

PROBLEMAS MULTI-ESTÁGIOS DE DIMENSIONAMENTO DE LOTES
COM TEMPO NÃO-ZERO DE PRODUÇÃO E CAPACIDADE FINITA

CAPACITATED MULTI-STAGE LOT-SIZING PROBLEMS
WITH NON-ZERO LEAD TIME

Alistair Richard Clark

*Este exemplar corresponde
à redação final da tese
defendida por Alistair
Richard Clark e aprovada
pela Comissão Julgadora
em 13 de julho de 1990*

Vinícius A. Armentano

Tese apresentada ao Departamento
de Engenharia de Sistemas da
Faculdade de Engenharia Elétrica
da Universidade Estadual de
Campinas como requisito parcial
para obtenção do título de Doutor
em Engenharia Elétrica na área de
Automação.

Campinas - 1990

Para Ester

Agradecimentos

36m
Ao Vinicius Armentano pela orientação generosa e crítica que ele deu;

A Ester por sua compreensão e paciência;

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Problemas Multi-Estágios de Dimensionamento de Lotes com Tempo Não-Zero de Produção (*Non-Zero Lead Time*) são formulados como modelos de programação inteira numa maneira adequada para uso com um horizonte rolante de planejamento em sistemas do tipo *Material Requirements Planning*, sem e com capacidade finita de produção. Duas abordagens de solução, uma de cortes fortes e uma outra de Relaxação Lagrangeana são desenvolvidas. Experimentos computacionais são relatados e analisados para as duas abordagens. Além disso, uma heurística para uso em sistemas multi-estágios de grande porte com tempo não-zero de produção e com capacidade finita é desenvolvida e testada computacionalmente.

Abstract

Multi-Stage Lot-Sizing Problems with Non-Zero Lead Time are formulated as Integer Programming models in a manner suitable for use with a rolling planning horizon in capacitated and uncapacitated Material Requirements Planning systems. Two solution approaches, one of strong cuts and another that uses Lagrangian Relaxation are developed. Computational results are reported and analysed for both approaches. In addition, a heuristic method for use in large-scale capacitated multi-stage systems with non-zero lead time is developed and tested.

Autor: Alistair Richard Clark
Orientador: Vinicius Amaral Armentano

Introdução	1
Capítulo 1 – Modelos para o Dimensionamento de Lotes	
1.1 Introdução	5
1.2 Modelos de Um Estágio para o Dimensionamento de Lotes	6
1.3 Modelos Multi-Estágios para o Dimensionamento de Lotes	11
1.3.1 Estruturas de Montagem com Tempo Zero de Produção	12
1.3.2 Estruturas Gerais com Tempo Zero de Produção	18
1.3.3 Estruturas de Montagem com Tempo Não-Zero de Produção	22
1.3.4 Estruturas Gerais com Tempo Não-Zero de Produção	31
1.4 Modelos Multi-Estágios com Capacidade Finita de Produção	49
Capítulo 2 – Soluções Ótimas Através de Cortes Fortes	
2.1 Introdução	59
2.2 A Identificação de Cortes Fortes	67
2.3 Um Algoritmo de Cortes Fortes	108
2.4 O Algoritmo Branch-and-Bound	120
2.4.1 Uma Heurística no caso de Capacidade Infinita	121
2.4.2 Estratégia de Busca	124
2.5 Os Experimentos Computacionais para Capacidade Infinita	127
2.5.1 Os Dados	128
2.5.2 A Pré-Fixação dos Estoques Iniciais e da Produção	130
2.5.3 Uma Comparação dos Cortes do tipo V1 e do tipo V3	132
2.5.4 A Análise das Abordagens Ótimas	137

Capítulo 3 - Soluções Ótimas através de Relaxação Lagrangeana e um Método Heurístico para o Caso de Capacidade Finita

3.1	Introdução	146
3.2	Um Limite Inferior através de Relaxação Lagrangeana	148
3.3	Uma Heurística no caso de Capacidade Finita	154
3.4	Os Experimentos Computacionais com Capacidade Finita	173
3.4.1	Os Dados	174
3.4.2	A Pré-Fixação dos Estoques Iniciais e da Produção	175
3.4.3	A Análise das Abordagens Ótimas	178
3.4.4	A Análise da Heurística	186

Capítulo 4 - Conclusões

Apêndice A	195
Apêndice B	206
Apêndice C	208
Apêndice D	214
Apêndice E	221
Referências	230

INTRODUÇÃO

Anthony (1965) [apud. Hax e Candea, 1984] identifica três níveis de tomada de decisões no planejamento da produção numa empresa de manufatura:

1. Planejamento Estratégico.
2. Planejamento Tático.
3. Controle de Operações

O Planejamento Estratégico trata da identificação e implementação de políticas adequadas para a realização das metas estratégicas de longo prazo da empresa. Tais políticas necessitam de decisões sobre mercados-alvo e investimentos de grande porte, por exemplo, as quantidades e locais da capacidade de manufatura para atingir as metas estratégicas.

O Planejamento Tático trata da utilização eficiente dos recursos disponíveis para alcançar alvos de médio prazo tais como a maneira mais barata de atender a demanda para os produtos da empresa. Aqui devem ser tomadas decisões sobre taxas de produção, níveis de estoque, alocação de mão de obra e equipamentos, e transporte de mercadoria. Estas decisões são sujeitas a restrições resultantes de decisões já tomadas no nível do planejamento estratégico.

O terceiro e último nível é o de Controle Operacional, que é relacionado com as decisões do dia-a-dia sobre a implementação dos planos táticos elaborados no segundo nível. Neste terceiro nível são decididos e executados os *schedules* detalhados de produção relacionados com os itens e componentes a serem produzidos no dia em questão.

Esta tese trata de um certo tipo de tomada de decisões que diz respeito ao segundo e ao terceiro dos três níveis de Anthony. Nosso interesse é com o planejamento tático-operacional da produção em lotes em sistemas multi-estágios da manufatura de itens com demanda dinâmica. O horizonte de planejamento é de curto a médio prazo e pode ser dividido em períodos de planejamento numa tal maneira que, num dado período, um produto ou não é produzido ou é produzido num só lote cujo tamanho pode variar. O problema de planejamento é decidir em quais períodos produzir quais itens e componentes dos itens, e quais serão os tamanhos dos lotes nos períodos de produção.

Esta classe de problema de planejamento é muito comum na indústria de manufatura e é de difícil resolução. Devemos levar em conta a estrutura de componentes dos itens, a capacidade de produção do sistema, o tempo necessário para a produção ou compra (*lead time*) de cada componente, os níveis de estoque de cada componente e a demanda para os itens ao longo do horizonte de planejamento. Para ajudar a enfrentar este conjunto de fatores, várias metodologias e ferramentas têm surgido. Entre elas, destaca-se o Planejamento de Necessidade de Materiais, também conhecido como *Material Requirements Planning* (MRP) [Orlicky, 1975]. A partir da sua introdução 15 a 20 anos atrás, o MRP tem sido largamente usado para organizar e planejar a manufatura de produtos com estruturas complexas. O conceito essencial do MRP é muito simples: Dado um plano para a produção de um item final ao longo de um horizonte de planejamento, o Plano Mestre de Produção ou *Master Production Schedule* (MPS), o usuário desce pela estrutura de componentes do item calculando quanto de cada componente se deve produzir em cada período para satisfazer o MPS, levando em conta os tempos de produção e níveis iniciais de todos os componentes. Aproveitando a

grande capacidade de computadores para o processamento de dados, o MRP tem se mostrado uma ferramenta poderosa para o planejamento da produção.

Porém, a abordagem do MRP tem certas limitações. Primeiro, ela assume que existe capacidade de produção em quantidades suficientes para atender o plano que o MRP prescreve. Certas metodologias simples são muitas vezes usadas com MRP para estimar as necessidades aproximativas de capacidade de um dado MPS. Tais metodologias incluem *Capacity Planning using Overall Factors*, *Capacity Bills*, *Resources Profiles*, e a relativamente sofisticada *Capacity Requirements Planning* [Vollman et al, 1988]. Esta última pode ser usada para calcular as consequências detalhadas e dinâmicas para as necessidades de capacidade das decisões tomadas no processo de MRP resultante de um dado MPS. Se uma capacidade suficiente de produção não for disponível, então devemos ou fornecer mais capacidade ou ajustar o MPS para que este fique factível quanto à capacidade. A maneira pela qual se deve ajustar o MPS é da alçada do usuário.

Uma segunda limitação do MRP é que ele não é uma metodologia otimizante que minimize o custo total de implementar o MPS através do balanceamento dos custos de preparação e produção de lotes e os custos de estocagem de itens e componentes. A maior parte dos sistemas de MRP permite que o usuário ou use sequencialmente técnicas mono-estágios de dimensionamento de lotes que em geral fornecem planos de produção que são mais caros que o ótimo ou use a política "lote-por-lote" que desconsidera custos. Porém, decisões de dimensionamento de lotes num dado nível têm implicações em níveis mais baixos da estrutura de componentes do item. Tais decisões, portanto, deveriam considerar simultaneamente todos os níveis da estrutura.

As duas limitações de MRP acima citadas fornecem a motivação para o assunto desta tese, a saber, o desenvolvimento de modelos e métodos de solução para decidir simultaneamente os tamanhos de lotes em sistemas multi-estágios de manufatura, sem e com capacidade finita de produção. O capítulo 1 examina e propõe formulações de modelos dinâmicos de programação matemática a serem usados para o planejamento da produção de curto e médio prazo. Concentrar-nos-emos em formulações de modelos de dimensionamento de lotes para uso com um horizonte rolante de planejamento em sistemas de tipo MRP, sem e com capacidade finita.

O capítulo 2 desenvolve e explora uma abordagem de cortes fortes dentro de um algoritmo de *Branch-and-Bound* para a solução ótima de modelos multi-estágios de dimensionamento de lotes com capacidade infinita de produção. Experimentos computacionais são relatados e analisados.

O desenvolvimento de métodos para a solução de modelos multi-estágios de dimensionamento de lotes com capacidade finita de produção é uma área conhecida por ser computacionalmente difícil. Porém, ela é considerada importante, uma vez que a maior parte dos sistemas na vida real são não apenas multi-estágios, mas também de capacidade finita. No capítulo 3 desenvolvemos uma abordagem ótima que usa a Relaxação Lagrangeana e uma heurística para fornecer limites inferiores e superiores respectivamente dentro de uma busca de *Branch-and-Bound*. Experimentos computacionais são relatados e analisados. Também no capítulo 3, reconhecendo que muitos sistemas de manufatura são grandes demais para possibilitar a utilização de métodos ótimos de solução, testamos computacionalmente a heurística para uso em sistemas multi-estágios de grande porte com capacidade finita.

CAPÍTULO 1

MODELOS PARA O DIMENSIONAMENTO DE LOTES

1.1 Introdução

Este capítulo examina e propõe modelos dinâmicos de dimensionamento de lotes que podem ser usados para o planejamento da produção de curto e médio prazo em sistemas multi-estágios de manufatura. Primeiro, consideramos modelos de um único estágio. Em seguida, tratamos de modelos de múltiplos estágios, para estruturas de montagem e estruturas gerais, sem e com tempo de produção (*lead time*), e sem e com restrições de capacidade finita de produção.

1.2 Modelos de Um Estágio para o Dimensionamento de Lotes

Suponha que a demanda para um dado item deva ser atendida ao longo de T períodos de tempo de mesma duração. Esta demanda pode variar entre períodos. Para um dado período, o item ou não é produzido ou é produzido num único lote cujo tamanho pode variar. O item é produzido num único estágio. O problema mono-estágio de dimensionamento de lotes é o de decidir em quais períodos devemos produzir quais tamanhos de lotes para atender com mínimo custo total a demanda para o item ao longo dos T períodos.

No caso do problema de dimensionamento de lotes com capacidade infinita de produção, a minimização dos custos totais trata do balanceamento dos custos de produção e dos custos de estocagem. No caso de capacidade finita de produção, os custos totais podem incluir um terceiro custo, a saber o de fornecer capacidade adicional de produção em certos períodos (por exemplo, horas adicionais de mão-de-obra como em Bahl e Zionts (1987)).

Em comum com a maior parte dos autores, assumamos que uma decisão para produzir o item em um período t incorre em um custo fixo de preparação (*setup cost*) s_t e em um custo c_t por unidade de produção. Também assumamos que é cobrado um custo h_t por unidade do item em estoque no fim do período t . Seja d_t a demanda para o item em período t . Então o problema mono-estágio de dimensionamento de lotes com capacidade infinita de produção pode ser formulado como

$$\min \quad \sum_{t=1}^T \left[s_t y_t + c_t x_t + h_t I_t \right]$$

tal que

$$I_{t-1} + x_t - I_t = d_t \quad t = 1, \dots, T$$

$$x_t \leq M_t y_t \quad t = 1, \dots, T$$

$$x_t \geq 0; \quad I_t \geq 0; \quad y_t = 0 \text{ ou } 1; \quad t = 1, \dots, T$$

onde a variável x_t é a produção do item no período t , a variável I_t é o estoque do item no fim do período t , e a constante M_t é um limite superior de x_t . A variável y_t é usada para cobrar o custo de preparação s_t quando há produção no período t .

A função objetivo minimiza o total dos custos de preparação de lotes, de produção e de estocagem ao longo dos T períodos do horizonte de planejamento. Notamos que um item produzido no período t é disponível para ajudar a satisfazer a demanda d_t . Assim, as restrições $I_{t-1} + x_t - I_t = d_t$ fornecem a ligação entre estoques de períodos sucessivos. A restrição $x_t \leq M_t y_t$ força x_t a ser 0 quando y_t é 0, mas deve não restringir x_t quando y_t é 1. Note que a formulação permite soluções factíveis que tem $x_t = 0$ e $y_t = 1$ para algum $t \in \{1, \dots, T\}$, mas tais soluções são obviamente subótimas se $s_t > 0$.

O problema mono-estágio de dimensionamento de lotes com capacidade infinita de produção tem sido estudado bastante durante os ultimos 30 anos. A referência básica é o conhecido artigo de Wagner e Whitin (1958) que desenvolveu um algoritmo ótimo de programação dinâmica que assume que o estoque inicial I_0 é zero e que é executável em tempo $O(T^2)$. Quando o estoque inicial I_0 é positivo, as demandas $d_1, \dots, d_T$ são redefinidas como demandas

"efetivas" depois de primeiro consumir o estoque I_0 [Johnson e Montgomery, 1974].

O modelo acima planeja os tamanhos dos lotes ao longo de um horizonte de planejamento de T períodos. Porém, em geral o horizonte de planejamento não pode ser especificado com tanta precisão. Seria ideal se fosse possível planejar ao longo de toda a vida do produto. Na prática, não sabemos com precisão qual será a demanda para um produto ao longo de toda a sua vida de mercado e, para tomar decisões sobre tamanhos de lotes, não é, em geral, necessário saber. As decisões de curto prazo resultantes de um horizonte longo de planejamento não deveriam ser muito diferentes das decisões resultantes de um horizonte de planejamento que se estende sobre a vida de mercado do produto [Lee e Denardo, 1986]. Adicionalmente, quanto mais longo o horizonte de planejamento, maior o esforço computacional em decidir os tamanhos dos lotes. Devemos conciliar o maior trabalho computacional de um horizonte mais longo com as decisões "não tão boas" de um horizonte menor. Assumamos que esta conciliação já foi considerada e que um horizonte de planejamento de T períodos já foi decidido [Baker 1977, Carlson et al 1982, Lee e Denardo 1986], levando em conta o uso de um horizonte rolante como vamos discutir agora.

Na prática, o modelo geralmente não é aplicado de T em T períodos. A forma côncava da função objetivo força o valor de I_T para zero ou um valor pré-fixado na solução ótima. A aplicação do modelo de T em T períodos introduziria provavelmente uma rigidez cara por forçar o estoque ser zero ou pré-fixado de T em T períodos. Na prática, o modelo é geralmente usado na base de um "horizonte rolante" na seguinte maneira repetitiva:

1. O modelo é resolvido e somente a decisão do período 1 é

implementada.

2. "Rola-se" para frente por um período tal que um período que tinha índice t passa a ter índice $t-1$.

3. Anexa-se uma nova demanda d_T e vai-se ao passo 1.

Em qualquer instante em tempo planejamos para frente ao longo de um horizonte de T períodos, mas implementamos apenas a decisão para o período imediato. Assim, uma decisão implementada sempre leva em conta os próximos T períodos de demanda.

Uma razão adicional para usar o modelo na base de um horizonte rolante é que podemos não saber com certeza a demanda até o período T . Neste caso temos que usar previsões da demanda. Se usarmos o modelo de T em T períodos então, por exemplo, a decisão x_{T-3} implementada no período $T-3$ seria baseada em previsões de demanda feitas no período 1. Seria melhor basear a decisão implementada x_{T-3} nas últimas previsões disponíveis no período $T-3$ que são geralmente mais confiáveis que as previsões disponíveis no período 1. Os efeitos de incerteza de demanda sobre custos foram pesquisados, por exemplo, por Bodt e Wassenhove (1983) e por Wemmerlov (1985) no caso de demanda constante com perturbações aleatóreas e previsões feitas com a técnica média exponencial móvel (*exponential smoothing*). Chalmet et al (1985) também investigaram tais efeitos num estudo de caso onde a demanda era altamente variável e sujeita a frequentes mudanças de quantidade.

Agora consideremos a inclusão do tempo de produção (*lead time*) no modelo. Suponha que sejam necessários L períodos para produzir um item de tal maneira que a produção do período t é disponível para atender a demanda somente no período $t+L$. Assim o modelo apropriado seria

$$\min \sum_{t=1}^T \left[s_t y_t + c_t x_t + h_{t+L} I_{t+L} \right]$$

tal que

$$I_{t+L-1} + x_t - I_{t+L} = d_{t+L} \quad t = 1, \dots, T$$

$$x_t \leq M_t y_t \quad t = 1, \dots, T$$

$$x_t \geq 0; \quad I_{t+L} \geq 0; \quad y_t = 0 \text{ ou } 1; \quad t = 1, \dots, T$$

Note que a primeira variável de estoque é I_{1+L} . Os níveis de estoque $I_1, \dots, I_L$ já foram determinados.

Suponha que este modelo é usado na base de um horizonte rolante. Se sempre soubermos a demanda d_{1+L} com certeza então os níveis pré-determinados $I_1, \dots, I_L$ sempre serão não-negativos e assim suficientes para atender as demandas $d_1, \dots, d_L$. Se tivermos que prever a demanda d_{1+L} com menos de 100% de confiança então existirá um risco de não haver estoque suficiente para atender $d_1, \dots, d_L$. Uma maneira de evitar déficits (*stockouts*) nos períodos 1 a $L-1$ é ter um estoque de segurança do item. Esta tese não levará em consideração a determinação de estoques de segurança ou maneiras alternativas de lidar com déficits. Porém, incerteza de demanda e estoques de segurança são tratados em Whybark e Williams (1976), Mehta (1980), e Aucamp (1986). Esta tese abordará incerteza de demanda em sistemas multi-estágios em outras seções deste capítulo.

1.3 Modelos Multi-Estágios para o Dimensionamento de Lotes

A maior parte de itens são produzidos não num único estágio, mas em múltiplos estágios. Um item pode ser composto de muitos componentes que também devem ser produzidos em lotes econômicos e assim entram no problema total. A demanda dinâmica para um dado componente depende, pelo menos em parte, das decisões tomadas sobre os tamanhos dos lotes dos componentes que usam o dado componente. Nosso modelo deve refletir tanto esta demanda dependente (por exemplo, demanda de auto-peças para montar veículos numa fábrica) quanto qualquer demanda independente para o componente (por exemplo, demanda de auto-peças para oficinas de conserto e manutenção).

Na seção 1.3.1 tratamos de um modelo para um item com uma estrutura de montagem, supondo tempo zero ou quase-zero de produção para cada componente e capacidade infinita de produção. Na seção 1.3.2 generalizamos para itens com estruturas gerais e na seção 1.3.3 para itens com estruturas de montagem e com tempo não-zero de produção de componentes. Finalmente na seção 1.3.4 propomos um modelo para o caso de itens com estruturas gerais com tempo não-zero de produção de componentes.

Consideramos o caso de capacidade finita de produção na seção 1.4.

1.3.1 Estruturas de Montagem com Tempo Zero de Produção

Queremos planejar a produção em lotes discretos de um item final e seus componentes numa estrutura de montagem ao longo de um horizonte de planejamento de T períodos (daqui para frente, quando falamos dos componentes, estamos falando implicitamente do item final também). Para cada componente temos que decidir em quais períodos devemos produzir quais tamanhos de lotes do item ou componente. Assumamos que um item produzido num período é disponível para consumo no mesmo período, isto é, o tempo de produção é zero para o item final e cada um de seus componentes. O objetivo é achar um plano que minimiza o total dos custos de preparação de lotes, de produção e de estoque ao longo do horizonte de planejamento .

Nesta seção examinamos uma formulação baseado naquela de Afentakis, Gavish e Karmarkar (1984). Antes de especificar a formulação, vamos denominar os componentes com os números 1 até N tal que, se o componente i for em si um componente do componente j , então $i > j$. O item final tem o número 1. A estrutura de montagem dos componentes pode ser representada por uma árvore invertida que tem o item final como raiz como no exemplo na Figura 1.3.1. Seja $s(i)$ o componente que é o (único) componente sucessor imediato do componente i , seja $R(i)$ o conjunto de todos os componentes sucessores do componente i , seja $P(i)$ o conjunto dos componentes predecessores imediatos do componente i , e $Q(i)$ o conjunto de todos os componentes predecessores do componente i . Assim, no exemplo da Figura 1.3.1, $s(5)=2$, $R(5)=\{1,2\}$, $P(2)=\{4,5,6\}$, e $Q(1)=\{2,3,4,5,6,7\}$.

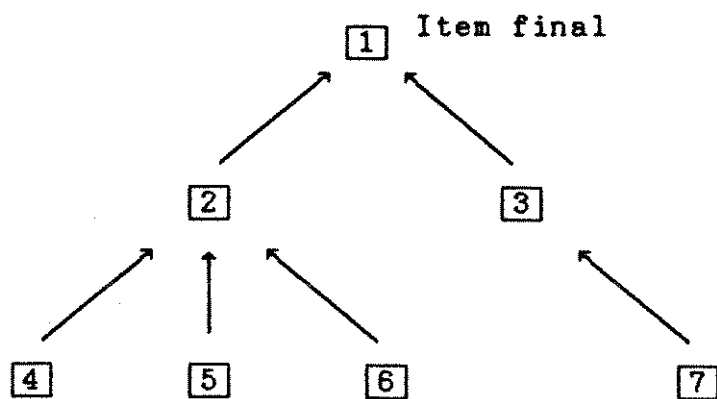


Figura 1.3.1 - Uma Estrutura de Montagem

A demanda independente d_{it} para cada componente i no período t tem que ser atendida no fim do período t . A demanda dependente para o componente i no período t depende do tamanho do lote do componente $s(i)$ no período t e da quantidade $r_{i,s(i)}$ que é o número de unidades do componente i necessário para produzir uma unidade do componente $s(i)$. Uma decisão para produzir um lote de tamanho x_{it} do componente i no período t implica um custo fixo $s_{it} \geq 0$ de preparação e um custo unitário $c_{it} \geq 0$ de produção. Componentes podem ser estocados de um período para o próximo e neste caso um custo unitário $h_{it} \geq 0$ de estocagem é cobrado por I_{it} , o nível de estoque de componente i que passa do período t para o período $t+1$. Assim o modelo pode ser formulado como:

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left[s_{it} y_{it} + c_{it} x_{it} + h_{it} I_{it} \right] \quad (F_{xyI}^{131})$$

tal que

$$I_{1,t-1} + x_{1t} - I_{1t} = d_{1t} \quad t = 1, \dots, T$$

$$I_{i,t-1} + x_{it} - I_{it} - r_{i,s(i)} x_{s(i),t} = d_{it} \quad \begin{array}{l} i = 2, \dots, N \\ t = 1, \dots, T \end{array}$$

$$x_{it} \leq M_{it} y_{it} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, N \\ t = 1, \dots, T \end{array}$$

$$x_{it} \geq 0; \quad I_{it} \geq 0; \quad y_{it} = 0 \text{ ou } 1; \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, N \\ t = 1, \dots, T \end{array}$$

onde M_{it} é um limite superior de x_{it} .

O modelo pode ser usado na base de um horizonte rolante, com a implementação somente das decisões de produção do período 1.

Afentakis et al (1984) transformaram a formulação acima expressa em termos de estoque convencional I_{it} (conhecido como *installation stock*) para uma em termos de *echelon stock* (que traduzimos como "estoque de escalão").

Defina E_{it} , o nível de estoque de escalão do componente i no fim do período t , como

$$E_{it} = I_{it} + r_{i,s(i)} E_{s(i),t}$$

Esta definição aplicada repetidas vezes resulta em

$$E_{it} = I_{it} + \sum_{j \in R(i)} p_{ij} I_{jt}$$

onde $p_{ij} = \prod_k r_{k,s(k)}$ e o produto $\prod_k$ é sobre todos os componentes k no caminho do componente i até o componente j , excluindo o componente j , isto é, p_{ij} é a quantidade do componente i em uma unidade de componente j .

Ao E_{it} podemos atribuir um custo unitário definido como:

$$e_{it} = h_{it} - \sum_{j \in P(i)} r_{ji} h_{jt}$$

No Apêndice A (Proposição A1) é mostrado que $\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N h_{it} I_{it} = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N e_{it} E_{it}$ para o caso mais geral de estruturas gerais. Também no Apêndice A (como um caso especial da Proposição A4) é mostrado que a formulação F_{xyI}^{131} em estoque convencional é equivalente à seguinte formulação F_{xyE}^{131} em estoque de escalão:

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left[s_{it} y_{it} + c_{it} x_{it} + e_{it} E_{it} \right] \quad (F_{xyE}^{131})$$

tal que

$$E_{i,t-1} + x_{it} - E_{it} = \sum_{j \in R(i) \cup \{i\}} p_{ij} d_{jt} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, N \\ t = 1, \dots, T \end{matrix}$$

$$r_{i,s(i)} E_{s(i),t} - E_{it} \leq 0 \quad \begin{matrix} i = 2, \dots, N \\ t = 1, \dots, T \end{matrix}$$

$$x_{it} \leq M_{it} y_{it} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, N \\ t = 1, \dots, T \end{matrix}$$

$$x_{it} \geq 0 ; E_{it} \geq 0 ; y_{it} = 0 \text{ ou } 1 ; \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, N \\ t = 1, \dots, T \end{matrix}$$

O conceito de estoque de escalão foi introduzido por Clark and Scarf (1960) e tem sido usado por vários autores inclusive Crowston et al (1960) e Schwarz e Schrage (1975). O estoque de escalão E_{it} é o estoque total do componente i no sistema no fim do período t , tanto como componente sozinho (I_{it}) como parte de componentes sucessores $\left[\sum_{j \in R(i)} p_{ij} I_{jt} \right]$. O estoque de escalão é um conceito muito útil que é capaz de simplificar bastante a análise no seguinte sentido: enquanto a quantidade de estoque convencional I_{it} depende das demandas independentes, dos tamanhos dos lotes do componente i , e também dos tamanhos dos lotes do componentes $j \in R(i)$, a quantidade

de estoque de escalão E_{it} depende somente das demandas independentes e dos tamanhos dos lotes do componente i . Podemos verificar este fato por notar que as restrições

$$I_{i,t-1} + x_{it} - I_{it} - r_{i,s(i)}x_{s(i),t} = d_{it} \quad \begin{matrix} i = 2, \dots, N \\ t = 1, \dots, T \end{matrix}$$

foram substituídas pelas restrições

$$E_{i,t-1} + x_{it} - E_{it} = \sum_{j \in R(i) \cup \{i\}} p_{ij} d_{jt} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, N \\ t = 1, \dots, T \end{matrix}$$

Note também que as restrições $I_{1t} \geq 0$ foram substituídas pelas restrições $E_{1t} \geq 0$ para $t=1, \dots, T$ e as restrições $I_{it} \geq 0$ foram substituídas pelas restrições $E_{it} \geq r_{i,s(i)}E_{s(i),t}$ para $i=2, \dots, N$ e $t=1, \dots, T$. Destas restrições podemos inferir que $E_{it} \geq 0$ para $i=2, \dots, N$ e $t=1, \dots, T$ que portanto são redundantes, mas mesmo assim são incluídas na formulação F_{xyE}^{131} por elegância e implementação computacional.

Agora consideremos o custo unitário de estoque de escalão e_{it} . Lembre que e_{it} é definido como

$$e_{it} = h_{it} - \sum_{j \in P(i)} r_{ji} h_{jt}.$$

O termo h_{it} é o custo unitário por período do estoque convencional do componente i no fim do período t e reflete o valor do componente i . O termo $\sum_{j \in P(i)} r_{ji} h_{jt}$ é o total dos h_{jt} , os custos unitários de estoque convencional dos componentes predecessores imediatos $j \in P(i)$ do componente i , multiplicados por r_{ji} (a quantidade do componente j em uma unidade do componente i). Assim o termo $\sum_{j \in P(i)} r_{ji} h_{jt}$ reflete o valor total dos componentes que entram na produção de uma unidade do componente i e que já tinham sido produzidos antes. Portanto $h_{it} - \sum_{j \in P(i)} r_{ji} h_{jt}$ reflete o valor adicionado na montagem final de uma unidade do componente i . Desta forma, podemos

interpretar o custo unitário de estoque de escalão $e_{it} = h_{it} - \sum_{j \in P(i)} r_{ji} h_{jt}$ como o custo unitário por período da estocagem no fim do período t do valor adicionado na produção do componente i que não tinha sido adicionado antes da montagem final do componente i . Em outras palavras, e_{it} é o custo unitário para o componente i de levar este valor adicionado em estoque do período t ao período $t+1$.

Afentakis et al (1984) usaram a formulação F_{xyE}^{131} para fornecer limites inferiores de rápida computação através de Relaxação Lagrangeana num algoritmo de *Branch-and-Bound* para resolver o problema com estrutura de montagem. A formulação é introduzida aqui porque vamos generalizá-la mais tarde neste capítulo no caso de um item com estrutura geral e com tempo não-zero de produção de componentes.

1.3.2 Estruturas Gerais com Tempo Zero de Produção

Vamos agora considerar estruturas gerais onde um componente pode ter mais que um componente sucessor. Por exemplo, na estrutura em Figura 1.3.2, o componente 6 tem dois sucessores.

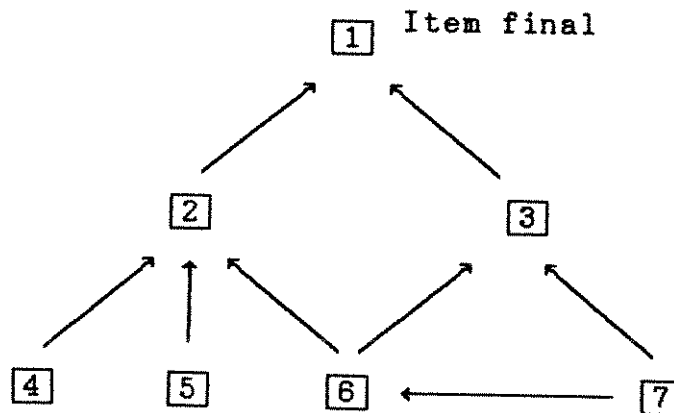


Figura 1.3.2 - Uma Estrutura Geral

Assumamos as mesmas hipóteses que na seção 1.3.1, mas agora seja $S(i)$ o conjunto dos componentes que são sucessores imediatos do componente i . Por exemplo $S(6) = \{2,3\}$ e $S(7) = \{3,6\}$ na Figura 1.3.2. Podemos ver que a estrutura geral de um item pode ser representada por um grafo direcional acíclico.

Portanto a formulação em termos de estoque convencional I_{it} do problema de dimensionamento de lotes para um item com estrutura geral quando cada componente tem tempo zero de produção é

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left[s_{it} y_{it} + c_{it} x_{it} + h_{it} I_{it} \right] \quad (F_{xyI}^{132})$$

tal que

$$I_{1,t-1} + x_{1t} - I_{1t} = d_{1t} \quad t = 1, \dots, T$$

$$I_{i,t-1} + x_{it} - I_{it} - \sum_{j \in S(i)} r_{ij} x_{jt} = d_{it} \quad \begin{matrix} i = 2, \dots, N \\ t = 1, \dots, T \end{matrix}$$

$$x_{it} \leq M_{it} y_{it} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, N \\ t = 1, \dots, T \end{matrix}$$

$$x_{it} \geq 0; \quad I_{it} \geq 0; \quad y_{it} = 0 \text{ ou } 1; \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, N \\ t = 1, \dots, T \end{matrix}$$

onde M_{it} é um limite superior de x_{it} .

Este modelo também pode ser usado na base de um horizonte rolante. Para reformular o problema em termos de estoque de escalão, devemos primeiro redefinir p_{ij} . Seja n_{ij} o número de caminhos do componente i até o componente j . Defina

$$p_{ij}^n = \prod_k r_{k,s(k)} \quad n = 1, \dots, n_{ij}$$

onde o produto $\prod_k$ é sobre todos os componentes k no caminho n do componente i até o componente j , excluindo o componente j , e onde $s(k)$ é o (único) componente sucessor imediato do componente k no dado caminho n . Agora redefina

$$p_{ij} = \sum_{n=1}^{n_{ij}} p_{ij}^n$$

Assim p_{ij} é, como na seção 1.3.1, a quantidade do componente i em uma unidade de component j . Por exemplo, na Figura 1.3.2, existem 3 caminhos entre os componentes 7 e 1, a saber, 7-3-1, 7-6-3-1, e 7-6-2-1. Assim

$$p_{71} = r_{73} r_{31} + r_{76} r_{63} r_{31} + r_{76} r_{62} r_{21}.$$

Também o *estoque de escalão* é redefinido como

$$E_{it} = I_{it} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{jt}$$

Esta definição aplicada repetidas vezes resulta, como na seção 1.3.1, em

$$E_{it} = I_{it} + \sum_{j \in R(i)} p_{ij} I_{jt}$$

Por exemplo, na Figura 1.3.2

$$E_{7t} = I_{7t} + r_{76} I_{6t} + (r_{76} r_{63} + r_{73}) I_{3t} + r_{76} r_{62} I_{2t} \\ + (r_{73} r_{31} + r_{76} r_{63} r_{31} + r_{76} r_{62} r_{21}) I_{1t}.$$

A definição do custo unitário de estoque de escalão é a mesma que na seção 1.3.1, a saber,

$$e_{it} = h_{it} - \sum_{j \in P(i)} r_{ji} h_{jt}$$

Com estas definições, é mostrado no Apêndice A (Proposições A1 e A4) que a reformulação do problema em termos de estoque de escalão é

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left[s_{it} y_{it} + c_{it} x_{it} + e_{it} E_{it} \right] \quad (F_{xyE}^{132})$$

tal que

$$E_{i,t-1} + x_{it} - E_{it} = \sum_{j \in R(i) \cup \{i\}} \sum_{n=1}^{n_{ij}} p_{ij}^n d_{jt} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, N \\ t = 1, \dots, T \end{matrix}$$

$$\sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{jt} - E_{it} \leq 0 \quad \begin{matrix} i = 2, \dots, N \\ t = 1, \dots, T \end{matrix}$$

$$x_{it} \leq M_{it} y_{it} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, N \\ t = 1, \dots, T \end{matrix}$$

$$x_{it} \geq 0 ; \quad E_{it} \geq 0 ; \quad y_{it} = 0 \text{ ou } 1 ; \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, N \\ t = 1, \dots, T \end{matrix}$$

Note que, analiticamente, a única diferença entre as formulações F_{xyE}^{131} e F_{xyE}^{132} é a forma mais geral das restrições

$\sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{jt} - E_{it} \leq 0$. Destas restrições e das restrições $E_{1t} \geq 0$ para $t=1, \dots, T$ pode se inferir que $E_{it} \geq 0$ para $i=2, \dots, N$ e $t=1, \dots, T$ que portanto são redundantes, mas mesmo assim são incluídas na formulação F_{xyE}^{132} por elegância e implementação computacional como na seção 1.3.1.

1.3.3 Estruturas de Montagem com Tempo Não-Zero de Produção

Voltamos agora para estruturas de montagem e consideramos o caso quando pelo menos um dos componentes, incluindo, talvez, o próprio item final, tem um tempo não-zero de produção. Em outras palavras, o componente não é disponível para atender a demanda no período de produção, mas somente num período mais tarde.

Suponha que o componente i leva $L(i)$ períodos para ser produzido, i.e., o tempo de produção (*lead time*) do componente i é $L(i)$. Assim a produção x_{it} do componente i no período t é disponível somente no período $t+L(i)$.

Seja o componente i um *componente primário* se $P(i)=\emptyset$. Por exemplo, os componentes primários na Figura 1.3.3.1 são 4, 5, e 6.

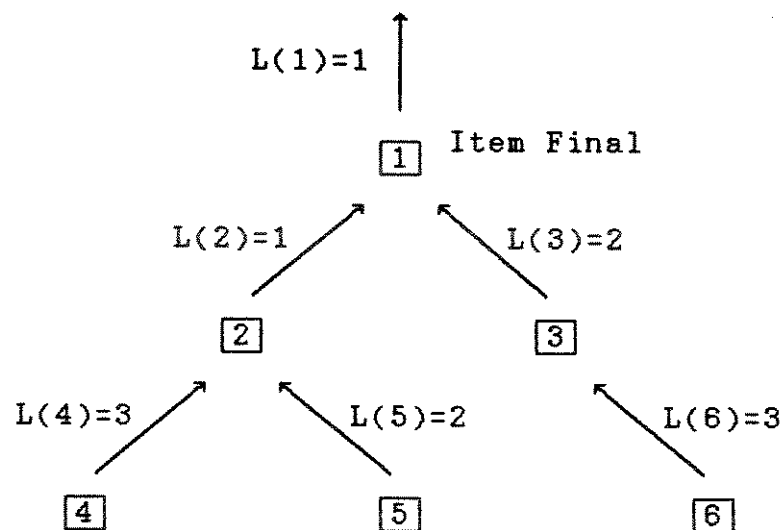


Figura 1.3.3.1

Uma Estrutura de Montagem com Tempo Não-Zero de Produção

Seja $M(i)$ a soma máxima dos tempos de produção $L(.)$ somados de um componente predecessor primário do componente i sobre os componentes sucessores até (mas não inclusive) o componente i . Formalmente, defina $M(i)$ na seguinte maneira recursiva:

$$M(i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \text{ for um componente primário} \\ \max_{j \in P(i)} \{M(j) + L(j)\} & \text{se } i \text{ não for um componente primário} \end{cases}$$

para $i = N, N-1, N-2, \dots, 1$ naquela sequência. Por exemplo, na estrutura de produto na Figura 1.3.3.1, podemos calcular que

$$\begin{aligned} M(6) &= 0; & M(5) &= 0; & M(4) &= 0; & M(3) &= L(6) = 3; \\ M(2) &= \max\{L(4), L(5)\} = \max\{3, 2\} = 3; \\ M(1) &= \max\{M(2) + L(2), M(3) + L(3)\} = \max\{3 + 1, 3 + 2\} = 5. \end{aligned}$$

Só $M(1)$ é interessante porque é o máximo total dos tempos de produção de um componente primário até o item final. Se tentarmos planejar a produção do item final para qualquer período antes do período $t = M(1) + 1$ então a produção do item final será limitada pelo estoque no começo do período 1 de pelo menos um componente. Para termos a apropriada liberdade de planejamento, devemos sincronizar os períodos ao longo dos quais planejamos a produção dos componentes. Na Figura 1.3.3.1, por exemplo, $M(1) = L(6) + L(3) = 5$, sendo que o máximo total dos tempos de produção de um componente primário até o item final. Para sincronizar a produção do item final e os componentes 3 e 6, devemos planejar a produção do componente 6 ao longo dos períodos 1 até T , do componente 3 ao longo dos períodos $L(6) + 1$ até $L(6) + T$ (i.e. ao longo dos períodos 4 até

3+T) e do item final ao longo dos períodos $L(3)+L(6)+1$ até $L(3)+L(6)+T$ (i.e. ao longo dos períodos 6 até 5+T). Sincronizando a produção dos componentes nesta maneira, temos a liberdade apropriada de planejamento. Se d_{17} for muito grande então o modelo terá a liberdade de fazer x_{16} suficientemente grande (lembre que $L(1)=1$) porque se pode fazer x_{34} e x_{61} suficientemente grandes para conseguir fornecer componentes 3 e 6 através da produção em lugar de fornecê-los através de estoques. Seguindo este raciocínio vemos que a produção dos outros componentes (2, 4 e 5) também precisa ser sincronizada com a produção do item final nos períodos 6, ..., T+5. Formalizamos a sincronização de qualquer estrutura de montagem de um produto na seguinte maneira.

Defina $K(i)$ como a soma dos tempos de produção do componente i e dos seus sucessores, excluindo o item final. Formalmente defina $K(i)$ recursivamente como

$$K(1) = 0 \quad \text{e}$$

$$K(i) = L(i) + K(s(i)) \quad \text{para } i = 2, \dots, N.$$

Por exemplo, na Figura 1.3.3.1, temos

$$K(1) = 0$$

$$K(2) = L(2) + K(1) = L(2) = 1$$

$$K(3) = L(3) + K(1) = L(3) = 2$$

$$K(4) = L(4) + K(2) = L(4) + L(2) = 4$$

$$K(5) = L(5) + K(2) = L(5) + L(2) = 3$$

$$K(6) = L(6) + K(3) = L(6) + L(3) = 5$$

Agora defina $T(i)$ recursivamente como:

$$T(i) = M(1) - K(i) \quad \text{para } i = 1, \dots, N.$$

Por exemplo, na Figura 1.3.3.1, temos

$$T(1) = M(1) - K(1) = 5 - 0 = 5$$

$$T(2) = M(1) - K(2) = 5 - 1 = 4$$

$$T(3) = M(1) - K(3) = 5 - 2 = 3$$

$$T(4) = M(1) - K(4) = 5 - 4 = 1$$

$$T(5) = M(1) - K(5) = 5 - 3 = 2$$

$$T(6) = M(1) - K(6) = 5 - 5 = 0$$

Então $T(i)+1$ indica o período no qual, na base de um horizonte rolante, devemos iniciar o planejamento do componente i para sincronizar sua produção com a de todos os outros componentes e, em particular, com a do item final. Se o planejamento do componente i ao longo de T períodos for iniciado antes do período $T(i)+1$, então vai faltar informação sobre a produção do componente i . Tal informação é necessária para o planejamento ao longo de T períodos de pelo menos um componente predecessor $j \in Q(i)$, dado que a produção de j depende da produção de i .

$T(i)+1$ pode também ser interpretado como o último período no qual pode-se produzir uma unidade do componente i para conseguir usar aquela unidade para produzir o item final no período $M(1)+1$. Podemos ver o conceito $T(i)$ como a incorporação da lógica *back schedule* de MRP em modelos multi-estágios de dimensionamento de lotes (Vollman et al, 1988). Esta lógica consiste em começar a produção de um dado componente o mais tarde possível, em contraste com a lógica *front schedule* que começa a produção dos componentes o

mais cedo possível a partir do período 1. A vantagem da lógica *back schedule* sobre a lógica *front schedule* é que ela elimina estoques desnecessários e permite maior flexibilidade caso hajam erros nas previsões de demanda. A lógica *back schedule* é fundamental em sistemas MRP.

A Figura 1.3.3.2 mostra os períodos sincronizados de planejamento para cada componente da estrutura de Figura 1.3.3.1.

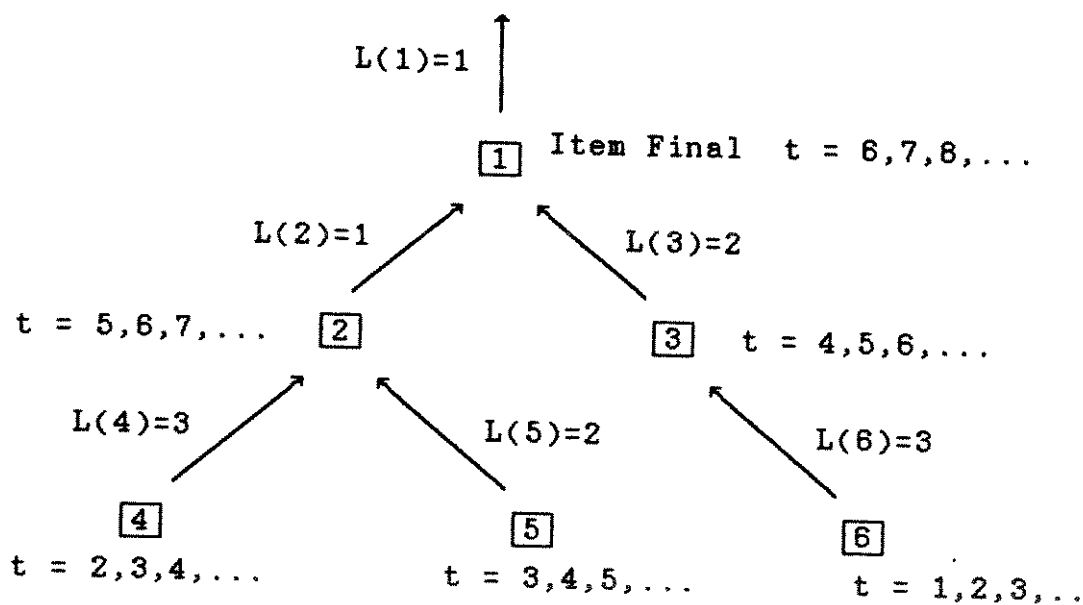


Figura 1.3.3.2

Uma Estrutura de Montagem com Tempo Não-Zero de Produção

O apropriado modelo sincronizado deve ser formulado como:

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} \left[s_{it} y_{it} + c_{it} x_{it} + h_{i,L(i)+t} I_{i,L(i)+t} \right] \quad (F_{xyl}^{133})$$

tal que

$$I_{1,L(1)+t-1} + x_{1t} - I_{1,L(1)+t} = d_{1,L(1)+t} \quad \text{para } t = T(1)+1, \dots, T(1)+T$$

$$I_{i,L(i)+t-1} + x_{it} - I_{i,L(i)+t} = r_{i,s(i)} x_{s(i),L(i)+t} + d_{i,L(i)+t} \quad \begin{array}{l} \text{para } i = 2, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{array}$$

$$x_{it} \leq M_{it} y_{it} \quad \text{para } i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T$$

$$x_{it} \geq 0; \quad I_{i,L(i)+t} \geq 0; \quad \text{para } i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T$$

$$y_{it} = 0 \text{ ou } 1; \quad \text{para } i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T$$

Se para $i=1, \dots, N$ a demanda $d_{i,1+T(i)+L(i)}$ para o componente i no período $1+T(i)+L(i)$ for sempre prevista com 100% de precisão então o modelo pode ser usado satisfatoriamente na base de um horizonte rolante. Para $i=1, \dots, N$ implementamos a decisão $x_{i,1+T(i)}$ e depois rolamos um período para frente. Como nos situamos no começo do período 1, "implementamos" $x_{i,1+T(i)}$ por fixar seu valor (o que implementamos de fato são os valores já fixados de $x_{i,1}$ decididos por aplicações anteriores do modelo ou, se $T(i)=0$, pela aplicação atual).

Se, porém, as previsões de demanda até $d_{i,1+T(i)+L(i)}$ não forem sempre precisas para qualquer componente i então corremos o risco de déficits (*stockouts*) de componentes. Um método de lidar com erro na previsão de demanda é usar estoques de segurança (*safety stocks*) daqueles componentes (inclusive o item final) para os quais existe

incerteza sobre sua demanda independente. Estoques de segurança e outras estratégias para enfrentar incerteza na demanda são discutidos em Whybark e Williams (1976), Wijngaard e Wortmann (1985), e Carlson e Yano (1986).

Afentakis e Gavish (1986) discutiram muito resumidamente o caso de estruturas de montagem com tempo não-zero de produção de componentes. Eles não mencionam o problema de sincronização, porém propõem uma generalização da definição de estoque de escalão que inclui tempo não-zero de produção de componentes, a saber:

$$E_{it} = I_{it} + r_{i,s(i)} E_{s(i),t+L(s(i))}$$

Prefirimos propor uma definição diferente de estoque de escalão no caso de tempo não-zero de produção:

$$E_{it} = I_{i,t+L(i)} + r_{i,s(i)} E_{s(i),t+L(i)}$$

com custo unitário de estoque de escalão definido como:

$$e_{it} = h_{i,t+L(i)} - \sum_{j \in P(i)} r_{ji} h_{jt}$$

Uma discussão destas definições é deixada para a seção 1.3.4.

No Apêndice A (Proposições A1 e A2) é mostrado que a formulação em termos de estoque de escalão que resulta da definição proposta acima é a seguinte:

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} \left[s_{it} y_{it} + c_{it} x_{it} + e_{it} E_{it} \right] \quad (F_{xyE}^{133})$$

tal que

$$E_{i,t-1} + x_{it} - E_{it} = \sum_{j \in R(i) \cup \{i\}} p_{ij} d_{j,t+L(j)+K(i,j)} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{array}$$

$$r_{i,s(i)} E_{s(i),L(i)+t} - E_{it} \leq 0 \quad \begin{array}{l} i = 2, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{array}$$

$$x_{it} \leq M_{it} y_{it} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{array}$$

$$x_{it} \geq 0; \quad E_{it} \geq 0; \quad y_{it} = 0 \text{ ou } 1 \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{array}$$

onde p_{ij} é definido como na seção 1.3.2 e $K(i,j)$ é definido como a soma dos tempos de produção $L(\cdot)$ no caminho do componente i até o componente j (exclusive $L(j)$).

Como o lado direito $\sum_{j \in R(i) \cup \{i\}} p_{ij} d_{j,t+L(j)+K(i,j)}$ do primeiro conjunto de restrições consiste somente de dados, vemos que, em termos analíticos, a formulação F_{xyE}^{133} do caso de tempo não-zero de produção não é essencialmente diferente da formulação F_{xyE}^{131} do caso de tempo zero de produção, tendo o índice t passado por uma mudança positiva de $T(i)$ períodos para levar em conta os tempos não-zero de produção. $I_{i,T(i)+L(i)}$ pode ser visto como o nível inicial de estoque convencional do componente i e $I_{i,T(i)+L(i)+T}$ como o nível terminal de estoque convencional do componente i . Equivalentemente $E_{i,T(i)}$ e $E_{i,T(i)+T}$ podem ser vistos respectivamente como o nível inicial e o nível terminal de estoque de escalão do componente i .

A definição de Afentakis e Gavish (1986) de estoque de escalão com tempo não-zero de produção resulta em essencialmente na mesma reformulação, embora eles não mencionem o problema da sincronização

dos períodos de planejamento e não definam e_{it} . Porém, a definição alternativa de E_{it} proposta acima fornece uma reformulação mais elegante (F_{xyE}^{133}) na qual as variáveis x_{it} não são afetadas explicitamente por tempo não-zero de produção como são afetadas na equação dinâmica da reformulação de Afentakis e Gavish, a saber:

$$E_{i,t-1} + x_{i,t-L(i)} - E_{it}$$

= Combinação linear das demandas independentes

1.3.4 Estruturas Gerais com Tempo Não-Zero de Produção

No caso de produtos com estruturas gerais e tempos não-zero de produção de componentes, a especificação de um modelo adequado em termos de estoque convencional I_{it} , e do modelo equivalente em termos de estoque de escalão E_{it} , fica mais complicada que nas seções anteriores. Revelamos a razão com a ajuda de um exemplo simples.

Considere um produto com a estrutura geral e tempos não-zero de produção na Figura 1.3.4.1:

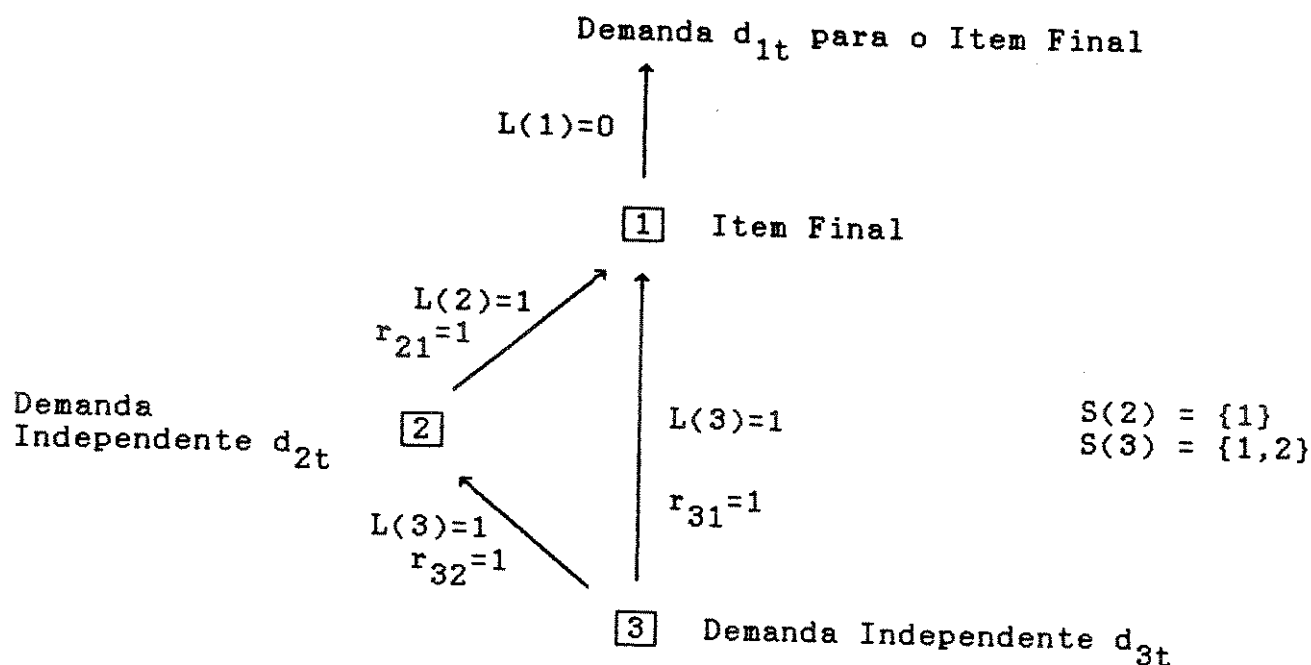


Figura 1.3.4.1

Uma Estrutura Geral com Tempo Não-Zero de Produção

Para planejar a produção do componente 3 ao longo dos períodos 1 até T, as seguintes restrições

$$I_{3t} + x_{3t} - I_{3,t+1} = x_{2,t+1} + x_{1,t+1} + d_{3,t+1} \quad \text{para } t = 1, \dots, T$$

mostram que precisamos levar em conta os valores de x_{2t} e x_{1t} para os períodos $t = 2, \dots, T+1$. Porém, para saber os valores de x_{2t} para $t = 2, \dots, T+1$, as restrições

$$I_{2t} + x_{2t} - I_{2,t+1} = x_{1,t+1} + d_{2,t+1} \quad \text{para } t = 2, \dots, T+1$$

mostram que devemos considerar os valores de x_{1t} para $t=3, \dots, T+2$. Assim, no total, devemos levar em conta os valores de x_{1t} ao longo dos $T+1$ períodos $t=2, \dots, T+2$ para conseguir planejar x_{3t} ao longo dos T períodos $t=1, \dots, T$. O período adicional surge porque um dos dois caminhos do componente 3 até o item final tem sua soma dos tempos de produção igual a 1 período enquanto o outro caminho tem sua soma igual a 2 períodos.

Estas considerações mostram que devemos levar em conta as seguintes restrições:

$$\begin{aligned} I_{1,t-1} + x_{1t} - I_{1t} &= d_{1t} & t &= 2, \dots, T+2 \\ I_{2t} + x_{2t} - I_{2,t+1} &= x_{1,t+1} + d_{2,t+1} & t &= 2, \dots, T+1 \\ I_{3t} + x_{3t} - I_{3,t+1} &= x_{2,t+1} + x_{1,t+1} + d_{3,t+1} & t &= 1, \dots, T \end{aligned}$$

Agora estendemos para estruturas gerais a definição de estoque de escalão E_{it} apresentada na seção 1.3.3. Defina

$$E_{it} = I_{i,t+L(i)} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{j,t+L(i)}$$

(o custo unitário de estoque de escalão e_{it} será definido mais adiante). Com a definição ampliada acima de E_{it} , é simples reformular as restrições:

$$\begin{aligned} I_{1,t-1} + x_{1t} - I_{1t} &= d_{1t} & t &= 2, \dots, T+2 \\ I_{2t} + x_{2t} - I_{2,t+1} &= x_{1,t+1} + d_{2,t+1} & t &= 2, \dots, T+1 \\ I_{3t} + x_{3t} - I_{3,t+1} &= x_{2,t+1} + x_{1,t+1} + d_{3,t+1} & t &= 1, \dots, T \end{aligned}$$

em termos de estoque de escalão:

$$\begin{aligned} E_{1,t-1} + x_{1t} - E_{1t} &= d_{1t} & t &= 2, \dots, T+2 \\ E_{2,t-1} + x_{2t} - E_{2t} &= d_{1,t+1} + d_{2,t+1} & t &= 2, \dots, T+1 \\ E_{3,t-1} + x_{3t} - E_{3t} &= d_{1,t+1} + d_{1,t+2} + d_{2,t+2} + d_{3,t+1} & t &= 1, \dots, T \end{aligned}$$

Note que analiticamente estas restrições tem a mesma forma simples que no caso de tempo zero de produção de componentes nas seções 1.3.1 e 1.3.2.

Consideremos agora as consequências das restrições de estoque para o uso do modelo na base de um horizonte rolante. Se a produção começasse com estoque zero de todos os componentes no começo do período 1, então o seguinte gráfico de Gantt:

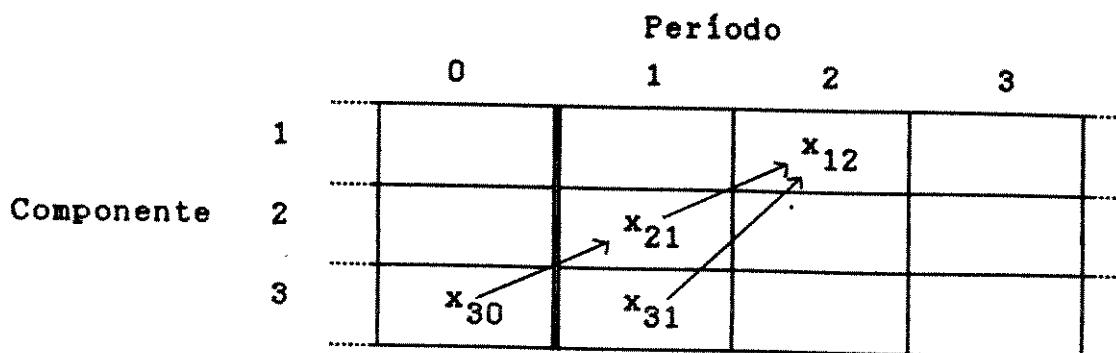


Figura 1.3.4.2 - Gráfico de Gantt

mostra que x_{12} seria obrigatoriamente zero porque $I_{30}=0$. Mesmo se o estoque 'inicial' I_{21} do componente 2 fosse positivo, a quantidade da produção x_{12} ainda seria limitada pela produção x_{21} que, por sua vez, é limitada pela quantidade de estoque I_{30} . Esta situação também acontece quando o modelo é usado na base de um horizonte rolante. Se, depois de cada aplicação do modelo, rolarmos para frente por um período, então x_{12} é limitado por uma decisão, a saber I_{30} , resultante da aplicação anterior do modelo. Parece mais apropriado excluir x_{12} como uma variável de decisão e deixar x_{13} ser a variável implementada x_{1t} do 'primeiro período' do item final. Portanto, a decisão implementada x_{13} da aplicação anterior do modelo seria o valor fixo de x_{12} da aplicação atual do modelo.

Agora considere os níveis 'iniciais' de estoque de escalão E_{11} , E_{21} e E_{30} , em termos de estoque convencional:

$$E_{11} = I_{11}$$

$$E_{21} = I_{22} + I_{12}$$

$$E_{30} = I_{31} + I_{22} + I_{12} + I_{11}$$

Se x_{12} fosse uma variável, então I_{11} , I_{22} e I_{31} seriam os níveis iniciais de estoque convencional e portanto conhecidos. Porém I_{12} seria uma variável (lembre de que, no nosso exemplo, o item final tem tempo zero de produção) e assim não poderíamos especificar os níveis iniciais de estoque de escalão E_{21} e E_{30} . Se, por outro lado, o valor de x_{12} fosse pré-fixado e conhecido, então I_{12} também seria pré-fixado e conhecido. Com x_{13} como a variável x_{1t} do 'primeiro período' do item final, os níveis iniciais de estoque de escalão seriam

$$E_{12} = I_{12}$$

$$E_{21} = I_{22} + I_{12}$$

$$E_{30} = I_{31} + I_{22} + I_{12} + I_{11}$$

sendo todos compostos de níveis pré-fixados de estoque convencional.

Portanto, é apropriado que a tomada de decisões para o item final comece no período 3. Os x_{1t} e I_{1t} para os períodos $t=1$ e $t=2$ devem ser vistos como decisões já tomadas e fixadas pelas aplicações anteriores do modelo na base de um horizonte rolante.

Consequentemente, a função objetivo deve incluir x_{1t} e y_{1t} para $t=3, \dots, T+2$, x_{2t} e y_{2t} para $t=2, \dots, T+1$, e x_{3t} e y_{3t} para $t=1, \dots, T$. Portanto, para a estrutura da Figura 1.3.4.1, vamos propor o seguinte modelo em termos de estoque de escalão:

$$\min \sum_{i=1}^3 \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} [s_{it}y_{it} + c_{it}x_{it} + e_{it}E_{it}] + e_{12}E_{12}$$

tal que

$$E_{1,t-1} + x_{1t} - E_{1t} = d_{1t} \quad t = 3, \dots, T+2$$

$$E_{2,t-1} + x_{2t} - E_{2t} = d_{1,t+1} + d_{2,t+1} \quad t = 2, \dots, T+1$$

$$E_{3,t-1} + x_{3t} - E_{3t} = d_{1,t+1} + d_{1,t+2} + d_{2,t+2} + d_{3,t+1} \quad t = 1, \dots, T$$

$$E_{1,t+1} - E_{2t} \leq 0 \quad t = 2, \dots, T+1$$

$$E_{1,t+1} + E_{2,t+1} - E_{3t} \leq 0 \quad t = 1, \dots, T$$

$$x_{it} \leq M_{it}y_{it} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, 3 \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{matrix}$$

$$x_{it} \geq 0; \quad E_{it} \geq 0; \quad y_{it} = 0 \text{ ou } 1 \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, 3 \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{matrix}$$

onde $T(1)=2$, $T(2)=1$ e $T(3)=0$. Note que E_{12} é pré-fixado e, portanto, o termo $e_{12}E_{12}$ pode ser omitido da função objetivo e depois adicionado à solução do problema. Porém, é essencial a presença de E_{12} na restrição $E_{1,t+1} + E_{2,t+1} - E_{3t} \leq 0$ para $t=1$.

Consideremos, agora, como calcular os custos de estocagem e_{it} . A definição de E_{it} resulta em

$$E_{1t} = I_{1t}$$

$$E_{2t} = I_{2,t+1} + E_{1,t+1}$$

$$E_{3t} = I_{3,t+1} + E_{2,t+1} + E_{1,t+1}$$

Na formulação em termos de estoque de escalão E_{it} , queremos que os custos de estocagem na função objetivo

$$\sum_{t=3}^{T+2} e_{1t}E_{1t} + \sum_{t=2}^{T+1} e_{2t}E_{2t} + \sum_{t=1}^T e_{3t}E_{3t} + e_{12}E_{12}$$

sejam iguais a

$$\begin{aligned}
 & \sum_{t=3}^{T+2} h_{1t} I_{1t} + \sum_{t=2}^{T+1} h_{2,t+1} I_{2,t+1} + \sum_{t=1}^T h_{3,t+1} I_{3,t+1} \\
 = & \sum_{t=3}^{T+2} h_{1t} E_{1t} + \sum_{t=2}^{T+1} h_{2,t+1} (E_{2t} - E_{1,t+1}) \\
 & + \sum_{t=1}^T h_{3,t+1} (E_{3t} - E_{2,t+1} - E_{1,t+1}) \\
 = & -h_{32} E_{12} + \sum_{t=3}^{T+1} (h_{1t} - h_{2t} - h_{3t}) E_{1t} + (h_{1,T+2} - h_{2,T+2}) E_{1,T+2} \\
 & + \sum_{t=2}^{T+1} (h_{2,t+1} - h_{3t}) E_{2t} + \sum_{t=1}^T h_{3,t+1} E_{3t}
 \end{aligned}$$

Note que, se usarmos a seguinte identidade

$$e_{it} = h_{i,t+L(i)} - \sum_{j \in P(i)} r_{ji} h_{jt},$$

onde $h_{i,t+L(i)} = 0$ para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{T(i)+1, \dots, T(i)+T\}$, então temos

$$\begin{aligned}
 e_{1t} &= h_{1t} - h_{2t} - h_{3t} \\
 e_{2t} &= h_{2,t+1} - h_{3t} \\
 e_{3t} &= h_{3,t+1}
 \end{aligned}$$

que resulta em

$$e_{12} = -h_{32}$$

$$e_{1t} = h_{1t} - h_{2t} - h_{3t} \quad t = 3, \dots, T+1$$

$$e_{1,T+2} = h_{1,T+2} - h_{2,T+2}$$

$$e_{2t} = h_{2,t+1} - h_{3t} \quad t = 2, \dots, T+1$$

$$e_{3t} = h_{3,t+1} - e_{3t} \quad t = 1, \dots, T$$

Agora especificamos o modelo apropriado para qualquer estrutura geral com tempo não-zero de produção de componentes. Primeiro precisamos definir certas características de estruturas gerais.

Generalizando a definição de $M(1)$ da seção 1.3.3, seja $M(1)$ a soma máxima dos tempos de produção $L(.)$ somados sobre um caminho que passa de um componente primário até (mas não inclusive) o item final. Em outras palavras $M(1)$ é o comprimento do caminho mais longo no grafo acíclico que representa a estrutura geral de componentes do produto. $M(1)$ pode ser calculado através da mesma definição recursiva da seção 1.3.3:

$$M(i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \text{ for um componente primário} \\ \max_{j \in P(i)} \{M(j) + L(j)\} & \text{se } i \text{ não for um componente primário} \end{cases}$$

para $i = N, N-1, N-2, \dots, 1$ naquela sequência.

Agora devemos identificar, para cada um dos componentes $i=2, \dots, N$, todos os caminhos distintos do componente i até cada um de seus componentes sucessores $j \in R(i)$. Seja n_{ij} o número de caminhos do componente i até o componente j , e seja $P^n(i,j)$ o n -ésimo caminho do componente i até o componente j , $n=1, \dots, n_{ij}$. Defina $K^n(i,j)$ como a soma dos tempos de produção $L(.)$ no caminho $P^n(i,j)$ (exclusive $L(j)$). Identificamos todos os caminhos $P^n(i,j)$ para $i=2, \dots, N$, $j=1, \dots, i-1$, $n=1, \dots, n_{ij}$, com o seguinte algoritmo

```
for i=3 to N do begin
```

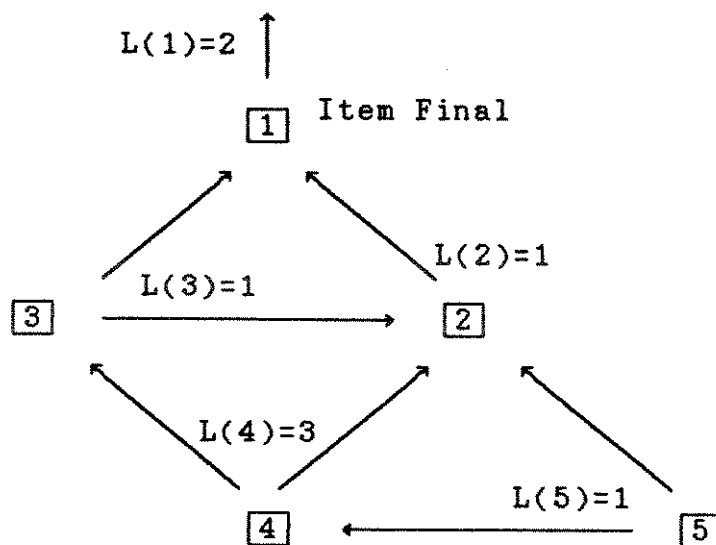
```
for k=1 to j do begin
```

```
end; { fim do loop k }
```

(Até agora todos os $n_{ik} = \sum_{j \in S(i)} n_{jk}$ caminhos de i até k foram identificados para $k=1, \dots, i-1$.)

Este algoritmo é demonstrado com o exemplo da estrutura geral

figura 1.3.4.3:



Uma Estrutura Geral com Tempo Não-Zero de Produção

Por inspeção vemos que $M(1)=6$ e que há 19 caminhos:

	j=1	j=2	j=3	j=4
i=2	2→1			
i=3	3→1 3→2→1	3→2		
i=4	4→2→1 4→3→1 4→3→2→1	4→2 4→3→2	4→3	
i=5	5→2→1 5→4→2→1 5→4→3→1 5→4→3→2→1	5→2 5→4→2 5→4→3→2	5→4→3	5→4

Aplicando o algoritmo resulta em:

Caminho 2→1 identificado automaticamente. $n_{21}=1$. Também $n_{11}=n_{22}=1$.

i=3 $S(3)=\{1,2\}$

j=1 k=1 Caminho 3→1 identificado como $P^1(3,1)$.

j=2 k=1 Caminho 3→2→1 identificado como $P^2(3,1)$.

k=2 Caminho 3→2 identificado como $P^1(3,2)$.

Assim $n_{31}=2$; $n_{32}=1$. Também $n_{33}=1$.

i=4 $S(4)=\{2,3\}$

j=2 k=1 Caminho 4→2→1 identificado como $P^1(4,1)$.

k=2 Caminho 4→2 identificado como $P^1(4,2)$.

j=3 k=1 Caminho 4→3→1 identificado como $P^2(4,1)$.

Caminho 4→3→2→1 identificado como $P^3(4,1)$.

k=2 Caminho 4→3→2 identificado como $P^2(4,2)$.

k=3 Caminho 4→3 identificado como $P^1(4,3)$.

Assim $n_{41}=3$; $n_{42}=2$; $n_{43}=1$. Também $n_{44}=1$.

i=5 S(5)={2,5}

<u>j=2</u>	<u>k=1</u>	Caminho 5→2→1	identificado como $P^1(5,1)$.
	<u>k=2</u>	Caminho 5→2	identificado como $P^1(5,2)$.
<u>j=4</u>	<u>k=1</u>	Caminho 5→4→2→1	identificado como $P^2(5,1)$.
		Caminho 5→4→3→1	identificado como $P^3(5,1)$.
		Caminho 5→4→3→2→1	identificado como $P^4(5,1)$.
	<u>k=2</u>	Caminho 5→4→2	identificado como $P^2(5,2)$.
		Caminho 5→4→3→2	identificado como $P^3(5,2)$.
	<u>k=3</u>	Caminho 5→4→3	identificado como $P^1(5,3)$.
	<u>k=4</u>	Caminho 5→4	identificado como $P^1(5,4)$.

Assim $n_{51}=4$; $n_{52}=3$; $n_{53}=1$; $n_{54}=1$. Também $n_{55}=1$.

O algoritmo identificou corretamente todos os 19 caminhos $P^n(i,j)$. Um algoritmo mais eficiente pode ser desenvolvido, mas o acima basta para estruturas de tamanho medio e é simples de entender.

Agora podemos definir $T(i)$:

$$T(i) = M(1) - \max_{n=1, \dots, n_{i1}} \{ K^n(i,1) \}$$

No exemplo da Figura 1.3.4.3, esta definição dá

$$T(1) = 6 - \max\{ K^1(1,1) \} = 6 - 0 = 6$$

$$T(2) = 6 - \max\{ K^1(2,1) \} = 6 - 1 = 5$$

$$\begin{aligned} T(3) &= 6 - \max\{ K^1(3,1), K^2(3,1) \} \\ &= 6 - \max\{1,2\} = 6 - 2 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(4) &= 6 - \max\{ K^1(4,1), K^2(4,1), K^3(4,1) \} \\
&= 6 - \max\{4,4,5\} = 6 - 5 = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(5) &= 6 - \max\{ K^1(5,1), \dots, K^4(5,1) \} \\
&= 6 - \max\{2,5,5,6\} = 6 - 6 = 0
\end{aligned}$$

Como na seção 1.3.3, $T(i)+1$ indica o período no qual, na base de um horizonte rolante, devemos iniciar o planejamento do componente i para sincronizar sua produção com a de todos os outros componentes e, em particular com a do item final. Se o planejamento do componente i ao longo de T períodos for iniciado antes do período $T(i)+1$, então vai faltar informação sobre a produção do componente i . Tal informação é necessária para o planejamento ao longo de T períodos de pelo menos um componente predecessor $j \in Q(i)$, dado que a produção de j depende da produção de i .

$T(i)+1$, de novo, pode ser interpretado como o último período no qual pode-se produzir uma unidade do componente i para conseguir usar aquela unidade para produzir o item final no período $M(1)+1$. Os comentários da seção 1.3.3 sobre a interpretação de $T(i)+1$ em termos da lógica *back schedule* de MRP são pertinentes aqui também.

Finalmente defina

$$p_{ij}^n = \prod_{k \in P^n(i,j) - \{j\}} r_{k,s(k)}$$

onde $s(k)$ é o (único) componente sucessor imediato do componente k no caminho $P^n(i,j)$.

Agora podemos especificar o modelo:

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} \left[s_{it} y_{it} + c_{it} x_{it} + e_{it} E_{it} \right] + \sum_{i|P(i) \neq \emptyset} \sum_{t=1}^{T(i)} e_{it} E_{it} \quad (F_{xyE}^{134})$$

tal que

$$E_{i,t-1} + x_{it} - E_{it} = \sum_{j \in R(i) \cup \{i\}} \sum_{n=1}^{n_{ij}} p_{ijn}^n d_{j,t+L(j)+K^n(i,j)} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{array}$$

$$\sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{j,L(i)+t} - E_{it} \leq 0 \quad \begin{array}{l} i = 2, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{array}$$

$$x_{it} \leq M_{it} y_{it} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{array}$$

$$x_{it} \geq 0; \quad E_{it} \geq 0; \quad y_{it} = 0 \text{ ou } 1 \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{array}$$

Pode ser que, para pelo menos um componente $i \in \{1, \dots, N\}$, tenhamos $T(i)+L(i) < T(j)$ para pelo menos um componente $j \in S(i)$. Para tais componentes i e j , quando $L(i)+t < T(j)+1$ (i.e., $L(i)+t \leq T(j)$), o nível de estoque de escalão $E_{j,L(i)+t}$ não é uma variável, mas é pré-fixado (i.e., um dado). Assim as restrições

$$\sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{j,L(i)+t} - E_{it} \leq 0 \quad \begin{array}{l} i=2, \dots, N \\ t=T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{array}$$

podem ser re-escritas

$$\sum_{\substack{j \in S(i) \\ j|T(j) < L(i)+t}} r_{ij} E_{j,L(i)+t} - E_{it} \leq - \sum_{\substack{j \in S(i) \\ j|T(j) \geq L(i)+t}} r_{ij} E_{j,L(i)+t} \quad \begin{array}{l} i=2, \dots, N \\ t=T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{array}$$

com as variáveis no lado esquerdo e os dados no lado direito.

Note que o termo

$$\sum_{i|P(i) \neq \emptyset} \sum_{t=1}^{T(i)} e_{it} E_{it}$$

é uma constante e, portanto, pode ser omitido da função objetivo e depois adicionado à solução do problema.

Os custos unitários de estoque de escalão e_{it} para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{1, \dots, T(i)+T\}$ são calculados usando a identidade

$$e_{it} = h_{i,t+L(i)} - \sum_{j \in P(i)} r_{ji} h_{jt}$$

onde $h_{i,t+L(i)} = 0$ para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \notin \{T(i)+1, \dots, T(i)+T\}$. Na Proposição A3 do Apêndice A, provamos que esta identidade implica que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} e_{it} E_{it} + \sum_{i|P(i) \neq \emptyset} \sum_{t=1}^{T(i)} e_{it} E_{it} \\ = \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} h_{i,t+L(i)} I_{i,t+L(i)}. \end{aligned}$$

Por exemplo, para a estrutura na Figura 1.3.4.3, usamos

$$\begin{aligned} h_{1t} &= 0 \text{ para } t \notin \{8, \dots, 8+T\} \\ h_{2t} &= 0 \text{ para } t \notin \{7, \dots, 6+T\} \\ h_{3t} &= 0 \text{ para } t \notin \{6, \dots, 5+T\} \\ h_{4t} &= 0 \text{ para } t \notin \{5, \dots, 4+T\} \\ h_{5t} &= 0 \text{ para } t \notin \{2, \dots, 1+T\} \end{aligned}$$

que, por exemplo, resulta em

$$\begin{aligned} e_{16} &= h_{18} - r_{21}h_{26} - r_{31}h_{36} \\ &= -r_{31}h_{36} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{1,6+T} &= h_{1,8+T} - r_{21}h_{2,6+T} - r_{31}h_{3,6+T} \\ &= h_{1,8+T} - r_{21}h_{2,6+T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{25} &= h_{26} - r_{32}h_{35} - r_{42}h_{45} - r_{52}h_{55} \\ &= \begin{cases} -r_{42}h_{45} & \text{se } T \leq 3 \\ -r_{42}h_{45} - r_{52}h_{55} & \text{se } T \geq 4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{2,T+5} &= h_{2,6+T} - r_{32}h_{3,5+T} - r_{42}h_{4,5+T} - r_{52}h_{5,5+T} \\ &= h_{2,6+T} - r_{32}h_{3,5+T} \quad \text{independente do valor de } T \end{aligned}$$

Com tempos não-zero de produção de componentes, fica mais difícil interpretar a identidade

$$e_{it} = h_{i,t+L(i)} - \sum_{j \in P(i)} r_{ji}h_{jt}$$

em termos intuitivos como na seção 1.3.1 (onde $L(i)=0$ para $i \in \{1, \dots, N\}$). Porém, como mostramos na Proposição A3 do Apêndice A, esta identidade, com $h_{i,t+L(i)} = 0$ para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{T(i)+1, \dots, T(i)+T\}$, permite a reformulação da função objetivo em termos de estoque de escalão.

Na Proposição A4 do Apêndice 1, é provado que as restrições da formulação F_{xyE}^{134} acima são equivalentes às seguintes restrições em

termos de estoque convencional:

$$I_{1,L(1)+t-1} + x_{1t} - I_{1,L(1)+t} = d_{1,L(1)+t} \quad \text{para } t = T(1)+1, \dots, T(1)+T$$

$$I_{i,L(i)+t-1} + x_{it} - I_{i,L(i)+t} - \sum_{j \in S(i)} r_{ij} x_{j,L(i)+t} = d_{i,L(i)+t} \quad \text{para } i = 2, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T$$

$$x_{it} \leq M_{it} y_{it} \quad \text{para } i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T$$

$$x_{it} \geq 0; \quad I_{i,L(i)+t} \geq 0; \quad \text{para } i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T$$

$$y_{it} = 0 \text{ ou } 1; \quad \text{para } i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T$$

Por exemplo, a estrutura da Figura 1.3.4.3 resulta nas seguintes restrições:

$$E_{1,t-1} + x_{1t} - E_{1t} = d_{1,t+2} \quad t = 7, \dots, 6+T$$

$$E_{2,t-1} + x_{2t} - E_{2t} = r_{21} d_{1,t+3} + d_{2,t+1} \quad t = 6, \dots, 5+T$$

$$E_{3,t-1} + x_{3t} - E_{3t} = r_{31} d_{1,t+3} + r_{32} r_{21} d_{1,t+4} \\ + r_{32} d_{2,t+2} + d_{3,t+1} \quad t = 5, \dots, 4+T$$

$$E_{4,t-1} + x_{4t} - E_{4t} = r_{42} r_{21} d_{1,t+6} \\ + r_{43} r_{31} d_{1,t+6} + r_{43} r_{32} r_{21} d_{1,t+7} + r_{42} d_{2,t+4} \\ + r_{43} r_{32} d_{2,t+5} + r_{43} d_{3,t+4} + d_{4,t+3} \quad t = 2, \dots, 1+T$$

$$\begin{aligned}
E_{5,t-1} + x_{5t} - E_{5t} = & r_{52}r_{21}d_{1,t+4} + r_{54}r_{42}r_{21}d_{1,t+7} \\
& + r_{54}r_{43}r_{31}d_{1,t+7} + r_{54}r_{43}r_{32}r_{21}d_{1,t+8} + r_{52}d_{2,t+2} \\
& + r_{54}r_{42}d_{2,t+5} + r_{54}r_{43}r_{32}d_{2,t+6} + r_{54}r_{43}d_{3,t+5} \\
& + r_{54}d_{4,t+4} + d_{5,t+1} \quad t = 1, \dots, T
\end{aligned}$$

$$r_{21}E_{1,t+1} - E_{2t} \leq 0 \quad t = 6, \dots, 5+T$$

$$r_{31}E_{1,t+1} + r_{32}E_{2,t+1} - E_{3t} \leq 0 \quad t = 5, \dots, 4+T$$

$$r_{42}E_{2,t+3} + r_{43}E_{3,t+3} - E_{4t} \leq 0 \quad t = 2, \dots, 1+T$$

$$r_{52}E_{2,t+1} + r_{54}E_{4,t+1} - E_{5t} \leq 0 \quad t = 1, \dots, T$$

$$x_{1t} \leq M_{1t}y_{1t}; x_{1t} \geq 0; E_{1t} \geq 0; y_{1t} = 0 \text{ ou } 1; \quad t = 7, \dots, 6+T$$

$$x_{2t} \leq M_{2t}y_{2t}; x_{2t} \geq 0; E_{2t} \geq 0; y_{2t} = 0 \text{ ou } 1; \quad t = 6, \dots, 5+T$$

$$x_{3t} \leq M_{3t}y_{3t}; x_{3t} \geq 0; E_{3t} \geq 0; y_{3t} = 0 \text{ ou } 1; \quad t = 5, \dots, 4+T$$

$$x_{4t} \leq M_{4t}y_{4t}; x_{4t} \geq 0; E_{4t} \geq 0; y_{4t} = 0 \text{ ou } 1; \quad t = 2, \dots, 1+T$$

$$x_{5t} \leq M_{5t}y_{5t}; x_{5t} \geq 0; E_{5t} \geq 0; y_{5t} = 0 \text{ ou } 1; \quad t = 1, \dots, T$$

Note que os seguintes níveis de estoque de escalão acima são pré-fixados

$$E_{16} \text{ na restrição } r_{31}E_{1,t+1} + r_{32}E_{2,t+1} - E_{3t} \leq 0 \text{ para } t = 5,$$

$$E_{25} \text{ na restrição } r_{42}E_{2,t+3} + r_{43}E_{3,t+3} - E_{4t} \leq 0 \text{ para } t = 2,$$

$$E_{22}, E_{23}, E_{24}, \text{ e } E_{25} \text{ nas restrições}$$

$$r_{52}E_{2,t+1} + r_{54}E_{4,t+1} - E_{5t} \leq 0 \text{ para } t = 1, 2, 3, 4.$$

Note também que na formulação em termos de estoque convencional, os seguintes níveis de produção são pré-fixados

x_{16} na restrição

$$I_{3t} + x_{3t} - I_{3,t+1} - r_{31}x_{1,t+1} - r_{32}x_{2,t+1} = d_{3,t+1}$$

para $t = 5$,

x_{25} na restrição

$$I_{4,t+2} + x_{4t} - I_{4,t+3} - r_{42}x_{2,t+3} - r_{43}x_{3,t+3} = d_{4,t+3}$$

para $t = 2$,

x_{22} , x_{23} , x_{24} , e x_{25} nas restrições

$$I_{5t} + x_{5t} - I_{5,t+1} - r_{52}x_{2,t+1} - r_{54}x_{4,t+1} = d_{5,t+1}$$

para $t = 1, 2, 3, 4$.

1.4 Modelos Multi-Estágios com Capacidade Finita de Produção

Até agora temos suposto que a quantidade de produção não é restrita por capacidade finita de produção. É claro que esta hipótese não é realista. A disponibilidade de mão-de obra regular e extra, de tempo de máquina, etc, limita a quantidade de itens e componentes que pode ser produzida num dado período de tempo. A disponibilidade de tais 'recursos' de produção deve ser representada por várias razões.

Em primeiro lugar, a disponibilidade de um ou mais recursos pode ser tão limitada que é impossível satisfazer dadas demandas, mesmo mudando a produção para outros períodos. Um modelo que leva em conta a capacidade finita de produção indicaria isso por ser infactível para as dadas demandas. Em segundo lugar, para alguns conjuntos de demanda, a região factível pode ser muito restrita, sendo a factibilidade alcançada somente pela mudança da produção para períodos mais cedo ou bem mais caros. Tal factibilidade é geralmente alcançada a custa de gastos bem maiores com a produção e, especialmente, com a estocagem.

As vezes a factibilidade da aplicação atual do modelo (na base de um horizonte rolante) é impossível, mas teria sido possível se tivéssemos usado um maior horizonte de planejamento nas aplicações anteriores tal que os estoques iniciais na aplicação atual fossem suficientemente grandes para permitir factibilidade. Por exemplo, a factibilidade de um conjunto atual de demandas grandes é impossível, mas teria sido possível se tivéssemos produzido mais quando as demandas eram menores de forma que os estoques iniciais na aplicação atual fossem feitos suficientemente grandes para permitir

factibilidade do conjunto atual de demandas grandes.

O tempo total de manufatura do produto final e a capacidade de manufatura são ligados porque, com capacidade infinita, as filas entre os centros de fabricação de cada componente seriam eliminadas e o tempo total de manufatura do produto seria substancialmente reduzido. Billington, McClain e Thomas (1983) chamam $L(i)$ de "o tempo mínimo de produção" (*minimum lead time*) uma vez que ele inclui uma estimativa das demoras que são inevitáveis e independentes da capacidade de produção do centro de fabricação do componente i . Um exemplo de tais demoras é o tempo que uma camada de tinta precisa para secar. O tempo $L(i)$ é fixo e não pode incluir tempo de espera entre os centros de fabricação de cada componente devido a capacidade finita destes centros. Porém, $L(i)$ pode incluir uma estimativa do tempo de espera uma vez dentro do centro de fabricação do componente i . Tal tempo de espera é suposto ser constante no nosso nível médio de modelagem, mas pode variar no nível mais detalhado do *jobshop*, dependendo do *scheduling* dentro do centro de fabricação do componente i . Devemos lembrar que estamos tratando de um modelo de nível intermediário de modelagem que tem certas aproximações (veja a Introdução desta tese).

A relação entre capacidade de produção, dimensionamento de lotes e tempo total de manufatura tem sido notada por vários autores, por exemplo Billington et al, e Karmarkar (1987). A seção presente desta tese tratará de um modelo multi-estágio de dimensionamento de lotes que incorpora a dependência do tempo total de manufatura em relação à capacidade de produção. Esta classe de modelo foi identificada numa recente resenha de Bahl, Ritzman e Gupta (1987) como uma direção de pesquisa útil e promissora, dado o fato que os ambientes de produção são geralmente multi-estágios e de

capacidade finita.

Billington et al discutem a ligação entre o tempo total de manufatura e a capacidade de manufatura. Eles propõem um modelo de dimensionamento de lotes para produtos com estruturas gerais, com tempo não-zero de produção de componentes e com capacidade finita de mão de obra. Porém, eles não consideram nem o uso do seu modelo na base de um horizonte rolante nem o problema da sincronização dos períodos. Vamos propor um modelo mais geral de dimensionamento de lotes para produtos com estruturas gerais, com tempo não-zero de produção de componentes e com capacidade finita de manufatura, que leva em conta estas complexidades.

Além de propor um modelo muito geral, vamos também desenvolver nesta tese dois métodos de resolver nosso modelo à otimalidade. Billington et al não fornecem um método de solução para seu modelo, embora, eles mencionem duas abordagens: uma primeira através de "sistemas Leontief de substituição", e uma segunda através de "decomposição", sem serem específicos.

Considere um item com estrutura geral de componentes. Seja $L(i)$ o tempo necessário para produzir o componente i (*lead time*) no seu centro de fabricação, sem contar o tempo gasto em filas entre os centros de fabricação de componentes devido a capacidade finita destes centros. $L(i)$ é medido em períodos inteiros de planejamento e, para muitos componentes, é muito aquém de um período, isto é, zero para fins de modelamento.

Seja f_{ikt} a quantidade do recurso k necessária para preparar (*setup*) a produção do componente i no período t , por exemplo o número de homens-hora necessário para preparar a produção do componente i no período t . De maneira semelhante, seja v_{ikt} a quantidade unitária do recurso k necessária para produzir o

componente i no período t , por exemplo o número de homens-hora necessário para produzir uma unidade do componente i no período t , independente do tempo necessário para preparar a produção. Um recurso k pode também representar um centro de produção.

Então, dada a produção x_{it} do componente i no período t , a quantidade total do recurso k consumida no período t é

$$\sum_{i=1}^N [f_{ikt} y_{it} + v_{ikt} x_{it}]$$

Esta quantidade total deve estar dentro da disponibilidade do recurso k no período t .

A quantidade disponível do recurso k talvez seja fixa com custo independente da produção ou do nível de estoques. Por exemplo, a quantidade de homens-hora de mão-de-obra direta disponível numa fábrica (sem hora extra) é sempre paga, independente da utilização desta quantidade. Neste caso as restrições apropriadas seriam

$$\sum_{i=1}^N [f_{ikt} y_{it} + v_{ikt} x_{it}] \leq b_{kt} \quad \forall k, \forall t.$$

onde b_{kt} é a disponibilidade fixa (já paga e portanto 'gratuita' no curto e médio prazo) do recurso k no período t .

Alternativamente, quantidades adicionais do recurso k talvez sejam disponíveis com custo extra, além da quantidade fixa 'gratuita' b_{kt} , por exemplo mão-de-obra em hora extra. Neste caso as restrições apropriadas seriam

$$\sum_{i=1}^N [f_{ikt} y_{it} + v_{ikt} x_{it}] \leq b_{kt} + u_{kt} \quad \forall k, \forall t.$$

$$u_{kt} \leq a_{kt}$$

$$\forall k, \forall t.$$

onde u_{kt} é a quantidade adicional do recurso k usada no período t e a_{kt} é o limite superior de u_{kt} . Também teríamos que inserir o termo

$$\sum_k \sum_t g_{kt} u_{kt}$$

na função objetivo onde g_{kt} é o custo unitário de fornecer as quantidades adicionais u_{kt} , por exemplo o custo de um homem-hora de mão-de-obra em hora extra. Este é o modelo adotado por Billington et al (1983) onde k é um centro de produção.

Esta tese se concentrará no primeiro e mais simples conjunto de restrições de capacidade:

$$\sum_{i=1}^N [f_{ikt} y_{it} + v_{ikt} x_{it}] \leq b_{kt} \quad \forall k, \forall t.$$

Até quantos períodos para frente devemos aplicar estas restrições de capacidade? O modelo será usado na base de um horizonte rolante. Portanto, sabemos que x_{it} pertence a uma das 3 categorias seguintes:

- (1) x_{it} já é decidido e fixo se $t \leq T(i)$,
- (2) x_{it} é uma variável do modelo se $T(i)+1 \leq t \leq T(i)+T$,
- (3) x_{it} está além do horizonte de planejamento se $t > T(i)+T$.

Assim, para $t > T$ e $k=1, \dots, K$, é impossível especificar a restrição

$$\sum_{i=1}^N [f_{ikt} y_{it} + v_{ikt} x_{it}] \leq b_{kt}$$

porque pelo menos um x_{it} está além do horizonte de planejamento (a saber, o x_{it} tal que $T(i)=0$, e possivelmente outros x_{it}). Portanto a restrição somente pode ser 'plenamente' especificada para $t=1, \dots, T$. Dizemos 'plenamente' porque, para $t > T$, a restrição pode ser 'parcialmente' especificada se tirarmos aqueles x_{it} que estão além do horizonte de planejamento. Então, neste caso, a restrição é re-expressa na seguinte forma:

$$\sum_{i|t \leq T(i)+T}^N [f_{ikt}y_{it} + v_{ikt}x_{it}] \leq b_{kt} \quad \begin{matrix} k=1, \dots, K \\ t=1, \dots, T(1)+T \end{matrix}$$

Por exemplo, considere a seguinte estrutura:

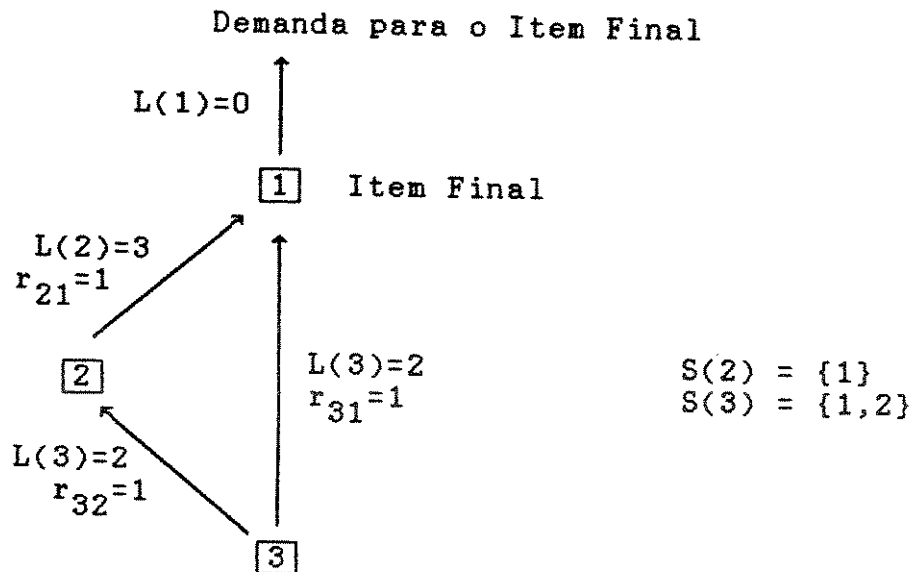


Figura 1.4.1

Uma Estrutura Geral com Tempo Não-Zero de Produção

Calcula-se que $T(3)=0$, $T(2)=2$ e $T(1)=5$. Seja $T=8$. Então a Figura 1.4.2 mostra os x_{it} já fixos (F), os x_{it} que são variáveis (V) e os x_{it} que são nem fixos nem variáveis (-).

	Período t							T	T+T(1)						
	1	2	3	4	5	6	7	↓	9	10	11	12	↓	14	15
i=1	F	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	-	-
i=2	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	-	-	-	-	-
i=3	V	V	V	V	V	V	V	V	-	-	-	-	-	-	-

‘plenamente’
restrito
‘parcialmente’
restrito

Figura 1.4.2

Por exemplo, os x_{it} para $i \in \{1,2,3\}$ e $t \in \{1, \dots, 8\}$ são restritos como:

$$\sum_{i=1}^3 [f_{ikt}y_{it} + v_{ikt}x_{it}] \leq b_{kt} \quad k = 1, \dots, K,$$

os x_{it} para $i \in \{1,2\}$ e $t \in \{9,10\}$ são restritos como:

$$\sum_{i=1}^2 [f_{ikt}y_{it} + v_{ikt}x_{it}] \leq b_{kt} \quad k = 1, \dots, K,$$

e os x_{1t} para $t \in \{11,12,13\}$ são restritos como:

$$f_{1kt}y_{1t} + v_{1kt}x_{1t} \leq b_{kt} \quad k = 1, \dots, K$$

Portanto, o modelo proposto para um único produto com estruturas geral, com tempo não-zero de produção de componentes e com capacidade finita de manufatura, em termos de estoque convencional, é

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} \left[s_{it}y_{it} + c_{it}x_{it} + h_{i,t+L(i)}I_{i,t+L(i)} \right] \quad (F_{xyI}^{14})$$

tal que

$$I_{1,L(1)+t-1} + x_{1t} - I_{1,L(1)+t} = d_{1,L(1)+t} \quad t = T(1)+1, \dots, T(1)+T$$

$$I_{i,L(i)+t-1} + x_{it} - I_{i,L(i)+t} - \sum_{j \in S(i)} r_{ij}x_{j,L(i)+t} = d_{i,L(i)+t} \quad \begin{matrix} i = 2, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{matrix}$$

$$\sum_{i|t \leq T(i)+T}^N [f_{ikt}y_{it} + v_{ikt}x_{it}] \leq b_{kt} \quad \begin{matrix} k = 1, \dots, K \\ t = 1, \dots, T(1)+T \end{matrix}$$

$$x_{it} \leq M_{it}y_{it} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{matrix}$$

$$x_{it} \geq 0; \quad I_{i,L(i)+t} \geq 0; \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{matrix}$$

$$y_{it} = 0 \text{ ou } 1; \quad \text{para } \begin{matrix} i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{matrix}$$

e, em termos de estoque de escalão, é

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} \left[s_{it} y_{it} + c_{it} x_{it} + e_{it} E_{it} \right] + \sum_{i|P(i) \neq \emptyset} \sum_{t=1}^{T(i)} e_{it} E_{it} \quad (F_{xyE}^{14})$$

tal que

$$E_{i,t-1} + x_{it} - E_{it} = \sum_{j \in R(i) \cup \{i\}} \sum_{n=1}^{n_{ij}} p_{ij}^n d_{j,t+L(j)+K^n(i,j)} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{array}$$

$$\sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{j,L(i)+t} - E_{it} \leq 0 \quad \begin{array}{l} i = 2, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{array}$$

$$\sum_{i|t \leq T(i)+T} [f_{ikt} y_{it} + v_{ikt} x_{it}] \leq b_{kt} \quad \begin{array}{l} k = 1, \dots, K \\ t = 1, \dots, T(1)+T \end{array}$$

$$x_{it} \leq M_{it} y_{it} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{array}$$

$$x_{it} \geq 0; \quad E_{it} \geq 0; \quad y_{it} = 0 \text{ ou } 1 \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{array}$$

Em relação aos parâmetros de custo do modelo, Aucamp (1984), Karmarkar (1987) e Trigeiro (1987) notam que s_{it} e c_{it} muitas vezes refletem custos de oportunidade e custos diretos dos recursos. Em outras palavras, um modelo de capacidade 'infinita' representa capacidade finita através dos custos s_{it} e c_{it} . A maneira como s_{it} e c_{it} refletem custos de oportunidade é complicada e não é um assunto desta tese. Porém, lembre que, no nosso modelo, os recursos $k \in \{1, \dots, K\}$ são providenciados com custo fixo que não varia com a utilização destes recursos. Assim, devemos tomar cuidado para assegurar que os custos de preparação s_{it} e os custos unitários de produção c_{it} não incluam os custos dos recursos $k \in \{1, \dots, K\}$. Portanto, esperamos que s_{it} e c_{it} , adequadamente calculados e

excluindo custos de oportunidade e os custos dos recursos $k \in \{1, \dots, K\}$, sejam consideravelmente menores num modelo com capacidade finita do que num com capacidade 'infinita'.

CAPÍTULO 2

SOLUÇÕES ÓTIMAS ATRAVÉS DE CORTES FORTES

2.1 Introdução

Este capítulo e o capítulo 3 tratam de métodos de solução para os modelos multi-estágios do capítulo 1. Este capítulo desenvolve e explora uma abordagem de cortes fortes dentro de um algoritmo de *Branch-and-Bound* para a solução ótima de modelos multi-estágios de tamanhos de lotes com capacidade infinita de produção. No capítulo 3 desenvolvemos e testamos uma abordagem que usa a Relaxação Lagrangeana e uma heurística para fornecer limites inferiores e superiores, respectivamente, dentro de uma busca de *Branch-and-Bound*. Vamos, primeiro, resenhar a literatura nesta área de pesquisa.

O problema multi-estágio de dimensionamento de lotes com capacidade infinita de produção tem recebido bastante atenção nos últimos vinte anos. A maior parte da pesquisa trata de estruturas seriais e estruturas de montagem, com tempo zero de produção de componentes. Vários métodos heurísticos têm sido desenvolvidos [McLaren e Whybark, 1976; Graves, 1981; Blackburn e Millen, 1982; Afentakis, 1987], alguns deles com resultados bons em relação à solução ótima e que foram obtidos em tempo razoável de computação. Em contraste, algoritmos ótimos têm sido mais difíceis de serem elaboradas. Abordagens ótimas incluem Programação Dinâmica e/ou métodos de Redes [Zangwill, 1969; Love, 1972; Crowston, Wagner e Williams, 1973; Crowston e Wagner, 1973; Steinberg e Napier, 1980; Konno, 1988] além de *Branch-and-Bound* [Crowston e Wagner, 1973,

Schwarz e Schrage, 1975; Afentakis, Gavish e Karmarkar , 1984; Afentakis e Gavish, 1986]. Porém estas abordagens muitas vezes são restritas a casos especiais, como por exemplo demanda constante ao longo de um horizonte infinito [Crowston et al, 1973; Schwarz e Schrage, 1975], ou estruturas seriais [Zangwill, 1969; Love, 1972; Konno, 1988] e quase-seriais [Crowston e Wagner, 1973]. A formulação de redes de Steinberg e Napier (1980) incorporou estruturas gerais, mas é computacionalmente factível somente para problemas de pequeno porte.

No caso de estruturas de montagem com capacidade infinita de produção, se os custos são não-crescentes ao longo de tempo, então existe uma solução ótima com uma certa estrutura [Crowston e Wagner, 1973]. Afentakis et al (1984) usaram esta estrutura para obter soluções ótimas em tempos de computação factíveis para estruturas de montagem de médio porte, usando Branch-and-Bound com limites inferiores obtidos através de Relaxação Lagrangeana. Afentakis e Gavish (1986) transformaram estruturas gerais em estruturas equivalentes de montagem para aplicar essencialmente o mesmo método. A dificuldade, neste caso, é que a estrutura de montagem resultante tem geralmente um número bem maior de componentes que a estrutura original.

No caso de capacidade finita de produção, a maior parte da pesquisa sobre o dimensionamento de lotes tem-se concentrado no problema "*multi-item*", isto é, quando há muitos itens-finais, cada um deles comportando um só componente. Neste caso, a formulação é simplesmente uma agregação de muitas formulações mono-estágias com restrições de capacidade finita.

Florian, Lenstra e Rinnooy Kan (1980) mostraram que o problema *multi-item* com capacidade finita de produção é *NP-hard*, mesmo no

caso de um único item, demandas iguais, custo zero de estocagem, e tempo zero de preparação de lotes (*setup times*). Assim é pouco provável que exista um algoritmo ótimo com tempo polinomial de solução.

Portanto muitos pesquisadores têm-se concentrado em métodos heurísticos e, mesmo assim, para casos especiais. Por exemplo, Karni e Roll (1982) consideram um único recurso limitado (i.e., $K=1$), supondo que os custos e a capacidade são constantes e que os tempos de preparação de lotes são todos zero. Dixon e Silver (1981) relaxaram uma destas condições ao permitir que a capacidade varie ao longo do tempo. Dixon, Elder, Rand e Silver (1983) e Newson (1975b) foram além disso e permitiram a disponibilidade de horas extras (*overtime*) com custo adicional, porém, Dixon et al consideram um único item. Newson (1975a) também supôs que os custos e a capacidade são constantes, mas não limitou o número K de recursos finitos que restringem a capacidade de produção. Newson (1975a, 1975b), Aras e Swanson (1982) e Trigeiro, Thomas e McClain (1985) contribuíram significativamente para ampliar as aplicações de seus modelos ao permitir que a preparação (*setup*) da produção de um lote de um item pudesse consumir os recursos finitos. Porém, Aras e Swanson, e também Trigeiro et al, consideram um único recurso finito, a saber, tempo (i.e., incluem *setup time*). Newson (1975a) e Trigeiro et al (1985) usaram essencialmente a mesma abordagem iterativa, a saber, a obtenção, através de Relaxação Lagrangeana das restrições de capacidade, de soluções parciais que são depois niveladas para alcançar factibilidade quanto à capacidade.

Os pesquisadores que desenvolveram métodos ótimos para o problema *multi-item* com capacidade finita de produção também se concentraram em casos especiais. Florian e Klein (1971) supuseram

um único item, capacidade constante de um recurso limitado, e consumo zero deste recurso na preparação de um lote. A partir destas hipóteses, os autores identificaram propriedades de uma solução ótima e desenvolveram um algoritmo de programação dinâmica, mas sem fazer testes computacionais. Lambrecht e Vander Eecken (1978) relaxaram a hipótese de capacidade constante de Florian e Klein, e propuseram um algoritmo semelhante que alegam ser mais eficiente, mas também não fizeram testes computacionais. Baker, Dixon, Magazine e Silver (1978) e Florian et al (1980) relaxaram a hipótese de capacidade constante, e desenvolveram um algoritmo de busca numa árvore de subproblemas (Baker et al, 1978), ou propuseram um método de programação dinâmica (Florian et al, 1980). Os testes computacionais de Baker et al (1978) num IBM 370/158 revelaram um desempenho médio bom com até 24 períodos, mesmo levando-se em conta que o problema é *NP-hard*. Evans (1985), trabalhando com múltiplos itens, capacidade variante de um recurso limitado e consumo zero deste recurso na preparação de um lote, desenvolveu um algoritmo de Branch-and-Bound combinado com métodos de redes. Porém, ele conseguiu soluções ótimas somente para problemas com até 6 itens e 4 períodos. Bahl e Zionts (1987) incluíram tempo de preparação. O único recurso limitado é tempo de mão-de-obra regular, mas horas extras (*overtime*) são disponíveis, sem limite, com custo adicional. Os autores chegam a soluções ótimas através do método de Benders, mas apresentam somente um exemplo computacional de pequena porte, com 2 itens e 3 períodos. Eles afirmam que a solução do problema mestre de Benders é o gargalo computacional do seu método.

Uma abordagem inovadora e promissora se baseia na reformulação do problema tal que sua envoltória convexa (*convex hull*) difere pouco da região factível do Programa Linear resultante da relaxação

das variáveis 0/1 (em certos casos pode coincidir). Assim a relaxação deve fornecer bons limites inferiores num algoritmo ortodóxo de Branch-and-Bound. Esta abordagem foi usada por Kippen e Martin (1987) para reformular o problema multi-item com capacidade infinita de produção. Depois da reformulação foram adicionadas restrições de capacidade variante de um recurso limitado, com consumo zero deste recurso na preparação de um lote. Soluções ótimas foram obtidas para quatro problemas com 8 itens e 8 períodos e para um problema com 20 itens e 13 períodos. Uma abordagem relacionada é a de Barany, Van Roy e Wolsey (1984) que identificaram facetas (*facets*) do problema com um único item e com capacidade infinita de produção. Algumas destas facetas foram selecionadas *a priori* como cortes fortes e adicionadas ao problema multi-item com capacidade variante de um recurso limitado e com consumo zero deste recurso na preparação de um lote. Soluções ótimas foram obtidas para problemas com até 20 itens e 13 períodos. Vamos investigar esta abordagem na solução do problema multi-estágio mais para a frente nesta tese, nas seções 2.3 e 2.4.

No caso de capacidade finita de produção, vimos que foram desenvolvidas várias pesquisas sobre o dimensionamento de lotes para o problema "*multi-item*". Em contraste, o problema multi-estágio com capacidade finita de produção tem recebido pouca atenção, provavelmente porque

"[este] problema é muito mais complexo do que [o problema multi-item com capacidade finita de produção] que foi provado ser *NP-hard* mesmo nos casos simples. Nenhuma técnica otimizante é disponível para problemas de porte realístico. Princípios simples - tais como fazer com que o tamanho de um lote seja um múltiplo inteiro do tamanho do lote do [componente] pai ou evitar, quando há qualquer estoque inicial [de um componente no

começo de um período], soluções em que ocorre produção [do componente no período] - não foram estabelecidos".

[Bahl, Ritzman e Gupta, 1987: p 340, tradução minha]

O único método ótimo na literatura é o de Gabbay (1979) que formulou um modelo multi-item para estruturas seriais com um recurso limitado e com consumo zero deste recurso na preparação de um lote. Ele propôs um algoritmo ótimo de programação dinâmica, mas não apresentou testes computacionais. Além disso, como citado na seção 1.4, Billington, McClain e Thomas (1983) não forneceram um método de solução para seu modelo, embora eles mencionassem duas abordagens: uma primeira através de "sistemas Leontief de substituição", e uma segunda através de "decomposição", sem serem específicos.

Existem alguns métodos heurísticos, mas todos são para situações especiais. Blackburn e Millen (1984) desenvolveram uma heurística para o caso de uma quantidade máxima de produção de cada componente em cada período. A heurística primeiro modifica os custos para levar em conta a escassez de capacidade. Em seguida os custos modificados são usados em métodos mono-estágios capacitados aplicados sequencialmente, começando com o item final e descendo pela estrutura do produto, terminando com uma solução ao problema multi-estágio. Os testes computacionais são feitos com um produto de 5 componentes ao longo de 24 períodos. Não são apresentadas comparações com soluções ótimas. Bahl e Ritzman (1984) propuseram um modelo não-linear com horas regulares e adicionais, e uma heurística iterativa para ele. O modelo decide somente os tamanhos dos lotes dos itens finais e supõe uma política de lote-por-lote nos níveis dos outros componentes. Existem outras heurísticas, não baseadas em modelos matemáticos, mas para aplicação num ambiente de *Capacity Requirements Planning* [Vollman, Berry e Whybark, 1988],

como, por exemplo, a de Harl e Ritzmann (1985).

Vimos que existe uma escassez de métodos para o problema multi-estágio com capacidade finita de produção. No capítulo 3 usaremos uma abordagem de solução para este problema que utiliza a Relaxação Lagrangeana e uma heurística para fornecer limites inferiores e superiores respectivamente, e que funciona dentro de um algoritmo de Branch-and-Bound. Mas primeiro, neste capítulo, vamos desenvolver um método de solução que usa cortes fortes de alta dimensão durante uma busca de Branch-and-Bound. Este método pode ser usado para o problema multi-estágio tanto com capacidade finita de produção quanto com capacidade infinita.

Métodos de cortes têm sido usados na solução de problemas de Programação Inteira por vários pesquisadores, começando com Gomory (1958) trinta anos atrás. No caso do problema mono-estágio de dimensionamento de lotes com um único item e capacidade infinita de produção, Barany, Van Roy e Wolsey (1984) identificaram as chamadas 'desigualdades válidas' (*valid inequalities*) que são satisfeitas por todas as soluções do problema, mas podem cortar a solução ótima da relaxação de Programação Linear do problema. Os autores mostraram que muitos destes cortes são facetas (*facets*) da envoltória convexa da formulação do problema. Este fato é importante porque a envoltória convexa da região factível da formulação coincide com o politopo definido por todas suas facetas. Assim uma solução ótima da relaxação de Programação Linear do problema formulado em termos do conjunto de todas suas facetas é também uma solução ótima da formulação original. Barany et al selecionaram algumas destas facetas *a priori* como sendo os cortes mais fortes na prática e adicionaram-os ao problema multi-item com capacidade variante de um recurso limitado e com consumo zero deste recurso na preparação de

um lote. Como já mencionado na seção 2.1, os autores obtiveram soluções ótimas para problemas com até 20 itens e 13 períodos.

Tal abordagem pode ser promissora também para o problema multi-estágio. Na seção 2.2, identificamos desigualdades válidas que talvez não sejam facetas da envoltória convexa deste problema, mas pelo menos são faces de alta dimensão. Portanto, podemos esperar que alguns deles sejam cortes fortes. Na seção 2.3, desenvolvemos algoritmos de separação (*separation algorithms*) que procuram escolher os cortes mais fortes de um dado problema. Os cortes escolhidos são adicionados às restrições originais no nó raiz de uma árvore de busca Branch-and-Bound (B&B). Na seção 2.4, explicamos os detalhes da busca Branch-and-Bound (B&B) utilizada. Os resultados computacionais são apresentados na seção 2.5 (problema com capacidade infinita de produção) e na seção 3.5 (problema com capacidade finita de produção).

2.2 A Identificação de Cortes Fortes

A formulação F_{xyI}^{134} (i.e., F_{xyI}^{14} sem as restrições de capacidade finita de produção) é

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} \left[s_{it} y_{it} + c_{it} x_{it} + h_{i,L(i)+t} I_{i,L(i)+t} \right] \quad (F_{xyI}^{134})$$

tal que

$$I_{1,L(1)+t-1} + x_{1t} - I_{1,L(1)+t} = d_{1,L(1)+t} \quad \text{para } t = T(1)+1, \dots, T(1)+T$$

$$I_{i,L(i)+t-1} + x_{it} - I_{i,L(i)+t} - \sum_{j \in S(i)} r_{ij} x_{j,L(i)+t} = d_{i,L(i)+t} \quad \text{para } i = 2, \dots, N, \quad t = T(i)+1, \dots, T(i)+T$$

$$x_{it} \leq M_{it} y_{it} \quad \text{para } i = 1, \dots, N, \quad t = T(i)+1, \dots, T(i)+T$$

$$x_{it} \geq 0; \quad I_{i,L(i)+t} \geq 0; \quad \text{para } i = 1, \dots, N, \quad t = T(i)+1, \dots, T(i)+T$$

$$y_{it} = 0 \text{ ou } 1; \quad \text{para } i = 1, \dots, N, \quad t = T(i)+1, \dots, T(i)+T$$

Agora, de modo análogo a E_{it} , defina D_{it} recursivamente como

$$D_{it} = d_{i,t+L(i)} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} D_{j,t+L(i)}$$

Esta definição, aplicada repetidas vezes, resulta em

$$D_{it} = \sum_{j \in R(i) \cup \{i\}} \sum_{n=1}^{n_{ij}} p_{ij}^n d_{j,t+L(j)+K^n(i,j)}$$

Também defina

$$d_{it_1t_2} = \sum_{t=t_1}^{t_2} d_{it} \quad e \quad D_{it_1t_2} = \sum_{t=t_1}^{t_2} D_{it}$$

$$i.e., \quad D_{it_1t_2} = d_{i,t_1+L(i),t_2+L(i)} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} D_{j,t_1+L(i),t_2+L(i)}$$

Então a formulação F_{xyE}^{134} (i.e., F_{xyE}^{14} sem as restrições de capacidade finita de produção) pode ser reescrita como

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} \left[s_{it} y_{it} + c_{it} x_{it} + e_{it} E_{it} \right] + \sum_{i|P(i) \neq \emptyset} \sum_{t=1}^{T(i)} e_{it} E_{it} \quad (F_{xyE}^{134})$$

tal que

$$\begin{aligned} E_{i,t-1} + x_{it} - E_{it} &= D_{it} & i=1, \dots, N \\ & & t=T(i)+1, \dots, T(i)+T \\ \sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{j,L(i)+t} - E_{it} &\leq 0 & i=2, \dots, N \\ & & t=T(i)+1, \dots, T(i)+T \\ x_{it} &\leq M_{it} y_{it} & i=1, \dots, N \\ & & t=T(i)+1, \dots, T(i)+T \\ x_{it} \geq 0; \quad E_{it} \geq 0; \quad y_{it} &= 0 \text{ ou } 1 & i=1, \dots, N \\ & & t=T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{aligned}$$

Como Zangwill (1966), supomos que os custos são tais que a variável $I_{i,L(i)+T(i)+T}$ tem valor zero numa solução ótima. Portanto, quando $I_{i,L(i)+T(i)+T} = 0$, não é difícil mostrar que as formulações equivalentes F_{xyI}^{134} e F_{xyE}^{134} podem ser transformadas para a seguinte formulação em apenas x_{it} e y_{it} :

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} \left[s_{it} y_{it} + \left(c_{it} + \sum_{\tau=t}^{T(i)+T} e_{i\tau} \right) x_{it} - D_{it} \sum_{\tau=t}^{T(i)+T} e_{i\tau} \right]$$

$$+ \sum_{i=1}^N \left[\sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} e_{it} \right] E_{i,T(i)} + \sum_{i|P(i) \neq \emptyset} \sum_{t=1}^{T(i)} e_{it} E_{it} \quad (F_{xy}^{134})$$

tal que

$$\sum_{\tau=T(i)+1}^t \left[x_{i\tau} - \sum_{j \in S(i)} r_{ij} x_{j,L(i)+\tau} \right] \geq d_{i,T(i)+L(i)+1,L(i)+t} - I_{i,L(i)+T(i)} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T-1 \end{matrix}$$

$$\sum_{\tau=T(i)+1}^{T(i)+T} \left[x_{i\tau} - \sum_{j \in S(i)} r_{ij} x_{j,L(i)+\tau} \right] = d_{i,T(i)+L(i)+1,T(i)+L(i)+T} - I_{i,L(i)+T(i)} \quad i = 1, \dots, N$$

$$x_{it} \leq M_{it} y_{it} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{matrix}$$

$$x_{it} \geq 0; \quad y_{it} = 0 \text{ ou } 1; \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{matrix}$$

onde $I_{i,L(i)+T(i)}$ para $i = 1, \dots, N$ são níveis já determinados de estoque convencional.

Barany, Van Roy e Wolsey (1984) mostraram que a seguinte desigualdade $V1_1$ é 'válida' para o caso especial da formulação F_{xy}^{134} quando $N=1$, $L(1)=0$ e $I_{10}=0$:

$$\sum_{t \in S} x_{1t} + \sum_{t \in Q \setminus S} d_{1tq} y_{1t} \geq d_{11q} \quad (V1_1)$$

para $1 \leq q \leq T$, $Q = \{1, \dots, q\}$, e $S \subseteq Q$. Barany et al também mostraram que, se $q+1 \leq T$, $1 \in S$ e $Q \setminus S \neq \emptyset$, então a desigualdade $V1_1$ define uma faceta da envoltória convexa da região factível do caso especial $N=1$ com $L(1)=0$ e $I_{10}=0$ da formulação F_{xy}^{134} .

A desigualdade $V1_1$ pode ser generalizada para a formulação F_{xy}^{134} como:

$$\sum_{t \in S} x_{it} + \sum_{t \in Q \setminus S} D_{itq} y_{it} \geq D_{i, T(i)+1, q} - E_{i, T(i)} \quad (V1_i)$$

ou, equivalentemente para a formulação F_{xyE}^{134} , como

$$\sum_{t \in Q \setminus S} (x_{it} - D_{itq} y_{it}) \leq E_{iq} \quad (V1E_i)$$

para $i \in \{1, \dots, N\}$, $T(i)+1 \leq q \leq T(i)+T$, $Q = \{T(i)+1, \dots, q\}$ e $S \subseteq Q$.

Proposição 1. Qualquer uma das três formulações F_{xyI}^{134} , F_{xyE}^{134} e F_{xy}^{134} implica na desigualdade

$$\sum_{t \in S} x_{it} + \sum_{t \in Q \setminus S} D_{itq} y_{it} \geq D_{i, T(i)+1, q} - E_{i, T(i)} \quad (V1_i)$$

para $i \in \{1, \dots, N\}$, $T(i)+1 \leq q \leq T(i)+T$, $Q = \{T(i)+1, \dots, q\}$ e $S \subseteq Q$.

Prova. Seja $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{T(i)+1, \dots, T(i)+T\}$. As seguintes restrições da formulação F_{xyE}^{134}

$$E_{i, \tau-1} + x_{i\tau} - E_{i\tau} = D_{i\tau} \quad \tau = T(i)+1, \dots, t$$

$$E_{it} \geq 0;$$

implicam na restrição

$$\sum_{\tau=T(i)+1}^t x_{i\tau} \geq D_{i, T(i)+1, t} - E_{i, T(i)}$$

Agora, seja (x, y) uma solução factível de qualquer uma das três formulações equivalentes F_{xy}^{134} , F_{xyI}^{134} e F_{xyE}^{134} , e seja $i \in \{1, \dots, N\}$, $T(i)+1 \leq q \leq T(i)+T$, $Q = \{T(i)+1, \dots, q\}$ e $S \subseteq Q$. Consideramos dois casos:

Caso 1. $y_{it} = 0$ para $t \in Q \setminus S$. Neste caso $x_{it} = 0$ para $t \in Q \setminus S$ e temos

$$\sum_{t \in S} x_{it} + \sum_{t \in Q \setminus S} D_{itq} y_{it}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{t \in S} x_{it} && \text{porque } y_{it}=0 \quad \forall t \in Q \setminus S \\
&= \sum_{t \in Q} x_{it} && \text{porque } x_{it}=0 \quad \forall t \in Q \setminus S \\
&= \sum_{\tau=T(i)+1}^q x_{i\tau} \\
&\geq D_{i,T(i)+1,q} - E_{i,T(i)} && \text{da restrição acima.}
\end{aligned}$$

Caso 2. Existe $\tau = \min\{t | t \in Q \setminus S, y_{it}=1\}$. Neste caso temos

$$\begin{aligned}
&\sum_{t \in S} x_{it} + \sum_{t \in Q \setminus S} D_{itq} y_{it} \\
&\geq \sum_{t \in S} x_{it} + D_{itq} && \text{porque } t \in Q \setminus S \text{ e } y_{it}=1 \\
&\geq \sum_{\tau=T(i)+1}^{\tau-1} x_{i\tau} + D_{itq} && \text{porque } \{T(i)+1, \dots, \tau-1\} \subseteq S \\
&\geq D_{i,T(i)+1,\tau-1} - E_{i,T(i)} + D_{itq} && \text{da restrição acima.} \\
&= D_{i,T(i)+1,q} - E_{i,T(i)}
\end{aligned}$$

i.e., a desigualdade $V1_i$ é válida para a formulação F_{xyE}^{134} , e, portanto, para a formulação F_{xyI}^{134} .

Uma vez que a formulação F_{xy}^{134} é equivalente a formulação F_{xyI}^{134} com $I_{i,L(i)+T(i)+T} = 0$ para $i \in \{1, \dots, N\}$, é evidente que a desigualdade $V1_i$ também é válida para a formulação F_{xy}^{134} . ■

Note que $V1_i$ foi obtida desconsiderando as restrições inter-escalões que fazem parte da formulação F_{xyE}^{134} .

Proposição 2. A formulação F_{xyE}^{134} implica a desigualdade

$$\sum_{t \in Q \setminus S} (x_{it} - D_{itq} y_{it}) \leq E_{iq} \quad (V1E_i)$$

para $i \in \{1, \dots, N\}$, $T(i)+1 \leq q \leq T(i)+T$, $Q = \{T(i)+1, \dots, q\}$ e $S \subseteq Q$.

Prova. Seja $i \in \{1, \dots, N\}$, $T(i)+1 \leq q \leq T(i)+T$, $Q = \{T(i)+1, \dots, q\}$ e $S \subseteq Q$.

A formulação F_{xyE}^{134} implica

$$\begin{aligned} E_{iq} &= \sum_{t=T(i)+1}^q x_{it} - D_{i,T(i)+1,q} + E_{i,T(i)} \\ &= \sum_{t \in Q} x_{it} - D_{i,T(i)+1,q} + E_{i,T(i)} \end{aligned}$$

que, substituída na desigualdade $V1_i$, resulta em

$$\sum_{t \in Q} x_{it} \leq E_{iq} + \sum_{t \in S} x_{it} + \sum_{t \in Q \setminus S} D_{itq} y_{it}$$

i.e.,

$$\sum_{t \in Q \setminus S} (x_{it} - D_{itq} y_{it}) \leq E_{iq}$$

■

Precisamos do seguinte resultado para mostrar que $V1_i$ e outras desigualdades são de alta dimensão, pelo menos sob certas condições.

Proposição 3. Se $L(i)=0$ e $I_{i0}=I_{iT}=0$ para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $d_{1t} > 0$ para $t \in \{1, \dots, T\}$, então a região factível das três formulações equivalentes F_{xyI}^{132} , F_{xyE}^{132} e F_{xy}^{132} tem dimensão $2N(T-1)$.

Prova. A prova é uma generalização da prova da Proposição 2 em Barany et al (1984) que trataram do caso especial $N=1$.

Quando $I_{i,L(i)+T(i)+T} = 0$ para $i \in \{1, \dots, N\}$, as três formulações F_{xyI}^{132} , F_{xyE}^{132} e F_{xy}^{132} são equivalentes e, portanto, têm a mesma dimensão. A formulação F_{xy}^{132} tem $2NT$ variáveis, mas $y_{i1}=1$ necessariamente para $i \in \{1, \dots, N\}$ porque $d_{11} > 0$ e $I_{i0}=0$ para $i \in \{1, \dots, N\}$. Além disso, $\{x_{it} | i=1, \dots, N; t=2, \dots, T\}$ determinam $\{x_{i1} | i=1, \dots, N\}$. Portanto $\dim(F_{xy}^{132}) \leq 2N(T-1)$. Agora especificaremos $2N(T-1)+1$ pontos afinamente independentes (*affinely independent points*) na região factível de F_{xy}^{132} . Assim, teremos mostrado que $\dim(F_{xy}^{132}) \geq 2N(T-1)$ [Brondsted, 1983] e, portanto, que $\dim(F_{xy}^{132}) = 2N(T-1)$.

Para $t = 1, \dots, T$ defina o ponto A_{1t} da seguinte maneira:

Para $k = 1, \dots, N$ seja

$$\begin{aligned} x_{k\tau} &= D_{k\tau} & e & & y_{k\tau} &= 1 & & \tau = 1, \dots, t-1 \\ x_{kt} &= D_{ktT} & e & & y_{kt} &= 1 \\ x_{k\tau} &= 0 & e & & y_{k\tau} &= 0 & & \tau = t+1, \dots, T \end{aligned}$$

Para $i = 2, \dots, N$ e $t = 2, \dots, T$ defina o ponto A_{it} da seguinte maneira:

Para $k = 1, \dots, N-i+1$ seja

$$\begin{aligned} x_{k\tau} &= D_{k\tau} & e & & y_{k\tau} &= 1 & & \tau = 1, \dots, t-1 \\ x_{kt} &= D_{ktT} & e & & y_{kt} &= 1 \\ x_{k\tau} &= 0 & e & & y_{k\tau} &= 0 & & \tau = t+1, \dots, T \end{aligned}$$

e para $k = N-i+2, \dots, N$ seja

$$\begin{aligned} x_{k1} &= D_{k1T} & e & & y_{k1} &= 1 \\ x_{k\tau} &= 0 & e & & y_{k\tau} &= 0 & & \tau = 2, \dots, T \end{aligned}$$

Para $i = 1, \dots, N$ e $t = 2, \dots, T$ defina o ponto B_{it} da seguinte maneira:

Para $k = 1, \dots, N-i+1$ seja

$$x_{k1} = D_{k1T} \quad \text{e} \quad y_{k1} = 1$$

$$x_{k\tau} = 0 \quad \text{and} \quad y_{k\tau} = \begin{cases} 1 & \text{se } \tau = t \\ 0 & \text{senão} \end{cases} \quad \tau = 2, \dots, T$$

e para $k = N-i+2, \dots, N$ seja

$$x_{k1} = D_{k1T} \quad \text{e} \quad y_{k1} = 1$$

$$x_{k\tau} = 0 \quad \text{e} \quad y_{k\tau} = 0 \quad \tau = 2, \dots, T.$$

Um exemplo destes pontos quando $N=T=3$ é dado no Apêndice B.

Vamos mostrar que os pontos A_{11} e $\{A_{it}, B_{it} | i=1, \dots, N; t=2, \dots, T\}$ estão na região factível de F_{xy}^{132} ao provar que eles satisfazem

$$\sum_{\tau=1}^t x_{i\tau} \geq \sum_{\tau=1}^t \sum_{j \in S(i)} r_{ij} x_{j\tau} + d_{i1t} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, N \\ t = 1, \dots, T \end{matrix}$$

(= para $t=T$)

Observe que os pontos satisfazem

$$\sum_{\tau=1}^t x_{i\tau} = D_{i1t} t_{it} \quad \text{para algum } t_{it} \geq t \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, N \\ t = 1, \dots, T \end{matrix}$$

(= para $t=T$)

e que, dados $t \in \{1, \dots, T\}$ e $\{i, j\} \subseteq \{1, \dots, N\}$,

se $i > j$ então $t_{it} \geq t_{jt}$.

(= para $t=T$)

Seja $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{1, \dots, T\}$. Portanto,

$$\sum_{\tau=1}^t x_{i\tau} = D_{i1t} t_{it} = \sum_{j \in S(i)} r_{ij} D_{j1t} t_{it} + d_{i1t} t_{it} \quad \text{por definição de } D_{i1t} t_{it}$$

$$\geq \sum_{j \in S(i)} r_{ij} D_{j1t} t_{jt} + d_{i1t} t_{it} \quad \text{porque } j \in S(i) \Rightarrow i > j \Rightarrow t_{it} \geq t_{jt}$$

(= para $t=T$)

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j \in S(i)} \sum_{\tau=1}^t r_{ij} x_{j\tau} + d_{i1} t_{it} \\
&\geq \sum_{\tau=1}^t \sum_{j \in S(i)} r_{ij} x_{j\tau} + d_{i1} t \quad \text{porque } t_{it} \geq t \text{ por definição de } t_{it} \\
&(\text{ = para } t=T)
\end{aligned}$$

Portanto, os pontos A_{11} e $\{A_{it}, B_{it} | i=1, \dots, N; t=2, \dots, T\}$ são factíveis.

Para mostrar que os pontos são afinamente independentes, resolvemos a seguinte dupla de equações em a_{11} , a_{it} e b_{it} ($i=1, \dots, N$; $t=2, \dots, T$):

$$a_{11} A_{11} + \sum_{i=1}^N \sum_{t=2}^T \left(a_{it} A_{it} + b_{it} B_{it} \right) = 0$$

$$a_{11} + \sum_{i=1}^N \sum_{t=2}^T \left(a_{it} + b_{it} \right) = 0.$$

A segunda equação da dupla é a précondição de independência afim (*affine independence*) [Brondsted, 1983].

O coeficiente de x_{it} ($i = 1, \dots, N$; $t = 2, \dots, T$) na primeira equação da dupla é

$$D_{itT} \sum_{k=1}^{N-i+1} a_{kt} + D_{it} \sum_{k=1}^{N-i+1} \sum_{\tau=t+1}^T a_{k\tau} = 0$$

O coeficiente de y_{it} ($i = 1, \dots, N$; $t = 2, \dots, T$) na primeira equação da dupla é

$$\sum_{k=1}^{N-i+1} \left[\sum_{\tau=t}^T a_{k\tau} + b_{kt} \right] = 0$$

Usando a pré-condição que $d_{1T} > 0$ ($\Rightarrow D_{iT} > 0$) e raciocinando para

trás, primeiro de x_{NT} até x_{N2} , depois de y_{NT} até y_{N2} , de $x_{N-1,T}$ até $x_{N-1,2}$, de $y_{N-1,T}$ até $y_{N-1,2}$, etc., deduzimos primeiro que $a_{1T} = a_{1,T-1} = \dots = a_{12} = 0$, depois que $b_{1t} = 0$ for $t = 2, \dots, T$, que $a_{2T} = a_{2,T-1} = \dots = a_{22} = 0$, que $b_{2t} = 0$ for $t = 2, \dots, T$, etc. O resultado é que temos

$$a_{it} = b_{it} = 0 \quad i = 1, \dots, N; t = 2, \dots, T.$$

Finalmente usamos a equação da précondição de independência afim

$$a_{11} + \sum_{i=1}^N \sum_{t=2}^T (a_{it} + b_{it}) = 0.$$

para deduzir que $a_{11} = 0$, assim provando a independência afim dos $2N(T-1)+1$ pontos. ■

Assim a envoltória convexa de F_{xy}^{134} tem dimensão $2N(T-1)$.

No caso de uma estrutura geral com tempo não zero de produção, os pontos A_{11} e $\{A_{it}, B_{it} | i=1, \dots, N; t=2, \dots, T\}$ especificados na prova acima não podem ser generalizados, uma vez que, em geral, os pontos são infactíveis.

Agora mostramos que, pelo menos sob certas condições, a desigualdade válida $V1_i$ define uma face de alta dimensão da envoltória convexa de F_{xy}^{134} .

Seja $R1_i$ a região que é definida pela intersecção da fronteira de $V1_i$:

$$\sum_{t \in S} x_{it} + \sum_{t \in Q \setminus S} D_{itq} y_{it} = D_{i,T(i)+1,q} - E_{i,T(i)}$$

com a envoltória convexa de F_{xy}^{134} . Lembre que $V1_i$ foi obtida desconsiderando todas as restrições inter-escalões

$$\sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{j, L(i)+t} - E_{it} \leq 0 \quad \begin{array}{l} i = 2, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{array}$$

que fazem parte da formulação F_{xy}^{134} . Porém, veremos na prova da seguinte Proposição que, sob certas condições, a fronteira de $V1_i$ contém pelo menos $2N(T-2)+1$ pontos afinamente independentes que também estão na envoltória convexa de F_{xy}^{134} .

Proposição 4. Seja $L(j)=0$ e $I_{j0} = I_{j, L(j)+T(j)+T} = 0$ para $j = 1, \dots, N$, $d_{1t} > 0$ para $t = 1, \dots, T$, $2 \leq q \leq T-1$, $Q = \{1, \dots, q\}$, $S \subseteq Q$, $1 \in S$, $Q \setminus S \neq \emptyset$, e $i \in \{1, \dots, N\}$. Então $2N(T-2) \leq \dim(R1_i) \leq 2N(T-1)-1$.

Prova. Uma vez que $L(j)=0$ para $j = 1, \dots, N$, tratamos das formulações F_{xyI}^{132} , F_{xyE}^{132} e F_{xy}^{132} . Também, dado que $I_{j0} = 0$ para $j = 1, \dots, N$ implica $E_{j0} = 0$ para $j = 1, \dots, N$, $R1_i$ é a região que é definida pela intersecção da fronteira de $V1_i$:

$$\sum_{t \in S} x_{it} + \sum_{t \in Q \setminus S} D_{itq} y_{it} = D_{i1q}$$

com a envoltória convexa de F_{xy}^{132} .

Uma vez que $R1_i$ é um subconjunto estrito da envoltória convexa de F_{xy}^{132} , temos $\dim(R1_i) < \dim(F_{xy}^{132})$. Já sabemos da Proposição 3 que $\dim(F_{xy}^{132}) = 2N(T-1)$. Portanto $\dim(R1_i) \leq 2N(T-1)-1$.

Provaremos que $\dim(R1_i) \geq 2N(T-2)$ através da demonstração da existência de $2N(T-2)+1$ pontos afinamente independentes em $R1_i$. Seja $k = \min\{t \in Q \setminus S\}$, i.e. $2 \leq k \leq Q$. Seja $m, n \in \mathbb{N}$ e defina

$$G_n = \left\{ (x_n^g, y_n^g) \mid x_n^g \in \mathbb{R}^{N(k-1)}, y_n^g \in \{0,1\}^{N(k-1)} \right\};$$

$$H_m = \left\{ (x_m^h, y_m^h) \mid x_m^h \in \mathbb{R}^{N(T-q)}, y_m^h \in \{0,1\}^{N(T-q)} \right\};$$

0^x = vetor zero de $\mathbb{R}^{N(q-k+1)}$; 0^y = vetor zero de $\{0,1\}^{N(q-k+1)}$.

Considere o problema de F_{xy}^{132} somente sobre os períodos 1 até $k-1$ com as seguintes demandas independentes:

$$\left. \begin{aligned} d_{it}^0 &= d_{it} & t &= 1, \dots, k-2 \\ d_{i,k-1}^0 &= d_{i,k-1,q} \end{aligned} \right\} \quad i = 1, \dots, N$$

Pela Proposição 3, existem $2N(k-2)+1$ soluções factíveis afinamente independentes $\{G_n \mid n=1, \dots, 2N(k-2)+1\}$ para este problema.

Agora considere o problema de F_{xy}^{132} somente sobre períodos $q+1$ até T . De novo pela Proposição 3, existem $2N(T-q-1)+1$ soluções factíveis afinamente independentes $\{H_m \mid m=1, \dots, 2N(T-q-1)+1\}$ para este problema.

Os seguintes $2N(T+k-q-3)+1$ pontos:

$$\left\{ (x_1^g, 0^x, x_m^h, y_1^g, 0^y, y_m^h) \mid m = 1, \dots, 2N(T-q-1)+1 \right\}$$

e

$$\left\{ (x_n^g, 0^x, x_1^h, y_n^g, 0^y, y_1^h) \mid n = 2, \dots, 2N(k-2)+1 \right\}$$

estão na região factível de F_{xy}^{132} . Uma vez que $\{1, \dots, k-1\} \subseteq S$, $Q \setminus S \subseteq \{k, \dots, q\}$ e $\{q+1, \dots, T\} \cap Q = \emptyset$, temos, para cada um dos $2N(T+k-q-3)+1$ pontos, o seguinte resultado:

$$\sum_{t \in S} x_{it} + \sum_{t \in Q \setminus S} D_{itq} y_{it} = \sum_{t=1}^{k-1} x_{it} + \sum_{t \in Q \setminus S} D_{itq} (0)$$

$$= D_{i1q}$$

i.e., os $2N(T+k-q-3)+1$ pontos acima também estão em $R1_i$. Agora especificamos os pontos da mesma maneira como na prova de Proposição

3. Os pontos são denominados como

$$A_{11};$$

$$A_{mt} \quad m = 1, \dots, N \quad t = 2, \dots, k-1 \text{ e } q+2, \dots, T;$$

$$B_{mt} \quad m = 1, \dots, N \quad t = 2, \dots, k-1 \text{ e } q+2, \dots, T;$$

e pode-se conferir da prova de Proposição 3 que os pontos podem ser especificados como se segue:

O ponto A_{11} é especificado:

Para $n = 1, \dots, N$

$$\begin{array}{ll} x_{n1} = D_{n1q} & y_{n1} = 1 \\ x_{n,q+1} = D_{n,q+1,T} & y_{n,q+1} = 1 \\ x_{n\tau} = y_{n\tau} = 0 & \text{para } \tau \in \{2, \dots, T\} \setminus \{q+1\} \end{array}$$

Para $m = 1, \dots, N$ e $t = 2, \dots, k-1$ o ponto A_{mt} é especificado:

Para $n = 1, \dots, N-m+1$

$$\begin{array}{lll} x_{n\tau} = D_{n1\tau} & y_{n\tau} = 1 & \text{para } \tau = 1, \dots, t-1 \\ x_{nt} = D_{ntq} & y_{nt} = 1 & \\ x_{n\tau} = 0 & y_{n\tau} = 0 & \text{para } \tau = t+1, \dots, q \\ x_{n,q+1} = D_{n,q+1,T} & y_{n,q+1} = 1 & \\ x_{n\tau} = 0 & y_{n\tau} = 0 & \text{para } \tau = q+2, \dots, T \end{array}$$

e para $n = N-m+2, \dots, N$

$$\begin{array}{ll} x_{n1} = D_{n1q} & y_{n1} = 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
x_{n,q+1} &= D_{n,q+1,T} & y_{n,q+1} &= 1 \\
x_{n\tau} &= y_{n\tau} = 0 & \text{para } \tau &\in \{2, \dots, T\} \setminus \{q+1\}
\end{aligned}$$

Para $m = 1, \dots, N$ e $t = 2, \dots, k-1$ o ponto B_{mt} é especificado:

Para $n = 1, \dots, N-m+1$

$$\begin{aligned}
x_{n1} &= D_{n1q} & y_{n1} &= 1 \\
x_{n\tau} &= 0 & y_{n\tau} &= \begin{cases} 1 & \text{se } \tau = t \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \text{ para } \tau = 2, \dots, k-1 \\
x_{n\tau} &= 0 & y_{n\tau} &= 0 \text{ para } \tau = k, \dots, q \\
x_{n,q+1} &= D_{n,q+1,T} & y_{n,q+1} &= 1 \\
x_{n\tau} &= 0 & y_{n\tau} &= 0 \text{ para } \tau = q+2, \dots, T
\end{aligned}$$

Para $n = N-m+2, \dots, N$

$$\begin{aligned}
x_{n1} &= D_{n1q} & y_{n1} &= 1 \\
x_{n,q+1} &= D_{n,q+1,T} & y_{n,q+1} &= 1 \\
x_{n\tau} &= y_{n\tau} = 0 & \text{para } \tau &\in \{2, \dots, T\} \setminus \{q+1\}
\end{aligned}$$

Para $m = 1, \dots, N$ e $t = q+2, \dots, T$ o ponto A_{mt} é especificado:

Para $n = 1, \dots, N-m+1$

$$\begin{aligned}
x_{n1} &= D_{n1q} & y_{n1} &= 1 \\
x_{n\tau} &= 0 & y_{n\tau} &= 0 \text{ para } \tau = 2, \dots, q \\
x_{n\tau} &= D_{n\tau} & y_{n\tau} &= 1 \text{ para } \tau = q+1, \dots, t-1 \\
x_{nt} &= D_{ntT} & y_{nt} &= 1 \\
x_{n\tau} &= 0 & y_{n\tau} &= 0 \text{ para } \tau = t+1, \dots, T
\end{aligned}$$

e para $n = N-m+2, \dots, N$

$$\begin{aligned}
x_{n1} &= D_{n1q} & y_{n1} &= 1 \\
x_{n,q+1} &= D_{n,q+1,T} & y_{n,q+1} &= 1
\end{aligned}$$

$$x_{n\tau} = y_{n\tau} = 0 \quad \text{para } \tau \in \{2, \dots, T\} \setminus \{q+1\}$$

Para $m = 1, \dots, N$ e $t = q+2, \dots, T$ o ponto B_{mt} é especificado:

Para $n = 1, \dots, N-m+1$

$$x_{n1} = D_{n1q} \quad y_{n1} = 1$$

$$x_{n\tau} = 0 \quad y_{n\tau} = 0 \quad \text{para } \tau = 2, \dots, q$$

$$x_{n,q+1} = D_{n,q+1,T} \quad y_{n,q+1} = 1$$

$$x_{n\tau} = 0 \quad y_{n\tau} = \begin{cases} 1 & \text{se } \tau = t \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{para } \tau = q+2, \dots, T$$

Para $n = N-m+2, \dots, T$

$$x_{n1} = D_{n1q} \quad y_{n1} = 1$$

$$x_{n,q+1} = D_{n,q+1,T} \quad y_{n,q+1} = 1$$

$$x_{n\tau} = y_{n\tau} = 0 \quad \text{para } \tau \in \{2, \dots, T\} \setminus \{q+1\}$$

Para ajudar a entender os pontos acima, um exemplo usando $N=2$, $T=7$, $q=4$, e $S=\{1,2,3\}$ é dado no Apêndice C. É simples mostrar que os pontos no exemplo são afinamente independentes.

Os pontos acima serão usados na última parte desta prova onde é mostrado que eles são afinamente independentes.

Agora vamos especificar um grupo de $2N(q-k+1)$ pontos em $R1_i$ e depois mostrar que a união destes pontos e os $2N(T+k-q-3)+1$ pontos acima constituem um total de $2N(T-2)+1$ pontos afinamente independentes em $R1_i$, assim provando o teorema.

Seja $\tau \in \{k, \dots, q\}$. Então ou $\tau \in S$ (Caso 1) ou $\tau \in Q \setminus S$ (Caso 2). Para cada um dos dois casos vamos especificar $2N$ pontos linearmente independentes em $R1_i$.

Caso 1: $\tau \in S$. Seja $n \in \{1, \dots, 2N\}$. As coordenadas $\{x_{mt}, y_{mt} \mid m=1, \dots, N;$

$t = 1, \dots, T\}$ do ponto $x^{\tau n}$ são

Se $m \leq n/2$

$$x_{m1} = D_{m1, \tau-1}$$

$$y_{m1} = 1$$

$$x_{m\tau} = D_{m\tau q}$$

$$y_{m\tau} = 1$$

$$x_{m, q+1} = D_{m, q+1, T}$$

$$y_{m, q+1} = 1$$

$$x_{mt} = y_{mt} = 0 \quad \text{para } t \in \{2, \dots, T\} \setminus \{\tau, q+1\}$$

Se $m > n/2$

$$x_{m1} = D_{m1q}$$

$$y_{m1} = 1$$

$$x_{m\tau} = 0$$

$$y_{m\tau} = \begin{cases} 1 & \text{se } m = (n+1)/2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$x_{m, q+1} = D_{m, q+1, T}$$

$$y_{m, q+1} = 1$$

$$x_{mt} = y_{mt} = 0 \quad \text{para } t \in \{2, \dots, T\} \setminus \{\tau, q+1\}$$

Uma vez que $\{1, \tau\} \subseteq S \subset Q$ e $q+1 \notin Q$, podemos ver imediatamente que $x^{\tau n} \in R1_i$ para $n=1, \dots, 2N$.

Para mostrar que $\{x^{\tau n} | n=1, \dots, 2N\}$ são linearmente independentes, resolvemos a seguinte equação em a_n , $n=1, \dots, 2N$:

$$\sum_{n=1}^{2N} a_n x^{\tau n} = 0.$$

Para $m = 1, \dots, N$ o coeficiente de $x_{m\tau}$ nesta equação é

$$D_{m\tau q} \sum_{n=2m}^{2N} a_n$$

do qual deduzimos que $a_{2N} = 0$, $a_{2N-2} + a_{2N-1} = 0$, $a_{2N-4} + a_{2N-3} = 0$, $\dots$, $a_2 + a_3 = 0$. O coeficiente de $y_{m\tau}$ na equação é

$$\sum_{n=2m-1}^{2N} a_n = 0$$

do qual deduzimos que $a_{2N-1} = 0$, $a_{2N-2} = 0$, ..., $a_2 = 0$, $a_1 = 0$.
Portanto $\{x^{\tau n} | n=1, \dots, 2N\}$ são linearmente independentes.

Caso 2: $\tau \in Q \setminus S$. Duplas dos $2N$ pontos $\{x^{\tau n} | n=1, \dots, 2N\}$ serão associadas com os componentes $C \in \{1, \dots, N\}$ da seguinte maneira. Seja $n \in \{1, \dots, 2N\}$. Então o ponto $x^{\tau n}$ é associado com o componente $C = (n+1)/2$ se n for ímpar ou com o componente $C = n/2$ se n for par. As coordenadas $\{x_{mt}, y_{mt} | m=1, \dots, N; t=1, \dots, T\}$ do ponto $x^{\tau n}$ são:

Se n for ímpar, então $C = (n+1)/2$ e

se $C < i$ então

se $m < C$ então

$$x_{m1} = D_{m1, \tau-1}$$

$$y_{m1} = 1$$

$$x_{m\tau} = D_{m\tau q}$$

$$y_{m\tau} = 1$$

$$x_{m, q+1} = D_{m, q+1, T}$$

$$y_{m, q+1} = 1$$

$$x_{mt} = y_{mt} = 0$$

$$\text{para } t \in \{2, \dots, T\} \setminus \{\tau, q+1\}$$

se $m = C$ então

$$x_{m1} = D_{m1q}$$

$$y_{m1} = 1$$

$$\text{se } C = 1$$

$$x_{m1} = D_{m1q} - 0.5(r_{m\psi} D_{\psi\tau q})$$

$$y_{m1} = 1$$

$$\text{se } C \geq 2$$

$$x_{m\tau} = 0$$

$$y_{m\tau} = 1$$

$$\text{se } C = 1$$

$$x_{m\tau} = 0.5(r_{m\psi} D_{\psi\tau q})$$

$$y_{m\tau} = 1$$

$$\text{se } C \geq 2$$

$$x_{m,q+1} = D_{m,q+1,T}$$

$$y_{m,q+1} = 1$$

$$x_{mt} = y_{mt} = 0$$

$$\text{para } t \in \{2, \dots, T\} \setminus \{\tau, q+1\}$$

onde, para $C \geq 2$, ψ é qualquer componente em $S(m)$ e onde a fração 0.5 pode ter sido qualquer número real ρ tal que $0 < \rho < 1$.

se $m > C$ então

$$x_{m1} = D_{m1q}$$

$$y_{m1} = 1$$

$$x_{m\tau} = 0$$

$$y_{m\tau} = 0$$

$$x_{m,q+1} = D_{m,q+1,T}$$

$$y_{m,q+1} = 1$$

$$x_{mt} = y_{mt} = 0$$

$$\text{para } t \in \{2, \dots, T\} \setminus \{\tau, q+1\}$$

se $C \geq i$ então

se $m \leq C$ então

$$x_{m1} = D_{m1,\tau-1}$$

$$y_{m1} = 1$$

$$x_{m\tau} = D_{m\tau q}$$

$$y_{m\tau} = 1$$

$$x_{m,q+1} = D_{m,q+1,T}$$

$$y_{m,q+1} = 1$$

$$x_{mt} = y_{mt} = 0$$

$$\text{para } t \in \{2, \dots, T\} \setminus \{\tau, q+1\}$$

se $m > C$ então

$$x_{m1} = D_{m1q}$$

$$y_{m1} = 1$$

$$x_{m\tau} = 0$$

$$y_{m\tau} = 0$$

$$x_{m,q+1} = D_{m,q+1,T}$$

$$y_{m,q+1} = 1$$

$$x_{mt} = y_{mt} = 0$$

$$\text{para } t \in \{2, \dots, T\} \setminus \{\tau, q+1\}$$

Se n for par, então $C = n/2$ e

se $C < i$ então

se $m \leq C$ então

$$x_{m1} = D_{m1, \tau-1}$$

$$y_{m1} = 1$$

$$x_{m\tau} = D_{m\tau q}$$

$$y_{m\tau} = 1$$

$$x_{m, q+1} = D_{m, q+1, T}$$

$$y_{m, q+1} = 1$$

$$x_{mt} = y_{mt} = 0$$

$$\text{para } t \in \{2, \dots, T\} \setminus \{\tau, q+1\}$$

se $m > C$ então

$$x_{m1} = D_{m1q}$$

$$y_{m1} = 1$$

$$x_{m\tau} = 0$$

$$y_{m\tau} = 0$$

$$x_{m, q+1} = D_{m, q+1, T}$$

$$y_{m, q+1} = 1$$

$$x_{mt} = y_{mt} = 0$$

$$\text{para } t \in \{2, \dots, T\} \setminus \{\tau, q+1\}$$

se $C \geq i$ então

se $m \leq C$ então

$$x_{m1} = D_{m1, \tau-1}$$

$$y_{m1} = 1$$

$$x_{m\tau} = D_{m\tau T}$$

$$y_{m\tau} = 1$$

$$x_{mt} = y_{mt} = 0$$

$$\text{para } t \in \{2, \dots, T\} \setminus \{\tau\}$$

se $m > C$ então

$$x_{m1} = D_{m1T}$$

$$y_{m1} = 1$$

$$x_{mt} = y_{mt} = 0$$

$$\text{para } t \in \{2, \dots, T\}$$

Para ajudar a entender os pontos $\{x^{tn} | n=1, \dots, 2N\}$ acima, um exemplo que usa uma estrutura geral de produto com $N=6$ componentes é dado no Apêndice D. Lembre que uma solução de F_{xy}^{132} é factível se

$$\sum_{\tau=1}^t x_{i\tau} \geq \sum_{\tau=1}^t \sum_{j \in S(i)} r_{ij} x_{j\tau} + d_{ilt} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, N \\ t = 1, \dots, T \end{matrix}$$

Pode ser conferido que esta condição é atendida pelos pontos $\{x^{tn} | n=1, \dots, 2N\}$ acima (para *insight*, veja o exemplo no Apêndice D). Note que a definição de D_{it} quando $L(k)=0$ para $k \in \{1, \dots, N\}$:

$$D_{it} = d_{it} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} D_{jt}$$

implica que, dado um componente i e um período t , se $\sum_{\tau=1}^t x_{j\tau} \leq D_{j1t}$ para todos os componentes $j < i$ e algum $t \in \{t, \dots, T\}$, então a produção cumulativa $\sum_{\tau=1}^t x_{i\tau} = D_{i1t}$ é suficiente para satisfazer sua demanda independente cumulativa d_{i1t} e sua demanda dependente cumulativa $\sum_{\tau=1}^t \sum_{j \in S(i)} r_{ij} x_{j\tau}$. Esta observação é útil para conferir a factibilidade dos pontos no exemplo do Apêndice D. Além disso, deve ser conferido com cuidado a factibilidade de algumas coordenadas de certos pontos no exemplo, tal como a factibilidade das coordenadas

$$x_{31} = D_{31q} - 0.5r_{31}D_{1\tau q} \quad \text{e} \quad x_{3\tau} = 0.5r_{31}D_{1\tau q}$$

do ponto $x^{\tau 5}$ em relação às outras coordenadas deste ponto. Note que a produção da quantidade $0.5r_{31}D_{1\tau q}$ do componente 3 no período 1 não é necessária para a produção $x_{11} = D_{11, \tau-1}$ e $x_{21} = D_{21, \tau-1}$ dos componentes 1 e 2 no período 1.

Uma vez que $1 \in S \setminus Q$, $\tau \in Q \setminus S$, e $\{q+1\} \cap Q = \emptyset$, pode ser visto que

$x^{\tau n} \in R1_i$ para $n=1, \dots, 2N$. Veja também o exemplo no Apêndice D.

Seja $\tau \in Q \setminus S$. Para mostrar que $\{x^{\tau n} \mid n = 1, \dots, 2N\}$ são linearmente independentes, resolvemos a seguinte equação em a_n^τ , $n = 1, \dots, 2N$:

$$\sum_{n=1}^{2N} a_n^\tau x^{\tau n} = 0.$$

Examinando os coeficientes de $x_{m\tau}$ e $y_{m\tau}$ na sequência $m = N, N-1, \dots, 1$, pode-se ver que $a_n^\tau = 0$ para $n = 2N, 2N-1, 2N-2, \dots, 2, 1$. Considere, por exemplo, a estrutura geral com $N=6$ componentes do exemplo no Apêndice D. O coeficiente de $y_{6\tau}$ dá

$$a_{11}^\tau + a_{12}^\tau = 0$$

enquanto o coeficiente de $x_{6\tau}$ dá

$$a_{11}^\tau D_{6\tau q} + a_{12}^\tau D_{6\tau T} = 0$$

Portanto

$$(a_{11}^\tau + a_{12}^\tau) D_{6\tau q} + a_{12}^\tau D_{6, q+1, T} = 0$$

que, com $a_{11}^\tau + a_{12}^\tau = 0$, implica

$$a_{12}^\tau D_{6, q+1, T} = 0$$

Lembre de que na afirmação da Proposição é suposto que $d_{1t} > 0$ para $t = 1, \dots, T$, que implica $D_{6, q+1, T} > 0$. Portanto, $a_{12}^\tau = 0$ e, assim, $a_{11}^\tau = 0$. Um raciocínio semelhante com os coeficientes de $y_{5\tau}$ e $x_{5\tau}$ dá $a_9^\tau = a_{10}^\tau = 0$. O coeficiente de $y_{4\tau}$ resulta em

$$a_7^\tau + a_8^\tau = 0,$$

enquanto o coeficiente de $x_{4\tau}$ resulta em

$$a_7^\tau (0.5r_{42} D_{2\tau q}) + a_8^\tau D_{4\tau q} = 0$$

Portanto

$$(a_7^\tau + a_8^\tau)(0.5r_{42}D_{2\tau q}) + a_8^\tau(0.5r_{42}D_{2\tau q} + d_{4\tau q}) = 0$$

porque, por definição, temos $D_{4\tau q} = r_{42}D_{2\tau q} + d_{4\tau q}$. Assim, temos

$$a_8^\tau(0.5r_{42}D_{2\tau q} + d_{4\tau q}) = 0$$

Agora, $d_{1t} > 0$ para $t = 1, \dots, T$ implica que

$$0.5r_{42}D_{2\tau q} + d_{4\tau q} > 0$$

Assim, $a_8^\tau = 0$ e, portanto, $a_7^\tau = 0$. Um raciocínio semelhante resulta em $a_6^\tau = a_5^\tau = a_4^\tau = a_3^\tau = a_2^\tau = a_1^\tau = 0$. Desta maneira vemos que os pontos $\{x^{\tau n} | n=1, \dots, 2N\}$ são linearmente independentes quando $\tau \in (Q \setminus S) \setminus \{k\}$.

Assim, para cada $\tau \in \{k, \dots, q\}$ especificamos um grupo $\{x^{\tau n} | n = 1, \dots, 2N\}$ de $2N$ pontos linearmente independentes em $R1_i$.

Agora, mostramos que a união dos $2N(q-k+1)$ pontos acima:

$$x^{\tau n} \quad \text{para } n = 1, \dots, 2N \text{ e } \tau = k, \dots, q$$

e os $2N(T+k-q-3)+1$ pontos

$$\begin{array}{lll} A_{11}; & & \\ A_{mt} & m = 1, \dots, N & t = 2, \dots, k-1 \text{ e } q+2, \dots, T; \\ B_{mt} & m = 1, \dots, N & t = 2, \dots, k-1 \text{ e } q+2, \dots, T; \end{array}$$

da primeira parte da prova constituem um total de $2N(T-2)+1$ pontos afinamente independentes em $R1_i$, assim provando a Proposição. Para mostrar isto devemos demonstrar que

$$\begin{aligned} & \sum_{\tau=k}^q \sum_{n=1}^{2N} a_n^\tau x^{\tau n} + \lambda_{11} A_{11} + \sum_{m=1}^N \sum_{t=2}^{k-1} \lambda_{mt} A_{mt} \\ & + \sum_{m=1}^N \sum_{t=q+2}^T \lambda_{mt} A_{mt} + \sum_{m=1}^N \sum_{t=2}^{k-1} \mu_{mt} B_{mt} + \sum_{m=1}^N \sum_{t=q+2}^T \mu_{mt} B_{mt} = 0 \end{aligned}$$

e a précondição de independência afim

$$\sum_{\tau=k}^q \sum_{n=1}^{2N} a_n^\tau + \lambda_{11} + \sum_{m=1}^N \sum_{t=2}^{k-1} \lambda_{mt} + \sum_{m=1}^N \sum_{t=q+2}^T \lambda_{mt} \\ + \sum_{m=1}^N \sum_{t=2}^{k-1} \mu_{mt} + \sum_{m=1}^N \sum_{t=q+2}^T \mu_{mt} = 0$$

implica que $a_n^\tau = 0$ para $n \in \{1, \dots, 2N\}$ e $\tau \in \{k, \dots, q\}$, $\lambda_{11} = 0$, $\lambda_{mt} = \mu_{mt} = 0$ para $m \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{2, \dots, k-1\} \cup \{q+2, \dots, T\}$. Agora vamos demonstrar isto.

Seja $\tau \in \{k, \dots, q\}$. Note que para os pontos x^{tn} para $n \in \{1, \dots, 2N\}$ e $t \in \{k, \dots, q\} \setminus \{\tau\}$, A_{11} , A_{mt} e B_{mt} para $m \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{2, \dots, k-1\} \cup \{q+2, \dots, T\}$, temos $x_{m\tau} = y_{m\tau} = 0$ para $m \in \{1, \dots, N\}$. Assim, os coeficientes de $x_{m\tau}$ e $y_{m\tau}$ na primeira equação da dupla imediatamente acima contêm termos somente em a_n^τ para $n \in \{1, \dots, 2N\}$. Este fato implica $a_n^\tau = 0$ para $n \in \{1, \dots, 2N\}$, como vimos na demonstração da independência linear de $\{x^{tn} | n=1, \dots, 2N\}$ para $\tau \in S$ (Caso 1) ou $\tau \in Q \setminus S$ (Caso 2).

Note que a dupla de equações acima ficou agora

$$\lambda_{11} A_{11} + \sum_{m=1}^N \sum_{t=2}^{k-1} \lambda_{mt} A_{mt} \\ + \sum_{m=1}^N \sum_{t=q+2}^T \lambda_{mt} A_{mt} + \sum_{m=1}^N \sum_{t=2}^{k-1} \mu_{mt} B_{mt} + \sum_{m=1}^N \sum_{t=q+2}^T \mu_{mt} B_{mt} = 0 \\ \lambda_{11} + \sum_{m=1}^N \sum_{t=2}^{k-1} \lambda_{mt} + \sum_{m=1}^N \sum_{t=q+2}^T \lambda_{mt} + \sum_{m=1}^N \sum_{t=2}^{k-1} \mu_{mt} + \sum_{m=1}^N \sum_{t=q+2}^T \mu_{mt} = 0$$

Considere agora os coeficientes na primeira equação de $\{y_{m,t}, x_{m,t} | m=N, N-1, N-2, \dots, 1\}$ para $t = T, T-1, T-2, \dots, q+2$:

y_{NT} resulta em $\lambda_{1T} + \mu_{1T} = 0$ e x_{NT} resulta em $D_{NT} \lambda_{1T} = 0$ que implica que $\lambda_{1T} = \mu_{1T} = 0$.

$y_{N-1,T}$ resulta em $\lambda_{1T} + \lambda_{2T} + \mu_{1T} + \mu_{2T} = 0$ e $x_{N-1,T}$ resulta em $D_{N-1,T}\lambda_{1T} + D_{N-1,T}\lambda_{2T} = 0$ que implica que $\lambda_{2T} = \mu_{2T} = 0$.

.....

.....

$y_{N,T-1}$ resulta em $\lambda_{1T} + \lambda_{1,T-1} + \mu_{1,T-1} = 0$ e $x_{N,T-1}$ resulta em $D_{N,T-1}\lambda_{1T} + D_{N,T-1,T}\lambda_{1,T-1} = 0$ que implica que $\lambda_{1,T-1} = \mu_{1,T-1} = 0$.

.....

.....

Finalmente temos $\lambda_{mt} = \mu_{mt} = 0$ para $m \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{q+2, \dots, T\}$.

Como consequência a dupla de equações ficou agora

$$\lambda_{11}A_{11} + \sum_{m=1}^N \sum_{t=2}^{k-1} (\lambda_{mt}A_{mt} + \mu_{mt}B_{mt}) = 0$$

$$\lambda_{11} + \sum_{m=1}^N \sum_{t=2}^{k-1} (\lambda_{mt} + \mu_{mt}) = 0$$

Porém, os pontos A_{11} , A_{mt} e B_{mt} para $m \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{2, \dots, k-1\}$ correspondem aos pontos $\{G_n | n=1, \dots, 2N(k-2)+1\}$ que são afinamente independentes. Portanto $\lambda_{mt} = \mu_{mt} = 0$ para $m \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{2, \dots, k-1\}$. Esta conclusão também pode ser verificada resolvendo-se a dupla de equações acima, exatamente como na prova da Proposição 3.

Assim mostramos que $a_n^\tau = 0$ para $n \in \{1, \dots, 2N\}$ e $\tau \in \{k, \dots, q\}$, $\lambda_{11} = 0$, $\lambda_{mt} = \mu_{mt} = 0$ para $m \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{2, \dots, k-1\} \cup \{q+2, \dots, T\}$. Portanto provamos que a união dos $2N(q-k+1)$ pontos

$$x^{\tau n} \quad \text{para } n = 1, \dots, 2N \text{ e } \tau = k, \dots, q$$

e os $2N(T+k-q-3)+1$ pontos

$A_{11};$

$A_{mt} \quad m = 1, \dots, N \quad t = 2, \dots, k-1 \text{ e } q+2, \dots, T;$

$B_{mt} \quad m = 1, \dots, N \quad t = 2, \dots, k-1 \text{ e } q+2, \dots, T;$

constituem um total de $2N(T-2)+1$ pontos afinamente independentes em $R1_i$, assim provando a Proposição. ■

Assim, pelo menos sob certas condições, a desigualdade válida $V1_i$ define uma face de alta dimensão da envoltória convexa de F_{xy}^{134} . Este resultado mostra que $V1_i$ é uma desigualdade válida forte (*strong valid inequality*: Nemhauser e Wolsey, 1988) e possivelmente até uma faceta da envoltória convexa de F_{xy}^{134} .

e os $2N(T+k-q-3)+1$ pontos

$$\begin{array}{lll} A_{11}; & & \\ A_{mt} & m = 1, \dots, N & t = 2, \dots, k-1 \text{ e } q+2, \dots, T; \\ B_{mt} & m = 1, \dots, N & t = 2, \dots, k-1 \text{ e } q+2, \dots, T; \end{array}$$

constituem um total de $2N(T-2)+1$ pontos afinamente independentes em $R1_i$, assim provando a Proposição. ■

Assim, pelo menos sob certas condições, a desigualdade válida $V1_i$ define uma face de alta dimensão da envoltória convexa de F_{xy}^{134} . Este resultado mostra que $V1_i$ é uma desigualdade válida forte (*strong valid inequality*: Nemhauser e Wolsey, 1988) e possivelmente até uma faceta da envoltória convexa de F_{xy}^{134} .

Agora vamos considerar uma desigualdade inter-escalão:

Proposição 5. Qualquer uma das três formulações F_{xyI}^{134} , F_{xyE}^{134} e F_{xy}^{134} implica a desigualdade $V2_i$:

$$\begin{aligned} & \sum_{t \in Q} x_{i, T(i)+t} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \sum_{t \in Q \setminus S} D_{j, T(j)+t, T(j)+q} y_{j, T(j)+t} \\ & + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[\sum_{\substack{t \geq T(i)+L(i)+q+1 \\ t-T(j) \in S}} x_{jt} - \sum_{\substack{T(j)+1 \leq t \leq T(i)+L(i)+q \\ t-T(j) \notin S}} x_{jt} \right] \\ & \geq d_{i, T(i)+L(i)+1, T(i)+L(i)+q} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \sum_{t=T(i)+L(i)+1}^{T(j)} x_{jt} \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[D_{j, T(j)+1, T(j)+q} - E_{j, T(j)} \right] - I_{i, L(i)+T(i)} \quad (V2_i)$$

para $i \in \{1, \dots, N\}$, $1 \leq q \leq T$, $Q = \{1, \dots, q\}$, e $S \subseteq Q$.

Prova. A formulação F_{xy}^{134} com $I_{i, L(i)+T(i)+T} \geq 0$ para $i \in \{1, \dots, N\}$ é equivalente às formulações F_{xyI}^{134} e F_{xyE}^{134} . Considere as seguintes restrições inter-escalão desta formulação mais ampla de F_{xy}^{134} :

$$\sum_{\tau=T(k)+1}^t \left[x_{k\tau} - \sum_{j \in S(k)} r_{kj} x_{j, L(k)+\tau} \right] \geq d_{k, T(k)+L(k)+1, L(k)+t} - I_{k, L(k)+T(k)} \quad \begin{matrix} k = 1, \dots, N \\ t = T(k)+1, \dots, T(k)+T \end{matrix}$$

Denomine estas restrições por $\{C_{kt} | k=1, \dots, N; t=1, \dots, T\}$. Seja $i \in \{1, \dots, N\}$, $1 \leq q \leq T$, $Q = \{1, \dots, q\}$, e $S \subseteq Q$. Portanto, a restrição C_{iq} é

$$\sum_{t \in Q} \left[x_{i, T(i)+t} - \sum_{j \in S(i)} r_{ij} x_{j, T(i)+L(i)+t} \right] \geq d_{i, T(i)+L(i)+1, T(i)+L(i)+q} - I_{i, L(i)+T(i)}$$

Seja $j \in S(i)$. A desigualdade $V1_j$ é

$$\sum_{t \in S} x_{j, T(j)+t} + \sum_{t \in Q \setminus S} D_{j, T(j)+t, T(j)+q} y_{j, T(j)+t} \geq D_{j, T(j)+1, T(j)+q} - E_{j, T(j)}$$

A desigualdade $V2_1$ é derivada somando C_{iq} com $\sum_{j \in S(i)} r_{ij} (V1_j)$, que resulta em

$$\sum_{t \in Q} x_{i, T(i)+t} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[\sum_{t \in S} x_{j, T(j)+t} - \sum_{t \in Q} x_{j, T(i)+L(i)+t} \right]$$

$$+ \sum_{t \in Q \setminus S} D_{j, T(j)+t, T(j)+q} y_{j, T(j)+t} \Big]$$

$$\geq d_{i, T(i)+L(i)+1, T(i)+L(i)+q}$$

$$+ \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[D_{j, T(j)+1, T(j)+q} - E_{j, T(j)} \right] - I_{i, L(i)+T(i)}$$

i.e.,

$$\sum_{t \in Q} x_{i, T(i)+t} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \sum_{t \in Q \setminus S} D_{j, T(j)+t, T(j)+q} y_{j, T(j)+t}$$

$$+ \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[- \sum_{t=T(i)+L(i)+1}^{T(j)} x_{jt} - \sum_{\substack{T(j)+1 \leq t \leq T(i)+L(i)+q \\ t-T(j) \in S}} x_{jt} \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{t \geq T(i)+L(i)+q+1 \\ t-T(j) \in S}} x_{jt} \right] \geq d_{i, T(i)+L(i)+1, T(i)+L(i)+q}$$

$$+ \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[D_{j, T(j)+1, T(j)+q} - E_{j, T(j)} \right] - I_{i, L(i)+T(i)}$$

i.e., a desigualdade $V2_i$ é válida para a formulação F_{xyE}^{134} , e, portanto, para a formulação F_{xyI}^{134} .

Uma vez que a formulação F_{xy}^{134} é equivalente à formulação F_{xyI}^{134} com $I_{i, L(i)+T(i)+T} = 0$ para $i \in \{1, \dots, N\}$, é evidente que a desigualdade $V2_i$ também é válida para a formulação F_{xy}^{134} . ■

Proposição 6. Seja $L(k)=0$ para $k=1, \dots, N$. Qualquer uma das três formulações F_{xyI}^{132} , F_{xyE}^{132} e F_{xy}^{132} implica as seguintes equivalentes da desigualdade $V2_i$:

$$\sum_{t \in Q} x_{it} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \sum_{t \in Q \setminus S} (D_{j t q} y_{j t} - x_{j t}) \geq D_{i 1 q} - E_{i 0}$$

ou,

$$\sum_{j \in S(i)} r_{ij} \sum_{t \in Q \setminus S} (x_{j t} - D_{j t q} y_{j t}) \leq E_{i q}$$

onde $i \in \{1, \dots, N\}$, $1 \leq q \leq T$, $Q = \{1, \dots, q\}$, e $S \subseteq Q$.

Prova. Com $L(k)=0$ para $k=1, \dots, N$, a desigualdade $V2_i$:

$$\begin{aligned} & \sum_{t \in Q} x_{i, T(i)+t} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \sum_{t \in Q \setminus S} D_{j, T(j)+t, T(j)+q} y_{j, T(j)+t} \\ & + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[- \sum_{t=T(i)+L(i)+1}^{T(j)} x_{j t} - \sum_{\substack{T(j)+1 \leq t \leq T(i)+L(i)+q \\ t-T(j) \notin S}} x_{j t} \right. \\ & \left. + \sum_{\substack{t \geq T(i)+L(i)+q+1 \\ t-T(j) \in S}} x_{j t} \right] \geq d_{i, T(i)+L(i)+1, T(i)+L(i)+q} \\ & + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[D_{j, T(j)+1, T(j)+q} - E_{j, T(j)} \right] - I_{i, L(i)+T(i)} \end{aligned}$$

se reduz a

$$\begin{aligned} & \sum_{t \in Q} x_{it} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \sum_{t \in Q \setminus S} D_{j t q} y_{j t} \\ & + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[- \sum_{t=1}^0 x_{j t} - \sum_{\substack{1 \leq t \leq q \\ t \notin S}} x_{j t} + \sum_{\substack{t \geq q+1 \\ t \in S}} x_{j t} \right] \\ & \geq d_{i 1 q} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[D_{j 1 q} - E_{j 0} \right] - I_{i 0} \end{aligned}$$

que resulta em

$$\sum_{t \in Q} x_{it} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \sum_{t \in Q \setminus S} (D_{j t q} y_{j t} - x_{j t}) \geq D_{i 1 q} - E_{i 0}$$

uma vez que $S \subseteq Q = \{1, \dots, q\}$, $D_{i1q} = d_{i1q} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} D_{j1q}$, e

$$E_{i0} = I_{i0} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{j0}.$$

A desigualdade

$$\sum_{j \in S(i)} r_{ij} \sum_{t \in Q \setminus S} (x_{jt} - D_{j1q} y_{jt}) \leq E_{iq}$$

é obtida por substituir

$$E_{iq} = \sum_{t \in Q} x_{it} - D_{i1q} + E_{i0}$$

na desigualdade

$$\sum_{t \in Q} x_{it} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \sum_{t \in Q \setminus S} (D_{j1q} y_{jt} - x_{jt}) \geq D_{i1q} - E_{i0}$$

como na prova da Proposição 2 ■

Agora mostramos que, quando $L(k)=0$ e $I_{k0}=I_{kT}=0$ para $k=1, \dots, N$, e dependendo dos conjuntos Q e S , a desigualdade válida $V2_i$ define um face da alta dimensão da envoltória convexa de F_{xy}^{132} .

Seja $R2_i$ a região que é definida pela interseção da fronteira $V2_i$ quando $L(k)=0$ para $k=1, \dots, N$:

$$\sum_{t \in Q} x_{it} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \sum_{t \in Q \setminus S} (D_{j1q} y_{jt} - x_{jt}) = D_{i1q} - E_{i0}$$

com a envoltória convexa de F_{xy}^{132} .

Proposição 7. Seja $L(j)=0$ e $I_{j0}=I_{jT}=0$ para $j=1, \dots, N$, $d_{1t} > 0$ para $t = 1, \dots, T$, $2 \leq q \leq T-1$, $Q = \{1, \dots, q\}$, $S \subseteq Q$, $1 \in S$, $Q \setminus S \neq \emptyset$. Seja também

$i \in \{1, \dots, N\}$. Então

$$\max\{2N(T+k-q-3), 2N(q-k+1)\} \leq \dim(R2_i) \leq 2N(T-1)-1$$

onde $k = \min\{t \in Q \setminus S\}$.

Prova. A prova usa algumas das construções e ideias da prova da Proposição 4.

Uma vez que $R2_i$ é um subconjunto estrito de F_{xy}^{132} , temos $\dim(R2_i) < \dim(F_{xy}^{132})$. Já sabemos da Proposição 3 que $\dim(F_{xy}^{132}) = 2N(T-1)$. Portanto $\dim(R2_i) \leq 2N(T-1)-1$.

Provaremos que $\dim(R2_i) \geq 2N(T+k-q-3)$ através da demonstração da existência de $2N(T+k-q-3)+1$ pontos afinamente independentes em $R2_i$. Considere-se os $2N(T+k-q-3)+1$ pontos

$$A_{11};$$

$$A_{mt} \quad m = 1, \dots, N \quad t = 2, \dots, k-1 \text{ e } q+2, \dots, T;$$

$$B_{mt} \quad m = 1, \dots, N \quad t = 2, \dots, k-1 \text{ e } q+2, \dots, T;$$

da primeira parte da prova Proposição 4. Uma vez que $\{1, \dots, k-1\} \subseteq S$, $Q \setminus S \subseteq \{k, \dots, q\}$ e $\{q+1, \dots, T\} \cap Q = \emptyset$, temos, para cada um dos $2N(T+k-q-3)+1$ pontos, o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} & \sum_{t \in Q} x_{it} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \sum_{t \in Q \setminus S} (D_{j t q} y_{j t} - x_{j t}) \\ &= \sum_{t=1}^{k-1} x_{it} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \sum_{t \in Q \setminus S} (D_{j t q}(0) - 0) \\ &= D_{i1q} \end{aligned}$$

i.e., os $2N(T+k-q-3)+1$ pontos acima estão em $R2_i$ (além de estarem em $R1_i$). Para provar que eles são afinamente independentes, temos que mostrar que a dupla de equações

$$\lambda_{11} A_{11} + \sum_{m=1}^N \sum_{t=2}^{k-1} \lambda_{mt} A_{mt}$$

$$+ \sum_{m=1}^N \sum_{t=q+2}^T \lambda_{mt} A_{mt} + \sum_{m=1}^N \sum_{t=2}^{k-1} \mu_{mt} B_{mt} + \sum_{m=1}^N \sum_{t=q+2}^T \mu_{mt} B_{mt} = 0$$

$$\lambda_{11} + \sum_{m=1}^N \sum_{t=2}^{k-1} \lambda_{mt} + \sum_{m=1}^N \sum_{t=q+2}^T \lambda_{mt} + \sum_{m=1}^N \sum_{t=2}^{k-1} \mu_{mt} + \sum_{m=1}^N \sum_{t=q+2}^T \mu_{mt} = 0$$

implica $\lambda_{11} = 0$, $\lambda_{mt} = \mu_{mt} = 0$ para $m \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{2, \dots, k-1\} \cup \{q+2, \dots, T\}$. Porém, já mostramos isso no fim da prova da Proposição 4. Assim $\dim(R2_i) \geq 2N(T+k-q-3)$.

Provamos que $\dim(R2_i) \geq 2N(q-k+1)$ através da demonstração da existência de $2N(q-k+1)$ pontos linearmente independentes em $R2_i$. Seja $\tau \in \{k, \dots, q\}$. Então ou $\tau \in S$ (Caso 1) ou $\tau \in Q \setminus S$ (Caso 2). Para cada um dos dois casos vamos especificar $2N$ pontos linearmente independentes em $R2_i$.

Caso 1: $\tau \in S$. Especificamos os mesmos pontos $x^{\tau n}$ para $n = 1, \dots, 2N$ que no Caso 1 da prova da Proposição 4. Uma vez que $\{1, \tau\} \subseteq S \subset Q$ e $q+1 \notin Q$ no Caso 1 ($\tau \in S$), é simples ver que $x^{\tau n} \in R2_i$ para $n = 1, \dots, 2N$. Mostramos na prova da Proposição 4 que estes pontos são linearmente independentes.

Caso 2: $\tau \in Q \setminus S$. Exatamente como na prova da Proposição 4, duplas dos $2N$ pontos $\{x^{\tau n} | n=1, \dots, 2N\}$ serão associadas com os componentes $C \in \{1, \dots, N\}$ da seguinte maneira. Seja $n \in \{1, \dots, 2N\}$. Então o ponto $x^{\tau n}$ é associado com o componente $C = (n+1)/2$ se n for ímpar ou com componente $C = n/2$ se n for par. As coordenadas $\{x_{mt}, y_{mt} | m=1, \dots, N; t=1, \dots, T\}$ do ponto $x^{\tau n}$ são:

Se $m < i$ então

$$x_{i,q+1} = d_{i,q+1,T} \quad y_{i,q+1} = 1 \quad \text{se } C \geq i \text{ e } n \text{ for par}$$

.....

$$x_{it} = y_{it} = 0 \quad \text{para } t \in \{2, \dots, T\} \setminus \{\tau, q+1\}$$

Se $m > i$ e $m \leq C$ então

$$x_{m1} = D_{m1,\tau-1}$$

.....

$$x_{m\tau} = D_{m\tau q} \quad \text{se } n \text{ for impar}$$

$$x_{m\tau} = D_{m\tau T} \quad \text{se } n \text{ for par}$$

.....

$$x_{m,q+1} = D_{m,q+1,T} \quad y_{m,q+1} = 1 \quad \text{se } n \text{ for impar}$$

$$x_{m,q+1} = y_{m,q+1} = 0 \quad \text{se } n \text{ for par}$$

.....

$$x_{mt} = y_{mt} = 0 \quad \text{para } t \in \{2, \dots, T\} \setminus \{\tau, q+1\}$$

Se $m > i$ e $m > C$ então

$$x_{m1} = D_{m1T} \quad y_{m1} = 1$$

.....

$$x_{mt} = y_{mt} = 0 \quad \text{para } t = 2, \dots, T$$

Para ajudar a entender os pontos $\{x^{\tau n} | n=1, \dots, 2N\}$ acima, um exemplo que usa uma estrutura geral de produto com $N=8$ componentes é dado no Apêndice E. Como notado na prova da Proposição 4, lembre de que uma solução de F_{xy}^{132} é factível se

$$\sum_{\tau=1}^t x_{i\tau} \geq \sum_{\tau=1}^t \sum_{j \in S(i)} r_{ij} x_{j\tau} + d_{i1t} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, N \\ t = 1, \dots, T \end{array}$$

Pode ser conferido que esta condição é satisfeita pelos pontos $\{x^{tn} | n=1, \dots, 2N\}$ acima (para *insight*, veja o exemplo no Apêndice E). De novo, note que a definição de D_{it} quando $L(k)=0$ para $k \in \{1, \dots, N\}$:

$$D_{it} = d_{it} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} D_{jt}$$

implica que, dado um componente i e um período t , se $\sum_{\tau=1}^t x_{j\tau} \leq D_{j1t}$ para todos os componentes $j < i$ e algum $t \in \{t, \dots, T\}$, então a produção cumulativa $\sum_{\tau=1}^t x_{i\tau} = D_{i1t}$ é suficiente para satisfazer sua demanda independente cumulativa d_{i1t} e sua demanda dependente cumulativa $\sum_{\tau=1}^t \sum_{j \in S(i)} r_{ij} x_{j\tau}$. Esta observação é útil para conferir a factibilidade dos pontos no exemplo do Apêndice E. Além disso, de novo deve ser conferido com cuidado a factibilidade de algumas coordenadas de certos pontos no exemplo, tal como a factibilidade das coordenadas

$$x_{61} = D_{61q} + r_{63} D_{3,q+1,T} + r_{65} D_{5,q+1,T}$$

$$x_{6\tau} = 0$$

$$x_{6,q+1} = D_{61T} - x_{61}$$

do ponto $x^{\tau 3}$ em relação às outras coordenadas deste ponto. Note que a produção da quantidade

$$D_{61q} + r_{63} D_{3,q+1,T} + r_{65} D_{5,q+1,T}$$

do componente 6 no período 1 é suficiente para a produção $x_{31} = D_{31,\tau-1}$ e $x_{51} = D_{51,\tau-1}$ dos componentes 3 e 5 no período 1 e para a produção $x_{3\tau} = D_{3\tau T}$ e $x_{5\tau} = D_{5\tau T}$ dos componentes 3 e 5 no período τ .

Uma vez que $1 \in S \subset Q$, $\tau \in Q \setminus S$, e $\{q+1\} \cap Q = \emptyset$, pode ser visto que $x^{tn} \in R_{2,1}$ para $n=1, \dots, 2N$. Veja também o exemplo no Apêndice E.

Seja $\tau \in Q \setminus S$. Para mostrar que $\{x^{\tau n} \mid n = 1, \dots, 2N\}$ são linearmente independentes, resolvemos a seguinte equação em a_n^τ , $n = 1, \dots, 2N$:

$$\sum_{n=1}^{2N} a_n^\tau x^{\tau n} = 0.$$

Examinando os coeficientes de $x_{m\tau}$ e $y_{m\tau}$ na sequência $m = N, N-1, \dots, i$, pode-se ver que $a_n^\tau = 0$ para $n = 2N, 2N-1, 2N-2, \dots, 2i, 2i-1$ nesta sequência. Depois, examinando os coeficientes de $x_{m\tau}$, $y_{m\tau}$ e $y_{m,q+1}$ na sequência $m = i-1, i-2, \dots, 2, 1$ pode ser visto que $a_n^\tau = 0$ para $n = 2i-2, 2i-3, \dots, 2, 1$ nesta sequência. Desta maneira vemos que os pontos $\{x^{\tau n} \mid n=1, \dots, 2N\}$ são linearmente independentes quando $\tau \in Q \setminus S$.

Assim para cada $\tau \in \{k, \dots, q\}$ especificamos um grupo $\{x^{\tau n} \mid n = 1, \dots, 2N\}$ de $2N$ pontos linearmente independentes em $R_{2,i}$. Agora mostramos que os $2N(q-k+1)$ pontos $\{x^{\tau n} \mid n = 1, \dots, 2N; \tau=k, \dots, q\}$ são linearmente independentes demonstrando que

$$\sum_{\tau=k}^q \sum_{n=1}^{2N} a_n^\tau x^{\tau n} = 0$$

implica que $a_n^\tau = 0$ para $n \in \{1, \dots, 2N\}$ e $\tau \in \{k, \dots, q\}$.

Seja $\tau \in \{k, \dots, q\}$. Como na prova da Proposição 4 note que, para os pontos $x^{\tau n}$ para $n \in \{1, \dots, 2N\}$ e $t \in \{k, \dots, q\} \setminus \{\tau\}$, temos $x_{m\tau} = y_{m\tau} = 0$ para $m \in \{1, \dots, N\}$. Assim os coeficientes de $x_{m\tau}$ e $y_{m\tau}$ na equação contêm termos somente em a_n^τ para $n \in \{1, \dots, 2N\}$. Este fato implica $a_n^\tau = 0$ para $n \in \{1, \dots, 2N\}$, como vimos na demonstração da independência linear de $\{x^{\tau n} \mid n=1, \dots, 2N\}$ para $\tau \in S$ (Caso 1) ou $\tau \in Q \setminus S$ (Caso 2).

Assim $a_n^\tau = 0$ para $n \in \{1, \dots, 2N\}$ e $\tau \in \{k, \dots, q\}$. Mostramos que os $2N(q-k+1)$ pontos $\{x^{\tau n} \mid n = 1, \dots, 2N; \tau=k, \dots, q\}$ em $R_{2,i}$ são

linearmente independentes e portanto $\dim(R2_i) \geq 2N(q-k+1)$.

Assim $\max\{ 2N(T+k-q-3), 2N(q-k+1) \} \leq \dim(R2_i) \leq 2N(T-1)-1$. ■

Agora consideramos uma generalização da desigualdade válida $V2_i$:

$$\begin{aligned} & \sum_{t \in Q} x_{i, T(i)+t} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \sum_{t \in Q \setminus S_j} D_{j, T(j)+t, T(j)+q} y_{j, T(j)+t} \\ & + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[\sum_{\substack{t \geq T(i)+L(i)+q+1 \\ t-T(j) \in S_j}} x_{jt} - \sum_{\substack{T(j)+1 \leq t \leq T(i)+L(i)+q \\ t-T(j) \notin S_j}} x_{jt} \right] \\ & \geq d_{i, T(i)+L(i)+1, T(i)+L(i)+q} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \sum_{t=T(i)+L(i)+1}^{T(j)} x_{jt} \\ & + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} [D_{j, T(j)+1, T(j)+q} - E_{j, T(j)}] - I_{i, L(i)+T(i)} \quad (V3_i) \end{aligned}$$

onde $i \in \{1, \dots, N\}$, $1 \leq q \leq T$, $Q = \{1, \dots, q\}$, e $S_j \subseteq Q$ para cada $j \in S(i)$. Se $S(i)$ tiver um único elemento, como por exemplo no caso de uma estrutura de montagem, ou se S_j for o mesmo conjunto para todos $j \in S(i)$, então $V3_i$ se reduz a $V2_i$.

Quando $L(k)=0$ para $k=1, \dots, N$, $V3_i$ torna se

$$\sum_{t \in Q} x_{it} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \sum_{t \in Q \setminus S_j} (D_{j, tq} y_{jt} - x_{jt}) \geq D_{i, 1q} - E_{i0} \quad (V3_i)$$

que também pode ser escrita como:

$$\sum_{j \in S(i)} r_{ij} \sum_{t \in Q \setminus S_j} (x_{jt} - D_{j, tq} y_{jt}) \leq E_{iq} \quad (V3E_i)$$

Proposição 8. Qualquer uma das três formulações F_{xyI}^{134} , F_{xyE}^{134} e F_{xy}^{134} implica a desigualdade $V3_i$:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{t \in Q} x_{i,T(i)+t} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \sum_{t \in Q \setminus S_j} D_{j,T(j)+t,T(j)+q} y_{j,T(j)+t} \\
 & + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[\sum_{\substack{t \geq T(i)+L(i)+q+1 \\ t-T(j) \in S_j}} x_{jt} - \sum_{\substack{T(j)+1 \leq t \leq T(i)+L(i)+q \\ t-T(j) \in S_j}} x_{jt} \right] \\
 & \geq d_{i,T(i)+L(i)+1,T(i)+L(i)+q} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \sum_{t=T(i)+L(i)+1}^{T(j)} x_{jt} \\
 & + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} [D_{j,T(j)+1,T(j)+q} - E_{j,T(j)}] - I_{i,L(i)+T(i)} \quad (V3_i)
 \end{aligned}$$

onde $i \in \{1, \dots, N\}$, $1 \leq q \leq T$, $Q = \{1, \dots, q\}$, e $S_j \subseteq Q$ para cada $j \in S(i)$.

Prova. Como na prova da Proposição 5, a formulação F_{xy}^{134} com $I_{i,L(i)+T(i)+T} \geq 0$ para $i \in \{1, \dots, N\}$ é equivalente às formulações F_{xyI}^{134} e F_{xyE}^{134} . Considere as seguintes restrições inter-escalão desta formulação mais ampla de F_{xy}^{134} :

$$\begin{aligned}
 \sum_{\tau=T(k)+1}^t \left(x_{k\tau} - \sum_{j \in S(k)} r_{kj} x_{j,L(k)+\tau} \right) & \geq d_{k,T(k)+L(k)+1,L(k)+t} \\
 & - I_{k,L(k)+T(k)} \quad \begin{array}{l} k = 1, \dots, N \\ t = T(k)+1, \dots, T(k)+T \end{array}
 \end{aligned}$$

Denomine estas restrições por $\{C_{kt} | k=1, \dots, N; t=1, \dots, T\}$. Agora, para cada $j \in S(i)$ considere a desigualdade $V1_j$ com $S=S_j$. A desigualdade $V3_i$ é derivada somando C_{iq} com $\sum_{j \in S(i)} r_{ij} (V1_j)$.

A desigualdade $V3_i$ é válida para a formulação F_{xyE}^{134} , e, portanto, para a formulação F_{xyI}^{134} . Uma vez que a formulação F_{xy}^{134} é equivalente a formulação F_{xyI}^{134} com $I_{i,L(i)+T(i)+T} = 0$ para $i \in \{1, \dots, N\}$, é evidente que a desigualdade $V3_i$ também é válida para a formulação F_{xy}^{134} . ■

Proposição 9. Seja $L(k)=0$ para $k=1, \dots, N$. A formulação F_{xyE}^{132} implica a desigualdade

$$\sum_{t \in Q} x_{it} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \sum_{t \in Q \setminus S_j} (D_{jtg} y_{jt} - x_{jt}) \geq D_{i1q} - E_{i0}$$

que também pode ser escrita como:

$$\sum_{j \in S(i)} r_{ij} \sum_{t \in Q \setminus S_j} (x_{jt} - D_{jtg} y_{jt}) \leq E_{iq}$$

onde $i \in \{1, \dots, N\}$, $1 \leq q \leq T$, $Q = \{1, \dots, q\}$, e $S_j \subseteq Q$ para cada $j \in S(i)$.

Prova. A prova é semelhante à da Proposição 6. ■

Agora mostraremos que, quando $L(k)=0$ e $I_{k0} = I_{k,L(k)+T(k)+T} = 0$ para $k=1, \dots, N$, e dependendo dos conjuntos Q e S_j para $j \in S(i)$, a desigualdade válida $V3_i$ define uma face de alta dimensão da envoltória convexa de F_{xy}^{132} .

Seja $R3_i$ a região que é definida pela intersecção da fronteira $V3_i$ quando $L(k)=0$ para $k=1, \dots, N$:

$$\sum_{t \in Q} x_{it} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \sum_{t \in Q \setminus S_j} (D_{jtg} y_{jt} - x_{jt}) = D_{i1q}$$

com a envoltória convexa de F_{xy}^{132} .

Proposição 10. Seja $L(j)=0$ e $I_{j0} = I_{jT} = 0$ para $j = 1, \dots, N$, $d_{1t} > 0$ para $t = 1, \dots, T$, $2 \leq q \leq T-1$, $Q = \{1, \dots, q\}$ e $i \in \{1, \dots, N\}$. Para cada $j \in S(i)$ seja $S_j \subseteq Q$ tal que $1 \in S_j$ e $Q \setminus S_j \neq \emptyset$. Então $\max\{2N(T+k-q-3), 2N(q-k+1)\} \leq \dim(R3_i) \leq 2N(T-1)-1$ onde $k = \min_{j \in S(i)} \{\min\{t \in Q \setminus S_j\}\}$.

Prova. A prova é semelhante à da Proposição 7, com as seguintes diferenças:

Uma vez que $\{1, \dots, k-1\} \subseteq S_j$ e $Q \setminus S_j \subseteq \{k, \dots, q\}$ para cada $j \in S(i)$ e $\{q+1, \dots, T\} \cap Q = \emptyset$, então, para cada um dos $2N(T+k-q-3)+1$ pontos

$$A_{11};$$

$$A_{mt} \quad m = 1, \dots, N \quad t = 2, \dots, k-1 \text{ e } q+2, \dots, T;$$

$$B_{mt} \quad m = 1, \dots, N \quad t = 2, \dots, k-1 \text{ e } q+2, \dots, T;$$

da primeira parte da prova da Proposição 7, temos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \sum_{t \in Q} x_{it} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \sum_{t \in Q \setminus S_j} (D_{jtg} y_{jt} - x_{jt}) \\ = \sum_{t=1}^{k-1} x_{it} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \sum_{t \in Q \setminus S_j} (D_{jtg}(0) - 0) \\ = D_{i1q} \end{aligned}$$

i.e., os $2N(T+k-q-3)+1$ pontos acima estão em $R3_i$ (além de estarem em $R1_i$ e $R2_i$).

Na segunda parte da prova, para cada $t \in \{k, \dots, q\}$, em lugar de simplesmente Caso 1 ou Caso 2, temos agora três casos. Para cada um destes casos especificamos $2N$ pontos linearmente independentes $\{x^{tn} | n=1, \dots, 2N\}$ como se segue:

Seja $\tau \in \{k, \dots, q\}$.

Caso 1: Se $\tau \in S_j$ para cada $j \in S(i)$, então especificamos o mesmo conjunto de $2N$ pontos linearmente independentes $\{x^{tn} | n=1, \dots, 2N\}$ como no Caso 1 ($\tau \in S$) da prova da Proposição 7.

Caso 2: Se $\tau \in Q \setminus S_j$ para cada $j \in S(i)$, então especificamos o mesmo conjunto de $2N$ pontos linearmente independentes $\{x^{tn} | n=1, \dots, 2N\}$ como no Caso 2 ($\tau \in Q \setminus S$) da prova da Proposição 7.

Caso 3: Se $\tau \in S_j$ para $j \in S(i) \cap A$, e $\tau \in Q \setminus S_j$ para $j \in S(i) \cap B$, onde $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $A \cup B = S(i)$ e $A \cap B = \emptyset$, então consideramos a estrutura de produto em questão, mas modificada da seguinte maneira: $S(i)$ é substituído por $S(i) \cap B$. Depois especificamos o mesmo conjunto de $2N$ pontos linearmente independentes $\{x^{tn} | n=1, \dots, 2N\}$ do Caso 2 ($\tau \in Q \setminus S$) da prova da Proposição 7, mas para o caso da estrutura modificada. Como antes, pode ser conferido que tais pontos estão na região factível de F_{xy}^{132} . Também,

$$\begin{aligned} D_{ilq} &= \sum_{t \in Q} x_{it} + \sum_{j \in S(i) \cap B} r_{ij} \sum_{t \in Q \setminus S_j} (D_{jtq} y_{jt} - x_{jt}) \\ &= \sum_{t \in Q} x_{it} + \sum_{j \in S(i) \cap A} r_{ij} (0) + \sum_{j \in S(i) \cap B} r_{ij} \sum_{t \in Q \setminus S_j} (D_{jtq} y_{jt} - x_{jt}) \\ &= \sum_{t \in Q} x_{it} + \sum_{j \in S(i) \cap A} r_{ij} \sum_{t \in Q \setminus S_j} (D_{jtq} y_{jt} - x_{jt}) \\ &\quad + \sum_{j \in S(i) \cap B} r_{ij} \sum_{t \in Q \setminus S_j} (D_{jtq} y_{jt} - x_{jt}) \end{aligned}$$

porque $1 \in S_j$, e $\tau \in Q \setminus S_j$ para $j \in S(i) \cap A$

$$= \sum_{t \in Q} x_{it} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \sum_{t \in Q \setminus S_j} (D_{jtg} y_{jt} - x_{jt})$$

porque $t \in S_j$ para $j \in S(i) \cap A$ e $t \in Q \setminus S_j$ para $j \in S(i) \cap B$

Portanto, os pontos do Caso 3 satisfazem

$$\sum_{t \in Q} x_{it} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \sum_{t \in Q \setminus S_j} (D_{jtg} y_{jt} - x_{jt}) = D_{i1g}$$

e estão em $R3_i$.

As outras partes da prova são exatamente como na prova da Proposição 7. ■

Nesta seção identificamos algumas faces de alta dimensão da envoltória convexa do problema multi-estágio de dimensionamento de lotes com tempo zero de produção. Na próxima seção desenvolveremos um algoritmo de Branch-and-Bound (B&B) que aproveita as faces, generalizadas para tempo não zero de produção, como cortes do problema relaxado.

2.3 Um Algoritmo de Cortes Fortes

Na seção 2.2 identificamos faces de alta dimensão da envoltória convexa do problema multi-estágio de dimensionamento de lotes com tempo zero de produção e capacidade infinita de produção. Na seção atual, desenvolveremos um algoritmo de Branch-and-Bound (B&B) que aproveita estas faces, generalizadas para tempo não zero de produção, como cortes do problema relaxado.

Trataremos da formulação F_{xyI}^{134} , i.e. com estrutura geral de produto, tempo não-zero de produção de componentes e capacidade infinita de produção:

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} \left[s_{it} y_{it} + c_{it} x_{it} + h_{i,L(i)+t} I_{i,L(i)+t} \right] \quad (F_{xyI}^{134})$$

tal que

$$I_{1,L(1)+t-1} + x_{1t} - I_{1,L(1)+t} = d_{1,L(1)+t} \quad \text{para } t = T(1)+1, \dots, T(1)+T$$

$$I_{i,L(i)+t-1} + x_{it} - I_{i,L(i)+t} - \sum_{j \in S(i)} r_{ij} x_{j,L(i)+t} = d_{i,L(i)+t} \quad \text{para } i = 2, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T$$

$$x_{it} \leq M_{it} y_{it} \quad \text{para } i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T$$

$$x_{it} \geq 0; \quad I_{i,L(i)+t} \geq 0; \quad \text{para } i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T$$

$$y_{it} = 0 \text{ ou } 1; \quad \text{para } i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T$$

A relaxação de Programação Linear de F_{xyI}^{134} no nó raiz da árvore B&B é

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} \left[s_{it} y_{it} + c_{it} x_{it} + h_{i,L(i)+t} I_{i,L(i)+t} \right] \quad PL(F_{xyI}^{134})$$

tal que

$$I_{1,L(1)+t-1} + x_{1t} - I_{1,L(1)+t} = d_{1,L(1)+t} \quad \text{para } t = T(1)+1, \dots, T(1)+T$$

$$I_{i,L(i)+t-1} + x_{it} - I_{i,L(i)+t} - \sum_{j \in S(i)} r_{ij} x_{j,L(i)+t} = d_{i,L(i)+t} \quad \begin{array}{l} \text{para } i = 2, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{array}$$

$$x_{it} \leq M_{it} y_{it} \quad \text{para } i = 1, \dots, N, t = T(i)+1, \dots, T(i)+T$$

$$x_{it} \geq 0; \quad I_{i,L(i)+t} \geq 0; \quad \text{para } i = 1, \dots, N, t = T(i)+1, \dots, T(i)+T$$

$$0 \leq y_{it} \leq 1; \quad \text{para } i = 1, \dots, N, t = T(i)+1, \dots, T(i)+T$$

Se, ao resolver $PL(F_{xyI}^{134})$, tivermos uma solução ótima inteira (i.e., tal que $y_{it} \in \{0,1\}$ para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{T(i)+1, \dots, T(i)+T\}$), então esta solução é também uma solução ótima de F_{xyI}^{134} .

Porém, ao resolver $PL(F_{xyI}^{134})$, é mais provável que não tenhamos uma solução ótima inteira. Neste caso, devemos seguir os passos do seguinte algoritmo:

1. Seja $n=1$. Seja $PL^n(F_{xyI}^{134}) = PL(F_{xyI}^{134})$. Estabeleça o valor de M , o número máximo de iterações deste algoritmo.
2. Resolve-se $PL^n(F_{xyI}^{134})$. Se tivermos uma solução ótima inteira,

então esta solução é também uma solução ótima de F_{xyI}^{134} e podemos parar. Senão, siga para o passo 3.

3. Se $n < M$, siga para o passo 4; senão siga para o passo 5.
4. Identifique um corte do tipo $V1_i$, $V2_i$ ou $V3_i$ que exclui a solução ótima encontrada para $PL^n(F_{xyI}^{134})$, e adicione o corte a $PL^n(F_{xyI}^{134})$ para formar o Programa Linear $PL^{n+1}(F_{xyI}^{134})$. Se não for possível identificar um tal corte, siga para o passo 5; se for possível, seja $n=n+1$ e siga para o passo 2.
5. Comece a busca Branch-and-Bound.

Quando $M=\infty$, os passos 1 até 5 descrevem um algoritmo do tipo *Strong Cutting Plane* [Van Roy e Wolsey, 1987; Nemhauser e Wolsey, 1988]. No passo 4 precisamos de um "algoritmo de separação" (*separation algorithm*) para identificar um corte do tipo $V1_i$, $V2_i$ ou $V3_i$ que exclui a solução ótima encontrada para $PL^n(F_{xyI}^{134})$. O corte ideal seria aquele que maximiza o valor da solução ótima de $PL^{n+1}(F_{xyI}^{134})$, mas não é possível saber qual corte é o ideal sem resolver muitos programas lineares do tipo $PL^{n+1}(F_{xyI}^{134})$. Podemos pensar em escolher o corte do tipo $V1_i$, $V2_i$ ou $V3_i$ que fica mais distante no espaço euclidiano da solução ótima encontrada para $PL^n(F_{xyI}^{134})$, mas um algoritmo de separação que procura fazer isto provavelmente teria que passar por todos os cortes possíveis do tipo $V1_i$, $V2_i$ ou $V3_i$ e não seria rápido. Um algoritmo de separação mais eficiente resulta se decidirmos escolher, como em Van Roy e Wolsey (1986, 1987), o corte que tem a maior diferença (na direção apropriada) entre o lado direito constante da equação do corte e o lado esquerdo avaliado na solução ótima encontrada para $PL^n(F_{xyI}^{134})$.

O algoritmo resultante é desenvolvido a seguir:

Fixe i e considere as desigualdades válidas do tipo $V1_i$:

$$\sum_{t \in S} x_{it} + \sum_{t \in Q \setminus S} D_{itq} y_{it} \geq D_{i,T(i)+1,q} - E_{i,T(i)} \quad (V1_i)$$

para $T(i)+2 \leq q \leq T(i)+T-1$, $Q = \{T(i)+1, \dots, q\}$, $S \subseteq Q$, $T(i)+1 \in S$ e $Q \setminus S \neq \emptyset$.

Estas desigualdades podem ser reescritas:

$$\begin{aligned} \sum_{t \in S} x_{i,T(i)+t} + \sum_{t \in Q \setminus S} D_{i,T(i)+t,T(i)+q} y_{i,T(i)+t} \\ \geq D_{i,T(i)+1,T(i)+q} - E_{i,T(i)} \end{aligned}$$

para $2 \leq q \leq T-1$, $Q = \{1, \dots, q\}$, $S \subseteq Q$, $1 \in S$ e $Q \setminus S \neq \emptyset$. Queremos identificar os conjuntos Q e S que minimizam

$$\begin{aligned} \sum_{t \in S} x_{i,T(i)+t}^* + \sum_{t \in Q \setminus S} D_{i,T(i)+t,T(i)+q} y_{i,T(i)+t}^* \\ - D_{i,T(i)+1,T(i)+q} + E_{i,T(i)} \end{aligned}$$

onde $x_{i,T(i)+t}^*$ e $y_{i,T(i)+t}^*$ pertencem à solução ótima (x^*, y^*, I^*) encontrada para $PL^n(F_{xyI}^{134})$. Se fixarmos q em um de seus $T-2$ valores possíveis, resta somente identificar o conjunto S .

$V1_i$ pode ser re-escrito como:

$$\begin{aligned} \sum_{t \in S} x_{i,T(i)+t} + \sum_{t \in Q} D_{i,T(i)+t,T(i)+q} y_{i,T(i)+t} \\ - \sum_{t \in S} D_{i,T(i)+t,T(i)+q} y_{it} - D_{i,T(i)+1,T(i)+q} + E_{i,T(i)} \geq 0 \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} \sum_{t \in S} (x_{i,T(i)+t} - D_{i,T(i)+t,T(i)+q} y_{it}) + \sum_{t \in Q} D_{i,T(i)+t,T(i)+q} y_{it} \\ - D_{i,T(i)+1,T(i)+q} + E_{i,T(i)} \geq 0 \end{aligned}$$

Para uma dada solução ótima (x^*, y^*, I^*) e um Q fixo, defina, para $t \in Q$,

$$\alpha_t^Q = 1 \text{ se } t \in S \text{ e } 0 \text{ se } t \in Q \setminus S. \quad (\text{uma variável})$$

$$\pi_t^Q = x_{i, T(i)+t}^* - D_{i, T(i)+t, T(i)+q} y_{i, T(i)+t}^* \quad (\text{uma constante})$$

$$D^Q = \sum_{t \in Q} D_{i, T(i)+t, T(i)+q} y_{i, T(i)+t}^* - D_{i, T(i)+1, T(i)+q} + E_{i, T(i)} + \pi_1^Q \quad (\text{uma constante})$$

Uma vez que $1 \in S$, sabemos que $\alpha_1^Q = 1$ (e é por causa disso que incorporamos π_1^Q em D^Q). Precisamos que $Q \setminus S \neq \emptyset$. Portanto, devemos impor a restrição:

$$\sum_{t=2}^q \alpha_t^Q \leq q-2$$

para forçar que pelo menos um dos $\alpha_2^Q, \dots, \alpha_q^Q$ seja zero. Assim, devemos resolver o seguinte problema de minimização

$$Z_1(i, q) = \min \sum_{t=2}^q \alpha_t^Q \pi_t^Q \quad (+ \text{ a constante } D^Q)$$

tal que

$$\sum_{t=2}^q \alpha_t^Q \leq q-2$$

$$\alpha_t^Q = 0/1 \quad t = 2, \dots, q.$$

Este problema pode ser resolvido rapidamente por inspeção dos sinais dos π_t^Q para $t \in \{2, \dots, q\}$. Se $\pi_t^Q \geq 0$ então seja $\alpha_t^Q = 0$, senão seja $\alpha_t^Q = 1$. Porém, se $\pi_t^Q < 0$ para todo $t \in \{2, \dots, q\}$, então seja

$\alpha_{\tau}^Q = 0$ e $\alpha_t^Q = 1$ para $t \in \{2, \dots, q\} \setminus \{\tau\}$ onde $\tau = \arg \max\{\pi_t^Q | t=2, \dots, q\}$.

O problema acima é resolvido para cada dupla (i, q) no conjunto $\{(i, q) | i=1, \dots, N, 2 \leq q \leq T-1\}$. Depois, escolhemos a tripla (i, Q, S) , e sua correspondente desigualdade do tipo $V1_i$, que fornece a solução a $\min\{Z_1(i, q) | i=1, \dots, N, 2 \leq q \leq T-1\}$. O algoritmo de separação resulta em $\min\{Z_1(i, q) | i=1, \dots, N, 2 \leq q \leq T-1\} \geq 0$ se e somente se não existir uma desigualdade do tipo $V1_i$ que corte (i.e., exclui) a solução ótima encontrada para $PL^n(F_{xyI}^{134})$. Portanto, se cortes do tipo $V1_i$ existirem, o algoritmo de separação sinalizará isso através de uma solução $\min\{Z_1(i, q) | i=1, \dots, N, 2 \leq q \leq T-1\} < 0$ e identificará um dos cortes.

Esperamos que um corte do tipo $V1_i$ fornecido pelo algoritmo de separação resulte num valor da solução ótima de $PL^{n+1}(F_{xyI}^{134})$ que esteja perto da solução ótima inteira. O algoritmo de separação é incorporado ao passo 4 do algoritmo principal.

Novamente fixe i e considere agora as desigualdades do tipo $V2_i$:

$$\begin{aligned} & \sum_{t \in Q} x_{i, T(i)+t} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \sum_{t \in Q \setminus S} D_{j, T(j)+t, T(j)+q} y_{j, T(j)+t} \\ & + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[\sum_{\substack{t \geq T(i)+L(i)+q+1 \\ t-T(j) \in S}} x_{jt} - \sum_{\substack{T(j)+1 \leq t \leq T(i)+L(i)+q \\ t-T(j) \notin S}} x_{jt} \right] \\ & \geq d_{i, T(i)+L(i)+1, T(i)+L(i)+q} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \sum_{t=T(i)+L(i)+1}^{T(j)} x_{jt} \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[D_{j, T(j)+1, T(j)+q} - E_{j, T(j)} \right] - I_{i, L(i)+T(i)} \quad (V2_i)$$

para $2 \leq q \leq T-1$, $Q = \{1, \dots, q\}$, $S \subseteq Q$, $1 \in S$ e $Q \setminus S \neq \emptyset$. Fixando Q , a desigualdade $V2_i$ pode ser re-escrita

$$\begin{aligned} & \sum_{t \in Q} \left[x_{i, T(i)+t} \right. \\ & + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[D_{j, T(j)+t, T(j)+q} y_{j, T(j)+t} - x_{j, T(i)+L(i)+t} \right] \\ & + \sum_{t \in S} \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[x_{j, T(j)+t} - D_{j, T(j)+t, T(j)+q} y_{j, T(j)+t} \right] \\ & - d_{i, T(i)+L(i)+1, T(i)+L(i)+q} + I_{i, L(i)+T(i)} \\ & \left. - \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[D_{j, T(j)+1, T(j)+q} - E_{j, T(j)} \right] \right] \geq 0 \end{aligned}$$

Para uma dada solução ótima (x^*, y^*, I^*) e um Q fixo, defina, para $t \in Q$,

$$\alpha_t^Q = 1 \text{ se } t \in S \text{ e } 0 \text{ se } t \in Q \setminus S. \quad (\text{uma variável})$$

$$\pi_t^Q = \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[x_{j, T(j)+t}^* - D_{j, T(j)+t, T(j)+q} y_{j, T(j)+t}^* \right] \quad (\text{uma constante})$$

$$\begin{aligned} D^Q &= I_{i, L(i)+T(i)} - d_{i, T(i)+L(i)+1, T(i)+L(i)+q} \\ & - \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[D_{j, T(j)+1, T(j)+q} - E_{j, T(j)} \right] + \sum_{t \in Q} \left[x_{i, T(i)+t}^* \right. \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[D_{j, T(j)+t, T(j)+q} y_{j, T(j)+t}^* - x_{j, T(i)+L(i)+t}^* \right]]$$

(uma constante)

Assim, temos o seguinte problema de minimização

$$Z_2(i, q) = \min \sum_{t=2}^q \alpha_t^Q \pi_t^Q \quad (+ \text{ a constante } D^Q)$$

tal que

$$\sum_{t=2}^q \alpha_t^Q \leq q-2$$

$$\alpha_t^Q = 0/1 \quad \text{para } t = 2, \dots, q.$$

Aqui também, note que o algoritmo de separação resulta em $\min\{Z_2(i, q) | i = 1, \dots, N, 2 \leq q \leq T-1\} \geq 0$ se e somente se não existir um desigualdade do tipo $V2_i$ que corte a solução ótima encontrada para $PL^n(F_{xyI}^{134})$.

De novo, fixe i e considere agora as desigualdades do tipo $V3_i$:

$$\begin{aligned} & \sum_{t \in Q} x_{i, T(i)+t} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \sum_{t \in Q \setminus S_j} D_{j, T(j)+t, T(j)+q} y_{j, T(j)+t} \\ & + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[\sum_{\substack{t \geq T(i)+L(i)+q+1 \\ t-T(j) \in S_j}} x_{jt} - \sum_{\substack{T(j)+1 \leq t \leq T(i)+L(i)+q \\ t-T(j) \notin S_j}} x_{jt} \right] \\ & \geq d_{i, T(i)+L(i)+1, T(i)+L(i)+q} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \sum_{t=T(i)+L(i)+1}^{T(j)} x_{jt} \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[D_{j, T(j)+1, T(j)+q} - E_{j, T(j)} \right] - I_{i, L(i)+T(i)} \quad (V3_i)$$

para $2 \leq q \leq T-1$, $Q = \{1, \dots, q\}$, onde $S_j \subseteq Q$, $1 \in S_j$ e $Q \setminus S_j \neq \emptyset$. De novo, fixando Q , a desigualdade $V3_i$ pode ser re-escrita

$$\begin{aligned} & \sum_{t \in Q} \left[x_{i, T(i)+t} \right. \\ & + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[D_{j, T(j)+t, T(j)+q} y_{j, T(j)+t} - x_{j, T(i)+L(i)+t} \right] \\ & + \sum_{t \in S_j} \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[x_{j, T(j)+t} - D_{j, T(j)+t, T(j)+q} y_{j, T(j)+t} \right] \\ & - d_{i, T(i)+L(i)+1, T(i)+L(i)+q} + I_{i, L(i)+T(i)} \\ & - \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[D_{j, T(j)+1, T(j)+q} - E_{j, T(j)} \right] \geq 0 \end{aligned}$$

Para uma dada solução ótima (x^*, y^*, I^*) e um Q fixo, defina, para $t \in Q$ e $j \in S(i)$

$$\alpha_{jt}^Q = 1 \text{ se } t \in S_j \text{ e } 0 \text{ se } t \in Q \setminus S_j. \quad (\text{uma variável})$$

$$\pi_{jt}^Q = r_{ij} \left[x_{j, T(j)+t}^* - D_{j, T(j)+t, T(j)+q} y_{j, T(j)+t}^* \right] \quad (\text{uma constante})$$

$$D^Q = I_{i, L(i)+T(i)} - d_{i, T(i)+L(i)+1, T(i)+L(i)+q}$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[D_{j, T(j)+1, T(j)+q} - E_{j, T(j)} \right] + \sum_{t \in Q} \left[x_{i, T(i)+t}^* \right. \\ & + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[D_{j, T(j)+t, T(j)+q} y_{j, T(j)+t}^* - x_{j, T(i)+L(i)+t}^* \right] \quad (\text{uma constante}) \end{aligned}$$

Assim temos o seguinte problema de minimização

$$Z_3(i,q) = \min \sum_{j \in S(i)} \sum_{t=2}^q \alpha_{jt}^Q \pi_{jt}^Q \quad (+ \text{ a constante } D^Q)$$

tal que

$$\sum_{t=2}^q \alpha_{jt}^Q \leq q-2 \quad \text{para } j \in S(i)$$

$$\alpha_{jt}^Q = 0/1 \quad \text{para } j \in S(i) \text{ e } t = 2, \dots, q.$$

que se decompõe em $|S(i)|$ problemas (um para cada j em $S(i)$) do tipo que temos para a desigualdade $V2_i$ acima.

Uma vez que uma desigualdade do tipo $V2_i$ é um caso especial de uma desigualdade do tipo $V3_i$, no passo 4 executamos os algoritmos de separação somente para as desigualdades do tipo $V1_i$ ou do tipo $V3_i$.

Uma possível modificação nos algoritmos de separação acima é escolher a tripla (i, Q, S) , e sua desigualdade correspondente do tipo $V1_i$ ou $V3_i$, que fornece a solução de

$$\min \{ Z_k(i,q) / D_{i, T(i)+1, T(i)+q} \mid k=1,3; i=1, \dots, N; 2 \leq q \leq T-1 \}.$$

O efeito desta modificação para desigualdades do tipo $V1_i$ seria a escolha do componente i e dos conjuntos Q e S que minimizam

$$\left(\sum_{t \in S} x_{i, T(i)+t}^* + \sum_{t \in Q \setminus S} D_{i, T(i)+t, T(i)+q} y_{i, T(i)+t}^* - D_{i, T(i)+1, T(i)+q} \right) / D_{i, T(i)+1, T(i)+q}.$$

O efeito da modificação para desigualdades do tipo $V3_i$ seria a escolha do componente i e dos conjuntos Q e $S_j \mid j \in S(i)$ que minimizam

$$\left[\sum_{t \in Q} x_{i,T(i)+t}^* + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \sum_{t \in Q \setminus S_j} \left[D_{j,T(i)+t,T(i)+q} y_{j,T(i)+t}^* - x_{j,T(i)+t}^* \right] - D_{i,T(i)+1,T(i)+q} \right] / D_{i,T(i)+1,T(i)+q}.$$

O raciocínio atrás deste critério é que a definição de D_{it} :

$$D_{it} = d_{i,t+L(i)} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} D_{j,t+L(i)},$$

a definição de E_{it} :

$$E_{it} = I_{i,t+L(i)} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{j,t+L(i)}$$

e as restrições dinâmicas da formulação F_{xyE}^{134} :

$$E_{i,t-1} + x_{it} - E_{it} = D_{it} \quad \begin{matrix} i=1, \dots, N \\ t=T(i)+1, \dots, T(i)+T' \end{matrix}$$

mostram que x_{it} , E_{it} , D_{it} , e D_{jt} para $j \in S(i)$ tendem ser maiores para valores maiores de $i \in \{1, \dots, N\}$. Assim, as diferenças entre o lado direito e o lado esquerdo das equações das desigualdades:

$$\begin{aligned} & \sum_{t \in S} x_{i,T(i)+t} + \sum_{t \in Q \setminus S} D_{i,T(i)+t,T(i)+q} y_{i,T(i)+t} \\ & \geq D_{i,T(i)+1,T(i)+q} - E_{i,T(i)} \end{aligned} \quad (V1_i)$$

e

$$\begin{aligned} & \sum_{t \in Q} x_{i,T(i)+t} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \sum_{t \in Q \setminus S_j} D_{j,T(j)+t,T(j)+q} y_{j,T(j)+t} \\ & + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[\sum_{\substack{t \geq T(i)+L(i)+q+1 \\ t-T(j) \in S_j}} x_{jt} - \sum_{\substack{T(j)+1 \leq t \leq T(i)+L(i)+q \\ t-T(j) \notin S_j}} x_{jt} \right] \end{aligned}$$

$$\geq d_{i,T(i)+L(i)+1,T(i)+L(i)+q} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \sum_{t=T(i)+L(i)+1}^{T(j)} x_{jt} \\ + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} [D_{j,T(j)+1,T(j)+q} - E_{j,T(j)}] - I_{i,1(i)+T(i)} \quad (V3_i)$$

tenderão ser maiores para valores maiores de $i \in \{1, \dots, N\}$, sendo da mesma ordem que $D_{i,T(i)+1,T(i)+q}$. Se dividirmos as equações por $D_{i,T(i)+1,T(i)+q}$, então as diferenças entre os dois lados tenderão ser de uma ordem semelhante para todos os $i \in \{1, \dots, N\}$. Senão, os algoritmos de separação tenderão escolher desigualdades com valores maiores de $i \in \{1, \dots, N\}$.

A divisão por $D_{i,T(i)+1,T(i)+q}$ é uma tentativa de escalar as equações das desigualdades. Tal escalamento é obviamente muito grosseiro, mas tem a vantagem de nos deixar ainda usar os rápidos algoritmos de separação desenvolvidos acima. A modificação foi adotada, uma vez que experimentos computacionais iniciais mostraram que ela é eficaz.

O valor $M=\infty$ foi usado, repetindo os passos 2,3 e 4, até que o passo 4 indicava que não existia nenhum corte adicional.

O algoritmo Branch-and-Bound (B&B) do passo 5 do algoritmo principal também pode utilizar cortes adicionais do tipo $V1_i$ ou $V3_i$ em cada nó da árvore B&B para gerar limites inferiores ainda melhores. A identificação e adição de cortes fortes durante uma busca B&B é apontada por Van Roy e Wolsey (1987) como um tópico promissor que merece mais investigação. Porém, esta possibilidade não será desenvolvida nesta tese.

2.4 O algoritmo Branch-and-Bound

A velocidade através da qual um algoritmo do tipo Branch-and-Bound encontra uma solução ótima depende não somente da qualidade dos limites inferiores nos nós da árvore BB, mas também pode depender da estratégia de busca usada para explorar os nós e da utilização de uma heurística para tentar melhorar a solução incumbente (*incumbent solution*).

Na nossa busca Branch-and-Bound (BB), o limite inferior num nó é dado pela solução da relaxação $PL^n(F_{xyI}^{134})$ onde n é o número dos cortes do tipo V1 ou V3). A seção 2.4.1 trata de uma heurística que gera limites superiores nos nós BB para fornecer boas soluções incumbentes (*incumbent solutions*). A seção 2.4.2 discute estratégias de busca na árvore BB. Os experimentos computacionais são relatados na seção 2.5.

2.4.1 Uma Heurística para o caso de Capacidade Infinita

Em cada nó da árvore BB, usamos uma heurística para tentar achar um limite superior da solução ótima naquele nó. Se o limite superior for menor que o valor atual da solução incumbente, então encontramos uma nova solução incumbente, a saber, a solução factível que forneceu o limite superior no nó

Num dado nó da árvore BB, algumas das variáveis y_{it} têm valores fixos em 0 ou em 1. As y_{it} restantes são ainda livres. Se y_{it} for fixa em 0, a produção do componente i é proibida no período t . Tal proibição pode ser forçada pela alocação artificial de s_{it} igual a infinito. Se y_{it} for fixa em 1, então o custo s_{it} deve ser obrigatoriamente cobrado, mesmo se o componente i não for produzido no período t (que pode acontecer se o custo c_{it} for caro em relação aos períodos vizinhos). Tal cobrança obrigatória do custo s_{it} dentro de qualquer cálculo pode ser forçada pela alocação artificial de s_{it} igual a zero e pela posterior adição do valor original de s_{it} ao custo do resultado do cálculo.

Usamos a formulação F_{xyI}^{134} (i.e., sem cortes do tipo V1 ou V3).

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} \left[s_{it}y_{it} + c_{it}x_{it} + h_{i,t+L(i)}I_{i,t+L(i)} \right] \quad (F_{xyI}^{134})$$

tal que

$$I_{1,L(1)+t-1} + x_{1t} - I_{1,L(1)+t} = d_{1,L(1)+t} \\ \text{para } t = T(1)+1, \dots, T(1)+T$$

$$\begin{aligned}
I_{i,L(i)+t-1} + x_{it} - I_{i,L(i)+t} - \sum_{j \in S(i)} r_{ij} x_{j,L(i)+t} &= d_{i,L(i)+t} \\
\text{para } i &= 2, \dots, N \\
t &= T(i)+1, \dots, T(i)+T \\
x_{it} &\leq M_{it} y_{it} \\
\text{para } i &= 1, \dots, N \\
t &= T(i)+1, \dots, T(i)+T \\
x_{it} &\geq 0; \quad I_{i,L(i)+t} \geq 0; \\
\text{para } i &= 1, \dots, N \\
t &= T(i)+1, \dots, T(i)+T \\
y_{it} &= 0 \text{ ou } 1; \\
\text{para } i &= 1, \dots, N \\
t &= T(i)+1, \dots, T(i)+T
\end{aligned}$$

Achamos uma solução factível (i.e., um limite superior) através da seguinte heurística.

Como mencionado na seção 1.2, o algoritmo Wagner-Whitin (WW) fornece uma rápida solução ótima do problema mono-estágio de dimensionamento de lotes. Podemos usar o algoritmo WW sequencialmente, primeiro no item final, e depois nos componentes 2,3,...,N nesta ordem, sendo que a demanda

$$d_{i,L(i)+t} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} x_{j,L(i)+t}$$

para o componente i no período $t \in \{T(i)+1, \dots, T(i)+T\}$, depende das soluções $x_{j,L(i)+t}$ de seus componentes sucessores imediatos $j \in S(i)$. Os custos de estocagem usados no algoritmo WW para o componente i são $h_{i,t+L(i)}$ para $t \in \{T(i)+1, \dots, T(i)+T\}$. Quando o estoque inicial $I_{i,T(i)+L(i)}$ for positivo, o algoritmo Wagner-Whitin fornece uma solução ótima se subtrairmos $I_{i,T(i)+L(i)}$ das demandas

$$d_{i,L(i)+t} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} x_{j,L(i)+t} \quad t \in \{T(i)+1, \dots, T(i)+T\},$$

começando com o período $t = T(i)+1$ (as demandas não podem ficar negativas), até que $I_{i,T(i)+L(i)}$ seja esgotado (Johnson e

Montgomery, 1974).

Os custos de preparação s_{it} são ajustados na maneira descrita acima. Assim, num período t no qual y_{it} é fixa em 0, faz-se s_{it} igual à infinito para uso no algoritmo WW. Num período t no qual y_{it} é fixa em 1, fazemos s_{it} igual a zero para uso no algoritmo WW. Por exemplo, com $N=T=3$, $S(2)=\{1\}$, $S(3)=\{2\}$, $L(i)=0$ para $i=1,2,3$, na hipótese de y_{22} e y_{33} serem fixas em 0, y_{11} , y_{12} e y_{32} fixas em 1, então usamos os seguintes custos modificados:

$$\begin{array}{lll} \hat{s}_{11} = 0 & \hat{s}_{12} = 0 & \hat{s}_{13} = s_{13} \\ \hat{s}_{21} = s_{21} & \hat{s}_{22} = \text{infinito} & \hat{s}_{23} = s_{23} \\ \hat{s}_{31} = s_{31} & \hat{s}_{32} = 0 & \hat{s}_{33} = \text{infinito} \end{array}$$

$$\hat{c}_{it} = c_{it} \quad \text{e} \quad \hat{h}_{it} = h_{it} \quad \text{para } i = 1,2,3 \text{ e } t = 1,2,3$$

Aplicando o algoritmo WW sequencialmente, primeiro no item final, e depois nos componentes $2,3,\dots,N$, chegamos a uma sequência de soluções mono-estágias que, juntas, correspondem a uma solução factível de F_{xyI}^{134} .

2.4.2 A Estratégia de Busca

Nesta seção discutimos as possíveis regras de escolha do nó de separação e de escolha da variável 0/1 y_{it} de separação.

Tratemos primeiro das regras de escolha do nó de separação. A regra parcial '*depth-first*' separa um dos dois nós filhos do último nó separado se pelo menos um dos filhos não for sondado (senão temos que usar uma outra regra de escolha, tal como a de *menor limite inferior* descrita logo em baixo). Uma vantagem desta regra é que descemos diretamente para um nó final da árvore BB onde resolvemos um Programa Linear para achar uma solução que esperamos seja melhor que a solução incumbente. Além disso, no caminho até um nó final, podemos esperar achar boas soluções para melhorar a solução incumbente através da heurística descrita na seção 2.4.1 acima. Uma desvantagem é que é possível gastar muito tempo descendo para um nó final que acaba tendo uma solução que não é melhor que a solução incumbente.

Uma regra alternativa é separar o nó ativo que tem o *menor limite inferior*, esperando que tal nó siga até uma solução ótima. O limite inferior de um nó-pai é automaticamente um limite inferior para um nó-filho cujo (melhor) limite inferior é, portanto, maior ou igual que o limite inferior do nó-pai. Assim o menor limite inferior de todos os nós ativos nunca diminui, e pode aumentar, melhorando a garantia de precisão da solução incumbente. Esta regra é, portanto, atraente, especialmente se a dimensão do problema for tão grande que temos que prematuramente parar a busca de uma solução ótima. Porém, se os limites inferiores dos nós-filhos aumentarem bem além do limite inferior do nó-pai, então o próximo nó

a ser separado não será um dos nós-filhos mas, ao contrário, um outro nó ativo em algum outro lugar da árvore BB. Assim, uma possível desvantagem desta regra é que podemos perder muito tempo saltando horizontalmente entre os nós ativos da árvore, sem conseguir melhorar a solução incumbente.

Vamos usar uma mistura das duas regras *depth-first* e *menor limite inferior*. Numa tentativa de logo achar uma solução ótima ou quase-ótima, usamos a regra *depth-first* até o nó numero 1.4NT. Em outras palavras, descemos até 70% da profundidade da árvore Branch-and-Bound (a porcentagem 70% foi escolhida na base de experiencia durante o desenvolvimento dos programas computacionais). Em seguida, mudamos para a regra *menor limite inferior* uma vez que, como mencionado acima, esta regra permite a melhoria contínua da garantia de precisão da solução incumbente, uma propriedade atraente se a dimensão do problema for tão grande que temos que prematuramente parar a busca de uma solução ótima.

Tratamos agora de uma regra de escolha da variável 0/1 y_{it} de separação. Faz sentido dar prioridade àquelas variáveis y_{it} que têm as maiores consequências em termos de custo. Fixar y_{it} em 0 pode causar a cobrança de pelo menos o seguinte custo de estocagem

$$h_{i,t+L(i)-1} \left(\sum_{j \in S(i)} r_{ij} x_{j,L(i)+t} + d_{i,L(i)+t} \right)$$

que, em geral, é maior para componentes i com o maior número de sub-componentes na estrutura de produto (e.g., o item final) e menor para componentes primários (i.e., componentes i tal que $Q(i)=\emptyset$).

Portanto uma regra parcial razoável de separação das y_{it} pode ser a seguinte: Fixar primeiro os y_{1t} , e depois os $y_{2t}, y_{3t}, \dots, y_{Nt}$ onde os componentes foram numerados tal que $i < j$ implica que o componente i tem um número maior ou igual de sub-componentes na

estrutura de produto do que o componente j.

Dado um componente i e um nó da árvore Branch-and-Bound, se fixarmos $y_{i,T(i)+1}$ em 0, podemos talvez provocar a infactibilidade de F_{xyI}^{134} no nó através da impossibilidade de satisfazer as restrições

$$E_{i,T(i)} + x_{i,T(i)+1} - E_{i,T(i)+1} = D_{i,T(i)+1}$$

$$E_{i,T(i)+1} \geq 0$$

da formulação equivalente F_{xyE}^{234} quando $x_{i,T(i)+1}$ for restrita a ser 0. Tal infactibilidade ocorrerá se $D_{i,T(i)+1} > E_{i,T(i)}$.

Assim, a regra de separação das y_{it} que usamos é a seguinte: Fixar os y_{1t} na seguinte ordem:

$$y_{1,T(1)+1}, \dots, y_{1,T(1)+T}$$

$$y_{2,T(2)+1}, \dots, y_{2,T(2)+T}$$

...

$$y_{N,T(N)+1}, \dots, y_{N,T(N)+T}$$

onde os componentes foram numerados tal que $i < j$ implica que o componente i tem um número maior ou igual de sub-componentes na estrutura de produto do que o componente j.

2.5 Os Experimentos Computacionais com Capacidade Infinita

Agora testamos e comparamos computacionalmente as abordagens de cortes do tipo V1 e de Relaxação Lagrangeana do capítulo 3 (seção 3.2) na resolução das formulações equivalentes F_{xy}^{134} e F_{xyE}^{134} com capacidade infinita de produção.

A seção 2.5.1 descreve os dados utilizados nos experimentos computacionais. Depois, a seção 2.5.2 explica como foram pré-fixados numa maneira representativa os níveis dos estoques iniciais dos componentes e os níveis de produção pré-fixados. Em seguida, a seção 2.5.3 compara a eficiência dos cortes do tipo V1 e do tipo V3, e explica porque apenas os cortes do tipo V1 são usados nos experimentos computacionais da seção 2.5.4. Finalmente, a seção 2.5.4 descreve o projeto experimental utilizados nos experimentos computacionais com os cortes do tipo V1, e analisa os resultados.

Os programas computacionais foram escritos na linguagem C, e utilizaram o pacote MINOS versão 5 (Murtagh e Saunders, 1983), escrito em Fortran. MINOS é um sistema de otimização adequado para a solução de programas lineares esparsos de médio e grande porte. Os testes foram rodados no sistema VAX Cluster da UNICAMP que é composto de duas máquinas Vax 11/785.

2.5.1 Os Dados

Produtos com $N = 10$ componentes foram utilizados. Porém, a estrutura do produto foi um fator variável em certos experimentos descritos mais adiante. O horizonte de planejamento foi $T = 12$ períodos.

Os custos s_{it} para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{T(i)+1, \dots, T(i)+T\}$ foram aleatoriamente sorteados de uma das seguintes distribuições uniformes:

$U(50, 950)$ (custos altos)

$U(50, 250)$ (custos médios)

$U(5, 95)$ (custos baixos).

Os custos c_{it} para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{T(i)+1, \dots, T(i)+T\}$ foram aleatoriamente sorteados da distribuição uniforme $U(1.5, 2.0)$, as demandas d_{1t} para $t \in \{T(1)+1, \dots, T(1)+T\}$ da $U(0, 180)$, as demandas d_{it} para $i \in \{2, \dots, N\}$ e $t \in \{T(i)+1, \dots, T(i)+T\}$ da $U(0, 18)$, e os tempos de produção $L(i)$ para $i \in \{1, \dots, N\}$ do conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$. Sem perda de generalidade, $r_{ij} = 1$ para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $j \in S(i)$.

Lembre da seção 1.3.4 que

$$e_{it} = h_{i,t+L(i)} - \sum_{j \in P(i)} r_{ji} h_{jt}$$

onde $h_{i,t+L(i)} = 0$ para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{T(i)+1, \dots, T(i)+T\}$. Para gerar aleatoriamente os custos h_{it} para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{T(i)+1, \dots, T(i)+T\}$, primeiro geramos valores 'provisórios' dos custos e_{it} para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{1, \dots, T(i)+T\}$ da distribuição $U(0.2, 0.4)$. Em seguir, usando estes valores de e_{it} , calculamos os custos $h_{i,t+L(i)}$ para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{T(i)+1, \dots, T(i)+T\}$ através da relação

$$h_{i,t+L(i)} = e_{it} + \sum_{j \in P(i)} r_{ji} h_{jt}$$

Finalmente, recalculamos os valores 'definitivos' dos custos e_{it} para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{1, \dots, T(i)+T\}$ através da identidade

$$e_{it} = h_{i,t+L(i)} - \sum_{j \in P(i)} r_{ji} h_{jt}.$$

onde $h_{i,t+L(i)} = 0$ para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{T(i)+1, \dots, T(i)+T\}$.

As distribuições para s_{it} (custos altos), e_{it} , d_{it} , e r_{ij} são as mesmas que as distribuições para s_i , e_i , d_{it} , e r_{ij} de Afentakis e Gavish (1986) que usaram $d_{it} = 0$ para $i \in \{2, \dots, N\}$, $L(i) = 0$ para $i \in \{1, \dots, N\}$, e desconsideram os custos c_i uma vez que todos os seus custos são constantes ao longo do tempo.

Os outros dados são descritos nas seções apropriadas.

2.5.2 A Pré-Fixação dos Estoques Iniciais e da Produção

Os estoques iniciais dos componentes:

$$I_{it} \quad i = 1, \dots, N \text{ e } t = L(i), \dots, T(i)+L(i)$$

e os níveis de produção pré-fixados:

$$x_{it} \quad i = 1, \dots, N \text{ e } t = 1, \dots, T(i)$$

são determinados na seguinte maneira. Seja

$$s_i = \left\{ \begin{array}{ll} (50 + 950)/2 = 500 & (\text{custos altos}) \\ (50 + 250)/2 = 150 & (\text{custos médios}) \\ (5 + 95)/2 = 50 & (\text{custos baixos}) \end{array} \right\} \quad i = 1, \dots, N$$

$$e_i = (0.2 + 0.4)/2 = 0.3 \quad i = 1, \dots, N.$$

$$d_1 = (180 + 0)/2 = 90$$

$$d_i = (18 + 0)/2 = 9 \quad i = 2, \dots, N.$$

Calculemos

$$h_i = e_i + \sum_{j \in P(i)} r_{ji} h_j \quad i = N, \dots, 1$$

$$D_i = d_i + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} D_j \quad i = 1, \dots, N$$

para em seguida calcular

$$Q_i = \sqrt{2s_i D_i / h_i} \quad i = 1, \dots, N.$$

Agora, Q_i seria a clássica Quantidade Econômica de Encomenda (*Economic Order Quantity*) para o componente i se este último tivesse uma demanda constante e contínua D_i , um custo constante de preparação s_i , e um custo constante de estocagem h_i . Nestas condições, o estoque do componente i variaria uniformemente entre

Q_i e 0. Para os experimentos computacionais, o estoque inicial $I_{i,L(i)}$ é aleatoriamente sorteado da distribuição uniforme $U(0, Q_i)$. Em seguida, como na seção 2.4.1, usamos o algoritmo Wagner-Whitin sequencialmente sobre os componentes $i = 1, \dots, N$ ao longo dos períodos 1 até $T(i)+T$ para gerar x_{it} para $i = 1, \dots, N$ e $t = 1, \dots, T(i)+T$ e I_{it} para $i = 1, \dots, N$ e $t = L(i), \dots, T(i)+L(i)+T$. Ficamos com os estoques iniciais dos componentes:

$$I_{it} \quad i = 1, \dots, N \text{ e } t = L(i), \dots, T(i)+L(i)$$

e os níveis de produção pré-fixados:

$$x_{it} \quad i = 1, \dots, N \text{ e } t = 1, \dots, T(i),$$

descartando os valores das variáveis x_{it} para $i = 1, \dots, N$ e $t = T(i)+1, \dots, T(i)+T$ e I_{it} para $i = 1, \dots, N$ e $t = T(i)+L(i)+1, \dots, T(i)+L(i)+T$.

Os valores dos estoques $\{I_{it} | i=1, \dots, N; t=L(i), \dots, T(i)+L(i)-1\}$ e os níveis de produção $\{x_{it} | i=1, \dots, N; t=1, \dots, T(i)\}$ são necessários para calcular $\{I_{i,L(i)+T(i)} | i=1, \dots, N\}$, os estoques iniciais nas formulações F_{xyI}^{134} e F_{xy}^{134} . Os estoques iniciais $\{E_{i,T(i)} | i=1, \dots, N\}$ na formulação F_{xyE}^{134} são calculados a partir dos valores dos estoques $\{I_{it} | i=1, \dots, N; t=L(i), \dots, T(i)+L(i)\}$.

Níveis positivos dos estoques iniciais foram gerados para dar mais realismo aos experimentos computacionais. Lembre que nosso modelo é tipicamente aplicado na base de um horizonte rolante. Portanto os estoques iniciais são geralmente positivos. A Quantidade Econômica de Encomenda (EOQ) foi aproveitada para dar um valor típico real à Q_i para $i=1, \dots, N$. Porém, poderíamos ter utilizado valores zero dos estoques iniciais sem prejudicar a validade dos experimentos computacionais.

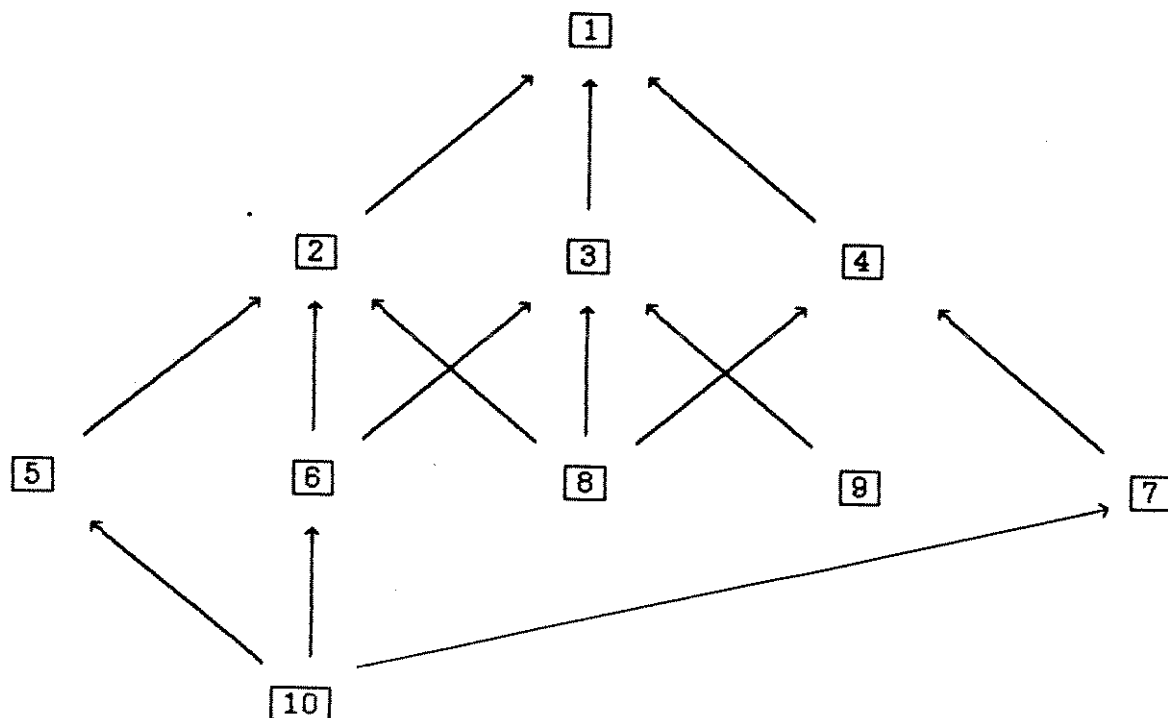
2.5.3 Uma Comparação dos Cortes do tipo V1 e do tipo V3

Na seção 2.3, desenvolvemos algoritmos de separação para escolher cortes do tipo V1 ou do tipo V3. Conforme visto na seção 2.2, um corte do tipo V3 para $i \in \{2, \dots, N\}$ é uma combinação linear de certos cortes do tipo V1 para $i \in \{2, \dots, N\}$ e de uma das restrições inter-escalão presentes na formulação F_{xy}^{134} . Portanto, a adição de todos os cortes do tipo V3 à formulação F_{xyI}^{134} (equivalente à F_{xy}^{134}) não pode aumentar o valor da função objetivo mais do que a adição de todos os cortes do tipo V1.

Porém, podemos especular que um corte do tipo V3, quando resultante de mais de um corte do tipo V1, possa ser um corte mais econômico do que um corte do tipo V1 no sentido que menos cortes seriam necessários para alcançar um dado valor da função objetivo. Em outras palavras, será que os cortes do tipo V3 podem resultar num limite inferior que é maior do que o limite inferior resultante de um número igual de cortes do tipo V1 ?

Esta questão foi investigada num experimento computacional utilizando um horizonte de planejamento de $T = 12$ períodos e um produto de $N = 10$ componentes com a seguinte estrutura geral:

$S(2) = \{1\}$	$S(3) = \{1\}$	$S(4) = \{1\}$
$S(5) = \{2\}$	$S(6) = \{2,3\}$	$S(7) = \{4\}$
$S(8) = \{2,3,4\}$	$S(9) = \{3\}$	$S(10) = \{5,6,7\}$



Através de seis sementes distintas, seis conjuntos de dados diferentes foram aleatoriamente gerados das distribuições descritas na seção 2.5.1. Os custos de preparação s_{it} foram aleatoriamente sorteados da distribuição uniforme $U(50, 950)$ (custos altos) para os dois primeiros conjuntos de dados, da $U(50, 250)$ (custos médios) para os dois conjuntos do meio, e da $U(5, 95)$ (custos baixos) para os dois últimos conjuntos de dados.

Uma rodada experimental consistiu em executar os passos 1 até 4 do algoritmo iterativo da seção 2.3, isto é, sem entrar na busca Branch-and-Bound. Para cada um dos seis conjuntos de dados, o problema foi rodado até quatro vezes, usando um método diferente de cada vez para calcular um limite inferior no nó raiz da árvore Branch-and-Bound: Quatro métodos diferentes foram testados:

1. A solução do $PL^n(F_{xyl}^{134})$ com todos os n cortes do tipo V1

identificados pelo algoritmo de separação da seção 2.3 (isto é, não restam cortes que excluam a solução ótima de $PL^n(F_{xyI}^{134})$);

2. A solução do $PL^m(F_{xyI}^{134})$ com os primeiros m cortes do tipo V1 identificados pelo algoritmo de separação da seção 2.3, onde m é o número de cortes do tipo V3 utilizados no método 3;
3. A solução do $PL^m(F_{xyI}^{134})$ com todos os m cortes do tipo V3 identificados pelo algoritmo de separação da seção 2.3 (isto é, não restam cortes que excluam a solução ótima de $PL^m(F_{xyI}^{134})$);
4. A solução do programa linear $PL^0(F_{xyI}^{134})$. Este método é denominado "Nenhum Corte" na Tabela 2.5.3 em baixo.

O método 2 é incluído para investigar a questão colocada acima, a saber, se os cortes do tipo V3 podem resultar num limite inferior que é maior do que o limite inferior resultante de um número igual de cortes do tipo V1.

Tabela 2.5.3
Comparação entre cortes do tipo V1 e V3

		Cortes V1	Cortes V1 /V3	Cortes V3	Nenhum Corte
Custos Altos	semente = 8212	171 12.2%	170 12.2%	170 16.7%	- 33.3%
	semente = 1230	119 11.4%	- -	129 16.3%	- 30.3%
Custos Médios	semente = 9060	227 6.87%	- -	266 10.0%	- 20.4%
	semente = 1667	210 5.57%	- -	258 8.81%	- 19.3%
Custos Baixos	semente = 58	192 1.35%	175 1.44%	175 3.96%	- 10.2%
	semente = 5329	221 2.65%	205 2.69%	205 4.90%	- 11.1%

A Tabela 2.5.3 mostra os resultados computacionais dos experimentos. Cada célula da tabela corresponde a uma rodada e contém dois números. O primeiro é o número de cortes utilizados, identificados pelo algoritmo de separação da seção 2.3. O segundo número é a garantia de precisão do limite superior encontrado pela heurística da seção 2.4.1, calculado como

$$\text{Garantia de Precisão} = \frac{\text{Limite Superior} \times 100\%}{\text{Limite Inferior}} - 100\%$$

O valor do limite superior é independente do método utilizado

para obter um limite inferior. Portanto, a garantia de precisão é uma indicação da força comparativa do limite inferior fornecido pelo método utilizado.

Vemos na Tabela 2.5.3 que, para todos os seis conjuntos de dados (sementes),

1. O uso dos cortes do tipo V1 e do tipo V3 aumentou muito o limite inferior;
2. Os cortes do tipo V1 aumentaram o limite inferior mais do que os cortes do tipo V3;
3. A garantia de precisão é melhor quando os custos de preparação são menores;
4. Os cortes do tipo V3 não resultaram num limite inferior maior do que o limite inferior resultante de um número igual de cortes do tipo V1.

Os resultados da Tabela 2.5.3 mostram que, pelo menos em geral, os cortes do tipo V1 são mais eficientes do que cortes do tipo V3. Por esta razão, daqui adiante, investigamos apenas os cortes do tipo V1.

2.5.4 A Análise das Abordagens Ótimas

Os experimentos computacionais foram feitos com produtos de $N = 10$ componentes sobre um horizonte de planejamento de $T = 12$ períodos. Os efeitos dos seguintes fatores foram avaliados:

X. O método usado para calcular um limite inferior em cada nó da árvore Branch-and-Bound: Três métodos diferentes foram testados:

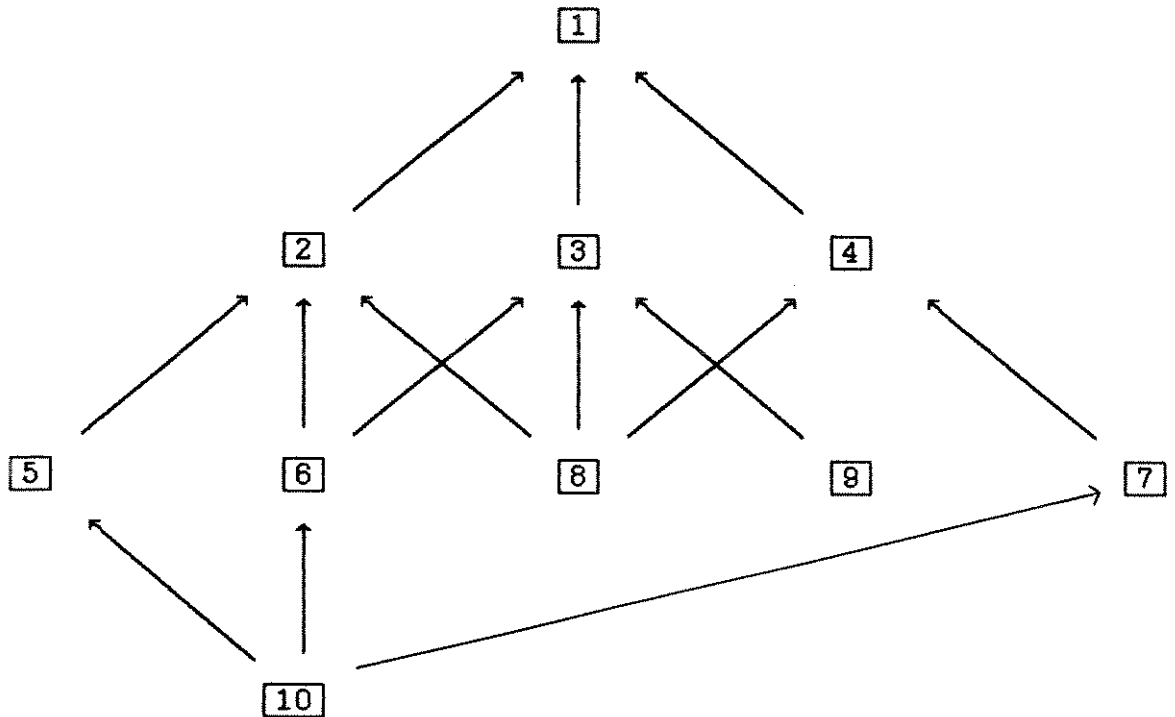
1. A solução do programa linear $PL^0(F_{xyI}^{134})$.
2. A solução do $PL^n(F_{xyI}^{134})$ com todos os n cortes do tipo V1 identificados pelo algoritmo de separação da seção 2.3 (isto é, não restaram cortes que excluem a solução ótima de $PL^n(F_{xyI}^{134})$);
3. Relaxação Langrangeana aplicada à formulação com capacidade infinita, F_{xyE}^{134} , na mesma maneira descrita na seção 3.2 para a formulação com capacidade infinita, F_{xyE}^{14} , com 500 iterações de otimização por subgradiente no nó raiz da árvore Branch and Bound, e 50 iterações nos outros nós. Este método, aplicado à F_{xyE}^{131} , é descrito em Clark e Armentano (1990a).

Y. A estrutura do item. Duas estruturas diferentes foram testadas:

1. A estrutura mais plana possível, i.e., $S(i) = \{1\}$ para $i = 2, \dots, 10$.

2. Uma típica estrutura geral, a mesma da seção 2.5.3, a saber,

$S(2)=\{1\}$, $S(3)=\{1\}$, $S(4)=\{1\}$, $S(5)=\{2\}$,
 $S(6)=\{2,3\}$, $S(7)=\{4\}$, $S(8)=\{2,3,4\}$, $S(9)=\{3\}$, e
 $S(10)=\{5,6,7\}$.



Z. O tamanho médio dos custos de preparação s_{it} em relação aos custos de estocagem de escalão e_{it} . Os custos s_{it} foram aleatoriamente sorteados das seguintes distribuições:

1. $U(50, 950)$ (custos altos)
2. $U(5, 95)$ (custos baixos).

Vimos na seção 2.5.3 que parece que a garantia de precisão é melhor quando os custos de preparação são menores;

Para avaliar os efeitos dos três fatores:

X. O método usado para calcular um limite inferior,

Y. A estrutura do item,

Z. Tamanho médio dos custos de preparação s_{it} ,

usamos um projeto experimental fatorial $3 \times 2 \times 2$, com duas replicações, isto é, rodando dois problemas para cada uma das 12 combinações dos três fatores. As 24 rodadas resultantes são estatisticamente independentes entre si.

Para as rodadas com cortes do tipo V1, a Tabela 2.5.4.1 mostra o número total n de cortes identificados pelo algoritmo de separação da seção 2.3 (isto é, não restaram cortes que excluem a solução ótima de $PL^n(F_{xyI}^{134})$).

Tabela 2.5.4.1
Número de Cortes Identificados

	Replicação 1	Replicação 2
Custos Baixos e Estrutura Plana	184	212
Custos Baixos e Estrutura Geral	192	221
Custos Altos e Estrutura Plana	70	51
Custos Altos e Estrutura Geral	171	157

Vemos que

menos cortes são necessários quando há custos altos de

preparação,

menos cortes são necessários na presença de uma estrutura plana,

existe uma interação entre os dois efeitos 'custos' e 'estrutura' no sentido que muito menos cortes são necessários quando há custos altos de preparação na presença de uma estrutura plana.

Agora consideremos a força dos cortes e de Relaxação Lagrangeana, e a influência dos custos de preparação e da estrutura do produto.

Existem vários softwares especializados para a aplicação de Branch-and-Bound (BB) à Programação Inteira Mista, por exemplo, MPSX/MIP da IBM, SCICONIC/VM (1981), e ZOOM (World Bank, 1987). Porém, MINOS não é um destes softwares. No nó raiz da busca BB da abordagem de cortes, toda vez que resolveu um programa linear modificado pela adição de um corte a mais, MINOS conseguiu aproveitar a base dual ótima do problema não-modificado como um ponto de partida para a solução ótima do problema modificado (mas sempre recalculando a fatorização LU da base). Este procedimento teria economizado muito tempo de CPU nos demais nós da árvore BB, mas não foi possível aplicá-lo devido a limitações técnicas de MINOS. O programa linear em cada nó foi sempre resolvido independentemente dos outros nós.

Uma busca Branch-and-Bound é uma abordagem ótima. Porém, na ausência de software BB adequado e por causa do grande tempo de CPU necessário para a solução dos programas lineares (entre 30 e 85

segundos, mesmo utilizando MINOS), não foi possível prosseguir até uma solução ótima. A busca BB foi sempre terminada prematuramente depois de percorrer 500 nós da árvore BB. Mesmo assim, cada busca que utilizou a Relaxação Linear, sem e com os cortes, exigiu entre 3 e 12.5 horas de tempo de CPU e entre 9 e 78 (sic) horas de tempo gasto (*elapsed time*) para rodar, dependendo do número de cortes. A identificação e adição dos cortes no nó raiz usaram até 25 minutos de tempo de CPU.

Cada busca que utilizou a Relaxação Lagrangeana exigiu entre 30 e 50 minutos de tempo de CPU e entre 1.5 e 13.5 horas de tempo gasto (*elapsed time*) para rodar.

Deve ser ressaltado que os tempos computacionais aqui relatados para os dois métodos não são comparáveis devido às deficiências de software mencionadas acima.

Uma garantia da distância de otimalidade do incumbente depois de 500 nós foi adotada como a medida de 'sucesso' da busca BB. Além disso, foram calculadas duas garantias da distância de otimalidade da solução encontrada no nó raiz da árvore BB pela heurística da seção 2.4.1. Estas duas garantias foram incluídos nos experimentos para julgar a qualidade da heurística da seção 2.1.4 e, também, para ajudar na interpretação dos resultados da seção 3.4.4 onde o desempenho da heurística é testado com duas estruturas de $N=40$ componentes.

A Tabela 2.5.4.2 mostra os resultados computacionais das 24 rodadas. Cada uma das 24 células da tabela mostra três porcentagens, resultantes da rodadas da célula.

A primeira porcentagem é uma garantia de precisão da solução encontrada no nó raiz da árvore BB, usando a heurística da seção 2.4.1. Esta garantia é denominada GP1 e é calculada:

$$GP1 = \frac{\text{Solução no nó raiz} \times 100\%}{\text{Limite Inferior no nó raiz}} - 100\%$$

onde o limite inferior é aquele obtido no nó raiz da árvore BB. Notamos que esta garantia é sabida antes de entrar na árvore BB.

A segunda porcentagem é uma outra garantia de precisão da solução encontrada no nó raiz da árvore BB, usando a heurística da seção 2.4.1. Esta garantia é denominada GP2 e é calculada:

$$GP2 = \frac{\text{Solução no nó raiz} \times 100\%}{\text{Menor Limite Inferior dos nós ativos}} - 100\%$$

onde o denominador é o menor limite inferior dos nós ainda ativos (isto é, não sondados) depois de percorrer 500 nós na árvore BB. Em tese, esta garantia não pode ser pior que a primeira. Na prática, esperamos que ela seja bem melhor. Veremos que, nos experimentos, ela foi sempre melhor.

A terceira porcentagem é uma garantia de precisão do incumbente depois de percorrer 500 nós na árvore BB. Esta garantia é denominada GP3 e é calculada;

$$GP3 = \frac{\text{Incumbente no nó 500} \times 100\%}{\text{Menor Limite Inferior dos nós ativos}} - 100\%$$

onde o denominador é o menor limite inferior dos nós ainda ativos depois de percorrer 500 nós na árvore BB. Se a heurística da seção 2.4.1 achar uma melhor solução incumbente nos nós 2 até 500, a terceira garantia será a melhor das três.

Notamos das fórmulas que as três garantias de precisão, GP1,

GP2 e GP3, são determinadas, em grande parte, pela força do limite inferior em cada nó e, também, pelo grau de sucesso da heurística da seção 2.4.1 em achar uma boa solução factível nos nós. Obviamente, a estratégia de busca também pode influenciar as garantias GP2 e GP3, como discutido na seção 2.4.2.

Tabela 2.5.4.2

Relaxação Linear Simples, Cortes, e Relaxação Lagrangeana
com Capacidade Infinita de Produção

GP1 GP2 GP3	Relaxação Linear Simples		Relaxação Lin. com Cortes V1		Relaxação Lagrangeana	
Custos Baixos e Estrutura Plana	9.96	9.21	0.60	1.50	0.22	1.11
	7.41	6.82	0.28	0.94	0.16	1.01
	7.36	6.77	0.05	0.94	0.07	0.81
Custos Baixos e Estrutura Geral	9.76	11.24	1.35	2.65	1.41	0.99
	7.93	8.29	1.13	2.35	1.32	0.93
	7.23	8.12	0.89	1.45	0.53	0.23
Custos Altos e Estrutura Plana	15.07	16.72	15.50	8.08	20.28	6.91
	7.51	10.43	3.71	3.59	19.39	6.39
	5.72	9.43	3.42	2.35	18.22	6.39
Custos Altos e Estrutura Geral	25.61	27.96	12.15	10.71	19.29	9.63
	18.20	22.82	10.31	9.88	18.49	9.06
	16.75	20.49	6.52	8.99	15.63	6.59

Analisando a Tabela 2.5.4.2, vemos que o uso dos cortes ou de

Relaxação Lagrangeana melhora muito, em geral, a qualidade de todas as três garantias.

Na presença dos custos baixos, os cortes e a Relaxação Lagrangeana resultaram numa qualidade muito boa, e às vezes excelente, das três garantias, GP1, GP2 e GP3. Não há nenhuma evidência de que os cortes sejam mais eficazes do que a Relaxação Lagrangeana ou vice-versa. Porém, lembre que o método de Relaxação Lagrangeana é muito mais rápido que o método de cortes.

A situação na presença dos custos altos é mais complicada. O uso dos cortes geralmente melhorou as três garantias, especialmente GP3. Porém, das rodagens com a estrutura plana e os custos altos a primeira rodagem das duas com a Relaxação Lagrangeana deu garantias piores que as duas com a Relaxação Linear Simples. A outra rodagem das duas com a Relaxação Lagrangeana deu um melhor valor de GP1 do que com o uso dos cortes, e piores valores de GP2 e GP3 do que com o uso dos cortes. Há evidência de que talvez os cortes sejam mais eficazes do que a Relaxação Lagrangeana.

Notamos que a garantia GP2 foi sempre estritamente melhor que a garantia GP1. Desconsiderando a Relaxação Linear Simples, o melhoramento parece ser mais acentuado com o uso de cortes, e na presença da estrutura plana, especialmente com custos altos.

A diferença entre as garantias GP2 e GP3 é uma medida do melhoramento do incumbente durante os 500 nós da busca Branch and Bound. Porém, não há nenhuma evidência de que os três fatores mencionados acima influenciem sobre o grau de melhoramento do incumbente.

A variabilidade destes resultados sugere que mais rodagens experimentais seriam desejáveis para melhor esclarecer os efeitos dos dois métodos. Isto não foi possível devido a limitações

computacionais.

Porém, fica claro que os dois métodos melhoram muito a qualidade das três garantias GP1, GP2, e GP3, e que as garantias são melhores com custos baixos.

Outros comentários sobre os cortes e a Relaxação Lagrangeana serão feitos na seção 3.4.3. Clark e Armentano (1990b) contém mais resultados computacionais.

CAPÍTULO 3

SOLUÇÕES ÓTIMAS ATRAVÉS DE RELAXAÇÃO LAGRANGEANA E UM MÉTODO HEURÍSTICO PARA O CASO DE CAPACIDADE FINITA

3.1 Introdução

Neste capítulo, desenvolvemos uma abordagem à solução do problema multi-estágio com capacidade finita de produção que utiliza a Relaxação Lagrangeana e uma heurística para fornecer limites inferiores e superiores respectivamente, e que funciona dentro de um algoritmo de Branch-and-Bound.

Na seção 1.4, propusemos o seguinte modelo formulado em termos de estoque de escalão:

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} \left[s_{it}y_{it} + c_{it}x_{it} + e_{it}E_{it} \right] + \sum_{i|P(i) \neq \emptyset} \sum_{t=1}^{T(i)} e_{it}E_{it} \quad (F_{xyE}^{14})$$

tal que

$$E_{i,t-1} + x_{it} - E_{it} = \sum_{j \in R(i) \cup \{i\}} \sum_{n=1}^{n_{ij}} p_{ijn}^n d_{j,t+L(j)+K^n(i,j)} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{array}$$

$$\sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{j,L(i)+t} - E_{it} \leq 0 \quad \begin{array}{l} i = 2, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{array}$$

$$\sum_{i|t \leq T(i)+T} [f_{ikt}y_{it} + v_{ikt}x_{it}] \leq b_{kt} \quad \begin{array}{l} k = 1, \dots, K \\ t = 1, \dots, T(1)+T \end{array}$$

$$x_{it} \leq M_{it}y_{it} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{array}$$

$$x_{it} \geq 0; \quad E_{it} \geq 0; \quad y_{it} = 0 \text{ ou } 1 \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{array}$$

Esta formulação é um Programa Linear Inteiro Misto com NT variáveis 0/1 e, como notado na seção 2.1, ela é *NP-hard*. Desenvolveremos um algoritmo que funciona dentro da estrutura básica do Branch-and-Bound (BB).

Num dado nó da árvore BB, algumas das variáveis y_{it} têm valores fixos em 0 ou em 1. As y_{it} restantes são ainda livres. Se y_{it} for fixa em 0, a produção do componente i é proibida no período t . Tal proibição pode ser forçada pela alocação artificial de s_{it} igual a infinito e de f_{ikt} igual a infinito por $k=1, \dots, K$. Se y_{it} for fixa em 1, então o custo s_{it} e o consumo f_{ikt} do recurso k para $k=1, \dots, K$ devem ser obrigatoriamente cobrados, mesmo se o componente i não for produzido no período t (que pode acontecer se o custo c_{it} for caro em relação aos períodos vizinhos, ou para razões de capacidade escassa). Tal cobrança obrigatória do custo s_{it} e do consumo f_{ikt} do recurso k para $k=1, \dots, K$ dentro de qualquer cálculo pode ser forçada (1) pela alocação artificial de s_{it} igual a zero e pela posterior adição do valor original de s_{it} ao custo do resultado do cálculo, e (2) pela alocação artificial de f_{ikt} igual a zero para $k=1, \dots, K$ e pela redução de b_{kt} por f_{ikt} para $k=1, \dots, K$.

O algoritmo Branch and Bound utiliza a estratégia de busca que é descrita na seção 2.4.2. A seção 3.2 trata do uso da Relaxação Lagrangeana e Otimização por Subgradiente para fornecer bons limites inferiores nos nós BB. A seção 3.3 descreve uma heurística que fornece limites superiores nos nós BB, tanto para fornecer boas soluções incumbentes (*incumbent solutions*) quanto para ser usada na Otimização por Subgradiente da seção 3.2. Os testes computacionais são relatados na seção 3.4.

3.2 Um Limite Inferior através de Relaxação Lagrangeana

Note que a formulação F_{xyE}^{14} incorpora N problemas mono-estágios de dimensionamento de lotes com capacidade infinita (um por componente) que seriam independentes se não existissem as restrições

$$\sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{j, L(i)+t} - E_{it} \leq 0 \quad \begin{array}{l} i = 2, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{array}$$

(que são simplesmente as restrições

$$I_{i, L(i)+t} \geq 0 \quad \begin{array}{l} i = 2, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{array}$$

expressas em termos de estoque de escalão) e se não existissem as restrições de capacidade de produção

$$\sum_{i|t \leq T(i)+T} [f_{ikt} y_{it} + v_{ikt} x_{it}] \leq b_{kt} \quad \begin{array}{l} k = 1, \dots, K \\ t = 1, \dots, T(1)+T \end{array}$$

Estes dois conjuntos de restrições podem ser dualizados e incluídos na função objetivo através de Relaxação Lagrangeana. O problema Lagrangeano resultante fornece um limite inferior do valor ótimo do F_{xyE}^{14} (Fisher, 1981). O problema Lagrangeano é $Z_D(\lambda, \mu) =$

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} \left[s_{it} y_{it} + c_{it} x_{it} + e_{it} E_{it} \right] + \sum_{i|P(i) \neq \emptyset} \sum_{t=1}^{T(i)} e_{it} E_{it} \\ & + \sum_{i=2}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} \lambda_{it} \left[\sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{j, L(i)+t} - E_{it} \right] \\ & + \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^{T(1)+T} \mu_{kt} \left[\sum_{i|t \leq T(i)+T} [f_{ikt} y_{it} + v_{ikt} x_{it}] - b_{kt} \right] \end{aligned}$$

tal que

$$E_{i,t-1} + x_{it} - E_{it} = \sum_{j \in R(i) \cup \{i\}} \sum_{n=1}^{n_{ij}} p_{ij}^n d_{j,t+L(j)+K^n(i,j)}$$

$$\begin{aligned} i &= 1, \dots, N \\ t &= T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{aligned}$$

$$x_{it} \leq M_{it} y_{it}$$

$$\begin{aligned} i &= 1, \dots, N \\ t &= T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{aligned}$$

$$x_{it} \geq 0; \quad E_{it} \geq 0; \quad y_{it} = 0 \text{ ou } 1$$

$$\begin{aligned} i &= 1, \dots, N \\ t &= T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{aligned}$$

onde os multiplicadores Lagrangeanos $\{\lambda_{it} \geq 0 \mid i=2, \dots, N; t=T(i)+1, \dots, T(i)+T\}$ e $\{\mu_{kt} \geq 0 \mid k=1, \dots, K; t=1, \dots, T(1)+1\}$ correspondem aos dois conjuntos de restrições:

$$\sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{j,L(i)+t} - E_{it} \leq 0 \quad \begin{aligned} i &= 2, \dots, N \\ t &= T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{aligned}$$

$$\sum_{i|t \leq T(i)+T} [f_{ikt} y_{it} + v_{ikt} x_{it}] \leq b_{kt} \quad \begin{aligned} k &= 1, \dots, K \\ t &= 1, \dots, T(1)+T \end{aligned}$$

respectivamente. Reordenando os termos da função objetivo de $Z_D(\lambda, \mu)$, podemos ver que ela é igual a

$$\sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} \left[\left(s_{it} + \sum_{k=1}^K \mu_{kt} f_{ikt} \right) y_{it} + \left(c_{it} + \sum_{k=1}^K \mu_{kt} v_{ikt} \right) x_{it} \right]$$

$$+ \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^{T(i)} \mu_{kt} [f_{ikt} y_{it} + v_{ikt} x_{it}] - \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^{T(1)+T} \mu_{kt} b_{kt}$$

$$+ \sum_{i|P(i) \neq \emptyset} \sum_{t=1}^{T(i)} e_{it} E_{it} + \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} e_{it} E_{it}$$

$$+ \sum_{i=2}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} \lambda_{it} \left[\sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{j,L(i)+t} - E_{it} \right]$$

Agora,

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} e_{it} E_{it} + \sum_{i=2}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} \lambda_{it} \left[\sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{j, L(i)+t} - E_{it} \right] \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} (e_{it} - \lambda_{it}) E_{it} + \sum_{i=2}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} \lambda_{it} \sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{j, L(i)+t} \\
&\quad \text{onde } \lambda_{1t} = 0 \text{ para } t = T(1)+1, \dots, T(1)+T \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} (e_{it} - \lambda_{it}) E_{it} + \sum_{i=1}^N \sum_{j \in P(i)} r_{ji} \sum_{t=T(j)+1}^{T(j)+T} \lambda_{jt} E_{i, L(j)+t} \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} (e_{it} - \lambda_{it}) E_{it} + \sum_{i=1}^N \sum_{j \in P(i)} r_{ji} \sum_{t=T(j)+L(j)+1}^{T(j)+L(j)+T} \lambda_{j, t-L(j)} E_{it} \\
&= \sum_{i=1}^N \left[\sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} (e_{it} - \lambda_{it}) + \sum_{j \in P(i)} r_{ji} \sum_{t=T(j)+L(j)+1}^{T(j)+L(j)+T} \lambda_{j, t-L(j)} \right] E_{it}
\end{aligned}$$

Agora, seja $i \in \{1, \dots, N\}$ e $j \in P(i)$. Então $T(j)+L(j) \leq T(i)$. Portanto os E_{it} tal que $T(j)+L(j)+1 \leq t \leq T(i)$ já são fixos e os E_{it} tal que $T(i)+1 \leq t \leq T(j)+L(j)+T$ são variáveis do modelo. Assim $Z_D(\lambda, \mu)$ pode ser expresso como

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} \left[\left(s_{it} + \sum_{k=1}^K \mu_{kt} f_{ikt} \right) y_{it} + \left(c_{it} + \sum_{k=1}^K \mu_{kt} v_{ikt} \right) x_{it} \right] \\
& + \sum_{i=1}^N \left[\sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} (e_{it} - \lambda_{it}) + \sum_{j \in P(i)} r_{ji} \sum_{t=T(j)+L(j)+1}^{T(j)+L(j)+T} \lambda_{j, t-L(j)} \right] E_{it} \\
& + \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j \in P(i)} r_{ji} \sum_{t=T(j)+L(j)+1}^{T(j)+L(j)+T} \lambda_{j, t-L(j)} E_{it} - \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^{T(1)+T} \mu_{kt} b_{kt} \right] \\
& \quad \leftarrow \text{tudo pré-fixado} \rightarrow
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^{T(i)} \mu_{kt} \left[f_{ikt} y_{it} + v_{ikt} x_{it} \right] + \sum_{i|P(i) \neq \emptyset} \sum_{t=1}^{T(i)} e_{it} E_{it}$$

← tudo pré-fixado →

tal que

$$E_{i,t-1} + x_{it} - E_{it} = \sum_{j \in R(i) \cup \{i\}} \sum_{n=1}^{n_{ij}} p_{ij}^n d_{j,t+L(j)+K^n(i,j)}$$

$$i = 1, \dots, N$$

$$t = T(i)+1, \dots, T(i)+T$$

$$x_{it} \leq M_{it} y_{it}$$

$$i = 1, \dots, N$$

$$t = T(i)+1, \dots, T(i)+T$$

$$x_{it} \geq 0; \quad E_{it} \geq 0; \quad y_{it} = 0 \text{ ou } 1$$

$$i = 1, \dots, N$$

$$t = T(i)+1, \dots, T(i)+T$$

Então podemos ver que $Z_D(\lambda, \mu)$ decompõe-se na soma de

$$\left[\sum_{i=1}^N \sum_{j \in P(i)} r_{ji} \sum_{t=T(j)+L(j)+1}^{T(i)} \lambda_{j,t-L(j)} E_{it} - \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^{T(1)+T} \mu_{kt} b_{kt} \right.$$

$$+ \left. \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^{T(i)} \mu_{kt} \left[f_{ikt} y_{it} + v_{ikt} x_{it} \right] + \sum_{i|P(i) \neq \emptyset} \sum_{t=1}^{T(i)} e_{it} E_{it} \right]$$

e os seguintes N problemas mono-estágios de dimensionamento de lotes com capacidade infinita (um por componente):

$$Z_{iD}(\lambda_i, \mu) =$$

$$\min \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} \left[\left(s_{it} + \sum_{k=1}^K \mu_{kt} f_{ikt} \right) y_{it} + \left(c_{it} + \sum_{k=1}^K \mu_{kt} v_{ikt} \right) x_{it} \right]$$

$$+ \left[\sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} (e_{it} - \lambda_{it}) + \sum_{j \in P(i)} r_{ji} \sum_{t=T(i)+1}^{T(j)+L(j)+T} \lambda_{j,t-L(j)} \right] E_{it}$$

tal que

$$\begin{aligned}
 E_{i,t-1} + x_{it} - E_{it} &= \sum_{j \in R(i) \cup \{i\}} \sum_{n=1}^{n_{ij}} p_{ij}^n d_{j,t+L(j)+K^n(i,j)} & t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \\
 x_{it} &\leq M_{it} y_{it} & t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \\
 x_{it} \geq 0; \quad E_{it} \geq 0; \quad y_{it} &= 0 \text{ ou } 1 & t = T(i)+1, \dots, T(i)+T
 \end{aligned}$$

onde $\lambda_{1t} = 0$ para $t = T(1)+1, \dots, T(1)+T$ em $Z_{1D}(\lambda_1, \mu)$.

É possível que o coeficiente de E_{it} seja negativo (por causa do termo $-\lambda_{it}$), mas sua função de custo de estocagem é linear e os custos de produção são côncavos. Portanto, como mostrou Denardo (1982), para todos os $i = 1, \dots, N$ existe pelo menos uma solução ótima a $Z_{iD}(\lambda_i, \mu)$ para o qual $E_{i,t-1} x_{it} = 0$ para todos os $t = 1, \dots, T$. Assim podemos resolver $Z_{iD}(\lambda_i, \mu)$ usando a versão do algoritmo Wagner-Whitin para custos variantes com o tempo (Wagner e Whitin, 1958; Wagner, 1960).

Lembre que o problema Lagrangeano fornece um limite inferior do valor ótimo de F_{xyE}^{14} . Este limite inferior é, portanto, dado por

$$\begin{aligned}
 Z_D(\lambda, \mu) &= \sum_{i=1}^N Z_{iD}(\lambda_i, \mu) \\
 &+ \sum_{i=1}^N \sum_{j \in P(i)} r_{ji} \sum_{t=T(j)+L(j)+1}^{T(i)} \lambda_{j,t-L(j)} E_{it} - \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^{T(1)+T} \mu_{kt} b_{kt} \\
 &+ \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^{T(i)} \mu_{kt} [f_{ikt} y_{it} + v_{ikt} x_{it}] + \sum_{i|P(i) \neq \emptyset} \sum_{t=1}^{T(i)} e_{it} E_{it}
 \end{aligned}$$

Tentamos aumentar o valor de $Z_D(\lambda, \mu)$ através de iterações em λ e μ . Utilizamos otimização por subgradiente, incorporando algumas

das modificações propostas por Camerini, Fratta and Maffioli (1975). Mais detalhes são dados na seção 3.4 que relata os experimentos computacionais.

3.3 Uma Heurística para o caso de Capacidade Finita

Em cada nó da árvore BB, usamos uma heurística para tentar achar um limite superior da solução ótima inteira naquele nó. Este limite superior é útil por várias razões:

- (1) Ele é utilizado no cálculo do tamanho do passo (*step-size*) na otimização por subgradiente do limite inferior no nó;
- (2) Se o limite superior for menor que o valor atual da solução incumbente, então encontramos uma nova solução incumbente, a saber, a solução factível que forneceu o limite superior no nó.

Usamos a formulação em termos de estoque de escalão F_{xyE}^{14} :

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} \left[s_{it} y_{it} + c_{it} x_{it} + e_{it} E_{it} \right] + \sum_{i|P(i) \neq \emptyset} \sum_{t=1}^{T(i)} e_{it} E_{it} \quad (F_{xyE}^{14})$$

tal que

$$E_{i,t-1} + x_{it} - E_{it} = \sum_{j \in R(i) \cup \{i\}} \sum_{n=1}^{n_{ij}} p_{ij}^n d_{j,t+L(j)+K^n(i,j)} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{array}$$

$$\sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{j,L(i)+t} - E_{it} \leq 0 \quad \begin{array}{l} i = 2, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{array}$$

$$\sum_{i|t \leq T(i)+T} [f_{ikt} y_{it} + v_{ikt} x_{it}] \leq b_{kt} \quad \begin{array}{l} k = 1, \dots, K \\ t = 1, \dots, T(1)+T \end{array}$$

$$x_{it} \leq M_{it} y_{it} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{array}$$

$$x_{it} \geq 0; \quad E_{it} \geq 0; \quad y_{it} = 0 \text{ ou } 1 \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{array}$$

O ponto de partida da heurística é uma solução factível de F_{xyE}^{134} resultante da aplicação sequencial do algoritmo WW, como descrita na secção 2.4.1. Se as restrições de capacidade de produção

$$\sum_{i|t \leq T(i)+T} [f_{ikt} y_{it} + v_{ikt} x_{it}] \leq b_{kt} \quad \begin{array}{l} k = 1, \dots, K \\ t = 1, \dots, T(1)+T \end{array}$$

forem apertadas, é provável que uma solução factível de F_{xyE}^{134} não seja factível em F_{xyE}^{14} . Neste caso podemos tentar impor factibilidade mudando parte da produção dos períodos infactíveis para outros períodos. Um período infactível é um período $t \in \{1, \dots, T(1)+T\}$ tal que

$$\sum_{i|t \leq T(i)+T} [f_{ikt} y_{it} + v_{ikt} x_{it}] > b_{kt}$$

para pelo menos um $k \in \{1, \dots, K\}$.

Na mudança de produção para outros períodos, devemos manter estoques de escalão não-negativos e a factibilidade inter-escalão, i.e., devemos assegurar que

$$E_{1t} \geq 0 \quad t = T(1)+1, \dots, T(1)+T$$

$$\sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{j, L(i)+t} - E_{it} \leq 0 \quad \begin{array}{l} i = 2, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{array}$$

ou, equivalentemente, numa forma que será útil mais adiante,

$$E_{1t} \geq 0 \quad t = T(1)+1, \dots, T(1)+T$$

$$\sum_{m \in S(j)} r_{jm} E_{m, L(j)+t} \leq E_{jt} \quad \begin{array}{l} n = 1, \dots, N \\ j \in P(n) \\ t = T(j)+1, \dots, T(j)+T \end{array}$$

continuam a ser satisfeitas. As restrições

$$E_{i,t-1} + x_{it} - E_{it} = \sum_{j \in R(i) \cup \{i\}} \sum_{n=1}^{n_{ij}} p_{ijn}^n d_{j,t+L(j)+K^n(i,j)} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{matrix}$$

mostram que, se mudarmos uma quantidade q_{it} da produção x_{it} do componente i no período t para um período posterior τ , então os níveis de estoque de escalão

$$E_{it} \quad \text{para } t=t, \dots, \tau-1$$

diminuirão pela quantidade q_{it} . As restrições

$$\sum_{m \in S(j)} r_{jm} E_{mt} \leq E_{j,t-L(j)} \quad \begin{matrix} j \in P(i) \\ t=t, \dots, \tau-1 \\ t-L(j) \leq T(j)+T \end{matrix}$$

continuarão a ser satisfeitas depois de tal mudança, mas podemos mudar a quantidade q_{it} para um período posterior τ somente se

$$E_{it} - q_{it} \geq \sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{j,L(i)+t} \quad \text{para } t=t, \dots, \tau-1$$

Estas restrições inter-escalaço e as restrições de capacidade de produção têm que ser conferidas quando tentamos mudar uma quantidade q_{it} da x_{it} para um período posterior τ .

De um modo semelhante, se mudarmos uma quantidade q_{it} da produção x_{it} do componente i no período t para um período anterior τ , então os níveis de estoque de escalão

$$E_{it} \quad \text{para } t=\tau, \dots, t-1$$

aumentarão pela quantidade q_{it} . As restrições

$$\sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{j,L(i)+t} - E_{it} \leq 0 \quad t = T(i)+1, \dots, T(i)+T$$

continuarão a ser satisfeitas após tal mudança, mas podemos mudar a quantidade q_{it} da produção x_{it} para um período anterior τ somente se

$$\sum_{m \in S(j)} r_{jm} E_{mt} + r_{ji} q_{it} \leq E_{j,t-L(j)} \quad \text{para } \begin{matrix} j \in P(i) \\ t = \tau, \dots, t-1 \\ t-L(j) \leq T(j)+T \end{matrix}$$

Estas restrições inter-escalon e as restrições de capacidade de produção têm que ser satisfeitas antes que mudemos uma quantidade q_{it} da produção x_{it} para um período anterior τ .

Por exemplo, a formulação em termos de estoque de escalão para a estrutura da Figura 1.3.4.3 do Capítulo 1:

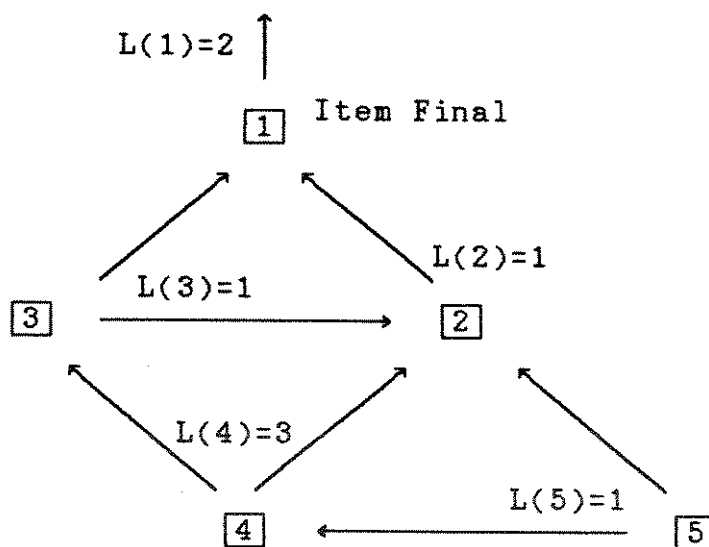


Fig. 1.3.4.3

tem as seguintes restrições inter-escalon:

$$r_{21} E_{1,t+1} - E_{2t} \leq 0 \quad t = 6, \dots, 5+T$$

$$r_{31} E_{1,t+1} + r_{32} E_{2,t+1} - E_{3t} \leq 0 \quad t = 5, \dots, 4+T$$

$$r_{42} E_{2,t+3} + r_{43} E_{3,t+3} - E_{4t} \leq 0 \quad t = 2, \dots, 1+T$$

$$r_{52}E_{2,t+1} + r_{54}E_{4,t+1} - E_{5t} \leq 0 \quad t = 1, \dots, T$$

Seja $T \geq 7$. Se quisermos mudar a quantidade q_{29} da produção x_{29} do período 9 para período 12, temos que verificar que

$$E_{2t} - q_{29} \geq \sum_{j \in S(2)} r_{2j} E_{j, L(2)+t} \quad \text{para } t = 9, \dots, 11$$

i.e., que

$$E_{29} - q_{29} \geq r_{21}E_{1,10};$$

$$E_{2,10} - q_{29} \geq r_{21}E_{1,11};$$

e
$$E_{2,11} - q_{29} \geq r_{21}E_{1,12};$$

Se quisermos mudar a quantidade q_{29} da produção x_{29} do período 9 para período 7, temos que verificar que

$$\sum_{m \in S(j)} r_{jm} E_{mt} + r_{j2} q_{29} \leq E_{j, t-L(j)} \quad \text{para } \forall j \in P(2) \quad t = 7, 8$$

i.e., que

$$r_{31}E_{17} + r_{32}E_{27} + r_{32}q_{29} \leq E_{36};$$

$$r_{31}E_{18} + r_{32}E_{28} + r_{32}q_{29} \leq E_{37};$$

$$r_{42}E_{27} + r_{43}E_{37} + r_{42}q_{29} \leq E_{44};$$

$$r_{42}E_{28} + r_{43}E_{38} + r_{42}q_{29} \leq E_{45};$$

$$r_{52}E_{27} + r_{54}E_{47} + r_{52}q_{29} \leq E_{56};$$

$$r_{52}E_{28} + r_{54}E_{48} + r_{52}q_{29} \leq E_{57};$$

Portanto, só certas quantidades de produção dos componentes podem ser mudadas para frente ou para trás.

Assim, uma heurística que tenta achar uma solução da formulação F_{xyE}^{14} , através da mudança da produção para períodos anteriores, é a seguinte, descrita em pseudo-Pascal

Aplique o algoritmo WW sequencialmente, nos componentes $1, 2, 3, \dots, N$, para obter uma solução factível da F_{xyE}^{134} , como na seção 2.4.1;

continua na próxima página

for t = T(1)+T downto 2 do begin

$$\text{Excesso}(t) = \sum_{k=1}^K \left[\left(\sum_{i|t \leq T(i)+T} [f_{ikt}y_{it} + v_{ikt}x_{it}] - b_{kt} \right)^+ / b_{kt} \right];$$

onde a^+ é definido como $\max(0, a)$

while Excesso(t) > 0 do begin

for i = 1 to N do begin

if $T(i)+1 \leq t \leq T(i)+T$ and $x_{it} > 0$ then begin

$$Q_{itk} = \left(\sum_{n|t \leq T(n)+T} [f_{nkt}y_{nt} + v_{nkt}x_{nt}] - b_{kt} \right)^+ / v_{ikt} \quad k=1, \dots, K;$$

$$M_{it} = x_{it};$$

$\tau = \max\{T(i)+1, \text{período da produção anterior do componente } i\};$

for $t = t-1$ downto τ do begin

$$M_{it} = \min \left\{ M_{i, t+1}, \min_{\substack{j \in P(i) \\ t-L(j) \leq T(j)+T}} \left\{ \left(E_{j, t-L(j)} - \sum_{m \in S(j)} r_{jm} E_{mt} \right) / r_{ji} \right\} \right\};$$

if $M_{it} = 0$ then vá para a próxima iteração do loop i;

for k = 0 to K do begin

if k = 0 then $q_{itk} = M_{it}$

else if $0 < Q_{itk} < M_{it}$ then $q_{itk} = Q_{itk}$

else vá à próxima iteração do loop k;

CustoAdicional(i, t, k) = custo adicional se a produção q_{itk} for mudada do período t para o período t;

Redução(i, t, k) = redução do valor do Excesso(t) se x_{it} for reduzida por q_{itk} ;

Razão(i, t, k) = CustoAdicional(i, t, k) / Redução(i, t, k);

end {fim do loop k}

end {fim do loop t}

end {fim de if $T(i)+1 \leq t \leq T(i)+T$ and $x_{it} > 0$ }

end {fim do loop i}

se existir $(i^*, t^*, k^*) = \arg \min \{Razão(i, t, k)\}$, então mude a produção q_{i^*, t^*, k^*} do período t para o período t^* ; se não existir, então execute a subrotina 'Mudar-Predecessor';

end {fim de while Excesso(t) > 0}

end {fim do loop t}

if $\sum_{i=1}^N [f_{ik1}y_{i1} + v_{ik1}x_{i1}] \leq b_{k1}$ para $k \in \{1, \dots, K\}$

then temos uma solução factível de F_{xyE}^{14} else não temos tal solução.

O ponto de partida desta heurística é a solução factível de F_{xyE}^{134} resultante da aplicação sequencial do algoritmo WW. Se a produção num período t ultrapassar a capacidade de pelo menos um dos recursos $k \in \{1, \dots, K\}$, porções desta produção são mudadas para períodos anteriores até que a produção no período t satisfaça

$$\sum_{i|t \leq T(i)+T} [f_{ikt}y_{it} + v_{ikt}x_{it}] \leq b_{kt} \quad \text{para } k \in \{1, \dots, K\}.$$

Para $k = 1, \dots, K$, a quantidade

$$\sum_{i|t \leq T(i)+T} \left[[f_{ikt}y_{it} + v_{ikt}x_{it}] - b_{kt} \right]^+ / b_{kt}$$

mede a proporção da sobrecarga do recurso k no período t . Sua vantagem é que ela é independente das unidades utilizadas para medir o recurso k . O numero $\text{Excesso}(t)$ é a soma destas K proporções e, portanto, é uma medida da sobrecarga total da capacidade disponível no período t . Para $t = T(1)+T, T(1)+T-1, \dots, 2$, porções da produção do período t são mudadas para períodos anteriores até que $\text{Excesso}(t) = 0$. Se, depois destas mudanças, tivermos

$$\sum_{i=1}^N [f_{ik1}y_{i1} + v_{ik1}x_{i1}] \leq b_{k1} \quad \text{para } k = 1, \dots, K,$$

então temos uma solução factível da F_{xyE}^{14} .

Seja $i \in \{1, \dots, N\}$, $t \in \{2, \dots, T\}$, $\tau = \max\{T(i)+1, \text{ o período da produção anterior do componente } i \text{ anterior ao período } t\}$, $t \in \{\tau, \dots, t-1\}$, e suponha que $\text{Excesso}(t) > 0$. A quantidade

$$M_{it} = \min \left\{ M_{i, t+1}, \min_{\substack{j \in P(i) \\ t-L(j) \leq T(j)+T}} \left\{ \left[E_{j, t-L(j)} - \sum_{m \in S(j)} r_{jm} E_{mt} \right] / r_{ji} \right\} \right\}$$

é a quantidade máxima da produção x_{it} do componente i no período t que as restrições inter-escalão discutidas acima permitem que seja

mudada para o período t . Note-se que a definição do M_{it} é recursiva e que $M_{it} = x_{it}$.

A primeira iteração $k=0$ do *loop* k considera a mudança da quantidade $q_{it0} = M_{it}$. Se mudarmos toda a produção x_{it} do período t para o período da produção anterior do componente, então economizamos o custo de preparação s_{it} . Obviamente tal mudança deve ser considerada, se τ for o período da produção anterior do componente i e o valor de $M_{i\tau}$ permitir. Esta mudança é considerada na primeira iteração $k=0$ do *loop* k da última iteração $t=\tau$ do *loop* t , se τ for o período da produção anterior do componente i e $M_{i\tau} = M_{it}$ ainda. Senão, então esta mudança pode ser desconsiderada, mas é mantida para não complicar demais a heurística.

Seja $k \in \{1, \dots, K\}$. Se mudarmos a quantidade

$$Q_{itk} = \left[\sum_{n|t \leq T(n)+T} [f_{nkt}y_{nt} + v_{nkt}x_{nt}] - b_{kt} \right]^+ / v_{ikt}$$

da produção x_{it} do componente i no período t , não somente será eliminada a sobrecarga do recurso k no período t , mas também não haverá folga de capacidade deste recurso. Portanto, se $Q_{itk} < M_{it}$, consideramos a mudança da quantidade $q_{itk} = Q_{itk}$ para o período t .

Portanto, para $k \in \{0\} \cup \{1, \dots, K | Q_{itk} < M_{it}\}$, pensamos em mudar a quantidade q_{itk} para o período t . Vale ressaltar que a quantidade q_{itk} é uma das várias opções sendo consideradas para ser mudada para o período t . Por sua vez, o período t é um de vários períodos alvo sendo considerados dentro do intervalo $\{\tau, \dots, t-1\}$, e, também por sua vez, o componente i é apenas um dos N componentes sendo considerados.

Seja $k \in \{0\} \cup \{1, \dots, K | Q_{itk} < M_{it}\}$. A razão $\text{Razão}(i, t, k) = \text{CustoAdicional}(i, t, k) / \text{Redução}(i, t, k)$ é o custo adicional por unidade da redução no valor de $\text{Excesso}(t)$ se a quantidade q_{itk} da

produção x_{it} do componente i for mudada do período t para o período t . Nosso critério é escolher aquele triplo (i,t,k) que minimiza o valor de $Razão(i,t,k)$. Para poupar cálculos, limitamos t ao intervalo $\{\tau, \dots, t-1\}$, onde $\tau = \max\{T(i)+1\}$, o período da produção anterior do componente i anterior ao período t . Também, note que o cálculo de $Razão(i,t,k) = \text{CustoAdicional}(i,t,k) / \text{Redução}(i,t,k)$ não é oneroso, uma vez que apenas os valores de x_{it} , x_{it} , e $E_{it}, \dots, E_{i,t-1}$ mudam (todos pela mesma quantidade, a saber q_{itk}).

Quando $L(i)=0$ para $i=1, \dots, N$, então para $t=2, \dots, T$, sempre existe um componente i cuja produção inteira x_{it} pode ser mudada do período t para um período anterior, a saber $i = \max\{i | x_{it} > 0\}$. Uma vez que $x_{jt}=0 \forall j \in P(i)$, sabemos que toda a produção x_{it} pode ser mudada do período t para o período $t-1$.

Porém, no caso de tempos não zero de produção de componentes, é possível que nenhuma parte da produção dos componentes possa ser mudada do período t para um período anterior, sem primeiro mudar a produção de períodos anteriores para períodos ainda mais anteriores. Por exemplo, considere uma estrutura de dois componentes com $L(1)=0$, $L(2)=1$, $r_{21}=1$, $T=4$, $d_{11}=0$, $d_{1t}=d_t > 0$ para $t=2, \dots, 5$, $d_{2t}=0$ para $t=1, \dots, 5$, e suponha que exista o seguinte plano de produção:

		Período				
		1	2	3	4	5
Componente	1	0	d_2	d_3	d_4	d_5
	2	d_2	d_3	d_4+d_5	0	0

Fig 3.4.2.1

Suponha que $\text{Excesso}(4) > 0$ e, portanto, que tenhamos que mudar uma

parte da produção do período 4 para períodos anteriores. O único componente ainda produzido no período 4 é o componente 1 com $x_{14} = d_4$. Porém, note que é impossível sequer mudar uma parte desta produção para o período 3 sem mudar também uma parte da produção $x_{23} = d_4 + d_5$ do componente 2 no período 3 para o período 2.

A impossibilidade de mudar qualquer parte da produção do período t para um período anterior, sem primeiro mudar parte da produção dos períodos anteriores, é revelada através da condição

$$M_{i,t-1} = 0 \quad \text{para } i \in \{1, \dots, N | x_{it} > 0\}$$

que implica que não existe $(i^*, t^*, k^*) = \arg \min \{ \text{Razão}(i, t, k) \}$. Para sair deste impasse, usamos a subrotina 'Mudar-Predecessor', descrita em baixo, que tenta mudar parte da produção dos períodos anteriores para períodos ainda mais anteriores.

A heurística pode não encontrar uma solução factível por três razões:

- (1) se $M_{i,t-1} = 0$ para $i \in \{1, \dots, N | T(i)+1 \leq t \leq T(i)+T, x_{it} > 0\}$ e o uso repetido da subrotina 'Mudar-Predecessor' não conseguir fazer $M_{i,t-1} > 0$ para $i \in \{1, \dots, N | T(i)+1 \leq t \leq T(i)+T, x_{it} > 0\}$.
- (2) se a capacidade de pelo menos um dos recursos k for muito restrita, a heurística pode não encontrar uma solução factível da F_{xyE}^{14} porque muita produção pode acabar sendo concentrada no período 1, causando assim infactibilidade.
- (3) mesmo se existir uma ou mais soluções factíveis, não existe nenhuma garantia que a heurística consiga encontrar uma delas.

A subrotina 'Mudar-Predecessor' funciona da seguinte maneira. Assumamos que os componentes são numerados tal que $i > j$ implica $|Q(i)| \leq |Q(j)|$, i.e., o componente j tem pelos menos o mesmo número

de componentes predecessores que o componente i (tal numeração é sempre possível). Agora, considere o componente $i = \max\{i | i=1, \dots, N; T(i)+1 \leq t \leq T(i)+T; x_{it} > 0\}$. Tal componente i sempre existe porque, senão, não haveria infactibilidade no período t , uma vez que $\{x_{it} | i=1, \dots, N; t \leq T(i)\}$ é factível por causa das aplicações anteriores do modelo na base de um horizonte rolante. Note que nenhum componente com produção positiva no período t tem menos componentes predecessores que o componente i . Agora, uma vez que $M_{i,t-1} = 0$, sabemos que

$$\sum_{m \in S(j)} r_{jm} E_{m,t-1} = E_{j,t-1-L(j)}$$

para (pelo menos) um $j \in P(i)$ tal que $t-1-L(j) \leq T(j)+T$. Além disso, $T(j) \leq T(i)-L(j)$ que, com $T(i)+1 \leq t$, implica $T(j)+1 \leq t-L(j)$, i.e., $x_{j,t-L(j)}$ não é pré-fixado. Também, se $t-L(j) \leq T(j)+T$, então $x_{j,t-L(j)}$ é uma variável do modelo, e temos

$$\begin{aligned} x_{j,t-L(j)} &= E_{j,t-L(j)} - E_{j,t-1-L(j)} + D_{j,t-L(j)} \\ &\geq \sum_{m \in S(j)} r_{jm} E_{mt} - E_{j,t-1-L(j)} + D_{j,t-L(j)} \\ &= \sum_{m \in S(j)} r_{jm} (E_{mt} - E_{m,t-1}) + D_{j,t-L(j)} \\ &= \sum_{m \in S(j)} r_{jm} (E_{mt} - E_{m,t-1} + D_{mt}) + d_{jt} \\ &= \sum_{m \in S(j)} r_{jm} x_{mt} + d_{jt} \\ &> 0 \quad \text{uma vez que } i \in S(j) \text{ e } x_{it} > 0 \end{aligned}$$

Portanto, existe produção positiva $x_{j,t-L(j)}$ do componente $j \in P(i)$ no período $t-L(j)$ que pode ser mudada para períodos anteriores ao

$t-L(j)$. Tentamos mudar para o período $t-L(j)-1$ a quantidade máxima da produção $x_{j,t-L(j)}$ permitida pelos estoques de escalão dos componentes predecessores imediatos do componente j . Se o estoque de um componente predecessor imediato i do componente j não permitir nenhuma mudança da produção $x_{j,t-L(j)}$, então tentamos mudar a quantidade máxima da produção $x_{i,t-L(j)-L(i)}$ do componente i .

Em outras palavras, descemos através da estrutura dos componentes predecessores até acharmos um componente i cuja produção x_{it} (ou parte dela) possa ser mudada para o período anterior $t-1 \geq T(i)+1$. Se for necessário, descemos até um componente predecessor primário i (a produção inteira x_{it} de um componente primária i sempre pode ser mudada para o período anterior $t-1$ se $t-1 \geq T(i)+1$, uma vez que tal componente não tem nenhum componente predecessor). Se $t-1 \leq T(i)$, então a produção $x_{i,t-1}$ do período anterior $t-1$ é pré-fixado e temos que reconhecer que não vamos conseguir mudar parte da produção do componente i para período $t-1$. Neste caso, repetimos a descida, começando com o componente $i^* = \max\{j | j=1, \dots, i-1; T(j)+1 \leq t \leq T(j)+T; x_{jt} > 0\}$. Se i^* não existir, então temos que reconhecer que não conseguimos achar uma solução factível de F_{xyE}^{14} .

Se conseguirmos mudar a produção de algum componente j , voltamos para o começo do loop i da heurística principal. Se no loop i ainda não conseguirmos mudar parte de algum x_{it} , então voltamos para a subrotina 'Mudar-Predecessor'. Pode ser que tenhamos que usar 'Mudar-Predecessor' muitas vezes antes de mudar parte de algum x_{it} ou reconhecer que não conseguimos achar uma solução factível de F_{xyE}^{14} .

A subrotina 'Mudar-Predecessor' é especificada a seguir:

Seja $i = \max\{i | i=1, \dots, N; T(i)+1 \leq t \leq T(i)+T; x_{it} > 0\}$; Seja $t = t$;

(*) Identifique um $j \in P(i)$ tal que $t-1-L(j) \leq T(j)+T$ e tal que

$$\sum_{m \in S(j)} r_{jm} E_{m,t-1} = E_{j,t-1-L(j)}; \quad (\text{existe uma vez que } M_{i,t-1}=0)$$

if $t-L(j)-1 \leq T(j)$ then begin $\{x(j,t-L(j)-1)$ é pré-fixado}

if $i^* = \max\{j | j=1, \dots, i-1; T(j)+1 \leq t \leq T(j)+T; x_{jt} > 0\}$ existir

then begin $i = i^*$; goto (*); end

else begin

não achamos uma solução factível de F_{xyE}^{14} ;

volte à heurística;

end {fim do else}

end {fim do if $t-L(j)-1 \leq T(j)$ }

Seja $M_{j,t-L(j)-1} = \min \left\{ x_{j,t-L(j)}, \right.$

$$\left. \min_{\substack{p \in P(j) \\ t-L(j)-1-L(p) \leq T(p)+T}} \left\{ \left[E_{p,t-L(j)-1-L(p)} - \sum_{m \in S(p)} r_{pm} E_{m,t-L(j)-1} \right] / r_{pj} \right\} \right\};$$

if $M_{j,t-L(j)-1} = 0$

then begin $i = j$; $t = t-L(j)$; goto (*); end

else begin

mude a produção $M_{j,t-L(j)-1}$ do componente j do período $t-L(j)$ para o período $t-L(j)-1$;

volte ao começo do loop i da heurística;

end {fim de $M_{j,t-L(j)-1} = 0$ }

Uma heurística alternativa, mas semelhante, muda a produção para períodos mais tardios:

Aplique o algoritmo WW sequencialmente, nos componentes $1, 2, 3, \dots, N$, para obter uma solução factível da F_{xyE}^{134} , como na seção 2.4.1;

continua na próxima página

for t = 1 to T(1)+T-1 do begin

$$\text{Excesso}(t) = \sum_{k=1}^K \left[\left(\sum_{i|t \leq T(i)+T} [f_{ikt} y_{it} + v_{ikt} x_{it}] - b_{kt} \right)^+ / b_{kt} \right];$$

onde a^+ é definido como $\max(0, a)$

while Excesso(t) > 0 do begin

for i = 1 to N do begin

if T(i)+1 ≤ t ≤ T(i)+T and $x_{it} > 0$ then begin

$$Q_{itk} = \left(\sum_{n|t \leq T(n)+T} [f_{nkt} y_{nt} + v_{nkt} x_{nt}] - b_{kt} \right)^+ / v_{ikt} \quad k=1, \dots, K;$$

$$M_{it} = x_{it};$$

τ = próximo período da produção do componente i, ou T(i)+T
se não houver mais produção depois do período t;

for $t = t+1$ to τ do begin

$$M_{it} = \min \left\{ M_{i,t-1}, E_{i,t-1} - \sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{j, L(i)+t-1} \right\};$$

if $M_{it} = 0$ then vá para a próxima iteração do loop i;

for k = 0 to K do begin

if k = 0 then $q_{itk} = M_{it}$

else if $Q_{itk} < M_{it}$ then $q_{itk} = Q_{itk}$
else vá à próxima iteração do loop k;

CustoAdicional(i, t, k) = custo adicional se a produção
 q_{itk} for mudada do período t para o período t ;

Redução(i, t, k) = redução do valor do Excesso(t) se x_{it}
for reduzida por q_{itk} ;

$$\text{Razão}(i, t, k) = \text{CustoAdicional}(i, t, k) / \text{Redução}(i, t, k);$$

end {fim do loop k}

end {fim do loop t}

end {fim de if T(i)+1 ≤ t ≤ T(i)+T and $x_{it} > 0$ }

end {fim do loop i}

$(i^*, t^*, k^*) = \arg \min \{ \text{Razão}(i, t, k) \}$ se existir; senão, então
pare (não consegue-se encontrar uma solução factível da F_{xyE}^{14});

Mude a produção q_{i^*, t^*, k^*} do período t para o período t^* ;

end {fim de while Excesso(t) > 0}

end {fim do loop t}

if $\sum_{i|t \leq T(i)+T} [f_{ikt} y_{it} + v_{ikt} x_{it}] \leq b_{kt}$ para $k \in \{1, \dots, K\}$
 $t = T(1)+T$

then temos uma solução factível da F_{xyE}^{14} else não temos tal solução.

Esta heurística, que tenta mudar a produção para frente para períodos mais tardios, é complementar à primeira heurística, que tenta mudar a produção para trás. As duas heurísticas tem o mesmo ponto de partida, a saber, a solução factível da F_{xyE}^{134} resultante da aplicação sequencial do algoritmo WW. Vamos usar as duas heurísticas paralelamente, porque é possível que uma não encontre uma solução factível procurando numa direção, mas a outra encontre uma procurando na direção oposta.

A segunda heurística pode não encontrar uma solução factível por três razões:

- (1) a mudança da produção para frente para períodos mais tardios é sempre limitada pela proibição de estoques negativos (*backlogs*). Esta proibição é efetuada através de

$$M_{it} = \min \left\{ M_{i,t-1}, E_{i,t-1} - \sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{j, L(i)+t-1} \right\}.$$

Assim, é possível que a produção de nenhum componente possa ser mudada para períodos mais tardios, e neste caso o algoritmo para sem ter conseguido encontrar uma solução factível de F_{xyE}^{14} . Por exemplo, numa solução lote-por-lote, temos $I_{it}=0$ e $E_{it}=0$ para todos i e t , o que implica $M_{it}=0$ para todos i e t , confirmando que tal solução não pode ser mudada para frente.

- (2) se a capacidade de pelo menos um dos recursos k for muito restrita, a heurística pode não encontrar uma solução factível da F_{xyE}^{14} porque muita produção pode acabar sendo concentrada no período $T(i)+T$, assim causando infactibilidade.
- (3) mesmo se existir uma ou mais soluções factíveis, não existe

nenhuma garantia que a heurística consiga encontrar uma delas.

Trigeiro, Thomas e McClain (1985) desenvolveram uma heurística para o problema *multi-item* (i.e., muitos itens de um único componente) com capacidade finita de apenas um recurso, a saber, horas regulares de mão de obra. De um modo semelhante a esta tese, os autores permitem que a preparação (*setup*) da produção de um lote de um item possa consumir o recurso finito. O algoritmo Wagner-Whitin é usado simultaneamente nos itens para obter uma solução não-capacitada que é nivelada para alcançar factibilidade quanto à capacidade. O processo de nivelamento primeiro muda produção para períodos anteriores, como na nossa primeira heurística acima. Se uma solução factível não for encontrada, a produção da solução resultante é mudada para períodos mais tardios. Se uma solução factível ainda não for encontrado, a produção é nivelada para trás, e depois para frente.

Nossas duas heurísticas usam um critério de custo que se assemelha ao do primeiro nivelamento de Trigeiro et al para escolher aquela parte da produção que vai mudar para outros períodos, a saber, a minimização do custo adicional por homem-hora de redução de mão de obra extra. Porém, existem várias diferenças entre a heurística de Trigeiro et al e as nossas. A mais importante é que temos que manter factibilidade inter-escalão na mudança de produção, uma dificuldade que Trigeiro et al não enfrentaram uma vez que eles trataram de muitos itens de apenas um componente. Tratamos um número geral de recursos limitantes, enquanto Trigeiro et al consideram apenas um recurso. Consideramos mais opções de mudança de produção. Nossas duas heurísticas são executadas simultaneamente a partir do mesmo ponto de partida, mas no método de Trigeiro et al

os nivelamentos são sequenciais, e somente acontecem se o nivelamento anterior não achar uma solução factível.

Trigeiro et al usam a Relaxação Lagrangeana para dualizar as restrições de capacidade e inclui-las na função objetivo, como na seção 3.3 acima. Assim eles obtém uma solução não-capacitada que leva em conta a capacidade finita através dos custos Lagrangeanos aplicados no problema não-capacitado. A solução não-capacitada também serve para fornecer um limite inferior. O nivelamento é aplicado com os custos Lagrangeanos, que, subsequentemente, são 'melhorados' através de otimização por subgradiente. Este ciclo é repetido entre 100 e 200 vezes. Nossas heurísticas não seguem esta abordagem iterativa porque testes computacionais iniciais mostraram que a solução factível encontrada na primeira iteração de otimização por subgradiente foi raramente melhorada nas iterações subsequentes.

No algoritmo Branch and Bound, usamos o menor dos limites superiores fornecidos pelos três seguintes procedimentos:

1. Aplicação sequencial do algoritmo Wagner-Whitin, seguida por mudanças da produção para períodos anteriores, isto é, a primeira heurística;
2. Aplicação sequencial do algoritmo Wagner-Whitin, seguida por mudanças da produção para períodos mais tardios, isto, é a segunda heurística;
3. Aplicação sequencial do algoritmo Wagner-Whitin, seguida por mudanças da produção para períodos anteriores, seguida por mudanças da produção para períodos mais tardios, isto é, a primeira heurística,

seguida pela parte de mudanças da segunda heurística;

O terceiro procedimento foi usado, além dos dois primeiros, por que testes computacionais iniciais mostraram que às vezes ele fornece o menor limite superior dos três procedimentos.

3.4 Os Experimentos Computacionais com Capacidade Finita

Agora testamos e comparamos computacionalmente as abordagens de cortes do tipo V1 e de Relaxação Lagrangeana, na resolução das formulações equivalentes F_{xy}^{14} e F_{xyE}^{14} com capacidade finita de produção.

A seção 3.4.1 descreve os dados utilizados nos experimentos computacionais. Depois, a seção 3.4.2 explica como foram pré-fixados numa maneira representativa os níveis dos estoques iniciais dos componentes e os níveis de produção pré-fixados.

A seção 3.4.3 descreve o projeto experimental utilizados nos experimentos computacionais com os cortes do tipo V1 e a Relaxação Lagrangeana, e analisa os resultados. Finalmente, a seção 3.4.4 testa e analisa a eficiência da heurística da seção 3.3 aplicada a estruturas de grande porte.

Como na seção 2.5, os programas computacionais foram escritos na linguagem C, e utilizaram o pacote MINOS versão 5 (Murtagh e Saunders, 1983), escrito em Fortran. Os testes foram rodados no sistema VAX Cluster da UNICAMP que é composto de duas máquinas VAX 11/785.

3.4.1 Os Dados

Produtos com $N = 10$ componentes (seção 3.4.3) e com $N = 40$ componentes (seção 3.4.4) foram utilizados nos experimentos. De novo, a estrutura do produto foi um fator variável. O horizonte de planejamento foi $T = 12$ períodos e o número de recursos foi $K = 2$.

Como na seção 2.5.4, os custos s_{it} para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{T(i)+1, \dots, T(i)+T\}$ foram aleatoriamente sorteados de uma das seguintes distribuições uniformes:

$U(50, 950)$ (custos altos)

$U(5, 95)$ (custos baixos).

Como na seção 2.5.1, os custos c_{it} para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{T(i)+1, \dots, T(i)+T\}$ foram aleatoriamente sorteados da distribuição uniforme $U(1.5, 2.0)$, as demandas d_{1t} para $t \in \{T(1)+1, \dots, T(1)+T\}$ da $U(0, 180)$, e as demandas d_{it} para $i \in \{2, \dots, N\}$ e $t \in \{T(i)+1, \dots, T(i)+T\}$ da $U(0, 18)$. Sem perda de generalidade, $r_{ij} = 1$ para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $j \in S(i)$.

Os custos h_{it} para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{T(i)+1, \dots, T(i)+T\}$ foram gerados na maneira descrita na seção 2.5.1.

As quantidades f_{ikt} para $i \in \{1, \dots, N\}$, $k \in \{1, 2\}$ e $t \in \{1, \dots, T(i)+T\}$ foram aleatoriamente sorteadas da distribuição uniforme $U(150, 250)$ para $k=1$ e da $U(200, 300)$ para $k=2$. As quantidades unitárias v_{ikt} para $i \in \{1, \dots, N\}$, $k \in \{1, 2\}$ e $t \in \{1, \dots, T(i)+T\}$ foram aleatoriamente sorteadas da distribuição uniforme $U(1.5, 2.5)$ para $k=1$ e da $U(2.0, 3.0)$ para $k=2$.

Os outros dados são descritos nas seções apropriadas.

3.4.2 A Pré-Fixação dos Estoques Iniciais e da Produção

A produção pré-fixada $\{x_{it} | i=1, \dots, N; t=1, \dots, T(i)\}$ pode consumir parte da disponibilidade b_{kt} de um recurso $k \in \{1, \dots, K\}$ num período $t \in \{1, \dots, T(1)+T\}$ (veja seção 1.4). Portanto, é importante levar isso em conta nos nossos experimentos computacionais.

Os estoques iniciais dos componentes:

$$I_{it} \quad i = 1, \dots, N \text{ e } t = L(i), \dots, T(i)+L(i)$$

e os níveis de produção pré-fixados:

$$x_{it} \quad i = 1, \dots, N \text{ e } t = 1, \dots, T(i)$$

são determinados da seguinte maneira.

Primeiro, geramos valores de I_{it} para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{L(i), \dots, T(i)+L(i)\}$ e de x_{it} para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{1, \dots, T(i)\}$ na maneira descrita na seção 2.5.2. Sabemos os valores de y_{it} para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{1, \dots, T(i)\}$ através da relação

$$x_{it}=0 \Rightarrow y_{it}=0$$

$$x_{it}>0 \Rightarrow y_{it}=1$$

para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{1, \dots, T(i)\}$.

Em seguida, forçamos que os valores x_{it} e y_{it} para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{1, \dots, T(i)\}$ satisfaçam as restrições de capacidade de produção

$$\sum_{i|t \leq T(i)} [f_{ikt}y_{it} + v_{ikt}x_{it}] \leq b_{kt} \quad \begin{matrix} k = 1, \dots, K \\ t = 1, \dots, T(1) \end{matrix}$$

da seguinte maneira.

Tentamos reduzir qualquer produção pré-fixada excessiva num período $t \in \{1, \dots, T(1)\}$ através da eliminação da produção x_{Nt} do componente N (se for pré-fixada e positiva) e sua inclusão nos

estoques iniciais $I_{N,L(N)}, \dots, I_{N,L(N)+t-1}$. Se a eliminação de x_{Nt} não for suficiente para ficar dentro de capacidade, então eliminamos a produção $x_{N-1,t}$ do componente N-1 (se for pré-fixada e positiva) e a incluímos nos estoques iniciais $I_{N-1,L(N-1)}, \dots, I_{N-1,L(N-1)+t-1}$. E assim por diante até conseguirmos eliminar a produção pré-fixada excessiva no período t.

Em termos formais, usamos o seguinte procedimento;

```

for t = T(1) downto 1 do begin
  if  $\sum_{i|t \leq T(i)} [f_{ikt}y_{it} + v_{ikt}x_{it}] > b_{kt}$  por algum  $k \in \{1, \dots, K\}$  then
    begin
      for i = N downto 1 do begin
        if  $t \leq T(i)$  and  $x_{it} > 0$  then begin
          for  $\tau = 1$  to t do begin
             $I_{i,\tau+L(i)-1} = I_{i,\tau+L(i)-1} + x_{it}$ ;
          end {fim do loop  $\tau$ }
           $x_{it} = 0$ ;
          if  $\sum_{i|t \leq T(i)} [f_{ikt}y_{it} + v_{ikt}x_{it}] \leq b_{kt} \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}$ 
            then vá para a próxima iteração do loop t;
          end {fim de if  $t \leq T(i)$  and  $x_{it} > 0$ }
        end {fim do loop i}
      end {fim do if ...}
    end {fim do loop t}
  end {fim do loop t}

```

Nesta mudança de produção, nota-se que a factibilidade inter-escala é mantida.

Assim, obtemos estoques iniciais

$$I_{it} \quad i = 1, \dots, N \text{ e } t = L(i), \dots, T(i)+L(i)$$

e níveis de produção pré-fixados:

$$x_{it} \quad i = 1, \dots, N \text{ e } t = 1, \dots, T(i),$$

que satisfazem as restrições de capacidade de produção

$$\sum_{i|t \leq T(i)} [f_{ikt}y_{it} + v_{ikt}x_{it}] \leq b_{kt} \quad \begin{array}{l} k = 1, \dots, K \\ t = 1, \dots, T(1) \end{array}$$

3.4.3 A Análise das Abordagens Ótimas

O projeto computacional procurou avaliar a força dos cortes do tipo V1 em comparação com a abordagem de Relaxação Lagrangeana, na presença de capacidade finita. Os experimentos foram feitos com produtos de $N = 10$ componentes sobre um horizonte de planejamento de $T = 12$ períodos e com $K = 2$ recursos.

As disponibilidades fixas b_{kt} para $k \in \{1, 2\}$ e $t \in \{1, \dots, T(1) + T\}$ foram aleatoriamente sorteados da distribuição uniforme $U(4550, 5000)$ para $k=1$ e da $U(6500, 7500)$ para $k=2$. Tais disponibilidades, em combinação com os dados já definidos, representam uma capacidade apertada na presença da estrutura geral utilizada nos experimentos descritos abaixo. Com a estrutura geral, foram necessárias várias tentativas, em geral, antes de chegar a uma rodada para qual a heurística achou uma solução factível no nó raiz. Entre tais tentativas, existiam rodadas para as quais a heurística achou uma primeira solução factível somente depois do nó raiz (mas logo após poucos nós, em muitos casos). Porém, mesmo se o problema for factível, não há nenhuma garantia que uma solução factível pode ser encontrada até o nó 500 da árvore Branch and Bound.

Os tempos de produção $L(i)$ para $i \in \{1, \dots, N\}$ foram aleatoriamente sorteados do conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$. Os outros dados são descritos na seção 3.4.1.

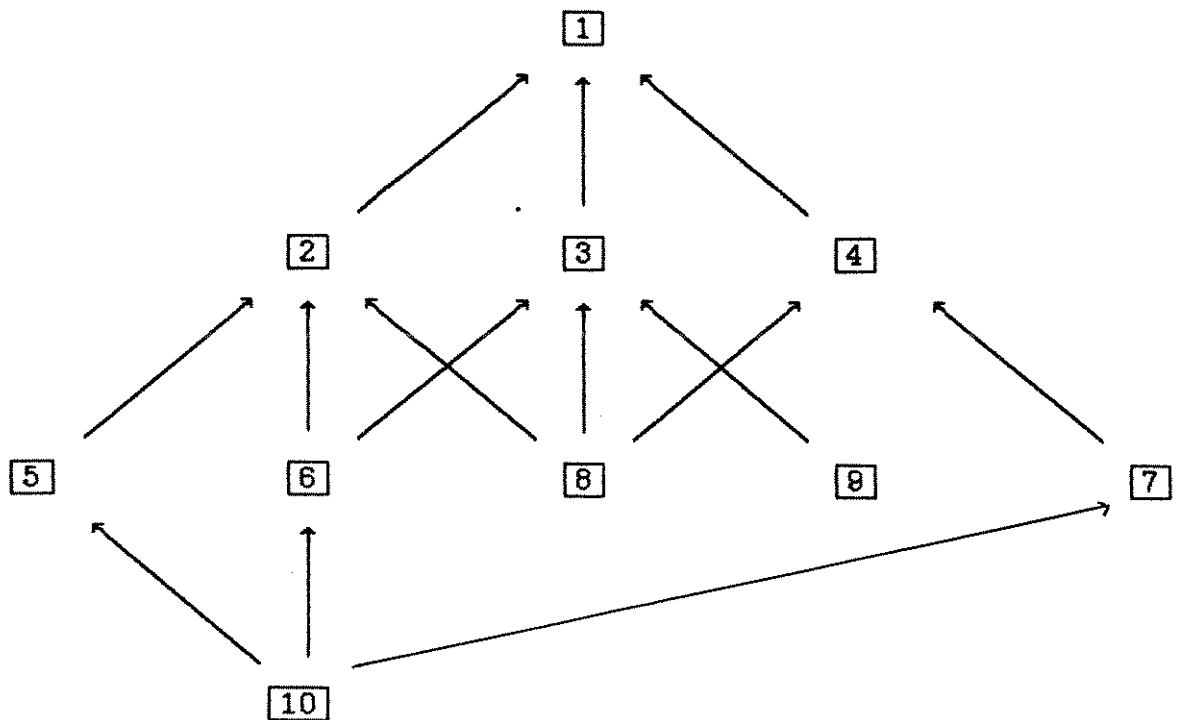
Os efeitos dos seguintes fatores foram avaliados:

- A. O método usado para calcular um limite inferior em cada nó da árvore Branch-and-Bound. Dois métodos diferentes foram utilizados:

1. A solução do $PL^n(F_{xyI}^{14})$ com todos os n cortes do tipo V1 identificados pelo algoritmo de separação da seção 2.3 (isto é, não restam cortes que excluam a solução ótima de $PL^n(F_{xyI}^{14})$);
2. Relaxação Langrangeana aplicada à formulação com capacidade finita, F_{xyE}^{14} , como descrita na seção 3.3, com 500 iterações de otimização por subgradiente no nó raiz da árvore Branch and Bound, e 50 iterações nos outros nós.

B. A estrutura do item. As mesmas duas estruturas da seção 2.5.4 foram utilizados:

1. A estrutura mais plana possível, a saber,
 $S(i) = \{1\}$ para $i = 2, \dots, 10$.
2. Uma típica estrutura geral, a saber,
 $S(2) = \{1\}, S(3) = \{1\}, S(4) = \{1\}, S(5) = \{2\},$
 $S(6) = \{2, 3\}, S(7) = \{4\}, S(8) = \{2, 3, 4\}, S(9) = \{3\},$ e
 $S(10) = \{5, 6, 7\}.$



C. O tamanho médio dos custos de preparação s_{it} em relação aos custos de estocagem de escalão e_{it} . Como na seção 2.5.4, os custos s_{it} foram aleatoriamente sorteados das seguintes distribuições:

1. $U(50, 950)$ (custos altos)
2. $U(5, 95)$ (custos baixos).

Para avaliar os efeitos dos três fatores:

- A. O método usado para calcular um limite inferior,
- B. A estrutura do item,
- C. Tamanho médio dos custos de preparação s_{it} ,

usamos um projeto experimental fatorial 2^3 , com duas replicações, isto é, rodando dois problemas para cada uma das 8 combinações dos três fatores.

Para as rodadas com cortes do tipo V1, a Tabela 3.4.3.1 mostra

o número total n de cortes identificados pelo algoritmo de separação da seção 2.3. Para comparação, a tabela também mostra o número de cortes identificados nos experimentos com capacidade infinita da seção 2.5.4

Tabela 3.4.3.1
Número de Cortes Identificados

	Capacidade Finita		Capacidade Infinita	
Custos Baixos e Estrutura Plana	220	230	184	212
Custos Baixos e Estrutura Geral	247	258	192	221
Custos Altos e Estrutura Plana	75	83	70	51
Custos Altos e Estrutura Geral	192	90	171	157

Como na seção 2.5.4, vemos que, com capacidade finita,

menos cortes são necessários quando há custos altos de preparação,

menos cortes são necessários na presença de uma estrutura plana,

mas, em contraste com a seção 2.5.4, não há nenhuma evidência de uma interação entre os dois efeitos 'custos' e 'estrutura' no sentido que muito menos cortes seriam necessários quando há custos altos de preparação na presença de uma estrutura plana. Vemos também que talvez, em geral, menos cortes sejam necessários quando há uma capacidade infinita de produção.

Agora consideremos a força dos cortes em comparação com a Relaxação Lagrangeana, e a influência dos custos de preparação e da estrutura do produto.

Como na seção 2.5.4, não foi possível prosseguir até uma solução ótima. A busca BB foi sempre terminada prematuramente depois de percorrer 500 nós da árvore BB. Cada busca que utilizou os cortes exigiu entre 9 e 23 horas (sic) de tempo de CPU e entre 45 e 96 horas (sic) de tempo gasto (*elapsed time*) para rodar, dependendo do número de cortes. Os comentários sobre software feitos na seção 2.5.4 são pertinentes aqui também.

Cada busca que utilizou a Relaxação Lagrangeana exigiu entre 45 e 60 minutos de tempo de CPU e entre 1.5 e 14 horas de tempo gasto (*elapsed time*) para rodar.

Como seria esperado dadas as restrições de capacidade, vemos que as buscas geralmente levaram mais tempo de CPU do que na seção 2.5.4.

Foram adotadas as mesmas três garantias de precisão como na seção 2.5.4, a saber,

$$GP1 = \frac{\text{Solução no nó raiz} \times 100\%}{\text{Limite Inferior no nó raiz}} - 100\%$$

$$GP2 = \frac{\text{Solução no nó raiz} \times 100\%}{\text{Menor Limite Inferior dos nós ativos}} - 100\%$$

$$GP3 = \frac{\text{Incumbente no nó 500} \times 100\%}{\text{Menor Limite Inferior dos nós ativos}} - 100\%$$

A tabela 3.4.3.2 mostra os resultados computacionais das 16 rodadas. Cada uma das 16 células da tabela mostra as garantias GP1, GP2 e GP3.

Tabela 3.4.3.2

Cortes e Relaxação Lagrangeana com Capacidade Finita

GP1 GP2 GP3	Relaxação Lin. com Cortes V1		Relaxação Lagrangeana	
Custos Baixos e Estrutura Plana	2.01	1.46	1.35	1.36
	1.65	1.07	1.26	1.32
	1.28	1.03	0.30	1.17
Custos Baixos e Estrutura Geral	11.13	4.89	4.72	14.17
	10.87	4.59	4.60	13.66
	6.67	3.07	3.47	9.59
Custos Altos e Estrutura Plana	10.80	7.42	9.90	10.46
	8.35	6.34	8.12	9.37
	4.70	4.13	7.84	7.67
Custos Altos e Estrutura Geral	12.67	18.15	36.50	29.00
	12.12	18.83	34.34	27.08
	5.93	15.30	19.64	15.21

Analisando a Tabela 3.4.3.2, vemos que em geral os cortes e a Relaxação Lagrangeana resultaram numa qualidade das três garantias, GP1, GP2 e GP3,

 muito melhor na presença de custos baixos do que na
 presença de custos altos

 muito melhor na presença da estrutura plana do que na
 presença da estrutura geral

permanecendo iguais os outros fatores.

Na presença de custos baixos e da estrutura plana, os cortes e a Relaxação Lagrangeana resultaram numa qualidade muito boa das três garantias, GP1, GP2 e GP3. Há evidência de que talvez a Relaxação Lagrangeana resulte em garantias melhores.

Na presença de custos baixos e da estrutura geral, os cortes e a Relaxação Lagrangeana resultaram numa qualidade média das três garantias. Não há nenhuma evidência de que os cortes resultem em garantias melhores do que a Relaxação Lagrangeana ou vice-versa.

Na presença de custos altos e da estrutura plana, os cortes e a Relaxação Lagrangeana também resultaram numa qualidade média das três garantias. Há evidência de que o uso dos cortes resulta em garantias GP2 e GP3 significativamente melhores do que com o uso da Relaxação Lagrangeana.

Porém, na presença dos custos altos e da estrutura geral, os cortes e a Relaxação Lagrangeana resultaram numa qualidade medíocre das três garantias. Há evidência de que os cortes resultam em garantias melhores do que a Relaxação Lagrangeana.

Notamos que a garantia GP2 foi sempre estritamente melhor do que a garantia GP1. Como na situação de capacidade infinita de produção da seção 2.5.4, o melhoramento parece ser levemente mais acentuado com o uso de cortes, e na presença da estrutura plana.

A diferença entre as garantias GP2 e GP3 é uma medida do melhoramento do incumbente durante os 500 nós da busca Branch and Bound. As vezes, o melhoramento foi espetacular (por exemplo, com a Relaxação Lagrangeana na presença dos custos altos e a estrutura geral), mas não há nenhuma evidência de que os fatores mencionados acima influem sobre o grau de melhoramento.

Como comentado na seção 2.5.4, mais experimentos seriam desejáveis para comparar melhor o método de cortes com o de Relaxação Lagrangeana. Os comentários feitos naquela seção sobre a comparação de tempo entre os dois métodos são pertinentes aqui também..

Veja Clark e Armentano (1990c) para outros resultados computacionais.

3.4.4 A Análise da Heurística

Nesta seção, testamos a eficiência da heurística da seção 3.3 aplicada a estruturas de grande porte.

O projeto computacional procurou avaliar a força da heurística sob circunstâncias diferentes. Os experimentos foram feitos com produtos de $N = 40$ componentes sobre um horizonte de planejamento de $T = 12$ períodos e com $K = 2$ recursos.

Os tempos de produção $L(i)$ para $i \in \{1, \dots, N\}$ foram aleatoriamente sorteados do conjunto $\{0, 1\}$. Os outros dados são descritos na seção 3.4.1.

Os efeitos dos seguintes fatores foram avaliados:

A. A estrutura do item. As duas seguintes estruturas com $N = 40$ componentes foram utilizados:

1. A estrutura mais plana possível, i.e., $S(i) = \{1\}$ para $i = 2, \dots, 40$.
2. Uma típica estrutura geral de grande porte, de Afentakis e Gavish (1986), com os componentes numerados tal que $i > j$ implica $|Q(i)| \leq |Q(j)|$, a saber:

$S(2) = \{1\}$, $S(3) = \{1\}$, $S(4) = \{1\}$, $S(5) = \{2\}$, $S(6) = \{4\}$,
 $S(7) = \{4\}$, $S(8) = \{3\}$, $S(9) = \{2, 3\}$, $S(10) = \{6\}$, $S(11) = \{9\}$,
 $S(12) = \{5\}$, $S(13) = \{8\}$, $S(14) = \{6, 7\}$, $S(15) = \{10\}$,
 $S(16) = \{10, 14\}$, $S(17) = \{7\}$, $S(18) = \{8\}$, $S(19) = \{8\}$,
 $S(20) = \{11, 12\}$, $S(21) = \{11\}$, $S(22) = \{13\}$, $S(23) = \{7, 12\}$,
 $S(24) = \{13, 18, 19\}$, $S(25) = \{15\}$, $S(26) = \{20\}$, $S(27) = \{21\}$,
 $S(28) = \{22\}$, $S(29) = \{15, 16\}$, $S(30) = \{16, 17\}$,
 $S(31) = \{17, 23\}$, $S(32) = \{24\}$, $S(33) = \{25\}$, $S(34) = \{25, 29\}$,
 $S(35) = \{30\}$, $S(36) = \{26, 31\}$, $S(37) = \{26, 27\}$, $S(38) = \{27\}$,
 $S(39) = \{2, 32\}$, $S(40) = \{28\}$.

B. O tamanho médio dos custos de preparação s_{it} em relação aos

custos de estocagem de escalão e_{it} . Como nas seções 2.5.4 e 3.4.3, os custos s_{it} foram aleatoriamente sorteados das seguintes distribuições:

1. $U(50, 950)$ (custos altos)
2. $U(5, 95)$ (custos baixos).

C. A capacidade de produção na forma das disponibilidades fixas b_{kt} para $k \in \{1, 2\}$ e $t \in \{1, \dots, T(1) + T\}$:

1. As disponibilidades fixas $b_{kt} = \infty$ para $k \in \{1, 2\}$ e $t \in \{1, \dots, T(1) + T\}$, representando capacidade infinita.
2. As disponibilidades fixas b_{1t} e b_{2t} para $t \in \{1, \dots, T(1) + T\}$ foram aleatoriamente sorteados de duas distribuições uniformes que dependem da combinação de estrutura e custos, como mostrado mais adiante. A distribuição escolhida foi aquela que, durante testes iniciais, representou a capacidade mais apertada para qual a heurística ainda achava soluções factíveis à F_{xyE}^{14} . Estas distribuições são mostradas na Tabela 3.4.4.1.

Na Tabela 3.4.4.1, vemos que varia a capacidade mais apertada para qual a heurística achou uma solução factível à F_{xyE}^{14} . Notamos que

a capacidade mais apertada na presença da estrutura geral é mais de que o dobro daquela na presença da estrutura plana.

a capacidade mais apertada com os custos baixos de preparação é, em média, 50% a mais daquela com os custos altos de preparação.

há pouca evidência de uma interação entre os dois efeitos 'custos' e 'estrutura'.

Tabela 3.4.4.1

As capacidades mais apertadas

para quais a heurística achou uma solução factível à F_{xyE}^{14}

b_{1t} b_{2t}	Custos Baixos	Custos Altos
Estrutura Plana	U(10500,11000) U(12500,13000)	U(7000,7500) U(8000,9500)
Estrutura Geral	U(26000,27000) U(27000,28000)	U(15000,16000) U(20000,21000)

Para avaliar os efeitos dos três fatores:

- A. A estrutura do item,
- B. O tamanho médio dos custos de preparação s_{it} ,
- C. A capacidade de produção,

foi utilizado um projeto experimental fatorial 2^3 , com duas

replicações, no sentido que, para cada uma das 8 combinações dos três fatores, foram registradas duas rodadas para as quais a heurística achou uma solução factível. No caso das 4 combinações com capacidade finita apertada, em geral foram necessárias muitas tentativas antes de chegar às duas rodadas para as quais a heurística achou uma solução factível.

Tabela 3.4.4.2
O Desempenho da Heurística

GP1 GP1		Capacidade Infinita		Capacidade Finita Apertada	
Custos Baixos e Estrutura Plana		0.09	0.95	3.60	3.26
Custos Baixos e Estrutura Geral		2.54	0.66	2.28	7.42
Custos Altos e Estrutura Plana		11.47	25.38	25.58	30.30
Custos Altos e Estrutura Geral		24.05	27.56	56.83	58.79

Tabela 3.4.4.2 mostra os resultados computacionais das 16 rodadas. Cada uma das 8 células da tabela mostra duas porcentagens,

os resultados das duas rodadas da célula. A porcentagem é a garantia de precisão da solução encontrada pelo heurística, (equivalente à garantia GP1 das seções 2.5.4 e 3.4.3) calculada;

$$\text{Garantia de Precisão} = \frac{\text{Solução} \times 100\%}{\text{Limite Inferior}} - 100\%$$

onde o limite inferior é aquele obtido através de Relaxação Lagrangeana depois de 1000 iterações de otimização por subgradiente, como descrito na seção 3.2.

A Relaxação Lagrangeana foi utilizada porque ela é mais rápida que adicionar cortes. As 1000 iterações de otimização por subgradiente usaram cerca de 6 minutos de CPU. A heurística em si mesma rodou em questão de segundos.

Analisando a Tabela 3.4.4.2, vemos que a garantia de precisão é

melhor na presença de capacidade infinita do que na presença de capacidade finita apertada,

muito melhor na presença dos custos baixos do que na presença dos custos altos,

melhor na presença da estrutura plana do que na presença da estrutura geral.

Os resultados com capacidade infinita são consistentes, em termos de ordem de grandeza relativa, com os valores de GP1 nas colunas de Relaxação Lagrangeana da Tabela 2.5.4.2. Porém, no caso dos custos altos, vemos que as garantias são piores para uma

estrutura de $N=40$ componentes do que para uma estrutura de $N=10$ componentes, especialmente na presença das estruturas gerais.

Considerando agora os resultados de capacidade finita apertada, notamos que os valores em células correspondentes da Tabela 3.4.4.2 e das colunas de Relaxação Lagrangeana da Tabela 3.4.3.2 são bem diferentes. No caso das estruturas planas, os resultados da Tabela 3.4.4.1 sugerem que a capacidade finita utilizada nos experimentos da Tabela 3.4.3.2 não era apertada, o que pode explicar as piores garantias da Tabela 3.4.4.2. No caso de estruturas gerais com custos baixos, os valores são da mesma ordem de grandeza. No caso de estruturas gerais com custos altos, os valores são ruins, especialmente com a estrutura de $N=40$ componentes.

Porém, a grande vantagem da heurística é a sua rapidez: como foi mencionado acima, ela se processa em questão de segundos.

CAPÍTULO 4

CONCLUSÕES

Esta tese considerou a formulação e a solução do problema de dimensionamento de lotes em sistemas multi-estágios de manufatura, para uso com um horizonte rolante de planejamento em sistemas do tipo MRP.

Um modelo adequado foi desenvolvido para representar a sincronização da produção dos componentes de um produto com uma estrutura geral e com tempo não-zero de reposição dos componentes. Uma formulação equivalente em termos de estoque de escalão foi desenvolvida. Foram incorporadas à formulação restrições de capacidade finita de produção que permitem a representação de tempo não zero de preparação de lotes.

Cortes que limitam a envoltória convexa do problema foram identificados e, pelo menos com tempo zero de reposição e capacidade infinita, foram mostrados ser de alta dimensão. Um algoritmo de separação foi desenvolvido para, iterativamente, escolher e adicionar cortes fortes para a formulação do problema. A solução da relaxação linear com os cortes adicionados fornece um limite inferior ao problema. Além disso, foi elaborada uma maneira alternativa, e computacionalmente mais rápida, de fornecer um limite inferior através da Relaxação Lagrangeana.

Uma heurística foi desenvolvida para achar uma solução factível na presença de capacidade finita de produção. A incorporação de tempo não-zero de reposição de componentes e de tempo não zero de preparação de lotes dificulta a tarefa da heurística.

As duas abordagens de fornecer limites inferiores e a heurística foram incorporadas num algoritmo de Branch and Bound. Experimentos computacionais com estrutura de 10 componentes comprovaram a superioridade das duas abordagens em relação ao método clássico de fornecer limites inferiores através de relaxação linear simples. A garantia de precisão da solução resultante depois de percorrer 500 nós de busca Branch and Bound variou, sendo em geral melhor com custos baixos e com estruturas planas. A garantia de precisão variou entre as duas abordagens dependendo dos custos, da estrutura e da capacidade numa maneira mais complexa

Experimentos computacionais com estruturas de 40 componentes e um limite inferior fornecido através da Relaxação Lagrangeana mostraram que a garantia de precisão da heurística é melhor com custos baixos, na presença de estruturas planas, e quando a capacidade de produção não é apertada.

Futuras direções de pesquisa podem incluir as seguintes:

rodar os experimentos computacionais da seção 2.5.4 e 3.4.3 numa máquina muito mais veloz que um VAX e com software especializado de Branch and Bound para chegar até uma solução ótima, e assim julgar melhor o desempenho das duas abordagens e da heurística;

investigar a eficiência computacional de abandonar os cortes não-ativos nos nós da árvore Branch-and-Bound e/ou de identificar novos cortes nos nós.

em lugar de usar a heurística da seção 2.4.1, usar a heurística do Afentakis (1987) para capacidade infinita

como um ponto de partida para a heurística da seção 3.3 para ver se o desempenho melhora, especialmente com custos altos de preparação;

generalizar as duas abordagens (dos cortes e da Relaxação Lagrangeana) e a heurística para problemas multi-estágios com múltiplos itens finais que compartilham componentes;

combinar as duas abordagens através da dualização dos cortes na Relaxação Lagrangeana. Desta maneira evitaríamos os programas lineares nos nós 2,3,4,... da árvore Branch and Bound. Porém, será que melhorariam os limites inferiores obtidos através da Relaxação Lagrangeana.?

descobrir outras classes de cortes de alta dimensão do problema.

APÊNDICE A

Proposição A1. No caso de uma estrutura geral com tempo zero de reposição de componentes, seja

$$E_{it} = I_{it} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{jt} \quad \text{e} \quad e_{it} = h_{it} - \sum_{j \in P(i)} r_{ji} h_{jt}$$

Então, para qualquer $t \in \{1, \dots, T\}$,

$$\sum_{i=1}^N h_{it} I_{it} = \sum_{i=1}^N e_{it} E_{it}.$$

Prova. Primeiro, fixe-se $t \in \{1, \dots, T\}$ e, para simplificar a notação, seja $I_i = I_{it}$, $h_i = h_{it}$, $E_i = E_{it}$ e $e_i = e_{it}$ para $i \in \{1, \dots, N\}$. Devemos demonstrar que

$$\sum_{i=1}^N h_i I_i = \sum_{i=1}^N e_i E_i.$$

Agora

$$\sum_{i=1}^N h_i I_i = \sum_{i=1}^N h_i \left(E_i - \sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_j \right) \quad \text{da definição de } E_{it} \text{ acima}$$

$$= \sum_{i=1}^N h_i E_i - \sum_{i=2}^N h_i \sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_j$$

$$= \sum_{i=1}^N h_i E_i - \sum_{j | P(j) \neq \emptyset} \sum_{i \in P(j)} r_{ij} h_i E_j$$

$$= \sum_{i=1}^N h_i E_i - \sum_{j | P(j) \neq \emptyset} (h_j - e_j) E_j$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^N h_i E_i + \sum_{j|P(j) \neq \emptyset} e_j E_j - \sum_{j|P(j) \neq \emptyset} h_j E_j \\
&= \sum_{j|P(j) = \emptyset} h_j E_j + \sum_{j|P(j) \neq \emptyset} e_j E_j \\
&= \sum_{j|P(j) = \emptyset} e_j E_j + \sum_{j|P(j) \neq \emptyset} e_j E_j \quad \text{porque } e_j = h_j \quad \forall j|P(j) = \emptyset \\
&= \sum_{i=1}^N e_i E_i
\end{aligned}$$

Proposição A2. No caso de uma estrutura de montagem com tempo não-zero de reposição de componentes, seja

$$E_{it} = I_{i,t+L(i)} + r_{i,s(i)} E_{s(i),t+L(i)} \quad e$$

$$e_{it} = h_{i,t+L(i)} - \sum_{j \in P(i)} r_{ji} h_{jt}$$

$$\text{Então, } \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} h_{i,t+L(i)} I_{i,t+L(i)} = \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} e_{it} E_{it}.$$

Prova.

$$\sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} h_{i,t+L(i)} I_{i,t+L(i)}$$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} h_{i,t+L(i)} \left[E_{it} - r_{i,s(i)} E_{s(i),t+L(i)} \right]$$

da definição de E_{it} acima

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} h_{i,t+L(i)} E_{it}$$

$$- \sum_{i=2}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} h_{i,t+L(i)} r_{i,s(i)} E_{s(i),t+L(i)} .$$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} h_{i,t+L(i)} E_{it}$$

$$- \sum_{j|P(j) \neq \emptyset} \sum_{i \in P(j)} \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} h_{i,t+L(i)} r_{ij} E_{j,t+L(i)}$$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} h_{i,t+L(i)} E_{it} - \sum_{j|P(j) \neq \emptyset} \sum_{i \in P(j)} \sum_{t=T(j)+1}^{T(j)+T} h_{it} r_{ij} E_{jt}$$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} h_{i,t+L(i)} E_{it}$$

$$- \sum_{j|P(j) \neq \emptyset} \sum_{t=T(j)+1}^{T(j)+T} E_{jt} (h_{j,t+L(j)} - e_{jt})$$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} h_{i,t+L(i)} E_{it}$$

$$+ \sum_{j|P(j) \neq \emptyset} \left[\sum_{t=T(j)+1}^{T(j)+T} e_{jt} E_{jt} - \sum_{t=T(j)+1}^{T(j)+T} h_{j,t+L(j)} E_{jt} \right]$$

$$= \sum_{j|P(j) = \emptyset} \sum_{t=T(j)+1}^{T(j)+T} h_{j,t+L(j)} E_{jt} + \sum_{j|P(j) \neq \emptyset} \sum_{t=T(j)+1}^{T(j)+T} e_{jt} E_{jt}$$

$$= \sum_{j|P(j) = \emptyset} \sum_{t=T(j)+1}^{T(j)+T} e_{jt} E_{jt} + \sum_{j|P(j) \neq \emptyset} \sum_{t=T(j)+1}^{T(j)+T} e_{jt} E_{jt}$$

uma vez que $e_{jt} = h_{j,t+L(j)} \quad \forall j|P(j) = \emptyset$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} e_{it} E_{it}.$$

Proposição A3. No caso de uma estrutura geral com tempo não-zero de reposição de componentes, seja

$$E_{it} = I_{i,t+L(i)} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{j,t+L(i)} \quad e$$

$$e_{it} = h_{i,t+L(i)} - \sum_{j \in P(i)} r_{ji} h_{jt}$$

onde $h_{i,t+L(i)} = 0$ para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{T(i)+1, \dots, T(i)+T\}$. Então

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} h_{i,t+L(i)} I_{i,t+L(i)} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} e_{it} E_{it} + \sum_{i|P(i) \neq \emptyset} \sum_{t=1}^{T(i)} e_{it} E_{it}. \end{aligned}$$

Prova.

$$\sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} h_{i,t+L(i)} I_{i,t+L(i)}$$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} h_{i,t+L(i)} \left(E_{it} - \sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{j,t+L(i)} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} h_{i,t+L(i)} E_{it}$$

$$- \sum_{i=2}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} h_{i,t+L(i)} \sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{j,t+L(i)}$$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} h_{i,t+L(i)} E_{it} \\ - \sum_{j|P(j) \neq \emptyset} \sum_{i \in P(j)} r_{ij} \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} h_{i,t+L(i)} E_{j,t+L(i)}$$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} h_{i,t+L(i)} E_{it} \\ - \sum_{j|P(j) \neq \emptyset} \sum_{i \in P(j)} r_{ij} \sum_{t=T(i)+L(i)+1}^{T(i)+L(i)+T} h_{it} E_{jt}$$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} h_{i,t+L(i)} E_{it} \\ - \sum_{j|P(j) \neq \emptyset} \sum_{i \in P(j)} r_{ij} \sum_{t=1}^{T(j)+T} h_{it} E_{jt}$$

uma vez que $T(i)+L(i) \leq T(j)$ para $i \in P(j)$,
e $h_{it} = 0$ para $t \leq T(i)+L(i)$ e $t > T(i)+L(i)+T$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} h_{i,t+L(i)} E_{it} \\ - \sum_{j|P(j) \neq \emptyset} \sum_{t=1}^{T(j)} (-e_{jt}) E_{jt} \quad \text{porque } h_{j,t+L(j)} = 0 \text{ se } t \leq T(j) \\ - \sum_{j|P(j) \neq \emptyset} \sum_{t=T(j)+1}^{T(j)+T} (h_{j,t+L(j)} - e_{jt}) E_{jt}$$

$$= \sum_{j|P(j) \neq \emptyset} \sum_{t=1}^{T(j)+T} e_{jt} E_{jt} \\ + \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} h_{i,t+L(i)} E_{it} \\ - \sum_{j|P(j) \neq \emptyset} \sum_{t=T(j)+1}^{T(j)+T} h_{j,t+L(j)} E_{jt}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i|P(i) \neq \emptyset} \sum_{t=1}^{T(i)+T} e_{it} E_{it} + \sum_{i|P(i) = \emptyset} \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} h_{i,t+L(i)} E_{it} \\
&= \sum_{i|P(i) \neq \emptyset} \sum_{t=1}^{T(i)} e_{it} E_{it} + \sum_{i|P(i) \neq \emptyset} \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} e_{it} E_{it} \\
&\quad + \sum_{i|P(i) = \emptyset} \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} e_{it} E_{it} \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{t=T(i)+1}^{T(i)+T} e_{it} E_{it} + \sum_{i|P(i) \neq \emptyset} \sum_{t=1}^{T(i)} e_{it} E_{it}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Proposição A4. No caso de uma estrutura geral com tempo não-zero de reposição de componentes, seja

$$E_{it} = I_{i,t+L(i)} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{j,t+L(i)}$$

Defina $K^n(i,j)$, n_{ij} , p_{ij}^n , e $T(i)$ como na seção 2.3.4. Então o seguinte conjunto de restrições

$$I_{1,L(1)+t-1} + x_{1t} - I_{1,L(1)+t} = d_{1,L(1)+t} \quad \text{para } t = T(1)+1, \dots, T(1)+T$$

$$I_{i,L(i)+t-1} + x_{it} - I_{i,L(i)+t} - \sum_{j \in S(i)} r_{ij} x_{j,L(i)+t} = d_{i,L(i)+t} \quad \text{para } i = 2, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T$$

$$x_{it} \leq M_{it} y_{it} \quad \text{para } i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T$$

$$x_{it} \geq 0; \quad I_{i,L(i)+t} \geq 0; \quad \text{para } i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T$$

$$y_{it} = 0 \text{ or } 1;$$

$$\text{para } \begin{matrix} i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{matrix}$$

é equivalente ao seguinte conjunto de restrições

$$E_{i,t-1} + x_{it} - E_{it} = \sum_{j \in R(i) \cup \{i\}} \sum_{n=1}^{n_{ij}} p_{ijn}^n d_{j,t+L(j)+K^n(i,j)}$$

$$\begin{matrix} i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{matrix}$$

$$\sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{j,L(i)+t} - E_{it} \leq 0$$

$$\begin{matrix} i = 2, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{matrix}$$

$$x_{it} \leq M_{it} y_{it}$$

$$\begin{matrix} i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{matrix}$$

$$x_{it} \geq 0; \quad E_{it} \geq 0; \quad y_{it} = 0 \text{ or } 1$$

$$\begin{matrix} i = 1, \dots, N \\ t = T(i)+1, \dots, T(i)+T \end{matrix}$$

Prova. Primeiro, suponha que o primeiro conjunto de restrições (em termos de estoque convencional) seja válido. Vamos mostrar que isso implica o segundo conjunto de restrições (em termos de estoque de escalão).

O uso do modelo na base de um horizonte rolante implica que, para $i \in \{1, \dots, N\}$, temos $x_{it} \geq 0$ e $E_{i,L(i)+t} \geq 0$ tanto para $t \in \{1, \dots, T(i)\}$ quanto para $t \in \{T(i)+1, \dots, T(i)+T\}$.

Agora, $E_{i,L(i)+t} \geq 0$ para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{1, \dots, T(i)+T\}$ implica, pela definição de E_{it} , que

$$E_{it} - \sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{j,L(i)+t} \geq 0$$

para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{1, \dots, T(i)+T\}$. Assim, $E_{1t} \geq 0$ para $t \in \{1, \dots, T(1)+T\}$. Seja $i \in \{2, \dots, N\}$ e suponha que $E_{jt} \geq 0$ para $j \in \{1, \dots, i-1\}$ e $t \in \{1, \dots, T(j)+T\}$. Então $E_{jt} \geq 0$ para $j \in S(i)$ e $t \in \{1, \dots, T(j)+T\}$. Assim, $E_{j,L(i)+t} \geq 0$ para $j \in S(i)$ e

$t \in \{1-L(i), \dots, T(j)-L(i)+T\}$. Uma vez que $j \in S(i)$, sabemos que $T(i) \leq T(j)-L(i)$. Portanto, $E_{j,L(i)+t} \geq 0$ para $j \in S(i)$ e $t \in \{1, \dots, T(i)+T\}$, que implica

$$E_{it} \geq \sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{j,L(i)+t} \geq 0$$

para $t \in \{1, \dots, T(i)+T\}$. Assim, por indução, $E_{it} \geq 0$ para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{T(i)+1, \dots, T(i)+T\}$.

O uso do modelo na base de um horizonte rolante implica que, para $i \in \{1, \dots, N\}$,

$$I_{1,L(1)+t-1} + x_{1t} - I_{1,L(1)+t} = d_{1,L(1)+t} \quad \text{para } t = 1, \dots, T(1)+T$$

$$I_{i,L(i)+t-1} + x_{it} - I_{i,L(i)+t} - \sum_{j \in S(i)} r_{ij} x_{j,L(i)+t} = d_{i,L(i)+t} \quad \begin{array}{l} \text{para } i = 2, \dots, N \\ t = 1, \dots, T(i)+T \end{array}$$

Agora,

$$I_{1,L(1)+t-1} + x_{1t} - I_{1,L(1)+t} = d_{1,L(1)+t} \quad \text{para } t = 1, \dots, T(1)+T$$

implica que

$$\begin{aligned} E_{1,t-1} + x_{1t} - E_{1t} &= d_{1,L(1)+t} && \text{pela definição de } E_{1t} \\ &= \sum_{j \in R(1) \cup \{1\}} \sum_{n=1}^{n_{1j}} p_{1j}^n d_{j,t+L(j)+K^n(1,j)} \end{aligned}$$

para $t \in \{1, \dots, T(1)+T\}$. Seja $i \in \{2, \dots, N\}$ e suponha que

$$I_{j,L(j)+t-1} + x_{jt} - I_{j,L(j)+t} - \sum_{k \in S(j)} r_{jk} x_{k,L(j)+t} = d_{j,L(j)+t} \quad \text{para } j \in \{1, \dots, i-1\} \text{ e } t \in \{1, \dots, T(j)+T\}$$

implica

$$E_{j,t-1} + x_{jt} - E_{jt} = \sum_{k \in R(j) \cup \{j\}} \sum_{n=1}^{n_{jk}} p_{jk}^n d_{k,t+L(k)+K^n(j,k)}$$

para $j \in \{1, \dots, i-1\}$ e $t \in \{1, \dots, T(j)+T\}$

Então, para $t \in \{1, \dots, T(i)+T\}$,

$$\begin{aligned} & E_{i,t-1} + x_{it} - E_{it} \\ &= I_{i,L(i)+t-1} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{j,L(i)+t-1} + x_{it} \\ &\quad - I_{i,L(i)+t} - \sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{j,L(i)+t} \\ &= \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[E_{j,L(i)+t-1} + x_{j,L(i)+t} - E_{j,L(i)+t} \right] + d_{i,t+L(i)} \\ &= \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[\sum_{k \in R(j) \cup \{j\}} \sum_{n=1}^{n_{jk}} p_{jk}^n d_{k,t+L(k)+K^n(j,k)+L(i)} \right] + d_{i,t+L(i)} \\ &\quad \text{uma vez que } T(i)+L(i) \leq T(j) \text{ e, portanto,} \\ &\quad L(i)+t \in \{1, \dots, T(i)+L(i)+T\} \subseteq \{1, \dots, T(j)+T\} \\ &= \sum_{k \in R(i)} \sum_{n=1}^{n_{ik}} p_{ik}^n d_{k,t+L(k)+K^n(i,k)} + d_{i,t+L(i)} \\ &= \sum_{j \in R(i) \cup \{i\}} \sum_{n=1}^{n_{ij}} p_{ij}^n d_{j,t+L(j)+K^n(i,j)} \end{aligned}$$

Portanto, por indução, temos

$$E_{i,t-1} + x_{it} - E_{it} = \sum_{j \in R(i) \cup \{i\}} \sum_{n=1}^{n_{ij}} p_{ij}^n d_{j,t+L(j)+K^n(i,j)}$$

$i = 1, \dots, N$
 $t = T(i)+1, \dots, T(i)+T$

Assim, o primeiro conjunto de restrições (em termos de estoque convencional) implica o segundo conjunto de restrições (em termos de

estoque de escalão).

Agora, suponha que o o segundo conjunto de restrições (em termos de estoque de escalão) seja válido. Vamos mostrar que isso implica o primeiro conjunto de restrições (em termos de estoque convencional).

Pela definição de E_{it} , a restrição

$$E_{it} - \sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{j, L(i)+t} \geq 0$$

para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{T(i)+1, \dots, T(i)+T\}$ implica $I_{i, L(i)+t} \geq 0$ para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{T(i)+1, \dots, T(i)+T\}$.

Agora, o uso do modelo na base de um horizonte rolante implica

$$E_{i, t-1} + x_{it} - E_{it} = \sum_{j \in R(i) \cup \{i\}} \sum_{n=1}^{n_{ij}} p_{ij}^n d_{j, t+L(j)+K^n(i, j)}$$

$$\begin{aligned} i &= 1, \dots, N \\ t &= 1, \dots, T(i)+T \end{aligned}$$

Seja $i \in \{1, \dots, N\}$ e $t \in \{T(i)+1, \dots, T(i)+T\}$. Então temos

$$I_{i, L(i)+t-1} + x_{it} - I_{i, L(i)+t}$$

$$= E_{i, t-1} - \sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{j, L(i)+t-1} + x_{it} \\ - E_{it} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} E_{j, L(i)+t}$$

$$= \sum_{j \in R(i) \cup \{i\}} \sum_{n=1}^{n_{ij}} p_{ij}^n d_{j, t+L(j)+K^n(i, j)} \\ - \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[E_{j, L(i)+t-1} - E_{j, L(i)+t} \right]$$

$$= \sum_{k \in R(i)} \sum_{n=1}^{n_{ik}} p_{ik}^n d_{k, t+L(k)+K^n(i, k)} + d_{i, t+L(i)}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[E_{j,L(i)+t-1} - E_{j,L(i)+t} \right] \\
= & \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[\sum_{k \in R(j) \cup \{j\}} \sum_{n=1}^{n_{jk}} p_{jk}^n d_{k,t+L(k)+K^n(j,k)+L(i)} \right] + d_{i,t+L(i)} \\
& - \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[E_{j,L(i)+t-1} - E_{j,L(i)+t} \right] \\
= & \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[E_{j,L(i)+t-1} + x_{j,L(i)+t} - E_{j,L(i)+t} \right] + d_{i,t+L(i)} \\
& \text{uma vez que } T(i)+L(i) \leq T(j) \text{ e, portanto,} \\
& L(i)+t \in \{1, \dots, T(i)+L(i)+T\} \subseteq \{1, \dots, T(j)+T\} \\
& - \sum_{j \in S(i)} r_{ij} \left[E_{j,L(i)+t-1} - E_{j,L(i)+t} \right] \\
= & \sum_{j \in S(i)} r_{ij} x_{j,L(i)+t} + d_{i,t+L(i)}
\end{aligned}$$

Assim, o segundo conjunto de restrições (em termos de estoque de escalão) implica o primeiro conjunto de restrições (em termos de estoque convencional). ■

APÊNDICE B

Exemplo dos pontos na prova de Proposição 3

Considere-se qualquer estrutura geral de produto com 3 componentes, i.e. $N=3$. Seja $T=3$. Então $2N(T-1)+1 = 13$. Os 13 pontos afinamente independentes especificado na prova são:

As coordenadas de x

Ponto	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}
A_{11}	D_{113}	0	0	D_{213}	0	0	D_{313}	0	0
A_{12}	D_{11}	D_{123}	0	D_{21}	D_{223}	0	D_{31}	D_{323}	0
A_{13}	D_{11}	D_{12}	D_{13}	D_{21}	D_{22}	D_{23}	D_{31}	D_{32}	D_{33}
A_{22}	D_{11}	D_{123}	0	D_{21}	D_{223}	0	D_{313}	0	0
A_{23}	D_{11}	D_{12}	D_{13}	D_{21}	D_{22}	D_{23}	D_{313}	0	0
A_{32}	D_{11}	D_{123}	0	D_{213}	0	0	D_{313}	0	0
A_{33}	D_{11}	D_{12}	D_{13}	D_{213}	0	0	D_{313}	0	0
B_{12}	D_{113}	0	0	D_{213}	0	0	D_{313}	0	0
B_{13}	D_{113}	0	0	D_{213}	0	0	D_{313}	0	0
B_{22}	D_{113}	0	0	D_{213}	0	0	D_{313}	0	0
B_{23}	D_{113}	0	0	D_{213}	0	0	D_{313}	0	0
B_{32}	D_{113}	0	0	D_{213}	0	0	D_{313}	0	0
B_{33}	D_{113}	0	0	D_{213}	0	0	D_{313}	0	0

As coordenadas de y são especificadas na próxima página.

As coordenadas de y

Ponto	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{21}	y_{22}	y_{23}	y_{31}	y_{32}	y_{33}
A_{11}	1	0	0	1	0	0	1	0	0
A_{12}	1	1	0	1	1	0	1	1	0
A_{13}	1	1	1	1	1	1	1	1	1
A_{22}	1	1	0	1	1	0	1	0	0
A_{23}	1	1	1	1	1	1	1	0	0
A_{32}	1	1	0	1	0	0	1	0	0
A_{33}	1	1	1	1	0	0	1	0	0
B_{12}	1	1	0	1	1	0	1	1	0
B_{13}	1	0	1	1	0	1	1	0	1
B_{22}	1	1	0	1	1	0	1	0	0
B_{23}	1	0	1	1	0	1	1	0	0
B_{32}	1	1	0	1	0	0	1	0	0
B_{33}	1	0	1	1	0	0	1	0	0

APÊNDICE C

Exemplo dos pontos

A_{11}

$\{A_{mt} | m=1, \dots, N; t=2, \dots, k-1, q+2, \dots, T\}$

$\{B_{mt} | m=1, \dots, N; t=2, \dots, k-1, q+2, \dots, T\}$

na primeira parte da prova de **Proposição 4**.

Seja $N=2$, $T=7$, $q=4$, e $S=\{1,2,3\}$. Portanto $k=4$, e os pontos A_{11} , $\{A_{mt} | m=1,2; t=2,3,6,7\}$, $\{B_{mt} | m=1,2; t=2,3,6,7\}$ são

A_{11}

$x_{11} = D_{114}$	$y_{11} = 1$	$x_{21} = D_{214}$	$y_{21} = 1$
$x_{12} = 0$	$y_{12} = 0$	$x_{22} = 0$	$y_{22} = 0$
$x_{13} = 0$	$y_{13} = 0$	$x_{23} = 0$	$y_{23} = 0$
$x_{14} = 0$	$y_{14} = 0$	$x_{24} = 0$	$y_{24} = 0$
$x_{15} = D_{157}$	$y_{15} = 1$	$x_{25} = D_{257}$	$y_{25} = 1$
$x_{16} = 0$	$y_{16} = 0$	$x_{26} = 0$	$y_{26} = 0$
$x_{17} = 0$	$y_{17} = 0$	$x_{27} = 0$	$y_{27} = 0$

A_{12}

$x_{11} = D_{11}$	$y_{11} = 1$	$x_{21} = D_{21}$	$y_{21} = 1$
$x_{12} = D_{124}$	$y_{12} = 1$	$x_{22} = D_{224}$	$y_{22} = 1$
$x_{13} = 0$	$y_{13} = 0$	$x_{23} = 0$	$y_{23} = 0$
$x_{14} = 0$	$y_{14} = 0$	$x_{24} = 0$	$y_{24} = 0$
$x_{15} = D_{157}$	$y_{15} = 1$	$x_{25} = D_{257}$	$y_{25} = 1$
$x_{16} = 0$	$y_{16} = 0$	$x_{26} = 0$	$y_{26} = 0$
$x_{17} = 0$	$y_{17} = 0$	$x_{27} = 0$	$y_{27} = 0$

A₁₃

$x_{11} = D_{112}$	$y_{11} = 1$	$x_{21} = D_{212}$	$y_{21} = 1$
$x_{12} = 0$	$y_{12} = 0$	$x_{22} = 0$	$y_{22} = 0$
$x_{13} = D_{134}$	$y_{13} = 1$	$x_{23} = D_{234}$	$y_{23} = 1$
$x_{14} = 0$	$y_{14} = 0$	$x_{24} = 0$	$y_{24} = 0$
$x_{15} = D_{157}$	$y_{15} = 1$	$x_{25} = D_{257}$	$y_{25} = 1$
$x_{16} = 0$	$y_{16} = 0$	$x_{26} = 0$	$y_{26} = 0$
$x_{17} = 0$	$y_{17} = 0$	$x_{27} = 0$	$y_{27} = 0$

A₂₂

$x_{11} = D_{11}$	$y_{11} = 1$	$x_{21} = D_{214}$	$y_{21} = 1$
$x_{12} = D_{124}$	$y_{12} = 1$	$x_{22} = 0$	$y_{22} = 0$
$x_{13} = 0$	$y_{13} = 0$	$x_{23} = 0$	$y_{23} = 0$
$x_{14} = 0$	$y_{14} = 0$	$x_{24} = 0$	$y_{24} = 0$
$x_{15} = D_{157}$	$y_{15} = 1$	$x_{25} = D_{257}$	$y_{25} = 1$
$x_{16} = 0$	$y_{16} = 0$	$x_{26} = 0$	$y_{26} = 0$
$x_{17} = 0$	$y_{17} = 0$	$x_{27} = 0$	$y_{27} = 0$

A₂₃

$x_{11} = D_{12}$	$y_{11} = 1$	$x_{21} = D_{214}$	$y_{21} = 1$
$x_{12} = 0$	$y_{12} = 0$	$x_{22} = 0$	$y_{22} = 0$
$x_{13} = D_{134}$	$y_{13} = 1$	$x_{23} = 0$	$y_{23} = 0$
$x_{14} = 0$	$y_{14} = 0$	$x_{24} = 0$	$y_{24} = 0$
$x_{15} = D_{157}$	$y_{15} = 1$	$x_{25} = D_{257}$	$y_{25} = 1$
$x_{16} = 0$	$y_{16} = 0$	$x_{26} = 0$	$y_{26} = 0$
$x_{17} = 0$	$y_{17} = 0$	$x_{27} = 0$	$y_{27} = 0$

B_{12}

$x_{11} = D_{114}$	$y_{11} = 1$	$x_{21} = D_{214}$	$y_{21} = 1$
$x_{12} = 0$	$y_{12} = 1$	$x_{22} = 0$	$y_{22} = 1$
$x_{13} = 0$	$y_{13} = 0$	$x_{23} = 0$	$y_{23} = 0$
$x_{14} = 0$	$y_{14} = 0$	$x_{24} = 0$	$y_{24} = 0$
$x_{15} = D_{157}$	$y_{15} = 1$	$x_{25} = D_{257}$	$y_{25} = 1$
$x_{16} = 0$	$y_{16} = 0$	$x_{26} = 0$	$y_{26} = 0$
$x_{17} = 0$	$y_{17} = 0$	$x_{27} = 0$	$y_{27} = 0$

 B_{13}

$x_{11} = D_{114}$	$y_{11} = 1$	$x_{21} = D_{214}$	$y_{21} = 1$
$x_{12} = 0$	$y_{12} = 0$	$x_{22} = 0$	$y_{22} = 0$
$x_{13} = 0$	$y_{13} = 1$	$x_{23} = 0$	$y_{23} = 1$
$x_{14} = 0$	$y_{14} = 0$	$x_{24} = 0$	$y_{24} = 0$
$x_{15} = D_{157}$	$y_{15} = 1$	$x_{25} = D_{257}$	$y_{25} = 1$
$x_{16} = 0$	$y_{16} = 0$	$x_{26} = 0$	$y_{26} = 0$
$x_{17} = 0$	$y_{17} = 0$	$x_{27} = 0$	$y_{27} = 0$

 B_{22}

$x_{11} = D_{114}$	$y_{11} = 1$	$x_{21} = D_{214}$	$y_{21} = 1$
$x_{12} = 0$	$y_{12} = 1$	$x_{22} = 0$	$y_{22} = 0$
$x_{13} = 0$	$y_{13} = 0$	$x_{23} = 0$	$y_{23} = 0$
$x_{14} = 0$	$y_{14} = 0$	$x_{24} = 0$	$y_{24} = 0$
$x_{15} = D_{157}$	$y_{15} = 1$	$x_{25} = D_{257}$	$y_{25} = 1$
$x_{16} = 0$	$y_{16} = 0$	$x_{26} = 0$	$y_{26} = 0$
$x_{17} = 0$	$y_{17} = 0$	$x_{27} = 0$	$y_{27} = 0$

B₂₃

$x_{11} = D_{114}$	$y_{11} = 1$	$x_{21} = D_{214}$	$y_{21} = 1$
$x_{12} = 0$	$y_{12} = 0$	$x_{22} = 0$	$y_{22} = 0$
$x_{13} = 0$	$y_{13} = 1$	$x_{23} = 0$	$y_{23} = 0$
$x_{14} = 0$	$y_{14} = 0$	$x_{24} = 0$	$y_{24} = 0$
$x_{15} = D_{157}$	$y_{15} = 1$	$x_{25} = D_{257}$	$y_{25} = 1$
$x_{16} = 0$	$y_{16} = 0$	$x_{26} = 0$	$y_{26} = 0$
$x_{17} = 0$	$y_{17} = 0$	$x_{27} = 0$	$y_{27} = 0$

A₁₆

$x_{11} = D_{114}$	$y_{11} = 1$	$x_{21} = D_{214}$	$y_{21} = 1$
$x_{12} = 0$	$y_{12} = 0$	$x_{22} = 0$	$y_{22} = 0$
$x_{13} = 0$	$y_{13} = 0$	$x_{23} = 0$	$y_{23} = 0$
$x_{14} = 0$	$y_{14} = 0$	$x_{24} = 0$	$y_{24} = 0$
$x_{15} = D_{15}$	$y_{15} = 1$	$x_{25} = D_{25}$	$y_{25} = 1$
$x_{16} = D_{167}$	$y_{16} = 1$	$x_{26} = D_{267}$	$y_{26} = 1$
$x_{17} = 0$	$y_{17} = 0$	$x_{27} = 0$	$y_{27} = 0$

A₁₇

$x_{11} = D_{114}$	$y_{11} = 1$	$x_{21} = D_{214}$	$y_{21} = 1$
$x_{12} = 0$	$y_{12} = 0$	$x_{22} = 0$	$y_{22} = 0$
$x_{13} = 0$	$y_{13} = 0$	$x_{23} = 0$	$y_{23} = 0$
$x_{14} = 0$	$y_{14} = 0$	$x_{24} = 0$	$y_{24} = 0$
$x_{15} = D_{15}$	$y_{15} = 1$	$x_{25} = D_{25}$	$y_{25} = 1$
$x_{16} = D_{16}$	$y_{16} = 1$	$x_{26} = D_{26}$	$y_{26} = 1$
$x_{17} = D_{17}$	$y_{17} = 1$	$x_{27} = D_{27}$	$y_{27} = 1$

A₂₆

$x_{11} = D_{114}$	$y_{11} = 1$	$x_{21} = D_{214}$	$y_{21} = 1$
$x_{12} = 0$	$y_{12} = 0$	$x_{22} = 0$	$y_{22} = 0$
$x_{13} = 0$	$y_{13} = 0$	$x_{23} = 0$	$y_{23} = 0$
$x_{14} = 0$	$y_{14} = 0$	$x_{24} = 0$	$y_{24} = 0$
$x_{15} = D_{15}$	$y_{15} = 1$	$x_{25} = D_{257}$	$y_{25} = 1$
$x_{16} = D_{167}$	$y_{16} = 1$	$x_{26} = 0$	$y_{26} = 0$
$x_{17} = 0$	$y_{17} = 0$	$x_{27} = 0$	$y_{27} = 0$

A₂₇

$x_{11} = D_{114}$	$y_{11} = 1$	$x_{21} = D_{214}$	$y_{21} = 1$
$x_{12} = 0$	$y_{12} = 0$	$x_{22} = 0$	$y_{22} = 0$
$x_{13} = 0$	$y_{13} = 0$	$x_{23} = 0$	$y_{23} = 0$
$x_{14} = 0$	$y_{14} = 0$	$x_{24} = 0$	$y_{24} = 0$
$x_{15} = D_{15}$	$y_{15} = 1$	$x_{25} = D_{257}$	$y_{25} = 1$
$x_{16} = D_{16}$	$y_{16} = 1$	$x_{26} = 0$	$y_{26} = 0$
$x_{17} = D_{17}$	$y_{17} = 1$	$x_{27} = 0$	$y_{27} = 0$

B₁₆

$x_{11} = D_{114}$	$y_{11} = 1$	$x_{21} = D_{214}$	$y_{21} = 1$
$x_{12} = 0$	$y_{12} = 0$	$x_{22} = 0$	$y_{22} = 0$
$x_{13} = 0$	$y_{13} = 0$	$x_{23} = 0$	$y_{23} = 0$
$x_{14} = 0$	$y_{14} = 0$	$x_{24} = 0$	$y_{24} = 0$
$x_{15} = D_{157}$	$y_{15} = 1$	$x_{25} = D_{257}$	$y_{25} = 1$
$x_{16} = 0$	$y_{16} = 1$	$x_{26} = 0$	$y_{26} = 1$
$x_{17} = 0$	$y_{17} = 0$	$x_{27} = 0$	$y_{27} = 0$

B₁₇

$x_{11} = D_{114}$	$y_{11} = 1$	$x_{21} = D_{214}$	$y_{21} = 1$
$x_{12} = 0$	$y_{12} = 0$	$x_{22} = 0$	$y_{22} = 0$
$x_{13} = 0$	$y_{13} = 0$	$x_{23} = 0$	$y_{23} = 0$
$x_{14} = 0$	$y_{14} = 0$	$x_{24} = 0$	$y_{24} = 0$
$x_{15} = D_{157}$	$y_{15} = 1$	$x_{25} = D_{257}$	$y_{25} = 1$
$x_{16} = 0$	$y_{16} = 0$	$x_{26} = 0$	$y_{26} = 0$
$x_{17} = 0$	$y_{17} = 1$	$x_{27} = 0$	$y_{27} = 1$

B₂₆

$x_{11} = D_{114}$	$y_{11} = 1$	$x_{21} = D_{214}$	$y_{21} = 1$
$x_{12} = 0$	$y_{12} = 0$	$x_{22} = 0$	$y_{22} = 0$
$x_{13} = 0$	$y_{13} = 0$	$x_{23} = 0$	$y_{23} = 0$
$x_{14} = 0$	$y_{14} = 0$	$x_{24} = 0$	$y_{24} = 0$
$x_{15} = D_{157}$	$y_{15} = 1$	$x_{25} = D_{257}$	$y_{25} = 1$
$x_{16} = 0$	$y_{16} = 1$	$x_{26} = 0$	$y_{26} = 0$
$x_{17} = 0$	$y_{17} = 0$	$x_{27} = 0$	$y_{27} = 0$

B₂₇

$x_{11} = D_{114}$	$y_{11} = 1$	$x_{21} = D_{214}$	$y_{21} = 1$
$x_{12} = 0$	$y_{12} = 0$	$x_{22} = 0$	$y_{22} = 0$
$x_{13} = 0$	$y_{13} = 0$	$x_{23} = 0$	$y_{23} = 0$
$x_{14} = 0$	$y_{14} = 0$	$x_{24} = 0$	$y_{24} = 0$
$x_{15} = D_{157}$	$y_{15} = 1$	$x_{25} = D_{257}$	$y_{25} = 1$
$x_{16} = 0$	$y_{16} = 0$	$x_{26} = 0$	$y_{26} = 0$
$x_{17} = 0$	$y_{17} = 1$	$x_{27} = 0$	$y_{27} = 0$

APÊNDICE D

Exemplo do Caso 2 ($\tau \in Q \setminus S$) na prova de Proposição 4

Considere-se a seguinte estrutura geral de produto

$$\begin{array}{llll} N = 6 & S(2) = \{ 1 \} & S(3) = \{ 1, 2 \} & S(4) = \{ 2, 3 \} \\ & S(5) = \{ 2, 3 \} & S(6) = \{ 3, 5 \} & \end{array}$$

e considere-se a desigualdade válida $V1_i$ com $i=5$, e qualquer $2 \leq q \leq T-1$, $Q = \{1, \dots, q\}$, $S \subseteq Q$, $1 \in S$ e $Q \setminus S \neq \emptyset$;

$$\sum_{t \in S} x_{5t} + \sum_{t \in Q \setminus S} D_{5tq} y_{5t} \geq D_{51q} \quad (V1_5)$$

Note-se que os coordenados $\{x_{mt}, y_{mt} | m=1, \dots, N; t = 1, \dots, T\}$ dos pontos $x^{\tau n}$ especificados acima para o Caso 2 ($\tau \in Q \setminus S$) são tal que $x_{mt} = y_{mt} = 0$ para $m=1, \dots, N$ e $t \in Q \setminus \{1, \tau\}$. Uma vez que $1 \in S$ e $\tau \in Q \setminus S$, a verificação de $x^{\tau n} \in R1_5$ pode ser simplificada à verificação de

$$x_{51} + D_{5\tau q} y_{5\tau} = D_{51q}$$

e de que $x^{\tau n}$ fica na região factível de F_{xy}^{234} .

Os pontos $\{x^{\tau n} | n=1, \dots, 2N\}$ são especificados nas próximas seis páginas:

C = 1 n = 1 (i = 5)			C = 1 n = 2 (i = 5)		
$x_{11} = D_{11q}$		$y_{11} = 1$	$x_{11} = D_{11,\tau-1}$		$y_{11} = 1$
$x_{21} = D_{21q}$		$y_{21} = 1$	$x_{21} = D_{21q}$		$y_{21} = 1$
$x_{31} = D_{31q}$		$y_{31} = 1$	$x_{31} = D_{31q}$		$y_{31} = 1$
$x_{41} = D_{41q}$		$y_{41} = 1$	$x_{41} = D_{41q}$		$y_{41} = 1$
$x_{51} = D_{51q}$		$y_{51} = 1$	$x_{51} = D_{51q}$		$y_{51} = 1$
$x_{61} = D_{61q}$		$y_{61} = 1$	$x_{61} = D_{61q}$		$y_{61} = 1$
$x_{1\tau} = 0$		$y_{1\tau} = 1$	$x_{1\tau} = D_{1\tau q}$		$y_{1\tau} = 1$
$x_{2\tau} = 0$		$y_{2\tau} = 0$	$x_{2\tau} = 0$		$y_{2\tau} = 0$
$x_{3\tau} = 0$		$y_{3\tau} = 0$	$x_{3\tau} = 0$		$y_{3\tau} = 0$
$x_{4\tau} = 0$		$y_{4\tau} = 0$	$x_{4\tau} = 0$		$y_{4\tau} = 0$
$x_{5\tau} = 0$		$y_{5\tau} = 0$	$x_{5\tau} = 0$		$y_{5\tau} = 0$
$x_{6\tau} = 0$		$y_{6\tau} = 0$	$x_{6\tau} = 0$		$y_{6\tau} = 0$
$x_{1,q+1} = D_{1,q+1,T}$	$y_{1,q+1} = 1$		$x_{1,q+1} = D_{1,q+1,T}$	$y_{1,q+1} = 1$	
$x_{2,q+1} = D_{2,q+1,T}$	$y_{2,q+1} = 1$		$x_{2,q+1} = D_{2,q+1,T}$	$y_{2,q+1} = 1$	
$x_{3,q+1} = D_{3,q+1,T}$	$y_{3,q+1} = 1$		$x_{3,q+1} = D_{3,q+1,T}$	$y_{3,q+1} = 1$	
$x_{4,q+1} = D_{4,q+1,T}$	$y_{4,q+1} = 1$		$x_{4,q+1} = D_{4,q+1,T}$	$y_{4,q+1} = 1$	
$x_{5,q+1} = D_{5,q+1,T}$	$y_{5,q+1} = 1$		$x_{5,q+1} = D_{5,q+1,T}$	$y_{5,q+1} = 1$	
$x_{6,q+1} = D_{6,q+1,T}$	$y_{6,q+1} = 1$		$x_{6,q+1} = D_{6,q+1,T}$	$y_{6,q+1} = 1$	

e também

$$x_{mt} = y_{mt} = 0 \quad \text{para } m = 1, \dots, 6 \text{ e } t \in \{2, \dots, T\} \setminus \{\tau, q+1\}$$

$C = 2$ $n = 3$ $(i = 5)$	$C = 2$ $n = 4$ $(i = 5)$
$x_{11} = D_{11,\tau-1}$ $y_{11} = 1$ $x_{21} = D_{21q}^{-0.5r_{21}} D_{1\tau q}$ $y_{21} = 1$ $x_{31} = D_{31q}$ $y_{31} = 1$ $x_{41} = D_{41q}$ $y_{41} = 1$ $x_{51} = D_{51q}$ $y_{51} = 1$ $x_{61} = D_{61q}$ $y_{61} = 1$	$x_{11} = D_{11,\tau-1}$ $y_{11} = 1$ $x_{21} = D_{21,\tau-1}$ $y_{21} = 1$ $x_{31} = D_{31q}$ $y_{31} = 1$ $x_{41} = D_{41q}$ $y_{41} = 1$ $x_{51} = D_{51q}$ $y_{51} = 1$ $x_{61} = D_{61q}$ $y_{61} = 1$
$x_{1\tau} = D_{1\tau q}$ $y_{1\tau} = 1$ $x_{2\tau} = 0.5r_{21} D_{1\tau q}$ $y_{2\tau} = 1$ $x_{3\tau} = 0$ $y_{3\tau} = 0$ $x_{4\tau} = 0$ $y_{4\tau} = 0$ $x_{5\tau} = 0$ $y_{5\tau} = 0$ $x_{6\tau} = 0$ $y_{6\tau} = 0$	$x_{1\tau} = D_{1\tau q}$ $y_{1\tau} = 1$ $x_{2\tau} = D_{2\tau q}$ $y_{2\tau} = 1$ $x_{3\tau} = 0$ $y_{3\tau} = 0$ $x_{4\tau} = 0$ $y_{4\tau} = 0$ $x_{5\tau} = 0$ $y_{5\tau} = 0$ $x_{6\tau} = 0$ $y_{6\tau} = 0$
$x_{1,q+1} = D_{1,q+1,T}$ $y_{1,q+1} = 1$ $x_{2,q+1} = D_{2,q+1,T}$ $y_{2,q+1} = 1$ $x_{3,q+1} = D_{3,q+1,T}$ $y_{3,q+1} = 1$ $x_{4,q+1} = D_{4,q+1,T}$ $y_{4,q+1} = 1$ $x_{5,q+1} = D_{5,q+1,T}$ $y_{5,q+1} = 1$ $x_{6,q+1} = D_{6,q+1,T}$ $y_{6,q+1} = 1$	$x_{1,q+1} = D_{1,q+1,T}$ $y_{1,q+1} = 1$ $x_{2,q+1} = D_{2,q+1,T}$ $y_{2,q+1} = 1$ $x_{3,q+1} = D_{3,q+1,T}$ $y_{3,q+1} = 1$ $x_{4,q+1} = D_{4,q+1,T}$ $y_{4,q+1} = 1$ $x_{5,q+1} = D_{5,q+1,T}$ $y_{5,q+1} = 1$ $x_{6,q+1} = D_{6,q+1,T}$ $y_{6,q+1} = 1$

e também

$$x_{mt} = y_{mt} = 0 \quad \text{para } m = 1, \dots, 6 \text{ e } t \in \{2, \dots, T\} \setminus \{\tau, q+1\}$$

C = 3 n = 5 (i = 5)	C = 3 n = 6 (i = 5)
$x_{11} = D_{11,\tau-1} \quad y_{11} = 1$ $x_{21} = D_{21,\tau-1} \quad y_{21} = 1$ $x_{31} = D_{31q}^{-0.5r_{31}} D_{1\tau q} \quad y_{31} = 1$ $x_{41} = D_{41q} \quad y_{41} = 1$ $x_{51} = D_{51q} \quad y_{51} = 1$ $x_{61} = D_{61q} \quad y_{61} = 1$	$x_{11} = D_{11,\tau-1} \quad y_{11} = 1$ $x_{21} = D_{21,\tau-1} \quad y_{21} = 1$ $x_{31} = D_{31,\tau-1} \quad y_{31} = 1$ $x_{41} = D_{41q} \quad y_{41} = 1$ $x_{51} = D_{51q} \quad y_{51} = 1$ $x_{61} = D_{61q} \quad y_{61} = 1$
$x_{1\tau} = D_{1\tau q} \quad y_{1\tau} = 1$ $x_{2\tau} = D_{2\tau q} \quad y_{2\tau} = 1$ $x_{3\tau} = 0.5r_{31} D_{1\tau q} \quad y_{3\tau} = 1$ $x_{4\tau} = 0 \quad y_{4\tau} = 0$ $x_{5\tau} = 0 \quad y_{5\tau} = 0$ $x_{6\tau} = 0 \quad y_{6\tau} = 0$	$x_{1\tau} = D_{1\tau q} \quad y_{1\tau} = 1$ $x_{2\tau} = D_{2\tau q} \quad y_{2\tau} = 1$ $x_{3\tau} = D_{3\tau q} \quad y_{3\tau} = 1$ $x_{4\tau} = 0 \quad y_{4\tau} = 0$ $x_{5\tau} = 0 \quad y_{5\tau} = 0$ $x_{6\tau} = 0 \quad y_{6\tau} = 0$
$x_{1,q+1} = D_{1,q+1,T} \quad y_{1,q+1} = 1$ $x_{2,q+1} = D_{2,q+1,T} \quad y_{2,q+1} = 1$ $x_{3,q+1} = D_{3,q+1,T} \quad y_{3,q+1} = 1$ $x_{4,q+1} = D_{4,q+1,T} \quad y_{4,q+1} = 1$ $x_{5,q+1} = D_{5,q+1,T} \quad y_{5,q+1} = 1$ $x_{6,q+1} = D_{6,q+1,T} \quad y_{6,q+1} = 1$	$x_{1,q+1} = D_{1,q+1,T} \quad y_{1,q+1} = 1$ $x_{2,q+1} = D_{2,q+1,T} \quad y_{2,q+1} = 1$ $x_{3,q+1} = D_{3,q+1,T} \quad y_{3,q+1} = 1$ $x_{4,q+1} = D_{4,q+1,T} \quad y_{4,q+1} = 1$ $x_{5,q+1} = D_{5,q+1,T} \quad y_{5,q+1} = 1$ $x_{6,q+1} = D_{6,q+1,T} \quad y_{6,q+1} = 1$

e também

$$x_{mt} = y_{mt} = 0 \quad \text{para } m = 1, \dots, 6 \text{ e } t \in \{2, \dots, T\} \setminus \{\tau, q+1\}$$

C = 4 n = 7 (i = 5)	C = 4 n = 8 (i = 5)
$x_{11} = D_{11,\tau-1} \quad y_{11} = 1$ $x_{21} = D_{21,\tau-1} \quad y_{21} = 1$ $x_{31} = D_{31,\tau-1} \quad y_{31} = 1$ $x_{41} = D_{41q}^{-0.5r_{42}} D_{2\tau q} \quad y_{41} = 1$ $x_{51} = D_{51q} \quad y_{51} = 1$ $x_{61} = D_{61q} \quad y_{61} = 1$	$x_{11} = D_{11,\tau-1} \quad y_{11} = 1$ $x_{21} = D_{21,\tau-1} \quad y_{21} = 1$ $x_{31} = D_{31,\tau-1} \quad y_{31} = 1$ $x_{41} = D_{41,\tau-1} \quad y_{41} = 1$ $x_{51} = D_{51q} \quad y_{51} = 1$ $x_{61} = D_{61q} \quad y_{61} = 1$
$x_{1\tau} = D_{1\tau q} \quad y_{1\tau} = 1$ $x_{2\tau} = D_{2\tau q} \quad y_{2\tau} = 1$ $x_{3\tau} = D_{3\tau q} \quad y_{3\tau} = 1$ $x_{4\tau} = 0.5r_{42} D_{2\tau q} \quad y_{4\tau} = 1$ $x_{5\tau} = 0 \quad y_{5\tau} = 0$ $x_{6\tau} = 0 \quad y_{6\tau} = 0$	$x_{1\tau} = D_{1\tau q} \quad y_{1\tau} = 1$ $x_{2\tau} = D_{2\tau q} \quad y_{2\tau} = 1$ $x_{3\tau} = D_{3\tau q} \quad y_{3\tau} = 1$ $x_{4\tau} = D_{4\tau q} \quad y_{4\tau} = 1$ $x_{5\tau} = 0 \quad y_{5\tau} = 0$ $x_{6\tau} = 0 \quad y_{6\tau} = 0$
$x_{1,q+1} = D_{1,q+1,T} \quad y_{1,q+1} = 1$ $x_{2,q+1} = D_{2,q+1,T} \quad y_{2,q+1} = 1$ $x_{3,q+1} = D_{3,q+1,T} \quad y_{3,q+1} = 1$ $x_{4,q+1} = D_{4,q+1,T} \quad y_{4,q+1} = 1$ $x_{5,q+1} = D_{5,q+1,T} \quad y_{5,q+1} = 1$ $x_{6,q+1} = D_{6,q+1,T} \quad y_{6,q+1} = 1$	$x_{1,q+1} = D_{1,q+1,T} \quad y_{1,q+1} = 1$ $x_{2,q+1} = D_{2,q+1,T} \quad y_{2,q+1} = 1$ $x_{3,q+1} = D_{3,q+1,T} \quad y_{3,q+1} = 1$ $x_{4,q+1} = D_{4,q+1,T} \quad y_{4,q+1} = 1$ $x_{5,q+1} = D_{5,q+1,T} \quad y_{5,q+1} = 1$ $x_{6,q+1} = D_{6,q+1,T} \quad y_{6,q+1} = 1$

e também

$$x_{mt} = y_{mt} = 0 \quad \text{para } m = 1, \dots, 6 \text{ e } t \in \{2, \dots, T\} \setminus \{\tau, q+1\}$$

C = 5 n = 9 (i = 5)			C = 5 n = 10 (i = 5)		
$x_{11} = D_{11,\tau-1}$	$y_{11} = 1$		$x_{11} = D_{11,\tau-1}$	$y_{11} = 1$	
$x_{21} = D_{21,\tau-1}$	$y_{21} = 1$		$x_{21} = D_{21,\tau-1}$	$y_{21} = 1$	
$x_{31} = D_{31,\tau-1}$	$y_{31} = 1$		$x_{31} = D_{31,\tau-1}$	$y_{31} = 1$	
$x_{41} = D_{41,\tau-1}$	$y_{41} = 1$		$x_{41} = D_{41,\tau-1}$	$y_{41} = 1$	
$x_{51} = D_{51,\tau-1}$	$y_{51} = 1$		$x_{51} = D_{51,\tau-1}$	$y_{51} = 1$	
$x_{61} = D_{61q}$	$y_{61} = 1$		$x_{61} = D_{61,T}$	$y_{61} = 1$	
$x_{1\tau} = D_{1\tau q}$	$y_{1\tau} = 1$		$x_{1\tau} = D_{1\tau T}$	$y_{1\tau} = 1$	
$x_{2\tau} = D_{2\tau q}$	$y_{2\tau} = 1$		$x_{2\tau} = D_{2\tau T}$	$y_{2\tau} = 1$	
$x_{3\tau} = D_{3\tau q}$	$y_{3\tau} = 1$		$x_{3\tau} = D_{3\tau T}$	$y_{3\tau} = 1$	
$x_{4\tau} = D_{4\tau q}$	$y_{4\tau} = 1$		$x_{4\tau} = D_{4\tau T}$	$y_{4\tau} = 1$	
$x_{5\tau} = D_{5\tau q}$	$y_{5\tau} = 1$		$x_{5\tau} = D_{5\tau T}$	$y_{5\tau} = 1$	
$x_{6\tau} = 0$	$y_{6\tau} = 0$		$x_{6\tau} = 0$	$y_{6\tau} = 0$	
$x_{1,q+1} = D_{1,q+1,T}$	$y_{1,q+1} = 1$		$x_{1,q+1} = 0$	$y_{1,q+1} = 0$	
$x_{2,q+1} = D_{2,q+1,T}$	$y_{2,q+1} = 1$		$x_{2,q+1} = 0$	$y_{2,q+1} = 0$	
$x_{3,q+1} = D_{3,q+1,T}$	$y_{3,q+1} = 1$		$x_{3,q+1} = 0$	$y_{3,q+1} = 0$	
$x_{4,q+1} = D_{4,q+1,T}$	$y_{4,q+1} = 1$		$x_{4,q+1} = 0$	$y_{4,q+1} = 0$	
$x_{5,q+1} = D_{5,q+1,T}$	$y_{5,q+1} = 1$		$x_{5,q+1} = 0$	$y_{5,q+1} = 0$	
$x_{6,q+1} = D_{6,q+1,T}$	$y_{6,q+1} = 1$		$x_{6,q+1} = 0$	$y_{6,q+1} = 0$	

e também

$$x_{mt} = y_{mt} = 0 \quad \text{para } m = 1, \dots, 6 \text{ e } t \in \{2, \dots, T\} \setminus \{\tau, q+1\}$$

$C = 6$ $n = 11$ $(i = 5)$	$C = 6$ $n = 12$ $(i = 5)$
$x_{11} = D_{11,\tau-1}$ $y_{11} = 1$ $x_{21} = D_{21,\tau-1}$ $y_{21} = 1$ $x_{31} = D_{31,\tau-1}$ $y_{31} = 1$ $x_{41} = D_{41,\tau-1}$ $y_{41} = 1$ $x_{51} = D_{51,\tau-1}$ $y_{51} = 1$ $x_{61} = D_{61,\tau-1}$ $y_{61} = 1$	$x_{11} = D_{11,\tau-1}$ $y_{11} = 1$ $x_{21} = D_{21,\tau-1}$ $y_{21} = 1$ $x_{31} = D_{31,\tau-1}$ $y_{31} = 1$ $x_{41} = D_{41,\tau-1}$ $y_{41} = 1$ $x_{51} = D_{51,\tau-1}$ $y_{51} = 1$ $x_{61} = D_{61,\tau-1}$ $y_{61} = 1$
$x_{1\tau} = D_{1\tau q}$ $y_{1\tau} = 1$ $x_{2\tau} = D_{2\tau q}$ $y_{2\tau} = 1$ $x_{3\tau} = D_{3\tau q}$ $y_{3\tau} = 1$ $x_{4\tau} = D_{4\tau q}$ $y_{4\tau} = 1$ $x_{5\tau} = D_{5\tau q}$ $y_{5\tau} = 1$ $x_{6\tau} = D_{6\tau q}$ $y_{6\tau} = 1$	$x_{1\tau} = D_{1\tau T}$ $y_{1\tau} = 1$ $x_{2\tau} = D_{2\tau T}$ $y_{2\tau} = 1$ $x_{3\tau} = D_{3\tau T}$ $y_{3\tau} = 1$ $x_{4\tau} = D_{4\tau T}$ $y_{4\tau} = 1$ $x_{5\tau} = D_{5\tau T}$ $y_{5\tau} = 1$ $x_{6\tau} = D_{6\tau T}$ $y_{6\tau} = 1$
$x_{1,q+1} = D_{1,q+1,T}$ $y_{1,q+1} = 1$ $x_{2,q+1} = D_{2,q+1,T}$ $y_{2,q+1} = 1$ $x_{3,q+1} = D_{3,q+1,T}$ $y_{3,q+1} = 1$ $x_{4,q+1} = D_{4,q+1,T}$ $y_{4,q+1} = 1$ $x_{5,q+1} = D_{5,q+1,T}$ $y_{5,q+1} = 1$ $x_{6,q+1} = D_{6,q+1,T}$ $y_{6,q+1} = 1$	$x_{1,q+1} = 0$ $y_{1,q+1} = 0$ $x_{2,q+1} = 0$ $y_{2,q+1} = 0$ $x_{3,q+1} = 0$ $y_{3,q+1} = 0$ $x_{4,q+1} = 0$ $y_{4,q+1} = 0$ $x_{5,q+1} = 0$ $y_{5,q+1} = 0$ $x_{6,q+1} = 0$ $y_{6,q+1} = 0$

e também

$$x_{mt} = y_{mt} = 0 \quad \text{para } m = 1, \dots, 6 \text{ e } t \in \{2, \dots, T\} \setminus \{\tau, q+1\}$$

APÊNDICE E

Exemplo do Caso 2 ($\tau \in Q \setminus S$) na prova de Proposição 7

Considere-se a seguinte estrutura geral de produto

$$\begin{array}{llll} N = 8 & S(2) = \{ 1 \} & S(3) = \{ 1 \} & S(4) = \{ 1, 3 \} \\ & S(5) = \{ 1, 4 \} & S(6) = \{ 3, 5 \} & S(7) = \{ 3, 4, 6 \} \\ & S(8) = \{ 2, 7 \} & & \end{array}$$

e considere-se a desigualdade válida $V2_i$ com $i=6$, e qualquer $2 \leq q \leq T-1$, $Q = \{1, \dots, q\}$, $S \subseteq Q$, $1 \in S$ e $Q \setminus S \neq \emptyset$;

$$\begin{aligned} \sum_{t \in Q} x_{6t} + r_{63} \sum_{t \in Q \setminus S} (D_{3tq} y_{3t} - x_{3t}) \\ + r_{65} \sum_{t \in Q \setminus S} (D_{5tq} y_{5t} - x_{5t}) \geq D_{61q} \end{aligned} \quad (V2_6)$$

Note-se que os coordenados $\{x_{mt}, y_{mt} | m=1, \dots, N; t = 1, \dots, T\}$ dos pontos $x^{\tau n}$ especificados acima para o Caso 2 ($\tau \in Q \setminus S$) são tal que $x_{mt} = y_{mt} = 0$ para $m=1, \dots, N$ e $t \in Q \setminus \{1, \tau\}$. Uma vez que $1 \in S$ e $\tau \in Q \setminus S$, a verificação de que $x^{\tau n} \in R2_6$ pode ser simplificada à verificação de

$$x_{61} + x_{6\tau} + r_{63}(D_{3\tau q} y_{3\tau} - x_{3\tau}) + r_{65}(D_{5\tau q} y_{5\tau} - x_{5\tau}) = D_{61q}$$

e de que $x^{\tau n}$ fica na região factível de F_{xy}^{234} .

Os pontos $\{x^{\tau n} | n=1, \dots, 2N\}$ são especificados nas próximas oito páginas (n.b., $x_{mt} = y_{mt} = 0$ para $m = 1, \dots, 8$ e $t \in \{2, \dots, T\} \setminus \{\tau, q+1\}$):

C = 1 n = 1 (i = 6)			C = 1 n = 2 (i = 6)		
$x_{11} = D_{11,\tau-1}$	$y_{11} = 1$		$x_{11} = D_{11,\tau-1}$	$y_{11} = 1$	
$x_{21} = D_{21,\tau-1}$	$y_{21} = 1$		$x_{21} = D_{21,\tau-1}$	$y_{21} = 1$	
$x_{31} = D_{31,\tau-1}$	$y_{31} = 1$		$x_{31} = D_{31,\tau-1}$	$y_{31} = 1$	
$x_{41} = D_{41,\tau-1}$	$y_{41} = 1$		$x_{41} = D_{41,\tau-1}$	$y_{41} = 1$	
$x_{51} = D_{51,\tau-1}$	$y_{51} = 1$		$x_{51} = D_{51,\tau-1}$	$y_{51} = 1$	
$x_{61} = D_{61q} + r_{63}D_{3,q+1,T}$ $+ r_{65}D_{5,q+1,T}$			$x_{61} = D_{61q} + r_{63}D_{3,q+1,T}$ $+ r_{65}D_{5,q+1,T}$		
$y_{61} = 1$			$y_{61} = 1$		
$x_{71} = D_{71T}$	$y_{71} = 1$		$x_{71} = D_{71T}$	$y_{71} = 1$	
$x_{81} = D_{81T}$	$y_{81} = 1$		$x_{81} = D_{81T}$	$y_{81} = 1$	
$x_{1\tau} = D_{1\tau q}$	$y_{1\tau} = 1$		$x_{1\tau} = D_{1\tau T}$	$y_{1\tau} = 1$	
$x_{2\tau} = D_{2\tau T}$	$y_{2\tau} = 1$		$x_{2\tau} = D_{2\tau T}$	$y_{2\tau} = 1$	
$x_{3\tau} = D_{3\tau T}$	$y_{3\tau} = 1$		$x_{3\tau} = D_{3\tau T}$	$y_{3\tau} = 1$	
$x_{4\tau} = D_{4\tau T}$	$y_{4\tau} = 1$		$x_{4\tau} = D_{4\tau T}$	$y_{4\tau} = 1$	
$x_{5\tau} = D_{5\tau T}$	$y_{5\tau} = 1$		$x_{5\tau} = D_{5\tau T}$	$y_{5\tau} = 1$	
$x_{6\tau} = 0$	$y_{6\tau} = 0$		$x_{6\tau} = 0$	$y_{6\tau} = 0$	
$x_{7\tau} = 0$	$y_{7\tau} = 0$		$x_{7\tau} = 0$	$y_{7\tau} = 0$	
$x_{8\tau} = 0$	$y_{8\tau} = 0$		$x_{8\tau} = 0$	$y_{8\tau} = 0$	
$x_{1,q+1} = D_{1,q+1,T}$	$y_{1,q+1} = 1$		$x_{1,q+1} = 0$	$y_{1,q+1} = 1$	
$x_{2,q+1} = 0$	$y_{2,q+1} = 0$		$x_{2,q+1} = 0$	$y_{2,q+1} = 0$	
$x_{3,q+1} = 0$	$y_{3,q+1} = 0$		$x_{3,q+1} = 0$	$y_{3,q+1} = 0$	
$x_{4,q+1} = 0$	$y_{4,q+1} = 0$		$x_{4,q+1} = 0$	$y_{4,q+1} = 0$	
$x_{5,q+1} = 0$	$y_{5,q+1} = 0$		$x_{5,q+1} = 0$	$y_{5,q+1} = 0$	
$x_{6,q+1} = D_{61T} - x_{61}$	$y_{6,q+1} = 1$		$x_{6,q+1} = d_{6,q+1,T}$	$y_{6,q+1} = 1$	
$x_{7,q+1} = 0$	$y_{7,q+1} = 0$		$x_{7,q+1} = 0$	$y_{7,q+1} = 0$	
$x_{8,q+1} = 0$	$y_{8,q+1} = 0$		$x_{8,q+1} = 0$	$y_{8,q+1} = 0$	

C = 2 n = 3 (i = 6)			C = 2 n = 4 (i = 6)		
$x_{11} = D_{11,\tau-1}$	$y_{11} = 1$		$x_{11} = D_{11,\tau-1}$	$y_{11} = 1$	
$x_{21} = D_{21,\tau-1}$	$y_{21} = 1$		$x_{21} = D_{21,\tau-1}$	$y_{21} = 1$	
$x_{31} = D_{31,\tau-1}$	$y_{31} = 1$		$x_{31} = D_{31,\tau-1}$	$y_{31} = 1$	
$x_{41} = D_{41,\tau-1}$	$y_{41} = 1$		$x_{41} = D_{41,\tau-1}$	$y_{41} = 1$	
$x_{51} = D_{51,\tau-1}$	$y_{51} = 1$		$x_{51} = D_{51,\tau-1}$	$y_{51} = 1$	
$x_{61} = D_{61q} + r_{63}D_{3,q+1,T}$ $+ r_{65}D_{5,q+1,T}$			$x_{61} = D_{61q} + r_{63}D_{3,q+1,T}$ $+ r_{65}D_{5,q+1,T}$		
$y_{61} = 1$			$y_{61} = 1$		
$x_{71} = D_{71T}$	$y_{71} = 1$		$x_{71} = D_{71T}$	$y_{71} = 1$	
$x_{81} = D_{81T}$	$y_{81} = 1$		$x_{81} = D_{81T}$	$y_{81} = 1$	
$x_{1\tau} = D_{1\tau q}$	$y_{1\tau} = 1$		$x_{1\tau} = D_{1\tau T}$	$y_{1\tau} = 1$	
$x_{2\tau} = D_{2\tau q}$	$y_{2\tau} = 1$		$x_{2\tau} = D_{2\tau T}$	$y_{2\tau} = 1$	
$x_{3\tau} = D_{3\tau T}$	$y_{3\tau} = 1$		$x_{3\tau} = D_{3\tau T}$	$y_{3\tau} = 1$	
$x_{4\tau} = D_{4\tau T}$	$y_{4\tau} = 1$		$x_{4\tau} = D_{4\tau T}$	$y_{4\tau} = 1$	
$x_{5\tau} = D_{5\tau T}$	$y_{5\tau} = 1$		$x_{5\tau} = D_{5\tau T}$	$y_{5\tau} = 1$	
$x_{6\tau} = 0$	$y_{6\tau} = 0$		$x_{6\tau} = 0$	$y_{6\tau} = 0$	
$x_{7\tau} = 0$	$y_{7\tau} = 0$		$x_{7\tau} = 0$	$y_{7\tau} = 0$	
$x_{8\tau} = 0$	$y_{8\tau} = 0$		$x_{8\tau} = 0$	$y_{8\tau} = 0$	
$x_{1,q+1} = D_{1,q+1,T}$	$y_{1,q+1} = 1$		$x_{1,q+1} = 0$	$y_{1,q+1} = 0$	
$x_{2,q+1} = D_{2,q+1,T}$	$y_{2,q+1} = 1$		$x_{2,q+1} = 0$	$y_{2,q+1} = 1$	
$x_{3,q+1} = 0$	$y_{3,q+1} = 0$		$x_{3,q+1} = 0$	$y_{3,q+1} = 0$	
$x_{4,q+1} = 0$	$y_{4,q+1} = 0$		$x_{4,q+1} = 0$	$y_{4,q+1} = 0$	
$x_{5,q+1} = 0$	$y_{5,q+1} = 0$		$x_{5,q+1} = 0$	$y_{5,q+1} = 0$	
$x_{6,q+1} = D_{61T} - x_{61}$	$y_{6,q+1} = 1$		$x_{6,q+1} = d_{6,q+1,T}$	$y_{6,q+1} = 1$	
$x_{7,q+1} = 0$	$y_{7,q+1} = 0$		$x_{7,q+1} = 0$	$y_{7,q+1} = 0$	
$x_{8,q+1} = 0$	$y_{8,q+1} = 0$		$x_{8,q+1} = 0$	$y_{8,q+1} = 0$	

C = 3 n = 5 (i = 6)			C = 3 n = 6 (i = 6)		
$x_{11} = D_{11,\tau-1}$	$y_{11} = 1$		$x_{11} = D_{11,\tau-1}$	$y_{11} = 1$	
$x_{21} = D_{21,\tau-1}$	$y_{21} = 1$		$x_{21} = D_{21,\tau-1}$	$y_{21} = 1$	
$x_{31} = D_{31,\tau-1}$	$y_{31} = 1$		$x_{31} = D_{31,\tau-1}$	$y_{31} = 1$	
$x_{41} = D_{41,\tau-1}$	$y_{41} = 1$		$x_{41} = D_{41,\tau-1}$	$y_{41} = 1$	
$x_{51} = D_{51,\tau-1}$	$y_{51} = 1$		$x_{51} = D_{51,\tau-1}$	$y_{51} = 1$	
$x_{61} = D_{61q} + r_{65}D_{5,q+1,T}$			$x_{61} = D_{61q} + r_{63}D_{3,q+1,T}$		
			$+ r_{65}D_{5,q+1,T}$		
$y_{61} = 1$			$y_{61} = 1$		
$x_{71} = D_{71T}$	$y_{71} = 1$		$x_{71} = D_{71T}$	$y_{71} = 1$	
$x_{81} = D_{81T}$	$y_{81} = 1$		$x_{81} = D_{81T}$	$y_{81} = 1$	
$x_{1\tau} = D_{1\tau q}$	$y_{1\tau} = 1$		$x_{1\tau} = D_{1\tau T}$	$y_{1\tau} = 1$	
$x_{2\tau} = D_{2\tau q}$	$y_{2\tau} = 1$		$x_{2\tau} = D_{2\tau T}$	$y_{2\tau} = 1$	
$x_{3\tau} = D_{3\tau q}$	$y_{3\tau} = 1$		$x_{3\tau} = D_{3\tau T}$	$y_{3\tau} = 1$	
$x_{4\tau} = D_{4\tau T}$	$y_{4\tau} = 1$		$x_{4\tau} = D_{4\tau T}$	$y_{4\tau} = 1$	
$x_{5\tau} = D_{5\tau T}$	$y_{5\tau} = 1$		$x_{5\tau} = D_{5\tau T}$	$y_{5\tau} = 1$	
$x_{6\tau} = 0$	$y_{6\tau} = 0$		$x_{6\tau} = 0$	$y_{6\tau} = 0$	
$x_{7\tau} = 0$	$y_{7\tau} = 0$		$x_{7\tau} = 0$	$y_{7\tau} = 0$	
$x_{8\tau} = 0$	$y_{8\tau} = 0$		$x_{8\tau} = 0$	$y_{8\tau} = 0$	
$x_{1,q+1} = D_{1,q+1,T}$	$y_{1,q+1} = 1$		$x_{1,q+1} = 0$	$y_{1,q+1} = 0$	
$x_{2,q+1} = D_{2,q+1,T}$	$y_{2,q+1} = 1$		$x_{2,q+1} = 0$	$y_{2,q+1} = 0$	
$x_{3,q+1} = D_{3,q+1,T}$	$y_{3,q+1} = 1$		$x_{3,q+1} = 0$	$y_{3,q+1} = 1$	
$x_{4,q+1} = 0$	$y_{4,q+1} = 0$		$x_{4,q+1} = 0$	$y_{4,q+1} = 0$	
$x_{5,q+1} = 0$	$y_{5,q+1} = 0$		$x_{5,q+1} = 0$	$y_{5,q+1} = 0$	
$x_{6,q+1} = D_{61T} - x_{61}$	$y_{6,q+1} = 1$		$x_{6,q+1} = d_{6,q+1,T}$	$y_{6,q+1} = 1$	
$x_{7,q+1} = 0$	$y_{7,q+1} = 0$		$x_{7,q+1} = 0$	$y_{7,q+1} = 0$	
$x_{8,q+1} = 0$	$y_{8,q+1} = 0$		$x_{8,q+1} = 0$	$y_{8,q+1} = 0$	

C = 4 n = 7 (i = 6)			C = 4 n = 8 (i = 6)		
$x_{11} = D_{11,\tau-1}$	$y_{11} = 1$		$x_{11} = D_{11,\tau-1}$	$y_{11} = 1$	
$x_{21} = D_{21,\tau-1}$	$y_{21} = 1$		$x_{21} = D_{21,\tau-1}$	$y_{21} = 1$	
$x_{31} = D_{31,\tau-1}$	$y_{31} = 1$		$x_{31} = D_{31,\tau-1}$	$y_{31} = 1$	
$x_{41} = D_{41,\tau-1}$	$y_{41} = 1$		$x_{41} = D_{41,\tau-1}$	$y_{41} = 1$	
$x_{51} = D_{51,\tau-1}$	$y_{51} = 1$		$x_{51} = D_{51,\tau-1}$	$y_{51} = 1$	
$x_{61} = D_{61q} + r_{65}D_{5,q+1,T}$			$x_{61} = D_{61q} + r_{63}D_{3,q+1,T}$		
			$+ r_{65}D_{5,q+1,T}$		
$y_{61} = 1$			$y_{61} = 1$		
$x_{71} = D_{71T}$	$y_{71} = 1$		$x_{71} = D_{71T}$	$y_{71} = 1$	
$x_{81} = D_{81T}$	$y_{81} = 1$		$x_{81} = D_{81T}$	$y_{81} = 1$	
$x_{1\tau} = D_{1\tau q}$	$y_{1\tau} = 1$		$x_{1\tau} = D_{1\tau T}$	$y_{1\tau} = 1$	
$x_{2\tau} = D_{2\tau q}$	$y_{2\tau} = 1$		$x_{2\tau} = D_{2\tau T}$	$y_{2\tau} = 1$	
$x_{3\tau} = D_{3\tau q}$	$y_{3\tau} = 1$		$x_{3\tau} = D_{3\tau T}$	$y_{3\tau} = 1$	
$x_{4\tau} = D_{4\tau q}$	$y_{4\tau} = 1$		$x_{4\tau} = D_{4\tau T}$	$y_{4\tau} = 1$	
$x_{5\tau} = D_{5\tau T}$	$y_{5\tau} = 1$		$x_{5\tau} = D_{5\tau T}$	$y_{5\tau} = 1$	
$x_{6\tau} = 0$	$y_{6\tau} = 0$		$x_{6\tau} = 0$	$y_{6\tau} = 0$	
$x_{7\tau} = 0$	$y_{7\tau} = 0$		$x_{7\tau} = 0$	$y_{7\tau} = 0$	
$x_{8\tau} = 0$	$y_{8\tau} = 0$		$x_{8\tau} = 0$	$y_{8\tau} = 0$	
$x_{1,q+1} = D_{1,q+1,T}$	$y_{1,q+1} = 1$		$x_{1,q+1} = 0$	$y_{1,q+1} = 0$	
$x_{2,q+1} = D_{2,q+1,T}$	$y_{2,q+1} = 1$		$x_{2,q+1} = 0$	$y_{2,q+1} = 0$	
$x_{3,q+1} = D_{3,q+1,T}$	$y_{3,q+1} = 1$		$x_{3,q+1} = 0$	$y_{3,q+1} = 0$	
$x_{4,q+1} = D_{4,q+1,T}$	$y_{4,q+1} = 1$		$x_{4,q+1} = 0$	$y_{4,q+1} = 1$	
$x_{5,q+1} = 0$	$y_{5,q+1} = 0$		$x_{5,q+1} = 0$	$y_{5,q+1} = 0$	
$x_{6,q+1} = D_{61T} - x_{61}$	$y_{6,q+1} = 1$		$x_{6,q+1} = d_{6,q+1,T}$	$y_{6,q+1} = 1$	
$x_{7,q+1} = 0$	$y_{7,q+1} = 0$		$x_{7,q+1} = 0$	$y_{7,q+1} = 0$	
$x_{8,q+1} = 0$	$y_{8,q+1} = 0$		$x_{8,q+1} = 0$	$y_{8,q+1} = 0$	

C = 5 n = 9 (i = 6)	C = 5 n = 10 (i = 6)
$x_{11} = D_{11,\tau-1}$ $y_{11} = 1$ $x_{21} = D_{21,\tau-1}$ $y_{21} = 1$ $x_{31} = D_{31,\tau-1}$ $y_{31} = 1$ $x_{41} = D_{41,\tau-1}$ $y_{41} = 1$ $x_{51} = D_{51,\tau-1}$ $y_{51} = 1$ $x_{61} = D_{61q}$ $y_{61} = 1$ $x_{71} = D_{71T}$ $y_{71} = 1$ $x_{81} = D_{81T}$ $y_{81} = 1$	$x_{11} = D_{11,\tau-1}$ $y_{11} = 1$ $x_{21} = D_{21,\tau-1}$ $y_{21} = 1$ $x_{31} = D_{31,\tau-1}$ $y_{31} = 1$ $x_{41} = D_{41,\tau-1}$ $y_{41} = 1$ $x_{51} = D_{51,\tau-1}$ $y_{51} = 1$ $x_{61} = D_{61q} + r_{63}D_{3,q+1,T}$ $\quad\quad\quad + r_{65}D_{5,q+1,T}$ $y_{61} = 1$ $x_{71} = D_{71T}$ $y_{71} = 1$ $x_{81} = D_{81T}$ $y_{81} = 1$
$x_{1\tau} = D_{1\tau q}$ $y_{1\tau} = 1$ $x_{2\tau} = D_{2\tau q}$ $y_{2\tau} = 1$ $x_{3\tau} = D_{3\tau q}$ $y_{3\tau} = 1$ $x_{4\tau} = D_{4\tau q}$ $y_{4\tau} = 1$ $x_{5\tau} = D_{5\tau q}$ $y_{5\tau} = 1$ $x_{6\tau} = 0$ $y_{6\tau} = 0$ $x_{7\tau} = 0$ $y_{7\tau} = 0$ $x_{8\tau} = 0$ $y_{8\tau} = 0$	$x_{1\tau} = D_{1\tau T}$ $y_{1\tau} = 1$ $x_{2\tau} = D_{2\tau T}$ $y_{2\tau} = 1$ $x_{3\tau} = D_{3\tau T}$ $y_{3\tau} = 1$ $x_{4\tau} = D_{4\tau T}$ $y_{4\tau} = 1$ $x_{5\tau} = D_{5\tau T}$ $y_{5\tau} = 1$ $x_{6\tau} = 0$ $y_{6\tau} = 0$ $x_{7\tau} = 0$ $y_{7\tau} = 0$ $x_{8\tau} = 0$ $y_{8\tau} = 0$
$x_{1,q+1} = D_{1,q+1,T}$ $y_{1,q+1} = 1$ $x_{2,q+1} = D_{2,q+1,T}$ $y_{2,q+1} = 1$ $x_{3,q+1} = D_{3,q+1,T}$ $y_{3,q+1} = 1$ $x_{4,q+1} = D_{4,q+1,T}$ $y_{4,q+1} = 1$ $x_{5,q+1} = D_{5,q+1,T}$ $y_{5,q+1} = 1$ $x_{6,q+1} = D_{61T} - x_{61}$ $y_{6,q+1} = 1$ $x_{7,q+1} = 0$ $y_{7,q+1} = 0$ $x_{8,q+1} = 0$ $y_{8,q+1} = 0$	$x_{1,q+1} = 0$ $y_{1,q+1} = 0$ $x_{2,q+1} = 0$ $y_{2,q+1} = 0$ $x_{3,q+1} = 0$ $y_{3,q+1} = 0$ $x_{4,q+1} = 0$ $y_{4,q+1} = 0$ $x_{5,q+1} = 0$ $y_{5,q+1} = 1$ $x_{6,q+1} = d_{6,q+1,T}$ $y_{6,q+1} = 1$ $x_{7,q+1} = 0$ $y_{7,q+1} = 0$ $x_{8,q+1} = 0$ $y_{8,q+1} = 0$

C = 6 n = 11 (i = 6)			C = 6 n = 12 (i = 6)		
$x_{11} = D_{11,\tau-1}$	$y_{11} = 1$		$x_{11} = D_{11,\tau-1}$	$y_{11} = 1$	
$x_{21} = D_{21,\tau-1}$	$y_{21} = 1$		$x_{21} = D_{21,\tau-1}$	$y_{21} = 1$	
$x_{31} = D_{31,\tau-1}$	$y_{31} = 1$		$x_{31} = D_{31,\tau-1}$	$y_{31} = 1$	
$x_{41} = D_{41,\tau-1}$	$y_{41} = 1$		$x_{41} = D_{41,\tau-1}$	$y_{41} = 1$	
$x_{51} = D_{51,\tau-1}$	$y_{51} = 1$		$x_{51} = D_{51,\tau-1}$	$y_{51} = 1$	
$x_{61} = D_{61,\tau-1}$	$y_{61} = 1$		$x_{61} = D_{61,\tau-1}$	$y_{61} = 1$	
$x_{71} = D_{71T}$	$y_{71} = 1$		$x_{71} = D_{71T}$	$y_{71} = 1$	
$x_{81} = D_{81T}$	$y_{81} = 1$		$x_{81} = D_{81T}$	$y_{81} = 1$	
$x_{1\tau} = D_{1\tau q}$	$y_{1\tau} = 1$		$x_{1\tau} = D_{1\tau T}$	$y_{1\tau} = 1$	
$x_{2\tau} = D_{2\tau q}$	$y_{2\tau} = 1$		$x_{2\tau} = D_{2\tau T}$	$y_{2\tau} = 1$	
$x_{3\tau} = D_{3\tau q}$	$y_{3\tau} = 1$		$x_{3\tau} = D_{3\tau T}$	$y_{3\tau} = 1$	
$x_{4\tau} = D_{4\tau q}$	$y_{4\tau} = 1$		$x_{4\tau} = D_{4\tau T}$	$y_{4\tau} = 1$	
$x_{5\tau} = D_{5\tau q}$	$y_{5\tau} = 1$		$x_{5\tau} = D_{5\tau T}$	$y_{5\tau} = 1$	
$x_{6\tau} = D_{6\tau q}$			$x_{6\tau} = D_{6\tau q} + r_{63}D_{3,q+1,T}$ $+ r_{65}D_{5,q+1,T}$		
$y_{6\tau} = 1$			$y_{6\tau} = 1$		
$x_{7\tau} = 0$	$y_{7\tau} = 0$		$x_{7\tau} = 0$	$y_{7\tau} = 0$	
$x_{8\tau} = 0$	$y_{8\tau} = 0$		$x_{8\tau} = 0$	$y_{8\tau} = 0$	
$x_{1,q+1} = D_{1,q+1,T}$	$y_{1,q+1} = 1$		$x_{1,q+1} = 0$	$y_{1,q+1} = 0$	
$x_{2,q+1} = D_{2,q+1,T}$	$y_{2,q+1} = 1$		$x_{2,q+1} = 0$	$y_{2,q+1} = 0$	
$x_{3,q+1} = D_{3,q+1,T}$	$y_{3,q+1} = 1$		$x_{3,q+1} = 0$	$y_{3,q+1} = 0$	
$x_{4,q+1} = D_{4,q+1,T}$	$y_{4,q+1} = 1$		$x_{4,q+1} = 0$	$y_{4,q+1} = 0$	
$x_{5,q+1} = D_{5,q+1,T}$	$y_{5,q+1} = 1$		$x_{5,q+1} = 0$	$y_{5,q+1} = 0$	
$x_{6,q+1} = D_{6,q+1,T}$	$y_{6,q+1} = 1$		$x_{6,q+1} = d_{6,q+1,T}$	$y_{6,q+1} = 1$	
$x_{7,q+1} = 0$	$y_{7,q+1} = 0$		$x_{7,q+1} = 0$	$y_{7,q+1} = 0$	
$x_{8,q+1} = 0$	$y_{8,q+1} = 0$		$x_{8,q+1} = 0$	$y_{8,q+1} = 0$	

C = 7 n = 13 (i = 6)			C = 7 n = 14 (i = 6)		
$x_{11} = D_{11,\tau-1}$	$y_{11} = 1$		$x_{11} = D_{11,\tau-1}$	$y_{11} = 1$	
$x_{21} = D_{21,\tau-1}$	$y_{21} = 1$		$x_{21} = D_{21,\tau-1}$	$y_{21} = 1$	
$x_{31} = D_{31,\tau-1}$	$y_{31} = 1$		$x_{31} = D_{31,\tau-1}$	$y_{31} = 1$	
$x_{41} = D_{41,\tau-1}$	$y_{41} = 1$		$x_{41} = D_{41,\tau-1}$	$y_{41} = 1$	
$x_{51} = D_{51,\tau-1}$	$y_{51} = 1$		$x_{51} = D_{51,\tau-1}$	$y_{51} = 1$	
$x_{61} = D_{61,\tau-1}$	$y_{61} = 1$		$x_{61} = D_{61,\tau-1}$	$y_{61} = 1$	
$x_{71} = D_{71,\tau-1}$	$y_{71} = 1$		$x_{71} = D_{71,\tau-1}$	$y_{71} = 1$	
$x_{81} = D_{81T}$	$y_{81} = 1$		$x_{81} = D_{81T}$	$y_{81} = 1$	
$x_{1\tau} = D_{1\tau q}$	$y_{1\tau} = 1$		$x_{1\tau} = D_{1\tau T}$	$y_{1\tau} = 1$	
$x_{2\tau} = D_{2\tau q}$	$y_{2\tau} = 1$		$x_{2\tau} = D_{2\tau T}$	$y_{2\tau} = 1$	
$x_{3\tau} = D_{3\tau q}$	$y_{3\tau} = 1$		$x_{3\tau} = D_{3\tau T}$	$y_{3\tau} = 1$	
$x_{4\tau} = D_{4\tau q}$	$y_{4\tau} = 1$		$x_{4\tau} = D_{4\tau T}$	$y_{4\tau} = 1$	
$x_{5\tau} = D_{5\tau q}$	$y_{5\tau} = 1$		$x_{5\tau} = D_{5\tau T}$	$y_{5\tau} = 1$	
$x_{6\tau} = D_{6\tau q}$			$x_{6\tau} = D_{6\tau q} + r_{63}D_{3,q+1,T}$ $+ r_{65}D_{5,q+1,T}$		
$y_{6\tau} = 1$			$y_{6\tau} = 1$		
$x_{7\tau} = D_{7\tau q}$	$y_{7\tau} = 1$		$x_{7\tau} = D_{7\tau T}$	$y_{7\tau} = 1$	
$x_{8\tau} = 0$	$y_{8\tau} = 0$		$x_{8\tau} = 0$	$y_{8\tau} = 0$	
$x_{1,q+1} = D_{1,q+1,T}$	$y_{1,q+1} = 1$		$x_{1,q+1} = 0$	$y_{1,q+1} = 0$	
$x_{2,q+1} = D_{2,q+1,T}$	$y_{2,q+1} = 1$		$x_{2,q+1} = 0$	$y_{2,q+1} = 0$	
$x_{3,q+1} = D_{3,q+1,T}$	$y_{3,q+1} = 1$		$x_{3,q+1} = 0$	$y_{3,q+1} = 0$	
$x_{4,q+1} = D_{4,q+1,T}$	$y_{4,q+1} = 1$		$x_{4,q+1} = 0$	$y_{4,q+1} = 0$	
$x_{5,q+1} = D_{5,q+1,T}$	$y_{5,q+1} = 1$		$x_{5,q+1} = 0$	$y_{5,q+1} = 0$	
$x_{6,q+1} = D_{6,q+1,T}$	$y_{6,q+1} = 1$		$x_{6,q+1} = d_{6,q+1,T}$	$y_{6,q+1} = 1$	
$x_{7,q+1} = D_{7,q+1,T}$	$y_{7,q+1} = 1$		$x_{7,q+1} = 0$	$y_{7,q+1} = 0$	
$x_{8,q+1} = 0$	$y_{8,q+1} = 0$		$x_{8,q+1} = 0$	$y_{8,q+1} = 0$	

C = 8 n = 15 (i = 6)		C = 8 n = 16 (i = 6)	
$x_{11} = D_{11,\tau-1}$	$y_{11} = 1$	$x_{11} = D_{11,\tau-1}$	$y_{11} = 1$
$x_{21} = D_{21,\tau-1}$	$y_{21} = 1$	$x_{21} = D_{21,\tau-1}$	$y_{21} = 1$
$x_{31} = D_{31,\tau-1}$	$y_{31} = 1$	$x_{31} = D_{31,\tau-1}$	$y_{31} = 1$
$x_{41} = D_{41,\tau-1}$	$y_{41} = 1$	$x_{41} = D_{41,\tau-1}$	$y_{41} = 1$
$x_{51} = D_{51,\tau-1}$	$y_{51} = 1$	$x_{51} = D_{51,\tau-1}$	$y_{51} = 1$
$x_{61} = D_{61,\tau-1}$	$y_{61} = 1$	$x_{61} = D_{61,\tau-1}$	$y_{61} = 1$
$x_{71} = D_{71,\tau-1}$	$y_{71} = 1$	$x_{71} = D_{71,\tau-1}$	$y_{71} = 1$
$x_{81} = D_{81,\tau-1}$	$y_{81} = 1$	$x_{81} = D_{81,\tau-1}$	$y_{81} = 1$
$x_{1\tau} = D_{1\tau q}$	$y_{1\tau} = 1$	$x_{1\tau} = D_{1\tau T}$	$y_{1\tau} = 1$
$x_{2\tau} = D_{2\tau q}$	$y_{2\tau} = 1$	$x_{2\tau} = D_{2\tau T}$	$y_{2\tau} = 1$
$x_{3\tau} = D_{3\tau q}$	$y_{3\tau} = 1$	$x_{3\tau} = D_{3\tau T}$	$y_{3\tau} = 1$
$x_{4\tau} = D_{4\tau q}$	$y_{4\tau} = 1$	$x_{4\tau} = D_{4\tau T}$	$y_{4\tau} = 1$
$x_{5\tau} = D_{5\tau q}$	$y_{5\tau} = 1$	$x_{5\tau} = D_{5\tau T}$	$y_{5\tau} = 1$
$x_{6\tau} = D_{6\tau q}$		$x_{6\tau} = D_{6\tau q} + r_{63}D_{3,q+1,T}$ $+ r_{65}D_{5,q+1,T}$	
$y_{6\tau} = 1$		$y_{6\tau} = 1$	
$x_{7\tau} = D_{7\tau q}$	$y_{7\tau} = 1$	$x_{7\tau} = D_{7\tau T}$	$y_{7\tau} = 1$
$x_{8\tau} = D_{8\tau q}$	$y_{8\tau} = 1$	$x_{8\tau} = D_{8\tau T}$	$y_{8\tau} = 1$
$x_{1,q+1} = D_{1,q+1,T}$	$y_{1,q+1} = 1$	$x_{1,q+1} = 0$	$y_{1,q+1} = 0$
$x_{2,q+1} = D_{2,q+1,T}$	$y_{2,q+1} = 1$	$x_{2,q+1} = 0$	$y_{2,q+1} = 0$
$x_{3,q+1} = D_{3,q+1,T}$	$y_{3,q+1} = 1$	$x_{3,q+1} = 0$	$y_{3,q+1} = 0$
$x_{4,q+1} = D_{4,q+1,T}$	$y_{4,q+1} = 1$	$x_{4,q+1} = 0$	$y_{4,q+1} = 0$
$x_{5,q+1} = D_{5,q+1,T}$	$y_{5,q+1} = 1$	$x_{5,q+1} = 0$	$y_{5,q+1} = 0$
$x_{6,q+1} = D_{6,q+1,T}$	$y_{6,q+1} = 1$	$x_{6,q+1} = d_{6,q+1,T}$	$y_{6,q+1} = 1$
$x_{7,q+1} = D_{7,q+1,T}$	$y_{7,q+1} = 1$	$x_{7,q+1} = 0$	$y_{7,q+1} = 0$
$x_{8,q+1} = D_{8,q+1,T}$	$y_{8,q+1} = 1$	$x_{8,q+1} = 0$	$y_{8,q+1} = 0$

REFERÊNCIAS

Abreviações:

Dec Sc	Decision Sciences
EJOR	European Journal of Operational Research
IIE Trans	Institute of Industrial Engineers Transactions
IJPR	International Journal of Production Research
JOM	Journal of Operations Management
JORS	Journal of the Operational Research Society
JOTA	Journal of Optimization Theory & Applications
Man Sc	Management Science
Math Prog	Mathematical Programming
Math OR	Mathematics of Operations Research
Op Res	Operations Research
PIM	Production and Inventory Management

AFENTAKIS P. (1987), *A Parallel Heuristic Algorithm for Lot-Sizing in Multi-Stage Production Systems*, IIE Trans, March 1987, pp 34-42.

AFENTAKIS P. e GAVISH B. (1986), *Optimal Lot-sizing Algorithms for Complex Product Structures*, Op Res, vol. 34, no. 2, pp 237-249.

AFENTAKIS P., GAVISH B., e KARMAKAR U. (1984), *Computationally Efficient Optimal Solutions to the Lot-Sizing Problem in Multistage Assembly Systems*, Man Sc, vol. 30, no. 2, pp 222-239.

ANTHONY R.N. (1965), *Planning and Control Systems: A Framework for Analysis*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts.

- AUCAMP D.C. (1984), *A Caveat on Using Setup Costs in Lot-Sizing*, PIM, First Quarter, pp 11-14.
- AUCAMP D.C. (1986), *The Evaluation of Safety Stock*, PIM, Second Quarter, pp 126-132.
- BAHL H.C. e RITZMAN L.P. (1984), *An Integrated Model for Master Scheduling, Lot Sizing and Capacity Requirements Planning*, JORS, vol. 35, no. 5, pp 388-399.
- BAHL H.C. e ZIONTS S. (1987), *Multi-Item Scheduling by Benders' Decomposition*, JORS, vol. 38, no. 12, pp 1141-1148.
- BAHL H.C., RITZMAN L.P. e GUPTA J.N.D (1987), *Determining Lot-Sizes and Resource Requirements: A Review*, Op Res, vol. 35, no. 3, pp 237-249.
- BAKER K.R. (1977), *An Experimental Study of the Effectiveness of Rolling Horizon Schedules in Production Planning*, Dec Sc, vol. 8, no. 1, pp 19-27.
- BAKER K.R., DIXON P., MAGAZINE M.J., e SILVER E.A. (1978), *An Algorithm for the Dynamic Lot-Size Problem with Time-Varying Production Capacity Constraints*, Man Sc, vol. 24, no. 16, pp 1710-1720.
- BARANY I., VAN ROY T.J., e WOLSEY L.A. (1984), *Strong Formulations for Multi-Item Capacitated Lot-Sizing*, Man Sc, vol. 30, no. 10, pp 1255-1261.

- BILLINGTON P.J., McCLAIN J.O., e THOMAS L.J.(1983), *Mathematical Programming Approaches to Capacity-Constrained MRP Systems: Review, Formulation and Problem Reduction*, Man Sc, vol. 29, no. 10, pp 1126-1141.
- BLACKBURN J.D. e MILLEN R.A. (1982), *Improved Heuristics for Multi-Stage Requirements Planning Systems*, Man Sc, vol. 28, no. 1, pp 44-56.
- BLACKBURN J.D. e MILLEN R.A. (1984), *Simultaneous Lot-Sizing and Capacity Planning in Multi-Stage Assembly Processes*, EJOR, vol. 16, pp 84-93.
- BODT M.A. de e VAN WASSENHOVE L.N. (1983), *Cost Increases due to Demand Uncertainty in MRP Lot Sizing*, Dec Sc, vol. 14, pp 345-362.
- BRONSTED A. (1983), *An Introduction to Convex Polytopes*, Springer-Verlag, New York.
- CAMERINI P.M., FRATTA L. & MAFFIOLI F. (1975), *On Improving Relaxation Methods by Modified Gradient Techniques*, Mathematical Programming Study 3, pp 26-34
- CARLSON R.C., BECKMAN S.L., e KROPP D.H. (1982), *The Effectiveness of Extending the Horizon in Rolling Production Scheduling*, Dec Sc, vol. 13, no. 1, pp 129-146.
- CARLSON R.C. e YANO C.A. (1986), *Safety Stocks in MRP-Systems with Emergency Setups for Components*", Man Sc, vol. 32, no. 4, pp 403-412.

- CHALMET L.G., DE BODT M., e VAN WASSENHOVE L. (1985), *The Effect of Engineering Changes and Demand Uncertainty on MRP Lot Sizing: A Case Study*, IJPR, vol. 23, no. 2, pp 233-251.
- CLARK A.J. e SCARF H. (1960), *Optimal Policies for a Multi-Echelon Inventory Problem*, Man Sc, vol. 6, pp 475-490.
- CLARK A.R. e ARMENTANO V.A. (1990a), *Optimal Solutions for the Lot-Sizing Problem in Multi-Stage Assembly Systems*, Controle e Automação, a sair.
- CLARK A.R. e ARMENTANO V.A. (1990b), *Accelerated Solutions to the Multi-Stage Lot-Sizing Problem with Lead-Time, through the use of Strong Valid Inequalities*, submetido para apresentação no 29th IEEE Conference on Decision and Control, Havaí, EEUU, dezembro 1990.
- CLARK A.R. e ARMENTANO V.A. (1990c), *Capacitated Multi-Stage Lot-Sizing: Optimal Solutions through the use of Strong Valid Inequalities*, aceito para apresentação no 12th IFORS Triennial Conference on Operations Research, Atenas, Grécia, junho 1990.
- CROWSTON W.B. e WAGNER M.H. (1973), *Dynamic Lot-Size Models for Multi-Stage Assembly Systems*, Man Sc, vol. 20, no. 1, pp 517-527.
- CROWSTON W.B., WAGNER M.H., e WILLIAMS J.F. (1973), *Economic Lot Size Determination in Multi-Stage Assembly Systems*, Man Sc, vol. 19, no. 5, pp 517-527.

- DENARDO E.V. (1982), *Dynamic Programming: Models and Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA
- DIXON P.S. e SILVER E.A. (1981), *A Heuristic Solution Procedure for the Multi-Item, Single-Level, Limited Capacity, Lot-Sizing Problem*, JOM, vol. 2, no. 1, pp 23-38.
- DIXON P.S., ELDER M.D., RAND G.K. e SILVER E.A. (1983), *A Heuristic Algorithm for Determining Lot-Sizes of an Item Subject to Regular and Overtime Production Capacities*, JOM, vol. 3, no. 3, pp 121-130.
- EPPEL G.D. e MARTIN R.K. (1987), *Solving Multi-Item Capacitated Lot-Sizing Problems Using Variable Redefinition*, Op Res, vol. 35, no. 6, pp 832-848.
- EVANS J.R. (1985), *Network-Based Optimization Algorithms for the Capacitated Multi-Item Lot Sizing Problem*, Computing and Industrial Engineering, vol. 8, no. 3, pp 287-305.
- FISHER M.L. (1981), *The Lagrangian Relaxation Method for Solving Integer Programming Problems*, Man Sc, vol. 27, no. 1, pp 1-18
- FLORIAN M. e KLEIN M. (1971), *Deterministic Production Planning with Concave Costs and Capacity Constraints*, Man Sc, vol. 18, no. 1, pp 12-20.
- FLORIAN M., LENSTRA J.K. e RINNOOY KAN A.H.G. (1980), *Deterministic Production Planning: Algorithms and Complexity*, Man Sc, vol. 26, no. 7, pp 669-679.

- GABBAY H. (1979), *Multi-Stage Production Planning*, Man Sc, vol. 25, no. 11, pp 1138-1148.
- GOMORY R.E. (1958), *Outline of an Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs*, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 64, pp 275-278.
- GRAVES S.C. (1981), *Multi-Stage Lot-Sizing: An Iterative Procedure*, pp 95-109 em "TIMS Studies in the Management Sciences", vol. 16, *Multi-stage Production/Inventory Control Systems: Theory and Practice*, L.B. Schwarz (ed), North-Holland, Amsterdam.
- HARL J.E. e RITZMAN L.P. (1985), *A Heuristic Algorithm for Capacity Sensitive Requirements Planning*, JOM, vol. 5, no. 3, pp 309-326.
- HAX A.C. e CANDEA A.D. (1984), *Production and Inventory Management*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA.
- JOHNSON L.A. e MONTGOMERY D.C. (1974), *Operations Research in Production Planning, Scheduling, and Inventory Control*, Wiley, New York.
- KARMARKAR U.S. (1987), *Lot Sizes, Lead Times and In-Process Inventories*, Man Sc, vol. 33, no. 3, pp 409-418.
- KARNI R. e ROLL Y., (1982), *A Heuristic Algorithm for the Multi-Item Lot-Sizing Problem with Capacity Constraints*, IIE Trans, vol. 14, no. 4, pp 249-256.

KONNO H. (1988), *Minimum Concave Cost Production System: A Further Generalization of Multi-Echelon Model*, Math Prog, vol. 41, pp 185-193.

LAMBRECHT M. e VANDER EECKEN J. (1978), *A Capacity Constrained Single-Facility Dynamic Lot-Size Model*, vol. 2, pp 132-136.

LEE C. e DENARDO E.V. (1986), *Rolling Planning Horizons: Error Bounds for the Dynamic Lot Size Model*, Math OR, vol. 11, no. 3, pp 423-432.

MEHTA N. (1980), *How to handle Safety Stocks in an MRP System*, PIM, Third Quarter, pp 16-24.

MURTAGH B.A. e SAUNDERS M.A. (1983), *MINOS 5.0 User's Guide*, Department of Operations Research, Stanford University.

NEMHAUSER G.L. e WOLSEY L.A. (1988), *Integer and Combinatorial Optimization*, Wiley, New York.

NEWSON E.F.P. (1975a), *Multi-Item Lot Size Scheduling by Heuristic, Part I: With Fixed Resources*, Man Sc, vol. 21, no. 10, pp 1186-1193.

NEWSON E.F.P. (1975b), *Multi-Item Lot Size Scheduling by Heuristic, Part II: With Variable Resources*, Man Sc, vol. 21, no. 10, pp 1194-1203.

ORLICKY J.A. (1975), *Material Requirements Planning: The New Way of Life in Production and Inventory Management*, McGraw-Hill, New York.

SCHWARZ L.B. e SCHRAGE L. (1975), *Optimal and System Myopic Policies for Multi-Echelon Production/Inventory Assembly Systems*, Man Sc, vol. 21, no. 11, pp 1285-1294.

SCICONIC/VM Users Guide (1981), Scicon Computer Services Ltd., Milton Keynes, England.

STEINBERG E. e NAPIER H.A. (1980), *Optimal Multi-Level Lot-Sizing for Requirements Planning Systems*, Man Sci, vol. 28, no. 12, pp 1258-1271.

TRIGEIRO W.W., THOMAS L.J. e McCLAIN J.O. (1985), *Capacitated Lot Sizing with Setup Times*, Working Paper 85-07, Johnson Graduate School of Management, Cornell University, Ithaca, New York.

TRIGEIRO W.W. (1987), *The Effect of Setup Time on Production Lot Sizes*, PIM, Third Quarter, pp 50-52.

VAN ROY T.J. e WOLSEY L.A. (1986), *Valid Inequalities for Mixed 0-1 Programs*, Discrete Applied Mathematics, vol. 14, pp 199-213.

VAN ROY T.J. e WOLSEY L.A. (1987), *Solving Mixed Integer Programming Problems using Automatic Reformulation*, Op Res, vol. 35, no. 1, pp 45-57.

- VEINOTT A.F. (1989), *Minimum Concave Cost Solution of Leontief Substitution Models of Multi-Facility Inventory Systems*, Op Res, vol. 17, no. 2, pp 262-281.
- VOLLMAN T.E., BERRY W.T., e WHYBARK D.C. (1988), *Manufacturing Planning and Control Systems*, Second Edition, Dow-Jones/Richard D Irvin, Homewood, Illinois.
- WAGNER H.M. (1980), *Dynamic Problems in the Theory of the Firm*, Naval Research Logistics Quarterly, vol. 7, no. 7, pp 7-12.
- WAGNER H.M. e WHITIN T.M. (1958), *A Dynamic Version of the Economic Lot-Size Model*, Man Sc, vol. 5, pp 89-96.
- WEMMERLOV U. (1985), *Comments on 'Cost Increases due to Demand Uncertainty in MRP Lot Sizing': A Verification of Ordering Probabilites*, Dec Sc, vol. 16, no. 4, Fall 1985, pp 410-419.
- WHYBARK D.C. e WILLIAMS J.G. (1976), *Material Requirements Planning under Uncertainty*, Dec Sc, vol. 7, no. 4, pp 595-606.
- WIJNGAARD J. e WORTMAN J.C. (1985), *MRP and Inventories*, EJOR, vol. 20, pp 281-293.
- WORLD BANK (1987), *GAMS/ZOOM Version 2.0*, The World Bank, Washington DC.
- ZANGWILL W.I. (1966), *A Deterministic Multi-Period Production Scheduling Model with Backlogging*, Man Sc, vol. 13, no. 1, pp 105-119.

ZANGWILL W.I. (1989), *A Backlogging Model and a Multi-Echelon Model of a Dynamic Economic Lot-Size Production System - A Network Approach*, Man Sc, vol. 15, no. 9, pp 506-527.

-o0o-