Universidade Estadual de Campinas

Faculdade de Engenharia Elétrica

Departamento de Telemática

# Solução do Problema de Rejeição de Perturbações com Regulação Linear-Quadrática

**Autor:** Carlos Eduardo Trabuco Dórea

**Orientador:** Prof. Dr. Basílio Ernesto de Almeida Milani

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Fevereiro de 1993

A Dona Mirtes e Doutor Adelino

# Agradecimentos

- Ao Professor Basílio, pela orientação, incentivo e amizade.
- Aos Professores Pedro Luis Dias Peres e Paulo Augusto Valente Ferreira da UNICAMP e ao Professor Paulo Sérgio Pereira da Silva da USP pela participação no julgamento desse trabalho.
- A minha gordinha Marie, por todo carinho que tem me dedicado e por tudo que a gente tem aprendido juntos.
- A meu companheiro Reginaldo, que tem sido como um irmão durante todo esse tempo.
- A todas as pessoas que em algum momento me deram demonstrações de carinho e amizade, tendo contribuido assim para a conclusão deste trabalho (Humberto, Paulo Maurício, Andrea, Isamara, Sérgio, Mabel e muitos outros).
- Ao Governo do Brasil, através da CAPES, pelo suporte financeiro.

"Senhor irmão de Tupã,
Fazei com que o chicote seja por fim pendurado
Revogai a intolerância, a lei
Devolvei o chão a quem no chão foi criado."

**Gilberto Gil** - *"Oração pela Libertação da África do Sul"*

## RESUMO

O Problema de Rejeição de Perturbações com Regulação Linear-Quadrática (PRPRLQ) é proposto como uma forma de se obter uma solução com características de otimalidade para o Problema de Rejeição de Perturbações (PRP). Com esse objetivo, a forma analítica de todas as soluções do PRP para uma classe particular de sistemas, e de algumas soluções para sistemas gerais é determinada a partir de uma abordagem na qual as questões numéricas envolvidas são consideradas. Os resultados obtidos são comparados com outros disponíveis na literatura. O PRPRLQ é então formulado como um problema de otimização de parâmetros em reguladores L-Q com restrições de estrutura, restrições estas impostas pela parametrização dos controladores oriundos da solução do PRP. Um método de descida especializado, concebido para lidar com restrições de estrutura severas, é proposto para solução do problema de otimização. O desempenho do método é discutido em exemplos numéricos significativos.

## ABSTRACT

The Disturbance Rejection Problem with Linear-Quadratic Regulation (DRPLQR) is proposed as a way to obtain a solution for Disturbance Rejection Problem (DRP) with optimality characteristics. To this end, the analytical expression of all DRP solutions for a particular class of systems, and of some solutions for general systems, is derived using an approach that considers the related numerical questions. The obtained results are compared to other ones available in literature. DRPLQR is then formulated as a parameter optimization problem in L-Q regulators subject to structural constraints, such constraints being imposed by the parameterization of the controllers resulting from DRP solution. A specialized descent method, conceived to handle severe structural constraints, is proposed to solve the optimization problem. The performance of the method is discussed in significant numerical examples.

# Simbologia Utilizada

| | |
|---|---|
| $\Re$ | - conjunto dos números reais |
| $\Re^n$ | - conjunto dos vetores reais de dimensão $n$ |
| $\Re^{n \times m}$ | - conjunto das matrizes reais de dimensão $n \times m$ |
| | |
| $\cup$ | - união |
| $\cap$ | - interseção |
| $\subset$ | - está contido em |
| $\supset$ | - contém |
| $\oplus$ | - soma direta |
| $\uplus$ | - união com repetição de elementos comuns |
| | |
| $I_n$ | - matriz identidade de ordem $n$ |
| $A'$ | - matriz transposta de $A$ |
| $\sigma[A]$ | - espectro da matriz $A$ |
| $det(A)$ | - determinante da matriz $A$ |
| $posto(A)$ | - posto da matriz $A$ |
| $\otimes$ | - produto de Kronecker |
| | |
| $dim(\mathcal{X})$ | - dimensão do espaço $\mathcal{X}$ |
| $\|x\|$ | - norma euclidiana do vetor $x$ |
| | |
| $< A \mid \mathcal{B} >$ | - subespaço controlável do par $(A, B)$ |
| | |
| $:=$ | - definido como |
| $\equiv$ | - equivalente a |
| $<<$ | - muito menor que |
| $\simeq$ | - aproximadamente igual a |
| | |
| $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ | - derivada parcial de $f(x)$ em relação a $x_i$ |
| | |
| $\mathbf{E}(x)$ | - esperança matemática de $x$ |

# Conteúdo

# Introdução Geral

Ao longo das duas últimas décadas, grande parte da teoria de controle tem sido construída com base na chamada *abordagem geométrica*. A força dessa abordagem reside na sua capacidade de interpretação dos fenômenos físicos e questões estruturais inerentes aos problemas de controle, que são por sua vez solucionados num contexto de abstração das questões numéricas envolvidas. Essa abstração, no entanto, resulta numa certa dificuldade de aplicação prática, no sentido de computação efetiva dos seus resultados, o que motivou um grande esforço de pesquisa dirigido ao estudo e criação de algoritmos numéricos eficientes para manipulação dos conceitos geométricos.

No contexto dessa abordagem, o *Problema de Rejeição de Perturbações* através de realimentação proporcional de estados (PRP) surge como um excelente exemplo de aplicação de alguns de seus conceitos fundamentais na solução de um problema de controle. Por essa razão, o PRP vem sendo exaustivamente estudado até hoje, apesar de tratar-se de um problema com pequena aplicabilidade em casos reais. Essa característica, aliás, pode explicar também a pouca atenção dirigida à questão da síntese efetiva de sua solução, ou, em outras palavras, da obtenção de uma lei de controle que se constitua em uma solução eficiente, sob algum critério, para o problema.

Na busca dessa solução eficiente, duas questões são colocadas. A primeira diz respeito à parametrização das matrizes de realimentação que solucionam o problema. É de grande importância num problema de controle que se tenha conhecimento das estruturas admissíveis para o controlador, principalmente no que se refere aos graus de liberdade disponíveis para sua síntese. A segunda questão é complementar à primeira e se refere à adoção de um critério para utilização desses graus de liberdade.

Este trabalho pretende fornecer algumas respostas para as questões acima mencionadas, de uma maneira que privilegie a possibilidade de implementação computacional efetiva.

Na tentativa de encontrar uma parametrização para as soluções do PRP, é investigado inicialmente sob que condições essa parametrização permite a determinação do conjunto de todas as soluções do PRP, ou seja, sob que condições existe uma única estrutura admissível para a matriz de realimentação. Essa estrutura é então determinada. No caso (geral) da impossibilidade da obtenção do conjunto de todas as soluções, outras estruturas admissíveis são procuradas.

Quanto à escolha de um critério para utilização dos graus de liberdade oriundos da parametrização das soluções do PRP, uma alternativa é oferecida através da formulação do *Problema de Rejeição de Perturbações com Regulação Linear-Quadrática* (PRPRLQ), que visa otimizar o desempenho do sistema através da minimização de um funcional quadrático, respeitando as estruturas admissíveis para o controlador.

No curso do desenvolvimento acima exposto, uma grande ênfase é dirigida a questões de implementação computacional das técnicas apresentadas.

Este trabalho é dividido em 4 Capítulos, resumidos a seguir.

**Capítulo 1** - *Teoria Geométrica de Controle de Sistemas Lineares: Conceitos Básicos*

Alguns conceitos fundamentais da abordagem geométrica são apresentados, com destaque para aqueles mais utilizados ao longo do trabalho.

**Capítulo 2** - *Solução do Problema de Rejeição de Perturbações*

Uma metodologia para solução computacional do PRP é apresentada. O problema original é sucessivamente transformado em problemas equivalentes até atingir uma forma onde a solução do PRP se torna evidente. Para isso, algoritmos para o cálculo de alguns subespaços importantes são apresentados. Uma classe de sistemas que admitem a parametrização do conjunto de todas as soluções do PRP é definida, sendo obtida em seguida a expressão geral dos controladores. Para sistemas gerais, a parametrização de alguns conjuntos é obtida. Comparações são feitas com resultados existentes na literatura. Ao final, aspectos numéricos da implementação da metodologia apresentada são discutidos.

**Capítulo 3** - *O Problema de Rejeição de Perturbações com Regulação Linear-Quadrática (PRPRLQ)*

O PRPRLQ é definido, sendo formulado como um problema de otimização de parâmetros em reguladores L-Q com restrições de estrutura. Para sua solução é proposto um método de descida especializado.

**Capítulo 4** - *Exemplos Numéricos*

Cinco exemplos ilustram aspectos importantes da aplicação das metodologias propostas para solução do PRP e do PRPRLQ. O evidenciamento passo a passo da estrutura da solução do PRP é destacado. O desempenho numérico do método de descida para solução do PRPRLQ é também enfatizado.

**Apêndice A -** *O Problema do Regulador Ótimo L-Q com Restrições de Estrutura*

A solução computacional do Problema do Regulador Linear-Quadrático quando restrições na estrutura de controle são impostas é discutida, sendo apresentadas as expressões para o cálculo do índice de desempenho, vetor gradiente e matriz Hessiana, utilizadas pelo método de descida proposto no Capítulo 3.

# Capítulo 1

# Teoria Geométrica de Controle de Sistemas Lineares: Conceitos Básicos

## 1.1 Introdução

Uma grande parte do desenvolvimento da teoria de controle surgido nas duas últimas décadas é baseada na abordagem geométrica, introduzida inicialmente por Wonham [42] e Basile e Marro [2] em trabalhos independentes.

A principal característica dessa abordagem é a possibilidade do alcance de um alto grau de abstração no tratamento das questões estruturais dos problemas de controle, separando-as das questões numéricas. Desse modo, é possível em primeiro lugar compreender a natureza do problema de controle e em seguida partir para sua solução numérica.

O objetivo deste Capítulo é apresentar alguns conceitos fundamentais da teoria geométrica que servirão como base para o desenvolvimento dos próximos Capítulos. Os tópicos selecionados são, por ordem de apresentação, espaços lineares, espaços quocientes, subespaços invariantes e mapas induzidos, polinômio característico e espectro, sistemas lineares, subespaços $(A, B)$-invariantes e de controlabilidade.

Os resultados apresentados são bastante difundidos na literatura e por isso não são acompanhados de provas. A maior parte do Capítulo é baseada no livro de Wonham [43], onde maiores detalhes sobre a teoria geométrica podem ser encontrados. Os resultados das Seções relativas a espaços e sistemas lineares são colocados com maior profundidade, por exemplo, em [5].

## 1.2 Espaços Lineares

**Definição 1.1** Um *espaço linear (vetorial)* $\mathcal{X}$ é um conjunto definido sobre um *corpo de escalares* $\mathcal{F}$, composto de elementos denominados *vetores* no qual são definidas as operações de *adição vetorial* e *multiplicação por escalar.*

As operações citadas satisfazem a um conjunto de leis axiomáticas bastante conhecidas e por isso aqui omitidas.

Neste trabalho só serão considerados espaços definidos sobre os corpos dos números reais e complexos.

**Definição 1.2** Um subconjunto $\mathcal{S}$ do espaço linear $\mathcal{X}$ é um *subespaço* de $\mathcal{X}$ se, considerando-se as operações definidas em $\mathcal{X}$, $\mathcal{S}$ forma um espaço vetorial sobre $\mathcal{F}$. Ou seja, para todos $s_1$, $s_2 \in \mathcal{S}$ e $c_1, c_2 \in \mathcal{F}$, $c_1 s_1 + c_2 s_2 \in \mathcal{S}$.

Se $\mathcal{R}, \mathcal{S} \subset \mathcal{X}$, os subespaços $\mathcal{R} + \mathcal{S}$ e $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ são definidos respectivamente por

$$\mathcal{R} + \mathcal{S} := \{r + s \;/\; r \in \mathcal{R}, s \in \mathcal{S}\}$$

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{S} := \{x \;/\; x \in \mathcal{R} \text{ e } x \in \mathcal{S}\}$$

**Definição 1.3** Um conjunto de vetores $x_1, x_2, ..., x_n$ de um espaço linear é *linearmente dependente* (LD) se e somente se existem escalares $c_1, c_2, ..., c_n$ não todos nulos tais que $c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n = 0$. Se essa expressão só é verdadeira para $c_1, c_2, ..., c_n = 0$, os vetores $x_1, x_2, ..., x_n$ são *linearmente independentes* (LI).

**Definição 1.4** O número máximo de vetores linearmente independentes de um espaço linear é denominado *dimensão* do espaço.

**Definição 1.5** Um conjunto de vetores linearmente independentes é chamado *base* de um espaço linear se qualquer vetor desse espaço pode ser escrito como uma combinação linear única desses vetores.

Num espaço vetorial de dimensão $n$, qualquer conjunto de $n$ vetores LI forma uma base.

**Definição 1.6** Num espaço linear $n$-dimensional, se uma base $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ é escolhida, então todo vetor $x$ desse espaço pode ser unicamente escrito na forma $x = [\; e_1 \;\; e_2 \;\; ... \;\; e_n \;]\beta$. O vetor $\beta$ é chamado *representação de $x$ na base* $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$.

É claro que o vetor $x$ deve possuir uma representação para cada base. A representação de $x$ numa outra base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\}$ é dada por $\bar{\beta} = Q^{-1}\beta$ onde $Q$ é uma matriz cuja $i$-ésima coluna é a representação de $\bar{e}_i$ na base $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$.

**Definição 1.7** Sejam os subespaços lineares $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$. Uma função $M : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é um *mapa (ou transformação) linear* se $M(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1M(x_1) + c_2M(x_2)$ para todos $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ e $c_1, c_2$ escalares.

Mapas lineares são representados por matrizes.

**Definição 1.8** O *espaço nulo* do mapa $M : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é o subespaço dado por

$$\ker(M) := \{x \ / \ x \in \mathcal{X} \ e \ Mx = 0\} \subset \mathcal{X}$$

**Definição 1.9** O *espaço imagem* do mapa $M : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é o subespaço dado por

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(M) \ &:= \{y \ / \ y \in \mathcal{Y} \ e \ \exists x \in \mathcal{X} \ / \ y = Mx\} \\ &= \{Mx \ / \ x \in \mathcal{X}\} \subset \mathcal{Y} \end{aligned}$$

## 1.3 Espaços Quocientes

**Definição 1.10** Seja o subespaço $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$. O *subespaço quociente (fator)* $\mathcal{X}/\mathcal{S}$ é definido como o conjunto de todas as classes de equivalência

$$\bar{x} := \{y \ / \ y \in \mathcal{X}, y - x \in \mathcal{S}; x \in \mathcal{X}\}$$

A definição das operações

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 := \overline{x_1 + x_2} \qquad x_1, x_2 \in \mathcal{X}$$

$$c\bar{x} = \overline{cx} \qquad x \in \mathcal{X}, \ c \text{ escalar}$$

torna $\mathcal{X}/\mathcal{S}$ um espaço linear de dimensão $dim(\mathcal{X}/\mathcal{S}) = dim(\mathcal{X}) - dim(\mathcal{S})$.

**Definição 1.11** O mapa $P : \mathcal{X} \to \mathcal{X}/\mathcal{S}$ que associa $x$ a $\bar{x}$ é denominado *projeção canônica de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{X}/\mathcal{S}$.*

Note que $\ker(P) = \mathcal{S}$. Desse modo, apesar de $\mathcal{X}/\mathcal{S}$ não ser um subespaço de $\mathcal{X}$, ele é isomorfo com qualquer complemento de $\mathcal{S}$, podendo então ser tomado como um complemento "padrão" de $\mathcal{S}$.

## 1.4 Subespaços Invariantes - Mapas Induzidos

**Definição 1.12** Sejam o mapa $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ e o subespaço $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ tal que $A\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$. $\mathcal{S}$ é então dito *$A$-invariante*.

**Definição 1.13** Se $A\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$, o *mapa de $A$ restrito a $\mathcal{S}$*, denotado $A|\mathcal{S}$, é um mapa que tem a mesma ação que o mapa $A$ mas não está definido fora de $\mathcal{S}$.

**Definição 1.14** Sejam $\bar{\mathcal{X}} = \mathcal{X}/\mathcal{S}$, com $\mathcal{S}$ $A$-invariante, e a projeção canônica $P : \mathcal{X} \to \bar{\mathcal{X}}$. Então existe um único mapa $\bar{A} : \bar{\mathcal{X}} \to \bar{\mathcal{X}}$ tal que $\bar{A}P = PA$. $\bar{A}$ é então denominado *mapa induzido em $\bar{\mathcal{X}}$ por $A$*.

Seja $\mathcal{S}$ um subespaço $A$-invariante, $\mathcal{R}$ qualquer subespaço tal que $\mathcal{S} \oplus \mathcal{R} = \mathcal{X}$ e $\{r_i; i = 1, ..., \rho\}$; $\rho = dim(\mathcal{R})$, uma base para $\mathcal{R}$. Escolhendo uma base $\{s_j; j = 1, .., \xi\}$; $\xi = dim(\mathcal{S})$, para $\mathcal{S}$, é fácil verificar que na base $\{s_1, ...r_\rho\}$ para $\mathcal{X}$ o mapa $A$ é dado por

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

onde $A_{11} \in \Re^{\xi\times\xi}$ e $A_{22} \in \Re^{\rho\times\rho}$.

O mapa de $A$ restrito a $\mathcal{S}$, $A|\mathcal{S}$, na base $\{s_j; j = 1, .., \xi\}$ é a submatriz $A_{11}$ e o mapa induzido em $\bar{\mathcal{X}} = \mathcal{X}/\mathcal{S}$ por $A$, $\bar{A}$, na base $\{\bar{r}_i = Pr_i; i = 1, ..., \rho\}$ é a submatriz $A_{22}$.

## 1.5 Polinômio Característico - Espectro

Sejam o espaço linear $\mathcal{X}$ e o mapa $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$. Temos então as seguintes definições:

**Definição 1.15** O *polinômio característico* de $A$ é o polinômio de grau $n$

$$\pi(\lambda) = det(\lambda I - A)$$

**Definição 1.16** O *espectro* de $A$, denotado $\sigma[A]$, é o conjunto de $n$ zeros complexos do polinômio $\pi(\lambda)$, contando as multiplicidades. Os elementos de $\sigma[A]$ são os *autovalores* de $A$.

**Definição 1.17** O *polinômio mínimo* de $A$ é o polinômio $\alpha(\lambda)$ de menor grau tal que $\alpha(A) = 0$.

O polinômio mínimo é único e divide todo polinômio não nulo $\beta(\lambda)$ tal que $\beta(A) = 0$. Em particular $\alpha(\lambda)$ divide o polinômio característico $\pi(\lambda)$.

# 1.6 Sistemas Lineares

Neste trabalho serão considerados sistemas lineares contínuos, invariantes no tempo, modelados por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1.1}$$

$$y = Cx(t) \tag{1.2}$$

para $t \geq 0$. Os vetores $x$, $u$ e $y$ pertencem aos espaços lineares reais $\mathcal{X}$, $\mathcal{U}$ e $\mathcal{Y}$ respectivamente, com $dim(\mathcal{X}) = n$, $dim(\mathcal{U}) = m$ e $dim(\mathcal{Y}) = p$, onde $\mathcal{X}$ é o *espaço de estados*, $\mathcal{U}$ é o *espaço de entradas* e $\mathcal{Y}$ o *espaço de saídas*. Ao longo deste trabalho, serão considerados então $\mathcal{X} = \Re^n$, $\mathcal{U} = \Re^m$ e $\mathcal{Y} = \Re^p$.

Se $x(0) = x_0$, as equações acima implicam em

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau; \qquad t \geq 0$$

ou, em geral,

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau; \qquad t_0, t \geq 0$$

## 1.6.1 Controlabilidade e Observabilidade

Seja o trio $(A, B, C)$ relacionado ao sistema (1.1) (1.2). Temos então as seguintes definições e resultados:

**Definição 1.18** O *subespaço controlável* do par $(A, B)$ é o menor subespaço $A$-invariante que contem $\mathrm{Im}(B)$ e é dado por

$$< A \mid \mathrm{Im}(B) >= \mathrm{Im}[\ B \quad AB \quad \ldots \quad A^{n-1}B\ ]$$

**Definição 1.19** O *subespaço não observável* do par $(C, A)$ é o maior subespaço $A$-invariante contido em $\ker(C)$ e é dado por

$$\mathcal{V}_{nob} = \ker\ [C \quad CA \quad \ldots \quad CA^{n-1}\ ]$$

**Teorema 1.1** *O sistema linear (1.1) (1.2) é* controlável *se e somente se* $< A \mid \mathrm{Im}(B) >= \Re^n$ *e é* observável *se e somente se* $\mathcal{V}_{nob} = 0$.

**Teorema 1.2** *Sejam* $A\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$, $\bar{\mathcal{X}} = \Re^n/\mathcal{V}$, *a projeção canônica* $P : \Re^n \to \bar{\mathcal{X}}$, $\bar{A}P = PA$ *e* $\bar{B} = PB$. *Se o par* $(A, B)$ *é controlável então o par* $(\bar{A}, \bar{B})$ *também é controlável.*

### 1.6.2 Estabilidade

**Definição 1.20** O sistema linear $\dot{x}(t) = Ax(t); x(0) = x_0$ é *assintoticamente estável* se para qualquer $x_0 \in \Re^n$,

$$\lim_{t \to 0} x(t) = 0$$

**Teorema 1.3** *O sistema linear $\dot{x} = Ax$ é assintoticamente estável se e somente se a parte real de todos os autovalores de $A$ é estritamente negativa.*

**Definição 1.21** Seja $\alpha(\lambda) = \alpha_g(\lambda)\alpha_b(\lambda)$ o polinômio mínimo de $A$, onde os zeros de $\alpha_g(\lambda)$ possuem parte real negativa e os de $\alpha_b(\lambda)$ positiva ou nula. O *subespaço estável* do sistema linear $\dot{x} = Ax$ é o espaço nulo de $\alpha_g(A)$ e o *subespaço instável* é o espaço nulo de $\alpha_b(A)$.

**Teorema 1.4** *O sistema linear (1.1) é* estabilizável *se e somente se seu subespaço instável está contido no seu subespaço controlável.*

**Teorema 1.5** *O sistema linear (1.1) (1.2) é* detectável *se e somente se seu subespaço não observável está contido no seu subespaço estável.*

## 1.7 Subespaços $(A, B)$-invariantes

**Definição 1.22** Seja o sistema linear representado por (1.1). Um subespaço $\mathcal{V} \subset \Re^n$ é dito *$(A, B)$-invariante* se existe um mapa $F : \Re^m \to \Re^n$ tal que $(A + BF)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$

A característica mais importante dos subespaços $(A, B)$-invariantes $\mathcal{V}$ é que se $x(0) \in \mathcal{V}$, então existe um controle $u(t)$; $t \geq 0$ tal que $x(t) \in \mathcal{V}$ para todo $t \geq 0$, ou seja, o estado $x(t)$ pode ser mantido em $\mathcal{V}$ através de uma escolha adequada de $u(t)$. Esta propriedade pode ser melhor compreendida através do seguinte resultado.

**Lema 1.1** *Sejam os subespaços $\mathcal{V} \subset \Re^n$ e $\mathcal{B} = \mathrm{Im}(B)$. Então $\mathcal{V}$ é $(A, B)$-invariante se e somente se*

$$A\mathcal{V} \subset \mathcal{V} + \mathcal{B}$$

Da Definição 1.22, observe que qualquer subespaço $A$-invariante é também $(A, B)$-invariante, bastando fazer $F = 0$.

A classe de subespaços $(A, B)$-invariantes contidos num dado subespaço $\mathcal{S}$ será denotada por $\mathcal{I}(A, B; \mathcal{S})$ e a classe de todas as matrizes $F$ tais que $(A + BF)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$ por $\mathbf{F}(\mathcal{V})$. Desse modo, qualquer subespaço $(A, B)$-invariante $\mathcal{V}$ é $(A + BF)$-invariante para $F \in \mathbf{F}(\mathcal{V})$.

A seguinte Propriedade é fundamental no estudo de subespaços $(A, B)$-invariantes.

**Propriedade 1.1** *A classe de subespaços $\mathcal{I}(A, B; \mathcal{S})$ é fechada em relação à operação de soma de subespaços.*

Isto significa que a soma de dois subespaços $(A, B)$-invariantes é também um subespaço $(A, B)$-invariante.

Seja agora $\mathcal{D}$ uma família de subespaços do $\Re^n$. O *máximo* elemento $\mathcal{V}^*$ de $\mathcal{D}$ é definido como o membro de $\mathcal{D}$ que, se existe, contém todos elementos de $\mathcal{D}$. O *mínimo* elemento $\mathcal{V}_*$ de $\mathcal{D}$ é o membro de $\mathcal{D}$ que, também se existe, está contido em todos elementos de $\mathcal{D}$.

$$\mathcal{V}^* := \max_{\mathcal{V} \in \mathcal{D}} \mathcal{V}$$
$$\mathcal{V}_* := \min_{\mathcal{V} \in \mathcal{D}} \mathcal{V}$$

**Lema 1.2** *Seja $\mathcal{D}$ uma classe não vazia de subespaços do $\Re^n$.*

- *Se $\mathcal{D}$ é fechado em relação à soma de subespaços, então $\mathcal{D}$ contém um elemento máximo $\mathcal{V}^*$.*
- *Se $\mathcal{D}$ é fechado em relação à interseção de subespaços, então $\mathcal{D}$ contém um elemento mínimo $\mathcal{V}_*$.*

Considerando então a classe $\mathcal{I}(A, B; \mathcal{S})$, o Lema acima e a Propriedade 1.1 garantem a existência do subespaço máximo

$$\mathcal{V}^* := \max \mathcal{I}(A, B; \mathcal{S})$$

### 1.7.1 Subespaços de Controlabilidade

**Definição 1.23** Seja o sistema linear representado por (1.1). Um subespaço $\mathcal{R} \subset \Re^n$ é um *subespaço de controlabilidade* do par $(A, B)$ se existem um mapa $F : \Re^m \rightarrow \Re^n$ e um mapa $G : \Re^m \rightarrow \Re^g; g \leq m$, tais que

$$\mathcal{R} =< A + BF \mid \mathrm{Im}(BG) >$$

Ou seja, $\mathcal{R}$ é o subespaço controlável do par $(A + BF, BG)$.

A característica mais importante dos subespaços de controlabilidade é que para todo $x \in \mathcal{R}$, existe um controle contínuo $u(t)$; $0 \leq t \leq t_1$ tal que, se $x(0) = 0$, então $x(t) \in \mathcal{R}$; $0 \leq t \leq t_1$ e $x(t_1) = x$, ou seja, qualquer estado $x \in \mathcal{R}$ pode ser atingido a partir da origem, através de uma trajetória controlada que não sai de $\mathcal{R}$.

Da Definição acima, é claro que subespaços de controlabilidade são $(A, B)$-invariantes.

A classe de subespaços de controlabilidade contidos num dado subespaço $\mathcal{S}$ será denotada por $\mathcal{C}(A, B; \mathcal{S})$.

Os subespaços de controlabilidade possuem muitas propriedades importantes. A seguir, aquelas mais utilizadas neste trabalho são apresentadas.

**Propriedade 1.2** *Se $\mathcal{R}$ é um subespaço de controlabilidade, então*

$$\mathcal{R} = < A + BF \mid \mathcal{B} \cap \mathcal{R} >$$

*para todo $F \in \mathbf{F}(\mathcal{R})$.*

**Propriedade 1.3** *Seja $\mathcal{R} \subset \Re^n$ um subespaço de dimensão $\rho \geq 1$ e suponha que para todo conjunto simétrico de $\rho$ números complexos $\Lambda$ exista um mapa $F : \Re^m \rightarrow \Re^n$ tal que $(A + BF)\mathcal{R} \subset \mathcal{R}$ e $\sigma[(A + BF)|\mathcal{R}] = \Lambda$. Então, $\mathcal{R}$ é um subespaço de controlabilidade.*

**Propriedade 1.4** *A classe de subespaços $\mathcal{C}(A, B; \mathcal{S})$ é fechada em relação à soma de subespaços.*

Como conseqüência dessa Propriedade, a exemplo dos subespaços $(A, B)$-invariantes, a classe $\mathcal{C}(A, B; \mathcal{S})$ possui um único elemento $\mathcal{R}^*$ de maior dimensão.

$$\mathcal{R}^* := \max \mathcal{C}(A, B; \mathcal{S})$$

Os seguintes resultados relacionam esse subespaço a $\mathcal{V}^*$.

**Teorema 1.6**

$$\mathcal{R}^* = < A + BF \mid \mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* > \qquad \textit{para } F \in \mathbf{F}(\mathcal{V}^*)$$

**Corolário 1.1**

$$\mathbf{F}(\mathcal{V}^*) \subset \mathbf{F}(\mathcal{R}^*)$$

Os resultados a seguir fornecem caracterizações de espectro relacionadas a $\mathcal{V}^*$ e $\mathcal{R}^*$.

**Teorema 1.7** *Seja $\mathcal{V}$ um subespaço $(A, B)$-invariante e $\mathcal{R}^* = \max \mathcal{C}(A, B; \mathcal{V})$. Para $F \in \mathbf{F}(\mathcal{V})$, sejam também $A_F = A + BF$ e $\bar{A}_F$ o mapa induzido em $\mathcal{V}/\mathcal{R}^*$ por $A_F$. Então $\bar{A}_F$ é independente de $F \in \mathbf{F}(\mathcal{V})$.*

**Corolário 1.2** *Nas condições do Teorema anterior, se $F \in \mathbf{F}(\mathcal{V})$ então $\sigma[(A + BF)|\mathcal{V}] = \sigma_F \uplus \sigma^*$, onde $\sigma_F = \sigma[(A + BF)|\mathcal{R}^*]$ é livremente alocável através de uma escolha adequada de $F \in \mathbf{F}(\mathcal{V})$ e $\sigma^* = \sigma[\overline{A + BF}]$ é fixo para qualquer $F \in \mathbf{F}(\mathcal{V})$.*

Esse resultado leva à seguinte definição:

**Definição 1.24** Seja $F \in \mathbf{F}(\mathcal{V}^*)$ e $\bar{A}_F$ o mapa induzido por $A+BF$ em $\Re^n/\mathcal{R}^*$. Os *zeros invariantes* do trio $(A, B, C)$ são as raízes, considerando suas multiplicidades, do polinômio característico da restrição de $\bar{A}_F$ a $\mathcal{V}^*/\mathcal{R}^*$.

Desse modo, se $F \in \mathbf{F}(\mathcal{V}^*)$ é escolhido, o espectro de $(A+BF)|\mathcal{R}^*$ é completamente livre, enquanto o de $(A+BF)|(\mathcal{V}^*/\mathcal{R}^*)$ é fixo e corresponde aos zeros invariantes.

Estes zeros são também denominados *zeros de transmissão* por alguns autores. Definições equivalentes no domínio da freqüência bem como maiores detalhes podem ser encontrados nas referências [10] e [24].

Em geral, é desejado que o espectro de $(A+BF) \mid \mathcal{V}$ esteja localizado numa região "boa" do plano complexo, aqui denotada por $\mathcal{C}_g$. Como estaremos interessados em estabilidade assintótica, daqui por diante $\mathcal{C}_g$ representará o semi-plano esquerdo do plano complexo. Podemos então estabelecer a seguinte definição:

**Definição 1.25** Um subespaço $\mathcal{V} \in \mathcal{I}(A, B; \mathcal{S})$ é *estabilizável* se $\exists F \in \mathbf{F}(\mathcal{V})$ tal que $\sigma[(A+BF)|\mathcal{V}] \subset \mathcal{C}_g$.

Pode ser provado [43] que a família de subespaços que satisfaz à Definição acima possui um elemento máximo $\mathcal{V}_g^*$. Sejam então $F \in \mathbf{F}(\mathcal{V}^*)$; $A_F = A + BF$; $P : \Re^n \longrightarrow \Re^n/\mathcal{R}^*$ a projeção canônica e $\bar{A}_F$ o mapa induzido em $\Re^n/\mathcal{R}^*$ por $A_F$. $\mathcal{V}^*/\mathcal{R}^*$ é então $\bar{A}_F$-invariante. Relembrando o Teorema 1.7, a restrição de $\bar{A}_F$ a $\mathcal{V}^*/\mathcal{R}^*$ é independente da escolha de $F \in \mathbf{F}(\mathcal{V}^*)$. Seja também $\beta(\lambda) = \beta_g(\lambda)\beta_b(\lambda)$ o polinômio mínimo de $\bar{A}_F|(\mathcal{V}^*/\mathcal{R}^*)$, onde os zeros de $\beta_g(\lambda)$ possuem parte real negativa e os de $\beta_b(\lambda)$ positiva ou nula. Definindo $\bar{\mathcal{X}}_g^* := \mathcal{V}^*/\mathcal{R}^* \cap \ker(\beta_g(\bar{A}_F))$ e $\bar{\mathcal{X}}_b^* := \mathcal{V}^*/\mathcal{R}^* \cap \ker(\beta_b(\bar{A}_F))$ temos $\mathcal{V}^*/\mathcal{R}^* = \bar{\mathcal{X}}_g^* \oplus \bar{\mathcal{X}}_b^*$. O maior subespaço $(A, B)$-invariante estabilizável contido em $\mathcal{S}$ pode então ser determinado por

**Teorema 1.8**

$$\mathcal{V}_g^* = P^{-1}\bar{\mathcal{X}}_g^*$$

## 1.8 Conclusão

Neste Capítulo foram apresentados alguns conceitos e resultados fundamentais da teoria geométrica de controle de sistemas lineares, que servirão como base para a solução do Problema de Rejeição de Perturbações, um dos tópicos mais estudados dessa teoria, assunto do próximo Capítulo.

# Capítulo 2

# Solução do Problema de Rejeição de Perturbações

## 2.1 Introdução

No contexto da teoria geométrica de controle, o *Problema de Rejeição de Perturbações* (PRP) ocupa uma posição de destaque. Sua solução teórica serve como um exemplo perfeito da aplicação de conceitos fundamentais dessa teoria, como os de subespaços $(A, B)$-invariantes e subespaços de controlabilidade. O livro de Wonham [43] contém a definição completa do problema, bem como as condições de existência de solução e a caracterização das matrizes de realimentação correspondentes.

Apesar de ter um apelo prático muito grande, já que objetiva, através de realimentação de estados, eliminar da saída os efeitos de quaisquer perturbações, o PRP é um problema com pouca aplicabilidade em casos reais, já que é em geral insolúvel e sua solução, quando existe, não apresenta características de robustez em relação a variações nos parâmetros do sistema. Mesmo assim, trata-se de um problema bastante estudado. Condições para solução no domínio da freqüência, por exemplo, foram obtidas em [34]. Além disso, algumas variações do problema foram formuladas, como rejeição de perturbações com compensadores dinâmicos [33], [41], com o controle em transmissão direta [43], com medidas das perturbações [43], com realimentação de saída [4], com lei de realimentação proporcional-derivativa [1] e em sistemas descritores [9], [29]. Talvez a variante mais importante gerada tenha sido o Problema de Quase Rejeição de Perturbações [25], [38], [40], esse geralmente solúvel, que visa manter em níveis arbitrariamente pequenos a influência das perturbações na saída.

Uma comparação entre métodos geométricos e métodos baseados em matrizes polinomiais para solução do PRP pode ser encontrada em [28].

Apesar da existência de uma caracterização das matrizes de realimentação que resolvem o PRP, poucos trabalhos têm se preocupado com a obtenção de expressões analíticas para essas matrizes. Os trabalhos de Paraskevopoulos *et al* [27] e Van Dooren [37] fornecem tais expressões. O primeiro deles, no entanto, é restrito a sistemas inversíveis à esquerda. O segundo limita-se a obter a solução de norma mínima relacionada a um único subespaço. Além disso, nenhum dos dois resolve o PRP com estabilidade (PRPE).

Este Capítulo trata da solução computacional do PRP. A princípio, a parametrização do conjunto de todas as soluções para uma classe de sistemas que engloba os inversíveis à esquerda é obtida. A seguir, alguns conjuntos são obtidos para sistemas gerais.

Na segunda Seção o problema é formulado, na terceira são apresentados algoritmos para o cálculo dos subespaços necessários, na quarta a solução do PRP é obtida, na quinta aspectos da implementação numérica são discutidos e finalmente na sexta, conclusões são feitas sobre os resultados obtidos.

## 2.2 Formulação do Problema

Seja o sistema linear, contínuo, invariante no tempo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Eq(t) \tag{2.1}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{2.2}$$

onde: $x \in \Re^n$, $u \in \Re^m$, $q \in \Re^d$, $y \in \Re^p$. O termo $q$ acima representa o vetor de perturbações suposto não diretamente acessível. O objetivo do PRP é determinar, se possível, uma lei de realimentação proporcional de estados

$$u(t) = Fx(t) \tag{2.3}$$

tal que o vetor de perturbações $q$ não tenha nenhuma influência sobre o vetor de saídas $y$. Aqui, nenhuma restrição é imposta à função $q(t)$.

Considerando o sistema em malha fechada:

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t) + Eq(t) \tag{2.4}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{2.5}$$

então, para que as perturbações não tenham influência em $y(t)$, a resposta forçada $y(t) = C\int_0^t e^{(A+BF)(t-s)}Eq(s)ds$ deve ser nula para qualquer $q(t)$ e $t \geq 0$. A condição equivalente no domínio da freqüência é que a função de transferência da perturbação para a saída, $\frac{Y(s)}{Q(s)} = C[sI - (A + BF)]^{-1}E$ deve ser nula. Desse modo, denotando

$$\mathcal{K} = \ker(C) \qquad \mathcal{E} = \mathrm{Im}(E)$$

é fácil verificar que o sistema (2.4), (2.5) é livre de perturbações se e somente se

$$< A + BF \mid \mathcal{E} > \subset \mathcal{K} \tag{2.6}$$

ou seja, o subespaço sobre o qual a perturbação $q$ exerce influência deve estar contido no subespaço que não é observado pela saída $y$. Baseado nessas considerações, o seguinte teorema estabelece as condições para solução do PRP.

**Teorema 2.1** *O PRP é solúvel se e somente se*

$$\mathcal{V}^* \supset \mathcal{E}$$

*onde $\mathcal{V}^*$ é o maior subespaço $(A, B)$-invariante contido em $\mathcal{K}$.*

Prova: Veja [43]. □

Este resultado pode ser facilmente compreendido. Como $\mathcal{V}^*$ é $(A, B)$-invariante, então uma escolha adequada de $F$ pode fazer com que o vetor de estados $x(t)$ permaneça em $\mathcal{V}^*$, desde que tenha iniciado nele. Se $\mathcal{E} \subset \mathcal{V}^*$, então a contribuição de $Eq(t)$ a $\dot{x}(t)$ (a contribuição de 1ª ordem de $q(t)$ a $x(t)$) é também localizada em $\mathcal{V}^*$, logo a contribuição integrada de $q(t)$ a $x(t)$ pode ser mantida em $\mathcal{V}^*$. Como $\mathcal{V}^* \subset \mathcal{K}$, esta contribuição não é observada na saída, o que garante a rejeição da perturbação $q(t)$. De fato, $\mathcal{V}^*$ é o maior subespaço que pode ser feito não observável pela saída. Por essa interpretação, é fácil perceber que a existência de solução para o PRP equivale à existência de qualquer subespaço $(A, B)$-invariante $\mathcal{V}$ tal que

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{K} \tag{2.7}$$

Claramente, a existência de tal subespaço só é possível se $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}$, ou seja, $CE = 0$, o que restringe enormemente as possibilidades de existência de solução.

Uma característica realista desejável para a solução do PRP é que ela estabilize assintoticamente o sistema em malha fechada. Essa exigência induz naturalmente a formulação do *Problema de Rejeição de Perturbações com Estabilidade* (PRPE) cujo objetivo é encontrar uma matriz $F$ tal que

$$< A + BF \mid \mathcal{E} > \subset \mathcal{K} \quad \text{e} \quad \sigma[A + BF] \subset \mathcal{C}_g \tag{2.8}$$

As condições para solução do PRPE estão também estabelecidas.

**Teorema 2.2** *O PRPE é solúvel se e somente se o par $(A, B)$ é estabilizável e*

$$\mathcal{V}_g^* \supset \mathcal{E}$$

*onde $\mathcal{V}_g^*$ é o maior subespaço $(A, B)$-invariante estabilizável contido em $\mathcal{K}$.*

Prova: Veja [43]. □

Outra versão do PRP, é o *Problema de Rejeição de Perturbações com Alocação de Pólos* (PRPAP), cujo objetivo é, além de rejeitar as perturbações, posicionar arbitrariamente os autovalores do sistema em malha fechada. Supondo o sistema controlável a condição de existência de solução é $\mathcal{R}^* \supset \mathcal{E}$, onde $\mathcal{R}^*$ é o maior subespaço de controlabilidade contido em $\mathcal{K}$.

Métodos geométricos para solução do PRP são então baseados na obtenção de alguns subespaços $(A, B)$-invariantes importantes. O cálculo desses subespaços é tratado na Seção a seguir.

## 2.3 Cálculo de Subespaços $(A, B)$-invariantes

Considerando satisfeita a condição imposta pelo Teorema 2.1, uma maneira direta de se obter uma solução para o PRP é calcular o subespaço $\mathcal{V}^*$ e obter uma matriz $F \in \mathbf{F}(\mathcal{V}^*)$. Para o PRPE, é necessário calcular o subespaço $\mathcal{V}_g^*$, o que depende do cálculo do subespaço $\mathcal{R}^*$ e dos zeros invariantes, e depois obter uma matriz $F \in \mathbf{F}(\mathcal{V}_g^*)$. Métodos para calcular esses subespaços e conjuntos são então indispensáveis. Wonham [43] apresentou algoritmos puramente algébricos para o cálculo dos subespaços bem como a completa caracterização dos conjuntos $\mathbf{F}(\mathcal{V}^*)$, $\mathbf{F}(\mathcal{R}^*)$ e $\mathbf{F}(\mathcal{V}_g^*)$.

Desde então, vários métodos numéricos têm sido propostos para o cálculo de $\mathcal{V}^*$ ([3], [35]), de $\mathcal{V}^*$ e $\mathcal{R}^*$ conjuntamente, ([23], [37]) e dos zeros invariantes ([15] e referências). A maioria dos métodos para obtenção de $\mathcal{V}^*$ e $\mathcal{R}^*$, no entanto, falha ao tratar da questão da estabilidade numérica. Duas exceções são os trabalhos de Moore e Laub [23] e Van Dooren [37]. O primeiro apresenta uma abordagem interessante que relaciona esses subespaços a subespaços gerados por autovetores do sistema em malha fechada, além de fazer uma análise numérica minuciosa dos resultados obtidos e sua aplicabilidade prática. Essa abordagem entretanto não se aplica a alguns sistemas, por exemplo, sistemas com zeros invariantes múltiplos. Os métodos propostos em [37], ao contrário, são aplicáveis a qualquer sistema, além de serem numericamente estáveis. Nenhum deles porém trata do cálculo de $\mathcal{V}_g^*$.

A seguir, procedimentos numéricos para o cálculo de $\mathcal{V}^*$, $\mathcal{R}^*$, zeros invariantes [8] e $\mathcal{V}_g^*$ são apresentados. Os procedimentos para o cálculo de $\mathcal{V}^*$, $\mathcal{R}^*$ e zeros invariantes são semelhantes aos propostos em [37]. Além disso, expressões analíticas para os conjuntos $\mathbf{F}(\mathcal{V}^*)$, $\mathbf{F}(\mathcal{R}^*)$ e $\mathbf{F}(\mathcal{V}_g^*)$ são obtidas.

### 2.3.1 Cálculo de $\mathcal{V}^*$ e $\mathcal{R}^*$

Seja o sistema (2.1), (2.2). Nosso objetivo agora é determinar $\mathcal{V}^*$, maior subespaço $(A, B)$-invariante contido em $\mathcal{K}$. Para isso, introduziremos o seguinte resultado simples, porém fundamental à abordagem utilizada.

**Proposição 2.1** *Considere, numa determinada base, o sistema (2.1), (2.2) representado por*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & C_2 \end{bmatrix}$$

*onde* $A_{11} \in \Re^{v\times v}$*;* $B_1 \in \Re^{v\times m}$*;* $C_2 \in \Re^{p\times(n-v)}$ *e seja o subespaço*

$$\mathcal{V} = \mathrm{Im}(V) \qquad V = \begin{bmatrix} I_v \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

*Então,* $\mathcal{V} \in \mathcal{I}(A, B; \mathcal{K})$ *se e somente se existe uma matriz* $F_1 \in \Re^{m\times v}$ *tal que:*

$$A_{21} + B_2F_1 = 0$$

Prova: Seja $F = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix}$ onde $F_1 \in \Re^{m\times v}$. Então

$$(A + BF)V = \begin{bmatrix} A_{11} + B_1F_1 \\ A_{21} + B_2F_1 \end{bmatrix}$$

A condição para que $\mathcal{V}$ seja $(A + BF)$-invariante é $(A + BF)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$. Devido à estrutura de $\mathcal{V}$ (2.9), isto ocorre se e somente se, $A_{21} + B_2F_1 = 0$. Além disso, claramente $\mathcal{V} \in \mathcal{K}$, o que assegura que $\mathcal{V} \in \mathcal{I}(A, B; \mathcal{K})$. □

Tendo essa proposição como base, o seguinte algoritmo para o cálculo de $\mathcal{V}^*$ é construido:

1.
   - Faça $i = 0$.
   - Encontre uma matriz ortogonal $Q^0 \in \Re^{n\times n}$ tal que:

     $$C^0 = CQ^0 = \begin{bmatrix} 0 & C_2^0 \end{bmatrix}$$

     onde $C_2^0$ é uma matriz com *posto*$(C)$ colunas.
   - Faça

     $$rc^0 = \text{número de colunas de } C_2^0$$

   - Calcule

     $$A^0 = Q^{0\prime}AQ^0 = \begin{bmatrix} A_{11}^0 & A_{12}^0 \\ A_{21}^0 & A_{22}^0 \end{bmatrix} \qquad B^0 = Q^{0\prime}B = \begin{bmatrix} B_1^0 \\ B_2^0 \end{bmatrix}$$

     onde: $A_{11}^0 \in \Re^{(n-rc^0)\times(n-rc^0)}$; $B_1^0 \in \Re^{(n-rc^0)\times m}$.

- Faça

$$V^0 = \begin{bmatrix} I_{n-rc^0} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = Q^0$$

2. - Encontre uma matriz ortogonal $Q_m^i \in \Re^{rc^i \times rc^i}$ tal que

$$\tilde{B_2}^i = Q_m^i{}' B_2^i = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{B}_{22}^i \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

onde $\tilde{B}_{22}^i$ é uma matriz com $posto(B_2^i)$ linhas.

- Faça

$$rb^i = \text{número de linhas de } \tilde{B}_{22}^i$$

- Calcule

$$\tilde{A}_{21}^i = Q_m^i{}' A_{21}^i = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{21_1}^i \\ \tilde{A}_{21_2}^i \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

onde $\tilde{A}_{21_1}^i \in \Re^{(rc^i - rb^i) \times (n - rc^i)}$.

3. - Se $\tilde{A}_{21}^i \neq 0$ e $rc^i < n - 1$
   - Encontre uma matriz ortogonal $Q_t^{i+1} \in \Re^{(n-rc^i)\times(n-rc^i)}$ tal que

$$\hat{A}_{21_1}^i = \tilde{A}_{21_1}^i Q_t^{i+1} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{A}_{21_{1_2}}^i \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

   onde $\hat{A}_{21_{1_2}}^i$ é uma matriz com $posto(\hat{A}_{21_1}^i)$ colunas.
   - Faça

$$ra^i = \text{número de colunas de } \hat{A}_{21_{1_2}}^i$$

$$Q^{i+1} = \begin{bmatrix} Q_t^{i+1} & 0 \\ 0 & I_{rc^i} \end{bmatrix}$$

$$rc^{i+1} = rc^i + ra^i$$

   - Calcule

$$A^{i+1} = Q^{i+1\prime} A^i Q^{i+1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{i+1} & A_{12}^{i+1} \\ A_{21}^{i+1} & A_{22}^{i+1} \end{bmatrix}$$

$$B^{i+1} = Q^{i+1\prime} B^i = \begin{bmatrix} B_1^{i+1} \\ B_2^{i+1} \end{bmatrix}$$

   onde: $A_{11}^{i+1} \in \Re^{(n-rc^{i+1})\times(n-rc^{i+1})}$; $B_1^{i+1} \in \Re^{(n-rc^{i+1})\times m}$.

- Faça

$$V^{i+1} = \begin{bmatrix} I_{n-rc^{i+1}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Calcule

$$Q = QQ^{i+1}$$

- Faça $i = i + 1$.
- Volte ao passo 2.

- Se não
  - Se $\tilde{A}^i_{21} = 0$
    - Calcule $V_o = QV^i$.
  - Se não $(rc^i \geq n - 1)$
    - Faça $V_o = 0$.
  - PARE.

**Teorema 2.3**

$$\mathcal{V}^* = \mathrm{Im}(V_o)$$

Prova: Primeiramente, note que a cada iteração do algoritmo existe uma mudança na base de representação do sistema dada por

$$x^i = Q^{i+1} x^{i+1}$$

Agora, seja $V_a^{i+1}$ a representação de $V^{i+1}$ na base da iteração $i$. Logo,

$$V_a^{i+1} = Q^{i+1} V^{i+1} = \left[\begin{array}{c|c} Q_t^{i+1} & 0 \\ \hline 0 & I_{rc^i} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} I_{n-rc^{i+1}} \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} V_{a1}^{i+1} \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

Lembrando que

$$V^i = \left[\begin{array}{c} I_{n-rc^i} \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

é então claro que $\mathrm{Im}(V_a^{i+1}) \subset \mathcal{V}^i = \mathrm{Im}(V^i)$. Também claramente, $\mathrm{Im}(V_a^1) \subset \mathrm{Im}(V^0)$. Como, por construção, $dim(\mathcal{V}^{i+1}) < dim(\mathcal{V}^i)$, a seqüência de subespaços $\mathcal{V}^i$ é decrescente. Além disso, o algoritmo possui um número finito de iterações, $k \leq n - p - 1$, para o qual $V_o = QV^k$ ou $V_o = 0$, o que garante a existência de um ponto de parada.

Seja agora o subespaço $\mathcal{V} = \mathrm{Im}(V)$ tal que

$$\mathcal{V} \in \mathcal{I}(A^i, B^i; \mathcal{K}^0)^1 \qquad \mathcal{V} \subset \mathcal{V}^i = \mathrm{Im}(V^i) \tag{2.13}$$

[1]Note que $C^i = \begin{bmatrix} 0 & C_2^0 \end{bmatrix}$ em qualquer iteração, logo $\mathcal{K}^i = \mathcal{K}^0$, para qualquer $i \leq k$.

Logo, a matriz $V$ pode ser representada por

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde $V_1 \in \Re^{(n-rc^i)\times v1}; v1 \leq n - rc^i$. Como $\mathcal{V}$ é $(A^i, B^i)$-invariante, então existe uma matriz $F^i = \begin{bmatrix} F_1^i & F_2^i \end{bmatrix} \in \Re^{m\times n}$ tal que:

$$\mathrm{Im}[(A^i + B^i F^i)V] \subset \mathrm{Im}(V) \tag{2.14}$$

Mas,

$$\begin{aligned}(A^i + B^i F^i)V &= \left( \begin{bmatrix} A_{11}^i & A_{12}^i \\ A_{21}^i & A_{22}^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1^i \\ B_2^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^i & F_2^i \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (A_{11}^i + B_1^i F_1^i)V_1 \\ (A_{21}^i + B_2^i F_1^i)V_1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Então, para que a condição (2.14) seja satisfeita, é necessário que

$$(A_{21}^i + B_2^i F_1^i)V_1 = 0 \tag{2.15}$$

$$Q_m^{i\,\prime}(A_{21}^i + B_2^i F_1^i)V_1 = 0 \tag{2.16}$$

Daí, a partir das equações (2.10), (2.11),

$$\left( \begin{bmatrix} \tilde{A}_{21_1}^i \\ \tilde{A}_{21_2}^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{B}_{2_2}^i \end{bmatrix} F_1^i \right) V_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{21_1}^i \\ \tilde{A}_{21_2}^i + \tilde{B}_{2_2}^i F_1^i \end{bmatrix} V_1 = 0$$

Então, obrigatoriamente,

$$\tilde{A}_{21_1}^i V_1 = 0$$

$$\tilde{A}_{21_1}^i Q_t^{i+1} Q_t^{i+1\prime} V_1 = 0 \tag{2.17}$$

Seja agora $V_p$ a representação de $V$ na base da iteração $i+1$. Então,

$$V_p = \begin{bmatrix} V_{p1} \\ V_{p2} \end{bmatrix} = Q^{i+1\prime} V = \begin{bmatrix} Q_t^{i+1\prime} & 0 \\ 0 & I_{rc^i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_t^{i+1\prime} V_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Substituindo essa equação e (2.12) em (2.17), temos:

$$\begin{bmatrix} 0 & \hat{A}_{211_2} \end{bmatrix} V_{p1} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{A}_{211_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{p1_1} \\ V_{p1_2} \end{bmatrix} = 0$$

onde $V_{p1_1} \in \Re^{(n-rc^i-ra^i)\times v1}$. Como $\hat{A}_{211_2}$ (2.12) é uma matriz de posto completo, então $V_{p1_2} = 0$. Logo,

$$V_p = \begin{bmatrix} V_{p1_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lembrando que

$$V^{i+1} = \begin{bmatrix} I_{n-rc^{i+1}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-(rc^i+ra^i)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

é então claro que

$$\mathcal{V}_p = \operatorname{Im}(V_p) \subset \mathcal{V}^{i+1} \tag{2.18}$$

Considerando $V_p^0$ a representação de $V^0$ na base da iteração 1, é fácil verificar que $\operatorname{Im}(V_p^0) \subset \mathcal{V}^1$. Então, a partir das equações (2.13) (2.18), podemos concluir por indução que:

$$\mathcal{V}_{pk} = \operatorname{Im}(V_{pk}) \subset \mathcal{V}^k$$

onde $V_{pk}$ é a representação de $V$ na base da última iteração $k$. Além disso, de acordo com a Proposição 2.1, $\mathcal{V}^k \in \mathcal{I}(A^k, B^k; \mathcal{K}^k)$. Como $\mathcal{V}$ foi escolhido arbitrariamente, concluimos que:

$$\mathcal{V}^* = \operatorname{Im}(V_o^k)$$

onde $V_o^k$ é a representação de $V^k$ na base original (2.1), (2.2) e é dada por:

$$V_o^k = Q^0 Q^1 \cdots Q^k V^k = QV^k = V_o$$

□

Por simplicidade, a matriz $E$ não foi incluida no algoritmo. É claro entretanto que as transformações $Q^{i+1}$; $0 \leq i < k$ devem ser aplicadas a $E$, ou seja, a cada iteração $i$ devemos calcular

$$E^{i+1} = Q^{i+1\prime} E^i = \begin{bmatrix} E_1^{i+1} \\ E_2^{i+1} \end{bmatrix}$$

onde $E_1^{i+1} \in \Re^{(n-rc^{i+1})\times d}$.

Ao final do algoritmo, o sistema original encontra-se então transformado no seguinte sistema equivalente:

$$\dot{x}^k = A^k x^k + B^k u + E^k q$$
$$y = C^k x^k$$

$$A^k = \begin{bmatrix} A_{11}^k & A_{12}^k \\ A_{21}^k & A_{22}^k \end{bmatrix} \quad B^k = \begin{bmatrix} B_1^k \\ B_2^k \end{bmatrix} \quad E^k = \begin{bmatrix} E_1^k \\ E_2^k \end{bmatrix}$$
$$C^k = \begin{bmatrix} 0 & C_2^k \end{bmatrix}$$

onde $A_{11}^k \in \Re^{v\times v}$; $B_1^k \in \Re^{v\times m}$; $E_1^k \in \Re^{v\times d}$; $C_2^k \in \Re^{p\times(n-v)}$; $v = n - rc^k$. O maior subespaço $(A^k, B^k)$-invariante contido em $\ker(C^k)$ é dado por

$$\mathcal{V}^k = \mathrm{Im}(V^k) \qquad V^k = \begin{bmatrix} I_v \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

Considere agora a seguinte mudança de variáveis:

$$u = Zu^k$$
$$\bar{B}^k = B^k Z = \begin{bmatrix} B_1^k \\ B_2^k \end{bmatrix} Z = \begin{bmatrix} \bar{B}_{11}^k & \bar{B}_{12}^k \\ \bar{B}_{21}^k & 0 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

onde $\bar{B}_{21}^k$ é uma matriz com $b = posto(B_2^k)$ colunas. A nova representação do sistema fica:

$$\dot{x}^k = A^k x^k + \bar{B}^k u^k + E^k q \tag{2.21}$$
$$y = C^k x^k \tag{2.22}$$

Considerando a lei de realimentação de estados

$$u^k = \bar{F}^k x^k \qquad \bar{F}^k = \begin{bmatrix} \bar{F}_{11}^k & \bar{F}_{12}^k \\ \bar{F}_{21}^k & \bar{F}_{22}^k \end{bmatrix}$$

onde $\bar{F}_{11}^k \in \Re^{b\times v}$, e denotando $\bar{\mathcal{B}}^k = \mathrm{Im}(\bar{B}^k)$, esta representação possui algumas propriedades importantes, formalizadas na seguinte Proposição.

**Proposição 2.2** *Considere o sistema representado por (2.21), (2.22). Então as seguintes afirmativas são válidas:*

*1.*

$$\bar{\mathcal{B}}^k \cap \mathcal{V}^k = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} \bar{B}_{12}^k \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

*2.*

$$\mathbf{F}(\mathcal{V}^k) \equiv \left\{ \bar{F}^k \;/\; A_{21}^k + \bar{B}_{21}^k \bar{F}_{11}^k = 0 \right\} \tag{2.24}$$

*3. O maior subespaço de controlabilidade contido em* $\ker(C^k)$ *é dado por:*

$$\mathcal{R}^k = \mathrm{Im}(R^k) \qquad R^k = \begin{bmatrix} R_1^k \\ 0 \end{bmatrix}$$

*onde* $\mathrm{Im}(R_1^k) = < A_{F_{11}^k} \mid \bar{B}_{12}^k > = < A_{11}^k + \bar{B}_{11}^k \bar{F}_{11}^k \mid \bar{B}_{12}^k >$.

Prova:

1. Seja o subespaço $\hat{\mathcal{B}} = \bar{\mathcal{B}}^k \cap \mathcal{V}^k$. Então, $\hat{\mathcal{B}} \subset \bar{\mathcal{B}}^k$ e, conseqüentemente, podemos escrever:

$$\hat{\mathcal{B}} = \mathrm{Im}(\bar{B}^k G) \qquad \text{para algum } G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \in \Re^{m \times g}; g \leq m.$$

Logo,

$$\bar{B}^k G = \begin{bmatrix} \bar{B}_{11}^k G_1 + \bar{B}_{12}^k G_2 \\ \bar{B}_{21}^k G_1 \end{bmatrix}$$

Mas $\hat{\mathcal{B}}$ também deve obedecer a $\hat{\mathcal{B}} \subset \mathcal{V}^k$. Devido à estrutura de $\mathcal{V}^k$ (2.19), é fácil verificar que essa condição é satisfeita se e somente se $\bar{B}_{21}^k G_1 = 0$. Como $\bar{B}_{21}^k$ possui as colunas linearmente independentes, então $G_1 = 0$ e

$$\bar{B}^k G = \begin{bmatrix} \bar{B}_{12}^k G_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como nenhuma restrição foi imposta à submatriz $G_2$ chegamos então ao resultado desejado:

$$\bar{\mathcal{B}}^k \cap \mathcal{V}^k = \hat{\mathcal{B}} = \mathrm{Im}(\bar{B}^k G) = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} \bar{B}_{12}^k \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.

$$(A^k + \bar{B}^k \bar{F}^k) V^k = \begin{bmatrix} A_{11}^k + \bar{B}_{11}^k \bar{F}_{11}^k + \bar{B}_{12}^k \bar{F}_{21}^k \\ A_{21}^k + \bar{B}_{21}^k \bar{F}_{11}^k \end{bmatrix}$$

Pela Proposição 2.1, $\mathcal{V}^k$ é $(A^k + \bar{B}^k \bar{F}^k)$-invariante se e somente se $A_{21}^k + \bar{B}_{21}^k \bar{F}_{11}^k = 0$. Como as colunas de $\bar{B}_{21}^k$ são linearmente independentes, a solução desse sistema de equações é única e o conjunto $\mathbf{F}(\mathcal{V}^k)$ é unicamente definido por (2.24).

3. De acordo com o Teorema 1.6, $\mathcal{R}^k$ é dado por:

$$\mathcal{R}^k = < A_F^k | \bar{\mathcal{B}}^k \cap \mathcal{V}^k > \tag{2.25}$$

$$A_F^k = A^k + \bar{B}^k \bar{F}^k \quad \text{para } \bar{F}^k \in \mathbf{F}(\mathcal{V}^k)$$

Como o Teorema é válido para qualquer $\bar{F}^k \in \mathbf{F}(\mathcal{V}^k)$ e apenas a submatriz $\bar{F}_{11}^k$ em (2.24) é fixa, podemos, sem perda de generalidade, considerar nulas as submatrizes $\bar{F}_{21}^k$, $\bar{F}_{12}^k$ e $\bar{F}_{22}^k$. A matriz $A_F^k = A^k + \bar{B}^k \bar{F}^k$ é então dada por:

$$A_F^k = \begin{bmatrix} A_{11}^k + \bar{B}_{11}^k \bar{F}_{11}^k & A_{12}^k \\ 0 & A_{22}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_F{}_{11}^k & A_{12}^k \\ 0 & A_{22}^k \end{bmatrix}$$

Em conseqüência da forma bloco triangular superior de $A_F^k$, a substituição da equação acima e de (2.23) em (2.25) leva ao resultado desejado. □

O cálculo de $\mathcal{R}^k$ foi então reduzido ao problema da obtenção do subespaço controlável do par $(A_F{}_{11}^k, \bar{B}_{12}^k)$. Uma abordagem eficiente para resolvê-lo é, a exemplo da que tem sido praticada até aqui neste Capítulo, colocar o par em questão numa forma onde o subespaço desejado seja evidenciado. Considere então a seguinte mudança na base de representação do sistema (2.21) (2.22).

$$x^k = Q_R \tilde{x} \qquad Q_R = \begin{bmatrix} Q_r & 0 \\ 0 & I_{n-v} \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

$$\tilde{A}_{F_{11}} = Q_r' A_F{}_{11}^k Q_r = \begin{bmatrix} A_{r11} & A_{r12} \\ 0 & A_{r22} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_{12} = Q_r' \bar{B}_{12}^k = \begin{bmatrix} B_{r1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde o par $(\tilde{A}_{F_{11}}, \tilde{B}_{12})$ está numa forma canônica controlável, para a qual o subespaço controlável é dado por

$$\mathcal{R}_r = \operatorname{Im}(R_r) \qquad R_r = \begin{bmatrix} I_c \\ 0 \end{bmatrix}$$

Voltando à base anterior, temos então

$$R_1^k = Q_r R_r = Q_r \begin{bmatrix} I_c \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R^k = \begin{bmatrix} Q_r \begin{bmatrix} I_c \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Voltando finalmente à base original, obtemos o maior subespaço de controlabilidade contido em $\mathcal{K}$.

$$\mathcal{R}^* = \operatorname{Im}(R^*) \qquad R^* = QR^k = QQ_R \begin{bmatrix} I_c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 2.3.2 Cálculo dos Zeros Invariantes e $\mathcal{V}_g^*$

Após a mudança de base (2.26), pode ser facilmente verificado que as matrizes $\tilde{A}_F = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}$, $\tilde{B}$ e $\tilde{F}$ são dadas por:

$$\tilde{A}_F = Q_R' A_F^k Q_R = \left[\begin{array}{cc|c} A_{r11} & A_{r12} & \multirow{2}{*}{$Q_r' A_{12}^k$} \\ 0 & A_{r22} & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & A_{22}^k \end{array}\right] \tag{2.27}$$

$$\tilde{B} = Q_R' \bar{B}^k = \left[\begin{array}{c|c} Q_r' \bar{B}_{11}^k & \begin{array}{c} B_{r1} \\ 0 \end{array} \\ \hline \bar{B}_{21}^k & 0 \end{array}\right] \tag{2.28}$$

$$\tilde{F} = \bar{F}^k Q_R = \left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\bar{F}_{11}^k Q_r} & \bar{F}_{12}^k \\ \hline F_{r1} & F_{r2} & \bar{F}_{22}^k \end{array}\right] \tag{2.29}$$

Nessa representação, claramente, os maiores subespaços $(A, B)$-invariante e de controlabilidade são dados respectivamente por:

$$\tilde{\mathcal{V}}^* = \operatorname{Im}(\tilde{V}^*) \qquad \tilde{V}^* = \begin{bmatrix} I_c & 0 \\ 0 & I_{(v-c)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathcal{R}}^* = \operatorname{Im}(\tilde{R}^*) \qquad \tilde{R}^* = \begin{bmatrix} I_c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Seja agora $\bar{A}_F$ o mapa induzido por $\tilde{A}_F$ no espaço quociente $\Re^n/\tilde{\mathcal{R}}^*$. Devido à forma bloco triangular superior de $\tilde{A}_F$ (2.27), é fácil verificar que o mapa de $\bar{A}_F$ restrito a

$\tilde{\mathcal{V}}^*/\tilde{\mathcal{R}}^*$ é simplesmente a submatriz $A_{r22}$. Logo, pela Definição 1.24, o conjunto de zeros invariantes é dado diretamente por:

$$\sigma_T = \sigma[A_{r22}] \tag{2.30}$$

Note que, devido à forma das matrizes $\tilde{B}$ (2.28) e $\tilde{F}$ (2.29), a submatriz $A_{r22}$ e a forma bloco triangular superior de $\tilde{A}_F$ não são modificadas por nenhuma matriz $\tilde{F} \in \mathbf{F}(\tilde{\mathcal{V}}^*)$, ou seja, os autovalores de $\tilde{A}_F|\tilde{\mathcal{V}}^*$ podem ser divididos em um conjunto fixo (os zeros invariantes) e um completamente livre ($\sigma[\tilde{A}_F|\tilde{\mathcal{R}}^*] = \sigma[A_{r11}]$). Desse modo, o sistema em malha fechada não pode ser estabilizado por nenhuma matriz $\tilde{F} \in \mathbf{F}(\tilde{\mathcal{V}}^*)$ caso algum zero invariante seja instável. Devemos portanto procurar subespaços $\tilde{\mathcal{V}}_g \subset \tilde{\mathcal{V}}^*$ tais que a parte real dos autovalores de $\tilde{A}_F|\tilde{\mathcal{V}}_g$ possa ser feita negativa. Considere então a seguinte transformação de similaridade:

$$A_s = Q_s' A_{r22} Q_s = \begin{bmatrix} A_{s11} & A_{s12} \\ 0 & A_{s22} \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

onde todos os autovalores de $A_{s11} \in \Re^{g\times g}$ possuem parte real negativa e os de $A_{s22} \in \Re^{h\times h}$ possuem parte real nula ou positiva. Devido a essa forma particular, o polinômio mínimo de $A_s$ é o produto entre os polinômios mínimos de $A_{s11}$ ($\beta_g(\lambda)$) e $A_{s22}$ ($\beta_b(\lambda)$), já que $\beta_g(\lambda)$ e $\beta_b(\lambda)$ são primos entre si. É então fácil verificar que a forma geral de $\beta_g(A_s)$ é

$$\beta_g(A_s) = \begin{bmatrix} \beta_g(A_{s11}) & X \\ 0 & \beta_g(A_{s22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & X \\ 0 & \beta_g(A_{s22}) \end{bmatrix}$$

logo, $\ker(\beta_g(A_s)) = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} I_g \\ 0 \end{bmatrix}$

Considere agora a mudança de base

$$\tilde{x} = Q_S \hat{x} \qquad Q_S = \begin{bmatrix} I_c & 0 & 0 \\ 0 & Q_s & 0 \\ 0 & 0 & I_{(n-v)} \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

A matriz $\hat{A}_F$ é então dada por:

$$\hat{A}_F = Q_S' \tilde{A}_F Q_S = \left[\begin{array}{c|cc|c} A_{r11} & \multicolumn{2}{c|}{A_{r12}Q_s} & \hat{A}_{13} \\ \hline 0 & A_{s11} & A_{s12} & \hat{A}_{23} \\ & 0 & A_{s22} & \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} & A_{22}^k \end{array}\right]$$

Devido a esta forma, pelo Teorema 1.8, podemos verificar por inspeção que o maior subespaço $(A, B)$-invariante estabilizável é dado por:

$$\hat{\mathcal{V}}_g = \mathrm{Im}(\hat{V}_g^*) \qquad \hat{V}_g^* = \begin{bmatrix} I_c & 0 \\ 0 & I_g \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para obtê-lo na base original devemos calcular

$$\tilde{V}_g^* = Q_S \hat{V}_g^* = \begin{bmatrix} I_c & 0 \\ 0 & Q_s \begin{bmatrix} I_g \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_g^k = Q_R \tilde{V}_g^* = \begin{bmatrix} Q_r \begin{bmatrix} I_c & 0 \\ 0 & Q_s \begin{bmatrix} I_g \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$\mathcal{V}_g^* = \mathrm{Im}(V_g^*) \qquad V_g^* = Q V_g^k = Q Q_R Q_S \begin{bmatrix} I_c & 0 \\ 0 & I_g \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Após todas as mudanças de variáveis aplicadas ao sistema original, os subespaços calculados estão representados numa forma que explicita o conjunto de matrizes de realimentação a eles relacionadas. Aplicando ao sistema (2.1) (2.2) as mudanças de variáveis

$$x = (Q Q_R Q_S)\hat{x} \qquad u = Z\hat{u}$$

podemos então representá-lo por:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}\hat{u} + \hat{E}q \tag{2.33}$$

$$y = \hat{C}\hat{x} \tag{2.34}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} & \hat{A}_{13} & \hat{A}_{14} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} & \hat{A}_{23} & \hat{A}_{24} \\ \hat{A}_{31} & \hat{A}_{32} & \hat{A}_{33} & \hat{A}_{34} \\ \hat{A}_{41} & \hat{A}_{42} & \hat{A}_{43} & \hat{A}_{44} \end{bmatrix} \qquad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_{11} & \hat{B}_{12} \\ \hat{B}_{21} & 0 \\ \hat{B}_{31} & 0 \\ \hat{B}_{41} & 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{E} = \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \\ \hat{E}_3 \\ \hat{E}_4 \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \hat{C}_4 \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

onde:

$$\hat{\mathcal{V}}^* = \mathrm{Im}(\hat{V}^*) \qquad \hat{V}^* = \begin{bmatrix} I_c & 0 & 0 \\ 0 & I_g & 0 \\ 0 & 0 & I_{v-(c+g)} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathcal{V}}_g^* = \mathrm{Im}(\hat{V}_g^*) \qquad \hat{V}_g^* = \begin{bmatrix} I_c & 0 \\ 0 & I_g \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathcal{R}}^* = \mathrm{Im}(\hat{R}^*) \qquad \hat{R}^* = \begin{bmatrix} I_c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Considerando a lei de realimentação de estados

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} \hat{F}_{11} & \hat{F}_{12} & \hat{F}_{13} & \hat{F}_{14} \\ \hat{F}_{21} & \hat{F}_{22} & \hat{F}_{23} & \hat{F}_{24} \end{bmatrix}$$

podemos definir precisamente os conjuntos:

$$\mathbf{F}(\hat{\mathcal{V}}^*) \equiv \left\{ \hat{F} \ / \ \begin{bmatrix} \hat{A}_{41} & \hat{A}_{42} & \hat{A}_{43} \end{bmatrix} + \hat{B}_{41} \begin{bmatrix} \hat{F}_{11} & \hat{F}_{12} & \hat{F}_{13} \end{bmatrix} = 0 \right\} \tag{2.37}$$

$$\mathbf{F}(\hat{\mathcal{V}}_g^*) \equiv \left\{ \hat{F} \ / \ \begin{bmatrix} \hat{A}_{41} & \hat{A}_{42} \end{bmatrix} + \hat{B}_{41} \begin{bmatrix} \hat{F}_{11} & \hat{F}_{12} \end{bmatrix} = 0 \right\} \tag{2.38}$$

$$\mathbf{F}(\hat{\mathcal{R}}^*) \equiv \left\{ \hat{F} \ / \ \hat{A}_{41} + \hat{B}_{41}\hat{F}_{11} = 0 \right\} \tag{2.39}$$

Tendo essa representação como ponto de partida, a solução computacional do PRP é discutida a seguir.

## 2.4 Solução do PRP

Nosso objetivo agora é a obtenção de uma lei de realimentação de estados $u = Fx$ que resolva o PRP. De acordo com o Teorema 2.1, a condição para que essa lei exista é que o maior subespaço $(A, B)$-invariante contido no espaço nulo da matriz

$C$ contenha a imagem da matriz $E$. Relembrando o algoritmo para o cálculo de $\mathcal{V}^*$, a cada iteração $i$ a representação da matriz $E$ é modificada através da transformação

$$E^{i+1} = Q^{i+1\prime} E^i = \begin{bmatrix} E_1^{i+1} \\ E_2^{i+1} \end{bmatrix}$$

Além disso, $\mathcal{V}^*$ é obtido através da geração de uma seqüência decrescente de subespaços $(\mathcal{V}^0, ..., \mathcal{V}^i, \mathcal{V}^{i+1}, ..., \mathcal{V}^k)$ onde

$$\mathcal{V}^i = \mathrm{Im}(V^i) \qquad V^i = \begin{bmatrix} I_{n-rc^i} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Desse modo, uma condição necessária de existência de solução na iteração $i$ é $\mathrm{Im}(E^i) \subset \mathcal{V}^i$. Devido à forma de $V^i$, essa condição, facilmente verificável a cada iteração, é dada por:

$$E_2^i = 0$$

para $i = 0, 1...k$. Na iteração $k$, obtemos então uma condição necessária e suficiente:

$$E_2^k = 0$$

Considere agora o sistema (2.33) (2.34). Nessa representação, a condição acima torna-se $\hat{E}_4 = 0$ e um conjunto de soluções do PRP é então definido por $\mathbf{F}(\hat{\mathcal{V}}^*)$ (2.37). Para o PRPE, se os sistema for estabilizável, a condição de existência de solução é $\hat{E}_3 = \hat{E}_4 = 0$ e um conjunto de soluções é dado por

$$\mathbf{F}_E(\hat{\mathcal{V}}_g^*) \equiv \left\{ \begin{array}{c} \hat{F} \in \mathbf{F}(\hat{\mathcal{V}}_g^*) \ / \ \sigma[\hat{A}_{11} + \hat{B}_{11}\hat{F}_{11} + \hat{B}_{12}\hat{F}_{21}] \subset \mathcal{C}_g \\ \text{e} \\ \sigma\left[\begin{bmatrix} \hat{A}_{33} & \hat{A}_{34} \\ \hat{A}_{43} & \hat{A}_{44} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_{31} \\ \hat{B}_{41} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{F}_{13} & \hat{F}_{14} \end{bmatrix}\right] \subset \mathcal{C}_g \end{array} \right\}$$

Na base original, os conjuntos acima podem ser facilmente obtidos

$$\mathbf{F}(\mathcal{V}^*) \equiv \left\{F = Z\hat{F}(QQ_RQ_S)' \ / \ \hat{F} \in \mathbf{F}(\hat{\mathcal{V}}^*)\right\}$$

$$\mathbf{F}_\mathbf{E}(\mathcal{V}_g^*) \equiv \left\{F = Z\hat{F}(QQ_RQ_S)' \ / \ \hat{F} \in \mathbf{F}_E(\hat{\mathcal{V}}_g^*)\right\}$$

Esses conjuntos, no entanto, podem ser bastante limitados, já que qualquer subespaço $(A, B)$-invariante contido em $\mathcal{K}$ que contenha $\mathcal{E}$ satisfaz à condição de solução do PRP. $\mathcal{V}^*$ é o subespaço de maior dimensão com essas características. Para que tivéssemos uma maior visão sobre a existência de outros subespaços, seria de grande interesse obter o subespaço de menor dimensão, ou seja, o menor subespaço $(A, B)$-invariante que contém a imagem da matriz $E$. Infelizmente, pode ser demonstrado que nem sempre existe um único subespaço com essas características. Isso ocorre porque, de um modo geral, o conjunto de subespaços $(A, B)$-invariantes não é fechado sob a operação de interseção. É de se esperar portanto que a solução do PRP para sistemas que gozem dessa propriedade apresente alguns aspectos diferenciados em relação a sistemas gerais. Nosso objetivo a seguir é definir e discutir a solução do PRP para uma classe de sistemas com essa propriedade.

### 2.4.1 Sistemas onde $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* \subset \mathcal{E}$

Considere a classe de subespaços:

$$\mathcal{J}(A, B; \mathcal{E}) \equiv \{\mathcal{V} \;/\; \mathcal{V} \in \mathcal{I}(A, B; \mathcal{K}) \text{ e } \mathcal{V} \supset \mathcal{E}\}$$

**Lema 2.1** *Se $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* \subset \mathcal{E}$, então o conjunto $\mathcal{J}(A, B; \mathcal{E})$ é fechado sob a operação de interseção de subespaços.*

Prova: Sejam os subespaços $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in \mathcal{J}(A, B; \mathcal{E})$. Então

$$\begin{aligned} A(\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2) &\subset A\mathcal{V}_1 \cap A\mathcal{V}_2 \\ &\subset (\mathcal{V}_1 + \mathcal{B}) \cap (\mathcal{V}_2 + \mathcal{B}) \end{aligned}$$

Como $(\mathcal{V}_1 + \mathcal{B}) \supset \mathcal{B}$, então

$$\begin{aligned} A(\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2) &\subset (\mathcal{V}_1 + \mathcal{B}) \cap \mathcal{V}_2 + (\mathcal{V}_1 + \mathcal{B}) \cap \mathcal{B} \\ &= (\mathcal{V}_1 + \mathcal{B}) \cap \mathcal{V}_2 + \mathcal{B} \end{aligned} \tag{2.40}$$

Se $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* \subset \mathcal{E}$ então $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{E}$. Como $\mathcal{V}_1 \supset \mathcal{E}$, então $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_1$. Dessa relação, pode ser verificado que $(\mathcal{V}_1 + \mathcal{B}) \cap \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$. Substituindo em (2.40), obtemos

$$A(\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2) \subset \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 + \mathcal{B}$$

Logo, $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \in \mathcal{J}(A, B; \mathcal{E})$. □

Esse resultado, juntamente com o Lema 1.2 assegura a existência do subespaço mínimo

$$\mathcal{V}_* = \min \mathcal{J}(A, B; \mathcal{E})$$

Os possíveis conjuntos de solução do PRP são então dados por

$$\mathbf{F}(\mathcal{V}) \equiv \{F \;/\; (A + BF)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}\}$$

$$\mathcal{V}_* \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{V}^* \tag{2.41}$$

Para a obtenção de $\mathcal{V}_*$ necessitaremos do seguinte resultado:

**Proposição 2.3**

$$\mathbf{F}(\mathcal{V}) \supset \mathbf{F}(\mathcal{V}^*) \qquad \text{para qualquer } \mathcal{V} \in \mathcal{J}(A, B; \mathcal{E}).$$

Prova: Como $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* \subset \mathcal{E}$, podemos sempre encontrar uma base na qual

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & 0 \\ B_{31} & 0 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

com as colunas de $B_{31}$ e as linhas de $E_1$ linearmente independentes,

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{V}^* = \mathrm{Im}(V^*) \qquad V^* = \begin{bmatrix} I_d & 0 \\ 0 & I_{v-d} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}(\mathcal{V}^*) \equiv \left\{ F \;/\; [\; A_{31} \quad A_{32} \;] + B_{31} \left[\; F_{11} \quad F_{12} \;\right] = 0 \right\}$$

Nessa representação, qualquer subespaço $\mathcal{V} \in \mathcal{J}(A, B; \mathcal{E})$ pode ser escrito como

$$\mathcal{V} = \mathrm{Im}(V) \qquad V = \begin{bmatrix} I_d & 0 \\ 0 & V_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde $V_2 \in \Re^{(v-d)\times v_2}, v_2 \leq v - d$. Além disso, sempre existe uma matriz de transformação

$$Q_V = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & Q_v & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

tal que

$$Q_V{}'V = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Q_v{}'V_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} I & 0 \\ \hline 0 & \bar{V}_2 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

onde $\bar{V}_2$ possui as linhas linearmente independentes. Aplicando essa transformação às outras matrizes obtemos:

$$\bar{A} = Q_V{}'AQ_V = \left[\begin{array}{c|cc|c} A_{11} & \bar{A}_{12_1} & \bar{A}_{12_2} & A_{13} \\ \hline \bar{A}_{21_1} & \bar{A}_{22_{11}} & \bar{A}_{22_{12}} & \bar{A}_{23_1} \\ \bar{A}_{21_2} & \bar{A}_{22_{21}} & \bar{A}_{22_{22}} & \bar{A}_{23_2} \\ \hline A_{31} & \bar{A}_{32_1} & \bar{A}_{32_2} & A_{33} \end{array}\right]$$

$$\bar{B} = Q_V{}'B = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline \bar{B}_{21_1} & 0 \\ \bar{B}_{21_2} & 0 \\ \hline B_{31} & 0 \end{array}\right] \qquad \bar{E} = E \qquad \bar{\mathcal{V}}^* = \mathcal{V}^*$$

$$\bar{F} = FQ_V = \left[\begin{array}{c|cc|c} F_{11} & \bar{F}_{12_1} & \bar{F}_{12_2} & F_{13} \\ \hline F_{21} & \bar{F}_{22_1} & \bar{F}_{22_2} & F_{23} \end{array}\right]$$

$$\mathbf{F}(\bar{\mathcal{V}}^*) \equiv \left\{\bar{F} \;/\; \left[\begin{array}{ccc} A_{31} & \bar{A}_{32_1} & \bar{A}_{32_2} \end{array}\right] + B_{31}\left[\begin{array}{ccc} F_{11} & \bar{F}_{12_1} & \bar{F}_{12_2} \end{array}\right] = 0\right\} \tag{2.42}$$

$$\bar{\mathcal{V}} = \mathrm{Im}(\bar{V}) \qquad \bar{V} = \left[\begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \tag{2.43}$$

Logo,

$$(\bar{A} + \bar{B}\bar{F})\bar{V} = \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} A_{11} & \bar{A}_{12_1} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc} B_{11} & B_{12} \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} F_{11} & \bar{F}_{12_1} \\ F_{21} & \bar{F}_{22_1} \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{cc} \bar{A}_{21_1} & \bar{A}_{22_{11}} \\ \bar{A}_{21_2} & \bar{A}_{22_{21}} \\ A_{31} & \bar{A}_{32_1} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} \bar{B}_{21_1} \\ \bar{B}_{21_2} \\ B_{31} \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} F_{11} & \bar{F}_{12_1} \end{array}\right] \end{array}\right]$$

Como $\bar{\mathcal{V}}$ é por hipótese $(\bar{A}, \bar{B})$-invariante, pela Proposição 2.1,

$$\left[\begin{array}{cc} \bar{A}_{21_2} & \bar{A}_{22_{21}} \\ A_{31} & \bar{A}_{32_1} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} \bar{B}_{21_2} \\ B_{31} \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} F_{11} & \bar{F}_{12_1} \end{array}\right] = 0$$

Como $B_{31}$ possui as colunas linearmente independentes, então $\left[\begin{array}{cc} F_{11} & \bar{F}_{12_1} \end{array}\right]$ é a solução única de $\left[\begin{array}{cc} A_{31} & \bar{A}_{32_1} \end{array}\right] + B_{31}\left[\begin{array}{cc} F_{11} & \bar{F}_{12_1} \end{array}\right] = 0$ e o conjunto $\mathbf{F}(\bar{\mathcal{V}})$ é completamente definido por

$$\mathbf{F}(\bar{\mathcal{V}}) \equiv \left\{\bar{F} \;/\; \left[\begin{array}{cc} A_{31} & \bar{A}_{32_1} \end{array}\right] + B_{31}\left[\begin{array}{cc} F_{11} & \bar{F}_{12_1} \end{array}\right] = 0\right\}$$

Da expressão (2.42), é fácil verificar que qualquer $\bar{F} \in \mathbf{F}(\bar{\mathcal{V}}^*)$ também pertence a $\mathbf{F}(\bar{\mathcal{V}})$, logo

$$\mathbf{F}(\bar{\mathcal{V}}) \supset \mathbf{F}(\bar{\mathcal{V}}^*)$$

Como $\mathcal{V} \in \mathcal{J}(A, B; \mathcal{E})$ foi arbitrário, a Proposição está provada. □

Estamos agora em condições de obter o subespaço mínimo desejado.

**Teorema 2.4**

$$\mathcal{V}_* =< A + BF \mid \mathcal{E} > \qquad \text{para qualquer } F \in \mathbf{F}(\mathcal{V}^*)$$

Prova: Da Proposição anterior, $\mathbf{F}(\mathcal{V}_*) \supset \mathbf{F}(\mathcal{V}^*)$, logo, $\mathcal{V}_*$ é $(A + BF)$-invariante para $F \in \mathbf{F}(\mathcal{V}^*)$. Devido à sua condição de mínimo, $\mathcal{V}_*$ é então o menor subespaço $(A + BF)$-invariante que contém $\mathcal{E}$, que é, por definição, o subespaço controlável do par $(A + BF, E)$. □

**Corolário 2.1**

$$\mathbf{F}(\mathcal{V}_*) \supset \mathbf{F}(\mathcal{V}) \qquad \text{para qualquer } \mathcal{V} \in \mathcal{J}(A, B; \mathcal{E})$$

Prova: Construindo uma base na qual

$$\mathcal{V}^* = \mathrm{Im}(V^*) \qquad V^* = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{V}_* = \mathrm{Im}(V_*) \qquad V_* = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

esse resultado pode ser obtido de maneira semelhante ao da Proposição 2.3. Por ser tão somente uma repetição, a prova é omitida. □

Esse resultado nos garante que em sistemas para os quais $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* \subset \mathcal{E}$ é possível determinar o conjunto de todas as soluções do PRP e esse conjunto é $\mathbf{F}(\mathcal{V}_*)$ (veja a equação (2.41)). Com o objetivo de obter esse conjunto, considere o sistema representado por (2.33) (2.34). Sem perda de generalidade, suporemos que o PRPE é também solúvel ($\hat{E}_3 = \hat{E}_4 = 0$). Tomando

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} \hat{F}_{11} & \hat{F}_{12} & \hat{F}_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{F}(\hat{\mathcal{V}}^*)$$

temos,

$$\hat{A}_F = \hat{A} + \hat{B}\hat{F} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} + \hat{B}_{11}\hat{F}_{11} & \hat{A}_{12} + \hat{B}_{11}\hat{F}_{12} & \hat{A}_{13} + \hat{B}_{11}\hat{F}_{13} & \hat{A}_{14} \\ 0 & \hat{A}_{12} + \hat{B}_{21}\hat{F}_{12} & \hat{A}_{23} + \hat{B}_{21}\hat{F}_{13} & \hat{A}_{24} \\ 0 & 0 & \hat{A}_{33} + \hat{B}_{31}\hat{F}_{13} & \hat{A}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{A}_{44} \end{bmatrix}$$

Considere agora a mudança na base de representação do sistema (2.33) (2.34)

$$\hat{x} = Q_E \bar{x} \qquad Q_E = \left[\begin{array}{c|cc} Q_e & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline 0 & I_g & 0 \\ & 0 & I_{n-v} \end{array}\right] \tag{2.44}$$

$$A_e = Q_e' \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} + \hat{B}_{11}\hat{F}_{11} & \hat{A}_{12} + \hat{B}_{11}\hat{F}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{12} + \hat{B}_{21}\hat{F}_{12} \end{bmatrix} Q_e = \begin{bmatrix} A_{e11} & A_{e12} \\ 0 & A_{e22} \end{bmatrix} \tag{2.45}$$

$$E_e = Q_e' \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{e1} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

onde o par $(A_e, E_e)$ está numa forma canônica controlável para a qual

$$< A_e | E_e >= \operatorname{Im} \begin{bmatrix} I_e \\ 0 \end{bmatrix}$$

Então, pelo Teorema 2.4,

$$\bar{\mathcal{V}}_* = \operatorname{Im}(\bar{V}_*) \qquad \bar{V}_* = \begin{bmatrix} I_e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para obter $\mathcal{V}_*$ na base original basta calcular

$$\mathcal{V}_* = \operatorname{Im}(V_*) \qquad V_* = Q Q_R Q_S Q_E \bar{V}_*$$

Note que, como $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* \subset \mathcal{E}$ então $\mathcal{R}^* \subset \mathcal{V}_*$ logo $c \leq e$. As matrizes $\hat{A}$ e $\hat{B}$ no sistema transformado ficam

$$\bar{A} = Q_E' \hat{A} Q_E = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \bar{A}_{13} & \bar{A}_{14} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & \bar{A}_{23} & \bar{A}_{24} \\ \bar{A}_{31} & \bar{A}_{32} & \hat{A}_{33} & \hat{A}_{34} \\ \bar{A}_{41} & \bar{A}_{42} & \hat{A}_{43} & \hat{A}_{44} \end{bmatrix} \qquad \bar{B} = Q_E' \hat{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} \\ \bar{B}_{21} & 0 \\ \hat{B}_{31} & 0 \\ \hat{B}_{41} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.47}$$

onde $\bar{A}_{11} \in \Re^{e \times e}$ e $\bar{B}_{11} \in \Re^{e \times b}$. Observe que $\bar{B}_{22} = 0$ devido à condição $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* \subset \mathcal{E}$.

De acordo com o Corolário 2.1, podemos então definir o conjunto de todas as soluções do PRP. Seja

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{11} & \bar{F}_{12} & \hat{F}_{13} & \hat{F}_{14} \\ \bar{F}_{21} & \bar{F}_{22} & \hat{F}_{23} & \hat{F}_{24} \end{bmatrix} \tag{2.48}$$

Então

$$\mathbf{F}(\bar{\mathcal{V}}_*) \equiv \left\{ \bar{F} \ / \ \bar{A}_{41} + \hat{B}_{41}\bar{F}_{11} = 0 \right\} \tag{2.49}$$

$$\mathbf{F}(\mathcal{V}_*) \equiv \left\{ F = Z\bar{F}(QQ_RQ_SQ_E)' \ / \ \bar{F} \in \mathbf{F}(\bar{\mathcal{V}}_*) \right\} \tag{2.50}$$

Para o PRPE, o conjunto de soluções é dado por:

$$\mathbf{F}_E(\bar{\mathcal{V}}_*) \equiv \left\{ \begin{array}{c} \bar{F} \in \mathbf{F}(\bar{\mathcal{V}}_*) \ / \ \sigma[\bar{A}_{11} + \bar{B}_{11}\bar{F}_{11} + \bar{B}_{12}\bar{F}_{21}] \subset \mathcal{C}_g \\ \text{e} \\ \sigma \left[ \begin{bmatrix} \bar{A}_{22} & \bar{A}_{23} & \bar{A}_{24} \\ \bar{A}_{32} & \hat{A}_{33} & \hat{A}_{34} \\ \bar{A}_{42} & \hat{A}_{43} & \hat{A}_{44} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_{21} \\ \hat{B}_{31} \\ \hat{B}_{41} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{F}_{12} & \hat{F}_{13} & \hat{F}_{14} \end{bmatrix} \right] \subset \mathcal{C}_g \end{array} \right\} \tag{2.51}$$

$$\mathbf{F}_E(\mathcal{V}_*) \equiv \left\{ F = Z\bar{F}(QQ_RQ_SQ_E)' \ / \ \bar{F} \in \mathbf{F}_E(\bar{\mathcal{V}}_*) \right\} \tag{2.52}$$

A equação (2.49) fornece então a expressão analítica explícita de todas as possíveis soluções do PRP. Para o PRPE não é obtida uma expressão explícita, já que apenas a submatriz $\bar{F}_{11}$ é unicamente definida. Entretanto, a garantia de existência de solução facilita a aplicação de qualquer método disponível para obtenção de uma solução estabilizante que, como será discutido no próximo capítulo, será suficiente para o início do processo de otimização. Observe que as submatrizes $\bar{F}_{22}$, $\hat{F}_{23}$ e $\hat{F}_{24}$ não têm qualquer influência nas soluções do PRP e PRPE, o que as deixa completamente livres para atuar no sentido de atender a outras especificações de projeto.

### Sistemas Inversíveis à Esquerda

Em particular, se $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* = 0$, o que equivale a $\mathcal{R}^* = 0$, o sistema é denominado *inversível à esquerda* [43]. Sua principal característica é que para uma determinada saída suas entradas podem ser unicamente determinadas [32].

Neste caso, as matrizes $\bar{B}$ (2.47) e $\bar{F}$ (2.48) são dadas por

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_{11} \\ \bar{B}_{21} \\ \hat{B}_{31} \\ \hat{B}_{41} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \bar{F}_{11} & \bar{F}_{12} & \hat{F}_{13} & \hat{F}_{14} \end{bmatrix}$$

É então fácil verificar que a submatriz $\bar{A}_{\bar{F}_{11}} = \bar{A}_{11} + \bar{B}_{11}\bar{F}_{11}$ é fixa para qualquer $\bar{F} \in \mathbf{F}(\mathcal{V}_*)$, ou seja, os autovalores de $A_F|\mathcal{V}_*$ são fixos e constituem-se necessariamente em pólos do sistema em malha fechada.

Nesse ponto, é importante destacar algumas vantagens da abordagem aqui adotada comparada à proposta em [27] para essa classe de sistemas:

- A existência de solução para o PRP é testada a cada passo do procedimento de uma maneira muito mais simples, sem envolver a determinação do posto de matrizes polinomiais. O mesmo ocorre com o teste da condição de inversibilidade à esquerda.

- A solução é obtida através de procedimentos numéricos estáveis baseados em matrizes de transformação de base ortogonais, evitando portanto a execução de multiplicações de matrizes com possível mau condicionamento $(E, A_F E, A_F^2 E, ...)$ que, é bem sabido, pode comprometer a estabilidade numérica do algoritmo.

- A existência de solução para o PRPE é facilmente verificada a partir do conhecimento do espectro de $A_F \mid \mathcal{V}_*$, que é fixo. Desse modo, sob a hipótese de controlabilidade do par $(A, B)$ (veja o Teorema 1.2), apenas os pólos de $A_F \mid (\Re^n/\mathcal{V}_*)$ podem ser livremente posicionados. Na abordagem proposta em [27] o PRP com alocação de pólos é transformado no problema em aberto de alocação de pólos via realimentação de saída, o que torna a síntese do controlador uma tarefa complicada.

- A síntese da lei de controle é extremamente facilitada pela forma analítica obtida para a matriz de realimentação, já que seus elementos fixos e livres são explicitados.

## 2.4.2 Sistemas Gerais

Nem todos os sistemas possuem as propriedades daqueles tratados anteriormente. Por isso, torna-se muito difícil encontrar uma parametrização de todos os conjuntos de soluções do PRP. Entretanto, seria interessante obter outros conjuntos além daqueles relacionados a $\mathcal{V}^*$ e $\mathcal{V}_g^*$, principalmente, como é o nosso caso, se outras especificações de projeto são requeridas. Baseado nos conjuntos obtidos até aqui, torna-se claro que nosso objetivo deve ser encontrar uma base na qual a representação do sistema seja [13]:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.53}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & C_2 \end{bmatrix} \tag{2.54}$$

e que exista uma matriz $F_1$ tal que $A_{21} + B_2 F_1 = 0$. Note que todos os conjuntos de soluções do PRP até agora foram obtidos dessa maneira.

Voltando então à representação (2.33) (2.34), verificamos que se $\hat{\mathcal{R}}^*$, $\hat{\mathcal{V}}_g^*$ e $\hat{\mathcal{V}}^*$ contêm $\mathcal{E}$, então os conjuntos $\mathbf{F}(\hat{\mathcal{R}}^*)$, $\mathbf{F}(\hat{\mathcal{V}}_g^*)$ e $\mathbf{F}(\hat{\mathcal{V}}^*)$ são soluções do PRP e além disso $\mathbf{F}(\hat{\mathcal{V}}^*) \subset \mathbf{F}(\hat{\mathcal{V}}_g^*) \subset \mathbf{F}(\hat{\mathcal{R}}^*)$, ou seja, o conjunto $\mathbf{F}(\hat{\mathcal{R}}^*)$ é o mais completo. Nosso interesse deve ser então encontrar subespaços $(A, B)$-invariantes com dimensões menores que a de $\mathcal{R}^*$ nos quais a condição de rejeição seja satisfeita. Se $\mathcal{R}^*$ não contiver $\mathcal{E}$, devemos nos contentar em trabalhar com $\mathcal{V}_g^*$.

Considere então, mais uma vez, a representação (2.33)-(2.39). Assumindo solúveis o PRP e o PRPE, a matriz $\hat{E}$ fica

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sejam agora as seguintes mudanças de base

$$\hat{x} = Q_D x_d \qquad Q_D = \left[\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{$Q_d$}} & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{v-(c+g)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-v} \end{array}\right] \tag{2.55}$$

$$E_d = Q_D'\hat{E} = \begin{bmatrix} Q_d' \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \end{bmatrix} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{d1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde $E_{d1}$ é uma matriz com $d = posto(E)$ linhas.

$$B_d = Q_D'\hat{B} = \begin{bmatrix} B_{d11} & B_{d12} \\ B_{d21} & B_{d22} \\ \hat{B}_{31} & 0 \\ \hat{B}_{41} & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_d = Q_B \check{x} \qquad Q_B = \begin{bmatrix} I_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{v-(c+g)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-v} \end{bmatrix} \tag{2.56}$$

$$\hat{u} = Z_B \check{u} \qquad Z_B = \begin{bmatrix} I_b & 0 \\ 0 & Z_b \end{bmatrix} \tag{2.57}$$

$$\breve{B} = Q'_B B_d Z_B = \begin{bmatrix} B_{d11} & B_{d12} \\ Q'_b B_{d21} & Q'_b B_{d22} \\ \hat{B}_{31} & 0 \\ \hat{B}_{41} & 0 \end{bmatrix} Z_B = \begin{bmatrix} B_{d11} & B_{d12} Z_b \\ Q'_b B_{d21} & Q'_b B_{d22} Z_b \\ \hat{B}_{31} & 0 \\ \hat{B}_{41} & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\left[\begin{array}{c|cc} B_{d11} & \breve{B}_{12_1} & \breve{B}_{12_2} \\ \hline \breve{B}_{21_1} & 0 & 0 \\ \breve{B}_{21_2} & \breve{B}_{22_{21}} & 0 \\ \hline \hat{B}_{31} & 0 & 0 \\ \hat{B}_{41} & 0 & 0 \end{array}\right]$$

onde $\breve{B}_{22_{21}} \in \Re^{f \times f}$ é uma matriz quadrada, não-singular, cujos elementos abaixo da diagonal secundária são nulos. Aplicando essas transformações às outras matrizes do sistema, podemos então representá-lo por:

$$\dot{\breve{x}} = \breve{A}\breve{x} + \breve{B}\breve{u} + \breve{E}q \tag{2.58}$$

$$y = \breve{C}\breve{x} \tag{2.59}$$

$$\breve{u} = \breve{F}\breve{x} \tag{2.60}$$

$$\breve{A} = \begin{bmatrix} \breve{A}_{11} & \breve{A}_{12} & \breve{A}_{13} & \breve{A}_{14} & \breve{A}_{15} \\ \breve{A}_{21} & \breve{A}_{22} & \breve{A}_{23} & \breve{A}_{24} & \breve{A}_{25} \\ \breve{A}_{31} & \breve{A}_{32} & \breve{A}_{33} & \breve{A}_{34} & \breve{A}_{35} \\ \breve{A}_{41} & \breve{A}_{42} & \breve{A}_{43} & \breve{A}_{44} & \breve{A}_{45} \\ \breve{A}_{51} & \breve{A}_{52} & \breve{A}_{53} & \breve{A}_{54} & \breve{A}_{55} \end{bmatrix} \qquad \breve{B} = \begin{bmatrix} \breve{B}_{11} & \breve{B}_{12} & \breve{B}_{13} \\ \breve{B}_{21} & 0 & 0 \\ \breve{B}_{31} & \breve{B}_{32} & 0 \\ \breve{B}_{41} & 0 & 0 \\ \breve{B}_{51} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\breve{E} = \begin{bmatrix} \breve{E}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \breve{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \breve{C}_5 \end{bmatrix}$$

$$\breve{F} = \begin{bmatrix} \breve{F}_{11} & \breve{F}_{12} & \breve{F}_{13} & \breve{F}_{14} & \breve{F}_{15} \\ \breve{F}_{21} & \breve{F}_{22} & \breve{F}_{23} & \breve{F}_{24} & \breve{F}_{25} \\ \breve{F}_{31} & \breve{F}_{32} & \breve{F}_{33} & \breve{F}_{34} & \breve{F}_{35} \end{bmatrix}$$

onde:

$$\breve{\mathcal{V}}^* = \mathrm{Im}(\breve{V}^*) \qquad \breve{V}^* = \begin{bmatrix} I_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{(c+g)-(d+f)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{v-(c+g)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.61}$$

$$\mathbf{F}(\mathcal{V}^*) \equiv \left\{ \breve{F} \ / \ \left[ \begin{array}{cccc} \breve{A}_{51} & \breve{A}_{52} & \breve{A}_{53} & \breve{A}_{54} \end{array} \right] + \breve{B}_{51} \left[ \begin{array}{cccc} \breve{F}_{11} & \breve{F}_{12} & \breve{F}_{13} & \breve{F}_{14} \end{array} \right] = 0 \right\}$$

$$\breve{\mathcal{V}}_g^* = \mathrm{Im}(\breve{V}_g^*) \qquad \breve{V}_g^* = \begin{bmatrix} I_d & 0 & 0 \\ 0 & I_{(c+g)-(d+f)} & 0 \\ 0 & 0 & I_f \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.62}$$

$$\mathbf{F}(\mathcal{V}_g^*) \equiv \left\{ \breve{F} \ / \ \left[ \begin{array}{ccc} \breve{A}_{51} & \breve{A}_{52} & \breve{A}_{53} \end{array} \right] + \breve{B}_{51} \left[ \begin{array}{ccc} \breve{F}_{11} & \breve{F}_{12} & \breve{F}_{13} \end{array} \right] = 0 \right\}$$

Nosso objetivo agora é identificar outros subespaços e matrizes de controle associadas que resolvam o PRP. Pode ser então facilmente verificado que os seguintes subespaços e conjuntos colocam o sistema na forma indicada em (2.53) (2.54):

$$\breve{\mathcal{V}}_j = \mathrm{Im}(\breve{V}_j) \qquad \breve{V}_j = \left[ \begin{array}{cc|c} I_d & 0 & 0 \\ 0 & I_{(c+g)-(d+f)} & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_j \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \tag{2.63}$$

$$\mathbf{F}(\breve{\mathcal{V}}_j) \equiv \left\{ \begin{array}{c} \breve{F} \ / \ \left[ \begin{array}{ccc} \breve{A}_{51} & \breve{A}_{52} & \breve{A}_{53}^j \end{array} \right] + \breve{B}_{51} \left[ \begin{array}{ccc} \breve{F}_{11} & \breve{F}_{12} & \breve{F}_{13}^j \end{array} \right] = 0 \\ \text{e} \\ \left( \left[ \begin{array}{ccc} \breve{A}_{31} & \breve{A}_{32} & \breve{A}_{33}^j \end{array} \right]_{f-j} + \breve{B}_{31_{f-j}} \left[ \begin{array}{ccc} \breve{F}_{11} & \breve{F}_{12} & \breve{F}_{13}^j \end{array} \right] \right) + \\ \breve{B}_{32_{f-j}} \left[ \begin{array}{ccc} \breve{F}_{21} & \breve{F}_{22} & \breve{F}_{23}^j \end{array} \right]_{f-j} = 0 \end{array} \right\} \tag{2.64}$$

onde $0 \leq j < f$; a matriz $M^j$ é formada pelas $j$ primeiras colunas da matriz $M$; a matriz $M_{f-j}$ é formada pelas $f-j$ últimas linhas da matriz $M$. Note que, para $j = f$, $\breve{\mathcal{V}}_j = \breve{\mathcal{V}}_g^*$.

As matrizes $\breve{F} \in \mathbf{F}(\breve{\mathcal{V}}_j)$ que estabilizam assintoticamente o sistema em malha fechada são soluções do PRPE. Não é garantida entretanto a existência dessas matrizes.

Para obter as matrizes de controle na base original, devemos calcular

$$F = ZZ_B\breve{F}(QQ_RQ_SQ_DQ_B)'$$

Apesar de não definirem todas as possíveis soluções, esses conjuntos aumentam as possibilidades de escolha do controlador, pois a depender das especificações de projeto complementares pode ser mais conveniente trabalhar com um desses conjuntos do que com $\mathcal{V}^*$ ou $\mathcal{V}_g^*$.

## 2.5 Aspectos Computacionais

A abordagem apresentada tanto para o cálculo de subespaços $(A, B)$-invariantes quanto para solução do PRP é baseada na transformação do problema original em problemas equivalentes onde a estrutura das matrizes e subespaços envolvidos é explicitada de modo a evidenciar os conjuntos de soluções do problema. Para isso, a base de representação do sistema é, a cada passo, modificada através da utilização de matrizes ortogonais, o que garante que o condicionamento do problema não é modificado e, conseqüentemente, a estabilidade numérica dos algoritmos [12], [39]. Além disso, todos os procedimentos apresentados podem ser facilmente implementados computacionalmente:

- A maior parte das matrizes de mudança de base ortogonais pode ser obtida através de uma rotina de fatoração QR, que é disponível na maioria dos pacotes de programas matemáticos.

- Para a obtenção das matrizes de mudança de base ortogonais que transformam um determinado par $(A, B)$ numa forma canônica que explicita seu subespaço controlável, diversos métodos são disponíveis. Dentre eles, os métodos propostos em [26] e [37] são bastante simples, numericamente estáveis e também fazem uso de técnicas de fatoração QR.

- As matrizes de realimentação são obtidas através da resolução de sistemas de equações lineares, tarefa computacional simples principalmente, como no caso em questão, quando os sistemas de equações são não-singulares.

- O procedimento mais complicado sem dúvida é a obtenção da matriz de mudança de base $Q_S$ (2.31) (2.32), já que envolve a solução de um problema de autovalores, tarefa computacional um tanto quanto elaborada. Nesse caso específico, uma solução adequada é a utilização de uma rotina de decomposição de Schur com ordenamento, que reduz a matriz em questão a uma forma bloco-triangular superior. O ordenamento é necessário para separar os autovalores com parte real negativa daqueles com parte real positiva ou nula.

## 2.6 Conclusão

Neste capítulo, o Problema de Rejeição de Perturbações com realimentação de estados com e sem estabilidade foi tratado. A síntese de sua solução foi baseada no cálculo de subespaços $(A, B)$-invariantes e na obtenção de formas analíticas explícitas dos controladores. Métodos numericamente estáveis foram apresentados para a obtenção dos subespaços. Para a classe de sistemas onde $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* \subset \mathcal{E}$, a parametrização de todas as soluções foi obtida, enquanto para sistemas gerais soluções alternativas às relacionadas com $\mathcal{V}^*$ e $\mathcal{V}_g^*$ foram determinadas. Os procedimentos numéricos apresentados são baseados em matrizes de mudança de base ortogonais, o que garante a estabilidade numérica dos algoritmos.

Os algoritmos para obtenção de $\mathcal{V}^*$ e $\mathcal{R}^*$ são semelhantes aos propostos em [37] e constituem-se em racionalizações numéricas dos algoritmos algébricos de Wonham [43]. O procedimento para obtenção de $\mathcal{V}_g^*$ não foi encontrado na literatura.

Quanto à obtenção da solução do PRP, a abordagem aqui adotada oferece algumas vantagens em relação a outras conhecidas. O conjunto de soluções para sistemas inversíveis à esquerda obtido em [27] é um caso particular do obtido para sistemas onde $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* \subset \mathcal{E}$. Além disso, a forma analítica apresentada não explicita os elementos livres da matriz de controle e o método proposto apresenta alguns procedimentos numéricos instáveis, como por exemplo o produto de matrizes com possível mau condicionamento $(E, AE, A^2E...)$. A solução obtida em [37] é muito restritiva, já que é apenas a de norma mínima relacionadada a $\mathcal{V}^*$. Além disso, nenhuma das duas se preocupa com estabilidade.

A forma obtida para a matriz de realimentação, na qual se tem o conhecimento dos elementos livres, facilita bastante o atendimento a outros requisitos de projeto além da rejeição de perturbações, como por exemplo alocação de autovalores e autovetores e, particularmente, regulação linear-quadrática, que será assunto do Capítulo seguinte.

# Capítulo 3

# O Problema de Rejeição de Perturbações com Regulação Linear-Quadrática (PRPRLQ)

## 3.1 Introdução

Como pode ser notado das expressões obtidas no Capítulo anterior, a solução do PRP fixa apenas alguns elementos da matriz de realimentação, ficando os outros livres para atender a outras especificações de projeto como por exemplo alocação de pólos [17], que, por sua vez, também não faz uso de toda a capacidade de controle.

Uma outra especificação clássica bastante utilizada no projeto de sistemas de controle é a minimização de um índice de desempenho quadrático que, ao mesmo tempo em que tenta posicionar os pólos mais à esquerda do eixo imaginário, não permite que a amplitude dos sinais de entrada atinja níveis elevados, o que leva à formulação do *Problema do Regulador Ótimo Linear-Quadrático Determinístico* [14].

Entre algumas propriedades atrativas dos reguladores L-Q podem ser citadas: boas margens de fase e ganho, sensibilidade reduzida a não-linearidades na planta de entrada [30], e, numa descoberta recente, valores singulares da função de transferência em malha fechada menores que os em malha aberta [31].

Neste Capítulo, a regulação ótima linear-quadrática é proposta como especificação de projeto complementar à rejeição de perturbações, levando à definição do *Problema de Rejeição de Perturbações com Regulação Linear-Quadrática* (PRPRLQ) [6], [7] que objetiva, através de realimentação de estados, eliminar da saída o efeito de perturbações e, ao mesmo tempo, minimizar um índice de desempenho quadrático de tempo infinito.

O PRPRLQ é formulado como um problema de otimização de parâmetros em reguladores L-Q com restrições de estrutura [19], [22]. Para sua solução, é proposto um método de descida especializado capaz de tratar problemas com restrições de estrutura *fortes* como as geralmente impostas pela solução do PRP.

Na segunda Seção, o PRPRLQ é formulado, na terceira o método proposto para sua solução é apresentado e na quarta conclusões são feitas sobre o Capítulo.

## 3.2 Formulação do Problema

Dado o sistema linear (2.1) (2.2), considere o índice de desempenho quadrático de tempo infinito para o sistema não perturbado ($q = 0$):

$$J(u(t)) = \mathbf{E}\left\{\int_0^\infty [x(t)'S_1'S_1x(t) + u(t)'S_2u(t)]dt\right\}$$

onde: $\mathbf{E}$ é o operador esperança matemática; $S_1$ e $S_2$ são matrizes reais, constantes, dimensionadas consistentemente; $S_2$ é definida positiva; $x_0 = x(0)$ é um vetor de variáveis aleatórias com $\mathbf{E}\{x_0\} = 0$ e $\mathbf{E}\{x_0x_0'\} = X_0'X_0$.

Considerando a lei de realimentação de estados (2.3), o índice acima pode ser escrito na forma

$$J(F) = \mathbf{E}\left\{\int_0^\infty x(t)'[S_1'S_1 + F'S_2F]x(t)dt\right\} \tag{3.1}$$

O objetivo do Problema de Rejeição de Perturbações com Regulação Linear-Quadrática (PRPRLQ) é encontrar a matriz $F$ que resolve o problema de otimização

$$\min_{F\in\mathbf{F}(\mathcal{V})} J(F) \tag{3.2}$$

onde $\mathbf{F}(\mathcal{V})$ é um conjunto de soluções do PRP. A matriz de controle $F$ deve então ser tal que elimine os efeitos das perturbações na saída e ao mesmo tempo otimize o desempenho do sistema através da minimização do índice (3.1).

O problema original foi então reduzido (veja o Apêndice A) a um problema de regulação ótima L-Q com restrições de estrutura, onde as restrições consideradas são a lei de realimentação de estados linear invariante no tempo e a condição $F \in \mathbf{F}(\mathcal{V})$.

Sejam agora as mudanças de variáveis definidas no Capítulo 2

$$x = (QQ_RQ_SQ_DQ_B)\breve{x} = Q_T\breve{x} \tag{3.3}$$

$$u = (ZZ_B)\breve{u} = Z_T\breve{u} \tag{3.4}$$

que colocam o sistema na forma (2.58) (2.59). O índice de desempenho (3.1) torna-se então

$$J(\breve{F}) = \mathbf{E}\left\{\int_0^\infty \breve{x}(t)'[Q_T'S_1'S_1Q_T + \breve{F}'Z_T'S_2Z_T\breve{F}]\breve{x}(t)dt\right\}$$

Considerando $\breve{S}_1 = S_1 Q_T$ e $\breve{S}_2 = Z_T' S_2 Z_T$, fica

$$J(\breve{F}) = \mathbf{E}\left\{\int_0^\infty \breve{x}(t)'[\breve{S}_1'\breve{S}_1 + \breve{F}'\breve{S}_2\breve{F}]\breve{x}(t)dt\right\} \tag{3.5}$$

com $\mathbf{E}\{\breve{x}_0\} = 0$ e $\mathbf{E}\{\breve{x}_0\breve{x}_0'\} = Q_T X_0' X_0 Q_T' = \breve{X}_0'\breve{X}_0$. O problema de otimização a ser resolvido é agora

$$\min_{\breve{F}\in\mathbf{F}(\breve{\mathcal{V}})} J(\breve{F})$$

onde $\mathbf{F}(\breve{\mathcal{V}})$ é um conjunto de soluções do PRP para o sistema (2.58) (2.59). Dentro da abordagem utilizada no Capítulo 2, não tendo sido possível obter a parametrização de todas as soluções do PRP para o caso geral, foi obtida a parametrização de alguns conjuntos de soluções. Dentre esses conjuntos, não é possível saber *a priori* qual deles fornece a melhor solução para o problema de otimização. Definindo o conjunto de subespaços (veja as equações (2.62)-(2.64))

$$\mathcal{T} = \left\{\breve{\mathcal{V}}_g^*; \breve{\mathcal{V}}_j, 0 \leq j < f\right\} \tag{3.6}$$

devemos portanto obter a solução de um problema mais abrangente

$$\min_{\breve{\mathcal{V}}\in\mathcal{T}} \min_{\breve{F}\in\mathbf{F}(\breve{\mathcal{V}})} J(\breve{F}) \tag{3.7}$$

ou seja, para cada $\breve{\mathcal{V}} \in \mathcal{T}$ devemos resolver $\min_{\breve{F}\in\mathbf{F}(\breve{\mathcal{V}})} J(\breve{F})$ e então escolher a melhor solução.

Para cada subespaço pertencente a $\mathcal{T}$, a matriz de realimentação $\breve{F}$ possui elementos fixos e elementos livres. Seja $\underline{\alpha}$ o vetor formado pelos elementos livres de $\breve{F} \in \mathbf{F}(\breve{\mathcal{V}})$, $\breve{\mathcal{V}} \in \mathcal{T}$. Podemos então reescrever o problema acima na forma

$$\min_{\breve{\mathcal{V}}\in\mathcal{T}} \min_{\underline{\alpha}} J(\underline{\alpha})$$

O problema $\min_{\underline{\alpha}} J(\underline{\alpha})$ corresponde a um problema de otimização de parâmetros em reguladores L-Q com restrições de estrutura [11], [19], [22]. Se algumas condições sobre as matrizes $\breve{X}_0$, $\breve{S}_1$ e $\breve{S}_2$ forem satisfeitas (veja o Apêndice A), um método de descida começando de uma matriz $\breve{F}(\underline{\alpha}_0)$ que estabiliza assintoticamente $(\breve{A} + \breve{B}\breve{F}(\underline{\alpha}_0))$ garante a estabilidade de $(\breve{A} + \breve{B}\breve{F}(\underline{\alpha}))$ ao longo de todo o processo de otimização. Desse modo, a obtenção de qualquer solução do PRPE é suficiente para garantir a existência de solução do PRPRLQ.

No caso de sistemas onde $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* \subset \mathcal{E}$, a parametrização do conjunto de todas as soluções do PRP foi obtida. É necessário portanto resolver um único problema de otimização

$$\min_{\bar{F}\in\mathbf{F}(\bar{\mathcal{V}}_*)} J(\bar{F})$$

que é equivalente a

$$\min_{\underline{\alpha}} J(\underline{\alpha})$$

onde $\underline{\alpha}$ corresponde aos elementos livres de $\bar{F} \in \mathbf{F}(\bar{\mathcal{V}}_*)$ (2.49).

## 3.3 Um Método de Descida Especializado

Para solução do problema de otimização de parâmetros diversos métodos são disponíveis. Uma compilação dos principais resultados pode ser encontrada na referência [19]. Um método de otimização do tipo descida, contudo, é particularmente adequado devido à garantia de estabilidade assintótica do sistema em malha fechada ao longo de todo o processo.

Quando as restrições de estrutura impostas são *fracas* no sentido de que a solução do problema com restrições é próxima da do problema com restrições, o método de Newton modificado proposto por Milani [21], [22] apresenta um desempenho altamente satisfatório. No caso do PRPRLQ entretanto, parece claro que as restrições impostas pela solução do PRP não podem ser consideradas fracas. Analisemos, por exemplo, o caso de sistemas inversíveis à esquerda. Como $\mathcal{R}^* = 0$, o espectro de $(A + BF)|\mathcal{V}_*$ é completamente definido pela solução do PRP, $F \in \mathbf{F}(\mathcal{V}_*)$ (2.49) (2.50), que pode impor, por exemplo, autovalores próximos do eixo imaginário, implicando claramente em um distanciamento entre a solução do PRPRLQ e a solução do problema do regulador linear-quadrático sem restrições.

Para tratar o caso de restrições fortes, é então proposto um método híbrido formado por uma seqüência de passos de métodos dos tipos Newton modificado, Newton e Quasi-Newton, que são escolhidos ao longo do processo de descida através da avaliação da taxa de convergência, do esforço computacional e da proximidade do ponto de ótimo.

Sejam então

$J(\underline{\alpha})$ - índice de desempenho;

$\nabla J(\underline{\alpha})$ - vetor gradiente de $J(\underline{\alpha})$;

$H(\underline{\alpha})$ - matriz hessiana de $J(\underline{\alpha})$;

$H_2(\underline{\alpha})$ - aproximação definida positiva de $H(\underline{\alpha})$;

$H_d(\underline{\alpha})$ - matriz obtida do escalamento diagonal de $H(\underline{\alpha})$ para satisfação da condição secante dos métodos Quasi-Newton;

A forma geral dos passos de descida do método proposto é dada por

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}_{j+1} &= \underline{\alpha}_j - \beta \underline{z} \\ G(\underline{\alpha}_j) z &= \nabla J(\underline{\alpha}_j) \end{aligned} \tag{3.8}$$

onde $\beta$ é um escalar calculado de modo a garantir $J(\underline{\alpha}_{j+1}) < J(\underline{\alpha}_j)$ e $G(\underline{\alpha}_j)$ depende do passo de descida a ser utilizado:

$$G(\underline{\alpha}_j) = \begin{cases} H_2(\underline{\alpha}_j) \text{ - Newton modificado} \\ H(\underline{\alpha}_j) \text{ - Newton} \\ H_d(\underline{\alpha}_j) \text{ - Quasi-Newton} \end{cases}$$

### 3.3.1 Escolha do Passo de Descida

A eficiência do método proposto depende fortemente de uma escolha adequada de $G(\underline{\alpha})$ ao longo do processo de descida, que deve levar em conta principalmente o esforço computacional requerido no seu cálculo e as propriedades de convergência dos métodos envolvidos.

Mesmo em problemas com restrições de estrutura fortes, foi observado que o método de Newton modificado ($G(\underline{\alpha}) = H_2(\underline{\alpha})$) apresenta uma taxa de convergência melhor que o método do gradiente. Além disso, o esforço computacional adicional requerido para o cálculo de $H_2(\underline{\alpha})$ é muito pequeno (veja o Apêndice A), o que justifica seu uso na parte inicial do processo de otimização para a obtenção de uma solução aproximada.

Perto do ponto de ótimo entretanto, o método de Newton modificado pode apresentar uma convergência assintótica semelhante à do método do gradiente. Seria então desejável trocá-lo pelo método de Newton ($G(\underline{\alpha}) = H(\underline{\alpha})$) que, é bem sabido, apresenta uma melhor convergência nessa região. Entretanto, devido ao grande esforço computacional requerido para o cálculo de $H(\underline{\alpha})$, essa troca nem sempre é efetiva. Considere então o método de descida (3.8) e o esforço computacional requerido para os cálculos de $J(\underline{\alpha})$, $\nabla J(\underline{\alpha})$, $H(\underline{\alpha})$ e $H_2(\underline{\alpha})$ apresentado no Apêndice A:

- Assumindo que $\beta$ é obtido através de uma busca unidimensional que interpola 3 valores de $J(\underline{\alpha})$ na direção de descida, um passo do método de Newton modificado requer a solução de 4 equações de Lyapunov de ordem $n$.
- Assumindo $\beta = 1$, um passo do método de Newton requer a solução de $(np+2)$ equações de Lyapunov de ordem $n$, onde $np$ é o número de parâmetros em $\underline{\alpha}$.

Desse modo, com o esforço computacional gasto em um passo do método de Newton é posível executar $s$ passos do método de Newton modificado, onde

$$s = \frac{np+2}{4}$$

Supondo agora que o método de Newton modificado apresenta uma taxa de convergência linear estimada ao longo do processo de descida dada por

$$r = \frac{\|\nabla J(\underline{\alpha}_{j+1})\|}{\|\nabla J(\underline{\alpha}_j)\|}$$

e o método de Newton uma taxa de convergência quadrática dada por (veja por exemplo [18])

$$\frac{\|\nabla J(\underline{\alpha}_{j+1})\|}{\|\nabla J(\underline{\alpha}_j)\|^2} \simeq 1$$

$$\|\nabla J(\underline{\alpha}_j)\| << 1$$

é fácil verificar que a troca do método de Newton modificado pelo de Newton só será efetiva quando

$$r^s > \|\nabla J(\underline{\alpha}_j)\|$$

Na maioria dos casos, um único passo de Newton não é suficiente para atingir o ponto de ótimo. Para evitar que $H(\underline{\alpha})$ seja calculada várias vezes e mesmo assim manter uma boa taxa de convergência, seria então conveniente obter uma boa aproximação de $H(\underline{\alpha})$ com um baixo custo computacional. Se essa aproximação é obtida a partir do conhecimento das derivadas de primeira ordem (vetor gradiente), estamos lidando com um método Quasi-Newton.

Seja então $H$ uma matriz definida positiva que corresponde a uma matriz Hessiana $H(\underline{\alpha})$ calculada anteriormente. Martinez [20] propõe que uma matriz $H_d$ que satisfaça à condição secante dos métodos Quasi-Newton seja obtida de um escalamento diagonal de $H$ através da solução do seguinte sistema de equações lineares em $D$:

$$H_d(\underline{\alpha}_j)(\underline{\alpha}_j - \underline{\alpha}_{j-1}) = \nabla J(\underline{\alpha}_j) - \nabla J(\underline{\alpha}_{j-1}) \tag{3.9}$$

$$H = LL' \tag{3.10}$$

$$H_d(\underline{\alpha}_j) = LDL' \tag{3.11}$$

onde $L$ é uma matriz triangular inferior obtida da fatoração de Cholesky de $H$ e $D$ é uma matriz diagonal. Efetuando as substituições apropriadas nas equações acima, é fácil verificar que os elementos $d_{ii}$ da matriz $D$ são dados por

$$d_{ii} = b_i/a_i \tag{3.12}$$

onde $b_i$ e $a_i$ são os componentes dos vetores $b$ e $a$ dados por

$$Lb = \nabla J(\underline{\alpha}_j) - \nabla J(\underline{\alpha}_{j-1}) \tag{3.13}$$

$$a = L'(\underline{\alpha}_j - \underline{\alpha}_{j-1}) \tag{3.14}$$

A maior parte do esforço computacional para obtenção de $H_d(\underline{\alpha})$ é devida à fatoração de Cholesky (3.10), à solução do sistema de equações lineares triangular (3.13) e ao produto de matrizes (3.11). É possível verificar que, comparado com $H(\underline{\alpha})$, que requer o cálculo de $np$ equações de Lyapunov, o esforço computacional de $H_d(\underline{\alpha})$ pode ser considerado desprezível na maioria dos casos.

Não é entretanto conveniente usar a aproximação $H_d(\underline{\alpha})$ por vários passos, já que ela tenderia a se afastar de $H(\underline{\alpha})$. É aconselhável portanto que o número máximo de passos com $H_d(\underline{\alpha})$ seja limitado a um valor $itm$.

### 3.3.2 Algoritmo Proposto

Baseado nas diretivas apresentadas anteriormente, o seguinte algoritmo é proposto para solução do problema de otimização de parâmetros

1. Inicialização:
   - Defina $\epsilon_1 < \epsilon_2$:

     $\epsilon_1$: tolerância para o teste $\|\nabla J(\underline{\alpha})\| = 0$.

     $\epsilon_2$: $\|\nabla J(\underline{\alpha})\| \leq \epsilon_2$ deve assegurar a convergência do método de Newton.
   - Defina $itm$, número máximo de passos Quasi-Newton após cada passo de Newton.
   - Encontre o vetor de parâmetros inicial $\underline{\alpha}_0$ tal que o sistema em malha fechada seja assintoticamente estável.
   - Faça

$$j = 0$$
$$it = 0$$
$$r = 0$$
$$\|\nabla J(\underline{\alpha}_{-1})\| = 1$$
$$s = \frac{np+2}{4}$$

   - Calcule $J(\underline{\alpha}_0)$; $\nabla J(\underline{\alpha}_0)$
2. Seleção de $G(\underline{\alpha}_j)$:
   - Se $\|\nabla J(\underline{\alpha}_j)\| \geq \epsilon_2$ ou $\|\nabla J(\underline{\alpha}_j)\| \geq r^s$: (Newton modificado)
     - Calcule $H_2(\underline{\alpha}_j)$.
     - Faça $G(\underline{\alpha}_j) = H_2(\underline{\alpha}_j)$.
     - Faça $flag = 1$.

- Se $\|\nabla J(\underline{\alpha}_j)\| < \epsilon_2$ e $\|\nabla J(\underline{\alpha}_j)\| < r^s$:
  - Se $it = 0$ ou $it > itm$: (Newton)
    - Calcule $H(\underline{\alpha}_j)$.
    - Faça $G(\underline{\alpha}_j) = H(\underline{\alpha}_j)$.
    - Faça $it = 1$; $flag = 0$
  - Se não: (Quasi-Newton)
    - Calcule $H_d(\underline{\alpha}_j)$.
    - Faça $G(\underline{\alpha}_j) = H_d(\underline{\alpha}_j)$.
    - Faça $it = it + 1$

3. Cálculo da direção de descida:

   - Resolva o sistema de equações:

$$G(\underline{\alpha}_j)\underline{z} = \nabla J(\underline{\alpha}_j)$$

4. Cálculo do passo de descida $\beta$ tal que

$$\underline{\alpha}_{j+1} = \underline{\alpha}_j - \beta \underline{z}$$

$$J(\underline{\alpha}_{j+1}) < J(\underline{\alpha}_j)$$

   - Se $flag = 1$ (Newton modificado): Calcule $\beta$ através de uma busca unidimensional (sugerimos a interpolação de 3 valores de $J(\underline{\alpha})$ na direção de busca).
   - Se $flag = 0$ (Newton ou Quasi-Newton): Faça $\beta = 1$.

5. Teste da condição de mínimo:

   - Calcule $J(\underline{\alpha}_{j+1})$; $\nabla J(\underline{\alpha}_{j+1})$; $\|\nabla J(\underline{\alpha}_{j+1})\|$.
   - Se $\|\nabla J(\underline{\alpha}_{j+1})\| \leq \epsilon_1$: PARE. Um ponto de mínimo foi atingido.
   - Se não:
     - Se $flag = 1$: Calcule $r = \|\nabla J(\underline{\alpha}_{j+1})\| / \|\nabla J(\underline{\alpha}_j)\|$.
     - Faça $j = j + 1$.
     - Volte ao passo 2.

Devido à não convexidade de $J(\underline{\alpha})$, não há garantias de que o ponto de mínimo obtido do processo de otimização seja global.

A solução ótima $F^*$ na base original pode ser obtida através de (veja as equações (3.3) (3.4)):

$$F^* = Z_T \check{F}(\underline{\alpha}^*) Q_T'$$

onde $\underline{\alpha}^*$ é a solução ótima obtida do algoritmo proposto.

### 3.3.3 Obtenção do Vetor de Parâmetros Inicial

Satisfeitas as condições de existência de solução para o PRPE, necessitamos para o início do processo de otimização de uma matriz de realimentação inicial que estabilize assintoticamente o sistema em malha fechada. Para obtê-la, basta recordar que as matrizes $\breve{A}_F$, $\breve{B}$ e $\breve{F}$ possuem as seguintes formas gerais:

$$\breve{A}_F = \breve{A} + \breve{B}\breve{F} = \begin{bmatrix} \breve{A}_{F11} & \breve{A}_{F12} \\ 0 & \breve{A}_{F22} \end{bmatrix} \qquad \breve{B} = \begin{bmatrix} \breve{B}_{11} & \breve{B}_{12} \\ \breve{B}_{21} & 0 \end{bmatrix} \qquad \breve{F} = \begin{bmatrix} \breve{F}_{11} & \breve{F}_{12} \\ \breve{F}_{21} & \breve{F}_{22} \end{bmatrix}$$

onde apenas os elementos de $\breve{F}_{11}$ são fixos. Desse modo, podemos obter uma matriz $\breve{F}$ estabilizante através da solução do problema linear-quadrático aplicado aos pares $(\breve{A}_{F11}, \breve{B}_{12})$ que fornece $\breve{F}_{21}$ e $(\breve{A}_{F22}, \breve{B}_{21})$ que fornece $\breve{F}_{12}$.

## 3.4 Conclusão

Neste Capítulo, o Problema de Rejeição de Perturbações com Regulação Linear-Quadrática foi proposto com o objetivo de utilizar a capacidade de controle deixada livre pela solução do PRP para minimizar um índice de desempenho quadrático, otimizando assim o desempenho do sistema com a saída desacoplada das perturbações.

O PRPRLQ foi formulado como um problema de otimização de parâmetros em reguladores L-Q com restrições de estrutura. Para sua solução foi proposto um método de descida híbrido, especializado para tratar problemas com restrições de estrutura severas como as que são em geral impostas pela solução do PRP, estendendo assim a possibilidade de solução computacional eficiente dessa classe de problemas de otimização.

O bom desempenho do método proposto poderá ser atestado através dos exemplos numéricos apresentados no Capítulo seguinte.

# Capítulo 4

# Exemplos Numéricos

## 4.1 Introdução

Neste Capítulo exemplos numéricos são apresentados com o objetivo de ilustrar a aplicação das técnicas propostas nos Capítulos 2 e 3 para resolver o PRP e o PRPRLQ. Com relação ao PRP, os passos percorridos para obtenção de sua solução são destacados, enquanto que para o PRPRLQ a ênfase maior é direcionada ao desempenho numérico do método de descida proposto.

Na segunda Seção, três exemplos de sistemas onde $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* \subset \mathcal{E}$ são apresentados. Os dois primeiros, encontrados na literatura, correspondem a sistemas inversíveis à esquerda. No primeiro exemplo, comparações são feitas com os resultados obtidos em [27]. O segundo exemplo corresponde a um modelo de coluna de destilação, cuja solução do PRP impõe restrições de estrutura extremamente severas à solução do problema de otimização de parâmetros. Aspectos importantes do método de otimização são então destacados. O terceiro exemplo ilustra um caso onde $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* \neq 0$.

Na terceira Seção dois exemplos de sistemas gerais ilustram a obtenção de outros conjuntos de soluções do PRP, que não aqueles relacionados a $\mathcal{V}^*$. O algoritmo de otimização é então aplicado para cada conjunto e a melhor solução é selecionada. No quinto exemplo é demonstrado que a solução relacionada a $\mathcal{V}^*$ pode resultar num índice de desempenho bastante pobre quando comparada à relacionada a outro subespaço.

## 4.2 Sistemas onde $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* \subset \mathcal{E}$

**Exemplo 1** *Sistema inversível à esquerda*

Este exemplo foi tirado da referência [27]. Considere o sistema para o qual

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A execução do algoritmo para cálculo de $\mathcal{V}^*$ gera os seguintes resultados

$$Q^0 = \begin{bmatrix} 0.4714 & 0.3333 & 0.4082 & 0.7071 \\ 0.4714 & 0.3333 & -0.8165 & 0 \\ 0.5774 & -0.8165 & 0 & 0 \\ 0.4714 & 0.3333 & 0.4082 & -0.7071 \end{bmatrix}$$

$$C^0 = CQ^0 = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1.4142 \\ 0 & 0 & -1.2247 & -0.7071 \end{array}\right]$$

$$A^0 = Q^{0\prime} A Q^0 = \left[\begin{array}{cc|cc} -0.6167 & -1.0134 & 0.3849 & 0 \\ -0.4361 & -0.7166 & 0.2722 & 0 \\ \hline -0.0865 & 0.9388 & -0.1667 & -0.8660 \\ 0.6667 & 0.4714 & -0.2887 & -1.5 \end{array}\right]$$

$$B^0 = Q^{0\prime} B = \left[\begin{array}{cc} 1.0488 & 0.4714 \\ -0.4832 & 0.3333 \\ \hline 0.4082 & 0.4082 \\ 0.7071 & 0.7071 \end{array}\right] \qquad E^0 = Q^{0\prime} E = \left[\begin{array}{c} 1.4142 \\ 1 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

$$V^0 = \left[\begin{array}{c} I_2 \\ \hline 0 \end{array}\right] \qquad Q = Q^0$$

$$Q_m^0 = \begin{bmatrix} 0.8660 & -0.5 \\ -0.5 & -0.8660 \end{bmatrix} \qquad \tilde{B_2}^0 = Q_m^{0\prime} B_2^0 = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \hline -0.8165 & -0.8165 \end{array}\right] \qquad rb^0 = 1$$

$$\tilde{A}^0_{21} = Q^0_m{}' A^0_{21} = \left[\begin{array}{cc} -0.4082 & 0.5774 \\ \hline -0.5341 & -0.8777 \end{array}\right]$$

$$Q^1_t = \begin{bmatrix} 0.8165 & 0.5774 \\ 0.5774 & -0.8165 \end{bmatrix} \qquad \hat{A}^0_{21_1} = \tilde{A}^0_{21_1} Q^1_t = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -0.7071 \end{array}\right]$$

$$ra^0 = 1 \qquad Q^1 = \begin{bmatrix} Q^1_t & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \qquad rc^1 = 3$$

$$A^1 = Q^{1\prime} A^0 Q^1 = \left[\begin{array}{c|ccc} -1.3333 & 0.5774 & 0.4714 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4714 & -0.8165 & -0.1667 & -0.8660 \\ 0.8165 & 0 & -0.2887 & -1.5 \end{array}\right]$$

$$B^1 = Q^{1\prime} B^0 = \left[\begin{array}{cc} 0.5774 & 0.5774 \\ \hline 1 & 0 \\ 0.4082 & 0.4082 \\ 0.7071 & 0.7071 \end{array}\right] \qquad E^1 = Q^{1\prime} E^0 = \left[\begin{array}{c} 1.7321 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

$$V^1 = \left[\begin{array}{c} I_1 \\ \hline 0 \end{array}\right] \qquad Q = QQ^1$$

$$Q^1_m = \begin{bmatrix} 0 & 0.6325 & -0.7746 \\ 0.8660 & -0.3873 & -0.3162 \\ -0.5 & -0.6708 & -0.5477 \end{bmatrix} \qquad \tilde{B}_2^1 = Q^1_m{}' B^1_2 = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \hline 0 & -0.6325 \\ -1.2910 & -0.5164 \end{array}\right]$$

$$rb^1 = 2 \qquad \tilde{A}^1_{21_1} = Q^1_m{}' A^1_{21} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline -0.7303 \\ -0.5963 \end{array}\right]$$

$$V_o = QV^1 = \begin{bmatrix} 0.5774 \\ 0.5774 \\ 0 \\ 0.5774 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{V}^* = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0.5774 \\ 0.5774 \\ 0 \\ 0.5774 \end{bmatrix}$$

Note que $E^1_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, logo o PRP é solúvel.

Para o cálculo de $\mathcal{R}^*$, é obtido de (2.20) e da Proposição 2.2,

$$Z = I_2 \qquad \bar{B}^1 = B^1 Z = B^1 \qquad \bar{\mathcal{B}}^1 \cap \mathcal{V}^1 = 0$$

logo, $\mathcal{R}^* = 0$, o que comprova que o sistema é inversível à esquerda. O sistema original foi reduzido então ao sistema equivalente

$$\dot{x}^1 = A^1 x^1 + B^1 u + E^1 q \tag{4.1}$$

$$y = C^1 x^1 \tag{4.2}$$

onde $C^1 = C^0$. O conjunto de soluções do PRP é dado por

$$F^1 = \begin{bmatrix} F^1_{11} & F^1_{12} & F^1_{13} & F^1_{14} \\ F^1_{21} & F^1_{22} & F^1_{23} & F^1_{24} \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathcal{V}^1) &\equiv \left\{ F^1 \;/\; \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4714 \\ 0.8165 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.4082 & 0.4082 \\ 0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F^1_{11} \\ F^1_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &\equiv \left\{ F^1 \;/\; \begin{bmatrix} F^1_{11} \\ F^1_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.1547 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \tag{4.4}$$

Tornando nulos os outros elementos de $F^1$, temos em malha fechada

$$A^1_F = A^1 + B^1 F^1 = \left[ \begin{array}{c|ccc} -2 & 0.5774 & 0.4714 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.8165 & -0.1667 & -0.8660 \\ 0 & 0 & -0.2887 & -1.5 \end{array} \right]$$

Claramente o sistema possui um autovalor fixo (zero invariante) em $-2$ e $\mathcal{V}^*_g = \mathcal{V}^* \subset \mathcal{E}$. Como o sistema é controlável, o PRPE também é solúvel. Claramente também $\mathcal{V}_* = \mathcal{V}^*_g = \mathcal{V}^*$ (veja o Teorema 2.4) e o espectro de $(A + BF) \mid (\Re^n / \mathcal{V}_*)$ pode ser livremente alocado. Essas constatações importantes não podem ser feitas a partir da abordagem proposta em [27].

Observe que o sistema já se encontra na forma (2.47). As equações (4.3)(4.4) fornecem então a expressão analítica de todas as soluções do PRP para o sistema representado por (4.1)(4.2). Comparada à obtida em [27], essa expressão oferece uma flexibilidade muito maior para a síntese do controlador, já que seus elementos livres são conhecidos explicitamente, sem interdependência entre eles.

Consideremos agora a solução do PRPRLQ. A solução do PRP fixa um pólo do sistema em malha fechada em $-2$, que não é um valor muito próximo do eixo imaginário. Além disso, os valores de $F^1_{11}$ e $F^1_{21}$ não são elevados. É de se esperar portanto que as restrições de estrutura impostas não sejam muito fortes. Tomando

$S_1 = I_4$; $S_2 = I_2$; $X_0'X_0 = \frac{1}{4}I_4$; $\epsilon_1 = 10^{-4}$; $\epsilon_2 = 10^{-1}$; $itm = 5$ e inicializando com a solução obtida em [27]

$$F^1(\underline{\alpha}_0) = \left[\begin{array}{r|rrr} 0 & -1 & 1.2247 & -0.7071 \\ -1.1547 & 0 & 0.4082 & 0.7071 \end{array}\right]$$

o algoritmo fornece

$$J(\underline{\alpha}^*) = 5.6711$$

$$F^1(\underline{\alpha}^*) = \left[\begin{array}{r|rrr} 0 & -1.7294 & 0.9253 & -0.6568 \\ -1.1547 & 0.4261 & -0.1657 & -0.1214 \end{array}\right]$$

Na base original

$$F^* = F^1(\underline{\alpha}^*)Q' = \begin{bmatrix} -0.0867 & -0.7555 & -1.7294 & 0.8422 \\ -0.8201 & -0.5314 & 0.4261 & -0.6485 \end{bmatrix}$$

A solução do problema sem restrições fornece $J^* = 1.3662$.

Os passos intermediários do processo de otimização são apresentados na Tabela 4.1.

| $j$ | $J(\underline{\alpha}_j)$ | $\|\nabla J(\underline{\alpha}_j)\|$ | $r$ | $G(\underline{\alpha}_j)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 8.4048 | 1.6868 | | $H_2$ |
| 1 | 5.8918 | 0.2735 | 0.1621 | $H_2$ |
| 2 | 5.6747 | 0.0319 | 0.1165 | $H_2$ |
| 3 | 5.6728 | 0.0250 | 0.7836 | $H$ |
| 4 | 5.6711 | 0.0003 | 0.0117 | $H_d$ |
| 5 | 5.6711 | $< 10^{-4}$ | 0.1133 | |

Tabela 4.1: *Exemplo 1* - Evolução do processo de otimização.

## Exemplo 2 *Coluna de Destilação*

Este exemplo foi tirado da referência [36], onde podem ser encontrados os dados, bem como a descrição física do problema. As dimensões das matrizes do sistema são: $A \in \Re^{11\times11}$; $B \in \Re^{11\times2}$; $C \in \Re^{2\times11}$; $E \in \Re^{11\times2}$. O objetivo é eliminar da saída o efeito de uma das perturbações. O cálculo de $\mathcal{V}^*$ fornece com duas iterações

$$Q = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & \begin{array}{ccc} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \\ \hline 0 & I_6 & 0 \\ \hline \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} & 0 & \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \end{array}\right]$$

$$\mathcal{V}^* = \mathrm{Im}(V^*)$$

onde $V^*$ é a matriz formada pelas 8 primeiras colunas de $Q$. Aqui, mais uma vez, o sistema é inversível à esquerda e $\mathcal{V}_* = \mathcal{V}_g^* = \mathcal{V}^* \subset \mathcal{E}$, logo a solução do PRP fixa 8 autovalores do sistema em malha fechada. A forma geral das soluções do PRP é dada por

$$F^1 = \left[\begin{array}{ccccccc|ccc} 470.1743 & 0 & -330.0603 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X \\ 632.0375 & 0 & -251.4745 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X \end{array}\right]$$

onde os elementos $X$ são livres para assumir qualquer valor.

Alguns elementos fixos de $F^1$ possuem valores elevados, o que pode resultar em valores também elevados para os sinais de entrada. Além disso, oito pólos do sistema em malha fechada são fixados por $F^1$, o que nos faz supor que as restrições de estrutura impostas nesse caso são bastante severas. De fato, tomando $S_1 = I_{11}$; $S_2 = I_2$; $X_0'X_0 = \frac{1}{11}I_{11}$; $\epsilon_1 = 10^{-4}$; $\epsilon_2 = 10^{-1}$; $itm = 5$ e inicializando com a solução obtida em [36], onde todos os elementos livres de $\underline{\alpha}_0$ são nulos e $J(\underline{\alpha}_0) = 3.7019 \times 10^5$, o algoritmo fornece

$$J(\underline{\alpha}^*) = 2.6263 \times 10^5$$

$$F^1(\underline{\alpha}^*) =$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc|ccc} 470.1743 & 0 & -330.0603 & 0 & 0 & 0 & 0 & 252.7588 & 214.1880 & 10.7317 \\ 632.0375 & 0 & -251.4745 & 0 & 0 & 0 & 0 & 92.9117 & 113.0758 & -37.3819 \end{array}\right]$$

Na base original

$$F^* = F^1(\underline{\alpha}^*)Q' =$$

$$\left[\begin{array}{cccccccccc} -10.7317 & 252.7588 & -330.0603 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 470.1743 & -214.1880 \\ 37.3819 & 92.9117 & -251.4745 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 632.0375 & -113.0758 \end{array}\right]$$

A solução do problema sem restrições fornece $J^* = 7.7061$, o que confirma nossa suposição sobre a severidade das restrições.

Os passos intermediários do processo de otimização apresentados na Tabela 4.2 ilustram aspectos importantes do desempenho do algoritmo para solução do problema de otimização de parâmetros:

- A efetividade do uso do método de Newton em lugar do de Newton modificado para o refinamento da solução. Na Tabela 4.2 pode ser observado que, a partir da condição $\|\nabla J(\underline{\alpha}_j)\| \leq \epsilon_2$, 2 passos de Newton foram suficientes para atingir a solução contra 155 passos do método de Newton modificado. Como cada passo de Newton neste exemplo corresponde, em esforço computacional, a aproximadamente 2 de Newton modificado, a troca de $H_2(\underline{\alpha})$ por $H(\underline{\alpha})$ revelou-se fundamental.

- A efetividade do uso alternado dos métodos de Newton e Quasi-Newton. Na Tabela 4.2 pode ser visto que um passo de Newton foi substituido por um passo Quasi-Newton, evitando assim o cálculo de 6 equações de Lyapunov, o que resultou num esforço computacional significativamente menor.

- A capacidade do método proposto para tratar um problema com restrições de estrutura extremamente severas. A solução foi obtida com 73 iterações, um número que pode ser considerado bom num problema com estas características.

| | 1 | | 2 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| j | $\|\nabla J(\underline{\alpha}_j)\|$ | $G(\underline{\alpha}_j)$ | $\|\nabla J(\underline{\alpha}_j)\|$ | $G(\underline{\alpha}_j)$ | $\|\nabla J(\underline{\alpha}_j)\|$ | $G(\underline{\alpha}_j)$ |
| 69 | 0.1138 | $H_2$ | 0.1138 | $H_2$ | 0.1138 | $H_2$ |
| 70 | 0.1084 | $H_2$ | 0.1084 | $H_2$ | 0.1084 | $H_2$ |
| 71 | 0.1047 | $H_2$ | 0.1047 | $H_2$ | 0.1047 | $H_2$ |
| 72 | 0.0996 | $H$ | 0.0996 | $H$ | 0.0996 | $H_2$ |
| 73 | 0.0007 | $H_d$ | 0.0007 | $H$ | 0.0963 | $H_2$ |
| 74 | $< 10^{-4}$ | | $< 10^{-4}$ | | 0.0916 | $H_2$ |
| $\vdots$ | | | | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| 228 | | | | | 0.0002 | $H_2$ |
| 229 | | | | | $< 10^{-4}$ | |

Tabela 4.2: *Exemplo 2* - Evolução do processo de otimização usando: 1 - o método proposto; 2 - o método de Newton a partir da condição $\|\nabla J(\underline{\alpha}_j)\| \leq \epsilon_2$; 3 - o método de Newton modificado.

**Exemplo 3** *Sistema onde* $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* \neq 0$

O objetivo deste exemplo é ilustrar o funcionamento do método para obtenção do conjunto de todas as soluções do PRP para um sistema não inversível à esquerda. Considere então o sistema para o qual

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 5 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 2 \\ 4 & -2 \\ 5 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

O cálculo de $\mathcal{V}^*$ gera após uma iteração

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8333 & 0.1667 & -0.1667 & -0.5 \\ 0 & 0.1667 & 0.8333 & 0.1667 & 0.5 \\ 0 & -0.1667 & 0.1667 & 0.8333 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{V}^* = \ker(C) = \operatorname{Im}(V^*)$$

onde $V^*$ é a matriz formada pelas 4 primeiras colunas de $Q$.

$$A^0 = Q'AQ = \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 0.6667 & -0.6667 & -0.3333 & -1 \\ -2.6667 & -1.6389 & -2.3611 & -0.8056 & 2.0833 \\ 6.6667 & 1.4722 & 4.5278 & 0.6389 & 2.4167 \\ 5.3333 & -2.4722 & 3.4722 & -0.6389 & 4.5833 \\ \hline 0 & -0.75 & -0.25 & -0.25 & 0.75 \end{array}\right]$$

$$B^0 = Q'B = \left[\begin{array}{cc} -2 & -1 \\ -1.6667 & -0.1667 \\ 1.6667 & 0.1667 \\ 2.3333 & 0.8333 \\ \hline -1 & -0.5 \end{array}\right] \qquad E^0 = Q'E = \left[\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ -3.6667 & 2.6667 \\ 4.6667 & -2.6667 \\ 4.3333 & -1.3333 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$C^0 = CQ = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$E_2^0 = [0\ 0]$, logo o PRP é solúvel. O cálculo da matriz de mudança de base $Z$ (2.20) gera

$$Z = \begin{bmatrix} -0.8944 & -0.4472 \\ -0.4472 & 0.8944 \end{bmatrix} \qquad \bar{B}^0 = B^0 Z = \left[\begin{array}{r|r} 2.2361 & 0 \\ 1.5652 & 0.5963 \\ -1.5652 & -0.5963 \\ -2.4597 & -0.2981 \\ \hline 1.1180 & 0 \end{array}\right]$$

Aplicando a Proposição 2.2 obtemos

$$\bar{\mathcal{B}}^0 \cap \mathcal{V}^0 = \mathrm{Im} \left[\begin{array}{r} 0 \\ 0.5963 \\ -0.5963 \\ -0.2981 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

As matrizes $\bar{F}^0 \in \mathbf{F}(\mathcal{V}^0)$ devem satisfazer a

$$\begin{bmatrix} 0 & -0.75 & -0.25 & -0.25 \end{bmatrix} + 1.1180 \begin{bmatrix} \bar{F}_{11}^0 & \bar{F}_{12}^0 & \bar{F}_{13}^0 & \bar{F}_{14}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que é equivalente a

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{11}^0 & \bar{F}_{12}^0 & \bar{F}_{13}^0 & \bar{F}_{14}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.6708 & 0.2236 & 0.2236 \end{bmatrix}$$

Fazendo $\bar{F}_{15}^0 = \bar{F}_{21}^0 = \bar{F}_{22}^0 = \bar{F}_{23}^0 = \bar{F}_{24}^0 = \bar{F}_{25}^0 = 0$, temos

$$A_F^0 = A^0 + \bar{B}^0 \bar{F}^0 = \left[\begin{array}{rrrr|r} -2 & 2.1667 & -0.1667 & 0.1667 & -1 \\ -2.6667 & -0.5889 & -2.0111 & -0.4556 & 2.0833 \\ 6.6667 & 0.4222 & 4.1778 & 0.2889 & 2.4167 \\ 5.3333 & -4.1222 & 2.9222 & -1.1889 & 4.5833 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0.75 \end{array}\right]$$

O cálculo da matriz de mudança de base $Q_r$ (2.26) gera

$$Q_r = \begin{bmatrix} 0 & 0.4082 & 0.4926 & 0.7686 \\ -0.6667 & -0.4082 & 0.6005 & -0.1680 \\ 0.6667 & 0 & 0.6275 & -0.4022 \\ 0.3333 & -0.8165 & -0.0540 & 0.4683 \end{bmatrix} \qquad Q_R = \begin{bmatrix} Q_r & 0 \\ 0 & I_1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_F = Q_R' A_F^0 Q_R = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 3.9 & 3.4701 & 6.7152 & 4.2619 & 1.75 \\ -3.6742 & -4.5 & -0.4049 & -2.6620 & -5.0010 \\ \hline 0 & 0 & 2.1 & 0.3574 & 2.0277 \\ 0 & 0 & -0.8674 & -1.1 & 0.0558 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0.75 \end{array}\right]$$

$$\tilde{B} = Q_R' \bar{B}^0 = \left[\begin{array}{c|c} -2.9069 & -0.8944 \\ 2.2822 & 0 \\ \hline 1.1920 & 0 \\ 0.9332 & 0 \\ \hline 1.1180 & 0 \end{array}\right] \qquad \tilde{E} = Q_R' E^0 = \left[\begin{array}{cc} 7 & -4 \\ -2.4495 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\tilde{A} = Q_R' A^0 Q_R$$

Nessa representação é possível verificar claramente que $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* \subset \mathcal{E}$.

O maior subespaço de controlabilidade contido em $\ker(C)$ na base original é obtido de

$$\mathcal{R}^* = \mathrm{Im}(R^*) \qquad R^* = Q Q_R \begin{bmatrix} I_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.4082 \\ -0.5 & -0.2041 \\ 0.5 & -0.2041 \\ 0.5 & -0.6124 \\ 0.5 & 0.6124 \end{bmatrix}$$

Os zeros invariantes são dados por (2.30)

$$\sigma_T = \sigma \begin{bmatrix} 2.1 & 0.3574 \\ -0.8674 & -1.1 \end{bmatrix} = \{-1, 2\}$$

Calculando a matriz de mudança de base $Q_S$ (2.31) obtemos

$$Q_s = \begin{bmatrix} 0.1145 & -0.9934 \\ -0.9934 & -0.1145 \end{bmatrix} \qquad Q_S = \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & Q_s & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}_F = Q_S' \tilde{A}_F Q_S = \left[\begin{array}{cc|c|c|c} 3.9 & 3.4701 & -3.4648 & -7.1591 & 1.75 \\ -3.6742 & -4.5 & 2.5981 & 0.7071 & -5.0010 \\ \hline 0 & 0 & -1 & -1.2247 & 0.1768 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & -2.0207 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0.75 \end{array}\right]$$

$$\hat{B} = Q_S'\tilde{B} = \left[\begin{array}{r|r} -2.9069 & -0.8944 \\ -1.8634 & 0 \\ \hline 0.9539 & 0 \\ -1.7658 & 0 \\ 1.1180 & 0 \end{array}\right] \qquad \hat{E} = Q_S'\tilde{E} = \tilde{E}$$

O maior subespaço $(A, B)$-invariante estabilizável contido em $\ker(C)$ é então dado por

$$\mathcal{V}_g^* = \mathrm{Im}(V_g^*) \qquad V_g^* = QQ_RQ_S \left[\begin{array}{c} I_3 \\ 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rrr} 0 & 0.4082 & 0.4630 \\ 0.5 & -0.2041 & 0.6245 \\ -0.5 & -0.2041 & 0.6245 \\ -0.5 & -0.6124 & -0.0538 \\ -0.5 & 0.6124 & 0.0538 \end{array}\right]$$

$\left[\begin{array}{c} \hat{E}_3 \\ \hat{E}_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$, logo o PRPE também é solúvel.

Partindo agora para o cálculo de $\mathcal{V}_*$ obtemos

$$Q_e = I_2 \qquad Q_E = I_5$$

Logo, $\mathcal{V}_* = \mathcal{R}^*$ e o sistema já se encontra representado na forma (2.47). A forma geral das matrizes de realimentação que resolvem o PRP é então

$$\hat{F} = \left[\begin{array}{cc|ccc} -0.2236 & -0.4564 & X & X & X \\ \hline X & X & X & X & X \end{array}\right]$$

Anulando seus elementos livres obtemos

$$\hat{A}_F = \hat{A} + \hat{B}\hat{F} = \left[\begin{array}{rr|rrr} 3.9 & 3.4701 & -3.0052 & -8.6603 & 1.75 \\ -3.6742 & -4.5 & 2.2372 & 1.8856 & -5.0010 \\ \hline 0 & 0 & -0.8750 & -1.6330 & 0.1768 \\ 0 & 0 & 0.2041 & 1.3333 & -2.0207 \\ 0 & 0 & -0.1768 & 0.5774 & 0.75 \end{array}\right]$$

O procedimento para obtenção de uma solução inicial estabilizante descrito no Capítulo 3 fornece

$$\hat{F}(\underline{\alpha}_0) = \left[\begin{array}{rr|rrr} -0.2236 & -0.4564 & -0.0588 & 3.2176 & -1.3193 \\ \hline 4.9090 & 2.3992 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A execução do algoritmo de otimização de parâmetros com $S_1 = I_5$; $S_2 = I_2$; $X_0'X_0 = \frac{1}{5}I_5$ resulta em

$$J(\underline{\alpha}^*) = 25.4961$$

$$\hat{F}(\underline{\alpha}^*) = \left[\begin{array}{cc|ccc} -0.2236 & -0.4564 & 1.4278 & 10.3254 & -0.2448 \\ \hline 4.9193 & 2.4040 & -2.2737 & -4.6527 & 3.4877 \end{array}\right]$$

$$F^* = Z\hat{F}(\underline{\alpha}^*)(QQ_RQ_S)' = \left[\begin{array}{ccccc} 4.0432 & 5.8456 & 2.5049 & 0.1709 & -0.8299 \\ 7.9189 & -0.2211 & 7.5075 & 0.1386 & 1.1324 \end{array}\right]$$

Os resultados intermediários do processo de otimização, onde foi utilizado $\epsilon_1 = 10^{-4}$; $\epsilon_2 = 10^{-1}$; $itm = 5$ são apresentados na Tabela 4.3.

| $j$ | $J(\underline{\alpha}_j)$ | $\|\nabla J(\underline{\alpha}_j)\|$ | $r$ | $G(\underline{\alpha}_j)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 58.8925 | 6.2675 | | $H_2$ |
| 1 | 46.2109 | 3.6230 | 0.5781 | $H_2$ |
| 2 | 34.1429 | 1.3173 | 0.3636 | $H_2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| 7 | 25.5438 | 0.0608 | 0.2748 | $H_2$ |
| 8 | 25.5148 | 0.0721 | 1.1857 | $H$ |
| 9 | 25.4962 | 0.0035 | 0.0491 | $H_d$ |
| 10 | 25.4961 | 0.0019 | 0.5279 | $H_d$ |
| 11 | 25.4961 | 0.0004 | 0.2283 | $H_d$ |
| 12 | 25.4961 | 0.0001 | 0.3261 | $H_d$ |
| 13 | 25.4961 | 0.0000 | 0.3502 | |

Tabela 4.3: *Exemplo 3* - Evolução do processo de otimização.

## 4.3 Sistemas Gerais

**Exemplo 4**

O objetivo deste exemplo é ilustrar a obtenção de outros conjuntos de soluções do PRP que não aquele relacionado a $\mathcal{V}^*$.

Considere o sistema para o qual

$$A = \begin{bmatrix} -0.4522 & -0.5074 & 1.7190 & -0.1881 & -0.1918 & -0.2478 \\ -0.9540 & -0.5919 & 0.4644 & 1.0887 & 0.3365 & -1.5569 \\ 0.4724 & -1.4694 & -0.3025 & 0.3522 & -0.6720 & -0.5556 \\ -0.7142 & -2.5229 & 0.0922 & -1.0115 & 0.0586 & 0.6940 \\ 0.8136 & -1.0854 & -0.1187 & -0.5732 & -0.1416 & 1.9600 \\ 1.4546 & 0.7018 & -0.5756 & 0.1318 & 0.4710 & 1.1221 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.0601 & -0.4945 & 0.5583 & -0.9008 \\ -2.2180 & 0.5704 & 0.2699 & -1.3366 \\ 2.1387 & 0.8061 & -0.8645 & 0.3474 \\ -0.1610 & -1.4373 & 1.8028 & -0.5953 \\ -0.7232 & 0.4831 & 0.1601 & -0.0369 \\ 0.7936 & -2.8138 & 1.2474 & 2.1850 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 0.4771 & 1.1290 \\ 0.5551 & 1.3511 \\ -1.6272 & -0.9866 \\ 0.3823 & -0.0853 \\ 1.6902 & 0.5012 \\ 11.0037 & 2.4896 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1.2336 & -0.1973 & 1.5698 & 0.5428 & 0.3896 & 0.1099 \end{bmatrix}$$

O cálculo de $\mathcal{V}^*$ gera, com uma iteração

$$Q = \begin{bmatrix} 0.6773 & 0.0516 & -0.4106 & -0.1420 & -0.1019 & -0.5826 \\ 0.0516 & 0.9917 & 0.0657 & 0.0227 & 0.0163 & 0.0932 \\ -0.4106 & 0.0657 & 0.4775 & -0.1807 & -0.1297 & -0.7414 \\ -0.1420 & 0.0227 & -0.1807 & 0.9375 & -0.0448 & -0.2563 \\ -0.1019 & 0.0163 & -0.1297 & -0.0448 & 0.9678 & -0.1840 \\ -0.5826 & 0.0932 & -0.7414 & -0.2563 & -0.1840 & -0.0519 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{V}^* = \ker(C) = \mathrm{Im}(V^*)$$

onde $V^*$ é a matriz formada pelas 5 primeiras colunas de $Q$.

$$A^0 = Q'AQ \qquad B^0 = Q'B$$

$$E^0 = Q'E = \left[\begin{array}{rr} -5.6173 & -0.2498 \\ 1.5298 & 1.5716 \\ -9.3825 & -2.7413 \\ -2.2993 & -0.6920 \\ -0.2346 & 0.0657 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$C^0 = CQ = \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.1174 \end{array}\right]$$

$E_2^0 = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array}\right]$, logo o PRP é solúvel.

$$Z = \left[\begin{array}{rrrr} -0.9813 & 0.0980 & -0.1248 & 0.1093 \\ 0.0980 & 0.9952 & 0.0062 & -0.0054 \\ -0.1248 & 0.0062 & 0.9921 & 0.0069 \\ 0.1093 & -0.0054 & 0.0069 & 0.9940 \end{array}\right]$$

$$\bar{B}^0 = B^0 Z = \left[\begin{array}{r|rrr} 1.2187 & 1.0322 & -0.0921 & -2.1464 \\ 1.8136 & 0.1176 & 0.6396 & -1.3700 \\ 0.0278 & 2.9262 & -1.9181 & -1.0399 \\ 0.3845 & -0.7673 & 1.5189 & -1.1453 \\ 1.2049 & 0.8880 & 0.0531 & -0.5165 \\ \hline 1.7265 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A forma geral das matrizes $\bar{F}^0 \in \mathbf{F}(\mathcal{V}^0)$ é

$$\bar{F}^0 = \left[\begin{array}{rrrrr|r} -0.1466 & -1.1958 & 0.0617 & -0.2983 & -0.4498 & X \\ \hline X & X & X & X & X & X \\ X & X & X & X & X & X \\ X & X & X & X & X & X \end{array}\right]$$

Tornando nulos seus elementos livres obtemos

$$A_F^0 = A^0 + \bar{B}^0 \bar{F}^0 = \left[\begin{array}{rrrrr|r} -1.1838 & -1.2279 & 2.1972 & -0.2899 & -0.5352 & -0.2979 \\ -0.3900 & -2.9970 & 1.4555 & 0.8321 & -0.2779 & -0.2100 \\ 0.5061 & -0.6837 & 1.1555 & 1.0033 & -0.1897 & 0.7192 \\ -1.0441 & -2.6536 & 0.2547 & -1.0243 & -0.0338 & 0.6173 \\ -0.7287 & -2.1031 & -1.4326 & -1.3740 & -0.9951 & -0.2062 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6648 \end{array}\right]$$

$Q_R = Q_S = I_6$, logo $\mathcal{V}_g^* = \mathcal{R}^* = \mathcal{V}^*$.

Para obter outros conjuntos de soluções, calculamos (2.55)-(2.57)

$$Q_d = \begin{bmatrix} -0.4979 & -0.6562 & -0.5498 & -0.1294 & -0.0491 \\ 0.1356 & -0.6999 & 0.6760 & 0.1770 & -0.0584 \\ -0.8317 & 0.2619 & 0.4718 & -0.1307 & -0.0049 \\ -0.2038 & 0.0760 & -0.1337 & 0.9669 & -0.0008 \\ -0.0208 & -0.0719 & 0.0147 & 0.0041 & 0.9971 \end{bmatrix}$$

$$Q_D = \begin{bmatrix} Q_d & 0 \\ 0 & I_1 \end{bmatrix}$$

$$E_d = Q_D' E^0 = \left[\begin{array}{cc} 11.2813 & 2.7571 \\ 0 & -1.7113 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \qquad B_d = Q_D' \bar{B}^0$$

$$Q_b = \begin{bmatrix} -0.0914 & 0.8023 & -0.5899 \\ -0.9413 & -0.2629 & -0.2116 \\ -0.3248 & 0.5360 & 0.7793 \end{bmatrix} \qquad Q_B = \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & Q_b & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \end{bmatrix} \qquad Z_B = I_4$$

$$\breve{B} = Q_B' B_d Z_B = \left[\begin{array}{c|ccc} -0.4874 & -2.7938 & 1.4172 & 1.9920 \\ -2.1191 & -0.1154 & -0.7780 & 2.0450 \\ \hline -0.8901 & 0.8045 & -1.6885 & 0.9968 \\ 0.8435 & 1.5694 & -0.9704 & 0 \\ 0.3775 & 0.3007 & 0 & 0 \\ \hline 1.7265 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad f = 3$$

$$\breve{E} = E_d$$

$$\begin{aligned} \breve{A} &= (Q_D Q_B)' A^0 (Q_D Q_B) \\ &= \left[\begin{array}{cc|ccc|c} 1.6029 & -1.2566 & 0.1095 & -0.2347 & 0.3934 & -0.5998 \\ 1.3415 & -1.1793 & 0.7670 & -1.0262 & 0.4777 & 0.5926 \\ \hline -0.7619 & -2.0557 & -1.1015 & 0.4852 & -1.1612 & -0.4397 \\ 0.0813 & -0.3205 & -0.5455 & -1.0821 & 0.3430 & -0.0091 \\ 1.9407 & -0.2947 & 1.2566 & 0.1359 & -0.2823 & -0.4115 \\ \hline 0.1214 & -1.6557 & -1.1115 & 1.0427 & -0.3571 & 0.6648 \end{array}\right] \end{aligned}$$

Chegamos então à representação (2.58) (2.59) onde são definidos os subespaços

$$\breve{\mathcal{V}}^* = \mathrm{Im}(\breve{V}^*) \qquad \breve{V}^* = \begin{bmatrix} I_5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\breve{\mathcal{V}}_2 = \mathrm{Im}(\breve{V}_2) \qquad \breve{V}_2 = \begin{bmatrix} I_4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\breve{\mathcal{V}}_1 = \mathrm{Im}(\breve{V}_1) \qquad \breve{V}_1 = \begin{bmatrix} I_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\breve{\mathcal{V}}_0 = \mathrm{Im}(\breve{V}_0) \qquad \breve{V}_0 = \begin{bmatrix} I_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e as respectivas formas gerais das matrizes de realimentação que resolvem o PRP:

$\breve{\mathcal{V}}^*$:

$$\breve{F} = \left[\begin{array}{rrrrr|r} -0.0703 & 0.9590 & 0.6438 & -0.6039 & 0.2068 & X \\ \hline X & X & X & X & X & X \\ X & X & X & X & X & X \\ X & X & X & X & X & X \end{array}\right]$$

$\breve{\mathcal{V}}_2$:

$$\breve{F} = \left[\begin{array}{rrrr|rr} -0.0703 & 0.9590 & 0.6438 & -0.6039 & X & X \\ -6.3660 & -0.2236 & -4.9874 & 0.3061 & X & X \\ \hline X & X & X & X & X & X \\ X & X & X & X & X & X \end{array}\right]$$

$\breve{\mathcal{V}}_1$:

$$\breve{F} = \left[\begin{array}{rrr|rrr} -0.0703 & 0.9590 & 0.6438 & X & X & X \\ -6.3660 & -0.2236 & -4.9874 & X & X & X \\ -10.2735 & 0.1417 & -8.0690 & X & X & X \\ \hline X & X & X & X & X & X \end{array}\right]$$

$\breve{\mathcal{V}}_0$:

$$\breve{F} = \left[\begin{array}{rr|rrrr} -0.0703 & 0.9590 & X & X & X & X \\ -6.3660 & -0.2236 & X & X & X & X \\ -10.2735 & 0.1417 & X & X & X & X \\ -11.5638 & 3.3392 & X & X & X & X \end{array}\right]$$

O conjunto $\mathcal{T}$ (3.6) é então formado por:

$$\mathcal{T} = \left\{\breve{\mathcal{V}}_0, \breve{\mathcal{V}}_1, \breve{\mathcal{V}}_2, \breve{\mathcal{V}}^*\right\}$$

Observe que as matrizes $\breve{F} \in \mathbf{F}(\breve{\mathcal{V}}_0)$ fixam 2 autovalores do sistema em malha fechada. Como ambos possuem parte real negativa e o sistema é controlável, o PRPE também é solúvel.

Resolvendo agora o problema (3.7) obtemos, com $S_1 = I_6$; $S_2 = I_4$; $X_0'X_0 = \frac{1}{6}I_6$:

$\breve{\mathcal{V}}^*$: $J^*(\underline{\alpha}^*) = 5.5922$

$\breve{\mathcal{V}}_2$: $J_2(\underline{\alpha}^*) = 34.5354$

$\breve{\mathcal{V}}_1$: $J_1(\underline{\alpha}^*) = 40.0827$

$\breve{\mathcal{V}}_0$: $J_0(\underline{\alpha}^*) = 35.5847$

A solução ótima é então

$$J(\underline{\alpha}^*) = 5.5922$$

$$\breve{F}(\underline{\alpha}^*) = \left[\begin{array}{rrrrr|r} -0.0703 & 0.9590 & 0.6438 & -0.6039 & 0.2068 & -3.3420 \\ \hline 1.3543 & -0.1664 & -0.0905 & -0.1126 & 0.4641 & -0.1268 \\ -0.7124 & 0.1455 & 0.4615 & 0.0177 & -0.2047 & -0.3358 \\ -0.9022 & -0.4709 & -0.1363 & -0.0213 & -0.5475 & 0.2181 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} F^* &= Z\breve{F}(\underline{\alpha}^*)(QQ_DQ_B)' \\ &= \left[\begin{array}{rrrrrr} -1.7996 & 1.5639 & -2.6619 & -0.5124 & -0.1388 & -0.1585 \\ 0.5453 & -0.2295 & -0.1234 & 0.1599 & 0.5619 & 1.2530 \\ -0.0931 & 0.0277 & 0.2211 & -0.3678 & -0.3584 & -0.6102 \\ 0.1639 & 0.4170 & 0.2637 & 0.1402 & -0.5086 & -0.8557 \end{array}\right] \end{aligned}$$

Na Tabela 4.4 são apresentados os resultados intermediários do processo de otimização, onde foi utilizado $\epsilon_1 = 10^{-4}$; $\epsilon_2 = 10^{-1}$; $itm = 5$. Pode ser observado que a solução foi obtida apenas com o uso do método de Newton modificado. Isto comprova a importância do uso da estimativa da taxa de convergência na escolha do passo a ser utilizado. Neste exemplo, a boa taxa apresentada pelo método de Newton modificado, resultado da fraqueza das restrições, evitou o cálculo de pelo menos uma matriz Hessiana que requereria a solução de 19 equações de Lyapunov, o que ilustra o bom desempenho do método proposto mesmo quando o número de parâmetros é elevado.

| $j$ | $J(\underline{\alpha}_j)$ | $\|\nabla J(\underline{\alpha}_j)\|$ | $r$ | $G(\underline{\alpha}_j)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 6.6093 | 0.3457 | | $H_2$ |
| 1 | 5.7298 | 0.0777 | 0.2247 | $H_2$ |
| 2 | 5.5956 | 0.0072 | 0.0933 | $H_2$ |
| 3 | 5.5923 | 0.0007 | 0.0979 | $H_2$ |
| 4 | 5.5922 | 0.0002 | 0.2239 | $H_2$ |
| 5 | 5.5922 | $< 10^{-4}$ | 0.0628 | |

Tabela 4.4: *Exemplo 4* - Evolução do processo de otimização para $\breve{\mathcal{V}} = \breve{\mathcal{V}}^*$.

**Exemplo 5**

Os resultados obtidos no exemplo anterior podem dar a falsa impressão de que a solução relacionada a $\mathcal{V}^*$ sempre fornece o melhor índice de desempenho. O exemplo a seguir mostra que isso nem sempre ocorre.

Considere o sistema para o qual

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 9.5 & -1.5 & 2.5 & -1 & 0 \\ 14.5 & -2.5 & 2.5 & -1 & 1 \\ -5 & 5 & 6 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 2 \\ 4 & -2 \\ 5 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

O sistema é então transformado para a representação (2.58) (2.59) dando:

$$\breve{A} = \left[\begin{array}{cc|cc|c} -0.0182 & 7.8087 & 12.1835 & -8.9625 & 3.1013 \\ -0.1522 & -5.6902 & -0.7310 & 11.1617 & -0.5367 \\ \hline -0.0778 & 0.2225 & -1.1667 & 0.4082 & 1.7321 \\ 0.0477 & -0.6715 & 1.2247 & 2.1250 & 1.9445 \\ \hline 0.0674 & 0.5642 & -0.5774 & -3.7123 & -1.7500 \end{array}\right]$$

$$\breve{B} = \left[\begin{array}{c|c} -1.8878 & -0.4045 \\ 0.0963 & 1.1560 \\ \hline 0.5774 & 0 \\ \hline -0.5303 & 0.7071 \\ \hline -0.2500 & 0 \end{array}\right] \quad \breve{E} = \left[\begin{array}{cc} 7.4162 & -3.7755 \\ 0 & -1.3212 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\breve{C} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$f = 1$$

$$\breve{\mathcal{V}}^* = \mathrm{Im}(\breve{V}^*) \qquad \breve{V}^* = \begin{bmatrix} I_4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\breve{\mathcal{V}}_0 = \mathrm{Im}(\breve{V}_0) \qquad \breve{V}_0 = \begin{bmatrix} I_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\breve{\mathcal{V}}^*$:

$$\breve{F} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0.2697 & 2.2570 & -2.3094 & -14.8492 & X \\ \hline X & X & X & X & X \end{array}\right]$$

$\breve{\mathcal{V}}_0$:

$$\breve{F} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0.2697 & 2.2570 & -2.3094 & X & X \\ 0.1348 & 2.6423 & -3.4641 & X & X \end{array}\right]$$

$$\mathcal{T} = \left\{\breve{\mathcal{V}}_0, \breve{\mathcal{V}}^*\right\}$$

$\breve{\mathcal{V}}^*$: $J^*(\underline{\alpha}^*) = 102.9894$

$\breve{\mathcal{V}}_0$: $J_0(\underline{\alpha}^*) = 42.7895$

onde foi utilizado $S_1 = I_5$; $S_2 = I_2$; $X_0'X_0 = \frac{1}{5}I_5$.

A solução ótima é então

$$J(\underline{\alpha}^*) = 42.7895$$

$$\breve{F}(\underline{\alpha}^*) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0.2697 & 2.2570 & -2.3094 & 3.4112 & -0.1778 \\ 0.1348 & 2.6423 & -3.4641 & -5.2193 & -1.1318 \end{array}\right]$$

$$F^* = \begin{bmatrix} -2.6906 & 4.2794 & 4.4112 & -1.4112 & -0.7206 \\ 2.9121 & 0.9551 & 0.1329 & 1.8671 & -3.0449 \end{bmatrix}$$

O menor índice obtido com $\breve{\mathcal{V}}_0$ pode ser explicado a partir da observação dos conjuntos de soluções determinados para o PRP. No conjunto relacionado a $\breve{\mathcal{V}}^*$, o elemento fixo $\breve{F}_{14} = -14.8492$ possui um valor de módulo elevado, o que pode resultar em grandes amplitudes do sinal de entrada e, conseqüentemente, num elevado índice de desempenho. Por outro lado, no conjunto relacionado a $\breve{\mathcal{V}}_0$, além de não existir nenhum elemento fixo com valor tão elevado, os pólos que são fixados no sistema em malha fechada não são excessivamente próximos do eixo imaginário $(-0.3397; -2.5802 \pm 2.5671i)$, o que faz com que as restrições de estrutura impostas não sejam tão severas quanto no caso da solução relacionada a $\breve{\mathcal{V}}^*$. Isto demonstra que a solução do PRP obtida do conjunto $\mathbf{F}(\mathcal{V}^*)$ pode resultar num desempenho muito pobre do sistema controlado.

Os resultados intermediários do processo de otimização para $\breve{\mathcal{V}} = \breve{\mathcal{V}}_0$, usando $\epsilon_1 = 10^{-4}$; $\epsilon_2 = 10^{-1}$; $itm = 5$ são apresentados na Tabela 4.5.

| $j$ | $J(\underline{\alpha}_j)$ | $\|\nabla J(\underline{\alpha}_j)\|$ | $r$ | $G(\underline{\alpha}_j)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 68.2310 | 9.6377 | | $H_2$ |
| 1 | 48.6191 | 1.7584 | 0.1824 | $H_2$ |
| 2 | 43.8510 | 0.4268 | 0.2427 | $H_2$ |
| 3 | 43.1195 | 0.2010 | 0.4709 | $H_2$ |
| 4 | 42.9976 | 0.1137 | 0.5659 | $H_2$ |
| 5 | 42.9437 | 0.1006 | 0.8844 | $H_2$ |
| 6 | 42.9088 | 0.0911 | 0.9063 | $H$ |
| 7 | 42.7899 | 0.0062 | 0.0683 | $H_d$ |
| 8 | 42.7895 | 0.0007 | 0.1180 | $H_d$ |
| 9 | 42.7895 | 0.0004 | 0.6089 | $H_d$ |
| 10 | 42.7895 | $< 10^{-4}$ | 0.0543 | |

Tabela 4.5: *Exemplo 5* - Evolução do processo de otimização para $\breve{\mathcal{V}} = \breve{\mathcal{V}}_0$.

## 4.4 Conclusão

Neste Capítulo, exemplos numéricos ilustraram a aplicação das técnicas propostas nos Capítulos 2 e 3 para solução do PRP e PRPRLQ respectivamente.

No primeiro exemplo, algumas vantagens da abordagem aqui adotada em relação àquela proposta em [27] para sistemas inversíveis à esquerda foram destacadas, principalmente no que se refere à forma analítica obtida para a solução do PRP, mais adequada à síntese do controlador e à determinação dos pólos do sistema em malha fechada fixados pela solução do PRP, que não são evidenciados em [27].

No segundo exemplo procurou-se mostrar que o algoritmo para solução do problema de otimização de parâmetros é capaz de tratar com eficiência problemas com restrições de estrutura extremamente severas. No terceiro, a solução do PRP para um sistema onde $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* \subset \mathcal{E}$; $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* \neq 0$, bem como o cálculo dos subespaços $\mathcal{R}^*$, $\mathcal{V}_g^*$ e dos zeros invariantes foram ilustrados.

Os exemplos 4 e 5 ilustraram a obtenção de alguns conjuntos de soluções do PRP para sistemas gerais. No quinto, em particular, foi demonstrado que a solução do PRP relacionada a $\mathcal{V}^*$ pode resultar num índice de desempenho muito pior que o obtido para outros subespaços, justificando assim a procura de outras soluções. No quarto exemplo foi também ilustrado o bom desempenho do método de otimização num problema com um grande número de parâmetros.

# Conclusão Geral

A solução computacional do problema de rejeição de perturbações foi assunto deste trabalho. Os graus de liberdade deixados pela solução do PRP foram utilizados no atendimento a uma especificação complementar de projeto. Com esse objetivo foi proposto o Problema de Rejeição de Perturbações com Regulação Linear-Quadrática, cuja solução fornece um controlador que, ao mesmo tempo em que elimina da saída os efeitos das perturbações, otimiza o desempenho do sistema através da minimização do clássico índice de desempenho quadrático.

Como um passo importante para atingir esse objetivo, a parametrização das soluções do PRP foi investigada, tendo sido usada uma metodologia baseada na explicitação de subespaços $(A, B)$-invariantes. Através de transformações sucessivas na sua representação, o sistema foi reduzido a uma forma onde a expressão das matrizes de realimentação associadas aos subespaços é evidente. A preocupação com as questões numéricas envolvidas esteve sempre presente.

Para uma classe de sistemas que engloba os sistemas inversíveis à esquerda, foi possível obter a parametrização de todas as soluções do PRP, cuja forma geral foi obtida em seguida. Foram então destacadas algumas vantagens da abordagem adotada, comparada a outras existentes na literatura.

Para sistemas gerais, não tendo sido obtida uma parametrização de todas as soluções, algumas estruturas admissíveis para o controlador foram determinadas. Isto se revelou de fundamental importância na síntese da lei de controle, já que foi mostrado que a escolha de uma das estruturas pode impor ao sistema um desempenho bastante inferior ao obtido com outras.

A partir da parametrização dos controladores, o PRP foi integrado ao problema da minimização de um índice de desempenho quadrático de tempo infinito, gerando o PRPRLQ que foi formulado como um problema de otimização de parâmetros em reguladores L-Q com restrições de estrutura, restrições estas correspondentes à parametrização obtida. Para solução do problema de otimização de parâmetros, um método de descida especializado foi proposto, tendo sido concebido para lidar com restrições de estrutura severas como as que geralmente são impostas pela solução do PRP. O bom desempenho do método, comprovado em exemplos significativos, aumenta assim a possibilidade de solução eficiente dessa classe de problemas de otimização. Como possíveis extensões deste trabalho podemos sugerir:

- O estudo da possibilidade de obtenção de uma parametrização conveniente para as soluções dos problemas de rejeição de perturbação com compensadores dinâmicos, quase rejeição de perturbações e desacoplamento entrada-saída, procurando também integrá-los ao problema do regulador L-Q.

- A utilização da metodologia adotada neste trabalho na solução do problema de regulação L-Q de sistemas sujeitos a restrições nas variáveis de estado e de controle, problema este já em estado de investigação.

# Bibliografia


[1] Armentano, V.A. (1987) "Rejeição de Perturbação Através de Realimentação Proporcional Derivativa", *SBA: Controle e Automação*, vol. 1, $n^o$ 4: 298-306.

[2] Basile, G. and G. Marro (1969) "Controlled and Conditioned Invariant Subspaces in Linear Systems Theory", *Journal of Optimization Techniques and Applications*, vol. 3: 306-315.

[3] Bhattacharyya, S.P. (1975) "On Calculating Maximal (A,B)-invariant Subspaces", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 20: 264-265.

[4] Bhattacharyya, S.P. (1982) "Transfer Function Conditions for Output Feedback Disturbance Rejection" *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 27, $n^o$ 4: 974-977.

[5] Chen, C.-T. (1970) *Introduction to Linear System Theory*, Holt, Rinehart and Winston Inc., New York.

[6] Dórea, C.E.T. e B.E.A. Milani (1992) "Regulador Ótimo L-Q com Rejeição de Perturbações Externas", *Anais do 9º Congresso Brasileiro de Automática, Vitória*, 804-809.

[7] Dórea, C.E.T. and B.E.A. Milani (1993) "A Computational Method for Optimal L-Q Regulation with Simultaneous Disturbance Decoupling", aceito pela *1993 American Control Conference, San Francisco.*

[8] Dórea, C.E.T. and B.E.A. Milani (1993) "On the Computation of Supremal Controllability Subspaces and Transmission Zeros", aceito pelo $12^{th}$ *IFAC World Congress, Sydney.*

[9] Fletcher, L.R. and A. Aasaraai (1989) "On Disturbance Decoupling on Descriptor Systems", *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 27: 1319-1332.

[10] Francis, B.A. and W.M. Wonham (1975) "The Role of Transmission Zeros in Linear Multivariable Regulators", *International Journal of Control*, vol. 22: 657-681.

[11] Geromel, J.C. and J. Bernussou (1982) "Optimal Decentralized Control of Dynamic Systems", *Automatica*, vol. 18: 545-557.

[12] Gill, P.E., W. Murray and M.H. Wright (1991) *Numerical Linear Algebra and Optimization*, Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City.

[13] Gomes, A.C.N. (1981) *Caracterização Estrutural de Sistemas de Controle Invariantes*, Tese de Doutorado, COPPE / UFRJ.

[14] Kwakernaak, H. and R. Sivan (1972) *Linear Optimal Control Systems*, Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, New York.

[15] Laub, A.J. and B.C. Moore (1978) "Calculation of Transmission Zeros Using QZ Techniques", *Automatica*, vol. 14: 557-566.

[16] Levine, W.S. and M. Athans (1970) "On the Determination of the Optimal Constant Output Feedback Gains for Linear Multivariable Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 15, *nº* 1: 44-48.

[17] Linnemann, A. (1987) "A Condensed Form for Disturbance Decoupling with Simultaneous Pole Placement Using State Feedback", Technical Note, Department of Electrical Engineering, University of Kassel, Germany.

[18] Luenberger, D.G. (1984) *Linear and Non-Linear Programming*, Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City.

[19] Mäkilä, P.M. and H.T. Toivonen (1987) "Computational Methods for Parametric L-Q Problems - A Survey", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 23, *nº* 8: 658-671.

[20] Martinez, J.M. (1987) "Quasi-Newton Methods with Factorization Scaling for Solving Sparse Nonlinear Systems of Equations", *Computing*, vol. 38: 133-141.

[21] Milani, B.E.A. (1979) "On the Computation of the Optimal Constant Output Feedback Gains for Large-Scale Linear Time-invariant Systems Subjected to Control Structure Constraints", *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol. 22 Springer-Verlag, Berlin; *Proceedings of the* $9^{th}$ *IFIP Conference on Optimization Technique, Warsaw*, 332-341.

[22] Milani, B.E.A. (1980) *Contribuição à Solução de Problemas de Otimização de Parâmetros Oriundos da Síntese de Reguladores L-Q e L-Q-G com Restrições de Estrutura*, Tese de Doutorado, FEC / UNICAMP.

[23] Moore, B.C. and A.J.Laub (1978) "Computation of Supremal (A,B)-invariant and Controllability Subspaces", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 23, $n^o$ 5: 783-792.

[24] Morse, A.S. (1973) "Structural Invariants of Linear Multivariable Systems", *SIAM Journal of Control and Optimization*, vol. 11: 446-465.

[25] Özgüler, A.B. (1990) "Almost Disturbance Decoupling with Internal Stability: Frequency Domain Conditions", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 35, $n^o$ 6: 719-723.

[26] Paige, C.C. (1981) "Properties of Numerical Algorithms Related to Computing Controllability", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 26, $n^o$ 1: 130-138.

[27] Paraskevopoulos, P.N., F.N. Koumboulis and K.G. Tzierakis (1992) "Disturbance Rejection of Left-invertible Systems", *Automatica*, vol. 28, $n^o$ 2: 427-430.

[28] Rico, J.E.N. (1989) *Teoria de Controle de Sistemas Lineares Multivariáveis: Uma Análise Comparativa das Teorias Geométrica e Polinomial*, Tese de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina.

[29] Rizzo, M.V. e R.J. Dias (1992) "Rejeição de Distúrbios em Sistemas Descritores", *Anais do 9° Congresso Brasileiro de Automática, Vitória*, 29-34.

[30] Safonov, M.G. and M. Athans (1977) "Gain and Phase Margin for Multiloop LQG Regulators", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 22: 173-179.

[31] Safonov, M.G. and W. Wang (1992) "Singular Value Properties of LQ Regulators", *IEEE Transactions on Automatic Control* vol. 37, $n^o$ 8: 1210-1211.

[32] Sain, M.K. and J.L. Massey (1969) "Invertibility of Linear Time-invariant Dynamical Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 14: 141-149.

[33] Schumacher, J.M. (1980) "Compensator Synthesis Using $(C, A, B)$-Pairs", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 25, $n^o$ 6: 1133-1138.

[34] Singh, R.P. and K.S. Narendra (1988) "Frequency Domain Conditions for the Solvability of the Multivariable Disturbance Decoupling Problem", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 33, $n^o$ 1: 122-126.

[35] Solak, M.K. (1986) "A Direct Computational Method for Determining the Maximal (A,B)-invariant Subspace Contained in Ker C", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 31, $n^o$ 4: 349-352.

[36] Takamatsu, T., I. Hashimoto and Y. Nakai (1979) "A Geometric Approach to Multivariable Control System Design of a Distilation Column", *Automatica*, vol. 15: 387-402.

[37] Van Dooren, P.M. (1981) "The Generalized Eigenstructure Problem in Linear System Theory", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 26, $n^o$ 1: 111-129.

[38] Weiland, S. and J.C. Willems (1989) "Almost Disturbance Decoupling with Internal Stability", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, $n^o$ 3: 277-286.

[39] Wilkinson, J.H. (1965) *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Oxford University Press, London.

[40] Willems, J.C. (1981) "Almost Invariant Subspaces: an Approach to High Gain Feedback Design - Part I: Almost Controlled Invariant Subspaces", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 26, $n^o$ 1: 235-252.

[41] Willems, J.C. and C. Commault (1981) "Disturbance Decoupling by Measurement Feedback with Stability or Pole Placement", *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 19, $n^o$ 4: 491-504.

[42] Wonham, W.M. and A.S. Morse (1970) "Decoupling and Pole Assignment in Linear Multivariable Systems: a Geometric Approach", *SIAM Journal on Control*, vol. 8: 1-18.

[43] Wonham, W.M. (1974) *Linear Multivariable Control. A Geometric Approach*, Springer-Verlag, New York.

# Apêndice A

# O Problema do Regulador Ótimo L-Q com Restrições de Estrutura

## A.1 Introdução

Se um sistema linear invariante no tempo é controlável, seus pólos em malha fechada podem ser feitos tão negativos quanto se queira, tornando a convergência do sistema para o regime estacionário arbitrariamente rápida. Isto entretanto requereria grandes magnitudes dos sinais de entrada, o que seria inviável em problemas práticos. Essas considerações conduzem naturalmente a um problema de otimização que leve em conta tanto a velocidade de convergência para o regime estacionário quanto as amplitudes dos sinais de entrada. Seja então o sistema linear invariante no tempo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{A.1}$$

com $x \in \Re^n$; $y \in \Re^m$; $x_0 = x(0)$, e o funcional de desempenho quadrático

$$J(u(t)) = \int_0^\infty [x'(t)S_1'S_1x(t) + u'(t)S_2u(t)]dt \tag{A.2}$$

onde $S_1$ e $S_2$ são matrizes reais, constantes, dimensionadas consistentemente e $S_2$ é uma matriz simétrica definida positiva.

O objetivo do *Problema do Regulador Ótimo Determinístico, Linear-Quadrático de Tempo Infinito*, abreviadamente *Problema do Regulador Ótimo L-Q de Tempo Infinito* (PLQ) é determinar a função $u(t)$ que minimiza $J(u(t))$ (A.2).

Se o sistema (A.1) é estabilizável e o par $(A, S_1)$ é detectável, temos para a solução do PLQ os seguintes fatos (veja por exemplo [14]):

- A solução do PLQ é dada por

$$u^*(t) = Fx(t) \tag{A.3}$$

$$F = -S_2^{-1}B'T \tag{A.4}$$

onde $T$ é a solução única definida positiva da equação matricial de Riccati

$$A'T + TA + S_1'S_1 - TBS_2^{-1}B'T = 0 \tag{A.5}$$

ou seja, a lei de controle ótimo é linear, invariante no tempo, na forma de realimentação de estados e independente da condição inicial $x_0$ do sistema.

- Para $u(t) = u^*(t)$ o sistema em malha fechada $\dot{x}(t) = (A + BF)x(t)$ é assintoticamente estável.
- Para $u(t) = u^*(t)$ o funcional de desempenho é dado por $J(u^*(t)) = x_0'Tx_0$, onde T é a solução da equação de Riccati (A.5).

A solução do PLQ entretanto, não leva em conta algumas restrições que aparecem comumente em problemas de controle, como por exemplo, indisponibilidade de medida completa dos estados, impossibilidade de todas as entradas disporem da medida de todos os sensores, etc. Estas restrições são conhecidas como *restrições de estrutura de controle* [11], [21], [22].

Se restrições de estrutura são acrescidas ao PLQ, não há nenhuma garantia de que a solução obtida goze das propriedades anteriormente citadas. Uma solução de compromisso geralmente utilizada é a pré-determinação de uma estrutura desejada para a lei de controle (por exemplo, realimentação de saída linear invariante no tempo) bem como das especificações sobre a condição inicial do sistema. Isto resulta em um *problema de otimização de parâmetros* onde as variáveis a serem otimizadas são todos os elementos da matriz de realimentação admissíveis dentro da estrutura adotada.

## A.2 Formulação de Problema de Otimização de Parâmetros

Dado o sistema linear (A.1) onde $x(0) = x_0$ é uma variável aleatória com média $\mathbf{E}\{x_0\} = 0$ e matriz de momentos de segunda ordem $\mathbf{E}\{x_0x_0'\} = X_0'X_0$, considere o índice de desempenho quadrático integral de tempo infinito

$$J(u(t)) = \mathbf{E}\left\{\int_0^\infty [x(t)'S_1'S_1x(t) + u(t)'S_2u(t)]dt\right\}$$

onde: $\mathbf{E}$ é o operador esperança matemática e $S_2$ é definida positiva.

Assumindo uma lei de realimentação de estados linear invariante no tempo

$$u(t) = F(\underline{\alpha})x(t) \tag{A.6}$$

onde $np$ elementos de $F(\underline{\alpha})$ são livres e os restantes são fixos; $\underline{\alpha}$ é um vetor de dimensão $np$ representando os elementos livres de $F(\underline{\alpha})$, o índice de desempenho pode ser escrito na forma

$$J(\underline{\alpha}) = \mathbf{E}\left\{\int_0^{\infty} x'(t)[S_1'S_1 + F'(\underline{\alpha})S_2F(\underline{\alpha})]x(t)dt\right\}$$

O objetivo do problema de otimização de parâmetros é determinar o vetor $\underline{\alpha}$ que resolve

$$\begin{array}{ll} \min_{\underline{\alpha}} J(\underline{\alpha}) & \\ s.a. & \dot{x}(t) = (A + BF(\underline{\alpha}))x(t) \end{array}$$

Pode ser demonstrado [11], [22] que se $(A + BF(\underline{\alpha}))$ é assintoticamente estável o problema acima é equivalente a

$$\min_{\underline{\alpha}} J(\underline{\alpha}) \tag{A.7}$$

$$J(\underline{\alpha}) = Tr(X_0'X_0T) \tag{A.8}$$

$$(A + BF(\underline{\alpha}))'T + T(A + BF(\underline{\alpha})) + S_1'S_1 + F'(\underline{\alpha})S_2F(\underline{\alpha}) = 0 \tag{A.9}$$

As condições para estabilidade assintótica do sistema em malha fechada obtido da solução do problema de otimização de parâmetros são estabelecidas no seguinte Teorema:

**Teorema A.1** *Se $X_0$ e $S_1$ são tais que $(A, S_1)$ é detectável e $(A + BF(\underline{\alpha}), X_0')$ é controlável, então, se $J(\underline{\alpha})$ é finito, $(A + BF(\underline{\alpha}))$ é assintoticamente estável.*

Prova: Veja [11], [22].

Esta propriedade viabiliza enormemente o uso de métodos de otimização do tipo descida para a solução desse tipo de problema. Partindo de $\underline{\alpha}_0$ que estabiliza assintoticamente $(A + BF(\underline{\alpha}_0))$, a cada iteração $k$ teremos $J(\underline{\alpha}_{k+1}) < J(\underline{\alpha}_k) < J(\underline{\alpha}_0)$, o que garante não só a validade da formulação (A.7)-(A.9) ao longo de todo o processo de descida, como também que a solução final estabiliza assintoticamente o sistema em malha fechada. Observe que é fundamental escolher $X_0'X_0$ definida positiva de modo que $posto(X_0) = posto(X_0') = n$ e, conseqüentemente o par $(A + BF(\underline{\alpha}), X_0')$ seja controlável para qualquer $F(\underline{\alpha})$, pois isso garante que as condições para validade do Teorema anterior são sempre satisfeitas.

Não existe nenhuma garantia de que o índice de desempenho $J(\underline{\alpha})$ seja uma função convexa, logo o ponto de mínimo encontrado pode não ser global.

## A.3 Cálculo do Vetor Gradiente e da Matriz Hessiana

Os elementos $\frac{\partial J(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i}$ do vetor Gradiente $\nabla J(\underline{\alpha})$ de dimensão $np$ são dados por [22]:

$$\frac{\partial J(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} = q_{l_i,c_i} \tag{A.10}$$

$$Q = 2(S_2F(\underline{\alpha}) + B'T)W \tag{A.11}$$

$$(A + BF(\underline{\alpha}))W + W(A + BF(\underline{\alpha}))' + X_0'X_0 = 0 \tag{A.12}$$

onde $(l_i, c_i)$ é a posição do parametro $\alpha_i$ em $F(\underline{\alpha})$ e $q_{l_i,c_i}$ é o elemento $(l_i, c_i)$ da matriz $Q$.

A matriz Hessiana $H(\underline{\alpha}) \in \Re^{np \times np}$ é dada por [22]:

$$H(\underline{\alpha}) = H_1(\underline{\alpha}) + H_1'(\underline{\alpha}) + H_2(\underline{\alpha}) \tag{A.13}$$

$$h_{ij} = h_{1_{ij}} + h_{1_{ji}} + h_{2_{ij}} \tag{A.14}$$

$$h_{1_{ij}} = k_{l_j,c_j} \tag{A.15}$$

$$h_{2_{ij}} = p_{c_i,c_j} s_{2_{l_i,l_j}} \tag{A.16}$$

$$K = 2B'\frac{\partial T}{\partial \alpha_i} W \tag{A.17}$$

$$P = 2W \tag{A.18}$$

$$(A + BF(\underline{\alpha}))'\frac{\partial T}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial T}{\partial \alpha_i}(A + BF(\underline{\alpha})) + Y(\alpha_i) = 0 \tag{A.19}$$

$$Y(\underline{\alpha}_i) = \left(B\frac{\partial F(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i}\right)' T + T\left(B\frac{\partial F(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i}\right) + \frac{\partial F(\underline{\alpha})'}{\partial \alpha_i} S_2 F(\underline{\alpha}) + F(\underline{\alpha})' S_2 \frac{\partial F(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} \tag{A.20}$$

onde: $h_{1_{ij}}$ e $h_{2_{ij}}$ são os elementos $(i, j)$ de $H_1(\underline{\alpha})$ e $H_2(\underline{\alpha})$ respectivamente; $s_{2_{l_i,l_j}}$ é o elemento $(l_i, l_j)$ de $S_2$; $p_{c_i,c_j}$ e $k_{l_j,c_j}$ são os elementos $(c_i, c_j)$, $(l_i, l_j)$ de $P$ e $K$ respectivamente; $(l_i, c_i)$, $(l_j, c_j)$ são as posições ocupadas pelos parâmetros $\alpha_i$ e $\alpha_j$ em $F(\underline{\alpha})$.

Quanto ao esforço computacional requerido para os cálculos de $\nabla J(\underline{\alpha})$ e $H(\underline{\alpha})$, temos:

- Uma vez que $J(\underline{\alpha})$ (A.8) (A.9) tenha sido calculado, a maior parte do esforço computacional necessário à obtenção de $\nabla J(\underline{\alpha})$ é devida à solução de uma equação de Lyapunov (A.12).

- Uma vez que $W$ e $T$ tenham sido obtidas no cálculo de $J(\underline{\alpha})$ e $\nabla J(\underline{\alpha})$, a obtenção de $H_2(\underline{\alpha})$ requer um esforço adicional muito pequeno (equações (A.16) (A.18)). Nas mesmas condições, a obtenção de $H_1(\underline{\alpha})$ requer a solução de $np$ equações de Lyapunov (A.19) de ordem $n$ (equações (A.15) (A.17) (A.20)), o que se constitui em uma tarefa computacional muito pesada quando o sistema em consideração é de grande dimensão com um grande número de parâmetros a serem otimizados.

As matrizes de realimentação que solucionam o PRP na representação (2.58) (2.59) podem ser escritos na seguinte forma geral (equação (2.64)):

$$F = \left[\begin{array}{c|c} F_{1_1} & \multirow{2}{*}{$F_2$} \\ \hline F_{1_2} & \end{array}\right]$$

onde os elementos de $F_{1_1} \in \Re^{b\times v}$ são fixados pela solução do PRP e os de $F_{1_2} \in \Re^{(m-b)\times v}$ e $F_2 \in \Re^{m\times(n-v)}$ são livres. Considerando essa forma particular, o cálculo de $H_2(\underline{\alpha})$ pode ser simplificado. Escrevendo $S_2$ na forma

$$S_2 = \left[\begin{array}{c|c} S_{2_{11}} & S_{2_{12}} \\ \hline S_{2_{21}} & S_{2_{22}} \end{array}\right]$$

onde $S_{2_{11}} \in \Re^{b\times b}$ e $S_{2_{22}} \in \Re^{(m-b)\times(m-b)}$, e $P$ (A.18) na forma

$$P = \left[\begin{array}{c|c} P_{11} & P_{12} \\ \hline P_{21} & P_{22} \end{array}\right]$$

onde $P_{11} \in \Re^{v\times v}$ e $P_{22} \in \Re^{(n-v)\times(n-v)}$, é fácil verificar que a matriz $H_2(\underline{\alpha})$ é dada por

$$H_2(\underline{\alpha}) = \left[\begin{array}{c|c} S_{2_{11}} \otimes P_{22} & S_{2_{12}} \otimes \left[\begin{array}{cc} P_{21} & P_{22} \end{array}\right] \\ \hline S_{2_{21}} \otimes \left[\begin{array}{c} P_{12} \\ P_{22} \end{array}\right] & S_{2_{22}} \otimes P \end{array}\right]$$

Ainda no caso do PRP, a matriz $(A+BF(\underline{\alpha}))$ possui uma forma bloco triangular superior. O cálculo das equações de Lyapunov (A.9) (A.12) (A.19) pode então ser feito de modo a reduzir à metade ou menos o esforço computacional necessário.

## A.3.1 Propriedades da Matriz $H_2(\underline{\alpha})$

Além do baixo esforço computacional necessário à sua obtenção, a matriz $H_2(\underline{\alpha})$ possui outras propriedades importantes [22]:

- Se o par $(A + BF(\underline{\alpha}), X_0')$ é controlável, $H_2(\underline{\alpha})$ é definida positiva.

- Se $S_2$ é uma matriz diagonal e os parâmetros de $F(\underline{\alpha})$ a serem otimizados são armazenados por linha em $\underline{\alpha}$, então $H_2(\underline{\alpha})$ tem uma estrutura bloco diagonal. O número de submatrizes em $H_2(\underline{\alpha})$ é igual ao número de linhas de $F(\underline{\alpha})$ onde existem parâmetros e a dimensão de cada submatriz é igual ao número de parâmetros na linha de $F(\underline{\alpha})$ a ela associada.

- Se o par $(A, B)$ é estabilizável e o par $(A, S_1)$ é detectável, então $H_1(\underline{\alpha}) = 0$ e conseqüentemente $H(\underline{\alpha}) = H_2(\underline{\alpha})$ quando $F(\underline{\alpha}) = -S_2B'T$, ou seja, $F(\underline{\alpha})$ é a solução do problema do regulador ótimo L-Q de tempo infinito sem restrições de estrutura. Isto significa que nas proximidades do ponto de ótimo, $H_2(\underline{\alpha})$ é uma aproximação eficiente de $H(\underline{\alpha})$ quando as restrições de estrutura são fracas no sentido de que a solução do problema com restrições é próxima da do problema sem restrições.

## A.4 Escolha da Condição Inicial

Como pode ser visto das equações (A.10)-(A.20), as especificações das condições iniciais do sistema traduzidas pela matriz de momentos de segunda ordem $X_0'X_0$ influem no cálculo do índice de desempenho, do Gradiente e da Hessiana. Influem também na garantia de estabilidade assintótica de $A + BF(\underline{\alpha})$ ao longo do processo de otimização (Teorema A.1).

No caso de conhecimento completo da condição inicial ($x_0$ determinístico), temos

$$\mathbf{E}\{x_0x_0'\} = x_0x_0'$$

$$J(\underline{\alpha}) = Tr(x_0x_0'T) = x_0'Tx_0$$

Quando não se tem conhecimento sobre a condição inicial, Levine e Athans [16] sugerem escolher

$$\mathbf{E}\{x_0x_0'\} = X_0'X_0 = \frac{I_n}{n}$$

o que corresponde a considerar $x_0$ uma variável aleatória uniformemente distribuida na esfera unitária de dimensão $n$.

Outras formas de escolher $X_0'X_0$ são propostas e discutidas em [11] e [22].