

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO E AUTOMAÇÃO

Este exemplar corresponde à defesa final da
defendida por JORGE VICENTE LOPES DA
SILVA e aprovada pela Comissão
Julgadora em 31 / 08 / 90.


Orientador

OTIMIZAÇÃO NA GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE
MODELOS DINÂMICOS PARA O CONTROLE
E A ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS DE ROBÔS

Dissertação apresentada à Faculdade de
Engenharia Elétrica da Universidade Estadual
de Campinas, como requisito básico para a
obtenção do título de Mestre em Automação.

Por : Jorge Vicente Lopes da Silva
Orientador: Prof. Dr. Edson de Paula Ferreira

AGOSTO/90

A G R A D E C I M E N T O S

O trabalho que ora apresentamos congrega o esforço de muitos que solidariamente contribuíram para levá-lo a bom termo. Entre todos, o que seria difícil de nominar, não poderia ser negligenciado o agradecimento:

Ao Prof. LUIS GIMENO Y LATRE por participar desta banca e por me acolher neste mestrado como meu orientador de programa.

Ao Prof. EDSON DE PAULA FERREIRA, meu orientador de tese, pela oportunidade de trabalharmos juntos desde a minha graduação na Universidade Federal do Espírito Santo e pela disponibilidade e espírito crítico durante todo este tempo.

Ao Prof. DOUGLAS EDUARDO ZAMPIERI por aceitar ser membro desta banca.

Ao Prof. LEO PINI MAGALHÃES e a MARIA PAULINA JULIANE pelo apoio à realização do III e IV "Laboratório de Robótica e Automação Industrial" da EBAI.

Aos companheiros de equipe, ANA CLÉLIA, JOSUÉ, RALPH, OTHON, MARCUS, JOSÉ PAULO e EDSON pelas sugestões, críticas e um convívio amigável.

Ao Instituto de Automação do Centro Tecnológico para Informática pelo suporte ao desenvolvimento deste trabalho.

Ao Chefe da Divisão de Robótica do Centro Tecnológico para Informática, JOSUÉ JR. GUIMARÃES RAMOS, pelo apoio incondicional.

Aos alunos do III e IV EBAI "Laboratório de Robótica e Automação", que com suas críticas e sugestões auxiliaram no aprimoramento das ferramentas e métodos apresentados neste trabalho.

Um agradecimento especial não poderia ser omitido ao amigo e colega de trabalho JOSÉ PAULO DE ANDRADE FILHO, pelas idéias, discussões, críticas e leitura dos originais.

A CÉLIA MARIA DORÁZIO pela dedicação na edição deste trabalho.

R E S U M O

Este trabalho apresenta contribuições no sentido de agilizar e otimizar a modelagem geométrica e dinâmica de robôs. A finalidade principal na utilização destes modelos é o desenvolvimento de estratégias de controle mais eficientes, que consigam compensar efeitos indesejáveis, quando é exigido um desempenho superior dos robôs.

Estes modelos são de grande complexidade e sua obtenção manual, além de demorada, é extremamente árida e bastante sujeita a erros. Por este motivo, implementamos um sistema para a geração automática de modelos geométricos e modelos dinâmicos com base no formalismo de Lagrange, utilizando recursos para otimização destes modelos.

É proposto um algoritmo eficiente para modelagem dinâmica, o qual elimina automaticamente um grande número de redundâncias. Este algoritmo é apresentado à nível de implementação.

Palavras-chave: Robótica, modelagem geométrica, modelagem dinâmica, otimização de modelos.

A B S T R A C T

This work presents contributions aiming at time saving and model improvement in the generation of geometric and dynamic robot models. The main purpose is to enable the generation of models suited for use in the development of more efficient control strategies, so as to compensate effects that become undesirable when a better robot performance is required.

These are quite complex models and the manual derivation of them is tedious, costly (time-consuming) and often error-prone. So, it was implemented a system for automatic generation of symbolic geometric and dynamic robot models based in the Lagrange formulation and that also cares about model optimization.

It is also proposed an efficient algorithm for dynamic modelling, which automatically eliminates a great number of redundancies. This algorithm is presented in the implementation level.

Keywords: Robotics, geometric modelling, dynamic modelling, model optimization.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO GERAL.....	1
1.1. Histórico.....	2
1.2. Contexto e Objetivos.....	2
1.3. Aspectos Relevantes na Otimização de Modelos.....	3
1.4. Estrutura do Sistema para Geração Automática de Modelos.....	7
1.5. Apresentação do Trabalho.....	10
 CAPÍTULO 2 - GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE MODELOS GEOMÉTRICOS DIRETOS.....	12
2.1. Introdução.....	13
2.2. Modelo Geométrico Direto.....	17
2.2.1. Matrizes de Passagem Homogêneas.....	17
2.2.2. Regras para Alocação de Referenciais.....	18
2.2.3. Parâmetros de Denavit-Hartenberg (Parâmetros Geométricos)....	19
2.2.4. Matriz de Passagem Homogênea Elementar.....	20
2.3. Cálculo Simbólico de Modelos.....	23
2.4. Alternativas de Cálculo do Modelo Geométrico.....	26
2.5. Cálculo Automático do Modelo Geométrico Direto.....	29
2.6. Resultados Obtidos com o Gerador Automático de Modelos Geométricos Diretos.....	33
2.7. Conclusões.....	40
 CAPÍTULO 3 - GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE MODELOS DINÂMICOS DE ROBÔS MANIPULADO- RES VIA FORMALISMO DE LAGRANGE.....	42
3.1. Introdução.....	43
3.2. Parâmetros Dinâmicos (Matriz de Pseudo-Inércia).....	45
3.3. Análise Qualitativa dos Métodos Analíticos de Newton-Euler e Lagrange para Geração de Modelos Dinâmicos.....	46
3.3.1. Método Recursivo Simbólico de Newton-Euler.....	47
3.3.2. Método Não Recursivo Simbólico de Lagrange.....	52
3.4. Geração Automática de Modelos Dinâmicos de Robôs Manipuladores.....	56
3.5. Resultados Obtidos com o Gerador Automático de Modelos Dinâmicos....	58

3.6. Proposta de um Algoritmo Eficiente para Geração de Modelos Dinâmicos de Robôs Manipuladores.....	66
3.6.1. Cálculo dos Coeficientes a^{ij}	68
3.6.2. Cálculo dos Coeficientes b^{ijk}	77
3.6.3. Cálculo dos Coeficientes g_1	81
3.6.4. Aplicação do Algoritmo (Coeficientes a^{ij} do Robô Stanford)...	81
3.7. Conclusões.....	85
 CAPÍTULO 4 - CONCLUSÕES/PERSPECTIVAS.....	86
 BIBLIOGRAFIA.....	89
 APÊNDICE A1 - EQUAÇÕES AUXILIARES DO MODELO DINÂMICO DO ROBÔ PUMA 560.....	95
APÊNDICE A2 - INFORMAÇÕES RESULTANTES DOS PROGRAMAS PARA GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE MODELOS.....	109
APÊNDICE A3 - ALGUNS ELEMENTOS BÁSICOS DE CÁLCULO E SIMPLIFICAÇÕES DE MODELOS DINÂMICOS.....	114
APÊNDICE A4 - GERAÇÃO DE MODELOS E CONTROLE.....	120
APÊNDICE A5 - OTIMIZAÇÃO DO MODELO DINÂMICO VIA PARAMETRIZAÇÃO MÍNIMA E IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS.....	127

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO GERAL

1.1. HISTÓRICO

A motivação básica para este trabalho surgiu da observação de que as pessoas que trabalhavam na área de Robótica, perdiam muito tempo num estudo de caso, desenvolvendo à mão um modelo que em geral era incorreto e de pouca utilidade. Daí, constatou-se a necessidade de uma ferramenta que permitisse a um usuário gerar rapidamente e de modo confiável, os modelos de um robô qualquer, eliminando uma etapa extremamente árdua.

O espaço encontrado para o desenvolvimento de tal ferramenta foi o "Laboratório de Robótica e Automação Industrial" que seria oferecido na III EBAI (*Escola Brasileiro-Argentina de Informática*) dentro do PABI (*Programa Argentino-Brasileiro de Informática*).

Neste contexto, a Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, a Universidade Federal do Espírito Santo - UFES e o Centro Tecnológico para Informática - CTI, decidiram por uma participação conjunta no desenvolvimento de referidas ferramentas, ficando disponível para utilização neste Laboratório o sistema GMSIR - *Geração de Modelos e Simulação de Robôs*.

O nosso trabalho se insere no âmbito do desenvolvimento de métodos e ferramentas para a modelagem geométrica e dinâmica de robôs, tendo como passo inicial a implementação destes aspectos no GMSIR.

1.2. CONTEXTO E OBJETIVOS

Inicialmente foi previsto como objetivo a longo prazo deste trabalho, o desenvolvimento de uma ferramenta para geração automática ou assistida de modelos dinâmicos para identificação de parâmetros de robôs. Porém, no desenvolvimento das ferramentas básicas de geração de modelos geométricos e dinâmicos, constatou-se que por si só estas etapas constituem trabalhos de grande complexidade e completeza.

Esta complexidade deveu-se a uma série de fatores:

- 1) A análise dos métodos de geração de modelos disponíveis na literatura indicou uma série de possibilidades de melhoria, isto no que se refere à estrutura dos métodos e aos seus aspectos de implementação.

2) As soluções encontradas deveriam ser estruturadas de modo didático e versátil, para serem utilizadas por um usuário não especialista e para uma gama bem ampla de finalidades.

3) As soluções encontradas, por motivos óbvios, deveriam ser implementadas em máquinas de pequeno porte. Esta restrição obrigou-nos a investir na eficiência estrutural dos métodos e na eficiência da implementação.

A contribuição do nosso trabalho está no desenvolvimento de ferramentas de geração automática de modelos geométricos e dinâmicos em máquinas de pequeno porte, com alto grau de confiabilidade e "economia", para a utilização na formação de pessoal especializado e para o uso de pesquisadores em Robótica. Contribuímos também com a proposta de um novo algoritmo para a geração de modelos dinâmicos, baseado no formalismo de Lagrange, cujo nível de detalhamento considera os aspectos de uma implementação eficiente, tais como diminuição do número de linhas de código e a otimização da memória necessária aos dados, além de gerar equações finais pouco redundantes.

1.3. ASPECTOS RELEVANTES NA OTIMIZAÇÃO DE MODELOS

Estes aspectos serão considerados, tomando-se como base o cálculo simbólico de modelos. Esta forma de cálculo é responsável pela obtenção de expressões que modelam a geometria e o comportamento da dinâmica de robôs e que são fundamentais para a simulação e o desenvolvimento de sistemas eficientes de controle. As opções de cálculo simbólico são inúmeras, sendo que o objetivo perseguido é o de obter equações finais, que contenham um menor número de operações, com a finalidade de avaliá-las numericamente em uma aplicação de tempo real. Neste trabalho, a denominação *modelo ótimo* é feita em relação à minimização do número de operações para a avaliação do modelo.

Quando se trabalha na geração de modelos simbólicos manual ou automaticamente, devido a complexidade das expressões envolvidas, não podemos garantir de imediato que as expressões obtidas correspondem a um modelo ótimo. A seguir, descreveremos alguns aspectos que têm influência direta na complexidade e conseqüentemente na otimização dos modelos geométricos e dinâmicos.

- Aspectos da Modelagem Geométrica :

a) Alocação adequada de referenciais nos diversos corpos constituintes do robô

Para se situar um corpo em relação a outro é alocado um referencial a cada um deles, obtendo-se uma determinada relação entre tais referenciais, cuja complexidade depende da forma de alocação. No nosso trabalho, não contribuimos no sentido de pesquisar formas alternativas mais eficientes para a alocação de referenciais.

b) Escolha de Parâmetros

As formas de se parametrizar as relações entre referenciais são as mais diversas, estando intimamente ligadas com a alocação de referenciais. Normalmente estas parametrizações, para o caso da robótica, possuem um mínimo de quatro parâmetros, sendo a mais comum a criada por Denavit-Hartenberg [DENAVID 55]. No desenvolvimento do nosso trabalho, além da notação de Denavit-Hartenberg, utilizamos a apresentada em Craig [CRAIG 86A] ou Khalil [KHALIL 86]. Estas parametrizações serão vistas na seção 2.2.

c) Simplificações Trigonômicas a Priori

São simplificações que podem ser detectadas antes da geração do modelo, em função de paralelismo de eixos de rotação, correspondendo a termos do tipo $\text{Cos}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_p)$ e/ou $\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_p)$, onde p é o número de eixos paralelos de rotação. Estas concatenações reduzem significativamente o número de operações, por substituírem as expressões resultantes na modelagem inicial. A ferramenta de geração automática de modelos geométricos que apresentamos neste trabalho, executa estas simplificações com base nos parâmetros geométricos do robô, para a alocação de referenciais definida.

d) Escolha Adequada da Seqüência de Multiplicação de Matrizes Elementares

Veremos na seção 2.4 que o modelo geométrico direto é obtido como uma seqüência de multiplicações das matrizes elementares. Portanto, para um número n de matrizes elementares, existem $F(n)$ maneiras de se obter este produto, onde $F(n)$ é uma função recursiva, definida em [FERREIRA 90]:

$$F(n) = \sum_{i=1}^n f(n,i) \quad (1.1)$$

onde:

$$f(n,i) = \begin{cases} 1, & \text{para } i=1, \text{ ou} \\ f(n-1,i) + f(n,i-1) & \text{para } 2 \leq i \leq n-1 \text{ e } n > 2, \text{ ou} \\ 0, & \text{para } i=n. \end{cases}$$

É importante lembrar que numericamente todas estas formas são equivalentes, mas que no cálculo simbólico e para cada caso particular de estrutura cinemática, o número de operações pode ser substancialmente diferente.

Dentre tantas alternativas de se efetuar tal produto, implementamos neste trabalho somente duas. Uma que multiplica no sentido direto e outra no sentido inverso, que serão melhor explicadas no capítulo 2.

e) Uso de Equações Auxiliares

Chamamos de equação auxiliar à qualquer parte de uma equação que pode ser substituída por uma variável auxiliar, guardando resultados parciais, com o objetivo de usar esta variável em qualquer ponto da modelagem que apareça a mesma equação auxiliar. Por exemplo: Suponhamos que a equação auxiliar $a_1 * S_1$ seja substituída pela variável auxiliar D_1 . Todas as vezes que na geração do modelo aparecer esta mesma equação, ela será automaticamente substituída por D_1 . Este procedimento é recursivo permitindo que variáveis das equações auxiliares, possam ser variáveis auxiliares, como por exemplo $D_2 = D_1 * S_2$. A utilização desta técnica é fundamental na redução de operações. Incorporamos à ferramenta de geração automática de modelos o uso de equações auxiliares. Porém, esta ferramenta apresenta também ao usuário a opção de não usá-las, visando obter os termos explicitamente para uma possível análise.

f) Propriedade de Ortonormalidade das Colunas da Matriz de Rotação

Na seção 2.2 veremos que as matrizes de passagem homogêneas são compostas de uma matriz de rotação (TR) e um vetor de translação (TT). A matriz de rotação possui a propriedade de formar uma base ortonormal de

dimensão 3. Assim, podemos sempre gerar uma das três colunas desta matriz como um produto vetorial das outras duas. Se omitimos uma destas três colunas antes de escolhermos a seqüência de multiplicação das matrizes elementares e após efetuarmos o produto, gerarmos a terceira coluna como o produto vetorial, o modelo poderá ter um número diferente de operações, que em alguns casos é menor. Neste trabalho, oferecemos a opção de se gerar modelos geométricos automaticamente, levando em consideração esta propriedade, para a terceira coluna da matriz de passagem homogênea.

- Aspectos da Modelagem Dinâmica:

Para a obtenção do modelo dinâmico é necessário conhecer as matrizes de passagem entre os diversos corpos do robô, como será visto no capítulo 3. Por isto, é fundamental a redução de operações destas matrizes, através dos aspectos de modelagem geométrica apresentados anteriormente, com a finalidade de evitar a propagação de redundâncias de operações na modelagem dinâmica. Um modelo dinâmico pode ser otimizado considerando os seguintes aspectos:

a) Uso de Equações Auxiliares

As equações auxiliares, como na modelagem geométrica, podem ser usadas na modelagem dinâmica, independentemente do formalismo utilizado.

b) Eliminação de Redundâncias Diversas

Este item engloba a eliminação de redundâncias verificadas no desenvolvimento do algoritmo de modelagem dinâmica, onde alguns termos são equivalentes a termos mais simples anteriormente gerados, devido a possíveis simplificações trigonométricas, do tipo $\cos^2_i + \sin^2_i = 1$, e aritméticas que podem ter seu cálculo evitado. Este tipo de simplificação será vista na seção 3.6, onde propomos um algoritmo para a geração de modelos dinâmicos. Tais redundâncias aparecem nas equações finais do modelo, porém em menor número.

c) Parametrização Mínima

Esta questão é tratada com maiores detalhes no apêndice 5. Os parâmetros que intervêm no modelo dinâmico de um robô com n graus de liberdade são em número de $10.n$. Contudo, estes parâmetros não intervêm todos separadamente no modelo dinâmico; alguns se agrupam outros não interferem na dinâmica e outros têm valor desprezível. Neste último caso, a consideração deve ser feita analisando-se por simulação as dinâmicas correspondentes às tarefas para as quais o robô será utilizado. Assim sendo, podemos parametrizar o modelo de diversas maneiras, existindo uma parametrização mínima. Nos métodos de otimização de modelos disponíveis na literatura a existência de uma parametrização mínima não é em geral considerada explicitamente, contudo esta informação pode ser usada depois de gerado o modelo para reduzir ainda mais o número de operações.

1.4. ESTRUTURA DO SISTEMA PARA GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE MODELOS

Com o objetivo de se criar um sistema para cálculo automático de modelos otimizados e confiáveis, que pudesse ser utilizado de forma didática e versátil na formação de pessoal, mas que pudesse também ser utilizado por pesquisadores da área, além de ser mandatória a sua implementação em máquinas de pequeno porte, desenvolveu-se o Sistema Gerador de Modelos, concorrendo para tal o trabalho de diversos pesquisadores [FERREIRA 88], [SILVA 88], cuja estrutura básica é apresentada na Figura 1.1.

O sistema para geração de modelos é constituído funcionalmente dos seguintes módulos:

- Gerador Automático de Modelo Geométrico Direto;
- Gerador Automático de Modelo Dinâmico;
- Ferramenta de Auxílio à Obtenção do Modelo Geométrico Inverso.

A estrutura do sistema está implementada como mostra a Figura 1.1:

- Supervisão: coordena o uso da Inicialização e Modelagem.

- Inicialização: permite que sejam introduzidos parâmetros geométricos e dinâmicos de robôs ou manuseados os parâmetros que já tenham sido introduzidos anteriormente. As opções existentes na inicialização são: criar ou apagar um arquivo, modificar o seu conteúdo, visualizar o conteúdo de um arquivo ou o conteúdo do diretório de arquivos. No Apêndice 2 pode ser encontrado maiores detalhes sobre a inicialização.
- Modelagem: permite a geração de modelos geométrico direto e dinâmico em sua forma simbólica a partir dos parâmetros geométricos e dinâmicos do robô. Auxilia na obtenção do modelo geométrico inverso. As várias alternativas de modelagem geométrica relacionadas na Figura 1.1, serão oportunamente explicadas no Capítulo 2.

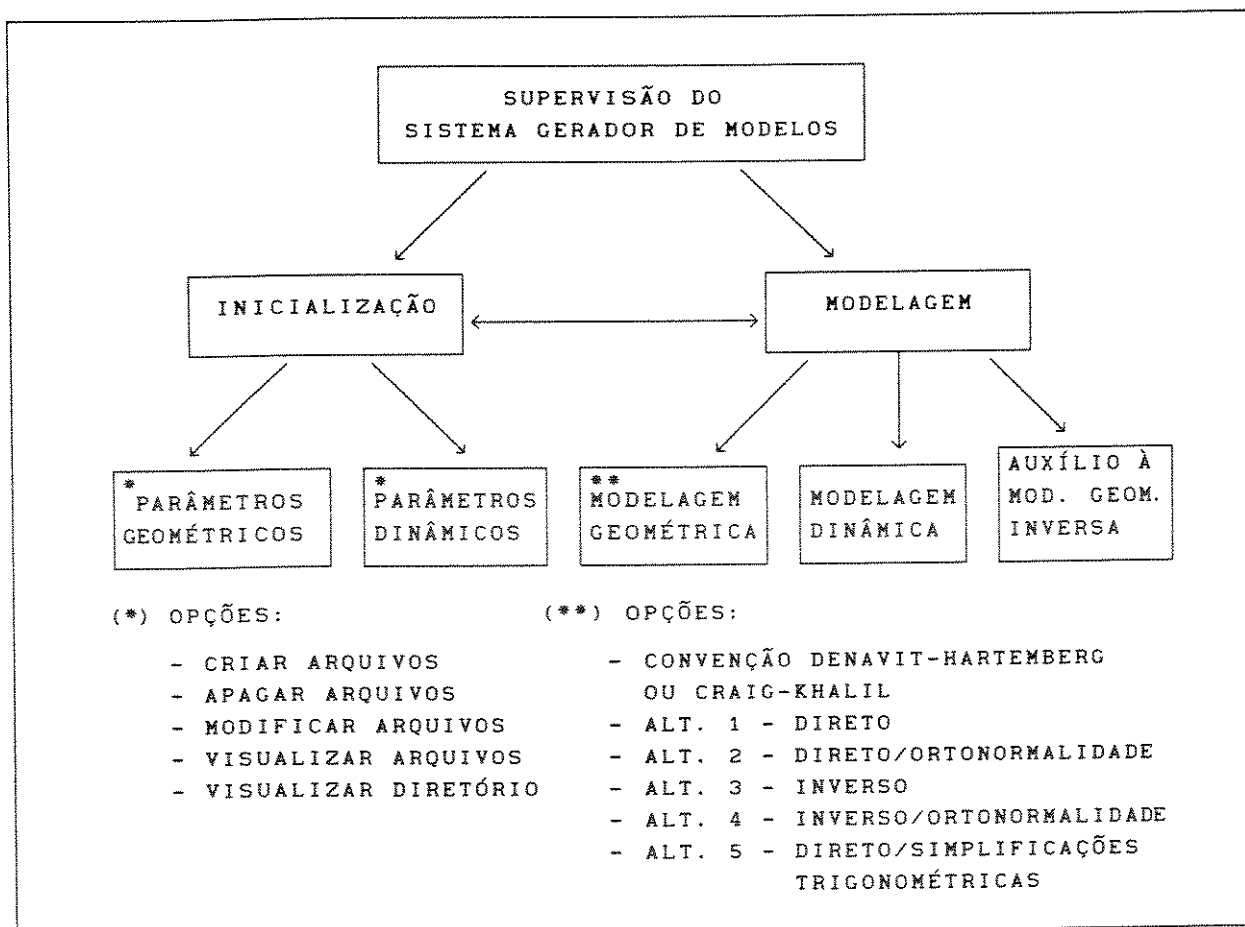


Figura 1.1 - Estrutura básica do Sistema Gerador de Modelos

Neste trabalho contemplamos a geração automática de modelos geométricos e modelos dinâmicos via formalismo de Lagrange, sendo que o auxílio à modelagem inversa é apresentada em [FERREIRA 90].

Relacionamos abaixo algumas características de implementação, além de alguns recursos deste sistema para modelagem de robôs, com estrutura cinemática simples e corpos rígidos:

- codificado em linguagem "C", o que facilita o tratamento com caracteres. Além disto, otimiza a memória utilizada através de recursos de alocação dinâmica de memória;
- foi originalmente desenvolvido em VAX e logo em seguida transplantado para PC, permitindo que seja utilizado indiferentemente da máquina, o que aumenta a sua portabilidade.
- funções básicas de tratamento de expressões simbólicas de: adição, subtração e multiplicação;
- funções básicas para tratamento de matrizes de: soma e multiplicação;
- possibilidade de tratamento de expressões simbólicas ou numéricas, o que permite a utilização de dados numéricos;
- opção de gerar as equações simbólicas na forma fatorada (uso de parênteses) ou na forma utilizando equações auxiliares;
- os resultados são apresentados em arquivos numa forma compilável em "C", de forma que possa ser lido diretamente de um outro programa (simulação por exemplo);
- padroniza as variáveis e os parâmetros introduzidos pelo usuário, de modo que as equações resultantes possam ser facilmente entendidas por outro usuário.

Na literatura, a eficiência dos métodos apresentados é comparada em função dos modelos gerados com o uso de equações auxiliares, evitando-se operações repetitivas. No sistema implementado, usando-se um PC-XT e

equações auxiliares, foram gerados modelos dinâmicos de robôs com até 8 graus de liberdade. Porém, se o usuário optar por gerar o modelo explicitando todos os seus elementos para a análise individual de algum parâmetro, o número de graus de liberdade é limitado em 3.

Muito embora, com o uso da linearidade do modelo dinâmico em relação aos parâmetros, que será mostrada no capítulo 3, podemos particionar a geração do modelo por corpo, ou por parâmetros dos corpos do robô e finalmente somar estes modelos usando o *Princípio da Superposição* [MEGAHED 81]. Neste caso, também não haveria restrições quanto ao número de graus de liberdade. Uma outra solução, que depende da disponibilidade do usuário, seria migrar para uma máquina com maior capacidade de memória.

1.5. APRESENTAÇÃO DO TRABALHO

No Capítulo 2 são apresentados os elementos e as técnicas utilizadas na modelagem geométrica. O nosso objetivo neste capítulo não foi o de esgotar a análise de todos estes elementos e técnicas disponíveis na literatura, mas sim de apresentar objetivamente os que cumprissem as seguintes finalidades:

- permitissem um entendimento fácil sobre a questão da geração simbólica e da otimização de modelos;
- constituíssem um elenco de técnicas que possibilitassem, dentro de uma ferramenta de geração automática, uma razoável gama de possibilidades aos usuários que se pretendia atingir (inicialmente alunos da EBAI);
- subsidiassem com eficiência e confiabilidade, as demandas nos aspectos geométricos, da geração de modelos dinâmicos.

Assim, dentre as várias opções de se gerar um modelo geométrico, implementamos uma ferramenta para a geração automática de modelos geométricos via 5 alternativas diferentes, aproveitando a propriedade de ortonormalidade das matrizes de rotação, o cálculo no sentido direto e inverso e simplificações trigonométricas.

O Capítulo 3 trata da geração de modelos dinâmicos via formalismo de Lagrange. A opção de utilizarmos tal formalismo para o desenvolvimento de uma ferramenta automática, esta baseada em uma análise qualitativa entre os dois principais que aparecem na literatura, Newton-Euler e Lagrange, para a geração de modelos dinâmicos. Propomos um algoritmo baseado no formalismo de Lagrange que reduz consideravelmente as redundâncias do modelo. Este algoritmo é apresentado em um nível de detalhamento próximo de sua implementação.

No Capítulo 4, fazemos algumas considerações globais e apresentamos algumas perspectivas de evolução.

Este trabalho é finalizado com 5 apêndices. No primeiro deles, damos as expressões do modelo dinâmico do robô Puma 560, obtidas automaticamente com equações auxiliares. O segundo Apêndice mostra os possíveis arquivos resultantes da geração automática, bem como as convenções adotadas. No Apêndice 3 apresentamos alguns elementos básicos à otimização e obtenção automática de modelos. Apesar de não ser o objetivo deste trabalho, apresentaremos no Apêndice 4 a título de ilustração ao uso de modelos, alguns esquemas de controle amplamente difundidos na literatura. No Apêndice 5 faremos uma breve discussão sobre a questão da parametrização mínima e a obtenção de modelos para identificação.

CAPÍTULO 2

GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE MODELOS GEOMÉTRICOS DIRETOS

2.1. INTRODUÇÃO

Um robô manipulador é um sistema articulado constituído de vários corpos (normalmente considerados rígidos) formando uma estrutura mecânica. Na terminação desta estrutura existe um corpo chamado órgão terminal que deve ser posicionado e orientado de acordo com a tarefa exigida. Os corpos são unidos através de uma ligação que permite uma mobilidade relativa entre eles.

É possível mecanicamente existir vários tipos de ligações entre dois corpos, com um ou mais graus de liberdade. No entanto, em robótica, normalmente é suficiente considerar somente dois tipos de ligação. Uma que permite somente um movimento de rotação entre eles, de forma que um gira em relação ao outro em torno de um eixo fixo, e outra que permite somente um movimento de translação, de modo que um deles se movimenta linearmente em relação ao outro. Usaremos a notação da Figura 2.1 para representar estes tipos de ligações.

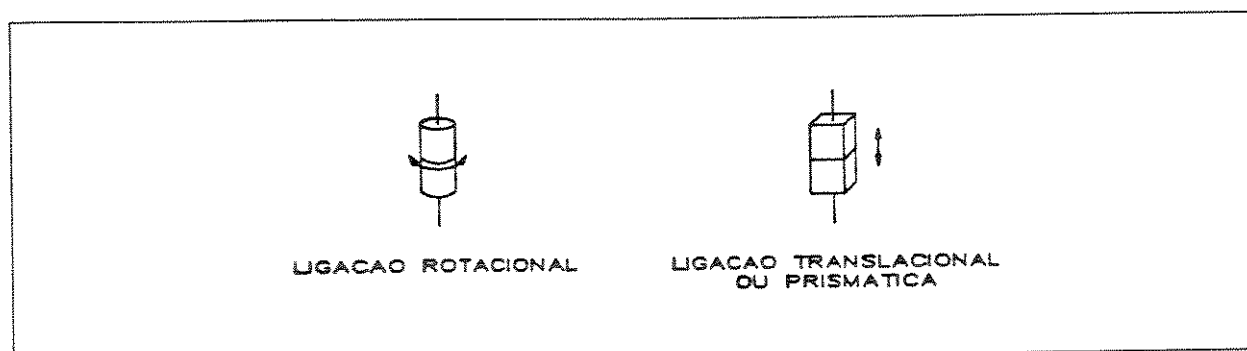


Figura 2.1 - Tipos de ligações

A estrutura mecânica ou cadeia cinemática de um robô manipulador é entendida neste contexto como um arranjo espacial dos corpos e dos eixos de movimento (ligações), composta de base, braço, punho e órgão terminal. A base de um robô pode ser fixa ou móvel (por exemplo, instalada sobre trilhos) dependendo da aplicação. O braço, normalmente constituído pelos primeiros corpos e ligações da estrutura, é utilizado para posicionar o órgão terminal. O punho, normalmente constituído pelos últimos corpos e ligações da estrutura, é utilizado para orientar o órgão terminal. O órgão terminal é formado pelo último corpo do robô acrescido de uma garra ou ferramenta, escolhida em função da aplicação.

Os corpos de um robô são ligados de modo a formar dois tipos básicos de estruturas cinemáticas: estrutura simples ou aberta onde são unidos progressivamente, sustentando um único órgão terminal. Esses corpos são numerados de C_0 a C_n e as ligações de L_1 a L_n (n representa o número de graus de liberdade do robô), seguindo a seqüência da base para o órgão terminal. Desta forma a ligação L_1 fica situada entre os corpos C_1 e C_{1-1} (Figura 2.2).

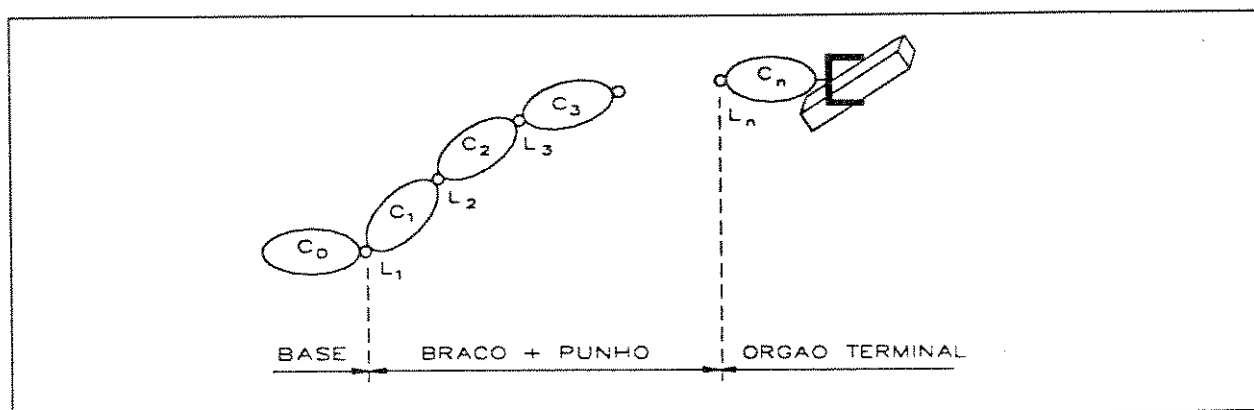


Figura 2.2 - Esquema de um robô de estrutura cinemática simples

O outro tipo é a estrutura cinemática complexa, caracterizada pelo aparecimento de laços mecânicos, podendo conter um ou mais órgãos terminais (Figura 2.3). O interesse despertado nesse tipo de estrutura para robôs, reside na sua rigidez, precisão e capacidade de carga. Um estudo detalhado da modelagem de tais estruturas é feito em [MEGAHED 84].

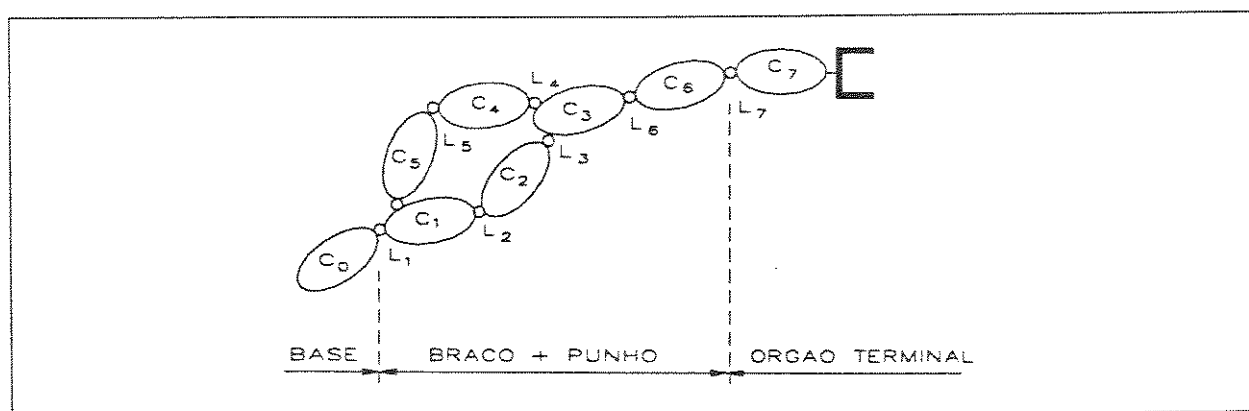


Figura 2.3 - Estrutura cinemática complexa com um órgão terminal (Robô HPR-HITACHI)

Para que um robô possa executar uma tarefa, ele deve ser capaz de posicionar e orientar seu órgão terminal no espaço onde atua, chamado *espaço operacional*. A *posição* do órgão terminal é definida como um vetor que liga a origem de um referencial fixo (normalmente ligado à base) à origem de um referencial móvel ligado ao centro do órgão terminal. Naturalmente, podemos caracterizar este vetor por coordenadas cartesianas, cilíndricas ou esféricas. A *orientação* corresponde a uma rotação espacial entre os eixos do referencial móvel ligado ao órgão terminal e os eixos correspondentes do referencial fixo ligado à base, considerando as origens destes referenciais coincidentes.

Existem diversas maneiras de se representar a *orientação*, sendo as mais comuns os *cosenos diretores* (caracterizado por nove elementos), *ângulos de Bryant* (caracterizado por três rotações sucessivas), e *Parâmetros de Euler* (caracterizado por três elementos). Estas e outras representações podem ser melhor entendidas em [GORLA 84] ou [KATHIB 80]. A *posição* conjuntamente com a *orientação* do robô definem a sua *situação*.

Podemos associar a cada ligação uma variável, que será um ângulo para ligações rotacionais ou uma distância para ligações translacionais. Definiremos um vetor q dessas variáveis, chamado de *vetor de coordenadas generalizadas*.

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (2.1)$$

Este vetor q de coordenadas generalizadas caracteriza a *configuração* do robô, definindo o seu *espaço de coordenadas generalizadas*.

A passagem do *espaço de coordenadas generalizadas* para o *espaço operacional* é feita através do que chamamos modelo geométrico direto. Mais especificamente, o modelo geométrico direto permite a obtenção sistemática da *situação* (*posição* e *orientação*), em função da sua *configuração* (vetor de coordenadas generalizadas).

Cada corpo do robô é representado sistematicamente por um referencial associado. Assim, cada dois referenciais consecutivos têm uma matriz de passagem homogênea associada, dita elementar. Essas matrizes de passagem elementares fornecem a base para o estabelecimento de todos os modelos de

robôs, tanto para representar a geometria e a cinemática, quanto a dinâmica.

Estudaremos neste capítulo somente os robôs com cadeia cinemática simples, considerando os corpos rígidos e unidos por ligações rotacionais ou translacionais. Este tipo representa a grande maioria dos robôs industriais existentes.

Analisaremos algumas alternativas de cálculo de modelos geométricos visando a redução do número de operações destes. Finalmente apresentaremos um sistema de geração automática de modelos geométricos diretos via 5 alternativas diferentes de geração. A primeira delas considera o produto das n matrizes elementares no sentido direto, a segunda implementa o produto no mesmo sentido, porém usando a propriedade de ortonormalidade das colunas da matriz de rotação. As terceira e quarta alternativas implementam o produto no sentido inverso, sendo que a quarta utiliza a propriedade de ortonormalidade. A quinta alternativa também é efetuada no sentido direto, porém são introduzidas simplificações trigonométricas.

No final do capítulo apresentaremos um exemplo de utilização do sistema de geração automática de modelos geométricos para o robô PUMA 560 da Unimation.

2.2. MODELO GEOMÉTRICO DIRETO

O modelo geométrico direto estabelece as relações entre o estado de cada ligação e a posição e a orientação do órgão terminal, em relação ao referencial normalmente fixado na base do robô.

O modelo geométrico direto é obtido através do produto de n matrizes, denominadas *matrizes de passagem homogêneas elementares*. Estas matrizes são responsáveis pela transformação entre dois referenciais consecutivos R_i e R_{i+1} , alocados respectivamente aos corpos C_i e C_{i+1} . A seguir damos o ferramental básico necessário à modelagem geométrica.

2.2.1. Matrizes de Passagem Homogêneas

São matrizes que executam conjuntamente uma transformação linear de rotação e uma transformação afim de translação.

A matriz de passagem homogênea TH de dimensão 4×4 entre dois referenciais pode ser definida da seguinte forma:

$$TH = \begin{vmatrix} TR & TT \\ P & E \end{vmatrix} \quad (2.2)$$

A matriz TR de dimensão (3×3) representa a transformação linear de rotação e a matriz TT de dimensão (3×1) representa a transformação afim de translação. Quanto ao vetor P e o elemento E , representam as transformações de perspectiva e escala respectivamente, que embora úteis para outras aplicações como no tratamento dos problemas de visão em robótica, não nos serão úteis na modelagem geométrica. Estas transformações são então substituídas por um vetor de perspectiva constituído de elementos nulos e um fator de escala unitário.

Consequentemente, neste trabalho, as matrizes de passagem homogêneas entre dois referenciais R_i e R_{i+1} serão considerados da forma:

$$T_{1,i+1} = \begin{vmatrix} \bar{n}_x & \bar{o}_x & \bar{a}_x & \bar{p}_x \\ \bar{n}_y & \bar{o}_y & \bar{a}_y & \bar{p}_y \\ \bar{n}_z & \bar{o}_z & \bar{a}_z & \bar{p}_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.3)$$

As componentes dos vetores $\bar{n}$, $\bar{o}$, $\bar{a}$ correspondem às projeções dos eixos x , y , z do referencial R_{i+1} nos eixos do referencial R_i . O vetor $\bar{p}$ representa a posição da origem do referencial R_{i+1} em relação ao referencial R_i .

2.2.2. Regras para Alocação de Referenciais

Para podermos descrever as relações de rotação e translação (situação relativa) entre os corpos da cadeia articulada, temos que associar um referencial a cada corpo. Este procedimento pode ser executado de várias maneiras, no entanto existem maneiras que conduzem a um modelo final mais simples, dentre estas nos pareceu adequado utilizar o método iterativo de Denavit-Hartenberg [DENAVID 55]. Este método determina que o referencial relativo ao qual são medidos os movimentos do corpo C_{i+1} é denominado R_i assim o referencial R_i deve estar ligado ao corpo C_i . Este referencial passa então a *substituir* o corpo e a *posição* e *orientação* deste passa a ser a *posição* e *orientação* representadas pelo referencial.

A principal vantagem desta forma de alocação de referenciais é reduzir o número de parâmetros geométricos para quatro ao invés de seis (vide Figura 2.4), implicando em matrizes de passagem homogêneas mais simples. Isto resulta em equações finais do modelo geométrico direto com menor número de operações que conseqüentemente facilita a obtenção de um modelo geométrico inverso analítico [FERREIRA 90] e diminui o número de operações do modelo dinâmico, como veremos no Capítulo 3.

O procedimento iterativo para alocação dos referenciais é o seguinte:

Estabelecer um sistema de coordenadas (x_0, y_0, z_0) para a base e em seguida alocar um sistema de coordenadas de índice i fixo ao corpo i e em relação ao qual se movimenta a ligação $i+1$, para cada um dos corpos da cadeia. Serão estabelecidas regras básicas e regras complementares para a alocação:

Regras Básicas:

- b1 - O eixo z_i deve coincidir com o eixo de movimento da ligação de índice $i+1$ e sua orientação é arbitrária.
- b2 - O eixo x_{i+1} deve ser normal ao eixo z_i .
- b3 - O eixo y_{i+1} deve completar o sistema ortonormal segundo a *regra da mão direita*.

Regras Complementares:

- c1 - Estabelecer a origem do sistema de coordenadas de índice i como sendo a intersecção do eixo z_{i+1} com o eixo z_i . Se os dois eixos forem coincidentes ou paralelos, deve-se escolher um perpendicular comum, levando-se em conta os aspectos de simetria e simplicidade.
- c2 - Escolher o eixo x_{i+1} coincidente com o produto vetorial $(z_i \times z_{i+1})$ ou na direção da normal comum, em caso de paralelismo dos eixos z_i e z_{i+1} . A orientação deve ser no sentido de z_i para z_{i+1} . Se os eixos z_i e z_{i+1} forem concorrentes ou coincidentes deve-se escolher a orientação levando-se em conta os aspectos de simetria e simplicidade.

2.2.3. Parâmetros de Denavit-Hartenberg (Parâmetros Geométricos)

Feita a alocação de referenciais aos n corpos do robô, segundo as regras do item anterior, estamos aptos a levantar os parâmetros de Denavit-Hartenberg (Figura 2.4). Estes parâmetros são em número de quatro para cada ligação, onde dois destes são parâmetros de rotação (ângulos) e os dois outros de translação (distâncias). Sempre um destes parâmetros será uma

variável (ângulo para juntas rotacionais e distância para juntas translacionais). O levantamento deve ser feito adotando-se a seguinte seqüência:

- i) girar o eixo z_i de um ângulo θ_i até alinhar x_i com x_{i+1} ;
- ii) transladar ao longo do eixo z_i a distância d_i até fazer x_i novo e x_{i+1} coincidentes;
- iii) transladar ao longo do eixo x_i novo a distância a_i até fazer as origens dos dois sistemas coincidentes;
- iv) girar o eixo x_i novo de um ângulo α_i até fazer os z_i e z_{i+1} coincidentes.

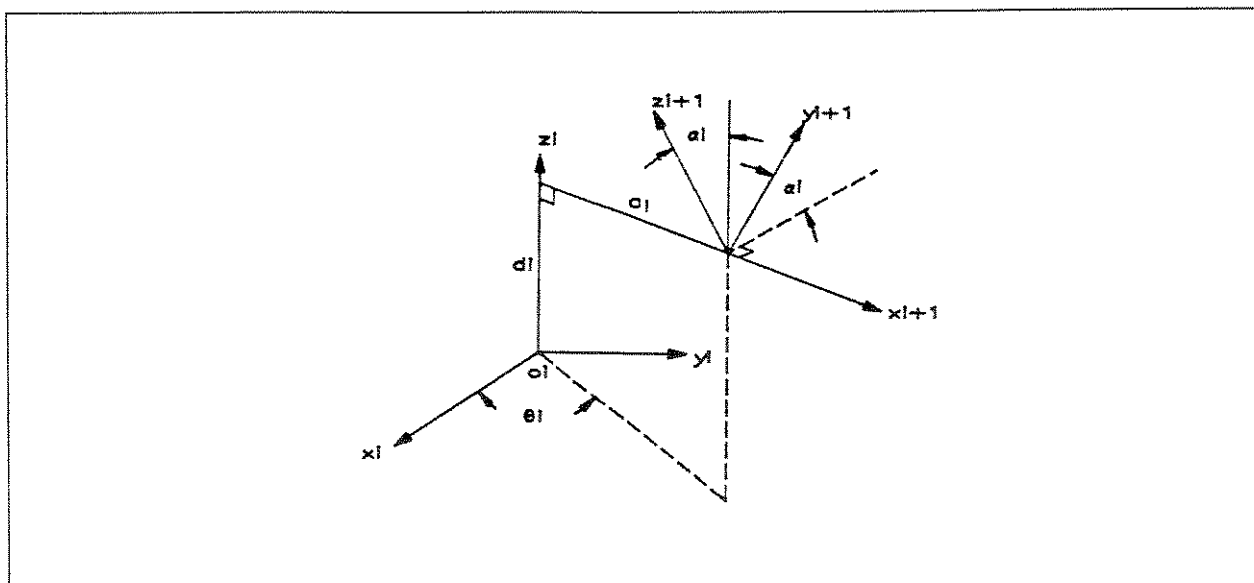


Figura 2.4 - Parâmetros de Denavit-Hartenberg

2.2.4. Matriz de Passagem Homogênea Elementar

Para os referenciais escolhidos de acordo com o processo iterativo anterior e em função da seqüência de definição dos parâmetros de Denavit-Hartenberg podemos definir uma matriz de passagem homogênea elementar entre os referenciais R_i e R_{i+1} , como um produto de transformações elementares de rotação e translação na seguinte ordem:

$$T_{i,i+1} = \text{ROT}(z_i, \theta_i) \text{TRANS}(0, 0, d_i) \text{TRANS}(a_i, 0, 0) \text{ROT}(x_i, \alpha_i) \quad (2.4)$$

Portanto, $T_{i,i+1}$ pode ser escrita como uma matriz com a forma geral:

$$T_{i,i+1} = \begin{vmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \cdot \cos\alpha_i & \sin\theta_i \cdot \sin\alpha_i & a_i \cdot \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \cdot \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \cdot \sin\alpha_i & a_i \cdot \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.5)$$

É importante notar que alguns autores como Craig [CRAIG 86A] e Khalil [KHALIL 86], chamam de uma *nova notação geométrica*, definindo a matriz $T_{i,i+1}$ um pouco diferente, em função uma outra alocação de referenciais e logicamente de uma sequência diferente de definição dos parâmetros geométricos. Abaixo relacionamos a sequência de definição dos parâmetros e a matriz de passagem homogênea elementar $T_{i,i+1}$ para esta notação:

- i) girar o eixo x_i de um ângulo α_i até alinhar z_i com z_{i+1} ;
- ii) transladar ao longo de x_i a distância a_i até fazer z_i novo e z_{i+1} coincidentes;
- iii) girar z_i novo de um ângulo θ_i até fazer x_i e x_{i+1} coincidentes;
- iv) transladar ao longo de z_i novo a distância de d_i até fazer as origens dos dois sistemas coincidentes.

Assim,

$$T_{i,i+1} = \text{ROT}(x_i, \alpha_i) \text{TRANS}(a_i, 0, 0) \text{ROT}(z_i, \theta_i) \text{TRANS}(0, 0, d_i) \quad (2.6)$$

E portanto, a forma geral de $T_{i,i+1}$ escrita nesta seqüência será:

$$T_{i,i+1} = \begin{array}{ccc|c} \cos\theta_1 & -\text{sen}\theta_1 & 0 & a_1 \\ \text{sen}\theta_1 \cos\alpha_1 & \cos\theta_1 \cos\alpha_1 & -\text{sen}\alpha_1 & -\text{sen}\alpha_1 d_1 \\ \text{sen}\theta_1 \text{sen}\alpha_1 & \cos\theta_1 \text{sen}\alpha_1 & \cos\alpha_1 & \cos\alpha_1 d_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad (2.7)$$

Esta notação apresenta em alguns casos a vantagem de se ter um menor número de operações nas equações finais do modelo geométrico direto.

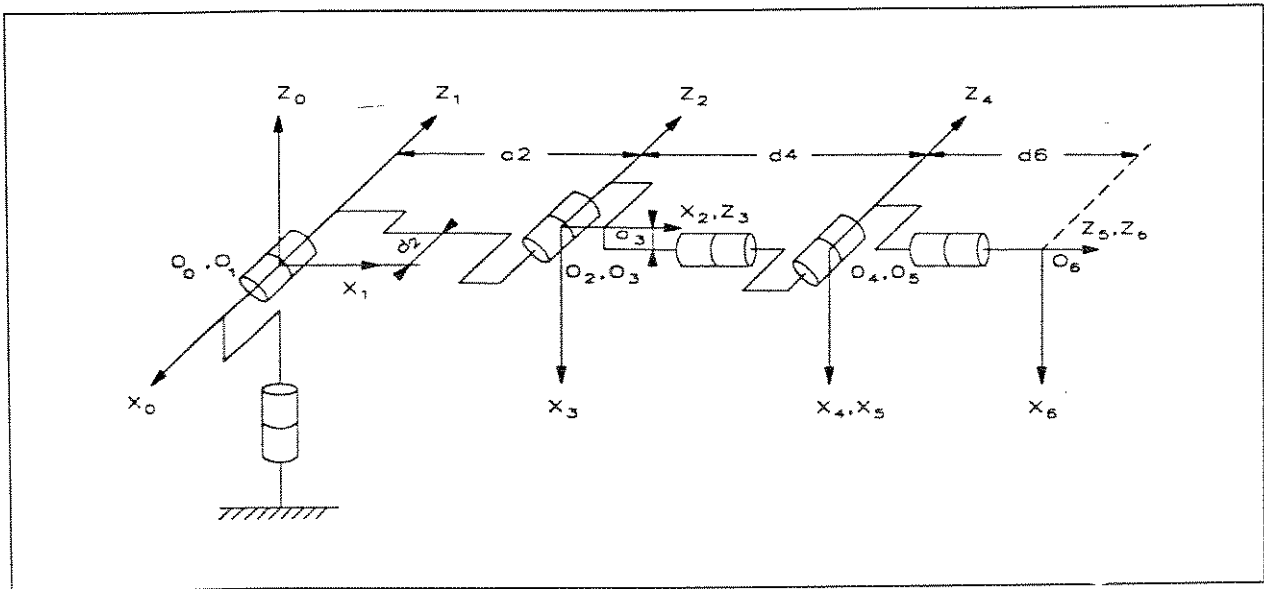


Figura 2.5 - Estrutura cinemática para o robô PUMA 560 com os referenciais alocados

Na Figura 2.5 temos um exemplo de utilização das regras de alocação de referenciais e definição dos parâmetros de Denavit- Hartenberg para o robô PUMA 560 (Unimation). A Tabela 2.1 mostra os parâmetros geométricos deste robô.

LIGAÇÃO	PARÂMETROS DENAVIT-HARTENBERG			
	θ_i	α_i	a_i	d_i
1	θ_1	-90	0	0
2	θ_2	0	a_2	d_2
3	θ_3	90	a_3	0
4	θ_4	-90	0	d_4
5	θ_5	90	0	0
6	θ_6	0	0	d_6

Tabela 2.1 - Parâmetros de Denavit-Hartenberg para o robô PUMA 560

2.3. CÁLCULO SIMBÓLICO DE MODELOS

Para ilustrar a utilização do cálculo simbólico, usaremos como exemplo o produto de três matrizes A B C de dimensão 2x2:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \quad (2.8)$$

O procedimento de cálculo simbólico consiste em calcular analiticamente uma matriz D, pelo produto ABC, em função dos elementos destas matrizes. A avaliação numérica da matriz D será feita posteriormente em função dos valores numéricos destes elementos. O resultado do cálculo simbólico pode ser apresentado em uma das três formas seguintes:

a) Forma Desenvolvida:

Consiste em exprimir diretamente o resultado em função dos dados literais, sem utilizar parênteses. Teremos:

$$\left. \begin{aligned} d_{11} &= a_{11} * b_{11} * c_{11} + a_{12} * b_{21} * c_{11} + a_{11} * b_{12} * c_{21} + a_{12} * b_{22} * c_{21} \\ d_{12} &= a_{11} * b_{11} * c_{12} + a_{12} * b_{21} * c_{12} + a_{11} * b_{12} * c_{22} + a_{12} * b_{22} * c_{22} \\ d_{21} &= a_{21} * b_{11} * c_{11} + a_{22} * b_{21} * c_{11} + a_{21} * b_{12} * c_{21} + a_{22} * b_{22} * c_{21} \\ d_{22} &= a_{21} * b_{11} * c_{12} + a_{22} * b_{21} * c_{12} + a_{21} * b_{12} * c_{22} + a_{22} * b_{22} * c_{22} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

É necessário avaliar 32 multiplicações, 12 adições e dispor de 4 posições de memória. As expressões são extremamente redundantes com longas cadeias de caracteres. A memória necessária é no entanto mínima (4 posições).

b) Forma Fatorada:

Consiste em utilizar parênteses para exprimir o resultado, explicitando alguns termos, por exemplo:

$$\left. \begin{aligned} d_{11} &= (a_{11} * b_{11} + a_{12} * b_{21}) * c_{11} + (a_{11} * b_{12} + a_{12} * b_{22}) * c_{21} \\ d_{12} &= (a_{11} * b_{11} + a_{12} * b_{21}) * c_{12} + (a_{11} * b_{12} + a_{12} * b_{22}) * c_{22} \\ d_{21} &= (a_{21} * b_{11} + a_{22} * b_{21}) * c_{11} + (a_{21} * b_{12} + a_{22} * b_{22}) * c_{21} \\ d_{22} &= (a_{21} * b_{11} + a_{22} * b_{21}) * c_{12} + (a_{21} * b_{12} + a_{22} * b_{22}) * c_{22} \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

É necessário avaliar 24 multiplicações, 12 adições e dispor de 4 posições de memória. As expressões são menos redundantes.

c) Forma Utilizando Equações Auxiliares:

Consiste em exprimir o resultado final em função de resultados parciais, de tal forma que cada nova expressão é guardada em uma variável auxiliar, como segue:

$$\left. \begin{aligned} E_{11} &= a_{11} * b_{11} + a_{12} * b_{21} \\ E_{12} &= a_{11} * b_{12} + a_{12} * b_{22} \\ E_{21} &= a_{21} * b_{11} + a_{22} * b_{21} \\ E_{22} &= a_{21} * b_{12} + a_{22} * b_{22} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Resultando em:

$$\left. \begin{aligned} d_{11} &= E_{11} * c_{11} + E_{12} * c_{21} \\ d_{12} &= E_{11} * c_{12} + E_{12} * c_{22} \\ d_{21} &= E_{21} * c_{11} + E_{22} * c_{21} \\ d_{22} &= E_{21} * c_{12} + E_{22} * c_{22} \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

É necessário avaliar 16 multiplicações, 8 adições e dispor de 8 posições de memória. Não existe redundância nas equações geradas, mas aumenta a quantidade de memória alocada.

Como visto, o uso de equações auxiliares racionaliza o número de operações necessárias à avaliação numérica do produto das matrizes A, B e C. Naturalmente estes resultados podem ser utilizados para o caso de matrizes de passagem homogêneas elementares (ordem 4), eliminando as redundâncias nos produtos destas matrizes.

2.4. ALTERNATIVAS DE CÁLCULO DO MODELO GEOMÉTRICO

Sabemos que com a utilização do cálculo simbólico, podemos ter alternativas para redução do número de operações devido às características das matrizes de passagem elementares. Temos também que o modelo geométrico é calculado através do produto das n matrizes de passagem elementares do robô, representando uma transformação do órgão terminal para a base do tipo:

$$T_{1,n+1} = \prod_{i=1}^n T_{i,i+1} \quad (2.13)$$

Nos resta então definir qual é a seqüência de multiplicação destas matrizes a uma matriz final $T_{1,n+1}$ com número de operações menor possível.

Da equação 1.1 verificamos que para um robô com 6 graus de liberdade existem 42 formas de se multiplicar estas n matrizes. Sabemos também que as três primeiras colunas da matriz de passagem homogênea representam vetores ortonormais, e que podemos então suprimir uma das colunas e em seguida gerá-la como um produto vetorial das outras duas. Combinando-se todas as formas de geração com a propriedade de ortonormalidade, teríamos uma gama muito grande de alternativas de geração do modelo geométrico direto. Dentre tantas alternativas, daremos uma maior importância a quatro delas, as quais foram implementadas como uma ferramenta de cálculo automático. Analisaremos uma quinta alternativa, também implementada, baseada em simplificações trigonométricas a partir do conhecimento dos parâmetros de Denavit-Hartenberg.

Alternativa 1 - Cálculo no Sentido Direto

Neste procedimento as matrizes $T_{i,i+1}$ são multiplicadas da esquerda para a direita, ou seja, os produtos são efetuados no sentido da base para o órgão terminal, como segue:

$$T_{1,n+1} = \left((T_{12} \cdot T_{23}) T_{34} \right) \dots T_{n,n+1} \quad (2.14)$$

Alternativa 2 - Cálculo no Sentido Direto com Ortonormalidade

Tomando-se a equação 2.14, suprime-se a terceira coluna da matriz T_{23} . Em seguida, efetua-se o produto $T_{12} \cdot T_{23}$. A matriz resultante terá a terceira coluna, obtida pelo produto vetorial das duas primeiras. A matriz T_{34} terá também a terceira coluna suprimida para efetuar o produto com o resultado de $T_{12} \cdot T_{23}$. Este procedimento deverá ser repetido até que a matriz $T_{1,n+1}$ tenha sido calculada.

Podemos notar que o produto das matrizes elementares é feito no sentido direto como na alternativa 1.

Alternativa 3 - Cálculo no Sentido Inverso

Neste procedimento as matrizes $T_{i,i+1}$ são multiplicadas da direita para a esquerda, ou seja, os produtos são efetuados no sentido do órgão terminal para a base, como segue:

$$T_{1,n+1} = T_{12} \left(T_{23} (T_{34} \dots (T_{n-1,n} T_{n,n+1}) \dots) \right) \quad (2.15)$$

Alternativa 4 - Cálculo no Sentido Inverso com Ortonormalidade

O uso da ortonormalidade neste sentido de cálculo é mais simples. Suprimindo-se a terceira coluna da matriz $T_{n,n+1}$ na equação 2.14 e efetuando-se o produto com $T_{n-1,n}$, obteremos uma matriz resultante sem a terceira coluna. Em seguida, efetua-se o produto desta matriz resultante com a matriz $T_{n-2,n-1}$. Novamente, a matriz resultante não conterá a terceira coluna. Repete-se o procedimento até o cálculo final de $T_{1,n+1}$.

Alternativa 5 - Simplificações trigonométricas a priori

Mostraremos como são tratadas as simplificações trigonométricas a priori no cálculo simbólico automático de modelos geométricos. Para tal, usaremos a matriz de passagem homogênea de Denavit-Hartenberg (2.5). Ilustraremos como são efetuadas estas simplificações, usando-se como exemplo o produto simbólico de duas matrizes de passagem homogêneas, correspondentes às ligações i e j respectivamente, com todos os parâmetros literais. Teremos então, uma matriz resultante com os seguintes termos:

$$\begin{aligned}
 t_{11} &= \text{Cose}_i \text{Cose}_j - \text{Sene}_i \text{Cosa}_i \text{Sene}_j \\
 t_{12} &= -\text{Cose}_i \text{Sene}_j \text{Cosa}_j + \text{Sene}_i \text{Cosa}_i \text{Cose}_j \text{Cosa}_j + \text{Sene}_i \text{Sen}\alpha_i \text{Sen}\alpha_j \\
 t_{13} &= \text{Cose}_i \text{Sene}_j \text{Sen}\alpha_j + \text{Sene}_i \text{Cosa}_i \text{Cose}_j \text{Sen}\alpha_j + \text{Sene}_i \text{Sen}\alpha_i \text{Cosa}_j \\
 t_{21} &= \text{Sene}_i \text{Cose}_j + \text{Cose}_i \text{Cosa}_i \text{Sene}_j \\
 t_{22} &= -\text{Sene}_i \text{Sene}_j \text{Cosa}_j + \text{Cose}_i \text{Cosa}_i \text{Cose}_j \text{Cosa}_j - \text{Cose}_i \text{Sen}\alpha_i \text{Sen}\alpha_j \\
 t_{23} &= \text{Sene}_i \text{Sene}_j \text{Sen}\alpha_j - \text{Cose}_i \text{Cosa}_i \text{Cose}_j \text{Sen}\alpha_j - \text{Cose}_i \text{Sen}\alpha_i \text{Cosa}_j \\
 t_{31} &= \text{Sen}\alpha_i \text{Sene}_j \\
 t_{32} &= \text{Sen}\alpha_i \text{Cose}_j \text{Cosa}_j + \text{Cosa}_i \text{Sen}\alpha_j \\
 t_{33} &= -\text{Sen}\alpha_i \text{Cose}_j \text{Sen}\alpha_j + \text{Cosa}_i \text{Cosa}_j \\
 t_{14} &= \text{Cose}_i \text{Cose}_j a_j - \text{Sene}_i \text{Cosa}_i \text{Sene}_j a_j + \text{Sene}_i \text{Sen}\alpha_i d_j + \text{Cose}_i a_i \\
 t_{24} &= \text{Sene}_i \text{Cose}_j a_j + \text{Cose}_i \text{Cosa}_i \text{Sene}_j a_j - \text{Cose}_i \text{Sen}\alpha_i d_j + \text{Sene}_i a_i \\
 t_{34} &= \text{Sen}\alpha_i \text{Sene}_j a_j + \text{Cosa}_i d_j + d_i
 \end{aligned}$$

(2.16)

Sabendo-se que algumas das identidades trigonométricas são dadas pelas equações abaixo:

$$\begin{aligned}
 \pm \text{Sen}(\theta_i \pm \theta_j) &= \pm (\text{Sene}_i \text{Cose}_j \pm \text{Sene}_j \text{Cose}_i) \\
 \pm \text{Cos}(\theta_i \pm \theta_j) &= \pm (\text{Cose}_i \text{Cose}_j \mp \text{Sene}_i \text{Sene}_j)
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

Não é difícil verificar que para valores de $\alpha_i = 0^\circ$ ou 180° os elementos da matriz de passagem representados em (2.16), apresentarão termos iguais ao lado direito das identidades trigonométricas dadas por (2.17). Assim, em função dos valores de α_i , já temos informações suficiente para saber em quais elementos e que tipo de simplificações trigonométricas ocorrerão. Estas simplificações aparecem devido ao paralelismo dos eixos de rotação do robô, como demonstra o parâmetro α_i .

Esta análise pode ser facilmente expandida para o caso em que apareçam mais de duas ligações paralelas. Logicamente nestes casos, o número de arcos que serão somados e/ou subtraídos nas identidades trigonométricas é equivalente ao número de ligações rotacionais paralelas. Implementamos este tipo de simplificação como alternativa 5 na ferramenta de geração automática de modelos, utilizando a opção de cálculo no sentido direto.

No cálculo automático, o que fazemos é descobrir quais são as ligações onde aparecerão estas simplificações em função dos parâmetros α_i . Em seguida, substituímos os parâmetros geométricos em expressões gerais dos elementos da matriz de passagem destas ligações. Tais expressões são obtidas como em 2.16, através do produto das n matrizes de passagem elementares correspondentes à ligações paralelas. Após a obtenção destes elementos, cujas expressões já estão contidas as simplificações, compomos a matriz de passagem e efetuamos o produto no sentido direto com as matrizes de passagem elementares restantes, correspondentes às ligações que apresentam paralelismo.

2.5. CÁLCULO AUTOMÁTICO DO MODELO GEOMÉTRICO DIRETO

As dificuldades de se implementar um sistema para geração automática de modelos está relacionada com a adequabilidade da linguagem ao tratamento simbólico, a eficiência computacional exigida do sistema e logicamente das técnicas a serem implementadas. Numa solução de compromisso, escolheu-se a linguagem "C", cujas características de médio nível a tornam altamente indicada ao tratamento com caracteres e a alocação eficiente de memória, fator de grande importância quando se trabalha com expressões simbólicas extensas. Entretanto, é necessário formar uma ampla biblioteca de funções básicas, o que é bastante custoso. Dentre tais, podemos destacar as mais importantes:

- Alocação dinâmica de memória

Existe uma função para alocação dinâmica, que permite utilizar uma quantidade mínima de memória, suficiente para alocar uma cadeia de caracteres, com base no seu tamanho. Esta área de memória é liberada por uma outra função, ao finalizar o processamento com a cadeia.

- Operações com cadeias de caracteres

São funções para somar, subtrair, multiplicar e duplicar cadeias de caracteres, simbolicamente. Estas funções tratam hibridamente a cadeia. Isto significa que números serão tratados como tal, efetuando-se as possíveis operações numéricas. São considerados os produtos e somas por "0" e produtos por "+1" ou "-1", devidamente. Isto pode parecer óbvio quando tratado numericamente, porém o cálculo simbólico requer um processo de identificação da ocorrência destas operações numéricas na cadeia de caracteres, o que não é trivial.

- Operações com matrizes

São funções de soma e produto simbólico de matrizes. Estas funções devolvem um apontador para a matriz resultante. Abaixo daremos maiores detalhes da estrutura de dados utilizada. Logicamente a soma e o produto de matrizes fazem uso das funções para operação com cadeias de caracteres.

- Manipulação com arquivos

As funções para tratamento de arquivos, são responsáveis pela abertura, fechamento, leitura e escrita nos mesmos. A cada robô corresponderá um conjunto de arquivos de modelos e de parâmetros, sendo que cada um destes arquivos terá uma extensão característica. Por exemplo: (.dh) - parâmetros geométricos, (.line) - parâmetros dinâmicos e etc. No Apêndice A2 são dadas maiores informações sobre as possíveis extensões.

- Manipulação com diretórios

Para facilitar a navegação pelos diversos arquivos, foi criado o conceito de diretórios, que catalogam arquivos de mesma extensão. Exemplificando, quando acessamos o diretório "sisdir.dh", identificamos todos os arquivos de parâmetros geométricos catalogados. Os problemas encontrados pelo sistema na manipulação dos arquivos ou diretórios são identificados e informados ao usuário, através de mensagens de erro.

- Equações auxiliares e contador de operações

Após cada operação com cadeias de caracteres, existe uma função geradora de equações auxiliares. Esta função recebe a cadeia de caracteres, transfere para uma outra área de memória e em seguida substitui a cadeia recebida, retornando uma variável indexada, cujo índice é incrementado a cada nova chamada. Esta função é habilitada pelo usuário a nível de "menu" quando opta por gerar ou não equações auxiliares. O número de operações é obtido através de uma varredura nas expressões.

- Estrutura de dados

Utilizamos como estrutura de dados básica, matrizes com um nível de indireção. Assim, cada elemento destas matrizes é um apontador para uma cadeia de caracteres, onde efetivamente está representada a expressão simbólica. Este tipo de estrutura apresenta uma grande flexibilidade de tratamento e a vantagem de se usar somente a memória necessária, através de alocação dinâmica para o tamanho exato da expressão. No módulo para geração de modelos dinâmicos, estas estruturas podem ser acessadas por um vetor de ponteiros, representando um nível a mais de indireção.

Em função das alternativas apresentadas na seção anterior e de posse de uma biblioteca básica de funções, implementamos uma ferramenta para cálculo automático de modelos geométricos, cujos resultados poderão estar disponíveis da seguinte forma:

- Matrizes de transformações elementares, construídas segundo a convenção de Denavit-Hartenberg [DENAVID 55] ou a modificada por [CRAIG 85].
- Matrizes de transformações intermediárias geradas durante o processo de obtenção do modelo geométrico. Estas matrizes relacionam o sistema de coordenadas da base com os sistemas de coordenadas associados a cada elemento da cadeia cinemática. Serão usadas posteriormente como dado de entrada para a modelagem dinâmica automática.

- Matriz de transformação homogênea que relaciona o sistema de coordenadas da base com o sistema de coordenadas do órgão terminal. Esta matriz corresponde ao Modelo Geométrico podendo ser expresso em Coordenadas Cartesianas ou Parâmetros de Euler.
- Permite que o usuário teste as 5 opções e escolha automaticamente a de menor número de operações ou qualquer delas individualmente.
- Todos os resultados podem ser obtidos com ou sem o uso de equações auxiliares. Embora do ponto de vista de otimização do modelo esta técnica deve ser sempre utilizada, para fins de visualização das expressões do modelo com objetivos didáticos, comparação com outras referências, geração de modelos inversos e etc, é possível obter as expressões simbólicas na sua forma expandida. Neste caso os termos são identificados com o uso de parênteses.
- Os resultados estarão disponíveis em forma compilável em "C" nos arquivos cuja forma está descrita no Apêndice A2.

2.6. RESULTADOS OBTIDOS COM O GERADOR AUTOMÁTICO DE MODELOS GEOMÉTRICOS DIRETO

A título de exemplo, mostramos a seguir os resultados obtidos com o Programa para Geração Automática de Modelos Geométricos para o robô PUMA 560. Os parâmetros introduzidos são os definidos pela convenção tradicional de Denavit-Hartenberg.

a) Dados Necessários:

puma.dh

Convencao D-H adotada : Tradicional

junta	tipo	teta	alfa	a	d
1	R	teta1	-90	+0.0	+0.0
2	R	teta2	+0.0	a2	d2
3	R	teta3	+90	a3	+0.0
4	R	teta4	-90	+0.0	d4
5	R	teta5	+90	+0.0	+0.0
6	R	teta6	+0.0	+0.0	d6

Tabela 2.2 - Parâmetros de Denavit-Hartenberg preenchidos com o Módulo de Inicialização

b) Resultados:

Matrizes de Passagem Homogêneas Elementares das 6 Ligações

- Matriz Elementar da Ligação 1:

+C1	+0.0	-S1	+0.0
+S1	+0.0	+C1	+0.0
+0.0	-1	+0.0	+0.0
+0.0	+0.0	+0.0	+1

- Matriz Elementar da Ligação 2:

+C2	-S2	+0.0	+a2*C2
+S2	+C2	+0.0	+a2*S2
+0.0	+0.0	+1	+d2
+0.0	+0.0	+0.0	+1

- Matriz Elementar da Ligação 3:

+C3	+0.0	+S3	+a3*C3
+S3	+0.0	-C3	+a3*S3
+0.0	+1	+0.0	+0.0
+0.0	+0.0	+0.0	+1

- Matriz Elementar da Ligação 4:

+C4	+0.0	-S4	+0.0
+S4	+0.0	+C4	+0.0
+0.0	-1	+0.0	+d4
+0.0	+0.0	+0.0	+1

- Matriz Elementar da Ligação 5:

+C5	+0.0	+S5	+0.0
+S5	+0.0	-C5	+0.0
+0.0	+1	+0.0	+0.0
+0.0	+0.0	+0.0	+1

- Matriz Elementar da Ligação 6:

+C6	-S6	+0.0	+0.0
+S6	+C6	+0.0	+0.0
+0.0	+0.0	+1	+d6
+0.0	+0.0	+0.0	+1

- Tabela gerada pelo sistema com os números de operações para as 5 alternativas implementadas, utilizando equações auxiliares:

Avaliacao automatica para o robo puma						

metodo	+	-	*	total oper.	sin_cos	

1	25	11	70	106	12	

2	23	13	71	107	12	

3	20	14	70	104	12	

4	19	12	62	93	12	

5	21	7	53	81	14	

***** Selecionada opcao de numero 5

Tabela 2.3 - Número de operações versus alternativa utilizada para o Robô Puma 560

- Expressões finais do modelo geométrico direto do Puma 560, obtidas automaticamente através da alternativa 5, utilizando equações auxiliares e representado em coordenadas cartesianas:

```

*****
      Modelo Geometrico Direto
representado em coordenadas cartesianas
*****

+D[29]    +D[30]    +D[24]    +D[31]

+D[32]    +D[33]    +D[26]    +D[34]

+D[35]    +D[36]    +D[28]    +D[37]

+0.0      +0.0      +0.0      +1

```

- Equações Auxiliares resultantes:

```
D[1] = a2*C2;  
D[2] = a2*S2;  
D[3] = C1*D[1]-S1*d2;  
D[4] = S1*D[1]+C1*d2;  
D[5] = 0;  
D[6] = 0;  
D[7] = C1*C23;  
D[8] = S1*C23;  
D[9] = C1*S23;  
D[10] = a3*D[7]+D[3];  
D[11] = S1*S23;  
D[12] = a3*D[8]+D[4];  
D[13] = -a3*S23-D[2];  
D[14] = D[7]*C4-S1*S4;  
D[15] = -D[7]*S4-S1*C4;  
D[16] = D[9]*d4+D[10];  
D[17] = D[8]*C4+C1*S4;  
D[18] = -D[8]*S4+C1*C4;  
D[19] = D[11]*d4+D[12];  
D[20] = -S23*C4;  
D[21] = S23*S4;  
D[22] = C23*d4+D[13];  
D[23] = D[14]*C5-D[9]*S5;  
D[24] = D[14]*S5+D[9]*C5;  
D[25] = D[17]*C5-D[11]*S5;  
D[26] = D[17]*S5+D[11]*C5;  
D[27] = D[20]*C5-C23*S5;  
D[28] = D[20]*S5+C23*C5;  
D[29] = D[23]*C6+D[15]*S6;  
D[30] = -D[23]*S6+D[15]*C6;  
D[31] = D[24]*d6+D[16];  
D[32] = D[25]*C6+D[18]*S6;  
D[33] = -D[25]*S6+D[18]*C6;  
D[34] = D[26]*d6+D[19];  
D[35] = D[27]*C6+D[21]*S6;  
D[36] = -D[27]*S6+D[21]*C6;  
D[37] = D[28]*d6+D[22];
```

- Mensagem Final do Sistema:

```
*****
Avaliacao numerica do Modelo Geometrico Direto
opcao : 5
*****
```

Sera necessario realizar :

1- Para avaliacao da Matriz de Transformacao Homogenea :

```
21 somas
7 subtracoes
53 multiplicacoes
```

total de operacoes = 81

Alem disso sera necessario avaliar 14 senos e/ou cossenos
e o numero de equacoes eh : 49

Observa-se na tabela 2.3, para as alternativas 1 e 5, que existe uma diminuição substancial do número de operações (105 contra 81), quando ocorrem simplificações trigonométricas. Como vimos, estas duas alternativas efetuam o produto na mesma ordem, porém na alternativa 5 são feitas simplificações trigonométricas.

- Equações finais do modelo geométrico do Puma 560, obtidas automaticamente através da alternativa 5, sem o uso de equações auxiliares:

```
t1n[0][0]= (+(+(+C1*C23*C4-S1*S4)*C5-C1*S23*S5)*C6+
            +(-C1*C23*S4-S1*C4)*S6);
t1n[0][1]= (-(+(+C1*C23*C4-S1*S4)*C5-C1*S23*S5)*S6+
            +(-C1*C23*S4-S1*C4)*C6);
t1n[0][2]= (+(+C1*C23*C4-S1*S4)*S5+C1*S23*C5);
t1n[0][3]= (+(+(+C1*C23*C4-S1*S4)*S5+C1*S23*C5)*d6+
            +(+C1*S23*d4+(+a3*C1*C23+(+C1*a2*C2-S1*d2)))));
t1n[1][0]= (+(+(+S1*C23*C4+C1*S4)*C5-S1*S23*S5)*C6+
            +(-S1*C23*S4+C1*C4)*S6);
t1n[1][1]= (-(+(+S1*C23*C4+C1*S4)*C5-S1*S23*S5)*S6+
            +(-S1*C23*S4+C1*C4)*C6);
```

```

t1n[1][2]= ((+S1*C23*C4+C1*S4)*S5+S1*S23*C5);
t1n[1][3]= ((+((+S1*C23*C4+C1*S4)*S5+S1*S23*C5)*d6+
              (+S1*S23*d4+(+a3*S1*C23+(+S1*a2*C2+C1*d2)))));

t1n[2][0]= ((-S23*C4*C5-C23*S5)*C6+S23*S4*S6);
t1n[2][1]= ((-(-S23*C4*C5-C23*S5)*S6+S23*S4*C6);
t1n[2][2]= (-S23*C4*S5+C23*C5);
t1n[2][3]= ((-(-S23*C4*S5+C23*C5)*d6+(+C23*d4+
              +(-a3*S23-a2*S2)))));

```

- Mensagem final do sistema:

```

*****
      Avaliacao numerica do Modelo Geometrico Direto
              opcao : 5
*****

```

Sera necessario realizar :

1- Para avaliacao da Matriz de Transformacao Homogenea :

```

      28  somas
      14  subtracoes
     106  multiplicacoes

```

total de operacoes = 148

Alem disso sera necessario avaliar 14 senos e/ou cossenos

NOTA : $\left. \begin{array}{l} C_i \text{ significa } \cos \theta_i \\ S_i \text{ significa } \sin \theta_i \end{array} \right\} i = 1, \dots, 6$

```

C23  significa  cos(θ2+θ3)
S23  significa  sen(θ2+θ3)

```

Podemos observar que para o mesmo robô e utilizando a mesma alternativa de cálculo (alternativa 5), o número de operações envolvidas (81 operações) é significativamente menor com o uso de equações auxiliares que ao contrário (148 operações).

Para ilustrar a geração automática de modelos geométricos através das 5 alternativas implementadas e a grande variação do número de operações em função da alternativa e do uso de equações auxiliares, formamos uma tabela com dados obtidos do sistema, tomando como dados de entrada os parâmetros de Denavit-Hartenberg do robô Puma 560.

ALTERN.	VAR. AUX.	NÚMERO DE OPERAÇÕES				
D-H	s/n	*	+	-	TOTAL	SEN/COS
1	s	70	25	11	106	12
1	n	205	40	37	282	12
2	s	71	23	13	107	12
2	n	1299	306	175	1780	12
3	s	70	20	14	104	12
3	n	131	41	36	208	12
4	s	62	19	12	93	12
4	n	253	66	79	253	12
5	s	53	21	07	81	14
5	n	106	28	14	148	14

Tabela 2.4 - Número de operações versus Alternativa Implementada

2.7. CONCLUSÕES

Apresentamos neste capítulo algumas considerações sobre a modelagem geométrica direta de robôs manipuladores com estrutura cinemática simples, corpos rígidos e ligações rotacionais ou translacionais. Vimos que com o cálculo simbólico, podemos obter uma maior ou menor eficiência nas expressões finais do modelo geométrico, em decorrência da alternativa utilizada para sua obtenção. Foi mostrado também que o uso de equações auxiliares reduz significativamente o número de operações e que nos casos onde existem simplificações trigonométricas, este número pode ser reduzido ainda mais.

Foram implementadas 5 alternativas de geração do modelo geométrico direto. Para um caso particular, não podemos garantir, a priori, qual delas é a mais eficaz. A otimização do número de operações do modelo geométrico direto é importante, para permitir a utilização das expressões deste modelo em tempo real, em determinadas estratégias de controle. É igualmente útil no processo de geração do modelo dinâmico, cujos detalhes serão vistos no capítulo seguinte.

CAPÍTULO 3

GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE MODELOS DINÂMICOS DE ROBÔS MANIPULADORES VIA FORMALISMO DE LAGRANGE

3.1. INTRODUÇÃO

Para que o robô se movimente e execute a tarefa desejada, é necessário que cada ligação seja acionada por um atuador (motor elétrico, hidráulico, etc.) [SNYDER 85]. Os atuadores são especificados em função das características das tarefas e do ambiente onde o robô irá trabalhar, sendo responsáveis pelos movimentos básicos deste.

Durante a execução de uma tarefa, sinais de referência são enviados aos atuadores do robô. A composição dos movimentos dos atuadores formam um movimento global de tal forma que o órgão terminal siga uma trajetória especificada. Ao movimentar-se aparecem nos atuadores efeitos dinâmicos de reação devido aos acoplamentos de inércia, forças de Coriolis e centrífuga e carga gravitacional entre os corpos constituintes do robô, que podem ser representados por um modelo dinâmico. Este modelo consiste num sistema de equações não lineares de segunda ordem representativa das forças generalizadas (torque para o caso de ligações rotacionais e forças para o caso de ligações translacionais) que devem ser aplicadas às diversas ligações pelos respectivos atuadores. Os efeitos dinâmicos são mais significativos quanto maior forem as magnitudes das velocidades e acelerações de cada ligação ou quanto menor forem as relações de redução de cada ligação (por exemplo, no acionamento direto "direct drive", onde a relação de redução é igual a 1). O modelo dinâmico exprime as relações entre as forças generalizadas e as coordenadas (q), velocidades ($\dot{q}$) e acelerações generalizadas ($\ddot{q}$) como abaixo:

$$\Gamma = \Gamma(q, \dot{q}, \ddot{q}) \quad (3.1)$$

A modelagem dinâmica de um robô manipulador está relacionada basicamente a dois objetivos:

- a) simulação dos efeitos dinâmicos do manipulador quando sujeito a velocidades e acelerações ou a simulação do comportamento da cadeia cinemática do manipulador, quando sujeito às ações dos atuadores sobre as ligações (vetor de forças generalizadas).

b) O outro objetivo de extrema importância, quando a influência das perturbações dinâmicas torna-se significativa, é o controle dinâmico do manipulador. Dado uma trajetória (vetores de posições, velocidades e acelerações generalizadas), calcula-se os torques ou forças generalizadas que os atuadores devem imprimir às ligações de modo a segui-la. Estes valores calculados, finalmente serão utilizados em uma estratégia de controle dinâmico, para compensar tais perturbações.

Chamamos a atenção para um problema que precede à simulação e à síntese do controle dinâmico, que é a identificação dos parâmetros geométricos e dinâmicos. A identificação dos parâmetros geométricos pode ser feita através de medidas diretamente sobre os corpos do robô, ou obtidos por qualquer outra técnica adequada. A identificação dos parâmetros dinâmicos, normalmente é feita utilizando-se técnicas de estimação "off-line", no entanto em alguns casos, é necessária a utilização de técnicas de estimação "on-line" dos parâmetros do órgão terminal, devido à sua variação de carga. Quando se utiliza uma estratégia de controle dinâmico e/ou identificação de parâmetros "on-line", é necessário um modelo dinâmico com um grau de redundâncias menor possível de tal forma que as equações dinâmicas possam ser avaliadas em tempo real durante a operação do robô. Estas questões, apesar de não serem o objetivo do trabalho, serão vistas com mais detalhes nos Apêndices A4 e A5.

Apresentamos neste capítulo um Sistema para Geração Automática de Modelos Dinâmicos de robôs com estrutura cinemática simples e corpos rígidos, baseado no formalismo de Lagrange, onde o número de redundâncias de operações é otimizado significativamente pelo uso de equações auxiliares. Utilizamos este sistema para obter as equações dinâmicas do robô PUMA 560 com equações auxiliares. Obtivemos automaticamente o termo de inércia própria da primeira ligação do robô STANFORD com 3 graus de liberdade, sem o uso de equações auxiliares, para ilustrar as redundâncias que podem ser eliminadas posteriormente, de forma manual.

Propomos um novo algoritmo baseado no formalismo de Lagrange, onde uma grande parte das redundâncias inerentes ao método, são eliminadas durante o processo de geração do modelo. Este algoritmo foi desenvolvido levando-se em consideração, além da questão das redundâncias, os aspectos de

implementação, tais como: otimização de memória e reusabilidade de funções. É apresentado praticamente ao nível de detalhamento da implementação.

3.2. PARÂMETROS DINÂMICOS (MATRIZ DE PSEUDO-INÉRCIA)[PAUL 81]

Para podermos estudar a dinâmica de um corpo C_i , é necessário conhecer os parâmetros dinâmicos que formam a matriz de Pseudo-Inércia deste corpo. Esta matriz definida em relação ao referencial R_i , alocado ao corpo, é simétrica, cujos elementos são mostrados abaixo:

$$J_i = \begin{vmatrix} I_i & XY_i & XZ_i & X_i \\ XY_i & J_i & YZ_i & Y_i \\ XZ_i & YZ_i & K_i & Z_i \\ X_i & Y_i & Z_i & M_i \end{vmatrix} \quad (3.2)$$

Estes 10 parâmetros são definidos como:

$$\left. \begin{aligned} I_i &= 1/2 (-I_{xxi} + I_{yyi} + I_{zz}) \\ J_i &= 1/2 (I_{xxi} - I_{yyi} + I_{zz}) \\ K_i &= 1/2 (I_{xxi} + I_{yyi} - I_{zz}) \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

onde:

I_{xxi} - momento principal de inércia do corpo C_i em relação ao eixo x do referencial R_i ;

I_{yyi} - momento principal de inércia do corpo C_i em relação ao eixo y do referencial R_i ;

I_{zzi} - momento principal de inércia do corpo C_i em relação ao eixo z do referencial R_i ;

XY_i , XZ_i e YZ_i - produtos de inércia do corpo C_i em relação ao referencial R_i .

Momentos de primeira ordem do corpo C_i em relação ao referencial R_i :

$$\left. \begin{aligned} X_i &= M_i \bar{x}_i \\ Y_i &= M_i \bar{y}_i \\ Z_i &= M_i \bar{z}_i \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

onde:

M_i = massa do corpo C_i ;

$\bar{r}_i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ - coordenadas do centro de massa do corpo C_i em relação ao referencial R_i .

As formas de se obter estes parâmetros são discutidas rapidamente no Apêndice A5.

3.3. ANÁLISE QUALITATIVA DOS MÉTODOS ANALÍTICOS DE NEWTON-EULER E LAGRANGE PARA GERAÇÃO DE MODELOS DINÂMICOS

O modelo dinâmico de robôs manipuladores foi objeto de vários estudos podendo ser obtido via diversos formalismos. Dentre eles podemos destacar Lagrange, Newton-Euler, Gibbs Appell e Princípio do Trabalho Virtual de D'Alembert. Uma síntese bibliográfica exaustiva destes métodos é feita em [RENAUD 75] e [RENAUD 80].

O cálculo das forças generalizadas pode ser efetuado através de procedimento recursivo de cálculo numérico ou procedimento de cálculo simbólico (recursivo ou não). No procedimento recursivo de cálculo numérico as forças generalizadas podem ser obtidas pelo formalismo de Newton-Euler [LUH 80] ou pelo formalismo de Lagrange [HOLLERBACH 80] e [SILVER 82]. No procedimento simbólico, as forças generalizadas também podem ser calculadas

por Newton-Euler [KHOSLA 86] e [CRAIG 86] ou por Lagrange [MEGAHED 84] [PAUL 81]. Ao contrário do cálculo numérico, o cálculo simbólico envolve métodos não recursivos [MEGAHED 84] [SILVA 89] e métodos recursivos [RENAUD 83] [KHOSLA 86].

Neste trabalho faremos uma análise qualitativa dos métodos recursivo simbólico de Newton-Euler e não recursivo simbólico de Lagrange, os quais são os mais utilizados atualmente.

3.3.1. Método Recursivo Simbólico de Newton-Euler

Este método é baseado na aplicação das Leis da Mecânica a cada corpo do robô. A primeira delas é aplicada à sistemas de translação, sendo que o somatório das forças que atuam em um corpo é igual à variação da sua quantidade de movimento. A segunda lei é uma extensão da primeira, aplicada à sistemas de rotação. Consiste de dois conjuntos de recursões: recursões progressivas, onde as velocidades e acelerações são calculadas no sentido da base para o órgão terminal ($i = 0, \dots, n-1$) e recursões regressivas, onde os torques e forças são calculados no sentido do órgão terminal para a base ($i = n, \dots, 1$). As equações referentes a este método são mostradas abaixo [KHOSLA 86]:

- Recursões Progressivas ($i = 0, \dots, n-1$)

$$w_{i+1} = \left\{ \begin{array}{ll} A_{i+1}^T [w_i + Z_o \dot{\Theta}_{i+1}] & - \text{ligações rotacionais} \\ \text{ou:} & \\ A_{i+1}^T w_i & - \text{ligações translacionais} \end{array} \right\} \quad (3.5)$$

$$\dot{w}_{i+1} = \left\{ \begin{array}{l} A_{i+1}^T [\dot{w}_i + Z_0 \dot{\theta}_{i+1} + w_i \times (Z_0 \ddot{\theta}_{i+1})] - \text{ligações rotacionais} \\ \text{ou:} \\ A_{i+1}^T \dot{w}_i - \text{ligações translacionais} \end{array} \right\} \quad (3.6)$$

$$v_{i+1} = A_{i+1}^T [v_i] + w_{i+1} \times P_{i+1} \quad (3.7)$$

$$\dot{v}_{i+1} = \left\{ \begin{array}{l} A_{i+1}^T \dot{v}_i + w_{i+1} \times P_{i+1} + w_{i+1} \times P_{i+1} - \text{ligações rotacionais} \\ \text{ou:} \\ A_{i+1}^T [\dot{v}_i + Z_0 \ddot{d}_{i+1} + 2w_i \times (Z_0 \dot{d}_{i+1})] + \dot{w}_{i+1} \times P_{i+1} + w_{i+1} \times (w_{i+1} \times P_{i+1}) - \text{ligações translacionais} \end{array} \right\} \quad (3.8)$$

Condições iniciais:

$$w_0 = \dot{w}_0 = v_0 = 0 \quad (3.9)$$

$$\dot{v}_0 = [g_x \ g_y \ g_z]^T \quad (3.10)$$

Neste método os efeitos da gravidade são levados em consideração, adotando-se uma aceleração linear da base igual em módulo e contrária a aceleração da gravidade, como na equação (3.10).

$$\dot{v}_i^* = \dot{w}_i \times s_i + w_i \times (w_i \times s_i) + \dot{v}_i \quad (3.11)$$

$$F_i = m_i \dot{v}_i^* \quad (3.12)$$

$$N_i = I_i \dot{w}_i + w_i \times (I_i w_i) \quad (3.13)$$

- Recursões Regressivas ($i = N; \dots; 1$)

$$f_i = A_{i+1} f_{i+1} + F_i \quad (3.14)$$

$$n_i = A_{i+1} n_{i+1} + P_i \times f_i + N_i + S_i \times F_i \quad (3.15)$$

$$\Gamma_i = \begin{cases} n_i^T (A_i^T z_0) & - \text{ligações rotacionais} \\ \text{ou:} \\ f_i^T (A_i^T z_0) & - \text{ligações translacionais} \end{cases} \quad (3.16)$$

A nomenclatura adotada:

w_i e $\dot{w}_i$ - velocidade e aceleração angular do i -ésimo sistema de coordenadas (alocado ao corpo C_i);

v_i e $\dot{v}_i$ - velocidade e aceleração linear do i -ésimo sistema de coordenadas;

v_i^* e $\dot{v}_i^*$ - velocidade e aceleração linear do centro de gravidade do corpo C_i ;

F_i e N_i - força e torque exercidos no corpo C_i ;

f_i e n_i - força e torque que o corpo C_{i-1} exerce no corpo C_i ;

P_i - posição do i -ésimo sistema de coordenadas com relação ao sistema de coordenadas $i-1$;

A_i - orientação do i -ésimo sistema de coordenadas com relação ao sistema de coordenadas $i-1$;

S_i - posição do centro de gravidade do corpo C_i , $S_i = [\bar{x}_i \ \bar{y}_i \ \bar{z}_i]$;

I_i - tensor de inércia do corpo C_i em relação ao centro de gravidade deste corpo (paralelo ao i -ésimo sistema de coordenadas). Os elementos deste tensor correspondem aos elementos $I_i, J_i, K_i, XY_i, XZ_i, YZ_i$ da matriz (3.2) já definidos na seção anterior;

m_i - massa do corpo C_i ;

$\Gamma_i(t)$ - força generalizada na ligação i ;

$$Z_0 = [0 \ 0 \ 1]^T.$$

NOTA : f_{n+1} e n_{n+1} correspondem às forças e torques externos que atuam sobre o órgão terminal.

Analisando-se as equações apresentadas anteriormente, mostraremos algumas propriedades principais do método Newton-Euler, com o objetivo de compará-lo qualitativamente com o de Lagrange:

- i) O modelo obtido é linear em relação aos tensores de Inércia I_i e a massa m_i do corpo C_i . Esta propriedade pode ser verificada diretamente das equações (3.12) a (3.16). Na equação (3.16) o torque ou força generalizada Γ_i é linear em relação ao momento n_i e força f_i . Nas equações de n_i (3.15) e f_i (3.14) o momento N_i e força F_i aparecem somando. Finalmente na equação de N_i (3.13) o tensor de inércia I_i aparece somando e a equação de F_i (3.12) é linear em relação à massa m_i .
- ii) O modelo obtido é não linear em relação ao vetor S_i do centro de gravidade. Esta propriedade é facilmente verificada, observando-se que na equação (3.11) F_i é linear em relação a S_i e o produto cruzado de vetores $S_i \times F_i$ na equação (3.15) é não-linear.

iii) Nas equações dos torques ou forças generalizadas os efeitos dinâmicos de acoplamento de inércia, coriolis, centrífuga e gravidade não aparecem explicitamente dificultando uma possível análise de significância destes efeitos. [KHOSLA 86] e [CRAIG 86A] lançam mão de uma *forma fechada* ("closed form"), onde os efeitos dinâmicos aparecem explicitamente. Entretanto a obtenção automática desta *forma fechada* a partir das equações de torque e forças generalizadas é complicada, devido às dificuldades de se agrupar os efeitos (inércia, coriolis, centrífuga e gravidade), por aparecem dispersos na obtenção simbólica.

A linearidade do modelo dinâmico em relação aos parâmetros dinâmicos é de fundamental importância para a identificação destes. Por isso, para que o modelo gerado pelo método de Newton-Euler se preste à estimação de parâmetros é necessário transformar a propriedade (ii). [KHOSLA 86] mostra que se as equações recursivas apresentadas nesta seção forem reformuladas de modo que o tensor de inércia do corpo C_1 passe a ser expresso em relação ao seu sistema de coordenadas ao invés do centro de gravidade, utilizando-se o teorema de Steiner (equação 3.17), a nova formulação será também linear em relação ao vetor do centro de gravidade S_1 .

$$I_1^* = I_1 + m_1 (S_1^T S_1 E - S_1 S_1^T) \quad (3.17)$$

onde:

I_1 - tensor de inércia em relação ao centro de gravidade do corpo C_1 ;

I_1^* - tensor de inércia em relação ao sistema de coordenadas do corpo C_1 ;

E - matriz identidade de ordem 3.

A aplicação deste teorema, após geradas as equações de torques e forças generalizadas não lineares em relação a S_1 , não é trivial de ser feito, devendo portanto adequar a formulação de Newton-Euler, substituindo a equação (3.17) na equação (3.13).

3.3.2. Método Não Recursivo Simbólico de Lagrange

Este método é baseado no cálculo da função de Lagrange, derivando a energia cinética e potencial do robô, em relação às coordenadas e velocidades generalizadas para obter os torques ou forças generalizadas que atuam neste.

$$F_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (3.18)$$

onde o Lagrangeano (L) é definido como a diferença entre a energia cinética (K) e potencial (P).

$$L = K - P \quad (3.19)$$

A equação (3.18) pode incluir as forças de natureza não conservativa (por exemplo atritos).

As primeiras tentativas de se modelar a dinâmica de robôs usando o formalismo de Lagrange, se devem a [UICKER 65] e [KAHN 69]. Uma característica importante destes trabalhos é o uso de matrizes de passagem homogêneas de ordem 4 (função da alocação de referenciais a cada corpo da estrutura cinemática) para representar a posição e velocidades dos corpos da estrutura cinemática. Isto permitiu um tratamento matricial sistemático da modelagem. A maior desvantagem da formulação de Uicker e Kahn é o número de operações das equações resultantes. Para um robô com 6 graus de liberdade, [HOLLERBACH 80] mostrou ser necessário avaliar 66.271 multiplicações e 51.548 adições no cálculo das expressões finais. Muitos estudos foram feitos no sentido de simplificar esta formulação, tais como em [BEJCZY 74], [HOLLERBACH 80], [ARMSTRONG 79], [PAUL 81], [RENAUD 75, 80, 83], [MEGAHED 82a, 84], [LI 86], [SILVA 89], etc.

Desenvolvendo-se a equação (3.18) para um caso geral e dando um tratamento matricial, obtém-se uma forma fácil de trabalhar, cujas equações de torques ou forças generalizadas são da seguinte forma:

$$\Gamma = A(q,p)\ddot{q} + 2B(q,p)\dot{q}\dot{q} + c(q,p)\dot{q}^2 - G(q,p) + P \quad (3.20)$$

onde:

Γ - vetor de torque / forças generalizadas;

$A(q,p)$ - matriz que representa os efeitos de inércia (própria e de acoplamento) como função do vetor de coordenadas generalizadas q e parâmetros geométricos e dinâmicos p dos n corpos que compõem o robô;

$B(q,p)$ - matriz que representa os efeitos de coriolis;

$C(q,p)$ - matriz dos efeitos centrífugos;

$G(q,p)$ - vetor que representa os efeitos de gravidade;

P - vetor que representa os efeitos de perturbação (ex.: atrito seco e/ou viscoso);

$q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^t$ - vetor de coordenadas generalizadas;

$\ddot{q} = [\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_n]^t$ - vetor de acelerações generalizadas;

$\dot{q}\dot{q} = [\dot{q}_1\dot{q}_2, \dot{q}_1\dot{q}_3, \dots, \dot{q}_1\dot{q}_n, \dot{q}_2\dot{q}_3, \dot{q}_2\dot{q}_4, \dots, \dot{q}_2\dot{q}_n, \dots, \dot{q}_{n-1}\dot{q}_n]$ - vetor de velocidades cruzadas;

$\dot{q}^2 = [\dot{q}_1^2, \dot{q}_2^2, \dot{q}_3^2, \dots, \dot{q}_n^2]$ - vetor das velocidades ao quadrado;

n - número de graus de liberdade do robô.

Usando a formulação de Lagrange os coeficientes das matrizes A , B , C e G podem ser obtidos das seguintes equações [PAUL 81]:

a) Coeficientes a^{ij} de A:

$$a^{ij} = \sum_{l=\max i j}^n \text{TR} \left(\frac{\partial T_{1,l+1}}{\partial q_i} \cdot J_1 \cdot \frac{\partial T_{1,l+1}^T}{\partial q_j} \right) \quad \text{para } i \leq j \quad (3.21)$$

usando a equação (A3.10) do Apêndice A3 teremos:

$$a^{ij} = \sum_{l=\max i j}^n \text{TR} (T_{1,l+1}^{l+1} \Delta_i J_1^{l+1} \Delta_j^t T_{1,l+1}^t) \quad (3.22)$$

onde:

a^{ij} - elemento da linha i e coluna j da matriz de inércia do modelo dinâmico, significando os efeitos de acoplamento de inércia entre os corpos i e j - a^{ii} representa a inércia própria vista na ligação i . A identidade $a^{ij} = a^{ji}$ torna a matriz A simétrica, pois o efeito de ação do corpo i no corpo j é igual a reação do j no i ;

$T_{1,l+1}$ - matriz de passagem da base para o referencial $l+1$ do robô;

$T_{1,l+1}^t$ - transposta de $T_{1,l+1}$;

$^{l+1}\Delta_i$ - transformação diferencial, definida no Apêndice A3.

$^{l+1}\Delta_j^t$ - transposta de $^{l+1}\Delta_j$;

n - número de graus de liberdade do robô;

J_1 - Matriz de pseudo-inércia do corpo 1;

$i = 1, 2, \dots, n$.

b) Coeficientes b^{ijk} de B e C:

Os coeficientes b^{ijk} das matrizes de coriolis e centrífuga são obtidos da equação:

$$b^{ijk} = \sum_{l=\max ijk}^n \text{TR} \left(\frac{\partial T_{1,l+1}}{\partial q_i} \cdot J_l \cdot \frac{\partial T_{1,l+1}^T}{\partial q_j \partial q_k} \right) \quad \text{para } j \leq k \quad (3.23)$$

novamente substituindo a equação (A3.11), teremos:

$$b^{ijk} = \sum_{l=\max ijk}^n \text{TR} \left(T_{1,l+1}^{1+1} \Delta_i^{J_l} \Delta_k^{1+1} \Delta_j^{1+1} T_{1,l+1}^T \right) \quad (3.24)$$

Os coeficientes b^{ijj} representam os acoplamentos de força centrífuga na ligação i , devido à velocidade do corpo j . Os coeficientes b^{ijk} ($j \neq k$) representam os acoplamentos de Coriolis na ligação i devido às velocidades dos corpos j e k .

c) Coeficientes g_i de G:

$$g_i = \sum_{l=1}^n g^T T_{1,l+1}^{1+1} \Delta_i (M_l \bar{r}_l) \quad (3.25)$$

Os coeficientes g_i representam efeitos da carga gravicional na ligação i .

d) Propriedades Características do Formalismo de Lagrange

i) O modelo obtido é linear em relação aos elementos da matriz de Pseudo-inércia J_1 . Esta propriedade pode ser facilmente verificada, observando-se que as equações (3.22) e (3.24) são lineares em relação a J_1 e que a operação Traço de uma matriz (TR) é uma operação linear. A equação (3.25) é linear em relação aos momentos de primeira ordem $(M_1, \bar{r}_1)$.

ii) Os efeitos de acoplamentos de inércia (a^{ij} ; $j \neq i$), inércia efetiva (a^{ii} ; $j = i$), coriolis (b^{ijk} ; $j \neq k$), centrífuga (b^{ijk} ; $j = k$) e carga gravitacional (g_1) aparecem explicitamente na equação (3.20).

A propriedade (i) é de fundamental importância quando se pensa na obtenção de modelos para a estimação de parâmetros.

A propriedade (ii) é bastante desejável na implementação de estratégias de controle dinâmico [HSIA 86], tendo como objetivo simplificações do modelo gerado ou o cálculo independente dos efeitos de acoplamento.

3.4. GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE MODELOS DINÂMICOS DE ROBÔS MANIPULADORES

A geração manual de modelos dinâmicos de robôs manipuladores demanda um tempo extremamente grande e é altamente susceptível a erros. Além disso o processo deve ser repetido para cada robô diferente. Na tentativa de obter modelos confiáveis e com menor tempo, foi desenvolvido um programa para cálculo automático do modelo dinâmico de robôs manipuladores, com estrutura cinemática simples e corpos rígidos.

Este programa foi implementado utilizando-se as mesmas funções básicas apresentadas anteriormente para a modelagem geométrica automática, com a diferença de também se usar estruturas de dados com dois níveis de indireção.

O algoritmo utilizado foi o de Lagrange, modificado por Megahed [MEGAHED 84]. Neste algoritmo, as equações dos termos a^{ij} e b^{ijk} são escritas como abaixo:

$$a^{ij} = {}^1\Delta_i \left[\sum_{l=\max i,j}^n \text{TR}(T_{1,l+1}^J T_{1,l+1}^t) \right] {}^1\Delta_j^t \quad (3.26)$$

$$b^{ijk} = {}^1\Delta_i \left[\sum_{l=\max i,j,k}^n \text{TR}(T_{1,l+1}^J T_{1,l+1}^t) \right] {}^1\Delta_j^{t1} {}^1\Delta_k^t \quad (3.27)$$

Observa-se que os operadores Δ não dependem do índice l , e portanto podem ser evidenciados. Estes operadores são calculados de maneira análoga aos apresentados na seção seguinte, onde serão oportunamente explicados, com vistas ao desenvolvimento do algoritmo proposto.

3.5. RESULTADOS OBTIDOS COM O GERADOR AUTOMÁTICO DE MODELOS DINÂMICOS

Apresentamos aqui, os resultados obtidos com a utilização do Programa para Geração Automática de Modelos Dinâmicos para o robô PUMA 560.

a) Dados Necessários:

- Matrizes de Passagens Intermediárias $T_{1,i+1}$ ($i = 1, \dots, n$) geradas pela modelagem geométrica automática

Matriz intermediaria T12

```
elemento(1,1) = +C1
elemento(1,2) = +0.0
elemento(1,3) = -S1
elemento(1,4) = +0.0
elemento(2,1) = +S1
elemento(2,2) = +0.0
elemento(2,3) = +C1
elemento(2,4) = +0.0
elemento(3,1) = +0.0
elemento(3,2) = -1
elemento(3,3) = +0.0
elemento(3,4) = +0.0
elemento(4,1) = +0.0
elemento(4,2) = +0.0
elemento(4,3) = +0.0
elemento(4,4) = +1
```

Matriz intermediaria T13

```
elemento(1,1) = +C1*C2
elemento(1,2) = -C1*S2
elemento(1,3) = -S1
elemento(1,4) = +D[3]
elemento(2,1) = +S1*C2
elemento(2,2) = -S1*S2
elemento(2,3) = +C1
elemento(2,4) = +D[4]
elemento(3,1) = -S2
elemento(3,2) = -C2
elemento(3,3) = +0.0
elemento(3,4) = -D[2]
elemento(4,1) = +0.0
elemento(4,2) = +0.0
elemento(4,3) = +0.0
elemento(4,4) = +1
```

Matriz intermediaria T14

```
elemento(1,1) = +D[7]
elemento(1,2) = -S1
elemento(1,3) = +D[9]
elemento(1,4) = +D[10]
elemento(2,1) = +D[8]
elemento(2,2) = +C1
elemento(2,3) = +D[11]
elemento(2,4) = +D[12]
elemento(3,1) = -S23
elemento(3,2) = +0.0
elemento(3,3) = +C23
elemento(3,4) = +D[13]
elemento(4,1) = +0.0
elemento(4,2) = +0.0
elemento(4,3) = +0.0
elemento(4,4) = +1
```

Matriz intermediaria T15

```
elemento(1,1) = +D[14]
elemento(1,2) = -D[9]
elemento(1,3) = +D[15]
elemento(1,4) = +D[16]
elemento(2,1) = +D[17]
elemento(2,2) = -D[11]
elemento(2,3) = +D[18]
elemento(2,4) = +D[19]
elemento(3,1) = +D[20]
elemento(3,2) = -C23
elemento(3,3) = +D[21]
elemento(3,4) = +D[22]
elemento(4,1) = +0.0
elemento(4,2) = +0.0
elemento(4,3) = +0.0
elemento(4,4) = +1
```

Matriz intermediaria T16

```
elemento(1,1) = +D[23]
elemento(1,2) = +D[15]
elemento(1,3) = +D[24]
elemento(1,4) = +D[16]
elemento(2,1) = +D[25]
elemento(2,2) = +D[18]
elemento(2,3) = +D[26]
elemento(2,4) = +D[19]
elemento(3,1) = +D[27]
elemento(3,2) = +D[21]
elemento(3,3) = +D[28]
elemento(3,4) = +D[22]
elemento(4,1) = +0.0
elemento(4,2) = +0.0
elemento(4,3) = +0.0
elemento(4,4) = +1
```

Matriz intermediaria T17

```

elemento(1,1) = +D[29]
elemento(1,2) = +D[30]
elemento(1,3) = +D[24]
elemento(1,4) = +D[31]
elemento(2,1) = +D[32]
elemento(2,2) = +D[33]
elemento(2,3) = +D[26]
elemento(2,4) = +D[34]
elemento(3,1) = +D[35]
elemento(3,2) = +D[36]
elemento(3,3) = +D[28]
elemento(3,4) = +D[37]
elemento(4,1) = +0.0
elemento(4,2) = +0.0
elemento(4,3) = +0.0
elemento(4,4) = +1

```

NOTA : As variáveis indexadas D[i] estão associadas às equações auxiliares já definidas na seção 2.6.

- Parâmetros Dinâmicos:

É mostrada abaixo a tabela de parâmetros dinâmicos do robô PUMA 560 preenchida através do Módulo de Inicialização deste programa:

Robo puma										
Parametros Dinamicos										
Junta	Ixx	Iyy	Izz	Ixy	Ixz	Iyz	rx	ry	rz	M
1	+Ixx1	+Iyy1	+Izz1	+0.0	+0.0	+0.0	+0.0	+0.0	+rz1	+M1
2	+Ixx2	+Iyy2	+Izz2	+0.0	+0.0	+0.0	+rx2	+0.0	+0.0	+M2
3	+Ixx3	+Iyy3	+Izz3	+0.0	+0.0	+0.0	+0.0	+0.0	+rz3	+M3
4	+Ixx4	+Iyy4	+Izz4	+0.0	+0.0	+0.0	+0.0	+ry4	+0.0	+M4
5	+Ixx5	+Iyy5	+Izz5	+0.0	+0.0	+0.0	+0.0	+0.0	+rz5	+M5
6	+Ixx6	+Iyy6	+Izz6	+0.0	+0.0	+0.0	+0.0	+0.0	+rz6	+M6

Tabela 3.1 - Parâmetros Dinâmicos para o Puma 560 preenchida com o Módulo de Inicialização

b) Resultados:

Relacionamos a seguir as equações do modelo dinâmico obtidas automaticamente para o robô PUMA 560, onde foi usada a seguinte convenção:

FIN[i] - força de inércia na ligação i;
TIN[i][j] - produto do coeficiente a^{ij} da matriz de inércia A pela
aceleração na ligação i;
FCOR[i] - força de coriolis na ligação i;
FCEN[i] - força centrífuga na ligação i;
GRA[i] - carga gravitacional na ligação i;
FPER[i] - força de perturbação na ligação i que for possível modelar;
FGEN[i] - torque ou força generalizada na ligação i;
 AC_i - aceleração da ligação i.

- Equações do Modelo Dinâmico:

```
FIN[0] = D[513];
TIN[0][0] = D[321]*AC1;
TIN[0][1] = D[304]*AC2;
TIN[0][2] = D[263]*AC3;
TIN[0][3] = D[219]*AC4;
TIN[0][4] = D[173]*AC5;
TIN[0][5] = D[127]*AC6;
FIN[1] = D[519];
TIN[1][0] = D[304]*AC1;
TIN[1][1] = D[322]*AC2;
TIN[1][2] = D[323]*AC3;
TIN[1][3] = D[324]*AC4;
TIN[1][4] = D[325]*AC5;
TIN[1][5] = D[326]*AC6;
FIN[2] = D[525];
TIN[2][0] = D[263]*AC1;
TIN[2][1] = D[323]*AC2;
TIN[2][2] = D[327]*AC3;
TIN[2][3] = D[328]*AC4;
TIN[2][4] = D[329]*AC5;
TIN[2][5] = D[330]*AC6;
FIN[3] = D[531];
TIN[3][0] = D[219]*AC1;
TIN[3][1] = D[324]*AC2;
TIN[3][2] = D[328]*AC3;
TIN[3][3] = D[331]*AC4;
TIN[3][4] = D[332]*AC5;
TIN[3][5] = D[333]*AC6;
```

```

FIN[4] = D[537];
TIN[4][0] = D[173]*AC1;
TIN[4][1] = D[325]*AC2;
TIN[4][2] = D[329]*AC3;
TIN[4][3] = D[332]*AC4;
TIN[4][4] = D[334]*AC5;
TIN[4][5] = D[335]*AC6;
FIN[5] = D[543];
TIN[5][0] = D[127]*AC1;
TIN[5][1] = D[326]*AC2;
TIN[5][2] = D[330]*AC3;
TIN[5][3] = D[333]*AC4;
TIN[5][4] = D[335]*AC5;
TIN[5][5] = D[336]*AC6;
FCOR[0] = D[516]+D[516];
FCOR[1] = D[522]+D[522];
FCOR[2] = D[528]+D[528];
FCOR[3] = D[534]+D[534];
FCOR[4] = D[540]+D[540];
FCOR[5] = D[546]+D[546];
FCEN[0] = D[517];
FCEN[1] = D[523];
FCEN[2] = D[529];
FCEN[3] = D[535];
FCEN[4] = D[541];
FCEN[5] = D[547];
GRA[0] = +0.0;
GRA[1] = D[491];
GRA[2] = D[490];
GRA[3] = D[489];
GRA[4] = D[488];
GRA[5] = D[487];
FPER[0] = P1;
FPER[1] = P2;
FPER[2] = P3;
FPER[3] = P4;
FPER[4] = P5;
FPER[5] = P6;
FGEN[0] = D[518];
FGEN[1] = D[524];
FGEN[2] = D[530];
FGEN[3] = D[536];
FGEN[4] = D[542];
FGEN[5] = D[548];

```

- Avaliação do Número de Operações Necessárias:

Avaliacao numerica do Modelo Dinamico de Referencia				
Robo utilizado : puma				
Operacao	+	-	*	total de operacoes
Num. Oper	543	189	961	1693
Numero de senos/cossenos :			14	
Numero total de equacoes :			548	

Tabela 3.2 - Número de operações do Modelo Dinâmico do Robô PUMA 560

NOTA : Para maiores detalhes sobre equações auxiliares envolvidas neste modelo, referenciar-se ao Apêndice A1.

Com a finalidade de mostrar que a geração automática de modelos apresentada, sem a utilização de equações auxiliares, gera resultados com uma grande quantidade de redundâncias, geramos automaticamente a expressão de inércia própria da primeira ligação do robô STANFORD, considerando somente os três primeiros graus de liberdade. Eliminando-se as redundâncias, obtemos uma expressão final com um número de operações expressivamente menor. A expressão final obtida é analiticamente igual a apresentada em [PAUL 81].

Na página seguinte mostramos as tabelas dos parâmetros geométricos e dinâmicos, necessários ao cálculo do modelo dinâmico:

Robo stanf3
Parametros de Denavit-Hartenberg

Junta	Tipo	Teta	Alfa	a	d
1	R	teta1	-90	+0.0	+0.0
2	R	teta2	+90	+0.0	d2
3	P	+0.0	+0.0	+0.0	D3

Tabela 3.3 - Parâmetros de Denavit-Hartenberg dos três primeiros graus de lib. do robô STANFORD

Robo stanf3
Parametros Dinamicos

Junta	Ixx	Iyy	Izz	Ixy	Ixz	Iyz	rx	ry	rz	M
1	+Ixx1	+Iyy1	+Izz1	+0.0	+0.0	+0.0	+0.0	+ry1	+rz1	+M1
2	+Ixx2	+Iyy2	+Izz2	+0.0	+0.0	+0.0	+0.0	+ry2	+0.0	+M2
3	+Ixx3	+Iyy3	+Izz3	+0.0	+0.0	+0.0	+0.0	+0.0	+rz3	+M3

Tabela 3.4 - Parâmetros dinâmicos dos três primeiros graus de liberdade. do robô STANFORD

- Inércia própria da primeira ligação do robô STANFORD, considerando os três primeiros graus de liberdade, obtida automaticamente, sem o uso de equações auxiliares:

$$\begin{aligned}
 A[0][0] = & (+(+(+(+C1*C2*I3*C1*C2+S1*J3*S1+(+C1*S2*K3+ \\
 & (+C1*S2*D3-S1*d2)*Z3)*C1*S2+(+C1*S2*Z3+ \\
 & (+C1*S2*D3-S1*d2)*M3)*(+C1*S2*D3-S1*d2)) + \\
 & (+C1*C2*I2*C1*C2-(-S1*J2-S1*d2*Y2)*S1+ \\
 & +C1*S2*K2*C1*S2-(-S1*Y2-S1*d2*M2)*S1*d2)) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+(+C1*I1*C1+S1*K1*S1)))+(+(+(+S1*C2*I3*S1*C2+C1*J3*C1+ \\
&+(+S1*S2*K3+(+S1*S2*D3+C1*d2)*Z3)*S1*S2+ \\
&+(+S1*S2*Z3+(+S1*S2*D3+C1*d2)*M3)*(+S1*S2*D3+C1*d2))+ \\
&+(+S1*C2*I2*S1*C2+(+C1*J2+C1*d2*Y2)*C1+S1*S2*K2*S1*S2+ \\
&+(+C1*Y2+C1*d2*M2)*C1*d2)))+(+S1*I1*S1+C1*K1*C1));
\end{aligned}$$

- Inércia própria da primeira ligação do robô STANFORD, considerando os três primeiros graus de liberdade, obtidas através de simplificações manuais na expressão acima

$$\begin{aligned}
a^{11} = & I1 + K1 + J2 + J3 + (I2 + I3)*C2*C2 + (K2 + K3)*S2*S2 + \\
& + 2*Y2*D2 + (M2 + M3)*D2*D2 + S2*S2*d3*(2*Z3 + M3*d3)
\end{aligned}$$

Vemos portanto, que as expressões geradas automaticamente sem equações auxiliares, apresentam um número significativo de redundâncias, implicando em um número elevado de operações (130 operações para o termo estudado). Porém, as redundâncias que aparecem nestas expressões são do tipo trigonométricas ($\text{Sen}^2 + \text{Cos}^2$) e aritméticas, o que facilita o processo de simplificação a partir do modelo gerado automaticamente, ao invés de obtê-lo manualmente. Se a mesma expressão de inércia própria for gerada automaticamente usando-se equações auxiliares, teremos um total de 86 operações. Isto representa uma média entre o caso sem equações auxiliares (130 operações) e o caso simplificado manualmente (25 operações).

Verificamos que o modelo dinâmico completo do robô STANFORD com três graus de liberdade, apresenta um total de 1995 operações se não forem usadas equações auxiliares, contra 304 para o caso oposto. Isto representa uma redução de aproximadamente 6,5 vezes no número total de operações. Para o termo de inércia própria estudado, a redução foi de aproximadamente 1,5 vezes. Esta diferença reside no fato de que no modelo dinâmico completo, uma mesma equação auxiliar é usada várias vezes, enquanto que na expressão de um termo isoladamente ela é usada uma única vez.

Através de uma análise mais detalhada das expressões dos termos do modelo dinâmico, nota-se que seria possível a implementação de um sistema automático para pós-processamento destes termos, que executasse as simplificações acima citadas, de modo a obtermos as expressões com um número reduzido de operações.

Uma idéia geral deste sistema seria:

- 1- Obter as expressões dos termos do modelo dinâmico automaticamente.
- 2- Transformar as expressões obtidas na forma fatorada, para a forma expandida, onde os seus termos aparecem explicitamente.
- 3- Reordenar as variáveis e parâmetros de cada termo explicitado, segundo uma ordem pré-estabelecida, para facilitar o processo de reconhecimento das expressões.
- 4- Identificar termos iguais, somando os de mesmo sinal e eliminando os de sinal contrário.
- 5- Identificar termos iguais, que contenham senos e cossenos ao quadrado, substituindo pela simplificação equivalente. Este último procedimento deve ser repetido até que não haja mais simplificações trigonométricas.

3.6. PROPOSTA DE UM ALGORITMO EFICIENTE PARA GERAÇÃO DE MODELOS DINÂMICOS DE ROBÔS MANIPULADORES

Na tentativa de validar as equações dinâmicas obtidas através da geração automática baseada no método de [MEGAHED 84], decidiu-se compara-las com as apresentadas em [PAUL 81] para o robô STANFORD. As equações foram geradas automaticamente sem o uso de variáveis auxiliares, para facilitar a comparação.

No entanto verificou-se que eram difíceis de se comparar, devido ao elevado número de redundâncias verificadas nas equações obtidas automaticamente. As expressões apresentadas em [PAUL 81] eram mais simples, por terem sido obtidas manualmente, eliminando-se por completo as redundâncias. Restou-nos então a comparação dos resultados numéricos, o que provou que as equações eram equivalentes e que não haviam aproximações nas formulações.

Prosseguindo na análise dos dois métodos, verificou-se que [MEGAHED 84] apresentava um processo de simplificação das equações dinâmicas, evitando-se redundâncias, que poderiam ser feitas automaticamente, no entanto não executava uma simplificação baseada na invariância da operação TRAÇO de uma matriz em relação a uma transformação de similaridade, apresentada por [PAUL 81]. De posse destas informações e com a experiência de implementação do Gerador Automático de Modelos Dinâmicos, criamos um novo algoritmo que aproveita as vantagens de ambas formulações. Como resultado obtivemos um algoritmo eficiente que evita as simplificações manuais, chegando-se a equações mais simples.

O algoritmo que apresentamos é baseado no formalismo de Lagrange, bastante adequado à automatização em computadores, implicando em estruturas computacionais simples. O modelo dinâmico obtido é composto de expressões pouco redundantes, se comparado com o gerado pela formulação de Megahed, além de apresentar a vantagem de se evitar sensivelmente o aparecimento de redundâncias, de modo automático. Utilizamos a noção de traço de uma matriz de ordem 3. Os dados necessários à utilização deste algoritmo são as $n(n+1)/2$ matrizes de passagem homogêneas intermediárias entre os n referenciais ligadas aos corpos do robô.

Para o caso geral de um robô com n graus de liberdade, serão necessárias as seguintes matrizes intermediárias :

$$\left. \begin{array}{l} T_{1,2}; T_{1,3}; T_{1,4}; \dots; T_{1,n+1} \\ T_{2,3}; T_{2,4}; \dots; T_{2,n+1} \\ T_{3,4}; \dots; T_{3,n+1} \\ \vdots \\ T_{n,n+1} \end{array} \right\} \quad (3.28)$$

No caso de se usar uma ferramenta automática para o cálculo destas matrizes, o usuário entraria somente com os parâmetros geométricos.

Além disso, é necessário também o conhecimento dos parâmetros dinâmicos, identificados por meio de uma das técnicas de identificação apresentadas no Apêndice A4.

3.6.1. Cálculo dos Coeficientes a^{ij}

Existe uma simplificação significativa na equação (3.22), baseada no fato de que multiplicando os três termos centrais desta equação (${}^{1+1}\Delta_i J_i {}^{1+1}\Delta_i^t$) a matriz resultante será sempre formada pela última linha e última coluna nulas (vide Apêndice A3). Isto devido ao fato da matriz ${}^{1+1}\Delta_i$ possuir a última linha nula. Premultiplicando esta matriz resultante por $T_{1,1+1}$ e posmultiplicando pela sua transposta $T_{1,1+1}^T$ somente é efetuada a transformação de rotação. Considerando que a operação TRAÇO é invariante com relação à rotação, a expressão (3.22) se reduz a:

$$a^{ij} = \sum_{l=\max i,j}^n \text{TR} \left({}^{1+1}\Delta_i J_i {}^{1+1}\Delta_j^t \right) \quad (3.29)$$

No Anexo A3 mostramos que:

$${}^{1+1}\Delta_i = \left| \frac{\Omega_{1,1+1}}{0} \right| = T_{1+1,i} Q_i T_{1,1+1} \quad (3.30)$$

onde:

$T_{i,l+1}$ = matriz de passagem homogênea do referencial i para o referencial l+1;

$T_{l+1,i}$ = matriz de passagem homogênea do referencial l+1 para o referencial i.

$$Q_i = \begin{cases} \left| \begin{array}{c|c} \hat{Z} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right| & \text{(ligação i rotacional)} \\ \text{ou:} \\ \left| \begin{array}{c|c} 0 & Z \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right| & \text{(ligação i translacional)} \end{cases} \quad (3.31)$$

com:

$$\hat{Z} = \left| \begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \quad \text{e} \quad Z = | 0 \ 0 \ 1 |^t$$

Assim, podemos calcular $\Omega_{i,l+1}$ da equação (3.30) como segue:

- Para o caso da junta i ser rotacional:

$$\left| \begin{array}{c|c} \Omega_{i,l+1} & \\ \hline 0 & \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} R_{l+1,i} & P_{l+1,i} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c|c} \hat{Z} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c|c} R_{l+1,i} & P_{l+1,i} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right| \quad (3.32)$$

Efetuando-se o produto e sabendo-se que $R_{l+1,i} = R_{i,l+1}^t$ (vide Apêndice A3), teremos:

$$\left| \begin{array}{c|c} \Omega_{i,l+1} & \\ \hline 0 & \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} R_{i,l+1}^t \hat{Z} R_{i,l+1} & \\ \hline 0 & \end{array} \right| \left| \begin{array}{c|c} R_{i,l+1}^t \hat{Z} P_{i,l+1} & \\ \hline 0 & \end{array} \right| \quad (3.33)$$

- Para o caso da junta i ser Translacional:

$$\left| \begin{array}{c} \Omega_{i,l+1} \\ \hline 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} R_{l+1,i} & P_{l+1,i} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c|c} 0 & Z \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c|c} R_{i,l+1} & P_{i,l+1} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right| \quad (3.34)$$

$$\left| \begin{array}{c} \Omega_{i,l+1} \\ \hline 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} 0 & R_{i,l+1}^t Z \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right| \quad (3.35)$$

Não é difícil ver na equação (3.29), que para $i=j$, esta formalização leva ao aparecimento de somente variáveis das juntas i e suas subseqüentes nas expressões de inércia própria a^{ii} . Logicamente nas expressões de inércia de acoplamento ($i \neq j$). Aparecem variáveis das juntas anteriores. Um fator importante é que a força generalizada da junta i só depende dos parâmetros dinâmicos desta junta em diante, surgindo uma estrutura em cascata em relação a estes parâmetros.

- Simplificação de $\Omega_{i,l+1}$:

As expressões (3.33) e (3.35) podem ser simplificadas como mostramos a seguir.

Definindo-se os termos da matriz de transformação de rotação $R_{i,l+1}$ e translação $P_{i,l+1}$, entre os referenciais i e l+1 como:

$$\left| \begin{array}{c|c} R_{i,l+1} & P_{i,l+1} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc|c} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \end{array} \right| \quad (3.36)$$

Observamos que o índice i,l+1 foi omitido provisoriamente para simplificar o desenvolvimento, mais adiante a indexação será retomada.

Da equação (3.33), temos:

$$R_{i,l+1}^t \hat{Z} R_{i,l+1} = \begin{vmatrix} 0 & T_{12}T_{21} - T_{11}T_{22} & T_{11}T_{23} - T_{21}T_{13} \\ T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} & 0 & T_{22}T_{13} - T_{12}T_{23} \\ T_{21}T_{13} - T_{11}T_{23} & T_{12}T_{23} - T_{22}T_{13} & 0 \end{vmatrix} \quad (3.37)$$

Não é difícil mostrar e pode ser facilmente visualizado no Apêndice A3 que a expressão (3.37) pode ser simplificada para:

$$R_{i,l+1}^T \hat{Z} R_{i,l+1} = \begin{vmatrix} 0 & -T_{33} & T_{32} \\ T_{33} & 0 & -T_{31} \\ -T_{32} & T_{31} & 0 \end{vmatrix} \quad (3.38)$$

Isto se deve ao fato de que a terceira linha da matriz $R_{i,l+1}$ é o produto vetorial das duas outras. A quarta coluna de $\Omega_{i,l+1}$ será igual a:

$$R_{i,l+1}^t \hat{Z}_{i,l+1} P_{i,l+1} = \begin{vmatrix} T_{21}T_{14} - T_{11}T_{24} \\ T_{22}T_{14} - T_{12}T_{24} \\ T_{23}T_{14} - T_{13}T_{24} \end{vmatrix} \quad (3.39)$$

Da equação (3.35), o produto $R_{i,l+1}^t Z$ será chamado de $Z_{i,l+1}$, que usaremos mais adiante. Assim:

$$Z_{i,l+1} = R_{i,l+1}^t Z = \begin{vmatrix} T_{31} \\ T_{32} \\ T_{33} \end{vmatrix} \quad (3.40)$$

A equação dos coeficientes a^{ij} da matriz de inércia será então como segue:

$$a^{ij} = \sum_{l=\max i,j}^n \text{TR} \left(\left| \begin{array}{c|c} \Omega_{i,l+1} & \\ \hline 0 & J_l \end{array} \right| \Omega_{j,l+1}^t \middle| 0 \right) \quad (3.41)$$

onde Ω é igual a:

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & -T_{33} & T_{32} & T_{21}T_{14} & -T_{11}T_{24} & \\ T_{33} & 0 & -T_{31} & T_{22}T_{14} & -T_{12}T_{24} & \\ -T_{32} & T_{31} & 0 & T_{23}T_{14} & -T_{13}T_{24} & \end{array} \right| \quad (3.42)$$

(ligação de índice i rotacional)

ou:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & T_{31} \\ 0 & 0 & 0 & T_{32} \\ 0 & 0 & 0 & T_{33} \end{array} \right| \quad (3.43)$$

(ligação de índice i translacional).

O processo de simplificação de $\Omega_{i,l+1}$ diminui consideravelmente o número de operações que intervém nesta matriz. Estas simplificações se fossem feitas depois da obtenção de $\Omega_{i,l+1}$ seriam do tipo trigonométricas ($\sin^2 \theta_i + \cos^2 \theta_i = 1$) e aritméticas que com o uso de equações auxiliares perderiam totalmente as características tornando-se impossíveis de serem detectadas.

Vimos então, que a simplificação do cálculo de $\Omega_{i,l+1}$ é bastante significativa e nos resta agora otimizar o cálculo de a^{ij} pela análise individual dos diversos termos que resulta da expansão da equação (3.41), com os $\Omega_{i,l+1}$ otimizados. Para isso, retomando a indexação, redefiniremos os elementos de $\Omega_{i,l+1}$ como:

$$T_{31} = \alpha_{i,l+1} ; \quad T_{32} = \beta_{i,l+1} ; \quad T_{33} = \gamma_{i,l+1} \quad (3.44)$$

$$\left. \begin{aligned} T_{21}T_{14} - T_{11}T_{24} &= \Omega_1^{i,l+1} \\ T_{22}T_{14} - T_{12}T_{24} &= \Omega_2^{i,l+1} \\ T_{23}T_{14} - T_{13}T_{24} &= \Omega_3^{i,l+1} \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

A equação (3.45) acima assume que não vamos considerar a análise de simplificação nestes termos, a não ser para o caso de $\Omega_{i,l+1}$ com $i = 1$, onde $\Omega_{i,l+1}$ é obtido das matrizes de passa-gem elementares, o que resulta em:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1^{i,l+1} &= 0 \\ \Omega_2^{i,l+1} &= a_i T_{33} \\ \Omega_3^{i,l+1} &= -a_i T_{32} \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

Posteriormente faremos um estudo para o caso de $i \neq 1$, onde sabemos que também aparecem simplificações trigonométricas e aritméticas, porém sua análise é um pouco mais complexa.

Usando a definição dos elementos de $\Omega_{i,l+1}$ dada por (3.44) e (3.45) e substituindo (3.42) (ligação rotacional) ou (3.43) (ligação translacional) em (3.41) teremos os produtos mostrados abaixo. A partir deste ponto, omitiremos o segundo índice $l+1$ dos elementos das matrizes por questão de facilitar a notação; porém i corresponde a $i,l+1$ e j a $j,l+1$, que serão posteriormente retomados.

- Para Ligação Rotacional:

$$\left| \frac{\Omega_{i,1+1}}{0} \right| J_1 \left| \Omega_{j,1+1}^T \right| 0 = \left| \begin{array}{ccc|c} 0 & -\gamma_i & -\beta_i & \Omega_1^i \\ \gamma_i & 0 & -\alpha_i & \Omega_2^i \\ \beta_i & \alpha_i & 0 & \Omega_3^i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \quad (3.47)$$

$$\left| \begin{array}{cccc} I_1 & XY_1 & XZ_1 & X_1 \\ XY_1 & J_1 & YZ_1 & Y_1 \\ XZ_1 & YZ_1 & K_1 & Z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & M_1 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{ccc|c} 0 & \gamma_j & \beta_j & 0 \\ -\gamma_i & 0 & -\alpha_i & 0 \\ -\beta_i & \alpha_i & 0 & 0 \\ \hline \Omega_1^j & \Omega_2^j & \Omega_3^j & 0 \end{array} \right|$$

Definindo D^i como o produto $J_1 \left| \Omega_{j,1+1}^T \right| 0$ teremos:

$$D^j = \left| \begin{array}{cccc} * & d_{12}^j & d_{13}^j & 0 \\ d_{21}^j & * & d_{23}^j & 0 \\ d_{31}^j & d_{32}^j & * & 0 \\ d_{41}^j & d_{42}^j & d_{43}^j & 0 \end{array} \right| \quad (3.48)$$

As expressões dos termos de D^j podem ser facilmente obtidas, porém serão omitidas por uma questão de síntese na formulação. Os elementos "*" não necessitam ser calculados, pois serão multiplicados por zero, como veremos mais adiante. Isso racionaliza ainda mais o uso de memória na implementação.

Aplicando-se a operação TRAÇO e efetuando-se o produto, teremos:

$$\text{TR} \left| \left| \frac{\Omega_{i, i+1}}{0} \right| D^j \right| = \text{TR} \left| \left| \begin{array}{ccc|c} 0 & -\gamma_i & -\beta_i & \Omega_4^i \\ \gamma_i & 0 & -\alpha_i & \Omega_4^i \\ \beta_i & \alpha_i & 0 & \Omega_4^i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cccc} * & d_{12}^j & d_{13}^j & 0 \\ d_{21}^j & * & d_{23}^j & 0 \\ d_{31}^j & d_{32}^j & * & 0 \\ d_{41}^j & d_{42}^j & d_{43}^j & 0 \end{array} \right| \right| \quad (3.49)$$

$$= \text{TR} \left| \begin{array}{ccc} -\gamma_i d_{21}^j - \beta_i d_{31}^j + \Omega_4^i d_{41}^j & * & * \\ * & \gamma_i d_{12}^j - \alpha_i d_{32}^j + \Omega_4^i d_{42}^j & * \\ * & * & \beta_i d_{13}^j + \alpha_i d_{23}^j + \Omega_4^i d_{43}^j \end{array} \right| \quad (3.50)$$

Novamente os elementos "*" não necessitarão ser calculados na obtenção dos a^{ij} , o que otimiza o uso da memória. Os termos a^{ij} , colocados em forma de produtos de matrizes linhas e colunas, serão:

$$a^{ij} = \sum_{l=\max ij}^n \left\{ \left[\alpha_i \quad \beta_i \quad \gamma_i \right] \begin{bmatrix} d_{23}^j - d_{32}^j \\ d_{13}^j - d_{31}^j \\ d_{12}^j - d_{21}^j \end{bmatrix} + \left[\Omega_1^i \quad \Omega_2^i \quad \Omega_3^i \right] \begin{bmatrix} d_{41}^j & d_{42}^j & d_{43}^j \end{bmatrix} \right\} \quad (3.51)$$

- Para Ligação Translacional:

O desenvolvimento para este tipo de ligação é análogo ao feito para ligações rotacionais, resultando:

$$a^{ij} = \sum_{l=\max ij}^n \left[\alpha_i d_{i41}^j + \beta_i d_{i42}^j + \gamma_i d_{i43}^j \right] \quad (3.52)$$

retomando-se os índices e reescrevendo em forma de produtos de matrizes:

$$a^{ij} = \sum_{l=\max ij}^n \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i & \gamma_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{41}^j & d_{42}^j & d_{43}^j \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Logicamente os termos da matriz D^j são diferentes para juntas j rotacionais ou translacionais, porém a partir deste ponto não vale a pena continuar o desenvolvimento de casos visando simplificações analíticas, pois não ocorrerão. Apesar da diferença destes termos para os casos da junta j ser rotacional ou translacional, deveremos implementar uma única função para ambos os casos.

Do exposto anteriormente, o termo a^{ij} será dado por:

- Para ligação de índice i rotacionais:

$$a^{ij} = \sum_{l=\max ij}^n \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_{i,l+1} & \beta_{i,l+1} & \gamma_{i,l+1} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} d_{23}^{j,l+1} - d_{32}^{j,l+1} \\ d_{13}^{j,l+1} - d_{31}^{j,l+1} \\ d_{12}^{j,l+1} - d_{21}^{j,l+1} \end{vmatrix} + \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} \Omega_1^{i,l+1} & \Omega_2^{i,l+1} & \Omega_3^{i,l+1} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} d_{41}^{j,l+1} \\ d_{42}^{j,l+1} \\ d_{43}^{j,l+1} \end{vmatrix} \right\} \quad (3.54)$$

- Para ligação de índice i translacional:

$$a^{ij} = \sum_{l=\max i j}^n \begin{bmatrix} \alpha_{i,l+1} & \beta_{i,l+1} & \gamma_{i,l+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{41}^{j,l+1} \\ d_{42}^{j,l+1} \\ d_{43}^{j,l+1} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Para efeito de implementação, embora o cálculo de a^{ij} para ligação translacional seja diferente do segundo termo de a^{ij} para ligação rotacional, eles podem ser executados por uma mesma função, pois $\alpha_{i,l+1}$ substituiria $\Omega_1^{i,l+1}$, $\beta_{i,l+1}$ a $\Omega_2^{i,l+1}$ e $\gamma_{i,l+1}$ a $\Omega_3^{i,l+1}$. Poderíamos então colocar a formulação de modo mais compacto:

$$a^{ij} = \sum_{l=\max i j}^n \begin{cases} Z_{i,l+1}^t \quad XD_{j,l+1} + ZP_{i,l+1}^t \quad XL_{j,l+1} \\ \text{(ligação i rotacional)} \\ \text{ou:} \\ ZP_{i,l+1}^t \quad XL_{j,l+1} \\ \text{(ligação i translacional)} \end{cases} \quad (3.56)$$

Devem ser calculados $n(n+1)/2$ coeficientes a^{ij} , devido a simetria da matriz de inércia ($a^{ij} = a^{ji}$).

3.6.2. Cálculo dos coeficientes b^{ijk}

Os coeficientes b^{ijk} das matrizes de coriolis e centrífuga devem ser calculados pela equação abaixo, obtida da equação (3.24), pela mesma simplificação usada no cálculo dos a^{ij} , devido a invariância da operação TRAÇO com relação a transformação de similaridade.

$$b^{ijk} = \sum_{l=\max ijk}^n \text{TR} \left({}^{l+1}\Delta_i J_l {}^{l+1}\Delta_j^t {}^{l+1}\Delta_k \right) \quad (3.57)$$

Definindo $E^{i,j,l+1}$ como o produto ${}^{l+1}\Delta_i J_l {}^{l+1}\Delta_j^t$ de dimensão (4x4) e elementos $e^{i,j,l+1}$ a última coluna e última linha deste produto é sempre formada por elementos iguais a zero.

Definição:

$$E^{i,j,l+1} = {}^{l+1}\Delta_i J_l {}^{l+1}\Delta_j^T = \left| e^{i,j,l+1} \right| \quad (3.58)$$

$$b^{ijk} = \sum_{l=\max ijk}^n \text{TR} \left(E^{i,j,l+1} \mid \Omega_{k,l+1} \mid 0 \mid \right) \quad (3.59)$$

com:

$$E^{i,j,l+1} = \begin{vmatrix} * & e_{12} & e_{13} & 0 \\ e_{21} & * & e_{23} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.60)$$

Novamente omitimos os índices para simplificar. No cálculo de b^{ijk} , os termos "*" não necessitarão ser calculados. Notamos que na obtenção de a^{ij} foram calculados, somente os elementos diagonais de $E^{i,j,l+1}$, que não são calculados agora, visando a diminuição da quantidade de memória a ser alocada.

- Para o caso da junta k ser rotacional:

$$b^{ijk} = \sum_{l=\max ijk}^n \text{TR} \begin{vmatrix} * & e_{12} & e_{13} & 0 & 0 & -\gamma_k & -\beta_k & 0 \\ e_{21} & * & e_{23} & 0 & \gamma_k & 0 & -\alpha_k & 0 \\ e_{31} & e_{32} & * & 0 & \beta_k & \alpha_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.61)$$

ou:

$$b^{ijk} = \sum_{l=\max ijk}^n \text{TR} \begin{vmatrix} e_{12}\gamma_k + e_{13}\beta_k & * & * & 0 \\ * & -e_{21}\gamma_k + e_{22}\alpha_k & * & 0 \\ * & * & -e_{31}\beta_k - e_{32}\alpha_k & 0 \\ * & * & * & 0 \end{vmatrix} \quad (3.62)$$

- Para o caso da junta k ser rotacional:

$$b^{ijk} = 0 \quad (3.63)$$

Efetuada-se a operação TRAÇO, retomando-se a indexação e reescrevendo-se b^{ijk} de (3.62), teremos:

- Para o caso da ligação de índice k Rotacional:

$$b^{ijk} = \sum_{l=\max ijk}^n \left[\begin{matrix} \alpha_{k,l+1} & \beta_{k,l+1} & \gamma_{k,l+1} \end{matrix} \right] \begin{vmatrix} e_{32}^{i,j,l+1} - e_{23}^{i,j,l+1} \\ e_{13}^{i,j,l+1} - e_{31}^{i,j,l+1} \\ e_{21}^{i,j,l+1} - e_{12}^{i,j,l+1} \end{vmatrix} \quad (3.64)$$

Para efeito de implementação, podemos escrever na forma compactada como segue, sendo que a função usada aqui será a mesma para o cálculo do primeiro termo de a^{ij} para uma ligação rotacional:

$$b^{ijk} = \begin{cases} \sum_{l=\max ijk}^n Z_{k,l+1}^t XE^{i,j,l+1} & \text{(ligação k rotacional)} \\ \text{ou:} & \\ 0 & \text{(ligação k translacional)} \end{cases} \quad (3.65)$$

Na implementação do método, usaremos as propriedades características da definição de símbolo de Christoffel [MEGAHED 84], para reduzir o número de coeficientes b^{ijk} calculados:

$$b^{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a^{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial a^{ik}}{\partial q_j} + \frac{\partial a^{jk}}{\partial q_i} \right) \quad (3.66)$$

Assim, obteremos as seguintes igualdades:

$$\left. \begin{aligned} b^{ikj} &= b^{ijk} \\ b^{kji} &= -b^{ijk} & \text{para } j \leq i \text{ e } i < k \\ b^{iji} &= 0 & \text{para } j \leq i \end{aligned} \right\} \quad (3.67)$$

Em função da equação (3.67), torna-se necessário calcular $n(n^2-1)/3$ coeficientes b^{ijk} ao invés de n^3 .

3.6.3. Cálculo dos coeficientes g_i

Os coeficientes g_i de gravidade serão calculados através da equação:

$$g_i = g^T \sum_{l=1}^n \left| T_{i,l+1} \right| \left| \frac{\Omega_{i,l+1}}{0} \right| [X_l \ Y_l \ Z_l \ M_l] \quad (3.68)$$

que pode ser simplificada facilmente para:

$$g_i = g^T \sum_{l=1}^n |R_{i,l+1}| \begin{bmatrix} d_{41}^{i,l+1} \\ d_{42}^{i,l+1} \\ d_{43}^{i,l+1} \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

ou de uma forma mais compacta:

$$g_i = g^T \sum_{l=1}^n R_{i,l+1} XL_{i,l+1} \quad (3.70)$$

onde:

$$g^T = [g_x \ g_y \ g_z] \quad (3.71)$$

3.6.4. Aplicação do Algoritmo (Coeficientes a^{ij} do Robô Stanford)

Devido ao fato deste algoritmo ainda não estar disponível como uma ferramenta automática, apresentamos um pequeno exemplo de utilização deste, para gerar manualmente as equações dos 3 primeiros graus de liberdade dos coeficientes a^{ij} do robô STANFORD.

a) Dados Necessários

- Parâmetros Geométricos:

N	TIPO JUNTA	α_1	a_1	d_1	VARIÁVEL DE JUNTA
1	R	-90	0	0	Θ_1
2	R	90	0	D_2	Θ_2
3	P	0	0	0	d_3

- Parâmetros Dinâmicos:

$$J_1 = \begin{vmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 & Y_1 \\ 0 & 0 & K_1 & Z_1 \\ 0 & Y_1 & Z_1 & M_1 \end{vmatrix}$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} I_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & Y_2 \\ 0 & 0 & K_2 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 & M_2 \end{vmatrix}$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} I_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_3 & 0 & Y_3 \\ 0 & 0 & K_3 & Z_3 \\ 0 & 0 & Z_3 & M_3 \end{vmatrix}$$

- Matrizes de Passagem Intermediárias Necessárias:

$$\begin{array}{ccc} T_{12}; & T_{13}; & T_{14} \\ & T_{23}; & T_{24} \\ & & T_{34} \end{array}$$

$$T_{12} = \begin{vmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad T_{13} = \begin{vmatrix} C_1 C_2 & -S_1 & C_1 S_2 & -S_1 D_2 \\ S_1 C_2 & C_1 & S_1 S_2 & C_1 D_2 \\ -S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$T_{14} = \begin{vmatrix} C_1 C_2 & -S_1 & C_1 S_2 & C_1 S_2 d_3 - S_1 D_2 \\ S_1 C_2 & C_1 & S_1 S_2 & C_1 D_2 + S_1 S_2 d_3 \\ -S_2 & 0 & C_2 & C_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad T_{23} = \begin{vmatrix} C_2 & 0 & S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & D_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$T_{24} = \begin{vmatrix} C_2 & 0 & S_2 & S_2 d_3 \\ S_2 & 0 & -C_2 & -C_2 d_3 \\ 0 & 1 & 0 & D_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad T_{34} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

b) Resultados

- Inércias próprias:

$$\left. \begin{aligned} a^{11} &= I_1 + K_1 + J_2 + J_3 + 2Y_2 D_2 + (M_2 + M_3) D_2^2 + (K_2 + \\ &\quad + K_3) S_2^2 + (I_2 + I_3) C_2^2 + S_2^2 d_3 (2Z_3 + M_3 d_3) \\ a^{22} &= I_2 + K_2 + I_3 + K_3 + 2Z_3 d_3 + M_3 d_3^2 \\ a^{33} &= M_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.72)$$

- Inércias de Acoplamentos:

$$\left. \begin{aligned} a^{12} &= -C_2 D_2 (Z_3 + M_3 d_3) \\ a^{13} &= -S_2 (D_2 M_3 + Y_3) \\ a^{23} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.73)$$

Estas expressões foram validadas considerando a referência [PAUL 81], cujos resultados são analiticamente iguais. Os parâmetros geométricos e dinâmicos que aparecem nestas expressões, são os definidos nas seções 2.2 e 3.2 respectivamente. Logicamente alguns dos termos mostrados não foram obtidos automaticamente na forma agrupada e extremamente reduzida como se apresentam, devido à simplificações aritméticas efetuadas manualmente, com o objetivo de colocá-los em uma forma facilmente comparável com a referência acima. A obtenção automática destes termos através do algoritmo proposto revelou que os mais próximos à base do robô ainda apresentam redundâncias significativas, porém quanto mais próximos ao órgão terminal menores serão estas redundâncias

3.7. CONCLUSÕES

Foram apresentadas neste capítulo as características de modelagem dinâmica e uma análise qualitativa dos formalismos de Newton-Euler e de Lagrange. A preferência pelo formalismo de Lagrange se deu devido às propriedades de linearidade do modelo dinâmico em relação aos parâmetros (fundamental para identificação de parâmetros) e da apresentação dos efeitos dinâmicos de forma explícita (adequado à implementação de estratégias de controle dinâmico). Com a evolução das simplificações no formalismo de Lagrange, atualmente este apresenta um número de operações muito reduzido e aproximadamente equivalente ao de Newton-Euler.

Em função das dificuldades de se modelar a dinâmica de um robô manualmente, foi desenvolvido um programa para geração automática de modelos dinâmicos. Ressaltamos as características deste programa (dados, implementação e resultados) e desenvolvemos um exemplo de aplicação para o robô PUMA 560. Analisamos os resultados da geração automática para o termo a^{11} do robô STANFORD com 3 graus de liberdade, com a finalidade de mostrar que a modelagem sem o uso de equações auxiliares gera um número significativo de redundâncias. Vimos também que estas redundâncias podem ser eliminadas manualmente, ou através de um sistema para pós-processamento nas expressões, cuja implementação não seria muito custosa.

Como resultado da experiência adquirida na implementação, foi proposto então um novo algoritmo baseado no formalismo de Lagrange adequado à implementação em computadores, devido à sua estrutura simples. As equações geradas por este algoritmo têm um número significativamente reduzido de redundâncias se comparado com a geração automática apresentada. Ao final desenvolveu-se manualmente o cálculo dos termos a^{ij} da matriz de inércia do robô STANFORD, com 3 graus de liberdade.

CAPÍTULO 4

CONCLUSÕES / PERSPECTIVAS

O objetivo principal deste trabalho foi o de estudar as questões relacionadas com a otimização de modelos geométricos e dinâmicos de robôs com estrutura cinemática simples e corpos rígidos, levando-se em consideração a sua utilização por usuários não especialistas, bem como a formação de pessoal na área de modelagem de robôs. A finalidade da otimização de tais modelos é a sua aplicação na coordenação de movimentos e no desenvolvimento de estratégias de controle eficientes, que compensem os efeitos indesejáveis em tempo real, quando se exige um desempenho superior dos robôs. São igualmente úteis nas etapas fundamentais de simulação e identificação de parâmetros que precedem o controle.

- Modelagem Geométrica:

Desenvolvemos uma ferramenta automática eficiente e confiável para a modelagem geométrica, sem tentar esgotar todas as possibilidades de se otimizar modelos geométricos. No entanto, esta ferramenta possui as características propostas de ser didática, para ser usada na formação de profissionais, e ao mesmo tempo gera resultados suficientemente otimizados para o uso de pesquisadores da área. O resultado serve de dados também para a etapa posterior de modelagem dinâmica.

Foram discutidos vários aspectos da otimização de modelos geométricos e dentre tantas possibilidades, escolheu-se para implementar nesta ferramenta, uma modelagem baseada nas duas parametrizações mais usuais de Denavit-Hartenberg e Craig-Khalil via cinco alternativas diferentes: produto direto, produto inverso, produto direto usando a propriedade de ortonormalidade, produto inverso usando a propriedade de ortonormalidade e produto direto com simplificações trigonométricas.

- Modelagem Dinâmica:

A modelagem dinâmica é extremamente complexa e sujeita a erros,

tornando-se um gargalo quando se deseja fazer um estudo de casos por simulação e/ou para implementação de controladores eficientes baseados em modelos. Assim, a ferramenta de modelagem dinâmica via formalismo de Lagrange mostrada neste trabalho é de grande valia, gerando equações confiáveis e otimizadas de forma automática e rápida.

Propomos um novo algoritmo, também baseado no formalismo de Lagrange, que apresenta a vantagem de eliminar grande número de redundâncias nas equações geradas, diminuindo o trabalho de simplificação manual no modelo obtido automaticamente. Este algoritmo foi pensado para uma implementação eficiente, tanto à nível de memória requerida, quanto à nível de programação das funções.

Perspectivas:

Como continuação deste trabalho na modelagem geométrica, não seria difícil agregar à ferramenta existente, um maior número de opções de cálculo do modelo geométrico.. Isto pelo fato de possuírmos uma sólida biblioteca de funções implementadas em "C" e que permitem todo tipo de manipulação simbólica, usando o mínimo de memória.

Do ponto de vista da modelagem dinâmica, a implementação do algoritmo proposto viria facilitar imensamente as etapas seguintes de identificação de parâmetros e controle baseado em modelos, devido ao reduzido número de operações das expressões obtidas.

Através de uma análise mais detalhada nas expressões dinâmicas geradas automaticamente, verificamos que não é difícil a implementação de um sistema para pós-processamento destas expressões, que eliminasse a maioria das redundâncias, transformando-as em expressões reduzidas.

BIBLIOGRAFIA

- [ARMSTRONG 79] W.W. ARMSTRONG, *Recursive Solution to the Equations of Motion of n-Links Manipulator*. Proc. of 5th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms, July 1979.
- [ARMSTRONG 86] B. ARMSTRONG, O. KHATIB & J. BURDICK, *The Explicit Dynamic Model and Inertial Parameters of the Puma 560 Arm*. IEEE International Conference on Robotics and Automation, April 1986.
- [BEJCZY 74] A.K. BEJCZY, *Robot Arm Dynamics and Control*. Technical Memorandum 33.669 American Control Conference, San Francisco, USA, June 1974.
- [BOUZOUIA 89] B. BOUZOUIA, *Commande des Robots Manipulateurs: Identification des Paramètres et Etude de Stratégies Adaptatives*. Thèse de Docteur, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 1989.
- [CONTI 87] P. CONTI, *Contribution a la Commande Dynamique-Adaptative des Robots Manipulateurs*. Thèse de Docteur, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 1987.
- [CRAIG 86A] J.J. CRAIG, *Introduction to Robotics - Mechanics and Control*. Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1986.
- [CRAIG 86B] J.J. CRAIG, *Adaptative Control of Mechanical Manipulators*. Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation, San Francisco, USA, April 1986.
- [CRAIG 88] J.J. CRAIG, *Adaptative Control of Mechanical Manipulators*. Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1988.
- [DENAVID 55] J. DENAVIT & R.S. HARTENBERG, *A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices*. Journal of Applied Mechanics, June 1955.
- [FERREIRA 84] E.P. FERREIRA, *Contribution a L'Identification de Paramètres et a la Commande Dynamique-Adaptative des Robots Manipulateurs*. Thèse de Docteur, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 1984.

- [FERREIRA 88] E.P. FERREIRA, J.V.L. SILVA et ali, *GMSIR - A Simulation Tool for Robot Manipulators Architecture and Control Synthesis*. III Congresso Latinoamericano de Automática, Viña del Mar. Chile, 1988.
- [FERREIRA 90] A.C. FERREIRA, *Otimização na Geração Automática dos Modelos Geométricos e na Geração Assistida de Modelos para a Coordenação de Movimentos de Robôs*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, a ser apresentada, Agosto 1990.
- [GAUTIER 88] M. GAUTIER, W. KHALIL, *A Direct Determination of Minimum Inertial Parameters of Robots*. Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1988.
- [GAUTIER 89] M. GAUTIER, W. KHALIL, *Identification of the Minimum Inertial Parameters of Robots*. Conference on Robotics and Automation, 1989.
- [GORLA 84] B. GORLA & M. RENAUD, *Modèles des Robots Manipulateurs, Application a leur Commande*. Cepadues Editions, Toulouse, France, 1984.
- [HAYATI 84] S. HAYATI & M. MIRMIRANI, *Puma 600 Robot Arm Geometric Calibration*. IEEE Trans. Systems, Man, Cybernetics, 1980.
- [HOLLERBACH 80] J.M. HOLLERBACH, *A Recursive Lagrangian Formulation of Manipulator Dynamics and a Comparative Study of Dynamics Formulation Complexity*. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, vol. SMG-10, n° 11, November 1980.
- [HSIA 86] T.C. HSIA, *Adaptative Control of Robot Manipulators - A Review*. Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation, San Francisco, USA, April 1986.
- [ISHIOMIN 82] G. ISHIOMIN, F. SAKHITAB, Y.D. XIONG, *Aplications à la Robotique de la Prise em Compte de la Déformation dans la Détermination du Comportement de Systèmes Dynamiques*. Poitiers, 1^{ères} Journées Annuelles ARA - Pôle Mécanique et Technologie, Sept. 1982.

- [KAHN 69] M.E. KAHN, *The Near-Minimum-Time Control of Open-Loop Articulated Kinematic Mechanics*. AIM 106, Stanford Artificial Intelligence Laboratory, USA, December 1969.
- [KHALIL 86A] W. KHALIL & J.F. KLEINFINGER, *A New Geometric Notation for Open and Closed Loop Robots*. Proc. IEEE Conf. on Robotics and Automation, 1986.
- [KHALIL 86B] W. KHALIL, J.F. KLEINFINGER, M. GAUTIER, *Reducing the Computational Burden of the Dynamic Models of Robots*. Proc. IEEE Conf. on Robotics and Automation, 1986.
- [KHALIL 86C] W. KHALIL, M. GAUTIER, J.F. KLEINFINGER, *Automatic Generation of Identification Models of Robots*. International Journal of Robotics and Automation, vol. 1, n° 1, 1986.
- [KHATIB 80] O. KHATIB, *Commande Dynamique, Dans L'Espace Opérationnel, de Robots Manipulateurs en Présence D'Obstacles*. Th. de Docteur-Ingénieur, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 1980.
- [KHOSLA 86] P.K. KHOSLA, *Real-Time Control and Identification of Direct-Drive Manipulators*. Thesis Doctor of Philosophy, Carnegie Mellon University, Pennsylvania, 1986.
- [LI 86] C.J. LI, *A New Method for Dynamic Analysis of Robot*. IEEE International Conference on Robotics and Automation, San Francisco, USA, April 1986.
- [LUH 80] J.Y.S. LUH, M.W. WALKER & R.P.C. PAUL, *On Line Computational Scheme for Mechanical Manipulators*. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, June 1980.
- [MAYEDA 89] H. MAYEDA, K. YOSHIDA, K. OHASHI, *Base Parameters of Dynamic Models for Manipulators with Rotational and Translational Joints*. Conference on Robotics and Automation, 1989.

- [MEGAHED 81] S. MEGAHED & E.P. FERREIRA, *Obtention du modèle dynamique d'un manipulateur grâce au principe de superposition*. Nota LAAS N° 82063, Toulouse, France, Novembre 1981.
- [MEGAHED 82] S. MEGAHED & M. RENAUD, *Minimization of the Computation Time Necessary for Dynamic Control of Robot Manipulators*. 12^{ème} I.S.I.R., Paris, France, Juin 1982.
- [MEGAHED 84] S.M. MEGAHED, *Contribution à la Modélisation Géométrique et Dynamique des Robots Manipulateurs à Structure de Chaîne Cinématique Simple ou Complexe*. Th. Doctorat D'État, Université Paul Sabatier, Automatique, Toulouse III, France, 1984.
- [PAUL 81] R.P. PAUL, *Robots Manipulators - Mathematics, Programming and Control*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts and London, England, 1981.
- [RÁNKY 85] P.G. RÁNKY & C.Y. HO, *Robot Modelling - Control and Applications with Software*. IFS (Publications) LTD - Spring-Verlag, England, 1985.
- [RENAUD 75] M. RENAUD, *Contribution a l'Étude de la Modélisation et de la Commande des Systèmes Mécaniques Articulés*. Th. Docteur-Ingénieur, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 1975.
- [RENAUD 80] M. RENAUD, *Contribution à la Modélisation et à la Commande Dynamique des Robots Manipulateurs*. Th. de Doctorat D'État, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 1980.
- [RENAUD 83] M. RENAUD, *An Efficient Iterative Analytical Procedure for Obtaining a Robot Manipulator Dynamic Model*. First International Symposium of Robotic Research, Bretton Woods, USA, August 1983.
- [RENAUD 84] M. RENAUD, *Calcul du Modèle Géométrique des Robots Manipulateurs en Utilisant un Nombre Quasi Minimal D'Operations Arithmetiques*. Publication LAAS du CNRS, Toulouse, France, 1984.
- [SHEU 89] S.Y. SHEU, M.W. WALKER, *Basis Set for Manipulator Inertial Parameters*. Conference on Robotics and Automation, 1989.

- [SILVA 88] R.S. SILVA, J.V.L. SILVA et ali, *Geração Automática de Modelos para Robôs Manipuladores*, 7º Congresso Brasileiro de Automática, Agosto 1988.
- [SILVA 89] J.V.L. DA SILVA, E.P. FERREIRA & J.P. ANDRADE FILHO, *Um Algoritmo Eficiente para a Geração de Modelos Dinâmicos de Robôs Manipuladores*. 1º Encontro Regional de Automação e Instrumentação, Vitória, ES, Agosto 1989.
- [SILVER 82] W.M. SILVER, *On the Equivalence of Lagrangian and Newton-Euler Dynamics for Manipulators*. The International Journal of Robotics Research, 1980.
- [SNYDER 85] W.E. SNYDER, *Industrial Robots: Computer Interfacing and Control*. Prentice-Hall, Inc. New Jersey, EUA, 1985.
- [UICKER 65] J.J. UICKER, *On the Dynamic Analysis of Spatial Linkages Using 4 by 4 Matrices*. PhD. Thesis, Department of Mechanical Engineering and Astronautical Sciences, Northwestern University, USA, 1965.

APÊNDICE A1

EQUAÇÕES AUXILIARES DO MODELO DINÂMICO DO
ROBÔ PUMA 560

```

D[1] = a2*C2;
D[2] = a2*S2;
D[3] = C1*D[1]-S1*d2;
D[4] = S1*D[1]+C1*d2;
D[5] = 0;
D[6] = 0;
D[7] = C1*C23;
D[8] = S1*C23;
D[9] = C1*S23;
D[10] = a3*D[7]+D[3];
D[11] = S1*S23;
D[12] = a3*D[8]+D[4];
D[13] = -a3*S23-D[2];
D[14] = D[7]*C4-S1*S4;
D[15] = -D[7]*S4-S1*C4;
D[16] = D[9]*d4+D[10];
D[17] = D[8]*C4+C1*S4;
D[18] = -D[8]*S4+C1*C4;
D[19] = D[11]*d4+D[12];
D[20] = -S23*C4;
D[21] = S23*S4;
D[22] = C23*d4+D[13];
D[23] = D[14]*C5-D[9]*S5;
D[24] = D[14]*S5+D[9]*C5;
D[25] = D[17]*C5-D[11]*S5;
D[26] = D[17]*S5+D[11]*C5;
D[27] = D[20]*C5-C23*S5;
D[28] = D[20]*S5+C23*C5;
D[29] = D[23]*C6+D[15]*S6;
D[30] = -D[23]*S6+D[15]*C6;
D[31] = D[24]*d6+D[16];
D[32] = D[25]*C6+D[18]*S6;
D[33] = -D[25]*S6+D[18]*C6;
D[34] = D[26]*d6+D[19];
D[35] = D[27]*C6+D[21]*S6;
D[36] = -D[27]*S6+D[21]*C6;
D[37] = D[28]*d6+D[22];
D[38] = Iyy1+Izz1-Ixx1;
D[39] = D[38]*0.5;
D[40] = Ixx1+Izz1-Iyy1;
D[41] = D[40]*0.5;
D[42] = Ixx1+Iyy1-Izz1;
D[43] = D[42]*0.5;
D[44] = M1*rz1;
D[45] = Iyy2+Izz2-Ixx2;
D[46] = D[45]*0.5;
D[47] = M2*rx2;
D[48] = Ixx2+Izz2-Iyy2;
D[49] = D[48]*0.5;
D[50] = Ixx2+Iyy2-Izz2;
D[51] = D[50]*0.5;
D[52] = Iyy3+Izz3-Ixx3;
D[53] = D[52]*0.5;
D[54] = Ixx3+Izz3-Iyy3;
D[55] = D[54]*0.5;
D[56] = Ixx3+Iyy3-Izz3;
D[57] = D[56]*0.5;
D[58] = M3*rz3;
D[59] = Iyy4+Izz4-Ixx4;

```

```

D[60] = D[59]*0.5;
D[61] = Ixx4+Izz4-Iyy4;
D[62] = D[61]*0.5;
D[63] = M4*ry4;
D[64] = Ixx4+Iyy4-Izz4;
D[65] = D[64]*0.5;
D[66] = Iyy5+Izz5-Ixx5;
D[67] = D[66]*0.5;
D[68] = Ixx5+Izz5-Iyy5;
D[69] = D[68]*0.5;
D[70] = Ixx5+Iyy5-Izz5;
D[71] = D[70]*0.5;
D[72] = M5*rz5;
D[73] = Iyy6+Izz6-Ixx6;
D[74] = D[73]*0.5;
D[75] = Ixx6+Izz6-Iyy6;
D[76] = D[75]*0.5;
D[77] = Ixx6+Iyy6-Izz6;
D[78] = D[77]*0.5;
D[79] = M6*rz6;
D[80] = C1*D[2];
D[81] = S1*D[2];
D[82] = C1*D[3]+S1*D[4];
D[83] = C23*D[12]-D[11]*D[13];
D[84] = -C23*D[10]+D[9]*D[13];
D[85] = D[11]*D[10]-D[9]*D[12];
D[86] = D[21]*D[19]-D[18]*D[22];
D[87] = -D[21]*D[16]+D[15]*D[22];
D[88] = D[18]*D[16]-D[15]*D[19];
D[89] = D[28]*D[19]-D[26]*D[22];
D[90] = -D[28]*D[16]+D[24]*D[22];
D[91] = D[26]*D[16]-D[24]*D[19];
D[92] = D[29]*D[74];
D[93] = D[30]*D[76];
D[94] = D[24]*D[78]+D[31]*D[79];
D[95] = D[24]*D[79]+D[31]*M6;
D[96] = D[32]*D[74];
D[97] = D[33]*D[76];
D[98] = D[26]*D[78]+D[34]*D[79];
D[99] = D[26]*D[79]+D[34]*M6;
D[100] = D[35]*D[74];
D[101] = D[36]*D[76];
D[102] = D[28]*D[78]+D[37]*D[79];
D[103] = D[28]*D[79]+D[37]*M6;
D[104] = D[92]*D[29]+D[93]*D[30]+D[94]*D[24]+D[95]*D[31];
D[105] = D[92]*D[32]+D[93]*D[33]+D[94]*D[26]+D[95]*D[34];
D[106] = D[92]*D[35]+D[93]*D[36]+D[94]*D[28]+D[95]*D[37];
D[107] = D[96]*D[32]+D[97]*D[33]+D[98]*D[26]+D[99]*D[34];
D[108] = D[96]*D[35]+D[97]*D[36]+D[98]*D[28]+D[99]*D[37];
D[109] = D[100]*D[35]+D[101]*D[36]+D[102]*D[28]+D[103]*D[37];
D[110] = D[24]*D[108];
D[111] = D[26]*D[106];
D[112] = D[28]*D[105];
D[113] = D[111]-D[112]+D[89]*D[95];
D[114] = D[112]-D[110]+D[90]*D[99];
D[115] = D[110]-D[111]+D[91]*D[103];
D[116] = D[104]*D[28]-D[106]*D[24]+D[95]*D[90];
D[117] = -D[104]*D[26]+D[105]*D[24]+D[95]*D[91];
D[118] = -D[105]*D[26]+D[107]*D[24]+D[99]*D[91];

```

```

D[119] = -D[107]*D[28]+D[108]*D[26]+D[99]*D[89];
D[120] = -D[108]*D[28]+D[109]*D[26]+D[103]*D[89];
D[121] = -D[99]*D[28]+D[103]*D[26]+M6*D[89];
D[122] = D[106]*D[28]-D[109]*D[24]+D[103]*D[90];
D[123] = D[95]*D[28]-D[103]*D[24]+M6*D[90];
D[124] = -D[95]*D[26]+D[99]*D[24]+M6*D[91];
D[125] = D[118]-D[122];
D[126] = D[120]-D[117];
D[127] = D[116]-D[119];
D[128] = D[23]*D[67];
D[129] = D[15]*D[69];
D[130] = D[24]*D[71]+D[16]*D[72];
D[131] = D[24]*D[72]+D[16]*M5;
D[132] = D[25]*D[67];
D[133] = D[18]*D[69];
D[134] = D[26]*D[71]+D[19]*D[72];
D[135] = D[26]*D[72]+D[19]*M5;
D[136] = D[27]*D[67];
D[137] = D[21]*D[69];
D[138] = D[28]*D[71]+D[22]*D[72];
D[139] = D[28]*D[72]+D[22]*M5;
D[140] = D[128]*D[23]+D[129]*D[15]+D[130]*D[24]+D[131]*D[16];
D[141] = D[128]*D[25]+D[129]*D[18]+D[130]*D[26]+D[131]*D[19];
D[142] = D[128]*D[27]+D[129]*D[21]+D[130]*D[28]+D[131]*D[22];
D[143] = D[132]*D[25]+D[133]*D[18]+D[134]*D[26]+D[135]*D[19];
D[144] = D[132]*D[27]+D[133]*D[21]+D[134]*D[28]+D[135]*D[22];
D[145] = D[136]*D[27]+D[137]*D[21]+D[138]*D[28]+D[139]*D[22];
D[146] = D[104]+D[140];
D[147] = D[105]+D[141];
D[148] = D[106]+D[142];
D[149] = D[95]+D[131];
D[150] = D[107]+D[143];
D[151] = D[108]+D[144];
D[152] = D[99]+D[135];
D[153] = D[109]+D[145];
D[154] = D[103]+D[139];
D[155] = M6+M5;
D[156] = D[15]*D[151];
D[157] = D[18]*D[148];
D[158] = D[21]*D[147];
D[159] = D[157]-D[158]+D[86]*D[149];
D[160] = D[158]-D[156]+D[87]*D[152];
D[161] = D[156]-D[157]+D[88]*D[154];
D[162] = D[146]*D[21]-D[148]*D[15]+D[149]*D[87];
D[163] = -D[146]*D[18]+D[147]*D[15]+D[149]*D[88];
D[164] = -D[147]*D[18]+D[150]*D[15]+D[152]*D[88];
D[165] = -D[150]*D[21]+D[151]*D[18]+D[152]*D[86];
D[166] = -D[151]*D[21]+D[153]*D[18]+D[154]*D[86];
D[167] = -D[152]*D[21]+D[154]*D[18]+D[155]*D[86];
D[168] = D[148]*D[21]-D[153]*D[15]+D[154]*D[87];
D[169] = D[149]*D[21]-D[154]*D[15]+D[155]*D[87];
D[170] = -D[149]*D[18]+D[152]*D[15]+D[155]*D[88];
D[171] = D[164]-D[168];
D[172] = D[166]-D[163];
D[173] = D[162]-D[165];
D[174] = D[14]*D[60];
D[175] = -D[9]*D[62]+D[16]*D[63];
D[176] = D[15]*D[65];
D[177] = -D[9]*D[63]+D[16]*M4;

```

$D[178] = D[17]*D[60];$
 $D[179] = -D[11]*D[62]+D[19]*D[63];$
 $D[180] = D[18]*D[65];$
 $D[181] = -D[11]*D[63]+D[19]*M4;$
 $D[182] = D[20]*D[60];$
 $D[183] = -C23*D[62]+D[22]*D[63];$
 $D[184] = D[21]*D[65];$
 $D[185] = -C23*D[63]+D[22]*M4;$
 $D[186] = D[174]*D[14]-D[175]*D[9]+D[176]*D[15]+D[177]*D[16];$
 $D[187] = D[174]*D[17]-D[175]*D[11]+D[176]*D[18]+D[177]*D[19];$
 $D[188] = D[174]*D[20]-D[175]*C23+D[176]*D[21]+D[177]*D[22];$
 $D[189] = D[178]*D[17]-D[179]*D[11]+D[180]*D[18]+D[181]*D[19];$
 $D[190] = D[178]*D[20]-D[179]*C23+D[180]*D[21]+D[181]*D[22];$
 $D[191] = D[182]*D[20]-D[183]*C23+D[184]*D[21]+D[185]*D[22];$
 $D[192] = D[146]+D[186];$
 $D[193] = D[147]+D[187];$
 $D[194] = D[148]+D[188];$
 $D[195] = D[149]+D[177];$
 $D[196] = D[150]+D[189];$
 $D[197] = D[151]+D[190];$
 $D[198] = D[152]+D[181];$
 $D[199] = D[153]+D[191];$
 $D[200] = D[154]+D[185];$
 $D[201] = D[155]+M4;$
 $D[202] = D[9]*D[197];$
 $D[203] = D[11]*D[194];$
 $D[204] = C23*D[193];$
 $D[205] = D[203]-D[204]+D[83]*D[195];$
 $D[206] = D[204]-D[202]+D[84]*D[198];$
 $D[207] = D[202]-D[203]+D[85]*D[200];$
 $D[208] = D[192]*C23-D[194]*D[9]+D[195]*D[84];$
 $D[209] = -D[192]*D[11]+D[193]*D[9]+D[195]*D[85];$
 $D[210] = -D[193]*D[11]+D[196]*D[9]+D[198]*D[85];$
 $D[211] = -D[196]*C23+D[197]*D[11]+D[198]*D[83];$
 $D[212] = -D[197]*C23+D[199]*D[11]+D[200]*D[83];$
 $D[213] = -D[198]*C23+D[200]*D[11]+D[201]*D[83];$
 $D[214] = D[194]*C23-D[199]*D[9]+D[200]*D[84];$
 $D[215] = D[195]*C23-D[200]*D[9]+D[201]*D[84];$
 $D[216] = -D[195]*D[11]+D[198]*D[9]+D[201]*D[85];$
 $D[217] = D[210]-D[214];$
 $D[218] = D[212]-D[209];$
 $D[219] = D[208]-D[211];$
 $D[220] = D[7]*D[53];$
 $D[221] = -S1*D[55];$
 $D[222] = D[9]*D[57]+D[10]*D[58];$
 $D[223] = D[9]*D[58]+D[10]*M3;$
 $D[224] = D[8]*D[53];$
 $D[225] = C1*D[55];$
 $D[226] = D[11]*D[57]+D[12]*D[58];$
 $D[227] = D[11]*D[58]+D[12]*M3;$
 $D[228] = -S23*D[53];$
 $D[229] = C23*D[57]+D[13]*D[58];$
 $D[230] = C23*D[58]+D[13]*M3;$
 $D[231] = D[220]*D[7]-D[221]*S1+D[222]*D[9]+D[223]*D[10];$
 $D[232] = D[220]*D[8]+D[221]*C1+D[222]*D[11]+D[223]*D[12];$
 $D[233] = -D[220]*S23+D[222]*C23+D[223]*D[13];$
 $D[234] = D[224]*D[8]+D[225]*C1+D[226]*D[11]+D[227]*D[12];$
 $D[235] = -D[224]*S23+D[226]*C23+D[227]*D[13];$
 $D[236] = -D[228]*S23+D[229]*C23+D[230]*D[13];$

```

D[237] = D[192]+D[231];
D[238] = D[193]+D[232];
D[239] = D[194]+D[233];
D[240] = D[195]+D[223];
D[241] = D[196]+D[234];
D[242] = D[197]+D[235];
D[243] = D[198]+D[227];
D[244] = D[199]+D[236];
D[245] = D[200]+D[230];
D[246] = D[201]+M3;
D[247] = -S1*D[242];
D[248] = C1*D[239];
D[249] = D[248]+D[80]*D[240];
D[250] = -D[247]+D[81]*D[243];
D[251] = D[247]-D[248]+D[82]*D[245];
D[252] = D[239]*S1+D[240]*D[81];
D[253] = -D[237]*C1-D[238]*S1+D[240]*D[82];
D[254] = -D[238]*C1-D[241]*S1+D[243]*D[82];
D[255] = D[242]*C1+D[243]*D[80];
D[256] = D[244]*C1+D[245]*D[80];
D[257] = D[245]*C1+D[246]*D[80];
D[258] = D[244]*S1+D[245]*D[81];
D[259] = D[245]*S1+D[246]*D[81];
D[260] = -D[240]*C1-D[243]*S1+D[246]*D[82];
D[261] = D[254]-D[258];
D[262] = D[256]-D[253];
D[263] = D[252]-D[255];
D[264] = C1*C2*D[46]+D[3]*D[47];
D[265] = -C1*S2*D[49];
D[266] = -S1*D[51];
D[267] = C1*C2*D[47]+D[3]*M2;
D[268] = S1*C2*D[46]+D[4]*D[47];
D[269] = -S1*S2*D[49];
D[270] = C1*D[51];
D[271] = S1*C2*D[47]+D[4]*M2;
D[272] = -S2*D[46]-D[2]*D[47];
D[273] = -C2*D[49];
D[274] = -S2*D[47]-D[2]*M2;
D[275] = D[264]*C1*C2-D[265]*C1*S2-D[266]*S1+D[267]*D[3];
D[276] = D[264]*S1*C2-D[265]*S1*S2+D[266]*C1+D[267]*D[4];
D[277] = -D[264]*S2-D[265]*C2-D[267]*D[2];
D[278] = D[268]*S1*C2-D[269]*S1*S2+D[270]*C1+D[271]*D[4];
D[279] = -D[268]*S2-D[269]*C2-D[271]*D[2];
D[280] = -D[272]*S2-D[273]*C2-D[274]*D[2];
D[281] = D[237]+D[275];
D[282] = D[238]+D[276];
D[283] = D[239]+D[277];
D[284] = D[240]+D[267];
D[285] = D[241]+D[278];
D[286] = D[242]+D[279];
D[287] = D[243]+D[271];
D[288] = D[244]+D[280];
D[289] = D[245]+D[274];
D[290] = D[246]+M2;
D[291] = -S1*D[286];
D[292] = C1*D[283];
D[293] = D[291]-D[292];
D[294] = D[283]*S1;
D[295] = -D[281]*C1-D[282]*S1;

```

$D[296] = -D[282]*C1 - D[285]*S1;$
 $D[297] = D[286]*C1;$
 $D[298] = D[288]*C1;$
 $D[299] = D[289]*C1;$
 $D[300] = D[288]*S1;$
 $D[301] = D[289]*S1;$
 $D[302] = -D[284]*C1 - D[287]*S1;$
 $D[303] = D[298] - D[295];$
 $D[304] = D[294] - D[297];$
 $D[305] = C1*D[39];$
 $D[306] = -S1*D[43];$
 $D[307] = -S1*D[44];$
 $D[308] = S1*D[39];$
 $D[309] = C1*D[43];$
 $D[310] = C1*D[44];$
 $D[311] = D[305]*C1 - D[306]*S1;$
 $D[312] = D[305]*S1 + D[306]*C1;$
 $D[313] = D[308]*S1 + D[309]*C1;$
 $D[314] = D[281] + D[311];$
 $D[315] = D[282] + D[312];$
 $D[316] = D[284] + D[307];$
 $D[317] = D[285] + D[313];$
 $D[318] = D[287] + D[310];$
 $D[319] = D[288] + D[41];$
 $D[320] = D[290] + M1;$
 $D[321] = D[314] + D[317];$
 $D[322] = -S1*D[296] - D[300] + C1*D[303];$
 $D[323] = -S1*D[261] + C1*D[262];$
 $D[324] = -S1*D[217] + C1*D[218];$
 $D[325] = -S1*D[171] + C1*D[172];$
 $D[326] = -S1*D[125] + C1*D[126];$
 $D[327] = -S1*D[261] + C1*D[262] + D[80]*D[257] + D[81]*D[259] + D[82]*D[260];$
 $D[328] = -S1*D[217] + C1*D[218] + D[80]*D[213] + D[81]*D[215] + D[82]*D[216];$
 $D[329] = -S1*D[171] + C1*D[172] + D[80]*D[167] + D[81]*D[169] + D[82]*D[170];$
 $D[330] = -S1*D[125] + C1*D[126] + D[80]*D[121] + D[81]*D[123] + D[82]*D[124];$
 $D[331] = D[9]*D[217] + D[11]*D[218] + C23*D[219] + D[83]*D[213] + D[84]*D[215] + D[85]*D[216];$
 $D[332] = D[9]*D[171] + D[11]*D[172] + C23*D[173] + D[83]*D[167] + D[84]*D[169] + D[85]*D[170];$
 $D[333] = D[9]*D[125] + D[11]*D[126] + C23*D[127] + D[83]*D[121] + D[84]*D[123] + D[85]*D[124];$
 $D[334] = D[15]*D[171] + D[18]*D[172] + D[21]*D[173] + D[86]*D[167] + D[87]*D[169] + D[88]*D[170];$
 $D[335] = D[15]*D[125] + D[18]*D[126] + D[21]*D[127] + D[86]*D[121] + D[87]*D[123] + D[88]*D[124];$
 $D[336] = D[24]*D[125] + D[26]*D[126] + D[28]*D[127] + D[89]*D[121] + D[90]*D[123] + D[91]*D[124];$
 $D[337] = D[292] - D[291];$
 $D[338] = D[249] + D[250];$
 $D[339] = D[205] + D[206];$
 $D[340] = D[159] + D[160];$
 $D[341] = D[113] + D[114];$
 $D[342] = S1*D[256];$
 $D[343] = -C1*D[249] - S1*D[255];$
 $D[344] = -C1*D[252] - S1*D[250];$
 $D[345] = C1*D[258];$
 $D[346] = C1*D[251];$
 $D[347] = S1*D[251];$
 $D[348] = D[344] - D[347];$

$D[349] = D[346] - D[343];$
 $D[350] = D[342] - D[345];$
 $D[351] = S1 * D[212];$
 $D[352] = -C1 * D[205] - S1 * D[211];$
 $D[353] = -C1 * D[208] - S1 * D[206];$
 $D[354] = C1 * D[214];$
 $D[355] = C1 * D[207];$
 $D[356] = S1 * D[207];$
 $D[357] = D[353] - D[356];$
 $D[358] = D[355] - D[352];$
 $D[359] = D[351] - D[354];$
 $D[360] = S1 * D[166];$
 $D[361] = -C1 * D[159] - S1 * D[165];$
 $D[362] = -C1 * D[162] - S1 * D[160];$
 $D[363] = C1 * D[168];$
 $D[364] = C1 * D[161];$
 $D[365] = S1 * D[161];$
 $D[366] = D[362] - D[365];$
 $D[367] = D[364] - D[361];$
 $D[368] = D[360] - D[363];$
 $D[369] = S1 * D[120];$
 $D[370] = -C1 * D[113] - S1 * D[119];$
 $D[371] = -C1 * D[116] - S1 * D[114];$
 $D[372] = C1 * D[122];$
 $D[373] = C1 * D[115];$
 $D[374] = S1 * D[115];$
 $D[375] = D[371] - D[374];$
 $D[376] = D[373] - D[370];$
 $D[377] = D[369] - D[372];$
 $D[378] = S1 * D[212] + D[81] * D[213];$
 $D[379] = -C1 * D[205] - S1 * D[211] + D[82] * D[213];$
 $D[380] = -C1 * D[208] - S1 * D[206] + D[82] * D[215];$
 $D[381] = C1 * D[214] + D[80] * D[215];$
 $D[382] = C1 * D[207] + D[80] * D[216];$
 $D[383] = S1 * D[207] + D[81] * D[216];$
 $D[384] = D[380] - D[383];$
 $D[385] = D[382] - D[379];$
 $D[386] = D[378] - D[381];$
 $D[387] = S1 * D[166] + D[81] * D[167];$
 $D[388] = -C1 * D[159] - S1 * D[165] + D[82] * D[167];$
 $D[389] = -C1 * D[162] - S1 * D[160] + D[82] * D[169];$
 $D[390] = C1 * D[168] + D[80] * D[169];$
 $D[391] = C1 * D[161] + D[80] * D[170];$
 $D[392] = S1 * D[161] + D[81] * D[170];$
 $D[393] = D[389] - D[392];$
 $D[394] = D[391] - D[388];$
 $D[395] = D[387] - D[390];$
 $D[396] = S1 * D[120] + D[81] * D[121];$
 $D[397] = -C1 * D[113] - S1 * D[119] + D[82] * D[121];$
 $D[398] = -C1 * D[116] - S1 * D[114] + D[82] * D[123];$
 $D[399] = C1 * D[122] + D[80] * D[123];$
 $D[400] = C1 * D[115] + D[80] * D[124];$
 $D[401] = S1 * D[115] + D[81] * D[124];$
 $D[402] = D[398] - D[401];$
 $D[403] = D[400] - D[397];$
 $D[404] = D[396] - D[399];$
 $D[405] = C23 * D[159] - D[9] * D[166] + D[84] * D[167];$
 $D[406] = -D[11] * D[159] + D[9] * D[165] + D[85] * D[167];$
 $D[407] = -D[11] * D[162] + D[9] * D[160] + D[85] * D[169];$

$D[408] = -C23*D[160]+D[11]*D[168]+D[83]*D[169];$
 $D[409] = -C23*D[164]+D[11]*D[161]+D[83]*D[170];$
 $D[410] = C23*D[163]-D[9]*D[161]+D[84]*D[170];$
 $D[411] = D[407]-D[410];$
 $D[412] = D[409]-D[406];$
 $D[413] = D[405]-D[408];$
 $D[414] = C23*D[113]-D[9]*D[120]+D[84]*D[121];$
 $D[415] = -D[11]*D[113]+D[9]*D[119]+D[85]*D[121];$
 $D[416] = -D[11]*D[116]+D[9]*D[114]+D[85]*D[123];$
 $D[417] = -C23*D[114]+D[11]*D[122]+D[83]*D[123];$
 $D[418] = -C23*D[118]+D[11]*D[115]+D[83]*D[124];$
 $D[419] = C23*D[117]-D[9]*D[115]+D[84]*D[124];$
 $D[420] = D[416]-D[419];$
 $D[421] = D[418]-D[415];$
 $D[422] = D[414]-D[417];$
 $D[423] = D[21]*D[113]-D[15]*D[120]+D[87]*D[121];$
 $D[424] = -D[18]*D[113]+D[15]*D[119]+D[88]*D[121];$
 $D[425] = -D[18]*D[116]+D[15]*D[114]+D[88]*D[123];$
 $D[426] = -D[21]*D[114]+D[18]*D[122]+D[86]*D[123];$
 $D[427] = -D[21]*D[118]+D[18]*D[115]+D[86]*D[124];$
 $D[428] = D[21]*D[117]-D[15]*D[115]+D[87]*D[124];$
 $D[429] = D[425]-D[428];$
 $D[430] = D[427]-D[424];$
 $D[431] = D[423]-D[426];$
 $D[432] = S1*D[295]-C1*D[296];$
 $D[433] = S1*D[253]-C1*D[254];$
 $D[434] = -S1*D[348]+C1*D[349];$
 $D[435] = S1*D[209]-C1*D[210];$
 $D[436] = -S1*D[357]+C1*D[358];$
 $D[437] = -S1*D[384]+C1*D[385];$
 $D[438] = S1*D[163]-C1*D[164];$
 $D[439] = -S1*D[366]+C1*D[367];$
 $D[440] = -S1*D[393]+C1*D[394];$
 $D[441] = -S1*D[411]+C1*D[412];$
 $D[442] = S1*D[117]-C1*D[118];$
 $D[443] = -S1*D[375]+C1*D[376];$
 $D[444] = -S1*D[402]+C1*D[403];$
 $D[445] = -S1*D[420]+C1*D[421];$
 $D[446] = -S1*D[429]+C1*D[430];$
 $D[447] = S1*D[253]-C1*D[254];$
 $D[448] = -S1*D[348]+C1*D[349];$
 $D[449] = S1*D[209]-C1*D[210];$
 $D[450] = -S1*D[357]+C1*D[358];$
 $D[451] = -S1*D[384]+C1*D[385];$
 $D[452] = S1*D[163]-C1*D[164];$
 $D[453] = -S1*D[366]+C1*D[367];$
 $D[454] = -S1*D[393]+C1*D[394];$
 $D[455] = -S1*D[411]+C1*D[412];$
 $D[456] = S1*D[117]-C1*D[118];$
 $D[457] = -S1*D[375]+C1*D[376];$
 $D[458] = -S1*D[402]+C1*D[403];$
 $D[459] = -S1*D[420]+C1*D[421];$
 $D[460] = -S1*D[429]+C1*D[430];$
 $D[461] = -D[9]*D[209]-D[11]*D[210]+C23*D[339];$
 $D[462] = D[9]*D[357]+D[11]*D[358]+C23*D[359];$
 $D[463] = D[9]*D[384]+D[11]*D[385]+C23*D[386];$
 $D[464] = -D[9]*D[163]-D[11]*D[164]+C23*D[340];$
 $D[465] = D[9]*D[366]+D[11]*D[367]+C23*D[368];$
 $D[466] = D[9]*D[393]+D[11]*D[394]+C23*D[395];$

$D[467] = D[9]*D[411]+D[11]*D[412]+C23*D[413];$
 $D[468] = -D[9]*D[117]-D[11]*D[118]+C23*D[341];$
 $D[469] = D[9]*D[375]+D[11]*D[376]+C23*D[377];$
 $D[470] = D[9]*D[402]+D[11]*D[403]+C23*D[404];$
 $D[471] = D[9]*D[420]+D[11]*D[421]+C23*D[422];$
 $D[472] = D[9]*D[429]+D[11]*D[430]+C23*D[431];$
 $D[473] = -D[15]*D[163]-D[18]*D[164]+D[21]*D[340];$
 $D[474] = D[15]*D[366]+D[18]*D[367]+D[21]*D[368];$
 $D[475] = D[15]*D[393]+D[18]*D[394]+D[21]*D[395];$
 $D[476] = D[15]*D[411]+D[18]*D[412]+D[21]*D[413];$
 $D[477] = -D[15]*D[117]-D[18]*D[118]+D[21]*D[341];$
 $D[478] = D[15]*D[375]+D[18]*D[376]+D[21]*D[377];$
 $D[479] = D[15]*D[402]+D[18]*D[403]+D[21]*D[404];$
 $D[480] = D[15]*D[420]+D[18]*D[421]+D[21]*D[422];$
 $D[481] = D[15]*D[429]+D[18]*D[430]+D[21]*D[431];$
 $D[482] = -D[24]*D[117]-D[26]*D[118]+D[28]*D[341];$
 $D[483] = D[24]*D[375]+D[26]*D[376]+D[28]*D[377];$
 $D[484] = D[24]*D[402]+D[26]*D[403]+D[28]*D[404];$
 $D[485] = D[24]*D[420]+D[26]*D[421]+D[28]*D[422];$
 $D[486] = D[24]*D[429]+D[26]*D[430]+D[28]*D[431];$
 $D[487] = gz*D[124];$
 $D[488] = gz*D[170];$
 $D[489] = gz*D[216];$
 $D[490] = gz*D[260];$
 $D[491] = gz*D[302];$
 $D[492] = V1*V2;$
 $D[493] = V1*V3;$
 $D[494] = V1*V4;$
 $D[495] = V1*V5;$
 $D[496] = V1*V6;$
 $D[497] = V2*V3;$
 $D[498] = V2*V4;$
 $D[499] = V2*V5;$
 $D[500] = V2*V6;$
 $D[501] = V3*V4;$
 $D[502] = V3*V5;$
 $D[503] = V3*V6;$
 $D[504] = V4*V5;$
 $D[505] = V4*V6;$
 $D[506] = V5*V6;$
 $D[507] = V1*V1;$
 $D[508] = V2*V2;$
 $D[509] = V3*V3;$
 $D[510] = V4*V4;$
 $D[511] = V5*V5;$
 $D[512] = V6*V6;$
 $D[513] = D[321]*AC1+D[304]*AC2+D[263]*AC3+D[219]*AC4+D[173]*AC5+D[127]*AC6;$
 $D[514] = D[337]*D[492]+D[338]*D[493]+D[339]*D[494]+D[340]*D[495]+$
 $D[341]*D[496]+D[433]*D[497];$
 $D[515] = D[514]+D[435]*D[498]+D[438]*D[499]+D[442]*D[500]+D[449]*$
 $D[501]+D[452]*D[502];$
 $D[516] = D[515]+D[456]*D[503]+D[464]*D[504]+D[468]*D[505]+D[477]*D[506];$
 $D[517] = D[432]*D[508]+D[447]*D[509]+D[461]*D[510]+D[473]*D[511]+$
 $D[482]*D[512];$
 $D[518] = D[513]+D[516]+D[516]+D[517]+P1;$
 $D[519] = D[304]*AC1+D[322]*AC2+D[323]*AC3+D[324]*AC4+D[325]*AC5+D[326]*AC6;$
 $D[520] = D[350]*D[493]+D[359]*D[494]+D[368]*D[495]+D[377]*D[496]+$
 $D[434]*D[497];$
 $D[521] = D[520]+D[436]*D[498]+D[439]*D[499]+D[443]*D[500]+D[450]*$

```

D[501]+D[453]*D[502];
D[522] = D[521]+D[457]*D[503]+D[465]*D[504]+D[469]*D[505]+D[478]*D[506];
D[523] = -D[337]*D[507]+D[448]*D[509]+D[462]*D[510]+D[474]*
D[511]+D[483]*D[512];
D[524] = D[519]+D[522]+D[522]+D[523]-D[491]+P2;
D[525] = D[263]*AC1+D[323]*AC2+D[327]*AC3+D[328]*AC4+D[329]*AC5+D[330]*AC6;
D[526] = -D[350]*D[492]+D[386]*D[494]+D[395]*D[495]+D[404]*D[496];
D[527] = D[526]+D[437]*D[498]+D[440]*D[499]+D[444]*D[500]+D[451]*
D[501]+D[154]*D[502];
D[528] = D[527]+D[458]*D[503]+D[466]*D[504]+D[470]*D[505]+D[479]*D[506];
D[529] = -D[338]*D[507]-D[434]*D[508]+D[463]*D[510]+D[475]*
D[511]+D[484]*D[512];
D[530] = D[525]+D[528]+D[528]+D[529]-D[490]+P3;
D[531] = D[219]*AC1+D[324]*AC2+D[328]*AC3+D[331]*AC4+D[332]*AC5+D[333]*AC6;
D[532] = -D[359]*D[492]-D[386]*D[493]+D[413]*D[495]+D[422]*
D[496]-D[437]*D[497];
D[533] = D[532]+D[441]*D[499]+D[445]*D[500]+D[455]*D[502];
D[534] = D[533]+D[459]*D[503]+D[467]*D[504]+D[471]*D[505]+D[480]*D[506];
D[535] = -D[339]*D[507]-D[436]*D[508]-D[451]*D[509]+D[476]*
D[511]+D[485]*D[512];
D[536] = D[531]+D[534]+D[534]+D[535]-D[489]+P4;
D[537] = D[173]*AC1+D[325]*AC2+D[329]*AC3+D[332]*AC4+D[334]*AC5+D[335]*AC6;
D[538] = -D[368]*D[492]-D[395]*D[493]-D[413]*D[494]+D[431]*
D[496]-D[440]*D[497];
D[539] = D[538]-D[441]*D[498]+D[446]*D[500]-D[455]*D[501];
D[540] = D[539]+D[460]*D[503]+D[472]*D[505]+D[481]*D[506];
D[541] = -D[340]*D[507]-D[439]*D[508]-D[454]*D[509]-D[467]*
D[510]+D[486]*D[512];
D[542] = D[537]+D[540]+D[540]+D[541]-D[488]+P5;
D[543] = D[127]*AC1+D[326]*AC2+D[330]*AC3+D[333]*AC4+D[335]*AC5+D[336]*AC6;
D[544] = -D[377]*D[492]-D[404]*D[493]-D[422]*D[494]-D[431]*
D[495]-D[444]*D[497];
D[545] = D[544]-D[445]*D[498]-D[446]*D[499]-D[459]*D[501]-D[460]*D[502];
D[546] = D[545]-D[472]*D[504];
D[547] = -D[341]*D[507]-D[443]*D[508]-D[458]*D[509]-D[471]*
D[510]-D[481]*D[511];
D[548] = D[543]+D[546]+D[546]+D[547]-D[487]+P6;

```

EQUACOES DOS COEFICIENTES:

```

/** Coeficientes de Inercia - A[i][j] **/

```

```

A[0][0] = D[321];
A[0][1] = D[304];
A[0][2] = D[263];
A[0][3] = D[219];
A[0][4] = D[173];
A[0][5] = D[127];
A[1][0] = D[304];
A[1][1] = D[322];
A[1][2] = D[323];
A[1][3] = D[324];
A[1][4] = D[325];
A[1][5] = D[326];
A[2][0] = D[263];
A[2][1] = D[323];
A[2][2] = D[327];
A[2][3] = D[328];
A[2][4] = D[329];
A[2][5] = D[330];

```

```

A[3][0] = D[219];
A[3][1] = D[324];
A[3][2] = D[328];
A[3][3] = D[331];
A[3][4] = D[332];
A[3][5] = D[333];
A[4][0] = D[173];
A[4][1] = D[325];
A[4][2] = D[329];
A[4][3] = D[332];
A[4][4] = D[334];
A[4][5] = D[335];
A[5][0] = D[127];
A[5][1] = D[326];
A[5][2] = D[330];
A[5][3] = D[333];
A[5][4] = D[335];
A[5][5] = D[336];
/** Coeficientes de Coriolis - COR[i][j] **/
COR[0][0] = D[337];
COR[0][1] = D[338];
COR[0][2] = D[339];
COR[0][3] = D[340];
COR[0][4] = D[341];
COR[0][5] = D[433];
COR[0][6] = D[435];
COR[0][7] = D[438];
COR[0][8] = D[442];
COR[0][9] = D[449];
COR[0][10] = D[452];
COR[0][11] = D[456];
COR[0][12] = D[464];
COR[0][13] = D[468];
COR[0][14] = D[477];
COR[1][0] = +0.0;
COR[1][1] = D[350];
COR[1][2] = D[359];
COR[1][3] = D[368];
COR[1][4] = D[377];
COR[1][5] = D[434];
COR[1][6] = D[436];
COR[1][7] = D[439];
COR[1][8] = D[443];
COR[1][9] = D[450];
COR[1][10] = D[453];
COR[1][11] = D[457];
COR[1][12] = D[465];
COR[1][13] = D[469];
COR[1][14] = D[478];
COR[2][0] = -D[350];
COR[2][1] = +0.0;
COR[2][2] = D[386];
COR[2][3] = D[395];
COR[2][4] = D[404];
COR[2][5] = +0.0;
COR[2][6] = D[437];
COR[2][7] = D[440];
COR[2][8] = D[444];
COR[2][9] = D[451];

```

```

COR[2][10] = D[454];
COR[2][11] = D[458];
COR[2][12] = D[466];
COR[2][13] = D[470];
COR[2][14] = D[479];
COR[3][0] = -D[359];
COR[3][1] = -D[386];
COR[3][2] = +0.0;
COR[3][3] = D[413];
COR[3][4] = D[422];
COR[3][5] = -D[437];
COR[3][6] = +0.0;
COR[3][7] = D[441];
COR[3][8] = D[445];
COR[3][9] = +0.0;
COR[3][10] = D[455];
COR[3][11] = D[459];
COR[3][12] = D[467];
COR[3][13] = D[471];
COR[3][14] = D[480];
COR[4][0] = -D[368];
COR[4][1] = -D[395];
COR[4][2] = -D[413];
COR[4][3] = +0.0;
COR[4][4] = D[431];
COR[4][5] = -D[440];
COR[4][6] = -D[441];
COR[4][7] = +0.0;
COR[4][8] = D[446];
COR[4][9] = -D[455];
COR[4][10] = +0.0;
COR[4][11] = D[460];
COR[4][12] = +0.0;
COR[4][13] = D[472];
COR[4][14] = D[481];
COR[5][0] = -D[377];
COR[5][1] = -D[404];
COR[5][2] = -D[422];
COR[5][3] = -D[431];
COR[5][4] = +0.0;
COR[5][5] = -D[444];
COR[5][6] = -D[445];
COR[5][7] = -D[446];
COR[5][8] = +0.0;
COR[5][9] = -D[459];
COR[5][10] = -D[460];
COR[5][11] = +0.0;
COR[5][12] = -D[472];
COR[5][13] = +0.0;
COR[5][14] = +0.0;
/** Coeficientes de Centrifuga - CEN[i][j] **/
CEN[0][0] = +0.0;
CEN[0][1] = D[432];
CEN[0][2] = D[447];
CEN[0][3] = D[461];
CEN[0][4] = D[473];
CEN[0][5] = D[482];
CEN[1][0] = -D[337];
CEN[1][1] = +0.0;

```

```

CEN[1][2] = D[448];
CEN[1][3] = D[462];
CEN[1][4] = D[474];
CEN[1][5] = D[483];
CEN[2][0] = -D[338];
CEN[2][1] = -D[434];
CEN[2][2] = +0.0;
CEN[2][3] = D[463];
CEN[2][4] = D[475];
CEN[2][5] = D[484];
CEN[3][0] = -D[339];
CEN[3][1] = -D[436];
CEN[3][2] = -D[451];
CEN[3][3] = +0.0;
CEN[3][4] = D[476];
CEN[3][5] = D[485];
CEN[4][0] = -D[340];
CEN[4][1] = -D[439];
CEN[4][2] = -D[454];
CEN[4][3] = -D[467];
CEN[4][4] = +0.0;
CEN[4][5] = D[486];
CEN[5][0] = -D[341];
CEN[5][1] = -D[443];
CEN[5][2] = -D[458];
CEN[5][3] = -D[471];
CEN[5][4] = -D[481];
CEN[5][5] = +0.0;
/** Termos de Gravidade - GRA[i] **/
GRA[0] = +0.0;
GRA[1] = D[491];
GRA[2] = D[490];
GRA[3] = D[489];
GRA[4] = D[488];
GRA[5] = D[487];
/** Termos de Perturbacoes - P(i) **/
P[0] = P1;
P[1] = P2;
P[2] = P3;
P[3] = P4;
P[4] = P5;
P[5] = P6;

```

APÊNDICE A2

INFORMAÇÕES RESULTANTES DOS PROGRAMAS PARA
GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE MODELOS

A2.1. PROGRAMA DE GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE MODELOS GEOMÉTRICOS

Após inicializados os parâmetros geométricos de um robô, será criado pelo módulo de inicialização o arquivo "nome do robô.dh ", contendo estes parâmetros. Usando-se este arquivo na geração do Modelo Geométrico, serão criados os seguintes arquivos:

- "nome do robô".mgd
- "nome do robô".ea
- "nome do robô".mt
- "nome do robô".mex
- "nome do robô".mel

Exemplo: Para o arquivo de dados de parâmetros geométricos "puma.dh" do robô Puma, terão sido gerados:

- puma.ea; puma.mel; puma.mgd;
- puma.mt; puma.mex;

Estes arquivos contêm as seguintes informações:

- "nome do robô".mgd

Este arquivo contém o modelo geométrico direto, constando de expressões compiláveis em linguagem "C", além das expressões das equações auxiliares geradas, caso existam. As equações auxiliares são apresentadas na forma:

$$D[n] = [\text{expressão compilável em "C"}]$$

- "nome do robô".mel

Neste arquivo estão gravadas as matrizes elementares, o modelo geométrico, as equações auxiliares geradas e a contabilidade do número de operações matemáticas necessárias para avaliar numericamente o modelo.

- "nome do robô".ea

Este arquivo contém as expressões das equações auxiliares geradas durante a obtenção automática do modelo geométrico.

- "nome do robô".mt e "nome do robô".mex

Estes arquivos contém as expressões dos elementos das matrizes intermediárias. A extensão "mex" contém as expressões das matrizes intermediárias na forma compilável.

Caso seja necessário obter listagens de algum destes arquivos, isto deve ser feito antes da gravação de outro modelo para o mesmo arquivo de dados (para outros arquivos isto não é necessário), pois o sistema mantém somente a última versão dos arquivos. Este procedimento evita o congestionamento da memória de massa.

NOTA IMPORTANTE: Os Modelos Geométricos que servem como dados de entrada para a geração de modelos dinâmicos são os gerados pelos métodos "1", "2" ou "5" apenas. Caso isto não ocorra o Módulo de Geração de Modelos Dinâmicos identificará a incompatibilidade e solicitará que seja gerado novo arquivo.

A2.2. PROGRAMA DE GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE MODELOS DINÂMICOS

Arquivos Gerados:

Após a inicialização dos parâmetros dinâmicos de um determinado robô, o sistema cria um arquivo "nome do robô.ine", que contém estes parâmetros. Usando-se este arquivo para gerar o modelo dinâmico deste robô, teremos as informações do número de operações para avaliar o modelo matematicamente, número de equações auxiliares geradas, além dos seguintes arquivos resultantes:

- "nome do robô".sim

Este arquivo contém todas as equações necessárias para simular os efeitos dinâmicos do robô de forma separada (inércia, centrífuga, coriolis ou gravidade) ou somente as forças generalizadas.

- "nome do robô".din

Este arquivo contém todas as informações referentes aos dados de entrada (tabelas contendo parâmetros geométricos e dinâmicos) e os resultados gerados, que são os termos das matrizes de inércia, coriolis, centrífuga, gravidade e perturbações.

No final deste arquivo é gravado o número de operações e o número de senos e/ou cossenos necessários para avaliar o modelo.

Este arquivo também pode ser usado para simulação, mas a sua principal finalidade é a documentação.

- "nome do robô".eac

Neste arquivo são armazenadas as equações auxiliares necessárias para avaliar o modelo numericamente.

Para cada 260 equações auxiliares do modelo, é gerado automaticamente um arquivo "nome do robô*".eac, como mostrado abaixo:

```
"nome-do-roboa1".eac  
"nome-do-roboa2".eac  
:  
:  
"nome-do-roboan".eac
```

São gerados estes vários arquivos, devido a limitações do PC-XT.

Convenção Adotada:

$A[i][j] \Leftrightarrow$ Termo da linha i e coluna j da matriz de inércia.

$COR[i][j] \Leftrightarrow$ Termo da linha i e coluna j da matriz de Coriolis.

$CEN[i][j] \Leftrightarrow$ Termo da linha i e coluna j da matriz de centrífuga.

$GRA[i] \Leftrightarrow$ Termo i do vetor de gravidade.

$P[i] \Leftarrow$ Termo i de vetor de perturbações.

$FIN[i] \Leftrightarrow$ Termo de força de inércia na junta i .

$TIN[i][j] \Leftrightarrow$ Termo de acoplamento de inércia entre juntas. Produto da
matriz de inércia e vetor de acelerações.

$FCOR[i] \Leftrightarrow$ Força de coriolis na ligação i .

$FCEN[i] \Leftrightarrow$ Força centrífuga na ligação i .

$FGRA [i] \Leftrightarrow$ Força de gravidade na ligação i .

$FPER[i] \Leftrightarrow$ Forças de perturbações na ligação i .

$FGEN[i] \Leftarrow$ Força generalizada na ligação i .

APÊNDICE A3

ALGUNS ELEMENTOS BÁSICOS PARA O CÁLCULO E SIMPLIFICAÇÕES DE MODELOS

A3.1. OBTENÇÃO DE Q_1

Pode ser visto em [PAUL 81] que uma transformação diferencial de rotação e translação Δ é composta de dois vetores: d , de translação diferencial e δ de rotação diferencial:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -\delta_z & \delta_y & d_x \\ \delta_z & 0 & -\delta_x & d_y \\ -\delta_y & \delta_x & 0 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (A3.1)$$

Assim, para uma rotação diferencial em torno do eixo z, teremos:

$$Q_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (A3.2)$$

e para uma translação diferencial ao longo de z teremos:

$$Q_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (A3.3)$$

A3.2. DERIVADA PARCIAL DE $T_{1,1+1}$ EM RELAÇÃO A q_1 E OBTENÇÃO DE ${}^{1+1}\Delta_1$

Sabemos que a matriz $T_{1,1+1}$ é a matriz i de passagem do órgão terminal para a base, função das variáveis $q_1, q_2, \dots, q_1, \dots, q_n$ onde n é o número de graus de liberdade, logo a derivada de $T_{1,1+1}$ em relação à variável q_1 será:

$$\frac{\partial T_{1,1+1}}{\partial q_1} = T_{12} \cdot T_{23} \dots \frac{\partial T_{i,1+1}}{\partial q_1} \dots T_{1,1+1} \quad (A3.4)$$

ou, usando a definição de Q_1 anterior:

$$\frac{\partial T_{1,1+1}}{\partial q_1} = T_{1,i} \cdot Q_i \cdot T_{i,1+1} \quad (A3.5)$$

podemos reescrever como:

$$\frac{\partial T_{1,1+1}}{\partial q_1} = T_{1,i} \cdot T_{i,1+1} \cdot (T_{i,1+1})^{-1} \cdot Q_i \cdot T_{i,1+1} \quad (A3.6)$$

adotando-se que:

$$(T_{i,1+1})^{-1} = T_{1+1,i} \quad (A3.7)$$

teremos:

$$\frac{\partial T_{1,1+1}}{\partial q_1} = T_{1,1+1} \cdot T_{1+1,i} \cdot Q_i \cdot T_{i,1+1} \quad (A3.8)$$

Esta forma de apresentar é fundamental na otimização da modelagem dinâmica.

No Capítulo 3 é usada a notação ${}^{l+1}\Delta_i$ que corresponde a:

$${}^{l+1}\Delta_i = T_{l+1,i} \cdot Q_i \cdot T_{i,l+1} \quad (A3.9)$$

e conseqüentemente:

$$\frac{\partial T_{i,l+1}}{\partial q_i} = T_{i,l+1} \cdot {}^{l+1}\Delta_i \quad (A3.10)$$

A3.3. OBTENÇÃO E SIMPLIFICAÇÃO DE $\left| \begin{array}{c} \Omega_{i,l+1} \\ -\frac{\Omega_{i,l+1}}{0} \end{array} \right|$

Provaremos que sempre a última linha de ${}^{l+1}\Delta_i$ é nula .

Mostraremos também que $\left| \begin{array}{c} \Omega_{i,l+1} \\ -\frac{\Omega_{i,l+1}}{0} \end{array} \right|$ é equivalente a ${}^{l+1}\Delta_i$, explicitando esta propriedade. Usando a equação (A3.9) e:

Definindo $T_{i,l+1}$ como:

$$T_{i,l+1} = \left| \begin{array}{ccc|c} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \quad (A3.11)$$

conseqüentemente:

$$T_{l+1,i} = \left| \begin{array}{ccc|c} n_x & n_y & n_z & -\bar{p} \cdot \bar{n} \\ o_x & o_y & o_z & -\bar{p} \cdot \bar{o} \\ a_x & a_y & a_z & -\bar{p} \cdot \bar{a} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \quad (A3.12)$$

e:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{p} = p_x + p_y + p_z \\ \bar{n} = n_x + n_y + n_z \\ \bar{o} = o_x + o_y + o_z \\ \bar{a} = a_x + a_y + a_z \end{array} \right. \quad (A3.13)$$

usando as definições de Q_i dadas nas equações (A3.2) e (A3.3) e substituindo (A3.11) e (A3.12) em (A3.9) e efetuando-se os produtos teremos:

- Para Ligação Rotacional:

$${}^{l+1}\Delta_i = \left| \begin{array}{ccc|c} 0 & n_{yx}o - n_{xy}o & n_{yx}a - n_{xy}a & n_{yx}p - n_{xy}p \\ o_{yx}n - o_{xy}n & 0 & o_{yx}a - o_{xy}a & o_{yx}p - o_{xy}p \\ a_{yx}n - a_{xy}n & o_{xy}a - o_{yx}a & 0 & a_{yx}p - a_{xy}p \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \quad (A3.14)$$

Sabendo-se que $\bar{a} = \bar{n} \times \bar{o}$, não é difícil provar que:

$$\left. \begin{aligned} n_z &= o_{xy} a_y - o_{yx} a_x \\ o_z &= n_{yx} a_x - n_{xy} a_y \\ a_z &= o_{yx} n_x - o_{xy} n_y \end{aligned} \right\} \quad (A3.15)$$

Assim, a matriz $^{1+1}\Delta_1$ pode ser simplificada e reescrita na forma em que explicita a última linha nula, resultando em:

$$\left| \begin{array}{c} \Omega_{1,1+1} \\ 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc|c} 0 & -a_z & o_z & n_{yx} p_x - n_{xy} p_y \\ a_z & 0 & -n_z & o_{yx} p_x - o_{xy} p_y \\ -o_z & n_z & 0 & a_{yx} p_x - a_{xy} p_y \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \quad (A3.16)$$

Analogamente para uma **Ligação translacional**:

$$\left| \begin{array}{c} \Omega_1 \\ 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & n_z \\ 0 & 0 & 0 & o_z \\ 0 & 0 & 0 & a_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \quad (A3.17)$$

APÊNDICE A4

GERAÇÃO DE MODELOS E CONTROLE

O problema de controle de robôs constitui ainda hoje um dos grandes desafios da robótica. Mesmo com a acelerada evolução da informática, ainda são usados nos robôs comercialmente disponíveis, controladores simples (por exemplo PID) que o consideram como um sistema linear onde cada junta atua desacoplada do resto do sistema. Estes controladores são de baixo custo e de fácil implementação, mas perdem muito em desempenho, limitando o uso dos robôs a aplicações simples que exijam baixas velocidades.

Como sabemos, um robô é um sistema não-linear e fortemente acoplado, cuja dinâmica pode ser representada por um sistema de n equações diferenciais de segunda ordem a coeficientes não-lineares e variantes com o estado do robô, chamado modelo dinâmico. Uma solução satisfatória é a de utilizar as informações que contém este modelo para desenvolver uma estratégia de controle, normalmente conhecida como *controle dinâmico*.

Apesar de parecer natural a implementação de um controle dinâmico, na verdade ela não é simples e ainda existem algumas barreiras a serem vencidas que limitam o seu uso fora dos laboratórios de pesquisa. [CRAIG 88] aponta duas razões principais para isso: a primeira delas seria de natureza econômica, ou seja, dotar o controlador com a capacidade de cálculo requerida para a avaliação do modelo dinâmico em tempo real. A segunda seria devido às imprecisões do modelo. Entretanto, ainda resta o problema da identificação de parâmetros (fixos e variáveis com a manipulação) e dos efeitos não considerados ou não modelados, tais como a flexibilidade, atritos, etc.

Apresentaremos a seguir, como motivação à modelagem geométrica e dinâmica, algumas estratégias de controle mais estudadas em robótica.

É evidente que qualquer destas soluções funcionaria satisfatoriamente em substituição a um controlador clássico, sendo o maior problema seu custo de implementação. Para cada estrutura mecânica teríamos uma solução mais adequada e a priori não poderíamos dizer qual é a melhor.

A4.1. Estratégia de Controle Dinâmico

Assim denominada por utilizar as equações do modelo dinâmico, esta estratégia apresenta a característica de que quanto melhor for a identificação dos parâmetros e a modelagem dinâmica, melhor será o seu desempenho. A identificação de parâmetros normalmente é feita em dois estágios: "off-line" dos parâmetros constantes que não variam com a manipulação e "on-line" dos parâmetros que variam com a manipulação, principalmente os do último corpo.

Atualmente existe uma tendência de se retornar ao controle dinâmico, por duas razões principais: a primeira seria devido às novas tecnologias de construção de manipuladores (exemplo: acionamento direto) que eliminam ou diminuem alguns efeitos difíceis de serem modelados ou não-modeláveis a nível de acionamento, mas acentuam os efeitos não lineares devido ao movimento da estrutura articulada. A segunda seria a evolução da informática e o desenvolvimento das técnicas de modelagem e identificação [CONTI 87]. Existe possibilidade de tratar no Espaço Operacional este tipo de controle, onde é comumente conhecido como "Resolved- Acceleration Control" [KHATIB 80].

Na Figura A4.1 mostra-se um esquema geral do torque calculado (em inglês, "computed torque").

Neste método devem ser fornecidas as posições, velocidades e acelerações desejadas. Apresenta um bom desempenho quando a modelagem dinâmica é rigorosa e os parâmetros são identificados precisamente, mas exige um grande esforço computacional [KHOSLA 86]. Um estudo da Robustez deste algoritmo é apresentado em [CRAIG 88].

$A(q)$ - Matriz de inércia

$V(q, \dot{q})$ - Vetor de força centrífuga e Coriolis -

$F(q, \dot{q})$ - Vetor de força de atrito

$q, \dot{q}, \ddot{q}$ - Posições, velocidades e acelerações

K_p, K_v - Matrizes $n \times n$ diagonais de ganhos constantes.

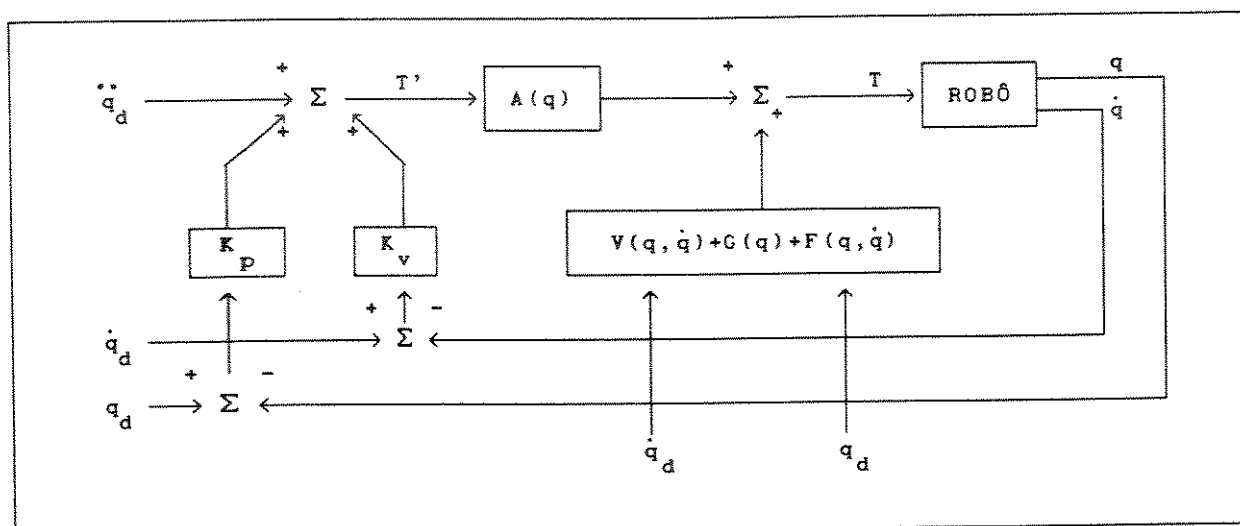


Figura A4.1 - Esquema geral do torque calculado

A4.2. Estratégia de Controle Adaptativo

Consiste em técnicas que permitem o ajuste automático em tempo real dos parâmetros do controlador, com o objetivo de manter um bom nível de desempenho quando a dinâmica do sistema varia com o tempo ou aparecem perturbações externas.

Os principais motivos de se usar um controlador adaptativo em um robô são: insensibilidade do sistema às variações de parâmetros, custo de implementação reduzido e algoritmos adequados à implementação descentralizada (Paralelo, multiprocessador, etc.) [CONTI 87].

Os esquemas mais comuns de controle adaptativo são os "Controle Adaptativo a Modelo de Referência" (do inglês MRAC - Model Reference Adaptative Control) e o "Controle Adaptativo Auto-Ajustável" (mais conhecido como STAC: Self-Tuning Adaptative Control). Alguns destes esquemas de controle adaptativo são propostos em [BOUZOUIA 89] e [CRAIG 86]. Uma análise da estabilidade destes controladores pode ser encontrada em [CRAIG 88] e [HSIA 86].

a) Controle Adaptativo a Modelo de Referência - MRAC

Na Figura A4.2 mostramos um esquema de um Sistema de Controle Adaptativo Direto (o robô é considerado uma caixa-preta, tomando-se somente informações da referência e da saída para ajustar os parâmetros do sistema de controle adaptativo) a Modelo de Referência.

A vantagem deste sistema é sua velocidade de adaptação. Existem vários esquemas de MRAC que podem ser classificados segundo o mecanismo de adaptação utilizado. [CONTI 87] apresenta um estudo destes esquemas.

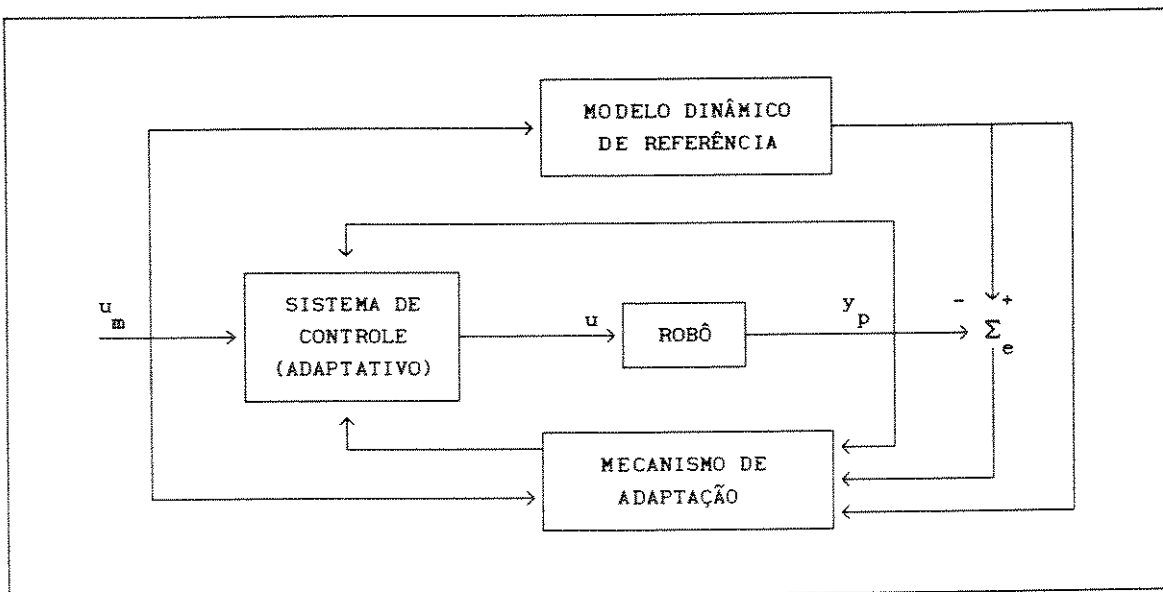


Figura A4.2 - Esquema de um Sistema de Controle Adaptativo a Modelo de Referência - MRAC

b) Controle Adaptativo Auto-Ajustável - STAC

Apresentamos na Figura A4.3 o esquema de um sistema de Controle Adaptativo Indireto (é feita a identificação da planta para ajustar os parâmetros do controlador) auto-ajustável.

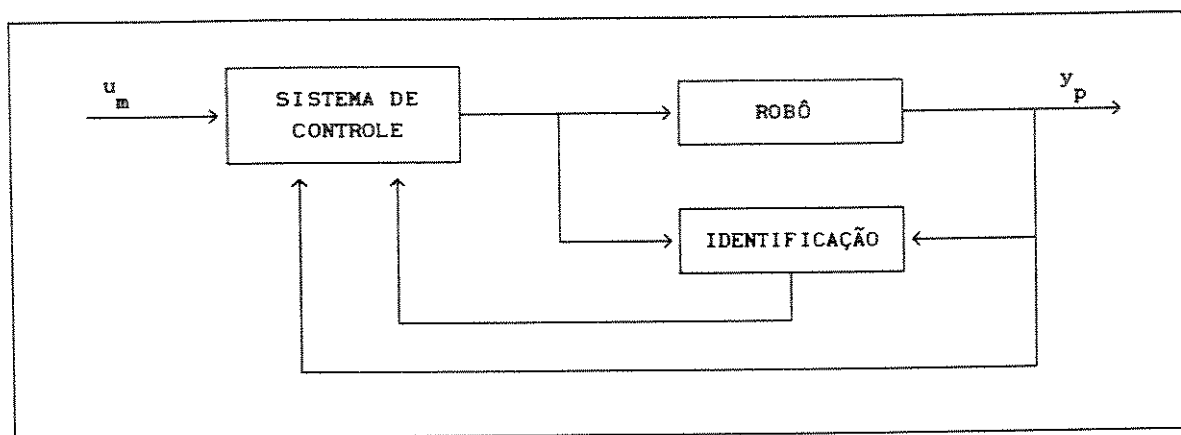


Figura A4.3 - Esquema de um Sistema de Controle Adaptativo Auto-Ajustável - STAC

A4.3. Estratégia de Controle Dinâmico-Adaptativo

É utilizado um lei adaptativa para compensar as variações não levadas em conta pelo modelo dinâmico. Tais variações podem ser devido aos erros de modelo (por exemplo atrito), erros de estimação, variação de carga, etc.

A Figura A4.4 apresenta um esquema de um controlador Dinâmico-Adaptativo [CRAIG 88]. [FERREIRA 84] usa tal esquema para compensar as variações de carga e [CONTI 87] faz um estudo de significância dos termos do modelo dinâmico do robô TH-8 da RENAULT e usa a parte adaptativa para compensar as simplificações feitas no modelo, bem como os efeitos de força de atrito.

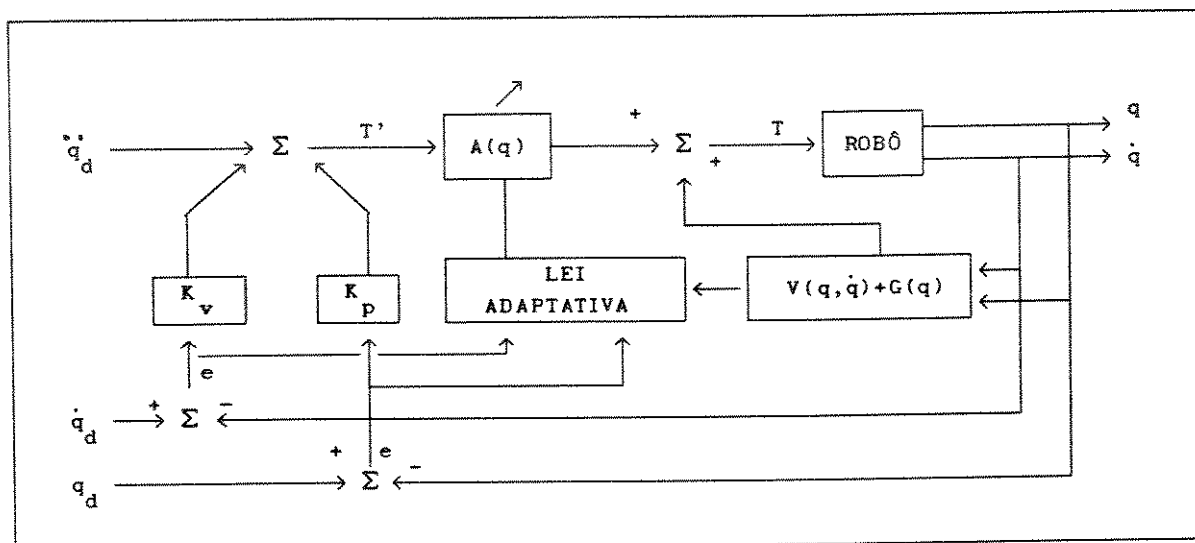


Figura A4.4 - Esquema de um Sistema de Controle Dinâmico-Adaptativo

APÊNDICE A5

OTIMIZAÇÃO DO MODELO DINÂMICO VIA PARAMETRIZAÇÃO MÍNIMA E IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS

Tendo sido geradas todas as equações do modelo dinâmico, simplificadas pelas várias técnicas apresentadas neste trabalho, resta ainda uma simplificação posterior através de um estudo de parametrização mínima do modelo e da significância dos parâmetros obtidos através da identificação de parâmetros.

Sintetizaremos a seguir algumas formas de se identificar os parâmetros do modelo dinâmico, bem como a obtenção da parametrização mínima com ajuda da simulação.

A5.1. Identificação de Parâmetros

Na utilização do modelo dinâmico para efetuar a síntese de um controle dinâmico, é necessária a identificação precisa dos parâmetros que intervêm neste modelo. A grosso modo poderíamos classificar o processo de identificação em duas etapas: na primeira é feita a identificação "off-line" dos parâmetros que influenciam de uma forma constante durante a manipulação. A segunda etapa corresponde à identificação "on-line" dos parâmetros que variam com a manipulação. Normalmente os que variam são os parâmetros do órgão terminal, devido às variações de carga. Para as variações de carga conhecidas, a identificação pode ser feita por uma técnica "off-line".

Normalmente, as medidas que devem ser efetuadas no robô, necessárias ao processo de identificação são os torques/forças generalizadas (Γ) aplicadas às diversas ligações pelos atuadores, as coordenadas (q), velocidades ($\dot{q}$) e acelerações generalizadas ($\ddot{q}$).

Os parâmetros que intervêm no modelo dinâmico são do tipo:

a) Parâmetros Geométricos:

Estes parâmetros definem a geometria do robô, podendo ser obtidos diretamente de medidas, por técnicas de estimação [BOUZOUIA 89], ou através de análise de trajetórias [HAYATI 84]. Quatro parâmetros por ligação são suficientes para definir a geometria de um robô de estrutura cinemática simples, sendo normalmente utilizados os parâmetros de Denavit-Hartenberg.

b) Parâmetros Dinâmicos:

Os parâmetros que caracterizam a dinâmica de um corpo são os momentos principais de inércia, os momentos cruzados de inércia, os momentos de inércia de primeira ordem e a massa. Estes parâmetros são melhor explicados na seção 3.2. São em número de 10 por ligação do robô e podem ser identificados segundo as seguintes técnicas:

MEDIDAS: Os corpos do robô devem ser ensaiados separadamente através de técnicas de pêndulo com dois suportes para determinação dos momentos de inércia principais, ensaios de equilíbrio em cada eixo para a determinação do centro de gravidade e medição da massa por balança [ARMSTRONG 86]. Os momentos de inércia cruzados não podem ser determinados. Esta técnica não é indicada após a construção do robô, pois implicaria na sua desmontagem, o que geraria problemas na mecânica (folgas, atritos, etc.). Além disso, perde em precisão devido a aproximação nos ensaios.

CÁLCULOS: Esta solução consiste em representar os diversos corpos do robô por formas geométricas com distribuição de massa uniforme. Em consequência, os cálculos das integrais que definem as características dos diversos corpos, fornecem valores aproximados para os parâmetros. Existem programas como o EUCLIDE [ISHIOMIN 82] que efetuam estes cálculos automaticamente .

ESTIMAÇÃO: Consiste na utilização de técnicas de estimação tais como Mínimos Quadrados, Gradiente e etc. [FERREIRA 84], [KHOSLA 86] e [BOUZOUIA 89] entre outros, utilizam a estimação. A sua grande vantagem é a precisão com que são identificados os parâmetros.

c) Atritos Secos e Viscosos:

Estes parâmetros inerentes a cada ligação do robô variam com a configuração e o tempo de vida do robô. Devem ser identificados conjuntamente com os parâmetros dinâmicos, bastando para isso adicionar a expressão (A5.1) a cada equação correspondente do modelo dinâmico e usar a técnica de estimação. A expressão da força de atrito, considerando dois parâmetros, é dada por:

$$AS_1 \operatorname{SGN}(\dot{q}_1) + AV_1 \dot{q}_1 \quad (A5.1)$$

onde:

AS_1 - coeficiente de atrito seco da ligação i;

AV_1 - coeficiente de atrito viscoso da ligação i;

$\dot{q}_1$ - velocidade da ligação i;

$\operatorname{SGN}(q_1)$ - sinal de q_1 .

d) Inércia dos Atuadores/Redutores:

A inércia dos atuadores e redutores de cada ligação (IA_i) pode também ser identificada pela técnica de estimação, considerando-se a expressão (A5.2) na equação correspondente do modelo dinâmico. Esses parâmetros normalmente constam de catálogos de fabricantes de atuadores/redutores. A expressão da força devido a estas inércias é igual a:

$$IA_i \ddot{q}_i \quad (A5.2)$$

onde:

IA_i - inércia do atuador/redutor da ligação i;

$\ddot{q}_i$ - aceleração da ligação i,

Existe uma tendência muito grande de se utilizar as técnicas de estimação para a identificação de parâmetros de robôs, devida à precisão dos valores identificados, além da facilidade de se identificar todos os parâmetros que influenciam na dinâmica deste. Porém, para a utilização destes métodos, é necessário que os parâmetros apareçam de forma explícita nas equações do modelo dinâmico como na equação (A5.3) abaixo. Além disso, é recomendável que as colunas na matriz D sejam linearmente independentes [FERREIRA 84].

$$\Gamma = D(q, \dot{q}, \ddot{q}) \theta \quad (A5.3)$$

onde:

- Γ - é o vetor de torque/forças generalizadas;
- $q, \dot{q}, \ddot{q}$ - vetores de posições, velocidades e acelerações generalizadas;
- θ - é o vetor de parâmetros a ser identificado;
- D - é uma matriz de dimensão $n \times m$ função de q , $\dot{q}$ e $\ddot{q}$, onde n é o número de graus de liberdade e m é parametrização adotada.

A5.2. Parametrização Mínima

No processo de explicitar o vetor de parâmetros θ , colocando as equações dinâmicas na forma apresentada em (A5.3), normalmente obtemos uma matriz D onde existem combinações lineares entre as colunas. Estas combinações lineares aparecem devido às simetrias intrínsecas do robô, sendo indesejáveis por incorrer em uma grande redundância de operações para avaliar o modelo e por impossibilitar a estimação de alguns parâmetros isoladamente. Isto não é restritivo para o controle, a não ser pelo número de operações, mas denuncia a existência de redundância no modelo em função da parametrização.

Muitos autores têm estudado a questão da parametrização mínima: [KHALIL 86B, 86C] e [GAUTIER 88, 89] usando o formalismo de Lagrange, sugerem métodos simbólicos diretos para a determinação de tal parametrização. Porém, a detecção de dependências lineares é muito complicada não se prestando a automatização. [SHEU 89] apresenta um método baseado na análise numérica de possíveis mudanças no conteúdo da energia do robô, através da técnica de "Decomposição em Valores Singulares". [MAYEDA 89] propõe um método baseado na formulação de Newton-Euler simbólica para robôs com juntas perpendiculares ou paralelas, porém a detecção de dependências lineares não é evidente.

Apresentaremos resumidamente uma técnica de obtenção da parametrização mínima baseada em simulação, desenvolvida em [FERREIRA 84], por se tratar de uma solução simples e eficiente. Para facilitar o entendimento, vamos definir as três categorias possíveis de parâmetros: identificáveis isoladamente, não identificáveis (pois não interferem nas equações do modelo dinâmico) e identificáveis em combinações lineares.

a) Obtenção do Modelo na Forma Explícita em Relação aos Parâmetros

Vimos no Capítulo 3 que o modelo dinâmico obtido via formalismo de Lagrange é linear em relação aos parâmetros, porém estes parâmetros não aparecem de forma explícita como na equação (a5.3). Para evidenciá-los, usaremos o princípio da superposição conjugado com o gerador automático de modelos, apresentado neste capítulo. Com isso, evitaremos o esforço de manipulação com expressões muito extensas e complicadas.

Essa técnica consiste em gerar um modelo dinâmico para cada parâmetro que se quer explicitar, utilizando para tal um robô virtual com a mesma geometria, porém com valor unitário para este parâmetro e nulo para todos os outros. O modelo resultante comporá a coluna de D correspondente a tal parâmetro. Por exemplo, para a obtenção da primeira coluna de D na equação (A5.4), geraremos as n equações do modelo dinâmico para um robô virtual, com o primeiro parâmetro (e_1^1) unitário.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
 \Gamma_1 & & d_{11} & d_{12} & d_{13} & \dots & d_{1k} & \dots & d_{1m} \\
 \Gamma_2 & & d_{21} & d_{22} & d_{23} & \dots & d_{2k} & \dots & d_{2m} \\
 \Gamma_3 & = & d_{31} & d_{32} & d_{33} & \dots & d_{3k} & \dots & d_{3m} \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \Gamma_n & \text{nx1} & d_{n1} & d_{n2} & d_{n3} & \dots & d_{nk} & \dots & d_{nm}
 \end{array}
 \begin{array}{c|c|c}
 e_1^1 \\
 e_1^2 \\
 \vdots \\
 e_1^k \\
 e_1^1 \\
 \vdots \\
 e_2^k \\
 \vdots \\
 e_n^k \\
 e_n^1
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{nxm} \\
 \text{mxn}
 \end{array}
 \quad (A5.4)$$

onde:

m - parametrizações;

k - número de parâmetros por ligação;

n - graus de liberdade.

Como o robô é uma estrutura em cascata em relação aos parâmetros dinâmicos, a matriz D possui todos os termos da linha i , que multiplicam parâmetros de ligações de índice menores que i , nulos.

Se uma coluna é toda nula, o parâmetro correspondente a esta coluna não intervém no modelo sendo não identificável. Quando uma coluna pode ser escrita como uma combinação linear das outras, os parâmetros podem ser agrupados, porém multiplicados respectivamente pela constante que multiplica cada coluna na combinação linear. Estes parâmetros são os identificáveis somente em combinações lineares. Todos os outros parâmetros do modelo serão identificáveis isoladamente.

Quando temos detectadas todas as combinações lineares, os parâmetros não identificáveis e os identificáveis isoladamente, estamos diante da parametrização mínima.

b) Parametrização Mínima Via Simulação [FERREIRA 84]

As relações de dependências lineares são extremamente difíceis de serem detectadas simbolicamente, devido à complexidade da matriz D , cujos termos são formados por séries enormes de senos e cossenos das variáveis das diversas ligações rotacionais.

Uma solução que se apresenta, para a obtenção da parametrização mínima é a análise das dependências lineares numericamente, via simulação. A Figura A5.1 mostra o esquema de um simulador adequado a tal análise, que simula a estimação dos parâmetros de um sistema fictício. Este sistema tem o mesmo modelo dinâmico simbólico que o robô em questão, contudo tem os valores dos parâmetros Θ^* arbitrados pelo usuário.

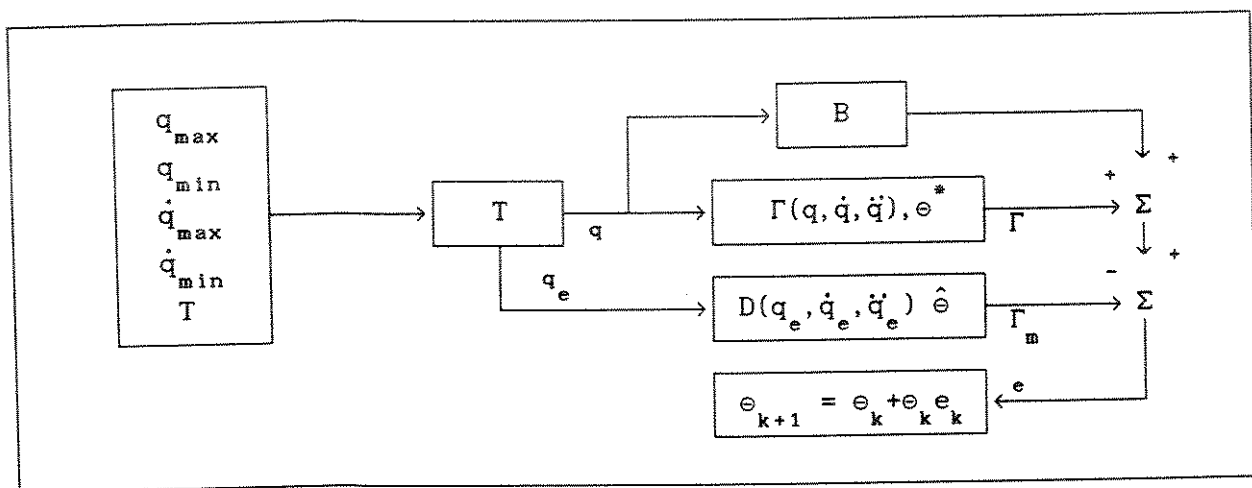


Figura A5.1 - Simulador

Na figura acima, os blocos significam:

- T - gerador de movimentos compatíveis com as características do sistema (amplitudes, velocidades e acelerações máximas);
- q_e - entrada do modelo, que é igual à entrada do modelo fictício, contaminada com ruído que reproduz as condições de medida das variáveis.
- q - entrada do modelo fictício;
- B - gerador de ruídos de entrada (atritos, saturações, folgas, etc.).

Com o uso deste simulador, [FERREIRA 84] chegou aos seguintes resultados: ao se efetuar a simulação, pode-se constatar que todos os parâmetros cujas colunas sejam independentes o valor estimado converge para o valor fictício (parâmetros identificáveis isoladamente). No entanto, os parâmetros cujas colunas são combinações lineares, não convergem para os valores fictícios, e a soma dos valores estimados é igual à dos fictícios, sendo que os valores estimados convergem segundo as relações de dependências entre as colunas (parâmetros identificáveis em combinações lineares).

A propriedade acima serve para ajudar a estabelecer as dependências entre colunas e os conseqüentes reagrupamentos de parâmetros.

Além da questão da parametrização mínima, este simulador é bastante útil para avaliar dois aspectos importantes, relacionados com a estimação: o desempenho dos algoritmos de estimação que se tem em vista para a estimação real e o estabelecimento de trajetórias que excitam convenientemente a dinâmica do sistema na estimação.

Após conseguida a parametrização mínima e feita a identificação dos parâmetros, podemos reduzir ainda mais o modelo, através da análise de significância destes parâmetros, eliminando os que possuam valores muito pequenos. Para cada classe de tarefas pode-se proceder a uma simplificação ainda maior, verificando por simulação quais os parâmetros que não influenciam no modelo, pelo fato destas tarefas não excitarem esses parâmetros, ou ainda pela pouca influência de alguns termos do modelo para esta classe de tarefas.