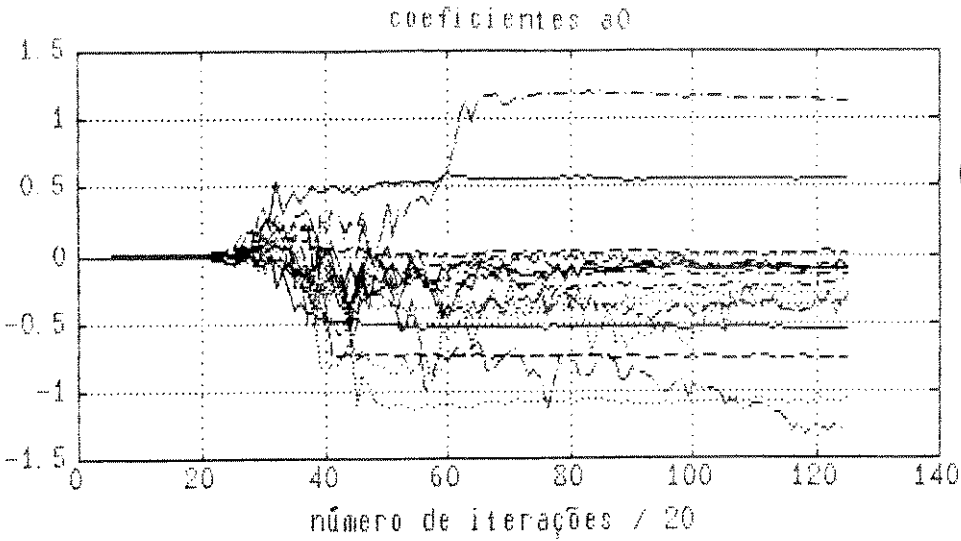


FIG.3.9(A)

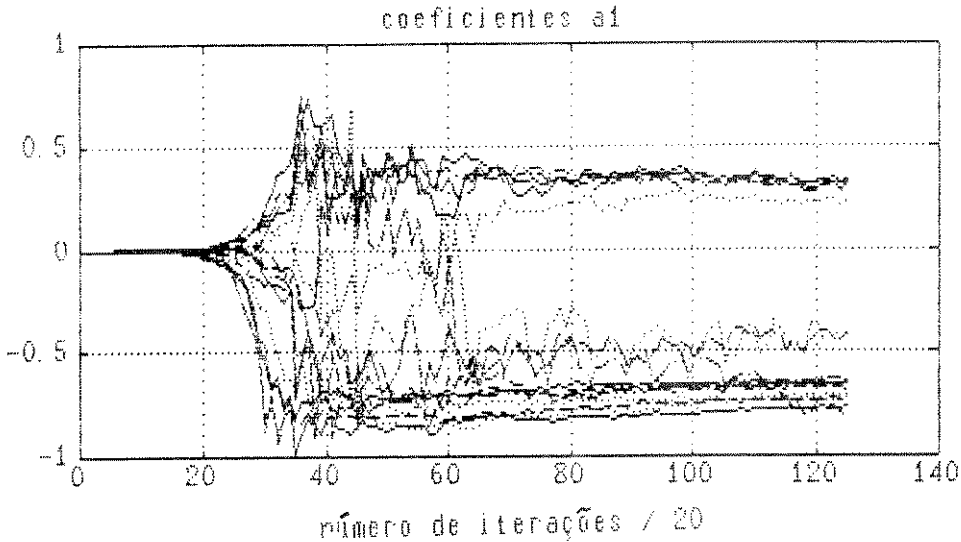


FIG.3.9(B)

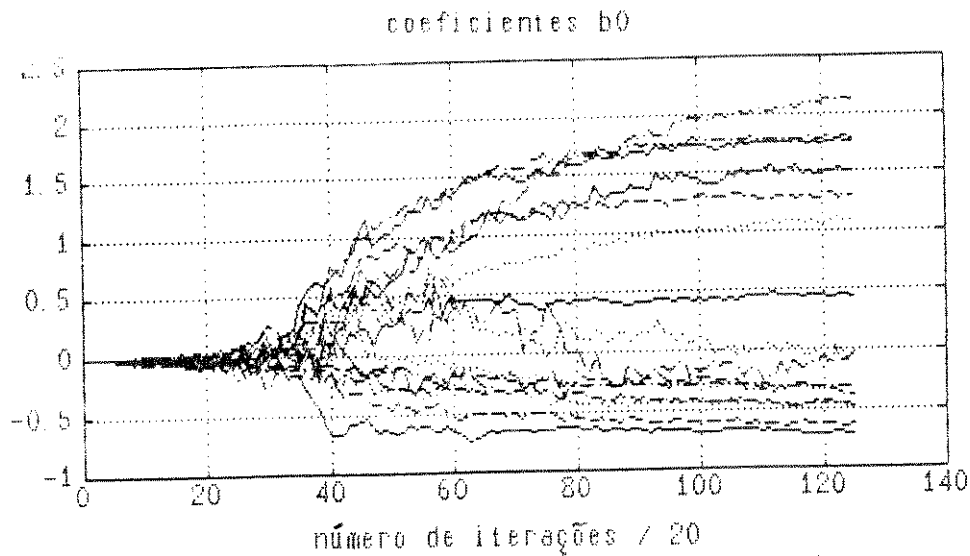


FIG.3.9(C)

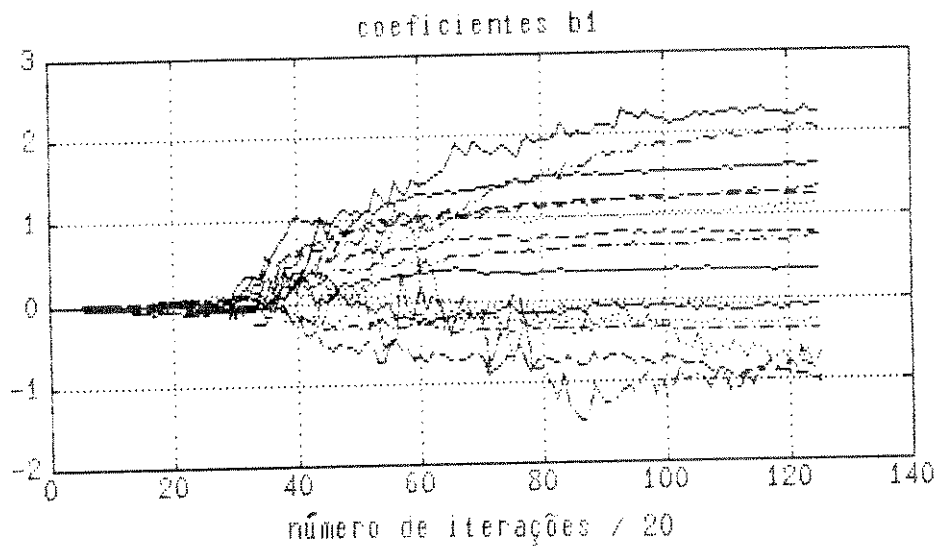


FIG.3.9(D)

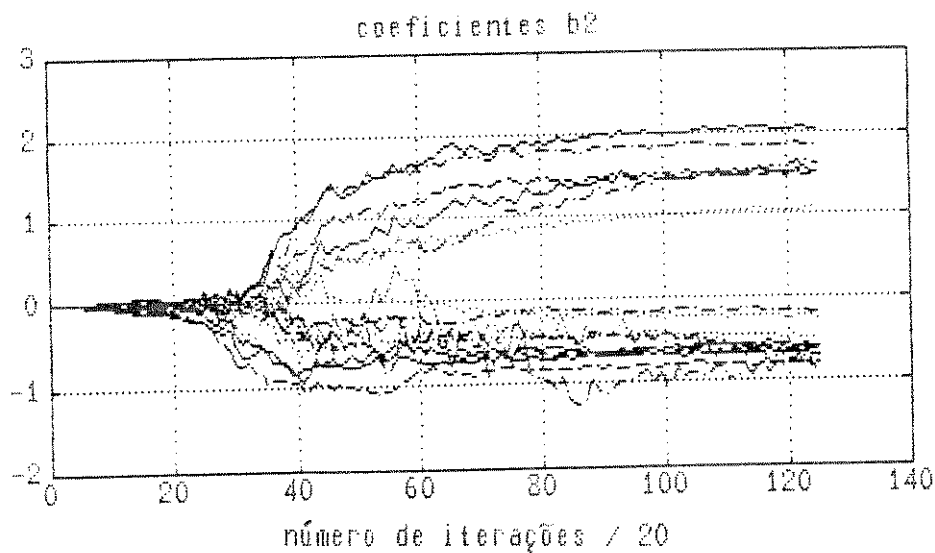


FIG.3.9(E)

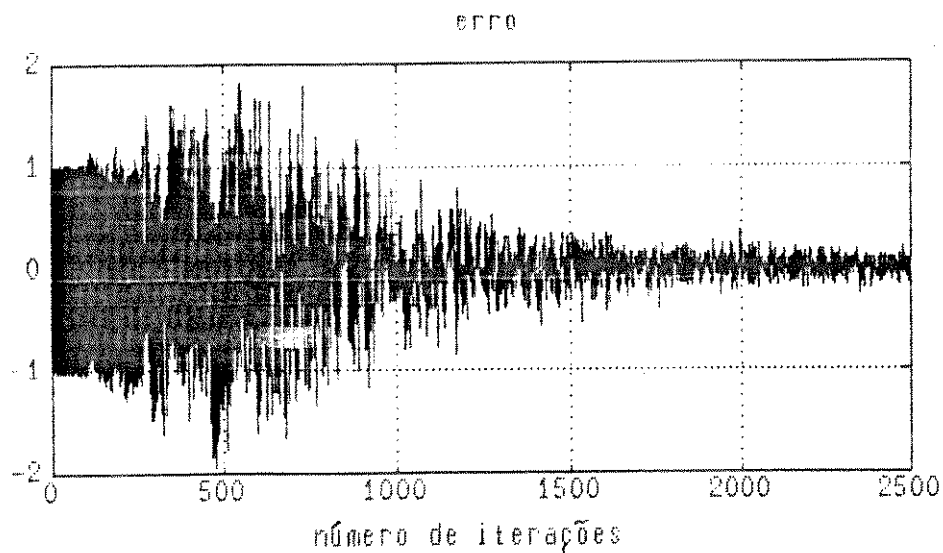


FIG.3.9(F)

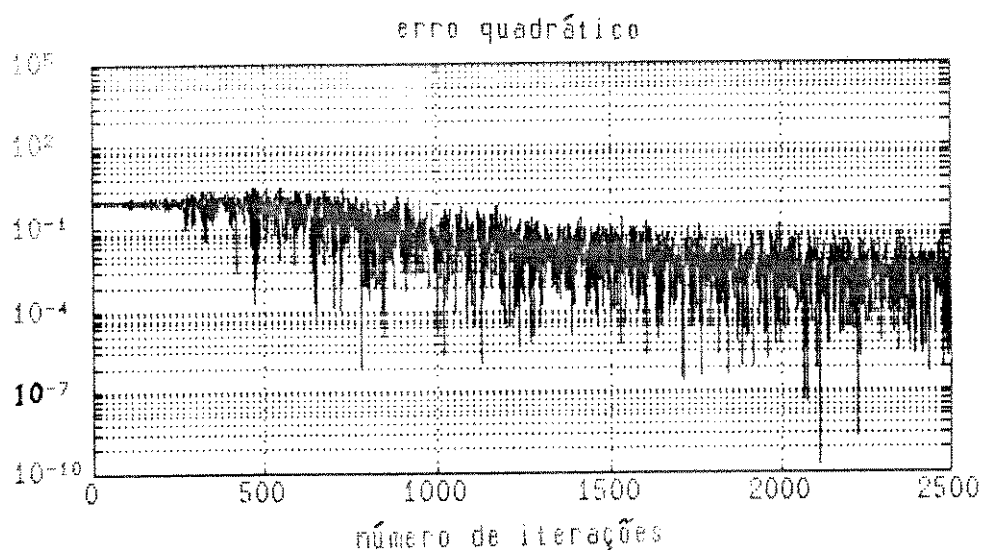


FIG.3.9(G)

Fig.3.9 A evolução dos coeficientes, erro e erro quadrático do equalizador adaptativo de FADF IIR real simplificado
($P = 16$, $\delta = 19$, $SNR = 30$, $\rho = 0,01$, canal H20)

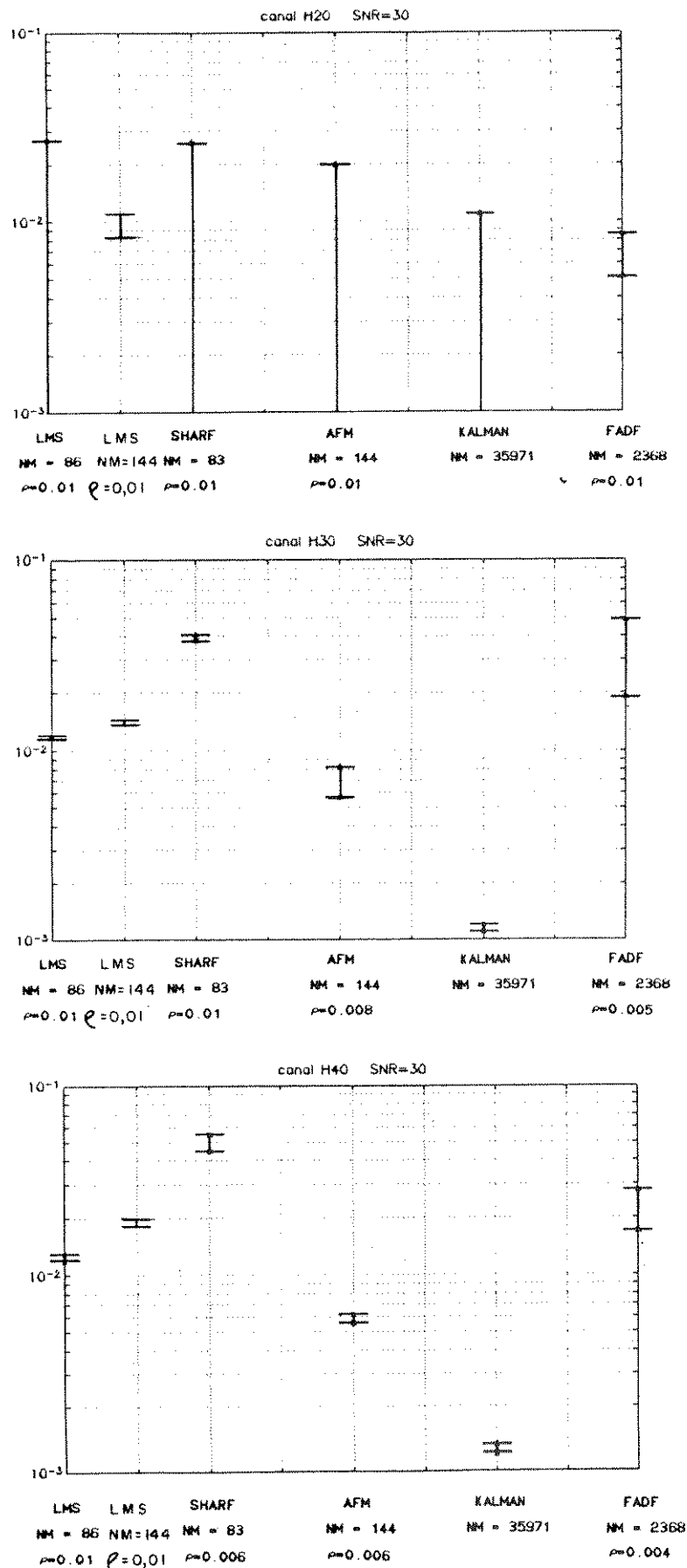


Fig.3.10 Intervalos de confiança para erro médio quadrático em regime dos equalizadores adaptativos (canais H20, 30 e H40)

"NM": O número global de multiplicações por iteração

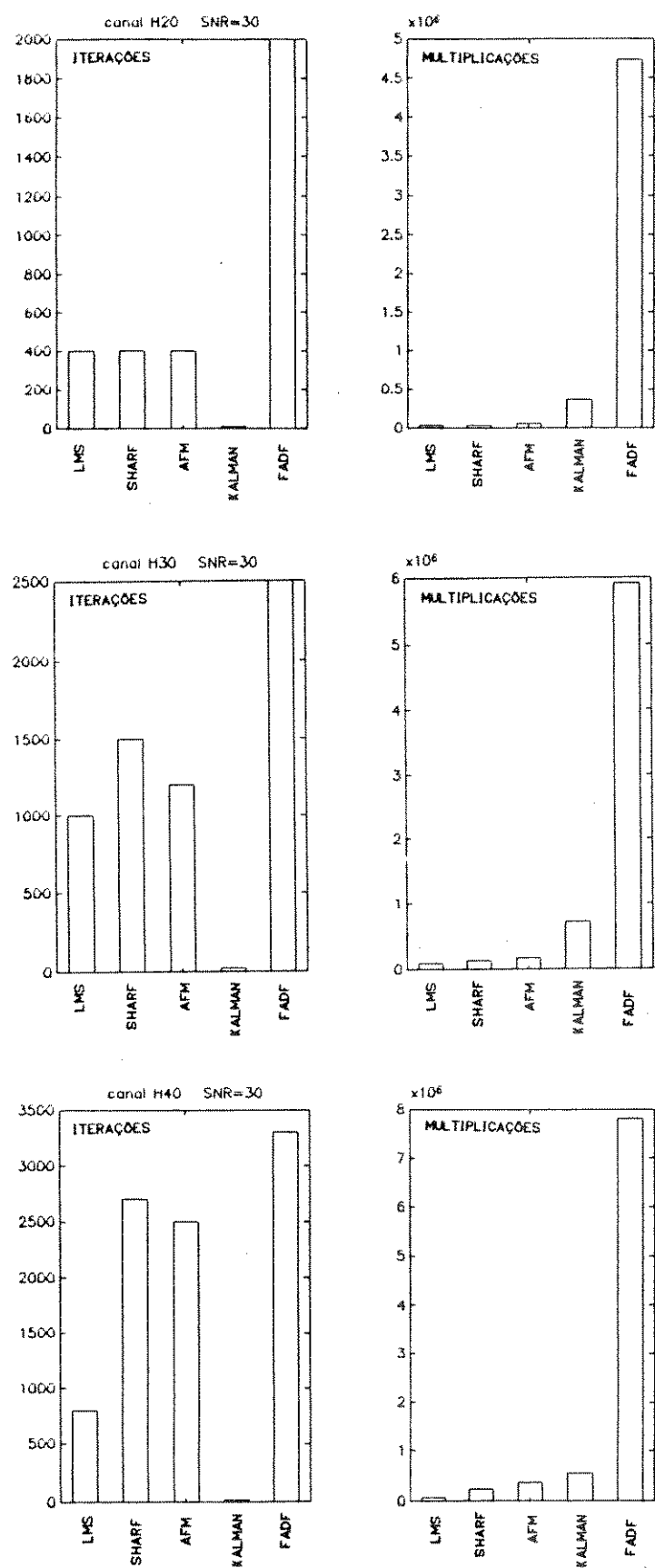


Fig.3.11 Número de iterações e número global de multiplicações necessárias para convergência dos equalizadores adaptativos (canais H20, 30 e H40)

3.3. A Influência da Relação Sinal/Ruído, SNR , sobre o Erro Médio Quadrático em regime dos Equalizadores Adaptativos

As Fig.3.12-Fig.3.14 mostram a influência da relação sinal/ruído, SNR , sobre intervalos de confiança para o erro médio quadrático em regime dos equalizadores adaptativos de LMS, SHARF, AFM e Kalman para os canais H20, H30 e H40, respectivamente. Os equalizadores adaptativos do tipo IIR são de ordem suficiente ($N = 31$). O número de taps do equalizador adaptativo de LMS é 43, e o atraso utilizado foi determinado através das simulações usando diversos atrasos. Adotou-se que o atraso do sinal desejado para este equalizador adaptativo é de 8. As relações sinal/ruído escolhidas para simulações foram 20, 30 e 50dB. As Fig.3.15-Fig.3.17 mostram os pólos dos equalizadores adaptativos de SHARF e AFM depois da adaptação e os zeros dos canais H20, H30 e H40 que ficam dentro do C.R.U..

Das Fig.3.15-Fig.3.17, notamos que os equalizadores adaptativos de SHARF e AFM modelam melhor os zeros dos canais quando o valor da relação sinal/ruído é alta e o equalizador adaptativo de AFM modela melhor os zeros dos canais do que o de SHARF em todos os casos. Também, percebemos que o erro médio quadrático em regime do equalizador adaptativo é pequeno, quando o equalizador modela bem os zeros do canal.

Das Fig.3.12-Fig.3.14, podemos observar a seguinte relação do erro médio quadrático em regime quando a relação sinal/ruído é baixa ($SNR = 20, 30$) .

$$\boxed{Kalman} < \boxed{AFM} < \boxed{LMS} \leq \boxed{SHARF}$$

Observamos a seguinte relação do erro médio quadrático em regime quando a relação sinal/ruído é alta ($SNR = 50$) .

$$\boxed{Kalman} < \boxed{LMS} \leq \boxed{AFM} < \boxed{SHARF}$$

Conforme as considerações acima, o equalizador adaptativo de LMS, que é do tipo FIR, pode ser melhor que os equalizadores adaptativos de SHARF e AFM quando a relação sinal/ruído é alta. No entanto, isto não ocorre quando a relação sinal/ruído é baixa.

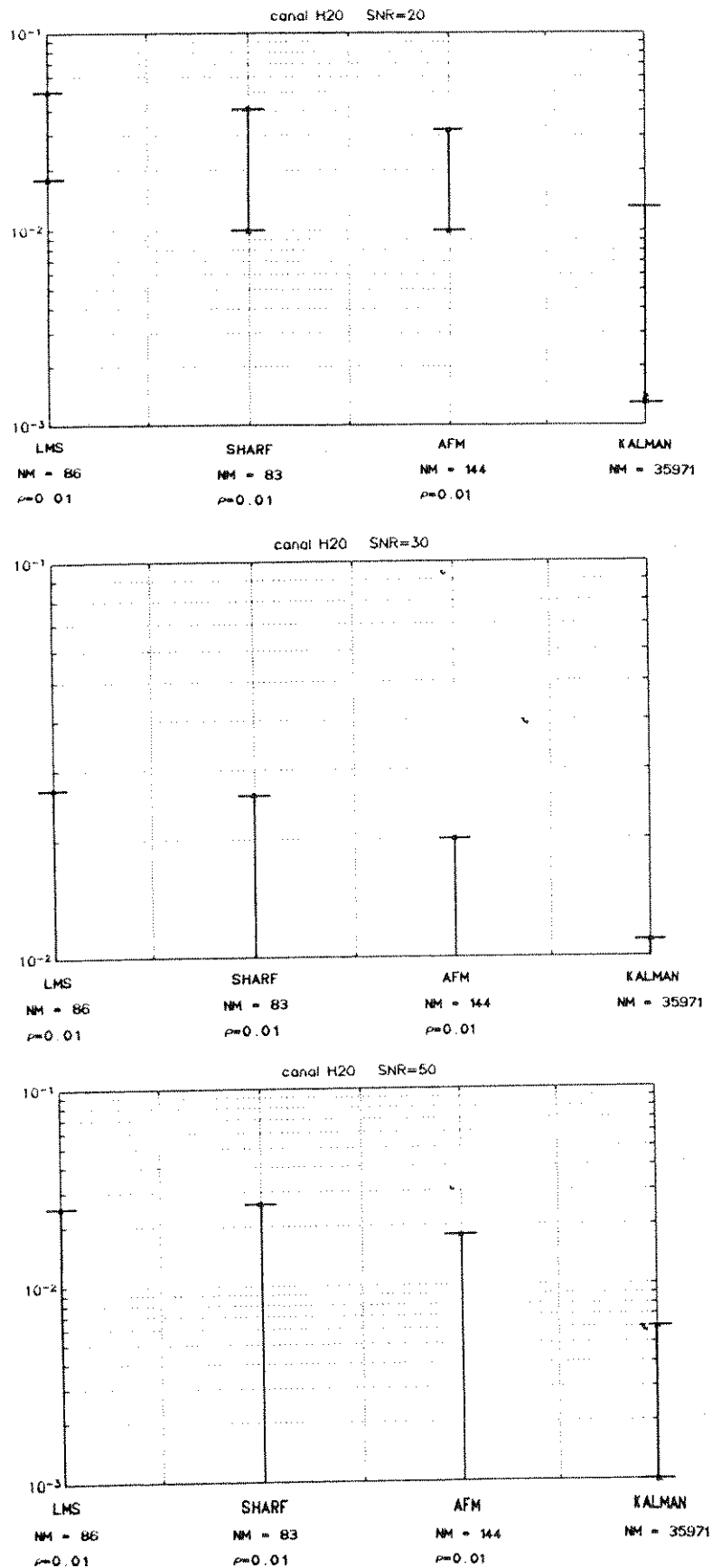


Fig.3.12 A influência da relação sinal/ruído sobre o erro médio quadrático em regime dos equalizadores adaptativos (canal H20)

"NM": O número global de multiplicações por iteração

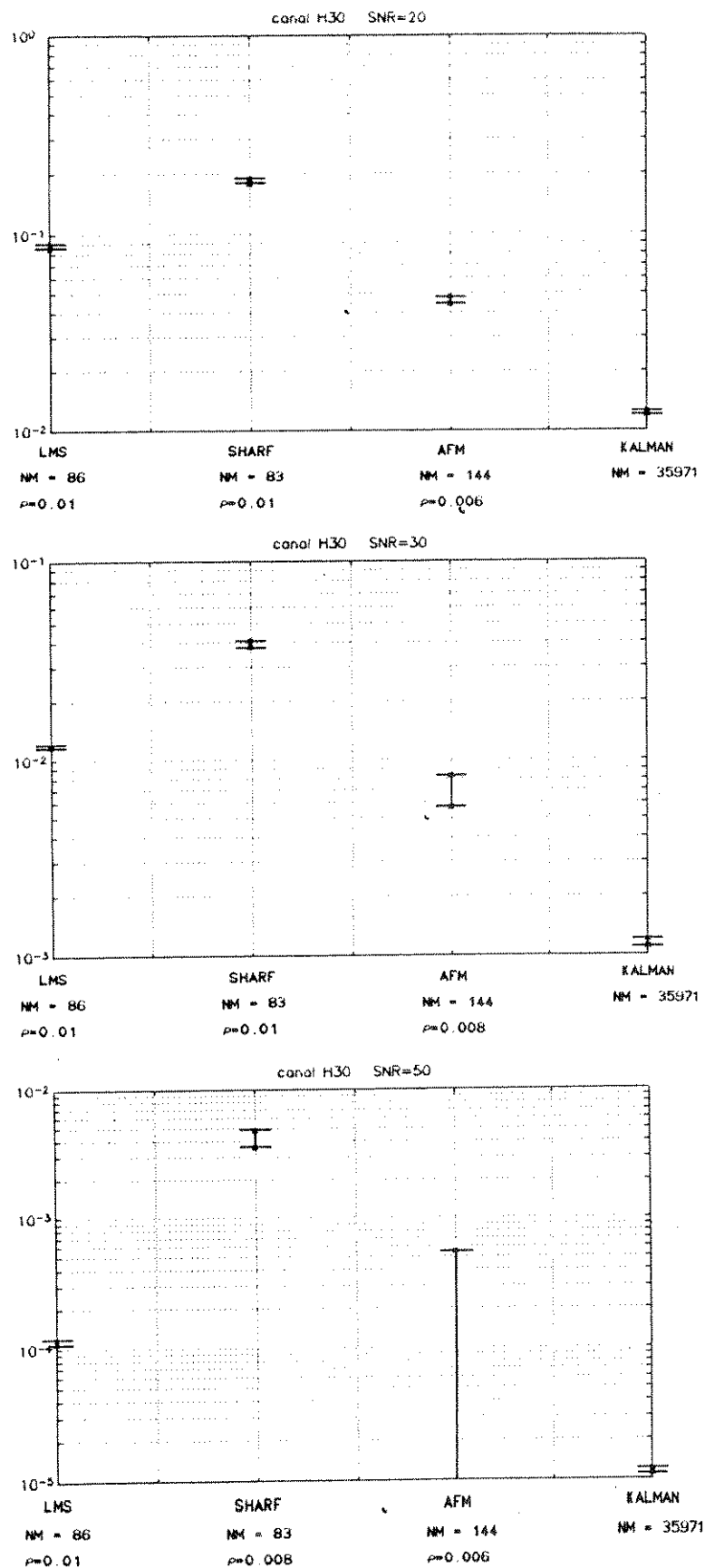


Fig.3.13 A influência da relação sinal/ruído sobre o erro médio quadrático em regime dos equalizadores adaptativos (canal H30)

"NM": O número global de multiplicações por iteração

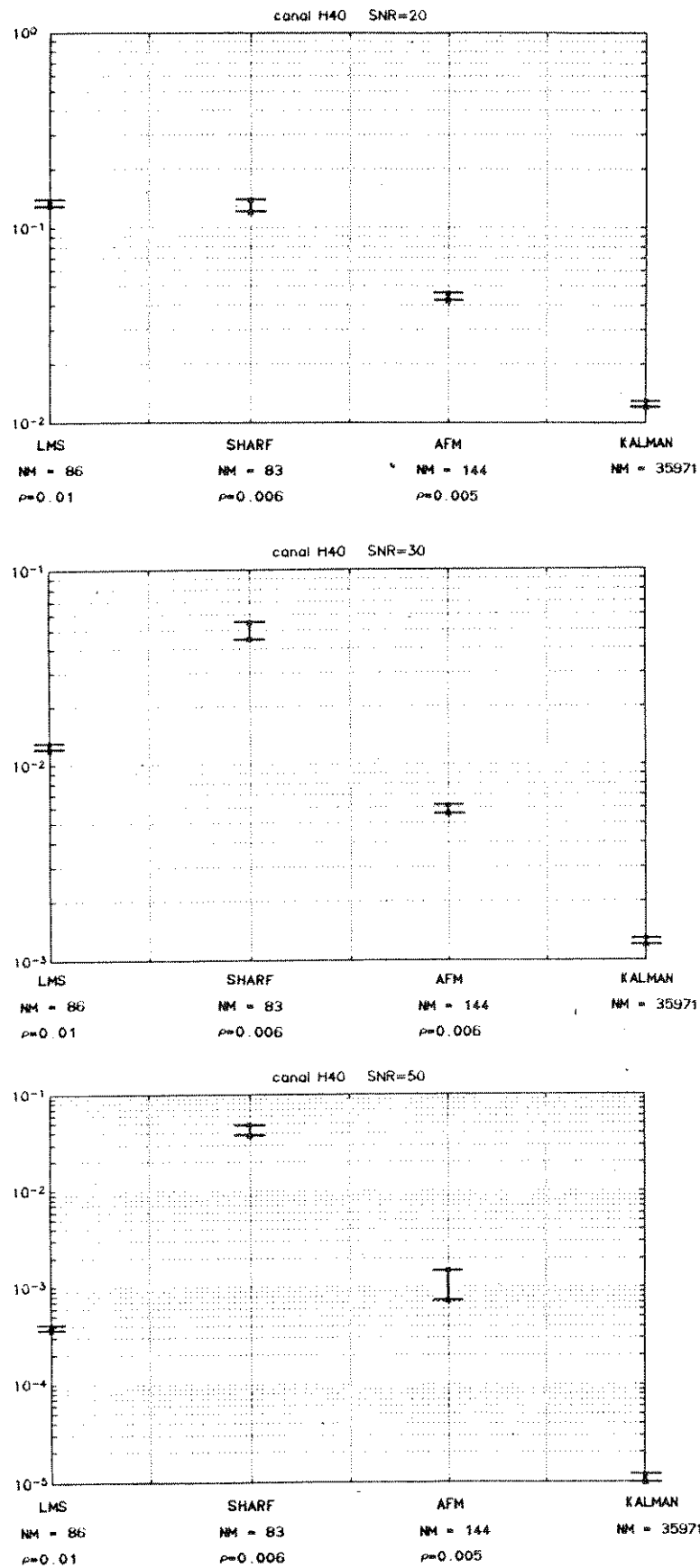


Fig.3.14 A influência da relação sinal/ruído sobre o erro médio quadrático em regime dos equalizadores adaptativos (canal H40)

"NM": O número global de multiplicações por iteração

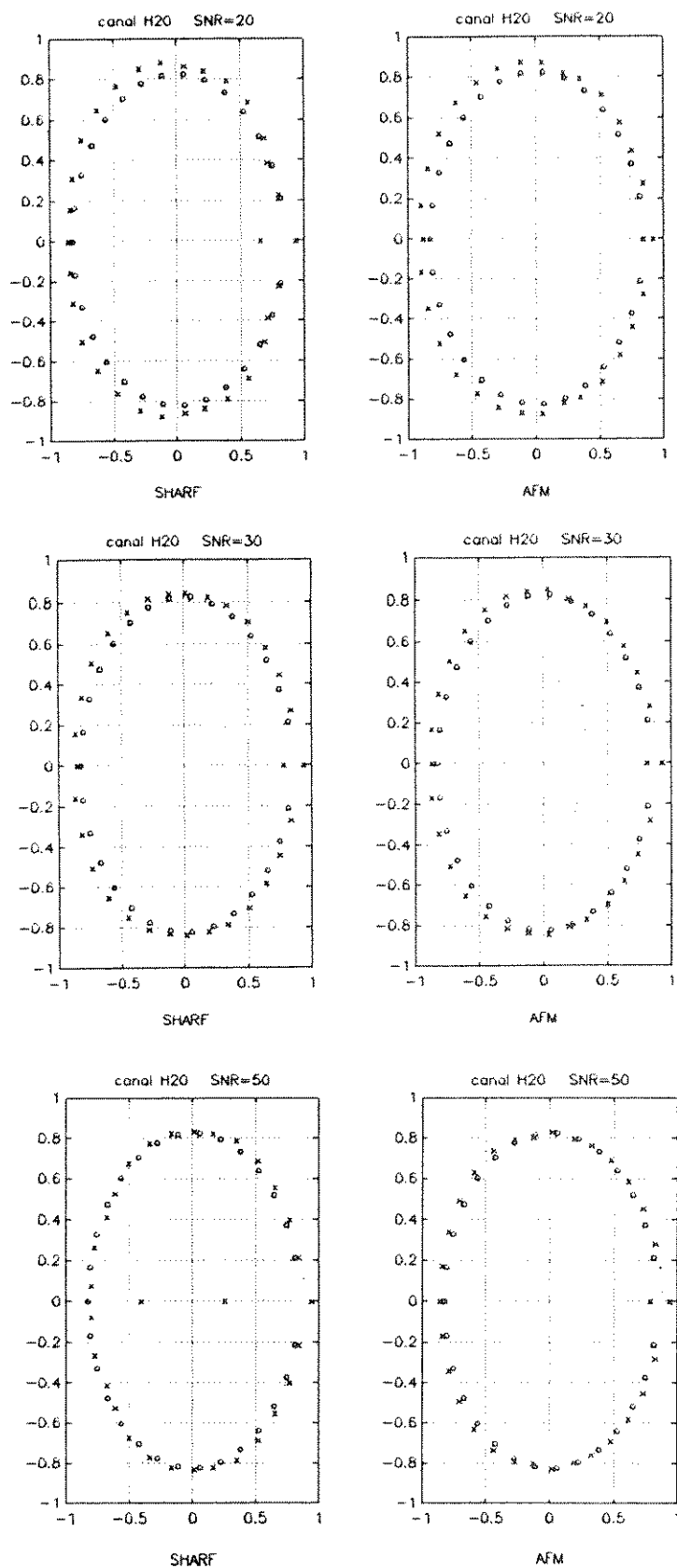


Fig.3.15 Os pólos (x) dos equalizadores adaptativos de SHARF e AFM depois da adaptação e os zeros (o) do canal H20

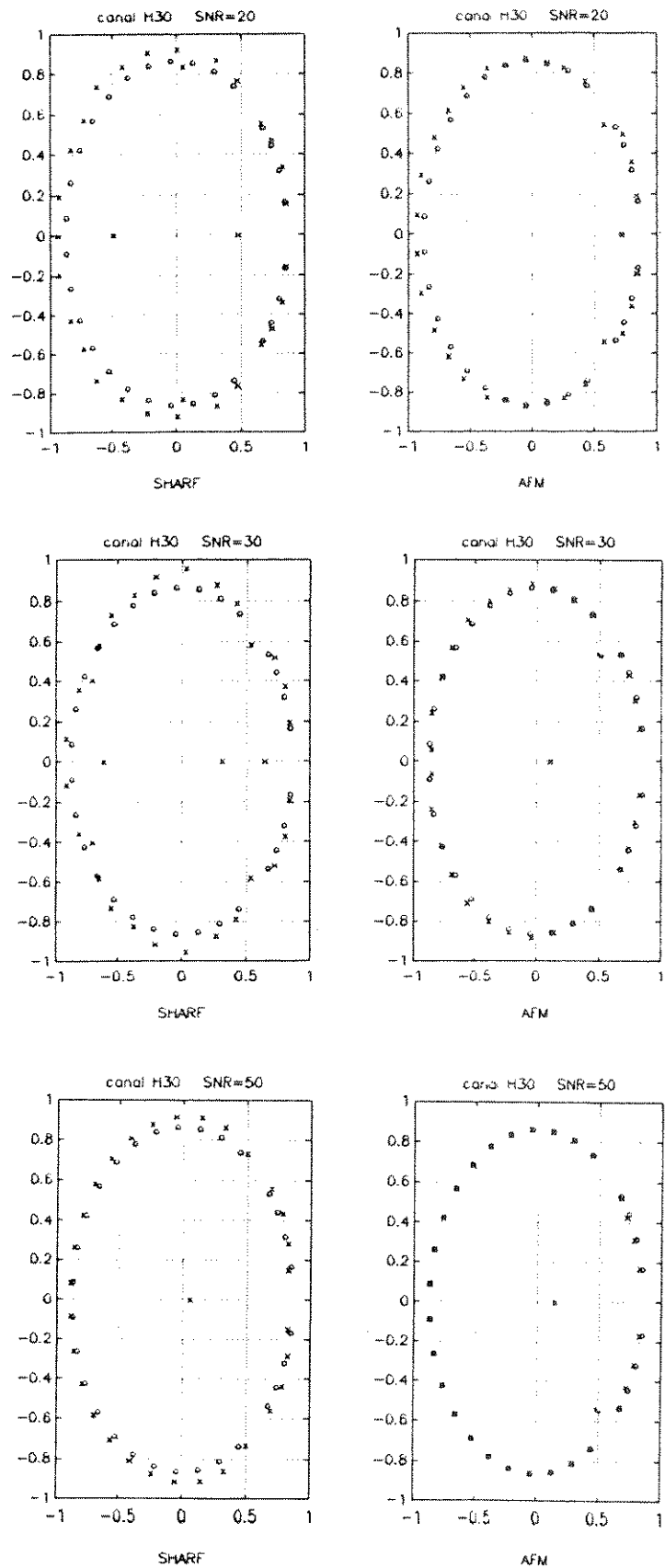


Fig.3.16 Os pólos (x) dos equalizadores adaptativos de SHARF e AFM depois da adaptação e os zeros (o) do canal H30

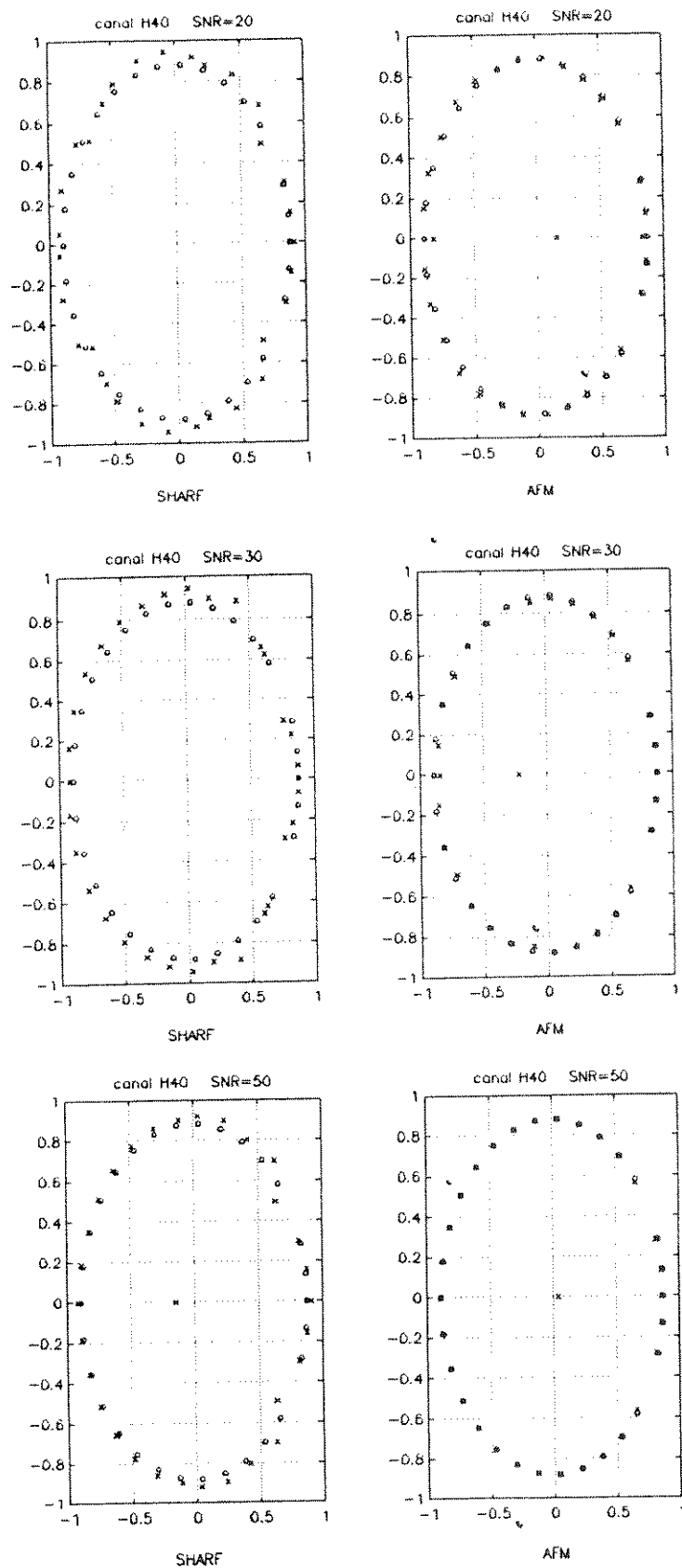


Fig.3.17 Os pólos (x) dos equalizadores adaptativos de SHARF e AFM depois da adaptação e os zeros (o) do canal H40

3.4. A Influência da Ordem M da Parte Transversal do Filtro Equalizador sobre o Erro Médio Quadrático em regime dos Equalizadores Adaptativos de SHARF e AFM

A Fig.3.18 mostra a influência da ordem da parte transversal , M , sobre os intervalos de confiança do erro médio quadrático em regime dos equalizadores adaptativos de SHARF e AFM, usando os três canais. Estes equalizadores adaptativos são de ordem suficiente ($N = 31$). A Fig.3.19 mostra o número de iterações e o número global de multiplicações destes equalizadores adaptativos para se atingir a convergência.

Das Fig.3.18 e Fig.3.19, observamos que o equalizador adaptativo de AFM, além de ter menor erro médio quadrático em regime do que o equalizador adaptativo de SHARF para todo valor de M , sempre converge com menos iterações do que o equalizador adaptativo de SHARF. Porém, o número global de multiplicações do equalizador adaptativo de AFM são sempre maiores em vista de sua complexidade computacional ser ligeiramente maior. Também, verificamos que a escolha do número M certamente tem influência sobre o erro médio quadrático em regime dos equalizadores adaptativo de SHARF e AFM. Sendo o resultado obtido para o canal H20 mais sensível a este número, o que poderíamos associar ao fato deste canal ter dois pólos fora do C.R.U..

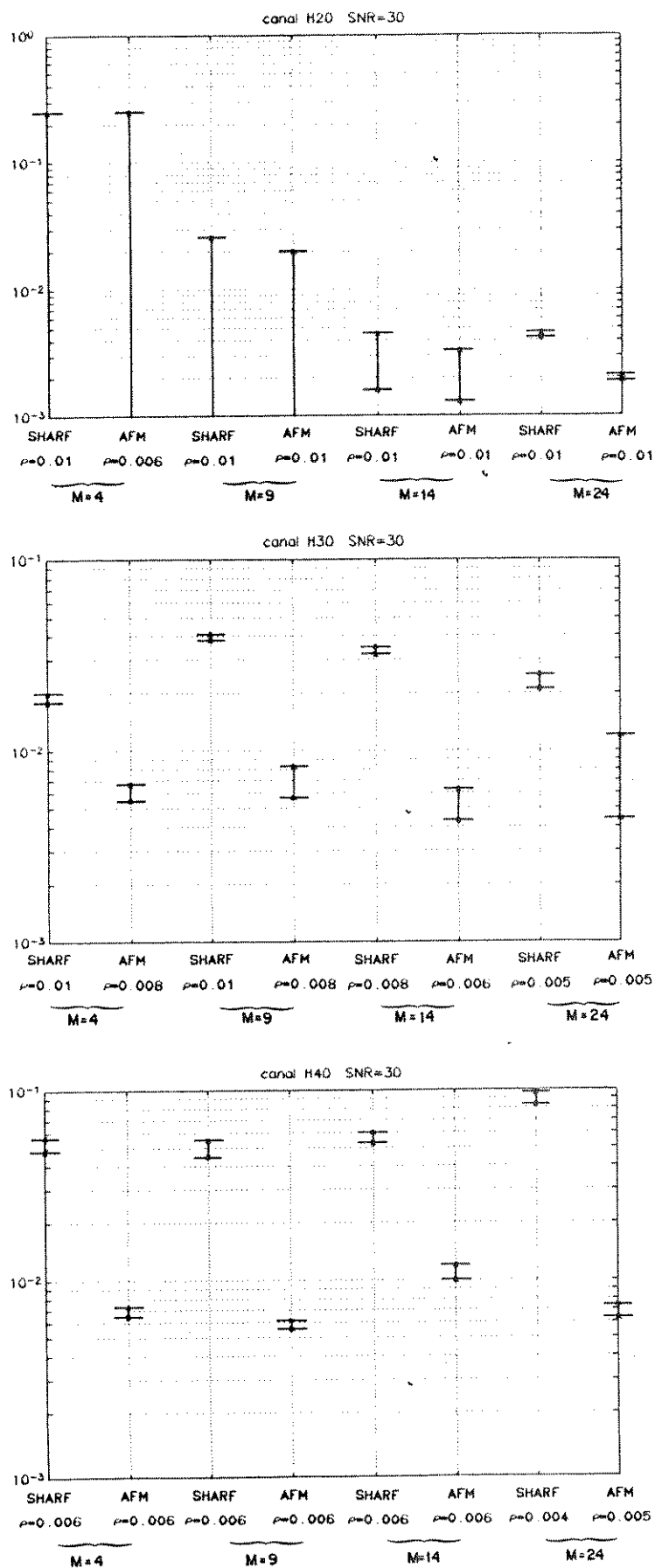


Fig.3.18 A influência da ordem da parte transversal, M, sobre o erro médio quadrático em regime dos equalizadores adaptativos de SHARF e AFM (N = 31)

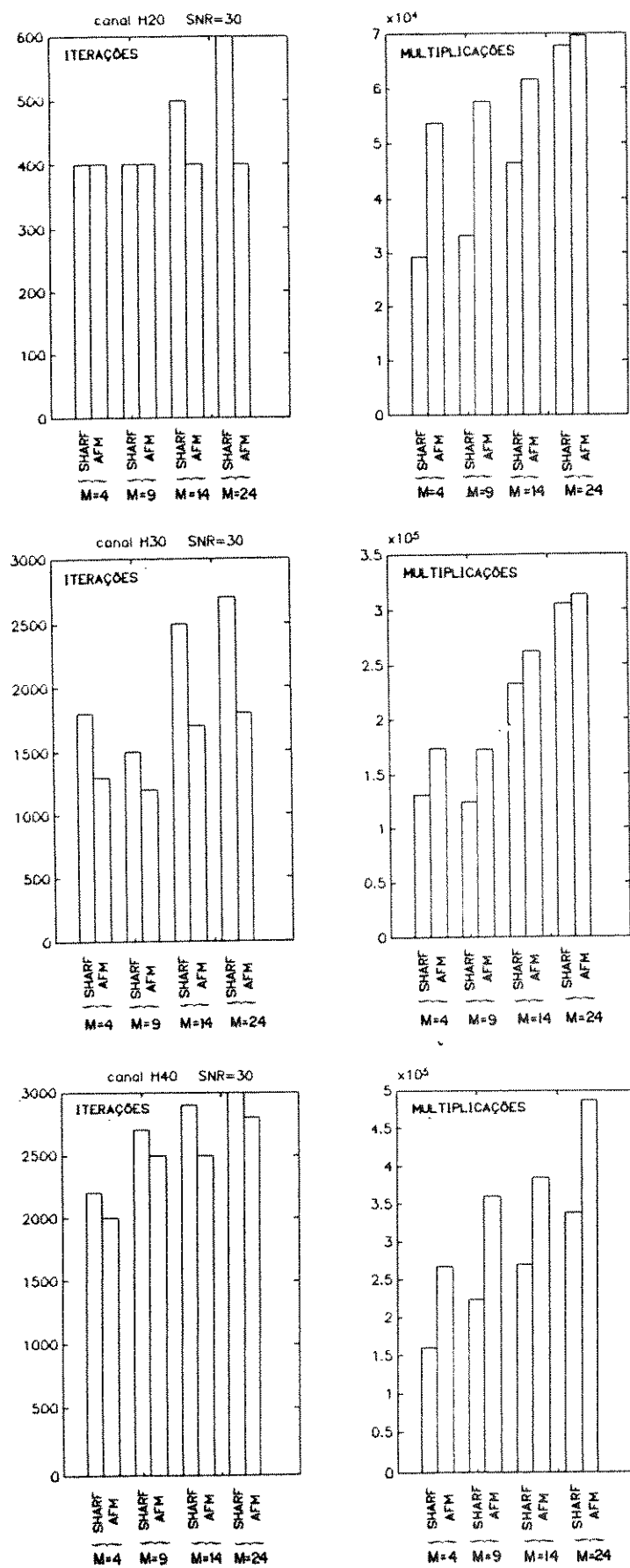


Fig.3.19 Número de iterações e número global de multiplicações necessárias para convergência dos equalizadores adaptativos de SHARF e AFM (N = 31)

3.5. A Influência da Ordem N da Parte Realimentada do Filtro Equalizador sobre o Erro Médio Quadrático em regime dos Equalizadores Adaptativos de AFM e Kalman

A Fig.3.18 mostra a influência da ordem da parte transversal, M , sobre os intervalos de confiança do erro médio quadrático em regime dos equalizadores adaptativos de SHARF e AFM, usando os três canais. Estes equalizadores adaptativos são de ordem suficiente ($N = 31$). A Fig.3.19 mostra o número de iterações e o número global de multiplicações destes equalizadores adaptativos para se atingir a convergência.

Das Fig.3.18 e Fig.3.19, observamos que o equalizador adaptativo de AFM, além de ter menor erro médio quadrático em regime do que o equalizador adaptativo de SHARF para todo valor de M , sempre converge com menos iterações do que o equalizador adaptativo de SHARF. Porém, o número global de multiplicações do equalizador adaptativo de AFM são sempre maiores em vista de sua complexidade computacional ser ligeiramente maior. Também, verificamos que a escolha do número de M certamente tem influência sobre erro médio quadrático em regime dos equalizadores adaptativo de SHARF e AFM. Sendo o resultado obtido para o canal H20 mais sensível a este número, o que poderíamos associar ao fato deste canal ter dois pólos fora do C.R.U..

A Fig.3.20 mostra a influência da ordem da parte realimentada, N , sobre os intervalos de confiança para erro médio quadrático em regime do equalizador adaptativo de AFM e a Fig.3.21 mostra o número de iterações e o número global de multiplicações necessárias para convergência destes equalizadores. As Fig.3.22-Fig.3.24 mostram os pólos dos equalizadores adaptativos de AFM com $N = 31, 24, 16$ depois da adaptação e os zeros dos canais H20, H30 e H40 que estão dentro do C.R.U., respectivamente. A Fig.3.25 mostra a influência do número, N , de amostras estabelecidas da resposta impulsiva para identificação do canal, sobre o erro médio quadrático em regime do equalizador adaptativo de Kalman.

Este número equivale à dimensão do equalizador adaptativo de Kalman mais um. A Fig.3.26 mostra o número de iterações e o número global de multiplicações necessárias para convergência dos equalizadores adaptativos de Kalman.

Da Fig.3.20, notamos que o erro médio quadrático em regime do equalizador adaptativo de AFM com ordem exagerada ($N = 40$) é maior para os canais H20 e H40 e menor para o canal H30, quando comparado com o equalizador adaptativo de AFM com ordem suficiente ($N = 31$). Da Fig.3.20, observamos também que o equalizador adaptativo de AFM apresenta pouca degradação com respeito ao erro médio quadrático em regime ao passo que N diminui. Das Fig.3.22- Fig.3.24, notamos que os pólos do equalizador adaptativo de AFM deslocam-se mais para origem (menor módulo) ao passo que N diminui. Da Tab.2.1, o número global de multiplicações por iteração são 86 para o equalizador adaptativo de LMS com $M = 43$ e 84 para o equalizador adaptativo de AFM com $N = 16$ e $M = 9$. Comparando estes dois equalizadores adaptativos da mesma complexidade computacional, na Fig.3.20, podemos notar a vantagem do equalizador adaptativo de AFM sobre o equalizador adaptativo de LMS com respeito a erro médio quadrático em regime. Dos resultados anteriores na seção 3.3, podemos prever que esta vantagem será mais pronunciada quanto menor for a relação sinal/ruído. Da Fig.3.21, observamos que o número de iterações e o número global de multiplicações para atingir convergência reduzem ao passo que N diminui. O conjunto destas observações indicam que o equalizador adaptativo de AFM tem interesse em aplicações em que se deseja uma boa precisão com pouca complexidade computacional.

Da Fig.3.25, observamos que o equalizador adaptativo de Kalman apresenta maior degradação de erro médio quadrático em regime do que o equalizador adaptativo de AFM ao passo que N diminui. Por esta razão ele não se torna atraente para o uso em situações de orden insuficiente ou quando não se conheça claramente a dimensões do canal.

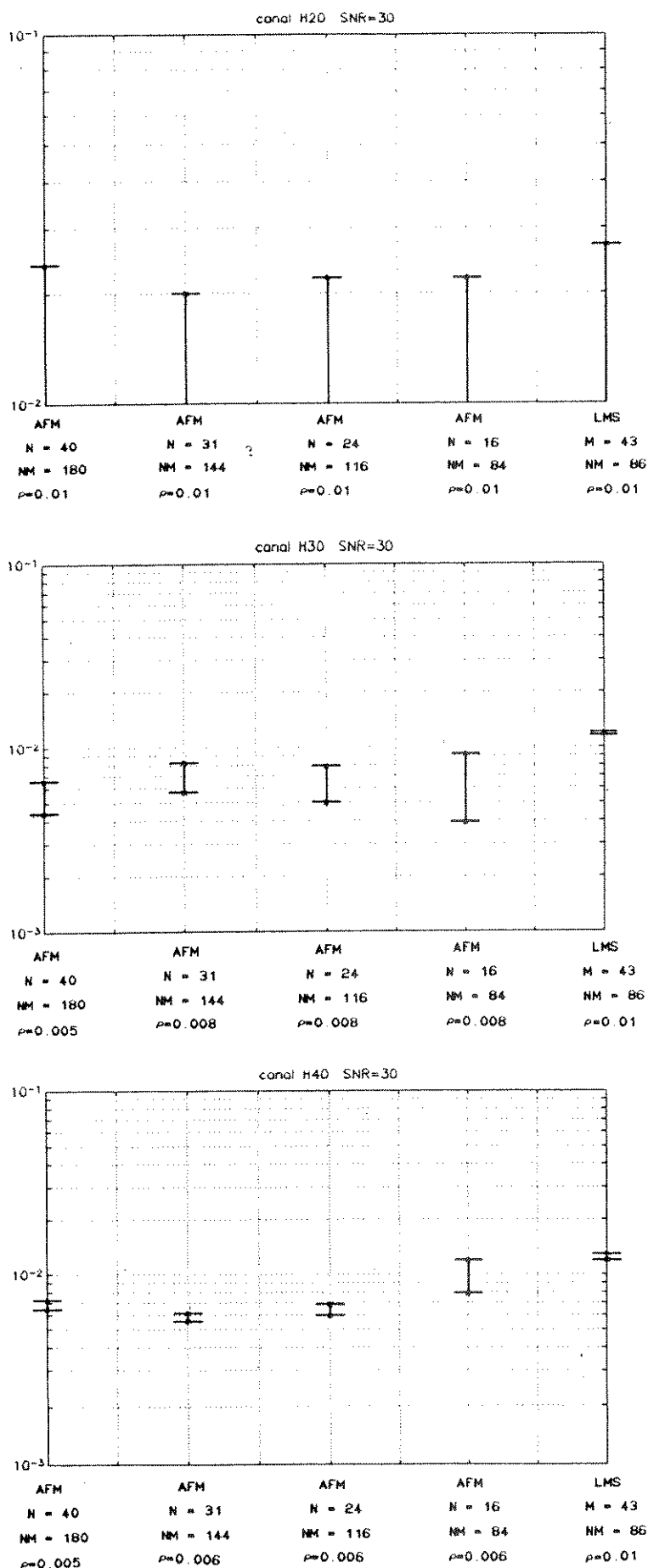


Fig.3.20 A influência da ordem da parte realimentada, N, sobre o erro médio quadrático em regime do equalizador adaptativo de AFM (M = 9)
 "NM": O número global de multiplicações por iteração

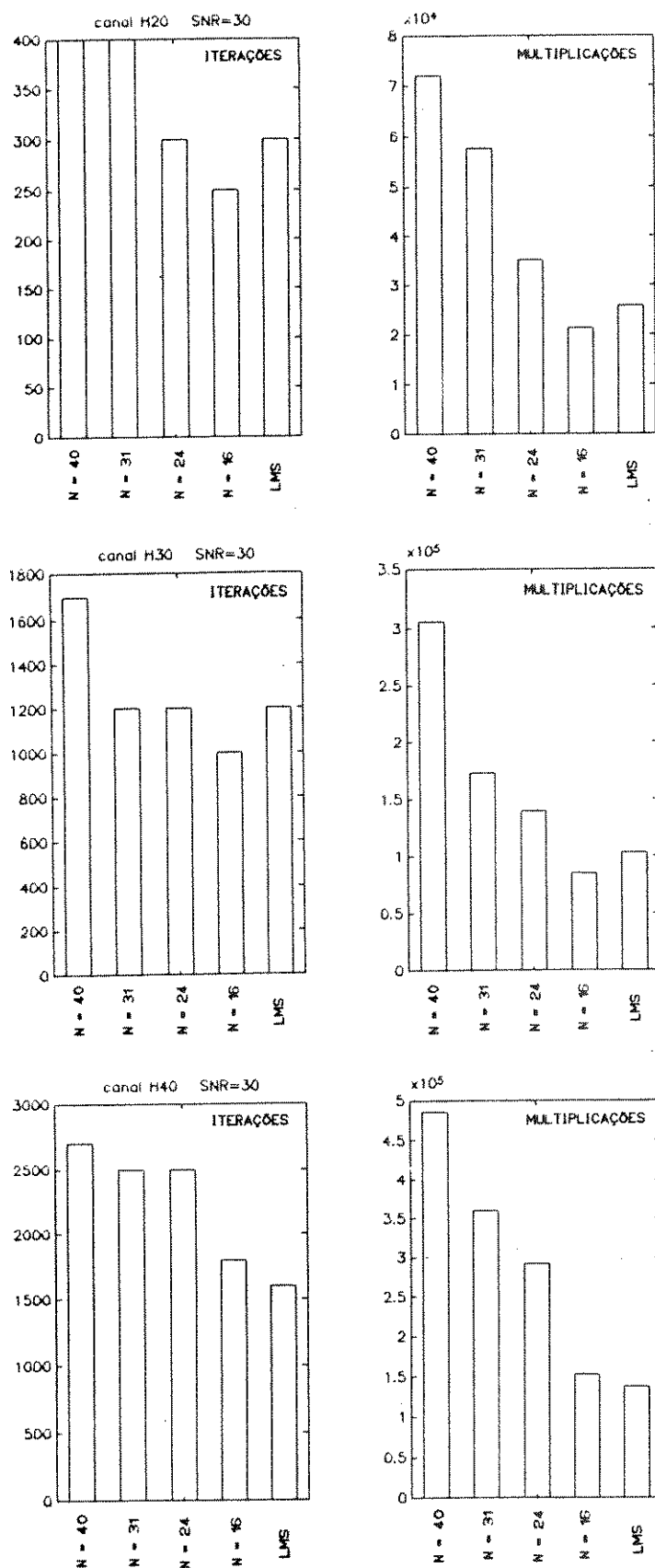


Fig.3.21 Número de iterações e número global de multiplicações necessárias para convergência dos equalizadores adaptativos de AFM ($M = 9$) e LMS
 "NM": O número global de multiplicações por iteração

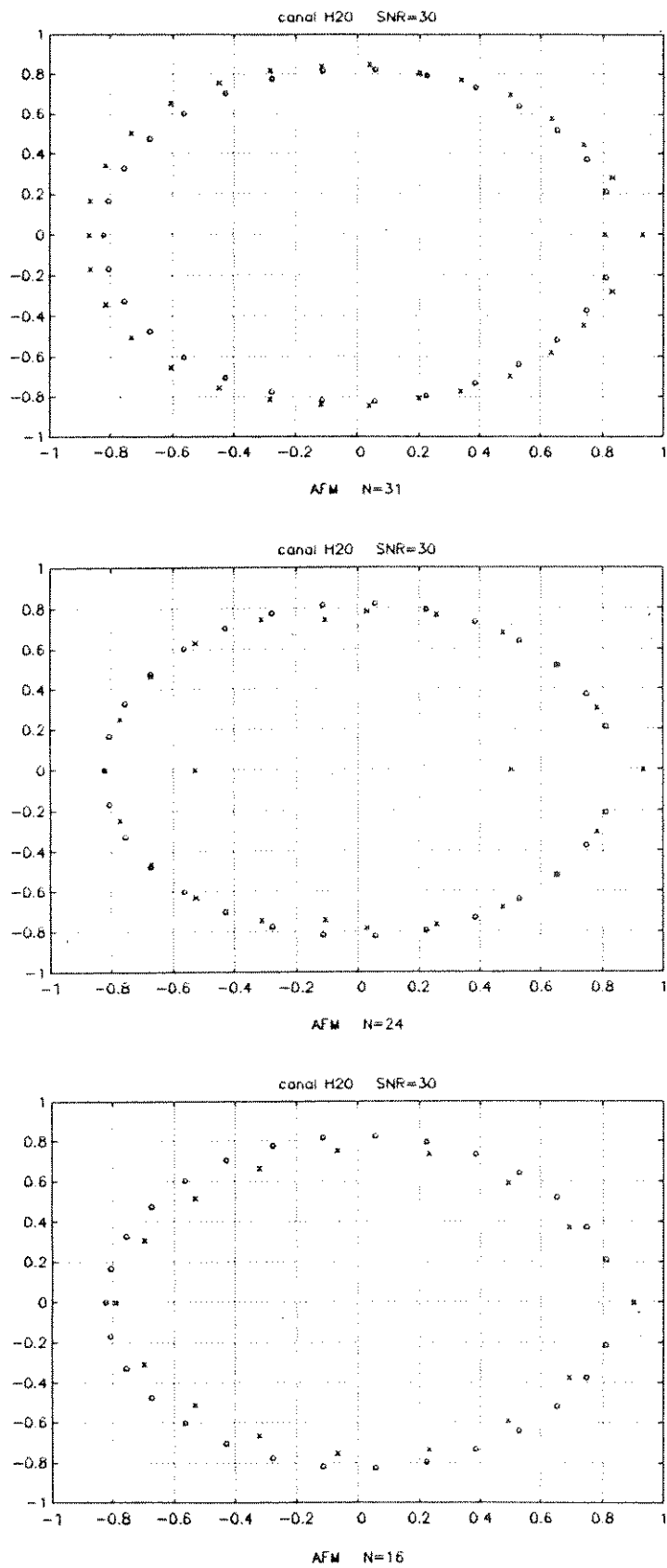


Fig.3.22 Os pólos (x) do equalizador adaptativo de AFM depois da adaptação e os zeros (o) do canal H20 (N = 31, 24, 16)

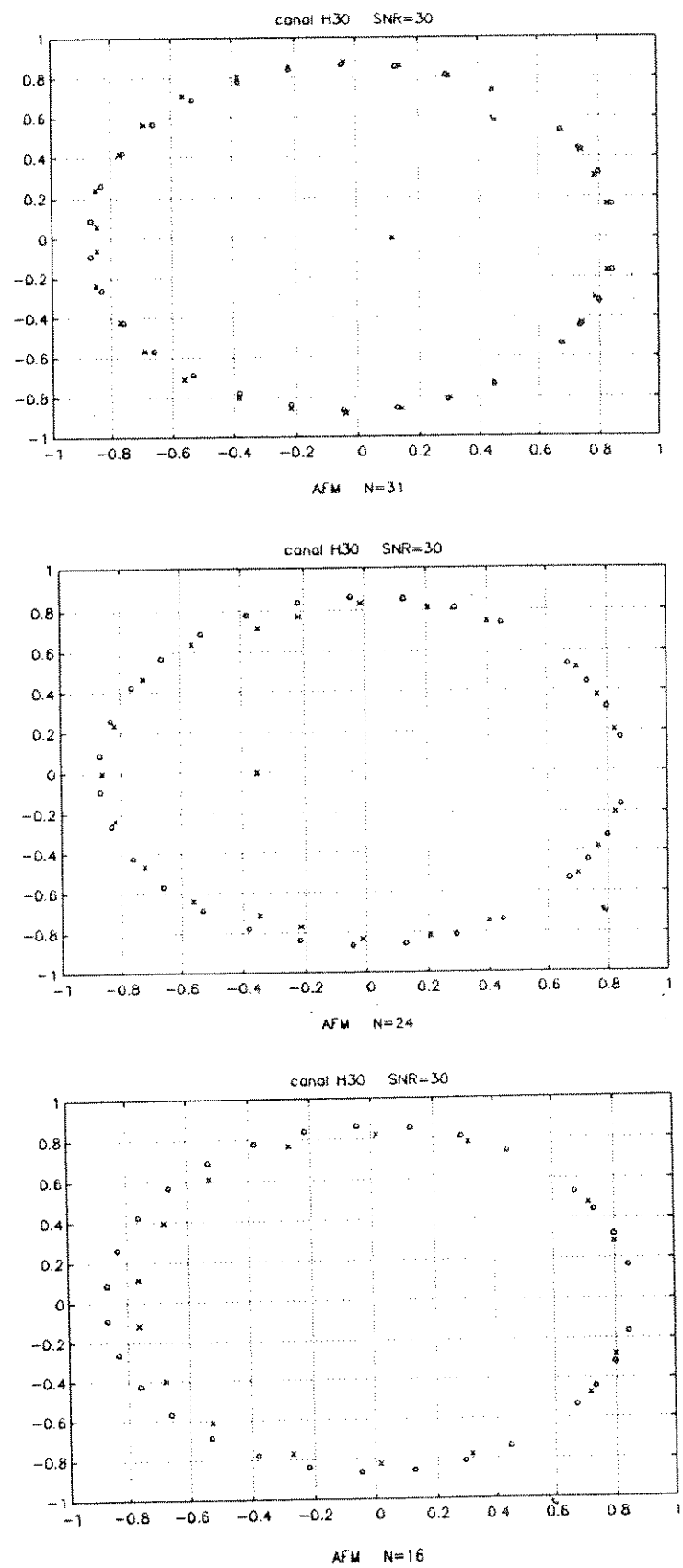


Fig.3.23 Os pólos (x) do equalizador adaptativo de AFM depois da adaptação e os zeros (o) do canal H30 (N = 31, 24, 16)

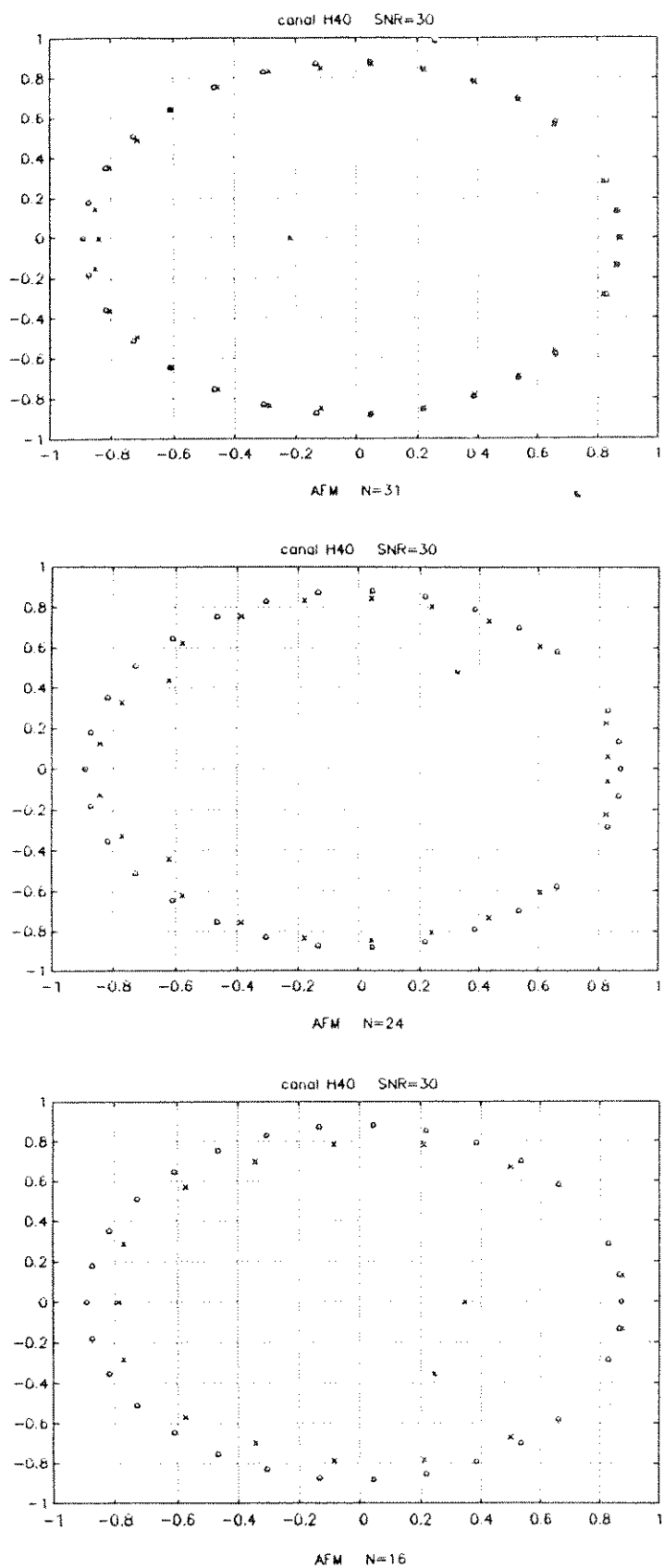


Fig.3.24 Os pólos (x) do equalizador adaptativo de AFM depois da adaptação e os zeros (o) do canal H40 (N = 31, 24, 16)

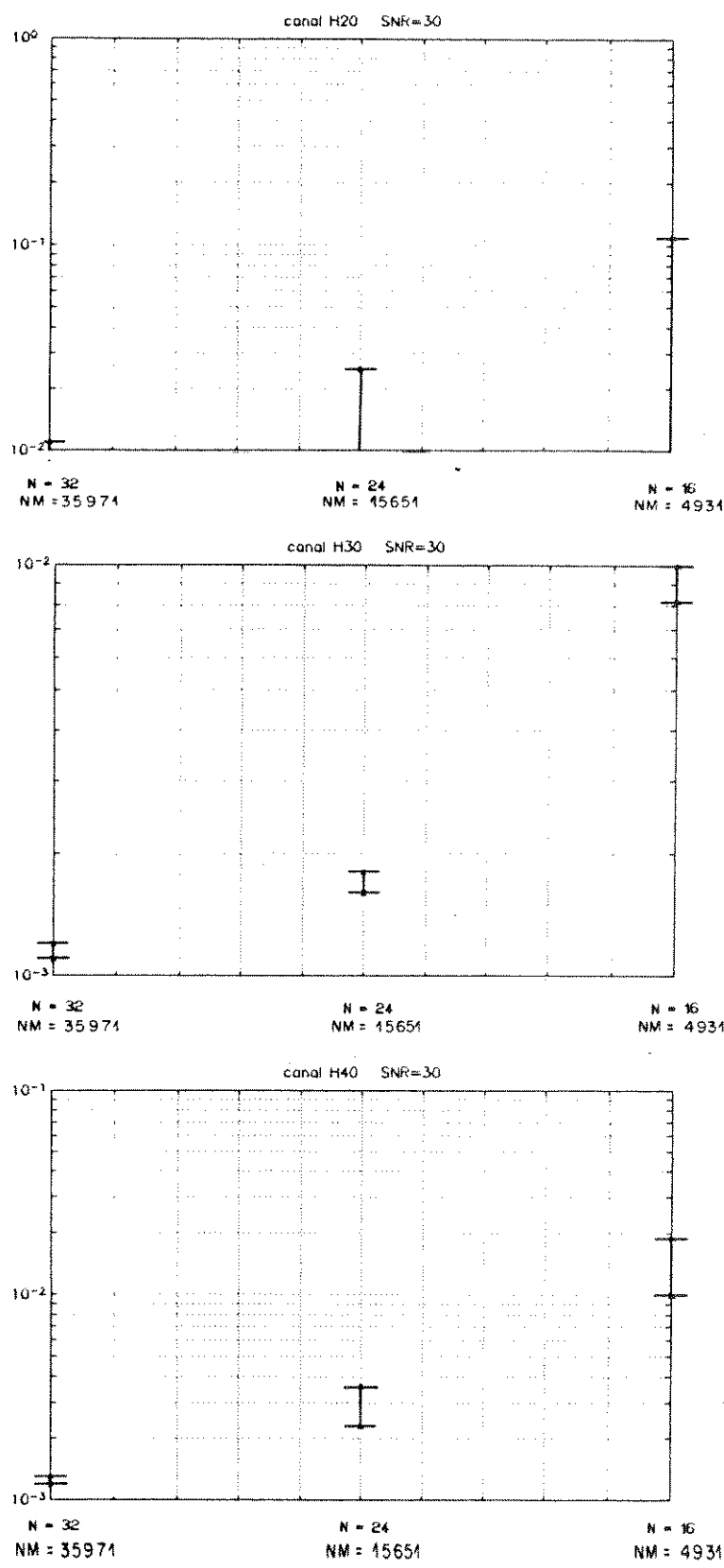


Fig.3.25 A influência da dimensão do filtro adaptativo de Kalman, N, sobre o erro médio quadrático em regime

"NM": O número global de multiplicações por iteração

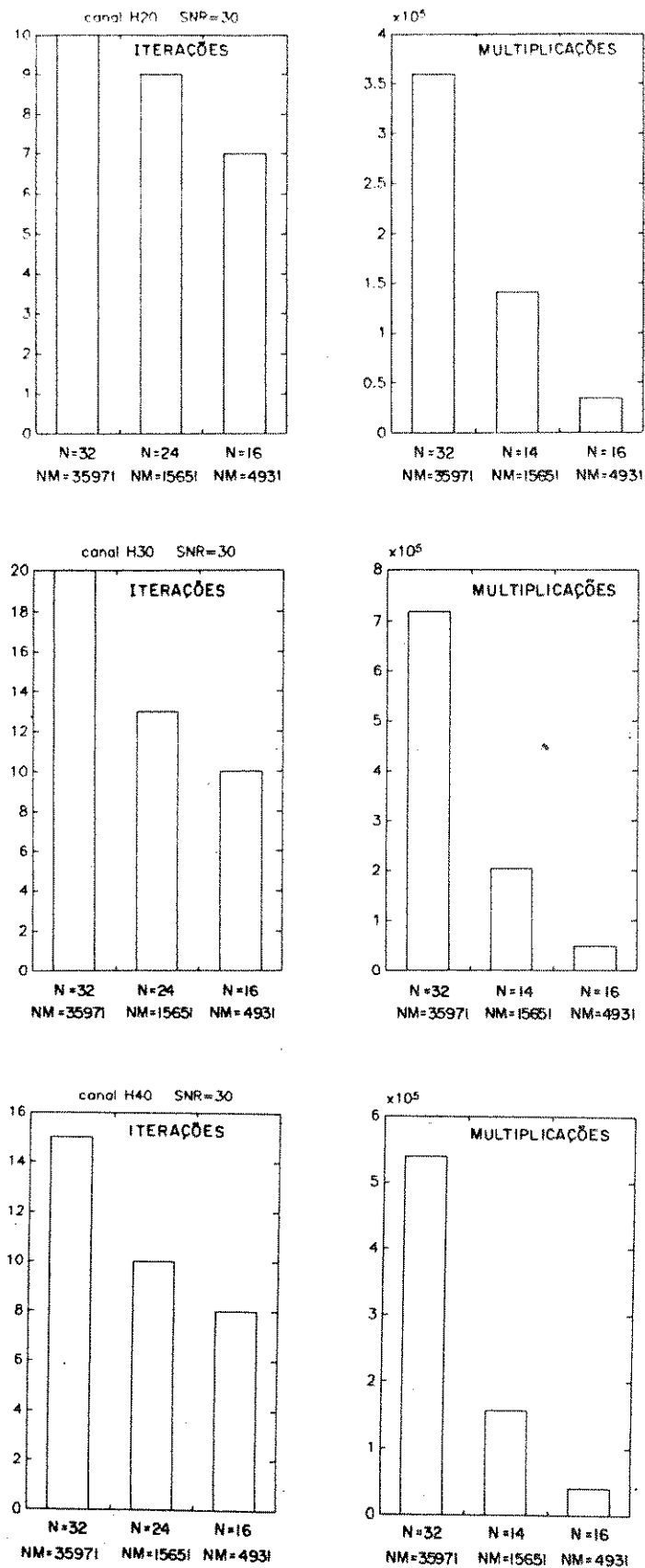


Fig.3.26 Número de iterações e número global de multiplicações necessárias para convergência dos equalizadores adaptativos de Kalman (N = 32, 24, 16)
"NM": O número global de multiplicações por iteração

3.6. A Resposta Impulsiva dos Canais Equalizados

Na seção 1.1, afirmamos que a amostra mais significativa do canal equalizado (canal + filtro adaptativo) irá ocorrer após um atraso de $(\delta + l_o)$, onde l_o é definido em (1.1.9). Utilizando os coeficientes do canal e do equalizador adaptativo depois da convergência, formamos o canal equalizado como na Fig.3.27 para verificar a afirmação acima. Aplicamos um sinal de impulso $u(n)$ como entrada para o canal equalizado e observamos a resposta impulsiva do canal equalizado $y(n)$.

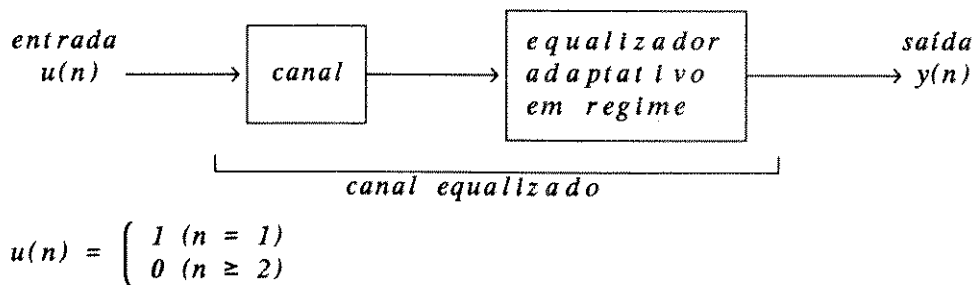


Fig.3.27 - A Resposta Impulsiva do Canal Equalizado

A Fig.3.28 mostra as respostas impulsivas dos canais equalizados para os equalizadores adaptativos de LMS ($M = 43$) e AFM ($N = 31, 24, 16$ e $M = 9$). Observamos que a amostra mais significativa é quase um, e ocorre após os atrasos de 9 e 10 para os equalizadores adaptativos de LMS e AFM, respectivamente. Visto que os valores de δ foram 8 e 9 para os equalizadores de LMS e AFM, respectivamente, e $l_o = 1$ como na Fig.2.7, estes resultados estão de acordo com a afirmação feita na seção 1.1. Também, notamos que as demais amostras das respostas impulsivas são quase nulas. Portanto, podemos concluir que a resposta impulsiva do canal equalizado reproduz quase perfeitamente o sinal de impulso com o atraso de $(\delta + l_o)$, o AFM com maior fidelidade do que o LMS.

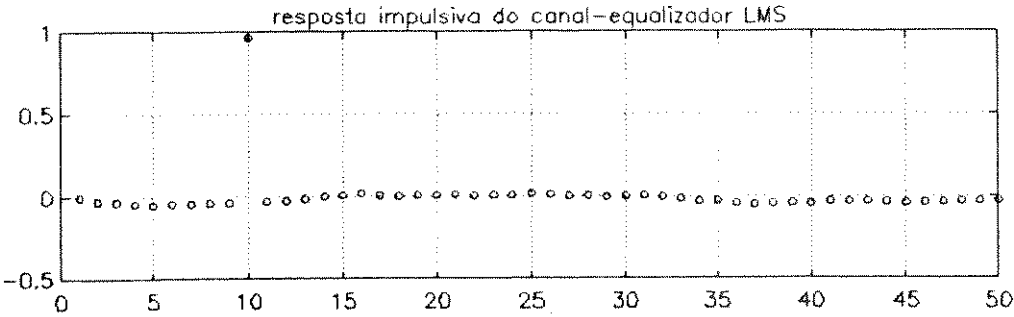


Fig. 3.28 (a)

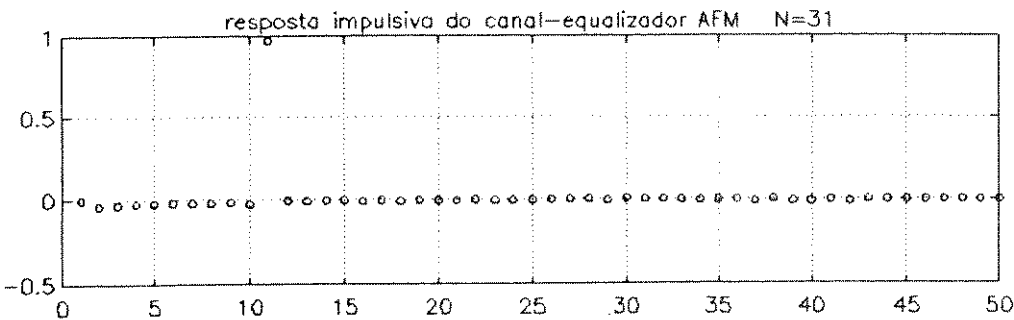


Fig. 3.28 (b)

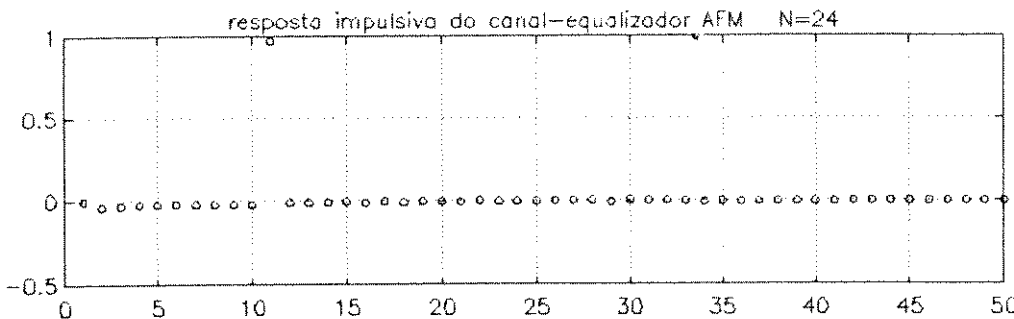


Fig. 3.28 (c)

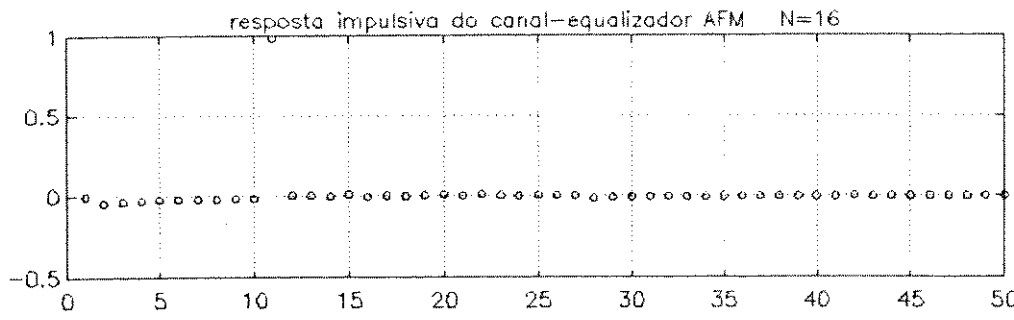


Fig. 3.28 (d)

Fig.3.28 As respostas impulsivas dos canais equalizados para os equalizadores adaptativos de de LMS e AFM
(SNR = 30, canal H20)

3.7. Sumário do Capítulo

- A escolha do atraso do equalizador adaptativo IIR na forma direta é simples, i.e. atraso apropriado = ordem do numerador do equalizador. Este aspecto é uma das vantagens do equalizador adaptativo IIR sobre o equalizador adaptativo FIR.
- Os equalizadores adaptativos IIR são capazes de realizar a equalização de canais de fase não-mínima. No caso dos equalizadores adaptativos IIR de ordem suficiente, os pólos modelam de forma mais precisa os zeros dos canais que ficam dentro do C.R.U., e os pólos restantes ajustam-se de modo a compensar somente o módulo, resultando assim numa distorção na fase.
- O equalizador adaptativo de Kalman com ordem suficiente é o esquema que exige a maior complexidade computacional, mas também apresenta sempre o menor erro médio quadrático em regime aproximando-se da potência do ruído do canal. Atinge a convergência com menor número de iterações.
- Quando a relação sinal/ruído é baixa ($SNR = 20,30$), a relação do erro médio quadrático em regime é

$$\boxed{Kalman} < \boxed{AFM} < \boxed{LMS} \leq \boxed{SHARF}$$

- Quando a relação sinal/ruído é alta ($SNR = 50$), a relação do erro médio quadrático em regime é

$$\boxed{Kalman} < \boxed{LMS} \leq \boxed{AFM} < \boxed{SHARF}$$

- A escolha da ordem da parte transversal, M , é importante para atingir o menor erro médio quadrático em regime dos equalizadores adaptativos de SHARF e AFM, mas não se tem uma forma sistemática para esta escolha.
- O equalizador adaptativo de AFM apresenta pouca degradação com respeito ao erro médio quadrático em regime, a medida que a ordem da parte realimentada, N , diminui. Este fato permite a maior liberdade da escolha de N em presença de canais desconhecidos.
- O equalizador adaptativo de Kalman apresenta maior degradação com respeito ao erro médio quadrático em regime do que o equalizador adaptativo de AFM ao passo que a dimensão deste equalizador, N , diminui.

CAPÍTULO.4 ALGORITMO DE AFM COM ESQUEMA DE ESTABILIZAÇÃO

Através das simulações apresentadas no **CAPÍTULO.3**, verificamos que o equalizador adaptativo de AFM tem melhor desempenho do que os equalizadores adaptativos de SHARF e LMS (FIR) com respeito ao erro médio quadrático em regime em várias situações, além de apresentar degradação insignificante do erro médio quadrático em regime mesmo com ordem insuficiente. Todavia, o equalizador adaptativo de AFM mostrou-se frequentemente instável durante as simulações.

Para tratar o problema da instabilidade de filtros adaptativos do tipo IIR na forma direta, propomos um esquema simples de estabilização neste capítulo. Aplicamos este esquema para o algoritmo de AFM e avaliamos o desempenho do algoritmo com esquema de estabilização através das simulações.

CAPÍTULO.4 ALGORITMO DE AFM

COM ESQUEMA DE ESTABILIZAÇÃO

Através das simulações apresentadas no CAPÍTULO.3, verificamos que o equalizador adaptativo de AFM tem melhor desempenho do que os equalizadores adaptativos de SHARF e LMS (FIR) com respeito a erro médio quadrático em regime em várias situações, além de apresentar degradação insignificante do erro médio quadrático em regime mesmo com ordem insuficiente. Todavia, o equalizador adaptativo de AFM mostrou-se instável frequentemente durante as simulações.

Para tratar o problema da instabilidade de filtros adaptativos do tipo IIR na forma direta, propomos um esquema simples de estabilização neste capítulo. Aplicamos este esquema para o algoritmo de AFM e avaliamos o desempenho do algoritmo com esquema de estabilização através das simulações.

4.1. Algoritmo de AFM com Esquema de Estabilização

O filtro adaptativo do tipo IIR na forma direta é mostrado na Fig.4.1 e a função de transferência entre $x(n)$ e $y(n)$ é

$$F(z) = \frac{\sum_{j=0}^M \hat{b}_j(n) z^{-j}}{1 - \sum_{l=1}^N \hat{a}_l(n) z^{-l}} \quad (4.1)$$

Os pólos de $F(z)$ são obtidos resolvendo-se a equação característica:

$$z^N - \hat{a}_1(n)z^{N-1} - \hat{a}_2(n)z^{N-2} - \dots - \hat{a}_N(n) = 0 \quad (4.2)$$

Para tratar o problema da instabilidade deste algoritmo, desenvolvemos o algoritmo modificado de AFM, utilizando um esquema simples de forçar os pólos para dentro do círculo raio unitário (C.R.U.) quando estes saem para fora do C.R.U..

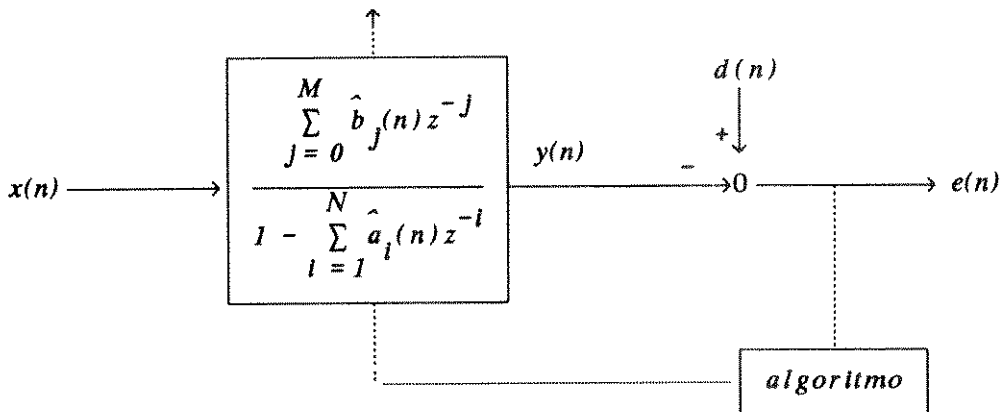


Fig.4.1 - Filtro Adaptativo do tipo IIR na forma direta

Neste algoritmo com esquema de estabilização, separamos o filtro adaptativo do tipo IIR na parte do numerador e na parte do denominador e colocamos um elemento de realimentação variável denominado de coeficiente de estabilização K , como mostra a Fig.4.2.

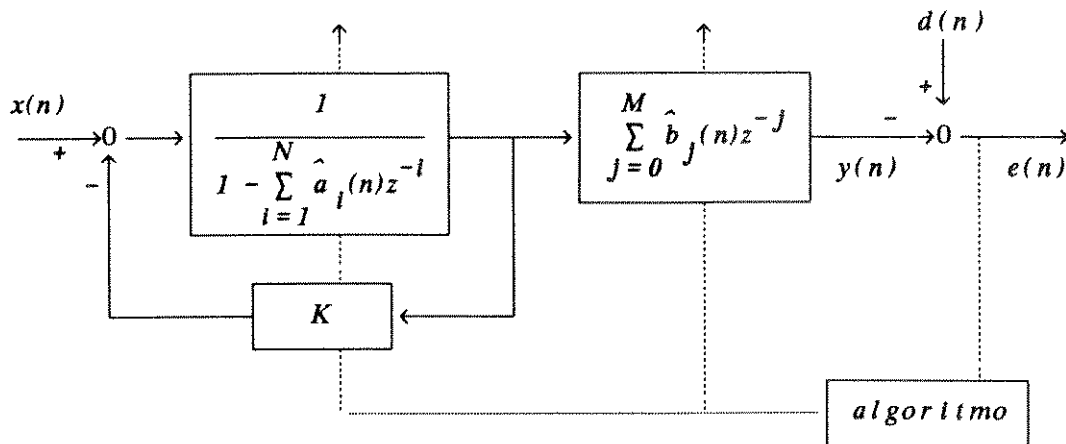


Fig.4.2 - Esquema de Estabilização para Filtro Adaptativo IIR

A função de transferência $F'(z)$ entre $x(n)$ e $y(n)$ na Fig.4.2 é agora :

$$\begin{aligned}
 F'(z) &= \frac{1}{(1+K) - \sum_{l=1}^N \hat{a}_l(n)z^{-l}} \sum_{j=0}^M \hat{b}_j(n)z^{-j} \\
 &= \frac{1}{1+K} \frac{\sum_{j=0}^M \hat{b}_j(n)z^{-j}}{1 - \sum_{l=1}^N \hat{c}_l(n)z^{-l}}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

onde

$$\hat{c}_l(n) = \frac{\hat{a}_l(n)}{1+K}$$

De (4.3), notamos que os pólos de $F'(z)$ são obtidos resolvendo-se

$$(1+K)z^N - \hat{a}_1(n)z^{N-1} - \hat{a}_2(n)z^{N-2} - \dots - \hat{a}_N(n) = 0 \tag{4.4}$$

Quando os pólos do filtro adaptativo estão dentro do C.R.U., fazemos $K = 0$ e (4.4) é idêntica a (4.2). Se algum pólo do filtro sai para fora do C.R.U., aumentamos K conforme (4.5) até que todos os pólos estejam dentro do C.R.U.:

$$K \leftarrow K + \Delta K \tag{4.5}$$

onde ΔK é suficientemente pequeno para não comprometer o desempenho do filtro. Para verificar se todos os pólos do filtro adaptativo com o valor atual de K estão dentro do C.R.U., podemos usar o teste de estabilidade de Jury [28] para cada iteração e toda vez que K é alterado. O número de multiplicações requerido por cada teste de estabilidade de Jury para o filtro adaptativo com $N = 5$ como na Tab.4.1 é 18, se não houver necessidade de ajustes no valor de K nos testes T_4, T_5, T_6 . Havendo um ajuste no valor de K , não é necessário voltar a se testar as condições anteriores pois como veremos elas serão automaticamente satisfeitas. O número de multiplicações do teste de estabilidade de Jury (MLP) para o filtro adaptativo de ordem N é dado por:

$$MLP = 9(N-3) + \sum_{l=1}^A (4l-3) + \sum_{l=1}^B (4l-4) \quad \text{para } N \geq 6 \quad (4.6)$$

onde

A : menor inteiro maior que $(N-5)/2$

B : maior inteiro menor que $(N-3)/2$

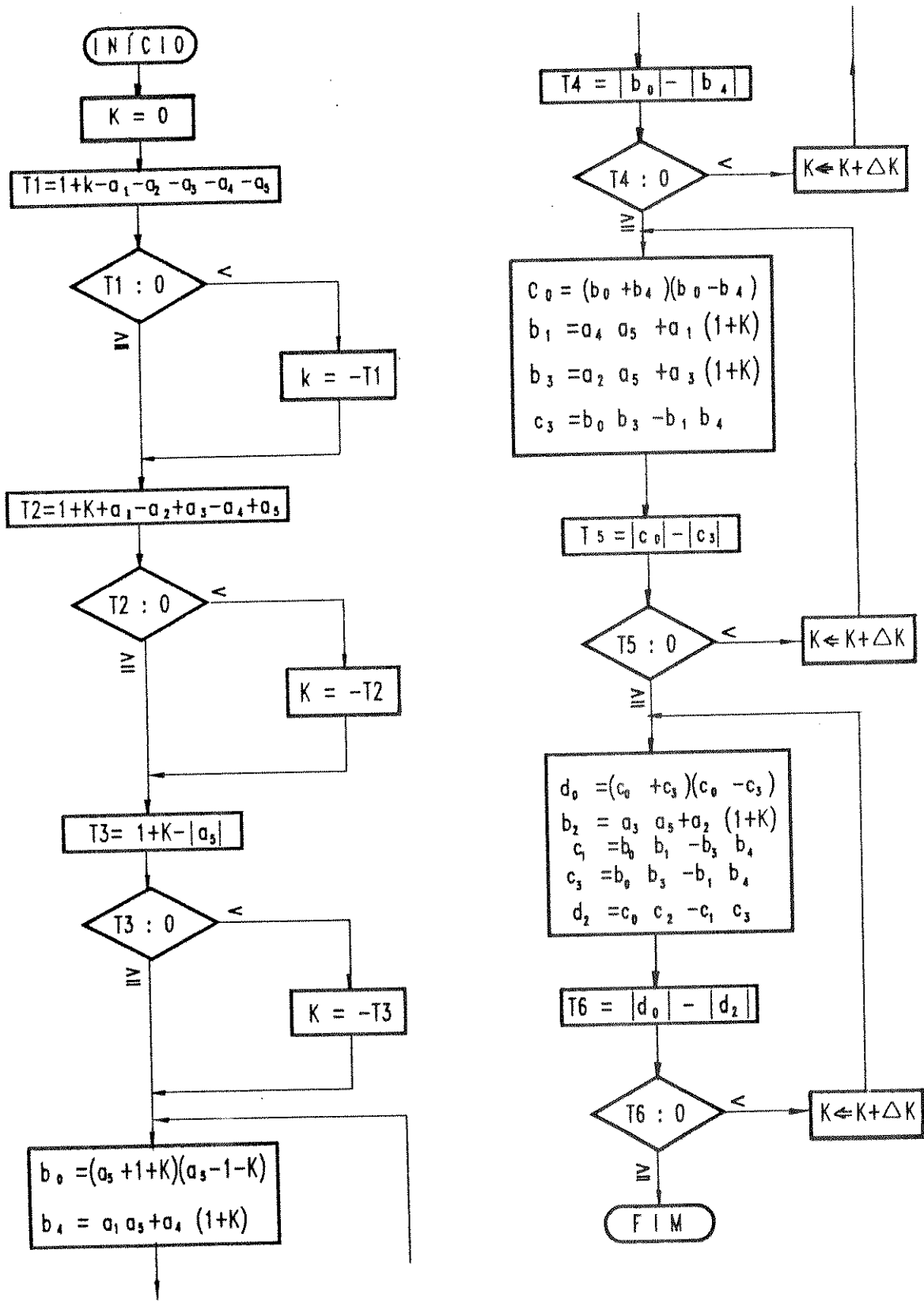
Esta idéia de monitoramento da estabilidade é baseada no Método de Root Locus da Teoria de Controle e funciona como esquematizado na Fig.4.3, onde observamos que os pólos do filtro adaptativo migram à origem a medida que K aumenta. Para explicar este comportamento, basta tomarmos de (4.4) o polinômio característico de $F'(z)$ na forma seguinte:

$$z^N - \hat{a}_1 z^{N-1} - \hat{a}_2 z^{N-2} - \dots - \hat{a}_N + Kz^N = 0$$

Sejam $p_1, p_2, \dots, p_N$ os pólos da equação característica original (4.2), assim reescrevemos:

$$(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_N) + K(z - z_0)^N = 0$$

Tabela 4.1 - Teste de Estabilidade de Jury (N = 5)



com $z_0 = 0$. Assim a medida que se aumenta K , as raízes do polinômio acima desloca-se dos valores p_i 's para a origem, onde estariam todas elas no limite, quando K atingisse o valor $+\infty$. Portanto o comportamento dos pólos do filtro monitorado da forma proposta é monotônico com respeito ao coeficiente de estabilização K , existindo um K finito, suficientemente grande para que o filtro monitorado seja estável.

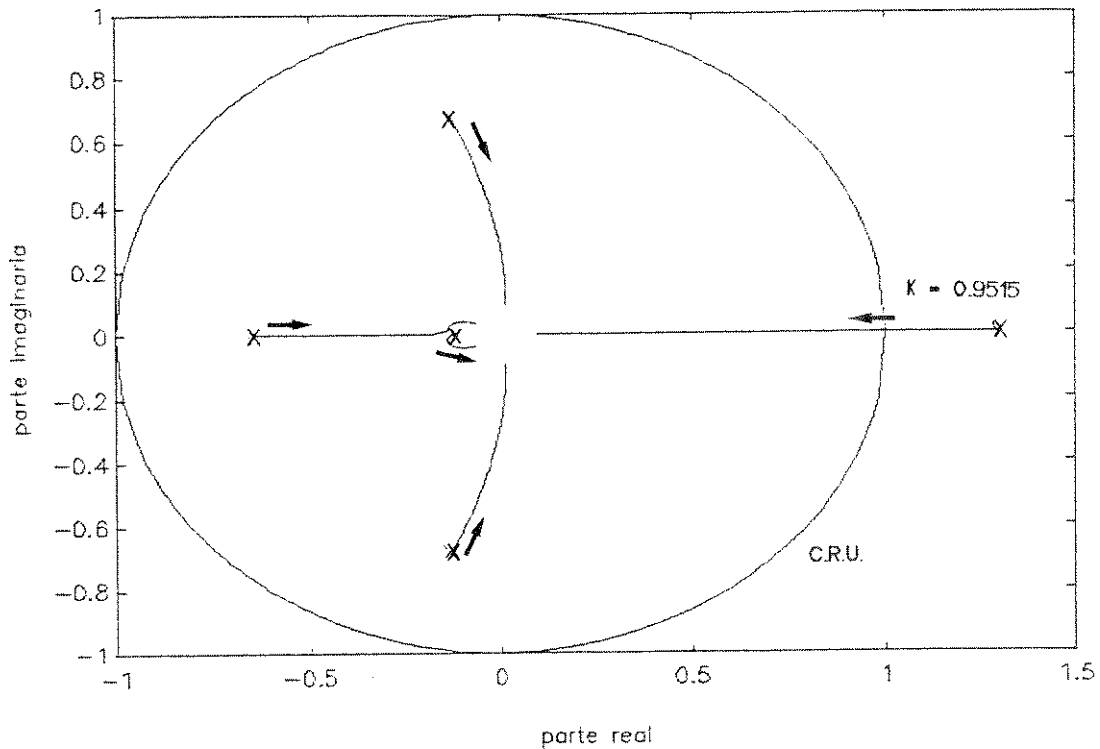


Fig. 4.3 - DESLOCAMENTO DOS PÓLOS À ORIGEM ($K : 0 \rightarrow 10000$) ganho limite $K = 0,9515$

Para K pequeno suponhamos que $\hat{c}_l(n) \cong \hat{a}_l(n)$, portanto de (4.1) e (4.3) obtemos

$$(1 + K) F'(z) \cong F(z) \quad (4.7)$$

A fim de compensar o efeito do coeficiente de estabilização K sobre o ganho da saída do filtro $y(n)$, de (4.7) observamos que o elemento de compensação $(1 + K)$ é necessário. Se adicionarmos este elemento, de (4.3) a função de transferência

entre $x(n)$ e $y(n)$ será então :

$$F''(z) = \frac{\sum_{j=0}^M \hat{b}_j(n) z^{-j}}{1 - \sum_{l=1}^N \hat{c}_l(n) z^{-l}} \quad (4.8)$$

No algoritmo de AFM, precisamos das quantidades filtradas de $x(n)$ e $d(n)$ para ajuste dos coeficientes do filtro. Usando a expressão do denominador de $F'(z)$ em (4.3), obtemos o algoritmo de AFM com esquema de estabilização como na Tab.4.2 e na Fig.4.4.

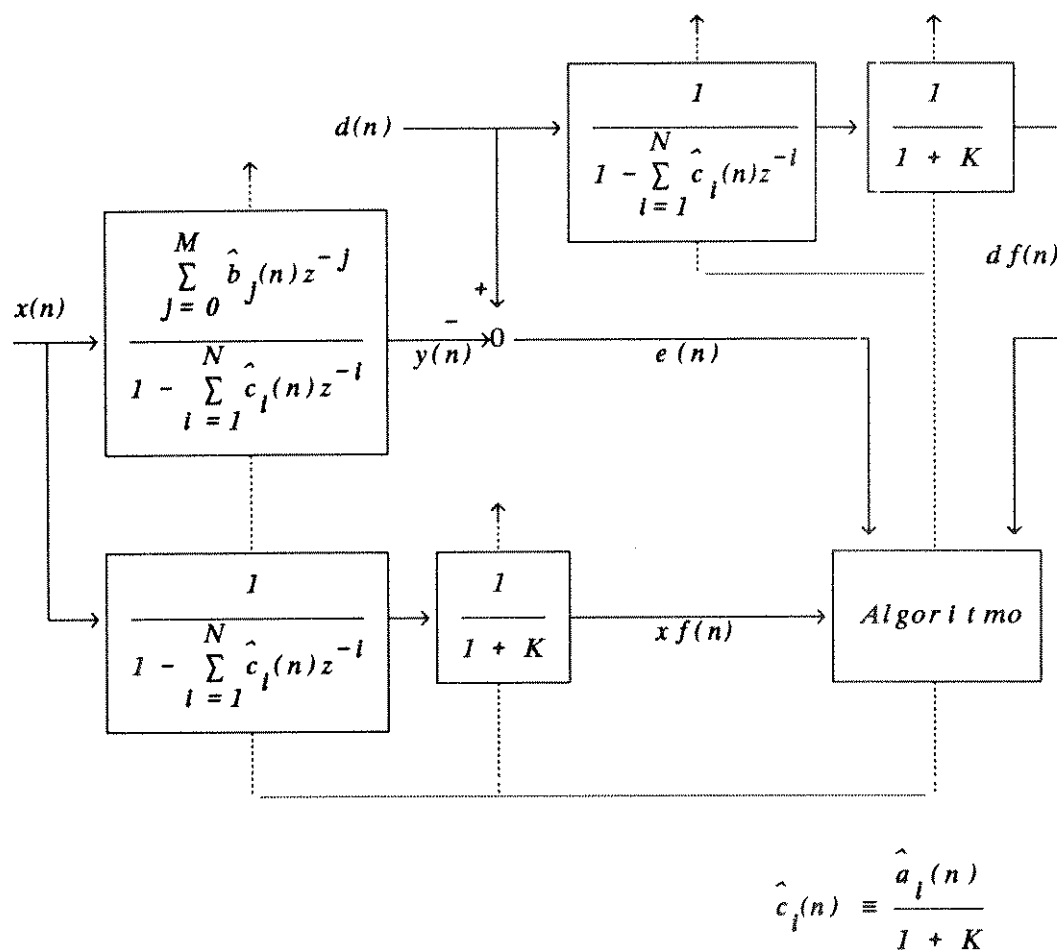


Fig.4.4 - Algoritmo de AFM com Esquema de Estabilização

Tab.4.2 - Algoritmo de AFM com Esquema de Estabilização

Para cada nova entrada $x(n)$, $d(n)$; $n \geq 0$ com $K = 0$

$$xf(n) = \frac{1}{1+K} \left(x(n) + \sum_{l=1}^N \hat{a}_l(n) xf(n-l) \right)$$

$$df(n) = \frac{1}{1+K} \left(d(n) + \sum_{l=1}^N \hat{a}_l(n) df(n-l) \right)$$

$$y(n) = \sum_{l=1}^N \hat{a}_l(n)/(1+K) + xf(n-l) + \sum_{j=0}^M \hat{b}_j(n) x(n-j)$$

$$e(n) = d(n) - y(n)$$

$$\hat{a}_l(n+1) = \hat{a}_l(n) + \rho e(n) df(n-l) \quad 1 \leq l \leq N$$

$$\hat{b}_j(n+1) = \hat{b}_j(n) + \rho e(n) xf(n-l) \quad 0 \leq j \leq M$$

Se os pólos do filtro definidos por

$$(1+K)z^N - \hat{a}_1(n)z^{N-1} - \hat{a}_2(n)z^{N-2} - \dots - \hat{a}_N(n) = 0$$

saem para fora do C.R.U.,

aumentar K até que todos os pólos estejam dentro do C.R.U..

Se todos os pólos do filtro estão dentro do C.R.U.,

faça $K = 0$.

4.2. Resultados das Simulações

Implementamos o algoritmo de AFM com esquema de estabilização na aplicação de equalizador adaptativo e realizamos as simulações para avaliar o desempenho do esquema proposto.

4.2.1. Equalização dos Canais com os Zeros próximos ao C.R.U.

Nesta seção, usamos os canais que têm os zeros bem próximos ao C.R.U., para que os pólos do equalizador adaptativo de AFM com esquema de estabilização fiquem frequentemente fora do C.R.U. durante a adaptação dos coeficientes. O valor de ΔK foi 0.1 para os canais H103 e H104, e 0.2 para o canal H22. Nesta seção, a ordem da parte transversal M foi escolhida igual a 0, visto que o aumento de M não significa melhor desempenho para os canais utilizados.

Primeiramente, os canais H103 e H104 nas Fig.4.5 e Fig.4.6 foram utilizados nas simulações. Eles tem 6 taps com 5 zeros (um zero está fora do C.R.U.). O número da ordem do denominador N foi escolhido como 5 para que o equalizador adaptativo de AFM com esquema de estabilização seja de ordem suficiente. As Fig.4.7- Fig.4.8 mostram os pólos deste equalizador depois da adaptação, a evolução do coeficiente de estabilização K , do erro e dos coeficientes deste equalizador para os canais H103 e H104, respectivamente.

As Fig.4.9-Fig.4.11 mostram os pólos do equalizador adaptativo de AFM com esquema de estabilização depois da adaptação, a evolução do coeficiente de estabilização K , do erro e dos coeficientes deste equalizador para o canal H22 com $N = 31, 24$ e 16 , respectivamente. Este canal tem os mesmos zeros do canal H20, exceto um zero $z = 0,98$ que substituiu o zero $z = 1,2607$ do canal H20. Por colocar um zero não só próximo a C.R.U. mas também dentro do C.R.U., um pólo do equalizador adaptativo converge a este zero e frequentemente sai fora do C.R.U. durante o período de adaptação.

Notamos das Fig.4.7 e Fig.4.9-Fig.4.11, que os coeficientes da parte realimentada deste equalizador variam bruscamente quando o coeficiente de estabilização K é alterado, e consequentemente o valor de erro quadrático aumenta quando $K \neq 0$ em todos os casos simulados para os canais H103 e H22. No entanto, a variação dos coeficientes da parte transversal é bem suave mesmo quando o valor de K é alterado. Quando este equalizador é aplicado ao canal H104 como na Fig.4.8, observamos que o coeficiente de estabilização K converge a um valor diferente de zero. Neste caso, diferente dos resultados obtidos para o canal H103 e H22, os coeficientes da parte realimentada variam mais suavemente quando K é alterado. Das Fig.4.9-Fig.4.11, observamos que os pólos do equalizador adaptativo de AFM com esquema de estabilização de ordem insuficiente saem fora do C.R.U. com menos frequência do que os de ordem suficiente e o equalizador de ordem insuficiente apresenta pouca degradação com relação ao erro médio quadrático em regime.

Foi relatado por Cowan [5, 25] que quando os pólos próximos ao C.R.U. são modelados aproximadamente por um filtro FIR, é necessário o grande número de taps para obter um bom desempenho. Porém, através das simulações verificamos a capacidade do filtro IIR de pequena ordem com o esquema de estabilização proposto para modelar os pólos próximos a C.R.U. apropriadamente.

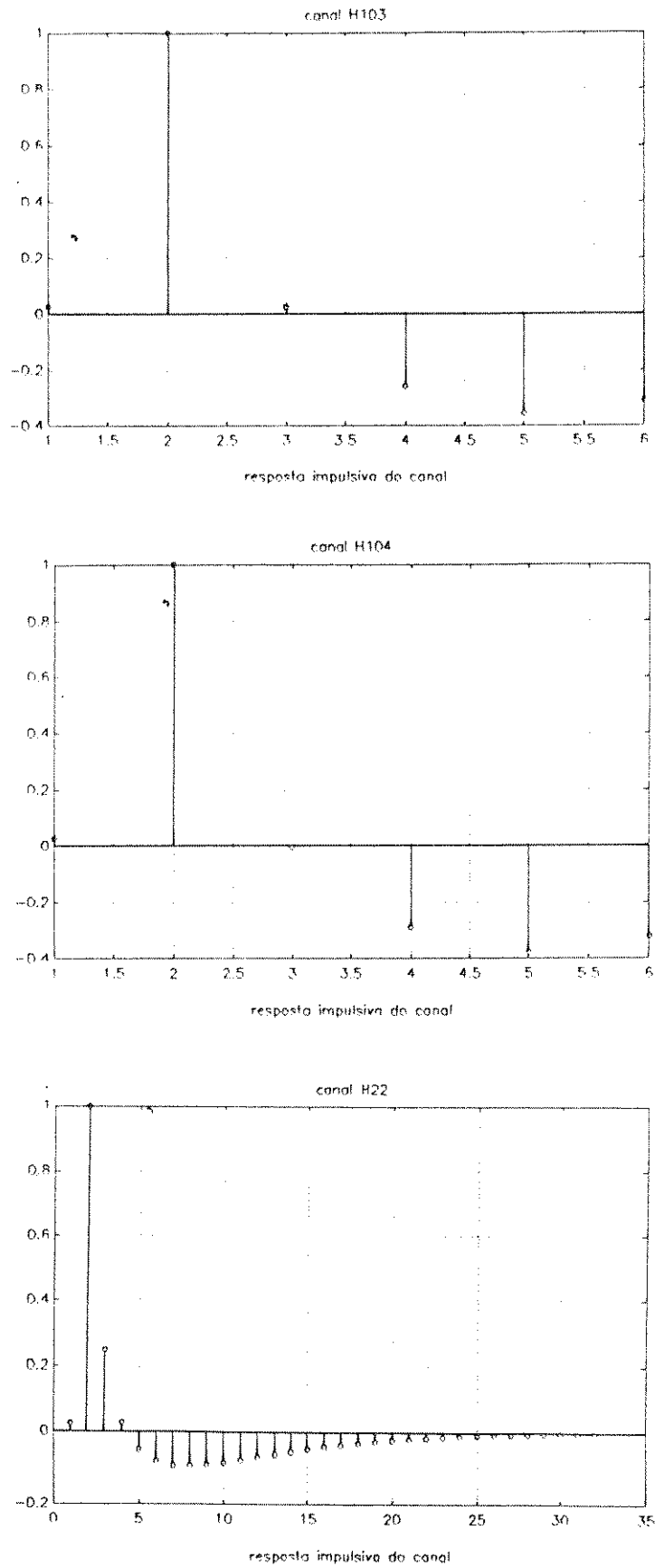


Fig.4.5 As respostas impulsivas dos canais H103, H104 e H22

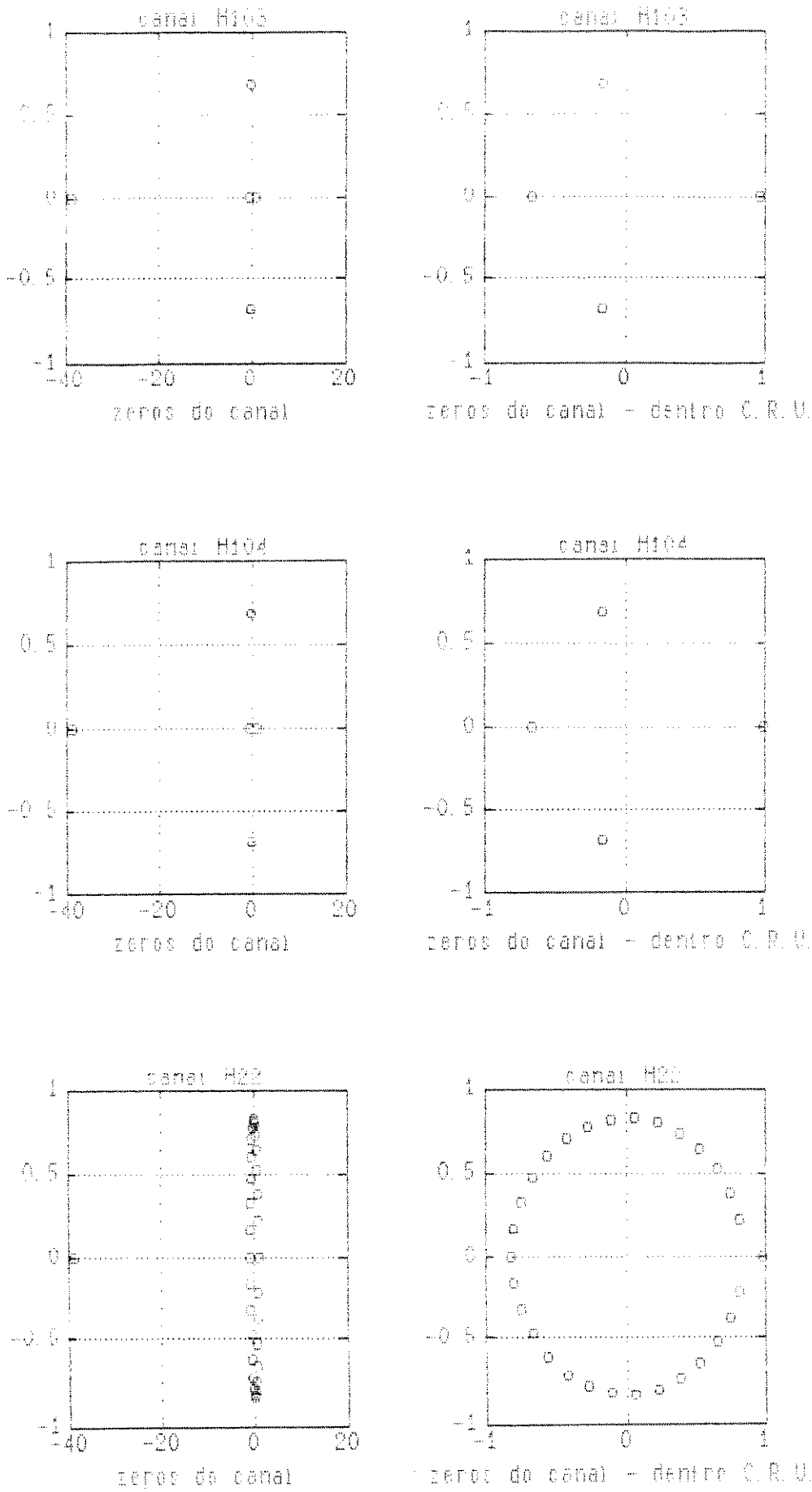


Fig.4.6 Os zeros dos canais H103, H104 e H22

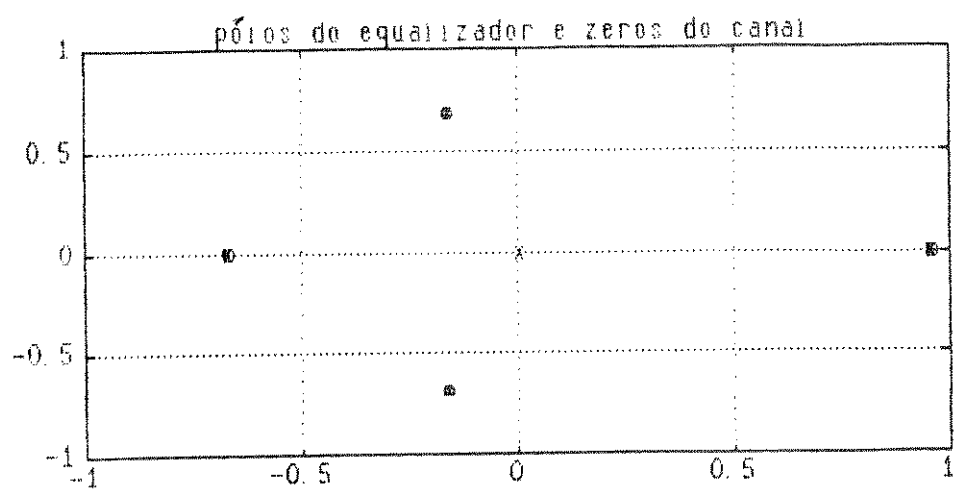


Fig. 4.7 (a)

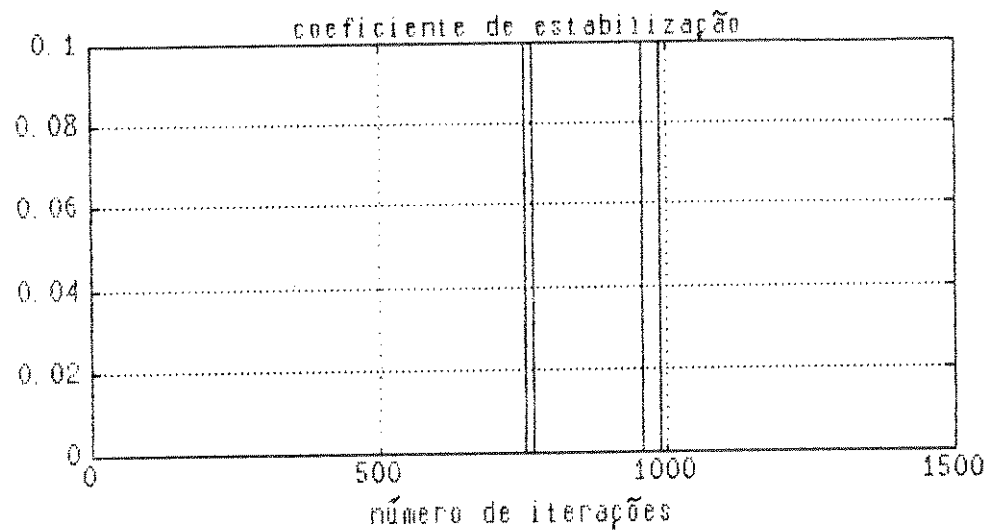


Fig. 4.7 (b)

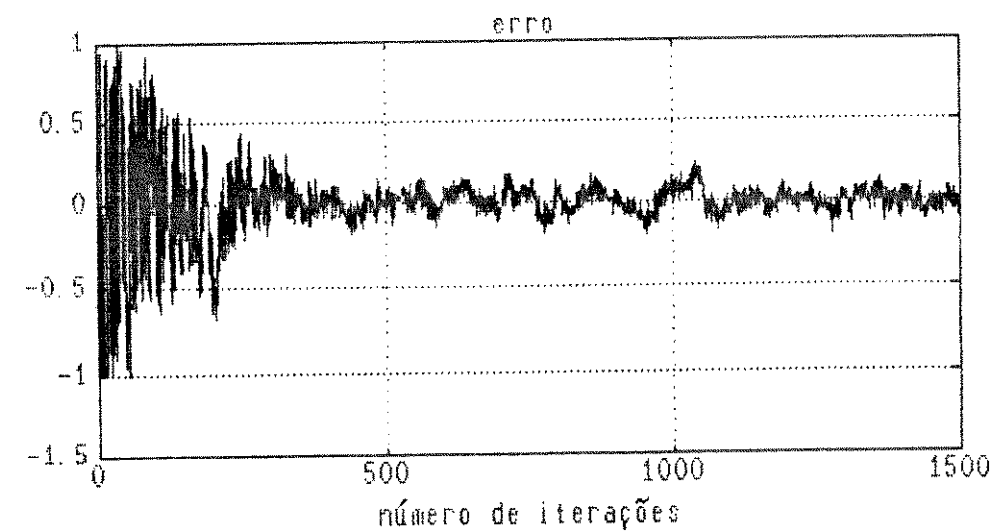


Fig. 4.7 (c)

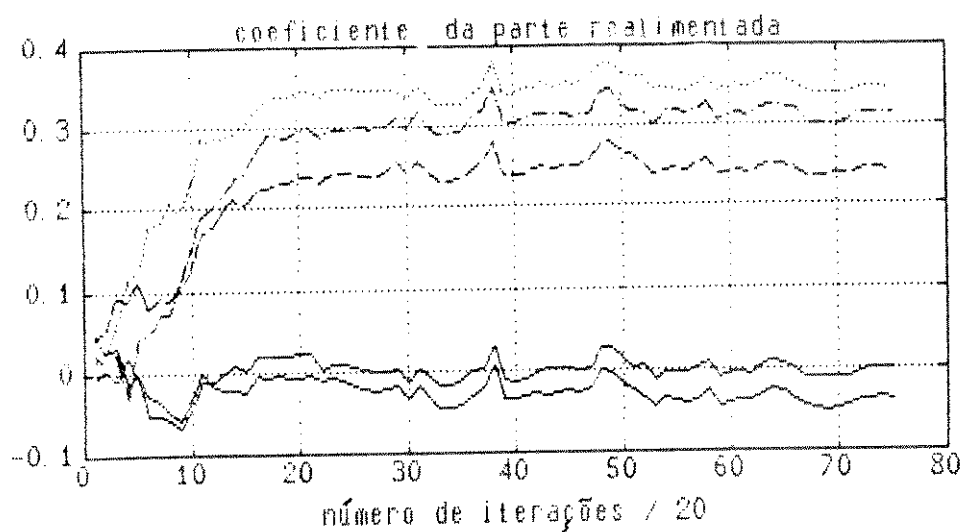


Fig.4.7 (d)

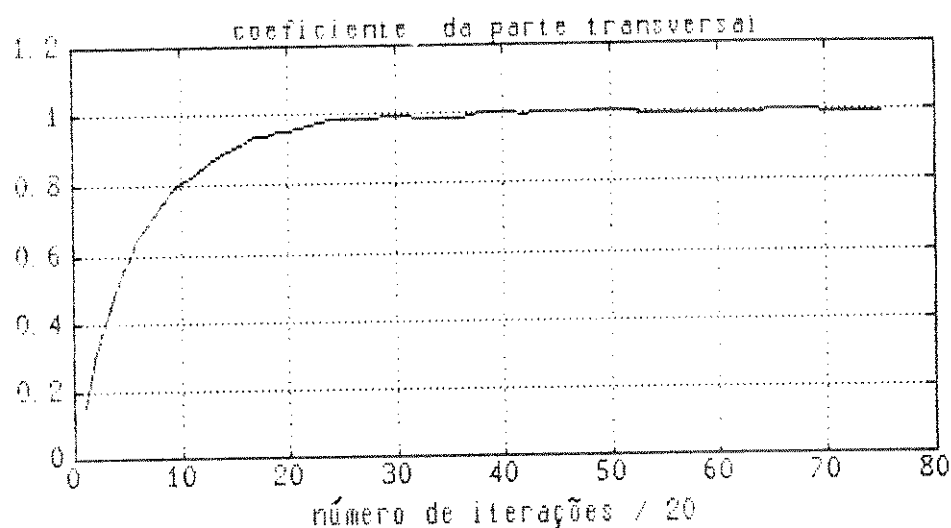


Fig. 4.7 (e)

Fig.4.7 Os pólos do equalizador depois da adaptação, a evolução do coeficiente de estabilização, do erro e dos coeficientes do equalizador adaptativo de AFM com esquema de estabilização

($N = 5$, $M = 0$, $\delta = 0$, $SNR = 30$, $\rho = 0,01$, canal H103)

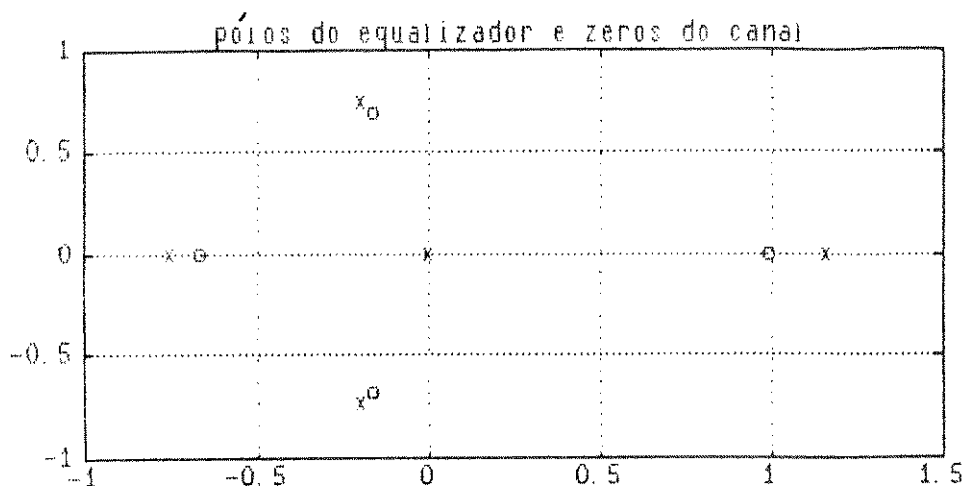


Fig. 4.8 (a)

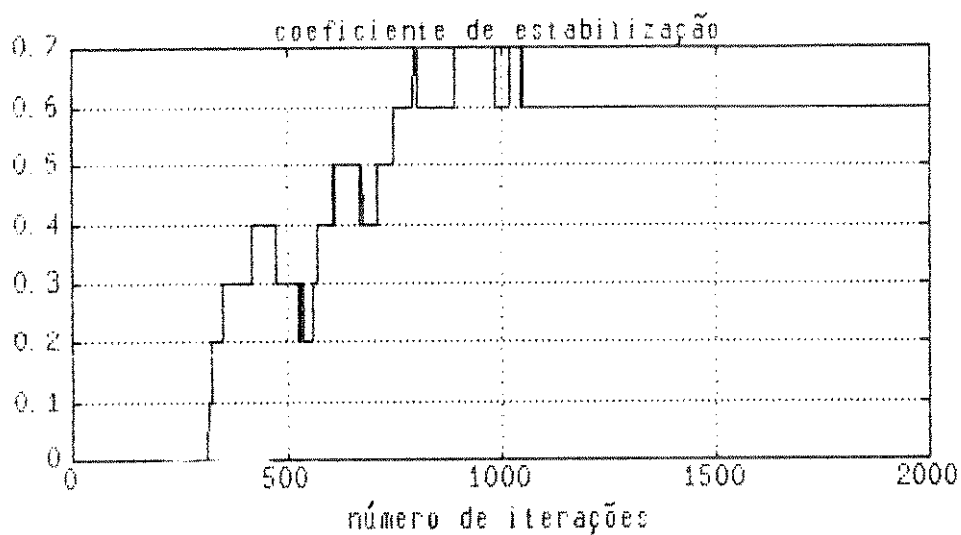


Fig. 4.8 (b)

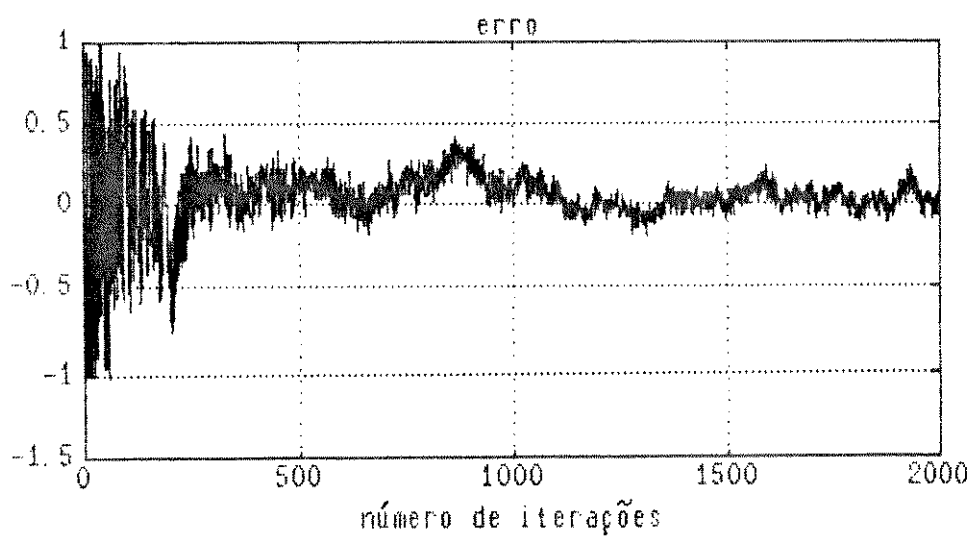


Fig. 4.8 (c)

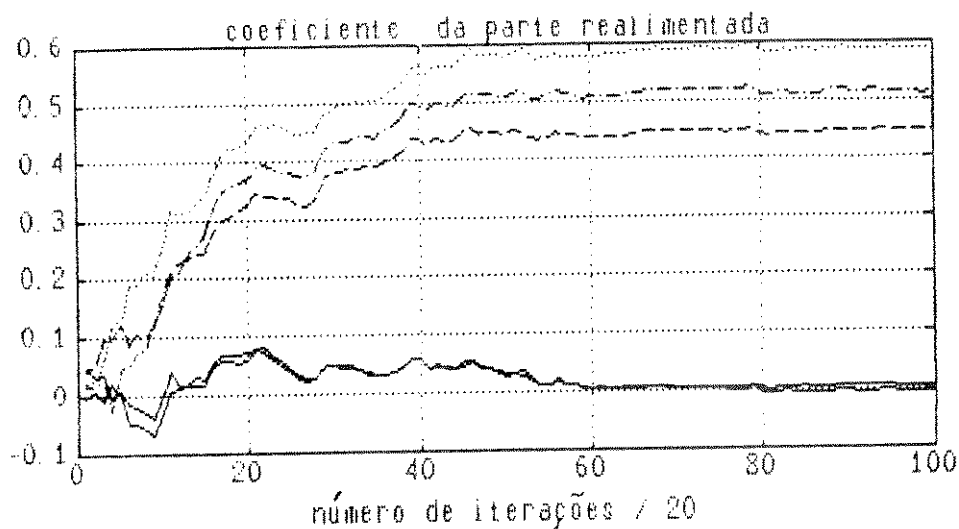


Fig. 4.8 (d)

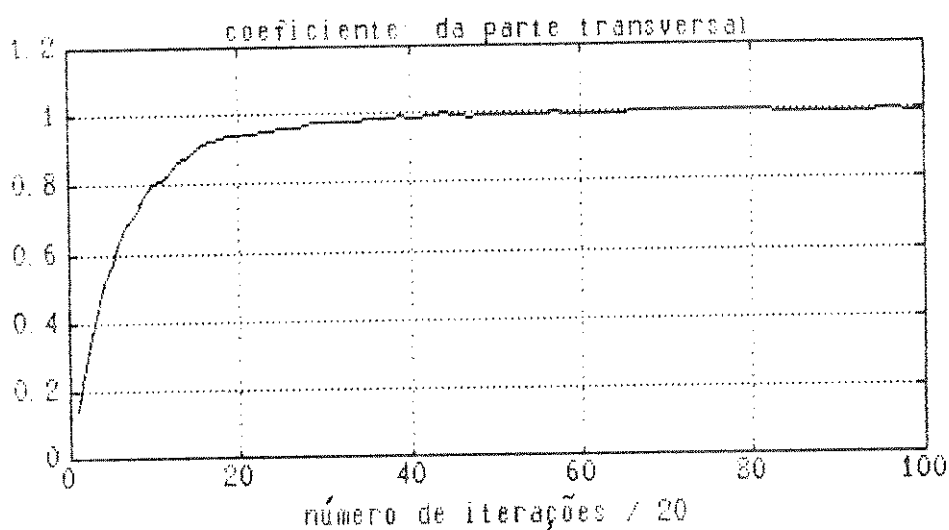


Fig. 4.8 (e)

Fig.4.8 Os pólos do equalizador depois da adaptação, a evolução do coeficiente de estabilização, do erro e dos coeficientes do equalizador adaptativo de AFM com esquema de estabilização
($N = 5$, $M = 0$, $\delta = 0$, $\text{SNR} = 30$, $\rho = 0,01$, canal H104)

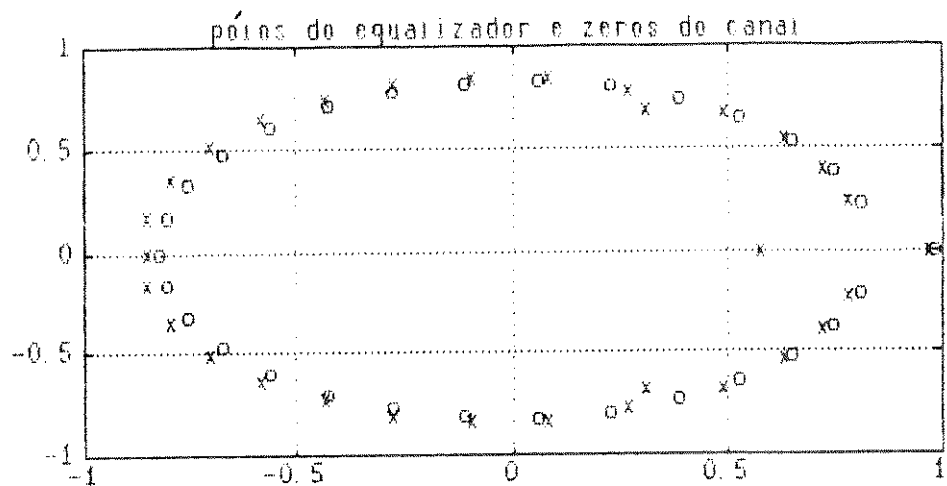


Fig. 4.9 (a)

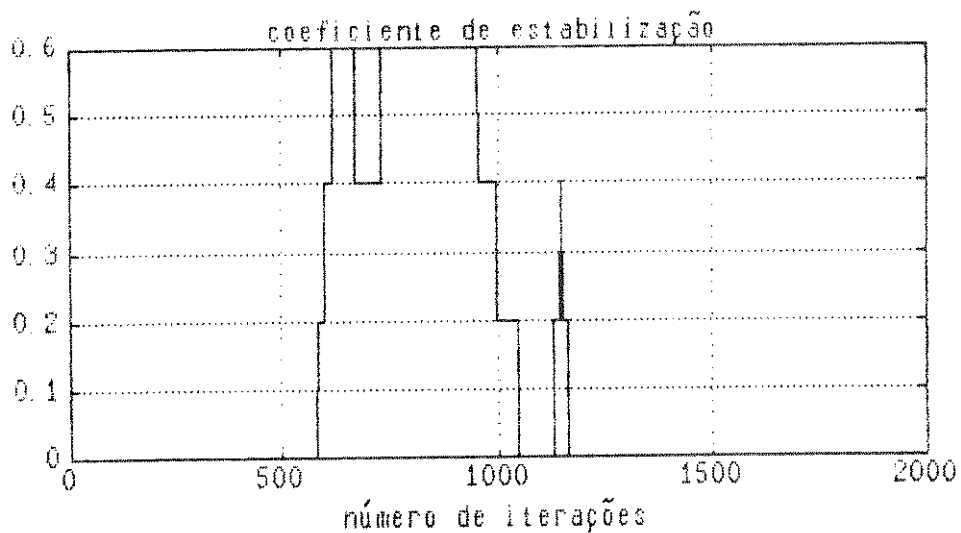


Fig. 4.9 (b)

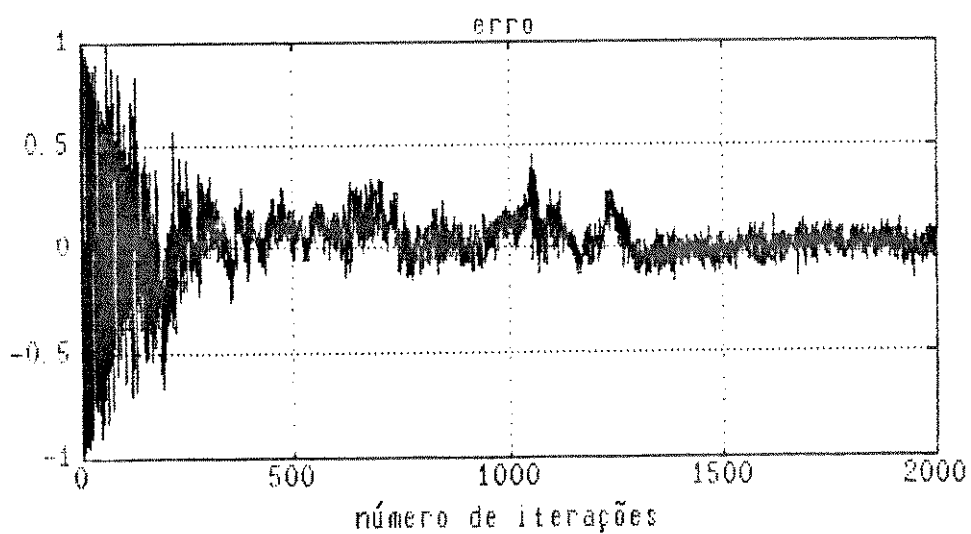


Fig. 4.9 (c)

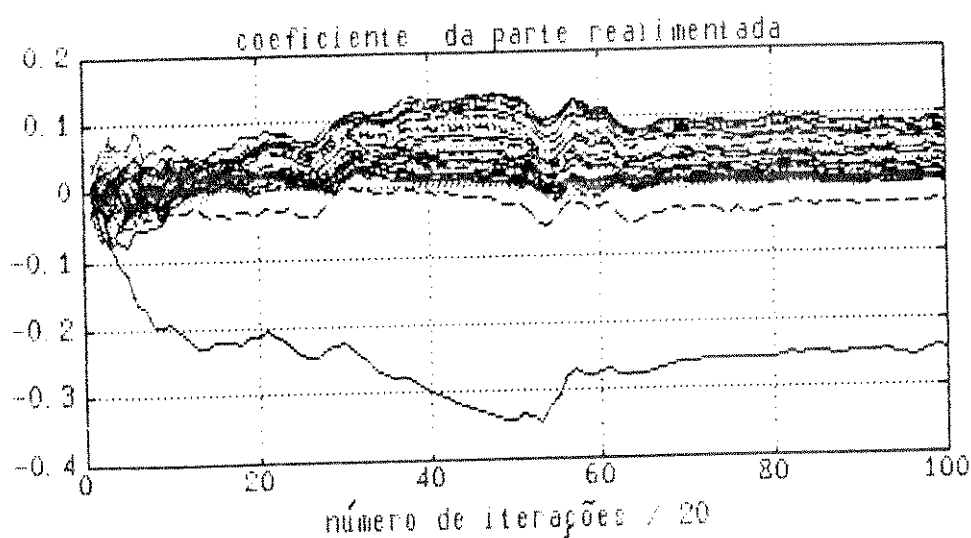


Fig. 4.9 (d)

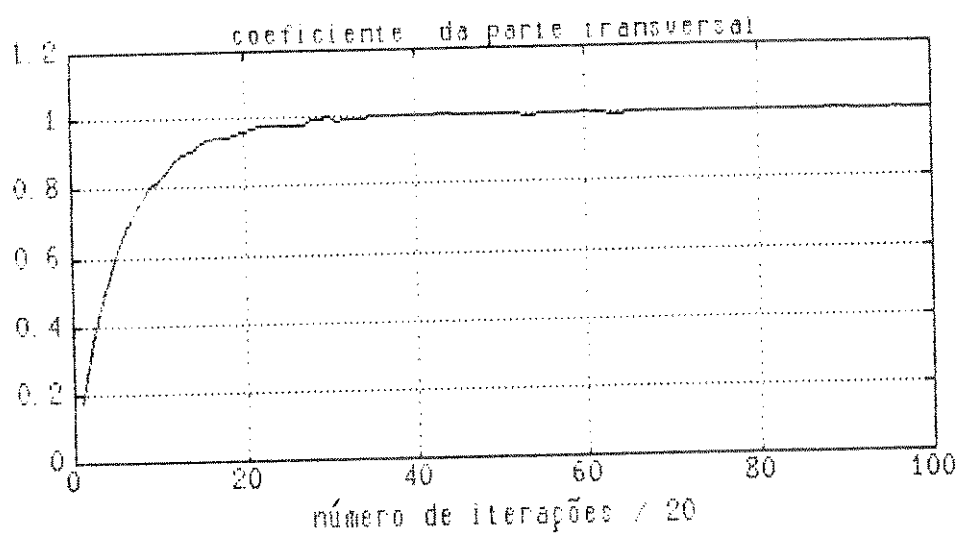


Fig. 4.9 (e)

Fig.4.9 Os pólos do equalizador depois da adaptação, a evolução do coeficiente de estabilização, do erro e dos coeficientes do equalizador adaptativo de AFM com esquema de estabilização

($N = 31$, $M = 0$, $\delta = 0$, $SNR = 30$, $\rho = 0,01$, canal H22)

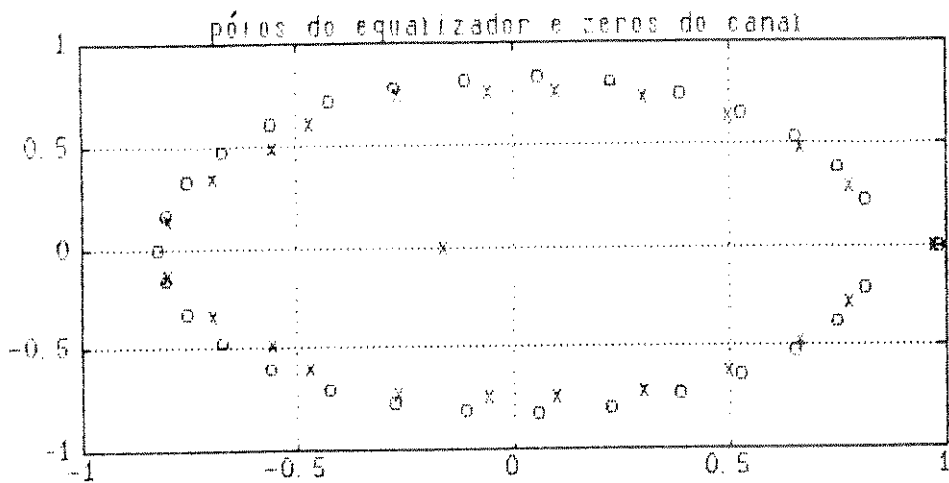


Fig. 4.10 (a)

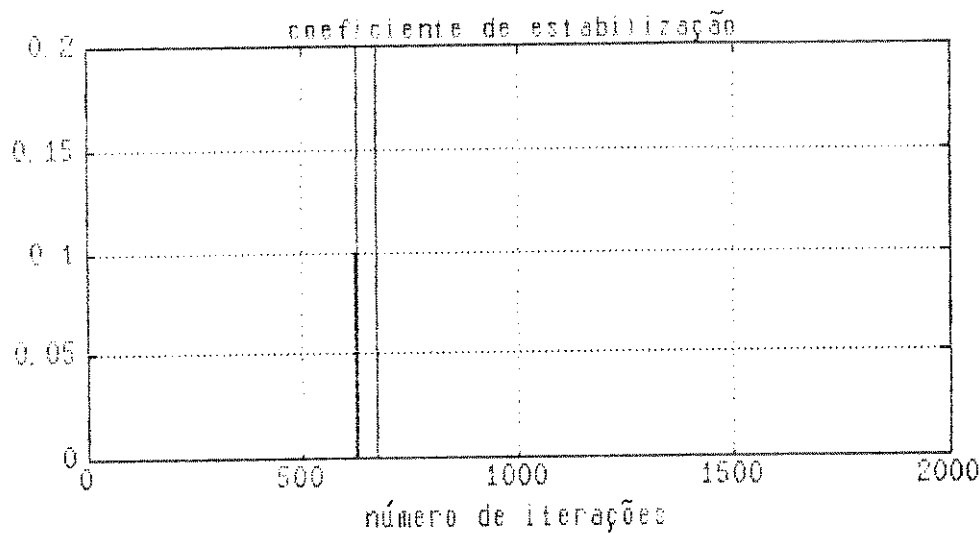


Fig. 4.10 (b)

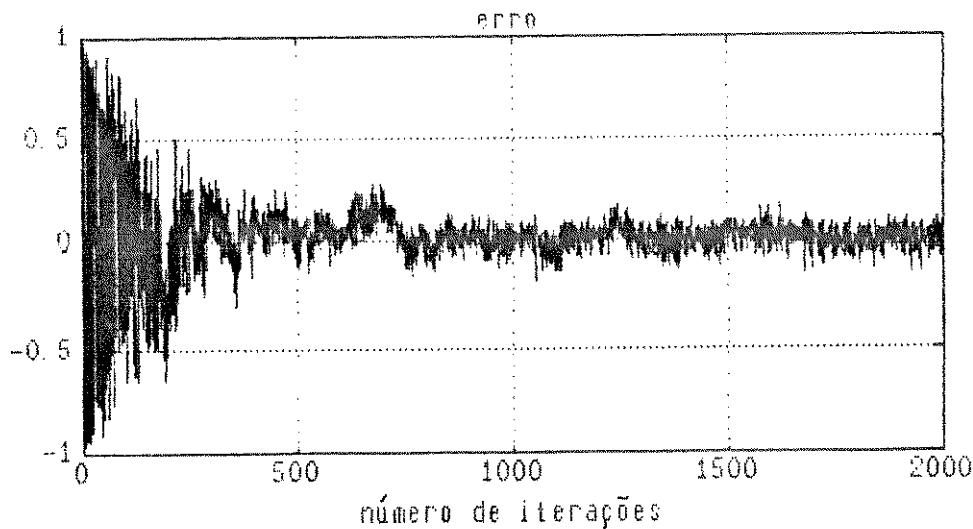


Fig. 4.10 (c)

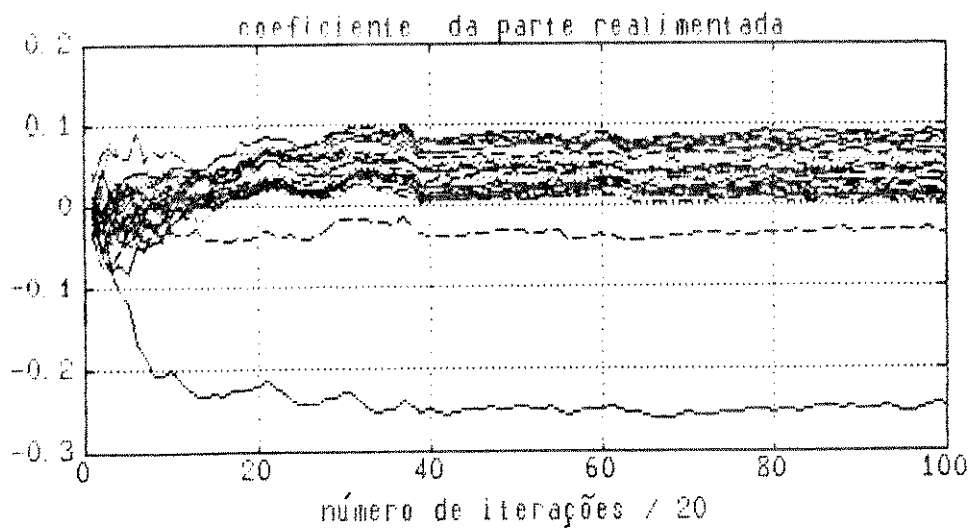


Fig. 4.10 (d)

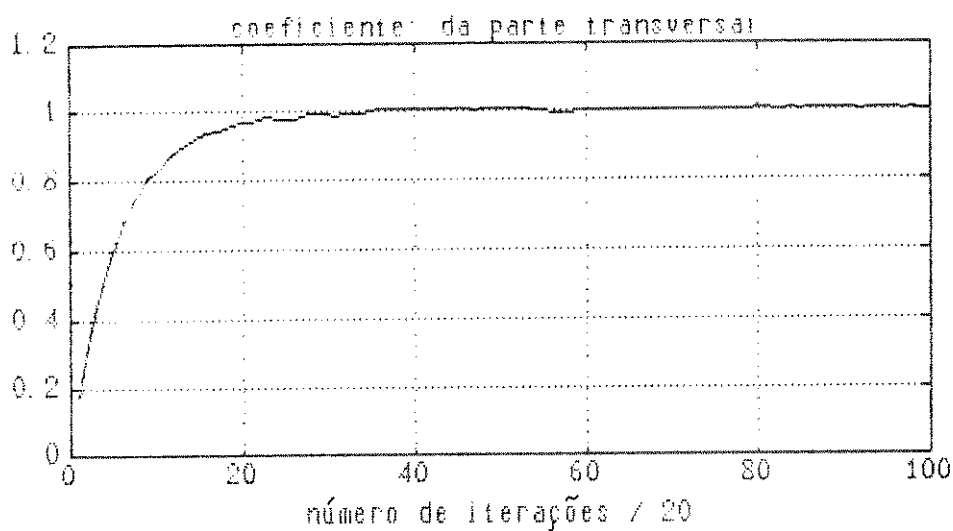


Fig. 4.10 (e)

Fig.4.10 Os pólos do equalizador depois da adaptação, a evolução do coeficiente de estabilização, do erro e dos coeficientes do equalizador adaptativo de AFM com esquema de estabilização
($N = 24$, $M = 0$, $\delta = 0$, $SNR = 30$, $\rho = 0,01$, canal H22)

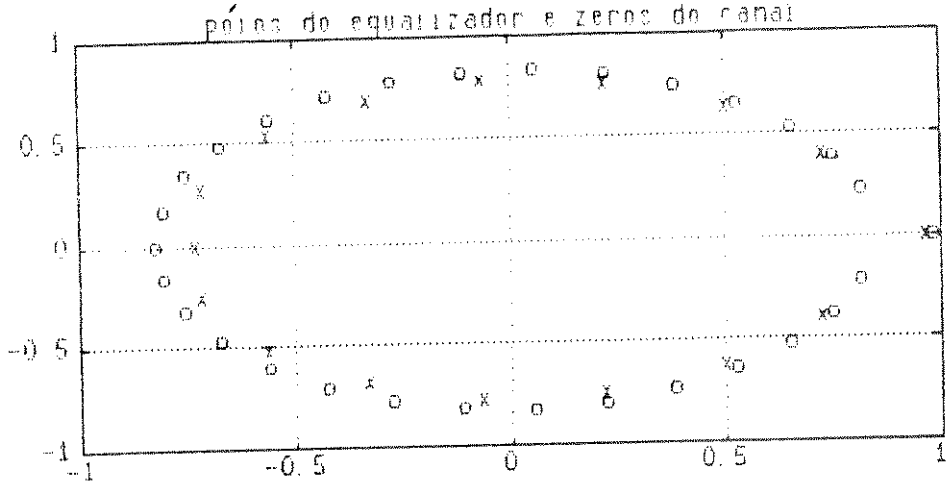


Fig. 4.11 (a)

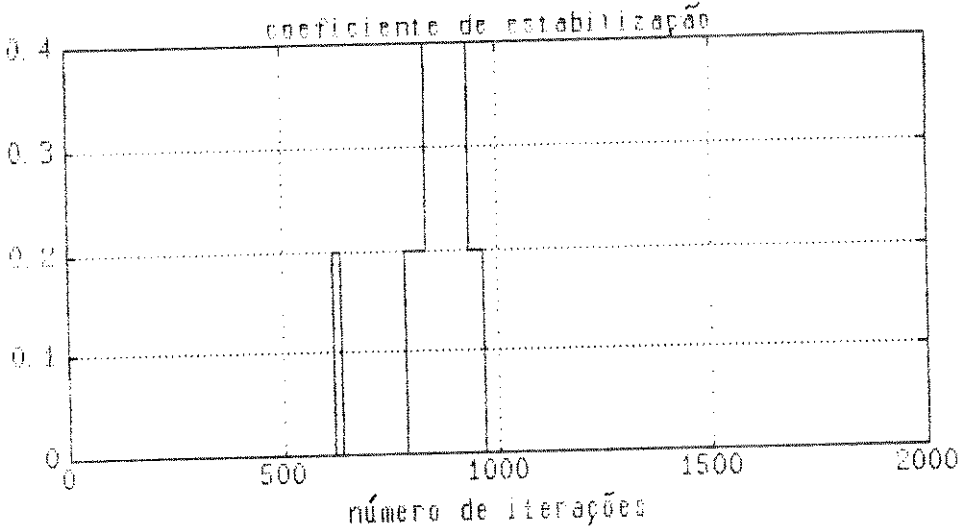


Fig. 4.11 (b)

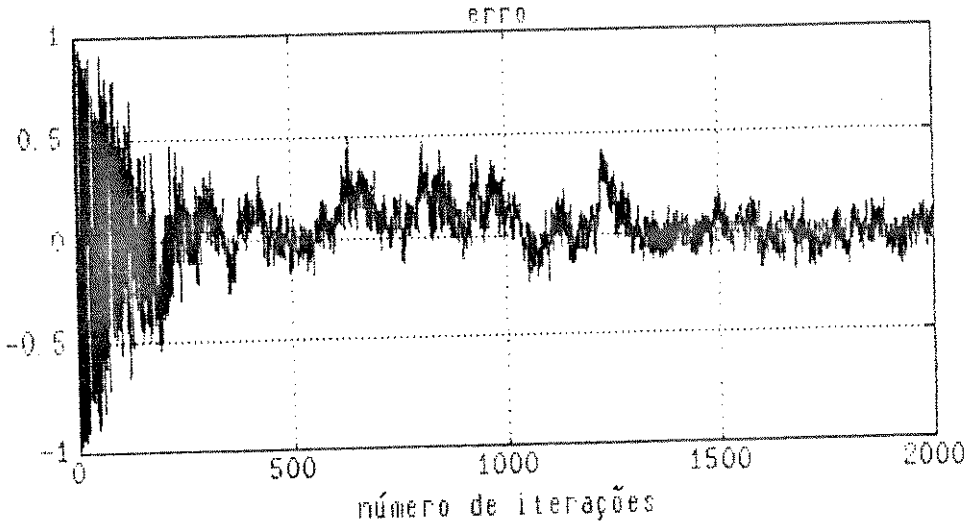


Fig. 4.11 (c)

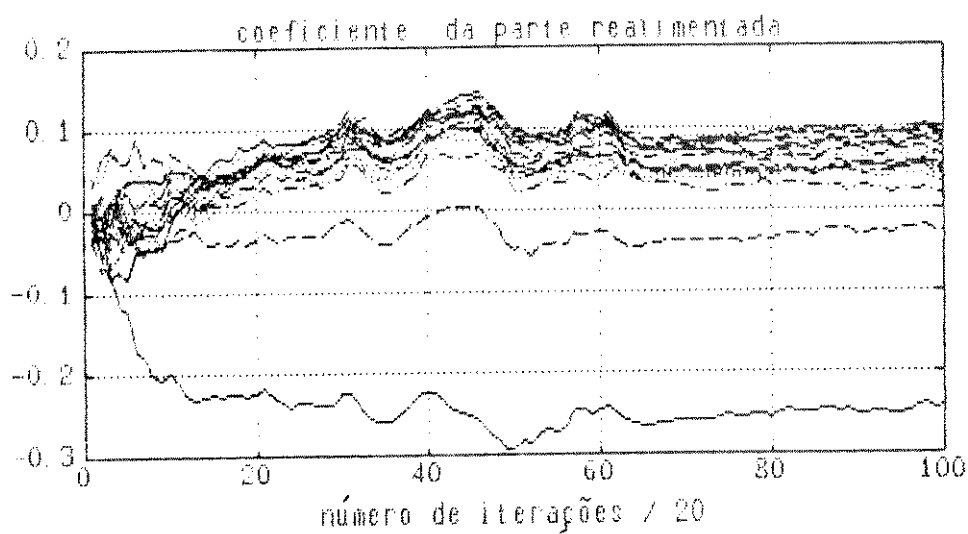


Fig. 4.11 (d)

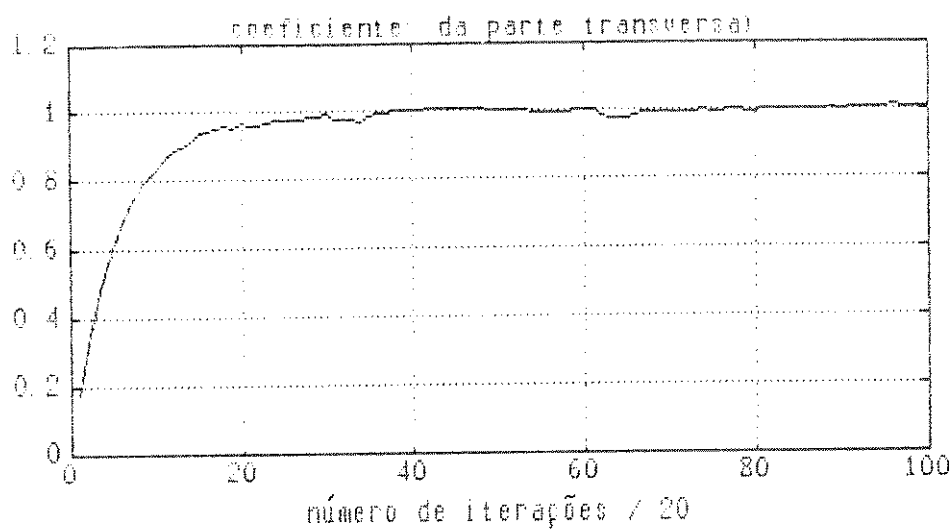


Fig. 4.11 (e)

Fig.4.11 Os pólos do equalizador depois da adaptação, a evolução do coeficiente de estabilização, do erro e dos coeficientes do equalizador adaptativo de AFM com esquema de estabilização

($N = 16$, $M = 0$, $\delta = 0$, $\text{SNR} = 30$, $\rho = 0,01$, canal H22)

4.2.2. Equalização Rápida com Passo Variável

Os canais utilizados nesta seção são do tipo FIR com 32 taps, e são mostrados na Fig.4.12. Notamos que os três canais são de fase não-mínima. Os zeros destes canais são mostradas na Fig.4.13. As Fig.4.14–Fig.4.16 mostram a evolução do erro do equalizador adaptativo de AFM com passo constante (0.01) e passo variável (que utiliza passo grande durante algumas iterações iniciais e passo pequeno depois desta fase) para os canais H20, H50 e H60, respectivamente. Quando o passo variável é utilizado, o esquema de estabilização proposto é aplicado para contornar o problema da instabilidade do equalizador, e as Fig.4.14–Fig.4.16 mostram a evolução do coeficiente de estabilização para os canais H20, H50 e H60, respectivamente.

Das Fig.4.14–Fig.4.16, observamos que o equalizador adaptativo de AFM com passo variável realmente converge bem mais rápido do que o equalizador adaptativo de AFM com passo pequeno constante. Devido ao passo grande durante as iterações iniciais, observamos que os pólos do equalizador adaptativo de AFM saem fora do C.R.U. frequentemente. Porém, podemos verificar que o algoritmo de AFM com esquema de estabilização realmente estabiliza o equalizador durante as iterações iniciais por aumentar o coeficiente K .

Através das simulações, verificamos que o algoritmo de AFM com esquema de estabilização mantém os pólos do equalizador adaptativo dentro do C.R.U. e estabiliza o filtro equalizador. Observamos mais uma vez que os pólos do equalizador adaptativo de AFM com esquema de estabilização de ordem suficiente convergem aos zeros dos canais, exceto aos zeros do canal que estão fora do C.R.U.. O equalizador adaptativo de AFM com esquema de estabilização abre o caminho para a equalização dos canais com os zeros próximos ao C.R.U. e permite a aceleração da adaptação dos coeficientes do filtro utilizando o passo variável.

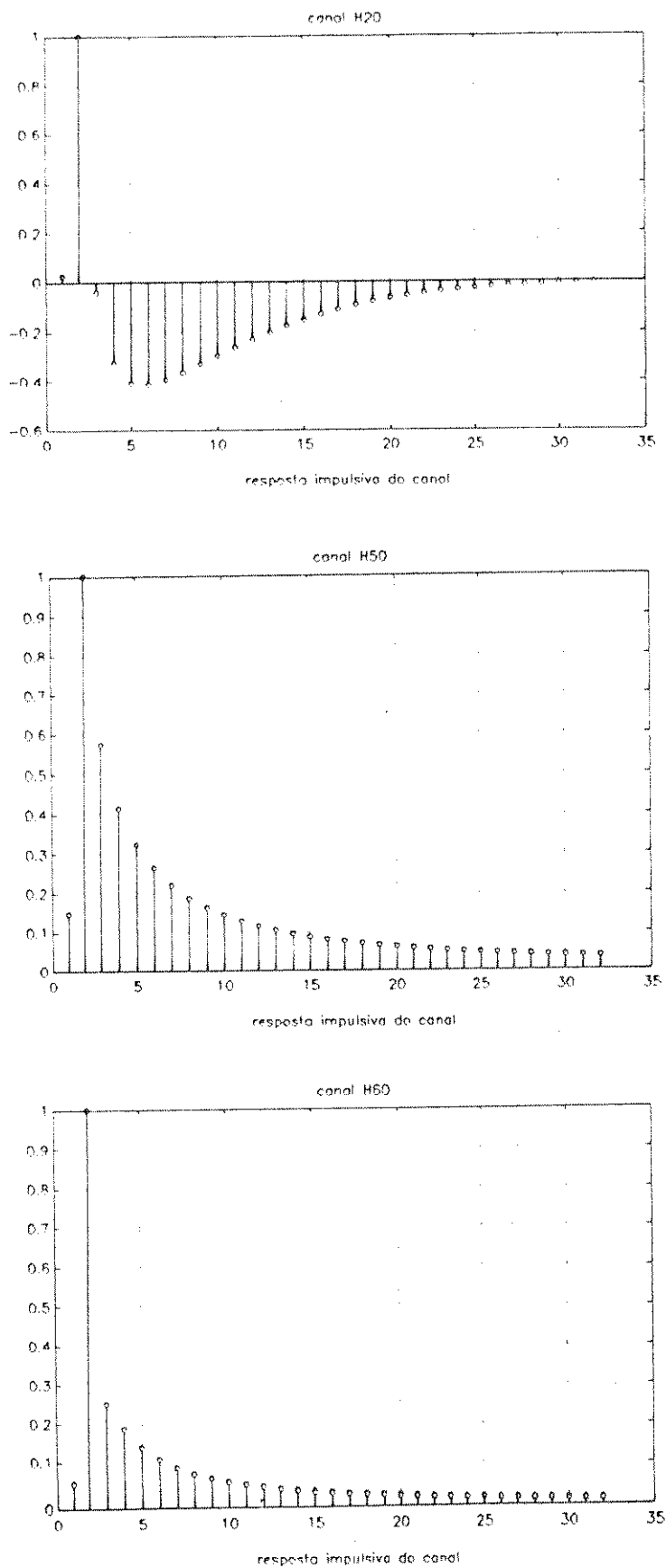


Fig. 4.12. A resposta impulsiva dos canais H20, H50 e H60.

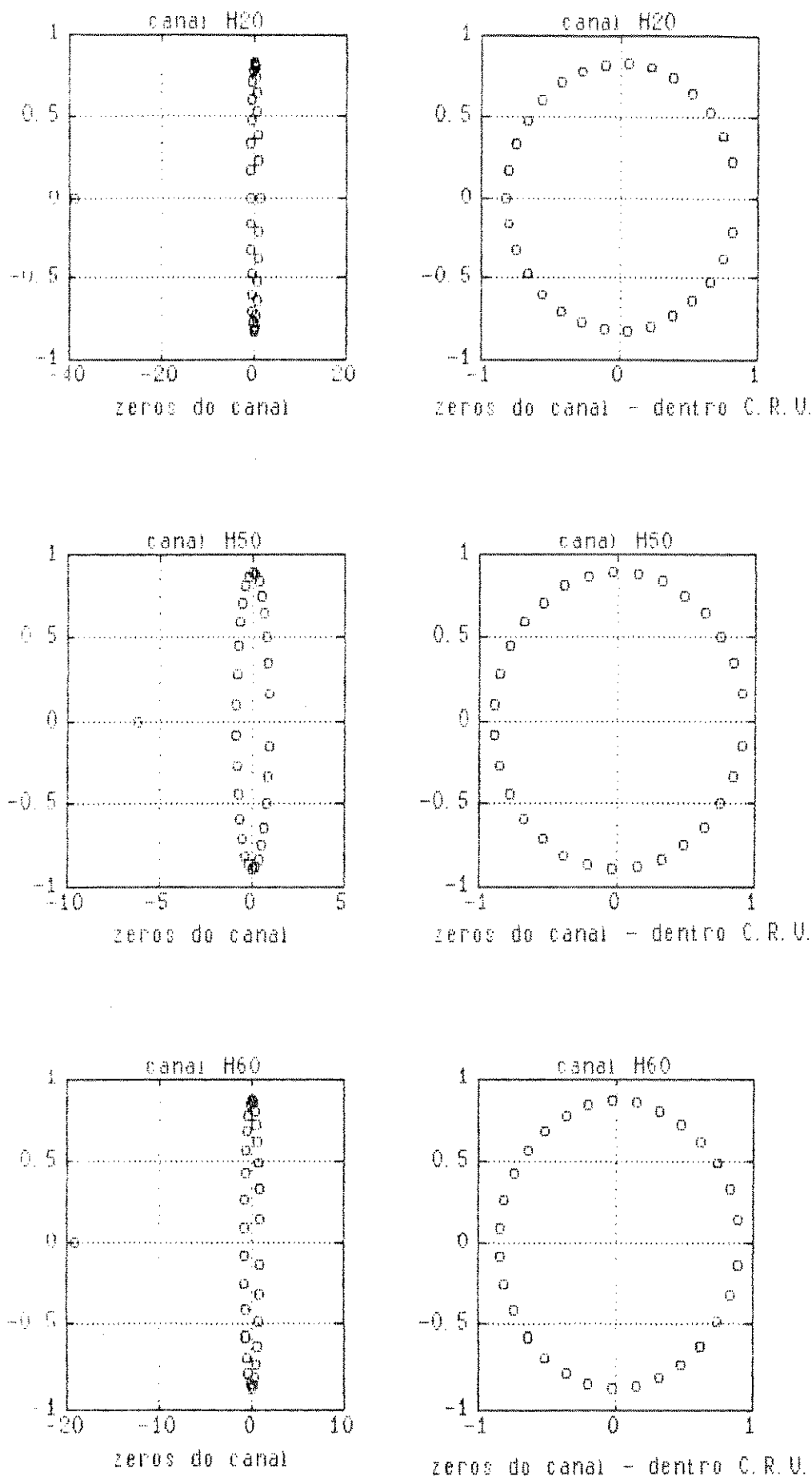


Fig.4.13 Os zeros dos canais H20, H50 e H60

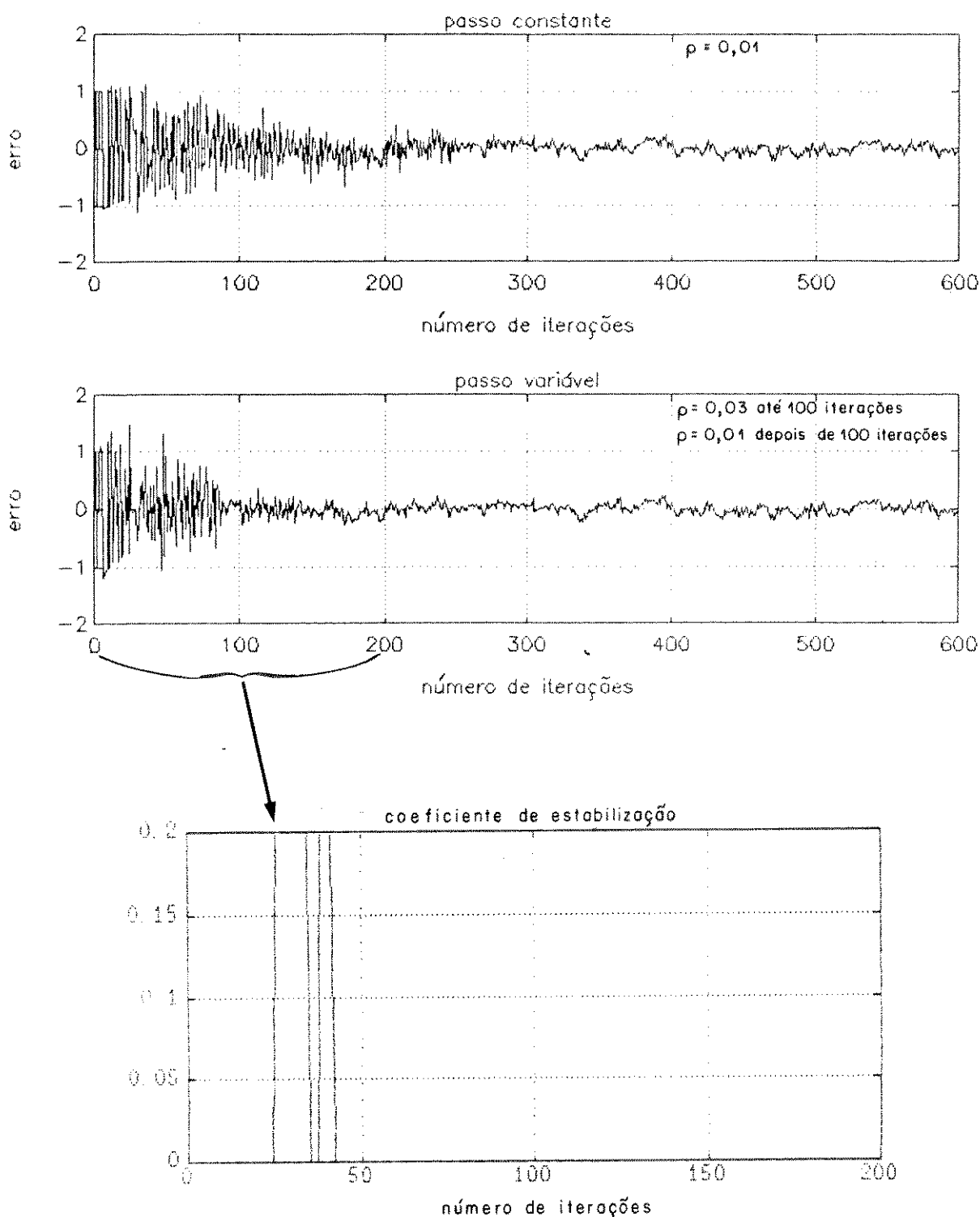


Fig.4.14 A evolução do erro do equalizador adaptativo de AFM com passo constante (0,01) e passo variável com o coeficiente de estabilização ($N = 16$, $M = 9$, $\delta = 9$, $SNR = 30$, canal H20)

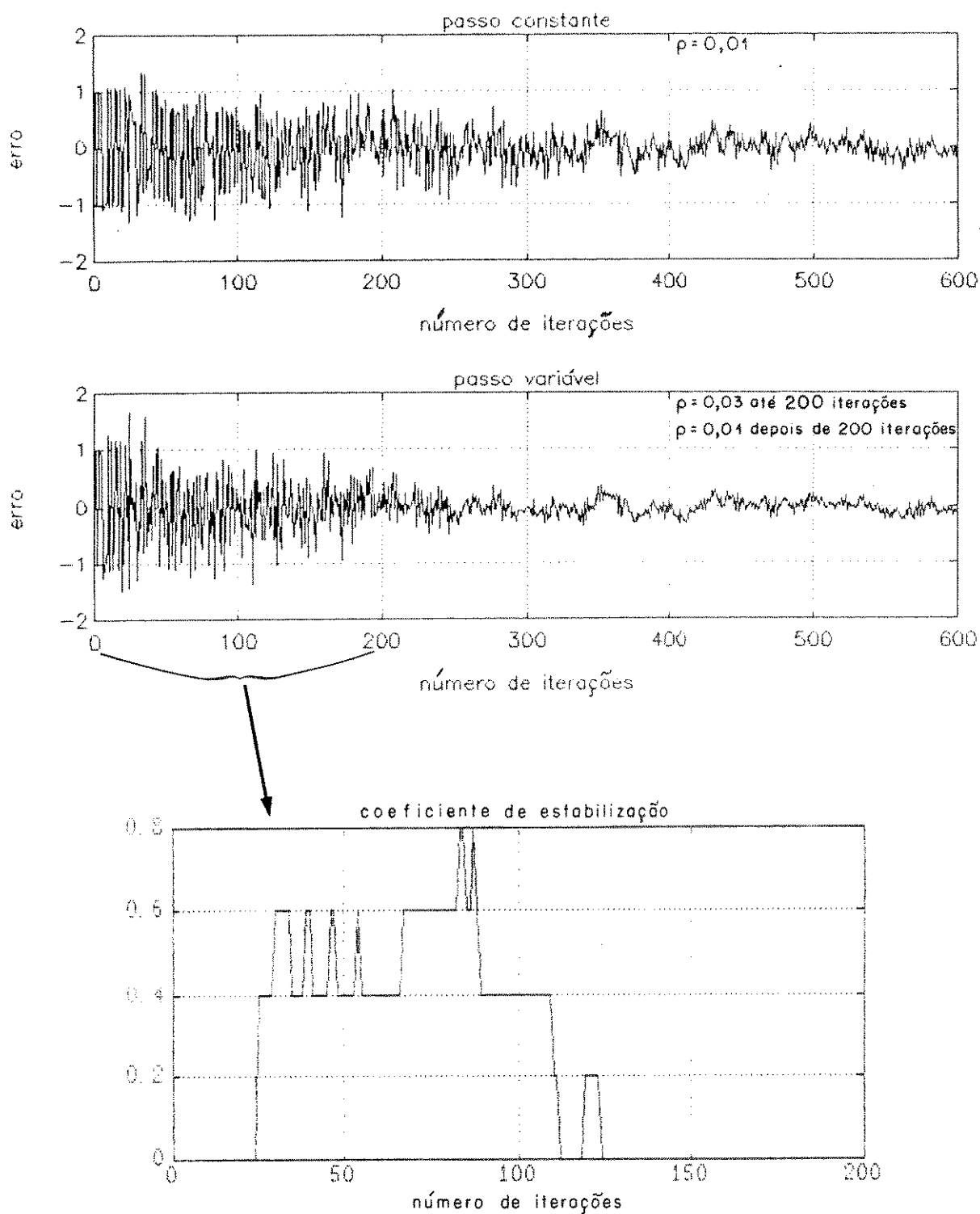


Fig.4.15 A evolução do erro do equalizador adaptativo de AFM com passo constante (0,01) e passo variável com o coeficiente de estabilização ($N = 16$, $M = 9$, $\delta = 9$, $SNR = 30$, canal H50)

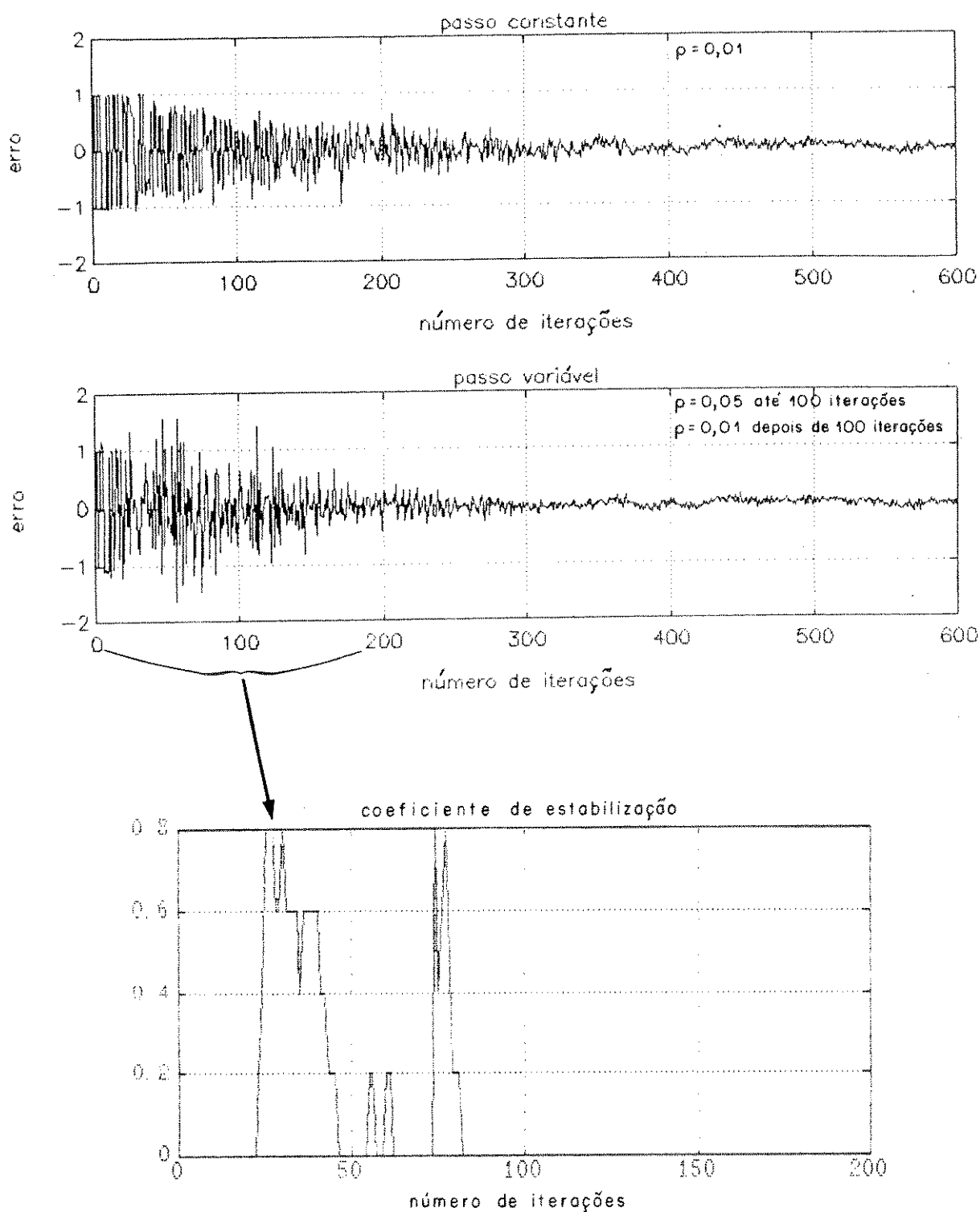


Fig.4.16 A evolução do erro do equalizador adaptativo de AFM com passo constante (0,01) e passo variável com o coeficiente de estabilização ($N = 16$, $M = 9$, $\delta = 9$, $SNR = 30$, Canal H60)

CAPÍTULO 5. CONCLUSÕES

Via da regra, o que se nota dos diversos equalizadores adaptativos propostos na literatura é a diversidade dos argumentos simplificadores e das hipóteses de modelamento que em geral são introduzidas de uma maneira ad-hoc. Exceto o filtro equalizador de Kalman que possui resultados analíticos (ainda que aproximados), as outras estruturas (SHARF, AFM e FADF IIR real simplificado) não permitem uma análise do seu comportamento quando aplicados a canais genéricos. Por esta razão optou-se nesta tese pela abordagem de simulação comparativa entre os filtros aplicados a canais telefônicos, como uma contribuição ao estudo de RSDI.

As comparações com respeito ao erro médio quadrático em regime, número global de multiplicações em cada iteração, número de iterações para se atingir a convergência e número global de multiplicações para se atingir convergência foram realizadas. Desenvolvemos também um procedimento de construção de intervalos de confiança para erro médio quadrático em regime dos equalizadores adaptativos a fim de analisar os resultados das simulações apropriadamente.

Através dos resultados das simulações, observamos que os equalizadores adaptativos IIR ajustam-se aos canais de fase não-mínima utilizando-se um passo de adaptação suficientemente pequeno para ajuste dos parâmetros. O equalizador adaptativo de Kalman com ordem suficiente apresenta de forma sistemática o menor erro quadrático em regime aproximando-se da potência do ruído do canal, com o menor número observado de iterações para atingir a convergência, com a inconveniência de possuir também a maior complexidade computacional dentre os equa-

lizadores adaptativos analisados. O equalizador adaptativo de AFM sempre apresenta menor erro médio quadrático em regime do que os equalizadores adaptativos de SHARF e LMS quando a relação sinal/ruído é baixa. O equalizador adaptativo de AFM, mesmo com a ordem do filtro insuficiente frente ao canal, demonstra degradação pequena com respeito ao erro médio quadrático em regime, sendo portanto adequado à situações de desconhecimento do canal a ser equalizado.

Propomos um esquema de estabilização para filtro adaptativo do tipo IIR na forma direta. Aplicando este esquema, desenvolvemos um algoritmo modificado para tratar o problema da instabilidade do algoritmo de AFM. Através dos resultados das simulações verificamos a eficiência deste algoritmo para manter os pólos dentro do círculo raio unitário (C.R.U.) e portanto, estabilizar o equalizador adaptativo, abrindo caminho para a equalização dos canais com zeros próximos ao C.R.U. e a aceleração da adaptação utilizando passo de adaptação variável.

Para verificar se todos os pólos do filtro adaptativo estão dentro do C.R.U. no esquema de estabilização proposto, utilizamos o teste de estabilidade de Jury. No entanto, um método mais simples de monitoramento da estabilidade através do uso do erro ou da potência do erro do filtro adaptativo poderá também ser explorada, dando continuidade a este trabalho.

APÊNDICE 1. CÁLCULOS DE $R_{xx}(z)$ E $R_{dx}(z)$

• Cálculo de $R_{xx}(z)$

Visto que $s(n)$ e $r(n)$ são não-correlacionados, de (1.1.1)

$$\begin{aligned} E[x(n+l)x(n)] &= E\left[\sum_{l=0}^{Mc-1} h_l s(n+l-l) \sum_{j=0}^{Mc-1} h_j s(n-j) \right] + E[r(n+l)r(n)] \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j E[s(n+l-l)s(n-j)] + E[r(n+l)r(n)] \end{aligned}$$

Se a sequência $\{s(n)\}$ é estacionária, $(E[s(n+l-l)s(n-j)])$ só depende da diferença do tempo $(l-l+j)$.

$$\phi_{xx}(l) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j \phi_{ss}(l-l+j) + E[r(n+l)r(n)]$$

onde $\phi_{ss}(l)$ é a função de correlação de $s(n)$ dado por

$$\phi_{ss}(l) = E[s(n+l)s(n)]$$

Substituindo l por m , que é definido como $m = l-j$, obtemos

$$\begin{aligned} \phi_{xx}(l) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{m+j} \phi_{ss}(l-m) + E[r(n+l)r(n)] \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j h_{m+j} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{ss}(l-m) + E[r(n+l)r(n)] \end{aligned}$$

Se assumimos que as sequências $\{s(n)\}$ e $\{r(n)\}$ são brancos com variâncias σ_s^2 e σ_r^2 , respectivamente, obtemos

$$\phi_{xx}(l) = h_j \otimes h_{-j} \sigma_s^2 + E[r(n+l)r(n)]$$

onde $\otimes$ denota a operação de convolução. Portanto, o espectro de potência $R_{xx}(z)$ é

$$R_{xx}(z) = H(z)H(z^{-1}) \sigma_s^2 + \sum_{l=-\infty}^{\infty} E[r(n+l)r(n)]z^{-l}$$

$$R_{xx}(z) = H(z)H(z^{-1}) \sigma_s^2 + \sigma_r^2$$

• Cálculo de $R_{dx}(z)$

Pela definição e de (1.1.1), obtemos

$$\begin{aligned} \phi_{dx}(l) &= E[s(n-\delta+l)x(n)] \\ &= E[s(n-\delta+l) \{ \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l s(n-l) + r(n) \}] \end{aligned}$$

Visto que $d(n)$ e $r(n)$ são não-correlacionados, temos

$$\phi_{dx}(l) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l E[s(n-\delta+l)s(n-l)] = \sigma_s^2 h_{-(l-\delta)}$$

$$R_{dx}(z) = \sigma_s^2 z^{-\delta} H(z^{-1})$$

APÊNDICE 2. PROVA DA (COND.2) PARA O SISTEMA NA FIG.1.2.6

De (1.2.6), temos

$$v(n-1) \equiv d(n-1) - y(n-1) + \sum_{l=1}^L c_l \{d(n-l-1) - f(n-l-1)\} \quad (A.2.1)$$

Somando e subtraindo o termo $f(n-1)$ e usando (1.2.1), (1.2.2) e (1.2.14), obtemos

$$\begin{aligned} v(n-1) &= d(n-1) - f(n-1) + f(n-1) - \sum_{l=1}^N \hat{a}_l(n-1)f(n-l-1) \\ &\quad - \sum_{j=0}^M \hat{b}_j(n-1)x(n-j-1) + \sum_{l=1}^L c_l \{d(n-l-1) - f(n-l-1)\} \\ &= \bar{e}(n-1) + \sum_{l=1}^N \hat{a}_l(n)f(n-l-1) + \sum_{j=0}^M \hat{b}_j(n)x(n-j-1) \\ &\quad - \sum_{l=1}^N \hat{a}_l(n-1)f(n-l-1) - \sum_{j=0}^M \hat{b}_j(n-1)x(n-j-1) \\ &\quad + \sum_{l=1}^L c_l \bar{e}(n-l-1) \\ &= \bar{e}(n-1) + \sum_{l=1}^L c_l \bar{e}(n-l-1) + \sum_{l=1}^N \{\hat{a}_l(n) - \hat{a}_l(n-1)\} f(n-l-1) \\ &\quad + \sum_{j=0}^M \{\hat{b}_j(n) - \hat{b}_j(n-1)\} x(n-j-1) \end{aligned} \quad (A.2.2)$$

Usando (1.2.3), (1.2.4), (1.2.18) e (A.2.1) para (A.2.2) vem que

$$v(n-1) = \bar{v}(n-1) + \frac{v(n-1)}{q(n)} \left(\sum_{l=1}^N \mu_l f^2(n-l-1) + \sum_{j=0}^M \rho_j x^2(n-j-1) \right) \quad (A.2.3)$$

Agora, resolvemos (A.2.3) para $\bar{v}(n-1)$ usando (1.2.5)

$$\bar{v}(n-1) = \frac{v(n-1)}{q(n)} \quad (A.2.4)$$

e usando (A.2.4), reescrevemos (1.2.3) e (1.2.4) como

$$\hat{a}_i(n) = \hat{a}_i(n-1) + \mu_i f(n-i-1) \bar{v}(n-1) \quad (A.2.5)$$

$$\hat{b}_j(n) = \hat{b}_j(n-1) + \rho_j x(n-j-1) \bar{v}(n-1) \quad (A.2.6)$$

Nota-se que $\bar{v}(n-1)$ em (1.2.18) precisa de $f(n-1)$ devido a (1.2.14). De (1.2.1), $f(n-1)$ é uma função de $\hat{a}_i(n)$ e $\hat{b}_j(n)$. Portanto, usar (A.2.5) e (A.2.6) para determinar $\hat{a}_i(n)$ e $\hat{b}_j(n)$ violaria causalidade. Definimos

$$\bar{a}_i(n) \equiv \hat{a}_i(n) - a_i \quad (A.2.7)$$

$$\bar{b}_j(n) \equiv \hat{b}_j(n) - b_j \quad (A.2.8)$$

Usando (A.2.5), (A.2.6), (A.2.7) e (A.2.8), (1.2.17) torna-se

$$\begin{aligned} w(n) &= \sum_{i=1}^N \{ \hat{a}_i(n+1) - a_i \} f(n-i) + \sum_{j=0}^M \{ \hat{b}_j(n+1) - b_j \} x(n-j) \\ &= \sum_{i=1}^N \{ \hat{a}_i(n) + \mu_i f(n-i) \bar{v}(n) - a_i \} f(n-i) \\ &\quad + \sum_{j=0}^M \{ \hat{b}_j(n) + \rho_j x(n-j) \bar{v}(n) - b_j \} x(n-j) \\ &= \sum_{i=1}^N \{ \bar{a}_i(n) + \mu_i f(n-i) \bar{v}(n) \} f(n-i) \\ &\quad + \sum_{j=0}^M \{ \bar{b}_j(n) + \rho_j x(n-j) \bar{v}(n) \} x(n-j) \end{aligned} \quad (A.2.9)$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 w(n)\bar{v}(n) = & \left(\sum_{l=1}^N \bar{a}_l(n)f(n-l)\bar{v}(n) + \sum_{j=0}^M \bar{b}_j(n)x(n-j)\bar{v}(n) \right) \\
 & + \sum_{l=1}^N \mu_l f^2(n-l)\bar{v}^2(n) + \sum_{j=0}^M \rho_j x^2(n-j)\bar{v}^2(n)
 \end{aligned} \tag{A.2.10}$$

De (A.2.7) e (A.2.5)

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_l(n) &= \hat{a}_l(n) - a_l = \hat{a}_l(n-1) - a_l + \mu_l f(n-l-1)\bar{v}(n-1) \\
 &= \bar{a}_l(n-1) + \mu_l f(n-l-1)\bar{v}(n-1) \\
 \bar{a}_l^2(n) &= \bar{a}_l^2(n-1) + 2\mu_l \bar{a}_l(n-1)f(n-l-1)\bar{v}(n-1) \\
 &\quad + \mu_l^2 f^2(n-l-1)\bar{v}^2(n-1)
 \end{aligned} \tag{A.2.11}$$

Da mesma maneira, de (A.2.8) e (A.2.6)

$$\begin{aligned}
 \bar{b}_j^2(n) &= \bar{b}_j^2(n-1) + 2\rho_j \bar{b}_j(n-1)x(n-j-1)\bar{v}(n-1) \\
 &\quad + \rho_j^2 x^2(n-j-1)\bar{v}^2(n-1)
 \end{aligned} \tag{A.2.12}$$

De (A.2.11) e (A.2.12), obtemos

$$\begin{aligned}
 & \sum_{l=1}^N \{ \bar{a}_l^2(n)/\mu_l \} + \sum_{j=0}^M \{ \bar{b}_j^2(n)/\rho_j \} \\
 &= \sum_{l=1}^N \{ \bar{a}_l^2(n-1)/\mu_l \} + \sum_{j=0}^M \{ \bar{b}_j^2(n-1)/\rho_j \} \\
 &\quad + 2 \left(\sum_{l=1}^N \bar{a}_l(n-1)f(n-l-1)\bar{v}(n-1) + \sum_{j=0}^M \bar{b}_j(n-1)x(n-j-1)\bar{v}(n-1) \right) \\
 &\quad + \sum_{l=1}^N \mu_l f^2(n-l-1)\bar{v}^2(n-1) + \sum_{j=0}^M \rho_j x^2(n-j-1)\bar{v}^2(n-1)
 \end{aligned} \tag{A.2.13}$$

Reorganizando (A.2.13), temos

$$\begin{aligned}
 & \sum_{l=1}^N \bar{a}_l(n-1)f(n-l-1)\bar{v}(n-1) + \sum_{j=0}^M \bar{b}_j(n-1)x(n-j-1)\bar{v}(n-1) \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\sum_{l=1}^N \{\bar{a}_l^2(n-1)/\mu_l\} + \sum_{j=0}^M \{\bar{b}_j^2(n-1)/\rho_j\} \right) \\
 &+ \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1}^N \{\bar{a}_l^2(n)/\mu_l\} + \sum_{j=0}^M \{\bar{b}_j^2(n)/\rho_j\} \right) \\
 &- \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N \mu_l f^2(n-l-1)\bar{v}^2(n-1) - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^M \rho_j x^2(n-j-1)\bar{v}^2(n-1)
 \end{aligned} \tag{A.2.14}$$

Substituindo (A.2.14) em (A.2.10), temos que :

$$\begin{aligned}
 w(n)\bar{v}(n) &= -\frac{1}{2} \left(\sum_{l=1}^N \{\bar{a}_l^2(n)/\mu_l\} + \sum_{j=0}^M \{\bar{b}_j^2(n)/\rho_j\} \right) \\
 &+ \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1}^N \{\bar{a}_l^2(n+1)/\mu_l\} + \sum_{j=0}^M \{\bar{b}_j^2(n+1)/\rho_j\} \right) \\
 &+ \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1}^N \mu_l f^2(n-l)\bar{v}^2(n) + \sum_{j=0}^M \rho_j x^2(n-j)\bar{v}^2(n) \right)
 \end{aligned} \tag{A.2.15}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=0}^{N_0} \bar{v}(l)w(l) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1}^N \{\bar{a}_l^2(N_0+1)/\mu_l\} + \sum_{j=0}^M \{\bar{b}_j^2(N_0+1)/\rho_j\} \right) \\
 &- \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1}^N \{\bar{a}_l^2(0)/\mu_l\} + \sum_{j=0}^M \{\bar{b}_j^2(0)/\rho_j\} \right) \\
 &+ \frac{1}{2} \left(\sum_{l=0}^{N_0} \left(\sum_{l=1}^N \mu_l f^2(n-l)\bar{v}^2(n) + \sum_{j=0}^M \rho_j x^2(n-j)\bar{v}^2(n) \right) \right)
 \end{aligned} \tag{A.2.16}$$

Como μ_l e ρ_j são positivos, o primeiro termo e o terceiro termo da equação (A.2.16) não são negativos. Portanto

$$\sum_{l=0}^N \bar{v}(l)w(l) \geq -\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N \{\bar{a}_i^2(0)/\mu_i\} + \sum_{j=0}^M \{\bar{b}_j^2(0)/\rho_j\} \right) \quad (A.2.17)$$

(A.2.17) claramente satisfaz a (cond.2) para o sistema na Fig.1.2.6..

APÊNDICE 3. INTERVALO DE CONFIANÇA DE ERRO MÉDIO QUADRÁTICO

Muitas pesquisas empregando simulações foram feitas para se comparar o desempenho dos vários filtros adaptativos. Porém, não encontramos relatado qualquer estudo para analisar o dado de saída das simulações destes filtros adaptativos numa maneira apropriada. Geralmente, o resultado de uma experiência é tratado como se fosse a "verdadeira" medida do desempenho para o modelo simulado. Esta estimativa é uma realização de uma variável aleatória que pode ter variância grande. Portanto, há a possibilidade significativa de se fazer avaliação incorreta sobre o desempenho do sistema.

Construir intervalos de confiança é uma maneira de analisar o resultado da simulação apropriadamente. Existem duas abordagens básicas para este fim: uma é baseada em amostras de tamanho fixo e a outra consiste em aumentar o tamanho de amostra até que um intervalo de confiança aceitável seja obtido. A primeira abordagem mostrou-se desvantajosa quando o tamanho de amostra não é suficientemente grande [8]. Também, foi mostrado que o tamanho de amostra adequado para obter um intervalo de confiança aceitável depende muito do modelo simulado [29]. Por causa dos problemas da primeira abordagem, cinco procedimentos baseados na segunda abordagem foram propostos [8]. Foi relatado que o procedimento por Fishman [30] e o procedimento por Law e Carson [8] provêm os melhores intervalos de confiança com respeito ao critério de probabilidade de cobertura [31].

Neste capítulo, descrevemos o procedimento utilizado para construir intervalo de confiança de erro médio quadrático em regime dos equalizadores adaptativos. Este procedimento basicamente é uma extensão do procedimento proposto por Law e Carson [8]. No entanto, em vez de construir intervalo de confiança somente para erro médio em regime dos equalizadores adaptativos, construímos

intervalo de confiança para erro médio quadrático em regime baseado em intervalos de confiança não só para erro médio mas também para variância deste erro.

Suponha que temos n observações de simulação, ou seja erro do equalizador adaptativo, x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) depois que equalizador adaptativo entrou em regime. Dividimos esta n observações em k lotes de tamanho m ($n = k * m$). Seja $y(j)$ ($j = 1, 2, \dots, k$) a média das m observações agrupados no j -ésimo lote e seja $\bar{x}$ a média das n observações.

$$y(j) = \frac{1}{m} \sum_{l=S1}^{S2} x_l \quad (j=1 \ 2 \ \dots \ k) \quad (A.3.1)$$

onde $S1 = m*(j-1)+1$ e $S2 = m*j$. Facilmente podemos provar que a média dos n observações $\bar{x}$ é igual à média dos k lotes, $\bar{y}$.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n x_l = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k y(j) = \bar{y} \quad (A.3.2)$$

Estimamos a variância dos k lotes por :

$$S^2 = \hat{\sigma}_y^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^k \{y(j) - \bar{y}\}^2 \quad (A.3.3)$$

Se escolhermos m suficientemente grande para que os $y(j)$ ($j=1, 2, \dots, k$) tenham distribuição aproximadamente normal, e sejam não correlacionadas, de [32] podemos dizer que:

$\frac{\bar{y} - \mu}{S / \sqrt{k}}$ tem aproximadamente distribuição t com o grau de liberdade $(k-1)$. Usando este fato e (A.3.2), construímos o intervalo de confiança de $100(1-\alpha)\%$ para média das observações $\mu = E[x_i]$.

$$P\left(-t_{k-1,1-\alpha/2} \leq \frac{\bar{y} - \mu}{S / \sqrt{k}} \leq t_{k-1,1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{y} - t_{k-1,1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{k}} \leq \mu \leq \bar{y} + t_{k-1,1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{k}}\right) = 1-\alpha \quad (A.3.4)$$

onde $t_{k-1,1-\alpha/2}$ é o valor de uma distribuição t com o grau de liberdade $(k-1)$, avaliado no ponto $(1 - \alpha/2)$.

Existem dois problemas a considerar especialmente quando usamos (A.3.4) para construir um intervalo de confiança: polarização de S^2 quando m é pequeno demais para que $y(j)$ ($j=1,2,\dots, k$) sejam não correlacionadas e não-normalidade de $y(j)$ ($j=1,2,\dots, k$). Law [8] relatou que o valor de k aproximadamente acima de 20 resolve o problema de normalidade e a polarização de S^2 é o problema mais sério. Para garantir que $y(j)$ ($j=1,2,\dots, k$) sejam não correlacionadas, fixamos k e incrementamos m até que a correlação de "lag one" estimado entre $y(j)$ ($j=1,2,\dots, k$) seja pequena. Usamos o estimador "jackknifed" $\hat{p}_j$ [33] para a correlação de "lag one" porque este estimador é menos polarizado do que o estimador comum $\hat{p}$.

$$\hat{p} = \frac{\sum_{j=1}^{k-1} \{y(j) - \bar{y}\} \{y(j+1) - \bar{y}\}}{\sum_{j=1}^k \{y(j) - \bar{y}\}^2} \quad (A.3.5)$$

$$\hat{p}_j = 2\hat{p} - (\hat{p}_f + \hat{p}_l)/2 \quad (A.3.6)$$

onde $\hat{p}_f$ e $\hat{p}_l$ são os estimadores comuns baseado nos primeiros $k/2$ e nos últimos $k/2$ lotes, respectivamente.

Usando $y(j)$ ($j=1,2,\dots, k$) com normalidade e pequena correlação de "lag one" garantida, construímos intervalo de confiança de $100(1-\alpha)\%$ para variância

dos lotes σ_y^2 . De [32], podemos dizer que:

$\frac{(k-1)S^2}{\sigma_y^2}$ tem aproximadamente distribuição de chi-quadrada com o grau de

liberdade $(k-1)$. Portanto,

$$P\left(q_{k-1, \alpha/2} \leq \frac{(k-1)S^2}{\sigma_y^2} \leq q_{k-1, 1-\alpha/2} \right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{(k-1)S^2}{q_{k-1, 1-\alpha/2}} \leq \sigma_y^2 \leq \frac{(k-1)S^2}{q_{k-1, \alpha/2}} \right) = 1-\alpha \quad (A.3.7)$$

onde $q_{k-1, \alpha/2}$ e $q_{k-1, 1-\alpha/2}$ são os valores de uma distribuição chi-quadrada com o grau de liberdade $(k-1)$, avaliados nos pontos $(\alpha/2)$ e $(1-\alpha/2)$, respectivamente.

Agora, obteremos a relação entre o estimador da variância de x_l e o estimador da variância de $y(j)$ para construir intervalo de confiança para σ_x^2 . Usando (A.3.1) e (A.3.2), o estimador de variância de $y(j)$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_y^2 &= \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^k \{y(j) - \bar{y}\}^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^k \left\{ \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m x_l - \bar{x} \right\}^2 \\ &= \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^k \left\{ \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m x_l - \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m \bar{x} \right\}^2 \\ &= \frac{1}{(k-1)m^2} \sum_{j=1}^k \left(\sum_{l=m(j-1)+1}^{mj} (x_l - \bar{x}) \right)^2 \\ &= \frac{1}{(k-1)m^2} \left[\left(\sum_{l=1}^m (x_l - \bar{x}) \right)^2 + \left(\sum_{l=m+1}^{2m} (x_l - \bar{x}) \right)^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \left(\sum_{l=(k-1)m+1}^{km} (x_l - \bar{x}) \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (A.3.8)$$

Notamos que

$$\left(\sum_{l=A}^B a_l \right)^2 = \sum_{l=A}^B a_l^2 + 2 \sum_{l=A}^B \sum_{j=l+1}^B a_l a_j \quad (A.3.9)$$

onde A e B são constantes. Aplicando (A.3.9) em (A.3.8), obtemos

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_y^2 &= \frac{1}{(k-1)m^2} \left[\sum_{l=1}^m (x_l - \bar{x})^2 + \sum_{l=m+1}^{2m} (x_l - \bar{x})^2 + \dots + \sum_{l=(k-1)m+1}^{km} (x_l - \bar{x})^2 + \right. \\ &\quad + 2 \sum_{l=1}^m \sum_{j=l+1}^m (x_l - \bar{x})(x_j - \bar{x}) + 2 \sum_{l=m+1}^{2m} \sum_{j=l+1}^{2m} (x_l - \bar{x})(x_j - \bar{x}) + \dots \\ &\quad \left. + 2 \sum_{l=(k-1)m+1}^{km} \sum_{j=l+1}^{km} (x_l - \bar{x})(x_j - \bar{x}) \right] \\ \hat{\sigma}_y^2 &\equiv \frac{1}{(k-1)m^2} \left[\sum_{l=1}^n (x_l - \bar{x})^2 + TC \right] \quad (A.3.10) \end{aligned}$$

onde

$$TC = 2 \sum_{l=1}^k \sum_{l=(l-1)m+1}^{lm} \sum_{j=l+1}^{lm} (x_l - \bar{x})(x_j - \bar{x})$$

Notamos que

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{l=1}^n (x_l - \bar{x})^2 \quad (A.3.11)$$

Usando (A.3.11) em (A.3.10)

$$\hat{\sigma}_y^2 = \frac{n-1}{(k-1)m^2} \hat{\sigma}_x^2 + \frac{1}{(k-1)m^2} TC$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{(k-1)m^2}{n-1} \hat{\sigma}_y^2 - \frac{1}{n-1} TC \quad (A.3.12)$$

(A.3.12) mostra a relação entre $\hat{\sigma}_x^2$ e $\hat{\sigma}_y^2$. Usando (A.3.7) e (A.3.12), podemos construir intervalo de confiança de $100(1-\alpha)\%$ para σ_x^2 .

$$P\left(\frac{(k-1)^2 m^2 S^2}{(n-1)q_{k-1, 1-\alpha/2}} - \frac{TC}{n-1} \leq \sigma_x^2 \leq \frac{(k-1)^2 m^2 S^2}{(n-1)q_{k-1, \alpha/2}} - \frac{TC}{n-1} \right) = 1-\alpha \quad (A.3.13)$$

Obter intervalo de confiança para erro médio quadrático em regime para equalizadores adaptativos significa construir o intervalo de confiança para $E[x_i^2]$ neste caso.

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= E[(x_i - \mu)^2] \\ &= E[x_i^2] - 2\mu E[x_i] + \mu^2 \\ E[x_i^2] &= \sigma_x^2 + \mu^2 \end{aligned} \quad (A.3.14)$$

Isto mostra que teremos o intervalo de confiança para $E[x_i^2]$ se conseguirmos os intervalos de confiança para σ_x^2 e μ^2 . Visto que já explicamos como construir o intervalo de confiança para σ_x^2 , consideramos agora como construir o intervalo de confiança para μ^2 .

De (A.3.4), já temos o intervalo de confiança para μ de $100(1-\alpha)\%$ e podemos escrever (A.3.13) e (A.3.4) em seguintes formas:

$$P(MIN1 \leq \sigma_x^2 \leq MAX1) = 1 - \alpha \quad (A.3.15)$$

$$P(MIN2 \leq \mu \leq MAX2) = 1 - \alpha \quad (A.3.16)$$

Para calcular o intervalo de confiança de μ^2 , dividimos em três casos diferentes :

• Se $MIN2 \leq 0$ e $MAX2 \geq 0$, então obtemos

$$P(0 \leq \mu^2 \leq \{ \max(|MAX2|, |MIN2|) \}^2) = 1 - \alpha \quad (A.3.17)$$

$$\text{onde } \max(a,b) = \begin{cases} a & (a \geq b) \\ b & (b \geq a) \end{cases}$$

- Se $MIN2 > 0$ e $MAX2 > 0$, então obtemos

$$P ((MIN2)^2 \leq \mu^2 \leq (MAX2)^2) = 1 - \alpha \quad (A.3.18)$$

- Se $MIN2 < 0$ e $MAX2 < 0$, então obtemos

$$P ((MAX2)^2 \leq \mu^2 \leq (MIN2)^2) = 1 - \alpha \quad (A.3.19)$$

Desta maneira, definimos dois valores: $MIN3$ e $MAX3$ obtidos através de (A.3.17) ou (A.3.18) ou (A.3.19), de tal forma que o intervalo de confiança para μ^2 é escrito como:

$$P (MIN3 \leq \mu^2 \leq MAX3) = 1 - \alpha \quad (A.3.20)$$

Definimos intervalos simultâneos de confiança e mostramos uma proposição para obter isso [34] .

- **Definição** : Num problema de k parametros, podemos dizer que os intervalos $J_1(\hat{\theta}), \dots, J_k(\hat{\theta})$ formam intervalos simultâneos de confiança de 100γ % se $P (\theta_j \in J_1(\hat{\theta}), \dots, \theta_k \in J_k(\hat{\theta})) \geq \gamma$ para todo θ_k

- **Proposição** : Se $J_1(\hat{\theta}), \dots, J_k(\hat{\theta})$ individualmente são intervalos de confiança de 100γ % , então eles formam intervalos simultâneos de confiança de $100[1-k(1-\gamma)]\%$.

De (A.3.14), (A.3.15) e (A.3.20) e usando proposição acima, obtemos o intervalo de confiança para $E[x_1^2]$ de $100(1-2\alpha)$ % .

$$P (MIN1 + MIN3 \leq E[x_1^2] \leq MAX1 + MAX3) = 1 - 2\alpha \quad (A.3.21)$$

REFERÊNCIAS

- [1] Haykin,S., "Adaptive Filter Theory", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1986
- [2] Sussman,S.M., "A Matched Filter Communications System for Multipath Channels", IRE Trans.,Vol.IT-6,No.3,pp.367-372,June 1960
- [3] Larimore,M.G., Treichler,J.R., and Johnson,C.R., "SHARF: An Algorithm for Adapting IIR Digital Filters", IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol.ASSP-28, No.4, PP.428- 440, August 1980
- [4] Fan,H., and Jenkins,W.K., "A New Adaptive IIR Filter", IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol.CAS-33, No.10, pp.939-946, October 1986
- [5] Mulgrew,B., and Cowan,C.F.N., "An Adaptive Kalman Equalizer: Structure and Performance", IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, Vol.ASSP-35, No.12, pp.1727 -1735, December 1987
- [6] Diniz,S.R.P., and Cousseau,E., "Optimal Convergence Factor for Gauss-Newton Algorithms and its Application to Adaptive Parallel Realization", SBT/IEEE International Telecommunication Symposium ITS'90, pp.420 - 424, Rio de Janeiro, September, 1990
- [7] Widrow,B., and Hoff Jr,M.E., "Adaptive Switching Circuits", IRE WESCON Conv.Rec., Part 4, pp.96-104, 1960
- [8] Law,A.M., and Carson,J.S., "A Sequential Procedure for Determining the Length of a Steady-State Simulation", Operations Research, Vol.27, No.5, pp.1011-1025, September-October 1979
- [9] Proakis,J.G., "Digital Communications", McGraw-Hill, New York, 1983
- [10] Srinath,M.D., and Rajasekaron,P.K., "An Introduction to Statistical Processing with Applications", Wiley, New York, 1979
- [11] Oppenheim,A.V., and Schafer,R.W., "Digital Signal Processing", Prentice-

- Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975
- [12] Widrow,B., and Stearns,S.D., "Adaptive Signal Processing", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1985
- [13] Landau,I.D., "Unbiased Recursive Identification Using Model Reference Adaptive Techniques", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.AC-21, No.2, pp.194 -202, April 1976
- [14] Johnson, C.R., "A Convergence Proof for a Hyperstable Adaptive Recursive Filter", IEEE Trans. on Information Theory, Vol.IT-25, No.6, pp.745-749, November 1979
- [15] Hitz,L., and Anderson,B.D.O., "Discrete Positive Real Functions and Their Application to System Stability", Proceedings IEE, Vol.116, pp.153-155, January 1969
- [16] Popov,V.M., "Hyperstability of Control Systems", Springer -Verlag, West Berlin, 1972
- [17] Anderson,B.D.O., "A Simplified Viewpoint of Hyperstability", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.AC-13, No.3, pp.292-294, June 1968
- [18] Steiglitz,K., and McBride,L.E., "A Technique for the Identification of Linear Systems", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.AC-10, pp.461 -464, October 1965
- [19] Stoica,P., and Soderstrom,T., "The Steiglitz-McBride Algorithm revisited - Convergence Analysis and Accuracy Aspects", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.AC-26, No.3, pp.712-717, June 1981
- [20] Werner,J.J., "An Echo-Cancellation based 4800bits/s full-diplex DDD Modem", IEEE Vol.SAC-2, pp.722-730, September 1984
- [21] Underboeck,G., "Theory on the Speed Convergence in Adaptive Equalizar for Digital Communication", IBM J.Res.Develop., Vol.16, No.6, pp.546-555, November 1972
- [22] Shynk,J.J., "Adaptive IIR filtering using Parallel-Form Realizations",

- IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, Vol.ASSP-37, pp.519-533, April 1989
- [23] Perez,H., and Tsujii,S., "A Fast Parallel Form IIR Adaptive Filter Algorithms", IEEE Trans. on Signal Processing, Vol.39, No.9, pp.2118-2122, September 1991
- [24] Ljung,L., "System Identification : Theory for the user", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1986
- [25] Cowan,C.F.N., and Grant,P.M., "Adaptive Filters", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1985
- [26] Anderson,B.D., and Moore,J.B., "Optimal Filtering", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1979
- [27] Chatfield,C., "The Analysis of Time Series : An Introduction", Chapman and Hall Ltd., London, 1984
- [28] Phillips,C.L., and Nagle,H.T., "Digital Control System and Design", Prentice-Hall, New Jersey, 1984
- [29] Law,A.M., and Kelton,W.D., "Confidence Intervals for Steady-State Simulations : 1. A Survey of Fixed Sample Size Procedures", Operations Research, Vol.32, No.6, pp.1221-1239, November - December, 1984
- [30] Fishman,G.S., "Grouping Observations in Digital Simulation", Management Science, Vol.24, No.5, pp.510-521, January 1978
- [31] Law,A.M., and Kelton,W.D., "Confidence Intervals for Steady-State Simulations: 2. A Survey of Sequential Procedures", Management Science, Vol.28, No.5, pp.550-562, May 1982
- [32] Mood,A.M., Graybill,F.A., and Boes,D.C., "Introduction to the Theory of Statistics", McGraw-Hill Int. Editions, New York, 1974
- [33] Miller,R.G., "The Jackknife - A Review", Biometrika 61, pp.1-15, 1974
- [34] Breiman,L., "Statistics with a View toward Applications", Houghton Mifflin Company, Boston, 1973