

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE MICROONDA E ÓPTICA

APLICAÇÃO DO FORMALISMO DAS FUNÇÕES DE GREEN
DIÁDICAS E DO MÉTODO DOS MOMENTOS NO ESTUDO
DE ELEMENTOS DE MICROFITA SOBRE SUBSTRATOS
CILÍNDRICOS CIRCULARES

Este exemplar corresponde à redação final da
defendida por FRANKLIN DA COSTA
SILVA e aprovada pela Com
Julgadora em 05/07/90.


Orientador

FRANKLIN DA COSTA SILVA *m.lera*

Orientador: Prof. Dr. Atílio José Giarola *m.lera*

Co-Orientador: Prof. Dr. Sérgio Barroso de Assis Fonseca

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da
Universidade Estadual de Campinas UNICAMP, como parte dos
requisitos exigidos para a obtenção do título de DOUTOR
EM ENGENHARIA ELÉTRICA

(JULHO DE 1990)

A Aline Cristina

AGRADECIMENTOS

Ao professor Atílio José Giarola, pela dedicação, orientação e acompanhamento de todas as etapas do curso.

Aos professores Sérgio Barroso de Assis Fonseca e Antônio José Martins Soares, pelo auxílio na compreensão dos assuntos e apoio material na redação deste trabalho.

A Leandro, Patrícia, Alessandra e Rildete, pelos incentivos e, principalmente, pela compreensão de minha ausência.

À minha mãe e irmãos, pelo apoio e reconhecimento do meu trabalho.

Aos colegas da pós-graduação e amigos de república, pelo alto nível de relacionamento.

Aos professores e funcionários da Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas, em especial aos do Departamento de Microonda e Óptica e aos do Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade de Brasília, que muito contribuíram para que este trabalho fosse possível.

Aos desenhistas Rogério Castro Figueiredo e Maria Lúcia Costa Cardoso, pelos trabalhos de desenho.

À Sonia Junqueira, pela acolhida que tive na cidade de Campinas.

A Raul Xavier de Souza, pela nossa amizade.

Agradecimento especial faço a professora Ivanilde Garcia Mendes, pela sua paciência em ensinar-me as primeiras letras.

À CAPES pelo auxílio financeiro.

S U M Á R I O

Neste trabalho exploram-se as potencialidades das funções de Green diádicas e do método dos momentos, nas soluções de problemas de elementos de microfita, sobre substratos cilíndricos circulares. Determinam-se os coeficientes de espalhamento das funções de Green diádicas do tipo elétrico, para um meio formado por quatro camadas cilíndricas concêntricas, sendo a camada central um condutor perfeito e equações integrais, que determinam o comportamento dos campos eletromagnéticos, são obtidas.

Analisa-se dois problemas particulares de elementos de microfita sobre substratos cilíndricos circulares: o do efeito da cobertura dielétrica na constante de propagação de uma linha de microfita infinita e na frequência de ressonância de uma antena com elemento ressoador "retangular", alimentada diretamente por uma linha de microfita. No segundo problema, a solução da equação integral resultante, através da aplicação do método dos momentos, é apresentada detalhadamente.

Os resultados indicam que o efeito da cobertura dielétrica, nos elementos de microfita, é substancial quando o valor da constante dielétrica e a espessura da cobertura são aumentados, de forma que, nos projetos de circuitos de microfita, este efeito tem que ser cuidadosamente analisado.

S U M M A R Y

The potential for using dyadic Green's functions and the moment method is explored in this work for the solution of problems of microstrip devices on circular cylindrical substrates. The scattering coefficients of the dyadic Green's functions of the electric type are determined for a four layered concentric cylindrical medium from which the central layer (the inner cylinder) is a perfect conductor. In addition, the integral equations that determine the electromagnetic field behavior are obtained.

Two particular problems of microstrip devices on circular cylindrical substrates are analyzed: the effect of a dielectric overlay on the propagation constant of an infinitely long microstripline and how this dielectric overlay affects the resonance frequency of a "rectangular" patch antenna, directly fed by a microstripline. The resultant integral solution for the latter problem is presented in detail by using the moment method.

The results indicate that the effect of the overlay on microstrip devices may be substantial when the dielectric constant and the thickness of the overlay are increased, such that it should be carefully considered in the design of these devices.

I N D I C E

CAP. 1	-	INTRODUÇÃO.....	1
CAP. 2	-	AS FUNÇÕES DE GREEN DIÁDICAS EM TEORIA ELETROMAGNÉTICA.....	6
		2.1 - Introdução.....	7
		2.2 - A Função Diádica.....	8
		2.3 - Formação das Funções de Green Diádicas.....	10
		2.4 - Classificação e Relações entre Funções de Green Diádicas.....	16
		2.5 - Cálculo dos Campos Eletromagnéticos.....	18
		2.6 - Função de Green Diádica para o Espaço Livre em Coordenadas Cilíndricas Circulares.....	22
CAP. 3	-	FUNÇÕES DE GREEN DIÁDICAS PARA MEIOS COM QUATRO CAMADAS CILÍNDRICAS CONCÊNTRICAS.....	26
		3.1 - Introdução.....	27
		3.2 - Funções de Green Diádicas para Meios com Quatro Camadas Cilíndricas Concêntricas.....	27
		3.3 - Obtenção dos Sistemas de Equações para o Cálculo dos Coeficientes de Espalhamento.....	32
		3.4 - Cálculo dos Coeficientes de Espalhamento.....	38
		3.5 - Conclusões.....	45
CAP. 4	-	EFEITO DA COBERTURA DIELÉTRICA, NA CONSTANTE DE PROPAGAÇÃO DE UMA LINHA DE MICROFITA SOBRE SUBSTRATO CILÍNDRICO CIRCULAR.....	46
		4.1 - Introdução.....	47
		4.2 - Formulação Matemática.....	47
		4.3 - Cálculo da Constante de Propagação de uma Linha de Microfita Infinita.....	51
		4.4 - Resultados e Conclusões.....	56

CAP. 5 - ESTUDO DO EFEITO DA COBERTURA DIELÉTRICA, NA FREQUÊNCIA DE RESSONÂNCIA DA ANTENA DE MICROFITA DE FORMA "RETANGULAR", SOBRE SUBSTRATO CILÍNDRICO CIRCULAR.....	62
5.1 - Introdução.....	63
5.2 - Determinação da Equação Integral.....	63
5.3 - Aplicação do Método dos Momentos na Solução da Equação Integral.....	66
5.4 - Cálculo dos Elementos das Matrizes do Método dos Momentos.....	73
5.5 - Resultados Numéricos.....	83
CAP. 6 - CONCLUSÕES.....	95
APÊNDICE.....	98
AP. 1 - Programa para o Cálculo da Constante de Propagação de uma Linha de Microfita Infinita, sobre Substrato Cilíndrico Circular com Cobertura Dielétrica.....	99
AP. 2 - Programa para o Cálculo das Características Elétricas de uma Antena de Microfita "Retangular", Alimentada Diretamente por uma Linha de Microfita, sobre Substrato Cilíndrico Circular com Cobertura Dielétrica.....	105
AP. 3 - Subprogramas Auxiliares.....	112
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	134

C A P Í T U L O I

I N T R O D U Ç Ã O

As primeiras sugestões de se trabalhar com antenas de microfita dadas em 1953, nos Estados Unidos por Deschamps [1] e em 1955 na França por Gutton e Baissinot [2], não tiveram de imediato muita aceitação da comunidade científica. Apenas no início da década de 1970, inicia-se uma nova era com resultados de pesquisas sobre o assunto. Em 1970 Byron [3] publicou um trabalho tratando de uma nova antena, consistindo de uma placa condutora separada de um plano de terra por uma camada dielétrica, ou seja, descreveu uma antena de microfita na sua configuração mais simples. Em 1972, Howell [4] publicou estudos sobre antenas de microfita de forma retangular e circular e, um ano depois, uma antena formada por elementos de microfita foi patenteada por Munson [5]. Até hoje, uma grande quantidade de trabalhos foi publicada sobre antenas de microfita, buscando novas técnicas de análise e implementação. Para uma imediata introdução sobre o assunto é importante conhecer os trabalhos de Carver e Mink [6], Mailloux, McIlvanna e Kernweis [7] e Bahl e Bhartia [8].

As antenas de microfita podem ser projetadas para operar na faixa de 100 MHz a 50 GHz [8] e apresentam, como vantagens principais, baixo peso, pequeno volume e possibilidade de serem montadas em qualquer superfície, como, por exemplo, se adaptarem às aeronaves sem modificar suas características aerodinâmicas. Além destas podem-se citar outras, bem como algumas desvantagens.

a) Vantagens [8-10]

- Baixo custo de produção
- Podem ser facilmente integradas com outros dispositivos
- Linhas de alimentação e redes de casamento podem ser fabricadas simultaneamente com as estruturas da antena
- Possibilidade de obter polarizações linear e circular, pela escolha adequada do ponto de alimentação

b) Desvantagens [10]

- Estreita faixa de frequência
- Baixo ganho
- Radiação em apenas um hemisfério
- Baixa isolamento entre alimentador e elemento radiante
- Possibilidade de excitação de onda de superfície
- Capacidade de potência limitada

O efeito destas desvantagens pode ser minimizado com projetos adequados das antenas. Por exemplo, a excitação de ondas de superfície pode ser reduzida com o uso de substrato com pequena espessura e baixo valor da permissividade dielétrica relativa [10].

As características físicas e elétricas das antenas de microfita possibilitam seu uso em diversas áreas, podendo-se citar, entre outras, as seguintes aplicações [8-10] :

- Comunicações via satélite
- Elementos alimentadores em antenas complexas
- Radares
- Veículos de alta velocidade
- Medicina
- Comando à distância

As técnicas usadas para o estudo das antenas de microfita, podem ser menos complexas, como a aproximação do modelo da linha de transmissão [11], seguindo, entre outros, o modelo da cavidade [12], até análises sofisticadas baseadas na formulação de uma equação integral e sua solução computacional [13-14]. As aproximações mais simples conduzem a fórmulas simplificadas de uso direto, com difícil previsão da faixa de validade. O tratamento através do uso de equações complexas levam a um aumento significativo na dificuldade do desenvolvimento e cálculo matemático. Porém os efeitos, como por exemplo os de onda de superfície, são computados e as respostas obtidas são precisas, representando o dispositivo real.

Dentro deste conceito de análise se destacam as funções de Green diádicas [15-17] e o método dos momentos [18]. Nos últimos anos as funções de Green diádicas foram amplamente utilizadas no estudo da propagação de ondas eletromagnéticas em meios com multicamadas [19-21]. A aplicação destas funções permite a obtenção de uma equação integral, que descreve o comportamento dos campos eletromagnéticos. Esta equação, formulada sob a aplicação de condições de contorno apropriadas, na maioria das vezes tem como incógnita a própria distribuição de corrente nos elementos da antena.

O método dos momentos é um procedimento numérico amplamente

utilizado na transformação de equações funcionais em equações matriciais e, por exemplo, soluciona uma equação integral, colocando-a sob a forma de um sistema de equações algébricas lineares. O método tem como limitações principais, memória de computador e tempo de execução dos programas, que diminuem à medida que a tecnologia computacional avança. A aplicação do método hoje é de interesse, uma vez que é, em geral, mais conveniente utilizar o tempo de computador e diminuir o esforço analítico.

A potencialidade das funções de Green diádicas e o método dos momentos são explorados neste trabalho para o caso da análise de elementos de microfita. Dá-se ênfase aos problemas particulares de uma linha de microfita infinita e de uma antena de microfita de forma "retangular", montadas sobre substratos cilíndricos circulares com coberturas dielétricas.

No capítulo seguinte introduz-se o conceito das funções diádicas, apresentando a dedução e importância do uso das funções de Green diádicas em teoria eletromagnética, bem como a expansão em autofunções da função de Green diádica do tipo elétrico para o espaço livre em coordenadas cilíndricas circulares.

No terceiro capítulo apresentam-se, inicialmente, as funções de Green diádicas para regiões formadas por quatro camadas cilíndricas concêntricas, sendo a do centro um condutor perfeito, obtidas pelo método da superposição por espalhamento. A seguir, através da aplicação de condições de contorno, calculam-se os coeficientes de espalhamento.

O quarto capítulo inicia apresentando uma formulação matemática geral para a solução de problemas de microfita, sejam linhas de transmissão ou elementos de antenas. Soluciona-se o problema com respeito ao efeito da cobertura dielétrica em uma linha de microfita infinita, montada sobre substrato cilíndrico circular, calculando sua constante de propagação, com o uso da técnica das funções de Green diádicas.

No quinto capítulo analisa-se uma antena de microfita de forma "retangular", alimentada diretamente por uma linha de microfita, estando o conjunto montado sobre substrato cilíndrico circular, com cobertura dielétrica. O problema é equacionado com o uso das funções de Green diádicas, obtendo-se uma equação integral que é resolvida através da aplicação do método dos momentos.

No último capítulo se discutem os métodos utilizados e as respostas obtidas neste trabalho. Finalmente apresenta-se um apêndice com explicações e listagens dos programas, em linguagem Fortran, desenvolvidos para o cálculo da constante de propagação da linha de microfita e das características elétricas da antena de microfita de forma "retangular", montadas sobre substratos cilíndricos circulares com coberturas dielétricas.

C A P Í T U L O I I

AS FUNÇÕES DE GREEN DIÁDICAS EM TEORIA ELETROMAGNÉTICA

2.1. Introdução

A análise de problemas eletromagnéticos, onde as condições de contorno dos campos têm que ser satisfeitas, como, por exemplo, em meios de várias camadas, guias de onda, etc, recebeu notável impulso após as publicações dos trabalhos de Tai [15-17], tratando da aplicação das funções de Green diádicas em teoria eletromagnética.

Neste capítulo, trata-se, inicialmente, da definição e algumas propriedades de uma função diádica. Mostra-se a formação de funções de Green diádicas, sejam do tipo elétrico $\bar{\bar{G}}_e$ ou do tipo magnético $\bar{\bar{G}}_m$, utilizando-se, para cada uma delas, três funções vetoriais de Green, classificando-as de acordo com as condições de contorno que devem satisfazer numa dada superfície. Deduzem-se, a seguir, utilizando-se da versão diádica do teorema vetorial de Green, equações integrais que regem o comportamento dos campos eletromagnéticos, a partir de suas versões diádicas, para fontes de correntes arbitrárias. Finalizando, obtém-se em coordenadas cilíndricas circulares, uma expansão em auto-funções da função de Green diádica do tipo elétrico para o espaço livre.

2.2. A Função Diádica

Sendo $\bar{A}$ e $\bar{B}$ funções vetoriais quaisquer, denomina-se função diádica à entidade matemática

$$\bar{\bar{D}} = \bar{A} \bar{B} \quad (2.1)$$

onde $\bar{A}$ e $\bar{B}$ são denominadas, respectivamente, de elementos anterior e posterior de $\bar{\bar{D}}$.

Uma função diádica não tem nenhuma interpretação física, a menos que sofra a ação de outra função vetorial. Sendo

$$\bar{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} \quad \text{e} \quad \bar{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}$$

então

$$\bar{\bar{D}} = \bar{A} \bar{B} = (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z})(B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z})$$

ou seja

$$\begin{aligned} \overline{\overline{D}} = & A_x B_x \hat{x}\hat{x} + A_x B_y \hat{x}\hat{y} + A_x B_z \hat{x}\hat{z} + A_y B_x \hat{y}\hat{x} \\ & + A_y B_y \hat{y}\hat{y} + A_y B_z \hat{y}\hat{z} + A_z B_x \hat{z}\hat{x} + A_z B_y \hat{z}\hat{y} + A_z B_z \hat{z}\hat{z} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Nota-se que uma função diádica tem nove componentes distintas. Definindo-se

$$\overline{D^{(x)}} = A_x B_x \hat{x} + A_y B_x \hat{y} + A_z B_x \hat{z} = B_x \overline{A} \quad (2.3a)$$

$$\overline{D^{(y)}} = A_x B_y \hat{x} + A_y B_y \hat{y} + A_z B_y \hat{z} = B_y \overline{A} \quad (2.3b)$$

$$\overline{D^{(z)}} = A_x B_z \hat{x} + A_y B_z \hat{y} + A_z B_z \hat{z} = B_z \overline{A} \quad (2.3c)$$

obtém-se

$$\overline{\overline{D}} = \overline{D^{(x)}} \hat{x} + \overline{D^{(y)}} \hat{y} + \overline{D^{(z)}} \hat{z} \quad (2.4)$$

que é uma forma alternativa de se representar $\overline{\overline{D}}$.

Existem dois produtos escalares entre uma função diádica $\overline{\overline{D}}$ e uma função vetorial $\overline{C}$. O produto escalar anterior é definido por

$$\overline{C} \cdot \overline{\overline{D}} = (\overline{C} \cdot \overline{A}) \overline{B} = \overline{B} (\overline{C} \cdot \overline{A}) = \overline{B} (\overline{A} \cdot \overline{C}) \quad (2.5)$$

Da Eq. (2.5) nota-se que o produto escalar anterior, resulta em um vetor na direção do elemento posterior $\overline{B}$, da função diádica $\overline{\overline{D}}$. O produto escalar posterior é definido por

$$\overline{\overline{D}} \cdot \overline{C} = \overline{A} (\overline{B} \cdot \overline{C}) = (\overline{B} \cdot \overline{C}) \overline{A} = (\overline{C} \cdot \overline{B}) \overline{A} \quad (2.6)$$

Nota-se, agora, da Eq. (2.6), que o produto escalar posterior, resulta em um vetor na direção do elemento anterior $\overline{A}$, da função diádica $\overline{\overline{D}}$.

As Eqs. (2.5) e (2.6) sugerem a definição da transposta de $\bar{\bar{D}}$, ou seja

$$\bar{\bar{D}} \stackrel{\approx}{=} \bar{B} \bar{A} \quad (2.7)$$

de forma que

$$\bar{\bar{D}} \cdot \bar{C} = \bar{C} \cdot \bar{\bar{D}} \stackrel{\approx}{=} \quad (2.8)$$

Os produtos vetoriais, anterior e posterior, entre uma função vetorial e uma função diádica resultam em uma função diádica e são definidos como

$$\bar{C} \times \bar{\bar{D}} = (\bar{C} \times \bar{A}) \bar{B} \quad (2.9)$$

$$\bar{\bar{D}} \times \bar{C} = \bar{A} (\bar{B} \times \bar{C}) \quad (2.10)$$

O divergente e o rotacional de uma função diádica são definidos por

$$\nabla \cdot \bar{\bar{D}} = (\nabla \cdot \bar{D}^{(x)}) \hat{x} + (\nabla \cdot \bar{D}^{(y)}) \hat{y} + (\nabla \cdot \bar{D}^{(z)}) \hat{z} \quad (2.11)$$

$$\nabla \times \bar{\bar{D}} = (\nabla \times \bar{D}^{(x)}) \hat{x} + (\nabla \times \bar{D}^{(y)}) \hat{y} + (\nabla \times \bar{D}^{(z)}) \hat{z} \quad (2.12)$$

Observam-se, das Eqs. (2.11) e (2.12) que a aplicação do divergente e do rotacional resultam, respectivamente, em uma função vetorial e em uma função diádica.

A função diádica unitária é representada por

$$\bar{\bar{I}} = \hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z} \quad (2.13)$$

tendo as seguintes propriedades

$$\bar{A} \cdot \bar{\bar{I}} = \bar{\bar{I}} \cdot \bar{A} = \bar{A} \quad (2.14)$$

$$\nabla \cdot (\bar{\bar{I}} \Psi) = \nabla \Psi \quad (2.15)$$

sendo Ψ uma função escalar de posição.

O fato do produto escalar entre uma função vetorial e uma função diádica, resultar em uma função vetorial e como uma função diádica tem a capacidade de armazenar nove componentes, como mostradas na Eq. (2.2), faz com que as funções diádicas sejam muito úteis na teoria dos campos vetoriais.

2.3. Formação das Funções de Green Diádicas

— As equações de Maxwell escritas na forma diferencial, para uma dependência no tempo do tipo $\exp(-i\omega t)$, onde ω é a frequência angular da fonte, são

$$\nabla \times \bar{E} = i\omega\mu\bar{H} \quad (2.16)$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} - i\omega\epsilon\bar{E} \quad (2.17)$$

$$\nabla \cdot \bar{J} = i\omega\rho \quad (2.18)$$

onde μ é a permeabilidade magnética do meio, ϵ é a permissividade elétrica do meio e ρ é a densidade de carga elétrica.

Das Eqs. (2.16)-(2.18) obtém-se

$$\nabla \cdot (\mu\bar{H}) = 0 \quad (2.19)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon\bar{E}) = \rho \quad (2.20)$$

Eliminando-se $\bar{H}$ ou $\bar{E}$ entre as Eqs. (2.16) e (2.17) resultam

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E} - k^2 \bar{E} = i\omega\mu\bar{J} \quad (2.21)$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{H} - k^2 \bar{H} = \nabla \times \bar{J} \quad (2.22)$$

onde $k = \omega(\mu\epsilon)^{1/2}$ é o número de onda do meio.

As soluções das Eqs. (2.21) e (2.22) em termos do vetor potencial magnético $\bar{A}$ são [15]

$$\bar{E}(\bar{R}) = i\omega \left(1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \right) \bar{A}(\bar{R}) \quad (2.23)$$

$$\bar{H}(\bar{R}) = \frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{A}(\bar{R}) \quad (2.24)$$

Nas Eqs. (2.23) e (2.24)

$$\bar{A}(\bar{R}) = \mu \iiint G_0(\bar{R}/\bar{R}^*) \bar{J}(\bar{R}^*) dv^* \quad (2.25)$$

onde $G_0(\bar{R}/\bar{R}^*)$ é a função de Green dada por [15]

$$G_0(\bar{R}/\bar{R}^*) = \exp[ik|\bar{R}-\bar{R}^*|]/4\pi|\bar{R}-\bar{R}^*| \quad (2.26)$$

$$\text{sendo } |\bar{R}-\bar{R}^*| = [(x-x^*)^2 + (y-y^*)^2 + (z-z^*)^2]^{1/2}$$

$\bar{R}$ denota o vetor posição de um ponto do campo, ou seja, localização do observador. $\bar{R}^*$ denota o vetor de posição de um ponto da fonte e $\bar{J}(\bar{R}^*)$ é a densidade de corrente elétrica da fonte.

Considerando-se uma fonte de corrente elétrica infinitesimal, localizada em $\bar{R}^*$ com um momento de corrente igual a $1/i\omega\mu$ ao longo da direção x , como ilustra a Fig. 2.1, pode-se escrever

$$\bar{J}(\bar{R}^*) = \frac{1}{i\omega\mu} \delta(\bar{R}-\bar{R}^*) \hat{x} \quad (2.27)$$

onde $\delta(\bar{R}-\bar{R}^*)$ é a função delta de Dirac definida como

$$\delta(\bar{R}-\bar{R}^*) = \delta(x-x^*) \delta(y-y^*) \delta(z-z^*) = \begin{cases} \infty & \text{para } \bar{R} = \bar{R}^* \\ 0 & \text{para } \bar{R} \neq \bar{R}^* \end{cases} \quad (2.28)$$

Da definição da função delta de Dirac, vem que

$$\iiint \bar{J}(\bar{R}^*) dv^* = \frac{1}{i\omega\mu} \hat{x} \quad (2.29)$$

Levando as Eqs. (2.27) e (2.29) na Eq. (2.25), obtém-se

$$\bar{A}(\bar{R}) = (1/i\omega) G_0(\bar{R}/\bar{R}^*) \hat{x} \quad (2.30)$$

Denominando-se de $\bar{E}^{(x)}(\bar{R}/\bar{R}^*)$ o campo elétrico produzido por essa fonte de corrente elétrica elementar, tem-se da Eq. (2.23)

$$\bar{E}^{(x)}(\bar{R}/\bar{R}^*) = (1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot) G_0(\bar{R}/\bar{R}^*) \hat{x} \quad (2.31)$$

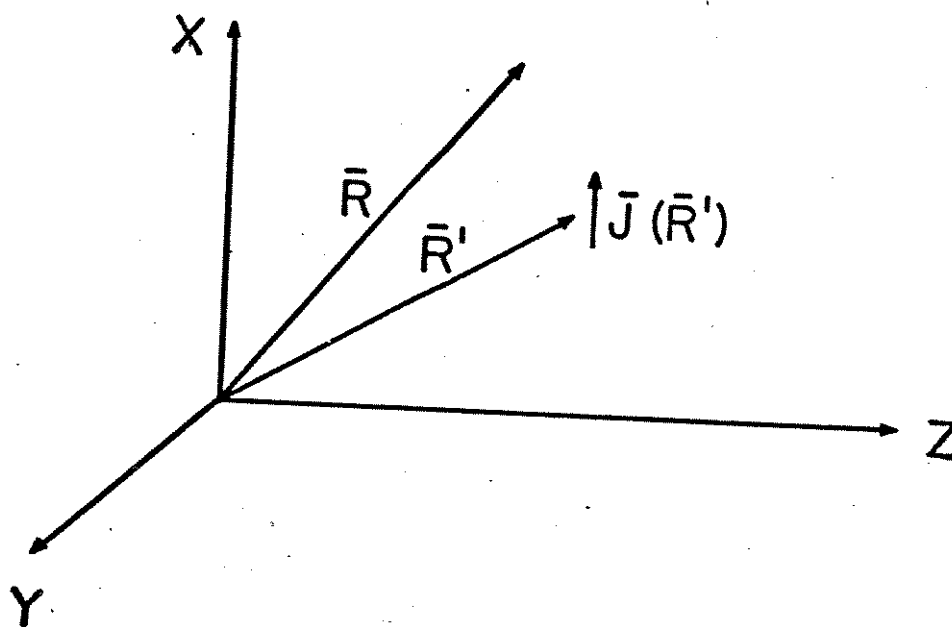


Fig. 2.1. Fonte de corrente elétrica infinitesimal no espaço livre

Nota-se também da Eq. (2.21), com $\bar{J}(\bar{R}^*)$ dada pela Eq. (2.27), que $\bar{E}^{(x)}(\bar{R}/\bar{R}^*)$ tem que satisfazer a equação de onda expressa por

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E}^{(x)}(\bar{R}/\bar{R}^*) - k^2 \bar{E}^{(x)}(\bar{R}/\bar{R}^*) = \delta(\bar{R}-\bar{R}^*) \hat{x} \quad (2.32)$$

Em adição, $\bar{E}^{(x)}(\bar{R}/\bar{R}^*)$ satisfaz a condição de radiação para $R \rightarrow \infty$, ou seja

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left[\nabla \times \bar{E}^{(x)}(\bar{R}/\bar{R}^*) - \frac{1}{k} \hat{R} \times \bar{E}^{(x)}(\bar{R}/\bar{R}^*) \right] = 0 \quad (2.33)$$

As funções $\bar{E}^{(y)}(\bar{R}/\bar{R}^*)$ e $\bar{E}^{(z)}(\bar{R}/\bar{R}^*)$ podem ser obtidas para fontes de correntes elétricas infinitesimais similares à da Eq. (2.27), mas ao longo das direções y e z , respectivamente. As equações que são satisfeitas por estas duas funções e suas respectivas soluções ficam

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E}^{(y)}(\bar{R}/\bar{R}^*) - k^2 \bar{E}^{(y)}(\bar{R}/\bar{R}^*) = \delta(\bar{R}-\bar{R}^*) \hat{y} \quad (2.34)$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E}^{(z)}(\bar{R}/\bar{R}^*) - k^2 \bar{E}^{(z)}(\bar{R}/\bar{R}^*) = \delta(\bar{R}-\bar{R}^*) \hat{z} \quad (2.35)$$

e

$$\bar{E}^{(y)}(\bar{R}/\bar{R}^*) = \left(1 + \frac{1}{k^2} \nabla \cdot \nabla\right) G_0(\bar{R}/\bar{R}^*) \hat{y} \quad (2.36)$$

$$\bar{E}^{(z)}(\bar{R}/\bar{R}^*) = \left(1 + \frac{1}{k^2} \nabla \cdot \nabla\right) G_0(\bar{R}/\bar{R}^*) \hat{z} \quad (2.37)$$

As funções $\bar{E}^{(y)}(\bar{R}/\bar{R}^*)$ e $\bar{E}^{(z)}(\bar{R}/\bar{R}^*)$ obedecem a mesma condição de radiação descrita pela Eq. (2.33).

Da Eq. (2.4) nota-se que uma função diádica pode armazenar três funções vetoriais. Então, torna-se óbvio usar tal propriedade e armazenar em uma única função diádica as três funções vetoriais descritas pelas Eqs. (2.31), (2.36) e (2.37), ou seja

$$\bar{\bar{E}}(\bar{R}/\bar{R}^*) = \bar{E}^{(x)}(\bar{R}/\bar{R}^*) \hat{x} + \bar{E}^{(y)}(\bar{R}/\bar{R}^*) \hat{y} + \bar{E}^{(z)}(\bar{R}/\bar{R}^*) \hat{z} \quad (2.38)$$

Colocando-se os vetores unitários $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$, respectivamente, na posição posterior das Eqs. (2.32), (2.34) e (2.35), e somando as três equações resultantes, forma-se a equação diferencial

diádica para $\bar{\bar{E}}(\bar{R}/\bar{R}^*)$, ou seja

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{E}}(\bar{R}/\bar{R}^*) - k^2 \bar{\bar{E}}(\bar{R}/\bar{R}^*) = \bar{\bar{I}} \delta(\bar{R}-\bar{R}^*) \quad (2.39)$$

onde $\bar{\bar{I}}$ é o fator identidade definido na Eq. (2.13).

Substituindo as Eqs. (2.31), (2.36) e (2.37) na Eq. (2.38) e fazendo-se uso da Eq. (2.15), resulta a função diádica do tipo elétrico dada por

$$\begin{aligned} \bar{\bar{E}}(\bar{R}/\bar{R}^*) &= \left(1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot\right) G_o(\bar{R}/\bar{R}^*) \bar{\bar{I}} \\ &= \left(\bar{\bar{I}} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot\right) G_o(\bar{R}/\bar{R}^*) \end{aligned} \quad (2.40)$$

De maneira similar, as três condições de radiação para as funções vetoriais obtidas, podem ser combinadas resultando

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left[\nabla \times \bar{\bar{E}}(\bar{R}/\bar{R}^*) - i k \hat{R} \times \bar{\bar{E}}(\bar{R}/\bar{R}^*) \right] = 0 \quad (2.41)$$

A Eq. (2.40) não tem significado físico, mas seu uso se dá pelo fato de englobar as Eqs. (2.31), (2.36) e (2.37) que expressam os campos elétricos em termos de suas fontes.

De forma similar, denominando-se de $\bar{H}^{(x)}(\bar{R}/\bar{R}^*)$ o campo magnético produzido pela fonte de corrente elétrica elementar dada na Eq. (2.27), resulta substituindo a Eq. (2.30) na Eq. (2.24) que

$$\bar{H}^{(x)}(\bar{R}/\bar{R}^*) = \frac{1}{i\omega\mu} \nabla \times G_o(\bar{R}/\bar{R}^*) \hat{x} \quad (2.42)$$

Da Eq. (2.22) $\bar{H}^{(x)}(\bar{R}/\bar{R}^*)$ tem que satisfazer a equação de onda expressa por

$$\nabla \times \nabla \times \bar{H}^{(x)}(\bar{R}/\bar{R}^*) - k^2 \bar{H}^{(x)}(\bar{R}/\bar{R}^*) = \frac{1}{i\omega\mu} \nabla \times [\delta(\bar{R}-\bar{R}^*) \hat{x}] \quad (2.43)$$

e deve satisfazer também a condição de radiação no infinito

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left[\nabla \times \bar{H}^{(x)}(\bar{R}/\bar{R}^*) - i k \hat{R} \times \bar{H}^{(x)}(\bar{R}/\bar{R}^*) \right] = 0 \quad (2.44)$$

Podem-se ainda escrever mais duas equações similares a Eq. (2.42) para as funções vetoriais $\bar{H}^{(x)}(\bar{R}/\bar{R}^*)$ e $\bar{H}^{(z)}(\bar{R}/\bar{R}^*)$, bem como suas respectivas equações de onda, obtendo-se então a função diádica

$$\bar{\bar{H}}(\bar{R}/\bar{R}^*) = \bar{H}^{(x)}(\bar{R}/\bar{R}^*)\hat{x} + \bar{H}^{(y)}(\bar{R}/\bar{R}^*)\hat{y} + \bar{H}^{(z)}(\bar{R}/\bar{R}^*)\hat{z} \quad (2.45)$$

e a equação diferencial diádica

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{H}}(\bar{R}/\bar{R}^*) - k^2 \bar{\bar{H}}(\bar{R}/\bar{R}^*) = \frac{1}{i\omega\mu} \nabla \times [\bar{\bar{I}} \delta(\bar{R}-\bar{R}^*)] \quad (2.46)$$

Como as fontes utilizadas são expressas pela diádica

$$i\omega\mu\bar{\bar{J}} = \bar{\bar{I}} \delta(\bar{R}-\bar{R}^*) = i\omega\mu [\bar{J}^{(x)}\hat{x} + \bar{J}^{(y)}\hat{y} + \bar{J}^{(z)}\hat{z}] \quad (2.47)$$

com $\bar{J}^{(x)} = \delta(\bar{R}-\bar{R}^*)\hat{x}/i\omega\mu$, e expressões semelhantes para $\bar{J}^{(y)}$ e $\bar{J}^{(z)}$, as funções de Green diádicas $\bar{\bar{E}}$ e $\bar{\bar{H}}$ corresponderão, respectivamente, às funções de Green diádicas do tipo elétrico $\bar{\bar{G}}_e$ e do tipo magnético $\bar{\bar{G}}_m$, através das relações [16]

$$\bar{\bar{G}}_e(\bar{R}/\bar{R}^*) = \bar{\bar{E}}(\bar{R}/\bar{R}^*) \quad (2.48)$$

$$\bar{\bar{G}}_m(\bar{R}/\bar{R}^*) = i\omega\mu\bar{\bar{H}}(\bar{R}/\bar{R}^*) \quad (2.49)$$

Empregando as Eqs. (2.48) e (2.49), respectivamente, nas Eqs. (2.39) e (2.46) resultam

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_e(\bar{R}/\bar{R}^*) - k^2 \bar{\bar{G}}_e(\bar{R}/\bar{R}^*) = \bar{\bar{I}} \delta(\bar{R}-\bar{R}^*) \quad (2.50)$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_m(\bar{R}/\bar{R}^*) - k^2 \bar{\bar{G}}_m(\bar{R}/\bar{R}^*) = \nabla \times [\bar{\bar{I}} \delta(\bar{R}-\bar{R}^*)] \quad (2.51)$$

As Eqs. (2.50) e (2.51) diferem entre si pelos termos não homogêneos. Aplicando-se o divergente nestas equações, obtém-se

$$\nabla \cdot \bar{\bar{G}}_e(\bar{R}/\bar{R}^*) = -\frac{1}{k^2} \nabla \cdot [\bar{\bar{I}} \delta(\bar{R}-\bar{R}^*)] = -\frac{1}{k^2} \nabla \delta(\bar{R}-\bar{R}^*) \quad (2.52)$$

$$\nabla \cdot \bar{\bar{G}}_m(\bar{R}/\bar{R}^*) = 0 \quad (2.53)$$

Então $\bar{\bar{G}}_m(\bar{R}/\bar{R}^*)$ é uma função diádica solenoidal, enquanto que $\bar{\bar{G}}_e(\bar{R}/\bar{R}^*)$ é não solenoidal.

2.4. Classificação e Relações entre Funções de Green Diádicas

As funções de Green diádicas, sejam do tipo elétrico $\bar{\bar{G}}_e(\bar{R}/\bar{R}^*)$, ou magnético $\bar{\bar{G}}_m(\bar{R}/\bar{R}^*)$, que são soluções, respectivamente, das Eqs. (2.50) e (2.51), são classificadas de acordo com as condições de contorno que devem satisfazer numa dada superfície, usando-se a notação de índices para diferenciar as espécies. As funções $\bar{\bar{G}}_{e0}(\bar{R}/\bar{R}^*)$ e $\bar{\bar{G}}_{m0}(\bar{R}/\bar{R}^*)$, satisfazem apenas a condição de radiação no infinito, sendo denominadas de função de Green diádica do espaço livre, respectivamente, do tipo elétrico e do tipo magnético.

As funções de primeira espécie satisfazem à condição de contorno de Dirichlet

$$\hat{n} \times \bar{\bar{G}}_{e1}(\bar{R}/\bar{R}^*) = 0 \quad (2.54)$$

$$\hat{n} \times \bar{\bar{G}}_{m1}(\bar{R}/\bar{R}^*) = 0 \quad (2.55)$$

onde $\hat{n}$ é o vetor unitário normal à superfície.

As funções de Green diádicas de segunda espécie satisfazem as condições de contorno de Neumann

$$\hat{n} \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_{e2}(\bar{R}/\bar{R}^*) = 0 \quad (2.56)$$

$$\hat{n} \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_{m2}(\bar{R}/\bar{R}^*) = 0 \quad (2.57)$$

As funções de terceira espécie satisfazem as condições de contorno mistas

$$\left[\hat{n} \times \bar{\bar{G}}_{e3}(\bar{R}/\bar{R}^*) \right]_{s-} = \left[\hat{n} \times \bar{\bar{G}}_{e3}(\bar{R}/\bar{R}^*) \right]_{s+} \quad (2.58)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \left[\hat{n} \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_{e3}(\bar{R}/\bar{R}^*) \right]_{s-} = \frac{1}{\mu_2} \left[\hat{n} \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_{e3}(\bar{R}/\bar{R}^*) \right]_{s+} \quad (2.59)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \left[\hat{n} \times \bar{\bar{G}}_{m3}(\bar{R}/\bar{R}^*) \right]_{s-} = \frac{1}{\mu_2} \left[\hat{n} \times \bar{\bar{G}}_{m3}(\bar{R}/\bar{R}^*) \right]_{s+} \quad (2.60)$$

$$\frac{1}{k_1^2} \left[\hat{n} \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_{m3}(\bar{R}/\bar{R}^*) \right]_{s-} = \frac{1}{k_2^2} \left[\hat{n} \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_{m3}(\bar{R}/\bar{R}^*) \right]_{s+} \quad (2.61)$$

Nas Eqs. (2.58)-(2.61), s^- e s^+ são as superfícies dos lados opostos de um contorno separando dois meios isotrópicos com parâmetros μ_1, ϵ_1 e μ_2, ϵ_2 , respectivamente.

Assume-se que todos os tipos de funções de Green diádicas mencionadas anteriormente, satisfazem a condição de radiação no infinito

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left[\nabla \times \bar{\bar{G}}(\bar{R}/\bar{R}^*) - i k \hat{R} \times \bar{\bar{G}}(\bar{R}/\bar{R}^*) \right] = 0 \quad (2.62)$$

— Das Eqs. (2.16) e (2.17), escrevem-se as versões diádicas das equações de Maxwell [21] :

$$\nabla \times \bar{\bar{E}}(\bar{R}/\bar{R}^*) = i \omega \mu \bar{\bar{H}}(\bar{R}/\bar{R}^*) \quad (2.63)$$

$$\nabla \times \bar{\bar{H}}(\bar{R}/\bar{R}^*) = \bar{\bar{J}}(\bar{R}/\bar{R}^*) - i \omega \epsilon \bar{\bar{E}}(\bar{R}/\bar{R}^*) \quad (2.64)$$

Levando os resultados das Eqs. (2.47)-(2.49), nas Eqs. (2.63) e (2.64), resultam de forma geral as relações entre as funções de Green diádicas do tipo elétrico e magnético

$$\nabla \times \bar{\bar{G}}_{\bullet}(\bar{R}/\bar{R}^*) = \bar{\bar{G}}_m(\bar{R}/\bar{R}^*) \quad (2.65)$$

$$\nabla \times \bar{\bar{G}}_m(\bar{R}/\bar{R}^*) = \bar{\bar{I}} \delta(\bar{R}-\bar{R}^*) + k^2 \bar{\bar{G}}_{\bullet}(\bar{R}/\bar{R}^*) \quad (2.66)$$

Devido às condições de contorno que caracterizam as várias espécies de funções, têm-se mais especificamente [16]

$$\nabla \times \bar{\bar{G}}_{e1}(\bar{R}/\bar{R}^*) = \bar{\bar{G}}_{m2}(\bar{R}/\bar{R}^*) \quad (2.67)$$

$$\nabla \times \bar{\bar{G}}_{m2}(\bar{R}/\bar{R}^*) = \bar{\bar{I}} \delta(\bar{R}-\bar{R}^*) + k^2 \bar{\bar{G}}_{e1}(\bar{R}/\bar{R}^*) \quad (2.68)$$

$$\nabla \times \bar{\bar{G}}_{e2}(\bar{R}/\bar{R}^*) = \bar{\bar{G}}_{m1}(\bar{R}/\bar{R}^*) \quad (2.69)$$

$$\nabla \times \bar{\bar{G}}_{m1}(\bar{R}/\bar{R}^*) = \bar{\bar{I}} \delta(\bar{R}-\bar{R}^*) + k^2 \bar{\bar{G}}_{e2}(\bar{R}/\bar{R}^*) \quad (2.70)$$

$$\nabla \times \bar{\bar{G}}_{e3}(\bar{R}/\bar{R}^*) = \bar{\bar{G}}_{m3}(\bar{R}/\bar{R}^*) \quad (2.71)$$

$$\nabla \times \bar{\bar{G}}_{m3}(\bar{R}/\bar{R}^*) = \bar{\bar{I}} \delta(\bar{R}-\bar{R}^*) + k^2 \bar{\bar{G}}_{e3}(\bar{R}/\bar{R}^*) \quad (2.72)$$

2.5. Cálculo dos Campos Eletromagnéticos

Quando se estuda a radiação de ondas eletromagnéticas, é de interesse calcular as grandezas de campo para uma dada distribuição de fontes. O conhecimento da função de Green diádica, seja do tipo elétrico ou magnético, permite a determinação dos campos elétrico e magnético devido a uma distribuição de corrente arbitrária, seja por um processo de somatório ou de integração. Considere, por exemplo, uma fonte de corrente elétrica $\bar{J}_1(\bar{R}^*)$, como ilustra a Fig. 2.2, localizada na região I, em um meio dividido em duas regiões com materiais isotrópicos diferentes.

As equações diferenciais para o campo elétrico nas duas regiões são

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E}_1(\bar{R}) - k_1^2 \bar{E}_1(\bar{R}) = i \omega \mu \bar{J}_1(\bar{R}^*) \quad , \quad z \geq 0 \quad (2.73)$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E}_2(\bar{R}) - k_2^2 \bar{E}_2(\bar{R}) = 0 \quad , \quad z \leq 0 \quad (2.74)$$

onde k_1 (k_2) representa o número de onda na região I (II). As condições de contorno a serem satisfeitas na superfície S, são do tipo misto. Logo a função de Green associada é de terceira espécie, e satisfaz as seguintes equações diferenciais

$$\nabla \times \nabla \times \bar{G}_{\text{es}}^{(11)}(\bar{R}/\bar{R}^*) - k_1^2 \bar{G}_{\text{es}}^{(11)}(\bar{R}/\bar{R}^*) = \bar{I} \delta(\bar{R}-\bar{R}^*) \quad , \quad z \geq 0 \quad (2.75)$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{G}_{\text{es}}^{(21)}(\bar{R}/\bar{R}^*) - k_2^2 \bar{G}_{\text{es}}^{(21)}(\bar{R}/\bar{R}^*) = 0 \quad , \quad z \leq 0 \quad (2.76)$$

Os índices superiores (m,n), com m=1,2 e n=1, indicam as regiões onde se localizam, respectivamente, os pontos de observação e a fonte.

Utilizando-se da versão diádica do teorema vetorial de Green, dada por [21]

$$\begin{aligned} & \iiint \left[\bar{P} \cdot \nabla \times \nabla \times \bar{Q} - (\nabla \times \nabla \times \bar{P}) \cdot \bar{Q} \right] dv \\ & = - \iint \hat{n} \cdot \left[\bar{P} \times \nabla \times \bar{Q} + (\nabla \times \bar{P}) \times \bar{Q} \right] ds \end{aligned} \quad (2.77)$$

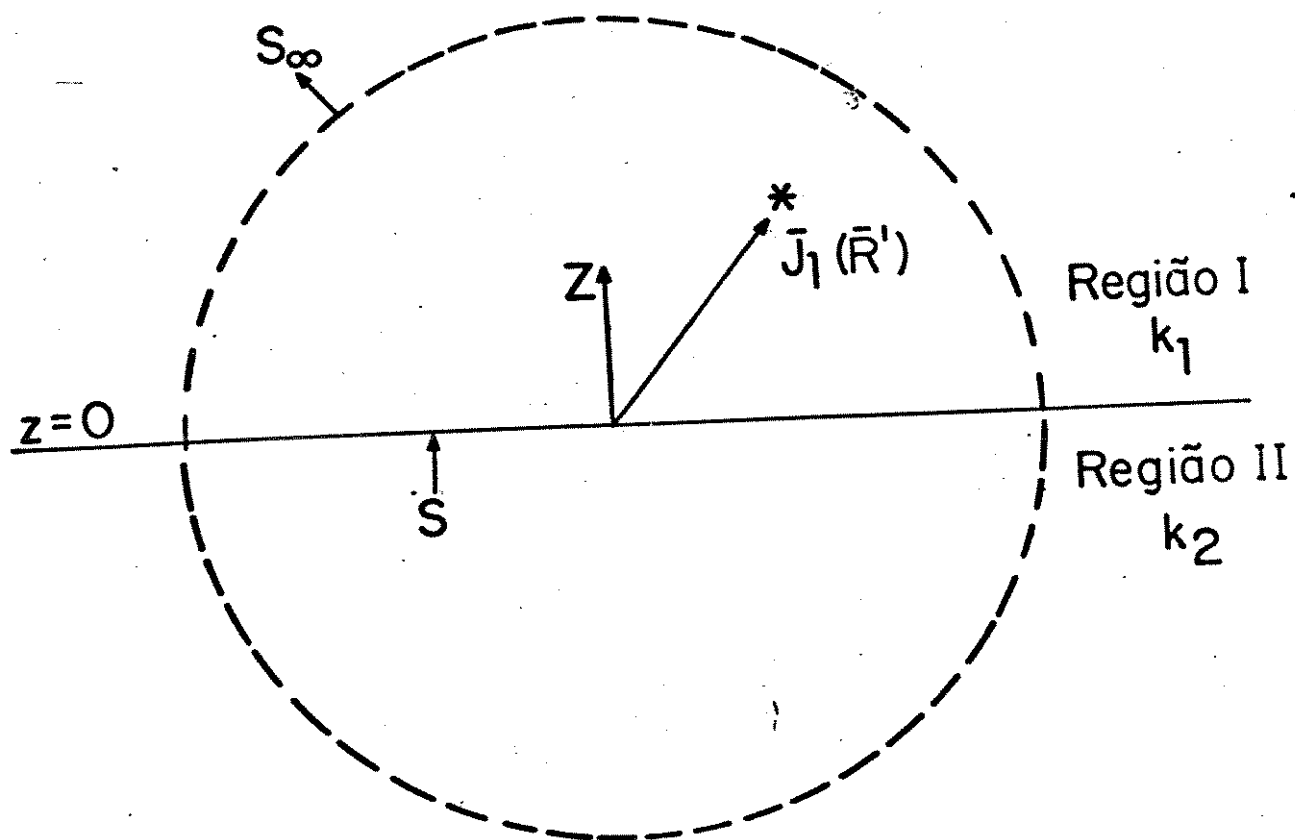


Fig. 2.2. Meio formado por duas regiões distintas

pode-se integrar a Eq. (2.73). Fazendo-se $\bar{P} = \bar{E}_1(\bar{R})$ e $\bar{Q} = \bar{G}_{\text{es}}^{(11)}(\bar{R}/\bar{R}')$, na Eq. (2.77), usando-se as Eqs. (2.73) e (2.75), obtém-se, depois de uma mudança entre as variáveis primas e não primas

$$\begin{aligned} \bar{E}_1(\bar{R}) &= \frac{1}{\epsilon_0} \omega \mu_1 \iiint_{V_1} \bar{J}_1(\bar{R}') \cdot \bar{G}_{\text{es}}^{(11)}(\bar{R}'/\bar{R}) dV' \\ - \iint \hat{n} \cdot \left[\bar{E}_1(\bar{R}') \times \nabla' \times \bar{G}_{\text{es}}^{(11)}(\bar{R}'/\bar{R}) + (\nabla' \times \bar{E}_1(\bar{R}')) \times \bar{G}_{\text{es}}^{(11)}(\bar{R}'/\bar{R}) \right] ds' \end{aligned} \quad (2.78)$$

Impõe-se a condição de radiação em $\bar{G}_{\text{es}}^{(11)}$, eliminando desta forma a integração de superfície no infinito. Usando-se as condições de contorno dadas pelas Eqs. (2.58) e (2.59), pode-se mostrar que a integral de superfície da Eq. (2.78) se anula [15]. As propriedades de simetria das funções de Green diádicas [15], permitem a obtenção do campo elétrico na região I, ou seja

$$\bar{E}_1(\bar{R}) = \frac{1}{\epsilon_0} \omega \mu_1 \iiint \bar{G}_{\text{es}}^{(11)}(\bar{R}/\bar{R}') \cdot \bar{J}_1(\bar{R}') dV' \quad (2.79)$$

Usando-se de um procedimento similar, obtém-se o campo elétrico na região II

$$\bar{E}_2(\bar{R}) = \frac{1}{\epsilon_0} \omega \mu_1 \iiint \bar{G}_{\text{es}}^{(21)}(\bar{R}/\bar{R}') \cdot \bar{J}_1(\bar{R}') dV' \quad (2.80)$$

Os campos magnéticos $\bar{H}_1(\bar{R})$ e $\bar{H}_2(\bar{R})$, podem ser obtidos de maneira análoga, partindo-se das Equações diferenciais para o campo magnético, trabalhando-se desta forma com as funções de Green diádicas de terceira espécie do tipo magnético. Porém, utilizando-se das relações dadas pelas Eqs. (2.16) e (2.71), obtém-se das Eqs. (2.79) e (2.80)

$$\bar{H}_1(\bar{R}) = \nabla \times \iiint \bar{G}_{\text{es}}^{(11)}(\bar{R}/\bar{R}') \cdot \bar{J}_1(\bar{R}') dV' \quad (2.81)$$

ou seja

$$\bar{H}_1(\bar{R}) = \iiint \bar{G}_{m3}^{(11)}(\bar{R}/\bar{R}') \cdot \bar{J}_1(\bar{R}') dv' \quad (2.82)$$

e

$$\bar{H}_2(\bar{R}) = \iiint \bar{G}_{m3}^{(21)}(\bar{R}/\bar{R}') \cdot \bar{J}_1(\bar{R}') dv' \quad (2.83)$$

Até o momento, trabalhou-se com funções de Green diádicas, relacionadas apenas à fonte de corrente elétrica. Com o objetivo de tornar a Eq. (2.16) simétrica da Eq. (2.17), introduz-se o conceito de corrente magnética. Reescrevendo estas duas equações têm-se

$$-\nabla \times \bar{E} = \bar{M} - i\omega\mu\bar{H} \quad (2.84)$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} - i\omega\epsilon\bar{E} \quad (2.85)$$

As Eqs. (2.84) e (2.85) são duais uma da outra, pois têm a mesma forma matemática. Nas equações duais, as quantidades que ocupam a mesma posição matemática são chamadas de quantidades duais.

Considerando-se apenas fonte de corrente magnética com um momento igual a $1/i\omega\epsilon$ [20], obtém-se as seguintes equações duais das Eqs. (2.50) e (2.51) [21]

$$\nabla \times \nabla \times \bar{G}_e(\bar{R}/\bar{R}') - k^2 \bar{G}_e(\bar{R}/\bar{R}') = \nabla \times [\bar{I} \delta(\bar{R}-\bar{R}')] \quad (2.86)$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{G}_m(\bar{R}/\bar{R}') - k^2 \bar{G}_m(\bar{R}/\bar{R}') = \bar{I} \delta(\bar{R}-\bar{R}') \quad (2.87)$$

Agora, se a fonte da região 1, na Fig. 2.2, fosse de corrente magnética, os campos magnéticos seriam dados por

$$\bar{H}_1(\bar{R}) = i\omega\epsilon_1 \iiint \bar{G}_{m3}^{(11)}(\bar{R}/\bar{R}') \cdot \bar{M}_1(\bar{R}') dv' \quad (2.88)$$

$$\bar{H}_2(\bar{R}) = i\omega\epsilon_1 \iiint \bar{G}_{m3}^{(21)}(\bar{R}/\bar{R}') \cdot \bar{M}_1(\bar{R}') dv' \quad (2.89)$$

que são expressões duais das Eqs. (2.79) e (2.80), respectivamente.

2.6 Função de Green Diádica para o Espaço Livre em Coordenadas Cilíndricas Circulares

O conhecimento das funções de Green diádicas para o espaço livre, quer sejam do tipo elétrico ou magnético, permite a obtenção das outras espécies através do método da superposição por espalhamento [21]. Estas funções, $\bar{G}_{eo}(\bar{R}, \bar{R}^*)$ e $\bar{G}_{mo}(\bar{R}, \bar{R}^*)$ são obtidas pelo método de expansão em autofunções, (método de Ohm-Rayleigh [15-17]), de duas funções de ondas vetoriais $\bar{M}$ e $\bar{N}$, que são solenoidais, e uma função de onda vetorial $\bar{L}$ não solenoidal.

Uma função de onda vetorial solenoidal é, por definição, uma autofunção ou função característica, que é solução da equação de onda vetorial homogênea

$$\nabla \times \nabla \times \bar{F} - k^2 \bar{F} = 0 \quad (2.90)$$

Uma função de onda vetorial não solenoidal é uma solução para

$$\nabla^2 \bar{F} + k^2 \bar{F} = 0 \quad (2.91)$$

onde k é um número de onda arbitrário.

Existem duas séries de funções de ondas vetoriais independentes, que podem ser construídas usando-se como funções geradoras as soluções da equação de onda escalar

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (2.92)$$

A primeira série, denominada de função de onda vetorial cartesiana, pode ser representada por

$$\bar{F} = \nabla \times (\psi \bar{c}) \quad (2.93)$$

onde ψ denota uma função característica que satisfaz a Eq. (2.93) e $\bar{c}$ é um vetor constante, tal como $\hat{x}$, $\hat{y}$ ou $\hat{z}$. Para a segunda série, que se aplica adequadamente a problemas esféricos, pode-se escrever

$$\bar{F} = \nabla \times (\psi \bar{r}) \quad (2.94)$$

onde $\bar{r}$ é o vetor radial esférico.

Trabalhando-se com coordenadas cilíndricas circulares a função de geração ψ e as funções de ondas vetoriais $\bar{M}$, $\bar{N}$ e $\bar{L}$ ficam [21]

$$\psi_{\begin{smallmatrix} e \\ o \end{smallmatrix} n \lambda}^{(h)} = J_n(\lambda r) \frac{\cos}{\sin}(n\phi) \exp(\pm h z) \quad (2.95)$$

$$\bar{L}_{\begin{smallmatrix} e \\ o \end{smallmatrix} n \lambda}^{(h)} = \nabla \psi_{\begin{smallmatrix} e \\ o \end{smallmatrix} n \lambda}^{(h)} \quad (2.96)$$

$$\bar{M}_{\begin{smallmatrix} e \\ o \end{smallmatrix} n \lambda}^{(h)} = \nabla \times \left[\psi_{\begin{smallmatrix} e \\ o \end{smallmatrix} n \lambda}^{(h)} \hat{z} \right] \quad (2.97)$$

$$\bar{N}_{\begin{smallmatrix} e \\ o \end{smallmatrix} n \lambda}^{(h)} = \frac{1}{k_\lambda} \nabla \times \nabla \times \left[\psi_{\begin{smallmatrix} e \\ o \end{smallmatrix} n \lambda}^{(h)} \hat{z} \right] \quad (2.98)$$

onde $J_n(\lambda r)$ é a função de Bessel de ordem n e argumento λr , $k_\lambda^2 = \lambda^2 + h^2$ e os índices $\begin{pmatrix} e \\ o \end{pmatrix}$ representam $e = \text{par}$ e $o = \text{ímpar}$.

Pelo fato de se usar a mesma função de onda escalar para a obtenção de $\bar{M}$ e $\bar{N}$, que satisfazem a Eq. (2.90), podem-se estabelecer as seguintes relações de simetria

$$\bar{M} = \frac{1}{k_\lambda} \nabla \times \bar{N} \quad (2.99)$$

$$\bar{N} = \frac{1}{k_\lambda} \nabla \times \bar{M} \quad (2.100)$$

A função de Green diádica do tipo elétrico para o espaço livre, $\bar{G}_{eo}(\bar{R}, \bar{R}')$, satisfaz a condição de radiação no infinito e a Eq. (2.50), e é obtida na forma da seguinte expansão em autofunções [15-17]

$$\bar{G}_{oo}(\bar{R}/\bar{R}^*) = - \frac{1}{k^2} \delta(\bar{R}-\bar{R}^*) \hat{r} \hat{r} + \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_o) / \lambda^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{M}_{on\lambda}^{(1)}(h) \bar{M}_{on\lambda}^{(1)*}(-h) + \bar{N}_{on\lambda}^{(1)}(h) \bar{N}_{on\lambda}^{(1)*}(-h) \quad , \quad r > r^* \\ \bar{M}_{on\lambda}^{(1)}(h) \bar{M}_{on\lambda}^{(1)*}(-h) + \bar{N}_{on\lambda}^{(1)}(h) \bar{N}_{on\lambda}^{(1)*}(-h) \quad , \quad r < r^* \end{array} \right. \quad (2.101)$$

onde $\lambda^2 = k^2 - h^2$, $k = \omega (\mu_o \epsilon_o)^{1/2}$ é o número de onda do espaço livre e δ_o denota a função delta de Kronecker, ou seja

$$\delta_o = \begin{cases} 1 & , \quad n = 0 \\ 0 & , \quad n \neq 0 \end{cases} \quad (2.102)$$

Adota-se, na Eq. (2.101), a seguinte notação simplificada

$$\bar{F}_b^a \bar{F}_d^c = \bar{F}_a^c \bar{F}_b^d + \bar{F}_b^d \bar{F}_a^c \quad (2.103)$$

Das Eqs. (2.95), (2.97) e (2.98) obtém-se as expressões para $\bar{M}$ e $\bar{N}$, resultando

$$\begin{aligned} \bar{M}_{on\lambda}^{(1)}(h) = & \left[\mp \frac{n}{r} J_n(\lambda r) \frac{\text{sen}(n\phi)}{\cos(n\phi)} \hat{r} \right. \\ & \left. - \partial J_n(\lambda r) / \partial r \frac{\cos(n\phi)}{\text{sen}(n\phi)} \hat{\phi} \right] \exp(iz) \end{aligned} \quad (2.104)$$

$$\begin{aligned} \bar{N}_{on\lambda}^{(1)}(h) = & \frac{1}{k_\lambda} \left[iz \partial J_n(\lambda r) / \partial r \frac{\cos(n\phi)}{\text{sen}(n\phi)} \hat{r} \mp (ihn/r) J_n(\lambda r) \frac{\text{sen}(n\phi)}{\cos(n\phi)} \hat{\phi} \right. \\ & \left. + \lambda^2 J_n(\lambda r) \frac{\cos(n\phi)}{\text{sen}(n\phi)} \hat{z} \right] \exp(iz) \end{aligned} \quad (2.105)$$

As funções $\bar{M}^*$ e $\bar{N}^*$ são as funções $\bar{M}$ e $\bar{N}$ definidas com respeito às coordenadas da fonte (r^*, ϕ^*, z^*) , enquanto que as funções $\bar{M}^{(1)}$ e $\bar{N}^{(1)}$ são expressas em termos da função de Hankel de primeira espécie e n-ésima ordem, substituindo-se $J_n(\lambda r)$ por $H_n^{(1)}(\lambda r)$ nas Eqs. (2.104) e (2.105).

C A P Í T U L O I I I

FUNÇÕES DE GREEN DIÁDICAS PARA MEIOS COM QUATRO CAMADAS

CILÍNDRICAS CONCÊNTRICAS

3.1. Introdução

O formalismo das funções de Green diádicas para a solução de problemas em meios de multicamadas, tem sido utilizado por vários autores [15-17,19-21]. Neste capítulo, apresentam-se as expressões para as funções de Green diádicas do tipo elétrico, nas regiões formadas por camadas cilíndricas concêntricas, para o caso de uma fonte de corrente elétrica arbitrária, obtidas pelo método da superposição por espalhamento [15]. Através da aplicação das condições de contorno, as quais estas funções têm que satisfazer nas superfícies formadas pelas descontinuidades entre os meios, obtém-se sistemas de equações, que são resolvidos pelo método da substituição, obtendo-se, desta forma, os coeficientes de espalhamento.

3.2. Funções de Green Diádicas para Meios com Quatro Camadas Cilíndricas Concêntricas

Um meio constituído de quatro camadas cilíndricas concêntricas, infinitas na direção z , com uma fonte de corrente elétrica arbitrária localizada na região 2, está mostrado na Fig. 3.1. Definem-se estas regiões de forma que

Região 1 :

$$k_1 = \omega(\mu_1 \epsilon_1)^{1/2}$$

e

$$\lambda_1^2 = k_1^2 - h^2$$

Região 2 :

$$k_2 = \omega(\mu_2 \epsilon_2)^{1/2}$$

e

$$\lambda_2^2 = k_2^2 - h^2$$

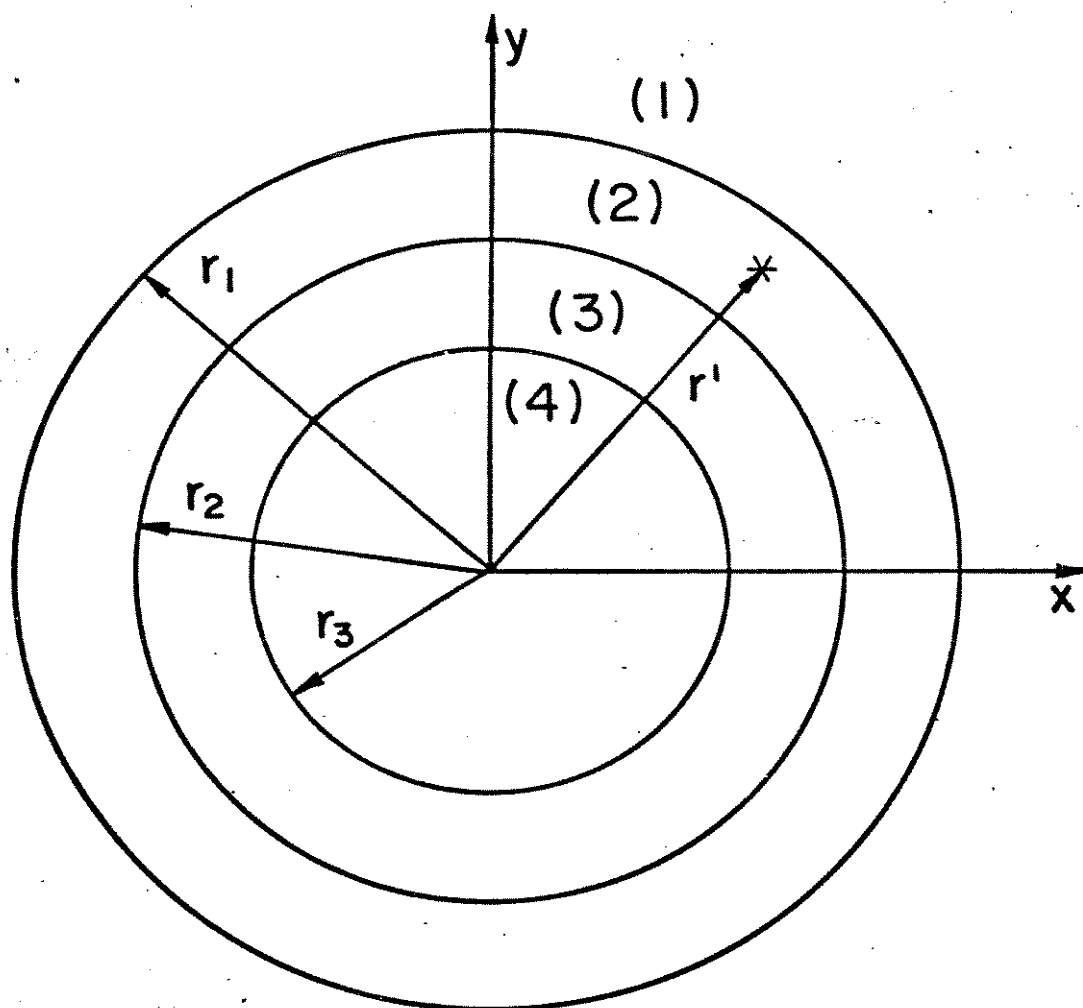


Fig. 3.1. Meio constituído de quatro camadas cilíndricas concêntricas.

Região 3:

$$k_3 = \omega(\mu_3 \epsilon_3)^{1/2}$$

e

$$\lambda_3^2 = k_3^2 - h^2$$

Região 4:

$$\sigma = \infty$$

onde μ_i e ϵ_i denotam, respectivamente, a permeabilidade e a permissividade da região i , e σ a condutividade elétrica da região 4, assumida infinita.

Como a fonte se localiza na região 2, têm-se as seguintes funções de Green diádicas do tipo elétrico [21] :

Região 1:

$$\bar{\bar{G}}^{(1,2)}(\bar{R}/\bar{R}^*) = \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_0) / \lambda_2^2$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[a_{1 \bullet n} \bar{M}_{\bullet n \lambda_1}^{(1)}(h) + b_{1 \bullet n} \bar{N}_{\bullet n \lambda_1}^{(1)}(h) \right] \bar{M}_{\bullet n \lambda_2}^{(1)}(-h) \right. \\ & + \left[a'_{1 \bullet n} \bar{M}_{\bullet n \lambda_1}^{(1)}(h) + b'_{1 \bullet n} \bar{N}_{\bullet n \lambda_1}^{(1)}(h) \right] \bar{M}'_{\bullet n \lambda_2}(-h) \\ & + \left[e_{1 \bullet n} \bar{N}_{\bullet n \lambda_1}^{(1)}(h) + f_{1 \bullet n} \bar{M}_{\bullet n \lambda_1}^{(1)}(h) \right] \bar{N}_{\bullet n \lambda_2}^{(1)}(-h) \\ & \left. + \left[e'_{1 \bullet n} \bar{N}_{\bullet n \lambda_1}^{(1)}(h) + f'_{1 \bullet n} \bar{M}_{\bullet n \lambda_1}^{(1)}(h) \right] \bar{N}'_{\bullet n \lambda_2}(-h) \right\} \quad (3.1) \end{aligned}$$

Região 2:

$$\begin{aligned}
 \bar{G}^{(2,2)}(\bar{R}/\bar{R}') &= -\delta(\bar{R}-\bar{R}') \hat{r} \hat{r}' / k_2^2 + \frac{4}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} (2-\delta_0) / \lambda_2^2 \\
 &\left\{ \bar{D} + \left[a_{2 \circ n} \bar{M}_{\circ n \lambda_2}^{(1)}(h) + b_{2 \circ n} \bar{N}_{\circ n \lambda_2}^{(1)}(h) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + c_{2 \circ n} \bar{M}_{\circ n \lambda_2}^{(1)}(h) + d_{2 \circ n} \bar{N}_{\circ n \lambda_2}^{(1)}(h) \right] \bar{M}_{\circ n \lambda_2}^{(1)}(-h) \right. \\
 &\quad + \left[a'_{2 \circ n} \bar{M}_{\circ n \lambda_2}^{(1)}(h) + b'_{2 \circ n} \bar{N}_{\circ n \lambda_2}^{(1)}(h) \right. \\
 &\quad \left. + c'_{2 \circ n} \bar{M}_{\circ n \lambda_2}^{(1)}(h) + d'_{2 \circ n} \bar{N}_{\circ n \lambda_2}^{(1)}(h) \right] \bar{M}_{\circ n \lambda_2}^{(1)}(-h) \\
 &\quad + \left[e_{2 \circ n} \bar{N}_{\circ n \lambda_2}^{(1)}(h) + f_{2 \circ n} \bar{M}_{\circ n \lambda_2}^{(1)}(h) \right. \\
 &\quad \left. + g_{2 \circ n} \bar{N}_{\circ n \lambda_2}^{(1)}(h) + h_{2 \circ n} \bar{M}_{\circ n \lambda_2}^{(1)}(h) \right] \bar{N}_{\circ n \lambda_2}^{(1)}(-h) \\
 &\quad + \left[e'_{2 \circ n} \bar{N}_{\circ n \lambda_2}^{(1)}(h) + f'_{2 \circ n} \bar{M}_{\circ n \lambda_2}^{(1)}(h) \right. \\
 &\quad \left. + g'_{2 \circ n} \bar{N}_{\circ n \lambda_2}^{(1)}(h) + h'_{2 \circ n} \bar{M}_{\circ n \lambda_2}^{(1)}(h) \right] \bar{N}_{\circ n \lambda_2}^{(1)}(-h) \left. \right\} \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

onde

$$\bar{D} = \begin{cases} \bar{M}_{\circ n \lambda_2}^{(1)}(h) \bar{M}_{\circ n \lambda_2}^{(1)}(-h) + \bar{N}_{\circ n \lambda_2}^{(1)}(h) \bar{N}_{\circ n \lambda_2}^{(1)}(-h) & , \quad r' \leq r \leq r_1 \\ \bar{M}_{\circ n \lambda_2}^{(1)}(h) \bar{M}_{\circ n \lambda_2}^{(1)}(-h) + \bar{N}_{\circ n \lambda_2}^{(1)}(h) \bar{N}_{\circ n \lambda_2}^{(1)}(-h) & , \quad r_2 \leq r \leq r' \end{cases}$$

Região 3:

$$\begin{aligned}
 \bar{G}^{(3,2)}(\bar{R}/\bar{R}^*) = & \frac{L}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_0)/\lambda_2^2 \left\{ \left[a_{s \circ n} \bar{M}_{\circ n \lambda_s}^{(1)}(h) \right. \right. \\
 & + b_{s \circ n} \bar{N}_{\circ n \lambda_s}^{(1)}(h) + c_{s \circ n} \bar{M}_{\circ n \lambda_s}(h) + d_{s \circ n} \bar{N}_{\circ n \lambda_s}(h) \left. \right] \bar{M}_{\circ n \lambda_2}^{(1)}(-h) \\
 & + \left[a_{s \circ n}^* \bar{M}_{\circ n \lambda_s}^{(1)}(h) + b_{s \circ n}^* \bar{N}_{\circ n \lambda_s}^{(1)}(h) \right. \\
 & + c_{s \circ n}^* \bar{M}_{\circ n \lambda_s}(h) + d_{s \circ n}^* \bar{N}_{\circ n \lambda_s}(h) \left. \right] \bar{M}_{\circ n \lambda_2}^{(1)}(-h) \\
 & + \left[e_{s \circ n} \bar{N}_{\circ n \lambda_s}^{(1)}(h) + f_{s \circ n} \bar{M}_{\circ n \lambda_s}^{(1)}(h) \right. \\
 & + g_{s \circ n} \bar{N}_{\circ n \lambda_s}(h) + h_{s \circ n} \bar{M}_{\circ n \lambda_s}(h) \left. \right] \bar{N}_{\circ n \lambda_2}^{(1)}(-h) \\
 & + \left[e_{s \circ n}^* \bar{N}_{\circ n \lambda_s}^{(1)}(h) + f_{s \circ n}^* \bar{M}_{\circ n \lambda_s}^{(1)}(h) \right. \\
 & + g_{s \circ n}^* \bar{N}_{\circ n \lambda_s}(h) + h_{s \circ n}^* \bar{M}_{\circ n \lambda_s}(h) \left. \right] \bar{N}_{\circ n \lambda_2}^{(1)}(-h) \left. \right\} \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

Nas Eqs. (3.1)-(3.3), as funções $\bar{M}$ e $\bar{N}$ são dadas, respectivamente, pelas Eqs. (2.104) e (2.105). A função delta de Kronecker, δ_0 , é dada na Eq. (2.102) e, ainda, usa-se a notação simplificada como mostrada na Eq. (2.103).

3.3. Obtenção dos Sistemas de Equações para o Cálculo dos Coeficientes de Espalhamento

Os sistemas de equações para o cálculo dos coeficientes de espalhamento, $a_1, b_1, \dots, g_3, h_3$, omitindo por simplificação os índices $(\cdot_n)$ e $(\cdot_n)$, destes coeficientes, que aparecem nas Eqs. (3.1)-(3.3), são determinados através da aplicação das condições de contorno nas interfaces, ou sejam:

Para $r = r_1$:

$$\hat{r} \times \bar{G}^{(1,2)}(\bar{R}/\bar{R}^*) = \hat{r} \times \bar{G}^{(2,2)}(\bar{R}/\bar{R}^*) \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \hat{r} \times \nabla \times \bar{G}^{(1,2)}(\bar{R}/\bar{R}^*) = \frac{1}{\mu_2} \hat{r} \times \nabla \times \bar{G}^{(2,2)}(\bar{R}/\bar{R}^*) \quad (3.5)$$

Para $r = r_2$:

$$\hat{r} \times \bar{G}^{(2,2)}(\bar{R}/\bar{R}^*) = \hat{r} \times \bar{G}^{(3,2)}(\bar{R}/\bar{R}^*) \quad (3.6)$$

$$\frac{1}{\mu_2} \hat{r} \times \nabla \times \bar{G}^{(2,2)}(\bar{R}/\bar{R}^*) = \frac{1}{\mu_3} \hat{r} \times \nabla \times \bar{G}^{(3,2)}(\bar{R}/\bar{R}^*) \quad (3.7)$$

Para $r = r_3$:

$$\hat{r} \times \bar{G}^{(3,2)}(\bar{R}/\bar{R}^*) = 0 \quad (3.8)$$

Operando individualmente com as condições de contorno dadas pelas Eqs. (3.4)-(3.8), igualando as expressões das funções $\bar{M}^*$ e $\bar{N}^*$, expressas com relação a (r^*, ϕ^*, z^*) , e a seguir comparando os termos em $\hat{\phi}$ e $\hat{z}$, obtém-se os seguintes sistemas de equações:

Sistema 1 :

$$\begin{aligned}
 -a_1 H^*(\alpha) \pm b_1 (J/k_1 r_1) H(\alpha) \\
 = -a_2 H^*(\beta) \pm b_2 (J/k_2 r_1) H(\beta) - c_2 J^*(\beta) \pm d_2 (J/k_2 r_1) J(\beta)
 \end{aligned} \quad (3.9a)$$

$$b_1 (\lambda_1^2/k_1) H(\alpha) = b_2 (\lambda_2^2/k_2) H(\beta) + d_2 (\lambda_2^2/k_2) J(\beta) \quad (3.9b)$$

$$\begin{aligned}
 \mp a_1 (pJ/r_1) H(\alpha) - b_1 p k_1 H^*(\alpha) \\
 = \mp a_2 (J/r_1) H(\beta) - b_2 k_2 H^*(\beta) \mp c_2 (J/r_1) J(\beta) - d_2 k_2 J^*(\beta)
 \end{aligned} \quad (3.9c)$$

$$a_1 p \lambda_1^2 H(\alpha) = a_2 \lambda_2^2 H(\beta) + c_2 \lambda_2^2 J(\beta) \quad (3.9d)$$

$$\begin{aligned}
 -J^*(\gamma) - a_2 H^*(\gamma) \pm b_2 (J/k_2 r_2) H(\gamma) - c_2 J^*(\gamma) \pm d_2 (J/k_2 r_2) J(\gamma) \\
 = a_3 H^*(\rho) \pm b_3 (J/k_3 r_2) H(\rho) - c_3 J^*(\rho) \pm d_3 (J/k_3 r_2) J(\rho)
 \end{aligned} \quad (3.9e)$$

$$b_2 (\lambda_2^2/k_2) H(\gamma) + d_2 (\lambda_2^2/k_2) J(\gamma) = b_3 (\lambda_3^2/k_3) H(\rho) + d_3 (\lambda_3^2/k_3) J(\rho) \quad (3.9f)$$

$$\begin{aligned}
 \mp (qJ/r_2) J(\gamma) \mp a_2 (qJ/r_2) H(\gamma) - b_2 q k_2 H^*(\gamma) \mp c_2 (qJ/r_2) J(\gamma) \\
 - d_2 q k_2 J^*(\gamma) \\
 = \mp a_3 (J/r_2) H(\rho) - b_3 k_3 H^*(\rho) \mp c_3 (J/r_2) J(\rho) - d_3 k_3 J^*(\rho)
 \end{aligned} \quad (3.9g)$$

$$q \lambda_2^2 J(\gamma) + a_2 q \lambda_2^2 H(\gamma) + c_2 q \lambda_2^2 J(\gamma) = a_3 \lambda_3^2 H(\rho) + c_3 \lambda_3^2 J(\rho) \quad (3.9h)$$

$$a_3 H^*(\rho) \pm b_3 (J/k_3 r_3) H(\rho) - c_3 J^*(\rho) \pm d_3 (J/k_3 r_3) J(\rho) = 0 \quad (3.9i)$$

$$b_3 H(\rho) + d_3 J(\rho) = 0 \quad (3.9j)$$

Sistema 2 :

$$-a_1^* H^*(\alpha) \pm b_1^* (J/k_1 r_1) H(\alpha) = -H^*(\beta) - a_2^* H^*(\beta) \pm b_2^* (J/k_2 r_1) H(\beta) \\ - c_2^* J^*(\beta) \pm d_2^* (J/k_2 r_1) J(\beta) \quad (3.10a)$$

$$b_1^* (\lambda_1^2/k_1) H(\alpha) = b_2^* (\lambda_2^2/k_2) H(\beta) + d_2^* (\lambda_2^2/k_2) J(\beta) \quad (3.10b)$$

$$\mp a_1^* (pJ/r_1) H(\alpha) - b_1^* p k_1 H^*(\alpha) = \mp (J/r_1) H(\beta) \\ \mp a_2^* (J/r_1) H(\beta) - b_2^* k_2 H^*(\beta) \mp c_2^* (J/r_1) J(\beta) - d_2^* k_2 J^*(\beta) \quad (3.10c)$$

$$a_1^* p \lambda_1^2 H(\alpha) = \lambda_2^2 H(\beta) + a_2^* \lambda_2^2 H(\beta) + c_2^* \lambda_2^2 J(\beta) \quad (3.10d)$$

$$-a_2^* H^*(\gamma) \pm b_2^* (J/k_2 r_2) H(\gamma) - c_2^* J^*(\gamma) \pm d_2^* (J/k_2 r_2) J(\gamma) \\ = a_3^* H^*(\rho) \pm b_3^* (J/k_3 r_2) H(\rho) - c_3^* J^*(\rho) \pm d_3^* (J/k_3 r_2) J(\rho) \quad (3.10e)$$

$$b_2^* (\lambda_2^2/k_2) H(\gamma) + d_2^* (\lambda_2^2/k_2) J(\gamma) = b_3^* (\lambda_3^2/k_3) H(\rho) + d_3^* (\lambda_3^2/k_3) J(\rho) \quad (3.10f)$$

$$\mp a_2^* (qJ/r_2) H(\gamma) - b_2^* q k_2 H^*(\gamma) \mp c_2^* (qJ/r_2) J(\gamma) - d_2^* q k_2 J^*(\gamma) \\ = \mp a_3^* (J/r_2) H(\rho) - b_3^* k_3 H^*(\rho) \mp c_3^* (J/r_2) J(\rho) - d_3^* k_3 J^*(\rho) \quad (3.10g)$$

$$a_2^* q \lambda_2^2 H(\gamma) + c_2^* q \lambda_2^2 J(\gamma) = a_3^* \lambda_3^2 H(\rho) + c_3^* \lambda_3^2 J(\rho) \quad (3.10h)$$

$$a_3^* H^*(\rho) \pm b_3^* (J/k_3 r_3) H(\rho) - c_3^* J^*(\rho) \pm d_3^* (J/k_3 r_3) J(\rho) = 0 \quad (3.10i)$$

$$b_3^* H(\rho) + d_3^* J(\rho) = 0 \quad (3.10j)$$

Sistema 3 :

$$-f_1 H^*(\alpha) \mp e_1 (J/k_1 r_1) H(\alpha) = -f_2 H^*(\beta) \mp e_2 (J/k_2 r_1) H(\beta) \\ - h_2 J^*(\beta) \mp g_2 (J/k_2 r_1) J(\beta) \quad (3.11a)$$

$$e_1 (\lambda_1^2/k_1) H(\alpha) = e_2 (\lambda_2^2/k_2) H(\beta) + g_2 (\lambda_2^2/k_2) J(\beta) \quad (3.11b)$$

$$\pm f_1 (pJ/r_1) H(\alpha) - e_1 p k_1 H^*(\alpha) = \pm f_2 (J/r_1) H(\beta) - e_2 k_2 H^*(\beta) \\ \pm h_2 (J/r_1) J(\beta) - g_2 k_2 J^*(\beta) \quad (3.11c)$$

$$f_1 p \lambda_1^2 H(\alpha) = f_2 \lambda_2^2 H(\beta) + h_2 \lambda_2^2 J(\beta) \quad (3.11d)$$

$$\mp (J/k_2 r_2) J(\gamma) - f_2 H^*(\gamma) \mp e_2 (J/k_2 r_2) H(\gamma) - h_2 J^*(\gamma) \\ \mp g_2 (J/k_2 r_2) J(\gamma) \\ = f_3 H^*(\rho) \mp e_3 (J/k_3 r_2) H(\rho) - h_3 J^*(\rho) \mp g_3 (J/k_3 r_2) J(\rho) \quad (3.11e)$$

$$(\lambda_2^2/k_2) J(\gamma) + e_2 (\lambda_2^2/k_2) H(\gamma) + g_2 (\lambda_2^2/k_2) J(\gamma) \\ = e_3 (\lambda_3^2/k_3) H(\rho) + g_3 (\lambda_3^2/k_3) J(\rho) \quad (3.11f)$$

$$- q k_2 J^*(\gamma) \pm f_2 (qJ/r_2) H(\gamma) - e_2 q k_2 H^*(\gamma) \pm h_2 (qJ/r_2) J(\gamma) \\ - g_2 q k_2 J^*(\gamma) \\ = \pm f_3 (J/r_2) H(\rho) - e_3 k_3 H^*(\rho) \pm h_3 (J/r_2) J(\rho) - g_3 k_3 J^*(\rho) \quad (3.11g)$$

$$f_2 q \lambda_2^2 H(\gamma) + h_2 q \lambda_2^2 J(\gamma) = f_3 \lambda_3^2 H(\rho) + h_3 \lambda_3^2 J(\rho) \quad (3.11h)$$

$$f_3 H^*(\rho) \mp e_3 (J/k_3 r_3) H(\rho) - h_3 J^*(\rho) \mp g_3 (J/k_3 r_3) J(\rho) = 0 \quad (3.11i)$$

$$e_3 H(\rho) + g_3 J(\rho) = 0 \quad (3.11j)$$

Sistema 4 :

$$\begin{aligned} -f_1^* H^*(\alpha) \mp e_1^* (J/k_1 r_1) H(\alpha) &= \mp (J/k_2 r_1) H(\beta) - f_2^* H^*(\beta) \\ &\mp e_2^* (J/k_2 r_1) H(\beta) - h_2^* J^*(\beta) \mp g_2^* (J/k_2 r_1) J(\beta) \end{aligned} \quad (3.12a)$$

$$e_1^* (\lambda_1^2/k_1) H(\alpha) = (\lambda_2^2/k_2) H(\beta) + e_2^* (\lambda_2^2/k_2) H(\beta) + g_2^* (\lambda_2^2/k_2) J(\beta) \quad (3.12b)$$

$$\begin{aligned} \pm f_1^* (pJ/r_1) H(\alpha) - e_1^* p k_1 H^*(\alpha) &= k_2 H^*(\beta) \pm f_2^* (J/r_1) H(\beta) \\ &- e_2^* k_2 H^*(\beta) \pm h_2^* (J/r_1) J(\beta) - g_2^* k_2 J^*(\beta) \end{aligned} \quad (3.12c)$$

$$f_1^* p \lambda_1^2 H(\alpha) = f_2^* \lambda_2^2 H(\beta) + h_2^* \lambda_2^2 J(\beta) \quad (3.12d)$$

$$\begin{aligned} -f_2^* H^*(\gamma) \mp e_2^* (J/k_2 r_2) H(\gamma) - h_2^* J^*(\gamma) \mp g_2^* (J/k_2 r_2) J(\gamma) \\ = f_3^* H^*(\rho) \mp e_3^* (J/k_3 r_2) H(\rho) - h_3^* J^*(\rho) \mp g_3^* (J/k_3 r_2) J(\rho) \end{aligned} \quad (3.12e)$$

$$e_2^* (\lambda_2^2/k_2) H(\gamma) + g_2^* (\lambda_2^2/k_2) J(\gamma) = e_3^* (\lambda_3^2/k_3) H(\rho) + g_3^* (\lambda_3^2/k_3) J(\rho) \quad (3.12f)$$

$$\begin{aligned} \pm f_2^* (qJ/r_2) H(\gamma) - e_2^* q k_2 H^*(\gamma) \pm h_2^* (qJ/r_2) J(\gamma) - g_2^* q k_2 J^*(\gamma) \\ = \pm f_3^* (J/r_2) H(\rho) - e_3^* k_3 H^*(\rho) \pm h_3^* (J/r_2) J(\rho) - g_3^* k_3 J^*(\rho) \end{aligned} \quad (3.12g)$$

$$f_2^* q \lambda_2^2 H(\gamma) + h_2^* q \lambda_2^2 J(\gamma) = f_3^* \lambda_3^2 H(\rho) + h_3^* \lambda_3^2 J(\rho) \quad (3.12h)$$

$$f_3^* H^*(\rho) \mp e_3^* (J/k_3 r_3) H(\rho) - h_3^* J^*(\rho) \mp g_3^* (J/k_3 r_3) J(\rho) = 0 \quad (3.12i)$$

$$e_3^* H(\rho) + g_3^* J(\rho) = 0 \quad (3.12j)$$

Nas Eqs. (3.9)-(3.12), usam-se, por facilidade, as seguintes notações :

$$\alpha = \lambda_1 r_1 \quad (3.13a)$$

$$\beta = \lambda_2 r_1 \quad (3.13b)$$

$$\gamma = \lambda_2 r_2 \quad (3.13c)$$

$$\varphi = \lambda_3 r_2 \quad (3.13d)$$

$$\rho = \lambda_3 r_3 \quad (3.13e)$$

$$j = i h n \quad (3.13f)$$

$$p = \mu_2 / \mu_1 \quad (3.13g)$$

$$q = \mu_3 / \mu_1 \quad (3.13h)$$

e

$$J(\alpha) = J_n(\alpha) \quad (3.14a)$$

$$H(\alpha) = H_n^{(1)}(\alpha) \quad (3.14b)$$

$$J^*(\alpha) = \left. \frac{\partial J_n(\lambda_1 r)}{\partial r} \right|_{r=r_1} \quad (3.14c)$$

$$H^*(\alpha) = \left. \frac{\partial H_n^{(1)}(\lambda_1 r)}{\partial r} \right|_{r=r_1} \quad (3.14d)$$

Trocando-se α por β, γ, φ ou ρ , definidos nas Eqs. (3.13b)-(3.13e), nas Eqs. (3.14), obtém-se as outras simbologias usadas. Por exemplo,

$$J(\beta) = J_n(\beta), \quad H(\beta) = H_n^{(1)}(\beta), \quad J_n^*(\beta) = \left. \partial J_n(\lambda_2 r) / \partial r \right|_{r=r_1}, \quad \text{etc.}$$

3.4. Cálculo dos Coeficientes de Espalhamento

As soluções para os sistemas descritos pelas Eqs.(3.9)-(3.12), podem ser obtidas através da solução do seguinte sistema geral

$$\begin{aligned} -v_1 H^*(\alpha) \pm x_1 (j/k_1 r_1) H(\alpha) &= A_1 - v_2 H^*(\beta) \pm x_2 (j/k_2 r_1) H(\beta) \\ &\quad - y_2 J^*(\beta) \pm z_2 (j/k_2 r_1) J(\beta) \end{aligned} \quad (3.15a)$$

$$x_1 (\lambda_1^2/k_1) H(\alpha) = A_2 + x_2 (\lambda_2^2/k_2) H(\beta) + z_2 (\lambda_2^2/k_2) J(\beta) \quad (3.15b)$$

$$\begin{aligned} \mp v_1 (p j/r_1) H(\alpha) - x_1 p k_1 H^*(\alpha) &= A_3 \mp v_2 (j/r_1) H(\beta) - x_2 k_2 H^*(\beta) \\ &\quad \mp y_2 (j/r_1) J(\beta) - z_2 k_2 J^*(\beta) \end{aligned} \quad (3.15c)$$

$$v_1 p \lambda_1^2 H(\alpha) = A_4 + v_2 \lambda_2^2 H(\beta) + y_2 \lambda_2^2 J(\beta) \quad (3.15d)$$

$$\begin{aligned} A_5 - v_2 H^*(\gamma) \pm x_2 (j/k_2 r_2) H(\gamma) - y_2 J^*(\gamma) \pm z_2 (j/k_2 r_2) J(\gamma) \\ = v_3 H^*(\rho) \pm x_3 (j/k_3 r_2) H(\rho) - y_3 J^*(\rho) \pm z_3 (j/k_3 r_2) J(\rho) \end{aligned} \quad (3.15e)$$

$$A_6 + x_2 (\lambda_2^2/k_2) H(\gamma) + z_2 (\lambda_2^2/k_2) J(\gamma) = x_3 (\lambda_3^2/k_3) H(\rho) + z_3 (\lambda_3^2/k_3) J(\rho) \quad (3.15f)$$

$$\begin{aligned} A_7 \mp v_2 (q j/r_2) H(\gamma) - x_2 q k_2 H^*(\gamma) \mp y_2 (q j/r_2) J(\gamma) - z_2 q k_2 J^*(\gamma) \\ = \mp v_3 (j/r_2) H(\rho) - x_3 k_3 H^*(\rho) \mp y_3 (j/r_2) J(\rho) - z_3 k_3 J^*(\rho) \end{aligned} \quad (3.15g)$$

$$A_8 + v_2 q \lambda_2^2 H(\gamma) + y_2 q \lambda_2^2 J(\gamma) = v_3 \lambda_3^2 H(\rho) + y_3 \lambda_3^2 J(\rho) \quad (3.15h)$$

$$v_3 H^*(\rho) \pm x_3 (j/k_3 r_3) H(\rho) - y_3 J^*(\rho) \pm z_3 (j/k_3 r_3) J(\rho) = 0 \quad (3.15i)$$

$$x_3 H(\rho) + z_3 J(\rho) = 0 \quad (3.15j)$$

onde A_i , $i = 1, 2, 3, \dots, 8$ são os termos não homogêneos e os índices $(\bullet_n)$, de todas as variáveis A , v , x , y e z , foram omitidos.

Comparando os sistemas dados pelas Eqs. (3.9)-(3.12) com o sistema geral dado pelas Eqs. (3.15), notam-se que

Sistema 1 :

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_6 = 0 \quad (3.16)$$

$$A_5 = -J'(\gamma) \quad (3.17)$$

$$A_7 = \mp (qJ/r_2)J(\gamma) \quad (3.18)$$

$$A_8 = q\lambda_2^2 J(\gamma) \quad (3.19)$$

resultando

$$a_{10n}^{\bullet} = v_{10n}^{\bullet} \quad (3.20)$$

$$b_{10n}^{\bullet} = x_{10n}^{\bullet} \quad (3.21)$$

$$a_{20n}^{\bullet} = v_{20n}^{\bullet} \quad (3.22)$$

$$b_{20n}^{\bullet} = x_{20n}^{\bullet} \quad (3.23)$$

$$c_{20n}^{\bullet} = y_{20n}^{\bullet} \quad (3.24)$$

$$d_{20n}^{\bullet} = z_{20n}^{\bullet} \quad (3.25)$$

Sistema 2 :

$$A_2 = A_5 = A_6 = A_7 = A_8 = 0 \quad (3.26)$$

$$A_1 = -H'(\beta) \quad (3.27)$$

$$A_3 = \mp (J/r_1)H(\beta) \quad (3.28)$$

$$A_4 = \lambda_2^2 H(\beta) \quad (3.29)$$

resultando

$$a_{10n}^{\bullet} = v_{10n}^{\bullet} \quad (3.30)$$

$$b_{10n}^{\bullet} = x_{10n}^{\bullet} \quad (3.31)$$

$$a_{2 \bullet n}^* = v_{2 \bullet n}^* \quad (3.32)$$

$$b_{2 \bullet n}^* = x_{2 \bullet n}^* \quad (3.33)$$

$$c_{2 \bullet n}^* = y_{2 \bullet n}^* \quad (3.34)$$

$$d_{2 \bullet n}^* = z_{2 \bullet n}^* \quad (3.35)$$

Sistema 3 :

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_8 = 0 \quad (3.36)$$

$$A_5 = \pm (J/k_2 r_2) J(\gamma) \quad (3.37)$$

$$A_6 = (\lambda_2^2 / k_2) J(\gamma) \quad (3.38)$$

$$A_7 = -q k_2 J'(\gamma) \quad (3.39)$$

resultando

$$e_{1 \bullet n}^* = x_{1 \bullet n}^* \quad (3.40)$$

$$f_{1 \bullet n}^* = v_{1 \bullet n}^* \quad (3.41)$$

$$e_{2 \bullet n}^* = x_{2 \bullet n}^* \quad (3.42)$$

$$f_{2 \bullet n}^* = v_{2 \bullet n}^* \quad (3.43)$$

$$g_{2 \bullet n}^* = z_{2 \bullet n}^* \quad (3.44)$$

$$h_{2 \bullet n}^* = y_{2 \bullet n}^* \quad (3.45)$$

Sistema 4 :

$$A_4 = A_5 = A_6 = A_7 = A_8 = 0 \quad (3.46)$$

$$A_1 = \pm (J/k_2 r_1) H(\beta) \quad (3.47)$$

$$A_2 = (\lambda_2^2 / k_2) H(\beta) \quad (3.48)$$

$$A_3 = -k_2 H'(\beta) \quad (3.49)$$

resultando

$$e'_{1 \circ n} = x_{1 \circ n} \quad (3.50)$$

$$f'_{1 \circ n} = v_{1 \circ n} \quad (3.51)$$

$$e'_{2 \circ n} = x_{2 \circ n} \quad (3.52)$$

$$f'_{2 \circ n} = v_{2 \circ n} \quad (3.53)$$

$$g'_{2 \circ n} = z_{2 \circ n} \quad (3.54)$$

$$h'_{2 \circ n} = y_{2 \circ n} \quad (3.55)$$

Os coeficientes de espalhamento para a função de Green diádica $\bar{G}^{(32)}$ podem ser calculados de maneira análoga aos da $\bar{G}^{(22)}$, bastando trocar o índice (2) pelo índice (3) nas Eqs. (3.22)-(3.25), (3.32)-(3.35), (3.42)-(3.45) e (3.52)-(3.55), dos sistemas 1, 2, 3 e 4, respectivamente.

Resolvendo-se o sistema geral, dado pelas Eqs. (3.15), pelo método da substituição, omitindo-se os índices ($\circ n$) de todas as variáveis v, x, y, z, A, P e S , obtém-se

$$v_1 = X / Y \quad (3.56)$$

$$x_1 = P_{26} + v_1 P_{27} \quad (3.57)$$

$$v_2 = P_{30} + v_1 P_{31} \quad (3.58)$$

$$x_2 = P_{28} + v_1 P_{29} \quad (3.59)$$

$$y_2 = P_{32} + v_1 P_{33} \quad (3.60)$$

$$z_2 = P_{34} + v_1 P_{35} \quad (3.61)$$

$$v_3 = -y_3 J'(\rho)/H'(\rho) \quad (3.62)$$

$$x_3 = -z_3 J(\rho)/H(\rho) \quad (3.63)$$

$$y_3 = [A_3 + v_2 q \lambda_2^2 H(\gamma) + y_2 q \lambda_2^2 J(\gamma)] [H'(\rho)/\lambda_3^2 S_3] \quad (3.64)$$

$$z_3 = P_1 + v_2 P_2 + x_2 P_3 + y_2 P_4 + z_2 P_5 \quad (3.65)$$

onde

$$X = A_1 \mp (J/k_1 r_1) H(\alpha) P_{26} \pm (J/k_2 r_1) [H(\beta) P_{28} + J(\beta) P_{34}] \\ - H^*(\beta) P_{30} - J^*(\beta) P_{32} \quad (3.66)$$

e

$$Y = -H^*(\alpha) \pm (J/k_1 r_1) H(\alpha) P_{27} \mp (J/k_2 r_1) [H(\beta) P_{29} + J(\beta) P_{35}] \\ + H^*(\beta) P_{31} + J^*(\beta) P_{33} \quad (3.67)$$

sendo

$$P_1 = [A_7 \pm (JA_8/r_2 \lambda_3^2)] (H(\rho)/k_3 S_1) \quad (3.68)$$

$$P_2 = (\mp 1 \pm \lambda_2^2/\lambda_3^2) (qJH(\gamma)H(\rho)/r_2 k_3 S_1) \quad (3.69)$$

$$P_3 = -qk_2 H^*(\gamma)H(\rho)/k_3 S_1 \quad (3.70)$$

$$P_4 = P_2 J(\gamma)/H(\gamma) \quad (3.71)$$

$$P_5 = P_3 J^*(\gamma)/H^*(\gamma) \quad (3.72)$$

$$P_6 = [(P_1 \lambda_3^2 S_2/k_3 H(\rho)) - A_6] (k_2 k_3 H(\rho)) / (\lambda_2^2 k_3 J(\gamma)H(\rho) \\ - P_5 k_2 \lambda_3^2 S_2) \quad (3.73)$$

$$P_7 = P_2 k_2 \lambda_3^2 S_2 / (\lambda_2^2 k_3 J(\gamma)H(\rho) - P_5 k_2 \lambda_3^2 S_2) \quad (3.74)$$

$$P_8 = [(-qk_2 \lambda_3^2 H^*(\gamma) S_2 / k_3^2 S_1) - (\lambda_2^2 H(\gamma)/k_2)] \\ [k_2 k_3 H(\rho) / (\lambda_2^2 k_3 J(\gamma)H(\rho) - P_5 k_2 \lambda_3^2 S_2)] \quad (3.75)$$

$$P_9 = P_7 J(\gamma)/H(\gamma) \quad (3.76)$$

$$P_{10} = J^*(\gamma) + (q \lambda_2^2 J(\gamma) S_3 / \lambda_3^2 S_5) + (P_4 + P_5 P_9) (J S_4 / k_3 r_2 H(\rho)) \\ \mp (JJ(\gamma) P_9 / k_2 r_2) \quad (3.77)$$

$$P_{11} = [A_5 - (A_8 S_3 / \lambda_3^2 S_5) - (P_1 + P_5 P_6)(J S_4 / k_3 r_2 H(\rho)) \pm (JJ(\gamma)P_6 / k_2 r_2)] / P_{10} \quad (3.78)$$

$$P_{12} = [-H^*(\gamma) - (q\lambda_2^2 H(\gamma)S_3 / \lambda_3^2 S_5) - (P_2 + P_5 P_7)(J S_4 / k_3 r_2 H(\rho)) \pm (JJ(\gamma)P_7 / k_2 r_2)] / P_{10} \quad (3.79)$$

$$P_{13} = \{ \pm [J(H(\gamma) + J(\gamma)P_8) / k_2 r_2] - (P_3 + P_5 P_8)(J S_4 / k_3 r_2 H(\rho)) \} / P_{10} \quad (3.80)$$

$$P_{14} = -(A_4 + \lambda_2^2 J(\beta)P_{11}) / [\lambda_2^2 (H(\beta) + J(\beta)P_{12})] \quad (3.81)$$

$$P_{15} = \rho \lambda_1^2 H(\alpha) / [\lambda_2^2 (H(\beta) + J(\beta)P_{12})] \quad (3.82)$$

$$P_{16} = -J(\beta)P_{13} / (H(\beta) + J(\beta)P_{12}) \quad (3.83)$$

$$P_{17} = P_{11} + P_{12}P_{14} \quad (3.84)$$

$$P_{18} = P_{12}P_{15} \quad (3.85)$$

$$P_{19} = P_{13} + P_{12}P_{16} \quad (3.86)$$

$$P_{20} = P_6 + P_7P_{14} + P_9P_{17} \quad (3.87)$$

$$P_{21} = P_{15}(P_7 + P_9P_{12}) \quad (3.88)$$

$$P_{22} = P_8 + P_7P_{16} + P_9P_{19} \quad (3.89)$$

$$P_{23} = [A_9 \mp J(J(\beta)P_{17} + H(\beta)P_{14}) / r_1 - k_2 J^*(\beta)P_{20}] / [\pm J(H(\beta)P_{16} + J(\beta)P_{19}) / r_1 + k_2 (H^*(\beta) + J^*(\beta)P_{22})] \quad (3.90)$$

$$P_{24} = [\pm J(+\rho H(\alpha) - H(\beta)P_{15} - J(\beta)P_{18}) / r_1 - k_2 J^*(\beta)P_{21}] / [\pm J(H(\beta)P_{16} + J(\beta)P_{19}) / r_1 + k_2 (H^*(\beta) + J^*(\beta)P_{22})] \quad (3.91)$$

$$P_{25} = \rho k_1 H^*(\alpha) / [\pm J(H(\beta)P_{16} + J(\beta)P_{19}) / r_1 + k_2 (H^*(\beta) + J^*(\beta)P_{22})] \quad (3.92)$$

$$P_{26} = [A_2 + \lambda_2^2 (H(\beta)P_{23} + J(\beta)P_{20} + J(\beta)P_{22}P_{23}) / k_2] \\ / [\lambda_1^2 H(\alpha) / k_1 - \lambda_2^2 P_{25} (H(\beta) + J(\beta)P_{22}) / k_2] \quad (3.93)$$

$$P_{27} = [\lambda_2^2 (H(\beta)P_{24} + J(\beta)P_{21} + J(\beta)P_{22}P_{24}) / k_2] / [\lambda_1^2 H(\alpha) / k_1 \\ - \lambda_2^2 P_{25} (H(\beta) + J(\beta)P_{22}) / k_2] \quad (3.94)$$

$$P_{28} = P_{23} + P_{25} P_{26} \quad (3.95)$$

$$P_{29} = P_{24} + P_{25} P_{27} \quad (3.96)$$

$$P_{30} = P_{14} + P_{16} P_{28} \quad (3.97)$$

$$P_{31} = P_{15} + P_{16} P_{29} \quad (3.98)$$

$$P_{32} = P_{17} + P_{19} P_{28} \quad (3.99)$$

$$P_{33} = P_{18} + P_{19} P_{29} \quad (3.100)$$

$$P_{34} = P_{20} + P_{22} P_{28} \quad (3.101)$$

$$P_{35} = P_{21} + P_{22} P_{29} \quad (3.102)$$

e

$$S_1 = H^*(\varphi)J(\rho) - J^*(\varphi)H(\rho) \quad (3.103)$$

$$S_2 = J(\varphi)H(\rho) - H(\varphi)J(\rho) \quad (3.104)$$

$$S_3 = H^*(\varphi)J^*(\rho) - J^*(\varphi)H^*(\rho) \quad (3.105)$$

$$S_4 = \mp H(\varphi)J(\rho) \pm J(\varphi)H(\rho) \quad (3.106)$$

$$S_5 = J(\varphi)H^*(\rho) - H(\varphi)J^*(\rho) \quad (3.107)$$

3.5 Conclusões

As funções de Green diádicas do tipo elétrico, para um meio composto por quatro regiões em forma de camadas cilíndricas concêntricas, infinitas na direção z , sendo a região central um condutor perfeito, com uma fonte de corrente elétrica localizada na região 2, como ilustra a Fig. 3.1, foram obtidas. Dada uma fonte de corrente elétrica, $\bar{J}(R^*)$, localizada na região 2, os campos eletromagnéticos podem ser calculados, em qualquer região, com o uso da função de Green diádica específica desta região. Caso não se conheça a fonte, esta pode ser calculada através da aplicação de condições de contorno, as quais o campo elétrico ou magnético tem que satisfazer.

CAPÍTULO IV

EFEITO DA COBERTURA DIELÉTRICA, NA CONSTANTE DE PROPAGAÇÃO
DE UMA LINHA DE MICROFITA SOBRE SUBSTRATO CILÍNDRICO
CIRCULAR

4.1. Introdução

Um grande número de trabalhos, por exemplo os catalogados por Gupta e Singh [22], foi desenvolvido visando uma compreensão detalhada das linhas de microfita sobre superfícies planas. O estudo de elementos de microfita sobre substratos cilíndricos circulares é de particular importância para uso em projetos de antenas de microfita sobre estes substratos. Também, pouco existe disponível com relação a este assunto na literatura científica.

Uma análise teórica, usando-se modelo dinâmico para elementos de microfita sobre substratos cilíndricos, foi desenvolvida por Nakatani e Alexopoulos [23]. Neste trabalho foram considerados apenas substratos com camada singela. Entretanto em muitas aplicações, as linhas de microfita são projetadas com cobertura dielétrica.

Inicialmente apresenta-se uma formulação matemática, obtendo-se uma equação integral geral, para o caso de uma distribuição de corrente elétrica, usando-se a função de Green diádica do tipo elétrico $\bar{G}^{(22)}(\bar{R}/\bar{R}^*)$. A seguir apresentam-se a determinação e resultados numéricos para a constante de propagação de uma linha de microfita infinita sobre substrato cilíndrico circular, dando ênfase ao efeito da cobertura dielétrica.

4.2. Formulação Matemática

Os circuitos de microfita, sejam elementos de antenas ou linhas de alimentação, são geralmente tratados como condutores perfeitos, aplicando-se, desta forma, a condição de contorno de campo elétrico tangencial nulo. Neste caso, a distribuição de corrente elétrica $\bar{J}(\bar{R}^*)$, torna-se corrente de superfície. Para uma densidade superficial de corrente elétrica qualquer, $\bar{J}_s(\bar{R}^*)$, que pode ser composta por uma corrente incidente conhecida mais correntes desconhecidas induzidas nos elementos, localizada na interface das regiões 2 e 3, ilustrada na Fig. 3.1, pode-se escrever

$$\bar{J}(\bar{R}^*) = \bar{J}_s(\bar{R}^*) \delta(r^* - r_2) \quad (4.1)$$

onde $\bar{J}_s(\bar{R}^*) = J_{\phi} \hat{\phi} + J_z \hat{z}$ e δ é a função delta de Dirac introduzida anteriormente.

O campo elétrico, na região 2, é dado por [15].

$$\bar{E}_2(\bar{R}) = 4 \omega \mu_2 \iiint_{V^*} \bar{G}^{(22)}(\bar{R}/\bar{R}^*) \cdot \bar{J}(\bar{R}^*) dv^* \quad (4.2)$$

onde $\bar{G}^{(22)}(\bar{R}, \bar{R}^*)$ é a função de Green diádica do tipo elétrico dada na Eq. (3.2). Substituindo-se a Eq. (4.1) na Eq. (4.2), resulta

$$\bar{E}_2(\bar{R}) = 4 \omega \mu_2 \iint_{s^*} \bar{G}^{(22)}(\bar{R}/\bar{R}^*) \cdot \bar{J}_s(\bar{R}^*) ds^* \Big|_{r^*=r_2} \quad (4.3)$$

onde $ds^* = r_2 d\phi^* dz^*$.

Aplicando-se a condição de contorno sobre os elementos, que estabelece que a componente tangencial do campo elétrico tem que ser nula, ou seja

$$\bar{E}_2(\bar{R})|_{\tan} = 0 \quad (4.4)$$

resulta

$$\left[\iint_{s^*} \bar{G}^{(22)}(\bar{R}/\bar{R}^*) \cdot \bar{J}_s(\bar{R}^*) ds^* \right]_{\tan} = 0 \quad (4.5)$$

Agora, escrevendo-se as funções $\bar{M}$ e $\bar{N}$, que fazem parte de $\bar{G}^{(22)}(\bar{R}, \bar{R}^*)$, nas formas simplificadas, como definidas abaixo, resultam

$$\bar{M}_{on\lambda_2}(h) = J_1 \hat{r} + J_3 \hat{\phi} \quad (4.6)$$

$$\bar{M}_{en\lambda_2}(h) = J_2 \hat{r} + J_4 \hat{\phi} \quad (4.7)$$

$$\bar{N}_{on\lambda_2}(h) = J_5 \hat{r} + J_7 \hat{\phi} + J_9 \hat{z} \quad (4.8)$$

$$\bar{N}_{en\lambda_2}(h) = J_6 \hat{r} + J_8 \hat{\phi} + J_{10} \hat{z} \quad (4.9)$$

sendo

$$J_1 = n J_n(\lambda_2 r_2) \cos(n\phi) \exp(izh) / r_2 \quad (4.10)$$

$$J_2 = -n J_n(\lambda_2 r_2) \sin(n\phi) \exp(izh) / r_2 \quad (4.11)$$

$$J_3 = -J_n^*(\lambda_2 r_2) \sin(n\phi) \exp(izh) \quad (4.12)$$

$$J_4 = -J_n^*(\lambda_2 r_2) \cos(n\phi) \exp(izh) \quad (4.13)$$

$$J_5 = iz J_n^*(\lambda_2 r_2) \sin(n\phi) \exp(izh) / k_2 \quad (4.14)$$

$$J_6 = iz J_n^*(\lambda_2 r_2) \cos(n\phi) \exp(izh) / k_2 \quad (4.15)$$

$$J_7 = iz n J_n(\lambda_2 r_2) \cos(n\phi) \exp(izh) / r_2 k_2 \quad (4.16)$$

$$J_8 = -iz n J_n(\lambda_2 r_2) \sin(n\phi) \exp(izh) / r_2 k_2 \quad (4.17)$$

$$J_9 = \lambda_2^2 J_n(\lambda_2 r_2) \sin(n\phi) \exp(izh) / k_2 \quad (4.18)$$

$$J_{10} = \lambda_2^2 J_n(\lambda_2 r_2) \cos(n\phi) \exp(izh) / k_2 \quad (4.19)$$

onde $J_n(\lambda_2 r_2)$ é a função de Bessel de n -ésima ordem e argumento $(\lambda_2 r_2)$ e $J_n^*(\lambda_2 r_2) = \partial J_n(\lambda_2 r) / \partial r |_{r=r_2}$

As funções $\bar{M}^{(4)}$ e $\bar{N}^{(4)}$ que também fazem parte de $\bar{G}^{(22)}(\bar{R}/\bar{R}^*)$, podem ser representadas por expressões similares às Eqs.(4.6)-(4.9), definindo desta forma os H_i , $i = 1, 2, \dots, 10$, fazendo nas Eqs. (4.10)-(4.19) $J_n(\lambda_2 r_2) = H_n^{(4)}(\lambda_2 r_2)$ e $J_n^*(\lambda_2 r_2) = \partial H_n^{(4)}(\lambda_2 r) / \partial r |_{r=r_2}$.

Da Eq. (3.2), usando-se as notações simplificadas de $\bar{M}$ e $\bar{N}$ e omitindo-se o índice n dos coeficientes de espalhamento, obtém-se

$$\begin{aligned}
& \left[\iint_{S^*} \bar{G}^{(2,2)} \{ \bar{R}/\bar{R}^* \} \cdot \bar{J}_s(\bar{R}^*) ds^* \right]_{\tan} = \iint_{S^*} \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} (2-\delta_0)/\lambda_z^2 \\
& \left\{ \left[\left(a_{20} H_4 + b_{20} H_7 + (1+c_{20}) J_4 + d_{20} J_7 \right) \hat{\phi} + \left(b_{20} H_9 + d_{20} J_9 \right) \hat{z} \right] J_{\phi} H_{4f} \right. \\
& + \left[\left(a_{20} H_9 + b_{20} H_8 + (1+c_{20}) J_9 + d_{20} J_8 \right) \hat{\phi} + \left(b_{20} H_{10} + d_{20} J_{10} \right) \hat{z} \right] J_{\phi} H_{9f} \\
& + \left[\left(a_{20}^* H_4 + b_{20}^* H_7 + c_{20}^* J_4 + d_{20}^* J_7 \right) \hat{\phi} + \left(b_{20}^* H_9 + d_{20}^* J_9 \right) \hat{z} \right] J_{\phi} J_{4f} \\
& + \left[\left(a_{20}^* H_9 + b_{20}^* H_8 + c_{20}^* J_9 + d_{20}^* J_8 \right) \hat{\phi} + \left(b_{20}^* H_{10} + d_{20}^* J_{10} \right) \hat{z} \right] J_{\phi} J_{9f} \\
& + \left[\left(e_{20} H_8 + f_{20} H_9 + (1+g_{20}) J_8 + h_{20} J_9 \right) \hat{\phi} + \left(e_{20} H_{10} + (1+g_{20}) J_{10} \right) \hat{z} \right] \\
& \quad \left(J_{\phi} H_{8f} + J_z H_{10f} \right) \\
& + \left[\left(e_{20} H_7 + f_{20} H_4 + (1+g_{20}) J_7 + h_{20} J_4 \right) \hat{\phi} + \left(e_{20} H_9 + (1+g_{20}) J_9 \right) \hat{z} \right] \\
& \quad \left(J_{\phi} H_{7f} + J_z H_{9f} \right) \\
& + \left[\left(e_{20}^* H_8 + f_{20}^* H_9 + g_{20}^* J_8 + h_{20}^* J_9 \right) \hat{\phi} + \left(e_{20}^* H_{10} + g_{20}^* J_{10} \right) \hat{z} \right] \\
& \quad \left(J_{\phi} J_{8f} + J_z J_{10f} \right) \\
& + \left[\left(e_{20}^* H_7 + f_{20}^* H_4 + g_{20}^* J_7 + h_{20}^* J_4 \right) \hat{\phi} + \left(e_{20}^* H_9 + g_{20}^* J_9 \right) \hat{z} \right] \\
& \quad \left(J_{\phi} J_{7f} + J_z J_{9f} \right) \left. \right\} ds^* \Big|_{r=r^*=r_2} = 0 \quad (4.20)
\end{aligned}$$

Na Eq. (4.20), as funções H_{lf} e J_{lf} , $l = 1, 2, \dots, 10$, são definidas com relação as coordenadas da fonte (r^*, ϕ^*, z^*) . Neste caso, obtém-se expressões para H_{lf} e J_{lf} semelhantes às de H_l e J_l , trocando-se a variável (h) por $(-h)$.

Através da Eq. (4.3) calcula-se o campo elétrico em qualquer ponto da região 2, ilustrada na Fig. 3.1. A Eq. (4.5), obtida sob a aplicação da condição de contorno do campo elétrico tangencial nulo, permite, por exemplo, com a aplicação do método dos momentos [18], o cálculo da distribuição de corrente nos elementos de microfita. Este assunto será tratado no capítulo 5, para o caso de uma antena de microfita "retangular".

4.3. Cálculo da Constante de Propagação de uma Linha de Microfita Infinita

Seja uma linha de microfita, infinitamente longa na direção z , montada sobre substrato cilíndrico circular, de largura W , localizado entre as regiões 2 e 3, como ilustra a Fig. 4.1, simetricamente posicionada com relação a ϕ . Para o caso de linhas finas, com respeito ao comprimento de onda, podem-se assumir que apenas correntes elétricas na direção z fluem na linha. Esta aproximação é válida para substratos de qualquer espessura [26]. Considerando-se uma corrente superficial de onda caminhante dada por

$$\bar{J}_s(\bar{R}^*) = J_z \hat{z} \quad (4.21)$$

onde $J_z = \exp(ik_z z^*) \delta(r^* - r_2) U(|\phi^*| - \phi_f)$, $\phi_f = W/2r_2$ e k_z é a constante de propagação da linha de microfita infinita a ser determinada. A função $U(|\phi^*| - \phi_f)$ é a função degrau unitário, definida como

$$U(|\phi^*| - \phi_f) = \begin{cases} 1 & \text{para } |\phi^*| \leq \phi_f \\ 0 & \text{para } |\phi^*| > \phi_f \end{cases} \quad (4.22)$$

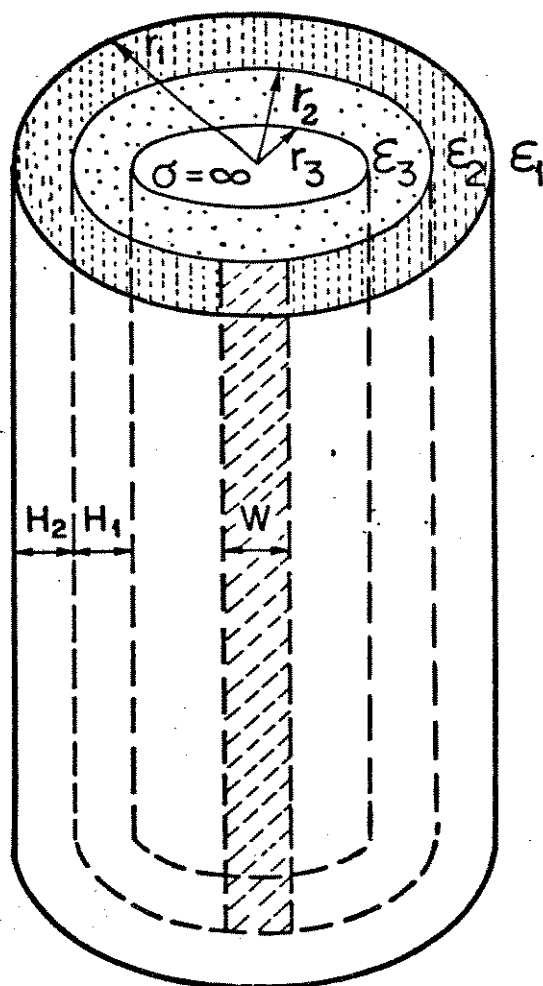


Fig. 4.1. Linha de microfita sobre substrato cilíndrico circular com cobertura dielétrica.

Considera-se nula a componente ϕ da corrente sobre a linha e constante a dependência em ϕ da componente z .

Substituindo a Eq. (4.21) na Eq. (4.5) resulta de acordo com Eq. (4.20)

$$\begin{aligned}
 & \iint_{S^*} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{8\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2-\delta_0)/\lambda_z^2 \left\{ \left[\left(e_{20} H_8 + f_{20} H_3 + (1+g_{20}) J_8 + h_{20} J_3 \right) \hat{\phi} \right. \right. \\
 & + \left. \left(e_{20} H_{10} + (1+g_{20}) J_{10} \right) \hat{z} \right] H_{1cf} + \left[\left(e_{20} H_7 + f_{20} H_4 + (1+g_{20}) J_7 + h_{20} J_4 \right) \hat{\phi} \right. \\
 & + \left. \left(e_{20} H_9 + (1+g_{20}) J_9 \right) \hat{z} \right] H_{9f} + \left[\left(e'_{20} H_8 + f'_{20} H_3 + g'_{20} J_8 + h'_{20} J_3 \right) \hat{\phi} \right. \\
 & + \left. \left(e'_{20} H_{10} + g'_{20} J_{10} \right) \hat{z} \right] J_{10f} + \left[\left(e'_{20} H_7 + f'_{20} H_4 + g'_{20} J_7 + h'_{20} J_4 \right) \hat{\phi} \right. \\
 & + \left. \left(e'_{20} H_9 + g'_{20} J_9 \right) \hat{z} \right] J_{9f} \left. \right\} \exp(i k_0 z^*) \delta(r^* - r_2) U(|\phi^*| - \phi_f) ds^* = 0
 \end{aligned}
 \tag{4.23}$$

onde $ds^* = r_2 d\phi^* dz^*$

A integral em h da Eq. (4.23) é discretizada para $h = k_0$ [23]. Notam-se a existência de duas equações, uma para a componente transversal E_ϕ e outra para a componente longitudinal E_z , para uma incógnita, ou seja, k_0 . Trabalhando-se com a componente longitudinal pode-se escrever

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\phi_f}^{\phi_f} \frac{t}{8\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2-\delta_0)/\lambda_z^2 \left[\left(e_{20} H_{10} + (1+g_{20}) J_{10} \right) H_{10f} + \left(e_{20} H_9 + (1+g_{20}) J_9 \right) H_{9f} \right. \\
 & + \left. \left(e'_{20} H_{10} + g'_{20} J_{10} \right) J_{10f} + \left(e'_{20} H_9 + g'_{20} J_9 \right) J_{9f} \right] d\phi^* = 0
 \end{aligned}
 \tag{4.24}$$

para $r = r^* = r_2$, $h = k_0$

sendo

$$H_{10f} = \lambda_2^2 H_n^{(1)}(\lambda_2 r_2) \cos(n\phi^*) \exp(-ik_0 z^*) / k_2 \quad (4.25)$$

$$H_{0f} = \lambda_2^2 H_n^{(1)}(\lambda_2 r_2) \sin(n\phi^*) \exp(-ik_0 z^*) / k_2 \quad (4.26)$$

$$J_{10f} = H_{10f} J_n(\lambda_2 r_2) / H_n^{(1)}(\lambda_2 r_2) \quad (4.27)$$

$$J_{0f} = H_{0f} J_n(\lambda_2 r_2) / H_n^{(1)}(\lambda_2 r_2) \quad (4.28)$$

Substituindo as Eqs. (4.25)-(4.28) na Eq. (4.24), sendo

$$\int_{-\phi_f}^{\phi_f} \sin(n\phi^*) d\phi^* = 0 \quad (4.29)$$

tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{4}{8\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2-\delta_0) r_2 \Psi_f H_n^{(1)}(\lambda_2 r_2) / k_2 \left[\left(e_{20} H_{10} + (1+g_{20}) J_{10} \right) \right. \\ & \left. + J_n(\lambda_2 r_2) \left(e_{20} H_{10} + g_{20} J_{10} \right) / H_n^{(1)}(\lambda_2 r_2) \right] \bigg|_{\substack{r=r_2 \\ h=k_0}} = 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

onde

$$\Psi_f = \int_{-\phi_f}^{\phi_f} \cos(n\phi^*) d\phi^* = \begin{cases} 2\phi_f & \text{para } n = 0 \\ 2\sin(n\phi_f)/n & \text{para } n \neq 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

A constante de propagação é obtida, procurando-se o valor de k_0 , que anula a integral da componente longitudinal ao longo da seção transversal da linha, ou seja, resolvendo-se para k_0 a equação

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2-\delta_0) \Psi_f H_n^{(1)}(\lambda_2 r_2) \int_{-\phi_f}^{\phi_f} \left[\left(e_{20} H_{10} + (1+g_{20}) J_{10} \right) + J_n(\lambda_2 r_2) \left(e_{20}^* H_{10} + g_{20}^* J_{10} \right) / H_n^{(1)}(\lambda_2 r_2) \right] d\phi^* = 0 \quad (4.32)$$

para $r = r_2$ e $h = k_0$.

Resolvendo-se as integrais em ϕ de modo similar as em ϕ^* , resulta para $r = r_2$ e $h = k_0$ que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2-\delta_0) \Psi_f^2 J_n(\lambda_2 r_2) H_n^{(1)}(\lambda_2 r_2) (1 + g_{20} + e_{20}^* + e_{20} H_n^{(1)}(\lambda_2 r_2) / J_n(\lambda_2 r_2) + g_{20}^* J_n(\lambda_2 r_2) / H_n^{(1)}(\lambda_2 r_2)) = 0 \quad (4.33)$$

Uma vez conhecida a constante de propagação da linha de microfita, a constante dielétrica efetiva é obtida da relação

$$\epsilon_{ef} = (k_0 / k_0)^{1/2} \quad (4.34)$$

onde k_0 é a constante de propagação do espaço livre.

4.4. Resultados e Conclusões

A solução numérica, procurando-se o valor de k_0 que satisfaz a Eq. (4.33), envolve a determinação das funções de Bessel e de Hankel de n -ésima ordem, obtidas fazendo-se o uso de fórmulas de diferenciação e recorrência [24] e, também, de aproximações polinomiais [25]. O programa completo está listado no apêndice.

A dependência da constante dielétrica efetiva com a frequência, expressa por $k_0 r_2$, para $\epsilon_1 = \epsilon_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 9,6\epsilon_0$ (ϵ_0 é a permissividade do espaço livre) e para alturas de cobertura dielétrica $H_2 = 0; 0,2W; 0,5W$ e $1,0W$, com $H_1 = W$, é mostrada na Fig. 4.2.

Na Fig. 4.3 a constante dielétrica efetiva é mostrada em função da altura da cobertura normalizada, H_2/W , para vários valores de permissividade da cobertura dielétrica, ϵ_2 , e para $\epsilon_1 = \epsilon_0$, $\epsilon_3 = 9,6\epsilon_0$ e $k_0 r_2 = 1$.

Na análise numérica para se obterem os dados fornecidos pelas Figs. 4.2 e 4.3, uma razão constante de $R = r_3/r_2 = 0,9$ e uma largura de fita metálica de $W = H_1 = (r_2 - r_3)$ foram usadas. Os dielétricos foram supostos não magnéticos, tais que $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_0$, onde μ_0 é a permeabilidade do espaço livre.

Na Fig. 4.2 os resultados de Nakatani e Alexopoulos [23] são também mostrados e uma quase perfeita concordância é observada entre os resultados, quando a altura da cobertura dielétrica é reduzida a zero ($H_2 = 0$).

Agora, sendo $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_0$, $r_3 = 2,5$ cm, $W = 0,477$ cm, a tabela 4.1 fornece o valor de h no eixo real que estabelece a localização do polo de onda de superfície, a constante de propagação do espaço livre, k_0 , a constante de propagação da região 3, k_3 , a constante de propagação da linha de microfita infinita, k_0 , para $H_1 = 0,159$ cm, $\epsilon_1 = \epsilon_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 2,57\epsilon_0$, nas frequências de 2,20; 2,25; 2,30 e 2,35 GHz. Na tabela 4.2 têm-se resultados para as mesmas grandezas da tabela 4.1, porém com cobertura dielétrica, fazendo-se $H_1 = H_2 = 0,159$ cm, $\epsilon_1 = \epsilon_0$ e $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 2,57\epsilon_0$. A espessura do substrato foi selecionada de forma que apenas o primeiro modo de onda de superfície seja possível.

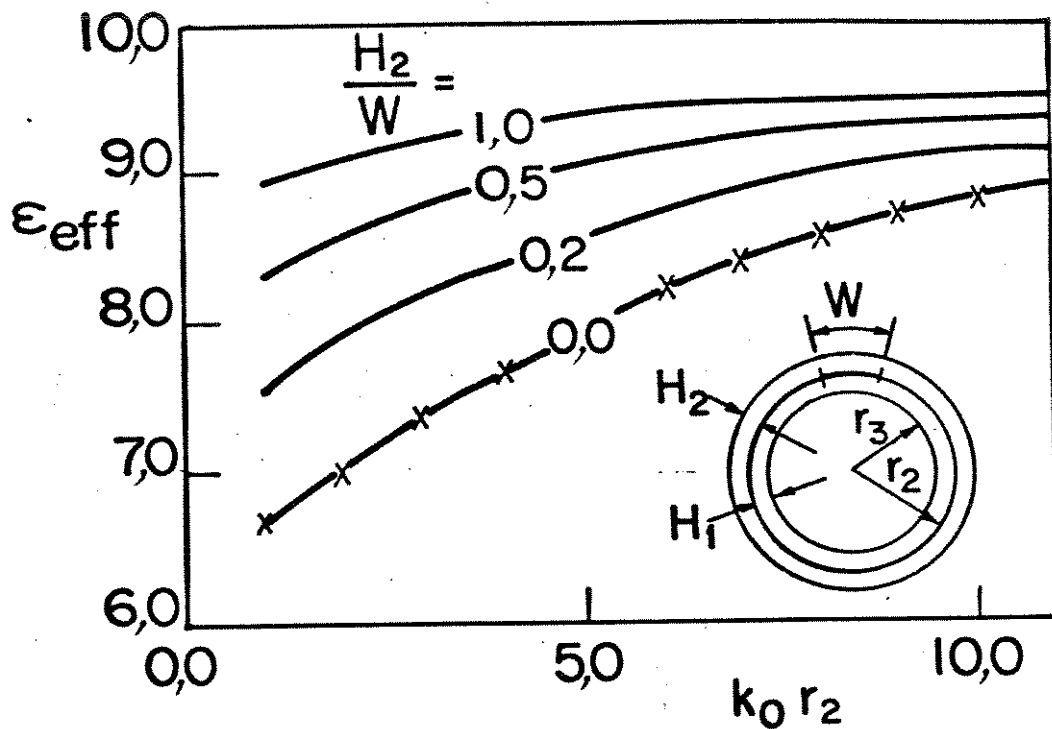


Fig. 4.2. Constante dielétrica efetiva, ϵ_{eff} , em função da frequência normalizada $k_0 r_2$, para vários valores de H_2/W e para $\epsilon_1 = \epsilon_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 9,8\epsilon_0$, $H_1 = W$ e $R = r_3/r_2 = 0,9$. Resultados de [23] são também mostrados com marcas x.

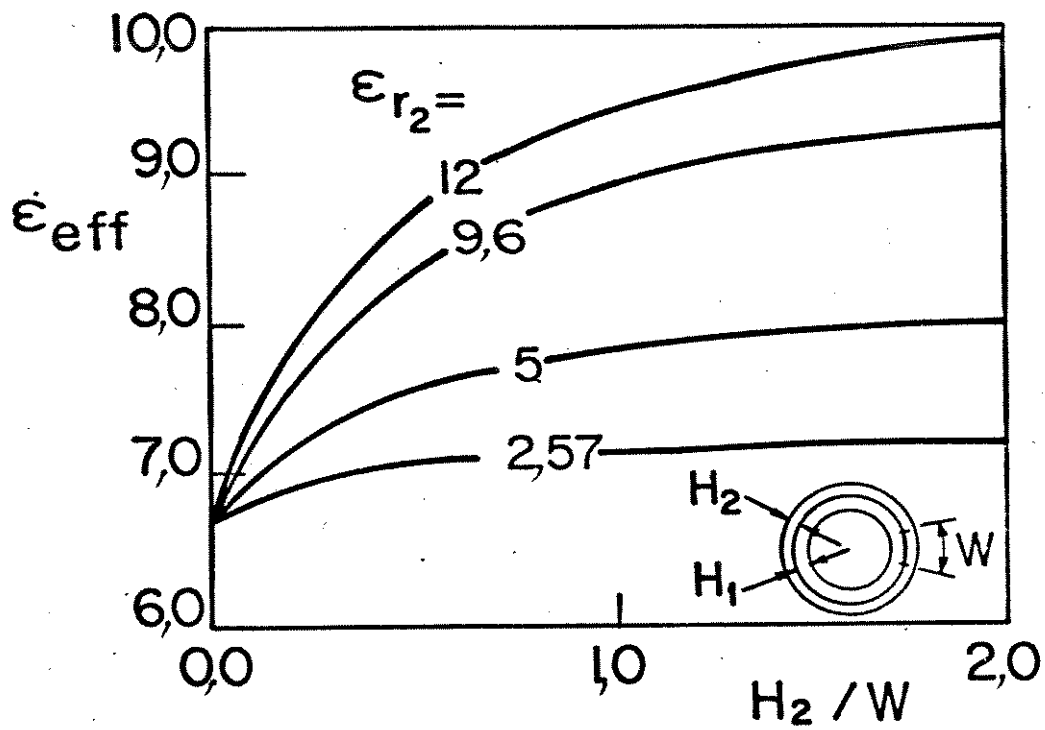


Fig. 4.3. Constante dielétrica efetiva, ϵ_{eff} , em função da altura normalizada da cobertura dielétrica, H_2/W , para vários valores de ϵ_2 e para $\epsilon_1 = \epsilon_0$, $\epsilon_3 = 9.8\epsilon_0$, $H_1 = W$, $k_0 r_2 = 1$ e $R = r_3/r_2 = 0.9$.

Tabela 4.1 : Valores da localização do polo de onda de superfície e da constante de propagação de uma linha de microfita, k_e , com $W = 0,477$ cm sobre substrato cilíndrico circular com $r_s = 2,5$ cm e $H_1 = 0,159$ cm, sendo $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ e $\epsilon_s = 2,57\epsilon_0$.

Freq. (GHz)	Polo	k_o	k_s	k_e
2,20	46,507	46,08	73,87	67,8
2,25	47,569	47,12	75,54	69,3
2,30	48,632	48,17	77,22	70,9
2,35	49,696	49,22	78,91	72,4

Tabela 4.2 : Valores da localização do polo de onda de superfície e da constante de propagação, k_e , da linha da tabela 4.1, porém com $H_1 = H_2 = 0,159$ cm, $\epsilon_1 = \epsilon_0$ e $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 2,57\epsilon_0$

Freq. (GHz)	Polo	k_o	k_s	k_e
2,20	47,129	46,08	73,87	71,4
2,25	48,216	47,12	75,54	73,0
2,30	49,305	48,17	77,22	74,6
2,35	50,396	49,22	78,91	76,3

Dos resultados das tabelas 4.1 e 4.2 nota-se a influência da cobertura dielétrica na constante de propagação da linha e, neste caso, sendo k maior que o valor da localização do polo, nenhuma potência de onda de superfície é gerada. Considera-se a linha de microfita uniforme, pois descontinuidades na linha podem excitar modos de onda de superfície, bem como modos propagantes além do fundamental [26].

Em conclusão, funções de Green diádicas em meios dielétricos cilíndricos estratificados, foram utilizadas para analisar linhas de microfita sobre substratos dielétricos cilíndricos, com cobertura dielétrica. Um efeito apreciável desta cobertura na constante dielétrica efetiva é observado, dependendo das dimensões e dielétricos utilizados.

C A P Í T U L O V

ESTUDO DO EFEITO DA COBERTURA DIELÉTRICA, NA FREQUÊNCIA
DE RESSONÂNCIA DA ANTENA DE MICROFITA DE FORMA "RETANGU-
LAR", SOBRE SUBSTRATO CILÍNDRICO CIRCULAR.

5.1. Introdução

Sendo a característica mais importante dos elementos de microfita, o fato que eles se adaptam a superfícies de várias formas, o estudo do desempenho das antenas de microfita sobre substratos cilíndricos circulares é relevante, uma vez que, estes substratos são comuns nos projetos destas antenas.

O método dos momentos tem sido amplamente utilizado para computar a impedância de entrada de antenas de microfita alimentadas por linhas de microfita montadas sobre substratos planos [27-29]. No presente capítulo, equaciona-se o problema de uma antena de microfita "retangular", alimentada diretamente por uma linha de microfita, estando o conjunto linha-antena, montado sobre substrato cilíndrico circular com cobertura dielétrica. Uma equação integral é obtida usando-se a técnica das funções de Green diádicas. A seguir, resolve-se essa equação integral, através da aplicação do método dos momentos, desenvolvendo-se as principais fases da análise, obtendo-se todos os elementos das matrizes envolvidas na solução. Apresentam-se, então, os resultados numéricos e procedimentos matemáticos necessários na obtenção dos resultados.

5.2. Determinação da Equação Integral

A Fig. 5.1 ilustra uma antena de microfita "retangular", montada sobre um substrato cilíndrico circular, infinito na direção z , posicionada simetricamente com relação a ϕ e z , alimentada diretamente por uma linha de microfita paralela ao eixo do cilindro. Considerando a espessura da antena e da linha desprezível com relação as outras dimensões, e o conjunto assim formado, posicionado, simetricamente com relação a ϕ , na interface entre as regiões 2 e 3 da Fig. 3.1, o campo elétrico na região 2 é dado por [15]

$$\vec{E}_2(\vec{R}) = \frac{1}{\epsilon \mu_2} \iiint_{V'} \vec{G}^{(22)}(\vec{R}/\vec{R}') \cdot \vec{J}(\vec{R}') dV' \quad (5.1)$$

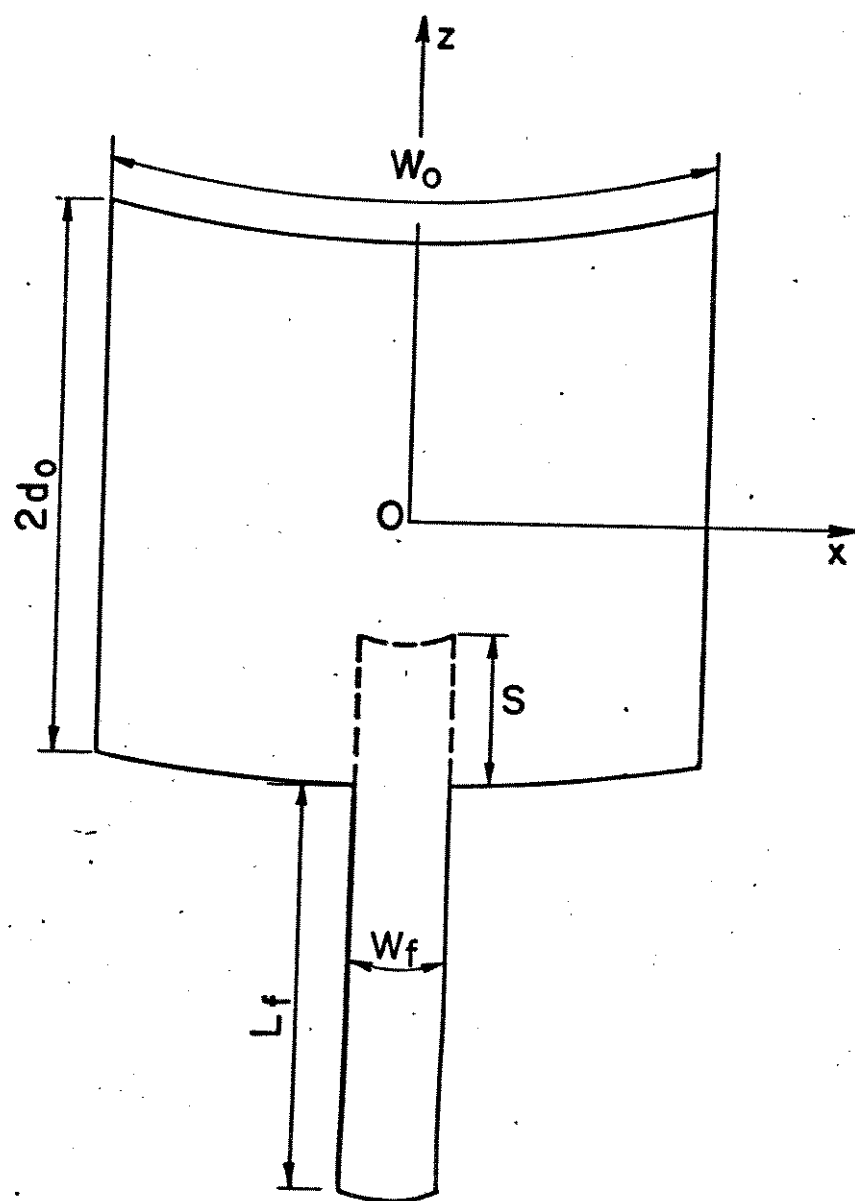


Fig. 5.1. Antena de microfita "retangular" alimentada por uma linha de microfita

Sendo a antena alimentada por uma linha de microfita de largura $W_f = 2 r_2 \phi_f$ muito menor que o comprimento de onda, pode-se escrever

$$\bar{J}(\bar{R}^*) = \bar{J}_s(\bar{R}^*)\delta(r^* - r_2) + J_i(\phi^*, z^*)U(|\phi^*| - \phi_f)\delta(r^* - r_2)\hat{z} \quad (5.2)$$

onde $\bar{J}_s(\bar{R}^*)$ é a corrente de superfície induzida no sistema e $J_i(\phi^*, z^*)$ é a componente na direção z da corrente que alimenta a antena. Considera-se nula, na linha de alimentação, a componente na direção ϕ .

Substituindo a Eq. (5.2) na Eq. (5.1) resulta

$$\begin{aligned} \bar{E}_2(\bar{R}) = i \epsilon \mu_2 \iiint_V \bar{G}^{(22)}(\bar{R}/\bar{R}^*) \cdot \left[\bar{J}_s(\bar{R}^*)\delta(r^* - r_2) \right. \\ \left. + J_i(\phi^*, z^*)U(|\phi^*| - \phi_f)\delta(r^* - r_2)\hat{z} \right] dv^* \end{aligned} \quad (5.3)$$

A condição de contorno sobre a linha de alimentação e a antena estabelece que

$$\bar{E}_2(\bar{R}) \Big|_{\tan} = 0 \quad (5.4)$$

ou seja

$$\begin{aligned} \left[\iint_{S^*} \bar{G}^{(22)}(\bar{R}/\bar{R}^*) \cdot \bar{J}_s(\bar{R}^*) ds^* \right]_{\tan}, \quad \text{para } r = r^* = r_2 \\ = - \left[\iint_{S^*} \bar{G}^{(22)}(\bar{R}/\bar{R}^*) \cdot J_i(\phi^*, z^*)\hat{z} ds^* \right]_{\tan}, \quad \text{para } r = r^* = r_2 \\ |\phi^*| < \phi_f \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde $ds^* = r_2 d\phi^* dz^*$.

Na Eq. (5.5) o primeiro membro é o campo elétrico tangencial espalhado e o segundo membro é o campo elétrico tangencial incidente. Essa equação é uma equação integral, uma vez que a grandeza desconhecida $\bar{J}_s(\bar{R}')$, encontra-se no integrando.

5.3. Aplicação do Método dos Momentos na Solução da Equação Integral

Define-se a corrente elétrica incidente [26]

$$\bar{J}^{inc}(\phi', z') = J_i(\phi', z') \hat{z} \quad (5.6)$$

onde

$$J_i(\phi', z') = \exp(4k_0(z' + d_0)) \quad (5.7)$$

sendo $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ a constante de propagação da linha de microfita infinita, calculada no capítulo 4, com λ_0 igual ao comprimento de onda guiado na linha de transmissão e d_0 igual à metade do comprimento da antena na direção axial z . Nota-se a independência da componente ao longo de z , dada pela Eq. (5.7), da coordenada ϕ' . Então, para esta corrente de alimentação, o segundo membro da Eq. (5.5) torna-se o campo elétrico tangencial incidente devido a uma onda de corrente caminhante, quase eletromagnética transversa (TEM), na linha de microfita. Já o segundo membro é o campo elétrico tangencial espalhado, devido a correntes na antena e correntes não TEM na linha de alimentação perto da junção linha-antena.

A solução pelo método dos momentos, consiste em expandir as correntes de superfície, $\bar{J}_s(\bar{R}')$, em séries de funções, como mostradas a seguir, podendo dessa forma discretizar a Eq. (5.5) com o uso de funções de teste, obtendo-se, então, um sistema de equações lineares, do qual se calculam os coeficientes de expansão.

As correntes na linha de alimentação e na antena são expandidas em termos de três tipos de modos

1. Correntes de onda caminhante sobre a linha de alimentação

A corrente elétrica incidente está definida na Eq. (5.6). Logo a corrente elétrica refletida fica [29]

$$\bar{J}^{ref}(\phi^*, z^*) = -R J_r(\phi^*, z^*) \hat{z} \quad (5.8)$$

onde

$$J_r(\phi^*, z^*) = \exp(-ik_0(z^* + d_0)) \quad (5.9)$$

e R é o coeficiente de reflexão referenciado no final da linha.

Para $z^* + d_0 = 0$, a corrente elétrica total tem que ser zero. Colocando as Eqs. (5.7) e (5.9), em termos de seno e cosseno, notam-se que os termos em seno satisfazem essa condição, porém os termos em cosseno têm que serem truncados em $z^* + d_0 = -\pi/2k_0 = -\lambda_0/4$. Também, ambos os termos são truncados após alguns ciclos, o que é obtido escolhendo-se L_f , que é o comprimento finito da linha de alimentação, múltiplo de $\lambda_0/2$. Tal procedimento acelera a convergência numérica, pois descontinuidades de corrente não existem no final do modo [29]. Dessa forma, têm-se

$$J_i(\phi^*, z^*) = J_c(\phi^*, z^*) + iJ_s(\phi^*, z^*) \quad (5.10)$$

$$J_r(\phi^*, z^*) = J_c(\phi^*, z^*) - iJ_s(\phi^*, z^*) \quad (5.11)$$

onde

$$J_c(\phi^*, z^*) = \cos(k_0(z^* + d_0)) \quad (5.12)$$

$$\text{para } -L_f - \lambda_0/4 < z^* + d_0 < -\lambda_0/4$$

$$\text{e } |\phi^*| < \phi_f$$

e

$$J_s(\phi^*, z^*) = \sin(k_0(z^* + d_0)) \quad (5.13)$$

$$\text{para } -L_f < z^* + d_0 < 0$$

$$\text{e } |\phi^*| < \phi_f$$

A Fig. 5.2a mostra o esboço dos modos de onda caminhante na linha de de microfita que alimenta a antena.

2. Correntes senoidais por partes na região da junção

Na região próxima à junção, onde a linha de alimentação se une à antena, a corrente não é uniforme por causa da descontinuidade. Funções senoidais por partes, sobrepondo a linha de alimentação e a antena, são usadas para modelar esta não uniformidade. Então, definem-se

$$\bar{J}^{jun}(\phi^*, z^*) = \sum_{m=1}^M I_m J_j(\phi^*, z^*) \hat{z} \quad (5.14)$$

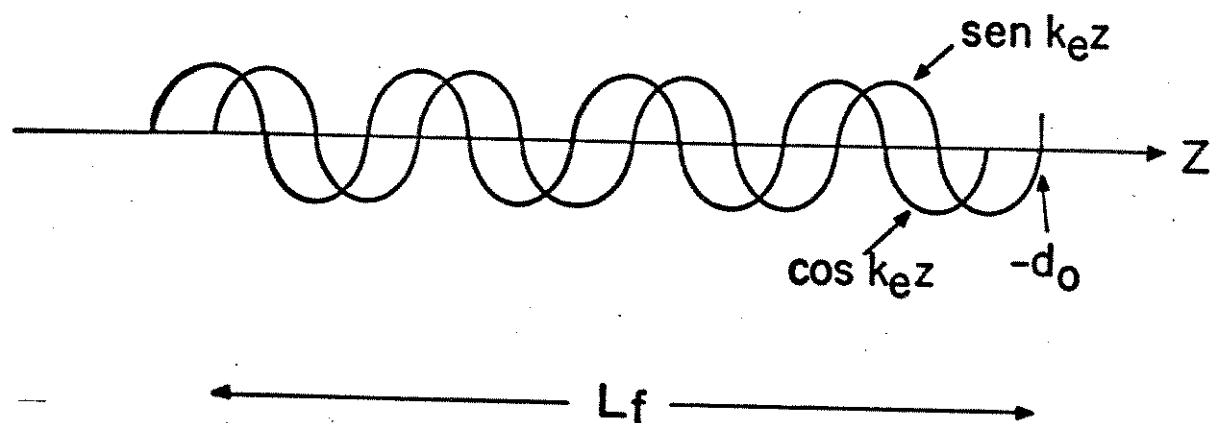
onde I_m são coeficientes de expansão a serem determinados, e

$$J_j(\phi^*, z^*) = \begin{cases} \frac{\sin(k_\bullet(z^* - z_{n-1}))}{\sin(k_\bullet \Delta z_n)} & \text{para } z_{n-1} \leq z^* < z_n \\ & |\phi^*| < \phi_f \\ \frac{\sin(k_\bullet(z_{n+1} - z^*))}{\sin(k_\bullet \Delta z_n)} & \text{para } z_n \leq z^* < z_{n+1} \\ & |\phi^*| < \phi_f \end{cases} \quad (5.15)$$

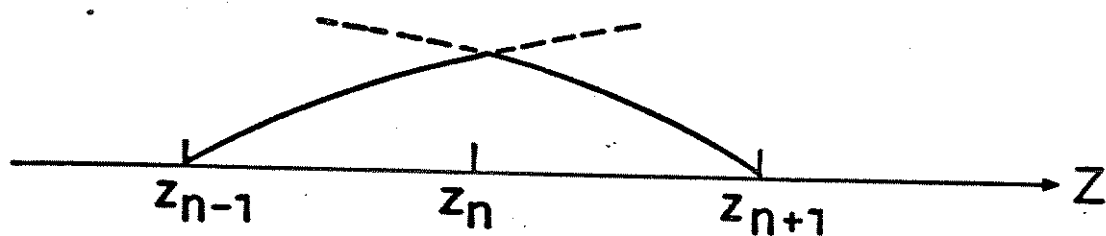
sendo

$$\Delta z_n = z_{n+1} - z_n = z_n - z_{n-1} \quad (5.16)$$

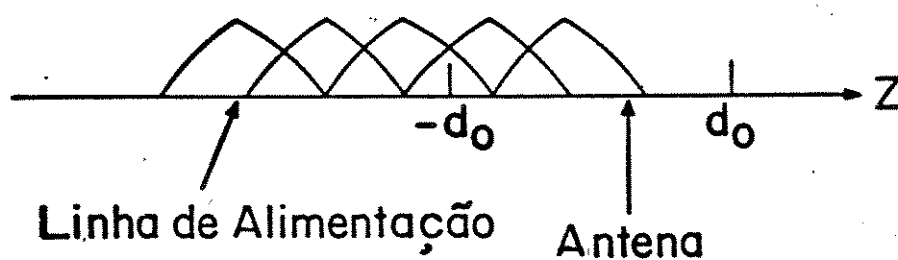
O número de onda das funções senoidais é arbitrário. Por conveniência, escolhe-se igual a $k_\bullet$. As Figs. (5.2b) e (5.2c) ilustram, respectivamente, uma função senoidal por partes e o esboço da superposição destas na junção.



(a)



(b)



(c)

Fig. 5.2. (a) Esboço dos modos de onda caminhante na linha de microfita.

(b) Função senoidal por partes.

(c) Sobreposição de funções senoidais por partes na junção.

3. Funções de expansão de domínio completo sobre a antena

Expandindo-se a corrente sobre a antena em termos de uma série de funções senoidais de domínio completo têm-se

$$\bar{J}^{ant}(\phi^*, z^*) = \sum_{p=1}^P K_p P_z(\phi^*, z^*) \hat{z} + \sum_{q=1}^Q L_q P_\phi(\phi^*, z^*) \hat{\phi} \quad (5.17)$$

onde K_p e L_q são coeficientes de expansão a serem determinados e

$$P_z(\phi^*, z^*) = \sin(p\pi(z^* + d_0)/2d_0) \quad \text{para} \quad \begin{array}{l} |z^*| < d_0 \\ |\phi^*| < \phi_0 \end{array} \quad (5.18)$$

$p = 1, 2, \dots, P$

e

$$P_\phi(\phi^*, z^*) = \sin(q\pi(\phi^* + \phi_0)/2\phi_0) \quad \text{para} \quad \begin{array}{l} |z^*| < d_0 \\ |\phi^*| < \phi_0 \end{array} \quad (5.19)$$

$q = 1, 2, \dots, Q$

onde $\phi_0 = W_0/2r_z$, sendo W_0 o comprimento da antena na direção ϕ .

Observam-se que estes modos de expansão não contêm qualquer variação na direção ortogonal à direção do fluxo de corrente, e a expressão para levar em conta o efeito de borda não foi incluída, pois, embora melhore a convergência do método dos momentos, há um aumento de complexidade na integração numérica [29].

Os modos de expansão mostrados são usados para aproximar a distribuição de corrente a se determinar. Substituindo estas aproximações na Eq. (5.5) e discretizando a equação resultante através dos produtos escalares de funções de testes, iguais às de expansão (método de Galerkin [18]), porém definidas com relação ao sistema (r, ϕ, z) , obtém-se um sistema de equações que pode

ser escrito na forma

$$[Z][I] = [V] \quad (5.20)$$

Por causa da analogia com as equações de rede de Kirchhoff, as matrizes $[Z]$, $[I]$ e $[V]$ são denominadas, respectivamente, matriz impedância, corrente e voltagem generalizada do método dos momentos [30].

Têm-se, então, um número de incógnitas dado por

$$N = 1 + M + P + Q \quad (5.21)$$

onde

M = Número dos coeficientes de expansão, I_m , da corrente na região da junção.

P = Número dos coeficientes de expansão, K_p , da corrente na antena na direção z .

Q = Número dos coeficientes de expansão, L_q , da corrente na antena na direção ϕ .

A incógnita restante refere-se a $-R$, que é a amplitude da onda de corrente refletida na linha, e faz com que o número de incógnitas seja maior que o número de equações. A adição da função de teste definida por

$$\bar{T}(\phi, z) = T_z(\phi, z)\hat{z} \quad (5.22)$$

onde

$$T_z(\phi, z) = \begin{cases} \frac{\sin(k_t(z+L_f+d_o))}{\sin(k_t L_f/2)} & \text{para } -L_f-d_o \leq z^* < -L_f/2-d_o \\ & |\phi^*| < \phi_f \\ \frac{\sin(k_t(-d_o-z))}{\sin(k_t L_f/2)} & \text{para } -L_f/2-d_o \leq z^* < -d_o \\ & |\phi^*| < \phi_f \end{cases} \quad (5.23)$$

faz com que o número de equações torne igual a N . Por conveniência seleciona-se $k_t = 0,2\pi/L_f$, onde L_f é o comprimento finito da linha de microfita.

Com o intuito de melhor compreensão da Eq. (5.20), subdividem-se as matrizes em quatro regiões como mostradas simbolicamente abaixo

$$\begin{bmatrix} T_z/J_r & T_z/J_j & T_z/P_z & T_z/P_\phi \\ J_j/J_r & J_j/J_j & J_j/P_z & J_j/P_\phi \\ P_z/J_r & P_z/J_j & P_z/P_z & P_z/P_\phi \\ P_\phi/J_r & P_\phi/J_j & P_\phi/P_z & P_\phi/P_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R \\ I_m \\ K_p \\ L_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_z/J_i \\ J_j/J_i \\ P_z/J_i \\ P_\phi/J_i \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

onde

T_z = Função de teste sobre a linha de alimentação (uma única função senoidal por partes).

J_j = Uma série de M funções senoidais por partes na junção.

P_z = Uma série de P funções de domínio completo para as correntes na direção z na antena.

P_ϕ = Uma série de Q funções de domínio completo para correntes na direção ϕ na antena.

J_i = Modo de onda de corrente caminhante incidente.

J_r = Modo de onda de corrente caminhante refletida.

Os termos P_z/J_j da matriz $[Z]$, por exemplo, representam as impedâncias entre as funções de teste de domínio completo na direção z sobre a antena e os modos de expansão senoidais por partes na junção. Os termos da fonte no vetor voltagem surgem das interações entre as funções de teste e o modo de onda caminhante incidente na linha de alimentação.

5.4. Cálculo dos Elementos das Matrizes do Método dos Momentos

Notam-se que para o cálculo da matriz impedância generalizada da Eq. (5.24), existem quatro combinações diferentes entre as funções de teste e o modo de onda caminhante refletida, e doze combinações distintas entre as funções de teste e as funções de expansão. Para a determinação da matriz voltagem generalizada, existem quatro combinações entre as funções de teste e o modo de onda caminhante incidente. O primeiro elemento da matriz $[Z]$ é dado por

$$Z_{11} = T_z / J_r \quad (5.25)$$

Substituindo-se o modo de onda caminhante refletida, $\bar{J}^{ref}(\phi^*, z^*)$, dado na Eq. (5.8), no primeiro membro da Eq. (5.5) e efetuando o produto escalar entre a função de teste $\bar{T}(\phi, z)$, dada na Eq. (5.22), e a equação resultante, integrando no domínio da função de teste, obtém-se

$$Z_{11} = \iint_S T_z \hat{z} \cdot \left[\iint_{S^*} \bar{G}^{(22)}(\bar{R}/\bar{R}^*) \cdot J_r \hat{z} ds^* \Big|_{\tan} \right] ds \quad (5.26)$$

Usando resultados da Eq. (4.20), a Eq. (5.26) fica

$$\begin{aligned} Z_{11} = & \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_0) / \lambda_z^2 \iint_S \iint_{S^*} T_z \left[\left(e_{z0} H_{10} + (1 + g_{z0}) J_{10} \right) H_{10f} \right. \\ & + \left(e_{z0}^* H_{10} + g_{z0}^* J_{10} \right) J_{10f} + \left(e_{z0} H_p + (1 + g_{z0}) J_p \right) H_{pf} \\ & \left. + \left(e_{z0}^* H_p + g_{z0}^* J_p \right) J_{pf} \right] J_r ds ds^* \end{aligned} \quad (5.27)$$

Das Eqs. (4.18) e (4.19), trocando-se h por $-h$ e a função de Bessel pela função de Hankel de primeira espécie, resultam

$$H_{10f} = \lambda_2^2 H_n^{(1)}(\lambda_2 r_2) \cos(n\phi^*) \exp(-hz^*)/k_2 \quad (5.28)$$

$$H_{0f} = \lambda_2^2 H_n^{(1)}(\lambda_2 r_2) \sin(n\phi^*) \exp(-hz^*)/k_2 \quad (5.29)$$

e

$$J_{10f} = H_{10f} J_n(\lambda_2 r_2)/H_n^{(1)}(\lambda_2 r_2) \quad (5.30)$$

$$J_{0f} = H_{0f} J_n(\lambda_2 r_2)/H_n^{(1)}(\lambda_2 r_2) \quad (5.31)$$

Resolvem-se, inicialmente, as integrais em ϕ^* e z^* , onde

$$ds^* = r_2 d\phi^* dz^* \quad (5.32)$$

$$\int_{-\phi_f}^{\phi_f} \sin(n\phi^*) d\phi^* = 0 \quad (5.33)$$

$$\Psi_f = \int_{-\phi_f}^{\phi_f} \cos(n\phi^*) d\phi^* = \begin{cases} 2\phi_f & \text{para } n = 0 \\ 2\sin(n\phi_f)/n & \text{para } n \neq 0 \end{cases} \quad (5.34)$$

Então a Eq. (5.27) fica

$$z_{11} = \frac{t}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} (2-\delta_0) \Psi_f I_1 r_2 H_n^{(1)}(\lambda_2 r_2)/k_2 \iint_S T_z \left[e_{20} H_{10} + (1 + g_{20}) J_{10} + J_n(\lambda_2 r_2) \left(e_{20}^* H_{10} + g_{20}^* J_{10} \right) / H_n^{(1)}(\lambda_2 r_2) \right] ds \quad (5.35)$$

Resolvendo com procedimento similar as integrals em ϕ e z e aplicando-se o mesmo desenvolvimento para as outras combinações de funções das matrizes $[Z]$ e $[V]$, obtém-se

$$z_{11} = T_z/J_r = \frac{l}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (2-\delta_0) \Psi_f^2 I_1 X_1 F_1 dh \quad (5.36)$$

$$z_{1s} = T_z/J_j = \frac{l}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (2-\delta_0) \Psi_f^2 I_2 X_1 F_1 dh \quad (5.37)$$

$$z_{1t} = T_z/P_z = \frac{l}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (2-\delta_0) \Psi_f \Psi_o I_3 X_1 F_1 dh \quad (5.38)$$

$$z_{1u} = T_z/P_\phi = \frac{l}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (2-\delta_0) \Psi_f \Psi_d I_4 X_1 F_2 dh \quad (5.39)$$

$$z_{s1} = J_j/J_r = \frac{l}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (2-\delta_0) \Psi_f^2 I_1 X_2 F_1 dh \quad (5.40)$$

$$z_{ss} = J_j/J_j = \frac{l}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (2-\delta_0) \Psi_f^2 I_2 X_2 F_1 dh \quad (5.41)$$

$$z_{st} = J_j/P_z = \frac{l}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (2-\delta_0) \Psi_f \Psi_o I_3 X_2 F_1 dh \quad (5.42)$$

$$z_{su} = J_j/P_\phi = \frac{l}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (2-\delta_0) \Psi_f \Psi_d I_4 X_2 F_2 dh \quad (5.43)$$

$$z_{t1} = P_z/J_r = \frac{l}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (2-\delta_0) \Psi_f \Psi_o I_3 X_1 F_1 dh \quad (5.44)$$

$$z_{ts} = P_z/J_j = \frac{l}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (2-\delta_0) \Psi_f \Psi_o I_2 X_2 F_1 dh \quad (5.45)$$

$$z_{tt} = P_z/P_z = \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (2-\delta_0) \Psi_0^2 I_3 X_3 F_1 dh \quad (5.46)$$

$$z_{tu} = P_z/P_\phi = \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (2-\delta_0) \Psi_0 \Psi_d I_4 X_3 F_2 dh \quad (5.47)$$

$$z_{ut} = P_\phi/J_r = \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (2-\delta_0) \Psi_f \Psi_d I_1 X_4 F_3 dh \quad (5.48)$$

$$z_{us} = P_\phi/J_j = \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (2-\delta_0) \Psi_f \Psi_d I_2 X_4 F_3 dh \quad (5.49)$$

$$z_{ut} = P_\phi/P_z = \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (2-\delta_0) \Psi_d \Psi_0 I_3 X_4 F_3 dh \quad (5.50)$$

$$z_{uu} = P_\phi/P_\phi = \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (2-\delta_0) \Psi_d^2 I_4 X_4 F_4 dh \quad (5.51)$$

$$v_{tt} = T_z/J_i = \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (2-\delta_0) \Psi_f^2 I_5 X_1 F_1 dh \quad (5.52)$$

$$v_{st} = J_j/J_i = \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (2-\delta_0) \Psi_f^2 I_5 X_2 F_1 dh \quad (5.53)$$

$$v_{tt} = P_z/J_i = \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (2-\delta_0) \Psi_f \Psi_0 I_5 X_3 F_1 dh \quad (5.54)$$

$$v_{ut} = P_\phi/J_i = \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (2-\delta_0) \Psi_f \Psi_d I_5 X_4 F_3 dh \quad (5.55)$$

Nas Eqs. (5.36) - (5.55) os indices $s = 2, 3, \dots, M+1$,
 $t = M+2, M+3, \dots, M+P+1$ e $u = M+P+2, M+P+3, \dots, M+P+Q+1$.

As funções Ψ_f , Ψ_d e Ψ_o são resultantes das integrais

$$\Psi_f = \int_{-\phi_f}^{\phi_f} \cos(n\phi^*) d\phi^* = \int_{-\phi_f}^{\phi_f} \cos(n\phi) d\phi \quad (5.56)$$

$$\Psi_d = \int_{-d_o}^{d_o} \exp(-\imath h z^*) dz^* = \int_{-d_o}^{d_o} \exp(\imath h z) dz \quad (5.57)$$

$$\Psi_o = \int_{-\phi_o}^{\phi_o} \cos(n\phi^*) d\phi^* = \int_{-\phi_o}^{\phi_o} \cos(n\phi) d\phi \quad (5.58)$$

que resolvidas resultam

$$\Psi_f = \begin{cases} 2\phi_f & \text{para } n = 0 \\ 2\text{sen}(n\phi_f)/n & \text{para } n \neq 0 \end{cases} \quad (5.59)$$

$$\Psi_d = \begin{cases} 2d_o & \text{para } h = 0 \\ 2\text{sen}(hd_o)/h & \text{para } h \neq 0 \end{cases} \quad (5.60)$$

$$\Psi_o = \begin{cases} 2\phi_o & \text{para } n = 0 \\ 2\text{sen}(n\phi_o)/n & \text{para } n \neq 0 \end{cases} \quad (5.61)$$

As funções I_1, I_2, I_3, I_4 e I_5 , são resultantes das integrais

$$I_1 = \int J_r \exp(-4hz^*) dz^* \quad (5.62)$$

sendo J_r dada pela Eq. (5.11)

$$I_2 = \int J_j \exp(-4hz^*) dz^* \quad (5.63)$$

com J_j dada pela Eq. (5.15)

$$I_3 = \int P_z \exp(-4hz^*) dz^* \quad (5.64)$$

com P_z dada pela Eq. (5.18)

$$I_4 = \int P_\phi \sin(n\phi^*) dz^* \quad (5.65)$$

com P_ϕ dada pela Eq. (5.19)

$$I_5 = \int J_i \exp(-4hz^*) dz^* \quad (5.66)$$

com J_i dada pela Eq. (5.10)

que solucionadas resultam em

$$\begin{aligned}
I_1 = & [\exp(ihd_0)/2] \left\{ \left[\exp[-i(k_0 - h)\lambda_0/4] - \exp[-i(k_0 - h)(L_f + \lambda_0/4)] \right. \right. \\
& \left. \left. - 1 + \exp[-i(k_0 - h)L_f] \right] / i(k_0 - h) \right. \\
& \left. - \left[\exp[i(k_0 + h)\lambda_0/4] - \exp[i(k_0 + h)(L_f + \lambda_0/4)] \right. \right. \\
& \left. \left. + 1 - \exp[i(k_0 + h)L_f] \right] / i(k_0 + h) \right\} \quad (5.67)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 = & \frac{1}{2\sin(k_0 \Delta z_n)} \left\{ \exp[ik_0 z_{n+1}] \left[\exp[-i(k_0 + h)z_{n+1}] \right. \right. \\
& \left. \left. - \exp[-i(k_0 + h)z_n] \right] / (k_0 + h) \right. \\
& + \exp[-ik_0 z_{n+1}] \left[\exp[i(k_0 - h)z_{n+1}] - \exp[i(k_0 - h)z_n] \right] / (k_0 - h) \\
& - \exp[ik_0 z_{n-1}] \left[\exp[-i(k_0 + h)z_n] - \exp[-i(k_0 + h)z_{n-1}] \right] / (k_0 + h) \\
& \left. - \exp[-ik_0 z_{n-1}] \left[\exp[i(k_0 - h)z_n] - \exp[i(k_0 - h)z_{n-1}] \right] / (k_0 - h) \right\} \quad (5.68)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 = & \exp[i\pi/2] \sin[\pi/2 - hd_0] / [i(-h + \pi/2d_0)] \\
& - \exp[-i\pi/2] \sin[\pi/2 + hd_0] / [i(h + \pi/2d_0)] \quad (5.69)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 = & \cos[q\pi/2] \left[\sin[q\pi/2 - n\phi_0] / [-n + q\pi/2\phi_0] \right. \\
& \left. - \sin[q\pi/2 + n\phi_0] / [n + q\pi/2\phi_0] \right] \quad (5.70)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_5 = & [\exp(i h d_0) / 2] \left\{ \left[\exp[-i(k_0 - h)\lambda_0 / 4] - \exp[-i(k_0 - h)(L_f + \lambda_0 / 4)] \right. \right. \\
& \left. \left. + 1 - \exp[-i(k_0 - h)L_f] \right] / i(k_0 - h) \right. \\
& - \left[\exp[i(k_0 + h)\lambda_0 / 4] - \exp[i(k_0 + h)(L_f + \lambda_0 / 4)] \right. \\
& \left. \left. - 1 + \exp[i(k_0 + h)L_f] \right] / i(k_0 + h) \right\} \quad (5.71)
\end{aligned}$$

As funções X_1 , X_2 , X_3 e X_4 , são resultantes das integrais em ϕ e z , ou sejam

$$X_1 = \int T_z \exp(i h z) dz \quad (5.72)$$

com T_z dada na Eq. (5.23)

$$X_2 = \int J_j \exp(i h z) dz \quad (5.73)$$

com J_j dada na Eq. (5.15)

$$X_3 = \int P_z \exp(i h z) dz \quad (5.74)$$

com P_z dada na Eq. (5.18)

$$X_4 = \int P_\phi \sin(n\phi) d\phi \quad (5.75)$$

com P_ϕ dada na Eq. (5.19). Observam-se porém, que J_j , P_z e P_ϕ , nas equações (5.73)-(5.75), tratam-se de funções de teste.

X_1 pode ser obtida da expressão de X_2 que é dada por

$$\begin{aligned}
 X_2 = \frac{1}{2\text{sen}(k_{\bullet}\Delta z_m)} & \left\{ \exp(i k_{\bullet} z_{m+1}) \left[\exp(-i(k_{\bullet}-h)z_{m+1}) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \exp(-i(k_{\bullet}-h)z_m) \right] / (k_{\bullet}-h) \right. \\
 & + \exp(-i k_{\bullet} z_{m+1}) \left[\exp(i(k_{\bullet}+h)z_{m+1}) - \exp(i(k_{\bullet}+h)z_m) \right] / (k_{\bullet}+h) \\
 & - \exp(i k_{\bullet} z_{m-1}) \left[\exp(-i(k_{\bullet}-h)z_m) - \exp(-i(k_{\bullet}-h)z_{m-1}) \right] / (k_{\bullet}-h) \\
 & \left. - \exp(-i k_{\bullet} z_{m-1}) \left[\exp(i(k_{\bullet}+h)z_m) - \exp(i(k_{\bullet}+h)z_{m-1}) \right] / (k_{\bullet}+h) \right\} \quad (5.76)
 \end{aligned}$$

fazendo-se

$$k_{\bullet} = k_t, \quad \Delta z_m = L_f/2, \quad z_{m-1} = -L_f - d_o, \quad z_m = -L_f/2 - d_o \quad \text{e} \quad z_{m+1} = -d_o.$$

$$\begin{aligned}
 X_3 = \exp(i\pi/2)\text{sen}(\pi/2 + h d_o) / (i(h + \pi/2d_o)) \\
 - \exp(-i\pi/2)\text{sen}(\pi/2 - h d_o) / (i(-h + \pi/2d_o)) \quad (5.77)
 \end{aligned}$$

A expressão para o cálculo de X_4 é igual à expressão para o cálculo de I_4 .

As funções F_1 , F_2 , F_3 e F_4 , resultantes dos termos independentes de ϕ e z (ϕ^* e z^*), são

$$F_1 = r_2^2 \lambda_2^2 J_n(\lambda_2 r_2) (B_1 + B_2) / k_2^2 \quad (5.78)$$

$$F_2 = r_2^2 J_n(\lambda_2 r_2) \left[i h n (B_1 + B_2) / k_2 r_2 - B_3 - B_4 \right] / k_2 \quad (5.79)$$

$$F_3 = r_2^2 \left[-i h n J_n(\lambda_2 r_2) (B_1 + B_2) / k_2 r_2 - B_5 - B_6 \right] / k_2 \quad (5.80)$$

$$F_4 = r_2^2 \left[(i h n J_n(\lambda_2 r_2) / k_2 r_2) [- i h n (B_1 + B_2) / k_2 r_2 + B_3 + B_4] \right. \\ \left. - i h n (B_5 + B_6) / k_2 r_2 + B_7 + B_8 \right] / \lambda_2^2 \quad (5.81)$$

onde

$$B_1 = H (H e_{20} / J + 1 + g_{20}) \quad (5.82)$$

$$B_2 = J (H e_{20}' / J + g_{20}') \quad (5.83)$$

$$B_3 = H^* (H b_{20} / J + d_{20}) \quad (5.84)$$

$$B_4 = J^* (H b_{20}' / J + d_{20}') \quad (5.85)$$

$$B_5 = H J^* (H^* f_{20} / J^* + h_{20}) \quad (5.86)$$

$$B_6 = J J^* (H^* f_{20}' / J^* + h_{20}') \quad (5.87)$$

$$B_7 = H^* J^* (H^* a_{20} / J^* + 1 + c_{20}) \quad (5.88)$$

$$B_8 = J^* J^* (H^* a_{20}' / J^* + c_{20}') \quad (5.89)$$

Nas Eqs. (5.82)-(5.89) $J = J_n(\lambda_2 r_2)$, $H = H_n^{(4)}(\lambda_2 r_2)$,

$$J^* = \partial J_n(\lambda_2 r) / \partial r \Big|_{r=r_2} \quad \text{e} \quad H^* = \partial H_n^{(4)}(\lambda_2 r) / \partial r \Big|_{r=r_2}.$$

Uma vez obtidos todos os elementos das matrizes $[Z]$ e $[V]$, a amplitude da onda de corrente refletida $-R$, onde R é o coeficiente de reflexão de voltagem, e os coeficientes de expansão I_m , K_p e L_q , que formam a matriz coluna $[I]$, podem ser obtidos através do processo de inversão e multiplicação de matrizes, ou seja

$$[I] = [Z]^{-1} [V] \quad (5.90)$$

Uma vez conhecido o coeficiente de reflexão de voltagem, R , a resistência r e a reatância x de entrada da antena, normalizadas com relação a impedância característica da linha de alimentação, são dadas por [31]

$$r + jx = (1 + R)/(1 - R) \quad (5.91)$$

Pelo fato de se trabalhar com as equações de Maxwell (Eqs. (2.16)-(2.18)), para uma dependência harmônica no tempo do tipo $\exp(-j\omega t)$, o sinal da reatância x da Eq. (5.91) deve ser trocado, de forma que valores positivos de x correspondam a reatância indutiva e negativos a reatância capacitiva.

5.5. Resultados Numéricos

As respostas obtidas através da aplicação do método dos momentos, que soluciona a Eq. (5.5), são dependentes do comprimento finito da linha de microfita, L_f , das convergências das integrais em h e dos somatórios das funções de Bessel, de Hankel e das funções circulares $\cos(n\phi)$ e $\sin(n\phi)$, bem como da precisão no cálculo destas funções, da distância S em que as funções senoidais por partes se sobrepõem na antena, do meio comprimento destas funções, dado pela Eq. (5.16), e da quantidade de termos usados nas funções de expansão.

Para o cálculo das funções de Bessel e de Hankel de primeira espécie e suas derivadas, subrotinas em linguagem Fortran foram desenvolvidas, fazendo-se uso de fórmulas de diferenciação e recorrência [24] e também de aproximações polinomiais [25].

Da relação $\lambda^2 = k^2 - h^2$, para $h < k$, $\lambda^2 > 0$, calculam-se as funções de Bessel de primeira espécie $J_n(\lambda r)$, a de segunda espécie $Y_n(\lambda r)$ e suas derivadas. A função de Hankel de primeira espécie é obtida da relação

$$H_n^{(1)}(\lambda r) = J_n(\lambda r) + j Y_n(\lambda r) \quad (5.92)$$

Se $h < k$, $\lambda^2 < 0$ e nesse caso calculam-se as funções $I_n(\lambda r)$ e $K_n(\lambda r)$, obtendo-se as funções de Bessel e de Hankel das relações [24]

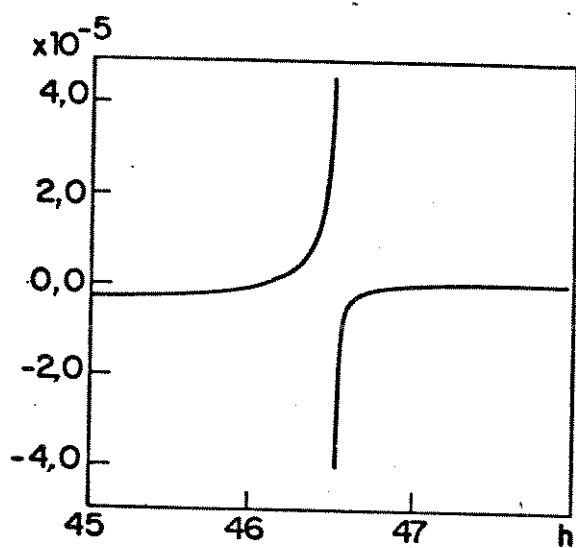
$$J_n(i\lambda r) = (i)^n I_n(\lambda r) \quad (5.93)$$

$$H_n^{(1)}(i\lambda r) = \frac{2}{\pi i^{n+1}} K_n(\lambda r) \quad (5.94)$$

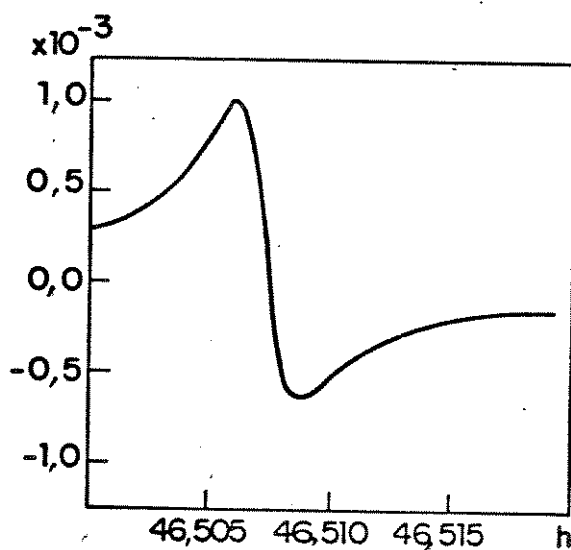
Para $h > k$, λ cresce proporcionalmente com h . Isto torna os argumentos das funções I e K , com valores expressivos. Devido à complexidade do cálculo dos coeficientes de espalhamento, apresentado no capítulo 3 e das limitações de representação numérica nos computadores, situações de saturação numérica (overflow) podem ocorrer. Com a finalidade de resolver esse problema, expressões assintóticas para o cálculo das funções F_1 , F_2 , F_3 e F_4 , dadas respectivamente nas Eqs. (5.78)-(5.81), foram deduzidas usando-se expressões assintóticas das funções I e K para grandes argumentos [24].

As integrais em h tratam-se de integrais no eixo real, onde atenção especial tem que ser dada, buscando a contribuição dos polos de onda de superfície. A Fig. 5.3a mostra a parte real do integrando, em função de h , da Eq. (5.36), no caso da análise de uma antena de forma "retangular", com $2d_0 = W_0 = 4,02$ cm, alimentada diretamente por uma linha de microfita com $W_f = 0,477$ cm, posicionada na interface das regiões 2 e 3 da Fig. 3.1, sendo $r_3 = 2,5$ cm, $r_2 = 2,659$ cm, $\epsilon_3 = 2,57\epsilon_0$ (ϵ_0 é a permissividade do espaço livre) e $\epsilon_2 = \epsilon_1 = \epsilon_0$, na região do polo para $n = 0$ e frequência de 2,20 GHz. Os valores da constante dielétrica e da espessura do substrato, foram escolhidos de forma que apenas o primeiro modo de onda de superfície exista.

A complexidade das expressões tornou inviável o uso de métodos analíticos [32-33] no cálculo da contribuição do polo de onda de superfície. Para se obter a contribuição do integrando na região do polo, consideram-se pequenas perdas no dielétrico, fazendo-se $\epsilon_3^* = \epsilon_3(1 + \text{tg}\delta)$ [34-35], resultando que $\text{Im}(k_3) > 0$. Este procedimento desloca o polo do eixo real [15], facilitando a integração numérica. Um valor de $\text{tg}\delta = 0,001$ foi usado, uma vez que



(a)



(b)

Fig 5.3. (a) Integrando para o cálculo do elemento z_{11} na região do polo sendo $\text{tg}\delta = 0$.

(b) Efeito das perdas nos valores do integrando na região do polo sendo $\text{tg}\delta = 0,001$.

testes de convergência mostraram que valores menores aumentam o tempo de processamento sem alterarem as respostas. Esse resultado para a tangente de perdas ($\text{tg}\delta$), confere com o obtido por Mosig [35]. A Fig. 5.3b mostra a parte real do integrando da Eq. (5.36), obtido nas mesmas condições da Fig. 5.3a, porém considerando-se perdas no dielétrico. O intervalo de integração na região do polo não é crítico, podendo-se integrar de k_1 a $2\zeta_p - k_1$ [35], onde ζ_p é o valor de h na localização do polo.

As integrais em h das Eqs. (5.36)-(5.55) apresentaram convergência dos resultados computando as contribuições dos integrandos de $h \cong -80k_0$ a $h \cong 80k_0$ (k_0 é a constante de propagação do espaço livre). Para se evitar aumento de tempo computacional na obtenção dos resultados, devido à redundância nos cálculos das funções de Bessel e de Hankel, que dependem de h , os elementos das matrizes [Z] e [V] são determinados simultaneamente.

Verificou-se que as respostas convergem para comprimentos do modo de onda caminhante (comprimento finito da linha de microfita) acima de $3\lambda_0$, onde λ_0 é o comprimento de onda guiado na linha. Trabalhou-se então com $L_f = 4\lambda_0$.

Pozar e Voda [29] constataram no estudo da antena de microfita retangular, alimentada por linha de microfita, sobre substrato plano, que as respostas obtidas analiticamente não são extremamente sensíveis a valores de $0,5 \leq S/2d_0 \leq 0,65$, verificando que dentro dessa faixa há uma boa concordância com os resultados experimentais. A Fig. 5.4 mostra a impedância de entrada para a antena descrita anteriormente nesse item, no quinto parágrafo, calculada nas frequências de 2,20; 2,25; 2,30 e 2,35 GHz, para valores de $S/2d_0$ igual a 0,45; 0,55 e 0,65. Resultados medidos obtidos por Pozar e Voda [29], para a antena sobre substrato plano, também são mostrados.

A concordância dos resultados mostra que a frequência de ressonância da antena não é fortemente afetada pela curvatura do substrato. Porém, um efeito expressivo nos diagramas de radiação para campo distante, com relação a antena sobre substrato plano é esperado. Os cálculos destes diagramas podem ser feitos em trabalhos futuros, uma vez que se conhece a função de Green diádica para a região externa e a distribuição de corrente na antena.

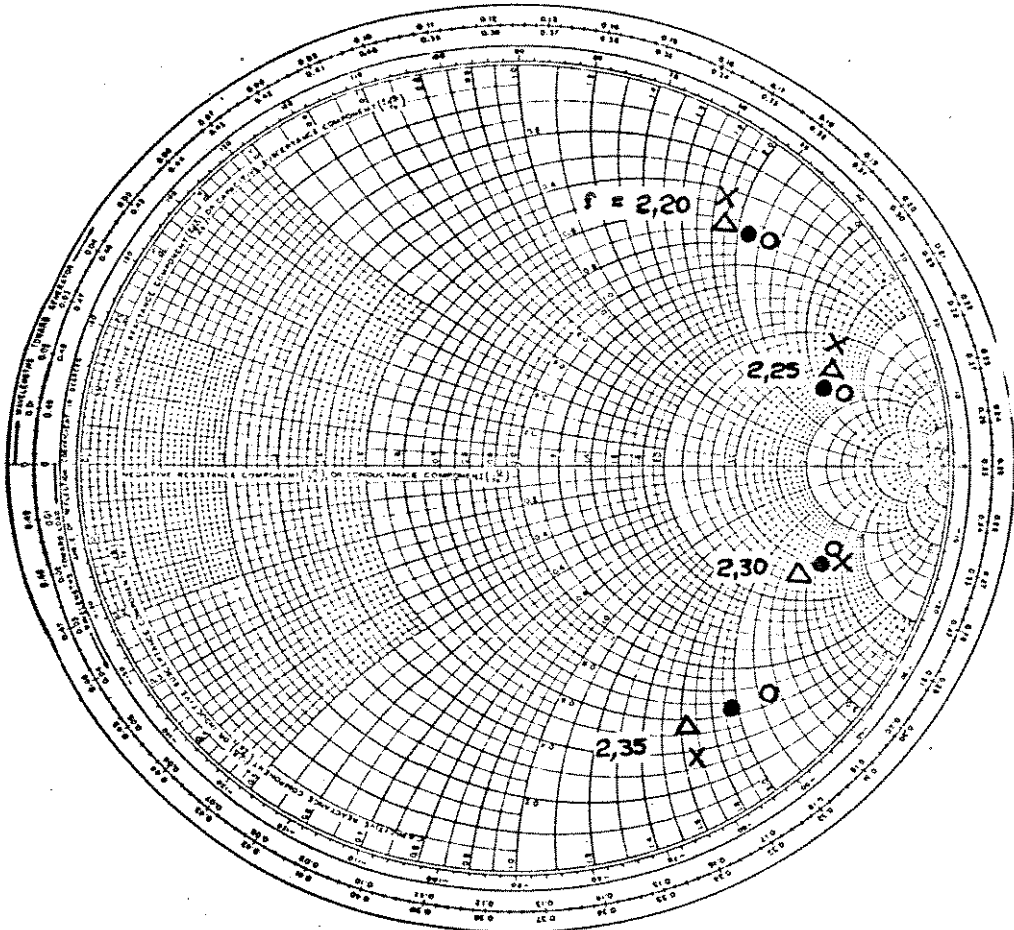


Fig. 5.4. Impedância de entrada de uma antena de microfita retangular com $2d_o = W_o = 4,02$ cm, alimentada diretamente por uma linha de microfita de largura $W_f = 0,477$ cm, com $r_3 = 2,5$ cm, $r_2 = 2,659$ cm, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_o$, $\epsilon_2 = 2,57\epsilon_o$, nas frequências de 2,20; 2,25; 2,30 e 2,35 GHz, sendo:

- Δ calculado para $S/2d_o = 0,45$;
- calculado para $S/2d_o = 0,55$;
- calculado para $S/2d_o = 0,65$;
- x valores medidos por [29] para antena com as mesmas dimensões, porém sobre substrato plano.

A Fig. 5.5 apresenta o efeito da variação do comprimento da antena na direção z , na frequência de ressonância, com valores de $2d_0$ igual a 3,80 cm e 4,24 cm, nas frequências de 2,20; 2,25; 2,30 e 2,35 GHz, para $S/2d_0 = 0,55$. As outras dimensões da antena foram mantidas. Cálculos do efeito da variação do comprimento da antena na direção ϕ , com W_0 igual a 3,80 cm e 4,24 cm, para $S/2d_0 = 0,55$, também foram obtidos e o efeito verificado na frequência de ressonância foi desprezível. Os resultados obtidos confirmam a ressonância da antena na direção z , notando-se o efeito significativo na frequência de ressonância para variações do comprimento nessa direção.

As Figs. 5.6 a 5.8 apresentam a variação na impedância de entrada $Z_{in} = r + jx$, normalizada com relação a impedância característica da linha de alimentação, em função da frequência, da antena sob análise, respectivamente para os casos sem cobertura, com cobertura dielétrica de espessura $H/2$ e com cobertura dielétrica de espessura H , onde $H = r_2 - r_3$, sendo que, com cobertura, $\epsilon_1 = \epsilon_0$ e $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 2,57\epsilon_0$.

A Fig. 5.9 mostra, comparativamente, as três reatâncias das Figs. 5.6 a 5.8. Nota-se o efeito da cobertura dielétrica na frequência de ressonância da antena, alterando sensivelmente esta frequência, mesmo para uma espessura de cobertura de $H/2$.

As respostas obtidas apresentaram convergência utilizando-se oito funções senoidais por partes na junção, com um meio comprimento de $0,05\lambda_0$, onde λ_0 é o comprimento de onda guiado na linha de microfita.

O efeito nas respostas, considerando o somatório dos termos das funções de Bessel, de Hankel e das funções circulares acima de n igual a dezesseis, foi desprezível.

Na presente solução do método dos momentos, usaram-se sobre a antena três modos de domínio completo na direção z , dados pela Eq. (5.18), com simetria par ($p = 1,3,5$) e três modos de domínio completo com simetria ímpar ($q = 2,4,6$). Outros modos têm um efeito insignificante. O número verificado de funções de expansão para convergência dos resultados, concordam com o obtido por Pozar e Voda [29].

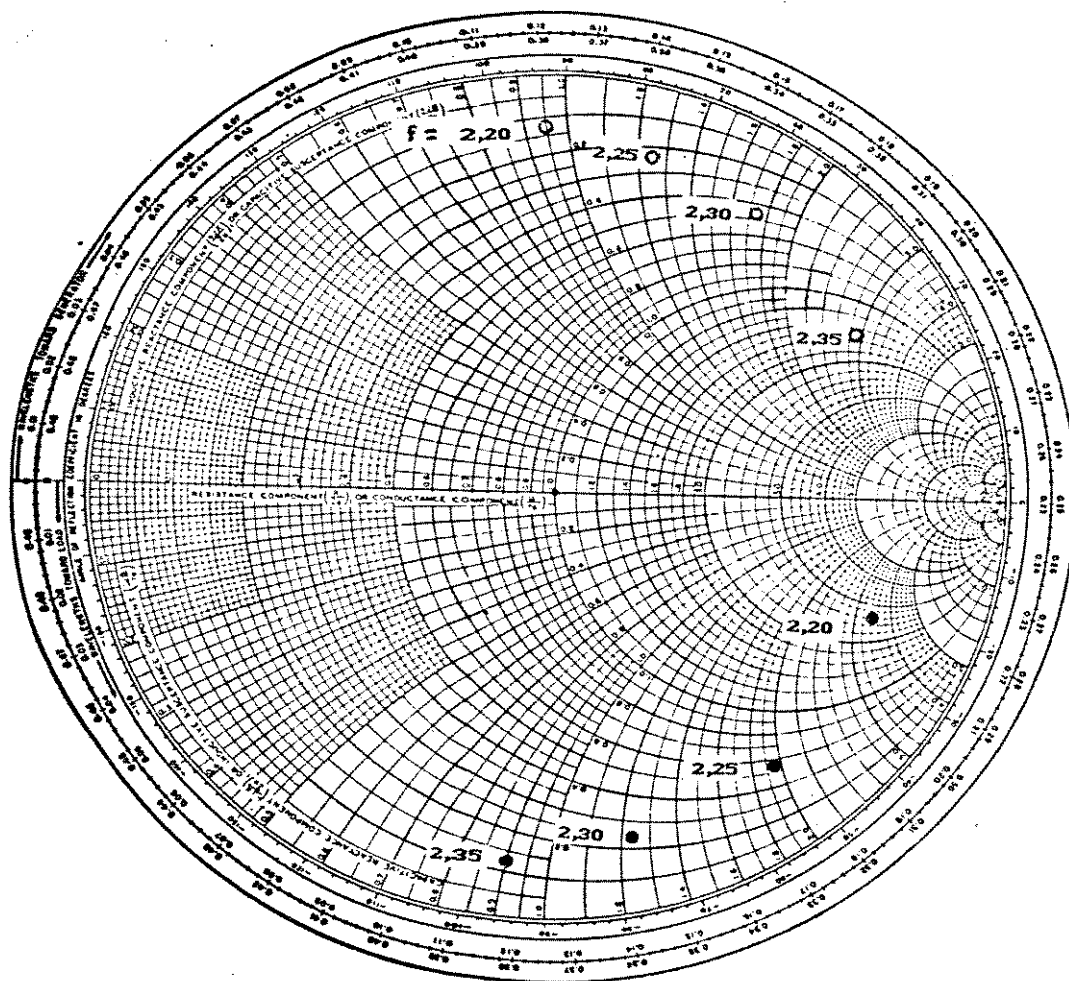


Fig. 5.5. Efeito da variação do comprimento $2d_0$ na frequência de ressonância da antena descrita na Fig. 5.4. Os cálculos foram feitos com $S/2d_0 = 0,55$, com:

O para $2d_0 = 3,80$ cm;

● para $2d_0 = 4,24$ cm;

nas frequências de 2,20; 2,25; 2,30 e 2,35 GHz.

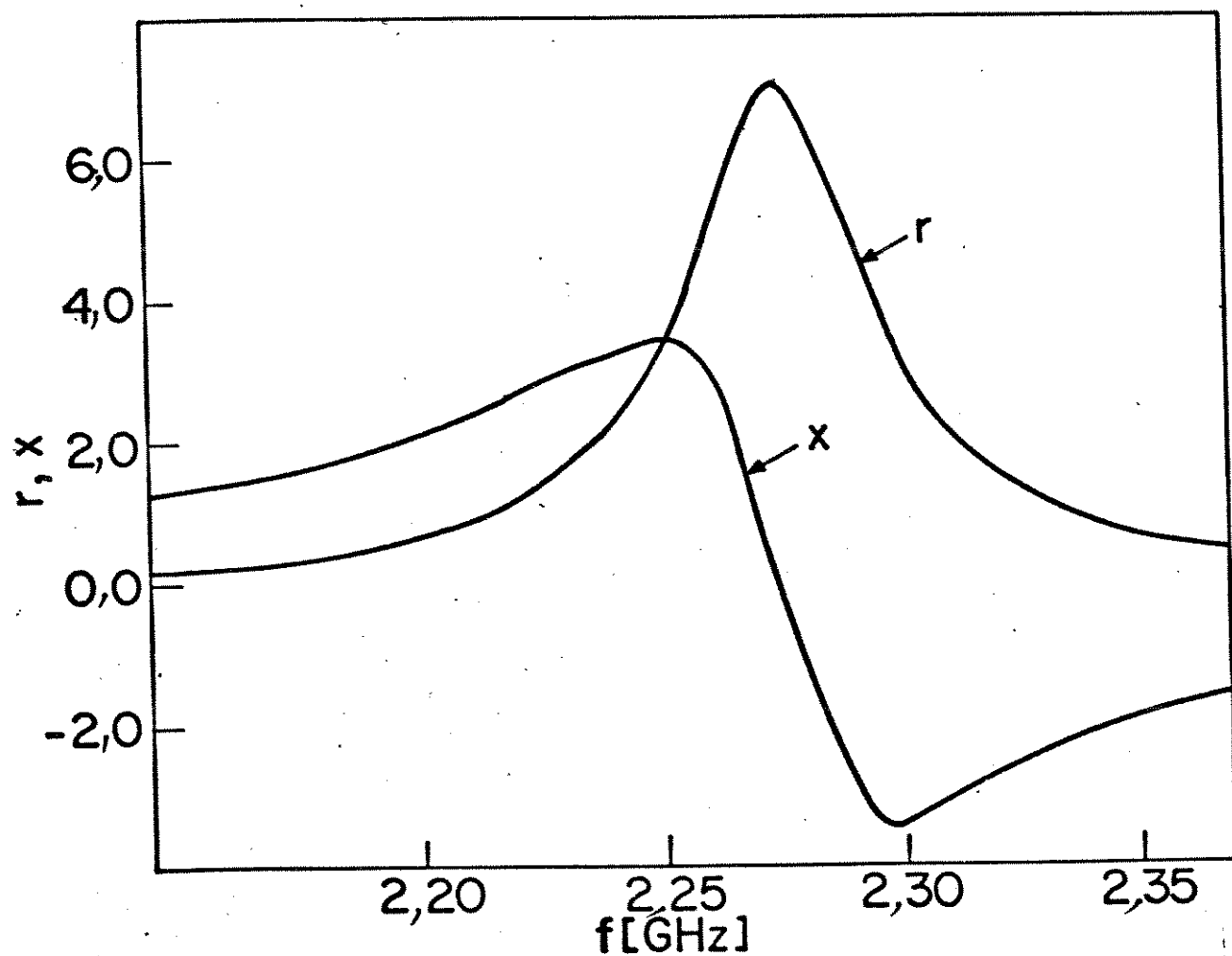


Fig. 5.6. Impedância de entrada, normalizada com relação à impedância característica da linha de alimentação, em função da frequência, para a antena da Fig.5.4. Os cálculos foram obtidos com uma relação de $S/2d_0 = 0,55$, sem cobertura dielétrica.

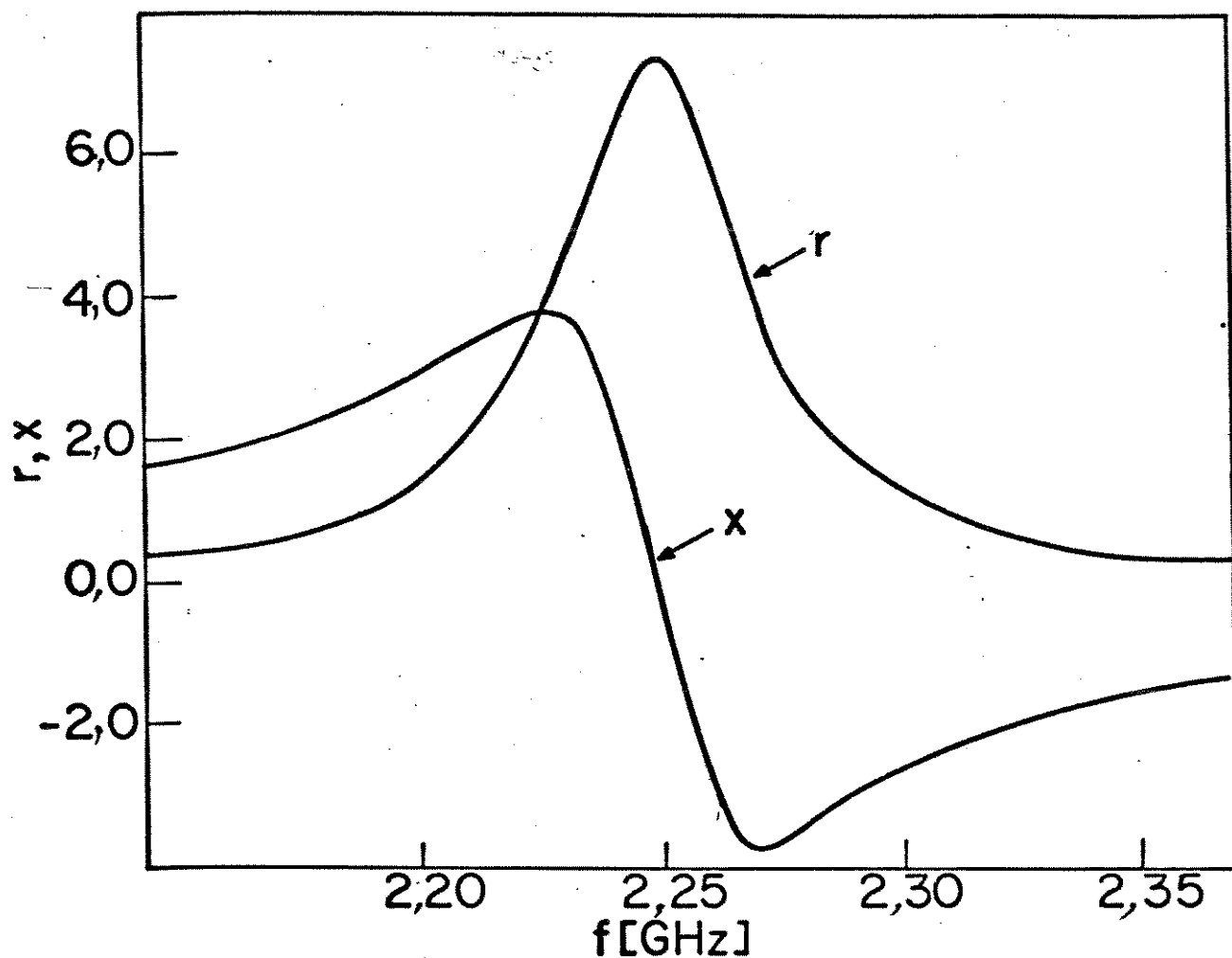


Fig. 5.7. Impedância de entrada, normalizada com relação à impedância característica da linha de alimentação, em função da frequência, para a antena da Fig.5.4, porém com cobertura dielétrica com espessura de $H/2$ sendo $H = 0,159$ cm, $\epsilon_1 = \epsilon_0$ e $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 2,57\epsilon_0$. Os cálculos foram obtidos com uma relação de $S/2d_0 = 0,55$.

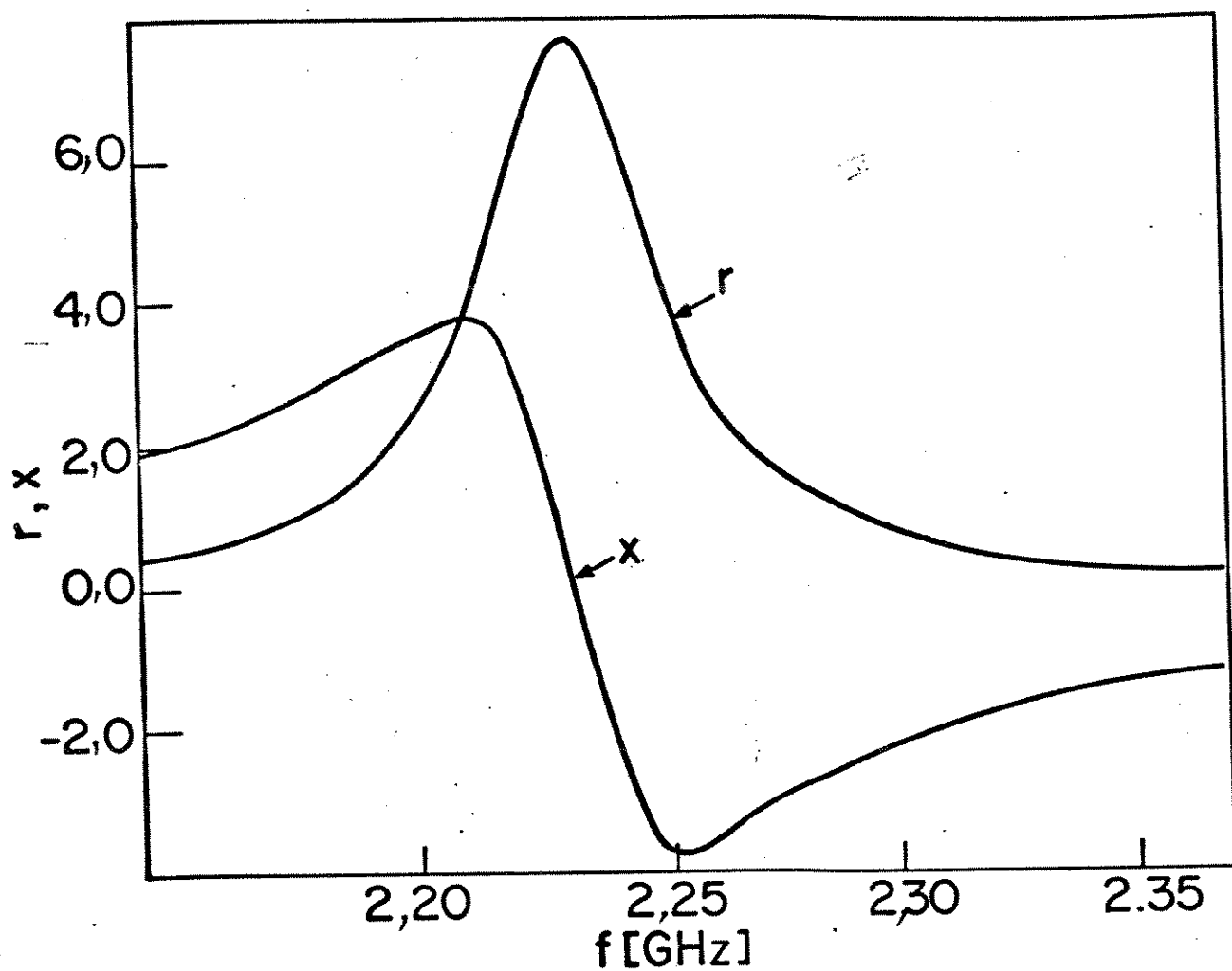


Fig. 5.8. Impedância de entrada, normalizada com relação à impedância característica da linha de alimentação, em função da frequência, para a antena da Fig.5.4, porém com cobertura dielétrica com espessura de $H = 0,159$ cm, $\epsilon_1 = \epsilon_0$ e $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 2,57\epsilon_0$. Os cálculos foram obtidos com uma relação de $S/2d_0 = 0,55$.

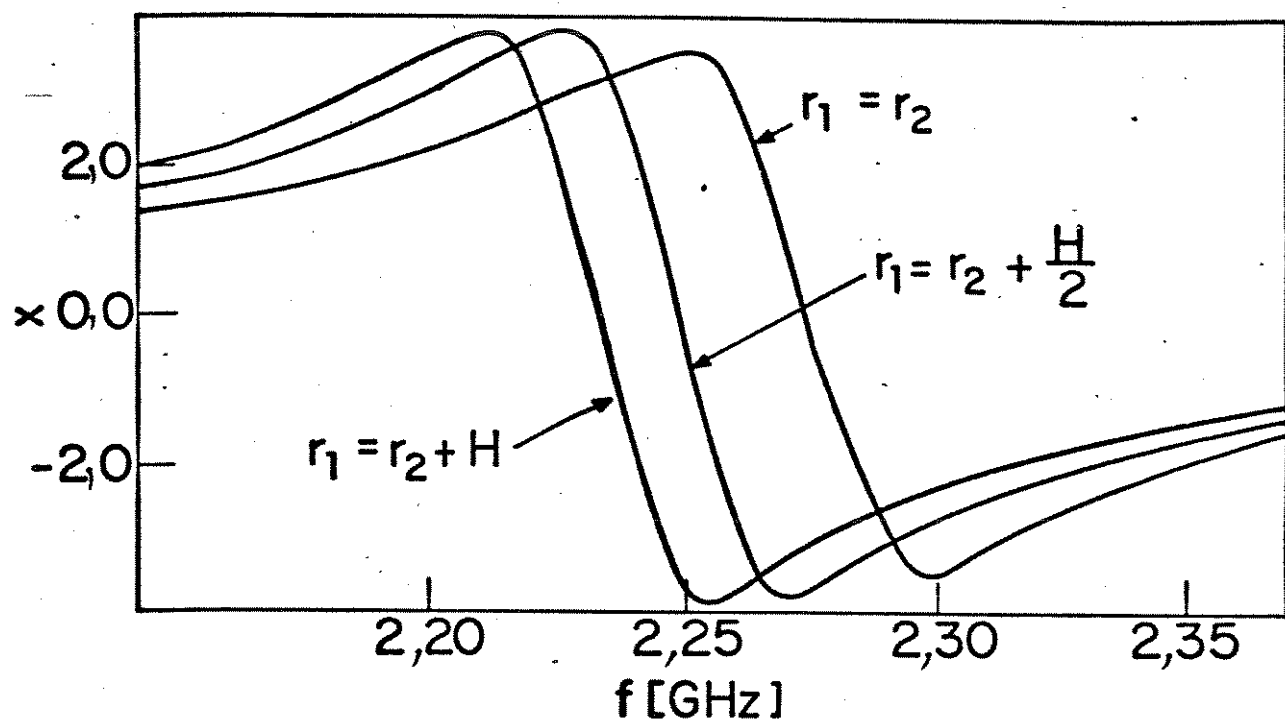


Fig. 5.9. Comparação entre as reatâncias das Figs. 5.6 a 5.8, destacando o efeito da cobertura dielétrica na frequência de ressonância da antena.

Os dielétricos para todas as respostas apresentadas, foram considerados não magnéticos, ou sejam, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_0$, onde μ_0 é a permeabilidade do espaço livre. As constantes de propagação da linha de alimentação e as localizações dos polos de ondas de superfície, para as análises da antena sem cobertura e com cobertura de espessura $H = 0,159$ cm, são dados, respectivamente, nas tabelas 4.1 e 4.2.

C A P Í T U L O V I

C O N C L U S Õ E S

O formalismo das funções de Green diádicas, foi utilizado neste trabalho, para se analisar o comportamento dos campos eletromagnéticos em meios divididos em quatro camadas cilíndricas concêntricas, sendo a camada central um condutor perfeito.

Como aplicações da formulação geral, dois casos particulares foram analisados: a linha de microfita infinita sobre substrato cilíndrico circular e a antena de microfita de forma "retangular", alimentada diretamente por uma linha de microfita, também sobre substrato cilíndrico circular. Em ambos os casos, foi examinado o efeito da cobertura dielétrica, seja na constante de propagação do modo fundamental da linha, seja na frequência de ressonância da antena.

Os resultados apresentados neste trabalho, mostram que a cobertura dielétrica exerce uma forte influência nas características elétricas dos dispositivos analisados. Notam-se modificações substanciais na frequência de ressonância da antena e na constante de propagação da linha, mesmo considerando uma cobertura com baixo valor de permissividade e espessura muito menor que o comprimento de onda.

É importante observar a não existência de dados experimentais disponíveis, a respeito do efeito da cobertura dielétrica nas características elétricas dos elementos de microfita, sobre substratos cilíndricos circulares, para comparação com os resultados deste trabalho. Porém, o uso das potencialidades das funções de Green diádicas e do método dos momentos, nas soluções de problemas eletromagnéticos e o confronto dos resultados numéricos obtidos para a linha de microfita com os de Nakatani e Alexopoulos [23], que mostram uma perfeita concordância quando a espessura da cobertura é reduzida a zero, tornam confiáveis os resultados apresentados.

Além da obtenção das funções de Green diádicas, para um meio constituído de quatro camadas cilíndricas circulares concêntricas e da dedução de equações integrais, buscando soluções de problemas de elementos de microfita, sobre substratos cilíndricos circulares, outra contribuição importante desse trabalho é mostrar detalhadamente a utilização do método dos momentos na solução de uma equação integral, como apresentado no problema particular da

antena de microfita "retangular", no capítulo 5. A grande vantagem de se aplicar o método dos momentos é o cálculo da distribuição de corrente sobre a antena. Desta forma, outras grandezas de interesse como o campo próximo, o campo distante e a impedância de entrada, podem ser avaliados com precisão, bem como, no caso de um conjunto de antenas, o acoplamento entre os elementos desse conjunto.

O método dos momentos permite obter soluções para antenas de microfita de qualquer forma geométrica. A dificuldade encontrada para formas complexas, está na escolha das funções de expansão, uma vez que é difícil prever que funções melhor se aproximam da distribuição de corrente, necessitando, na maioria das vezes, de um número maior de termos dessas funções para convergência dos resultados. Um estudo de funções de expansão, modelando as superfícies por subseções triangulares planares, é apresentado no trabalho de Rao, Wilton e Glisson [36], tratando-se do problema do espalhamento eletromagnético por objetos de formato arbitrário.

Os programas em linguagem Fortran, apresentados no apêndice, foram submetidos ao computador IBM-3090 do Centro de Processamento de Dados da Universidade Estadual de Campinas. Constatou-se um considerável consumo de tempo de processamento no cálculo das integrais em h , dadas nas Eqs. (5.36)-(5.55). Como exemplo, para o cálculo da impedância de entrada da antena analisada no capítulo 5, para uma única frequência gastaram-se pouco menos de onze e meio segundos de cpu.

Trabalhos futuros podem ser atacados, utilizando-se os resultados e métodos de análise apresentados, obtendo-se os diagramas de radiação e um estudo mais detalhado da influência do valor da constante dielétrica, nas características elétricas da antena analisada. Podem-se também, explorar outros métodos de alimentação, antenas de formas geométricas arbitrárias e ainda conjuntos de antenas.

A P Ê N D I C E

AP. 1. Programa para o Cálculo da Constante de Propagação de uma Linha de Microfita Infinita, sobre Substrato Cilíndrico Circular com Cobertura Dielétrica.

Dados de entrada:

- RF - Frequência de operação
- RKEI - Limite de teste inferior para a constante de propagação k_0
- RKEF - Limite de teste superior para k_0
- RNV - Número de vezes que se calcula a Eq.(4.33) nos limites dados de k_0
- RNMAX - Valor máximo do índice n das funções de Bessel, de Hankel e das funções circulares
- R3 - r_3 , que é o raio da região central (condutor perfeito)
- RTIP - Se igual a 1, sem cobertura dielétrica, se diferente de 1, com cobertura dielétrica
- RWD - W , largura da linha de microfita
- RAR1 - Espessura da cobertura dielétrica
- RE1 - Permissividade da cobertura dielétrica
- R1 - r_1 (ver Fig. 3.1)
- R2 - r_2 (ver Fig. 3.1)

Saída:

O programa fornece uma tabela com as seguintes variáveis:

- RKE - k_0 , constante de propagação da linha de microfita
- CR - Valor (número complexo) da Eq. (4.33) para o k_0 dado
- R2K1 - produto entre r_2 e k_1
- REEF - Constante dielétrica efetiva

Subprogramas utilizados: subrotinas SI, BEKR e BEKI.

```

C  PROGRAMA CALCULO E EFETIVO LINHA DE MICROFITA
      IMPLICIT COMPLEX*16 (C)
      IMPLICIT REAL*8   (D-H,L,O-Z)
      COMMON/CNSTNS/R1,R2,R3,R12,R22,R32,RK1,RK2,RK3,RK12,RK22,RK32,
      RM1,RM2,R2K2,FIF,RPI,XDEL,RKF,NP,NQ,N,NL
      LEITURA DOS DADOS DE ENTRADA

      CALL CPUTIME(RTI,ITI)

      READ(71,1)RF,RKEI,RKEF,RNV,R3,RNMAX,RTIP,RWO
      WRITE(72,1)RF,RKEI,RKEF,RNV,R3,RNMAX,RTIP,RWO
1_  FORMAT(F12.0,7(/,F11.5))

      REI=20.00
      REM=REI
      RAR1=0.0015900
      RE1=2.5700

      RPI=3.14159265358979323D+00
      NMAX=RNMAX

      DO 5 NMAX=27,34
      IF(NR3.EQ.2) R3=.03300

      CI=(0.,1.)
      RM0=4.D-07*RPI
      RE0=1.D-09/(36.D+00*RPI)
      R2=R3+.0015900
      R1=R2
      FIF=RWO/(2.*R2)
      R12=R1*R1
      R22=R2*R2
      R32=R3*R3
      RW=2.D+00*RPI*RF
      RME0=RM0*RE0
      NFREQ=RTIP
      DO 5 NTIP=1,1
      RF=2244444000.00
      DO 5 KF=1,1
      IF(KF.EQ.2) RF=2135000000.00
      IF(KF.EQ.3) RF=2300000000.00
      IF(KF.EQ.4) RF=2350000000.00

      RW=2.D0*RPI*RF
      RK1=RW*SORT(RME0)
      RK2=RK1
      RK3=RW*SORT(2.5700*RME0)
      RK12=RK1*RK1
      RK22=RK2*RK2
      RK32=RK3*RK3

      IF(NTIP.EQ.1) GO TO 6
      R1=R2+PAR1
      R12=R1*R1

```

```

RK2=RK3
RK22=RK32

```

```

6 RM1=1.D+00
  RM2=1.D+00
  R2K2=R2*RK2

```

```

WRITE(72,570)NMAX,FIF,R1,R2,R3,RK1,RK2,RK3,RF,RW0
570 FORMAT('***** NMAX = ',I4,' FIF = ',F20.5,/,
  &,'R1,R2,R3 ',3F20.10,/,,'RK1,RK2,RK3 ',3F15.4,/,
  &,'***** FREQ = ',E20.10,' HZ',/,,' W = ',F12.6)

```

```

— CALCULO DOS ELEMENTOS

```

```

RDIV=(RKEF-RKEI)/RNV
DO 5 RKE=RKEI,RKEF,RDIV
CD=CI/(8.D+00*RPI)
N=0
CALL PROG(RKE,CR)
CR=CD*CR

```

```

      PARA N MAIOR QUE 0

```

```

CD=2.D+00*CI/(8.D+00*RPI)
KT=0
DO 11 N=1,NMAX
CALL PROG(RKE,CRP,NT)
CR=CR+CRP*CD
11 CONTINUE

```

```

R2K1=R2*RK1
REEF=(RKE/RK1)*(RKE/RK1)

```

```

CALL CPUTIME(RTF,ITF)
RTT=(RTF-RTI)/600000000.D0
WRITE(73,921)RTT
921 FORMAT('GASTARAM-SE ',F20.10,'MINUTOS DE CPU')
5 WRITE(72,333)RKE,CR,R2K1,REEF
333 FORMAT(F12.4,2E15.6,2F12.2)
STOP
END

```

```

SUBROUTINE PROG(RH,CR)
IMPLICIT COMPLEX*16 (C,H,J,T,Y)
IMPLICIT REAL*8 (B,D,F,L,P,Q,R,X,Z)
DIMENSION Y(80)
COMMON/CNSTNS/R1,R2,R3,R12,R22,R32,RK1,RK2,RK3,RK12,RK22,RK32,
&RM1,RM2,R2K2,FIF,RPI,XDEL,RKF,NP,NQ,N,NL

```

```

RPI=3.14159265358979323D0
CI=(0.,1.)
TI=CI**N
TK=2.D+00/(RPI*(CI**(N+1)))
CJ=CI*N**RH
RH2=RH**RH

```

```

RL12=RK12-PH2
RL22=RK22-RH2
RL32=RK32-RH2
RX1=ABS(RL12)
RX2=ABS(RL22)
RX3=ABS(RL32)

```

```

C          ATENCAO
C
C
C          IF((RX1.LE.RINF).OR.(RX2.LE.RINF).OR.(RX3.LE.RINF)) GO TO 10
C
C
C
C

```

```

C  CALCULO DE  I1  E  X1
C

```

```

C  C11=2.D0*FIF
C  IF(N.EQ.0)GO TO 1
C  C11=2.D0*SIN(N*FIF)/N
C

```

```

C  CALCULO DOS A'S NORMAIS
C
C

```

```

C  1  IF(RL12.LE.0.D0) GO TO 200
C     RL1=SQRT(RL12)
C     CL1=RL1
C     RLR=RL1*R1
C     CALL BEKR(N,RL1,RLR,RJ,RJL,HJ,HJL)
C     JA=RJ
C     JLA=RJL
C     HA=HJ
C     HLA=HJL
C     GO TO 21
C  200 RL1=SQRT(-RL12)
C     CL1=CI*RL1
C     RLR=RL1*R1
C     CALL BEKI(N,RL1,RLR,RI,RIL,RK,RKL)
C     JA=TI*R1
C     JLA=TI*RIL
C     HA=RK*TK
C     HLA=RKL*TK
C  21  IF(RL22.LE.0.D0) GO TO 30
C     RL2=SQRT(RL22)
C     CL2=RL2
C     RLR=RL2*R1
C     CALL BEKR(N,RL2,RLR,RJ,RJL,HJ,HJL)
C     JB=RJ
C     JLB=RJL
C     HB=HJ
C     HLB=HJL
C     RLR=RL2*R2
C     CALL BEKR(N,RL2,RLR,RJ,RJL,HJ,HJL)
C     JG=RJ
C     JLG=RJL
C     HG=HJ
C     HLG=HJL
C     GO TO 31
C  30  RL2=SQRT(-RL22)

```

```

CL2=CI*RL2
RLR=RL2*P1
CALL BEKI(N,RL2,RLR,RI,RIL,RK,RKL)
JB=TI*P1
JLB=TI*RIL
HB=TK*RK
HLB=TK*RKL
RLR=RL2*R2
CALL BEKI(N,RL2,RLR,RI,RIL,RK,RKL)
JG=TI*R1
JLG=TI*RIL
HG=TK*RK
HLG=TK*RKL
31 IF(RL32.LE.0.D0) GO TO 40
RL3=SQRT(RL32)
CL3=RL3
RLR=RL3*R2
CALL BEKR(N,PL3,RLR,RJ,RJL,HF,HLF)
JF=RJ
JLF=RJL
RLR=RL3*R3
CALL BEKR(N,RL3,RLR,RJ,RJL,HR,HLR)
JR=RJ
JLR=RJL
GO TO 41
40 PL3=SQRT(-RL32)
CL3=CI*RL3
RLR=RL3*R2
CALL BEKI(N,RL3,RLR,RI,RIL,RK,RKL)
JF=TI*R1
JLF=TI*RIL
HF=TK*RK
HLF=TK*RKL
RLR=RL3*R3
CALL BEKI(N,RL3,RLR,RI,RIL,RK,RKL)
JR=TI*R1
JLR=TI*RIL
HR=TK*RK
HLR=TK*RKL
C
41 CONTINUE
H=RH+CI*RIH
C
CALL SI(JB,JF,JG,JR,JLA,JLB,JLF,JLG,JLR,HA,HB,HF,HG,HR,HLA,
&HLB,HLF,HLG,HLR,RK1,RK2,RK3,R1,R2,R3,RL1,RL2,RL3,CL1,CL2,CL3,
&RM1,RM2,N,H,RIH,Y)
C

```

C CALCULO DOS VALORES DOS A'S NORMAIS

C

CL22=CL2*CL2

C

HSJ=HG/JG

HLSJL=HLG/JLG

HJL=HG*JLG

JJL=JG*JLG

JLJL=JLG*JLG

HLJL=HLG*JLG

C

CA=HG*(HSJ*Y(37)+1.+Y(37))

CB=JG*(HSJ*Y(41)+Y(45))

CC=HLG*(HSJ*Y(19)+Y(23))

CD=JLG*(HSJ*Y(27)+Y(31))

CE=HJL*(HLSJL*Y(36)+Y(40))

CF=JJL*(HLSJL*Y(44)+Y(48))

CG=HLJL*(HLSJL*Y(18)+1.+Y(22))

CH=JLJL*(HLSJL*Y(26)+Y(30))

C

C1=R22/RK2

C2=C1*CL22/RK2

C3=CJ/R2K2

CA1=-C2*JG*(CA+CB)

C

CR=-C11*C11*CA1

RETURN

END

AP. 2. Programa para o Cálculo das Características Elétricas de uma Antena de Microfita "Retangular", Alimentada Diretamente por uma Linha de Microfita, sobre Substrato Cilíndrico Circular com Cobertura Dielétrica.

Dados de entrada:

- RF - Frequência de operação
- RHMAX - Limite de integração em h
- RLIM - Limite para início de uso de expressões assintóticas para os cálculos das funções dadas nas Eqs. (5.78)-(5.81)
- RHIM - Tangente de perdas do dielétrico
- RLF - Comprimento finito da linha de alimentação
- RKE - Valor da constante de propagação da linha de microfita
- NM - Número de funções de expansão senoidais por partes na junção
- NP - Número de funções de expansão de domínio completo na antena na direção z
- NQ - Número de funções de expansão de domínio completo na antena na direção ϕ
- NMAX - Valor máximo do índice n das funções de Bessel, de Hankel e das funções circulares
- RAR1 - Espessura da cobertura dielétrica
- RE1 - Valor da permissividade da cobertura dielétrica
- NC - Se igual a 1, antena sem cobertura dielétrica, se diferente de 1, antena com cobertura dielétrica.

$$\begin{array}{lllll}
 DO = d_0 & R1 = r_1 & R2 = r_2 & R3 = r_3 & RK1 = k_1 \\
 RK2 = k_2 & RK3 = k_3 & FIF = \phi_f & FID = \phi_0 &
 \end{array}$$

Saída:

GRF = R (Coeficiente de reflexão de tensão);

GRFZ = $z_{in} = r + ix$ (Impedância de entrada da antena normalizada em relação a impedância característica da linha de alimentação).

Observam-se que os coeficientes de expansão podem ser obtidos simplesmente alterando a instrução (MM = 1), após a inversão da matriz impedância generalizada do método dos momentos, para (D0 16 MM = 1 , 15).

Usam-se todas as subrotinas listadas no item AP.3.

UNICAMP

```

C  PROGRAMA NOVOS DADOS  09/02/90-NOVO          NOVO
      IMPLICIT COMPLEX*16 (C)
      IMPLICIT REAL*8   (D-H,L,O-Z)
      DIMENSION CZ(50,100),CV(50),CMI(50),CR(2500),CRP(2500)
      DIMENSION Z1(2500),Z2(2500),X1(2500),X2(2500),IN(2500)
      COMMON/CNSTNS/R1,R2,R3,R12,R22,R32,RK1,RK2,RK3,RK12,RK22,RK32,
      &RM1,RM2,R2K2,RIH,RLIM,RKE,DO,F10,LF,LE4,DZJ,RPI,FF,F0,RWL,RWF,
      &RWZ,RKT,ZO,I1,I2,I3,I4,I5,NM,NP,NQ,N

C
      RHMAX=4000.DO
      RLIM=1000.DO
      R3=0.02500
      RV=1.DO
      RHIM=0.001
      RLF=4.DO
      RDZJ=0.0500
      DO=0.020100
      NM=8
      NP=3
      NQ=3
      NMAX=16
      NL=14
      REI=20.DO
      REM=REI
      RAR1=0.0015900
      REI=2.5700

C
      NC=1
      RF=2212500000.DO-12500000.DO/2.DO
      RPO=46.772500-0.265500/2.DO
      RKE=68.23365000-0.3833300/2.DO
      DO 888 KK1=11,20
      RF=RF+12500000.DO/2.DO
      RPO=RPO+0.265500/2.DO
      RKE=RKE+0.3833300/2.DO

C
889 CALL CPUTIME(RTI,ITI)

C
C
      WRITE(11,7002)NC,RF,RPO,RKE,KK1
7002 FORMAT('TIP= ',I1,' FREQ.= ',F12.0
&,' P = ',F12.6,' RKE = ',F12.6,I6)

C
      RPI=3.141592653589793230+00

C
      CI=(0.,1.)
      RM0=4.D-07*RPI
      RE0=1.D-09/(36.D+00*RPI)
      R2=R3+.001590+00

C
      FIF=0.0047700/(2.DO*R2)
      F10=0.040200/(2.DO*R2)

C
      R1=R2+RAR1
      IF(NC.EQ.1) R1=R2

```

UNICAMP

```

R12=R1*R1
R22=R2*R2
R32=R3*R3
RW=2.D+00*RPI*RF
RME0=RMO*RE0
RK1=RW*SQRT(RME0)
RK2=RW*SQRT(RME0*RE1)
IF(NC.EQ.1) RK2=RK1
RK3=RW*SQRT(2.57D+00*RME0)
RK12=RK1*RK1
RK22=RK2*RK2
RK32=RK3*RK3
RM1=1.D+00
RM2=1.D+00
      CALCULO DE KE - DZJ - LE4   ===   ETC

```

```

LE=2.D+00*RPI/RKE
LF=RLF*LE
LE4=LE/4.D+00
DZJ=RDZJ*LE
RWL=2.D0*R2*F1F
RWF=2.D0*R2*F10
RWZ=2.D0*D0
ZS=.55D0*2.D0*D0
ZO=ZS-D0
      WRITE(23,991)ZS,D0,ZO
991  FORMAT(' ZS D0 ZO === ',3F17.5)
RKT=.2D0*RPI/LF

```

```

R2K2=R2*RK2
I1=NM+1
I2=NM+2
I3=NM+NP+1
I4=NM+NP+2
I5=NM+NP+NQ+1
NT=I5*I5+I5
FF=2.D+00*F1F
FO=2.D+00*F10

```

CALCULO DOS ELEMENTOS DAS MATRIZES

```

DO 10 KK=1,NT
IN(KK)=0
10  CR(KK)=(0.,0.)
    CD=CI/(8.D+00*RPI)
    N=0
    XL=-RHMAX
    XU=-RPO-RV
    RIH=0.D0
    CALL XINT(XL,XU,CRP,REI,NT,NL,N)
    WRITE(11,801)N,NL,XL,NT,XU
C 801  FORMAT('N = ',I4,' I ',I4,F10.2,' KT ',I4,F10.2)
    DO 4 KK=1,NT
4  CR(KK)=CR(KK)+CRP(KK)*CD

```

UNICAMP

```

XL=-RPO-RV
XU=-RPO+RV
RIH=RHIM
CALL XINT(XL,XU,CRP,REI,NT,NL,N)
C WRITE(11,801)N,NL,XL,NT,XU
DO 5 KK=1,NT
5 CR(KK)=CR(KK)+CRP(KK)*CD
XL=-RPO+RV
XU=RPO-RV
RIH=0.DO
CALL XINT(XL,XU,CRP,REI,NT,NL,N)
C WRITE(11,801)N,NL,XL,NT,XU
DO 6 KK=1,NT
6 CR(KK)=CR(KK)+CRP(KK)*CD
XL=RPO-RV
XU=RPO+RV
RIH=RHIM
CALL XINT(XL,XU,CRP,REI,NT,NL,N)
C WRITE(11,801)N,NL,XL,NT,XU
DO 7 KK=1,NT
7 CR(KK)=CR(KK)+CRP(KK)*CD
XL=RPO+RV
XU=RHMAX
RIH=0.DO
CALL XINT(XL,XU,CRP,REI,NT,NL,N)
C WRITE(11,801)N,NL,XL,NT,XU
DO 8 KK=1,NT
8 CR(KK)=CR(KK)+CRP(KK)*CD
Z1(K)=REAL(CR(KK))
8 X1(K)=IMAG(CR(KK))
C 8 WRITE(8,13)N,KK,CR(KK)
13 FORMAT(2X,'N = ',I4,3X,I5,2E20.10)
C
C PARA N MAIOR QUE 0
C
CD=2.D+00*CI/(8.D+00*RP1)
KT=0
DO 11 N=1,NMAX
FF=2.D+00*SIN(N*FIF)/N
FO=2.D+00*SIN(N*FIO)/N
XL=-RHMAX
XU=RHMAX
CALL XINT(XL,XU,CRP,REI,NT,NL,N)
C WRITE(11,801)N,NL,XL,NT,XU
DO 12 KK=1,NT
12 CR(KK)=CR(KK)+CRP(KK)*CD
C WRITE(8,101)N,KK,CR(KK),KT
101 FORMAT('N = ',I5,3X,I5,2E20.10,2X,'KT = ',I5)
C
C TESTE DE CONVERGENCIA DO SOMATORIO EM N
C
IF(N.LE.30) GO TO 11
DO 90 K=1,NT
IF(IN(K).EQ.1) GO TO 95
Z2(K)=REAL(CR(K))

```

UNICAMP

```

X2(K)=IMAG(CR(K))
RTE=ABS(Z2(K))+ABS(X2(K))
IF(RTE.LE..1D-26) GO TO 94
RR=(ABS(Z1(K))+ABS(Z2(K)))/REM
RI=(ABS(X1(K))+ABS(X2(K)))/REM
IF(X2(K).EQ.0.) GO TO 92
RMN=ABS(Z2(K)/X2(K))
IF(RMN.LE.1.D-03) GO TO 91
IF(RMN.GE.1.D+03) GO TO 93
92 IF(ABS(Z2(K)-Z1(K)).GT.RR) GO TO 89
91 IF(ABS(X2(K)-X1(K)).GT.RI) GO TO 89
GO TO 94
93 IF(ABS(Z2(K)-Z1(K)).GT.RR) GO TO 89
94 IN(K)=1
KT=KT+1
GO TO 95
89 Z1(K)=Z2(K)
X1(K)=X2(K)
95 KI=K+40
IF(K.NE.20) GO TO 90
C WRITE(23,901)K,IN(K),N,NT,KT,CR(K)
90 CONTINUE
901 FORMAT('TIPO=',I4,' I=',I3,' N=',I3,' A CONV',I4,
&' CONV',I4,2E15.7)
IF(KT.EQ.NT) GO TO 100
11 CONTINUE
C
C DETERMINACAO DAS MATRIZES Z E V
100 CONTINUE
C 100 WRITE(11,111)NMAX,N,NT,KT
111 FORMAT(' NMAX = ',I6,' N = ',I5,' NT = ',I6,' KT = ',I6)
KK=0
DO 14 MM=1,I5
DO 14 NN=1,I5
KK=KK+1
14 CZ(MM,NN)=CR(KK)
C 14 WRITE(11,6002)MM,NN,CZ(MM,NN)
6002 FORMAT(2X,'Z',I5,I5,2E15.5)
C
DO 15 MM=1,I5
KK=KK+1
C WRITE(11,6002)MM,KK,CR(KK)
15 CV(MM)=-CR(KK)
C
C INVERSAO DA MATRIZ Z
C
CALL INVER(CZ,I5)
C
C CALCULO DOS COEFICIENTES
C
MM=1
CRF=(0.,0.)
DO 16 NN=1,I5
16 CRF=CRF+CZ(MM,NN)*CV(NN)
C WRITE(11,18)CRF

```

UNICAMP

C 18 FORMAT(' RA = ',2F10.2)

C

RVR=REAL(CRF)

RVX=-IMAG(CRF)

CRF=RVR+CI*RVX

CRFZ=(1.D0+CRF)/(1.D0-CRF)

WRITE(11,8004)CRF,CRFZ

8004 FORMAT(' R = ',2F10.2 , ' Z = ',2F10.2)

CALL CPUTIME(RTF,ITF)

RTT=(RTF-RTI)/600000000.D0

WRITE(11,921)RTT

921 FORMAT('GASTARAM-SE ',F20.2,' MINUTOS DE CPU',/)

C

888 RTI=RTF

STOP

END

AP.3. Subprogramas Auxiliares

Têm-se as seguintes subrotinas:

- XINT - Subrotina de integração numérica
- PROG - Subrotina para o cálculo dos integrandos das Eqs. (5.36)-(5.55)
- SI - Fornece as soluções dos sistemas de equações do capítulo 3
- INVER - Subrotina para inversão de uma matriz complexa
- BEKR - Calcula as funções de Bessel e de Hankel de primeira espécie e suas derivadas
- BEKI - Calcula as funções $K_n(\lambda r)$ e $I_n(\lambda r)$, e suas derivadas.

As subrotinas XINT e PROG estão adaptadas para o cálculo simultâneo dos elementos das matrizes [Z] e [V].

Na Subrotina SI, têm-se, entre outras, as seguintes variáveis de transferência:

JB = J(β)	JF = J(ρ)	JG = J(γ)	JR = J(ρ)	HA = H(α)
HB = H(β)	HF = H(ρ)	HG = H(γ)	HR = H(ρ)	JLA = J [*] (A)
JLB = J [*] (β)				HLR = H [*] (ρ).
CL1 = λ_1	CL2 = λ_2	CL3 = λ_3		

Notam-se também que H é a variável de integração h, RIH é a tangente de perdas e N o índice das funções de Bessel, de Hankel e das funções circulares. RM1 é igual a p e RM2 igual a q. As simbologias usadas estão definidas nas Eqs. (3.13).

A subrotina SI apresenta como resposta, no vetor Y, os coeficientes de espalhamento, sendo:

$Y(1) = a_{10}$	$Y(21) = c_{20}$	$Y(41) = e'_{20}$	$Y(61) = c'_{30}$
$Y(2) = a_{10}$	$Y(22) = c_{20}$	$Y(42) = e'_{20}$	$Y(62) = c'_{30}$
$Y(3) = b_{10}$	$Y(23) = d_{20}$	$Y(43) = f'_{20}$	$Y(63) = d'_{30}$
$Y(4) = b_{10}$	$Y(24) = d_{20}$	$Y(44) = f'_{20}$	$Y(64) = d'_{30}$
$Y(5) = a'_{10}$	$Y(25) = a'_{20}$	$Y(45) = g'_{20}$	$Y(65) = e_{30}$
$Y(6) = a'_{10}$	$Y(26) = a'_{20}$	$Y(46) = g'_{20}$	$Y(66) = e_{30}$
$Y(7) = b'_{10}$	$Y(27) = b'_{20}$	$Y(47) = h'_{20}$	$Y(67) = f_{30}$
$Y(8) = b'_{10}$	$Y(28) = b'_{20}$	$Y(48) = h'_{20}$	$Y(68) = f_{30}$
$Y(9) = e_{10}$	$Y(29) = c'_{20}$	$Y(49) = a_{30}$	$Y(69) = g_{30}$
$Y(10) = e_{10}$	$Y(30) = c'_{20}$	$Y(50) = a_{30}$	$Y(70) = g_{30}$
$Y(11) = f_{10}$	$Y(31) = d'_{20}$	$Y(51) = b_{30}$	$Y(71) = h_{30}$
$Y(12) = f_{10}$	$Y(32) = d'_{20}$	$Y(52) = b_{30}$	$Y(72) = h_{30}$
$Y(13) = e'_{10}$	$Y(33) = e_{20}$	$Y(53) = c_{30}$	$Y(73) = e'_{30}$
$Y(14) = e'_{10}$	$Y(34) = e_{20}$	$Y(54) = c_{30}$	$Y(74) = e'_{30}$
$Y(15) = f'_{10}$	$Y(35) = f_{20}$	$Y(55) = d_{30}$	$Y(75) = f'_{30}$
$Y(16) = f'_{10}$	$Y(36) = f_{20}$	$Y(56) = d_{30}$	$Y(76) = f'_{30}$
$Y(17) = a_{20}$	$Y(37) = g_{20}$	$Y(57) = a'_{30}$	$Y(77) = g'_{30}$
$Y(18) = a_{20}$	$Y(38) = g_{20}$	$Y(58) = a'_{30}$	$Y(78) = g'_{30}$
$Y(19) = b_{20}$	$Y(39) = h_{20}$	$Y(59) = b'_{30}$	$Y(79) = h'_{30}$
$Y(20) = b_{20}$	$Y(40) = h_{20}$	$Y(60) = b'_{30}$	$Y(80) = h'_{30}$

UNICAMP

SUBROTINAS

```

SUBROUTINE XINT(XL,XU,Y,REI,NT,NL,N)
IMPLICIT COMPLEX*16 (A,S,Y)
IMPLICIT REAL*8 (D,H,P,Q,R,X)
DIMENSION AL(2500),AU(2500),Y(2500),SM(2500),AUX(2500,20)
DIMENSION R1(2500),R2(2500),X1(2500),X2(2500),IN(2500)

```

```

C
DO 9 K=1,NT
9 IN(K)=0
KT=0
DZM=XU-XL
CALL PROG(XL,AL,NT)
CALL PROG(XU,AU,NT)
DO 10 K=1,NT
AUX(K,1)=.5D+00*(AL(K)+AU(K))
R1(K)=REAL(AUX(K,1))
10 X1(K)=IMAG(AUX(K,1))
HH=DZM
P=1.0D+00
JJ=1

```

```

C
DO 3 I=2,NL
DO 40 K=1,NT
40 Y(K)=AUX(K,1)
HD=HH
HH=.5D+00*HH
P=.5D+00*P
X=XL+HH
DO 45 K=1,NT
45 SM(K)=(0.,0.)
DO 1 J=1,JJ
CALL PROG(X,AL,NT)
DO 50 K=1,NT
50 SM(K)=SM(K)+AL(K)
1 X=X+HD
DO 60 K=1,NT
60 AUX(K,I)=.5D+00*AUX(K,I-1)+P*SM(K)
Q=1.0D+00
JI=I-1
DO 2 J=1,JI
II=I-J
Q=Q+Q
O=Q+Q
DO 70 K=1,NT
70 AUX(K,II)=AUX(K,II+1)+(AUX(K,II+1)-AUX(K,II))/(Q-1.)
2 CONTINUE

```

TESTE DE CONVERGENCIA DA INTEGRAL

```

C
C
C
IF(I.LE.16) GO TO 3
DO 90 K=1,NT
IF(IN(K).EQ.1) GO TO 95
R2(K)=REAL(AUX(K,1))

```

UNICAMP

```

X2(K)=IMAG(AUX(K,1))
RTE=ABS(R2(K))+ABS(X2(K))
IF(RTE.LE..1D-26) GO TO 94
RR=(ABS(R1(K))+ABS(R2(K)))/REI
RI=(ABS(X1(K))+ABS(X2(K)))/REI
IF(R2(K).EQ.0) GO TO 92
RMN=ABS(R2(K)/X2(K))
IF(RMN.LE..1D-02) GO TO 91
IF(RMN.GE.1.0+03) GO TO 93
92 IF(ABS(R2(K)-R1(K)).GT.RR) GO TO 89
91 IF(ABS(X2(K)-X1(K)).GT.RI) GO TO 89
GO TO 94
93 IF(ABS(R2(K)-R1(K)).GT.RR) GO TO 89
94 IN(K)=1
KT=KT+1
GO TO 95
89 R1(K)=R2(K)
X1(K)=X2(K)
95 KI=K+20
IF(K.NE.20) GO TO 90
C WRITE(20,901)K,IN(K),I,N,KT,XL,XU,AUX(K,1)
90 CONTINUE
901 FORMAT('T=',I2,' I=',I2,' NL=',I2,' N=',I2,' KT=',I5,2F10.2,
&2E15.7)
C
IF(KT.EQ.NT) GO TO 4
3 JJ=JJ+JJ
DO 3001 K=1,NT
IF(IN(K).EQ.1)GO TO 3001
C WRITE(81,3002)N,K,IN(K)
3002 FORMAT(I5,I5,I5)
3001 CONTINUE
4 DO 80 K=1,NT
80 Y(K)=DZM*AUX(K,1)
XL=1
XU=KT
RETURN
END
C
C*FCONV1P2*
SUBROUTINE PROG(RH,CR,NT)
IMPLICIT COMPLEX*16 (C,H,J,T,Y)
IMPLICIT REAL*8 (B,D,F,L,P,Q,R,Z)
DIMENSION CI2(20),CI3(20),CI4(20),CX2(20),CX3(20),
&CX4(20),CX5(20),Y(80),CR(2500)
COMMON/CNSTNS/R1,R2,R3,R12,R22,R32,RK1,RK2,RK3,RK12,RK22,RK32,
&RM1,RM2,P2K2,RIH,RLIM,RKE,DO,FIO,LF,LE4,DZJ,RPI,FF,F0,RWL,RWF,
&RWZ,RKT,Z0,I1,I2,I3,I4,I5,NM,NP,NQ,N
C
CI=(0.,1.)
TI=CI**N
TK=2.0+00/(RPI*(CI**(N+1)))
CJ=CI*N*RH
RH2=RH*RH
RL12=RK12-RH2

```

UNICAMP

```

RL22=RK22-RH2
RL32=RK32-RH2
RX1=ABS(RL12)
RX2=ABS(RL22)
RX3=ABS(RL32)

```

```

=====

```

ATENCAO

```

IF((RX1.LE.RINF).OR.(RX2.LE.RINF).OR.(RX3.LE.RINF)) GO TO 1

```

```

CALCULO DE FD, I'S E X'S

```

```

CALCULO DE I1 E I6

```

```

FD=2.D+00*D0
IF(RH.EQ.0) GO TO 201
FD=2.D+00*SIN(RH*D0)/RH
201 CRS=(RKE+RH)*CI
CRI=(RKE-RH)*CI
C1=EXP(CI*RH*D0)/(2.D0*RWL)
C2=1.D+00/CRI
C3=1.D+00/CRS
CA=EXP(-CRI*LE4)
CB=EXP(-CRI*(LF+LE4))
CC=EXP(-CRI*LF)
CD=EXP(CRS*LE4)
CE=EXP(CRS*(LF+LE4))
CF=EXP(CRS*LF)
CI1=C1*(C2*(-CA+CB+1.D+00-CC))+C3*(CD-CE+1.D+00-CF)
CI6=C1*(C2*(CA-CB+1.D+00-CC))+C3*(-CD+CE+1.D+00-CF)

```

```

CALCULO DE CX1

```

```

CRS=(RKT+RH)*CI
CRI=(RKT-RH)*CI
CKE=RKT*CI
DZM=LF/2.D0
ZM1=-LF-D0
ZM=-LF/2.D0-D0
ZM2=-D0
CKM1=CKE*ZM1
CKM2=CKE*ZM2
CSM=CRS*ZM
CSM1=CRS*ZM1
CSM2=CRS*ZM2
CIM=CRI*ZM
CIM1=CRI*ZM1
CIM2=CRI*ZM2

```

```

CT=CI/(2.D0*RWL*SIN(RKT*LF/2.D0))
C1=EXP(-CKM1)
C2=EXP(CKM1)
C3=EXP(CKM2)
C4=EXP(-CKM2)
C9=C1/CRS

```

UNICAMP

```

C10=C2/CRI
C11=C3/CRI
C12=C4/CRS
CG=EXP(CSM)
CH=EXP(CSM1)
CII=EXP(-CIM)
CJJ=EXP(-CIM1)
CK=EXP(-CIM2)
CL=EXP(CSM2)

```

```

C
C  CX1=-CT*(C9*(CG-CH)+C10*(CII-CJJ)-C11*(CK-CII)-C12*(CL-CG))
C

```

```

C  CALCULO DE I2 E X2
C

```

```

CRS=(RKE+RH)*CI
CRI=(RKE-RH)*CI
CKE=RKE*CI
DZM=DZJ
ZM2=Z0
DO 45 K=1,NM
ZM=ZM2-DZM
ZM1=ZM-DZM

```

```

C  NAO SE RECALCULA CKE
CKM1=CKE*ZM1
CKM2=CKE*ZM2
CSM=CRS*ZM
CSM1=CRS*ZM1
CSM2=CRS*ZM2
CIM=CRI*ZM
CIM1=CRI*ZM1
CIM2=CRI*ZM2
CT=CI/(2.DO*SIN(RKE*DZM)*RWL)
C1=EXP(-CKM1)
C2=EXP(CKM1)
C3=EXP(CKM2)
C4=EXP(-CKM2)
C5=C1/CRI
C6=C2/CRS
C7=C3/CRS
C8=C4/CRI
C9=C1/CRS
C10=C2/CRI
C11=C3/CRI
C12=C4/CRS

```

```

C
CA=EXP(CIM)
CB=EXP(CIM1)
CC=EXP(-CSM)
CD=EXP(-CSM1)
CE=EXP(-CSM2)
CF=EXP(CIM2)
CG=EXP(CSM)
CH=EXP(CSM1)
CII=EXP(-CIM)
CJJ=EXP(-CIM1)

```

UNICAMP

CK=EXP(-CIM2)

CL=EXP(CSM2)

C

C12(K)=-CT*(C5*(CA-CB)+C6*(CC-CD)-C7*(CE-CC)-C8*(CF-CA))

CX2(K)=-CT*(C9*(CG-CH)+C10*(CII-CJJ)-C11*(CK-CII)-C12*(CL-CG))

45 ZM2=ZM

C

C

C

CALCULO DE I3 E X3

NP2=2*NP-1

KI=0

DO 46 K=1, NP2, 2

KI=KI+1

PT=K*RPI/(2.0+00*DO)

PHS=PT+RH

PHI=PT-RH

CPP=C1*K*RPI/2.0+00

C1=EXP(CPP)

C2=EXP(-CPP)

CA=SIN(PHS*DO)/(C1*PHS)

CB=SIN(PHI*DO)/(C1*PHI)

C13(KI)=(C1*CB-C2*CA)/RWF

46 CX3(KI)=(C1*CA-C2*CB)/RWF

C

C

C

CALCULO DE I4 I5 X4 X5

NQ2=2*NQ

KI=0

DO 42 K=2, NQ2, 2

KI=KI+1

QP=K*RPI/2.0

QNS=QP/FIO+N

QNI=QP/FIO-N

CA=SIN(QNS*FIO)/QNS

CB=SIN(QNI*FIO)/QNI

CI4(KI)=COS(QP)*(CB-CA)/RWZ

42 CX4(KI)=CI4(KI)

C

C

C

COMPARA SE E ASSINTOTICA

IF(ABS(RH).LE.RLIM) GO TO 80

C

C

C

CALCULO DOS A'S ASSINTOTICOS

RL1=SQRT(RX1)

RL2=SQRT(RX2)

RL3=SQRT(RX3)

RFI=RL3*(R2-R3)

RX=EXP(RFI)

RY=EXP(-RFI)

RTAN=(RX-RY)/(RX+RY)

RK46=(RL2*RK32-RL3*RK22*RM2*RTAN)/(RL2*RK32+RL3*RK22*RM2*RTAN)

RT=RL1*RK22+RM1*RK12*RL2

RK50=(RL1*RK22-RM1*RK12*RL2)/RT

C

UNICAMP

```

C1=R22/RK2
C2=C1*RL22/RK2
C3=CJ/R2K2
REXP=EXP(2.D0*RL2*(R2-R1))
CJAB=-C1*(1.D0-RK46+REXP*RK50*(1.D0-2.D0*RK46))/(RPI*RL2*R2)
CA1=-C2*CJAB
CK3=RM2*RL3*RTAN/(RL2*RK32-RL3*RK22*RM2*RTAN)
RCHA=1.D0-RL22/RL32
RCHA2=RL22-RL32
CK10=RL2-RL22*RM2*RTAN/RL3+RCHA*CJ*CJ*RM2*RTAN*(1.D0+RK22*CK3)
E/(R22*RK32*RL3)-RCHA*CJ*CJ*CK3/(R22*RL2)
-CK12=RL2+RL2*RM2*RTAN/RL3+CJ*CJ*CK3*RCHA2*RCHA2/
E(R22*RL2*RL32*RL32)
CK13=2.D0*RK2*RCHA2*CK3/RL32
CK123=(CK10+CK12)*CK3
CK124=CK12/R1-RL12*(CK12/R1+RCHA*RK22*CK123/R2)/RL22
CK27=RL12*(CK242/RK2+RCHA*CK123*RK2/R2)/CK12

C   CD2=(1.D0-1.D0/RK46)*(-RCHA*RK22*CK123/(R2*CK12)+RM1*(RM1*RK12*CK
E*RK2/RT-RL12*CK242/(RL2*CK12))/RL1)

C   CJCD=-C1*CJ*RK46*(-RL2*CK13*(1.D0+RK50*REXP)/(R2*CK12)+
E*REXP*CD2/RK2)/(RPI*RL2*R2)

C   CA2=C1*(CJCD-C3*CJAB)

C   CEF=-C1*CJ*RK46*CK3*(RK50*REXP-1.D0)/(RPI*R22*CK12)
CA3=C1*(-CEF-C3*CJAB)

C   C12=CK10/CK12
C11=RM1*RL1/RL2-1.D0
CG=C1*RL2*(1.D0+C12*(REXP*C11-1.D0))/(RPI*R2)
CH=-C1*REXP*C11*(1.D0-2.D0*C12)/(2.D0*RPI*R2)
CA4=-(-CG-CH+C3*CEF-C3*(CJCD-C3*CJAB))/RL22

C   GO TO 90

C
C   CALCULO DOS A'S NORMAIS
C
80  IF(RL12.LE.0.D0) GO TO 200
    RL1=SQRT(RL12)
    CL1=RL1
    RLR=RL1*R1
    CALL BEKR(N,RL1,RLR,RJ,RJL,HJ,HJL)
    JA=RJ
    JLA=RJL
    HA=HJ
    HLA=HJL
    GO TO 21
200 RL1=SQRT(-RL12)
    CL1=CI*RL1
    RLR=RL1*R1
    CALL BEKI(N,RL1,RLR,RI,RIL,RK,RKL)
    JA=TI*R1
    JLA=TI*RIL

```

UNICAMP

```

HA=RK*TK
HLA=RKL*TK
21 IF(RL22.LE.0.D0) GO TO 30
RL2=SQRT(RL22)
CL2=RL2
RLR=RL2*R1
CALL BEKR(N,RL2,RLR,RJ,RJL,HJ,HJL)
JB=RJ
JLB=RJL
HB=HJ
HLB=HJL
RLR=RL2*R2
CALL BEKR(N,RL2,RLR,RJ,RJL,HJ,HJL)
JG=RJ
JLG=RJL
HG=HJ
HLG=HJL
GO TO 31
30 RL2=SQRT(-RL22)
CL2=CI*RL2
RLR=RL2*R1
CALL BEKI(N,RL2,RLR,RI,RIL,RK,RKL)
JB=TI*R1
JLB=TI*RIL
HB=TK*RK
HLB=TK*RKL
RLR=RL2*R2
CALL BEKI(N,RL2,RLR,RI,RIL,RK,RKL)
JG=TI*R1
JLG=TI*RIL
HG=TK*RK
HLG=TK*RKL
31 IF(RL32.LE.0.D0) GO TO 40
RL3=SQRT(RL32)
CL3=RL3
RLR=RL3*R2
CALL BEKR(N,RL3,RLR,RJ,RJL,HF,HLF)
JF=RJ
JLF=RJL
RLR=RL3*R3
CALL BEKR(N,RL3,RLR,RJ,RJL,HR,HLR)
JR=RJ
JLR=RJL
GO TO 41
40 RL3=SQRT(-RL32)
CL3=CI*RL3
RLR=RL3*R2
CALL BEKI(N,RL3,RLR,RI,RIL,RK,RKL)
JF=TI*R1
JLF=TI*RIL
HF=TK*RK
HLF=TK*RKL
RLR=RL3*R3
CALL BEKI(N,RL3,RLR,RI,RIL,RK,RKL)
JR=TI*R1

```

UNICAMP

JLR=TI*RII

HR=TK*RK

HLR=TK*RKL

C

41 CONTINUE

H=RH+CI*RIH

C

VALORES USUAIS PARA TESTE NO PROGRAMA NAO APAGAR

C

N=2

C

H=(.2,0.)

C

JA=(0.,0.)

C

JB=(5.1,0.)

C

JF=(5.2,0.)

C

JG=(6.3,0.)

C

JR=(6.4,0.)

C

JLA=(6.5,0.)

C

JLB=(5.6,0.)

C

JLF=(6.7,0.)

C

JLG=(6.81,0.)

C

JLR=(6.9,0.)

C

H=(.2,0.)

C

R1=.345

C

R2=.454

C

R3=.52

C

RK1=.54

C

RK2=.4582

C

RK3=.65

C

CL1=(.575,0.)

C

CL2=(.5,0.)

C

CL3=(.599,0.)

C

RM1=.2

C

RM2=.56

C

HA=(.13,.2)

C

HB=(.9,.1)

C

HG=(.113,.32)

C

HF=(.73,.32)

C

HR=(1.3,.62)

C

HLA=(1.3,1.2)

C

HLB=(.3,1.245)

C

HLG=(.3,.52)

C

HLF=(.53,.2)

C

HLR=(.3,.2)

C

C

C

CALL SI(JB,JF,JG,JR,JLA,JLB,JLF,JLG,JLR,HA,HB,HF,HG,HR,HLA,
 EHLB,HLF,HLG,HLR,RK1,RK2,RK3,R1,R2,R3,RL1,RL2,RL3,CL1,CL2,CL3,
 ERM1,ERM2,N,H,RIH,Y)

C

CALCULO DOS VALORES DOS A'S NORMAIS

C

CL22=CL2*CL2

C

C

C

UNICAMP

```

HSJ=HG/JG
HLSJL=HLG/JLG
HJL=HG*JLG
JJL=JG*JLG
JLJL=JLG*JLG
HLJL=HLG*JLG

```

C

```

CA=HG*(HSJ*Y(33)+1.+Y(37))
CB=JG*(HSJ*Y(41)+Y(45))
CC=HLG*(HSJ*Y(19)+Y(23))
CD=JLG*(HSJ*Y(27)+Y(31))
CE=HJL*(HLSJL*Y(36)+Y(40))
CF=JJL*(HLSJL*Y(44)+Y(48))
CG=HLJL*(HLSJL*Y(18)+1.+Y(22))
CH=JLJL*(HLSJL*Y(26)+Y(30))

```

C

```

C1=R22/RK2
C2=C1*CL22/RK2
C3=CJ/R2K2
CA1=-C2*JG*(CA+CB)
CA2=C1*JG*(CC+CD-C3*(CA+CB))
CA3=C1*(-CE-CF-JG*C3*(CA+CB))
CA4=(-CG-CH+C3*(CE+CF)-C3*JG*(CC+CD-C3*(CA+CB)))/CL22

```

C

C

CALCULO DOS VALORES FINAIS

C

90 K=1

C

TIPO 1

```

CR(K)=-FF*FF*CI1*CX1*CA1
DO 2 NN=2,11
K=K+1

```

C

TIPO 2

```

2 CR(K)=-FF*FF*CI2(NN-1)*CX1*CA1
DO 3 NN=12,13
K=K+1

```

C

TIPO 3

```

3 CR(K)=-FF*F0*CI3(NN-11)*CX1*CA1
DO 4 NN=14,15
K=K+1

```

C

TIPO 4

```

4 CR(K)=-FF*FD*CI4(NN-13)*CX1*CA2
DO 32 MM=2,11
K=K+1

```

C

TIPO 5

```

CR(K)=-FF*FF*CI1*CX2(MM-1)*CA1
DO 6 NN=2,11
K=K+1

```

C

TIPO 6

```

6 CR(K)=-FF*FF*CI2(NN-1)*CX2(MM-1)*CA1
DO 7 NN=12,13
K=K+1

```

C

TIPO 7

```

7 CR(K)=-FF*F0*CI3(NN-11)*CX2(MM-1)*CA1
DO 8 NN=14,15
K=K+1

```

UNICAMP

```

C TIPO 8
  8 CR(K)=-FD*FF*CX2(MM-1)*CI4(NN-I3)*CA2
 32 CONTINUE
    DO 33 MM=12,I3
      K=K+1
C TIPO 9
    CR(K)=-FF*F0*CI1*CX3(MM-I1)*CA1
    DO 10 NN=2,I1
      K=K+1
C TIPO 10
    10 CR(K)=-FF*F0*CX3(MM-I1)*CI2(NN-1)*CA1
    DO 11 NN=12,I3
      K=K+1
C TIPO 11
    11 CR(K)=-F0*F0*CI3(NN-I1)*CX3(MM-I1)*CA1
    DO 12 NN=14,I5
      K=K+1
C TIPO 12
    12 CR(K)=-FD*F0*CX3(MM-I1)*CI4(NN-I3)*CA2
    33 CONTINUE
    DO 34 MM=14,I5
      K=K+1
C TIPO 13
    CR(K)=FD*FF*CI1*CX4(MM-I3)*CA3
    DO 14 NN=2,I1
      K=K+1
C TIPO 14
    14 CR(K)=FD*FF*CI2(NN-1)*CX4(MM-I3)*CA3
    DO 15 NN=12,I3
      K=K+1
C TIPO 15
    15 CR(K)=FD*F0*CI3(NN-I1)*CX4(MM-I3)*CA3
    DO 16 NN=14,I5
      K=K+1
C TIPO 16
    16 CR(K)=-R22*FD*FD*CA4*CI4(NN-I3)*CX4(MM-I3)
    34 CONTINUE
    K=K+1
C TIPO 17
    CR(K)=-FF*FF*CI6*CX1*CA1
    DO 18 MM=2,I1
      K=K+1
C TIPO 18
    18 CR(K)=-FF*FF*CI6*CX2(MM-1)*CA1
    DO 19 MM=12,I3
      K=K+1
C TIPO 19
    19 CR(K)=-FF*F0*CI6*CX3(MM-I1)*CA1
    DO 20 MM=14,I5
      K=K+1
C TIPO 20
    20 CR(K)=FD*FF*CI6*CX4(MM-I3)*CA3
    RETURN
    END
C

```

UNICAMP

```

SUBROUTINE INVER(A,N)
  IMPLICIT COMPLEX*16 (A,T,P,J)
  DIMENSION A(50,100), T(50)
  J=(0.,1.)
  NA=2*N
  NP1=N+1
  DO 3 KJ=1,N
    DO 2 KI=NP1,NA
      A(KJ,KI)=(0.,0.)
      IF(KI-N-KJ)2,1,2
1    A(KJ,KI)=(1.,0.)
2    CONTINUE
3    CONTINUE
    DO 10 K=1,N
      PIVOT=A(K,K)
      DO 4 KI=1,N
4      T(KI)=A(KI,K)
      DO 7 KJ=K,NA
        A(K,KJ)=A(K,KJ)/PIVOT
      DO 6 KI=1,N
        IF(KI-K)5,6,5
5      CONTINUE
        A(KI,KJ)=A(KI,KJ)-T(KI)*A(K,KJ)
6      CONTINUE
7      CONTINUE
      IF(K-N)8,9,9
8      CONTINUE
9      CONTINUE
10     CONTINUE
      DO 11 KI=1,N
      DO 11 KL=1,N
        KJ=KL+N
11    A(KI,KL)=A(KI,KJ)
      RETURN
      END

```

C*FCONVP2*

```

SUBROUTINE SI(JB,JF,JG,JR,JLA,JLB,JLF,JLG,JLR,HA,HB,HF,HG,HR,HLA,
&HLB,HLF,HLG,HLR,RK1,RK2,RK3,R1,R2,R3,RL1,RL2,RL3,CL1,CL2,CL3,RM1,
&RM2,N,H,RIH,Y)
  IMPLICIT COMPLEX*16 (A,B,C,D,E,F,G,H,J,P,T,X,Y)
  IMPLICIT REAL*8 (R)
  DIMENSION AE(8),AO(8),Y(80)
  CI=(0.,1.)
  HH=H*H
  RK12=RK1*RK1
  RK22=RK2*RK2
  RK32=RK3*RK3
  CL12=RK12-HH
  CL22=RK22-HH
  CL32=RK32-HH

```

C*

```

  CALCULO DOS P'S INDEPENDENTES DOS A'S
  DLT1=HLR/(CL32*(JF*HLR-JLR*HF))
  CJ=CI*H*N

```

UNICAMP

$D1 = RM2 \div HR / (RK3 \div HLF \div JR - RK3 \div JLF \div HR)$
 $P2E = CJ \div HG \div D1 \div (-1.00 + CL22 / CL32) / R2$
 $P20 = CJ \div HG \div D1 \div (1.00 - CL22 / CL32) / R2$
 $P3E = -RK2 \div HLG \div D1$
 $P30 = P3E$
 $P4E = P2E \div JG / HG$
 $P40 = P20 \div JG / HG$
 $P5E = P3E \div JLG / HLG$
 $P50 = P5E$
 $D2 = RK2 \div CL32 \div (JF \div HR - HF \div JR)$
 $AUX = D2 / (CL22 \div RK3 \div JG \div HR - P5E \div D2)$
 $P7E = P2E \div AUX$
 $P70 = P20 \div AUX$
 $D3 = RK2 \div RK3 \div HR / (CL22 \div RK3 \div JG \div HR - P5E \div D2)$
 $AUX = -D2 \div RM2 \div HLG / (RK3 \div (RK3 \div HLF \div JR - RK3 \div JLF \div HR))$
 $P8E = (AUX - CL22 \div HG / RK2) \div D3$
 $P80 = P8E$
 $P9E = P7E \div JG / HG$
 $P90 = P70 \div JG / HG$
 $D4 = (HLF \div JLR - JLF \div HLR) / (CL32 \div (JF \div HLR - HF \div JLR))$
 $D5E = CJ \div (-HF \div JR + JF \div HR) / (RK3 \div R2 \div HR)$
 $D50 = CJ \div (HF \div JR - JF \div HR) / (RK3 \div R2 \div HR)$
 $AUX = JLG + CL22 \div RM2 \div JG \div D4$
 $P10E = AUX + (P4E + P5E \div P9E) \div D5E - CJ \div JG \div P9E / (RK2 \div R2)$
 $P100 = AUX + (P40 + P50 \div P90) \div D50 + CJ \div JG \div P90 / (RK2 \div R2)$
 $AUX = -HLG - CL22 \div RM2 \div HG \div D4$
 $P12E = (AUX - (P2E + P5E \div P7E) \div D5E + CJ \div JG \div P7E / (RK2 \div R2)) / P10E$
 $P120 = (AUX - (P20 + P50 \div P70) \div D50 - CJ \div JG \div P70 / (RK2 \div R2)) / P100$
 $P13E = (CJ \div (HG + JG \div P8E) / (RK2 \div R2) - (P3E + P5E \div P8E) \div D5E) / P10E$
 $P130 = (-CJ \div (HG + JG \div P80) / (RK2 \div R2) - (P30 + P50 \div P80) \div D50) / P100$
 $AUX = RM1 \div CL12 \div HA / CL22$
 $P15E = AUX / (HB + P12E \div JB)$
 $P150 = AUX / (HB + P120 \div JB)$
 $P16E = -P13E \div JB / (HB + P12E \div JB)$
 $P160 = -P130 \div JB / (HB + P120 \div JB)$
 $P18E = P12E \div P15E$
 $P180 = P120 \div P150$
 $P19E = P13E + P12E \div P16E$
 $P190 = P130 + P120 \div P160$
 $P21E = (P7E + P9E \div P12E) \div P15E$
 $P210 = (P70 + P90 \div P120) \div P150$
 $P22E = P8E + P7E \div P16E + P9E \div P19E$
 $P220 = P80 + P70 \div P160 + P90 \div P190$
 $D6E = CJ \div (HB \div P16E + JB \div P19E) / R1 + RK2 \div (HLB + JLB \div P22E)$
 $D60 = -CJ \div (HB \div P160 + JB \div P190) / R1 + RK2 \div (HLB + JLB \div P220)$
 $P24E = (CJ \div (RM1 \div HA - HB \div P15E - JB \div P18E) / R1 - RK2 \div JLB \div P21E) / D6E$
 $P240 = (CJ \div (-RM1 \div HA + HB \div P150 + JB \div P180) / R1 - RK2 \div JLB \div P210) / D60$
 $P25E = RM1 \div RK1 \div HLA / D6E$
 $P250 = RM1 \div RK1 \div HLA / D60$
 $D7E = CL12 \div HA / RK1 - CL22 \div P25E \div (HB + JB \div P22E) / RK2$
 $D70 = CL12 \div HA / RK1 - CL22 \div P250 \div (HB + JB \div P220) / RK2$
 $P27E = (CL22 \div (HB \div P24E + JB \div (P21E + P22E \div P24E)) / RK2) / D7E$
 $P270 = (CL22 \div (HB \div P240 + JB \div (P210 + P220 \div P240)) / RK2) / D70$
 $P29E = P24E + P25E \div P27E$
 $P290 = P240 + P250 \div P270$

UNICAMP

```

P31E=P15E+P16E*P29E
P310=P150+P160*P290
P33E=P18E+P19E*P29E
P330=P180+P190*P290
P35E=P21E+P22E*P29E
P350=P210+P220*P290
C* CALCULO DAS PARTES INDEPENDENTES DOS A'S DOS P'S RESTANTES
D8=RK2*RK3*HR/(CL22*RK3*JG*HR-P5E*D2)
D9=D2/(RK2*RK3*HR)
DO 10 L=1,8
AE(L)=(0.,0.)
I0 AO(L)=(0.,0.)
AE(5)=-JLG
AO(5)=-JLG
AE(7)=-CJ*RM2*JG/R2
AO(7)= CJ*RM2*JG/R2
AE(8)=CL22*RM2*JG
AO(8)=AE(8)
C* CALCULO DOS P'S DEPENDENTES DOS A'S
LVZ=-2
200 P1E=D1*(AE(7)+CJ*AE(8)/(R2*CL32))/RM2
P10=D1*(AO(7)-CJ*AO(8)/(R2*CL32))/RM2
P6E=(P1E*D9-AE(6))*D8
P60=(P10*D9-AO(6))*D8
P11E=(AE(5)-AE(8)*D4-(P1E+P5E*P6E)*D5E+CJ*JG*P6E/(RK2*R2))
*/P10E
P110=(AO(5)-AO(8)*D4-(P10+P50*P60)*D50-CJ*JG*P60/(RK2*R2))
*/P100
P14E=(-AE(4)-P11E*CL22*JB)/(CL22*(HB+P12E*JB))
P140=(-AO(4)-P110*CL22*JB)/(CL22*(HB+P120*JB))
P17E=P11E+P12E*P14E
P170=P110+P120*P140
P20E=P6E+P7E*P14E+P9E*P17E
P200=P60+P70*P140+P90*P170
P23E=(AE(3)-CJ*(JB*P17E+HB*P14E)/R1-RK2*JLB*P20E)/D6E
P230=(AO(3)+CJ*(JB*P170+HB*P140)/R1-RK2*JLB*P200)/D60
P26E=(AE(2)+CL22*(HB*P23E+JB*(P20E+P22E*P23E)))/RK2/D7E
P260=(AO(2)+CL22*(HB*P230+JB*(P200+P220*P230)))/RK2/D70
P28E=P23E+P25E*P26E
P280=P230+P250*P260
P30E=P14E+P16E*P28E
P300=P140+P160*P280
P32E=P17E+P19E*P28E
P320=P170+P190*P280
P34E=P20E+P22E*P28E
P340=P200+P220*P280
C* CALCULO DAS CONSTANTES GERAIS
AUX=-HLA+CJ*HA*P27E/(RK1*R1)-CJ/(RK2*R1)*(HB*P29E+JB*P35E)
*+HLB*P31E+JLB*P33E
XAE1=(AE(1)-CJ*HA*P26E/(RK1*R1)+CJ/(RK2*R1)*(HB*P28E+JB*P34E)
*-HLB*P30E-JLB*P32E)/AUX
AUX=-HLA-CJ*HA*P270/(RK1*R1)+CJ/(RK2*R1)*(HB*P290+JB*P350)
*+HLB*P310+JLB*P330
XAO1=(AO(1)+CJ*HA*P260/(RK1*R1)-CJ/(RK2*R1)*(HB*P280+JB*P340)
*-HLB*P300-JLB*P320)/AUX

```

UNICAMP

```

XBE1=P26E+XAE1*P27E
XBO1=P260+XA01*P270
XAE2=P30E+XAE1*P31E
XA02=P300+XA01*P310
XBE2=P28E+XAE1*P29E
XBO2=P280+XA01*P290
XCE2=P32E+XAE1*P33E
XC02=P320+XA01*P330
XDE2=P34E+XAE1*P35E
XD02=P340+XA01*P350
XDE3=P1E+XAE2*P2E+XBE2*P3E+XCE2*P4E+XDE2*P5E
XD03=P10+XA02*P20+XBO2*P30+XC02*P40+XD02*P50
XCE3=DLT1*(AE(8)+XAE2*CL22*RM2*HG+XCE2*CL22*RM2*JG)
XC03=DLT1*(AO(8)+XA02*CL22*RM2*HG+XC02*CL22*RM2*JG)
XBE3=-XDE3*JR/HR
XBO3=-XD03*JR/HR
XAE3=-XCE3*JLR/HLR
XA03=-XC03*JLR/HLR

```

```

LVZ=LVZ+1

```

```

IF(LVZ.GT.1) GO TO 300

```

```

IF(LVZ) 20,25,30

```

```

C* CALCULO DO PRIMEIRO BLOCO DE CONSTANTES

```

```

20 Y(1)=XAE1

```

```

Y(2)=XA01

```

```

Y(3)=XBO1

```

```

Y(4)=XBE1

```

```

Y(17)=XAE2

```

```

Y(18)=XA02

```

```

Y(19)=XBO2

```

```

Y(20)=XBE2

```

```

Y(21)=XCE2

```

```

Y(22)=XC02

```

```

Y(23)=XD02

```

```

Y(24)=XDE2

```

```

Y(49)=XAE3

```

```

Y(50)=XA03

```

```

Y(51)=XBO3

```

```

Y(52)=XBE3

```

```

Y(53)=XCE3

```

```

Y(54)=XC03

```

```

Y(55)=XD03

```

```

Y(56)=XDE3

```

```

DO 11 L=1,8

```

```

AE(L)=(0.,0.)

```

```

11 AO(L)=(0.,0.)

```

```

AE(1)=-HLB

```

```

AO(1)=-HLB

```

```

AE(3)=-CJ*HB/R1

```

```

AO(3)=-AE(3)

```

```

AE(4)=CL22*HB

```

```

AO(4)=AE(4)

```

```

GO TO 200

```

```

C* CALCULO DO SEGUNDO BLOCO DE CONSTANSTES

```

UNICAMP

```

25 Y(5)=XAE1
   Y(6)=XA01
   Y(7)=XB01
   Y(8)=XBE1
   Y(25)=XAE2
   Y(26)=XA02
   Y(27)=XB02
   Y(28)=XBE2
   Y(29)=XCE2
   Y(30)=XC02
   Y(31)=XD02
   Y(32)=XDE2
   Y(57)=XAE3
   Y(58)=XA03
   Y(59)=XB03
   Y(60)=XBE3
   Y(61)=XCE3
   Y(62)=XC03
   Y(63)=XD03
   Y(64)=XDE3
DO 12 L=1,8
  AE(L)=(0.,0.)
12 AD(L)=(0.,0.)
  AE(5)=CJ*JG/(RK2*R2)
  AD(5)=-AE(5)
  AE(6)=CL22*JG/RK2
  AD(6)=AE(6)
  AE(7)=-RK2*RM2*JLG
  AD(7)=AE(7)
GO TO 200

```

C* CALCULO DO TERCEIRO BLOCO DE CONSTANTES

```

30 Y(9)=XB01
   Y(10)=XBE1
   Y(11)=XAE1
   Y(12)=XA01
   Y(33)=XB02
   Y(34)=XBE2
   Y(35)=XAE2
   Y(36)=XA02
   Y(37)=XD02
   Y(38)=XDE2
   Y(39)=XCE2
   Y(40)=XC02
   Y(65)=XB03
   Y(66)=XBE3
   Y(67)=XAE3
   Y(68)=XA03
   Y(69)=XD03
   Y(70)=XDE3
   Y(71)=XCE3
   Y(72)=XC03
DO 13 L=1,8
  AE(L)=(0.,0.)
13 AD(L)=(0.,0.)
  AE(1)=CJ*HB/(RK2*R1)

```

```

AO(1)=-AE(1)
AE(2)=CL22*HB/RK2
AO(2)=AE(2)
AE(3)=-RK2*FLB
AO(3)=AE(3)
GO TO 200

```

C* CALCULO DO QUARTO GRUPO DE CONSTANTES

```

300 Y(13)=XB01

```

```

Y(14)=XBE1

```

```

Y(15)=XAE1

```

```

Y(16)=XA01

```

```

Y(41)=XB02

```

```

Y(42)=XBE2

```

```

Y(43)=XAE2

```

```

Y(44)=XA02

```

```

Y(45)=XD02

```

```

Y(46)=XDE2

```

```

Y(47)=XCE2

```

```

Y(48)=XC02

```

```

Y(73)=XB03

```

```

Y(74)=XBE3

```

```

Y(75)=XAE3

```

```

Y(76)=XA03

```

```

Y(77)=XD03

```

```

Y(78)=XDE3

```

```

Y(79)=XCE3

```

```

Y(80)=XC03

```

```

RETURN

```

```

END

```

C

```

SUBROUTINE BEKR(N,RL,RLR,BJ,BJL,HJ,HJL)

```

```

IMPLICIT COMPLEX*16 (C,H)

```

```

IMPLICIT REAL*8 (B,J,R,Y)

```

```

DIMENSION J(120),YJ(120)

```

```

CALL BESJ2(N,RLR,J)

```

```

CJ=(0.,1.)

```

```

K=0

```

```

CALL BESJ(RLR,K,BJ)

```

```

CALL BESY(RLR,K,R)

```

```

YJ(1)=R

```

```

HJ=BJ+CJ*R

```

```

K=1

```

```

CALL BESJ(RLR,K,R)

```

```

BJL=-RL*R

```

```

CALL BESY(RLR,K,R)

```

```

YJ(2)=R

```

```

YJL=-RL*R

```

```

HJL=BJL+CJ*YJL

```

```

IF(N.EQ.0) RETURN

```

```

RLR2=2.00/RLR

```

```

1 K=K+1

```

```

YJ(K+1)=RLR2*(K-1)*YJ(K)-YJ(K-1)

```

```

IF(N.NE.(K-1)) GO TO 1

```

```

BJ=J(K)

```

```

HJ=BJ+CJ*YJ(K)

```

UNICAMP

```

RL2=RL/2.D0
BJL=RL2*(J(K-1)-J(K+1))
YJL=RL2*(YJ(K-1)-YJ(K+1))
HJL=BJL+CJ*YJL
RETURN
END

```

C

```

SUBROUTINE BESJ(X,N,BJ)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
IF(N.EQ.1)GO TO 30
IF(X-3.D0)10,20,20
10 Y=(X/3.D0)**2.D0
BJ=(((.0002100*Y-.0039444D0)*Y+.0444479D0)*Y-.3163866D0)*Y
&+1.2656208D0
BJ=(BJ*Y-2.2499997D0)*Y+1.D0
RETURN
20 Y=3.D0/X
P0=(((-.0001355800*Y+.00029333D0)*Y+.00054125D0)*Y-.00262573D0)*Y
P0=((P0+.00003954D0)*Y+.04166397D0)*Y+.78539816D0
F0=(((-.00014476D0*Y-.00072805D0)*Y+.00137237D0)*Y-.00009512D0)*Y
F0=((F0-.0055274D0)*Y-.00000077D0)*Y+.79788456D0
BJ=(1.D0/(X**.5D0))*F0*COS(X-P0)
RETURN
30 IF(X-3.D0)40,50,50
40 Y=(X/3.D0)**2.D0
BJ=(((.00001109D0*Y-.00031761D0)*Y+.00443319D0)*Y-.03954289D0)*Y
BJ=((BJ+.21093573D0)*Y-.56249985D0)*Y*X+.5D0*X
RETURN
50 Y=3.D0/X
P1=(((.00029166D0*Y-.00079824D0)*Y-.00074348D0)*Y+.00637879D0)*Y
P1=((P1-.0000565D0)*Y-.12499612D0)*Y+.78539816D0
F1=(((-.00020033D0*Y+.00113653D0)*Y-.00249511D0)*Y+.00017105D0)*Y
F1=((F1+.01659667D0)*Y+.00000156D0)*Y+.79788456D0
BJ=(1.D0/(X**.5D0))*F1*SIN(X-P1)
RETURN
END

```

C

```

SUBROUTINE BESJ2(N,RLR,J)
IMPLICIT REAL*8 (J,R)
DIMENSION J(120)
K=N+RLR+26
KF=K
RLR2=2.D0/RLR
J(K)=0.D0
K=K-1
J(K)=1.D-30
1 J(K-1)=RLR2*(K-1)*J(K)-J(K+1)
K=K-1
IF(K.NE.1) GO TO 1
JS=J(1)
DO 2 K=3,KF,2
2 JS=JS+2.D0*J(K)
JSN=1.D0/JS
DO 3 K=1,N+2
3 J(K)=J(K)*JSN

```

UNICAMP

RETURN
END

C

SUBROUTINE BESY(X,N,BY)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
IF(N.EQ.1)GO TO 30

10

IF(X-3.)10,20,20

Y=(X/3.D0)**2.D0

BY=(((-.0002484600*Y+.0042791600)*Y-.0426121400)*Y+.2530011700)*
E-.743503800

BY=(BY*Y+.6055936600)*Y+.3674669100

CALL BESJ(X,0,BJ)

BY=BY+BJ*DLOG(X/2.D0)*(2.D0/3.1415926535897932300)

RETURN

20

Y=3.D0/X

P0=(((-.0001355800*Y+.0002933300)*Y+.0005412500)*Y-.0026257300)*

P0=((P0+.0000395400)*Y+.0416639700)*Y+.7853981600

F0=(((-.0001447600*Y-.0007280500)*Y+.0013723700)*Y-.0000951200)*Y

F0=((F0-.005527400)*Y-.0000007700)*Y+.7978845600

BY=(1.D0/(X**.500))*F0*SIN(X-P0)

RETURN

30

IF(X-3.)40,50,50

40

Y=(X/3.D0)**2.D0

BY((((0.002787300*Y-.040097600)*Y+.312395100)*Y-1.316482700)*Y
E+2.1682709

BY=(BY*Y+.221209100)*Y-.636619800

CALL BESJ(X,1,BJ)

BY=BY/X+BJ*DLOG(X/2.D0)*(2.D0/3.1415926535897932300)

RETURN

50

Y=3.D0/X

P1((((0.0002916600*Y-.0007982400)*Y-.0007434800)*Y+.0063787900)*Y

P1=((P1-.000056500)*Y-.1249961200)*Y+.7853981600

F1((((0.0002003300*Y+.0011365300)*Y-.0024951100)*Y+.0001710500)*Y

F1=((F1+.0165966700)*Y+.0000015600)*Y+.7978845600

BY=-(1.D0/(X**.500))*F1*COS(X-P1)

RETURN

END

C

SUBROUTINE BEKI(N,RL,RLR,RI,RIL,RK,RKL)

IMPLICIT REAL*8 (I,P)

DIMENSION I(120),IK(120)

CALL BES12(N,RLR,I)

K=0

CALL BES1(RLR,K,RI)

CALL BESK(RLR,K,R)

IK(1)=P

RK=R

K=1

CALL BES1(RLR,K,R)

RIL=RL*R

CALL BESK(RLR,K,R)

IK(2)=R

RKL=-RL*R

IF(N.EQ.0) RETURN

RLR2=2.D0/RLR

UNICAMP

```

1 K=K+1
  IK(K+1)=RLR2*(K-1)*IK(K)+IK(K-1)
  IF(N.NE.(K-1)) GO TO 1
  RI=I(K)
  RK=IK(K)
  RL2=RL/2.D0
  RIL=RL2*(I(K-1)+I(K+1))
  RKL=-RL2*(IK(K-1)+IK(K+1))
  RETURN
END

```

C

```

SUBROUTINE BESI(X,N,BI)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
IF(N.EQ.1) GO TO 30
IF(X-3.75D0) 10,20,20
10 T=(X/3.75D0)**2.D0
  BI=(((.0045813D0*T+.0360768D0)*T+.2659732D0)*T+1.2067492D0)*T
  BI=((BI+3.0899424D0)*T+3.5156229D0)*T+1.D0
  RETURN
20 T=3.75D0/X
  BI(((((((.00392377D0*T-.01647633D0)*T+.02635537D0)*T
    &-.02057706D0)*T
    &+.00916281D0)*T-.00157565D0)*T+.00225319D0)*T+.01328592D0)*T
    &+.39894228D0)*EXP(X)/(X**2.D0)
  RETURN
30 IF(X-3.75D0) 40,50,50
40 T=(X/3.75D0)**2.D0
  BI(((((((.00032411D0*T+.00301532D0)*T+.02658733D0)*T+.15084934D0
    &T+.51498869D0)*T+.87890594D0)*T+.500)*X
  RETURN
50 T=3.75D0/X
  BI((((((((-.00420059D0*T+.01787654D0)*T-.02895312D0)*T
    &+.02282967D0)*T-.01031555D0)*T+.00163801D0)*T
    &-.00362018D0)*T-.03988024D0)*T+.39894228D0)
    &EXP(X)/(X**2.D0)
  RETURN
END

```

C

```

SUBROUTINE BESI2(N,RLR,I)
IMPLICIT REAL*8 (I,R)
DIMENSION I(120)
K=N+10+RLR/2
KF=K
RLR2=2.D0/RLR
I(K)=0.D0
K=K-1
I(K)=1.D0
1 I(K-1)=RLR2*(K-1)*I(K)+I(K+1)
  K=K-1
  IF(K.NE.1) GO TO 1
  IS=I(1)
  DO 2 K=2,KF
2 IS=IS+2.D0*I(K)
  ISN=EXP(RLR)/IS
  DO 3 K=1,N+2
3

```

UNICAMP

```

3  I(K)=I(K)*ISN
   RETURN
   END

```

C
C

```

SUBROUTINE BESK(X,N,BK)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
IF(N.EQ.1) GO TO 30
IF(X-2.D0)10,20,20
10 Y=(X/2.D0)**2.D0
   BK=(( (.000007400*Y+.000107500)*Y+.0026269800)*Y+.034885900)*Y
   BK=(( BK+.2306975600)*Y+.422784200)*Y-.5772156600
   CALL BESI(X,N,F0)
   BK=BK-F0*LOG(X/2.D0)
   RETURN
20 Y=2.D0/X
   BK=(( (.0005320800*Y-.002515400)*Y+.0058787200)*Y-.0106244600)*Y
   BK=(( BK+.0218956800)*Y-.0783235800)*Y+1.2533141400
   BK=BK*(1.D0/(X**.500))* (1.D0/EXP(X))
   RETURN
30 IF(X-2.D0)40,50,50
40 Y=(X/2.D0)**2.D0
   BK=(( (-.0000468600*Y-.0011040400)*Y-.0191940200)*Y-.1815689700)*
   BK=(( BK-.6727857900)*Y+.1544314400)*Y+1.D0
   CALL BESI(X,N,F1)
   BK=BK/X+F1*LOG(X/2.D0)
   RETURN
50 Y=2.D0/X
   BK=(( (-.0006824500*Y+.0032561400)*Y-.0078035300)*Y+.0150426800)*
   BK=(( BK-.036556200)*Y+.2349861900)*Y+1.2533141400
   BK=BK*(1.D0/(X**.500))* (1.D0/EXP(X))
   RETURN
END

```

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] G. A. Deschamps, "Microstrip microwave antennas," 3rd USAF Symp. on Antennas, 1953.
- [2] H. Gutton e G. Baissinot, "Flat aerial for ultra high frequencies," French Patent Nº 703113, 1955.
- [3] E. V. Byron, "A new flush-mounted antenna element for phased array application," em Proc. Phased Array Antenna Symp., pp. 187-192, 1970.
- [4] J. O. Howell, "Microstrip antennas," em Dig. Int. Symp. Antennas Prop. Soc., Williamsburg, VA, pp. 177-180, 1972.
- [5] R. E. Munson, "Single slot cavity antennas assembly," Patente Nº 3713162, Estados Unidos, 1973.
- [6] K. R. Carver e J. W. Mink, "Microstrip antenna technology," IEEE Trans. on Ant. and Propagat., vol. AP-29, pp. 2-24, 1981.
- [7] R. J. Mailloux, J. F. McIlvenna e N. P. Kernweis, "Microstrip array techonology," IEEE Trans. on Ant. and Propagat., vol. AP-29, pp. 25-37, 1981.
- [8] I. J. Bahl e P. Bhartia, Microstrip Antennas, Dedham, Massachusetts: Artech House, 1980.
- [9] R. M. Nelson, D. A. Rogers, A. G. Assunção, "Rectangular microstrip patch resonators on anisotropic substrates," Technical Report, Dept. of Electrical and Electronics Engineering, North Dakota State University, Fargo, North Dakota, 1987.

- [10] S. B. A. Fonseca e A. J. Glarola, "Dyadic Green's functions and their use in the analysis of microstrip antennas," em Advances in Electronics and Electron Physics, editado por Peter W. Hawkes, vol. 65, pp. 1-90, Academic Press, 1985.
- [11] R. E. Munson, "Conformal microstrip antennas and microstrip phased arrays," IEEE Trans. on Ant. and Propagat., vol. AP-22, pp. 74-77, 1974.
- [12] W. F. Richards, Y. L. Lo e D. D. Harrinson, "An improved theory for microstrip antennas and aplications," IEEE Trans. on Ant. and Propagat., vol. AP-29, pp. 38-46, 1981.
- [13] D. M. Pozar, "Input impedance and mutual coupling of rectangular microstrip antennas," IEEE Trans. on Ant. and Propagat., vol. AP-30, pp. 1191-1196, 1982.
- [14] M. G. Bayley e M. D. Deshpande, "Integral equations formulation of microstrip antennas," IEEE. Trans. on Ant. and Propagat., vol. AP-30, pp. 651-655, 1982.
- [15] G. T. Tai, Dyadic Green's Functions in Electromagnetic Theory, Scranton PA: Intext Publishers, 1971.
- [16] G. T. Tai, "Eigen-function expansion of dyadic Green's functions," Math. Note 28, The University of Michigan Radiation Laboratory, Ann Arbor, Mich., 1973.
- [17] G. T. Tai, "The singular terms in the eigen-function expansion of dyadic Green's function of the electric type," The University of Michigan Radiation Laboratory, Ann Arbor, Mich., 1980.
- [18] R. F. Harrington, Field Computation by Moment Methods, New York: The Macmillan Company, 1968.

- [19] G. P. S. Cavalcanti, D. A. Rogers e A. J. Glarola, "Analysis of electromagnetic wave propagation in multilayered media using dyadic Green's function," Radio Sci., vol. 17, No 3, pp. 503-508, 1982.
- [20] S. B. A. Fonseca, "Aplicações do formalismo das funções de Green diádicas na análise de antenas de microfita," Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 1982.
- [21] A. J. M. Soares, "Análise da propagação de ondas em meios com multicamadas cilíndricas concêntricas utilizando-se funções de Green diádicas," Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 1986.
- [22] K. G. Gupta e A. Singh, Microwave Integrated Circuits, New York: Wiley, 1974.
- [23] A. Nakatani e N. G. Alexopoulos, "Microstrip circuit elements on cylindrical substrates," em 1987 IEEE-MTT-S Microwave Theory and Technique International Symposium Digest, Las Vegas, NV., pp. 739-742, 1987.
- [24] R. E. Collins, Mathematical methods for Physicists and Engineers, New York: Reinhold Book, 1968.
- [25] M. Abramowitz e I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, New York: Dover Publications, Inc., 1970.
- [26] R. W. Jackson e D. M. Pozar, "Full-wave analysis of microstrip open-end and gap discontinuities," IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-33, pp. 1036-1042, 1985.
- [27] M. D. Deshpande e M. C. Bailey, "Input impedance of microstrip antennas," IEEE Trans. on Ant. and Propagat., vol. AP-30, pp. 645-650, 1982.

- [28] D. M. Pozar, "Input impedance and mutual coupling of rectangular microstrip antennas," IEEE Trans. on Ant. and Propagat., vol. AP-30, pp. 1191-1196, 1982.

- [29] D. M. Pozar e S. M. Voda, "A rigorous analysis of a microstripline fed patch antenna," IEEE Trans. on Ant. and Propagat., vol. AP-35, pp. 1343-1350, 1987.

- [30] W. L. Stutzman e G. A. Thiele, Antenna Theory and Design, New York: Wiley, 1981.

- [31] D. T. Paris e F. K. Hurd, Basic Electromagnetic Theory, New York: McGraw-Hill Book Company, 1969.

- [32] I. E. Rana e N. G. Alexopoulos, "Current distribution and input impedance of printed dipoles," IEEE Trans. on Ant. and Propagat., vol. AP-29, pp. 99-105, 1981.

- [33] A. J. M. Soares, S. B. A. Fonseca e A. J. Glarola, "The effect of a dielectric cover on the current distribution and input impedance of printed dipoles," IEEE Trans. on Ant. and Propagat., vol. AP-32, pp. 1149-1153, 1984.

- [34] R. E. Collin, Field Theory of Guided Waves, New York: MacGraw-Hill Book Company, 1960.

- [35] J. R. Mosig, "Les structures microruban: Analyse moyen des équations intégrales," Tese de Doutorado Nº 511(1983), Departamento de Eletricidade da Escola Politécnica Federal de Lausane, França, 1984.

- [36] S. M. Rao, D. R. Wilton e A. W. Glisson, "Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape," IEEE Trans. on Ant. and Propagat., vol. AP-30, pp. 409-417, 1982.