

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE MICROONDA E ÓPTICA

Este exemplar corresponde à redação final da tese
defendida por ANTONIO CEZAR DE CASTRO LIMA
e aprovada pela Comissão
Julgadora em 23 / 11 / 90.

Orientador

LINHA E ANTENA DE MICROFITA AO LONGO DE UMA DIREÇÃO
HELICOIDAL SOBRE UM SUBSTRATO CILÍNDRICO

ANTONIO CEZAR DE CASTRO LIMA *AC*

ORIENTADOR: Atílio José Giarola *Atílio*

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), como parte dos
requisitos exigidos para a obtenção do título de MESTRE EM
ENGENHARIA ELÉTRICA.

NOVEMBRO - 1990

04/00016/30

à minha mãe

e

à minha esposa

AGRADECIMENTOS

Ao professor Attílio José Giarola, pelas idéias, confiança e dedicação.

Ao colega Oswaldo P. Paixão, pelo incentivo e ajuda nos primeiros dias em Campinas.

Ao professor Rui Fragassi Souza, pelos conhecimentos que me transmitiu durante o curso e pela sua disposição em ajudar.

Ao colega José Ricardo Descardecí, pelas discussões sobre o assunto.

Ao professor Kretly, por me permitir usar várias vezes os micros do LED.

Aos colegas, Dilvan, Itamar, Marcos e Daniel, pelo companheirismo e compreensão durante a digitação desta tese.

À minha irmã Ana Cláudia, pela atenção e preocupação para comigo.

Ao amigo e pai de criação Carlos Antônio Carvalho que, através de nossas inúmeras reflexões, fez manter sempre vivo o meu interesse pela ciência.

Ao amigos Djalma e Sueli, por acolherem a mim e a minha esposa durante nossos últimos dias em Campinas.

Ao CNPq, pelo auxílio financeiro.

E, finalmente, a aqueles que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

ABSTRACT

A theoretical analysis of a microstripline and a patch antenna on a circular cylindrical substrate, along a helical direction, is presented here. The waveguide model with magnetic side walls is used for the characterization of the microstripline and the cavity model with magnetic side walls is employed for the calculation of the antenna resonant frequency and input impedance. The theory of dyadic Green's functions together with the saddle point method are used for the calculation of the radiated far fields. A first analysis is done by considering that the thickness of the dielectric substrate of the antenna is very thin. A second and more rigorous analysis is developed at the end of this work where the dielectric substrate thickness is assumed to have a finite value. Also shown, for the antenna operating in the fundamental mode, are the input impedance as a function of frequency and of the substrate parameters and the radiation patterns.

SUMÁRIO

A análise teórica de uma linha e antena de microfita sobre um substrato cilíndrico, ao longo de uma direção helicoidal, é apresentada neste trabalho. Os modelos do guia de onda e cavidade com paredes laterais magnéticas são, respectivamente, utilizados na caracterização da linha e determinação da frequência de ressonância e impedância de entrada da antena. A teoria das funções diádicas de Green, juntamente com o método do ponto de sela, são empregados na obtenção dos campos distantes radiados pela antena. Uma primeira análise é feita considerando a espessura do substrato dielétrico, da antena de microfita, muito fina. Um estudo mais rigoroso é desenvolvido no final do trabalho, onde o substrato é suposto de espessura finita. São também apresentados, para a antena operando no modo fundamental, o comportamento da impedância de entrada com a frequência e parâmetro do substrato, assim como, os diagramas de radiação.

CONTEÚDO

Introdução	1
 Capítulo 1. Considerações Gerais sobre Linhas e Antenas de Microfita	
1.1 Introdução	4
1.2 Linhas de microfita	4
1.3 Antenas de microfita	8
1.4 Modelos do guia de onda e cavidade com paredes laterais magnéticas	11
 Capítulo 2. Caracterização da Linha de Microfita	
2.1 Introdução	13
2.2 Determinação do campo elétrico sob a microfita	15
2.3 Frequência de corte e comprimento de onda guiado	20
2.4 Impedância característica	23
2.5 Conclusão	25
 Capítulo 3. Frequência de Ressonância e Impedância de Entrada da Antena de Microfita	
3.1 Introdução	26
3.2 Frequência de ressonância	28
3.3 Método da força eletromotriz induzida	30
3.4 Impedância de entrada	33
3.5 Fator de Qualidade	36
3.6 Conclusão	38

Capítulo 4. Funções Diádicas de Green Aplicadas às Estruturas Cilíndricas Circulares

4.1 Introdução	40
4.2 Introdução às funções diádicas	41
4.3 Funções diádicas de Green para o espaço livre	43
4.4 Funções vetoriais de onda	50
4.5 Funções vetoriais de onda para estruturas cilíndricas .	53
4.6 Método de Ohm-Rayleigh	61
4.7 Funções diádicas de Green expandidas em termos de auto-funções	66
4.8 Método do ponto de sela	71
4.9 Conclusão	73

Capítulo 5. Campos Distantes Radiados pela Antena de Microfita

5.1 Introdução	74
5.2 Corrente magnética equivalente	75
5.3 Função diádica de Green próxima a um cilindro condutor	76
5.4 Determinação dos campos distantes	81
5.5 Campos distantes para o modo fundamental	85
5.6 Conclusão	86

Capítulo 6. Campos Distantes Radiados pela Antena de Microfita (Substrato não muito fino)

6.1 Introdução	88
6.2 Funções diádicas de Green para um meio de três camadas cilíndricas concêntricas	88
6.3 Determinação dos campos distantes	103
6.4 Campos distantes para o modo fundamental	107
6.5 Conclusão	110

Capítulo 7. Resultados: Impedância de Entrada e Diagramas de Radiação

7.1 Introdução	112
----------------------	-----

7.2 Impedância de entrada	112
7.3 Diagramas de radiação	114
7.4 Influência da espessura do substrato nos diagramas de radiação	115
 Capítulo 8. Conclusões e Perspectivas Futuras	
8.1 A análise	128
8.2 Os resultados	129
8.3 Perspectivas futuras	130
 Referências Bibliográficas	 132
 Lista de Figuras	 135
 Apêndice	 A-1
Arquivo de entrada de dados	A-3
Programa IMPP0S	A-3
Programa IMPFRQ	A-6
Programa DIARAD	A-8
Programa DIARADS	A-12
Sub-rotina BESSEL	A-18

INTRODUÇÃO

No início dos anos 50, surgiram novas tecnologias em linhas de transmissão. Dentre estas, se destacam as linhas impressas sobre uma das faces de um substrato, com o lado adjacente montado sobre uma placa condutora. A primeira linha deste tipo, chamada de linha de microfita (*microstripline*), foi desenvolvida nos laboratórios da Federal Communications Research Laboratories, em 1952. Pouco tempo depois, Deschamps (1953), Gutton e Baissinot (1955), publicaram os primeiros artigos sobre antenas utilizando este tipo de tecnologia. Novos trabalhos significativos sobre este tema, só começaram a aparecer no final da década de 60 e início dos anos 70, como, por exemplo, o de Byron (1970), que fez uma descrição da antena de microfita e Howell (1972), que publicou estudos sobre antenas deste tipo, cujo elemento radiador tinha formas geométricas retangular e circular. Em 1973, Munson conseguiu a patente de um elemento de antena de microfita. A partir desta data, um número grande de trabalhos vem sendo publicado. Nos últimos anos vem crescendo o interesse em antenas de microfita moldadas sobre as superfícies de estruturas não planas. Dentre estas, se destacam aquelas sobre estruturas cilíndricas. Vários artigos, apresentando cálculos de impedância de entrada, diagramas de radiação e outros parâmetros relevantes de uma antena, foram publicados durante a década de 80.

A partir de pesquisas bibliográficas em artigos da literatura especializada, pode-se facilmente verificar, no que diz respeito a antenas de microfita montadas sobre estruturas cilíndricas, a existência de problemas que não foram tratados pela comunidade científica. Observou-se que existem vários trabalhos em antenas, cuja microfita de forma retangular, é posta na direção do

comprimento do cilindro ou em torno deste (wraparound). Deste fato surgiu a motivação para este trabalho, onde se faz uma análise de uma linha de transmissão e antena de microfita posicionadas, na superfície do cilindro, ao longo de uma direção helicoidal. A análise é baseada nos modelos do guia de onda e cavidade com paredes laterais magnéticas e, no caso da antena, na teoria das funções diádicas de Green.

A distribuição do trabalho é dada nos parágrafos a seguir.

Uma rápida introdução às linhas e antenas de microfita é dada no Cap. 1, onde é apresentada uma breve história destes dispositivos, além de outras informações, como: aplicações, vantagens e limitações. No final do capítulo são introduzidos os modelos do guia de onda e cavidade com paredes laterais magnéticas.

No Cap. 2 é feita a caracterização de uma linha de microfita, orientada ao longo de uma direção helicoidal, sobre um substrato cilíndrico. O método do guia de onda com paredes laterais magnéticas é empregado na determinação da frequência de corte, comprimento de onda guiado e impedância característica.

Nos capítulos seguintes, com exceção do Cap. 4, são determinados alguns dos principais parâmetros de uma antena de microfita retangular, também posicionada numa direção helicoidal, sobre um substrato cilíndrico.

No Cap. 3, o modelo da cavidade com paredes laterais magnéticas é utilizado para se obter a frequência de ressonância e a impedância de entrada da antena, quando esta é alimentada por um cabo coaxial. A expressão do fator de qualidade, usado na determinação da impedância, é apresentada no final do capítulo.

No Cap. 4 são introduzidas as ferramentas matemáticas utilizadas na determinação dos campos radiados pela antena de microfita. Estas ferramentas incluem desde as funções diádicas de Green para o espaço livre, expandidas em termos de funções ondas vetoriais cilíndricas, até o método do ponto de sela, que é empregado na obtenção das expressões dos campos distantes.

No Cap. 5, o elemento radiador da antena é considerado como

uma fonte pontual, próxima a um cilindro condutor. As funções diádicas de Green, que descrevem os campos, são obtidas a partir deste modelo. As expressões dos campos para uma excitação no modo fundamental, são obtidas no final do capítulo.

No Cap. 6, o substrato dielétrico, onde se encontra estendida a microfita, envolve toda a superfície condutora do cilindro. As expressões das funções diádicas de Green são obtidas a partir de um modelo onde se considera um meio de três camadas cilíndricas concêntricas, espaço livre, dielétrico e condutor, com a fonte situada na camada dielétrica. Mais uma vez são fornecidas as expressões que descrevem os campos distantes, para uma excitação no modo fundamental.

No Cap. 7 são apresentados os resultados das simulações feitas para a antena de microfita operando no modo fundamental, no caso TM_{01} . Estes resultados mostram, tanto o comportamento da impedância de entrada com a variação da frequência, ponto de alimentação, espessura e permissividade do substrato dielétrico, como os diagramas de radiação para antenas com o elemento radiador posicionado em direções diferentes e substratos de espessura e permissividades distintas.

Finalmente, no Cap. 8, são apresentadas as conclusões, baseadas na análise desenvolvida e nos resultados obtidos. Sugestões para trabalhos futuros são também dadas no final do capítulo.

CAPÍTULO I

CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE LINHAS E ANTENAS DE MICROFITA

1.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão introduzidos alguns conceitos sobre linhas e antenas de microfita, assim como suas propriedades, vantagens, limitações e aplicações. Os modelos do guia de onda e da cavidade com paredes laterais magnéticas são apresentados na penúltima seção. Estes modelos serão utilizados, respectivamente, na determinação dos campos eletromagnéticos dentro da linha e da antena de microfita, ao longo de uma direção helicoidal, sobre uma estrutura cilíndrica.

1.2 LINHAS DE MICROFITA

No início dos anos 80, novos tipos de linhas de transmissão foram desenvolvidos com o intuito de tornar os circuitos de microondas compatíveis com o processo geral de miniaturização dos equipamentos eletrônicos. Deste esforço surgiram vários tipos de linhas de transmissão com geometria plana, que podiam ser fabricados utilizando-se a tecnologia dos circuitos impressos. Dentre estas linhas, duas merecem destaque. A primeira, chamada de linha de fita (*stripline*), é constituída de uma tira condutora entre dois planos de terra, isolada destes planos através do uso de materiais dielétricos, formando assim, uma estrutura semelhante a um *sandwich* (Fig. 1.1a). A segunda linha, desenvolvida por um

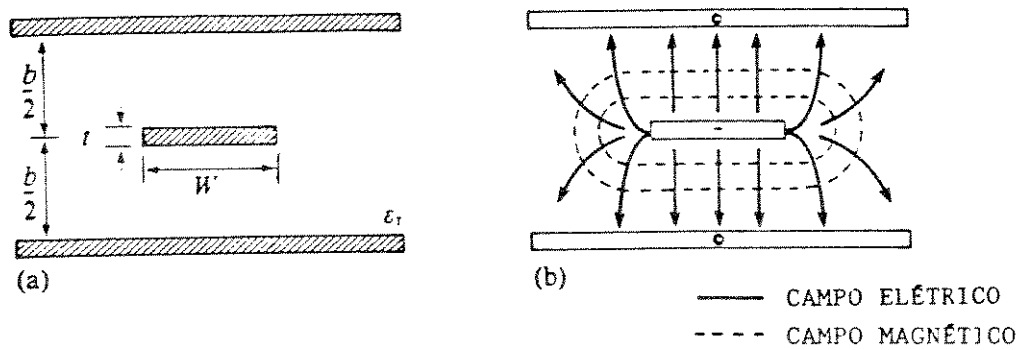


Fig. 1.1 - Linha de fita (stripline). (a) Geometria.
 (b) Linhas de campo.

grupo de engenheiros da Federal Communications Research Laboratories em 1952 [1], é chamada atualmente de linha de microfita (*microstripline*), constituída de uma tira condutora separada de um plano terra por meio de um substrato dielétrico (Fig. 1.2a).

A linha de microfita, assim como a de fita, tem se tornado muito atrativa, devido a algumas de suas características, como por exemplo: baixo custo, fácil fabricação e, especialmente, fácil integração com dispositivos em chips.

É possível se verificar, na Fig. 1.2, que, embora a geometria da linha de microfita seja extremamente simples, as linhas que descrevem o campo elétrico em torno da estrutura, possuem uma distribuição no espaço, muito complexa. O modelamento dos campos torna-se uma tarefa difícil, uma vez que as linhas destes campos não estão completamente confinadas no interior do substrato dielétrico. Portanto, o modo de propagação ao longo do comprimento da linha de transmissão não é mais TEM, mas quase-TEM, um termo designado para indicar que as linhas de campo são similares àsquelas de uma linha de fita (*stripline*), porém ligeiramente distorcidas, devido ao fato delas se encontrarem em dois meios dielétricos distintos. ($\epsilon_r = 1$ e, no substrato, $\epsilon_r \neq 1$). Para baixas frequências, os cálculos são baseados no modo de propagação quase-TEM, cujos resultados são de razoável precisão, mas, para altas frequências, a componente do campo, ao longo do comprimento da linha, torna-se significativa e tem que ser levada em conta. Os efeitos provocados pelo aumento da frequência, levam a uma dispersão, onde a impedância característica da linha e a permissividade tornam-se funções que variam lentamente com a frequência.

Os cálculos para caracterização de uma linha de microfita envolvem uma constante física conhecida como permissividade efetiva ou constante dielétrica efetiva, denotada por ϵ_{ef} . A permissividade efetiva de uma linha de microfita é de grande ajuda, desde que esteja proporcionalmente relacionada com a

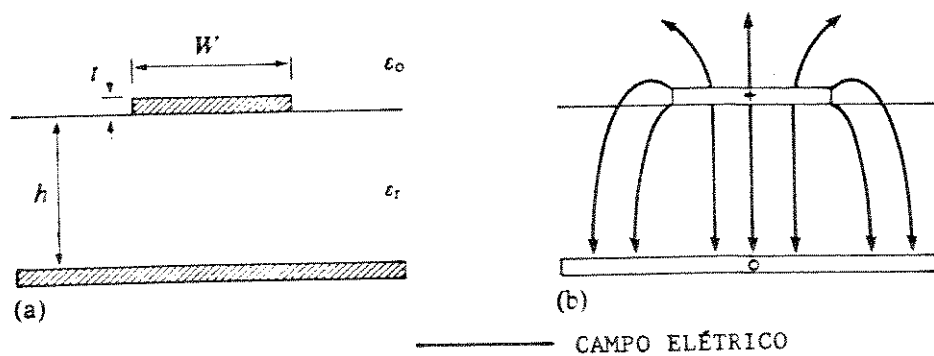


Fig. 1.2 - Linha de microfita (microstripline).
(a) Geometria. (b) Linhas de campo.

quantidade de linhas de campo existentes no ar e no substrato dielétrico. Um grande número de expressões fechadas, para a análise de linhas de microfita, têm sido apresentadas na literatura especializada. A maioria destas fórmulas ou expressões são fornecidas a partir de um ajuste de curvas sobre pontos obtidos experimentalmente ou, mais comumente, através de métodos numéricos. Fórmulas fechadas são absolutamente necessárias para facilitar os cálculos dos parâmetros de uma linha de transmissão deste tipo. Neste trabalho serão utilizadas as expressões para a permissividade efetiva obtidas por Hammerstad [2].

Linhas de microfita montadas em estruturas não planas vêm sendo investigadas nos últimos anos [3] - [5], apesar desta idéia ter sido concebida primeiramente por Barrett [6] em 1952. Estas linhas podem ser construídas em superfícies do tipo elíptica, cilíndrica ou esférica. Linhas de microfita montadas em estruturas não planas podem ser utilizadas na alimentação de elementos radiadores de uma rede (array) de antenas do tipo microfita, que estejam também montadas nesta estrutura. Pode-se utilizar, na análise destas linhas não planas, técnicas comumente aplicadas às linhas planas, como por exemplo: mapeamento conforme, diferenças finitas, equação integral ou ainda o método variacional no domínio da transformada de Fourier (Gupta et al. [7]). Neste trabalho será empregada uma técnica mais simples, chamada de modelo do guia de onda com paredes laterais magnéticas, cuja aplicação depende das condições que serão apresentadas na Seq. 1.4.

1.3 ANTENAS DE MICROFITA

O conceito de antena de microfita tem quase 40 anos de existência. Os primeiros trabalhos apresentados à comunidade científica foram desenvolvidos no início década de 50, por Deschamps [8], nos Estados Unidos, e Gutton e Baissinot [9], na França. Com exceção de alguns poucos trabalhos, somente no início

da década de 70 foi publicado, por Byron [10], um outro artigo de relevância, descrevendo com detalhes a estrutura de uma antena de microfita. Pouco tempo depois, Munson [11] conseguiu a patente de um tipo de antena de microfita, enquanto que Howell [12] publicou dados referentes às antenas, de mesma tecnologia, mas com a tira ou placa condutora de forma retangular e circular. Nos anos seguintes, vários trabalhos foram publicados, merecendo destaque o artigo de Carver e Mink [13], cuja leitura é obrigatória para aqueles interessados no assunto.

A configuração mais simples para uma antena de microfita consiste em uma tira condutora separada de um plano terra por meio de um substrato dielétrico, como mostra a Fig. 1.3. A tira condutora pode ter várias formas geométricas, tais como retângulos, círculos, triângulos e anéis.

Assim como as linhas, as antenas de microfita podem ser moldadas sobre superfícies curvas, como as de um cilindro, esfera ou cone. Nos últimos anos vem sendo feitos estudos em antenas de microfita sobre estruturas cilíndricas. Os mais recentes, os quais serviram de base para este trabalho, fornecem os principais parâmetros de uma antena, como impedância de entrada, diagrama de radiação, eficiência e outros.

A alimentação de uma antena de microfita pode ser feita de várias maneiras. As principais estão relacionadas a seguir:

- Alimentação por linha de transmissão de microfita. A linha é conectada diretamente a uma das bordas da tira condutora.

- Alimentação por cabo coaxial. A alimentação é feita através do substrato. O fio central do cabo coaxial é conectado num ponto adequado da superfície da tira condutora.

- Alimentação por acoplamento capacitivo. A alimentação é feita com a linha de microfita próxima a uma das bordas da tira condutora.

- Alimentação por linha de transmissão de microfita com substrato duplo. A alimentação é feita por acoplamento eletromagnético.

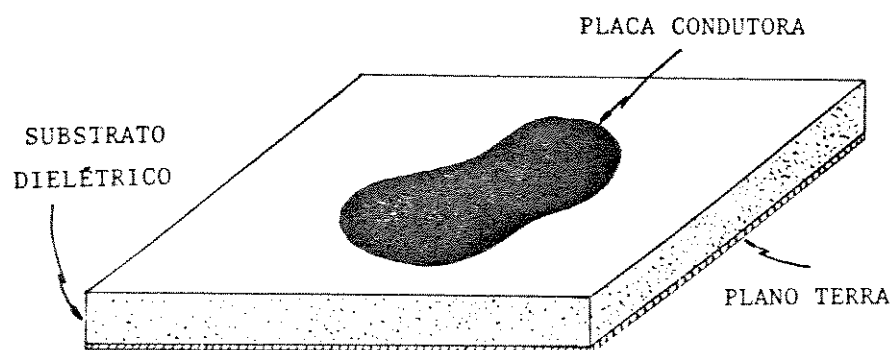


Fig. 1.3 - Antena de microfita plana.

Cada tipo de alimentação oferece vantagens e desvantagens. Para maiores detalhes consulte James et al. [14].

O grande interesse nas antenas de microfita é justificado por algumas de suas características, que são idênticas àsquelas citadas para as linhas de microfita, ou seja, baixo perfil, baixo peso, baixo custo, facilidade de fabricação e integração com outros dispositivos. Porém, para se obter baixo perfil é necessária a utilização de substratos dielétricos muito finos, que fazem este tipo de antena apresentar algumas desvantagens, como por exemplo: banda muito estreita, baixa eficiência, baixa capacidade de potência, etc. Contudo, estas limitações podem ser reduzidas através de um projeto otimizado.

Por fim, podem ser citadas algumas das aplicações deste tipo de antenas, como por exemplo: radioaltímetro, radar portátil, enlaces de comunicação e telemetria em microondas, sistemas de navegação para foguetes e mísseis, radiadores em biomedicina, comunicações via satélite, etc.

Será empregado neste trabalho, para análise da antena de microfita, o modelo da cavidade ressonante com paredes laterais magnéticas.

1.4 MODELOS DO GUIA DE ONDA E CAVIDADE COM PAREDES LATERAIS MAGNÉTICAS

Esses modelos teóricos, utilizados neste trabalho para representar a linha e antena de microfita, são baseados nas seguintes observações (vide Lo et al. [15]):

a) Considerando que o substrato dielétrico tem espessura muito fina, pode-se supor que o campo elétrico possui apenas a componente na direção normal à superfície da fita condutora e o campo magnético apenas na direção tangencial. Supõe-se, também, que estes campos se encontram completamente confinados entre a microfita e o plano terra.

b) O campo elétrico, na região mencionada acima, não varia na direção normal à superfície da microfita, para todas as frequências de interesse.

c) A corrente elétrica, que excita os campos nas estruturas em consideração, não deve ter componente normal próxima ao contorno da superfície da microfita. Com isto, a componente tangencial do campo magnético ao longo deste contorno fica sendo igual a zero.

A região entre a microfita e o plano de terra pode ser, então, tratada como um guia de onda (no caso da linha de transmissão) ou como uma cavidade (no caso da antena), limitados por paredes laterais magnéticas e paredes, superior e inferior, elétricas. Apesar de ser do conhecimento de todos, que uma cavidade ideal não deve radiar potência, pode-se utilizar, como uma boa aproximação, este modelo para representar o elemento radiador na análise de uma antena de microfita. Sendo assim, as linhas de campo no elemento radiador são consideradas idênticas àsquelas encontradas no interior de uma cavidade, da mesma forma que, as linhas de campo no interior da linha de microfita são supostamente análogas àsquelas de um guia de onda.

No caso da antena de microfita, o conhecimento da componente do campo elétrico tangente às paredes laterais magnéticas permite que se defina uma densidade de corrente magnética equivalente. Esta corrente magnética pode ser obtida a partir do princípio de Huygens ou princípio da equivalência [16, pp. 447-454].

Quando a antena de microfita é alimentada através de um cabo coaxial ou linha de microfita, em geral, muitos modos são excitados. Existem várias maneiras de se representarem os campos no interior da cavidade (elemento radiador) [17]. Uma delas é a representação por expansão dos modos ressonantes [15], que será empregada neste trabalho, na determinação da impedância de entrada (Cap. 3, Seç. 3.4) da antena de microfita sobre uma estrutura cilíndrica.

CAPÍTULO II

CARACTERIZAÇÃO DA LINHA DE MICROFITA

2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão determinados os principais parâmetros de uma linha de transmissão do tipo microfita, montada sobre um substrato cilíndrico e orientada ao longo de uma direção helicoidal. Estes parâmetros são: impedância característica, frequência de corte e comprimento de onda guiado. A linha é analisada através do modelo do guia de onda com paredes laterais magnéticas. O campo elétrico dentro da linha é obtido a partir das equações de Maxwell para regiões livres de fontes. A frequência de corte e o comprimento de onda guiado são obtidos através da substituição deste campo na equação de Helmholtz. Finalmente, a impedância característica é determinada a partir das componentes dos campos , elétrico e magnético, transversais à direção de propagação.

A linha de microfita em consideração é mostrada na Fig. 2.1, ou seja, uma fita metálica com largura W , se estendendo sobre a superfície de um substrato dielétrico com espessura h , sobre um cilindro metálico de raio a . O eixo da fita metálica se estende de $\phi = 0$ e $\phi = \phi_0$ ao longo de uma hélice, com passo $t = 2\pi(a+h)\tan\alpha$, onde α é o ângulo de avanço da hélice, também mostrada na figura. Na análise será suposta que a espessura do substrato dielétrico, h , é muito menor que o raio do cilindro.

A largura da fita metálica W é suficientemente maior que h , de tal forma que o modelo de guia de onda com paredes magnéticas

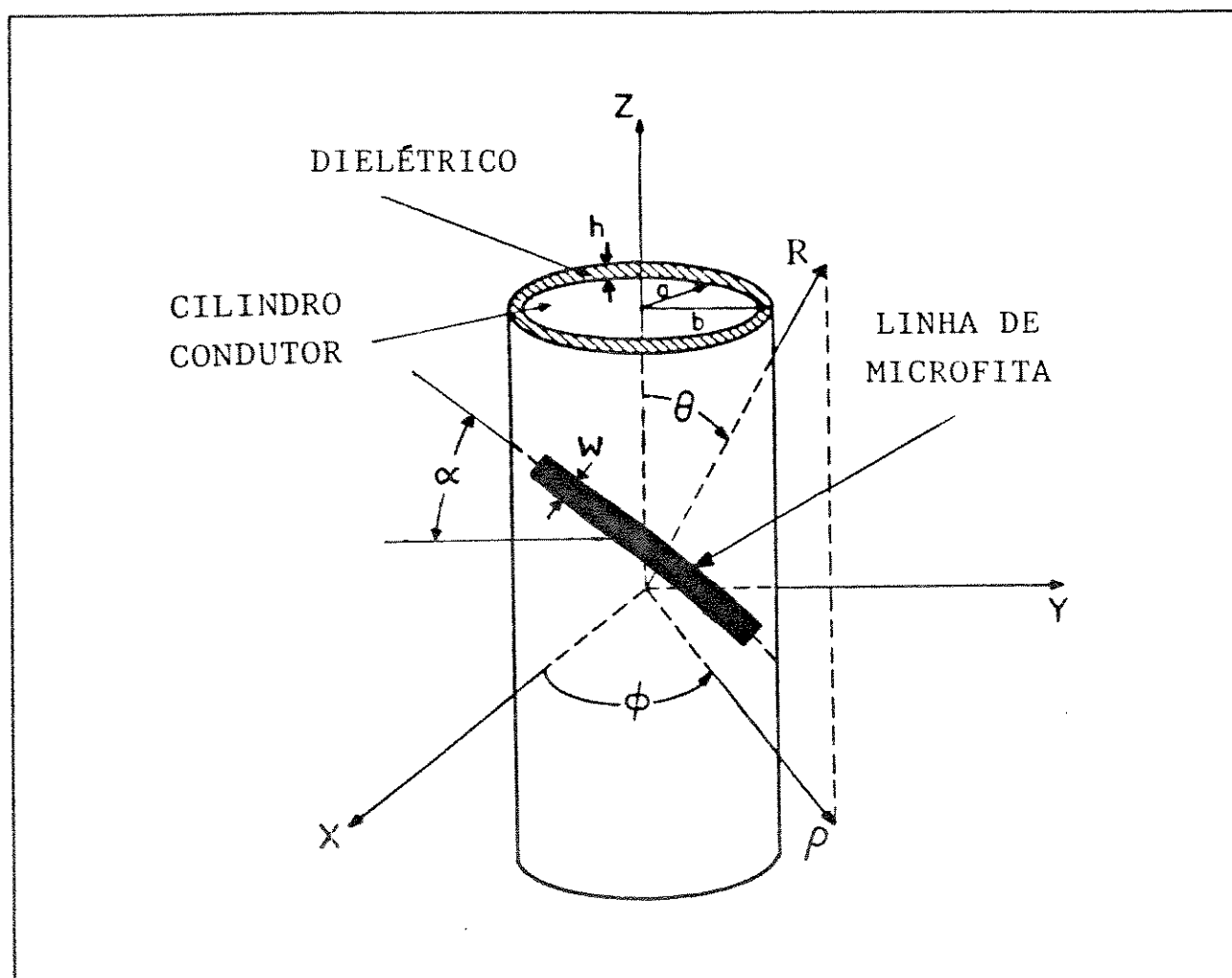


Fig. 2.1 - Linha de microfita sobre uma estrutura cilíndrica.

laterais possa ser utilizado.

Em adição, a frequência de operação é considerada suficientemente baixa, de tal forma que $h \ll \lambda$, onde λ é o comprimento de onda no substrato dielétrico.

2.2 DETERMINAÇÃO DO CAMPO ELÉTRICO SOB A MICROFITA

As equações de Maxwell aplicadas no interior da linha, são

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \mathbf{H} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon_0\epsilon_r \mathbf{E}, \quad (2.2)$$

sendo $\mathbf{E}$ o campo elétrico, $\mathbf{H}$ o campo magnético, ω a frequência angular, μ_0 a permeabilidade e $\epsilon_0\epsilon_r = \epsilon$ a permissividade do substrato dielétrico. É interessante ressaltar que os campos variam harmonicamente no tempo, ou seja, eles são funções de $e^{j\omega t}$. Deve ficar claro que esta variação existe, apesar de ser omitida durante esta análise.

Explicitando o campo magnético na Eq. (2.1) e, em seguida, substituindo em (2.2), tem-se a equação de onda em termos do campo elétrico, ou seja,

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = k^2 \mathbf{E}, \quad (2.3)$$

onde k é o número de onda no substrato dielétrico, expresso por

$$k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r} = k_0 \sqrt{\epsilon_r} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r} = \frac{2\pi f}{c} \sqrt{\epsilon_r}, \quad (2.4)$$

sendo f a frequência da onda e c a velocidade da luz no espaço livre.

Utilizando-se a identidade vetorial

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}, \quad (2.5)$$

na Eq. (2.3) e sabendo-se que $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ para regiões livres de fontes, obtém-se

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad (2.6)$$

também conhecida como equação de Helmholtz.

Com as hipóteses descritas na seção anterior pode-se, como primeira aproximação, supor que o campo elétrico sob a fita metálica apresenta apenas a componente ao longo de ρ , isto é,

$$\mathbf{E} = E_\rho \hat{\rho}, \quad (2.7)$$

com

$$E_\rho = E_0 \psi(\phi, z), \quad (2.8)$$

ou seja, E_ρ função apenas de ϕ e z .

Para resolver a Eq. (2.6) é necessário expressar o laplaciano de $\mathbf{E}$ em termos de um sistema de coordenadas adequado, no caso o cilíndrico. Portanto, escrevendo-se $\nabla^2 \mathbf{E}$ neste sistema de coordenadas, tem-se:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} = & \left[\frac{\partial^2 E_\rho}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 (E_\rho)}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 (E_\rho)}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (E_\rho)}{\partial \rho} - \frac{E_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial (E_\phi)}{\partial \phi} \right] \hat{\rho} \\ & + \left[\frac{\partial^2 E_\phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 (E_\phi)}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 (E_\phi)}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (E_\phi)}{\partial \rho} - \frac{E_\phi}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial (E_\rho)}{\partial \phi} \right] \hat{\phi} \\ & + \left[\frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 (E_z)}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 (E_z)}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (E_z)}{\partial \rho} \right] \hat{z}. \quad (2.9) \end{aligned}$$

Como está sendo suposto que o campo elétrico só tem componente na direção ρ , então,

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \left[\frac{\partial^2 E_\rho}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 (E_\rho)}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 (E_\rho)}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (E_\rho)}{\partial \rho} - \frac{E_\rho}{\rho^2} \right] \hat{\rho} - \left[\frac{2}{\rho^2} \frac{\partial (E_\rho)}{\partial \phi} \right] \hat{\phi}. \quad (2.10)$$

Levando-se em consideração que E_ρ não depende de ρ e $\nabla(\nabla \cdot E) = 0$, tem-se

$$\nabla^2 E = \left[\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2(E\rho)}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2(E\rho)}{\partial z^2} \right] \hat{\rho}. \quad (2.11)$$

Substituindo (2.7), (2.8) e (2.11) em (2.6), tem-se:

$$\left[\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi + k^2 \psi = 0. \quad (2.12)$$

Tomando-se dois eixos ortogonais quaisquer sobre a superfície cilíndrica, como mostra a Fig. 2.2, e relacionando-os com o sistema de coordenadas cilíndricas através das expressões

$$\zeta = \rho \phi \cos \alpha + z \sin \alpha \quad (2.13)$$

e

$$\xi = \rho \phi \sin \alpha - z \cos \alpha, \quad (2.14)$$

pode-se reescrever a equação diferencial de Helmholtz da seguinte forma:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + k^2 \right] \psi = 0, \quad (2.15)$$

uma vez que o sistema adotado é linearmente dependente do sistema cilíndrico.

A Eq. (2.15) pode ser resolvida através do método Euler, ou método da separação das variáveis, o qual consiste em escrever a variável dependente em termos de funções de apenas uma variável. No caso, tem-se ψ como variável dependente que pode ser escrita como sendo

$$\psi(\xi, \zeta) = X(\xi) Z(\zeta). \quad (2.16)$$

Substituindo (2.16) em (2.15) e em seguida dividindo toda a equação por $X(\xi) Z(\zeta)$, obtém-se

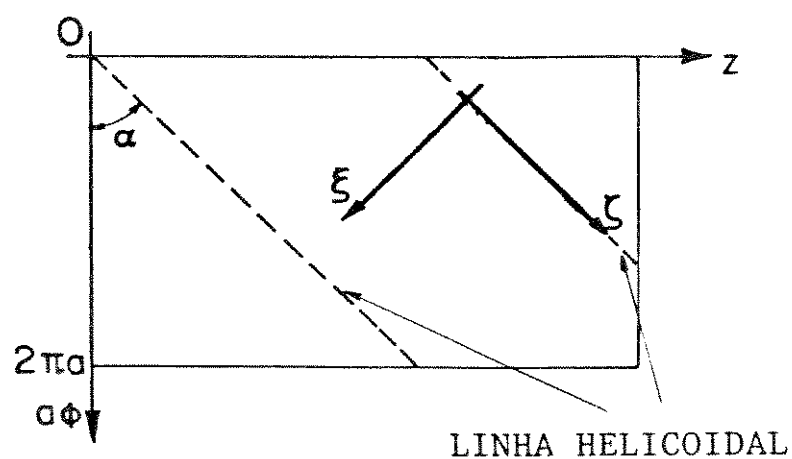


Fig. 2.2 - Eixos ortogonais ao sistema de coordenadas cilíndricas (cilindro aberto).

$$[1/X(\xi)] \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} [X(\xi)] + [1/Z(\zeta)] \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} [Z(\zeta)] + k^2 = 0 \quad (2.17)$$

ou

$$-\gamma_1^2 - \gamma_2^2 + k^2 = 0, \quad (2.18)$$

onde

$$\begin{cases} 1/X(\xi) \frac{d^2}{d\xi^2} [X(\xi)] = -\gamma_1^2 & (2.19a) \\ 1/Z(\zeta) \frac{d^2}{d\zeta^2} [Z(\zeta)] = -\gamma_2^2 & (2.19b) \end{cases}$$

Resolvendo as equações diferenciais (2.19a) e (2.19b), tem-se respectivamente,

$$X(\xi) = C_1 e^{+j\gamma_1 \xi} + C_2 e^{-j\gamma_1 \xi} \quad (2.20)$$

e

$$Z(\zeta) = C_3 e^{+j\gamma_2 \zeta} + C_4 e^{-j\gamma_2 \zeta}, \quad (2.21)$$

sendo C_1 , C_2 , C_3 e C_4 constantes a determinar.

Utilizando a fórmula de Euler na Eq. (2.20), tem-se

$$X(\xi) = C_1 [\cos(\gamma_1 \xi) + j \sin(\gamma_1 \xi)] + C_2 [\cos(\gamma_1 \xi) - j \sin(\gamma_1 \xi)]$$

ou

$$X(\xi) = (C_1 + C_2) \cos(\gamma_1 \xi) + j (C_1 - C_2) \sin(\gamma_1 \xi). \quad (2.22)$$

Considerando a solução apenas no domínio real, obtém-se:

$$X(\xi) = (C_1 + C_2) \cos(\gamma_1 \xi). \quad (2.23)$$

Repetindo o desenvolvimento acima para $Z(\zeta)$, tem-se:

$$Z(\zeta) = (C_3 + C_4) \cos(\gamma_2 \zeta). \quad (2.24)$$

Portanto, a solução da equação diferencial (2.15) é obtida substituindo-se as expressões (2.23) e (2.24) em (2.16), ou seja,

$$\psi(\xi, \zeta) = \cos(\gamma_1 \xi) \cos(\gamma_2 \zeta), \quad (2.25)$$

onde C_1 , C_2 , C_3 e C_4 foram consideradas iguais à unidade.

Esta solução será utilizada mais adiante no Cap. 3. As constantes γ_1 e γ_2 são obtidas aplicando-se as condições de contorno.

Considerando agora uma linha terminada em ϕ_0 por uma impedância de valor igual à impedância característica, de forma que exista apenas uma onda incidente, ou seja, uma onda se propagando na direção ξ^+ , pode-se escrever a Eq. (2.21) da seguinte forma:

$$Z(\zeta) = C_4 e^{-j\gamma_2 \zeta}. \quad (2.26)$$

Neste caso a solução da equação diferencial fica sendo

$$\psi(\xi, \zeta) = \cos(\gamma_1 \xi) e^{-j\gamma_2 \zeta}. \quad (2.27)$$

Finalmente, o campo elétrico no interior da linha de microfita terminada por uma carga casada é dado por:

$$E_\rho = E_0 \psi(\xi, \zeta) = E_0 \cos(\gamma_1 \xi) e^{-j\gamma_2 \zeta}. \quad (2.28)$$

2.3 FREQUÊNCIA DE CORTE E COMPRIMENTO DE ONDA GUIADO

O campo elétrico no interior da linha de microfita, considerada aqui como um guia de paredes laterais magnéticas, deve satisfazer a condição de contorno

$$\left. \frac{\partial E_\rho}{\partial \xi} \right|_{\xi=0, W} = 0, \quad (2.29)$$

ou seja, a derivada do campo E_ρ na direção tangencial a estas paredes, localizadas em 0 e W, deve ser igual a zero.

Substituindo (2.28) em (2.29), obtém-se

$$-\gamma_1 \operatorname{sen}(\gamma_1 \xi) e^{-j\gamma_2 \xi} \Big|_{\xi=0, W} = 0$$

ou

$$\operatorname{sen}(\gamma_1 \xi) \Big|_{\xi=0, W} = 0. \quad (2.30)$$

Portanto, γ_1 é dado por

$$\gamma_1 = \pm n\pi/W, \quad (2.31)$$

onde n é um número inteiro, que caracteriza o modo de propagação. Sendo assim, o campo elétrico dado por (2.28), fica

$$E_{\rho n} = E_0 \psi_n = E_0 \cos\left(\frac{n\pi\xi}{W}\right) e^{-j\gamma_2 \xi}. \quad (2.32)$$

Nota-se em (2.32) que γ_2 é a constante de fase de uma onda se propagando na direção ξ . A expressão desta constante é obtida quando se substitui (2.31) em (2.18), ou seja,

$$-\left(\frac{n\pi}{W}\right)^2 - \gamma_2^2 + k^2 = 0 \quad (2.33)$$

ou

$$\gamma_2 = \beta_n = k \sqrt{1 - (k_{cn}/k)^2}, \quad (2.34)$$

onde k_{cn} é o número de onda de corte, expresso por:

$$k_{cn} = \frac{n\pi}{W}. \quad (2.35)$$

A frequência de corte é, portanto,

$$f_{cn} = \frac{ck_{cn}}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{nc}{2W\sqrt{\epsilon_r}}, \quad (2.36)$$

onde c é a velocidade da luz no espaço livre ($c = 3 \times 10^8$ m/s).

Reescrevendo a constante de fase em termos da frequência de ressonância, tem-se:

$$\beta_n = k \sqrt{1 - (f_{cn}/f)^2} = k_0 \sqrt{\epsilon_r} \sqrt{1 - (f_{cn}/f)^2}. \quad (2.37)$$

O comprimento de onda guiado é dado por

$$\lambda_{gn} = \frac{2\pi}{\beta_n} \quad (2.38)$$

ou

$$\lambda_{gn} = \lambda_0 / (\sqrt{\epsilon_r} \sqrt{1 - (f_{cn}/f)^2}), \quad (2.39)$$

ou ainda,

$$\lambda_{gn} = c / (f \sqrt{\epsilon_r} \sqrt{1 - (f_{cn}/f)^2}). \quad (2.40)$$

Para o modo quase TEM, tem-se $n = 0$,

$$\beta_0 = k \quad (2.41)$$

e

$$\lambda_{g0} = c / (f \sqrt{\epsilon_r}). \quad (2.42)$$

Até agora se considerou o campo elétrico totalmente confinado no substrato, entre a fita e o plano terra. Para fitas largas, a análise feita nesta seção é satisfatória; entretanto, se se diminuir a largura da fita, o campo de borda começa a se tornar importante e deve ser considerado na análise. Este campo de borda é compensado utilizando-se no lugar da permissividade relativa uma permissividade efetiva ϵ_{ef} . Vários trabalhos foram feitos no sentido de se obter um valor para ϵ_{ef} que tornasse as expressões da frequência de corte, comprimento de onda guiado e impedância característica, o mais próximo possível da realidade. Será empregado mais adiante, como uma primeira aproximação, a expressão da permissividade efetiva obtida por Hammerstad [2], ou seja:

para $W/h \leq 1$,

$$\epsilon_{ef} = \frac{(\epsilon_r + 1)}{2} + \frac{(\epsilon_r - 1)}{2} \times \left[\left(1 + \frac{10h}{W} \right)^{-1/2} + 0,04(1 - W/h)^2 \right]; \quad (2.43a)$$

para $W/h \geq 1$,

$$\epsilon_{ef} = \frac{(\epsilon_r + 1)}{2} + \frac{(\epsilon_r - 1)}{2} \left(1 + \frac{10h}{W} \right)^{-1/2}. \quad (2.43b)$$

As equações (2.43a) e (2.43b) são válidas para $\epsilon_r \leq 16$ e W/h entre 0,05 e 20.

Sendo assim, as expressões da frequência de corte e do comprimento de onda guiado são obtidas a partir da substituição da Eq. (2.43a) ou (2.43b) em (2.36) e (2.40), que fornecem respectivamente,

$$f_{cn} \cong \frac{nc}{2W\sqrt{\epsilon_{ef}}} \quad (2.44)$$

e

$$\lambda_{gn} \cong c/(f\sqrt{\epsilon_{ef}} \sqrt{1 - (f_{cn}/f)^2}). \quad (2.45)$$

2.4 IMPEDÂNCIA CARACTERÍSTICA

Para se calcular a impedância característica da linha de microfita, pode-se utilizar o método da linha de transmissão equivalente, o qual considera a seção transversal da linha de microfita como sendo também uma linha de transmissão.

A tensão e corrente na linha equivalente, para o modo quase-TEM ($n = 0$), pode ser obtida, respectivamente, de

$$V = \int_a^{a+h} E_\rho d\rho \cong h E_\rho \quad (2.46)$$

e

$$I = \int_0^W H_{\xi} d\xi \cong W H_{\xi} , \quad (2.47)$$

onde E_{ρ} é dado pela Eq. (2.32) e H_{ξ} é o campo magnético transversal à direção de propagação, que pode ser calculado a partir de

$$-j\omega\mu_0 H = \nabla \times E = -\hat{\rho} \times \nabla E_{\rho} , \quad (2.48)$$

ou seja,

$$H_{\xi} = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial E_{\rho}}{\partial \xi} . \quad (2.49)$$

Substituindo a expressão do campo elétrico na Eq. (2.49), obtém-se

$$H_{\xi} = \frac{\beta_0}{\omega\mu_0} E_{\rho} . \quad (2.50)$$

A impedância característica é finalmente obtida de:

$$Z_0 = \frac{V}{I} \cong \frac{E_{\rho} h}{H_{\xi} W} = \frac{h}{W} \frac{\omega\mu_0}{\beta_0} . \quad (2.51)$$

Substituindo a Eq. (2.37) em (2.51) e considerando $n = 0$, tem-se:

$$Z_0 \cong \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{h}{W} . \quad (2.52)$$

Se forem considerados os campos de borda, obtém-se

$$Z_0 \cong \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_{ef}}} \frac{h}{W} \quad (2.53)$$

onde η_0 é a impedância intrínseca do espaço livre ($\eta_0 = 120\pi \Omega$) e f_{cn} é a frequência de corte, dada por (2.44).

2.5 CONCLUSÃO

A linha de microfita, considerada neste capítulo, foi suposta suficientemente curta, de forma a não chegar a dar uma volta completa sobre o cilindro, isto é, $\phi_0 < 2\pi$ rad.

Para ϕ_0 igual ou maior a 2π existem restrições a serem feitas. Se $\alpha = 0$, a linha se fecha sobre si mesma, resultando em uma antena envólucro, ressoando ao longo da direção z. Para que não haja sobreposição da fita quando $\alpha \neq 0$ e $\phi_0 > 2\pi$, o passo da hélice, ao longo do eixo da linha de microfita, deve ser maior do que W, ou seja, $t = 2\pi(a+h)\tan\alpha > W$, com $\alpha \neq 0$.

É interessante salientar que a permissividade efetiva utilizada neste capítulo foi aquela válida para uma linha de microfita plana, podendo ser usada em estrutura cilíndrica apenas como uma primeira aproximação.

CAPÍTULO III

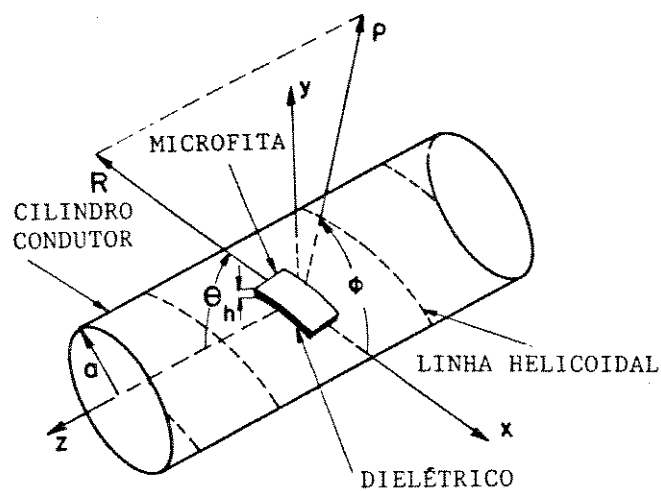
FREQUÊNCIA DE RESSONÂNCIA E IMPEDÂNCIA DE ENTRADA DA ANTENA DE MICROFITA

3.1 INTRODUÇÃO

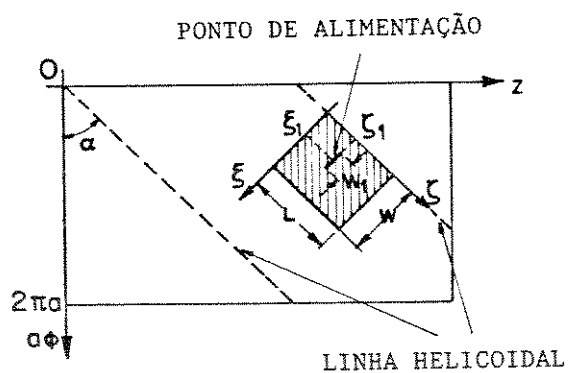
Neste capítulo será calculada a frequência de ressonância e a impedância de entrada de uma antena de microfita retangular, sobre uma estrutura cilíndrica circular, ao longo de uma direção helicoidal. O elemento radiador é analisado através do modelo da cavidade com paredes laterais magnéticas. Ao se resolver a equação de Helmholtz no interior da cavidade obtém-se as expressões dos modos ressonantes, assim como a frequência de ressonância. A impedância de entrada da antena, alimentada por um cabo coaxial, é obtida a partir de uma expansão do campo elétrico em termos destes modos e da utilização do método da força eletromotriz induzida. A expressão do fator de qualidade da cavidade, utilizado na determinação da impedância de entrada, é deduzida no final do capítulo.

A geometria usada para a análise da antena em questão é mostrada na Fig. 3.1. Uma fita metálica muito fina com largura W e comprimento L , é estendida sobre um substrato que consiste em um dielétrico com espessura h e permissividade relativa igual a ϵ_r . O substrato, por sua vez, encontra-se estendido sobre um cilindro condutor de raio a . O lado maior da microfita retangular, no caso o comprimento L , é posto na direção de uma linha helicoidal dada pelo versor $\hat{\zeta}$ e com passo $t=2\pi(a+h)\tan\alpha$, onde α é o ângulo de avanço da hélice.

A região entre a fita e o cilindro é considerada como uma cavidade com paredes laterais magnéticas. Se se considerar a espessura do substrato suficientemente pequena ($h \ll \lambda$ e $h \ll a$),



(a)



(b)

Fig. 3.1 - Antena de microfita, ao longo de uma direção helicoidal, sobre uma estrutura cilíndrica. (a) Em perspectiva. (b) Superfície cilíndrica aberta.

pode-se supor, como uma primeira aproximação, que existe apenas a componente E_ρ do campo elétrico e que essa componente não é função de ρ . Este procedimento é o mesmo adotado no capítulo anterior.

3.2 FREQUÊNCIA DE RESSONÂNCIA

Os campos no interior do elemento radiador, que no caso é considerado como uma cavidade, são fornecidos por

$$\mathbf{E}_{mn} = E_0 \psi_{mn} \hat{\rho} \quad (3.1)$$

e

$$\mathbf{H}_{mn} = \frac{H_0}{j\omega\mu_0} \hat{\rho} \times \nabla_t \psi_{mn}, \quad (3.2)$$

onde ψ_{mn} são os modos ressonantes ou auto-funções que satisfazem a equação de Helmholtz,

$$\nabla_t^2 \psi_{mn} + k^2 \psi_{mn} = 0 \quad (3.3)$$

e a condição de contorno sobre as paredes laterais magnéticas

$$\frac{\partial \psi_{mn}}{\partial n} = 0, \quad (3.4)$$

ou seja, a derivada da função ψ_{mn} na direção tangencial a estas paredes anula-se.

Considere mais uma vez o sistema de coordenadas que pode ser relacionado com o sistema cilíndrico através de

$$\rho = \rho, \quad (3.5)$$

$$\xi = \rho\phi\cos\alpha + z\sin\alpha, \quad (3.6)$$

e

$$\xi = \rho\phi\sin\alpha - z\cos\alpha. \quad (3.7)$$

Pode-se reescrever então a Eq. (3.3) como sendo

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + k^2 \right] \psi_{mn} = 0, \quad (3.8)$$

onde k (auto-valor) é o número de onda no substrato dielétrico expresso por

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r} = k_0 \sqrt{\epsilon_r}, \quad (3.9)$$

sendo ω a frequência angular da onda, c a velocidade da luz ($c = 3 \times 10^8$ m/s) e k_0 o número de onda, ambos no espaço livre.

Resolvendo (3.8) juntamente com a condição de contorno (3.4) obtém-se as auto-funções ψ_{mn} (vide Sec. 2.2 do capítulo anterior), que, substituídas na Eq. (3.1), fornecem o campo elétrico

$$E_\rho = E_0 \psi_{mn} = E_0 \cos\left[\frac{m\pi}{W} \xi\right] \cos\left[\frac{n\pi}{L} \zeta\right] \quad (3.10)$$

e os auto-valores que, no caso, fornecem a expressão do número de onda

$$k = k_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{W}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \quad (3.11)$$

e, conseqüentemente, a frequência de ressonância,

$$f_{mn} = \frac{c}{2\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{m}{W}\right)^2 + \left(\frac{n}{L}\right)^2}, \quad (3.12)$$

onde m e n são números inteiros que estão relacionados com os modos de ressonância da cavidade.

Deve-se observar que a expressão da frequência encontrada aqui é exatamente igual àquela determinada por Luk *et al.* [18].

Pode-se verificar também que a frequência de ressonância não depende da curvatura da superfície cilíndrica. É interessante ressaltar mais uma vez, que a análise feita aqui considera a espessura do substrato muito pequena. Uma expressão mais precisa é obtida por Dearnley *et al.* [19] e Chang *et al.* [20], onde o campo

de borda é incluído utilizando-se uma constante dielétrica efetiva e compensações nas dimensões da cavidade ressonante.

Portanto, considerando-se o efeito de borda, tem-se

$$f_{mn} = \frac{c}{2\sqrt{\epsilon_{ef}}} \sqrt{\left(\frac{m}{W+\Delta W}\right)^2 + \left(\frac{n}{L+\Delta L}\right)^2}, \quad (3.13)$$

onde

$$\epsilon_{ef} = \begin{cases} \epsilon_{ef}(W), & \text{para } m = 0 \\ \epsilon_{ef}(L), & \text{para } n = 0 \\ \frac{\epsilon_{ef}(W) \epsilon_{ef}(L)}{\epsilon_r}, & \text{para } m \text{ e } n \text{ qualquer,} \end{cases} \quad (3.14)$$

sendo

$$\epsilon_{ef}(X) = \frac{(\epsilon_r + 1)}{2} + \frac{(\epsilon_r - 1)}{2} (1 + 10h/X)^{-1/2}, \quad (3.15)$$

$$\Delta W = \frac{0,412h(\epsilon_{ef}(L)+0,3)(L/h+0,264)}{(\epsilon_{ef}(L)-0,258)(L/h+0,8)}, \quad (3.16)$$

$$\Delta L = \frac{0,412h(\epsilon_{ef}(W)+0,3)(W/h+0,264)}{(\epsilon_{ef}(W)-0,258)(W/h+0,8)}, \quad (3.17)$$

com X igual W ou L.

3.3 MÉTODO DA FORÇA ELETROMOTRIZ INDUZIDA

Para se determinar a impedância de entrada é necessário se obter a tensão e a corrente no ponto de alimentação, ou seja,

$$Z_{in} = \frac{V}{I}. \quad (3.18)$$

No caso de uma alimentação feita por cabo coaxial a tensão V é obtida a partir do campo elétrico induzido no fio central do cabo, como mostra a Fig. 3.2. Uma vez que o campo elétrico na superfície do fio condutor é nulo, um campo de sentido contrário ao existente na cavidade deve ser induzido no interior do condutor de forma que a condição de contorno seja satisfeita, isto é,

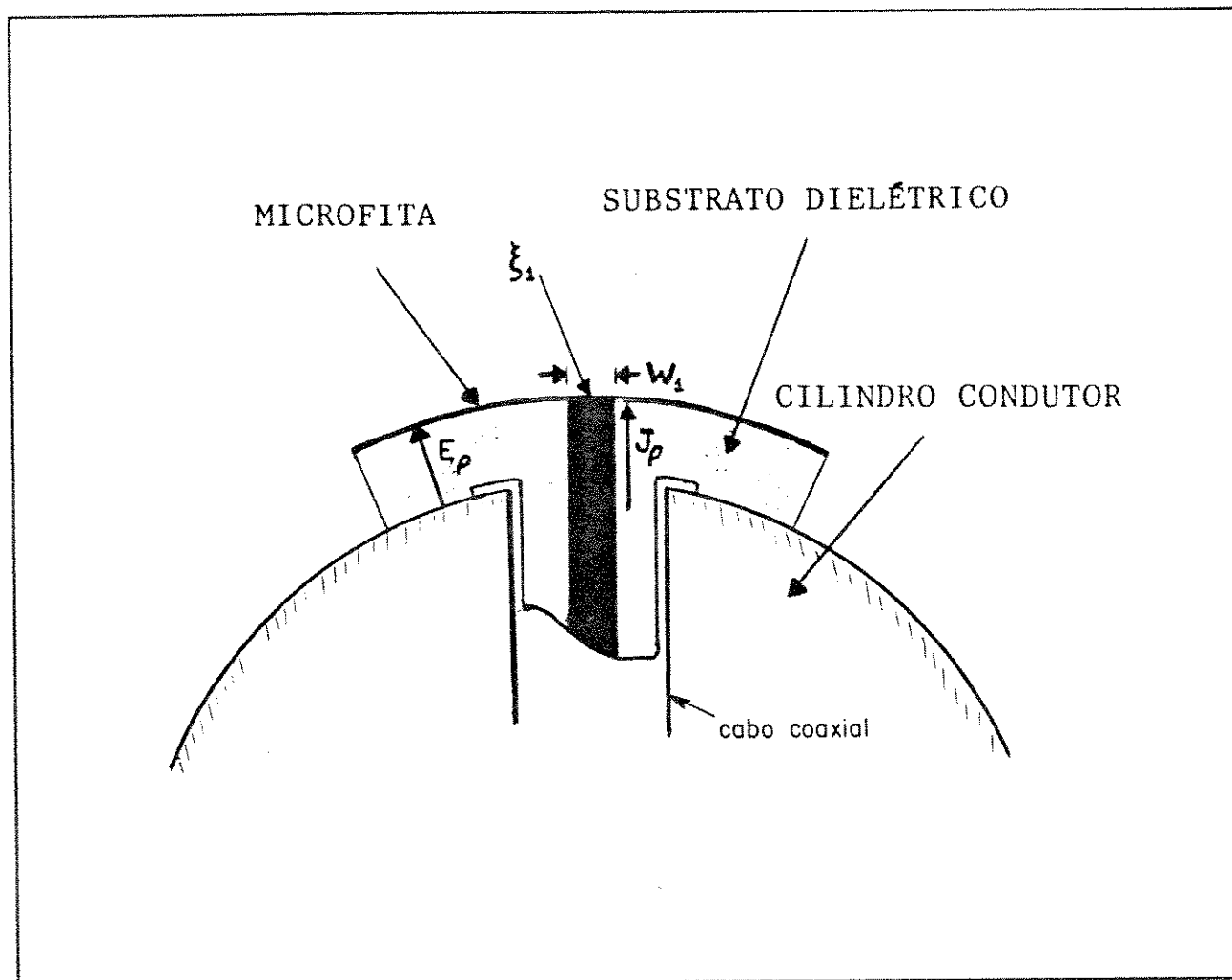


Fig. 3.2 - Alimentação da antena de microfita por cabo coaxial.

$$E_{\rho} + E_{ind} = 0, \quad (3.19)$$

logo,

$$V = h E_{ind} = - h E_{\rho}, \quad (3.20)$$

onde E_{ind} é o campo elétrico induzido no fio condutor.

Modelando-se o fio central do coaxial por uma fita com largura efetiva W_1 e espessura desprezível [13], pode-se determinar o campo elétrico médio ao longo desta largura, ou seja,

$$E_{\rho med} = - \frac{1}{W_1} \int_{\xi_1 - W_1/2}^{\xi_1 + W_1/2} E_{\rho} d\xi. \quad (3.21)$$

Substituindo (3.21) em (3.20), tem-se:

$$V = - \frac{h}{W_1} \int_{\xi_1 - W_1/2}^{\xi_1 + W_1/2} E_{\rho} d\xi. \quad (3.22)$$

A densidade de corrente elétrica no fio central do coaxial é dada por

$$J = J_{\rho} \hat{\rho} = J(\xi) \delta(\xi - \xi_1) \hat{\rho}, \quad (3.23)$$

onde

$$J(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi_1 - W_1/2 \leq \xi \leq \xi_1 + W_1/2 \\ 0, & \text{demais valores} \end{cases} \quad (3.24)$$

e $\delta(\xi - \xi_1)$ é a função delta de Dirac.

Portanto, a corrente pode ser determinada a partir de

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} J(\xi) \delta(\xi - \xi_1) d\xi d\xi = \int_{\xi_1 - W_1/2}^{\xi_1 + W_1/2} d\xi = W_1. \quad (3.25)$$

Substituindo (3.25) e (3.22) em (3.18), obtém-se, finalmente, a expressão da impedância de entrada, ou seja,

$$Z_{in} = \frac{V}{I} = - \frac{h}{W_1} \int_{\xi_1 - W_1/2}^{\xi_1 + W_1/2} E_\rho \frac{d\xi}{W_1} . \quad (3.26)$$

3.4 IMPEDÂNCIA DE ENTRADA

A determinação da impedância de entrada do ressoador com frequência de ressonância, f_{mn} , dada por (3.13) e alimentado por um cabo coaxial no ponto (ξ_1, ξ_1) , é obtida a partir do modelamento descrito na seção anterior.

Os campos no interior da cavidade, levando-se em consideração a corrente de excitação, são determinados a partir de uma expansão em termos dos modos ressonantes ψ_{mn} [15]. A equação de onda para o campo elétrico no interior da cavidade alimentada pelo cabo coaxial é

$$(\nabla_t^2 + k^2) E_\rho = j\omega\mu_0 J \cdot \hat{\rho} \quad (3.27)$$

ou

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + k^2 \right] E_\rho = j\omega\mu_0 J_\rho . \quad (3.28)$$

Substituindo

$$E_\rho = j\omega\mu_0 \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{mn} \psi_{mn} \quad (3.29)$$

e

$$J_\rho = J(\xi) \delta(\xi - \xi_1)$$

na Eq. (3.28), obtém-se

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} C_{mn} (k^2 - k_{mn}^2) \psi_{mn} = J(\xi) \delta(\xi - \xi_1), \quad (3.30)$$

onde C_{mn} são coeficientes a determinar, enquanto que $J(\xi)$ é dado por (3.24) e ψ_{mn} por:

$$\psi_{mn} = \cos \left[\frac{m\pi}{W} \xi \right] \cos \left[\frac{n\pi}{L} \zeta \right]. \quad (3.31)$$

Multiplicando-se ambos os lados da Eq. (3.30) por $\psi_{mn} d\xi d\zeta$ e integrando-se de 0 a W em ξ e de 0 a L em ζ e ainda fazendo uso das condições de ortogonalidade,

$$\int_0^W \cos^2 \left(\frac{m\pi}{W} \xi \right) d\xi = (1 + \delta_{om}) W/2 \quad (3.32)$$

e

$$\int_0^L \cos^2 \left(\frac{n\pi}{L} \zeta \right) d\zeta = (1 + \delta_{on}) L/2, \quad (3.33)$$

obtém-se

$$C_{mn} (k^2 - k_{mn}^2) (1 + \delta_{om}) (1 + \delta_{on}) \frac{WL}{4} = \int_{\xi_1 - W_1/2}^{\xi_1 + W_1/2} J(\xi) \cos \left(\frac{m\pi}{W} \xi \right) d\xi \int_0^L \delta(\zeta - \zeta_1) \cos \left(\frac{n\pi}{L} \zeta \right) d\zeta \quad (3.34)$$

ou

$$C_{mn} (k^2 - k_{mn}^2) (1 + \delta_{om}) (1 + \delta_{on}) \frac{WL}{4} = W_1 \cos \left(\frac{m\pi}{W} \xi_1 \right) \cos \left(\frac{n\pi}{L} \zeta_1 \right) j_0 \left(\frac{m\pi W_1}{2W} \right), \quad (3.35)$$

onde δ_{om} e δ_{on} são funções deltas de Kronecker, ou seja,

$$\delta_{op} = \begin{cases} 1, & p = 0 \\ 0, & p \neq 0 \end{cases} \quad (3.36)$$

e $j_0(x)$ é a função esférica de Bessel de ordem zero, dada por:

$$j_0(x) = \text{sen}(x)/x. \quad (3.37)$$

De (3.35) obtém-se finalmente

$$C_{mn} = \frac{4W_1}{WL} \frac{\cos \left(\frac{m\pi}{W} \xi_1 \right) \cos \left(\frac{n\pi}{L} \zeta_1 \right) j_0 \left(\frac{m\pi W_1}{2W} \right)}{(k^2 - k_{mn}^2) (1 + \delta_{om}) (1 + \delta_{on})}. \quad (3.38)$$

A expressão (3.38) não inclui as perdas do elemento radiador. Essas perdas são devidas às ondas de superfície, radiação, perdas no dielétrico e material condutor. Para $h \ll a$, as perdas devidas à excitação das ondas de superfície são pequenas e serão desprezadas. As perdas restantes podem ser calculadas em termos de uma tangente de perdas δ_{ef} , que pode ser relacionada com o fator de qualidade do radiador através da expressão

$$\delta_{ef} = 1/Q_t. \quad (3.39)$$

Portanto se se considerarem as perdas, o número de onda fica sendo

$$k_{ef} = k_o \sqrt{\epsilon_r (1 - j\delta_{ef})} \quad (3.40)$$

que, substituído na Eq. (3.38), torna-se:

$$C_{mn} = \frac{4W_1}{WL} \frac{\cos\left(\frac{m\pi}{W} \xi_1\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L} \zeta_1\right) j_o\left(\frac{m\pi W_1}{2W}\right)}{(k_{ef}^2 - k_{mn}^2)(1 + \delta_{om})(1 + \delta_{on})}. \quad (3.41)$$

A expressão que fornece a impedância de entrada é obtida através da substituição do campo elétrico (3.29) na Eq. (3.26), ou seja,

$$Z_{in} = -\frac{h}{W_1} j\omega\mu_o \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{mn} \cos\left(\frac{n\pi}{L} \zeta\right) \int_{\xi_1 - W_1/2}^{\xi_1 + W_1/2} \cos\left(\frac{m\pi}{W} \xi\right) \frac{d\xi}{W_1}. \quad (3.42)$$

Substituindo (3.41) na expressão acima e considerando a impedância no ponto de alimentação (ξ_1, ζ_1) , tem-se:

$$Z_{in} = \sum_{m,n=0}^{\infty} j \frac{8\pi\mu_o h f}{WL} \frac{\cos^2\left(\frac{m\pi}{W} \xi_1\right) \cos^2\left(\frac{n\pi}{L} \zeta_1\right) j_o^2\left(\frac{m\pi W_1}{2W}\right)}{(k_{mn}^2 - k_{ef}^2)(1 + \delta_{om})(1 + \delta_{on})}. \quad (3.43)$$

Sabendo-se que,

$$k_{mn}^2 - k_{ef}^2 = 4\pi^2 \mu_o \epsilon_o \epsilon_r [f_{mn}^2 - f(1 - j\delta_{ef})] , \quad (3.44)$$

obtem-se, após algumas manipulações matemáticas, a expressão final da impedância de entrada, isto é,

$$Z_{in} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{4h}{WL} \frac{1}{2\pi\epsilon_o \epsilon_r (1+\delta_{om})(1+\delta_{on})} \cos^2\left(\frac{m\pi}{W} \xi_1\right) \cos^2\left(\frac{n\pi}{L} \xi_1\right) \\ \times j_o^2\left(\frac{m\pi W_1}{2W}\right) \frac{\delta_{ef} f^3 - jf(f^2 - f_{mn}^2)}{\delta_{ef}^2 f^4 + (f^2 - f_{mn}^2)^2} . \quad (3.45)$$

3.5 FATOR DE QUALIDADE

Para se obter a impedância de entrada no elemento radiador é necessário calcular-se a tangente de perda efetiva, que está por sua vez inversamente relacionada com o fator de qualidade da cavidade ou radiador da antena.

O fator de qualidade total Q_t de uma cavidade ressonante é dado por

$$\frac{1}{Q_t} = \frac{1}{Q_d} + \frac{1}{Q_r} + \frac{1}{Q_c} , \quad (3.46)$$

onde, Q_d , Q_r e Q_c são, respectivamente, os fatores de qualidade associados às perdas no dielétrico, por radiação e nas paredes condutoras da cavidade. Cada fator está relacionado com estas perdas através da expressão

$$Q_i = \frac{2\pi f U_{arm}}{P_i} , \quad (3.47)$$

onde U_{arm} é a energia armazenada na cavidade e P_i a potência associada a cada uma das perdas.

A energia armazenada pode ser obtida a partir do campo elétrico (3.10) no interior da cavidade, ou seja,

$$U_{arm} = \frac{\epsilon r \epsilon_0}{2} \iiint_{V'} |E_\rho|^2 dV' \quad (3.48)$$

ou

$$U_{arm} = E_o^2 \frac{\epsilon r \epsilon_0}{2} \int_0^L \int_0^W \int_a^{a+h} \cos^2 \left(\frac{m\pi}{W} \xi \right) \cos^2 \left(\frac{n\pi}{L} \zeta \right) d\rho d\xi d\zeta. \quad (3.49)$$

Resolvendo a integral no volume da cavidade, obtém-se:

$$U_{arm} = E_o^2 \frac{\epsilon r \epsilon_0 h W L}{8}. \quad (3.50)$$

As perdas ôhmicas nas paredes condutoras são calculadas a partir de

$$P_c = 2 \iint_S \frac{1}{2} R_s |H_t|^2 dS = R_s \int_0^L \int_0^W |H_t|^2 d\xi d\zeta, \quad (3.51)$$

onde R_s é a resistência devido ao efeito pelicular, S é a superfície condutora (microfita) e H_t é o campo magnético tangencial a essa superfície, dado por

$$-j\omega\mu_o H_t = \nabla \times E = -\hat{\rho} \times \nabla E_\rho = \frac{\partial E_\rho}{\partial \zeta} \hat{\xi} - \frac{\partial E_\rho}{\partial \xi} \hat{\zeta}, \quad (3.52)$$

logo,

$$|H_t|^2 = \frac{1}{\omega^2 \mu_o^2} \left[\left(\frac{\partial E_\rho}{\partial \zeta} \right)^2 + \left(\frac{\partial E_\rho}{\partial \xi} \right)^2 \right] \quad (3.53)$$

ou

$$|H_t|^2 = \frac{E_o^2}{\omega^2 \mu_o^2} \left[\left(\frac{m\pi}{W} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{m\pi}{W} \xi \right) \cos^2 \left(\frac{n\pi}{L} \zeta \right) + \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{n\pi}{L} \zeta \right) \cos^2 \left(\frac{m\pi}{W} \xi \right) \right]. \quad (3.54)$$

Substituindo (3.54) em (3.51) e, em seguida, integrando na superfície condutora, tem-se

$$P_c = \frac{E_o^2 W L R_s}{4\omega^2 \mu_o^2} \left[\left(\frac{m\pi}{W} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right] \quad (3.55)$$

ou

$$P_c = \frac{E_0^2 \delta^3 \sigma W L}{16} k_{mn}^2, \quad (3.56)$$

onde $R_s = (\sigma \delta)^{-1}$ e $\omega^2 \mu_0^2 = 4/(\delta^4 \sigma^2)$, sendo σ a condutividade e δ a profundidade de penetração.

As perdas por radiação são dadas por

$$P_r = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{W} \cdot \mathbf{R} R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi, \quad (3.57)$$

sendo $\mathbf{R}$ o versor posição e $\mathbf{W}$ o vetor de Poynting, dado por

$$\mathbf{W} = \frac{|\mathbf{E}|^2}{2\eta_0} \mathbf{R} \cong \frac{1}{2\eta_0} (|\mathbf{E}_\theta|^2 + |\mathbf{E}_\phi|^2) \mathbf{R}, \quad (3.58)$$

onde η_0 é a impedância intrínseca do ar e $\mathbf{E}$, ou $\mathbf{E}_\theta$ e $\mathbf{E}_\phi$, são os campos radiados, que serão calculados no Cap. 5.

Devido à complexidade das expressões destes campos, as perdas por radiação, ou melhor, a Eq. (3.57) só pode ser resolvida a partir de processos numéricos.

A expressão final do fator de qualidade total da cavidade fica sendo

$$Q_t = \left[\frac{P_c + P_r}{2\pi f U_{arm}} + \delta_d \right]^{-1}, \quad (3.59)$$

onde δ_d é a tangente de perda do substrato dielétrico, que geralmente é fornecida pelo fabricante.

3.6 CONCLUSÃO

A análise aqui desenvolvida proporcionou a obtenção de dois parâmetros importantes de uma antena. São estes a frequência de ressonância e a impedância de entrada.

Verifica-se que a frequência de ressonância, dentro das aproximações feitas, não depende do raio de curvatura do cilindro, mas do comprimento e largura da fita condutora, além da

permissividade do substrato dielétrico. O efeito do campo de borda é incluído utilizando-se permissividade, comprimento e largura efetiva. Este procedimento foi inserido com o intuito de melhorar a precisão no cálculo da frequência e ,conseqüentemente, da impedância de entrada, uma vez que a primeira é utilizada no cálculo da segunda.

A impedância de entrada para uma alimentação por cabo coaxial é obtida através de um modelamento onde se considera o fio central do cabo como uma tira metálica de espessura muito fina e largura efetiva aproximadamente igual a cinco vezes o diâmetro deste fio [13]. A partir da expressão obtida para esta impedância pode-se constatar sua dependência com o ponto de alimentação, o modo de excitação, as dimensões do elemento radiador e a frequência de ressonância. Mais uma vez o raio de curvatura não aparece na expressão final deste parâmetro.

Pode-se, finalmente, dizer que as expressões obtidas , tanto da frequência de ressonância como da impedância de entrada, para a antena analisada, são semelhantes àsquelas obtidas para uma antena de microfita retangular sobre um substrato plano. Verificou-se também que a orientação da microfita sobre a estrutura cilíndrica, dada pelo ângulo α , não afeta estes parâmetros.

CAPÍTULO IV

FUNÇÕES DIÁDICAS DE GREEN APLICADAS ÀS ESTRUTURAS CILÍNDRICAS CIRCULARES

4.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo é de interesse para aquelas pessoas que não estão familiarizadas com a teoria das funções diádicas de Green, ficando opcional a leitura deste para quem domina o assunto com relativa facilidade.

As seções foram distribuídas de forma a conduzir o leitor até o ponto onde seja capaz de aplicar a teoria que será exposta, no problema envolvendo espalhamento de campos eletromagnéticos em estruturas cilíndricas (Caps. 5 e 6). Uma rápida introdução às funções diádicas é feita na Seq. 4.2, mostrando como são definidas e como alguns operadores são aplicados a elas. Na Seq. 4.3 é obtida a função de Green para o espaço livre, nas três dimensões, utilizando o formalismo das funções diádicas. As expressões dos campos em termos da função diádica de Green são fornecidas no final da seção. Em 4.4 são apresentadas as soluções possíveis para a equação de onda na forma vetorial e, em 4.5, estas soluções são obtidas para um guia de onda cilíndrico circular. O método de Ohm-Rayleigh, que é utilizado na obtenção das soluções das equações diferenciais não homogêneas, é introduzido na Seq. 4.6. A solução da equação diferencial vetorial, envolvendo as funções diádicas de Green no espaço livre, é obtida na Seq. 4.7 através do método de Ohm-Rayleigh e de uma expansão em termos das funções ortogonais da Seq. 4.5. Finalmente, o método do ponto de sela é apresentado na Seq. 4.8 e será

empregado nos próximos capítulos na obtenção dos campos distantes radiados por uma antena. Todo o material apresentado neste capítulo pode ser encontrado com riqueza de detalhes no livro [21] e nas notas [22] do Chen-To-Tai.

4.2 INTRODUÇÃO AS FUNÇÕES DIÁDICAS

A função diádica, com notação $\bar{D}$, é definida como a associação de duas funções vetoriais A e B , isto é,

$$\bar{D} = A B, \quad (4.1)$$

onde A é chamado de elemento anterior e B de elemento posterior. Portanto, se A e B forem dadas, respectivamente, por

$$A = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} \quad \text{e} \quad B = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z},$$

então $\bar{D}$ será

$$\bar{D} = (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z})(B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}) \quad (4.2)$$

ou

$$\begin{aligned} \bar{D} = & A_x B_x \hat{x}\hat{x} + A_x B_y \hat{x}\hat{y} + A_x B_z \hat{x}\hat{z} \\ & + A_y B_x \hat{y}\hat{x} + A_y B_y \hat{y}\hat{y} + A_y B_z \hat{y}\hat{z} \\ & + A_z B_x \hat{z}\hat{x} + A_z B_y \hat{z}\hat{y} + A_z B_z \hat{z}\hat{z}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Outra forma de se escrever a Eq. (4.3) é

$$\bar{D} = D^{(x)} \hat{x} + D^{(y)} \hat{y} + D^{(z)} \hat{z}, \quad (4.4a)$$

onde

$$D^{(x)} = A_x B_x \hat{x} + A_y B_x \hat{y} + A_z B_x \hat{z} = B_x A, \quad (4.4b)$$

$$D^{(y)} = A_x B_y \hat{x} + A_y B_y \hat{y} + A_z B_y \hat{z} = B_y A \quad (4.4c)$$

$$\text{e} \quad D^{(z)} = A_x B_z \hat{x} + A_y B_z \hat{y} + A_z B_z \hat{z} = B_z A. \quad (4.4d)$$

Uma função diádica, por si só, não tem significado físico, a

menos que uma função vetorial atue sobre esta através de um produto escalar. O produto escalar entre uma função vetorial C e uma função diádica $\bar{D}$, dado pela Eq. (4.1), pode ser feito de dois modos. O primeiro, chamado de produto escalar anterior, é obtido quando se aplica a função C sobre o elemento anterior da diádica, ou seja,

$$C \cdot \bar{D} = (C \cdot A)B = B(C \cdot A) = B(A \cdot C), \quad (4.5)$$

e o segundo, chamado de produto escalar posterior, é obtido quando se aplica C sobre o elemento posterior, isto é,

$$\bar{D} \cdot C = A(B \cdot C) = (B \cdot C)A = (C \cdot B)A. \quad (4.6)$$

Pode-se verificar também que,

$$\bar{D} \cdot \hat{x} = D^{(x)}, \quad \bar{D} \cdot \hat{y} = D^{(y)} \quad \text{e} \quad \bar{D} \cdot \hat{z} = D^{(z)}. \quad (4.7)$$

Sendo assim, pode-se dizer que o produto escalar entre uma função vetorial e uma diádica resulta em uma função vetorial.

O produto vetorial pode ser, também, de dois tipos:

$$C \times \bar{D} = (C \times A)B, \quad (4.8)$$

chamado produto vetorial anterior e

$$\bar{D} \times C = A(B \times C), \quad (4.9)$$

chamado produto vetorial posterior.

Pode-se também aplicar os operadores divergente e rotacional sobre uma função diádica, ou seja,

$$\nabla \cdot \bar{D} = [\nabla \cdot D^{(x)}] \hat{x} + [\nabla \cdot D^{(y)}] \hat{y} + [\nabla \cdot D^{(z)}] \hat{z} \quad (4.10)$$

e

$$\nabla \times \bar{D} = [\nabla \times D^{(x)}] \hat{x} + [\nabla \times D^{(y)}] \hat{y} + [\nabla \times D^{(z)}] \hat{z}. \quad (4.11)$$

Uma função diádica unidade pode ser definida como sendo

$$\bar{\bar{I}} = \hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z}, \quad (4.12)$$

que tem as seguintes propriedades:

$$A \cdot \bar{\bar{I}} = \bar{\bar{I}} \cdot A = A \quad (4.13)$$

e

$$\nabla \cdot (\bar{\bar{I}}\psi) = \nabla\psi, \quad (4.14)$$

onde ψ é um função escalar.

4.3 FUNÇÕES DIÁDICAS DE GREEN PARA O ESPAÇO LIVRE

A maioria dos livros de física matemática apresentam o método da função de Green para resolver equações diferenciais não homogêneas. Um exemplo da aplicação deste método pode ser vista no livro do Tai [21], Cap. 3], onde as funções de Green são empregadas para obter a solução da equação escalar de onda. Nesta seção, o formalismo das funções diádicas será utilizado, juntamente com as funções de Green, para obtenção das soluções das equações diferenciais na forma vetorial que fornecem os campos elétrico e magnéticos, ou seja,

$$\nabla \times \nabla \times H(R) - k^2 H(R) = -j\omega\epsilon_0 M(R) \quad (4.15)$$

e

$$\nabla \times \nabla \times E(R) - k^2 E(R) = -\nabla \times M(R). \quad (4.16)$$

onde k é o número de onda e M a densidade de corrente magnética que excita os campos E e H . Pode-se associar a cada uma das equações diferenciais acima uma função diádica de Green. Será chamada de $\bar{\bar{G}}_e$, função diádica de Green do tipo elétrica, a função diádica

obtida a partir das equações que fornecem o campo elétrico e de $\vec{G}_m$ a função diádica de Green do tipo magnética, que será obtida das equações que fornecem o campo magnético. Convém lembrar que a variação dos campos com o tempo, considerada aqui, é do tipo $e^{j\omega t}$.

Utilizando a Eq.(4.15) e o potencial vetor F [16], para obtenção dos campos eletromagnéticos no espaço livre, tem-se

$$H(R) = -j\omega \left(1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \right) F(R) \quad (4.17)$$

$$E(R) = \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \times F(R), \quad (4.18)$$

onde

$$F(R) = \epsilon_0 \iiint_{V'} G_0(R|R') M(R') dV' \quad (4.19)$$

$$G_0(R|R') = \frac{e^{-jk|R-R'|}}{4\pi|R-R'|} \quad (4.20)$$

Sendo V' o volume que envolve a fonte, G_0 a função de Green no espaço livre, R o vetor que localiza o ponto de observação e R' o vetor que localiza a fonte (Fig. 4.1).

Considerando-se a fonte $M(R)$ pontual, orientada na direção $\hat{x}$ e dada por

$$M(R) = \frac{J}{\omega \epsilon_0} \delta(R - R') \hat{x}, \quad (4.21)$$

com

$$\iiint_{V'} M(R) dV' = \frac{J}{\omega \epsilon_0} \hat{x}. \quad (4.22)$$

Levando (4.21) em (4.19), tem-se:

$$F(R) = \frac{J}{\omega} G_0(R|R') \hat{x}. \quad (4.23)$$

Uma das componentes da função diádica de Green do tipo magnética é obtida a partir da substituição da Eq. (4.23) em

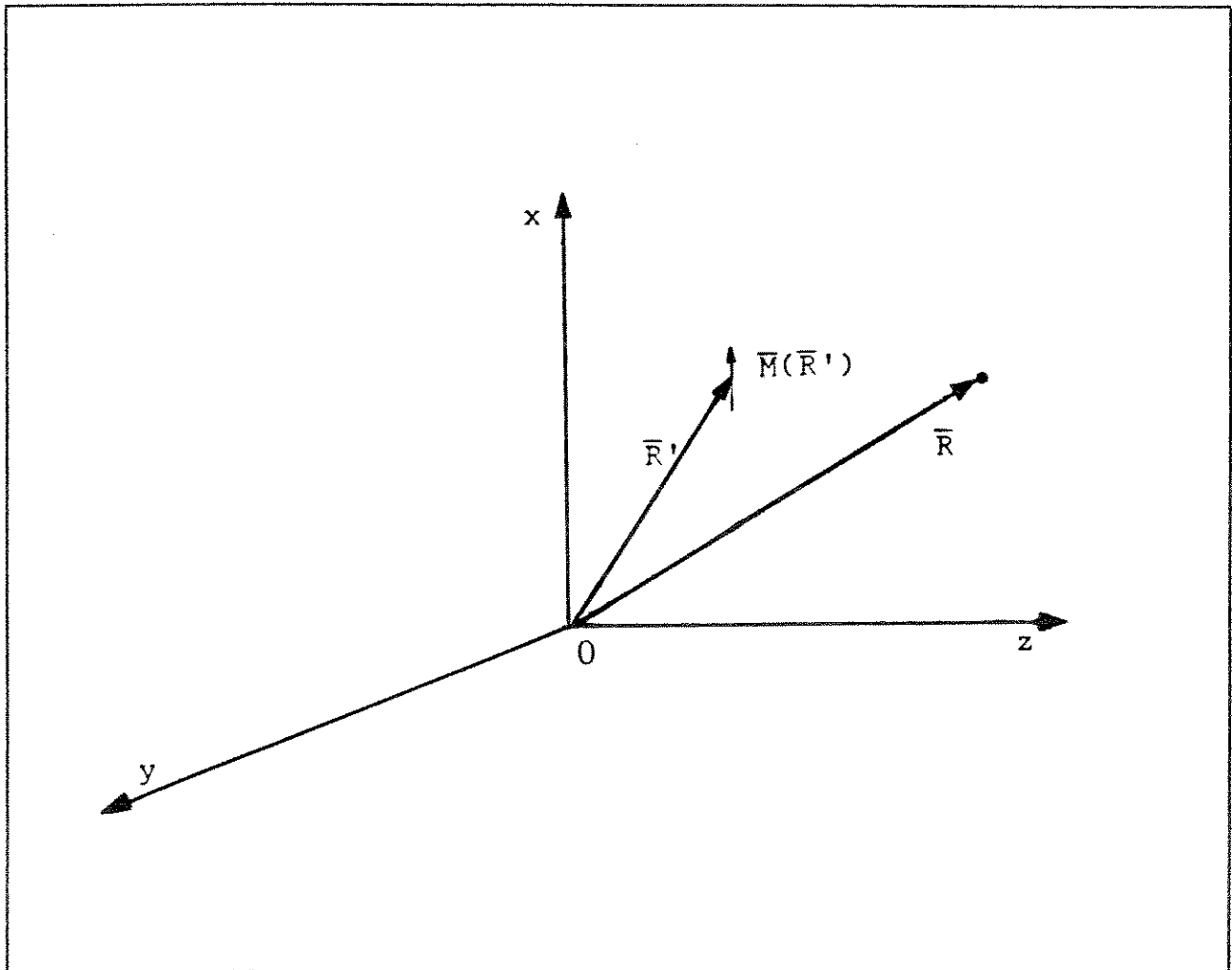


Fig. 4.1 - Fonte de corrente magnética no espaço livre.

(4.17), ou seja,

$$G_{mo}^{(x)}(R|R') = (1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot) G_o(R|R') \hat{x}, \quad (4.24)$$

que é solução de

$$\nabla \times \nabla \times G_{mo}^{(x)}(R|R') - k^2 G_{mo}^{(x)}(R|R') = \delta(R - R') \hat{x}. \quad (4.25)$$

Caso a fonte fosse orientada na direção $\hat{y}$ ou $\hat{z}$, ter-se-iam, respectivamente,

$$\nabla \times \nabla \times G_{mo}^{(y)}(R|R') - k^2 G_{mo}^{(y)}(R|R') = \delta(R - R') \hat{y} \quad (4.26)$$

e

$$\nabla \times \nabla \times G_{mo}^{(z)}(R|R') - k^2 G_{mo}^{(z)}(R|R') = \delta(R - R') \hat{z}, \quad (4.27)$$

onde

$$G_{mo}^{(y)}(R|R') = (1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot) G_o(R|R') \hat{y}, \quad (4.28)$$

e

$$G_{mo}^{(z)}(R|R') = (1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot) G_o(R|R') \hat{z}. \quad (4.29)$$

Sendo assim, a expressão completa da função diádica de Green do tipo magnética fica,

$$\bar{G}_{mo}(R|R') = G_{mo}^{(x)}(R|R') \hat{x} + G_{mo}^{(y)}(R|R') \hat{y} + G_{mo}^{(z)}(R|R') \hat{z}, \quad (4.30)$$

que é solução da equação

$$\nabla \times \nabla \times \bar{G}_{mo}(R|R') - k^2 \bar{G}_{mo}(R|R') = \bar{I} \delta(R - R'), \quad (4.31)$$

onde a diádica de Green pode ser escrita como sendo

$$\bar{G}_{mo}(R|R') = (1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot) \bar{I} G_o(R|R'). \quad (4.32)$$

A equação que relaciona o campo magnético com a função diádica do tipo magnética é obtida quando se faz a integração das Eqs.

(4.15) e (4.31), através do teorema de Green na forma vetorial [21]. Este teorema é apresentado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \iiint_V \{ \mathbf{P} \cdot [\nabla \times \nabla \times \mathbf{Q}] - [\nabla \times \nabla \times \mathbf{P}] \cdot \mathbf{Q} \} dV \\ = \iint_S [\mathbf{Q} \times \nabla \times \mathbf{P} - \mathbf{P} \times \nabla \times \mathbf{Q}] \cdot d\mathbf{S}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ são duas funções vetoriais quaisquer. Portanto, se se considerar $\mathbf{P} = \mathbf{H}(\mathbf{R})$ e $\mathbf{Q} = \vec{\mathcal{G}}_{mo}(\mathbf{R}|\mathbf{R}') \cdot \mathbf{a}$, sendo $\mathbf{a}$ um vetor qualquer, pode-se reescrever (4.33) como

$$\begin{aligned} \iiint_V \{ \mathbf{H} \cdot [\nabla \times \nabla \times \vec{\mathcal{G}}_{mo}(\mathbf{R}|\mathbf{R}') \cdot \mathbf{a}] - [\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}] \cdot \vec{\mathcal{G}}_{mo}(\mathbf{R}|\mathbf{R}') \cdot \mathbf{a} \} dV \\ = - \iint_S [\nabla \times \mathbf{H}] \times \vec{\mathcal{G}}_{mo}(\mathbf{R}|\mathbf{R}') \cdot \mathbf{a} + \mathbf{H} \times \nabla \times \vec{\mathcal{G}}_{mo}(\mathbf{R}|\mathbf{R}') \cdot \mathbf{a}] \cdot d\mathbf{S}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

onde o segundo termo da Eq. (4.34) tende a zero quando $S \rightarrow \infty$ [21, pp. 51 e 52]. A demonstração é obtida utilizando a condição de radiação,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R [jk\hat{n} \mathbf{E}(\mathbf{R}) - j\omega\mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{R})] = 0, \quad (4.35)$$

sendo $\hat{n}$ um versor orientado na direção de propagação. Portanto, se se utilizarem (4.15) e (4.31) em (4.34), tem-se

$$\iiint_V [\mathbf{H} \cdot \vec{\mathcal{I}} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \cdot \mathbf{a} + j\omega\epsilon_0 \mathbf{M}(\mathbf{R}) \cdot \vec{\mathcal{G}}_{mo}(\mathbf{R}|\mathbf{R}') \cdot \mathbf{a}] dV = 0 \quad (4.36)$$

ou

$$\iiint_V [\mathbf{H} \cdot \vec{\mathcal{I}} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \cdot \mathbf{a}] dV =$$

$$= -j\omega\epsilon_0 \iiint_V [M(R) \cdot \bar{G}_{m0}(R|R') \cdot a] dV. \quad (4.37)$$

Resolvendo a integral do primeiro termo e permutando as variáveis com "''" por aquelas sem "''", obtém-se:

$$\begin{aligned} H(R) &= -j\omega\epsilon_0 \iiint_{V'} M(R') \cdot \bar{G}_{m0}(R'|R) dV' \\ &= -j\omega\epsilon_0 \iiint_{V'} \tilde{\bar{G}}_{m0}(R'|R) \cdot M(R') dV'. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Utilizando a propriedade de simetria da função diádica de Green do espaço livre,

$$\tilde{\bar{G}}_{m0}(R'|R) = \bar{G}_{m0}(R|R'), \quad (4.39)$$

cuja a demonstração é dada por [21, pp. 62], tem-se finalmente

$$H(R) = -j\omega\epsilon_0 \iiint_{V'} \bar{G}_{m0}(R|R') \cdot M(R') dV'. \quad (4.40)$$

O campo elétrico pode ser obtido fazendo $Q = \bar{G}_{m0}(R|R') \cdot a$ e $P = E(R)$ na Eq. (4.33); em seguida substitui-se (4.16) e (4.31) nesta equação. Empregando-se um procedimento semelhante a aquele utilizado na determinação do campo magnético, tem-se

$$E(R) = - \iiint_{V'} \bar{G}_{m0}(R|R') \cdot \nabla' \times M(R') dV' \quad (4.41)$$

ou

$$E(R) = - \iiint_{V'} \bar{G}_{m0}(R|R') \cdot J(R') dV', \quad (4.42)$$

sendo $J(R')$ uma corrente elétrica equivalente, obtida de $M(R)$

através de,

$$J(R') = \nabla' \times M(R'). \quad (4.43)$$

A função diádica de Green do tipo elétrica é obtida a partir (4.23) e (4.18), para $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$, ou seja,

$$\bar{G}_{eo}(R|R') = \frac{j}{\omega \epsilon_0} \nabla \times [\bar{I} G_o(R|R')], \quad (4.44)$$

onde $\bar{G}_{eo}(R|R')$ satisfaz equação

$$\nabla \times \nabla \times \bar{G}_{eo}(R|R') - k^2 \bar{G}_{eo}(R|R') = -\nabla \times [\bar{I} \delta(R - R')]. \quad (4.45)$$

O campo magnético é relacionado com $\bar{G}_{eo}(R|R')$ através do teorema de Green, Eq. (4.33), onde $P = E(R)$ e $Q = \bar{G}_{eo}(R|R') \cdot a$. Repetindo-se o procedimento adotado para as funções do tipo magnética, obtém-se a expressão

$$E(R) = \iiint_{V'} \bar{G}_{eo}(R|R') \cdot M(R') dV'. \quad (4.46)$$

Pode-se relacionar as funções diádicas de Green do tipo magnética com a do tipo elétrica substituindo-se (4.46) e (4.40) na equação de Maxwell,

$$j\omega \epsilon_0 E(R) = \nabla \times H(R), \quad (4.47)$$

ou seja,

$$\bar{G}_{eo}(R|R') = -\nabla \times \bar{G}_{mo}(R|R'). \quad (4.48)$$

Para se obter $\bar{G}_{mo}(R|R')$ a partir de $\bar{G}_{eo}(R|R')$ utiliza-se

$$j\omega \mu_0 H(R) + M(R) = -\nabla \times E(R), \quad (4.49)$$

juntamente com

$$M(R) = \iiint_{V'} M(R') \cdot \bar{I} \delta(R - R') dV'. \quad (4.50)$$

Portanto, substituindo (4.46), (4.40) e (4.50) em (4.49), tem-se

$$k^2 \bar{G}_{mo}(R|R') + \bar{I} \delta(R - R') = -\nabla \times \bar{G}_{eo}(R|R') \quad (4.51)$$

ou

$$\bar{G}_{mo}(R|R') = -\frac{1}{k^2} \bar{I} \delta(R - R') - \frac{1}{k^2} \nabla \times \bar{G}_{eo}(R|R'). \quad (4.52)$$

Outra propriedade interessante é obtida quando se aplica $\nabla \cdot$ nas Eqs. (4.31) e (4.45), ou seja,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \nabla \times \bar{G}_{mo}(R|R') - k^2 \bar{G}_{mo}(R|R')) = \nabla \cdot (\bar{I} \delta(R - R')) \quad (4.53)$$

e

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \nabla \times \bar{G}_{eo}(R|R') - k^2 \bar{G}_{eo}(R|R')) \\ = -\nabla \cdot (\nabla \times [\bar{I} \delta(R - R')]), \end{aligned} \quad (4.54)$$

que fornecem respectivamente,

$$\nabla \cdot \bar{G}_{mo}(R|R') = -\frac{1}{k^2} \nabla \cdot [\bar{I} \delta(R - R')] \neq 0 \quad (4.55)$$

e

$$\nabla \cdot \bar{G}_{eo}(R|R') = 0 \quad (4.56)$$

4.4 FUNÇÕES VETORIAIS DE ONDA

Uma função vetorial de onda, por definição, é uma auto-função ou função característica que satisfaz a equação de onda na forma vetorial,

$$\nabla^2 A + k^2 A = 0 \quad (4.57)$$

ou

$$\nabla (\nabla \cdot A) - \nabla \times \nabla \times A + k^2 A = 0, \quad (4.58)$$

obtida a partir da identidade vetorial

$$\nabla^2 \mathbf{A} \equiv \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}. \quad (4.59)$$

Existem três conjuntos independentes de funções vetoriais $\mathbf{A}$ que são soluções de (4.58),

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} = \nabla \psi_\nu \quad (4.60)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} = \nabla \times (\psi_\nu \hat{\mathbf{c}}) \quad (4.61)$$

e

$$\mathbf{A} = \mathbf{N} = \frac{1}{k} \nabla \times \nabla \times (\psi_\nu \hat{\mathbf{c}}), \quad (4.62)$$

sendo $\hat{\mathbf{c}}$ um versor arbitrário, ν um número real e ψ_ν uma função escalar que satisfaz a equação

$$\nabla^2 \psi_\nu + k^2 \psi_\nu = 0, \quad (4.63)$$

também conhecida como equação de onda na forma escalar.

A prova de que (4.60), (4.61) e (4.62) são soluções da equação vetorial de onda, é obtida substituindo $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$ e $\mathbf{N}$ na Eq. (4.58). Portanto, levando (4.60) em (4.58), tem-se

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{L}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{L} + k^2 \mathbf{L} = 0 \quad (4.64)$$

ou

$$\nabla (\nabla \cdot \nabla \psi_\nu) - \nabla \times \nabla \times (\nabla \psi_\nu) + k^2 \nabla \psi_\nu = 0. \quad (4.65)$$

Sabendo-se que $\nabla \cdot \nabla \psi_\nu = \nabla^2 \psi_\nu$ e $\nabla \times (\nabla \psi_\nu) = 0$, então (4.65) fica

$$\nabla [(\nabla^2 \psi_\nu + k^2 \psi_\nu)] = 0. \quad (4.66)$$

Como ψ_ν é solução de (4.63) então está provado que $\mathbf{L}$ é solução de (4.58). Substituindo (4.61) em (4.58), tem-se

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{M}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{M} - k^2 \mathbf{M} = 0 \quad (4.67)$$

ou

$$\nabla [\nabla \cdot \nabla \times (\psi_\nu \hat{\mathbf{c}})] - \nabla \times [\nabla \times \nabla \times (\psi_\nu \hat{\mathbf{c}}) - k^2 (\psi_\nu \hat{\mathbf{c}})] = 0 \quad (4.68)$$

ou ainda,

$$\nabla \times [(\nabla^2 \psi_\nu + k^2 \psi_\nu) \hat{\mathbf{c}}] = 0, \quad (4.69)$$

uma vez que $\nabla \cdot \nabla \times$ de um vetor é zero. Portanto, se ψ_ν é solução de (4.63) fica então provado que $\mathbf{M}$ também é solução de (4.58). No caso de $\mathbf{N}$, tem-se:

$$\nabla \times \nabla \times [(\nabla^2 \psi_\nu + k^2 \psi_\nu) \hat{\mathbf{c}}] = 0. \quad (4.70)$$

Utilizando mais uma vez (4.63), prova-se que $\mathbf{N}$ é solução de (4.58).

Pode-se verificar que as funções $\mathbf{M}$ e $\mathbf{N}$ são ortogonais entre si, portanto satisfazem as relações

$$\mathbf{M} = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{N}, \quad (4.71)$$

e

$$\mathbf{N} = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M} \quad (4.72)$$

ou

$$\nabla \times \mathbf{N} = \frac{1}{k} \nabla \times \nabla \times \mathbf{M} = k \mathbf{M}. \quad (4.73)$$

Outras relações envolvendo os três tipos de funções podem ser obtidas. Dentre elas tem-se

$$\mathbf{M} = \mathbf{L} \times \hat{\mathbf{c}} = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{N} \quad (4.74)$$

e

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{M} = 0. \quad (4.75)$$

Esta última mostra claramente que a função $\mathbf{L}$ é ortogonal a $\mathbf{M}$.

Existem algumas propriedades interessantes que podem ser obtidas diretamente das definições de $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$ e $\mathbf{N}$. Uma delas diz que

$$\nabla \times \mathbf{L} = 0 \quad (4.76)$$

e que

$$\nabla \cdot \mathbf{L} = \nabla^2 \psi_\nu = -k^2 \psi_\nu. \quad (4.77)$$

Outras mostram que $\mathbf{M}$ e $\mathbf{N}$ são solenoidais, ou seja,

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = 0 \quad (4.78)$$

e

$$\nabla \cdot \mathbf{N} = 0. \quad (4.79)$$

4.5 FUNÇÕES VETORIAIS DE ONDA PARA ESTRUTURAS CILÍNDRICAS

A teoria exposta na seção anterior pode ser utilizada para determinar os campos eletromagnéticos dentro de um guia de onda com seção transversal circular, mostrado na Fig. 4.2.

A solução da equação de onda na forma escalar em coordenadas cilíndricas é dada por:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right] + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0. \quad (4.80)$$

Utilizando o método da separação das variáveis, tem-se:

$$\psi(\rho, \phi, z) = P(\rho) \Phi(\phi) Z(z). \quad (4.81)$$

Substituindo (4.81) em (4.80) e, em seguida, dividindo toda a equação por ψ , obtém-se:

$$\frac{1}{\rho P} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial P}{\partial \rho} \right] + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 = 0. \quad (4.82)$$

Como cada termo da equação envolve a derivada de uma função dividida pela própria função de mesma variável, pode-se então,

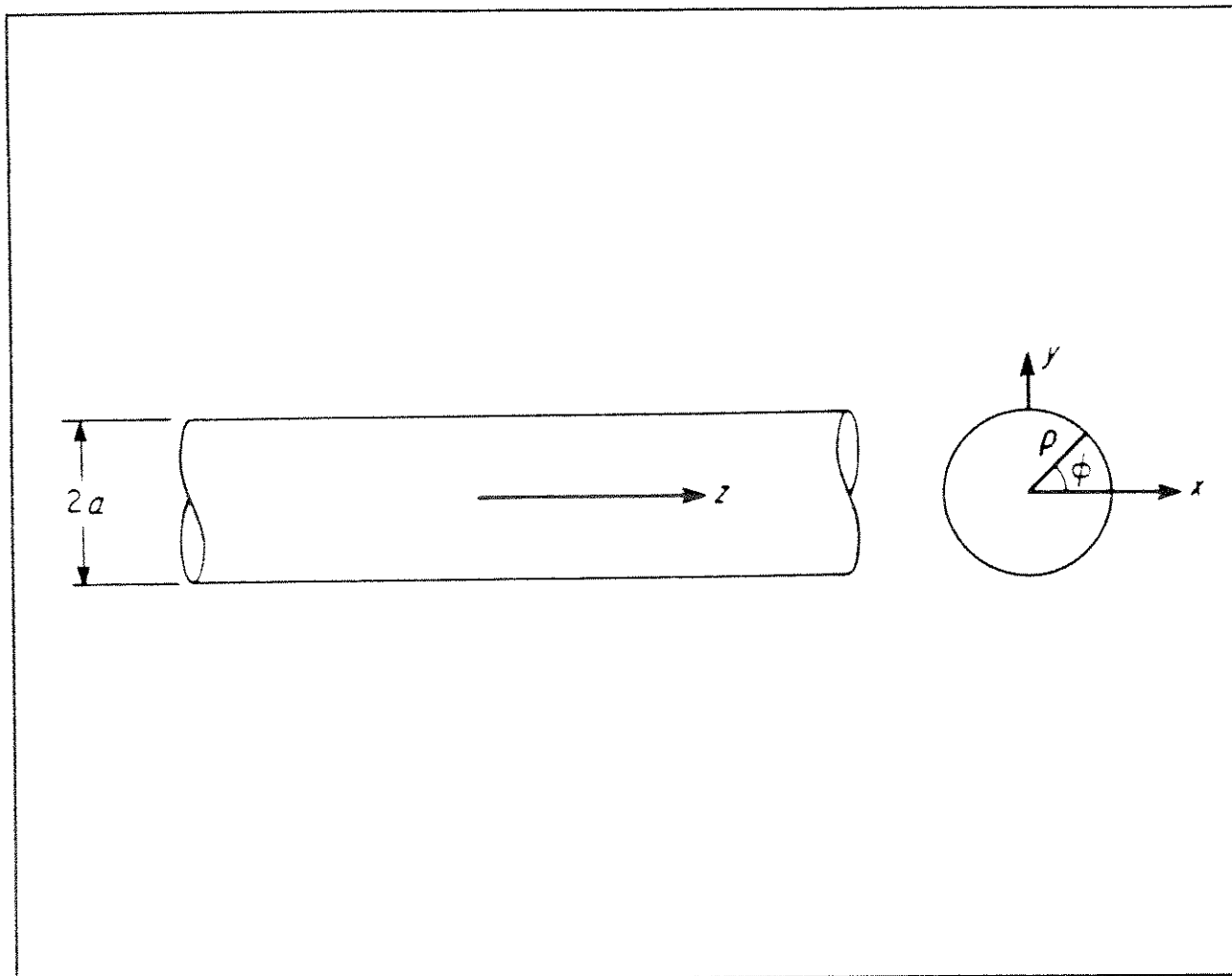


Fig. 4.2 - Guia de onda com seção transversal circular.

escrever a Eq. (4.82) da seguinte forma:

$$-\alpha^2 - h^2 + k^2 = 0 \quad (4.83)$$

ou

$$k^2 = \alpha^2 + h^2, \quad (4.84)$$

onde

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -h^2 \quad (4.85)$$

e

$$\frac{1}{\rho P} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial P}{\partial \rho} \right] + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = -\alpha^2. \quad (4.86)$$

A solução de (4.85) é dada por

$$Z(z) = C_1 e^{+jhz} + C_2 e^{-jhz}, \quad (4.87)$$

onde C_1 e C_2 são constantes a serem determinadas a partir das condições de contorno.

Considerando a onda propagando na direção z^+ , tem-se apenas a solução,

$$Z(z) = C_2 e^{-jhz}. \quad (4.88)$$

A Eq. (4.86) pode ser resolvida utilizando mais uma vez o método da separação das variáveis, ou seja,

$$\frac{\rho}{P} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial P}{\partial \rho} \right] + \alpha^2 \rho^2 = - \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}, \quad (4.89)$$

que, por sua vez, pode ser dividida em duas equações,

$$- \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = \nu^2 \quad (4.90)$$

e

$$\frac{\rho}{P} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{dP}{d\rho} \right] + \alpha^2 \rho^2 = \nu^2, \quad (4.91)$$

onde ν e α são dois números reais quaisquer.

A solução da Eq. (4.90) é semelhante àquela obtida para (4.85), ou seja,

$$\Phi(\phi) = C_3 e^{+j\nu\phi} + C_4 e^{-j\nu\phi}. \quad (4.92)$$

Utilizando a fórmula de Euler, pode-se obter

$$\Phi(\phi) = A \cos(\nu\phi) + B \sin(\nu\phi), \quad (4.93)$$

onde A e B são constantes a determinar. A Eq. (4.91) é conhecida como equação de Bessel, cuja a solução é da forma

$$P(\rho) = C_5 J_\nu(\alpha\rho) + C_6 Y_\nu(\alpha\rho). \quad (4.94)$$

A primeira é chamada função de Bessel do primeiro tipo de ordem ν e a segunda de função de Bessel do segundo tipo de ordem ν ou função de Neumann. Como Y_ν tende a infinito quando $\rho \rightarrow 0$, então C_6 tem que ser igual a zero para a solução existir na origem. Portanto,

$$P(\rho) = C_5 J_\nu(\alpha\rho). \quad (4.95)$$

O campo no interior do guia deve ser periódico em ϕ , com período igual a 2π . Portanto, é necessário escolher ν igual a um inteiro n que satisfaça

$$\nu = 2\pi/\lambda = n \quad \text{ou} \quad n\lambda = 2\pi.$$

Sendo assim, a solução geral fica da seguinte forma:

$$\psi(\rho, \phi, z) = J_n(\alpha\rho) [\cos(n\phi) + \sin(n\phi)] e^{-jhz} \quad (4.96)$$

ou

$$\psi(\rho, \phi, z) = J_n(\alpha\rho) \cos(n\phi) e^{-jhz} + J_n(\alpha\rho) \sin(n\phi) e^{-jhz}, \quad (4.97)$$

onde as constantes foram feitas igual a um.

Verifica-se que ψ é a combinação linear de duas funções ortogonais, uma par e outra ímpar, que podem ser denotadas, respectivamente, como

$$\psi_e = J_n(\alpha\rho) \cos(n\phi) e^{-jhz} \quad (4.98)$$

e

$$\psi_o = J_n(\alpha\rho) \sin(n\phi) e^{-jhz} \quad (4.99)$$

ou ainda como

$$\psi_o = \psi_e + \psi_o. \quad (4.100)$$

A solução da equação de onda na forma vetorial, para regiões livres de fontes, dentro do guia cilíndrico circular, é então obtida utilizando-se as Eqs. (4.61) e (4.62) com $\hat{c} = \hat{z}$, ou seja,

$$M_{e\text{ona}} = \nabla \times (\psi_e \hat{z}) = \nabla \times [J_n(\alpha\rho) \frac{\cos(n\phi)}{\sin(n\phi)} e^{-jhz} \hat{z}] \quad (4.101)$$

e

$$N_{e\text{ona}} = \frac{1}{k} \nabla \times \nabla \times (\psi_e \hat{z}) = \frac{1}{k} \nabla \times \nabla \times [J_n(\alpha\rho) \frac{\cos(n\phi)}{\sin(n\phi)} e^{-jhz} \hat{z}], \quad (4.102)$$

onde

$$\frac{\cos(n\phi)}{\sin(n\phi)} = \cos(n\phi) + \sin(n\phi).$$

Se se considerar $M_{e\text{ona}}$ como uma função que descreve o campo elétrico no modo TE e $N_{e\text{ona}}$ no modo TM, então, $M_{e\text{ona}}$ e $N_{e\text{ona}}$ devem satisfazer, nas paredes do guia, às condições de contorno

$$\hat{\rho} \times M_{e\text{ona}}|_{\rho=a} = 0 \quad (4.103)$$

e

$$\hat{\rho} \times N_{e\text{ona}}|_{\rho=a} = 0. \quad (4.104)$$

Logo, substituindo (4.101) em (4.103), tem-se

$$\hat{\rho} \times \nabla \times (\psi_e \hat{z})|_{\rho=a} = - \frac{\partial \psi_e}{\partial \rho} \hat{z}|_{\rho=a} = 0, \quad (4.105)$$

portanto,

$$\frac{\partial \psi_e}{\partial \rho}|_{\rho=a} = \frac{\partial}{\partial \rho} [J_n(\alpha\rho) \frac{\cos(n\phi)}{\sin(n\phi)} e^{-jhz}]|_{\rho=a} = 0$$

ou

$$\left. \frac{\partial}{\partial \rho} [J_n(\alpha \rho)] \right|_{\rho=a} = 0. \quad (4.106)$$

Se q_{mn} é raiz da Eq. (4.106), então

$$\alpha a = q_{mn}$$

ou

$$\alpha = q_{mn}/a, \quad (4.107)$$

que será designada pela letra grega μ . Sendo assim, $M_{\alpha n \alpha}$ fica

$$\begin{aligned} M_{\alpha n \mu}(h) &= \nabla \times (\psi_0 \hat{z}) = \nabla \times [J_n(\mu \rho) \frac{\cos(n\phi)}{\sin(n\phi)} e^{-jh z} \hat{z}] \\ &= \left[\mp \frac{n J_n(\mu \rho)}{\rho} \frac{\sin(n\phi)}{\cos(n\phi)} \hat{\rho} - \frac{\partial J_n(\mu \rho)}{\partial \rho} \frac{\cos(n\phi)}{\sin(n\phi)} \hat{\phi} \right] e^{-jh z}. \end{aligned} \quad (4.108)$$

Substituindo (4.102) em (4.104), tem-se

$$\begin{aligned} &\frac{1}{k} \hat{\rho} \times \nabla \times \nabla \times (\psi_0 \hat{z}) \Big|_{\rho=a} \\ &= \frac{1}{k} \hat{\rho} \times \left[-jh \frac{\partial J_n(\alpha \rho)}{\partial \rho} \frac{\cos(n\phi)}{\sin(n\phi)} \hat{\rho} \pm \frac{jhn}{\rho} J_n(\alpha \rho) \frac{\sin(n\phi)}{\cos(n\phi)} \hat{\phi} \right. \\ &\quad \left. + \alpha^2 J_n(\alpha \rho) \frac{\cos(n\phi)}{\sin(n\phi)} \hat{z} \right] e^{-jh z} = 0 \end{aligned} \quad (4.109)$$

ou

$$\pm \frac{jhn}{\rho} J_n(\alpha \rho) \frac{\sin(n\phi)}{\cos(n\phi)} \hat{z} - \alpha^2 J_n(\alpha \rho) \frac{\cos(n\phi)}{\sin(n\phi)} \hat{\phi} = 0. \quad (4.110)$$

A Eq. (4.110) será sempre satisfeita se

$$J_n(\alpha \rho) \Big|_{\rho=a} = 0. \quad (4.111)$$

Portanto, considerando p_{mn} como raiz da Eq. (4.111), tem-se

$$\alpha a = p_{mn}$$

ou

$$\alpha = \lambda = p_{mn}/a. \quad (4.112)$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{on\lambda}(h) &= \frac{1}{k_\lambda} \nabla \times \nabla \times [J_n(\lambda\rho) \frac{\cos(n\phi)}{\sin(n\phi)} e^{-jh z} \hat{z}] \\ &= \frac{1}{k_\lambda} \left[-jh \frac{\partial J_n(\lambda\rho)}{\partial \rho} \frac{\cos(n\phi)}{\sin(n\phi)} \hat{\rho} \pm \frac{jhn}{\rho} J_n(\lambda\rho) \frac{\sin(n\phi)}{\cos(n\phi)} \hat{\phi} \right. \\ &\quad \left. + \lambda^2 J_n(\lambda\rho) \frac{\cos(n\phi)}{\sin(n\phi)} \hat{z} \right] e^{-jh z} \end{aligned} \quad (4.113)$$

Para expressar o campo magnético nos modos TM e TE, são utilizadas, respectivamente, as equações

$$\mathbf{M}_{on\lambda} = \frac{1}{k_\lambda} \nabla \times \mathbf{N}_{on\lambda} \quad (4.114)$$

e

$$\mathbf{N}_{on\mu} = \frac{1}{k_\mu} \nabla \times \mathbf{M}_{on\mu}. \quad (4.115)$$

Portanto, substituindo (4.113) em (4.114), obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{on\lambda}(h) &= \left[\mp \frac{n J_n(\lambda\rho)}{\rho} \frac{\sin(n\phi)}{\cos(n\phi)} \hat{\rho} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial J_n(\lambda\rho)}{\partial \rho} \frac{\cos(n\phi)}{\sin(n\phi)} \hat{\phi} \right] e^{-jh z} \end{aligned} \quad (4.116)$$

e de (4.108) em (4.115),

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{on\mu}(h) &= \frac{1}{k_\mu} \left[-jh \frac{\partial J_n(\mu\rho)}{\partial \rho} \frac{\cos(n\phi)}{\sin(n\phi)} \hat{\rho} \pm \frac{jhn}{\rho} J_n(\mu\rho) \frac{\sin(n\phi)}{\cos(n\phi)} \hat{\phi} \right. \\ &\quad \left. + \mu^2 J_n(\mu\rho) \frac{\cos(n\phi)}{\sin(n\phi)} \hat{z} \right] e^{-jh z} \end{aligned} \quad (4.117)$$

É importante resaltar que

$$k_\lambda = h^2 + \lambda^2 \quad (4.118)$$

e

$$k_\mu = h^2 + \mu^2, \quad (4.119)$$

onde λ e μ são valores discretos que estão associados às raízes das Eqs. (4.106) e (4.111).

No espaço livre, λ e μ passam a ser contínuos, devido à inexistência de fronteiras que imponham condições, como por exemplo, aquelas expressas pelas Eqs. (4.106) e (4.111). Portanto, pode-se fazer $\lambda = \mu = \alpha$, de forma que os campos eletromagnéticos possam ser representados apenas por

$$M_{on\alpha}(h) \text{ e } N_{on\alpha}(h),$$

onde ambas as funções representam tanto o campo elétrico como o magnético.

Pode-se provar que estas funções satisfazem as seguintes condições de ortogonalidade:

$$\iiint_V M_{on\alpha}(h) \cdot N_{on'\alpha'}(-h') dV = 0, \quad (4.120)$$

$$\begin{aligned} \iiint_V M_{on\alpha}(h) \cdot M_{on'\alpha'}(-h') dV \\ = \begin{cases} 0, & \text{para } n \neq n' \\ 2(1+\delta_{no})\pi^2\alpha \delta(\alpha-\alpha')\delta(h-h'), & \text{para } n = n' \end{cases} \end{aligned} \quad (4.121)$$

e

$$\begin{aligned} \iiint_V N_{on\alpha}(h) \cdot N_{on'\alpha'}(-h') dV \\ = \begin{cases} 0, & \text{para } n \neq n' \\ 2(1+\delta_{no})\pi^2\alpha \delta(\alpha-\alpha')\delta(h-h'), & \text{para } n = n' \end{cases} \end{aligned} \quad (4.122)$$

onde δ_{no} é função delta de Kronecker e $\delta(x-x')$ a de Dirac.

4.6 MÉTODO DE OHM - RAYLEIGH

Este método é empregado na determinação das soluções de equações diferenciais não homogêneas e será utilizado neste trabalho para resolver, em específico, as equações que fornecem as funções diádicas de Green para o espaço livre. O método será ilustrado através de um exemplo, que consiste na determinação da função de Green da equação de uma linha de transmissão, em uma dimensão, na presença de uma fonte pontual.

A equação diferencial

$$\frac{d^2}{dx^2}[g_o(x|x')] + k^2 g_o(x|x') = -\delta(x - x'), \quad (4.123)$$

pode ser resolvida como segue:

1) Determina-se a solução da equação homogênea

$$\frac{d^2}{dx^2}[g_o(x|x')] + k^2 g_o(x|x') = 0, \quad (4.124)$$

que é da forma

$$g_o(x|x') = C_1 e^{jkx} + C_2 e^{-jkx}. \quad (4.125)$$

Verifica-se que a solução é a combinação linear de duas funções ortogonais ou linearmente independente. Estas soluções são chamadas de auto-funções da equação de onda (4.124).

2) Escreve-se a função que representa a fonte em termos de uma das auto-funções, semelhantes àsquelas da Eq. (4.125). Escolhendo por exemplo e^{-jhx} , tem-se

$$\delta(x - x') = \int_{-\infty}^{+\infty} A(h) e^{-jh x} dh, \quad (4.126)$$

onde h é uma variável que pode assumir qualquer valor entre $-\infty$ e $+\infty$.

O valor de $A(h)$ é obtido multiplicando-se ambos os lados da Eq. (4.126) por $e^{jh'x'}$, para em seguida integrar-se em x de $-\infty$ a $+\infty$, ou seja,

$$e^{jh'x'} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(h) e^{-j(h-h')x} dh dx. \quad (4.127)$$

Sabendo-se que a função delta de Dirac pode ser definida como sendo

$$\delta(h - h') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(h-h')x} dx, \quad (4.128)$$

que, substituída em (4.127), fornece

$$e^{jh'x'} = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} A(h) \delta(h - h') dx = 2\pi A(h')$$

ou

$$A(h) = \frac{e^{jh x'}}{2\pi}. \quad (4.129)$$

Pode-se escrever então,

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jh(x-x')} dh. \quad (4.130)$$

3) Determina-se $g_o(x|x')$ de maneira semelhante àquela da fonte, ou seja,

$$g_o(x|x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} B(h) e^{-jh(x-x')} dh, \quad (4.131)$$

onde $B(h)$ é obtida substituindo (4.131) e (4.130) em (4.123). Portanto, $B(h)$ deve satisfazer

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} B(h) \left[\frac{d^2}{dx^2} + k^2 \right] e^{-jh(x-x')} dh = - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jh(x-x')} dh$$

ou

$$B(h) (-h^2 + k^2) = -1$$

ou ainda

$$B(h) = \frac{1}{h^2 - k^2} . \quad (4.132)$$

Sendo assim, pode-se reescrever (4.131) como

$$g_o(x|x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jh(x-x')}}{h^2 - k^2} dh. \quad (4.133)$$

4) Obtém-se, finalmente, $g_o(x|x')$ no domínio real através da teoria das variáveis complexas.

Considerando-se uma função ϕ de variável complexa h , dada por:

$$\phi(h) = \frac{f(h)}{h^2 - k^2} = \frac{f(h)}{(h - k)(h + k)} . \quad (4.134)$$

Sendo $f(h)$ uma função analítica, k um número complexo e

$$h = u + jv. \quad (4.135)$$

Pode-se integrar a função ϕ num contorno C que envolve o semi-plano superior ($v \geq 0$) do plano complexo h (vide Fig. 4.3). Como a função ϕ não é analítica, devido à presença dos pólos $\pm k$, deve-se resolver a integral a partir do cálculo dos resíduos, ou seja,

$$\oint_C \phi(h) dh = -2\pi j \phi(h')(h - h') \Big|_{h=k} , \quad (4.136)$$

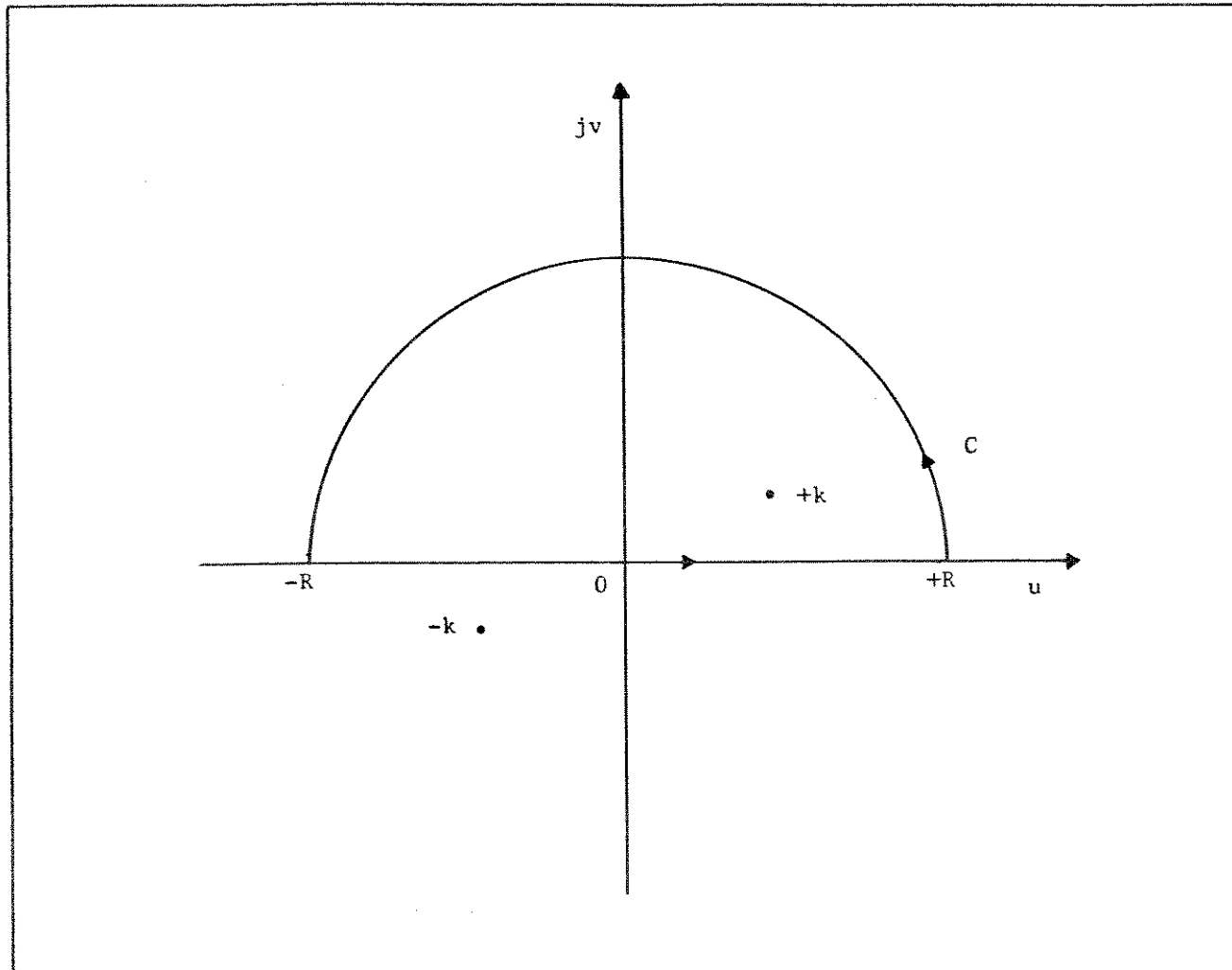


Fig. 4.3 - Integração no semi-plano complexo superior.

onde $\phi(h)$ é dada por (4.134). Esta integral pode também ser expressa da seguinte forma:

$$\oint_C \phi(h) dh = \int_{-R}^R \phi(h) dh + \int_0^\pi \phi(Re^{j\theta}) d(Re^{j\theta}). \quad (4.137)$$

Pode-se verificar que a segunda integral tende a zero quando $R \rightarrow \infty$, para $(x - x') \geq 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C \phi(h) dh &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \phi(h) dh \\ &+ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \phi(Re^{j\theta}) d(Re^{j\theta}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(h) dh. \end{aligned} \quad (4.138)$$

Sendo assim, pode-se obter a expressão de $g_o(x|x')$ para $u \geq 0$ utilizando as identidades (4.136) e (4.133), isto é,

$$g_o(x|x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(h) dh = -j \phi(h')(h-h') \Big|_{h'=k}, \quad (4.139)$$

onde

$$\phi(h) = \frac{e^{-jh(x-x')}}{h^2 - k^2}.$$

Logo,

$$g_o(x|x') = -j \phi(h')(h-h') \Big|_{h'=k} = \frac{-j}{2k} e^{-jk(x-x')}. \quad (4.140)$$

Considerando, agora, a integração no semi-plano inferior, $u \leq 0$, e observando que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \phi(Re^{j\theta}) d(Re^{j\theta}) = 0$$

para $x - x' \leq 0$ (vide Fig. 4.4), tem-se então,

$$\oint_C \phi(h) dh = 2\pi j \phi(h')(h - h') \Big|_{h'=-k} \quad (4.141)$$

e

$$g_o(x|x') = j \phi(h')(h - h') \Big|_{h'=-k} = \frac{-j}{2k} e^{jk(x-x')} \quad (4.142)$$

Finalmente, a solução completa para equação (4.123) fica da seguinte forma:

$$g_o(x|x') = \frac{-j}{2k} \begin{cases} e^{-jk(x-x')}, & \text{para } x - x' \geq 0 \\ e^{+jk(x-x')}, & \text{para } x - x' \leq 0. \end{cases} \quad (4.143)$$

4.7 FUNÇÕES DIÁDICAS DE GREEN EXPANDIDAS EM TERMOS DE AUTO-FUNÇÕES

A função diádica de Green do tipo elétrica para o espaço livre pode ser obtida através do método exposto anteriormente. Sabe-se que esta função diádica é solução da equação diferencial vetorial (4.45), ou seja,

$$\nabla \times \nabla \times \bar{G}_{eo}(R|R') - k^2 \bar{G}_{eo}(R|R') = -\nabla \times [\bar{I} \delta(R - R')]. \quad (4.144)$$

De acordo com o método de Ohm-Rayleigh deve-se expressar a função impulsiva, que descreve a fonte, em termos das soluções da equação homogênea, que no caso podem ser as funções L, M e N. Portanto,

$$\begin{aligned} \bar{I} \delta(R - R') = & \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} [N_{on\alpha}(h) A_{on\alpha}(h) \\ & + M_{on\alpha}(h) B_{on\alpha}(h) + L_{on\alpha}(h) C_{on\alpha}(h)], \quad (4.145) \end{aligned}$$

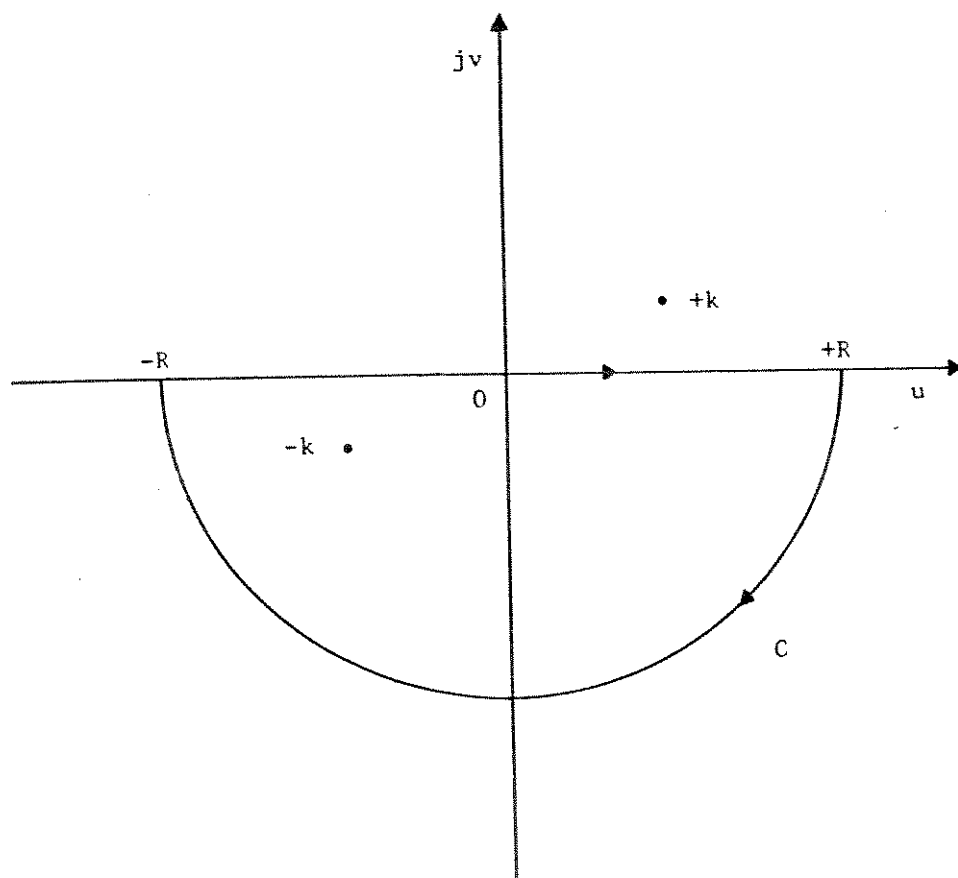


Fig. 4.4 - Integração no semi-plano complexo inferior.

onde A , B e C são funções vetoriais a se determinar.

Aplicando $\nabla \times$ na Eq. (4.145), tem-se:

$$\begin{aligned} \nabla \times [\bar{I} \delta(R - R')] &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \langle \nabla \times [N_{\text{on}\alpha}(h)] A_{\text{on}\alpha}(h) \\ &+ \nabla \times [M_{\text{on}\alpha}(h)] B_{\text{on}\alpha}(h) + \nabla \times [L_{\text{on}\alpha}(h)] C_{\text{on}\alpha}(h) \rangle. \end{aligned} \quad (4.146)$$

Utilizando as relações (4.71), (4.72) e (4.76), obtém-se

$$\begin{aligned} \nabla \times [\bar{I} \delta(R - R')] &= -k \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} [M_{\text{on}\alpha}(h) A_{\text{on}\alpha}(h) \\ &+ N_{\text{on}\alpha}(h) B_{\text{on}\alpha}(h)]. \end{aligned} \quad (4.147)$$

Aplicando o produto escalar anterior de (4.147) com $M_{\text{on}'\alpha'}(-h')$ e, em seguida, integrando-se em todo o espaço, tem-se:

$$\begin{aligned} \iiint_V M_{\text{on}'\alpha'}(-h') \cdot \nabla \times [\bar{I} \delta(R - R')] dV &= \\ k \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \iiint_V [M_{\text{on}'\alpha'}(-h') \cdot M_{\text{on}\alpha}(h) A_{\text{on}\alpha}(h) \\ &+ M_{\text{on}'\alpha'}(-h') \cdot N_{\text{on}\alpha}(h) B_{\text{on}\alpha}(h)] dV. \end{aligned} \quad (4.148)$$

ou

$$\begin{aligned} \nabla' \times M_{\text{on}'\alpha'}(-h') &= \\ k \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dh [2(1 + \delta_{n0}) \pi^2 \alpha \delta(\alpha - \alpha') \delta(h - h') A_{\text{on}\alpha}(h), \end{aligned} \quad (4.149)$$

devido às condições de ortogonalidade (4.120) e (4.121) e o fato de $A_{\text{on}\alpha}(h)$ não ser função de ρ , ϕ e z .

A função $A_{on\alpha}(h)$ é obtida a partir da integração de (4.149), ou seja,

$$\nabla' \times M_{on'\alpha'}(-h') = 2k(1 + \delta_{no})\pi^2\alpha' A_{on'\alpha'}(h') \quad (4.150)$$

ou

$$A_{on\alpha}(h) = \frac{2-\delta_{no}}{4\pi^2 k\alpha} \nabla' \times M_{on'\alpha'}(-h) = \frac{2-\delta_{no}}{4\pi^2 \alpha} N_{on\alpha}'(-h). \quad (4.151)$$

Aplicando agora, o produto escalar anterior de (4.147) com $N_{on'\alpha'}(-h')$ e integrando-se novamente em todo o espaço, obtém-se

$$\nabla' \times N_{on'\alpha'}(-h') = 2k(1 + \delta_{no})\pi^2\alpha' B_{on'\alpha'}(h') \quad (4.152)$$

ou

$$B_{on\alpha}(h) = \frac{2-\delta_{no}}{4\pi^2 k\alpha} \nabla' \times N_{on'\alpha'}(-h) = \frac{2-\delta_{no}}{4\pi^2 \alpha} M_{on\alpha}'(-h), \quad (4.153)$$

onde "'" nas funções M e N indicam que elas são expressas em termos das coordenadas da fonte, localizada pelo vetor R' .

Uma vez determinadas as funções vetoriais A e B, pode-se obter a expressão final que descreve a fonte, ou seja,

$$\begin{aligned} -\nabla \times [\bar{I} \delta(R - R')] = -k \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2-\delta_{no}}{4\pi^2 \alpha} [M_{on\alpha}(h) N_{on\alpha}'(-h) \\ + N_{on\alpha}(h) M_{on\alpha}'(-h)], \end{aligned} \quad (4.154)$$

sendo M e N dadas, respectivamente, pelas Eqs. (4.108) e (4.117) com a substituição de μ por α .

O próximo passo é a determinação de $\bar{G}_{eo}(R|R')$ a partir da função que descreve a fonte. O procedimento é semelhante àquele utilizado na Seq. 4.8, item 4, ou seja, escreve-se $\bar{G}_{eo}(R|R')$ como segue:

$$\begin{aligned} \bar{G}_{eo}(R|R') = -k \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2-\delta_{no}}{4\pi^2 \alpha} [C(h) M_{on\alpha}(h) N_{on\alpha}'(-h) \\ + D(h) N_{on\alpha}(h) M_{on\alpha}'(-h)]. \end{aligned} \quad (4.155)$$

Substituindo a Eq. (4.155) na equação diferencial (4.144), determinam-se as constantes $C(h)$ e $D(h)$. Logo, $\bar{G}_{eo}(R|R')$, fica sendo dada por:

$$\bar{G}_{eo}(R|R') = -k \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_{no}}{4\pi^2 \alpha (h^2 + \alpha^2 - k^2)} [M_{on\alpha}(h) N'_{on\alpha}(-h) + N_{on\alpha}(h) M'_{on\alpha}(-h)]. \quad (4.156)$$

Para se chegar à expressão final da função diádica $\bar{G}_{eo}(R|R')$ deve-se, em problemas envolvendo estruturas cilíndricas, resolver a integral em α [21, pp. 95]. Esta integração é feita utilizando-se a teoria das variáveis complexas e o resultado é da seguinte forma:

$$\bar{G}_{eo}(R|R') = \frac{jk}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_{no}}{\eta^2} \times \begin{cases} M_{on\eta}^{(2)}(h) N'_{on\eta}(-h) + N_{on\eta}^{(2)}(h) M'_{on\eta}(-h), & \rho > \rho' \\ M_{on\eta}(h) N_{on\eta}^{(2)}(-h) + N_{on\eta}(h) M_{on\eta}^{(2)}(-h), & \rho < \rho' \end{cases} \quad (4.157)$$

onde

$$\eta = \sqrt{k^2 - h^2}.$$

As expressões das funções com índice (2) são fornecidas, respectivamente, por (4.108) e (4.117), com a substituição de μ por η e da função de Bessel J_n pela função de Hankel $H_n^{(2)}$.

A função diádica de Green do tipo magnética $\bar{G}_{mo}(R|R')$ pode ser obtida partindo-se da Eq. (4.31) e empregando o método de Ohm-Rayleigh, ou então, utilizando a Eq. (4.52), que relaciona $\bar{G}_{eo}(R|R')$ com $\bar{G}_{mo}(R|R')$. Escolhendo o segundo procedimento, tem-se

$$\bar{G}_{mo}(R|R') = -\frac{1}{k^2} \bar{I} \delta(R - R') - \frac{1}{k^2} \nabla \times \bar{G}_{eo}(R|R').$$

Substituindo (4.157) na equação acima, obtém-se:

$$\begin{aligned} \bar{G}_{mo}(R|R') = & -\frac{1}{k^2} \bar{I} \delta(R - R') - \frac{j}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_{no}}{\eta^2} \\ & \times \begin{cases} N_{n\eta}^{(2)}(h) N'_{n\eta}(-h) + M_{n\eta}^{(2)}(h) M'_{n\eta}(-h), & \rho > \rho' \\ N_{n\eta}(h) N_{n\eta}^{(2)}(-h) + M_{n\eta}(h) M_{n\eta}^{(2)}(-h), & \rho < \rho'. \end{cases} \end{aligned}$$

De acordo com a referência [22], o segundo termo do lado esquerdo da equação acima, possui uma singularidade em $\rho = \rho'$. Portanto, removendo-se esta singularidade, tem-se:

$$\begin{aligned} \bar{G}_{mo}(R|R') = & -\frac{1}{k^2} \hat{\rho\rho} \delta(R - R') + \frac{-j}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_{no}}{\eta^2} \\ & \times \begin{cases} N_{n\eta}^{(2)}(h) N'_{n\eta}(-h) + M_{n\eta}^{(2)}(h) M'_{n\eta}(-h), & \rho > \rho' \\ N_{n\eta}(h) N_{n\eta}^{(2)}(-h) + M_{n\eta}(h) M_{n\eta}^{(2)}(-h), & \rho < \rho'. \end{cases} \quad (4.158) \end{aligned}$$

4.8 MÉTODO DO PONTO DE SELA

Nos cálculos dos campos distantes, radiados por uma fonte de corrente elétrica ou magnética, aparece, com frequência, a integral complexa do tipo

$$F(\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(h) e^{-j\rho\phi(h)} dh \quad (4.159)$$

O método do ponto de sela é empregado, como primeira aproximação, na obtenção de $F(\rho)$. De acordo com este método (veja Van der Waerden [23], Collin [24] e Tai [21]), a integral (4.159) pode ser calculada a partir de

$$F(\rho) \cong \left[\frac{2\pi}{\rho |\phi''(h_0)|} \right]^{1/2} f(h) \exp(-j[\rho\phi(h_0) - \frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}]), \quad (4.160)$$

com

$$\beta = \text{Arg}[\phi''(h_0)],$$

onde h_0 é o ponto de sela obtido de $\phi'(h_0) = 0$; $\phi'(h_0)$ e $\phi''(h_0)$ são, respectivamente, as derivadas primeira e segunda de $\phi(h)$ com relação a h , em $h = h_0$.

A Eq. (4.160) é a expressão assintótica de (4.159) e só pode ser utilizada se as condições a seguir forem satisfeitas:

- (a) ρ muito maior que a unidade ($\rho \gg 1$).
- (b) o módulo de $\phi'(h)$ da ordem de um ($|\phi'(h)| \cong 1$), com valor máximo em h_0 , de tal forma que $\phi'(h_0) = 0$.
- (c) a variação de $f(h)$ com h tem que ser lenta nas vizinhanças de h_0 .

Considerando, como exemplo, a integral

$$F(\rho, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(h)}{\sqrt{2\pi\eta\rho}} e^{-j(hz+\eta\rho)} dh, \quad (4.161)$$

onde

$$\eta = \sqrt{k^2 - h^2},$$

sendo k uma constante e ρ e z variáveis do sistema de coordenadas cilíndricas. Tem-se então, a expressão

$$\rho\phi(h) = hz + \rho \sqrt{k^2 - h^2}, \quad (4.162)$$

que, derivada em relação a h e igualada a zero, fornece

$$h_0 = \frac{kz}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = k \cos\theta, \quad (4.163)$$

portanto,

$$\rho\phi(h_0) = k \sqrt{\rho^2 + z^2} = kR \quad (4.164)$$

e

$$\rho\phi''(h_0) = \frac{-k^2\rho}{(k^2 - h_0^2)^{3/2}} = -\frac{R}{k \sin^2\theta}, \quad (4.165)$$

onde R e θ são variáveis do sistema esférico de coordenadas. Quando kR torna-se muito grande, pode-se aproximar a integral (4.161) por:

$$F(R, \theta) \cong \frac{G(k \cos\theta)}{R} e^{-j(kR - \pi/4)}. \quad (4.166)$$

4.9 CONCLUSÃO

É importante que os conceitos introduzidos neste capítulo tenham sido bem absorvidos, pois todas as ferramentas matemáticas aqui apresentadas serão utilizadas no decorrer deste trabalho. Para aqueles que não conseguiram absorver a teoria exposta, recomenda-se a leitura das notas [22] e livro [21] do professor Chen-To-Tai. Porém, deve-se observar que, nestas referências, a variação dos campos no tempo é expressa por $e^{i\omega t}$ e as funções diádicas de Green são obtidas para uma fonte de corrente elétrica.

A função diádica de Green do tipo magnética para o espaço livre, $\bar{G}_{mo}(R|R')$, será utilizada nos próximos capítulos na obtenção de outras diádicas de Green, que satisfaçam as condições de contorno de Dirichlet ou Neumann. A razão de se escrever a função $\bar{G}_{mo}(R|R')$ em termos de uma expansão de auto-funções, é justamente a de se tornar mais fácil a construção destas funções diádicas de outros tipos.

CAPÍTULO V

CAMPOS DISTANTES RADIADOS PELA ANTENA DE MICROFITA

5.1 INTRODUÇÃO

Antes de se determinarem os campos radiados pela antena de microfita, é necessário especificar-se o modelo que será utilizado para representar o elemento radiador, assim como as aproximações que deverão ser consideradas para se solucionar o problema.

Na Seq. 5.2 é determinada, através do princípio de Huygens, a fonte de corrente magnética equivalente que excita os campos radiados. É utilizado na determinação desta fonte de corrente, o campo elétrico sob a microfita, que foi analisado no Cap. 3 através do modelo da cavidade ressonante com paredes laterais magnéticas. A espessura do substrato dielétrico é mais uma vez considerada muito pequena em relação ao comprimento de onda e ao raio do cilindro. Em 5.3 são obtidas as funções diádicas de Green para uma fonte pontual próxima de um corpo cilíndrico condutor de comprimento infinito. Este modelo representará o elemento radiador da antena de microfita em consideração. Na Seq. 5.4 são fornecidas as expressões dos campos distantes, para uma excitação num modo mn qualquer. Finalmente, na penúltima seção, é apresentado o campo elétrico distante, para uma excitação no modo fundamental.

A geometria da antena é mostrada no Cap 3, Fig. 3.1.

5.2 CORRENTE MAGNÉTICA EQUIVALENTE

Analisando o elemento radiador através do modelo da cavidade com paredes laterais magnéticas, pode-se supor que as bordas desta cavidade sejam fontes de correntes magnéticas, expressas por:

$$M(R') = -2\hat{n} \times E \big|_{\text{bordas}}, \quad (5.1)$$

sendo $\hat{n}$ o versor normal à abertura, que equivale às bordas, e E o campo elétrico calculado nestas bordas. A expressão (5.1) resulta do princípio da equivalência de Huygens [16, pp. 447-454].

No caso de um elemento radiador de forma retangular, sobre a estrutura cilíndrica da Fig. 3.1, a corrente magnética fica escrita em termos de duas componentes, ou seja,

$$M(R') = -2\hat{n} \times \hat{\rho} E_{\rho} = -2 \frac{\delta(\rho - a)}{\rho} \left[\hat{\xi} \times \hat{\rho} E_{\rho} + \hat{\zeta} \times \hat{\rho} E_{\rho} \right]$$

ou simplesmente

$$M(R') = M_{\xi}(R') \hat{\xi} + M_{\zeta}(R') \hat{\zeta}, \quad (5.2)$$

onde E_{ρ} é o campo elétrico, calculado nas bordas da cavidade, e R' o vetor posição que localiza a fonte. Estas componentes são dadas por

$$M_{\xi}(R') = -2E_{\rho} \frac{\delta(\rho - a)}{\rho} \left[\delta(\zeta - 0) - \delta(\zeta - L) \right] \quad (5.3)$$

e

$$M_{\zeta}(R') = -2E_{\rho} \frac{\delta(\rho - a)}{\rho} \left[\delta(\xi - 0) - \delta(\xi - W) \right], \quad (5.4)$$

com o campo elétrico E_{ρ} obtido da Eq. (3.10), ou seja,

$$E_{\rho} = E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{W} \xi\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L} \zeta\right).$$

Restringindo-se a análise para a cavidade operando no modo fundamental, ou seja, $m = 0$ e $n = 1$, que ocorre quando $L > W$, tem-se apenas a componente M_ξ . Portanto,

$$M(R') = M_\xi(R') \hat{\xi}, \quad (5.5)$$

onde

$$M_\xi(R') = -2E_0 \cos\left(\frac{\pi}{L} \xi\right) \times \frac{\delta(\rho - a)}{\rho} \left[\delta(\xi - 0) - \delta(\xi - L) \right] \quad (5.6)$$

e

$$\hat{\xi} = \sin\alpha \hat{\phi} - \cos\alpha \hat{z}. \quad (5.7)$$

Para facilitar a determinação dos campos radiados, como será verificado na Sec. 5.4, é necessário mudar a origem do sistema de coordenadas para o centro da fita. Isto equivale a se fazer $\xi = \xi' + W/2$ e $\zeta = \zeta' + L/2$. Sendo assim, a corrente magnética equivalente fica

$$M_\xi(R') = -2E_0 \cos\left[\frac{\pi}{L} \left(\xi' + \frac{L}{2}\right)\right] \times \frac{\delta(\rho - a)}{\rho} \left[\delta\left(\xi' + \frac{L}{2}\right) - \delta\left(\xi' - \frac{L}{2}\right) \right]$$

ou

$$M_\xi(R') = -2\sin\left(\frac{\pi}{L} \xi'\right) \times \frac{\delta(\rho - a)}{\rho} \left[\delta\left(\xi' - \frac{L}{2}\right) - \delta\left(\xi' + \frac{L}{2}\right) \right]. \quad (5.8)$$

onde E_0 foi feito igual a um.

5.3 FUNÇÃO DIÁDICA DE GREEN PRÓXIMA A UM CILINDRO CONDUTOR

O elemento radiador da antena de microfita, Fig. 3.1, é considerado nesta seção com uma fonte pontual muito próxima de um

cilindro infinito, perfeitamente condutor, como mostra a Fig 5.1. Observe que a função diádica, a qual se quer determinar, deve satisfazer as condições de contorno na superfície do cilindro e a condição de radiação quando $R \rightarrow \infty$. A função diádica de Green para o problema pode ser obtida a partir da função diádica de Green para o espaço livre, tanto do tipo magnética $\bar{G}_{mo}$ como do tipo elétrica $\bar{G}_{eo}$, juntamente com o método da superposição da onda espalhada. Portanto, se for escolhida $\bar{G}_{mo}$, tem-se

$$\bar{G}_m(R|R') = \bar{G}_{mo}(R|R') + \bar{G}_{me}(R|R') \quad (5.9)$$

onde $\bar{G}_{me}$ é a função diádica de Green espalhada pelo cilindro condutor e $\bar{G}_{mo}$ é dado pela Eq. (4.158), ou seja,

$$\begin{aligned} \bar{G}_{mo}(R|R') = & -\frac{1}{k^2} \hat{\rho}\hat{\rho} \delta(R - R') + \frac{-j}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_{0n}}{\eta^2} \\ & \times \begin{cases} M_{on\eta}^{(2)}(h) M_{on\eta}'(-h) + N_{on\eta}^{(2)}(h) N_{on\eta}'(-h) & , \rho > \rho' \\ M_{on\eta}(h) M_{on\eta}'^{(2)}(-h) + N_{on\eta}(h) N_{on\eta}'^{(2)}(-h) & , \rho < \rho' \end{cases} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Enquanto que $\bar{G}_{me}$ deve ser dado por

$$\begin{aligned} \bar{G}_{me}(R|R') = & \frac{-j}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_{0n}}{\eta^2} \\ & \times \left[A_{on} M_{on\eta}^{(2)}(h) M_{on\eta}'^{(2)}(-h) + B_{on} N_{on\eta}^{(2)}(h) N_{on\eta}'^{(2)}(-h) \right], \end{aligned} \quad (5.11)$$

onde A_{on} e B_{on} são coeficientes que podem ser obtidos a partir da condição de contorno na superfície do cilindro ($\rho = a$). Já as funções $M_{on\eta}^{(2)}$ e $N_{on\eta}^{(2)}$, que são os elementos anteriores da diádica, foram escolhidas de forma a satisfazerem a condição de radiação, enquanto que as funções $M_{on\eta}'^{(2)}$ e $N_{on\eta}'^{(2)}$, elementos posteriores, devem satisfazer a condição de contorno em $\rho = a$.

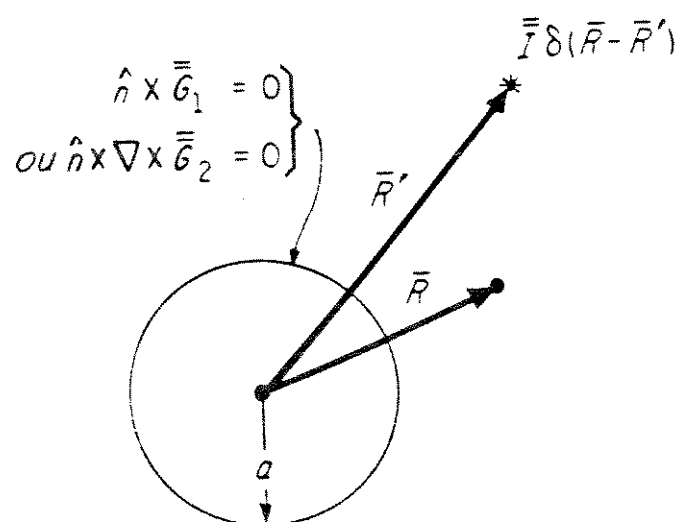


Fig. 5.1 - Fonte infinitesimal próxima ao cilindro condutor.

A análise que será feita daqui por diante não incluirá a fonte, uma vez que os pontos de interesse estão localizados ou na superfície da estrutura cilíndrica ou muito distantes desta. Sendo assim, pode-se trabalhar com a Eq. (5.10) sem expressar a função delta de Dirac, ou seja,

$$\begin{aligned} \bar{G}_{m0}(R|R') &= \frac{-j}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_{0n}}{\eta^2} \\ &\times \begin{cases} M_{on\eta}^{(2)}(h) M_{on\eta}'(-h) + N_{on\eta}^{(2)}(h) N_{on\eta}'(-h) & , \rho > \rho' \\ M_{on\eta}(h) M_{on\eta}'^{(2)}(-h) + N_{on\eta}(h) N_{on\eta}'^{(2)}(-h) & , \rho < \rho' \end{cases} \quad (5.12) \end{aligned}$$

O próximo passo é determinar os coeficientes A_{on} e B_{on} que fornecem as diádicas associadas ao espalhamento dos campos. Estes coeficientes são obtidos diretamente das condições de contorno na superfície do cilindro, chamadas de condição de Dirichlet e Neumann, que estão, respectivamente, associadas ao campos elétrico e magnético, cujas expressões são dadas por

$$\hat{\rho} \times \bar{G}_{m1}(R|R') = 0 \quad (5.13)$$

e

$$\hat{\rho} \times \nabla \times \bar{G}_{m2}(R|R') = 0, \quad (5.14)$$

onde $\hat{\rho}$ é o versor normal à superfície e 1 e 2 os índices utilizados para diferenciar as funções diádicas associadas a cada uma destas condições de contorno.

Como a fonte de corrente que será utilizada na determinação dos campos é do tipo magnética, fica mais adequada a utilização da Eq. (4.40), que fornece o campo magnético. Portanto, deve-se aplicar a condição (5.14) na Eq. (5.9), de forma a se obter

$$\hat{\rho} \times [N_{on\eta}(h) + A_{on} N_{on\eta}^{(2)}(h)]_{\rho=a} = 0 \quad (5.15)$$

e

$$\hat{\rho} \times [M_{on\eta}(h) + B_{on} M_{on\eta}^{(2)}(h)]_{\rho=a} = 0. \quad (5.16)$$

Substituindo as funções M e N , respectivamente, pelas Eqs. (4.108) e (4.117), com as devidas trocas de índices e de funções cilíndricas, tem-se

$$A_{on} = - \frac{J_n(x)}{H_n^{(2)}(x)}, \quad x = \eta a \quad (5.17)$$

$$B_{on} = - \frac{\frac{\partial J_n(x)}{\partial x}}{\frac{\partial H_n^{(2)}(x)}{\partial x}}, \quad x = \eta a. \quad (5.18)$$

Com a mudança da origem do sistema de coordenadas para o centro da microfita, feita na seção anterior, as auto-funções M e N ficam representadas apenas por funções pares, de forma que as Eqs. (5.11) e (5.12) podem ser reescritas com sendo

$$\begin{aligned} \bar{G}_{mo}(R|R') &= \frac{-j}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_{on}}{\eta^2} \\ &\times \begin{cases} M_{n\eta}^{(2)}(h) M'_{n\eta}(-h) + N_{n\eta}^{(2)}(h) N'_{n\eta}(-h), & \rho > \rho' \\ M_{n\eta}(h) M'_{n\eta}{}^{(2)}(-h) + N_{n\eta}(h) N'_{n\eta}{}^{(2)}(-h), & \rho < \rho' \end{cases} \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_{ms}(R|R') &= \frac{-j}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_{on}}{\eta^2} \\ &\times \left[A_n M_{n\eta}^{(2)}(h) M'_{n\eta}{}^{(2)}(-h) + B_n N_{n\eta}^{(2)}(h) N'_{n\eta}{}^{(2)}(-h) \right]. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Sendo A_n e B_n dados por (5.17) e (5.18) e $M_{n\eta}$ e $N_{n\eta}$ por

$$M_{n\eta}(h) = \left[-\frac{n J_n(\eta\rho)}{\rho} \sin(n\phi) \hat{\rho} - \frac{\partial J_n(\eta\rho)}{\partial \rho} \cos(n\phi) \hat{\phi} \right] e^{-jh z} \quad (5.21)$$

$$N_{n\eta}(h) = \frac{1}{\sqrt{\eta^2 + h^2}} \left[-jh \frac{\partial J_n(\eta\rho)}{\partial \rho} \cos(n\phi) \hat{\rho} + \frac{jhn}{\rho} J_n(\eta\rho) \sin(n\phi) \hat{\phi} \right]$$

$$+ \eta^2 J_n(\eta \rho) \cos(n\phi) \hat{z} \Big] e^{-jhz} \quad (5.22)$$

$$\text{com } \eta = \sqrt{k^2 - h^2}.$$

As expressões de $M_{n\eta}^{(2)}(h)$ e $N_{n\eta}^{(2)}(h)$ são, respectivamente, idênticas às (5.21) e (5.22), com a substituição da função de Bessel J_n pela função de Hankel de segunda espécie $H_n^{(2)}$. As funções com "" estão relacionadas com o sistema de coordenadas que localiza a fonte, ou seja, (ρ', ϕ', z') .

5.4 DETERMINAÇÃO DOS CAMPOS DISTANTES

Sabe-se que o campo magnético radiado pode ser obtido de

$$H(R) = -j\omega\epsilon_0 \iiint_{V'} \bar{G}_2(R|R') \cdot M(R') dV', \quad (5.23)$$

sendo $\bar{G}_2(R|R')$ a função diádica de Green do tipo magnética, Eq. (5.9), que satisfaz a condição de contorno de Neumann (5.14), e $M(R')$ a corrente magnética equivalente, dada por (5.2).

O campo elétrico pode ser obtido a partir da equação de Maxwell para regiões livres de fontes,

$$E(R) = \frac{-j}{\omega\epsilon_0} \nabla \times H(R). \quad (5.24)$$

Substituindo (5.23) em (5.24) tem-se

$$E(R) = - \iiint_{V'} \nabla \times \bar{G}_2(R|R') \cdot M(R') dV', \quad (5.25)$$

onde

$$\nabla \times \bar{G}_2(R|R') = \nabla \times \bar{G}_0(R|R') + \nabla \times \bar{G}_{2s}(R|R'). \quad (5.26)$$

Levando (5.19) e (5.20) em (5.26), e utilizando as relações (4.71)

e (4.72), tem-se

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{G}_0(R|R') &= \frac{-jk_0}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_{0n}}{\eta^2} \\ &\times \begin{cases} M_{n\eta}^{(2)}(h) M'_{n\eta}(-h) + M_{n\eta}^{(2)}(h) N'_{n\eta}(-h), & \rho > \rho' \\ N_{n\eta}(h) M_{n\eta}^{(2)}(-h) + M_{n\eta}(h) N_{n\eta}^{(2)}(-h), & \rho < \rho' \end{cases} \end{aligned} \quad (5.27)$$

e

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{G}_{2e}(R|R') &= \frac{-jk_0}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_{0n}}{\eta^2} \\ &\times \left[A_n M_{n\eta}^{(2)}(h) M_{n\eta}^{(2)}(-h) + B_n M_{n\eta}^{(2)}(h) N_{n\eta}^{(2)}(-h) \right]. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Restringindo-se a análise para a região dos campos distantes, de forma que $\eta\rho$ seja muito maior que a unidade ($\eta\rho \gg 1$), pode-se utilizar apenas a expressão assintótica de $\nabla \times \vec{G}_2$. Esta expressão é encontrada através do método de integração do ponto de sela juntamente como a expressão assintótica da função de Hankel em $M_{n\eta}^{(2)}(h)$ e $N_{n\eta}^{(2)}(h)$, ou seja,

$$H_n^{(2)}(\eta\rho) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi\eta\rho}} j^{n+1/2} e^{-j\eta\rho}. \quad (5.29)$$

Portanto, as funções $M_{n\eta}^{(2)}(h)$ e $N_{n\eta}^{(2)}(h)$ ficam

$$M_{n\eta}^{(2)}(h) = j^{n+3/2} \eta \sqrt{\frac{2}{\pi\eta\rho}} e^{-j(\eta\rho+hz)} \cos(n\phi) \hat{\phi} \quad (5.30)$$

e

$$N_{n\eta}^{(2)}(h) = j^{n+1/2} \frac{\eta}{k_0} \sqrt{\frac{2}{\pi\eta\rho}} e^{-j(\eta\rho+hz)} \cos(n\phi) (-h\hat{\rho} + \eta\hat{z}). \quad (5.31)$$

Da substituição de (5.29), (5.30) e (5.31) em (5.27) e (5.28), obtém-se

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{G}_2(R|R') &\cong \frac{-jk_0}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_{0n}}{\eta^2} e^{-j(\eta\rho+hz)} \\ &\times \left\{ \frac{1}{k_0} \left[M'_{n\eta}(-h) + A_n M_{n\eta}^{(2)}(-h) \right] \cos(n\phi) (-h\hat{\rho} + \eta\hat{z}) \right\} \end{aligned}$$

$$+ j \left[N'_{n\eta}(-h) + B_n N'^{(2)}_{n\eta}(-h) \right] \cos(n\phi) \hat{\phi} \Big\}, \quad (5.32)$$

onde os termos de ordem igual e superior a $(\eta\rho)^{-3/2}$ foram desprezados.

Mudando-se das variáveis cilíndricas para esféricas, a partir das relações:

$$\eta = s = k_0 \sin\beta,$$

$$h = k_0 \cos\beta,$$

$$\rho = R \sin\theta,$$

$$z = R \cos\theta.$$

e

Tem-se, então,

$$\eta\rho + hz = k_0 R \cos(\theta - \beta), \quad (5.33)$$

$$-h\hat{\rho} + \eta\hat{z} = k_0 (-\hat{\rho} \cos\beta + \hat{z} \sin\beta) \quad (5.34)$$

e

$$dh = -k_0 \sin\beta d\beta. \quad (5.35)$$

Usando agora o método do ponto de sela, tem-se

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{G}_2(R|R') &\cong \frac{e^{-jk_0 R}}{4\pi R \sin\theta} \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_{0n}) j^{n+1} \cos(n\phi) \\ &\left\{ j \left[M'_{ns}(-k_0 \cos\theta) + c_n M'^{(2)}_{ns}(-k_0 \cos\theta) \right] \hat{\theta} \right. \\ &\quad \left. + \left[N'_{ns}(-k_0 \cos\theta) + d_n N'^{(2)}_{ns}(-k_0 \cos\theta) \right] \hat{\phi} \right\}, \quad (5.36) \end{aligned}$$

onde,

$$s = k_0 \sin\theta, \quad (5.37)$$

correspondendo aos valores de η para $\beta = \theta$.

A singularidade em $\theta = 0$, da Eq. (5.36), na realidade não existe, uma vez que θ nunca deve ser igual a zero, pois o cilindro tem um raio finito ($\rho = a$).

O campo elétrico é calculado a partir da substituição das Eqs. (5.36) e (5.2) em (5.25), ou seja,

$$E(R) \cong - \frac{e^{-jk_o R}}{4\pi R \sin\theta} \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_{on}) j^{n+1} \cos(n\phi) \\ \times \iiint_{V'} \left\{ j \left[M'_{ns}(-k_o \cos\theta) + c_n M_{ns}^{(2)}(-k_o \cos\theta) \right] \hat{\theta} \right. \\ \left. + \left[N'_{ns}(-k_o \cos\theta) + d_n N_{ns}^{(2)}(-k_o \cos\theta) \right] \hat{\phi} \right\} \cdot M(R') dV' \quad (5.38)$$

ou

$$E(R) = E_{\theta} \hat{\theta} + E_{\phi} \hat{\phi}, \quad (5.39)$$

onde

$$E_{\theta} \cong \frac{-j e^{-jk_o R}}{4\pi R \sin\theta} \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_{on}) j^{n+1} \cos(n\phi) \\ \times \iiint_{V'} \left[M'_{ns}(-k_o \cos\theta) + c_n M_{ns}^{(2)}(-k_o \cos\theta) \right] \cdot M(R') dV' \quad (5.40)$$

e

$$E_{\phi} \cong \frac{- e^{-jk_o R}}{4\pi R \sin\theta} \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_{on}) j^{n+1} \cos(n\phi) \\ \times \iiint_{V'} \left[N'_{ns}(-k_o \cos\theta) + d_n N_{ns}^{(2)}(-k_o \cos\theta) \right] \cdot M(R') dV'. \quad (5.41)$$

O campo magnético, para regiões distantes, é dado por

$$H(R) \cong \frac{1}{\eta} \hat{\rho} \times E(R) = H_{\theta} \hat{\theta} + H_{\phi} \hat{\phi} \quad (5.42)$$

onde

$$H_{\theta} = - E_{\phi} / \eta$$

e

$$H_{\phi} = E_{\theta} / \eta.$$

5.5 CAMPOS DISTANTES PARA O MODO FUNDAMENTAL

Quando a cavidade (elemento radiador) é excitada no modo $m = 0$ e $n = 1$, a corrente magnética $M(R')$ fica sendo expressa pela Eq. (5.5), ou seja,

$$M(R') = M_{\zeta}(R') \hat{\zeta},$$

onde M_{ζ} e $\hat{\zeta}$ são fornecidos, respectivamente, pelas Eqs. (5.7) e (5.8). Portanto, neste caso, a componente E_{θ} do campo elétrico fica dada por:

$$E_{\theta} \cong \frac{-j}{2\pi R} \frac{e^{-jk_0 R}}{\sin\theta} \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_{on}) j^{n+1} \cos(n\phi) \sin\alpha \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{d}{d\rho'} \left[J_n(s\rho') + A_n H_n^{(2)}(s\rho') \right] \cos(n\phi') e^{jhz'} \\ \times \sin\left(\frac{\pi}{L} \zeta'\right) \frac{\delta(\rho' - a)}{\rho'} \left[\delta\left(\zeta' - \frac{L}{2}\right) - \delta\left(\zeta' + \frac{L}{2}\right) \right] \rho' d\rho' d\phi' dz'. \quad (5.43)$$

Integrando-se em ρ' e mudando (ϕ', z') por (ζ', ξ') , através das relações

$$\phi' = \frac{1}{a} (\zeta' \cos\alpha + \xi' \sin\alpha)$$

e

$$z' = \zeta' \sin\alpha - \xi' \cos\alpha,$$

tem-se:

$$E_{\theta} \cong - \frac{e^{-jk_0 R}}{2\pi R \sin\theta} \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_{on}) j^{n+2} \cos(n\phi) \sin\alpha \\ \times \left[J'_n(sa) + A_n H_n^{(2)'}(sa) \right] \int_{-W/2}^{W/2} \int_{-L/2}^{L/2} \cos\left[\frac{n}{a} (\zeta' \cos\alpha + \xi' \sin\alpha) \right] \\ \times e^{jhi(\zeta' \sin\alpha - \xi' \cos\alpha)} \sin\left(\frac{\pi}{L} \zeta'\right) \\ \times \left[\delta\left(\zeta' - \frac{L}{2}\right) - \delta\left(\zeta' + \frac{L}{2}\right) \right] d\zeta' d\xi'. \quad (5.44)$$

Integrando-se em ζ' e ξ' obtém-se, finalmente,

$$E_{\theta} \cong \frac{e^{-jk_0 R}}{\pi R \sin \theta} \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_{0n}) j^{n+2} \cos(n\phi) \left[J'_n(sa) + A_n H_n^{(2)'}(sa) \right] \\ \times \sin \alpha \left[F_n(\theta) - G_n(\theta) \right], \quad (5.45)$$

onde

$$J'_n(sa) = \frac{dJ_n(sa)}{da}, \quad H_n^{(2)'}(sa) = \frac{dH_n^{(2)}(sa)}{da},$$

$$F_n(\theta) = \frac{nb_{\alpha} - a_{\alpha} \cos \theta}{n^2 b_{\alpha}^2 - a_{\alpha}^2 \cos^2 \theta} \cos(\alpha_L \cos \theta - n\beta_L) \sin(\alpha_W \cos \theta + n\beta_W)$$

e

$$G_n(\theta) = \frac{nb_{\alpha} + a_{\alpha} \cos \theta}{n^2 b_{\alpha}^2 - a_{\alpha}^2 \cos^2 \theta} \cos(\alpha_L \cos \theta + n\beta_L) \sin(\alpha_W \cos \theta - n\beta_W),$$

sendo,

$$a_{\alpha} = k_0 \cos \alpha, \quad b_{\alpha} = \frac{\sin \alpha}{a}$$

$$\alpha_L = \frac{k_0 L}{2} \sin \alpha, \quad \alpha_W = \frac{k_0 W}{2} \cos \alpha$$

$$\beta_L = L \frac{\cos \alpha}{2a} \quad e \quad \beta_W = W \frac{\sin \alpha}{2a}.$$

De maneira semelhante se obtém a componente em ϕ , ou seja,

$$E_{\phi} \cong \frac{e^{-jk_0 R}}{\pi R \sin \theta} \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_{0n}) j^{n+1} \cos(n\phi) \left[J_n(sa) + B_n H_n^{(2)}(sa) \right] \\ \times \left\{ \frac{n \cos \theta}{a} \sin \alpha \left[F_n(\theta) + G_n(\theta) \right] - k_0 \sin^2 \theta \cos \alpha \left[F_n(\theta) - G_n(\theta) \right] \right\}. \quad (5.46)$$

5.6 CONCLUSÃO

A análise feita neste capítulo foi dirigida de forma a conduzir o leitor a um caso específico, onde a antena de microfita

se encontra operando no modo fundamental. As expressões obtidas para o campo elétrico distante, são válidas apenas para este modo. Caso se queiram expressões gerais, para qualquer modo de excitação, é necessário se utilizar a equação completa da densidade de corrente magnética, fornecida por (5.2).

O diagrama de radiação da antena, que será mostrado no final deste trabalho, é determinado a partir das expressões do campo elétrico aqui obtidas. O cálculo das perdas por radiação, que é empregado na obtenção da impedância de entrada (vide Cap 3), depende também deste campo. Em ambos os casos o campo elétrico é calculado a partir de processos numéricos. Convém lembrar que toda a análise foi desenvolvida considerando a espessura do substrato dielétrico muito fina. Um estudo mais rigoroso, que considera uma camada dielétrica de espessura não desprezível, será apresentado no próximo capítulo.

CAPÍTULO VI

CAMPOS DISTANTES RADIADOS PELA ANTENA DE MICROFITA (SUBSTRATO NÃO MUITO FINO)

6.1 INTRODUÇÃO

No capítulo anterior foram determinados os campos distantes de uma antena de microfita onde o substrato dielétrico encontrava-se presente apenas entre a superfície da fita condutora e cilindro metálico. A espessura deste substrato foi considerada muito menor que o comprimento de onda e o raio do cilindro, de forma que os campos de bordas fossem desprezados. Neste capítulo, a camada dielétrica possui espessura finita e envolve toda a superfície do cilindro, como mostra a Fig. 6.1. O efeito de borda é incluído através da substituição da permissividade relativa por uma efetiva, além de correções nas dimensões da fita condutora (vide Cap. 3, Eqs. 3.14, 3.15, 3.16 e 3.17).

A fonte utilizada na excitação dos campos é semelhante àquela obtida no Cap. 5. As funções diádicas de Green são determinadas na próxima seção, enquanto que os campos distantes, para um modo de excitação mn qualquer, são fornecidos na Seq. 6.3. Finalmente, na Seq. 6.4, são obtidos os campos para o modo fundamental. São também feitas comparações entre as expressões dos campos desta seção e aquelas encontradas no capítulo anterior.

6.2 FUNÇÕES DIÁDICAS DE GREEN PARA UM MEIO DE TRÊS CAMADAS CILÍNDRICAS CONCÊNTRICAS

O elemento radiador da antena de microfita, mostrada na

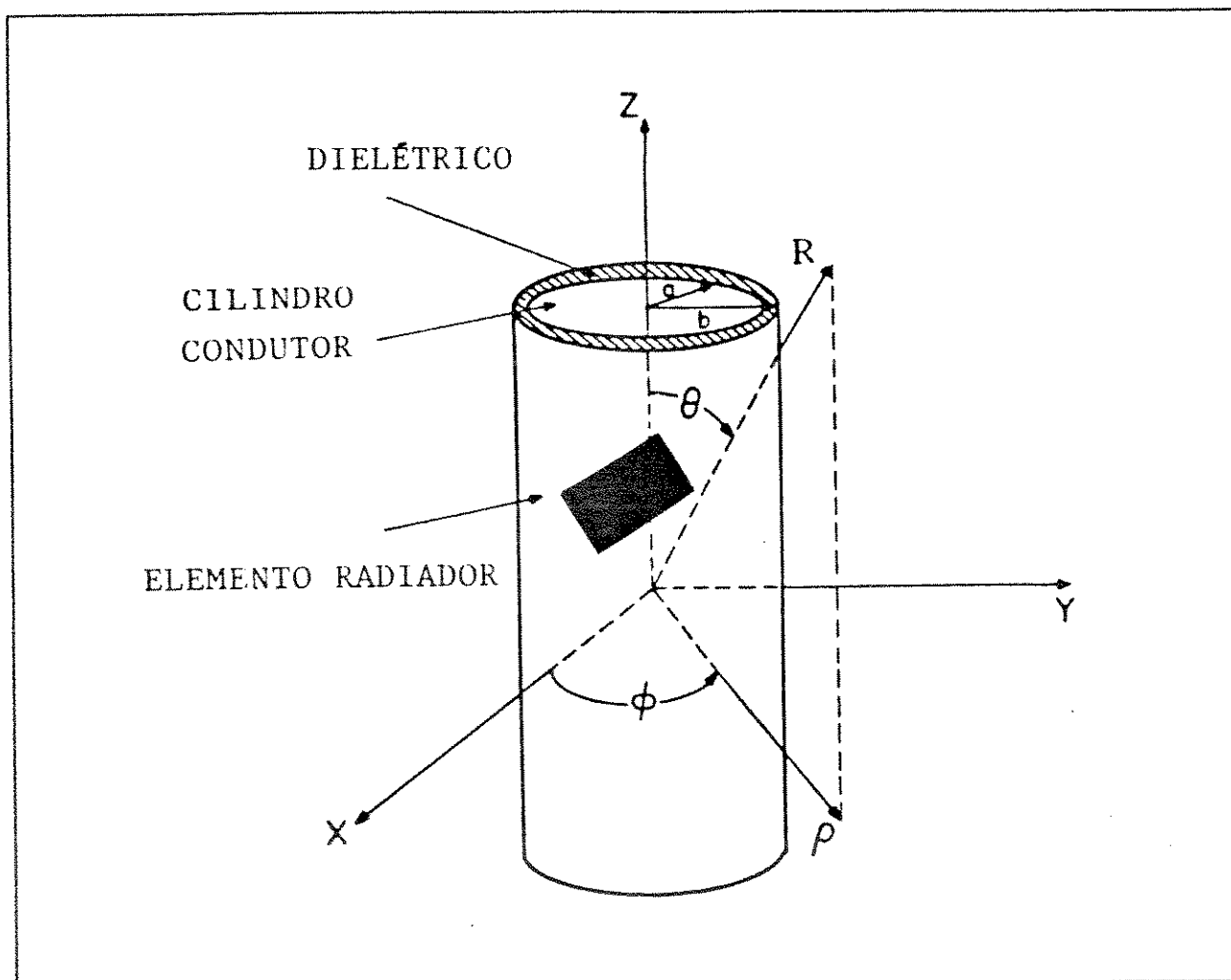


Fig. 6.1 - Antena de microfita, ao longo de uma direção helicoidal, com o substrato dielétrico cobrindo toda a superfície do cilindro condutor.

Fig. 6.1, é considerado nesta seção como uma fonte pontual colocada no substrato dielétrico a uma distância $h/2$ da superfície do cilindro condutor, como mostra a Fig. 6.2. Observe que existem três meios a serem considerados: o espaço livre, o substrato dielétrico e o cilindro condutor. Estes meios possuem, respectivamente, os seguintes parâmetros físicos:

$$(\text{meio 1}) \quad \mu_0, \epsilon_0, \sigma = 0 \text{ e } k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0},$$

$$(\text{meio 2}) \quad \mu, \epsilon, \sigma = 0 \text{ e } k = \omega \sqrt{\mu \epsilon},$$

e

$$(\text{meio 3}) \quad \sigma = \infty.$$

Portanto, as funções diádicas de Green devem satisfazer as condições de contorno nas interfaces destes meios e, ainda, a condição de radiação quando $R \rightarrow \infty$. As funções diádicas para o problema são obtidas utilizando mais uma vez o método da superposição das ondas espalhadas. Para a geometria em consideração, pode-se escrever

$$\bar{G}_m^{(12)}(R|R') = \bar{G}_T^{(12)}(R|R') \quad (6.1)$$

$$\bar{G}_m^{(22)}(R|R') = \bar{G}_{m2}^{(22)}(R|R') + \bar{G}_{R1}^{(22)}(R|R') + \bar{G}_{R2}^{(22)}(R|R') \quad (6.2)$$

sendo $\bar{G}_m^{(12)}$ a função diádica de Green do tipo magnética referente ao espaço livre e $\bar{G}_m^{(22)}$ a função diádica referente ao meio dielétrico. Enquanto que $\bar{G}_T^{(12)}$ está associada ao campo transmitido do meio 2 (dielétrico) para o meio 1 (espaço livre) e $\bar{G}_{R1}^{(22)}$ e $\bar{G}_{R2}^{(22)}$ estão, nesta ordem, associadas aos campos refletidos nas interfaces dos meios 1 e 2, e, 2 e 3. Os índices superiores indicam os meios onde se encontram, respectivamente, o ponto de observação e a fonte.

As condições de contorno nas interfaces são

$$\hat{\rho} \times \nabla \times \bar{G}_m^{(22)}(R|R') = 0 \quad \rho / \rho = a, \quad (6.3)$$

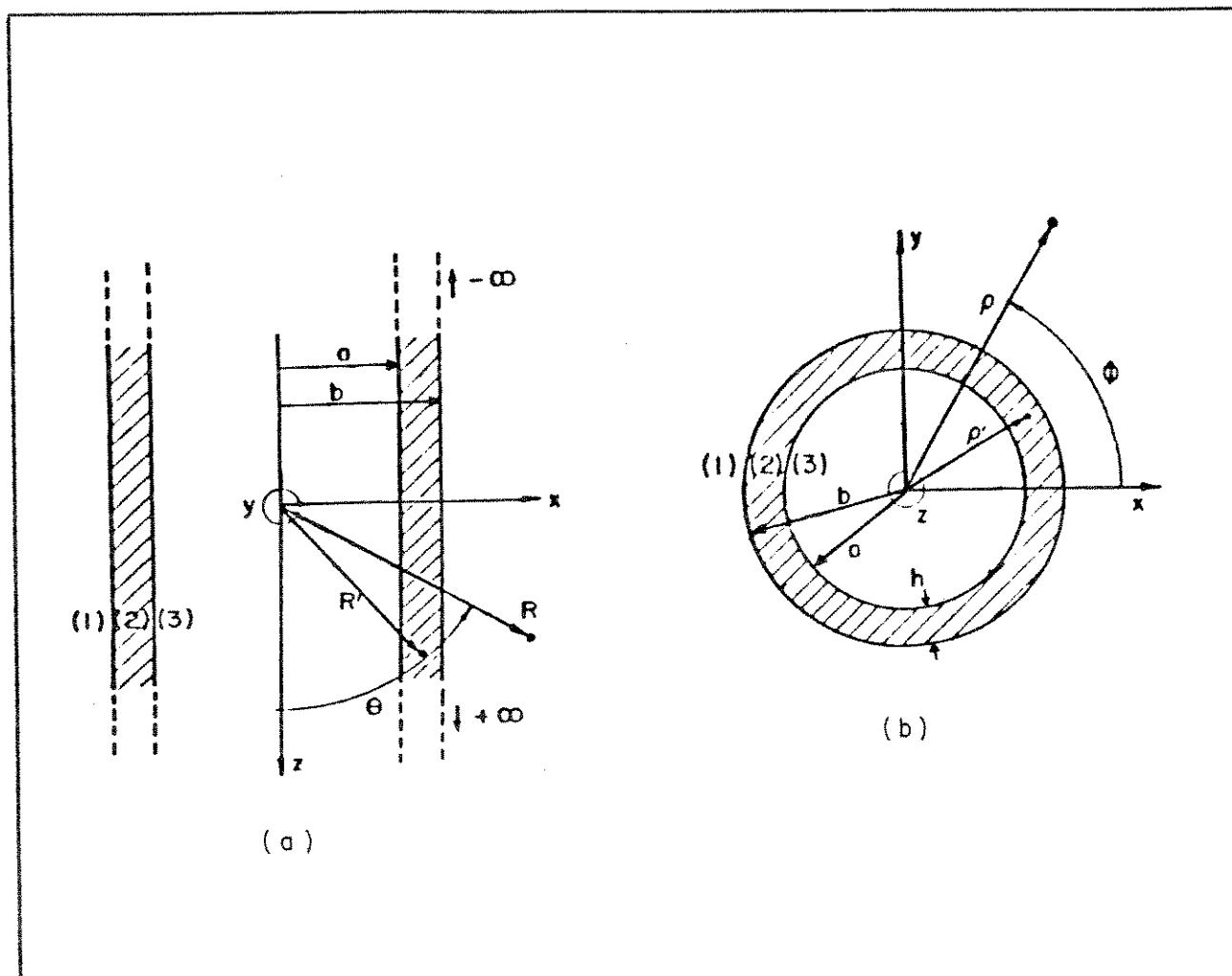


Fig. 6.2 - Estrutura de três camadas cilíndricas concêntricas.
(a) Corte longitudinal. (b) Corte transversal.

$$\frac{1}{\epsilon} \hat{\rho} \times \nabla \times \bar{G}_m^{(22)}(R|R') = \frac{1}{\epsilon_o} \hat{\rho} \times \nabla \times \bar{G}_m^{(12)}(R|R') \quad (6.4)$$

e

$$\hat{\rho} \times \bar{G}_m^{(22)}(R|R') = \hat{\rho} \times \bar{G}_m^{(12)}(R|R') \quad (6.5)$$

ambas em $\rho = b$.

A função $\bar{G}_{m2}^{(22)}(R|R')$ é semelhante a $\bar{G}_{m0}^{(22)}(R|R')$, obtida no capítulo anterior, ou seja,

$$\begin{aligned} \bar{G}_{m2}^{(22)}(R|R') &= \frac{1}{k_o^2} \hat{\rho} \hat{\rho} \delta(R - R') + \frac{-j}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_{on}}{\gamma^2} \\ &\times \left\{ \begin{aligned} &M_{on\gamma}^{(2)}(h) M_{on\gamma}'(-h) + N_{on\gamma}^{(2)}(h) N_{on\gamma}'(-h), \quad \rho' \leq \rho \leq b \\ &M_{on\gamma}^{(2)}(h) M_{on\gamma}'^{(2)}(-h) + N_{on\gamma}^{(2)}(h) N_{on\gamma}'^{(2)}(-h), \quad a \leq \rho \leq \rho'. \end{aligned} \right. \quad (6.6) \end{aligned}$$

Como os pontos de interesse não incluem a fonte, mais uma vez não será expressa, durante o trabalho, a função delta de Dirac da Eq. (6.6).

Levando-se em consideração a condição de radiação, obtém-se as funções ortogonais M e N anteriores e, a partir das condições de contorno, as funções posteriores. Pode-se verificar também que, as condições de contorno só são satisfeitas se as diádicas $\bar{G}_{R1}^{(22)}$, $\bar{G}_{R2}^{(22)}$ e $\bar{G}_T^{(12)}$ forem dadas por (vide Fonseca e Giarola [25]):

$$\begin{aligned} \bar{G}_{R1}^{(22)}(R|R') &= \frac{-j}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_{on}}{\gamma^2} \\ &\times \left\{ \left[A_{o1} M_{on\gamma}^{(2)}(h) + A_{o1}' N_{on\gamma}^{(2)}(h) \right] M_{on\gamma}'^{(2)}(-h) \right. \\ &+ \left[B_{o1} N_{on\gamma}^{(2)}(h) + B_{o1}' M_{on\gamma}^{(2)}(h) \right] N_{on\gamma}'^{(2)}(-h) \\ &+ \left[C_{o1} M_{on\gamma}^{(2)}(h) + C_{o1}' N_{on\gamma}^{(2)}(h) \right] M_{on\gamma}'(-h) \\ &\left. + \left[D_{o1} N_{on\gamma}^{(2)}(h) + D_{o1}' M_{on\gamma}^{(2)}(h) \right] N_{on\gamma}'(-h) \right\}, \quad (6.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{G}_{R2}^{(22)}(R|R') &= \frac{-j}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_{0n}}{\gamma^2} \\
&\times \left\{ \left[A_{e2} M_{on\gamma}(h) + A_{e2}' N_{on\gamma}(h) \right] M_{on\gamma}'^{(2)}(-h) \right. \\
&\quad + \left[B_{e2} N_{on\gamma}(h) + B_{e2}' M_{on\gamma}(h) \right] N_{on\gamma}'^{(2)}(-h) \\
&\quad + \left[C_{e2} M_{on\gamma}(h) + C_{e2}' N_{on\gamma}(h) \right] M_{on\gamma}'(-h) \\
&\quad \left. + \left[D_{e2} N_{on\gamma}(h) + D_{e2}' M_{on\gamma}(h) \right] N_{on\gamma}'(-h) \right\}, \quad (6.8)
\end{aligned}$$

ambas válidas para $a \leq \rho \leq b$, e

$$\begin{aligned}
\bar{G}_T^{(12)}(R|R') &= \frac{-j}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_{0n}}{\gamma^2} \\
&\times \left\{ \left[A_{eT} M_{on\alpha}^{(2)}(h) + A_{eT}' N_{on\alpha}^{(2)}(h) \right] M_{on\gamma}'^{(2)}(-h) \right. \\
&\quad + \left[B_{eT} N_{on\alpha}^{(2)}(h) + B_{eT}' M_{on\alpha}^{(2)}(h) \right] N_{on\gamma}'^{(2)}(-h) \\
&\quad + \left[C_{eT} M_{on\alpha}^{(2)}(h) + C_{eT}' N_{on\alpha}^{(2)}(h) \right] M_{on\gamma}'(-h) \\
&\quad \left. + \left[D_{eT} N_{on\alpha}^{(2)}(h) + D_{eT}' M_{on\alpha}^{(2)}(h) \right] N_{on\gamma}'(-h) \right\}, \quad (6.9)
\end{aligned}$$

válida para $\rho \geq b$.

Como se tem interesse apenas nos campos radiados pela estrutura, devem ser determinados somente os coeficientes da Eq. (6.9). Estes coeficientes são obtidos a partir da substituição das Eqs. (6.1) e (6.2) nas expressões (6.3), (6.4) e (6.5), que fornecem as condições de contorno, de forma que,

$$\begin{aligned}
\hat{\rho} \times \nabla \times \left[\bar{G}_{m2}^{(22)}(R|R') + \bar{G}_{R1}^{(22)}(R|R') \right. \\
\left. + \bar{G}_{R2}^{(22)}(R|R') \right] = 0 \quad p/ \quad \rho = a, \quad (6.10)
\end{aligned}$$

$$\hat{\rho} \times \left[\bar{G}_{m2}^{(22)}(R|R') + \bar{G}_{R1}^{(22)}(R|R') + \bar{G}_{R2}^{(22)}(R|R') \right] = \hat{\rho} \times \bar{G}_T^{(12)}(R|R') \quad (6.11)$$

e

$$\frac{1}{\epsilon} \hat{\rho} \times \nabla \times \left[\bar{G}_{m2}^{(22)}(R|R') + \bar{G}_{R1}^{(22)}(R|R') + \bar{G}_{R2}^{(22)}(R|R') \right] = \frac{1}{\epsilon_0} \hat{\rho} \times \nabla \times \bar{G}_T^{(12)}(R|R'), \quad (6.12)$$

ambas em $\rho = b$. Portanto, substituindo (6.6), (6.7) e (6.8) em (6.10), tem-se

para $M_{e' \text{ on } \gamma}^{(2)}(-h)$,

$$\begin{aligned} \hat{\rho} \times N_{e \text{ on } \gamma}(h) + \hat{\rho} \times A_{e \text{ o } 1} N_{e \text{ on } \gamma}^{(2)}(h) + \hat{\rho} \times A_{e \text{ o } 1}' M_{e \text{ on } \gamma}^{(2)}(h) \\ + \hat{\rho} \times A_{e \text{ o } 2} N_{e \text{ on } \gamma}(h) + \hat{\rho} \times A_{e \text{ o } 2}' M_{e \text{ on } \gamma}(h) = 0. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Substituindo as funções M e N por suas respectivas expressões, obtém-se

$$\left[\frac{\gamma^2}{k} J_n(\gamma a) + A_{e \text{ o } 1} \frac{\gamma^2}{k} H_n^{(2)}(\gamma a) + A_{e \text{ o } 2} \frac{\gamma^2}{k} J_n(\gamma a) \right] \hat{\phi} = 0 \quad (6.14)$$

e

$$\begin{aligned} \left[\pm \frac{jhn}{ka} J_n(\gamma a) \pm A_{e \text{ o } 1} \frac{jhn}{ka} H_n^{(2)}(\gamma a) - A_{e \text{ o } 1}' H_n^{(2)'}(\gamma a) \right. \\ \left. \pm A_{e \text{ o } 2} \frac{jhn}{ka} J_n(\gamma a) - A_{e \text{ o } 2}' J_n'(\gamma a) \right] \hat{z} = 0 \end{aligned} \quad (6.15)$$

ou

$$1 + A_{e \text{ o } 1} \left[H_n^{(2)}(\gamma a) / J_n(\gamma a) \right] + A_{e \text{ o } 2} = 0 \quad (6.16)$$

e

$$A_{e \text{ o } 1}' \left[H_n^{(2)'}(\gamma a) / J_n'(\gamma a) \right] + A_{e \text{ o } 2}' = 0. \quad (6.17)$$

Para $N_{e\gamma}'^{(2)}(-h)$,

$$\begin{aligned} \hat{\rho} \times M_{e\gamma}'(h) + \hat{\rho} \times B_{e1} M_{e\gamma}'^{(2)}(h) + \hat{\rho} \times B_{e1}' N_{e\gamma}'^{(2)}(h) \\ + \hat{\rho} \times B_{e2} M_{e\gamma}'(h) + \hat{\rho} \times B_{e2}' N_{e\gamma}'(h) = 0 \end{aligned} \quad (6.18)$$

ou

$$\left[B_{e1}' \frac{\gamma^2}{k} H_n^{(2)}(\gamma a) + B_{e2}' \frac{\gamma^2}{k} J_n(\gamma a) \right] \hat{\phi} = 0 \quad (6.19)$$

e

$$\begin{aligned} \left[-J_n'(\gamma a) - B_{e1} H_n^{(2)'}(\gamma a) \pm B_{e1}' \frac{jhn}{ka} H_n^{(2)}(\gamma a) \right. \\ \left. - B_{e2} J_n'(\gamma a) \pm B_{e2}' \frac{jhn}{ka} J_n(\gamma a) \right] \hat{z} = 0 \end{aligned} \quad (6.20)$$

ou ainda

$$B_{e1}' \left[H_n^{(2)}(\gamma a) / J_n(\gamma a) \right] + B_{e2}' = 0 \quad (6.21)$$

e

$$1 + B_{e1} \left[H_n^{(2)'}(\gamma a) / J_n'(\gamma a) \right] + B_{e2} = 0. \quad (6.22)$$

Para $M_{e\gamma}'(-h)$,

$$\begin{aligned} \hat{\rho} \times C_{e1} N_{e\gamma}'^{(2)}(h) + \hat{\rho} \times C_{e1}' M_{e\gamma}'^{(2)}(h) \\ + \hat{\rho} \times C_{e2} N_{e\gamma}'(h) + \hat{\rho} \times C_{e2}' M_{e\gamma}'(h) = 0 \end{aligned} \quad (6.23)$$

ou

$$\left[C_{e1} \frac{\gamma^2}{k} H_n^{(2)}(\gamma a) + C_{e2} \frac{\gamma^2}{k} J_n(\gamma a) \right] \hat{\phi} = 0 \quad (6.24)$$

e

$$\begin{aligned} \left[\pm C_{e1} \frac{jhn}{ka} H_n^{(2)}(\gamma a) - C_{e1}' H_n^{(2)'}(\gamma a) \right. \\ \left. \pm C_{e2} \frac{jhn}{ka} J_n(\gamma a) - C_{e2}' J_n'(\gamma a) \right] \hat{z} = 0 \end{aligned} \quad (6.25)$$

ou ainda

$$C_{e1} \left[H_n^{(2)}(\gamma a) / J_n(\gamma a) \right] + C_{e2} = 0 \quad (6.26)$$

e

$$C_{e1}' \left[H_n^{(2)'}(\gamma a) / J_n'(\gamma a) \right] + C_{e2}' = 0. \quad (6.27)$$

E para $M_{on\gamma}'^{(2)}(-h)$,

$$\begin{aligned} \hat{\rho} \times D_{o1} M_{on\gamma}'^{(2)}(h) + \hat{\rho} \times D_{e1}' N_{en\gamma}'^{(2)}(h) \\ + \hat{\rho} \times D_{o2} M_{on\gamma}(h) + \hat{\rho} \times D_{e2}' N_{en\gamma}(h) = 0 \end{aligned} \quad (6.28)$$

ou

$$\left[D_{e1}' \frac{\gamma^2}{k} H_n^{(2)'}(\gamma a) + D_{e2}' \frac{\gamma^2}{k} J_n(\gamma a) \right] \hat{\phi} = 0 \quad (6.29)$$

e

$$\begin{aligned} \left[-D_{o1} H_n^{(2)'}(\gamma a) \pm D_{e1}' \frac{jhn}{ka} H_n^{(2)'}(\gamma a) \right. \\ \left. - D_{o2} J_n'(\gamma a) \pm D_{e2}' \frac{jhn}{ka} J_n(\gamma a) \right] \hat{z} = 0 \end{aligned} \quad (6.30)$$

ou ainda

$$D_{e1}' \left[H_n^{(2)'}(\gamma a) / J_n(\gamma a) \right] + D_{e2}' = 0 \quad (6.31)$$

e

$$D_{o1} \left[H_n^{(2)'}(\gamma a) / J_n'(\gamma a) \right] + D_{o2} = 0. \quad (6.32)$$

Substituindo agora, (6.6), (6.7), (6.8) e (6.9) em (6.11), tem-se para $M_{on\gamma}'^{(2)}(-h)$,

$$\begin{aligned} \hat{\rho} \times A_{o1} M_{on\gamma}'^{(2)}(h) + \hat{\rho} \times A_{e1}' N_{en\gamma}'^{(2)}(h) + \hat{\rho} \times A_{o2} M_{on\gamma}(h) \\ + \hat{\rho} \times A_{e2}' N_{en\gamma}(h) = \hat{\rho} \times A_{oT} M_{on\alpha}'^{(2)}(h) + \hat{\rho} \times A_{eT}' N_{en\alpha}'^{(2)}(h), \end{aligned} \quad (6.33)$$

logo

$$A_{e1}' \frac{\gamma^2}{k} H_n^{(2)'}(\gamma b) + A_{e2}' \frac{\gamma^2}{k} J_n(\gamma b) = A_{eT}' \frac{\alpha^2}{k_o} H_n^{(2)'}(\alpha b) \quad (6.34)$$

e

$$\begin{aligned} -A_{o1} H_n^{(2)'}(\gamma b) \mp A_{o1}' \frac{jhn}{kb} H_n^{(2)'}(\gamma b) - A_{o2} J_n'(\gamma b) \\ \mp A_{e2}' \frac{jhn}{kb} J_n(\gamma b) = -A_{oT} H_n^{(2)'}(\alpha b) \mp A_{eT}' \frac{jhn}{k_o b} H_n^{(2)'}(\alpha b). \end{aligned} \quad (6.35)$$

Para $N_{e\gamma}'^{(2)}(-h)$,

$$\begin{aligned} \hat{\rho} \times B_{e1} N_{e\gamma}'^{(2)}(h) + \hat{\rho} \times B_{e1}' M_{e\gamma}^{(2)}(h) + \hat{\rho} \times B_{e2} N_{e\gamma}(h) \\ + \hat{\rho} \times B_{e2}' M_{e\gamma}(h) = \hat{\rho} \times B_{eT} N_{e\alpha}^{(2)}(h) + \hat{\rho} \times B_{eT}' M_{e\alpha}^{(2)}(h), \end{aligned} \quad (6.36)$$

logo

$$B_{e1} \frac{\gamma^2}{k} H_n^{(2)}(\gamma b) + B_{e2} \frac{\gamma^2}{k} J_n(\gamma b) = B_{eT} \frac{\alpha^2}{k_o} H_n^{(2)}(ab) \quad (6.37)$$

e

$$\begin{aligned} \pm B_{e1} \frac{jhn}{kb} H_n^{(2)}(\gamma b) - B_{e1}' H_n^{(2)'}(\gamma b) \pm B_{e2} \frac{jhn}{kb} J_n(\gamma b) \\ - B_{e2}' J_n'(\gamma b) = \pm B_{eT} \frac{jhn}{k_o b} H_n^{(2)}(ab) - B_{eT}' H_n^{(2)'}(ab). \end{aligned} \quad (6.38)$$

Para $M_{e\gamma}'^{(2)}(-h)$,

$$\begin{aligned} \hat{\rho} \times M_{e\gamma}'^{(2)}(h) + \hat{\rho} \times C_{e1} M_{e\gamma}'^{(2)}(h) + \hat{\rho} \times C_{e1}' N_{e\gamma}^{(2)}(h) \\ + \hat{\rho} \times C_{e2} M_{e\gamma}(h) + \hat{\rho} \times C_{e2}' N_{e\gamma}(h) = \\ \hat{\rho} \times C_{eT} M_{e\alpha}^{(2)}(h) + \hat{\rho} \times C_{eT}' N_{e\alpha}^{(2)}(h), \end{aligned} \quad (6.39)$$

logo

$$C_{e1}' \frac{\gamma^2}{k} H_n^{(2)}(\gamma b) + C_{e2}' \frac{\gamma^2}{k} J_n(\gamma b) = C_{eT}' \frac{\alpha^2}{k_o} H_n^{(2)}(ab) \quad (6.40)$$

e

$$\begin{aligned} - H_n^{(2)'}(\gamma b) - C_{e1} H_n^{(2)'}(\gamma b) \mp C_{e1}' \frac{jhn}{kb} H_n^{(2)}(\gamma b) \\ - C_{e2} J_n'(\gamma b) \mp C_{e2}' \frac{jhn}{kb} J_n(\gamma b) = \\ - C_{eT} H_n^{(2)'}(ab) \mp C_{eT}' \frac{jhn}{k_o b} H_n^{(2)}(ab). \end{aligned} \quad (6.41)$$

E para $N_{e\gamma}'^{(2)}(-h)$,

$$\hat{\rho} \times N_{e\gamma}'^{(2)}(h) + \hat{\rho} \times D_{e1} N_{e\gamma}'^{(2)}(h) + \hat{\rho} \times D_{e1}' M_{e\gamma}^{(2)}(h)$$

$$\begin{aligned}
& + \hat{\rho} \times D_{o2} N_{on\gamma}^{(2)}(h) + \hat{\rho} \times D_{e2} M_{en\gamma}^{(2)}(h) = \\
& \hat{\rho} \times D_{oT} N_{on\alpha}^{(2)}(h) + \hat{\rho} \times D_{eT} M_{en\alpha}^{(2)}(h), \quad (6.42)
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
& \frac{\gamma^2}{k} H_n^{(2)}(\gamma b) + D_{o1} \frac{\gamma^2}{k} H_n^{(2)}(\gamma b) \\
& + D_{o2} \frac{\gamma^2}{k} J_n(\gamma b) = D_{oT} \frac{\alpha^2}{k} H_n^{(2)}(ab) \quad (6.43)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \pm \frac{jhn}{kb} H_n^{(2)}(\gamma b) \pm D_{o1} \frac{jhn}{kb} H_n^{(2)}(\gamma b) - D_{e1} H_n^{(2)'}(\gamma b) \\
& \pm D_{o2} \frac{jhn}{kb} J_n(\gamma b) - D_{e2} J_n'(\gamma b) = \\
& \pm D_{oT} \frac{jhn}{k_b} H_n^{(2)}(ab) - D_{eT} H_n^{(2)'}(ab). \quad (6.44)
\end{aligned}$$

Finalmente, levando (6.6), (6.7), (6.8), (6.9) em (6.12), tem-se para $M_{on\gamma}^{(2)}(-h)$,

$$\begin{aligned}
& k \left[\hat{\rho} \times A_{o1} N_{on\gamma}^{(2)}(h) + \hat{\rho} \times A_{e1} M_{en\gamma}^{(2)}(h) \right. \\
& \left. + \hat{\rho} \times A_{o2} N_{on\gamma}(h) + \hat{\rho} \times A_{e2} M_{en\gamma}(h) \right] \\
& = \epsilon_r k_o \left[\hat{\rho} \times A_{oT} N_{on\alpha}^{(2)}(h) + \hat{\rho} \times A_{eT} M_{en\alpha}^{(2)}(h) \right], \quad (6.45)
\end{aligned}$$

logo

$$A_{o1} \gamma^2 H_n^{(2)}(\gamma b) + A_{o2} \gamma^2 J_n(\gamma b) = A_{oT} \epsilon_r \alpha^2 H_n^{(2)}(ab) \quad (6.46)$$

e

$$\begin{aligned}
& \pm A_{o1} \frac{jhn}{kb} H_n^{(2)}(\gamma b) - A_{e1} H_n^{(2)'}(\gamma b) \pm A_{o2} \frac{jhn}{kb} J_n(\gamma b) \\
& - A_{e2} J_n'(\gamma b) = \sqrt{\epsilon_r} \left[\pm A_{oT} \frac{jhn}{k_b} H_n^{(2)}(ab) - A_{eT} H_n^{(2)'}(ab) \right]. \quad (6.47)
\end{aligned}$$

Para $N_{on\gamma}^{(2)}(-h)$,

$$\begin{aligned}
& k \left[\hat{\rho} \times B_{o1} M_{on\gamma}^{(2)}(h) + \hat{\rho} \times B_{o1}' N_{on\gamma}^{(2)}(h) \right. \\
& \quad \left. + \hat{\rho} \times B_{o2} M_{on\gamma}(h) + \hat{\rho} \times B_{o2}' N_{on\gamma}(h) \right] \\
& = \epsilon_r k_o \left[\hat{\rho} \times B_{oT} M_{on\alpha}^{(2)}(h) + \hat{\rho} \times B_{oT}' N_{on\alpha}^{(2)}(h) \right], \quad (6.48)
\end{aligned}$$

logo

$$B_{o1}' \gamma^2 H_n^{(2)}(\gamma b) + B_{o2}' \gamma^2 J_n(\gamma b) = B_{oT}' \epsilon_r \alpha^2 H_n^{(2)}(ab) \quad (6.49)$$

e

$$\begin{aligned}
& - B_{o1} H_n^{(2)'}(\gamma b) \mp B_{o1}' \frac{jhn}{kb} H_n^{(2)}(\gamma b) - B_{o2} J_n'(\gamma b) \mp B_{o2}' \frac{jhn}{kb} J_n(\gamma b) \\
& = \sqrt{\epsilon_r} \left[- B_{oT} H_n^{(2)'}(ab) \mp B_{oT}' \frac{jhn}{k_o b} H_n^{(2)}(ab) \right]. \quad (6.50)
\end{aligned}$$

Para $M_{on\gamma}'(-h)$,

$$\begin{aligned}
& k \left[\hat{\rho} \times N_{on\gamma}^{(2)}(h) + \hat{\rho} \times C_{o1} N_{on\gamma}^{(2)}(h) + \hat{\rho} \times C_{o1}' M_{on\gamma}^{(2)}(h) \right. \\
& \quad \left. + \hat{\rho} \times C_{o2} N_{on\gamma}(h) + \hat{\rho} \times C_{o2}' M_{on\gamma}(h) \right] = \\
& \epsilon_r k_o \left[\hat{\rho} \times C_{oT} N_{on\alpha}^{(2)}(h) + \hat{\rho} \times C_{oT}' M_{on\alpha}^{(2)}(h) \right], \quad (6.51)
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
& \gamma^2 H_n^{(2)}(\gamma b) + C_{o1} \gamma^2 H_n^{(2)}(\gamma b) \\
& \quad + C_{o2} \gamma^2 J_n(\gamma b) = C_{oT} \epsilon_r \alpha^2 H_n^{(2)}(ab) \quad (6.52)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \pm \frac{jhn}{kb} H_n^{(2)}(\gamma b) \pm C_{o1} \frac{jhn}{kb} H_n^{(2)}(\gamma b) - C_{o1}' H_n^{(2)'}(\gamma b) \\
& \quad \pm C_{o2} \frac{jhn}{kb} J_n(\gamma b) - C_{o2}' J_n'(\gamma b) = \\
& \sqrt{\epsilon_r} \left[\pm C_{oT} \frac{jhn}{k_o b} H_n^{(2)}(ab) - C_{oT}' H_n^{(2)'}(ab) \right]. \quad (6.53)
\end{aligned}$$

E para $N_{\text{on}\gamma}^{(2)}(-h)$,

$$k \left[\hat{\rho} \times M_{\text{on}\gamma}^{(2)}(h) + \hat{\rho} \times D_{\text{o1}} M_{\text{on}\gamma}^{(2)}(h) + \hat{\rho} \times D_{\text{o1}}' N_{\text{on}\gamma}^{(2)}(h) \right. \\ \left. + \hat{\rho} \times D_{\text{o2}} M_{\text{on}\gamma}^{(2)}(h) + \hat{\rho} \times D_{\text{o2}}' N_{\text{on}\gamma}^{(2)}(h) \right] = \\ \varepsilon_r k_o \left[\hat{\rho} \times D_{\text{oT}} M_{\text{on}\alpha}^{(2)}(h) + \hat{\rho} \times D_{\text{oT}}' N_{\text{on}\alpha}^{(2)}(h) \right], \quad (6.54)$$

logo

$$D_{\text{o1}}' \gamma^2 H_n^{(2)}(\gamma b) + D_{\text{o2}}' \gamma^2 J_n(\gamma b) = D_{\text{oT}}' \varepsilon_r \alpha^2 H_n^{(2)}(\alpha b) \quad (6.55)$$

e

$$- H_n^{(2)}(\gamma b) - D_{\text{o1}} H_n^{(2)}(\gamma b) \mp D_{\text{o1}}' \frac{j h n}{k b} H_n^{(2)}(\gamma b) \\ - D_{\text{o2}} J_n'(\gamma b) \mp D_{\text{o2}}' \frac{j h n}{k b} J_n(\gamma b) = \\ \sqrt{\varepsilon_r} \left[- D_{\text{oT}} H_n^{(2)}(\alpha b) \mp D_{\text{oT}}' \frac{j h n}{k_o b} H_n^{(2)}(\alpha b) \right]. \quad (6.56)$$

Observe que os termos referentes à função $\bar{G}_{m2}^{(22)}(R|R')$ foram colocados, para as condições (6.11) e (6.12), nas equações envolvendo os coeficientes C e D, enquanto que, na condição (6.10), eles foram postos nas equações envolvendo A e B. Isto foi feito por uma mera questão de escolha.

Reescrevendo as Eqs. de (6.34) a (6.56), tem-se: de (6.34) em (6.35),

$$A_{\text{oT}} H_n^{(2)}(\alpha b) \mp A_{\text{oT}}' \frac{\chi}{k_o} H_n^{(2)}(\alpha b) = \\ A_{\text{o1}} H_n^{(2)}(\gamma b) + A_{\text{o2}} J_n'(\gamma b). \quad (6.57)$$

De (6.37) em (6.38),

$$\pm B_{\text{oT}} \frac{\chi}{k_o} H_n^{(2)}(\alpha b) + B_{\text{oT}}' H_n^{(2)}(\alpha b) = \\ B_{\text{o1}}' H_n^{(2)}(\gamma b) + B_{\text{o2}} J_n'(\gamma b). \quad (6.58)$$

De (6.40) em (6.41),

$$C_{\circ T} H_n^{(2)'}(ab) \mp C_{\circ T}' \frac{X}{k_o} H_n^{(2)'}(ab) = \\ C_{\circ 1} H_n^{(2)'}(\gamma b) + C_{\circ 2} J_n'(\gamma b) + H_n^{(2)'}(\gamma b). \quad (6.59)$$

De (6.43) em (6.44),

$$\pm D_{\circ T} \frac{X}{k_o} H_n^{(2)'}(ab) + D_{\circ T}' H_n^{(2)'}(ab) = \\ D_{\circ 1}' H_n^{(2)'}(\gamma b) + D_{\circ 2}' J_n'(\gamma b). \quad (6.60)$$

De (6.46) em (6.47),

$$\sqrt{\epsilon_r} \left[\pm A_{\circ T} \frac{X}{k_o} H_n^{(2)'}(ab) + A_{\circ T}' H_n^{(2)'}(ab) \right] = \\ A_{\circ 1}' H_n^{(2)'}(\gamma b) + A_{\circ 2}' J_n'(\gamma b). \quad (6.61)$$

De (6.49) em (6.50),

$$\sqrt{\epsilon_r} \left[B_{\circ T} H_n^{(2)'}(ab) \mp B_{\circ T}' \frac{X}{k_o} H_n^{(2)'}(ab) \right] = \\ B_{\circ 1} H_n^{(2)'}(\gamma b) + B_{\circ 2} J_n'(\gamma b). \quad (6.62)$$

De (6.52) em (6.53),

$$\sqrt{\epsilon_r} \left[\pm C_{\circ T} \frac{X}{k_o} H_n^{(2)'}(ab) + C_{\circ T}' H_n^{(2)'}(ab) \right] = \\ C_{\circ 1}' H_n^{(2)'}(\gamma b) + C_{\circ 2}' J_n'(\gamma b). \quad (6.63)$$

de (6.55) em (6.56),

$$\sqrt{\epsilon_r} \left[D_{\circ T} H_n^{(2)'}(ab) \mp D_{\circ T}' \frac{X}{k_o} H_n^{(2)'}(ab) \right] = \\ D_{\circ 1} H_n^{(2)'}(\gamma b) + D_{\circ 2} J_n'(\gamma b) + H_n^{(2)'}(\gamma b). \quad (6.64)$$

Das Eqs. (6.16), (6.17), (6.34), (6.46), (6.57) e (6.61), obtém-se,

$$A_{\circ T} = \mp A_{\circ T}' \frac{V}{X} \quad (6.65)$$

e

$$A_{\circ T}' = \frac{\pm 2j J_n(\gamma a) X}{\pi b Q(YX^2 + VW)}. \quad (6.66)$$

Das Eqs. (6.21), (6.22), (6.37), (6.49), (6.58) e (6.62),

obtem-se,

$$B_{oT} = \frac{2jJ_n'(\gamma a)W}{\pi bTY\sqrt{\epsilon_r}(YX^2 + VW)} \quad (6.67)$$

e

$$B_{oT}' = \mp B_{oT} \frac{XY}{W} \quad (6.68)$$

Das Eqs. (6.26), (6.27), (6.40), (6.52), (6.59) e (6.63),
obtem-se,

$$C_{oT} = \frac{-2jH_n^{(2)}(\gamma a)V}{\pi bQ(\pm YX^2 - VW)} \quad (6.69)$$

e

$$C_{oT}' = \mp C_{oT} \frac{X}{V} \quad (6.70)$$

Das Eqs. (6.31), (6.32), (6.43), (6.55), (6.60) e (6.64),
obtem-se,

$$D_{oT} = -B_{oT} \frac{H_n^{(2)'}(\gamma a)}{J_n'(\gamma a)} \quad (6.71)$$

e

$$D_{oT}' = -B_{oT}' \frac{H_n^{(2)'}(\gamma a)}{J_n'(\gamma a)} \quad (6.72)$$

Sendo V, W, Y e X dados, respectivamente, por

$$V = k_o \left[\left(\frac{\alpha}{\gamma} \right)^2 \frac{S}{T} + \frac{H_n^{(2)}(\alpha b)}{H_n^{(2)}(\alpha b)} \right], \quad (6.73)$$

$$W = \epsilon_r \left(\frac{\alpha}{\gamma} \right)^2 \frac{P}{Q} H_n^{(2)}(\alpha b) + H_n^{(2)'}(\alpha b), \quad (6.74)$$

$$Y = H_n^{(2)}(\alpha b)/k_o, \quad (6.75)$$

e

$$X = \frac{-jhn}{b} \left[1 - \left(\frac{\alpha}{\gamma} \right)^2 \right] \quad (6.76)$$

com

$$P = H_n^{(2)}(\gamma a) J_n'(\gamma b) - H_n^{(2)'}(\gamma b) J_n(\gamma a), \quad (6.77)$$

$$Q = H_n^{(2)}(\gamma b) J_n(\gamma a) - H_n^{(2)}(\gamma a) J_n(\gamma b), \quad (6.78)$$

$$S = H_n^{(2)}(\gamma b) J_n'(\gamma a) - H_n^{(2)}(\gamma a) J_n'(\gamma b) \quad (6.79)$$

e

$$T = H_n^{(2)'}(\gamma a) J_n(\gamma b) - H_n^{(2)'}(\gamma b) J_n'(\gamma a). \quad (6.80)$$

Onde as derivadas das funções cilíndricas são denotadas por

$$J_n'(\beta \rho) = \frac{dJ_n(\beta \rho)}{d\rho} \quad \text{e} \quad H_n^{(2)'}(\beta \rho) = \frac{dH_n^{(2)}(\beta \rho)}{d\rho},$$

sendo

$$\beta = \gamma, \alpha \quad \text{e} \quad \rho = a, b.$$

6.3 DETERMINAÇÃO DOS CAMPOS DISTANTES

Como foi visto no capítulo anterior, o campo magnético radiado pode ser obtido de

$$H(R) = -j\omega\epsilon_0 \iiint_{V'} \bar{G}_T^{(12)}(R|R') \cdot M(R') dV', \quad (6.81)$$

onde $\bar{G}_T^{(12)}(R|R')$ é dada pela Eq. (6.9) e $M(R')$ por (5.2).

O campo elétrico pode ser obtido, mais uma vez, da equação de Maxwell para regiões livres de fontes,

$$E(R) = \frac{-j}{\omega\epsilon_0} \nabla \times H(R). \quad (6.82)$$

Logo

$$E(R) = - \iiint_{V'} \nabla \times \bar{G}_T^{(12)}(R|R') \cdot M(R') dV', \quad (6.83)$$

onde

$$\nabla \times \bar{G}_T^{(12)}(R|R') = \frac{-jk_0}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_{0n}}{\gamma^2} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \left[A_{eT} N_{\text{ond}}^{(2)}(h) + A_{eT}' M_{\text{ond}}^{(2)}(h) \right] M_{\text{ony}}'^{(2)}(-h) \right. \\
& + \left[B_{eT} M_{\text{ond}}^{(2)}(h) + B_{eT}' N_{\text{ond}}^{(2)}(h) \right] N_{\text{ony}}'^{(2)}(-h) \\
& + \left[C_{eT} N_{\text{ond}}^{(2)}(h) + C_{eT}' M_{\text{ond}}^{(2)}(h) \right] M_{\text{ony}}'(-h) \\
& \left. + \left[D_{eT} M_{\text{ond}}^{(2)}(h) + D_{eT}' N_{\text{ond}}^{(2)}(h) \right] N_{\text{ony}}'(-h) \right\}. \quad (6.84)
\end{aligned}$$

Os coeficientes são fornecidos pelas equações (6.65) a (6.72).

Nas regiões dos campos distantes pode-se utilizar a expressão assintótica da função de Hankel, ou seja,

$$H_n^{(2)}(\alpha\rho) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha\rho}} j^{n+1/2} e^{-j\alpha\rho}. \quad (6.85)$$

Portanto, as funções $M_{\text{ond}}^{(2)}(h)$ e $N_{\text{ond}}^{(2)}(h)$ ficam

$$M_{\text{ond}}^{(2)}(h) \cong j^{n+3/2} \alpha \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha\rho}} e^{-j(\alpha\rho+h z)} \frac{\cos(n\phi)}{\sin(n\phi)} \hat{\phi} \quad (6.86)$$

e

$$N_{\text{ond}}^{(2)}(h) \cong j^{n+1/2} \frac{\alpha}{k_o} \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha\rho}} e^{-j(\alpha\rho+h z)} \frac{\cos(n\phi)}{\sin(n\phi)} (-h\hat{\rho} + \alpha\hat{z}). \quad (6.87)$$

As funções $M_{\text{ond}}^{(2)}(h)$ e $N_{\text{ond}}^{(2)}(h)$ são semelhantes às descritas acima trocando seno por cosseno e vice-versa. Portanto, substituindo as expressões assintóticas de M e N na equação (6.84), tem-se

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{E}_T^{(12)}(R|R') &= \frac{-jk_o}{8\pi} \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_{0n}}{\gamma^2} \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha\rho}} e^{-j(\alpha\rho+h z)} j^{n+1/2} \\
&\times \left\{ \left[A_{eT} \frac{\cos(n\phi)}{\sin(n\phi)} (-h\hat{\rho} + \alpha\hat{z})/k_o + j A_{eT}' \frac{\sin(n\phi)}{\cos(n\phi)} \hat{\phi} \right] M_{\text{ony}}'^{(2)}(-h) \right. \\
&+ \left[j B_{eT} \frac{\cos(n\phi)}{\sin(n\phi)} \hat{\phi} + B_{eT}' \frac{\sin(n\phi)}{\cos(n\phi)} (-h\hat{\rho} + \alpha\hat{z})/k_o \right] N_{\text{ony}}'^{(2)}(-h) \\
&+ \left[C_{eT} \frac{\cos(n\phi)}{\sin(n\phi)} (-h\hat{\rho} + \alpha\hat{z})/k_o + j C_{eT}' \frac{\sin(n\phi)}{\cos(n\phi)} \hat{\phi} \right] M_{\text{ony}}'(-h) + \\
&\left. + \left[j D_{eT} \frac{\cos(n\phi)}{\sin(n\phi)} \hat{\phi} + D_{eT}' \frac{\sin(n\phi)}{\cos(n\phi)} (-h\hat{\rho} + \alpha\hat{z})/k_o \right] N_{\text{ony}}'(-h) \right\}
\end{aligned}$$

$$+ \left[j D_{\theta T}' \frac{\cos(n\phi)}{\sin(n\phi)} \hat{\phi} + D_{\theta T}' \frac{\sin(n\phi)}{\cos(n\phi)} (-h\hat{\rho} + \alpha\hat{z}) / k_0 \right] N_{\theta\gamma}'(-h) \} . \quad (6.88)$$

Mudando-se das variáveis cilíndricas para esféricas a partir das relações:

$$\rho = R \sin\theta,$$

$$z = R \cos\theta$$

e sabendo-se que,

$$\alpha = k_0 \sin\beta$$

e

$$h = k_0 \cos\beta,$$

tem-se então,

$$\alpha\rho + hz = k_0 R \cos(\theta - \beta),$$

$$-h\hat{\rho} + \alpha\hat{z} = k_0 (-\hat{\rho} \cos\beta + \hat{z} \sin\beta)$$

e

$$dh = -k_0 \sin\beta d\beta.$$

Para $\beta = \theta$, obtém-se

$$h = k_0 \cos\theta,$$

$$-h\rho + \alpha z = k_0 R,$$

$$-h\hat{\rho} + \alpha\hat{z} = k_0 (-\hat{\rho} \cos\theta + \hat{z} \sin\theta)$$

e

$$dh = -k_0 \sin\theta d\theta.$$

Usando agora o método do ponto de sela, tem-se

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{G}_T^{(12)}(R|R') &= \frac{k_0^2 \sin\theta e^{-jk_0 R}}{4\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_{0n}}{u^2} j^{n+1} \\ &\times \left\{ \left[j A_{\theta T}' \frac{\cos(n\phi)}{\sin(n\phi)} \hat{\theta} + A_{\theta T}' \frac{\sin(n\phi)}{\cos(n\phi)} \hat{\phi} \right] M_{\theta\gamma}'^{(2)}(-h) \right. \\ &+ \left[B_{\theta T}' \frac{\cos(n\phi)}{\sin(n\phi)} \hat{\phi} + j B_{\theta T}' \frac{\sin(n\phi)}{\cos(n\phi)} \hat{\theta} \right] N_{\theta\gamma}'^{(2)}(-h) \\ &+ \left[j C_{\theta T}' \frac{\cos(n\phi)}{\sin(n\phi)} \hat{\theta} + C_{\theta T}' \frac{\sin(n\phi)}{\cos(n\phi)} \hat{\phi} \right] M_{\theta\gamma}'(-h) \end{aligned}$$

$$+ \left[D_{\theta T} \frac{\cos(n\phi)}{\sin(n\phi)} \hat{\phi} + j D_{\theta T}' \frac{\sin(n\phi)}{\cos(n\phi)} \hat{\theta} \right] N_{\theta\gamma}'(-h) \}. \quad (6.89)$$

onde

$$v = k_o \sin\theta \quad (6.90)$$

e

$$u = \sqrt{k^2 - k_o^2 \cos^2\theta} \quad (6.91)$$

correspondem, respectivamente, aos valores de α e γ para $\beta = \theta$.

O campo elétrico é calculado a partir da substituição das Eqs. (6.89) e (5.2) em (6.83). Como a simetria do problema é par (vide Cap. 5), utilizam-se, na Eq. (6.89), apenas as funções pares. Pode-se verificar, também, que o campo elétrico possui componentes na direção ϕ e θ . Portanto,

$$E(R) = E_\theta \hat{\theta} + E_\phi \hat{\phi} = - \iiint_{V'} \nabla \times \bar{G}_T^{(12)}(R|R') \cdot M(R') dV',$$

onde

$$E_\theta \cong \frac{-jk_o^2 \sin\theta e^{-jk_o R}}{4\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 - \delta_{no})}{u^2} j^{n+1} \cos(n\phi) \\ \times \iiint_{V'} \left[A_T M_{nu}'^{(2)}(-h) + B_T' N_{nu}'^{(2)}(-h) \right. \\ \left. + C_T M_{nu}'(-h) + D_T' N_{nu}'(-h) \right] \cdot M(R') dV' \quad (6.92)$$

e

$$E_\phi \cong \frac{-k_o^2 \sin\theta e^{-jk_o R}}{4\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 - \delta_{no})}{u^2} j^{n+1} \cos(n\phi) \\ \times \iiint_{V'} \left[A_T' M_{nu}'^{(2)}(-h) + B_T N_{nu}'^{(2)}(-h) \right. \\ \left. + C_T' M_{nu}'(-h) + D_T N_{nu}'(-h) \right] \cdot M(R') dV'. \quad (6.93)$$

Os coeficientes A, B, C e D são dados pelas Eqs. (6.65) a (6.72), considerando apenas expressões referentes aos índices pares.

O campo magnético, para regiões distantes, é dado por

$$H(R) \cong \frac{1}{\eta} \hat{\rho} \times E(R) = H_{\theta} \hat{\theta} + H_{\phi} \hat{\phi} \quad (6.94)$$

onde

$$H_{\theta} = -E_{\phi} / \eta$$

e

$$H_{\phi} = E_{\theta} / \eta.$$

6.4 CAMPOS DISTANTES PARA O MODO FUNDAMENTAL

Quando a cavidade (elemento radiador) é excitada no modo $m=0$ e $n=1$, a corrente magnética $M(R')$ fica sendo expressa pela Eq. (5.5), como foi visto no capítulo anterior. Para simplificar os cálculos, será considerado que a fonte se encontra, na direção radial, em $\rho = d$, onde $d = a + h/2$. Portanto, a componente E_{θ} do campo elétrico fica sendo expressa por:

$$\begin{aligned} E_{\theta} \cong & \frac{j e^{-jk_0 R}}{2\pi R \sin\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 - \delta_{0n}) k_0^2 \sin^2\theta}{u^2} j^{n+1} \cos(n\phi) \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ -\sin\alpha \left[C_T J'_n(u\rho') + A_T H_n^{(2)'}(u\rho') \right] \cos(n\phi') \right. \\ & - \frac{j h n}{k \rho'} \sin\alpha \left[D'_T J_n(u\rho') + B'_T H_n^{(2)}(u\rho') \right] \sin(n\phi') \\ & \left. - \frac{u^2}{k} \cos\alpha \left[D'_T J_n(u\rho') + B'_T H_n^{(2)}(u\rho') \right] \cos(n\phi') \right\} e^{j h z'} \\ & \times \sin\left(\frac{\pi}{L} \zeta'\right) \frac{\delta(\rho' - d)}{\rho'} \left[\delta\left(\zeta' - \frac{L}{2}\right) - \delta\left(\zeta' + \frac{L}{2}\right) \right] \rho' d\rho' d\phi' dz'. \quad (6.95) \end{aligned}$$

Integrando-se em ρ' e mudando (ϕ', z') por (ξ', ζ') , através das relações

$$\phi' = \frac{1}{d} (\zeta' \cos\alpha + \xi' \sin\alpha)$$

e

$$z' = \zeta' \sin\alpha - \xi' \cos\alpha,$$

tem-se:

$$\begin{aligned}
 E_{\theta} \cong & - \frac{e^{-jk_0 R}}{2\pi R \sin\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 - \delta_{0n})v^2}{u^2} j^{n+2} \cos(n\phi) \\
 & \times \int_{-W/2}^{W/2} \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ \text{sen}\alpha \cos \left[\frac{n}{d} (\zeta' \cos\alpha + \xi' \text{sen}\alpha) \right] \right. \\
 & \quad \times \left[C_T J'_n(ud) + A_T H_n^{(2)'}(ud) \right] \\
 & \quad + \left\{ \frac{jhn}{kd} \text{sen}\alpha \sin \left[\frac{n}{d} (\zeta' \cos\alpha + \xi' \text{sen}\alpha) \right] + \frac{u^2}{k} \cos\alpha \cos(n\phi') \right\} \\
 & \quad \times \left[D'_T J_n(ud) + B'_T H_n^{(2)}(ud) \right] \Bigg\} \\
 & \times e^{jh(\zeta' \text{sen}\alpha - \xi' \cos\alpha)} \text{sen}\left(\frac{\pi}{L} \zeta'\right) \\
 & \times \left[\delta\left(\zeta' - \frac{L}{2}\right) - \delta\left(\zeta' + \frac{L}{2}\right) \right] d\zeta' d\xi'. \quad (6.96)
 \end{aligned}$$

Integrando em ζ' e ξ' obtém-se, finalmente,

$$\begin{aligned}
 E_{\theta} \cong & \frac{-e^{-jk_0 R}}{\pi R \sin\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 - \delta_{0n})v^2}{u^2} j^{n+2} \cos(n\phi) \\
 & \times \left[C_T J'_n(ud) + A_T H_n^{(2)'}(ud) \right] \text{sen}\alpha \left[F_n(\theta) - G_n(\theta) \right] \\
 & - \left[D'_T J_n(ud) + B'_T H_n^{(2)}(ud) \right] \left\{ \frac{n \cos\theta}{d\sqrt{\epsilon_r}} \text{sen}\alpha \left[F_n(\theta) + G_n(\theta) \right] \right. \\
 & \quad \left. - k \left(1 - \frac{\cos^2\theta}{\epsilon_r} \right) \cos\alpha \left[F_n(\theta) - G_n(\theta) \right] \right\} \quad (6.97)
 \end{aligned}$$

onde

$$F_n(\theta) = \frac{nb_{\alpha} - a_{\alpha} \cos\theta}{n^2 b_{\alpha}^2 - a_{\alpha}^2 \cos^2\theta} \cos(\alpha_L \cos\theta - n\beta_L) \text{sen}(\alpha_W \cos\theta + n\beta_W)$$

e

$$G_n(\theta) = \frac{nb_{\alpha} + a_{\alpha} \cos\theta}{n^2 b_{\alpha}^2 - a_{\alpha}^2 \cos^2\theta} \cos(\alpha_L \cos\theta + n\beta_L) \text{sen}(\alpha_W \cos\theta - n\beta_W),$$

sendo,

$$\begin{aligned} a_\alpha &= k_0 \cos \alpha & , & \quad b_\alpha = \frac{\sin \alpha}{d} \\ \alpha_L &= \frac{k_0 L}{2} \sin \alpha & , & \quad \alpha_W = \frac{k_0 W}{2} \cos \alpha \\ \beta_L &= L \frac{\cos \alpha}{2d} & \text{ e } & \quad \beta_W = W \frac{\sin \alpha}{2d} . \end{aligned}$$

De maneira semelhante se obtém a componente em ϕ , ou seja,

$$\begin{aligned} E_\phi &\cong \frac{-e^{-jk_0 R}}{\pi R \sin \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 - \delta_{0n}) v^2}{u^2} j^{n+1} \cos(n\phi) \\ &\times \left[C'_T J'_n(ud) + A'_T H_n^{(2)'}(ud) \right] \sin \alpha \left[F_n(\theta) - G_n(\theta) \right] \\ &- \left[D_T J_n(ud) + B_T H_n^{(2)}(ud) \right] \left\{ \frac{n \cos \theta}{d \sqrt{\epsilon_r}} \sin \alpha \left[F_n(\theta) + G_n(\theta) \right] \right. \\ &\quad \left. - k \left(1 - \frac{\cos^2 \theta}{\epsilon_r} \right) \cos \alpha \left[F_n(\theta) - G_n(\theta) \right] \right\} \quad (6.98) \end{aligned}$$

Pode-se verificar que as expressões dos campos, fornecidas pelas Eqs. (6.97) e (6.98), são idênticas às aquelas apresentadas no capítulo anterior, Seç. 6.5, quando se faz $\epsilon_r = 1$ e $a = b = d$ (h muito fino). Para esta condição, tem-se

$$u = v = \alpha = \gamma = k_0 \sin \theta$$

e os coeficientes

$$A_T = \frac{-2j J_n(\gamma a)}{\pi a Q W} = - \frac{J_n(\gamma a)}{H_n^{(2)}(\gamma a)} ,$$

$$A'_T = \frac{-2j J_n(\gamma a) X}{\pi a Q (Y X^2 + V W)} = 0 ,$$

$$B_T = \frac{2jJ_n'(\gamma a)}{\pi aTYV\sqrt{\epsilon_r}} = - \frac{J_n'(\gamma a)}{H_n^{(2)'}(\gamma a)},$$

$$B_T' = \frac{-2jJ_n'(\gamma a)X}{\pi aTWV\sqrt{\epsilon_r}} = 0,$$

$$C_T = \frac{2jH_n(\gamma a)}{\pi aQW} = 1,$$

$$C_T' = \frac{-2jH_n(\gamma a)X}{\pi aQW} = 0,$$

$$D_T = - B_T \frac{H_n^{(2)'}(\gamma a)}{J_n'(\gamma a)} = 1$$

e

$$D_T' = - B_T' \frac{H_n^{(2)'}(\gamma a)}{J_n'(\gamma a)} = 0.$$

6.5 CONCLUSÃO

A influência do substrato nos campos radiados pode ser notada quando se varia a permissividade e/ou a espessura do mesmo. Os diagramas de radiação para várias espessuras são apresentados no próximo capítulo.

A localização do vetor densidade de corrente magnética, $M(R')$, com relação à direção radial, foi feita igual ao raio do cilindro mais a metade da espessura do substrato, isto é, $(a + h/2)$. A partir desta aproximação foi possível se resolver, de uma maneira simples, a integral em ρ da Eq. (6.95). Porém, para se obter uma expressão mais precisa faz-se necessário a integração em ρ , de a até b . De qualquer forma, a aproximação feita aqui é válida nos casos usuais, para os quais $h \ll \lambda$.

Para verificar a validade das expressões que fornecem os campos, considerou-se o substrato muito fino ($a \cong d \cong b$) com uma permissividade relativa igual a um, de forma que se pudesse

comparar as equações obtidas aqui com aquelas do capítulo anterior e mostrar que , nesse limite, elas são idênticas.

CAPÍTULO VII

RESULTADOS: IMPEDÂNCIA DE ENTRADA E DIAGRAMAS DE RADIAÇÃO

7.1 INTRODUÇÃO

Os resultados, que serão apresentados neste capítulo, foram obtidos a partir de simulações feitas no computador IBM 3090. Os cálculos foram feitos utilizando a linguagem FORTRAN 77, enquanto que algumas rotinas gráficas foram desenvolvidas em PASCAL. Foi utilizado, na apresentação gráfica da impedância de entrada, o programa GRAPHER. Todas as rotinas empregadas neste capítulo estão anexadas no final do trabalho.

Na Seq. 7.2 são mostrados os resultados referentes à impedância de entrada da antena de microfita do Cap. 3., onde a alimentação é feita por cabo coaxial através do substrato dielétrico. Estes resultados incluem tanto a variação da impedância com a frequência como a variação com o ponto de alimentação. Na Seq. 7.3 tem-se o comportamento dos diagramas de radiação, no plano de azimute e de elevação, para o elemento radiador posicionado em direções diferentes. Nesta mesma seção são mostradas as variações dos diagramas com a premissividade relativa do substrato dielétrico. A influência da espessura do substrato, nos diagramas de radiação, é apresentada na última seção.

7.2 IMPEDÂNCIA DE ENTRADA

As rotinas numéricas utilizadas nesta seção foram obtidas a partir da Eq. (3.43). A rotina que simula a impedância de entrada

com a posição é chamada de IMPPPOS, enquanto que, a simulação da impedância de entrada com a frequência é feita por IMPFRQ (vide apêndice).

As rotinas apresentadas no parágrafo anterior são gerais, no que diz respeito ao modo de excitação, porém, os resultados que serão apresentados aqui, foram obtidos para uma excitação no modo fundamental (no caso, TM_{01}), com o elemento radiador posicionado na direção $\hat{\phi}$, ou seja, $\alpha = 0^\circ$. A fita condutora, considerada na simulação, tem comprimento $L = 4$ cm, largura $W = 3$ cm e espessura desprezível. Os substratos considerados nos cálculos possuem permissividades relativas, ϵ_r , iguais a 1,06 e 2,32 e espessuras, h , iguais a 0,159 cm e 0,0795 cm. O cilindro metálico de raio $a = 5$ cm é suposto perfeitamente condutor. O fio central do cabo coaxial é representado por uma fita condutora de largura efetiva $W_1 = 0,5$ cm.

Para o cálculo da impedância de entrada é necessário se saber o valor do fator de qualidade da cavidade, Q_T , que modela o elemento radiador da antena. Os valores utilizados neste cálculo foram extraídos do trabalho de Luk *et al.* [18] e estão relacionados na TAB. 7.1.

TAB. 7.1 - FATOR DE QUALIDADE DA CAVIDADE QUE MODELA O ELEMENTO RADIADOR (MODO TM_{01} , $\alpha = 0^\circ$, $L = 4$ cm e $W = 3$ cm).

ϵ_r	h (mm)	Q_T
1,06	0,795	64,6
	1,590	34,6
2,32	0,795	117,6
	1,590	73,8

Utilizou-se, na determinação da impedância de entrada, a Eq. (3.12), que fornece a frequência de ressonância. Para se levar em consideração o efeito de borda, substituiu-se ϵ_r por ϵ_{ef} (Eq. 3.14) e compensaram-se as dimensões W e L do elemento radiador, (Eqs. 3.16 e 3.17). Este procedimento está detalhado nos trabalhos

de Dearnley e Bared [19] e Chang *et al.* [20].

Na Fig. 7.1 tem-se a impedância de entrada, na frequência de ressonância, em função da posição do alimentador ao longo do comprimento da cavidade, que se encontra no eixo ζ . Pode-se observar a existência de uma reatância de caráter indutivo associada a esta impedância. Nota-se também que a resistência aumenta, enquanto que a reatância diminui, com o aumento da permissividade relativa ϵ_r . Para $\zeta_1 = 2,0$ cm a resistência é zero, como se era de esperar, uma vez que o campo elétrico é nulo neste ponto. Na Fig. 7.2 verifica-se o comportamento da impedância para substratos de espessuras diferentes. Nota-se que, quanto mais espesso é o substrato, maior é o valor da impedância.

Na Fig. 7.3 e 7.4 são mostradas as variações da impedância de entrada com a frequência de excitação, para o ponto de alimentação numa posição fixa e substratos com diferentes permissividades. Observa-se um estreitamento da curva que descreve a resistência, quando se eleva o valor da permissividade do substrato. Isto ocorre devido ao aumento do fator de qualidade.

7.3 DIAGRAMAS DE RADIAÇÃO

As rotinas numéricas empregadas nesta seção foram obtidas a partir das Eqs. (5.45) e (5.46) e da referência [26]. O campo elétrico, no plano de azimute e de elevação, foi calculado pela rotina DIARAD. Para gerar as funções de Bessel e Neumann utilizou-se a subrotina BESSEL (vide apêndice).

São apresentados aqui os diagramas de radiação da antena em consideração para uma excitação no modo fundamental, TM_{01} . As dimensões da antena são idênticas àsquelas da seção anterior e a espessura do substrato é suposta desprezível. O raio do cilindro é mais uma vez considerado igual a 5 cm.

Nas Figs. 7.5 e 7.6 são mostrados, respectivamente, os diagramas de radiação de potência em dB no plano azimutal e de

elevação, para um substrato com permissividade relativa $\epsilon_r = 1,06$. Nas Figs. 7.7 e 7.8 são mostrados os diagramas para $\epsilon_r = 2,32$. Em todas as figuras (7.5 a 7.8) são apresentadas as variações dos diagramas de radiação em função do ângulo α , que determina a orientação da fita sobre o cilindro.

Na Fig. 7.5 é feita uma comparação (pontos marcados com X) entre o diagrama de radiação para $\alpha = 0^\circ$ e aquele obtido por Luk *et al.* [18], que, no caso, equivale ao modo TM_{10} com $\epsilon_r = 1,06$. Pode-se verificar que os diagramas de radiação são idênticos, mostrando que as expressões obtidas são confiáveis.

Verifica-se através dos diagramas que a radiação no hemisfério inferior aumenta à medida que α se aproxima de 0° , o mesmo efeito ocorre quando se aumenta o valor da permissividade do substrato.

7.4 INFLUÊNCIA DA ESPESSURA DO SUBSTRATO NOS DIAGRAMAS DE RADIAÇÃO

Os cálculos dos campos distantes, que são utilizados na determinação dos diagramas de radiação da antena de microfita do Cap. 6, são feitos através do uso da rotina DIARADS juntamente com a subrotina BESSEL.

A antena mais uma vez é excitada no modo fundamental, TM_{01} . As dimensões do elemento radiador e o raio do cilindro metálico são os mesmos das seções anteriores. Os substratos, que agora cobrem toda a superfície do cilindro, possuem permissividade relativa igual 2,32 e espessuras entre 0,0795 cm e 0,636 cm.

Nas Figs. 7.9 e 7.10 são mostrados, respectivamente, os diagramas de radiação de potência em dB no plano azimutal e de elevação, para um elemento radiador posicionado na direção $\alpha = 0^\circ$, enquanto que nas Figs. 7.11 e 7.12 são mostrados os diagramas para $\alpha = 90^\circ$. Nestas quatro figuras são confrontados os diagramas de radiação para uma antena com substratos dielétrico de espessuras diferentes. Notam-se nos diagramas que, as antenas com substrato dielétrico de espessura maior são as que mais radiam.

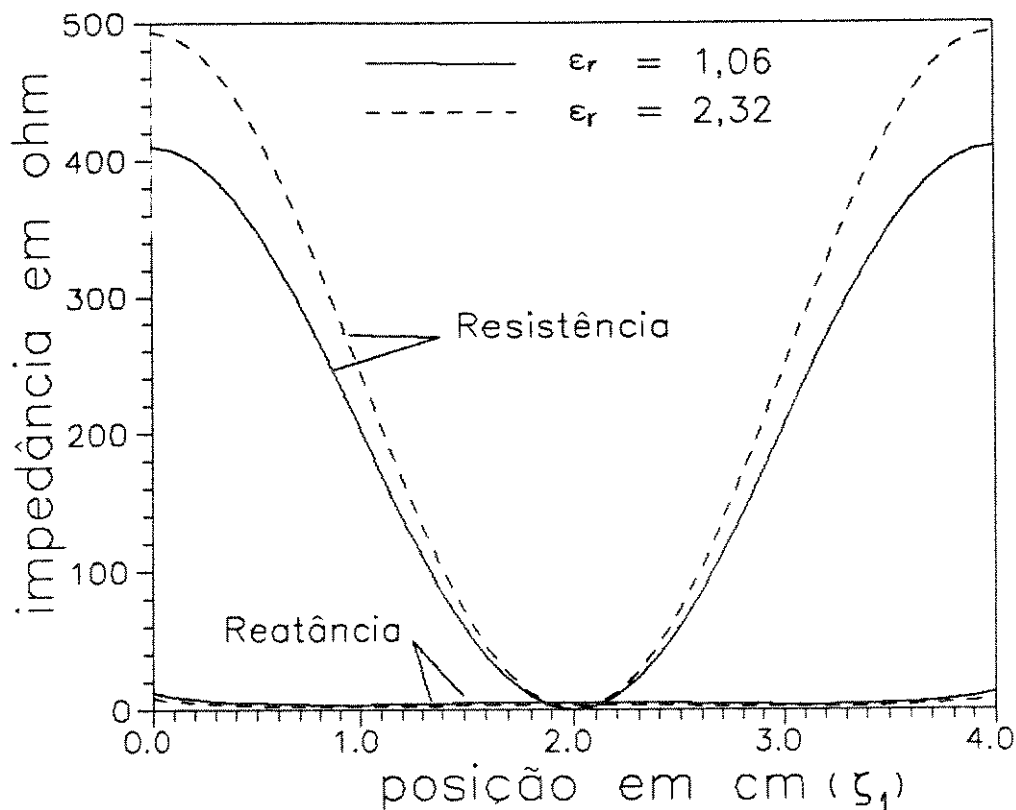


Fig.7.1 - Impedância de entrada em função do ponto de alimentação, ao longo da direção ζ , com ξ_1 igual 1,5 cm, para uma antena operando na frequência de ressonância do modo TM_{01} . O elemento radiador, posicionado em $\alpha = 0^\circ$, possui $W = 3$ cm, $L = 4$ cm e substrato com $h = 0,0795$ cm e $\epsilon_r = 1,06$ e $2,32$.

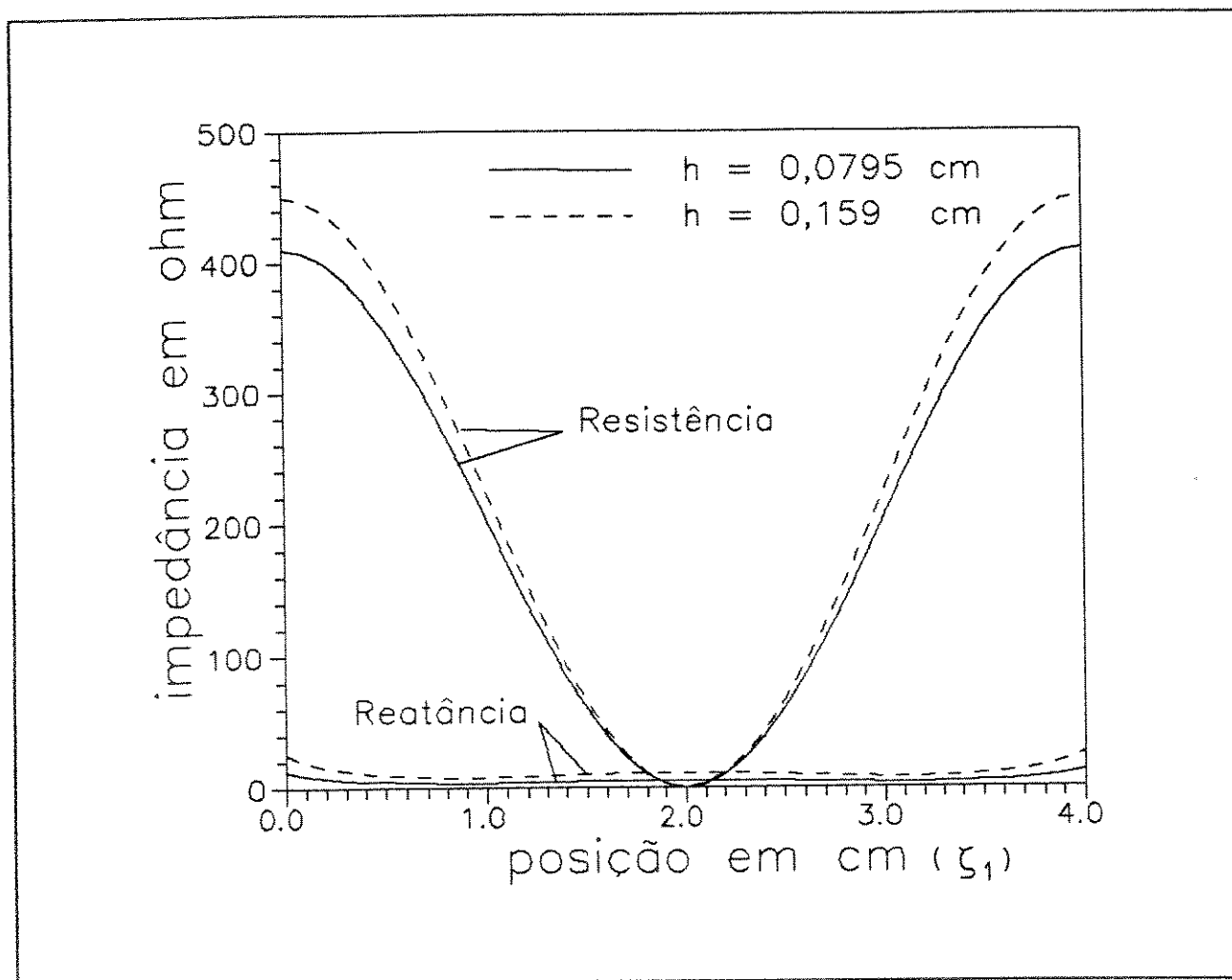


Fig.7.2 - Impedância de entrada em função do ponto de alimentação, ao longo da direção ζ , com ξ_1 igual 1,5 cm, para uma antena operando na frequência de ressonância do modo TM_{01} . O elemento radiador, posicionado em $\alpha = 0^\circ$, possui $W = 3$ cm, $L = 4$ cm e substrato com $\epsilon_r = 2,32$ e h igual 0,0795 cm e 0,159 cm.

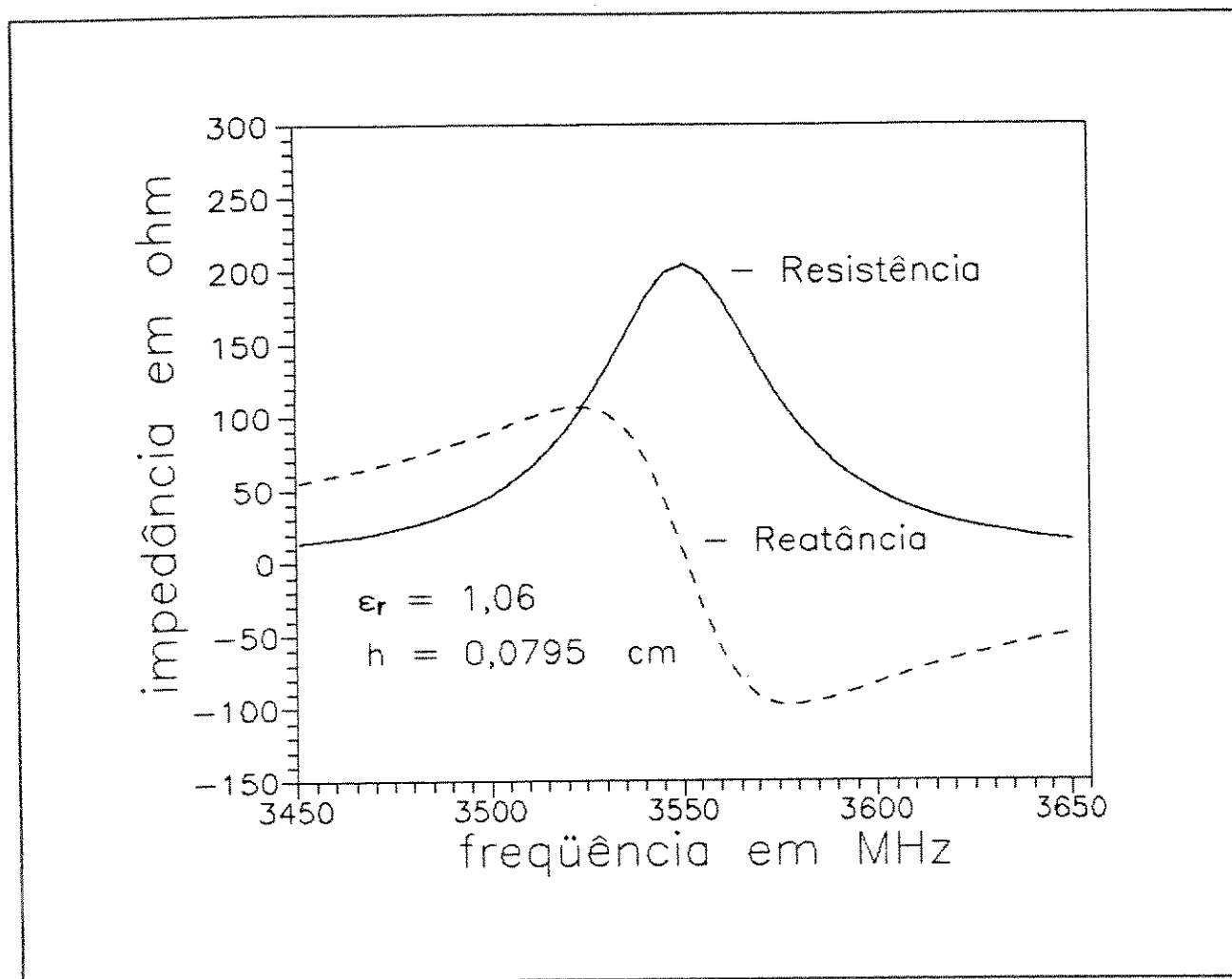


Fig. 7.3 - Impedância de entrada em função da freq. de ressonância do modo TM_{01} , para um ponto de alimentação localizado em $\zeta_1 = 1,5 \text{ cm}$ e $\zeta_2 = 1 \text{ cm}$. O elemento radiador, posicionado em $\alpha = 0^\circ$, possui $W = 3 \text{ cm}$, $L = 4 \text{ cm}$ e substrato com $h = 0,0795 \text{ cm}$ e $\epsilon_r = 1,06$.

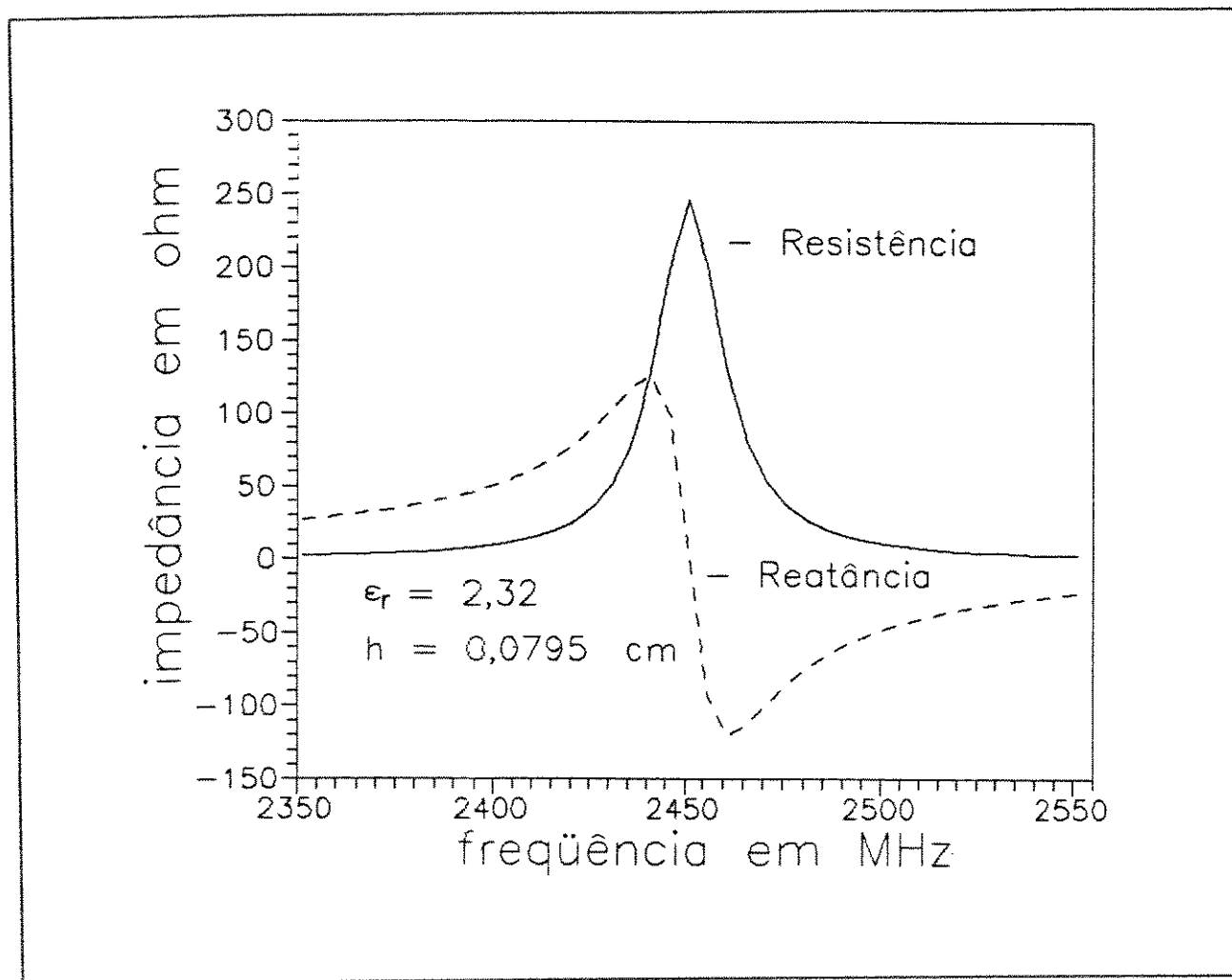


Fig. 7.4 - Impedância de entrada em função da freq. de ressonância do modo TM_{01} , para um ponto de alimentação localizado em $\zeta_1 = 1,5 \text{ cm}$ e $\zeta_2 = 1 \text{ cm}$. O elemento radiador, posicionado em $\alpha = 0^\circ$, possui $W = 3 \text{ cm}$, $L = 4 \text{ cm}$ e substrato com $h = 0,0795 \text{ cm}$ e $\epsilon_r = 2,32$.

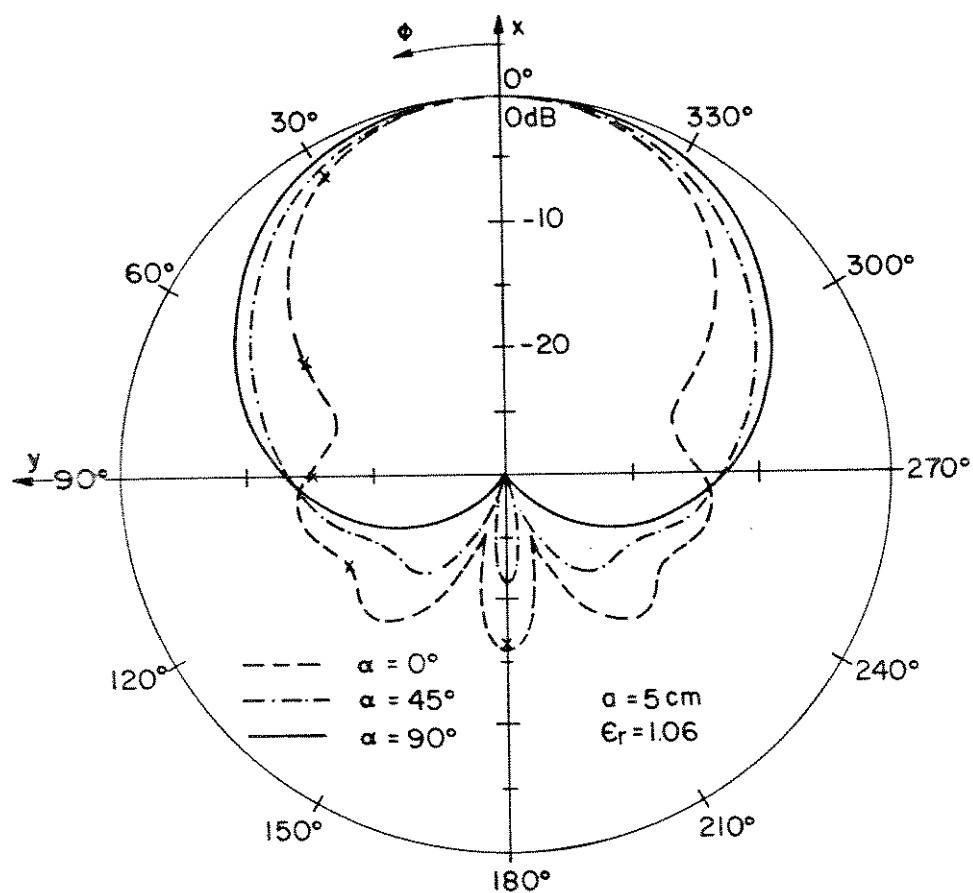


Fig.7.5 - Diagrama de radiação de potência, no plano $z = 0$, para o modo TM_{01} . O elemento radiador posicionado em α igual 0° , 45° e 90° , possui $W = 3$ cm, $L = 4$ cm e substrato com $\epsilon_r = 1,06$. Os pontos marcados com X são referentes aos valores obtidos por Luk et al [18].

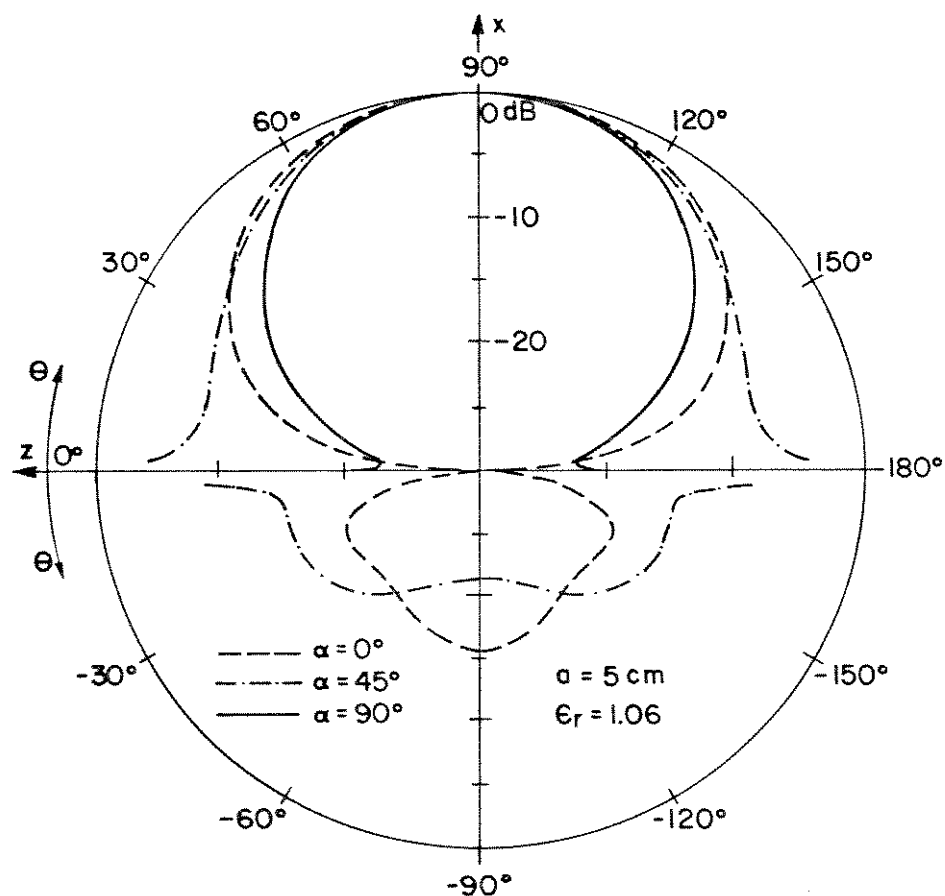


Fig. 7.6 - Diagrama de radiação de potência, no plano $\phi = 0$, para o modo TM_{01} . O elemento radiador posicionado em α igual 0° , 45° e 90° , possui $W = 3 \text{ cm}$, $L = 4 \text{ cm}$ e substrato com $\epsilon_r = 1.06$.

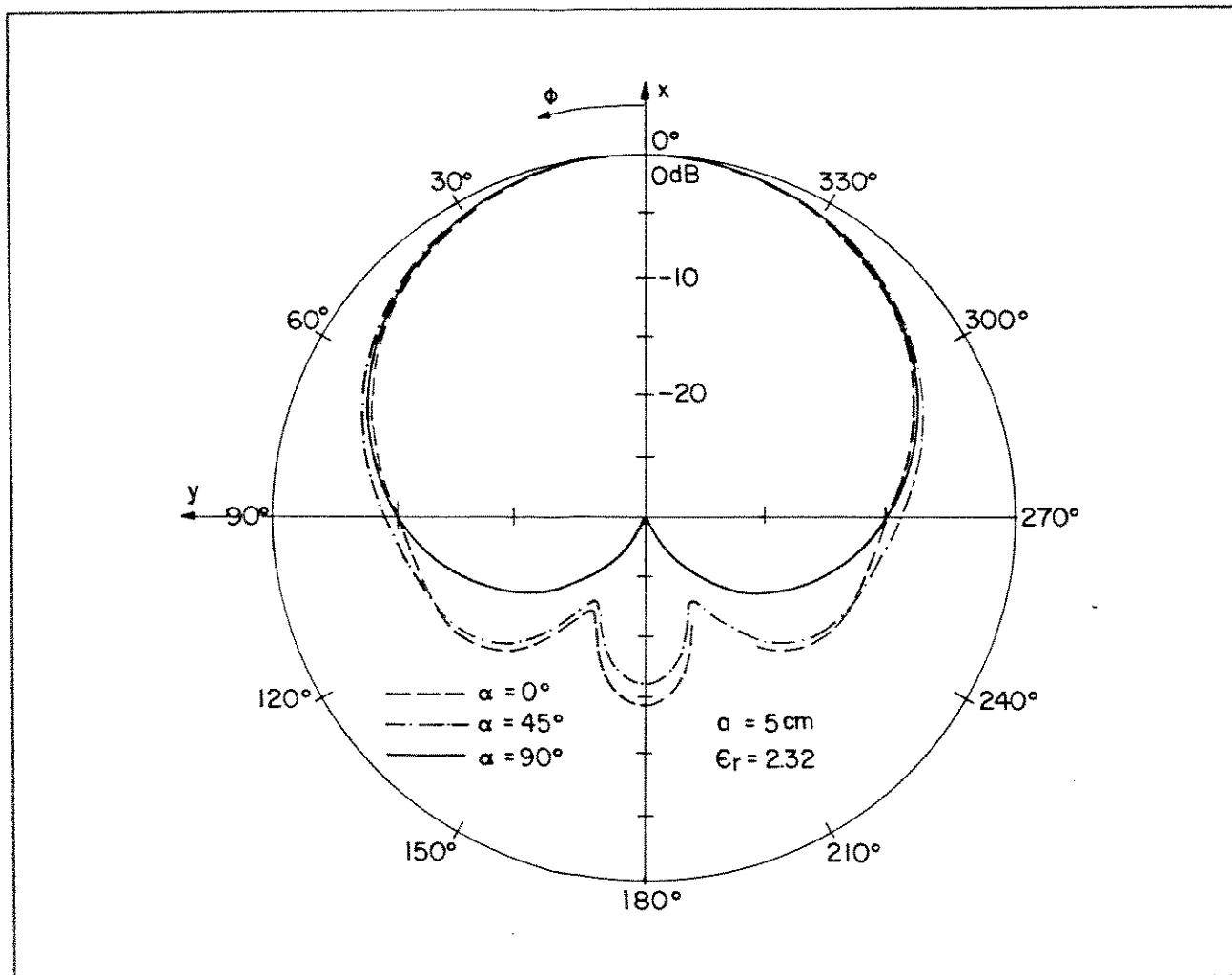


Fig.7.7 - Diagrama de radiação de potência, no plano $z = 0$, para o modo TM_{01} . O elemento radiador posicionado em α igual 0° , 45° e 90° , possui $W = 3\text{ cm}$, $L = 4\text{ cm}$ e substrato com $\epsilon_r = 2,32$.

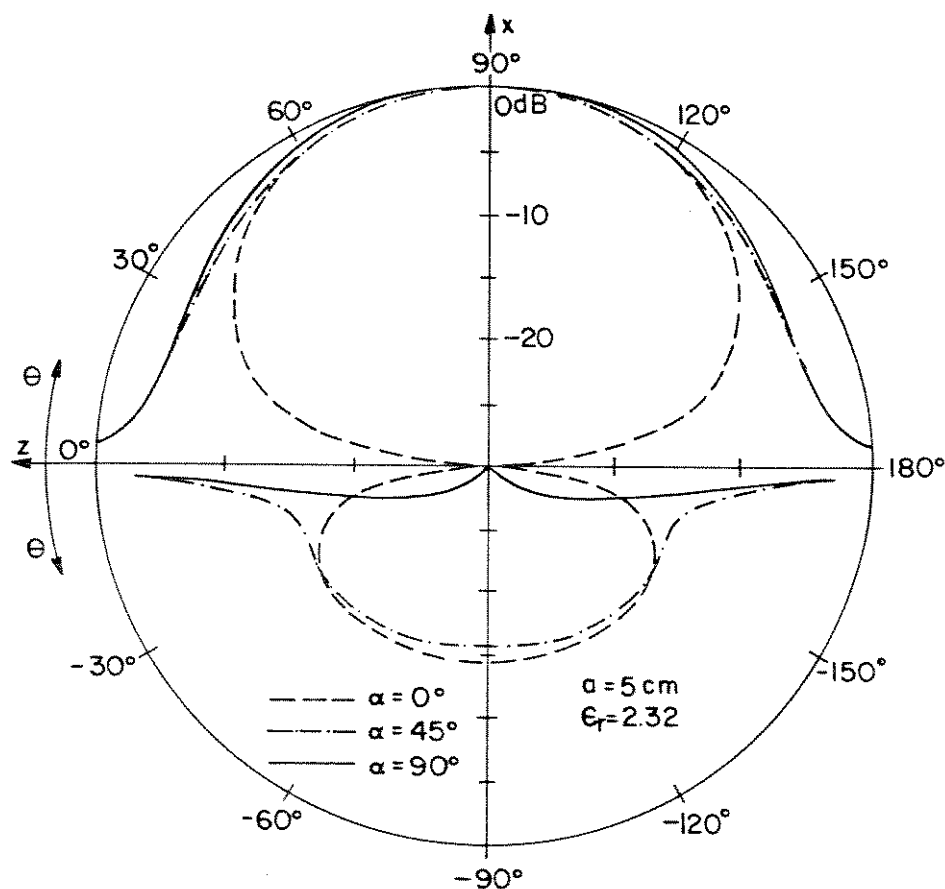


Fig. 7.8 - Diagrama de radiação de potência, no plano $\phi = 0$, para o modo TM_{01} . O elemento radiador posicionado em α igual $0^\circ, 45^\circ$ e 90° , possui $W = 3\text{ cm}$, $L = 4\text{ cm}$ e substrato com $\epsilon_r = 2,32$.

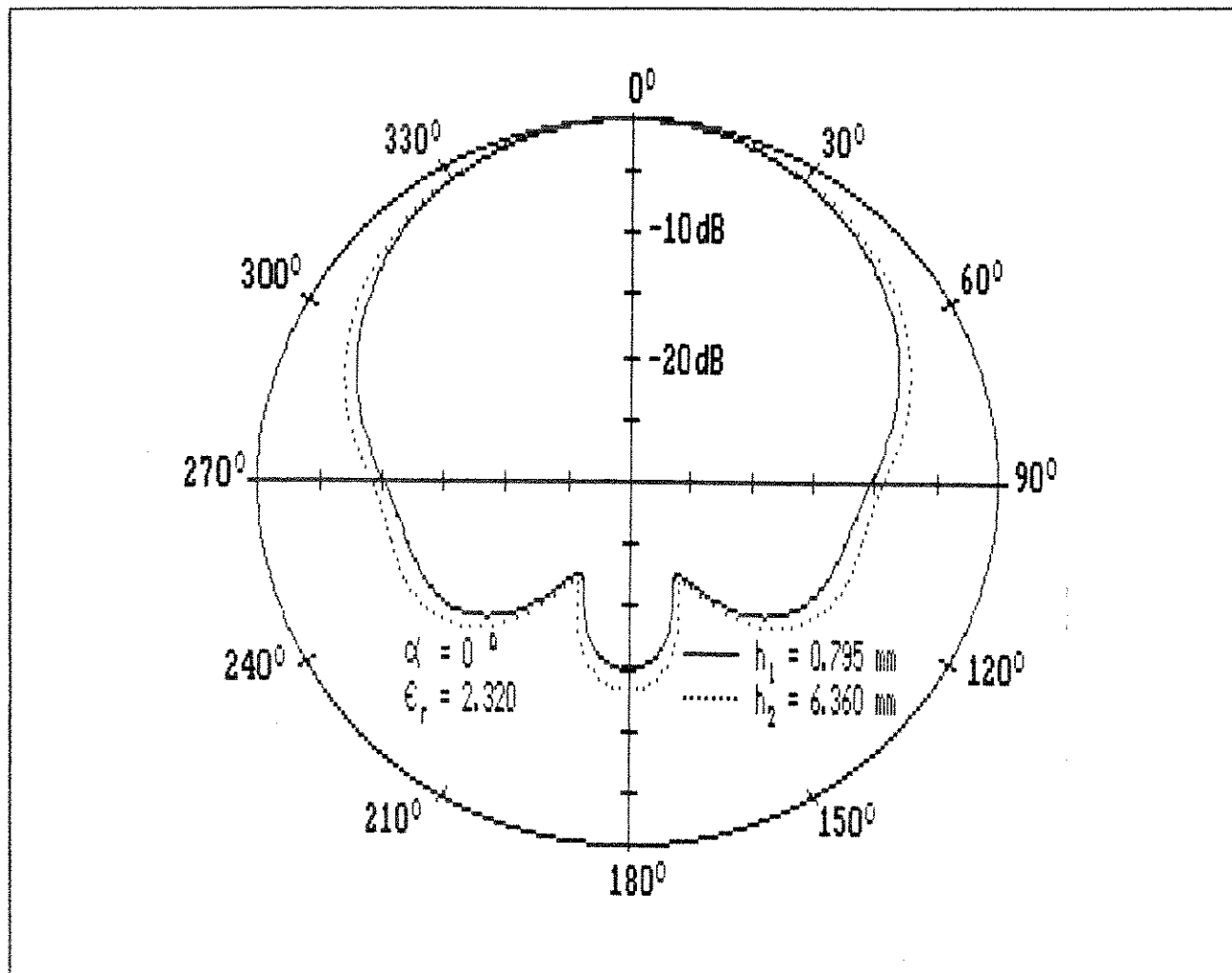


Fig. 7.9 - Diagrama de radiação de potência, no plano $z = 0$, para o modo TM_{01} . O elemento radiador, posicionado em $\alpha = 0^\circ$, possui $W = 3$ cm, $L = 4$ cm e substrato com $\epsilon_r = 2,32$ e h igual 0,0795 cm e 0,636 cm.

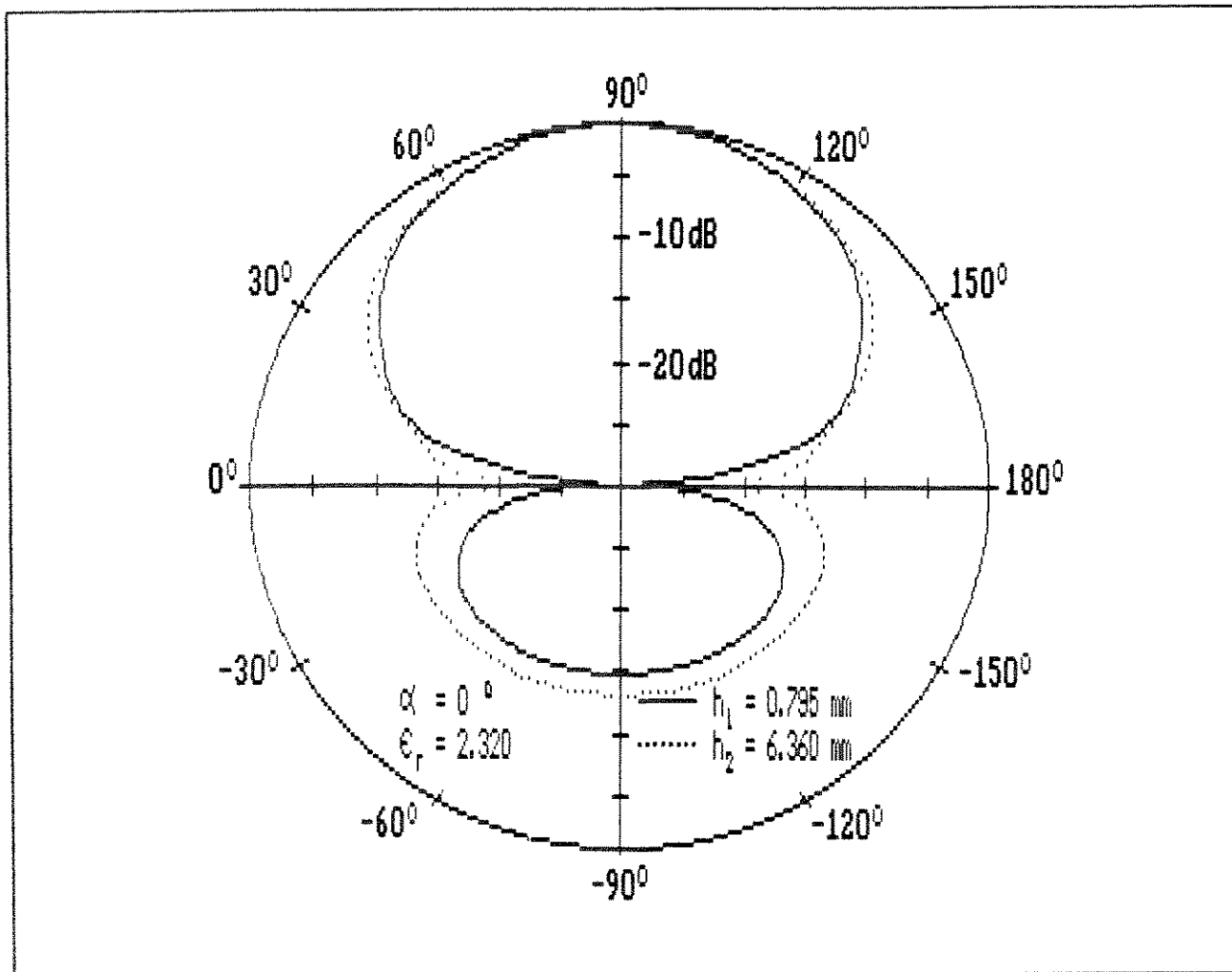


Fig. 7.10 - Diagrama de radiação de potência, no plano $\phi = 0$, para o modo TM_{01} . O elemento radiador, posicionado em $\alpha = 0^\circ$, possui $W = 3 \text{ cm}$, $L = 4 \text{ cm}$ e substrato com $\epsilon_r = 2,32$ e h igual $0,0795 \text{ cm}$ e $0,636 \text{ cm}$.

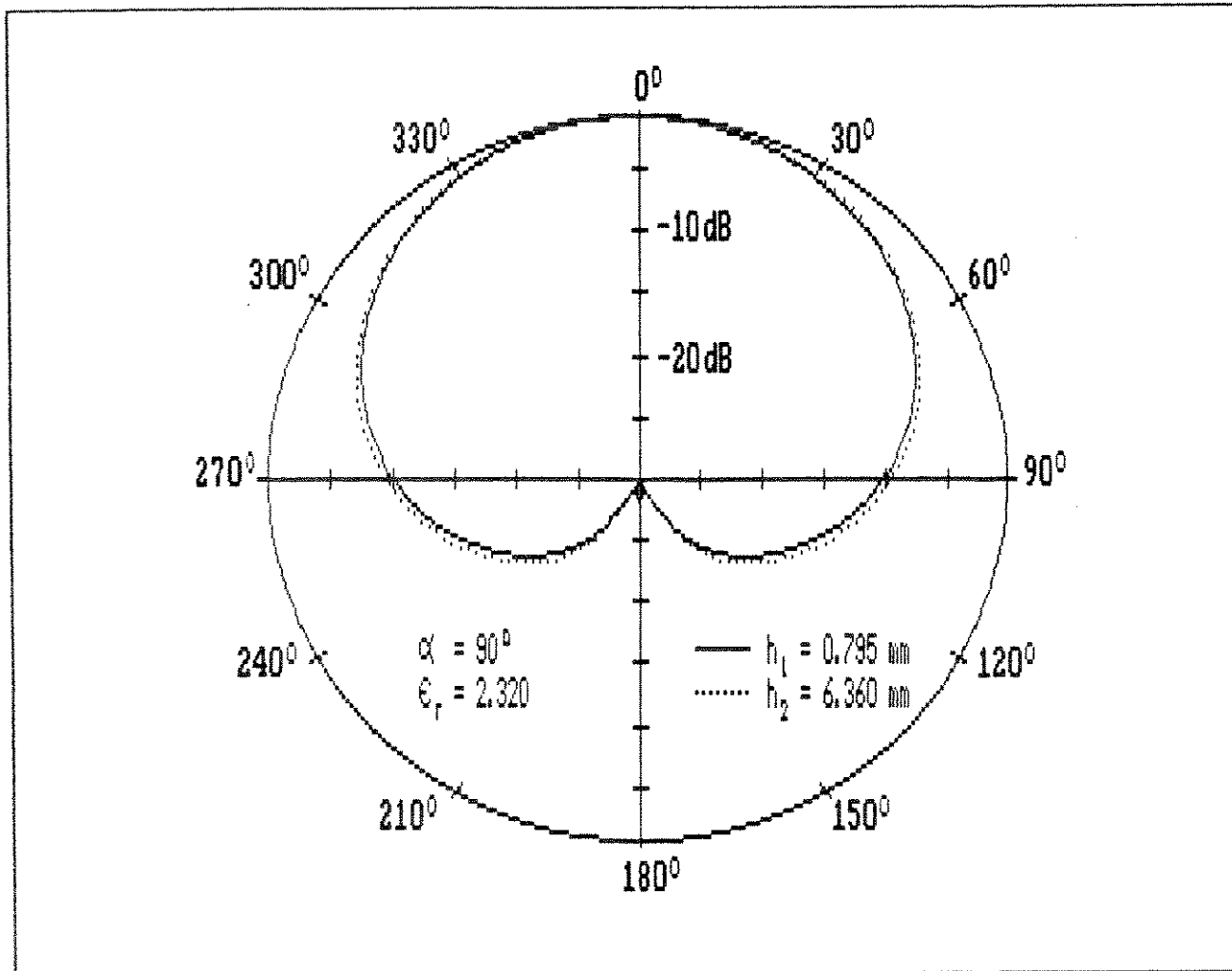


Fig. 7.11 - Diagrama de radiação de potência, no plano $z = 0$, para o modo TM_{01} . O elemento radiador, posicionado em α igual 90° , possui $W = 3$ cm, $L = 4$ cm e substrato com $\epsilon_r = 2,32$ e h igual 0,0795 cm e 0,636 cm.

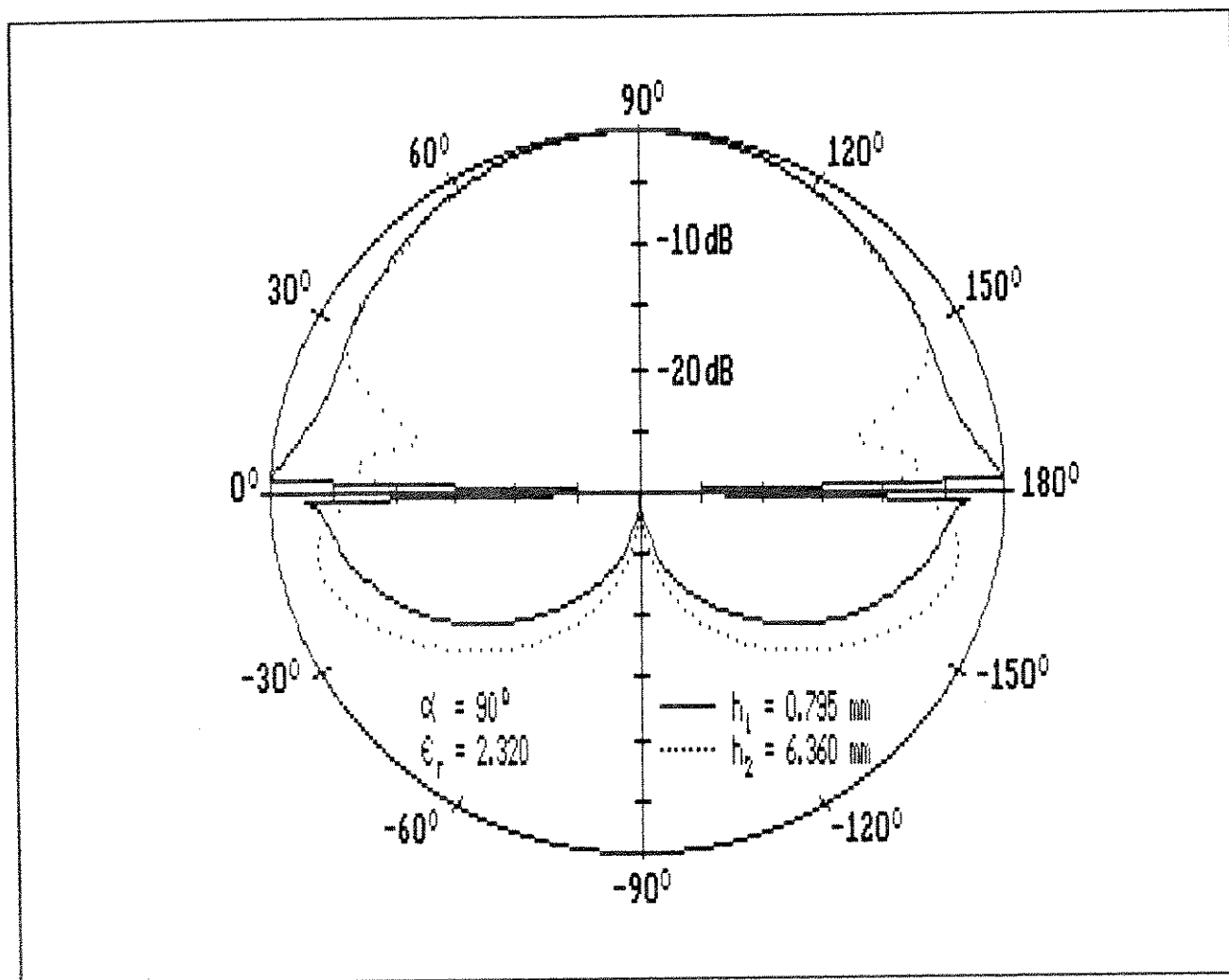


Fig. 7.12 - Diagrama de radiação de potência, no plano $\phi = 0$, para o modo TM_{01} . O elemento radiador, posicionado em α igual 90° , possui $W = 3 \text{ cm}$, $L = 4 \text{ cm}$ e substrato com $\epsilon_r = 2,32$ e h igual $0,0795 \text{ cm}$ e $0,636 \text{ cm}$.

CAPÍTULO VIII

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

8.1 A ANÁLISE

A caracterização de uma linha de microfita numa direção helicoidal sobre uma estrutura cilíndrica, foi obtida no início trabalho, prevendo uma possível aplicação junto às antenas de microfita montadas na mesma estrutura.

A frequência de ressonância e a impedância de entrada foram determinadas utilizando o modelo da cavidade ressonante com paredes laterais magnéticas. A expressão da impedância foi obtida a partir de uma expansão dos modos ressonantes. Notou-se, nesta expressão, que a impedância depende diretamente da geometria do elemento radiador (cavidade) e das características elétricas do substrato dielétrico que o compõe. A impedância de entrada também depende do fator de qualidade, que, por sua vez, está relacionado com a potência radiada e as perdas na cavidade.

Na determinação dos campos radiados, foram utilizadas as funções diádicas de Green juntamente com o método do ponto de sela. A corrente que excita estes campos foi, mais uma vez, obtida a partir do modelo da cavidade com paredes laterais magnéticas. Entretanto, estes campos poderiam ser calculados, com maior precisão, se fosse empregado o método dos momentos na determinação da distribuição de corrente elétrica sobre o elemento radiador. No caso da análise feita no Cap. 5, a espessura do substrato foi considerada muito menor que o comprimento de onda e o raio do cilindro. Uma análise rigorosa foi feita no Cap.6, onde se supos

um substrato de espessura não desprezível, se estendendo por toda a superfície do cilindro. Porém, se for considerado, nas expressões que fornecem os campos, um substrato dielétrico com permissividade relativa igual a um e espessura próxima de zero, recái-se exatamente nas equações dos os campos anteriormente determinadas no Cap. 5, mostrando que as expressões estão coerentes.

8.2 OS RESULTADOS

Observou-se a dependência da impedância de entrada com os principais parâmetros do substrato dielétrico e com o ponto de alimentação, ao longo do comprimento do ressonador, para uma excitação na frequência de ressonância do modo TM_{01} . Nota-se que, quanto maior a permissividade do substrato, maior é o valor da resistência associada à impedância. Já com a reatância acontece o contrário, o aumento da permissividade acarreta uma diminuição do valor da parte reativa da impedância. A comparação feita entre dois substratos de espessuras diferentes, mostra que, reduzindo-se a espessura, diminui-se o valor da impedância. Isto decorre da diminuição da tensão no ponto de alimentação, devido a redução da espessura do substrato dielétrico.

Foi observado também o comportamento da impedância de entrada com a frequência variando próxima da ressonância, do modo anteriormente mencionado, para substratos com diferentes valores de permissividade. Verificou-se um estreitamento da curva de ressonância quando se aumenta o valor da permissividade do substrato. A explicação para o estreitamento da banda, pode ser obtida a partir do seguinte raciocínio: o aumento da permissividade do substrato provoca uma elevação da energia armazenada na cavidade, que por sua vez leva a um aumento do valor do fator de qualidade e uma conseqüente diminuição na largura da banda.

Uma comparação entre os diagramas de radiação, para o elemento radiador posicionado em três direções ($\alpha = 0^\circ$, 45° e 90°), revela um aumento de potência radiada no hemisfério traseiro, com relação ao hemisfério frontal, à proporção que o elemento radiador gira em direção ao plano normal ao eixo do cilindro (vide, por exemplo, a Fig. 7.5). A radiação no hemisfério traseiro também aumenta, com relação ao hemisfério frontal, quando se eleva o valor da permissividade do substrato dielétrico (compare as Fig. 7.5 e 7.7). Isto pode ser interpretado como segue: um aumento da permissividade acarreta uma diminuição da frequência de ressonância, uma vez que, a largura do elemento radiador está fixada. O comprimento de onda no espaço livre é, portanto, maior para antenas com substratos de maior permissividade. Sendo assim, a razão, raio do cilindro sobre comprimento de onda, diminui com o aumento da permissividade, tendo como consequência, um aumento da radiação no hemisfério traseiro com relação ao frontal.

Confrontando diagramas de radiação referentes a antenas de microfita com substratos de espessuras diferentes, verifica-se que antenas com substratos espessos radiam mais potência no hemisfério traseiro, com relação ao hemisfério frontal, que as de substratos finos (Fig. 7.9 a 7.12). Isto pode ser atribuído ao fato das aberturas entre a microfita e o cilindro condutor, que correspondem às fontes de campos, serem maiores para substratos espessos.

Finalmente, uma comparação com os resultados obtidos por Luk *et al.* [18] (Fig 7.5), mostraram que as expressões dos campos radiados estão condizentes com a literatura especializada.

8.3 PERSPECTIVAS FUTURAS

Este trabalho pode servir de ponto de partida para diversas investigações. Algumas sugestões são dadas a seguir.

A partir das expressões dos campos radiados, pode-se calcular

o fator de qualidade para um elemento radiador (tratado como cavidade) posicionado em uma direção, dada pelo ângulo α , diferente daquela obtida aqui, ou seja, $\alpha = 0^\circ$. Sabendo-se a expressão do fator de qualidade, pode-se determinar a impedância de entrada para o elemento radiador em qualquer direção.

Outro trabalho interessante seria determinar o diagrama de radiação para uma antena cuja microfita desse mais de uma volta em torno do cilindro condutor. Neste caso, podem-se utilizar diretamente as rotinas numéricas em anexo.

Um trabalho mais complexo, porém relevante, seria o de calcular a eficiência de radiação da antena analisada. Neste caso ter-se-ia de determinar as ondas de superfície, partindo-se das expressões gerais dos campos radiados (vide Cap. 6).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] D. D. Grieg and H. F. Engelmann, "Microstrip - A new transmission for the Kilomegacycle L range", *IRE Proc.*, vol. 40, pp. 1644, 1952.
- [2] E. O. Hammerstad, "Equations for microstrip circuit design", *Proc. 5th European Microwave Conference*, Hamburg, pp. 268 - 272, 1975.
- [3] Y. Wang, "Cylindrical and cylindrically wrapped strip and microstriplines", *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, vol. MTT-26, pp. 20-23, 1978.
- [4] L.-R. Zeng and Y. Wang, "Accurate solutions of elliptical and cylindrical stripline and microstripline", *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, vol. MTT-34, pp. 259-265, 1986.
- [5] N. G. Alexópoulos and A. Nakatani, "Cylindrical substrate microstrip line characterization", *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, vol. MTT-35, pp. 843-849, 1987.
- [6] R. M. Barrett, "Etched sheets serve as microwave components", *Electronics*, pp. 114-118, June 1952.
- [7] K. C. Gupta, R. Garg and I. J. Bahl, *Microstrip Lines and Slotlines*, Artech House Inc., Dedham, MA, 1979.
- [8] G. A. Deschamps, "Microstrip microwave antennas", *3rd USAF Symp. on Antennas*, 1953.
- [9] H. Gutton and G. Baissinot, "Flat aerial ultra high frequency", French Patent No. 703113, 1955.
- [10] E. V. Byron, "A new flush-mounted antenna element for phased array application", *Proc. Phased-Array Antenna Symp.*, pp. 187-192, 1970.

- [11] R. E. Munson, "Single slot cavity antennas assembly", U.S. Patent No. 3713162, Jan. 23, 1973.
- [12] J. Q. Howell, "Microstrip Antennas", *Dig. Int. Symp. Antennas Propagat. Soc.*, Williamsburg, VA, pp. 177-180, 1972.
- [13] K. R. Caver and J. W. Mink, "Microstrip antenna technology", *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol AP-29, pp. 2-24, 1981.
- [14] J. R. James, P. S. Hall and C. Wood, *Microstrip Antennas (Theory and Design)*, Peter Peregrinus LTD., UK, 1981.
- [15] Y. T. Lo, D. Solomon, and W. F. Richards, "Theory and experiment on microstrip antennas", *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol AP-27, pp. 137-145, 1979.
- [16] C. A. Balanis, *Antenna Theory (Analysis and Design)*, Haper & Row Publisher, New York, NY, 1982.
- [17] Y. T. Lo et al., "Study of microstrip antennas, microstrip phased arrays, and microstrip feed networks", Electromagnetics Laboratory, Universidade de Illinois, Urbana, IL, 1977.
- [18] K. M. Luk, K. F. Lee, and J. S. Dahele, "Analysis of the cylindrical-rectangular patch antenna", *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol AP-37, pp. 143-147, 1989.
- [19] R. W. Dearnley and A. R. F. Barel, "A comparison of models to determine resonant frequencies of a rectangular microstrip antenna", *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol AP-37, pp. 114-118, 1989.
- [20] E. Chang, S. A. Long, and W. F. Richards, "An experimental investigation of electrically thick rectangular microstrip antennas", *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol AP-34, pp. 767-772, 1986.
- [21] C. T. Tai, *Dyadic Green's Functions in Electromagnetic Theory*, Intext Publishers, Scranton, Pennsylvania, 1971.
- [22] C. T. Tai, *Math Note 65*, University of Michigan Radiation

Laboratory, Ann Arbor, 1980.

- [23] B. L. Van der Waerden, "On the method of saddle points", *Appl. Sci. Res.*, vol. B2, pp. 33-45, 1950.
- [24] R. E. Collin, *Field Theory of Guided Waves*, Mc.Graw-Hill, New York, NY, 1960.
- [25] S. B. A. Fonseca and A. J. Giarola, "Dyadic Green's Function and their use in the analysis of microstrip antennas", *Advances in Electronics and Electron Physics*, vol. 65, pp. 2-89, 1985.
- [26] W. H. Press et al., *Numerical Recipes (The Art of Scientific Computing)*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

LISTA DE FIGURAS

Capítulo 1

1.1 - Linha de fita (<i>stripline</i>)	5
1.2 - Linha de microfita (<i>microstripline</i>)	7
1.3 - Antena de microfita plana	10

Capítulo 2

2.1 - Linha de microfita sobre uma estrutura cilíndrica	14
2.2 - Eixos ortogonais ao sistema de coordenadas cilíndricas	18

Capítulo 3

3.1 - Antena de microfita ao longo de uma direção helicoidal sobre uma estrutura cilíndrica	27
3.2 - Alimentação da antena de microfita por cabo coaxial ...	31

Capítulo 4

4.1 - Fonte de corrente magnética no espaço livre	45
4.2 - Guia de onda com seção transversal circular	54
4.3 - Integração no semi-plano complexo superior	64
4.4 - Integração no semi-plano complexo inferior	67

Capítulo 5

5.1 - Fonte infinitesimal próxima ao cilindro condutor	78
--	----

Capítulo 6

6.1 - Antena de microfita ao longo de uma direção helicoidal com substrato dielétrico cobrindo toda a superfície do	
--	--

cilindro condutor	89
6.2 - Estrutura de três camadas cilíndricas concêntricas	91

Capítulo 7

7.1 - Impedância de entrada x ponto de alim. (substratos com permissividades diferentes)	116
7.2 - Impedância de entrada x ponto de alim. (substratos com espessuras diferentes)	117
7.3 - Impedância de entrada x frequência (substrato com permissividade igual 1,06)	118
7.4 - Impedância de entrada x frequência (substrato com permissividade igual 2,32)	119
7.5 - Diagrama de radiação de potência no plano $z = 0$ para o elemento radiador posicionado em direções diferentes (permissividade do substrato igual 1,06)	120
7.6 - Diagrama de radiação de potência no plano $\phi = 0$ para o elemento radiador posicionado em direções diferentes (permissividade do substrato igual 1,06)	121
7.7 - Diagrama de radiação de potência no plano $z = 0$ para o elemento radiador posicionado em direções diferentes (permissividade do substrato igual 2,32)	122
7.8 - Diagrama de radiação de potência no plano $\phi = 0$ para o elemento radiador posicionado em direções diferentes (permissividade do substrato igual 2,32)	123
7.9 - Diagrama de radiação de potência no plano $z = 0$ para o elemento radiador posicionado na direção $\alpha = 0^\circ$ (substratos com espessuras diferentes)	124
7.10 - Diagrama de radiação de potência no plano $\phi = 0$ para o elemento radiador posicionado na direção $\alpha = 0^\circ$ (substratos com espessuras diferentes)	125
7.11 - Diagrama de radiação de potência no plano $z = 0$ para o elemento radiador posicionado na direção $\alpha = 90^\circ$ (substratos com espessuras diferentes)	126
7.12 - Diagrama de radiação de potência no plano $z = 0$ para	

o elemento radiador posicionado na direção $\alpha = 90^\circ$ (substratos com espessuras diferentes)	127
--	-----

APÊNDICE

Constam neste apêndice os seguintes programas:

- 1) FILE FT19F001 - Arquivo único para entrada de dados.
- 2) IMPPPOS FORTRAN - Rotina para o cálculo da impedância de entrada da antena de microfita. O programa gera uma tabela contendo dados referentes à variação da impedância com a posição do ponto de alimentação.
- 3) IMPFRQ FORTRAN - Rotina para o cálculo da impedância de entrada da antena de microfita. O programa gera uma tabela contendo dados referentes à variação da impedância com a frequência de operação.
- 4) DIARAD FORTRAN - Rotina para cálculo dos campos distantes radiados pela antena de microfita. O programa gera duas tabelas contendo dados referentes à variação do campo elétrico nos planos de elevação e azimute.
- 5) DIARADS FORTRAN - Rotina para cálculo dos campos distantes radiados pela antena de

microfita, considerando um substrato não muito fino. O programa gera duas tabelas contendo dados referentes à variação do campo elétrico nos planos de elevação e azimuth.

- 6) BESSEL FORTRAN - Sub-rotina chamada pelos programas DIARAD e DIARADS. Utilizada para o cálculo das funções cilíndricas de Bessel.

ARQUIVO DE ENTRADA: FILE FT19FO01

ALFA= 90 GRAUS , ANGULO ENTRE A FITA E O EIXO Z
 PHI = 0 GRAUS , ANGULO DE AZIMUTE
 TETA= 90 GRAUS , ANGULO DE ELEVACAO
 L =0.040 M , COMPRIMENTO DA FITA
 W =0.030 M , LARGURA DA FITA
 ER=2.320 , CONSTANTE DIELETRICA RELATIVA
 A =0.050 M , RAO DO CILINDRO
 H =0.00636 M , ESPESSURA DO SUBSTRATO
 X1=0.015 M , PTO. DE ALIMENTACAO
 Z1=0.010 M , PTO. DE ALIMENTACAO
 W1=0.005 M , COMP. DO ARCO DA FITA DE ALIM.
 QT=73.8 , FATOR DE QUALIDADE DA CAVIDADE
 MN=01 , MODO RESSONANTE
 END

ROTINA: IMPPOS FORTRAN

```

C *****
C *
C *
C *          ANTENA DE MICROFITA SOBRE
C *          UMA ESTRUTURA CILINDRICA
C *          CONDUTORA.
C *
C *          CALCULO DA IMPEDANCIA
C *          DE ENTRADA
C *          EM FUNCAO DO PONTO DE
C *          ALIMENTACAO.
C *
C *          ANTONIO CEZAR DE CASTRO LIMA
C *          DEPT. DE MICROONDAS E OPTICA (DMO)
C *          FACULDADE DE ENG. ELETRICA (FEE)
C *          UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS (UNICAMP)
C *
C *****

```

```

PROGRAM IMPPOS
  REAL L,LE
  REAL*8 PI
  COMPLEX I,FR,ZIN

```

C CONSTANTES FISICAS E MATEMATICAS

```

PI=3.1415926535893526D0
ZO=120.*PI
C=3.E8
EO=1./ZO/C
I=(0.,1.)

C      LEITURA DOS DADOS DE ENTRADA
      READ(19,8) ALFA,L,W,ER,A,H,X1,Z1,W1,QT,M,N
8      FORMAT(5X,I3,/,/,/,3X,F5.3,/,3X,F5.3,/,3X,F5.3,/,3X,F5.3,/,3X,
*        (F8.6,/,3X,F5.3,/,3X,F5.3,/,3X,F5.3,/,3X,F5.1,/,3X,I1,I1,/)

C      CONSTANTE DIELETRICA EFTIVA
      EFW=(ER+1.)/2.+(ER-1.)/2./SQRT(1.+10.*H/W)
      EFL=(ER+1.)/2.+(ER-1.)/2./SQRT(1.+10.*H/L)
      EFS=EFW*EFL/ER

C      DIMENSOES EFETIVAS DA CAVIDADE
      DL=0.412*H*(EFW+0.3)*(W/H+0.264)/((EFW-0.258)*(W/H+0.8))
      DW=0.412*H*(EFL+0.3)*(L/H+0.264)/((EFL-0.258)*(L/H+0.8))
      LE=L+2.*DL
      WE=W+2.*DW

C      FREQUENCIA DE RESSONANCIA
      EF=EFS
      IF (M.EQ.0) EF=EFW
      IF (N.EQ.0) EF=EFL
      U=FLOAT(M)
      V=FLOAT(N)
      FO=C/(2.*SQRT(EF))*SQRT((U/WE)**2+(V/LE)**2)
      WRITE(23,5)M,N,FO
5      FORMAT('F',I1,I1,'=',E11.4,/)

C      IMPEDANCIA DE ENTRADA
      WRITE(23,*)' '
      WRITE(23,*)'VARIACAO DA IMPEDANCIA EM Z.'
      WRITE(23,*)' '
      WRITE(5,*)'CALCULANDO A VARIACAO DA IMPEDANCIA EM Z...'
      NF=50
      DEF=1./QT
      CMN=4.*H/(2.*PI*EO*ER*W*L)
      F=FO
      Z=0.
7      IF (Z.GT.L) GOTO 13
          FR=(DEF-I)/((DEF**2+1.)*F)
          ZIN=0.25*CMN*FR
          DO 9 M=1,NF
              U=FLOAT(M)
              FMN=C/(2.*SQRT(EFL))*U/WE
              FR=(DEF*F**3-I*F*(F**2-FMN**2))/
*              (DEF**2*F**4+(F**2-FMN**2)**2)
              X=U*PI*W1/2./W
              ZIN=ZIN+0.5*CMN*(COS(U*PI*X1/W)*SIN(X)/X)**2*FR

```

```

9      CONTINUE
      DO 10 N=1,NF
        V=FLOAT(N)
        FMN=C/(2.*SQRT(EFW))*V/LE
        FR=(DEF*F**3-I*F*(F**2-FMN**2))/(
*      (DEF**2*F**4+(F**2-FMN**2)**2)
        ZIN=ZIN+0.5*CMN*COSC(V*PI*Z/L)**2*FR
10     CONTINUE
      DO 12 M=1,NF
        U=FLOAT(M)
        X=U*PI*W1/2./W
        DO 11 N=1,NF
          V=FLOAT(N)
          FMN=C/(2.*SQRT(EFS))*SQRT((U/WE)**2+(V/LE)**2)
          FR=(DEF*F**3-I*F*(F**2-FMN**2))/(
*      (DEF**2*F**4+(F**2-FMN**2)**2)
          ZIN=ZIN+CMN*(COSC(U*PI*X1/W)*COSC(V*PI*Z/L)*SINC(X)/X)**2*FR
11     CONTINUE
12     CONTINUE
        RZ=REAL(ZIN)
        XZ=IMAG(ZIN)
        WRITE(23,15)Z,RZ,XZ
        Z=Z+0.001
        GOTO 7
13     CONTINUE
15     FORMAT(E11.4,1X,E11.4,1X,E11.4)
        WRITE(23,*)' '
        WRITE(23,*)'VARIACAO DA IMPEDANCIA EM X.'
        WRITE(23,*)' '
        WRITE(5,*)'CALCULANDO A VARIACAO DA IMPEDANCIA EM X...'
        X=0.
17     IF (X.GT.W) GOTO 23
        FR=(DEF-I)/(DEF**2+1.)*F
        ZIN=0.25*CMN*FR
        DO 18 M=1,NF
          U=FLOAT(M)
          FMN=C/(2.*SQRT(EFL))*U/WE
          FR=(DEF*F**3-I*F*(F**2-FMN**2))/(
*      (DEF**2*F**4+(F**2-FMN**2)**2)
          Y=U*PI*W1/2./W
          ZIN=ZIN+0.5*CMN*(COSC(U*PI*X/W)*SINC(Y)/Y)**2*FR
18     CONTINUE
        DO 19 N=1,NF
          V=FLOAT(N)
          FMN=C/(2.*SQRT(EFW))*V/LE
          FR=(DEF*F**3-I*F*(F**2-FMN**2))/(
*      (DEF**2*F**4+(F**2-FMN**2)**2)
          ZIN=ZIN+0.5*CMN*COSC(V*PI*Z1/L)**2*FR
19     CONTINUE
        DO 22 M=1,NF
          U=FLOAT(M)
          Y=U*PI*W1/2./W

```

```

DO 21 N=1,NF
  V=FLOAT(N)
  FMN=C/(2.*SQRT(EFS))*SQRT((U/WE)**2+(V/LE)**2)
  FR=(DEF*F**3-I*F*(F**2-FMN**2))/
  *      (DEF**2*F**4+(F**2-FMN**2)**2)
  ZIN=ZIN+CMN*(COS(U*PI*X/W)*COS(V*PI*Z1/L)*SIN(Y/Y)**2*FR
21  CONTINUE
22  CONTINUE
  RZ=REAL(ZIN)
  XZ=IMAG(ZIN)
  WRITE(23,15)X,RZ,XZ
  X=X+0.001
  GOTO 17
23  CONTINUE
  WRITE(23,24)ALFA,L,W,ER,A,H,X1,Z1,W1,QT
24  FORMAT(/,I3,/,F5.3,/,F5.3,/,F5.3,/,F5.3,/,F5.3,/,F5.6,
  *      /,F5.3,/,F5.3,/,F5.3,/,F5.1,/)
  STOP
END

```

ROTINA: IMPFRQ FORTRAN

```

C *****
C *
C *
C *      ANTENA DE MICROFITA SOBRE
C *      UMA ESTRUTURA CILINDRICA
C *      CONDUTORA.
C *
C *      CALCULO DA IMPEDANCIA DE
C *      DE ENTRADA EM FUNCAO
C *      DA FREQUENCIA.
C *
C *
C *      ANTONIO CEZAR DE CASTRO LIMA
C *      DEPT. DE MICROONDAS E OPTICA (DMO)
C *      FACULDADE DE ENG. ELETRICA (FEE)
C *      UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS (UNICAMP)
C *
C *
C *****

PROGRAM IMPFRQ
  REAL L,LE
  REAL*8 PI
  COMPLEX I,FR,ZIN

C  CONSTANTES FISICAS E MATEMATICAS
  PI=3.1415926535893526D0
  Z0=120.*PI
  C=3.E8

```

```

E0=1./Z0/C
I=(0.,1.)

C      LEITURA DOS DADOS DE ENTRADA
      READ(19,8) ALFA,L,W,ER,A,H,X1,Z1,W1,QT,M,N
8      FORMAT(5X,I3,/,/,/,3X,F5.3,/,3X,F5.3,/,3X,F5.3,/,3X,F5.3,/,3X,
*      (F8.6,/,3X,F5.3,/,3X,F5.3,/,3X,F5.3,/,3X,F5.1,/,3X,I1,I1,/)

C      CONSTANTE DIELETRICA EFTIVA
      EFW=(ER+1.)/2.+(ER-1.)/2./SQRT(1.+10.*H/W)
      EFL=(ER+1.)/2.+(ER-1.)/2./SQRT(1.+10.*H/L)
      EFS=EFW*EFL/ER

C      DIMENSOES EFETIVAS DA CAVIDADE
      DL=0.412*H*(EFW+0.3)*(W/H+0.264)/(EFW-0.258)*(W/H+0.8)
      DW=0.412*H*(EFL+0.3)*(L/H+0.264)/(EFL-0.258)*(L/H+0.8)
      LE=L+2.*DL
      WE=W+2.*DW

C      FREQUENCIA DE RESSONANCIA
      EF=EFS
      IF (M.EQ.0) EF=EFW
      IF (N.EQ.0) EF=EFL
      U=FLOAT(M)
      V=FLOAT(N)
      FO=C/(2.*SQRT(EF))*SQRT((U/WE)**2+(V/LE)**2)

C      WRITE(22,5)M,N,FO
5      FORMAT('F',I1,I1,'=',E11.4,/)

C      IMPEDANCIA DE ENTRADA
      WRITE(5,*)'CALCULANDO A IMPEDANCIA...'
      NF=50
      DEF=1./QT
      CMN=4.*H/(2.*PI*EO*ER*W*L)
      F1=FO-1.E8
      F2=FO+1.E8
      F=F1
7      IF (F.GT.F2) GOTO 13
          FR=(DEF-I)/(DEF**2+1.)*F
          ZIN=0.25*CMN*FR
          DO 9 M=1,NF
              U=FLOAT(M)
              FMN=C/(2.*SQRT(EFL))*U/WE
              FR=(DEF*F**3-I*F*(F**2-FMN**2))/(
*              (DEF**2*F**4+(F**2-FMN**2)**2)
              X=U*PI*W1/2./W
              ZIN=ZIN+0.5*CMN*(COS(U*PI*X1/W)*SIN(X)/X)**2*FR
9          CONTINUE
          DO 10 N=1,NF
              V=FLOAT(N)
              FMN=C/(2.*SQRT(EFW))*V/LE
              FR=(DEF*F**3-I*F*(F**2-FMN**2))/

```



```

*      (DEF**2*F**4+(F**2-FMN**2)**2)
      ZIN=ZIN+0.5*CMN*COSC V*PI*Z1/L)**2*FR
10    CONTINUE
      DO 12 M=1,NF
        U=FLOAT(M)
        X=M*PI*W1/2./W
        DO 11 N=1,NF
          V=FLOAT(N)
          FMN=C/(2.*SQRT(EFS))*SQRT((U/WE)**2+(V/LE)**2)
          FR=(DEF*F**3-I*F*(F**2-FMN**2))/
*      (DEF**2*F**4+(F**2-FMN**2)**2)

11    CONTINUE
12    CONTINUE
      RZ=REAL(ZIN)
      XZ=IMAG(ZIN)
      FG=F/1.E6
      WRITE(22,15)FG,RZ,XZ
      F=F+5.E6
      GOTO 7
13    CONTINUE
15    FORMAT(F6.1,1X,F6.1,1X,F6.1)
      WRITE(22,16) ALFA,L,W,ER,A,H,X1,Z1,W1,QT
16    FORMAT(/,I3,/,F5.3,/,F5.3,/,F5.3,/,F5.3,/,F8.6,
*      /,F5.3,/,F5.3,/,F5.3,/,F5.1,/)
      STOP
END

```

ROTINA: DIARAD FORTRAN

```

C *****
C *
C *
C *      ANTENA DE MICROFITA SOBRE
C *      UMA ESTRUTURA CILINDRICA
C *      CONDUTORA.
C *
C *      CALCULO DO CAMPO ELETRICO
C *      PARA DETERMINACAO DO
C *      DIAGRAMA DE RADIAÇÃO.
C *
C *
C *      ANTONIO CEZAR DE CASTRO LIMA
C *      DEPT. DE MICROONDAS E OPTICA (DMO)
C *      FACULDADE DE ENG. ELETRICA (FEE)
C *      UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS (UNICAMP)
C *
C *****

```

```

PROGRAM DIARAD
  REAL KO,L
  REAL*8 PI
  COMMON L,W,A,KO,ZO

C      CONSTANTES FISICAS E MATEMATICAS
  PI=3.1415926535893526D0
  ZO=120.*PI
  C=3.E8
  EO=1./ZO/C

C      LEITURA DOS DADOS DE ENTRADA
  READ(19,10)IALFA,IPHI,ITETA,L,W,ER,A
10  FORMAT(5X,I3,/,5X,I3,/,5X,I3,/,3X,F5.3,/,
*      3X,F5.3,/,3X,F5.3,/,3X,F5.3,/)

C      FREQUENCIA DE RESSONANCIA
  M=0
  N=1
  RM=FLOAT(M)
  RN=FLOAT(N)
  FO=C/(2.*SQRT(ER))*SQRT((RM/W)**2+(RN/L)**2)
  KO=2.*PI*FO/C

C      *****
C      *
C      *      CALCULO DO MODULO DO      *
C      *      VETOR DE POYNTING      *
C      *      NO PLANO DE ELEVACAO.      *
C      *
C      *****

C      MODULO DO V. DE POYNTING MAXIMO
  WRITE(5,*)'CAMPO ELETRICO NO PLANO DE ELEVACAO.'
  WRITE(5,*)
  WRITE(5,*)'CALCULANDO V. POYNTING MAX. ...'
  UO=UTMAX(IPHI,IALFA)
  U1=UTMAX(IPHI+180,IALFA)
  DBM=10.*LOG10(MAX(UO,U1))

C      MODULO DO V. DE POYNTING EM DB
  WRITE(5,*)'CALCULANDO V. POYNTING EM DB...'
  DO 11 N=2,178
    DBU=10.*LOG10(UC1.,N,IPHI,IALFA))-DBM
    WRITE(20,15)N,DBU
11  CONTINUE
15  FORMAT(I3,2X,F9.5)
  DO 16 N=178,2,-1
    DBU=10.*LOG10(UC1.,N,IPHI+180,IALFA))-DBM
    WRITE(20,15)N,DBU
16  CONTINUE
  WRITE(20,18)IPHI,IALFA,L,W,ER,H,A

```

```

WRITE(5,*)

C      *****
C      *
C      *      CALCULO DO MODULO DO      *
C      *      VETOR DE POYNTING        *
C      *      NO PLANO DE AZIMUTE.      *
C      *
C      *****

C      MODULO DO V. DE POYNTING MAXIMO
WRITE(5,*) 'CAMPO ELETRICO NO PLANO DE AZIMUTE. '
WRITE(5,*)
WRITE(5,*) 'CALCULANDO V. POYNTING MAX. ... '
DBM=10. *LOG10(CUPMAX(ITETA,IALFA))

C      MODULO DO V. DE POYNTING EM DB
WRITE(5,*) 'CALCULANDO V. POYNTING EM DB... '
DO 17 N=0,359
    DBU=10. *LOG10(UC1.,ITETA,N,IALFA))-DBM
    WRITE(21,15)N,DBU
17  CONTINUE
    WRITE(21,18)ITETA,IALFA,L,W,ER,H,A
18  FORMAT(I3,1X,I3,/,F5.3,1X,F5.3,/,F5.3,1X,F8.6,/,F5.3)
    STOP
END

C      MODULO DO VETOR DE POYNTING
C      =====

FUNCTION UC(UO,ITETA,IPHI,IALFA)
    COMPLEX H1,DH1,I,SUM1,SUM2,CN,DN
    REAL KO,J,L,Y
    REAL*8 PI,TETA,ALFA,PHI
    COMMON L,W,A,KO,ZO
    PI=3.1415926535893526D0
    TETA=FLOAT(ITETA)*PI/180.
    PHI=FLOAT(IPHI)*PI/180.
    ALFA=FLOAT(IALFA)*PI/180.
    SUM1=(0.,0.)
    SUM2=(0.,0.)
    X=KO*SIN(TETA)*A

C      COEFICIENTES ASSOCIADOS A FTN E GTN
A1=KO*COS(ALFA)
B1=SIN(ALFA)/A
AL=KO*L*SIN(ALFA)/2.
AW=KO*W*COS(ALFA)/2.
BL=L*COS(ALFA)/2./A
BW=W*SIN(ALFA)/2./A

```

```

I=CO.,1.)
DO 11 N=0,10
  V=FLOAT(N)
  DTO=0.
  IF (N.EQ.0) THEN
    DTO=1.
    V=1.E-40
  ENDIF

C      FUNCOES DE BESSEL E HANKEL E SUAS DERIVADAS
J=BESSJ(N,X)
Y=BESSY(N,X)
DJ=V/X*J-BESSJ(N+1,X)
DY=V/X*Y-BESSY(N+1,X)
H1=J+I*Y
DH1=DJ+I*DY

C      FUNCOES ASSOCIADAS A FTM E GTN
A2=A1*COSC(TETA)
B2=(V*B1)**2-A2**2
CSP=COSC(AL)*COSC(TETA)+V*BL)
CSN=COSC(AL)*COSC(TETA)-V*BL)
SNP=SINC(AW)*COSC(TETA)+V*BW)
SNN=SINC(AW)*COSC(TETA)-V*BW)

C      FUNCOES FTM E GTN
FTN=((V*B1-A2)*CSN*SNP)/B2
GTN=((V*B1+A2)*CSP*SNN)/B2

C      CAMPO ELETRICO NA DIRECAO TETA
CN=-J/H1
SUM1=SUM1+(2.-DTO)*( -I)**(N+2)*COSC(V*PHI)*(DJ+CN*DH1)
*      *KO*SINC(TETA)*SINC(ALFA)*(FTN-GTN)

C      CAMPO ELETRICO NA DIRECAO PHI
DN=-DJ/DH1
SUM2=SUM2+(2.-DTO)*( -I)**(N+1)*COSC(V*PHI)*(J+DN*H1)
*      *(V*COSC(TETA)*SINC(ALFA)/A*(FTN+GTN)-
*      *KO*SINC(TETA)**2*COSC(ALFA)*(FTN-GTN))

11  CONTINUE

C      MODULO DO VETOR DE POYNTING
U=U0/(2.*Z0*(PI*SINC(TETA))**2)*(ABSC(SUM1)**2+ABSC(SUM2)**2)
END

C      MODULO DO VETOR DE POYNTING MAXIMO EM TETA
=====

FUNCTION UTMAX(IPHI,IALFA)
  REAL MX,MXA,MXF,L,KO
  COMMON L,W,A,KO,ZO

```

```

      MXA=0.
      DO 11 N=2,177
        XA=UC1.,N,IPHI,IALFA
        XP=UC1.,N+1,IPHI,IALFA
        MX=MAX(XA,XP)
        IF (MX.GT.MXA) MXF=MX
        MXA=MXF
11      CONTINUE
        UTMAX=MXF
      END

C      MODULO DO VETOR DE POYNTING MAXIMO EM PHI
C      =====

      FUNCTION UPMAX(ITETA,IALFA)
      REAL MX,MXA,MXF,L,KO
      COMMON L,W,A,KO,ZO
      MXA=0.
      DO 11 N=0,359
        XA=UC1.,ITETA,N,IALFA
        XP=UC1.,ITETA,N+1,IALFA
        MX=MAX(XA,XP)
        IF (MX.GT.MXA) MXF=MX
        MXA=MXF
11      CONTINUE
        UPMAX=MXF
      END

```

ROTINA: DIARADS FORTRAN

```

C      *****
C      *
C      *
C      *          ANTENA DE MICROFITA SOBRE
C      *          UMA ESTRUTURA CILINDRICA
C      *          COM A CAMADA DIELETRICA
C      *          ENVOLVENDO TODA A SUPERFICIE
C      *          CONDUTORA.
C      *
C      *          CALCULO DO CAMPO ELETRICO
C      *          PARA DETERMINACAO DO
C      *          DIAGRAMA DE RADIACAO.
C      *
C      *
C      *          ANTONIO CEZAR DE CASTRO LIMA
C      *          DEPT. DE MICROONDAS E OPTICA (DMO)
C      *          FACULDADE DE ENG. ELETRICA (FEE)
C      *          UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS (UNICAMP)
C      *

```

```

C      *
C      *****

PROGRAM DIARADS
  REAL KO,L,LE
  REAL*8 PI
  COMMON L,W,A,KO,ZO,H,ER

C      CONSTANTES FISICAS E MATEMATICAS
  PI=3.1415926535893526D0
  ZO=120.*PI
  C=3.E8
  EO=1./ZO/C

C      LEITURA DOS DADOS DE ENTRADA
  READ(19,10)IALFA,IPHI,ITETA,L,W,ER,A,H
10    FORMAT(5X,I3,/,5X,I3,/,5X,I3,/,3X,F5.3,/,
*       3X,F5.3,/,3X,F5.3,/,3X,F5.3,/,3X,F8.6,/)

C      CONSTANTE DIELETRICA EFTIVA
  EFW=(ER+1.)/2.+(ER-1.)/2./SQRT(1.+10.*H/W)
  EFL=(ER+1.)/2.+(ER-1.)/2./SQRT(1.+10.*H/L)

C      DIMENSOES EFETIVAS DA CAVIDADE
  DL=0.412*H*(EFW+0.3)*(W/H+0.264)/(EFW-0.258)*(W/H+0.8)
  DW=0.412*H*(EFL+0.3)*(L/H+0.264)/(EFL-0.258)*(L/H+0.8)
  LE=L+2.*DL
  WE=W+2.*DW

C      FREQUENCIA DE RESSONANCIA
  M=0
  N=1
  RM=FLOAT(M)
  RN=FLOAT(N)
  FO=C/(2.*SQRT(EFW))*SQRT((RM/WE)**2+(RN/LE)**2)
  KO=2.*PI*FO/C

C      *****
C      *
C      *      CALCULO DO MODULO DO      *
C      *      VETOR DE POYNTING        *
C      *      NO PLANO DE ELEVACAO.    *
C      *
C      *****

C      MODULO DO V. DE POYNTING MAXIMO
  WRITE(5,*)'CAMPO ELETRICO NO PLANO DE ELEVACAO.'
  WRITE(5,*)
  WRITE(5,*)'CALCULANDO V. POYNTING MAX. ...'
  UO=UTMAX(IPHI,IALFA)
  U1=UTMAX(IPHI+180,IALFA)
  DBM=10.*LOG10(MAX(UO,U1))

```

```

C      MODULO DO V. DE POYNTING EM DB
      WRITE(5,*) 'CALCULANDO V. POYNTING EM DB...'
      DO 11 N=2,178
        DBU=10.*LOG10(UC1.,N,IPHI,IALFA))-DBM
        WRITE(20,15)N,DBU
11     CONTINUE
15     FORMAT(I3,2X,F9.5)
      DO 16 N=178,2,-1
        DBU=10.*LOG10(UC1.,N,IPHI+180,IALFA))-DBM
        WRITE(20,15)N,DBU
16     CONTINUE
      WRITE(20,18)IPHI,IALFA,L,W,ER,H,A
      WRITE(5,*)

C      *****
C      *
C      *      CALCULO DO MODULO DO      *
C      *      VETOR DE POYNTING        *
C      *      NO PLANO DE AZIMUTE.      *
C      *
C      *****

C      MODULO DO V. DE POYNTING MAXIMO
      WRITE(5,*) 'CAMPO ELETRICO NO PLANO DE AZIMUTE.'
      WRITE(5,*)
      WRITE(5,*) 'CALCULANDO V. POYNTING MAX. ...'
      DBM=10.*LOG10(UPMAX(ITETA,IALFA))

C      MODULO DO V. DE POYNTING EM DB
      WRITE(5,*) 'CALCULANDO V. POYNTING EM DB...'
      DO 17 N=0,359
        DBU=10.*LOG10(UC1.,ITETA,N,IALFA))-DBM
        WRITE(21,15)N,DBU
17     CONTINUE
      WRITE(21,18)ITETA,IALFA,L,W,ER,H,A
18     FORMAT(I3,1X,I3,/,F5.3,1X,F5.3,/,F5.3,1X,F8.6,/,F5.3)
      STOP
END

C      MODULO DO VETOR DE POYNTING
C      =====

FUNCTION UCU0,ITETA,IPHI,IALFA)
  COMPLEX I,SUM1,SUM2,X,P,Q,S,T
  COMPLEX H1,H1A,H1B,H1D,DH1,DH1A,DH1B,DH1D
  COMPLEX AT,BT,CT,DT,AL,BL,CL,DL,VT,WT,YT
  REAL KO,K1,L,J,JA,JB,JD,Y,YA,YB,YD
  REAL*8 PI,TETA,ALFA,PHI
  COMMON L,W,A,KO,ZO,H,ER
  REAL BJAC(15),BYAC(15),BJB(15),BYB(15),BJD(15),BYD(15)

```

```

REAL BJ(15),BY(15)
PI=3.1415926535893526D0
TETA=FLOAT(ITETA)*PI/180.
PHI=FLOAT(IPHI)*PI/180.
ALFA=FLOAT(IALFA)*PI/180.
SUM1=(0.,0.)
SUM2=(0.,0.)
K1=KO*SQRT(ER)
G=KO*SQRT(ER-COS(TETA)**2)
F=KO*SIN(TETA)
B=A+H
D=A+H/2.
XA=G*A
XB=G*B
XD=G*D
XF=F*B

C      NUMERO DE TERMOS
NF=10

C      CALCULO DAS FUNCOES DE BESSEL
DO 10 N=0,NF+1
    BJA(N+1)=BESSJ(N,XA)
    BJB(N+1)=BESSJ(N,XB)
    BJD(N+1)=BESSJ(N,XD)
    BJ(N+1)=BESSJ(N,XF)
    BYA(N+1)=BESSY(N,XA)
    BYB(N+1)=BESSY(N,XB)
    BYD(N+1)=BESSY(N,XD)
    BY(N+1)=BESSY(N,XF)
10    CONTINUE

C      COEFICIENTES ASSOCIADOS A FTN E GTN
A1=KO*COS(ALFA)
B1=SIN(ALFA)/D
AC=KO*L*SIN(ALFA)/2.
AW=KO*W*COS(ALFA)/2.
BC=L*COS(ALFA)/D/2.
BW=W*SIN(ALFA)/D/2.

I=(0.,1.)
DO 11 N=0,NF
    V=FLOAT(N)
    DTO=0.
    IF (N.EQ.0) THEN
        DTO=1.
        V=1.E-15
    ENDIF
11

C      FUNCOES DE BESSEL, HANKEL E SUAS DERIVADAS P/R=A
JA=BJA(N+1)
YA=BYA(N+1)

```



```
DJA=(V/XA*JA-BJAC(N+2))*G
DYA=(V/XA*YA-BYAC(N+2))*G
H1A=JA+I*YA
DH1A=DJA+I*DYA
```

C FUNCOES DE BESSEL, HANKEL E SUAS DERIVADAS P/R=B

```
JB=BJB(N+1)
YB=BYB(N+1)
DJB=(V/XB*JB-BJB(N+2))*G
DYB=(V/XB*YB-BYB(N+2))*G
H1B=JB+I*YB
DH1B=DJB+I*DYB
```

C FUNCOES DE BESSEL, HANKEL E SUAS DERIVADAS P/R=A+H/2.

```
JD=BJDC(N+1)
YD=BYDC(N+1)
DJD=(V/XD*JD-BJDC(N+2))*G
DYD=(V/XD*YD-BYDC(N+2))*G
H1D=JD+I*YD
DH1D=DJD+I*DYD
```

C FUNCOES DE BESSEL, HANKEL E SUAS DERIVADAS P/O AR EM R=B

```
J=BJ(N+1)
Y=BY(N+1)
DJ=(V/XF*J-BJ(N+2))*F
DY=(V/XF*Y-BY(N+2))*F
H1=J+I*Y
DH1=DJ+I*DY
```

C COEFICIENTES ASSOCIADOS AS FUNCOES DIADICAS

```
X=I*K0*COSC(TETA)*V/B*(1.-(F/G)**2)
P=H1A*DJB-DH1B*JA
Q=H1B*JA-H1A*JB
S=DH1B*DJA-DH1A*DJB
T=JB*DH1A-DJA*H1B
VT=K0*((F/G)**2*S/T+DH1/H1)
WT=ER*(F/G)**2*P*H1+DH1*Q
YT=H1/K0
AL=2.*I*JA*X/(PI*B*(Q*YT*X**2+VT*WT))
AT=2.*I*JA/(PI*B*(Q*YT*X**2/VT+WT))
BT=-2.*I*DJA/(PI*T*B*SQRT(ER)*YT*(VT+X**2*YT*Q/WT))
BL=BT*X*YT*Q/WT
CT=2.*I*H1A/(PI*B*(Q*YT*X**2/VT-WT))
CL=-2.*I*H1A*X/(PI*B*(Q*YT*X**2+WT*VT))
DT=-BT*DH1A/DJA
DL=-BL*DH1A/DJA
```

C FUNCOES ASSOCIADAS A FTN E GTN

```
A2=A1*COSC(TETA)
B2=(V*B1)**2-A2**2
CSP=COSC(AC*COSC(TETA)+V*BC)
CSN=COSC(AC*COSC(TETA)-V*BC)
```

```

        SNP=SI NC AW*COSC(TETA)+V*BWD
        SNN=SI NC AW*COSC(TETA)-V*BWD

C      FUNCOES FTN E GTN
        FTN=((V*B1-A2)*CSN*SNP)/B2
        GTN=((V*B1+A2)*CSP*SNN)/B2

C      CAMPO ELETRICO NA DIRECAO TETA
        SUM1=SUM1+(2.-DT0)*(F/G)**2*(-I)**(N+2)*COSC(V*PHI)*
*      (-CT*DJD+AT*DH1D)*SI NC ALFA)*(FTN-GTN)+(DL*DJD+BL*DH1D)
*      *(V*K0*COSC(TETA)*SI NC ALFA)/(K1*D)*(FTN+GTN)-
*      G**2/K1*COSC(ALFA)*(FTN-GTN))

C      CAMPO ELETRICO NA DIRECAO PHI
        SUM2=SUM2+(2.-DT0)*(F/G)**2*(-I)**(N+1)*COSC(V*PHI)*
*      (-CL*DJD+AL*DH1D)*SI NC ALFA)*(FTN-GTN)+(DT*DJD+BT*DH1D)
*      *(V*K0*COSC(TETA)*SI NC ALFA)/(K1*D)*(FTN+GTN)-
*      G**2/K1*COSC(ALFA)*(FTN-GTN))

11     CONTINUE

C      MODULO DO VETOR DE POYNTING
        U=U0/(2.*ZO*(PI*SI NC(TETA))**2)*(ABS(SUM1)**2+ABS(SUM2)**2)
END

C      MODULO DO VETOR DE POYNTING MAXIMO EM TETA
C      =====

FUNCTION UTMAX(IPHI,IALFA)
    REAL MX,MXA,MXF,L,KO
    COMMON L,W,A,KO,ZO,H,ER
    MXA=0.
    DO 11 N=2,177
        XA=UC1.,N,IPHI,IALFA
        XP=UC1.,N+1,IPHI,IALFA
        MX=MAX(XA,XP)
        IF (MX.GT.MXA) MXF=MX
        MXA=MXF
11     CONTINUE
    UTMAX=MXF
END

C      MODULO DO VETOR DE POYNTING MAXIMO EM PHI
C      =====

FUNCTION UPMAX(ITETA,IALFA)
    REAL MX,MXA,MXF,L,KO
    COMMON L,W,A,KO,ZO,H,ER
    MXA=0.
    DO 11 N=0,359
        XA=UC1.,ITETA,N,IALFA

```

```

        XP=UC1.,ITETA,N+1,IALFA)
        MX=MAX(XA,XP)
        IF (MX.GT.MXA) MXF=MX
        MXA=MXF
11      CONTINUE
        UPMAX=MXF
      END

```

SUB-ROTINA: BESSEL FORTRAN

```

C      *****
C      *
C      *      GERACAO DAS FUNCOES DE BESSEL      *
C      *
C      *****

C      FUNCAO DE BESSEL DE ORDEM 0
C      =====

      FUNCTION BESSJO(X)
      REAL*8 Y,P1,P2,P3,P4,P5,Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,R1,R2,R3,R4,R5,R6,
*      S1,S2,S3,S4,S5,S6
      DATA P1,P2,P3,P4,P5/1.D0,-.1098628627D-2,.2734510407D-4,
*      -.2073370639D-5,.2093887211D-6/
      DATA Q1,Q2,Q3,Q4,Q5/-.1562499995D-1,.1430488765D-3,
*      -.6911147651D-5,.7621095161D-6,-.934945152D-7/
      DATA R1,R2,R3,R4,R5,R6/57568490574.D0,-13362590354.D0,
*      651619640.7D0,-11214424.18D0,77392.33017D0,-184.9052456D0/,
*      S1,S2,S3,S4,S5,S6/57568490411.D0,1029532985.D0,
*      9494680.718D0,59272.64853D0,267.8532712D0,1.D0/
      IF (ABS(X).LT.8) THEN
        Y=X**2
        BESSJO=(R1+Y*(R2+Y*(R3+Y*(R4+Y*(R5+Y*R6))))
*      /(S1+Y*(S2+Y*(S3+Y*(S4+Y*(S5+Y*S6))))
      ELSE
        AX=ABS(X)
        Z=8./AX
        Y=Z**2
        XX=AX-.785398164
        BESSJO=SQRT(.636619772/AX)*(COS(XX)*(P1+Y*(P2+Y*(P3+Y*(P4+Y
*      *P5))))-Z*SIN(XX)*(Q1+Y*(Q2+Y*(Q3+Y*(Q4+Y*Q5))))
      ENDIF
      END

C      FUNCAO DE NEUMANN DE ORDEM 0
C      =====

      FUNCTION BESSYO(X)

```

```

REAL*8 Y,P1,P2,P3,P4,P5,Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,R1,R2,R3,R4,R5,R6,
* S1,S2,S3,S4,S5,S6
DATA P1,P2,P3,P4,P5/1.D0,-.1098628627D-2,.2734510407D-4,
* -.2073370639D-5,.2093887211D-6/,Q1,Q2,Q3,Q4,Q5/
* -.1562499995D-1,.1430488765D-3,
* -.6911147651D-5,.7621095161D-6,-.934945152D-7/
DATA R1,R2,R3,R4,R5,R6/-2957821389.D0,7062834065.D0,
* -512359803.6D0,10879881.29D0,-86327.92757D0,228.4622733D0/,
* S1,S2,S3,S4,S5,S6/40076544269.D0,745249964.8D0,
* 7189466.438D0,47447.26470D0,226.1030244D0,1.D0/
IF(X.LT.8) THEN
    Y=X**2
    BESSJO=(R1+Y*(R2+Y*(R3+Y*(R4+Y*(R5+Y*R6))))/(S1+Y*(S2+Y
* *(S3+Y*(S4+Y*(S5+Y*S6))))+.636619772*BESSJO(X)*LOG(X)
ELSE
    Z=8./X
    Y=Z**2
    XX=X-.785398164
    BESSJO=SQRT(.636619772/X)*(SIN(XX)*(P1+Y*(P2+Y*(P3+Y*(P4+Y
* *P5))))+Z*COS(XX)*(Q1+Y*(Q2+Y*(Q3+Y*(Q4+Y*Q5))))
ENDIF
END

```

C FUNCAO DE BESSEL DE ORDEM 1
C =====

```

FUNCTION BESSJ1(X)
REAL*8 Y,P1,P2,P3,P4,P5,Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,R1,R2,R3,R4,R5,R6,
* S1,S2,S3,S4,S5,S6
DATA P1,P2,P3,P4,P5/1.D0,.183105D-2,-.3516396496D-4,
* .2457520174D-5,-.240337019D-6/
* ,Q1,Q2,Q3,Q4,Q5/.04687499995D0,
* -.2002690873D-3,.8449199096D-5,-.88228987D-6,.105787412D-6/
DATA
* ,-2972611.439D0,15704.48260D0,-30.16036606D0/,
* S1,S2,S3,S4,S5,S6/144725228442D0,2300535178D0,
* 18583304.74D0,99447.43394D0,376.9991397D0,1.D0/
IF(ABS(X).LT.8) THEN
    Y=X**2
    BESSJ1=X*(R1+Y*(R2+Y*(R3+Y*(R4+Y*(R5+Y*R6))))/(S1+Y*(S2+Y
* *(S3+Y*(S4+Y*(S5+Y*S6))))
ELSE
    AX=ABS(X)
    Z=8./AX
    Y=Z**2
    XX=AX-2.356194491
    BESSJ1=SQRT(.636619772/AX)*(COS(XX)*(P1+Y*(P2+Y*(P3+Y*(P4+Y
* *P5))))-Z*SIN(XX)*(Q1+Y*(Q2+Y*(Q3+Y*(Q4+Y*Q5))))
* *SIGN(1.,X)
ENDIF
END

```

```

C      FUNCAO DE NEUMANN DE ORDEM 1
C      =====

      FUNCTION BESSY1(X)
      REAL*8 Y,P1,P2,P3,P4,P5,Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,R1,R2,R3,R4,R5,R6,
*      S1,S2,S3,S4,S5,S6,S7
      DATA P1,P2,P3,P4,P5/1.D0,.183105D-2,-.3516396496D-4,
*      .2457520174D-5,-.240337019D-6/
*      ,Q1,Q2,Q3,Q4,Q5/.04687499995D0,
*      -.2002690873D-3,.8449199096D-5,-.88228987D-6,.105787412D-6/
      DATA R1,R2,R3,R4,R5,R6/-.4900604943D13,.1275274390D13,
*      -.5153438139D11,.7349264551D9,-.4237922726D7,.8511937935D4/,
*      S1,S2,S3,S4,S5,S6,S7/.2499580570D14,.4244419664D12,
*
      IF(X.LT.8) THEN
        Y=X**2
        BESSY1=X*(R1+Y*(R2+Y*(R3+Y*(R4+Y*(R5+Y*(R6)))))/(S1+Y*(S2+Y
*      *(S3+Y*(S4+Y*(S5+Y*(S6+Y*(S7)))))+.636619772
*      *(BESSJ1(X)*LOG(X)-1./X)
      ELSE
        Z=8./X
        Y=Z**2
        XX=X-2.356194491
        BESSY1=SQRT(.636619772/X)*(SIN(XX)*(P1+Y*(P2+Y*(P3+Y*(P4+Y
*      *P5))))+Z*COS(XX)*(Q1+Y*(Q2+Y*(Q3+Y*(Q4+Y*(Q5))))
      ENDIF
      END

C      FUNCAO DE NEUMANN DE ORDEM N
C      =====

      FUNCTION BESSY(N,X)
      IF(N.LT.2) THEN
        IF(N.EQ.0) THEN
          BY=BESSY0(X)
        ELSE
          BY=BESSY1(X)
        ENDIF
      ELSE
        TOX=2./X
        BY=BESSY1(X)
        BYM=BESSY0(X)
        DO 11 J=1,N-1
          BYP=J*TOX*BY-BYM
          BYM=BY
          BY=BYP
        CONTINUE
      ENDIF
      BESSY=BY

```

11

END

```

C      FUNCAO DE BESSEL DE ORDEM N
C      =====

FUNCTION BESSJ(N,X)
PARAMETER (IACC=40,BIGNO=1.E10,BIGNI=1.E-10)
AX=ABS(X)
IF(N.LT.2) THEN
    IF(N.EQ.0) THEN
        BJ=BESSJ0(AX)
    ELSE
        BJ=BESSJ1(AX)
    ENDIF
ELSE
    IF(AX.EQ.0) THEN
        BESSJ=0.
    ELSE IF(AX.GT.FLOAT(N)) THEN
        TOX=2./AX
        BJ=BESSJ1(AX)
        BJM=BESSJ0(AX)
        DO 11 J=1,N-1
            BJP=J*TOX*BJ-BJM
            BJM=BJ
            BJ=BJP
11      CONTINUE
        BESSJ=BJ
    ELSE
        TOX=2./AX
        M=2*((N+INT(SQRT(FLOAT(IACC*N)))))/2)
        BESSJ=0
        JSUM=0
        SUM=0
        BJP=0
        BJ=1
        DO 12 J=M,1,-1
            BJM=J*TOX*BJ-BJP
            BJP=BJ
            BJ=BJM
            IF(ABS(BJ).GT.BIGNO) THEN
                BJ=BJ*BIGNI
                BJP=BJP*BIGNI
                BESSJ=BESSJ*BIGNI
                SUM=SUM*BIGNI
            ENDIF
            IF(JSUM.NE.0) SUM=SUM+BJ
            JSUM=1-JSUM
            IF(J.EQ.N) BESSJ=BJP
12      CONTINUE
        SUM=2.*SUM-BJ
        BESSJ=BESSJ/SUM
    
```

```
ENDIF  
IF (X.LT.0..AND.MOD(N,2).EQ.1) BESSJ=-BESSJ  
BJ=BESSJ  
ENDIF  
BESSJ=BJ  
END
```