Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica
Departamento de Telemática

CONTRIBUIÇÕES AO ESTUDO DE SISTEMAS LINEARES COM SALTOS MARKOVIANOS

Autor: Dorival Leao Pinto Júnior
Orientador: Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val OK
Co-orientador: Prof. Dr. Marcelo Dutra Fragoso OK

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas – FEE–UNICAMP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Dezembro de 92.

Resumo

Uma classe de processos dinâmicos sujeitos às falhas é estudada nesta dissertação. Este tipo de sistema pode sofrer mudanças abruptas na sua estrutura, causadas por fenômenos tais como falhas de componentes ou reparos, mudança na interconexão de subsistema ou perturbação ambiental repentina. É comum que estes eventos ocorram em um contexto de incerteza, todavia, o conhecimento prévio das características do sistema podem ser levadas em contas através de um modelo estocástico subjacente. Mais especificamente, os sistemas lineares a tempo discreto com saltos markovianos serão objetos de nosso estudo.

No aspecto de controle, é feito uma abordagem via H^{∞}, cujas origens e motivações serão estudadas no capítulo 1. Discutiremos a pertinência desta formulação em problemas de atenuação de distúrbios, estabilização robusta, como também na caracterização de sistemas incertos, para os quais a classe de sistemas em estudo tem grande relevância. No capítulo 4, obtemos condição suficiente para que o problema de controle H^{∞} formulado em horizonte finito tenha solução.

O segundo tópico abordado foi o critério de estabilidade estocástica apropriado a esta classe de sistemas. Este problema está intimamente relacionado com o desenvolvimento do problema de controle em horizonte infinito. Obtemos um teste computacional, que fornece condições necessária e suficiente, para a verificação da estabilidade estocástica no sentido *quase certamente*. A relação deste teste com o conceito de estabilidade na média quadrática desta classe de sistemas já era conhecida na literatura. Com isto pudemos demonstrar a equivalência entre diversos conceitos de estabilidade estocástica, para estes sistemas.

COMISSÃO JULGADORA

João Bosco Ribeiro do Val, UNICAMP

Elder Moreira Hemerly, ITA

Jose Claudio Geromel, UNICAMP

Pedro Luís Dias Peres, UNICAMP

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

A classe dos modelos lineares com saltos Markovianos (MLSM) tem despertado um grande interesse nos últimos vinte anos. Isto pode ser confirmado pelo crescente número de artigos publicados em diversos periódicos (ver, e.g. Ji e Chizeck 1990a). Além do interesse natural como um primeira extensão dos sistemas lineares, essa classe pode ser (e tem sido) utilizada, por exemplo, como um acessório poderoso na modelagem de sistemas lineares que são sujeitos a mudanças abruptas em sua estrutura tal como falhas em componentes, interconexões, etc. Isso acontece, por exemplo, em sistemas de controle de aeronaves, estruturas flexíveis de grande porte, sistemas de manipuladores robóticos, etc., onde uma falha de sensor e/ou atuador é uma ocorrência bastante comum. Vários autores estudaram a MLSM em diferentes situações, tais como: 1) Problema de deteção (ver, Bassevile and Beneviste 1988); 2) Filtragem (referências em Bassevile and Beneviste 1988) ; 3) Controle (Chizeck et al. 1986, Chizeck e Ji 1988, Fragoso 1989, Ji e Chizeck 1990 a, Souza e Fragoso 1991, Tadmor 1990) ; 4) Estabilidade (Ji e Chizeck 1990 a, Fragoso e Costa, pre print) ; 5) Aplicações (Loparo et al. 1991, Sworder e Rogers 1983), etc.

Nessa dissertação estaremos interessados basicamente em dois problemas associados a classe MLSM, acima mencionada :

(P.1) - Critério de estabilidade forte (com probabilidade 1)
(P.2) - Controle "H^∞ com realimentação de estados".

A abrangência da área (enfoque H^∞), aliada à limitação de tempo fez com que nosso trabalho se limitasse a um estudo bastante inicial do problema. Decidimos atacar inicialmente o problema a horizonte finito porque o mesmo estabelece mais facilmente a estrutura da solução e todas as equações e fórmulas sem a complicação adicional associada à estabilidade interna. Como a questão da estabilidade é essencial para o problema H^∞, o problema (P.1) surgiu de maneira natural.

Um resumo do conteúdo dessa dissertação é o seguinte. Nesse capítulo (capítulo 1) será feita uma pequena introdução ao problema de controle H^∞, assim como serão formulados os problemas (P.1) e (P.2). No capítulo 2 é feita uma análise detalhada das principais propriedades do processo Markoviano (denominado Z) que é gerado pela classe MLSL. A parte referente a estabilidade (problema (P.1)) é tratada no capítulo 3. O problema de controle H^∞ para a classe MLSM é abordado no capítulo 4. Finalmente, uma série de pequenos apêndices recheados de conceitos e resultados básicos é incluido.

Antes de formularmos os problemas que são tratados nessa dissertação, faremos uma breve introdução ao problema de controle H^∞, que acreditamos possa ser de utilidade para os neófitos no assunto. Não é nossa intenção fazer uma revisão exaustiva, nem seria possível num texto dessa natureza, mas apenas apresentar uma motivação ao assunto.

1.1 Origens e motivações do controle H^∞

A teoria de controle está relacionada ao controle de processos cujas entradas e saídas sejam acessíveis para atuação e medida, respectivamente. Deseja-se obter um desempenho adequado para as saídas da planta, escolhendo-se as entradas apropriadamente.

EXEMPLO 1.1.1 *Imagine uma planta de fazer papel. Esta tem certas entradas: polpa da madeira, água, pressão e vapor. O produto final desta planta é o papel. Esta máquina apresenta duas variáveis que expressam a qualidade do produto. Elas são: espessura do papel e a massa de fibra por unidade de área. Neste processo, gostaríamos que as saídas fossem iguais à determinados valores, a fim de que pudéssemos garantir qualidade, resistência etc. Portanto, temos aqui um processo com um determinado número de entradas e saídas, para o qual, gostaríamos de tornar o desvio das saídas, com relação aos valores desejados, tão pequeno quanto possível.*

De partida, devemos encontrar um modelo matemático que descreva a estrutura da planta. A seguir, usamos o modelo matemático a fim de encontrarmos entradas ideais. Entretanto, aplicamos estas entradas à planta e não ao modelo. Uma vez que o modelo deve ser "suficientemente simples" a fim de que possamos tratá-lo matematicamente, ele não é capaz descrever totalmente a planta (como nas palavras de Kac (1969) : " Models are, for the most part, caricatures of reality, but if they are good, then, like good caricatures, they portray, though perhaps in a distorted manner, some of the features of the real world. "). Além disso, existem perturbações sobre a planta que não são modeladas, na forma de entradas que não são acessíveis ao nosso comando (por exemplo, temperatura ambiente), como também na forma de parâmetros que variam ou que não podemos estabelecer seu valor com absoluta precisão. Assim, devido ao desconhecimento da sensibilidade das entradas com relação as diferenças entre modelos e plantas, podem ser obtidos resultados insatisfatórios. Torna-se então extremamente importante que, ao procurarmos uma lei de controle para o modelo, devemos ter consciência de que ela estará longe da perfeição. Isto nos leva à análise de robustez da planta e controladores sugeridos.

A maneira clássica de se tratar o problema descrito acima foi desenvolvido na década de 60 e é conhecido como Problema Linear Quadrático Gaussiano (LQG). Nesta abordagem, a incerteza é modelada como um ruído branco e adicionada ao sistema como uma entrada extra. O maior problema desta abordagem é que nem sempre a incerteza pode ser modelada via um ruído branco. Erros obtidos em medidas podem ser descritos por processos aleatórios. Mas se modelarmos $a = 2.3$ ao invés de $a = 2.2$, o erro que cometemos não é aleatório mas determinístico. A questão é que apesar de determinístico, este erro é desconhecido. Outro problema é a incerteza na estrutura da planta, ou seja, incerteza na função de transferência entre a entrada e a saída, que não pode ser modelada como estado, na estrutura de espaço de estados ou perturbações na saída, isto é, entradas extras, pois ao estarmos considerando sistemas lineares esta incerteza teria uma estrutura linear, o que nem sempre ocorre (ver, Stoovorgel 1990, pg. 3)

A fim de estudar o efeito da realimentação numa situação de incerteza, Zames (1981) deu o primeiro passo no desenvolvimento da teoria de controle H^∞. Ele considerou a incerteza de duas formas no modelo: como uma perturbação aditiva w na saída e/ou na entrada da planta. Zames então estudou este problema do ponto de vista da teoria clássica de sensibilidade, com a diferença de que ele não somente propõe reduzir a sensibilidade, mas a otimizá-la num sentido apropriado. Em outras palavras, Zames formulou o problema de redução da sensibilidade por realimentação como um problema de otimização separado da estabilização. Ele desenvolveu uma função para medir a sensibilidade do sistema que será otimizada (na próxima subseção apresentaremos exemplos que ilustrarão esta afirmação).

A idéia constitui em desenvolver uma seminorma ponderada sobre alguma álgebra de operadores, a fim de se medir a sensibilidade. Assim, analisando as identidades "sistemas lineares" e "resposta em freqüência", observa-se que no modelo de "entrada e saída", sistemas podem ser somados, multiplicados por escalares, e as somas e multiplicações obtidas ainda são sistemas. Portanto, estes formam uma álgebra. Freqüentemente, assume-se que a maior variação produzida por um sistema pode ser medida por uma norma. Tipicamente a amplitude máxima da resposta em freqüência sobre uma região de analiticidade da função de transferência pode ser usada. Desta forma, a álgebra de sistemas torna-se normada. Também, assume-se que esta álgebra normada é Banach, isto é, tem a propriedade de que toda seqüência convergente de elementos da álgebra tem seu ponto limite nesta. Estas propriedades de sistemas com interconexões, tais como realimentação, podem ser encontradas em textos, como Naimark (1964).

A função de transferência de um sistema linear, invariante no tempo, causal e estável é uma função analítica no semi-plano direito do plano complexo. Uma caracterização de tais funções envolve os espaços de Hardy H^p(ver, Rudin, 1987). No apêndice A fizemos uma breve discusão de alguns resultados relacionados ao espaços de Hardy H^2 e H^∞, que serão utilizados no decorrer deste capítulo. Desta forma o leitor que não tenha afinidade com este tópico é aconselhado a ler o apêndice A.

Com este conceito, Zames (1981) propôs modelar a sensibilidade com relação a distúrbios e a robustez sobre perturbações na planta, através de normas ponderadas H^∞.

Com o intuito de mostrar as possibilidades do enfoque H^∞, na próxima subseção, vamos estudar versões simplificadas dos problemas de estabilização robusta e atenuação de distúrbios, cujas soluções serão apresentadas através de restrições na norma H^∞. Os problemas serão apresentados numa forma simplificada a fim de facilitar os cálculos, resultados gerais podem ser encontrados em textos como Francis e Doyle (1987).

1.1.1 Exemplos

Um dos resultados importantes na teoria de controle H^∞ é conhecido como "small gain theorem". No entanto, antes de apresentarmos o "small gain theorem" vamos apresentar a seguir alguns conceitos que serão utilizados nos exemplos.

DEFINIÇÃO 1.1.1 *Uma função $F \in H^\infty$ é dita ser:*

a- real-racional, se

$$F(s) = \frac{h(s)}{g(s)}$$

onde h e g são polinômios na variável complexa s, com coeficientes reais.

b- própria, se

$$\lim_{|s|\to\infty} F(s)$$

é finito

c- estritamente própria, se

$$\lim_{|s|\to\infty} F(s) = 0$$

e

d- estável, se F não tem polos no semi-plano fechado direito ($Re(s) \geq 0$).

Considere o sistema com realimentação positiva

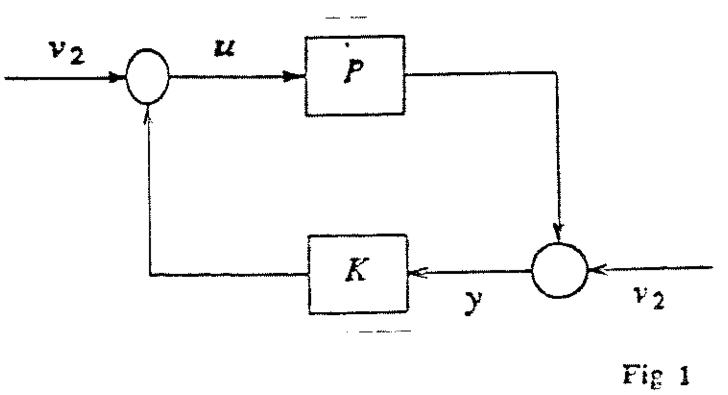


Fig 1

Neste caso, $P(s)$ e $K(s)$ são funções de transferências que assumiremos serem reais-racionais, próprias e estáveis. Por simplicidade assumiremos também que P ou K (ou ambas) é estritamente própria. O sistema realimentado da fig. 1 é internamente estável se as quatro funções de transferências de v_1 e v_2 para u e y são estáveis. Estas funções são próprias devido à suposição sobre P e K.

O critério de Nyquist nos diz que este sistema realimentado é internamente estável se, e só se, o gráfico de Nyquist de PK não contornar o ponto $(-1,0)$ no plano complexo. Então, uma condição "bem" suficiente para garantir a estabilidade interna é a "small gain condition", isto é

$$\| PK \|_{\infty} < 1$$

que foi obtida diretamente da relação da norma H^{∞} com o gráfico de Nyquist, apêndice A.1

A fim de estender esta idéia ao problema de estabilização robusta, considere o seguinte diagrama de blocos:

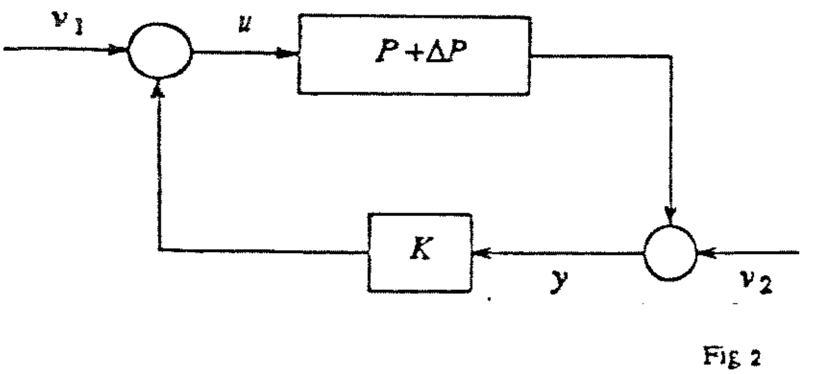


Fig 2

representando um sistema realimentado com perturbação na planta.

A fig. 2 mostra-nos uma planta e um controlador com funções de transferência $P(s) + \Delta P(s)$ e $K(s)$, respectivamente. Aqui P representa a planta nominal e ΔP uma perturbação desconhecida, geralmente devida a variações em parâmetros e/ou entradas não acessíveis ao comando ou ainda parte da planta não modelada.

Suponha, por simplicidade, que $P, \Delta P$ e K sejam reais-racionais, P e ΔP estritamente próprias e K própria. Dado que o sistema realimentado (fig. 2) é internamente estável para $\Delta P = 0$, qual a variação permitida a $| \Delta P |$ a fim de que a estabilidade interna seja mantida?

Para resolvermos este problema, aplicamos transformações na malha do diagrama em blocos da fig. 2, a fim de obtermos

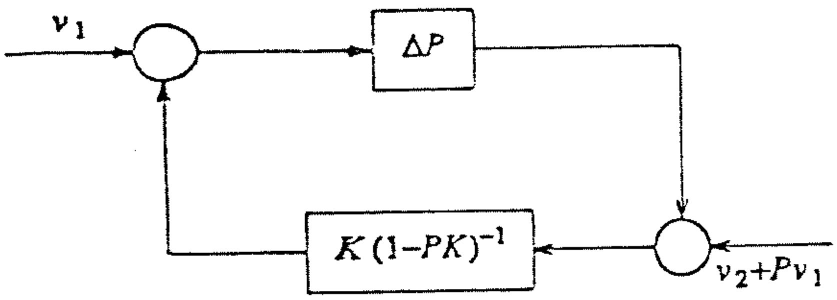


Fig 3

Desde que o sistema nominal realimentado é internamente estável, segue que $K(1-PK)^{-1}$ é estável e própria. Portanto, através de nossa versão simplificada do "small gain theorem" o sistema representado pela fig. 3 é internamente estável se

$$\| \Delta PK(1 - PK)^{-1} \|_{\infty} < 1 \qquad (1.1.1)$$

Assim, concluímos que limitantes na norma H^{∞} da função de transferência em malha fechada, isto é, a condição (1.1.1), é suficiente para garantir a estabilidade robusta.

Outro problema que destacamos é o de atenuação de perturbações. Na fig. 1, suponha $v_1 = 0$ e v_2 um sinal exógeno representando distúrbios na saída da planta P. O objetivo é atenuar o efeito de v_2 na saída y, num sentido apropriado.

Assumindo as mesmas restrições feitas no enunciado do "small gain theorem" definimos a função de sensibilidade como sendo a função de tranferência de v_2 para y, isto é

$$S = (1 - PK)^{-1}$$

Suponha que v_2 não é um sinal fixo, mas qualquer função na classe

$$\{v_2 : v_2 = Wx, \ para \ algum \ x \in H^2, \ \| x \|_2 \leq 1 \} \qquad (1.1.2)$$

onde W e W^{-1} são funções pertencentes ao H^{∞}.

Esta classe consiste de todos os sinais em H^2, tal que

$$\| W^{-1} v_2 \|_2 \leq 1 \qquad (1.1.3)$$

Assumindo que os valores limites $v_2(jw)$ e $W(jw)$ estejam bem definidos, podemos interpretar (1.1.3) como sendo uma restrição ponderada na energia de v_2.

Assim, uma forma de atenuação de distúrbios é minimizar a energia de y para o pior v_2 na classe (1.1.2). Portanto, utilizando o teorema A.4.2, obtemos

$$\sup_{v_2} \| y \|_2 = \sup_{v_2} \| Sv_2 \|_2 = \sup_{\{x:\|x\|\leq 1\}} \| SWx \|_2 = \| SW \|_\infty$$

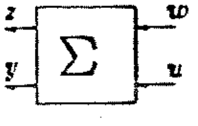
Portanto, queremos minimizar a norma H^∞ ponderada da função de sensibilidade, isto é, minimizar $\| SW \|_\infty$. Em problemas de síntese P e W são dados e K pode ser escolhido de forma a minimizar $\| SW \|_\infty$, adicionando-se uma restrição que garanta a estabilidade interna.

Concluindo, mostramos nesta seção que versões simplificadas dos problemas de estabilização robusta e atenuação de distúrbios podem ser resolvidos através de restrições na norma H^∞. É importante salientar que as suposições aos modelos (reais-racionais, próprias) têm como objetivo simplificar os cálculos. Caso gerais foram resolvidos de forma similar (ver, Francis e Doyle 1987). Portanto, foi neste contexto que Zames (1981) formulou o problema de redução da sensibilidade por realimentação como um problema de otimização.

Na próxima seção, vamos introduzir o problema padrão H^∞, na estrutura de espaço de estados, de maneira que os problemas apresentados acima serão vistos como casos particulares.

1.2 Controle H^∞ na estrutura de espaço de estados

Seja o sistema



Assuma que o sistema Σ é linear, a tempo discreto ou contínuo. Note que Σ é um sistema com dois tipos de entradas e de saídas. A entrada w é exógena, representando distúrbios que estão agindo sobre o sistema, z é a saída do sistema, cuja dependência da entrada exógena w, queremos minimizar. A saída y é uma medida que retiramos do sistema, que pode ser usada para escolher u, de forma a minimizar o efeito de w sobre z, portanto u é uma entrada de controle.

1.2.1 Formulação do problema de controle H^∞

Considere o sistema dinâmico, a tempo contínuo

$$\Sigma \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = Cx + Du \end{cases}$$

Onde, para cada $t \in \Re, x(t) \in \Re^n$, é o estado do sistema, $u(t) \in \Re^m$ a entrada controle, $w(t) \in \Re^l$ o distúrbio (envolvendo ruídos, comandos externos, etc) e $z(t) \in \Re^q$ a saída a ser controlada. As matrizes A, B_1, B_2, C e D têm dimensões apropriadas. Queremos minimizar o efeito do distúrbio w sobre a saída z, encontrando uma entrada de controle u apropriada. Mais precisamente, procuramos um compensador estático descrito por uma lei de controle com realimentação

$$u = Kx \tag{1.2.4}$$

tal que, esta lei aplicada ao sistema Σ, resulta em um sistema em malha fechada cuja matriz de transferência de w para z, denotada por $H(s)$, não tenha pólos no semiplano fechado direito (estável) e tenha norma H^∞ mínima.

Apesar da minimização da norma da matriz de transferência, em malha fechada, de z para w ser o problema geral de controle H^∞, nesta dissertação, derivaremos condições sobre o qual a norma H^∞da matriz de transferência em malha fechada, seja menor que um limitante γ, dado a priori. Portanto, o problema de controle H^∞ pode ser traduzido na forma seguinte.

Considerando $H(s)$ a matriz de transferência de w para z, temos que

$$Z(s) = H(s)W(s)$$

Pelo teorema A.4.2, obtemos

$$\| H \|_\infty = \sup_w \{\| z \|_2 = \| Hw \|_2 : w \in L^2 \text{ e } \| w \|_2 = 1 \}$$

Queremos encontrar um controlador u, de tal forma que

$$\| H \|_\infty \leq \gamma$$

ou seja,

$$\sup_{w:\|w\|_2=1} \| z \|_2 \leq \gamma \tag{1.2.5}$$

Desde que $w \in L^2$ (estamos usando a completude de L^2, apêndice A.1.3), pode-se colocar a inequação (1.2.5) da seguinte forma

$$\| z \|_2 \leq \gamma \| w \|_2 \tag{1.2.6}$$

para toda função $w \in L^2$ e diferente de zero.

Sobre o sistema (Σ), introduziremos a seguinte condição de ortogonalidade

$$D^T [C \;\; D] \; = \; [0 \; R] \tag{1.2.7}$$

onde $R > 0$.

Tal condição de ortogonalidade não representa uma perda de generalidade, se a matriz D apresentar posto completo, com relação as colunas (ver, Lema 2.1 , Lee et al.). Em outras palavras, podemos transformar o sistema Σ em

$$\dot{x} = \overline{A}x \; + \; B_1 w \; + \; B_2 \overline{u}$$

com saída controlada

$$\overline{z} = \; \overline{C}x \; + \; \overline{D}\overline{u}$$

onde

$$\overline{z} \; \triangleq \; Ez$$

com E uma transformação não singular, tal que

$$ED \; = \; \begin{bmatrix} R^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\overline{A} \triangleq A \; - \; B_2 D^T E^T EC$$

$$\overline{C} = EC \; - \; EDD^T E^T EC$$

$$\overline{D} \; = \; ED$$

$$\overline{u} = u \; + \; D^T E^T ECx$$

Para este sistema transformado, temos que

$$\overline{D}^T \left[\overline{C} \; \overline{D}\right] \; = \; [0 \; R]$$

note que esta transformação não altera propriedades estruturais do sistema como a estabilidade.

Resumindo, podemos colocar o problema de controle H^{∞}, da forma:

"Queremos encontrar uma lei de controle com realimentação linear, dada pela equação 1.2.4, de tal forma que a função de transferência em malha fechada de w para z, do sistema (Σ), tenha norma H^{∞} menor ou igual a γ, ou equivalentemente, conforme expresso por (1.2.6). (Σ) satisfaz a condição de ortogonalidade (1.2.7)."

Nos últimos anos, a teoria de controle H^{∞} foi extensivamante estudada tanto no domínio da freqüência quanto na estrutura de espaço de estados. Inicialmente, técnicas no domínio da freqüência foram propostas para se resolver o problema de controle H^∞, no qual resultados de análise complexa foram utilizados (ver, Francis 1987). Doyle et al (1989) introduziram a teoria de controle H^∞ na estrutura de espaço de estados, conectando a teoria de controle H^∞ com H^2 em termos de equações de Riccati. Apesar da maioria dos trabalhos tratar apenas o caso contínuo, o problema de controle H^∞ a tempo discreto também foi resolvido, tanto para horizonte finito quanto infinito, ver Stoorgovel (1990) ou Tadmor (1990).

Apesar disso, poucos trabalhos tem proposto métodos para se estudar modelos incertos. Khargonekar et al (1990) relacionam a teoria de controle H^∞ com o problema de estabilidade quadrática em modelos incertos. Neste caso, consideraram

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A]x(t)$$

onde,

$$\Delta A = EF(t)D$$

tal que D e E são matrizes reais conhecidas e $F(t)$ representa uma matriz real, para cada $t \in \Re$, cujos elementos são Lebesgue mensuráveis (ver Royden 1968) satisfazendo

$$\| F \|_\infty \leq 1$$

Com este modelamento para incerteza, Khargonekar et al. (1990) mostram que o problema de estabilização quadrática é equivalente à "small gain condition", apresentada na subseção 1.1.1. Portanto, qualquer resultado sobre estabilização quadrática de sistemas incertos, com a incerteza descrita como acima, correspondem a resultados na área de otimização H^∞.

Mas, além desse tipo de modelamento da incerteza ser de certa forma impreciso, devido à maneira não estruturada que a incerteza se apresenta, segue que esta pode mascarar completamente a estrutura do modelo. Em outras palavras, mesmo que esta incerteza tenha norma limitada, qualquer matriz satisfazendo esta suposição pode ser usada, o que muitas vezes gera situações absurdas. Outro aspecto importante é sobre a análise desses modelos. Khargonekar et al. (1990) desenvolvem sua teoria usando a planta nominal.

Nosso objetivo é colocar a incerteza de forma mais explícita, dentro do contexto de incertezas estruturadas. Neste caso, a incerteza assumirá formas especiais, adaptadas a cada tipo de problema, isto é, levaremos em conta informações adicionais ao sistema. Além disso, na análise deste problema esta incerteza entrará a priori, ou seja, não desenvolveremos resultados baseados na planta nominal e sim num conjunto de diferentes sistemas gerados pelas incertezas. Com este tipo de abordagem, os resultados tornam-se menos restritivos do que os obtidos através da planta nominal, como em Khargonekar et al. (1990).

O problema de estabilização quadrática com incerteza contida em intervalos limitados convexos, analisados através de uma lei de controle linear, cuja função de transferência em malha fechada é limitada por uma constante pré-definida, isto é, com análise do problema de controle H^∞ (descrito anteriormente), foi resolvido por Geromel et al (1991) e Peres et al. (1991) para o caso à tempo contínuo e discreto, respectivamente.

Nesta abordagem, eles supuseram que as matrizes A e B_2 (no modelo Σ) não são exatamente conhecidas, mas pertencem à determinados conjuntos poliedrais fechados convexos. Análise é feita através dos extremos dos conjuntos poliedrais e as soluções são apresentadas em termos de equações do tipo Riccati.

Nesta dissertação, vamos propor uma forma diferente para se formular a incerteza no modelo. Enquanto Peres et al (1991) formulam a incerteza no modelo em conjuntos fechados convexos, cujos resultados são obtidos através da análise convexa, nós vamos propor um modelo probabilístico para incerteza no modelo. Neste caso, as matrizes do sistema não são conhecidas precisamente, mas assumem valores em um determinado conjunto finito, com uma estrutura probabilística pré-definida. O primeiro trabalho tratando esta abordagem foi apresentado por Souza e Fragoso (1991), que estudaram o problema de controle H^∞ para uma classe de sistemas lineares contínuos no tempo que estão sujeitos a mudanças abruptas em sua estrutura, que foram modelados via uma cadeia de Markov com espaço de estados finito.

Aqui, vamos estudar controle H^∞ a tempo discreto, cuja incerteza no modelo será formulada através de uma cadeia de Markov com espaço de estados finito.

Envolvidos nesta abordagem, apresentaremos a seguir a classe de processos discreto no tempo com saltos markovianos que será nosso objeto de estudo.

1.3 Sistemas Lineares Discreto no tempo com Saltos Markovianos

Nesta seção, vamos introduzir uma certa classe de sistemas lineares discreto no tempo, que possuem parâmetros saltando aleatoriamente, cujos saltos são modelados via uma cadeia de Markov (apêndice B.2) com espaço de estados finito. Um MLSM pode ser usado para modelar sistemas que estão sujeitos à mudanças abruptas em sua estrutura e/ou parâmetros, causado por fenômenos tais como falhas, reparos, mudanças em subsistemas interconectados, etc. Este também pode ser usado para aproximar sistemas não-lineares, saltando entre diferentes modelos linearizados.

Dado $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade completo, considere um sistema linear discreto no tempo com saltos markovianos, modelado por

$$X_{k+1} = A(\theta_k)X_k \quad ; \quad K \geq 0 \tag{1.3.8}$$

Onde X_k é um vetor aleatório n-dimensional e $\{\theta_k : k \geq 0\}$ é uma cadeia de Markov com probabilidades de transição estacionárias, que assume valores num espaço $\mathcal{S} = \{1, \cdots, r\}$ finito, denominado de espaço de estados. O conjunto de matrizes $\{A(\theta_k)\}$ tem dimensões apropriadas. Denotaremos por A_i a matriz $A(\theta_k)$ quando θ_k assumir o valor i. Também vamos supor que as normas das matrizes A_i são finitas qualquer que seja

$i \in \mathcal{S}$.

Observa-se que o processo estocástico $\{X_k : k \geq 0\}$ não é markoviano, mas sim o processo conjunto $\{(X_k, \theta_k) : k \geq 0\}$, que representa os estados do sistema (1.3.8). No capítulo 2, faremos uma análise detalhada das principais propriedade relacionadas ao processo apresentado acima. Pelo fato de X assumir valores em um espaço contínuo ($\Re^n$) e a cadeia de Markov tomar valores num espaço discreto ($\mathcal{S}$), sistemas da forma (1.3.8) são denominados, as vezes, híbridos (ver, Willsky and Levy 1979).

Problemas de controle relacionados ao processo híbrido definido acima foram propostos na forma

$$X_{k+1} = A(\theta_k)X_k + B(\theta_k)u_k \tag{1.3.9}$$

onde $u_k \in \Re^q$ é uma entrada controle e $k = 0, \cdots, N$, de maneira que N pode ser finito ou não.

O processo (1.3.9) é linear em X e u para qualquer trajetória. Definindo o vetor informação até o instante k, denotado G_k, por

$$G_k = \{u_0, \cdots, u_{k-1}; x_0, \cdots, x_k; \theta_0, \cdots, \theta_k\}$$

adotamos a classe de controladores admissíveis

$$u_k = \psi(k, G_k)$$

que é causal. Assumindo que ψ tenha norma finita, segue que o processo conjunto $\{(X_k, \theta_k) : k \geq 0\}$ é markoviano. Portanto, a lei de controle linear pode ser colocada na forma

$$u_k = \psi_k(x_k, \theta_k) \tag{1.3.10}$$

Observe que estamos supondo que os estados, isto é, $\{X_k\}$ e $\{\theta_k\}$ são totalmente acessíveis ao controlador, e esta suposição será uma constante ao longo desta dissertação.

Assim, considere o problema de se encontrar $\{u_k : 0 \leq k \leq N-1\}$ que minimize a função custo

$$J(x_0, \theta_0) = E\left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \left[u_k^T M(\theta_k) u_k + X_k^T N(\theta_k) X_k\right] + X_N^T Q(\theta_N) X_N \;\middle|\; x_0, \theta_0 \right\}$$

onde $E[\cdot|x_0, \theta_0]$ denota a esperança condicional (apêndice B.1.2). Consideramos as matrizes simétrica $M(\theta_k) > 0$ (positiva definida), $N(\theta_k) \geq 0$ e $Q(\theta_k) \geq 0$ (semi definida positiva) qualquer que seja o valor assumido por θ_k. Este problema é conhecido como Linear Quadrático com Saltos Markovianos (Jump Linear Quadratic Problem - JLQ), ver Chizeck et al. (1986).

Este problema foi extensivamente estudado na literatura. Para sistemas contínuos no tempo, podemos citar o trabalho de Krasokvskii e Lidskii (1961), que introduziram este tipo de sistema. Sworder (1969) e Wonham (1971) resolveram este problema para o caso de horizonte finito, com a diferença de que Sworder usou o princípio do máximo estocástico e Wonham usou a programação dinâmica. Wonham também resolveu o caso de horizonte infinito, no qual ele obteve condições suficientes para a existência de uma solução finita.

Para sistemas discreto no tempo (isto é, o problema apresentado acima), Chizeck et al. (1986) resolveram-no para o caso de horizonte finito e Ji e Chizeck (1990a) apresentam condições necessárias e suficientes para que o conjunto de soluções apresentada em Chizeck et al. (1986) sejam convergente para uma solução finita quando $N \uparrow \infty$, isto é, derivam condições para existência de soluções "steady state".

Como foi discutido na seção 1.1, existem distúrbios e perturbações sobre o sistema que não são modelados. O método clássico para se modelar esta situação consiste em adicionar ruído branco na entrada do sistema, que aproxime estas incertezas. Então o modelo (1.3.9) é reformulado na forma

$$X_{k+1} = A(\theta_k)X_k + B(\theta_k)u_k + F(\theta_k)w_k \tag{1.3.11}$$

onde $\{w_k\}$ é uma seqüência de vetores aleatórios gaussianos independentes com média zero e matriz de covariância unitária (isto é, a identidade).

A formulação deste problema segue as mesmas regras do problema JLQ apresentado anteriormente e é conhecido como problema Linear Quadrático Gaussiano com Saltos Markovianos (JLQG). Uma análise deste problema pode ser encontrado entre outros em Chizeck e Ji (1988), Ji e Chizeck (1990a) e Fragoso (1989).

Fugindo desta caracterização clássica de controle, vamos estudar o problema de controle para a classe de sistemas híbridos à tempo discreto introduzido em (1.3.8), com uma abordagem via H^∞. Desta maneira, passamos agora a definir o problema de controle H^∞ para esta classe de sistemas híbridos, que será estudado para o caso de horizonte finito, considerando o sistema (1.3.8) variante no tempo. Assim, dado um espaço de probabilidade completo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, considere a seguinte classe de sistemas dinâmicos

$$(\Sigma_1) \quad \begin{cases} X_{k+1} = A(k,\theta_k)X_k + B_1(k,\theta_k)w_k + B_2(k,\theta_k)u_k \\ x_0 = 0 \ ; \ \theta_0 = i \ , \ 0 \le k \le N-1 \end{cases}$$

com saída controlada

$$z_k = C(k,\theta_k)x_k + D(k,\theta_k)u_k \tag{1.3.12}$$

e assumindo a condição de ortogonalidade

$$D^T(k,\theta_k)\,[\, C(k,\theta_k) \quad D(k,\theta_k)\,] = [\, 0 \quad R(k,\theta_k)\,] \tag{1.3.13}$$

$$R(k,\theta_k) = R^T(k,\theta_k) > 0 \tag{1.3.14}$$

onde X_k é um vetor aleatório n-dimensional, $\{w_k\} \in l_2[0, N-1]$, o espaço das seqüências quadrado somáveis sobre o $[0, N-1]$ e $\{u_k\}$ é uma seqüência de funções de controle m-dimensionais. Da mesma forma, $\{\theta_k\}$ é uma cadeia de Markov com probabilidades de transição estacionárias, assumindo valores em um espaço de estados finito $\mathcal{S}$.

Assumiremos que $\{X_k\}$ e $\{\theta_k\}$ são totalmente acessíveis ao controlador. Assim, usando a propriedade markoviana do processo conjunto $\{(X_k, \theta_k) : k \geq 0\}$ definimos a seguinte política de controle com realimentação markoviana

$$u_k = u(x_k, \theta_k) \tag{1.3.15}$$

A fim de colocar a problema de controle H^∞ dentro de uma estrutura estocástica vamos definir o espaço l_2 ($[\Omega, \mathcal{F}, P], [0, N-1]$) das seqüências z_k, tais que

$$\| z \|_2 = \left\{ E \left[\sum_{k=0}^{N-1} z_k^T z_k \right] \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Entretanto, usaremos a mesma notação $\| \cdot \|_2$ para a norma em $l_2[0, N-1]$ ou l_2 ($[\Omega, \mathcal{F}, P], [0.N-1]$), quando no contexto estiver claro a qual espaço estamos referindo.

No capítulo 4, vamos estudar o problema de controle H^∞ com realimentação de estados para o sistema (Σ_1), considerando-se o problema de desenvolver uma lei de controle com realimentação de estados

$$u(k, \theta_k, x_k) = -L(k, \theta_k) x_k \tag{1.3.16}$$

tal que para todo $w \in l_2[0, N-1]$, $w \neq 0$

$$\| z \|_2 \leq \gamma \| w \|_2,$$

onde $\{z_k\}$ é a saída controlada definida por (1.3.12) e $\gamma > 0$ é o nível pré-determinado de atenuação de distúrbios.

Observe que a colocação do problema de controle H^∞ na estrutura estocástica segue as mesmas regras do caso determinístico (seção 1.2). Este problema será analisado e resolvido no capítulo 4, o resultado principal está enunciado no teorema 4.2.1

Como discutimos anteriormente, vamos estudar a propriedade de estabilidade estocástica para a classe de sistemas introduzida em (1.3.8). Mas, ao invés de usarmos conceitos envolvendo valores esperados, trabalharemos a estabilidade estocástica com probabilidade 1. Assim, para motivar o leitor apresentaremos as definições e o resultado sobre estabilidade estocástica. No capítulo 3, faremos uma análise detalhada sobre a estabilidade estocástica com probabilidade 1, enfatizando suas conexões com o caso determinístico.

1.4 Estabilidade estocástica de sistemas híbridos

Uma das maneiras de se estudar a estabilidade do sistema (1.3.8), seria analisar a estabilidade no sentido determinístico (definições 3.1.1 e 3.1.2), de cada modelo linear associado, mas isto não têm interesse, devido à estrutura estocástica do sistema e pelo fato de que assim estaríamos analisando todas as possíveis trajetórias do sistema, o que é excessivamente restritivo, interessa-nos analisar apenas um determinado subconjunto das trajetórias que têm probabilidade 1. Além disso, desde que a estabilidade está relacionada à variabilidade global do sistema, podemos ter estados instáveis, mas o sistema de forma global, ser estocasticamente estável com probabilidade 1.

Denotaremos $Z = \{(X_k, \theta_k) : k \geq 0\}$ o processo conjunto, definido em (1.3.8), a fim de simplificar a notação. Assim, denotando $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, temos

$$Z \; : \Omega \times \mathbb{N}_0 \;\longrightarrow\; \Re \times S = E$$

Mas, definindo

$$E^{\mathbb{N}_0} \;\triangleq\; \{(z_0, z_1, \cdots) \;:\; z_n \in E \;;\; n \in \mathbb{N}_0\}$$

isto é, $E^{\mathbb{N}_0}$ é o conjunto das seqüências $(z_n)_{n \geq 0}$, cujos elementos pertencem a E. Desta forma

$$Z : \Omega \;\longrightarrow\; E^{\mathbb{N}_0}$$

Portanto, quando falamos em estabilidade estocástica com probabilidade 1, estamos nos referindo à estabilidade de uma classe de funções, que neste caso pertencem ao $E^{\mathbb{N}_0}$. Assim, é sobre este espaço de funções que construímos a lei de probabilidade (ver, apêndice B). A propriedade de estabilidade estocástica com probabilidade 1 está fundamentada sobre restrições nesta lei de probabilidade e conseqüentemente sobre o processo Z, devido a equivalência entre Z e a lei de probabilidade.

No contexto estocástico, podemos ter diversos tipos ou conceitos de estabilidade. Apesar de grande parte dos pesquisadores terem dirigido seus esforços no estudo da estabilidade de momentos dos processos (ou soluções de processos, no caso de equações diferenciais estocásticas), a estabilidade das trajetórias ("sample stability") é uma propriedade mais significante, no sentido de ser natural, menos restritiva e ideal para propostas práticas. Estas observações levaram vários autores, inclusive nós, a estudar a estabilidade estocástica com probabilidade 1.

Quando se observa um processo estocástico, estamos na realidade observando suas trajetórias. Portanto, nada mais natural que estudarmos a estabilidade deste processo impondo restrições nestas trajetórias, através da lei de probabilidade associada ao processo. Além disso, conceitos de estabilidade envolvendo valores esperados tem-se mostrado restritivos. Para maiores detalhes, ver Kozin (1972).

Portanto, de forma análoga à Kushner (1967), definimos

DEFINIÇÃO 1.4.1 *A origem em (1.3.8) é estável com probabilidade 1 se, e só se, dados $\epsilon, \rho > 0$, existe $\delta(\epsilon, \rho) > 0$, tal que se $x_0^T x_0 < \delta(\epsilon, \rho)$, têm-se que*

$$P\left[\sup_{0 \leq t < \infty} X_t^T X_t \geq \epsilon \mid X_0 = x_0, \theta_0 = i\right] \leq \rho \qquad (1.4.17)$$

DEFINIÇÃO 1.4.2 *A origem em (1.3.8) é assintoticamente estável com probabilidade 1 se, e só se, esta for estável com probabilidade 1 e qualquer que seja $x_0 \in \Re^n$*

$$\lim_{N \uparrow \infty} P\left[\sup_{t \geq N} X_t^T X_t \geq \epsilon \mid X_0 = x_0, \theta_0 = i\right] = 0 \;\; ; \;\; \forall \epsilon > 0$$

ou melhor,

$$X_k^T X_k \longrightarrow 0 \;\; ; \;\; P(\cdot | X_0 = x_0, \theta_0 = i) - q.c. \quad \textit{quando } t \uparrow \infty \tag{1.4.18}$$

Apesar das definições de estabilidade estocástica, apresentadas acima, serem estruturadas, aparentemente, sobre o processo $\{X_k : k \geq 0\}$, é importante ressaltar que, na realidade, estuda-se a *evolução do processo* conjunto $Z = \{(X_k, \theta_k) : k \geq 0\}$, através da relação (1.3.8). Isto gera uma certa confusão na notação, que tentaremos minimizar.

Desde que o processo Z contém toda informação a respeito da evolução da equação (1.3.8), vamos estudar no capítulo 2 algumas propriedades de Z que serão úteis na análise da estabilidade estocástica. Com o intuito de simplificar a notação, denotaremos

$$P(\cdot \mid X_0, \theta_0) = P_{Z_0}(\cdot) \quad e \quad E(\cdot \mid X_0, \theta_0) = E_{Z_0}(\cdot)$$

Infelizmente, a fim de encontrarmos condições necessárias e suficientes para que o sistema (1.3.8) seja assintoticamente estável com probabilidade 1, tivemos que fazer uma suposição adicional ao modelo (1.3.8). Vamos supor que os estados da Cadeia de Markov $\{\theta_k : k \geq 0\}$ sejam recorrentes (apêndice B.2.5). Tal suposição não representa uma restrição grave ao modelo, mas ainda estamos analisando maneiras que permitam retirar tal suposição, que nos parece ser possível.

TEOREMA 1.4.1 *Se $\mathcal{S}$ é composto por estados recorrentes, segue que a origem em (1.3.8) é assintoticamente estável com probabilidade 1 se, e só se, para qualquer conjunto de matrizes simétricas $\{N_i > 0 : i \in \mathcal{S}\}$ existe um conjunto de matrizes simétricas $\{M_i > 0 : i \in \mathcal{S}\}$, que é solução de*

$$\sum_{l=1}^{r} p_{il} A_i^T M_l A_i - M_i = -N_i \;\; ; \;\; \forall i \in \mathcal{S} \tag{1.4.19}$$

No estudo de MLSM um conceito especial de estabilidade estocástica foi usado por Ji e Chizeck (1990 a,b) para as versões a tempo discreto e contínuo, respectivamente. Estes autores estudaram o problema de controle linear quadrático com horizonte infinito e conseqüentemente tratam o problema de estabilização que surge no problema de controle com realimentação para MLSM, através de uma definição de estabilidade estocástica especificamente desenvolvida para este problema, que apresentaremos a seguir.

DEFINIÇÃO 1.4.3 *A origem em (1.3.8) é estocásticamente estável se, qualquer que seja $x_0 \in \Re^n$ e $i \in \mathcal{S}$,*

$$\lim_{N\uparrow\infty} E\left[\sum_{k=0}^{N} X_k^T X_k \;\middle|\; X_0 = x_0; \theta_0 = i\right] < \infty$$

Mais recentemente, Ji et al. (1991) para o caso a tempo discreto e Feng et al. (1992) para a versão contínua do MLSM, mostraram que a estabilidade estocástica (definida acima) é equivalente à estabilidade assintótica na média quadrática, isto é,

DEFINIÇÃO 1.4.4 *A origem em (1.3.8) é assintoticamente estável na média quadrática se, qualquer que seja $x_0 \in \Re^n$ e $\theta_0 = i \in \mathcal{S}$*

$$\lim_{N\uparrow\infty} E\left[X_N^T X_N\right] = 0$$

Ainda, Ji et al. (1991) e Feng et al. (1992) para versões à tempo discreto e contínuo, respectivamente, mostraram que a estabilidade assintótica na média quadrática é equivalente à estabilidade geométrica na média quadrática, isto é,

DEFINIÇÃO 1.4.5 *A origem em (1.3.8) é geometricamente (ou exponencialmente) estável na média quadrática se, qualquer que seja $x_0 \in \Re^n$ e $\theta_0 = i \in \mathcal{S}$, existem $\alpha, \beta > 0$, tal que*

$$E\left[X_k^T X_k\right] \leq \alpha x_0^T x_0 \exp^{-\beta k} \quad ; \quad \forall k \geq 0$$

Agora, utilizando o teorema 1.4.1 e o teorema 2.1 de Ji e Chizeck (1990 a), concluímos que os quatro conceitos de estabilidade estocástica, apresentados aqui, são equivalentes para o MLSM.

COROLÁRIO 1.4.1 *Se $\mathcal{S}$ é composto por estados recorrentes, então os seguinte conceitos de estabilidade estocástica são equivalentes para o sistema (1.3.8) :*

(i) - estabilidade estocástica com probabilidade 1
(ii) - assintoticamente estável na média quadrática
(iii)- geometricamente estável na média quadrática
(iv) - estocasticamente estável

A seguir apresentaremos dois exemplos que ilustraram a aplicabilidade do teste computacional desenvolvido no teorema 1.4.1. Além disso, estes exemplos nos mostram que a estabilidade (no sentido da definição 3.1.1 e 3.1.2) de cada modelo (ou forma) associado ao MLSM não é necessária nem suficiente para garantir a estabilidade assintótica com probabilidade 1.

EXEMPLO 1.4.1 (Ji e Chizeck 1990 a) *Considere o sistema (1.3.8) da forma:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

com matriz de probabilidades de transição

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Podemos observar que as matrizes A_1 e A_2 são instáveis (definições 3.1.1 e 3.1.2). Mas, se tomarmos $N_1 = N_2 = I$ e resolvermos a equação (1.4.19), obtemos como único conjunto de soluções simétricas

$$M_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 23 & -10 \\ -10 & 8 \end{bmatrix} \qquad M_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 28 \end{bmatrix}$$

com $M_1 > 0$ e $M_2 > 0$, isto é, positivas definidas. Portanto, pelo teorema 1.4.1 o sistema 1.3.8 é assintoticamente estável com probabilidade 1. Isto mostra que a estabilidade de cada modelo (ou forma) não é necessário para garantir a estabilidade estocástica com probabilidade 1.

EXEMPLO 1.4.2 (Ji e Chizeck 1990 a) *Considere o sistema (1.3.8) da forma:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

com matriz de probabilidades de transição

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

As matrizes A_1 e A_2 são estáveis (definições 3.1.1 e 3.1.2), mas se tomarmos $N_1 = N_2 = I$ e resolvermos a equação (1.4.19), o único conjunto de soluções simétricas é dado por:

$$M_1 = \frac{1}{57}\begin{bmatrix} 57 & 0 \\ 0 & -73 \end{bmatrix} \qquad M_2 = \frac{1}{57}\begin{bmatrix} -73 & 0 \\ 0 & 57 \end{bmatrix}$$

aqui M_1 e M_2 não são positivas definidas. Portanto, pelo teorema 1.4.1 o sistema 1.3.8 não é assintoticamente estável com probabilidade 1. Isto mostra que a estabilidade de cada modelo (ou forma) não é suficiente para garantir a estabilidade assintótica com probabilidade 1.

Concluindo esta seção, ressaltamos que o teorema 1.4.1 não somente nos apresenta condições necessárias e suficientes para garantir a estabilidade assintótica com probabilidade 1, mas também nos permitiu conectar alguns conceitos de estabilidade estocástica relacionadas ao MLSM. A demonstração deste teorema foi dividida em duas partes distintas, suficiência e necessidade. Para mostrar a suficência usamos a propriedade supermartingale positivo (apêndice C) da função estocástica de Lyapunov, que será estudada no capítulo 3. Agora, para estabelecermos a necessidade, a propriedade regenerativa para MLSM com respeito a uma determinada seqüência de tempos de parada (apêndice C.2) é empregada. Desta forma, no capítulo 2 vamos fazer um estudo aprofundado sobre algumas propriedades do processo Z.

Capítulo 2

Propriedades importantes do processo Z

Neste capítulo, faremos uma análise das principais propriedades do processo $Z = \{(X_k, \theta_k) : k \geq 0\}$, que representam os estados do sistema (1.3.8). Entre estas, citamos a propriedade regenerativa, que será utilizada no estudo da estabilidade estocástica.

2.1 Propriedade regenerativa

Considere $Y = \{Y_t : t \geq 0\}$ um processo estocástico, definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Suponha que um determinado fenômeno ocorra num tempo T (aleatório ou não) e o futuro do processo, após T, torna-se uma réplica probabilística do processo após o tempo zero. Tal tempo é denominado de regeneração e o processo é dito ser regenerativo.

A fim de mostrarmos que existe um tempo T, tal que o processo $Z = \{(X_k, \theta_k) : k \geq 0\}$ é regenerativo com relação a este, necessitamos de um estudo mais profundo sobre Z. Assim, começamos definindo

$$\mathcal{F}_n^Z = \sigma\{(X_k, \theta_k) : k \leq n\} \quad ; \quad n \geq 0$$

A seqüência $\{\mathcal{F}_n^Z : n \geq 1\}$ é crescente e será denominada de filtragem interna associada ao processo Z. Pode-se interpretar $\mathcal{F}_n^Z$ como sendo a σ-álgebra gerada pela família de variáveis aleatória $\{(X_k, \theta_k) : k \leq n\}$, em outras palavras, a menor σ-álgebra que registra todos eventos relacionados ao processo Z, anteriores ao tempo n. Denotando $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, temos que

$$Z : \mathbb{N}_0 \times \Omega \longrightarrow \Re \times \mathcal{S}$$

Como já dissemos, denotaremos por $E = \Re \times \mathcal{S}$ o espaço de estados de Z. Assim, para todo $n, m \geq 0$ e $\Gamma \in \beta(E)$ (a σ-álgebra de Borel de E), temos

$$P\left[Z_{n+m} \in \Gamma \mid \mathcal{F}_n^Z\right] = P[(X_{n+m}, \theta_{n+m}) \in \Gamma | (X_0, \theta_0), \cdots, (X_n, \theta_n)]$$

Usando (1.3.8) e a propriedade Markoviana de $\{\theta_k : k \geq 0\}$, concluí-se que

$$P[(X_{n+m}, \theta_{n+m}) \in \Gamma \mid (X_0, \theta_0), \cdots, (X_n, \theta_n)] = P[(X_{n+m}, \theta_{n+m}) \in \Gamma \mid X_n, \theta_n]$$

ou melhor

$$P\left[Z_{n+m} \in \Gamma \mid \mathcal{F}_n^Z\right] = P[Z_{n+m} \in \Gamma \mid Z_n]$$

Portanto, o processo Z é markoviano. Assim, usando o fato de que (1.3.8) é invariante no tempo, define-se

$$P\left[Z_{n+1} \in \Gamma \mid \mathcal{F}_n^Z\right] = P[Z_{n+1} \in \Gamma \mid Z_n] = \mu(Z_n, \Gamma)$$

que é denominada de função de transição homogênea no tempo, do processo Z. A função de transição μ está definida sobre $E \times \beta(E)$, satisfazendo

i- $\mu(z, \cdot)$ é uma probabilidade sobre $\beta(E)$, $\forall z \in E$.
ii- $\mu(\cdot, \Gamma)$ é uma função mensurável e limitada sobre E, $\forall\ \Gamma \in \beta(E)$.

Desta forma, definimos a função de transição em k etapas como sendo

$$P\left[Z_{n+k} \in \Gamma \mid \mathcal{F}_n^Z\right] = P[Z_{n+k} \in \Gamma \mid Z_n] = \mu^k(Z_n, \Gamma)$$

para todo $k \in I\!N$ e $\Gamma \in \beta(E)$.

Desde que Z é um processo Markoviano segue que a função $Z_k(\cdot)$ e a probabilidade $P_z(\cdot)$ satisfazem a propriedade de Markov, isto é, " o futuro é independente do passado, dado que se conhece o presente". Mais precisamente, para cada valor conhecido de Z_k, a predição de valores subseqüentes não depende de estados anteriores ao tempo k.

Suponha que existe um tempo de parada τ (apêndice C.2) com relação à filtragem $\{\mathcal{F}_n^Z : n \geq 0\}$, cujo Z_τ é conhecido. O conhecimento dos estados anteriores a τ é essencial para a predição dos estados posteriores ? A intuição nos sugere uma afirmação contrária, isto é, o conhecimento dos estados posteriores não é relevante. Entretanto, dado um processo markoviano, nada podemos afirmar, desde que a definição envolve apenas um tempo n (fixo), não um tempo τ, aleatório. Com isso, dizemos que um processo é markoviano forte, se o princípio de Markov é satisfeito, não somente para momentos fixos, mas também, para uma certa classe de tempos aleatórios.

A fim de dar-mos consistência a esta idéia, definimos para todo τ, tempo de parada com relação a $\{\mathcal{F}_n^Z : n \geq 0\}$,

$$\mathcal{F}_\tau^Z = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n^Z \ ;\ n \geq 0\}$$

Pode-se interpretar $\mathcal{F}_\tau^Z$ como sendo a menor σ-álgebra que contém os eventos do processo Z, relacionados com o passado de τ.

DEFINIÇÃO 2.1.1 *Um processo estocástico $Y = \{Y_k : k \geq 0\}$, definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, cujo espaço de estados será denotado por C, é $\mathcal{F}_k^Y$-progressivo, onde $\{\mathcal{F}_k^Y : k \geq 0\}$ é a filtragem interna relacionada à Y, se a restrição de Y sobre $\Omega \times [0,k]$ é mensurável com relação a σ-álgebra produto $\mathcal{F}_k^Y \times \beta([0,k])$, para todo $k \geq 0$, isto é, se*

$$\{(k,w) : Y_k(w) \in \Gamma\} \cap \{\Omega \times [0,k]\} \in \mathcal{F}_k^Y \times \beta([0,k])$$

para todo $k \geq 0$ e $\Gamma \in \beta(C)$.

Pode-se mostrar que se Y é um processo a tempo discreto, então Y é $\mathcal{F}_k^Y$-progressivo (Dynkin 1965).

Com estas considerações, temos os elementos para definir o processo markoviano forte.

DEFINIÇÃO 2.1.2 *Considere um processo Markoviano $Y = \{Y_k : k \geq 0\}$, definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, com valores em C, de forma que Y é $\mathcal{F}_k^Y$-progressivo. Suponha que $\mu^k(z, \Gamma)$ é a função de transição de Y, considere τ um tempo de parada com relação à filtragem $\{\mathcal{F}_k^Y : k \geq 0\}$, tal que $\tau < \infty$ $P-$q.c.. Então, Y é Markov forte em τ, se*

$$P\left[Y_{\tau+k} \in \Gamma \mid \mathcal{F}_\tau^Y\right] = \mu^k(Y_\tau, \Gamma)$$

para todo $k \geq 0$ e $\Gamma \in \beta(C)$, ou equivalentemente

$$E\left[f(Y_{\tau+k}) \mid \mathcal{F}_\tau^Y\right] = \int_C f(y)\mu^k(Y_\tau, dy)$$

para todo $k \geq 0$, sendo f uma função mensurável e limitada sobre C.

Dizemos que Y é markoviano forte, com respeito a $\{\mathcal{F}_k^Y : k \geq 0\}$, se Y é Markov forte para todo τ, tempo de parada com respeito a $\{\mathcal{F}_k^Y : k \geq 0\}$, tal que $\tau < \infty$ $P-q.c.$.

LEMA 2.1.1 *Seja $Z = \{(X_k, \theta_k) : k \geq 0\}$ o processo markoviano definido por (1.3.8). Considere τ um tempo de parada com relação à $\{\mathcal{F}_k^Z : k \geq 0\}$, assumindo valores em um espaço enumerável $\{t_1, t_2, \cdots\} \subset I\!N_0$, tal que $\tau < \infty$ $P-q.c.$. Então, Z é markoviano forte em τ.*

Prova: Seja f uma função limitada e mensurável sobre E. Se $B \in \mathcal{F}_\tau^Z$, então segue da definição de $\mathcal{F}_\tau^Z$, que

$$B \cap \{\tau = t_i\} \in \mathcal{F}_{t_i}^Z$$

para todo $i \geq 1$. Com isso, usando a definição de esperança condicional (apêndice B.1.2) e a propriedade markoviana, obtemos

$$\int_{B\cap\{\tau=t_i\}} f(Z_{\tau+k})dP = \int_{B\cap\{\tau=t_i\}} f(Z_{t_i+k})dP$$

$$= \int_{B\cap\{\tau=t_i\}} E\left[f(Z_{t_i+k}) \mid \mathcal{F}_{t_i}^Z\right] dP$$

$$= \int_{B\cap\{\tau=t_i\}} \int_E f(y)\mu^k(Z_{t_i}, dy) dP$$

$$= \int_{B\cap\{\tau=t_i\}} \int_E f(y)\mu^k(Z_\tau, dy) dP$$

Agora, somando em i, obtemos

$$\int_B f(Z_{\tau+k}) dP = \int_B \int_E f(y)\mu^k(Z_\tau, dy) dP$$

Assim, segue diretamente da definição de esperança condicional, que

$$E\left[f(Z_{\tau+k}) \mid \mathcal{F}_k^Z\right] = \int_E f(y)\mu^k(Z_\tau, dy)$$

Portanto, Z é um processo markoviano forte. □

Na realidade, este resultado é válido para qualquer processo Markoviano a tempo discreto (Ethier and Kurtz, 1986, pg. 157).

Desde que a cadeia de Markov tem espaço de estados finito, segue do corolário B.2.1 (apêndice B.2.5) que existe pelo menos um estado recorrente (apêndice B.2.5). Portanto, o seguinte subconjunto de E está bem definido.

$$\Gamma_i = \{(\cdot, i) : i \in \mathcal{S}, recorrente, fixo\}$$

Assim, considerando $z_0 \in \Gamma_i$, definimos

$$\begin{aligned}
T_0 &= 0 \quad P_{z_0} - q.c. \\
T_1 &= inf\{k > 0 : Z_k \in \Gamma_i\} \\
&\vdots \\
T_{n+1} &= inf\{k > T_n : Z_k \in \Gamma_i\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

A seqüência $(T_n)_{n\geq 0}$ é constituída de tempos de parada com relação a $\{\mathcal{F}_k^Z : k \geq 0\}$.

LEMA 2.1.2 *Para $z_0 \in \Gamma_i$, temos*

$$P_{z_0}[T_n < \infty] = 1 \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.1.1}$$

Prova: Vamos mostrar por indução que (2.1.1) é válido. Da definição de T_1, observa-se que este não depende da primeira coordenada, isto é, de $X = \{X_k : k \geq 0\}$. Portanto, desde que i é recorrente

$$P_{z_0}[T_1 < \infty] = P[T_1 < \infty \mid \theta_0 = i] = 1$$

Supondo (2.1.1) válido para n, vamos mostrar que também vale para $n+1$. Desta forma, usando a propriedade markoviana forte e o fato do estado i ser recorrente, temos

$$P_{z_0}[T_{n+1} < \infty] = E\{ P_{z_0}[T_{n+1} < \infty] \mid \mathcal{F}^Z_{T_n} \}$$

$$= E\{ P[T_{n+1} < \infty \mid \mathcal{F}^Z_{T_n}] \mid z_0 \} = E\{ P[T_{n+1} < \infty \mid Z_{T_n}] \mid z_0 \} = 1$$

Portanto,

$$P_{z_0}[T_n < \infty] = 1 \ ; \ n \in I\!N$$

segue o lema. □

LEMA 2.1.3 *Sejam* $n \in I\!N$, $t_1, t_2, \cdots, t_n \in I\!N_0$ *e* τ *um tempo de parada com relação a* $\{\mathcal{F}^Z_k : k \geq 0\}$, *tal que* $\tau < \infty$ $P_{z_0} -$ *q.c.. Então, se* f *é uma função mensurável limitada nas variáveis aleatórias* $Z_{\tau+t_1}, \cdots, Z_{\tau+t_n}$, *tem-se que*

$$E[f(Z_{\tau+t_1}, \cdots, Z_{\tau+t_n}) \mid \mathcal{F}^Z_\tau] = E[f(Z_{\tau+t_1}, \cdots, Z_{\tau+t_n}) \mid Z_\tau] \qquad (2.1.2)$$

Prova: Vamos mostrar por indução que (2.1.2) é válido. Para $n = 1$, segue da propriedade markoviana forte, que

$$E[f(Z_{\tau+t_1}) \mid \mathcal{F}^Z_\tau] = \int_E f(y)\mu^{t_1}(Z_\tau, dy)$$

$$= E[f(Z_{\tau+t_1}) \mid Z_\tau]$$

Supondo que (2.1.2) é válido para k, vamos mostrar que também é válido para $k+1$. Sem perda de generalidade podemos supor que $t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$, com isso

$$E[f(Z_{\tau+t_1}, \cdots, Z_{\tau+t_{k+1}}) \mid \mathcal{F}^Z_\tau] =$$

$$E\left\{E\left[f(Z_{\tau+t_1}, \cdots, Z_{\tau+t_{k+1}}) \mid \mathcal{F}^Z_{\tau+t_k}\right] \mid \mathcal{F}_\tau\right\}$$

Mas,

$$E\left[f(Z_{\tau+t_1},\cdots,Z_{\tau+t_{k+1}}) \mid \mathcal{F}^Z_{\tau+t_k}\right] =$$

$$\int_E f(Z_{\tau+t_1},\cdots,Z_{\tau+t_k},y)\mu^{t_k+1}(Z_{\tau+t_k},dy) \tag{2.1.3}$$

Nota-se que (2.1.3) é uma função nas variáveis aleatórias $Z_{\tau+t_1},\cdots,Z_{\tau+t_k}$, ou melhor

$$E[f(Z_{\tau+t_1},\cdots,Z_{\tau+t_{k+1}}) \mid \mathcal{F}^Z_{\tau+t_k}] = h(Z_{\tau+t_1},\cdots,Z_{\tau+t_k})$$

para alguma função h mensurável e limitada. Portanto, usando a hipótese de indução, obtemos

$$E\left[f(Z_{\tau+t_1},\cdots,Z_{\tau+t_{k+1}}) \mid \mathcal{F}^Z_{\tau}\right]$$

$$= E\left\{E\left[f(Z_{\tau+t_1},\cdots,Z_{\tau+t_{k+1}}) \mid \mathcal{F}^Z_{\tau+t_k}\right] \mid \mathcal{F}^Z_{\tau}\right\}$$

$$= E\left[h(Z_{\tau+t_1},\cdots,Z_{\tau+t_k}) \mid \mathcal{F}^Z_{\tau}\right]$$

$$= E\left[h(Z_{\tau+t_1},\cdots,Z_{\tau+t_k}) \mid Z_{\tau}\right]$$

$$= E\left[f(Z_{\tau+t_1},\cdots,Z_{\tau+t_{k+1}}) \mid Z_{\tau}\right]$$

segue o lema. □

LEMA 2.1.4 *Considere $z_0 \in \Gamma_i$ e inteiros não negativos $m, k \geq 1$. Assim,*

$$P_{z_0}[T_{m+1} - T_m = k \mid T_0, T_1, \cdots, T_m] = P_{z_0}[T_1 = k] \tag{2.1.4}$$

Prova: Fixando m, segue do lema 2.1.2 que $T_m < \infty$ $P_{z_0} - q.c.$. Portanto, o evento

$$\{T_{m+1} - T_m = k\} = \{Z_{T_m+1} \notin \Gamma_i, \cdots, Z_{T_m+k-1} \notin \Gamma_i, Z_{T_m+k} \in \Gamma_i\}$$

Então, segue do lema 2.1.3 e de (1.3.8), que

$$P_{z_0}\left[T_{m+1} - T_m = k \mid \mathcal{F}^Z_{T_m}\right]$$

$$= P_{z_0}\left[Z_{T_m+1} \notin \Gamma_i,\cdots,Z_{T_m+k-1} \notin \Gamma_i, Z_{T_m+k} \in \Gamma_i \mid \mathcal{F}^Z_{T_m}\right]$$

$$= \; P_{z_0}\left\{[X_{T_m+1},\theta_{T_m+1}]\notin \Gamma_i, \cdots, [X_{t_m+k-1},\theta_{T_m+k-1}]\notin \Gamma_i,\right.$$

$$\left.[X_{T_m+k},\theta_{T_m+k}] \in \Gamma_i \mid X_{T_m},\theta_{T_m}\right\}$$

$$= \; P_{z_0}\left\{[A(\theta_{T_m})X_{T_m},\theta_{T_m+1}]\notin \Gamma_i,\cdots, [A(\theta_{T_m+k-2})\cdots A(\theta_{T_m})X_{T_m},\theta_{T_m+k-1}]\notin \Gamma_i,\right.$$

$$\left.[A(\theta_{T_m+k-1})\cdots A(\theta_{T_m})X_{T_m},\theta_{T_m+k}] \in \Gamma_i \mid \theta_{T_m}\right\}$$

$$= \; g(\theta_{T_m})$$

onde

$$g(i) \; = \; P_{z_0}\left\{[A(\theta_0)X_0,\theta_1]\notin \Gamma_i, \cdots, [A(\theta_{k-2})\cdots A(\theta_0)X_0,\theta_{k-1}]\notin \Gamma_i,\right.$$

$$\left.[A(\theta_{k-1})\cdots A(\theta_0)X_0,\theta_k] \in \Gamma_i \mid \theta_0 = i\right\}$$

$$= \; P_{z_0}\left[Z_1 \notin \Gamma_i, \cdots, Z_{k-1} \notin \Gamma_i, Z_k \in \Gamma_i\right] \; = \; P_{z_0}\left[T_1 \; = \; k\right]$$

Definindo,

$$h(n) = g(i) \quad ; \quad n < \infty$$

obtemos,

$$g(\theta_{T_m}) \; = \; h(T_m)$$

por definição de θ_{T_m}. Portanto, desde que $\sigma(T_0,\cdots,T_m) \subset \mathcal{F}^Z_{T_m}$, temos

$$P_{z_0}\left[T_{m+1} - T_m = k \mid T_0, T_1, \cdots, T_m\right]$$

$$= \; E_{z_0}\left\{P_{z_0}\left[T_{m+1} - T_m = k \mid \mathcal{F}^Z_{T_m}\right] \mid T_0, T_1, \cdots, T_m\right\}$$

$$= \; E_{z_0}\left[h(T_m) \mid T_0, T_1, \cdots, T_m\right] \; = \; h(T_m)$$

segue o lema. □

No início deste capítulo, colocamos uma idéia intuitiva sobre a propriedade regenerativa, que a seguir apresentaremos de forma rigorosa.

DEFINIÇÃO 2.1.3 (Çinlar) *Um processo $Y = \{Y_k : k \geq 0\}$ é dito ser regenerativo se existe uma seqüência $S_0, S_1, \cdots$ de tempos de parada, tais que*

(a)- $S = \{S_n : n \in I\!N\}$ é um processo de renovação, isto é, as variáveis aleatórias

$$W_n = S_{n+1} - S_n \; ; \; n \geq 0$$

onde $S_0 = 0 \quad P - q.c.$, são independentes e identicamente distribuidas. De forma que $S_n \to \infty \quad P - q.c.$ quando $n \uparrow \infty$.

(b)- para qualquer $n, m \in I\!N$, $t_1, \cdots, t_n \in I\!N_0$ e f uma função limitada e mensurável, definida sobre E^n,

$$E\left[f(Y_{S_m+t_1}, \cdots, Y_{S_m+t_n}) \mid \mathcal{F}^Y_{S_m}\right] = E\left[f(Y_{t_1}, \cdots, Y_{t_n})\right]$$

LEMA 2.1.5 *O processo Z é regenerativo com tempos de regeneração $(T_n)_{n\geq 0}$, considerando-se $z_0 \in \Gamma_i$.*

Prova: Segue do lema (2.1.4) que a seqüência de tempos de parada $(T_n)_{n\geq 0}$ é um processo de renovação. Portanto, basta-nos mostrar que a parte b da definição (2.1.3) é válida. Considerando $z_0 \in \Gamma_i$, segue do lema (2.1.3) e de (1.3.8), que

$$E_{z_0}\left[f\left(Z_{T_m+t_1}, \cdots, Z_{T_m+t_n}\right) \mid \mathcal{F}^Z_{T_m}\right]$$

$$= E_{z_0}\left\{f\left[(X_{T_m+t_1}, \theta_{T_m+t_1}), \cdots, (X_{T_m+t_n}, \theta_{T_m+t_n})\right] \mid X_{T_m}, \theta_{T_m}\right\}$$

$$= E_{z_0}\{f\left[(A(\theta_{T_m+t_1}) \cdots A(\theta_{T_m})X_{T_m}, \theta_{T_m+t_1}), \cdots,\right.$$

$$\left.(A(\theta_{T_m+t_n}) \cdots A(\theta_{T_m})X_{T_m}, \theta_{T_m+t_n})\right] \mid \theta_{T_m}\} = g\left(\theta_{T_m}\right)$$

onde

$$g(i) = E_{z_0}\{f[(A(\theta_{t_1}) \cdots A(\theta_0)X_0, \theta_{t_1}), \cdots,$$

$$(A(\theta_{t_n}) \cdots A(\theta_0)X_0, \theta_{t_n})] \mid \theta_0 = i\}$$

$$= E_{z_0}\left\{f\left[(X_{t_1}, \theta_{t_1}), \cdots, (X_{t_n}, \theta_{t_n})\right] \mid X_0, \theta_0 = i\right\}$$

$$= E_{z_0}\left[f\left(Z_{t_1}, \cdots, Z_{t_n}\right)\right]$$

Agora, definindo

$$h(k) = g(i) \quad ; \quad k < \infty$$

Obtemos diretamente da definição de θ_{T_m} que

$$g(\theta_{T_m}) = h(T_m)$$

Portanto,

$$E_{z_0}\left[f(Z_{T_m+t_1}, \cdots, Z_{T_m+t_n}) \mid \mathcal{F}^Z_{T_m}\right]$$

$$= g(\theta_{T_m}) = h(T_m)$$

segue o lema. $\square$.

Agora, vamos começar a construir os elementos necessários a fim de que possamos conectar a propriedade regenerativa e a estabilidade assintótica com probabilidade 1, relacionados ao processo Z. Assim, supondo o processo Z assintoticamente estável com probabilidade 1 (seção 1.4), vamos mostrar que este é limitado com probabilidade 1.

Portanto, da definição 1.4.2, dados $\epsilon, \rho > 0$, existe $\delta(\epsilon, \rho) > 0$, tal que se $x_0^T x_0 < \delta(\epsilon, \rho)$, tem se que para $z_0 = \{(x_0, \theta_0)\}$

$$P_{z_0}\left[\sup_{0 \leq k < \infty} X_k^T X_k \geq \epsilon\right] \leq \rho \tag{2.1.5}$$

Agora, considerando $z_0 \in \Gamma_i$, definimos para $\epsilon > 0$ (fixo) o seguinte tempo de parada com relação a $\{\mathcal{F}^Z_n : n \geq 0\}$

$$T_\rho = inf\{k \geq 0 : X_k^T X_k \leq \delta(\epsilon, \rho)\} \quad ; \quad \rho > 0$$

Desde que

$$X_k^T X_k \longrightarrow 0 \qquad P_{z_0} - q.c.$$

qualquer que seja $z_0 \in E$, temos que

$$P_{z_0}[T_\rho < \infty] = 1 \quad ; \quad \rho > 0 \tag{2.1.6}$$

Desde que $z_0 \in \Gamma_i$, segue que existe $m \in I\!N$ tal que $T_m > T_\rho$ $(P_{z_0} - q.c.)$. Então, usando a propriedade markoviana forte e a equação (2.1.5), concluímos que

$$P_{z_0}\left[\sup_k X^T_{T_m+k} X_{T_m+k} \geq \epsilon \;\middle|\; \mathcal{F}^Z_{T_m}\right]$$

$$= P_{z_0}\left[\sup_k X^T_{T_m+k} X_{T_m+k} \geq \epsilon \;\middle|\; Z_{T_m}\right] \leq \rho$$

Da equação acima obtemos que

$$P_{z_0}\left[X^T_{T_m+k}X_{T_m+k} \geq \epsilon \;\middle|\; \mathcal{F}^Z_{T_m}\right] \leq \rho$$

qualquer que seja $k \geq 0$. Portanto, usando a parte (b) da propriedade regenerativa (definição 2.1.3), onde

$$f(Z_{T_m+k}) = 1\!\!1_{\{X^T_{T_m+k}X_{T_m+k}\geq\epsilon\}}$$

concluímos que

$$P_{z_0}\left[X_k^T X_k \geq \epsilon\right] = P_{z_0}\left[X^T_{T_m+k}X_{T_m+k} \geq \epsilon \;\middle|\; \mathcal{F}^Z_{T_m}\right] \leq \rho$$

qualquer que seja $\rho > 0$ e $k \geq 0$.

Portanto, o processo é limitado com probabilidade pelo menos $1-\rho$. Desde que ρ é arbitrário, segue que o processso é limitado com probabilidade 1.

Com estes resultados temos os elementos necessários para demonstrar o seguinte teorema que será usado na demonstração do resultado sobre estabilidade estocástica com probabilidade 1.

TEOREMA 2.1.1 *Se o processo $Z = \{(X_k, \theta_k) : k \geq 0\}$ for assintoticamente estável com probabilidade 1 e se $z_0 = (x_0, \theta_0) \in \Gamma_i$, para $x_0 \in \Re^n$ e diferente de zero, então*

$$E_{z_0}\left[X^T_{T_{k+1}}X_{T_{k+1}} - X^T_{T_k}X_{T_k}\right] < 0 \;;\; k \geq 0 \tag{2.1.7}$$

independentemente de k.

Prova: Dado que o sistema é assintoticamente estável com probabilidade 1, segue que Z é limitado com probabilidade 1. Mas, como Z é tal que

$$X_k^T X_k \longrightarrow 0 \;;\; P_{z_0} - q.c.$$

segue diretamente do teorema da convergência dominada de Lebesgue (ver, Neveu 1965, pg. 42), que

$$E_{z_0}\left(X_k^T X_k\right) \longrightarrow 0 \quad quando\ n \uparrow \infty$$

Agora, suponha por absurdo que existe $n \in I\!\!N$, tal que

$$E_{z_0}\left[X^T_{T_{n+1}}X_{T_{n+1}} - X^T_{T_n}X_{T_n}\right] \geq 0$$

Então, pela propriedade regenerativa (lema 2.1.3), temos

$$E_{z_0}\left[X^T_{T_{k+1}}X_{T_{k+1}} - X^T_{T_k}X_{T_k}\right] \geq 0 \;;\; \forall k \geq 0$$

Agora, desde que $x_0 \neq 0$, tem-se que

$$0 < x_0^T x_0 \;\leq\; E_{z_0}\left[X_{T_1}^T X_{T_1}\right] \;\leq\; E_{z_0}\left[X_{T_2}^T X_{T_2}\right] \;\cdots \tag{2.1.8}$$

Assim, usando o fato de que a seqüência $(T_n)_{n \geq 0}$ é um processo de renovação, segue que a subseqüência $\left(E_{z_0}\left[X_{T_k}^T X_{T_k}\right]\right)_{k \geq 0}$ está bem definida e da equação (2.1.8) concluímos que

$$E_{z_0}\left[X_{T_k}^T X_{T_k}\right] \not\longrightarrow 0 \;\; ; \;\; quando\ k \uparrow \infty$$

Portanto,

$$E_{z_0}\left[X_k^T X_k\right] \not\longrightarrow 0 \;\; ; \;\; quando\ k \uparrow \infty$$

o que é um absurdo. □

Capítulo 3

Estabilidade estocástica

Sistemas estocásticos tornaram-se nas últimas décadas um ferramental extremamente útil no modelamento de fenômenos físicos. Eles têm sido usado para o estudo de sistemas que estão sujeitos a mudanças aleatórias em sua estrutura e parâmetros, devido a falhas, ruídos, incertezas, mudanças em subsistemas interconectados, etc. Com o desenvolvimento da teoria de processos estocásticos e da análise de funções aleatórias tem se tornado possível estudar propriedades destes sistemas, entre as quais citamos aqui a estabilidade.

Estabilidade é uma propriedade qualitativa de sistemas cuja conceituação assume formas diversas e são geralmente definidas em termos de convergência relativa a parâmetros no tempo e/ou condições iniciais.

Neste capítulo, vamos explorar o conceito de estabilidade de Lyapunov (1907) no caso determinístico e analisar suas extensões para o caso estocástico, a fim de estudar mais profundamente a estabilidade de sistemas lineares discreto no tempo que possuem parâmetros saltando aleatoriamente. Estes saltos são modelados via cadeias de Markov com espaço de estados finito.

3.1 Estabilidade de Lyapunov

Estabilidade de sistemas é um ramo da teoria qualitativa de sistemas dinâmicos, que freqüentemente é estudada sem que seja necessário a resolução do sistema.

Considere um sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\dot{x} = f(x,t) \tag{3.1.1}$$

com $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in \Re^n$ e f um função vetorial real contínua.

Para cada valor de t, é dada uma solução para equação (3.1.1), que descreve uma curva no espaço formado por x e t, que é denominado de curva integral. Agora, a projeção da curva integral sobre o espaço formado por x (neste caso, o $\Re^n$) é denominado de trajetória.

Valores de x para o qual a equação (3.1.1) é nula para todo $t \geq t_0$ são conhecidos como pontos de equilíbrio ou críticos. Uma trajetória começando em um ponto de equilíbrio permanecerá neste ponto, para todo tempo subseqüente.

A solução da equação (3.1.1) que passa pelo ponto x_0 no tempo t_0 será denotada por $x(t, x_0, t_0)$. Assumiremos que a origem é um ponto crítico de (3.1.1), isto é, $f(0,t) = 0$ para $t \geq t_0$. Esta suposição não representa um perda de generalidade, pois, se $x = a$ é um ponto de equilíbrio, este pode ser transferido para a origem por meio da translação $x^* = x - a$.

Informalmente falando, estabilidade está relacionada com o fato de que se o sistema está num estado de equilíbrio e for perturbado, então este irá retornar ao ponto de equilíbrio ou não. Definições mais precisas são devidas a Lyapunov e serão apresentadas a seguir.

DEFINIÇÃO 3.1.1 *A origem em (3.1.1) é estável se para qualquer $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon, t_0) > 0$, tal que se $\| x_0 \| < \delta$, temos que*

$$\sup_{t \geq t_0} \| x(t, x_0, t_0) \| < \epsilon \tag{3.1.2}$$

DEFINIÇÃO 3.1.2 *A origem é assintoticamente estável, se esta for estável e se existe um $\delta^* > 0$ tal que se $\| x_0 \| < \delta^*$, então*

$$\lim_{t \to \infty} \| x(t, x_0, t_0) \| = 0 \tag{3.1.3}$$

onde $\| \cdot \|$ é qualquer norma sobre o $\Re^n$.

Observa-se que para garantir a estabilidade assintótica não é suficiente que todas as trajetórias tendam à origem quando $t \uparrow \infty$, necessita-se também da estabilidade da origem.

A fim de interpretarmos geometricamente estas definições, considere um sistema bidimensional (fig. 1). Dado um círculo A_1 de raio R, pode-se encontrar um círculo A_2 de raio r, tal que qualquer trajetória começando em A_2 nunca sai de A_1. A origem é assitoticamente estável se esta for estável e se existe um círculo A_3 tal que todas as trajetórias começando em A_3 tendem para a origem, quando $t \uparrow \infty$.

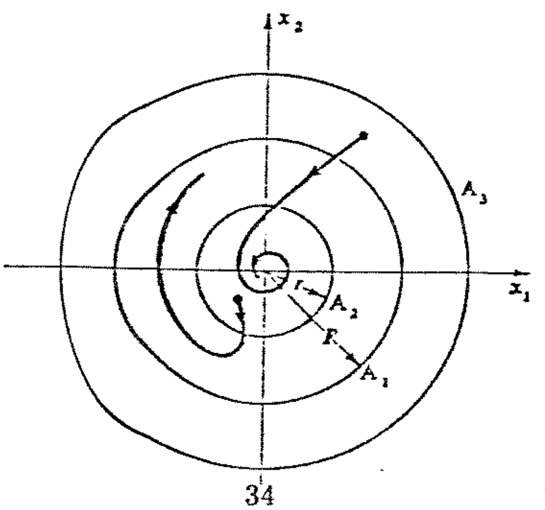


Fig 1

Tem-se observado que muitos sistemas são instáveis, no sentido da definição 3.1.1, mas apresentam uma performance razoável do ponto de vista prático. Contrariamente, pode-se encontrar sistemas que são estáveis , mas apresentam um comportamento ruim (ver, Barnett and Storey, 1970, pg. 70). Estas considerações levam-nos a uma definição alternativa de estabilidade

Se na definição 3.1.1 a constante δ for independente de t_0, ou seja,

$$\sup_{t \geq t_0} \| x(t, x_0, t_0) \| < \epsilon$$

para todo t_0, dizemos que a estabilidade é uniforme. Este conceito é mais realista e será utilizado como definição de estabilidade.

Outro aspecto importante é a dependência da condição inicial na definição 3.1.2. Tendo em vista um estudo de sistemas lineares, esta dependência é redundante. Portanto, consideraremos o seguinte conceito:

$$\lim_{t \to \infty} \| x(t, x_0, t_0) \| = 0$$

para todo $x_0 \in \Re^n$. Na literatura, isto é conhecido como: " asymptotically stable in the large " (ver, Kozin 1969, pg 97).

3.1.1 Funções de Lyapunov

Investigar a estabilidade de sistemas dinâmicos sem resolvê-los é conhecido como segundo método de Lyapunov (ver, Lyapunov 1907). A idéia envolvida é uma generalização do conceito de energia para sistemas conservativos. Em tais sistemas a energia é uma função positiva que decresce para zero, quando aproxima-se de um ponto de equilíbrio.

Agora, para sistemas gerais, uma função com propriedades similares à função energia pode ser usada para garantir a estabilidade de sistemas dinâmicos. Suponha uma função não negativa contínua V, satisfazendo $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ se $x \neq 0$ e com derivadas parciais contínuas sobre um conjunto limitado $Q_m = \{x : V(x) < m\}$, para $m < \infty$.

Os conjuntos Q_r, cada um contendo a origem, decrescem monotonicamente para zero, quando $r \longrightarrow 0$.

Por simplicidade (caso geral, ver Barnett and Storey, 1970) assumiremos que o sistema é invariante no tempo, ou seja,

$$\dot{x} = f(x) \tag{3.1.4}$$

com (3.1.4) tendo uma única solução em Q_m. Suponha que

$$\dot{V}(x_t) = \frac{dV}{dx} f(x) = -K(x_t) < 0$$

em Q_m, onde $K(x)$ é contínua.

Dado que $\dot{V}(x_t) \leq 0$ em Q_m, se $x_0 \in Q_m$, então $x_t \in Q_m$ para todo $t < \infty$, que é exatamente a definição de estabilidade que apresentamos na subseção anterior (ver definição 3.1.1.). A função $V(x)$ é denominada função de Lyapunov.

Do teorema fundamental do cálculo, temos

$$V(x_0) - V(x_t) = \int_0^t K(x_s)ds = -\int_0^t \dot{V}(x_s)ds \tag{3.1.5}$$

Agora, $K(x)$ é uma função não negativa e contínua no conjunto limitado Q_m e $x_t \in Q_m$ para todo $t < \infty$. Portanto,

$$V(x_0) - V(x_t)$$

é limitado, conseqüentemente

$$x_t \longrightarrow \{x : K(x) = 0\} \quad \textit{quando} \ t \uparrow \infty$$

Isto quer dizer que $V(x_t)$ decresce monotonicamente para alguma constante não negativa v. Se, por exemplo, $k(x) = 0$ em Q_m implica necessariamente que $x = 0$, teremos

$$x_t \longrightarrow 0 \quad \textit{quando} \ t \uparrow \infty$$

Estes são algums dos resultados que podem ser obtidos via função de Lyapunov. O método da função de Lyapunov é utilizado para obter informações sobre a família de soluções de (3.1.4) sem computar os valores numéricos de cada solução. Este método foi extensivamente estudado na literatura e citamos, como exemplo, Krasovskii (1957, 1963), Barnett and Storey (1970) entre outros.

3.2 Estabilidade de sistemas estocásticos

Nesta seção, vamos definir e estudar a estabilidade de sistemas estocásticos de forma análoga ao determinístico e em contrapartida, consideraremos os modos de convergência da teoria de probabilidade. Portanto, tem-se a princípio três maneiras diferentes de se definir estabilidade no sentido estocástico, desde que podemos falar em convergência em probabilidade, na média e quase certamente (com probabilidade 1).

Portanto, dado um sistema estocástico, nem toda definição de estabilidade estocástica terá interesse prático, desde que existe nuanças entre os tipos de convergência estocástica. Em outras palavras, o tipo de estabilidade que usaremos estará intimamente relacionado à estrutura do sistema que queremos analisar. Por exemplo, sistemas biológicos freqüentemente apresentam estabilidade do tipo quase certamente. Para maiores detalhes sobre estas considerações ver Kozin (1969).

3.2.1 Definições

Nesta subseção, vamos definir a estabilidade estocástica no sentido da convergência quase certa ou com probabilidade 1. Esta escolha foi motivada por vários fatores. Entre estes, podemos citar, a facilidade com que esta definição nos permite conectar a estabilidade de sistemas determinísticos e estocásticos, principalmente, via função estocástica de Lyapunov (subseção 3.2.2). Outro aspecto importante é que este tipo de estabilidade é uma dos mais fortes, entre os diversos tipos de estabilidade estocástica (ver, Kozin, 1969). Podemos, também, citar a aplicabilidade deste conceito no estudo do sistemas que estamos abordando.

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade completo e o seguinte sistema dinâmico estocástico

$$\dot{X} = f(X,t) \tag{3.2.6}$$

com condição inicial x_0, vetor n-dimensional, no tempo t_0. Denotaremos a solução de (3.2.6), com condição inicial x_0, por $X(t, x_0, t_0)$ que se supõe ser um vetor aleatório n-dimensional.

A fim de fazermos a transição da análise de estabilidade para o caso estocástico, basta-nos reescrever as definições 3.1.1 e 3.1.2, no sentido da convergência quase certa. Observe que a variável cuja convergência foi estudada é precisamente

$$\sup_{t \geq t_0} \| X(t, x_0, t_0) \| \tag{3.2.7}$$

norma de um vetor de variáveis aleatórias, cujo limite probabilístico será estudado, com respeito à estabilidade estocástica de uma solução de equilíbrio. Como na seção anterior, a origem será considerada ponto de equilíbrio.

DEFINIÇÃO 3.2.1 *A origem é estável com probabilidade 1 se, e só se, dados $\epsilon, \rho > 0$, existe $\delta(\epsilon, \rho, t_0) > 0$, tal que se $\| x_0 \| < \delta$, então*

$$P\left[\sup_{t \geq t_0} \| X(t, x_0, t_0) \| \geq \epsilon \right] \leq \rho \tag{3.2.8}$$

DEFINIÇÃO 3.2.2 *A origem é assintoticamente estável com probabilidade 1 se, e só se, a origem é estável com probabilidade 1 e existe δ^*, tal que se $\| x_0 \| < \delta^*$, então*

$$P\left[\limsup_{t \uparrow \infty} \| X(t, x_0, t_0) \| = 0 \right] = 1 \tag{3.2.9}$$

Pode-se notar que o processo $t \longrightarrow X(t, x_0, t_0)$ depende da condição inical e do instante inicial. Conseqüentemente, a definição de estabilidade com probabilidade 1 depende destes parâmetros. Agora, como no caso determinístico, se na definição 3.2.1 a constante δ não depender de t_0, dizemos que a estabilidade é uniforme. Esta definição é mais realista e da mesma forma que Kushner (1967) consideraremos a estabilidade com probabilidade 1 uniforme. Portanto, a definição 3.2.1 será recolocada na seguinte forma.

DEFINIÇÃO 3.2.3 *A origem é estável com probabilidade 1 se, e só se, dados $\epsilon, \rho > 0$, existe $\delta(\epsilon, \rho) > 0$, tal que se $\| x_0 \| < \delta$, então*

$$P\left[\sup_{0 \leq t < \infty} \| X_t \| \geq \epsilon \;\middle|\; X_0 = x_0 \right] \leq \rho \qquad (3.2.10)$$

onde $X_t = X(t, x_0, t_0)$, como forma de simplificar a notação.

Na definição 3.2.2, existe uma dependência de (3.2.9) com relação a condição inicial, pois estamos considerando x_0 pertencente a uma determinada vizinhança da origem. Dado que estamos interessados em estudar uma certa classe de sistemas lineares, cuja estrutura é relativamente simples, não faz sentido tal dependência, como já frisamos anteriormente. Portanto, na definição 3.2.2, consideraremos x_0 qualquer, no caso, $x_0 \in \Re^n$. Na literatura, esta definição é conhecida como: " asymptotically stable with prob. 1 in the large ", (Kushner, 1967).

3.2.2 Função estocástica de Lyapunov

Quando estuda-se a estabilidade de sistemas estocásticos, estamos, na realidade, investigando propriedades qualitativas de uma família de funções aleatórias (trajetórias), simultaneamente. Portanto, se quiséssemos de forma análoga ao determinístico, encontrar uma função V não negativa, tal que $\dot{V}(x_t) < 0$, para cada trajetória, os teoremas determinísticos poderiam ser aplicados, e o problema não teria interesse do ponto de vista probabilístico. Adicionamente, é importante salientar que, como modelamos o problema de forma estocástica não nos interessa analisar todas as trajetórias, pois estaríamos exigindo muito do sistema.

Da mesma forma que na subseção 3.2.1, vamos supor que o sistema é invariante no tempo, como forma de simplificar a exposição da teoria.

Mostramos que a principal propriedade das funções de Lyapunov é que

$$V(x_t) \downarrow v \geq 0 \quad quando \;\; t \uparrow \infty$$

Como estamos interessados em fazer inferência sobre valores assintóticos do processo estocástico $V = \{ V(X_t) : t \geq 0 \}$, a possibilidade de se aplicar teoremas limites de martingales é sugerida. Por exemplo, se $V(x) \geq 0$ e para qualquer $\Delta > 0$

$$E[\, V(X_{t+\Delta}) - V(X_t) \mid \mathcal{F}_t \,] \leq 0 \quad (P - q.c.) \qquad (3.2.11)$$

com,

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s : s \leq t\}$$

ou seja, a filtragem interna (apêndice C.2) associada ao processo $X = \{X_t : t \geq 0\}$.

Segue daí que, $\{V(x_t) : t \geq 0 \}$ é um supermartingale positivo (apêndice C). Assim da versão contínua do teorema C.1.1 (Doob, 1953), temos que

$$V(X_t) \longrightarrow v \geq 0 \quad (P - q.c.)$$

Mas, como também não esperamos que $\dot{V}\ (X_t) < 0$, é razoável querermos operar com o análogo estocástico da derivada determinística. Tendo este objetivo, é necessário que façamos outra suposição sobre o modelo.

Supondo o processo estocástico $X = (X_t\ :\ t \geq 0)$ markoviano forte (definição 2.1.2), é possível definir o gerador infinitesimal associado ao processo (apêndice D), denotado por $\mathcal{L}$, que é o análogo estocástico da derivada determinística, tal denominação é motivada por um resultado que apresentaremos a seguir. Portanto, desejamos obter informações sobre a estabilidade através da forma $\mathcal{L}V(X)$.

De maneira análoga, como a forma de $K(x)$ era útil para se obter informações sobre valores assintóticos de x_s, no caso determinístico, espera-se que a forma $\mathcal{L}V(X)$ produza informação similar no caso estocástico.

A fim de conectar estes elementos, isto é, $V(X)$, $\mathcal{L}V(X)$ e os teoremas limites de martingales, precisamos desenvolver o análogo estocástico do teorema fundamental do cálculo, ou melhor, da equação (3.1.5). Tal conexão é obtida através da fórmula de Dynkin (apêndice D.3). Seja $V(X) \geq 0$ pertencente ao domínio do gerador $\mathcal{L}$, e τ um tempo de parada com respeito a $\mathcal{F}_t$ (apêndice C.2) satisfazendo $E[\tau | X_0 = x] < \infty$. Então, temos que

$$V(x) \; - \; E[\, V(X_\tau) \mid X_0 = x\,] \; = \; -E\left[\int_0^\tau \mathcal{L}V(X_s)ds \mid X_0 = x\right] =$$

$$E\left[\int_0^\tau k(X_s)ds \mid X_0 = x\right] \geq 0 \tag{3.2.12}$$

onde denotamos $\mathcal{L}V(x) = -K(x) < 0$.

Portanto, é razoável que se $\{\, V(X_t)\ :\ t \geq 0\,\}$ é um supermartingale positivo, então

$$X_t \longrightarrow \{x : k(x) = 0\} \quad (P - q.c.)$$

Este resultado será demonstrado na próxima seção, para a classe de sistemas híbridos introduzidos na seção 1.3.

Na aplicação destas idéias, surgem algumas dificuldades. Primeiro, o domínio do gerador tem que ser suficiente para incluir as funções $V(X)$ de interesse. Mesmo que $V(X)$ esteja no domínio do gerador, $k(x)$ pode ser não negativa apenas sobre um subconjunto do espaço de estados do processo X, desde que estamos interessados em valores assintóticos, isto pode nos trazer alguns problemas.

A idéia do análogo estocástico do método de estabilidade de Lyapunov apareceu, pela primeira vez, nos trabalhos de Bertran e Sarachik (1959) e Kats e Krasovskii (1960). Bucy (1965) conseguiu, através da propriedade supermartingale da função estocástica de Lyapunov $V(X)$, condições suficientes para garantir a estabilidade estocástica de sistemas a parâmetros discretos. O trabalho de Bucy é provavelmente o primeiro que trata a estabilidade estocástica de sistemas não-lineares, de forma bem geral.

3.3 Demonstração do resultado sobre estabilidade estocástica de sistemas híbridos

Nesta seção, vamos demonstrar o resultado sobre estabilidade estocástica apresentado na seção 1.4. Porém, antes da tortuosa demonstração reapresentaremos o resultado.

TEOREMA 3.3.1 *Seja $\mathcal{S}$ composto somente por estados recorrentes. A origem em (1.3.8) é assintoticamente estável com probabilidade 1 se, e só se, para qualquer conjunto de matrizes simétricas $\{N_i > 0 : i \in \mathcal{S}\}$ existe um conjunto de matrizes simétricas $\{M_i > 0 : i \in \mathcal{S}\}$, que é solução de*

$$\sum_{l=1}^{r} p_{il} A_i^T M_l A_i \; - \; M_i \; = \; -N_i \quad ; \quad \forall i \in \mathcal{S} \tag{3.3.13}$$

Prova: (Suficiência) O método que usaremos para mostrar a suficiência é o da função estocástica de Lyapunov (subseção 3.2.2). Com esta finalidade, considere $z_0 = (x_0, i)$, onde $x_0 \in \Re^n$ e $i \in \mathcal{S}$. Definimos

$$V(X_k, \theta_k) = X_k^T M(\theta_k) X_k \quad ; \quad k \geq 0$$

onde $\{M(\theta_k)\}$ é uma matriz simétrica definida positiva, qualquer que seja o valor assumido por θ_k.

Usando (3.3.13) e a propriedade markoviana, mostraremos que o processo $\{V(X_k, \theta_k) \, : \, k \geq 0\}$ é um supermartingale positivo, com relação à filtragem interna $(\mathcal{F}_n^Z : n \geq 0)$, definida no capítulo 2. Assim

$$E\Big[\, V(X_{k+1}, \theta_{k+1}) \; - \; V(X_k, \theta_k) \mid \mathcal{F}_k^Z \,\Big] \; =$$

$$E\Big[\, X_{k+1}^T M(\theta_{k+1}) X_{k+1} \; - \; X_k^T M(\theta_k) X_k \mid X_k, \theta_k \,\Big] \; =$$

$$E\Big[\, X_{k+1}^T M(\theta_{k+1}) X_{k+1} \mid X_k, \theta_k \,\Big] \; - \; X_k^T M(\theta_k) X_k \; =$$

$$X_k^T \Big\{ \, A^T(\theta_k) E[\, M(\theta_{k+1}) \mid \theta_{k+1} \,] A(\theta_k) \; - \; M(\theta_k) \, \Big\} X_k \; = \; - \, X_k^T N(\theta_k) X_k \; < \; 0$$

sendo importante observar que estas igualdades são válidas $P - q.c.$

Portanto, $\{V(X_k, \theta_k) : k \geq 0\}$ é um supermartingale positivo. Usando a desigualdade de Doob para supermartingales positivos (apêndice C.1), obtemos para qualquer $\epsilon > 0$, que

$$P_{z_0}\left[\sup_{0 \leq t < \infty} \; X_t^T M(\theta_t) X_t \geq \epsilon \right] \; \leq \; \frac{1}{\epsilon} \, E_{z_0}\Big[\, X_0^T M(\theta_0) X_0 \,\Big]$$

$$= \frac{1}{\epsilon}\ x_0^T M_i x_0$$

Como $M(\theta_k)$ é definida positiva, segue que o sistema (1.3.8) é estável com probabilidade 1 (ver definição 1.4.1).

A fim de mostrarmos a estabilidade assintótica com probabilidade 1, utilizaremos uma versão discreta da fórmula de Dynkin (apêndice D.3). Para isto, considere

$$E_{x_0}\,[\ V(X_0,\theta_0)\ -\ V(X_n,\theta_n)]\ =\ x_0^T M_i x_0\ -\ E_{x_0}\left[\ X_n^T M(\theta_n) X_n\right]$$

Agora, somando e subtraindo $X_1^T M(\theta_1) X_1$, na expressão anterior,

$$E_{x_0}\left[\ X_0^T M(\theta_0)X_0\ -\ X_1^T M(\theta_1)X_1\ +\ X_1^T M(\theta_1)X_1\ -\ X_n^T M(\theta_n)X_n\right]$$

usando propriedade da esperança condicional (Neveu, 1965),

$$=\ E_{x_0}\left\{\ X_0^T M(\theta_0)X_0\ -\ E_{x_0}\left[X_1^T M(\theta_1)X_1\right]\ + X_1^T M(\theta_1)X_1\ -\ X_n^T M(\theta_n)X_n\ \right\}$$

usando a equação (3.3.13), chegamos a

$$=\ E_{x_0}\left[\ X_0^T N(\theta_0)X_0 +\ X_1^T M(\theta_1)X_1\ -\ X_n^T M(\theta_n)X_n\ \right]$$

Da mesma forma, somando e subtraindo $X_2^T M(\theta_2)X_2$ na expressão anterior

$$E_{x_0}\left[\ X_0^T N(\theta_0)X_0 + X_1^T M(\theta_1)X_1\ +\ X_2^T M(\theta_2)X_2\ -\right.$$

$$\left. X_2^T M(\theta_2)X_2\ -\ X_n^T M(\theta_n)X_n\ \right]\ =$$

usando propriedade da esperança condicional (Neveu, 1965)

$$E_{x_0}\left\{X_0^T N(\theta_0)X_0\ +\ X_1^T M(\theta_1)X_1 - E_{x_0}\left[X_2^T M(\theta_2)X_2 \mid X_1,\theta_1\right]\ +\ X_2^T M(\theta_2)X_2\ -\ X_n^T M(\theta_n)X_n\right\}$$

pela propriedade markoviana

$$=\ E_{x_0}\left\{X_0^T N(\theta_0)X_0\ +\ X_1^T M(\theta_1)X_1\ -\ E\left[X_2^T M(\theta_2)X_2 \mid X_1,\theta_1\right]\ +\right.$$

$$\left. X_2^T M(\theta_2)X_2\ -\ X_n^T M(\theta_n)X_n\right\}\ =$$

usando a equação (3.3.13), concluí-se

$$E_{x_0}\left[X_0^T N(\theta_0)X_0\ +\ X_1^T N(\theta_1)X_1\ +\ X_2^T M(\theta_2)X_2\ -\ X_n^T M(\theta_n)X_n\right]$$

Assim, por indução chegamos à versão discreta da fórmula de Dynkin.

$$x_0^T M_i x_0 \; - \; E_{x_0}\left[X_n^T M(\theta_n) X_n\right] \; = \; \sum_{k=0}^{n-1} E_{x_0}\left[\, X_k^T N(\theta_k) X_k \,\right]$$

ou melhor

$$x_0^T M_i x_0 \; = \; \sum_{k=0}^{n-1} E_{x_0}\left[\, X_k^T N(\theta_k) X_k \,\right] \; + \; E_{x_0}\left[\, X_n^T M(\theta_n) X_n \,\right]$$

Desde que $M(\theta_k)$ e $N(\theta_k)$ são matrizes definidas positivas qualquer que seja o valor assumido por θ_k, temos

$$\lim_{n\uparrow\infty} \sum_{k=0}^{n-1} E_{x_0}\left[\, X_k^T N(\theta_k) X_k \,\right] \; < \; \infty$$

Agora, pela desigualdade de Tchebychev, para qualquer $\epsilon > 0$, temos

$$P_{x_0}\left[\, X_k^T N(\theta_k) X_k \geq \epsilon \,\right] \; \leq \; \frac{1}{\epsilon} \, E_{x_0}\left[\, X_k^T N(\theta_k) X_k \,\right]$$

Então,

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_{x_0}\left[\, X_k^T N(\theta_k) X_k \; \geq \; \epsilon \,\right] \; \leq$$

$$\frac{1}{\epsilon} \sum_{k=0}^{\infty} E_{x_0}\left[\, X_k^T N(\theta_k) X_k \,\right] \; < \; \infty$$

Assim, pelo lema de Borel-Cantelli (apêndice B.1.1)

$$P_{x_0}\left[\, X_k^T N(\theta_k) X_k \geq \; \epsilon \qquad i.o. \,\right] \; = \; 0 \quad ; \quad \forall \epsilon > 0$$

ou melhor,

$$X_k^T N(\theta_k) X_k \; \stackrel{k\uparrow\infty}{\longrightarrow} \; 0 \quad ; \quad P_{x_0} - q.c.$$

Desde que, $N(\theta_k)$ é definida positiva para qualquer valor de θ_k, temos

$$X_k^T X_k \; \stackrel{k\uparrow\infty}{\longrightarrow} \; 0 \quad ; \quad P_{x_0} - q.c.$$

que mostra a suficiência.

(Necessidade). Suponha o sistema (1.3.8) assintoticamente estável com probabilidade 1. Mostraremos que (3.3.13) é válido, qualquer que seja o estado da Cadeia

$\{\theta_k : k \geq 0\}$. Usando a notação do capítulo 2, considere inicialmente que $z_0 \in \Gamma_i$, com $x_0 \neq 0$ (caso contrário, nada teríamos a demonstrar). Assim, segue do teorema 2.1.1

$$E_{z_0}\left[X_{T_k}^T N_i X_{T_k}\right] \;>\; E_{z_0}\left[X_{T_{k+1}}^T N_i X_{T_{k+1}}\right]$$

independente de k. Portanto

$$\lim_{k\to\infty} \frac{E_{z_0}\left[X_{T_{k+1}}^T N_i X_{T_{k+1}}\right]}{E_{z_0}\left[X_{T_k}^T N_i X_{T_k}\right]} \;<\; 1$$

Conseqüentemente, segue do teorema da razão, ver Rudin (1976, pg 66), que

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} E_{z_0}\left[X_{T_k}^T N_i X_{T_k}\right] \;<\; \infty \tag{3.3.14}$$

Desde que (3.3.14) é válido qualquer que seja o estado i recorrente, segue diretamente do fato de que $\mathcal{S}$ é finito e composto somente por estados recorrentes que

$$\lim_{N\uparrow\infty} \sum_{k=0}^{N} E_{z_0}\left[X_k^T N(\theta_k) X_k\right] \;<\; \infty$$

Desde que, $\{N(j) > 0 : j \in \mathcal{S}\}$, temos

$$\lim_{N\uparrow\infty} \sum_{k=0}^{N} E_{z_0}\left[X_k^T X_k\right] \;<\; \infty$$

Portanto, qualquer que seja $z_0 \in E$, temos

$$\lim_{N\uparrow\infty} \sum_{k=0}^{N} X_k^T X_k \;<\; \infty \quad ; \quad P_{z_0} - q.c. \tag{3.3.15}$$

Com isso, definimos, para qualquer X_k, vetor aleatório n-dimensional, finito ($P_{z_0} - q.c.$) e diferente de zero, a matriz $w[N, \theta_k^N]$, por

$$X_k^T w[N, \theta_k^N] X_k \;\triangleq\; \sum_{t=k}^{N} X_t^T N(\theta_t) X_t$$

onde

$$\theta_k^N = \{(\theta_k, \cdots, \theta_N)\}$$

um vetor aleatório $(N-k)$-dimensional. Desde que, (3.3.15) é válido, definimos

$$X_k^T M(\theta_k) X_k \triangleq \lim_{n\uparrow\infty} X_k^T w[N, \theta_k^N] X_k$$

$$= \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{t=k}^{N} X_t^T N(\theta_t) X_t$$

cujos limites são válidos $P_{z_0} - q.c.$. Mas, como X_k é um vetor aleatório arbitrário, podemos definir

$$M(\theta_k) \triangleq \lim_{N\uparrow\infty} w[N, \theta_k^N] \quad ; \quad P_{z_0} - q.c.$$

Conseqüentemente, $M(\theta_k)$ é uma matriz simétrica e positiva definida qualquer que seja o valor assumido por θ_k, pois $N(\boldsymbol{\theta}_k)$ satisfaz estas condições. Agora,

$$X_k^T w[N, \theta_k^N] X_k \; - \; X_{k+1}^T w[N, \theta_{k+1}^N] X_{k+1} \; = \; X_k^T N(\theta_k) X_K \tag{3.3.16}$$

Tomando o limite $(P_{z_0} - q.c.)$ de ambos os lados de (3.3.16), obtemos

$$X_k^T M(\theta_k) X_k \; - \; X_{k+1}^T M(\boldsymbol{\theta}_{k+1}) X_{k+1} \; = \; X_k^T N(\theta_k) X_k$$

Então, tomando a esperança condicional

$$E\left[X_k^T M(\theta_k) X_k \; - \; X_{k+1}^T M(\boldsymbol{\theta}_{k+1}) X_{k+1} \mid X_k = x, \theta_k = j\right]$$

$$= \; E\left[X_k^T N(\theta_k) X_k \mid X_k = x, \theta_k = j\right]$$

Assim,

$$x^T \left[M_j \; - \; \sum_{l=1}^{r} p_{jl} A_j^T M_l A_j \right] x \; = \; x^T N_j x \tag{3.3.17}$$

Desde que (3.3.17) é válido qualquer que seja o $x \in \Re^n$, temos

$$\sum_{l=1}^{r} p_{jl} A_j^T M_l A_j \; - \; M_j \; = \; -N_j \quad ; \quad \forall j \in \mathcal{S}$$

segue a necessidade. $\square$.

Capítulo 4

Controle de sistemas híbridos com enfoque H^{∞}

Neste capítulo, vamos estudar o problema de controle para a classe de sistemas híbridos definidos na seção 1.3, com enfoque H^{∞}. Aqui, vamos resolver o problema de controle com horizonte finito apresentado na seção 1.3.

A solução deste problema será apresentada em termos de um conjunto de equações interconectadas de Riccati, que são aplicadas "backward" no tempo. Os resultados obtidos aqui são, de alguma forma, a versão discreta no tempo dos resultados apresentados em Souza e Fragoso (1991). Adicionalmente, é importante ressaltarmos que o problema originalmente exposto no capítulo 1 não foi resolvido, nós conseguimos condições suficientes (mas não necessárias) para se resolver o problema de controle H^{∞}.

A fim de facilitar a análise, vamos reapresentar o problema de controle H^{∞} dentro da estrutura estocástica, como foi discutido na seção 1.3.

4.1 Formulação do problema

Dado um espaço de probabilidade completo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, considere a seguinte classe de sistemas dinâmicos variantes no tempo

$$(\Sigma_1) \quad \begin{cases} X_{k+1} = A(k,\theta_k)X_k + B_1(k,\theta_k)w_k + B_2(k,\theta_k)u_k \\ x_0 = 0 \ ; \ \theta_0 = i \ , \ 0 \leq k \leq N-1 \end{cases}$$

com saída controlada

$$z_k = C(k,\theta_k)x_k + D(k,\theta_k)u_k \tag{4.1.1}$$

assumindo a seguinte condição de ortogonalidade

$$D^T(k,\theta_k)\,[\ C(k,\theta_k) \quad D(k,\theta_k)\ ] = [\ 0 \quad R(k,\theta_k)\ ] \tag{4.1.2}$$

$$R(k,\theta_k) = R^T(k,\theta_k) > 0 \tag{4.1.3}$$

onde X_k é um vetor aleatório n-dimensional, $\{w_k\} \in l_2[0, N-1]$, o espaço das seqüências quadrado somáveis sobre o $[0, N-1]$ e $\{u_k\}$ é uma seqüência de funções controle m-dimensionais. Da mesma forma, $\{\theta_k\}$ é uma cadeia de Markov com probabilidades de transição estacionárias, assumindo valores em um espaço de estados finito $\mathcal{S}$.

Assumiremos que $\{X_k\}$ e $\{\theta_k\}$ são totalmente acessíveis ao controlador. Assim, usando a propriedade markoviana do processo conjunto $\{(X_k, \theta_k) : k \geq 0\}$ definimos a seguinte política de controle com realimentação markoviana

$$u_k = u(x_k, \theta_k) \tag{4.1.4}$$

A fim de colocar a problema de controle H^∞ dentro de uma estrutura estocástica vamos definir o espaço $l_2\ (\ [\Omega, \mathcal{F}, P], [0, N-1]\ )$ das seqüências z_k, tais que

$$\| z \|_2 = \left\{ E\left[\sum_{k=0}^{N-1} z_k^T z_k \right] \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Entretanto, usaremos a mesma notação $\| \cdot \|_2$ para a norma em $l_2[0, N-1]$ ou $l_2\ (\ [\Omega, \mathcal{F}, P], [0.N-1]\ )$, quando no contexto estiver claro a qual espaço estamos referindo.

Aqui, vamos estudar o problema de controle H^∞ com realimentação de estados para o sistema (Σ_1), considerando-se o problema de desenvolver uma lei de controle com realimentação de estados

$$u(k, \theta_k, x_k) = -L(k, \theta_k) x_k \tag{4.1.5}$$

tal que para todo $w \in l_2[0, N-1]$, $w \neq 0$,

$$\| z \|_2 \leq \gamma \| w \|_2,$$

onde $\{z_k\}$ é a saída controlada definida por (4.1.1) e $\gamma > 0$ é o nível pré-determinado de atenuação de distúrbios.

4.2 Controle H^∞

Nesta seção, apresentaremos o resultado que resolve o problema de controle H^∞ com realimentação de estados para a classe de sistemas markovianos com saltos no parâmetros descrito na seção anterior.

Seguindo recentes resultados sobre controle H^∞ para sistemas variantes no tempo sem saltos nos parâmetros, o desenvolvimento usado aqui é baseado em equações matriciais do tipo de Riccati a tempo discreto. A principal diferença é que nossa solução ao problema de controle é apresentada em termos de um conjunto de equações interconectadas, ao invés de uma equação de Riccati, como é o caso de controle H^∞ no contexto de sistemas lineares variantes no tempo sem saltos nos parâmetros. A seguir apresentaremos o resultado principal deste capítulo.

TEOREMA 4.2.1 *Considere o sistema* (Σ_1), *com saída controlada (4.1.1), e* $\gamma > 0$ *o nível pré-determinado de atenuação de distúrbios. Então, existe um controlador com realimentação de estados tal que*

$$\| z \|_2 \leq \gamma \| w \|_2,$$

para todo $w \in l_2[0, N-1]$, $w \neq 0$, *desde que* $\{\Sigma_j(i) : i \in \mathcal{S}\}$ *sejam matrizes simétricas* $(n \times n)$ *satisfazendo o seguinte conjunto de equações de Riccati discretas, computadas "backward" no tempo, com* $\Sigma_N(i) = 0 \; : \; i \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}
\Sigma_j(i) \;&=\; C^T(j,i)C(j,i) \;+\; A^T(j,i)E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})]A(j,i) \\
&+ A^T(j,i)E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})]B_1(j,i)[\gamma^2 I - B_1^T(j,i)E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})]B_1(j,i)]^{-1} \\
&\quad B_1^T(j,i)E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})]A(j,i) \\
&- \Big\{A^T(j,i)E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})]B_1(j,i)[\gamma^2 I - B_1^T(j,i)E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})]B_1(j,i)]^{-1} \\
&\quad B_1^T(j,i)E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})]B_2(j,i) \\
&+ A^T(j,i)E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})]B_2(j,i)\Big\} \; H^{-1}(j,i) \; \Big\{B_2^T(j,i)E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})]A(j,i) \\
&+ B_2^T(j,i)E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})]B_1(j,i)[\gamma^2 I - B_1^T(j,i)E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})]B_1(j,i)]^{-1} \\
&\quad . \; B_1^T(j,i)E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})]A(j,i)\Big\}
\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

com

$$\gamma^2 I - B_1^T(j,i)E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})]B_1(j,i) \; > \; 0 \tag{4.2.7}$$

para todo $i \in \mathcal{S}$ *e* $j = 0, 1, \cdots, N-1$. *Além disso, a lei de controle é dada por*

$$\begin{aligned}
u_j^*(x_j, i) \;&=\; - \; H^{-1}(j,i) \; \{B_2^T(j,i)E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})]A(j,i) \\
&+ B_2^T(j,i)E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})]B_1(j,i)[\gamma^2 I - B_1^T(j,i)E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})]B_1(j,i)]^{-1} \\
&\quad . \; B_1^T(j,i)E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})]A(j,i)\}x_j,
\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

com

$$H(j,i) = R(j,i) + B_2^T(j,i)E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})]B_2(j,i)$$

$$+ B_2^T(j,i)E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})]B_1(j,i)[\gamma^2 I - B_1^T(j,i)E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})]B_1(j,i)]^{-1}$$

$$. \; B_1^T(j,i)E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})]B_2(j,i)$$

onde

$$E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})] = \sum_{l=1}^{r} \Sigma_{j+1}(l)p_{il}$$

e p_{il} é a probabilidade de transição em uma etapa do estado i ($\theta_j = i$) para o estado l.

PROVA: Começamos definindo o seguinte funcional

$$J(u) = E\left[\sum_{j=0}^{N-1} z_j^T z_j - \gamma^2 w_j^T w_j\right] \tag{4.2.9}$$

A prova está sedimentada em mostrarmos que $J(u^*) \leq 0$, onde $u^*(\cdot)$ é dado pela equação (4.2.8)

Assim, definimos o somatório

$$E\left[\sum_{j=0}^{N-1} X_{j+1}^T \Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})X_{j+1} - X_j^T \Sigma_j(\theta_j)X_j\right]$$

note que este é identicamente nulo, desde que $\Sigma_N(\cdot) = 0$ e $x_0 = 0$. Adicionando estes termos ao $J(u)$, obtemos

$$J(u) = E\left\{\sum_{j=0}^{N-1} z_j^T z_j + X_{j+1}^T \Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})X_{j+1} - X_j^T \Sigma_j(\theta_j)X_j - \gamma^2 w_j^T w_j\right\}$$

Agora, fixando uma política de controle arbitrária markoviana com realimentação $u_j(x_j, \theta_j)$ e considerando, via (Σ_1) a correspondente seqüência $\{x_j\}$, temos

$$J(u) = E\{\sum_{j=0}^{N-1} E\left[z_j^T z_j + X_{j+1}\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})X_{j+1}\right.$$

$$\left. - x_j^T \Sigma_j(\theta_j)x_j - \gamma^2 w_j^T w_j \mid x_j, \theta_j \right]\}$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} z_j^T z_j + E\left[X_{j+1}^T \Sigma_{j+1}(\theta_{j+1}) X_{j+1}\right]$$

$$- \; x_j^T \Sigma_j(\theta_j) x_j - \gamma^2 w_j^T w_j$$

Usando (Σ_1), (4.1.1) e (4.1.2), obtemos

$$J(u) = \sum_{j=0}^{N-1} x_j^T \left[C^T(j,\theta_j)C(j,\theta_j) - \Sigma_j(\theta_j)\right] x_j$$

$$+ \; u_j^T R(j,\theta_j) u_j + \left[w_j^T B_1^T(j,\theta_j) + u_j^T B_2^T(j,\theta_j)\right.$$

$$\left. + \; x_j^T A^T(j,\theta_j)\right] E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right]\left[A(j,\theta_j)x_j\right.$$

$$\left. + \; B_2(j,\theta_j)u_j + B_1(j,\theta_j)w_j\right] - \gamma^2 w_j^T w_j$$

ou

$$J(u) = \sum_{j=0}^{N-1} x_j^T \left\{C^T(j,\theta_j)C(j,\theta_j) - \Sigma_j(\theta_j) + A^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right]A(j,\theta_j)\right\} x_j$$

$$+ \; u_j^T \left\{R(j,\theta_j) + B_2^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right]B_2(j,\theta_j)\right\} u_j$$

$$+ \; w_j^T \left\{B_1^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right]B_1(j,\theta_j) - \gamma^2 I\right\} w_j$$

$$+ \; u_j^T B_2^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right]A(j,\theta_j)x_j + x_j^T A^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right]B_2(j,\theta_j)u_j$$

$$+ w_j^T B_1^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right]A(j,\theta_j)x_j + x_j^T A^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right]B_1(j,\theta_j)w_j$$

$$+ \; w_j^T B_1^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right]B_2(j,\theta_j) + u_j^T B_2^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right]B_1(j,\theta_j)w_j$$

ou ainda

$$J(u) = \sum_{j=0}^{N-1} x_j \left\{C^T(j,\theta_j)C(j,\theta_j) - \Sigma_j(\theta_j) + A^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1}\right] A(j,\theta_j)\right\} x_j$$

$$+ \; u_j^T \left\{R(j,\theta_j) + B_2^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right] B_2(j,\theta_j)\right\} u_j$$

$$+ \; u_j^T B_2^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right] A(j,\theta_j)x_j \; + \; x_j^T A^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right] B_2(j,\theta_j)u_j$$

$$- \; w_j^T \left\{\gamma^2 I - B_1^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right] B_1(j,\theta_j)\right\} w_j$$

$$w_j^T \left\{B_1^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right] A(j,\theta_j)x_j \; + \; B_1^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right] B_2(j,\theta_j)u_j\right.$$

$$\left. + \; x_j^T A^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right] B_1(j,\theta_j) \; + \; u_j^T B_2(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1}\right] B_1(j,\theta_j)\right\} w_j$$

A fim de simplificarmos a notação, definimos

$$Q_j(\theta_j, x_j, u_j) \triangleq B_1^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right] A(j,\theta_j)x_j$$

$$+ \; B_1^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1}\right] B_2(j,\theta_j)u_j \tag{4.2.10}$$

$$\Delta_j(\theta_j) \triangleq \gamma^2 I - B_1^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right] B_1(j,\theta_j) > 0 \tag{4.2.11}$$

$$\Gamma_j(\theta_j, x_j, u_j) \triangleq \Delta_j(\theta_j)^{-1} Q_j(\theta_j, x_j, u_j) \tag{4.2.12}$$

Então

$$J(u) = \sum_{j=0}^{N-1} x_j^T \left\{C^T(j,\theta_j)C(j,\theta_j) - \Sigma_j(\theta_j) + A^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right] A(j,\theta_j)\right\} x_j$$

$$+ \; u_j \left\{R(j,\theta_j) + B_2(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right] B_2(j,\theta_j)\right\} u_j$$

$$+ \; u_j^T B_2^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right] A(j,\theta_j)x_j \; + \; x_j^T A^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right] B_2(j,\theta_j)u_j$$

$$- \quad [w_j - \Gamma_j(\theta_j, x_j, u_j)]^T \Delta_j(\theta_j)[w_j - \Gamma_j(\theta_j, x_j, u_j)]$$

$$+ \quad Q_j(\theta_j, x_j, u_j)\delta_j^{-1}(\theta_j)Q_j(\theta_j, x_j, u_j)$$

Agora, levando em conta a definição de $Q_j(\cdot)$ em (4.2.10) e denotando $Q_j \triangleq Q_j(\theta_j, x_j, u_j)$ para facilitar a notação, temos

$$Q_j^T \Delta^{-1}(\theta_j) Q_j = x_j^T A^T(j, \theta_j) E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})] B_1(j,\theta_j)\Delta_j^{-1}(\theta_j) B_1(j,\theta_j) E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1}]$$

$$\cdot A(j,\theta_j)x_j + u_j^T B_2^T(j,\theta_j) E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1}] B_1(j,\theta_j)\Delta_j^{-1}(\theta_j)$$

$$\cdot B_1^T(j,\theta_j) E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1}] B_2(j,\theta_j)u_j + x_j^T A^T(j,\theta_j)$$

$$\cdot E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})] B_1(j,\theta_j)\Delta_j^{-1}(\theta_j) B_1^T(j,\theta_j) E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})] B_2(j,\theta_j)u_j$$

$$+ u_j^T B_2^T(j,\theta_j) E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})] B_1(j,\theta_j)\Delta_j^{-1}(\theta_j) B_1^T(j,\theta_j)$$

$$E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})] A(j,\theta_j)x_j \tag{4.2.13}$$

Substituindo (4.2.13) em (4.2.12) e rearranjando os termos, chegamos a

$$J(u) = \sum_{j=0}^{N-1} x_j^T \Big\{ C^T(j,\theta_j)C(j,\theta_j) - \Sigma_j(\theta_j) + A^T(j,\theta_j) E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})] A(j,\theta_j)$$

$$+ A^T(j,\theta_j) E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})] B_1(j,\theta_j)\Delta_j^{-1}(\theta_j) B_1^T(j,\theta_j) E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})] A(j,\theta_j)\Big\} x_j$$

$$+ u_j^T \Big\{ R(j,\theta_j) + B_2^T(j,\theta_j) E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})] B_2(j,\theta_j) + B_2^T(j,\theta_j) E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1}] B_1(j,\theta_j)$$

$$\cdot \Delta_j^{-1}(\theta_j) B_1^T(j,\theta_j) E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})] B_2(j,\theta_j)\Big\} u_j$$

$$+ u_j^T \Big\{ B_2^T(j,\theta_j) E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})] A(j,\theta_j) + B_2^T(j,\theta_j) E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})] B_1(j,\theta_j)$$

$$\cdot\ \Delta_j^{-1}(\theta_j)B_1(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right]A(j,\theta_j)\Big\}\,x_j$$

$$+\ x_j^T\Big\{A^T(j,\theta_j)E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})]B_2(j,\theta_j)\ +\ A^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right]B_1(j,\theta_j)$$

$$\cdot\ \Delta_j^{-1}(\theta_j)B_1^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right]B_2(j,\theta_j)\Big\}\,x_j$$

$$-\ \left[w_j\ -\ \Gamma_j(\theta_j,x_j,u_j)\right]^T\Delta_j^{-1}(\theta_j)\left[w_j\ -\ \Gamma_j(\theta_j,x_j,u_j)\right]$$

ou melhor,

$$J(u)\ =\ \sum_{j=0}^{N-1}\ x_j^T\Big\{C^T(j,\theta_j)C(j,\theta_j)\ -\ \Sigma_j(\theta_j)\ +\ A^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right]A(j,\theta_j)$$

$$+\ A^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right]B_1(j,\theta_j)\Delta_j^{-1}(\theta_j)B_1^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right]A(j,\theta_j)\Big\}\,x_j$$

$$+\ \Big[u_j\ +\ H_j^{-1}(\theta_j)L_j(\theta_j)x_j\Big]^T H_j(\theta_j)\Big[u_j\ +\ H_j^{-1}(\theta_j)L_j(\theta_j)x_j\Big]$$

$$-\ \left[w_j\ -\ \Gamma_j(\theta_j,x_j,u_j)\right]^T\Delta_j(\theta_j)\left[w_j\ -\ \Gamma_j(\theta_j,x_j,u_j)\right]$$

$$-\ x_j^TL_j^T(\theta_j)H_j^{-1}(\theta_j)L_j(\theta_j)x_j \tag{4.2.14}$$

onde,

$$H_j(\theta_j)\ \triangleq\ R(j,\theta_j)\ +\ B_2^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right]B_2(j,\theta_j)$$

$$+\ B_2^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right]B_1(j,\theta_j)\Delta_j^{-1}(\theta_j)B_1^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right]B_2(j,\theta_j) \tag{4.2.15}$$

$$L_j(\theta_j)\ \triangleq\ B_2^T(j,\theta_j)E[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})]B_1(j,\theta_j)\Delta_j^{-1}(\theta_j)B_1^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right]A(j,\theta_j)$$

$$+\ B_2^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right]A(j,\theta_j). \tag{4.2.16}$$

Novamente, rearrajando os termos em (4.2.14) obtemos

$$J(u) = \sum_{j=0}^{N-1} x_j^T \Big\{ C^T(j,\theta_j)C(j,\theta_j) - \Sigma_j(\theta_j) + A^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right]A(j,\theta_j)$$

$$+ A^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right]B_1(j,\theta_j)\Delta_j^{-1}(\theta_j)B_1^T(j,\theta_j)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right]A(j,\theta_j)$$

$$- L_j^T(\theta_j)H_j^{-1}(\theta_j)L_j(\theta_j)\Big\} x_j$$

$$+ \left[u_j + H_j^{-1}(\theta_j)L_j(\theta_j x_j\right]^T H_j(\theta_j)\left[u_j + H_j^{-1}(\theta_j)L_j(\theta_j)x_j\right]$$

$$- \left[w_j - \Gamma_j(\theta_j,x_j,u_j)\right]^T \Delta_j(\theta_j)\left[w_j - \Gamma_j(\theta_j,x_j,u_j)\right]. \qquad (4.2.17)$$

Agora, através de (4.2.11) e (4.2.12), levando em conta (4.2.16) e (4.2.17), e assumindo que $\theta_j = i$, concluímos que

$$J(u^\star) = -\sum_{j=0}^{N-1} \left[w_j - \Gamma_j(\theta_j,x_j,u_j)\right]^T \Delta_j(\theta_j)\left[w_j - \Gamma_j(\theta_j,x_j,u_j)\right]$$

$$\leq 0$$

e segue o resultado. □

A seguir apresentaremos algumas conclusões e observações relacionadas ao resultado obtido.

Observação 1 : Note que quando $\gamma \to \infty$ a equação (4.2.6) torna-se

$$\Sigma_j(i) = C^T(j,i)C(j,i) + A^T(j,i)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right]A(j,i)$$

$$- A^T(j,i)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right]B_2(j,i)M^{-1}(j,i)B_2^T(j,i)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right[A(j,i)$$

com

$$M(j,i) = R(j,i) + B_2^T(j,i)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right]B_2(j,i)$$

e a política controle, equação (4.2.8), torna-se

$$u^\star(x_j,i) = -M^{-1}(j,i)B_2^T(j,i)E\left[\Sigma_{j+1}(\theta_{j+1})\right]A(j,i)x_j,$$

que é um conjunto de equações interconectadas de Riccati e a política de controle, respectivamente, para o problema de controle Linear Quadrático Gaussiano com Saltos (JLQG), como em Fragoso (1989).

Observação 2 : Outro aspecto importante a salientar é a comparação entre este modelo estocástico e o determinístico, que foi estudado por Stoovorgel (1990). Se a cadeia fosse composta por apenas um estado, tornando o sistema determinístico, a equação (4.2.6) e (4.2.8) corresponde a solução do problema determinístico estudado em Stoovorgel (1990)

Observação 3 : Nossa última observação é sobre a equação (4.2.7), esta condição está relacionada ao problema de convexidade e também ocorre no caso determinístico (Stoovorgel 1990).

Capítulo 5

Conclusões

Aqui vamos fazer um apanhado geral sobre os principais resultados obtidos, juntamente com uma discusão sobre perspectivas futuras de trabalho e problemas em aberto.

Nesta dissertação, trabalhamos basicamente dois problemas distintos, controle H^∞ e estabilidade estocástica com probabilidade 1, para a classe de sistemas lineares a tempo discreto com saltos Markovianos. Nossa idéia inicial era conectar a estabilidade estocástica ao problema de controle H^∞, mas por falta de tempo isto não foi possível.

Estabilidade estocástica é um ramo da teoria de processos estocásticos que foi extensivamente estudado nas últimas décadas. Seu desenvolvimento, em grande parte, ocorreu devido ao avanço do cálculo estocástico de Ito e das equações diferenciais estocásticas (Has'minskii, 1980) . No início, grande parte dos autores trabalhavam com conceitos envolvendo valores esperados do processo. Mas, por motivos evidenciados no capítulo 1, a estabilidade estocástica no sentido quase certamente tem interpretações e mesmo aplicações práticas bem mais razoáveis que os conceitos envolvendo valores esperados do processo, que são restritivos.

A definição de estabilidade estocástica que utilizamos foi baseada em Kushner (1967) e tem como objetivo estender os conceito introduzidos por Lyapunov (1907) no caso determinístico. Com relação a esta definição, encontramos um teste computacional para verificar a estabilidade estocástica com probabilidade 1. Para nossa surpresa acabamos verificando a equivalência desta definição com diversos tipos distintos de estabilidade estocástica para a classe MLSM.

Uma extensão natural do nosso resultado sobre estabilidade estocástica, é a obtenção do análogo para sistemas contínuos no tempo. Fora isso, existe uma série de problemas em aberto na literatura de estabilidade estocástica. Por exemplo, as retrições no espaço de estados da Cadeia de Markov (finito e recorrente) podem ou não serem retirados ? Generalizações desta definição de estabilidade devem ser estudadas. Nós consideramos z_0 (fixo) não aleatório como condição inicial. Suponha que ao invés disso considerássemos uma probabilidade μ_0 inicial, como ficaria nosso resultado sobre estabilidade estocástica ? Estes são alguns problemas imediatos em estabilidade estocástica que estamos estudando.

No contexto de controle, técnicas sobre H^∞ foram utilizadas a fim de que pudéssemos resolver o problema de controle para a classe MLSM introduzida no capítulo 1. Apesar deste problema estar bem colocado e a forma com que a incerteza foi modelada representar inovações à teoria, existem alguns problemas sobre interpretações com relação ao controle H^∞ determinístico. Por exemplo, a norma da matriz de transferência em malha fechada do sistema MLSM não está bem definida, devido a sua estrutura estocástica, mais ainda, não podemos dizer que se

$$\| z \|_2 \leq \gamma \| w \|_2$$

então a norma da matriz de transferência em malha fechada seja menor ou igual à γ, isto é,

$$\| H \|_\infty \leq \gamma$$

pois z e w têm horizontes finitos e na definição original $z \in l_2([\Omega, \mathcal{F}, P]; [0, N-1])$ e $w \in l_2[0, N-1]$. Mas, como já dissemos, este problema com horizonte finito estabelece mais facilmente a estrutura da solução e todas as equações e fórmulas sem as complicações adicionais associadas à estabilidade interna, que é essencial para o problema de controle com horizonte infinito. Esperamos resolver o problema com horizonte infinito no futuro próximo e desta forma unir os dois problemas tratados aqui.

A teoria de controle H^∞ teve uma evolução muito grande nos últimos anos. Este tipo de abordagem tem sido encaixada em diversos ramos tradicionais da teoria de sistemas. Na teoria de filtragem também têm se embutida idéias sobre H^∞. Mas, aqui gostaríamos de discutir rapidamente o problema de observações parciais e expor estas idéias para a classe de MLSM.

Uma das suposições marcantes desta dissertação é que o processo $Z = \{(X_k, \theta_k) : k \geq 0\}$ é totalmente acessível ao controlador, isto é, Z_k é precisamente avaliado no instante k. Agora, suponha que $\{X_k : k \geq 0\}$ é precisamente avaliado, mas $\{\theta_k : k \geq 0\}$ não é completamente observado. Se nenhuma informação sobre a cadeia de Markov $\{\theta_k : k \geq 0\}$ for utilizada, a análise do processo Z torna-se extremamente complicada, pois Z perde a estrutura markoviana e podemos observar que todos os resultados obtidos nesta dissertação estão ligados à estrutura markoviana. Mas, se alguma informação sobre $\{\theta_k : k \geq 0\}$ for utilizada, por exemplo, se tivermos informações sobre os instantes de saltos da Cadeia de Markov, isto é, os instantes entre as mudanças de estados (sem conhecermos qual é o estado), podemos definir um processo de contagem associado e assim recuperarmos a estrutura markoviana. Desta forma, podemos estudar o problema de controle H^∞ para a classe MLSM, considerando-se observações parcias na Cadeia de Markov $\{\theta_k : k \geq 0\}$. Este tipo de abordagem com observações parciais constituem problemas em aberto, tanto para sistemas lineares a tempo discreto quanto contínuo. Várias outras questões interessantes tiveram que ser proteladas. Nesse sentido, acreditamos que esse primeiro trabalho abre um vasto leque de opções para pesquisas futuras. Por exemplo :

a) A parte relativa a *necessidade*, cuja abordagem deve utilizar a "teoria de jogos estocásticos"

b) O problema de filtragem H^∞
c) O problema de controle H^∞ com realimentação de saída
d) Observações parciais
e) Aspectos numéricos, etc.

Apêndice A

Espaços de funções

Nesta seção, vamos derivar alguns resultados básicos sobre espaços funcionais, que facilitarão o leitor no aprendizado das técnicas sobre controle H^{∞}. Assim, faremos uma rápida introdução aos espaços de Banach e Hilbert, cujos resultados e difinições serão úteis na caracterização das funções sobre os espaços de Hardy.

A.1 Espaços de Hilbert e Banach

Seja X um espaço linear sobre o corpo dos números complexos C. O espaço X é denominado de espaço normado se a cada $x \in X$ existe um número real $\| x \|$ associado, denominado de norma de x, satisfazendo

a- $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \| \;\; ; \;\; x, y \in X$
b- $\| ax \| = |a| \, \| x \| \;\; ; \;\; x \in X \text{ e } a \in C$
c- $\| x \| = 0 \;\; \leftrightarrow \;\; x = 0 \;\; ; \;\; x \in X$

Através da norma podemos definir uma métrica, basta observar que $d(x, y) = \| x - y \| \; ; \; x, y \in X$. Conseqüentemente, pode-se falar sobre convergência em X.

DEFINIÇÃO A.1.1 *Uma seqüência $(x_n)_{n \geq 1}$ em X converge para um elemento $x \in X$ se a seqüência de números reais $\| x_k - x \|$ converge para zero, ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe $n(\epsilon) \in I\!N$, tal que para todo $n \geq n(\epsilon)$, temos que*

$$\| x_n - x \| < \epsilon \tag{1.1.1}$$

Um importante conceito da análise matemática é o de seqüência de Cauchy. Pois, apesar de falar sobre convergência de seqüências em X, este nada diz sobre seu ponto limite.

DEFINIÇÃO A.1.2 *Uma seqüência $(x_n)_{n \geq 1}$ em X é de Cauchy se, para todo $\epsilon > 0$, existe $n(\epsilon) \in I\!N$, tal que para todo $n, m \geq n(\epsilon)$, temos que*

$$\| x_n - x_m \| < \epsilon \qquad (1.1.2)$$

Pode-se observar que toda seqüência convergente é de Cauchy, mas a recíproca não vale.

DEFINIÇÃO A.1.3 *Um espaço X é completo se toda seqüência de Cauchy é convergente para um elemento $x \in X$. Um espaço linear normado completo é denominado de espaço de Banach.*

Seja H um espaço linear sobre o corpo dos números complexos. Dizemos que H é um espaço com produto interno se, para cada par ordenado $x, y \in H$ existe um número complexo $< x, y >$, que é denominado de produto interno, satisfazendo, para todo $x, y, z \in H$ e $\alpha \in C$ um escalar, os seguintes axiomas.

a- $< x, y > = < y, x >^*$ (onde o símbolo $\star$ denota o conjugado complexo).
b- $< x + y, z > = < x, z > + < y, z >$
c - $< \alpha x, y > = \alpha < x, y >$
d- $< x, x > \geq 0$
e- $< x, x > = 0 \leftrightarrow x - 0$

Estes axiomas têm uma série de conseqüências imediatas. O axioma (c) implica que $< 0, y >= 0$; $\forall y \in H$, (b) e (c) combinados implica que a transformação

$$x \longrightarrow < x, y >$$

é um funcional linear.

Segue-se de (a) e (c), que

$$< x, \alpha y > = \alpha^* < x, y >$$

e (a) e (d) implicam que o produto interno é bilinear, ou seja,

$$< x, y + z > = < x, y > + < x, z >$$

Do axioma (d) e (c), podemos definir uma norma sobre H, induzida pelo produto interno, a norma é a raiz quadrada, não negativa, de $< x, x >$. Portanto,

$$\| x \|^2 = < x, x >$$

PROPOSIÇÃO A.1.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwartz) *Segue-se que,*

$$| < x, y > | \leq \| x \| \, \| y \|$$

para todo $x, y \in H$

PROPOSIÇÃO A.1.2 (Desigualdade triangular) *Temos que,*

$$\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$$

para todo $x, y \in H$

Segue das proposições A.1.1 e A.1.2 que esta norma está bem definida. Portanto, pode-se questionar H sobre convergência e completitude. Um espaço linear com produto interno e completo (com relação à definição A.1.2) é denominado espaço de Hilbert.

Dois elementos $x, y \in H$ são ortogonais se $< x, y >= 0$. Dizemos que S é um subespaço de H se,

$$\forall x, y \in S \ , \ x + y \in S \ \ e \ \ \alpha x \in S \ \ ; \ \ \forall \alpha \in C$$

O subespaço S é fechado se toda seqüência em S que converge em H tem seu limite em S. Se S é um subespaço de H, $S^{\perp}$ é o conjunto de todos os elementos de H que são ortogonais à todos os elementos de S, pode-se mostrar que $S^{\perp}$ é um subespaço fechado, para qualquer subespaço S. Agora se S é fechado, então $S^{\perp}$ é denominado complemento ortogonal de S. Temos que,

$H = S \bigotimes S^{\perp}$

Isto significa que todo elemento em H pode ser escrito unicamente como a soma de um elemento em $S^{\perp}$ e um em S.

Uma transformação $f : H_1 \longrightarrow H_2$, que preserva a norma (ou a métrica), isto é, $\| f(x) \|_{H_2} = \| x \|_{H_1}$, é denominada isométrica.

Informalmente falando, dizemos que dois sistemas são isomórfos se existe uma transformação linear um a um , entre estes, que preservam propriedades relevantes. Por exemplo, se X e Y são dois espaços lineares, então, estes são isomórfos se existe uma transformação linear um a um entre estes, pois as transformações lineares preservam propriedades importantes para espaços lineares, como adição e multiplicação por um escalar.

Agora, se H_1 e H_2 são espaços de Hilbert, dizemos que estes são isomórficos se existe uma transformação linear Λ de H_1 em H_2 que é um a um e preserva o produto interno, ou seja, $< \Lambda(x), \Lambda(y) >_{H_2} = < x, y >_{H_1}$ para todo $x, y \in H_1$. Tal transformação é denominada isomorfismo de H_1 em H_2, ou mais especificamente, um isomorfismo de Hilbert (Hilbert space isomorphism) de H_1 em H_2.

Existem vários exemplos de espaços de Banach e Hilbert. Um dos mais clássico exemplos de espaço de Hilbert é o espaço C^n, este, consiste de vetores complexos n dimensionais, cujo produto interno é definido por

$$< x, y > = x^{\star} y \tag{1.1.3}$$

onde x e y são vetores coluna e $\star$ denota a transposta conjugada.

Neste apêndice, vamos trabalhar com espaços de Banach e Hilbert infinito dimensionais, ou seja, espaços de funções.

A.2 Sinais no domínio do tempo

Considere um sinal $x(t)$ definido para todo $t \in \Re$, tomando valores em C^n, ou seja

$$x \; : \; (-\infty, \infty) \longrightarrow C^n$$

Restringiremos x ao espaço das funções (Lebesgue) quadrado integráveis, denotado $L_2(-\infty, \infty)$, isto é, o conjunto das funções x, satisfazendo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \| x(t) \|^2 \, dt \; < \; \infty \tag{1.2.4}$$

Onde a norma em (1.2.4) é a mesma, definida anteriormente, para o C^n. A raiz quadrado da expressão (1.2.4) define uma norma sobre o $L_2(-\infty, \infty)$, que é completo com relação a esta norma. Sobre este pode-se definir um produto interno,

$$< x, y > \; = \; \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^{\star} y(t) dt \quad ; \quad \forall x, y \in L_2(-\infty, \infty)$$

que o torna um espaço de Hilbert. Pode-se observar que a norma (1.2.4) provém deste produto interno.

O conjunto de todos os sinais em $L_2(-\infty, \infty)$ que são iguais a zero para quase todo $t < 0$ (ou seja, exceto, possivelmente, para um conjunto de medida de Lebesgue nula) é um subespaço fechado, denotado por $L_2[0, \infty)$. Seu complemento ortogonal, o conjunto de todos os sinais no $L_2(-\infty, \infty)$ que são iguais a zero para quase todo $t > 0$, será denotado por $L_2(-\infty, 0]$.

A.3 Sinais no domínio da freqüência e os espaços de Hardy

Considere uma função $x(jw)$ que é definida para toda freqüência $w \in \Re$, tomando valores em C^n, que é (Lebesgue) quadrado integrável com respeito à w. O conjunto de tais funções denotado por L^2 é um espaço de Hilbert, com produto interno

$$< x, y > \; = \; \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(jw)^{\star} y(jw) dw \quad ; \quad \forall x, y \in L^2$$

Para um estudo mais aprofundado de sinais no domínio da freqüência, faz-se necessário estudarmos algumas propriedades dos espaços de Hardy, que nos restringiremos aos espaços H^2 e H^{∞}. Dentro do contexto geral de análise complexa, vamos trabalhar com um subconjunto destas funções, pois às restringiremos à um subplano, com uma condição de integrabilidade uniforme, ver Rudin (1987) para definições gerais e referências especializadas.

O espaço das funções analíticas (ou, holomórficas) sobre o semiplano direito

$$D' \; = \; \{ z = x + jw \; : \; x > 0 \}$$

satisfazendo a seguinte condição de integrabilidade quadrática uniforme

$$\left[\sup_{x>0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \| f(x+jw) \| dw \right]^{\frac{1}{2}} < \infty \tag{1.3.5}$$

será denominado de H^2 e (1.3.5) sua norma, denotada por $\| f \|_{H^2}$.

Pode-se mostrar que o H^2, com esta norma, é um espaço de Banach. As funções sobre o H^2 não estão definidas, a priori, sobre o eixo imaginário, mas podemos obte-las via o limite.

TEOREMA A.3.1 *Se $f \in H^2$, então para quase todo w, o limite*

$$g(jw) = \lim_{x \to 0} f(x+jw) \tag{1.3.6}$$

existe e $f \in L^2$.

Então, podemos definir as funções no H^2 sobre o eixo imaginário por continuidade. Pode-se mostrar que, a transformação $f \to g$ é linear, injetora e preserva a norma. Então, podemos interpretar o H^2 como um subespaço fechado do espaço de Hilbert L^2.

Da mesma forma, definiremos o complemento ortogonal $H^{2\perp}$ do H^2, como o espaço das funções $f(z)$ analíticas no semiplano aberto esquerdo ($Re(z) < 0$), com $f(z)$ tomando valores em C^n e satisfazendo

$$\sup_{x<0} \int_{-\infty}^{\infty} \| f(x+jw) \| dw < \infty$$

onde a norma, na expressão anterior é mesma definida, na seção anterior para o C^n. O teorema A.3.1 pode ser aplicado para as funções no $H^{2\perp}$ e conseqüentemente, interpreta-se o $H^{2\perp}$ como um subespaço fechado do espaço de Hilbert L^2.

Definiremos o espaço H_1^{∞}, consistindo de todas as funções complexas $F(z)$, na variável complexa z, que são analíticas e limitadas sobre o semiplano aberto direito D'. Limitada, significa que existe um número real b, tal que

$$| F(z) | \leq b \ ; \ Re(z) > 0$$

o menor dos limitantes b, é denominado de norma H_1^{∞} de F, denotado por $\| F \|_{\infty}$. Ou seja

$$\| F \|_{\infty} = \sup_{z} \{ \ | F(z) | : \ Re(z) > 0 \ \}$$

Agora, segue do teorema do módulo máximo (Duren 1970) que podemos trocar o semiplano aberto direito pelo eixo imaginário, ou ainda

$$\| F \|_{\infty} = \sup_{w} \{ \ | F(jw) | : \ w \in \Re \ \}$$

desta forma podemos interpretar a norma H^{∞} como sendo a maior distância da origem ao gráfico de nyquist.

Denotaremos por L_1^{∞} o espaço das funções $F(jw)$ que são essencialmente limitadas (ver Royden, pg 111), ou seja, limitadas, exceto, possivelmente, sobre um conjunto de medida de Lebesgue nula. Então,

$$\| F \|_{\infty} = ess\sup_{w} \mid F(jw) \mid = inf\{b \; : \; m(\mid F(jw) \mid > b) = 0 \; \}$$

Observe que não fizemos distinção, na notação, entre as normas H_1^{∞} e L_1^{∞}, pois do teorema do módulo máximo, concluí-se que o H_1^{∞}, para funções estritamente próprias, é um subespaço fechado do L_1^{∞}.

A.4 Conexões

Esta seção contém alguns resultados básicos que relacionam os espaços funcionais introduzidos anteriormente. Primeiro, o teorema de Paley Wiener e Plancherel conecta os espaços de Hilbert no domínio da freqüência com o domínio do tempo, ou seja, mostraremos que existe uma transformação isomórfica entre esses espaços.

A transformada de Fourier está definida para funções $f \in L_1$, ou seja, o espaço das funções Lebesgue integráveis, (ver Rudin 1987, pg 178). Desde que a medida de Lebesgue sobre o $\Re$ é infinita, o $L_2(-\infty,\infty)$, não é um subespaço do L_1. Conseqüentemente, a definição tradicional da transformada de Fourier não pode ser diretamente aplicada para toda função $f \in L_2(-\infty,\infty)$. A definição, pode ser aplicada, se $f \in L_1 \cap L_2(-\infty,\infty)$, e neste caso $\hat{f}$ (a transformada de Fourier de f) pertence ao L^2, de fato, $\|\hat{f}\|_2 = \| f \|_2$. Esta isometria pode ser extendida para uma isometria do $L_2(-\infty,\infty) \rightarrow L^2$, esta extensão define a transformada de Fourier (algumas vezes, denominada de transformada de Plancherel) para toda função $f \in L_2(-\infty,\infty)$. Então, dado uma função $f \in L_2(-\infty,\infty)$, existe uma função $\hat{f} \in L^2$ (via a transformada de Fourier), tal que, $\| f \|_{L_2(-\infty,\infty)} = \|\hat{f}\|_{L^2}$. Conseqüentemente, a transformação $f \rightarrow \hat{f}$ é um isomorfismo do $L_2(-\infty,\infty)$ no L^2.

TEOREMA A.4.1 *A transformada de Fourier determina um isomorfismo do $L_2(-\infty,\infty)$ no L^2.*

Segundo teorema de Paley e Wiener, existe uma função $F \in L_2(0,\infty)$, tal que para todo $f \in H^2$

$$f(z) = \int_0^{\infty} F(t)e^{itz}dt$$

para todo $z \in D'$.

Isto quer dizer que a transformada de Fourier transforma o $L_2(0,\infty) \rightarrow H^2$. Então, podemos interpretar as funções em H^2 como sendo transformadas de Fourier de sinais no $L_2(0,\infty)$.

O segundo teorema conecta o espaço de Hilbert H^2 com os espaços de Banach L^∞ e H^∞. Denotaremos por FX o espaço gerado pelas funções da forma $\{Fx \ : \ x \in X\}$.

TEOREMA A.4.2 *i- Se $F \in L^\infty$, então $FL^2 \subset L^2$ e*

$$\| F \|_\infty = \sup_x \{ \| Fx \|_2 : x \in L^2 \ e \ \| x \|_2 = 1 \} =$$

$$\sup_x \{ \| Fx \|_2 : x \in H^2 \ e \ \| x \|_{H^2} = 1 \}$$

ii- Se $F \in H^\infty$, então $FH^2 \subset H^2$ e

$$\| F \|_\infty = \sup_x \{ \| Fx \|_{H^2} : x \in H^2 \ e \ \| x \|_{H^2} = 1 \}$$

Este teorema é a junção de resultados apresentados em Conway (1985) e Duren (1970), a parte (i) encontra-se demonstrada em Conway e a parte (ii) em Duren.

Na próxima subseção, vamos introduzir o espaço H_1^∞ para sistemas multivariados. Nexte contexto, fica claro a necessidade de se falar em álgebra de operadores, ao invés de espaço.

A.5 Espaços H^∞ e L^∞

Definimos, na seção A.4, o espaço funcional H_1^∞, como o conjunto das funções f sobre o semi-plano aberto direito (D'), que são analíticas e satisfazem

$$\| f \|_\infty = \sup_{z \in D'} | f(z) | < \infty$$

Pode-se, facilmente, mostrar que o conjunto das funções racionais e próprias que não têm polos no semi-plano fechado direito, está contido no H_1^∞. Vamos definir o H^∞ como o conjunto das matrizes complexas cujos componentes estão no H_1^∞. Então, considere funções

$$F : D' \longrightarrow C^{n \times m}$$

que são analíticas e limitadas, no sentido

$$\| F \|_\infty = \sup_z \{ \| F(z) \| : z \in D' \} < \infty \tag{1.5.7}$$

Aqui, $\| F(z) \| = \sigma_{max}[F(z)]$, ou seja, o maior valor singular da matriz $F(z)$. Note que a norma definida em (1.5.7), não está bem definida, pois o H^∞ não é um espaço linear (não podemos somar matrizes de diferentes dimensões). Entretanto, qualquer subconjunto do H^∞, consistindo de matrizes de mesma dimensão, é um espaço vetorial para o qual a norma $\| \cdot \|_\infty$ está bem definida e torna-o um espaço de Banach. Por isso, Zames (1981), analisa os sistemas de forma geral, como sendo álgebras de Banach.

O conjunto das funções F tomando valores em $C^{n \times m}$ que são essencialmente limitadas e mensurável sobre o eixo imaginário será denotado por L^∞. Sobre este espaço define-se a norma

$$\| F \|_\infty = \sup_{w \in \Re} \sigma_{max}[F(jw)] < \infty$$

Com respeito a esta norma, o subconjunto de todas as funções de valores matriciais (com mesma dimensão), formam um espaço de Banach. Da mesma forma que na seção A.4, teorema do módulo máximo pode ser aplicado. Portanto, as funções sobre o H^∞ podem ser levados isometricamente para uma função sobre o L^∞ (ver N. Young, 1988). Portanto, não faremos distinção entre as normas.

Apêndice B

Processos Estocásticos

Objetivo deste apêndice é apresentar alguns resultados da teoria de probabilidade e processos estocásticos, que serão utilizados nesta dissertação.

Inicialmente, faremos uma revisão sobre conceitos elementares de probabilidade, dando ênfase ao lema de Borel-Cantelli e a esperança condicional, que serão extensivamente utilizados. Além disso, discutiremos a relação existente entre uma variável aleatória e a probabilidade P_X, induzida. Da mesma forma, suas extensões para espaço produto.

Na seção B.2, faremos uma introdução à cadeias de Markov, onde derivaremos resultados básicos sobre estes. Nesta abordagem, daremos ênfase à caracterização de estados recorrentes e transientes.

B.1 Introdução

Cosidere Ω um espaço abstrato, denominado de espaço amostral, onde $w \in \Omega$ são denominados eventos elementares. Seja $\mathcal{F}$ a σ-álgebra de Borel dos subconjuntos de Ω, e P uma função de conjunto definida na σ-álgebra $\mathcal{F}$ com valores no [0,1], satisfazendo

i- $P(A) \geq 0$, para todo $A \in \mathcal{F}$

ii- $P(\Omega) = 1$

iii- Sejam $A_1, A_2, \cdots$ eventos (ou seja, $A_n \in \mathcal{F}$, $\forall n \in I\!N$), tais que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Então

$$P(\cup_{n\geq 1} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

isto é, P é uma probabilidade sobre $(\Omega, \mathcal{F})$. A tripla $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é denomindada de espaço de probabilidade.

Dado um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, uma variável aleatória X é uma função definida em Ω com valores em $\Re$, de tal forma que o evento $[X \leq x] = [w \in \Omega \ : \ X(w) \leq x] \in \mathcal{F}$, $\forall x \in \Re$. Então, uma variável aleatória é uma função que "transforma" o espaço $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ no espaço $(\Re, \beta(\Re), P_X)$, onde $\beta(R)$ é a σ-álgebra de Borel dos Reais e P_X é definido da seguinte forma,

$$P_X[\,(-\infty, x]\,] \;=\; P[\,X \leq x\,]\;;\;\forall x \in \Re \tag{2.1.1}$$

Considerando-se,

$$\mathcal{C} \;=\; \{\emptyset, (-\infty, x), (-\infty, x], (x, \infty), [x, \infty), (a, b), (a, b], [a, b), [a, b], (-\infty, \infty)\,\}$$

Pode-se formar uma álgebra dos subconjuntos de $\Re$

$$\mathcal{A} \;=\; \{A = \cup_{i=1}^{n} C_i\;;\; C_i \cap C_j = \emptyset\;;\; i \neq j \;\; e \;\; C_i \in \mathcal{A}\; i = 1, \cdots, n\;;\; n \in I\!N\}$$

Assim, desde que P_X define uma probabilidade nesta álgebra, segue que, via o teorema de extensão de Carathéodory, P_X pode ser extendida, de forma única, para uma σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$, que é denominada σ-álgebra de Borel. Portanto

$$P_X \;:\; \beta(\Re) \longrightarrow [0,1]$$

Assim, P_X define uma probabilidade sobre o espaço mensurável $(\Re, \beta(\Re))$.

Com isso, podemos definir

$$F_X(x) \;=\; P[\,X \leq x\,]$$

onde $F_X(\cdot)$ é denominada função de distribuição acumulada da variável aleatória X.

Pode-se mostrar que existe uma correspondência entre variável aleatória X , probabilidade (P_X) e a função de distribuição acumulada da variável aleatória X, isto é

$$X \longleftrightarrow P_X \longleftrightarrow F_X$$

Uma variável aleatória é discreta se, e só se, existe um conjunto $A \in \mathcal{F}$, enumerável, tal que $P[X \in A] = 1$. Uma variável aleatória é absolutamente contínua se, e só se, existe uma função $f_X(\cdot)$ não negativa, satisfazendo

$$F_X(x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \quad e$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)dt \;=\; 1$$

A esperança matemática de uma variável aleatória X é definida via a integral de Lebesgue,

$$E(X) \;=\; \int_{\Omega} X(w)P(dw)$$

se a $E|X|$ é finita, dizemos que X é integrável.

Na literatura probabilística existem vários tipos de convergência. Podemos citar, na r-ésima média, em probabilidade, com probabilidade 1 e varios outros. Nesta dissertação, trabalharemos apenas com estes três tipos de convergência estocástica.

DEFINIÇÃO B.1.1 *Uma seqüência de variáveis aleatórias, definidas sobre o mesmo espaço de probabilidade, convergem para uma variável aleatória X*

a- em probabilidade se, qualquer que seja $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\uparrow\infty} P[\,|\,X_n \;-\; X\,|\geq \epsilon\,] \;=\; 0$$

b- na r-ésima média se,

$$\lim_{n\uparrow\infty} E[\,|\,X_n \;-\; X\,|^r\,] \;=\; 0$$

c- com probabilidade 1 se, qualquer que seja $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\uparrow\infty} P\left[\sup_{k\geq n}\;|\,X_k \;-\; X\,|\geq \epsilon\right] \;=\; 0$$

LEMA B.1.1 (lema de Borel-Cantelli) *Sejam* $A_1, A_2, \cdots$ *eventos definidos sobre o mesmo espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

a- Se,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \;<\; \infty$$

então,

$$P\left[\limsup_{n}\; A_n\right] \;=\; 0$$

mas
b- se, $A_1, A_2, \cdots$ *são independentes 2 a 2 e*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \;=\; \infty$$

temos

$$P\left[\liminf_{n}\; A_n\right] \;=\; 1$$

Dizemos que $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ é um vetor aleatório se, e só se, cada componente é uma variável aleatória. Da mesma forma, definimos

$$F_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n) \;=\; P[\,X_1 \leq x_1, \cdots, X_n \leq x_n\,]$$

que é a função de distribuição acumulada do vetor aleatório $(X_1, \cdots, X_n)$ e de forma análoga existe uma correspondência entre o vetor aleatório, a probabilidade induzida por

P, sobre a σ-álgebra de Borel do $\Re^n$, e a função de distribuição acumulada conjunta, isto é

$$(X_1, \ldots, X_n) \longleftrightarrow P_{X_1,\ldots,X_n} \longleftrightarrow F_{X_1,\ldots,X_n}$$

Considere $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade. Sejam A e B eventos pertencentes a σ-álgebra $\mathcal{F}$, tal que $P(B) > 0$, então podemos definir a probabilidade condicional do evento A dado a ocorrência do evento B, denotada por $P[\ A|B\ ]$, por

$$P[\ A|B\ ] = \frac{P[\ A \cap B\ ]}{P[B]}$$

Dado $A \in \mathcal{F}$ com $P(A) > 0$, podemos definir a esperança condicional da variável aleatória X, sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, dado o evento A, da forma

$$E[\ X|A\ ] = \int_\Omega x(w)P(dw|A) = \frac{\int_\Omega x(w)P(dw)}{P(A)}$$

Além do estudo sobre supermartingales positivos que faremos no apêndice C a esperança condicional será um ferramental de extrema importância no desenrolar dos capítulos 2 e 3. Dado estas observações, apresentamos uma definição rigorosa sobre tal tópico.

DEFINIÇÃO B.1.2 *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e Y uma variável aleatória integrável. Considere $\beta \subset \mathcal{F}$ uma sub-σ-álgebra. Então existe uma única (P-q.s.)variável aleatória $E[\ Y|\beta\ ]$, chamada esperança condicional de Y dado β, que satisfaz*

- *$E[\ Y|\beta\ ]$ é β-mensurável e integrável*

- *a seguinte equação*

$$\int_B Y dP = \int_B E[\ Y|\beta\ ]dP \quad ; \quad \forall\ B \in \beta$$

A probabilidade condicional pode ser definida por:

$$P[\ Y \in B \mid \beta\ ] = E[\ \mathbb{1}_{\{B\}}(w) \mid \beta\ ]$$

B.1.1 Teoria básica de processos estocásticos

Nesta subseção, apresentaremos as definições básicas sobre processos estocásticos. Para esse fim, considere $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade completo e $\boldsymbol{T} \subset \Re_+$, um conjunto de índices não vazio.

DEFINIÇÃO B.1.3 *Um processo estocástico é uma coleção de variáveis aleatória definidas em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, indexadas por $\boldsymbol{T}$*

EXEMPLO B.1.1 *A variável aleatória X, neste caso* $\boldsymbol{T} = \{1\}$

EXEMPLO B.1.2 $\{X_n \; : \; n \in I\!N\}$, *ou seja, uma seqüência de variáveis aleatórias definidas no mesmo espaço de probabilidade, neste caso* $\boldsymbol{T} = I\!N$.

A seguir apresentaremos uma definição mais rigorosa de processo estocástico

DEFINIÇÃO B.1.4 *Um processo estocástico é uma função, que toma valores em* $\boldsymbol{T} \times \Omega$, *da forma*

$$X \; : \; \boldsymbol{T} \times \Omega \longrightarrow \Re$$

Onde, $X(t, \cdot)$ *é uma variável aleatória para todo* $t \in \boldsymbol{T}$ *e* $X(\cdot, w)$ *é uma função de* $\boldsymbol{T}$ *em* $\Re$, *para cada* $w \in \Omega$, *esta função é denominada de trajetória do processo* X

Seja $\Re^{\boldsymbol{T}}$ o conjunto de todas as funções de $\boldsymbol{T}$ em $\Re$, então:

$$X \; : \; \Omega \longrightarrow \Re^{\boldsymbol{T}}$$

Sobre o $\Re^{\boldsymbol{T}}$ pode-se definir o seguinte subconjunto

$$C = \{x \in \Re^{\boldsymbol{T}} : (x_{t_1}, \cdots, x_{t_n}) \in B \; ; \; B \in \beta(\Re^n) \;\; e \;\; t_1, \cdots, t_n \in \boldsymbol{T} \;\; \forall n \in I\!N\}$$

Tal conjunto é denominado de cilindro de base B. A classe de todos cilindros formam uma álgebra . Denotaremos por $\beta(\Re^{\boldsymbol{T}})$ a σ-álgebra gerada pela álgebra dos cilindros, que é denominada de σ-álgebra dos cilindros. Conseqüentemente, usando a consistência de Kolmogorov, pode-se definir uma probabilidade sobre $\beta(\Re^{I\!T})$. De forma análoga, existe uma relação entre o processo X e a probabilidade definida sobre a σ-álgebra dos cilindros, ou seja

$$X \; = \; (\; X_t \; ; \; t \in \mathcal{T} \;) \;\; \longleftrightarrow \;\; P_{\{X_t \; ; \; t \in \mathcal{T}\}}$$

Define-se $F \; = \; \{F_{X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} \; ; \; \forall n \in I\!N \; , \; (t_1, \ldots, T_n) \in T}\}$ que é o conjunto das distribuições finito dimensionais do processo X.

DEFINIÇÃO B.1.5 *Um processo estocástico* $\{X_t \; ; \; t \in \boldsymbol{T}\}$, *definido sobre* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *é dito ter incrementos independentes se qualquer que seja* $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ *têm-se que as variáveis aleatórias* $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ *são independentes.*

Muitos sistemas são modelados com uma estrutura de incrementos independentes, por exemplo, os fenômenos modelados via o processo de Poisson e processo de Wiener.

DEFINIÇÃO B.1.6 *Um processo estocástico* $(X_t \; ; \; t \in \boldsymbol{T})$, *definido sobre* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *é dito ser processo Markoviano, se para todo* $t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t$, *temos que:*

$$P \; [\; X_t \leq x \mid X_{t_0} = x_0, \ldots, X_{t_n} = x_n \;] \; = \; P \; [\; X_t \leq x \mid X_{t_n} = x_n \;]$$

Isto quer dizer que eventos futuros são independentes do passado dado que conhecemos o presente. O conjunto onde o processo estocástico assume valores é denominado de espaço de estados, que na próxima seção será denotado por $\mathcal{S}$.

B.2 Cadeia de Markov

Considere um sistema que tenha um número finito ou infinito enumerável de estados, ou seja, assumiremos que $\mathcal{S}$ é um subconjunto dos inteiros. Este sistema é observado em instantes discretos, denotando-se por X_n o estado do sistema no tempo n , n=1,2, ...

Desde que estamos interessados em estudar sistemas não determinísticos, introduzimos (X_n ; $n \geq 0$) como variáveis aleatórias definidas no mesmo espaço de probabilidade. Dado apenas estas variáveis aleatórias fica difícil analisar este sistema, a menos que uma estrutura adicional seja imposta sobre o mesmo. A estrutura mais simples é a de variáveis aleatórias independentes, mas este modelo seria bom para sistemas cujo os estados futuros sejam independentes do passado e presente. Entretanto, a maioria dos sistemas que aparecem na prática, os estados presente e passado influenciam sobre os estados futuros.

Mas, muitos destes sistemas tem a propriedade de que os estados futuros são independentes do passado, dado o presente. Esta propriedade é conhecida como Markoviana. Sistemas discretos tendo esta propriedade são denominados de Cadeias de Markov

DEFINIÇÃO B.2.1 *Um processo estocástico* $(X_n\ ;\ n \geq 0)$ *é denominado de cadeia de Markov, se :*

i- $\boldsymbol{T} \subseteq \mathcal{Z}$

ii- $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{Z}$

iii- O processo é Markoviano

Dado que o processo é Markoviano, segue que :

$$P\ [\ X_{n+1}\ =\ x_{n+1}\ |\ X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n\ ]\ =\ P\ [\ X_{n+1}\ =\ x_{n+1}\ |\ X_n = x_n\ ]$$

qualquer que seja n, um inteiro não negativo, e $x_0, \ldots, x_n$ cada um pertencente à $\mathcal{S}$. Devido a dependência sobre n, esta cadeia é denominada não homogênea. Muitos sistemas dinânicos são modelados através de cadeias não homogêneas, mas consideraremos uma subclasse destes sistemas, denominados de conservativos. Neste caso, se uma partícula está no estado x, no tempo s, e move-se para o estado y, no tempo $s+t$, então o movimento desta partícula será o mesmo se esta partir do estado x, em $s = 0$, e atingir o estado y no tempo t.

DEFINIÇÃO B.2.2 *Uma cadeia de Markov* $\{X_n\ ;\ n \geq 0\}$ *é chamada homogênea ou com probabilidades de transição estacionária, se a probablidade de transição em uma etapa, ou seja,*

$$P\ [\ X_{n+1}\ =\ y\ |\ X_0 = x_0, \ldots, X_n = x\ ]\ =\ P\ [\ X_{n+1}\ =\ y\ |\ X_n = x\ ]$$

é independente de n, isto é

$$P\ [\ X_{n+1}\ =\ y\ |\ X_n = x\ ]\ =\ p(x,y)\ \ ;\ \ \forall\ n \in I\!N\ e\ x, y\ \in\ \mathcal{S}$$

Neste apêndice, considereremos apenas cadeias de Markov com probabilidade de transição estacionária.

B.2.1 Função de transição e distribuição inicial

Seja $\{X_n\ ;\ n \geq 0\}$ uma cadeia de Markov com espaço de estado $\mathcal{S}$. A função p(x,y), para todo $x \in \mathcal{S}$ e $y \in \mathcal{S}$, definida por

$$p(x,y) = P\ [\ X_1 = y \mid X_0 = x\ ]$$

é denominada de função de transição da Cadeia, onde

$p(x,y) \geq 0\ ;\ \forall\ x,y\ \in \mathcal{S}$

$\sum_y p(x,y) = 1\ ;\ \forall\ x \in \mathcal{S}$

Desde que a cadeia tem probabilidade de transição estacionária e a propriedade Markoviana segue, respectivamente, que

$$P\ [\ X_{n+1} = y \mid X_n = x\ ] = p(x,y)\ ;\ n \geq 1$$

e

$$P\ [\ X_{n+1} = y \mid X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n\ ] = p(x,y)$$

Como já discutimos anteriormente, p(x,y) é denominado probablidade de transição em uma etapa. A função $\pi_0(x)$, $x \in \mathcal{S}$, definida por:

$$\pi_0(x) = P\ [X_0 = x\ ]\ ,\ \forall x \in \mathcal{S}$$

é denominada de distribuição inicial da cadeia. Segue que,

$\pi_0(x) \geq 0\ ;\ \forall x \in \mathcal{S}$

$\sum_x \pi_0(x) = 1$

A distribuição conjunta de $X_0, \ldots, X_n$ pode ser expressa em termos da função de transição e da distribuição inicial. Pois,

$$P\ [\ X_0 = x_0\ ;\ X_1 = x_1\ ] = P\ [\ X_0 = x_0\ ]\ P\ [\ X_1 = x_1 \mid X_0 = x_0\ ]$$

$$= \pi_0(x_0)P(x_0, x_1)$$

da mesma forma,

$$P\ [\ X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = x_2\ ]$$

$$= P\,[\ X_0 = x_0, X_1 = x_1\ ]\ P\,[\ X_2 = x_2 \mid X_0 = x_0, X_1 = x_1\ ]$$

Pela propriedade Markoviana,

$$P\,[\ X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = x_2\ ] \;=\; \pi_0(x_0)\ p(x_0, x_1)\ p(x_1, x_2)$$

Por indução, podemos concluir

$$P\,[X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\ ] \;=\; \pi_0(x_0)\ p(x_0, x_1)\ \ldots\ p(x_{n-1}, x_n) \qquad (2.2.2)$$

para todo $n \in I\!N$.

B.2.2 Cálculo com funções de transição

Seja $\{X_n\ ;\ n \geq 0\}$ uma cadeia de Markov sobre $\mathcal{S}$ tendo função de transição p. Considere,

$$P\,[\ X_{n+1} = x_{n+1}, \ldots, X_{n+m} = x_{n+m} \mid X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n\ ]$$

$$= \frac{P\,[\ X_0 = x_0, \ldots, X_{n+m} = x_{n+m}\ ]}{P\,[\ X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n\ ]}$$

Usando (2.2.2), temos que:

$$= \frac{\pi_0(x_0)\ p(x_0, x_1)\ \ldots\ p(x_{n+m-1}, x_{n+m})}{\pi_0(x_0)\ p(x_0, x_1)\ \ldots\ p(x_{n-1}, x_n)}$$

$$= p(x_n, x_{n+1})\ \ldots\ p(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \qquad (2.2.3)$$

A probablidade de transição em m-etapas $P^m(x, y)$, ou seja, a probabilidade de ir de x para y em m etapas, é definida por:

$$p^m(x, y) \;=\; P\,[\ X_{n+m} \;=\; y \mid X_n \;=\; x\ ]\ ;\ \forall m\ \geq 2$$

TEOREMA B.2.1 *Seja* $\{X_n\ ;\ n \geq 0\}$ *uma cadeia de Markov com distribuição inicial* $\{\pi_0(x)\ ;\ x \in \mathcal{S}\}$ *e* $p^n(x, y)$ *a probabilidade de transição em n etapas. Então,*

i- $P\,[X_n \;=\; y\ ] \;=\; \sum_{x \in \mathcal{S}}\ \pi_0(x) p^n(x, y)$

ii- relação de Chapman-Kolmogorov

$$P^{m+n}(x, y) \;=\; \sum_{z \in \mathcal{S}} p^m(x, z)\ p^n(z, y) \qquad (2.2.4)$$

PROVA: Temos que,

$$P\,[\,X_n\;=\;y\,]\;=\;\sum_{x\in\mathcal{S}} P\,[\,X_n=y\;;\;X_0=x\,]$$

$$=\sum_{z\in\mathcal{S}} P\,[\,X_0=x\,]\;P\,[\,X_n=y\mid X_0=x\,]$$

$$=\sum_{x\in\mathcal{S}} \pi_0(x)\;p^n(x,y)$$

que mostra a parte i. Agora, segue da propriedade markoviana

$$p^{n+m}(x,y)\;=\;P\,[\,X_{n+m}\;=\;y\mid X_0\;=\;x\,]$$

$$=\sum_{z\in\mathcal{S}} P\,[\,X_{n+m}\;=\;y\;;\;X_n\;=\;z\mid X_0\;=\;x\,]$$

$$=\sum_{z\in\mathcal{S}} \frac{P\,[\,X_{n+m}\;=\;y\;;\;X_n\;=\;z\;;\;X_0\;=\;x\,]}{P\,[\,X_0\;=\;x\,]}$$

$$=\sum_{z\in\mathcal{S}} \frac{P\,[\,X_{n+m}\;=\;y\mid X_n\;=z\;;\;X_0\;=\;x\,]\;P\,[\,X_n\;=\;z\;;\;X_0\;=\;x\,]}{P\,[\,X_0\;=\;x\,]}$$

$$=\sum_{z\in\mathcal{S}} P\,[\,X_{n+m}\;=\;y\mid X_n\;=\;z\,]\;P\,[\,X_n\;=\;z\mid X_0\;=\;x\,]$$

$$=\sum_{z\in\mathcal{S}} p^n(x,z)\;p^m(z,y)$$

segue o teorema. □

B.2.3 Tempos de parada relacionados com a cadeia de Markov

Considere uma cadeia de Markov $X=\{X_n : n\geq 0\}$ definida sobre $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Seja $\mathcal{F}_n^X\;=\;\sigma\{X_k\;;\;0\leq k\leq n\}$ a σ-álgebra gerada pelas trajetórias da Cadeia de Markov, ou melhor, pelas variáveis aleatórias $\{X_k : k\leq n\}$. A seqüência de sub-σ-álgebras $\{\mathcal{F}_n^X\;,\;n\in I\!N\}$ de $\mathcal{F}$ é crescente ($i.e.,\mathcal{F}_n^X\subset\mathcal{F}_m^X\;;\;n<m$) e é denominada de filtragem interna associada à cadeia de Markov. A sub-σ-álgebra $\mathcal{F}_n^X$ contém todos as informações sobre a cadeia até o tempo n, ou seja, até a etapa n.

DEFINIÇÃO B.2.3 *Uma variável aleatória* $T \,:\, \Omega \longrightarrow \overline{T} = T \cup \{\infty\}$, *é chamada tempo de parada, relativo à filtragem* $\{\mathcal{F}_n^X : n \geq 0\}$, *se para cada inteiro não negativo,*

$$\{ \, w \, : \, T(w) = n \, \} \;\; \in \;\; \mathcal{F}_n$$

ou seja, o evento $\{w : T(w) = n\}$ *é determinado pelas " informações" de* $X_1, \ldots, X_n$.

A seguir vamos estudar um importante tempo de parada relacionado à cadeia de Markov.

DEFINIÇÃO B.2.4 *Seja* $A \subset \mathcal{S}$ *um evento. O tempo de chegada em* A *é uma variável aleatória definida por:*

$$T_A \;=\; \begin{cases} min \; (\; n > 0 \; ; \; X_n \in A \;) & , \; se \; X_n \in A \; para \; algum \; n \\ + \, \infty & , \; c.c. \end{cases}$$

Inicialmente, pode-se obsevar que T_A é uma tempo de parada com relação à filtragem $\{\mathcal{F}_n^X ; n \geq 0\}$, e podemos interpretar T_A como sendo o tempo (positivo) da primeira passagem da Cadeia pelo evento A. Estaremos interessados, principalmente, em tempos de chegada com relação a conjuntos consistindo de um único ponto. Se $a \in \mathcal{S}$, denotaremos por T_a o instante da primeira passagem da cadeia pelo evento $\{a\}$.

TEOREMA B.2.2 *Seja* $\{X_n \; ; \; n \geq 0\}$ *uma cadeia de Markov, então*

$$p^n(x,y) \;=\; \sum_{m=1}^{n} P_x \; [\; T_y = m \;] \; p^{n-m}(y,y) \quad ; \quad n \geq 1 \tag{2.2.5}$$

PROVA: Temos que, $\{T_y = m, X_n = y\}$, são eventos disjuntos para $1 \leq m \leq n$, e

$$\{ \; X_n = y \; \} \;=\; \cup_{m=1}^{n} \; \{ \; T_y = m \; , \; X_n = y \; \}$$

Isto quer dizer que decompomos o evento $\{ \; X_n = y \; \}$ de acordo com o tempo da primeira passagem pelo estado y, então:

$$P_x \; [\; X_n = y \;] \;=\; p^n(x,y)$$

usando o fato dos evento serem disjuntos e a propriedade markoviana, segue

$$= \sum_{m=1}^{n} \; P_x \; (\; T_y = m \; , \; X_n = y \;)$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \; P_x \; (\; T_y = m \;) \; P \; [\; X_n = y \mid X_0 = x \; , \; T_y = m \;]$$

$$= \sum_{m=1}^{n} P_x \; (\; T_y = m \;) \; P \; [\; X_n = x \mid X_0 = x \; , \; X_1 \neq y \; , \ldots , X_{m-1} \neq y \; , \; X_m = y \;]$$

$$= \sum_{m=1}^{n} P_x \; (\; T_y = m \;) \; P \; [\; X_n = y \mid X_m = y \;]$$

$$= \sum_{m=1}^{n} P_x \; (\; T_y = m \;) \; p^{n-m}(y,y)$$

que mostra o teorema. □

Um estado a de uma cadeia é chamado absorvente se $p(a,a) = 1$ e $p(a,y) = 0 \; , \; \forall \; y \neq a \; \in \; \mathcal{S}$.

PROPOSIÇÃO B.2.1 *Se um estado a é absorvente, então:*

$$p^n(x,a) \; = \; P_x \; [\; T_a \; \leq \; n \;] \quad ; \quad n \geq 1$$

PROVA: Se a é um estado absorvente, tem-se que $p^{n-m}(a,a) = 1$, então,

$$p^n(x,a) \; = \; \sum_{m=1}^{n} P_x \; [\; T_y = m \;] \; p^{n-m}(a,a) \; = \; P_x \; [\; T_y \; \leq \; n \;] \quad ; \quad n \geq 1$$

segue a proposição. □

B.2.4 Matriz de transição

Suponha que o espaço de estado $\mathcal{S}$ seja finito, isto é, $\mathcal{S}$ pode ser representado por um conjunto de pontos da forma $\{0, 1, 2, \ldots, d\}$. Neste caso, a função de transição pode ser representada por uma matriz quadrada de dimensão $d+1$, dada por:

$$\mathbb{P} \; = \; \begin{bmatrix} p(0,0) & p(0,1) & \ldots & p(0,d) \\ p(1,0) & p(1,1) & \ldots & p(1,d) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p(d,0) & p(d,1) & \ldots & p(d,d) \end{bmatrix}$$

Utilizando a equação de Chapman-Kolmogorov com n=m=1, obtemos

$$p^2(x,y) \; = \; \sum_{z \in \mathcal{S}} p(x,z) \; p(z,y)$$

Podemos observar que esta relação é exatamente a definição da multiplicação de matrizes, então $p^2(\cdot,\cdot)$ é o produto matriz $\mathbb{P}$ com ela mesma. Se tomarmos n (qualquer, $n \in \mathbb{N}$) e m=1, usando da relação de Chapmann-Kolmogorov, temos que

$$p^{n+1}(x,y) = \sum_{z \in \mathcal{S}} p^n(x,z)\, p(z,y)$$

Então, segue por indução que $p^n(\cdot,\cdot)$ é dado pelo n-ésimo poder da matriz $I\!P$. Tomando a distribuição inicial π_0 como um vetor $d+1$-dimensional

$$\pi_0 = (\ \pi_0(0),\ \ldots\ , \pi_0(d)\ )$$

e

$$\pi_n = (\ P\ [\ X_n = 0\ ]\ ,\ \ldots\ ,\ P\ [\ X_n = d\ ]\ )$$

Deduz-se, as seguintes relações matriciais:

$$\pi_n = \pi_0\ I\!P^n = \pi_{n-1}\ I\!P \tag{2.2.6}$$

B.2.5 Estados transientes e recorrentes

Seja $\{X_n\ ;\ n \geq 0\}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $\mathcal{S}$ e probabilidade de transição p. Definimos,

$$\rho_{x,y} = P_x\ [\ T_y\ <\ \infty\ ]$$

Então, $\rho_{x,y}$ denota a probabilidade de que uma cadeia começando em x, atinge o estado y, num tempo finito. Em particular, $\rho_{y,y}$ denota a probabilidade da cadeia começar em y e retornar à y em um número finito de etapas, isto é, em um tempo finito.

DEFINIÇÃO B.2.5 *Um estado y é*

i- recorrente se $\rho_{yy} = 1$
ii- transiente se $\rho_{yy} < 1$

Então, um estado y é recorrente, se a cadeia começando em y retorna a y com probabilidade 1. Agora, se y é um estado transiente, a cadeia começando em y tem uma probabilidade positiva de nunca retornar à y, esta probabilidade é dado por $1-\rho_{yy}$. Pode-se observar que um estado absorvente ($P_y\ [\ T_y = 1\ ]\ =\ p(y,y)\ =\ 1$) é necessariamente recorrente.

Seja $1\!\!1_y(z)$, $z \in \mathcal{S}$, a função indicadora do conjunto $\{y\}$, isto é

$$1\!\!1_y(z) = \begin{bmatrix} 1 & se\ z = y \\ & \\ 0 & se\ z \neq y \end{bmatrix}$$

Com isso, definimos

$$N(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_y(X_n) \tag{2.2.7}$$

que pode ser interpretado como o número de visitas da cadeia ao estado y.

Agora, observe que o evento $\{N(y) \geq 1\}$ coincide com o evento $\{T_y < \infty\}$. Portanto,

$$P_x [\ N(y) \geq 1\ ] = P_y [\ T_y < \infty\ ] = \rho_{x,y} \tag{2.2.8}$$

Dados n e m dois inteiros positivos. A probabilidade de que uma cadeia começando em x visite y, pela primeira vez, no tempo m e depois visite novamente y, pela primeira vez, em n etapas é dado por:

$$P_x [\ T_y = m\ ]\ P_y [\ T_y = n\ ]$$

portanto,

$$P_x [\ N(y) \geq 2\ ] = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_x [\ T_y = m\ ]\ P_y [\ T_y = n\ ]$$

$$= \left(\sum_{m=1}^{\infty} P_x [\ T_y = m\ ] \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} P_y [\ T_y = n\ ] \right)$$

$$= P_x [\ T_y < \infty\ ]\ P_y [\ T_y < \infty\ ]$$

$$= \rho_{x,y}\ \rho_{y,y}$$

De maneira similar, pode-se mostrar que

$$P_x [\ N(y) \geq m\ ] = \rho_{x,y}\ \rho_{y,y}^{m-1} \quad ; \quad m \geq 1 \tag{2.2.9}$$

Dado que,

$$P_x [\ N(y) = k\ ] = P_x [\ N(y) \geq k\ ] - P_x [\ N(y) \geq k+1\ ]$$

$$= \rho_{x,y}\ \rho_{y,y}^{k-1} - \rho_{x,y}\ \rho_{x,y}^{k}$$

$$= \rho_{x,y}\ \rho_{y,y}^{k-1} (\ 1 - \rho_{y,y}\ ) \quad ; \quad k \geq 1 \tag{2.2.10}$$

Observe que estas fórmulas são intuitivas. Por exemplo, pela fórmula (2.2.10), a cadeia começando em x visita o estado y exatamente m vezes se, e só se, visita y pela primeira vez, depois retorna à y $m-1$ vezes e não retorna mais ao estado y.

Denotaremos por $E_x[\cdot]$ a esperança condicional de variáveis aleatória definidas em termos da cadeia, dado que a cadeia começa em x. Por exemplo,

$$E_x\ [\ \mathbb{1}_y(X_n)\ ]\ =\ P_x\ [\ X_n = y\ ]\ =\ p^n(x,y)$$

Usando o teorema da convergência monótona (ver Royden 1968) e a linearidade da esperança condicional, concluí-se

$$E_x\ [\ N(y)\ ]\ =\ E_x\ [\ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_y(X_n)\ ]$$

$$=\ E_x\left[\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{1}_y(X_k)\right]\ =\ \lim_{n\to\infty} E_x\left[\sum_{k=1}^{n}\mathbb{1}_y(X_k)\right]$$

$$=\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} E_x\ [\ \mathbb{1}_y(X_k)\ ]$$

$$=\ \sum_{n=1}^{\infty} E_x\ [\ \mathbb{1}_y(X_n)\ ]\ =\ \sum_{n=1}^{\infty} p^n(x,y)$$

Definimos,

$$G(x,y)\ =\ E_x\ [N(y)\ ]\ =\ \sum_{n=1}^{\infty} p^n(x,y) \qquad (2.2.11)$$

que pode ser interpretado como sendo o número esperado de visitas ao estado y, dado que a cadeia começou no estado x.

A seguir mostraremos um teorema que nos descreve a diferença fundamental entre estados transientes e recorrentes.

TEOREMA B.2.3 *i- Seja y um estado transiente. Então,*

$$P_x\ [\ N(y) < \infty\ ]\ =\ 1 \qquad (2.2.12)$$

e

$$G(x,y)\ =\ \frac{\rho_{x,y}}{1-\rho_{y,y}}\quad ;\quad \forall\ x \in \mathcal{S} \qquad (2.2.13)$$

que é finito para todo $x \in \mathcal{S}$.

ii- Seja y um estado recorrente. Então,

$$P_y\ [\ N(y) = \infty\ ]\ =\ 1 \tag{2.2.14}$$

e

$$G(y,y)\ =\ \infty \tag{2.2.15}$$

segue também que,

$$P_x\ [\ N(y) = \infty\ ]\ =\ P_x\ [\ T_y < \infty\ ]\ =\ \rho_{x,y}\ \ ;\ \ \forall\ x \in \mathcal{S}$$

Se $\rho_{x,y} = 0$, *então* $G(x,y) = 0$
Se $\rho_{x,y} > 0$, *então* $G(x,y) = \infty$

Antes de mostrarmos este teorema, vamos interpretá-lo.

Se y é um estado transiente, então, independente de onde a cadeia começa, esta visita y apenas um número finito de vezes, com probabilidade 1, e também é esperado um número finito de visitas ao estado y

Suponha, agora, que y é um estado recorrente, então se a cadeia começa em y, retorna à y infinitas vezes, com probabilidade 1. Mas, se a cadeia começa em um estado x diferente de y, talvez esta não visite y, mas se visitá-lo pelo menos uma vez, visita o infinitas vezes, com probabilidade 1.

PROVA: Seja y um estado transiente, então $0 \leq \rho_{x,y} < 1$, assim, segue que

$$P_x\ [\ N(y) = \infty\ ]\ =\ \lim_{n \to \infty}\ P_x\ [\ N(y) \geq m\ ]$$

pois, os eventos $A_m\ =\ \{N(y) \geq m\}$ são eventos monótonos, isto é, $A_{m+1} \subset A_m\ \ \forall m$, assim

$$\lim_{m \to \infty}\ P_x(A_m)\ =\ P_x(\lim_{m \to \infty}\ A_m)$$

então, segue que

$$\lim_{m \to \infty}\ P_x\ [\ N(y) \geq m\ ]\ =\ P_x\ [\ \lim_{m \to \infty}\ N(y) \geq m\ ]\ =\ P_x\ [\ N(y) = \infty\ ]$$

Agora, utilizando (2.2.9), temos que,

$$\lim_{m \to \infty}\ P_x\ [\ N(y) \geq m\ ]\ =\ \lim_{m \to \infty}\ \rho_{x,y}\, \rho_{y,y}^{m-1}\ =\ 0$$

conseqüentemente

$$\lim_{m \to \infty}\ P_x\ [\ N(y) \geq m\ ]\ =\ P_x\ [\ N(y)\ =\ \infty\ ]\ =\ 0$$

e

$$P_x\ [\ N(y) < \infty\ ]\ =\ 1$$

Agora,

$$G(x,y)\ =\ E_x\ [\ N(y)\ ]\ =\ \sum_{m=1}^{\infty}\ m\ P_x\ [\ N(y) = m\ ]$$

$$=\ \sum_{m=1}^{\infty}\ m\ \rho_{x,y}\ \rho_{y,y}^{m-1}\ (1 - \rho_{y,y})$$

$$=\ (1 - \rho_{y,y})\ \rho_{x,y}\ \sum_{m=1}^{\infty}\ m\rho_{y,y}^{m-1}$$

Tomando, $t = \rho_{y,y}$, temos que:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\ mt^{m-1}\ =\ \frac{1}{(1-t)^2}$$

dado que $0 \leq t = \rho_{y,y} < 1$. Então, concluimos que,

$$G(x,y)\ =\ \frac{(1-\rho_{y,y})\rho_{x,y}}{(1-\rho_{y,y})^2}\ =\ \frac{\rho_{x,y}}{(1-\rho_{y,y})}$$

isto completa a prova da parte (i)

Agora, seja y um estado recorrente. Usando a equação 2.2.9

$$P_x\ [\ N(y) \geq m\ ]\ =\ \rho_{x,y}\ \rho_{y,y}^{m-1}\ \ ;\ \ m \geq 1$$

mas, desde que y é recorrente, obtemos

$$P_x\ [\ N(y) = \infty\ ]\ =\ \lim_{m\to\infty}\ P_x\ [\ N(y) \geq m\ ]\ =\ \rho_{x,y}$$

em particular,

$$P_y\ [\ N(y) = \infty\ ]\ =\ \rho_{y,y}\ =\ 1$$

Se uma variável aleatória tem uma probabilidade positiva de assumir valor infinito, então esta tem esperança infinita. Portanto,

$$G(y,y)\ =\ E_y\ [\ N(y)\ ]\ =\ \infty$$

agora se, $\rho_{x,y} = 0$, segue que,

$$P_x\ [\ T_y = m\ ]\ =\ 0\ \ ;\ \ \textit{para todo } m \textit{ inteiro positivo}$$

Usando a equação (2.2.5), temos que $p^n(x,y) = 0$, $n \geq 1$. Portanto, $G(x,y) = 0$. Se $\rho_{x,y} > 0$, segue que,

$$P_x\ [\ N(y) = \infty\ ]\ =\ \rho_{x,y}\ >\ 0$$

Então,

$$G(x,y)\ =\ E_x\ [\ N(y)\ ]\ =\ \infty$$

que completa a prova □

Observe que se y é um estado transiente, então,

$$\sum_{m=1}^{\infty} p^n(x,y)\ =\ G(x,y)\ <\ \infty$$

Portanto,

$$\lim_{m \to \infty} p^n(x,y)\ =\ 0\ \ ,\ \ \forall x \in \mathcal{S} \qquad (2.2.16)$$

DEFINIÇÃO B.2.6 *Uma cadeia é dita ser transiente (recorrente) se todos os seus estados são transientes (recorrentes).*

COROLÁRIO B.2.1 *Uma cadeia de Markov com espaço de estado finito tem pelo menos um estado recorrente.*

PROVA: Usando a equação (2.2.16), e supondo que todos os estados são transientes, temos

$$0\ =\ \sum_{y \in \mathcal{S}} \lim_{n \to \infty} p^n(x,y)\ =\ \lim_{n \to \infty} P_x\ [\ X_n \in \mathcal{S}\ ]\ =\ 1$$

que é uma contradição. □

B.2.6 Decomposição do espaço de estados

Dado x e y dois estados não necessariamente distintos. Dizemos que x "leva" y, escrevemos $x \longrightarrow y$, se existe uma probabilidade positiva de que a cadeia mova-se de x para y em um número finito de transições, ou seja, $\rho_{x,y} > 0$. Se $x \longrightarrow y$ e $y \longrightarrow x$ dizemos que x e y são estados comunicantes, escrevemos $x \longleftrightarrow y$.

PROPOSIÇÃO B.2.2 *A relação "comunicação" (ou seja, $\longleftrightarrow$) é uma relação de equivalência no espaço de estado $\mathcal{S}$, portanto decompõe $\mathcal{S}$ em classes de equivalência, isto é, gera uma partição no espaço de estado.*

Prova: A propriedade reflexiva e simétrica são consequências da propria definição. Vamos mostrar a propriedade transitiva, ou seja, se $x \longleftrightarrow y$ e $y \longleftrightarrow z$, então $x \longleftrightarrow z$.

Se $x \longleftrightarrow y$ e $y \longleftrightarrow z$, então existe inteiros positivos m e n, tais que

$$p^m(x,y)\, p^n(y,z) > 0$$

Mas, segue da relação de Chapman-Kolmogorov, que

$$p^{n+m}(x,z) = \sum_{u \in \mathcal{S}} p^m(x,u)\, p^n(u,z) \geq p^m(x,y)\, p^n(y,z) > 0$$

Portanto, $x \rightarrow z$. De forma similar podemos concluir que $z \rightarrow x$. Conseqüentemente, $x \longleftrightarrow z$. □

TEOREMA B.2.4 *Seja x um estado recorrente e suponha que $x \rightarrow y$. Então y é recorrente e $\rho_{x,y} = \rho_{y,x} = 1$*

PROVA: Asuma que $x \neq y$, caso contrário seria óbvio. Como $x \rightarrow y$, segue que

$$P_x[\, T_y < \infty \,] = \rho_{x,y} > 0$$

Então, existe n, inteiro positivo, tal que $P_x[T_y = m] > 0$. Com isso, define-se

$$n_0 = min\, (\, n \geq 1 \;:\; P_x\, [\, T_y = m\,] > 0\,)$$

Segue da definição de n_0 e da equação (2.2.5), que $p^{n_0}(x,y) > 0$ e

$$p^m(x,y) = 0 \;,\; 1 \leq m < n_0$$

Desde que $P^{n_0}(x,y) > 0$, podemos encontrar $y_1, \ldots, y_{n_0-1}$, tais que

$$P_x\, [\, X_1 = y_1 \,, \,\ldots\, , X_{n_0-1} = y_{n_0-1}, X_{n_0} = y\,] = p(x,y_1) \,\ldots\, , p(y_{n_0-1}, y)$$

Nenhum dos estados $y_1, \ldots, y_{n_0-1}$ são iguais à x e y. Com isso, vamos mostrar que $\rho_{y,x} = 1$. Suponha que $\rho_{y,x} < 1$. Então a cadeia começando em y tem um probabilidade positiva, $1 - \rho_{y,x}$, de não visitar o estado x. Portanto, uma cadeia começando em x, tem probabilidade positiva

$$p(x,y_1)\, p(y_1,y_2) \,\ldots\, p(y_{n_0-1}, y)(1 - \rho_{y,x})$$

de visitar os estados $y_1, \ldots, y_{n_0-1}, y$ sucessivamente até n_0, e não retornar a x depois de n_0. Então a cadeia não retorna a x qualquer que seja $n \geq 1$, que contradiz a hipótese de que x é recorrente, portanto, $\rho_{y,x} = 1$.

Desde que $\rho_{y,x} = 1$, existe um inteiro positivo n_1 tal que $p^{n_1}(y,x) > 0$. Agora,

$$p^{n_1+n+n_0}(y,y) = P_y\, [\, x_{n_1+n+n_0} = y\,] \geq P_y\, [\, X_{n_1} = x, X_{n_1+n} = x, X_{n_1+n+n_0} = y\,] =$$

$$= \; p^{n_1}(y,x)\, p^n(y,y)\, p^{n_0}(x,y)$$

então,

$$G(x,y) \;\geq\; \sum_{n=n_1+1+n_0}^{\infty} p^n(y,y) \;\geq\; p^{n_1}(y,x)\, p^{n_0}(x,y) \sum_{n=1}^{\infty} p^n(x,x) \;=$$

$$= \; p^{n_1}(y,x)\, p^{n_0}(x,y)\, G(x,x) \;=\; \infty$$

Portanto, y é um estado recorrente.

Desde que y é recorrente e $y \;\rightarrow\; x$, segue pelo mesmo argumento anterior que $\rho_{x,y} = 1$. Isto completa a prova. □

Um conjunto C de estados é dito ser fechado se,

$$\rho_{x,y} \;=\; 0 \;\;,\;\; \forall x \in C \;\; e \;\; y \notin C$$

Pode-se observar que C é um conjunto fechado se, e só se, $p(x,y) = 0$ para $x \in C$ e $y \notin C$, então

$$p^2(x,y) \;=\; \sum_{z \in \mathcal{S}} p(x,z)\, p(z,y) \;=\; \sum_{z \in C} p(x,z)\, p(z,y) \;=\; 0$$

para todo $x \in C$ e $y \notin C$.

Por indução, segue que $p^n(x,y) = 0 \;\;,\;\; \forall x \in C \;\; e \;\; y \notin C$.

Se C é um conjunto fechado, então uma cadeia começando em C, nunca sairá de C, com probabilidade 1. Se a é um estado absorvente, então $\{a\}$ é fechado.

Um conjunto C é chamado irredutível se este for uma classe de equivalência. Uma cadeia de Markov é denominada irredutível se seu espaço de estado é irredutível. Então um conjunto fechado é irredutível se $x \;\rightarrow\; y$ para qualquer escolha de x e y em C. Segue do teorema B.2.4 que se C é um conjunto fechado, então todos os seus estados são recorrentes ou transientes. Como conseqüência dos teoremas B.2.3 e B.2.4, temos os seguintes corolários.

COROLÁRIO B.2.2 *Seja C um conjunto fechado irredutível de estados recorrentes. Então* $\rho_{x,y} = 1$, $P_x[N(y) = \infty] = 1$ *e* $G(x,y) = \infty$ *para toda escolha de* x *e* y *em* C

Se uma cadeia de Markov é irredutível, então todos os seus estados são recorrentes ou transientes. Se a cadeia é recorrente, então pelo corolário B.2.2 esta visita todos os seus estados infinitas vezes, com probabilidade 1. Na seção anterior mostramos que se $\mathcal{S}$ é finito, então este contém pelo menos um estado recorrente. Assim, temos o seguinte corolário.

COROLÁRIO B.2.3 *Seja C um conjunto fechado finito irredutível. Então todos os seus estados são recorrentes.*

COROLÁRIO B.2.4 *Suponha que* $\mathcal{S}_R$ *é um conjunto de estados recorrentes não vazio. Então,* $\mathcal{S}_R$ *é a união finita ou infinita enumerável de conjuntos fechados irredutíveis* $C_1, C_2, \ldots$

Apêndice C

Supermartingales positivos

Esta apêndice, tem com objetivo definir e estudar algumas propriedades relacionadas à supermartingales positivos, dentre estas citamos o teorema da convergência de supermartingales positivos e a desigualdade de Doob. Com este fim, considere $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade completo e $\{\beta_n : n \geq 0\}$, uma seqüência crescente de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$, que é denominada de filtragem sobre $(\Omega, \mathcal{F})$.

C.1 Definição e resultados

DEFINIÇÃO C.1.1 *Qualquer seqüência de variáveis aleatórias com valores em* $\overline{\Re}_+ = [0, \infty]$, *satisfazendo*

1. X_n *é* β_n*-mensurável, ou seja, adaptado à família* $\{\beta_n \ ; \ n \in I\!N\}$.
2. $E[X_{n+1} \mid \beta_n] \ \leq \ X_n$

é denominada de Supermartingale positivo com respeito à filtragem $\{\beta_n \ ; \ n \in I\!N\}$. *Quando estiver claro qual filtragem estamos usando, diremos resumidamente que* $(X_n : n \in I\!N)$ *é um supermartingale positivo.*

Apesar de não exigirmos a integrabilidade das variáveis aleatórias a existência da esperança condicional está garantida, pois as variáveis aleatórias são não negativas (Brémaud T17, pg 275). As vezes, para ressaltar a filtragem que estamos usando denotaremos o supermartingale positivo por $X = \{(X_n, \beta_n) : n \in I\!N\}$.

Considerando-se a definição (C.1.1) vamos desenvolver a teoria necessária para se mostrar o seguinte teorema.

TEOREMA C.1.1 *Todo supermartingale positivo* $X = (X_n, \beta_n)_{n \in I\!N}$ *converge (P-q.c.), e seu limite é (P-q.c.) finito sobre o conjunto* $\{X_n < \infty\}$.

Antes de demonstrá-lo, apresentaremos alguns lemas que nos serão úteis.

LEMA C.1.1 *Seja* $(X_n^{(i)}, \beta_n)_{n\in I\!N}$, $i = 1,2$ *dois supermartingales positivos definidos sobre* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *e adaptado à mesma seqüência crescente* $(\beta_n, n \in I\!N)$ *de sub-*σ*-álgebras de* $\mathcal{F}$*.Então, se*

$$v : \Omega \longrightarrow \bar{I\!N} = I\!N \cup \{\infty\}$$

é uma variável aleatória, tal que:

a− $\{v = n\} \in \beta_n$; $\forall n \in I\!N$ *(tempo de parada)*

b− $X_v^{(1)} \geq X_v^{(2)}$ $(P - q.s.)$, *sobre* $\{v < \infty\}$,

Segue que,

$$X_n(w) = \begin{cases} X_n^{(1)}(w) & se \ \ n < v(w) \\ X_n^{(2)}(w) & se \ \ n \geq v(w) \end{cases}$$

define um novo supermartingale positivo adaptado à filtragem $(\beta_n, n \in I\!N)$.

Prova: Temos que,

$$X_n = 1\!\!1_{\{v>n\}} X_n^{(1)} + 1\!\!1_{\{v\leq n\}} X_n^{(2)} \ \ ; \ \ \forall n \in I\!N$$

Como,

$$\{v \leq n\} = \sum_{i=1}^{n} \{v = i\} \ \ (\text{ união disjunta})$$

segue-se que $\{v \leq n\}$ pertence à β_n, por complementação, o conjunto $\{v > n\}$, também pertence à $\{\beta_n\}$. Portanto

$$X_n \ \ \text{é} \ \ \beta_n - \text{mensurável} \ \ (\textit{adaptado})$$

Usando a definição de supermartingale (ou melhor a equação 2 da definição 2.3.1), segue-se que,

$$X_n = 1\!\!1_{\{v>n\}} X_n^{(1)} + 1\!\!1_{\{v\leq n\}} X_n^{(2)} \geq 1\!\!1_{\{v>n\}} E\left[X_{n+1}^{(1)} \mid \beta_n\right] + 1\!\!1_{\{v\leq n\}} E\left[X_{n+1} \mid \beta_n\right]$$

$$= E\left[\, 1\!\!1_{\{v>n\}} X_{n+1}^{(1)} + 1\!\!1_{\{v\leq n\}} X_{n+1}^{(2)} \mid \beta_n\right]$$

pois, $1\!\!1_{\{v>n\}}$ e $1\!\!1_{\{v\leq n\}}$ são β_n-mensuráveis.

Por outro lado, a desigualdade $X_v^{(1)} \geq X_v^{(2)}$ sobre $(v = n+1)$ implica que,

$$\mathbb{1}_{\{v>n\}}X^{(1)}_{n+1} + \mathbb{1}_{\{v\leq n\}}X^{(2)}_{n+1} \geq \mathbb{1}_{\{v>n+1\}}X^{(1)}_{n+1} + \mathbb{1}_{\{v\leq n+1\}}X^{(2)}_{n+1} = X_{n+1}$$

Portanto,

$$E[X_{n+1} \mid \beta_n] \leq X_n \ ; \ \forall n \in I\!N$$

que completa a prova. □

Considere $(a < b)$ números reais fixos. Para toda seqüência $(x_n, n \in I\!N)$ com valores no $\bar{\Re}$, podemos definir (relativo à a e b) os índices v_k $(k \geq 1)$ sucessivamente por:

$$\begin{aligned} v_1 &= min(n : n \geq 0; x_n \leq a) \\ v_2 &= min(n : n > v_1; x_n \geq b) \\ v_3 &= min(n : n > v_2; x_n \leq a) \end{aligned}$$

e assim por diante.

Se um dos índices v_k não está bem definido (por exemplo, v_1 não está definido se $x_n > a$ para todo $n \in I\!N$), neste caso, é conveniente igüalá-lo à $+\infty$, e conseqüentemente todos os índices seguintes.

Denotaremos por $B_{a,b}$ o maior inteiro p para o qual v_{2p} seja finito. Define-se $B_{a,b} = +\infty$ se $v_{2p} < \infty$ para todo p. Então $B_{a,b}$ pode ser interpretado com o número de vezes que a sequência $(x_n, n \in I\!N)$ cruza o intervalo $[a, b]$, no sentido crescente. Este será denotado por número de subidas da seqüência $(x_n; n \in I\!N)$. Segue, imediatamente da definição de $B_{a,b}$, que

$$\liminf_n x_n < a < b < \limsup_n x_n \iff B_{a,b} = +\infty$$

Portanto, para que uma seqüência $(x_n; n \in I\!N)$ seja convergente no $\bar{\Re}$, é necessário e suficiente que $B_{a,b} < +\infty$ para todos números reais $a < b$. Desde que, os números racionais formam um subconjunto denso dos reais, é suficiente trabalharmos com a e b racionais.

Agora, considere uma seqüência de variáveis aleatórias $(X_n, n \in I\!N)$ com valores em $\bar{\Re}$ e a seqüência de inteiros $v_k(w)$ $(k \geq 1)$ e $B_{a,b}(w)$ associada a cada trajetória $(X_n(w); n \in I\!N)$, para w percorrendo todo Ω. A fim de que a seqüência de variáveis aleatórias sejam (P-q.s) convergente sobre Ω é suficiente e necessário que $B_{a,b} < +\infty$ (P-q.s.) para toda dupla de números racionais $(a < b)$. A partir desta observação é que vamos demonstrar o teorema C.1.1. A etapa principal desta demonstração é formada pela seguinte desigualdade.

LEMA C.1.2 (Desigualdade de Dubins) *Seja $(X_n; n \in I\!N)$ um supermartingale positivo adaptado à filtragem $(\beta_n; n \in I\!N)$. Para toda dupla $0 < a < b$ de números reais positivos, o número de subidas $B_{a,b}$ com relação ao supermartingale positivo $(X_n; n \in I\!N)$, verifica a desigualdade*

$$P[\,B_{a,b}\ \geq\ k\,]\ \leq\ (\frac{a}{b})^k\,E\left[\,min(\frac{X_0}{a}\ ,\ 1)\,\right] \qquad (3.1.1)$$

para todo inteiro $k \geq 1$

Prova: Pode-se observar que os índices são tempos de parada com relação à filtragem $(\beta_n; n \in I\!N)$. Portanto, o conjunto $\{v_k = n\}$ só depende de $X_0, X_1, \cdots, X_n$ e é β_n-mensurável para todo $n \in I\!N$ e todo $k \geq 1$. Aplicando-se o lema C.1.1 sucessivamente à fórmula seguinte, onde $k \geq 1$ está fixo, define-se um supermartingale positivo:

$$Y_n\ =\ \left[\begin{array}{ll} 1 & ;\ se\ \ 0 \leq n < v_1 \\ \frac{X_n}{a} & ;\ se\ \ v_1 \leq n < v_2 \\ \frac{b}{a} & ;\ se\ \ v_2 \leq n < v_3 \\ \frac{b}{a}\frac{X_n}{a} & ;\ se\ \ v_3 \leq< v_4 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ (\frac{b}{a})^{k-1}\frac{X_n}{a} & ;\ se\ \ v_{2k-1} \leq< v_{2k} \\ (\frac{b}{a})^k & ;\ se\ \ v_{2k} \leq n \end{array}\right.$$

Portanto as seqüências constantes $(\frac{b}{a})^j$; $0 \leq j \leq k$ e as seqüências $((\frac{b}{a})^j \frac{X_n}{a}$; $n \in I\!N)$ são supermartingales positivos, pois pela definnição de v_j

$$1 \geq \frac{X_{v_1}}{a}\ ;\ \frac{X_{v_2}}{a} \geq \frac{b}{a}\ ; \cdots ;\ (\frac{b}{a})^{k-1}\frac{X_{v_{2k}}}{a} \geq (\frac{b}{a})^k$$

sobre os conjuntos onde v_j é finito.

Observamos que

$$Y_o\ =\ min\left(1, \frac{X_0}{a}\right)$$

dado que $\frac{X_0}{a}$ é inferior ou superior à 1 sobre

$$v_1 = 1\ \ ou\ \ v_1 > 0$$

Da definição de supermartingale positivo

$$Y_0\ \geq\ E\,[Y_n \mid \beta_0\,]\ \ ;\ \ \forall n \in I\!N$$

Agora, dado que $Y_n \geq (\frac{b}{a})^k$ sobre $(v_{2k} \leq n)$, segue-se que:

$$min\left(1, \frac{X_0}{a}\right)\ \geq (\frac{b}{a})^k\ E\left[\ 1\!\!1_{\{v_{2k} \leq n\}} \mid \beta_0\,\right]$$

Então, fazendo $n \longrightarrow \infty$ e aplicando a esperança dos dois lados, obtém-se a desigualdade de Dubins, pois

$$\{V_{2k} < \infty\} \;=\; \{\; B_{a,b} \;\geq k\}$$

segue o lema. □

Com desigualdade de Dubins, pode-se demonstrar o teorema C.1.1

Demonstração do teorema C.1.1: Fazendo $k \longrightarrow \infty$ na desigualdade de Dubins, segue-se que $P[B_{a,b} = \infty] = 0$ para todo par de números reais positivos. Então, deduz-se que

$$\{w : B_{a,b}(w) < \infty \;\; \textit{para todo par } 0 < a < b \;\; \textit{de racionais}\}$$

é um conjunto de probabilidade 1 e para todo w neste conjunto, $\lim_n X_n(w)$ existe. Portanto, a seqüência $(X_n; n \in I\!N)$ converge (P-q.s.). Para terminar a demonstração do teorema resta-nos mostrar que $\lim_n X_n \;<\; \infty$ (P-q.s.) sobre

$$\{\; X_n = \infty \;;\; \forall n \;\}^c \;=\; \{\inf_n \; X_n \;<\; \infty \;\}$$

A seguinte inclusão,

$$\{\inf_n X_n \;\leq\; a \;;\; \lim_n X_n \;=\; \infty \;\} \;\subset\; \{\; B_{a,b} \;\geq\; 1 \;\} \;\;;\;\; 0 < a < b$$

mais a desigualdade de Dubins, implicam que:

$$P\;\left[\;\inf_n X_n \leq a \;;\; \lim_n X_n \;=\; \infty\;\right] \;\leq\; P[B_{a,b} \;\geq\; 1] \;\leq\; \frac{a}{b}$$

fazendo $b \longrightarrow \infty$, segue que:

$$P[\;\inf_n X_n \leq a \;;\; \lim_n X_n = +\infty] \;=\; 0$$

Agora, fazendo $a \longrightarrow \infty$, vê-se, enfim

$$P\left[\;\inf_n X_n \;<\; \infty \;;\; \lim_n X_n \;=\; \infty\;\right] \;=\; 0$$

segue o teorema. □

A seguir, vamos apresentar a desigualdade de Doob para supermartingales positivos, que foi introduzido por Doob (1953).

TEOREMA C.1.2 *Seja* $\{(X_n, \beta_n) : n \geq 0\}$ *um supermartingale positivo, então para cada* $\lambda \geq 0$

$$P\left[\sup_{0 \leq i < \infty} X_i \geq \lambda\right] \leq E\left[\frac{X_0}{\lambda}\right] \tag{3.1.2}$$

Maiores informações sobre os tópicos discutidos rapidamente neste apêndice pode ser encontrado, entre outros, em textos tais como Doob (1953), Neveu (1975).

C.2 Tempo de parada

Para encerrar este apêndice, vamos discutir um pouco a idéia de tempo (ou instante) de parada e filtragem associada a um processo estocástico.

Dado um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, a evolução de um fenômeno aleatório observado continuamente no tempo, é representado por uma família de variáveis aleatórias $(X_t \ ; \ t \geq 0)$ definidas sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e geralmente com valores no $\Re^n$. Tal família é denominada de processo estocástico.

Associada a cada processo $(X_t \ ; \ t \geq 0)$, pode-se definir para cada $t \geq 0$, uma sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$, denotada por $\mathcal{F}_t^X$, tal que

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s : s \in [0,t]\}$$

Em outras palavras, $\mathcal{F}_t^X$ é a σ-álgebra gerada pela família de variáveis aleatórias $(X_s : s \in [0,t])$. A família $(\mathcal{F}_t^X : t \geq 0)$ é denominada de filtragem interna do processo $(X_t : t \geq 0)$. Pode-se interpretar $\mathcal{F}_t^X$ como sendo a σ-álgebra que registra todos os eventos relacionados ao processo $(X_t : t \geq 0)$ até o tempo t. A σ-álgebra terminal $\sigma\{X_t : t \geq 0\}$ será denotada por $\mathcal{F}_\infty^X$.

A fim de generalizar este conceito, considere uma família $(\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$. Esta será denominada de filtragem ou filtração sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ se, e só se, for crescente (isto é, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t : s < t$). Pode-se observar que $(\mathcal{F}_t^X : t \geq 0)$ é crescente, portanto uma filtragem. Se o processo $(X_t : t \geq 0)$ é tal que, para todo $t \geq 0$

$$\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t$$

então $\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ é denominada de filtragem de $(X_t : t \geq 0)$.

Uma variável aleatória

$$T : \Omega \longrightarrow \overline{\Re_+} = \Re \cup \{\infty\}$$

que pode ser interpretada como a ocorrência de algum fenômeno, num tempo aleatório, que depende casualmente do processo $(X_t : t \geq 0)$. Neste caso, casualidade pode ser interpretada como a resposta, a cada tempo $t \geq 0$, da pergunta: O fenômeno já ocorreu ? E esta resposta depende somente da observações do passado do processo $(X_t : t \geq 0)$. Em outras palavras, a função indicadora do conjunto $\{T \leq t\}$, isto é, uma função que toma valor 1 se o fenômeno ocorreu antes de t e zero caso contrário, é $\mathcal{F}_t^X$-mensurável, ou equivalentemente

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t^X \tag{3.2.3}$$

Quando T satisfaz (3.2.3) para todo $t \geq 0$, este é denominado de tempo de parada com relação à filtragem interna $(\mathcal{F}_t^X : t \geq 0)$.

Da mesma forma que generalizamos a definição de filtragem interna, vamos generalizar o conceito de tempo de parada para uma filtragem.

DEFINIÇÃO C.2.1 *Seja* $(\mathcal{F}_t \ : \ t \geq 0)$ *uma filtragem definida sobre* $(\Omega, \mathcal{F})$. *Uma variável aleatória* T, *tomando valores em* $\overline{\Re_+}$, *definido sobre* $(\Omega, \mathcal{F})$ *é denominado de tempo de parada com relação à filtragem* $(\mathcal{F}_t \ : \ t \geq 0)$ *se, e só se*

$$\{T \leq t\} \ \in \ \mathcal{F}_t \ : \ t \geq 0$$

Apêndice D

Gerador de um processo markoviano

Seja $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ um processo estocástico definido sobre o espaço de probabilidade completo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ com valores em E, que estaremos considerando ser um espaço métrico, e $\{\mathcal{F}_t^X : t \geq 0\}$ a filtragem interna associada ao processo X (capítulo 2). Então X é um processo markoviano se

$$P[X(t+s) \in \Gamma \mid \mathcal{F}_t^X] = P[X(t+s) \in \Gamma \mid X_t]$$

para todo $s, t \geq 0$ e $\Gamma \in \beta(E)$. Equivalentemente, dizemos que X é markoviano se

$$E\left\{f[X(t+s)] \mid \mathcal{F}_t^X\right\} = E\{f[X(t+s)] \mid X(t)\} \tag{4.0.1}$$

para todo $s, t \geq 0$ e $f \in B(E)$, onde $B(E)$ é o espaço das funções mensuráveis limitadas sobre E com norma

$$\sup_{x \in E} \mid f(x) \mid$$

Uma função $P[t, x, \Gamma]$ definida sobre $[0, \infty) \times E \times \beta(E)$ é denominada função de transição homogênea no tempo se

$$P[t, x, \cdot] \text{ é uma probabilidade sobre } \beta(E) \;\; ; \;\; (t, x) \in [0, \infty) \times E$$

$$P[0, x, \cdot] = \delta_x \text{ (massa unitária em x)} \;\; ; \;\; x \in E$$

$$P[\cdot, \cdot, \Gamma] \in B([0, \infty) \times E) \;\; ; \;\; \Gamma \in \beta(E)$$

satisfazendo a relação de Chapman-Kolmogorov

$$P[t+s,x,\Gamma] = \int P[s,y,\Gamma]P[t,x,dy] \tag{4.0.2}$$

para todo $s,t,\geq 0$, $x \in E$ e $\Gamma \in \beta(E)$.

Uma função de transição $P[t,x,\Gamma]$ é função de transição relativa à um processo markoviano X homogêneo no tempo, se

$$P[X(t+s) \in \Gamma \mid \mathcal{F}_t^X] = P[s,X(t),\Gamma]$$

para todo $s,t \geq 0$ e $\Gamma \in \beta(E)$.

Neste apêndice, vamos discutir um método para se especificar um processo markoviano. Geralmente, fórmulas para as funções de transição não podem ser obtidas, a excessão mais interessante é o movimento browniano, neste caso

$$P[t,x,\Gamma] = \int_\Gamma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2t}\right] dy$$

Conseqüentemente, a função de transição não é o método usual para se especificar um processo markoviano. Aqui, consideraremos o método de gerador (infinitesimal) associado ao processo.

D.1 Operador de Semigrupo

Operadores de semigrupo são fundamentais para o estudo inicial sobre processos markovianos. Aqui, faremos um introdução aos operadores, discutindo o que vêm a ser seu gerador infinitesimal.

Uma família de operadores lineares limitados sobre um espaço de Banach L é denominado de semigrupo se $T(0) = I$ e $T(s+t) = T(s)T(t)$ para todo $s,t \geq 0$. Um semigrupo $\{T(t)\}$ sobre L é dito ser fortemente contínuo se

$$\lim_{t\to\infty} T(t)f = f$$

para toda função $f \in L$, aqui f funciona como uma classe de equivalência em L. Este é denominado contração se $\| T(t) \| \leq 1$ para todo $t \geq 0$.

EXEMPLO D.1.1 *Considere um operador linear B sobre L. Então, definimos*

$$\exp^{tB} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k B^k \quad ; \quad t \geq 0$$

Podemos facilmente mostrar que

$$\exp^{(s+t)B} = \exp^{sB} \exp^{tB} \quad ; \quad s,t \geq 0$$

Portanto $\{\exp^{tB}\}$ define um semigrupo sobre L

O gerador infinitesimal de um semigrupo $\{T(t)\}$ sobre L é um operador linear $\mathcal{L}$ definido por:

$$\mathcal{L}f = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [\, T(t)f - f \,] \qquad (4.1.3)$$

O domínio $D(\mathcal{L})$ de $\mathcal{L}$ é o subespaço de todas as funções $f \in L$ para o qual este limite existe. Destacamos que não é nosso objetivo apresentar definições e análises rigorosas sobre gerador infinitessimal, por exemplo o limite apresentado em (4.1.3) pode assumir diversas forma e interpretações que não serão evidenciadas aqui, tal considerações juntamente com uma análise sobre existência e principais propriedades sobre geradores infinitesimais de semigrupo podem ser encontrados em textos, como Ethier e Kurtz (1986).

Agora, vamos analisar a relação entre operadores de semigrupo e processos markovianos, isto é, vamos mostrar que através de um processo markoviano podemos definir um operador de semigrupo.

D.2 Semigrupo associado a um processo markoviano

Nesta seção, vamos explorar o fato de que

$$T(t)f(x) = \int f(y)P[t,x,dy]$$

define um semigrupo de contração mensurável sobre $B(E)$ Pois, segue diretamente da relação de Chapman-Kolmogorov, que

$$T(s+t) = \int P[t,x,dy] = \int \int P[s,z,dy]P[t,x,dz]$$

$$= \int P[s,z,dy] \int P[t,x,dz]$$

Seja $\{T(t)\}$ um semigrupo sobre um subespaço fechado de $L \subset B(E)$. Portanto, dizemos que um processo markoviano X com valores em E corresponde à $\{T(t)\}$ se

$$E\left\{f[X(t+s)] \mid \mathcal{F}_t^X\right\} = T(s)f[X(t)] \qquad (4.2.4)$$

para todo $s, t \geq 0$ e $f \in L$. A seguir apresentaremos uma proposição que garante que um processo markoviano pode ser representado pelo semigrupo associado. Esta proposição e detalhes de como cálcular o gerador infinitesimal associado à processos markovianos podem ser encontrados em Ethier e Kurtz (1986).

PROPOSIÇÃO D.2.1 *Seja E um espaço separável. Seja X um processo markoviano com valores em E tendo distribuição inicial μ correspondente ao semigrupo $\{T(t)\}$ sobre um subespaço fechado $L \subset B(E)$. Se L é separado, então $\{T(t)\}$ e μ determinam a distribuição finito-dimensional de X*

D.3 Fórmula de Dynkin

Suponha que $\{X_t : t \geq 0\}$ é um processo Markoviano forte contínua à direita e τ um tempo de parada tal que $E[\tau | X_0 = x] < \infty$. Seja $f(x)$ uma função pertencente ao domínio do gerador $\mathcal{L}$, com $\mathcal{L}f(x) = h(x)$. Então, segue de Dynkin (1965, pg. 133), que

$$E\left[f(X_\tau) - f(x) \mid X_0 = x\right] = E\left[\int_0^\tau h(X_s)ds \middle| X_0 = x\right] = E\left[\int_0^\tau \mathcal{L}f(X_s) \middle| X_0 = x\right] \tag{4.3.5}$$

Esta fórmula é o análogo estocástico do teorema fundamental do cálculo.

Bibliografia

[1] M. Bassevile and Beneviste (1988) - "Detection of Abrupt Changes in Signals and Dynamical Systems", Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, vol. 77

[2] S. Barnett and C. Storey (1970) - *Matrix Methods in Stability Theory*, Thomas Nelson and Sons LTD

[3] J. E. Bertran and P. E. Sarachik (1959) - " On the Stability of Systems with Random Parameters ", Trans. IRE-PGCT, 5

[4] P. Brémaud (1981) - *Point Process and Queues: martingale dynamics*, Springer-Verlag, New York

[5] R. S. Bucy (1965) - "Stability and Positive Supermartingales, J. Differential Equations, 1, No. 2, pp. 151 - 155

[6] E. Çinlar (1975) - *Introduction to Stochastic Processes*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

[7] H. J. Chizeck, A. S. Willsky and D. Castonon (1986) - "Discrete Time Markovian Jump Linear Quadratic Optimal Control", Int. J. Control, vol 43, no.1, pp. 213 - 231,

[8] H. J. Chizeck and Y. Ji (1988) - "Optimal Quadratic Control of Jump Linear Systems with Gaussian Noise in Discrete Time", Proc. 27th IEEE, CDC, 3, pp. 1989 - 1993, Austin, Texas

T

[9] J. B. Conway (1985) - *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, New York

[10] J. L. Doob (1953) - *Stochastic Process* , Wiley, New York

[11] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar and B. A. Francis (1989) - "State Space Solutions to the Standard H^2 and H^∞ Control Problems", IEEE Trans. Automat. Control, 34, pp. 831 - 847

[12] P. L. Duren (1970) - *Theory of H^p Spaces*, Academic Press, New York

[13] E. B. Dynkin (1965) - *Markov Process* , Springer, Berlin (translation of 1963 publication of state publishing housem Moscow)

[14] S. N. Ethier and T. G. Kurtz (1986) - *Markov Processes: characterization and convergence*, John Wiley and Sons

[15] X. Feng, A. Loparo, Y. Ji and H. J. Chizeck - (1992) "Stochastic Stability Properties of Jump Linear Systems" , IEEE Trans. Automat. Control, vol. 37, no. 1, pp. 38 - 53

[16] M. D. Fragoso (1989) - "Discrete-time Jump LQG Problem", Int. J. Systems Sci., vol. 20, no. 12, pp. 539 - 545

[17] M. D. Fragoso and O. L. V. Costa - "Stability results for discrete-time linear systems with Markovian jumping parameters ", aceito para publicação em Journal of Mathematical Analysis and Applications

[18] B. A. Francis (1987) - *A Course in H^∞ Control*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol 88, Spring Verlag, Berlin

[19] B. A. Francis and J. C. Doyle (1987) - "Linear Control Theory with an H^∞ Optimality Criterion" , SIAM J. Control Opt., vol. 25, pp. 815-844

[20] J. C. Geromel, P. L. D. Peres and S. R. Souza (1991) - " Quadratic Stabilizability of Linear Uncertain Systems with Prescribed H^∞ Norm Bounds", 1st IFAC Symp. on Design Meth. Control Systems, Zurich, Switzerland

[21] R. Z. Has'minskii (1980) - *Stochastic Stability of Differencial Equations*, Gröningen, The Netherlands: Sijthoff and Noordhoff

[22] Y. Ji and H. J. Chizeck (1989) - " Optimal Quadratic Control of Discrete-time Jump Linear Systems with Separately Controllable Transition Probabilities", Int. J. Control, vol. 49, 2, pp. 481 - 491

[23] Y. Ji and H. J. Chizeck (1990a) - "Jump Linear Quadratic Gaussian Control: steady-state solution and testable conditions", Control Theory and Adv. Technology, vol. 6, no.3, pp. 289-319,

[24] Y. Ji and H. J. Chizeck (1990b) - "Controlability, Stabilizability and Continuous-times Markovian Jump Linear Quadratic", IEEE Trans. Automat. Control, vol. 35, no. 7, pp. 777 - 788

[25] M. Kac (1969) - "Some Mathematical Models in Science", Science, vol. 166, 695-699

[26] R. E. Kalman and J. E. Bertran (1960) - "Control System analysis and Design via the second Method fo Lyapunov: I- Continuous Systems ; II- Discrete-time Systems", Trans. A.S.M.E. J. Basic Eng., vol. 82D, pp. 371-400

[27] I. I. Kats (1964) - "On the Stability of Stochastic Systems in the Large", J. Appl. Math. and Mech. (PMM), 28

[28] I. I. Kats and N. N. Krasovskii (1960) - "On the Stability of Systems with Random Disturbance", J. Appl. Math. and Mech. (PMM), 24

[29] P. P. Khargonekar, I. R. Petersen and M. A. Rotea (1989) - "H^∞ Optimal Control with State Feedback", IEEE Trans. Automat. Control, 33, pp. 786 - 788

[30] P. P. Khargonekar, I. R. Petersen and K. Zhou (1990) - "Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems: quadratic stabilizability and H^∞ control theory", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 35, no. 3, pp. 356-361

[31] F. Kozin (1963) - "On Almost Sure Stability of Linear Systems with Random Coefficients", J. Math and phys. 43, pp. 59 - 67

[32] F. Kozin (1965) - "On Relations Between Monent Properties and Almost Sure Lyapunov Stability for Linear Stochastic Systems", J. Math. anal. and appl. , 10, 342 - 353

[33] F. Kozin (1969) - " A Survey of Stability of Stochastic Systems ", Automatica, vol. 5, pp. 95 - 112

[34] F. Kozin (1972) - "Stability of the Linear Stochastic Systems", Lecture Notes in Mathematics, vol. 294, pp. 186-229

[35] N. N. Krasovskii (1957) - "On Stability with Large Initial Perturbation", P.M.M., vol. 21, pp. 309-319

[36] N. N. Krasovskii (1963) - "Stability of Motion", Stanford Univ. Press, Stanford, California (translation of the 1959 Russian book)

[37] N. N. Krasovskii and E. A. Lidskii (1961) - " Analitycal Design of Controllers in Systems with Random Attributes " I, II, III, Automation Remote Control 22, 9, 10 e 11, pp. 1021 - 1025, 1141 - 1146 e 1289 - 1294

[38] H. J. Kushner (1967) - *Stochastic Stability and Control* , Academic press, New York

[39] H. J. Kushner (1972) - "Stochastic Stability", Lecture Notes in Mathematics, 294, pp. 97-124

[40] L. Lee, G. Goodwin and W. Kolodziej (1990) - "Interconections Between Continuous and Discrete Games with Aplications to H^∞ ", Technical Report EE8965,

[41] K. A. Loparo. M. R. Buchner and K. S. Vasudeva - (1991) " Leak Detection in an Experimental Heat Exchanger Process: a multiple model approach ", IEEE Transaction on Automat. Control, vol 36, no. 2, pp. 167-177

[42] A. M. Lyapunov (1907) - "Problème général de la stabilité du mouvement", Annals of Math. Studies, no. 7, Princeton University Press, N. J. (French translation of 1892 paper in Russian)

[43] R. R. Mitchell and F. Kozin (1974) - "Sample Stability of Second Order Linear Differential Equation with Wide Band Noise Coefficients* ", SIAM J. Appl. Math., vol. 27, pp. 571-605

[44] T. Morozan (1968) - "Stability of Stochastic Discrete Systems", J. Math. Anal. Appl., vol 23, pp. 1-9.

[45] M. A. Naimark (1964) - *Normed Rings* , Gröningen, Noordhooff

[46] J. Neveu (1965) - *Mathematical Foundations of the Calculus of Probability*, Holden-Day, San Francisco

[47] J. Neveu (1975) - *Discrete-Parameter Martingales*, North Holland Publishing Company

[48] P. L. D. Peres, J. C. Geromel and S. R. Souza (1991) - " Convex Analysis of Discrete-Time Uncertain H^∞ Control Problems", Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control, Brighton, England, pp. 521-526

[49] H. L. Royden (1968) - *Real Analysis* * , The Macmillan Company, New York

[50] W. Rudin (1973) - *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York

[51] W. Rudin (1976) - *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, Tokyo

[52] W. Rudin (1987) - *Real and Complex Analysis* , 3rd. ed. , McGraw-Hill, New York

[53] C. E. Souza and M. D. Fragoso (1991) - "H^∞ Control for Linear Systems with Markovian Jumping Parameters ", Proc. of the European Control Conference, Grenoble, France, pp. 17-22.

[54] A. A. Stoorvogel (1990) - *The H^∞ Control Problem : A State Space Approach*, Ph.D. thesis, Tech. Univ. Eindhoven

[55] D. D. Sworder (1969) - " Feedback Control for a Class of Linear Systems with Jump Parameters ", IEEE Trans. Auto. Control, AC-14, 1, pp. 9 - 14

[56] D. D. Sworder and R. O. Rogers (1983) - "An LQG solution to a Control Problem with Solar Thermal Receiver ", IEEE Transaction on Automat. Control, vol. 28, pp. 971-978

[57] G. Tadmor (1990) - "Worst-case Design in the Time-domain : the maximum principle and the standard H^∞ problem ", Math. of Control Signals and Systems 3, pp. 301 - 324. Signals Systems

[58] A. C. Willsky and B. C. Levy (1979) - "Stochastic Stability Reserch for Complex Power Systems", DOE Contract, LIDS, MIT, Rep. ET-76-C-01-2295

[59] W. M. Wonham (1971) - " Random Differential Equations in Control Theory ", A. T. Bharucha-Reid (ed.), Probabilistic Methods in Applied Mathematic, vol. 2, pp. 131 - 213, Academic Press, N. Y.

[60] G. Zames (1981) - "Feedback and Optimal Sentivity: model reference transformation, multiplicative seminorms and aproximate inverse ", IEEE Trnas. Auto. Cont., vol. AC-26, pp 301 - 320

[61] G. Zames and B. A. Francis (1983) - "Feedback, Minimax Sentivity and Optimal Robustness", IEEE Trans. Auto. Control, vol. AC-28, pp. 585 - 601