

Este exemplar corresponde à redação final da tese
entendida por Rubén Augusto R. Lázaro
e aprovada pela Comissão
gadora em 10 / 08 / 93.
Stor José Monticelli
Orientador

Está e' a versão
final da tese
Stor Monticelli
15/10/93

Um Método de Decomposição para Planejamento a Longo Prazo de Sistemas de Transmissão

Rubén Augusto Romero Lázaro
FEE - UNICAMP
Campinas - SP

10 de agosto de 1993

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica
Departamento de Sistemas de Energia Elétrica

Um Método de Decomposição para Planejamento a Longo Prazo
de Sistemas de Transmissão

Rubén Augusto Romero [Lázaro / 457

Alcir [Monticelli, 1946 - 1
Orientador

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica, UNICAMP, como
parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em
Engenharia Elétrica.

Campinas, agosto de 1993.

À **Lucila**, mulher e companheira
Aos meus filhos, **Iván e Ruth**
A meus pais, **Julián e Benedicta**

Agradecimentos

- Ao Professor Alcir José Monticelli pela orientação;
- Ao Professor Ariovaldo Verândio Garcia pela grande ajuda dispensada especialmente na utilização dos recursos do LSEE;
- Aos colegas do DSEE pela harmoniosa convivência nesta fase difícil de posgraduando;
- A todos aqueles que ajudaram a tornar aceitável a redação final da presente tese.

Este trabalho contou com o apoio financeiro do CNPq.

Resumo

Este trabalho apresenta uma alternativa de planejamento ótimo da expansão a longo prazo de sistemas de transmissão. É apresentada uma metodologia hierarquizada de planejamento em três etapas ou fases. Cada fase usa um determinado tipo de modelamento da rede de transmissão iniciando dos modelos mais relaxados. Assim, são usados o Modelo de Transportes, o Modelo Híbrido e o Modelo de Fluxo de Carga DC para modelar a rede elétrica. Em cada fase da metodologia hierarquizada é usada uma técnica de decomposição de Benders para decompor o problema em duas partes: um subproblema de operação e um subproblema de investimento, os quais são resolvidos alternadamente através de processo de otimização geral. Neste sentido foi formulada e desenvolvida as técnicas para a determinação dos cortes de Benders para o caso do problema linear e não linear usando a teoria de Benders padrão e Benders generalizada desenvolvida por Geoffrion. No processo de elaboração da metodologia de planejamento ainda foram incorporados diferentes conceitos e heurísticas para melhorar o desempenho da metodologia básica. Neste sentido, foram usados o conceito de rede fictícia para contornar o problema de rede inicial não conexa e as características específicas da operação da rede elétrica, no problema de planejamento, a fim de introduzir restrições adicionais, além dos cortes de Benders, ao subproblema de investimento para torná-lo mais fácil de resolver. Finalmente, apresenta-se uma formulação para resolver um problema de programação linear inteira zero-um que é usado com êxito para resolver o subproblema de investimento na Fase III. Os testes realizados com sistemas reais foram bem sucedidos o que qualifica a eficiência da metodologia proposta.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	O Problema de Planejamento	4
2.1	Introdução	4
2.2	O Problema de Planejamento	5
2.2.1	Formulação do Problema de Planejamento	5
2.3	Métodos Clássicos de Planejamento: Técnicas Heurísticas	7
2.3.1	Modelo de Transportes e Metodologia de Garver	7
2.3.2	Modelo de Fluxo de Carga DC e Metodologia do Mínimo Esforço	9
2.3.3	O Modelo Híbrido de Villanasa	11
2.3.4	Outros Métodos Clássicos	13
2.4	Planejamento Ótimo de Sistemas de Transmissão	13
2.4.1	A Decomposição de Benders	13
3	Planejamento Hierarquizado Usando a Decomposição de Benders Generalizada	20
3.1	Introdução	20
3.2	Teoria da Decomposição de Benders	21

3.3	Resolução do Modelo de Transportes Usando a Decomposição de Benders	23
3.3.1	Formulação Tradicional	23
3.3.2	Decomposição de Benders e o Modelo de Transportes	23
3.4	Resolução do Modelo de Fluxo de Carga DC Usando a Decomposição de Benders	26
3.4.1	Apresentação do Modelo	27
3.4.2	A Decomposição de Benders Generalizada	28
3.4.3	Decomposição de Benders no Modelo FCDC	31
3.4.4	Cálculo do Índice de Sensibilidade σ_{ij}	35
3.5	Resolução do Modelo Híbrido Usando a Decomposição de Benders	38
3.5.1	Decomposição do Modelo Híbrido	38
3.6	Planejamento Hierarquizado	40
3.6.1	Justificativa do Planejamento Hierarquizado	40
3.6.2	A Formulação do Planejamento Hierarquizado	41
3.6.3	Formulação Básica do Planejamento Hierarquizado	44
3.6.4	Discussão Sobre Ótimos Locais e Global	45
3.6.5	Idéias Alternativas Para Melhorar o Desempenho da Metodologia de Decomposição de Benders	46
3.6.6	O Conceito de Rede Fictícia	53
4	Proposta de Metodologia Ótima: Testes e Resultados Obtidos	55
4.1	A Metodologia Hierarquizada	55
4.2	O Subproblema de Operação	56
4.3	O Subproblema de Investimento	56
4.4	Resolução Exata do Subproblema de Investimento	57

4.4.1	Algoritmo de Cortes Duais	57
4.4.2	Algoritmo de Enumeração Implícita Zero-Um	58
4.5	Testes e Resultados Obtidos	58
4.5.1	Sistema de 03 Barras	58
4.5.2	Sistema de 06 Barras	62
4.5.3	Sistema de 46 Barras: Sul-Brasileiro - 1980	72
4.6	Qualidade dos Resultados Obtidos	80
5	Técnica de Enumeração Implícita Zero-Um em Planejamento de	
	Sistemas de Transmissão	82
5.1	Introdução	82
5.2	Conceitos e Definições da Enumeração Implícita	84
5.3	Esquema de Enumeração Implícita de Glover	86
5.4	Algoritmo de Enumeração Implícita de Balas	86
5.5	Algoritmo Implementado	100
5.6	Resultados Computacionais	104
5.6.1	Sistema Sul Brasileiro	104
5.7	Modificação Adicional	110
6	Conclusões	114
A	A Decomposição de Benders e a Determinação do Índice de	
	Sensibilidade σ_{ij}	121
A.1	A Decomposição de Benders	121
A.2	A Decomposição de Benders Generalizada	126

A.3	Determinação dos Índices de Sensibilidade para o Modelo de Fluxo de Carga DC	133
B	Dados dos Sistemas Testados	142
C	Papers Publicados	149

Capítulo 1

Introdução

O planejamento a longo prazo da expansão de redes de transmissão de energia elétrica tem por objetivo determinar onde, quando e que tipos de equipamentos devem ser instalados ao longo de um período, de modo a satisfazer as necessidades do mercado de energia elétrica com certas especificações de qualidade nos serviços e ao menor custo possível. Neste caso, usa-se a técnica denominada Síntese Conceitual de Redes de Transmissão que permite fazer os estudos iniciais para o planejamento a longo prazo da expansão de sistemas de transmissão baseados em técnicas rápidas e modelos simplificados.

Uma das primeiras técnicas de síntese de redes de transmissão usadas no planejamento a longo prazo foi o Modelo de Transportes de Garver [5], que resolve o problema de uma rede inicial não conexa e sobrecarregada, com cargas futuras e que não pode ser resolvido por métodos de análise tradicionais como o fluxo de carga AC. No Modelo de Transportes só é representada a Primeira Lei de Kirchhoff na representação do sistema elétrico, o que apresenta uma limitação grande, pois este modelo pode ficar muito distante em relação à rede original. Depois tentou-se resolver o problema de planejamento formulado com o Modelo de Fluxo de Carga DC, FCDC, no qual é levado em conta as duas leis de Kirchhoff. Entretanto, esta formulação produz um problema de tratamento difícil por ser um problema de Programação Não Linear Inteiro Misto (PNLIM). Uma primeira tentativa de resolver este problema foi a utilização de uma técnica heurística, chamada de mínimo esforço [4]. Um modelo alternativo, intermediário é o chamado Modelo Híbrido [7] que combina os dois modelos anteriores. Neste caso, o Modelo de FCDC é usado para representar a rede atual existente e o Modelo de Transportes é usado para representar as novas alternativas de investimento ou linhas candidatas.

Na década de 80 iniciou-se a aplicação de técnicas de decomposição matemática [6, 9], como uma ferramenta atrativa para resolver o problema de planejamento da expansão de

sistemas de transmissão formulado com o Modelo de FCDC. Neste sentido, iniciaram-se as primeiras tentativas para encontrar a solução ótima do problema de planejamento. Esta técnica aproveita a decomposição natural do problema da expansão de sistemas de transmissão em duas partes: um subproblema de investimento e um subproblema de operação. O objetivo é minimizar os custos de investimento requeridos para um fornecimento adequado da demanda.

A formulação que faz parte da presente tese incorpora aportes de todas as experiências mencionadas para formular um algoritmo de planejamento ótimo da expansão de sistemas de transmissão, isto é, procurar a solução ótima do problema de planejamento formulado com o Modelo de FCDC. Uma primeira versão desta formulação foi desenvolvida e apresentada em [3].

A presente formulação, chamada de planejamento hierarquizado, usando a técnica de decomposição de Benders, resolve o problema de planejamento por etapas, iniciando o processo de solução com modelos relaxados com a finalidade de contornar os problemas de convexidade, próprios dos problemas PNLIM, e evitar a utilização de algoritmos de programação inteira (PI) já no início do processo, deixando o uso do algoritmo de PI somente para a fase final do processo, logrando-se diminuir o tempo de computação drasticamente.

No Capítulo II, apresenta-se o problema de planejamento e as principais formulações e técnicas usadas na resolução deste problema. Nesta parte dá-se especial ênfase àquelas formulações que são incorporadas no algoritmo do presente trabalho de tese.

No Capítulo III, desenvolve-se a técnica de decomposição de Benders para os três modelos antes mencionados: Modelo de Transportes, Híbrido e de Fluxo de Carga DC. Apresenta-se também a idéia de planejamento hierarquizado, assim como conceitos e ferramentas adicionais incorporados ao algoritmo.

No Capítulo IV, apresenta-se, esquematicamente, a metodologia de planejamento ótimo desenvolvido no capítulo anterior. Para testar o desempenho do algoritmo são testados três sistemas: sistema de 03 barras de [46], sistema de 06 barras de Garver [5] e sistema sul-brasileiro de 46 barras para 1980 apresentado em [11].

No Capítulo V, desenvolve-se um algoritmo especializado de enumeração implícita para resolver o subproblema de investimento na Fase III do processo hierarquizado. Apresentam-se as vantagens de incorporar as características específicas do problema na elaboração de um poderoso algoritmo de enumeração implícita de Balas especializado e comparam-se os resultados obtidos com os de um algoritmo tradicional aplicado no capítulo anterior, especialmente em relação ao desempenho em tempo computacional.

No Capítulo VI, são feitos comentários dos resultados obtidos e as perspectivas de desenvolvimentos futuros.

No Apêndice A, são apresentadas as proposições e formulações relacionadas com a técnica de decomposição de Benders generalizada e sua aplicação específica para o problema de planejamento de sistemas de transmissão, usando o Modelo de Transportes, Híbrido e FCDC. No Apêndice B, são apresentados os dados dos sistemas testados e no Apêndice C são incorporados os “papers” que foram apresentados em congressos do IEEE como consequência da elaboração da presente tese de doutorado.

Capítulo 2

O Problema de Planejamento

2.1 Introdução

Neste Capítulo apresenta-se o problema de planejamento de sistemas de transmissão formulado como um Modelo de Fluxo de Carga DC, FCDC, cuja determinação de sua solução ótima é motivo da presente tese. Inicialmente é apresentado o modelo na sua forma matemática e comenta-se o enquadramento do problema no contexto dos problemas de programação matemática, assim como suas características específicas. Em seguida é apresentado um histórico e as principais metodologias usadas para resolver este problema de planejamento, dando-se ênfase especial aqueles métodos que apresentam relação direta com a metodologia desenvolvida no presente trabalho.

Os dados iniciais no problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão são: a rede do ano inicial, as injeções líquidas de potência ativa (geração menos a demanda) para o período que vai do ano inicial até o ano final do planejamento e o conjunto de circuitos (linhas de transmissão e transformadores) candidatos a serem instalados neste período de planejamento.

Os resultados obtidos no planejamento a longo prazo são depois usados no planejamento de médio e curto prazo, nas quais são usadas formulações mais exatas para testar as diversas alternativas de expansão obtidas no planejamento a longo prazo.

2.2 O Problema de Planejamento

2.2.1 Formulação do Problema de Planejamento

O problema de planejamento de sistemas de transmissão a longo prazo, formulado usando o Modelo de Fluxo de Carga DC, FCDC, pode ser sistematizado através da seguinte relação matemática:

$$\text{Min} \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij} x_{ij} \quad (2.1)$$

s.a.

$$Sf + g = d \quad (2.1.a)$$

$$f_{ij} - (\gamma_{ij}^0 + x_{ij})(\theta_i - \theta_j) = 0 \quad (2.1.b)$$

$$|f_{ij}| - x_{ij} \bar{\phi}_{ij} \leq \gamma_{ij}^0 \bar{\phi}_{ij} \quad (2.1.c)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g} \quad (2.1.d)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{e discreto} \quad (2.1.e)$$

$$\forall (i, j) \in \Omega$$

onde:

$$\bar{\phi}_{ij} = \frac{\bar{f}_{ij}}{\gamma_{ij}^0}$$

Nesta formulação tem-se as seguintes variáveis:

$\Omega \rightsquigarrow$ Conjunto de todos os ramos definidos pelas linhas existentes e as alternativas de expansão. A ampliação ou duplicação de uma linha existente também é considerada uma alternativa de expansão. Assume-se que Ω é sempre conexo.

$g \rightsquigarrow$ vetor de gerações.

$d \rightsquigarrow$ vetor de cargas.

$\bar{g} \rightsquigarrow$ vetor de limites de geração.

$\theta \rightsquigarrow$ ângulos das tensões nodais.

$S \rightsquigarrow$ matriz de incidência nó-ramo.

$f \rightsquigarrow$ vetor de fluxos.

$\bar{f}_{ij} \rightsquigarrow$ fluxo máximo na linha (i, j) .

$x_{ij} \rightsquigarrow$ nova susceptância a ser instalada no ramo $(i, j) \in \Omega$.

$\gamma_{ij}^0 \rightsquigarrow$ susceptância inicial no ramo $(i, j) \in \Omega$.

$c_{ij} \rightsquigarrow$ custo relativo da linha no ramo $(i, j) \in \Omega$.

$$c_{ij} = \frac{\text{custo da linha}}{\gamma_{ij}}$$

Na formulação (2.1), chamada de Modelo de Fluxo de Carga DC, FCDC, o sistema elétrico obedece às duas leis de Kirchhoff. Assim, a relação (2.1.a) é simplesmente um conjunto de equações satisfazendo a Primeira Lei de Kirchhoff, uma equação para cada nó. A relação (2.1.b) é um conjunto de equações que satisfaz a Segunda Lei de Kirchhoff, uma equação para cada circuito existente ou candidato. A relação (2.1.c) é um conjunto de equações que impõe limites máximos nos fluxos, através dos circuitos, uma equação para cada circuito existente ou candidato. A relação (2.1.d) simplesmente impõe limites à geração nas barras de geração e finalmente a relação (2.1.e) impõe a restrição de que as susceptâncias dos circuitos candidatos têm susceptância positiva e de natureza discreta.

A formulação (2.1) é um problema PNLIM e pertence ao conjunto de problemas chamados NP-completo de difícil tratamento. Nesta formulação têm-se variáveis contínuas de operação tais como os fluxos nas linhas, o nível de geração e demanda e a diferença angular nas barras e variáveis de investimento inteiras, como são os circuitos candidatos à adição.

A tentativa de encontrar a solução ótima da formulação (2.1) implica na elaboração de um algoritmo especializado para resolver um problema PNLIM. Pode-se observar que o conjunto de equações agrupadas na relação (2.1.b) é o fator complicante do problema, dando um caráter não linear ao problema geral, pois, esta relação incorpora variáveis contínuas de operação multiplicados com variáveis de investimento discretas.

Em seguida apresentam-se as diversas formulações desenvolvidas para modelar o problema de planejamento de sistemas de transmissão e as respectivas técnicas ou metodologias sugeridas para resolvê-las.

2.3 Métodos Clássicos de Planejamento: Técnicas Heurísticas

2.3.1 Modelo de Transportes e Metodologia de Garver

O Modelo de Transportes foi inicialmente formulado por Garver [5] e o grande mérito desta formulação é que representou a primeira proposta de síntese de redes para planejamento, isto é, foi proposta uma nova metodologia para o planejamento de sistemas de transmissão. Uma rede para planejamento apresenta duas características muito peculiares: geralmente ela é não conexa e apresenta muitas linhas sobrecarregadas. Nestas condições, as técnicas tradicionais de análise de redes como o fluxo de Carga AC eram incapazes de fornecer soluções coerentes pois pretendia-se resolver um problema de fluxo de carga utilizando uma rede inicial existente e as gerações/cargas futuras. Em situações como esta simplesmente não existe fluxo de carga. O grande mérito de Garver foi propor uma nova metodologia para resolver o problema de planejamento, formulando um algoritmo para resolver um modelo simplificado da rede.

Se na formulação (2.1) é descartado o conjunto de equações (2.1.b), o problema resultante é conhecido como Modelo de Transportes. Assim, no Modelo de Transportes somente é levada em conta a Primeira Lei de Kirchhoff. Neste contexto o problema de planejamento assume a seguinte forma:

$$\text{Min} \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij} x_{ij} \quad (2.2)$$

s.a.

$$\begin{aligned} Sf + g &= d \\ |f_{ij}| - x_{ij} \bar{\phi}_{ij} &\leq \gamma_{ij}^0 \bar{\phi}_{ij} \\ 0 &\leq g \leq \bar{g} \\ x_{ij} &\geq 0 \quad \text{e discreto} \\ &\forall (i,j) \in \Omega \end{aligned}$$

A formulação (2.2) é um problema de Programação Linear Inteira Mista (PLIM) pois as variáveis de investimento são de natureza discreta. Portanto, nesta formulação desaparece o caráter não linear do problema, reduzindo-se conseqüentemente sua complexidade.

Entretanto, encontrar a solução ótima da formulação (2.2) implica na utilização de um algoritmo para resolver um PLIM. Assim, a formulação (2.2) é uma relaxação da formulação (2.1).

Garver não formulou um algoritmo para encontrar a solução ótima de (2.2). Pelo contrário, ele projetou um algoritmo, muito inteligente, baseado em programação linear para resolver (2.2). Assim, a metodologia de Garver resolve (2.2) em um processo passo-a-passo, adicionando um circuito por vez nas áreas de maior sobrecarga. Esta metodologia considera dois tipos de ligações:

- **Ligações Normais:** Com capacidades de transmissão máximas iguais às linhas reais e custos de transporte iguais às reatâncias dessas linhas.
- **Ligações de Sobrecarga:** São ligações fictícias com capacidades de transmissão ilimitadas e custos de transporte muito superiores (10 vezes, por exemplo) aos das linhas normais; estas ligações são colocadas entre todos os nós ou barras nas quais sejam permitidas a construção de novas linhas.

Na metodologia de Garver, todo fluxo que não puder ser transportado pelas ligações normais, fluirão pelas ligações de sobrecarga, pois estas têm capacidades ilimitadas, e só passarão através das ligações de sobrecarga quando for impossível transportá-los pelas ligações normais, já que estas têm custos muito inferiores. Em cada estágio do processo de planejamento deve-se resolver um problema de programação linear e logo adicionar um circuito na trajetória de maior sobrecarga. O processo é repetido até eliminar todas as sobrecargas.

A vantagem da metodologia de Garver é a simplicidade na implementação do algoritmo pois ela exige somente soluções sucessivas de programação linear. A maior limitação da metodologia é que ela não garante a obtenção da solução ótima da formulação (2.2) que é um problema PLIM. Portanto, a metodologia de Garver, em essência, é de natureza heurística.

A principal limitação do Modelo de Transportes é a excessiva simplificação do modelo do circuito, pois ele só leva em conta a Primeira Lei de Kirchhoff. Este fato pode levar a alternativas de planejamento muito distantes aos adequados, no planejamento de sistemas reais. Assim, o uso do Modelo de Transportes como alternativa única de planejamento representa, atualmente, uma metodologia superada.

No Modelo de Transportes, entretanto, existem alguns aspectos muito importantes que podem ser muito bem aproveitadas. O Modelo de Transportes leva a uma formulação matemática que é um problema linear e, portanto, muito mais fácil de manipular através

de algoritmos especializados. Outro fato, muito importante, é que o problema de planejamento formulado como um Modelo de Transportes leva a uma formulação matemática que não apresenta nenhuma dificuldade para resolver um sistema elétrico não conexo, pois o modelo não leva em conta a susceptância dos circuitos. Esta característica é de grande importância, pois a existência de rede inicial não conexa é comum em planejamento de sistemas de transmissão a longo prazo. Estas duas características fundamentais são amplamente aproveitadas na formulação do algoritmo da presente tese.

2.3.2 Modelo de Fluxo de Carga DC e Metodologia do Mínimo Esforço

Na UNICAMP [4] desenvolveu-se uma metodologia para resolver o problema de planejamento de sistemas de transmissão, formulado como um Modelo de FCDC. Esta metodologia, conhecida como de **mínimo esforço**, faz também um plano de expansão passo-a-passo, isto é, para uma configuração da rede os circuitos são adicionados um a um ou em pequenos grupos. O critério para a adição do próximo circuito é determinada por uma análise de sensibilidade, chamada de mínimo esforço.

Nesta metodologia, a dificuldade de desconexões na rede inicial é contornada adotando-se, superposta à configuração do sistema, uma “rede fictícia” constituída por ligações com susceptância igual a, por exemplo, 10^{-4} vezes dos valores nominais, colocados em todos os ramos onde são permitidas a construção de novas linhas. A baixa capacidade de transmissão da rede fictícia faz com que estas só sejam utilizadas quando não houver possibilidade de transporte de potência pela rede real.

Se são fixadas a geração e a carga em cada barra é possível escrever a formulação de FCDC na seguinte forma [33]:

$$B \theta = P \quad (2.3)$$

onde:

B Matriz capacidade de transmissão.

θ Vetor dos ângulos das tensões nodais.

P Vetor das injeções líquidas de potência ativa.

Os elementos da matriz B são dados pelas relações:

$$\begin{aligned}
B_{ij} &= -\gamma_{ij} \\
B_{ii} &= \sum_{j \in \Omega_i} \gamma_{ij}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

onde:

γ_{ij} Susceptância do ramo (i,j).

Ω_i Conjunto das barras que se ligam à barra i.

Com os valores de θ obtidos de (2.3) pode-se calcular os fluxos de potência ativa nas linhas através da relação:

$$f_{ij} = \gamma_{ij}(\theta_i - \theta_j); \quad (i, j) \in \Omega \tag{2.5}$$

É possível mostrar que a solução de (2.3) é também solução do seguinte problema de otimização [46]:

$$Min \ Z = \frac{1}{2} \sum_{ij \in \Omega} \gamma_{ij}^{-1} f_{ij}^2 \tag{2.6}$$

s.a.

$$\sum_{j \in \Omega_i} f_{ij} = P_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, (N - 1)$$

onde Z é uma função objetivo correspondente às perdas no modelo resistivo associado ao sistema elétrico. Assim, a variação da função objetivo Z em relação a uma variação da susceptância dos circuitos candidatos pode ser usada como índice de sensibilidade do sistema de transmissão. Admitindo-se uma variação da susceptância da rede pela adição de um novo componente no ramo (i,j), obtém-se o seguinte critério de desempenho [4]:

$$\Delta Z_{ij}^* = -\frac{1}{2}(\theta_i^* - \theta_j^*)^2 \Delta \gamma_{ij} \tag{2.7}$$

Assim, a relação (2.7) é utilizada como um critério de desempenho na adição de novos circuitos ao sistema. Em cada passo do processo de planejamento é adicionado ao sistema aquele circuito que produz o maior impacto na distribuição de fluxos na rede.

A metodologia de mínimo esforço foi usada com sucesso em aplicações práticas com sistemas brasileiros. Baseados nesta metodologia foi projetado um software denominado SINTRA (Síntese de Transmissão) pela UNICAMP em convênio com a ELETROBRÁS. Entretanto, a metodologia heurística usada para determinar o próximo circuito a ser adicionado ao sistema não garante a otimalidade da solução obtida no final do processo. No caso do SINTRA, depois de terminado o processo de adições de circuitos, é realizado um processo de retirada daqueles circuitos que ficaram supérfluos na fase final de adições.

A vantagem do SINTRA é que ele é muito rápido e apresenta, geralmente, soluções de boa qualidade. A desvantagem é que ele não garante a otimalidade da solução e, às vezes, pode apresentar soluções distantes do ótimo global, pois não existe forma de determinar o quanto perto da solução ótima está a solução encontrada.

O conceito de rede fictícia desenvolvida conjuntamente com a metodologia de mínimo esforço é uma ferramenta que faz parte do algoritmo desenvolvido na presente tese.

2.3.3 O Modelo Híbrido de Villanasa

O Modelo Híbrido foi apresentado por Villanasa e outros em [7]. O Modelo Híbrido é uma combinação do Modelo de Transportes e o Modelo de FCDC. Se na formulação (2.1), relaxa-se parte das restrições, concretamente se o conjunto de restrições (2.1.b) é aplicado somente para os circuitos existentes e relaxa-se para os circuitos candidatos, então obtém-se o Modelo Híbrido. Assim, no Modelo Híbrido a Primeira Lei de Kirchhoff é obedecida por todos os circuitos do sistema (os existentes e os candidatos), mas a Segunda Lei de Kirchhoff é obedecida somente pelas linhas existentes na configuração inicial.

A metodologia proposta por Villanasa para resolver o problema de planejamento de sistemas de transmissão, formulado com um Modelo Híbrido, também não garante a otimalidade da solução obtida. O algoritmo apresentado para resolver o problema, na verdade, é a metodologia de Garver melhorada. Neste caso, o PL resolvido a cada passo tem a seguinte forma:

$$\text{Min } Z = C_D |f_D| \quad (2.8)$$

s.a.

$$B\theta - S^t f_D = P$$

$$|f| \leq f^{Lim}$$

onde:

Z função objetivo que minimiza o investimento.

C_D vetor de custos das linhas de sobrecarga.

f_D fluxos nas linhas de sobrecarga.

S^t matriz de incidência nó-ramo.

Nesta metodologia mantêm-se os conceitos de linhas de sobrecarga e usa-se programação linear para determinar o circuito mais sobrecarregado e, portanto, candidato a adição de um novo circuito.

O Modelo Híbrido mantém as vantagens do Modelo de Transportes e além disso apresenta resultados de melhor qualidade. As desvantagens ficam por conta da imprecisão da formulação em relação ao Modelo de FCDC o que pode ser aliviada através de uma aplicação repetida da metodologia como é sugerida em [7].

A característica fundamental do Modelo Híbrido é que ele ainda é altamente linear, pois o conjunto de restrições (2.1.b) é só aplicado à rede existente, com a vantagem de ser uma formulação mais exata do que o Modelo de Transportes. Esta característica do Modelo Híbrido é aproveitada na formulação do algoritmo da presente tese.

Em resumo, as metodologias de solução já apresentadas para resolver os diferentes modelos de rede têm como característica comum o fato de que elas fazem o planejamento do sistema passo-a-passo, usando um índice de sensibilidade para escolher o próximo circuito a ser adicionado ao sistema e não garantem a otimalidade da solução para o correspondente modelo utilizado. A vantagem destas metodologias é que são computacionalmente muito rápidas. Desta forma, as mesmas são denominadas de técnicas heurísticas no sentido de que elas não garantem a otimalidade da solução.

2.3.4 Outros Métodos Clássicos

Existem outros métodos ou formulações propostas para resolver o problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão a longo prazo. Existem na literatura métodos heurísticos e aqueles que usam técnicas de otimização matemática ou ainda métodos híbridos, ou seja, uma combinação de otimização matemática e alguma heurística geralmente obtida com a intervenção do planejador [49].

Quando no problema de planejamento de sistemas de transmissão o sistema é representado por um modelo de FCDC, pode-se ainda escolher formulações alternativas para resolver o problema de planejamento. Na presente tese, usa-se a decomposição de Benders, alternativamente também se pode usar um algoritmo de lagrangeano projetado. Uma outra alternativa promissora é usar o modelo de restrições disjuntas, cuja idéia básica é contornar as não linearidades introduzidas na representação das duas leis de Kirchhoff através de restrições lineares disjuntas, obtendo-se uma formulação linear do problema. Neste caso, seria usada um algoritmo de PLI com branch-and-bound ou a decomposição de Benders. Na UNICAMP, recentemente foi desenvolvido um outro trabalho [41] de planejamento de sistemas de transmissão no qual as leis de Kirchhoff do modelo de FCDC é representado implicitamente. O problema, formulado como um modelo de fluxo em redes inteiro-misto, é resolvido usando um algoritmo de enumeração implícita, o que levou à elaboração de um software conhecido como EXTRA. Outros métodos interessantes usados em planejamento a longo prazo podem ser encontrados em [11], [12] e [13].

2.4 Planejamento Ótimo de Sistemas de Transmissão

2.4.1 A Decomposição de Benders

Na década de 80, iniciou-se uma nova fase na tentativa de resolver a formulação (2.1) de maneira ótima e a principal ferramenta matemática encontrada foram as técnicas de decomposição matemática para resolver problemas de grande porte. A preocupação fundamental é como encontrar a solução ótima do problema de planejamento de sistemas de transmissão quando ele é formulado com um dos três modelos: Modelo de Transportes, Modelo Híbrido e Modelo de FCDC. Na verdade, o objetivo principal é encontrar a solução ótima do problema de planejamento, usando o Modelo de FCDC, isto é, resolver a formulação (2.1) o que significa resolver um problema PNLIM.

Nesta perspectiva a metodologia mais usada foi a técnica de decomposição de Benders

e, nesta linha de pesquisa, foram publicados dois trabalhos muito importantes apresentados em [6] e [9].

A decomposição de Benders explora a decomposição natural do problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão em duas partes:

1. **Um subproblema de investimento** em que se escolhe um plano de expansão candidato e calculam-se os custos de investimento associados a ele.
2. **Um subproblema de operação** onde é testado o plano de expansão candidato em termos do adequado fornecimento de carga.

A otimização global é atingida através de uma solução iterativa das soluções separadas dos subproblemas de operação e investimento.

As vantagens da utilização da decomposição de Benders é que a solução separada dos subproblemas de operação e investimento permite a aplicação de algoritmos de solução diferentes em cada caso. Também se tem, em cada iteração, os limites superior e inferior da solução, e as soluções dos modelos aproximados podem ser usadas como solução inicial dos modelos mais elaborados. Assim, por exemplo, a solução obtida de formulações com variáveis contínuas podem ser usadas como referência inicial para obter a solução de uma formulação do problema com variáveis inteiras [9].

O problema de minimizar os custos da expansão dos sistemas de transmissão pode ser formulado assim [9]:

$$\text{Min } z = c(x) + d(y) \quad (2.9)$$

s.a.

$$A(x) \geq b$$

$$E(x) + F(y) \geq h$$

em que as variáveis x representam decisões sobre a capacidade de transmissão e as variáveis y representam decisões de operação (fluxo em linhas, níveis de geração, corte de carga, etc). $A(x) \geq b$ representam as restrições de decisões de investimento e $E(x) + F(y) \geq h$ representam as restrições de operação.

O problema (2.9) pode ser representado como um processo de decisão em dois estágios:

- No primeiro estágio determina-se uma decisão de investimento factível x^* .
- No segundo estágio, dado x^* , o sistema é operado da forma mais eficiente, isto é, minimizando os custos de operação $d(y)$:

$$\text{Min } d(y) \tag{2.10}$$

s.a.

$$F(y) \geq h - E(x^*)$$

O objetivo é minimizar a soma dos custos de investimento e de operação.

A metodologia de decomposição é baseada nas seguintes observações:

- Os custos de operação $d(y^*)$, em que y^* é a solução ótima de (2.10), pode ser visto como uma função $\alpha(x)$ da decisão x factível, isto é,

$$\alpha(x) = \text{Min } d(y) \tag{2.11}$$

s.a.

$$F(y) \geq h - E(x)$$

- O problema da expansão da capacidade do sistema de transmissão, a equação (2.9), pode ser escrito em termos das variáveis x , assim:

$$\text{Min } c(x) + \alpha(x) \tag{2.12}$$

s.a.

$$A(x) \geq b$$

em que $\alpha(x)$ é a solução de (2.11) para algum x .

A função $\alpha(x)$ fornece informação das “conseqüências” das decisões de investimento x em termos de custos de operação. O esquema da decomposição de Benders é uma técnica para construir $\alpha(x)$ com alguma precisão requerida, baseado na solução do subproblema de operação (2.10) como é mostrado na Figura 2.1.

O esquema da decomposição de Benders em dois estágios é resolvido iterativamente como segue:

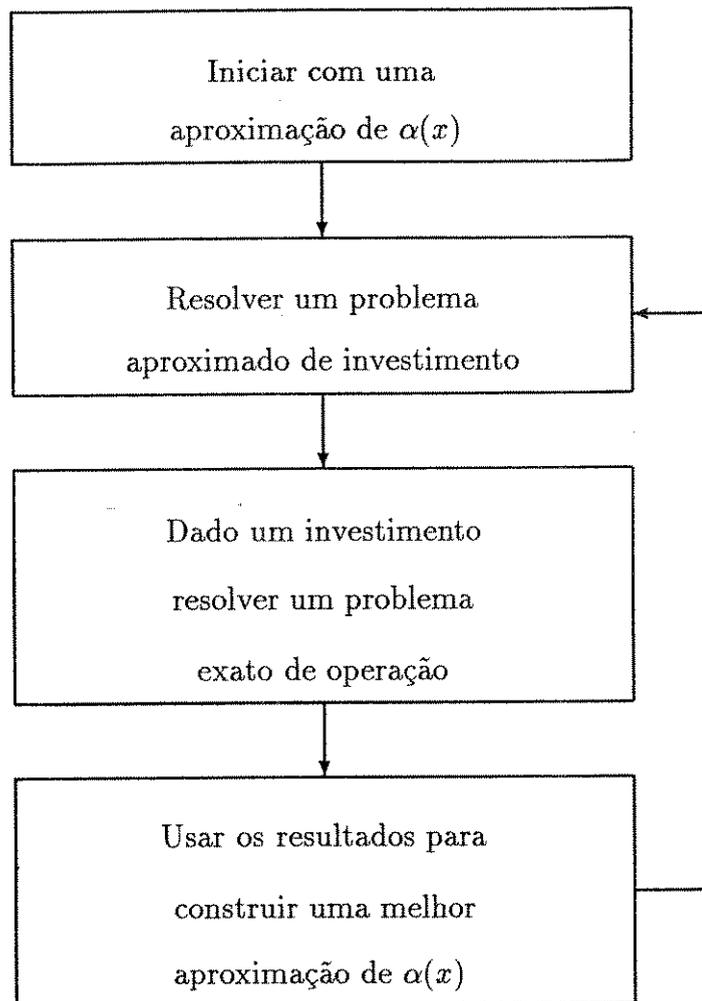


Figura 2.1: Esquema de Decomposição de Benders

1. Iniciar com uma aproximação de $\alpha(x)$ que é um limite inferior de $\alpha(x)$.

2. Subproblema de investimento:

Resolver uma aproximação do problema (2.12),

$$\text{Min } c(x) + \alpha(x) \tag{2.13}$$

s.a.

$$A(x) \geq b$$

que tem somente variáveis em x .

3. A solução ótima do problema (2.13),

$$\underline{Z} = c(x^*) + \alpha(x^*) \tag{2.14}$$

é um limite inferior da solução ótima do problema geral (2.9).

4. Subproblema de Operação:

Resolver o sistema:

$$\text{Min } d(y) \tag{2.15}$$

s.a.

$$F(y) \geq h - E(x^*)$$

em que x^* é a solução de (2.13). A relação (2.15) tem somente variáveis y .

5. Seja y^* a solução de (2.15). Então (x^*, y^*) é uma solução factível do problema geral (2.9), mas não necessariamente o ótimo. O valor da função objetivo:

$$\overline{Z} = c(x^*) + d(y^*)$$

é assim um limite superior da solução ótima de (2.9).

6. Se $\overline{Z} - \underline{Z} \leq \epsilon$ o processo termina e (x^*, y^*) é a solução ótima. Caso contrário, gerar uma nova aproximação $\alpha(x)$ da solução de (2.15), que ainda será um limite inferior para $\alpha(x)$. Voltar ao passo (2).

O ponto crítico neste esquema de decomposição é a mudança de $\alpha(x)$, a partir da solução de (2.15). Associado com a solução do subproblema de operação existe um conjunto de multiplicadores de Lagrange que avaliam as mudanças nos custos de operação do sistema, causados por mudanças marginais nas capacidades das linhas de transmissão. Estes multiplicadores são usados para gerar uma restrição linear em termos das variáveis x . Estas restrições, conhecidas como **Cortes de Benders**, são incorporadas ao subproblema de investimento que, uma vez resolvido, apresenta uma nova tentativa de solução.

Em [9] e [11], pesquisadores do CEPEL apresentaram um algoritmo, usando a decomposição de Benders, para resolver o problema de planejamento, usando o Modelo de Transportes e o Modelo de FCDC separadamente. Os resultados obtidos para o sistema sul-brasileiro mostram a grande dificuldade de tentar encontrar a solução ótima de um problema PNLIM, mesmo usando técnicas de decomposição matemática. Em relação aos resultados apresentados para o sistema brasileiro, sistema de médio porte, podem-se enfatizar três fatos fundamentais:

- O número excessivo de iterações de Benders (108 para o Modelo de FCDC) necessários para atingir a convergência, à primeira vista, pode gerar uma controvérsia dos críticos da metodologia da decomposição de Benders.
- O tempo de computação relativamente alto (80 minutos para o Modelo de FCDC) que não é mencionado na publicação, mas é especificado por um dos autores numa publicação posterior [13]. A maior responsável pelo tempo de computação é, obviamente, a necessidade de resolver iterativamente um problema de programação inteira correspondente ao subproblema de investimento.
- A incerteza em relação à otimalidade da solução final encontrada devido à não convexidade do problema de planejamento, aspecto este que ainda não foi totalmente resolvido até hoje.

Em um trabalho posterior [6], apresentado pelo mesmo grupo de pesquisadores, foram apresentados os resultados teóricos de uma pesquisa importante, usando a decomposição de Benders generalizada para problemas de planejamento. Nesta pesquisa, é realizada uma análise teórica interessante sobre os problemas de convexidade e sobre as características dos cortes de Benders. Entretanto, a implementação do algoritmo, baseada nesta pesquisa, limitou-se ao sistema de 06 barras de Garver e, mesmo assim, os resultados apresentados são muito contraditórios, apresentando um número excessivo de cortes de Benders e problemas de convergência a ótimos locais.

O algoritmo desenvolvido no presente trabalho retoma a pesquisa realizada em [6], usando alguns dos desenvolvimentos teóricos realizados nesta pesquisa, como parte integrante fundamental na formulação de um novo algoritmo para resolver o problema de

planejamento da expansão de sistemas de transmissão a longo prazo. Esta nova metodologia, chamada de planejamento hierarquizado, usando a decomposição de Benders generalizada, teve seu desenvolvimento parcial apresentado em [3].

Capítulo 3

Planejamento Hierarquizado Usando a Decomposição de Benders Generalizada

3.1 Introdução

Neste capítulo apresenta-se a análise teórica fundamental necessária para a formulação do algoritmo de planejamento ótimo da expansão de sistemas de transmissão. Assim, inicialmente é desenvolvida a teoria da decomposição de Benders para cada um dos três modelos de circuitos, usados no planejamento de sistemas de transmissão, apresentados no capítulo anterior e depois elas são integradas na formulação do algoritmo de planejamento hierarquizado.

Na segunda parte apresentam-se ferramentas adicionais que podem ser incorporadas no algoritmo e as características específicas do problema de planejamento que podem ser aproveitadas para contornar ou acelerar o processo de planejamento. Neste sentido, são muito importantes as discussões sobre os problemas de convexidade próprios dos problemas de planejamento, os problemas de rede inicial não conexa e a grande dificuldade de usar um algoritmo de programação inteira na resolução do subproblema de investimento. Os resultados menos relevantes ou os muito elaborados deste capítulo são transferidos para o Apêndice A.

3.2 Teoria da Decomposição de Benders

Aplica-se a decomposição de Benders ao problema de planejamento de sistemas de transmissão por três motivos:

- A decomposição de Benders fornece uma ferramenta natural para decompor o problema em duas partes:
 1. Determinação do investimento ótimo da nova capacidade do sistema.
 2. Determinação dos custos de operação e confiabilidade do fornecimento de energia associado com a construção desta nova capacidade.
- A decomposição de Benders é atrativa neste caso particular pois permite a solução de um problema difícil através de uma seqüência de soluções de problemas simples.
- Além disso já foi aplicada com sucesso em problemas relacionados com sistemas de potência.

Os métodos de decomposição, de acordo com a classificação de Geoffrion [16], podem ser classificados dentro de um esquema padrão pelos conceitos fundamentais usados para o desenvolvimento de cada método. Estes conceitos fundamentais podem ser classificados em dois grupos: manipulação de problemas e estratégias de resolução.

Manipulação de um problema é formulá-lo de uma maneira equivalente com a vantagem de que o problema resultante é mais fácil de se resolver. A manipulação de um problema é usada para obter o problema mestre. As principais manipulações são: Dualidade, projeção, linearização interna e linearização externa.

A estratégia de resolução é usada para resolver o problema mestre de maneira iterativa. As principais estratégias de resolução são: Otimização por partes, restrição, relaxação e direções factíveis.

A decomposição de Benders usa **projeção-linearização externa/relaxação** como manipulação e estratégia de resolução. Assim, comenta-se brevemente estes conceitos.

Projeção, freqüentemente também conhecido como “partição”, é um mecanismo que leva vantagem em certos problemas que se tornam relativamente simples, quando algumas variáveis são fixadas temporariamente. Na decomposição de Benders, o conceito de projeção é usado para isolar problemas com estruturas especiais que estão integrados num problema maior, ou seja, isolar a parte linear ou contínua de um problema “semi-linear”, por exemplo.

Linearização Externa é um mecanismo que objetiva induzir linearidade em um problema parcialmente não-linear, via aproximação, para depois usar poderosos algoritmos de programação linear. A linearização externa implica na aproximação tangencial para funções convexas. Um importante uso de linearização externa é na manipulação das não-linearidades introduzidas por projeção. Linearização externa é aplicada a conjuntos convexos e funções convexas ou côncavas.

O principal obstáculo que se tem com linearização externa é que se pode requerer um número excessivo de aproximações para obter resultados adequados. Esta dificuldade é contornada, desde que exista uma estratégia de solução aplicável a problemas com linearização externa usando as aproximações somente quando forem necessárias, sem ter que especificá-las antecipadamente. Esta estratégia de resolução é relaxação. O efeito nato é que a manipulação de linearização externa é feita só implicitamente.

Relaxação é útil para problemas com muitas restrições de desigualdade. Assim, a relaxação reduz um problema a uma seqüência recursiva de problemas, em que muitas das restrições são ignoradas. Relaxação é usada principalmente para problemas com um grande número de restrições de desigualdade, alguns dos quais podem estar disponíveis só implicitamente. Tais problemas ocorrem, por exemplo, como resultado de uma linearização externa.

Em algumas aplicações, somente uma ou algumas das restrições mais violadas estão disponíveis, cada vez que o problema relaxado é resolvido e serão usadas se elas satisfizerem algum critério particular. Em outras aplicações, tal como a decomposição de Benders, um critério tal como “a restrição mais violada” é obtido via implementação de um problema de programação linear subsidiário.

O método de decomposição de Benders, proposto originalmente por Benders [18], mostra-se particularmente atrativo ou interessante para problemas de programação mista, ou seja, para problemas de programação linear inteira mista. Nos últimos anos, entretanto, os avanços nas técnicas de computação paralela fazem que a decomposição de Benders possa ser usada num contexto mais geral, até para decompor problemas de programação linear de características especiais. Posteriormente, o método de decomposição de Benders foi estendido para o caso não-linear por Geoffrion [19]. Como já foi mencionado, o método de decomposição de Benders consiste na combinação **Projeção-Linearização Externa/Relaxação** como manipulação e estratégia de resolução.

A decomposição de Benders e a decomposição de Benders generalizada, devido à amplitude de sua apresentação, é transferida para o Apêndice A, no qual é adequadamente apresentada e discutida.

3.3 Resolução do Modelo de Transportes Usando a Decomposição de Benders

3.3.1 Formulação Tradicional

O problema de planejamento de sistemas de transmissão a longo prazo baseado no Modelo de Transportes pode ser formulado como [6] :

$$\text{Min } v = \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij} x_{ij} \quad (3.1)$$

s.a.

$$\begin{aligned} S f + g &= d \\ f_{ij} - x_{ij} \bar{\phi}_{ij} &\leq \gamma_{ij}^o \bar{\phi}_{ij} \\ -f_{ij} - x_{ij} \bar{\phi}_{ij} &\leq \gamma_{ij}^o \bar{\phi}_{ij} \\ 0 &\leq g \leq \bar{g} \\ x_{ij} &\geq 0 \text{ e discreto} \quad \forall (i,j) \in \Omega \end{aligned}$$

onde:

$$\bar{\phi}_{ij} = \frac{\bar{f}_{ij}}{\gamma_{ij}^o}$$

O problema (3.1) é um problema de programação linear inteira mista (PLIM) e quando se relaxa a integralidade das linhas de transmissão (ou seja, são permitidas adições de frações de linhas), (3.1) é um problema de Programação Linear Normal (PL).

3.3.2 Decomposição de Benders e o Modelo de Transportes

No presente trabalho é usada uma formulação que, na verdade, é a formulação do Modelo de Transportes (3.1) ligeiramente modificada ou generalizada na formulação da função objetivo. Também na presente formulação, relaxa-se a integralidade das variáveis de investimento. Esta relaxação não modifica a forma do corte de Benders, mas torna o subproblema de investimento em um PL, antes que em um PLI. Assim, o problema de planejamento usando o Modelo de Transportes assume a seguinte forma:

$$\text{Min } v = \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij} x_{ij} + \alpha e^t r \quad (3.2)$$

s.a.

$$\begin{aligned} S f + g + r &= d \\ |f_{ij}| - x_{ij} \bar{\phi}_{ij} &\leq \gamma_{ij}^o \bar{\phi}_{ij} \\ 0 &\leq g \leq \bar{g} \\ 0 &\leq r \leq d \\ x_{ij} &\geq 0 \quad \forall (i, j) \in \Omega \end{aligned}$$

em que:

$$e = [1, \dots, 1]^t$$

$r_k \rightsquigarrow$ corte de carga na barra k.

$\alpha \rightsquigarrow$ parâmetro de penalidade associado com o corte de carga.

Note que o problema (3.1) pode ser considerado como um caso particular de (3.2) quando α é grande.

Nesta formulação é incorporado um vetor de corte de carga ou de geradores fictícios r . Portanto, a formulação (3.2) torna-se mais geral que a formulação (3.1).

Para aplicar a decomposição de Benders, deduzida no Apêndice A, ao problema (3.2) não existe maior dificuldade, pois, neste caso, as variáveis de operação e investimento são linearmente separáveis, ou seja, o problema (3.2) é um problema de programação linear. Em outras palavras, o problema (3.2) é convexo e neste caso a decomposição de Benders leva a uma solução muito rápida e segura [20].

Assim, depois de fazer o processo de decomposição, o subproblema de operação assume a seguinte forma:

$$\text{Min } w = \alpha e^t r \quad (3.3)$$

s.a.

$$S f + g + r = d$$

$$\frac{|f_{ij}|}{\phi_{ij}} - \gamma_{ij}^o \leq x_{ij} \quad (3.3.2)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}$$

$$0 \leq r \leq d$$

$$\forall (i, j) \in \Omega$$

que é equivalente ao problema de programação linear seguinte:

$$\text{Min } w = \alpha e^t r \quad (3.4)$$

s.a.

$$S f + g + r = d$$

$$|f_{ij}| \leq (\gamma_{ij}^o + x_{ij}) \bar{\phi}_{ij} \quad (3.4.2)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}$$

$$0 \leq r \leq d$$

$$\forall (i, j) \in \Omega$$

e o problema mestre ou subproblema de investimento é o seguinte:

$$\text{Min } v = \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij} x_{ij} + \beta \quad (3.5)$$

s.a.

$$w^k + \sum_{(i,j) \in \Omega} \sigma_{ij}^k (x_{ij} - x_{ij}^k) \leq \beta$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{e discreto}$$

$$\beta \geq 0 \quad \forall (i, j) \in \Omega$$

em que:

$w^k \rightsquigarrow$ é o valor ótimo de (3.3) ou (3.4) com $x_{ij} = x_{ij}^k; \forall (i, j) \in \Omega$.

$\sigma_{ij}^k \rightsquigarrow$ é o índice de sensibilidade de (3.3) com relação a x_{ij} com $x_{ij} = x_{ij}^k; \forall (i, j) \in \Omega$.

σ_{ij}^k pode-se obter diretamente dos multiplicadores simplex de (3.3.2), mas geralmente resolve-se o sistema (3.4) e assim σ_{ij}^k é obtido dos índices de sensibilidade de (3.4.2) através da seguinte relação:

$$\sigma_{ij} = -\pi_{ij}\bar{\phi}_{ij} \quad \forall (i, j) \in \Omega \quad (3.6)$$

em que:

$\sigma_{ij} \rightsquigarrow$ é o índice de sensibilidade com respeito a x_{ij} .

$\pi_{ij} \rightsquigarrow$ é a variável dual associada à restrição (3.4.2); $\forall (i, j) \in \Omega$.

3.4 Resolução do Modelo de Fluxo de Carga DC Usando a Decomposição de Benders

A expansão da transmissão usando o Modelo de FCDC tem a seguinte forma:

$$\text{Min} \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij}x_{ij} \quad (3.7)$$

s.a.

$$Sf + g = d$$

$$f_{ij} - (\gamma_{ij}^0 + x_{ij})(\theta_i - \theta_j) = 0$$

$$|f_{ij}| - x_{ij}\bar{\phi}_{ij} \leq \gamma_{ij}^0\bar{\phi}_{ij}$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{e discreto}$$

$$\forall (i, j) \in \Omega$$

O problema (3.7) pode ser formulado de uma maneira mais geral, como no caso do Modelo de Transportes, na seguinte forma:

$$\text{Min} \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij} x_{ij} + \alpha e^t r \quad (3.8)$$

s.a.

$$\begin{aligned} Sf + g + r &= d \\ f_{ij} - (\gamma_{ij}^0 + x_{ij})(\theta_i - \theta_j) &= 0 \\ |f_{ij}| - x_{ij} \bar{\phi}_{ij} &\leq \gamma_{ij}^0 \bar{\phi}_{ij} \\ 0 &\leq g \leq \bar{g} \\ 0 &\leq r \leq d \\ x_{ij} &\geq 0 \quad \text{e discreto} \\ &\forall (i, j) \in \Omega \end{aligned}$$

Nota-se que também neste caso o problema (3.7) pode ser considerado como um caso particular de (3.8), quando α é grande.

Para todas as aplicações futuras no presente trabalho, considera-se a formulação (3.8) como a mais adequada para o Modelo de FCDC.

Os problemas de otimização (3.7) e (3.8) têm funções objetivo lineares, mas algumas de suas restrições são não lineares. Também a região factível pode ser não convexa.

3.4.1 Apresentação do Modelo

Uma das dificuldades na aplicação da decomposição de Benders padrão ao problema de planejamento de sistemas de transmissão, formulada na equação (3.8), é que as variáveis de operação e investimento não são linearmente separáveis umas das outras. Por exemplo, as equações,

$$f_{ij} - (\gamma_{ij}^0 + x_{ij})(\theta_i - \theta_j) = 0 ; \forall (i, j) \in \Omega \quad (3.9)$$

contêm produtos de variáveis de investimento x_{ij} (susceptância das novas linhas) e variáveis de operação (diferença de ângulos de tensão de barras $\theta_i - \theta_j$).

É possível, contudo, reescrever o problema para fazer essas variáveis separáveis. Por exemplo, pode-se escrever (3.8) assim,

$$\text{Min} \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij} x_{ij} + \alpha e^t r \quad (3.10)$$

s.a.

$$Sf + g + r = d$$

$$\frac{f_{ij}}{\theta_i - \theta_j} - \gamma_{ij}^0 - x_{ij} = 0$$

$$|f_{ij}| - \gamma_{ij}^0 \bar{\phi}_{ij} - x_{ij} \bar{\phi}_{ij} \leq 0$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}$$

$$0 \leq r \leq d$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{e discreto}$$

$$\forall (i, j) \in \Omega$$

Este problema transformado é não linear nas variáveis de operação. A não linearidade vem dos termos $f_{ij}/(\theta_i - \theta_j)$. Assim, o problema é adequado para a aplicação da decomposição de Benders generalizada que resolve problemas de programação não linear e a convergência é garantida sob certas condições que são amplamente discutidos no Apêndice A. No contexto da decomposição de Benders generalizada ainda é possível definir cortes:

$$w^k + \sigma^k(x - x^k) \leq \beta \quad (3.11)$$

em que σ^k é o vetor de índice de sensibilidade com respeito à susceptância das linhas.

3.4.2 A Decomposição de Benders Generalizada

Considere o seguinte problema de otimização:

$$\text{Min } f(x, y) \tag{3.12}$$

s.a.

$$G(x, y) = 0$$

$$x \in X; \quad y \in Y$$

onde x é o vetor de variáveis “complicadas” ou que apresentam características diferentes das variáveis y que justifiquem um processo de resolução separado.

No problema da expansão da transmissão, x são as variáveis de investimento e y as variáveis de operação. $G(x, y) = 0$ para x fixo expressa, portanto, as restrições do problema de mínimo corte de carga (3.8). Os conjuntos X e Y expressam as restrições específicas para as variáveis de investimento e operação, respectivamente.

O problema (3.12) pode ser escrito em termos de x através de uma projeção nas variáveis y :

$$\text{Min } v(x) \tag{3.13}$$

s.a.

$$x \in X$$

onde:

$$v(x) = \text{Min } f(x, y) \tag{3.14}$$

s.a.

$$G(x, y) = 0$$

$$y \in Y$$

Sob condições de *convexidade e estabilidade*, para algum $\bar{x} \in X$ existe $\pi(\bar{x})$ tal que:

$$\begin{aligned}
v(\bar{x}) &= \inf_{y \in Y} \{f(\bar{x}, y) - \pi^t(\bar{x}) G(\bar{x}, y)\} \\
v(\bar{x}) &= \sup_{\pi} \{ \inf_{y \in Y} [f(\bar{x}, y) - \pi^t G(\bar{x}, y)] \}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Assim, tal $\pi(\bar{x})$ é a solução ótima dual do problema (3.14) com $x = \bar{x}$. Isto implica que (3.12) pode ser escrito da seguinte forma,

$$Min \quad \beta \tag{3.16}$$

s.a.

$$\begin{aligned}
&x \in X \\
&\inf_{y \in Y} \{f(x, y) - \pi^t G(x, y)\} \leq \beta ; \forall \pi
\end{aligned}$$

Desde que o problema mestre (3.16) tenha muitas restrições, a estratégia mais natural para resolvê-lo é relaxação. Seja:

$$L^*(x, \pi) = \inf_{y \in Y} \{f(x, y) - \pi^t G(x, y)\} \tag{3.17}$$

Algoritmo de Decomposição de Benders Generalizada:

1. Seja $\bar{x} \in X$ factível para (3.14). Resolver o problema (3.14) e obter $v(\bar{x})$, $\bar{\pi} = \pi(\bar{x})$ e a função $L^*(x, \bar{\pi})$.
2. $v(\bar{x})$ é um limite superior do valor ótimo pois \bar{x} é factível. Seja $\bar{z} = v(\bar{x})$. Inicializar: $J = 1$; $\pi^1 = \bar{\pi}$. Definir a tolerância ϵ .
3. Resolver o problema relaxado:

$$Min \quad \beta \tag{3.18}$$

s.a.

$$\begin{aligned}
&x \in X \\
&\beta \geq L^*(x, \pi^j); \quad \forall j = 1, \dots, J
\end{aligned}$$

4. Seja $\hat{\beta}$ a solução ótima do problema (3.18). Como (3.18) é uma versão relaxada de (3.16), $\hat{\beta}$ é um limite inferior do valor ótimo. Seja $\underline{z} = \hat{\beta}$. Se $\bar{z} - \underline{z} \leq \epsilon$, pare. Em caso contrário ir ao passo (5).
5. Seja \hat{x} a solução de (3.18). Resolver (3.14) e calcular $v(\hat{x})$, $\hat{\pi} = \pi(\hat{x})$ e $L^*(x, \hat{\pi})$. Seja $\bar{z} = \text{Min}\{\bar{z}, v(\hat{x})\}$. Se $\bar{z} - \underline{z} \leq \epsilon$, pare. Em caso contrário ir ao passo (6).
6. Seja $J = J + 1$; $\pi^j = \hat{\pi}$. Ir ao passo (3).

O passo mais difícil no algoritmo é a solução do problema mestre (3.18) pois, no caso geral, não é fácil obter explicitamente as funções $L^*(x, \pi^j)$. Assim, a decomposição de Benders generalizada é normalmente usada em problemas que têm a chamada propriedade (P). A **propriedade (P)** significa que o ínfimo de $f(x, y) - \pi^t G(x, y)$ sobre Y é essencialmente independente de x, assim a função $L^*(., \pi)$ sobre X pode ser obtida explicitamente com pequeno ou nenhum esforço adicional, além do requerido para calculá-la para um valor simples x.

Um caso importante em que se cumpre a propriedade (P) é quando f e G são linearmente separáveis em x e y; isto é:

$$f(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$$

$$G(x, y) = G_1(x) + G_2(y)$$

Neste caso:

$$L^*(x, \bar{\pi}) = \inf_{y \in Y} \{f_2(y) - \bar{\pi}^t G_2(y)\} + f_1(x) - \bar{\pi}^t G_1(x) \quad (3.19)$$

3.4.3 Decomposição de Benders no Modelo FCDC

Para aplicar a decomposição de Benders generalizada ao problema de planejamento de sistemas de transmissão usando o Modelo de FCDC, deve-se formular o problema separando suas variáveis de investimento e operação, como em (3.10). Neste caso é possível obter uma expressão geral do tipo $G_1(x) = -x$. Assim, supor que $G_1(x) = -x$ no problema (3.14) é que o mínimo de:

$$w(x) = \text{Min } f_2(y) \quad (3.20)$$

s.a.

$$\begin{aligned} G_2(y) &= x \\ y &\in Y \end{aligned}$$

é atingido para algum $x \in X$.

Agora, para algum $(\bar{y}, \bar{\pi})$ que vem da solução de (3.20) com $x = \bar{x}$,

$$\mathbf{L}^*(\mathbf{x}, \bar{\pi}) = \mathbf{f}_2(\bar{\mathbf{y}}) - \bar{\pi}^t \underbrace{G_2(\bar{\mathbf{y}})}_{\bar{x}} + \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) - \bar{\pi}^t \underbrace{G_1(\mathbf{x})}_{-x} \quad (3.21)$$

e assim, obtém-se:

$$\mathbf{L}^*(\mathbf{x}, \bar{\pi}) = \mathbf{f}_2(\bar{\mathbf{y}}) + \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) + \bar{\pi}^t(\mathbf{x} - \bar{x}) \quad (3.22)$$

Com estas considerações, o problema de otimização geral (3.13) pode ser escrito como:

$$\text{Min } \{f_1(x) + w(x)\} \quad (3.23)$$

s.a.

$$x \in X$$

e o problema mestre relaxado como:

$$\text{Min } \{f_1(x) + \beta\} \quad (3.24)$$

s.a.

$$x \in X$$

$$w^{jt} + \pi^{jt}(x - x^j) \leq \beta; \quad j = 1, \dots, J.$$

onde w^j é a solução ótima do subproblema (3.20) com $x = x^j$ e π^j é a solução dual do subproblema (3.20) com $x = x^j$. Em (3.24) $f_1(x)$ foi transferido do corte obtido de (3.22) para a função objetivo.

Se $w(x) \geq 0; \forall x \in X$ então pode-se adicionar a restrição:

$$\beta \geq 0 \tag{3.25}$$

ao problema (3.24). Isto é importante na prática para evitar soluções ilimitadas indesejáveis no problema mestre.

Para aplicar a decomposição de Benders generalizada, deduzida anteriormente, ao problema (3.8), reescreve-se (3.8) para que as variáveis de investimento e operação sejam linearmente separáveis, assim:

$$\text{Min} \left\{ \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij} x_{ij} + \alpha e^t r \right\} \tag{3.26}$$

s.a.

$$S f + g + r = d$$

$$\frac{f_{ij}}{\theta_i - \theta_j} - \gamma_{ij}^0 - x_{ij} = 0$$

$$|f_{ij}| - \gamma_{ij}^0 \bar{\phi}_{ij} - x_{ij} \bar{\phi}_{ij} \leq 0$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}$$

$$0 \leq r \leq d$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{e discreto}$$

$$\forall (i, j) \in \Omega$$

Então, o subproblema de operação é:

$$\text{Min } w = \alpha e^t r \quad (3.27)$$

s.a.

$$\begin{aligned} S f + g + r &= d \\ \frac{f_{ij}}{\theta_i - \theta_j} - \gamma_{ij}^0 &= x_{ij} \\ |f_{ij}| - \gamma_{ij}^0 \bar{\phi}_{ij} &\leq x_{ij} \bar{\phi}_{ij} \\ 0 &\leq g \leq \bar{g} \\ 0 &\leq r \leq d \\ \forall (i, j) &\in \Omega \end{aligned}$$

que é equivalente ao problema de programação linear seguinte:

$$\text{Min } w = \alpha e^t r \quad (3.28)$$

s.a.

$$\begin{aligned} S f + g + r &= d \\ f_{ij} - (\gamma_{ij}^0 + x_{ij})(\theta_i - \theta_j) &= 0 \\ |f_{ij}| &\leq (\gamma_{ij}^0 + x_{ij}) \bar{\phi}_{ij} \\ 0 &\leq g \leq \bar{g} \\ 0 &\leq r \leq d \\ \forall (i, j) &\in \Omega \end{aligned}$$

e o problema mestre ou subproblema de investimento é o seguinte:

$$\text{Min } \left\{ \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij} x_{ij} + \beta \right\} \quad (3.29)$$

s.a.

$$\begin{aligned} x_{ij} &\geq 0; \quad \text{e discreto} \quad \forall (i,j) \in \Omega \\ w^k + \sum_{(i,j) \in \Omega} \sigma_{ij}^k (x_{ij} - x_{ij}^k) &\leq \beta; \quad k = 1, \dots, K \\ \beta &\geq 0 \end{aligned}$$

onde;

$w^k \rightsquigarrow$ é o valor ótimo de (3.28) com $x_{ij} = x_{ij}^k; \quad \forall (i,j) \in \Omega$.

$\sigma_{ij}^k \rightsquigarrow$ é o índice de sensibilidade de (3.28) com respeito a x_{ij} com $x_{ij} = x_{ij}^k; \quad \forall (i,j) \in \Omega$.

3.4.4 Cálculo do Índice de Sensibilidade σ_{ij}

Na aplicação da decomposição de Benders à expansão ótima dos sistemas de transmissão com o Modelo de FCDC, o problema mestre é resolvido através de programação linear, na versão relaxada e com programação linear inteira, na versão completa. O subproblema de operação é resolvido através de programação linear. Os índices de sensibilidade podem ser obtidos da solução ótima do subproblema de operação.

Considere o problema de programação linear:

$$\text{Min } w = \alpha e^t r \quad (3.30)$$

s.a.

$$\begin{aligned} Sf + g + r &= d \\ f_{ij} - \gamma_{ij}(\theta_i - \theta_j) &= 0 \\ |f_{ij}| &\leq \gamma_{ij} \bar{\phi}_{ij} \\ 0 &\leq g \leq \bar{g} \\ 0 &\leq r \leq d \\ \forall (i,j) &\in \Omega \end{aligned}$$

O problema (3.30) é o problema de mínimo corte de carga (MLS) e tem relação direta com o subproblema que aparece na aplicação da decomposição de Benders ao problema (3.8). O problema (3.30) pode ser escrito assim:

$$\text{Min } w = \alpha e^t r \quad (3.31)$$

s.a.

$$B\theta + g + r = d \quad (3.31a)$$

$$\gamma_{ij}(\theta_i - \theta_j) \leq \gamma_{ij}\bar{\phi}_{ij} \quad (3.31b)$$

$$-\gamma_{ij}(\theta_i - \theta_j) \leq \gamma_{ij}\bar{\phi}_{ij} \quad (3.31c)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g} \quad (3.31d)$$

$$0 \leq r \leq d \quad (3.31e)$$

$$\forall (i, j) \in \Omega$$

em que B é a matriz de susceptâncias ($N \times N$):

$$B = (b_{ij})$$

$$b_{ks} = \begin{cases} \gamma_{ks} & \text{se } (k, s) \in \Omega \text{ e } k \neq s \\ -\sum_{j \in \Omega_k} \gamma_{kj} & \text{se } k = s \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\Omega_k = \{s, (k, s) \in \Omega\}$$

Observa-se que se $\gamma_{ij} > 0; \forall (i, j) \in \Omega$, então o problema (MLS) (3.31) tem a seguinte forma:

$$\text{Min } w = \alpha e^t r \quad (3.32)$$

s.a.

$$B\theta + g + r = d \quad (3.32a)$$

$$(\theta_i - \theta_j) \leq \bar{\phi}_{ij} \quad (3.32b)$$

$$-(\theta_i - \theta_j) \leq \bar{\phi}_{ij} \quad (3.32c)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}; \quad (3.32d)$$

$$0 \leq r \leq d \quad (3.32e)$$

$$\forall (i, j) \in \Omega$$

O problema (MLS) nos formatos dos problemas (3.31) e (3.32) é sempre factível pois, se $g = 0$; $\theta = 0$; $r = d$ obtém-se, então, uma solução factível.

Na decomposição de Benders usando o Modelo de FCDC resolve-se o subproblema de operação com a estrutura (3.31) ou (3.32). Assim, deve-se determinar os índices de sensibilidade σ_{ij} do problema de mínimo corte de carga (MLS), isto é, do problema (3.32).

A determinação dos índices de sensibilidade σ_{ij} precisa de um desenvolvimento teórico um pouco complicado. Assim, toda a análise teórica para a determinação de σ_{ij} é apresentada no Apêndice A. Neste Capítulo, apresenta-se apenas o resultado final obtido. Portanto, os índices de sensibilidade σ_{ij} , usando o Modelo de FCDC, são obtidos pela relação:

$$\sigma_{ij}^{MLS} = \pi_{ij}(0) = (\pi_i^0 - \pi_j^0)(\theta_i - \theta_j) \quad \forall (i, j) \in \Omega \quad (3.33)$$

onde:

π_i^0 são as variáveis duais ótimas associadas às restrições (3.32.a).

θ_i são as defasagens angulares nas barras na solução ótima de (3.32).

3.5 Resolução do Modelo Híbrido Usando a Decomposição de Benders

O problema de planejamento da expansão a longo prazo de sistemas de transmissão, formulado usando o Modelo Híbrido assume a seguinte forma:

$$\text{Min } v = \left\{ \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij} x_{ij} + \alpha e^t r \right\} \quad (3.34)$$

s. a.

$$S f + g + r = d$$

$$f_{ij} - (\gamma_{ij}^0 + x_{ij})(\theta_i - \theta_j) = 0; \quad \forall (i, j) \in \Omega_1$$

$$|f_{ij}| - x_{ij} \bar{\phi}_{ij} \leq \gamma_{ij}^0 \bar{\phi}_{ij}$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}$$

$$0 \leq r \leq d$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ e discreto}$$

$$\forall (i, j) \in \Omega$$

onde Ω representa o conjunto de todos os circuitos (candidatos e existentes), em que é permitida adição de novos circuitos e Ω_1 representa o conjunto de elementos de Ω , em cujos ramos existem circuitos na configuração inicial.

3.5.1 Decomposição do Modelo Híbrido

De maneira similar à decomposição do Modelo de Transportes e do Modelo de FCDC, o Modelo Híbrido pode ser decomposto em dois subproblemas:

O subproblema de operação é definido pela relação:

$$\text{Min } w = \alpha e^t r \quad (3.35)$$

s.a.

$$B_1 \theta + S_2 f + g + r = d \quad (3.35a)$$

$$|(\theta_i - \theta_j)| \leq \bar{\phi}_{ij}; \quad \forall (i, j) \in \Omega_1 \quad (3.35b)$$

$$|f_{ij}| \leq (\gamma_{ij}^o + x_{ij}) \bar{\phi}_{ij}; \quad \forall (i, j) \in \Omega_2 \quad (3.35c)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}$$

$$0 \leq r \leq d$$

em que B_1 é a matriz de susceptância da rede existente, S_2 é a matriz de incidência nó-ramo dos novos ramos ou circuitos candidatos (isto é, ramos nos quais inicialmente não existiam circuitos, mas que são permitidas adições) e Ω_2 representa o subconjunto de Ω constituído por estes novos ramos.

E o subproblema mestre ou subproblema de investimento é definido pela relação:

$$\text{Min } v = \left\{ \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij} x_{ij} + \beta \right\} \quad (3.36)$$

s.a.

$$w^k + \sum_{(i,j) \in \Omega} \sigma_{ij}^k (x_{ij} - x_{ij}^k) \leq \beta$$

$$\beta \geq 0$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ e discreto}$$

$$\forall (i, j) \in \Omega$$

Os índices de sensibilidade σ_{ij} são uma combinação dos índices de sensibilidade dados para os modelos de transportes e FCDC, assim estes índices são obtidos pelas relações:

$$\sigma_{ij} = (\pi_i^0 - \pi_j^0)(\theta_i - \theta_j); \quad \forall (i, j) \in \Omega_1 \quad (3.37)$$

$$\sigma_{ij} = -\pi_{ij} \bar{\phi}_{ij}; \quad \forall (i, j) \in \Omega_2 \quad (3.38)$$

nas quais π_i^0 são as variáveis duais (multiplicadores de Lagrange) associadas às restrições (3.35a) e π_{ij} são as variáveis duais (multiplicadores de Lagrange) associadas às restrições (3.35c).

3.6 Planejamento Hierarquizado

3.6.1 Justificativa do Planejamento Hierarquizado

Nas seções anteriores, foi apresentada uma maneira sistemática de resolver o problema de planejamento, usando a decomposição de Benders para os três tipos de modelamento do sistema elétrico: Modelo de Transportes, Modelo de Fluxo de Carga DC e Modelo Híbrido. Em princípio, pode-se usar cada metodologia, independentemente, para resolver o problema de planejamento. Entretanto, existem algumas limitações ou complicações ao implementar cada metodologia separadamente. Estas dificuldades são apresentadas, em forma resumida, para justificar a implementação de uma metodologia hierarquizada. É também oportuno lembrar que o problema de planejamento apresenta três grandes dificuldades que devem ser contornadas de alguma forma: O problema de **rede inicial não conexa**, o problema de **não convexidade**, que pode levar a atingir um ótimo local antes do ótimo global e o problema de **esforço computacional**, ao resolver de maneira iterativa o subproblema de investimento que é um problema de programação linear inteira (PLI).

Em relação ao Modelo de Transportes, não existe maior dificuldade, pois ele não apresenta problemas quando é utilizado para resolver um sistema elétrico não conexo e também não apresenta problemas de convexidade. Portanto, a única dificuldade é a necessidade de usar um algoritmo de PLI ao resolver iterativamente o subproblema de investimento. Este esforço computacional pode ser aliviado separando o problema em duas fases: Na primeira fase resolve-se um subproblema de investimento relaxando o caráter discreto das variáveis de investimento. Assim, com variáveis de investimento contínuas, o subproblema de investimento é simplesmente um PL que pode ser resolvido por um algoritmo de PL especializado. Na fase final é reintegrado o caráter discreto das variáveis de investimento, sendo necessário a utilização de um algoritmo de PLI. Assim, pode-se reduzir o número de iterações de PLI reduzindo, conseqüentemente, o uso do algoritmo de PLI e o esforço computacional global.

A limitação ao usar o Modelo de Transportes em forma independente ou separada está na **qualidade da solução final** obtida, pois este modelo só leva em conta a Primeira Lei de Kirchhoff e, assim, a alternativa de investimento obtida pode ficar muito distante da solução real desejada para futuros estudos de planejamento.

A utilização do Modelo Híbrido em forma independente ou separada apresentaria características muito parecidas às do Modelo de Transportes. Novamente, pode-se implementar um processo de otimização de duas fases mas, neste caso, os problemas de convexidade e convergência aumentam em complexidade de maneira significativa. Em compensação, a qualidade da solução final obtida é melhor.

A utilização do Modelo de FCDC, o modelo mais adequado para planejamento, apresenta todas as dificuldades mencionadas anteriormente. Este modelo não pode trabalhar se a rede inicial é não conexa, os problemas de convexidade aumentam significativamente apresentando freqüentemente grandes problemas de convergência e soluções ótimas locais, e a necessidade de usar iterativamente um algoritmo de PLI para resolver o subproblema de investimento. A implementação de um processo de duas fases, relaxando a integralidade dos circuitos candidatos a investimento na primeira fase, não consegue contornar as dificuldades mencionadas. Também, a utilização de uma rede fictícia para evitar o problema de rede inicial não conexa contorna só em parte esta dificuldade.

Levando em conta as dificuldades mencionadas, foi projetado um novo algoritmo de planejamento hierarquizado, tentando tirar proveito das melhores qualidades de cada modelo e contornando suas limitações.

3.6.2 A Formulação do Planejamento Hierarquizado

Como já foi mencionado, a idéia do planejamento hierarquizado é contornar as dificuldades ao usar cada modelo de planejamento independentemente ou de maneira separada. Na metodologia hierarquizada, resolve-se, sucessivamente, problemas relaxados eliminando ou relaxando algumas restrições, na tentativa de contornar os problemas de convexidade. Estas restrições relaxadas são paulatinamente reintroduzidas. Assim, inicialmente é resolvido o problema de planejamento relaxando as restrições que representam a Segunda Lei de Kirchhoff e a natureza discreta das variáveis de investimento, isto equivale a resolver o problema usando o Modelo de Transportes com variáveis de investimento contínuas. A solução ótima obtida, assim como as outras informações relevantes como os cortes de Benders gerados, são reutilizadas para iniciar o processo de solução no estágio seguinte em que é usado o Modelo Híbrido com variáveis de investimento contínuas. Neste Modelo Híbrido, as linhas correspondentes aos circuitos existentes são tratadas usando o Modelo de FCDC e as linhas correspondentes a novos caminhos, em que novas adições são permitidas, são tratadas usando o Modelo de Transportes. Finalmente, são reintroduzidas todas as restrições do Modelo de FCDC e a integralidade das variáveis de investimento na fase final. Assim, aparece um algoritmo básico de planejamento hierarquizado de três fases usando a decomposição de Benders em cada fase.

Em cada nível ou fase do algoritmo hierarquizado, o problema de planejamento da expansão da transmissão é decomposto pelo método de Benders em dois subproblemas, como é mostrada na Figura 3.1. Durante o processo de solução, estes dois subproblemas trocam informação. O mestre informa ao escravo acerca das decisões de investimento (incremento na capacidade de transmissão) e o escravo informa ao mestre acerca das necessidades de transmissão (os cortes de Benders gerados). O subproblema de operação, a partir de uma alternativa de investimento apresentada pelo subproblema de investimento, minimiza o uso dos geradores fictícios para apresentar um fluxo de carga sem violar as restrições de operação. Se, num estágio do processo, as decisões de investimento são tais que é possível obter um ponto de operação com geração fictícia igual a zero, então foi obtida uma solução parcial para o problema da expansão e o processo passa ao nível seguinte. Por outro lado, quando não é possível obter um ponto de operação factível sem recorrer aos geradores fictícios, então deve-se enviar informações relevantes, acerca das necessidades de operação, ao subproblema de investimento, através dos cortes de Benders. Estes cortes, incorporados ao subproblema de investimento como restrições adicionais, têm um papel fundamental no mecanismo de planejamento, pois eles informam ao subproblema de investimento acerca das necessidades de capacidade adicional de transmissão.

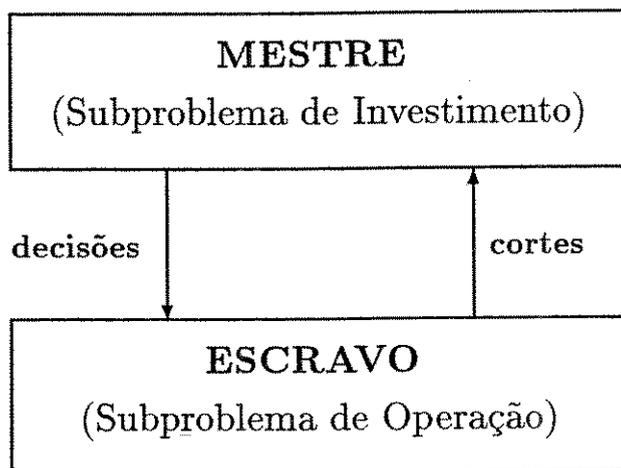


Figura 3.1: O Problema da Decomposição.

O subproblema de investimento apresenta dois tipos de restrições como é mostrado na

Figura 3.2. Um tipo de restrição são aquelas próprias das variáveis de investimento (tais como a restrição do número máximo de adições permitida em cada linha e as restrições de investimento ou orçamentária) e outras restrições são aquelas que fazem uma representação equivalente do subproblema de operação (um conjunto reduzido de restrições que representam implicitamente as restrições críticas de operação). A representação equivalente das restrições de operação contém basicamente o conjunto de cortes de Benders que estão disponíveis em qualquer estágio do processo e outros tipos de informação simplificada acerca da topologia da rede elétrica.

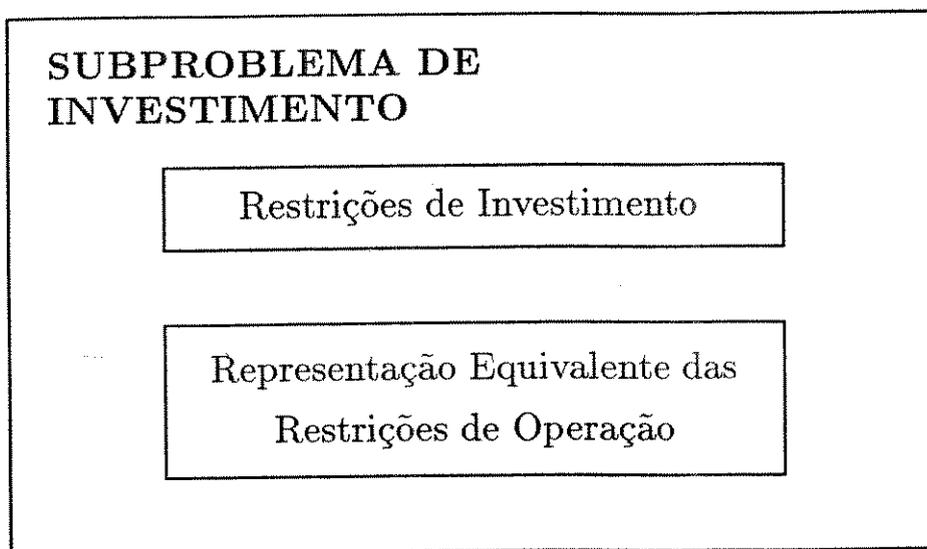


Figura 3.2: O Subproblema de Investimento.

A experiência prática mostra que a técnica de planejamento hierarquizado é uma forma simples e efetiva para contornar soluções ótimas locais. Mas esta é só uma das várias motivações para usar um planejamento hierarquizado. Outra motivação importante é a natureza combinatorial do problema. Resolver diretamente o subproblema de investimento, mantendo sua natureza discreta, pode levar a um esforço computacional excessivo, pois exigiria a resolução de um problema de PLI em cada iteração. Na metodologia hierarquizada, quando é usado um algoritmo de PLI na fase III, o processo já está perto da solução final, sendo necessário apenas algumas iterações de PLI para atingir a solução ótima global. Finalmente, a outra motivação importante é que a metodologia hierarquizada contorna facilmente o problema de rede inicial não conexa, pois na fase inicial, a Fase I, o Modelo de Transportes não apresenta nenhuma dificuldade para trabalhar com uma rede não conexa. Por outro lado, na fase final ou Fase III, o problema de rede não conexa

praticamente desaparece e, nas raras vezes em que ele se apresenta, são contornados pelo uso de uma rede fictícia superposta ao sistema real.

3.6.3 Formulação Básica do Planejamento Hierarquizado

As três fases do algoritmo hierarquizado podem ser resumidas na seguinte forma:

- **Fase I: Modelo de Transportes - Variáveis de Investimento Contínuas**

Nesta fase, a técnica de decomposição é aplicada ao problema de planejamento da expansão relaxado em que a rede é representada por um Modelo de Transportes, e os subproblemas resultantes (subproblema de operação e investimento) são resolvidos alternadamente até atingirem a convergência. Uma relaxação adicional é considerar as variáveis de investimento contínuas. O subproblema de investimento é resolvido por um algoritmo padrão de programação linear. Como de uma iteração a outra, no processo iterativo, o subproblema de investimento difere somente em uma restrição (último corte de Benders adicionado), então o algoritmo mais adequado é do tipo dual simplex, aproveitando, desta maneira, a base dual ótima da iteração anterior do subproblema de investimento. A base ótima anterior é dual factível para o novo subproblema de investimento com uma restrição adicionada. Assim, com poucas iterações dual simplex, atinge-se a nova solução ótima tornando o processo mais rápido e evitando resolver cada subproblema de investimento isoladamente usando um algoritmo primal simplex. O subproblema de operação é também um problema de programação linear e pode-se usar um algoritmo de programação linear primal simplex ou algum dos algoritmos especializados de programação linear, projetados para sistemas elétricos como os desenvolvidos em [10]. Os resultados de investimento, assim como os cortes de Benders gerados no processo, são reutilizados nas fases seguintes.

- **Fase II: Modelo Híbrido - Variáveis de Investimento Contínuas**

Nesta fase, a técnica de decomposição de Benders é aplicada ao problema de planejamento relaxado, no qual a rede é representada pelo Modelo Híbrido (Modelo de FCDC para os circuitos existentes e Modelo de Transportes para os circuitos candidatos em novos caminhos) e ainda mantêm-se relaxadas as variáveis de investimento, considerando-as como variáveis contínuas. O subproblema de investimento é resolvido como na Fase I e o subproblema de operação pode ser resolvido usando técnicas especializadas de programação linear em sistemas de potência, como as apresentadas em [9, 10] ou mesmo algoritmos de PL padrão do tipo primal simplex. Assim, como na Fase I, os resultados de investimento e os cortes de Benders gerados no processo são transferidos para a fase seguinte.

- **Fase III: Modelo de FCDC - Variáveis de Investimento Discretas**

Nesta fase final é reintroduzida a natureza discreta das variáveis de investimento e as restrições correspondentes à Segunda Lei de Kirchhoff para todos os circuitos do sistema elétrico, existentes e candidatos. O subproblema de operação é um problema de fluxo de carga DC e pode ser resolvido usando os algoritmos sugeridos na Fase II ou técnicas tradicionais de fluxo de carga DC como os utilizados em [10]. O subproblema de investimento torna-se agora muito mais complicado para resolver, pois ele é um problema de programação linear inteira (PLI). Em princípio, pode-se usar qualquer algoritmo de programação inteira para resolver este subproblema de investimento. Entretanto, as características específicas do problema de planejamento fazem com que determinados tipos de algoritmos sejam mais eficientes que outros. A discussão do melhor algoritmo para resolver o subproblema de investimento faz parte integrante da presente tese, assim como o desenvolvimento de um algoritmo de enumeração implícita especializado que é apresentado em capítulo a parte. Esta fase, obviamente, consome o maior esforço de tempo de computação pela necessidade de resolver iterativamente um problema de PLI.

3.6.4 Discussão Sobre Ótimos Locais e Global

O maior obstáculo para a aplicação prática da técnica de decomposição de Benders está associado à convexidade, pois o problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão é não convexo. Uma visualização deste tipo de comportamento é mostrada na Figura 3.3.a. A figura ilustra a minimização de uma função linear com restrições que determinam uma região factível não convexa que não é explicitamente conhecida, mas ela é gradualmente construída através de uma sequência de hiperplanos (cortes de Benders na decomposição de Benders). Entretanto, é possível que um hiperplano corte ou jogue fora parte da região factível, como é mostrado na Figura 3.3.a, levando o processo à obtenção de uma solução ótima que é mínimo local. Em aplicações práticas de problemas de planejamento esta situação acontece, às vezes, quando é permitida a adição de novos circuitos em caminhos onde inicialmente não existia nenhum circuito.

Em contrapartida, na técnica hierarquizada, o problema de planejamento é resolvido em três fases como é ilustrado na Figura 3.3.b; na Fase I, onde a formulação é convexa, é obtida uma solução ótima, que tipicamente representa uma parte significativa do investimento total (40 a 70 %); na Fase II acontecem investimentos adicionais depois de incorporar alguns cortes de Benders, tipicamente entre 10 e 20 % do investimento total e finalmente, na Fase III, é realizado o investimento complementar necessário para atingir a solução ótima global. A característica mais importante a ser observada na metodologia hierarquizada é que, quando o método passa a tratar o sistema elétrico não relaxado, com região factível não convexa, o processo já está suficientemente perto da solução ótima

global, reduzindo consideravelmente a chance de atingir uma solução ótima local.

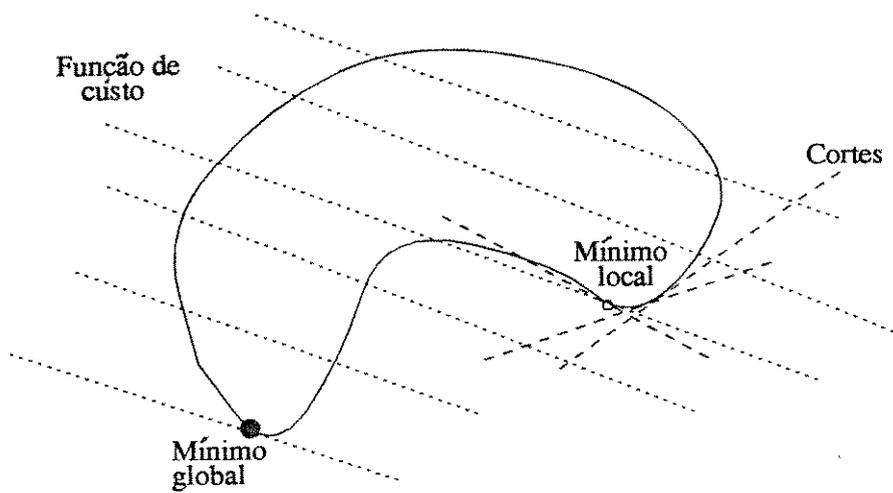
3.6.5 Idéias Alternativas Para Melhorar o Desempenho da Metodologia de Decomposição de Benders

Na metodologia de planejamento usando a decomposição de Benders, o subproblema de investimento têm 2 tipos de restrições: as restrições próprias de investimento e as restrições que representam de maneira aproximada o subproblema de operação. Este segundo tipo de restrições, na formulação básica, está representado unicamente pelos cortes de Benders. Entretanto, é possível e altamente desejável incorporar outros tipos de restrições relativas ao subproblema de operação do sistema elétrico. Estas restrições, cuja única condição é de que não cortem a região factível do problema, embora sejam relaxadas, podem introduzir uma melhoria significativa na convergência do problema de planejamento. Assim, o subproblema de investimento pode ser esquematizado como é mostrado na Figura 3.4, onde foi explicitamente considerado um conjunto de restrições que não são os cortes de Benders. Estas restrições “ajudam”, às vezes de maneira significativa, os cortes de Benders na delimitação da região factível, levando, portanto, à geração de melhores cortes de Benders e a uma aceleração do processo de convergência. Neste sentido, apresenta-se algumas idéias alternativas para a obtenção destas outras restrições de operação.

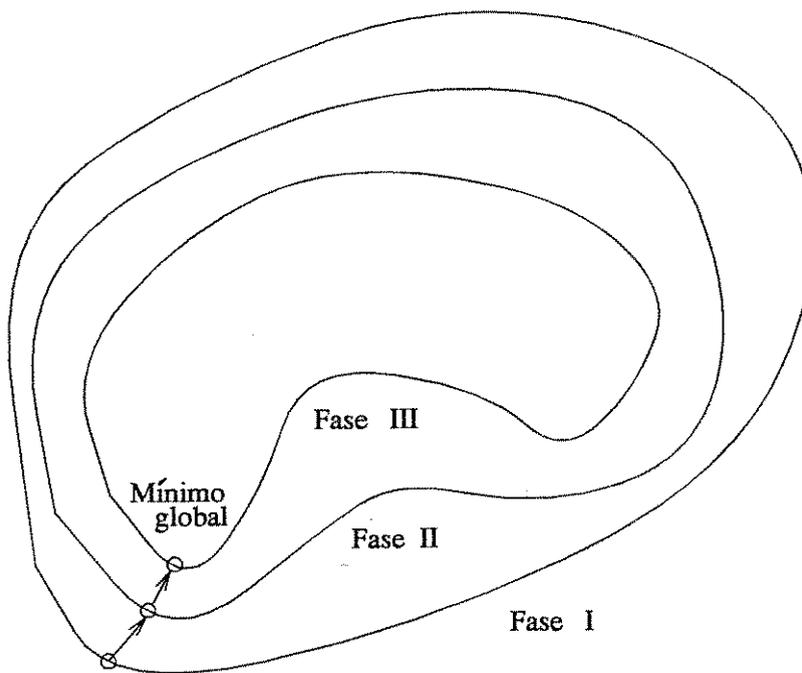
O Método de Cerca

O Método de Cerca é uma metodologia heurística desenvolvida nas primeiras pesquisas sobre problemas de planejamento [14]. Em forma simplificada, pode-se afirmar que o Método de Cerca é uma simplificação ou relaxação da metodologia usada para resolver o problema de planejamento usando o Modelo de Transportes.

No Método de Cerca, o sistema elétrico é separado em áreas denominadas centros de carga ou centros de geração. Assim, um centro de carga é uma área onde existe um excesso de carga líquida, isto é, a capacidade de transmissão de todas as linhas que atravessam a cerca é menor que a carga líquida dentro da cerca. Por outro lado, um centro de geração é uma área onde existe excesso de geração precisando-se, portanto, de novas linhas para levar o excesso de geração para fora da área definida pelo centro de geração. Estas áreas são cercadas imaginariamente para determinar o excesso de carga ou de geração. Uma metodologia heurística identifica o principal centro de geração e determina quais linhas devem ser construídas para os respectivos centros de carga vizinhos. Neste processo são usadas cercas sucessivas para determinar os excessos de carga ou de geração. O processo



(a)



(b)

Figura 3.3: Metodologia Hierarquizada e o Problema de Não Convexidade.

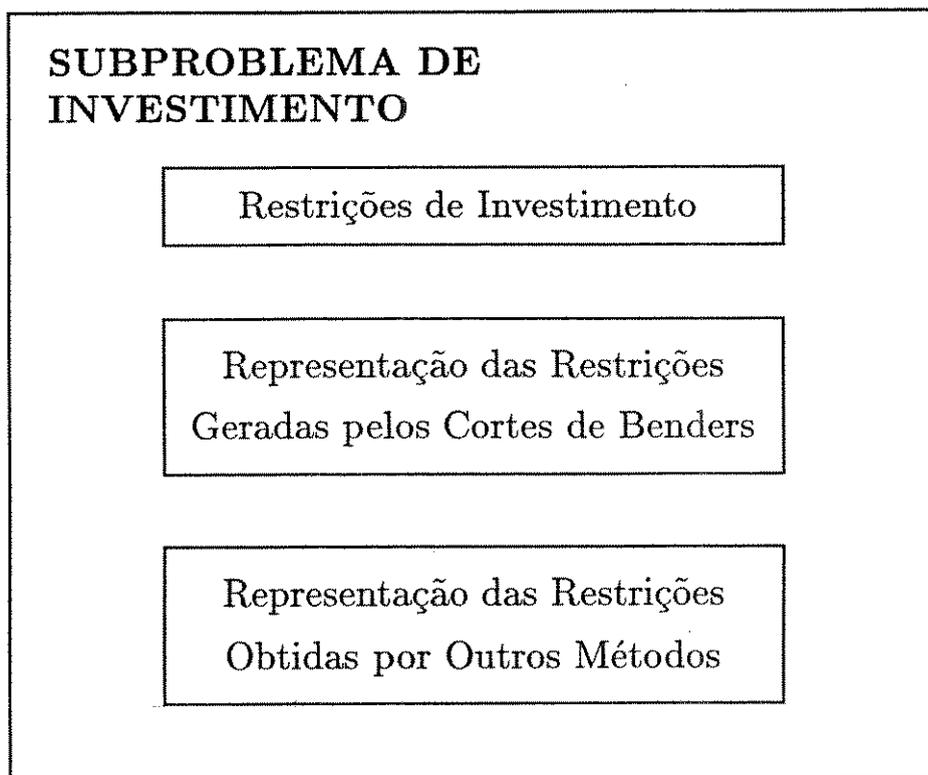


Figura 3.4: O Subproblema de Investimento Modificado.

termina quando nenhuma área tem excesso de carga ou geração.

Pode-se retomar a idéia fundamental do método de cerca para gerar restrições de operação identificando, através de cercas, áreas com excesso de carga ou de geração. Neste contexto, uma cerca, na verdade, é um corte no grafo do circuito elétrico, isto é, a cerca equivale à aplicação da Primeira Lei de Kirchhoff para uma área, como caso geral da aplicação para um nó. A eficiência da restrição gerada pela cerca pode ser forte ou fraca dependendo muito do tipo de cerca escolhido. Estas características são ilustradas através de 2 exemplos de um sistema elétrico real.

Na Figura 3.5 é mostrada uma parte do sistema sul brasileiro em 1980 cujos dados estão em [11], que corresponde a uma área ou região de carga. São mostrados 5 cortes ou cercas e, entre parênteses, são mostradas as capacidades de transmissão das linhas existentes que apresentam interesse na análise. Todos os dados de potência estão em MW. Assim, nesta região de carga, as cercas 1 e 2 são totalmente ineficientes, pois as capacidades de

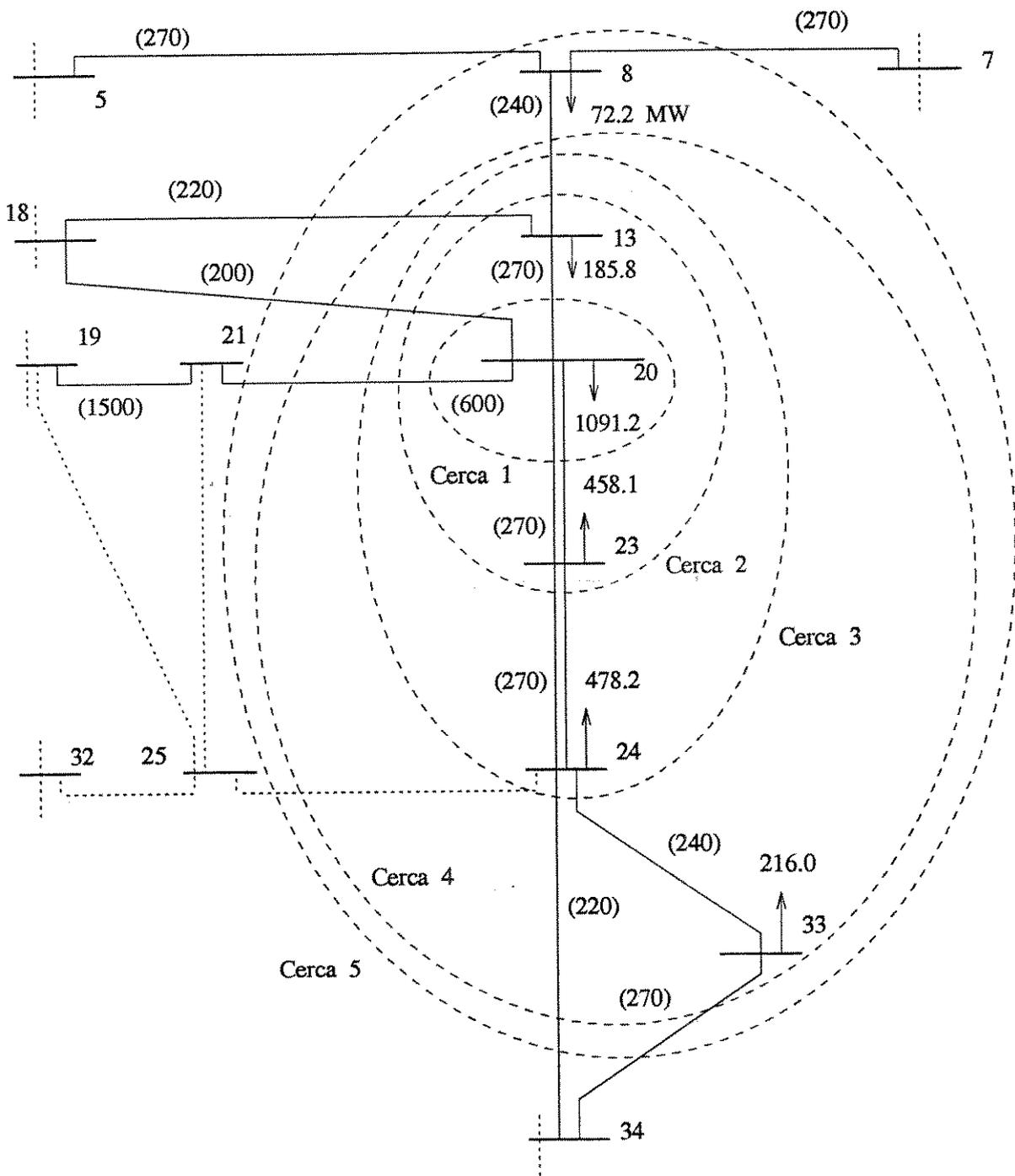


Figura 3.5: Método de Cerca para uma Região de Carga.

transmissão das linhas existentes são suficientes para fornecer a carga líquida dentro da cerca. Portanto, as cercas 1 e 2 levam a restrições de cerca fracas ou ineficientes. Por outro lado, as cercas 3, 4 e 5 identificam áreas com excessos de carga iguais a 493.3, 679.3 e 451.5 MW, respectivamente. Desta forma, a cerca 4 define a restrição mais forte e, a partir dela, pode-se gerar uma restrição de cerca que impõe a restrição de que o incremento na capacidade de transmissão nas linhas ou circuitos que são “cortadas” pela cerca 4 seja maior ou igual a 679.3 MW. Esta restrição pode ser “transformada” em termos das variáveis de investimento e incorporada ao subproblema de investimento, o que logicamente acelera o processo de convergência da metodologia de decomposição de Benders.

Na Figura 3.6 é mostrada uma região de geração do mesmo sistema sul brasileiro. Os dados mostrados correspondem ao caso em que a geração, em cada barra de geração é fixada. São mostradas 4 cercas, dentre as muitas possíveis, para ilustração. A cerca 1 é muito fraca, pois define uma área que não tem excesso de geração. Por outro lado, as cercas 2, 3 e 4 definem áreas que apresentam excessos de geração iguais a 438, 1288 e 2088 MW, respectivamente. Assim, estas 3 cercas podem gerar 3 restrições de cerca e, depois de serem transformadas em termos das variáveis de investimento, podem ser incorporadas ao subproblema de investimento.

As restrições de cerca, apesar de simples na parte conceitual, são muito importantes na aceleração do processo de convergência do problema de planejamento. Entretanto, existe a dificuldade em determinar quais são as melhores restrições de cerca dentre as muitas que podem ser geradas. A definição mais adequada das áreas ou regiões com excesso de carga ou de geração, assim como a determinação do melhor conjunto de restrições de cerca em termos do subproblema de investimento, representam tópicos que não fazem parte da presente tese. Experiências preliminares mostraram que as restrições de cerca produzem uma diminuição significativa das iterações de Benders no problema de planejamento. Pode-se dizer que estas restrições de cerca tornam “mais inteligente” o subproblema de investimento, o mestre, na hora de tomar decisões de operação.

Novos Caminhos Definidos por Linha de Transmissão - Transformador

No problema de planejamento, quando são incorporados circuitos candidatos em caminhos onde ainda não existem circuitos construídos, é muito freqüente a necessidade de adição simultânea de vários circuitos para transportar potência de uma barra de geração, ou com capacidade de transmitir potência, para uma barra com carga não satisfeita. Este fato é esquematizado na Figura 3.7. A barra k é uma barra de geração ou tem capacidade de transmitir potência gerada em outras barras; a barra m é uma barra de carga. Assim, uma possibilidade de fornecer a potência necessária na barra m pode ser através do sis-

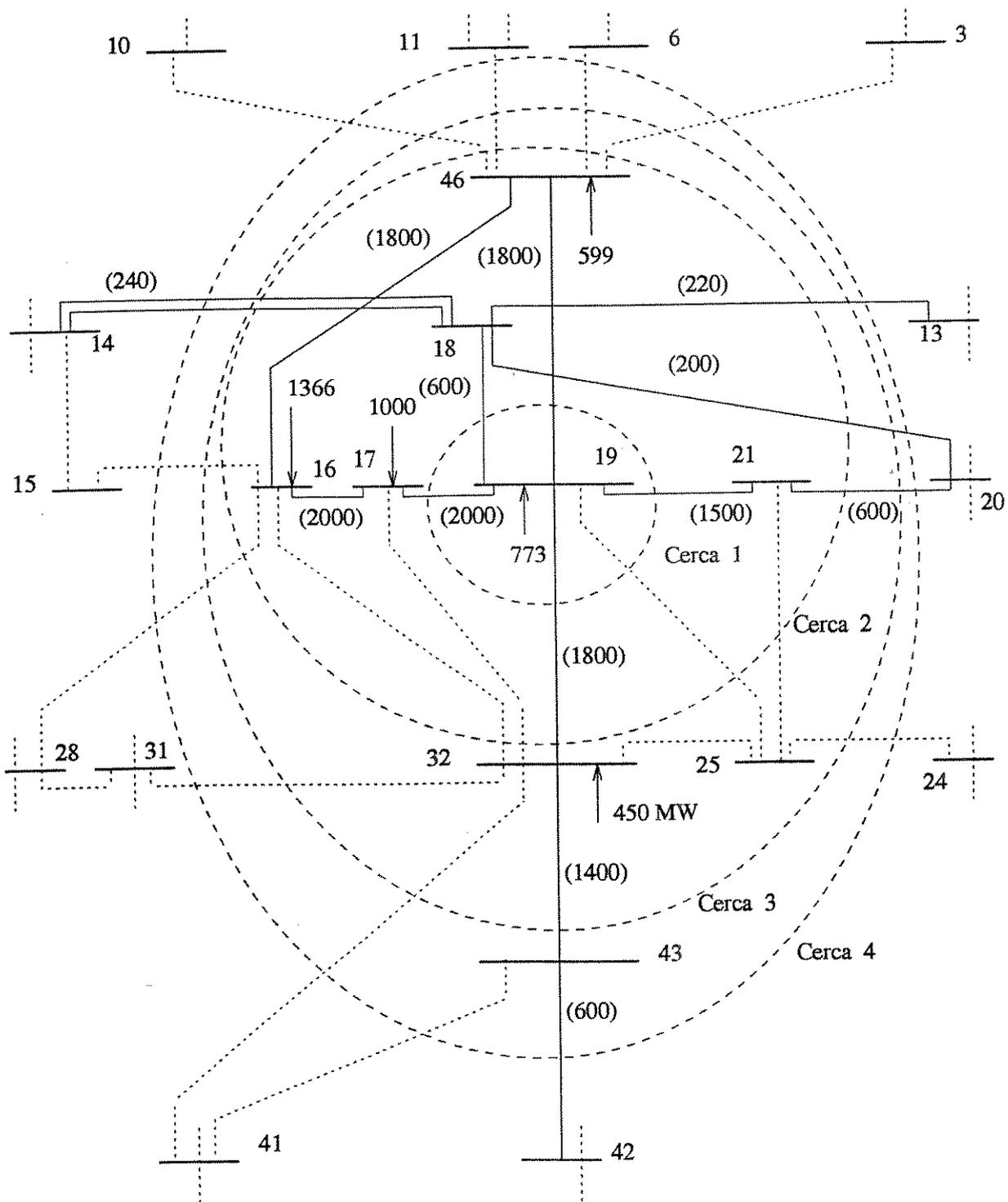


Figura 3.6: Método de Cerca para uma Região de Geração.

tema linha - transformador candidato, incorporando ao sistema a barra l, com as adições da linha k-l e o transformador l-m. Portanto, a adição de somente um destes circuitos não faz sentido, pois não contribui à transferência de potência da barra k à barra m.

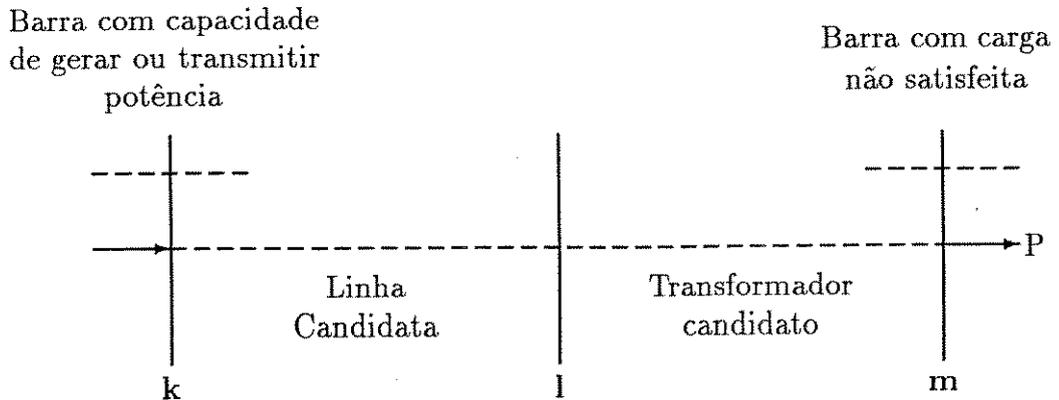


Figura 3.7: Caminho definido por linha-transformador

A metodologia padrão de decomposição de Benders não consegue resolver este problema da maneira mais adequada, em termos de esforço computacional. O que normalmente acontece é que a presença de carga não satisfeita na barra m “exige” a adição de um conjunto de circuitos candidatos, entre os quais, aparece o transformador l-m como forte candidato, mas essa “exigência” não aparece simultaneamente evidente para a linha k-l. Matematicamente este fato aparece claramente nos respectivos multiplicadores de Lagrange. Pode-se dizer, então, que o mestre “não consegue entender” como indispensáveis a adição simultânea dos circuitos k-l e l-m, pois o primeiro corte de Benders, que identifica a deficiência de carga em m, não fornece esta informação. Foi observado experimentalmente, por exemplo, para o caso do Modelo de Transportes, que a adição dos circuitos é realizada em três tentativas mostradas a seguir:

- Na iteração p o mestre faz investimento somente no transformador l-m.
- Na iteração $p + 1$ o mestre faz investimento somente na linha k-l.
- Na iteração $p + 2$ o mestre faz investimento simultâneo na linha k-l e no transformador l-m.

Desta maneira a metodologia de Benders resolve este problema depois de fazer uma oscilação, o que incrementa o número de cortes de Benders desnecessariamente. Uma forma de contornar esta dificuldade é incorporando restrições que impliquem na adição simultânea da linha e do transformador. Assim, para um conjunto linha-transformador, pode-se gerar uma restrição através da seguinte premissa:

Uma linha é adicionada se e somente se o correspondente transformador também é adicionado.

Restrições deste tipo podem ser facilmente sistematizadas e, depois de serem transformadas em termos das variáveis de investimento, incluídas como restrições de operação no subproblema de investimento. Em geral, podem existir outros tipos de caminhos como, por exemplo, o definido pelo conjunto transformador-linha-transformador.

Outras Restrições Alternativas

Em geral, pode-se construir outros tipos de restrições relativas ao subproblema de operação, as quais depois podem ser incorporadas ao subproblema de investimento. Neste sentido, existem várias outras formas de elaborar restrições relaxadas relativas ao problema de operação, entre as quais, pode-se mencionar todo tipo de heurísticas relacionadas com a experiência do planejador. A característica fundamental de todas estas restrições geradas, que não são as obtidas através dos cortes de Benders, é que elas sejam restrições relaxadas no sentido de que não “cortam” a região factível do problema de planejamento, mas que, em determinadas condições, tornam-se restrições muito fortes, redirecionando o processo de convergência do problema de planejamento.

3.6.6 O Conceito de Rede Fictícia

O conceito de rede fictícia, inicialmente usado para contornar o problema de rede inicial não conexa [4], é um conceito muito importante que é usado na Fase III da metodologia hierarquizada, em que o problema de planejamento é formulado usando o Modelo de FCDC. Nesta fase, é pouco provável que ainda exista uma rede não conexa, mas, se isto acontecer, a dificuldade é facilmente contornada pela utilização de uma rede artificial ou fictícia superposta ao sistema real em todos os novos caminhos para a adição de circuitos. Assim, se existem circuitos candidatos que definem novos caminhos e eles ainda não foram adicionados, adiciona-se artificialmente circuitos nestes caminhos. Estes circuitos artificiais possuem susceptâncias iguais a, por exemplo, 10^{-3} vezes os valores normais.

Pode-se ainda considerar que os fluxos máximos de potência transmitida por estas linhas de transmissão sejam várias vezes maior que os fluxos máximos de potência permitidas para as linhas normais, por exemplo de 2 a 10 vezes. Desta forma, o circuito torna-se conexo e as potências transmitidas por estas linhas são desprezíveis e não comprometem o desenvolvimento normal do algoritmo.

É importante enfatizar que, no planejamento hierarquizado, usando a decomposição de Benders, não existe o problema de rede inicial não conexa, pois o Modelo de Transportes (Fase I) não apresenta problemas para trabalhar com rede não conexa e, o Modelo Híbrido (Fase II) também não apresenta problema de tratar uma rede não conexa porque a parte correspondente a novos caminhos, nos quais ainda não existem circuitos, é modelada como no Modelo de Transportes. Assim, somente na Fase III, quando já foram realizadas muitas adições de circuitos e o problema de rede não conexa foi grandemente minimizado, usa-se uma rede fictícia para contornar o problema de rede não conexa que, eventualmente, possa acontecer.

Capítulo 4

Proposta de Metodologia Ótima: Testes e Resultados Obtidos

4.1 A Metodologia Hierarquizada

Baseado nos resultados do capítulo anterior pode-se apresentar um algoritmo básico de planejamento hierarquizado. Assim, o algoritmo básico de planejamento hierarquizado usando a decomposição de Benders em cada fase assume a seguinte forma:

1. Iniciar as variáveis de investimento com $x_{ij} = 0$ e fazer $fase = 1$.
2. Resolver o subproblema de operação para o presente nível de investimento definido pelos valores dos x_{ij} :
 - Se o corte de carga obtido é menor que a tolerância especificada ϵ_w , fazer $fase = fase + 1$ e ir ao passo 4;
 - Em outro caso adicionar um novo corte de Benders ao subproblema de investimento. Ir ao passo 3.
3. Resolva o subproblema de investimento e determine um novo nível de investimento que satisfaça a nova restrição definida pelo corte de Benders obtido no passo 2 e/ou à integralidade das variáveis de investimento incorporadas ao subproblema de investimento quando $fase = 3$. Ir ao passo 2.
4. Se $fase \leq 2$, ir ao passo 2;
Se $fase = 3$ ir ao passo 3; em outro caso pare.

4.2 O Subproblema de Operação

Na implementação da metodologia hierarquizada, na realização de testes, o subproblema de operação foi resolvido usando técnicas de programação linear padrão. Nas três fases da metodologia hierarquizada o subproblema de operação, na verdade, é um problema de programação linear. Entretanto, é possível usar algoritmos mais especializados para resolver o subproblema de operação em cada fase, o que levaria a uma melhoria no esforço computacional. Portanto, na realização dos testes apresentados no presente capítulo foram usadas técnicas tradicionais de programação linear do tipo primal simplex canalizado, para resolver o subproblema de operação nas três fases da metodologia hierarquizada. Adicionalmente, na Fase III foi usado o conceito de rede fictícia para contornar problemas de rede não conexa que eventualmente possam aparecer. Foi considerado um valor relativamente alto do parâmetro α , diferente para cada sistema testado.

4.3 O Subproblema de Investimento

A resolução do subproblema de investimento apresenta características específicas em cada fase do processo. Nas fases I e II, o subproblema de investimento é, na verdade, um problema de programação linear padrão. Além disso, de uma iteração para outra, o subproblema de investimento muda somente numa restrição (o último corte de Benders gerado). Neste sentido, a melhor maneira de resolver o subproblema de investimento é utilizando um algoritmo de programação linear do tipo dual simplex, que reinicie o processo de solução aproveitando a base ótima do problema na iteração anterior. A base ótima do subproblema de investimento na iteração k é ainda uma base dual factível do novo subproblema de investimento na iteração $k + 1$. Assim, o processo levaria poucas iterações do tipo dual simplex para atingir a nova solução ótima. Entretanto, na implementação do algoritmo hierarquizado da presente tese foi usado um algoritmo padrão de programação linear primal simplex com variáveis canalizadas similar ao usado para o subproblema de operação, resolvendo desta maneira cada subproblema de investimento de forma independente, incrementando conseqüentemente o esforço computacional. O desenvolvimento de um programa de computador usando o algoritmo dual simplex não foi considerado prioritário no presente trabalho.

Outra simplificação realizada no subproblema de investimento, nas três fases, foi dar um coeficiente relativamente alto à variável β , que aparece nos cortes de Benders. Esta idéia tem a finalidade de “forçar”, na medida que seja possível, a saída de β da base do PL, o que é sempre desejável.

Nos testes realizados no presente capítulo somente foram considerados os cortes de

Benders como restrições do subproblema de investimento. A única mudança foi incluir algumas restrições do tipo linha-transformador na Fase III para o sistema sul brasileiro - Caso 1. A incorporação deste tipo de restrições foi realizada posteriormente como uma forma de melhorar o esforço computacional de um algoritmo de enumeração implícita especializado, cujos resultados são apresentados no capítulo próximo. A incorporação das restrições de cerca ao subproblema de investimento não faz parte do presente trabalho, pois ainda está sendo desenvolvida uma forma sistemática e eficiente de gerar as melhores restrições de cerca para um problema de planejamento.

Na Fase III, o subproblema de investimento é um problema PLI. Na verdade, as variáveis de investimento (susceptâncias das linhas de transmissão) são discretas, mas elas podem ser transformadas a um problema PLI padrão. Como são possíveis ainda adições de várias linhas por cada caminho candidato, o problema é do tipo PLI geral, isto é, um problema com variáveis inteiras. Assim, resolver o subproblema de investimento implica a elaboração de um programa de computador baseado em algoritmos de PI, tais como o algoritmo de cortes duais ou o algoritmo de branch-and-bound.

Entretanto, chegou-se à conclusão de que é ainda melhor transformar o subproblema de investimento em um problema PLI, binário, o que obviamente incrementa o número de variáveis do problema mas, em compensação, pode-se usar um algoritmo de Programação Linear Inteira Zero-Um, PLI 0-1. Isto foi realizado e, implementou-se dois tipos de algoritmos para resolvê-lo: um algoritmo de enumeração implícita padrão e posteriormente outro algoritmo de enumeração implícita especializado.

4.4 Resolução Exata do Subproblema de Investimento

4.4.1 Algoritmo de Cortes Duais

Uma alternativa, aparentemente a mais promissora, é resolver o subproblema de investimento usando um algoritmo de cortes duais. Neste sentido, foi elaborado um programa de computador usando o algoritmo de cortes duais inteiros de Greenberg [37]. Este algoritmo apresenta a vantagem de que aparentemente não acumula erros de arredondamento, pois os cortes têm coeficientes inteiros e também não incrementa o tamanho do problema, isto é, o número de restrições adicionadas sempre é igual ao número de variáveis do problema. Em contrapartida, estes cortes, às vezes, podem ser muito fracos.

Em seguida foi implementado outro programa de computador usando o algoritmo de cortes duais fracionários de Gomory [38]. Este programa foi ainda melhorado usando

as melhorias introduzidas por Wilson [31]. As três versões de programa correspondentes a estes algoritmos de cortes duais se mostraram muito eficientes para problemas de pequeno porte (06 barras), entretanto, todos eles mostraram-se incapazes para atingir a convergência e obter a solução ótima de problemas reais de maior porte. Portanto, os algoritmos de cortes duais foram considerados não promissores para serem usados nos problemas de planejamento de sistemas reais.

4.4.2 Algoritmo de Enumeração Implícita Zero-Um

Outra alternativa promissora foi desenvolver um programa de computador usando o algoritmo de enumeração implícita de Balas [21, 23], com algumas melhorias introduzidas por outros pesquisadores. O algoritmo de enumeração implícita zero-um de Balas conseguiu resolver eficientemente o subproblema de investimento na Fase III. Este algoritmo foi usado para testar os sistemas cujos resultados são apresentados no presente capítulo. Entretanto, o esforço computacional requerido para resolver, em cada iteração da Fase III, o subproblema de investimento, usando o programa de computador baseado no algoritmo de enumeração implícita de Balas convencional, foi considerado relativamente alto.

Como o maior esforço computacional, no processo de planejamento integral, correspondeu à resolução do subproblema de investimento na Fase III, tentou-se desenvolver um algoritmo de enumeração implícita de Balas especializado, o que levou a uma redução significativa do esforço computacional do processo geral. A análise teórica e os resultados obtidos desta implementação são apresentados no próximo capítulo.

4.5 Testes e Resultados Obtidos

Foram testados 3 sistemas: Sistema de 03 barras, sistema de 06 barras de Garver e sistema de 46 barras sul-brasileiro correspondente a 1980.

4.5.1 Sistema de 03 Barras

Este exemplo foi usado em [46]. A Figura 4.1 mostra a configuração inicial do sistema. Pode-se adicionar linhas de transmissão através de duas barras quaisquer. Os dados relevantes do sistema são apresentados no Apêndice B. A tolerância neste caso foi de $\epsilon_w = 0.2MW$ e o valor de $\alpha = 1$.

Na Figura 4.2 é mostrada a solução obtida após a Fase I. A Figura 4.3 mostra a solução obtida após a Fase II. Neste caso simples de 03 barras, a Fase II não faz diferença entre Modelo Híbrido e Modelo de FCDC, pois não existem novos caminhos; portanto, na Fase II, o Modelo Híbrido é equivalente ao Modelo de FCDC. Finalmente, na Figura 4.4 é mostrada a solução ótima final de planejamento do sistema de 03 barras apresentando os seguintes resultados finais:

- Investimento: $v = 2.0$.
- Circuitos adicionados: $n_{13} = 1$.
- Corte de carga na solução ótima: $w = 0.0$.
- Cortes de Benders necessários: 02
 1. Fase I: 01
 2. Fase II: 01
 3. Fase III: 00

É simples verificar que a solução obtida é ótima global. Pode-se observar também que o processo não gera cortes de Benders na Fase III, em que o algoritmo de PI é usado somente uma vez para resolver o subproblema de investimento.

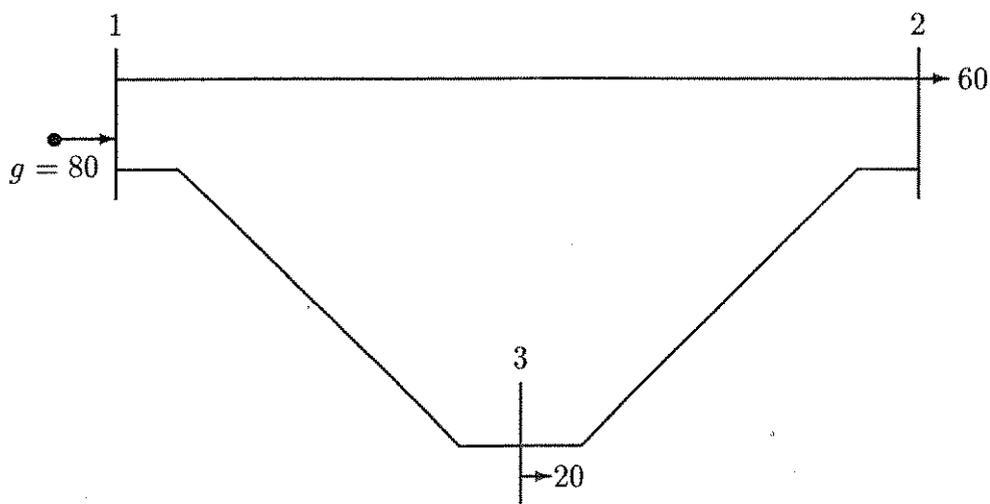


Figura 4.1 Sistema Inicial de 03 Barras

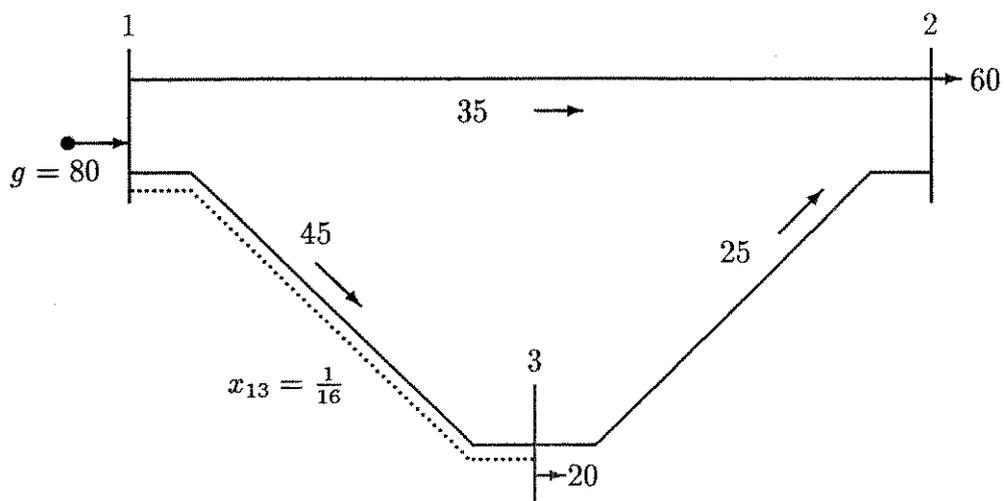


Figura 4.2 Sistema de 03 Barras Após a Fase I

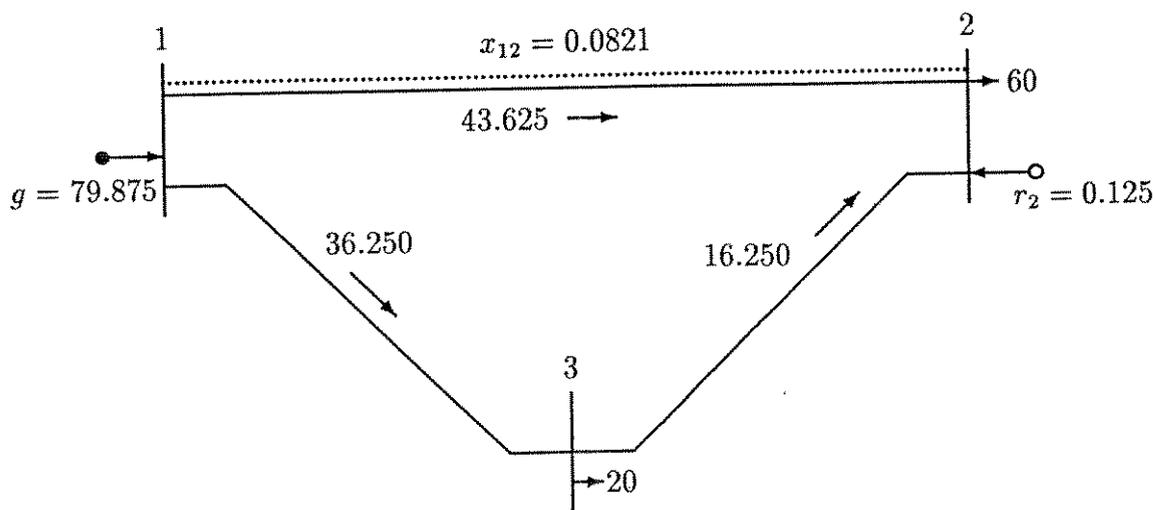


Figura 4.3 Sistema de 03 Barras Após a Fase II

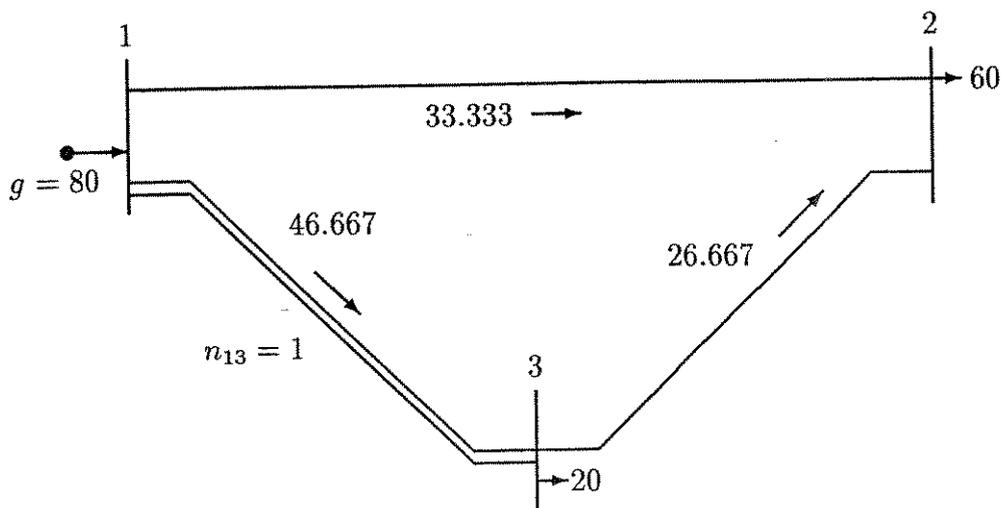


Figura 4.4 Sistema de 03 Barras Após a Fase III

4.5.2 Sistema de 06 Barras

Este sistema foi usado em [5]. A Figura 4.5 mostra a configuração inicial do sistema. Pode-se ver que a barra 6 está inicialmente desconectada do sistema. Pode-se adicionar linhas de transmissão, através das barras do sistema, indistintamente. Os outros dados relevantes deste sistema são apresentados no Apêndice B.

Para este sistema de 06 barras se faz dois tipos de planejamento. Um primeiro tipo de planejamento, o tradicionalmente usado, é aquele que considera níveis de geração compatíveis com a carga, isto é, com níveis de geração programados. Este tipo de planejamento é denominado de Caso 1. Um outro tipo de planejamento, mais flexível, é aquele que permite o redespacho da geração, isto é, não é fixado o nível de geração nas barras de geração, especificando simplesmente os valores máximos de geração permitidos em cada barra de geração. Neste caso, a determinação do nível de geração nas barras de geração faz parte do processo de otimização do problema de planejamento. Este tipo de planejamento, também denominado planejamento da geração-transmissão [9], é denominado simplesmente, Caso 2. A tolerância considerada neste caso foi $\epsilon_w = 5MW$, o valor de $\alpha = 10$ e não existe restrição de número máximo de linhas que pode ser adicionado por cada caminho candidato.

Sistema de 06 Barras: Caso 1

Neste caso foram assumidas as seguintes considerações iniciais:

- Os níveis de geração em cada barra são fixados (MW):

$$g_1 = 50 \quad g_3 = 165 \quad g_6 = 545$$

Os resultados deste planejamento são mostrados nas figuras 4.6, 4.7, 4.8 e na Tabela 4.1. Os resultados relevantes deste processo de planejamento são:

- Investimento: $v = 200.0$.
- Circuitos adicionados: $n_{35} = 1$, $n_{26} = 4$ e $n_{46} = 2$.
- Corte de carga na solução ótima: $w = 0.0$.
- Cortes de Benders necessários: 06

1. Fase I: 03

2. Fase II: 03
3. Fase III: 00

Os resultados obtidos não apresentam diferença em relação aos apresentados por todos os outros métodos de planejamento conhecidos. Entretanto, pode-se observar o número reduzido de cortes de Benders necessários para atingir a solução ótima, assim como a utilização do algoritmo de PLI somente uma vez, a fim de se resolver o subproblema de investimento na Fase III, onde não foi necessário gerar cortes de Benders.

Sistema de 06 Barras: Caso 2

Neste caso é permitido o redespacho da geração nas barras de geração, portanto são especificadas somente as capacidades máximas de geração nas barras de geração.

Os resultados deste planejamento são mostrados nas Figuras 4.9, 4.10, 4.11 e na Tabela 4.2. Os resultados relevantes deste processo de planejamento são:

- Investimento: $v = 110.0$.
- Circuitos adicionados: $n_{35} = 1$ e $n_{46} = 3$.
- Corte de carga na solução ótima: $w = 0.0$.
- Cortes de Benders necessários: 05
 1. Fase I: 03
 2. Fase II: 02
 3. Fase III: 00

Neste caso, os resultados obtidos são surpreendentes, mesmo levando em conta o tamanho do sistema. A literatura especializada não registra esta solução ótima. Outros pesquisadores, ao tentar resolver este problema, simplesmente obtiveram soluções ótimas locais. Também é necessário mencionar que nem todos os métodos resolvem o problema de planejamento com redespacho da geração. Comparado com o Caso 1, pode-se observar que a solução foi atingida com menos cortes de Benders, com um investimento 45% menor e com uma topologia significativamente diferente. Pode-se observar também uma melhor distribuição de fluxos de potência, pois 70% dos circuitos ficaram fortemente carregados.

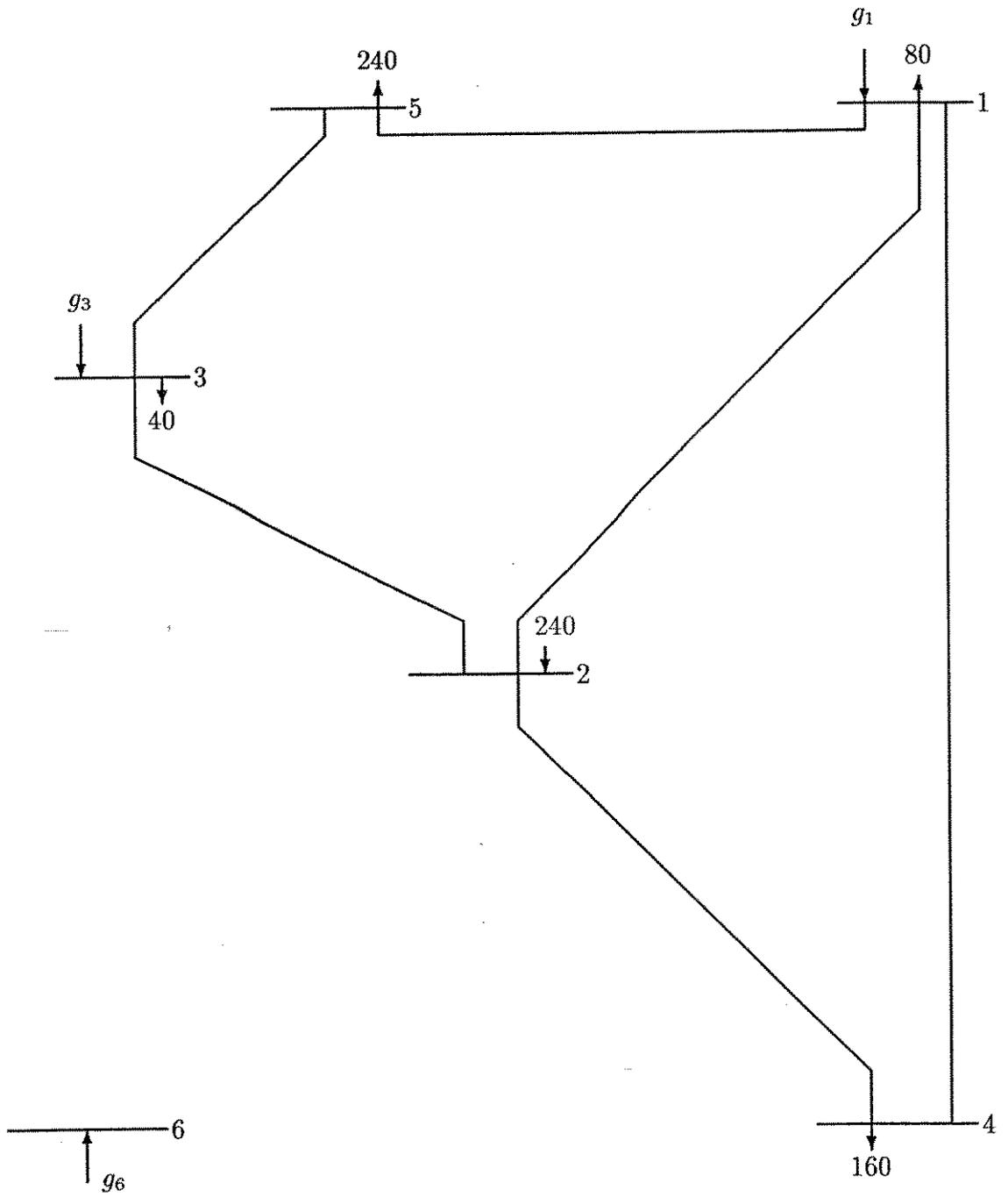


Figura 4.5 Sistema Inicial de 06 Barras

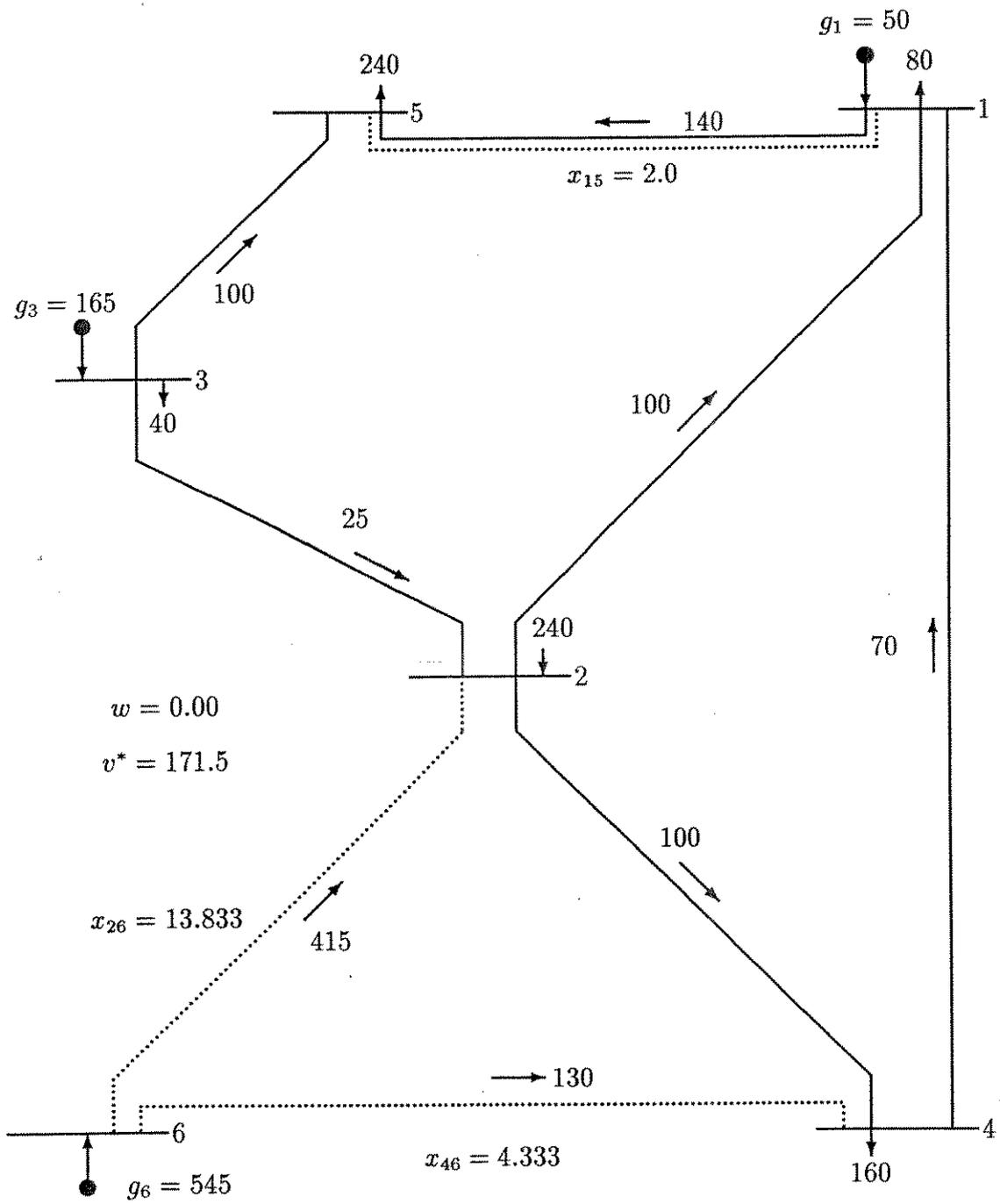


Figura 4.6 Sistema de 06 Barras: Caso 1 - Final da Fase I

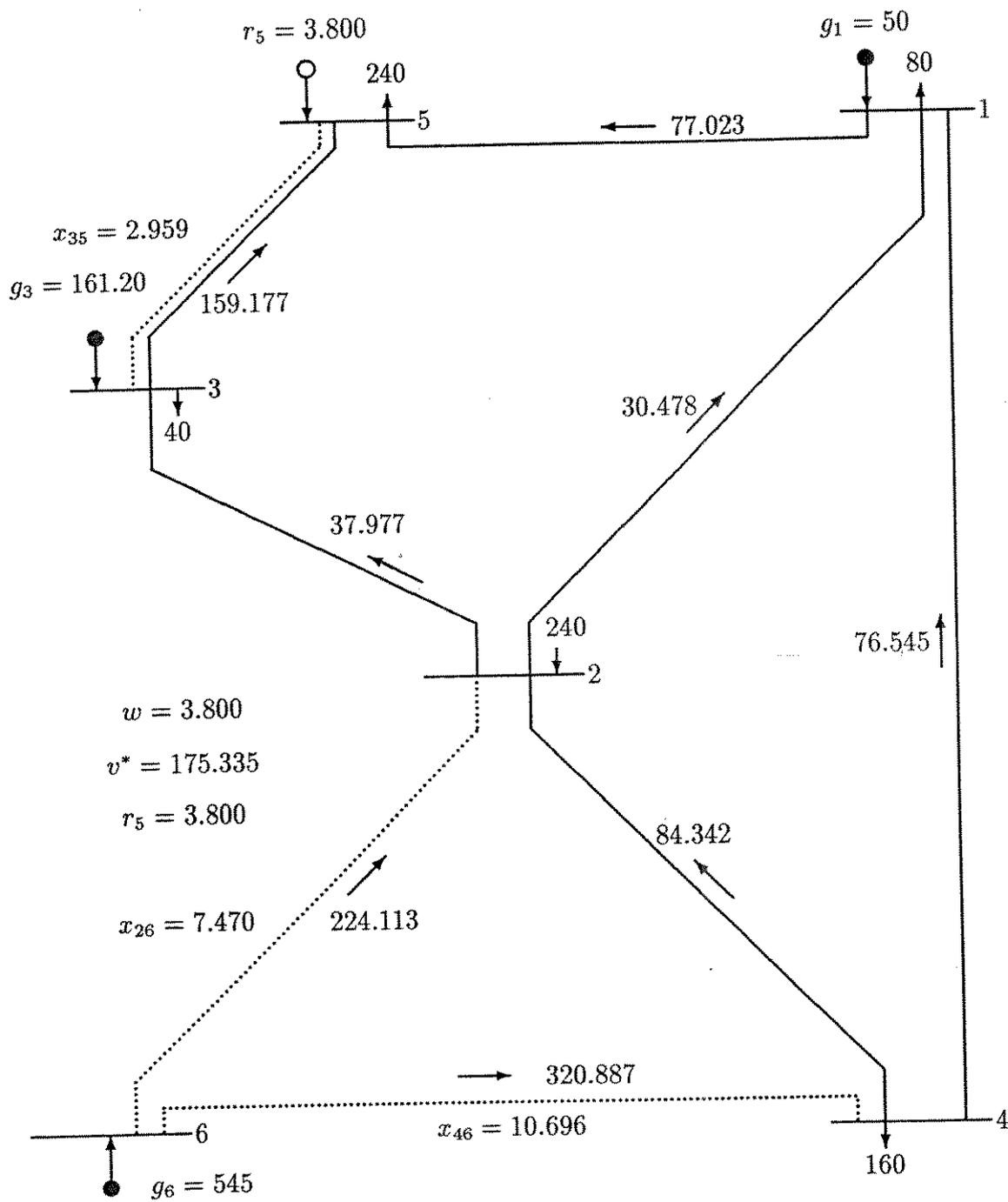


Figura 4.7 Sistema de 06 Barras: Caso 1 - Final da Fase II

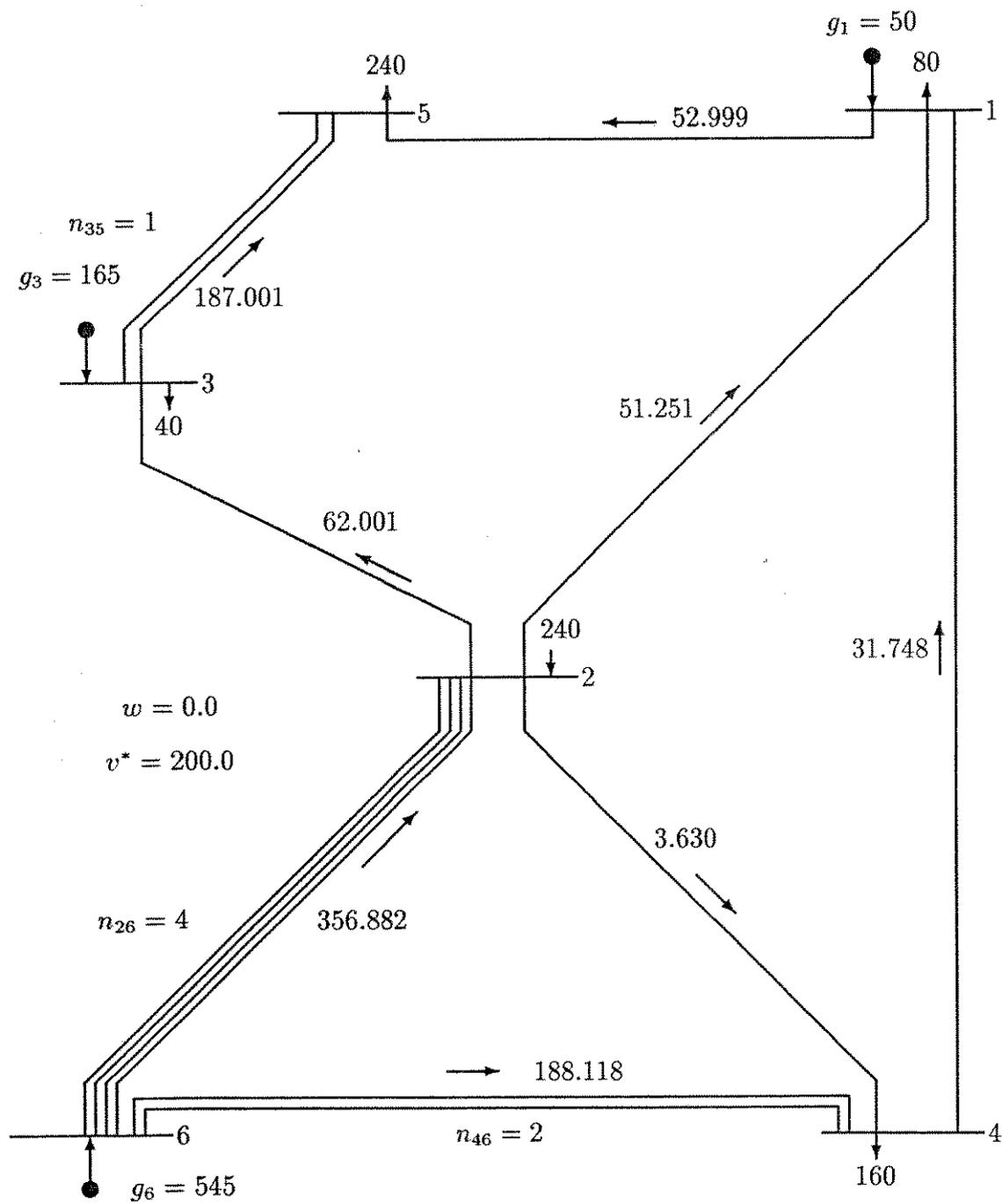


Figura 4.8 Sistema de 06 Barras: Caso 1 - Final da Fase III

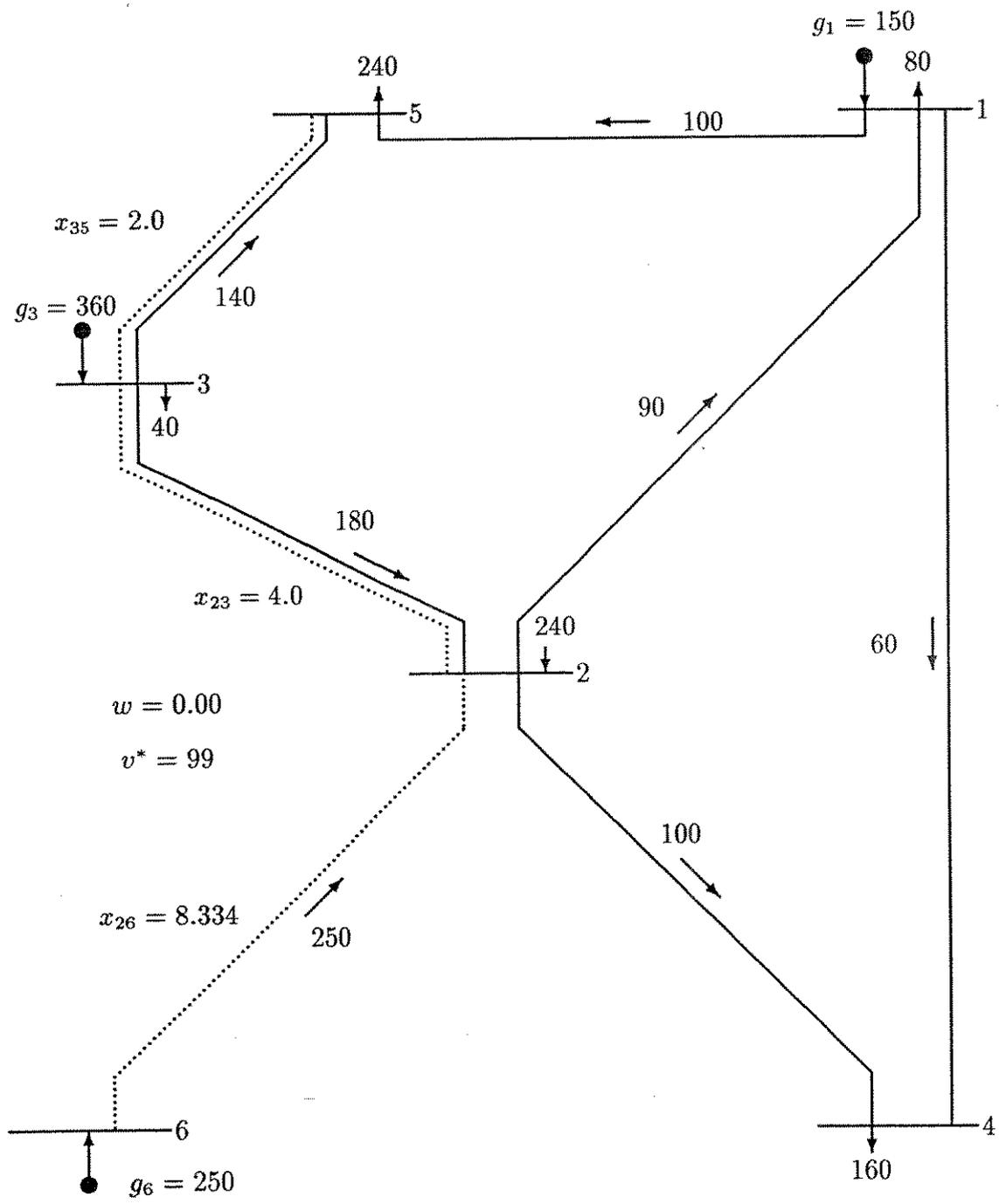


Figura 4.9 Sistema de 06 Barras: Caso 2 - Final da Fase I

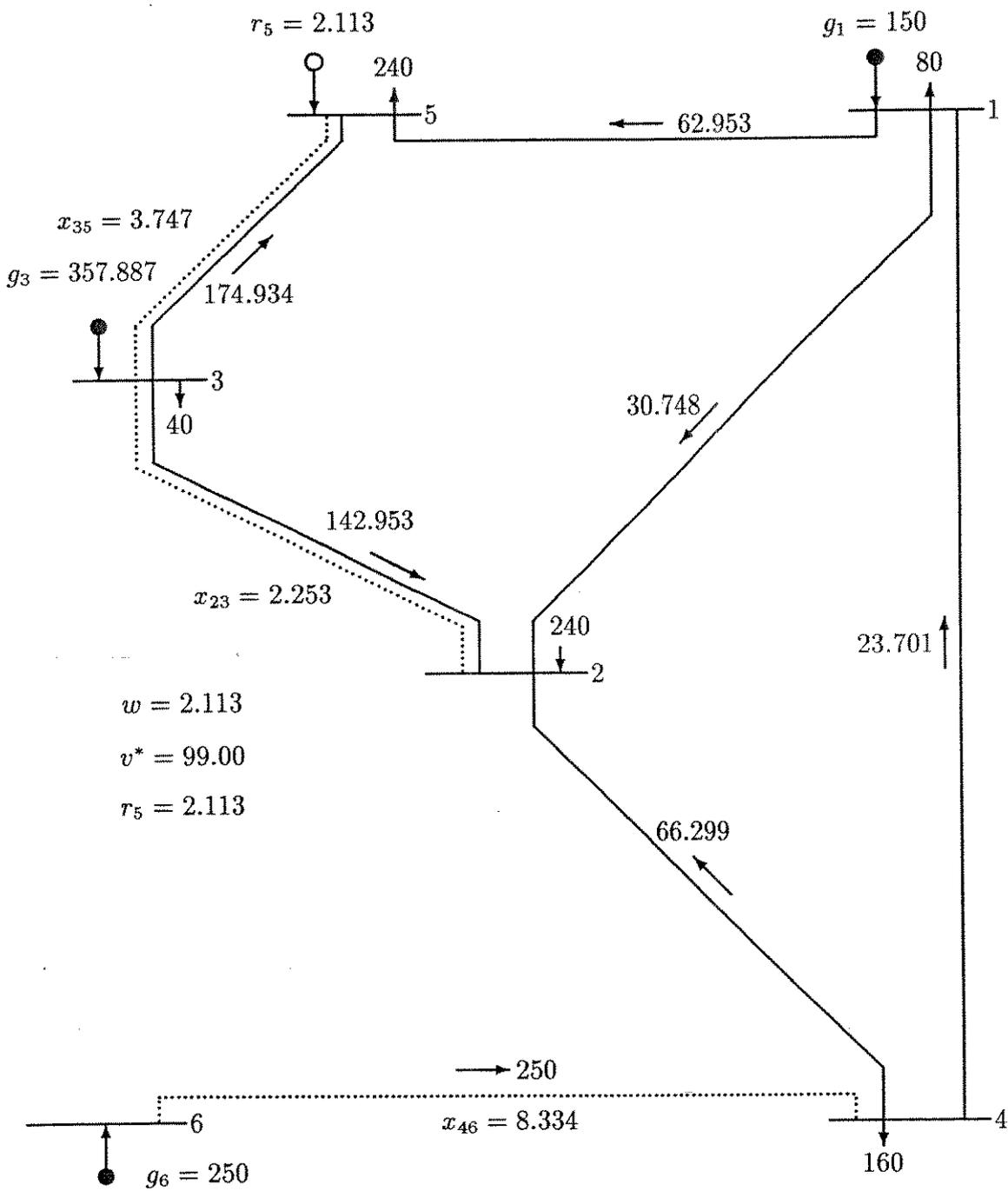


Figura 4.10 Sistema de 06 Barras: Caso 2 - Final da Fase II

Resultados Obtidos para o Sistema de 06 Barras.

Tabela 4.1 Dados de Convergência para o Caso 1.

FASE	Iter.	Variáveis de Investimento				Custo de Invest.	Custo de Operação
		x_{15}	x_{26}	x_{35}	x_{46}	v	w
I	--	--	--	--	--	--	545
	1	--	18.167	--	--	163.500	130
	2	--	13.833	--	4.333	163.500	40
	3	2.0	13.833	--	4.333	171.500	0
II	--	2.0	13.833	--	4.333	171.500	90.682
	1	--	3.955	2.000	14.212	171.500	86.363
	2	--	6.833	2.785	11.333	174.640	7.297
	3	--	7.470	2.959	10.696	175.335	3.799
III	--	--	$\frac{40}{3}$	5.000	$\frac{20}{3}$	200.000	0

Tabela 4.2 Dados de Convergência para o Caso 2.

FASE	Iter.	Variáveis de Investimento				Custo de Invest.	Custo de Operação
		x_{23}	x_{26}	x_{35}	x_{46}	v	w
I	--	--	--	--	--	--	370
	1	18.500	--	--	--	74	250
	2	6.000	8.334	--	--	99	40
	3	4.000	8.334	2.000	--	99	0
II	--	4.000	8.334	2.000	--	99	78.947
	1	4.000	5.303	2.000	3.030	99	61.102
	2	2.253	--	3.747	8.334	99	2.113
III	--	--	--	5.000	10.000	110	0

4.5.3 Sistema de 46 Barras: Sul-Brasileiro - 1980

Este sistema foi usado em [11]. A Figura 4.12 mostra a configuração inicial do sistema onde os novos caminhos candidatos à adição de circuitos são mostrados em linhas pontilhadas. Pode-se observar que existem muitas barras não conexas ao sistema inicial. É possível adicionar até 03 linhas de transmissão nos circuitos existentes e nos novos caminhos. Os outros dados relevantes deste sistema são apresentados no Apêndice B. A tolerância considerada neste caso foi de $\epsilon_w = 5MW$ e o valor de $\alpha = 2000$.

Para este sistema também são realizados os dois tipos de planejamento, isto é, com os níveis de geração fixados e quando é permitido o redespacho da geração.

Sistema de 46 Barras: Caso 1

Neste caso foram considerados os níveis de geração indicados no Apêndice B.

Os resultados deste planejamento são mostrados na Figuras 4.13 e na Tabela 4.3. Na figura, o número de circuitos adicionados estão entre parêntesis e os novos caminhos em linhas pontilhadas.

Os resultados relevantes deste processo de planejamento são:

- Investimento: $v = 154.420$ milhões de dólares.
- Circuitos adicionados: 16 circuitos mostradas na Tabela 4.3.
- Corte de carga na solução ótima: $w = 0.0$.
- Cortes de Benders necessários: 76
 1. Fase I: 35
 2. Fase II: 20
 3. Fase III: 21

Os resultados obtidos, neste caso, são os melhores dentre todos os outros métodos conhecidos que tentaram resolver o mesmo sistema. O número de cortes de Benders também é menor. Este problema, na verdade, é de difícil solução, pois ele apresenta muitas barras não conexas. O número de iterações na Fase III, (21), é relativamente alto, pois cada iteração implica na solução de um problema de PLI usando um algoritmo de enumeração implícita.

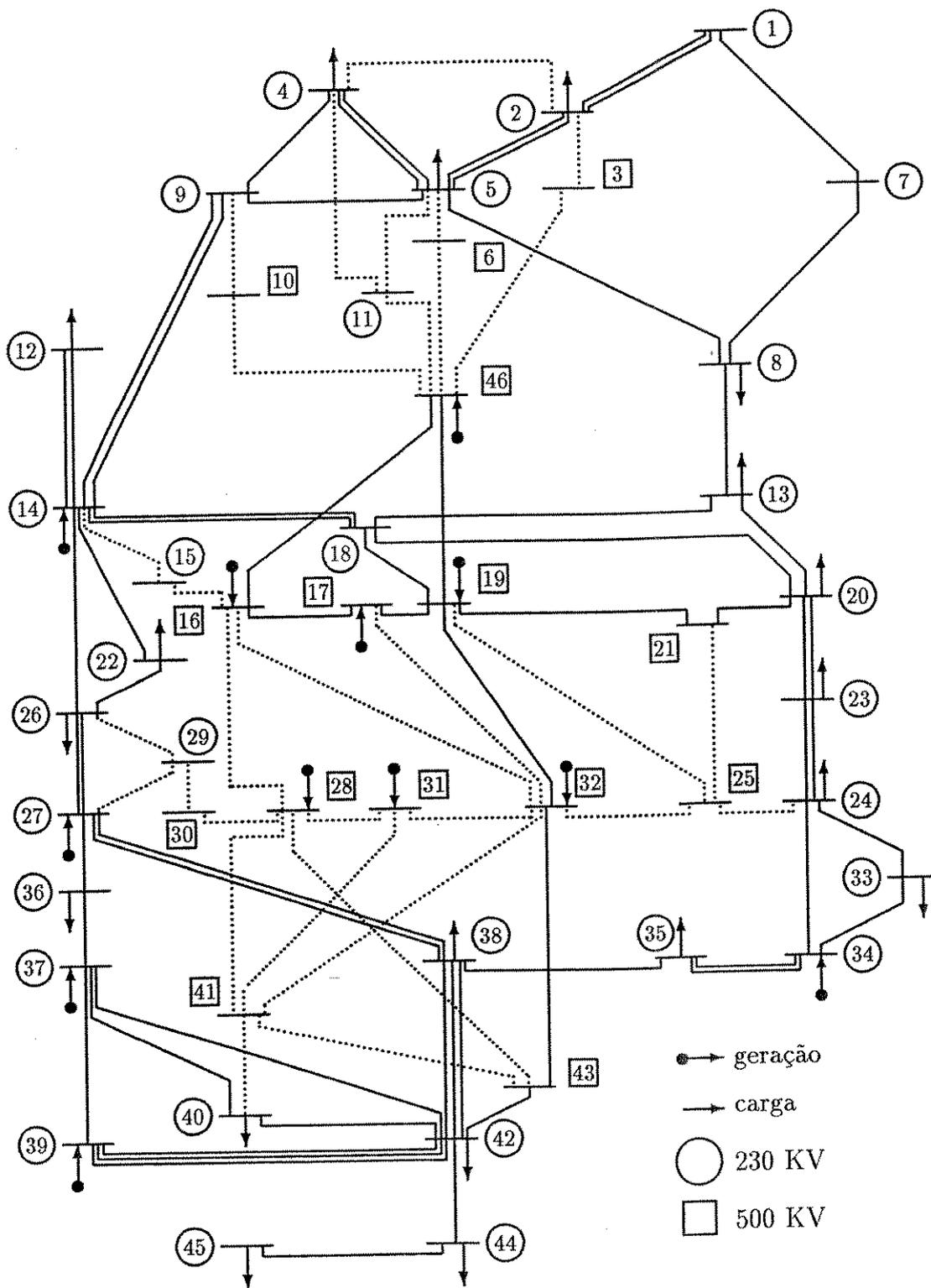


Figura 4.12: Sistema Sul Brasileiro - Rede Inicial.

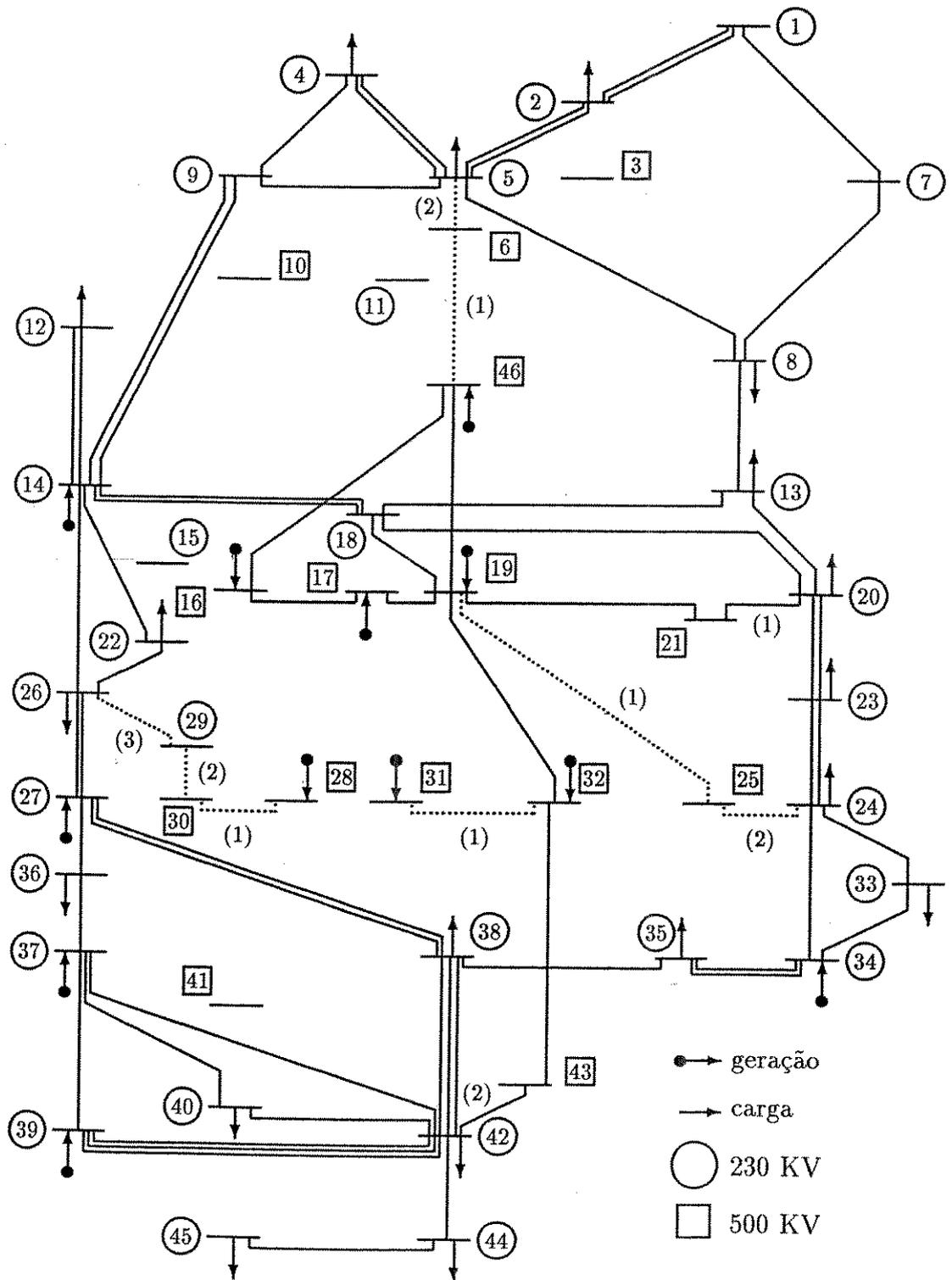


Figura 4.13: Sistema Sul Brasileiro - Caso 1

Sistema de 46 Barras: Caso 2

Neste caso é permitido o redespacho da geração nas barras de geração, portanto, são especificadas somente as capacidades máximas de geração nas barras de geração.

Os resultados deste planejamento são mostrados na Figuras 4.14 e na Tabela 4.4. Na figura, o número de circuitos adicionados estão entre parêntesis e os novos caminhos em linhas pontilhadas.

Os resultados relevantes deste processo de planejamento são:

- Investimento: $v = 70.289$ milhões de dólares.
- Circuitos adicionados: 08 circuitos mostrados na Tabela 4.4
- Corte de carga na solução ótima: $w = 1.3$ MW.
- Cortes de Benders necessários: 40
 1. Fase I: 15
 2. Fase II: 16
 3. Fase III: 09

Neste caso, os resultados obtidos são também surpreendentes. O investimento final obtido é significativamente menor comparado com o Caso 1, e com a obtida por outros pesquisadores. Pode-se observar também uma redução significativa dos cortes de Benders necessários para atingir a convergência. Neste caso, também tem importância os níveis de geração nas barras de geração, os quais são apresentados na Tabela 4.5.

Neste caso, o processo termina apresentando um corte de carga igual a $w = 1.3$ MW, que é menor que a tolerância ϵ_w considerada. Quando esta tolerância é reduzida a zero, o processo leva ainda 04 iterações adicionais para atingir uma nova solução com corte de carga zero, acrescentando às linhas já adicionadas uma linha em 02-05, elevando o investimento total para $v = 72.870$ milhões de dólares. Esta avaliação, sem relevância prática, foi realizada por seu interesse acadêmico e os resultados relevantes são mostrados nas Tabelas 4.6 e 4.7. Entretanto, pode-se observar que ocorrem uma mudança significativa nos níveis de geração em algumas barras de geração, especialmente nas barras 16, 17 e 19. É importante mencionar que, neste sistema, o Caso 2, produz um investimento que é 54% mais barato que o obtido para o Caso 1.

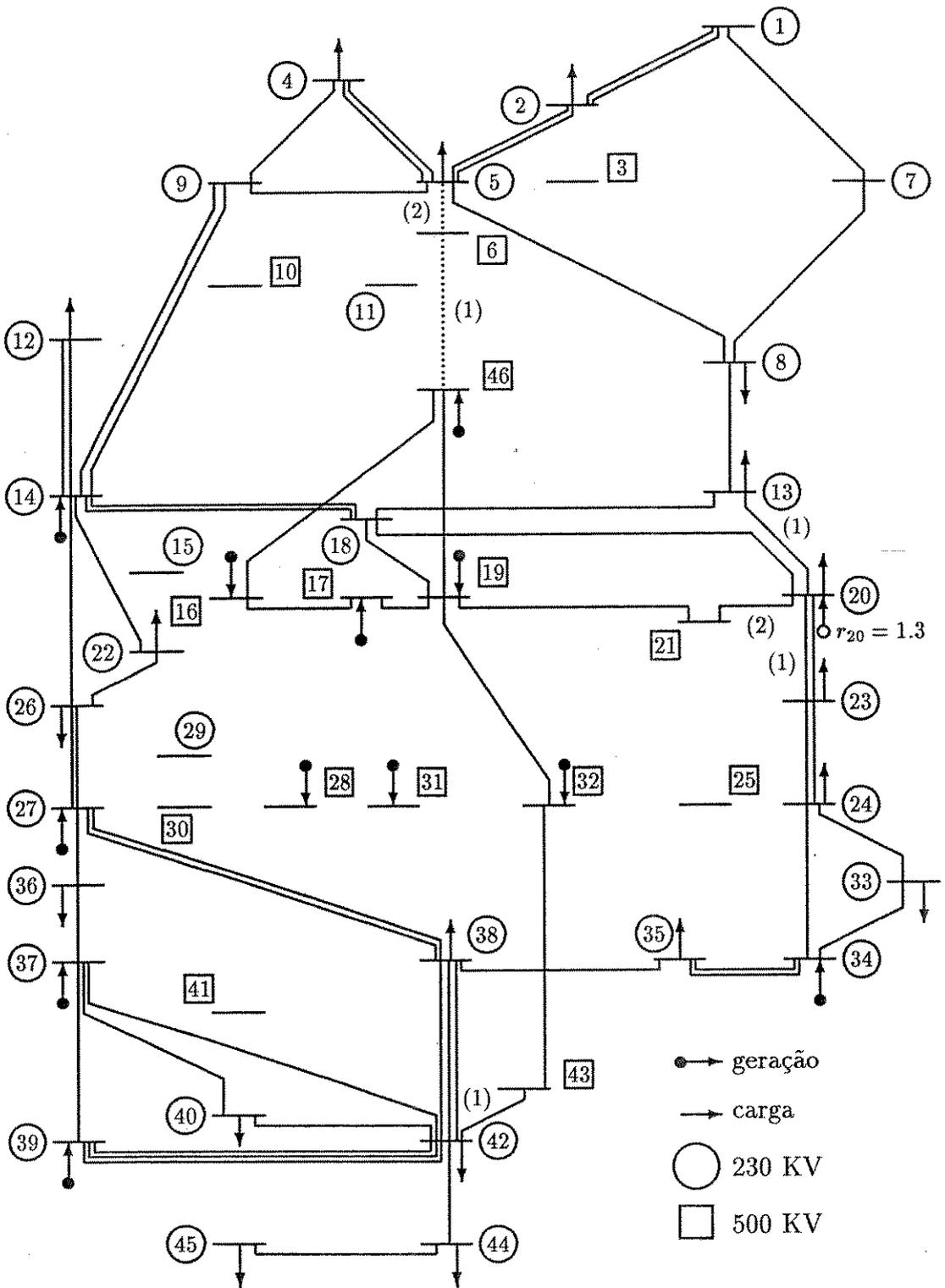


Figura 4.14: Sistema Sul Brasileiro - Caso 2.

Tabela 4.3: Sistema de 46 Barras - Caso 1.

No.	Circuito Adicionado	No. de Circuitos Adicionados	Fluxo MW	Capacidade MW	Carregamento %
1	20-21	1	542.2	600	90.4
2	42-43	2	450.3	600	75.1
3	46-06	1	931.7	2000	46.6
4	19-25	1	952.7	1400	68.0
5	31-32	1	310.0	2000	15.5
6	28-30	1	730.0	2000	36.5
7	26-29	3	243.3	270	90.1
8	24-25	2	476.1	600	79.4
9	29-30	2	365.0	600	60.8
10	05-06	2	465.8	600	77.6

Tabela 4.4: Sistema de 46 Barras - Caso 2.

No.	Circuito Adicionado	No. de Circuitos Adicionados	Fluxo MW	Capacidade MW	Carregamento %
1	13-20	1	47.9	270	17.8
2	20-23	1	230.0	270	85.2
3	46-06	1	1165.2	2000	58.3
4	20-21	2	494.7	600	82.5
5	42-43	1	600.0	600	100.0
6	05-06	2	582.6	600	97.1

Tabela 4.5: Níveis de Geração para o Caso 2.

Barra	Geração(MW)	Status
14	561.3	folgada
16	2000.0	no limite
17	758.0	folgada
19	588.8	folgada
27	220.0	no limite
28	0.0	sem geração
31	0.0	sem geração
32	402.5	folgada
34	748.0	no limite
37	300.0	no limite
39	600.0	no limite
46	700.0	no limite

Outras Alternativas de Investimento Interessantes

A metodologia hierarquizada apresentada eventualmente produz alternativas de investimento interessantes com pequeno corte de carga antes de atingir a convergência. Assim, na Fase III, algumas alternativas de investimento com pequeno corte de carga, apresentam-se realmente interessantes do ponto de vista prático, pois uma alternativa de investimento deste tipo pode ser considerada factível, se é permitido um pequeno incremento nos fluxos máximos em algumas linhas de transmissão.

Estas alternativas de investimento interessantes, obtidos como um subproduto do processo hierarquizado, são as seguintes:

• Sistema de 46 Barras: Caso 1

1. Corte de carga: $w = 29$ MW.

– Investimento: $v = 153.781$ milhões de dólares.

– Adições: 20-21, 42-43 (2), 46-6, 25-32, 31-32, 28-30, 26-29 (3), 24-25 (2), 5-6 (2) e 29-30 (2).

Tabela 4.6: Sistema de 46 Barras - Caso 2.a.

No.	Circuito Adicionado	No. de Circuitos Adicionados	Fluxo MW	Capacidade MW	Carregamento %
1	13-20	1	48.6	270	18.0
2	20-23	1	230.0	270	85.2
3	46-06	1	1164.7	2000	58.2
4	20-21	2	494.7	600	82.5
5	42-43	1	600.0	600	100.0
6	05-06	2	582.6	600	97.1
7	02-05	1	161.0	270	59.7

Tabela 4.7: Níveis de Geração para o Caso 2.a.

Barra	Geração (MW)	Status
14	563.2	folgada
16	1883.7	folgada
17	856.1	folgada
19	607.6	folgada
27	220.0	no limite
28	0.0	sem geração
31	0.0	sem geração
32	401.4	folgada
34	748.0	no limite
37	300.0	no limite
39	600.0	no limite
46	700.0	no limite

- **Sistema de 46 Barras: Caso 2**

1. Corte de carga: $w = 28$ MW.
 - Investimento: $v = 63.163$ milhões de dólares.
 - Adições: 20-23, 20-21(2), 42-43, 46-6, 5-6(2)
2. Corte de carga: $w = 25.7$ MW.
 - Investimento: $v = 71.341$ milhões de dólares.
 - Adições: 20-23, 20-21(2), 42-43 (2), 46-6, 5-6(2)
3. Corte de carga: $w = 9.3$ MW.
 - Investimento: $v = 71.341$ milhões de dólares.
 - Adições: 20-23, 20-21(3), 42-43, 46-6, 5-6(2)

4.6 Qualidade dos Resultados Obtidos

Os resultados obtidos são em geral promissores, pois foram obtidas alternativas de investimento até inesperadas, considerando os resultados obtidos com outros métodos heurísticos desenvolvidos anteriormente. Considerando o investimento obtido na solução final, como elemento de comparação, pode-se fazer os seguintes comentários:

- Para o sistema de 06 barras Caso 1 não existe nenhuma diferença com os resultados obtidos por outros métodos. Todos os métodos conhecidos obtiveram a mesma alternativa de investimento.
- Para o sistema de 06 barras, Caso 2, a metodologia hierarquizada, apresentada neste trabalho, obteve uma alternativa de investimento que ainda não era conhecida na literatura especializada. Resultados apresentados, por exemplo, em [6] e [12] mostram simplesmente soluções ótimas locais. As dificuldades de contornar uma rede inicial não conexa, no primeiro caso, e a limitação do espaço de solução, no segundo caso, parecem ter levado estes métodos a convergir em soluções ótimas locais.
- Não foi possível comparar os resultados obtidos para o sistema de 46 barras com outros métodos exatos. Em relação aos métodos heurísticos, a diferença de investimentos é significativa.
- Para o sistema de 46 barras, Caso 1, o resultado obtido é o melhor conhecido com um investimento de 154.420 milhões de dólares. Em [11], apresenta-se dois métodos

heurísticos chamados de MLS e LSC com diversas variantes. Para o mesmo sistema, a melhor solução encontrada pelo método MLS foi de 181.645 milhões de dólares e pelo método LSC de 206.824 milhões de dólares. Em [41], apresenta-se a melhor solução atingida pelo SINTRA com uma alternativa de investimento de 166.052 milhões de dólares, assim como o investimento obtido pelo EXTRA que apresenta uma alternativa de investimento de 161.827 milhões de dólares. Entretanto, esta última alternativa apresenta um corte de carga de 16 MW na barra 45. A eliminação deste corte de carga implica a adição de uma linha em 14-22 incrementando o investimento total para 167.539 milhões de dólares. Assim, pode-se concluir que a diferença de investimento entre o resultado obtido pela metodologia hierarquizada e os outros métodos comentados é significativa.

- Para o sistema de 46 barras, Caso 2, os resultados obtidos foram realmente interessantes. O investimento de 70.289 milhões de dólares é muito melhor que os outros resultados conhecidos e o que é mais importante, comparado com o Caso 1, a diferença de investimento está na relação de 1 a 2. Portanto, existe uma grande diferença em termos de investimento entre um mesmo problema planejado considerando redespacho da geração e o mesmo problema sem considerar redespacho da geração. A diferença, tradicionalmente considerada da ordem de 20% entre as duas alternativas de planejamento, vai além do que normalmente os pesquisadores da área imaginavam.
- Na Fase III, na solução do subproblema de investimento, para o sistema de 46 barras, Caso 1, foram incluídas algumas restrições ao subproblema de investimento do tipo linha-transformador, para aliviar o esforço computacional do algoritmo de enumeração implícita. Esta idéia leva a uma reformulação adicional da metodologia hierarquizada que é apresentada à parte no próximo capítulo.
- A maior limitação da metodologia hierarquizada ainda é o esforço computacional. Esta limitação é aliviada de maneira significativa com modificações adicionais no algoritmo, especialmente na forma de resolver o subproblema de investimento na Fase III. Estas modificações, assim como os indicadores de esforço computacional, são apresentadas no próximo capítulo.

Capítulo 5

Técnica de Enumeração Implícita Zero-Um em Planejamento de Sistemas de Transmissão

5.1 Introdução

No processo de solução de um problema de planejamento de sistemas de transmissão a longo prazo usando a técnica de decomposição de Benders hierarquizada, deve-se resolver de maneira iterativa um problema de programação linear inteira (PLI). Concretamente, isto acontece na Fase III do processo hierarquizado na solução do subproblema de investimento, que é um problema de programação inteira. Neste capítulo, apresenta-se um algoritmo de enumeração implícita especializado, baseado no algoritmo aditivo de enumeração implícita 0-1 de Balas. As principais razões desta escolha foram mencionados no capítulo anterior e outras razões serão mencionados no desenvolvimento do algoritmo.

O algoritmo desenvolvido é usado para resolver um problema de PLI com variáveis limitadas. No caso de planejamento de sistemas de transmissão a longo prazo, que é o problema real, as variáveis inteiras limitadas são as linhas e/ou transformadores candidatos a adição no problema de planejamento.

Para esta parte da pesquisa, considera-se que é possível adicionar até 3 linhas de transmissão e/ou transformadores (circuitos) por cada caminho candidato. Assim, a variável que representa o circuito k , $x_k^* \leq u_k$ é transformada em variáveis binárias através da seguinte relação:

$$x_k = \sum_{p=0}^k 2^p y_{kp} ; y_{kp} = 0, 1 \quad (5.1)$$

onde k é determinado pela relação:

$$2^{k+1} \geq u_k + 1 \quad (5.2)$$

Para o caso em que $u_k = 3$ tem-se $k = 1$.

Assim, cada variável de investimento é transformada, em princípio, em duas variáveis binárias na seguinte forma:

$$x_k = y_{k0} + 2y_{k1} ; y_{k0} = y_{k1} = (0, 1) \quad (5.3)$$

Portanto, em princípio, isto implica duplicar o número de variáveis de investimento para “transformar” nosso subproblema de investimento no problema de planejamento de sistemas de transmissão em um PLI 0-1, ao qual pode-se aplicar um algoritmo de enumeração implícita zero-um.

O motivo principal para desenvolver um algoritmo de enumeração implícita zero-um especializado para resolver o problema de planejamento de sistemas de transmissão a longo prazo, usando a técnica de decomposição de Benders hierarquizado, foi o fato de que, ao contrário do que acontece com programação linear (PL), **não existe software nem algoritmo** de programação inteira que seja bom para resolver todos os tipos de problemas. Isto se deve ao fato de que a eficiência de um algoritmo de PI depende, em grande medida, e às vezes radicalmente, das características particulares de um problema. Portanto, não existe um algoritmo de PI que seja melhor que os outros para resolver todos os problemas, nem software disponível com tais características.

Neste contexto, a primeira fase da pesquisa consiste em escolher um método para resolução de problemas de PI, dentre os vários disponíveis na literatura especializada. Entre estes destacam: métodos de planos de corte, branch-and-bound, enumeração implícita, métodos subótimos. Numa fase seguinte, busca-se o desenvolvimento de um algoritmo especializado que aproveite as características específicas do problema.

Assim, objetivando resolver o problema de planejamento de sistemas de transmissão, foi desenvolvido um algoritmo de enumeração implícita zero-um especializado, baseado no algoritmo aditivo de enumeração implícita zero-um de Balas [21].

As principais vantagens de um algoritmo de enumeração implícita são:

- Somente realiza operações de adição e comparação, o que elimina os erros de arredondamento que pode ser um problema grave para outros métodos.
- Não precisa da solução de um PL subsidiário, como é o caso de praticamente todos os outros métodos. Entretanto, existe um método de enumeração implícita com restrições substitutas desenvolvido por Geoffrion, o que precisa da solução de um PL subsidiário. Este método não é considerado no presente trabalho.
- Não muda a matriz A e ocupa um espaço reduzido de memória
- Permite grande flexibilidade na implementação dos chamados testes de sondagem.

As características específicas do problema de planejamento da transmissão, que permitem sua implementação eficiente através de um algoritmo de enumeração implícita zero-um especializado, serão apresentadas posteriormente.

5.2 Conceitos e Definições da Enumeração Implícita

A metodologia apresentada é desenvolvida para um problema de PLI 0-1 da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Min. } Z &= \sum_{j \in N} c_j x_j ; c_j \geq 0 ; \quad j \in N = \{1, 2, \dots, n\} \\ \text{s.a. } \sum_{j \in N} a_{ij} x_j + S_i &= b_i ; \quad i \in M = \{1, 2, \dots, m\} \\ x_j &= (0, 1) ; \quad j \in N \\ S_i &\geq 0 ; \quad i \in M \end{aligned} \tag{5.4}$$

Qualquer problema 0-1 pode ser escrito na forma da equação (5.4) observando os aspectos relacionados a seguir:

- Um problema de maximização é transformado num problema de minimização multiplicando a função objetivo por -1.

- Qualquer $c_j < 0$ pode ser transformado em positivo redefinindo a variável $x_j = 1 - x'_j$, com $x'_j \in (0, 1)$.
- Todas as restrições podem ser escritas na forma \leq as quais, depois, deve-se acrescentar as respectivas variáveis de folga para que se tenha a forma de igualdades.

A idéia da enumeração implícita ou parcial é tentar avaliar somente uma pequena parte de todas as soluções possíveis, descartando as restantes por serem não promissoras. Uma enumeração explícita de um problema de n variáveis levaria a uma exploração de 2^n soluções possíveis que produziria, para n grande, o fenômeno da explosão combinatorial. Na enumeração implícita, explora-se somente uma pequena parte do espaço solução do problema, cuja implementação, com êxito, precisa de dois requisitos fundamentais:

1. Necessita-se de um esquema de enumeração que assegure que todas as soluções possíveis sejam enumeradas implícita ou explicitamente e, logicamente, de uma maneira não redundante.
2. Deve-se projetar testes de sondagem para excluir o maior número possível de soluções não promissoras.

O esquema de enumeração de Glover [25] garante o requisito 1. Por outro lado, existem muitos testes de sondagem e alguns deles serão apresentados no presente trabalho.

Antes, porém algumas definições e notações devem ser apresentadas:

- **Notação:**

+j indica que a variável $x_j = 1$.

-j indica que a variável $x_j = 0$.

Um elemento sublinhado, tal como \underline{j} , indica que a variável x_j para a alternativa $x_j = 0$ já foi explorada e sondada.

- **Solução Parcial (J):**

É um conjunto ordenado que dá, isto é define, valores binários a um subconjunto $J \subseteq N$. Por exemplo:

$$J = \{6, -2, -\underline{4}, 5\}$$

indica que $x_6 = x_5 = 1$, $x_2 = 0$ e, $x_4 = 0$ com a alternativa $x_4 = 1$ já sondada, isto é, com esta alternativa já explorada ou eliminada por ser não promissora.

- **Variáveis Livres (N-J):**

São aquelas variáveis que ainda não tem um valor binário definido por uma solução parcial e, portanto, encontra-se disponível para assumir um valor 0-1.

- **Complemento de J:**

É o conjunto de soluções obtíveis a partir de J dando, a todas as variáveis, ainda livres, valores binários 0-1.

- **Solução Parcial Sondada:**

Uma solução parcial J pode ser sondada se todos os seus complementos podem ser descartados, por serem não promissores.

5.3 Esquema de Enumeração Implícita de Glover

O esquema de enumeração implícita de Glover [25] permite uma implementação mais adequada do algoritmo de Balas.

Neste esquema, o processo se inicia fixando o valor de uma (ou várias) variáveis e, no decorrer do processo, obtém-se uma solução factível fixando o valor de novas variáveis. No processo, muitos pontos solução são excluídos implicitamente. A Figura 5.1 mostra o esquema de enumeração de Glover.

Pode-se mostrar que o esquema de enumeração de Glover mostrado na Figura 5.1 é finito e consegue enumerar implícita ou explicitamente todos os 2^n possíveis soluções, de uma maneira não redundante.

5.4 Algoritmo de Enumeração Implícita de Balas

No algoritmo de Balas, assim que o processo progride, é armazenada a melhor solução factível encontrada e depois de enumerar todas as 2^n soluções possíveis, implícita ou explicitamente, a última melhor solução factível encontrada, chamada de incumbente, é a solução ótima.

O algoritmo de enumeração de Balas, depois de algumas modificações feitas por Glover no esquema de enumeração, levou a um algoritmo geral de enumeração implícita conhecido como algoritmo aditivo de Balas, cujo diagrama de fluxo, após modificações secundárias, é apresentado na Figura 5.2.

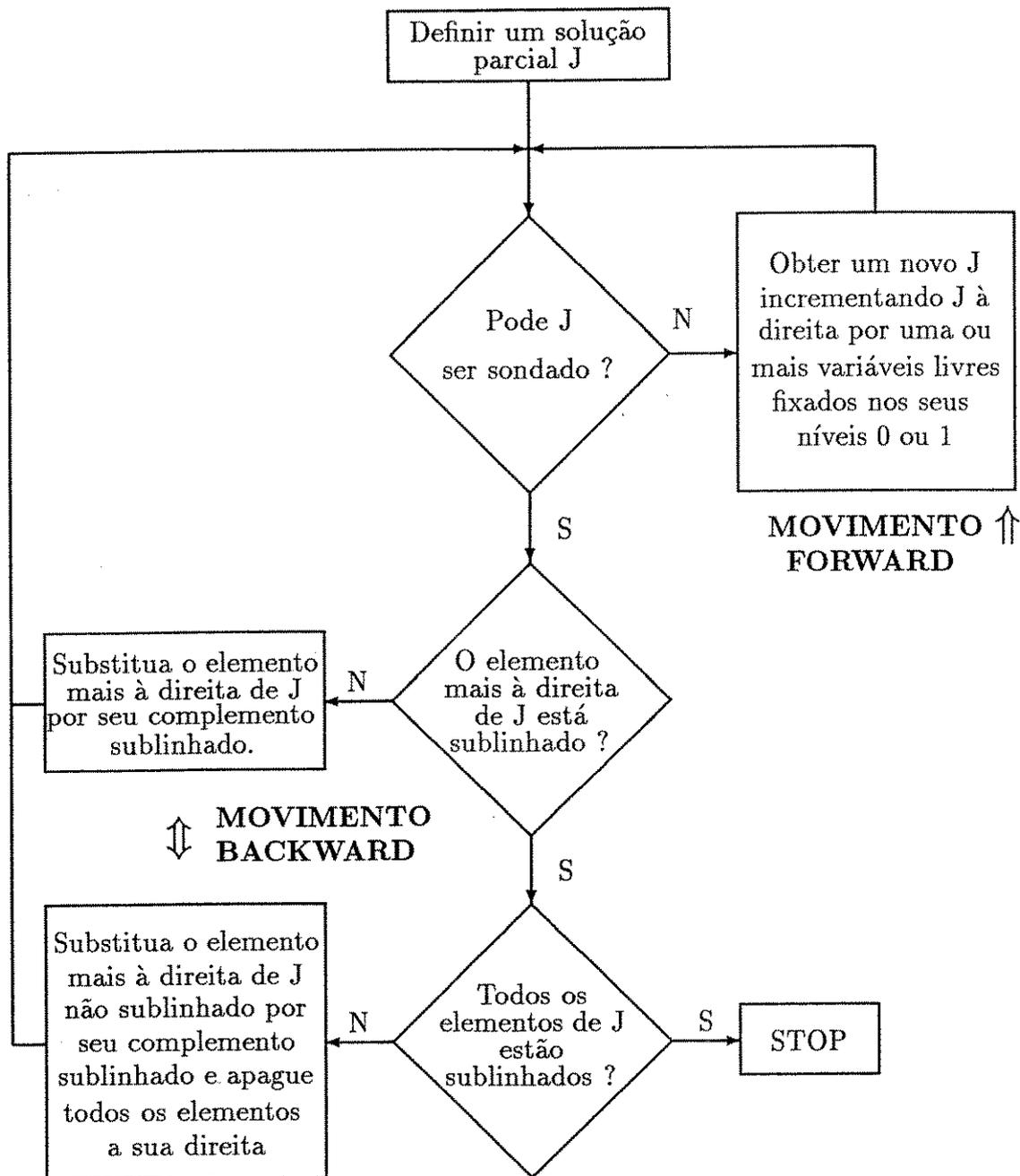


Figura 5.1: Esquema de Enumeração de Glover

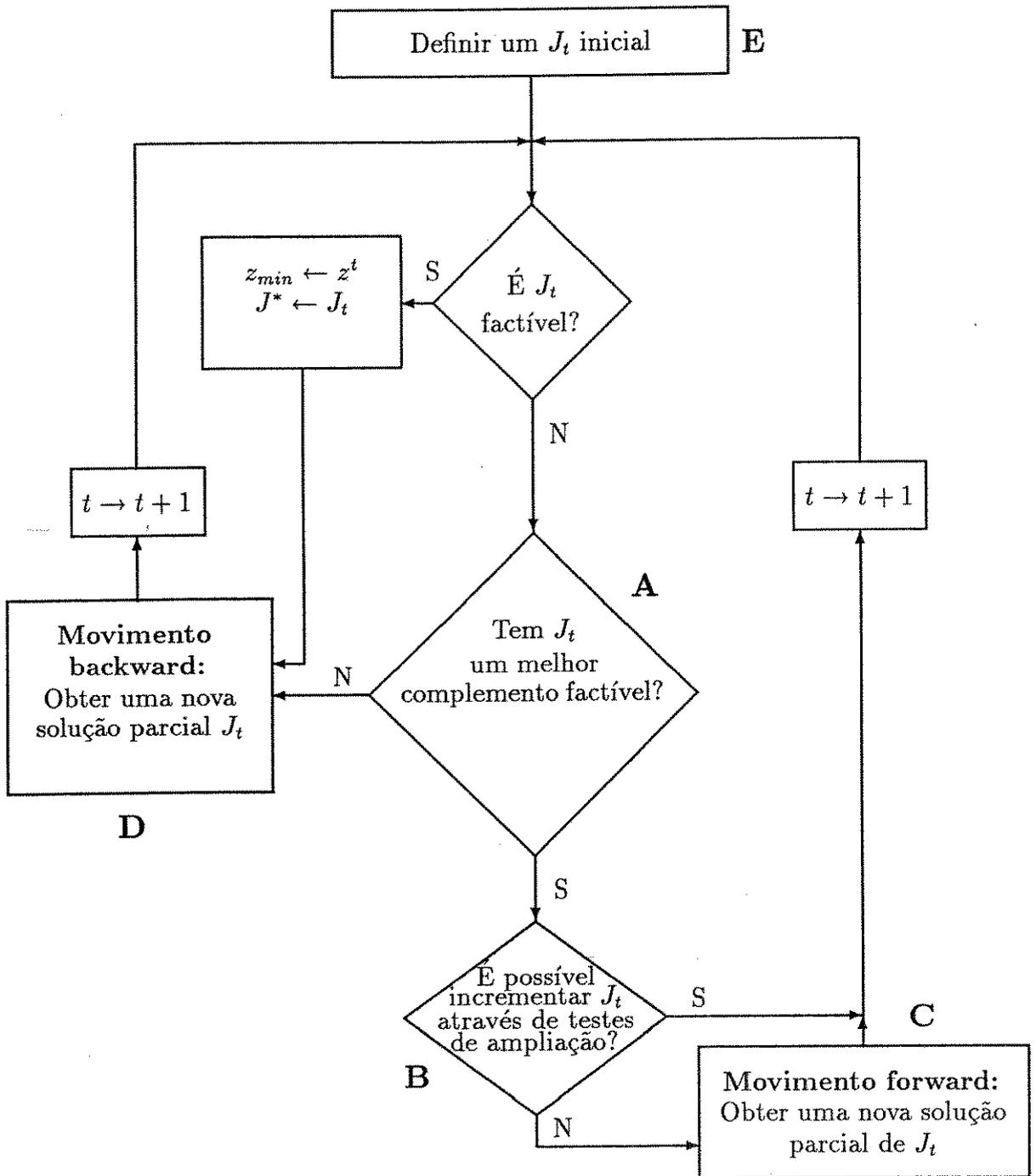


Figura 5.2: Algoritmo Aditivo de Balas

O algoritmo geral mostrado na Figura 5.2 pode assumir vários níveis de especialização, depois de definir as tarefas específicas em cada um dos blocos A, B, C, D e E. Portanto, a especificação das tarefas em cada bloco define o nível de especialização do algoritmo e, de certa forma, a potência da metodologia. Apresenta-se as principais tarefas desenvolvidas em cada bloco, com as particularidades incorporadas ao algoritmo desenvolvido.

A. Testes de Sondagem:

Os testes de sondagem são projetados para excluir o máximo possível de complementos (isto é, soluções derivadas) de uma solução parcial por serem não promissoras. Estes testes são fundamentalmente de tipo heurístico e podem ser tão fracos, que permitam a enumeração explícita de quase todas as 2^n soluções factíveis ou, tão poderosos, que excluam praticamente todas as soluções possíveis.

Na iteração t , seja J_t a solução parcial, então tem-se:

$$S_i^t = b_i - \sum_{j \in J_t; j > 0} a_{ij}; \quad i \in M \quad (5.5)$$

$$z^t = \sum_{j \in J_t; j > 0} c_j \quad (5.6)$$

onde S_i^t define o valor das variáveis de folga e z^t a função objetivo. Seja z_{min} a melhor solução factível encontrada, chamada de incumbente. A idéia dos testes de sondagem, na tentativa de excluir um conjunto de possíveis soluções porque são consideradas não promissoras, pode ser feita em base a duas considerações básicas mostradas a seguir. Para a solução parcial definida por J_t supor que $S_i^t < 0$ para pelo menos um $i \in M$. Nesta situação, pode-se avaliar se:

- J_t não tem complemento factível.
- J_t tem complemento factível mas com uma função objetivo maior que a incumbente, isto é, o melhor objetivo z_c^t que pode-se obter a partir de J_t leva a um $z_c^t > z_{min}$.

Em ambos os casos J_t é sondado e deve ser feito um movimento backward. Se os testes de sondagem falham, então, deve-se fazer um movimento forward tentando inicialmente dar ou especificar valores definidos a algumas variáveis livres, através dos chamados testes de ampliação ou, então, dar o valor 1 a uma variável livre, definido em C na Figura 5.2, na tentativa de encontrar um melhor complemento factível.

Apresenta-se os testes de sondagem de Balas e Glover-Zionts que são implementados no algoritmo do presente trabalho. Para mostrar e/ou demonstrar os testes de sondagem apresentados, é melhor apresentar as expressões gerais de S_i^t e z^t na seguinte forma:

$$S_i^t = b_i - \sum_{j \in J_i; j > 0} a_{ij} - \sum_{j \in J_i; j < 0} a_{ij} - \sum_{j \in (N - J_i)} a_{ij} \quad (5.7)$$

$$z^t = \sum_{j \in J_i; j > 0} c_j + \sum_{j \in J_i; j < 0} c_j - \sum_{j \in (N - J_i)} c_j \quad (5.8)$$

Teste 1: (Balas)

Define-se:

$$A_t = \{j \in N - J_t \mid a_{ij} \geq 0 \forall i \mid S_i^t < 0\} \quad (5.9)$$

Os elementos de A_t são aquelas variáveis livres que, ao serem elevados ao nível 1, não melhoram a infactibilidade da solução parcial corrente. Isto pode ser visto em (5.7), pois se x_j ; $j \in A_t$ é elevado ao nível 1, então, a infactibilidade de S_i^t muda para pior. Assim todos aqueles x_j ; $j \in A_t$ são excluídas porque não contribuem para melhorar a infactibilidade.

Seja: $N_t^1 = N - J_t - A_t$.

Se $N_t^1 = \{\emptyset\}$, isto significa que nenhuma variável livre pode ser elevado ao nível 1, então J_t é sondado por infactibilidade e, deve-se fazer um movimento backward.

Teste 2: (Balas)

Define-se:

$$B_t = \{j \in N_t^1 \mid z^t + c_j \geq z_{min}\} \quad (5.10)$$

Os elementos de B_t são aquelas variáveis livres que, embora possam melhorar a infactibilidade do problema, cada variável leva a uma função objetivo maior que a incumbente z_{min} , isto é, a um objetivo de pior qualidade. Assim os x_j , $j \in B_t$ são excluídos como candidatos para assumir o valor 1, pois são não promissoras.

Seja: $N_t^2 = N_t^1 - B_t$.

Se $N_t^2 = \{\emptyset\}$, isto significa que nenhuma variável livre pode ser elevado ao nível 1, então J_t é sondado, pois não existe complementos factíveis melhores que a incumbente corrente. Assim, J_t é **sondado** porque não tem melhor complemento factível e, deve-se fazer um movimento backward.

Teste 3: (Balas)

Define-se:

$$C_t = \left\{ i \in M \mid S_i^t < 0; \sum_{j \in N_t^2} a_{ij}^- > S_i^t \right\} \quad (5.11)$$

onde: $a_{ij}^- = \min(0, a_{ij})$.

Os elementos de C_t são os índices i daquelas restrições, em que as folgas são negativas e que apesar de elevar todos os elementos de N_t^2 adequadamente ao nível 1, ainda aquela restrição i é infactível. Na equação (5.7), pode-se ver claramente que, se uma restrição tem sua folga corrente num valor negativo e usarmos todas as variáveis livres ainda disponíveis com $a_{ij} < 0$, na tentativa de melhorar a infactibilidade, e esta restrição ainda continuar infactível, então não existe complemento factível de J_t . Assim, se $C_t \neq \emptyset$, pelo menos uma restrição continuará infactível, então J_t é sondado pois não tem complemento factível e, deve-se fazer um movimento backward. Se $C_t = \{\emptyset\}$, tenta-se ainda sondar J_t através do teste 3'.

Teste 3': (Glover-Zionts) [22]

Neste teste, tenta-se avaliar se existe uma restrição cuja infactibilidade pode ser resolvida, mas produzindo um valor da função objetivo pior que a incumbente corrente.

Para cada $S_i^t < 0$ calcular:

$$r_i = \min_{j \in N_t^2} \left\{ \frac{S_i^t c_j}{a_{ij}}; \quad a_{ij} < 0 \right\} \quad (5.12)$$

Se $r_i \geq z_{min} - z^t$ então J_t é sondado.

Este teste, projetado por Glover-Zionts em [22], foi motivado pelo fato de que o teste 3 de Balas poderia ser ineficiente em alguns casos, por exemplo, em muitos casos pode-se satisfazer a factibilidade, mas levando o valor do objetivo a um valor maior que a incumbente, o que significa que a solução parcial J_t realmente poderia ser sondada, fato

que não é detectado pelo Teste 3 de Balas. Em outras palavras, pode acontecer que

$$\sum_{j \in N_i^2} a_{ij}^- < S_i^t \quad (5.13)$$

mas promover aquelas variáveis ao nível 1 levaria o valor do objetivo parcial a um valor maior que a incumbente.

O seguinte exemplo ilustra este fato: Supor que num determinado estágio na solução de um problema tem-se $z_{min} = 40$; $N_i^2 = \{3, 5\}$; $z^t = 18$ e alguns dados parciais mostrados na seguinte tabela:

Variável	x_3	x_5	
Restrição 2	$a_{23} = -6$	$a_{25} = -4$	$S_2 = -8$
Custo	$c_3 = 12$	$c_5 = 20$	

Esta solução parcial não é sondado por nenhum dos testes de sondagem de Balas (1, 2 e 3). Especialmente no Teste 3 de Balas acontece que $-6 - 4 = -10 < -8$ o que levaria a $S_2 = 2$, isto é, fazendo $x_3 = x_5 = 1$ se elimina a infactibilidade da restrição 2 e o teste de sondagem 3 de Balas falha, pois não consegue sondar esta solução parcial. Mas, note-se que eliminar esta infactibilidade levaria a solução parcial a $z^t = 18 + 12 + 20 = 50$ o que é pior que a incumbente, $z_{min} = 40$. O teste de Glover-Zionts foi projetado para lograr a sondagem neste tipo de casos. Pode-se, então, resumir o teste de Glover-Zionts.

Teste de Glover-Zionts: Uma condição suficiente para sondar uma solução parcial J_t é seguinte:

Se existe um $i \mid S_i^t < 0$ e

$$\frac{S_i^t c_j}{a_{ij}^-} \geq z_{min} - z^t \quad \forall j \in N_i^2; \quad a_{ij}^- < 0 \quad (5.14)$$

então não existe complemento factível de J_t que possa melhorar a incumbente, então a solução parcial definida por J_t é sondada.

Prova: Prova pelo absurdo:

Assumir que existe uma solução melhor que a incumbente. Então, para tal solução, temos que $\sum a_{ij}^- \leq S_i^t$, que é o caso que realmente interessa, em que a soma é feita

somente com os elementos negativos de a_{ij} |. $j \in N_i^2$ e a_j está na base para a solução especificada. A relação anterior que é a mesma apresentada em (5.13) pode ser escrita na seguinte forma:

$$\sum a_{ij}^- = \rho S_i^t; \quad \rho > 1 \quad (5.15)$$

Então se $\sum c_j$ está restrito a esses mesmos valores de j , o valor da função objetivo corrente definido por $z^t + \sum c_j$ levaria a um limite inferior da incumbente, pois estamos supondo que existe uma melhor incumbente, então:

$$z^t + \sum c_j < z_{min}$$

Por outro lado, pela hipótese, tem-se que:

$$\begin{aligned} z^t + \sum c_j &= z^t + \sum a_{ij}^- \left(\frac{c_j}{a_{ij}^-} \right) \\ &\geq z^t + \sum a_{ij}^- \left[\frac{z_{min} - z^t}{S_i^t} \right] \quad \text{de (5.14)} \\ &\geq z^t + \left(\frac{\sum a_{ij}^-}{S_i^t} \right) (z_{min} - z^t) \\ &\geq z^t + \rho (z_{min} - z^t) \quad \text{de (5.15)} \\ &\geq \rho z_{min} - (\rho - 1)z^t \\ &\geq \rho z_{min} - z_{min} + z_{min} - (\rho - 1)z^t \\ &\geq z_{min} + (\rho - 1)(z_{min} - z^t) \geq z_{min} \\ z^t + \sum c_j &\geq z_{min} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

e assim chegou-se a uma contradição, então a validade do teste de Glover-Zionts foi provado pelo absurdo.

Portanto, de acordo com Glover-Zionts pode-se resumir que:

Para aqueles i |. $S_i^t < 0$ verificar se

$$\frac{S_i^t c_j}{a_{ij}^-} \geq z_{min} - z^t \quad \forall j \in N_i^2$$

se for verdade para qualquer i então J_t é sondado.

B. Movimento Forward: Testes de Ampliação de Variáveis.

Quando os testes de sondagem falham deve-se incrementar o número de variáveis em J_t , isto é, algumas variáveis livres devem assumir valores definidos e incluídos no conjunto J_t , assumindo valores específicos 0 ou 1. Uma primeira tentativa de incremento de variáveis é fazer os chamados testes de ampliação, que visam determinar o valor exato 0 ou 1 de alguma variável livre para garantir condições de factibilidade à solução parcial definida por J_t . No presente trabalho, apresenta-se e usa-se no algoritmo implementado dois testes de ampliação de variáveis: os testes de ampliação de variáveis de Glover-Zionts e de Geoffrion.

Teste de Ampliação de Geoffrion:

Teorema: [26]

1. A restrição:

$$\beta - \sum_j \alpha_j x_j \geq 0 \quad (> 0), \quad x_j = (0, 1)$$

é infactível binário, isto é, não tem solução binária factível se e somente se

$$\max \left\{ \beta - \sum_j \alpha_j x_j \mid x_j = (0, 1) \right\} = \beta - \sum_j \min(0, \alpha_j) < 0 \quad (\leq 0)$$

2. Em qualquer solução binária de:

$$\beta - \sum_j \alpha_j x_j \geq 0 \quad (> 0),$$

$$\beta - \sum_j \min(0, \alpha_j) - |\alpha_{j_0}| < 0 \implies x_{j_0} = 0 \text{ ou } x_{j_0} = 1$$

se $\alpha_{j_0} > 0$ ou $\alpha_{j_0} < 0$ respectivamente.

Prova: A prova é trivial. Prova-se somente a primeira parte de 1.

1. \implies Se

$$\beta - \sum_j \alpha_j x_j \geq 0$$

é binário infactível então,

$$\max \left[\beta - \sum_j \alpha_j x_j \right] < 0$$

$$\max \left[\beta + \sum_{j; \alpha_j < 0} -\alpha_j x_j + \sum_{j; \alpha_j \geq 0} -\alpha_j x_j \right] < 0$$

$$\beta + \max \sum_{j; \alpha_j < 0} -\alpha_j x_j + \max \sum_{j; \alpha_j \geq 0} -\alpha_j x_j < 0$$

$$\beta + \sum_{j; \alpha_j < 0} -\alpha_j + \sum_{j; \alpha_j \geq 0} 0 < 0$$

$$\beta - \sum_j \min(0, \alpha_j) < 0 \quad \blacksquare$$

A utilização da parte 2 do teorema de Geoffrion leva a uma forma simples de fixar os valores de algumas variáveis livres. Assim o teste pode ser estabelecido da seguinte forma:

Teste de Ampliação de Geoffrion: Para cada i tal que $S_i^t < 0$ e cada $j \in N_i^2$, se

$$\left[S_i^t - \sum_{j \in (N_i^2)} \min(0, a_{ij}) - |a_{ij}| \right] < 0 \quad (5.16)$$

então

$$x_j = 0 \text{ se } a_{ij} > 0 \text{ ou}$$

$$x_j = 1 \text{ se } a_{ij} < 0$$

Teste de Ampliação de Glover-Zionts: [22]

Este teste permite fixar uma variável livre no nível 0 através de um teste muito simples formulado na seguinte forma:

Para cada i e cada $p \in N_t^2$ tal que $a_{ip} > S_i^t$, calcular

$$c_h = \min \{c_j \mid j \in N_t^2 - \{p\}, a_{ij} < 0\} \quad (5.17)$$

se $c_h + c_p \geq z_{min} - z^t$ então $x_p = 0$.

C. Movimento Forward: Critério de Incremento de Variáveis

Se os testes de sondagem e de ampliação de variáveis falham deve-se selecionar uma variável livre j para ser adicionado a J_t com um valor de $x_j = 1$. Esta variável é escolhida através do chamado Teste 4 de Balas.

Teste 4: (Balas)

Selecione uma variável livre x_{j^*} , $x_{j^*} \in N_t^2$ para assumir o nível 1 e adicionar j^* a J_t . Esta variável é escolhida através da relação:

$$v_{j^*} = \max_{j \in N_t^2} \{v_j\} \quad (5.18)$$

onde

$$v_j = \sum_{i \in M} \min(0, S_i^t - a_{ij}); \quad j \in N_t^2 \quad (5.19)$$

v_j é uma medida empírica da infactibilidade total da nova solução parcial após fazer $x_j = 1$. Em caso de empate j^* é selecionado de tal maneira que c_{j^*} seja o menor entre os c_j candidatos.

Se $v_{j^*} = 0$ então não existe infactibilidade e assim J_{t+1} é factível e esta nova solução deve levar a um melhor valor da incumbente z_{min} . Então J_{t+1} é sondado e, deve-se atualizar a incumbente.

Este critério de entrada de variáveis que quantifica a infactibilidade total da solução parcial após fazer $x_j = 1$ não é o único critério de seleção de variáveis para adicionar a J_t . Para alguns problemas, outros critérios podem ser mais eficientes tais como [23]:

- Selecione a variável x_j que produz a menor infactibilidade na restrição mais violada.
- Selecione a variável x_j que elimine a infactibilidade do maior número de restrições.
- Selecione uma variável x_j que tem um c_j pequeno e uma grande capacidade de reduzir a infactibilidade total da solução parcial, isto na tentativa de encontrar boas soluções factíveis.

D. Movimento Backward

Se uma solução parcial foi sondada deve-se fazer um movimento backward no esquema de Balas, isto é, deve ser alterado o valor de uma variável de J_t . No esquema normal de Balas, este processo é feito através da regra LIFO para ordenar as variáveis. Na regra LIFO (last-in,first-out) a última variável a entrar na lista é a primeira considerada para futuras explorações. Por exemplo, seja J_t ,

$$J_t = \{2, -\underline{5}, 3, 6, 1, \underline{4}\} \quad (5.20)$$

Se J_t é sondado, a nova solução parcial é definida pela relação:

$$J_{t+1} = \{2, -\underline{5}, 3, 6, -\underline{1}\} \quad (5.21)$$

Evidentemente, a ordem em que as variáveis são analisadas altera o processo de enumeração. Este fato foi observado por Tuan [24] que demonstrou não ser preciso seguir estritamente a regra LIFO, implicitamente embutido no esquema de enumeração de Glover, para garantir um desenvolvimento correto do esquema de enumeração de Glover. Tuan sugere a determinação de um subconjunto J'' , constituído por aquelas variáveis que podem ser escolhidas para o desenvolvimento de futuras explorações, isto é, aquelas variáveis que podem ser sublinhadas. Se j_1 é o elemento de J_t que seria escolhido pela regra LIFO, então os elementos de J'' são todos aqueles elementos de J_t que estão localizados

a partir de j_1 inclusive até achar o primeiro elemento sublinhado num percurso de direita a esquerda nos elementos de J_t . Assim, por exemplo, se J_t é definido por (5.20),

$$J'' = \{3, \underline{6}, 1\}$$

Portanto, num movimento backward, de acordo com a idéia de Tuan, qualquer elemento de J'' pode ser complementado ou sublinhado. No exemplo, a partir de J_t pode-se gerar as seguintes soluções parciais:

$$J_t = \{2, -\underline{5}, 3, 6, -\underline{1}\}$$

$$J_t = \{2, -\underline{5}, 3, 1, -\underline{6}\}$$

$$J_t = \{2, -\underline{5}, 6, 1, -\underline{3}\}$$

Segundo Tuan, a ordem dos elementos 3, 6 e 1 é indiferente e, o que realmente é importante é a ordem e a posição dos elementos sublinhados. Obviamente cada uma das 3 alternativas mostradas anteriormente levam a estruturas de árvore e convergência diferentes. Assim, existe a oportunidade de escolher aquela variável que pode fornecer melhores condições de sondagem.

O critério para selecionar um elemento de J'' é permitir condições favoráveis para produzir complementos factíveis rapidamente.

Teste de Tuan: [24]

O elemento $j \in J_t''$ a ser complementado, isto é igualado a 0 e sublinhado, é aquele que produz na solução primal resultante a menor quantidade de inactibilidade total. Assim, o elemento p selecionado deve satisfazer:

$$w_p = \max_{j \in J_t''} \{w_j\} \quad (5.22)$$

onde

$$w_j = \sum_{i \in M} \min(0, S_i^t + a_{ij}); \quad j \in J_t'' \quad (5.23)$$

onde w_j quantifica a inactibilidade quando $x_j = 0$. No caso de empate, p define aquela variável que tem o maior c_j entre as variáveis que empataram.

E. Determinação de uma Solução Inicial

No início do processo, pode-se começar com uma solução inicial factível que assim se torna em incumbente inicial ou, pode-se iniciar com uma incumbente $z_{min} = \infty$ e $J_t = \{\emptyset\}$.

No algoritmo normal de Balas, inicia-se o processo com todas as variáveis livres e $z_{min} = \infty$. O processo rapidamente fornece uma solução factível, mas de pobre qualidade. Foi observado ainda em [23], que um conhecimento a priori de uma solução factível de boa qualidade e seu uso como incumbente inicial reduz consideravelmente o processo de enumeração implícita.

Uma boa solução inicial pode ser fornecido por um algoritmo subótimo obtido através de métodos heurísticos, utilizando tempos computacionais reduzidos. Existem vários algoritmos heurísticos que podem ser implementados, desde os mais simples até os mais sofisticados.

Uma outra alternativa para determinar uma “boa” solução inicial é sugerida por Petersen [28]. Nesta alternativa é sugerido fazer um ranking das variáveis, selecionando primeiro aquelas variáveis que tem os maiores valores da relação

$$\frac{1}{\sum a_{ij}} \frac{c_j}{a_{ij}}$$

Uma variante mais simples é fazer um ranking considerando somente a restrição mais restritiva, isto é considerando somente aquela restrição que tem

$$\max \{ \sum a_{ij} - b \}$$

mas é observado que a eficiência desta alternativa depende da estrutura do problema.

Pode-se ainda usar o conhecimento a priori do valor de algumas variáveis na solução ótima. Esta idéia sugerida por Geoffrion [23] consiste em determinar um J_t inicial constituído por uma combinação destas variáveis. Pode-se ainda “ordenar” estas variáveis em J_t pelo “grau de certeza” de seus valores na solução ótima. Assim, por exemplo, tem-se “quase total certeza”, a priori, de que $x_7 = 1$ na solução ótima, “grande certeza” de que $x_2 = 0$ e “pouca certeza” de que $x_5 = 1$, então $J_t = \{7, -2, 5\}$ é melhor que $J_t = \{5, -2, 7\}$ ou qualquer outra combinação possível. A mesma estratégia pode ser usada para escolher uma permutação, quando J_t é sondada, o que levaria a uma variante do teste de Tuan.

5.5 Algoritmo Implementado

Em adição às características anteriormente mencionadas, que são próprias de um algoritmo de enumeração implícita de caráter geral, deve-se ainda utilizar, num algoritmo especializado, as características próprias do problema a resolver, especialmente aquelas que tem relação com a estrutura do problema, conhecimento prévio das particularidades do problema e um especial conhecimento das características das grandezas físicas, às quais representam as variáveis binárias do problema. Assim, um conhecimento das características particulares de um problema pode levar à formulação de um algoritmo de enumeração implícita especializado que seja muito eficiente, ao aproveitar essas informações disponíveis, na aceleração do processo de solução.

Em relação ao problema de planejamento de sistemas de transmissão, as variáveis de investimento são linhas de transmissão que eventualmente podem assumir valores 0,1,2,3,... Estas variáveis de investimento devem ser transformadas em variáveis binárias para serem implementados num algoritmo de enumeração implícita 0-1. Na presente análise, foi limitado o número máximo de linhas candidatas a investimento a 3 linhas por caminho de investimento disponível. Assim, em princípio, tem-se um número de variáveis binárias igual ao dobro das variáveis de investimento, o que, obviamente, representa um aumento significativo no tamanho do problema.

Por outro lado, o algoritmo de enumeração implícita é usado somente na Fase III, na solução do problema de planejamento de sistemas de transmissão, usando a decomposição de Benders hierarquizada. Nesta fase, resolve-se um subproblema de investimento com variáveis de investimento em forma iterativa. Esta solução iterativa do subproblema de investimento permite dispor de muita informação das características do problema pois, no processo iterativo, um subproblema de investimento na iteração $k + 1$ é simplesmente o mesmo problema na iteração k com uma restrição adicionada, o último corte de Benders gerado. Assim, é possível aproveitar muita informação disponível do processo de solução do problema na iteração k , na tentativa de resolver mais rapidamente o problema na iteração $k + 1$.

É importante, de igual maneira, observar que a evolução do processo iterativo é “suave”, isto é, o incremento em investimento de uma iteração a outra é relativamente pequena, o que, em outras palavras, faz um acontecimento quase impossível, por exemplo, que uma variável com $x_j = 0$ nas soluções ótimas do problema, nas k primeiras iterações “pule” para $x_j = 2$ na iteração $k + 1$.

No processo de solução do subproblema de investimento pode-se observar as seguintes características, que podem ser aproveitadas na especialização de um algoritmo de enumeração implícita 0-1:

1. Pode-se reduzir significativamente o número de variáveis binárias devido à evolução suave dos custos de investimento no processo iterativo. Assim, somente são duplicadas aquelas variáveis de investimento que já atingiram valores diferentes de zero nos processos iterativos prévios. Foi observado que um número reduzido das variáveis assumem valores diferentes de zero na solução ótima dos subproblemas de investimento, o que leva a duplicar um número reduzido de variáveis de investimento em variáveis binárias. Desta forma, reduz-se consideravelmente o número de variáveis binárias.
2. Os elementos da matriz A , obtidos a partir dos cortes de Benders, são praticamente todos eles não negativos e um número muito reduzido deles são significativos, pelo menos aqueles obtidos dos cortes de Benders na Fase I do processo iterativo, o que torna estas restrições especialmente adequadas para os testes de sondagem, na tentativa de eliminar o maior número de complementos de uma solução parcial por serem inactivos ou não promissoras.
3. O número de iterações num algoritmo de enumeração implícita depende em grande medida das características do problema. Foi observado, ainda, por Balas [21], que em problemas onde na solução ótima existe um número reduzido de variáveis no nível 1, os testes de sondagem são relativamente eficientes, produzindo uma rápida convergência do algoritmo. Nossa experiência reforça a observação de Balas e ainda mostra que, este fato é uma característica muito particular do problema de planejamento de sistemas de transmissão, e o conseqüente subproblema de investimento, em que se tem um elevado número de caminhos alternativos para investimento de circuitos (variáveis inteiras), mas na solução ótima somente num número muito reduzido destes caminhos candidatos (variáveis de investimento inteiras) é realizado investimento, isto é, muito poucas variáveis assumem valores diferentes de zero, tradicionalmente entre 8 – 15% das variáveis; o que faz deste tipo de problema **naturalmente adequado** para serem resolvidos por um algoritmo de enumeração implícita.
4. Existe muita informação disponível do processo de solução do subproblema de investimento na iteração k que pode ser adequadamente aproveitada na iteração $k + 1$. A diferença entre os dois subproblemas é somente numa restrição adicional (último corte de Benders gerado). Assim, pode-se ter a “quase-certeza” de que a maioria das variáveis que assumiram valores diferentes de zero na iteração k , também assumirão valores diferentes de zero na iteração $k + 1$, pois a mudança entre uma iteração e outra é muito pequena. Portanto, aquelas variáveis que assumiram valores diferentes de zero na solução ótima do problema na iteração k podem ser usados, ordenados adequadamente, como sugere Geoffrion [23], para obter uma boa solução inicial ou incumbente do problema na iteração $k + 1$, pois aquelas variáveis podem ser incluídas prioritariamente na obtenção de J_t inicial, isto é, na obtenção de uma

boa solução factível inicial.

Uma outra forma de produzir uma boa solução inicial é armazenar um subconjunto constituído por parte das incumbentes geradas na solução do problema na iteração k e as anteriores iterações, pois várias delas podem ainda ser factíveis para o problema na iteração $k + 1$ tornando-se, desta maneira, a melhor delas, em excelente incumbente inicial para este novo problema. Este processo de “armazenagem” de incumbentes pode ser mantido e atualizado no decorrer de todo o processo iterativo, eliminando aquelas incumbentes que se tornaram infactíveis para os novos problemas e, eventualmente, armazenando novos incumbentes que sejam gerados no processo de solução. Além disso, este processo é favorecido de maneira especial neste tipo de algoritmo, pois o processo de armazenagem de incumbentes não implica computação adicional e ocupa espaço reduzido de memória. Esta idéia é reforçada pelo fato de que o requerimento de memória é um problema inexistente nos algoritmos de enumeração implícita, em que a ocupação de memória é insignificante comparado aos outros métodos.

5. Também foi observado ainda por Balas [21], que o incremento do número de restrições geralmente aumenta a eficiência dos critérios ou testes de sondagem reduzindo, às vezes, de maneira considerável, o número de iterações. No caso do problema de planejamento de sistemas de transmissão, além dos cortes de Benders gerados, que são as restrições no subproblema de investimento, pode-se ainda gerar outros cortes ou restrições adicionais, na tentativa de aumentar a eficiência dos testes de sondagem. Existem vários tipos de restrições que podem ser adicionados ao subproblema de investimento como as restrições de cerca e do tipo linha-transformador discutidos no Capítulo 3.

Em planejamento de sistemas de transmissão é muito freqüente o fato de que para transportar energia de um ponto a outro de um sistema elétrico, usando um novo caminho alternativo, precisa-se de mais de um circuito como, por exemplo, a adição de uma linha e transformador ou, às vezes, ainda, precisa-se da adição de um conjunto transformador-linha-transformador e provavelmente outras combinações parecidas. Nestes casos, não faz sentido para problemas reais adicionar somente um destes elementos, pois isso não contribuiria com nenhuma transferência de energia. Este fato, que o algoritmo resolveria a um custo adicional maior, pode ser favoravelmente aproveitado para gerar simples restrições, que são adicionados ao subproblema de investimento e que normalmente incrementa substancialmente a potência dos testes de sondagem, especialmente torna poderosos ao teste de ampliação de Geoffrion.

Restrições deste tipo são facilmente sistematizados e incorporados ao subproblema de investimento diminuindo consideravelmente o número de iterações para atingir a convergência do algoritmo de enumeração implícita.

Baseado nas anteriores observações foi elaborado e programado um algoritmo de enu-

meração implícita zero-um especializado, para resolver o subproblema de investimento na Fase III do problema de planejamento de sistemas de transmissão a longo prazo, usando a técnica de decomposição de Benders hierarquizada.

Algoritmo de Enumeração Implícita Zero-Um:

Baseado nos tópicos apresentados anteriormente foi projetado o seguinte algoritmo de enumeração implícita especializado: Seja k o contador de iterações do subproblema de investimento na Fase 3. Inicialize $k = 0$.

1. Determinação de uma boa solução inicial: $j = 0$.

Se $k = 0$ definir um J_t inicial constituído pelas variáveis de investimento que assumiram um valor significativo diferente de zero na solução ótima do subproblema de investimento na Fase II. Estas variáveis ainda podem ser ordenadas em ordem decrescente do valor numérico assumido no final da Fase II.

Em caso contrário, atualizar as incumbentes armazenadas nas iterações anteriores testando a factibilidade destas incumbentes através do último corte de Benders gerado. Assumir a melhor incumbente como solução inicial e J_t é constituído pelas variáveis diferentes de zero dessa incumbente. Se não existe incumbente factível, definir um J_t inicial constituído pelas variáveis que assumiram valor diferente de zero na solução ótima do problema anterior e ordenadas de maneira decrescente em relação a seus valores numéricos da iteração anterior.

2. Teste de Factibilidade:

Se a solução parcial definida por J_t é factível então J_t é sondado; atualizar e armazenar a incumbente e ir ao passo 10. Em caso contrário, ir ao passo 3.

3. Teste 1 de Balas:

Obter o conjunto N_t^1 . Se $N_t^1 = \{\emptyset\}$ então J_t é sondado e ir ao passo 10. Em caso contrário, ir ao passo 4.

4. Teste 2 de Balas:

Obter o conjunto N_t^2 . Se $N_t^2 = \{\emptyset\}$ então J_t é sondado e ir ao passo 10. Em caso contrário, ir ao passo 5.

5. Teste 3 de Balas:

Obter o conjunto C_t . Se $C_t \neq \{\emptyset\}$ então J_t é sondado e ir ao passo 10. Em caso contrário, ir ao passo 6.

6. Teste 3' de Glover-Zionts:

Nas condições sugeridas por Glover-Zionts determinar se J_t pode ser sondado. Se J_t é sondado ir ao passo 10. Em caso contrário, ir ao passo 7.

7. Teste de Ampliação de Geoffrion:

Se é possível ampliar J_t de acordo com o teste de ampliação de Geoffrion, então, ampliar J_t , fazer $t \rightarrow t + 1$ e voltar ao passo 2. Em caso contrário, ir ao passo 8.

8. Teste de Ampliação de Glover-Zionts:

Se é possível ampliar J_t de acordo com o teste de ampliação de Glover-Zionts, então, ampliar J_t , fazer $t \rightarrow t + 1$ e voltar ao passo 2. Em caso contrário, ir ao passo 9.

9. Teste 4 de Balas:

Selecione uma variável livre para adicionar a J_t de acordo com o teste 4 de Balas, $t \rightarrow t + 1$.

Se $v_{j^*} = 0$ então o novo J_t é factível. Atualize e armazene a incumbente, J_t é sondado e ir ao passo 10. Em caso contrário, voltar ao passo 3.

10. Movimento Backward

Verificar se a enumeração implícita já foi esgotada. Se a enumeração foi completada, pare. $k \rightarrow k + 1$ armazenar a solução ótima e voltar ao planejamento hierarquizado. Em caso contrário fazer um movimento backward de acordo com o teste de Tuan, $t \rightarrow t + 1$ e voltar ao passo 2.

5.6 Resultados Computacionais

5.6.1 Sistema Sul Brasileiro

Foi testado o sistema sul brasileiro para o caso em que é permitido o redespacho da geração, isto é, o Caso 2, para avaliar o desempenho do algoritmo de enumeração implícita especializado. Apresenta-se vários testes a fim de acompanhar a evolução do algoritmo, na medida que são incluídas as diferentes melhorias sugeridas.

Na Tabela 5.1, apresentam-se os resultados correspondentes à Fase III do subproblema de investimento, em que precisamente é usado o algoritmo de enumeração implícita de Balas especializado. Os resultados da Tabela 5.1 foram obtidos com um algoritmo de Balas sem um nível elevado de especialização, isto é, usando o algoritmo padrão usado nos testes do capítulo anterior. Neste estágio, além do esquema normal de Balas, foi incorporado ao

algoritmo o teste de Tuan, para fazer o movimento backward na escolha da variável que deve ser sublinhada. Também, a única característica específica incorporada foi a técnica de redução de variáveis binárias. Assim, para os resultados apresentados na Tabela 5.1, 80 variáveis inteiras foram transformados somente em 96 variáveis binárias, reduzindo consideravelmente o tamanho do problema a ser resolvido pelo algoritmo de enumeração implícita de Balas.

Na Tabela 5.2, apresentam-se os resultados do mesmo problema, somente que, neste caso, foi incorporado ao algoritmo o teste de sondagem de Glover-Zionts. Pode-se notar que a simples incorporação do teste de sondagem de Glover-Zionts reduz consideravelmente o número de iterações do algoritmo de Balas, produzindo também uma significativa redução do tempo total de solução do problema de planejamento.

Na Tabela 5.3, apresentam-se os resultados do mesmo problema, mas com a incorporação adicional de um conjunto de restrições de tipo linha-transformador, além dos já adicionados anteriormente. Pode-se notar que estas restrições de tipo linha-transformador também reduzem consideravelmente o número de iterações utilizados pelo algoritmo de enumeração implícita. Pode-se observar que a redução do número de iterações do algoritmo de Balas é muito grande, o que significa que estas restrições de tipo linha-transformador, embora incrementem o número de restrições, elas incrementam a potência dos testes de sondagem. Além disso, as restrições reduzem o número de iterações na Fase III do problema de planejamento, fato que é mais surpreendente. Especificamente, na Tabela 5.3 não aparecem as 3 primeiras linhas da Tabela 5.2, ou seja as 3 primeiras alternativas de investimento inteiras obtidas no processo, pois elas são **eliminadas** pelas restrições do tipo linha-transformador. Verificando o problema real, pode-se observar que estas 3 alternativas de investimento realmente são **inadequadas** do ponto de vista físico, pois produz uma alternativa de investimento numa linha e não no correspondente transformador. Isto é particularmente certo nas duas primeiras alternativas de investimento. Note-se ainda que a solução ótima é a mesma e também as tabelas apresentam como soluções parciais os mesmos resultados mais significativos, isto é, ambas formulações apresentam alternativas de investimento com corte de carga pequeno que, para efeito prático, do ponto de vista do planejador, também constituem “soluções” para o problema de planejamento.

Na Tabela 5.4, apresentam-se os resultados do mesmo problema, mas com a incorporação adicional de uma estratégia para determinar uma boa solução inicial do PLI resolvido. Pode-se observar que a redução do número de iterações do algoritmo de enumeração implícita diminui em torno de 10%. A redução não é grande, mas é significativa. Este fato é uma característica do problema de planejamento. Na verdade, quando o algoritmo de enumeração implícita começa com um limite $z_{min} = \infty$, o processo rapidamente encontra uma boa incumbente e até mesmo a solução ótima e o resto do processo é gasto simplesmente na verificação desta solução ótima encontrada. Assim, uma boa solução inicial (verificou-se que, às vezes, esta boa solução inicial é mesmo a ótima) não favorece

Tabela 5.1: Resultados Obtidos para o Sistema Sul Brasileiro.

Iteração	Investimento $\times 10^3$ dol.	No. de iterações de enumeração implícita	Corte de carga	Tempo s.
31	58879	9592	851.0	34.5
32	62690	16671	977.0	63.4
33	62884	29589	262.7	121.2
34	63163	29683	28.0	126.2
35	65183	37193	111.6	159.5
36	65659	43490	341.4	192.1
37	66555	49975	333.3	221.6
38	67717	52683	605.0	241.1
39	67717	52128	155.6	248.2
40	70289	53814	1.3	258.2
41	71341	63783	25.8	314.3
42	71341	65301	9.3	324.2
43	72235	72215	89.1	362.5
44	72870	77233	0.0	390.7

Tempo total até $w = 0.0$: 3124.7 s.

Tempo total até $w = 1.3$: 1727.4 s.

Tabela 5.2: Resultados Obtidos para o Sistema Sul Brasileiro.

Iteração	Investimento $\times 10^3$ dol.	No. de iterações de enumeração implícita	Corte de carga	Tempo s.
31	58879	4124	851.0	19.5
32	62690	6683	977.0	33.5
33	62884	10511	262.7	58.9
34	63163	9838	28.0	58.4
35	65183	12844	111.6	76.6
36	65659	14548	341.4	90.5
37	66555	16323	333.3	102.0
38	67717	16917	605.0	110.4
39	67717	17326	155.6	118.0
40	70289	18524	1.3	129.1
41	71341	21911	25.8	156.1
42	71341	22651	9.3	161.9
43	72235	25567	89.1	183.7
44	72870	27261	0.0	198.7

Tempo total até $w = 0.0$: 1561.1 s.

Tempo total até $w = 1.3$: 855.2 s.

Tabela 5.3: Resultados Obtidos para o Sistema Sul Brasileiro.

Iteração	Investimento $\times 10^3$ dol.	No. de iterações de enumeração implícita	Corte de carga	Tempo s.
31	63163	2513	28.0	14.5
32	65183	3465	111.6	20.1
33	66555	4330	333.3	26.1
34	66555	3650	266.5	24.1
35	67717	3375	605.0	23.3
36	70289	4530	1.3	31.8
37	71341	5365	25.8	38.0
38	71341	5792	9.3	40.9
39	72235	6268	89.1	44.4
40	72870	6661	0.0	47.7

Tempo total até $w = 0.0$: 371.7 s.

Tempo total até $w = 1.3$: 193.8 s.

de maneira determinante no número de iterações deste tipo de problemas. No exemplo testado, na Tabela 5.4, nas iterações 33, 35 e 36 a boa solução inicial (incumbente inicial) fornecida pelo processo (obtidas das iterações anteriores) é realmente a própria solução ótima. Portanto, numa eventual nova especialização do algoritmo, não seria atrativo usar outras técnicas especializadas para determinar uma boa solução inicial. A idéia sugerida na presente metodologia para determinar uma boa solução inicial é suficiente ainda mais que ela não precisa de um esforço computacional adicional.

Na Tabela 5.5, apresentam-se os resultados obtidos com a versão final do algoritmo de enumeração implícita de Balas especializado em que foi incorporado, a todo o anteriormente adicionado, o teste de ampliação de Geoffrion. Pode-se observar uma redução muito grande em termos de número de iterações e tempo de computação.

Em relação ao tempo de computação é necessário mencionar que a Fase I levou 13 s., a Fase II levou 37 s. e o resto foi usado na Fase III. Todos os testes foram realizados numa estação Sun Sparc2.

Tabela 5.4: Resultados Obtidos para o Sistema Sul Brasileiro.

Iteração	Investimento $\times 10^3$ dol.	No. de iterações de enumeração implícita	Corte de carga	Tempo s.
31	63163	2333	28.0	13.8
32	65183	3015	111.6	18.0
33	66555	3784	333.3	23.4
34	66555	3270	266.5	22.1
35	67717	2987	605.0	21.2
36	70289	4190	1.3	30.0
37	71341	5039	9.3	36.4
38	72235	5561	89.1	40.1
39	72870	6001	0.0	43.7

Tempo total até $w = 0.0$: 307.4 s.

Tempo total até $w = 1.3$: 182.6 s.

Tabela 5.5: Resultados Obtidos para o Sistema Sul Brasileiro.

Iteração	Investimento $\times 10^3$ dol.	No. de iterações de enumeração implícita	Corte de carga	Tempo s.
31	63163	1138	28.0	09.2
32	65183	1438	111.6	11.8
33	66555	1720	333.3	14.6
34	66555	1682	266.5	15.1
35	67717	1427	605.0	13.2
36	70289	1967	1.3	18.5
37	71341	2389	9.3	23.2
38	72235	2684	89.1	26.1
39	72870	2848	0.0	28.0

Tempo total até $w = 0.0$: 218.5 s.

Tempo total até $w = 1.3$: 136.8 s.

5.7 Modificação Adicional

Nesta parte, apresenta-se uma idéia preliminar para tentar diminuir, de maneira sistemática, o número de iterações de PLI na Fase III. Na implementação anterior já foi observado que, o número de iterações de PLI na Fase III diminui, ao incorporar no subproblema de investimento as chamadas restrições de tipo linha-transformador, pois estas restrições, além de melhorar o desempenho do algoritmo de enumeração implícita de Bales, evita alternativas de investimento **inadequadas do ponto de vista de operação**, que os cortes de Benders gerados até esse momento não conseguem ainda eliminar. Outra forma de diminuir o número de iterações de PLI na Fase III é incorporando vários cortes de Benders simultaneamente depois de resolver um subproblema de investimento através de um PLI.

Na forma padrão, na Fase III, resolve-se um subproblema de investimento através de um algoritmo de PLI. Esta nova alternativa de investimento é transferida ao subproblema de operação que, por sua vez, gera um corte de Benders que é transferida ao subproblema de investimento, no caso em que ainda exista corte de carga no subproblema de operação. Nesta formulação, somente um corte de Benders é gerado para cada alternativa de investimento que justamente elimina esta alternativa de investimento na próxima iteração. Entretanto, ao se resolver o subproblema de investimento, além da solução ótima, tem-se como um subproduto um conjunto de outras boas alternativas de investimento, constituídas pelas melhores incumbentes geradas no processo de solução do algoritmo de enumeração implícita. No algoritmo especializado mostrado anteriormente, estas incumbentes são armazenadas e usadas nas próximas iterações de PLI para gerar **uma boa solução inicial**, escolhendo a melhor destas incumbentes, ainda factíveis para o novo subproblema, como incumbente inicial do novo subproblema de investimento. Esta idéia, como foi verificado, acelera o processo de solução do algoritmo de enumeração implícita especializado. Agora, nesta nova especialização do algoritmo, tenta-se usar a informação destas incumbentes armazenadas para diminuir o número de iterações de PLI. Assim, depois de resolver um subproblema de investimento, pode-se gerar não somente um corte de Benders, senão vários cortes de Benders, usando a alternativa de investimento ótima (como na forma padrão) e um subconjunto de boas alternativas de investimento constituídas pelas melhores incumbentes, geradas no processo de solução do subproblema de investimento. Nesta forma o processo seria acelerado pois, pelo desenvolvimento relativamente suave das alternativas de investimento, é muito provável que as melhores incumbentes sejam, na verdade, soluções ótimas de subproblemas de investimento que normalmente seriam gerados e resolvidas depois; e até mesmo alguma incumbente armazenada pode ser a solução ótima global transformando-se então, numa limitante superior de investimento, até que seja descoberta como sendo efetivamente a solução ótima.

Com as idéias formuladas anteriormente, o algoritmo especializado foi ampliado na

seguinte forma:

1. Depois de resolver um subproblema de investimento é gerado até um máximo de p cortes de Benders ($p=3$) no teste do sistema sul brasileiro. Estes cortes são gerados usando a alternativa de investimento ótima e as melhores incumbentes armazenadas. Assim, para cada subproblema de investimento, pode-se resolver até p subproblemas de operação.
2. Ao resolver o subproblema de operação podem acontecer as seguintes alternativas:
 - Quando a alternativa de investimento é ótima:
Neste caso, se não existe corte de carga, então foi atingida a solução ótima global. Se existe corte de carga, então se gera o correspondente corte de Benders.
 - Quando a alternativa de investimento não é ótima:
Este caso acontece quando é usada as melhores incumbentes armazenadas ao resolver o PLI. Neste caso, se não existe corte de carga, então a correspondente alternativa de investimento é uma solução ótima local (na verdade, esta solução pode ser ótima local ou global, mas ainda não se pode demonstrar que ela seja global) e se transforma num limite superior de investimento para o problema global e não é gerado corte de Benders, transferindo o processo para a solução do subproblema de investimento através de um PLI. Se existe corte de carga, então se gera o correspondente corte de Benders.

A modificação sugerida foi implementado e usado para testar o sistema sul brasileiro para o caso em que é permitido o redespacho da geração.

Na Tabela 5.6 a apresentado os resultados para o caso em que $w = 1.3$. Pode-se observar que o número de iterações de PLI diminui de 6 para 4, reduzindo de maneira apreciável o tempo de computação. É ainda interessante observar as incumbentes geradas e/ou usadas no processo de solução:

- | | | |
|----------------|-------|-------|
| • Iteração 31: | 66555 | 74733 |
| • Iteração 32: | 70289 | |
| • Iteração 33: | 67717 | |
| • Iteração 34: | - - - | |

Na Tabela 5.7 a apresentado os resultados para o caso em que $w = 0$. Pode-se observar que o número de iterações de PLI diminui de 9 para 5, reduzindo significativamente o tempo de computação. É ainda interessante observar as incumbentes geradas e/ou usadas no processo de solução:

Tabela 5.6: Resultados Obtidos para o Sistema Sul Brasileiro.

Iter.	Investimento $\times 10^3$ dol.	No. de iter. de enumer. impli.	No. de cortes usados	Corte de carga	Tempo s.
31	63163	1138	3	28.0	09.2
32	65183	1225	1	111.6	11.4
33	66555	1652	2	266.5	15.3
34	70289	1913		1.3	18.8

Tempo total até $w = 1.3$: 115.28 s.

Tabela 5.7: Resultados Obtidos para o Sistema Sul Brasileiro.

Iter.	Investimento $\times 10^3$ dol.	No. de iter. de enumer. impli.	No. de cortes usados	Corte de carga	Tempo s.
31	63163	1138	3	28.0	09.2
32	65183	1225	2	111.6	11.4
33	66555	1702	3	266.5	16.5
34	72235	2584	1	89.1	26.2
35	72870	2913		0.0	29.3

Tempo total até $w = 0$: 154.13 s.

- Iteração 31: 66555 74733
- Iteração 32: 70289
- Iteração 33: 67717 71341 72235
- Iteração 34: - - -
- Iteração 35: 73774 78467 79629 ...

Finalmente, na Tabela 5.8 é mostrado um resumo dos investimentos realizados na Fase III, a fim de acompanhar a evolução do processo e a qualidade das diferentes alternativas de investimento.

Tabela 5.8: Resumo de Investimento na Fase III

Circuito	Investimento: $\times 10^3\$$							
	58879	62690	62884	63163	65183	65659	66555	66555
09-14		1						
13-18		1	1				1	1
20-23	1	1	1	1		1	1	1
33-34					1			
20-21	1	2	2	2	2	3	2	1
42-43		1	1	1	1	1	1	1
14-15		1						
05-11		1	2			3		
46-06	1			1	1		1	1
26-29	1							
46-11			1			1		
40-41	1							
05-06	2			2	2		1	2

Tabela 5.8: Continuação.

Circuito	Investimento: $\times 10^3\$$						
	67717	67717	70289	71341	71341	72235	72870
02-05							1
13-20			1				1
18-20	1	1					
20-23	1	1	1	1	1		1
33-34						1	
20-21	2	1	2	2	3	2	2
42-43		1	1	2	1	1	1
46-06	1	1	1	1	1	1	1
31-32						1	
05-06	2	2	2	2	2	2	2

Capítulo 6

Conclusões

A metodologia hierarquizada, proposta na presente tese, usando a decomposição de Benders em cada fase, levou à obtenção de resultados considerados ótimos no teste de sistemas elétricos reais. A metodologia contorna, adequadamente, as três principais limitações apresentadas pela metodologia de decomposição de Benders tradicional para problemas de planejamento a longo prazo, isto é, contorna o problema de rede inicial não conexa, os problemas relacionados ao carácter não convexo do problema, evitando ótimos locais, e, reduz consideravelmente o esforço computacional ao resolver, iterativamente, o subproblema de investimento, que é um problema de PLI, através de um eficiente algoritmo de enumeração implícita especializado.

No caso do sistema de 06 barras, a metodologia proposta resolve o problema com um número reduzido de cortes de Benders e a solução apresentada, considerada ótima, é de excelente qualidade especialmente para o caso 2. É interessante observar também que existe uma grande diferença de investimento entre os casos 1 e 2. O investimento para o caso 1 de 200 se reduz a 110 para o caso 2, levando também a uma grande variação da topologia final da rede em ambos casos.

No caso do sistema de 46 barras, a metodologia desenvolvida apresenta propostas de investimento melhores aos apresentados por outros métodos conhecidos. Neste caso, ainda é surpreendente a diferença de investimento entre o caso 1, com 154.420 milhões de dólares e o caso 2, com 70.289 milhões de dólares, além da grande diferença na topologia final da rede, para ambas alternativas de investimento. Assim, para os dois sistemas testados, 06 barras e 46 barras, a diferença de investimento entre os casos 1 e 2 é de aproximadamente 2 para 1, o que leva a concluir que é mais adequado fazer um planejamento conjunto da geração e da transmissão, como é sugerido em [11].

Foi observado a grande importância da incorporação de outras restrições de operação

ao subproblema de investimento, além dos cortes de Benders. Estas restrições adicionais de operação são muito importantes na caracterização da região factível do problema, limitando a relaxação do problema. Em outras palavras, estas restrições de operação são as chamadas “restrições ou desigualdades válidas”, que reduzem consideravelmente o espaço de busca ao resolver o subproblema de investimento, através de um algoritmo de enumeração implícita. No presente trabalho foi mencionado duas maneiras de obter estas restrições de operação: através das restrições de cerca e através de restrições de tipo linha-transformador. A determinação de outros tipos de restrições de operação, assim como uma melhor sistematização das anteriormente mencionadas representam uma continuação natural do presente trabalho.

Para resolver o subproblema de investimento na Fase III foram pesquisados dois tipos de algoritmos: algoritmos de cortes duais e algoritmos de enumeração implícita. Os programas de computador obtidos usando os algoritmos de cortes duais mostraram-se ineficientes para problemas reais. Por outro lado, os programas obtidos usando os algoritmos de enumeração implícita mostraram-se muito eficientes, e eles foram usados para testar os sistemas elétricos apresentados no presente trabalho. Entretanto, ainda é possível obter melhorias adicionais com os algoritmos de enumeração implícita. A utilização de um algoritmo de branch-and-bound especializado, usando eficientes critérios na separação de variáveis e sondagem, ao que parece, é uma alternativa promissora a ser implementada no futuro.

Ainda no contexto da decomposição de Benders existem variantes alternativas da metodologia apresentada. Uma variante particularmente interessante é resolver o subproblema de investimento através de um algoritmo, chamado de subótimo, que resolve um problema de PLI de maneira aproximada, mas com tempos de computação muito pequenos. Um destes algoritmos subótimos clássicos é o algoritmo de Pivot e Complemento de Balas e Martin [27] que resolve problemas de PLI zero-um, apresentando soluções com desvios máximas em torno de 1 – 2% da solução ótima. Esta desviação seria ainda minimizada, para o caso do problema de planejamento, pois, neste caso, o subproblema de investimento é resolvida iterativamente. Esta metodologia é particularmente interessante para sistemas de grande porte e, também, representa uma continuação natural do presente trabalho.

Finalmente, deve-se projetar outros tipos de algoritmos fora do contexto da decomposição de Benders, isto é, resolver o problema de planejamento em forma integral. Existem vários métodos subótimos novos que se mostraram muito eficientes na resolução de problemas combinatórios. Entre estes métodos novos, apresentam-se particularmente interessantes o algoritmo de Simulated Annealing [55]-[61] e o algoritmo de Busca Tabu [52]-[54].

Bibliografia

- [1] *R. Romero and A. Monticelli*: "A Hierarchical Decomposition Approach for Transmission Network Expansion Planning", Paper WP93-048, IEEE-PES Winter Meeting, Jan./Feb 1993, Columbus-Ohio.
- [2] *R. Romero, A. Monticelli*: "A Zero-One Implicit Enumeration Method for Optimizing Investments in Transmission Expansion Planning", paper SP93-206, IEEE-PES Summer Meeting, July 1993, Vancouver, Canada.
- [3] *R. Romero*: "Planejamento da Expansão de Sistemas de Transmissão por Decomposição de Benders Hierarquizada", Tese de Mestrado, UNICAMP, 1990.
- [4] *A. Monticelli, A. Santos Jr., M.V.F. Pereira, S.H.. Cunha, B.J. Parker, J.C.G. Praça*: "Interactive Transmission Network Planning Using a Least-Effort Criterion", IEEE Trans. Power App. Systems, Vol. PAS-101, No. 10, Outubro, 1982.
- [5] *L.L. Garver*: "Transmission Network Estimation Using Linear Programming", IEEE Trans. Power App. Syst., Vol. PAS-89, p. 1688-1697, september-october, 1970.
- [6] *S.Granville, M.V.F. Pereira*: "Analysis of the Linearized Power Flow Model in Benders Decomposition", EPRI-Report RP 2473-6, Stanford University, february, 1985.
- [7] *R. Villanasa, L.L. Garver, S.J. Salon*: "Transmission Network Planning Using Linear Programming", IEEE Trans. Power App. Systems, Vol. PAS-104, No. 2, february, 1985.
- [8] *M.V.F. Pereira, L.M.V.G. Pinto*: "Aplication of Sensitivity Analysis of Load Supplying Capability to Interactive Transmission Expansion Planning", IEEE Trans. Power App. Systems; Vol. PAS-104, No. 2, february, 1985.
- [9] *M.V.F. Pereira, L.M.V.G. Pinto, S.H.F. Cunha, G.C. Oliveira*: "A Decomposition Approach to Automated Generation/Transmission Expansion Planning"; IEEE Trans. Power App. Systems, Vol. PAS-104, No. 11, november, 1985.

- [10] *B. Stott, J.L. Marinho*: “Linear Programming for Power-System Network Security Applications”, IEEE Trans. Power App. Systems, Vol. PAS-98, No. 3, may-june, 1979.
- [11] *M.V.F. Pereira, L.M.V.G. Pinto, G.C. Oliveira and S.H.F. Cunha*: “Composite Generation-Transmission Expansion Planning”, EPRI-Research Project 2473-9, Stanford University, 1987.
- [12] *V. Levi and M. Calovic*: “A New Decomposition Based Method for Optimal Expansion Planning of Large Transmission Networks”, IEEE-PES 1991 Winter Meeting, New York, 1991.
- [13] *L.M.V.G. Pinto, A. Nunes*: “A Model for the Optimal Transmission Expansion Planning”, Proceedings of 10th Power Systems Computation Conference, Graz, 1990.
- [14] *C.J. Baldwin, C.A. De Salvo, C.H. Hoffman, W.S. Ku*: “A Model for Transmission Planning by Logic”, AIEE Transactions PAS, Vol. 79, pp. 1638-1645, february, 1960.
- [15] *A.M. Geoffrion*: “Duality in Nonlinear Programming: A Simplified Application-Oriented Development”, SIAM Review, Vol. 13, No. 1, 1971.
- [16] *A.M. Geoffrion*: “Elements of Large-Scale Mathematical Programming Part I: Concepts”, Management Science , Vol. 16, No. 11, 1970.
- [17] *A.M. Geoffrion*: “Elements of Large-Scale Mathematical Programming Part II: Synthesis of Algorithms and Bibliography ” Management Science , Vol. 16, No. 11, 1970.
- [18] *J.F. Benders*: “Partitioning Procedures for Solving Mixed-Variables Programming Problems”, Numerische Mathematik, Vol. 4, 1962.
- [19] *A. Geoffrion*: “Generalized Benders Decomposition”; Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 10, 1972.
- [20] *J.C. Geromel and M.R. Belloni*: “Nonlinear Programs with Complicating Variables: Theoretical Analysis and Numerical Experience, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics , Vol. SMC-16, No. 2, march/april, 1986.
- [21] *E. Balas*: “An Additive Algorithm for Solving Linear Programs with Zero-One Variables”, Operations Research 13(4), 517-546, 1965.
- [22] *F. Glover and S. Zionts*: “A Note on the Additive Algorithm of Balas”, Operations Research 13(4), 546-549, 1965.
- [23] *A.M. Geoffrion*: “Integer Programming by Implicit Enumeration and Balas’ Method”, SIAM Review, Vol. 9, No. 2, april, 1967.

- [24] *N. Tuan*: "A Flexible Tree-Search Method for Integer Programming Problems", *Operations Research* 19(1), 115-119, 1971.
- [25] *F. Glover* : "A Multiphase-Dual Algorithm for the Zero-One Integer Programming Problem", *Operations Research* 13, 879-919, 1965.
- [26] *A.M. Geoffrion*: "An Improved Implicit Enumeration Approach for Integer Programming", *Operations Research* 17, 437-454, 1969.
- [27] *E. Balas , C. Martin*: "Pivot and Complement - A Heuristic for 0-1 Programming", *Management Science*, Vol. 26, No. 1, pp. 86-96, 1980
- [28] *C. Petersen*: "Computational Experience with Variants of the Balas Algorithm Applied to the Seletion of *R&D* Projects", *Management Science*, Vol. 13, No. 9, pp. 736-750, 1967.
- [29] *F. Glover*: "Heuristics for Integer Programming Using Surrogate Constraints", *Decision Sciences* 8, pp. 156-166, 1977.
- [30] *A.M. Geoffrion, G.W. Graves*: "Multicommodity Distribution System Design by Benders Decomposition", *Management Science*, Vol. 20, No. 5, pp. 822-844, 1974.
- [31] *R. Wilson*: "Stronger Cuts in Gomory's All-Integer Programming Algorithm", *Operations Research* 15(1), 155-157, 1967.
- [32] *A.M. Geoffrion and R.E. Marsten*: "Integer Programming Algorithms: A Framework and State-of-the Art Survey", *Perspectives on Optimization*, Edited by A. M. Geoffrion, Addison-Wesley Publishing Company, 1972.
- [33] *A. Monticelli*: "Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica, Editora Edgar Bucher Ltda, 1983.
- [34] *L. Lasdon*: "Optimization Theory for Large Systems", New York, Mac Millan, 1970.
- [35] *R.S. Garfinkel, G.L. Nenhauser*: "Integer Programming", Jhon Wiley and Sons, 1^a Ed., 427 pp., 1972.
- [36] *H. Taha*: "Integer Programming ", Academic Press, New York, 1975.
- [37] *H. Greenberg*: "Integer Programming", Academic Press, New York, 1971.
- [38] *H. M. Salkin, M. Kamlesh*: "Foundations of Integer Programming", North-Holland, New York, 1989.
- [39] *K. Murty*: "Linear Programming", John Wiley & Sons, New York, 1983 .

- [40] *A. Dos Santos Jr.*: “Síntese Conceitual Estática de Redes de Transmissão de Energia Elétrica”, Tese de Mestrado, UNICAMP, 1981.
- [41] *A. Said*: “Um Método de Síntese Estática de Redes de Transmissão para Auxílio ao Planejamento a Longo Prazo”, Tese de Mestrado, UNICAMP, 1988.
- [42] *Secundino Soares Filho*: “ Programação Matemática de Grande Porte: Uma Aplicação a Sistemas Hidrotérmicos de Potência”, Tese de Doutorado, UNICAMP, 1978.
- [43] *F. Muller*: “Busca Tabu na Solução de Problemas de Programação Zero-Um”, Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia Elétrica, UNICAMP, 1990.
- [44] *V. Pureza*: “A Busca Tabu Aplicada a Problemas de Roteamento de Veículos”, Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia Elétrica, UNICAMP, 1990.
- [45] *K. Almeida*: “Estudos em Fluxos de Potência Ativa ”, Tese de Mestrado, UNICAMP, abril, 1987.
- [46] *A. Monticelli*: “Métodos de Análise e Síntese Aplicados ao Planejamento a Longo Prazo de Sistemas de Transmissão de Energia Elétrica, Relatório No. 1 do Contrato CEPEL/UNICAMP sobre Planejamento de Sistemas de Transmissão, 1979.
- [47] *A. Monticelli*: “Planejamento de Redes de Transmissão de Energia Elétrica ”, Relatório No. 2 do Convênio CEPEL/UNICAMP sobre Planejamento de Sistemas de Transmissão, 1980.
- [48] *A. Santos A. Monticelli*: “Síntese Interativa de Redes de Transmissão - Relatório No. 3 Convênio CEPEL/UNICAMP, maio, 1980.
- [49] *EPRI*: “Long Range Transmission Expansion Models” , EPRI Technical Planning Study, TPS 79-728, EL-1569, Final Report, 1980.
- [50] *R. Romero*: “Métodos Heurísticos Usados em Otimização Combinatória: Parte I”, Relatório Interno, DSEE-FEE-UNICAMP, 73 pp., 1991.
- [51] *R. Romero*: “Métodos Heurísticos Usados em Otimização Combinatória: Parte II”, Relatório Interno, DSEE-FEE-UNICAMP, 87 pp., 1991.
- [52] *F. Glover*: “Tabu Search: Part I”, ORSA Journal on Computing, Vol. 1, No. 3, pp. 190-206, 1989.
- [53] *F. Glover*: “Tabu Search: Part II”, ORSA Journal on Computing, Vol. 2, No. 1, pp. 4-32, 1989.

- [54] *A. Hertz, D. de Werra*: "Using Tabu Search Techniques for Graph Coloring", *Computing* 39, pp. 345-351, 1987.
- [55] *R.W. Eglese*: "Simulated Annealing: A Tool for Operational Research", *European Journal of Operation Research* 46, pp. 271-281, 1990.
- [56] *V. Cerny*: "Thermodynamical Approach to the Traveling Salesman Problem: An Efficient Simulation Algorithm", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 45, No. 1, 1985.
- [57] *D.T. Connolly*: "An Improved Annealing Scheme for the QAP", *European Journal of Operation Research* 46, pp. 93-100, 1990.
- [58] *M. Lundy, A. Mees*: "Convergence of an Annealing Algorithm", *Mathematical Programming* 34, pp. 111-124, 1986.
- [59] *A. Drexl*: "A Simulated Annealing Approach to the Multiconstraint Zero-One Knapsack Problem", *Computing* 40, pp. 1-8, 1988.
- [60] *S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt Jr., M.P. Vecchi*: "Optimization by Simulated Annealing", *Science* 220. pp. 671-680, 1983.
- [61] *R.A. Rutenbar*: "Simulated Annealing Algorithms: An Overview", *IEEE Circuits and Devices Magazine*, pp. 19-26, 1989.
- [62] *S. Zanakis*: "Heuristic 0-1 Linear Programming: An Experimental Comparison of Three Methods", *Management Science*, Vol. 24, No. 1, 1977, pp. 91-104.
- [63] *G.A. Kochenberger, B.A. McCarl, F.P. Wyman*: "A Heuristic for General Integer Programming", *Decision Sciences*, Vol.5, No. 1, pp. 36-46.
- [64] *Y. Toyoda*: "A Simplified Algorithm for Obtaining Aproximate Solutions to Zero-One Programming Problems", *Management Science*, Vol. 21, No. 12, 1975, pp. 1417-1427.
- [65] *S. Senju, Y. Toyoda*: "An Approach to Linear Programming with 0-1 Variables", *Management Science*, Vol. 15, No. 4, 1968, pp. B.196-B.207.
- [66] *C. Witzgall*: "On One-Row Linear Programs", *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, No. 174, Springer, New York, 1980, pp 384-414.
- [67] *H. Wagner*: "The Dual Simplex Algorithm for Bounded Variables", *Naval Research Logistics Quarterly* 5, (1958), 257-261.

Apêndice A

A Decomposição de Benders e a Determinação do Índice de Sensibilidade σ_{ij}

A.1 A Decomposição de Benders

Seja o seguinte problema linear ou semi-linear (P),

$$\begin{aligned} \text{Min } & cx + f(y) && \text{(A.1)} \\ & Ax + F(y) \leq y \\ & x \geq 0; \quad y \in Y \end{aligned}$$

O algoritmo de Benders para este problema pode ser considerado como a aplicação de projeção, linearização externa e relaxação. Concretamente, projeta-se (A.1) sobre o espaço das variáveis y , efetua-se a linearização externa da função de valor supremo resultante na minimização e, depois, aplica-se a estratégia de relaxação para as novas restrições que aparecem como uma consequência da linearização externa. Assume-se por simplicidade que (A.1) é factível e tem ótimo finito.

Projeção sobre o espaço das variáveis y leva a,

$$\text{Min}_{y \in V} \{ f(y) + \text{inf}_{x \geq 0} [cx; \text{s.a.}, Ax \leq b - f(y)] \} \quad (\text{A.2})$$

onde:

$$V = \{ y \in Y \mid \exists! x \geq 0 \text{ com } \rightsquigarrow Ax \leq b - F(y) \}$$

O ínfimo dentro da minimização é o valor ótimo do programa linear parametrizado (PLP),

$$\text{Min } cx \quad (\text{A.3})$$

s.a.

$$\begin{aligned} Ax &\leq b - F(y) \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

cujo programa linear dual (DLP) é,

$$\text{Max } u(b - F(y)) \quad (\text{A.4})$$

s.a.

$$\begin{aligned} uA &\leq c \\ u &\leq 0 \end{aligned}$$

Sejam $\langle u^1, \dots, u^p \rangle$ os pontos extremos e $\langle u^{p+1}, \dots, u^{p+q} \rangle$ os raios extremos do poliedro,

$$S = \{ u \leq 0 \mid uA \leq c \}$$

Se S é vazio (P) não tem solução factível ou tem valor ótimo ilimitado. Afastando estes casos triviais pode-se garantir, pela dualidade de programação linear, que se (DLP) em (A.4) tiver solução ilimitada para algum y , então o (PLP) será infactível. Assim pode-se caracterizar o conjunto V como:

$$V = \{ y \in Y \mid u^j(b - F(y)) \leq 0; \quad j = p+1, \dots, p+q \} \quad (\text{A.5})$$

Assim, a projeção aplicada a (A.1) leva a (A.2) sujeito às restrições (A.5).

Por outro lado, linearizando externamente o ínfimo de (PLP), ou seja, lembrando pelo teorema da dualidade em programação linear que seu valor é:

$$\text{Max}_{1 \leq j \leq p} \{u^j(b - F(y))\} \quad (\text{A.6})$$

Substituindo (A.6) em (A.2) e tomando em consideração (A.5) tem-se que,

$$\text{Min}_{y \in Y} \{f(y) + \text{Max}_{1 \leq j \leq p} u^j(b - F(y))\} \quad (\text{A.7})$$

s.a.

$$u^j[b - F(y)] \leq 0; \quad j = p + 1, \dots, p + q$$

e sabendo que o máximo é o menor limitante superior, (A.7) pode ser escrito da seguinte forma equivalente,

$$\text{Min}_{y \in Y; y^o} \{f(x) + y^o\} \quad (\text{A.8})$$

s.a.

$$u^j[b - F(y)] \leq y^o; \quad j = 1, 2, \dots, p$$

$$u^j[b - F(y)] \leq 0; \quad j = p + 1, \dots, p + q$$

que é o problema mestre (PM) a ser resolvido. O problema mestre (A.8) é equivalente a (A.1), obtido depois das manipulações de projeção e linearização externa.

É claro que relaxação é uma estratégia natural para resolver o (PM) pois evita determinar antecipadamente os vetores $\{u^j\}; j = 1, 2, \dots, p + q$. O problema mestre relaxado (PMR) fica,

$$\text{Min}_{y \in Y; y^o} \{f(y) + y^o\} \quad (\text{A.9})$$

s.a.

$$u^j[b - F(y)] \leq y^o; \text{ para alguns } \rightsquigarrow 1 \leq j \leq p$$

$$u^j[b - F(y)] \leq 0; \text{ para alguns } \rightsquigarrow p + 1 \leq j \leq p + q$$

Algoritmo de Solução:

1. Resolva o (PMR). Seja (\bar{y}, \bar{y}^o) a solução.
2. Resolva o (DLP) de (A.4) ou o (PLP) de (A.3) com $y = \bar{y}$ para testar a factibilidade da solução (\bar{y}, \bar{y}^o) obtida anteriormente,
 - Se o valor ótimo for menor ou igual a \bar{y}^o pare: (\bar{y}, \bar{y}^o) é factível para o (PM) e portanto ótimo. A solução ótima de (P) será (\bar{y}, \bar{x}) onde \bar{x} é o vetor multiplicador de (DLP) ou a solução de (PLP).
 - Se o valor ótimo for superior a \bar{y}^o então uma restrição violada de (PM) é produzida do tipo :
 - (a) $u^j[b - F(y)] \leq y^o$ se o valor ótimo for finito (onde u^j é o ponto extremo solução), ou
 - (b) $u^j[b - F(y)] \leq 0$ se o valor ótimo for ilimitado (onde u^j é o raio extremo).
 Voltar ao passo (1).

Na Figura A.1 apresenta-se graficamente a função de perturbação do programa linear parametrizado (PLP),

$$v(y) = \text{inf}_{x \geq 0} \{cx \rightsquigarrow \text{s.a. } Ax \leq b - F(y)\}$$

A curva cheia representa a linearização externa da função de perturbação de (PLP). A curva tracejada é a sua relaxação. A solução de (PMR) fornece um par (\bar{y}, \bar{y}^o) . Se a solução de (PLP) para $y = \bar{y}$ (obtida através de seu dual ou diretamente dele) fornecer um valor ótimo não superior a \bar{y}^o , o processo iterativo termina. Caso contrário, melhora-se a precisão de (PMR) introduzindo uma nova restrição $\bar{u}^j[b - F(y)] \leq y^o$ quando (PLP) tem solução factível ou, em outro caso, será introduzida uma restrição do tipo $\bar{u}^j[b - F(y)] \leq 0$ que reduz o domínio efetivo dos y .

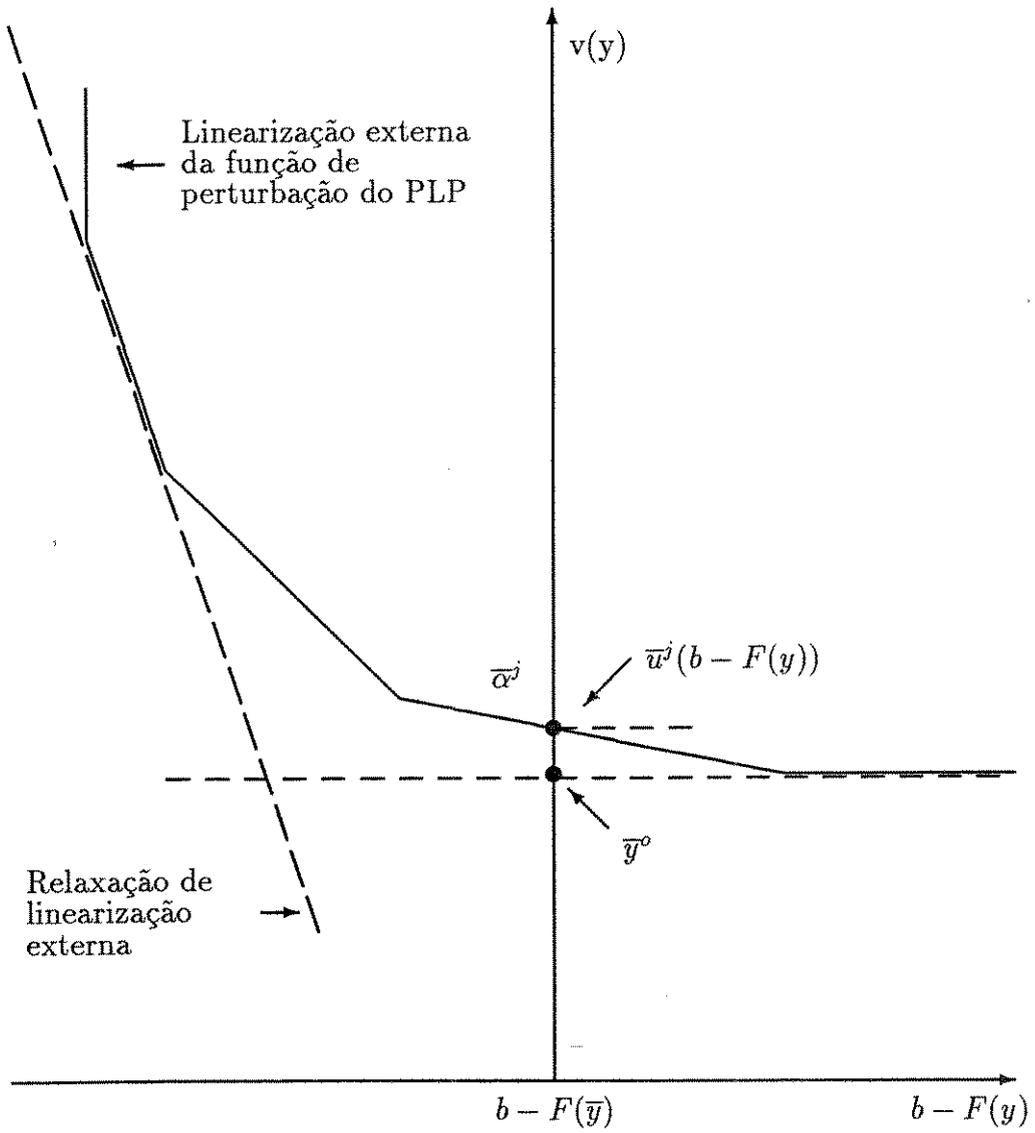


Figura A.1 Função de Perturbação do PLP

A inclusão no algoritmo do fato de omitir as restrições amplamente satisfeitas requer considerações de convexidade para f , F e Y .

As hipóteses de convexidade para f , F e Y garantem a convergência do processo ao assegurar que (P) e (PM) serão problemas convexos. Entretanto, o método ainda é válido para problemas de programação linear inteira mista.

O método de Benders é estendido, permitindo não linearidade também em x . Isto é apresentado na seguinte seção.

A.2 A Decomposição de Benders Generalizada

Geoffrion generalizou a técnica de decomposição de Benders para ser usada em programas em que o subproblema parametrizado, pelas variáveis y fixadas temporariamente, já não precisa ser linear. A teoria da dualidade convexa não linear é usada para desenvolver a decomposição de Benders para o caso não linear.

Seja o problema,

$$\text{Max}_{x,y} f(x,y) \tag{A.10}$$

s.a.

$$G(x,y) \geq 0; \quad x \in X, \quad y \in Y$$

onde y é o vetor das variáveis que serão fixadas temporariamente e G é um vetor de restrições funcionais definido sobre $X \times Y \subseteq R^{n_1} \times R^{n_2}$.

Tem-se em mente situações específicas como:

- Para y fixo, (A.10) é separável num número de subproblemas de otimização independentes, cada um deles envolvendo um subvetor de x .
- Para y fixo, (A.10) assume uma estrutura especial em que é possível aproveitar técnicas de solução muito eficientes.
- O problema (A.10) não é um programa convexo em conjunto, mas fixando y , problema resultante é convexo em x .

A projeção de (A.10) sobre y é,

$$\text{Max}_y \quad v(y) \tag{A.11}$$

s.a.

$$y \in Y \cap V$$

onde:

$$v(y) = \text{Sup}_x \{f(x, y); \text{s.a. } G(x, y) \geq 0; x \in X\} \tag{A.12}$$

e

$$V = \{y : G(x, y) \geq 0; \text{ para algum } x \in X\} \tag{A.13}$$

Note que $v(y)$ é o valor ótimo de (A.10) para um y fixo e, por nossa definição de y como variáveis complicadas, calcular $v(y)$ é muito mais fácil de se resolver do que o problema (A.10).

Denote-se novamente o problema de otimização (A.12), $v(y)$:

$$\text{Max}_{x \in X} \{f(x, y); \text{s.a. } G(x, y) \geq 0\} \tag{A.14}$$

V é o conjunto de valores de y para os quais (A.14) é factível. $Y \cap V$ pode ser considerado como a projeção da região factível de (A.10) no espaço de y .

O problema projetado (A.11) é equivalente ao problema original (A.10).

Derivação do Problema Mestre

O problema mestre é obtido de (A.10) através de uma seqüência de três manipulações:

1. Projeção de (A.10) sobre y para obter (A.11).

2. Invocar a representação dual natural de V em termos da interseção de uma coleção de regiões que o contém.
3. Invocar a representação dual natural de v em termos do ínfimo ponto a ponto de uma coleção de funções.

O seguinte teorema mostra que (A.10) e (A.11) são equivalentes para nossos propósitos e compreende a manipulação (1) já mencionada.

Teorema A.1 **Projeção:**

O problema (A.10) é infactível ou ilimitado se o mesmo é certo para (A.11). Se (x^*, y^*) é ótimo em (A.10), então y^* é ótimo em (A.11). Se y^* é ótimo em (A.11) e x^* atinge o supremo em (A.12) com $y = y^*$, então (x^*, y^*) é ótimo em (A.10). Se \bar{y} é ϵ_1 -ótimo em (A.11) e \bar{x} é ϵ_2 -ótimo em (A.14), então (\bar{x}, \bar{y}) é $(\epsilon_1 + \epsilon_2)$ -ótimo em (A.10).

Prova: Ver [19] ■

A manipulação (2) baseia-se no seguinte teorema:

Teorema A.2 **Representação de V :**

Assumir que X é um conjunto convexo não vazio e que G é côncava sobre X para cada $y \in Y$ fixo. Assumir depois que o conjunto,

$$Z_y = \{z \in R^m : G(x, y) \geq z; \text{ para algum } x \in X\}$$

é fechado para cada $y \in Y$ fixo. Então, um ponto $\bar{y} \in Y$ está também no conjunto V se \bar{y} satisfaz o sistema (infinito):

$$[\text{supremo } \lambda^t G(x, y)] \geq 0; \quad \forall \lambda \in \Lambda \tag{A.15}$$

onde:

$$\Lambda = \{\lambda \in R^m : \lambda \geq 0, \text{ e } \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1\}$$

Prova: Ver [19] ■

A manipulação (3) baseia-se no seguinte teorema:

Teorema A.3: Representação de v:

Assumir que X é um conjunto convexo não vazio e que f e G são côncavos sobre X para cada $y \in Y$ fixo. Assumir também que, para cada $\bar{y} \in Y \cap V$ fixo, pelo menos uma das seguintes três condições são satisfeitas:

1. $v(\bar{y})$ é finito e (A.14) possui um vetor multiplicador ótimo.
2. $v(\bar{y})$ é finito, $G(x, \bar{y})$ e $f(x, \bar{y})$ são contínuos em X , X é fechado e o conjunto solução ϵ -ótimo de (A.14) é não vazio e limitado para algum $\epsilon \geq 0$, e
3. $v(\bar{y}) = +\infty$. Então o valor ótimo de (A.14) é igual a seu dual sobre $Y \cap V$, isto é,

$$v(y) = \inf_{u \geq 0} [\sup_{x \in X} f(x, y) + u^t G(x, y)]; \forall y \in Y \cap V \quad (\text{A.16})$$

Prova: Ver [19] ■

A condição (1) verifica-se mais freqüentemente.

Assim dos teoremas A.2 e A.3, as manipulações (1)-(3) aplicadas a (A.10) levam ao problema mestre equivalente:

$$\text{Max}_{y \in Y} \{ \inf_{u \geq 0} [\sup_{x \in X} f(x, y) + u^t G(x, y)] \} \text{ s.a. } (\text{A.15})$$

e, usando a definição de ínfimo como o maior limitante inferior, tem-se que,

$$\text{Max}_{y \in Y; y_0} \{ y_0 \} \quad (\text{A.17})$$

s.a.

$$\text{Sup}_{x \in X} \{ f(x, y) + u^t G(x, y) \} \geq y_0; \forall u \geq 0 \quad (\text{A.18})$$

$$\text{Sup}_{x \in X} \{ \lambda^t G(x, y) \} \geq 0; \forall \lambda \in \Lambda \quad (\text{A.19})$$

Resolução do Problema Mestre

A estratégia mais natural para resolver o problema mestre (A.17) é relaxação, pois ele tem um número muito grande de restrições.

Inicia-se resolvendo a versão relaxada de (A.17), ignorando todas ou algumas das restrições (A.18) e (A.19); se a solução resultante não satisfaz todas as restrições ignoradas, então gerar e adicionar ao problema relaxado uma ou mais restrições violadas e resolvê-lo novamente; continuar deste modo até que a solução do problema relaxado satisfaça todas as restrições ignoradas (neste ponto foi achada uma solução ótima de (A.17)), ou até obter uma solução de precisão aceitável de acordo com algum critério de parada. Temos ainda que resolver o problema crucial de como testar a factibilidade da solução da versão relaxada de (A.17) em relação às restrições ignoradas e, no caso de infactibilidade, como gerar uma restrição violada.

Supor que (\hat{y}, \hat{y}_o) é uma solução ótima da versão relaxada de (A.17) assim:

- Do teorema A.2 e da definição de V tem-se que \hat{y} satisfaz (A.19) se (A.14) é factível.
- Se (A.14) tem solução factível, o teorema A.3 implica que (\hat{y}, \hat{y}_o) satisfaz (A.18) se $\hat{y}_o \leq v(\hat{y})$.

Assim (A.14) é o subproblema natural para testar a factibilidade de (\hat{y}, \hat{y}_o) no problema mestre.

O problema (A.14) é apropriado para testar factibilidade de (\hat{y}, \hat{y}_o) em (A.17) e, em caso contrário, uma solução de (A.14) fornece os índices das restrições violadas no caso que (\hat{y}, \hat{y}_o) seja infactível. Um índice de uma restrição violada significa:

- Um vetor $\hat{u} \geq 0$ tal que,

$$\hat{y}_o > \sup_{x \in X} \{f(x, \hat{y}) + \hat{u}^t G(x, \hat{y})\} \quad (\text{A.20})$$

se (A.18) é violada, ou

- Um vetor $\hat{\lambda} \in \Lambda$ tal que,

$$[\sup_{x \in X} \{\hat{\lambda}^t G(x, \hat{y})\}] < 0 \quad (\text{A.21})$$

se (A.19) é violada.

Se (A.14) é infactível obtém-se um $\hat{\lambda}$. Se (A.14) é factível e tem um valor ótimo finito obtém-se um vetor multiplicador ótimo, que satisfaz (A.20) se existe tal multiplicador e $\hat{y}_o > v(\hat{y})$, como um subproduto da solução de (A.14). A não existência do vetor multiplicador ótimo está relacionada com um ótimo ilimitado.

Então (A.14) para $y = \hat{y}$ fica relacionada com um algoritmo dual adequado, pois ele produz: Um vetor $\hat{\lambda} \in \lambda$ que satisfaz (A.21) se (A.14) é infactível para $y = \hat{y}$ ou um vetor multiplicador \hat{u} que satisfaz (A.20) se ele existe.

Assim (A.14) para $y = \hat{y}$ pode ser usado para testar a factibilidade de qualquer ponto (\hat{y}, \hat{y}_o) no problema mestre (A.17) e gerar um índice ($\hat{\lambda}$ ou \hat{u}) de uma restrição violada no caso de infactibilidade.

Resumo do Processo de Solução

O processo de decomposição de Benders generalizada agora pode ser estabelecido formalmente. Assume-se que se cumprem os teoremas A.2 e A.3 e, por simplicidade, assume-se que (A.10) tem valor ótimo finito.

Define-se as seguintes expressões:

$$L^*(y; u) = \text{Sup}_{x \in X} \{f(x, y) + u^t G(x, y)\}; \quad y \in Y; \quad u \geq 0 \quad (\text{A.22})$$

$$L_*(y; \lambda) = \text{Sup}_{x \in X} \{\lambda^t G(x, y)\}; \quad y \in Y; \quad \lambda \geq 0 \quad (\text{A.23})$$

Algoritmo de Solução:

1. Seja $\bar{y} \in Y \cap V$ conhecido. Resolver o subproblema (A.14) e obter um vetor multiplicador ótimo \bar{u} e a função $L^*(y; \bar{u})$. Fazer $p = 1$, $q = 0$, $u^1 = u$, $v(\bar{y}) = LBD$. Escolher um parâmetro de tolerância de convergência $\epsilon > 0$.
2. Resolver o problema mestre relaxado atual,

$$\text{Max}_{y \in Y; y_o} \{y_o\} \quad (\text{A.24})$$

s.a.

$$L^*(y; u^j) \geq y_o; \quad j = 1, \dots, p.$$

$$L_*(y; \lambda^j) \geq 0; \quad j = 1, \dots, q.$$

Seja (\hat{y}, \hat{y}_o) a solução ótima; \hat{y}_o é um limite superior do ótimo de (A.10). Se $LBD \geq \hat{y}_o - \epsilon$, termine.

3. Resolver o problema revisado (A.14) com $y = \hat{y}$. Pode acontecer o seguinte:

- (a) $v(\hat{y})$ é finita.
- Se $v(\hat{y}) \geq \hat{y}_o - \epsilon$ termine.
 - Em outro caso, obter um vetor multiplicador ótimo \hat{u} e a função $L^*(y; \hat{u})$. Fazer $p \rightarrow p + 1$ e $u^p = \hat{u}$. Se $v(\hat{y}) > LBD$ fazer $LBD = v(\hat{y})$. LBD é um limitante inferior do ótimo de (A.10). Voltar ao passo (2).
- (b) O problema (A.14) é infactível. Determinar $\hat{\lambda}$ em Λ satisfazendo (A.21) e a função $L_*(y; \hat{\lambda})$. Incrementar $q \rightarrow q + 1$ e fazer $\lambda^q = \hat{\lambda}$. Voltar ao passo (2).

Convergência Teórica

Existem diferentes condições para as quais a decomposição de Benders generalizada converge. Apresenta-se dois teoremas de aplicações concretas. O primeiro aplicado quando Y é um conjunto discreto finito e, portanto, adequado para aplicações em programação não linear inteira mista. O outro teorema é aplicado quando Y é de cardinalidade finita, ou seja, Y convexo.

Teorema A.4 Convergência Finita:

Seja Y um conjunto discreto finito e considere satisfeitas as hipóteses do teorema A.2 e as hipóteses do teorema A.3 com a condição (b) omitida. Então, o processo da decomposição de Benders generalizada termina num número finito de passos para algum $\epsilon > 0$ e também $\epsilon = 0$.

Prova: Ver [19] ■

Teorema A.5 ϵ -Convergência Finita:

Seja Y um subconjunto compacto não vazio de V , X um conjunto convexo compacto não vazio, f e G côncavos sobre X para cada $y \in Y$ fixo e contínuos sobre $X \times Y$ e que o conjunto $U(y)$ de vetores multiplicadores ótimos para (A.14) é não vazio para todo $y \in Y$ e uniformemente limitado numa vizinhança de cada tal ponto. Então, para algum $\epsilon > 0$, o processo de decomposição de Benders generalizada termina num número finito de passos.

Prova: Ver [19] ■

A.3 Determinação dos Índices de Sensibilidade para o Modelo de Fluxo de Carga DC

Os seguintes resultados estão relacionados com o “Teorema da Compensação” da teoria do modelo de fluxo de carga linearizado. Quando a geração é fixada, o efeito de uma mudança na susceptância de uma linha é equivalente a manter a susceptância constante e fazer uma mudança adequada nas cargas das barras conectadas a essa linha.

Seja $P(\gamma, d, \bar{\phi}) \rightsquigarrow$ a expressão que denota o problema (3.31) com vetor de susceptâncias de linha γ e carga d . Sejam também $h_1 = (h_{1ij} = \gamma_{ij}\bar{\phi}_{ij})$; $h_2 = (h_{2ij} = \gamma_{ij}\bar{\phi}_{ij})$.

Sejam:

$z(\gamma, d, \bar{\phi}) \rightsquigarrow$ a solução básica ótima de $P(\gamma, d, \bar{\phi})$.

$w(\gamma, d, \bar{\phi}) \rightsquigarrow$ o valor ótimo da função objetivo.

Note que $z(\gamma, d, \bar{\phi})$ contém as variáveis θ .

Se $\gamma^0 \geq 0$, d^0 , $\bar{\phi}^0$ são os valores iniciais de γ , d , $\bar{\phi}$ e o vetor x definido em $R^{|\Omega|}$ tal que

$$\gamma^0 + x \geq 0$$

definem-se os vetores $d(x)$, $h_1(x)$, $h_2(x)$ tal que:

$$d_k(x) = d_k^0 + \sum_{i \in \Omega_k} x_{ik} [\theta_k(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)]; \quad k = 1, \dots, N. \quad (\text{A.25})$$

$$h_{1ij}(x) = h_{1ij}^0 - x_{ij} [\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \bar{\phi}_{ij}^0]; \quad \forall (i, j) \in \Omega \quad (\text{A.26})$$

$$h_{2ij}(x) = h_{2ij}^0 - x_{ij} \{ -[\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)] - \bar{\phi}_{ij}^0 \}; \quad \forall (i, j) \in \Omega \quad (\text{A.27})$$

Além disso, sejam:

$$\pi_{ij}(x) = (\pi_i^0 - \pi_j^0) [\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)] \quad \forall (i, j) \in \Omega \quad (\text{A.28})$$

$$\lambda_{1ij}(x) = \lambda_{1ij}^0 \{ [\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)] - \bar{\phi}_{ij}^0 \} \quad \forall (i, j) \in \Omega \quad (\text{A.29})$$

$$\lambda_{2ij}(x) = \lambda_{2ij}^0 \{ -[\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)] - \bar{\phi}_{ij}^0 \} \quad \forall (i, j) \in \Omega \quad (\text{A.30})$$

onde:

$$h_{1ij}^0 = h_{2ij}^0 = \gamma_{ij}^0 \bar{\phi}_{ij}^0, \quad \forall (i, j) \in \Omega$$

$\theta(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) \rightsquigarrow$ vem da solução ótima $z(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$.

$\pi^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0 \rightsquigarrow$ são as variáveis duais ótimas de $P(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0)$ associados às restrições (3.31a), (3.31b) e (3.31c) respectivamente, no problema (3.31).

Seja $\bar{P}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x))$ a expressão que denota o problema $P(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0)$ com o lado direito substituído por $(d(x), h_1(x), h_2(x))$. Seja $\bar{w}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x))$ o valor ótimo de $\bar{P}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x))$.

Nota: As proposições e lemas apresentados aqui estão desenvolvidos em [6].

Proposição 3.1:

Sejam $\gamma^0 \geq 0$, d^0 e $\bar{\phi}^0$ os valores iniciais para γ , d e $\bar{\phi}$ respectivamente e o vetor $x \in R^{|\Omega|}$ tal que $\gamma^0 + x \geq 0$. Então a solução ótima $z(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$ de $P(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$ é factível para $\bar{P}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x))$. Além disso seu valor ótimo é:

$$w(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) \geq w(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0) + \sum_{(i,j) \in \Omega} (\pi_{ij}(x) - \lambda_{1ij}(x) - \lambda_{2ij}(x)) x_{ij} \quad (\text{A.31})$$

Prova:

Seja $z(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$ uma solução básica ótima de $P(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$. Neste caso, $z(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$ inclui as variáveis θ , g e r .

Tomando a equação (3.31a) na barra k e as equações (3.31b) e (3.31c) nos ramos (i, j) tem-se:

$$\begin{aligned}
& - \left\{ \sum_{i \in \Omega_k} (\gamma_{ik}^0 + x_{ik}) \right\} \theta_k(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) + \sum_{i \in \Omega_k} (\gamma_{ik}^0 + x_{ik}) \theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) + \\
& g_k(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) + r_k(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) = d_k^0
\end{aligned} \tag{A.32}$$

$$(\gamma_{ij}^0 + x_{ij}) \left[\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) \right] \leq (\gamma_{ij}^0 + x_{ij}) \bar{\phi}_{ij}^0 \tag{A.33}$$

$$- (\gamma_{ij}^0 + x_{ij}) \left[\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) \right] \leq (\gamma_{ij}^0 + x_{ij}) \bar{\phi}_{ij}^0 \tag{A.34}$$

Depois de algumas simplificações obtém-se o seguinte:

$$\begin{aligned}
& - \left\{ \sum_{i \in \Omega_k} \gamma_{ik}^0 \right\} \theta_k(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) + \sum_{i \in \Omega_k} \gamma_{ik}^0 \theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) + \\
& g_k(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) + r_k(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) = d_k(x)
\end{aligned} \tag{A.35}$$

$$\gamma_{ij}^0 \left[\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) \right] \leq h_{1ij}(x) \tag{A.36}$$

$$- \gamma_{ij}^0 \left[\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) \right] \leq h_{2ij}(x) \tag{A.37}$$

onde $d_k(x)$, $h_1(x)$ e $h_2(x)$ foram definidos antecipadamente. Isto implica que $z(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$ é factível para $\bar{P}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x))$ então,

$$w(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) \geq \bar{w}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x)) \tag{A.38}$$

Pela teoria da dualidade em programação linear tem-se:

$$\begin{aligned}
\bar{w}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x)) &\geq w(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0) + \\
&+ \sum_k \pi_k^0 \left\{ \sum_{i \in \Omega_k} x_{ik} [\theta_k(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)] \right\} \\
&- \sum_{(i,j) \in \Omega} \lambda_{1ij}^0 x_{ij} [\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \bar{\phi}_{ij}^0] \\
&- \sum_{(i,j) \in \Omega} \lambda_{2ij}^0 x_{ij} \left\{ -[\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)] - \bar{\phi}_{ij}^0 \right\} \quad (A.39)
\end{aligned}$$

Portanto faz-se:

$$\sum_{(i,j) \in \Omega} \pi_{ij}(x) = \sum_k \pi_k^0 \left\{ \sum_{i \in \Omega_k} [\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)] \right\}$$

$$\lambda_{1ij}(x) = \lambda_{1ij}^0 \left\{ [\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)] - \bar{\phi}_{ij}^0 \right\}$$

$$\lambda_{2ij}(x) = \lambda_{2ij}^0 \left\{ -[\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)] - \bar{\phi}_{ij}^0 \right\}$$

onde:

$$\pi_{ij}(x) = (\pi_i^0 - \pi_j^0) [\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)]$$

Das expressões anteriores e das equações (A.38) e (A.39) tem-se que:

$$w(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) \geq w(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0) + \sum_{(i,j) \in \Omega} [\pi_{ij}(x) - \lambda_{1ij}(x) - \lambda_{2ij}(x)] x_{ij} \quad \blacksquare \quad (A.40)$$

Lema 3.1:

Sejam $\gamma^0 \geq 0$, d^0 e $\bar{\phi}^0$ valores iniciais para γ , d e $\bar{\phi}$ respectivamente. Existe um $\epsilon > 0$ tal que para algum $\gamma > 0$, $\|\gamma - \gamma^0\| < \epsilon$ se $H(\gamma)$ é uma base ótima para $P(\gamma, d^0, \bar{\phi}^0)$, então $H(\gamma^0)$ é um ótimo para $P(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0)$. Além disso, para alguma direção v sobre $R^{|\Omega|}$ existe um $\delta_v > 0$ e um conjunto fixo $H(v)$ (possivelmente dependente de v) tal que $H_v(\gamma^0 + tv)$ é uma base ótima para $P(\gamma^0 + tv, d^0, \bar{\phi}^0)$ para algum t , $0 \leq t \leq \delta_v$.

Prova:

Para a primeira parte, se $H(\gamma^0)$ não é primal ou dual factível para $P(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0)$, então existe uma vizinhança de γ^0 tal que para algum γ nessa vizinhança $H(\gamma)$ não é primal ou dual factível para $P(\gamma, d^0, \bar{\phi}^0)$. Como o número de bases possíveis para $P(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0)$ é finito, tomando a interseção das vizinhanças anteriores obtém-se o $\epsilon > 0$ desejado.

Para a segunda parte, observe que se $H_H(t)$ e $C_H(t)$ são a solução básica e o custo reduzido associado com a base $H(\gamma^0 + tv)$ de $P(\gamma^0 + tv, d^0, \bar{\phi}^0)$ respectivamente, então cada um de seus componentes é uma função racional de t . Isto significa que ele muda de sinal ou torna-se singular, no máximo, num número finito de pontos. Agora supor por contradição que não existe $\delta_v > 0$ e H_v como estabelece o lema. Então para cada conjunto fixado H e algum $\delta > 0$ existe t , $0 < t < \delta$ tal que $H(\gamma^0 + tv)$ seja uma base não ótima para $P(\gamma^0 + tv, d^0, \bar{\phi}^0)$. Portanto, pela observação anterior, existe um $\delta_H > 0$ tal que $H(\gamma^0 + tv)$ é uma base não ótima para $P(\gamma^0 + tv, d^0, \bar{\phi}^0)$ para algum t , $0 < t < \delta_H$. Agora seja:

$$\delta^0 = \min_H \{\delta_H\}$$

Como o número de possíveis conjuntos H é finito, $\delta^0 > 0$ e $P(\gamma^0 + tv, d^0, \bar{\phi}^0)$ não tem base ótima para $0 < t < \delta^0$, que é uma contradição nesse caso. ■

Um dos resultados da seguinte proposição é a fórmula para o índice de sensibilidade com respeito às susceptâncias de linha.

Proposição 3.2:

Seja $\gamma^0 \geq 0$, d^0 , $\bar{\phi}^0$ valores iniciais para γ , d e $\bar{\phi}$. Existe um $\epsilon > 0$ tal que para algum $x \in R^{|\omega|}$, $\|x\| < \epsilon$ e $\gamma^0 + x \geq 0$, a solução básica ótima $z(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$ de $P(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$ é uma solução ótima de $\bar{P}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x))$. O valor ótimo satisfaz:

$$w(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) = w(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0) + \sum_{(i,j) \in \Omega} [\pi_{ij}(x) - \lambda_{1ij}(x) - \lambda_{2ij}(x)] x_{ij} \quad (\text{A.41})$$

Além disso, as derivadas parciais pela esquerda e pela direita de $w(\gamma, d^0, \bar{\phi}^0)$ com respeito a γ_{ij} existem em γ^0 e são iguais a:

$$\sigma_{ij} = \pi_{ij}(0) - \lambda_{1ij}(0) - \lambda_{2ij}(0) \quad (\text{A.42})$$

Se, em adição, a base ótima de $P(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0)$ é única e não degenerada, $w(\gamma, d^0, \bar{\phi}^0)$ é diferenciável na vizinhança de γ^0 .

Prova:

Assumir $\epsilon > 0$ como no Lema 3.1 e seja $x \in R^{|\Omega|}$, $\|x\| < \epsilon$ e $\gamma^0 + x \geq 0$.

Seja $z(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$ uma solução básica ótima de $P(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$ e $H(\gamma^0 + x)$ sua base associada.

Então, do Lema 3.1, $H(\gamma^0)$ é uma base ótima para $P(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0)$. Em particular ela é dual factível para $\bar{P}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x))$. Por outro lado, da Proposição 3.1, $z(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$ é factível para $\bar{P}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x))$, então ele é ótimo para este problema pois é factível e sua base associada é dual factível. Isto implica que:

$$w(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) = \bar{w}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x)) \quad (\text{A.43})$$

Agora, como $\bar{P}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x))$ e $P(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0)$ têm uma base ótima comum $H(\gamma^0)$,

$$\begin{aligned} \bar{w}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x)) &\geq w(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0) + \\ &+ \sum_k \pi_k^0 \left\{ \sum_{i \in \Omega_k} x_{ik} [\theta_k(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)] \right\} \\ &- \sum_{(i,j) \in \Omega} \lambda_{1ij}^0 x_{ij} [\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \bar{\phi}_{ij}^0] \\ &- \sum_{(i,j) \in \Omega} \lambda_{2ij}^0 x_{ij} \{ -[\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)] - \bar{\phi}_{ij}^0 \} \quad (\text{A.44}) \end{aligned}$$

Então tem-se:

$$w(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) = w(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0) + \sum_{(i,j) \in \Omega} [\pi_{ij}(x) - \lambda_{1ij}(x) - \lambda_{2ij}(x)]x_{ij} \quad (\text{A.45})$$

Para calcular as derivadas parciais pela direita e pela esquerda de $w(\gamma, d^0, \bar{\phi}^0)$ com respeito a γ_{ij} , faz-se $v = e_{ij}$ ou $-e_{ij}$ no Lema 3.1. Então existe um $\delta_v > 0$ e H_v tal que $H_v(\gamma^0 + tv)$ é uma base ótima para $P(\gamma^0 + tv, d^0, \bar{\phi}^0)$ para algum t , $0 \leq t \leq \delta_v$. Usando o mesmo argumento como antes,

$$w(\gamma^0 + tv, d^0, \bar{\phi}^0) = w(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0) + t \sum_{(i,j) \in \Omega} [\pi_{ij}(tv) - \lambda_{1ij}(tv) - \lambda_{2ij}(tv)]v_{ij} \quad (\text{A.46})$$

Da relação anterior assumindo continuidade para $w(\cdot)$ para $0 \leq t \leq \delta_v$, tem-se:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{w(\gamma^0 + tv, d^0, \bar{\phi}^0) - w(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0)}{t} \right\} = \sum_{(i,j) \in \Omega} [\pi_{ij}(0) - \lambda_{1ij}(0) - \lambda_{2ij}(0)]v_{ij} \quad (\text{A.47})$$

Em particular, as derivadas parciais pela direita e pela esquerda de $w(\gamma, d^0, \bar{\phi}^0)$ com respeito a γ_{ij} :

$$\left. \frac{\partial^+ w(\gamma, d^0, \bar{\phi}^0)}{\partial \gamma_{ij}} \right]_{\gamma=\gamma^0} = \sigma_{ij} = \pi_{ij}(0) - \lambda_{1ij}(0) - \lambda_{2ij}(0) \quad (\text{A.48})$$

$$\left. \frac{\partial^- w(\gamma, d^0, \bar{\phi}^0)}{\partial \gamma_{ij}} \right]_{\gamma=\gamma^0} = \sigma_{ij} = \pi_{ij}(0) - \lambda_{1ij}(0) - \lambda_{2ij}(0) \quad \blacksquare \quad (\text{A.49})$$

Note que, se a base ótima de $P(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0)$ é não não degenerada ou não única, as derivadas parciais pela direita e pela esquerda de $w(\gamma, d^0, \bar{\phi}^0)$ em γ^0 podem ser diferentes, porque as variáveis primal e dual que aparecem nas expressões anteriores podem vir de bases diferentes. Porém, se a base ótima $H(\gamma^0)$ é única e não degenerada, existe uma vizinhança de γ^0 tal que $H(\gamma)$ é uma base ótima única e não degenerada de $P(\gamma, d^0, \bar{\phi}^0)$

para γ nessa vizinhança. Isto implica que $w(\gamma, d^0, \bar{\phi}^0)$ é uma função diferenciável sobre γ nessa vizinhança.

Proposição 3.3:

Sejam $\gamma^0 \geq 0$, $d^0, \bar{\phi}^0$ valores iniciais de γ, d e $\bar{\phi}$. No problema (MLS), (3.31),

$$\sigma_{ij}^{MLS} = \pi_{ij}(0) \quad \forall (i, j) \in \Omega \quad (\text{A.50})$$

Prova:

Da Proposição 3.2,

$$\sigma_{ij}^{MLS} = \pi_{ij}(0) - \lambda_{1ij}(0) - \lambda_{2ij}(0) \quad (\text{A.51})$$

Agora:

$$\lambda_{1ij}(0) = \lambda_{1ij}^0 [(\theta_i(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0)) - \bar{\phi}_{ij}^0] \quad (\text{A.52})$$

$$\lambda_{2ij}(0) = \lambda_{2ij}^0 [-(\theta_i(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0)) - \bar{\phi}_{ij}^0] \quad (\text{A.53})$$

onde λ_1^0, λ_2^0 são valores ótimos duais associados com as restrições (3.31b) e (3.31c) no problema (3.31), então:

$$\lambda_{1ij}(0)\gamma_{ij}^0 = 0 \quad (\text{A.54})$$

$$\lambda_{2ij}(0)\gamma_{ij}^0 = 0 \quad (\text{A.55})$$

pela condição das folgas complementares. Por outro lado, se $\gamma_{ij}^0 = 0$, então para que a base seja não singular, a correspondente variável de folga dessa restrição ficará na base. Isto implica que se $\gamma_{ij}^0 = 0$, então

$$\lambda_{1ij}(0) = \lambda_{2ij}(0) = 0$$

Portanto, no problema (MLS):

$$\sigma_{ij}^{MLS} = \pi_{ij}(0) \quad (\text{A.56})$$

Assim tem-se que:

$$\sigma_{ij}^{MLS} = \pi_{ij}(0) = (\pi_i^0 - \pi_j^0)(\theta_i - \theta_j) \quad \forall (i, j) \in \Omega \quad \blacksquare \quad (\text{A.57})$$

para o subproblema (3.31).

Quando o sistema é desconexo, a matriz básica da solução ótima pode ser singular e a Proposição 3.2 não se cumpre. Então, para sistemas não conexos, não é necessariamente verdadeira a equação (A.57), como pode ser mostrado facilmente com exemplos práticos [6]. Assim, o desenvolvimento apresentado, para atingir uma solução ótima global, tem que considerar um sistema elétrico conexo e a maneira de se contornar este problema é apresentada na formulação geral do algoritmo.

Apêndice B

Dados dos Sistemas Testados

B.1 Sistema de 03 Barras

Níveis de Geração e Carga

Barra	Geração	Carga (MW)
1	80	0
2	0	60
3	0	20

Características das Linhas

Linha	Custo	Reatância (Ohm)	Capacidade (MW)
1-2	3	3	35
1-3	2	2	40
2-3	2	2	40

B.2 Sistema de 06 Barras

Níveis de Geração e Carga

Barra	Cap. de geração	Ger. Atual	Carga (MW)
1	150	50	80
2	0		240
3	360	165	40
4	0		160
5	0		240
6	600	545	0

Características das Linhas

Linha	Custo	Reatância (Ohm)	Capacidade (MW)
1-2	40	0.40	100
1-3	38	0.38	100
1-4	60	0.60	80
1-5	20	0.20	100
1-6	68	0.68	70
2-3	20	0.20	100
2-4	40	0.40	100
2-5	31	0.31	100
2-6	30	0.30	100
3-4	59	0.59	82
3-5	20	0.20	100
3-6	48	0.48	100
4-5	63	0.63	75
4-6	30	0.30	100
5-6	61	0.61	78

B.3 Sistema de 46 Barras

Níveis de Geração e Carga

Barra	Cap. de geração	Ger. Atual	Carga (MW)
1	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.0	443.1
3	0.0	0.0	0.0
4	0.0	0.0	300.7
5	0.0	0.0	238.0
6	0.0	0.0	0.0
7	0.0	0.0	0.0
8	0.0	0.0	72.2
9	0.0	0.0	0.0
10	0.0	0.0	0.0
11	0.0	0.0	0.0
12	0.0	0.0	511.9
13	0.0	0.0	185.8
14	1257.0	944.0	0.0
15	0.0	0.0	0.0
16	2000.0	1366.0	0.0
17	1050.0	1000.0	0.0
18	0.0	0.0	0.0
19	1670.0	773.0	0.0
20	0.0	0.0	1091.2

Níveis de Geração e Carga (continuação).

Barra	Cap. de geração	Ger. Atual	Carga (MW)
21	0.0	0.0	0.0
22	0.0	0.0	81.9
23	0.0	0.0	458.1
24	0.0	0.0	478.2
25	0.0	0.0	0.0
26	0.0	0.0	231.9
27	220.0	54.0	0.0
28	800.0	730.0	0.0
29	0.0	0.0	0.0
30	0.0	0.0	0.0
31	700.0	310.0	0.0
32	500.0	450.0	0.0
33	0.0	0.0	229.1
34	748.0	221.0	0.0
35	0.0	0.0	216.0
36	0.0	0.0	90.1
37	300.0	212.0	0.0
38	0.0	0.0	216.0
39	600.0	221.0	0.0
40	0.0	0.0	262.1
41	0.0	0.0	0.0
42	0.0	0.0	1607.9
43	0.0	0.0	0.0
44	0.0	0.0	79.1
45	0.0	0.0	86.7
46	700.0	599.0	0.0

Características das Linhas

No.	Linha	Linhas existentes	Reatância (Ohm)	Capacidade (MW)	Custo 10 ³ dol.
1	01-07	1	0.0616	270	4349
2	01-02	2	0.1065	270	7076
3	04-09	1	0.0924	270	6217
4	05-09	1	0.1173	270	7732
5	05-08	1	0.1132	270	7480
6	07-08	1	0.1023	270	6823
7	04-05	2	0.0566	270	4046
8	02-05	2	0.0324	270	2581
9	08-13	1	0.1348	240	8793
10	09-14	2	0.1756	220	11267
11	12-14	2	0.0740	270	5106
12	14-18	2	0.1514	240	9803
13	13-18	1	0.1805	220	11570
14	13-20	1	0.1073	270	7126
15	18-20	1	0.1997	200	12732
16	19-21	1	0.0278	1500	32632
17	16-17	1	0.0078	2000	10505
18	17-19	1	0.0061	2000	8715
19	14-26	1	0.1614	220	10409
20	14-22	1	0.0840	270	5712
21	22-26	1	0.0790	270	5409
22	20-23	2	0.0932	270	6268
23	23-24	2	0.0774	270	5308

Características das Linhas (continuação).

No.	Linha	Linhas existentes	Reatância (Ohm)	Capacidade (MW)	Custo 10 ³ dol.
24	26-27	2	0.0832	270	5662
25	24-34	1	0.1647	220	10611
26	24-33	1	0.1448	240	9399
27	33-34	1	0.1265	270	8288
28	27-36	1	0.0915	270	6167
29	27-38	2	0.2080	200	13237
30	36-37	1	0.1057	270	7025
31	34-35	2	0.0491	270	3591
32	35-38	1	0.1980	200	12631
33	37-39	1	0.0283	270	2329
34	37-40	1	0.1281	270	8389
35	37-42	1	0.2105	200	13388
36	39-42	3	0.2030	200	12934
37	40-42	1	0.0932	270	6268
38	38-42	3	0.0907	270	6116
39	32-43	1	0.0309	1400	35957
40	42-44	1	0.1206	270	7934
41	44-45	1	0.1864	200	11924
42	19-32	1	0.0195	1800	23423
43	46-19	1	0.0222	1800	26365
44	46-16	1	0.0203	1800	24319
45	18-19	1	0.0125	600	8178
46	20-21	1	0.0125	600	8178
47	42-43	1	0.0125	600	8178
48	02-04	0	0.0882	270	5965
49	14-15	0	0.0374	270	2884
50	46-10	0	0.0081	2000	10889
51	04-11	0	0.2246	240	14247
52	05-11	0	0.0915	270	6167

Características das Linhas (continuação).

No.	Linha	Linhas existentes	Reatância (Ohm)	Capacidade (MW)	Custo 10 ³ dol.
53	46-06	0	0.0128	2000	16005
54	46-03	0	0.0203	1800	24319
55	16-28	0	0.0222	1800	26365
56	16-32	0	0.0311	1400	36213
57	17-32	0	0.0232	1700	27516
58	19-25	0	0.0325	1400	37748
59	21-25	0	0.0174	2000	21121
60	25-32	0	0.0319	1400	37109
61	31-32	0	0.0046	2000	7052
62	28-31	0	0.0053	2000	7819
63	28-30	0	0.0058	2000	8331
64	27-29	0	0.0998	270	6672
65	26-29	0	0.0541	270	3894
66	28-41	0	0.0339	1300	39283
67	28-43	0	0.0406	1200	46701
68	31-41	0	0.0278	1500	32632
69	32-41	0	0.0309	1400	35957
70	41-43	0	0.0139	2000	17284
71	40-45	0	0.2205	180	13994
72	15-16	0	0.0125	600	8178
73	46-11	0	0.0125	600	8178
74	24-25	0	0.0125	600	8178
75	29-30	0	0.0125	600	8178
76	40-41	0	0.0125	600	8178
77	02-03	0	0.0125	600	8178
78	05-06	0	0.0125	600	8178
79	09-10	0	0.0125	600	8178

Apêndice C

Papers Publicados

- **R. Romero and A. Monticelli:** “A Hierarchical Decomposition Approach for Transmission Network Expansion Planning”, Paper WP93-048, IEEE-PES Winter Meeting, Jan./Feb 1993, Columbus-Ohio.
- **R. Romero, A. Monticelli:** “A Zero-One Implicit Enumeration Method for Optimizing Investments in Transmission Expansion Planning”, paper SP93-206, IEEE-PES Summer Meeting, July 1993, Vancouver, Canada.

A HIERARCHICAL DECOMPOSITION APPROACH FOR TRANSMISSION NETWORK EXPANSION PLANNING

R. Romero A. Monticelli
UNICAMP-Campinas-Brazil

Abstract: This paper presents a hierarchical decomposition approach for optimal transmission network expansion planning. A major difficulty in obtaining global optimal solutions for complex, real-life networks is due to the nonconvexity of the problem. Hierarchical decomposition has proved to be an efficient heuristic for coping with nonconvexity, as illustrated in the test results section of the paper. Significant reductions in investment costs have been obtained in some practical cases for which results are available in the literature. The current implementation of the hierarchical decomposition approach utilizes three different levels of network modeling: transportation models, hybrid models, and linearized power flow models. An initial solution is obtained for the simplest model (transportation model) and as one moves towards the final solution the algorithm successively switches to more accurate models.

Keywords: network expansion planning, Benders decomposition, hierarchical decomposition, optimization.

INTRODUCTION

Long term transmission planning involves a series of studies whose purpose is to determine when and where to install new equipments. Planning horizons of 20 years or more are not uncommon. In addition to the combinatorial nature of the problem, its complexity is increased by the need for studying a variety of cases, both for intermediate years as well as for the horizon year. There are important practical cases for which the expansion of the transmission network is not just a question of reinforcing an already existing system, but may involve significant changes in network topology. Also, the expansion planning may have to deal with disconnected networks at the initial point of the planning process (Fig.1). This may happen, for instance, when new generating/load nodes are added to the system, or when the interconnection of previously isolated systems has to be studied. In such cases, regular power flow analysis methods are not directly applicable at the early stages of the planning process.

Network expansion planning can be classified as static or dynamic. Static expansion, which is dealt with in this paper, involves one stage transitions: for example, given the network configuration for a given year and the peak generation/demand for the next year (along with other data such as network operating limits, costs, and investment constraints),

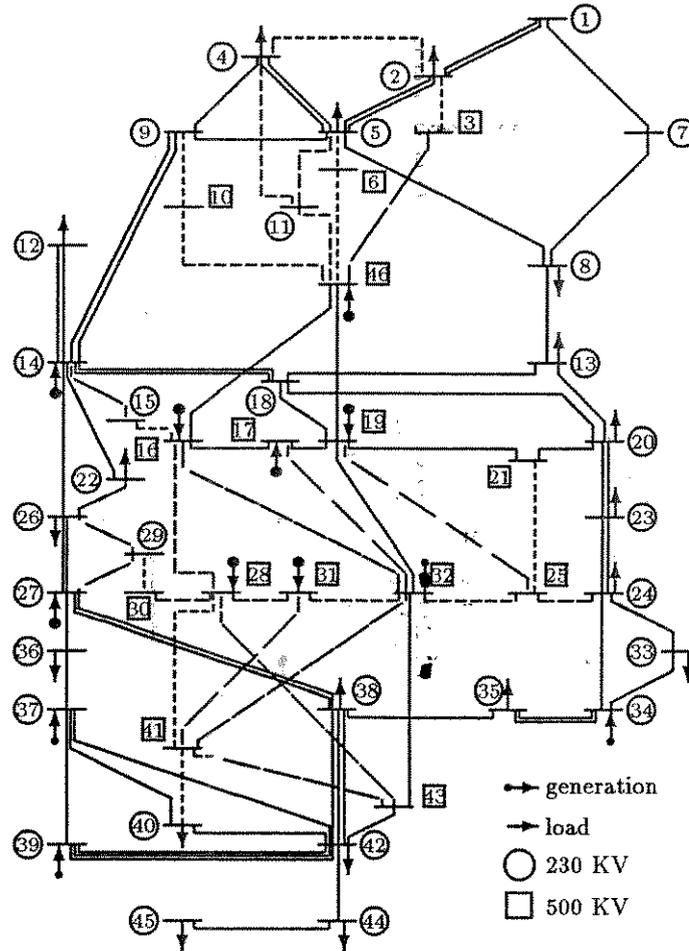


Figure 1: Test system.

one wants to determine the expansion plan with minimum cost. By dynamic planning it is usually meant the year-by-year expansion plan that goes from the initial year through the horizon year (the dynamic planning is made with the help of an interactive tool [2] and is not discussed in the present paper). This paper addresses the initial stages of the expansion planning studies when the basic topology of the future network is studied. It is understood that the network topologies synthesized by the proposed approach will be further analyzed and improved by testing their performances using other analysis tools such as power flow, short circuit, transient and stability analysis tools. Thus, the proposed methodology is basically used for screening a variety of expansion alternatives from which one or more attractive options are selected for more detailed consideration.

This paper presents a hierarchical decomposition approach for optimal transmission expansion planning. A major diffi-

culty in obtaining global optimal solutions for complex, real-life networks is that normally the expansion problem has a nonconvex formulation, in which case normally only local optimal solutions are guaranteed. This is particularly true for the Benders decomposition method which was the starting point for the approach proposed in this paper. Hierarchical decomposition has proved to be an efficient heuristic for coping with nonconvexity, as illustrated by the results presented in the paper. Reductions in the number of iterations have been obtained and, importantly, significant savings have been observed in some practical cases for which results are available in the literature. The current implementation of the hierarchical decomposition approach utilizes three different levels of network modeling: transportation models, hybrid models, and linearized power flow models (the so called dc models). Each level of network representation is seen as a relaxation of the next higher level. An initial solution is obtained for the simplest model (transportation model) and as one moves towards the final solution one successively switches to more accurate models. The methodology is flexible enough for allowing the inclusion of full nonlinear power flow models as a fourth level of network representation, what will be the object of future work.

The paper is organized as follows: initially the basic features of the hierarchical approach are presented; it is then shown how the decomposition technique fits into the hierarchical planning methodology; next an illustrative example is given; then results obtained with a practical case are presented and comparisons with results available in the literature are discussed; next, the relevant conclusions are summarized; finally, the Appendix details the application of the decomposition approach to the three different types of network representation (transportation, hybrid, and dc models).

THE HIERARCHICAL APPROACH

At the initial stages of the expansion planning the hierarchical algorithm solves relaxed problems for which convexity conditions are satisfied and so optimal solutions can be obtained. The relaxed constraints are then gradually reintroduced as one gets closer to the final solution of the problem. Thus, initially it is solved a relaxed problem from which the constraints representing KVL (Kirchhoff Voltage Law) and the discrete nature of circuit additions have been dropped (transportation model without integrality constraints). The optimal solution obtained, as well as other relevant information, are then reutilized for starting the solution process of the second hierarchical level (hybrid model without integrality constraints; in the hybrid model the branches with existing circuits are treated by the dc model and the branches where only new additions are possible are treated by the transportation model [5]). Finally, the integrality constraints and the dc model for the entire network are brought back into the problem. Notice also that other levels of relaxation could be added without changing the basic approach, say, for including the representation of full ac power flow constraints.

Benders Decomposition: Overview

At each level of the hierarchical algorithm the expansion problem is further decomposed by the Benders method [10, 14] into two subproblems: the investment subproblem and the operation subproblem (Fig.2a). During the solution process these two subproblems exchange information: the *Master* informs the *Slave* about investment decisions (transmission ca-

capacity additions) and the *Slave* informs the *Master* about transmission needs (cuts). The investment subproblem basically models the economics of the planning process; the operation subproblem represents the power flow equations, with different degrees of detail according to the current level in the hierarchy. The operation subproblem takes an investment plan generated by the investment subproblem and minimizes the use of fictitious generations to supply the load without violations in the operation constraints. If at a given stage of the solution process, the investment decisions are such that a feasible operating point can be found with zero generation from the fictitious generators, a partial solution has been obtained for the expansion problem and the process moves to the next level. On the other hand, when a feasible operating point cannot be found without recurring to the fictitious generators, relevant information about operation needs is sent back to the investment subproblem via Benders cuts, as indicated in Fig.2a. These cuts are added to the investment subproblem as extra constraints; they play a crucial role in the planning mechanism for they inform the investment subproblem about the need for additional transmission capability.

Reduced Operation Model

Two types of constraints (Fig.2b) are dealt with in the investment subproblem: constraints in the investment variables (say maximum number of circuit additions in a given branch) and an equivalent representation of the operation constraints (a reduced set of constraints which implicitly represent the critical operation constraints). The equivalent representation of the operation constraints basically consists of the set Benders cuts which are available at any stage of the process, and other types of simplified information about network operation (e.g. it may contain rules such as "the addition of a line section may also require the addition of other line sections or transformers with appropriate capacities in order to form a connected path"). The point is that the more the investment subproblem knows about network operation, the better will be the investment decisions, and the faster will be the convergence to the optimal solution. Because the investment subproblem keeps the available cuts when it moves to higher levels of network representation, it learns about system operational needs as the expansion process evolves.

Deficiencies and Pitfalls

As mentioned before, a major obstacle associated to the practical application of the Benders approach regards convexity (the network expansion planning problem is nonconvex). A simplified visualization of this type of situation is given in Fig.3a. The figure illustrates the constrained minimization of a linear function; it is assumed that the feasible region is not explicitly known but, instead, it is gradually built from a sequence of hyperplanes (cuts); because one of the cuts over-constrains the search for the minimum only a local optimal solution is obtained. This situation occurs in the expansion planning problem when the addition of new circuits is allowed in branches which initially do not have any circuits (Fig.1).

By the hierarchical approach, instead, the problem is solved in three phases as indicated in Fig.3b; in Phase I, where the formulation is convex, an optimal solution is obtained which typically represents from 60 to 70% of the total investment; in Phase II additional investments are made to cope with the newly added constraints (typically 10 - 15% of the total cost); in Phase III complementary investments are made leading to the final solution. The point is that when eventually the

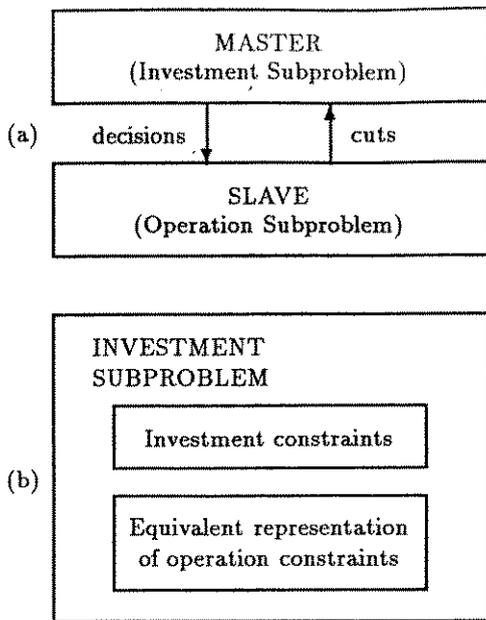


Figure 2: Problem Decomposition.

method switches to the unrelaxed network model (nonconvex feasible region shown in Fig.3b), one is sufficiently close to the global optimal solution and so the chances of reaching a local optimum are greatly reduced.

Hierarchization

The previous discussion and the practical experience with the hierarchical approach has shown that this is a simple, effective way of avoiding local optimal solutions [7]. But this is only one of various reasons for going hierarchical. Another one is the combinatorial nature of the problem. Directly solving the investment subproblem could demand excessive computational time; when a integer linear programming method is used to solve the investment subproblem (Phase III) one normally is closer to the desired solution point, which significantly reduces the computational burden. Yet another justification for hierarchization, is the fact that the expansion planning may have to deal with disconnected networks (Fig.1). In such cases, regular power flow analysis methods are not directly applicable.

Basic Algorithm

The three phases of the hierarchical algorithm are summarized in the following.

Phase I: Transportation Model / Continuous Additions

In this phase the decomposition approach is applied to a relaxed expansion problem in which the network is represented by a transportation model, and the resulting subproblems (operation subproblem, and investment subproblem) are solved alternately until convergence is attained. The investment subproblem is solved by linear programming while the operation subproblem is solved via a relaxed version of the algorithm used in Phase II [4, 7]. Both the investments as well as the Benders cuts at the solution point will be reused in the following phases.

Phase II: Hybrid Model / Continuous Additions

In this phase the Benders decomposition approach is applied to a relaxed expansion problem in which the network

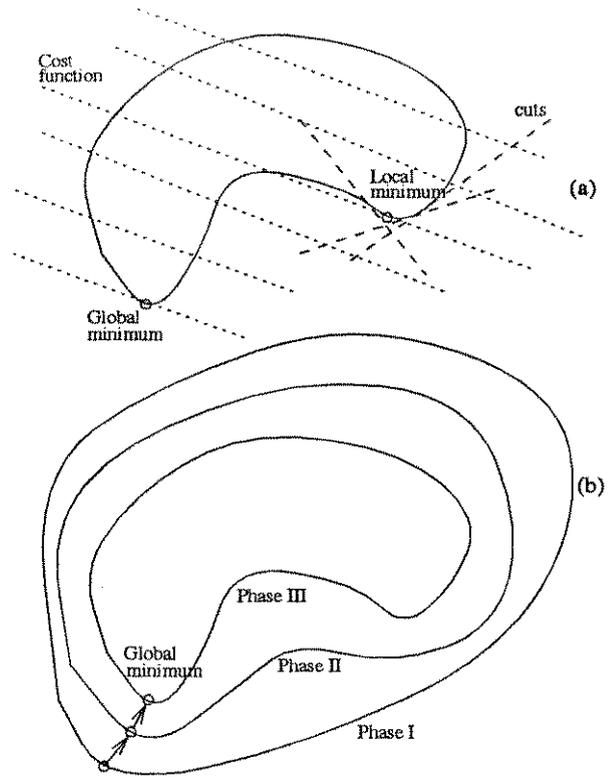


Figure 3: Nonconvexity and the hierarchical approach.

is represented by a hybrid model (dc model for existing branches and transportation model for new branches) [5]. The investment subproblem is solved as in Phase I, and the power flow model is solved via specialized linear programming algorithm [6, 7]. As it happens in Phase I, both the investments as well as the Benders cuts are transferred to the next phase.

Phase III: DC Model / Discrete Additions

The constraints on the discrete nature of the investment variables and the KVL constraints are reintroduced at this phase of the solution process. The investment subproblem is solved via integer linear programming, while the operation subproblem is modeled by the dc power flow.

ILLUSTRATIVE EXAMPLES

To illustrate the use of the hierarchical approach, a detailed example based on the network expansion problem originally suggested in [3] is given in the following. All the relevant data is in Tables 1, 2. The initial topology of the system is in Fig. 4. Two cases have been studied: Case 1 considers constant generation levels; Case 2 allows the generation levels to vary from zero to the generation capacities given in Table 1.

Case 1: In this case the generation levels at buses 1, 3, and 6 have been scheduled to 50 MW, 165 MW, and 545 MW, respectively [3]. The following circuit additions were made: four circuits in branch 2-6, two circuits in branch 4-6, and one circuit in branch 3-5. The evolution of the solution process is summarized in Table 3.

Case 2: In this case generation levels at buses 1, 3, and 6 are allowed to vary from zero to the maximum generation level given in Table 1. Only four additions were needed: three circuits in branch 4-6, and one circuit in branch 3-5. The solution process is summarized in Table 4 and Figs. 5.1-5.3.

Remarks: The results summarized in Tables 3 and 4 correspond to global optimal solutions, for Cases 1 and 2, respectively. This would not be so, however, if Benders decomposition was directly applied to the formulation in which the network is represented by the dc model; instead, a local optimal solution would be obtained, as illustrated in Fig.3a. On the other hand, by the hierarchical approach one goes as far as possible using the transportation and hybrid models (Phases I and II), and when Phase III is started one is already in the neighborhood of the global optimum. Importantly, the convergence in Case 2 has been obtained in only 8 iterations (5 cuts); also, to the authors knowledge, this is the first time an optimal solution is shown for this case (Fig. 5.3).

Table 1: Bus Data

Bus No.	Max Generation (MW)	Actual Generation (MW)	Load (MW)
1	150	50	80
2	0		240
3	360	165	40
4	0		160
5	0		240
6	600	545	0

Table 2: Circuit Data

Circuit	Cost (US\$)	Series Reactance (Ohm)	Transmission Capability (MW)
1-2	40	0.40	100
1-3	38	0.38	100
1-4	60	0.60	80
1-5	20	0.20	100
1-6	68	0.68	70
2-3	20	0.20	100
2-4	40	0.40	100
2-5	31	0.31	100
2-6	30	0.30	100
3-4	59	0.59	82
3-5	20	0.20	100
3-6	48	0.48	100
4-5	63	0.63	75
4-6	30	0.30	100
5-6	61	0.61	78

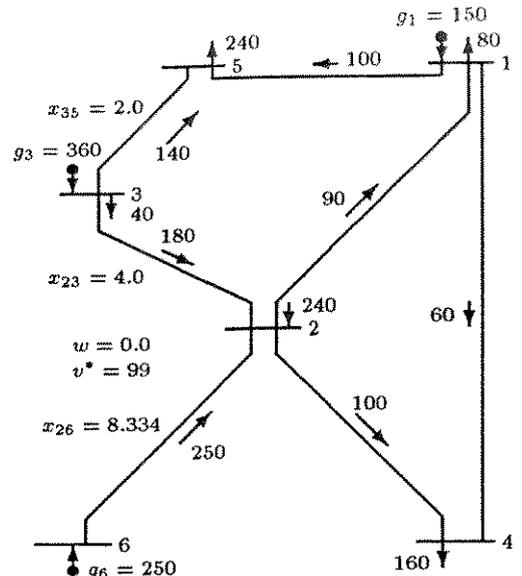


Figure 5.1: Solution After Phase 1 in Case 2

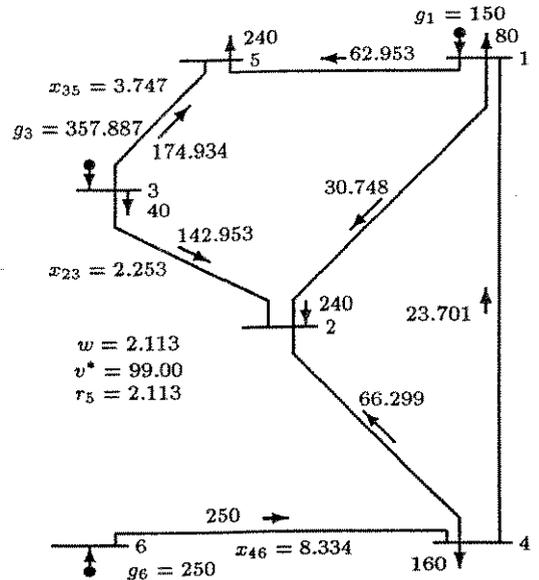


Figure 5.2: Solution After Phase 2 in Case 2

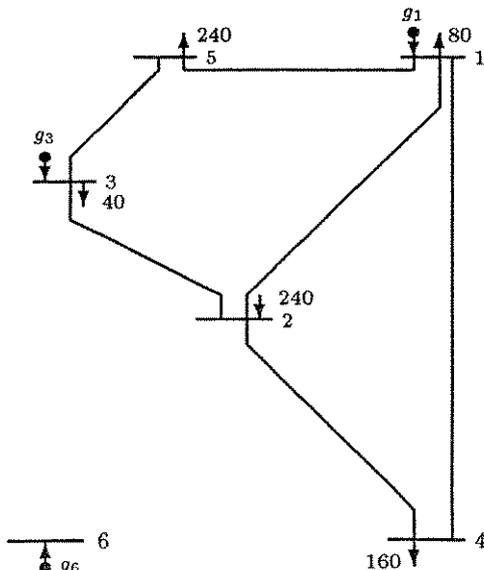


Figure 4: Initial Network

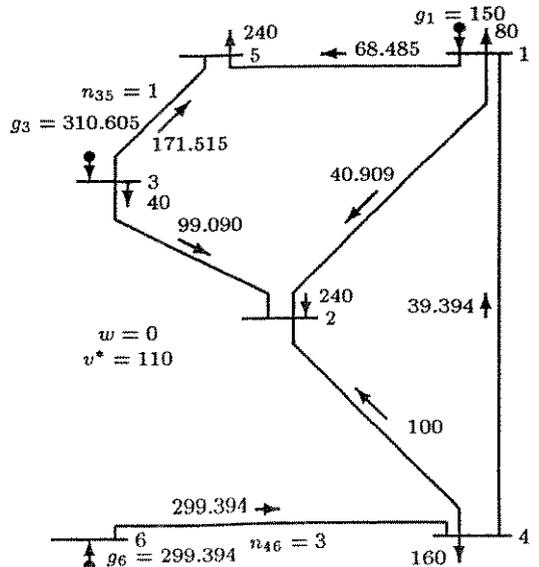


Figure 5.3: Solution After Phase 3 in Case 2

Table 3: Convergence Date for Case 1

Phase Iter.	Investment Variables				Inv. Cost	Operat. Cost
	x_{15}	x_{26}	x_{35}	x_{46}	v	w
-	-	-	-	-	-	545
1	-	18.167	-	-	163.500	130
2	-	13.833	-	4.333	163.500	40
3	2.0	13.833	-	4.333	171.500	0
-	2.0	13.833	-	4.333	171.500	90.682
1	-	3.955	2.000	14.212	171.500	86.363
2	-	6.833	2.785	11.333	174.640	7.297
3	-	7.470	2.959	10.696	175.335	3.799
-	-	$\frac{40}{3}$	5.000	$\frac{20}{3}$	200.000	0

Table 4: Convergence Date for Case 2

Phase Iter.	Investment Variables				Inv. Cost	Operat. Cost
	x_{23}	x_{26}	x_{35}	x_{46}	v	w
-	-	-	-	-	-	370
1	18.500	-	-	-	74	250
2	6.000	8.334	-	-	99	40
3	4.000	8.334	2.000	-	99	0
-	4.000	8.334	2.000	-	99	78.947
1	4.000	5.303	2.000	3.030	99	61.102
2	2.253	-	3.747	8.334	99	2.113
-	-	-	5.000	10.000	110	0

VALIDATION TESTS

The proposed methodology has been tested on a difficult real-world system whose initial configuration is depicted in Fig.1. All the relevant data can be found in [13].

Case 1: In this case generation levels are kept constant. The total investment at optimal solution is US\$ 154 420 000, which corresponds to the following 16 circuit additions: one circuit in branch 20-21, two circuits in branch 42-43, one circuit in branch 46-6, one circuit in branch 19-25, one circuit in branch 31-32, one circuit in branch 28-30, three circuits in branch 26-29, two circuits in branch 24-25, two circuits in branch 29-30, and two circuits in branch 5-6. 76 cuts were generated during the solution process: 35 in Phase I, 20 in Phase II and 21 in Phase III.

Case 2: In this case generation rescheduling was allowed. The total investment at optimal solution is US\$ 70 289 000, which corresponds to the following eight circuit additions: one circuit in branch 13-20, one circuit in branch 20-23, one circuit in branch 46-6, two circuits in branch 20-21, one circuit in branch 42-43, and two circuits in branch 5-6. 40 cuts were generated during the solution process: 15 in Phase I, 16 in Phase II and 9 in Phase III.

Remarks: The total cost of the expansion plan for Case 2 is significantly less than the cost previously reported in the literature; notice that herein no use is made of the generation buses which are not connected to the network at the starting point (Fig.1), which are scheduled to zero generation levels at the optimum. Importantly, the proposed methodology also has the advantage of given a set of suboptimal solutions for which small violations in circuits capabilities are allowed. Finally, it should be emphasized that the difference between the total investments obtained for Cases 1 and 2 strongly suggests that the optimization of transmission and generation expansion should be made in a combined way, as suggested in [13].

This paper proposes a hierarchical version of the Benders decomposition approach which has shown to be effective in dealing with the nonconvexity of the transmission network expansion problem. The improvements can be verified both on the convergence behavior and in the costs associated to investment plans. Also, to cope with the combinatorial nature of the network expansion problem, in the initial phases of the hierarchical approach a relaxed version of the problem is solved; the integrality constraints are reintroduced into the problem only at the last phase. Because most of the required investments are made in the initial phases, when one finally switches to the unrelaxed model, the need for additional investments are relatively modest, which turns out to be very handy in dealing with the normal difficulties associated with dimensionality.

References

- [1] R. Fischl: "Optimal System Expansion Planning: A Critical Overview", ERDA & EPRI Conf., Henniker, 1975.
- [2] A. Monticelli, A. Santos Jr., M.V.F. Pereira, S.H. Cunha, B.J. Parker, J.C.G. Praça: "Interactive Transmission Network Planning Using a Least-effort Criterion", IEEE Trans. Power App. Systems, vol. PAS-101, No. 10, October 1982.
- [3] L.L. Garver: "Transmission Network Estimation Using Linear Programming", IEEE Trans. Power App. Syst., vol. PAS-89, pp. 1688-1697, Sept/Oct 1970.
- [4] S.Granville, M.V.F. Pereira: "Analysis of the Linearized Power Flow Model in Benders Decomposition", EPRI-Report RP 2473-6, Stanford University, February 1985.
- [5] R. Villanasa, L.L. Garver, S.J. Salon: "Transmission Network Planning Using Linear Programming", IEEE Trans. Power App. Systems, vol. PAS-104, No. 2, February 1985.
- [6] M.V.F. Pereira, L.M.V.G. Pinto, S.H.F. Cunha, G.C. Oliveira: "A Decomposition Approach to Automated Generation/Transmission Expansion Planning"; IEEE Trans. Power App. Systems, vol. PAS-104, No. 11, November 1985.
- [7] R. Romero : "Transmission Network Planning Using Hierarchical Benders Decomposition", M.Sc. Thesis, UNICAMP, 1990 (in Portuguese).
- [8] A.M. Geoffrion: "Duality in Nonlinear Programming: A Simplified Application-Oriented Development", SIAM Review, vol. 13, No. 1, 1971.
- [9] A.M. Geoffrion: "Elements of Large-Scale Mathematical Programming Part I: Concepts", Management Science, vol. 16, No. 11, 1970.
- [10] A.M. Geoffrion: "Generalized Benders Decomposition"; Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 10, 1972.
- [11] J.C. Geromel and M.R. Belloni: "Nonlinear Programs with Complicating Variables: Theoretical Analysis and Numerical Experience", IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, vol. SMC-16, No. 2, March/April 1986.
- [12] L. Lasdon: "Optimization Theory for Large Systems", New York, Mac Millan, 1970.

- [13] *M.V.F. Pereira, L.M.V.G. Pinto, G.C. Oliveira and S.H.F. Cunha*: "Composite Generation-Transmission Expansion Planning", EPRI-Research Project 2473-9, Stanford University, 1987.
- [14] *J.F. Benders*: "Partitioning Procedures for Solving Mixed-Variables Programming Problems", *Numerische Mathematik*, vol. 4, 1962.

APPENDIX: PROBLEM DECOMPOSITION

In this appendix all the relevant mathematical formulations and derivations are summarized.

Problem Formulation

The static transmission network expansion planning problem is formulated in the following as an optimization problem, using three different network models [4, 5]:

- transportation model, Eq.(1),
- linearized power flow model, Eq.(2), and
- hybrid model, Eq.(3).

Formulation I:

$$\text{Minimize } v = \left\{ \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij} x_{ij} + \alpha e^t r \right\} \quad (1.1)$$

subject to

$$S f + g + r = d \quad (1.2)$$

$$|f_{ij}| - x_{ij} \bar{\phi}_{ij} \leq \gamma_{ij}^0 \bar{\phi}_{ij} \quad (1.3)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}; \quad 0 \leq r \leq d \quad (1.4)$$

$$x_{ij} = n_{ij} \tilde{\gamma}_{ij}; \quad 0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij}; \quad \forall (i,j) \in \Omega \quad (1.5)$$

Formulation II:

$$\text{Minimize } v = \left\{ \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij} x_{ij} + \alpha e^t r \right\} \quad (2.1)$$

subject to

$$S f + g + r = d \quad (2.2)$$

$$f_{ij} - (\gamma_{ij}^0 + x_{ij})(\theta_i - \theta_j) = 0 \quad (2.3)$$

$$|f_{ij}| - x_{ij} \bar{\phi}_{ij} \leq \gamma_{ij}^0 \bar{\phi}_{ij} \quad (2.4)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}; \quad 0 \leq r \leq d \quad (2.5)$$

$$x_{ij} = n_{ij} \tilde{\gamma}_{ij}; \quad 0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij}; \quad \forall (i,j) \in \Omega \quad (2.6)$$

Formulation III:

$$\text{Minimize } v = \left\{ \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij} x_{ij} + \alpha e^t r \right\} \quad (3.1)$$

subject to

$$S f + g + r = d \quad (3.2)$$

$$f_{ij} - (\gamma_{ij}^0 + x_{ij})(\theta_i - \theta_j) = 0; \quad \forall (i,j) \in \Omega_1 \quad (3.3)$$

$$|f_{ij}| - x_{ij} \bar{\phi}_{ij} \leq \gamma_{ij}^0 \bar{\phi}_{ij} \quad (3.4)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}; \quad 0 \leq r \leq d \quad (3.5)$$

$$x_{ij} = n_{ij} \tilde{\gamma}_{ij}; \quad 0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij}; \quad \forall (i,j) \in \Omega \quad (3.6)$$

In Eqs.(1)-(3) and in the rest of this appendix, the following notation is adopted: $x_{ij} = n_{ij} \tilde{\gamma}_{ij}$ represents the discrete values of the circuit susceptances that can be added in branch-ij (n_{ij} is the number of circuits and $\tilde{\gamma}_{ij}$ is the circuit susceptance), c_{ij} is the incremental cost associated to the addition of a circuit in branch-ij (\$/MW), S is the node-branch incidence matrix, f is the vector of branch active power flows, g is the vector of active power injections, d is the vector of bus loads, f_{ij} is the total flow in branch-ij, f_{ij}^0 is the flow limit in the circuits already existing in branch-ij, $(\gamma_{ij} + x_{ij})$ is the total susceptance in branch ij, θ_i and θ_j are the voltage angles at the terminal buses of branch-ij, Ω represents the set of all

the branches where the addition of new circuits is allowed, Ω_1 represents the set of elements of Ω in whose branches there is circuits at the initial network, and, finally, Ω_2 is formed by the elements of Ω that are not in Ω_1 .

In Formulation I the objective (1.1) represents the cost of new additions. Constraint (1.2) represents KCL (Kirchhoff Current Law for the dc power flow model). Constraint (1.3) says that active power flow f_{ij} is limited by the branch transmission capacity given by the capacity of the existing circuits plus the capacity of the new additions. Constraint (1.4) gives the bounds on active power generation g and slack variables r , and constraints (1.5) regards the discrete nature of the decision variables x_{ij} . Formulation II introduces a new set of constraints represented by Eq.(2.3), which represents the KVL (Kirchhoff Voltage Law); thus Formulation I is a relaxed form of Formulation II. Formulation III is a hybrid formulation: already existing branches Ω_1 are treated as in Formulation II, and new branches Ω_2 are treated as in Formulation I.

Formulation I is a mixed integer linear programming problem; if the integrality of circuit additions is relaxed, i.e. if one allows for the addition of lines with fractional capacities, this formulation becomes a linear programming problem. Formulation II is a mixed integer nonlinear programming problem due to the presence of Eq.(2.3), where the decision variables x_{ij} appear multiplying the state variables θ_i, θ_j .

Notice that in all the three formulations investment and operating constraints appear together, forming a coupled set of equations. In the following we will see how these formulations can be put in a decoupled form (investment and operation subproblems) by Benders decomposition.

Network Connectivity

When new generation, load nodes are added to the system regular power flow methods are not readily applicable. For handling this type of networks one can: (1) turn the initial network into a connected network by the addition of certain candidate circuits which most likely will form part of the optimal solution in order to turn it into a connected network [4]; (2) use of transportation model for the disconnected parts of the network [3]; (3) add to the the initial network a dummy network composed of elements whose reactances are very much higher than normal reactances [2]. The first method may introduce a bias into the optimization process, and so should be avoided; the second method is adopted in Phases I and II of the hierarchical approach; whereas third method is adopted in Phase III.

Decomposition of the Transportation Model

By Benders decomposition [10, 14] Formulation I can be decomposed as follows [3, 4],

Operation Subproblem (Slave):

$$\text{Minimize } w = \alpha e^t r \quad (4.1)$$

subject to

$$S f + g + r = d \quad (4.2)$$

$$|f_{ij}| \leq (\gamma_{ij}^0 + x_{ij}) \bar{\phi}_{ij}; \quad \forall (i,j) \in \Omega \quad (4.3)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}; \quad 0 \leq r \leq d \quad (4.4)$$

where the decision variables x_{ij}^k are held constant during the solution of the subproblem; for instance, initially one may have $x_{ij} = 0$, meaning that no new additions have been made, in which case possible infeasibilities should be handled by the penalty variables r (loss of load); as circuit additions are granted by the investment subproblem penalties are reduced.

Investment Subproblem (Master):

$$\text{Minimize } v = \left\{ \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij} x_{ij} + \beta \right\} \quad (5.1)$$

subject to

$$w^k + \sum_{(i,j) \in \Omega} \sigma_{ij}^k (x_{ij} - x_{ij}^k) \leq \beta; \quad \beta \geq 0 \quad (5.2)$$

$$x_{ij} = n_{ij} \tilde{\gamma}_{ij}; \quad 0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij}; \quad \forall (i,j) \in \Omega \quad (5.3)$$

where w is the optimum value of (4.1), σ_{ij} is the sensitivity of the optimum value w with respect to the decision variable x_{ij} given by [7]:

$$\sigma_{ij} = \pi_{ij} \bar{\phi}_{ij}; \quad \forall (i,j) \in \Omega \quad (6)$$

(π_{ij} are the Lagrange multipliers associated to constraints (4.3) of the operation subproblem) and β is an upper bound [7].

The linear constraints (5.2), the Benders cuts, bring into the investment subproblem information about the need for using penalty variables (loss of load) in order to make the operation subproblem feasible. Notice that at each iteration a new constraint (5.2) is added to the investment subproblem, forcing new investments until a feasible solution (a solution with $w = 0$) is obtained for the operation subproblem. Finally notice that the application of the Benders decomposition in this case is straightforward, since the operation and investment variables are linearly separable. Also, the problem given in Formulation I is convex (linear) what guarantees the convergence of the iterative process [10, 11].

Decomposition of the Linear Power Flow Model

Unlike in Formulation I, in Formulation II operation and investment variables are not linearly separable. This is so because of the presence of the term $x_{ij}(\theta_i - \theta_j)$ in constraint (2.3). Formulation II can be decomposed in the following two subproblems [4],

Operation Subproblem (Slave):

$$\text{Minimize } w = \alpha e^t r \quad (7.1)$$

subject to

$$B \theta + g + r = d \quad (7.2)$$

$$|(\theta_i - \theta_j)| \leq \bar{\phi}_{ij}; \quad \forall (i,j) \in \Omega \quad (7.3)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}; \quad 0 \leq r \leq d \quad (7.4)$$

Investment Subproblem (Master):

$$\text{Minimize } v = \left\{ \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij} x_{ij} + \beta \right\} \quad (8.1)$$

subject to

$$w^k + \sum_{(i,j) \in \Omega} \sigma_{ij}^k (x_{ij} - x_{ij}^k) \leq \beta; \quad \beta \geq 0 \quad (8.2)$$

$$x_{ij} = n_{ij} \tilde{\gamma}_{ij}; \quad 0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij}; \quad \forall (i,j) \in \Omega \quad (8.3)$$

where the same notation used in Eqs. (4) and (5) are applicable, and B is the network susceptance matrix.

Though the Benders cuts given by Eq.(8.2) have the same general form as the cuts expressed by Eq.(5.2), in the present case the sensitivity factor σ_{ij} is given by [4, 7]:

$$\sigma_{ij} = (\pi_i^0 - \pi_j^0)(\theta_i - \theta_j); \quad \forall (i,j) \in \Omega \quad (9)$$

where π_i^0 are the dual variables (Lagrange multipliers) associated to constraints (7.2). It is important to note that Eq.(9) holds only for connected systems, as is shown in Ref.[7].

Decomposition of the Hybrid Model

As it happens with Formulations I and II, Formulation III can be decomposed in the following two subproblems [4, 5],

Operation Subproblem (Slave):

$$\text{Minimize } w = \alpha e^t r \quad (10.1)$$

subject to

$$B_1 \theta + S_2 f + g + r = d \quad (10.2)$$

$$|(\theta_i - \theta_j)| \leq \bar{\phi}_{ij}; \quad \forall (i,j) \in \Omega_1 \quad (10.3)$$

$$|f_{ij}| \leq (\gamma_{ij}^0 + x_{ij}) \bar{\phi}_{ij}; \quad \forall (i,j) \in \Omega_2 \quad (10.4)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}; \quad 0 \leq r \leq d \quad (10.5)$$

Investment Subproblem (Master):

$$\text{Minimize } v = \left\{ \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij} x_{ij} + \beta \right\} \quad (11.1)$$

subject to

$$w^k + \sum_{(i,j) \in \Omega} \sigma_{ij}^k (x_{ij} - x_{ij}^k) \leq \beta; \quad \beta \geq 0 \quad (11.2)$$

$$x_{ij} = n_{ij} \tilde{\gamma}_{ij}; \quad 0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij}; \quad \forall (i,j) \in \Omega \quad (11.3)$$

where the same notation used in Eqs. (4) and (5) are applicable and B_1 is the susceptance matrix of the existing network, S_2 is the node-branch incidence matrix for the new branches (i.e., branches in which initially there is no circuits but where additions are allowed), and Ω_2 represent the subset of Ω formed by the new branches.

Herein the sensitivity factors σ_{ij} are a combination of the sensitivities given by Eqs. (6) and (9), [7]:

$$\sigma_{ij} = (\pi_i^0 - \pi_j^0)(\theta_i - \theta_j); \quad \forall (i,j) \in \Omega_1 \quad (12.1)$$

$$\sigma_{ij} = \pi_{ij} \bar{\phi}_{ij}; \quad \forall (i,j) \in \Omega_2 \quad (12.2)$$

where π_i^0 are the dual variables (Lagrange multipliers) associated to constraints (10.2) and π_{ij} are the dual variables (Lagrange multipliers) associated to constraints (10.4).

Basic Algorithm:

The following algorithm summarizes the basic features of the hierarchical approach:

1. Initialize the investment variables as $x_{ij=0}$ and make *phase* = 1.
2. Solve the operation subproblem for the present level of investments x_{ij} :
 - If the loss of load is less than a specified ϵ_w , make *phase* = *phase* + 1 and go to Step 4;
 - Otherwise add a new Benders cut to the investment subproblem.
3. Solve the investment subproblem and determine the new level of investments to comply with the new constraints added in Step 2. Go to Step 2.
4. If *phase* ≤ 3, go to Step 2; otherwise, stop.

BIOGRAPHIES

Rubén Romero received his B.Sc. degree in 1978 and P.E. degree in 1984 from the National University of Engineering, in Lima, Peru, his M.Sc. degree in 1990 from Unicamp, in Brazil. From 1980 to 1987 he served as Instructor at University of Huamanga in Ayacucho, Peru. Currently he is working towards his Ph.D. degree at Unicamp. (e-mail address: ruben@dsee.fee.unicamp.br)

Alcir J. Monticelli (Senior Member, IEEE) received his Ph.D. degree from Unicamp in 1975 where he is currently a Professor of Electrical Engineering. From 1982 to 1985 he was with the Department of EECS, University of California, Berkeley, and in 1990-91 he was with Mitsubishi Electric Corporation in Japan. (e-mail address: alcir@dsee.fee.unicamp.br)

A ZERO-ONE IMPLICIT ENUMERATION METHOD FOR OPTIMIZING INVESTMENTS IN TRANSMISSION EXPANSION PLANNING

R. Romero

A. Monticelli

UNICAMP-Campinas-Brazil

Abstract: This paper presents a zero-one implicit enumeration method applied to an integer programming subproblem which has to be solved as part of a more general process of obtaining an optimal solution for a transmission expansion planning problem by hierarchical Benders decomposition. The proposed algorithm has been successfully implemented and tested in a real-life system. The reasons why the implicit enumeration approach is particularly suited for the static expansion planning problem is fully discussed in the paper.

Keywords: zero-one enumeration, integer programming, network static expansion planning, hierarchical Benders decomposition, optimization.

INTRODUCTION

This paper deals with transmission network *static* expansion planning. In this type of planning studies, given the network configuration for a given year and the peak generation/demand for the next year (along with other data such as network operating limits, costs, and investment constraints), one wants to determine the expansion plan with minimum cost, i.e. one wants to determine *where* and *what* type of new equipment should be installed. Of course this is a subproblem of a more general case, called *dynamic* expansion planning, where, in addition to the questions *what* and *where*, one wants to know *when* to install new pieces of equipment. In the paper we will be interested in the initial stages of the expansion planning studies when the basic topology of the future network is studied. It is understood that the network topologies synthesized by the proposed approach will be further analyzed and improved by testing their performances using other analysis tools such as power flow, short circuit, transient and stability analysis tools.

It has been recognized that one of the main difficulties in obtaining global optimal solutions for complex, real-life networks is that normally the expansion problem has a nonconvex formulation, in which case normally only local optimal solutions are guaranteed. In a previous paper [15] a hierarchical decomposition approach for optimal transmission expansion planning was presented. At the initial stages of the expansion planning the hierarchical algorithm solves relaxed problems for which convexity conditions are satisfied and so optimal solutions can be obtained. The relaxed constraints are then gradually reintroduced as one gets closer to the final solution of the problem. Thus, initially it is solved a relaxed problem from which the constraints representing KVL (Kirchhoff Voltage Law) and the discrete nature of circuit additions

have been dropped (a transportation model without integrality constraints is used). The optimal solution obtained, as well as other relevant information, are then reutilized for starting the solution process of the second hierarchical level (hybrid model without integrality constraints; in the hybrid model the branches with existing circuits are treated by the dc model and the branches where only new additions are possible are treated by the transportation model [4]). Finally, the integrality constraints and the dc model for the entire network are brought back into the problem.

The reintroduction of the integrality constraints (which had been relaxed in the previous phases of the algorithm) turns the expansion problem into a mixed integer non-linear programming problem [15]. The paper proposes a specialized implicit enumeration algorithm which has been successfully implemented and tested in real-life conditions. The algorithm is used for solving the investment subproblem which results from the application of Benders decomposition to the problem of static expansion planning of transmission networks. The specialization of the algorithm has shown to be particularly effective in dealing with the investment problem. Due to the combinatorial nature of the investment decision problem, coping with the dimensions of the decision tree that has to be traversed by the algorithm is critical to the success of the method.

The paper is organized as follows. Initially the hierarchical approach proposed in a previous publication is summarized [15]. Next the implicit enumeration algorithm is fully discussed; both the basic version of the algorithm due to Balas and Glover, as well as a number of improvements suggested by Geoffrion, Tuan, and Glover-Zionts are presented. Next discussions on the specifics of the expansion planning problem are presented. It follows an illustrative example which shows the capabilities of the method in doing implicit rather than complete (or explicit) enumerations. Then the results of some validation tests are reported. Finally the relevant conclusions are summarized. An appendix gives a mathematical formulation of the problem, and summarizes the basic equations related to the Benders decomposition approach.

THE HIERARCHICAL APPROACH

In this section a brief summary of the hierarchical Benders decomposition approach is given. A more comprehensive description can be found in [15]. The idea here is to set the stage for the discussion of the zero-one implicit enumeration method which is proposed in the next section as an efficient means of handling the combinatorial nature of the investment decision aspects of the transmission expansion planning problem.

The three sequential phases of the hierarchical algorithm are summarized in the following. In each one of the three phases the problem is further decomposed into two subproblems by Benders decomposition: an *investment* subproblem and an *operation* subproblem – the mathematical aspects of the approach are summarized in the Appendix.

In Phase I of the solution process the decomposition approach is applied to a relaxed expansion problem in which the network is represented by a *transportation model*, *continuos additions* of transmission lines/transformers are allowed, and the resulting subproblems (operation subproblem, and investment subproblem) are solved alternately until convergence is attained. The investment subproblem is solved by linear programming while the operation subproblem is solved via a relaxed version of the algorithm used in Phase II [3, 15]. Both the investments as well as the Benders cuts at the solution point will be reused in the following phases.

In the next phase, Phase II, the Benders decomposition approach is applied to a relaxed expansion problem in which the network is represented by a *hybrid model* (dc model for existing branches and transportation model for new branches) [4], and, as it happens in Phase I, integrality constraints are relaxed. The investment subproblem is solved as in Phase I, and the power flow model is solved via specialized linear programming algorithm [5, ?]. Both the investments as well as the Benders cuts are transferred to the next phase.

In the last phase, Phase III, a *linearized* power flow model (the so called DC Model) is used to represent the power network (KVL constraints are reintroduced), and the *discrete* nature of transmission line additions is enforced. The investment subproblem is solved via integer linear programming (implicit enumeration, dealt with the the following section), while the operation subproblem is solved as in Phase II.

IMPLICIT ENUMERATION ALGORITHM

This section summarizes the basic features of the implicit enumeration approach to the solution of zero-one integer problems.

Alternate Solution Scheme

The following algorithm results from the application of the Benders decomposition to Phase III of the hierarchical approach:

1. Initialize the investment variables x_{ij} .
2. Solve the operation subproblem for the present level of investments x_{ij} :
 - If the loss of load is less than a specified ϵ_w , stop;
 - Otherwise add a new Benders cut to the investment subproblem.
3. Solve the investment subproblem using the zero-one implicit enumeration algorithm and determine the new level of investments to comply with the new constraints added in Step 2. Go to Step 2.

The Investment Subproblem

The investment subproblem as it results from the application of the Benders decomposition, is an *integer linear problem* in which the integer variables represent the number of line/transformer additions to the branches of the network. The number of allowed additions per branch is relatively small, say 3, 4 or 5, what makes the binary representation of the integer variables attractive. By the binary representation the integer variables are converted into one or more binary variables, depending on the upper bound of each integer variable. If, for example, the upper bound on the number of circuit additions in a given branch is 3, the associated integer variable can be represented by two binary (0-1) variables; thus the set of possible values that such integer variables can

assume is given by $\{00;01;10;11\}$, corresponding to the integer set $\{0;1;2;3\}$, respectively. If we introduce this substitution into the investment subproblem of the Appendix, the following *zero-one linear problem* will result.

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= \sum_{j \in N} c_j x_j ; c_j \geq 0 ; j \in N = \{1, 2, \dots, n\} \\ \text{s.a. } &\sum_{j \in N} a_{ij} x_j + S_i = b_i , i \in M = \{1, 2, \dots, m\} \\ &x_j = (0, 1) , j \in N ; S_i \geq 0 , i \in M \end{aligned} \quad (1)$$

The special structure of this problem allows the efficient use of *implicit enumerative schemes* [10]. Of course, *complete enumeration* would be possible only for problems presenting a small number of binary variables. By the *implicit enumeration* scheme, on the contrary, information (knowledge about the problem) which is generated during the enumeration process, is used to exclude from consideration a number of candidate solutions. Enumeration can be seen as the traversing of a binary decision tree where all the possible combinations (without duplications) of the binary decision variables are considered. Accordingly, the exclusion of candidate alternatives can be seen as the *pruning* of the decision tree. In the rest of this section, the implicit enumeration method originally suggested by Balas, and perfected by Glover, Geoffrion and Tuan, will be discussed. More specifically, it will be shown that the investment subproblem we are dealing with is particularly suited for a series of *specializations* which are used for improved efficiency.

The Search Strategy

The search strategy is based on the backtrack idea originally suggested by Balas [8]. Backtracking allows for the nonredundant enumeration of all the solution points. It consists basically of two types of moves: *forward* movement and *backward* movement. In terms of the binary decision tree, forward movement means moving down the tree, while backtracking means going back to higher levels in the tree. By the forward movement a previously unassigned decision variable is set to 0 or 1, thus reducing the number of degrees of freedom of the resulting problem; backward movement is carried out when all possible alternatives resulting from a set of decisions made in forward movements have been considered either implicitly or explicitly. Glover [13] have suggested a modification to the original scheme which considerably reduces the storage needs of the Balas' enumeration algorithm. The modification suggested by Tuan [11] is aimed at introducing certain degree of flexibility when performing backtrack moves: in the previous schemes [8, 9] the decision variables are ranked in a rigid order by the choices in the forward moves, and backtracking is performed on a LIFO basis (last-in-first-out rule). Tuan's modification, keeps the characteristics of nonredundant implicit enumeration of the previous algorithms, but allows partial reranking of the decisions, what permits the use of selection rules that improve the efficiency of the search. Figure 1 gives a flow-chart which illustrates the basic features of Balas implicit enumeration algorithm [8] including the modifications introduced by Glover [13] and Geoffrion [10, 14].

Proper understanding of the flow-chart requires some clarifications about the notations and on the concepts of *partial solutions*, *free variables*, *completions*, *fathoming*, and *incumbent solutions* [12]. Let N be the set of all the n binary variables under consideration, and let x_j be an element of N . A *partial solution*, J , is an ordered subset of N , whose binary variables

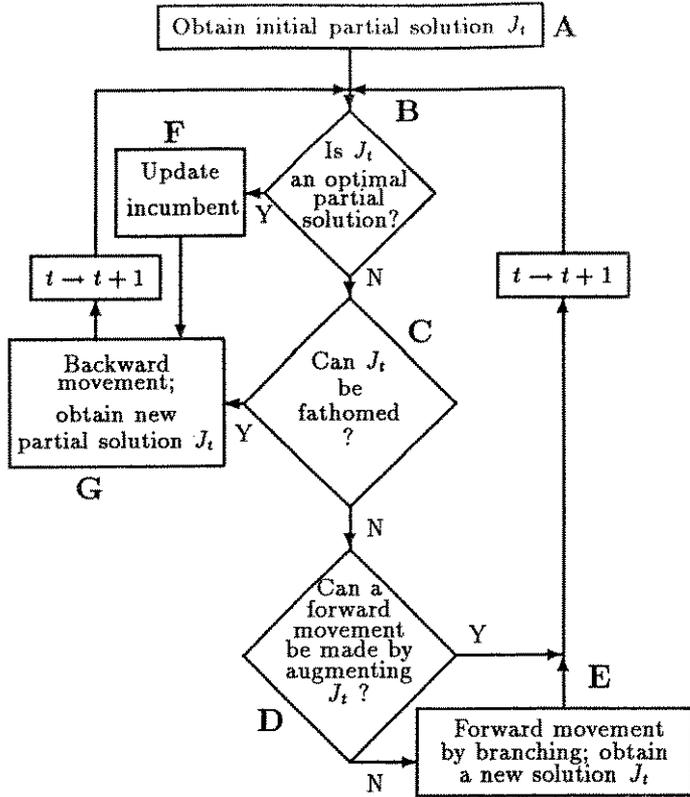


Figure 1: Additive implicit enumeration algorithm.

have been tentatively assigned values 0 or 1. For simplicity the following notation is adopted: $+j$ denotes $x_j = 1$, and $-j$ denotes $x_j = 0$; $+j$ denotes that $x_j = 1$ and that the alternative $x_j = 0$ have already been considered, whereas $-j$ denotes that $x_j = 0$ and that the alternative $x_j = 1$ have already been considered. Hence, $J = \{6, -2, -4, 5\}$ denotes that $x_6 = x_5 = 1$, $x_2 = 0$, and $x_4 = 0$; -4 indicates that the alternative $x_4 = 1$ has already been considered (i.e., given the previous decisions in the tree search, $x_4 = 1$ would lead to nonpromising solutions, which are pruned from the decision tree and so excluded from further consideration). Any variable not assigned a value by the partial solution J is called a *free variable*; $N - J$ denotes the set of free variables. The set of free variables, $N - J$, defines a reduced subproblem with the same characteristics of the original problem, except that the number of degrees of freedom is smaller - in that sense, the implicit enumeration scheme is a kind of divide-and-conquer strategy, of the same type used in methods such as the branch-and-bound approach, and other methods that commonly appear in connection with expert systems techniques. A complete assignment of the binary variables in $N - J$ is called a *completion* of J . In the previous example, assuming that $n = 6$, a possible completion of $J = \{6, -2, -4, 5\}$ is $J = \{6, -2, -4, 5, 1, 3\}$; another one would be $J = \{6, -2, -4, 5, -1, 3\}$. Depending on the stage of the search, i.e. depending on the knowledge already accumulated about the solution of the problem, partial solutions can be *fathomed*. Fathoming of a partial solution occurs when all its completions can be excluded as nonpromising, what means a pruning of part of the search tree, the corresponding solutions being considered as implicitly enumerated; for instance, this may occur when a tentative optimal solution is available (called *incumbent* solution), and all the completions of a partial solution would lead to solution costs that are bigger than the cost of the incumbent solution.

Initialization - Block A

At the beginning of Phase III of the hierarchical approach, i.e. for $k = 0$, k being the iteration count for the alternate algorithm used in Phase III, a initial partial solution $J_{t=0}$ is obtained by rounding-off the relaxed optimal solution obtained at the end of Phase II (here t is the iteration count of the enumeration algorithm, not to be confused with k)

At the beginning of the k -th iteration of the alternate algorithm (the k -th solution of the investment subproblem in Phase III) incumbents of the previous iterations can be used as initial partial solutions $J_{t=0}$ for the implicit enumeration algorithm. If there are incumbent solutions that remain feasible after the inclusion of the last Benders cut, the one with the lowest cost is taken as the initial partial solution for the k -th iteration. If not, one can always use the non-zero binary variables of the previous optimal solution (iteration $k - 1$) as a good starting point - most of the variables will assume the same values at iteration k .

Optimality Checking - Block B

Let J_t be a partial solution at iteration t of the implicit enumeration algorithm. The slack variables S_i^t and the current value of the objective function z^t are given by,

$$S_i^t = b_i - \sum_{j \in J_t; j > 0} a_{ij}; \quad i \in M \quad (2)$$

$$z^t = \sum_{j \in J_t; j > 0} c_j \quad (3)$$

If $S_i^t \geq 0$ for all i , then J_t will be an optimal partial solution, in the sense that none of the possible completions of J_t will have a cost lower than z^t ; this is so because all cost coefficients c_j are assumed positive, and so if we consider that the completion with lowest cost will be the one in which all the free variables are assigned zero values, we conclude that the current partial solution is at least as good as the best of the possible completions; notice that the values of the slack variables are not affected when the free variables are assigned zero values. Thus a feasible partial solution is an optimal partial solution, and the corresponding completions can be discarded.

Fathoming - Block C

Fathoming tests are designed aiming at excluding the maximum number of completions from further consideration; the idea is to discard nonpromising partial solutions as soon as possible. Weak fathoming tests would allow the explicit enumeration of most of the 2^n possible solutions; whereas strong fathoming tests would reduce the search space to a minimum size. The stronger the test the better, provided that optimality is not affected.

There are two basic types of fathoming tests: (1) test that flag whether the current partial solution J_t has no feasible complement; (2) tests that indicate that the feasible completions of J_t will have costs bigger than the cost of the incumbent solution (the feasible solution with the minimum cost up to the moment). Whatever the case, the partial solution J_t is fathomed and the algorithm moves backward in order to explore other areas of the search space (to traverse other regions of the decision tree).

Test #1 of Balas [8]: Let's define A_t as the set:

$$A_t = \{j \in N - J_t \mid a_{ij} \geq 0 \forall i \mid S_i^t < 0\} \quad (4)$$

The elements of A_t are all the free variables that if assigned values 1 will not reduce the infeasibility of the current partial solution J_t . Hence all the decisions corresponding to x_j ; $j \in$

A_t are discarded. Let $N_t^1 = N - J_t - A_t$. If $N_t^1 = \{\emptyset\}$, then the current partial solution J_t is fathomed for infeasibility.

Test #2 of Balas[8]: Let's define B_t as the set:

$$B_t = \{j \in N_t^1 \mid z^t + c_j \geq z_{min}\} \quad (5)$$

The elements of B_t are free variables that if assigned values 1 will reduce the infeasibility of the current partial solution J_t , but will at the same time will lead to solution costs that are bigger than the cost of the incumbent solution, z_{min} . Hence all the decisions corresponding to x_j ; $j \in B_t$ are excluded from consideration. Let $N_t^2 = N_t^1 - B_t$. If $N_t^2 = \{\emptyset\}$, then the current partial solution J_t is fathomed (there is no feasible complement better than the incumbent).

Test #3 of Balas[8]: Let's define C_t as the set:

$$C_t = \{i \in M \mid S_i^t < 0; \sum_{j \in N_t^2} a_{ij}^- > S_i^t\} \quad (6)$$

where: $a_{ij}^- = \min(0, a_{ij})$. The elements of C_t are the indexes of the constraints whose slack variables S_i^t are negative, and even when all the elements of N_t^2 are assigned values 1, the constraints will remain infeasible ($S_i^t < 0$). Hence there is no feasible complement for the current partial solution, and J_t is fathomed. If $C_t = \{\emptyset\}$, there will rest a chance of J_t being fathomed by the following test.

Glover-Zionts Test[9]: For the constraints with $S_i^t < 0$ compute:

$$\tau_i = \min_{j \in N_t^2} \left\{ \frac{S_i^t c_j}{a_{ij}}; a_{ij} < 0 \right\} \quad (7)$$

If $\tau_i \geq z_{min} - z^t$ then J_t is fathomed. This test was motivated by the fact that Test #3 of Balas can be inefficient in certain cases in which feasibility may be satisfied but with costs that are bigger than the cost of the incumbent solution.

Forward Movement by Augmentation - Block D

When the current partial solution is not fathomed one has to move forward by assigning 0 - 1 values to a selected free variable. It may happen that one of these alternatives (either 0 or 1) can be discarded, and so the move forward occurs without branching. Geoffrion has devised the following augmentation test which allows specifying a free variable without creating a complementary alternative to be analyzed later on during the search.

Geoffrion Test[14]: For the constraints with $S_i^t < 0$ and for each $j \in N_t^2$, if

$$[S_i^t - \sum_{j \in (N_t^2)} \min(0, a_{ij}) - |a_{ij}|] < 0 \quad (8)$$

then $x_j = 0$ if $a_{ij} > 0$ or $x_j = 1$ if $a_{ij} < 0$.

Forward Movement by Branching- Block E

When the augmentation test fails the only alternative is branching, in which case a free variable is selected for assignment, thus generating a new partial solution J_t ; the complementary assignment will be left for future consideration by a backward movement. Notice that, contrary to what happens in general with branch-and-bound methods, it is not necessary to keep a explicit list of the alternatives generated by branching; they will be implicitly considered by the enumeration algorithm, without the need of any type of book-keeping.

Test #4 of Balas[8]: Chose a free variable x_{j^*} , $x_{j^*} \in N_t^2$ to be assigned value 1 and add j^* to J_t . The selection is made according to the criterion:

$$v_{j^*} = \max_{j \in N_t^2} \{v_j\} \quad (9)$$

$$v_j = \sum_{i \in M} \min(0, S_i^t - a_{ij}); j \in N_t^2 \quad (10)$$

v_j gives an indication of the degree of global infeasibility of the new partial solution J_t . If there is more than one candidate variable for augmentation, j^* is chosen according to the costs c_{j^*} (the candidate with minimum cost is selected). If $v_{j^*} = 0$ then the partial solution J_{t+1} is feasible and should be better than the incumbent; if so the new partial solution is fathomed and the incumbent is updated accordingly.

Incumbent Updating - Block F

Whenever a new optimal partial solution is found, its cost z_t is compared with the cost of the incumbent, z_{min} , if $z_t < z_{min}$ then the new solution becomes the incumbent.

Backward Movement - Block G

Whenever a partial solution J_t is fathomed, a backward movement is carried out; in the Balas' scheme this simply means changing the assigned value of one of the variables in J_t , according to a LIFO rule. For example, let $J_t = \{2, -5, 3, 6, 1, \underline{4}\}$. When J_t is fathomed, the new partial solution will be given by $J_{t+1} = \{2, -5, 3, 6, -\underline{1}\}$. Notice that the LIFO rule is automatically considered by the implicit enumeration scheme as suggested by Glover [13]. A more flexible scheme was introduced by Tuan [14]; a subset J'' formed by all the candidate variables that can be underlined; if j_1 is the element of J_t which would be chosen by the LIFO rule, then the elements of J'' are all the elements of J_t on the left of j_1 , including j_1 , until the first underlined element is found. Hence, for the J_t of the previous example, $J'' = \{3, 6, 1\}$. Thus according to Tuan's criterion, any element of J'' can be underlined. In the case of the example, the following partial solutions J_t would be possible $J_t = \{2, -5, 3, 6, -\underline{1}\}$, $J_t = \{2, -5, 3, 1, -\underline{6}\}$, and $J_t = \{2, -5, 6, 1, -\underline{3}\}$. The order of the elements 3, 6, and 1 do not matter; only the ordering of the underlined elements are critical for the correct enumeration. Now, how best select the element of J'' that will be underlined? The following test makes a choice according to the proximity to a feasible solution.

Tuan's Test[14]: The element $j \in J_t''$ that is chosen for underlining is the one that will lead to a primal solution with the minimum infeasibility, i.e.,

$$w_p = \max_{j \in J_t''} \{w_j\} \quad (11)$$

$$w_j = \sum_{i \in M} \min(0, S_i^t + a_{ij}); j \in J_t'' \quad (12)$$

where w_j is a measure of infeasibility when $x_j = 0$. If more than one option is available, the variable with the maximum cost is selected.

DISCUSSIONS

In this section some of the reasons why the implicit enumeration approach is particularly suited for the static expansion planning problem are discussed.

Advantages of the Implicit Enumeration Approach

Balas' basic algorithm is called *additive* because the only type of arithmetic operation required by the algorithm is *addition*; hence roundoff problems commonly encountered in other algorithms are eliminated. Feasible, or even optimal solutions, are normally available early during the search, and so partial searches (time limited) can yield useful results. Contrary to what happens with branch-and-bound methods, it is not necessary to solve a subsidiary LP problem in order to determine a lower bound for the optimal solution cost; as it has been shown in the previous section, the same effect can be obtained

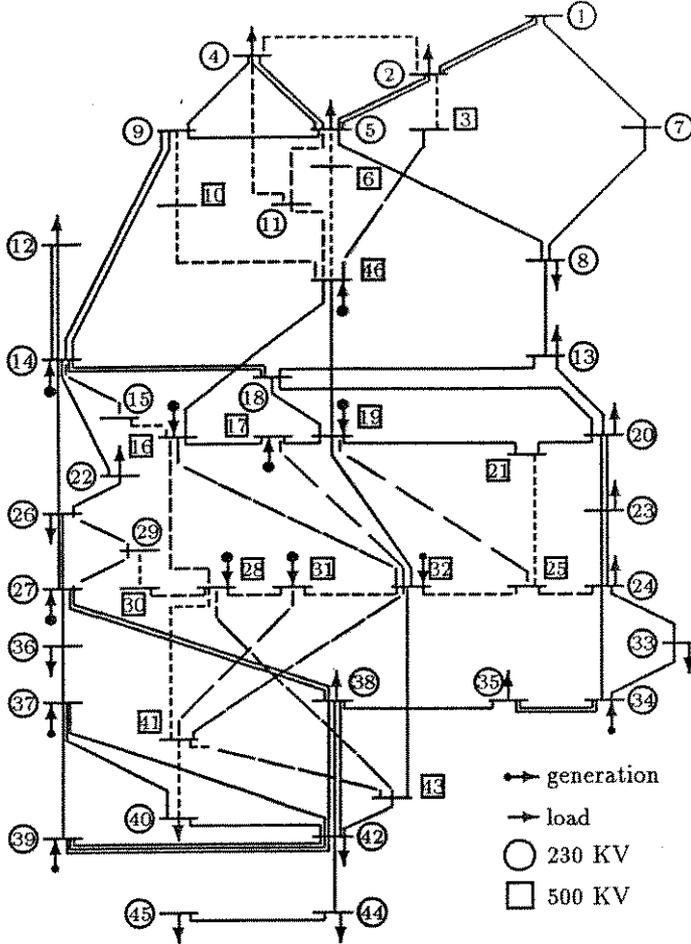


Figure 5: Southern Brazilian system.

main hierarchical algorithm, and t denotes implicit enumeration iterations). Ten investment subproblems (Linear Integer Problems) were solved, corresponding to ten cuts generated by the successive solution of operation problems (iterations $k = 31$ through $k = 40$). The total solution time was 1727 seconds, running in a Sun Sparc2 station.

Table 2 summarizes the results obtained with the specialized implicit enumeration algorithm. A significant reduction in the number of iterations is observed – both k -iterations as well as t -iterations – and the computing time is about 1/20 of the time taken by the standard algorithm. The total computing time was 136 seconds (14 seconds in Phase I, 36 seconds in Phase II, and the rest in Phase III). The reason for the reduction in the number of k -iterations is that some investment decisions that do not make much sense from the operation point of view are avoided by the specialized algorithm, which “knows” more about the operational needs of the power system. The optimal solution found by the algorithm is: circuit additions in branches 13-20, 20-23, 20-21, 20-21, 42-43, 46-06, 05-06, and 05-06. The loss of load is $w = 1MW$, which is perfectly acceptable, is smaller than the specified tolerance; if the tolerance is reduced to zero, then an extra circuit addition is made at branch 02-05.

Table 3 gives the situation of the generation levels for the optimal solution. Isolated buses with no generation/load, and that do not form part of any of the added paths, remain isolated, although, during the search, they have been considered as valid alternatives for addition of circuits. This is a good indication of the “cleverness” of the enumeration algorithm.

Table 1: Results obtained with the Balas-Glover standard implicit enumeration algorithm.

Iteration k	Cost $\times 10^3$ US\$	Iteration t	Loss of load	Time sec.
31	58879	9592	851	34.5
32	62690	16671	977	63.4
33	62884	29589	263	121.2
34	63163	29683	28	126.2
35	65183	37193	112	159.5
36	65659	43490	341	192.1
37	66555	49975	333	221.6
38	67717	52683	605	241.1
39	67717	52128	156	248.2
40	70289	53814	1	258.2

Table 2: Results obtained with the Balas-Glover standard implicit enumeration algorithm.

Iteration k	Cost $\times 10^3$ US\$	Iteration t	Loss of load	Time sec.
31	63163	1138	28	09.2
32	65183	1438	112	11.8
33	66555	1720	333	14.6
34	66555	1682	266	15.1
35	67717	1427	605	13.2
36	70289	1967	1	18.5

Table 3: Generation levels at the optimal solution

Bus	Gen. (MW)	Status
14	561.3	free
16	2000.0	binding
17	758.0	free
19	588.8	free
27	220.0	binding
28	0.0	no generation
31	0.0	no generation
32	402.5	free
34	748.0	binding
37	300.0	binding
39	600.0	binding
46	700.0	binding

CONCLUSIONS

The paper proposes a specialized implicit enumeration algorithm which has been successfully implemented and tested in real-life conditions. The algorithm is used for solving the investment subproblem which results from the application of Benders decomposition to the static expansion planning of transmission networks. The specialization of the algorithm has shown to be particularly effective in dealing with the investment problem, which is a mixed integer non-linear problem that has defied a number of methods for a long time. Due to the combinatorial nature of the investment decision problem, coping with the dimensions of the decision tree that has to be traversed by the algorithm is critical to the success of the method.

References

- [1] R. Fischl: “Optimal System Expansion Planning: A

Critical Overview", ERDA & EPRI Conf., Henniker, 1975.

- [2] L.L. Garver: "Transmission Network Estimation Using Linear Programming", IEEE Trans. Power App. Syst., vol. PAS-89, pp. 1688-1697, Sept/Oct 1970.
- [3] S.Granville, M.V.F. Pereira: "Analysis of the Linearized Power Flow Model in Benders Decomposition", EPRI-Report RP 2473-6, Stanford University, February 1985.
- [4] R. Villanasa, L.L. Garver, S.J. Salon: "Transmission Network Planning Using Linear Programming", IEEE Trans. Power App. Systems, vol. PAS-104, No. 2, February 1985.
- [5] M.V.F. Pereira, L.M.V.G. Pinto, S.H.F. Cunha, G.C. Oliveira: "A Decomposition Approach to Automated Generation/Transmission Expansion Planning"; IEEE Trans. Power App. Systems, vol. PAS-104, No. 11, November 1985.
- [6] M.V.F. Pereira, L.M.V.G. Pinto, G.C. Oliveira and S.H.F. Cunha: "Composite Generation-Transmission Expansion Planning", EPRI-Research Project 2473-9, Stanford University, 1987.
- [7] J.F. Benders: "Partitioning Procedures for Solving Mixed-Variables Programming Problems", Numerische Mathematik, vol. 4, 1962.
- [8] E. Balas: "An Additive Algorithm for Solving Linear Programs with Zero-One Variables", Operations Research 13(4), 517-546, 1965.
- [9] F. Glover and S. Zionts: "A Note on the Additive Algorithm of Balas", Operations Research 13(4), 546-549, 1965.
- [10] A.M. Geoffrion: "Integer Programming by Implicit Enumeration and Balas' Method", SIAM Review, vol.9, No.2, April, 1967.
- [11] N. Tuan: "A Flexible Tree-Search Method for Integer Programming Problems", Operations Research 19(1), 115-119, 1971.
- [12] H. Taha: "Integer Programming", Academic Press, New York, 1975.
- [13] F. Glover: "A Multiphase-Dual Algorithm for the Zero-One Integer Programming problem", Operations Research 13, 879-919, 1965.
- [14] A.M. Geoffrion: "An Improved Implicit Enumeration Approach for Integer Programming", Operations Research 17, 437-454, 1969.
- [15] R. Romero and A. Monticelli: "A Hierarchical Decomposition Approach for Transmission Network Expansion Planning", Paper WP93-048, IEEE-PES Winter Meeting, Jan./Feb 1993, Columbus-Ohio.

APPENDIX : PROBLEM DECOMPOSITION [15]

In this appendix all the relevant mathematical formulations and derivations are summarized.

Problem Formulation

In Phase III of the hierarchical approach the static transmission network expansion planning problem is formulated as the following integer non-linear optimization problem. [3]:

$$\text{Minimize } v = \left\{ \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij} x_{ij} + \alpha e^t r \right\} \quad (13.1)$$

$$\text{subject to} \quad (13.2)$$

$$S f + g + r = d \quad (13.3)$$

$$f_{ij} - (\gamma_{ij}^0 + x_{ij})(\theta_i - \theta_j) = 0 \quad (13.4)$$

$$|f_{ij}| - x_{ij} \bar{\phi}_{ij} \leq \gamma_{ij}^0 \bar{\phi}_{ij} \quad (13.5)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}; \quad 0 \leq r \leq d \quad (13.6)$$

$$x_{ij} = n_{ij} \tilde{\gamma}_{ij}; \quad 0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij}; \quad \forall (i,j) \in \Omega$$

In Eqs.(13) and in the rest of this appendix, the following notation is adopted: $x_{ij} = n_{ij} \tilde{\gamma}_{ij}$ represents the discrete values of the circuit susceptances that can be added in branch-ij (n_{ij} is the number of circuits and $\tilde{\gamma}_{ij}$ is the circuit susceptance), c_{ij} is the incremental cost associated to the addition of a circuit in branch-ij (\$/MW), S is the node-branch incidence matrix, f is the vector of branch active power flows, g is the vector of active power injections, d is the vector of bus loads, f_{ij} is the total flow in branch-ij, f_{ij}^0 is the flow limit in the circuits already existing in branch-ij, $(\gamma_{ij} + x_{ij})$ is the total susceptance in branch-ij and Ω represents the set of all the branches where the addition of new circuits is allowed.

Problem Decomposition

This formulation can be decomposed in the following two subproblems [3],

Operation Subproblem (Slave):

$$\text{Minimize } w = \alpha e^t r \quad (14.1)$$

$$\text{subject to} \quad (14.2)$$

$$B \theta + g + r = d \quad (14.3)$$

$$|(\theta_i - \theta_j)| \leq \bar{\phi}_{ij}; \quad \forall (i,j) \in \Omega \quad (14.4)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}; \quad 0 \leq r \leq d$$

Investment Subproblem (Master):

$$\text{Minimize } v = \left\{ \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij} x_{ij} + \beta \right\} \quad (15.1)$$

$$\text{subject to} \quad (15.2)$$

$$w^k + \sum_{(i,j) \in \Omega} \sigma_{ij}^k (x_{ij} - x_{ij}^k) \leq \beta; \quad \beta \geq 0$$

$$x_{ij} = n_{ij} \tilde{\gamma}_{ij}; \quad 0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij}; \quad \forall (i,j) \in \Omega \quad (15.3)$$

where w is the optimum value of (14.1), B is the network susceptance matrix and β is an upper bound.

The Benders cuts are given by Eq.(15.2) where the sensitivity factor σ_{ij} is, [3, 15]:

$$\sigma_{ij} = (\pi_i^0 - \pi_j^0)(\theta_i - \theta_j); \quad \forall (i,j) \in \Omega \quad (16)$$

Here, π_i^0 are the dual variables (Lagrange multipliers) associated with constraints (14.2).

BIOGRAPHIES

Rubén Romero received his B.Sc. degree in 1978 and P.E. degree in 1984 from the National University of Engineering, in Lima, Peru, his M.Sc. degree in 1990 from Unicamp, in Brazil. From 1980 to 1987 he served as Instructor at University of Huamanga in Ayacucho, Peru. Currently he is working towards his Ph.D. degree at Unicamp. (e-mail address: ruben@dsee.fee.unicamp.br)

Alcir J. Monticelli (Senior Member, IEEE) received his Ph.D. degree from Unicamp in 1975 where he is currently a Professor of Electrical Engineering. From 1982 to 1985 he was with the Department of EECS, University of California, Berkeley, and in 1990-91 he was with Mitsubishi Electric Corporation in Japan. (e-mail address: alcir@dsee.fee.unicamp.br).