

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

**Desempenho de Enlaces Sem Fio em
Condições Muito Severas de Desvanecimento
e Modelagem Estatística de Canais de Desvanecimento
Correlacionados e com Parâmetros Arbitrários**

Autor: Guilherme Silveira Rabelo
Orientador: Prof. Dr. Michel Daoud Yacoub

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Banca Examinadora

Membro1, Prof. Dr. Michel Daoud Yacoub DECOM/FEEC/Unicamp
Membro2, Prof. Dr. Renato da Rocha Lopes DECOM/FEEC/Unicamp
Membro3, Prof. Dr. Daniel Benevides da Costa UFC

Campinas, SP

Abril/2010

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

R112d	<p>Rabelo, Guilherme Silveira</p> <p>Desempenho de enlaces sem fio em condições muito severas de desvanecimento e modelagem estatística de canais de desvanecimento correlacionados e com parâmetros arbitrários / Guilherme Silveira Rabelo. - - Campinas, SP: [s.n.], 2010.</p> <p>Orientador: Michel Daoud Yacoub. Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.</p> <p>1. Sistemas de comunicação sem fio 2. Rádio – Transmissores e transmissão – Desvanecimento. 3. Correlação (Estatística) 4. Comunicações digitais. 5. Telecomunicações. I Yacoub, Michel Daoud. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.</p>
-------	--

Título em Inglês:	Wireless link performance under severe fading conditions and statistical modeling of correlated fading channels with arbitrary parameters
Palavras-chave em Inglês:	Wireless communication systems, Fading channels, Severe Fading, Diversity methods, Correlated fading
Área de concentração:	Telecomunicações e Telemática
Titulação:	Mestre em Engenharia Elétrica
Banca examinadora:	Daniel Benevides da Costa, Renato da Rocha Lopes
Data da defesa:	12/04/2010
Programa de Pós Graduação:	Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

Candidato: Guilherme Silveira Rabelo

Data da Defesa: 12 de abril de 2010

Título da Tese: "Desempenho de Enlaces sem Fio em Condições Muito Severas de Desvanecimento e Modelagem Estatística de Canais de Desvanecimento Correlacionados e com Parâmetros Arbitrários"

Prof. Dr. Michel Daoud Yacoub (Presidente): Michel Daoud Yacoub

Prof. Dr. Daniel Benevides da Costa: Daniel Benevides da Costa

Prof. Dr. Renato da Rocha Lopes: Renato Lopes

Resumo

Este trabalho avalia o desempenho de enlaces sem fio em condições muito severas de desvanecimento. Para isso, uma nova distribuição de probabilidade, a κ - μ Extrema, é investigada como modelo de desvanecimento para descrever o sinal propagado em tais condições. Ajustes a dados de campos publicados na literatura e coletados em um ambiente confinado e outros dados coletados pelo grupo de pesquisa do autor deste trabalho mostram que a distribuição κ - μ Extrema é flexível e apropriada para modelar ambientes severos. Medidas de desempenho de enlace são então obtidas para esquemas de modulação não-coerente, onde é mostrado que, devido a uma característica particular do canal de desvanecimento κ - μ Extremo, a taxa de erro de bit é limitada inferiormente por um valor assintótico não-nulo. Do mesmo modo, para qualquer uma das três técnicas de combinação por diversidade denominadas combinação por seleção, combinação por razão máxima e combinação por ganho igual, a taxa de erro de bit também é limitada inferiormente, embora o valor mínimo decresça com o aumento do número de ramos de diversidade. Formulações para a distribuição do sinal de saída e relação sinal-ruído média na saída dos combinadores também são obtidas. De forma bastante interessante, é mostrado que em condições extremas de desvanecimento, o desempenho do combinador por seleção pode superar o desempenho do combinador por ganho igual. Além disso, este trabalho também apresenta uma formulação inédita para a distribuição conjunta α - μ , que inclui como casos particulares as distribuições de desvanecimento largamente utilizadas Weibull, Nakagami- m e Rayleigh. Escrita em termos de funções já conhecidas na literatura, a formulação é facilmente computável e muito geral na medida em que permite um esquema de correlação e parâmetros arbitrários. Embora a formulação seja dada na forma de soma infinita, é mostrado que uma versão truncada também é uma distribuição válida. Finalmente, para demonstrar a aplicabilidade das novas formulações, a distribuição da envoltória na saída de um combinador por seleção é avaliada utilizando as abordagens exata e aproximada. Os resultados mostram que um número pequeno de termos na soma já é suficiente para prover um excelente ajuste entre os resultados exatos e aproximados.

Palavras-chave: Distribuição κ - μ Extrema, condições severas de desvanecimento, técnicas de combinação por diversidade, distribuição α - μ , desvanecimento correlacionado, distribuição conjunta.

Abstract

This work evaluates the performance of a wireless link under severe fading conditions. To achieve this, a new probability distribution, the κ - μ Extreme, is investigated as a fading model to describe the propagated signal under such conditions. Adjustments to field data published elsewhere in the literature, collected in an enclosed environment, and other fading data collected by the author's team show that the κ - μ Extreme distribution is flexible and suitable to model these scenarios. Link performance measures are then obtained for non-coherent modulation schemes, where it is shown that, due to an intrinsic characteristic of the κ - μ Extreme fading channel, the bit error rate is lower-bounded by a non-nil minimum value. In the same way, for anyone of the M -branch basic diversity combining techniques, namely selection combining, maximal ratio combining, and equal gain combining, the bit error rate is still lower-bounded, although the minimum achievable value decreases exponentially with the increase in the number of diversity branches. Formulations for the outage probability as well as mean signal-to-noise ratio at the output of the combiners are also derived. Interestingly, it is shown that in extreme fading conditions, the selection combiner may outperform the equal gain combiner. In addition, this work also derives a new closed-form series-type formulation for the multivariate α - μ joint distribution, which includes as particular cases the largely used fading distributions Weibull, Nakagami- m , and Rayleigh. Written in terms of functions already available in literature, the formulation is easily computable and very general for it assumes arbitrary correlation scheme and parameters. Even though the new formulation is given in terms of an infinite series, it is shown that a truncated version is still a valid distribution. Finally, in order to demonstrate the applicability of the new results, the envelope cumulative distribution at the output of the selection combiner is evaluated using the approximate and exact approaches. The results show that that only a few terms is sufficient to provide an excellent fit between approximate and exact results.

Keywords: κ - μ Extreme distribution, severe fading conditions, diversity combining techniques, α - μ distribution, correlated fading, joint distribution

Ao Criador.

Aos meus pais, Mário e Cristina.

Aos meus irmãos, Davi e Henrique.

À minha querida namorada e companheira, Luisa.

Agradecimentos

A Deus, que um dia me chamou, justificou e capacitou. *Soli Deo Gloria*.

Ao Prof. Michel Daoud Yacoub, pela amizade, paciência, conselhos, ensino e compreensão.

Aos meus pais, Mário e Cristina, pelo suporte, incentivo, conselhos e apoio em todas as decisões.

Aos meus queridos irmãos, Davi e Henrique, pela amizade e carinho, sempre.

A minha querida namorada, Luisa, pelo apoio incondicional, confiança, suporte, esforço e sacrifício.

Aos meus queridos companheiros da Casa ABU, Ricardo, Sydnei, Felipe, Milena, Priscila, Suelen, Sarah, Thais e Monique, pelo acolhimento, paciência e convívio.

Ao Wellington, por ter me recebido de braços abertos, pelas conversas, conselhos e amizade.

Aos amigos do laboratório WissTek, Luís Gustavo, Ednei, Renata, Flávio, Cattalina, Rubem, Ugo, Aravind, Maice e Portelinha, pelo convívio, amizade, conversas, conselhos, almoços e ajuda. Em especial ao Luís Gustavo, companheiro inseparável de viagens e academia e amigo para todas as horas. Ao Ugo, pela disposição e ajuda no trabalho, pelos conselhos. Ao Portelinha, pela amizade, companheirismo e conversas furadas.

Ao CNPq e FAPESP, pelo apoio financeiro.

Sumário

Lista de Figuras	xvii
Lista de Símbolos	xix
Lista de Siglas	xxi
Trabalhos Publicados Pelo Autor	xxiii
1 Introdução	1
1.1 Propagação do sinal de rádio em condições muito severas de desvanecimento	2
1.2 Modelagem estatística de canais de desvanecimento correlacionados	3
1.3 Objetivos do trabalho	4
1.4 Estrutura da dissertação	5
2 Modelagem Estatística do Canal Rádio-Móvel	7
2.1 Introdução	7
2.2 A distribuição Rayleigh	8
2.3 A distribuição Rice	8
2.4 A distribuição Nakagami- m	9
2.5 A distribuição Weibull	10
2.6 A distribuição <i>Two-Ray</i>	11
2.7 A distribuição α - μ	12
2.8 A distribuição κ - μ	13
2.9 Conclusões	15
3 A Distribuição de Desvanecimento κ-μ Extrema	17
3.1 Introdução	17
3.2 Formulações gerais	17
3.3 Modelo físico e obtenção a partir da distribuição κ - μ	19
3.4 Propriedades da soma de variáveis κ - μ Extremas	23
3.5 Comparação entre κ - μ Extrema, Rayleigh e <i>Two-Ray</i>	27
3.6 Conclusões	27

4	Aplicações e Validações por Medidas de Campo	31
4.1	Introdução	31
4.2	Caracterização das condições de propagação em ambientes confinados	32
4.3	Outros cenários de desvanecimento severo	34
4.3.1	Sistema de coleta de dados	34
4.3.2	Metodologia	37
4.3.3	Resultados	37
4.4	Distribuição empírica do fator k_{Rice}	38
4.5	Conclusões	40
5	Medidas de Desempenho para um Canal κ-μ Extremo	41
5.1	Introdução	41
5.2	Enlace simples	42
5.2.1	FDA da SNR	42
5.2.2	BER média para modulações não-coerentes	44
5.3	Técnicas de combinação por diversidade	45
5.3.1	Combinação por seleção	45
5.3.2	Combinação por razão máxima	48
5.3.3	Combinação por ganho igual	49
5.3.4	Resultados e discussões	53
5.4	Conclusões	60
6	A Distribuição Conjunta α-μ	61
6.1	Introdução	61
6.2	A função densidade de probabilidade conjunta α - μ	61
6.3	Obtenção da função de distribuição acumulada conjunta α - μ	70
6.4	Uma abordagem alternativa	73
6.5	Análise de convergência	77
6.6	Exemplos de coeficientes	79
6.7	Conclusões	80
7	Casos Especiais da Distribuição Conjunta α-μ e Exemplo de Aplicação	83
7.1	Introdução	83
7.2	Formulação exata para a distribuição conjunta de duas e três variáveis correlacionadas	83
7.3	Casos especiais	86
7.3.1	Distribuição conjunta Weibull	86
7.3.2	Distribuição conjunta Nakagami- m	87
7.3.3	Distribuição conjunta Rayleigh	88
7.4	Uma versão aproximada para a distribuição conjunta α - μ	88
7.5	Exemplo de aplicação: combinador por seleção	89
7.6	Conclusões	91
8	Considerações Finais e Perspectivas de Trabalhos Futuros	95
	Referências bibliográficas	99

A	Obtenção de uma Expansão em Série para a FDA κ-μ Extrema	107
B	Cálculo do Valor Assintótico de Taxa de Erro de Bit na Saída de Combinadores para um Canal κ-μ Extremo	109
C	Especificação Técnica dos Equipamentos de Medição	111
D	Código em <i>Wolfram Mathematica</i>[®] para a Geração de Amostras κ-μ Extremas	113
E	Código em <i>Matlab</i>[®] para a Geração de Amostras α-μ Correlacionadas	115

Lista de Figuras

3.1	FDA de envoltórias Nakagami- m , κ - μ and κ - μ Extrema para $m = 1, 2, 5$	21
3.2	Função densidade de probabilidade de uma envoltória normalizada κ - μ Extrema. . .	21
3.3	Função de distribuição acumulada de uma envoltória normalizada κ - μ Extrema. . . .	22
3.4	Comparação entre as FDAs exata e aproximada de uma envoltória normalizada κ - μ Extrema utilizando a expansão em série.	22
3.5	FDAs exata e aproximada da soma de $M = 1, 2, 3, 4$ envoltórias normalizadas e independentes κ - μ Extrema para $m = 1$	26
3.6	FDAs exata e aproximada da soma de duas envoltórias normalizadas e independentes κ - μ Extrema para $m = 1, 2, 3, 4, 5$	26
3.7	FDAs <i>Two-Ray</i> e Rayleigh esboçadas em função da envoltória normalizada com relação ao seu valor eficaz.	28
3.8	Mediana normalizada da distribuição κ - μ Extrema esboçada em função do parâmetro m	28
3.9	FDAs Rayleigh, <i>Two-Ray</i> e κ - μ Extrema esboçadas em função da envoltória normalizada com relação ao seu valor mediano.	29
4.1	Distribuições κ - μ Extrema e <i>Two-Ray</i> ajustadas para os dados de campos coletados em um ambiente confinado.	33
4.2	Diagrama de transmissão	35
4.3	Diagrama de recepção	36
4.4	Comparação entre FDAs experimentais e teóricas obtidas para outros cenários de desvanecimento severo.	38
4.5	Comparação entre FDAs obtidas para os fatores k_{Rice} experimentais com exemplos da FDA κ - μ Extrema configuradas para melhor ajuste.	39
5.1	FDA da SNR normalizada κ - μ Extrema e Rayleigh	43
5.2	FDP da SNR normalizada κ - μ Extrema e Rayleigh	43
5.3	BER média em um canal κ - μ Extremo utilizando modulação DPSK e para $m = 1, 2, 3, 4, 5$	46
5.4	FDA da SNR normalizada na saída dos combinadores para $M = 1, 2, 3, 4$ e $m = 1$. .	55
5.5	Detalhes da FDA da SNR normalizada na saída do CS e CGI para $M = 1, 2, 3, 4$ e $m = 1$	55
5.6	Comparação entre a FDA da envoltória normalizada na saída do CS e CGI para $M = 1, 2, 3, 4$ e $m = 1$	56

5.7	Comparação entre as FDA exata e aproximada da SNR normalizada na saída do CGI para $M = 1, 2, 3, 4$ e $m = 1$	56
5.8	BER média na saída dos combinadores para $M = 1, 2, 3, 4$, $m = 1$ e utilizando modulação DPSK.	57
5.9	Detalhes da BER média na saída do CS e CGI para $M = 1, 2, 3, 4$, $m = 1$ e utilizando modulação DPSK.	57
5.10	Comparação entre BER média exata e aproximada na saída do CGI para $M = 1, 2, 3, 4$, $m = 1$ e utilizando modulação DPSK.	58
5.11	Ganho na SNR média para $M = 1, 2, \dots, 10$ e $m = 0.5, 1, 2, 3, 4, 5$	59
5.12	Detalhes do ganho na SNR média para o CS e CGI, $M = 1, 2, \dots, 10$ e $m = 0.5, 1, 2, 3, 4, 5$	59
6.1	Correlação generalizada entre as VAs gaussianas que compõem os sinais α - μ R_1 e R_2	73
6.2	Padrão de correlação para o cenário de correlação vertical	74
7.1	FDA da envoltória na saída do CS para $\mu_i = 2$, $\alpha_i = 2$, $\hat{r}_i = 1$ e $\delta = 0.3$	92
7.2	FDA da envoltória na saída do CS para $\mu_i = 2$, $\alpha_i = 2$, $\hat{r}_i = 1$ e $\delta = 0.5$	92
7.3	FDA da envoltória na saída do CS para $\mu_i = 2$, $\alpha_i = 2$, $\hat{r}_i = 1$ e $\delta = 0.7$	93
7.4	FDA da envoltória na saída do CS para os cenários #1, #2, #3 (Veja Tabela 7.1).	93
7.5	FDA da envoltória na saída do CS considerando um esquema de correlação constante ($\alpha_i = 2$, $\mu_i = 2$, $\hat{r}_i = 1$, $i = 1, \dots, L$).	94

Lista de Símbolos

m	- Parâmetro de desvanecimento de Nakagami- m
α	- Parâmetro de desvanecimento de Weibull
κ	- Parâmetro de desvanecimento de κ - μ
μ	- Parâmetro de desvanecimento de κ - μ , α - μ ou Gamma
R	- Envoltória de um sinal com desvanecimento
X	- Componente em fase de um sinal com desvanecimento
Y	- Componente em quadratura de um sinal com desvanecimento
$ \cdot $	- Operador determinante
W	- Potência instantânea de um sinal com desvanecimento
\bar{w} ou Ω	- Potência média de um sinal com desvanecimento
\hat{r}	- Valor eficaz (<i>RMS</i>) de R
\hat{r}_{med}	- Mediana da envoltória de um sinal com desvanecimento
$\hat{\rho}_{med}$	- Mediana da envoltória normalizada de um sinal com desvanecimento
P	- Envoltória normalizada com relação a \hat{r}
P_{med}	- Envoltória normalizada com relação a \hat{r}_{med}
Γ	- Relação sinal-ruído instantânea
$\bar{\gamma}$	- Relação sinal-ruído média de um sinal com desvanecimento
$\bar{\gamma}_{in}$	- Relação sinal-ruído média na entrada de um combinador
$\bar{\gamma}_{out}$	- Relação sinal-ruído média na saída de um combinador
Υ	- Relação sinal-ruído normalizada com relação a $\bar{\gamma}_{in}$
$\tilde{\Upsilon}$	- Relação sinal-ruído normalizada com relação a $\bar{\gamma}_{out}$
\bar{v}	- Relação sinal-ruído normalizada média
$G_{\gamma} = \bar{\gamma}_{out} / \bar{\gamma}_{in}$	- Razão entre relação sinal-ruído média na saída e na entrada de um combinador
$F_A(a)$	- Função de distribuição acumulada de uma variável aleatória A
$f_A(a)$	- Função densidade de probabilidade de uma variável aleatória A
$F_{A_1, A_2, \dots, A_L}(a_1, a_2, \dots, a_L)$	- Função de distribuição acumulada conjunta das variáveis aleatórias A_1, A_2, \dots, A_L
$f_{A_1, A_2, \dots, A_L}(a_1, a_2, \dots, a_L)$	- Função de densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias A_1, A_2, \dots, A_L
M	- Número de ramos de diversidade

$P\{A\}$	- Probabilidade do evento A ocorrer
$E(\cdot)$	- Esperança de uma variável aleatória
$\text{Var}(\cdot)$	- Variância de uma variável aleatória
$\text{Cov}(\cdot, \cdot)$	- Covariância entre duas variáveis aleatórias
k_{Rice}	- Razão entre potências da componente dominante e componentes espalhados no modelo Rice
ρ_{ij}	- Coeficiente de correlação entre duas gaussianas X_i e X_j
δ_{ij}	- Coeficiente de correlação entre duas potências α - μ , $R_i^{\alpha_i}$ e $R_j^{\alpha_j}$
\mathbf{I}	- Matriz identidade
Σ	- Matriz de correlação entre variáveis aleatórias gaussianas
\mathbf{S}	- Matriz diagonal cujo elementos da diagonal principal são variáveis de Laplace
σ	- Desvio padrão de uma variável aleatória
$\vartheta(\cdot)$	- Operador produto utilizado na distribuição conjunta α - μ
$(\cdot)_k$	- Símbolo de Pochhammer.

Lista de Siglas

BER	- Taxa de Erro de Bit (do inglês <i>Bit Error Rate</i>)
CGI	- Combinador por Ganho Igual
CRM	- Combinador por Razão Máxima
CS	- Combinador por Seleção
DPSK	- Chaveamento por desvio diferencial de fase (do inglês <i>Differential Phase Shift Keying</i>)
ERP	- Potência efetivamente radiada (do inglês <i>Effective Radiated Power</i>)
FEEC	- Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
FDA	- Função de Distribuição Acumulada
FDAC	- Função de Distribuição Acumulada Conjunta
FDP	- Função Densidade de Probabilidade
FDPC	- Função Densidade de Probabilidade Conjunta
FGM	- Função Geradora de Momentos
FSK	- Chaveamento por desvio de frequência (do inglês <i>Frequency Shift Keying</i>)
HF	- Banda de frequência compreendida entre 3 MHz e 30 MHz (do inglês <i>High Frequency</i>)
HpCC	- Coeficiente Generalizado de Correlação (do inglês <i>Hyper-Power Correlation Coefficient</i>)
i.i.d.	- independentes e identicamente distribuídos
MSE	- Erro Médio Quadrático (do inglês <i>Mean Square Error</i>)
LED	- Diodo emissor de luz (do inglês <i>Light-Emitting Diode</i>)
LOS	- Linha de Visada (do inglês <i>Line-of-Sight</i>)
RAM	- Memória de acesso aleatório (do inglês <i>Random-Access Memory</i>)
RMS	- Valor Eficaz (do inglês <i>Root Mean Square</i> - Raiz quadrada do valor médio)
RF	- Rádio Frequência
RX	- Receptor
SNR	- Relação Sinal-Ruído (do inglês <i>Signal-to-Noise Ratio</i>)
TX	- Transmissor
UNICAMP	- Universidade Estadual de Campinas
USB	- Barramento Serial Universal (do inglês <i>Universal Serial Bus</i>)
UWB	- Tecnologia de rádio de curto alcance empregada em bandas de frequência muito largas (do inglês <i>Ultra-wide Band</i>)
VA	- Variável Aleatória

- WissTek - Laboratório de Tecnologia Sem Fio (do inglês *Wireless Technology Laboratory*)
WLAN - Redes locais sem fio (do inglês *Wireless Local Area Networks*)
WSN - Redes de sensores sem fio (do inglês *Wireless Sensor Networks*)

Trabalhos Publicados pelo Autor

Artigos publicados em anais de congressos

1. G. S. Rabelo, U. S. Dias e M. D. Yacoub. “The κ - μ Extreme distribution: theory and applications”. *XXVII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT'2009)*, 2009, Blumenau, SC, Brasil.
2. G. S. Rabelo, U. S. Dias e M. D. Yacoub. “The κ - μ Extreme distribution: characterizing severe fading conditions”. *SBMO/IEEE MTT-S International Microwave and Optoelectronics Conference (IMOC'09)*, 2009, Belém, PA, Brasil.

Artigos submetidos para revista

1. G. S. Rabelo e M. D. Yacoub. “The κ - μ Extreme distribution”. *IEEE Transactions on Communications*, dezembro de 2009.

Artigos em elaboração para revista

1. G. S. Rabelo, M. D. Yacoub e R. A. A. de Souza. “On the α - μ multivariate distribution: further results”. *IEEE Transactions on Communications*, 2010.

Capítulo 1

Introdução

O estudo do canal rádio-móvel desempenha um papel fundamental no contexto das comunicações sem fio. A correta caracterização das condições de propagação do sinal transmitido é imprescindível para o planejamento e dimensionamento de sistemas de comunicação móvel à medida que torna possível a estimação de níveis de potência de transmissão, aperfeiçoamento de receptores, avaliação da necessidade de técnicas de combate aos efeitos de desvanecimento, entre outras tantas aplicações. No entanto, sua modelagem esbarra em um grande problema, que é sua imprevisibilidade, tanto no domínio do tempo, como também espaço e frequência. Ao longo do seu trajeto, o sinal de rádio sofre inúmeras reflexões, refrações, difrações e espalhamentos que, juntamente com uma série de outros fatores envolvidos, impossibilitam uma análise puramente determinística do sinal recebido. Por isso, cuidados e esforços adicionais para sua análise e modelagem são necessários.

Este trabalho visa apresentar duas contribuições principais para a modelagem do canal sem fio. As contribuições atacam problemas distintos e por isso são tratadas em separado. A primeira contribuição contempla um estudo da propagação do sinal de rádio em condições muito severas de desvanecimento e suas implicações no desempenho de um enlace sem fio. Formulações analíticas exatas e aproximadas, medidas de campo e indicadores de desempenho são apresentados no que diz respeito a ambientes cujas condições de propagação apresentam um desvanecimento muito severo. A segunda contribuição contempla um estudo teórico de canais de desvanecimento correlacionados. Diferentemente dos canais independentes, a correlação implica em dificuldades adicionais para a modelagem estatística do canal, de forma que muitos modelos hoje disponibilizados na literatura contemplam apenas situações particulares e/ou são pouco tratáveis matematicamente. Por isso, este trabalho apresenta a continuação de um estudo estatístico para a caracterização de canais correlacionados. Derivações matemáticas, formulações analíticas exatas e aproximadas e validações por simulação computacional são apresentadas para uma distribuição de desvanecimento muito geral. As seções a seguir apresentam algumas das motivações que levaram ao desenvolvimento deste trabalho.

1.1 Propagação do sinal de rádio em condições muito severas de desvanecimento

Os serviços de comunicações sem fio expandem rapidamente e suas aplicações parecem ilimitadas. Anteriormente restritos apenas a ambientes externos, eles rapidamente alcançaram ambientes internos e, mais recentemente, ambientes confinados, como aeronaves, trens e ônibus. Juntamente com estes serviços, outras aplicações sem fio como aquelas contempladas pelas redes de sensores sem fio (WSN, do inglês *Wireless Sensor Networks*) e redes locais sem fio (WLAN, do inglês *Wireless Local Area Networks*) têm sido largamente difundidas nos mais diversos cenários.

Neste contexto, a caracterização do ambiente de propagação sem fio e, em particular, das condições de desvanecimento, continua a despertar o interesse da comunidade científica [1–3]. No entanto, ao contrário dos ambientes descritos inicialmente, como os externos ou internos, para os quais as condições de propagação são razoavelmente bem compreendidas, as condições para os ambientes confinados ainda carecem de um entendimento mais profundo. Diversas questões têm surgido relativamente à aplicabilidade dos modelos de desvanecimentos tradicionais, como Nakagami- m [4], Weibull [5] e outras para descrever as condições de propagação em ambientes confinados. Uma tentativa de responder a algumas dessas perguntas foi recentemente apresentada em [6].

Ambientes confinados são conhecidos por apresentar condições muito severas de desvanecimento. Utilizando definição semelhante à apresentada em [3, 6, 7], neste trabalho convencionou-se chamar desvanecimento severo como aquele pior do que previsto pela distribuição Rayleigh, ou seja, aquele cuja função de distribuição acumulada (FDA) encontra-se acima da FDA Rayleigh (desvanecimento *hyper-Rayleigh*). Diferentemente dos ambientes convencionais, onde as diferentes combinações do grande número de multipercursos leva aos canais de desvanecimentos já conhecidos, ambientes confinados podem apresentar um número pequeno de multipercursos, o que torna a aproximação pelo *Teorema do Limite Central* inapropriada [3]. Como consequência, o canal rádio-móvel em tais condições não é bem descrito por distribuições convencionais [3, 6]. Adicionalmente, modelos consolidados de propagação de sinais, como por exemplo o Terra Plana [8], já prevêem que os sinais direto e refletidos podem ser combinados de forma a gerar nulos em determinados pontos de recepção.

Apesar de serem típicas de ambientes confinados, condições de propagação muito severas não se restringem a tais ambientes. Estudos recentes têm mostrado algumas situações particulares em que o desvanecimento sofrido pelo sinal de rádio é pior do que aquele previsto por uma distribuição Rayleigh. Entre elas, destacam-se:

- redes de sensores de monitoramento sem fio estáticos [3];
- propagação ionosférica na banda HF (entre 3 Mhz e 30 MHz, do inglês *High Frequency*) [9];

- propagação em ambientes suburbanos na frequência 1,5 GHz [10];
- propagação em florestas [11];
- propagação em canais *indoor* UWB (tecnologia de rádio de curto alcance empregada em bandas de frequência muito largas, do inglês *Ultra-wide Band*) [12, 13].

Uma abordagem inicial para descrever a propagação de rádio em condições muito severas de desvanecimento foi recentemente apresentada em [3]. Neste trabalho, uma nova distribuição de probabilidade, denominada *Two-Ray*, foi proposta como um modelo de desvanecimento de pior cenário possível. Ela é um caso particular da distribuição *Two-Ray With Diffuse Power* (TWDP) [14] e é obtida para as seguintes condições: (i) potência das componentes espalhadas nula e (ii) ocorrência de duas componentes dominantes com amplitudes iguais e fases aleatórias [3].

O modelo *Two-Ray* é muito simples, no entanto ao custo de algumas limitações: ele não prevê a ocorrência de sinal recebido com amplitude maior que duas vezes a amplitude de uma componente dominante nem é flexível para ajustar a outras condições de desvanecimento que não aquela limitada pelo cenário *Two-Ray*. Na prática, existem diversos outros cenários que certamente divergem daquele previsto pelo modelo *Two-Ray*. Por isso, surge a necessidade de novos modelos de desvanecimento severo, capazes de contemplar as situações que não são previstas pelo modelo *Two-Ray* nem por outros modelos já existentes.

1.2 Modelagem estatística de canais de desvanecimento correlacionados

Nas comunicações sem fio, o desvanecimento ocasionado pelo fenômeno do multipercurso é modelado por diversas distribuições probabilísticas, entre elas Hoyt, Rayleigh, Weibull, Nakagami- m e Rice. Mais recentemente o modelo α - μ foi apresentado em [15, 16], onde visava caracterizar as não-linearidades do ambiente de propagação assim como o fenômeno do agrupamento de multipercursos. A distribuição α - μ é geral, flexível, matematicamente fácil de manipular e tem se mostrado bastante útil para ajuste a dados de campo [17]. Ela inclui, como casos particulares, a distribuição Gamma (e sua versão discreta Erlang e Chi-Quadrada), Nakagami- m (e sua versão discreta Chi), Exponencial Negativa, Weibull, Gaussiana Unilateral e Rayleigh.

No dimensionamento de sistemas sem fio com múltiplos canais, a consideração de canais estatisticamente independentes certamente facilita sua análise e modelagem, no entanto restringe uma compreensão correta do sistema como um todo, pois a correlação entre os canais pode existir. Uma abordagem inicial para o problema foi apresentada em [18], onde a função densidade de probabilidade

conjunta (FDPC) para sinais correlacionados do tipo Rayleigh foi proposta, sendo em seguida generalizado em [19] e [20]. Em [21] e [22], o caso Nakagami- m foi explorado. Em [15], uma FDPC α - μ foi proposta para o caso em que a matriz inversa de correlação fosse tridiagonal. Uma outra proposta para a FDPC α - μ foi então apresentada em [23], em que uma correlação arbitrária era permitida mas os sinais deveriam ser identicamente distribuídos. Finalmente, em [24], uma formulação na forma de série infinita foi apresentada para a FDPC α - μ como extensão dos resultados apresentados em [25] e [26], para uma matriz de correlação arbitrária e sinais com distribuições distintas. Apesar de muito gerais e elegantes, os resultados de [24] contemplam apenas a função densidade de probabilidade conjunta, não apresentando formulações para a função de distribuição acumulada conjunta (FDAC) α - μ , que pode ser útil para a obtenção de outras estatísticas de canais correlacionados.

1.3 Objetivos do trabalho

Os objetivos deste trabalho estão divididos de acordo com o assunto abordado. Na primeira parte do trabalho, que concerne o estudo de propagação sem fio em condições severas de desvanecimento, visa-se, primeiramente, investigar a aplicabilidade de uma nova distribuição probabilística, a κ - μ Extrema, como modelo de desvanecimento para caracterizar a propagação do sinal de rádio em condições severas de desvanecimento. Esta distribuição, apesar de ter sido proposta inicialmente em [27], carece de estudos aprofundados a respeito de suas características e propriedades estatísticas. Por isso, este trabalho visa oferecer uma descrição formal da distribuição, incluindo seu modelo físico, sua obtenção a partir da distribuição κ - μ e expressões analíticas em forma fechada para diversas propriedades. Em seguida, para validar o modelo proposto, visa-se apresentar resultados de ajustes de campo para diversas situações práticas em que as condições de propagação de fato são caracterizadas pela distribuição κ - μ Extrema. Por fim, para avaliar a implicação das condições severas de desvanecimento no desempenho de um sistema sem fio, apresentam-se medidas de desempenho em um canal κ - μ Extremo, tanto para enlace simples como para esquemas básicos de combinação por diversidade, entre eles a combinação por seleção, combinação por máxima razão e combinação por ganho igual.

Na segunda parte do trabalho, estendem-se os resultados de [24], propondo uma formulação para a função distribuição acumulada conjunta α - μ , juntamente com as condições de convergência para os resultados obtidos. Em seguida, para validar o modelo, utiliza-se um simulador de canais correlacionados α - μ desenvolvido especificamente para este fim. Por fim, para ilustrar a aplicabilidade do modelo, avalia-se a confiabilidade de um combinador por seleção cujos sinais de entrada apresentam correlação entre si.

De forma sucinta, os objetivos deste trabalho são:

- Apresentação e descrição formal da distribuição κ - μ Extrema;

- Validação da distribuição por meio de medidas de campo;
- Cálculo de indicadores de desempenho de enlace em um ambiente κ - μ Extremo;
- Avaliação de técnicas de combinação por diversidade em um ambiente κ - μ Extremo;
- Validação dos resultados por meio de simulação computacional;
- Obtenção de uma formulação exata para a função distribuição acumulada conjunta α - μ ;
- Estudo das condições de convergência para a formulação obtida;
- Validação das formulações por meio de simulação computacional;
- Estudo da confiabilidade de um combinador por seleção em um ambiente com correlação.

1.4 Estrutura da dissertação

Este trabalho é dividido em oito capítulos e cinco anexos. Os capítulos 2, 3, 4 e 5 e anexos A, B, C e D estão relacionados à primeira parte do trabalho, enquanto os capítulos 6 e 7 e o anexo E estão relacionados à segunda parte e, portanto, podem ser lidos separadamente. Uma breve descrição do conteúdo de cada capítulo é apresentada a seguir:

- O **Capítulo 2** descreve algumas das principais distribuições probabilísticas utilizadas para descrever o desvanecimento de pequena escala. São apresentados o modelo físico, função densidade de probabilidade (FDP) e FDA das distribuições Rayleigh, Rice, Nakagami- m , Weibull, *Two-ray*, α - μ e κ - μ ;
- O **Capítulo 3** apresenta uma descrição formal da distribuição κ - μ Extrema, juntamente com o modelo físico e obtenção a partir da distribuição κ - μ . Além disso, a distribuição é comparada com outra distribuição de desvanecimento severo, denominada *Two-ray*;
- O **Capítulo 4** apresenta medidas de campo para a validação da distribuição κ - μ Extrema. Dados experimentais previamente apresentados na literatura e outros obtidos pelo laboratório de pesquisa WissTek, da UNICAMP, são utilizados para ajustar a distribuição de interesse;
- O **Capítulo 5** apresenta medidas de desempenho de um enlace simples e de técnicas de combinação por diversidade em um canal κ - μ extremo. Funções densidade de probabilidade e de probabilidade acumulada da relação sinal-ruído (SNR, do inglês *Signal-to-Noise Ratio*), taxa

de erro de bit (BER, do inglês *Bit Error Rate*) e ganho na SNR média na saída dos combinadores por seleção, razão máxima e ganho igual são obtidos e validados por meio de simulações computacionais;

- O **Capítulo 6** apresenta a FDPC α - μ e os procedimentos para a obtenção da FDAC α - μ . As condições de convergência para a formulação são avaliadas e os coeficientes de expansão são apresentados para até cinco variáveis correlacionadas;
- O **Capítulo 7** apresenta formulações exatas para a distribuição de duas e três variáveis α - μ correlacionadas, juntamente com formulações exatas para as distribuições conjuntas Weibull, Nakagami- m e Rayleigh. Adicionalmente, a distribuição do sinal de saída de um combinador por seleção é obtida como um exemplo de aplicabilidade da formulação obtida. Os resultados são validados por meio de simulações computacionais;
- O **Capítulo 8** apresenta as considerações finais e perspectivas de trabalhos futuros;
- O **Anexo A** apresenta os procedimentos para a obtenção de uma formulação em forma de soma infinita para a FDA κ - μ Extrema;
- O **Anexo B** apresenta o cálculo do valor assintótico de taxa de erro de bit na saída de combinadores por diversidade em um canal κ - μ Extremo;
- O **Anexo C** apresenta a especificação técnica dos equipamentos utilizados nas campanhas de medição para a validação da distribuição κ - μ Extrema;
- O **Anexo D** apresenta o código em *Wolfram Mathematica*[®] para a geração de amostras κ - μ Extremas, utilizadas para a validação de estatísticas de primeira ordem;
- O **Anexo E** apresenta o código em *Matlab*[®] para a geração de amostras α - μ correlacionadas, também utilizadas para a validação de estatísticas de primeira ordem.

Capítulo 2

Modelagem Estatística do Canal Rádio-Móvel

2.1 Introdução

Tradicionalmente, a modelagem do canal rádio-móvel em sistemas de comunicação sem fio se divide em duas partes, de acordo com a natureza do desvanecimento sofrido pelo sinal transmitido: modelos de desvanecimento de larga escala e modelos de desvanecimento de pequena escala [28–30]. Os modelos de desvanecimento de larga escala, juntamente com a perda de percurso, procuram caracterizar a distribuição espacial do sinal transmitido a partir do decaimento da potência devido à distância entre transmissor e receptor. Logo, são úteis para estimar área de cobertura de determinado transmissor. A distribuição de probabilidade log-normal tem se mostrado satisfatória para modelar o desvanecimento de larga escala [27].

O desvanecimento de pequena escala descreve flutuações do sinal recebido em um pequeno período de tempo observado ou em pequenas distâncias [29]. Este é causado pela sobreposição de amostras do sinal transmitido que chegam com amplitudes e fases diferentes e em instantes de tempo diferentes no receptor. A principal característica do desvanecimento de pequena escala é a presença de multipercursos [28], que ocasionam a chegada das amostras defasadas no tempo. Devido ao seu comportamento aleatório, a caracterização das variações de pequena escala do canal de rádio móvel lança mão de distribuições probabilísticas. Estas distribuições, em geral, partem de modelos físicos de propagação, embora algumas tenham surgido a partir de métodos empíricos. As seções a seguir descrevem algumas das principais distribuições utilizadas para descrever o desvanecimento de pequena escala. Embora não detalhadas aqui, outras distribuições como Hoyt [31] e η - μ [27] também constituem importantes modelos de desvanecimento.

2.2 A distribuição Rayleigh

A distribuição Rayleigh foi proposta inicialmente por Lord Rayleigh [32] em 1880 para a utilização na área de eletromagnetismo. No entanto, foi apenas em 1935 que Pawsey [33] utilizou-a para modelar dados de potência de sinal de rádio. Seu modelo físico baseia-se em um ambiente de propagação homogêneo, onde a grande quantidade de multipercursos e ausência de linha de visada (LOS, do inglês *Line-of-Sight*) faz com que as componentes em fase e quadratura do sinal recebido se aproximem, pelo *Teorema do Limite Central* [34], a processos gaussianos independentes, com média nula e mesma variância. Em outras palavras, a envoltória resultante do modelo Rayleigh segue a forma [34]

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad (2.1)$$

em que X e Y são processos gaussianos independentes com média nula e mesma variância. Dessa forma, a FDP da envoltória resultante tem a forma [28]

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), \quad r \geq 0, \quad (2.2)$$

em que $\sigma^2 = E(X^2) = E(Y^2)$ é a variância (e, neste caso, potência média) de cada processo gaussiano e $E(\cdot)$ denota o operador esperança. Por sua vez, a FDA da envoltória segue a forma [28]

$$F_R(r) = 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), \quad r \geq 0. \quad (2.3)$$

A distribuição Rayleigh também é utilizada para a caracterização da propagação das ondas refletidas e refratadas através da troposfera [35] e ionosfera [36, 37] e enlaces de rádio em comunicações marítimas [38].

2.3 A distribuição Rice

A distribuição Rice [39, eq. (1.4-1)] descreve a envoltória do sinal recebido que resulta de uma propagação com múltiplos percursos e com LOS. Em outras palavras, uma envoltória Rice segue a forma [28]

$$R = \sqrt{(X + a)^2 + Y^2}, \quad (2.4)$$

em que X e Y são processos gaussianos independentes com média nula e mesma variância e a representa o valor médio da componente com LOS. Dessa forma, a FDP da envoltória do sinal resultante

pode ser escrita como [28]

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2 + a^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{ar}{\sigma^2}\right), \quad r \geq 0, \quad (2.5)$$

em que $I_0(\cdot)$ é a função de Bessel modificada do primeiro tipo e ordem zero [40, eq. (8.406)]. Por sua vez, a FDA da envoltória segue a forma [28]

$$F_R(r) = 1 - Q\left(\frac{a}{\sigma}, \frac{r}{\sigma}\right), \quad r \geq 0. \quad (2.6)$$

em que

$$Q(a, b) = \int_b^\infty x \exp\left(-\frac{x^2 + a^2}{2}\right) I_0(ax) dx \quad (2.7)$$

é a função Marcum-Q [41]. A distribuição Rice é frequentemente descrita em termos do parâmetro k_{Rice} , definido como a razão entre as potências da componente dominante (a^2) e das componentes espalhadas ($2\sigma^2$), ou seja,

$$k_{\text{Rice}} \triangleq \frac{a^2}{2\sigma^2}. \quad (2.8)$$

O desvanecimento Rice pode ser observado em microcélulas em ambientes urbano e suburbano com LOS [42], picocélulas *indoor* [43] e ambientes de fábrica [44]. Ainda, o modelo encontra aplicação nas comunicações via satélite [45, 46] e marítimas [38].

2.4 A distribuição Nakagami- m

A distribuição Nakagami- m foi proposta de forma empírica por Nakagami [4] em 1960 para ajuste de dados experimentais coletados ao longo de anos em regiões urbanas e suburbanas do Japão. Um modelo físico correspondente foi proposto posteriormente em [47], no qual o sinal recebido é resultado de uma composição de sinais oriundos de diversos agrupamentos de multipercursos. Em cada agrupamento, as ondas espalhadas apresentam atrasos de propagação similares e o espalhamento por atraso entre os diversos agrupamentos é relativamente grande [27]. Nestas condições, a envoltória do sinal resultante segue a forma [47, eq. (7a)]

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^m X_i^2 + Y_i^2}, \quad (2.9)$$

em que X_i e Y_i , $i = 1, \dots, m$ são processos gaussianos independentes com média nula e m é o número de agrupamento de multipercursos. A FDP da envoltória resultante é então obtida como [4]

$$f_R(r) = \frac{2m^m r^{2m-1}}{\Omega^m \Gamma(m)} \exp\left(-m \frac{r^2}{\Omega}\right), \quad r \geq 0, \quad (2.10)$$

em que $\Omega = E(R^2)$ é a potência média do sinal recebido, m é o fator de desvanecimento [4, eq. (4)] e $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \exp(-t) dt$ é a função Gamma [48, eq. (6.1.1)]. Por sua vez, a FDA da envoltória segue a forma [4]

$$F_R(r) = P(m, mr^2/\Omega), \quad r \geq 0, \quad (2.11)$$

em que $P(a, x) = 1/\Gamma(a) \times \int_0^x t^{a-1} \exp(-t) dt$ é a função Gamma incompleta regularizada inferior [48, eq. (6.5.1)]. Uma inspeção mais cuidadosa de (2.10) pode constatar que o parâmetro m , apesar de estar inicialmente relacionado ao fenômeno de agrupamento de multipercursos, pode ser obtido como o inverso da variância normalizada da potência, ou seja, [4, eq. (4)]

$$m = \frac{\Omega^2}{\text{Var}(R^2)}, \quad (2.12)$$

em que $\text{Var}(\cdot)$ representa o operador variância. Logo, este parâmetro, descrito em termos físicos, pode ser facilmente estimado a partir de dados experimentais e é utilizado para descrever o grau de desvanecimento sofrido pelo sinal de rádio. Por exemplo, para $m < 1$, o desvanecimento é mais severo que Rayleigh, ao passo que para $m > 1$, o desvanecimento é menos severo que Rayleigh. Para $m = 1$, a distribuição Rayleigh é obtida.

Casos de aplicação da distribuição Nakagami em comunicações sem fio são ilustrados em [49–51], sendo o último para o caso de ambientes interiores e em [52], para enlaces de rádio ionosféricos.

2.5 A distribuição Weibull

A distribuição Weibull foi proposta inicialmente por Fisher e Tippet [53] e relacionava-se à teoria dos valores extremos. Posteriormente, foi apresentada por Waloddi Weibull [54] para calcular o tempo médio de vida útil em máquinas industriais como um modelo estatístico para análise de confiabilidade.

Apesar de não ser um modelo de desvanecimento em sua essência, resultados de ajustes à medidas de campo, provenientes tanto de ambientes externos [55,56] como internos [50,57], têm demonstrado a grande aplicabilidade e versatilidade da distribuição Weibull para caracterizar as condições de propagação em canais de rádio móvel, aliada à sua simplicidade e facilidade de manipulação. Por isso, sua aplicação foi logo estendida para os sistemas de comunicação sem fio. Em [16], um modelo físico simples para a distribuição Weibull foi proposto, no qual a envoltória do sinal recebido segue a

forma [16, eq. (10)]

$$R = (X^2 + Y^2)^{1/\alpha}, \quad (2.13)$$

em que X e Y são processos gaussianos independentes com média nula e α é um parâmetro que representa as não-linearidades do ambiente de propagação. A FDP da envoltória é então dada por [16]

$$f_R(r) = \frac{\alpha r^{\alpha-1}}{\hat{r}^\alpha} \exp\left(-\frac{r^\alpha}{\hat{r}^\alpha}\right), \quad r \geq 0, \quad (2.14)$$

em que \hat{r} representa a raiz α -ésima do valor médio de R^α , ou seja, $\hat{r} = \sqrt[\alpha]{E(R^\alpha)}$. Por sua vez, a FDA resultante segue a forma [16]

$$F_R(r) = 1 - \exp\left(-\frac{r^\alpha}{\hat{r}^\alpha}\right), \quad r \geq 0. \quad (2.15)$$

2.6 A distribuição *Two-Ray*

A distribuição *Two-Ray* foi proposta em [3] especificamente para a caracterização de condições severas de desvanecimento. O modelo é um caso particular do *Two-Ray with Difuse Power* (TWDP) [14], no qual o sinal recebido é uma composição de dois sinais dominantes, V_1 e V_2 , com outros sinais espalhados que se aproximam a um processo gaussiano complexo. Em outras palavras,

$$R \exp(j\varphi) = \underbrace{V_1 \exp(j\varphi_1) + V_2 \exp(j\varphi_2)}_{\text{Comp. dominantes}} + \underbrace{X + jY}_{\text{Comp. espalhados}}, \quad (2.16)$$

em que φ é a fase do sinal resultante, V_1 , V_2 e φ_1 , φ_2 representam a amplitude e fase dos sinais dominantes, respectivamente, e X e Y representam as componentes em fase e quadratura do sinal resultante das ondas espalhadas. O modelo *Two-Ray* é então obtido a partir de (2.16) considerando a potência das componentes dispersas nula e fazendo $V_1 = V_2 = 1$, ocasionando um cenário de pior caso possível. Nestas condições, o sinal recebido assume a forma [3]

$$R \exp(j\varphi) = \exp(j\varphi_1) + \exp(j\varphi_2), \quad (2.17)$$

e a FDP da envoltória resultante é dada por [3]

$$f_R(r) = \frac{2r}{\pi \sqrt{4r^2 - r^4}}, \quad 0 \leq r < 2. \quad (2.18)$$

Por sua vez, sua FDA segue a forma [3]

$$F_R(r) = \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{r}{2}\right), \quad 0 \leq r < 2. \quad (2.19)$$

2.7 A distribuição α - μ

A distribuição α - μ foi primeiramente apresentada como modelo de desvanecimento em [16], sendo posteriormente formalizada em [15]. No entanto, a distribuição probabilística de fato já havia sido apresentada em 1925 por L. Amoroso [58]. Outros pesquisadores, como por exemplo E. W. Stacy [59], apresentaram contribuições à esta distribuição, porém sem relacioná-la a alguma aplicação específica ou modelagem de fenômenos físicos [15].

Modelos de desvanecimento tradicionais como Rayleigh, Nakagami- m e Hoyt foram obtidos a partir de considerações físicas do ambiente de propagação que podem não traduzir de forma estrita o que ocorre na prática [15]. Por exemplo, a aproximação pelo *Teorema do Limite Central* surge a partir da pressuposição de um ambiente com campo de espalhamento homogêneo, resultante de uma distribuição espacial aleatória dos pontos de dispersão [15, 27]. No entanto, conforme já argumentado por Braun [50], um campo de espalhamento homogêneo é obtido apenas nas seguintes condições: grande número de ondas parciais, amplitudes das ondas parciais idênticas, ondas parciais descorrelacionadas, nenhuma correlação de fase e amplitude de uma onda parcial e distribuição de fase homogênea entre $[0, 2\pi)$. Ainda, as superfícies de reflexão e refração podem apresentar correlação espacial entre si, logo resultando em um ambiente não-linear [15]. Essas não-linearidades são então levadas em conta no modelo α - μ , que considera a envoltória do sinal recebido como [15, eq. (10)]

$$R = \sqrt[\alpha]{\sum_{i=1}^n X_i^2 + Y_i^2}, \quad (2.20)$$

em que X_i e Y_i são processos gaussianos independentes com média nula, $E(X_i^2) = E(Y_i^2) = \hat{r}/2n$, onde \hat{r} representa a raiz α -ésima do valor médio de R^α , ou seja, $\hat{r} = \sqrt[\alpha]{E(R^\alpha)}$, α é um parâmetro que representa as não-linearidades do meio e n é o número de agrupamentos de multipercursos. Note que o conceito de agrupamento de multipercursos também é considerado no modelo α - μ . A partir de (2.20) e definindo o parâmetro μ como a extensão contínua de n , a FDP da envoltória pode ser obtida como [15]

$$f_R(r) = \frac{\alpha \mu^\mu r^{\alpha\mu-1}}{\hat{r}^{\alpha\mu} \Gamma(\mu)} \exp\left(-\mu \frac{r^\alpha}{\hat{r}^\alpha}\right), \quad r \geq 0. \quad (2.21)$$

De maneira similar ao parâmetro m de Nakagami, o parâmetro μ pode ser obtido a partir de (2.21) como o inverso da potência normalizada, isto é, $\mu = E^2(R^\alpha)/\text{Var}(R^\alpha) = \hat{r}^{2\alpha}/\text{Var}(R^\alpha)$ e pode ser

estimado completamente a partir de dados físicos.

Por sua vez, a FDA resultante segue a forma [15]

$$F_R(r) = P(\mu, \mu(r/\hat{r})^\alpha), \quad r \geq 0, \quad (2.22)$$

em que $P(a, x)$ é a função Gamma incompleta regularizada inferior, já mencionada previamente.

A distribuição α - μ apresenta como casos particulares diversas distribuições conhecidas. Algumas delas estão ilustradas na Tabela 2.1, com os respectivos valores de α e μ .

Tab. 2.1: Exemplos de casos particulares da distribuição α - μ

Distribuição	α	μ
Weibull	-	$\mu = 1$
Nakagami- m	$\alpha = 2$	$\mu = m$
Rayleigh	$\alpha = 2$	$\mu = 1$
Exponencial Negativa	$\alpha = 1$	$\mu = 1$
Gaussiana Unilateral	$\alpha = 2$	$\mu = 1/2$

2.8 A distribuição κ - μ

A distribuição κ - μ foi primeiramente apresentada como modelo de desvanecimento em [60], sendo posteriormente formalizada em [27]. Assim como o modelo α - μ , o modelo κ - μ também leva em conta um ambiente heterogêneo, com diversos agrupamentos de multipercursos, no entanto considera a condição de LOS. Por hipótese, é pressuposto que as ondas resultantes de cada agrupamento possuem potências iguais, mas dentro de cada agrupamento há uma componente arbitrária, com potência arbitrária. Nestas condições, a envoltória resultante é dada da forma [27]

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i + p_i)^2 + (Y_i + q_i)^2}, \quad (2.23)$$

em que X_i e Y_i , $i = 1, \dots, n$ são processos gaussianos independentes com média nula, $E(X_i^2) = E(Y_i^2) = \sigma^2$ e p_i e q_i correspondem ao valor médio das componentes em fase e quadratura da onda resultantes do agrupamento i , respectivamente. A partir de (2.23) e definindo-se o parâmetro μ como a extensão contínua de n e κ como a razão entre a potência das componentes dominantes e espalhadas, ou seja, $\kappa = d^2/2n\sigma^2$, em que $d = \sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n p_i^2 + q_i^2$, a FDP da envoltória do sinal resultante

pode ser obtida como [27]

$$f_R(r) = \frac{2\mu(1+\kappa)^{\frac{\mu+1}{2}} r^\mu}{\kappa^{\frac{\mu-1}{2}} \exp(\mu\kappa) \hat{r}^{\mu+1}} \exp[-\mu(1+\kappa)(r/\hat{r})^2] \times I_{\mu-1} \left[2\mu\sqrt{\kappa(1+\kappa)}(r/\hat{r}) \right], \quad (2.24)$$

em que $\hat{r} = \sqrt{E(R^2)}$ e $I_\nu(\cdot)$ é a função de Bessel modificada de primeiro tipo e ordem ν .

Por sua vez, a FDA da envoltória é obtida como [27]

$$F_R(r) = 1 - Q_\mu \left(\sqrt{2\kappa\mu}, \sqrt{2(1+\kappa)\mu}r/\hat{r} \right), \quad (2.25)$$

em que

$$Q_\nu(a, b) = \frac{1}{a^{1-\nu}} \int_b^\infty x^\nu \exp\left(-\frac{x^2 + a^2}{2}\right) I_{\nu-1}(ax) dx \quad (2.26)$$

é a função de Marcum Q de ordem ν [41]. Note que, juntamente com a distribuição α - μ e diferentemente da maioria das distribuições, a distribuição κ - μ é descrita em termos de dois parâmetros físicos ao invés de apenas um, o que a torna um modelo bastante flexível para ajuste de dados de campo medidos nos mais diversos cenários, tanto para estatísticas de primeira ordem [27] como para ordens superiores [61].

Definindo $W = R^2$ como a potência do sinal recebido, ou seja,

$$W = \sum_{i=1}^n (X_i + p_i)^2 + (Y_i + q_i)^2, \quad (2.27)$$

suas FDP e FDA são então dadas por, respectivamente,

$$f_W(w) = \frac{\mu(1+\kappa)^{\frac{\mu+1}{2}} w^{\frac{\mu-1}{2}}}{\kappa^{\frac{\mu-1}{2}} \exp(\mu\kappa) \bar{w}^{\frac{\mu+1}{2}}} \exp[-\mu(1+\kappa)(w/\bar{w})] \times I_{\mu-1} \left[2\mu\sqrt{\kappa(1+\kappa)}w/\bar{w} \right], \quad (2.28)$$

$$F_W(w) = 1 - Q_\mu \left(\sqrt{2\kappa\mu}, \sqrt{2(1+\kappa)\mu}w/\bar{w} \right). \quad (2.29)$$

A partir de (2.27), uma propriedade interessante da distribuição κ - μ pode ser observada: a soma de potências κ - μ também é uma potência κ - μ . Por exemplo, a soma de M potências κ - μ independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), cada uma com parâmetros κ , μ , \hat{r}^2 (potência média), é uma outra potência κ - μ , com parâmetros κ , $M \times \mu$, e $M \times \hat{r}^2$ [27]. Esta propriedade pode ser utilizada, por exemplo, para o estudo de desempenho de combinadores por diversidade em um ambiente κ - μ e será explorada adiante neste trabalho.

O parâmetro m de Nakagami, conforme deduzido em [27], pode ser expresso em função dos parâmetros κ e μ da forma [27]

$$m = \frac{\mu(1 + \kappa)^2}{1 + 2\kappa}. \quad (2.30)$$

Este interessante resultado indica que, para um mesmo valor de m de Nakagami, infinitas combinações de κ e μ podem ser obtidas, o que confere à distribuição a sua grande flexibilidade.

Assim como a distribuição α - μ , a κ - μ apresenta como casos particulares diversas distribuições conhecidas. Algumas delas estão ilustradas na Tabela 2.2, com os respectivos valores de κ e μ .

Tab. 2.2: Exemplos de casos particulares da distribuição κ - μ

Distribuição	κ	μ
Rice	$\kappa = k_{\text{Rice}}$	$\mu = 1$
Nakagami- m	$\kappa \rightarrow 0$	$\mu = m$
Rayleigh	$\kappa \rightarrow 0$	$\mu = 1$
Gaussiana Unilateral	$\kappa \rightarrow 0$	$\mu = 1/2$

2.9 Conclusões

Este capítulo apresentou uma descrição das principais distribuições probabilísticas utilizadas para descrever as variações de pequena escala do sinal de rádio. Foram apresentados modelo físico e formulações para as distribuições Rayleigh, Rice, Nakagami- m , Weibull, *Two-Ray*, α - μ e κ - μ . Observou-se que os diferentes modelos surgiram a partir da necessidade de caracterizar os mais variados cenários de desvanecimento. Por exemplo, a distribuição Rayleigh explora o desvanecimento ocasionado em um ambiente de espalhamento homogêneo e sem ausência de LOS, ao contrário da distribuição Rice, que explora a presença de uma componente dominante. Por sua vez, a distribuição Nakagami- m explora o caso em que o sinal recebido é composto por sinais oriundos de diversos agrupamentos de multipercursos. No caso de Weibull, são exploradas as não-linearidades, assim como na distribuição α - μ , que também leva em conta o agrupamento de multipercursos. Ainda, a distribuição *Two-Ray* explora as condições severas de desvanecimento. Por fim, a distribuição κ - μ explora o caso de agrupamentos de multipercursos e LOS.

Capítulo 3

A Distribuição de Desvanecimento κ - μ Extrema

3.1 Introdução

Como visto anteriormente, há uma escassez de distribuições de probabilidade designadas especificamente para a caracterização de condições severas de desvanecimento. Apesar de algumas distribuições apresentarem características de desvanecimento severo para determinadas configurações de seus parâmetros, a única distribuição proposta especificamente para este fim, dentre as abordadas neste trabalho, é a *Two-Ray*. Este capítulo investiga a utilização de uma nova distribuição de desvanecimento severo, denominada κ - μ Extrema. A nova distribuição, apresentada originalmente em [27], é um caso particular da distribuição κ - μ , obtida quando seus parâmetros assumem valores extremos, caracterizando assim um cenário severo. A distribuição apresenta um parâmetro de desvanecimento, o mesmo parâmetro m de Nakagami, que pode ser utilizado para ajuste a dados de campo.

3.2 Formulações gerais

Seja um sinal de rádio cuja envoltória R segue a distribuição κ - μ Extrema com $\hat{r} = \sqrt{\mathbb{E}(R^2)}$ sendo o seu valor eficaz. Então a FDP da envoltória normalizada $P = R/\hat{r}$, $f_P(\rho)$, é dada por

$$f_P(\rho) = \frac{4mI_1(4m\rho)}{\exp[2m(1 + \rho^2)]} + \exp(-2m)\delta(\rho), \quad (3.1)$$

em que $m = \text{Var}^{-1}(P^2)$ é o já conhecido parâmetro de desvanecimento e $\delta(\cdot)$ é a função delta de Dirac [34]. Por sua vez, sua FDA é dada por

$$F_P(\rho) = 1 - Q_0(2\sqrt{m}, 2\sqrt{m}\rho), \quad (3.2)$$

em que

$$Q_0(a, b) = a \int_b^\infty \exp\left(-\frac{x^2 + a^2}{2}\right) I_1(ax) dx \quad (3.3)$$

é a função Marcum Q de ordem zero [41].

O k -ésimo momento de P , $E(P^k)$, pode ser expresso em uma forma fechada como

$$E(P^k) = \frac{km\Gamma(k/2)}{(2m)^{\frac{k}{2}}} {}_1F_1(1 - k/2; 2; -2m), \quad (3.4)$$

$k > 0$ e $E(P^0) = 1$, em que ${}_1F_1(\cdot; \cdot; \cdot)$ é a função hipergeométrica confluyente [48, eq. (13.1.2)]. Obviamente, $E(R^k) = \hat{r}^k E(P^k)$.

No Apêndice A, uma representação em série muito útil para a FDA κ - μ Extrema é obtida como

$$F_P(\rho) = 1 - \exp(-2m) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2m)^{i+1}}{(i+1)!i!} \Gamma(i+1, 2m\rho^2), \quad (3.5)$$

em que $\Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ é a função Gamma incompleta superior [40, eq. (8.350.2)]. Alternativamente, sabendo que para valores inteiros de i , que é o caso, $\Gamma(1+i, x) = i!e^{-x} \sum_{n=0}^i \frac{x^n}{n!}$ [40, eq. (8.352.2)], a FDA κ - μ Extrema pode ser reescrita em uma outra formulação em série como

$$F_P(\rho) = 1 - \exp[-2m(1 + \rho^2)] \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2m)^{i+1}}{(i+1)!} \sum_{n=0}^i \frac{(2m\rho^2)^n}{n!}. \quad (3.6)$$

Entre outras aplicações, a expansão em série da FDA κ - μ Extrema pode ser utilizada para:

- redução do esforço computacional para o cálculo da FDA κ - μ Extrema;
- obtenção de outras estatísticas em um canal κ - μ Extremo, como por exemplo taxa de erro de bit na saída de combinadores;
- geração de amostras κ - μ Extremo por meio da inversão da FDA [34].

3.3 Modelo físico e obtenção a partir da distribuição κ - μ

A distribuição κ - μ Extrema foi apresentada inicialmente em [27], onde surgiu como um caso particular da distribuição κ - μ quando os seus parâmetros κ e μ assumiam valores extremos simultaneamente. Em [27, eq. (16)], a obtenção da distribuição κ - μ Extrema foi realizada notando que, à medida que se mantinha m constante e fazia $\kappa \rightarrow \infty$ (LOS muito intensa) e $\mu \rightarrow 0$ (pouquíssimos multipercursos) em (2.24), um impulso tendia a ocorrer em $\rho = 0$. A FDP da envoltória normalizada foi então obtida como [27, eq. (16)]

$$f_P(\rho) = \frac{4mI_1(4m\rho)}{\exp[2m(1+\rho^2)]} + \left[1 - \frac{\sqrt{2m\pi}}{\exp(m)}I_{0.5}(m)\right]\delta(\rho). \quad (3.7)$$

Utilizando $I_{0.5} = [\exp(m) - \exp(-m)]/\sqrt{2\pi m}$ [40, eq. (8.447)] em (3.7), a expressão dada por (3.1) é então obtida.

Nesta seção, uma abordagem formal para a obtenção da distribuição κ - μ Extrema confirma o resultado de [27, eq. (16)]. Conforme descrito anteriormente, na distribuição κ - μ , o parâmetro m de Nakagami relaciona-se com κ e μ da forma $m = \mu(1 + \kappa)^2/(1 + 2\kappa)$. Aplicando as condições extremas em (2.30), isto é, fixando m e fazendo $\kappa \rightarrow \infty$ e $\mu \rightarrow 0$, pode ser visto que $\kappa\mu \rightarrow 2m$. Aplicando então este resultado à FDA κ - μ , esta é obtida de forma exata como

$$F_P(\rho) = [1 - Q_0(2\sqrt{m}, 2\sqrt{m}\rho)]U(\rho), \quad (3.8)$$

em que $U(\rho)$ é a função degrau [34], utilizada aqui para fins de formalidade. Para obter a FDP κ - μ Extrema, deve-se então derivar (3.8) com relação a ρ , o que resulta em

$$\begin{aligned} f_P(\rho) &= \frac{d[1 - Q_0(2\sqrt{m}, 2\sqrt{m}\rho)]}{d\rho} + [F_P(0) - F_P(0_-)]\delta(\rho) \\ &= \frac{d[1 - Q_0(2\sqrt{m}, 2\sqrt{m}\rho)]}{d\rho} + \exp(-2m)\delta(\rho). \end{aligned} \quad (3.9)$$

A derivada em (3.9), por sua vez, pode ser obtida utilizando a *Regra de Leibniz* [48, eq. (3.3.7)], que diz que

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{a(z)}^{b(z)} f(x, z) dz = \int_{a(z)}^{b(z)} \frac{\partial f(x, z)}{\partial z} dx + \frac{\partial b(z)}{\partial z} f(b(z), z) - \frac{\partial a(z)}{\partial z} f(a(z), z). \quad (3.10)$$

Fazendo $z = \rho$, $a(z) = a(\rho) = 2\sqrt{m}\rho$, $b(z) = \infty$ e $f(z, x) = \exp\left(-\frac{x^2+4m}{2}\right) I_1(2\sqrt{m}x)$, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d[1 - Q_0(2\sqrt{m}, 2\sqrt{m}\rho)]}{d\rho} &= -2\sqrt{m} \frac{d}{d\rho} \left[\int_{2\sqrt{m}\rho}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2+4m}{2}\right) I_1(2\sqrt{m}x) dx \right] \\ &= -2\sqrt{m} \left[-2\sqrt{m} \exp\left(-\frac{4m\rho^2+4m}{2}\right) I_1(4m\rho) \right] \\ &= 4m I_1(4m\rho) \exp[-2m(1+\rho^2)]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Logo,

$$f_P(\rho) = \frac{4m I_1(4m\rho)}{\exp[2m(1+\rho^2)]} + \exp(-2m)\delta(\rho), \quad (3.12)$$

confirmando [27, eq. (16)].

De maneira interessante, no modelo κ - μ Extremo, apesar de κ e μ tenderem a valores extremos, o parâmetro físico m continua a representar o inverso da variância da potência normalizada, ou seja, a relação $m = \text{Var}^{-1}(P^2)$ é mantida.

A Fig. 3.1 compara as distribuições Nakagami- m , κ - μ and κ - μ Extrema para um mesmo valor de m ($m = 1,25$). Note que, para um dado m , todas as possíveis distribuições κ - μ posicionam-se entre as curvas de Nakagami- m (limite inferior) e κ - μ Extrema (limite superior), ou seja, esta última atua como um cenário de pior caso para o modelo κ - μ .

As Figs. 3.2 and 3.3 ilustram exemplos das FDP e FDA κ - μ Extrema, $f_P(\rho)$ e $F_P(\rho)$, como funções da envoltória normalizada, ρ , e para diversos valores de m . Note que, diferentemente dos modelos de desvanecimento tradicionais, existe um impulso na origem que indica uma probabilidade não-nula de envoltória nula, sugerindo uma condição severa de desvanecimento. Na Fig. 3.2, está representada em $\rho = 0$ o valor da amplitude dos impulsos e não $f_P(0)$, que é indeterminado.

Por fim, utilizando as formulações (3.2) e (3.5), respectivamente, a Fig. 3.4 compara as FDAs exata e aproximada κ - μ Extrema. Na formulação aproximada, são considerados os trinta primeiros termos do somatório, valor escolhido para garantir a indistinguibilidade visual das curvas. Para ilustrar o esforço computacional relativo ao cálculo de cada uma das formulações, a Tabela 3.1 ilustra o tempo gasto para a geração de cada uma das curvas da Fig. 3.4 utilizando o *software Wolfram Mathematica*[®] 6 em um microcomputador pessoal com processador *Intel*[®] *Core*TM 2 *Duo T7300* @ 2,0 GHz e memória RAM (Memória de acesso aleatório, do inglês *Random-Access Memory*) de 2 GB. Note como a formulação em série é calculada em um tempo significativamente menor do que a formulação exata, mesmo para um número elevado de termos no somatório.

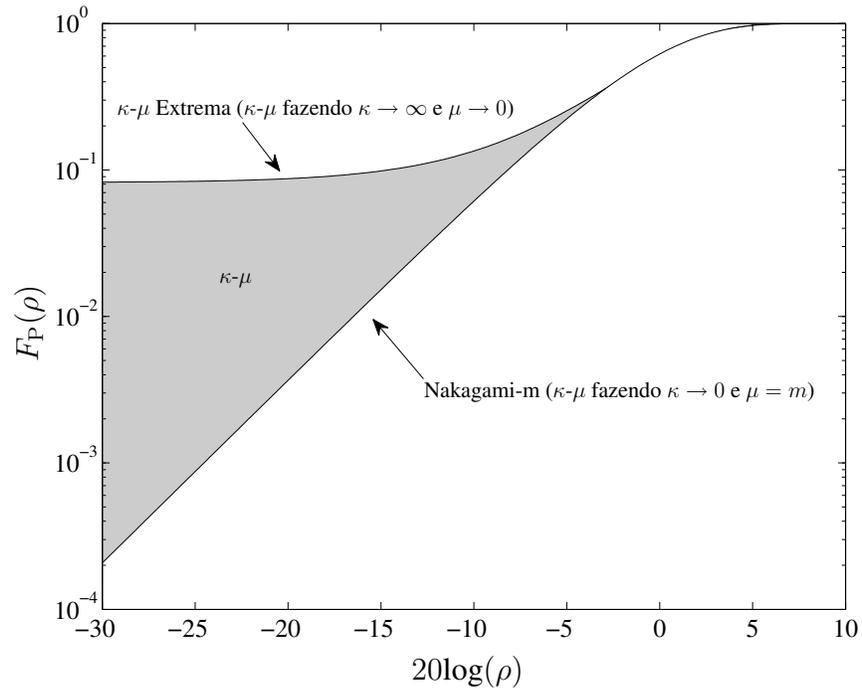


Fig. 3.1: FDA de envoltórias Nakagami- m , κ - μ and κ - μ Extrema para $m = 1,25$.

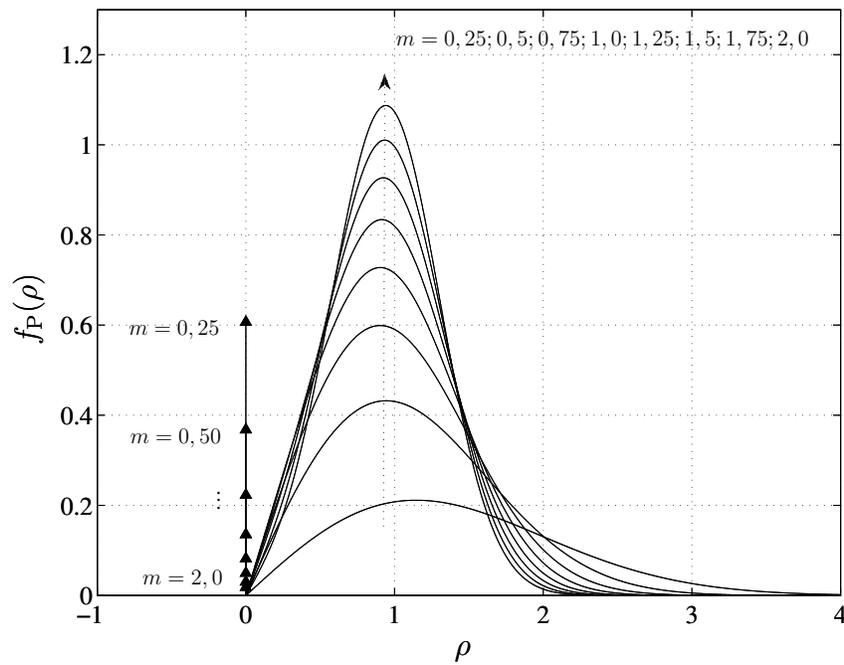


Fig. 3.2: Função densidade de probabilidade de uma envoltória normalizada κ - μ Extrema.

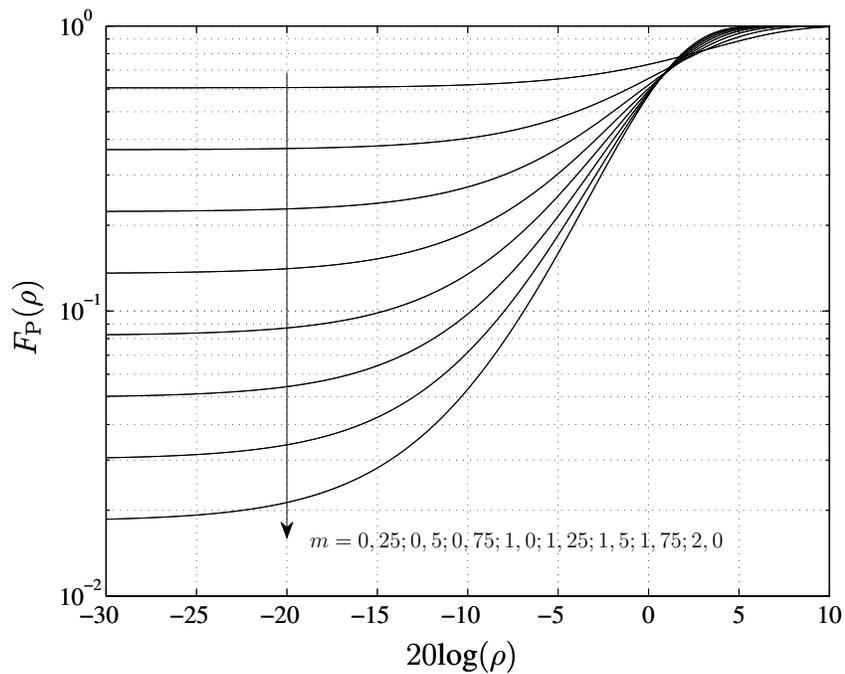


Fig. 3.3: Função de distribuição acumulada de uma envoltória normalizada κ - μ Extrema.

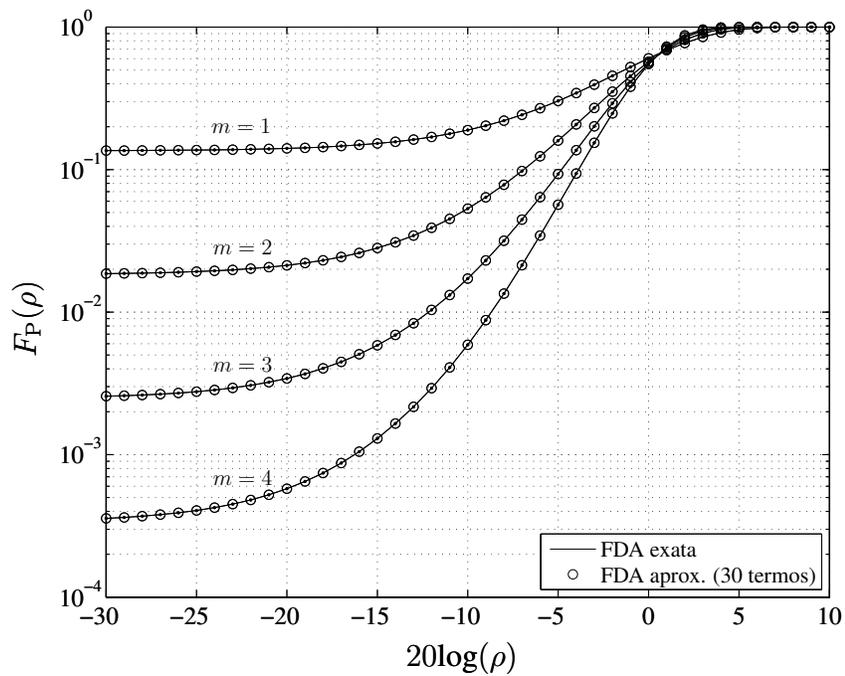


Fig. 3.4: Comparação entre as FDAs exata e aproximada de uma envoltória normalizada κ - μ Extrema utilizando a expansão em série.

Tab. 3.1: Tempo gasto para a geração da FDA κ - μ Extrema

m	Exata	Aproximada (30 termos)
$m = 1$	2,964 s	0,436 s
$m = 2$	3,494 s	0,514 s
$m = 3$	3,760 s	0,577 s
$m = 4$	3,697 s	0,562 s

3.4 Propriedades da soma de variáveis κ - μ Extremas

A distribuição da soma de envoltórias e potências de sinais com desvanecimento constituem estatísticas importantes para o estudo do desempenho de sistemas de comunicação sem fio. Entre as suas aplicações, incluem o estudo do desempenho de técnicas de combinação por diversidade. Para a distribuição κ - μ , como visto anteriormente, a soma de potências κ - μ i.i.d., cada uma com parâmetros κ , μ e \hat{r}^2 (potência média) é uma outra potência κ - μ , por sua vez com parâmetros κ , $M \times \mu$ e $M \times \hat{r}^2$. Logo a FDA da soma de potências κ - μ pode ser dada em forma fechada por

$$F_W(w) = 1 - Q_{\mu M} \left(\sqrt{2\kappa\mu M}, \sqrt{2(1+\kappa)\mu w/\hat{r}^2} \right). \quad (3.13)$$

Vale lembrar que a distribuição κ - μ Extrema é um caso particular da distribuição κ - μ , com seus parâmetros assumindo valores extremos. Logo, aplicando as mesmas condições extremas em (3.13), isto é, fazendo $\kappa \rightarrow \infty$ e $\mu \rightarrow 0$, a FDA de soma de potências κ - μ Extrema também pode ser obtida em forma fechada como

$$F_W(w) = 1 - Q_0 \left(2\sqrt{mM}, 2\sqrt{mw/\hat{r}^2} \right). \quad (3.14)$$

A FDP correspondente é então dada por

$$f_W(w) = \frac{2mI_1 \left(4m\sqrt{w/\hat{r}^2} \right)}{\sqrt{w\hat{r}^2} \exp [2m(1+w/\hat{r}^2)]} + \frac{\exp(-2m)}{2\sqrt{w\hat{r}^2}} \delta(\sqrt{w/\hat{r}^2}). \quad (3.15)$$

Por sua vez, a determinação da distribuição da soma de M envoltórias independentes pode ser uma tarefa um pouco mais complicada, pois envolve o cálculo de $M - 1$ convoluções ou a transformada inversa do produto de M funções características das FDP individuais. Uma formulação elegante para a distribuição exata foi proposta em [62], onde a FDA do sinal resultante é expressa na forma de uma integral M -upla finita. Aplicando este resultado ao caso κ - μ Extremo, e após algumas manipulações

algébricas, a FDA da envoltória normalizada resultante ($P = \sum_{i=1}^M P_i$) pode ser obtida como

$$F_P(\rho) = \sum_{i=0}^M \binom{M}{i} \underbrace{\int_0^\rho \cdots \int_0^{\rho - \sum_{j=2}^{M-i} \rho_j}}_{M-i \text{ integrais}} \frac{(4m)^{M-i} I_1(4m\rho_1) \cdots I_1(4m\rho_{M-i})}{\exp[2m(M + \rho_1^2 + \cdots + \rho_{M-i}^2)]} d\rho_1 \cdots d\rho_{M-i}. \quad (3.16)$$

A FDP correspondente pode ser obtida derivando (3.16) com relação à ρ , o que resulta em, após algumas manipulações algébricas,

$$f_P(\rho) = \sum_{i=0}^{M-1} \binom{M}{i} \underbrace{\int_0^\rho \cdots \int_0^{\rho - \sum_{j=2}^{M-i} \rho_j}}_{M-i-1 \text{ integrais}} I_1 \left[4m \left(\rho - \sum_{j=2}^{M-i} \rho_j \right) \right] \\ \times \frac{I_1(4m\rho_2) \cdots I_1(4m\rho_{M-i})}{\exp \left\{ 2m \left[M + \left(\rho - \sum_{j=2}^{M-i} \rho_j \right)^2 + \cdots + \rho_{M-i}^2 \right] \right\}} d\rho_2 \cdots d\rho_{M-i} + \exp(-2Mm)\delta(\rho). \quad (3.17)$$

As formulações exatas para as FDP e FDA em (3.16) e (3.17), respectivamente, são muito úteis para valores pequenos de M , no entanto podem se tornar impraticáveis à medida que M aumenta, como por exemplo $M > 4$. Para contornar a complexidade da formulação exata, métodos de aproximação podem ser utilizados, como por exemplo em [63–65], onde são apresentadas aproximações para a soma de envoltórias Rice, Nakagami- m e κ - μ , respectivamente. Sabendo-se que a FDP da soma de M envoltórias i.i.d. κ - μ pode ser aproximada por outra FDP κ - μ [65], então é esperado que o mesmo possa ocorrer para o caso da κ - μ Extrema. A aproximação é feita calculando o parâmetro m equivalente (m_{eq}) relacionado ao sinal resultante e usando-o como parâmetro de desvanecimento para caracterizar a distribuição κ - μ Extrema aproximada. A expressão exata para o n -ésimo momento da soma de M envoltórias, $E(P^n)$, em função dos momentos das envoltórias individuais, $E(P_i^k)$, é dada por [64, eq. (6)]

$$E(P^n) = \sum_{n_1=0}^n \sum_{n_2=0}^{n_1} \cdots \sum_{n_{M-1}=0}^{n_{M-2}} \binom{n}{n_1} \binom{n_1}{n_2} \cdots \binom{n_{M-2}}{n_{M-1}} E(P_1^{n-n_1}) E(P_2^{n_1-n_2}) \cdots E(P_M^{n_{M-1}}). \quad (3.18)$$

Para o caso i.i.d. e $n = 2$ e 4 , (3.18) é simplificada para, respectivamente, [64, eqs. (8) e (9)]

$$E(P^2) = M E(P_i^2) + M(M-1) E^2(P_i) \quad (3.19) \\ E(P^4) = M E(P_i^4) + 4M(M-1) E(P_i^3) E(P_i) \\ + 3M(M-1) E^2(P_i^2) \\ + 6M(M-1)(M-2) E(P_i^2) E^2(P_i)$$

$$+ M(M - 1)(M - 2)(M - 3) E^4 (P_i) . \quad (3.20)$$

O parâmetro m equivalente pode ser então calculado como

$$m_{eq} = \frac{E^2 (P^2)}{E (P^4) - E^2 (P^2)}, \quad (3.21)$$

em que $E (P^2)$ e $E (P^4)$ são dados por (3.19) e (3.20), respectivamente, e $E (P_i^k)$ é dado por (3.4).

Ainda, sabendo-se a priori que a probabilidade de envoltória resultante nula vale

$$P\{P = 0\} = \prod_{i=1}^M P\{P_i = 0\} = \exp(-2Mm), \quad (3.22)$$

uma versão ainda mais acurada para a distribuição aproximada pode ser obtida. Neste caso, a FDA aproximada, $\tilde{F}_P(\rho)$, da soma de M envoltórias normalizadas i.i.d. torna-se

$$\tilde{F}_P(\rho) = [1 - Q_0(2\sqrt{m_{eq}}, 2\sqrt{m_{eq}}\rho) - \exp(-2m_{eq})] \times \frac{1 - \exp(-2Mm)}{1 - \exp(-2m_{eq})} + \exp(-2Mm), \quad (3.23)$$

em que o termo $[1 - \exp(-2Mm)]/[1 - \exp(-2m_{eq})]$ aparece para fins de normalização. De maneira similar, a FDP da soma de M envoltórias normalizadas i.i.d., $\tilde{f}_P(\rho)$, é obtida como

$$\tilde{f}_P(\rho) = \left[\frac{4m_{eq}I_1(4m_{eq}\rho)}{\exp[2m_{eq}(1 + \rho^2)]} \right] \times \frac{1 - \exp(-2Mm)}{1 - \exp(-2m_{eq})} + \exp(-2Mm)\delta(\rho). \quad (3.24)$$

É importante notar que, em (3.23) e (3.24), a envoltória é normalizada com relação à $\hat{r} = \sqrt{E(R^2)}$, em que $R = \sum_{i=1}^M R_i$ ao invés de $\hat{r}_i = \sqrt{E(R_i^2)}$. Por isso, para comparar as formulações (3.16) e (3.23), ou (3.17) e (3.24), é preciso garantir antes que a normalização seja feita com relação à mesma grandeza. A Fig. 3.5 compara a formulação exata e aproximada para a soma de M envoltórias normalizadas e independentes κ - μ Extrema e $m = 1$. Por sua vez, a Fig. 3.6 compara a formulação exata e aproximada para a soma de duas envoltórias normalizadas e independentes κ - μ Extrema e $m = 1, 2, 3, 4, 5$. Note como as curvas aproximadas assemelham-se às exatas.

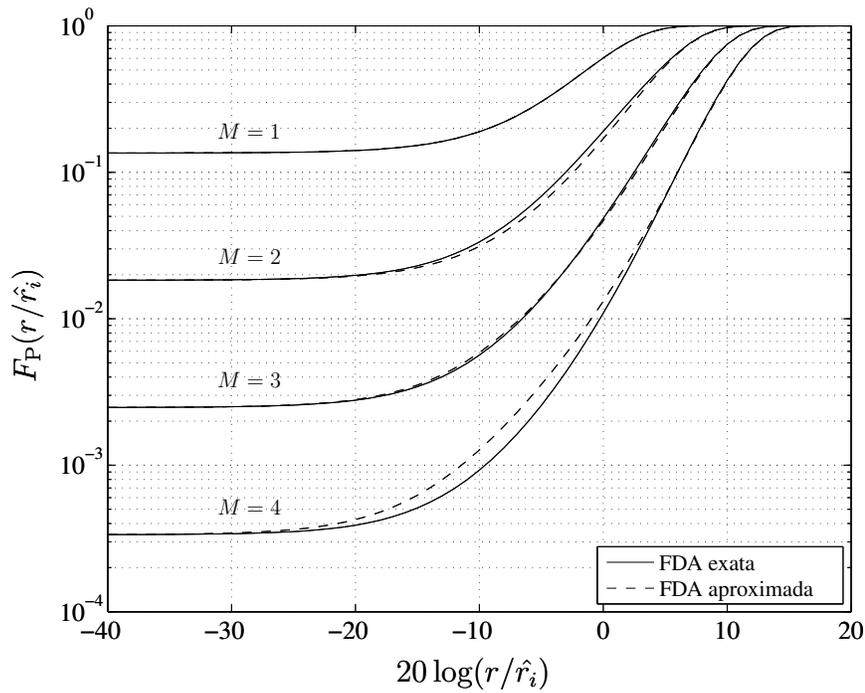


Fig. 3.5: FDAs exata e aproximada da soma de $M = 1, 2, 3, 4$ envoltórias normalizadas e independentes κ - μ Extrema para $m = 1$.

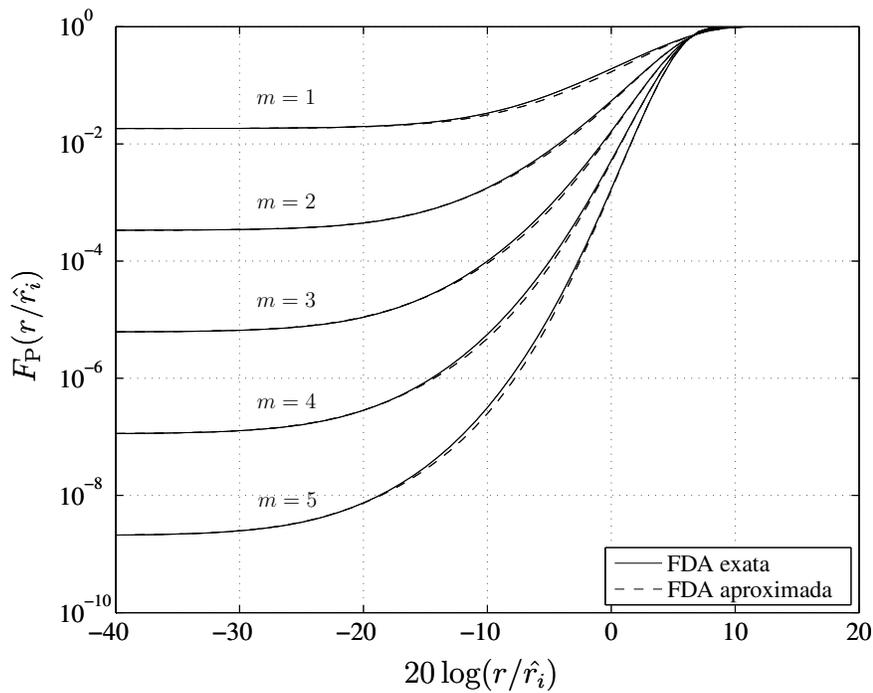


Fig. 3.6: FDAs exata e aproximada da soma de duas envoltórias normalizadas e independentes κ - μ Extrema para $m = 1, 2, 3, 4, 5$.

3.5 Comparação entre κ - μ Extrema, Rayleigh e *Two-Ray*

Em [3, 6], as distribuições *Two-Ray* e Rayleigh foram comparadas. Esboçadas em função da envoltória normalizada com relação ao seu valor mediano, a FDA *Two-Ray* mostrou-se acima da FDA Rayleigh, justificando o termo desvanecimento *hiper-Rayleigh*. No entanto, deve ser notado que se as curvas fossem esboçadas em função da envoltória normalizada com relação ao seu valor eficaz, as duas curvas iriam cruzar em algum ponto, como mostrado na Fig. 3.7. Logo, a condição de desvanecimento *hiper-Rayleigh* é verificada apenas na situação em que a normalização é dada em relação à mediana.

Nesta seção as distribuições κ - μ Extrema, Rayleigh e *Two-Ray* são comparadas. Para tanto, a mediana da distribuição κ - μ Extrema precisa ser primeiramente determinada. Infelizmente, não foi encontrada nenhuma solução em forma fechada, logo a equação $\hat{r}_{med} = F_R^{-1}(1/2)$ é resolvida apenas por métodos numéricos. A Fig. 3.8 ilustra a mediana normalizada ($\hat{\rho}_{med} = \hat{r}_{med}/\hat{r}$) da distribuição κ - μ Extrema esboçada em função do parâmetro m . Note que para valores de $m < \ln(2)/2$, a mediana é nula, pois para estes valores a amplitude do impulso é maior que $1/2$, isto é, $\exp(-2m) > 1/2$.

A Fig. 3.9 compara as distribuições κ - μ Extrema, Rayleigh e *Two-Ray*, esboçadas em função da envoltória normalizada com relação à sua mediana ($\rho_{med} = r/\hat{r}_{med} = \rho/\hat{\rho}_{med}$). Note que para a distribuição κ - μ Extrema, há diversas situações que caracterizam o desvanecimento *hiper-Rayleigh*. Mais interessante, para $m = 1$, o seguinte comportamento pode ser notado: para $\rho_{med} < 0$ dB, a curva κ - μ Extrema situa-se acima da Rayleigh, enquanto para $\rho_{med} \geq 0$ dB, segue-a estritamente.

3.6 Conclusões

Este capítulo investigou a distribuição de desvanecimento κ - μ Extrema. Apresentada originalmente em [27], a distribuição κ - μ Extrema é obtida a partir da distribuição κ - μ quando os parâmetros κ e μ assumem valores extremos e possui um parâmetro de desvanecimento que pode ser utilizado para ajustes a dados de campo. Ainda, diferentemente das distribuições de desvanecimento tradicionais, a κ - μ Extrema possui uma probabilidade não-nula de envoltória nula, comportamento característico de ambientes com condições muito severas de desvanecimento.

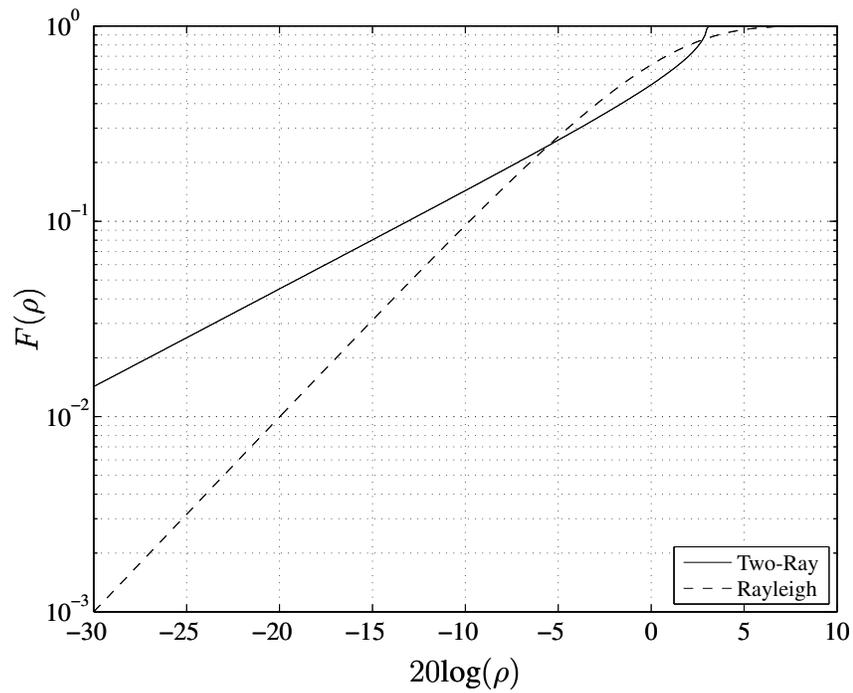


Fig. 3.7: FDAs *Two-Ray* e *Rayleigh* esboçadas em função da envoltória normalizada com relação ao seu valor eficaz.

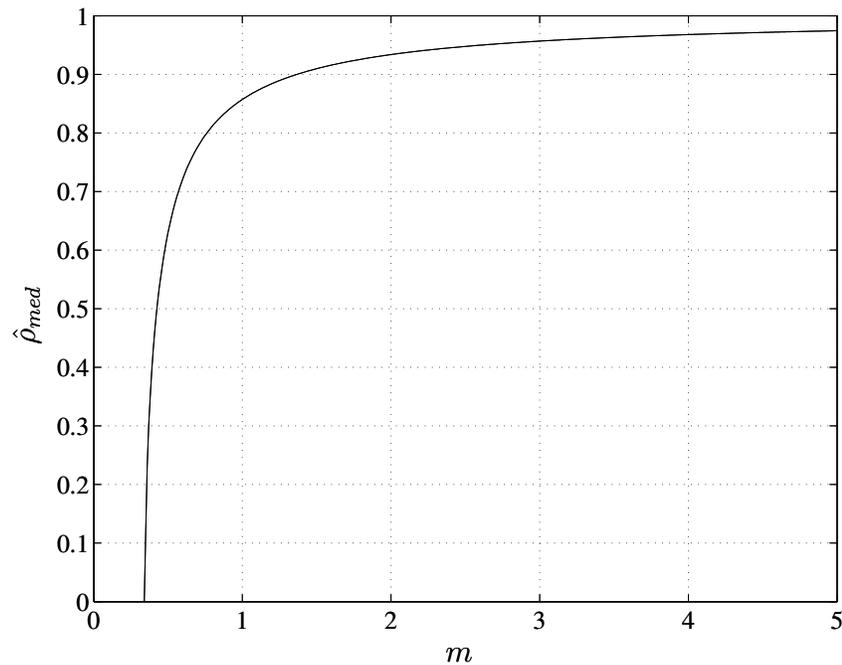


Fig. 3.8: Mediana normalizada da distribuição κ - μ Extrema esboçada em função do parâmetro m .

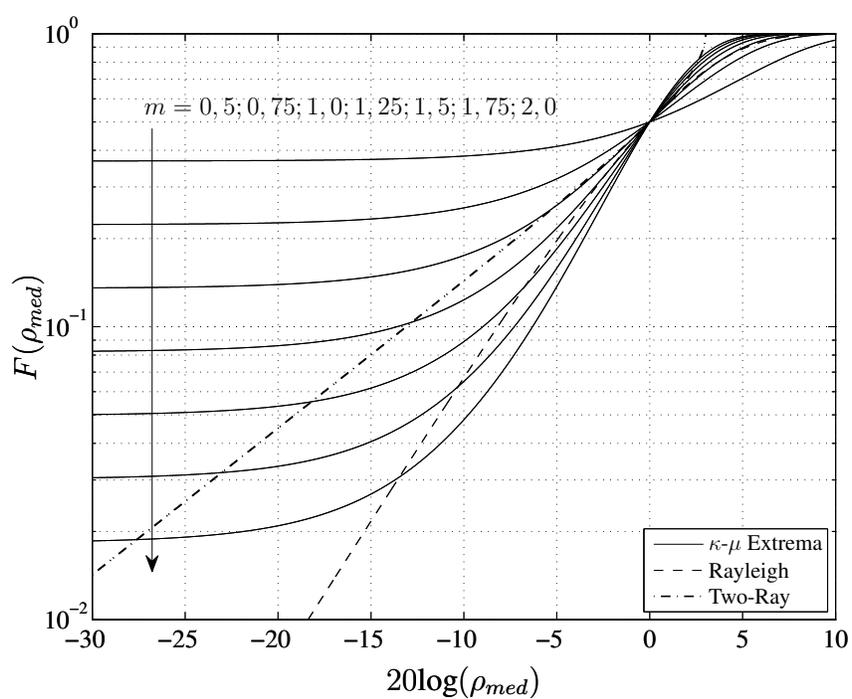


Fig. 3.9: FDAs Rayleigh, *Two-Ray* e κ - μ Extrema esboçadas em função da envoltória normalizada com relação ao seu valor mediano.

Capítulo 4

Aplicações e Validações por Medidas de Campo

4.1 Introdução

No capítulo anterior, a distribuição κ - μ Extrema foi apresentada como um possível modelo estatístico para descrever as variações de pequena escala do sinal de rádio em condições muito severas de desvanecimento. No entanto, para ser efetivamente representativo das condições de propagação reais, o modelo teórico precisa ser validado por meio de dados de campo.

Este capítulo apresenta uma série de medidas de campo que ilustram algumas condições nas quais as variações de pequena escala do sinal recebido podem ser modeladas pela distribuição κ - μ Extrema. O primeiro conjunto de medidas foi apresentado inicialmente em [6] para ilustrar situações em que desvanecimentos piores do que aqueles previstos por uma distribuição Rayleigh podem ocorrer e avaliar a aplicabilidade da distribuição *Two-ray* como um modelo para caracterizar tais cenários. As medidas foram realizadas em um ambiente confinado, cenário cujas condições de propagação são potencialmente piores do que as de Rayleigh devido ao pequeno número de multipercursos.

O segundo conjunto de medidas foi realizado pelo próprio grupo de pesquisa *Wireless Technology Laboratory* (WissTek), pertencente à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação (FEEC) da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp) e visa ilustrar outras condições em que desvanecimento muito severo pode ocorrer.

Por fim, o terceiro conjunto de medidas foi apresentado em [66] e [67] e não se trata especificamente de dados de desvanecimento, mas ilustra uma situação em que a distribuição κ - μ Extrema também pode ser útil, que é a caracterização do fator k_{Rice} experimental obtido a partir de medidas de campo.

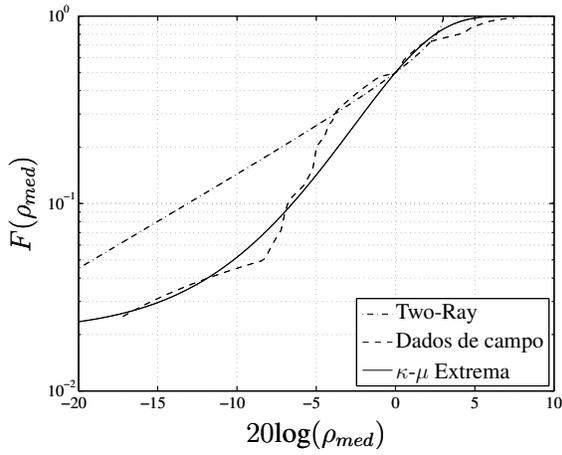
4.2 Caracterização das condições de propagação em ambientes confinados

A primeira aplicação para distribuição κ - μ Extrema é a caracterização das condições de propagação em ambientes confinados. Em [6], foram apresentadas medidas de campo no contexto de redes de sensores sem fio em que o sinal recebido apresentava comportamento de desvanecimento *hiper-Rayleigh*. Os dados foram coletados na frequência de 2,4 GHz ISM e ilustrados na Fig. 4 de [6].

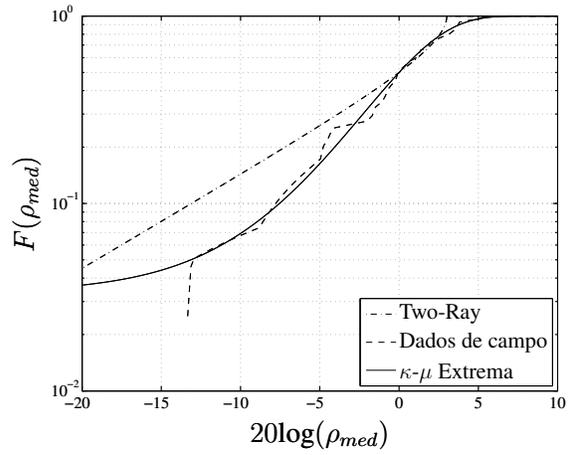
Visando ilustrar o uso da distribuição κ - μ Extrema para caracterizar tais cenários e comparar o seu desempenho de ajuste com o da distribuição *Two-Ray*, os dados experimentais das curvas presentes em [6] foram então cuidadosamente extraídos e utilizados para ajustar as distribuições. A extração dos dados foi realizada com o auxílio de uma ferramenta computacional de aplicações gráficas. Para cada ponto de quebra da curva, isto é, com mudança abrupta de inclinação, foi coletada sua coordenada cartesiana em unidades de *pixels*. Após a coleta de todos os pontos para uma determinada curva, foi realizado um mapeamento das coordenadas em unidades de *pixels* para a unidade correspondente ao eixo das abscissas e ordenadas.

Para cada conjunto de medidas, o parâmetro m da distribuição κ - μ Extrema foi escolhido de modo a proporcionar o melhor ajuste. As Figs. 4.1(a) a 4.1(e) ilustram os dados coletados juntamente com as distribuições κ - μ Extrema e *Two-Ray*. Todas as curvas foram normalizadas em relação à respectiva mediana, portanto cruzam o ponto (0 dB; 0,5) e o ajuste foi realizado em escala logarítmica para melhor acomodar a cauda das curvas. Juntamente com as figuras, a Tabela 4.1 ilustra o erro quadrático médio (MSE, do inglês *Mean Square Error*) obtido a partir do ajuste de cada conjunto de dados. Apesar do comportamento irregular dos dados apresentados nas figuras, pode ser observado que a distribuição κ - μ Extrema apresentou um melhor desempenho de ajuste para três dos cinco casos apresentados.

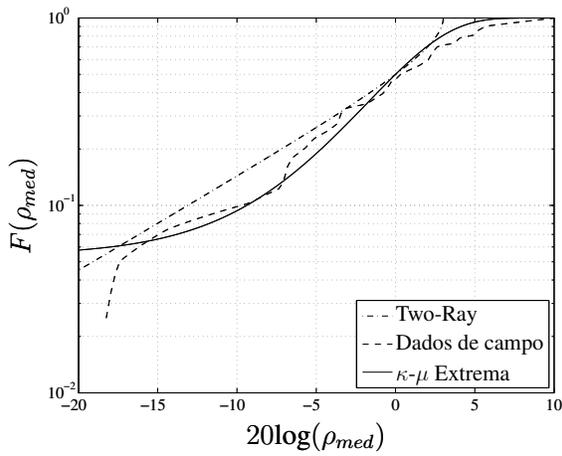
Para os conjuntos de dados #1, #2 e #3, o ajuste proporcionado pela distribuição κ - μ Extrema resultou em um MSE significativamente menor do que aquele obtido pela distribuição *Two-Ray*, juntamente com um melhor ajuste da cauda das distribuições experimentais. Por outro lado, para os dados de campo #4 e #5, a distribuição *Two-Ray* apresentou melhor desempenho de ajuste, apesar de a diferença de desempenho não ser tão significativa como nos casos anteriores. No entanto, em todos os conjuntos de dados, para os casos de composição construtiva do sinal recebido, ou seja, para $20\log(\rho_{med}) > 0$, os dados de campos foram sempre melhor ajustados pela distribuição κ - μ Extrema.



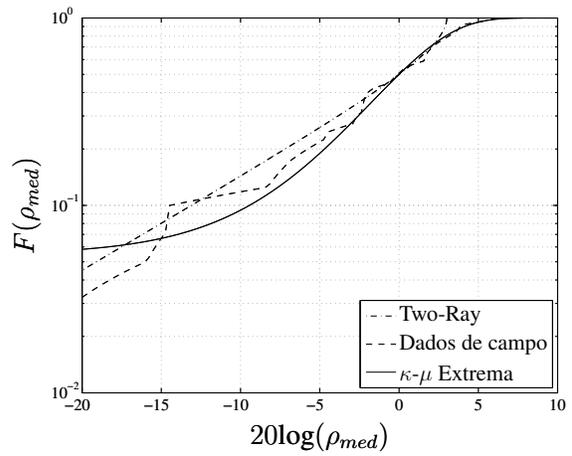
(a) Ajuste para o conjunto de dados #1 ($m = 1, 94$)



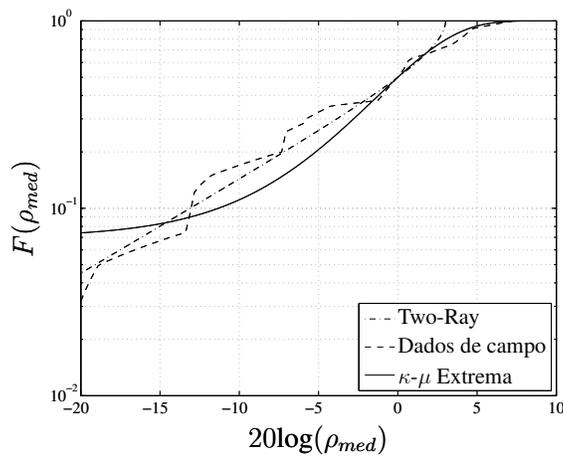
(b) Ajuste para o conjunto de dados #2 ($m = 1, 70$)



(c) Ajuste para o conjunto de dados #3 ($m = 1, 46$)



(d) Ajuste para o conjunto de dados #4 ($m = 1, 45$)



(e) Ajuste para o conjunto de dados #5 ($m = 1, 33$)

Fig. 4.1: Distribuições κ - μ Extrema e *Two-Ray* ajustadas para os dados de campos de [6].

Tab. 4.1: Comparação de desempenho de ajuste a medidas de campo

Curvas	m	MSE κ - μ Extrema	MSE Two-Ray
Conjunto de dados #1	1,94	0,0061	0,0946
Conjunto de dados #2	1,70	0,0014	0,0380
Conjunto de dados #3	1,46	0,0037	0,0099
Conjunto de dados #4	1,45	0,0102	0,0070
Conjunto de dados #5	1,33	0,0179	0,0045

4.3 Outros cenários de desvanecimento severo

Diversas outras situações nas quais o sinal de rádio está sujeito a condições severas de desvanecimento podem ser encontradas na prática. Para investigar alguns destes casos, uma série de campanhas de medição foi feita no campus da Unicamp. Em particular, dois cenários foram avaliados: (i) um estacionamento com carros tanto parados quanto em movimento; e (ii) um ginásio (fechado) relativamente vazio. Em (i), ambos transmissor e receptor foram dispostos levemente abaixo da altura dos carros e havia LOS em grande parte do tempo. Em (ii), condição similar à (i) era encontrada com exceção de pessoas em movimento ao invés de carros.

4.3.1 Sistema de coleta de dados

Um conjunto de equipamentos de transmissão e recepção foram especialmente montados para as campanhas de medição e baseiam-se na descrição apresentada em [68]. A especificação completa dos equipamentos encontra-se no Apêndice C.

Transmissão

O módulo transmissor, como mostra o diagrama da Fig. 4.2, é constituído por um gerador de RF (Rádio Freqüência), um amplificador de RF e uma antena omnidirecional, além de cabos e conectores. O gerador pode ser sintonizado com uma freqüência específica entre 9 kHz e 2,080 GHz e a potência de saída pode ser ajustada entre -25 dBm e 15 dBm. A saída do gerador alimenta a entrada do amplificador de RF, com ganho fixo de 30 dB. Por fim, a saída do amplificador é conectada a uma antena de transmissão omnidirecional, com ganho de 11 dBi.

Recepção

O módulo de recepção é um aparato veicular composto por três conjuntos de equipamentos, conforme ilustrado na Fig. 4.3, denominados de sistema de medição, sistema de amostragem e sistema

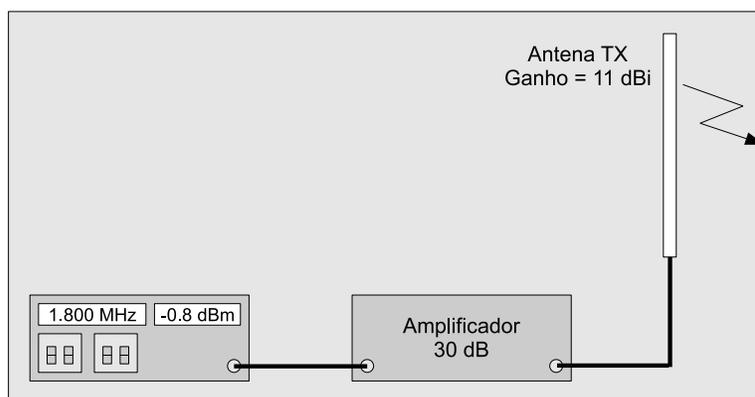


Fig. 4.2: Diagrama de transmissão

de aquisição. O sistema de medição é responsável pela recepção e processamento do sinal de rádio e é constituído por uma antena do tipo monopolo omnidirecional, acoplada a um plano de terra fixado no equipamento de aquisição de dados, um amplificador de baixo ruído e um analisador de espectro. O sinal de RF recebido pela antena é encaminhado ao amplificador de baixo ruído. A função do amplificador de baixo ruído é manter o nível do sinal recebido na porção linear da faixa da operação do medidor de sinal, que para este caso é de -122 dBm a -47 dBm. Em seguida, o sinal na saída do amplificador é enviado a um analisador de espectro, que é responsável pela medição da potência do sinal. Por fim, a saída do analisador de espectro é conectada a uma das entradas da placa de aquisição de dados. Para a correta medição do sinal, o analisador é configurado segundo as seguintes especificações:

- *Abertura em frequência* = 0 Hz (para medição de potência de uma portadora simples);
- *Tempo de varredura* = 15 μ s (menor valor possível, para que seja visualizado na tela um sinal na forma de um segmento de reta, uma vez que não há tempo suficiente para alterações no nível do sinal antes de este ser completamente desenhado);
- *Largura de faixa de vídeo* = 10 kHz e *Largura de faixa* = 30 Hz (compromisso entre potência de ruído filtrado e sensibilidade de variação na frequência central de filtragem do sinal).

O sistema de amostragem é responsável por fornecer ao sistema de aquisição um sinal de controle para que as amostras provenientes do sinal do sistema de medição possam ser armazenadas adequadamente. É constituído basicamente por dois componentes, uma roda dentada e um circuito amostrador. A roda dentada define a distância de amostragem do sinal e consiste de uma chapa de alumínio dentada, com 1,2 mm de espessura, acoplada a uma quinta roda do veículo. Para cada dente que passa pelo circuito amostrador, uma amostra é coletada. O número de dentes (n) da roda deve

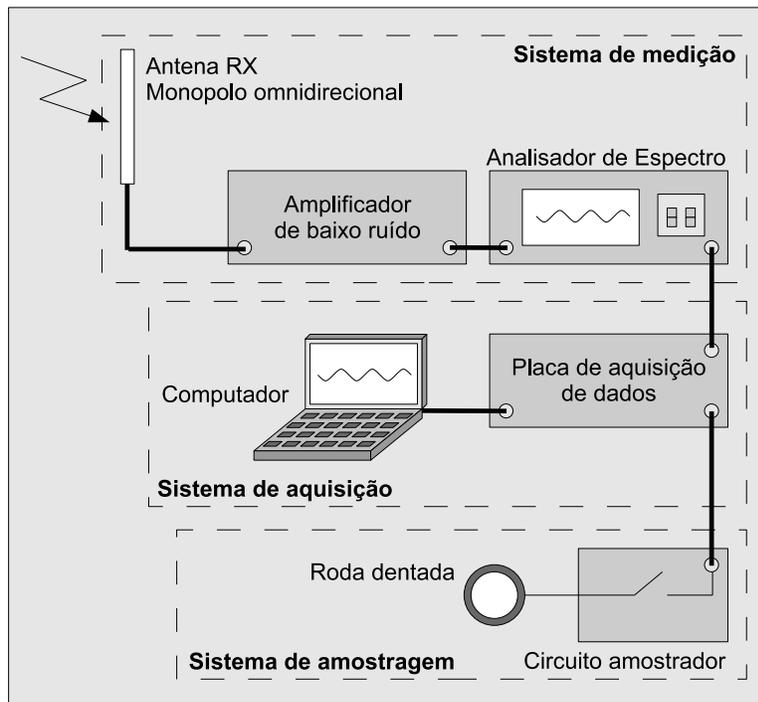


Fig. 4.3: Diagrama de recepção

ser definido de acordo com a distância de amostragem desejada para o sinal. Em [68], o cálculo para assegurar uma boa amostragem do sinal e uma folga razoável com relação à velocidade mostrou que um número adequado de dentes é de $n = 57$ e por isso foi o valor utilizado neste trabalho. Utilizando este valor, permite-se uma velocidade máxima do veículo de até 13 km/h [68], que é menor do que a velocidade que se atinge por uma pessoa ao caminhar.

O circuito tem a função de transformar a passagem dos dentes da roda em um trem de pulsos a ser aplicado à placa de aquisição de dados. A rotação do disco dentado aciona o interruptor óptico. Esse interruptor, que consiste em um LED (diodo emissor de luz, do inglês *Light-Emitting Diode*) acoplado a um fototransistor através de uma fenda de 3mm, produz um trem de pulsos a uma taxa proporcional ao número de ranhuras por metro e à velocidade de caminhada. Este sinal faz com que a placa de aquisição leia uma amostra do sinal de rádio que está sendo recebido pela antena naquele instante.

Por fim, o sistema de aquisição de dados é responsável pela aquisição e armazenagem das medidas e é composto por uma placa de aquisição e por um computador. A placa de aquisição possui duas entradas analógicas, nas quais estão conectadas a saída dos sistemas de medição e amostragem e fornece ao computador um sinal digital de saída. O computador, juntamente com o programa de controle desenvolvido em LabVIEW 6.1, é responsável por armazenar as amostras em disco e monitorar o trabalho em tempo real.

4.3.2 Metodologia

Estacionamento

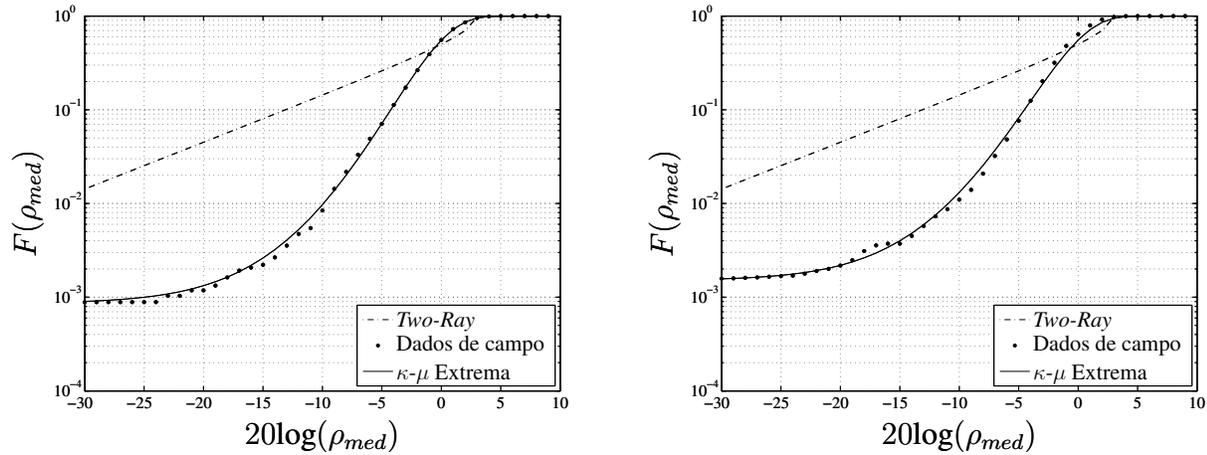
Neste cenário, o transmissor foi fixado no centro de um estacionamento do campus da Unicamp (em frente ao banco Santander). O gerador foi sintonizado na frequência de 1.800 MHz e a potência de saída ajustada em 0 dBm. Como não havia uma fonte de energia em corrente alternada disponível no local, o amplificador não foi utilizado neste caso e, portanto, a saída do gerador foi conectada diretamente à antena monopolo omnidirecional, com ganho de 11 dBi, transmitindo uma potência efetivamente radiada (ERP) de aproximadamente 1 mW. Para a coleta dos dados, o operador do veículo caminhou em círculos ao redor do transmissor até que fossem coletadas algumas dezenas de milhares de amostras. Devido às condições severas de propagação e variações drásticas do sinal recebido, uma quantidade significativa de amostras foi encontrada abaixo da sensibilidade do receptor.

Ginásio

Neste cenário, o transmissor foi fixado no topo do prédio E da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação (FEEC), da Unicamp. O gerador foi sintonizado na frequência de 1.800 MHz e a potência de saída ajustada em -0,8 dBm. A saída do gerador alimentava a entrada do amplificador de RF, com ganho de 30 dB, proporcionando em sua saída, computadas as perdas com cabos e conectores, uma potência de 28,4 dBm. Na saída do amplificador de potência, foi acoplada, através de um cabo de 22 cm, uma antena monopolo omnidirecional, com ganho de 11 dBi, transmitindo uma potência efetivamente radiada (ERP) de 2 W. Para a coleta dos dados, o operador do veículo caminhou ao redor da quadra central do ginásio até que fosse coletadas algumas centenas de milhares de amostras.

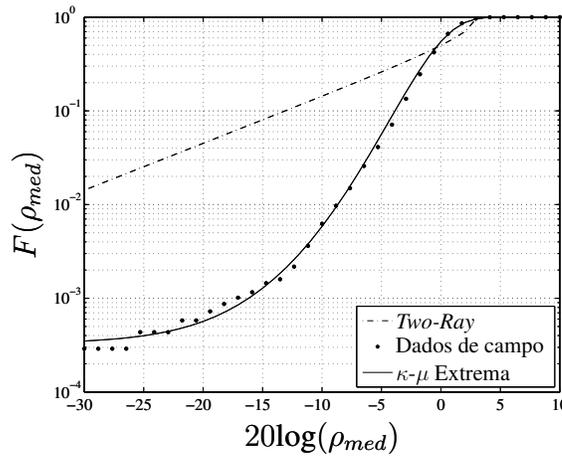
4.3.3 Resultados

Funções de distribuição acumulada foram obtidas a partir dos dados experimentais e comparadas com as distribuições *Two-Ray* e κ - μ Extrema utilizando o parâmetro m estimado a partir dos dados. As Figs. 4.4(a) a 4.4(c) ilustram exemplos de resultados de ajuste das distribuições teóricas aos dados de campo. Note como a distribuição κ - μ Extrema proporciona um ajuste excelente e acompanha adequadamente a cauda das curvas experimentais.



(a) Ajuste para dados coletados em estacionamento
($m = 3, 53$)

(b) Ajuste para dados coletados em estacionamento
($m = 3, 25$)



(c) Ajuste para dados coletados em ginásio ($m = 4, 01$)

Fig. 4.4: Comparação entre FDAs experimentais e teóricas obtidas para outros cenários de desvanecimento severo.

4.4 Distribuição empírica do fator k_{Rice}

Recentemente, dois trabalhos, [66] e [67], apresentaram resultados de extensas medições de campo realizadas em ambientes internos e externos, respectivamente, e para os quais a distribuição κ - μ Extrema também pode ser aplicável, mas com finalidade diferente da qual foi proposta inicialmente. Em [66], foi realizada uma profunda análise para descrever as condições de propagação entre típicos nós de sensores instalados em ambientes de escritório e concluiu-se que a que melhor caracterizou tais condições era a Rice. O fator de Rice, k_{Rice} , foi então analisado em diversas situações e observou-se que, mesmo em situações de intensa LOS, apresentava comportamento aleatório. De maneira semelhante, em [67], foram investigadas as condições de propagação em canais sem fio localizados

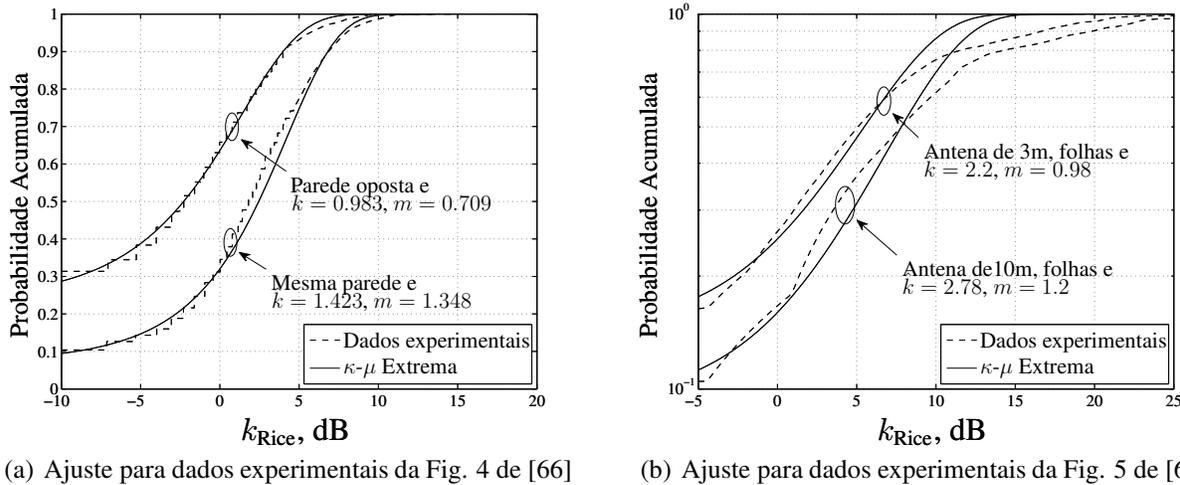


Fig. 4.5: Comparação entre FDAs obtidas para os fatores k_{Rice} experimentais com exemplos da FDA κ - μ Extrema configuradas para melhor ajuste.

fixamente em ambientes suburbanos e para diversas estações do ano. Novamente observou-se que as condições de propagação eram melhor descritas pela distribuição Rice e que o fator k_{Rice} também apresentava um comportamento aleatório.

Em ambos os trabalhos, foram então obtidas funções de distribuição acumulada para o fator k_{Rice} experimental. De maneira interessante, notou-se que as curvas resultantes apresentavam grandes similaridades com a FDA κ - μ Extrema. Diversas curvas de [66] e [67] foram então cuidadosamente extraídas e utilizadas para ajustar à distribuição κ - μ Extrema. Os resultados de ajuste estão ilustrados nas Figs. 4.5(a) e 4.5(b). Em particular, na Fig. 4.5(a) são ilustradas curvas empíricas da distribuição do fator k_{Rice} obtidas para duas situações distintas: em uma delas o transmissor e receptor encontravam-se instalados na mesma parede e em outra situavam-se em paredes opostas do mesmo ambiente. Na Fig. 4.5(b), ambas as curvas experimentais ilustradas foram obtidas a partir de medições realizadas em estações do ano nas quais as árvores apresentavam uma grande quantidade de folhas em suas copas. Pode ser observado que, apesar da distribuição κ - μ Extrema ter sido inicialmente proposta para caracterizar as variações de pequena escala do sinal de rádio em condições severas de desvanecimento, também encontra aplicações no ajuste do fator k_{Rice} experimental. Vale lembrar que algumas distribuições probabilísticas foram inicialmente propostas com finalidades diferentes da caracterização do fenômeno de desvanecimento, mas posteriormente encontraram grande aplicabilidade na modelagem estatística do canal rádio-móvel, como por exemplo Weibull [56].

4.5 Conclusões

Este capítulo apresentou uma série de medidas para a validação da distribuição κ - μ Extrema. O primeiro conjunto de medidas abrangia um ambiente confinado, enquanto o segundo conjunto de medidas contemplava outras condições de desvanecimento severo. Os resultados de ajuste às curvas experimentais ilustraram a flexibilidade da distribuição κ - μ Extrema e mostraram que ela de fato pode ser utilizada como modelo para caracterizar tais ambientes.

Capítulo 5

Medidas de Desempenho para um Canal κ - μ Extremo

5.1 Introdução

Neste capítulo, são apresentadas medidas de desempenho para um canal κ - μ Extremo. Primeiramente, são obtidas a FDA da SNR e BER para um enlace simples. Em seguida, são avaliadas as técnicas de combinação por diversidade denominadas combinação por seleção, combinação por razão máxima e combinação por ganho igual. As técnicas de combinação por diversidade são empregadas nos sistemas de comunicação sem fio em uma tentativa de minimizar os efeitos prejudiciais da propagação do sinal de rádio pela interface aérea explorando a diversidade inerente aos canais rádio-móvel. Para isso, utiliza-se na recepção um combinador multi-ramos cujo sinal de saída é resultado de uma simples combinação dos vários sinais de entrada.

Para cada esquema de combinação, são obtidas a distribuição da SNR, BER e SNR média na saída do combinador. Os M sinais de entradas são considerados independentes e identicamente distribuídos (i.i.d). A maioria das formulações apresentadas neste capítulo está representada em forma fechada, embora algumas sejam expressas apenas na forma de integral. No entanto, todas as formulações são validadas por meio de um simulador de canal κ - μ Extremo, desenvolvido especificamente para este trabalho.

Para os cálculos relativos aos combinadores, é apropriado definir:

- $\Gamma_i, i = 1, \dots, M$, como a SNR instantânea na ramo i ;
- Γ como a SNR instantânea na saída do combinador;
- $\bar{\gamma}_{in} = E(\Gamma_i)$ como a SNR média no ramo i ;

- $\bar{\gamma}_{\text{out}} = E(\Gamma)$ como a SNR média na saída do combinador;
- $\Upsilon_i = \Gamma_i/\bar{\gamma}_{\text{in}}$ como a SNR normalizada instantânea no ramo i . Obviamente, $\Upsilon_i = P_i^2$;
- $\Upsilon = \Gamma/\bar{\gamma}_{\text{in}}$ como a SNR normalizada instantânea na saída do combinador;
- $\bar{v} = \bar{\gamma}_{\text{out}}/\bar{\gamma}_{\text{in}} = E(\Upsilon)$ como a SNR normalizada média na saída do combinador.

5.2 Enlace simples

5.2.1 FDA da SNR

Seja R a envoltória de um sinal de desvanecimento κ - μ Extremo. Seguindo a notação de [27], define-se $W = R^2$ como a potência instantânea, $\bar{w} = E(W)$ a potência média do sinal, $\hat{r} = \sqrt{\bar{w}}$ o valor eficaz de R e N a potência de ruído. Dessa forma, a SNR instantânea normalizada, isto é, $\Upsilon = \Gamma/\bar{\gamma}$, onde $\Gamma = W/N$ é a SNR instantânea e $\bar{\gamma} = E(\Gamma)$ é a SNR média, relaciona-se com a envoltória normalizada, $P = R/\hat{r}$, da forma $\Upsilon = P^2$, e portanto a FDA da SNR normalizada pode ser obtida facilmente a partir da FDA da envoltória normalizada como

$$F_{\Upsilon}(v) = F_P(\sqrt{v}) = 1 - Q_0(2\sqrt{m}, 2\sqrt{mv}). \quad (5.1)$$

Por sua vez, a FDP da SNR normalizada pode ser obtida derivando (5.1) com relação a v , obtendo

$$f_{\Upsilon}(v) = \frac{2mI_1(4m\sqrt{v})}{\sqrt{v} \exp[2m(1+v)]} + \frac{\exp(-2m)}{2\sqrt{v}} \delta(\sqrt{v}). \quad (5.2)$$

Em suas versões não-normalizadas, as FDA e FDP da SNR podem ser escritas, respectivamente, como

$$F_{\Gamma}(\gamma) = 1 - Q_0(2\sqrt{m}, 2\sqrt{m\gamma/\bar{\gamma}}). \quad (5.3)$$

$$f_{\Gamma}(\gamma) = \frac{2mI_1(4m\sqrt{\gamma/\bar{\gamma}})}{\sqrt{\gamma\bar{\gamma}} \exp[2m(1+\gamma/\bar{\gamma})]} + \frac{\exp(-2m)}{2\sqrt{\gamma\bar{\gamma}}} \delta(\sqrt{\gamma/\bar{\gamma}}). \quad (5.4)$$

As Figs. 5.1 e 5.2 ilustram a FDA e FDP da SNR normalizada para diversos valores de m . Para fins de comparação, as FDA e FDP relativas à distribuição Rayleigh também são ilustradas. Note que, ao contrário do caso Rayleigh, a distribuição acumulada da SNR κ - μ Extrema apresenta uma probabilidade não-nula de SNR nula. Deste modo, para qualquer que seja o valor de m , em algum momento a FDA κ - μ Extrema irá situar-se acima da FDA Rayleigh, ocasionando o desvanecimento *hiper-Rayleigh*.

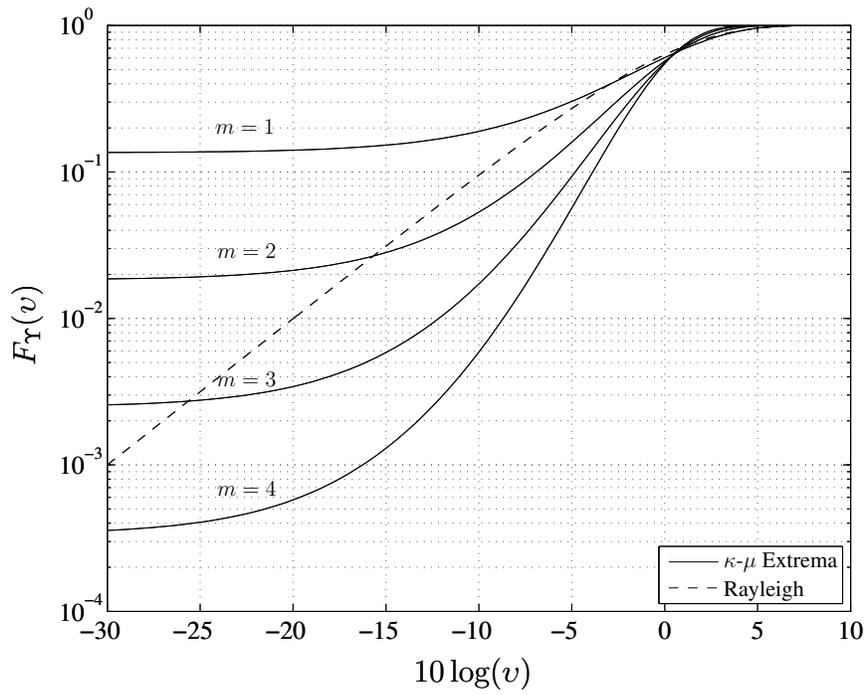


Fig. 5.1: FDA da SNR normalizada κ - μ Extrema e Rayleigh

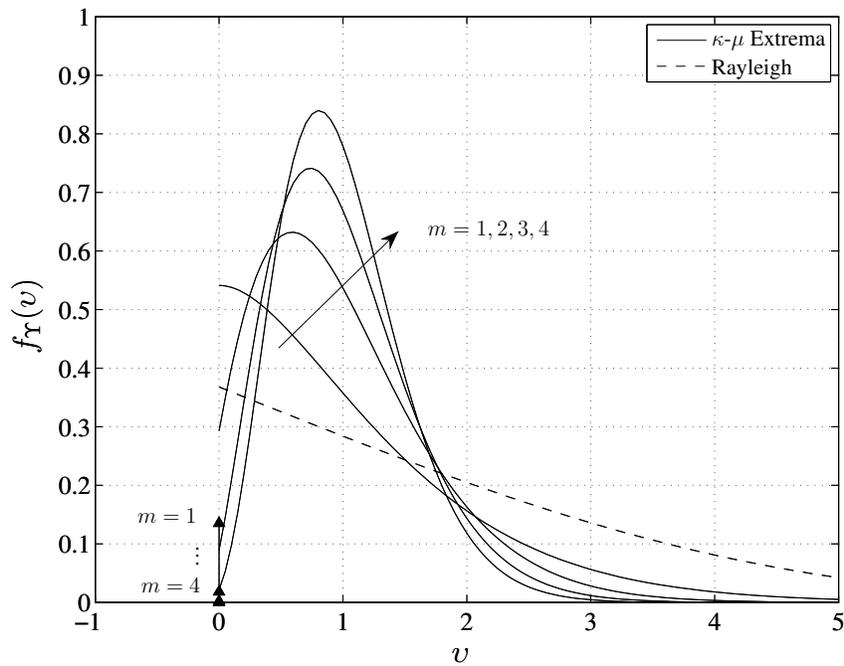


Fig. 5.2: FDP da SNR normalizada κ - μ Extrema e Rayleigh

5.2.2 BER média para modulações não-coerentes

Para um canal aditivo gaussiano, a BER condicional obtida quando utilizada uma modulação não-coerente pode ser expresso em função da SNR instantânea ($\Gamma = \gamma$) da forma [69]

$$\text{BER}(\gamma) = \text{P}\{\text{erro de bit}|\Gamma = \gamma\} = \frac{1}{2} \exp(-\alpha\gamma), \quad (5.5)$$

em que $\alpha = 1/2$ para FSK (chaveamento por desvio de frequência, do inglês *Frequency Shift Keying*) e $\alpha = 1$ para DPSK (chaveamento por desvio diferencial de fase, do inglês *Differential Phase Shift Keying*).

Como mencionando acima, a expressão (5.5) é uma BER condicional, ou seja, é obtida a partir do conhecimento do valor de Γ . Em um ambiente com desvanecimento, a SNR instantânea pode ser caracterizada por alguma função densidade de probabilidade $f_{\Gamma}(\gamma)$, em que $\bar{\gamma} = E(\Gamma)$ é a SNR média, de forma que, fazendo

$$\text{BER}(\bar{\gamma}) = \int_0^{\infty} \text{P}\{\text{erro de bit}|\Gamma = \gamma\} f_{\Gamma}(\gamma) d\gamma, \quad (5.6)$$

a BER média para o dado canal pode ser obtida. Portanto, considerando um ambiente κ - μ Extremo, isto é, um ambiente em que a SNR segue (5.4), a BER média para um canal κ - μ Extremo pode ser obtida resolvendo

$$\text{BER}(\bar{\gamma}) = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \exp(-\alpha\gamma) \left\{ \frac{2mI_1(4m\sqrt{\gamma/\bar{\gamma}})}{\sqrt{\gamma\bar{\gamma}} \exp[2m(1 + \gamma/\bar{\gamma})]} + \frac{\exp(-2m)}{2\sqrt{\gamma\bar{\gamma}}} \delta(\sqrt{\gamma/\bar{\gamma}}) \right\} d\gamma. \quad (5.7)$$

O primeiro termo pode ser obtido utilizando as propriedades da função de Bessel modificada [40] e resulta em

$$\int_0^{\infty} \frac{mI_1(4m\sqrt{\gamma/\bar{\gamma}})}{\sqrt{\gamma\bar{\gamma}} \exp[2m(1 + \gamma/\bar{\gamma}) + \alpha\gamma]} d\gamma = -\frac{1}{2} \exp(-2m) + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{-2\alpha m\bar{\gamma}}{4m + \alpha\bar{\gamma}}\right). \quad (5.8)$$

Por sua vez, o segundo termo pode ser obtido fazendo a substituição de variáveis $\sqrt{\gamma/\bar{\gamma}} = t \Rightarrow dt = d\gamma/2\sqrt{\gamma\bar{\gamma}}$, o que resulta em

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\exp(-2m - \gamma/2)}{4\sqrt{\gamma\bar{\gamma}}} \delta(\sqrt{\gamma/\bar{\gamma}}) d\gamma &= \int_0^{\infty} \frac{\exp(-2m - t^2\bar{\gamma}/2)}{2} \delta(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \exp(-2m). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Logo, a BER média para um canal κ - μ Extremo é finalmente encontrada como

$$\text{BER}(\bar{\gamma}) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{2\alpha m \bar{\gamma}}{2m + \alpha \bar{\gamma}}\right). \quad (5.10)$$

A Fig. 5.3 ilustra os valores de BER médio para um canal κ - μ Extremo utilizando uma modulação DPSK e para $m = 1, 2, 3, 4, 5$. Para fins comparativos, valores de BER obtidos para um canal Rayleigh e gaussiano também são ilustrados. Note que, ao contrário dos dois últimos casos e, de fato, das distribuições de desvanecimento conhecidas, para as quais a BER tende à zero à medida que a SNR média tende a infinito, em um canal κ - μ Extremo, a BER tende a um valor assintótico não-nulo quando $\bar{\gamma} \rightarrow \infty$. Este valor pode ser obtido facilmente fazendo $\lim_{\bar{\gamma} \rightarrow \infty} \text{BER}(\bar{\gamma})$ em (5.10) e resulta em $1/2 \times \exp(-2m)$. Isso significa que, para um ambiente de desvanecimento κ - μ Extremo, há um valor mínimo atingível de BER média, independentemente do aumento na potência de transmissão do sinal. Este valor mínimo surge a partir da probabilidade não-nula de envoltória nula e, como esta probabilidade depende apenas da severidade das condições de propagação, representada pelo parâmetro m , o valor mínimo independe da potência média do sinal. Note que este interessante comportamento assemelha-se ao caso de um ruído gerado por modulações aleatórias, que também ocasiona resultados assintóticos no desempenho de enlace. No Apêndice B, é mostrado que o valor assintótico de BER média vale sempre $1/2 \times \exp(-2m)$, independente do esquema de modulação.

5.3 Técnicas de combinação por diversidade

5.3.1 Combinação por seleção

No combinador por seleção (CS), também chamado de combinador por seleção pura, em contraste ao combinador por seleção limiar [28], o sinal de saída é escolhido de acordo com a maior SNR instantânea na entrada [8]. Em outras palavras,

$$\Upsilon = \max\{\Upsilon_1, \Upsilon_2, \dots, \Upsilon_M\}. \quad (5.11)$$

Distribuição da SNR na saída do CS

Considerando os sinais de entrada i.i.d., a FDA do sinal de saída é o produto das FDAs individuais dos sinais de entrada. Logo, a FDA da SNR normalizada na saída do combinador pode ser obtida

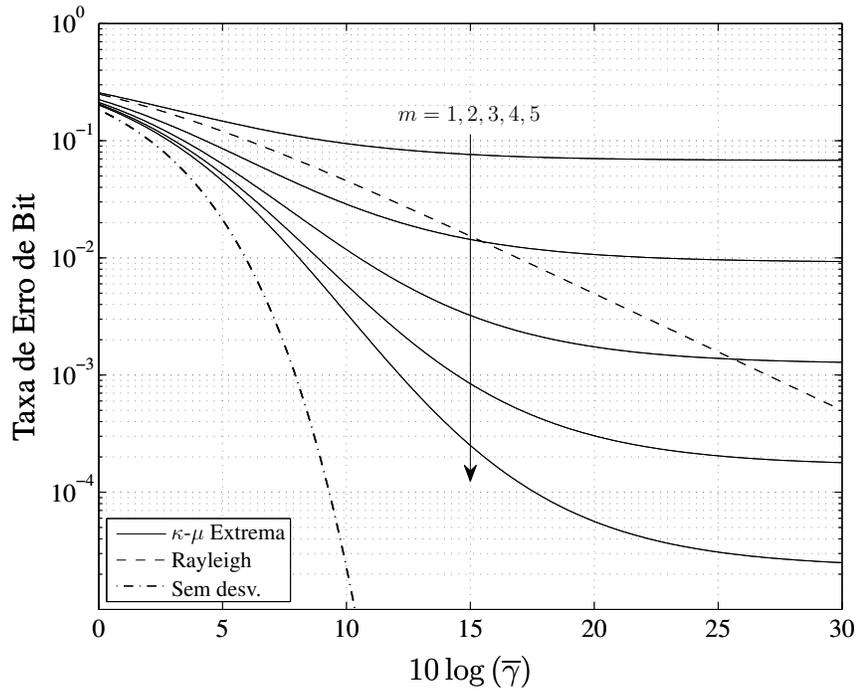


Fig. 5.3: BER média em um canal κ - μ Extremo utilizando modulação DPSK e para $m = 1, 2, 3, 4, 5$.

como

$$\begin{aligned}
 F_{\Upsilon, \text{CS}}(v) &= \prod_{i=1}^M F_{\Upsilon}(v) \\
 &= [F_{\Upsilon}(v)]^M \\
 &= [1 - Q_0(2\sqrt{m}, 2\sqrt{mv})]^M.
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Utilizando a *Regra de Leibniz* [48, Eq.3.3.7], a FDP da SNR normalizada na saída do CS pode ser obtida derivando (5.12) com relação à v , obtendo

$$f_{\Upsilon, \text{CS}}(v) = M [1 - Q_0(2\sqrt{m}, 2\sqrt{mv})]^{M-1} \times \frac{2mI_1(4m\sqrt{v})}{\sqrt{v} \exp[2m(1+v)]} + \frac{\exp(-2Mm)}{2\sqrt{v}} \delta(\sqrt{v}). \tag{5.13}$$

Em suas versões não-normalizadas, as FDA e FDP da SNR na saída do CS podem escritas, respectivamente, como

$$F_{\Upsilon, \text{CS}}(\gamma) = \left[1 - Q_0\left(2\sqrt{m}, 2\sqrt{m\gamma/\bar{\gamma}_{\text{in}}}\right) \right]^M \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned}
f_{\Gamma,CS}(\gamma) &= M \left[1 - Q_0 \left(2\sqrt{m}, 2\sqrt{m\gamma/\bar{\gamma}_{in}} \right) \right]^{M-1} \\
&\quad \times \frac{2mI_1(4m\sqrt{\gamma/\bar{\gamma}_{in}})}{\sqrt{\gamma\bar{\gamma}_{in}} \exp[2m(1 + \gamma/\bar{\gamma}_{in})]} + \frac{\exp(-2Mm)}{2\sqrt{\gamma\bar{\gamma}_{in}}} \delta(\sqrt{\gamma/\bar{\gamma}_{in}}). \quad (5.15)
\end{aligned}$$

BER média para modulações não-coerentes

Conforme apresentado na Seção 5.2.2, a BER média para um canal com desvanecimento pode ser obtida integrando a BER condicional com a função densidade de probabilidade da SNR do canal de interesse. Logo, substituindo (5.5) e (5.15) em (5.6), a BER média na saída do CS para modulações não-coerentes pode ser obtida como

$$\begin{aligned}
\text{BER}_{CS}(\bar{\gamma}_{in}) &= \int_0^\infty \frac{1}{2} \exp(-\alpha\gamma) f_{\Gamma,CS}(\gamma; \bar{\gamma}_{in}) d\gamma \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{2} \exp(-\alpha\gamma) \left\{ M \left[1 - Q_0 \left(2\sqrt{m}, 2\sqrt{m\gamma/\bar{\gamma}_{in}} \right) \right]^{M-1} \right. \\
&\quad \left. \times \frac{2mI_1(4m\sqrt{\gamma/\bar{\gamma}_{in}})}{\sqrt{\gamma\bar{\gamma}_{in}} \exp[2m(1 + \gamma/\bar{\gamma}_{in})]} + \frac{\exp(-2Mm)}{2\sqrt{\gamma\bar{\gamma}_{in}}} \delta(\sqrt{\gamma/\bar{\gamma}_{in}}) \right\} d\gamma. \quad (5.16)
\end{aligned}$$

Infelizmente, não foi possível encontrar solução exata em forma fechada para (5.16) e, portanto, os resultados são avaliados apenas por meio de integrações numéricas.

SNR média na saída do CS

A SNR normalizada média na saída do CS por ser obtida calculando

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{\gamma}_{out}}{\bar{\gamma}_{in}} &= \int_0^\infty v f_{\Gamma,CS}(v) dv \\
&= \int_0^\infty v \left\{ M \left[1 - Q_0 \left(2\sqrt{m}, 2\sqrt{m\gamma/\bar{\gamma}_{in}} \right) \right]^{M-1} \right. \\
&\quad \left. \times \frac{2mI_1(4m\sqrt{\gamma/\bar{\gamma}_{in}})}{\sqrt{\gamma\bar{\gamma}_{in}} \exp[2m(1 + \gamma/\bar{\gamma}_{in})]} + \frac{\exp(-2Mm)}{2\sqrt{\gamma\bar{\gamma}_{in}}} \delta(\sqrt{\gamma/\bar{\gamma}_{in}}) \right\} dv. \quad (5.17)
\end{aligned}$$

Novamente, uma solução em forma fechada não foi encontrada. Portanto, os resultados são avaliados apenas por meio de integrações numéricas.

5.3.2 Combinação por razão máxima

No combinador por razão máxima (CRM), os sinais de entrada são cofasados, apropriadamente ponderados e somados para otimizar o sinal de saída [8]. Dessa forma, a SNR de saída relaciona-se com as relações sinal-ruído de entrada da forma

$$\Upsilon = \sum_{i=1}^M \Upsilon_i. \quad (5.18)$$

Distribuição da SNR na saída do CRM

Utilizando a propriedade de soma de potências, conforme descrita na Seção 3.4, de que a soma de M potências i.i.d. κ - μ Extremas originam outra potência κ - μ Extrema, a FDA da SNR normalizada na saída do CRM pode ser obtida facilmente como

$$F_{\Upsilon, \text{CRM}}(v) = 1 - Q_0 \left(\sqrt{2mM}, 2\sqrt{mv} \right). \quad (5.19)$$

Por sua vez, a FDP da SNR normalizada na saída do CRM pode ser obtida derivando (5.19) com relação a v , resultando em

$$f_{\Upsilon, \text{CRM}}(v) = \frac{2mI_1(4m\sqrt{Mv})}{\sqrt{v/M} \exp[2m(M+v)]} + \frac{\exp(-2Mm)}{2\sqrt{Mv}} \delta(\sqrt{v}). \quad (5.20)$$

Em suas versões não-normalizadas, as FDA e FDP da SNR na saída do CRM podem ser escritas, respectivamente, como

$$F_{\Gamma, \text{CRM}}(\gamma) = 1 - Q_0 \left(\sqrt{2mM}, 2\sqrt{m\gamma/\bar{\gamma}_{\text{in}}} \right) \quad (5.21)$$

$$f_{\Gamma, \text{CRM}}(\gamma) = \frac{2mI_1(4m\sqrt{M\gamma/\bar{\gamma}_{\text{in}}})}{\sqrt{\gamma\bar{\gamma}_{\text{in}}/M} \exp[2m(M + \gamma/\bar{\gamma}_{\text{in}})]} + \frac{\exp(-2Mm)}{2\sqrt{M\gamma\bar{\gamma}_{\text{in}}}} \delta(\sqrt{\gamma/\bar{\gamma}_{\text{in}}}). \quad (5.22)$$

BER média para modulações não-coerentes

A BER média na saída do CRM para modulações não-coerentes pode ser obtida substituindo (5.5) e (5.22) em (5.6), o que leva à simples formulação em forma fechada

$$\text{BER}_{\text{CRM}}(\bar{\gamma}_{\text{in}}) = \frac{1}{2} \exp \left(-\frac{2\alpha m M \bar{\gamma}_{\text{in}}}{2m + \alpha \bar{\gamma}_{\text{in}}} \right). \quad (5.23)$$

Note as semelhanças entre (5.23) e (5.10), que diferem entre si apenas pelo fator M no expoente.

SNR média na saída do CRM

A partir de (5.18),

$$\frac{\bar{\gamma}_{\text{out}}}{\bar{\gamma}_{\text{in}}} = M. \quad (5.24)$$

5.3.3 Combinação por ganho igual

No combinador por ganho igual (CGI), os sinais de entrada são cofasados e somados com pesos iguais [8]. A SNR instantânea na saída do combinador pode ser escrita, então, em função das envoltórias de entrada e da potência de ruído, onde esta é considerada idêntica para todos os ramos, da forma

$$\Gamma = \frac{\left(\sum_{i=1}^M R_i\right)^2}{MN}. \quad (5.25)$$

Equivalentemente,

$$\Upsilon = \frac{\left(\sum_{i=1}^M P_i\right)^2}{M}. \quad (5.26)$$

Distribuição da SNR na saída do CGI

Na Seção 3.4, formulações exatas para as FDP e FDA da soma de envoltórias normalizadas κ - μ Extrema foram apresentadas em (3.16) e (3.17), respectivamente. A partir de (5.26), sabe-se que SNR normalizada na saída do CGI relaciona-se com a envoltória normalizada de saída da forma $\Upsilon = P^2/M$, em que $P = \sum_{i=1}^M P_i$. Logo, a partir destas formulações, a distribuição da SNR normalizada na saída do CGI pode ser obtida facilmente como $F_{\Upsilon, \text{CGI}}(v) = F_P(\sqrt{vM})$, em que $F_P(\cdot)$ é dado por (3.16), obtendo

$$F_{\Upsilon, \text{CGI}}(v) = \sum_{i=0}^M \binom{M}{i} \underbrace{\int_0^{\sqrt{vM}} \cdots \int_0^{\sqrt{vM} - \sum_{j=2}^{M-i} \rho_j}}_{M-i \text{ integrais}} \frac{(4m)^{M-i} I_1(4m\rho_1) \cdots I_1(4m\rho_{M-i})}{\exp[2m(M + \rho_1^2 + \cdots + \rho_{M-i}^2)]} d\rho_1 \cdots d\rho_{M-i}. \quad (5.27)$$

Similarmente, a FDP da SNR normalizada na saída do CGI pode ser obtida fazendo $f_{\Upsilon, \text{CGI}}(v) = 1/2 \sqrt{M/v} f_P(\sqrt{vM})$, em que $f_P(\cdot)$ é dado (3.17), obtendo

$$\begin{aligned}
f_{\Upsilon, \text{CGI}}(v) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M}{v}} \sum_{i=0}^{M-1} \binom{M}{i} \underbrace{\int_0^{\sqrt{vM}} \cdots \int_0^{\sqrt{vM} - \sum_{j=3}^{M-i} \rho_j}}_{M-i-1 \text{ integrais}} I_1 \left[4m \left(\sqrt{vM} - \sum_{j=2}^{M-i} \rho_j \right) \right] \\
&\quad \times \frac{I_1(4m\rho_2) \cdots I_1(4m\rho_{M-i})}{\exp \left\{ 2m \left[M + \left(\sqrt{vM} - \sum_{j=2}^{M-i} \rho_j \right)^2 + \cdots + \rho_{M-i}^2 \right] \right\}} d\rho_2 \cdots d\rho_{M-i} \\
&\quad + \frac{\sqrt{M} \exp(-2Mm)}{2\sqrt{v}} \delta(\sqrt{vM}). \tag{5.28}
\end{aligned}$$

Em suas versões não-normalizadas, as FDA e FDP da SNR na saída do CGI podem ser escritas, respectivamente, como

$$\begin{aligned}
F_{\Gamma, \text{CGI}}(\gamma) &= \\
&\quad \sum_{i=0}^M \binom{M}{i} \underbrace{\int_0^{\sqrt{\gamma M/\bar{\gamma}}} \cdots \int_0^{\sqrt{\gamma M/\bar{\gamma}} - \sum_{j=2}^{M-i} \rho_j}_{M-i \text{ integrais}} \frac{(4m)^{M-i} I_1(4m\rho_1) \cdots I_1(4m\rho_{M-i})}{\exp [2m (M + \rho_1^2 + \cdots + \rho_{M-i}^2)]} d\rho_1 \cdots d\rho_{M-i}. \tag{5.29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{\Gamma, \text{CGI}}(\gamma) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M}{\gamma\bar{\gamma}}} \sum_{i=0}^{M-1} \binom{M}{i} \underbrace{\int_0^{\sqrt{\gamma M/\bar{\gamma}}} \cdots \int_0^{\sqrt{\gamma M/\bar{\gamma}} - \sum_{j=3}^{M-i} \rho_j}_{M-i-1 \text{ integrais}} I_1 \left[4m \left(\sqrt{\gamma M/\bar{\gamma}} - \sum_{j=2}^{M-i} \rho_j \right) \right] \\
&\quad \times \frac{I_1(4m\rho_2) \cdots I_1(4m\rho_{M-i})}{\exp \left\{ 2m \left[M + \left(\sqrt{\gamma M/\bar{\gamma}} - \sum_{j=2}^{M-i} \rho_j \right)^2 + \cdots + \rho_{M-i}^2 \right] \right\}} d\rho_2 \cdots d\rho_{M-i} \\
&\quad + \frac{\sqrt{M} \exp(-2Mm)}{2\sqrt{\gamma\bar{\gamma}}} \delta(\sqrt{\gamma M/\bar{\gamma}}). \tag{5.30}
\end{aligned}$$

As expressões (5.27) e (5.28) fornecem as FDA e FDP *exatas* da SNR normalizada na saída do CGI, respectivamente. Por outro lado, utilizando a aproximação de soma de envoltórias κ - μ Extrema, conforme descrita na Seção 3.4, a distribuição aproximada da SNR na saída do combinador, $\tilde{F}_{\Gamma, \text{CGI}}(\gamma)$, pode ser obtida. Seja $\tilde{\Upsilon}$ a SNR normalizada com relação à SNR média de saída, ou seja, $\tilde{\Upsilon} = \Gamma/\bar{\gamma}_{\text{out}}$. Dessa forma, a FDA aproximada da nova SNR normalizada pode ser expressa como

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{\Upsilon, \text{CGI}}(\tilde{v}) &= \tilde{F}_P(\sqrt{\tilde{v}}) \\ &= \left[1 - Q_0(2\sqrt{m_{eq}}, 2\sqrt{m_{eq}\tilde{v}}) - \exp(-2m_{eq}) \right] \frac{1 - \exp(-2Mm)}{1 - \exp(-2m_{eq})}.\end{aligned}\quad (5.31)$$

A SNR normalizada com relação à SNR média de entrada, isto é, $\Upsilon = \Gamma/\bar{\gamma}_{in}$, pode ser expressa em termos de $\tilde{\Upsilon}$ como $\Upsilon = \tilde{\Upsilon} \times G_\gamma$, em que $G_\gamma = \bar{\gamma}_{out}/\bar{\gamma}_{in}$ é o ganho na SNR média e é obtido adiante nesta seção. Utilizando estas relações, a FDA aproximada da SNR normalizada (Υ) na saída do CGI torna-se

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{\Upsilon, \text{CGI}}(v) &= \\ &= \left[1 - Q_0\left(2\sqrt{m_{eq}}, 2\sqrt{m_{eq}v/G_\gamma}\right) - \exp(-2m_{eq}) \right] \frac{1 - \exp(-2Mm)}{1 - \exp(-2m_{eq})} + \exp(-2Mm).\end{aligned}\quad (5.32)$$

De maneira equivalente, a FDP aproximada da SNR normalizada na saída do CGI torna-se

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{\Upsilon, \text{CGI}}(v) &= \\ &= \left[\frac{2m_{eq}I_1(4m_{eq}\sqrt{v/G_\gamma})}{\sqrt{vG_\gamma} \exp[2m_{eq}(1 + v/G_\gamma)]} \right] \frac{1 - \exp(-2Mm)}{1 - \exp(-2m_{eq})} + \frac{\exp(-2Mm)}{2\sqrt{vG_\gamma}} \delta\left(\sqrt{v/G_\gamma}\right).\end{aligned}\quad (5.33)$$

Em suas versões não-normalizadas, as FDA e FDP aproximadas da SNR na saída do CGI podem ser escritas, respectivamente, como

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{\Gamma, \text{CGI}}(\gamma) &= \\ &= \left[1 - Q_0\left(2\sqrt{m_{eq}}, 2\sqrt{m_{eq}\gamma/\bar{\gamma}_{in}G_\gamma}\right) - \exp(-2m_{eq}) \right] \frac{1 - \exp(-2Mm)}{1 - \exp(-2m_{eq})} + \exp(-2Mm).\end{aligned}\quad (5.34)$$

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{\Gamma, \text{CGI}}(\gamma) &= \\ &= \left[\frac{2m_{eq}I_1(4m_{eq}\sqrt{\gamma/\bar{\gamma}_{in}G_\gamma})}{\sqrt{\gamma\bar{\gamma}_{in}G_\gamma} \exp[2m_{eq}(1 + \gamma/\bar{\gamma}_{in}G_\gamma)]} \right] \frac{1 - \exp(-2Mm)}{1 - \exp(-2m_{eq})} + \frac{\exp(-2Mm)}{2\sqrt{\gamma\bar{\gamma}_{in}G_\gamma}} \delta\left(\sqrt{\gamma/\bar{\gamma}_{in}G_\gamma}\right).\end{aligned}\quad (5.35)$$

BER média para modulações não-coerentes

A BER média na saída do CGI para modulações não-coerentes pode ser obtida substituindo (5.5) e (5.30) em (5.6), o que resulta em

$$\begin{aligned} \text{BER}_{\text{CGI}}(\bar{\gamma}) &= \int_0^\infty \frac{1}{2} \exp(-\alpha\gamma) \\ &\times \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M}{\gamma\bar{\gamma}}} \sum_{i=0}^{M-1} \binom{M}{i} \underbrace{\int_0^{\sqrt{\gamma M/\bar{\gamma}}} \cdots \int_0^{\sqrt{\gamma M/\bar{\gamma} - \sum_{j=3}^{M-i} \rho_j}}}_{M-i-1 \text{ integrais}} I_1 \left[4m \left(\sqrt{\gamma M/\bar{\gamma}} - \sum_{j=2}^{M-i} \rho_j \right) \right] \right. \\ &\times \frac{I_1(4m\rho_2) \cdots I_1(4m\rho_{M-i})}{\exp \left\{ 2m \left[M + \left(\sqrt{\gamma M/\bar{\gamma}} - \sum_{j=2}^{M-i} \rho_j \right)^2 + \cdots + \rho_{M-i}^2 \right] \right\}} d\rho_2 \cdots d\rho_{M-i} \\ &\left. + \frac{\sqrt{M} \exp(-2Mm)}{2\sqrt{\gamma\bar{\gamma}}} \delta(\sqrt{\gamma M/\bar{\gamma}}) \right\} d\gamma. \quad (5.36) \end{aligned}$$

Infelizmente, não foi encontrada solução em forma fechada para (5.36). Portanto, assim como no CS, os resultados de BER na saída do CGI são avaliados apenas por meio de integrações numéricas.

Por outro lado, utilizando a aproximação de soma de envoltórias κ - μ Extrema, uma formulação aproximada pode ser obtida para a BER. A solução aproximada é obtida substituindo (5.35) em (5.6), o que resulta em

$$\begin{aligned} \text{BER}_{\text{CGI}}(\bar{\gamma}_{\text{in}}) &= \frac{1}{2} \left[\exp \left(-\frac{2\alpha m_{eq} G_\gamma \bar{\gamma}_{\text{in}}}{2m_{eq} + \alpha G_\gamma \bar{\gamma}_{\text{in}}} \right) - \exp(-2m_{eq}) \right] \times \frac{1 - \exp(-2Mm)}{1 - \exp(-2m_{eq})} \\ &\quad + \frac{1}{2} \exp(-2Mm). \quad (5.37) \end{aligned}$$

SNR média na saída do CGI

Para sinais de entrada i.i.d., a SNR normalizada média na saída do CGI pode ser obtida diretamente de (5.26) como

$$E(\Upsilon) = E(P_i^2) + (M-1) E^2(P_i). \quad (5.38)$$

Obviamente, $E(P_i^2) = 1$. Para a distribuição κ - μ Extrema, a partir de (3.4) pode-se obter $E(P_i) = \exp(-m) \times (m\pi/2)^{1/2} \times [I_0(m) + I_1(m)]$. Logo, a SNR normalizada média na saída do CGI pode ser obtida como

$$\frac{\bar{\gamma}_{\text{out}}}{\bar{\gamma}_{\text{in}}} = 1 + (M-1) \frac{m\pi \exp(-2m)}{2} [I_0(m) + I_1(m)]^2 \quad (5.39)$$

5.3.4 Resultados e discussões

As Figs. 5.4 e 5.5 ilustram a FDA exata da SNR normalizada na saída do CS, CRM e CGI para $M = 1, 2, 3, 4$ ramos e $m = 1$. Pode ser notado que na saída dos combinadores ainda persiste uma probabilidade não-nula de envoltória nula, embora decresça exponencialmente com o aumento do número de ramos. Para o caso i.i.d., a probabilidade de sinal resultante nulo é igual para todas as técnicas de combinação avaliadas neste trabalho e pode ser calculada de maneira exata da forma

$$P\{\text{sinal de saída é nulo}\} = \prod_{i=1}^M P\{\text{sinal } i \text{ é nulo}\} = \exp(-2Mm). \quad (5.40)$$

O resultado em (5.40) indica que o número de ramos (M) e a severidade do desvanecimento sofrido pelo sinal, representado pelo parâmetro m , têm o mesmo efeito na probabilidade de que o sinal resultante permaneça em nível zero. Em outras palavras, M e m são intercambiáveis. Dessa forma, a severidade do desvanecimento pode ser compensada com o uso apropriado dos ramos de diversidade. Para valores muito baixos de SNR, a probabilidade de indisponibilidade do sinal permanece aproximadamente a mesma para as três técnicas. No exemplo da Fig. 5.4, a diferença de desempenho entre as técnicas começa a se tornar significativa a partir de $\nu > -35$ dB, aproximadamente.

Como esperado, o CRM apresentou os melhores resultados em termos de confiabilidade de enlace. Por outro lado e de maneira interessante e inusitada, para valores baixos de SNR, o CGI apresenta um desempenho pior do que o CS. Este resultado possui uma explicação muito simples: no CGI, amostras nulas de envoltória na entrada podem ocasionar pouco ou nenhum ganho na envoltória resultante, no entanto a potência de ruído na saída do combinador aumenta obrigatoriamente por um fator M . Já no CS, apesar das amostras nulas também contribuírem pouco para o ganho na envoltória resultante, a potência de ruído na saída do combinador permanece constante, justificando o melhor desempenho neste caso. Apesar dos resultados de probabilidade acumulada de SNR, a FDA da envoltória resultante do CGI está sempre abaixo da FDA da envoltória resultante do CS, pois $\sum_{i=1}^M R_i \geq \max\{R_1, \dots, R_M\}$ é verdadeiro para qualquer conjunto de $[R_1, R_2, \dots, R_M] \geq [0, 0, \dots, 0]$, conforme ilustrado na Fig. 5.6. Uma comparação entre as FDAs exata e aproximada da SNR normalizada na saída do CGI é ilustrada na Fig. 5.7. Note como as curvas exata e aproximada apresentam um comportamento muito similar.

As Figs. 5.8 e 5.9 ilustram os resultados de BER média na saída dos combinadores utilizando modulação DPSK, para $m = 1$ e $M = 1, 2, 3, 4$. De maneira similar ao caso de enlace simples, isto é, sem a utilização de combinadores, a BER média resultante não tende a zero à medida que $\bar{\gamma} \rightarrow \infty$. De fato, no Apêndice B é mostrado que o valor de BER assintótico para qualquer uma das técnicas de combinação avaliadas neste trabalho vale $1/2 \times \exp(-2Mm)$, independentemente do esquema de modulação. Este resultado indica que o número de ramos M e o parâmetro de desvanecimento m têm

o mesmo efeito no valor mínimo atingível de BER média, semelhante ao que ocorre nos resultados de confiabilidade (FDA da SNR). Logo, uma escolha adequada do número de ramos é crucial para atingir um valor mínimo de taxa média de erro desejado. Além disso, deve ser notado que a inversão no desempenho do CS e CGI também ocorre nos resultados de taxa de erro: para valores elevados de SNR média, o desempenho do CS é melhor do que CGI. Uma comparação entre os resultados de BER média exata e aproximada na saída do CGI é ilustrada na Fig. 5.10. Novamente, note como as curvas exata e aproximada apresentam grande similaridade.

Finalmente, as Figs. 5.11 e 5.12 ilustram o ganho na SNR média na saída dos combinadores para $M = 1, 2, \dots, 10$ e $m = 0.5, 1, 2, 3, 4, 5$. Como esperado, o ganho ótimo é obtido pelo CRM. Quanto ao CGI e CS, o desempenho do primeiro é melhor que o do último na maioria dos casos. No entanto, para valores muito pequenos de m e M , uma inversão no desempenho de ambos pode ocorrer. Por exemplo, para $M = 2, 3, 4$ e $m < 0,690; 0,576; 0,506$, respectivamente, o CS apresenta ganhos de SNR média melhores do que o CGI. Curiosamente, a alteração do parâmetro m tem efeitos contrários no ganho de SNR média para o CS e CGI. Mais especificamente, um aumento em m implica em um acréscimo de ganho para o CGI e em um decréscimo para o SC, similar ao que ocorre em um ambiente de desvanecimento Nakagami- m . Isto pode ser explicado pelo fato de que um aumento em m implica em um ambiente mais determinístico, correlacionado, de forma que adicionar sinais (CGI) ao invés de selecioná-los (CS) leva a maiores ganhos na SNR média.

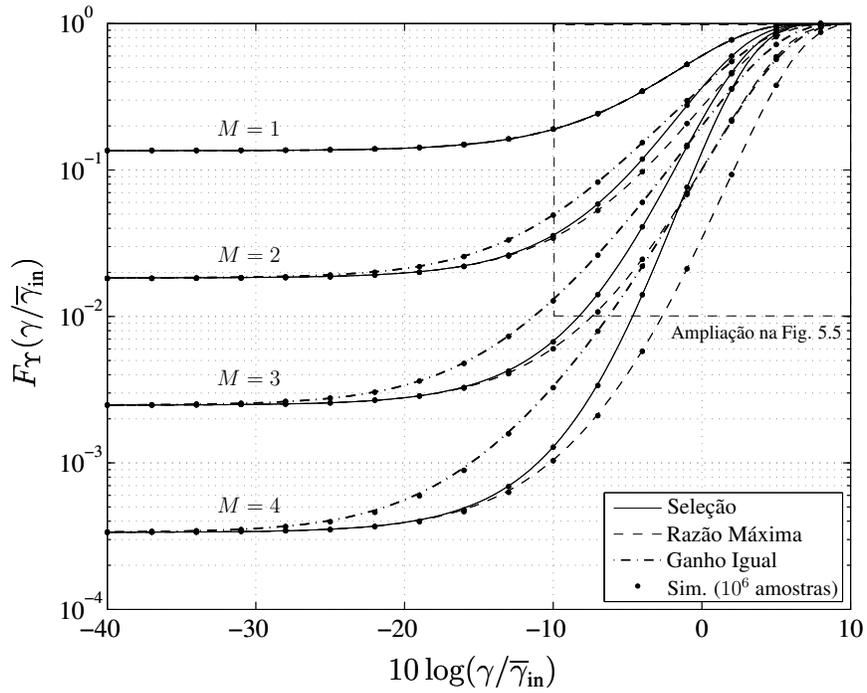


Fig. 5.4: FDA da SNR normalizada na saída dos combinadores para $M = 1, 2, 3, 4$ e $m = 1$.

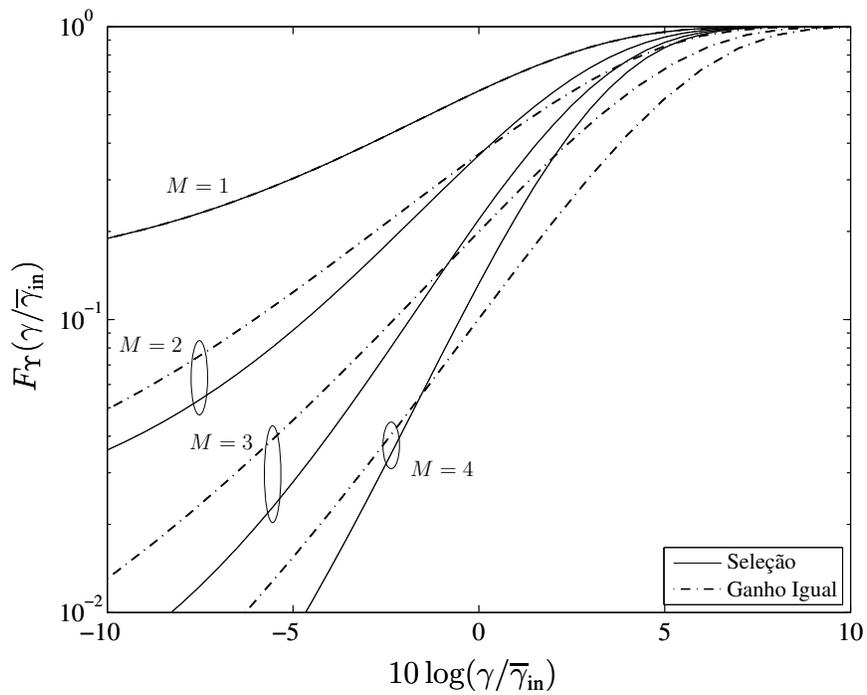


Fig. 5.5: Detalhes da FDA da SNR normalizada na saída do CS e CGI para $M = 1, 2, 3, 4$ e $m = 1$.

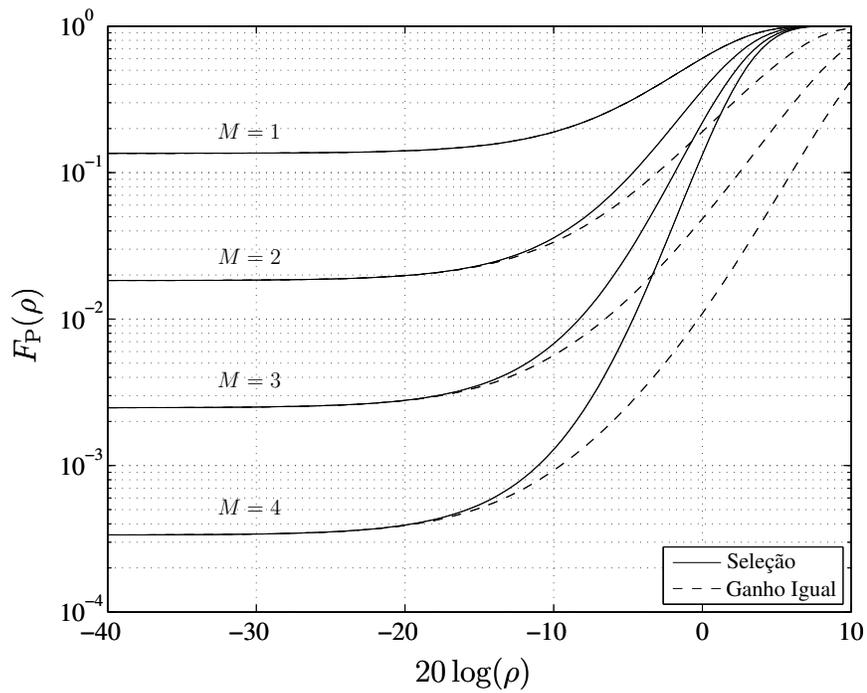


Fig. 5.6: Comparação entre a FDA da envoltória normalizada na saída do CS e CGI para $M = 1, 2, 3, 4$ e $m = 1$.

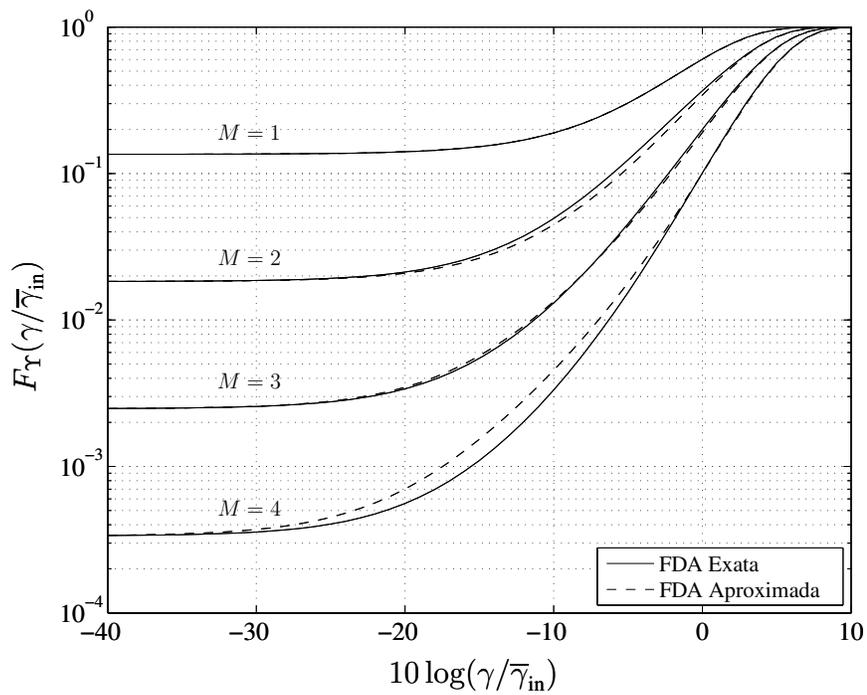


Fig. 5.7: Comparação entre as FDA exata e aproximada da SNR normalizada na saída do CGI para $M = 1, 2, 3, 4$ e $m = 1$.

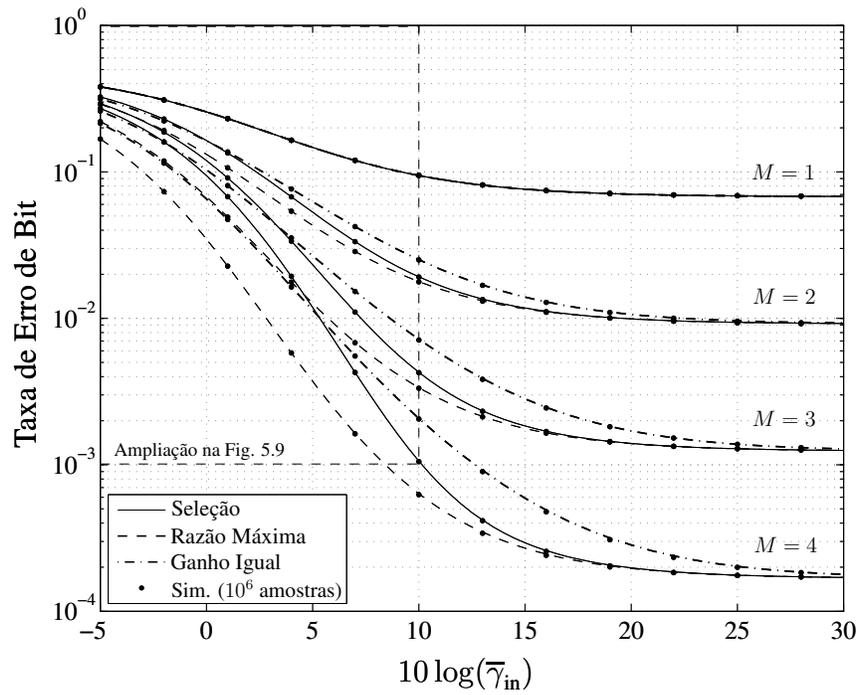


Fig. 5.8: BER média na saída dos combinadores para $M = 1, 2, 3, 4$, $m = 1$ e utilizando modulação DPSK.

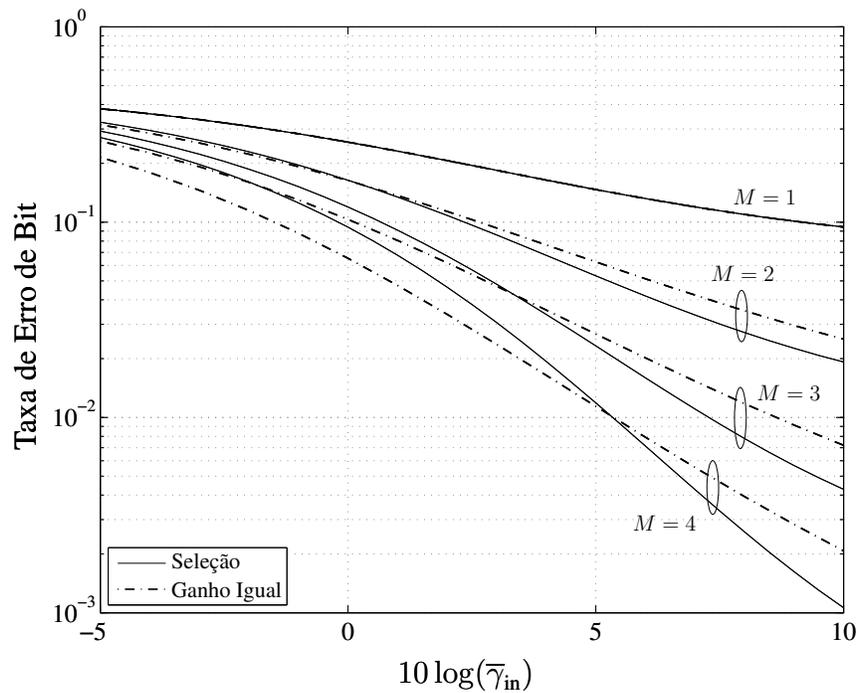


Fig. 5.9: Detalhes da BER média na saída do CS e CGI para $M = 1, 2, 3, 4$, $m = 1$ e utilizando modulação DPSK.

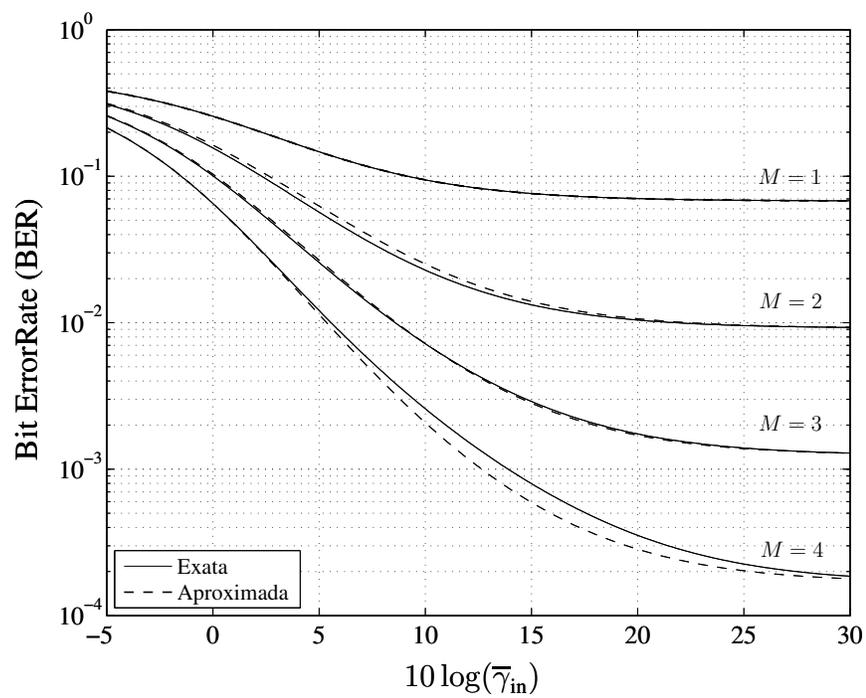


Fig. 5.10: Comparação entre BER média exata e aproximada na saída do CGI para $M = 1, 2, 3, 4$, $m = 1$ e utilizando modulação DPSK.

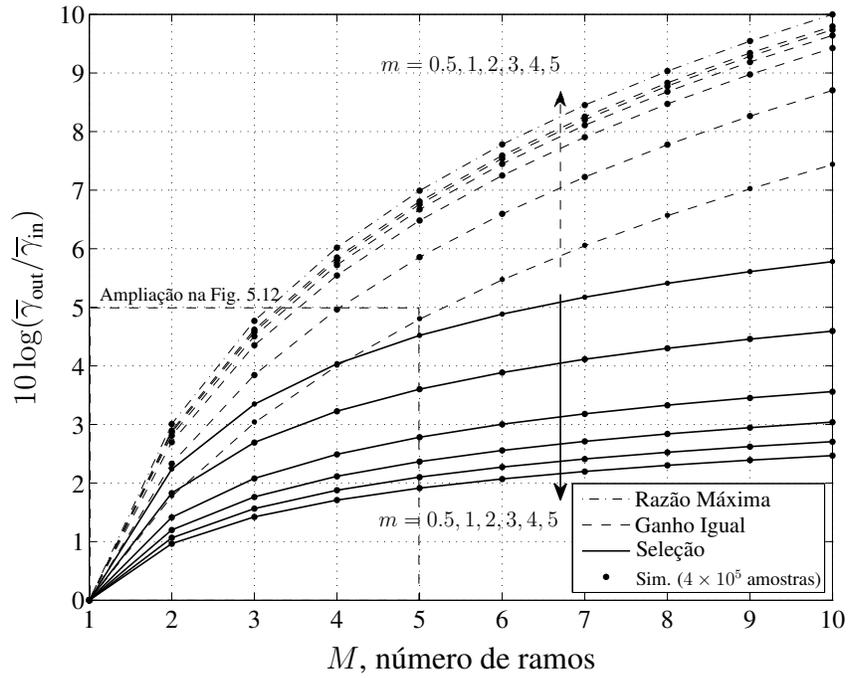


Fig. 5.11: Ganho na SNR média para $M = 1, 2, \dots, 10$ e $m = 0.5, 1, 2, 3, 4, 5$.

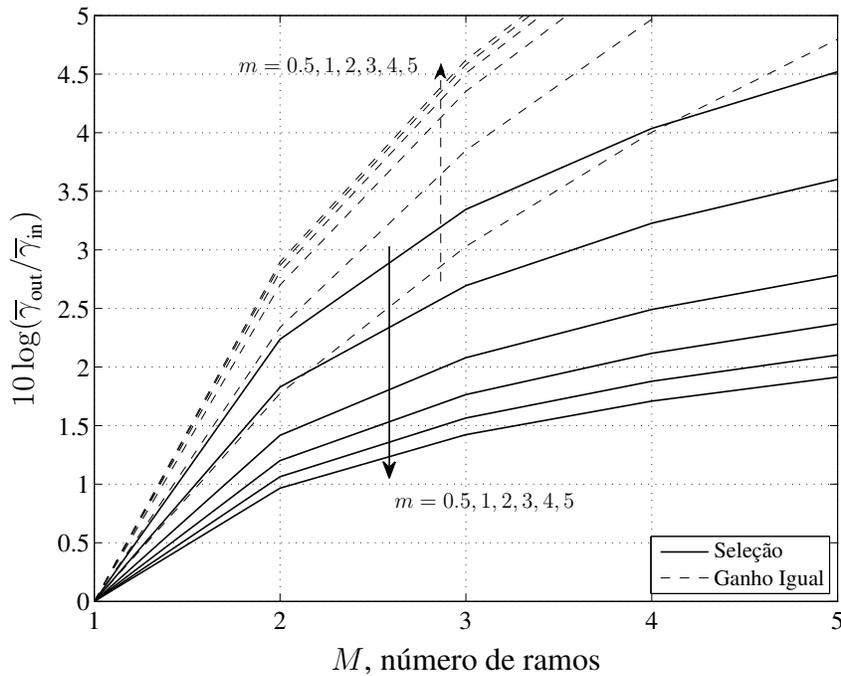


Fig. 5.12: Detalhes do ganho na SNR média para o CS e CGI, $M = 1, 2, \dots, 10$ e $m = 0.5, 1, 2, 3, 4, 5$.

5.4 Conclusões

Este capítulo apresentou medidas de desempenho para um canal κ - μ Extremo. Primeiramente, foram obtidos resultados de confiabilidade e BER para um enlace simples. Em especial, os resultados de taxa de erro mostraram que, devido à probabilidade de envoltória nula, a BER média tende sempre a um valor mínimo não nulo, que independe do aumento na potência média de transmissão e do esquema de modulação utilizado.

Em seguida, foram avaliadas técnicas de combinação por diversidade denominadas combinação por seleção, combinação por razão máxima e combinação por ganho igual. Para todas as técnicas, foram obtidas a distribuição da SNR, BER média e SNR média na saída dos combinadores. Os resultados mostraram que, mesmo utilizando técnicas de combinação, uma probabilidade não-nula do sinal de saída nulo ainda persiste, apesar de diminuir exponencialmente com o aumento do número de ramos de diversidade. Esta probabilidade independe da técnica utilizada e da modulação e vale $\exp(-2Mm)$. De maneira semelhante, a BER média na saída dos combinadores continua a apresentar um valor mínimo assintótico, $1/2 \times \exp(-2Mm)$, que também decresce exponencialmente com o número de ramos de diversidade e independe do esquema de modulação utilizado. Por fim, os resultados indicaram que, em condições muito severas de desvanecimento, o desempenho do combinador por seleção pode superar o desempenho do combinador por ganho igual.

Capítulo 6

A Distribuição Conjunta α - μ

6.1 Introdução

Neste capítulo, inicia-se a segunda parte deste trabalho, que é relativo à modelagem estatística de canais de desvanecimento correlacionados. Primeiramente, é apresentada aqui uma formulação exata para a função densidade de probabilidade conjunta (FDPC) α - μ . Esta formulação foi apresentada inicialmente em [70] e é muito geral à medida que considera uma matriz de correlação e demais parâmetros arbitrários. Em seguida, é obtida uma formulação inédita para a função de distribuição acumulada conjunta (FDAC) α - μ . A formulação é exata, geral e facilmente computável. Apresentada sob a forma de soma infinita, suas condições de convergência são posteriormente avaliadas e apresentadas em função do coeficiente de correlação para dois esquemas de correlação abordados, o constante e exponencial.

6.2 A função densidade de probabilidade conjunta α - μ

Sejam R_1, R_2, \dots, R_L variáveis aleatórias (VAs) α - μ , cada uma com parâmetros $\alpha_1, \mu_1, \alpha_2, \mu_2, \dots, \alpha_L, \mu_L$, respectivamente, de forma que

$$\begin{aligned} \frac{R_1^{\alpha_1}}{\hat{r}_1^{\alpha_1}} &= \frac{1}{2\mu_1} (X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{2\mu_1}^2) \\ \frac{R_2^{\alpha_2}}{\hat{r}_2^{\alpha_2}} &= \frac{1}{2\mu_2} (X_{2\mu_1+1}^2 + X_{2\mu_1+2}^2 + \dots + X_{2(\mu_1+\mu_2)}^2) \\ &\vdots \\ \frac{R_L^{\alpha_L}}{\hat{r}_L^{\alpha_L}} &= \frac{1}{2\mu_L} (X_{2(\mu_1+\dots+\mu_{L-1})+1}^2 + X_{2(\mu_1+\dots+\mu_{L-1})+2}^2 + \dots + X_n^2). \end{aligned} \quad (6.1)$$

em que $X_i, i = 1, 2, \dots, n$, são VAs gaussianas com média zero, variância $\sigma^2 = E(X_i^2) = 1$ e matriz de correlação dada por

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{12} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

em que $\rho_{ij} = \rho_{ji}$ e $n = 2 \sum_{i=1}^L \mu_i$. Note que, como condição para que as variáveis R_1, R_2, \dots, R_L sejam do tipo α - μ , as VAs gaussianas que compõem cada R_i devem ser independentes entre si. Isto implica que, em (6.2), $\rho_{12} = \rho_{13} = \cdots = \rho_{1,2\mu_1} = 0$, $\rho_{2\mu_1+1,2\mu_1+2} = \rho_{2\mu_1+1,2\mu_1+3} = \cdots = \rho_{2\mu_1+1,2(\mu_1+\mu_2)} = 0$, e assim por diante.

Para a dada matriz de correlação em (6.2), deseja-se saber qual é a FDPC conjunta de R_1, R_2, \dots, R_L . Para responder a esta pergunta, é apropriado definir as variáveis aleatórias Gamma Y_1, Y_2, \dots, Y_L , cada uma com parâmetro $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_L$, respectivamente, da forma

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{2} (X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{2\mu_1}^2) \\ Y_2 &= \frac{1}{2} (X_{2\mu_1+1}^2 + X_{2\mu_1+2}^2 + \cdots + X_{2(\mu_1+\mu_2)}^2) \\ &\vdots \\ Y_L &= \frac{1}{2} (X_{2(\mu_1+\cdots+\mu_{L-1})+1}^2 + X_{2(\mu_1+\cdots+\mu_{L-1})+2}^2 + \cdots + X_n^2) \end{aligned} \quad (6.3)$$

em que $X_i, i = 1, 2, \dots, n$, são as mesmas VAs gaussianas de (6.1). Neste caso, cada variável Y_i apresenta a distribuição marginal dada por [71]

$$f_{Y_i}(y_i) = \frac{\exp(-y_i)y_i^{\mu_i-1}}{\Gamma(\mu_i)}. \quad (6.4)$$

Por sua vez, definindo $W_i = X_i^2/2, i = 1, \dots, n$ de forma que

$$\begin{aligned} Y_1 &= W_1 + W_2 + \cdots + W_{2\mu_1} \\ Y_2 &= W_{2\mu_1+1} + W_{2\mu_1+2} + \cdots + W_{2(\mu_1+\mu_2)} \\ &\vdots \\ Y_L &= W_{2(\mu_1+\cdots+\mu_{L-1})+1} + W_{2(\mu_1+\cdots+\mu_{L-1})+2} + \cdots + W_n \end{aligned} \quad (6.5)$$

cada VA W_i também será do tipo Gamma, mas com parâmetro $1/2$ ao invés de μ_i [71], ou seja,

$$f_{W_i}(w_i) = \frac{\exp(-w_i)w_i^{-1/2}}{\Gamma(1/2)}. \quad (6.6)$$

A importância da definição das variáveis Gamma Y_1, Y_2, \dots, Y_L e W_i, W_2, \dots, W_n torna-se clara pela explicação a seguir: a função geradora de momentos (FGM) de n variáveis Gamma com parâmetro $1/2$ já foi obtida previamente em [71]. Como as variáveis Y_1, Y_2, \dots, Y_L são somas de variáveis W_i, W_2, \dots, W_n , a FGM de Y_1, Y_2, \dots, Y_L pode ser obtida a partir da FGM de W_i, W_2, \dots, W_n efetuando um simples mapeamento de variáveis de Laplace. Após a obtenção da FGM de Y_1, Y_2, \dots, Y_L , pode-se obter a FDPC Gamma efetuando-se a transformada inversa de Laplace da respectiva FGM. Após obtida a FDPC Gamma e sabendo como as VAs Gamma Y_1, Y_2, \dots, Y_L relacionam-se com as VAs $\alpha\text{-}\mu$ R_1, R_2, \dots, R_L , a FDPC $\alpha\text{-}\mu$ pode ser obtida a partir da FDPC Gamma por uma transformação de variáveis aleatórias.

A função geradora de momentos (FGM) de n variáveis Gamma com parâmetro $1/2$ pode ser expressa como [71, eq. (2.2)]

$$\Phi(s'_1, s'_2, \dots, s'_n) = |\mathbf{I} - \Sigma \mathbf{S}|^{-1/2} \quad (6.7)$$

em que \mathbf{I} é a matriz identidade $n \times n$ e \mathbf{S} é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são as variáveis de Laplace s'_1, s'_2, \dots, s'_n . Define-se $\beta'_i \triangleq s'_i / (1 - s'_i)$, $i = 1, \dots, n$, de tal forma que (6.7) possa ser reescrita como

$$\Phi(s'_1, s'_2, \dots, s'_n) = \{(1 - s'_1)(1 - s'_2) \cdots (1 - s'_n)\}^{-1/2} \{g(\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n)\}^{-1/2} \quad (6.8)$$

em que $g(\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n)$ é dada por

$$g(\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n) = \begin{vmatrix} 1 & -\rho_{12}\beta'_2 & \cdots & -\rho_{1n}\beta'_n \\ -\rho_{12}\beta'_1 & 1 & \cdots & -\rho_{2n}\beta'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\rho_{n1}\beta'_1 & -\rho_{n2}\beta'_2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}. \quad (6.9)$$

Expandindo $g(\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n)$ por meio do *Teorema de Maclaurin* para uma função de n variáveis, $g(\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n)$ pode ser reescrito da forma

$$g(\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \left(\sum_{i=1}^n \beta'_i \frac{\partial}{\partial \beta'_i} \right)^{[j]} g(\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n) \Bigg|_{(\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n) = (0, 0, \dots, 0)} \quad (6.10)$$

em que o operador $[j]$ denota o operador j -ésima derivada parcial dada por

$$\left(\sum_{i=1}^n \beta'_i \frac{\partial}{\partial \beta'_i} \right)^{[j]} = \sum_{j_1=0}^j \sum_{j_2=0}^{j_1} \cdots \sum_{j_{n-1}=0}^{j_{n-2}} \binom{j}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{n-2}}{j_{n-1}} \left(\beta'_1 \frac{\partial}{\partial \beta'_1} \right)^{j-j_1} \left(\beta'_2 \frac{\partial}{\partial \beta'_2} \right)^{j_1-j_2} \cdots \left(\beta'_n \frac{\partial}{\partial \beta'_n} \right)^{j_{n-2}-j_{n-1}} \quad (6.11)$$

resultando em

$$g(\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n) = 1 - \left(\sum_{i < j} C_{ij} \beta'_i \beta'_j + \sum_{i < j < k} C_{ijk} \beta'_i \beta'_j \beta'_k + \cdots + C_{12\dots n} \beta'_1 \beta'_2 \cdots \beta'_n \right). \quad (6.12)$$

Em (6.12), os coeficientes $C_{ij}, C_{ijk}, \dots, C_{12\dots n}$, denominados aqui por *coeficientes de expansão*, são calculados da forma

$$\begin{aligned} C_{12} &= - \frac{\partial^2 g(\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n)}{\partial \beta'_1 \partial \beta'_2} \Big|_{(\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n) = (0, 0, \dots, 0)} \\ C_{123} &= - \frac{\partial^3 g(\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n)}{\partial \beta'_1 \partial \beta'_2 \partial \beta'_3} \Big|_{(\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n) = (0, 0, \dots, 0)} \\ &\vdots \\ C_{12\dots n} &= - \frac{\partial^n g(\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n)}{\partial \beta'_1 \partial \beta'_2 \cdots \partial \beta'_n} \Big|_{(\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n) = (0, 0, \dots, 0)}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Apesar do aparente número elevado de coeficientes de expansão, diversos deles como apresentados em (6.13) resultarão em valor nulo, devido à independência estatística entre VAs gaussianas que compõem cada VA Gamma. O número de coeficientes não-nulos, \mathfrak{C} , depende da configuração dos valores de $\mu_i, i = 1, 2, \dots, L$ e, para um determinado valor de n , possui o valor máximo de $2^n - (n + 1)$, obtido para quando $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_L = 1/2$.

Como cada VA Y_i é uma soma das VAs independentes $W_j, j = 2(\mu_1 + \cdots + \mu_{i-1}) + 1, \dots, 2(\mu_1 +$

$\dots + \mu_i$), a FGM conjunta de Y_1, Y_2, \dots, Y_L pode ser então obtida fazendo [34]

$$\begin{aligned} s'_1 &= s'_2 = \dots = s'_{2\mu_1} = s_1 \\ s'_{2\mu_1+1} &= s'_{2\mu_1+2} = \dots = s'_{2(\mu_1+\mu_2)} = s_2 \\ &\vdots \\ s'_{2(\mu_1+\dots+\mu_{L-1})+1} &= s'_{2(\mu_1+\dots+\mu_{L-1})+2} + \dots + s'_n = s_L. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Por sua vez, as variáveis $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L$ também são obtidas por meio de

$$\begin{aligned} \beta'_1 &= \beta'_2 = \dots = \beta'_{2\mu_1} = \beta_1 \\ \beta'_{2\mu_1+1} &= \beta'_{2\mu_1+2} = \dots = \beta'_{2(\mu_1+\mu_2)} = \beta_2 \\ &\vdots \\ \beta'_{2(\mu_1+\dots+\mu_{L-1})+1} &= \beta'_{2(\mu_1+\dots+\mu_{L-1})+2} = \dots = \beta'_n = \beta_L. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Substituindo (6.14) e (6.15) em (6.12), a FGM de L variáveis Gamma, cada uma com parâmetro $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_L$, respectivamente, é então obtida como

$$\Phi(s_1, s_2, \dots, s_L) = (1 - s_1)^{-\mu_1} (1 - s_2)^{-\mu_2} \dots (1 - s_L)^{-\mu_L} \{g(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L)\}^{-1/2} \quad (6.16)$$

em que $g(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L)$ é obtido por meio de (6.12) após a substituição dos β'_i por β_i . Após as transformações, $g(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L)$ pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} g(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L) &= 1 - \left[\sum_{i < j} C_{ij} \vartheta(\beta'_i \beta'_j) + \sum_{i < j < k} C_{ijk} \vartheta(\beta'_i \beta'_j \beta'_k) + \dots + C_{12\dots n} \vartheta(\beta'_1 \beta'_2 \dots \beta'_n) \right] \\ &\triangleq 1 - B, \end{aligned} \quad (6.17)$$

em que $\vartheta(\cdot)$ é um operador produto definido em [70] para escrever (6.9) de maneira mais compacta. Os exemplos a seguir ilustram o uso do operador:

- Se $\beta'_i \in \{\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_{2\mu_j}\}$ então $\vartheta\left(\prod_{i=1}^{2\mu_j} \beta'_i\right) = \beta_1^{2\mu_j}$, $j = 1, \dots, L$;
- Se $\beta'_i \in \{\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_{2\mu_1}\}$ e $\beta'_j \in \{\beta'_{2\mu_1+1}, \dots, \beta'_{2\mu_1+2\mu_2}\}$ então $\vartheta(\beta'_i \beta'_j) = \beta_1 \beta_2$;
- Se $\beta'_i \in \{\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_{2\mu_1}\}$ e $\beta'_j, \beta'_k \in \{\beta'_{2\mu_1+1}, \dots, \beta'_{2\mu_1+2\mu_2}\}$ então $\vartheta(\beta'_i \beta'_j \beta'_k) = \beta_1 \beta_2^2$.
- $\vartheta(\beta'_1 \beta'_2 \dots \beta'_n) = \beta_1^{2\mu_1} \beta_2^{2\mu_2} \dots \beta_L^{2\mu_L}$.

Note que, após a aplicação do operador produto em (6.17), diversos coeficientes poderão ser agrupados, resultando em um número efetivo de termos significativamente menor, como no exemplo a seguir, em que $L = 2$ e $\mu_1 = \mu_2 = 1$ (apenas os C_{ij} estão ilustrados):

$$\begin{aligned} C_{12}\vartheta(\beta'_1\beta'_2) + C_{13}\vartheta(\beta'_1\beta'_3) + C_{14}\vartheta(\beta'_1\beta'_4) + C_{23}\vartheta(\beta'_2\beta'_3) + C_{24}\vartheta(\beta'_2\beta'_4) + C_{34}\vartheta(\beta'_3\beta'_4) = \\ C_{12}\beta_1^2 + C_{13}\beta_1\beta_2 + C_{14}\beta_1\beta_2 + C_{23}\beta_1\beta_2 + C_{24}\beta_1\beta_2 + C_{34}\beta_2^2 = \\ C_{12}\beta_1^2 + (C_{13} + C_{14} + C_{23} + C_{24})\beta_1\beta_2 + C_{34}\beta_2^2 \triangleq \\ C_{11}\beta_1^2 + C_{12}\beta_1\beta_2 + C_{22}\beta_2^2 \end{aligned} \quad (6.18)$$

Os novos coeficientes, $C_{ij\dots}$, denominados aqui por *coeficientes compostos*, resultam da combinação dos coeficientes de expansão que multiplicam a mesma seqüência de β 's. Alternativamente, podem ser obtidos ao fazer a substituição dos β'_i por β_i em (6.9), ao invés de (6.12), e apenas depois efetuar a expansão de MacLaurin. Dessa forma, são calculados por

$$\begin{aligned} C_{12} &= - \left. \frac{\partial^2 g(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L)}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} \right|_{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L) = (0, 0, \dots, 0)} \\ C_{1122} &= - \left. \frac{\partial^4 g(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L)}{\partial \beta_1 \partial \beta_1 \partial \beta_2 \partial \beta_2} \right|_{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L) = (0, 0, \dots, 0)} \\ &\vdots \\ C_{\underbrace{11\dots 1}_{2\mu_1} \underbrace{22\dots 2}_{2\mu_2} \dots \underbrace{LL\dots L}_{2\mu_L}} &= - \left. \frac{\partial^{2(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_L)} g(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L)}{\partial \beta_1 \dots \partial \beta_1 \partial \beta_2 \dots \partial \beta_2 \dots \partial \beta_L \dots \partial \beta_L} \right|_{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L) = (0, 0, \dots, 0)} \end{aligned} \quad (6.19)$$

em que $g(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L)$ é dado por (6.9) após a substituição dos β'_i por β_i . Utilizando esta abordagem, *chega-se ao mesmo resultado final* daquele obtido a partir de (6.17). No entanto, *apenas* por questão de facilidade na apresentação das formulações, são utilizados aqui os coeficientes $C_{ij}, C_{ijk}, \dots, C_{12\dots n}$ na representação dos resultados. De fato, na prática não é necessário calcular os coeficientes de expansão estritamente como em (6.13) ou em (6.19). Utilizando um software de operações matemáticas simbólicas, como o *Wolfram Mathematica*[®], é possível calcular $g(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L)$ analiticamente e, a partir deste resultado, apenas coletar diretamente os valores dos coeficientes já agrupados.

Substituindo (6.17) em (6.16) e expandindo $(1 - B)^{-1/2}$ pelo *Teorema Binomial* [40, eq. (1.110)],

dado por

$$(1 - B)^{-1/2} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1/2)_r}{r!} B^r, \quad (6.20)$$

em que $(p)_k = p(p+1)(p+2) \cdots (p+k-1) = \Gamma(p+k)/\Gamma(p)$ é o símbolo de Pochhammer [48, eq. (6.1.22)] e cuja convergência é verificada $|B| < 1$ [40, eq. (1.110)], obtém-se

$$\Phi(s_1, s_2, \dots, s_L) = (1 - s_1)^{-\mu_1} (1 - s_2)^{-\mu_2} \cdots (1 - s_L)^{-\mu_L} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1/2)_r}{r!} B^r. \quad (6.21)$$

Por sua vez, o polinômio resultante de B^r pode ser expandido utilizando o *Teorema Multinomial*, em que

$$(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)^r = \sum_{a_1 + a_2 + \cdots + a_n = r} \binom{r}{a_1, a_2, \dots, a_n} b_1^{a_1} b_2^{a_2} \cdots b_n^{a_n}, \quad (6.22)$$

$\binom{r}{a_1, a_2, \dots, a_n} = r! / a_1! a_2! \cdots a_n!$ são os coeficientes multinomiais [48, eq. (24.1.2)] e a soma é feita para todos os valores inteiros de a_1, a_2, \dots, a_n tais que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = r$. Neste caso, e após após algumas manipulações algébricas, a FGM pode ser reescrita como

$$\Phi(s_1, s_2, \dots, s_L) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1/2)_r}{r!} \sum_{a_1 + \cdots + a_n = r} K_r \prod_{i=1}^L (1 - s_i)^{-\mu_i} \left(\frac{s_i}{1 - s_i} \right)^{a_i}, \quad (6.23)$$

em que K_r é um polinômio em função dos coeficientes de expansão e a_i são potências inteiras positivas, resultantes da expansão multinomial. Finalmente, para obter a FDPC das variáveis Gamma Y_1, Y_2, \dots, Y_L , efetua-se a transformada inversa de Laplace em (6.23). No entanto, da forma como está representada, não é possível obtê-la em forma fechada. Por isso reescreve-se (6.23) em função de polinômios de Laguerre, para que a propriedade de Laplace [71, eq. (1.3)]

$$\alpha^r (1 - \alpha)^{-p-r} = \int_0^r \frac{\exp[(\alpha - 1)x] x^{p-1} L_r^p(x)}{(p)_r \Gamma(p)} dx \quad (6.24)$$

possa ser utilizada. A função $L_r^p(x)$ apresentada em (6.24) é definida em [71] como o polinômio de Laguerre *generalizado* e relaciona-se com o polinômio de Laguerre da forma $L_r^p(x) = r! \mathcal{L}_r^{p-1}(x)$, em que $\mathcal{L}_r^{p-1}(x)$ é definido por [71]

$$\mathcal{L}_r^{p-1}(x) = \frac{\exp(x) x^{-(p-1)}}{r!} \left(-\frac{d}{dx} \right)^r [\exp(-x) x^{r+(p-1)}] = \sum_{j=0}^r (-1)^{j+r} \frac{\Gamma(p+r) x^j}{j!(r-j)! \Gamma(p+j)}. \quad (6.25)$$

Note que a definição do polinômio de Laguerre em [71] é ligeiramente diferente da definição comumente utilizada e apresentada em [40, eq. (8.970.1)], onde o polinômio de Laguerre é definido

como

$$\mathcal{L}_r^{p-1}(x) = \frac{\exp(x)x^{-(p-1)}}{r!} \left(\frac{d}{dx} \right)^r [\exp(-x)x^{r+(p-1)}] = \sum_{j=0}^r (-1)^j \frac{\Gamma(p+r)x^j}{j!(r-j)!\Gamma(p+j)}. \quad (6.26)$$

Utilizando a propriedade (6.24) e sabendo que [71]

$$\sum_{a_1+\dots+a_n=r} K_r \prod_{i=1}^L \frac{L_{a_i}(x_i, p)}{(p)_{a_i}} = \left\{ \sum_{i<j} C_{ij} \vartheta \left[\frac{L(x_i, p)}{p} \frac{L(x_j, p)}{p} \right] + \dots + C_{12\dots n} \left[\frac{L(x_1, p)}{p} \right]^{2\mu_1} \dots \left[\frac{L(x_L, p)}{p} \right]^{2\mu_L} \right\}^r, \quad (6.27)$$

a FDPC de Y_1, Y_2, \dots, Y_L pode ser finalmente obtida como

$$f_{Y_1, Y_2, \dots, Y_L}(y_1, y_2, \dots, y_L) = \left[\prod_{k=1}^L f_{Y_k}(y_k) \right] \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1/2)_r}{r!} \times \left\{ \sum_{i<j} C_{ij} \vartheta \left[\frac{L(y_i, \mu_i)}{\mu_i} \frac{L(y_j, \mu_j)}{\mu_j} \right] + \dots + C_{12\dots n} \left[\frac{L(y_1, \mu_1)}{\mu_1} \right]^{2\mu_1} \dots \left[\frac{L(y_L, \mu_L)}{\mu_L} \right]^{2\mu_L} \right\}^r \quad (6.28)$$

em que $f_{Y_k}(y_k)$ é a FDP marginal de Y_k , dada por (6.4). Note que, na representação da FDPC Gamma em (6.28), a propriedade $\vartheta(\beta'_1 \beta'_2 \dots \beta'_n) = \beta_1^{2\mu_1} \beta_2^{2\mu_2} \dots \beta_L^{2\mu_L}$ foi utilizada. No processo de expansão, é assumido que

$$\left[\frac{L(x, p)}{p} \right]^m \left[\frac{L(x, p)}{p} \right]^n = \left[\frac{L(x, p)}{p} \right]^{m+n} = \frac{L_{m+n}^p(x)}{(p)_{m+n}}. \quad (6.29)$$

A convergência de (6.28) é discutida em [71], onde é mostrado que a série é absolutamente convergente dado que

$$\sum_{i<j} |C_{ij}| + \sum_{i<j<k} |C_{ijk}| + \dots + |C_{12\dots n}| < 1. \quad (6.30)$$

Valores de coeficientes de expansão para a qual (6.30) não for satisfeita não implicam necessariamente na divergência da série, apenas não garantem sua convergência.

A partir da FDPC Gamma, a FDPC α - μ pode ser obtida facilmente. As VAs α - μ R_1, R_2, \dots, R_L relacionam-se com as VAs Gamma Y_1, Y_2, \dots, Y_L da forma

$$\begin{aligned}
\frac{R_1^{\alpha_1}}{\hat{r}_1^{\alpha_1}} &= \frac{1}{2\mu_1} (X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{2\mu_1}^2) = \frac{Y_1}{\mu_1} \\
\frac{R_2^{\alpha_2}}{\hat{r}_2^{\alpha_2}} &= \frac{1}{2\mu_2} (X_{2\mu_1+1}^2 + X_{2\mu_1+2}^2 + \cdots + X_{2(\mu_1+\mu_2)}^2) = \frac{Y_2}{\mu_2} \\
&\vdots \\
\frac{R_L^{\alpha_L}}{\hat{r}_L^{\alpha_L}} &= \frac{1}{2\mu_L} (X_{2(\mu_1+\cdots+\mu_{L-1})+1}^2 + X_{2(\mu_1+\cdots+\mu_{L-1})+2}^2 + \cdots + X_n^2) = \frac{Y_L}{\mu_L}.
\end{aligned} \tag{6.31}$$

De forma simplificada, $R_i = \alpha_i \sqrt{\hat{r}_i^{\alpha_i} Y_i / \mu_i}$, $i = 1, 2, \dots, L$. Logo, utilizando (6.31), a FDPC α - μ pode ser obtida utilizando a transformação

$$f_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L) = |J| f_{Y_1, Y_2, \dots, Y_L}(y_1, y_2, \dots, y_L), \tag{6.32}$$

em que $|J|$ é o *Jacobiano* da transformação [34]. Seguindo o procedimento padrão de transformação de variáveis aleatórias e, após algumas manipulações algébricas, a FDPC α - μ é obtida finalmente como [70]

$$\begin{aligned}
f_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L) &= \\
&\left[\prod_{k=0}^L f_{R_k}(r_k) \right] \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1/2)^r}{r!} \left\{ \sum_{i < j} C_{ij} \vartheta \left[\frac{L(\mu_i(r_i/\hat{r}_i)^{\alpha_i}, \mu_i)}{\mu_i} \frac{L(\mu_j(r_j/\hat{r}_j)^{\alpha_j}, \mu_j)}{\mu_j} \right] \right. \\
&\quad \left. + \cdots + C_{12\dots n} \left[\frac{L(\mu_1(r_1/\hat{r}_1)^{\alpha_1}, \mu_1)}{\mu_1} \right]^{2\mu_1} \cdots \left[\frac{L(\mu_L(r_L/\hat{r}_L)^{\alpha_L}, \mu_L)}{\mu_L} \right]^{2\mu_L} \right\}^r
\end{aligned} \tag{6.33}$$

em que $f_{R_k}(r_k)$ é a distribuição α - μ marginal, dada por

$$f_{R_k}(r_k) = \frac{\alpha_k \mu_k^{\mu_k} r_k^{\alpha_k \mu_k - 1}}{\hat{r}_k^{\alpha_k \mu_k} \Gamma(\mu_k)} \exp\left(-\mu_k \frac{r_k^{\alpha_k}}{\hat{r}_k^{\alpha_k}}\right) \quad k = 1, 2, \dots, L. \tag{6.34}$$

Assim como na distribuição conjunta Gamma, a FDPC α - μ converge absolutamente para [70]

$$\sum_{i < j} |C_{ij}| + \sum_{i < j < k} |C_{ijk}| + \cdots + |C_{12\dots n}| < 1. \tag{6.35}$$

6.3 Obtenção da função de distribuição acumulada conjunta α - μ

Na Seção 6.2, a FDPC α - μ foi obtida à partir da FDPC Gamma. Esta seção apresenta a obtenção da função de distribuição acumulada conjunta α - μ . A expressão final é apresentada de forma exata como uma soma infinita de funções Gamma incompletas.

A obtenção da FDAC se dá a partir da FDPC α - μ , expressa por (6.33). Expandindo (6.33) utilizando o *Teorema Multinomial*, a FDPC α - μ pode ser reescrita da forma

$$f_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L) = \left[\prod_{k=1}^L f_{R_k}(r_k) \right] \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1/2)_r}{r!} \\ \times \sum_{u_1 + \dots + u_{\mathfrak{C}} = r} \binom{r}{u_1, u_2, \dots, u_{\mathfrak{C}}} \underbrace{C_{12}^{u_1} \times \dots \times C_{12 \dots n}^{u_{\mathfrak{C}}}}_{\mathfrak{C} \text{ coeficientes}} \left[\frac{L \left(\frac{\mu_1}{\hat{r}_1} r_1^{\alpha_1}, \mu_1 \right)}{\mu_1} \right]^{v_1} \dots \left[\frac{L \left(\frac{\mu_L}{\hat{r}_L} r_L^{\alpha_L}, \mu_L \right)}{\mu_L} \right]^{v_L}, \quad (6.36)$$

em que \mathfrak{C} é o número de coeficientes de expansão e $\binom{r}{u_1, u_2, \dots, u_{\mathfrak{C}}}$ são os já conhecidos coeficientes multinomiais [48, eq. (24.1.2)]. Os índices v_i , $i = 1, 2, \dots, L$, por sua vez, são combinações lineares dos índices u_j , $j = 1, 2, \dots, \mathfrak{C}$, e surgem como consequência da expansão multinomial, como no exemplo a seguir, em que $L = 3$, $\mu_1 = 1/2$, $\hat{r}_i = 1$ e $\alpha_i = 2$, $i = 1, 2, 3$:

$$\left\{ C_{12} \left[\frac{L(r_1^2/2, 1/2)}{1/2} \right] \left[\frac{L(r_1^2/2, 1/2)}{1/2} \right] \right. \\ + C_{13} \left[\frac{L(r_1^2/2, 1/2)}{1/2} \right] \left[\frac{L(r_1^2/2, 1/2)}{1/2} \right] \\ + C_{23} \left[\frac{L(r_1^2/2, 1/2)}{1/2} \right] \left[\frac{L(r_1^2/2, 1/2)}{1/2} \right] \\ \left. + C_{123} \left[\frac{L(r_1^2/2, 1/2)}{1/2} \right] \left[\frac{L(r_1^2/2, 1/2)}{1/2} \right] \left[\frac{L(r_1^2/2, 1/2)}{1/2} \right] \right\}^r = \\ \sum_{u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = r} \binom{r}{u_1, u_2, u_3, u_4} C_{12}^{u_1} C_{13}^{u_2} C_{23}^{u_3} C_{123}^{u_4} \\ \times \left[\frac{L(r_1^2/2, 1/2)}{1/2} \right]^{u_1 + u_2 + u_4} \left[\frac{L(r_1^2/2, 1/2)}{1/2} \right]^{u_1 + u_3 + u_4} \left[\frac{L(r_1^2/2, 1/2)}{1/2} \right]^{u_2 + u_3 + u_4} \quad (6.37)$$

Para o exemplo acima, $v_1 = u_1 + u_2 + u_4$, $v_2 = u_1 + u_3 + u_4$ e $v_3 = u_2 + u_3 + u_4$. É importante frisar que, caso haja coeficientes multiplicando os mesmos polinômios de Laguerre, como no exemplo (6.18), estes podem ser agrupados em um coeficiente apenas, reduzindo o número total de termos

na expansão multinomial. Em outras palavras, efetuando-se a expansão multinomial utilizando os coeficientes compostos, chega-se ao mesmo resultado final. Rearranjando (6.36), a FDPC α - μ torna-se

$$f_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1/2)_r}{r!} \sum_{u_1 + \dots + u_{\mathfrak{e}} = r} \binom{r}{u_1, u_2, \dots, u_{\mathfrak{e}}} C_{12}^{u_1} \times \dots \times C_{12 \dots n}^{u_{\mathfrak{e}}} \\ \times f_{R_1}(r_1) \left[\frac{L\left(\frac{\mu_1}{\hat{r}_1^{\alpha_1}} r_1^{\alpha_1}, \mu_1\right)}{\mu_1} \right]^{v_1} f_{R_2}(r_2) \left[\frac{L\left(\frac{\mu_2}{\hat{r}_2^{\alpha_2}} r_2^{\alpha_2}, \mu_2\right)}{\mu_2} \right]^{v_2} \dots f_{R_L}(r_L) \left[\frac{L\left(\frac{\mu_L}{\hat{r}_L^{\alpha_L}} r_L^{\alpha_L}, \mu_L\right)}{\mu_L} \right]^{v_L}. \quad (6.38)$$

A FDAC α - μ pode ser obtida integrando (6.38) com relação a r_1, r_2, \dots, r_L . Conforme será discutido adiante na Seção 6.5, a integração pode ser feita termo-a-termo, resultando em

$$F_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L) = \int_0^{r_L} \dots \int_0^{r_1} f_{R_1, R_2, \dots, R_L}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_L) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_L = \\ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1/2)_r}{r!} \sum_{u_1 + \dots + u_{\mathfrak{e}} = r} \binom{r}{u_1, u_2, \dots, u_{\mathfrak{e}}} C_{12}^{u_1} \times \dots \times C_{12 \dots n}^{u_{\mathfrak{e}}} \\ \times \int_0^{r_1} f_{R_1}(\xi_1) \left[\frac{L\left(\frac{\mu_1}{\hat{r}_1^{\alpha_1}} \xi_1^{\alpha_1}, \mu_1\right)}{\mu_1} \right]^{v_1} d\xi_1 \times \dots \times \int_0^{r_L} f_{R_L}(\xi_L) \left[\frac{L\left(\frac{\mu_L}{\hat{r}_L^{\alpha_L}} \xi_L^{\alpha_L}, \mu_L\right)}{\mu_L} \right]^{v_L} d\xi_L. \quad (6.39)$$

Para resolver as L integrais presentes em (6.39), pode-se expandir $[L(\mu_i(\xi_i/\hat{r}_i)^{\alpha_i}, \mu_i)/\mu_i]^{v_i}$ da forma

$$\left[\frac{L(\mu_i(\xi_i/\hat{r}_i)^{\alpha_i}, \mu_i)}{\mu_i} \right]^{v_i} = \frac{L_{v_i}^{\mu_i}(\mu_i(\xi_i/\hat{r}_i)^{\alpha_i})}{(\mu_i)_{v_i}} \\ = \frac{v_i! \Gamma(\mu_i)}{\Gamma(\mu_i + v_i)} \sum_{q=0}^{v_i} (-1)^{q+v_i} \frac{\Gamma(\mu_i + v_i) \mu_i^q (\xi_i/\hat{r}_i)^{\alpha_i q}}{q! (v_i - q)! \Gamma(\mu_i + q)} \\ = \sum_{q=0}^{v_i} \binom{v_i}{q} (-1)^{q+v_i} \frac{\Gamma(\mu_i) \mu_i^q (\xi_i/\hat{r}_i)^{\alpha_i q}}{\Gamma(\mu_i + q)}. \quad (6.40)$$

Utilizando (6.40), a integração pode ser expressa como

$$\int_0^{r_i} f_{R_i}(\xi_i) \left[\frac{L(\mu_i(\xi_i/\hat{r}_i)^{\alpha_i}, \mu_i)}{\mu_i} \right]^{v_i} d\xi_i = \sum_{q=0}^{v_i} \binom{v_i}{q} (-1)^{q+v_i} \int_0^{r_i} f_{R_i}(\xi_i) \frac{\Gamma(\mu_i) \mu_i^q (\xi_i/\hat{r}_i)^{\alpha_i q}}{\Gamma(\mu_i + q)} d\xi_i. \quad (6.41)$$

Sabendo-se que $f_{R_i}(\xi_i) = \frac{\alpha_i \mu_i^{\mu_i} \xi_i^{\alpha_i \mu_i - 1}}{\hat{r}_i^{\alpha_i \mu_i} \Gamma(\mu_i)} \exp\left(-\mu_i \frac{\xi_i^{\alpha_i}}{\hat{r}_i^{\alpha_i}}\right)$,

$$\begin{aligned} \int_0^{r_i} f_{R_i}(\xi_i) \frac{\Gamma(\mu_i) \mu_i^q (\xi_i/\hat{r}_i)^{\alpha_i q}}{\Gamma(\mu_i + q)} d\xi_i &= \int_0^{r_i} \frac{\alpha_i \mu_i^{\mu_i} \xi_i^{\alpha_i \mu_i - 1}}{\hat{r}_i^{\alpha_i \mu_i} \Gamma(\mu_i)} \exp\left(-\mu_i \frac{\xi_i^{\alpha_i}}{\hat{r}_i^{\alpha_i}}\right) \frac{\Gamma(\mu_i) \mu_i^q (\xi_i/\hat{r}_i)^{\alpha_i q}}{\Gamma(\mu_i + q)} d\xi_i \\ &= \int_0^{r_i} \frac{\alpha_i \mu_i^{\mu_i + q} \xi_i^{\alpha_i(\mu_i + q) - 1}}{\hat{r}_i^{\alpha_i(\mu_i + q)} \Gamma(\mu_i + q)} \exp\left(-\mu_i \frac{\xi_i^{\alpha_i}}{\hat{r}_i^{\alpha_i}}\right) d\xi_i. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Fazendo $t = \mu_i(\xi_i/\hat{r}_i)^{\alpha_i} \Rightarrow dt = \alpha_i \mu_i (\xi_i/\hat{r}_i)^{\alpha_i - 1} d\xi_i/\hat{r}_i$, (6.42) pode ser rearranjada como

$$\int_0^{r_i} \frac{\alpha_i \mu_i^{\mu_i + q} \xi_i^{\alpha_i(\mu_i + q) - 1}}{\hat{r}_i^{\alpha_i(\mu_i + q)} \Gamma(\mu_i + q)} \exp\left(-\mu_i \frac{\xi_i^{\alpha_i}}{\hat{r}_i^{\alpha_i}}\right) d\xi_i = \frac{1}{\Gamma(\mu_i + q)} \int_0^{\mu_i(r_i/\hat{r}_i)^{\alpha_i}} t^{\mu_i + q - 1} \exp(-t) dt, \quad (6.43)$$

que é a própria definição da função Gamma incompleta regularizada inferior, mencionada anteriormente como $P(a, x) = 1/\Gamma(a) \times \int_0^x t^{a-1} \exp(-t) dt$ [48, eq. (6.5.1)], e aplicada em $a = \mu_i + q$ e $x = \mu_i(r_i/\hat{r}_i)^{\alpha_i}$. Note que para $q = 0$, a FDA marginal α - μ é obtida. Logo,

$$\int_0^{r_i} f_{R_i}(\xi_i) \left[\frac{L(\mu_i(\xi_i/\hat{r}_i)^{\alpha_i}, \mu_i)}{\mu_i} \right]^{v_i} d\xi_i = \sum_{q=0}^{v_i} \binom{v_i}{q} (-1)^{q+v_i} P(\mu_i + q, \mu_i(r_i/\hat{r}_i)^{\alpha_i}) \quad (6.44)$$

e, finalmente, a FDAC α - μ é obtida como

$$\begin{aligned} F_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1/2)^r}{r!} \sum_{u_1 + \dots + u_{\mathbf{e}} = r} \binom{r}{u_1, \dots, u_{\mathbf{e}}} C_{12}^{u_1} \cdots C_{12 \dots n}^{u_{\mathbf{e}}} \\ &\quad \times \prod_{i=1}^L \left[\sum_{q=0}^{v_i} \binom{v_i}{q} (-1)^{q+v_i} P(\mu_i + q, \mu_i(r_i/\hat{r}_i)^{\alpha_i}) \right]. \end{aligned} \quad (6.45)$$

6.4 Uma abordagem alternativa

A expressão obtida em (6.45) é muito geral pois considera uma correlação arbitrária entre as VAs gaussianas que compõem os sinais $\alpha\text{-}\mu$. No entanto, pode-se tornar impraticável para um número elevado de variáveis correlacionadas e/ou altos valores de $\mu_i, i = 1, 2, \dots, L$. A razão para isso é que o número de coeficientes de expansão baseia-se na matriz de correlação das gaussianas, cuja dimensão cresce severamente à medida que L ou μ_i aumenta e leva a um elevado número de coeficientes a serem determinados e, conseqüentemente, de termos na expansão multinomial. Além disso, a expressão (6.45) conta com a limitação de que, na construção da matriz de correlação em (6.2), são permitidos apenas valores múltiplos de $1/2$ para $\mu_i, i = 1, \dots, L$, por razões óbvias.

Por isso, uma formulação alternativa e mais simples é apresentada nesta seção. A nova formulação é obtida considerando o que é definido neste trabalho como um cenário de correlação vertical entre as VAs gaussianas. Sem perda de generalidade, sejam R_1 e R_2 dois sinais $\alpha\text{-}\mu$ correlacionados tais que ($\mu_1 \leq \mu_2$). Na formulação geral, uma esquema bastante geral de correlação entre as VAs gaussianas é permitido, como mostra a Fig. 6.1.

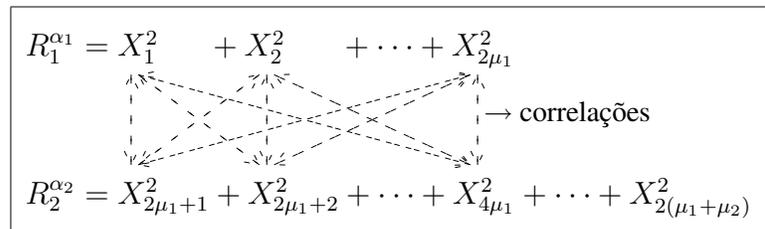


Fig. 6.1: Correlação generalizada entre as VAs gaussianas que compõem os sinais $\alpha\text{-}\mu$ R_1 e R_2 .

Por sua vez, na nova abordagem, o coeficiente de correlação entre as VAs gaussianas que compõem R_1 e R_2 é dado por $\rho_{1,2\mu_1+k} = \rho_{12}, k = 1, 2, \dots, 2\mu_1$, e zero caso contrário, como mostra a Fig. 6.2. As implicações em considerar tal cenário de correlação, também admitido em [23], foi analisado recentemente [72] e [73] para as distribuições conjuntas de duas variáveis Nakagami- m e Hoyt, respectivamente. Nestes trabalhos, a confiabilidade de combinador por seleção foi avaliada para diversos cenários de correlação. Em particular, para o caso vertical, (tradução do inglês) “não há diferenças significativas entre a probabilidade acumulada do sinal na saída do CS para o caso geral e o particular (...) De fato, para este caso (vertical), a diferença de desempenho é quase imperceptível” [73].

Para o caso de correlação vertical, a FDPC das VAs Y_1, Y_2, \dots, Y_L , como mostradas em (6.3), foi

$$\begin{array}{c}
 R_1^{\alpha_1} = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{2\mu_1}^2 \\
 \uparrow \rho_{12} \quad \uparrow \rho_{12} \quad \uparrow \rho_{12} \\
 R_2^{\alpha_2} = X_{2\mu_1+1}^2 + X_{2\mu_1+2}^2 + \cdots + X_{4\mu_1}^2 + \cdots + X_{2(\mu_1+\mu_2)}^2
 \end{array}$$

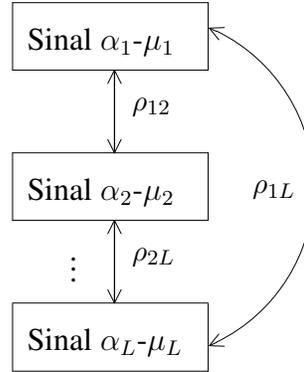
(a) Detalhes da correlação entre as gaussianas dos sinais $\alpha_i\text{-}\mu_i$ and $\alpha_j\text{-}\mu_j$.(b) Visão geral da correlação entre as gaussianas dos L sinais $\alpha\text{-}\mu$.

Fig. 6.2: Padrão de correlação para o cenário de correlação vertical

obtida em [71] como [71, eq. (4.1)]

$$\begin{aligned}
 f_{Y_1, \dots, Y_L}(y_1, \dots, y_L) = & \left[\prod_{k=1}^L f_{Y_k}(y_k) \right] \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\min(\mu_i))^r}{r!} \left\{ \sum_{i < j} C_{ij} \frac{L(y_i, \mu_i)}{\mu_i} \frac{L(y_j, \mu_j)}{\mu_j} \right. \\
 & \left. + \cdots + C_{12 \dots L} \frac{L(y_1, \mu_1)}{\mu_1} \cdots \frac{L(y_L, \mu_L)}{\mu_L} \right\}^r. \quad (6.46)
 \end{aligned}$$

Conforme observado anteriormente, os L sinais $\alpha\text{-}\mu$ correlacionados R_1, R_2, \dots, R_L , com parâmetros $\alpha_1, \mu_1, \alpha_2, \mu_2, \dots, \alpha_L, \mu_L$, respectivamente, podem ser obtidos a partir de Y_1, Y_2, \dots, Y_L fazendo $R_i = \sqrt{\hat{r}_i^{\alpha_i} Y_i / \mu_i}$, $i = 1, 2, \dots, L$. Utilizando este resultado, a FDPC dos L sinais $\alpha\text{-}\mu$ pode então ser obtida a partir da FDPC Gamma como $f_{R_1, \dots, R_L}(r_1, \dots, r_L) = |J| f_{Y_1, \dots, Y_L}(y_1, \dots, y_L)$, em que J é o Jacobiano da transformação. Portanto, após algumas manipulações algébricas envolvendo variáveis aleatórias [34], a FDPC $\alpha\text{-}\mu$ pode ser obtida como

$$f_{R_1, \dots, R_L}(r_1, \dots, r_L) = \left[\prod_{k=1}^L f_{R_k}(r_k) \right] \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\min(\mu_i))_r}{r!} \left\{ \sum_{i < j} C_{ij} \frac{L \left(\frac{\mu_i}{\hat{r}_i} r_i^{\alpha_i}, \mu_i \right)}{\mu_i} \frac{L \left(\frac{\mu_j}{\hat{r}_j} r_j^{\alpha_j}, \mu_j \right)}{\mu_j} \right. \\ \left. + \dots + C_{12\dots L} \frac{L \left(\frac{\mu_1}{\hat{r}_1} r_1^{\alpha_1}, \mu_1 \right)}{\mu_1} \dots \frac{L \left(\frac{\mu_L}{\hat{r}_L} r_L^{\alpha_L}, \mu_L \right)}{\mu_L} \right\}^r \quad (6.47)$$

em que $f_{R_k}(r_k)$ é a FDP marginal α - μ . Em (6.47), os coeficientes de expansão são calculados a partir de uma nova função $g(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L)$, dada por

$$g(\beta_1, \dots, \beta_L) = \begin{vmatrix} 1 & -\rho_{12}\beta_2 & \cdots & -\rho_{1L}\beta_L \\ -\rho_{12}\beta_1 & 1 & \cdots & -\rho_{2L}\beta_L \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\rho_{1L}\beta_1 & -\rho_{2L}\beta_2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}. \quad (6.48)$$

Note que, pela nova definição de $g(\beta_1, \dots, \beta_L)$ em (6.48), a dimensão da matriz depende apenas do número de VAs α - μ , L . Conseqüentemente, o número de coeficientes de expansão independe dos valores de μ_i , $i = 1, \dots, L$ e decai drasticamente quando comparado com (6.45). Por exemplo, considerando $L = 3$ e $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$, existem 14 coeficientes compostos de expansão na formulação geral, ao passo que, utilizando a nova abordagem, o número cai para $\mathfrak{C} = 4$ (na nova abordagem, não há operador produto, por isso não há coeficientes compostos). O novo número total de coeficientes de expansão pode ser expresso em função do número de variáveis α - μ em uma forma exata como $\mathfrak{C} = 2^L - (L + 1)$. Além disso, como consequência de (6.48), os parâmetros μ_i , $i = 1, \dots, L$ agora podem assumir valores arbitrários reais não-negativos.

Utilizando estes resultados, e seguindo os mesmos procedimentos apresentados na Seção 6.3, a FDAC α - μ pode ser obtida em uma maneira mais simples como

$$F_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\min(\mu_i))_r}{r!} \sum_{u_1 + \dots + u_{\mathfrak{C}} = r} \binom{r}{u_1, \dots, u_{\mathfrak{C}}} C_{12}^{u_1} \dots C_{12\dots L}^{u_{\mathfrak{C}}} \\ \times \prod_{i=1}^L \left[\sum_{q=0}^{v_i} \binom{v_i}{q} (-1)^{q+v_i} P(\mu_i + q, \mu_i (r_i / \hat{r}_i)^{\alpha_i}) \right]. \quad (6.49)$$

Note que as expressões para a FDAC α - μ apresentadas em (6.45) e (6.49) são dadas em termos da correlação entre as VAs gaussianas dos sinais α - μ correlacionados. No entanto, para o cenário

de correlação vertical, ela pode ser expressa diretamente em termos da correlação entre as potências α - μ . A correlação entre duas potências α - μ , $R_i^{\alpha_i}$ e $R_j^{\alpha_j}$, comumente denominada HpCC (do inglês *Hyper-Power Correlation Coefficient*) [24], é definida como [24]

$$\delta_{ij} \triangleq \frac{\text{Cov}(R_i^{\alpha_i}, R_j^{\alpha_j})}{\sqrt{\text{Var}(R_i^{\alpha_i}) \text{Var}(R_j^{\alpha_j})}} \quad (6.50)$$

em que $\text{Cov}(\cdot, \cdot)$ e $\text{Var}(\cdot)$ denotam os operadores covariância e variância, respectivamente. Conforme observado em [15], para $\mu_i = \mu_j = \mu$, a correlação entre duas potências α - μ , $R_i^{\alpha_i}$ e $R_j^{\alpha_j}$, é igual à correlação observada entre duas potências Rayleigh. Por sua vez, assumindo dois sinais Rayleigh dados por $R_1^2 = X_1^2 + Y_1^2$ e $R_2^2 = X_2^2 + Y_2^2$, em que X_1, X_2, Y_1, Y_2 são processos gaussianos de média nula e variância σ^2 , a correlação entre R_1^2 e R_2^2 (δ_{Rayleigh}) é dada por [15, eq. (35)]

$$\delta_{\text{Rayleigh}} = \frac{\text{E}^2(X_1 X_2) + \text{E}^2(X_1 Y_2)}{\text{E}(X_1^2) \text{E}(X_2^2)}. \quad (6.51)$$

Para o caso de correlação vertical, $\text{E}(X_1 Y_2) = 0$ e, portanto,

$$\delta_{\text{Rayleigh}} = \frac{\text{E}^2(X_1 X_2)}{\text{E}(X_1^2) \text{E}(X_2^2)} = \rho_{\text{Rayleigh}}^2, \quad (6.52)$$

em que ρ_{Rayleigh} é a correlação entre X_1 e X_2 ou Y_1 e Y_2 . Logo, para o caso de $\mu_i = \mu_j = \mu$, o HpCC vale ρ_{ij}^2 . Por outro lado, para o caso de $\mu_i \leq \mu_j$, conforme também observado em [15], o HpCC vale $\delta \sqrt{\mu_i / \mu_j}$, em que δ é o HpCC quando $\mu_i = \mu_j = \mu$. Isso significa que δ corresponde ao HpCC de dois sinais α - μ quando $\mu_i = \mu_j = \mu$ [24]. Para futuras referências, δ será chamado de HpCC- μ .

6.5 Análise de convergência

Seja a FDPC α - μ definida como

$$f_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r_1, r_2, \dots, r_L), \quad (6.53)$$

em que

$$f_n(r_1, r_2, \dots, r_L) \triangleq \frac{(\min(\mu_i))_n}{n!} \left[\prod_{k=1}^L f_{R_k}(r_k) \right] \left\{ \sum_{i < j} C_{ij} \frac{L\left(\frac{\mu_i}{\hat{r}_i^{\alpha_i}} r_i^{\alpha_i}, \mu_i\right)}{\mu_i} \frac{L\left(\frac{\mu_j}{\hat{r}_j^{\alpha_j}} r_j^{\alpha_j}, \mu_j\right)}{\mu_j} \right. \\ \left. + \dots + C_{12\dots L} \frac{L\left(\frac{\mu_1}{\hat{r}_1^{\alpha_1}} r_1^{\alpha_1}, \mu_1\right)}{\mu_1} \dots \frac{L\left(\frac{\mu_L}{\hat{r}_L^{\alpha_L}} r_L^{\alpha_L}, \mu_L\right)}{\mu_L} \right\}^n. \quad (6.54)$$

É possível definir uma constante K , $\{K \in \mathbb{R} | 0 \leq K < \infty\}$, de forma que $\left[\prod_{k=1}^L f_{R_k}(r_k) \right] < K$, para qualquer conjunto $[r_1, r_2, \dots, r_L] \geq [0, \dots, 0]$. Dessa forma, uma outra seqüência, $g_n(r_1, r_2, \dots, r_L)$, pode ser definida como

$$g_n(r_1, r_2, \dots, r_L) \triangleq \left| K \frac{(\min(\mu_i))_n}{n!} \left\{ \sum_{i < j} C_{ij} \frac{L\left(\frac{\mu_i}{\hat{r}_i^{\alpha_i}} r_i^{\alpha_i}, \mu_i\right)}{\mu_i} \frac{L\left(\frac{\mu_j}{\hat{r}_j^{\alpha_j}} r_j^{\alpha_j}, \mu_j\right)}{\mu_j} \right. \right. \\ \left. \left. + \dots + C_{12\dots L} \frac{L\left(\frac{\mu_1}{\hat{r}_1^{\alpha_1}} r_1^{\alpha_1}, \mu_1\right)}{\mu_1} \dots \frac{L\left(\frac{\mu_L}{\hat{r}_L^{\alpha_L}} r_L^{\alpha_L}, \mu_L\right)}{\mu_L} \right\}^n \right| \quad (6.55)$$

tal que

$$|f_n(r_1, r_2, \dots, r_L)| \leq g_n(r_1, r_2, \dots, r_L). \quad (6.56)$$

Conforme discutido em [71], a série de potência

$$g_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(r_1, r_2, \dots, r_L) \quad (6.57)$$

é absolutamente convergente com raio de convergência infinito dado que

$$\sum_{i < j} |C_{ij}| + \sum_{i < j < k} |C_{ijk}| + \cdots + |C_{12\dots L}| < 1. \quad (6.58)$$

Desta forma, respeitada a condição (6.58), (6.57) pode ser integrado termo-a-termo dentro de sua hiper-esfera de convergência, com o raio de convergência da série resultante igual ao da série original [40, Teorema 0.312]. Isso significa que

$$G(r_1, r_2, \dots, r_L) = \sum_{n=0}^{\infty} \int g_n(r_1, r_2, \dots, r_L) dr_1 dr_2 \cdots dr_L \quad (6.59)$$

também é absolutamente convergente, com o mesmo raio de convergência de $g_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L)$. Utilizando (6.56) e o *Teorema da Convergência Dominada* [74], a FDPC α - μ dada por (6.47) pode então ser integrada termo-a-termo e, portanto, (6.49) é válida. De maneira semelhante, utilizando os resultados de [24], (6.33) também pode ser integrada termo-a-termo e, portanto, (6.45) também é válida.

A convergência da FDAC α - μ é garantida para $\sum_{i < j} |C_{ij}| + \sum_{i < j < k} |C_{ijk}| + \cdots + |C_{12\dots L}| < 1$. É importante frisar que, embora esta condição seja a mesma para as expressões (6.45) e (6.49), ela se traduz em valores máximos de correlação diferentes, uma vez que o número de coeficientes de expansão, bem como seus valores, são diferentes para as duas abordagens. Se a condição de convergência não for satisfeita, nada pode ser afirmado, embora convergência tenha sido observada para esquemas de correlação com $\sum_{i < j} |C_{ij}| + \sum_{i < j < k} |C_{ijk}| + \cdots + |C_{12\dots L}| \geq 1$, como será mostrado na Seção 7.5. A Tabela 6.1 ilustra os valores máximos de ρ e HpCC- μ para os quais a condição de convergência é atendida, considerando o cenário de correlação vertical e os esquemas de correlação constante ($\rho_{ij} = \rho$) e exponencial ($\rho_{ij} = \rho^{|i-j|}$). Note que, para o esquema constante, a condição de convergência implica em um valor máximo de correlação menor do que para o esquema exponencial.

Tab. 6.1: Valor máximo de coeficiente de correlação

L	Constante ($\rho_{ij} = \rho$)	Exponencial ($\rho_{ij} = \rho^{ i-j }$)
$L = 2$	$\rho < 1$ $\delta < 1$	$\rho < 1$ $\delta < 1$
$L = 3$	$\rho < 1/2$ $\delta < 1/4$	$\rho < \sqrt{3}/3$ $\delta < 1/3$
$L = 4$	$\rho < 1/3$ $\delta < 1/9$	$\rho < 0,46741$ $\delta < 0,21847$

6.6 Exemplos de coeficientes

Nesta seção, alguns exemplos de coeficientes de expansão são apresentados. O procedimento para o cálculo dos coeficientes segue aquele mostrado na Seção 6.4 e seus valores estão ilustrados na Tabela 6.2. Juntamente com o valor geral dos coeficientes (expressos em função dos coeficientes de correlação entre as VAs gaussianas), a Tabela 6.2 ilustra os valores dos coeficientes obtidos para os esquemas de correlação constante e exponencial. Note que, para o esquema constante, os coeficientes podem ser expressos em uma formulação generalizada como $C_{ij\dots s}^{\underbrace{}_{N \text{ termos}}} = (N-1)\rho^N$. Utilizando este resultado, o produto dos coeficientes de expansão pode ser reescrito como

$$C_{12}^{u_1} \cdots C_{12\dots L}^{u_{\mathfrak{e}}} = \rho^{2r + \sum_{i=1}^{L-1} (i-1) \sum_{j=h(i)+1}^{h(i+1)} u_j} \prod_{i=1}^{L-1} i^{\sum_{j=h(i)+1}^{h(i+1)} u_j}, \quad (6.60)$$

em que $h(i) \triangleq \sum_{k=1}^{i-1} \binom{L}{k+1}$, $h(1) = 0$. Utilizando este resultado, a FDAC α - μ para o esquema constante torna-se

$$F_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\min(\mu_i))_r}{r!} \sum_{u_1 + \dots + u_{\mathfrak{e}} = r} \binom{r}{u_1, \dots, u_{\mathfrak{e}}} \rho^{2r + \sum_{i=1}^{L-1} (i-1) \sum_{j=h(i)+1}^{h(i+1)} u_j} \\ \times \left[\prod_{i=1}^{L-1} i^{\sum_{j=h(i)+1}^{h(i+1)} u_j} \right] \prod_{i=1}^L \left[\sum_{q=0}^{v_i} \binom{v_i}{q} (-1)^{q+v_i} P(\mu_i + q, \mu_i (r_i / \hat{r}_i)^{\alpha_i}) \right]. \quad (6.61)$$

De maneira similar, a FDPC α - μ torna-se

$$f_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L) = \left[\prod_{k=1}^L f_{R_k}(r_k) \right] \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\min(\mu_i))_r}{r!} \sum_{u_1 + \dots + u_{\mathfrak{e}} = r} \binom{r}{u_1, \dots, u_{\mathfrak{e}}} \\ \times \rho^{2r + \sum_{i=1}^{L-1} (i-1) \sum_{j=h(i)+1}^{h(i+1)} u_j} \times \left[\prod_{i=1}^{L-1} i^{\sum_{j=h(i)+1}^{h(i+1)} u_j} \right] \prod_{i=1}^L \left[\frac{L^{\mu_i} (\mu_i (r_i / \hat{r}_i)^{\alpha_i})}{(\mu_i)_{v_i}} \right]. \quad (6.62)$$

Para os casos particulares $L = 2, 3, 4$, tem-se

$$C_{12}^r = \rho^{2r} \quad (6.63)$$

$$C_{12}^{u_1} C_{13}^{u_2} C_{23}^{u_3} C_{123}^{u_4} = 2^{u_4} \rho^{2r + u_4} \quad (6.64)$$

$$C_{12}^{u_1} C_{12}^{u_2} C_{13}^{u_1} \cdots C_{1234}^{u_{11}} = 2^{u_7 + u_8 + u_9 + u_{10}} 3^{u_{11}} \rho^{2r + u_7 + u_8 + u_9 + u_{10} + 2u_{11}} \quad (6.65)$$

Para o esquema de correlação exponencial, não é possível expressar os coeficientes de expansão em função apenas do coeficiente de correlação (ρ) e do número de termos no subíndice (N), por isso resultados como (6.60) e (6.62) não foram apresentados para tal esquema.

6.7 Conclusões

Este capítulo apresentou uma formulação inédita, exata e na forma de soma infinita para a distribuição conjunta α - μ . Escrita em termos de funções de Gamma incompletas, a formulação é facilmente computável e muito geral na medida em que permite correlação e parâmetros arbitrários. As condições de convergência para a formulação foram avaliadas e verificou-se que, para o esquema de correlação constante, as condições de convergência implicam em um menor valor de correlação máximo do que para o esquema exponencial.

Tab. 6.2: Exemplos de coeficientes de expansão

L	Valor Geral	Constante ($\rho_{ij} = \rho$)	Exponencial ($\rho_{ij} = \rho^{ i-j }$)
$L = 2$	$C_{ij} = \rho_{ij}^2$	$C_{12} = \rho^2$	$C_{12} = \rho^2$
$L = 3$	$C_{ij} = \rho_{ij}^2$	$C_{12} = \rho^2$ $C_{13} = \rho^2$ $C_{23} = \rho^2$	$C_{12} = \rho^2$ $C_{13} = \rho^4$ $C_{23} = \rho^2$
	$C_{ijk} = 2\rho_{ij}\rho_{ik}\rho_{jk}$	$C_{123} = 2\rho^3$	$C_{123} = 2\rho^4$
$L = 4$	$C_{ij} = \rho_{ij}^2$	$C_{12} = \rho^2$ $C_{13} = \rho^2$ $C_{14} = \rho^2$ $C_{23} = \rho^2$ $C_{24} = \rho^2$ $C_{34} = \rho^2$	$C_{12} = \rho^2$ $C_{13} = \rho^4$ $C_{14} = \rho^6$ $C_{23} = \rho^2$ $C_{24} = \rho^4$ $C_{34} = \rho^2$
	$C_{ijk} = 2\rho_{ij}\rho_{ik}\rho_{jk}$	$C_{123} = 2\rho^3$ $C_{124} = 2\rho^3$ $C_{134} = 2\rho^3$ $C_{234} = 2\rho^3$	$C_{123} = 2\rho^4$ $C_{124} = 2\rho^6$ $C_{134} = 2\rho^6$ $C_{234} = 2\rho^4$
	$C_{ijkl} = 2\rho_{il}\rho_{jk}(\rho_{ik}\rho_{jl} + \rho_{ij}\rho_{kl}) - \rho_{il}^2\rho_{jk}^2 - (\rho_{ik}\rho_{jl} - \rho_{ij}\rho_{kl})^2$	$C_{1234} = 3\rho^4$	$C_{1234} = 4\rho^6 - \rho^4$

L	Valor Geral	Constante ($\rho_{ij} = \rho$)	Exponencial ($\rho_{ij} = \rho^{ i-j }$)
$L = 5$	$C_{ij} = \rho_{ij}^2$	$C_{12} = \rho^2$ $C_{13} = \rho^2$ $C_{14} = \rho^2$ $C_{15} = \rho^2$ $C_{23} = \rho^2$ $C_{24} = \rho^2$ $C_{25} = \rho^2$ $C_{34} = \rho^2$ $C_{35} = \rho^2$ $C_{45} = \rho^2$	$C_{12} = \rho^2$ $C_{13} = \rho^4$ $C_{14} = \rho^6$ $C_{23} = \rho^2$ $C_{24} = \rho^4$ $C_{34} = \rho^2$ $C_{13} = \rho^4$ $C_{14} = \rho^6$ $C_{23} = \rho^2$ $C_{24} = \rho^4$
	$C_{ijk} = 2\rho_{ij}\rho_{ik}\rho_{jk}$	$C_{123} = 2\rho^3$ $C_{124} = 2\rho^3$ $C_{125} = 2\rho^3$ $C_{134} = 2\rho^3$ $C_{135} = 2\rho^3$ $C_{145} = 2\rho^3$ $C_{234} = 2\rho^3$ $C_{235} = 2\rho^3$ $C_{245} = 2\rho^3$ $C_{345} = 2\rho^3$	$C_{123} = 2\rho^4$ $C_{13} = 2\rho^6$ $C_{14} = 2\rho^8$ $C_{23} = 2\rho^6$ $C_{24} = 2\rho^8$ $C_{34} = 2\rho^8$ $C_{13} = 2\rho^4$ $C_{14} = 2\rho^6$ $C_{23} = 2\rho^6$ $C_{24} = 2\rho^4$
	$C_{ijkl} = 2\rho_{il}\rho_{jk}(\rho_{ik}\rho_{jl} + \rho_{ij}\rho_{kl})$ $-\rho_{il}^2\rho_{jk}^2 - (\rho_{ik}\rho_{jl} - \rho_{ij}\rho_{kl})^2$	$C_{1234} = 3\rho^4$ $C_{1235} = 3\rho^4$ $C_{1245} = 3\rho^4$ $C_{1345} = 3\rho^4$ $C_{2345} = 3\rho^4$	$C_{1234} = 4\rho^6 - \rho^4$ $C_{1235} = 4\rho^8 - \rho^6$ $C_{1245} = 4\rho^8 - \rho^4$ $C_{1345} = 4\rho^8 - \rho^6$ $C_{2345} = 4\rho^6 - \rho^4$
	$C_{ijklm} = -2\{\rho_{im}^2\rho_{jk}\rho_{jl}\rho_{kl} + \rho_{ik}^2\rho_{jl}\rho_{jm}\rho_{lm}$ $+ \rho_{im}[(\rho_{ik}\rho_{jl} - \rho_{ij}\rho_{kl})(-\rho_{jm}\rho_{kl} + \rho_{jl}\rho_{km})$ $- \rho_{jk}(\rho_{ik}\rho_{jl} + \rho_{ij}\rho_{kl})\rho_{lm}$ $+ \rho_{il}\rho_{jk}(-\rho_{jm}\rho_{kl} - \rho_{jl}\rho_{km} + \rho_{jk}\rho_{lm})]$ $+ \rho_{ik}[\rho_{il}\rho_{jm}(\rho_{jm}\rho_{kl} - \rho_{jl}\rho_{km} - \rho_{jk}\rho_{lm})$ $+ \rho_{ij}\rho_{lm}(-\rho_{jm}\rho_{kl} - \rho_{jl}\rho_{km} + \rho_{jk}\rho_{lm})]$ $+ \rho_{km}[\rho_{il}^2\rho_{jk}\rho_{jm} + \rho_{ij}^2\rho_{kl}\rho_{lm}$ $- \rho_{ij}\rho_{il}(\rho_{jm}\rho_{kl} - \rho_{jl}\rho_{km} + \rho_{jk}\rho_{lm})]\}$	$C_{12345} = 4\rho^5$	$C_{12345} = 8\rho^8 - 4\rho^6$

Capítulo 7

Casos Especiais da Distribuição Conjunta α - μ e Exemplo de Aplicação

7.1 Introdução

O capítulo anterior apresentou a FDAC α - μ sob a forma de soma infinita e, conforme detalhado na Seção 2.7, contempla uma série de distribuições de desvanecimento largamente utilizadas. Este capítulo apresenta formulações exatas para as distribuições conjuntas Weibull, Nakagami- m e Rayleigh, todas casos particulares da distribuição conjunta α - μ . Adicionalmente, é mostrado que qualquer versão truncada da formulação em série, ou seja, em que apenas um número finito de termos é considerado, também é uma FDAC válida. Esta versão aproximada é então utilizada para avaliar a distribuição do sinal de saída de um combinador por seleção no caso em que os sinais de entrada apresentam correlação entre si. Os resultados aproximados são comparados com resultados obtidos a partir de integração numérica da FDPC exata e resultados obtidos por simulações computacionais.

7.2 Formulação exata para a distribuição conjunta de duas e três variáveis correlacionadas

Sejam R_1 e R_2 dois sinais α - μ correlacionados com parâmetros μ_1, α_1 e μ_2, α_2 , respectivamente ($\mu_1 \leq \mu_2$), e ρ_{12} o coeficiente de correlação entre as VAs gaussianas que compõem R_1 e R_2 . A partir de (6.47) e (6.49), a FDPC e FDAC α - μ de duas variáveis correlacionadas podem ser escritas de forma muito simples e exatas como, respectivamente,

$$f_{R_1, R_2}(r_1, r_2) = f_{R_1}(r_1) f_{R_2}(r_2) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{r!}{(\mu_2)_r} \rho_{12}^{2r} \mathcal{L}_r^{\mu_1-1} \left(\frac{\mu_1}{\hat{r}_1^{\alpha_1}} r_1^{\alpha_1} \right) \mathcal{L}_r^{\mu_2-1} \left(\frac{\mu_2}{\hat{r}_2^{\alpha_2}} r_2^{\alpha_2} \right). \quad (7.1)$$

$$F_{R_1, R_2}(r_1, r_2) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\mu_1)_r}{r!} \rho_{12}^{2r} \left[\sum_{q=0}^r \binom{r}{q} (-1)^q P(\mu + q, \mu(r_1/\hat{r}_1)^{\alpha_1}) \right] \\ \times \left[\sum_{q=0}^r \binom{r}{q} (-1)^q P(\mu + q, \mu(r_2/\hat{r}_2)^{\alpha_2}) \right]. \quad (7.2)$$

A FDPC e FDAC α - μ também podem ser expressas em função da correlação δ_{12} entre as potências $R_1^{\alpha_1}$ e $R_2^{\alpha_2}$. Sabe-se que δ_{12} relaciona-se com o HpCC- μ da forma $\delta_{12} = \delta \sqrt{\mu_1/\mu_2}$, em que δ é o HpCC- μ . Além disso, sabe-se que, para a correlação vertical, o HpCC- μ relaciona-se com a correlação ρ_{12} entre as VAs gaussianas da forma $\delta = \rho_{12}^2$. Utilizando estas relações, a FDPC e FDAC podem ser escrita de forma exata como

$$f_{R_1, R_2}(r_1, r_2) = f_{R_1}(r_1) f_{R_2}(r_2) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{r!}{(\mu_2)_r} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{r/2} \delta_{12}^r \mathcal{L}_r^{\mu_1-1} \left(\frac{\mu_1}{\hat{r}_1^{\alpha_1}} r_1^{\alpha_1} \right) \mathcal{L}_r^{\mu_2-1} \left(\frac{\mu_2}{\hat{r}_2^{\alpha_2}} r_2^{\alpha_2} \right). \quad (7.3)$$

$$F_{R_1, R_2}(r_1, r_2) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\mu_1)_r}{r!} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{r/2} \delta_{12}^r \left[\sum_{q=0}^r \binom{r}{q} (-1)^q P(\mu + q, \mu(r_1/\hat{r}_1)^{\alpha_1}) \right] \\ \times \left[\sum_{q=0}^r \binom{r}{q} (-1)^q P(\mu + q, \mu(r_2/\hat{r}_2)^{\alpha_2}) \right]. \quad (7.4)$$

A partir de (6.58), a FDPC e FDAC de duas variáveis α - μ correlacionadas convergem para $\rho_{12} < 1$ ou, equivalentemente, $\delta_{12} < \sqrt{\mu_1/\mu_2}$.

Agora sejam R_1 , R_2 e R_3 três sinais α - μ correlacionados com parâmetros μ_1 , α_1 , μ_2 , α_2 e μ_3 , α_3 , respectivamente ($\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3$) e ρ_{12} , ρ_{13} , ρ_{23} a correlação entre as gaussianas que compõem R_1 , R_2 e R_3 . A partir de (6.47) e (6.49), A FDPC e FDAC α - μ de três variáveis correlacionadas podem ser escritas de forma exata como, respectivamente,

$$\begin{aligned}
 f_{R_1, R_2, R_3}(r_1, r_2, r_3) &= f_{R_1}(r_1) f_{R_2}(r_2) f_{R_3}(r_3) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\mu_1)_r}{r!} \sum_{u_1+u_2+u_3+u_4=r} \binom{r}{u_1, u_2, u_3, u_4} \\
 &\times 2^{u_4} \rho_{12}^{2u_1+u_4} \rho_{13}^{2u_2+u_4} \rho_{23}^{2u_3+u_4} \left[\frac{L\left(\frac{\mu_1}{\hat{r}_1^{\alpha_1}} r_1^{\alpha_1}, \mu_1\right)}{\mu_1} \right]^{u_1+u_2+u_4} \\
 &\times \left[\frac{L\left(\frac{\mu_2}{\hat{r}_2^{\alpha_2}} r_2^{\alpha_2}, \mu_2\right)}{\mu_2} \right]^{u_1+u_3+u_4} \left[\frac{L\left(\frac{\mu_3}{\hat{r}_3^{\alpha_3}} r_3^{\alpha_3}, \mu_3\right)}{\mu_3} \right]^{u_2+u_3+u_4} \quad (7.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{R_1, R_2, R_3}(r_1, r_2, r_3) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\mu_1)_r}{r!} \sum_{u_1+u_2+u_3+u_4=r} \binom{r}{u_1, u_2, u_3, u_4} (-2)^{u_4} \rho_{12}^{2u_1+u_4} \rho_{13}^{2u_2+u_4} \rho_{23}^{2u_3+u_4} \\
 &\times \left[\sum_{q=0}^{u_1+u_2+u_4} \binom{u_1+u_2+u_4}{q} (-1)^q P(\mu+q, \mu(r_1/\hat{r}_1)^{\alpha_1}) \right] \\
 &\times \left[\sum_{q=0}^{u_1+u_3+u_4} \binom{u_1+u_3+u_4}{q} (-1)^q P(\mu+q, \mu(r_2/\hat{r}_2)^{\alpha_2}) \right] \\
 &\times \left[\sum_{q=0}^{u_2+u_3+u_4} \binom{u_2+u_3+u_4}{q} (-1)^q P(\mu+q, \mu(r_3/\hat{r}_3)^{\alpha_3}) \right]. \quad (7.6)
 \end{aligned}$$

Alternativamente, substituindo $\delta_{12} = \rho_{12}^2 \sqrt{\mu_1/\mu_2}$, $\delta_{13} = \rho_{13}^2 \sqrt{\mu_1/\mu_3}$ e $\delta_{23} = \rho_{23}^2 \sqrt{\mu_2/\mu_3}$ em (7.5) e (7.6), a FDPC e FDAC α - μ podem ser escritas em função da correlação entre potências δ_{12} , δ_{13} e δ_{23} como, respectivamente,

$$\begin{aligned}
 f_{R_1, R_2, R_3}(r_1, r_2, r_3) &= f_{R_1}(r_1) f_{R_2}(r_2) f_{R_3}(r_3) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\mu_1)_r}{r!} \sum_{u_1+u_2+u_3+u_4=r} \binom{r}{u_1, u_2, u_3, u_4} \\
 &\times 2^{u_4} \frac{\mu_2^{u_1-u_3} \mu_3^{u_2+u_3+u_4}}{\mu_1^{u_1+u_2+u_4}} \delta_{12}^{u_1+u_4/2} \delta_{13}^{u_2+u_4/2} \delta_{23}^{u_3+u_4/2} \\
 &\times \left[\frac{L\left(\frac{\mu_1}{\hat{r}_1^{\alpha_1}} r_1^{\alpha_1}, \mu_1\right)}{\mu_1} \right]^{u_1+u_2+u_4} \left[\frac{L\left(\frac{\mu_2}{\hat{r}_2^{\alpha_2}} r_2^{\alpha_2}, \mu_2\right)}{\mu_2} \right]^{u_1+u_3+u_4} \left[\frac{L\left(\frac{\mu_3}{\hat{r}_3^{\alpha_3}} r_3^{\alpha_3}, \mu_3\right)}{\mu_3} \right]^{u_2+u_3+u_4} \quad (7.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{R_1, R_2, R_3}(r_1, r_2, r_3) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\mu_1)_r}{r!} \sum_{u_1+u_2+u_3+u_4=r} \binom{r}{u_1, u_2, u_3, u_4} \\
&\times (-2)^{u_4} \frac{\mu_2^{u_1-u_3} \mu_3^{u_2+u_3+u_4}}{\mu_1^{u_1+u_2+u_4}} \delta_{12}^{u_1+u_4/2} \delta_{13}^{u_2+u_4/2} \delta_{23}^{u_3+u_4/2} \\
&\times \left[\sum_{q=0}^{u_1+u_2+u_4} \binom{u_1+u_2+u_4}{q} (-1)^q P(\mu+q, \mu(r_1/\hat{r}_1)^{\alpha_1}) \right] \\
&\times \left[\sum_{q=0}^{u_1+u_3+u_4} \binom{u_1+u_3+u_4}{q} (-1)^q P(\mu+q, \mu(r_2/\hat{r}_2)^{\alpha_2}) \right] \\
&\times \left[\sum_{q=0}^{u_2+u_3+u_4} \binom{u_2+u_3+u_4}{q} (-1)^q P(\mu+q, \mu(r_3/\hat{r}_3)^{\alpha_3}) \right]. \quad (7.8)
\end{aligned}$$

A partir de (6.58), a FDPC e FDAC de três variáveis α - μ correlacionadas convergem para

$$\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 + \rho_{23}^2 + 2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} < 1 \quad (7.9)$$

ou, equivalentemente,

$$\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \delta_{12} + \sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_1}} \delta_{13} + \sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_2}} \delta_{23} + 2\sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_1}} \sqrt{\delta_{12}\delta_{13}\delta_{23}} < 1. \quad (7.10)$$

7.3 Casos especiais

Diversos casos particulares podem ser obtidos a partir de (6.47) e (6.49), em especial as distribuições de desvanecimento largamente utilizadas Weibull, Nakagami- m e Rayleigh. Esta seção apresenta as condições para que tais distribuições sejam obtidas.

7.3.1 Distribuição conjunta Weibull

Utilizando a mesma notação de [75], a FDPC e FDAC Weibull pode ser obtida fazendo $\mu_i = 1$ e $\hat{r}_i^{\alpha_i} = \Omega_i$, $i = 1, \dots, L$. Neste caso, obtém-se

$$\begin{aligned}
f_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L) &= \left[\prod_{k=1}^L f_{R_k}(r_k) \right] \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{u_1+u_2+\dots+u_{\mathfrak{E}}=r} \binom{r}{u_1, u_2, \dots, u_{\mathfrak{E}}} \\
&\times C_{12}^{u_1} \cdots C_{12\dots L}^{u_{\mathfrak{E}}} \prod_{i=1}^L [\mathcal{L}_{v_i}^0(r_i^{\alpha_i}/\Omega_i)]. \quad (7.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L) &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{u_1+u_2+\dots+u_{\mathfrak{E}}=r} \binom{r}{u_1, u_2, \dots, u_{\mathfrak{E}}} C_{12}^{u_1} \cdots C_{12\dots L}^{u_{\mathfrak{E}}} \\
&\times \prod_{i=1}^L \left[\sum_{q=0}^{v_i} \binom{v_i}{q} (-1)^{q+v_i} P(1+q, r_i^{\alpha_i}/\Omega_i) \right]. \quad (7.12)
\end{aligned}$$

Ainda, a partir de (7.11) e (7.12), a distribuição conjunta Exponencial Negativa pode ser obtida fazendo $\alpha_i = 1$.

7.3.2 Distribuição conjunta Nakagami- m

A FDPC e FDAC Nakagami- m podem ser obtidas a partir de (6.47) e (6.49), fazendo $\mu_i = m_i$, $\alpha_i = 2$ e $\hat{r}_i^2 = E(R^2) = \Omega_i$ (potência média), $i = 1, \dots, L$, obtendo, respectivamente,

$$\begin{aligned}
f_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L) &= \left[\prod_{k=1}^L f_{R_k}(r_k) \right] \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\min(m_i))_r}{r!} \sum_{u_1+u_2+\dots+u_{\mathfrak{E}}=r} \binom{r}{u_1, u_2, \dots, u_{\mathfrak{E}}} \\
&\times C_{12}^{u_1} \cdots C_{12\dots L}^{u_{\mathfrak{E}}} \prod_{i=1}^L \left[\frac{v_i! \mathcal{L}_{v_i}^{m_i-1}(m_i r_i^2/\Omega_i)}{(m_i)_{v_i}} \right]. \quad (7.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\min(m_i))_r}{r!} \sum_{u_1+u_2+\dots+u_{\mathfrak{E}}=r} \binom{r}{u_1, u_2, \dots, u_{\mathfrak{E}}} C_{12}^{u_1} \cdots C_{12\dots L}^{u_{\mathfrak{E}}} \\
&\times \prod_{i=1}^L \left[\sum_{q=0}^{v_i} \binom{v_i}{q} (-1)^{q+v_i} P(m_i+q, m_i r_i^2/\Omega_i) \right]. \quad (7.14)
\end{aligned}$$

Ainda, a partir de (7.13) e (7.14), a distribuição conjunta Gaussiana Unilateral pode ser obtida fazendo $m_i = 1/2$.

7.3.3 Distribuição conjunta Rayleigh

A partir de (7.13) e (7.14), a FDPC e FDAC conjunta Rayleigh podem ser obtidas fazendo $m_i = 1$ e $\Omega_i = 2\sigma_i^2$ (potência média), $i = 1, \dots, L$, obtendo, respectivamente,

$$f_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L) = \left[\prod_{k=1}^L f_{R_k}(r_k) \right] \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{u_1+u_2+\dots+u_{\mathcal{L}}=r} \binom{r}{u_1, u_2, \dots, u_{\mathcal{L}}} \times C_{12}^{u_1} \cdots C_{12 \dots L}^{u_{\mathcal{L}}} \prod_{i=1}^L [\mathcal{L}_{v_i}^0(r_i^2/2\sigma_i^2)]. \quad (7.15)$$

$$F_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{u_1+u_2+\dots+u_{\mathcal{L}}=r} \binom{r}{u_1, u_2, \dots, u_{\mathcal{L}}} C_{12}^{u_1} \cdots C_{12 \dots L}^{u_{\mathcal{L}}} \times \prod_{i=1}^L \left[\sum_{q=0}^{v_i} \binom{v_i}{q} (-1)^{q+v_i} P(1+q, r_i^2/2\sigma_i^2) \right]. \quad (7.16)$$

7.4 Uma versão aproximada para a distribuição conjunta α - μ

Nesta seção, será mostrado que, apesar de a FDAC α - μ em (6.49) estar sob a forma de somatório infinito, uma versão truncada deste somatório, ou seja, em que apenas um número finito de somas parciais é considerado, também é uma FDA válida.

Duas condições necessárias para que a FDAC seja válida é que [34]

$$\begin{aligned} (i) \quad & F(-\infty, -\infty, \dots, -\infty) = 0 \\ (ii) \quad & F(+\infty, +\infty, \dots, +\infty) = 1 \end{aligned} \quad (7.17)$$

A primeira condição é imediata dado que a FDPC α - μ em (6.47) depende do produto das FDPs marginais α - μ , que são nulas para valores negativos de envoltória. Logo a FDAC α - μ também é nula para tais valores. A segunda condição pode ser verificada baseando-se no fato de que

$$\lim_{r_i \rightarrow \infty} P(\mu_i + q, \mu_i(r_i/\hat{r}_i)^{\alpha_i}) = 1 \quad (7.18)$$

e, logo,

$$\lim_{r_i \rightarrow \infty} \sum_{q=0}^{v_i} \binom{v_i}{q} (-1)^{q+v_i} P(\mu_i + q, \mu_i(r_i/\hat{r}_i)^{\alpha_i}) = 0, \quad \text{para todo } v_i > 0. \quad (7.19)$$

Obviamente, para $v_i = 0$,

$$\lim_{r_i \rightarrow \infty} \sum_{q=0}^{v_i} \binom{v_i}{q} (-1)^{q+v_i} P(\mu_i + q, \mu_i (r_i/\hat{r}_i)^{\alpha_i}) = \lim_{r_i \rightarrow \infty} P(\mu_i, \mu_i (r_i/\hat{r}_i)^{\alpha_i}) = 1. \quad (7.20)$$

O único caso em que todos os v_i 's são simultaneamente nulos é quando $r = 0$. Isso significa que, para $r > 0$, todas as somas parciais resultam em valor nulo. Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{r_1, \dots, r_L \rightarrow \infty} F_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L) &= \lim_{r_1, \dots, r_L \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^L P(\mu_i, \mu_i (r_i/\hat{r}_i)^{\alpha_i}) \\ &= \lim_{r_1, \dots, r_L \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^L F_{R_k}(r_k) \\ &= 1, \end{aligned} \quad (7.21)$$

em que $F_{R_k}(r_k)$ é a FDA marginal α - μ . Note que este importante resultado independe do número de somas parciais e coeficientes utilizados na expansão de $F_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L)$. Portanto, uma versão aproximada para a FDAC α - μ pode ser definida como

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L) &= \sum_{r=0}^M \frac{(\min(\mu_i))_r}{r!} \sum_{u_1+u_2+\dots+u_{\mathcal{C}}=r} \binom{r}{u_1, u_2, \dots, u_{\mathcal{C}}} C_{12}^{u_1} \cdots C_{12\dots L}^{u_{\mathcal{C}}} \\ &\quad \times \prod_{i=1}^L \left[\sum_{q=0}^{v_i} \binom{v_i}{q} (-1)^{q+v_i} P(\mu_i + q, \mu_i (r_i/\hat{r}_i)^{\alpha_i}) \right], \end{aligned} \quad (7.22)$$

em que $M \in \mathbb{N}$ é um valor arbitrário e (7.22) continua sendo uma distribuição válida. Por exemplo, a formulação apresentada em [24, eq. (20)] é apenas um caso particular da versão truncada de (6.45), obtida para $M = 1$ e quando apenas os coeficientes C_{ij} são considerados.

7.5 Exemplo de aplicação: combinador por seleção

Para demonstrar a aplicabilidade dos resultados obtidos e avaliar a acurácia da formulação aproximada, a distribuição resultante do sinal de saída de um combinador por seleção é analisada nesta seção. Na combinação por seleção com entradas R_1, R_2, \dots, R_L e mesma potência de ruído, a envoltória de saída é dada por $R = \max\{R_1, R_2, \dots, R_L\}$. Em um cenário onde os sinais de entrada apresentam correlação entre si, a FDA da envoltória de saída, $F_R(r)$, pode ser obtida a partir da

distribuição conjunta dos sinais de entrada $F_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L)$ como

$$F_R(r) = F_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r, r, \dots, r) \quad \text{em sua versão exata} \quad (7.23)$$

ou

$$\tilde{F}_R(r) = \tilde{F}_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r, r, \dots, r) \quad \text{em sua versão aproximada.} \quad (7.24)$$

Para a correlação exponencial, uma formulação exata e em forma fechada para a FDPC α - μ é apresentada em [15, eq. (38)], que é um caso particular de (6.33), este último expresso na forma de soma infinita. Utilizando [15, eq. (38)] para obter $F_R(r)$ e (7.22) em $\tilde{F}_R(r)$, o desempenho exato e aproximado do CS podem ser comparados.

Alguns exemplos da FDA da envoltória resultante na saída do CS são ilustrados nas Figs. 7.1, 7.2 e 7.3. Juntamente com os resultados exatos e aproximados, resultados de simulações computacionais também são apresentados para a validação das formulações apresentadas. Nas simulações, as amostras gaussianas correlacionadas são geradas utilizando a *Decomposição de Cholesky* [76]. Para os resultados aproximados, $M = 10$ foi utilizado para $L = 2, 3$ e $M = 6$ para $L = 4$. Embora um número maior de ramos requiera um valor maior de M para que a versão aproximada se ajuste à versão exata, o grande número de termos resultantes da expansão multinomial pode torná-la proibitiva. Por exemplo, para $L = 4$ e $r = 10$, existem 184.756 possíveis combinações de u_1, u_2, \dots, u_{11} tais que $u_1 + u_2 + \dots + u_{11} = 10$. Isso significa que, para valores muito grandes de M , o esforço computacional para o cálculo das somas parciais do resultado aproximado pode se tornar comparável ao esforço relativo à integração numérica da FDPC exata, caso exista. Note como os resultados exato, aproximado e simulado apresentam comportamento muito similar, inclusive para valores maiores de correlação e ramos. Vale destacar que, enquanto a formulação exata pode demorar até horas para ser calculada, a formulação aproximada leva apenas alguns minutos para um número alto de ramos de entrada (piores casos) e apenas alguns segundos para os números menores.

Por sua vez, a Fig. 7.4 ilustra o desempenho do combinador utilizando a formulação aproximada e explorando os parâmetros μ_i , α_i e \hat{r}_i . Resultados de três cenários distintos são mostrados e os parâmetros relativos a cada cenário são ilustrados na Tabela 7.1. Novamente, resultados de simulação computacional são ilustrados para fins de comparação e uma grande proximidade é observada entre os resultados aproximados e simulados. Note que, como restrição para a obtenção de resultados de simulação, os valores de μ_i , $i = 1, 2, \dots, L$, devem ser múltiplos de $1/2$.

Finalmente, a Fig. 7.5 ilustra o uso da formulação para a FDAC α - μ apresentada em (6.60), em que um esquema de correlação constante é considerado. São obtidos resultados para $L = 2, 3, 4$, $\rho = 0.6, 0.4, 0.3$, respectivamente, e $\alpha_i = 2$, $\mu_i = 2$, $\hat{r}_i = 1$, $i = 1, \dots, L$. Embora uma menor proximidade entre os resultados exato e aproximado seja esperada neste caso, devido às condições mais

severas de convergência para o esquema de correlação constante, é observado ainda um excelente desempenho da formulação aproximada.

7.6 Conclusões

Este capítulo apresentou formulações exatas para as distribuições conjuntas Weibull, Nakagami- m e Rayleigh, todas casos particulares da distribuição geral α - μ . Apesar da distribuição conjunta α - μ ser escrita em termos de uma soma infinita, mostrou-se que uma versão truncada da formulação ainda é uma FDAC válida. Utilizando este resultado, a distribuição do sinal de saída de um combinador por seleção foi avaliada para mostrar a aplicabilidade das novas formulações. Os resultados obtidos utilizando a versão aproximada da FDAC α - μ foram comparados com os resultados obtidos a partir da integração numérica da FDPC exata apresentada na literatura e outros resultados obtidos por simulação computacional para os mais diversos cenários, valores de correlação e números de ramos. De acordo com os resultados, um número pequeno de termos na formulação aproximada já é suficiente para que haja uma excelente proximidade entre os resultados aproximados, exatos e simulados.

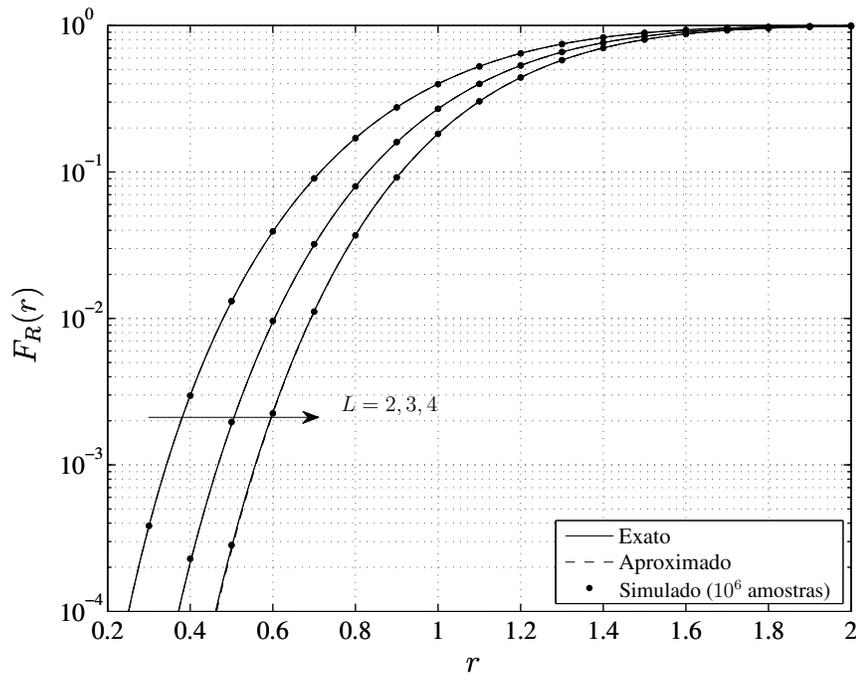


Fig. 7.1: FDA da envoltória na saída do CS para $\mu_i = 2$, $\alpha_i = 2$, $\hat{r}_i = 1$ e $\delta = 0.3$.

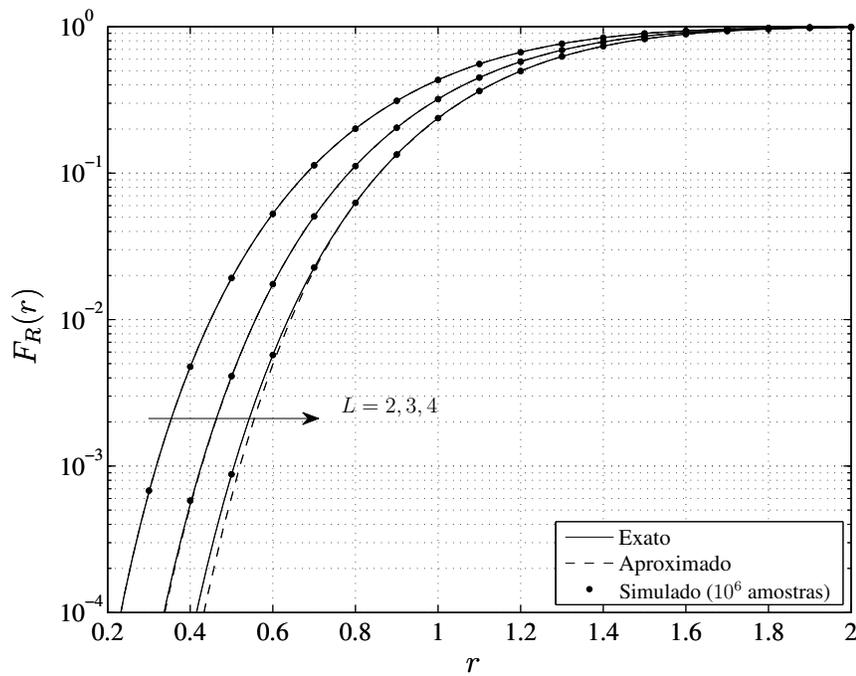


Fig. 7.2: FDA da envoltória na saída do CS para $\mu_i = 2$, $\alpha_i = 2$, $\hat{r}_i = 1$ e $\delta = 0.5$.

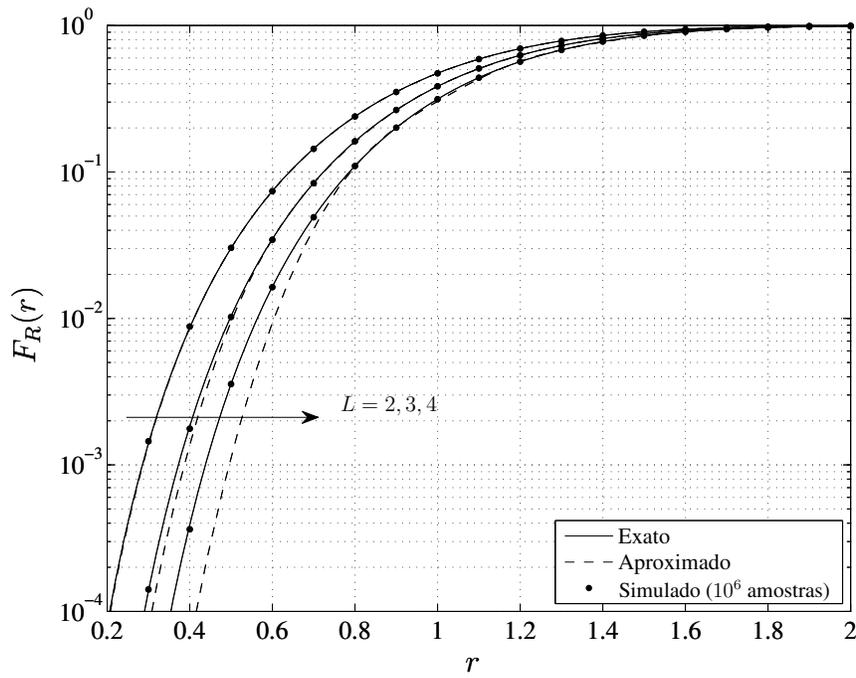


Fig. 7.3: FDA da envoltória na saída do CS para $\mu_i = 2$, $\alpha_i = 2$, $\hat{r}_i = 1$ e $\delta = 0.7$.

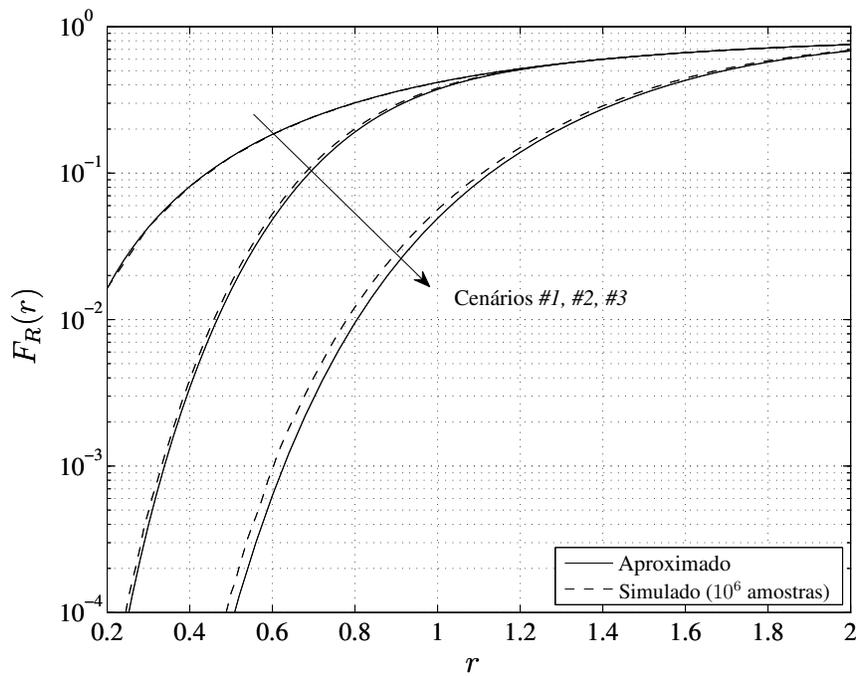


Fig. 7.4: FDA da envoltória na saída do CS para os cenários #1, #2, #3 (Veja Tabela 7.1).

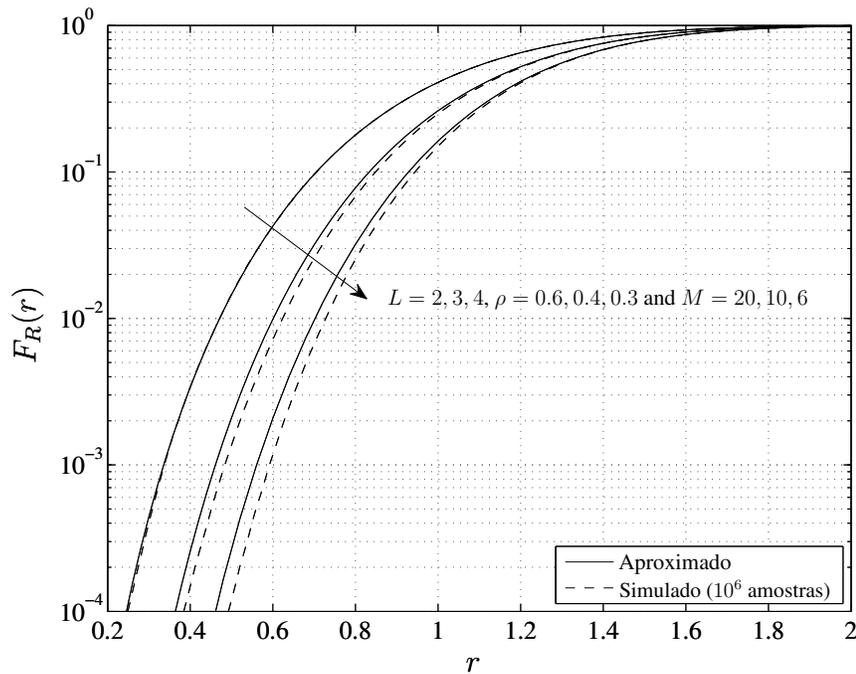


Fig. 7.5: FDA da envoltória na saída do CS considerando um esquema de correlação constante ($\alpha_i = 2$, $\mu_i = 2$, $\hat{r}_i = 1$, $i = 1, \dots, L$).

Tab. 7.1: Configuração de parâmetros

Cenário	Parâmetros
#1	$\delta = 0.4, L = 2, M = 10$ $\mu_1 = 1.0, \alpha_1 = 1.73, \hat{r}_1 = 0.94$ $\mu_2 = 1.5, \alpha_2 = 0.69, \hat{r}_2 = 1.21$
#2	$\delta = 0.4, L = 3, M = 10$ $\mu_1 = 1.0, \alpha_1 = 1.73, \hat{r}_1 = 0.94$ $\mu_2 = 1.5, \alpha_2 = 0.69, \hat{r}_2 = 1.21$ $\mu_3 = 2.5, \alpha_3 = 2.40, \hat{r}_3 = 0.81$
#3	$\delta = 0.4, L = 4, M = 6$ $\mu_1 = 1.0, \alpha_1 = 1.73, \hat{r}_1 = 0.94$ $\mu_2 = 1.5, \alpha_2 = 0.69, \hat{r}_2 = 1.21$ $\mu_3 = 2.5, \alpha_3 = 2.40, \hat{r}_3 = 1.58$ $\mu_4 = 3.5, \alpha_4 = 1.82, \hat{r}_4 = 0.77$

Capítulo 8

Considerações Finais e Perspectivas de Trabalhos Futuros

Este trabalho abordou duas questões relacionadas à análise e modelagem do canal rádio-móvel. A primeira questão diz respeito à caracterização de ambientes de propagação com condições muito severas de desvanecimento e suas implicações no desempenho de um enlace sem fio. Para isso, foi investigada a utilização de uma nova distribuição de desvanecimento, a κ - μ Extrema, como modelo estatístico para descrever as variações de pequena escala do sinal de rádio em tais condições. A distribuição κ - μ Extrema foi primeiramente apresentada em [27] como um caso limite da distribuição κ - μ , obtida quando os seus parâmetros assumiam valores extremos, o que resultava em uma distribuição de desvanecimento com caráter extremamente severo. Essa distribuição, posteriormente denominada κ - μ Extrema [77, 78], apresentava algumas características interessantes que a tornavam uma potencial candidata para a modelagem de desvanecimento severo, no entanto carecia de um estudo mais aprofundado e validações por meio de medidas de campo.

Por isso, foi apresentada uma descrição formal da distribuição κ - μ Extrema. Juntamente com seu modelo físico e obtenção a partir da distribuição κ - μ , foram ilustradas características que a tornam um modelo potencial de desvanecimento severo. A primeira delas é a presença de um parâmetro de desvanecimento, o mesmo parâmetro m de Nakagami, que pode ser utilizado para ajustes de dados de campo, permitindo uma certa flexibilidade no ajuste de curvas experimentais. Este parâmetro está estritamente relacionado às características físicas do sinal de rádio e conseqüentemente pode ser facilmente obtido a partir de dados de campo como o inverso da variância da potência normalizada do sinal recebido. A segunda característica é a presença de um impulso na origem, que acarreta em uma probabilidade não-nula de envoltória nula. Esta característica é verificada principalmente em ambientes com muito poucos multipercursos (por exemplo, ambientes confinados), onde os sinais oriundos destes podem combinar-se de maneira totalmente destrutiva no receptor e ocasionar um sinal

resultante nulo.

Apesar de todas as prerrogativas teóricas, a distribuição ainda precisava ser validada por meio de dados de campo para ser efetivamente representativa das condições severas de desvanecimento. Por isso, foi apresentada aqui uma série de medidas de campo para a validação da distribuição de interesse. Dados experimentais coletados em três ambientes diferentes ilustraram alguns dos possíveis cenários em que podem ocorrer desvanecimento severo. O primeiro cenário é um ambiente confinado, conforme já explicado aqui, cujos poucos multipercursos levam a uma condição de desvanecimento severo. Os segundo e terceiro cenários, apesar de aparentemente diferentes, ilustram exemplos em que a intensa movimentação de agentes dispersores pode ocasionar variações drásticas do sinal recebido.

Após ser validado, o modelo foi então utilizado para o estudo de desempenho de enlaces sem fio em condições muito severas de desvanecimento. Em particular, os resultados de BER para modulações não-coerentes indicaram que, devido à probabilidade não-nula de envoltória nula, a taxa de erro tende a um valor mínimo assintótico não-nulo, diferentemente do que ocorre com modelos tradicionais de desvanecimento, para os quais a taxa de erro tende a zero à medida que o valor médio de SNR aumenta. Para um canal κ - μ Extremo, mostrou-se que o valor assintótico independe de um aumento na potência média do sinal transmitido, do esquema de modulação e depende apenas do parâmetro m de desvanecimento do canal.

Juntamente com as medidas de desempenho de um enlace simples, foi avaliado o desempenho de combinadores por diversidade em um canal κ - μ Extremo. Medidas de desempenho foram apresentadas para as técnicas de combinação por seleção, combinação por razão máxima e combinação por ganho igual. Os resultados de confiabilidade mostraram que, mesmo utilizando tais técnicas, uma probabilidade não-nula de sinal nulo ainda persiste, apesar de diminuir exponencialmente com o aumento do número de ramos de diversidade. Este resultado é devido à probabilidade individual dos sinais de entrada apresentarem envoltória nula e, considerando a independência estatística dos ramos de entrada, vale $\exp(-2Mm)$, ou seja, depende apenas do número de ramos e do parâmetro m de desvanecimento do canal. Por conseqüência, os resultados de BER também indicaram que, mesmo com a utilização de técnicas de diversidade, os valores de taxa de erro tendem a um valor mínimo assintótico, $1/2 \times \exp(-2Mm)$, igual para todas as técnicas e modulações. Como último indicador de desempenho, foi apresentado o valor médio de SNR na saída dos combinadores para diversos números de ramos. Observou-se que, para valores muito pequenos de m e número de ramos, uma inversão no desempenho do CS e CGI pode ocorrer, ou seja, o CS apresenta melhor desempenho do que o CGI. Curiosamente, essa inversão no desempenho do CS e CGI também foi observada para determinadas situações nos resultados de confiabilidade e taxa de erro bit. Ou seja, em condições muito severas de desvanecimento, a utilização do CS, apesar de mais simples, pode resultar em melhorias mais significativas na qualidade do enlace do que quando da utilização do CGI.

A segunda questão abordada neste trabalho diz respeito à modelagem estatística de canais de desvanecimento correlacionados. Como visto, a correlação entre os canais introduz dificuldades adicionais na obtenção de estatísticas conjuntas, como função densidade de probabilidade ou função de distribuição acumulada. Inicialmente, foi introduzida a FDPC $\alpha-\mu$, previamente apresentada em [24,70]. A seguir, foi obtida uma formulação inédita para a FDAC $\alpha-\mu$. A formulação é exata, geral e simples, sendo escrita em termos de funções de Gamma incompletas. Foi visto que as condições de convergência apresentadas para a FDPC também se aplicam para a FDAC.

A distribuição $\alpha-\mu$ inclui, como casos particulares, diversas outras distribuições tradicionais de desvanecimento. Por isso, foram apresentadas as formulações exatas para as funções de distribuição acumulada conjunta Weibull, Nakagami- m e Rayleigh, todas obtidas a partir da $\alpha-\mu$. De maneira interessante, foi visto que, apesar de FDAC ser escrita em termos de uma soma infinita, uma versão aproximada, ou seja, considerando apenas um número finito de termos, continua sendo uma distribuição válida. Utilizando este resultado, a distribuição do sinal de saída de um combinador por seleção foi avaliada para ilustrar a aplicabilidade e acurácia das formulações obtidas. Observou-se que os resultados aproximados apresentam comportamento muito próximo dos resultados exatos e simulados, mesmo para um pequeno número de termos na soma e elevados valores de correlação entre os sinais de entrada.

À luz dos resultados acima, algumas considerações podem ser feitas. Com relação ao estudo de desempenho de sistemas sem fio em condições de desvanecimento severo, os resultados destacam a importância de uma correta modelagem do canal rádio-móvel, pois as medidas de campos mostraram que situações de desvanecimento muito severo podem ocorrer na prática e devem ser levadas em conta no projeto e dimensionamento de um sistema de comunicação sem fio. É importante frisar, no entanto, que este trabalho não propõe uma substituição dos modelos tradicionais de desvanecimento, mas apenas oferece mais um modelo probabilístico que encontra aplicabilidade na modelagem do canal rádio-móvel. Independentemente do modelo utilizado, uma correta e profunda investigação das condições de propagação pode ser determinante para o sucesso no planejamento e dimensionamento de um sistema. Estas condições, quando corretamente analisadas e modeladas, podem ser seguramente previstas e, caso necessário, contornadas com a utilização de técnicas de combinação por diversidade, entre outras.

Com relação à modelagem estatística de canais de desvanecimento correlacionados, as formulações mostraram a dificuldade em obter estatísticas conjuntas de sinais com correlação. No entanto, estas formulações ganham cada vez mais importância à medida que a consideração de independência estatística entre múltiplos canais tem se mostrado equivocada em muitas situações na prática, seja na utilização de técnicas de combinação por diversidade [24] ou múltiplas antenas [79]. Por isso, os resultados obtidos neste trabalho representam a continuação de uma caminhada que teve início em [70]

e oferecem muitas perspectivas de aplicações e trabalhos futuros.

Por fim, a proliferação dos serviços de sistemas de comunicações sem fio nos mais variados ambientes, somada à crescente demanda por taxas de transmissão e confiabilidade do sistema traz cada dia novos desafios ao estudo das condições de propagação do sinal de rádio-móvel. Esta demanda só pode ser suprida se acompanhada com a evolução dos modelos teóricos de propagação, avanços na teoria de comunicações e quebras de paradigmas. Este trabalho foi apenas uma tentativa de fornecer pequenas contribuições para a resolução de problemas que são atuais, significativos e carecem ainda de respostas mais profundas. Apesar de não responder todas as questões, abre algumas perspectivas para trabalhos futuros, listadas a seguir:

- Com relação ao estudo de propagação em condições severas de desvanecimento:
 - Investigação de outros cenários cujas condições de desvanecimento podem ser caracterizadas pela distribuição κ - μ Extrema;
 - Obtenção de resultados práticos de desempenho em um ambiente κ - μ Extremo;
 - Modelagem de um processo κ - μ Extremo;
 - Obtenção de estatísticas de ordem superior para a distribuição κ - μ Extrema, entre elas taxa de cruzamento de nível e tempo médio de desvanecimento;
 - Desenvolvimento de simulador para o processo κ - μ Extremo;
- Com relação à modelagem estatística de canais de desvanecimento correlacionados:
 - Investigação de condições mais precisas de convergência;
 - Obtenção de uma expressão generalizada para os coeficientes de expansão considerando o esquema de correlação exponencial;
 - Obtenção de uma formulação de erro máximo para a FDAC truncada;
 - Obtenção de uma formulação em série para a FDPC e FDAC η - μ .

Referências Bibliográficas

- [1] J. Frolik e T. M. Weller, “Wireless sensor systems: an approach for a multiuniversity design course,” *IEEE Trans. Educ.*, vol. 45, nº 2, pág. 135–141, Maio de 2002.
- [2] N. I. Sarkar e E. Lo, “Indoor propagation measurements for performance evaluation of IEEE 802.11g,” em *Proc. Australasian Telecommunication Networks and Applications Conference (ATNAC’2008)*, Adelaide, SA, Austrália, Dezembro de 2008, pág. 163–168.
- [3] J. Frolik, “A case for considering Hyper-Rayleigh fading channels,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 6, nº 4, pág. 1235–1239, Abril de 2007.
- [4] M. Nakagami, *The m-Distribution – A General Formula of Intensity Distribution of Rapid Fading*, série Statistical Methods in Radio Wave Propagation. W. C. Hoffman, Ed. Elmsford, NY: Pergamon, 1960.
- [5] M. D. Yacoub, D. B. da Costa, U. S. Dias e G. Fraidenraich, “Joint statistics for two correlated Weibull variates,” *IEEE Antennas Wirel. Propag. Lett.*, vol. 4, pág. 129–132, 2005.
- [6] J. Frolik, “On appropriate models for characterizing Hyper-Rayleigh fading,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 7, nº 12, pág. 5202–5207, Dezembro de 2008.
- [7] L. Bakir e J. Frolik, “Diversity gains in two-ray fading channels,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 8, nº 2, pág. 968–977, Fevereiro de 2009.
- [8] W. C. Jakes, *Microwave Mobile Communications*. IEEE Computer Society Press, 1974.
- [9] M. A. Taneda, J. Takada e K. Araki, “A new approach to fading: Weibull model,” em *Proc. IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC’1999)*, Osaka, Japão, Setembro de 1999, pág. 711–715.
- [10] ———, “The problem of the fading model selection,” *IEICE Trans. Comm.*, vol. E84-B, nº 3, pág. 355–358, Março de 2001.

- [11] J. B. Andersen, “Statistical distributions in mobile communications using multiple scattering,” em *27th URSI General Assembly*, Maastricht, Holanda, Agosto de 2002.
- [12] D. Cassioli, M. Z. Win e A. F. Molisch, “The Ultra-Wide bandwidth indoor channel: From statistical model to simulations,” *IEEE J. Select. Areas Comm.*, vol. 20, nº 6, pág. 1247–1257, Agosto de 2002.
- [13] C. C. Chong, Y. Kim e S. S. Lee, “A modified S-V clustering channel model for the UWB indoor residential environment,” em *Proc. IEEE Spring Veh. Technol. Conf. (VTC’2005)*, Estocolmo, Suécia, Maio de 2005, pág. 58–62.
- [14] G. D. Durgin, T. S. Rappaport e D. A. de Wolf, “New analytical models and probability density functions for fading in wireless communications,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 50, nº 6, pág. 1005–1015, Junho de 2002.
- [15] M. D. Yacoub, “The α - μ distribution: A physical fading model for the Stacy distribution,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 56, nº 1, pág. 27–34, Janeiro de 2007.
- [16] ———, “The α - μ distribution: A general fading distribution,” em *Proc. IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC’2002)*, Lisboa, Portugal, Setembro de 2002, pág. 629–633.
- [17] U. S. Dias e M. D. Yacoub, “On the α - μ autocorrelation and power spectrum functions: field trials and validation,” em *Proc. IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM’2009)*, Honolulu, Havaí, EUA, 2009.
- [18] L. E. Blumenson e K. S. Miller, “Properties of generalized Rayleigh distributions,” *Annu. Math. Statist.*, vol. 34, pág. 903–910, 1963.
- [19] Y. Li, T. T. Tjhung e F. Adachi, “Performance of DS-CDMA in correlated Rayleigh-fading channel with RAKE combining,” em *Proc. IEEE Vehicular Technology Conference (VTC’2000)*, vol. 2, Tokyo, Japão, Maio de 2000, pág. 785–789.
- [20] R. K. Mallik, “On multivariate Rayleigh and exponential distributions,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 49, nº 6, pág. 1499–1515, Junho de 2003.
- [21] G. K. Karagiannidis, D. S. Zogas e S. A. Kotsopoulos, “On multivariate Nakagami- m distribution with exponential correlation,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 58, nº 8, pág. 1240–1244, Agosto de 2003.

- [22] —, “An efficient approach to multivariate Nakagami- m distribution using Green’s matrix approximation,” *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 2, nº 5, pág. 883–889, Setembro de 2003.
- [23] R. A. A. de Souza, G. Fraidenraich e M. D. Yacoub, “On the multivariate α - μ distribution with arbitrary correlation,” em *Proc. IEEE International Telecommunications Symposium (ITS’2006)*, Fortaleza, CE, Brasil, Setembro de 2006, pág. 38–41.
- [24] R. A. A. de Souza e M. D. Yacoub, “The multivariate α - μ distribution,” *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 9, nº 1, pág. 45–50, Janeiro de 2010.
- [25] —, “On the multivariate α - μ distribution with arbitrary correlation and fading parameters,” em *Proc. IEEE International Conference on Communications (ICC’2008)*, Beijing, China, Maio de 2008, pág. 4456–4460.
- [26] —, “The multivariate α - μ distribution,” em *Proc. IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC’2008)*, Las Vegas, NV, EUA, Março de 2008, pág. 808–812.
- [27] M. D. Yacoub, “The κ - μ distribution and the η - μ distribution,” *IEEE Antennas Propag. Mag.*, vol. 49, nº 1, pág. 68–81, Fevereiro de 2007.
- [28] —, *Foundations of Mobile Radio Engineering*. CRC Press, 1993.
- [29] T. S. Rappaport, *Wireless Communications: Principles and Practice*. Prentice Hall, 1996.
- [30] D. Tse e P. Viswanath, *Fundamentals of Wireless Communication*. Cambridge University Press, 2005.
- [31] R. S. Hoyt, “Probability functions for the modulus and angle of the normal complex variate,” *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 26, pág. 318–359, Abril de 1947.
- [32] Lord Rayleigh J. W. S., *Phil. Mag.*, vol. 73, nº 10, 1880.
- [33] J. L. Pawsey, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. 31, nº 125, 1935.
- [34] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, 4ª ed. McGraw-Hill, 2002.
- [35] H. B. James e P. I. Wells, “Some tropospheric scatter propagation measurements near the radio-horizon,” *IRE*, pág. 1336–1340, Outubro de 1955.
- [36] G. R. Sugar, “Some fading characteristics of regular VHF ionospheric propagation,” *IRE*, pág. 1432–1436, 1955.

- [37] S. Basu, E. C. Mackenzie, P. F. Fougere, H. C. Carlson e H. E. Whitney, “250 MHz/GHz scintillation parameter in the equatorial, polar, and aural environments,” *IEEE J. Select. Areas Commun.*, vol. 5, pág. 102–115, Fevereiro de 1987.
- [38] T. L. Staley, R. C. North, W. H. Ku e J. R. Zeidler, “Performance of coherent MPSK on frequency selective slowly fading channels,” em *Proc. IEEE Veh. Technol. Conf. (VTC’2000)*, Atlanta, GA, EUA, Maio de 1996, pág. 784–788.
- [39] S. O. Rice, “Mathematical analysis of random noise,” *Bell System Technical Journal*, vol. 23, pág. 282–332, Julho de 1944.
- [40] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 6^a ed. Academic Press, 2000.
- [41] J. Marcum, “A statistical theory of target detection by pulsed radar,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 6, nº 2, pág. 59–267, Abril de 1960.
- [42] K. A. Stewart, G. P. Labeledz e K. Sohrabi, “Wideband channel measurements at 900 MHz,” em *Proc. IEEE Veh. Technol. Conf. (VTC’95)*, Chicago, IL, EUA, Julho de 1995, pág. 236–240.
- [43] R. J. C. Bultitude, S. A. Mahmoud e W. A. Sullivan, “A comparison of indoor radio propagation characteristics at 910 MHz and 1.75 GHz,” *IEEE J. Select. Areas Commun.*, vol. 7, pág. 20–30, Janeiro de 1989.
- [44] T. S. Rappaport e C. D. McGillem, “UHF fading in factories,” *IEEE J. Select. Areas Commun.*, vol. 7, pág. 40–48, Janeiro de 1989.
- [45] G. H. Munro, “Scintillation of radio signal from satellites,” *J. Geophys. Res.*, vol. 68, Abril de 1963.
- [46] P. D. Shaft, “On the relationship between scintillation index and Rician fading,” *J. Geophys. Res.*, vol. 22, pág. 731–732, Maio de 1974.
- [47] M. D. Yacoub, J. E. V. Bautista e L. G. de R Guedes, “On higher order statistics of the Nakagami-m distribution,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 48, nº 3, pág. 790 – 794, Maio de 1999.
- [48] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover, 1972.
- [49] H. Suzuki, “A statistical model of urban radio propagation,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 25, nº 7, pág. 673–680, Julho de 1977.

- [50] W. R. Braun e U. Dersch, “A physical mobile radio channel model,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 40, nº 2, pág. 472–482, Maio de 1991.
- [51] M. H. A. U. Sheikh e M. Abdi, “Indoor mobile radio channel at 956 MHz: measurements and modeling,” em *Proc. IEEE Veh. Technol. Conf. (VTC’93)*, Secaucus, NJ, EUA, Maio de 1993, pág. 73–76.
- [52] E. J. Fremouw e H. F. Bates, “Worldwide behavior of average VHF-UHF scintillation,” *Radio Sci.*, vol. 6, pág. 863–869, Outubro de 1971.
- [53] Fisher R.A. e Tippett L.H.C., “Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample,” em *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1928, pág. 180–190.
- [54] W. Weibull, “A statistical theory of the strength of materials,” *Royal Swedish Institute for Engineering Research*, vol. 151, 1939.
- [55] M. S. Adawi, “Coverage prediction for mobile radio systems operating in the 800/900 MHz frequency range,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 37, pág. 3–72, Fevereiro de 1988.
- [56] N. H. Shepherd, “Radio wave loss deviation and shadow loss at 900 MHz,” em *Proc. IEEE Veh. Technol. Conf. (VTC’1976)*, vol. 26, Março de 1976, pág. 63–66.
- [57] H. Hashemi, “The indoor radio propagation channel,” *Proc. IEEE*, pág. 943–968, Julho de 1993.
- [58] L. Amoroso, “Ricerche intorno alla curva dei redditi,” *Ann. Mat. Pura Appl.*, vol. 4, nº 21, pág. 123–159, 1925.
- [59] E. W. Stacy, “A generalization of the gamma distribution,” *Ann. Math. Stat.*, vol. 33, nº 3, pág. 1187–1192, Setembro de 1962.
- [60] M. D. Yacoub, “The κ - μ distribution: a general fading distribution,” em *Proc. IEEE Fall Veh. Technol. Conf. (VTC’2001)*, Atlantic City, NJ, EUA, Outubro de 2001, pág. 1427–1431.
- [61] S. L. Cotton e W. G. Scanlon, “Higher-order statistics for κ - μ distribution,” *Electron. Letters*, vol. 43, nº 22, Outubro de 2007.
- [62] D. G. Brennan, “Linear diversity combining techniques,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 91, nº 2, pág. 331–356, Fevereiro de 2003.

- [63] J. C. S. Santos Filho e M. D. Yacoub, “Highly accurate κ - μ approximation to sum of m independent non-identical ricean variates,” *Electron. Letters*, vol. 41, nº 6, pág. 338–339, Março de 2005.
- [64] ———, “Nakagami- m approximation to the sum of m non-identical independent Nakagami- m variates,” *Electron. Letters*, vol. 40, nº 15, pág. 951–952, Julho de 2004.
- [65] D. B. da Costa e M. D. Yacoub, “Accurate approximations to the sum of generalized random variables and applications in the performance analysis of diversity systems,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 57, nº 5, pág. 1271–1274, Maio de 2009.
- [66] S. Wyne, A. P. Singh, F. Tufvesson e A. F. Molisch, “A statistical model for indoor office wireless sensor channels,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 8, nº 8, pág. 4154–4164, Agosto de 2009.
- [67] L. J. Greenstein, S. S. Ghassemzadeh, V. Erceg e D. G. Michelson, “Ricean K -Factors in Narrow-Band fixed wireless channels: Theory, experiments, and statistical models,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 58, nº 8, pág. 4000–4012, Outubro de 2009.
- [68] U. S. Dias, “Validação de estatísticas de ordem superior para canais com desvanecimento Weibull e Nakagami- m ,” Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil, Agosto de 2006.
- [69] W. C. Y. Lee, *Mobile Communications Design Fundamentals*, 2ª ed. Wiley-Interscience, 1993.
- [70] R. A. A. de Souza, “Contribuições teóricas para o estudo de funções de distribuição correlacionadas em um canal sem fio,” Tese de Doutorado, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil, Maio de 2009.
- [71] M. Parthasarathy e Krishnamoorthy, “A multivariate Gamma-Type distribution,” *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 22, nº 4, pág. 549–557, Dezembro de 1951.
- [72] R. A. A. de Souza e M. D. Yacoub, “Bivariate Nakagami- m distribution with arbitrary correlation and fading parameters,” *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 7, nº 12, pág. 5227–5232, Dezembro de 2008.
- [73] ———, “Bivariate Hoyt (Nakagami- q) distribution,” *submetido para IEEE Trans. Wireless Commun.*, Setembro 2009.
- [74] A. Browder, *Mathematical Analysis: An Introduction*. Springer, 1996.

- [75] G. Fraidenraich, M. D. Yacoub e J. C. S. Santos Filho, “Second-order statistics of maximal-ratio and equal-gain combining in Weibull fading,” *IEEE Commun. Lett.*, vol. 9, nº 6, pág. 499–501, Junho de 2005.
- [76] J. E. Gentle, *Numerical Linear Algebra for Applications in Statistics*, 1ª ed. Springer, 1998.
- [77] G. S. Rabelo, U. S. Dias e M. D. Yacoub, “The κ - μ Extreme Distribution: Theory and Applications,” em *Anais do Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT’2009)*, Blumenau, SC, Brasil, Setembro de 2009.
- [78] ———, “The κ - μ Extreme Distribution: Characterizing Severe Fading Conditions,” em *Proc. SBMO/IEEE MTT-S International Microwave and Optoelectronics Conference (IMOC’2009)*, Belém, PA, Brasil, Novembro de 2009.
- [79] D. Shiu, G. J. Foschini, M. J. Gans e J. M. Kahn, “Fading correlation and its effect on the capacity of multielement antenna systems,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 48, nº 3, pág. 502–513, Março de 2000.

Apêndice A

Obtenção de uma Expansão em Série para a FDA κ - μ Extrema

Por definição [34],

$$\begin{aligned} F_P(\rho) &= \int_{-\infty}^{\rho} f_P(\xi) d\xi \\ &= \int_0^{\rho} \left\{ \frac{4mI_1(4m\xi)}{\exp[2m(1 + \xi^2)]} + \exp(-2m)\delta(\xi) \right\} d\xi. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Fazendo uso de $I_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!}$ [40, Eq. 8.447], a FDA κ - μ Extrema pode ser reescrita como

$$F_P(\rho) = e^{-2m} - 4me^{-2m} \int_0^{\rho} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2m\xi)^{2k+1}}{k!(k+1)!} e^{-2m\xi^2} \right] d\xi. \quad (\text{A.2})$$

A série presente em (A.2) é uniformemente convergente, logo sua integração pode ser realizada termo-a-termo, ou seja,

$$F_P(\rho) = e^{-2m} - 4me^{-2m} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\rho} \frac{(2m\xi)^{2k+1}}{k!(k+1)!} e^{-2m\xi^2} d\xi. \quad (\text{A.3})$$

Resolvendo a integral,

$$F_P(\rho) = e^{-2m} - 4me^{-2m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2m)^{2k+1}}{k!(k+1)!} (2^{-2-k})m^{-k-1} [k! - \Gamma(k+1, 2m\rho^2)], \quad (\text{A.4})$$

em que $\Gamma(\alpha, x) = \int_x^{\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt$ é a função Gamma incompleta [40, Eq. 8.350.2]. Rearranjando

(A.4), a FDA κ - μ Extrema é finalmente obtida como

$$F_P(\rho) = 1 - e^{-2m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2m)^{k+1}}{(k+1)!k!} \Gamma(k+1, 2m\rho^2). \quad (\text{A.5})$$

Apêndice B

Cálculo do Valor Assintótico de Taxa de Erro de Bit na Saída de Combinadores para um Canal κ - μ Extremo

Para todas as técnicas de combinação por diversidade avaliadas neste trabalho, foi mostrado que a probabilidade de envoltória nula na saída do combinador é $\exp(-2Mm)$, em que M é o número de ramos de diversidade. Logo, a FDP da relação sinal-ruído na saída do combinador por ser escrita como

$$f_{\Gamma}(\gamma) = g(\gamma; \bar{\gamma}) + \frac{\exp(-2Mm)}{2\sqrt{\gamma\bar{\gamma}}} \delta(\sqrt{\gamma/\bar{\gamma}}), \quad (\text{B.1})$$

em que $g(\gamma; \bar{\gamma})$ é uma função contínua, não-negativa, depende da técnica de diversidade e apresenta as seguinte propriedades:

- $g(\gamma; \bar{\gamma}) = 0$ para $\gamma < 0$;
- $\lim_{\gamma \rightarrow 0^+, \infty} g(\gamma; \bar{\gamma}) = 0$;
- $\lim_{\bar{\gamma} \rightarrow \infty} g(\gamma; \bar{\gamma}) = 0$;
- $\int_0^{\infty} g(\gamma; \bar{\gamma}) d\gamma = 1 - e^{-2Mm}$, que surge do fato de que $\int_0^{\infty} f_{\Gamma}(\gamma) d\gamma = 1$.

Por outro lado, seja $h(\gamma)$ uma função contínua, não-negativa, para a qual é assumida que $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} h(\gamma) = 0$ e ambos $h(\gamma)$ e $\int_0^{\gamma} h(\xi) d\xi$ são limitados para todo $\gamma \in [0, \infty)$. Se γ é uma variável aleatória cuja FDP segue (B.1), então o valor esperado de $h(\gamma)$ pode ser calculado por

$$E[h(\gamma)] \triangleq \overline{h(\gamma; \bar{\gamma})} = \int_0^{\infty} h(\gamma) g(\gamma; \bar{\gamma}) d\gamma + \int_0^{\infty} h(\gamma) \frac{\exp(-2Mm)}{2\sqrt{\gamma\bar{\gamma}}} \delta(\sqrt{\gamma/\bar{\gamma}}) d\gamma. \quad (\text{B.2})$$

O segundo termo no lado direito de (B.2) pode ser calculado fazendo $\xi = \sqrt{\gamma/\bar{\gamma}} \Rightarrow d\xi = d\gamma/2\sqrt{\gamma\bar{\gamma}}$. Neste caso,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty h(\gamma) \frac{\exp(-2Mm)}{2\sqrt{\gamma\bar{\gamma}}} \delta(\sqrt{\gamma/\bar{\gamma}}) d\gamma &= \int_0^\infty h(\xi^2\bar{\gamma}) \exp(-2Mm) \delta(\xi) d\xi \\ &= h(0) \exp(-2Mm). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

O valor esperado de $h(\gamma)$ quando $\bar{\gamma} \rightarrow \infty$, denotado aqui por $\overline{h(\gamma; \bar{\gamma})}_{\bar{\gamma} \rightarrow \infty}$, pode ser obtido da forma

$$\overline{h(\gamma; \bar{\gamma})}_{\bar{\gamma} \rightarrow \infty} = \lim_{\bar{\gamma} \rightarrow \infty} \int_0^\infty h(\gamma) g(\gamma; \bar{\gamma}) d\gamma + h(0) \exp(-2Mm). \quad (\text{B.4})$$

Utilizando as propriedades de $g(\gamma; \bar{\gamma})$ e $h(\gamma)$, (B.4) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \overline{h(\gamma; \bar{\gamma})}_{\bar{\gamma} \rightarrow \infty} &= \int_0^\infty h(\gamma) \lim_{\bar{\gamma} \rightarrow \infty} g(\gamma; \bar{\gamma}) d\gamma + h(0) \exp(-2Mm) \\ &= h(0) \exp(-2Mm). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Para o caso em que $h(\gamma) = \text{P}\{\text{erro de bit} | \Gamma = \gamma\}$, $\overline{h(\gamma; \bar{\gamma})}_{\bar{\gamma} \rightarrow \infty}$ torna-se o valor assintótico de taxa de erro de bit e vale

$$\begin{aligned} \overline{h(\gamma; \bar{\gamma})}_{\bar{\gamma} \rightarrow \infty} &= h(0) \exp(-2Mm) \\ &= \text{P}\{\text{erro de bit} | \Gamma = 0\} \exp(-2Mm) \\ &= 1/2 \times \exp(-2Mm). \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Note que este resultado independe da modulação e da técnica de combinação por diversidade.

Apêndice C

Especificação Técnica dos Equipamentos de Medição

- **Gerador de RF** - Rhode&Schwartz, modelo SMY02. Faixa de frequência de operação 9 kHz - 2,080 GHz. Potência de saída -25 a 15 dBm.
- **Amplificador de RF** - HUGHES, modelo TWT 1177H. Ganho fixo de 30 dB.
- **Antena de transmissão** - Kathrein. Omnidirecional. Ganho de 11 dBi.
- **Antena de recepção**: Kathrein, modelo K704784. Faixa de frequência de operação 1710-1880 MHz. Conexão cabo RG 174.
- **Atenuador**: Agilent, modelo 8496 A. Atenuador manual para frequências na faixa de 0-4 GHz com atenuação variável de 0-110 dB, em passos de 10 dB.
- **Amplificador**: Mini-circuits, modelo ZHL-1724HLN-case NN92. Frequência de operação 1700-2400 MHz. Amplificação de 40 dB e alimentação na faixa de 12-16 VDC.
- **Analisador de espectro**: HP, modelo 8593 E. Frequência de operação 0-22 GHz.
- **Placa de aquisição**: Labjack, modelo U12 (Labjack U12). Conectada ao computador ou a um HUB através de uma porta USB (Barramento Serial Universal). A porta USB fornece alimentação e comunicação para a placa Labjack U12. Composta por um conector USB, um conector DB25 para entradas/saídas digitais e trinta terminais do tipo parafuso (*screw*).
- **Computador portátil**: Toshiba, modelo Satellite 1800-S254. Processador Pentium III 1 GHz, 1 Gb de memória RAM, disco rígido de 20 Gb. Tela TFT de 14.1”.
- **Baterias**: Duas baterias. Marca AC Delco, modelo 011AO63D1, 12 V, 63 Ah.

Apêndice D

Código em *Wolfram Mathematica*[®] para a Geração de Amostras κ - μ Extremas

```
Clear["Global`*"];
(* Definir diretorio para armazenar as amostras *)
SetDirectory["C:\\KMExtremeSamples"];
(* Definicao de parametros *)
Nsamples = 100000; (* Numero de amostras *)
m = 1; (* parametro m de Nakagami *)
(* Inverte a CDF k-u Extrema. CDF em forma de soma finita, 30 termos. *)
Inv[x_, m_] :=
  FindRoot[
    1 - Exp[-2m]
    Sum[(2m)^(k+1)/((k+1)!k!)Gamma[k + 1, 2mp^2], {k,0,
    30}] == x, {p, 0.5}];
Clear[x, y];
x = RandomReal[1, Nsamples];
y = ConstantArray[0, Length[x]];
For[i = 1, i <= Length[x], i++,
  If[x[[i]] > Exp[-2m], y[[i]] = p /. Inv[x[[i]], m], y[[i]] = 0];
Export["samples.dat", Table[{x[[i]], y[[i]]}, {i, Length[x]}];
```

Apêndice E

Código em *Matlab*[®] para a Geração de Amostras α - μ Correlacionadas

```
clear all;
close all;

% Definicao de parametros
L = 4 % Numero de ramos
N = 1e6 % Numero de amostras por ramo
rho = 0.5
Corij = [[1 rho rho^2 rho^3];
         [rho 1 rho rho^2];
         [rho^2 rho 1 rho];
         [rho^3 rho^2 rho 1]]; % Correlacao vertical entre gaussianas
a = [2 2 2 2]; % Valores de alpha
rmed = [1 1 1 1]; % Valores de \hat{r}
mu = [2 2 2 2]; % Valores de mu

% Calculos preliminares
n = 2*sum(mu); % Numero de gaussianas
pmed = (rmed.^a)./(2*mu); % Potencia media de cada gaussiana
Cij = zeros(n,n); % Inicialização de matriz de correlacao

m = 0;
for i =1:1:L
    m = [m ones(1,2*mu(i))+i-1];
end;
m = m(1,2:1:length(m));
```

```

for i=1:1:n
    n1 = m(1,i);
    Cij(i,i) = Corij(n1,n1)/2;
end

% Criacao de matriz de correlacao n X n entre gaussianas
cont1 = 1;
for k = 1:1:L-1
    for i=cont1:1:cont1+2*mu(k)-1
        n1 = m(1,i);
        index = i;
        for j = k:1:L-1
            index = index + 2*mu(j);
            if index <= n
                Cij(i,index) = Corij(n1,j+1);
            end
        end
    end
    cont1 = cont1+2*mu(k);
end
Cij = Cij + Cij';

% Decomposicao de Cholesky
L1 = chol(Cij,'lower');

% Geracao de amostras gaussianas correlacionadas
GausVar = randn(n,N);
CoreVar = L1 * GausVar;
clear GausVar;

% Geracao de amostas alpha-mu correlacionadas
Gam = (CoreVar.^2);

y = zeros(L,N);
r = zeros(N,L);
pot = zeros(N,L);

fin = 0;
for i=1:1:L
    ini = fin+1;
    fin = 2*sum(mu(1:1:i));
    y(i,:) = sum(Gam(ini:1:fin,:))*pmed(i);
end

```

```
    pot(:,i) = (y(i,:))';
    r(:,i) = pot(:,i).^(1/a(i));
end

clear y Gam;

% Verificacao da matrix de correlacao
CovMatrix = zeros(n,n); % Correlacao entre gaussianas
CovMatrix = cov(CoreVar');
for i = 1:1:n
    for j = 1:1:n
        CovMatrix(i,j) = CovMatrix(i,j)/sqrt(var(CoreVar(i,:),[],2)*var(...
            CoreVar(j,:),[],2));
    end
end

CovMatrix1 = zeros(L,L); % Correlacao entre potencias
CovMatrix1 = cov(pot);
for i = 1:1:L
    for j = 1:1:L
        CovMatrix1(i,j) = CovMatrix1(i,j)/sqrt(var(pot(:,i))*var(pot(:,j)));
    end
end

clear L1 fin i ini j k m m1 m m1;

% Saida do receptor CS
y_sc = max(r,[],2);
```