

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA

DEPARTAMENTO DE COMUNICAÇÕES

MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS DOS MODELOS ARMA  
PARA ANÁLISE ESPECTRAL

Por: Adrián Sotero De Witt Batista  
Engenheiro Eletricista (UNICAMP - 1987)

Orientador: Prof. Dr. Amauri Lopes†  
Professor MS4 do Departamento de Comunicações da  
Faculdade de Engenharia Elétrica da UNICAMP

Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia  
Elétrica da UNICAMP como requisito parcial para  
para obtenção do título de Mestre em Engenharia  
Elétrica.

Campinas, 30 de junho de 1992.

Este exemplar corresponde à redação final da tese  
defendida por Adrián Sotero de Witt  
Batista aceita pela Comissão  
Julgadora em 30 06 92.

Amauri Lopes  
Orientador

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL

Biblioteca

## AGRADECIMENTOS

A meus pais, minha avó e familiares pelo estímulo e carinho.

Ao Prof. Dr. Amauri Lopes por sua orientação e principalmente pelo imenso incentivo e amizade.

Aos professores Fabio Violaro e João Romano pela colaboração, e ao professor José Augusto pela valiosa ajuda ao andamento deste trabalho.

Aos amigos e colegas Ernesto, Paulo, Jozué, Nagle, Francisco, Leonardo, Coradine, Fernando, Aleardo e todos os outros pela ajuda e companheirismo.

Pela paciência e solicitude, a Celi, Marcia, Gisleine e Insley.

A Blake, Giba e família.

Ao pessoal da Turma, da Pô, Romeu! e da Buarque.

À mocada da graduação.

A todos que colaboraram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho, seja através de discussões, críticas ou colocações pessoais.

À Universidade Estadual de Campinas pela oportunidade.

Ao CNPq, CPqD/TELEBRÁS e FAEP pelo apoio financeiro.

aos meus pais e irmãos,  
saudade

## RESUMO

Este trabalho está direccionado ao estudo das técnicas de Análise Espectral com base no modelo ARMA, utilizando os métodos de estimação separada de seus parâmetros.

São desenvolvidos os aspectos teóricos e práticos da análise de mínimos quadrados das Equações Modificadas de Yule-Walker para a estimação dos parâmetros auto-regressivos do modelo ARMA. O mesmo se dá em relação ao método de Durbin para a estimação do modelo MA, visando sua aplicação na estimação dos parâmetros média-ajustável do modelo ARMA. Os resultados deste estudo são confrontados com aqueles resultados da aplicação dos métodos clássicos na estimação espectral ARMA e MA.

A avaliação do desempenho destes vários métodos é realizada através de simulações envolvendo sinais de testes gerados a partir de processos aleatórios conhecidos. Este conhecimento permitiu comparar as estimativas resultantes com os aspectos teóricos destes sinais. Também, utilizou-se varios tipos de processos de modo a cobrir uma ampla gama de possibilidades.

## ÍNDICE

|                   |                                                                                              |           |
|-------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Capítulo 1</b> | <b>Introdução</b>                                                                            | <b>1</b>  |
| 1.1               | A Análise Espectral                                                                          | 1         |
| 1.2               | Objetivos da Tese                                                                            | 2         |
| 1.3               | Organização da Dissertação                                                                   | 3         |
| <br>              |                                                                                              |           |
| <b>Capítulo 2</b> | <b>Conceitos Gerais</b>                                                                      | <b>5</b>  |
| 2.1               | Introdução                                                                                   | 5         |
| 2.2               | Avaliação Espectral                                                                          | 5         |
| 2.3               | Estimadores da Sequência de Autocorrelação                                                   | 7         |
| 2.4               | Método Clássico Correlograma                                                                 | 13        |
| 2.5               | Método Clássico Periodograma                                                                 | 16        |
| 2.6               | Modelos Paramétricos                                                                         | 17        |
| <br>              |                                                                                              |           |
| <b>Capítulo 3</b> | <b>Modelos Paramétricos para a Análise Espectral</b>                                         | <b>20</b> |
| 3.1               | Introdução                                                                                   | 20        |
| 3.2               | Modelo Auto-regressivo Média-Ajustável de Ordem $p$ e $q$ , ARMA( $p$ , $q$ )                | 20        |
| 3.2.1             | Relação entre os Parâmetros e a Sequência de Autocorrelação de um Processo ARMA( $p$ , $q$ ) | 23        |
| 3.3               | Modelo Auto-regressivo de Ordem $p$ , AR( $p$ )                                              | 25        |
| 3.3.1             | Relação entre os Parâmetros e a Sequência de Autocorrelação de um Processo AR( $p$ )         | 27        |
| 3.4               | Modelo Média-Ajustável de ordem $q$ , MA( $q$ )                                              | 29        |
| 3.4.1             | Relação entre os Parâmetros e a Sequência de Autocorrelação de um Processo MA( $q$ )         | 30        |
| 3.5               | Relação entre os modelos AR e MA                                                             | 31        |
| 3.6               | Estimadores Espectrais Paramétricos                                                          | 33        |
| <br>              |                                                                                              |           |
| <b>Capítulo 4</b> | <b>Estimadores do Modelo Auto-Regressivo, Métodos com Base na Análise de Predição Linear</b> | <b>35</b> |
| 4.1               | Introdução                                                                                   | 35        |
| 4.2               | Relação entre a Análise de Predição Linear e o Modelo Auto-regressivo                        | 35        |

|                                                                                                                                |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.3 Métodos de Estimação AR Baseados na Predição Linear Progressiva                                                            | 38         |
| 4.4 Método Covariância Modificado                                                                                              | 43         |
| 4.5 Seleção da Ordem do Modelo AR                                                                                              | 45         |
| <b>Capítulo 5 Estimação Espectral Média-Ajustável</b>                                                                          | <b>47</b>  |
| 5.1 Introdução                                                                                                                 | 47         |
| 5.2 Método de Durbin para a Estimação dos Parâmetros do Modelo MA                                                              | 47         |
| 5.3 Método de Durbin: Análise Qualitativa                                                                                      | 51         |
| 5.4 Método de Durbin: Análise Quantitativa                                                                                     | 53         |
| 5.5 Estimativas Espectrais MA com Base nos Métodos Clássicos                                                                   | 71         |
| 5.6 Considerações Finais                                                                                                       | 81         |
| <b>Capítulo 6 Estimação Espectral Auto-Regressiva Média-Ajustável, ARMA</b>                                                    | <b>82</b>  |
| 6.1 Introdução                                                                                                                 | 82         |
| 6.2 Estimação Separada dos Parâmetros ARMA                                                                                     | 83         |
| 6.3 Estimação do Numerador Espectral do Modelo ARMA                                                                            | 91         |
| 6.4 Seleção da Ordem do Modelo ARMA(p,q)                                                                                       | 93         |
| 6.5 Simulações                                                                                                                 | 94         |
| 6.5.1 Apresentação das Simulações                                                                                              | 94         |
| 6.5.2 Estimação do Denominador Espectral ARMA com Base na Análise de Mínimos Quadrados das Equações Modificadas de Yule-Walker | 98         |
| 6.5.3 Estimação do Numerador Espectral ARMA com Base no Método de Durbin                                                       | 119        |
| 6.5.4 Estimação do Numerador Espectral ARMA com Base nos Métodos Correlograma e Periodograma                                   | 135        |
| 6.6 Conclusão                                                                                                                  | 144        |
| <b>Capítulo 7 Conclusões</b>                                                                                                   | <b>148</b> |
| <b>Referências</b>                                                                                                             | <b>152</b> |

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

#### 1.1 A Análise Espectral

A Análise Espectral é um conjunto de conceitos e métodos que visa caracterizar o conteúdo em frequência de um sinal observado. Sua aplicação abrange todas as áreas da Engenharia Elétrica e das ciências em geral. Sua pesquisa tem produzido uma variedade de métodos de modo que se faz necessário a preparação de pessoal especializado nesta área, não só para a escolha adequada a cada aplicação como também para resolver novos problemas. Suas ferramentas matemáticas fundamentais são a Transformada de Fourier e os conceitos estatísticos. A primeira relaciona um sinal ou modelo deste com sua representação no domínio da frequência, enquanto que a segunda torna-se necessária devido ao comportamento aleatório de uma grande variedade de sinais.

A Análise Espectral seria uma ciência exata se as características estatísticas do sinal observado pudessem ser exatamente determinadas. Entretanto, na prática dispomos, em geral, de pequenos intervalos do sinal, a partir dos quais não é possível determinar exatamente tais características. Esta é a razão pela qual é possível obter apenas uma estimativa do espectro de potência do sinal.

Existem diversos métodos para estabelecer tal estimativa, e podem ser divididos em duas categorias: Modernos e Clássicos.

1. Nos Métodos Modernos, também chamados de paramétricos, um modelo é utilizado na formulação do problema de estimação espectral. A base destes métodos é a idéia de que um sinal pode ser modelado pela resposta de um filtro linear causal cuja excitação é um ruído branco. O espectro de potência é, então, estimado em função dos parâmetros do filtro e da variância do ruído branco.

2. Nos Métodos Clássicos, ou não-paramétricos, nenhum modelo é utilizado na formulação do problema de estimação espectral.

Neles o espectro de potência é estimado diretamente do segmento do sinal observado (Método do Periodograma), ou então a partir da sua sequência de autocorrelação (Método do Correlograma).

## 1.2 Objetivos da Tese

O objetivo desta tese é o estudo dos métodos de estimação dos parâmetros dos modelos ARMA para Análise Espectral. Tais modelos apresentam função de sistema racional composta por pólos e zeros, o que os torna adequados para a estimação de espectros de potência formados por picos estreitos e vales abruptos. Ao contrário, os modelos auto-regressivos (AR), composto apenas por pólos, e média-ajustável (MA), composto apenas por zeros, são específicos para a estimação de uma destas formas espectrais. Entretanto, a presença de relações não-lineares no modelo ARMA dificulta a estimação de seus parâmetros, que é realizada através de métodos iterativos de estimação simultânea ou, então, métodos sub-ótimos de estimação separada. Este trabalho está direcionado aos métodos de estimação separada.

O modelo MA é adequado para a estimação de espectros de potência com vales abruptos e também apresenta relações não-lineares que dificultam a obtenção direta de seus parâmetros. Embora o modelo MA não seja amplamente utilizado, as relações e os métodos de estimação do mesmo são parte importante dos métodos de estimação separada ARMA. Por este fato, a tese aborda o método de Durbin para a estimação MA, o qual é um método indireto de fácil implementação.

Ao longo da tese são ainda desenvolvidos tópicos tais como os método de estimação clássica, a conceituação e uso dos método modernos na Análise Espectral, bem como os métodos mais conhecidos para a estimação dos parâmetros do modelo AR. A motivação para tal é a geração de uma base para o estudo da estimação dos parâmetros do modelo ARMA.

### 1.3 Organização da Dissertação

No capítulo 2 são apresentados a problemática básica da Análise Espectral, os estimadores de autocorrelação utilizados ao longo da tese, os métodos de estimação clássica Correlograma e Periodograma e uma breve conceituação dos modelos paramétricos na Análise Espectral.

O capítulo 3 é dedicado às relações que caracterizam os modelos ARMA, AR e MA, à equivalência entre os modelos AR e MA, a ser utilizada no capítulo 5, bem como à aplicação prática destes modelos na estimativa da densidade espectral de potência de um sinal a partir dos dados disponíveis.

São apresentados no capítulo 4, alguns métodos para a obtenção dos parâmetros do modelo AR. Este modelo tem sido amplamente pesquisado e existe um número considerável de métodos para estimar seus parâmetros. Neste trabalho não será efetuado um estudo aprofundado do mesmo, mas serão apresentadas apenas suas características principais e os métodos mais conhecidos para a estimação de seus parâmetros, ou seja, aqueles baseados na teoria da predição linear: Autocorrelação, Covariância e Covariância Modificado.

O capítulo 5 é dedicado à estimação espectral MA. Nele é efetuado um estudo detalhado sobre o método de Durbin e sobre uma eventual substituição do modelo MA pelos métodos clássicos na estimação espectral MA. O método de Durbin explora a equivalência entre os modelo AR e MA e utiliza o método Autocorrelação para a obtenção do modelo AR. Neste trabalho é proposto e analisado o uso de outros métodos para a obtenção do modelo AR e as estimativas espectrais obtidas com este método são comparadas com aquelas fornecidas pelos métodos clássicos. Estes aspectos representam parte das contribuições deste trabalho.

O tema do capítulo 6 é a estimação espectral ARMA com base nos métodos de estimação separada. Aqui é utilizado a análise de mínimos quadrados das Equações Modificadas de Yule-Walker para a obtenção da parte auto-regressiva do modelo ARMA e o método de Durbin e os clássicos para a obtenção da parte média-ajustável. É efetuado um estudo detalhado das características do algoritmo de estimação da parte auto-regressiva, visando aumentar seu desempe-

nho, e uma nova análise comparativa entre os métodos apresentados no capítulo 5, agora dentro do contexto da estimação espectral ARMA. Este estudo e a análise comparativa completam o conjunto de contribuições proporcionado por esta tese.

Finalmente, o capítulo 7 resume as principais conclusões e contribuições atingidas.

Os estudos teóricos realizados nos capítulos 5 e 6 foram complementados com simulações baseadas em processos artificiais com espectros de potência conhecidos. Os algoritmos necessários às simulações foram implantados em rotinas de computador utilizando a linguagem C, compilador Turbo C 2.0 (Borland International, Inc)

## CAPÍTULO 2

## CONCEITOS GERAIS

2.1 Introdução

Neste capítulo é abordado de forma sucinta o problema da estimativa espectral a partir de um número finito de amostras de um processo aleatório e são apresentadas as idéias básicas associadas aos métodos clássicos e paramétricos da análise espectral. O objetivo é formar uma base comum aos próximos capítulos e nenhum esforço foi realizado na tentativa de aprofundar estes assuntos. Em conjunto com estes temas principais, são apresentados dois estimadores da sequência de autocorrelação e analisadas suas propriedades.

2.2 Avaliação Espectral

A densidade espectral de potência (DEP),  $P_{xx}(f)$ , de um processo aleatório discreto  $x[n]$ , é definida como a Transformada de Fourier de sua sequência de autocorrelação estatística,  $r_{xx}[m]$ :

$$P_{xx}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xx}[m] \exp(-j2\pi mfT) \quad (2.1)$$

a qual é conhecida como relação de Wiener-Khintchine.

$P_{xx}(f)$  é periódica em frequência com período  $1/T$  Hz, e é assumido ser de faixa limitada em  $\pm 1/2T$  Hz, onde  $T$  é o intervalo de amostragem do processo  $x[n]$ . O seu caráter de densidade de potência exige que  $P_{xx}(f)$  seja uma função não-negativa.

A DEP é também definida, para processos ergódicos, como [1]:

$$P_{xx}(f) = \lim_{M \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{2M+1} \left| \sum_{n=-M}^M x[n] \exp(-j2\pi nfT) \right|^2 \right\} \quad (2.2)$$

onde "E" representa a operação de média estatística.

Ambas definições da DEP são equivalentes sob a hipótese de ergodicidade e ao longo deste trabalho assumimos que os processos aleatórios sob análise são discretos e ergódicos.

As duas definições da DEP não podem, em geral, ser utilizadas na prática, pois exigem o conhecimento da sequência de autocorrelação ou então de todas as amostras do processo a ser analisado.

Em geral, dispomos apenas de um conjunto finito de amostras e é deste conjunto que devem ser obtidas ou estimadas as informações que o caracterizam. Por exemplo, seja  $x[n]$  um processo discreto do qual dispomos de apenas  $N$  amostras no intervalo  $0 \leq n \leq N-1$ , denominadas  $x_o[n]$ . Este conjunto de amostras pode ser representado por:

$$x_o[n] = \begin{cases} x[n] & ; 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & ; \text{c.c} \end{cases} \quad (2.3)$$

ou ainda por:

$$x_o[n] = x[n] w[n] \quad (2.4)$$

onde  $w[n]$  é uma janela retangular de amplitude unitária e comprimento  $N$ ,

$$w[n] = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & ; \text{c.c} \end{cases}$$

De acordo com a equação (2.4), o espectro de frequências de  $x_o[n]$  será:

$$X_o(f) = X(f) * W(f) \quad (2.5)$$

onde  $*$  denota a operação de convolução.

A equação (2.5) mostra que o espectro de frequências  $X_o(f)$  resulta da convolução entre o espectro desejado  $X(f)$  e o da janela  $w[n]$ . Assim, enquanto dispormos de apenas um trecho finito de  $x[n]$ , poderemos obter somente uma aproximação de seu espectro de frequências.

Os métodos de estimação do espectro de densidade de potência de processos aleatórios também estão sujeitos a esta limitação intrínseca ao conjunto finito de amostras, que se reflete numa redução na capacidade de discernir detalhes espectrais. Além desta li-

mitação na resolução espectral, existe o fenômeno da variância da estimativa, ou seja, conjuntos distintos de  $N$  amostras produzem estimativas distintas. Este efeito decorre da ausência da operação de mediação, estatística ou temporal, ao longo de todas as amostras do processo.

Nos métodos clássicos de análise espectral, baseados na Transformada de Fourier, procura-se estabelecer mecanismos de compromisso entre estes efeitos sem se dispor de meios eficazes para minorá-los. Nos métodos paramétricos são atingidos melhores resultados ao buscar a estimativa de um modelo para o processo sob análise.

Antes de passar para a discussão mais detalhada destes métodos, vamos estudar o problema da avaliação da sequência de autocorrelação de um processo.

### 2.3 Estimadores da Sequência de Autocorrelação, SAC

A média estatística mais freqüente nos métodos da análise espectral é a sequência de autocorrelação, SAC, de um processo aleatório, a qual também está sujeita às limitações de se dispor de um conjunto finito de amostras.

A sequência de autocorrelação de um processo aleatório  $x[n]$  estacionário, é definida como:

$$r_{xx}[m] = E \{ x[n+m] x^*[n] \} = E \{ x[n] x^*[n-m] \} \quad (2.6)$$

onde "\*" denota a operação de conjugado complexo.

Também, para processo ergódicos a SAC pode ser calculada através da seguinte média temporal [1], [2]:

$$r_{xx}[m] = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M x[n+m] x^*[n] \quad (2.7)$$

A SAC apresenta várias propriedades, entre as quais destacamos [1], [2], [3]:

$$r_{xx}[0] \geq |r_{xx}[m]| \quad (2.8)$$

$$r_{xx}[-m] = r_{xx}^*[m] \quad (2.9)$$

A definição dada pela equação (2.6) requer o conhecimento da função de densidade de probabilidade de segunda ordem do processo aleatório, enquanto que a definição (2.7) requer disponibilidade de todas as amostras do processo.

Entretanto, em geral, ambas informações não estão disponíveis nas situações práticas, o que nos obriga a fazer uso de estimativas da autocorrelação, obtidas das  $N$  amostras disponíveis do processo aleatório. A seguir vamos apresentar dois estimadores de autocorrelação que serão utilizados no decorrer deste trabalho.

### 1. Estimador Não-Polarizado de Autocorrelação:

Este estimador é a equação (2.7) adaptada a um conjunto finito de amostras, ou seja:

$$\hat{r}_{xx}[m] = \begin{cases} \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n+m] x^*[n] & ; 0 \leq m \leq N-1 \\ \hat{r}_{xx}^*[-m] & ; -(N-1) \leq m < 0 \\ 0 & ; |m| \geq N \end{cases} \quad (2.10)$$

Este estimador é não-polarizado, uma vez que a média de suas estimativas é igual a SAC teórica:

$$E \{ \hat{r}_{xx}[m] \} = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} E \{ x[n+m] x^*[n] \} = r_{xx}[m] ; 0 \leq m \leq N-1 \quad (2.11)$$

Observe que o valor médio das estimativas não-polarizadas é o produto da SAC teórica por uma janela retangular unitária, de comprimento  $2N-1$ , em torno de  $m=0$ .

A variância desta estimativa para um processo aleatório Gaussiano pode ser aproximada por:

$$\text{var} \{ \hat{r}_{xx}[m] \} \approx \frac{N}{(N-m)^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( r_{xx}^2[k] + r_{xx}[k+m] r_{xx}[k-m] \right) \quad (2.12)$$

para  $N \gg m$  [4]. Observamos que à medida que o valor  $m$  aumenta a variância também aumenta. Isto acontece pois, à medida que  $m$  se aproxima de  $N-1$ , diminui o número de produtos a serem somados para compor  $\hat{r}_{xx}[m]$ , aumentando a incerteza ou o erro da estimativa. Por outro lado, quando  $N$  tende a infinito, a variância de  $\hat{r}_{xx}[m]$  tende a zero.

Dizemos que uma estimativa é consistente quando sua polarização e sua variância tendem a zero com o aumento do número  $N$  de amostras. Desta forma,  $\hat{r}_{xx}[m]$  é uma estimativa consistente da SAC.

## 2. Estimador Polarizado de Autocorrelação:

O estimador da equação (2.10) fornece estimativas não-polarizadas, cuja variância aumenta com o valor de  $m$ . Um estimador que contorna este problema, porém com a desvantagem de produzir estimativas polarizadas, é apresentado a seguir:

$$\tilde{r}_{xx}[m] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n+m] x^*[n] & ; 0 \leq m \leq N-1 \\ \tilde{r}_{xx}^*[-m] & ; -(N-1) \leq m < 0 \\ 0 & ; |m| \geq N \end{cases} \quad (2.13)$$

A relação entre ambos estimadores é dada por:

$$\tilde{r}_{xx}[m] = \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) \hat{r}_{xx}[m] \quad ; \quad 0 \leq |m| \leq N-1 \quad (2.14)$$

e a média das estimativas  $\tilde{r}_{xx}[m]$ , por:

$$E \{ \tilde{r}_{xx}[m] \} = \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) r_{xx}[m] \quad ; \quad |m| \leq N-1 \quad (2.15)$$

De modo que  $\tilde{r}_{xx}[m]$  é uma estimativa polarizada da SAC para um número finito de amostras. Entretanto, se torna assintoticamente não-polarizada quando o número de amostras tende a infinito. As equações (2.14) e (2.15) mostram que o valor médio destas estimativas é o produto da SAC teórica por uma janela triangular, de comprimento  $2N-1$ , em torno do valor  $m=0$ .

Das equações (2.12) e (2.14), obtemos uma aproximação da va-

riância do estimador polarizado:

$$\text{var} \left\{ \tilde{r}_{xx}[m] \right\} \simeq \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( r_{xx}^2[m] + r_{xx}[k+m] r_{xx}[k-m] \right) \quad (2.16)$$

Observamos que a variância da estimativa não é influenciada pelo valor de  $m$  como acontece na estimativa não-polarizada. Também, esta variância tende a zero com o aumento do número de amostras. Assim, o estimador polarizado também fornece estimativas consistentes da SAC de um processo aleatório.

Por fim, ambos estimadores satisfazem a propriedade de sequência conjugada simétrica da equação (2.9).

### 3. Característica de sequência positiva semidefinida das estimativas de autocorrelação.

O fato que a DEP é uma função não-negativa está intimamente relacionado com o fato de a SAC ser uma sequência positiva semidefinida [5]. Esta propriedade se refere à matriz Toeplitz Hermitiana,  $R_M$ , formada por elementos da SAC:

$$R_M = r_{xx}[i-j] \quad ; \quad 0 \leq i, j \leq M-1$$

Tomando a forma quadrática associada a  $R_M$ :

$$a R_M a^H = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} a[k] a^*[j] r_{xx}[k-j]$$

onde " $h$ " representa a operação de transposto conjugado, e  $a$  é um vetor linha  $M \times 1$  qualquer, podemos escrever:

$$\begin{aligned} a R_M a^H &= \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} a[k] a^*[j] E \left\{ x[n+k] x^*[n+j] \right\} \\ &= E \left\{ \left| \sum_{k=0}^{M-1} a[k] x[n+k] \right|^2 \right\} \geq 0 \end{aligned}$$

O fato deste produto ser não-negativo para todo vetor  $a$  de  $M$  elementos arbitrários caracteriza a matriz  $R_M$  como positiva semidefinida. Pode-se mostrar, [5], que esta propriedade da matriz  $R_M$ ,

válida para qualquer inteiro positivo  $M$ , está diretamente relacionada à não negatividade da DEP e motiva a denominação de  $r_{xx}[m]$  como uma sequência positiva semidefinida.

Portanto, é necessário que as sequências de autocorrelação estimadas também sejam positivas semidefinidas, de forma a garantir que a Transformada de Fourier destas (que é uma estimativa possível para a DEP do processo aleatório) seja não-negativa.

Assim, vamos agora analisar as sequências obtidas dos estimadores não-polarizado e polarizado de autocorrelação quanto ao seu carácter positivo semidefinido (ou não-negativo definido, NND). Uma abordagem mais ampla sobre as propriedades das sequências e matrizes NND pode ser encontrada nos textos [5], [6], [7]. Apresentaremos aqui apenas aquelas características necessárias ao estudo em questão.

Definição 2.1: Uma sequência é NND se e somente se sua Transformada de Fourier é uma função não-negativa.

Propriedades: Uma sequência NND satisfaz as propriedades dadas pelas equações (2.8) e (2.9) (condições necessárias mas não suficientes).

Teorema 2.1: Dada uma sequência  $v[m]$  finita de comprimento  $2N-1$ , se existir uma sequência  $x[0], \dots, x[N-1]$ , tal que:

$$v[m] = K x[m] * x^*[-m] \quad ; \quad 0 \leq m \leq N-1 \quad (2.17)$$

onde  $K$  é uma constante não-nula positiva, então  $v[m]$  é NND.

Demonstração:

Seja

$$\begin{aligned} v[m] &= K x[m] * x^*[-m] \\ \mathcal{F}\{v[m]\} &= K \mathcal{F}\{x[m]\} \mathcal{F}\{x^*[-m]\} \\ V(f) &= K X(f) X^*(f) \\ &= K |X(f)|^2 \end{aligned}$$

como  $K > 0$  e  $|X(f)|^2 \geq 0$ ,  $V(f)$  é uma função não-negativa e, portanto,  $v[m]$  é uma sequência NND, c.q.d.

**Teorema 2.2:** O produto de duas seqüências NND é uma seqüência NND.

Demonstração:

Seja

$$c[m] = w[m] v[m]$$

onde  $w[m]$  e  $v[m]$  são NND,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{c[m]\} &= \mathcal{F}\{w[m]\} * \mathcal{F}\{v[m]\} \\ C(f) &= W(f) * V(f) \end{aligned} \quad (2.18)$$

como  $W(f) \geq 0$  e  $V(f) \geq 0$  para todo valor de frequência,  $C(f)$  é uma função não-negativa e, portanto,  $c[m]$  é uma seqüência NND, c.q.d.

Este teorema garante que o produto de duas seqüência NND é NND. Por outro lado, como a expressão de convolução (2.18) implica numa soma de produtos, o produto de duas seqüências pode não ser NND se uma delas não o for.

Aplicando estes conceitos nos estimadores de autocorrelação, temos:

**-Para as seqüências de estimativas não-polarizadas de autocorrelação:**

Podemos escrever a equação (2.10) como:

$$\hat{r}_{xx}[m] = ww[m] rr[m] \quad ; \quad 0 \leq m \leq N-1$$

onde:

$$ww[m] = \frac{1}{N-m} \quad ; \quad 0 \leq m \leq N-1$$

$$rr[m] = \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n+m] x^*[n] \quad ; \quad 0 \leq m \leq N-1$$

Lembrando que:

$$rr[m] = \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n+m] x^*[n] = x[m] * x^*[-m]$$

o Teorema 2.1 assegura que  $rr[m]$  é uma seqüência NND. Entretanto, a seqüência  $ww[m]$  não é NND, pois a propriedade (2.8) não é satisfeita, já que  $ww[0] < ww[m]$ . Portanto, não é garantido que o produto  $ww[m] rr[m]$  seja NND.

Assim, o estimador não-polarizado pode fornecer estimativas de autocorrelação que não sejam positivas semidefinidas. Por exemplo, para a sequência de amostras  $x[0]=2.0$ ,  $x[1]=2.1$  e  $x[2]=1.0$ , o estimador não-polarizado fornecerá  $\hat{r}_{xx}[0]=3.137$ ,  $\hat{r}_{xx}[1]=3.150$  e  $\hat{r}_{xx}[2]=2.0$ ; como  $\hat{r}_{xx}[0] < \hat{r}_{xx}[1]$  esta sequência não é NND.

**-Para as sequências de estimativas polarizadas de autocorrelação:**

A expressão (2.13) do estimador polarizado pode ser colocada na forma da equação (2.17) do Teorema 2.1 com  $K=1/N$ . Logo as estimativas polarizadas de autocorrelação são sempre NND.

O fato do estimador não-polarizado não garantir estimativas não-negativas para a DEP, faz com que o estimador polarizado seja o mais utilizado na prática. Unido a isto, nos métodos paramétricos de análise espectral é utilizada a inversa da matriz de estimativas de autocorrelação. Esta inversão só é possível se tais estimativas formam uma sequência positiva definida [6], [7].

Nesta seção os símbolos  $\hat{\cdot}$  e  $\tilde{\cdot}$  foram utilizados para indicar as estimativas não-polarizadas e polarizadas da SAC, respectivamente. No decorrer deste trabalho o símbolo  $\hat{\cdot}$ , indicará as estimativas genéricas das grandezas de interesse. Quando, eventualmente, este símbolo indicar especificamente a estimativa não-polarizada, tal fato será explicitado.

Nos itens seguintes abordaremos os métodos clássicos da análise espectral e conceituaremos os métodos paramétricos. Este material tem por objetivo formar uma base para os próximos capítulos e não se propõe aprofundar nestes assuntos.

## 2.4 Método Clássico Correlograma

O Método Correlograma tem por base a equação (2.1), na qual a SAC desconhecida, é substituída por uma estimativa,  $\hat{r}_{xx}[m]$ , de comprimento  $2C+1$ , obtida de  $N$  amostras do processo aleatório  $x[n]$ :

$$\hat{P}_{xx}(f) = \sum_{m=-C}^C \hat{r}_{xx}[m] \exp(-j2\pi m f T) \quad (2.19)$$

onde  $C$  é feito bem menor que  $N-1$  de forma a evitar a variância associada às estimativas de autocorrelação de índices elevados. Um valor máximo  $C \cong N/10$  é sugerido em [8].

O Método Correlograma fornece estimativas polarizadas do espectro de potência desejado,  $P_{xx}(f)$ , pois:

$$\begin{aligned} E \left\{ \hat{P}_{xx}(f) \right\} &= \sum_{m=-C}^C E \left\{ r_{xx}[m] \right\} \exp(-j2\pi mfT) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} d[m] r_{xx}[m] \exp(-j2\pi mfT) \end{aligned}$$

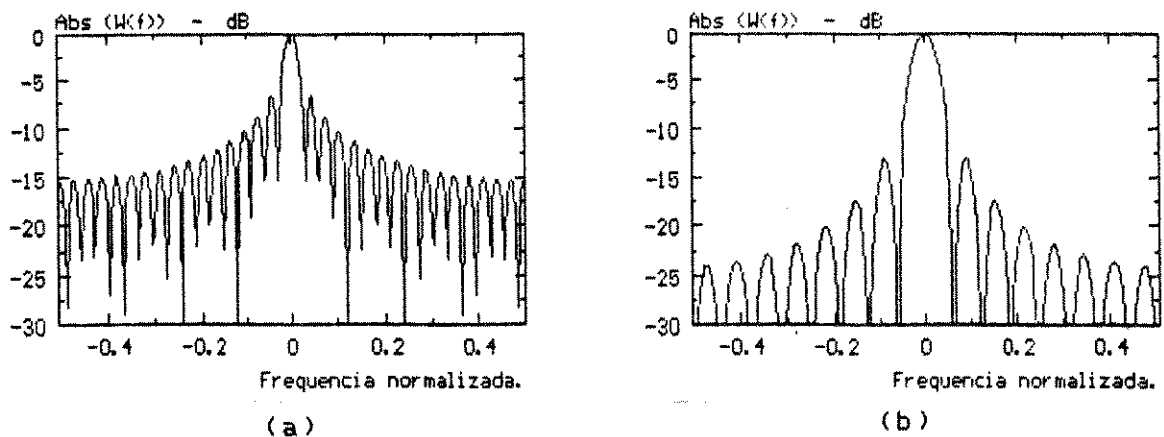
onde  $d[m]$  é uma janela de comprimento  $2C+1$ , retangular unitária se  $\hat{r}_{xx}[m]$  é o estimador não-polarizado, ou triangular truncada se  $\hat{r}_{xx}[m]$  é o estimador polarizado. Portanto:

$$E \left\{ \hat{P}_{xx}(f) \right\} = P_{xx}(f) * D(f) \quad (2.20)$$

Assim, o valor médio das estimativas produzidas pelo estimador espectral Correlograma, é a convolução entre o espectro de potência desejado  $P_{xx}(f)$ , e o espectro de frequências,  $D(f)$ , da janela  $d[m]$ .

A figura 2.1 mostra o espectro de frequências de uma janela retangular unitária e o de uma janela triangular. Estas figuras permitem prever que a operação de convolução deformará o espectro  $P_{xx}(f)$ . As eventuais raias de  $P_{xx}(f)$ , produzidas por componentes periódicas em  $x[n]$ , serão alargadas pelo lóbulo central de  $D(f)$ , enquanto que os lóbulos laterais provocarão dispersões que polarizarão as componentes de  $P_{xx}(f)$  adjacentes. O alargamento espectral impõe limites na capacidade de observar raias próximas em frequência, ou seja, provoca capacidade limitada de resolução. O espalhamento, por sua vez, leva à polarização da estimativa. Além destes fenômenos, componentes de baixa potência, próximas à componentes de alta potência serão completamente mascaradas.

As janelas, retangular ou triangular, estão implícitas nas estimativas da SAC, devido ao número finito de amostras disponí-



**FIGURA 2.1** Espectro de Frequências de uma Janela (a) Retangular e (b) Triangular.

veis do processo aleatório sob análise. O aumento da variância das estimativas  $\hat{r}_{xx}[m]$ , à medida que  $m$  tende a  $N-1$ , também é consequência deste número finito. Seu efeito é controlado fazendo  $C \ll N-1$ , porém esta ação piora a resolução espectral, pois estreita a janela  $d[m]$ .

A tentativa de obter um compromisso entre o efeito da variância das estimativas de autocorrelação para  $m \rightarrow N-1$  e a redução da resolução, leva à utilização de uma janela artificial  $w[m]$ :

$$\hat{P}_{xx}(f) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} w[m] \hat{r}_{xx}[m] \exp(-j2\pi m f T)$$

onde  $w[m]$  deve ter as seguintes características:

- $w[0] = 1$  para manter a potência média do sinal,
- $w[-m] = w[m]$ , e
- $w[m] = 0$  para  $|m| > C$ .

onde  $C$  deve ser menor que  $N-1$ . Devido a estas propriedades a expressão anterior pode ser escrita como:

$$\hat{P}_{xx}(f) = \sum_{m=-C}^C w[m] \hat{r}_{xx}[m] \exp(-j2\pi m f T) \quad (2.21)$$

A equação (2.21) é a forma descrita por Blackman e Tukey, [8], para o estimador espectral Correlograma.

Para garantir que a estimativa espectral seja positiva, a janela  $w[m]$  deve ser NND, tal como a estimativa de autocorrelação utilizada, motivo pelo qual é aconselhado o uso do estimador polarizado de autocorrelação.

## 2.5 Método Clássico Periodograma

O método Periodograma original tem por base o espectro do conjunto de  $N$  amostras do sinal, ou seja:

$$\hat{P}_{xx}(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi n f T) \right|^2 \quad (2.22)$$

Este estimador apresenta variância excessiva, além de ser inconsistente, [1], devido à supressão das operações de média indicadas na seção 2.2. Novas versões deste método foram sugeridas visando corrigir estas deficiências. Dentre elas trataremos do método de Welch, por ser o mais empregado atualmente [1], [9].

No Periodograma de Welch o conjunto de  $N$  amostras é dividido em  $P$  segmentos,  $x^{(p)}[n]$ , com  $D$  amostras ( $D \leq N-1$ ) cada um e é efetuado um deslocamento de  $S$  amostras entre segmentos adjacentes ( $S \leq D$ ). Deste modo o número máximo de segmentos é a parte inteira de  $1+(N-D)/S$ . Sobre cada segmento é aplicada uma janela de ponderação  $w[n]$ , de forma que o  $p$ -ésimo segmento é dado por:

$$x^{(p)}[n] = w[n] x[n+pS] \quad ; \quad 0 \leq p \leq P-1 \quad (2.23)$$

A Transformada de Fourier de cada segmento é:

$$X^{(p)}(f) = \sum_{n=0}^{D-1} x^{(p)}[n] \exp(-j2\pi n f T) \quad (2.24)$$

e o espectro de amostras:

$$\hat{P}_{xx}^{(p)}(f) = \frac{1}{D} |X^{(p)}(f)|^2 \quad (2.25)$$

Finalmente, o Periodograma de Welch é a média dos  $P$  espectros de amostras:

$$\hat{P}_{xx}(f) = \frac{1}{P} \sum_{p=0}^{P-1} \hat{P}_{xx}^{(p)}(f) \quad (2.26)$$

O propósito da janela de ponderação é diminuir a polarização da estimativa e o efeito dos lóbulos laterais decorrentes da janela retangular, intrínseca ao número finito de amostras. A segmentação tem o propósito de reduzir a variância do estimador espectral, às custas de uma redução na resolução. A sobreposição entre segmentos tem por objetivo permitir um número significativo de segmentos sem uma redução drástica da resolução.

Existe um compromisso entre resolução e variância na escolha destes parâmetros: um número pequeno de segmentos fornece estimativas de maior resolução, porém de variância elevada, enquanto que um aumento do número de segmentos reduz a variância das estimativas, porém também reduz a resolução.

Tem sido proposto, [9], o uso de 50% do número de amostras por segmento como o valor de sobreposição entre os mesmos.

Ambos métodos clássicos, Correlograma e Periodograma serão utilizados e comparados entre si no capítulo 5 para a estimativa espectral de dois processo MA, e novamente no capítulo 6, dentro do contexto da estimação espectral ARMA.

## 2.6 Modelos Paramétricos

Os métodos paramétricos se baseiam no fato que o processo  $x[n]$  sob análise pode ser modelado pela resposta de um filtro linear causal composto por pólos e zeros, cuja excitação é um ruído branco,  $u[n]$ , de média nula e variância  $P_v$ . A DEP de  $x[n]$  é obtida da relação entre os espectros de potência dos processos de entrada e saída.

$$P_{xx}(f) = P_v |H(f)|^2 \quad (2.27)$$

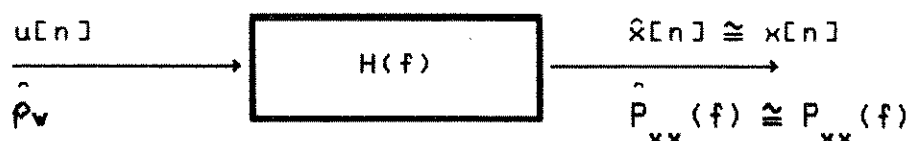
onde  $H(f)$  é a função de transferência do filtro. A forma mais geral para  $H(f)$  é uma função racional composta por  $p$  pólos e  $q$  zeros:

$$H(f) = \frac{\sum_{k=0}^q b[k] \exp(-j2\pi k f T)}{1 + \sum_{k=1}^p a[k] \exp(-j2\pi k f T)} \quad (2.28)$$

É necessário, então, estimar os parâmetros de  $H(f)$  a partir das amostras de  $x[n]$ , de forma tal que a excitação pelo ruído branco gere uma estimativa de  $x[n]$  na saída, conforme ilustrado na figura 2.2.

Desta forma, a DEP do processo gerado constitui uma estimativa da DEP do processo  $x[n]$ , e é completamente determinada por um número finito de variáveis: os parâmetros do filtro e a variância do ruído branco.

Se fosse possível representar as propriedades estatísticas do processo  $x[n]$  de forma fiel através do modelo, os problemas de variância e janelamento decorrentes do conjunto finito de amostras seriam totalmente superados. Porém, para um número finito de amostras, o modelo é também uma estimativa e o processo gerado na sua saída, somente uma aproximação. Contudo, em geral, são obtidos resultados superiores aos fornecidos pelos métodos clássicos, pois é possível fazer uso de técnicas de estimação que permitem explorar melhor as informações presentes nas amostras disponíveis.



**FIGURA 2.2** Aproximação de um Processo Aleatório  $x[n]$  Através de um Modelo Racional

Os três tipos de modelos utilizados nos métodos paramétricos são definidos a partir da equação (2.28):

1. Modelo Auto-Regressivo Média-Ajustável de ordem  $p$  e  $q$ , ARMA( $p, q$ ). Neste modelo a função de transferência do filtro linear é a própria expressão (2.28).

2. Modelo Auto-Regressivo de ordem  $p$ , AR( $p$ ), com  $q=0$  e  $b[0]=1$ . Para este modelo a equação (2.28) torna-se

$$H(f) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^p a[k] \exp(-j2\pi k f T)} \quad (2.29)$$

neste caso o filtro apresenta somente  $p$  pólos.

3. Modelo Média-Ajustável de ordem  $q$ , MA( $q$ ), com  $p=0$ , a função de transferência é:

$$H(f) = \sum_{k=0}^q b[k] \exp(-j2\pi k f T) \quad (2.30)$$

e o filtro é composto por  $q$  zeros apenas.

A motivação para a explicitação destes modelos está ligada ao compromisso que existe entre o tipo de modelo a ser empregado e as características espectrais do processo a ser analisado. Os modelos compostos apenas por pólos são adequados à representação de espectros que apresentem picos, ao passo que aqueles compostos apenas por zeros são indicados para situações onde existem somente vales espectrais abruptos. Logo, os modelos com pólos e zeros são utilizados quando ambas características espectrais estão presentes.

Estes fatos tornam necessário um conhecimento prévio das características espectrais básicas do processo a ser analisado, de modo a permitir a exploração plena da potencialidade dos métodos paramétricos.

## CAPÍTULO 3

## MODELOS PARAMÉTRICOS PARA A ANÁLISE ESPECTRAL

3.1 Introdução

Neste capítulo são apresentadas as relações teóricas que caracterizam o processo gerado pelos modelos ARMA, AR e MA quando excitados por ruído branco. Estas relações são desenvolvidas tendo em vista a aplicação destes modelos na Análise Espectral. Em seguida são apresentadas as dificuldades de obtenção dos parâmetros dos modelos a partir das relações teóricas que envolvem a SAC do processo gerado e são abordadas as relações existentes entre os modelos AR e MA. Finalmente, é discutido o problema de aplicação destes conceitos teóricos na estimativa da DEP de um processo aleatório.

3.2 Modelo Auto-Regressivo Média-Ajustável De Ordem p E q, ARMA(p, q)

A função de sistema do filtro linear causal de um modelo ARMA(p, q) é composta por p pólos e q zeros:

$$H_{\text{ARMA}}(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b[k] z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a[k] z^{-k}} \quad (3.1)$$

ou:

$$H_{\text{ARMA}}(z) = \frac{b[0] \prod_{k=1}^q (1 - \beta_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^p (1 - \rho_k z^{-1})} \quad (3.2)$$

onde  $A(z)$  é a Transformada de Z da sequência de parâmetros  $a[0]$ ,  $a[1]$ , ...,  $a[p]$ , com  $a[0]=1$ , denominados parâmetros auto-regressi-

vos, enquanto que  $B(z)$  é a Transformada de Z da sequência de parâmetros  $b[0], \dots, b[q]$ , denominados parâmetros média-ajustável, e  $p_k$  e  $z_k$  são as raízes dos polinômios  $A(z)$  e  $B(z)$ , respectivamente.

Para garantir que filtro ARMA( $p, q$ ) seja causal e estável, os  $p$  pólos  $p_k$  devem estar no interior da circunferência de raio unitário (CRU) no plano Z [10]. A condição de estabilidade,  $|p_k| < 1$  garante que o processo ARMA gerado seja estacionário [11].

A função de transferência associada é obtida da equação (3.1), substituindo  $z$  por  $\exp(j2\pi fT)$ :

$$H_{\text{ARMA}}(f) = \frac{B(f)}{A(f)} = \frac{\sum_{k=0}^q b[k] \exp(-j2\pi k fT)}{1 + \sum_{k=1}^p a[k] \exp(-j2\pi k fT)} \quad (3.3)$$

A equação (3.2) mostra que  $b[0]$  pode ser considerado como um fator de ganho do filtro ARMA. Neste trabalho iremos empregar  $b[0]=1$ , e o ajuste da potência do processo  $x[n]$ , gerado pelo modelo, se dará através do valor da potência  $P_w$  do ruído branco de excitação.

Das equações (2.27) e (3.3) temos que a DEP do processo ARMA( $p, q$ ) é:

$$P_{\text{ARMA}}(f) = P_w \frac{|B(f)|^2}{|A(f)|^2} = P_w \frac{\left| 1 + \sum_{k=1}^q b[k] \exp(-j2\pi k fT) \right|^2}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p a[k] \exp(-j2\pi k fT) \right|^2} \quad (3.4)$$

ou seja, a DEP do processo ARMA( $p, q$ ) é completamente definida pelos  $p$  parâmetros auto-regressivos,  $a[k]$ , os  $q$  parâmetros média-ajustável,  $b[k]$ , e pela variância,  $P_w$ , do ruído branco.

A figura 3.1 apresenta o espectro de densidade de potência de um processo ARMA (4, 4), onde podemos notar claramente as formas espectrais compostas por picos estreitos e vales abruptos, próprias de um processo ARMA. Os picos ocorrem nas frequências dos pólos da equação (3.2) e se tornam tanto mais agudos quanto mais os pólos correspondentes se aproximem da CRU; de forma semelhante, os vales abruptos correspondem aos zeros e serão tanto mais abruptos quanto mais os zeros se aproximem da CRU.

A equação a diferenças, linear e com coeficientes constantes que define o processo  $x[n]$  na saída do modelo pode ser obtida da aplicação da Transformada Z inversa na expressão (3.1):

$$x[n] = - \sum_{k=1}^p a[k] x[n-k] + \sum_{k=0}^q b[k] u[n-k] \quad (3.5)$$

A relação entre  $x[n]$  e  $u[n]$  também pode ser expressa por:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] u[n-k] \quad (3.6)$$

onde  $h[k]$  é a resposta impulsiva do filtro ARMA( $p$ ,  $q$ ).

O modelo ARMA( $p$ ,  $q$ ) é representado pelo fluxograma da figura 3.2.

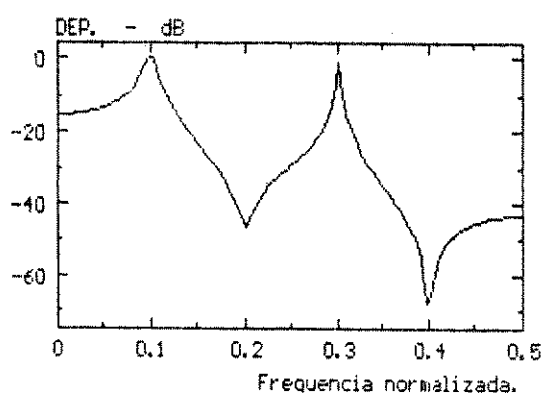


FIGURA 3.1 Espectro de Potência Típico de um Processo ARMA(4, 4).

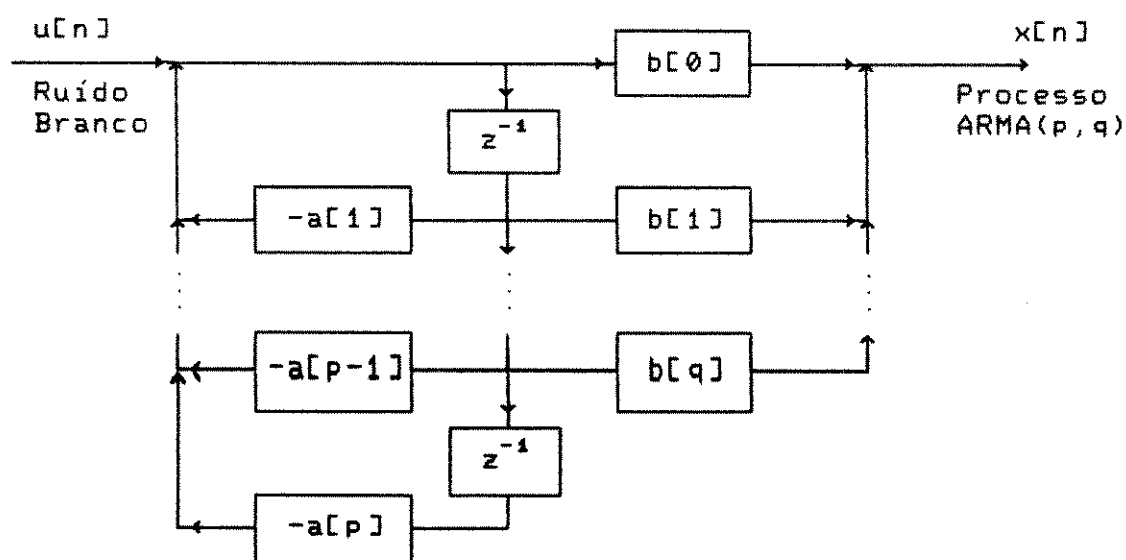


Figura 3.2 Modelo ARMA de Ordem  $p$  e  $q$ .

### 3.2.1 Relação entre os Parâmetros e a SAC de um Processo ARMA(p, q)

Esta relação é bastante importante no contexto da aplicação deste modelo para a análise espectral, pois será a base dos métodos de estimação dos parâmetros ARMA a partir das amostras de um sinal. Ela pode ser obtida reescrevendo a expressão (3.4) da seguinte forma:

$$P_{\text{ARMA}}(z) = \rho_v \frac{B(z)}{A(z)} H^*(z)$$

ou

$$P_{\text{ARMA}}(z) A(z) = \rho_v B(z) H^*(z) \quad (3.7)$$

Calculando a Transforma Z inversa:

$$r_{xx}[m] * [\delta[m] + a[m]] = \rho_v b[m] * h^*[-m] \quad (3.8)$$

onde  $a[m] = \{a[1], \dots, a[p]\}$  e  $b[m] = \{1, b[1], \dots, b[q]\}$  e  $\delta[m]$  é a sequência impulso unitário:

$$\delta[m] = \begin{cases} 1 & ; m=0 \\ 0 & ; m \neq 0 \end{cases}$$

Explicitando a convolução, temos:

$$r_{xx}[m] = - \sum_{k=1}^p a[k] r_{xx}[m-k] + \rho_v \sum_{k=0}^q b[k] h^*[k-m] \quad (3.9)$$

mas  $h[n]=0$  para  $n < 0$ . Logo:

$$r_{xx}[m] = \begin{cases} - \sum_{k=1}^p a[k] r_{xx}[m-k] & ; m > q \quad (3.10a) \\ - \sum_{k=1}^p a[k] r_{xx}[m-k] + \rho_v \sum_{k=m}^q b[k] h^*[k-m]; & 0 \leq m \leq q \quad (3.10b) \\ r_{xx}^*[-m] & ; m < 0 \quad (3.10c) \end{cases}$$

Podemos observar que a relação entre os parâmetros auto-regressivos do processo ARMA( $p$ ,  $q$ ) e sua SAC é linear para  $|m| > q$ , enquanto que os parâmetros média-ajustável estão convoluídos com os coeficientes da resposta impulsiva  $h[n]$ , resultando numa relação não-linear com a SAC.

Também, a SAC de um processo ARMA( $p$ ,  $q$ ) não tem um limite definido, o que significa que as amostras do processo são todas correlacionadas entre si, independente do intervalo que as separa. Isto é consequência da presença de pólos no modelo e quanto mais próximos à CRU estes se encontram, maior é a sobreposição entre respostas impulsivas do filtro ARMA excitadas em instantes distintos, resultando numa maior correlação entre as amostras correspondentes.

A figura 3.2 permite inferir que os conjuntos de amostras do ruído branco  $\{u[n-q], \dots, u[n]\}$  e  $\{u[n-q+m], \dots, u[n+m]\}$  formam a componente média-ajustável de  $x[n]$  e de  $x[n+m]$ , respectivamente. Estes dois conjuntos são compostos por amostras totalmente distintas quando  $|m| > q$ . Logo, as componentes média-ajustável correspondentes são incorrelatas entre si para  $|m| > q$ . Este é o motivo pelo qual os parâmetros  $b[k]$  participam da definição da SAC somente para  $|m| \leq q$ . Isto não significa que a componente média-ajustável do processo ARMA não influencie a SAC para  $|m| > q$ , pois a autocorrelação deste processo é uma sequência regressiva em si mesma, conforme as equações (3.10a) e (3.10b).

A estimação de um modelo ARMA para representar a DEP de um sinal parte de estimativas da SAC obtidas das amostras disponíveis, e faz uso das relações expressas na equação (3.10) para avaliar os parâmetros do modelo. Vamos analisar esta tarefa supondo, por enquanto, que a SAC é perfeitamente conhecida.

A não-linearidade destas relações, decorrente da convolução entre os parâmetros  $b[k]$  e a resposta impulsiva do filtro ARMA, não permite obter simultaneamente os parâmetros do modelo através de algoritmos de fácil implementação. Para esta finalidade são utilizadas técnicas iterativas de elevada complexidade, [2], [11].

Entretanto, a linearidade observada para  $|m| > q$  permite que os parâmetros auto-regressivos sejam calculados separadamente dos média-ajustável, através de um sistema de  $p$  equações formado com

base na expressão (3.10a). Por exemplo, do seguinte sistema de equações lineares, com  $r_{xx}[m]$  no intervalo  $q+1 \leq m \leq q+p$ :

$$\begin{bmatrix} r_{xx}[q] & r_{xx}[q-1] & \dots & r_{xx}[q-p+1] \\ r_{xx}[q+1] & r_{xx}[q] & \dots & r_{xx}[q-p+2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}[q+p-1] & r_{xx}[q+p-2] & \dots & r_{xx}[q] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a[1] \\ a[2] \\ \vdots \\ a[p] \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_{xx}[q+1] \\ r_{xx}[q+2] \\ \vdots \\ r_{xx}[q+p] \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Este sistema é denominado Equações Normais ARMA de Yule-Walker ou Equações Modificadas de Yule-Walker. A matriz de autocorrelações é Toeplitz, o que facilita a solução do sistema através de um algoritmo de eliminação Gaussiana [1], [2].

Contudo, ainda que os parâmetros auto-regressivos sejam conhecidos, não é possível calcular com a mesma facilidade os média-ajustável devido à não-linearidade da relação de convolução. Torna-se necessário utilizar de certos algoritmos indiretos, conhecidos como métodos de estimação separada dos parâmetros do modelo ARMA, os quais serão estudados no capítulo 6. O estudo das características deste métodos é o objetivo central deste trabalho. Seu desenvolvimento requer os conceitos a serem desenvolvidos no restante deste capítulo, bem como nos capítulos 4 e 5.

### 3.3 MODELO AUTO-REGRESSIVO DE ORDEM p, AR(p)

O modelo AR(p) é um caso particular do modelo ARMA(p, q), onde os zeros são eliminados, restando apenas os pólos. A função de sistema do filtro AR(p) pode ser obtida da expressão (3.1) fazendo  $q=0$  e  $b[0]=1$ , ou seja:

$$H_{AR}(z) = \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^p a[k] z^{-k}} \quad (3.12)$$

Os p pólos devem estar dentro da CRU para que o filtro seja estável e o processo gerado, estacionário.

Desta forma, a equação a diferenças linear associada será:

$$x[n] = - \sum_{k=1}^p a[k] x[n-k] + u[n] \quad (3.13)$$

onde os parâmetros  $a[k]$  e o processo  $u[n]$  são definidos como na seção anterior. O modelo  $AR(p)$  é representado no fluxograma da figura 3.3.

Particularizando a expressão (3.4), obtemos a DEP do processo  $AR(p)$ :

$$P_{AR}(f) = \frac{P_u}{|A(f)|^2} = \frac{P_u}{\left| 1 + \sum_{n=1}^p a[n] \exp(-j2\pi n f T) \right|^2} \quad (3.14)$$

A figura 3.4 mostra o espectro de potência de um processo  $AR(4)$ , onde observamos os picos estreitos, que correspondem aos pólos do filtro  $AR$ , e a ausência de vales abruptos em decorrência da ausência de zeros. Tal como no caso do modelo  $ARMA$ , os picos serão tanto mais agudos quanto mais próximos à CRU se encontrarem os pólos correspondentes. Logo, o modelo  $AR$  é adequado para a análise de processos com estas características espectrais.

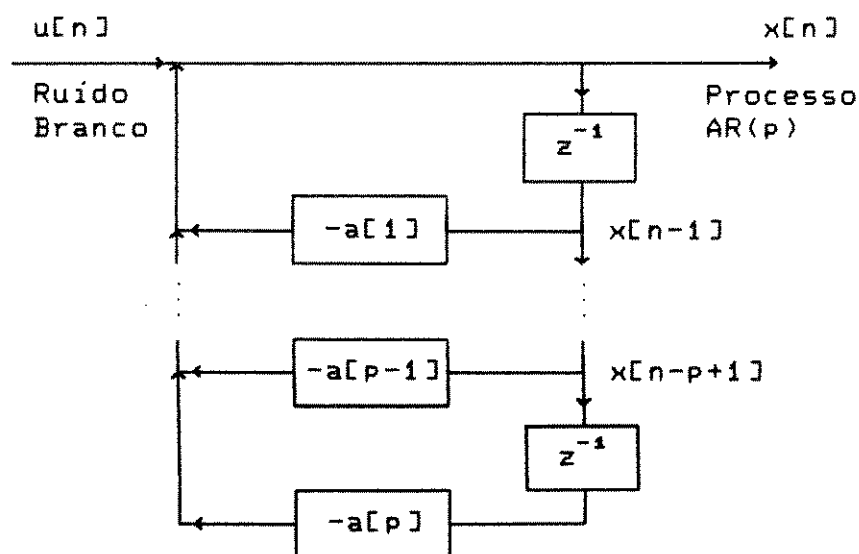


Figura 3.3 Modelo AR De Ordem p.

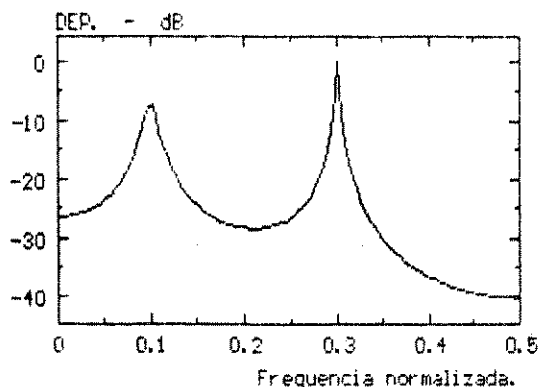


FIGURA 3.4 Espectro de Potência Típico de um Processo AR(4).

### 3.3.1 Relação entre os Parâmetros e a SAC de um Processo AR(p)

Fazendo  $q=0$  nas equações (3.10), obtemos a relação entre os parâmetros de um processo AR(p) e sua SAC:

$$r_{xx}[m] = \begin{cases} - \sum_{k=1}^p a[k] r_{xx}[m-k] + p_v \delta[m] & ; m \geq 0 \\ r_{xx}^*[-m] & ; m < 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (3.15a) \\ (3.15b) \end{matrix}$$

onde  $\delta[m]$  é a sequência impulso unitário, já definida.

A presença de  $p_v$  para  $m=0$  decorre do fato de  $b[0]=1$ , o que faz com que  $h[0]=1$ .

O anulamento dos coeficientes  $b[k]$  eliminou a presença da operação de convolução, presente na equação (3.10b), tornando linear a relação entre a SAC e os parâmetros  $a[k]$ . Este fato simplificará significativamente a tarefa de estimação do modelo AR, como será discutido mais adiante.

Observamos ainda, que a SAC do processo AR(p), do mesmo modo que no caso ARMA, não tem um comprimento definido. Logo, aqui também as amostras do processo gerado são todas correlacionadas entre si, independente do intervalo que as separe. Este fato pode ser intuitivo de forma alternativa a partir da equação (3.13), a qual mostra que  $x[n]$  depende das amostras passadas.

A estimação dos parâmetros de um modelo AR, supondo que a SAC seja conhecida, pode ser realizada através do seguinte sistema de  $p+1$  equações lineares, obtido da equação (3.15) para  $0 \leq m \leq p$ :

$$\begin{bmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}^*[1] & \dots & r_{xx}^*[p] \\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & \dots & r_{xx}^*[p-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}[p] & r_{xx}[p-1] & \dots & r_{xx}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a[1] \\ \vdots \\ a[p] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p\sigma^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Este sistema, denominado de Equações Normais AR de Yule-Walker, em homenagem aos pioneiros dos modelos de regressão, mostra que para obter a variância do ruído branco e os parâmetros do processo AR(p), basta conhecer sua SAC no intervalo  $0 \leq m \leq p$ . Paralelamente, uma vez obtidos estes parâmetros, os valores de  $r_{xx}[m]$  para  $|m| > p$  podem ser obtidos recursivamente através da equação (3.15a), lembrando que  $r_{xx}[-m] = r_{xx}^*[m]$ :

A matriz de correlações do sistema de equações (3.16) é Toeplitz e Hermetiana, o que permite a solução deste sistema através do algoritmo de Levinson-Durbin. Este é um algoritmo eficiente de fácil implementação, e fornece os parâmetros do modelo AR de forma recursiva [1], [2].

Nas situações práticas onde se pretende aplicar o modelo AR para estimação da DEP de um processo  $x[n]$ , não dispomos dos valores da SAC para estimar os parâmetros do modelo. Entretanto, é possível substituir  $r_{xx}[m]$  por estimativas da mesma obtidas a partir das amostras disponíveis do processo. A matriz de correlações formada por tais estimativas, continua a satisfazer as condições acima e o algoritmo de Levinson-Durbin poderá ser utilizado, desde que a matriz apresente inversa.

Em função destas características, o modelo AR tem sido amplamente estudado e aplicado.

### 3.4 MODELO MÉDIA-AJUSTÁVEL DE ORDEM q, MA(q)

O modelo MA(q) é o outro caso particular do modelo ARMA(p, q) onde os pólos são eliminados. Assim, fazendo  $p=0$  na expressão (3.1), obtemos a função de sistema do filtro MA(q):

$$H_{MA}(z) = B(z) = 1 + \sum_{k=1}^q b[k] z^{-k} \quad (3.17)$$

O fato do filtro MA(q) apresentar apenas zeros faz com que a resposta impulsiva seja de comprimento finito. Portanto, o filtro é sempre estável e o processo MA(q) gerado é sempre estacionário. Se os q zeros se situarem no interior da CRU, o filtro apresentará fase mínima.

A equação a diferenças linear que define um processo MA(q) é dada por:

$$x[n] = u[n] + \sum_{k=1}^q b[k] u[n-k] \quad (3.18)$$

onde os parâmetros média-ajustável, b[k], são os coeficientes da resposta impulsiva do filtro MA(q). O modelo MA(q) é representado no fluxograma da figura 3.5.

Paralelamente, a DEP de um processo MA(q) é dada por:

$$P_{MA}(f) = P_u |B(f)|^2 = P_u \left| 1 + \sum_{k=1}^q b[k] \exp(-j2\pi k f T) \right|^2 \quad (3.19)$$

NA figura 3.6 é mostrado o espectro de potência de um processo MA(4), onde as formas espectrais predominantes são os vales abruptos, correspondentes aos zeros do filtro. Logo, o modelo MA é adequado para processos com esta característica espectral.

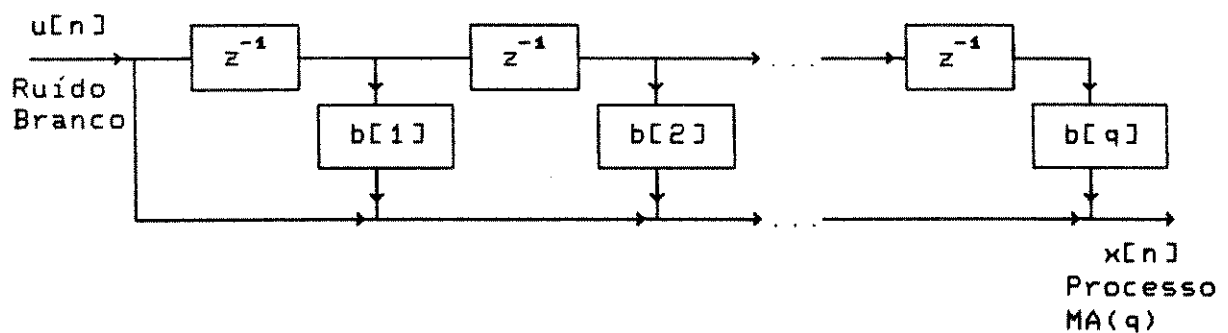


Figura 3.5 Modelo MA de Ordem q.

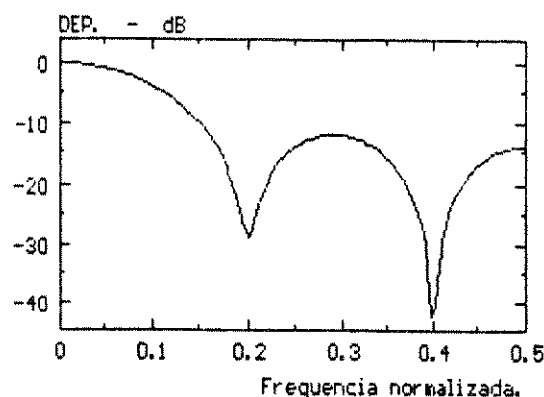


FIGURA 3.6 Espectro de Potência Típico de um Processo MA(4).

### 3.4.1 Relação entre os Parâmetros e a SAC de um Processo MA(q)

Fazendo  $p=0$  na expressão 3.10 e lembrando que  $h[k] = b[k]$ , obtemos:

$$r_{xx}[m] = \begin{cases} 0 & ; m > q \\ \rho_v \sum_{k=m}^q b[k] b^*[k-m] & ; 0 \leq m \leq q \\ r_{xx}^*[-m] & ; m < 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

na qual persiste a relação não-linear entre a SAC e os  $q$  parâmetros do processo MA(q).

Podemos constatar da expressão (3.20) que a SAC de um processo MA(q), é nula para  $|m| > q$ . Isto significa que amostras do processo separadas por um intervalo  $|m| > q$  são incorrelatas. De fato, a equação (3.18) permite inferir que as amostras do ruído branco que formam  $x[n]$  são totalmente distintas daquelas que compõem  $x[n+m]$  para  $|m| > q$ . Portanto,  $x[n]$  e  $x[n+m]$  são incorrelatas entre si, para  $|m| > q$ .

A presença da relação não linear entre a SAC e os coeficientes  $b[k]$  tornam difícil a tarefa de estimação destes coeficientes a partir de  $r_{xx}[m]$ . Existem duas técnicas propostas:

1. Técnicas iterativas de grande complexidade que não possuem garantia de convergência [11].

2. Técnicas de fatoração espectral que também apresentam alto grau de dificuldade, mas garantem uma solução satisfatória [5].

Entretanto, os parâmetros de um modelo  $MA(q)$ , também podem ser encontrados de forma indireta, através da relação existente entre os parâmetros de um modelo AR de ordem infinita e os do  $MA(q)$ , apresentada na seção a seguir, e que é explorada de forma ampla no capítulo 5 como parte do método de Durbin para a estimação de parâmetros média-ajustável.

Em virtude da dificuldade de obtenção de seus parâmetros e de sua qualidade como estimador espectral, o modelo  $MA(q)$  tem sido pouco estudado e utilizado. Entretanto, sua participação nos métodos de estimação separada dos parâmetros do modelo  $ARMA(p, q)$  é bastante importante, e motivou o estudo detalhado de suas características no capítulo 5.

### **3.5 RELAÇÃO ENTRE OS MODELOS AR E MA**

Existem relações envolvendo os três modelos as quais permitem expressar um determinado modelo em função de outro. Assim um processo  $ARMA(p, q)$  ou  $MA(q)$  pode ser representado através de um modelo AR de ordem infinita, enquanto que um processo  $ARMA(p, q)$  ou  $AR(p)$ , através de um MA de ordem infinita.

A importância destas relações reside em que, na prática podemos selecionar qualquer dos três modelos e ainda obter uma boa aproximação de um dado processo aleatório, desde que uma ordem suficientemente elevada seja utilizada. Ou ainda, podemos estimar os parâmetros de um modelo a partir das amostras do processo aleatório e, a partir desses, estimar os parâmetros de outro modelo [1].

Trataremos especificamente da relação entre os parâmetros dos modelos  $AR(\infty)$  e  $MA(q)$ , que é a base do método de Durbin para estimação dos parâmetros MA, apresentado no capítulo 5. As relações entre os outros modelos podem ser encontradas seguindo procedimento análogo [12].

Seja:

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a[n] z^{-n} \quad (3.21)$$

o polinômio do denominador da função de sistema de um modelo AR( $\infty$ ), onde  $a[n] = 0$  para  $n < 0$  e  $a[0] = 1$ , e

$$B(z) = 1 + \sum_{n=1}^q b[n] z^{-n} \quad (3.22)$$

o polinômio associado a um modelo MA( $q$ ).

Encontramos a equivalência entre os parâmetros  $a[n]$  e  $b[n]$ , igualando a função do sistema  $B(z)$  ao inverso de  $A(z)$ :

$$B(z) = \frac{1}{A(z)} \quad (3.23)$$

de onde resulta:

$$A(z) B(z) = 1 \quad (3.24)$$

Aplicando a Transformada Z inversa nesta expressão obtemos a relação desejada:

$$a[n] + \sum_{k=1}^q b[k] a[n-k] = \delta[n] \quad (3.25)$$

onde  $\delta[n]$  é a sequência impulso unitário, já definida.

Dados os parâmetros  $a[n]$  podemos calcular os parâmetros do modelo MA( $q$ ) formando um conjunto de  $q$  equações lineares a partir da expressão (3.25) para  $1 \leq n \leq q$ .

Embora, na prática, não seja possível estimar um modelo AR( $\infty$ ), este pode ser aproximado por um de ordem muito elevada ( $p \gg q$ ). Isto permite contornar as dificuldades de estimar os parâmetros do modelo MA( $q$ ), aproveitando a facilidade de obtenção dos parâmetros dos modelos auto-regressivos: estimamos inicialmente, a partir das amostras disponíveis do processo, os parâmetros de um modelo AR de ordem suficientemente elevada (AR longo) e, utilizando as relações desta seção, obtemos as estimativas dos parâmetros do MA( $q$ ).

### 3.6 Estimadores Espectrais Paramétricos

O objetivo aqui é apresentar algumas considerações sobre a utilização das relações teóricas dos modelos paramétricos nas situações práticas onde se pretende a análise espectral de um processo aleatório  $x[n]$  qualquer.

A princípio, é necessário estimar os parâmetros do modelo a ser utilizado, seja ARMA, AR ou MA, a partir do conjunto finito de amostras disponível, e substituí-las na equação correspondente da DEP, (3.4), (3.14) ou (3.19), para obter a estimativa espectral.

Entretanto, devemos antes selecionar o modelo a ser utilizado em função das características espectrais do processo  $x[n]$ . Estas não são, em geral, conhecidas e devem ser inferidas do conjunto de amostras disponível, o que pode ser efetuado através do método Periodograma.

Escolher o modelo adequado às características espectrais do processo é bastante importante. Se, por exemplo, for utilizado um modelo MA para estimar um espectro de potência com somente picos estreitos, então a ordem do modelo deverá ser bastante elevada para que a estimativa resultante seja de boa qualidade. A opção por um modelo AR permitiria a utilização de uma ordem muito menor, e a qualidade da estimativa resultante seria superior. Além disto, o esforço necessário para estimar os parâmetros seria consideravelmente menor.

Por outro lado, uma vez selecionado o modelo correto, a ordem do mesmo deve ser tal que evite a presença de formas espectrais falsas ou o mascaramento de detalhes importantes na estimativa do espectro de potência. Por exemplo, no caso de processos com picos espectrais estreitos, uma ordem auto-regressiva elevada poderá provocar a formação de picos espúrios, enquanto que uma ordem insuficiente fornecerá espectros de baixa resolução onde os picos espectrais não serão explicitados adequadamente.

Existem diversos critérios para a seleção da ordem. Dentre eles, o Critério de Informação de Akaike para os modelos AR, MA e ARMA será apresentado nos capítulos a seguir.

Em geral, a estratégia adotada para estimar os parâmetros do modelo selecionado consiste em obter inicialmente uma estimativa

da SAC a partir das amostras disponíveis do processo  $x[n]$ . Esta, então, é substituída na relação correspondente entre a SAC e os parâmetros do modelo, equação (3.10), (3.16) ou (3.20). É desta nova relação aproximada que são obtidas as estimativas dos parâmetros. Entretanto, o fato de trabalharmos com uma SAC estimada gera imprecisões, mesmo quando  $x[n]$  é um processo obtido através do modelo racional selecionado.

O uso dos estimadores espectrais paramétricos fornecem estimativas de melhor qualidade que os estimadores espectrais clássicos, particularmente quando é necessário grande resolução e se dispõe de seqüências de amostras de comprimento pequeno.

Alguns métodos para obter os parâmetros dos modelos paramétricos a partir de uma estimativa da SAC serão objeto dos próximos capítulos.

## CAPÍTULO 4

### ESTIMADORES DO MODELO AUTO-REGRESSIVO,

### MÉTODOS COM BASE NA ANÁLISE DE PREDIÇÃO LINEAR

#### 4.1 Introdução

No capítulo anterior foi delineado o método de estimação dos parâmetros do modelo AR baseado na matriz de autocorrelações dos dados e no algoritmo de Levinson-Durbin. Entretanto, tal método apresenta resultados satisfatórios apenas nas situações onde o número de amostras disponíveis é bem maior que a ordem do modelo AR desejado.

O objetivo deste capítulo é apresentar métodos baseados na Teoria de Predição Linear, em particular o método Covariância e Covariância Modificado, que oferecem melhor resolução espectral às custas de um maior esforço computacional. A abordagem destes métodos aqui visa apenas criar um suporte para sua aplicação nos métodos de estimação MA e ARMA dos capítulos seguintes.

#### 4.2. Relação entre a Análise de Predição Linear e o Modelo Auto-Regressivo

Existe uma relação estreita entre a análise de predição linear e a modelagem auto-regressiva. Tal relação tem sido amplamente explorada para a obtenção dos parâmetros do modelo AR, e é apresentada a seguir.

Abordaremos primeiro a predição linear progressiva de um processo  $x[n]$ . Usamos o termo progressiva como o equivalente à palavra inglesa "forward" e denotamos as variáveis envolvidas com o sub-índice  $f$ . De forma semelhante, utilizaremos o termo regressivo em substituição a "backward" e mantemos o sub-índice  $b$ , para a predição linear regressiva.

Seja  $\hat{x}_f[n]$  a predição linear progressiva da amostra  $x[n]$ , em termos das  $p$  amostras anteriores  $x[n-1], \dots, x[n-p]$ , isto é:

$$\hat{x}_f[n] = - \sum_{k=1}^p a_f[k] x[n-k] \quad (4.1)$$

Onde  $a_f[1], \dots, a_f[p]$  são os coeficientes da predição linear progressiva.

O erro de predição da amostra  $x[n]$  é definido como:

$$\begin{aligned} e_f[n] &= x[n] - \hat{x}_f[n] \\ &= x[n] + \sum_{k=1}^p a_f[k] x[n-k] \end{aligned} \quad (4.2)$$

e sua potência média  $P_f$  como:

$$P_f = E \left\{ |e_f[n]|^2 \right\} \quad (4.3)$$

A equação (4.2) é a equação a diferenças linear que descreve o filtro de erro de predição progressiva de ordem  $p$  mostrado na figura 4.1, onde  $x[n]$  é o processo de excitação deste filtro e  $e_f[n]$  seu processo residual.

Sabe-se que os  $p$  coeficientes  $a_f[k]$ , que minimizam a potência do erro de predição são obtidos solucionando-se o seguinte sistema de equações [1], [2], [6]:

$$\begin{bmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}^*[1] & \dots & r_{xx}^*[p] \\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & \dots & r_{xx}^*[p-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}[p] & r_{xx}[p-1] & \dots & r_{xx}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_f[1] \\ \vdots \\ a_f[p] \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} P_f \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

onde  $r_{xx}[m]$  é a SAC teórica do processo  $x[n]$ .

Este sistema tem estrutura idêntica às Equações Normais AR de Yule-Walker, equação (3.16). Também, a equação (4.2) é similar a expressão (3.13) que define um modelo AR( $p$ ).

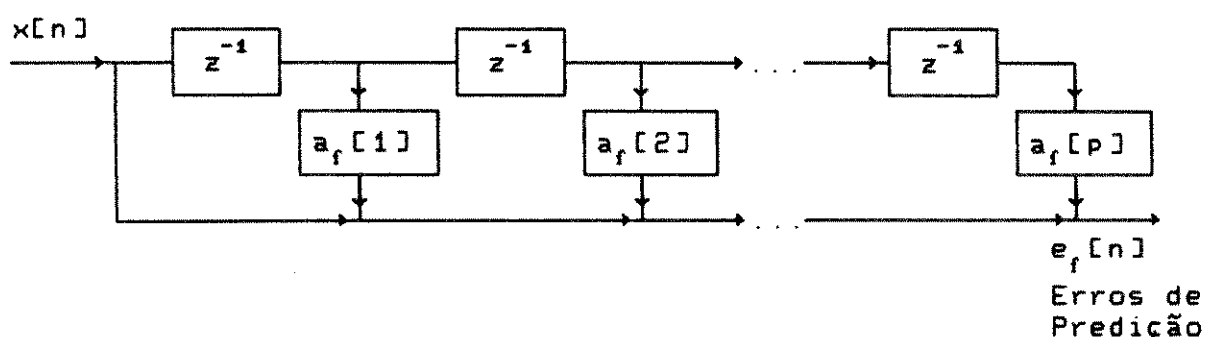


Figura 4.1 Filtro de Erro de Predição Progressiva de Ordem  $p$ .

Desta forma, se o processo  $x[n]$  foi gerado por um filtro  $AR(p)$ , então a sequência de erros de predição é o ruído branco  $u[n]$  da equação (3.13), os coeficientes da predição linear progressiva são os parâmetros auto-regressivos ( $a_f[k] = a[k]$ ) e o filtro de erro de predição (que é o inverso do filtro  $AR(p)$ ) é um filtro branqueador.

De forma semelhante, seja  $\hat{x}_b[n]$  a predição linear regressiva da amostra  $x[n]$ , em função das  $p$  amostras futuras  $x[n+1], \dots, x[n+p]$ :

$$\hat{x}_b[n] = - \sum_{k=1}^p a_b^*[k] x[n+k] \quad (4.5)$$

onde  $a_b[1], \dots, a_b[p]$  são os coeficientes da predição linear regressiva de ordem  $p$ .

O erro  $e_b[n]$  desta predição é dado pela equação a seguir:

$$\begin{aligned} e_b[n] &= x[n] - \hat{x}_b[n] \\ &= x[n] + \sum_{k=1}^p a_b^*[k] x[n+k] \end{aligned} \quad (4.6)$$

e a potência a ser minimizada:

$$\rho_b = E \{ |e_b[n]|^2 \} \quad (4.7)$$

Os coeficientes  $a_b[k]$  que minimizam  $\rho_b$  são obtidos através do seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}^*[1] & \dots & r_{xx}^*[p] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}[p-1] & r_{xx}[p-2] & \dots & r_{xx}^*[1] \\ r_{xx}[p] & r_{xx}[p-1] & \dots & r_{xx}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_b[p] \\ \vdots \\ a_b[1] \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \rho_b \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Onde a matriz de autocorrelações é a mesma da equação (4.4). Estas semelhanças permitem demonstrar que as soluções das equações matriciais (4.4) e (4.8) apresentam as seguintes propriedades [1], [2], [6]:

$$\begin{aligned} a_b[k] &= a_f^*[k] \quad 1 \leq k \leq p \\ \rho_b &= \rho_f \end{aligned} \quad (4.9)$$

Também, ambas predições lineares contêm a mesma informação estatística do processo  $x[n]$ . Assim, se o filtro de erro de predição progressiva é um filtro branqueador de um processo  $AR(p)$ , então o filtro de erro de predição regressiva pode ser considerado como o filtro branqueador de uma realização anti-causal do mesmo processo.

#### 4.3 Métodos de Estimação AR Baseados na Predição Linear Progressiva

Seja a sequência de amostras  $x[0], \dots, x[N-1]$ , de um processo  $x[n]$  no qual se deseja efetuar uma modelagem  $AR(p)$ . De acordo com a teoria da seção anterior, a técnica de predição linear permitiria obter os parâmetros deste modelo. Entretanto não conhecemos a SAC de  $x[n]$  e não podemos montar a equação (4.4). Torna-se então necessário definir outro critério de otimização que leve em conta o número finito de amostras disponíveis.

A estratégia mais empregada nesta situação é a minimização da soma dos erros quadráticos de predição das amostras disponíveis, a qual é geralmente denominada critério dos mínimos quadrados. Visando explicitar tal critério, vamos considerar os erros de predição:

$$e_f[n] = x[n] - \hat{x}_f[n] = x[n] + \sum_{k=1}^p a_f[k] x[n-k] \quad (4.10)$$

definidos no intervalo  $0 \leq n \leq N-1+p$ , considerando  $x[n]=0$  para  $n < 0$  e  $n \geq N$ .

Os  $N+p$  erros de predição representados pela equação (4.10), podem ser expressos na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} e_f[0] \\ \vdots \\ e_f[p] \\ \vdots \\ e_f[N-1] \\ \vdots \\ e_f[N-1+p] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x[0] & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x[p] & \dots & x[0] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x[N-1] & \dots & x[N-1-p] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & x[N-1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_f[1] \\ \vdots \\ a_f[p] \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

onde a matriz de amostras de ordem  $(N+p) \times (p+1)$ , denominada  $X$ , é uma matriz retangular Toeplitz. Seus elementos nas extremidades superior direita e inferior esquerda são nulos devido a que  $x[n]=0$  para  $n < 0$  e  $n \geq N$ .

Os coeficientes da predição linear são encontrados minimizando a potência do erro de predição:

$$P_f = \sum_n |e_f[n]|^2 \quad (4.12)$$

onde os limites da soma não foram especificados de propósito, já que sua seleção determina os critérios distintos para a determinação de tais coeficientes. Dentre estes, estudaremos:

1. Método Autocorrelação.
2. Método Covariância.

### Método Autocorrelação

Neste método são selecionados todos os  $N+p$  termos do erro de predição associados à matriz de amostras  $X$ , de modo que a relação

entre os erros predição,  $e_f[n]$ , e os coeficientes  $a_f[k]$ , é a própria equação (4.11):

$$\mathbf{e}_f = \mathbf{X} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_f \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_f &= [e_f[0], \dots, e_f[N-1+p]]^T \\ \mathbf{a}_f &= [a_f[1], \dots, a_f[p]]^T \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde "T" denota a operação de transposição.

Assim, o objetivo é encontrar o conjunto de coeficientes que minimizam  $P_f$  dado por:

$$P_f = \sum_{n=0}^{N-1+p} |e_f[n]|^2 \quad (4.15)$$

Pode-se mostrar que este conjunto ótimo é obtido pela solução da equação [1]:

$$\mathbf{X}^H \mathbf{X} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_f \\ \mathbf{0}_p \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

onde  $\mathbf{0}_p$  é um vetor de  $p$  elementos nulos.

O produto  $\mathbf{R} = \mathbf{X}^H \mathbf{X}$  é uma matriz quadrada de ordem  $(p+1)$ , Hermitiana, cujos elementos,  $rr[i,j]$ , são:

$$\begin{aligned} rr[i,j] &= \sum_{n=0}^{N-1+p} x^*[n-i] x[n-j] = \sum_{n=0}^{N-1-(i-j)} x[n+i-j] x^*[n] \\ rr[i,j] &= rr^*[j,i] \end{aligned} \quad (4.17)$$

para  $0 \leq i-j \leq p$ . Como  $rr[i,j]$  depende apenas de diferença  $(i-j)$ , a matriz  $\mathbf{R}$  é também Toeplitz. Se cada termo  $rr[i,j]$  é dividido pelo número de amostras,  $N$ , então estes termos serão iguais as estimativas polarizada da autocorrelação:  $\tilde{r}_{xx}[i-j] = rr[i,j]/N$ . Se  $P_f$  é também dividido por  $N$ , então as equações normais (4.16) serão

idênticas as equações de Yule-Walker (3.16), com a SAC teórica substituída pelas estimativas polarizadas de autocorrelação do processo  $x[n]$ .

A matriz  $R$ , além de ser Toeplitz e Hermitiana, é também positiva definida, o que garante que a sequência  $\{1, a_f[1], \dots, a_f[p]\}$ , solução da equação (4.16), será de fase mínima [2]. Logo, o filtro de erro de predição associado também o será. Isto garante que o modelo  $AR(p)$  (cuja função de sistema é a inversa do filtro de erro de predição) apresentará todos seus pólos no interior da CRU e será, portanto, estável.

Estas características da matriz  $R$  permite a solução da equação matricial (4.16) através do algoritmo de Levinson-Durbin, o qual apresenta um número pequeno de operações proporcional a  $p^2$ , em contraste com o método de eliminação Gaussiana (algoritmo de Cholesky) onde o número de operações é proporcional a  $p^3$  [1].

Os elementos nulos na matriz de amostras  $X$  estão associados aos registradores de conteúdo nulo no filtro de erro de predição linear; o que implica que os erros de predição na saída do filtro serão maiores que aqueles obtidos quando o filtro está "cheio", ou seja, quando todos seus registradores apresentam conteúdo não-nulo. Isto acarreta estimativas espectrais  $AR$  com resolução pobre, principalmente quando o número de amostras é pequeno. Nesta situação a qualidade das estimativas obtidas é bastante semelhante à daquelas fornecidas pelo método Periodograma [1].

Este fato motivou a avaliação de outros métodos onde os erros correspondentes à situação em que o filtro não está completamente "cheio" são desenfaturados ou abandonados. Dentre estes, destaca-se o método Covariância.

#### Método da Covariância

Aqui são selecionados apenas os  $N-p$  termos do erro de predição  $e_f[p], \dots, e_f[N-1]$ , associados aos elementos não-nulos da matriz  $X$ . Isto significa que não é colocada nenhuma hipótese sobre as amostras fora do intervalo  $0 \leq n \leq N-1$ .

Os elementos não-nulos da matriz  $X$  utilizados formam a matriz  $T$ , Toeplitz, de ordem  $(N-p) \times (p+1)$ :

$$T = \begin{bmatrix} x[p] & \dots & x[0] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x[N-1] & \dots & x[N-1-p] \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

A relação entre os erros de predição e os coeficientes  $a_f[k]$  é:

$$e_f = T \begin{bmatrix} 1 \\ a_f \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

onde o vetor  $a_f$  é definido como na equação (4.14), e

$$e_f = [e_f[p], \dots, e_f[N-1]]^T \quad (4.20)$$

Assim, a potência média do erro de predição a ser minimizada é:

$$P_{cv} = \frac{1}{N-p} \sum_{n=p}^{N-1} |e_f[n]|^2 \quad (4.21)$$

e as equações normais que a minimizam são:

$$T^H T \begin{bmatrix} 1 \\ a_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{cv} \\ 0_p \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

O produto  $R = T^H T$  é uma matriz Hermitiana quadrada de ordem  $(p+1)$ . Também é uma matriz não-Toeplitz, já que seus elementos:

$$rr[i, j] = \frac{1}{N-p} \sum_{n=p}^{N-1} x^*[n-i] x[n-j] \quad ; \quad 0 \leq i, j \leq p \quad (4.23)$$

não podem ser expressos em termos da diferença  $(i-j)$ .

Em função disto, o sistema de equações normais (4.22) é resolvido através do algoritmo de Cholesky, resultando em um esforço computacional maior que o método Autocorrelação.

A matriz  $R$  é, em geral, positiva definida, o que significa que não se pode garantir que os coeficientes de predição encontrados formem uma sequência de fase-mínima [2]. Logo o modelo  $AR(p)$  correspondente poderá ser instável. Para a aplicação em análise espectral, esta instabilidade não é problemática.

Uma condição necessária, mas não suficiente, para que a matriz  $R$  seja não singular é [1]:

$$p \leq \frac{N}{2} \quad (4.24)$$

o que condiciona a escolha da ordem do modelo  $AR(p)$ .

Uma vez que a matriz de amostras  $T$  está associada ao filtro de erro de predição "cheio", cada amostras  $x[n]$  no intervalo  $p \leq n \leq N-1$  é prevista unicamente em termos das amostras disponíveis, e, portanto, os erros de predição tendem a ser pequenos. Como resultado o uso do método Covariância fornece estimativas espectrais  $AR$  com resolução significativamente melhor que o método anterior, particularmente quando o número de amostras disponíveis é pequeno.

#### 4.4 Método Covariância Modificado

Na seção 4.2, foi mencionado que as predições lineares progressivas e regressivas contêm a mesma informação estatística do processo  $x[n]$ . Entretanto, o mesmo não se verifica quando dispomos de um conjunto finito de amostras para calcular os filtros ótimos. Neste caso os preditores progressivos e regressivos ótimos segundo o critério dos mínimos quadrados fornecerão resultados distintos [1]. Este fato sugere a combinação de ambas predições para gerar mais pontos de erros e obter, como resultado, melhores estimativas dos parâmetros do modelo  $AR(p)$ .

Desta forma o erro de predição regressiva,  $e_b[n]$ , equação (4.6), pode ser expresso como:

$$e_b[n] = x[n-p] + \sum_{k=1}^p a_b^*[k] x[n-p+k] \quad (4.25)$$

onde agora é utilizada a notação  $n-p$ , em lugar de  $n$ , para que  $e_f[n]$  e  $e_b[n]$  sejam funções do mesmo conjunto de amostras  $(x[n], x[n-1], \dots, x[n-p])$ .

A estratégia adotada para o cálculo dos coeficientes é a minimização da soma dos erros quadráticos da predição progressiva e regressiva:

$$P_{\text{cvM}} = \frac{1}{2(N-p)} \left[ \sum_{n=p}^{N-1} |e_f[n]|^2 + \sum_{n=p}^{N-1} |e_b[n]|^2 \right] \quad (4.26)$$

sujeita à condição que  $a_f[k] = a_b^*[k]$  para  $1 \leq k \leq p$ . Aqui também são utilizados apenas os erros correspondentes a filtros cheios, o que justifica os extremos no somatório da equação (4.26).

A minimização de  $P_{\text{cvM}}$  nas condições acima leva ao seguinte sistema de equações:

$$R \begin{bmatrix} 1 \\ a_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2P_{\text{cvM}} \\ 0 \\ p \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

onde  $R$  é dado por,

$$R = T^H T + J T^H T^* J \quad (4.28)$$

$T$  é a matriz do item anterior e  $J$  é a matriz de reflexão quadrada de ordem  $(p+1)$ :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$R$  é uma matriz quadrada de ordem  $(p+1)$ , não-Toeplitz, Hermi-tiana cujos elementos são, [2]:

$$rr[i,j] = \frac{1}{2(N-p)} \left[ \sum_{n=p}^{N-1} x^*[n-i] x[n-j] + \sum_{n=0}^{N-1-p} x[n+i] x^*[n+j] \right] \quad (4.30)$$

A sequência de estimativas de parâmetros auto-regressivos obtidas através deste método pode não ser de fase mínima. A matriz  $R$  é, em geral, positiva definida e a ordem auto-regressiva a ser escolhida deve obedecer a

$$p \leq \frac{2N}{3} \quad (4.31)$$

a qual é a condição necessária mas não suficiente para que  $R$  seja não singular [1].

Tal como no método anterior, o Covariância Modificado requer um número de operações proporcional a  $p^3$ , para a solução das equações normais (4.27) através do algoritmo de Cholesky.

Este método é altamente indicado para situações onde se necessita de grande resolução e se dispõe de um número reduzido de amostras. Seu desempenho é superior ao do método Covariância, porém o esforço computacional também é maior.

O método Covariância Modificado tem sido amplamente estudado dentro do contexto de detecção de senóides em ruído branco. E é observado que para esta finalidade seu melhor desempenho é atingido quando a ordem do modelamento AR é [13], [14]:

$$p = \frac{N}{3} \quad (4.32)$$

#### 4.5 Seleção da Ordem do Modelo AR

Sabemos que a seleção da ordem do modelo AR representa um compromisso entre o aumento da resolução e a diminuição da variância do espectro de potência estimado.

Como não se sabe previamente qual é a melhor ordem a ser utilizada diversos critérios de seleção da ordem tem sido propostos

[1], [2]. Dentre eles apresentamos o Critério de Informação Akaike, CIA.

O CIA determina a ordem do modelo minimizando uma função de informação teórica. Para processos AR de características estatísticas Gaussianas, este critério estabelece que a ordem  $p$  adequada é aquela que minimiza [1]:

$$CIA[p] = N \ln(P\omega) + 2p \quad (4.33)$$

onde

$N$  é o número de amostras disponíveis

$\ln$  é a função logaritmo natural

$P\omega$  é a estimativa da variância do ruído branco, e

$p$  é a ordem a ser selecionada.

Uma forma de testar se a ordem  $p$  selecionada é a mais adequada é verificar se os resíduos produzidos pelo filtro branqueador de ordem  $p$  associado, quando alimentado pelo processo sob análise, se aproximam de um processo tipo ruído branco; ou seja, se o espectro de potência dos resíduos é aproximadamente constante. Este espectro pode ser estimado através do método Correlograma ou o Periodograma.

## CAPÍTULO 5

### ESTIMAÇÃO ESPECTRAL MÉDIA-AJUSTAVÉL

#### 5.1 Introdução

Como foi observado no capítulo 3, o uso do estimador espectral MA é adequado para a análise de processos cuja DEP é formada por picos de faixa larga, vales abruptos ou ambos. Por outro lado, uma vez que este modelo é composto apenas por zeros, seu uso não é aconselhado quando se deseja estimativas espectrais de alta resolução. Também a relação de convolução (3.20) dificulta a estimação de seus parâmetros em função da SAC estimada do processo sob análise.

Embora estas desvantagens, as técnicas de estimação MA fazem parte importante dos métodos de estimação separada dos parâmetros do modelo ARMA, apresentados no capítulo a seguir.

É em função deste fato que estudamos aqui o método de Durbin para a estimação dos parâmetros do modelo  $MA(q)$ , bem como a comparação entre este e os métodos clássicos, Correlograma e Periodograma, na estimativa espectral de processos MA.

Analizamos com riqueza de detalhes, o uso do método de Durbin para a estimativa espectral de dois processos  $MA(4)$  onde são apresentadas novas idéias que permitiram alcançar melhor desempenho. Em seguida, as estimativas obtidas são comparadas com as fornecidas pelos estimadores clássicos.

#### 5.2 Método de Durbin para a Estimação dos Parâmetros do Modelo MA

Como descrito no capítulo 3, este método é uma alternativa para contornar as dificuldades da estimação dos parâmetros do modelo  $MA(q)$ . É um algoritmo indireto, de fácil implementação e que utiliza relações lineares.

A base do método de Durbin  equaco (3.25) da relao entre o modelo  $AR(\infty)$  e o modelo  $MA(q)$ :

$$a[n] + \sum_{k=1}^q b[k] a[n-k] = d[n] \quad 0 \leq n \leq \infty \quad (5.1)$$

Dado que no  possível estimar um modelo  $AR$  com ordem infinita, este é substituído por um modelo  $AR(L)$  de ordem suficientemente elevada ( $L \gg q$ ), o qual é geralmente denominado  $AR$  longo. As estimativas de seus coeficientes so obtidas do conjunto de amostras disponíveis do processo  $x[n]$ , através de algum método de estimaco dos parâmetros do modelo  $AR$ , como, por exemplo, os apresentados no capítulo anterior.

A ordem  $L$  deve ser a maior possível, pois quanto maior o seu valor, melhor será a aproximao entre o processo  $AR(L)$  e o  $MA(q)$  desejado. A fim de compreender este fato, vamos retomar a equaco (3.23) que estabelece o critério de equivalência entre os modelos e analisar a relao entre as respostas impulsivas dos filtros associados. Especificamente, vamos inverter a relao (3.23) e calcular a resposta impulsiva de  $1/B(z)$ , em funo dos  $q$  zeros,  $z_k$ , do polinmio  $B(z)$ . Por questo de simplicidade, consideraremos somente zeros simples. Assim:

$$\begin{aligned} A(z) = \frac{1}{B(z)} &= \frac{1}{1+b[1]z^{-1}+\dots+b[q]z^{-q}} \\ &= \frac{1}{\prod_{k=1}^q (1 - z_k z^{-1})} \end{aligned}$$

A expanso de  $1/B(z)$  em fraces parciais permite escrever:

$$A(z) = \frac{1}{B(z)} = \frac{A_1}{(1-z_1 z^{-1})} + \dots + \frac{A_q}{(1-z_q z^{-1})}$$

Da transformada  $Z$  inversa:

$$h_{1/B(z)}[n] = [A_1 z_1^n + \dots + A_q z_q^n] d[n] \quad (5.2)$$

onde  $d[n]$   a seqncia degrau unitário:

$$d[n] = \begin{cases} 1 & ; n \geq 0 \\ 0 & ; n < 0 \end{cases}$$

A equaco (5.2) mostra que enquanto  $|a_k| < 1$ , a resposta impulsiva associada a  $1/B(z)$  decresce exponencialmente com  $n$ , indicando um comprimento ilimitado e, portanto, uma ordem infinita para  $A(z)$ . Entretanto, se suas amplitudes tornam-se desprezveis para valores de  $n$  maiores que  $L$ , será possível trunc-la neste valor gerando um polinmio  $A(z)$  de ordem  $L$ , ou seja, um filtro AR equivalente de ordem  $L$ . Podemos inferir de imediato que quanto mais próximos  CRU no plano  $Z$  estiverem os zeros de  $B(z)$ , maior será o valor de  $L$  necessário para garantir uma boa aproximaco para o processo  $MA(q)$ .

Do ponto de vista da aplicaco para análise espectral, devemos observar que os vales espectrais serão representados pelos zeros do polinmio  $B(z)$  do modelo  $MA(q)$  a ser estimado. Logo, os zeros deste modelo deverão se situar tanto mais próximos da CRU quanto mais abruptos forem os vales do espectro a ser avaliado. Assim, quanto mais abruptos forem os vales maior deverá ser a ordem  $L$  do modelo AR longo, de modo a garantir uma boa qualidade na estimativa do modelo  $MA(q)$ .

Deve-se observar que a adoco de uma ordem  $L$  finita faz com que os parâmetros  $a[n]$  sejam nulos para  $n > L$  e a igualdade da equaco (5.1) d lugar a uma aproximaco. Expressando este ltimo fato através de um erro  $e[n]$ , podemos reescrever (5.1) da seguinte forma:

$$e[n] = a[n] + \sum_{k=1}^q b[k] a[n-k] \quad ; \quad 0 \leq n \leq L \quad (5.3)$$

Seria desejável que  $e[n]$  fosse nulo para todo valor de  $n$  exceto  $n=0$ , onde deveria ser unitário, uma vez que, por hipótese,  $a[0]=1$ . Na impossibilidade, podemos escolher os parâmetros  $MA$ , dados os  $a[n]$ , de modo a minimizar a potência de erro  $e[n]$  sujeito  restrico  $e[0] = a[0] = 1$ .

A estrutura da equaco (5.3)  semelhante  de um filtro de erro de predico progressiva de ordem  $q$  e coeficientes  $b[k]$ , onde  $\{1, a[1], \dots, a[L]\}$   a seqncia de entrada deste filtro. Assim, os coeficientes  $b[k]$  timos podem ser obtidos da teoria do capítulo 4, segundo o critério dos mínimos quadrados. Logo, vamos analisar a possibilidade de aplicaco dos métodos Autocorrelaco e Covarincia a este caso.

No método Autocorrelaco, os parmetros  $b[k]$  sero estimados minimizando a potência média do erro de predico,  $P_{AT}$ , dada por:

$$P_{AT} = \frac{1}{L+1} \sum_{n=0}^L \left| a[n] + \sum_{k=1}^q b[k] a[n-k] \right|^2 \quad (5.4)$$

onde os  $a[n]$  so considerados nulos fora do intervalo de observaco ( $0 \leq n \leq L$ ). Isto garante que o erro de predico para  $n=0$  ser igual a  $a[0]$ .

J no método Covarincia, os parmetros  $b[k]$  so encontrados minimizando a potência média do erro de predico,  $P_{CV}$ , dada por:

$$P_{CV} = \frac{1}{L+1-q} \sum_{n=q}^L \left| a[n] + \sum_{k=1}^p b[k] a[n-k] \right|^2 \quad (5.5)$$

Os limites da soma na equaco (5.5) fazem com que sejam considerados apenas os  $a[n]$  no intervalo  $0 \leq n \leq L$ . Logo, nenhuma hiptese é colocada sobre os valores de  $a[n]$  fora deste intervalo. Ainda e por esta razo, o erro de predico para  $n=0$  no ser igual a  $a[0]$  (de fato este erro no é utilizado no processo de minimizaco, como podemos deduzir da equaco (5.5)).

Podemos concluir que o método Autocorrelaco é o mais adequado, pois a hiptese de amostras nulas fora do intervalo de observaco é coerente com o fato de que os parmetros  $a[k]$  do modelo AR longo devero ser nulos para  $n < 0$  e  $n > L$ . Além destes fatos, é interessante mencionar que o método Autocorrelaco fornece a estimativa de mxima verossimilhana dos parmetros do modelo MA a partir dos parmetros do modelo AR longo, [2].

O método Covarincia Modificado também no é adequado para a soluo da equaco (5.3), pois os erros de predico regressiva no so semelhantes aos desta equaco.

Por fim, a estimativa da variância  $P_v$  do ruído branco que compõe a entrada do modelo MA desejado, é obtida quando da estimação dos parâmetros do modelo AR(L).

Em resumo, o algoritmo de Durbin pode ser decomposto nos seguintes passos:

- **Passo 1:** Dado um conjunto finito de amostras do processo  $x[n]$ , estimar os parâmetros do modelo AR(L) e a variância do ruído branco, através de um dos métodos de estimação dos parâmetros AR.

- **Passo 2:** Com os dados  $\{1, a[1], \dots, a[L]\}$ , estimar os parâmetros do modelo MA(q) através do método Autocorrelação.

Dado que o método Autocorrelação sempre fornece estimativas de fase mínima, a sequência de parâmetros MA estimada pelo método de Durbin será também de fase mínima mesmo que a função de sistema do modelo AR longo não apresente esta característica.

Para a seleção da ordem  $q$  do modelo MA podemos utilizar o critério CIA, o qual apresenta as mesmas características da seleção da ordem do modelo AR.

Entretanto, para processos MA este critério frequentemente determina uma ordem muito pequena, [1]. Uma forma de testar se a ordem selecionada é correta, consiste em verificar se a sequência residual do filtro MA inverso é um processo branco.

Um outro esquema para estimar a ordem do modelo MA foi proposto no texto de referência [15]. Sabe-se que a sequência de autocorrelação,  $r_{xx}[m]$ , de um processo MA(q) é nula para  $|m| > q$ . Esta proposta consiste em procurar o valor mínimo de  $m$  a partir do qual as estimativas de autocorrelação do processo  $x[n]$  tornam-se desprezíveis. Este valor mínimo é adotado como a estimativa de  $q$ .

### 5.3 Método de Durbin: Análise Qualitativa

O objetivo aqui é realizar uma análise qualitativa do desempenho do método de Durbin em relação a vários parâmetros. Para tal, supomos que o processo  $x[n]$  sob análise foi gerado por um modelo MA de ordem  $q$  e que conhecemos apenas  $N$  amostras do mesmo. Esta hipótese é interessante pois garante que a utilização de um

modelo MA( $q$ ) para a análise do processo é a melhor opo. Com isto conseguimos separar fatores de influência e eliminar os efeitos que resultam quando no se adota o modelo mais adequado para a análise de um dado sinal. Poderemos ento avaliar de forma isolada a influência de fatores como a posio dos zeros do filtro gerador do sinal, número de amostras disponíveis e método de estimaco do modelo AR longo.

Dado que o primeiro passo do método de Durbin é estimar os parâmetros de um modelo AR longo, vamos considerar inicialmente a questo da seleo de um método para tal estimativa.

Nas referências [1] e [2], utiliza-se apenas o método Autocorrelaco. Também, no temos conhecimento de nenhum trabalho que aborde o uso de outros métodos. Entretanto, foi mencionado no capítulo 4 que os métodos Covariância e Covariância Modificado permitem atingir estimativas AR de melhor qualidade, principalmente quando o número de amostras disponíveis para análise é relativamente pequeno e o espectro do processo apresenta picos agudos. E podemos imaginar que a qualidade da estimativa do modelo AR longo é bastante importante para a qualidade da estimativa MA final. Isto nos motiva a iniciar aqui uma análise comparativa sobre a aplicaco destes três métodos.

No método Autocorrelaco é utilizado o estimador polarizado de correlaco, o qual, como foi mostrado no capítulo 2, fornece estimativas cuja variância no cresce em demasia  medida que o ndice destas se aproxima do número de amostras. Este fato, aliado à positividade da matriz de correlaco associada, permite escolher ordens auto-regressivas próximas do número de amostras e ainda obter estimativas espectrais relativamente estáveis estatisticamente.

Por outro lado, as matrizes de correlaco associadas aos métodos Covariância e Covariância Modificado se tornam singular quando a ordem auto-regressiva  $L$   grande em relao ao número  $N$  de amostras. O valor de  $L$  deve ser menor ou igual a  $N/2$  no método Covariância, e menor ou igual a  $2N/3$  no Covariância Modificado. Logo, tais métodos impem restricoes mais severas para a escolha da ordem  $L$ .

Porém, se as restricoes acima favorecem o método Autocorrelaco

co, os métodos Covarincia e Covarincia Modificado produzem estimativas de melhor qualidade. Assim, torna-se necessário um estudo mais detalhado que permita identificar qual o fator predominante para a qualidade final da estimativa MA.

Consideremos agora a localizao dos zeros do processo MA sob o qual realizaremos a análise espectral. Quando estes zeros se encontram prximos ¢ CRU, o espectro de potência apresenta vales abruptos e o comprimento efetivo da resposta impulsiva associada a  $1/B(z)$  é elevado. Isto significa que a ordem do modelo AR longo também deverá ser elevada. A possibilidade de utilizarmos uma ordem AR elevada e ainda respeitar os limites de singularidade e estabilidade dos métodos de estimaco auto-regressiva, dependerá principalmente do nmero de amostras disponível. Se este for pequeno  provável que no possamos escolher uma ordem AR adequada.

No caso em que os zeros do processo MA se encontram afastados da CRU, a ordem do modelo AR pode ser menor que na situao anterior. Com isto fica mais fácil conseguirmos uma ordem auto-regressiva adequada. Como o espectro de potência deste tipo de processo é caracterizado por formas suaves, sem vales abruptos,  de se esperar que os três métodos da predico linear sejam capazes de fornecer boas estimativas espectrais.

Esta análise revela a necessidade da realizao de simulaes para observao do desempenho em funo dos parâmetros discutidos.

#### 5.4 Método de Durbin: Análise Quantitativa

Avaliaremos aqui o desempenho do método de Durbin nas estimativas espectrais de dois processos MA(4). Os parâmetros e o espectro de potência terico de cada processo so mostrados na Tabela 5.1 e na figura 5.1, respectivamente. O processo MA<sub>0</sub> foi tomado da referência [2], e o MA<sub>1</sub> foi escolhido da forma a termos um processo com vales abruptos no espectro da potência.

Para cada processo foram geradas trinta seqncias com 256 amostras cada uma, através de uma rotina de gerao de dados. De posse destas seqncias efetuamos dois conjuntos de simulaes: um com as 256 amostras, o outro com 64 amostras.

| Processo | Zeros                                                        | Parâmetros |       |        |       |          |
|----------|--------------------------------------------------------------|------------|-------|--------|-------|----------|
|          |                                                              | b[1]       | b[2]  | b[3]   | b[4]  | $\rho_v$ |
| $MA_0$   | $0.7 \exp[\pm j2\pi(0.21)]$<br>$0.7 \exp[\pm j2\pi(0.12)]$   | -1.352     | 1.338 | -0.662 | 0.240 | 1        |
| $MA_1$   | $0.96 \exp[\pm j2\pi(0.24)]$<br>$0.96 \exp[\pm j2\pi(0.21)]$ | -0.598     | 1.900 | -0.551 | 0.849 | 1        |

Tabela 5.1 Processos MA Utilizados nas Simulaes

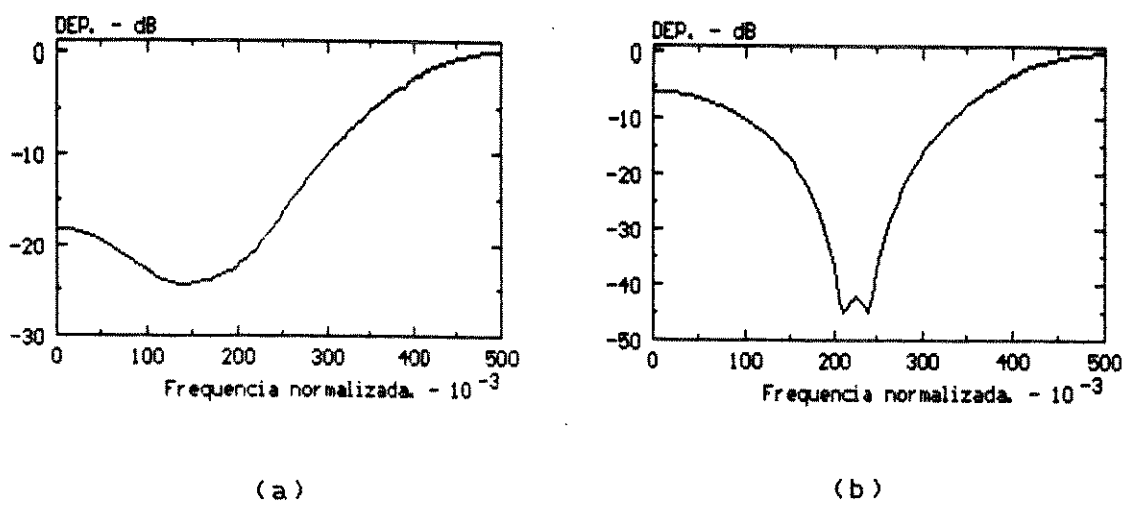


Figura 5.1 Espectro de Potência dos processos: (a)  $MA_0$ , (b)  $MA_1$

A ordem do modelo AR longo foi selecionada segundo os seguintes critérios:

$L = N/5$ , conforme sugesto presente em [2].

$L = N/3$ , valor para o qual o método Covariância Modificado apresenta melhor desempenho para a deteco de senides em rudo branco.

$L = N/2$ , limite de singularidade no método Covariância.

$L = 2N/3$ , limite de singularidade no método Covariância Modificado.

A ordem do modelo MA a ser estimado, foi fixada em  $q=4$ , ou seja, a mesma do processo a ser analisado.

As estimativas espectrais pelo método de Durbin (estimativas Durbin), e as fornecidas pelo modelo AR longo (estimativas AR),

são apresentadas da seguinte forma:

- a média das estimativas e o espectro de potência teórico (curva pontilhada) são apresentadas simultaneamente de modo a permitir a visualização da polarização dos estimadores;

- as estimativas isoladas estão traçadas de forma sobreposta de modo a explicitar a variação das mesmas.

Consideremos inicialmente o processo  $MA_0$ . Dado que o espectro de potência não apresenta vales abruptos, não é necessário que a ordem do modelo AR longo seja muito grande. De fato, o módulo dos zeros é 0.7 e para a menor ordem utilizada,  $L=12$  ( $L=N/5$  para  $N=64$  amostras), temos  $0.7^{12}=0.014$  (equação (5.2)). Portanto, podemos considerar que as amplitudes da resposta impulsiva de  $1/B(z)$  serão pequenas a partir de  $n=12$ , o que garante boas aproximações do processo  $MA_0$  para todos os valores de  $L$  considerados.

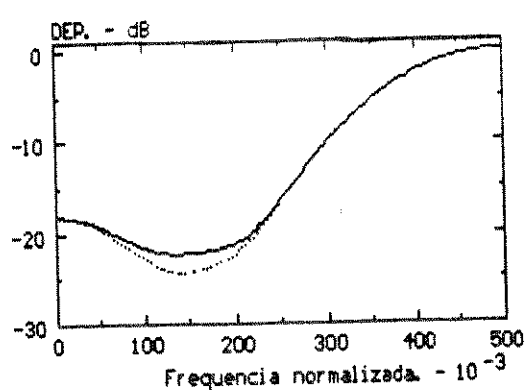
Passemos às simulações. Para o conjunto das trinta seqüências com  $N=64$ , referente ao processo  $MA_0$ , utilizamos as seguintes ordens para o modelo AR longo:  $L=12$  ( $N/5$ ),  $L=21$  ( $N/3$ ),  $L=32$  ( $N/2$ ) e  $L=42$  ( $2N/3$ ). Os resultados obtidos foram:

#### Para $L=12$ , Figuras 5.2 e 5.3

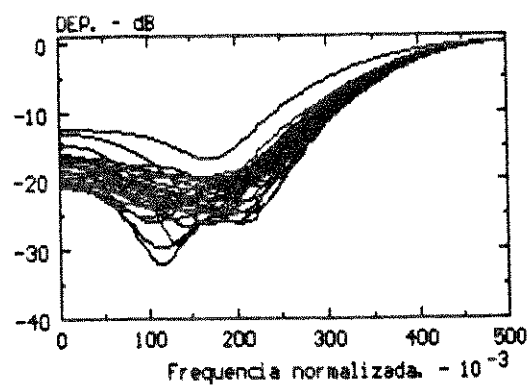
As estimativas Durbin apresentaram boa qualidade e foram semelhantes entre si, tanto na média como na variação. As estimativas espectrais AR no gráfico das estimativas se afastam do espectro de potência do processo  $MA_0$ , uma vez que elas, em geral, apresentam as formas agudas típicas produzidas pelos pólos do modelo AR. Entretanto, tais variações são bastante atenuadas ao realizarmos a conversão do modelo AR para MA. Este comentário deve ser levado em conta sempre que observemos uma estimativa espectral AR de um processo MA.

#### Para $L=21$ , Figuras 5.4 e 5.5

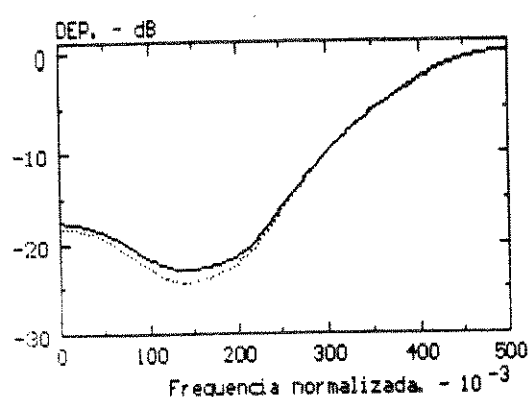
Os resultados para os três métodos da predição linear apresentaram diferenças significativas entre si. Os de melhor qualidade foram aqueles obtidos com método Autocorrelação. Suas estimativas Durbin são semelhantes àsquelas do caso  $L=12$ ; razão pela qual seus gráficos foram omitidos, visando economia de espaço. As estimativas com os métodos Covariância e Covariância Modificado foram inferiores àsquelas para  $L=12$ . Entre os dois métodos o Covariância Modificado foi melhor.



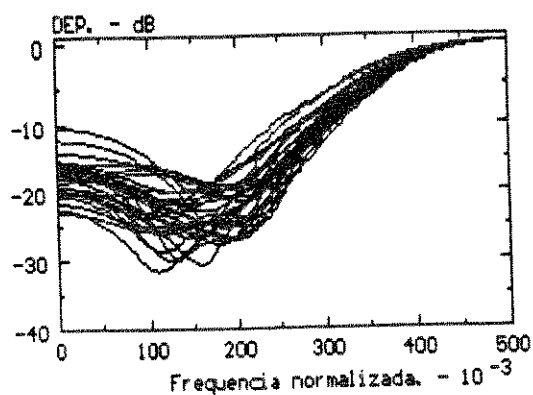
(a) média



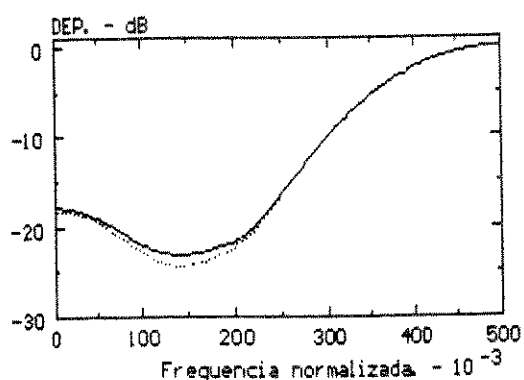
(a) estimativas



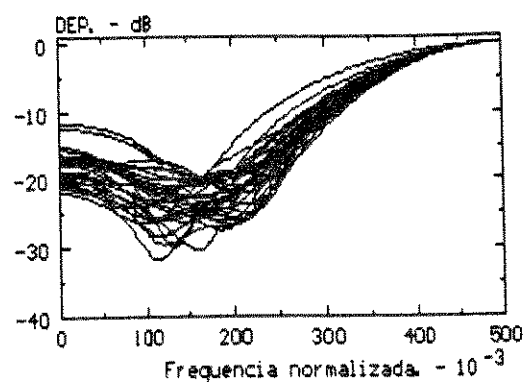
(b) média



(b) estimativas



(c) média



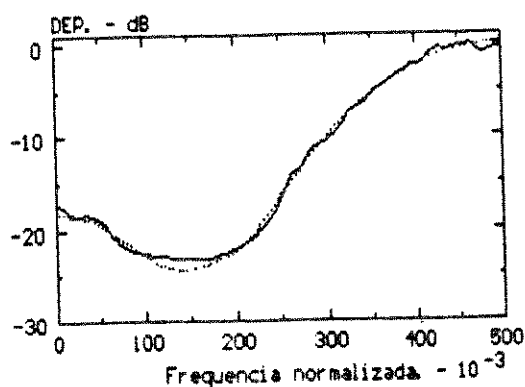
(c) estimativas

Figura 5.2 Estimativas Durbin, Processo  $MA_0$ ,  $N=64$ , Modelo AR Longo de Ordem 12:

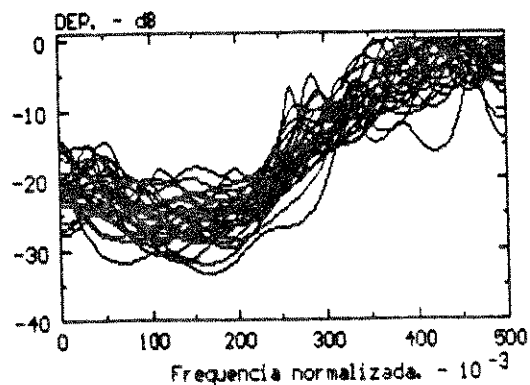
(a) Método Autocorrelaco,

(b) Método Covariância,

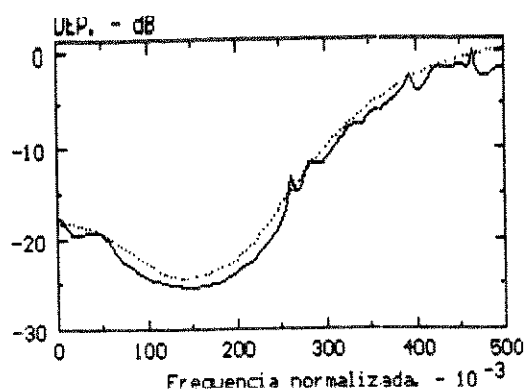
(c) Método Covariância Modificado.



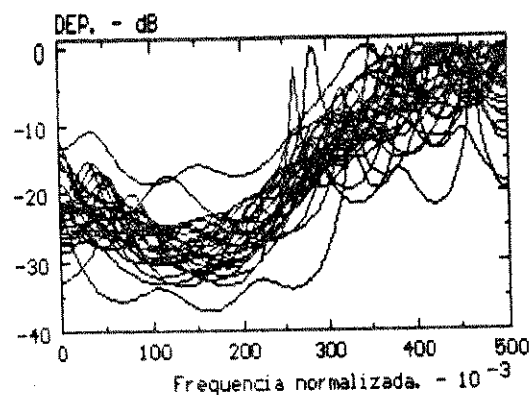
(a) média



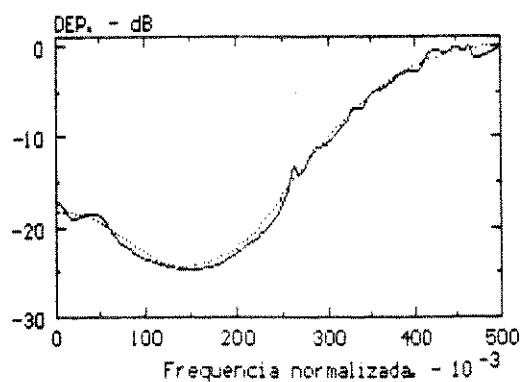
(a) estimativas



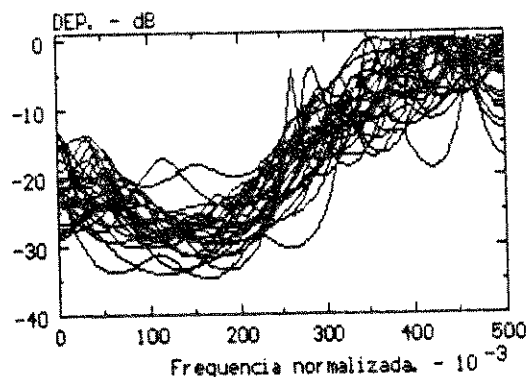
(b) média



(b) estimativas

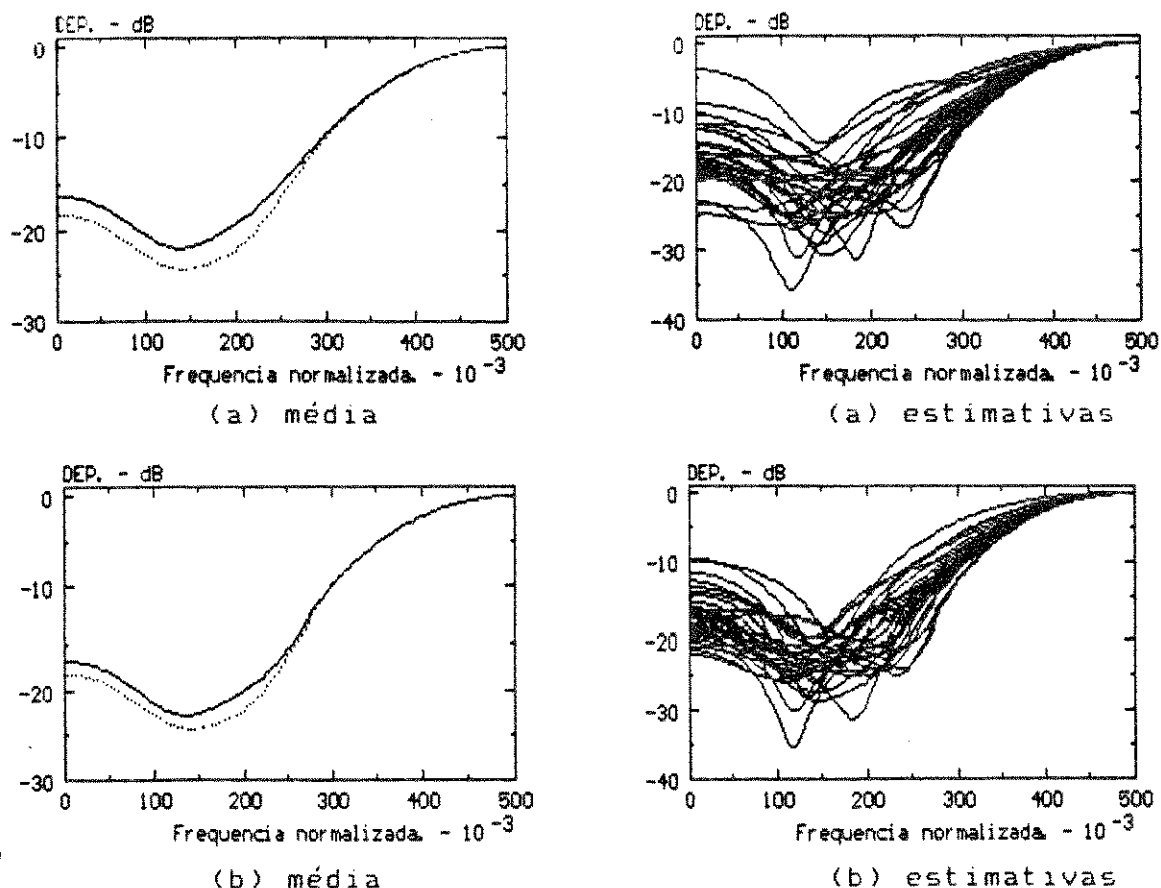


(c) média



(c) estimativas

**Figura 5.3 Estimativas AR de Ordem 12, Processo MA<sub>0</sub>, N=64,****(a) Método Autocorrelaco,****(b) Método Covariância,****(c) Método Covariância Modificado.**

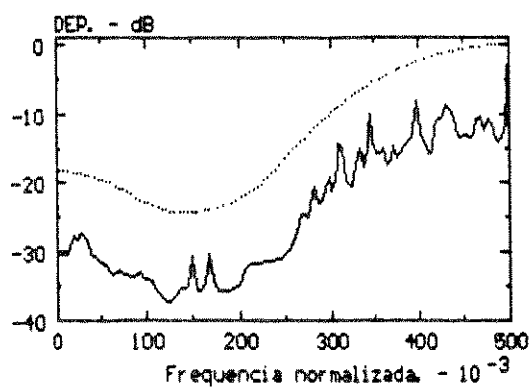


**Figura 5.4 Estimativas Durbin, Processo  $MA_9$ ,  $N=64$ , Modelo AR Longo de Ordem 21: (a) Método Covariância, (b) Método Covariância Modificado.**

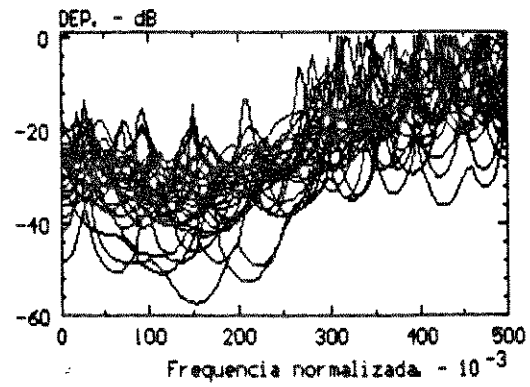
Nos gráficos de média das estimativas AR aparece uma diferença entre as curvas de aproximadamente 10 dB para a Covariância e de 5 dB para a Covariância Modificado. Tal diferença é consequência da normalização efetuada para o traçado das estimativas (valor máximo igual a 0 dB), e não do estimador em si.

**Para  $L=32$ , Figuras 5.6 e 5.7**

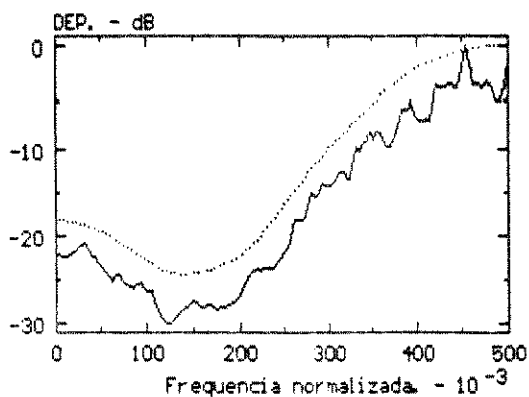
As diferenças neste caso se tornaram mais significativas. A matriz de correlações associada ao método Covariância se tornou singular para todas as seqüências de amostras (observe que esta ordem é o limite de singularidade do método), o que inviabilizou seu uso neste caso. Novamente, os resultados do método Autocorrelação foram os melhores, e ainda semelhantes aos de  $L=12$ . As estimativas com o método Covariância Modificado foram inferiores às anteriores.



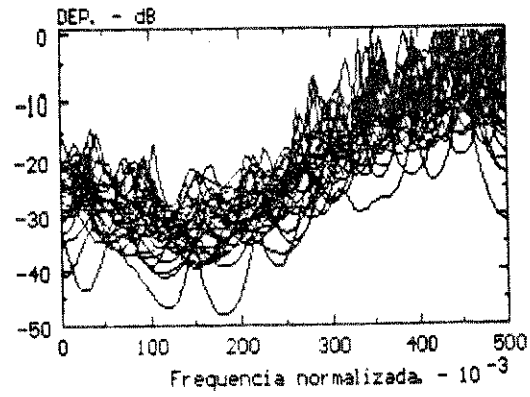
(a) mdia



(a) estimativas

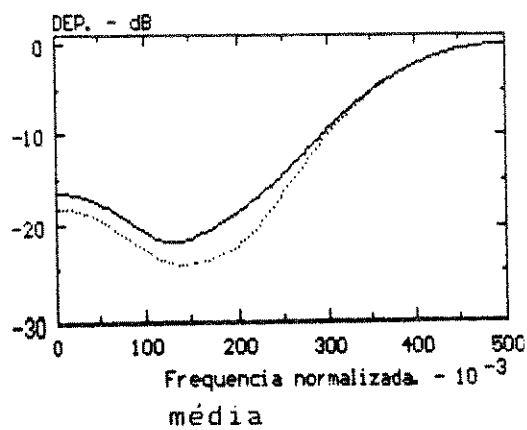


(b) média

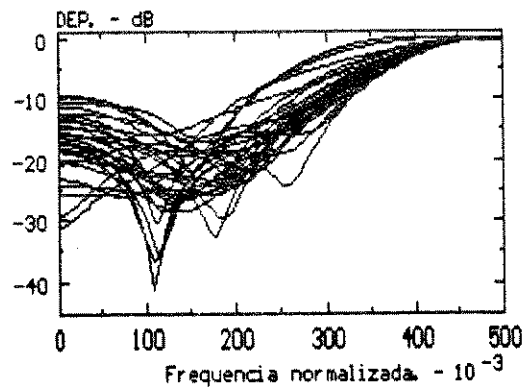


(b) estimativas

Figura 5.5 Estimativas AR de Ordem 21, Processo  $MA_0$ ,  $N=64$ ,  
(a) Método Covariância,  
(b) Método Covariância Modificado.



média



estimativas

Figura 5.6. Estimativas Durbin, Processo  $MA_0$ ,  $N=64$ , Modelo AR  
Longo de Ordem 32, Método Covariância Modificado.

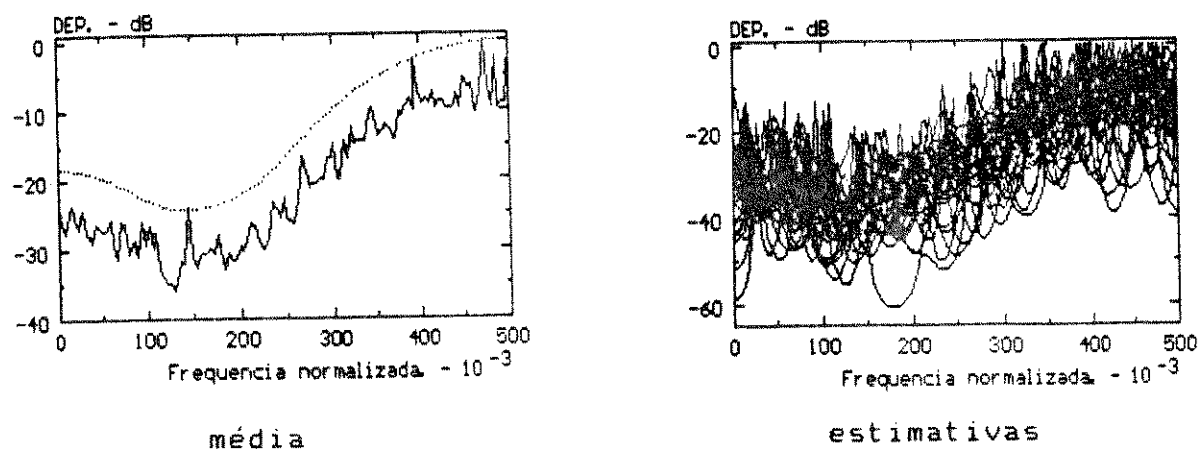


Figura 5.7 Estimativas AR de Ordem 32, Processo  $MA_0$ ,  $N=64$ , Método Covariância Modificado.

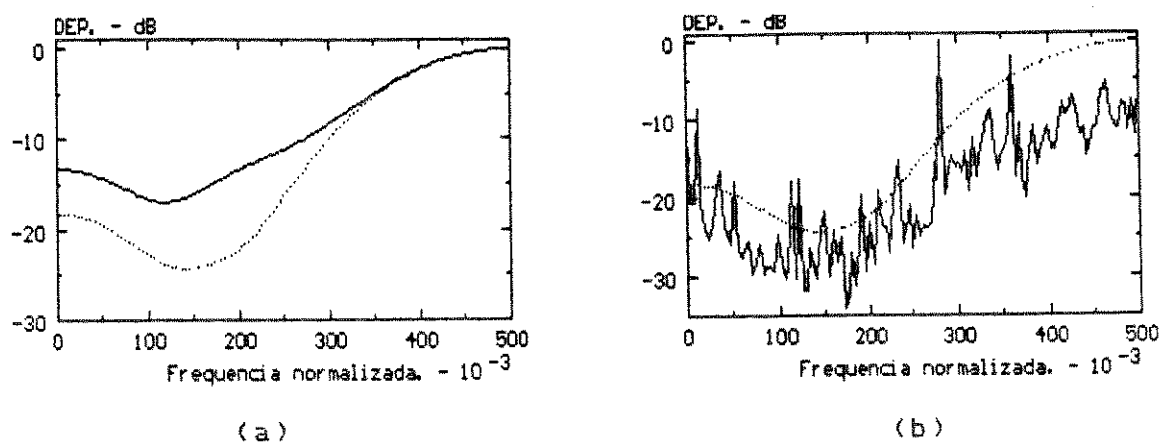
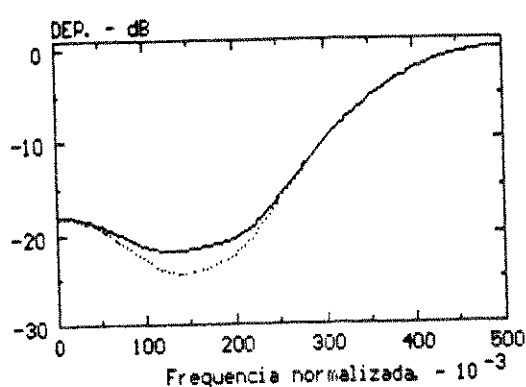


Figura 5.8 Mdias das Estimativas Durbin (a) e AR de Ordem 42 (b), Processo  $MA_0$ ,  $N=64$ , Método Covariância Modificado.

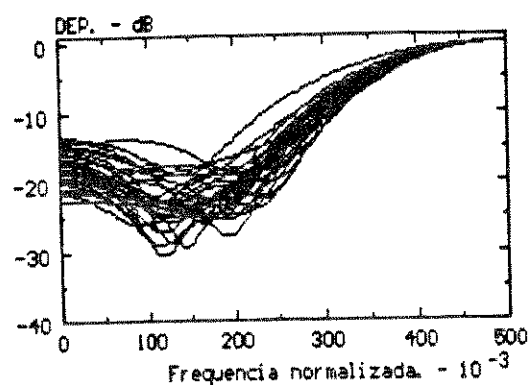
Para  $L=42$ , Figuras 5.8 e 5.9

A qualidade das estimativas AR e Durbin foi ruim com o método Covariância Modificado, como podemos inferir dos gráficos da mdia na figura 5.8. Por outro lado, as estimativas Durbin com o método Autocorrelaco, figura 5.9a, ainda foram semelhantes às das ordens anteriores, enquanto que nas estimativas AR somente ficou mais evidente o aumento do número de pólos.

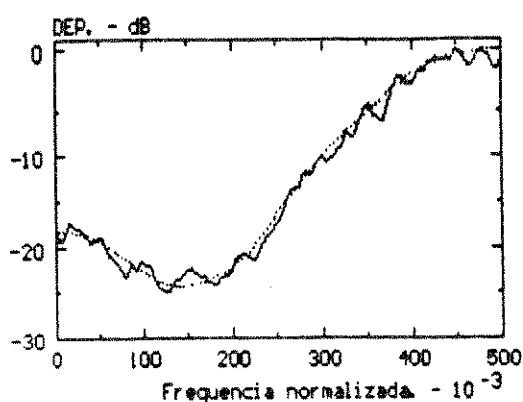
Podemos explicar os resultados obtidos através da discusso da seco anterior.



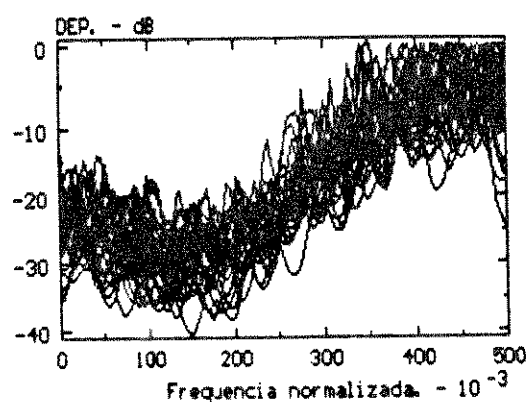
(a) mdia



(a) estimativas



(b) média



(b) estimativas

Figura 5.9 Estimativas Durbin (a) e AR de Ordem 42 (b), Processo  $MA_6$ ,  $N=64$ , Método Autocorrelaco.

A boa qualidade das estimativas AR produzidas pelos três métodos para  $L=12$ , se deve ao fato que tal ordem foi suficiente para obtermos uma boa aproximao do processo  $MA_6$ . Valores inferiores de  $L$  tendem a degradar a aproximao deste processo, enquanto que a elevaco da ordem  $L$  tende a produzir estimativas com os picos agudos, tpicos da modelagem AR com ordem elevada, particularmente nos casos dos métodos Covariância e Covariância Modificado.

As estimativas espectrais Durbin não se degradaram com o aumento da ordem do modelo AR longo quando utilizamos o método Autocorrelaco, pois este método fornece estimativas relativamente estáveis quando a ordem do modelo se aproxima do número de amostras.

Já a degradao observada quando do uso dos métodos Covariância e Covariância Modificado para  $L=21$  e para  $L=32$  se deve em par-

te ao fato da característica de alta resoluo destes métodos se evidenciar com o aumento da ordem auto-regressiva. Logo, os pólos se tornam mais agudos e a variao das estimativas AR aumenta, como podemos conferir nos gráficos correspondentes. Nestes, a faixa de excurso de cada um  maior (pólos mais agudos), que no gráfico da estimativas AR do método Autocorrelao para  $L=42$ , figura 5.9.

Um segundo fator a provocar a degradao acima é o grau crescente de instabilidade estatística nos métodos Covariância e Covariância Modificado, ¢ medida que  $L$  cresce. Isto porque vai-se convergindo para o limite onde a matriz de correlao associada a cada um se torna singular. Este efeito está evidente na figura 5.8b. Tal instabilidade seria observada também, se a matriz de correlaes no tivesse se tornado singular quando do método Covariância para  $L=32$ .

Passemos agora ¢s simulaes sobre as seqncias com  $N=256$ . Em funo dos resultados anteriores, a ordem do modelo AR longo foi fixada em  $L=51$  ( $N/5$ ).

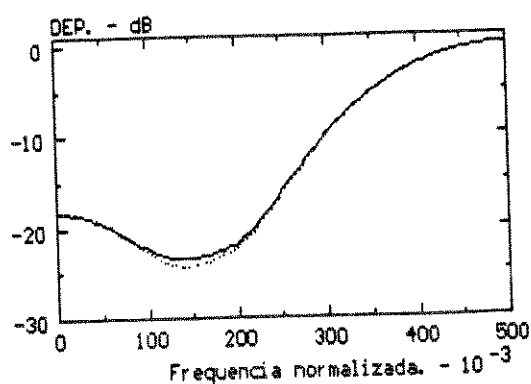
As estimativas Durbin e AR so apresentadas nas figuras 5.10 e 5.11, respectivamente.

Observamos que tal como no caso de  $N=64$  e  $L=12$ , as estimativas Durbin e AR foram boas tanto em termos de mdia como de variao. Também, a qualidade das estimativas neste caso é superior ¢quelas correspondentes para  $N=64$ , como consequência do aumento do nmero de amostras disponíveis.

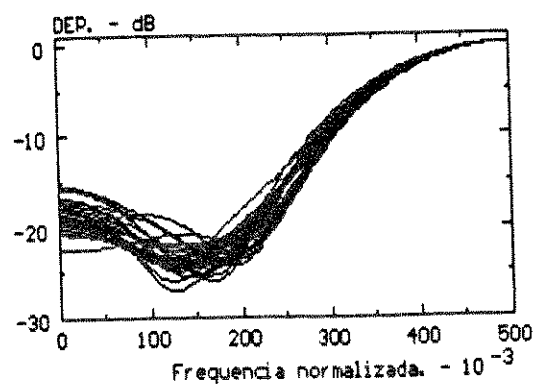
As simulaes para valores superiores de  $L$  no so apresentadas aqui pois sofrem dos mesmos problemas analisados anteriormente para  $N=64$ . Além disto, esta elevao de ordem acarreta um aumento do esforo computacional.

Concluímos assim que uma ordem para o modelo AR longo de cerca de 20% do nmero de amostras  adequada para este tipo de processo.

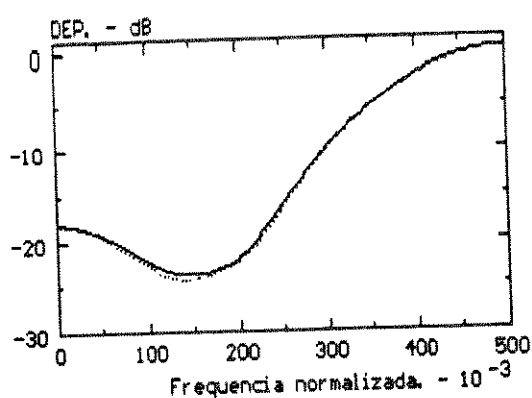
Consideremos agora o segundo processo,  $MA_1$ , utilizado nas simulaes. Seu espectro de potência apresenta vales abruptos, já que os zeros se encontram perto da CRU (módulo igual a 0.96). Isto significa que as amplitudes da resposta impulsiva de  $1/B(z)$  decaem mais lentamente que no caso do processo  $MA_0$ . Portanto,  necessário que a ordem do modelo AR longo seja maior.



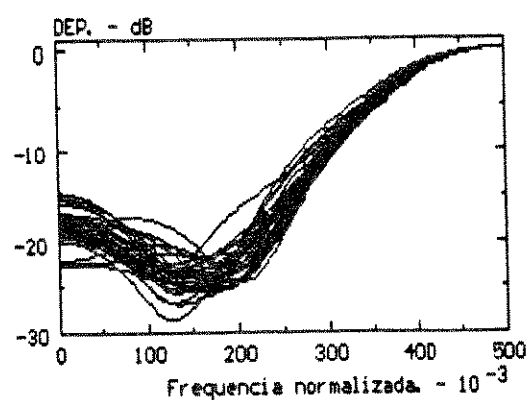
(a) média



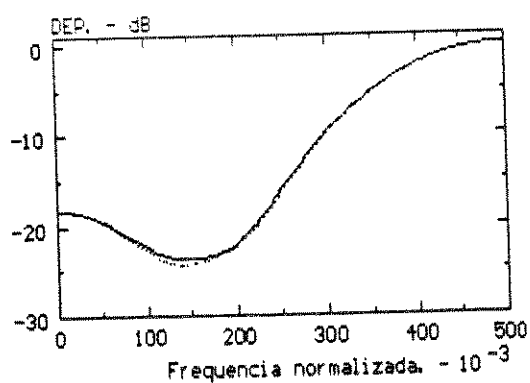
(a) estimativas



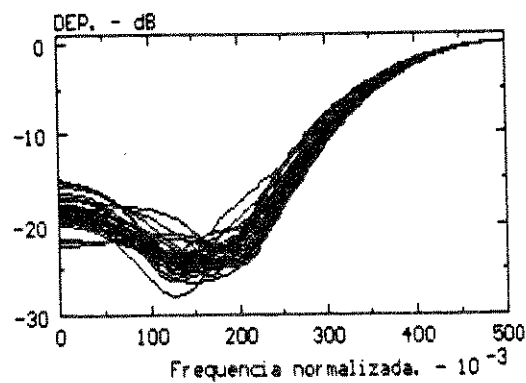
(b) média



(b) estimativas

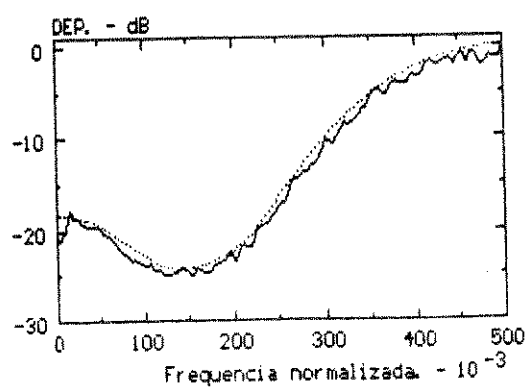


(c) média

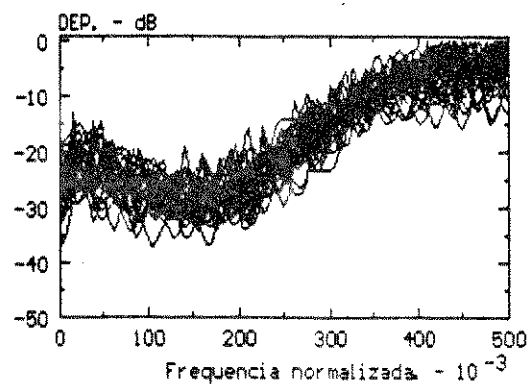


(c) estimativas

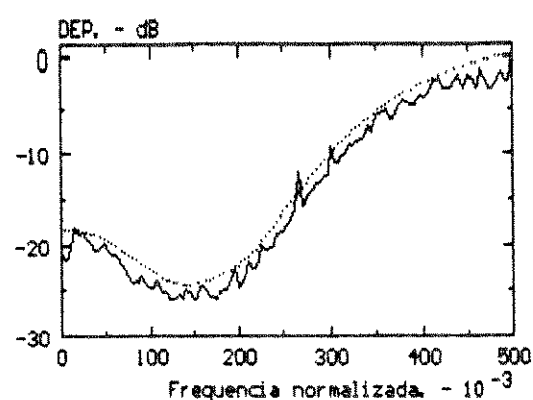
**Figura 5.10 Estimativas Durbin, Processo  $MA_9$ ,  $N=256$ , Modelo AR****Longo de Ordem 51:****(a) Método Autocorrelaco,****(b) Método Covariância,****(c) Método Covariância Modificado.**



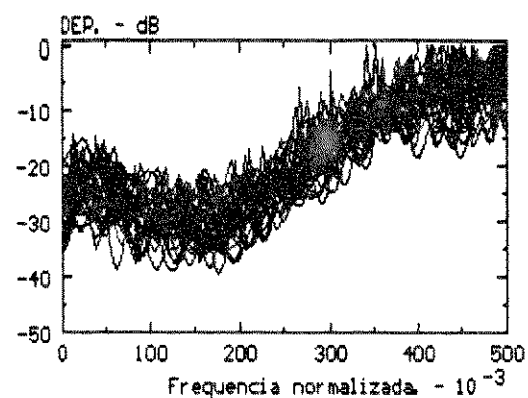
(a) média



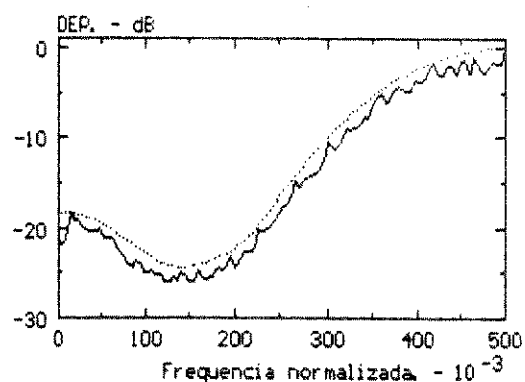
(a) estimativas



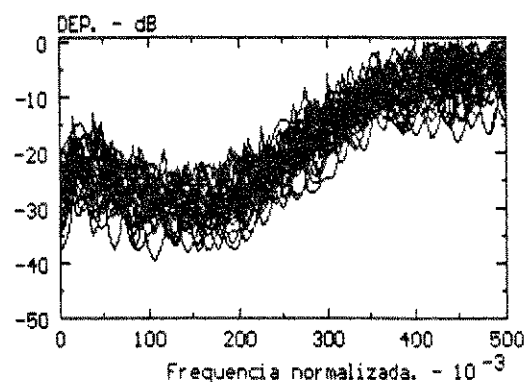
(b) média



(b) estimativas



(c) média



(c) estimativas

**Figura 5.11 Estimativas AR de Ordem 52, Processo  $MA_0$ ,  $N=256$ ,**

**(a) Método Autocorrelação,**

**(b) Método Covariância,**

**(c) Método Covariância Modificado.**

Tomando inicialmente as simulaes sobre as seqncias com 64 amostras e as ordens 12 ( $N/5$ ) e 21 ( $N/3$ ), observamos que  $0.96^{21} = 0.424$ . Assim, da equaco (5.2), temos que ambas ordens so insuficientes para fornecer boas aproximaes do processo  $MA_1$  e, portanto, podemos prever estimativas espectrais ruins. Os resultados obtidos foram:

**Para  $L=12$**

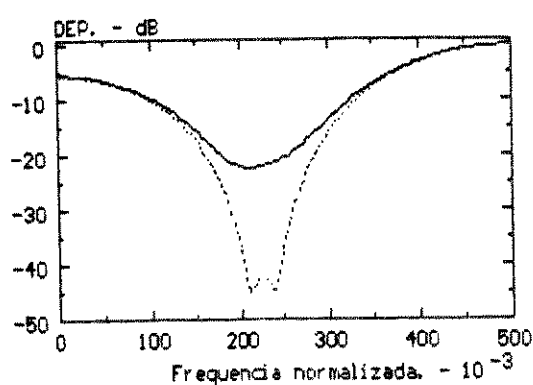
As estimativas Durbin e AR no foram boas. A polarizao e a variao se mostraram excessivas na vizinhana dos vales abruptos. O desempenho do método Autocorrelao foi o pior, enquanto que as duas outras estimativas foram semelhantes entre si.

**Para  $L=21$ , Figura 5.12 e 5.13**

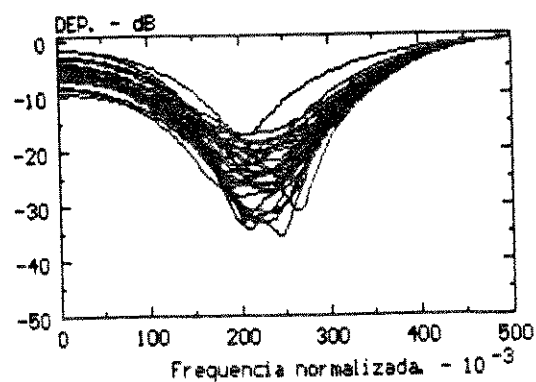
Os resultados com o método Autocorrelao foram to ruins quantos os da ordem anterior. O desempenho dos métodos Covarincia e Covarincia Modificado foi superior quele obtido com  $L=12$  e ainda semelhantes entre si. Suas estimativas porém, no mostram a mesma qualidade observada quando do processo sem vales abruptos e  $L=12$ .

Observando os gráficos das estimativas AR, figura 5.13, notamos que nas vizinhanas das frequências dos zeros do processo  $MA_1$  no h picos espectrais (pólos). Isto ocorre pois a depresso que corresponde aos vales das estimativas Durbin é produzida de forma indireta, ou seja, pela ausência de plos. Por outro lado, a reproduo da curva nas regies de maior energia se d pela concentrao de pólos. Portanto, podemos afirmar, sob esta tica, que o aumento da ordem AR e o uso de estimadores de alta resoluo criam condies favoráveis para uma melhor aproximao. Daí o aumento da qualidade das estimativas quando passamos de  $L=12$  para  $L=21$  e a supremacia dos métodos Covarincia e Covarincia Modificado.

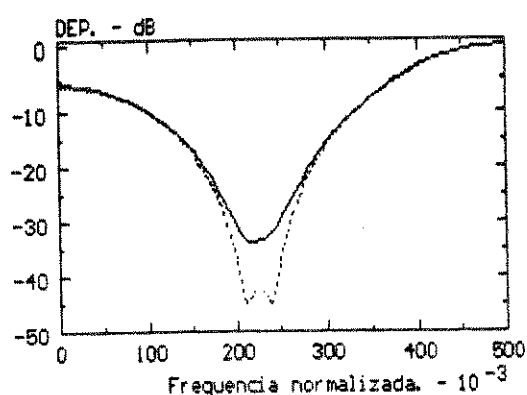
Ordens maiores que  $L=21$  no so adequadas com 64 amostras. Mesmo assim testamos  $L=42$  ( $2N/3$ ) e os métodos Autocorrelao e Covarincia Modificado. Os resultados do primeiro no foram diferentes dos obtidos para  $L=21$ , e os do segundo mostraram a mesma instabilidade estatística observada na figura 5.8. Concluímos que 64 amostras é um nmero muito pequeno para este tipo de processo, no permitindo atingir estimativas melhores que aquelas das figuras 5.12b e 5.12c.



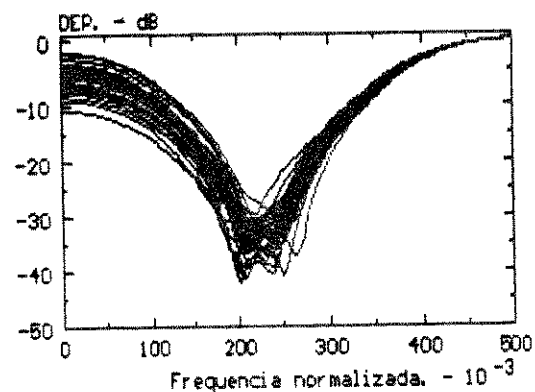
(a) média



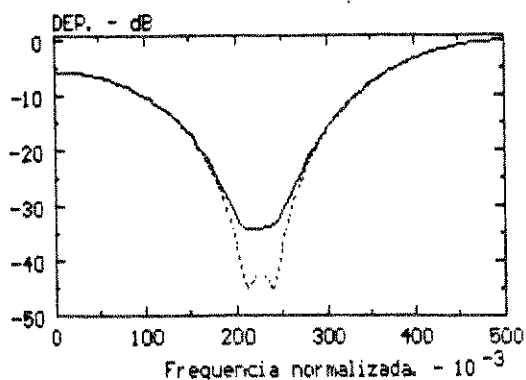
(a) estimativas



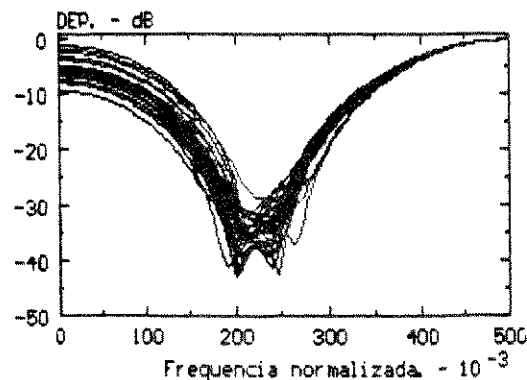
(b) média



(b) estimativas



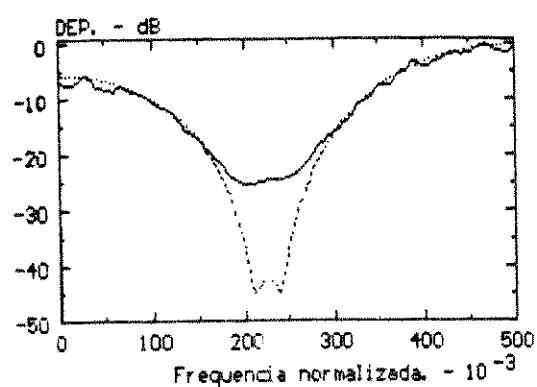
(c) média



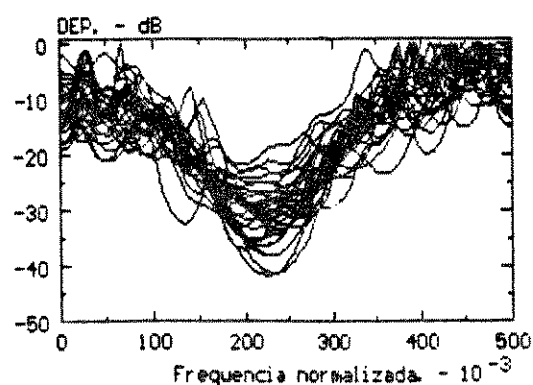
(c) estimativas

**Figura 5.12 Estimativas Durbin, Processo  $MA_1$ ,  $N=64$ , Modelo AR longo de Ordem 21:**

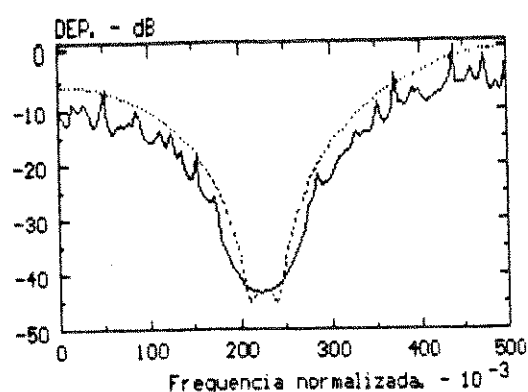
- (a) Método Autocorrelaco,
- (b) Método Covarincia,
- (c) Método Covarincia Modificado.



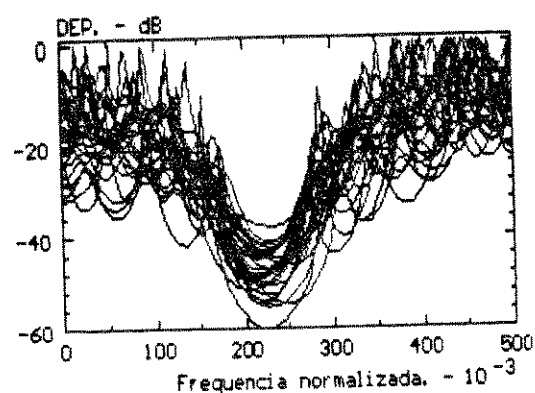
(a) média



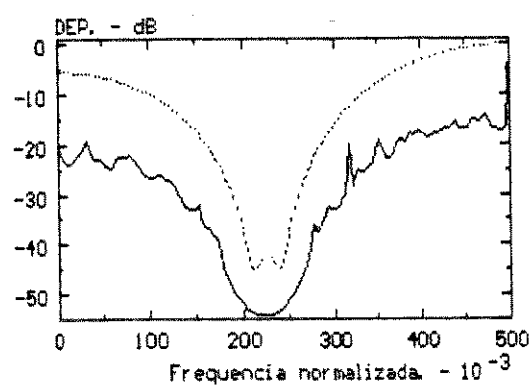
(a) estimativas



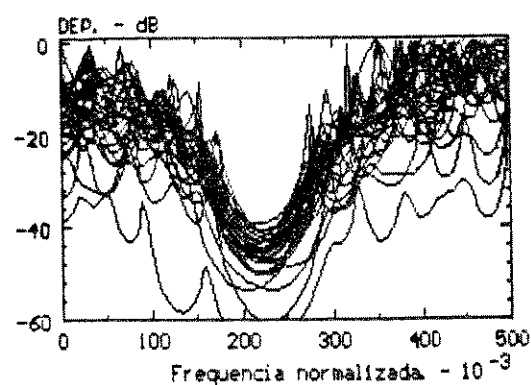
(b) média



(b) estimativas



(c) média



(c) estimativas

Figura 5.13 Estimativas AR de Ordem 21, Processo  $MA_1$ ,  $N=64$

(a) Método da Autocorrelação,

(b) Método da Covariância,

(c) Método da Covariância Modificado.

Ordens maiores para o modelo AR longo foram utilizadas com as seqncias de 256 amostras.  $L=85$  ( $N/3$ ) e  $L=125$  ( $N/2$ ) permitem melhores aproximaes do processo  $MA_1$ , pois  $0.96^{85} = 0.031$ .

Os resultados obtidos foram:

**Para  $L=85$ , Figuras 5.14 e 5.15**

Os métodos Covariância e Covariância Modificado forneceram boas estimativas espectrais, enquanto que o desempenho do método Autocorrelao foi, novamente, inferior.

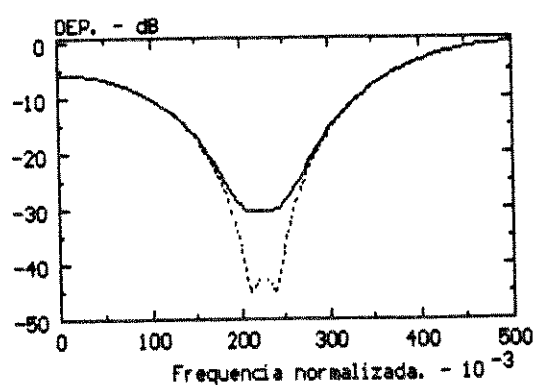
**Para  $L=125$ , Figura 5.16**

As estimativas com o método Covariância Modificado foram inferiores às obtidas com a ordem anterior, o que pode ser explicado lembrando que 125 ( $N/2$ ) não é o valor onde este método atinge seu melhor desempenho.

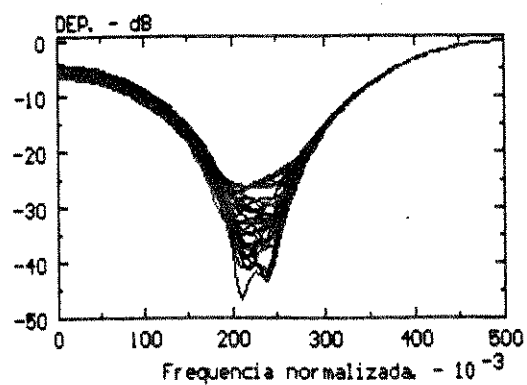
O melhor desempenho dos métodos Covariância e Covariância Modificado para este processo decorre da característica de estimadores de alta resoluo, como foi comentado anteriormente. Por outro lado, podemos observar que os vales abruptos nas estimativas AR estão melhor definidos que no caso de 64 amostras. Isto é consequência do aumento da ordem do modelo AR e do nmero de amostras. O aumento da ordem permitiu até a alocao de pólos no centro do vale espectral, como pode ser observado nas figuras 5.15b e 5.15c.

Concluímos então que para processos com vales abruptos no espectro de potência, o método de Durbin com os métodos Covariância e Covariância Modificado fornece estimativas espectrais de boa qualidade e estabilidade estatística, quando um tero do nmero de amostras é utilizado como ordem do modelo AR e este nmero  grande o suficiente.

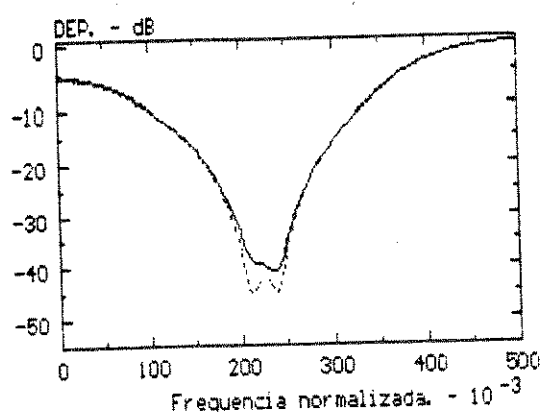
Por outro lado, para processos sem vales abruptos, o método de Durbin fornece boas estimativas quando utilizamos um quinto do nmero de amostras como ordem do modelo AR longo e qualquer dos três métodos da predico linear para estim-lo. Também, a qualidade das estimativas apresenta menor sensibilidade em relao ao nmero de amostras, quando comparado com os processos com vales abruptos.



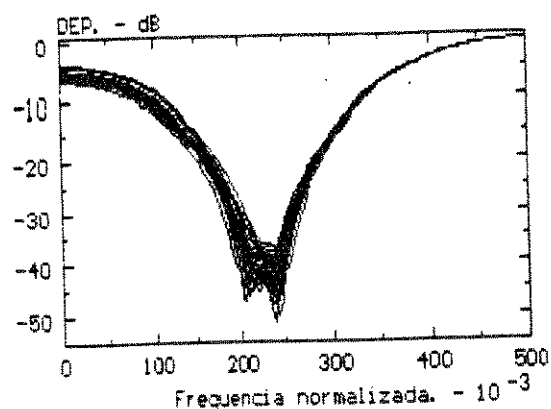
(a) média



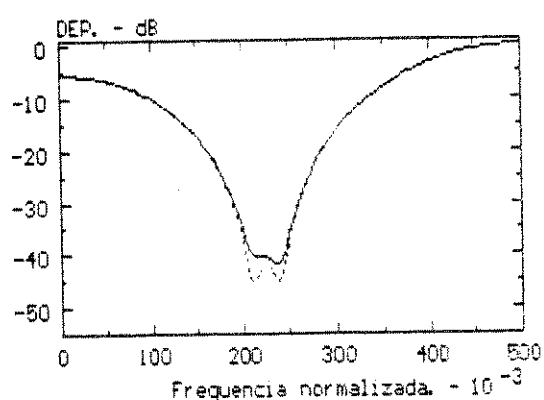
(a) estimativas



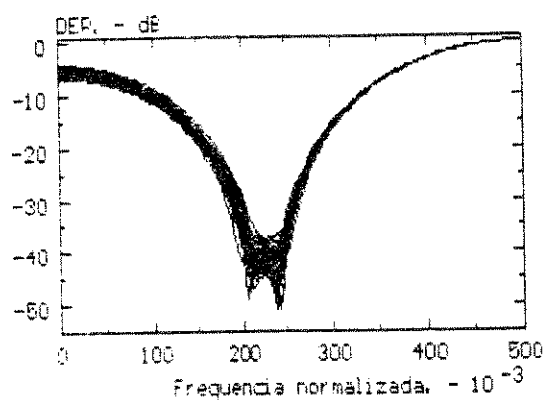
(b) média



(b) estimativas



(c) média



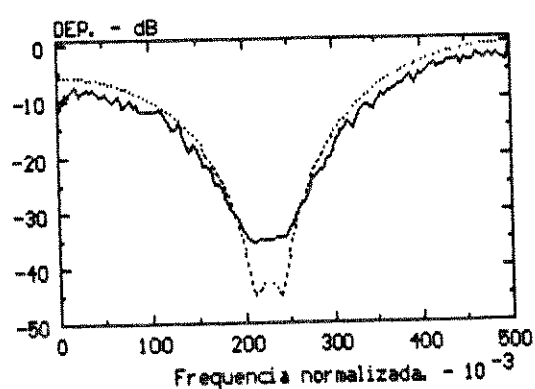
(c) estimativas

**Figura 5.14 Estimativas Durbin, Processo  $MA_1$ ,  $N=256$ , Modelo AR Longo de Ordem 85;**

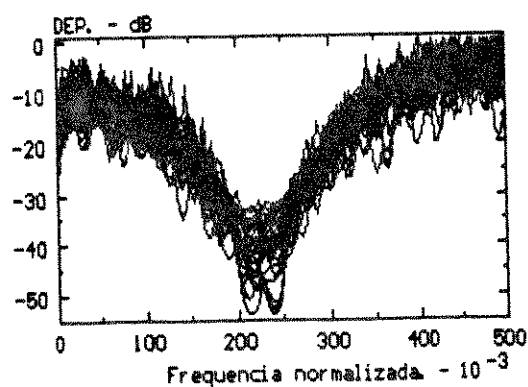
**(a) Método da Autocorrelaco,**

**(b) Método da Covariância,**

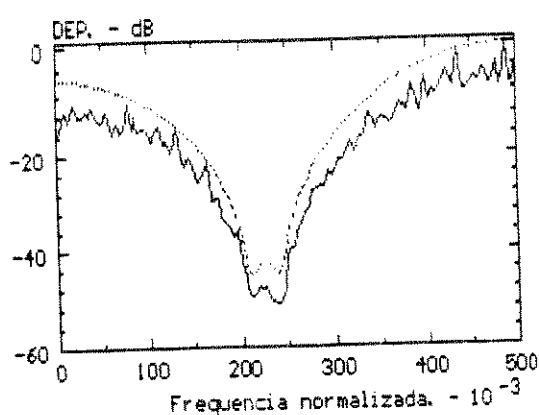
**(c) Método da Covariância Modificado.**



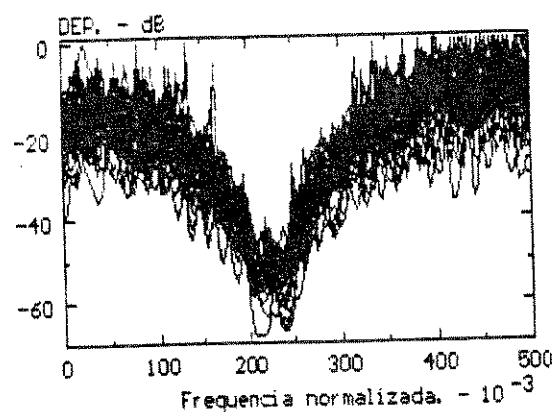
(a) média



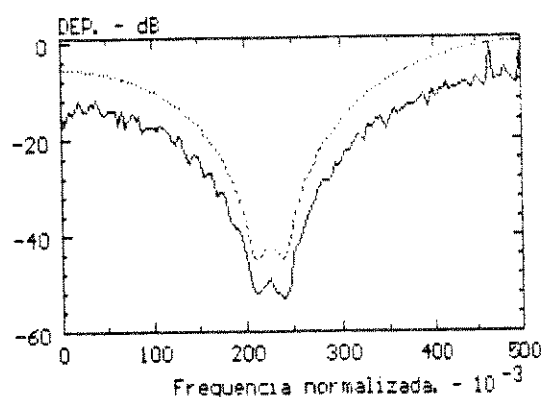
(a) estimativas



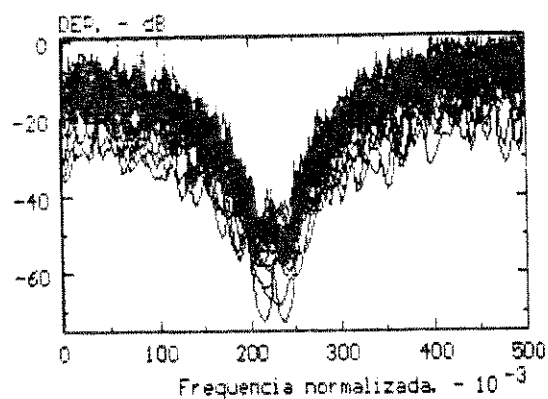
(b) média



(b) estimativas

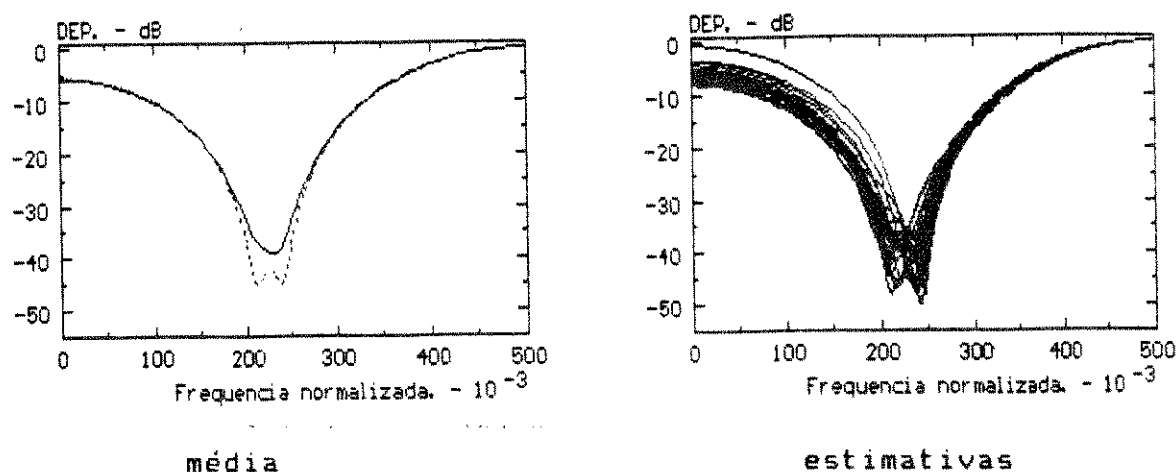


(c) média



(c) estimativas

**Figura 5.15 Estimativas AR de Ordem 85, Processo MA<sub>1</sub>, N=256:****(a) Método da Autocorrelaco,****(b) Método da Covariância,****(c) Método da Covariância Modificado.**



**Figura 5.16. Estimativas Durbin, Processo  $MA_1$ ,  $N=256$ , Modelo AR Longo de Ordem 125, Método Covariância Modificado.**

Embora os três métodos utilizados para estimar o modelo AR longo tenham apresentado bom desempenho quando do processo sem vales abruptos, o método Autocorrelaco é mais adequado por requerer um esforo computacional menor.

Em resumo, as estimativas pelo método de Durbin so tanto melhores quanto melhor for a aproximao fornecida pelo modelo AR longo. Esta, por sua vez, depende muito da localizao dos zeros, do número de amostras disponível e do método de estimao do modelo AR.

### 5.5 Estimativas Espectrais MA com Base nos Métodos Clássicos

Foi visto na seo 3.4 que a SAC de um processo  $MA(q)$  apresenta comprimento finito, pois é nula para  $|m| > q$ . Em funo deste fato a equao (3.19) da DEP-MA

$$P_{MA}(f) = \rho_w \left| 1 + \sum_{k=1}^q b[k] \exp(-j2\pi k f T) \right|^2$$

pode ser escrita como:

$$P_{MA}(f) = \sum_{m=-q}^q r_{xx}[m] \exp(-j2\pi mfT) \quad (5.6)$$

Esta expressão é semelhante à equação (2.19) do método Correlograma, utilizando a SAC teórica e  $C=q$ .

As duas expressões acima sugerem que as estimativas espectrais pelo modelo  $MA(q)$  e pelo método Correlograma serão semelhantes. Logo, a estimativa paramétrica poderia ser substituída pela clássica com  $C=q$ . Entretanto é preciso levar em conta que nas situações práticas não conhecemos a SAC teórica e que somente podemos obter uma estimativa da mesma a partir das amostras disponíveis. Esta SAC estimada não apresentará, necessariamente, o comprimento finito adequado e o método Correlograma manterá suas limitações naturais.

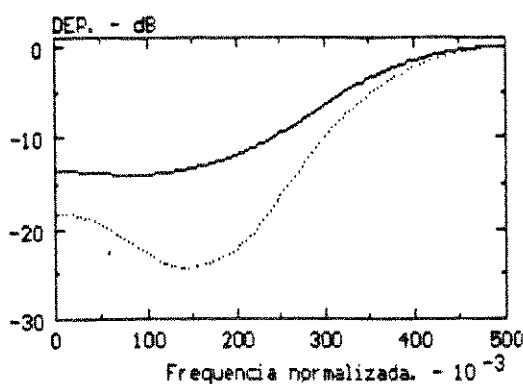
Contudo, o uso do método Correlograma, bem como o Periodograma, tem sido sugeridos como meio de efetuar uma estimativa espectral  $MA(q)$ , [1], [2], [16], como forma de contornar as dificuldades impostas pela não-linearidade presente na expressão (3.20) e reduzir o esforço computacional requerido pelo método de Durbin.

Visando avaliar a eficácia desta sugestão, estudaremos aqui o desempenho dos métodos clássicos na estimativa da DEP dos dois processos  $MA(4)$  apresentados na seção 5.4. As estimativas fornecidas por estes métodos serão comparadas entre si e com aquelas obtidas com o método de Durbin.

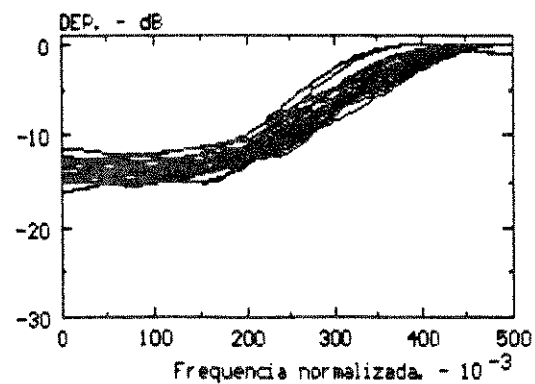
No caso do método Correlograma não é necessário que o maior índice das estimativas de autocorrelação,  $C$ , seja igual à ordem do processo  $MA$  ( $C=q=4$ ). Vejamos as razões para isto.

Como já foi comentado, na prática, por dispormos de um conjunto finito de amostras, as estimativas de autocorrelação de um processo  $MA(q)$  não são necessariamente nulas para  $|m| > q$ . Estas estimativas não nulas contêm informação sobre o processo sob análise e, portanto, não devem ser desprezadas. Desta forma, melhores estimativas espectrais devem ser obtidas fazendo o valor de  $C$  maior que a ordem  $MA$  teórica (desde que seja  $C \ll N-1$ ).

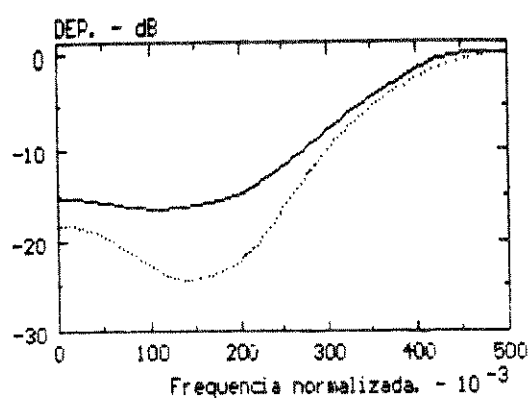
Tratando-se do método Periodograma, seção 2.6, o desempenho será avaliado em função de seus parâmetros na busca da melhor estimativa espectral possível.



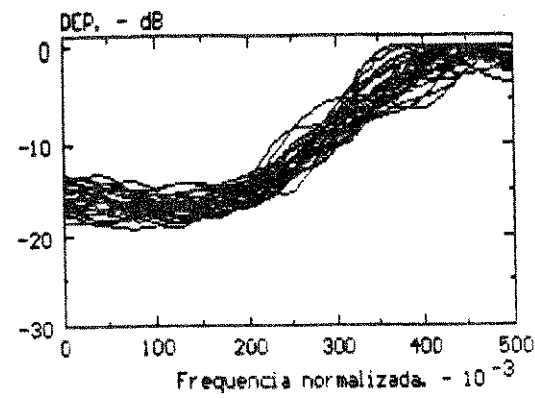
(a) média



(a) estimativas



(b) média

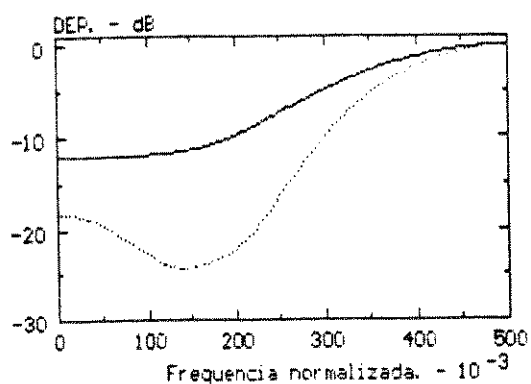


(b) estimativas

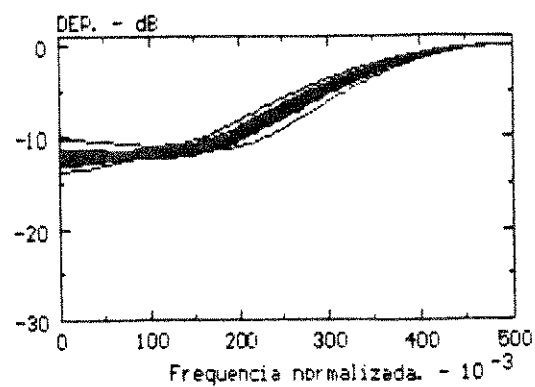
Figura 5.17 Estimativas Espectrais do Processo  $MA_0$ ,  $N=64$ , Método Correlograma: (a)  $C=6$  ( $N/10$ ),  
(b)  $C=12$  ( $N/5$ ).

Iniciando a avaliao do método Correlograma, utilizamos, para este, janela triangular de comprimento  $2C+1$ , estimativas polarizadas de correlao e os seguintes valores para o ndice  $C$ : 4 (ordem  $MA$ ),  $N/10$ ,  $N/5$ . Os resultados so mostrados nas figuras 5.17 e 5.18 para  $MA_0(4)$  e nas figuras 5.19 e 5.20 para  $MA_1(4)$ .

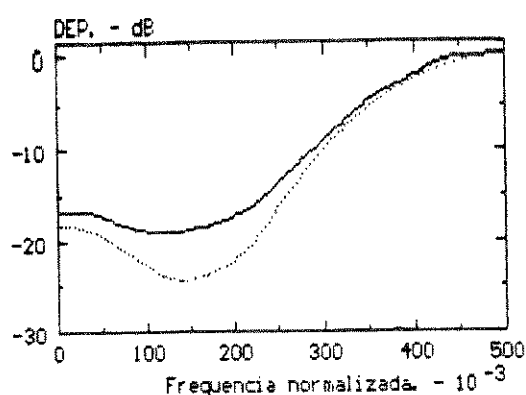
Observamos que para ambos processos a variao das estimativas espectrais aumentou e a polarizao diminuiu à medida que aumentamos o valor de  $C$ . Este resultado era esperado pois o aumento de  $C$  permite utilizar mais valores da SAC estimada, enquanto que a qualidade destes valores diminui à medida que  $C$  aumenta, levando a uma maior variao das estimativas do espectro.



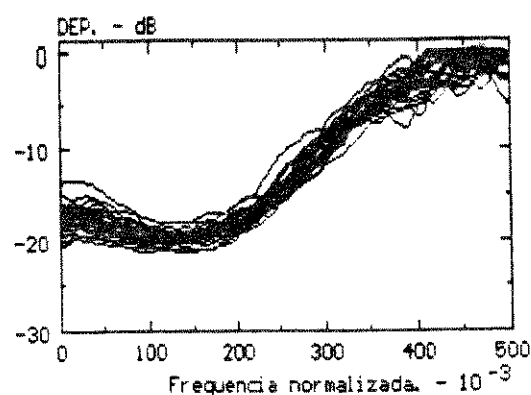
(a) média



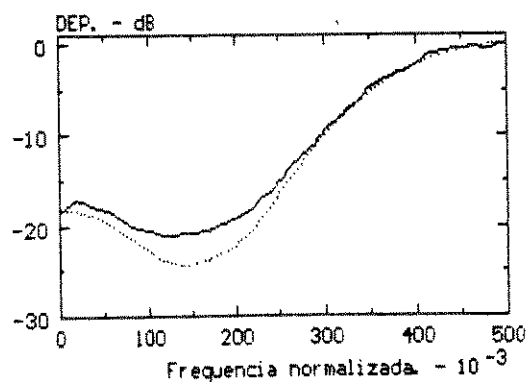
(a) estimativas



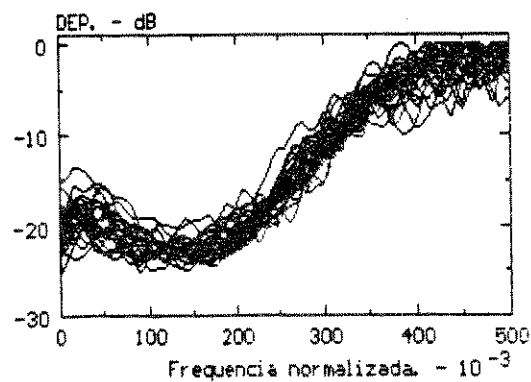
(b) média



(b) estimativas

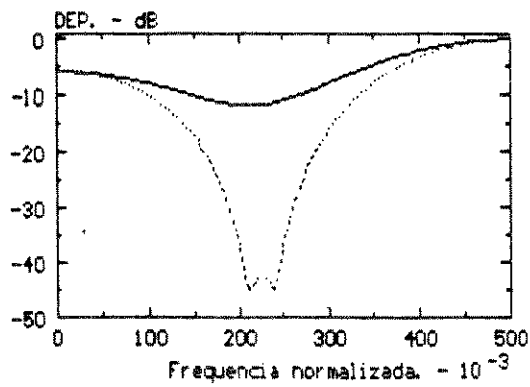


(c) média

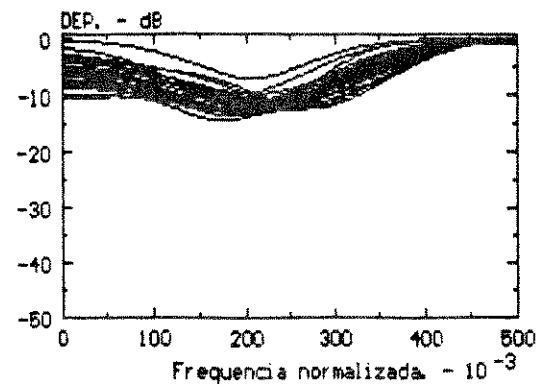


(c) estimativas

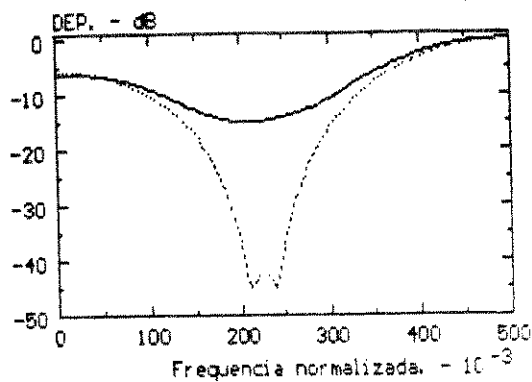
Figura 5.18 Estimativas Espectrais do Processo  $MA_0$ ,  $N=256$ , Método Correlograma: (a)  $C=4$ ,  
 (b)  $C=25$  ( $N/10$ ).  
 (c)  $C=51$  ( $N/5$ ).



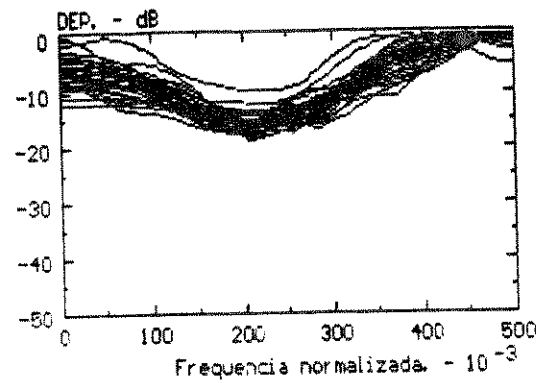
(a) média



(a) estimativas



(b) média

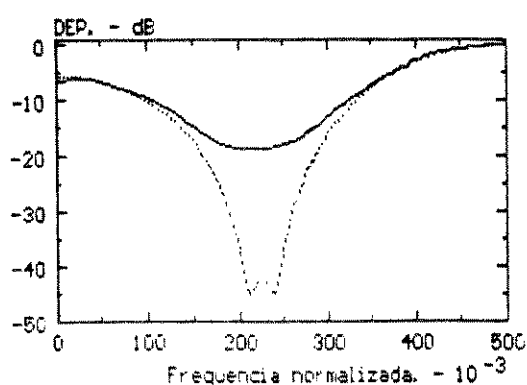


(b) estimativas

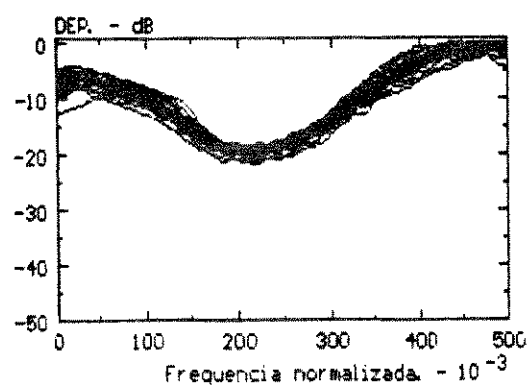
**Figura 5.19 Estimativas Espectrais do Processo  $MA_1$ ,  $N=64$ , Método Correlograma: (a)  $C=6$  ( $N/10$ ), (b)  $C=12$  ( $N/5$ ).**

O valor  $C=N/10$  é sugerido em [8] como um bom compromisso entre a polarização e variância das estimativas. Entretanto, embora os resultados aqui mostrados confirmem esta sugestão, a falta de qualidade das estimativas mostra que tal condição não é importante para sinais do tipo MA.

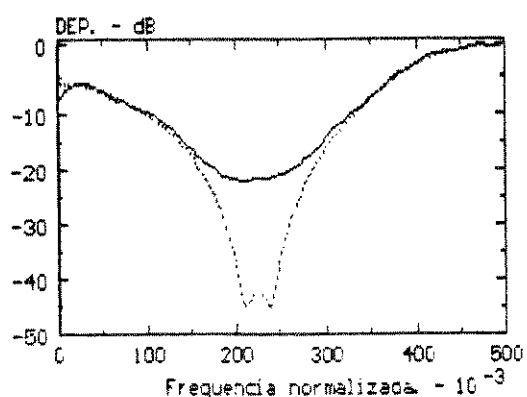
No método Periodograma utilizamos janela de Hamming, sobreposição entre segmentos igual a 50% do número de amostras por segmento e este número teve os seguintes valores:  $N/10$ ,  $N/5$ , e  $N$ . Os resultados são mostrados nas figuras 5.21 e 5.22 para o processo  $MA_0$  e nas figuras 5.23 e 5.24 para  $MA_1$ .



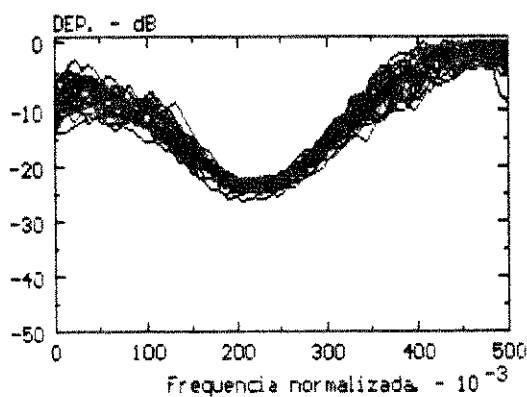
(a) média



(a) estimativas



(b) média

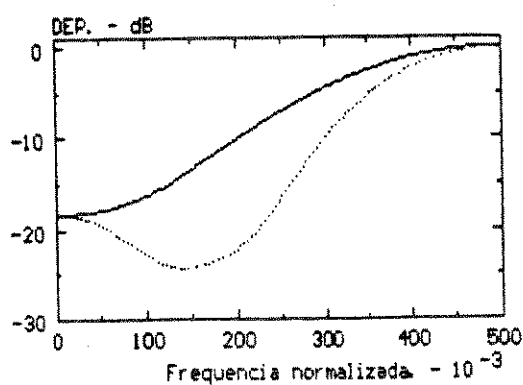


(b) estimativas

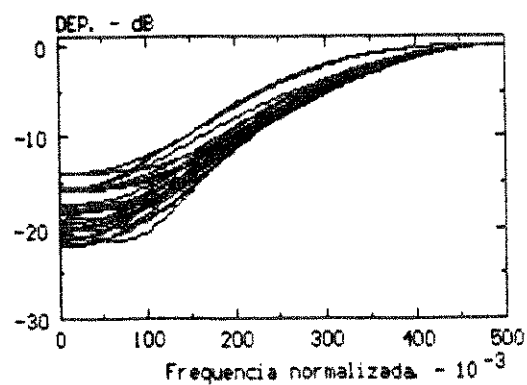
**Figura 5.20 Estimativas Espectrais do Processo  $MA_1$ ,  $N=256$ , Método Correlograma: (a)  $C=25$  ( $N/10$ ), (b)  $C=51$  ( $N/5$ ).**

Para ambos processos a variao das estimativas espectrais aumentou e a polarizao diminuiu com o incremento do número de amostras por segmento. Quando este número foi máximo as estimativas apresentaram a instabilidade estatística decorrente da falta de mediao sobre os segmentos; quando este número foi pequeno as estimativas apresentaram resoluo pobre em funo da reduo do comprimento dos segmentos.

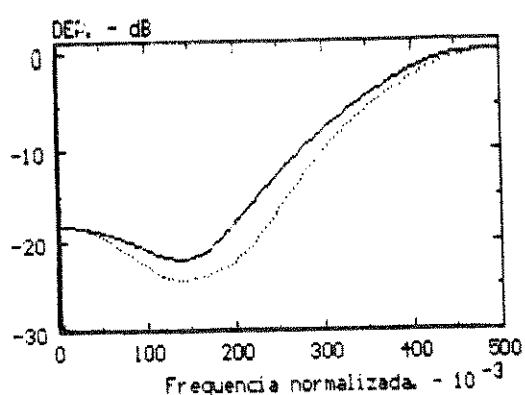
O número de amostras por segmento que forneceu o melhor compromisso resoluo-variância foi:  $N/5$  para  $N=64$  e  $N/10$  para  $N=256$ , no processo  $MA_0$ ;  $N/5$  no processo  $MA_1$ . Porém, considerando que a diferena entre as estimativas com  $N/5$  e  $N/10$  no caso  $MA_0$ , não foram significativas, podemos adotar o valor  $N/5$  em todos os casos.



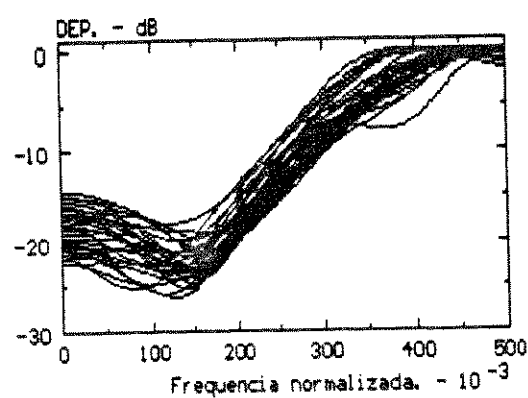
(a) média



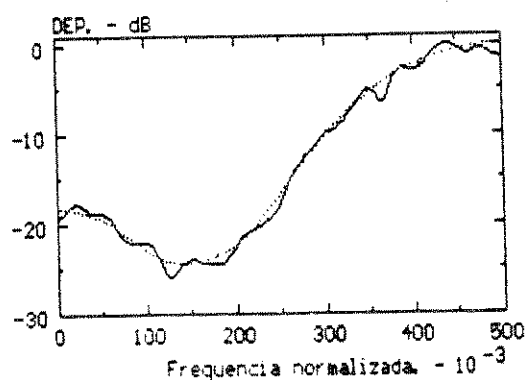
(a) estimativas



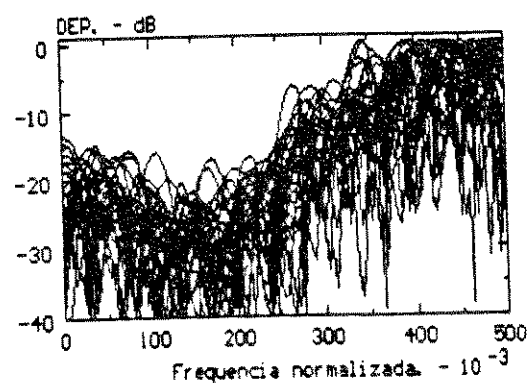
(b) média



(b) estimativas

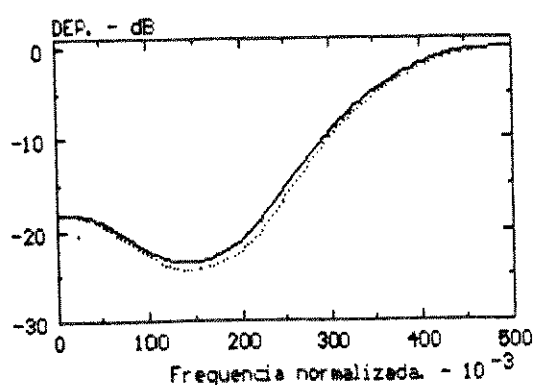


(c) média

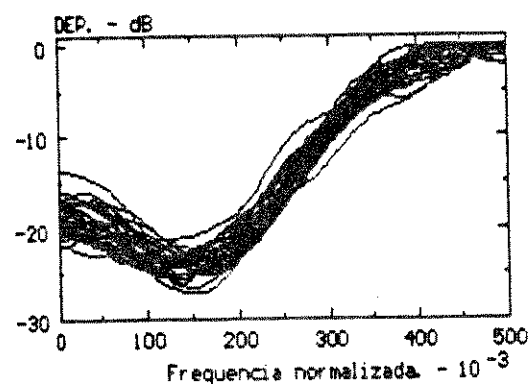


(c) estimativas

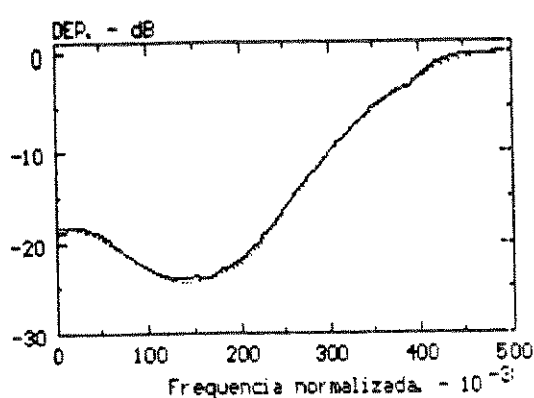
Figura 5.21 Estimativas Espectrais do Processo  $MA_0$ ,  $N=64$ , Método Periodograma: (a)  $P=6$  ( $N/10$ ),  
(b)  $P=12$  ( $N/5$ ),  
(c)  $P=64$  ( $N$ ).



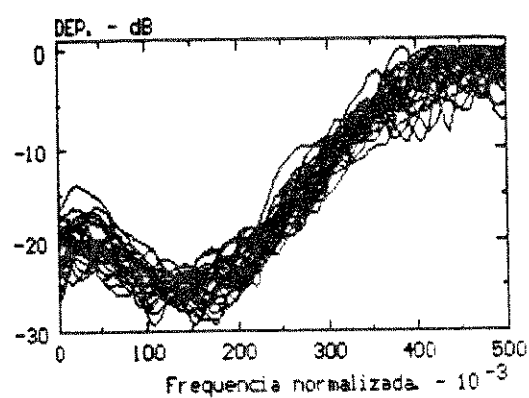
(a) média



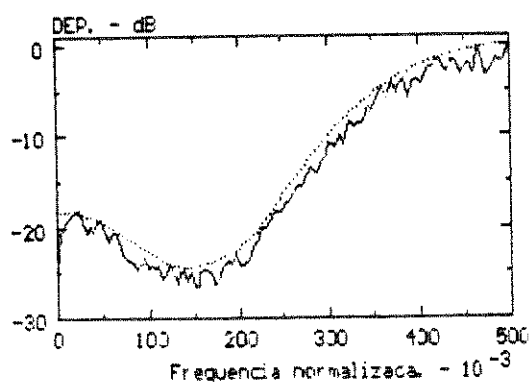
(a) estimativas



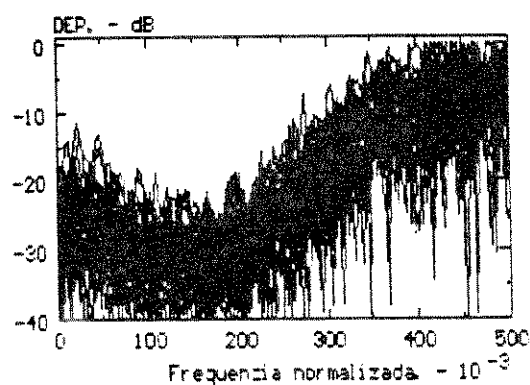
(b) média



(b) estimativas

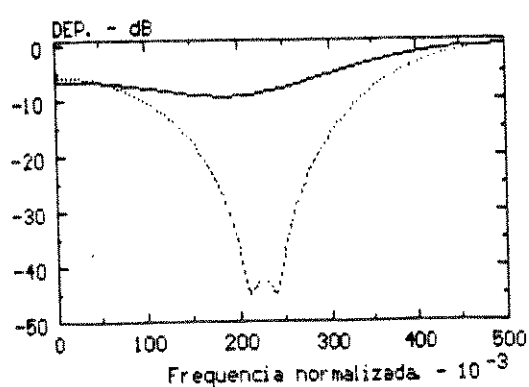


(c) média

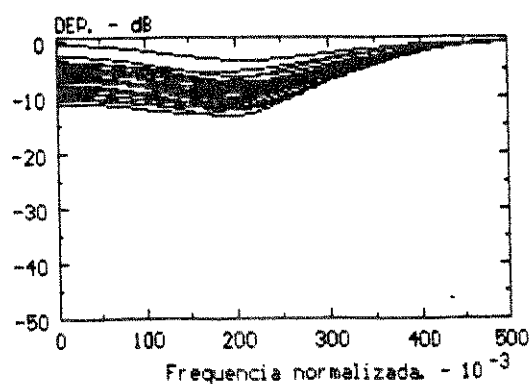


(c) estimativas

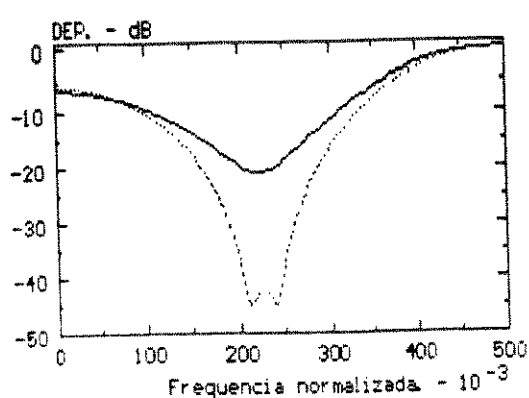
Figura 5.22 Estimativas Espectrais do Processo  $MA_0$ ,  $N=256$ , Método Periodograma, (a)  $P=24$  ( $N/10$ ),  
 (b)  $P=50$  ( $N/5$ ),  
 (c)  $P=256$  ( $N$ ).



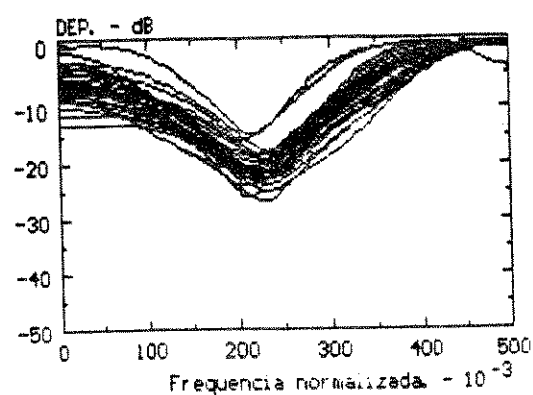
(a) mdia



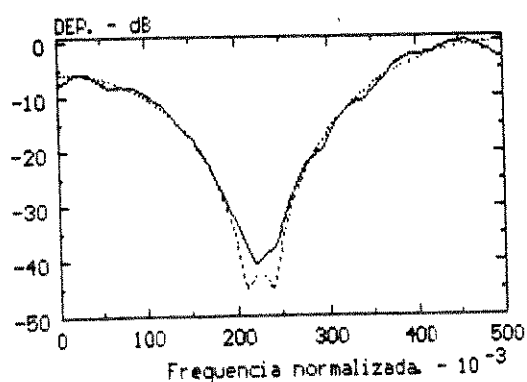
(a) estimativas



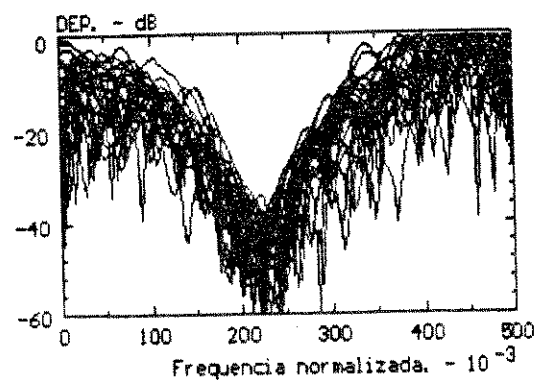
(b) mdia



(b) estimativas

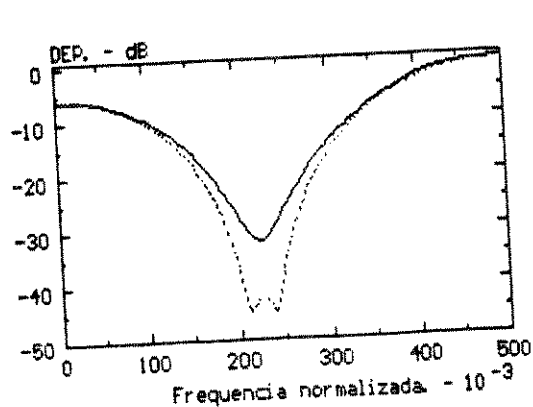


(c) mdia

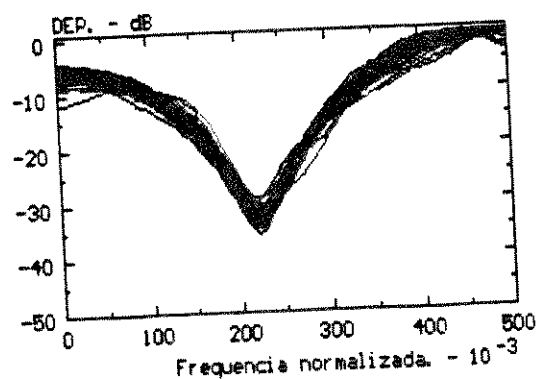


(c) estimativas

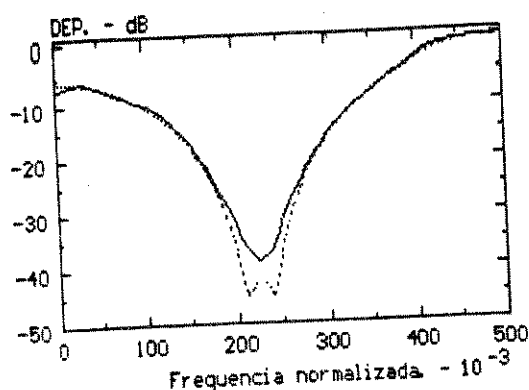
**Figura 5.23 Estimativas Espectrais do Processo  $MA_1$ ,  $N=64$ , Método Periodograma (a)  $P=6$  ( $N/10$ ), (b)  $P=12$  ( $N/5$ ), (c)  $P=64$  ( $N$ ).**



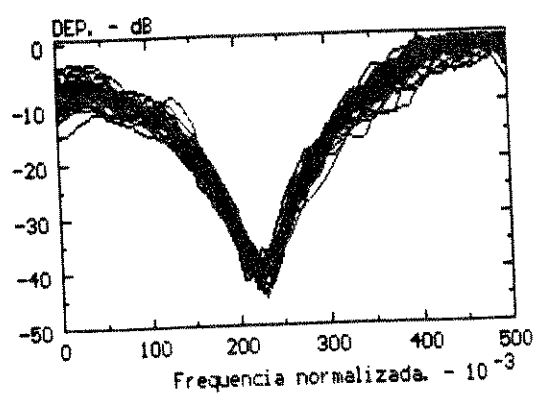
(a) média



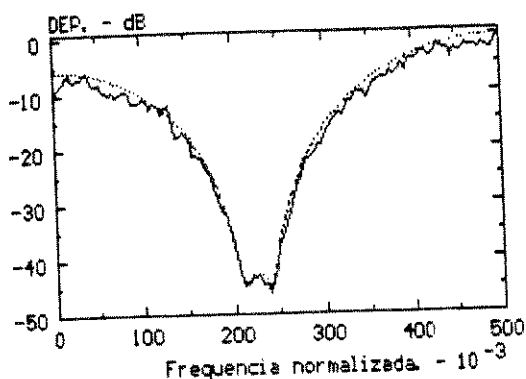
(a) estimativas



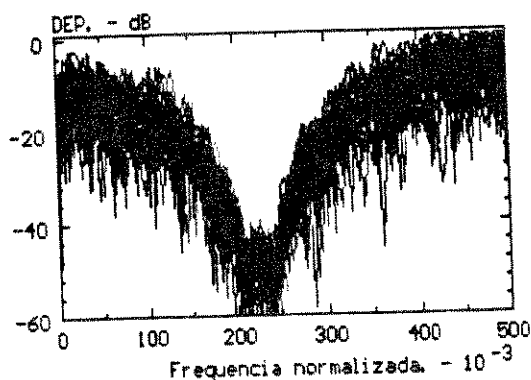
(b) média



(b) estimativas



(c) média



(c) estimativas

Figura 5.24 Estimativas Espectrais do Processo  $MA_1$ ,  $N=256$ , Método Periodograma: (a)  $P=24$  ( $N/10$ ),  
(b)  $P=50$  ( $N/5$ ),  
(c)  $P=256$  ( $N$ ).

Para este valor,  $(N/5)$ , do número de amostras por segmento, o método Periodograma forneceu boas estimativas espectrais do processo sem vales abruptos. Entretanto, a definição dos vales abruptos do processo  $MA_1$  não foi boa, particularmente para  $N=64$ . Embora estes resultados sejam melhores que aqueles atingidos pelo método Correlograma, ainda são inferiores àqueles obtidos através do método de Durbin na seção 5.4.

Logo, podemos afirmar que de maneira geral o método de Durbin deve ser preferido para a estimativa de espectros do tipo  $MA$ . Somente quando o número de amostras disponível for bastante grande é que será razoável substituí-lo pelo Periodograma, visando reduzir o esforço computacional. O método Correlograma não apresenta condições de ser utilizado nesta substituição.

### 5.6 Considerações Finais

Como foi afirmado anteriormente o objetivo do trabalho desenvolvido neste capítulo foi o de criar uma base para a análise espectral de processos  $MA$ , visando sua aplicação na estimativa do numerador espectral  $ARMA$  que será o objeto do próximo capítulo. Em função disto, as simulações aqui efetuadas não foram exaustivas, já que poderíamos considerar ainda situações como: um número de amostras maior ou menor que os utilizados, processos com zeros mais próximos da origem ou da própria  $CRU$ , ou uma combinação destes, ou ainda, zeros que se encontrem mais próximos ou afastados entre si. Por fim, um trabalho posterior poderia ainda analisar a variação do desempenho em função da ordem atribuída ao processo  $MA$ .

Entetanto, este capítulo apresentou vários aspectos inéditos tais como: 1) o uso de outros métodos que não a Autocorrelação, para estimar o modelo  $AR$  longo; 2) a análise da seleção da ordem do modelo  $AR$  longo em função do método escolhido para sua estimação, do número de amostras disponíveis e das características espectrais do processo sob estudo; 3) a aplicabilidade da característica de alta resolução dos métodos de estimação  $AR$  na estimativa de espectros com vales abruptos e 4) a comparação entre as estimativas da DEP de processos  $MA$  usando o método de Durbin e os estimadores clássicos.

## CAPÍTULO 6

### ESTIMAÇÃO ESPECTRAL AUTO-REGRESSIVA MÉDIA-AJUSTÁVEL, ARMA

#### 6.1 Introdução

O estimador espectral ARMA tem por característica principal a capacidade de fornecer formas espectrais com picos agudos e vales abruptos utilizando um número reduzido de parâmetros. Esta característica é particularmente importante se consideramos o número elevado de parâmetros que os estimadores espectrais AR e MA requerem para gerar simultaneamente tais formas espectrais.

Paralelamente, na prática quase todos os processos com características auto-regressivas se encontram corrompidos por algum tipo de ruído e, portanto, não podem ser modelados como sendo puramente AR, sendo a modelagem ARMA mais adequada para esta finalidade [2].

Também, é crescente o interesse pelo uso do modelo ARMA para o tratamento de sinais de voz, uma vez que o trato vocal exige um modelo com pólos e zeros para a representação adequada de certos sons, como, por exemplo, os nasalados [17], [18].

Por outro lado, como consequência da não-linearidade das relações da SAC no modelo ARMA, não se dispõe de algoritmos simples para estimar seus parâmetros, tal como ocorre no caso AR [2].

Os métodos disponíveis para estimar os parâmetros de um modelo ARMA podem ser divididos em duas categorias:

1. Métodos ótimos: Utilizam técnicas iterativas com base no estimador de máxima verossimilhança para estimar simultaneamente os parâmetros do modelo. Porém, requerem a solução de um conjunto de equações não-lineares, o que exige considerável esforço computacional e não apresentam garantia de convergência [1], [2].

2. Métodos sub-ótimos: Utilizam relações lineares e requerem menor esforço computacional. Dentro desta categoria há dois tipos:

- estimação simultânea: onde os parâmetros são estima-

dos iterativamente através de relações lineares. Também não garantem convergência [1], [2], [19].

- estimação separada: são métodos indiretos que estimam de forma separada o denominador e o numerador da função de sistema ARMA.

O objetivo deste capítulo é o estudo do estimador espectral ARMA com base nos métodos sub-ótimos de estimação separada. Este estudo compreende o desenvolvimento teórico desse método e a realização de simulações que permitam avaliar seu desempenho em função de parâmetros tais como o tipo de sinal a ser analisado, o número de amostras disponíveis e os métodos empregados para estimar a parte auto-regressiva e a média-ajustável

## 6.2 Estimação Separada dos Parâmetros do modelo ARMA

Seja  $x[n]$  um sinal gerado por um filtro ARMA( $p, q$ ), alimentado por ruído branco  $u[n]$ . A equação a diferenças (3.5) que descreve  $x[n]$ , pode ser reescrita na seguinte forma:

$$x[n] + \sum_{k=1}^p a[k] x[n-k] = y_f[n] \quad (6.1)$$

$$y_f[n] = u[n] + \sum_{k=1}^q b[k] u[n-k] \quad (6.2)$$

A expressão (6.1) pode ser interpretada como a equação a diferenças que descreve um filtro FIR (Finite Impulsive Response) de ordem  $p$ , com parâmetros iguais aos parâmetros auto-regressivos do filtro ARMA( $p, q$ ). Na entrada do filtro temos o processo  $x[n]$  e na saída, um processo residual  $y_f[n]$ . Este processo residual é do tipo MA( $q$ ) com os mesmos parâmetros média-ajustável do filtro ARMA, como podemos constatar através da equação (6.2).

Considerando o problema da estimação dos parâmetros  $a[k]$  e  $b[k]$  a partir de um conjunto de  $N$  amostras de  $x[n]$ , observamos das equações (6.1) e (6.2) que se obtivermos os parâmetros auto-regressivos poderemos obter um processo residual MA ao qual é plausível aplicar as técnicas de estimação espectral MA. Esta in-

terpretao é a base dos métodos de estimaco separada para os parâmetros ARMA.

O problema inicial neste contexto é estimar os parâmetros auto-regressivos do modelo ARMA. Sabemos da equaco (3.10a), que a relao entre a SAC e os parâmetros  $a[k]$  é linear para  $m > q$ , ou seja:

$$r_{xx}[m] = - \sum_{k=1}^p a[k] r_{xx}[m-k] ; \quad m > q \quad (6.3)$$

O primeiro método desenvolvido para estimar os parâmetros auto-regressivos do modelo ARMA utiliza estas relaes substituindo a SAC por estimativas de autocorrelao, polarizadas ou no, do processo  $x[n]$ . As estimativas dos parâmetros auto-regressivos so, ento, obtidas através da soluo do sistema de  $p$  equaces, semelhante as Equaces Modificadas de Yule-Walker, EMYW, que resulta ao escrevermos (6.3) para  $q+1 \leq m \leq q+p$ .

Entretanto, em diversos trabalhos sobre estimaco espectral ARMA foi constatado que, em geral, este método fornece estimativas de baixa qualidade para os parâmetros auto-regressivos do modelo ARMA [2], [20].

Como forma de melhorar a qualidade destas estimativas, foi sugerido o uso de mais de  $p$  equaces e a soluo do sistema de equaces resultante através da anlise de mínimos quadrados. Este algoritmo é conhecido como sobredeterminao ou anlise de mínimos quadrados das Equaces Modificadas de Yule-Walker (MQEMYW) [1], [2], [16], [21].

A motivao para este procedimento vem da observao de que se conhecessemos a SAC terica de  $x[n]$ , as  $p$  equaces mencionadas acima forneceriam os valores corretos dos parâmetros auto-regressivos e os demais valores de  $r_{xx}[m]$ , para  $m > q+p$ , poderiam ser calculados por recorrência através da equaco (6.3). Logo, toda a informao de  $r_{xx}[m]$  para  $m > q+p$  estaria contida nos parâmetros  $a[k]$  e em  $r_{xx}[m]$  no intervalo  $q+1 \leq m \leq q+p$ .

Entretanto, ao utilizarmos estimativas de autocorrelao para obter os parâmetros  $a[k]$ , as relaes exatas no mais se verificam. Com isto a extrapolao de  $\hat{r}_{xx}[m]$  para  $m > q+p$  com base nos

$a[k]$  obtidos, conterà erros em relação a SAC estimada. Por outro lado, ao utilizarmos mais que  $p$  equações para estimar os parâmetros  $a[k]$ , a informação disponível nas estimativas de autocorrelação para  $m > p+q$  será utilizada de forma direta, criando a possibilidade de atingirmos estimativas mais precisas para estes parâmetros. Neste caso, a extrapolação de  $\hat{r}_{xx}[m]$  será mais fiel à SAC estimada a partir das amostras de  $x[n]$  disponíveis.

Estas considerações podem ser confirmadas observando que a expressão (6.3) é semelhante à equação de um filtro predição linear com coeficientes  $a[k]$ , aplicado para a predição dos "dados" representados por  $\hat{r}_{xx}[m]$ . Segundo esta interpretação, ao utilizarmos mais que  $p$  equações, os parâmetros  $a[k]$  devem ser obtidos pela aplicação da teoria dos mínimos quadrados, onde os valores ótimos dos parâmetros resultam da minimização da soma dos quadrados dos erros entre as estimativas  $\hat{r}_{xx}[m]$  e a predição das mesmas. Estas predições para  $m > q+p$  são as extrapolações mencionadas acima. Da teoria dos mínimos quadrados, sabemos que a qualidade das predições aumenta à medida que envolvemos mais erros na soma a ser minimizada, ou seja, à medida que aumentamos o número de equações.

Supondo que o maior índice das estimativas de autocorrelação a ser utilizado seja  $M$ , onde  $M > p+q$  e  $M < N$ , a equação (6.3) fornecerá um sistema com  $M-q$  equações e  $p$  incógnitas, do tipo:

$$\hat{r} = -\hat{R} a$$

onde os  $M-q$  elementos do vetor  $\hat{r}$  são:

$$r[j] = \hat{r}_{xx}[q+1+j] ; 0 \leq j \leq M-q-1$$

os da matriz  $\hat{R}$  de dimensão  $(M-q) \times p$  são:

$$r[j, k] = \hat{r}_{xx}[q+j-k] ; 0 \leq j \leq M-q-1 ; 0 \leq k \leq p-1$$

e o vetor  $a$  é:

$$a = [a[1], a[2], \dots, a[p]]^T$$

Entretanto, devido ao excesso de equações e às estimativas de autocorrelação, a igualdade das EMYW não poderá ser satisfeita. Será, então, necessário introduzir um erro de aproximação na equação anterior:

$$\mathbf{e} = \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{R}} \mathbf{a} \quad (6.4)$$

onde o vetor  $\mathbf{e}$  possui  $M-q$  elementos do tipo:

$$\mathbf{e} = [e[q+1], \dots, e[M]]^T$$

É conveniente utilizar estimativas não-polarizadas de autocorrelação na equação acima para que a polarização do erro de aproximação seja nula [2], [22]:

$$\begin{aligned} E \left\{ \mathbf{e} \right\} &= E \left\{ \hat{\mathbf{r}} \right\} + E \left\{ \hat{\mathbf{R}} \mathbf{a} \right\} \\ &= \mathbf{r} + \mathbf{R} \mathbf{a} \end{aligned}$$

onde os elementos de  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{R}$  são as autocorrelações teóricas do processo  $x[n]$  e o vetor  $\mathbf{a}$  resultante é aquele ótimo da Teoria de Wiener.

Da análise de mínimos quadrados podemos deduzir que o vetor  $\mathbf{a}$  que minimiza a soma dos quadrados dos erros:

$$P = \sum_{m=q+1}^M |e[m]|^2$$

é dado por:

$$\mathbf{a} = - \left[ \hat{\mathbf{R}}^H \hat{\mathbf{R}} \right]^{-1} \left[ \hat{\mathbf{R}}^H \hat{\mathbf{r}} \right] \quad (6.5)$$

A matriz  $\mathbf{R}^H \mathbf{R}$ , de dimensão  $p \times p$ , é Hermitiana e, em geral, positiva definida. Sua inversa pode ser calculada através do algoritmo de Cholesky [1], [2].

Temos, ento, que a estimaco dos parmetros auto-regressivos do modelo ARMA atravs do mtodo MQEMYW, pode ser interpretada como a aplicaco do mtodo Covarincia, apresentado no captulo 4, sobre a seqncia de "dados"  $\{\hat{r}_{xx}[q-p+1], \dots, \hat{r}_{xx}[M]\}$ .

A seqncia de estimativas de parmetros auto-regressivos dada pela equaco (6.5) no , em geral, de fase mnima, e uma fatoraco espectral pode ser necessria para deslocar os eventuais plos situados no exterior da CRU para o interior desta [1], [5]. Isto, porm, no  necessrio se os parmetros forem estimados visando a realizaco de uma anlise espectral.

O desempenho deste mtodo , em geral, superior quele obtido com o uso de apenas  $p$  equaces, e depende do tipo de espectro a ser estimado [23], [24], [25].

O nmero de equaces,  $M-q$ , a ser utilizado tambm depende das caractersticas espectrais de  $x[n]$ . Como j foi comentado,  medida que aumentamos este nmero, aumenta a quantidade de informaco contidas nas estimativas de autocorrelaco. Entretanto, a qualidade das estimativas de autocorrelaco fornecidas pelo estimador no-polarizado, decae com o aumento do deslocamento, conforme mostrado no captulo 2. Logo,  medida que aumentamos o nmero de equaces, passamos a utilizar valores de  $\hat{r}_{xx}[m]$  cada vez menos confiveis. Isto mostra a existncia de um compromisso, o qual depende das caractersticas espectrais do processo  $x[n]$ .

Para compreendermos esta dependncia, devemos considerar que a funo de sistema do filtro gerador de um processo ARMA  formada por plos e zeros. Assim, quanto mais prximos da CRU se localizarem os plos, ou seja, quanto mais agudos forem os picos espectrais de  $x[n]$ , maior ser o comprimento efetivo da resposta impulsiva do filtro. Neste caso se considerarmos a resposta do filtro a dois impulsos espaados no tempo, conclumos que a influncia de uma resposta sobre a outra aumenta  medida que os plos se aproximam da CRU. Isto significa que o decaimento das amplitudes da SAC,  $r_{xx}[m]$ , ao longo do eixo  $m$  ser tanto mais lento quanto mais agudos foram os picos espectrais.

Esta explicao pode ser efetuada de outra forma, lembrando que DEP de um processo e sua SAC formam um par de Transformadas de Fourier e que uma contrao no domnio da freqncia corresponde a

uma expansão no domínio do tempo e vice-versa. Assim, à medida que os pólos se aproximam da CRU, vão se pronunciando os picos na DEP, com um correspondente espalhamento da SAC no eixo  $m$ . Na situação inversa, o afastamento dos pólos leva a uma suavização do espectro, com a consequente contração da SAC no eixo  $m$ .

Admitindo que os erros de estimação da SAC não dependam deste comportamento, concluímos que a influência relativa destes para  $m > q$  será tanto maior quanto mais rápido for o decaimento da SAC. Logo, podemos prever que o compromisso na escolha do número de equações dependerá das características espectrais a serem analisadas e que para espectros com picos agudos devemos utilizar um número de equações maior que no caso de espectros suaves.

Este comportamento da qualidade das estimativas da SAC se reflete nos erros das equações,  $e[m]$ , fazendo com que a "qualidade" destes erros decresça à medida que o índice  $m$  aumenta. Uma maneira eficiente de enfatizar a participação dos erros referentes a valores de  $m$  próximos à ordem média-ajustável,  $q$ , em relação àqueles referentes a  $m$  próximo a  $M$ , é a utilização de uma janela de ponderação,  $w[m]$ , na minimização da soma dos quadrados dos erros [21], [23], [24], [26]:

$$P = \sum_{m=q+1}^M w[m] |e[m]|^2$$

ou na forma matricial:

$$P = e^H W e \quad (6.6)$$

onde  $w[m]$  é uma sequência positiva, monotônica decrescente, de forma a atribuir pesos cada vez menores à medida que  $m$  aumenta, e  $W$  é uma matriz de dimensões  $(M-q) \times (M-q)$  e elementos:

$$ww[j, k] = \begin{cases} 0 & ; j \neq k \\ w[q+1+j] & ; j=k \end{cases} \quad 0 \leq j, k \leq M-q-1 \quad (6.7)$$

Substituindo a equação (6.4) em (6.6), obtemos:

$$\begin{aligned} \rho &= (\hat{r} + \hat{R} a)^H W (\hat{r} + \hat{R} a) \\ &= a^H \hat{R}^H W \hat{R} a + \hat{r}^H W \hat{R}^H a + a^H \hat{R}^H W \hat{r} + \hat{r}^H W \hat{r} \end{aligned}$$

Derivando esta expresso em relao ao vetor  $a$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial a} = 2 \hat{R}^H W \hat{R} a + 2 \hat{R}^H W \hat{r}$$

de modo que o vetor  $a$  que torna  $\partial \rho / \partial a$  nulo será:

$$a = - \left[ \hat{R}^H W \hat{R} \right]^{-1} \left[ \hat{R}^H W \hat{r} \right] \quad (6.8)$$

Os elementos da matriz  $\hat{R}^H W \hat{R}$ , com dimenso  $p \times p$ , so:

$$c[j,k] = \sum_{l=0}^{M-q-1} ww[l,l] rr^*[l,j] rr[l,j] ; \begin{cases} 0 \leq j < M-q-1 \\ 0 \leq k \leq p-1 \end{cases} \quad (6.9)$$

e os da matriz  $\hat{R}^H W \hat{r}$ , com dimenso  $p \times 1$ , so:

$$cr[j] = \sum_{l=0}^{M-q-1} ww[l,l] rr^*[l,j] r[j] ; \quad 0 \leq j \leq p-1 \quad (6.10)$$

com  $rr[j,k]$ ,  $r[j]$  e  $ww[l,l]$  como definidos anteriormente.

A matriz  $\hat{R}^H W \hat{R}$   Hermitiana e, em geral, positiva definida, tal que sua inversa pode ser calculada através do algoritmo de Cholesky.

Se a matriz  $W$  for igual à matriz identidade, ou seja, se a janela de ponderaco tiver pesos unitários, as equaces (6.5) e (6.8) sero idênticas. A questo agora é escolher o tipo de janela a ser utilizada para produzir o ponderamento desejado.

Da equaco (2.12), observamos que o ndice  $m$  contribui para a variância das estimativas no-polarizadas de autocorrelaco com

um fator  $(N-m)^{-2}$ . Como a soma dos quadrados dos erros de aproximao a ser minimizada é uma funo quadrática de  $\hat{r}_{xx}[m]$ , constatamos que tal fator está implícito nas parcelas do somatório da expresso (6.6) e assume a forma  $(N-m)^{-4}$ . Isto sugere que uma janela do tipo:

$$ww[m] = \begin{cases} 0 & ; \text{c.c.} \\ (N-m)^4 & ; q+1 \leq m \leq M \end{cases}$$

seja adequada para corrigir o efeito da variância das estimativas de autocorrelao. De fato, janelas do tipo  $(N-m)^4$  e  $(N-m)^3$  foram propostas nas referências [26] e [21], respectivamente, e sua influência será avaliada aqui através de simulaes.

Devemos, por fim, observar que o uso da janela de ponderao atenua o compromisso na escolha no número de equaes, uma vez que ela automaticamente reduz a importância da participao dos erros,  $e[m]$ ,  medida que  $m$  aumenta.

Lembrando que a DEP de um processo ARMA  do tipo:

$$P_{\text{ARMA}}(f) = \frac{P_v |B(f)|^2}{|A(f)|^2} \quad (6.11)$$

a estimativa dos parâmetros  $a[k]$  fornece o fator de denominador desta expresso. Isto nos motiva a utilizar a denominao: estimativa do denominador espectral do modelo ARMA (DEN-ARMA) para o fator  $1/|A(f)|^2$ . Também, estes parâmetros estimados permitem a realizao da filtrao que produz o processo residual  $y_f[n]$  segundo a equao (6.1). Com base neste processo podemos atacar o problema da estimativa dos parâmetros  $b[k]$  e da variância  $P_v$  do ruído branco, ou seja do numerador espectral do modelo ARMA (NUM-ARMA).

Nos métodos de estimao separada dos parâmetros do modelo ARMA, a qualidade das estimativas dos parâmetros auto-regressivos é muito importante, pois quanto mais exatas forem estas, mais o processo residual  $y_f[n]$  se aproximar do processo MA( $q$ ) caracterizado por  $P_v$  e os parâmetros  $b[1], \dots, b[q]$ .

### 6.3 Estimação do Numerador Espectral do Modelo ARMA

Dado que teoricamente o processo residual  $y_f[n]$  é um processo MA(q), seu espectro de potência e, portanto, a estimativa do NUM-ARMA, pode ser encontrado com base nos conceitos do capítulo 5:

- aplicando o método de Durbin já apresentado.
- através dos métodos Correlograma e Periodograma.

O NUM-ARMA também pode ser estimado, sem explicitar os parâmetros média-ajustável, através de outros métodos:

- que utilizam as estimativas dos parâmetros auto-regressivos e das estimativas de autocorrelação do processo  $x[n]$  em questão [27], [28], [29].

- que dividem a SAC estimada do processo  $x[n]$ , em uma sequência causal e outra anti-causal [21].

Mosses e Beex, [30], reduzem estes métodos a uma forma comum e os analisam em função da polarização, variância e positividade da estimativa do NUM-ARMA. Estes não serão abordados aqui pois seus desempenhos são inferiores àqueles propiciados pelo método de Durbin e pelos estimadores espectrais clássicos, além de, na sua maior parte, não garantirem estimativas positivas do numerador espectral.

No contexto de detecção de senóides em ruído branco através da modelagem ARMA, os métodos Correlograma e Periodograma têm sido freqüentemente utilizados para estimar o numerador espectral, fornecendo bons resultados, [26], [31].

Embora tenhamos concluído no capítulo 5 que os métodos Correlograma e Periodograma não são competitivos com o método de Durbin, vamos considerá-los novamente no contexto ARMA. Isto porque  $y_f[n]$  a ser analisado é o resultado de uma filtragem envolvendo os parâmetros  $a[k]$ , a qual pode ser realizada de duas maneiras distintas: 1) através de um filtro de predição linear progressiva, como na equação (6.1), dando origem a  $y_f[n]$  e, 2) através de um filtro de predição linear regressiva, descrito pela seguinte equação:

$$y_b[n] = x[n] + \sum_{k=1}^P a^*[k] x[n+k] ; 0 \leq n \leq N-1 \quad (6.12)$$

Esta é uma situao semelhante ¢ aquela encontrada no método Covariância Modificado, apresentado no capítulo 4. Da mesma forma que l, os resultados destas duas filtragens possuem informaes distintas, as quais podem ser usadas simultaneamente através dos métodos clássicos [30].

Vejamos primeiro o método do Correlograma. A partir da seo 2.5, podemos afirmar que a estimativa do NUM-ARMA,  $\hat{N}(f)$ , com base:

- nos resíduos progressivos é dada por:

$$\hat{N}(f) = \sum_{m=-C}^C w[m] \hat{r}_{yf}[m] \exp(-j2\pi mfT) \quad (6.13)$$

- nos resíduos progressivos e regressivos:

$$\hat{N}(f) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{m=-C}^C w[m] (\hat{r}_{yf}[m] + \hat{r}_{yb}[m]) \exp(-j2\pi mfT) \right] \quad (6.14)$$

onde

- $\hat{r}_{yf}[m]$  e  $\hat{r}_{yb}[m]$  so as estimativas de autocorrelao dos processos  $y_f[m]$  e  $y_b[m]$ , respectivamente, as quais devem ser obtidas através do estimador polarizado de autocorrelao.

- $w[m]$   uma janela de ponderao, a qual deve ser positiva semidefinida.

- $C$   o maior ndice de autocorrelao utilizado, que de acordo com a seo 5.6 pode ser maior que a ordem MA assumida.

Em relao ao método do Periodograma, da seo 2.4, deduzimos que a estimativa do NUM-ARMA com base:

- nos resíduos progressivos é dada por:

$$\hat{N}(f) = \frac{1}{P} \sum_{p=0}^{P-1} \left\{ \frac{1}{D} \left| \sum_{n=0}^{D-1} w[n] y_f[n+pS] \exp(-j2\pi n f T) \right|^2 \right\} \quad (6.15)$$

- nos resíduos progressivos e regressivos será:

$$\hat{N}(f) = \frac{1}{2P} \sum_{p=0}^{P-1} \left\{ \frac{1}{D} \left| \sum_{n=0}^{D-1} w[m] y_f[n+pS] \exp(-j2\pi n f T) \right|^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{D} \left| \sum_{n=0}^{D-1} w[m] y_b[n+pS] \exp(-j2\pi n f T) \right|^2 \right\} \quad (6.16)$$

onde:

D é o número de amostras por segmento.

P é o número de segmentos mediados.

S é o deslocamento de cada segmento.

w[m] é uma janela de ponderação sobre as amostras dos processos residuais.

A escolha destes parâmetros deve ser efetuada em função dos conceitos da seção 2.4.

#### 6.4 Seleção da ordem do modelo ARMA(p, q)

Tal como nos casos dos modelos AR e MA, podemos utilizar o critério de Akaike, CIA, para escolher as ordens do modelo ARMA, [2]:

$$CIA(p, q) = N \ln P_v + 2(p + q) \quad (6.17)$$

onde p e q são as ordens auto-regressiva e média-ajustável assumidas e  $P_v$  é a estimativa de máxima verossimilhança da variância do ruído branco, obtida sob a hipótese de que  $x[n]$  é um processo ARMA(p, q). As ordens adequadas são aquelas que minimizam CIA(p, q).

Também, podemos testar se as ordens selecionadas são as corretas, verificando se a sequência residual do filtro ARMA inverso é um ruído branco [32].

6.5 Simulaoes

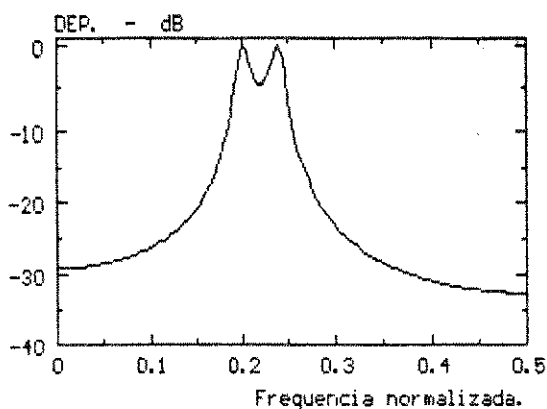
6.5.1 Apresentao das Simulaoes

Os métodos apresentados nas seoes 6.2 e 6.3 foram aplicados na estimativa da DEP de quatro processos ARMA(4, 2) perfeitamente conhecidos, de modo a permitir a avaliao do desempenho. A escolha da localizao dos plos e zeros destes processos foi efetuada de forma a obtermos espectros de potência com características distintas quanto aos picos e vales espectrais. Os parâmetros dos processos so mostrados na Tabela 6.1

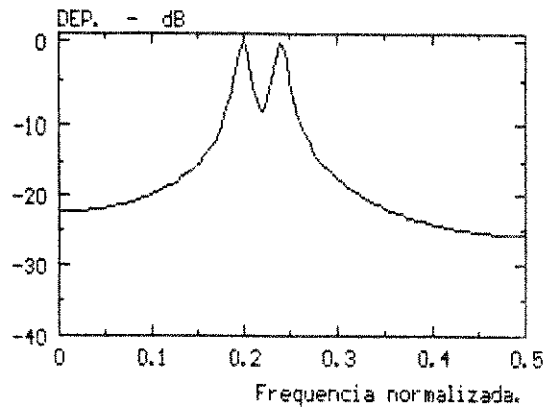
| Processo          | Parâmetros AR                                |       |        |       | Parâmetros MA        |       | $\rho_v$ |
|-------------------|----------------------------------------------|-------|--------|-------|----------------------|-------|----------|
|                   | a[1]                                         | a[2]  | a[3]   | a[4]  | b[1]                 | b[2]  |          |
| ARMA <sub>0</sub> | -0.714                                       | 1.915 | -0.658 | 0.849 | -0.262               | 0.490 | 1        |
| ARMA <sub>1</sub> | -0.714                                       | 1.915 | -0.658 | 0.849 | -0.337               | 0.810 | 1        |
| ARMA <sub>2</sub> | -0.520                                       | 1.018 | -0.255 | 0.240 | -0.075               | 0.040 | 1        |
| ARMA <sub>3</sub> | -0.520                                       | 1.018 | -0.255 | 0.240 | -0.337               | 0.810 | 1        |
|                   | Localizao dos plos e zeros                 |       |        |       |                      |       |          |
|                   | plos                                        |       |        |       | zeros                |       |          |
| ARMA <sub>0</sub> | 0.96 exp[±j2π(0.20)]<br>0.96 exp[±j2π(0.24)] |       |        |       | 0.70 exp[±j2π(0.22)] |       |          |
| ARMA <sub>1</sub> | 0.96 exp[±j2π(0.20)]<br>0.96 exp[±j2π(0.24)] |       |        |       | 0.90 exp[±j2π(0.22)] |       |          |
| ARMA <sub>2</sub> | 0.70 exp[±j2π(0.20)]<br>0.70 exp[±j2π(0.24)] |       |        |       | 0.20 exp[±j2π(0.22)] |       |          |
| ARMA <sub>3</sub> | 0.70 exp[±j2π(0.20)]<br>0.70 exp[±j2π(0.24)] |       |        |       | 0.90 exp[±j2π(0.22)] |       |          |

Tabela 6.1 Processos ARMA Utilizados nas Simulaoes.

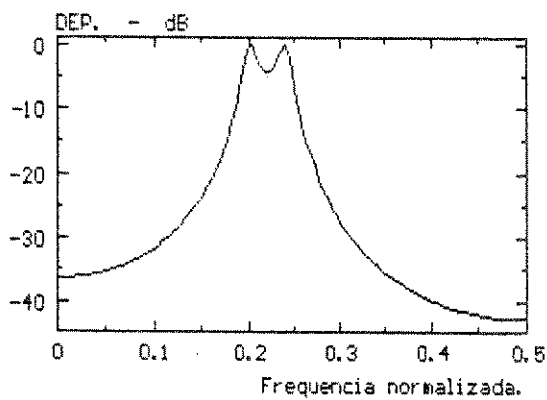
Os processos  $ARMA_0$  e  $ARMA_1$  apresentam DEP com picos estreitos, como podemos observar nas figuras 6.1a e 6.1b, respectivamente. Ambos possuem os mesmos parâmetros auto-regressivos e, portanto, o mesmo denominador espectral (figura 6.1c), diferindo apenas quanto ao módulo dos zeros. Estes, no processo  $ARMA_0$ , se encontram afastados da CRU de forma a não produzirem vales espectrais. Ao contrário, os zeros do processo  $ARMA_1$  se encontram próximos à CRU de modo a acentuar o vale espectral entre os picos estreitos, produzindo variações abruptas.



(a)



(b)



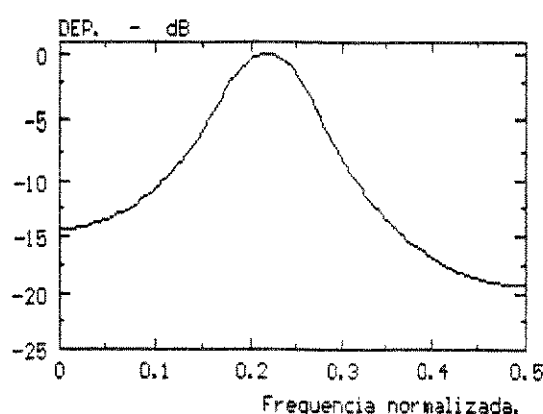
(c)

Figura 6.1 (a) Espectro de Potência do Processo  $ARMA_0$

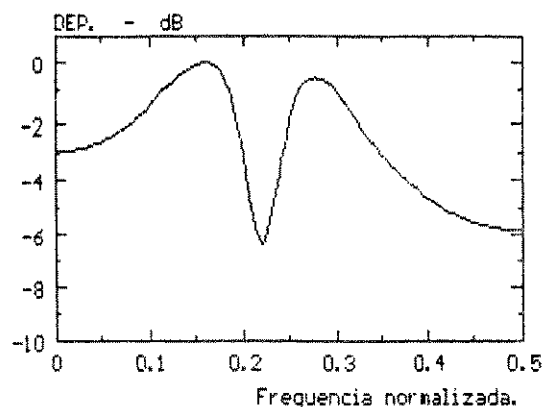
(b) Espectro de Potência do Processo  $ARMA_1$

(c) Denominador Espectral dos Processos  $ARMA_0$  e  $ARMA_1$

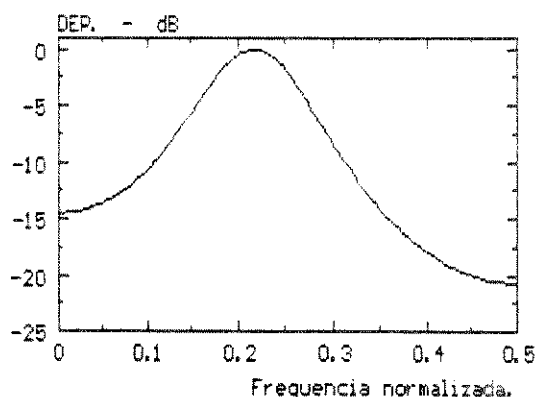
Os processos  $ARMA_2$  e  $ARMA_3$  foram escolhidos de forma a no apresentarem picos espectrais agudos, conforme mostrado nas figuras 6.2a e 6.2b, respectivamente. Ambos possuem o mesmo denominador espectral (figura 6.2c) e os zeros do processo  $ARMA_2$  se encontram afastados da CRU, enquanto que os zeros do processo  $ARMA_3$  se encontram prximos  CRU provocando um vale abrupto. É importante observar que a localizao angular dos zeros se situa na posio intermediria quelas dos plos. Logo, a DEP apresenta o vale entre duas elevaes.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.2 (a) Espectro de Potência do Processo  $ARMA_2$

(b) Espectro de Potência do Processo  $ARMA_3$

(c) Denominador Espectral dos Processos  $ARMA_2$  e  $ARMA_3$

Para cada processo foram geradas trinta seqüências com 256 amostras, através de uma rotina de geração de dados, sobre as quais foram efetuados dois conjuntos de simulações: um com seqüências de 64 amostras e o outro com seqüências de 256 amostras. As estimativas obtidas serão apresentadas através de um gráfico para a média e outro para as estimativas, da mesma forma que no capítulo 5. As ordens escolhidas para o modelo ARMA a ser estimado foram as mesmas dos processos utilizados:  $p=4$  e  $q=2$ .

A execução das simulações foi dividida em três etapas:

1º Foi estimado o DEN-ARMA com base no método MQEMYW, com e sem ponderação: seção 6.7.2.

2º O NUM-ARMA foi estimado utilizando-se o método de Durbin: seção 6.7.3.

3º O NUM-ARMA foi estimado utilizando-se os métodos Correlograma e Periodograma: seção 6.7.4.

Objetivando realizar uma análise detalhada da característica do método MQEMYW decidimos estudar inicialmente a estimativa do denominador da DEP-ARMA. Isto é possível, pois o estudo das simulações foi realizado com base em parâmetros conhecidos, de modo que sabemos a forma exata do denominador espectral e podemos utilizá-la como referência para suas estimativas.

Uma vez que os métodos sub-ótimos de estimação separada dos parâmetros do modelo ARMA, dependem inicialmente da estimativa da parte auto-regressiva, esta divisão permite avaliar o desempenho do método apresentado na seção 6.2 para a estimativa dos parâmetros auto-regressivos do modelo ARMA, bem como a validade dos conceitos teóricos lá desenvolvidos. Também, permitirá observar a influência da qualidade das estimativas do DEN-ARMA sobre a estimativa espectral ARMA.

Paralelamente, a divisão das simulações também permite observar o efeito da localização dos pólos e zeros sobre o desempenho do método MQEMYW e avaliar a influência das janelas de ponderação propostas.

Por fim, permitirá comparar novamente o método de Durbin com os métodos Correlograma e Periodograma levando em conta os dois sinais residuais apresentados na seção 6.3.

### 6.5.2 Estimativas do Denominador Espectral com Base na Anlise de Mnimos Quadrados das Equaces Modificadas de Yule-Walker

Nesta seo so apresentados os resultados das estimativas do denominador espectral dos quatro processos ARMA(4, 2), utilizando o mtodo MQEMYW, com e sem ponderaco.

Para cada conjunto de seqncias com 64 e 256 amostras, utilizamos trs valores para o nmero de equaces,  $M-q$ : nmero mximo de equaces ( $M=N-1$ , e  $q=2$ ), 16 e 8 equaces (nmero pequeno de equaces).

As janelas de ponderaco  $w[m]$  utilizadas foram (com  $q+1 \leq m \leq M$ ):

- $w[m]=1$ ; janela unitria ou ausncia de ponderaco,
- $w[m]=(N-m)^4$ ,
- $w[m]=(N-m)^2$ .

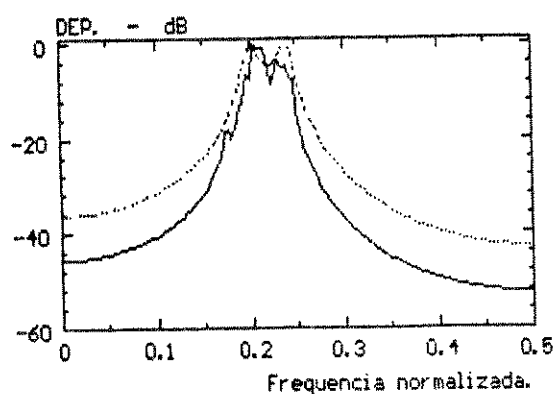
#### **A. Estimativas do Denominador Espectral do Processo ARMA<sub>0</sub>**

O processo ARMA<sub>0</sub> tem seus plos prximos  CRU e os zeros afastados. Em funo da localizaco dos plos, sua SAC apresentar um decaimento relativamente lento e, portanto, haver informao relevante nos ndices de autocorrelaco elevados. Assim, podemos prever que o desempenho do mtodo MQEMYW ser melhor com um nmero grande de equaces e, por causa deste nmero, com o uso das janelas de ponderaco.

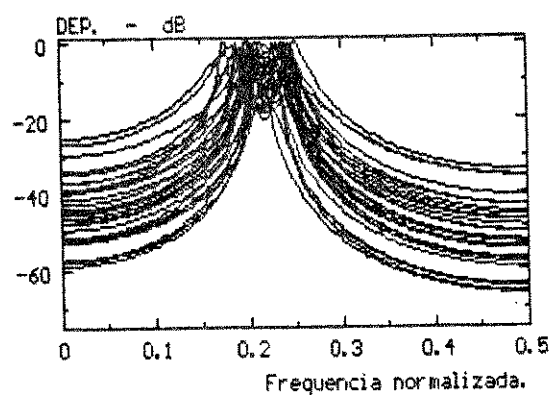
Para as simulaes com as seqncias de 64 amostras, as figuras apresentadas so: figura 6.3, para as estimativas com mximo de equaces,  $M-q=61$ , e figura 6.4, para as estimativas com 16 equaces, ambas com as trs janelas descritas.

Das figuras 6.3 e 6.4, observamos que:

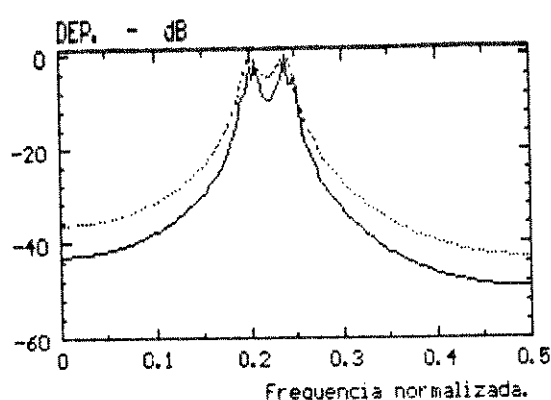
- o melhor desempenho do mtodo MQEMYW foi obtido com o mximo de equaces e ponderaco.
- a ponderaco no apresentou efeitos significativos para o caso com 16 equaces.
- a ponderaco com  $(N-m)^2$   ligeiramente melhor que com  $(N-m)^4$ .



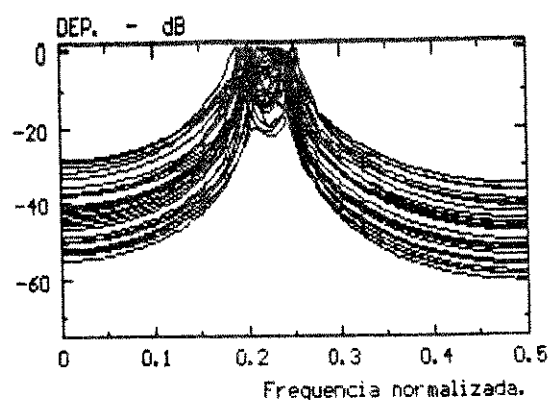
(a) média



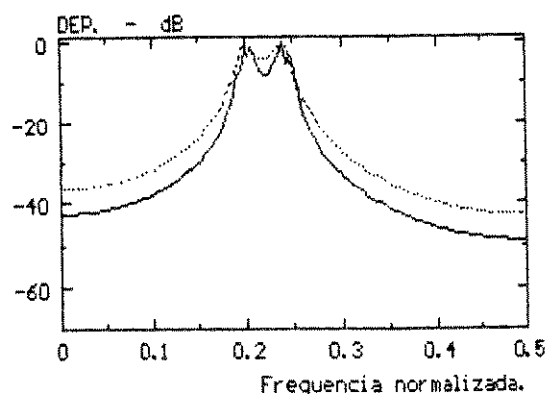
(a) estimativas



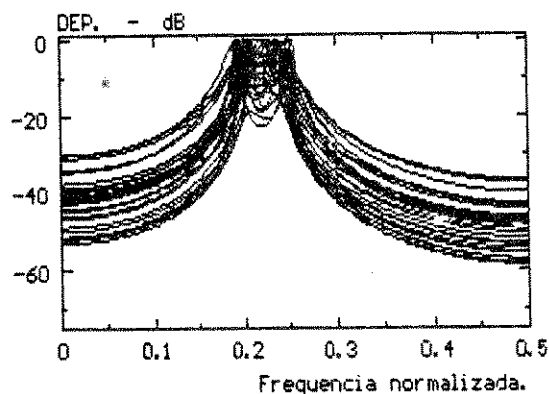
(b) média



(b) estimativas

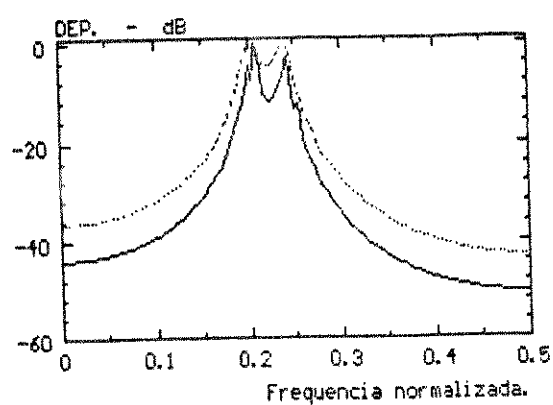


(c) média

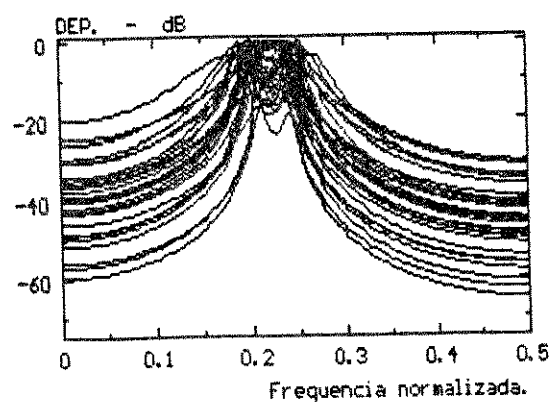


(c) estimativas

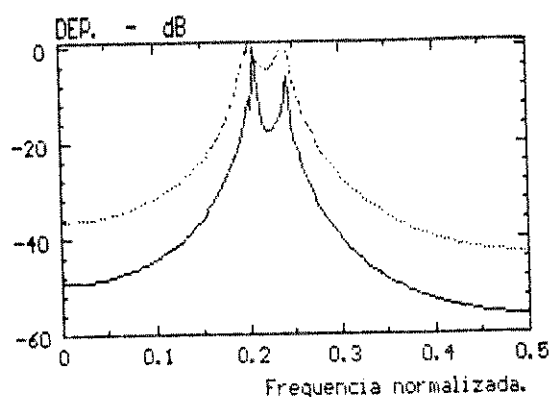
Figura 6.3 Estimativas do DEN-ARMA do Processo  $ARMA_0$ , para  $N=64$  e Máximo de Equações: (a) Sem Ponderação, (b) Ponderação com  $(N-m)^4$ , (c) Ponderação com  $(N-m)^3$ .



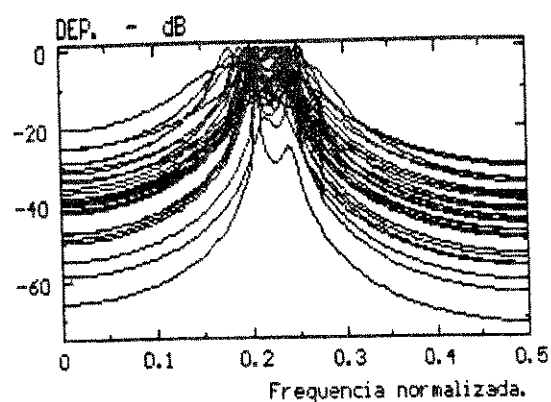
(a) média



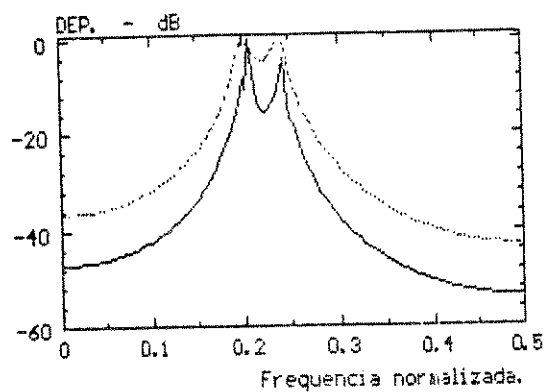
(a) estimativas



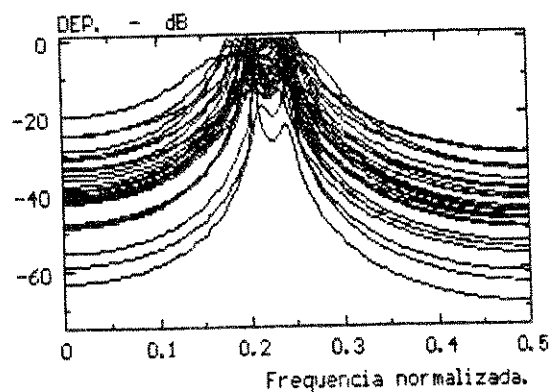
(b) média



(b) estimativas



(c) média



(c) estimativas

Figura 6.4 Estimativas do DEN-ARMA do Processo ARMA<sub>0</sub>, para N=64 e 16 Equações: (a) Sem Ponderação, (b) Ponderação com  $(N-m)^4$ , (c) Ponderação com  $(N-m)^3$ .

Também foram efetuadas simulações com :

- número de equações igual a 32 e as três janelas descritas, obtendo-se um desempenho intermediário aos dois anteriores.

- número de equações igual a 8 e ponderação  $(N-m)^2$ , obtendo-se o pior desempenho entre todos.

Logo, o melhor desempenho do método MQEMYW foi obtido com máximo de equações e ponderação, confirmando a previsão propiciada pela análise teórica desenvolvida na seção 6.2,

Para as simulações com as seqüências de 256 amostras, as figuras apresentadas são: figura 6.5, para as estimativas com máximo de equações,  $M-q=253$ , e figura 6.6, para as estimativas com 16 equações, ambas com as três janelas descritas.

Das figuras 6.5 e 6.6, observamos que:

- exceto para o caso com o máximo de equações e ausência de ponderação, o desempenho dos MQEMYW foi bom.

- baseando-se principalmente nos gráficos das estimativas, observamos que o melhor desempenho foi obtido com máximo de equações e ponderação. É preciso ter cuidado ao analisar os gráficos de médias, pois a normalização pelo pico espectral produz falsas polarizações.

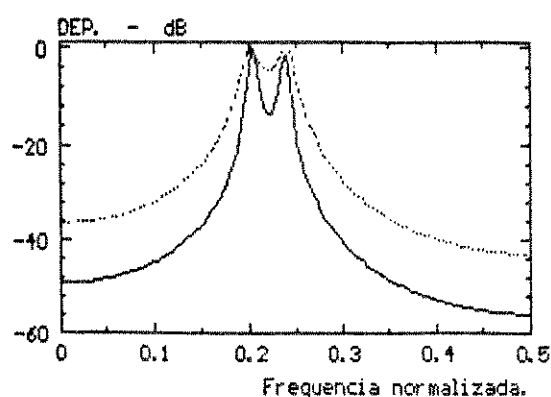
- com 16 equações, os desempenhos foram semelhantes entre si. Isto evidencia novamente a fraca influência da ponderação quando o número de equações é relativamente pequeno.

- é difícil distinguir diferenças entre os dois tipos de ponderação.

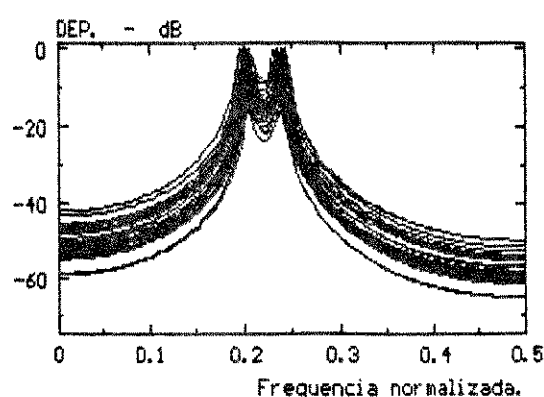
Também foram realizadas simulações com:

- número de equações igual a 48 e as três janelas descritas: o desempenho foi intermediário aos dois anteriores. Este número de equações é valor utilizado na referência [2].

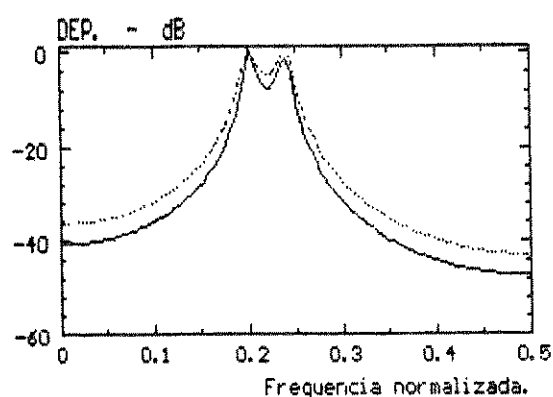
- número de equações igual a 8 e ponderação  $(N-m)^2$ : as estimativas foram inferiores a todos os casos ponderados, porém ainda com bom desempenho.



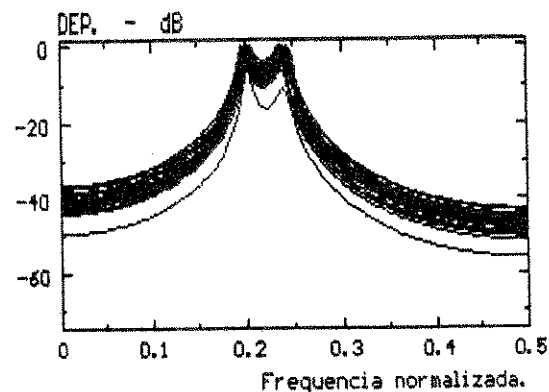
(a) média



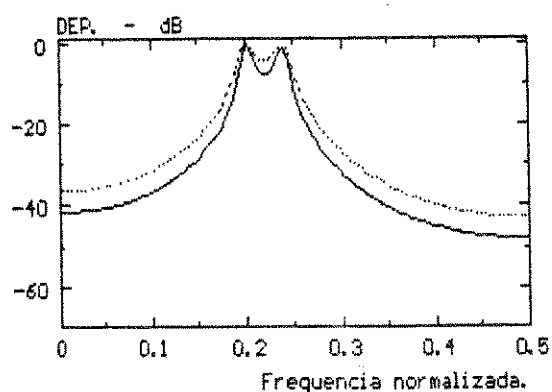
(a) estimativas



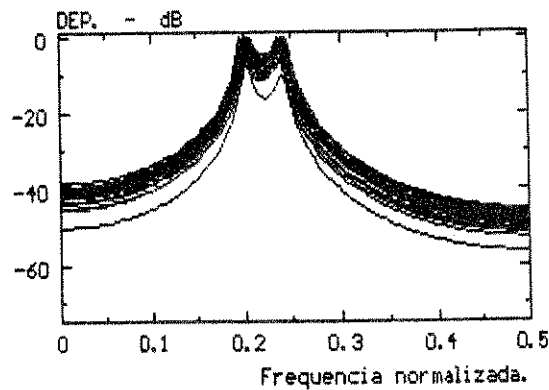
(b) média



(b) estimativas

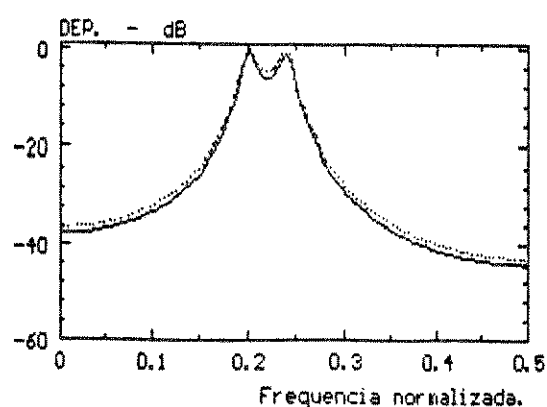


(c) média

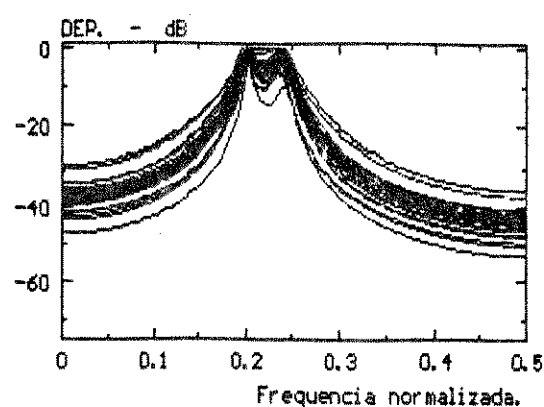


(c) estimativas

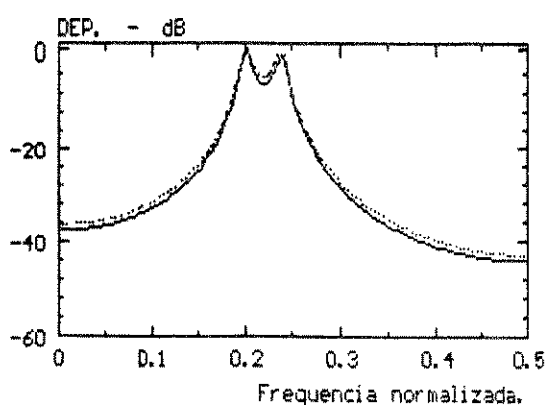
Figura 6.5 Estimativas do DEN-ARMA do Processo  $ARMA_0$ , para  $N=256$  e Máximo de Equações: (a) Sem Ponderação, (b) Ponderação com  $(N-m)^4$ , (c) Ponderação com  $(N-m)^3$ .



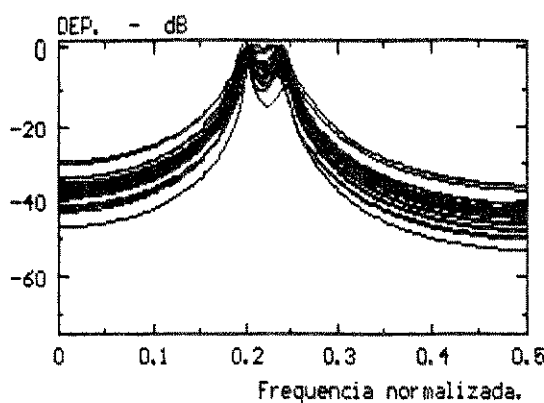
(a) média



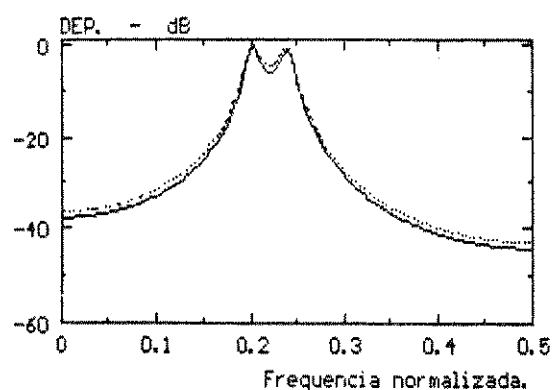
(a) estimativas



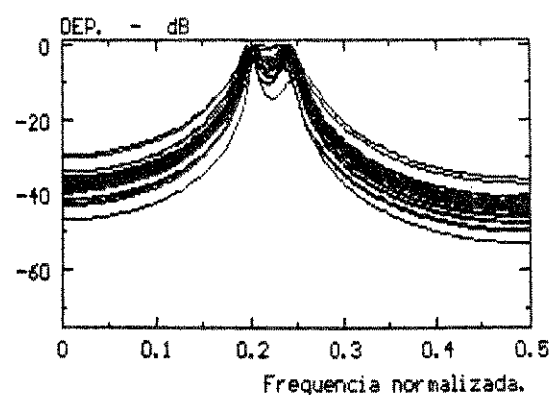
(b) média



(b) estimativas



(c) média



(c) estimativas

Figura 6.6 Estimativas do DEN-ARMA do Processo  $ARMA_0$ , para  $N=256$  e 16 Equaces: (a) Sem Ponderaco, (b) Ponderaco com  $(N-m)^4$ , (c) Ponderaco com  $(N-m)^3$ .

Comparando os resultados obtidos conclumos que o desempenho para todos os casos com 256 amostras foi superior queles com 64 amostras e que os benefcios produzidos pelo incremento do nmero de equaces tornam-se menos significativos  medida que é aumentado o nmero de amostras. Isto ocorre pois as estimativas de autocorrelaco apresentam melhor qualidade, o que explica, também, porque obtivemos bom desempenho no caso com 256 amostras e 8 equaces: embora o nmero de equaces fosse pequeno, a informao utilizada foi de melhor qualidade.

É importante observar, particularmente na figura 6.5a, uma tendência na estimativa fornecida pelo método MQEMYW de enfatizar os picos espectrais. Tal tendência  responsvel pelo nvel de polarizao nestes picos da referida figura.

Em resumo, para este processo com plos perto da CRU e zeros afastados, o método MQEMYW apresentou as seguintes caractersticas gerais:

- o melhor desempenho é atingido com o nmero mximo de equaces e janela de ponderaco do tipo  $(N-m)^3$ .
- quando se dispe de um nmero grande de amostras,  possvel reduzir o nmero de equaces, de modo a privilegiar a reduo do esforo computacional.

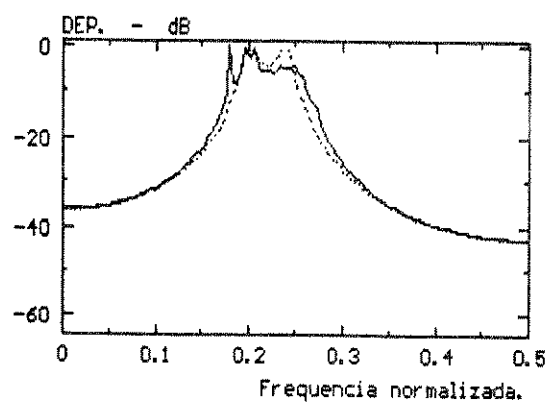
#### **B. Estimativas do Denominador Espectral do Processo ARMA<sub>1</sub>**

O processo ARMA<sub>1</sub> tem os mesmos plos do processo ARMA<sub>0</sub> e, portanto, espera-se que o método MQEMYW apresente o mesmo comportamento do caso anterior.

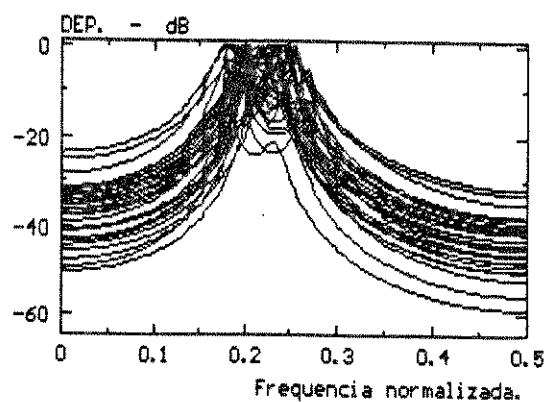
As simulaes com as seqncias de 64 amostras so apresentadas na figura 6.7, para as estimativas com o mximo de equaces,  $M-q=61$ , e figura 6.8, para as estimativas com 16 equaces, ambas com as três janelas descritas.

Das figuras 6.7 e 6.8, observamos que:

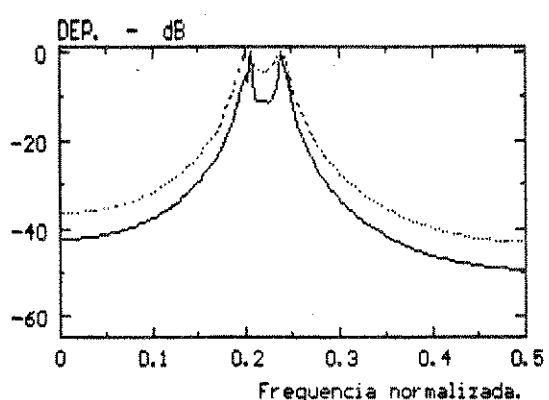
- no houve aumento de qualidade ao se aumentar o nmero de equaces.
- o efeito da ponderaco foi significativo nos dois casos, particularmente por permitir melhor reproduo dos picos espectrais.



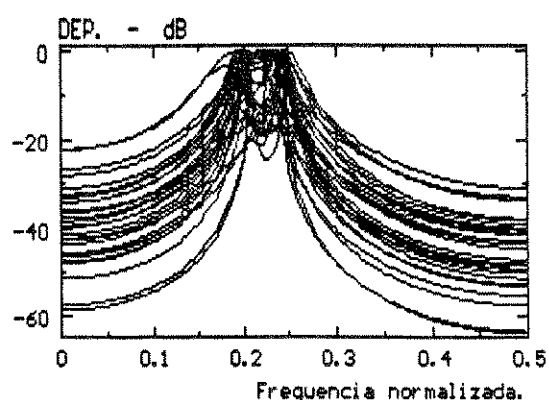
(a) média



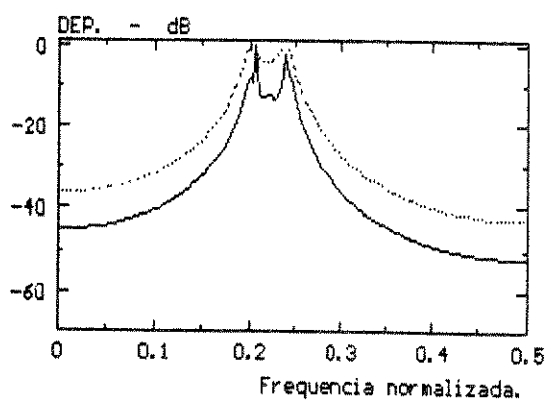
(a) estimativas



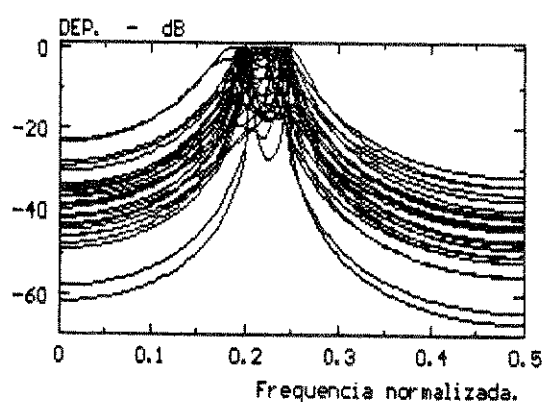
(b) média



(b) estimativas

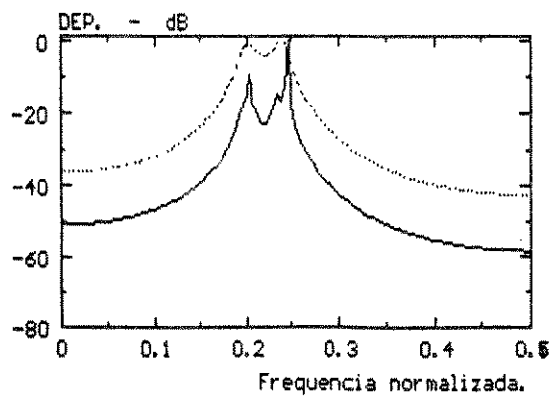


(c) média

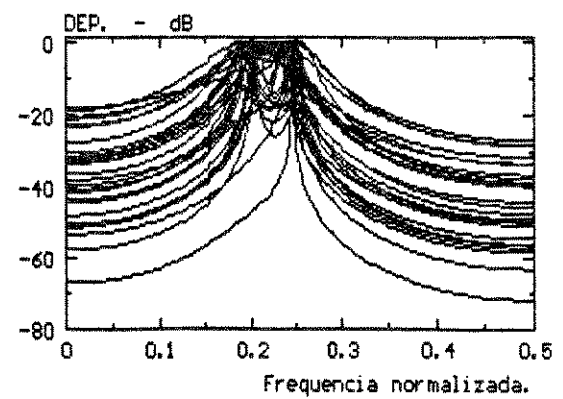


(c) estimativas

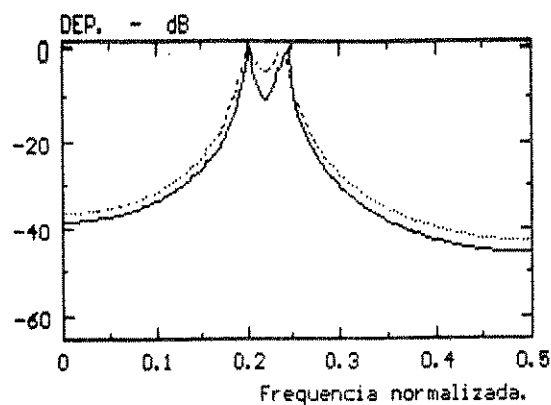
Figura 6.7 Estimativas do DEN-ARMA do Processo  $ARMA_1$ , para  $N=64$  e Mximo de Equaces: (a) Sem Ponderaco, (b) Ponderaco com  $(N-m)^4$ , (c) Ponderaco com  $(N-m)^3$ .



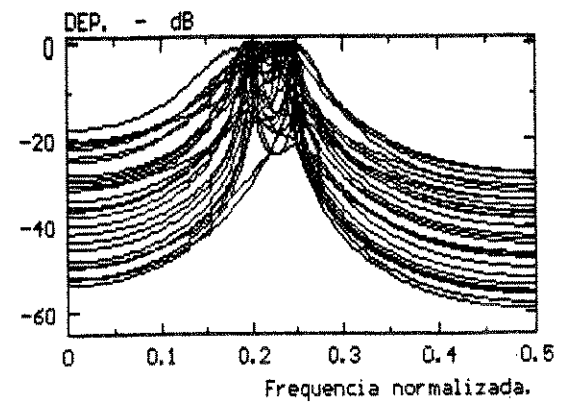
(a) média



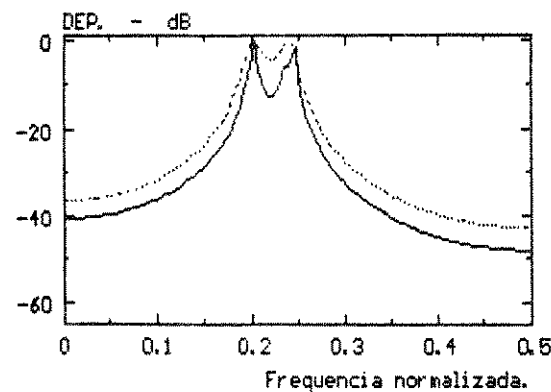
(a) estimativas



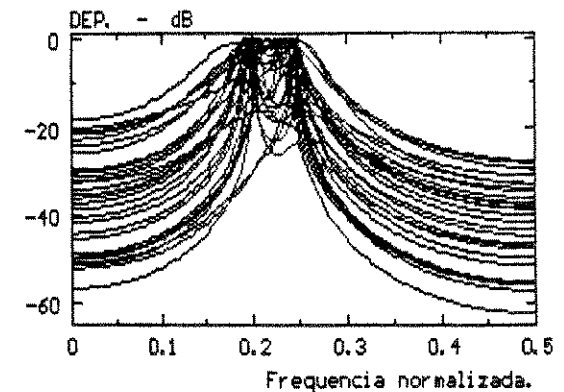
(b) média



(b) estimativas



(c) média



(c) estimativas

**Figura 6.8 Estimativas do DEN-ARMA do Processo  $ARMA_1$ , para  $N=64$  e 16 Equaces: (a) Sem Ponderaco, (b) Ponderaco com  $(N-m)^4$ , (c) Ponderaco com  $(N-m)^3$ .**

- não há diferenças significativas entre os resultados fornecidos pelos dois tipos de ponderação. Porém,  $(N-m)^4$  é ligeiramente melhor.

- a ênfase nos picos espectrais é notória em todas as figuras exceto a 6.7a.

Também utilizamos 8 equações e ponderação  $(N-m)^2$  obtendo um desempenho inferior aos casos analisados.

Dado que os processos  $ARMA_0$  e  $ARMA_1$  possuem parâmetros auto-regressivos idênticos, a expectativa era de que os resultados fossem semelhantes. Podemos deduzir, então, que as diferenças observadas são consequência da diferença nas posições dos zeros dos processos. Este assunto será tratado posteriormente.

As simulações com as seqüências de 256 amostras, são apresentadas na figura 6.9, para as estimativas com máximo de equações,  $M-q=253$ , e na figura 6.10, para as estimativas com 16 equações.

Das figuras 6.9 e 6.10, podemos concluir:

- o melhor desempenho foi obtido com o máximo de equações e ponderação.

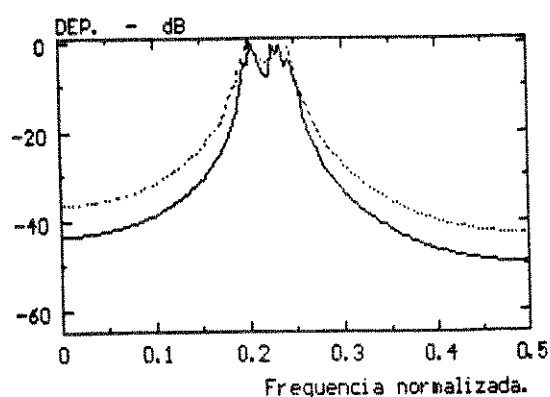
- não há diferenças significativas entre os resultados dos dois tipos de ponderação.

- houve ênfase do pico espectral situado ao redor da frequência 0.2, particularmente com 16 equações.

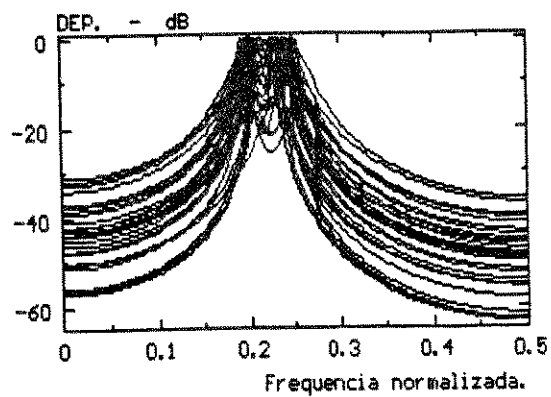
Foi utilizado também 8 equações e ponderação  $(N-m)^2$ , e novamente o desempenho foi o menor de todos.

Os resultados para 256 amostras apresentaram melhor qualidade que os correspondentes com 64 e o comportamento do método com  $N=256$  se assemelhou àquele observado no caso do processo  $ARMA_0$ .

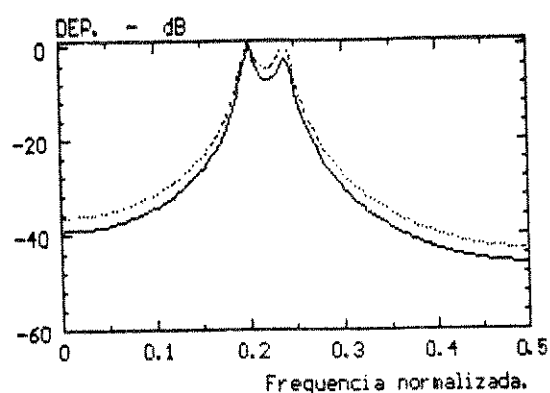
Este último fato permite afirmar que as diferenças de comportamento no caso  $N=64$  (bem como a qualidade inferior das estimativas obtidas) evidenciam a insuficiência de amostras para uma melhor atuação do método MQEMYW. A necessidade de um número maior amostras para o processo  $ARMA_1$  em relação ao  $ARMA_0$ , deve ser consequência exclusiva do posicionamento dos seus zeros, os quais deram origem a um vale entre os dois picos espectrais. Aparentemente, este posicionamento provocou um aumento da tendência para enfatizar estes picos, a qual é compensada com o aumento do número de amostras.



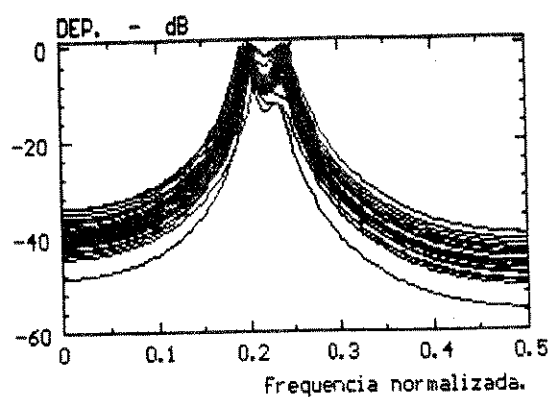
(a) média



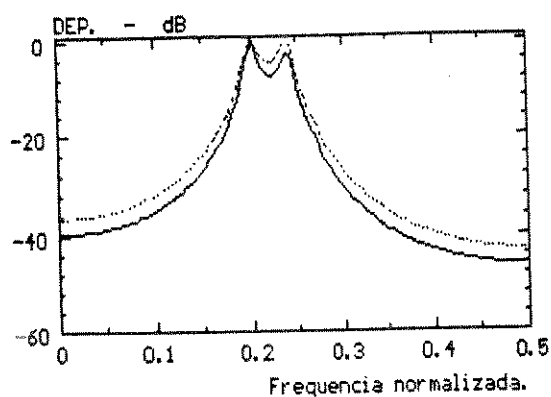
(a) estimativas



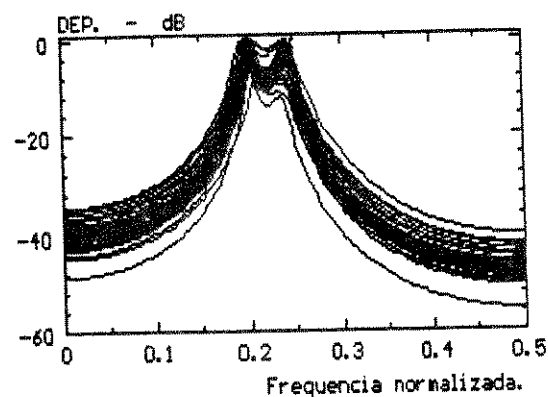
(b) média



(b) estimativas



(c) média



(c) estimativas

Figura 6.9 Estimativas do DEN-ARMA do Processo  $ARMA_1$ , para  $N=256$  e Máximo de Equações: (a) Sem Ponderação, (b) Ponderação com  $(N-m)^4$ , (c) Ponderação com  $(N-m)^3$ .

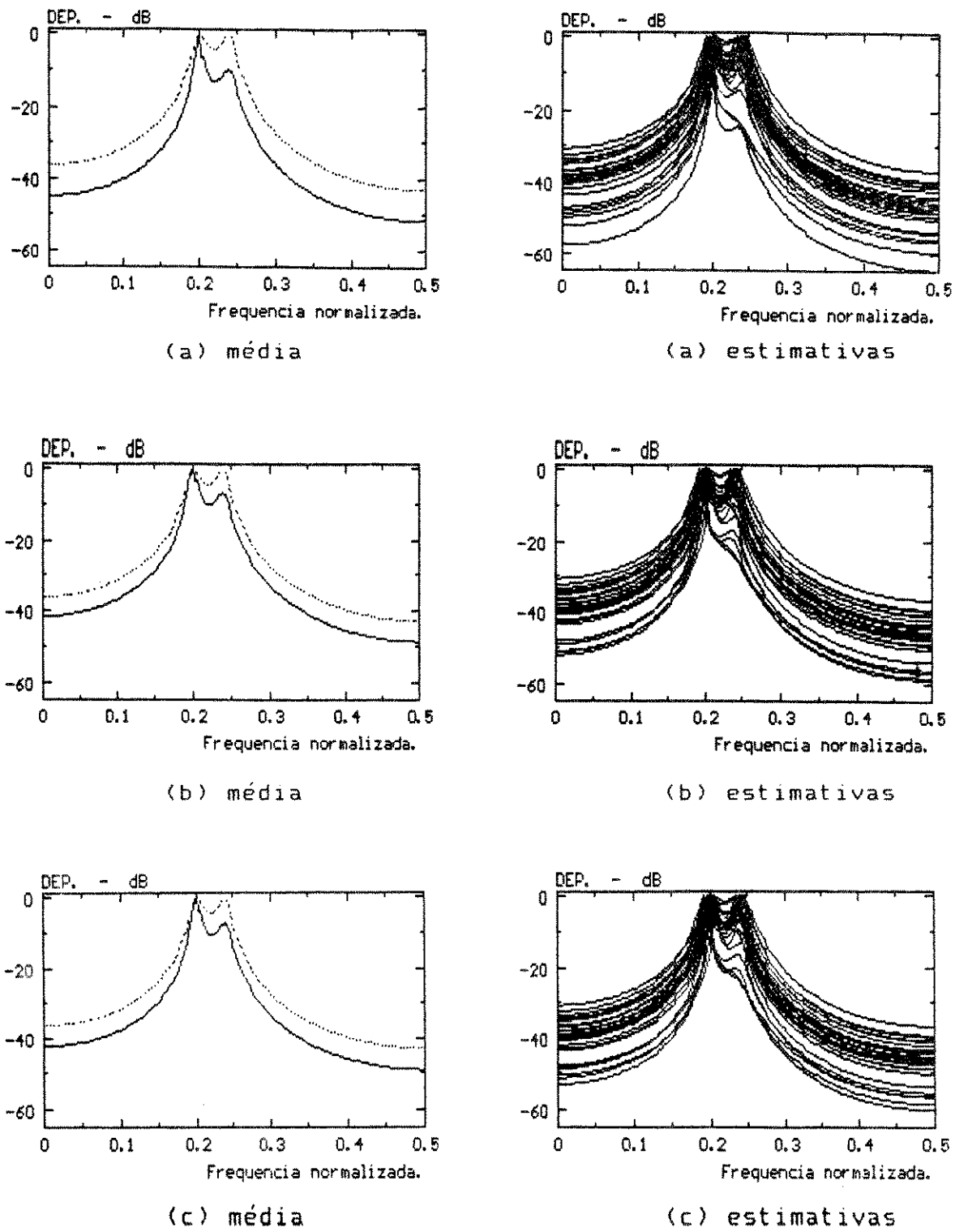


Figura 6.10 Estimativas do DEN-ARMA do Processo  $ARMA_1$ , para  $N=256$  e 16 Equaces: (a) Sem Ponderaco, (b) Ponderaco com  $(N-m)^4$ , (c) Ponderaco com  $(N-m)^3$ .

Por fim, no contexto do processo  $ARMA_1$ , no podemos afirmar que o aumento do nmero de amostras, até cerca de 256, permite reduzir o nmero de equaces de modo a privilegiar a reduco do esforo computacional. As estimativas do denominador espectral deste processo apresentaram diferenas significativas para os três nmeros de equaces utilizados.

Dado que as duas formas de ponderaco analisadas apresentaram resultados semelhantes, resolvemos adotar apenas uma delas no restante deste capítulo, como forma de economizar espao. Escolhemos a janela do tipo  $(N-m)^3$  em funo de alguns desempenhos ligeiramente superiores.

### C. Estimativa do Denominador Espectral do Processo $ARMA_2$

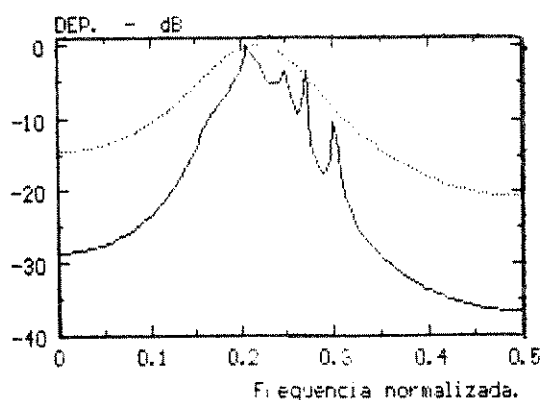
O processo  $ARMA_2$  tem seus pólos e zeros afastados da CRU, indicando que a SAC correspondente decairá de forma mais rápida que nos casos anteriores. Logo, no haverá informao relevante nos índices de autocorrelaco elevados, o que permite prever que o método MQEMYW apresentará melhor desempenho com um nmero pequeno de equaces. Em funo deste, no deve ocorrer diferenas significativas entre as estimativas com e sem ponderaco.

As simulaes com o conjunto de seqncias de 64 amostras so apresentadas na figura 6.11 para o máximo de equaces,  $M-q=61$ , e na figura 6.12 para 8 equaces, as quais permitem concluir que:

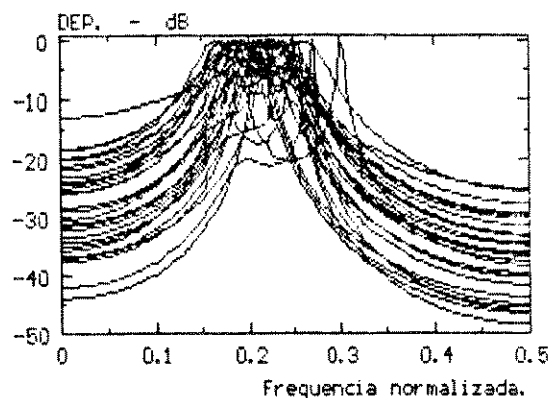
- o melhor desempenho foi obtido com o nmero pequeno de equaces, e neste caso a ponderaco no foi importante.
- a qualidade das estimativas com o máximo de equaces é bastante inferior.

Também, com 16 equaces o desempenho foi muito inferior qule com 8 equaces.

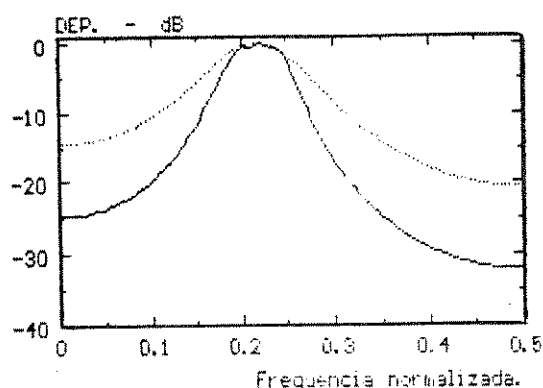
Podemos concluir que de fato a informao relevante do processo se encontra nas autocorrelaces com índices pequenos. Também, a janela de ponderaco atribui pesos bastantes semelhantes aos erros de aproximao das oito equaces utilizadas, no produzindo, portanto, efeito significativo.



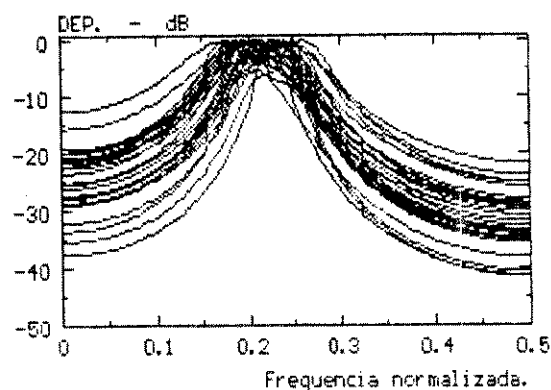
(a) mdia



(a) estimativas



(b) media

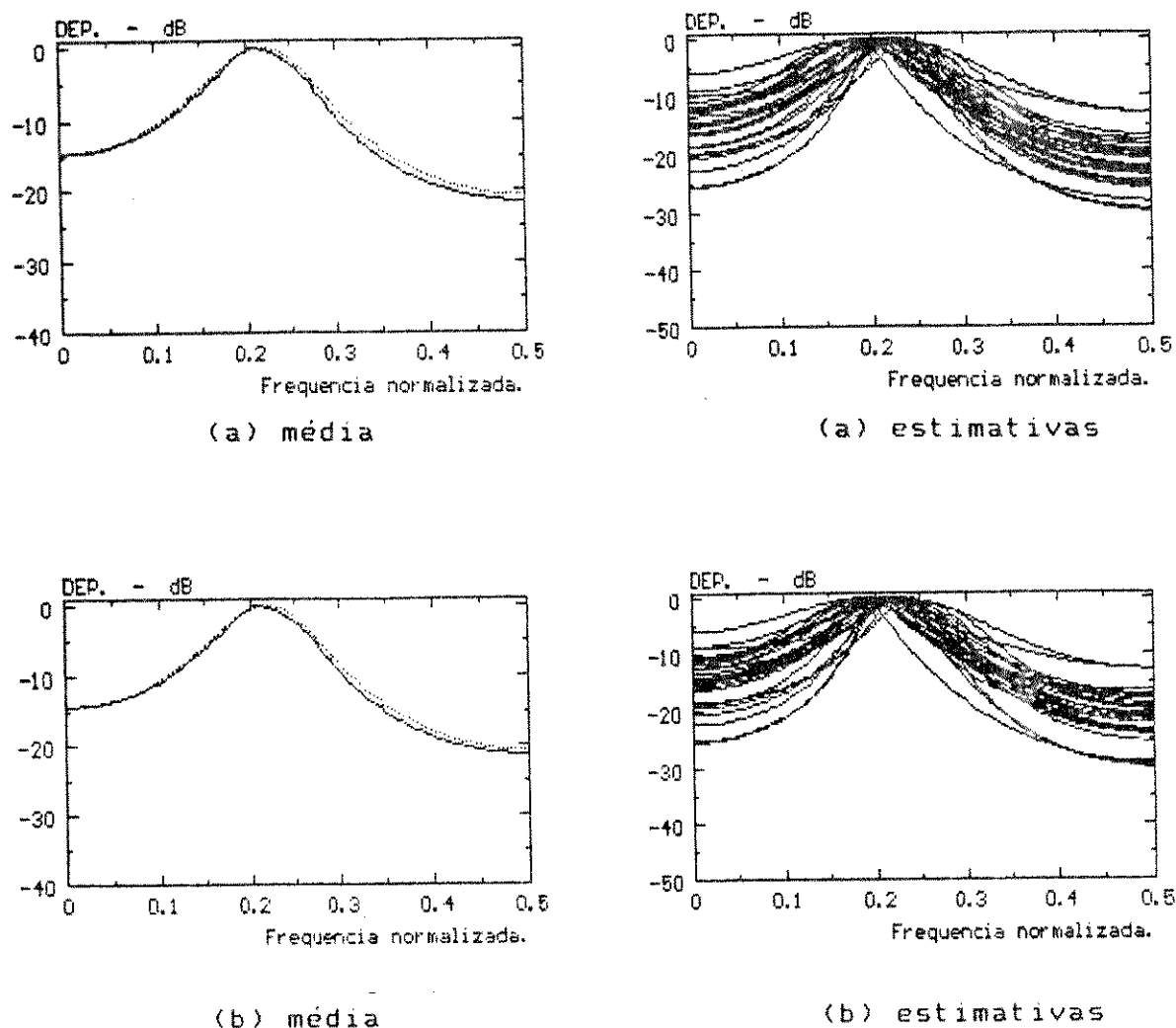


(b) estimativas

**Figura 6.11 Estimativas do DEN-ARMA do Processo  $ARMA_2$ , para  $N=64$  e Mximo de Equaces: (a) Sem Ponderaco, (b) Ponderaco com  $(N-m)^3$ .**

As simulaes com o conjunto de seqncias de 256 amostras so apresentadas nas figuras 6.13 e 6.14. A anlise destas figuras leva s mesmas concluses atingidas para o caso com 64 amostras. As curvas mais pronunciadas observadas nas estimativas da figura 6.14 so aqui consideradas atpicas

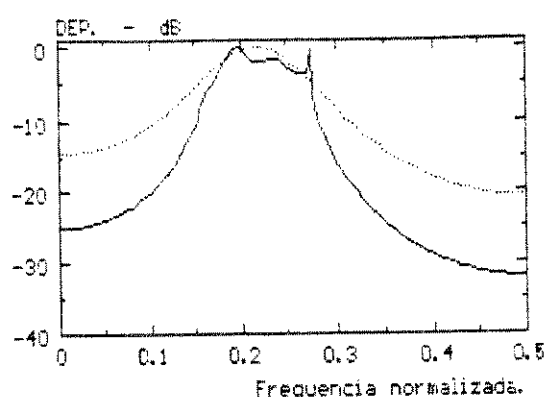
 interessante observar que as melhores estimativas do denominador espectral, aquelas das figuras 6.12 e 6.14, so bastante semelhantes entre si. Isto indica que mesmo 64 amostras so suficientes para obtermos boas estimativas do denominador espectral do



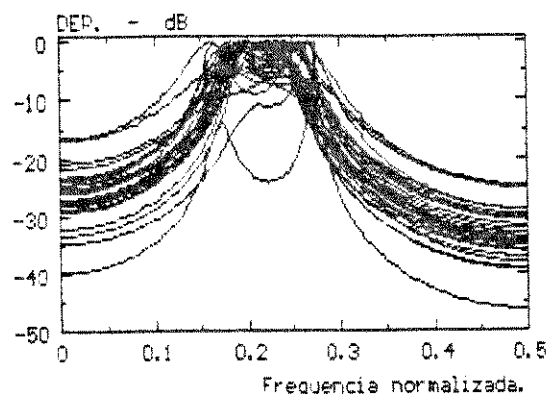
**Figura 6.12 Estimativas do DEN-ARMA do Processo  $ARMA_2$ , para  $N=64$  e 8 Equaces: (a) Sem Ponderaco, (b) Ponderaco com  $(N-m)^2$ .**

processo  $ARMA_2$ . A suavidade de sua caracterstica espectral assegura um decaimento suficientemente rpido da SAC como para permitir-nos o uso de poucas equaces. Logo, necessitamos apenas das estimativas  $\hat{r}_{xx}[m]$  prximas ¢ origem do eixo  $m$ , as quais so bem estimadas a partir das 64 amostras.

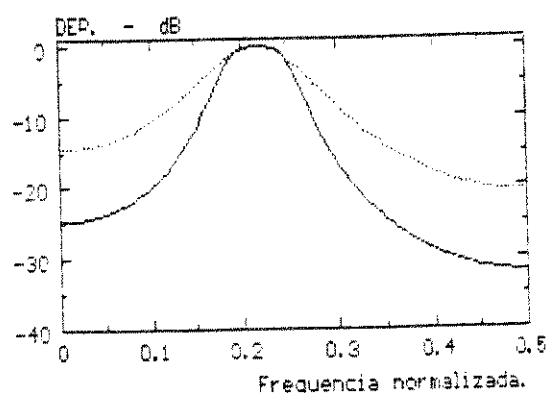
Por outro lado, a tendncia de polarizaco no pico espectral se fz sentir apenas com o uso do nmero mximo de equaces, porm no foi atenuada com o aumento do nmero de amostras.



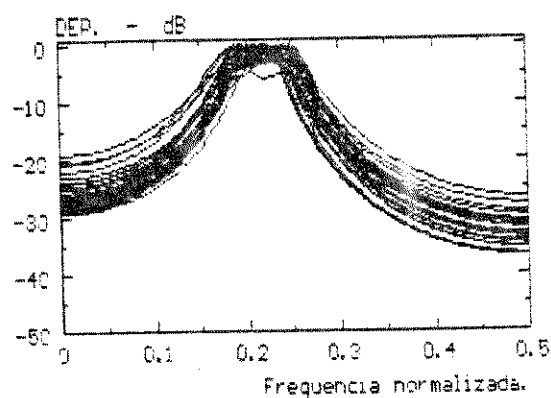
(a) mdia



(a) estimativas



(b) média



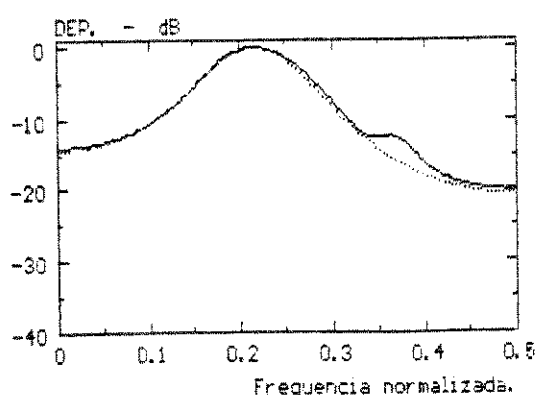
(b) estimativas

Figura 6.13 Estimativas do DEN-ARMA do Processo  $ARMA_2$ , para  $N=256$   
e Mximo de Equaces: (a) Sem Ponderaco,  
(b) Ponderaco com  $(N-m)^2$ .

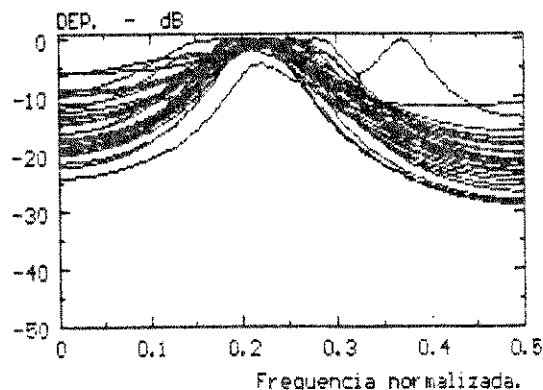
#### D. Estimativa do Denominador Espectral do Processo $ARMA_3$

O processo  $ARMA_3$  tem os mesmos plos do processo  $ARMA_2$ . Porém como seus zeros se encontram prximos  CRU, devero afetar de forma adversa o desempenho do método MQEMYW, tal como ocorreu com o processo  $ARMA_1$ .

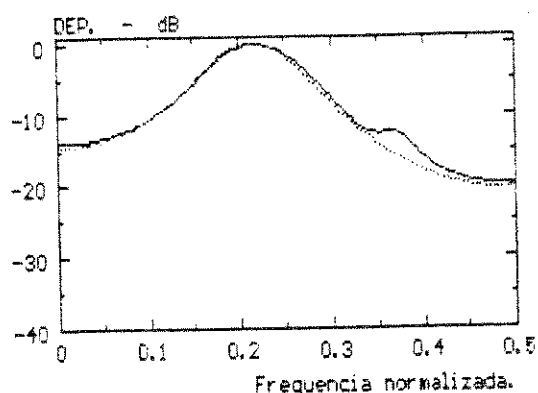
Nas figuras 6.15 e 6.16 so mostrados os resultados para  $N=64$  amostras, enquanto que as figuras 6.17 e 6.18 se referem ao caso com 256 amostras.



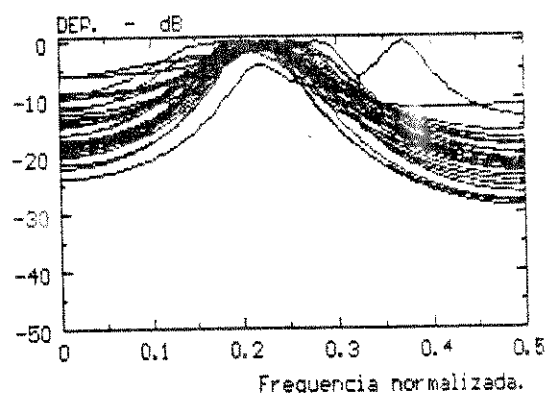
(a) mdia



(a) estimativas



(b) mdia

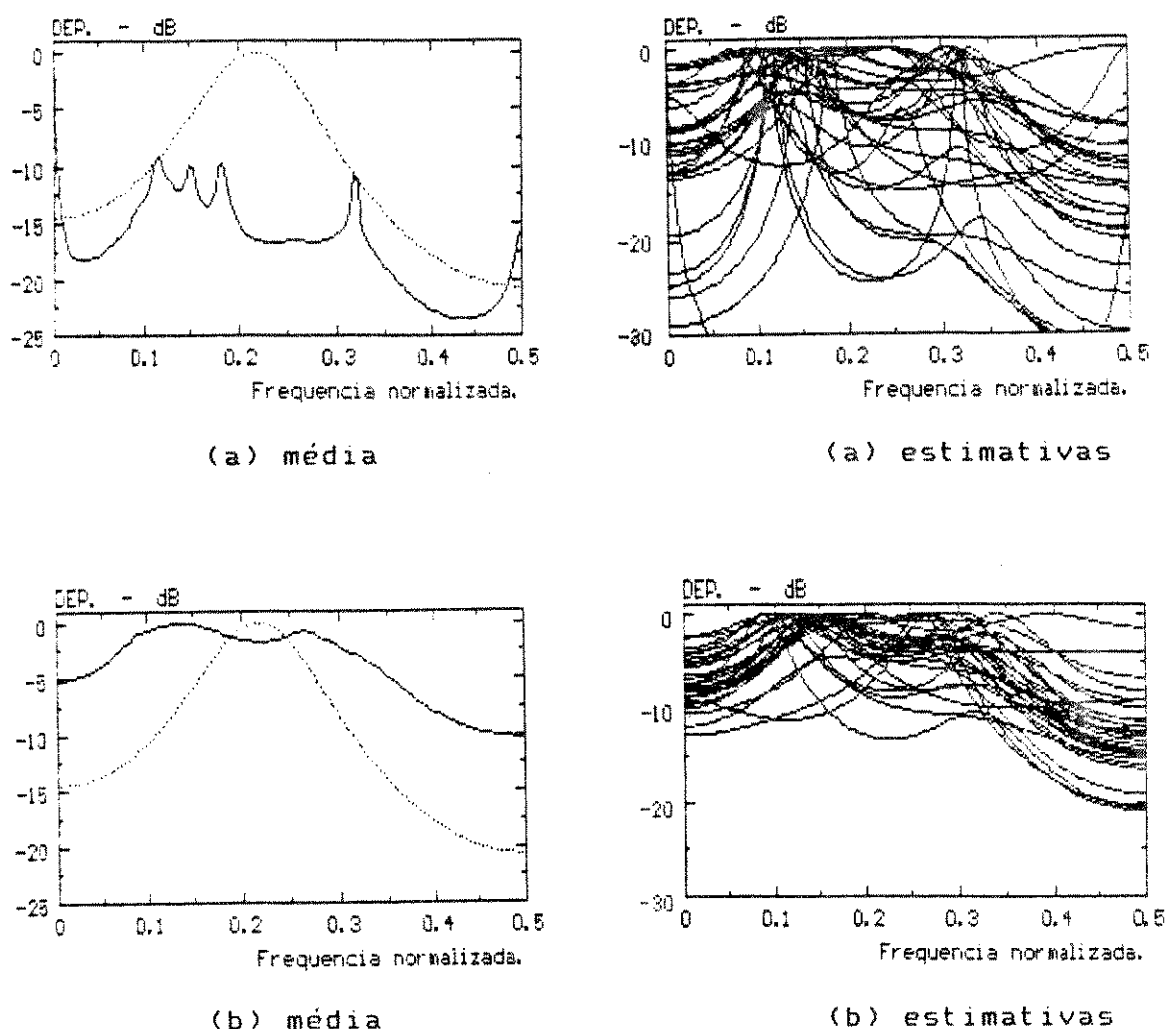


(b) estimativas

**Figura 6.14 Estimativas do DEN-ARMA do Processo  $ARMA_2$ , para  $N=256$  e 8 Equaces: (a) Sem Ponderaco, (b) Ponderaco com  $(N-m)^3$ .**

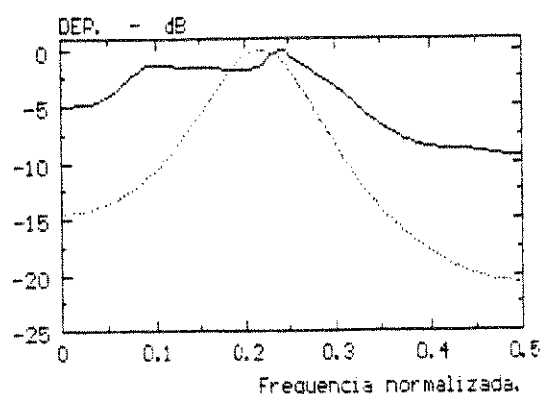
Das figuras 6.15 e 6.16 observamos que com 64 amostras o desempenho do mtodo foi muito ruim tanto para o mximo de equaces como para 8 equaces.

Para  $N=256$ , figuras 6.17 e 6.18, o aumento do nmero de amostras e, portanto, a melhor qualidade das estimativas de autocorrelaco, permitiu um aumento no desempenho. Entretanto, mesmo no melhor caso, com o nmero pequeno de equaces, o desempenho ainda  bastante ruim.

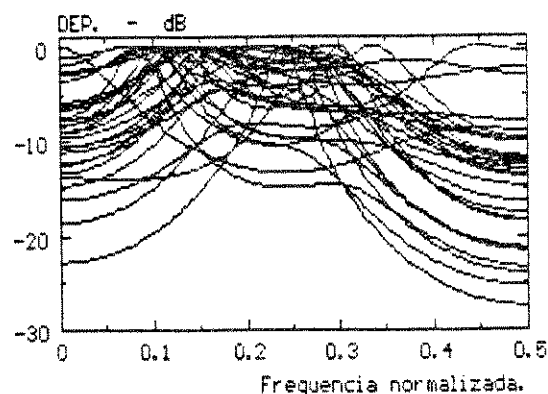


**Figura 6.15 Estimativas do DEN-ARMA do Processo  $ARMA_3$ , para  $N=64$  e Mximo de Equaces: (a) Sem Ponderaco, (b) Ponderaco com  $(N-m)^2$ .**

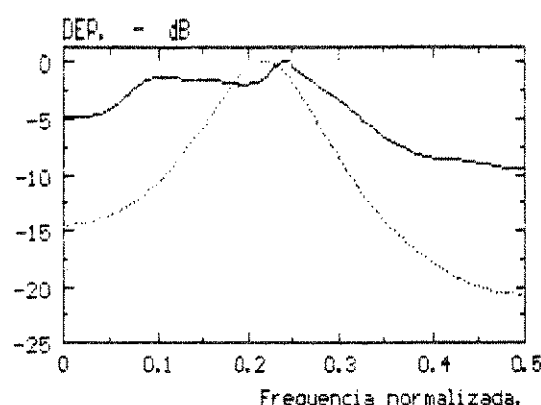
Fica evidente ao compararmos os resultados para os processos  $ARMA_2$  e  $ARMA_3$ , que a presena dos zeros deste ltimo, localizados entre os plos e prximos  CRU, afeta de forma drstica o desempenho do mtodo MQEMYW. Ocorre uma polarizao nas estimativas das frequncias destes plos, gerando duas elevaces espectrais ligeiras adjacente  posio onde deveria ocorrer o pico espectral largo, presente na curva espectral terica do denominador do  $ARMA_3$ . Tudo se passa como se houvesse uma tentativa de reproduzir a curva espectral completa deste processo. Acreditamos que de fato esta 



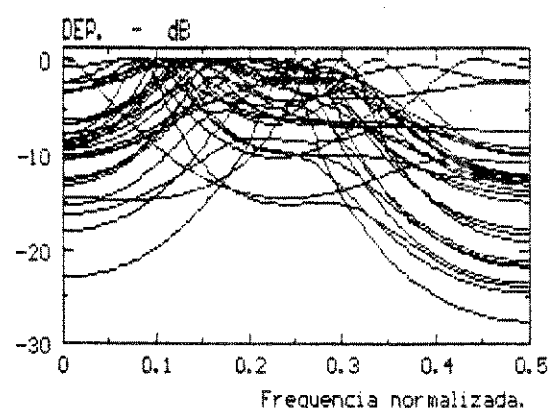
(a) mdia



(a) estimativas



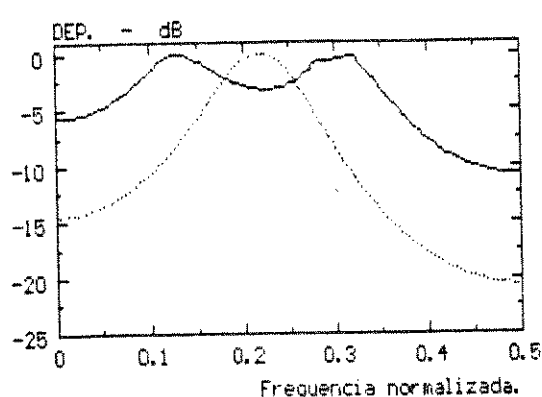
(b) média



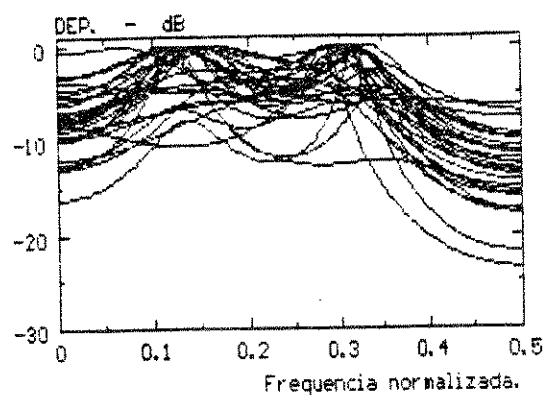
(b) estimativas

**Figura 6.16 Estimativas do DEN-ARMA do Processo  $ARMA_3$ , para  $N=64$  e 8 Equaces: (a) Sem Ponderaco, (b) Ponderaco com  $(N-m)^3$ .**

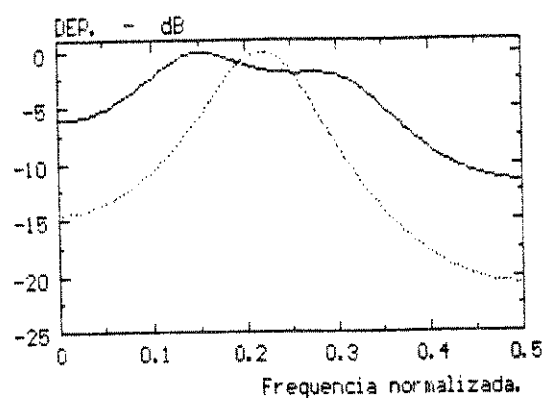
a explicaco para os resultados, e  uma consequência da tentativa de estimar de forma separada os efeitos dos plos e dos zeros. Enquanto estamos estimando os parâmetros do denominador ARMA de forma isolada, no h como direcionar o processo de estimaco no sentido de se ater apenas s características do denominador, uma vez que so as amostras do processo ARMA que proporcionam as informaes para tal estimativa. Por esta análise, somente através de estimativas simultâneas de numerador e denominador é que poderíamos atingir melhores resultados.



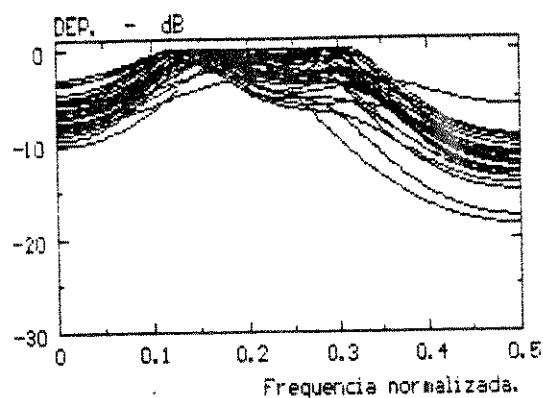
(a) mdia



(a) estimativas



(b) média

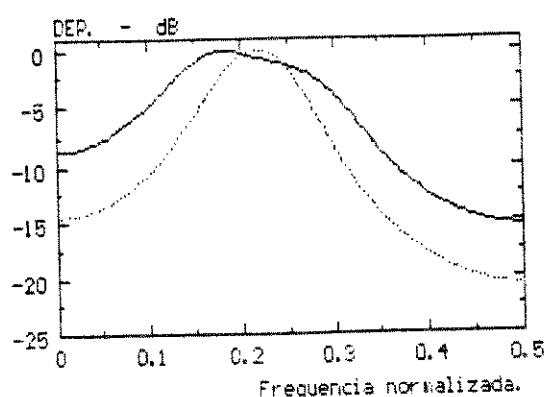


(b) estimativas

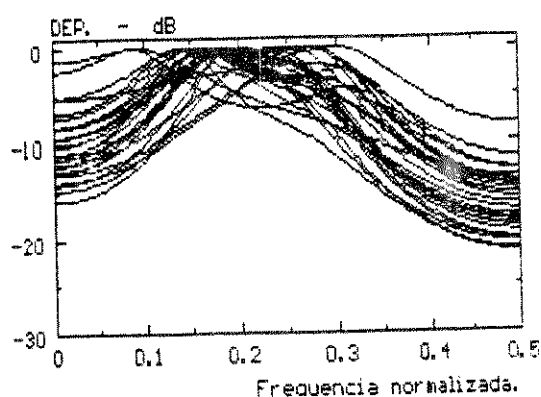
Figura 6.17 Estimativas do DEN-ARMA do Processo  $ARMA_3$ , para  $N=256$  e Mximo de Equaces: (a) Sem Ponderaco, (b) Ponderaco com  $(N-m)^3$ .

### E. Concluses gerais

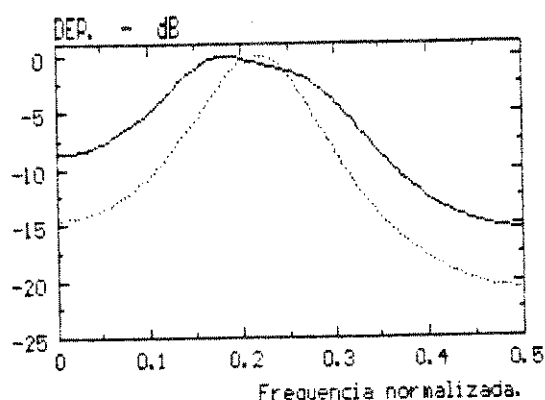
Os resultados obtidos na estimativa do denominador espectral dos quatros processos  $ARMA(4, 2)$  através do método MQEMYW permitiram concluir que a localizaco dos plos condiciona o nmero de equaces a ser utilizado. Tal nmero deve ser elevado quando os plos se encontram perto da CRU, e prximo do mínimo quando se encontram afastados. Também, o uso da ponderaco  necessrio



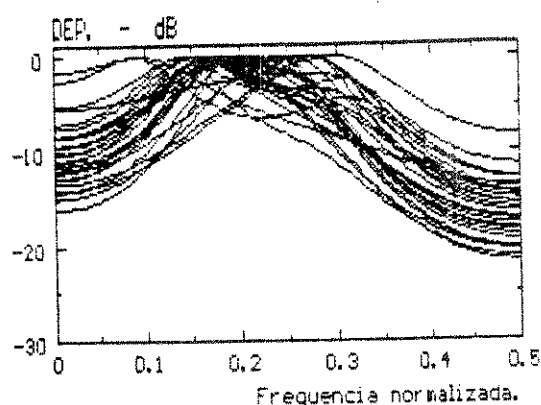
(a) mdia



(a) estimativas



(b) média



(b) estimativas

**Figura 6.18 Estimativas do DEN-ARMA do Processo  $ARMA_9$ , para  $N=256$  e 8 Equaces: (a) Sem Ponderaco, (b) Ponderaco com  $(N-m)^2$ .**

quando o número de equaces é elevado mas no produz efeitos significativos quando o número de equaces é pequeno. Os dois tipos de ponderaco examinados produziram resultados bastantes semelhantes. Em funco disto optou-se por um deles em particular o tipo  $(N-m)^2$ .

Os resultados confirmaram também que os conceitos tericos desenvolvidos na seco 6.2 sobre a aplicaco do método MQEMYW. De fato o desempenho do método mostrou ser altamente dependente da localizaco dos plos do processo a ser analisado. Da mesma forma, confirmou-se a previso de que o número adequado de equaces seria

função das características espectrais do processo sob análise.

A constatação do efeito da localização dos zeros do processo sob análise no desempenho do método, principalmente quando os pólos se encontram afastados e os zeros próximos à CRU, permitiu observar a limitação natural da estratégia de estimação separada: não conseguimos isolar os efeitos de tais zeros sobre a estimativa do DEN-ARMA. Assim, as estimativas deste tendem a reproduzir as características que deveriam ser retratadas pelas estimativas do NUM-ARMA.

Observamos também que o método MQEMYW apresenta polarização na estimativa dos picos espectrais, a qual tende a realçar tais picos, ou seja, existe uma polarização na estimativa da posição dos pólos na direção radial, com tendência a localiza-los exageradamente próximos à CRU.

Finalmente, os resultados mostraram que o melhor desempenho do método MQEMYW ocorre quando os pólos e zeros se encontram afastados da CRU. O desempenho ainda é satisfatório quando os pólos se aproximam da CRU mas os zeros permanecem afastados, ou quando os pólos e zeros se aproximam da CRU, porém também próximos entre si. O pior desempenho ocorre com pólos afastados e zeros próximos à CRU, porém todos situados em posições angulares próximas entre si.

### 6.5.3 Estimação do Numerador Espectral com Base no Método de Durbin

Nesta seção serão apresentados os resultados das estimativas da DEP completa dos quatros processo ARMA(4, 2), utilizando o método de Durbin para a avaliar o numerador espectral. Nestas simulações foram utilizadas algumas das estimativas do denominador espectral de cada processo.

Temos por objetivo destacar que a qualidade das estimativas da DEP depende da qualidade das estimativas dos parâmetros autor-regressivos, confirmar as conclusões sobre o método MQEMYW obtidas quando das estimativas do denominador espectral e confirmar as conclusões do capítulo 5 sobre as estimativas espectrais MA, agora dentro do contexto da estimação do numerador espectral ARMA.

Com base nos resultados da seção 5.4, os métodos utilizados para obter o modelo AR longo e a ordem atribuída a este, foram:

- método Autocorrelação com a ordem do modelo AR longo igual a  $ND/5$  (ordem adequada para processos MA sem vales abruptos na DEP).

- método Covariância Modificado com a ordem do modelo AR longo igual a  $ND/3$  (ordem adequada neste método para processos MA com vales abruptos na DEP).

onde  $ND=N-p$ , é o número de amostras na saída do filtro que gera o sinal residual MA a partir das amostras  $x[n]$  do processo ARMA,  $N$  é o número de amostras disponíveis e  $p$  é a ordem auto-regressiva assumida.

É importante observar que consideraremos apenas as amostras do sinal residual MA produzidas quando todos os registros do filtro contém amostras  $x[n]$ . Serão desprezadas aquelas referentes às situações onde nem todos os registros contém amostras.

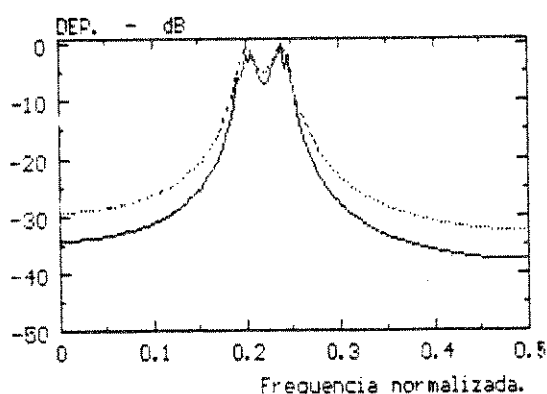
No decorrer desta, sempre que tratarmos dos métodos Autocorrelação e Covariância Modificado, estaremos nos referimos ao seu uso na obtenção do modelo AR longo no método de Durbin. Também, utilizaremos apenas as estimativas do denominador espectral obtidas com a ponderação do tipo  $(N-m)^3$ .

#### A. Estimativas da DEP do Processo ARMA<sub>0</sub>

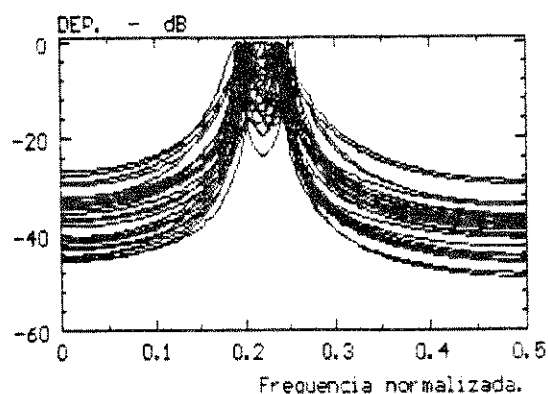
Para este processo ARMA<sub>0</sub>, com pólos próximos à CRU e zeros afastados, o método MQEMYW apresentou melhor desempenho quando utilizamos o máximo de equações e ponderação. Entretanto, calculamos as estimativas da DEP para as seguintes estimativas do denominador espectral: número máximo de equações e ponderação, 16 equações com e sem ponderação, 8 equações e ponderação, tanto para 64 como para 256 amostras.

Os melhores resultados obtidos são apresentados nas figuras 6.19 e 6.20 para as seqüências com 64 amostras e figuras 6.21 e 6.22 para as seqüências com 256 amostras.

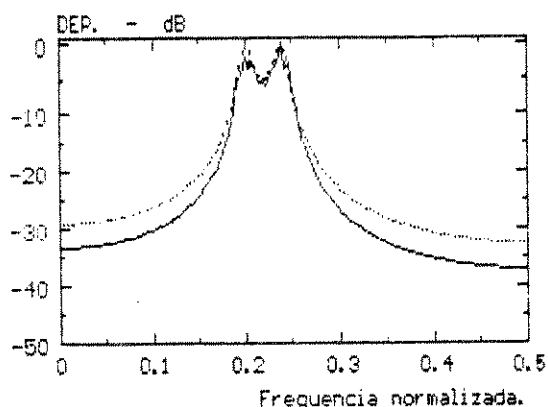
Analisando inicialmente a qualidade destas estimativas em relação às estimativas do denominador espectral, constatamos que o conjunto de estimativas da DEP do processo ARMA<sub>0</sub> mostrou (independen-



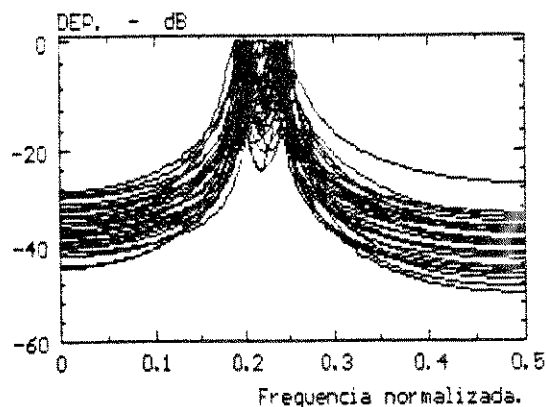
(a) média



(a) estimativas



(b) média



(b) estimativas

**Figura 6.19 Estimativas da DEP do Processo ARMA<sub>0</sub> : N=64, Máximo de Equaces, Ponderaco  $(N-m)^3$  e**

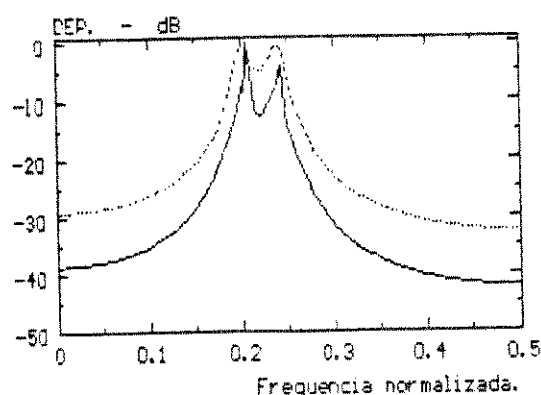
**(a) Método Autocorrelaco,**

**(b) Método Covariância Modificado.**

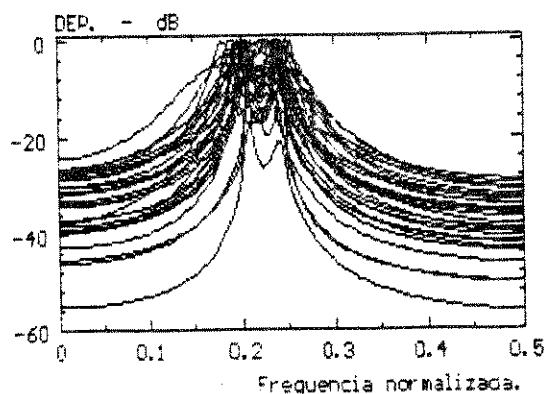
dente dos métodos Autocorrelaco e Covariância Modificado) o mesmo padro observado nas estimativas do denominador espectral, ou seja:

- para N=64, as melhores estimativas espectrais foram obtidas com o máximo de equaces e ponderaco.

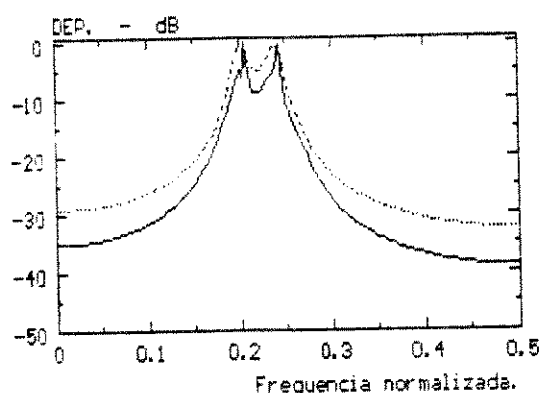
- para N=256, tal como na estimativa do DEN-ARMA, foram obtidas boas estimativas espectrais, exceto no caso com o máximo de equaces e ausência de ponderaco. E, com base nos gráficos das estimativas, as melhores foram aquelas quando do máximo de equaces e ponderaco.



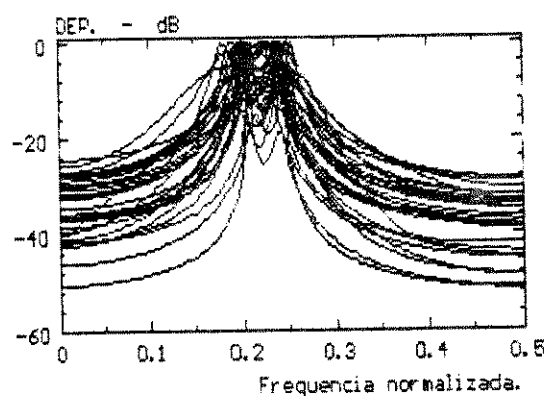
(a) mdia



(a) estimativas



(b) média



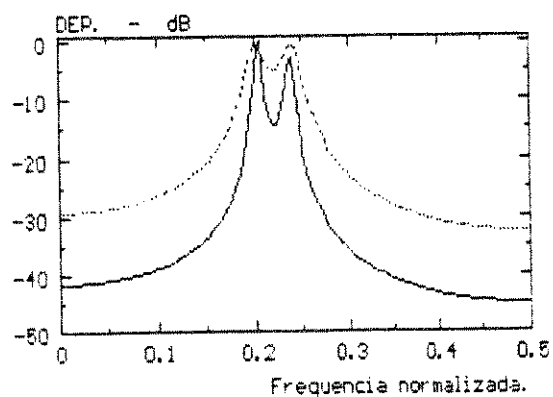
(b) estimativas

**Figura 6.20 Estimativas da DEP do Processo ARMA<sub>0</sub> : N=64, 16 Equaces, Ponderaco  $(N-m)^2$  e**  
**(a) Método Autocorrelaco,**  
**(b) Método Covarincia Modificado.**

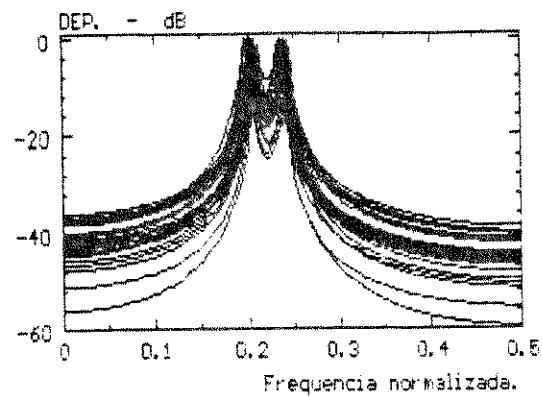
- a qualidade aumenta com a elevaco do número de amostras.

Temos aqui uma primeira comprovaco de que a qualidade da estimativa da DEP-ARMA depende do grau de qualidade das estimativas do denominador espectral.

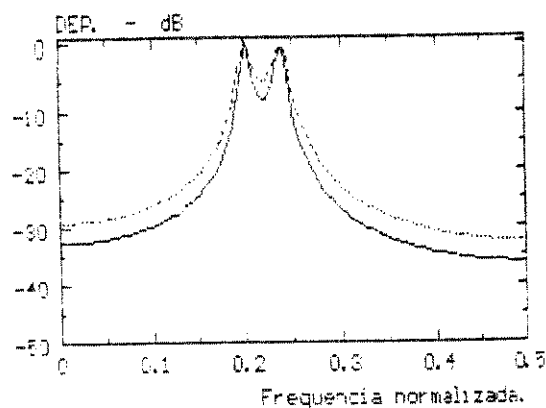
Analisando a qualidade dos resultados em relaco  estimaco do numerador espectral constatamos que:



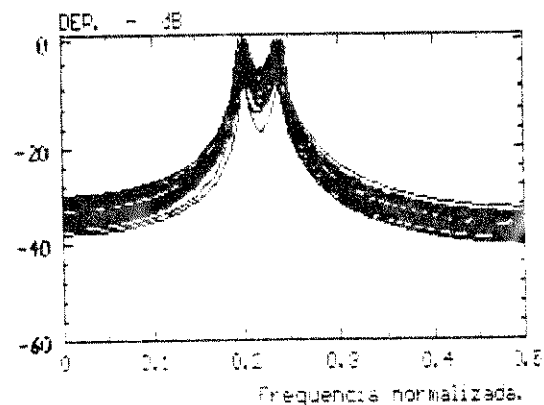
(a) média



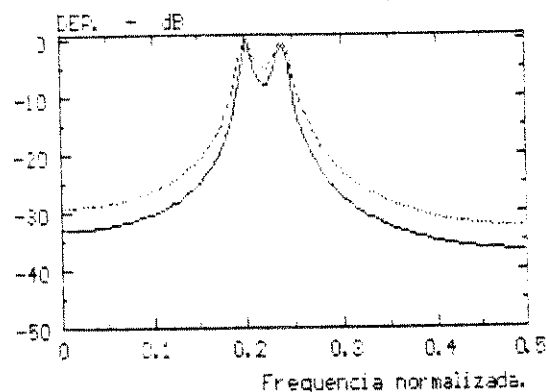
(a) estimativas



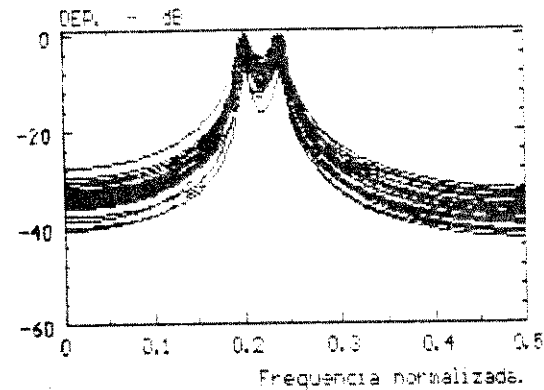
(b) média



(b) estimativas



(c) média



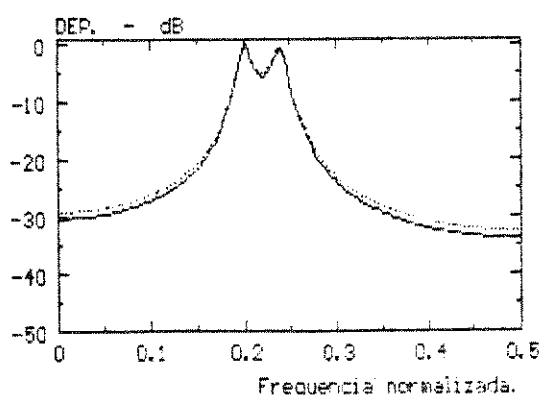
(c) estimativas

**Figura 6.21 Estimativas da DEP do Processo ARMA<sub>0</sub>: N=256, Número Máximo de Equaces**

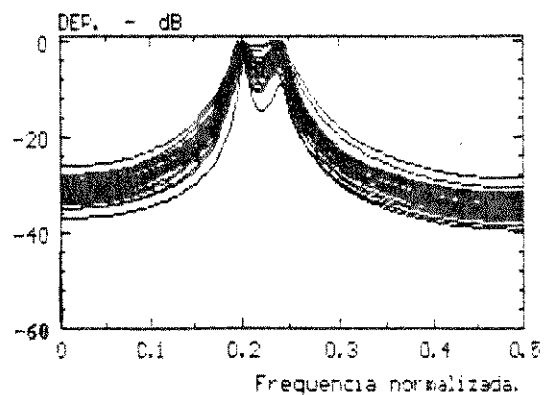
**(a) Sem Ponderaco, Método Autocorrelaco,**

**(b) Ponderaco  $(N-m)^3$ , Método Autocorrelaco,**

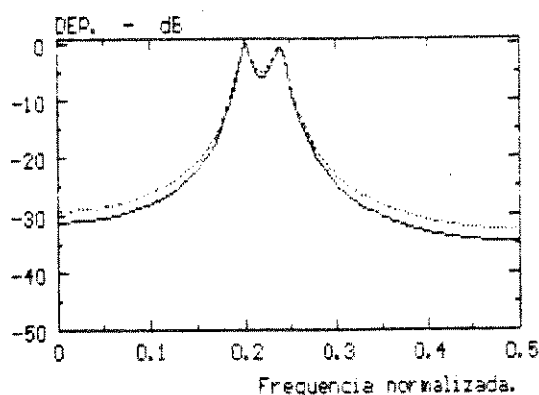
**(c) Ponderaco  $(N-m)^3$ , Método Covariância Modificado.**



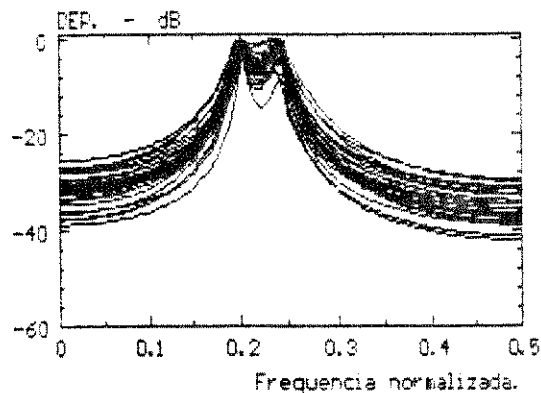
(a) mdia



(a) estimativas



(b) média



(b) estimativas

**Figura 6.22 Estimativas da DEP do Processo ARMA<sub>0</sub> : N=256, 16 Equaces, Ponderaco  $(N-m)^3$  e**  
**(a) Método Autocorrelaco,**  
**(b) Método Covariância Modificado.**

- em geral, as diferenas entre as estimativas espectrais com os métodos Autocorrelaco e Covariância Modificado foram pequenas. Este resultado era esperado uma vez que os zeros da parte MA se encontram afastados da CRU e, portanto, no h vales espectrais abruptos.

- com 64 amostras, no foram significativas as diferenas entre as estimativas espectrais com estes métodos, principalmente para o caso com o máximo de equaces e ponderaco.

- com 256 amostras, a qualidade das estimativas espectrais foram ligeiramente melhores com o método Autocorrelaco.

Embora a ordem atribuida ao modelo AR longo no método Covarincia Modificado seja aquela adequada para estimativas espectrais MA de processos com zeros prximos  CRU, tal fato no apresentou influência negativa na estimativa da DEP do processo ARMA<sub>0</sub>.

Dado que o método Covarincia Modificado requer um esforo computacional maior que o Autocorrelaco e as diferenas entre as estimativas fornecidas por ambos so pequenas, concluimos que este ltimo deve ser escolhido para estimar o NUM-ARMA de processos com zeros afastados da CRU, como o ARMA<sub>0</sub>.

### **B. Estimativas da DEP do Processo ARMA<sub>1</sub>**

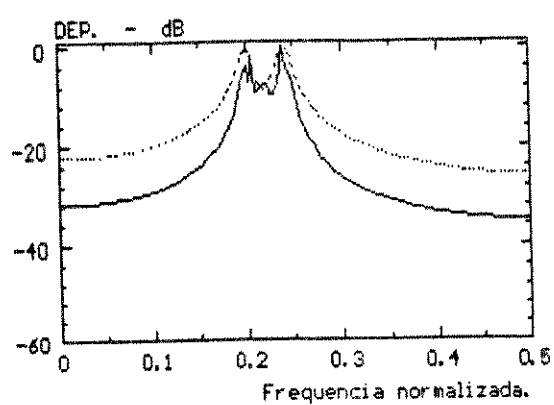
No processo ARMA<sub>1</sub> (com plos e zeros prximos  CRU) o método MQEMYW, quando das seqncias com 64 amostras, mostrou desempenho semelhante entre os casos ponderados com 16 equaes e com o nmero mximo de equaes; quando das seqncias com 256 amostras, o melhor desempenho foi o obtido com mximo de equaes e ponderao.

As estimativas do denominador espectral utilizadas para estimar a DEP foram, com 64 e 256 amostras: mximo e 16 equaes, ambas com e sem ponderao e 8 equaes com ponderao.

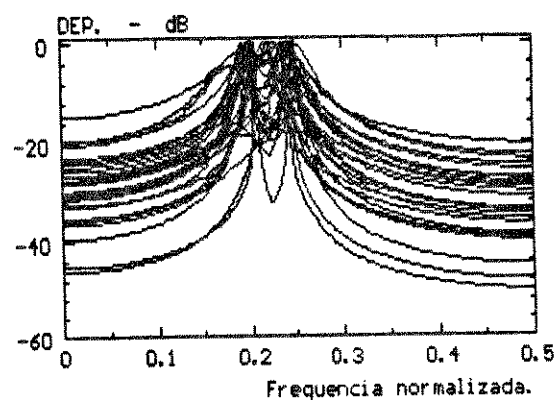
Parte dos resultados obtidos so apresentados na figura 6.23 para as seqncias com 64 amostras e figura 6.24 para as seqncias com 256 amostras.

Observamos que as melhores estimativas da DEP com 256 amostras provm do caso com mximo de equaes e ponderao, enquanto que para 64 amostras no houve aumento significativo de qualidade ao aumentar-se o nmero de equaes. Estas foram as concluses quando das estimativas do denominador espectral, confirmando a importncia da qualidade destas.

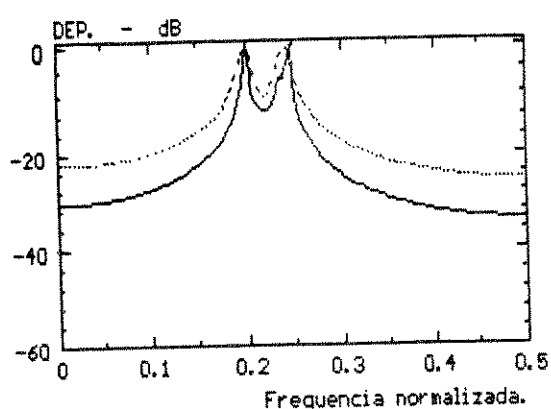
Tal como no processo ARMA<sub>0</sub>, observamos nas estimativas da DEP que, em geral, as diferenas entre os resultados atingidos com os métodos Autocorrelaco e Covarincia Modificado foram pequenas. Independente do nmero de amostras, ambos métodos forneceram bons resultados.



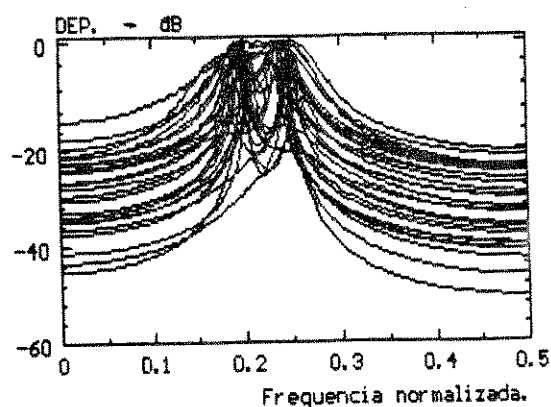
(a) média



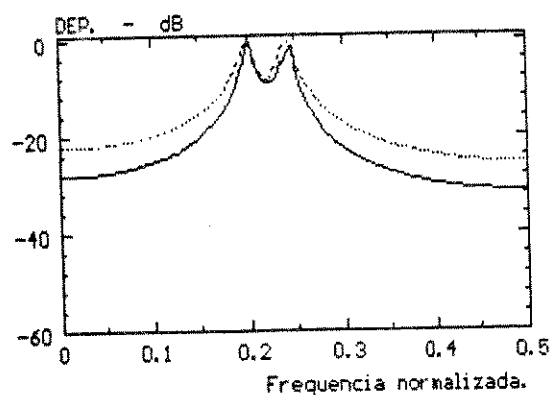
(a) estimativas



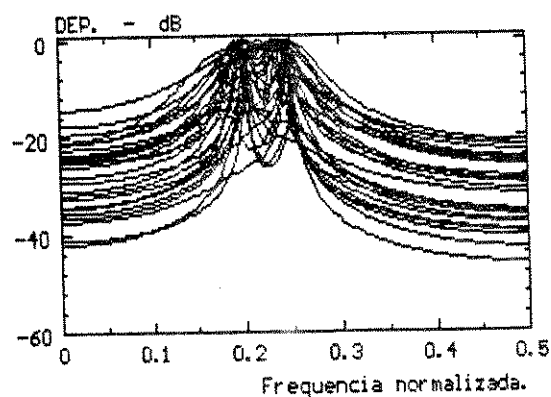
(b) mdia



(b) estimativas



(c) mdia



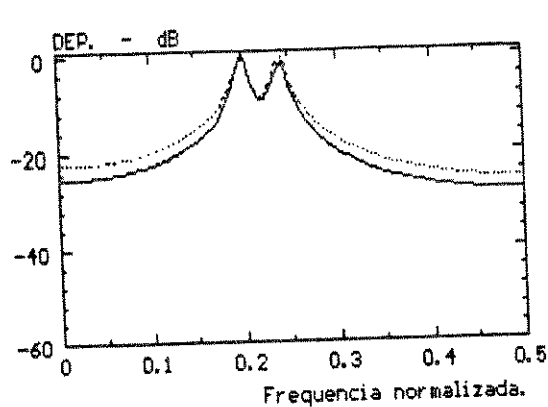
(c) estimativas

Figura 6.23 Estimativas da DEP do Processo ARMA<sub>1</sub> : N=64, Ponderaco  $(N-m)^3$  e

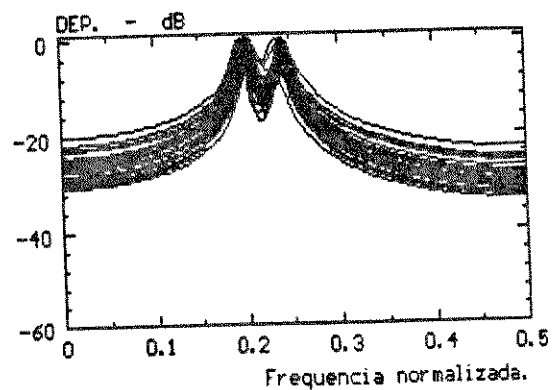
(a) Máximo de Equaces, Método Autocorrelaco,

(b) 16 Equaces, Método Autocorrelaco,

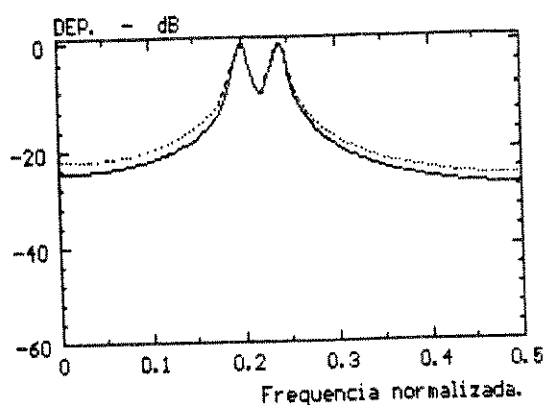
(c) 16 Equaces, Método Covariância Modificado.



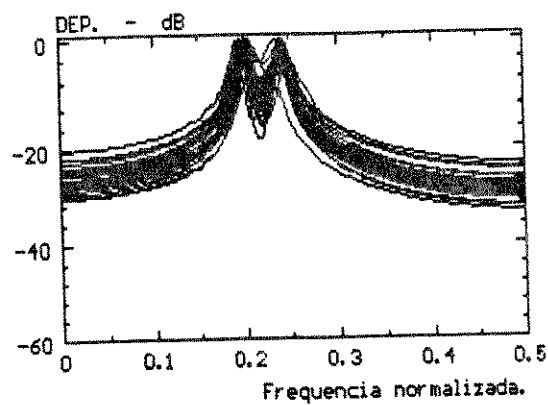
(a) média



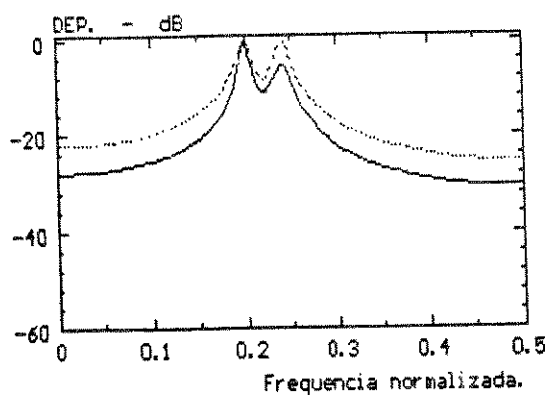
(a) estimativas



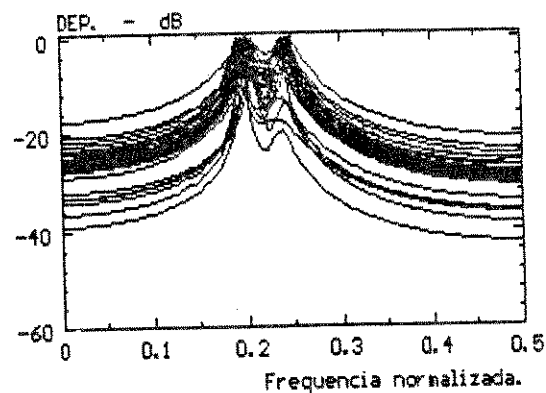
(b) média



(b) estimativas



(c) média



(c) estimativas

Figura 6.24 Estimativas da DEP do Processo ARMA<sub>1</sub>: N=256, Ponderaco  $(N-m)^3$  e

- (a) Máximo de Equaces, Método Autocorrelaco,
- (b) Máximo de Equaces, Método Covariância Modificado,
- (c) 16 Equaces, Método Covariância Modificado.

O no haver diferenas significativas entre as estimativas espectrais obtidas com os métodos Autocorrelao e Covarincia Modificado,  um resultado contrário ¢aquele quando da estimativa, no capítulo 5, da DEP do processo  $MA_1$  com zeros próximos ¢ CRU, onde os resultados foram superiores com o método Covarincia Modificado. Atribuímos isto ¢ tendência do método MQEMYW de enfatizar os picos espectrais, a qual modelou o nulo espectral abrupto, do processo  $ARMA_1$ , quando da estimativa do denominador espectral.

#### C. Estimativas da DEP do Processo $ARMA_2$

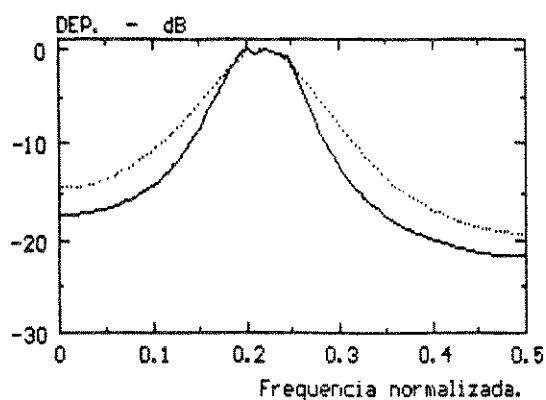
O processo  $ARMA_2$  tem seus pólos e zeros afastados da CRU e o melhor desempenho do método foi obtido com o número pequeno de equaes,  $M-q=8$ . Neste caso a ponderao no produziu efeitos significativos.

As estimativas do denominador espectral utilizadas para estimar a DEP foram, para  $N=64$  e 256 amostras: o máximo e o número pequeno de equaes, ambas com ponderao.

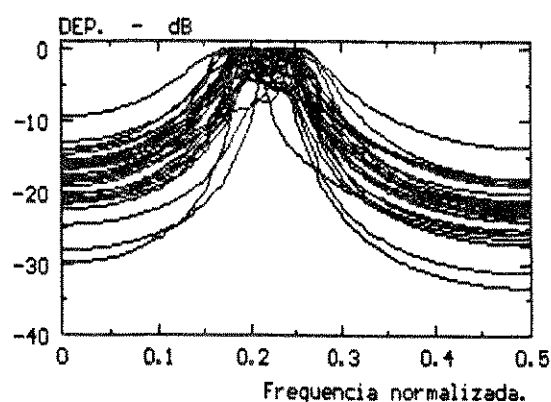
As figuras apresentadas so: figura 6.25 e figura 6.26 para as seqncias com 64 e 256 amostras, respectivamente.

Independente do uso do método Autocorrelao ou Covarincia Modificado, as estimativas da DEP mostraram o mesmo padro observado nas estimativas do denominador espectral, ou seja, as melhores estimativas espectrais foram obtidas com o número pequeno de equaes. Entretanto, foi observado que as estimativas do denominador espectral com o número pequeno de equaes, foram semelhantes para ambos conjuntos de amostras. Porém, o mesmo no aconteceu nas estimativas correspondentes da DEP, estas, com 256 amostras, apresentaram menor variao que aquelas obtidas com 64 amostras.

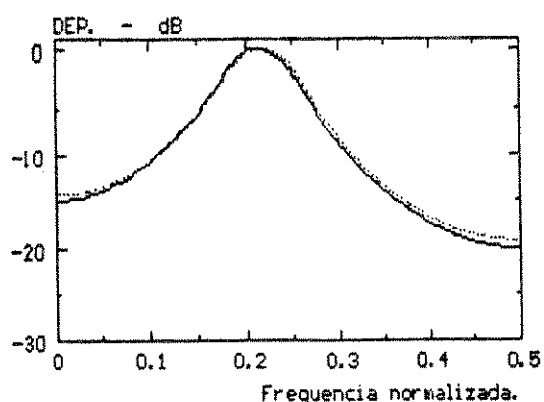
Como foi comentado quando da estimativa do denominador espectral deste processo, os "dados" do método MQEMYW so as estimativas da SAC, tal que se estas forem de boa qualidade o resultado final será bom (independente do número de amostras). Por outro lado, no método de Durbin, o desempenho dos métodos utilizados para obter o modelo AR longo depende muito do número de amostras disponíveis, sendo melhor quando este número é elevado. Daí a diferena agora observada na qualidade das estimativas espectrais em funo do número de amostras.



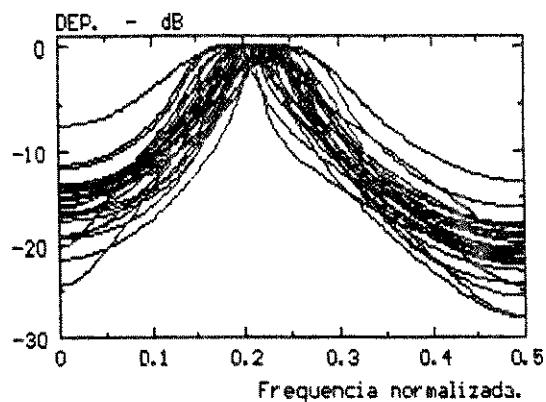
(a) mdia



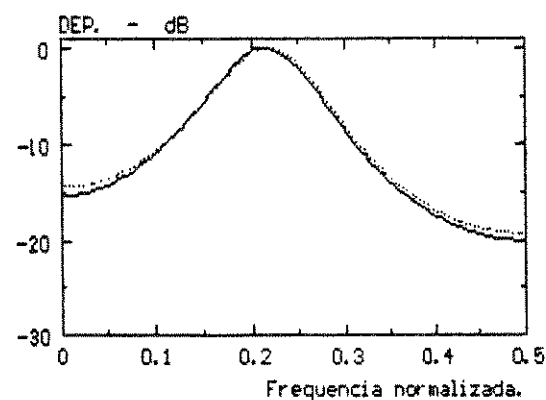
(a) estimativas



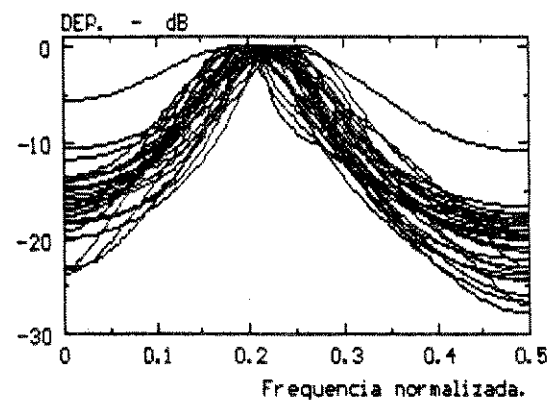
(b) mdia



(b) estimativas



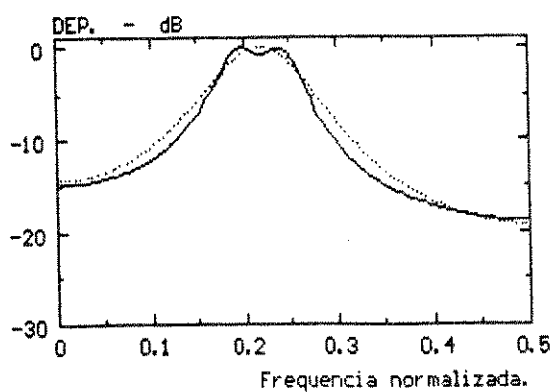
(c) mdia



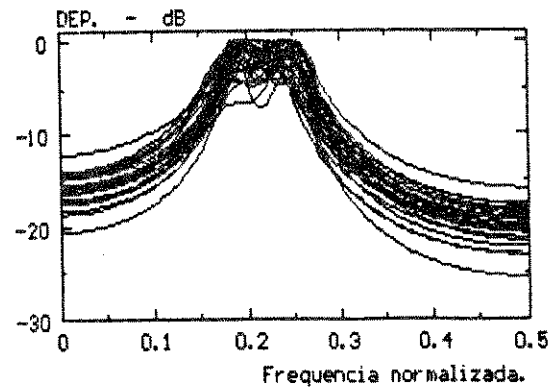
(c) estimativas

Figura 6.25 Estimativas da DEP do Processo  $ARMA_2$ ;  $N=64$ , Ponderaco  $(N-m)^3$  e

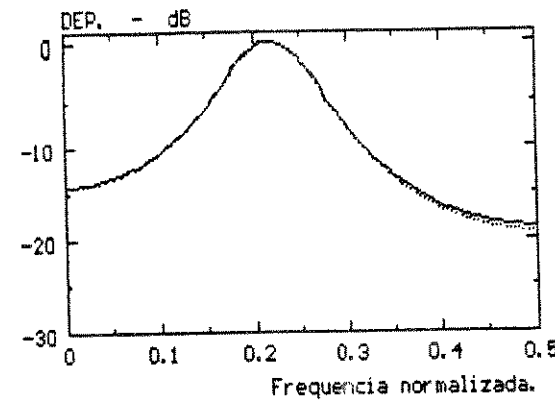
- (a) Mximo de Equaces, Método Autocorrelaco,
- (b) 8 Equaces, Método Autocorrelaco,
- (c) 8 Equaces, Método Covarincia Modificado.



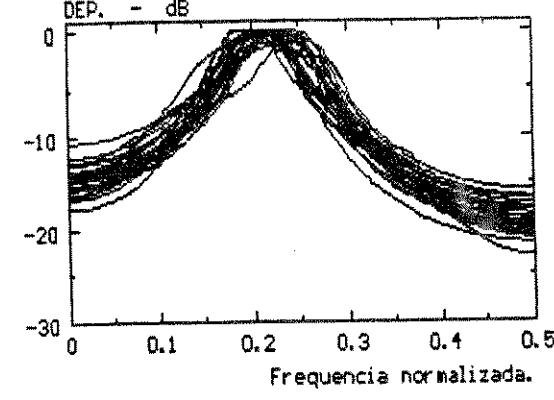
(a) média



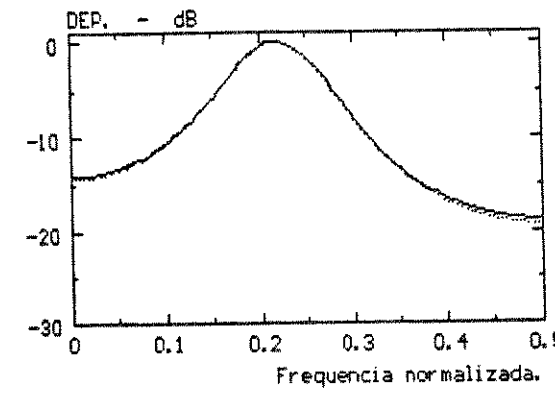
(a) estimativas



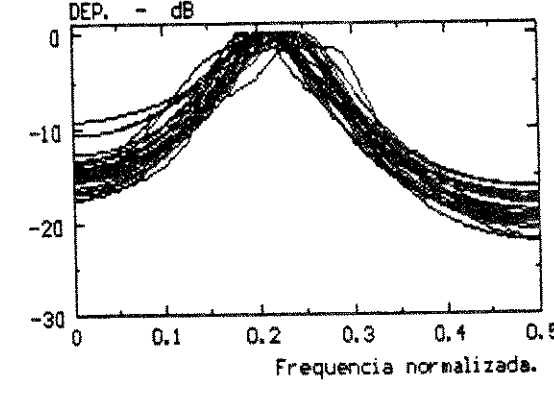
(b) média



(b) estimativas



(c) média



(c) estimativas

Figura 6.26 Estimativas da DEP do Processo  $ARMA_2$ ;  $N=256$ , Ponderaco  $(N-m)^3$  e  
(a) Máximo de Equaces, Método Autocorrelaco,  
(b) 8 Equaces, Método Autocorrelaco,  
(c) 8 Equaces, Método Covariância Modificado.

Ambos os métodos, Autocorrelação e Covariância Modificado, apresentaram bom desempenho e não houve diferenças suficientes para destacar um deles. Isto era de se esperar, pois os zeros da parte MA do processo  $ARMA_2$  se encontram muito próximos à origem da CRU.

#### D. Estimativa da DEP do Processo $ARMA_9$

Para este processo, com pólos afastados e zeros próximos à CRU, o método MQEMYW apresentou desempenho ruim para ambos conjuntos de amostras.

As estimativas do denominador espectral utilizadas para estimar a DEP foram, tanto para 64 como 256 amostras: máximo de equações, 16 equações e o número pequeno de equações  $M-q=8$ , todos com ponderação. Parte destes resultados são apresentados nas figuras 6.27 e 6.28 para as seqüências com 64 e 256 amostras, respectivamente.

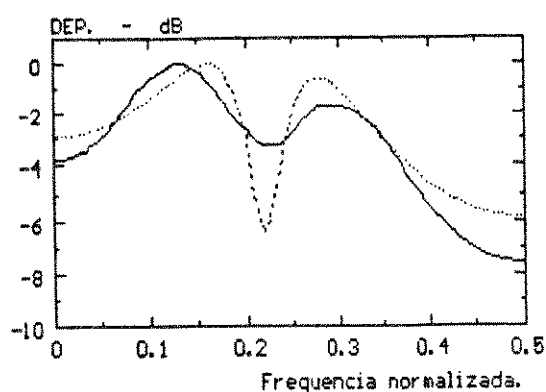
Todas as estimativas da DEP tiveram o mesmo padrão de baixa qualidade observado nas estimativas do denominador espectral, o que mostra de outra forma, a dependência das estimativas espectrais ARMA da qualidade das estimativas dos parâmetros auto-regressivos.

Podemos resumir os resultados obtidos da seguinte forma:

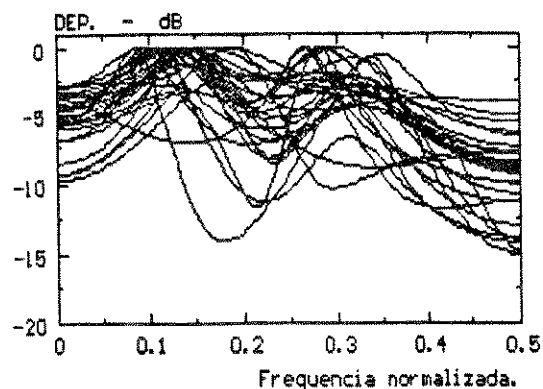
- com 64 amostras: todas as estimativas espectrais foram de baixa qualidade, tal que não é possível apontar o número de equações mais adequado no método MQEMYW, ou caracterizar qual dos métodos, Autocorrelação ou Covariância Modificado, foi o melhor.

- com 256 amostras: por dispormos de um maior número de amostras, a qualidade das estimativas foi melhor que no caso anterior, porém a polarização e variância ainda foram elevadas. Quanto ao número de equações no método MQEMYW e à comparação entre os métodos Autocorrelação e Covariância Modificado, repetimos os comentários acima.

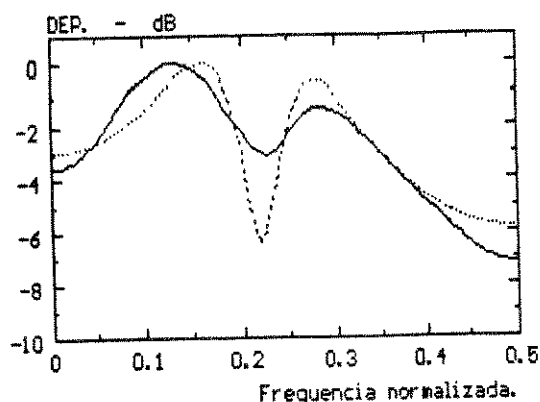
Uma vez que os parâmetros auto-regressivos não foram bem estimados, não há garantia de que o processo residual seja de fato uma aproximação da parte MA do processo  $ARMA_9$ . Com isto podemos reafirmar que o desempenho das técnicas de estimação separada depende fortemente da qualidade das estimativas do denominador ARMA.



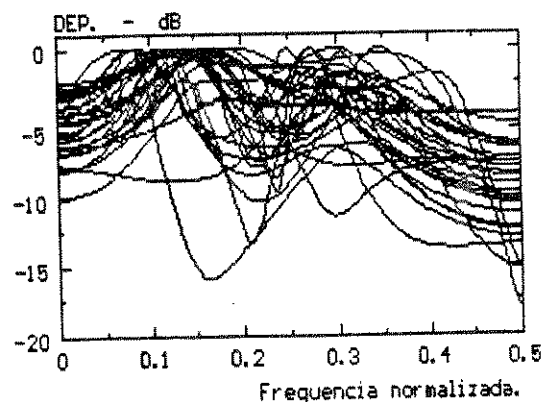
(a) média



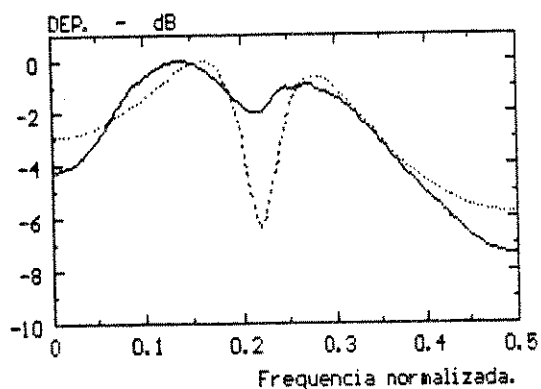
(a) estimativas



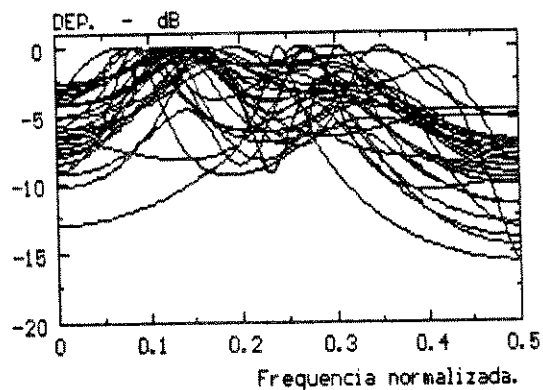
(b) mdia



(b) estimativas



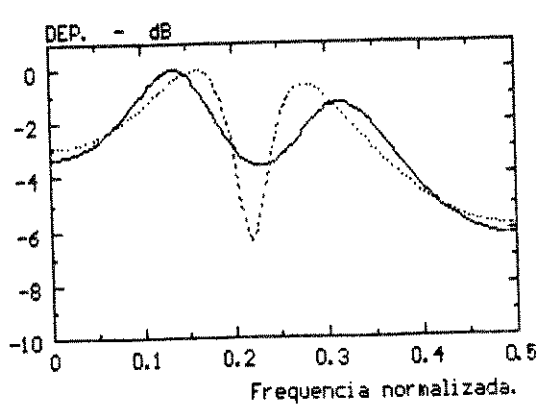
(c) mdia



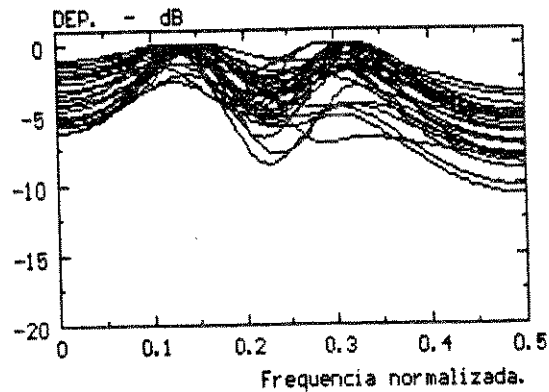
(c) estimativas

Figura 6.27 Estimativas da DEP do Processo  $ARMA_3$ ;  $N=64$ , Ponderaco  $(N-m)^3$  e

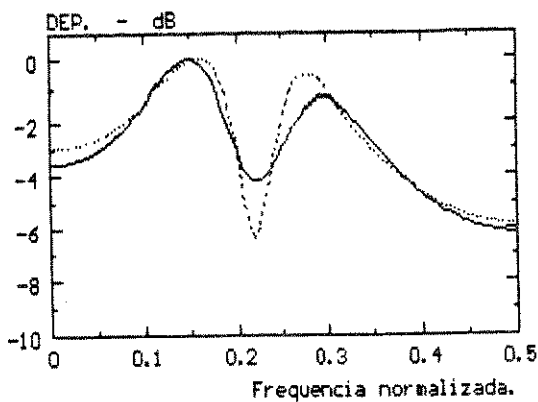
- (a) Máximo de Equaces, Método Covariância Modificado,
- (b) 8 Equaces, Método Covariância Modificado,
- (c) 8 Equaces, Método Autocorrelaco.



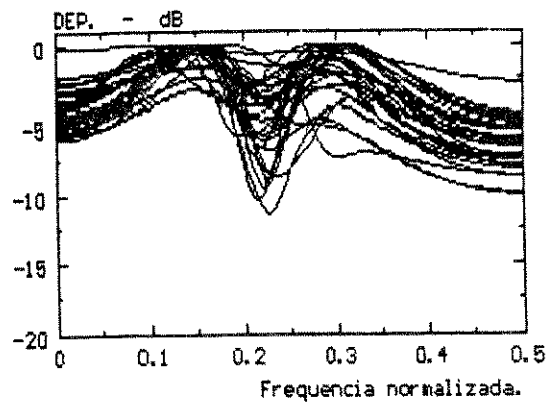
(a) média



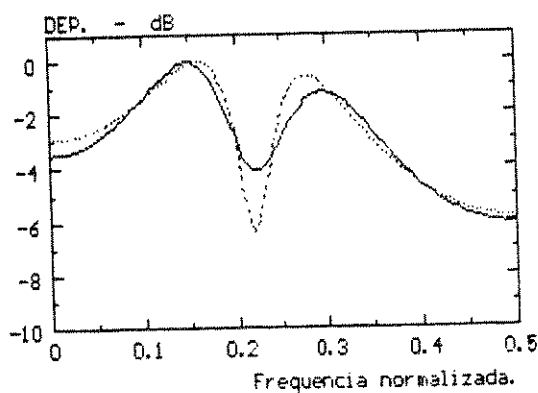
(a) estimativas



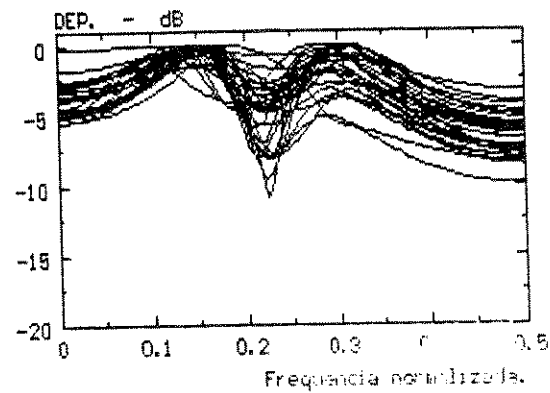
(b) média



(b) estimativas



(c) média



(c) estimativas

Figura 6.28 Estimativas da DEP do Processo ARMA<sub>3</sub>; N=256, Ponderaco  $(N-m)^3$  e

- (a) Máximo de Equaces, Método Covariância Modificado,
- (b) 8 Equaces, Método Covariância Modificado,
- (c) 8 Equaces, Método Autocorrelaco.

Isto nos leva a concluir que os métodos sub-ótimos de estimação separada não são adequados para a estimativa espectral de processos com pólos afastados da CRU e zeros próximos a esta, como o ARMA<sub>9</sub>, exceto quando dispomos de um número muito elevado de amostras ( $N > 256$ ).

#### **E. Conclusões gerais**

Os resultados obtidos nesta seção confirmaram que quanto melhor as estimativas dos parâmetros auto-regressivos, melhor será a estimativa espectral. Em relação ao método MQEMYW, devemos utilizar um número elevado de equações e ponderação para processos com pólos próximos à CRU, independente da localização dos zeros e do número de amostras disponíveis. Porém, para processos com pólos e zeros afastados da CRU o número de equações deve ser pequeno, independente do número de amostras.

Em relação ao método de Durbin, é mais indicado utilizar o método Autocorrelação quando os zeros do processo ARMA se encontram afastados da CRU. O método Covariância Modificado deve ser empregado quando os zeros se encontram próximos à CRU, embora, para os casos aqui estudados, as diferenças entre os resultados dos dois métodos tenham sido pequenas, não confirmando as conclusões do capítulo 5. Atribuímos isto ao fato dos vales espectrais não terem sido abruptos e quando o foram, a qualidade das estimativas do denominador espectral não permitiu que as diferenças entre estes métodos se destacassem.

Os resultados nos permitiram concluir que os métodos sub-ótimos de estimação separada não são adequados para a estimativa espectral de processos ARMA com pólos afastados e zeros próximos à CRU, porém todos situados em posições angulares próximas entre si. Exceto quando o número amostras disponíveis é muito elevado, a qualidade das estimativas é ruim, particularmente na região do vale espectral.

Paralelamente, foram utilizados dois processos ARMA com picos estreitos próximos entre si, ARMA<sub>9</sub> e ARMA<sub>1</sub>. As simulações mostraram que o uso do método MQEMYW neste tipo de processo conduz a

estimativas espectrais de alta resolução, desde que utilizado com máximo de equações e ponderação sobre os erros de aproximação. Esta característica é particularmente importante, pois indica que os métodos de estimação ARMA separada, são adequados para a estimativa espectral de processos AR (com pólos próximos à CRU) corrompidos por ruído, assim como para a detecção de senóides em ruído branco.

#### 6.5.4 Estimação do Numerador Espectral com Base nos Métodos Correlograma e Periodograma

Nesta seção são apresentados os resultados das estimativas da DEP dos quatro processos ARMA(4, 2), utilizando os métodos Correlograma e Periodograma para estimar o numerador espectral, como descrito na seção 6.5

Temos por objetivo observar a viabilidade de se utilizar os estimadores espectrais clássicos sobre os processos residuais MA progressivos e sobre os processos residuais progressivos e regressivos simultaneamente, assim como também comparar estas estimativas com aquelas obtidas na seção anterior através do método de Durbin.

Seja ND o número de amostras na saída dos filtros progressivo e regressivo na condição "cheia". Tendo em conta os resultados da seção 5.5, escolhemos os seguintes parâmetros para os dois métodos:

- janela triangular de comprimento  $2C+1$  e  $C=ND/10$ , com 64 e 256 amostras, para o método Correlograma.

- janela de Hamming, 50% de sobreposição entre segmentos e número de amostras por segmento igual a  $ND/5$ , para o caso de 64 amostras e  $ND/10$  para 256 amostras, no Periodograma.

As estimativas dos parâmetros auto-regressivos utilizadas foram aquelas correspondentes ao melhor desempenho do método MQEMYW: para os processos ARMA<sub>0</sub> e ARMA<sub>1</sub>, máximo de equações e ponderação, para o processo ARMA<sub>2</sub>, número pequeno de equações,  $M-q=8$ , e ponderação. Para o processo ARMA<sub>3</sub>, optou-se pelo número pequeno de e-

quações e ponderação.

As figuras apresentadas para cada processo são:

- processo  $ARMA_0$ : figura 6.29 com o método Correlograma e figura 6.30 com o método Periodograma.
- processo  $ARMA_1$ : figura 6.31 com o método Correlograma e figura 6.32 com o método Periodograma.
- processo  $ARMA_2$ : figura 6.33 com o método Correlograma e figura 6.34 com o método Periodograma.
- processo  $ARMA_3$ : figura 6.35 com o método Correlograma e figura 6.35 com o método Periodograma.

Os resultados obtidos para os três primeiros processos foram semelhantes e são os seguintes:

- a utilização dos resíduos progressivos-regressivos, tanto no Correlograma como no Periodograma, propiciou resultados semelhantes ao caso dos resíduos progressivos apenas.
- as estimativas com o método Periodograma foram melhores que aquelas obtidas com o Correlograma, porém as diferenças foram pequenas,

O método de Durbin, propiciou melhores estimativas espectrais que aquelas obtidas com o método Periodograma. Porém, as diferenças foram pequenas e menores ainda quando do processo  $ARMA_2$ .

Nos processos  $ARMA_0$ ,  $ARMA_1$  e  $ARMA_2$ , a DEP tem praticamente a mesma forma do denominador espectral e as estimativas que utilizamos deste foram as de melhor qualidade. Assim, a tarefa legada aos estimadores do NUM-ARMA para a complementação da estimativa de DEP-ARMA é relativamente leve. Daí o bom desempenho destes e a semelhança dos resultados dos métodos clássicos entre si e com aqueles obtidos através do método de Durbin. Isto explica também a pequena diferença de desempenho entre os métodos Autocorrelação e Covariância Modificado para estimar o modelo AR longo no método de Durbin.

Também os zeros dos processos  $ARMA_0$  e  $ARMA_2$  se encontram próximos à origem da CRU, e o processo  $ARMA_1$  tem somente um vale abrupto no espectro de potência. Em ambas situações o método Periodograma tem bom desempenho.

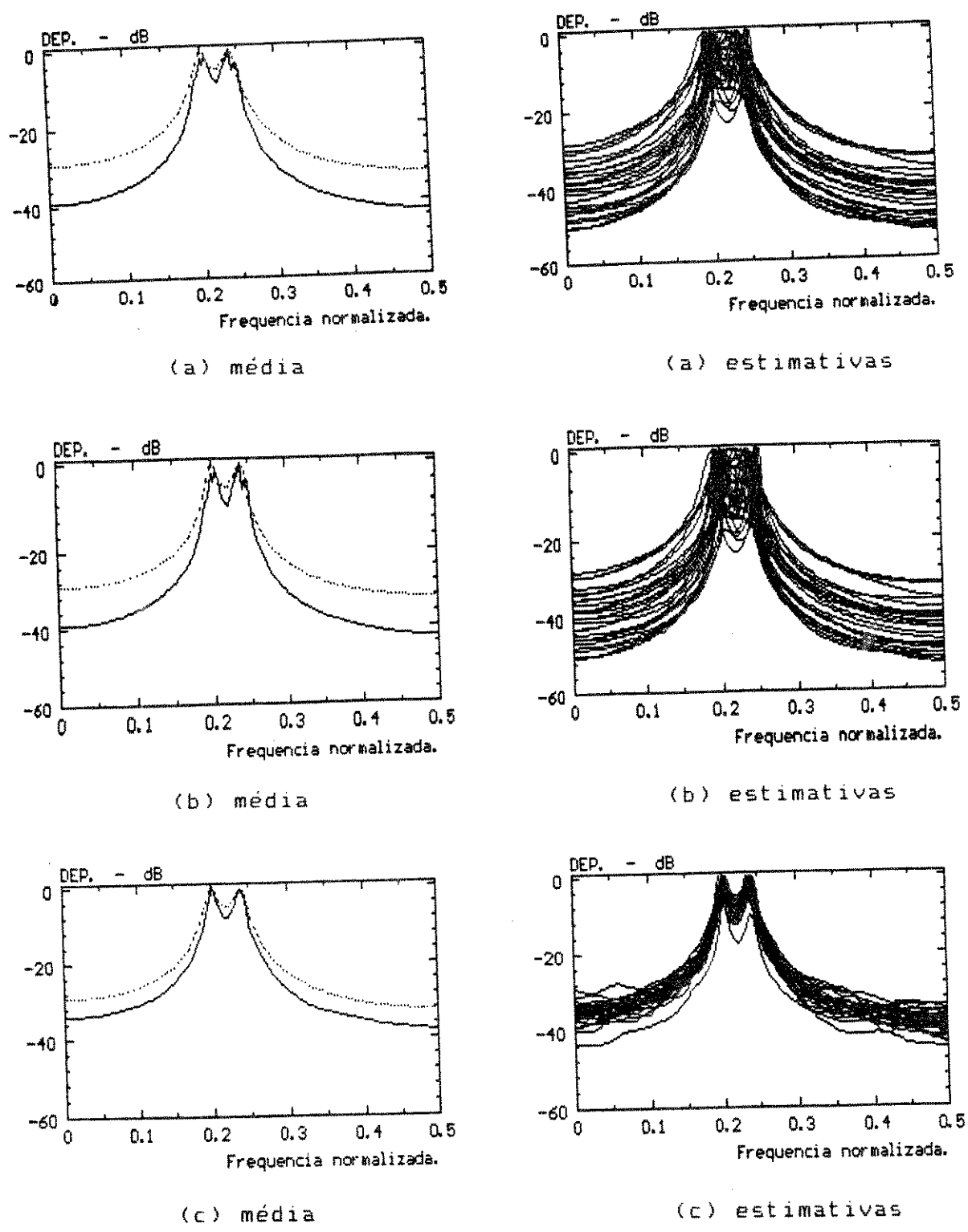
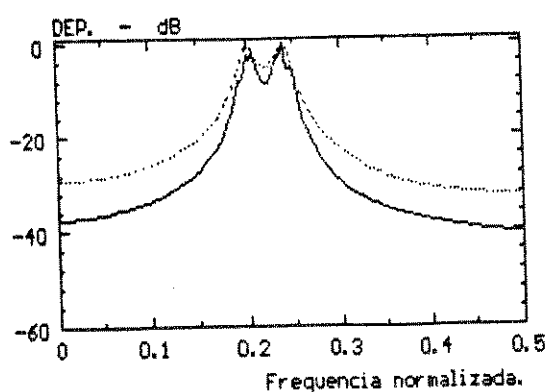
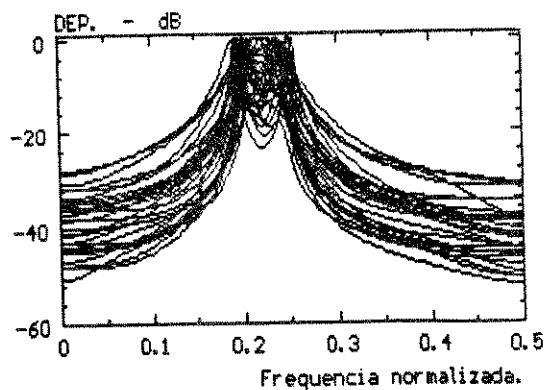


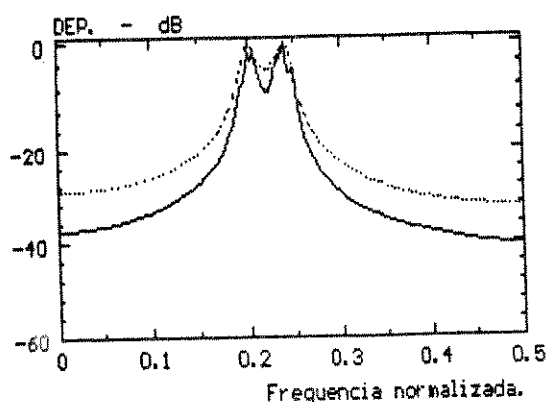
Figura 6.29 Estimativas da DEP do Processo ARMA<sub>0</sub>: Método Correlograma Sobre  
(a) os Resíduos Progressivos e N=64,  
(b) os Resíduos Progressivos-Regressivos e N=64,  
(c) os Resíduos Progressivos e N=256.



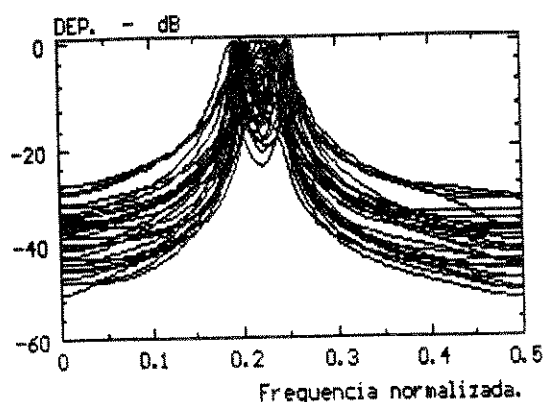
(a) média



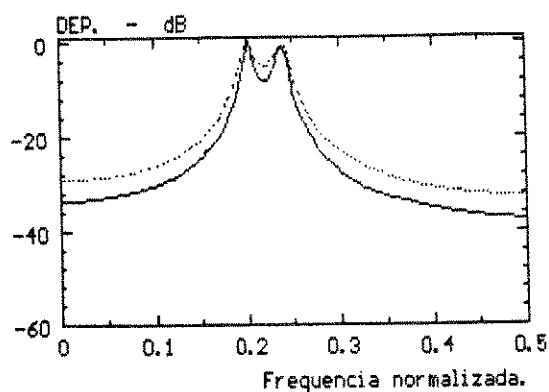
(a) estimativas



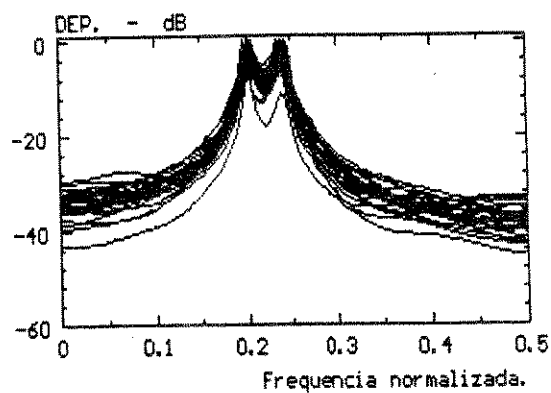
(b) média



(b) estimativas



(c) média



(c) estimativas

**Figura 6.30 Estimativas da DEP do Processo ARMA<sub>0</sub>: Método Periodograma Sobre**  
 (a) os Resíduos Progressivos e N=64,  
 (b) os Resíduos Progressivos-Regressivos e N=64,  
 (c) os Resíduos Progressivos e N=256.

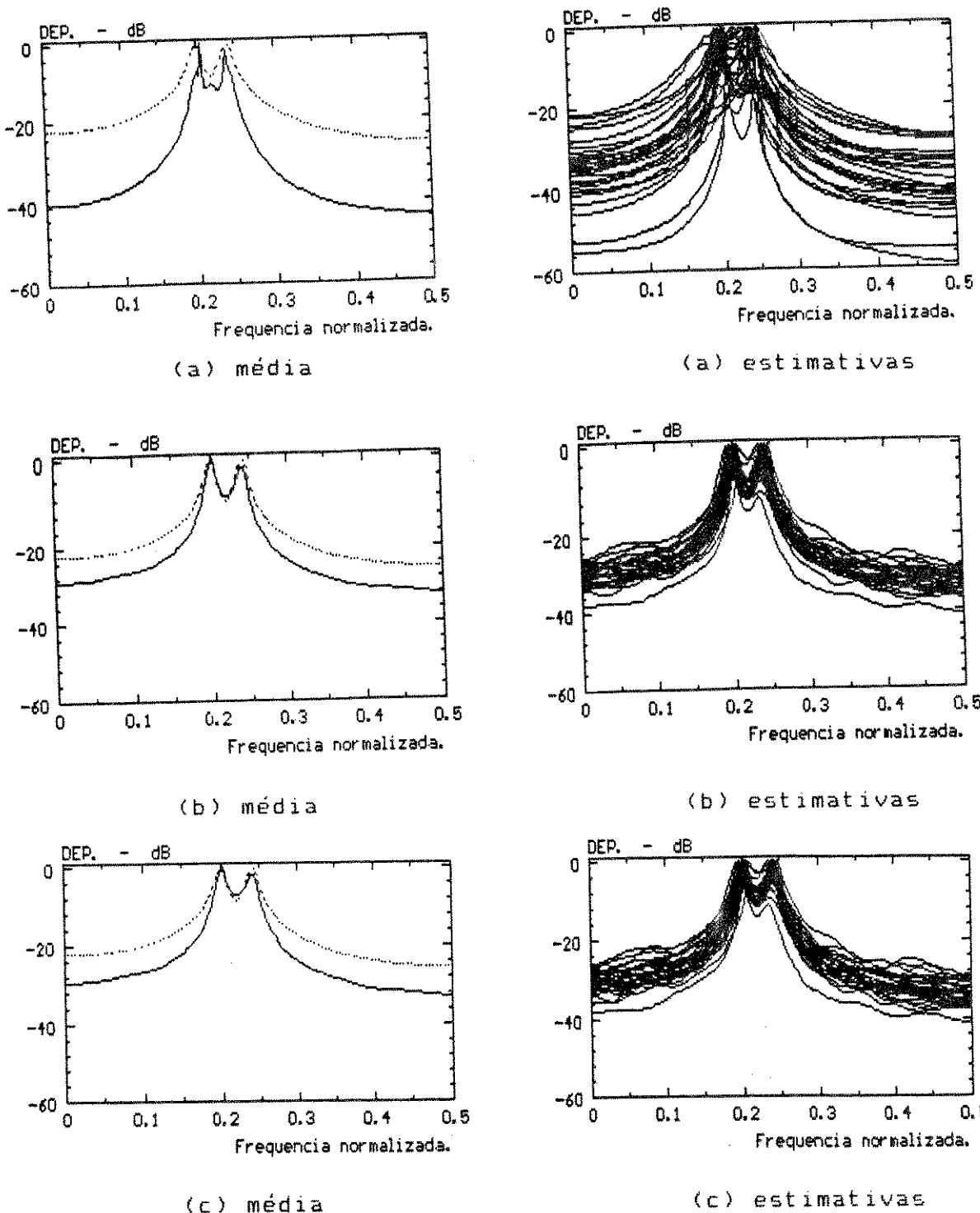
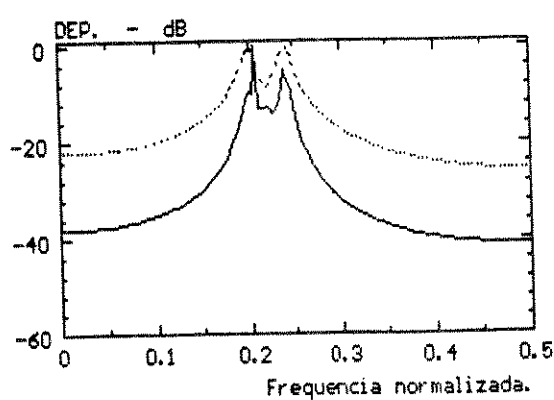
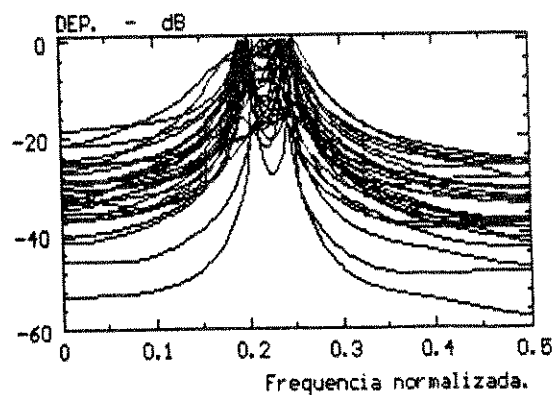


Figura 6,31 Estimativas da DEP do Processo  $ARMA_1$ : Método Correlograma Sobre

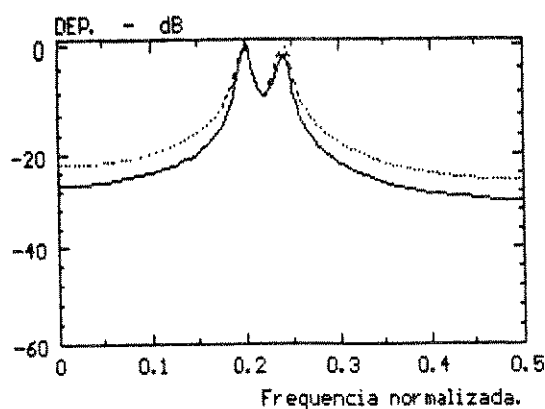
- (a) os Resíduos Progressivos e  $N=64$ ,
- (b) os Resíduos Progressivos e  $N=256$ ,
- (c) os Resíduos Progressivos-Regressivos e  $N=256$ .



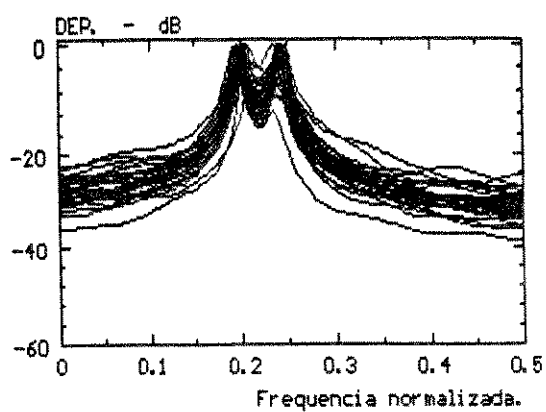
(a) média



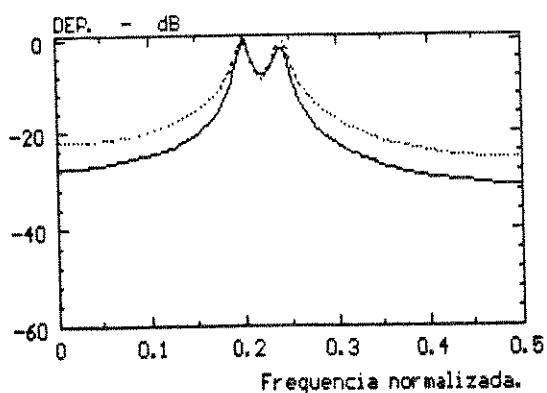
(a) estimativas



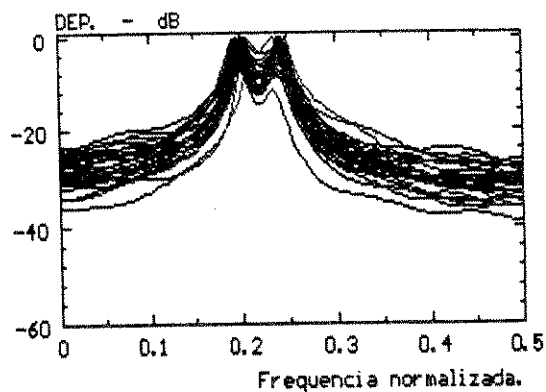
(b) média



(b) estimativas

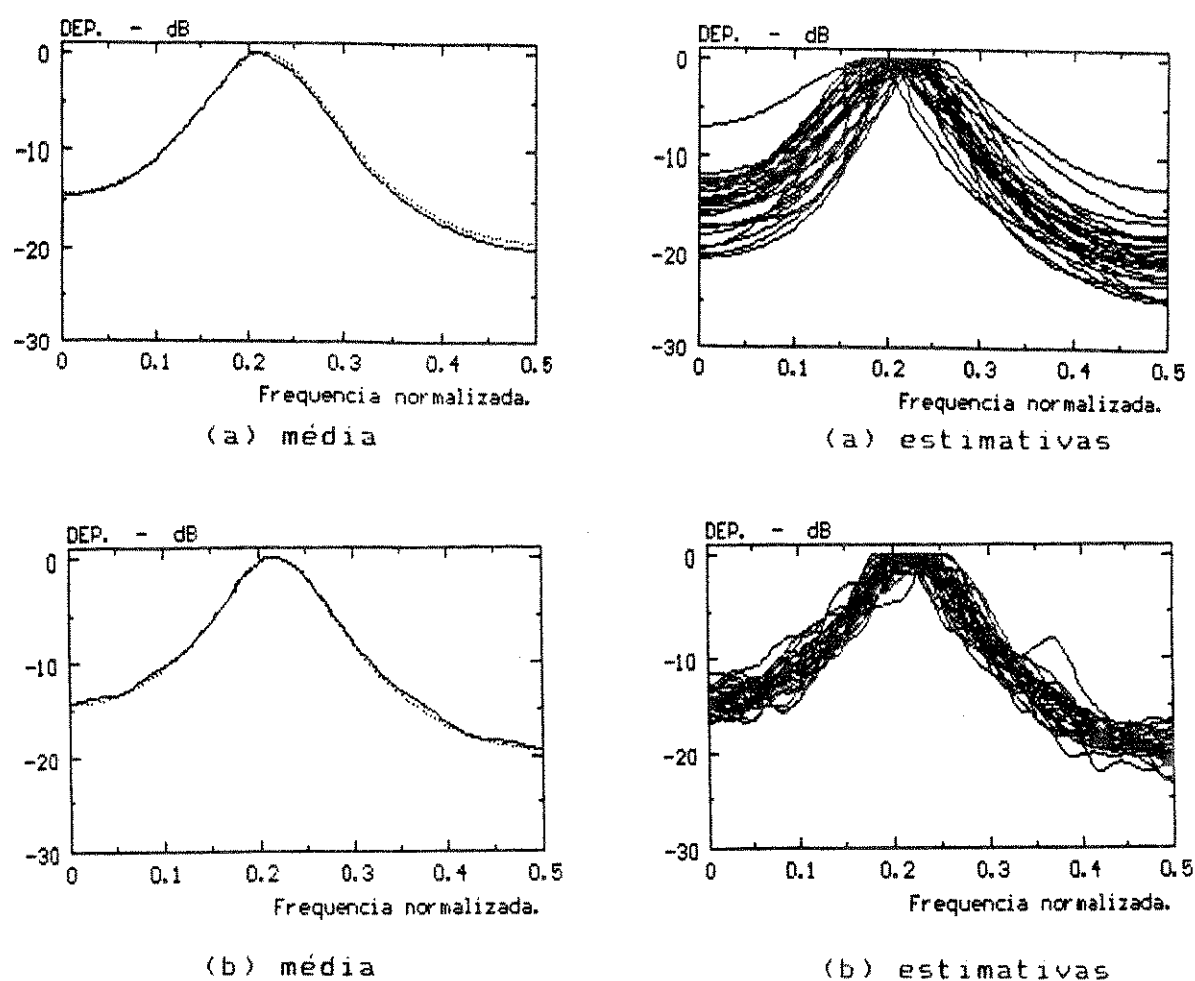


(c) média



(c) estimativas

**Figura 6.32 Estimativas da DEP do Processo  $ARMA_1$ : Método Periodograma Sobre**  
**(a) os Resíduos Progressivos e  $N=64$ ,**  
**(b) os Resíduos Progressivos e  $N=256$ ,**  
**(c) os Resíduos Progressivos-Regressivos e  $N=256$ .**



**Figura 6.33 Estimativas da DEP do Processo  $ARMA_2$ : Método Correlograma**

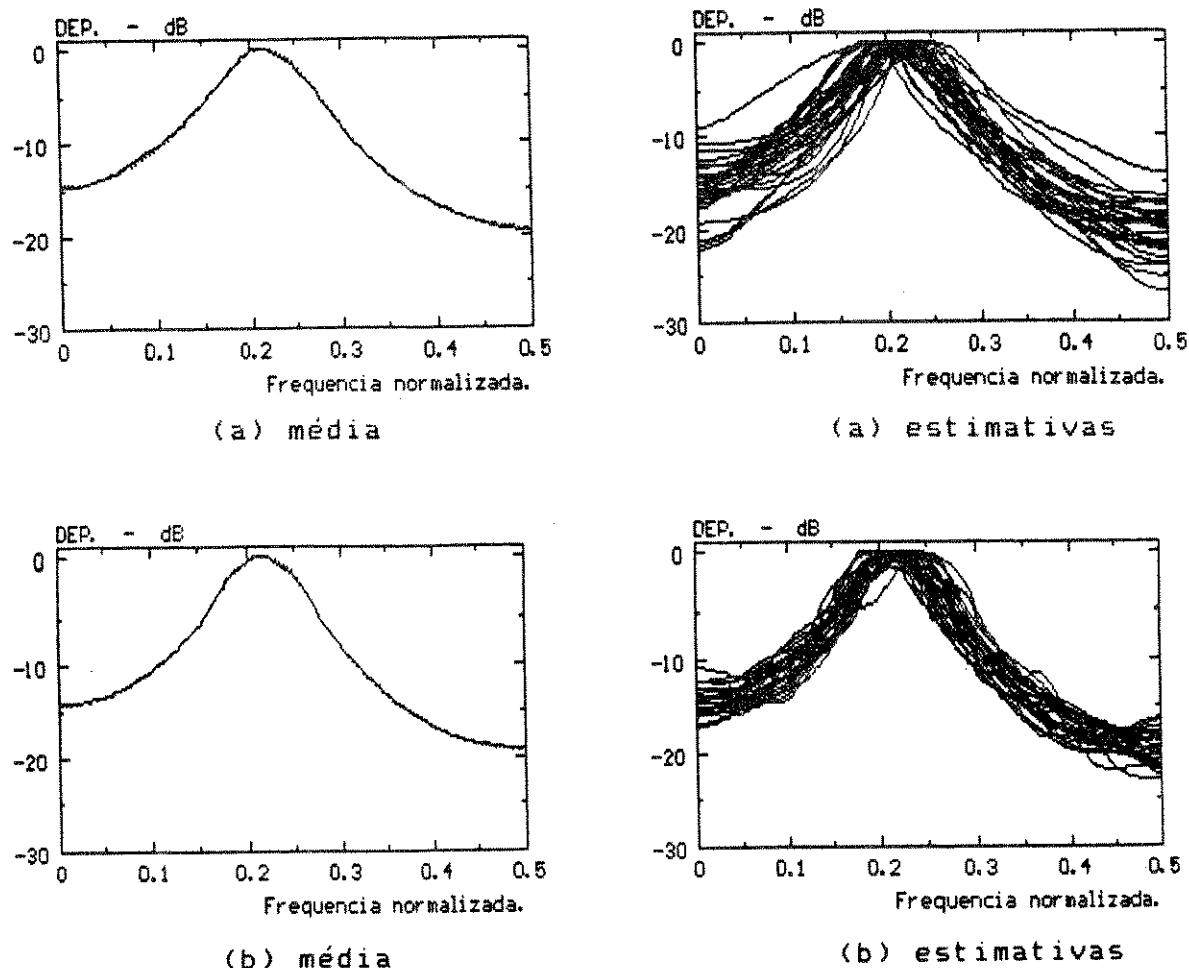
**(a) Sobre os Resíduos Progressivos e  $N=64$ ,**

**(b) Sobre os Resíduos Progressivos e  $N=256$ .**

Em relação ao processo  $ARMA_2$  temos que :

- a qualidade das estimativas com 64 amostras foi muito ruim, como era esperado, e não permite comparar os estimadores clássicos entre si. Também não houve diferença significativas entre os resultados obtidos com os resíduos progressivos ou progressivos-regressivos.

- com 256 amostras, a qualidade das estimativas espectrais ainda é ruim. O método Periodograma propiciou um desempenho ligeiramente superior ao do Correlograma, como era de se esperar em função do vale abrupto do espectro de potência. Novamente não

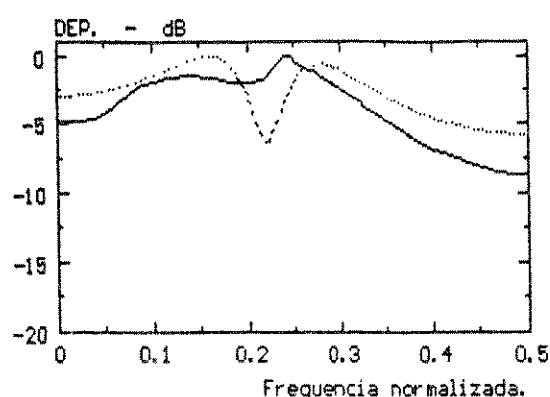


**Figura 6.34 Estimativas da DEP do Processo  $ARMA_2$ : Método Periodograma**  
**(a) Sobre os Resíduos Progressivos e  $N=64$ ,**  
**(b) Sobre os Resíduos Progressivos e  $N=256$ .**

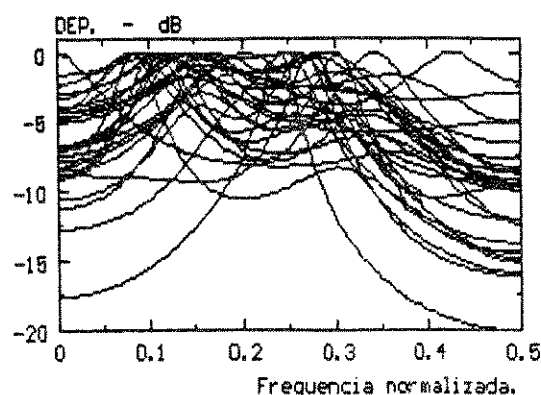
houve diferenas entre o uso dos resíduos progressivos e progressivos-regressivos. Em funo da baixa qualidade do denominador espectral, no  possível afirmar que as estimativas espectrais tenham sido melhores com o método de Durbin.

Em resumo, os resultados obtidos confirmaram novamente que o desempenho do método Periodograma é superior ao Correlograma, porém inferior ao desempenho do método de Durbin.

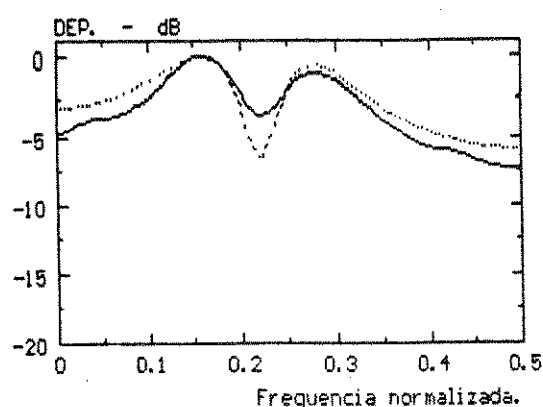
Também mostraram que a utilizao dos resíduos progressivos-regressivos no resulta em estimativas espectrais de melhor qualidade que aquelas obtidas com os resíduos progressivos. Ao con-



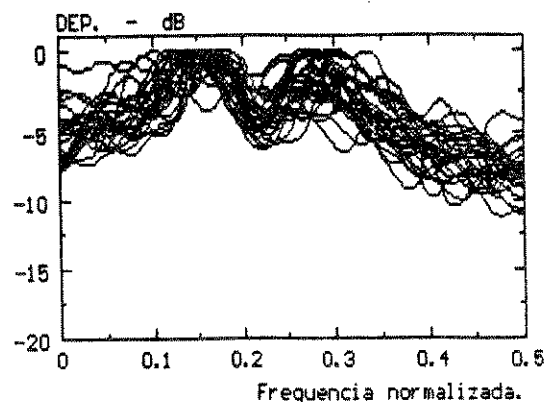
(a) mdia



(a) estimativas



(b) média



(b) estimativas

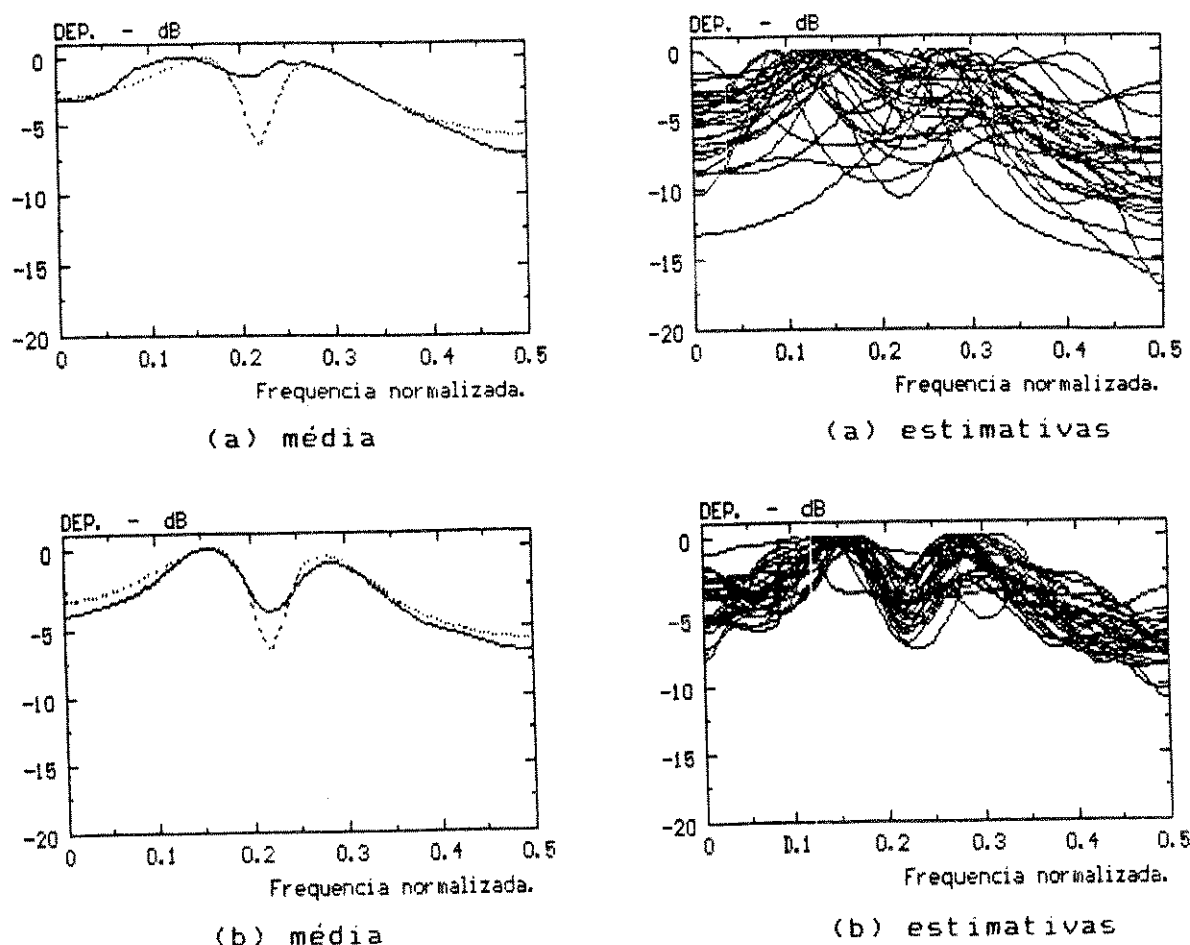
**Figura 6.35 Estimativas da DEP do Processo ARMA<sub>2</sub>: Método Correlograma**

**(a) Sobre os Resíduos Progressivos e N=64,**

**(b) Sobre os Resíduos Progressivos e N=256.**

trrio do que seria esperado, pelo menos nos casos onde o número de amostras é pequeno, em funco da maior explorao dos dados.

Por fim, nos casos onde a DEP é semelhante ao DEN-ARMA (zeros afastados da CRU) a substituio do método de Durbin pelo Periodograma  satisfatria. Este resultado é bastante significativo para a Análise Espectral, pois a substituio permite uma reduo no esforo computacional referente à estimativa do NUM-ARMA. Entretanto, em aplicaoes onde se necessita dos parâmetros média-ajustável, como, por exemplo, na modelagem de voz, tal substituio não  possível.



**Figura 6.36 Estimativas da DEP do Processo  $ARMA_9$ : Método Periodograma**  
**(a) Sobre os Resíduos Progressivos e  $N=64$ ,**  
**(b) Sobre os Resíduos Progressivos e  $N=256$ .**

## 6.6 Concluso

Resumindo as concluses atingidas ao longo deste capítulo, observamos que a qualidade das estimativas da DEP depende da qualidade das estimativas do DEN-ARMA. Por sua vez, o desempenho do método MQEMYW depende das características espectrais do processo analisado, ou seja, da localizao dos plos e zeros do mesmo. Particularmente, a localizao dos pólos condiciona o número de equaoes que deve ser utilizado neste método: este número deve ser elevado quando os pólos se encontram perto da CRU, e pequeno, pr-

ximo do mínimo, quando se encontram afastados.

Também foi analisado o uso de janela de ponderação sobre os erros de aproximação visando aumentar o desempenho do método. Os resultados mostraram que a ponderação é necessária quando o número de equações é elevado, porém não produz efeitos significativos quando este número é pequeno. As ponderações utilizadas,  $(N-m)^4$  e  $(N-m)^3$ , produziram resultados bastantes semelhantes, o que permitiu optarmos pela última.

Foi constatado ainda que a localização dos zeros do processo também afeta o desempenho do método, degradando-o à medida que os zeros se aproximam à CRU, particularmente quando os pólos do processo se encontram afastados da CRU.

Em resumo, o melhor desempenho do método MQEMYW ocorre quando os pólos e zeros se encontram afastados da CRU. Este ainda é satisfatório quando os pólos e zeros se aproximam à CRU, porém ambos próximos entre si. O pior desempenho ocorre com os pólos afastados e os zeros próximos à CRU, porém todos em posições angulares próximas entre si.

Ainda em relação ao método MQEMYW, este apresenta, principalmente quando o número de equações é elevado, polarização radial na estimativa da posição dos pólos, com tendência a localizá-los muito próximos à CRU. Por outro lado, a constatação do efeito da localização dos zeros permitiu observar a limitação natural dos algoritmos de estimação separada: não foi possível isolar os efeitos de tais zeros sobre a estimativa do DEN-ARMA, sendo que estas tendem a reproduzir as características espectrais que deveriam ser obtidas apenas quando da estimação do NUM-ARMA.

Em relação ao uso do método de Durbin na estimação do numerador espectral, esperavamos atingir as mesmas conclusões do capítulo 5 sobre a utilização dos métodos Autocorrelação e Covariância Modificado na obtenção do modelo AR longo. Nos casos em que os zeros dos processos se encontravam próximos à CRU, era esperado que os resultados do emprego do método Covariância Modificado fossem superiores àqueles obtidos com o Autocorrelação. Entretanto, observamos que as diferenças entre os resultados com os dois métodos foram pequenas, o que atribuímos ao fato da qualidade das estimativas do DEN-ARMA não terem permitido que tais diferenças se des-

tacassem. Contudo, as semelhanas entre os resultados mostram que pode-se utilizar o método Covarincia Modificado quando os zeros do processo se encontram prximos  CRU, porém o esforo computacional neste método é maior que no Autocorrelaco. Nos casos em que os zeros se encontram afastados da CRU, é mais adequado utilizar o método Autocorrelaco, tal como foi concluido no capítulo 5.

Quanto ao uso dos métodos clssicos na estimaco do numerador espectral, concluímos, tal como no capítulo 5, que o desempenho do método Periodograma é superior ao Correlograma, porém inferior ao desempenho do método de Durbin. E nos casos em que a DEP é semelhante ao denominador espectral (ou seja, aqueles onde os zeros se encontram afastados da CRU), a substituio do método de Durbin pelo Periodograma  satisfatria. Porém, tal substituio no  possível em situaes onde se deseja os parmetros média-ajustvel, como, por exemplo, na modelagem de voz.

Ainda sobre o uso dos métodos clssicos, sua aplicao sobre os resíduos progressivos-regressivos no resultou em melhores estimativas espectrais que aquelas apenas com os resíduos progressivos, independente do número de amostras. De modo que podemos optar unicamente pelo emprego dos resíduos progressivos, reduzindo desta forma o esforo computacional.

Os resultados ao longo da seco 6.5 de simulaes, também nos permitiram concluir que os métodos sub-timos de estimaco separada no so adequados para a estimaco da DEP de processos ARMA com plos afastados e zeros prximos  CRU, porém todos situados em posies angulares prximas entre si.

O trabalho desenvolvido neste capítulo apresentou os seguintes aspectos importantes:

- a anlise sobre o número de equaes e o uso de ponderao no método MQEMYW, envolvendo quatro processos ARMA diferentes e dois números de amostras distintos.
- como resultado desta anlise foram obtidas estimativas para a DEP-ARMA melhores que aquelas da referência [2], principalmente para processos com plos e zeros afastados da CRU.
- a observao da tendência de polarizao radial na estimativa da posio dos plos, no método MQEMYW. Esta observao no foi encontrada em nenhum dos textos estudados.

- a constatação de que os métodos de estimação separada não são adequados para a estimativa da DEP de processo ARMA com pólos afastados e zeros próximos à CRU, porém ambos situados em posições angulares próximas entre si.

- a análise comparativa entre o método de Durbin e os métodos clássicos na estimativa do NUM-ARMA e a conclusão de que o uso simultâneo dos processos residuais progressivos e regressivos nos métodos clássicos não melhora a estimativa da DEP-ARMA em relação ao uso exclusivo dos resíduos progressivos. Estes aspectos não foram encontrados nos textos estudados.

Também, o algoritmo do método MQEMYW sem ponderação, apresentado neste capítulo, foi utilizado como parte de um algoritmo para a síntese de sinais de voz através da modelagem ARMA na tese da referência [18], fornecendo bons resultados.

## CAPÍTULO 7

### CONCLUSÕES

Este trabalho, cujo objetivo foi o estudo de métodos de estimação dos parâmetros dos modelos ARMA para Análise Espectral, deu início às pesquisas sobre a Análise Espectral nesta faculdade. Sendo assim foi tomado o cuidado de apresentar os principais conceitos e métodos da Análise Espectral sem realizar um tutorial sobre a mesma. Contudo, algumas contribuições foram produzidas.

No capítulo 2 tratamos do problema inerente à Análise Espectral em virtude de se dispor, na prática, de um número limitado de amostras do processo a ser analisado. Também foram apresentados os estimadores da sequência de autocorrelação, os métodos clássicos Correlograma e Periodograma e uma breve discussão sobre os modelos paramétricos.

Um ponto importante neste capítulo é o estudo teórico sobre a característica de sequência positiva semidefinida das estimativas polarizadas e não-polarizadas da sequência de autocorrelação. Tal estudo confirma que as sequências de estimativas polarizadas de autocorrelação são sempre positivas semidefinidas. Esta afirmação foi verificada nas simulações envolvendo o método Correlograma: nelas as estimativas do espectro de potência foram sempre não-negativas. Este resultado também confirma o uso da janela triangular para o truncamento da sequência de estimativas polarizadas de autocorrelação, de forma a obtermos uma sequência truncada positiva semidefinida.

No capítulo 5 foi desenvolvido o método de Durbin para a estimação dos parâmetros do modelo MA e a possível substituição deste modelo pelos métodos clássicos na estimativa do espectro de potência de processos MA.

Embora o objetivo inicial deste capítulo fosse apenas o de servir de suporte para o capítulo sobre estimação espectral ARMA, o mesmo apresentou vários aspectos inéditos tais como: 1) o uso de outros métodos além do Autocorrelação para a obtenção do modelo AR

longo; 2) a análise da seleção da ordem do modelo AR longo em função do método escolhido para sua obtenção, do número de amostras disponíveis e das características espectrais do processo MA analisado; 3) a aplicabilidade da característica de alta resolução dos métodos de estimação AR na estimativa espectral de processos MA com vales espectrais abruptos e 4) a comparação entre o método de Durbin e os estimadores clássicos

As conclusões atingidas ao longo do capítulo 5 foram:

- em relação ao método de Durbin: a estimativa espectral com este método será tanto melhor quanto melhor for a aproximação fornecida pelo modelo AR longo. Esta, por sua vez, depende da localização dos zeros, do número de amostras disponíveis e do método de estimação do modelo AR longo. No caso em que os zeros se encontram afastados da CRU, os resultados mostraram que a ordem adequada para o modelo AR longo é um quinto do número de amostras. Para este valor os três métodos utilizados para estimar o modelo AR, Autocorrelação, Covariância e Covariância Modificado, forneceram resultados semelhantes, prevalecendo então o método Autocorrelação em função do menor esforço computacional. Para processos MA com zeros próximo à CRU, os métodos Covariância e Covariância Modificado apresentaram desempenho superior na estimação do modelo AR longo e a ordem adequada para este modelo é um terço do número de amostras.

- em relação aos métodos clássicos: o desempenho do método Periodograma é superior ao do Correlograma, porém inferior ao desempenho do método de Durbin, independente da localização dos zeros. Entretanto, os resultados mostraram que o método de Durbin pode ser substituído pelo Periodograma quando o número de amostras for bastante elevado. O método Correlograma não apresentou condições de ser utilizado em tal substituição.

O capítulo 6, sobre estimação espectral ARMA, é o tema central da tese e objetivou extrair o maior número possível de informações sobre os métodos de estimação separada, a partir dos conceitos teóricos apresentados e as simulações efetuadas.

Entre os aspectos mais importantes deste capítulo destaca-se o estudo sobre o número de equações e uso de janela de ponderação

no algoritmo da análise de mínimos quadrados das Equações Modificadas de Yule-Walker para a estimativa dos parâmetros autorregressivos do modelo ARMA. Tal estudo permitiu obter melhores estimativas do espectro de potência de processos ARMA que aquelas observadas na referência [2] e permitiu constatar que este algoritmo apresenta tendência de polarização radial na estimativa da posição dos pólos. Por fim, destaca-se também a comparação entre o método de Durbin e os métodos clássicos, agora dentro do contexto da estimação do numerador espectral ARMA.

As principais conclusões alcançadas foram:

- a qualidade da estimativa do espectro de densidade de potência depende da qualidade da estimativa do denominador espectral.

- os métodos de estimação separada não são adequados para estimar o espectro de potência de processos com pólos afastados e zeros próximos à CRU, porém situados em posições angulares próximas.

- o desempenho do algoritmo da análise de mínimos quadrados das Equações Modificadas de Yule-Walker depende da localização dos pólos e zeros do processo, sendo melhor quando os pólos e zeros se encontram afastados da CRU, satisfatório quando ambos se aproximam à CRU e ruim quando os pólos se encontram afastados e os zeros próximo à CRU. O número de equações neste algoritmo deve ser elevado quando os pólos se encontram próximos à CRU e pequeno quando os pólos se encontram afastados. O número elevado de equações exige o uso de ponderação dos erros, ao passo que tal ponderação não produz efeitos significativos quando este número é pequeno.

- na estimação do numerador espectral utilizando o método de Durbin, constatamos que é mais adequado o uso do método Autocorrelação na obtenção do modelo AR longo quando os zeros se encontram afastados da CRU. Porém, a qualidade das estimativas do denominador espectral, nos casos em que os zero se encontram próximos à CRU, não permiti confirmar a superioridade do método Covariância Modificado em relação ao Autocorrelação. Em relação ao uso dos métodos clássicos, concluimos, novamente, que o desempenho

do método Periodograma é superior ao Correlograma, porém inferior ao do Durbin. Entretanto, a substituição do método de Durbin pelo Periodograma é satisfatória nos casos em que a densidade espectral de potência é semelhante ao denominador espectral.

O prosseguimento deste trabalho pode se dar em duas etapas. Em primeiro lugar, é necessário estudar se as tendências da estimativa do denominador espectral ARMA em reproduzir aspectos referentes ao numerador e gerar polarização radial na estimativa dos pólos, se manifestam em outros processos onde os zeros se encontrem em posições angulares afastadas daquelas ocupadas pelos pólos. Este estudo permitirá avaliar o desempenho dos métodos de estimação separada quanto ao posicionamento angular dos pólos e zeros e observar se o afastamento leva a uma melhor estimativa do denominador ARMA nos casos mais difíceis tratados no capítulo 6.

Em seguida, pode-se tentar compensar a polarização radial na estimativa dos pólos, através de um fator de ajuste. Também, pode ser avaliado o uso do algoritmo da variável instrumental para a solução das Equações Modificadas de Yule-Walker, como proposto no texto de referência [33], onde é discutido o uso de uma ponderação ótima dos erros de aproximação que considere a parte média-ajustável do modelo ARMA. Tal proposta tem por objetivo melhorar a qualidade da estimativa dos parâmetros auto-regressivos.

Será interessante, ainda, um estudo sobre o comportamento dos métodos de estimação separada em função da ordem atribuída ao modelo ARMA.

Por fim, naqueles casos onde os métodos de estimação separada não ofereçam estimativas espectrais de qualidade aceitável, será necessário empregar outros métodos mais poderosos, tais como os métodos ótimos de estimação simultânea.

**REFERÊNCIAS**

- [ 1] Marple, S. L. Jr., Digital Spectral Analysis with Applications, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J., 1987.
- [ 2] Kay, S. M., Modern Spectral Estimation, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1988.
- [ 3] Lathi, B. P., An introduction to Random Signals and Communication Theory, International Textbook Co., 1968.
- [ 4] Jenkins, G. M., and D. G. Watts, Spectral Analysis and Its Applications, Holden-Day, Inc., San Francisco, 1968.
- [ 5] Cadzow, J. A., and Y. Sum, Sequences with Positive Semidefinite Fourier Transforms, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-34, pp. 1502-1510, December, 1986.
- [ 6] Haykin S., Adaptive Filter Theory, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1986.
- [ 7] Noble, B., e J. W. Daniel, Álgebra Linear Aplicada, Segunda Edição, Prentice/Hall do Brasil, Rio de Janeiro, 1986
- [ 8] Balckman, R. B., and J. W. Tukey, The Measurement of Power Spectra from the Point of View of Communication Engineering, Dover Publications Inc., New York, 1958.
- [ 9] Welch, P. D., The Use of Fast Fourier Transform for Estimation of Power Spectra: A Method Based on Time Averaging over Short, Modified Periodogram, IEEE Trans. Audio Electroacoust., vol AU-15, pp 70-73, June 1967.
- [10] Oppenheim, A. V., and R.W. Schafer, Digital Signal Processing Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.

- [11] Box, G. F. P., and G. M. Jenkins, Time Series Analysis Forecasting and Control, Revised Edition, Holden-Day, Inc., San Francisco, 1976.
- [12] De Witt B., A. S. e A. Lopes, Introdução aos Modelos Paramétricos na Análise Espectral, RT-204 Convênio UNICAMP-TELEBRÁS, FEE-UNICAMP, Nov. 1990.
- [13] Lang, S. W., and J. H. McClellan, Frequency Estimation with Maximum Entropy Spectral Estimators, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-28 pp 716-724, December 1980.
- [14] Antunes, E. J. B. e A. Lopes, Detecção de Frequências Através de Predição Linear, RT-223, Convênio UNICAMP-TELEBRÁS, FEE-UNICAMP, Nov. 1991.
- [15] Chow, J. C., On the Estimation of the Order of a Moving-Average Process, IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-17, pp 386-387, June 1972.
- [16] Cadzow, J. A., Spectral Estimation: An Overdetermined Rational Model Equation Approach, Proc. IEEE vol. 70 pp 907-938, September 1982.
- [17] Jacson, L. B., Digital Filters and Signal Processing, Kluwer Academic Publishers, 1989.
- [18] Oliveira, P. C. D., Aplicação do Processamento Homomórfico na Codificação de Voz a Baixas Taxas, Tese de Mestrado, FEE-UNICAMP, Fev. 1992.
- [19] Steiglitz, K., and L. E. McBride, A Technique for Identification of Linear System, IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-10, pp 461-464, October 1965.

- [20] Sakai, H., and H. Tokumaru, Statistical Analysis of a Spectral Estimator for ARMA Process, IEEE Trans. Autom. Control, vol AC-25, pp 122-124, February 1980.
- [21] Cadzow, J. A., High Performance Spectral Estimation - A New ARMA Method, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-28, pp 524-529, October 1980.
- [22] Durbin, J. Estimation of Parameters in Time-Series Regression Models, J. Roy. Statist. Soc., vol. 22, pp. 139-153, 1960.
- [23] Friedlander, B., and B. Porat, Modified Yule-Walker Method of ARMA Spectral Estimation, IEEE Trans. Aerosp. Electron. System, vol. AES-20, pp 158-172, March 1984.
- [24] Friedlander, B., and K. C. Sharman, Performance Evaluation of the Modified Yule-Walker Estimator, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-33, pp 719-725, June 1985.
- [25] Bruzzone, S. P., and M. Kaveh, Information Tradeoff in Using the Sample Autocorrelation Function in ARMA Parameter Estimation, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-32, pp 710-715, August 1984.
- [26] Cadzow, J. A., Autoregressive Moving-Average Spectral Estimation: A Model Equation Procedure, IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing, vol. GE-19, pp 24-28, January 1981.
- [27] Kinkel, J. F., J. Perl, L. Scharf and A. Stubberud, A Note on Covariance-Invariant Digital Filter Design and Autoregressive Moving-Average Spectral Estimation, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-27, pp 200-202, April 1979.
- [28] Kaveh, M., High Resolution Spectral Estimation for Noisy Signals, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-27, pp 286-287, June 1979.

- 
- [29] Bruzzone, S. P., and M. Kaveh, One Some Suboptimum ARMA Spectral Estimators, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-28, pp 753-755, December 1980.
- [30] Mosses, R. L., and A. A. Beex, A Comparison of Numerator Estimators for ARMA Spectra, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-34, pp 1668-1671, December 1986.
- [31] Kay, S. M., A New ARMA Spectral Estimator, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-28, pp 585-588, October 1980.
- [32] Chow, J. C., On Estimaing the Orders of an Autoregressive Moving-Average Process with Uncertain Observations, IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-17, pp 707-709, October 1972.
- [33] P. Stoica, T. Söderström and B. Friedlander, Optimal Instrumental Variable Estimates of the an ARMA Process, IEEE Trans. Autom. Control, vol AC-30, pp 1066-1074, November 1985.