

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE MÁQUINAS COMPONENTES E SISTEMAS INTELIGENTES

CONTRIBUIÇÃO À REDUÇÃO DE ORDEM E CONTROLE DE
SISTEMAS DISCRETOS MULTIVARIÁVEIS

*Este exemplar corresponde à
redação final da tese defendida
por Celso José Munaro e aprovada
pela Comissão Julgadora em 27/7/1990
Celso Pascoli Bottura*

CELSO JOSÉ MUNARO

Orientador :

Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA

- JULHO 1990 -

À memória da querida mana, Claire

RESUMO

Neste trabalho são pesquisados métodos de agregação modal e separação temporal para derivar modelos de ordem reduzida. Também são pesquisadas técnicas de controle discreto por realimentação de estados e de saídas. Propõe-se e utiliza-se a decomposição de Schur para obter algoritmos de redução de ordem e de controle numericamente mais estáveis e eficientes. Exploram-se a obtenção de modelos de ordem reduzida por agregação bem como de controles por realimentação de estados para modelos de via expressa. São aplicados os métodos de redução de ordem por separação temporal e de controle por realimentação de saídas a um modelo de sistema de potência.

ABSTRACT

In this work methods of aggregation and time-separation to derive reduced order models are researched. Technics of discrete control by state and output feedback are researched too. The Schur decomposition is proposed and used to obtain numerically more stable and efficient algorithms for order reduction and control. The obtainment of reduced order models of different orders by aggregation and state feedback controls for freeway models are exploited. To a power system model order reduction by time-separation and control by output feedback are made.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 -	INTRODUÇÃO	
CAPÍTULO 2 -	ALOCÇÃO DE PÓLOS EM SISTEMAS DISCRETOS	
	MULTIVARIAVEIS	1
2.1	Realimentação de Estados	2
2.1.1	Algoritmo I	2
2.1.2	Alocção de Autovetores	6
2.1.3	Redução da Norma da Matriz de Realimentação	6
2.1.4	Algoritmo II	10
2.2	Realimentação de Saídas	14
2.2.1	Algoritmo	14
2.2.2	Escolha dos Pólos a Alocar	16
CAPÍTULO 3 -	REDUÇÃO DE ORDEM DE SISTEMAS DISCRETOS	18
3.1	Agregação Modal	18
3.1.1	Condições para Agregação Exata	19
3.1.2	Análise Modal do Sistema	26
3.1.3	Método I	28
3.1.4	Método II	30
3.1.5	Método III	33
3.1.6	Matriz de Agregação	35
3.1.7	Erro de Regime dos Modelos	37
3.1.8	Escolha dos Modos a Reter no Modelo Reduzido	39
3.1.9	Agregação Usando Decomposição de Schur	43

3.1.10	Decomposição de Schur	44
3.1.11	Redução Usando Decomposição de Schur	49
3.1.12	Controle Usando Sistemas Reduzidos	56
3.2	Redução de Sistemas com a Propriedade da Separação Temporal	58
3.2.1	Transformação Linear Explicitamente Inversível	60
3.2.2	Regime Quase Permanente	64
3.2.3	Comparação entre os Métodos	66
3.3	Relação entre Agregação Modal e Separação Temporal	68
CAPÍTULO 4 -	APLICAÇÃO DOS ALGORITMOS DE REDUÇÃO DE ORDEM E DE CONTROLE	71
4.1	Modelo Dinâmico da Via Expressa	71
4.2	Redução da Via Expressa por Separação Temporal	72
4.3	Redução da Via Expressa por Agregação Modal	76
4.3.1	Análise dos Modos a Reter nos Modelos Reduzidos	77
4.3.2	Modelos Reduzidos de Ordem 9	99
4.3.3	Modelos Reduzidos de Ordem 11	104
4.3.4	Modelos Reduzidos de Ordem 15	109
4.3.5	Comentários sobre as Técnicas de Redução ...	118
4.4	Controle da via expressa	120
4.4.1	Aplicação direta ao modelo de ordem 34	120
4.4.2	Aplicação aos modelos reduzidos de ordem 15	127
4.4.3	Aplicação aos modelos reduzidos de ordem 11	128
4.4.4	Comentários sobre os Resultados Obtidos	133

4.5	Redução de Ordem de Sistema de Potência	134
4.6	Controle de Sistema de Potência por Realimentação de Saídas	137

CAPÍTULO 5 - CONCLUSÃO

BIBLIOGRAFIA

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Sistemas dinâmicos de grande porte, por serem uma abstração de uma realidade muito complexa, representam eles próprios uma aproximação da realidade que procuram descrever. Nestes sistemas, requer-se uma grande quantidade de informação para representar bem sua dinâmica bem como para projetar controles. Para estes casos, a obtenção de modelos reduzidos para o sistema de grande porte torna-se uma solução atraente.

Em sistemas de grande porte, é comum encontrar-se subsistemas com pouca interação entre si. Nesta situação, um modelo reduzido pode representar com boa precisão um destes subsistemas, e um controle aplicado a tal subsistema pouco interferirá nos demais. Portanto, pode-se analisar e modificar subsistemas separadamente, solucionando diversos problemas pequenos ao invés de um problema grande. Estudar-se-á agora com mais detalhes os processos de controle e redução de sistemas lineares discretos multivariáveis, que são o escopo deste trabalho.

Controlar um sistema significa basicamente obter sinais que aplicados à entrada deste sistema façam com que ele apresente determinado comportamento ou então que alcance uma determinada condição. Tratar-se-á aqui do primeiro caso. Quando se deseja mudar o

comportamento de um sistema, deve-se analisar seu comportamento atual e em função dele gerar controles que o modifiquem. A melhor forma de fazer isto é usar as variáveis de estado do sistema, que descrevem o sistema totalmente, e combiná-las de modo a gerarem um sinal de controle que aplicado à entrada corrija eventuais comportamentos indesejáveis. Isto equivale a mudar a posição dos autovalores e autovetores do sistema, que são os elementos que especificam totalmente seu comportamento. Estes controles podem ser projetados via otimização. Entretanto, optou-se por trabalhar com algoritmos de alocação de pólos para projetá-los. Este procedimento, ao contrário do anterior, exige um maior conhecimento do sistema a controlar para que uma boa solução seja obtida. Maiores discussões sobre estas duas formas de obter controles são encontradas em Bottura [47].

O problema de alocação de pólos em sistemas multivariáveis vem sendo estudado desde longa data. Wonham [16] (1967) caracterizou bem este problema ao mesmo tempo em que estabelecia condições para a alocação de pólos do sistema. Moore [31] (1976) estabeleceu condições suficientes e necessárias para a alocação da autoestrutura do sistema, ou seja, a alocação de seus autovalores e autovetores. Era mostrado que a liberdade que existe na alocação de um conjunto de pólos de malha fechada corresponde à escolha dos autovetores de malha fechada. Em um próximo trabalho, Moore [32] (1977) estende seu trabalho anterior de modo a permitir a alocação de autovalores repetidos com cadeias de autovetores generalizados.

Dentro deste enfoque, Porter e D'Azzo [33] (1978) apresentam mais estudos no sentido de facilitar a exploração da não unicidade da

solução da alocação de pólos em sistemas multivariáveis. Em 1978 Porter e D'Azzo [24] obtêm os vetores requeridos em seu trabalho anterior de forma a explorar a alocação de toda autoestrutura do sistema.

Em (1982), Fahmy e O'Reilly [36] fazem uso da identidade do determinante, primeiramente usada por Brogan [35] para alocação de pólos, e obtêm um algoritmo para a alocação da autoestrutura facilmente implementável computacionalmente. O desenvolvimento do algoritmo leva à alocação dos pólos do sistema ,com os autovetores surgindo naturalmente em uma forma paramétrica. Fahmy e Tantawy [37] (1984) acrescentam uma modificação a este algoritmo de forma que seja possível a alocação de pólos de malha fechada iguais a pólos de malha aberta, o que não era possível com o algoritmo anterior. Entretanto, este novo algoritmo torna-se mais complexo e seu uso computacional torna-se mais difícil dada a forma analítica como é desenvolvido. Uma versão de [36] é apresentada por Mahmoud [10] para alocação de pólos por realimentação de saídas . Neste caso, porém , aloca-se apenas parte da autoestrutura do sistema.

Optou-se por utilizar o algoritmo proposto em [36] para alocar a autoestrutura de sistemas,neste trabalho. As razões principais são a facilidade de implementar o algoritmo computacionalmente e a forma paramétrica como é apresentado, permitindo utilizar de forma muito eficiente a liberdade que existe na alocação de pólos em sistemas multivariáveis.

Na alocação de pólos , muda-se a velocidade de resposta do sistema. A alocação de autovetores , por outro lado,permite modificar a forma desta resposta. Uma forma indireta de especificar os

autovetores é fazer com que a matriz de realimentação tenha o menor ganho possível, pois em geral, quanto menor for este ganho para um dado conjunto de autovalores de malha fechada, mais suave será a resposta do sistema [13].

Quando o objetivo é reduzir a norma da matriz de realimentação, existem algoritmos para alocação de pólos em sistemas multivariáveis designados especialmente para este fim. Cameron [38] propõe um algoritmo para alocação parcial de pólos por realimentação de estados ou de saídas, que resulta em uma matriz de realimentação de pequeno ganho. Ainda, em Bingulac e outros [39] é proposto um interessante algoritmo onde, pela escolha adequada de diferentes bases para o sistema e pela ordenação conveniente dos autovalores de malha fechada, o mesmo objetivo é alcançado. No algoritmo escolhido, a redução da norma da matriz de realimentação pode ser alcançada pela escolha adequada dos parâmetros livres existentes no mesmo.

Outra característica buscada em algoritmos de alocação é a robustez da solução obtida. Em [42], Kautsky e outros sugerem [40] e [41] como algoritmos que fornecem soluções robustas, definidas como soluções onde os pólos alocados são menos sensíveis a perturbações. Estes algoritmos utilizam procedimentos numericamente estáveis para chegar a estas soluções. O algoritmo utilizado aqui permite obter soluções robustas pela possibilidade da alocação dos autovetores. Ele pode apresentar problemas em sistemas mal condicionados, pois inversões matriciais são requeridas. Para estes casos, a estratégia proposta permite transpor este problema, pois são usadas técnicas numericamente estáveis em pontos críticos do algoritmo.

A obtenção de modelos simplificados, ou reduzidos, é buscada através de uma análise estrutural do sistema. Uma forma natural de reduzir sistemas é eliminar sua parte não observável e não controlável [13]. Um trabalho clássico sobre este tipo de estudo é feito por Moore [13] (1981), estendido posteriormente por Fernebo e Silverman [43] (1982). Os gramianos de controlabilidade e observabilidade são usados para obter uma medida de controlabilidade e de observabilidade do sistema. Para isto, é mostrado que existe uma base onde os gramianos de controlabilidade e observabilidade são iguais e diagonais. Nesta representação, definida como balanceada, quando despreza-se a parte menos controlável também estamos eliminando a parte menos observável.

Outra técnica proposta para eliminar a parte pouco observável do sistema é a agregação em cadeia [19] (1978). Neste método, a matriz do sistema é colocada na forma de Hessenberg induzida pela matriz de saída. Com o sistema nesta forma, a parte mais fracamente observável do sistema é facilmente identificada e pode ser eliminada.

Neste trabalho, optou-se por utilizar a técnica de redução por agregação, particularmente agregação modal. Os primeiros trabalhos neste contexto são devidos a Marshall, Davison e Chidambara. Nesta forma de redução, a estratégia consiste em obter um modelo de menor dimensão retendo apenas os modos dominantes do sistema.

Marshall [9] (1965) propõe um método em que o modelo reduzido não apresenta erro de regime para entradas constantes. Davison [11] propõe um método em que os modos do sistema reduzido são excitados na mesma proporção em que são no sistema original, o que não ocorria no método de Marshall. Neste ponto, tem início uma série de discussões

entre Davison e Chidambara a respeito do modelo do primeiro, da qual no conhecimento do autor, estranhamente Marshall não participa e nem sequer é citado pelos dois. Chidambara [2]-[4] (1967) propõe modificações no método de Davison no sentido de corrigir o erro de regime existente no modelo. Davison, por outro lado, contesta estas modificações afirmando que o modelo assim obtido não apresenta erro de regime, porém apresenta uma dinâmica diferente da do sistema original correspondente, com respostas no tempo incorretas. Chidambara [2]-[4] continua apresentando modificações em seus modelos, sempre contestadas por Davison pelos motivos expostos, até chegar a um modelo reduzido igual ao obtido por Marshall.

Como resultado destas discussões, Davison [5] (1968) propõe um novo método de redução, que é basicamente um melhoramento de seu trabalho original onde o modelo agora obtido não apresenta erro de regime.

Os métodos de redução citados eram baseados em uma sequência, onde algumas suposições eram feitas, o que resultava em modelos reduzidos retendo os modos dominantes do sistema. Aoki [6] (1968) apresenta um trabalho clássico neste contexto, onde é estudada a obtenção de modelos reduzidos a partir de sistemas de grande porte. Para isto, é usada a teoria de agregação, sendo propostas formas de obter uma matriz de agregação e com ela obter um sistema reduzido agregando o sistema de alta ordem. São estabelecidas condições para agregação exata e um controle via otimização é proposto para o sistema reduzido. Também é feita uma análise da estabilidade do sistema com controle projetado via sistema reduzido.

Lamba e Rao [20] (1972) verificaram que o modelo de Davison

[11] era um caso especial da teoria de agregação [6], e portanto, a análise de Aoki poderia ser aplicada a este modelo. Em trabalho subsequente, Hickin e Sinha [21] (1975) mostraram que todos os métodos de preservação de autovalores são casos especiais da agregação, sendo denominados métodos de agregação modal. Entretanto, todos estes trabalhos foram aplicados a sistema contínuos.

Em 1972, Wilson e outros [7] apresentam uma versão dos modelos de Davison e Marshall para sistemas discretos. Conclui-se que reduzir um sistema e depois discretizá-lo é uma tarefa computacionalmente mais eficiente, porém analiticamente equivalente a discretizar e depois reduzir o sistema.

Arbel e Tse [8] estabelecem condições para que um sistema possa ser agregado exatamente para uma dada matriz de agregação. Parte-se da condição de Aoki [6] e conclui-se que, para que o sistema possa ser agregado exatamente, este deve ser não observável para a matriz de agregação escolhida, que assume o papel de uma matriz de saída.

Um ponto que recebeu bastante atenção foi a busca de critérios para escolha da ordem e dos modos a serem retidos em um modelo obtido pelos métodos de redução de Davison e Marshall [22]-[28]. Em geral, a obtenção de um critério deste tipo envolve um grande esforço computacional. Neste sentido, Gopal e Mehta [27] propõe um critério adequado a sistemas de grande porte.

Outra forma de obter modelos reduzidos aplicável a sistemas com duas escalas de tempo é o método desenvolvido via teoria da separação

temporal [10]-[12], a qual pode ser interpretada [12] como sendo uma aplicação para sistemas discretos da teoria de perturbações singulares [29]-[30]. É mostrado que sistemas com a propriedade da separação temporal [10] podem ser separados em dois subsistemas : um lento retendo os modos de maior valor absoluto e outro rápido retendo os modos de menor valor absoluto.

Em [12] é mostrado que esta abordagem é similar à redução por agregação modal, com a diferença de que toda a autoestrutura é retida e não apenas a sua parte dominante. Em [48], propriedades estruturais dos subsistemas ,tais como controlabilidade e estabilidade, são estudadas, sendo estabelecidas condições para que as mesmas existam. É mostrado ainda, que é possível projetar um controle para cada subsistema e depois aplicá-lo ao sistema original sem degradação do mesmo.

O presente trabalho está organizado da seguinte forma : no capítulo 2 é estudado o algoritmo para alocação da autoestrutura de sistemas multivariáveis via realimentação de estados e de saídas. Na realimentação de estados é discutida a utilização dos parâmetros livres do algoritmo para a alocação de autovetores e para a redução da norma da matriz de realimentação. Na realimentação de saídas comenta-se a forma como este tipo de realimentação atua sobre os diferentes pólos do sistema. Também é proposto um aperfeiçoamento no algoritmo estudado de forma a fazer alocação parcial de pólos em sistemas de grande porte.

No capítulo 3, estuda-se métodos de redução de ordem de sistemas. São estudados três métodos de redução por agregação modal, e

em seguida é feita uma análise dos mesmos. Também é proposto um algoritmo, baseado em procedimentos numéricos estáveis, para obter sistemas reduzidos de forma similar aos já estudados. Na seção seguinte, mostra-se como os modelos reduzidos podem ser usados para controle, analisando-se o efeito sobre o sistema original de um controle obtido via modelo reduzido. Considerada uma extensão dos métodos de agregação modal, a teoria da separação temporal é por este motivo apresentada, na seção seguinte. Traça-se então um paralelo entre estas duas técnicas analisando-se suas semelhanças.

O capítulo 4 é dedicado à aplicação das técnicas de controle e redução estudados. Inicialmente, o sistema utilizado é o modelo de uma via expressa, para o qual no conhecimento do autor, ainda não foi explorada a obtenção de modelos reduzidos. Os métodos de redução por separação temporal e agregação modal são aplicados neste modelo, resultando em diferentes modelos reduzidos obtidos por diferentes estratégias baseadas no estudo das características do modelo. Os algoritmos de alocação de pólos são então aplicados no sistema original e nos sistemas reduzidos.

No modelo seguinte, representando um sistema de potência, aplica-se as técnicas de redução usando separação temporal e alocação de pólos por realimentação de saídas, as quais são muito adequadas para este tipo de modelo.

Por fim, são apresentadas no capítulo 5 conclusões baseadas nos resultados e na experiência do autor durante a realização deste trabalho.

ALOCACÃO DE PÓLOS EM SISTEMAS DISCRETOS MULTIVARIÁVEIS

Estuda-se aqui o seguinte problema. Dado o sistema discreto linear , suposto controlável e observável

$$x(k+1) = A x(k) + B u(k) \quad (1.1)$$

$$y(k) = C x(k) \quad (1.2)$$

onde

$$A (n \times n) , B (n \times m) \text{ e } C (p \times n) ,$$

procura-se a realimentação de estados

$$u(k) = -K x(k) \quad (2.1)$$

ou a realimentação de saídas

$$u(k) = -K_s y(k) \quad (2.2)$$

tal que o sistema (1) tenha seu comportamento modificado através da mudança de um conjunto ou mesmo de todos os seus pólos. Em [10] e [16] é mostrado que se um sistema for controlável então é possível alocar todos seus pólos arbitrariamente através de uma realimentação de estados. É mostrado ainda que uma realimentação como (2.1) não altera a controlabilidade do sistema, mas pode alterar sua observabilidade. Em [14] e [17] é mostrado que se um sistema for controlável, então uma

realimentação como (2.2) pode alocar no máximo p pólos do sistema, com os pólos restantes sendo movidos para posições quaisquer. Ainda, esta realimentação não afeta a controlabilidade nem a observabilidade do sistema.

2.1 REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS

Estuda-se agora o problema de projetar um controle por realimentação de estados para o sistema (1). A realimentação de estados provê o melhor controle possível para (1), uma vez que ela contém informações sobre toda a dinâmica do sistema. Supõe-se aqui que todos os estados estão disponíveis . Se não estiverem, pode-se construir observadores [13] para obtê-los .

Uma vez obtida a realimentação de estados (2.1), pode-se aplicá-la a (1) , obtendo

$$x(k+1) = (A - BK) x(k) \quad (3)$$

2.1.1 ALGORITMO I

Procura-se agora uma matriz de realimentação K tal que os autovalores do sistema original (1) ($\gamma_1 \dots \gamma_n$) sejam alocados para as posições ($\lambda_1 \dots \lambda_n$) , usando para isto o algoritmo proposto por Fahmy e O'Reilly [15].

É sabido que os autovalores de um sistema de malha fechada são raízes de

$$P_f(\lambda) \triangleq \det [\lambda I_n - A + BK] = 0 \quad (4)$$

Outra forma de escrever (4) é

$$\begin{aligned} P_f(\lambda) &= \det[(\lambda I_n - A) (I_n + (\lambda I_n - A)^{-1} BK)] \\ &= \det[\lambda I_n - A] \det[I_n + (\lambda I_n - A)^{-1} BK] \\ &= P_a(\lambda) \det[I_n + (\lambda I_n - A)^{-1} BK] \end{aligned} \quad (5)$$

onde $P_a(\lambda) \triangleq \det[\lambda I_n - A]$ é o polinômio de malha aberta. Usando a identidade polinomial

$$\det [I_n + (\lambda I_n - A)^{-1} BK] = \det [I_m + K(\lambda I_n - A)^{-1} B]$$

em (5), obtém-se

$$P_f(\lambda) = P_a(\lambda) \det [I_m + K(\lambda I_n - A)^{-1} B] \quad (6)$$

Definimos aqui

$$S(\lambda) \triangleq (\lambda I_n - A)^{-1} B \quad (7)$$

Estudar-se-á apenas o caso de autovalores distintos, pois é o caso mais geral e é o que nos interessa neste trabalho. Para autovalores repetidos, é feita apenas uma extensão deste método [15].

Em vista de (6) , pode-se escrever que

$$\det [I_m - KS(\lambda_i)] = 0 , \quad i=1,2,\dots,n \quad (8)$$

O determinante em (8) será nulo se e somente se as colunas de $[I_m - KS(\lambda_i)]$ forem linearmente dependentes. Ou seja, para algum vetor não nulo f_i , tem-se

$$[I_m - KS(\lambda_i)]f_i = 0 \quad \text{ou} \quad KS(\lambda_i)f_i = f_i \quad (9)$$

a qual pode ser rescrita como

$$K [S(\lambda_1)f_1 \ S(\lambda_2)f_2 \ \dots \ S(\lambda_n)f_n] = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n] \quad (10)$$

Os vetores f_i são arbitrariamente escolhidos sob a condição de que os n vetores $S(\lambda_i)f_i$ sejam linearmente independentes. Para garantir que K seja real, escolhe-se $f_i \in \mathbb{R}^m$ para um autovalor real λ_i , enquanto para um par de autovalores complexos conjugados $(\lambda_i, \lambda_j = \lambda_i^*)$ toma-se $f_i = f_j \in \mathbb{R}^m$ ou $f_i = f_j^* \in \mathbb{C}^m$. Sempre é possível uma escolha apropriada para (10) que dá

$$K = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n] [S(\lambda_1)f_1 \ S(\lambda_2)f_2 \ \dots \ S(\lambda_n)f_n]^{-1} \quad (11)$$

Esta é uma equação paramétrica para K tendo como parâmetros livres os vetores f_i , o que bem demonstra a não unicidade da solução do problema de alocação de pólos. Investiga-se agora o papel dos vetores $S(\lambda_i)f_i$. Da definição de (10) é óbvio que $S(\lambda_i)f_i$ pertence ao espaço imagem de $(\lambda_i I - A)^{-1} B$. Assim, pode-se antecipar que $S(\lambda_i)f_i$ são de fato os autovetores alocados v_i , definidos pela sequência

$$A_f v_i = \lambda_i v_i \quad i=1,2,\dots,n \quad (12.1)$$

Para mostrar que isto é verdadeiro, verifica-se se (12.1) é satisfeita para

$$v_i = S(\lambda_i)f_i \quad (12.2)$$

Obtém-se então,

$$\begin{aligned}
(A - BK) S(\lambda_i) f_i &= A(\lambda_i I - A)^{-1} B f_i - BK S(\lambda_i) f_i \\
&= A(\lambda_i I - A)^{-1} B f_i - B f_i \\
&= (A + (\lambda_i I - A)(\lambda_i I - A)^{-1} B) f_i \\
&= \lambda_i S(\lambda_i) f_i
\end{aligned}$$

que mostra ser verdadeira a suposição feita . Portanto, o presente algoritmo permite alocar os pólos do sistema e intrinsicamente caracterizar o conjunto de autovetores alocáveis na forma parametrizada dada por

$$V \triangleq [S(\lambda_1) f_1 \quad S(\lambda_2) f_2 \quad \dots \quad S(\lambda_n) f_n] \quad (13)$$

Para obter a matriz de ganho K, a expressão (7) constitui uma dificuldade se avaliada algebricamente. Portanto, substitui-se a manipulação algébrica por um procedimento meramente numérico, fazendo

$$(\lambda I - A)^{-1} \Big|_{\lambda=\lambda_i} = (\lambda_i I - A)^{-1} \quad (14)$$

Para o caso de sistemas de uma única entrada ($m=1$), os vetores f_i se reduzem a escalares, e, de acordo com (11), K é única. À medida que o número de entradas aumenta, entretanto, aumentam também os graus de liberdade. Pode-se então usar estes graus de liberdade de forma a satisfazer mais exigências sobre o desempenho de malha fechada do sistema . Isto é tratado nas próximas seções .

2.1.2 ALOCAÇÃO DE AUTOVETORES

Se a matriz B for de posto completo, então $S(\lambda)$ em (7) também será [13]. Conhecendo-se os autovetores de malha fechada desejados, pode-se, a partir de (12.2), especificar os vetores f_i , que serão dados por

$$f_i = S(\lambda_i)^+ v_i \quad (15)$$

onde

$$S(\lambda_i)^+ = S(\lambda_i)^T (S(\lambda_i) S(\lambda_i)^T)^{-1} \quad (16)$$

é a pseudoinversa de $S(\lambda_i)$. A expressão (15) permite obter os vetores f_i que dão aproximadamente o conjunto de autovetores de malha fechada $[v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ desejados, onde a aproximação provém da minimização por mínimos quadrados (16). Este conjunto de autovetores pode, entretanto, não satisfazer a condição de que os vetores $S(\lambda_i)f_i$ sejam LIs, devendo neste caso serem modificados.

2.1.3 REDUÇÃO DA NORMA DA MATRIZ DE REALIMENTAÇÃO

Uma das formas de especificar os vetores f_i é fazê-lo de forma a reduzir a norma da matriz de realimentação K resultante, o que implicará em um esforço menor do controle para alocar os pólos.

De (7) e (9), observa-se que f_i pode ser interpretado como sendo uma ponderação das m entradas para mover o pólo γ_i para a posição λ_i . Isto porque f_i é um vetor $(m \times 1)$ que multiplica as m colunas da matriz de entrada B . Por exemplo, se a componente j de f_i , $1 \leq j \leq m$, for nula, então a entrada j não atuará na alocação do

pólo λ_i . Portanto, é interessante que se conheça a influência que cada entrada possui sobre determinado autovalor que se deseje mudar, de forma a utilizá-las da melhor forma possível.

Para conhecer esta influência, o sistema (1) é colocado na forma de Jordan

$$z(k+1) = J z(k) + P u(k) \quad (17)$$

onde

$$J = W A V = \begin{bmatrix} \gamma_1 & & \\ & \gamma_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \gamma_n \end{bmatrix} \quad (18.1)$$

$$P = W B \triangleq \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} \quad (18.2)$$

$$V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n] = \text{autovetores direitos de } A \quad (18.3)$$

$$W = V^{-1} = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n]^T = \text{autovetores esquerdos} \quad (18.4)$$

A resposta de (17) ao estado zero é dada por

$$\begin{bmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \\ \vdots \\ z_n(k) \end{bmatrix} = \sum_{t=0}^{k-1} \begin{bmatrix} \gamma_1 & & \\ & \gamma_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \gamma_n \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad (19)$$

De (19), observa-se que o vetor $p_1 = [p_{11} \ p_{12} \ \dots \ p_{1m}]$ aplicado às entradas $[u_1(k) \ u_2(k) \ \dots \ u_m(k)]^T$ atua unicamente sobre $z_1(k)$, o estado que corresponde à trajetória do autovalor γ_1 . Este raciocínio leva a escolher

$$f_i = p_i^T = B^T w_i^T \quad i=1, \dots, n \quad (20)$$

como os vetores que compõem F em (10), uma vez que desta forma estar-se-á aplicando a cada entrada um esforço proporcional à sua atuação na alocação de determinado autovalor. Para aproveitar ainda melhor o esforço das entradas, deve-se ordenar os autovalores de malha fechada de modo que eles fiquem o mais próximos possível dos autovalores de malha aberta, pois assim, o esforço aplicado para movê-los também será menor.

É feita agora uma análise diferente que mostrará ser correto o raciocínio desenvolvido. De (11) pode-se escrever [13] que

$$\|K\| \leq \|F\| \|S^{-1}\| \quad (21)$$

onde

$$S \triangleq [S(\lambda_1)f_1 \ S(\lambda_2)f_2 \ \dots \ S(\lambda_n)f_n]$$

De (21) observa-se que, para que $\|K\|$ seja pequena deve-se ter $\|F\|$ pequena e $\|S\|$ grande. Analisar-se-á primeiramente a importância da norma dos vetores f_i sobre a norma de K . Sejam $[f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n]$ os vetores arbitrários e $[f_1' \ f_2' \ \dots \ f_n']$ vetores normalizados, tais que

$$f_i' = \frac{f_i}{\|f_i\|} \triangleq \frac{f_i}{\alpha_i} \quad (22)$$

Pode-se reescrever (11) como

$$\begin{aligned} K &= [f_1 f_2 \dots f_n] \left\{ \begin{bmatrix} S(\lambda_1)f_1' & S(\lambda_2)f_2' & \dots & S(\lambda_n)f_n' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ &= [f_1' \ f_2' \ \dots \ f_n'] \begin{bmatrix} S(\lambda_1)f_1' & S(\lambda_2)f_2' & \dots & S(\lambda_n)f_n' \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

Portanto, a norma dos vetores f_i não tem influência direta sobre a norma de K , pois usar vetores f_i de grande norma é equivalente a usar vetores de norma unitária. Sua função, como já afirmado, consiste em ponderar os vetores coluna da matriz B que serão utilizadas para alocar λ_i .

Para escolher os vetores f_i , far-se-á a alocação dos pólos de (17). Para que $\|K\|$ seja pequena, deve-se fazer com que $\|S(\lambda_i)f_i\|$ seja grande, como visto. Para λ_1 , usando (7) em (17) obtém-se

$$S(\lambda_1)f_1 = (\lambda_1 I - J)^{-1} P f_1 \quad (23)$$

Escolhendo $f_1 = p_1^T$ como em (20) e normalizando este vetor, o produto Pf_1 terá o valor máximo para a primeira componente do vetor resultante, uma vez que o produto interno entre dois vetores é máximo quando estes forem colineares (desigualdade de Schwarz [13]). Se também for escolhido para λ_1 o autovalor que for mais próximo de γ_1 , o primeiro autovalor de J em (17), então o elemento (1,1) de $(\lambda_1 I - A)^{-1}$ será o maior possível, e o produto $(\lambda_1 I - A)^{-1} Pf_1$ dará um vetor cuja primeira componente será de grande norma. Seguindo esta estratégia até f_n , obtém-se uma matriz S com as componentes da diagonal grandes e sua inversa terá pequena norma. Usando (11) e (18), K é dada por

$$K = [f_1 \dots f_n] \left[(\lambda_1 I_n - J)^{-1} Pf_1 \dots (\lambda_n I_n - J)^{-1} Pf_n \right]^{-1} V^{-1} \quad (24)$$

No entanto, não é necessário colocar o sistema na forma de Jordan (17) para obter K como em (24). Dado o sistema (1) e a matriz de autovetores esquerdos W de A , os vetores f_i são calculados usando (20). Está implícito, entretanto, que o primeiro autovalor a ser

alocado, usando f_i , será aquele que estiver mais próximo do autovalor de malha aberta correspondente ao autovetor esquerdo w_i de W . Seguindo assim até λ_n , a matriz K é calculada usando (11).

Os passos a seguir para obter K com norma reduzida são :

- 1) Obter os autovalores e correspondentes autovetores esquerdos do sistema
- 2) Definir os vetores f_i como em (20)
- 3) Ordenar os autovalores de malha fechada λ_i de modo que cada um deles esteja o mais próximo possível dos autovalores de malha aberta γ_i correspondentes aos autovetores esquerdos w_i usados para compor f_i em 2) .
- 4) Calcular K usando (11).

2.1.4 ALGORITMO II

O algoritmo visto acima mostrou características bastante interessantes para alocação de pólos. Uma das restrições do método, no entanto, é o fato de não ser aplicável diretamente quando deseja-se alocar apenas um conjunto de pólos. Uma possível solução é adicionar apenas uma pequena perturbação aos autovalores que não se deseja modificar, de forma que eles fiquem praticamente nas mesmas posições. Porém, se o sistema em estudo for de grandes dimensões, estar-se-á efetuando muito trabalho desnecessário, uma vez que para cada pólo alocado calcula-se a inversa de uma matriz de ordem n .

Em [40], a decomposição de Schur é utilizada para alocação de pólos, onde é destacada a estabilidade numérica deste tipo de procedimento. Propõe-se aqui a utilização da decomposição de Schur em

conjunto à alocação de pólos estudada. Isto permite alocar subconjuntos de pólos operando sobre blocos da matriz do sistema original transportada para outra base (via transformação de Schur). Desta forma, além da alocação parcial de pólos, pode-se resolver problemas em sistemas mal condicionados. O algoritmo é agora apresentado com detalhes.

Seja o sistema (1) de ordem n , no qual deseja-se alocar r pólos. Efetua-se a decomposição de Schur da matriz A , calculando a matriz ortonormal Q que permite obter

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{A}_2 \\ 0 & \bar{A}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^T & Q_3^T \\ Q_2^T & Q_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{bmatrix} \quad (25.1)$$

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^T & Q_3^T \\ Q_2^T & Q_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \quad (25.2)$$

onde $\bar{A}_1$ ($n-r \times n-r$), $\bar{A}_2$ ($n-r \times r$), $\bar{A}_3$ ($r \times r$), $\bar{E}_1$ ($n-r \times m$) e $\bar{E}_2$ ($r \times m$).

Definindo uma nova variável z para a nova base de A como

$$z(k) = Q^T x(k) \quad (26)$$

surge o sistema na nova base dado por

$$\begin{bmatrix} z_1(k+1) \\ z_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{A}_2 \\ 0 & \bar{A}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \end{bmatrix} u(k) \quad (27)$$

Nesta nova base, os autovalores de $\bar{A}$, que são iguais aos de A , são dados pelo conjunto dos autovalores de $\bar{A}_1$ mais os de $\bar{A}_3$. Ainda, z_2

forma um subsistema independente de z_4 . Define-se então o sistema reduzido $\bar{x}$ de ordem r

$$\bar{x}(k+1) = \bar{A}_3 \bar{x}(k) + \bar{B}_2 u(k) \quad (28)$$

cuja relação com (27) é

$$\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} 0 & I_r \end{bmatrix} z(k) \quad (29)$$

Usando o algoritmo já visto, calcula-se a matriz de realimentação K_r (rxm) tal que $[\bar{A}_3 - \bar{B}_2 K_r]$ tenha os pólos desejados. Esta realimentação significa aplicar uma entrada

$$u(k) = -K_r \bar{x}(k) \quad (30)$$

ao sistema (29). Usando (29), aplica-se este controle ao sistema dado por (27), obtendo

$$\bar{A}_r = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{A}_2 \\ 0 & \bar{A}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_r \end{bmatrix} K_r$$

ou

$$\bar{A}_r = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{A}_2 - \bar{B}_1 K_r \\ 0 & \bar{A}_3 - \bar{B}_2 K_r \end{bmatrix} \quad (31)$$

Portanto, o controle projetado para alocar os pólos de $\bar{A}_3$ não modifica os pólos de $\bar{A}_1$. Este controle para o sistema (1), é obtido usando (30), (29) e (26) e dá

$$u(k) = -K_r \begin{bmatrix} Q_2^T & Q_4^T \end{bmatrix} x(k) \quad (32)$$

Em resumo , o procedimento para alocar r pólos de (1) consiste em:

- 1) Fazer a decomposição de Schur da matriz A de (1), de modo que os r pólos que devem ser modificados fiquem na submatriz $\bar{A}_g$.
- 2) Alocar os pólos de $\bar{A}_g$ utilizando o algoritmo de alocação visto na seção 2.1.1 .
- 3) Usando (32), calcular o controle que deve ser aplicado ao sistema original para obter a alocação de pólos desejada.

Seguindo estes passos, não se faz necessário inverter uma matriz de ordem n , mas sim, outra de ordem r em geral com $r \ll n$. Ainda, esta matriz de ordem r é triangular, cuja inversa é calculada facilmente fazendo

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & M_g \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} M_1^{-1} & -M_1^{-1} M_2 M_g^{-1} \\ 0 & M_g^{-1} \end{bmatrix} \quad (33)$$

A obtenção da forma de Schur não significa uma operação a mais no processo de alocação de pólos, uma vez que se constitui em um procedimento comum para a obtenção dos autovalores da matriz A , os quais ,por sua vez, devem ser conhecidos para que o processo de alocação seja efetuado.

2.2 REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA

A realimentação de saída é mais simples de ser implementada, dada a total disponibilidade das saídas . No entanto, paga-se o preço de não se poder alocar os n pólos do sistema, como na realimentação de estados. Devem ser usadas, neste caso, estratégias especiais para realimentação, de modo que os pólos não alocados se mantenham em posições adequadas. Aplicando uma realimentação de saídas como (2.2) em (1), obtém-se

$$x(k+1) = (A - BK C) x(k) \quad (34)$$

2.2.1 ALGORITMO

Emprega-se aqui uma versão do algoritmo estudado na seção 2.1.1 para efetuar alocação de pólos por realimentação de saída [10]. É sabido [17] que com este tipo de realimentação pode-se alocar no máximo p pólos, onde p é o posto da matriz de saída.

Os autovalores do sistema com realimentação de saída são raízes de

$$P_f(\lambda) = \det [\lambda I_n - A + BK_s C] = 0 \quad (35)$$

Efetuando o mesmo tipo de manipulações que foram feitas para o primeiro algoritmo, chega-se a

$$P_f(\lambda) = P_a(\lambda) \det [I_m + K_s C(\lambda I_n - A)^{-1} B] \quad (36)$$

Define-se

$$\alpha(\lambda) = C (\lambda I_n - A)^{-1} B \quad (37)$$

Então, o número de colunas linearmente independentes que podem ser encontradas na matriz $(p \times mp)$

$$[\alpha(\lambda_1) \alpha(\lambda_2) \dots \alpha(\lambda_p)]$$

nunca excederá a p , o posto da matriz C . Como o par $[A, B]$ é controlável e C tem posto completo $p \leq n$, pode-se alocar p pólos para outras posições desejadas.

Por semelhança a (11), tem-se a matriz de realimentação de saída dada por

$$K_s = [f_1 \ f_2 \dots f_p] [\alpha(\lambda_1)f_1 \ \alpha(\lambda_2)f_2 \ \dots \ \alpha(\lambda_p)f_p]^{-1} \quad (38)$$

Da mesma forma que para realimentação de estado, tem-se

$$(\lambda_i I_n - A)^{-1} B f_i = v_i \quad i=1,2,\dots,p$$

como sendo os autovetores de malha fechada. Os $(n-p)$ pólos restantes e seus correspondentes autovetores assumirão novos valores desconhecidos. Usando (15), pode-se alocar os p autovetores desejados com uma aproximação que depende do número de entradas do sistema.

2.2.2 ESCOLHA DOS PÓLOS A ALOCAR

Na realimentação de saída, a situação ideal seria alocar p pólos para novas posições, deixando os pólos restantes inalterados. No entanto, quanto os $(n-p)$ autovalores serão movidos de suas posições é algo que depende exclusivamente da matriz de saída do sistema. Analisar-se-á como isto ocorre, de modo a buscar estratégias que permitam alocar p pólos por realimentação de saída alterando o mínimo possível o restante dos pólos.

Seja o sistema (1) na sua forma modal (17) reescrito abaixo .

$$\begin{bmatrix} z_1(k+1) \\ z_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} u(k) \quad (39)$$

Um controle usando as saídas como (2.2) aplicado a (39) com

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \end{bmatrix}$$

$$C = [C_1 \quad C_2]$$

fornece

$$\begin{bmatrix} z_1(k+1) \\ z_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} K C V \begin{bmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} z_1(k+1) \\ z_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 - P_1 K_s \phi_1 & -P_1 K_s \phi_2 \\ -P_2 K_s \phi_1 & J_2 - P_2 K_s \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \end{bmatrix} \quad (40)$$

onde

$$\phi_1 = C_1 V_1 + C_2 V_3 \quad (41.1)$$

$$\phi_2 = C_1 V_2 + C_2 V_4 \quad (41.2)$$

De (41.1) observa-se que a matriz C sendo ortogonal ao conjunto

de autovetores $[V_1^T \ V_3^T]^T$, tem-se $\phi_1=0$ e a matriz de realimentação K_s modifica apenas os pólos do bloco de Jordan J_2 . Se, por outro lado C for ortogonal a $[V_2^T \ V_4^T]^T$, então $\phi_2=0$ e apenas os autovalores do bloco J_1 são modificados . Qualquer destas condições corresponde a um sistema não observável, sendo uma condição buscada quando se procura uma matriz de agregação para reduzir a ordem de um sistema [8]. Nenhuma das duas condições acima é normalmente obtida. Entretanto, de (40) observa-se que, ordenando os autovetores de V de modo que ϕ_1 tenha a máxima norma possível e ϕ_2 a mínima norma , os autovalores do bloco J_1 receberão uma influência muito maior de K_s do que os do bloco J_2 . Para fazer esta ordenação dos autovetores, multiplica-se a matriz de saída pela matriz de autovetores, resultando

$$C V = [m_1 \ m_2 \ \dots \ m_n] \quad (42)$$

Os vetores m_i de C que têm maior norma correspondem aos autovalores que recebem maior influência da realimentação de saída, e portanto, devem ser escolhidos para serem alocados. Usando este critério, atua-se sobre os autovalores mais fortemente associados às saídas, e que portanto, exigirão menor esforço para serem alocados. Os autovalores restantes, por estarem mais fracamente relacionados às saídas, receberão pouca influência do controle projetado e portanto, não modificarão muito suas posições no plano complexo.

CAPITULO 3

REDUÇÃO DE ORDEM DE SISTEMAS DISCRETOS

Os métodos de redução de ordem de sistemas estudados neste trabalho são os derivados das teorias da agregação modal e da separação temporal. Trata-se de duas abordagens com enfoques diferentes mas que são semelhantes no contexto de redução de sistemas, com a segunda sendo considerada uma extensão da primeira [12].

Os dois métodos são estudados separadamente e ao final é estabelecida a relação existente entre ambos.

3.1 AGREGAÇÃO MODAL

Agregar um sistema significa, basicamente, fazer a projeção de um determinado espaço de estados em outro subespaço de menor dimensão. Este subespaço de menor ordem não pode, contudo, ser escolhido arbitrariamente. Deve, isto sim, envolver um conjunto de informações do sistema original que tenham uma certa coerência a fim de que o modelo reduzido se assemelhe ao original.

Ao escolher-se o subconjunto do vetor de estados que será projetado no sistema de menor ordem, deve-se incorporar nele estados que apresentem forte interação entre si e pequena interação para com os demais estados não retidos no subconjunto. Isto assegurará que as trajetórias dos estados do sistema reduzido serão o mais próximas

possível das trajetórias correspondentes no sistema original.

Uma forma de avaliar a interação entre os estados consiste em fazer uma análise modal do sistema. Esta análise revela a presença ou não de modos lentos e rápidos. Se ambos existirem, pode-se em geral desprezar os modos rápidos e representar um conjunto de estados lentos em função apenas dos modos lentos. Ou seja, nestes casos o efeito dos modos rápidos será significativo apenas durante o início do transitório, podendo ser desprezado.

3.1.1 CONDIÇÕES PARA AGREGAÇÃO EXATA

Nesta seção é estudada a teoria desenvolvida por Arbel e Tse [8], a qual fundamenta os métodos de redução por agregação e permite entendê-los com maior facilidade .

Seja o sistema dinâmico descrito por

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (1.1)$$

$$y(k) = Dx(k) \quad (1.2)$$

onde $x(k)$, $u(k)$ e $y(k)$ são $n \times 1$, $m \times 1$ e $p \times 1$ respectivamente e as matrizes A , B e D têm dimensões apropriadas. Supõe-se que o sistema descrito por (1) é controlável e que os valores de x estão disponíveis. Deseja-se descrever o comportamento no tempo de

$$z(k) = Cx(k) \quad (2)$$

onde C é a matriz de agregação $1 \times n$ ($1 < n$) e o vetor z (1×1) é chamado agregação de x . Supõe-se que

$$\text{posto}(C) = 1 \quad (3)$$

O sistema agregado será descrito por

$$z(k+1) = Fz(k) + Gu(k) \quad (4)$$

Estabelecer-se-ão agora as condições sobre F e G para que $z(k)$ satisfaça (4). Multiplicando (1.1) por C

$$Cx(k+1) = CAx(k) + CBu(k) \quad (5)$$

Substituindo agora (2) em (4), tem-se

$$Cx(k+1) = FCx(k) + Gu(k) \quad (6)$$

Comparando (5) e (6) obtêm-se as condições

$$FC = CA \quad (7)$$

$$G = CB \quad (8)$$

A equação (8) não apresenta problemas. A dificuldade está em encontrar uma matriz C tal que a condição (7) seja satisfeita. Definindo um vetor erro como $e(k) = z(k) - Cx(k)$, seu comportamento no tempo será dado por $e(k+1) = Fe(k) + (FC - CA)x(k) + (G - CB)u(k)$, o que se reduz a $e(k+1) = Fe(k)$ se (7) e (8) forem satisfeitas. Portanto, se $e(0) = 0$, então $e(k) = 0$ para todo $k > 0$ e, se $e(0) \neq 0$ mas F for a matriz de um sistema estável, então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = 0$$

Verifica-se agora que condições são impostas sobre C , para A qualquer, afim de que a condição (7) seja satisfeita. O seguinte resultado é conhecido e será apresentado sem prova.

Lema 1

Um sistema de equações lineares dado por $Ax=b$, onde $x \in \mathbb{R}^l$, $b \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$, tem solução para x se e somente se o vetor b estiver no espaço imagem das colunas da matriz A . Se além disso $\text{posto}(A)=1 < n$, então $Ax=b$ terá uma única solução para x .

Com este resultado pode-se especificar a condição para solvabilidade de (7).

Teorema 1 [8]

Uma condição necessária e suficiente para $FC=CA$ ter solução única para F é que $\text{Im}(A^T C^T) \subseteq \text{Im}(C^T)$. Se, em adição, $\text{posto}(C)=\text{posto}(CA)=1$ então

$$\text{Im}(A^T C^T) = \text{Im}(C^T) \quad (9)$$

ou, de forma equivalente,

$$\mathcal{N}(C) = \mathcal{N}(CA) \quad (10)$$

onde $\text{Im}(\cdot)$ e $\mathcal{N}(\cdot)$ são os espaços imagem e nulo, respectivamente.

Prova

Seja

$$(CA)^T = [\alpha_1 | \alpha_2 | \dots | \alpha_l], \quad \alpha_i \in \mathbb{R}^n \quad (11)$$

$$F^T = [f_1 | f_2 | \dots | f_l], \quad f_i \in \mathbb{R}^l \quad (12)$$

Transpondo $FC=CA$ vem

$$C^T f_i = \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq l \quad (13)$$

o qual, pelo lema 1, terá uma única solução para f_i , e portanto F , se e somente se $\alpha_i \in \text{Im}(C^T)$ e $\text{posto}(C^T)=l$. Supõe-se que a matriz de agregação C é de posto completo, e portanto, $FC=CA$ terá solução única para F se e somente se

$$\text{Im}(A^T C^T) \subseteq \text{Im}(C^T) \quad (14)$$

Contudo, se $\text{posto}(A^T C^T)=l$, então ele gera o subespaço de dimensão l e cada linha de C pode ser expressa como uma combinação linear das linhas de CA , portanto

$$\text{Im}(C^T) \subseteq \text{Im}(A^T C^T) \quad (15)$$

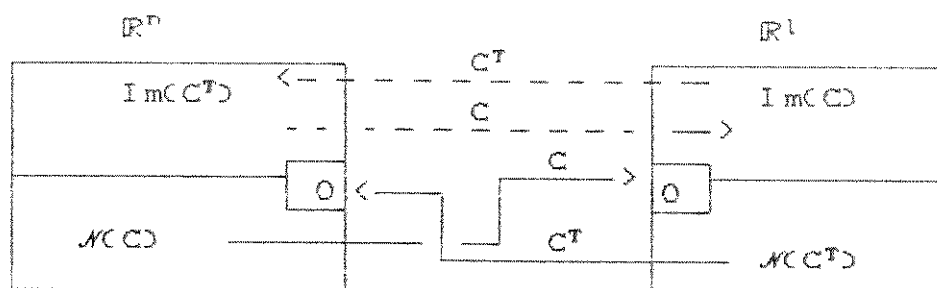
do qual segue que

$$\text{Im}(C^T) = \text{Im}(A^T C^T)$$

ou, de forma equivalente,

$$\mathcal{N}(C) = \mathcal{N}(CA) .$$

Isto pode ser visto facilmente na figura abaixo.



Corolário 1

Se a matriz A ($n \times n$) for não singular, então uma condição

suficiente e necessária para a solvabilidade de $FC=CA$ é dada por

$$K(C) = K(CA)$$

Prova

Uma vez que a matriz A é não singular e a matriz C é suposta ser de posto completo, então

$$\text{posto}(CA) = 1 \quad (16)$$

Então usando o teorema 1, o resultado segue.

Corolário 2

Se as condições no teorema 1 forem satisfeitas, então a única solução, F , para $FC=CA$ é dada por

$$F = CAC^T(CCT)^{-1} \quad (17)$$

Prova

A equação matricial $FC=CA$ pode ser transposta e resolvida coluna por coluna, portanto, usando as definições em (11) e (12), resulta

$$C^T f_i = \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq l \quad (18)$$

A solução por mínimos quadrados dada em (17) minimizará

$$\|C^T f_i - \alpha_i\|^2 \quad (19)$$

Porém, uma vez que as condições do teorema 1 sejam satisfeitas, a solução de (18) será exata e, portanto, o erro em (19) será zero.

Até aqui, as condições para solvabilidade de $FC=CA$ foram desenvolvidas. Mostrar-se-á agora que, dada uma matriz A , existe uma matriz C para a qual a condição (7) é satisfeita.

Proposição 1 [8]

Uma condição suficiente para $\mathcal{N}(C) = \mathcal{N}(CA)$ ser verdadeiro para uma matriz A não singular, é que as linhas da matriz C $l \times n$ sejam combinações lineares de l autovetores esquerdos da matriz A .

Prova

A matriz C $l \times n$ é suposta ser dada por

$$C = T W_1 \quad (20)$$

onde

T é uma matriz $l \times l$ não singular

W_1 é uma matriz $l \times n$ de autovetores esquerdos

Tem-se que

$$W_1 A = J_1 W_1 \quad (21)$$

e

$$J_1 = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l) \quad (22)$$

Por definição

$$\mathcal{N}(C) \triangleq \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Cx = 0_l \} \quad (23)$$

$$\mathcal{N}(CA) \triangleq \{ x \in \mathbb{R}^n \mid CAx = 0_l \} \quad (24)$$

Como $|J_1| \neq 0$ para uma matriz A não singular, tem-se

$$\mathcal{N}(CA) \triangleq \{ x \in \mathbb{R}^n \mid T W_1 A x = 0_l \} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid T J_1 W_1 x = 0_l \} \quad (25)$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n \mid TW_1 x = 0_1\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx = 0_1\}$$

portanto

$$\mathcal{N}(CA) \subset \mathcal{N}(C) \quad (26)$$

Mas

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(C) &\triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \mid TW_1 x = 0_1\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid TJ_1 W_1 x = 0_1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid TW_1 Ax = 0_1\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid CAx = 0_1\} \end{aligned} \quad (27)$$

assim

$$\mathcal{N}(C) \subset \mathcal{N}(CA) \quad (28)$$

e de (26) vem

$$\mathcal{N}(C) = \mathcal{N}(CA)$$

Corolário 3

Quando $C = TW_1$ a única solução para $FC = CA$ é dada por

$$F = TJ_1 T^{-1} \quad (29)$$

Prova

Do corolário 2 é sabido que a única solução para $FC = CA$ é dada por (17), quando todas condições do teorema 1 forem satisfeitas.

Usando

$$C = TW_1$$

$$W_1 A = J_1 W_1$$

em (17), encontra-se

$$\begin{aligned} F &= CAC^T(CC^T)^{-1} = TW_1 A W_1^T T^T (TW_1 W_1^T T^T)^{-1} \\ &= TJ_1 W_1 W_1^T T^T (T^T)^{-1} (W_1 W_1^T)^{-1} T^{-1} \end{aligned}$$

portanto

$$F = TJ_1T^{-1}$$

Fica óbvio , devido à transformação de similaridade entre F e J_1 , que qualquer que seja a matriz de transformação T ($l \times l$) , a matriz F terá os mesmos autovalores que os associados com os autovetores que geram o subespaço linha da matriz de agregação C .

3.1.2 ANÁLISE MODAL DO SISTEMA

Na agregação modal os modelos reduzidos são obtidos via análise modal do sistema, ou seja, através do conhecimento dos autovalores e autovetores do sistema. Como os autovetores formam subespaços invariantes para a matriz do sistema, eles são muito úteis para uma formulação que leva à obtenção da matriz de agregação e dos modelos reduzidos a ela associados.

É feita agora uma análise modal do sistema , necessária para a obtenção dos modelos reduzidos que serão estudados a seguir.

Dado o sistema dinâmico descrito por (1), pode-se particioná-lo como

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(k) \quad (30)$$

onde $x_1(k)$ é o vetor de estados $l \times 1$ a ser retido no modelo reduzido e $x_2(k)$ $(n-l) \times 1$ é o vetor a ser eliminado. Procura-se um modelo reduzido

de dimensão 1 ($1 < n$) na forma de (4). Define-se

$$V = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{bmatrix} \quad (31)$$

como a matriz modal cujos vetores coluna são os autovetores direitos de A e

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_3 & W_4 \end{bmatrix} \quad (32)$$

como a inversa de V cujos vetores linha são os autovetores esquerdos de A. É sabido que

$$V \cdot W = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_3 & W_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & I_{n-l} \end{bmatrix} \quad (33)$$

Também é sabido que

$$\begin{array}{l} \lambda_1 v_1 = A v_1 \\ \lambda_2 v_2 = A v_2 \\ \vdots \\ \lambda_n v_n = A v_n \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix}^{-1} A \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} \quad (34)$$

Arranjando as colunas de V da esquerda para a direita em ordem decrescente de dominância dos correspondentes autovalores de A, e usando esta matriz como a transformação de similaridade

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(k) \\ \tilde{x}_2(k) \end{bmatrix} \quad (35)$$

o sistema (30) é convertido para a forma de Jordan

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1(k+1) \\ \tilde{x}_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(k) \\ \tilde{x}_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} u(k) \quad (36)$$

onde

$$J_1 = W_1(A_1V_1 + A_2V_3) + W_2(A_3V_1 + A_4V_3) \quad (37)$$

$$J_2 = W_3(A_1V_2 + A_2V_4) + W_4(A_3V_2 + A_4V_4) \quad (38)$$

$$P_1 = W_1B_1 + W_2B_2 \quad (39)$$

$$P_2 = W_3B_1 + W_4B_2 \quad (40)$$

O bloco J_1 contém os autovalores lentos ao passo que o bloco J_2 contém os rápidos. Isto pode ser verificado pelos elementos que compõem cada bloco nas equações (37) e (38), ou pela equação (34), onde percebe-se a forma segundo a qual o arranjo das colunas dos autovetores modifica a posição dos autovalores nos blocos de Jordan.

Conforme mostra a equação (36), os blocos J_1 e J_2 não interferem entre si. No caso de autovalores repetidos, deve-se tomar o cuidado de não repartir um bloco de Jordan entre $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$, de forma a evitar a interação.

3.1.3 MÉTODO I

Este método de redução foi desenvolvido em duas abordagens diferentes por Marshall [9] e por Chidambara [2]-[4]. Wilson e outros [7] aplicaram o método para sistemas discretos.

Neste método o erro de regime é nulo para entradas constantes. Supõe-se que os modos rápidos não têm transitório, reagindo instantaneamente à entrada.

Da equação (30) obtém-se

$$x_1(k+1) = A_1 x_1(k) + A_2 x_2(k) + B_1 u(k) \quad (41)$$

De (33) e (35) deriva-se uma expressão para x_2 em função de x_1 e $\tilde{x}_2$:

$$x_2(k) = W_4^{-1} \tilde{x}_2(k) - W_4^{-1} W_3 x_1(k) \quad (42)$$

Pela suposição feita, $\tilde{x}_2$ responde instantaneamente e tem-se $\tilde{x}_2(k+1) = \tilde{x}_2(k)$. De (36) tem-se que

$$\begin{aligned} \tilde{x}_2(k+1) &= J_2 x_2(k) + P_2 u(k) = \tilde{x}_2(k) \\ \tilde{x}_2(k) &= (I_{n-1} - J_2)^{-1} P_2 u(k) \end{aligned} \quad (43)$$

Substituindo (43) em (42) :

$$x_2(k) \simeq W_4^{-1} (I_{n-1} - J_2)^{-1} P_2 u(k) - W_4^{-1} W_3 x_1(k) \quad (44)$$

Substituindo agora (44) em (41)

$$x_1(k+1) \simeq (A_1 - A_2 W_4^{-1} W_3) x_1(k) + (B_1 + A_2 W_4^{-1} (I_{n-1} - J_2) P_2) u(k) \quad (45)$$

Definindo $z(k)$ como o vetor de estados do modelo reduzido (uma aproximação de $x_1(k)$), tem-se

$$z(k+1) = Fz(k) + Gu(k)$$

onde

$$F = A_1 - A_2 W_4^{-1} W_3 = A_1 + A_2 V_3 V_1^{-1} \quad (45)$$

$$G = B_1 + A_2 W_4^{-1} (I_{n-1} - J_2)^{-1} P_2 \quad (47)$$

3.1.4 MÉTODO II

Neste método de redução, devido a Davison [1] e aplicado para sistemas discretos por Wilson e outros [7], os modos do modelo de ordem reduzida são excitados na mesma proporção relativa que são excitados no modelo original. Supõe-se aqui que a contribuição dos modos rápidos para a resposta do sistema pode ser desprezada. Isto ocasiona um erro de regime para entradas constantes entre a resposta do modelo original e o reduzido.

A solução forçada de (30) considerando $x(0)=0$ e $z(k)$ como a aproximação de $x_1(k)$ é

$$\begin{bmatrix} z(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \sum_{t=0}^{k-1} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) \quad (48)$$

Como $A = V \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} W$, pode-se escrever

$$\begin{bmatrix} z(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = V \sum_{t=0}^{k-1} \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}^t W \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) \quad (49)$$

Desprezando a influência dos modos rápidos, ou seja, fazendo $J_2=0$.

$$\begin{bmatrix} z(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_3 \end{bmatrix} \sum_{t=0}^{k-1} J_1^t \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) \quad (50)$$

Definindo um vetor $\alpha(1 \times 1)$ como

$$\alpha = \sum_{t=0}^{k-1} J_1^t \begin{bmatrix} W_1 B_1 + W_2 B_2 \end{bmatrix} u(t) \quad (51)$$

e usando (50), (49) se reduz a

$$\begin{bmatrix} z(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_3 \end{bmatrix} \alpha \quad (52)$$

ou

$$\alpha = V_1^{-1} z(k) \quad (53)$$

$$x_2(k) = V_3 V_1^{-1} z(k) \quad (54)$$

Para obter F e G de (4) faz-se :

1 $\Rightarrow u(k)=0$ em (11) trocando $x_1(k)$ por $z(k)$

$$z(k+1) = A_1 z(k) + A_2 V_3 V_1^{-1} z(k)$$

$$z(k+1) = (A_1 + A_2 V_3 V_1^{-1}) z(k)$$

Logo,

$$F = A_1 + A_2 V_3 V_1^{-1} \quad (55)$$

2 $\Rightarrow x(0)=0$ em (1) e em (4)

De (50) (sistema original)

$$z(k) = V_1 \sum_{t=0}^{k-1} \left[J_1^t (W_1 B_1 + W_2 B_2) \right] u(t) \quad (56)$$

De (4) (sistema reduzido)

$$z(k) = \sum_{t=0}^{k-1} \left[F^t G u(t) \right] \quad (57)$$

Obter-se-á agora uma expressão para F como função de W e J_1 . De (55)

$$F = A_1 + A_2 V_2 V_1^{-1}$$

De $A = V J W$ tem-se que

$$A_1 = V_1 J_1 W_1 + V_2 J_2 W_3$$

$$A_2 = V_1 J_1 W_2 + V_2 J_2 W_4$$

Substituindo A_1 e A_2 na expressão de F , tem-se :

$$F = V_1 J_1 V_1^{-1} \quad (58)$$

Substituindo agora (58) em (57)

$$z(k) = V_1 \sum_{t=0}^{k-1} \left[J_1^t V_1^{-1} G u(t) \right] \quad (59)$$

Comparando os somatórios (59) e (56)

$$J_1^t V_1^{-1} G = J_1^t (W_1 B_1 + W_2 B_2)$$

$$G = V_1 (W_1 B_1 + W_2 B_2) \quad (60)$$

3.1.5 MÉTODO III

Em [2]-[4] são encontradas discussões muito interessantes sobre os dois métodos apresentados acima. O primeiro método fornece um modelo sem erro de regime para entradas constantes, porém os modos não são excitados na mesma proporção que no modelo original. No modelo obtido pelo segundo método os modos são excitados na mesma proporção, porém há um erro de regime para entradas constantes. Em [5], é feita uma modificação no segundo método de forma que ele não apresente erro em regime para entrada constante. O resultado é dirigido a sistemas contínuos mas é feito aqui seu desenvolvimento para sistemas discretos.

Para que $z(k)$ em (4), com F e G dadas por (55) e (60), respectivamente, e $x_1(k)$ em (30) apresentem mesmos valores em condições de regime, compara-se os dois sistemas nestas condições. Para o sistema (30), em regime com entrada constante, pode-se afirmar que $x(k+1)=x(k)$. Portanto, de (30)

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = (I_n - A)^{-1} B u(k) \quad (61)$$

$$\triangleq \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} u(k) \quad (62)$$

Para o modelo reduzido (4), analogamente $z(k+1)=z(k)$, e de (4) para as mesmas condições

$$z(k) = (I_1 - F)^{-1} G u(k) \quad (63)$$

$$\triangleq U u(k) \quad (64)$$

Comparando (62) com (64), observa-se que $z(k)$ e $x_1(k)$ terão mesmos valores em regime se Q_1 for igual a U .

É definida então uma nova variável

$$z^*(k) = M z(k) = M U u(k) \quad (65)$$

Se M for escolhido de modo que se tenha

$$M U = Q_1 \quad (66)$$

então ter-se-á $x_1(k) = z^*(k)$ nas condições de regime descritas. Usando (65), (32) e (60), (4) pode ser reescrita como

$$z^*(k+1) = F^* z(k) + G^* u(k) \quad (67)$$

onde

$$F^* = M F M^{-1} = M V_1 J_1 V_1^{-1} M^{-1} \quad (68.1)$$

$$G^* = M G = M V_1 [W_1 \ W_2] B \quad (68.2)$$

A matriz M de (66) é uma matriz diagonal da forma

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_l \end{bmatrix}$$

onde

$$m_l = \frac{\sum_{j=0}^r Q_{1lj}}{\sum_{j=0}^r U_{lj}}$$

$$m_l = 1$$

$$\text{se } \sum_{j=0}^r U_{lj} \neq 0 \quad (68.1)$$

$$\text{se } \sum_{j=0}^r U_{lj} = 0 \quad (68.2)$$

3.1.6 MATRIZ DE AGREGAÇÃO

Uma vez obtidos os modelos reduzidos, é necessário encontrar a matriz de agregação C , a qual representa a relação algébrica entre o modelo original e o modelo reduzido. Sem esta matriz não é possível, por exemplo, aplicar no sistema original um controle projetado para o sistema reduzido.

Inicia-se com o modelo do método 2, dado por (55) e (60). De acordo com o corolário 3 da seção 3.1.1, foi visto que para C dada por (20), F seria dada por (29) para qualquer matriz T não singular. De (58), observa-se que $T=V_1$ em (20) faz (29) igual a (58). Observa-se ainda que, C dada desta forma, permite obter (60). Portanto, para este método, F e G são obtidas de (17) e (8) respectivamente, usando

$$C_2 = V_1 [W_1 \ W_2] \quad (70)$$

No método 3 a matriz de agregação pode ser obtida usando o desenvolvimento feito para o método 2, uma vez que é feita apenas uma troca de variáveis entre os dois métodos. Portanto, de (2) e (65), pode-se escrever que

$$z^* = M z = M C_2 x$$

e

$$C_3 = M C_2 \quad (71)$$

No método 1, a matriz F é igual à obtida no método 2, portanto pode-se usar a mesma matriz de agregação obtida para este para calcular F usando (17). No entanto, C dada por (70) não permite obter (47). A equação (47) pode ser reescrita como

$$G = [I_1 + A_2 W_4^{-1} (I_{n-1} - J_2)^{-1} W_3 \quad A_2 W_4^{-1} (I_{n-1} - J_2)^{-1} W_4] B$$

Comparando esta equação a (8), nota-se que para obter G dado por (47) C deveria ser dada por

$$C = [I_1 + A_2 W_4^{-1} (I_{n-1} - J_2)^{-1} W_3 \quad A_2 W_4^{-1} (I_{n-1} - J_2)^{-1} W_4] \quad (72)$$

Observa-se que C dada por (72) é função de W_3 e W_4 , que são os autovetores correspondentes aos autovalores não retidos no modelo reduzido. Isto é esperado, pois este método de redução inclui no modelo reduzido o efeito dos modos não retidos. O resultado disto, é que não é possível encontrar, para este método, uma matriz de agregação que seja combinação linear de $[W_1 \ W_2]$ apenas, o que permitiria utilizar os resultados já desenvolvidos na seção 3.1.1. Assim, para este método, não é possível encontrar uma matriz de agregação que forneça F e G usando (17) e (8), respectivamente.

3.1.7 ERRO DE REGIME DOS MODELOS

Na seção 3.1.3 afirmou-se que o método 1 não possuía erro de regime para entradas constantes e em 3.1.4 afirmou-se que o método 2 apresentava erro para as mesmas condições. Isto é agora analisado com mais detalhes.

A resposta do sistema original (30) em regime é obtida fazendo $x(k+1)=x(k)$, o que dá

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = (I_n - A)^{-1} B u(k) \quad (73)$$

Usando (34), (39) e (40), (73) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1(I_1 - J_1)^{-1} & V_2(I_{n-1} - J_2)^{-1} \\ V_3(I_1 - J_1)^{-1} & V_4(I_{n-1} - J_2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} u(k)$$

Portanto, a resposta de $x_1(k)$, o conjunto de estados a ser retido, é dada por

$$x_1(k) = V_1(I_1 - J_1)^{-1} P_1 u(k) + V_2(I_{n-1} - J_2)^{-1} P_2 u(k) \quad (74)$$

Para o modelo obtido pelo método 2, a resposta em regime é obtida de (4) fazendo $z(k+1)=z(k)$. Logo,

$$z(k) = (I_1 - F)^{-1} G u(k) \quad (75)$$

Usando (58) e (60), a expressão acima pode ser reescrita como

$$z(k) = V_1 (I_1 - J_1)^{-1} P_1 u(k) \quad (76)$$

Portanto, percebe-se claramente que a contribuição dos modos contidos em J_2 não é incluída na resposta do sistema. O erro em regime pode ser obtido subtraindo (76) de (74), o que dá

$$E = V_2 (I_{n-1} - J_2)^{-1} P_2 u(k) \quad (77)$$

Uma avaliação de (77) pode auxiliar no momento da escolha dos autovalores a serem eliminados do sistema. Através dela observa-se, que se elementos das matrizes V_2 e P_2 forem significativos, talvez o modo ou os modos correspondentes a estes valores devam ser retidos no modelo, uma vez que poderiam causar erros significativos na resposta em regime. Isto será analisado com detalhes mais adiante.

Obtém-se agora uma expressão para a resposta em regime no modelo dado pelo método 1. Usando (58) e (47) em (75), vem

$$(I_1 - F)^{-1} = V_1 (I_1 - J_1)^{-1} V_1^{-1} \quad (78)$$

$$G = [B_1 + A_2 W_4^{-1} (I_{n-1} - J_2)^{-1} P_2] \quad (79)$$

Com (35) obtém-se

$$B_1 = V_1 P_1 + V_2 P_2 \quad (80)$$

e de (34) pode-se escrever que

$$A_2 = V_1 J_1 W_2 + V_2 J_2 W_4 \quad (81)$$

Usando (80) e (81) em (79) e lembrando que, de (33)

$$W_2 W_4^{-1} = -V_1^{-1} V_2$$

é obtida uma nova expressão para G , dada por

$$G = [V_1 (I_1 - V_1 J_1 V_1^{-1}) V_2 (I_{n-1} - J_2)] P \quad (82)$$

Substituindo (78) e (82) em (75) vem

$$z(k) = [V_1(I_1 - J_1)^{-1} \quad V_2(I_{n-1} - J_2)^{-1}] P u(k) \quad (83)$$

que é exatamente igual à expressão (74) desenvolvida para o sistema original nas mesmas condições. Portanto, o desenvolvimento acima mostrou que para condições de regime ,com entrada constante, o modelo em estudo não apresenta erro.

Para o modelo obtido via método 3 também não há erro em condições de regime. Isto não precisa ser provado , pois o próprio desenvolvimento do modelo foi feito visando esta característica.

3.1.8 ESCOLHA DOS MODOS A RETER NOS MODELOS REDUZIDOS

Nos métodos de redução estudados considerou-se que os modos lentos seriam retidos no modelo reduzido e os modos rápidos eliminados. Esta escolha deve-se ao fato de que em geral os modos lentos têm maior influência sobre a resposta do sistema tanto no transitório quanto em condições de regime. Porém, nem sempre isto é verdadeiro e seria interessante que se pudesse verificar a influência de cada modo tanto em regime quanto no transitório, afim de decidir sobre quais modos devem ser retidos para que o modelo reduzido tenha um determinado comportamento. Vários trabalhos já foram publicados neste sentido [22]-[28], em geral para sistemas contínuos .

São desenvolvidas aqui expressões baseadas na resposta do sistema tanto em regime como no transitório , que permitem fazer uma análise quantitativa da influência de cada modo sobre cada estado que se deseja reter no modelo reduzido.

Seja o sistema (1), inicialmente em repouso. Sua resposta a uma entrada $u(k)$ é dada por

$$x(k) = \sum_{t=0}^{k-1} A^t B u(t) \quad (84)$$

Usando (34), (84) pode ser reescrita como

$$x(k) = V \sum_{t=0}^{k-1} J^t \bar{B} u(t) \quad (85)$$

onde

$$\bar{B} = V^{-1} B$$

$$J = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

Pode-se desenvolver os termos de (85) , o que dá

$$x(k) = V \bar{B} u(0) + V J \bar{B} u(1) + V J^2 \bar{B} u(2) + \dots + V J^{k-1} \bar{B} u(k-1) \quad (86)$$

Em (86) pode-se verificar que a cada instante discreto há uma contribuição dada por $V, J, \bar{B}$ e u para o vetor de estado x .

Supondo uma entrada degrau unitário e definindo

$$s_i = \sum_{j=1}^r \bar{E}_{ij} \quad (87)$$

onde r é o número de entradas de (1), para cada instante discreto t de (86) e (87) tem-se que

$$c_t = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^t s_1 \\ \vdots \\ \lambda_n^t s_n \end{bmatrix} \quad (88)$$

Em (88), c_t representa a contribuição de $V, J, \bar{E}$ e u para o vetor de estados x no instante discreto t . Uma análise de (88) mostra que se pode obter a influência de cada autovalor separadamente sobre cada estado e em cada instante. A influência do autovalor j sobre o estado i no instante t é dada por

$$c_{tij} = v_{ij} \lambda_j^t s_j \quad (89)$$

De (89) observa-se que se v_{ij} ou s_j forem pequenos, a contribuição do modo j sobre o estado i será pequena para todo instante discreto t , o que justificaria sua exclusão do modelo reduzido. Variando t desde 0 até um instante k qualquer, obtém-se a contribuição do modo j sobre o estado i durante o transitório. Fazendo isto para todos os modos, é possível escolher quais modos devem ser retidos para que o modelo reduzido represente bem o transitório.

Obtém-se agora uma expressão que dá a contribuição de cada autovalor para condição de regime do sistema. Esta informação é particularmente importante no método 2, onde a escolha dos modos retidos pode diminuir o erro de regime.

O sistema (1) em regime é descrito por

$$x(k) = (I_n - A)^{-1} B u(k)$$

Usando (33) na expressão acima, vem

$$x(k) = V (I_n - J)^{-1} V^{-1} B u(k)$$

Usando $\tilde{B} = V^{-1} B$ e supondo $u(k)$ uma entrada degrau unitário, pode-se escrever

$$cr = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s_1}{1-\lambda_1} \\ \vdots \\ \frac{s_n}{1-\lambda_n} \end{bmatrix} \quad (90)$$

onde s_i é definido da mesma forma que em (87). A contribuição do autovalor j no estado i é dada por

$$cr_{ij} = \frac{v_{ij} s_j}{1 - \lambda_j} \quad (91)$$

Portanto, (89) e (91) podem ser usadas na determinação dos autovalores a serem retidos no sistema reduzido. O resultado de (91) consiste de n^2 valores correspondentes à contribuição de cada autovalor sobre cada estado e pode ser analisada numericamente. Porém, (89) fornece $n^2 \times k$ valores, os quais podem ser melhor analisados graficamente. Monta-se um gráfico para cada estado com a contribuição de todos autovalores para o intervalo discreto analisado.

3.1.9 AGREGAÇÃO USANDO DECOMPOSIÇÃO DE SCHUR

Nas seções anteriores foram analisados métodos para a obtenção de modelos reduzidos, os quais exigiam a disponibilidade do conjunto de autovalores e autovetores do sistema a ser reduzido. Uma técnica que vem sendo utilizada com sucesso em redução de sistemas é a decomposição de Schur. Em [44], Rabah e Khalil utilizam a forma real de Schur para obter sistemas reduzidos via perturbações singulares. Seu uso visa evitar o cálculo dos autovetores do sistema, o que representa uma grande dificuldade em sistemas de grande porte ou nos casos em que a matriz do sistema seja defectiva [46].

Propõe-se aqui a utilização da decomposição de Schur como ferramenta auxiliar na redução de sistemas por agregação. Através da decomposição de Schur seguida de um conjunto de operações algébricas, pode-se obter os modelos reduzidos desenvolvidos via agregação modal, sem ter que recorrer, para isto, ao cálculo dos autovetores do sistema.

Algoritmos para computar a forma de Schur são estáveis e eficientes, constituindo rotinas padrão para o cálculo de autovalores de uma matriz. A transformação que leva à forma de Schur é ortonormal, não necessitando, portanto, do cálculo de sua inversa. A forma real de Schur (FRS) consiste de uma matriz quase triangular superior com blocos 1×1 ou 2×2 em sua diagonal, correspondendo a autovalores reais ou complexos, respectivamente. A forma complexa de Schur (FCS)

apresenta em sua diagonal os autovalores com suas partes reais e complexas. A comutação de uma forma para outra é simples e feita por meio de transformações ortonormais.

Em [46], Stewart faz uma análise detalhada sobre decomposição de Schur, onde poderão ser encontradas maiores informações. Este assunto também é apresentado por Golub [47], onde são incluídos recentes avanços neste mesmo tópico.

3.1.10 DECOMPOSIÇÃO DE SCHUR

Utilizar-se-á a FCS por ser mais adequada aos nossos propósitos. A seguir, é apresentado o teorema de Schur com uma prova construtiva do mesmo. Esta prova não é prática, mas permite obter certas relações que serão de muita utilidade.

Teorema:

Dada uma matriz A $n \times n$, existe uma transformação de similaridade ortonormal Q tal que $Q^T A Q$ é triangular superior com os autovalores em sua diagonal. Além disto, Q pode ser escolhida de forma que os autovalores apareçam em qualquer ordem.

Prova:

A prova construtiva do teorema acima, é feita usando para isto a matriz de autovetores de A , $V = [v_1 \dots v_n]$, supondo, para maior simplicidade, que os correspondentes autovalores sejam distintos.

É sabido que

$$Av_1 = \lambda_1 \quad (92.1)$$

e define-se $q_1 = v_1$. Partindo agora de v_2 , obtém-se q_2 ortogonal a q_1 , usando para isto o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Então,

$$\begin{aligned} q_2 &= v_2 - b_1 q_1 \\ \text{onde} \quad b_1 &= \frac{\langle v_2, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle} \end{aligned} \quad (92.2)$$

Pré-multiplicando (92.2) por A,

$$\begin{aligned} Aq_2 &= Av_2 - b_1 Aq_1 = \lambda_2 v_2 - b_1 \lambda_1 q_1 \\ &= \lambda_2 (q_2 + b_1 q_1) - b_1 \lambda_1 q_1 \\ &= \lambda_2 q_2 + k_1 v_1 \end{aligned} \quad (92.3)$$

Usando (92.1) e (92.3) pode-se escrever

$$A \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & k_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (92.4)$$

Toma-se agora v_3 e obtém-se q_3 ortogonal a q_2 e q_1 ,

$$q_3 = v_3 - c_1 q_2 - c_2 q_1 \quad (92.5)$$

onde

$$c_1 = \frac{\langle v_3, q_2 \rangle}{\langle q_2, q_2 \rangle}, \quad c_2 = \frac{\langle v_3, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle}$$

Novamente, pré-multiplicando (92.5) por A,

$$Aq_3 = Av_3 - c_1 Aq_2 - c_2 Aq_1$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda_3 v_3 - c_1 A(v_2 - b_1 q_1) - c_2 \lambda_1 q_1 \\
&= \lambda_3 (q_3 + c_1 q_2 + c_2 q_1) - c_1 \lambda_2 v_2 - c_1 b_1 \lambda_1 q_1 - c_2 \lambda_1 q_1 \\
&= \lambda_3 q_3 + \lambda_3 c_1 q_2 + \lambda_3 c_2 q_1 - c_1 \lambda_2 q_2 + c_1 \lambda_2 b_1 q_1 - \\
&\quad c_1 b_1 \lambda_1 q_1 - c_2 \lambda_1 q_1 \\
&= \lambda_3 q_3 + k_2 q_2 + k_3 q_1
\end{aligned} \tag{92.6}$$

Usando (92.4) e (92.6), pode-se escrever

$$A \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & k_1 & k_2 \\ 0 & \lambda_2 & k_3 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \tag{92.7}$$

Prosseguindo desta forma até v_n , e normalizando estes vetores, obter-se-á

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{bmatrix} \tag{92.8}$$

onde

$$q_i = \frac{q_i}{\|q_i\|},$$

Portanto, (92.8) é a transformação de similaridade ortogonal que torna A triangular superior. Observa-se que a sequência dos autovetores normalizados na transformação Q determina a sequência com que os autovalores aparecem na diagonal da matriz triangularizada.

Generalizando a equação (92.7) e particionando as matrizes obtém-se

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{A}_2 \\ 0 & \bar{A}_3 \end{bmatrix} \tag{93}$$

lembrando que

$$\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T & Q_3^T \\ Q_2^T & Q_4^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \quad (94)$$

Observa-se que as matrizes aqui são particionadas em dimensões já adequadas para a redução. Ou seja na equação (94), tem-se Q_1 (1×1), Q_2 ($1 \times n-1$), Q_3 ($n-1 \times 1$) e Q_4 ($n-1 \times n-1$), onde 1 é a dimensão do sistema reduzido.

A matriz que relaciona V a Q tem uma forma especial. De (92.1) tem-se que

$$q_1 = v_1$$

De (92.2),

$$q_2 = v_2 - b_1 q_1 = v_2 - b_1 v_1$$

De (92.5),

$$q_3 = v_3 - c_1 q_2 - c_2 q_1 = v_3 - c_1 v_2 - (c_1 b_1 - c_2) v_1$$

Prosseguindo desta forma até q_n , pode-se escrever

$$\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & \dots & q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \dots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1n} \\ 0 & 1 & t_{23} & \dots & t_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & t_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

que escrito na forma de matrizes particionadas dá

$$\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{bmatrix} \quad (95)$$

de onde pode-se escrever que

$$Q_1 = V_1 T_1 \quad (96.1)$$

$$Q_3 = V_3 T_1 \quad (96.2)$$

Usando (37) e (95) pode-se escrever

$$V^{-1} A V = J = T Q^T A Q T^{-1} = T \bar{A} T^{-1}$$

ou na forma de matrizes particionadas

$$\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{A}_2 \\ 0 & \bar{A}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^{-1} & -T_1^{-1}T_2T_3^{-1} \\ 0 & T_3^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \quad (97)$$

de onde se obtém

$$J_1 = T_1 \bar{A}_1 T_1^{-1} \quad (98.1)$$

$$J_2 = T_3 \bar{A}_3 T_3^{-1} \quad (98.2)$$

De (95) pode-se escrever ainda

$$\begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_3 & W_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T & Q_2^T \\ Q_3^T & Q_4^T \end{bmatrix} \quad (99)$$

As relações aqui obtidas serão agora utilizadas para o desenvolvimento dos métodos de redução. Usando as matrizes Q e $\bar{A}$ procurar-se-á obter os mesmos modelos que os obtidos através dos métodos de agregação modal.

3.1.11 REDUÇÃO USANDO DECOMPOSIÇÃO DE SCHUR

Inicialmente procurar-se-á obter um modelo reduzido como o obtido pelo método 1 da seção 3.1.3 usando a transformação de Schur ao invés da matriz modal. Mostrar-se-á depois que os modelos reduzidos são idênticos.

Dado um sistema como (30), aplica-se nele a transformação de Schur descrita anteriormente. Isto equivale a uma troca de variáveis

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(k) \\ \tilde{x}_2(k) \end{bmatrix} \quad (100)$$

colocando o sistema na nova base

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1(k+1) \\ \tilde{x}_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{A}_2 \\ 0 & \bar{A}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(k) \\ \tilde{x}_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} u(k) \quad (101)$$

onde

$$\bar{B}_1 = [Q_1^T \quad Q_3^T]B \quad (102.1)$$

$$\bar{B}_2 = [Q_2^T \quad Q_4^T]B \quad (102.2)$$

A decomposição de Schur é feita de modo que os autovalores apareçam na diagonal da matriz do sistema em ordem decrescente de valor absoluto. Deste modo, $\bar{A}_1$ e $\bar{A}_3$ herdarão os autovalores com maior e com menor valor absoluto, respectivamente. Em (100), $x_1(1 \times 1)$ representa o conjunto de estados a reter e $x_2(n-1 \times 1)$ o conjunto de estados a eliminar.

De (100) pode-se obter x_2 em função de x_1 e $\tilde{x}_2$,

$$x_2 = Q_4^{-T} \tilde{x}_2 - Q_4^{-T} Q_2^T x_1 \quad (103)$$

Como $\tilde{x}_2$ contém apenas modos rápidos e não recebe influência de $\tilde{x}_1$, pode-se dizer que

$$\tilde{x}_2(k+1) \simeq \tilde{x}_2(k)$$

e de (101) obtêm-se

$$\tilde{x}_2(k+1) \simeq \tilde{x}_2(k) \simeq (I_{n-1} - \bar{A}_3)^{-1} \bar{B}_2 u(k) \quad (104)$$

Substituindo (104) em (103) e em (41), e definindo $z \simeq x_1$, obtêm-se

$$z(k+1) = (A_1 - A_2 Q_4^{-T} Q_3^T) z(k) + (B_1 + A_2 Q_4^{-T} (I_{n-1} - \bar{A}_3)^{-1} \bar{B}_2) u(k)$$

ou escrevendo na forma

$$z(k+1) = F z(k) + G u(k)$$

tem-se

$$F = A_1 - A_2 Q_4^{-T} Q_3^T = A_1 + A_2 Q_3 Q_1^{-1} \quad (105.1)$$

$$G = B_1 + A_2 Q_4^{-T} (I - \bar{A}_3)^{-1} \bar{B}_2 \quad (105.2)$$

Mostrar-se-á agora que o modelo reduzido aqui obtido é idêntico ao obtido na seção 3.1.3, e portanto, possui as mesmas propriedades daquele modelo. Comparando (105.1) com (46) observa-se que para que F seja igual em ambas equações deve-se ter $V_3 V_1^{-1} = Q_3 Q_1^{-1}$. De (96.1) tem-se que

$$V_1^{-1} Q_1 = T_1$$

Portanto, de (96.2)

$$Q_3 = V_3 V_1^{-1} Q_1$$

ou

$$Q_3 Q_1^{-1} = V_3 V_1^{-1}$$

Portanto, F obtida pelos dois métodos é idêntica. Verificar-se-á agora que G é o mesmo para os dois métodos. Comparando (105.2) com (47), observa-se que a condição de igualdade é

$$W_4^{-1} (I_{n-1} - J_2)^{-1} P_2 = Q_4^{-1} (I_{n-1} - \bar{A}_3)^{-1} \bar{E}_2 \quad (106)$$

Usando (99) pode-se escrever

$$Q_4^{-T} T_3^{-1} (I_{n-1} - J_2)^{-1} P_2 = Q_4^{-1} (I_{n-1} - \bar{A}_3)^{-1} \bar{E}_2$$

ou

$$P_2 = (I_{n-1} - J_2) T_3 (I_{n-1} - \bar{A}_3)^{-1} \bar{E}_2$$

Usando agora (98.2) chega-se a

$$P_2 = T_3 \bar{E}_2$$

As equações (40.4) e (99) permitem escrever

$$P_2 = [W_3 \ W_4] B = T_3 [Q_2^T \ Q_4^T] B = T_3 \bar{E}_2$$

Como $[Q_2^T \ Q_4^T] B = \bar{E}_2$, conclui-se que a equação (106) está correta e a matriz G obtida pelos dois métodos é idêntica. Portanto, de posse da transformação de Schur Q consegue-se obter o mesmo modelo que o obtido pelo método 1 da seção 3.1.3, sem ter para isto, que calcular os

autovetores do sistema.

Procurar-se-á agora obter o modelo reduzido obtido pelo método 2 de (3.1.4) ,novamente usando transformação de Schur . Será usada a mesma estratégia daquele método, ou seja, desprezar a influência dos modos rápidos na resposta do sistema.

A resposta do sistema (30) com $z(k)$ substituindo $x_1(k)$ e com condição inicial nula é

$$\begin{bmatrix} z(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \sum_{t=0}^{k-1} \begin{bmatrix} A_1 A_2 \\ A_3 A_4 \end{bmatrix}^t B u(t)$$

Substituindo A por $Q \bar{A} Q^T$ nesta equação, resulta

$$\begin{bmatrix} z(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = Q \sum_{t=0}^{k-1} \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{A}_2 \\ 0 & \bar{A}_3 \end{bmatrix}^t Q^T B u(t) \quad (107)$$

Desprezar a influência dos modos rápidos na resposta de $z(k)$ significa desprezar $\bar{A}_2$ e $\bar{A}_3$ na matriz acima . Então, (107) pode ser reescrita como

$$z(k) = Q_1 \sum_{t=0}^{k-1} \bar{A}_1^t [Q_1^T Q_3^T] B u(t) \quad (108)$$

Definindo o vetor α como

$$\alpha = \sum_{t=0}^{k-1} \bar{A}_1^t [Q_1^T \ Q_3^T] B u(t) \quad (109)$$

tem-se

$$\begin{bmatrix} z(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_3 \end{bmatrix} \alpha$$

com

$$x_2(k) = Q_3 Q_1^{-1} z(k) \quad (110)$$

Fazendo $u(k)=0$ em (22) e $z(k) = x_1(k)$, tem-se que

$$z(k+1) = A_1 z(k) + A_2 Q_3 Q_1^{-1} z(k)$$

ou

$$z(k+1) = (A_1 + A_2 Q_3 Q_1^{-1}) z(k)$$

que é a mesma expressão que a obtida no método anterior. Faz-se agora $x(0)=0$ no sistema original e no reduzido para obter G . A equação (108) representa a resposta aproximada de x_1 para $x(0)=0$. A resposta do sistema reduzido (4) ao estado zero dá a equação (57). Então (108) pode ser reescrita como

$$z(k) = \sum_{t=0}^{k-1} Q_1 \bar{A}_1^t Q_1^{-1} Q_1 [Q_1^T \ Q_3^T] B u(t) \quad (111)$$

Usando (58), (98.1) e (96.1) obtém-se a seguinte expressão para F ,

$$F = Q_1 \bar{A}_1 Q_1^{-1} \quad (112)$$

que substituída em (111), permite obter G por comparação a (57), o qual é dado por

$$G = Q_1 [Q_1^T \quad Q_3^T] B \quad (113)$$

Para verificar se (113) é igual a (60), substitui-se V_1 por $Q_1 T_1^{-1}$ e $[W_1 \ W_2]$ por $[T_1 \ T_2] Q^T$ em (60) , para obter

$$G = Q_1 [I_1 \quad T_1^{-1} T_2] \begin{bmatrix} Q_1^T & Q_3^T \\ Q_2^T & Q_4^T \end{bmatrix} B$$

Verifica-se que esta expressão somente seria igual a (113) se $T_1^{-1} T_2$ fosse uma matriz nula, o que não ocorre. Portanto , a matriz de entrada aqui obtida difere da obtida no método 2 . O resultado obtido constitui-se em um modelo reduzido de utilidade. Porém, para obter um modelo com as características do modelo obtido pelo método 2, deve-se buscá-lo de outra forma.

Mostrou-se na seção 3.1.6 que a matriz de agregação dada por (70) permitia obter F e G dadas pelo método 2, usando (17) e (8) respectivamente. Usando (96.1) e (99) pode-se escrever a mesma matriz de agregação C em função de Q e T . Tem-se então ,

$$C_2 = V_1 [W_1 \ W_2] = Q_1 T_1^{-1} [T_1 \ T_2] Q^T$$

ou

$$C_2 = [Q_1 \quad Q_1 T_1^{-1} T_2] Q^T \quad (114)$$

De (114) conclui-se que para obter C_2 precisa-se de Q , T_1 e T_2 . Será demonstrado agora que T_1 e T_2 podem ser obtidas através de uma sequência de operações algébricas, não oferecendo qualquer dificuldade numérica. Como visto em (97) , T é a transformação de similaridade que leva o sistema na base obtida pela transformação de Schur para a base

na qual a matriz do sistema é diagonal . Pode-se escrever (97) como

$$\begin{bmatrix} 1 & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & j_2 & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & j_n \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} j_1 j_2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & j_n & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (115)$$

De (115) percebe-se que os elementos da matriz T podem ser obtidos com certa facilidade . Nesta equação, j_i são os autovalores complexos de $\bar{A}$. Observa-se que para o segundo elemento da primeira linha de T, tem-se

$$\alpha_{12} + t_{12}\alpha_{21} = j_1 t_{12}$$

ou

$$t_{12} = \frac{\alpha_{12}}{j_1 - j_2}$$

Com o mesmo procedimento, obtêm-se t_{13} ,

$$t_{13} = \frac{\alpha_{13} - t_{12}\alpha_{23}}{j_1 - j_3}$$

Pode-se ,portanto ,escrever um algoritmo que dá os $(n^2-n)/2$ elementos de T que precisam ser calculados .Isto porque os elementos abaixo da diagonal são nulos e os elementos da diagonal são todos iguais a unidade. Para obter a matriz de agregação C apenas os elementos de T_1 e T_2 precisam ser calculados, diminuindo ainda mais o tempo de computação.

A sequência apresentada para obter T é válida apenas para

autovalores reais ou complexos distintos. Se os autovalores repetidos estiverem contidos em $\bar{A}_y$, é possível obter T_1 e T_2 fazendo $t_{ij}=0$ para $j_i-j_j=0$ e então obter os modelos reduzidos. Quando não for este o caso, deve ser feito um estudo semelhante ao que é feito para a obtenção de autovetores generalizados, o qual não é incluído neste trabalho.

Portanto, o uso da decomposição de Schur permitiu obter o modelo reduzido obtido pelo método I da seção 3.1.3 através de um processo numericamente superior. Para obter os modelos reduzidos obtidos via métodos II e III de 1.3, é necessário o cálculo de mais elementos além da forma de Schur. No entanto, este cálculo é meramente algébrico, não apresentando problemas. Logo, os três modelos reduzidos podem ser derivados de técnicas numéricas estáveis e eficientes, evitando assim o cálculo de autovetores.

3.1.12 CONTROLE USANDO SISTEMAS REDUZIDOS

Uma vez obtido o modelo reduzido este se constitui em um ambiente onde projetam-se controles que serão posteriormente aplicados ao sistema original. Será agora analisado o efeito dos controles obtidos através dos diferentes modelos reduzidos quando estes são aplicados ao modelo original.

Seja (32) a representação modal de (1) e (4) seu sistema agregado. Obtém-se a lei de controle

$$u(k) = -K z(k)$$

que aloca os pólos de (4). Para aplicar este controle em (1), utiliza-se (2), o que dá

$$u(k) = -K C x(k) \quad (116.1)$$

Para verificar o que ocorre com os autovalores de (1), aplica-se (116.1) em (39). Usando (38), (116.1) se torna

$$u(k) = -K C V \tilde{x}(k) \quad (116.2)$$

que aplicado em (39) fornece

$$\tilde{x}(k+1) = (J - PKCV) \tilde{x}(k) \quad (117)$$

Se C for da forma (20), sendo T uma matriz qualquer não singular, então

$$C V = T W_1 \quad V = T [I_1 \mid 0]$$

Logo,

$$P K C V \triangleq \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ \delta_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (118.1)$$

e

$$J - PKCV = \begin{bmatrix} J_1 - \delta_1 & 0 \\ -\delta_2 & J_2 \end{bmatrix} \quad (118.2)$$

Como mostrado na seção 3.1.1, devido à relação (2), os pólos de F serão os mesmos que os de $(J_1 - \delta_1)$.

Portanto, os controles projetados para modelos reduzidos cuja matriz de agregação for da forma (20), quando aplicados ao modelo

original, alocam 1 pólos deste para as mesmas posições que no modelo reduzido e deixam os restantes inalterados. Isto permite, por exemplo, obter controladores para estabilizar sistemas não controláveis, desde que os pólos não controláveis estejam dentro do círculo unitário.

Como analisado na seção 3.1.6, os métodos de redução 2 e 3 possuem matrizes de agregação da forma (20), aos quais se aplica a análise acima. Para o método 1, verifica-se que C dada por (70) permite obter F , e C dada por (72) permite obter G , porém não existe uma única matriz que permite obter F e G . Assim, usando (70) que é da forma (20), a lei de controle do modelo reduzido moverá os 1 pólos do sistema original para posições diferentes das do reduzido, porém manterá os $(n-1)$ pólos restantes inalterados. Usando (72), os pólos do sistema original serão todos modificados para posições diferentes das desejadas. Isto ocorre [2]-[4] porque G dada por (47) não excita os modos do modelo reduzido na mesma proporção em que são excitados no modelo original.

3.2 REDUÇÃO DE ORDEM DE SISTEMAS COM A PROPRIEDADE DA SEPARAÇÃO TEMPORAL

Sistemas dinâmicos de grande porte envolvem a interação entre modos de diferentes velocidades. Quando a propriedade da separação temporal for satisfeita, é possível representar um sistema com

razoável precisão através de dois outros subsistemas de menor ordem. Os dois subsistemas podem então ser estudados independentemente, cada um deles contendo um conjunto de estados que possuem características comuns. A obtenção destes subsistemas será feita através de dois métodos : transformação linear explicitamente inversível e quase regime permanente [10]. Inicia-se definindo a propriedade da separação temporal.

Sejam os autovalores do sistema assintoticamente estável (30) arranjados na forma

$$1 > |\lambda_1| > \dots > |\lambda_l| > |\lambda_{l+1}| > \dots > |\lambda_n| \quad (119)$$

Se a desigualdade

$$v = |\lambda_{l+1}| / |\lambda_l| \ll 1 \quad (120)$$

for satisfeita, então o modelo (30) representa um sistema com duas escalas de tempo com v sendo uma medida da propriedade da separação temporal. Esta classe de sistemas consiste de subsistemas fracamente acoplados cujos modos são largamente espaçados no tempo. Neste caso, pode-se expressar o conjunto de autovalores de A , $\sigma(A)$, como

$$\sigma(A) = \sigma(A_l) \cup \sigma(A_r) \quad (121.1)$$

onde

$$\sigma(A_l) = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \quad (121.2)$$

são os autovalores da parte lenta (dominante) do sistema (30) , e

$$\sigma(A_r) = (\lambda_{l+1} , \dots , \lambda_n) \quad (121.3)$$

são os autovalores da parte rápida (não dominante) de (30). Uma interpretação útil das equações (121) é que , em vista das equações (119) e (120) , $[A_l]^k$ tende a zero muito mais lentamente do que $[A_r]^k$. Para qualquer matriz quadrada P e sua norma , $\| P \|$, temos $|\lambda_{\max}(P)| \leq \| P \|$ e se P^{-1} existe, $1/|\lambda_{\min}(P)| \leq \| P^{-1} \|$. Portanto, uma alternativa para a expressão (120) é

$$\| A_l^{-1} \| \ll \frac{1}{\| A_r \|} \quad (122)$$

que é uma condição sobre norma de matrizes para a separação de sistemas discretos em uma parte lenta e outra rápida .

São agora estudadas duas formas diferentes para a obtenção dos subsistemas lento e rápido .

3.2.1 TRANSFORMAÇÃO LINEAR EXPLICITAMENTE INVERSÍVEL

Trata-se de um processo de diagonalização de blocos feito em dois estágios. No primeiro estágio é feita a troca de variáveis

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_r(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ L & I_{n-l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad (123)$$

para transformar (30) em

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_r(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_r(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ LB_1 + B_2 \end{bmatrix} u(k) \quad (124)$$

onde I_1 é a matriz identidade (1×1) e

$$A_1 = A_1 - A_2 L \quad (125.1)$$

$$A_r = A_r + LA_2 \quad (125.2)$$

A matriz L $(n-1 \times 1)$ é uma raiz real de

$$A_1 L - LA_1 + LA_2 L - A_3 = 0 \quad (126)$$

O segundo estágio desacopla o bloco A_2 aplicando uma mudança de variáveis

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_r(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & K \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_r(k) \end{bmatrix} \quad (127)$$

ao sistema (124) para dar

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_r(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_r(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} u(k) \quad (128)$$

onde

$$G_1 = (I_1 + KL)B_1 + KB_2 \quad (129.1)$$

$$G_2 = LB_1 + B_2 \quad (129.2)$$

e a matriz K $(1 \times n-1)$ é uma raiz real de

$$KA_r - A_1K + A_2 = 0 \quad (130)$$

Se as matrizes L e K existem, então $\alpha(A_1)$ e $\alpha(A_r)$ correspondem aos autovalores lentos e rápidos, respectivamente. Combinando as transformações (123) e (127), obtém-se

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_r(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 + KL & K \\ L & I_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad (131)$$

cuja inversa é

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & -K \\ -L & I_{n-1} + LK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_r(k) \end{bmatrix} \quad (132)$$

não requerendo, portanto, inversão matricial.

As matrizes L e K são agora obtidas de modo que a transformação (131) possa ser feita. Define-se

$$L_0 = -(I_{n-1} - A_4)^{-1} A_3 \quad (133.1)$$

$$A_0 = A_1 - A_2 L_0 \quad (133.2)$$

$$K_0 = A_0^{-1} A_2 \quad (133.3)$$

A solução numérica da matriz L é usualmente procurada como sendo da forma

$$L = L_0 + D \quad (134)$$

onde D é uma raiz real de

$$DA_0 - (A_4 + L_0 A_2)D - DA_2 D + L_0 A_0 - L_0 = 0 \quad (135)$$

a qual pode ser resolvida iterativamente usando [10] :

$$D_{j+1} = (L_0 + (A_4 + L_0 A_2) D_j - L_0 A_0 + D_j A_2 D_j) A_0^{-1} \quad (136)$$

Para a matriz K , é usada a equação de aproximações sucessivas

$$K_{j+1} = A_0^{-1} (K_j (A_4 - L_0 A_2) + K_j D A_2 - A_2 D K_j + A_2) \quad (137)$$

A análise das equações recursivas (136) e (137) usando argumentos de um teorema de ponto fixo [10] , mostraram que se , as normas de desigualdade

$$\left(\|A_4\| + \|L_0\| \|A_2\| \right)^2 > 4 \left(\|L_0\| \|A_2\| \|E_1 - A_0\| \right) \quad (138)$$

$$\|A_0^{-1}\| < \frac{1}{3} \left(\|A_4\| + \|L_0\| \|A_2\| \right) \quad (139)$$

forem satisfeitas então os esquemas iterativos (135) e (136) possuem raízes reais únicas . Aproximações de primeira ordem de L e K são dadas por

$$L = L_0 + O(\nu)^1 \quad (140.1)$$

$$K = K_0 + O(\nu) \quad (140.2)$$

As equações (133) e (125) permitem verificar que

1 Uma função vetorial ou matricial $\Pi(\nu)$ de um escalar positivo ν é dita ser $O(\nu^m)$ se existem constantes positivas c e ν^+ tal que $|\Pi(\nu)| \leq c \nu^m$ para todo $\nu \leq \nu^+$.

$$A_1 = A_0 \langle 1 + O(v) \rangle \quad (141.1)$$

$$A_r = A_4 \langle 1 + O(v) \rangle \quad (141.2)$$

o que significa que os autovalores de A_0 e A_4 são apenas perturbações dos autovalores do sistema desacoplado (128), os quais, por sua vez, são equivalentes aos autovalores do sistema (30). Com este resultado, conclui-se que o sistema (30) pode ser aproximado em primeira ordem com razoável precisão por meio de dois subsistemas de menor ordem: um subsistema lento descrito pela matriz A_0 de ordem 1 e um subsistema rápido caracterizado pela matriz A_4 de ordem $n-1$.

3.2.2 REGIME QUASE PERMANENTE

Em sistemas discretos assintoticamente estáveis com a propriedade da separação temporal, os modos rápidos que correspondem aos autovalores próximos à origem são importantes apenas durante os primeiros instantes discretos. Após este período eles são desprezíveis e os modos lentos dominam o comportamento do sistema. Desprezar o efeito dos modos rápidos é equivalente a fazer $x_2(k+1)=x_2(k)$ em (30). Sem estes modos, o sistema (30) se reduz a

$$\bar{x}_1(k+1) = A_1 \bar{x}_1(k) + A_2 \bar{x}_2(k) + B_1 \bar{u}(k) \quad (142.1)$$

$$\bar{x}_1(0) = x_{10}$$

$$\bar{x}_2(k+1) = A_3 \bar{x}_1(k) + A_4 \bar{x}_2(k) + B_2 \bar{u}(k) \quad (142.2)$$

onde uma barra sobre a variável indica um estado discreto quase

permanente. Supondo que $(I_{n-1} - A_4)^{-1}$ existe, $\bar{x}_2(k)$ é dada por

$$\bar{x}_2(k) = (I_{n-1} - A_4)^{-1} (A_3 \bar{x}_1(k) + B_2 \bar{u}(k)) \quad (143)$$

que substituído em (142.1) dá o subsistema lento de (30), definido como

$$x_s(k+1) = A_0 x_s(k) + B_0 u_s(k) \quad (144)$$

onde

$$A_0 = A_1 + A_2(I_{n-1} - A_4)^{-1} A_3 \quad (145.1)$$

$$B_0 = B_1 + A_2(I_{n-1} - A_4)^{-1} B_2 \quad (145.2)$$

Portanto, $\bar{x}_1(k) = x_s(k)$, $\bar{x}_2(k)$ e $\bar{u}(k) = u_s(k)$ são as componentes lentas das variáveis correspondentes no sistema (30).

O subsistema rápido é derivado assumindo que $\bar{x}_1(k) = x_s(k) = \text{cte.}$ e $x_2(k+1) = x_2(k)$. De (30) e (142.2) vem

$$x_2(k+1) - \bar{x}_2(k+1) = A_4(x_2(k) - \bar{x}_2(k)) + B_2(u(k) - u_s(k)) \quad (146)$$

Definindo $x_f(k) = x_2(k) - \bar{x}_2(k)$ e $u_f(k) = u(k) - u_s(k)$, o subsistema rápido de (30) pode ser expresso por

$$\begin{aligned} x_f(k+1) &= A_4 x_f(k) + B_2 u_f(k) \\ x_f(0) &= x_{20} - \bar{x}_2(0) \end{aligned} \quad (147)$$

A suposição usada para obter o subsistema rápido é justificada pelo fato de que os modos lentos do sistema (30) têm valores próximos à

unidade e durante o período dos transientes rápidos, estes modos variam muito lentamente em relação aos modos rápidos.

3.2.3 COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS

É feita agora uma comparação entre os dois métodos utilizados para obter os subsistemas desacoplados. Aplicando a transformação linear (131) com

$$L = -(I_{n-1} - A_4)^{-1} A_3, \quad K = A_0^{-1} A_2 \quad (148)$$

ao sistema (30) obtém-se

$$z(k+1) = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{bmatrix} z(k) + \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} u(k) \quad (149)$$

onde

$$D_1 = A_0 + A_0^{-1} A_2 (I_{n-1} - A_4)^{-1} A_3 (I_1 - A_0) \quad (150.1)$$

$$D_2 = A_0^{-1} A_2 (A_4 - (I_{n-1} - A_4)^{-1} A_3 A_0^{-1} A_2) \quad (150.2)$$

$$D_3 = (I_{n-1} - A_4)^{-1} A_3 (I_1 - A_0) \quad (150.3)$$

$$D_4 = A_4 - (I_{n-1} - A_4)^{-1} A_3 A_0^{-1} A_2 \quad (150.4)$$

$$H_1 = B_0 + (A_0^{-1} A_2 - A_2 (I_{n-1} - A_4)^{-1}) B_2 - A_0^{-1} A_2 (I_{n-1} - A_4)^{-1} A_3 B_1 \quad (150.5)$$

$$H_2 = B_2 - (I_{n-1} - A_4)^{-1} A_3 B_1 \quad (150.6)$$

O uso de (148) em (126), (130), (138) e (139) indica que

$$D_1 = A_0 + O(v) \quad (151.1)$$

$$D_2 = O(v) \quad , \quad D_3 = O(v) \quad (151.2)$$

$$D_4 = A_4 + O(v) \quad (151.3)$$

$$H_1 = B_0 + O(v) \quad (151.4)$$

$$H_2 = B_2 + O(v) \quad (151.5)$$

Isto mostra claramente que as duas abordagens para desacoplar sistemas discretos são idênticas a perturbações de primeira ordem. Também fica claro que os esquemas iterativos (136) e (137) são consistentes com os resultados obtidos usando o conceito de regime quase permanente.

Em vista da análise acima e de (141), é fácil ver que (144) e (147) são perturbações de primeira ordem para (128), no sentido de que

$$x_l(k) = x_s(k) + O(v) \quad (152.1)$$

$$x_r(k) = x_f(k) + O(v) \quad (152.2)$$

Para relacionar este resultado com o modelo discreto original (30), usa-se a transformação linear (132) para obter

$$x_1(k) = x_s(k) - A_0^{-1} A_2 x_f(k) + O(v) \quad (153.1)$$

$$x_2(k) = (I_{n-1} - A_4)^{-1} A_3 x_s(k) + x_f(k) + O(v) \quad (153.2)$$

onde percebe-se a proximidade das trajetórias $\langle x_s(k), x_f(k) \rangle$ e $\langle x_1(k), x_2(k) \rangle$, uma vez $\|A_0^{-1}\|$ e $\|(I_{n-1} - A_4)^{-1}\|$ são pequenas.

3.3 RELAÇÃO ENTRE AGREGAÇÃO MODAL E SEPARAÇÃO TEMPORAL

Verifica-se agora a relação que existe entre as teorias da agregação modal e da separação temporal [12].

Aplicando (123) em (30) com

$$T_1 = \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ L & I_{n-l} \end{bmatrix}$$

obtem-se

$$T_1^{-1} A T_1 = \begin{bmatrix} A_s & A_2 \\ 0 & A_f \end{bmatrix} \quad (154)$$

com L satisfazendo (126) e A_s e A_f dados por (125). Aplicando a mesma transformação a (30), com $A=VJW$ de (37), resulta que

$$\begin{bmatrix} I_l & 0 \\ L & I_{n-l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_3 & W_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ L & I_{n-l} \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ LV_1+V_3 & LV_2+V_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1-W_2L & W_2 \\ W_3-W_4L & W_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{bmatrix} \quad (155)$$

Comparando (155) com (154) e usando (36), observa-se que

$$L = W_4^{-1} W_3 = -V_3 V_1^{-1} \quad (156)$$

faz $F_3=0$ e, mais importante que isto,

$$F_1 = V_1 J_1 V_1^{-1} \quad (157.1)$$

$$F_4 = W_4^{-1} J_2 W_4 \quad (157.2)$$

$$F_2 = V_1 J_1 W_2 + V_2 J_2 W_4 \quad (157.3)$$

De (157.1) observa-se que se L existe, os autovalores e autovetores de A_l e A_r são J_1, V_1 e J_2, W_2^{-1} , respectivamente. Comparando (157.1) com (58), nota-se que A_l aqui obtida é igual a F obtida por agregação. Com este resultado, conclui-se que agregação modal e separação temporal são abordagens similares no contexto da redução de ordem de modelos dinâmicos.

Aplicando agora a transformação (127) em (154), com

$$T_2 = \begin{bmatrix} I_l & K \\ 0 & I_{n-l} \end{bmatrix}$$

obtem-se

$$\begin{bmatrix} I_l & K \\ 0 & I_{n-l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_s & A_2 \\ 0 & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_l & -K \\ 0 & I_{n-l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix} \quad (158)$$

com K satisfazendo (130). Aplicando a mesma transformação a (155), obtém-se

$$\begin{bmatrix} I_l & K \\ 0 & I_{n-l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ 0 & F_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_l & K \\ 0 & I_{n-l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 + KF_3 - F_1K \\ 0 & F_4 \end{bmatrix} \quad (159)$$

Para fazer

$$F_2 + KF_3 - F_1K = 0 \quad (160)$$

basta usar

$$K = -V_2 W_4 = V_1 W_2 \quad (161)$$

que é obtido por inspeção a (160).

Pode-se agora interpretar os resultados obtidos . A transformação explicitamente inversível (131), por ser uma transformação de similaridade, preserva todos autovalores do sistema discreto com duas escalas de tempo. Usando a agregação modal, preserva-se apenas o conjunto de autovalores mais significativos em suas posições exatas. A abordagem da separação temporal dá uma aproximação de primeira ordem destes autovalores, porém requer um esforço computacional menor.

Para que o processo iterativo (135)-(137) possa convergir e se obtenha os dois subsistemas independentes, as relações (138) e (139) devem ser satisfeitas. Isto significa, de um ponto de vista mais prático, que devem haver 1 estados lentos associados a 1 autovalores lentos e $(n-1)$ estados rápidos associados a $(n-1)$ autovalores rápidos.

APLICAÇÃO DOS ALGORITMOS DE REDUÇÃO DE
ORDEM E DE CONTROLE

4.1 MODELO DINÂMICO DA VIA EXPRESSA

Nos últimos anos, vários trabalhos já foram publicados [43] com o objetivo de melhorar o fluxo dos veículos que atravessam uma via expressa. O modelo dinâmico da via expressa é obtido dividindo-se a mesma em seções, cada qual com duas variáveis de estado que representam a densidade e a velocidade dos carros na seção. Como resultado obtém-se, em geral, um modelo dinâmico de grandes dimensões, o que torna difícil o cálculo de um controle para o sistema. Uma saída para este problema consiste em obter modelos reduzidos do sistema original que representem com suficiente precisão a parte do modelo que seja de interesse. Obtido o modelo reduzido, projeta-se um controle para o mesmo que depois é aplicado ao modelo original.

Procura-se aqui aplicar os algoritmos de redução e controle com o objetivo de facilitar o estudo e a solução dos problemas de um sistema de grande porte como é o da via expressa.

O modelo dinâmico utilizado representa uma via expressa dividida em dezessete seções (figura 1). A cada seção são atribuídas duas variáveis de estado : densidade dos carros e velocidade dos carros na seção (x_1 a x_{34}). A via expressa é controlada através de semáforos

localizados em suas rampas de entrada (u1 a u11). O número de veículos que entram na via expressa é influenciado pelo tempo de abertura dos semáforos. São onze rampas de entrada que podem ser controladas, cada qual afetando diretamente apenas as seções próximas à rampa.

	u1	u2	u3		u4		u5	u6	u7	u8		u9		u10	u11	
x1	x3	x5	x7	x9	x11	x13	x15	x17	x19	x21	x23	x25	x27	x29	x31	x33
x2	x4	x6	x8	x10	x12	x14	x16	x18	x20	x22	x24	x26	x28	x30	x32	x34
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

Figura 1. Via expressa dividida em seções .

4.2 REDUÇÃO DA VIA EXPRESSA POR SEPARAÇÃO TEMPORAL

Em uma primeira tentativa, procura-se usar o método da separação temporal para obter dois modelos reduzidos para a VE. Esta decisão surge do fato de existirem diferentes dinâmicas na VE o que, em geral, indica a existência de fraco acoplamento entre certos conjuntos de estados.

Na figura 2 é mostrado o resultado de uma simulação da via expressa para entrada nula e um vetor de estados unitário. Nela pode-se verificar a existência de dinâmicas bastante diferenciadas no sistema. Como se pode observar, o vetor de estados pode ser dividido em quinze estados lentos e dezenove estados rápidos. Procura-se então obter dois subsistemas, um lento e outro rápido, que representem estes

conjuntos de estados. Em um primeiro passo, são calculados os

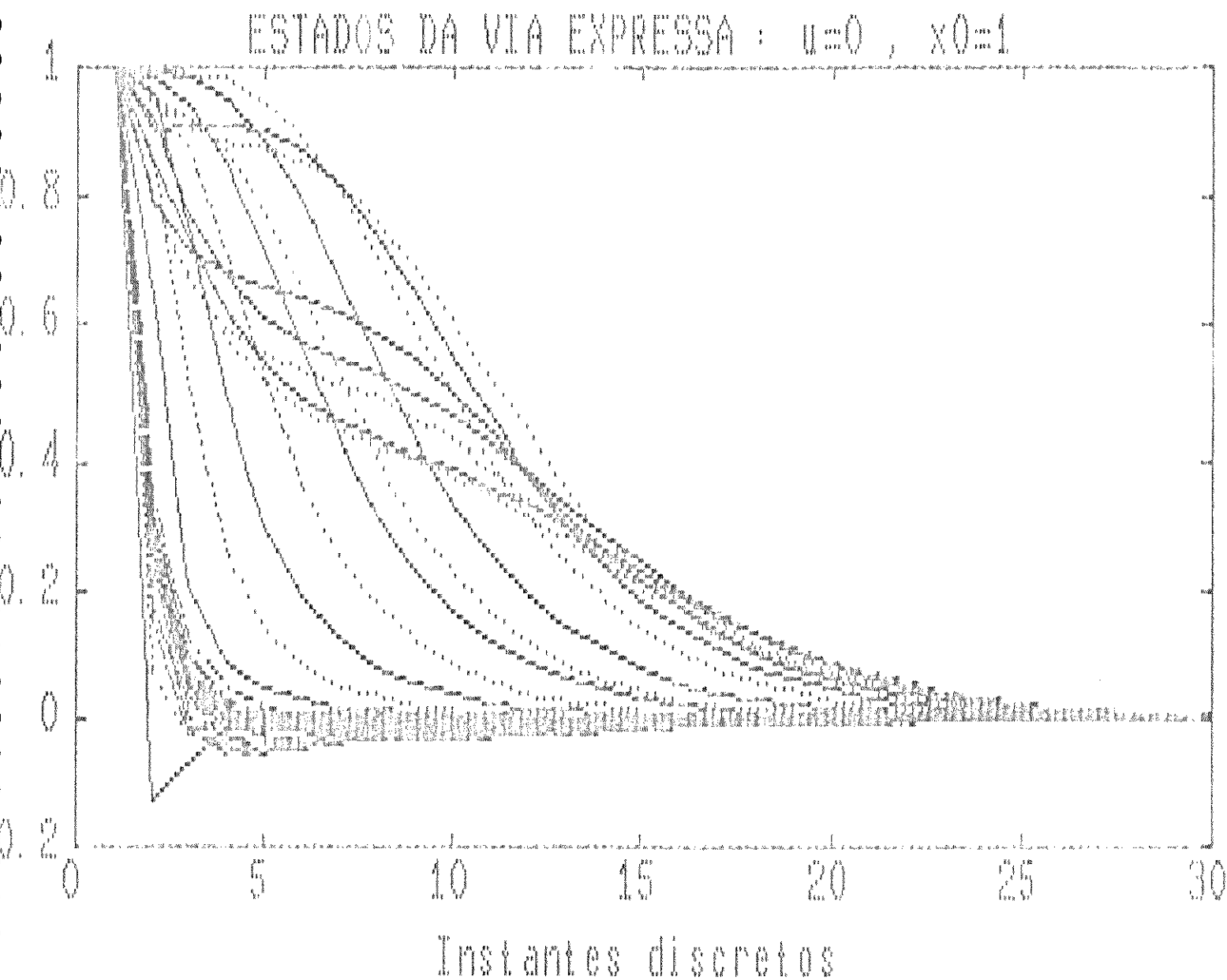


Figura 2 . Simulação da via expressa

autovalores deste sistema, apresentados em ordem decrescente de valor absoluto na tabela 1. Desta tabela, percebe-se que não é possível dividir os autovalores em dois conjuntos suficientemente separados no

tempo. Tomando

$$\frac{|\lambda_{15}|}{|\lambda_{16}|} = \frac{0.1829}{0.1696} = 1.0784$$

nota-se que a condição (120) do cap.3 não é satisfeita, ou seja, o sistema não possui a propriedade da separação temporal. Ainda assim, pode-se verificar as condições (138-139) do mesmo capítulo ,para aplicabilidade da técnica da separação temporal a este sistema. Para isto, reordena-se o vetor de estados de modo que os 15 primeiros sejam os mais lentos .Para verificar se as condições mencionadas são satisfeitas calcula-se

1	0.7092
2	0.6732
3	0.6124
4	0.5800
5	0.4962
6	0.4499
7	0.3720
8	0.3296
9	0.2499
10	0.2091
11	0.1989
12 e 13	0.1793+/- 0.0392i
14 e 15	0.1695+/- 0.0688i
16 e 17	0.1370+/- 0.1000i
18 e 19	0.1124+/- 0.0994i
20 e 21	0.1010+/- 0.1035i
22 e 23	0.0604+/- 0.1304i
24 e 25	0.0460+/- 0.1310i
26 e 27	0.0606+/- 0.1158i
28	0.1283
29 e 30	0.0339+/- 0.0921i
31 e 32	-0.0135+/- 0.0612i
33 e 34	-0.0277+/- 0.0506i

Tabela 1. Autovalores do sistema

$$L_0 = -(I_{19} - A_4)^{-1} A_3$$

$$A_0 = A_1 - A_2 L_0$$

$$\|A_4\| = 0.5391$$

$$\|L_0\| = 0.1623$$

$$\|A_2\| = 0.4202$$

$$\|A_0^{-1}\| = 58.9337$$

$$\|I_1 - A_0\| = 1.006$$

Usando estes valores nas condições citadas, nenhuma delas é satisfeita. Portanto, o processo recursivo deste método não permite obter os modelos reduzidos desejados. Na tentativa de obter pelo menos um subsistema lento de ordem 11, envolvendo os 11 estados mais lentos do sistema, foram aplicadas as equações recursivas (136-137) do cap.3 ao modelo, porém estas não convergiram.

Portanto, apesar do sistema possuir dinâmicas bastante diferentes, não é possível separá-las através desta técnica. Isto pode ser explicado em parte pelo fato de que embora a interação entre estados lentos e rápidos seja função de tempo, ela é bastante forte, pois os estados rápidos e lentos que estão em uma mesma seção da via expressa interagem fortemente.

4.3 REDUÇÃO DA VIA EXPRESSA POR AGREGAÇÃO MODAL

O modelo dinâmico da via expressa, apesar de ser de ordem relativamente grande não apresenta grande dificuldade na análise modal da matriz do sistema. De fato, os autovalores e autovetores do sistema podem ser obtidos em micros tipo PC consumindo para isto um tempo da ordem de 60 segundos. A análise dos autovalores da tabela 1 mostra que eles vão desde valores próximos a 1 até valores próximos a zero. Esta característica é muito importante e viabiliza a aplicação da técnica de redução por agregação modal. Resta saber quais estados serão retidos no sistema de menor ordem.

Para isto, observa-se a simulação do sistema original, mostrada na figura 2. O resultado da simulação dá uma boa idéia sobre os estados a serem retidos, pois mostra os estados cujas trajetórias demoram mais para entrar em regime. Estes estados serão retidos no modelo reduzido basicamente por dois motivos : os controles projetados para VEs visam ,em geral, acelerar sua dinâmica e isto significa atuar sobre sua parte lenta. O segundo motivo é que, retendo os estados mais lentos no modelo reduzido, este será mais fiel ao modelo original, pois em geral, os estados lentos estão associados a autovalores lentos. Convém lembrar que os estados lentos da via expressa correspondem às densidades das seções e os estados rápidos às velocidades destas seções.

4.3.1 ANÁLISE DOS MODOS A REETER NOS MODELOS REDUZIDOS

Uma vez escolhido o conjunto de estados a reter no modelo reduzido (dos quais ainda pode-se extrair um novo subconjunto), resta agora a análise dos modos a reter. Em geral, os modos retidos são os mais lentos, porém, em certos casos esta não é a melhor escolha.

Baseando-se na seção 3.1.8 do capítulo 3, é feito agora um estudo sobre a importância dos modos do sistema sobre os 15 estados escolhidos, iniciando pela análise da influência dos modos em condições de regime. Usando (90) do cap.3 calcula-se a influência dos 34 modos sobre os estados. O resultado pode ser visto nas figuras 3.a,b,c. As abscissas dos gráficos destas figuras representam os 34 modos do sistema e as ordenadas representam suas contribuições.

Em cada gráfico, as contribuições correspondem a valores reais, de modo que, se forem somadas, resultam na condição de regime do respectivo estado. Como se pode observar, os modos mais lentos realmente possuem uma influência maior em regime. Os modos 1 a 7 têm grande influência sobre todos os estados, não podendo, portanto, ser excluídos de um modelo reduzido.

Para avaliar melhor a influência dos modos menos importantes, as contribuições destes 7 primeiros modos são somadas. Isto permite obter os gráficos das figuras 4.a,b,c. Nestes gráficos, a contribuição de cada modo é representada por um '+' e a linha pontilhada corresponde à condição de regime de cada estado.

Nas figuras 5.a-o, é mostrada a influência dos modos do sistema sobre os 15 estados mais lentos durante os primeiros 15

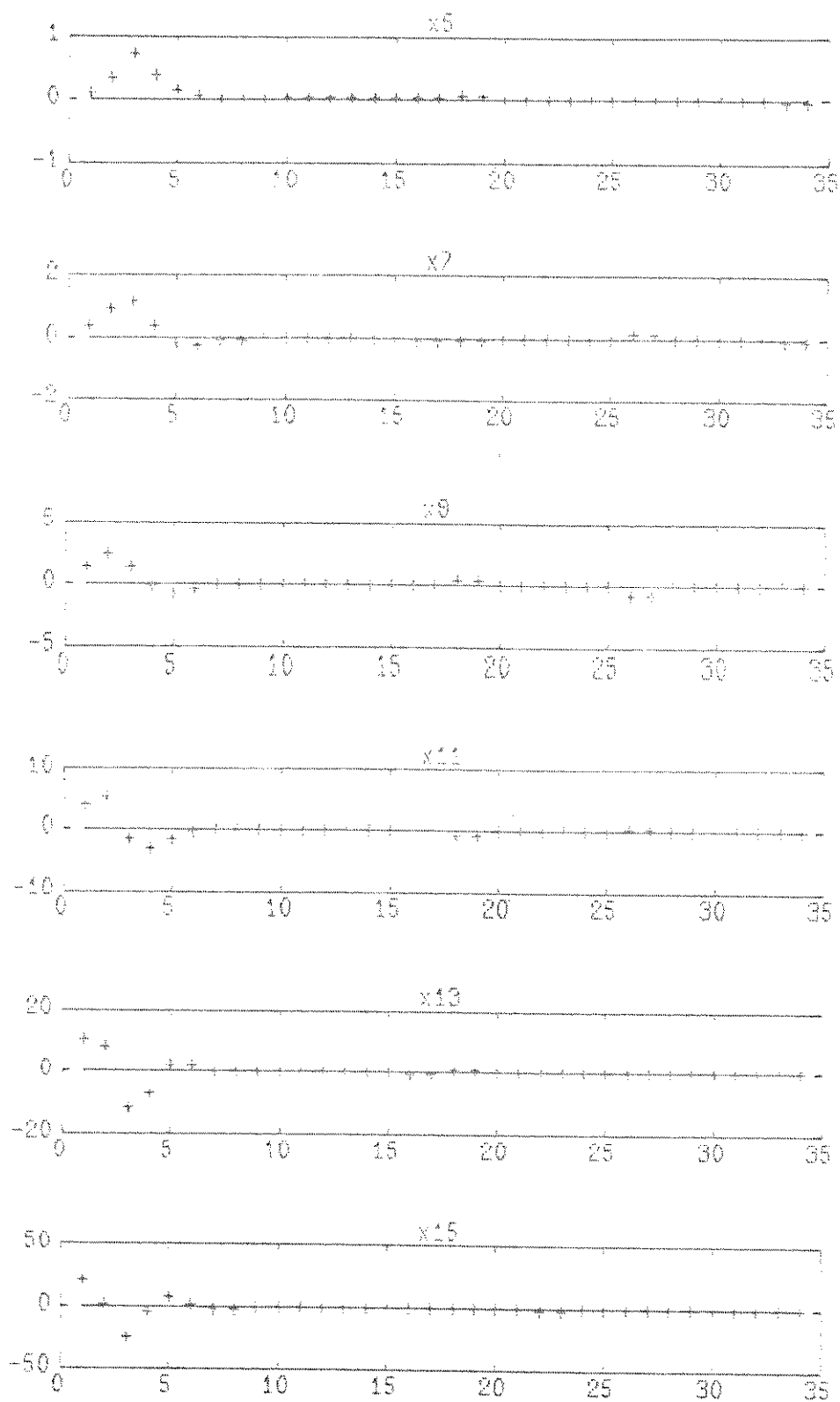


Figura 3.a. Contribuição dos autovalores em regime

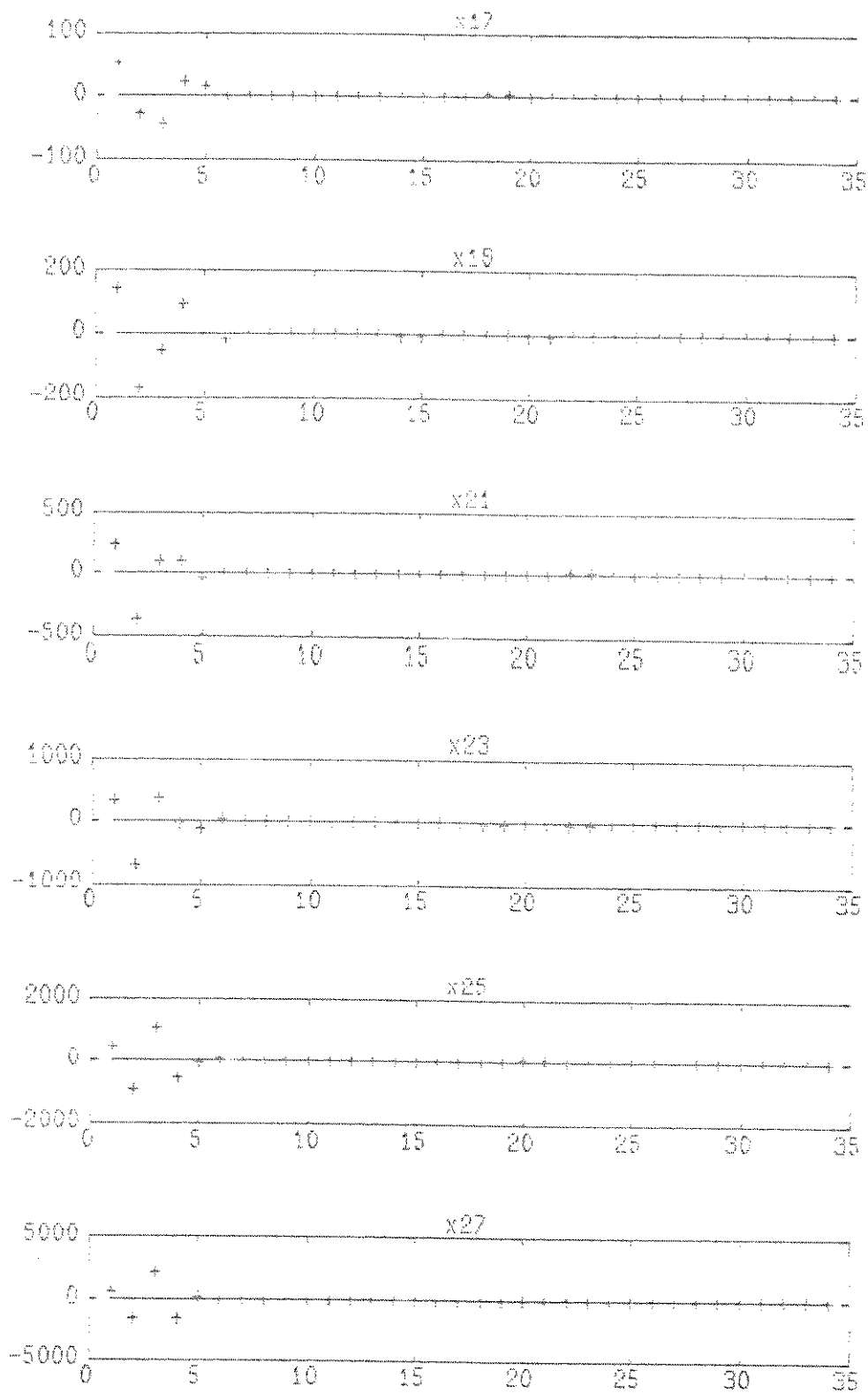


Figura 3.b. Idem 3.a

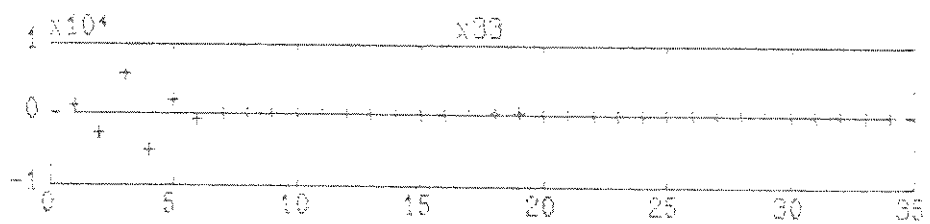
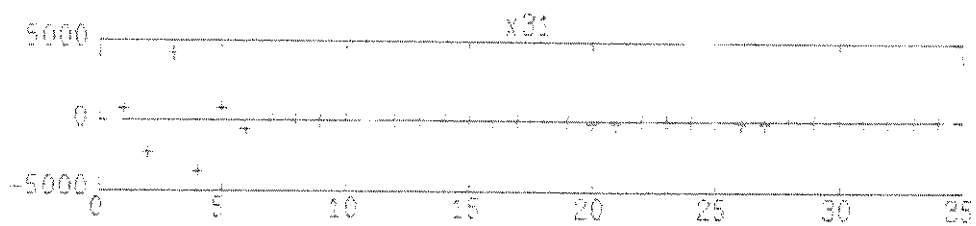
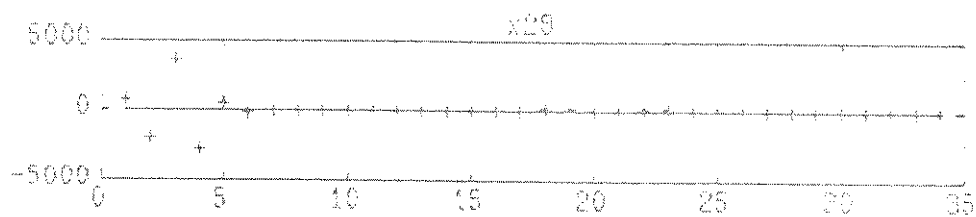


Figura 3.c. Idem 3.a

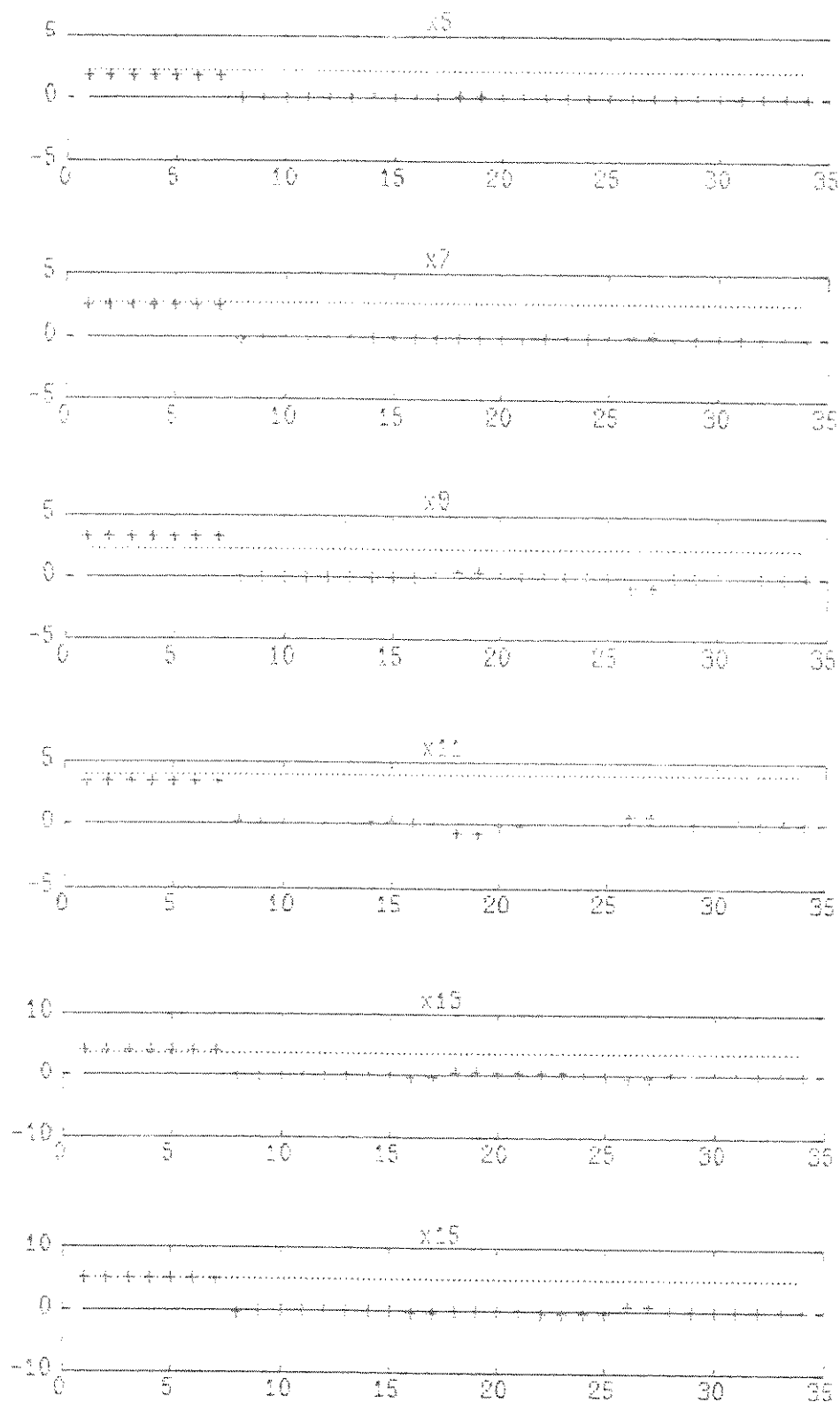


Figura 4.a. Contribuição em regime e condição de regime dos estados

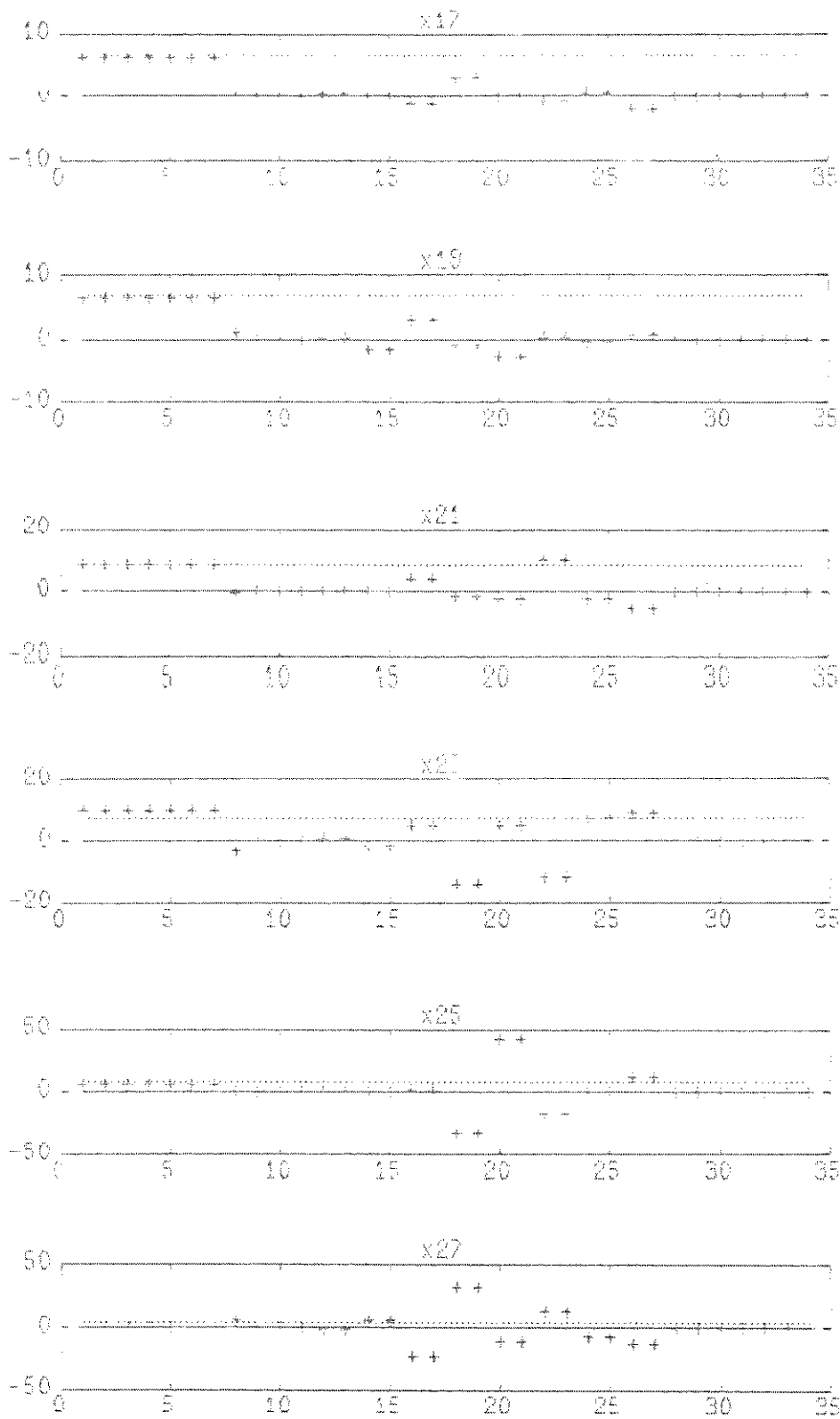


Figura 4.b. Idem 4.a

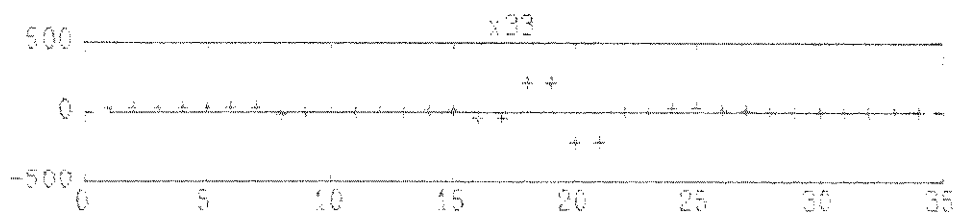
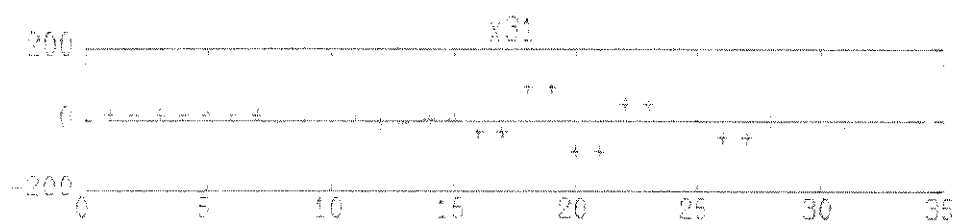
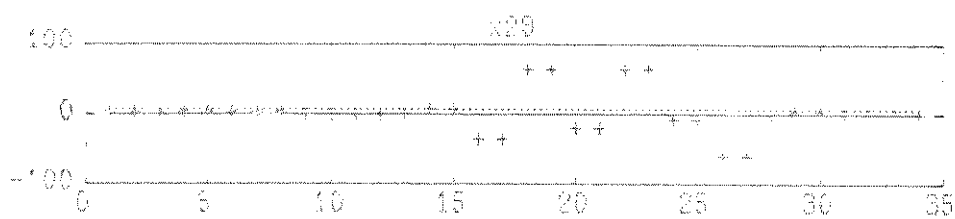


Figura 4.c. Idem 4.a

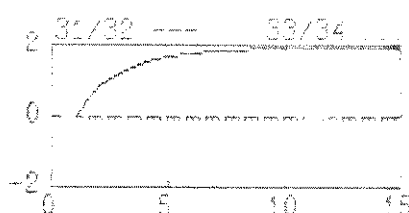
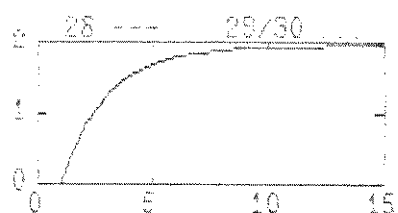
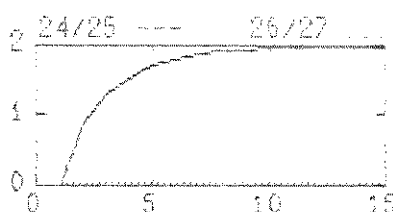
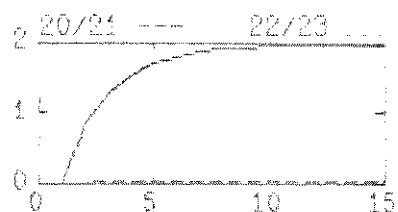
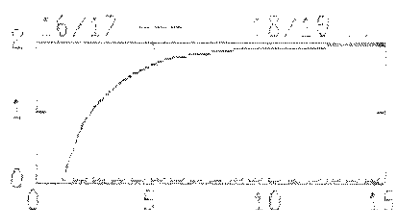
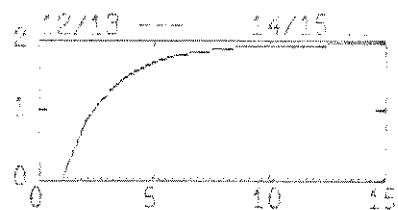
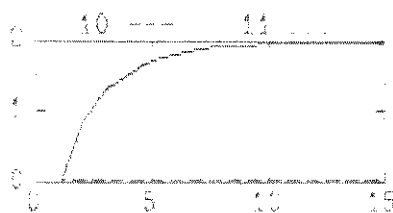
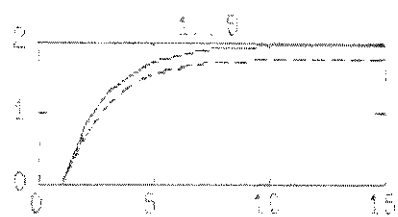


Figura B.a. Contribuição dos autovalores no transitório de x_5

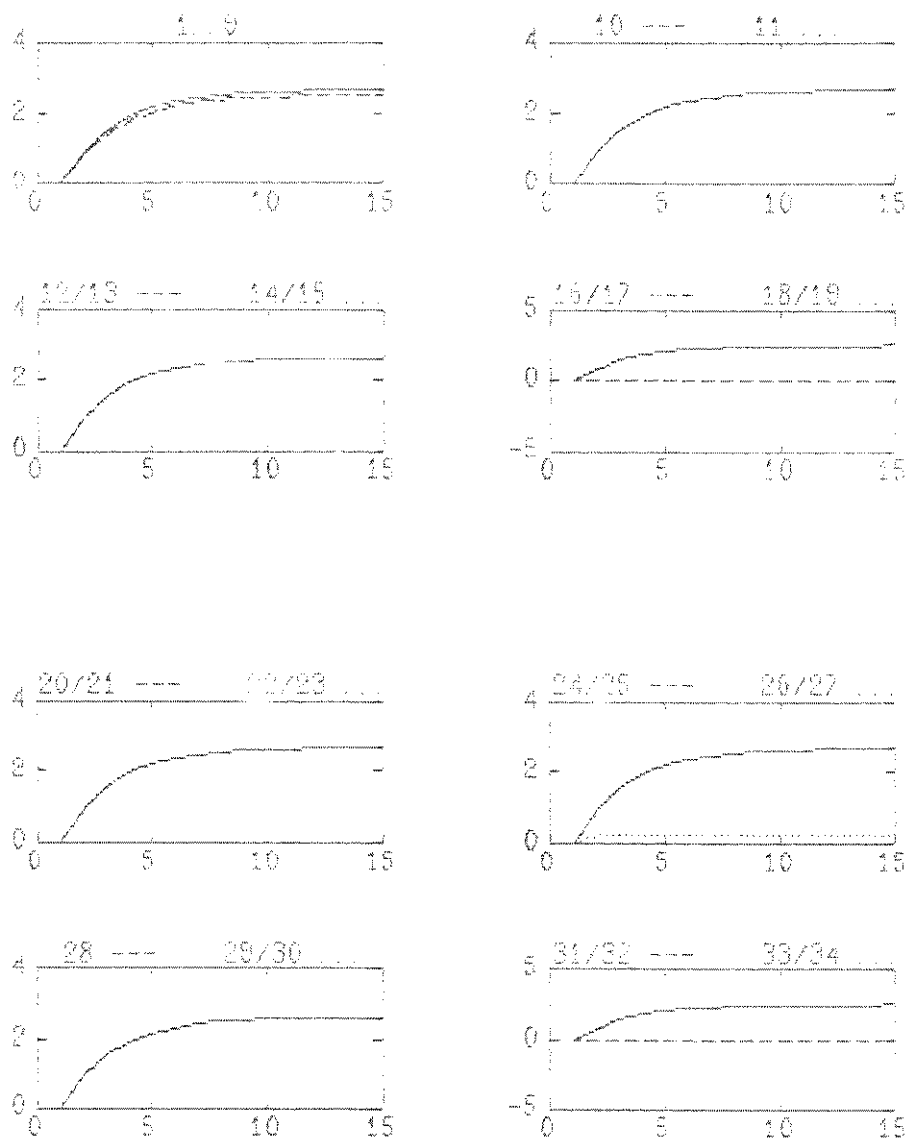


Figura 5.b. Contribuição dos autovalores no transitório de x_7

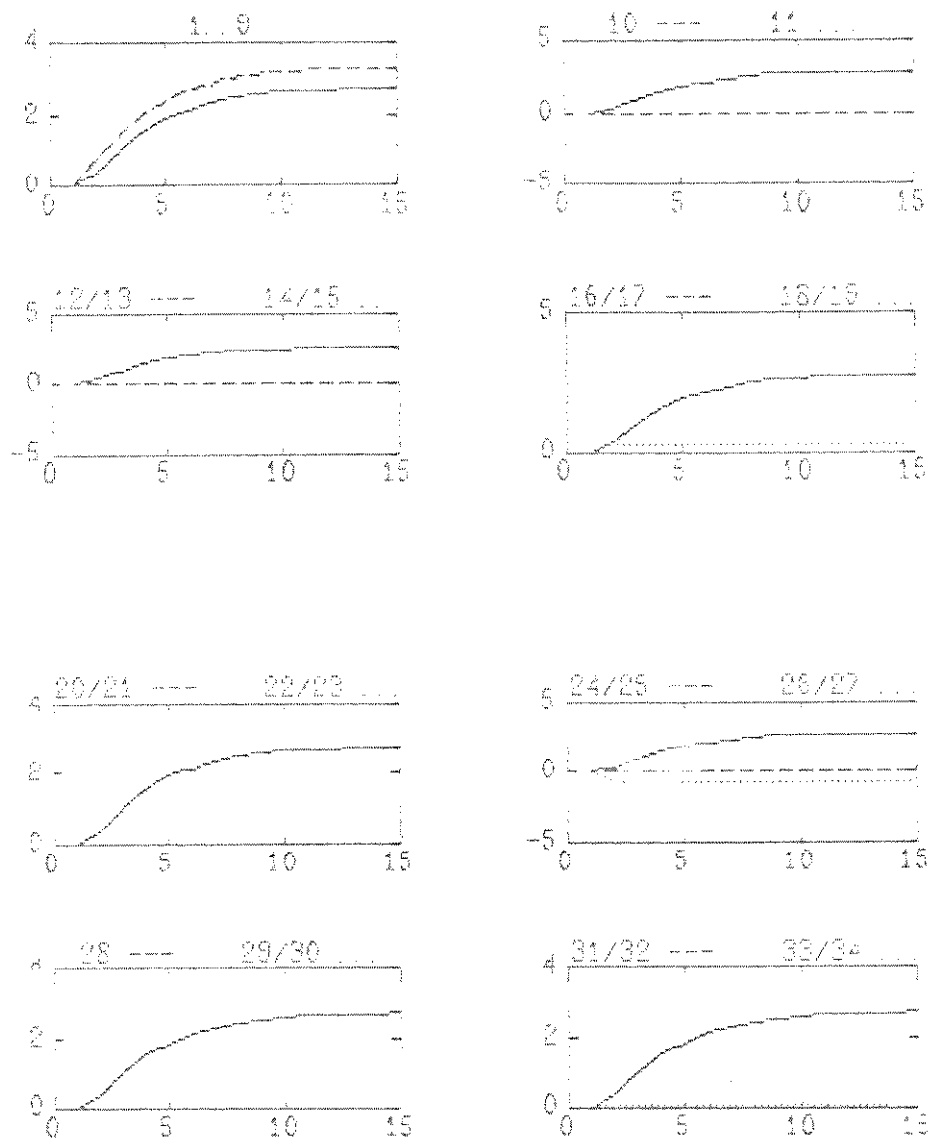


Figura 5.C. Contribuição dos autovalores no transitório de x_9

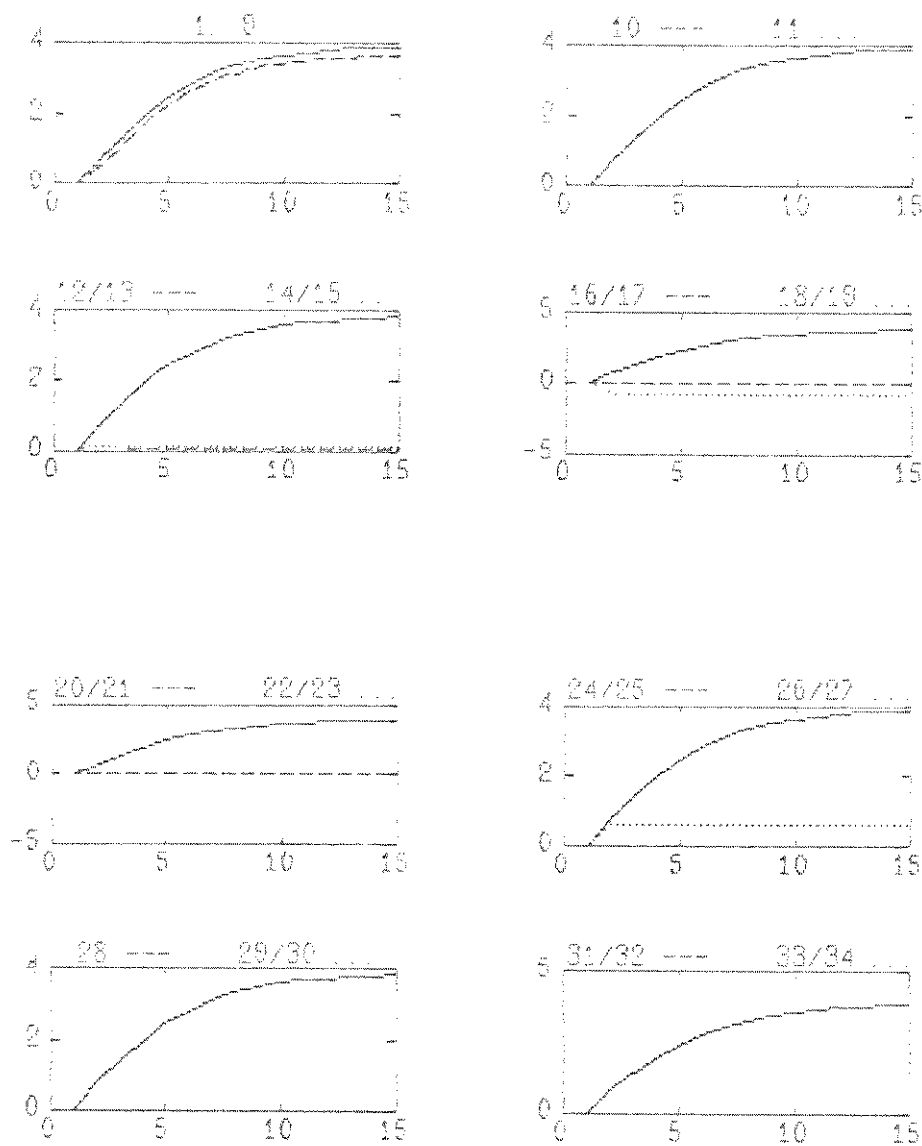


Figura 5.d. Contribuição dos autovalores no transitório de x_{11}

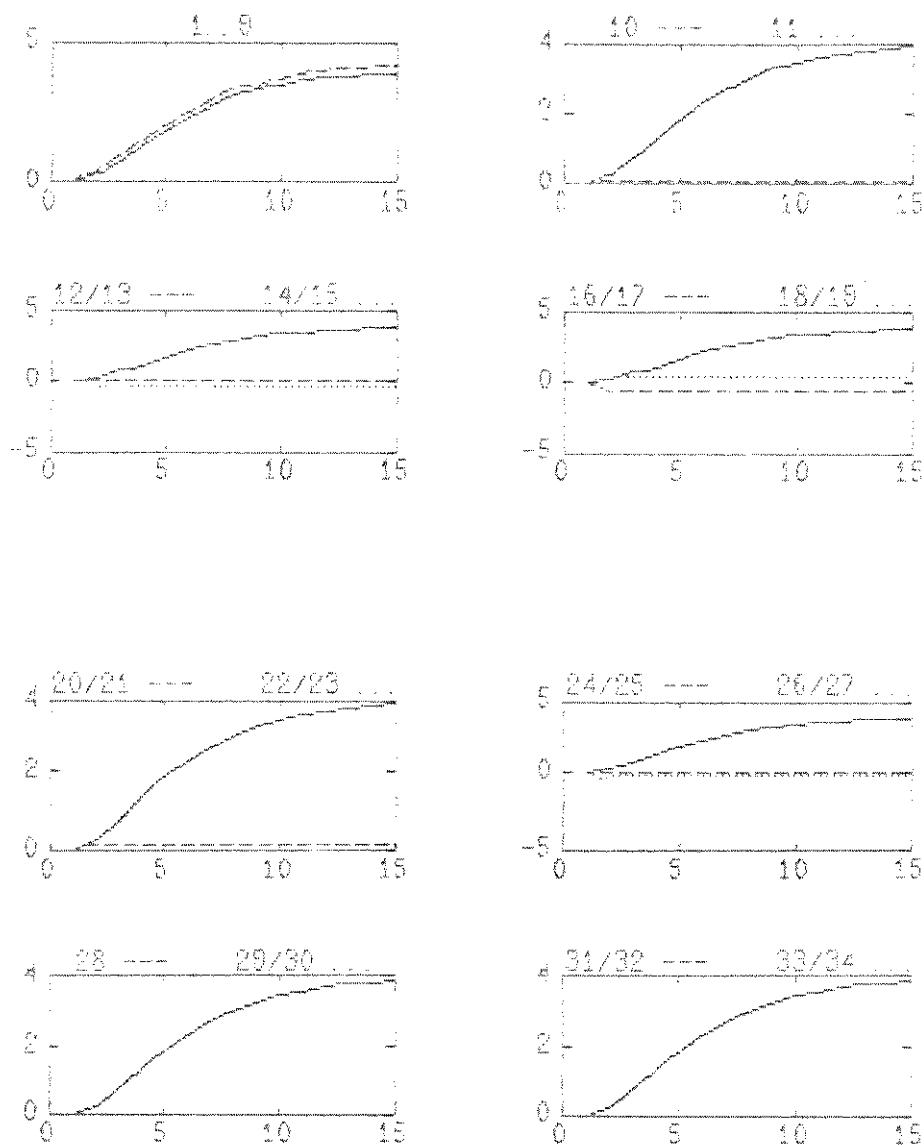


Figura 5.e. Contribuição dos autovalores no transitório de x_{13}

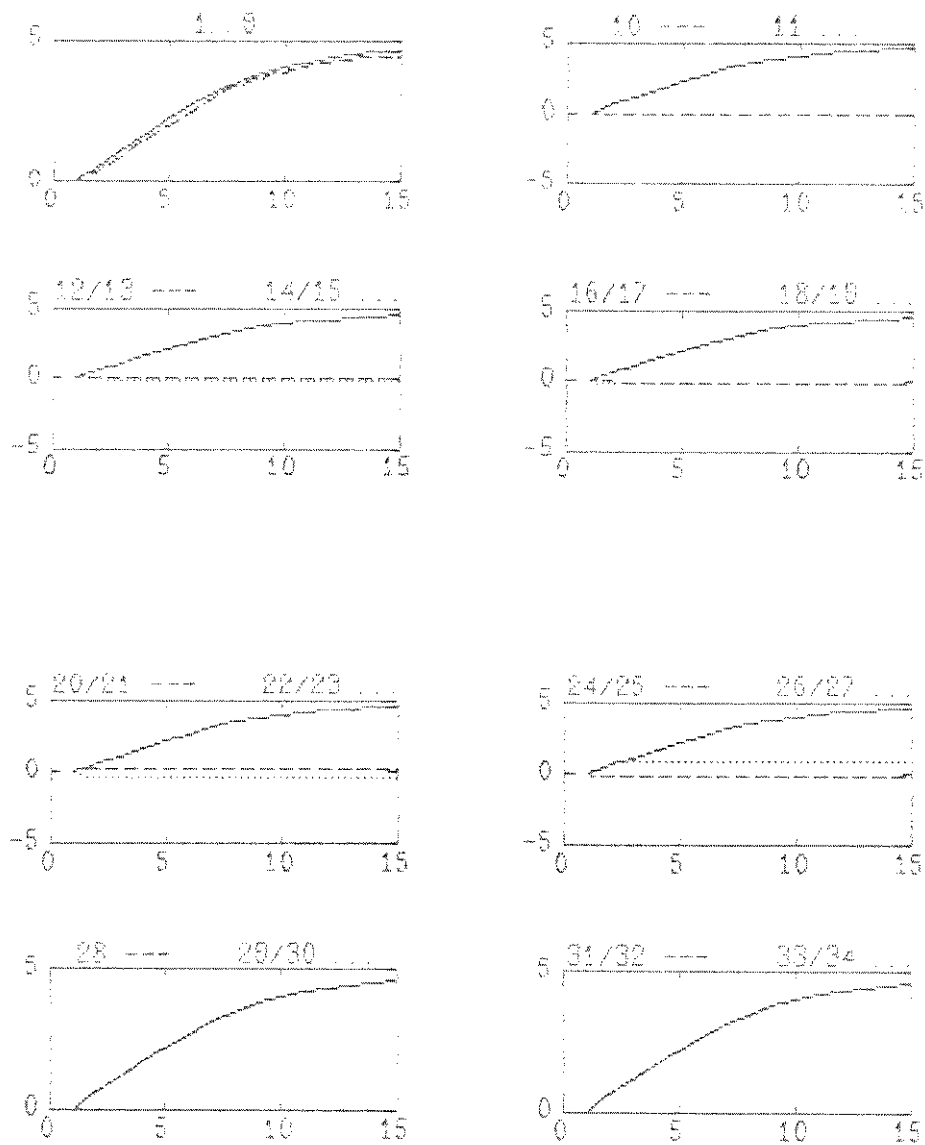


Figura 5.f. Contribuição dos autovalores no transitório de x_{15}

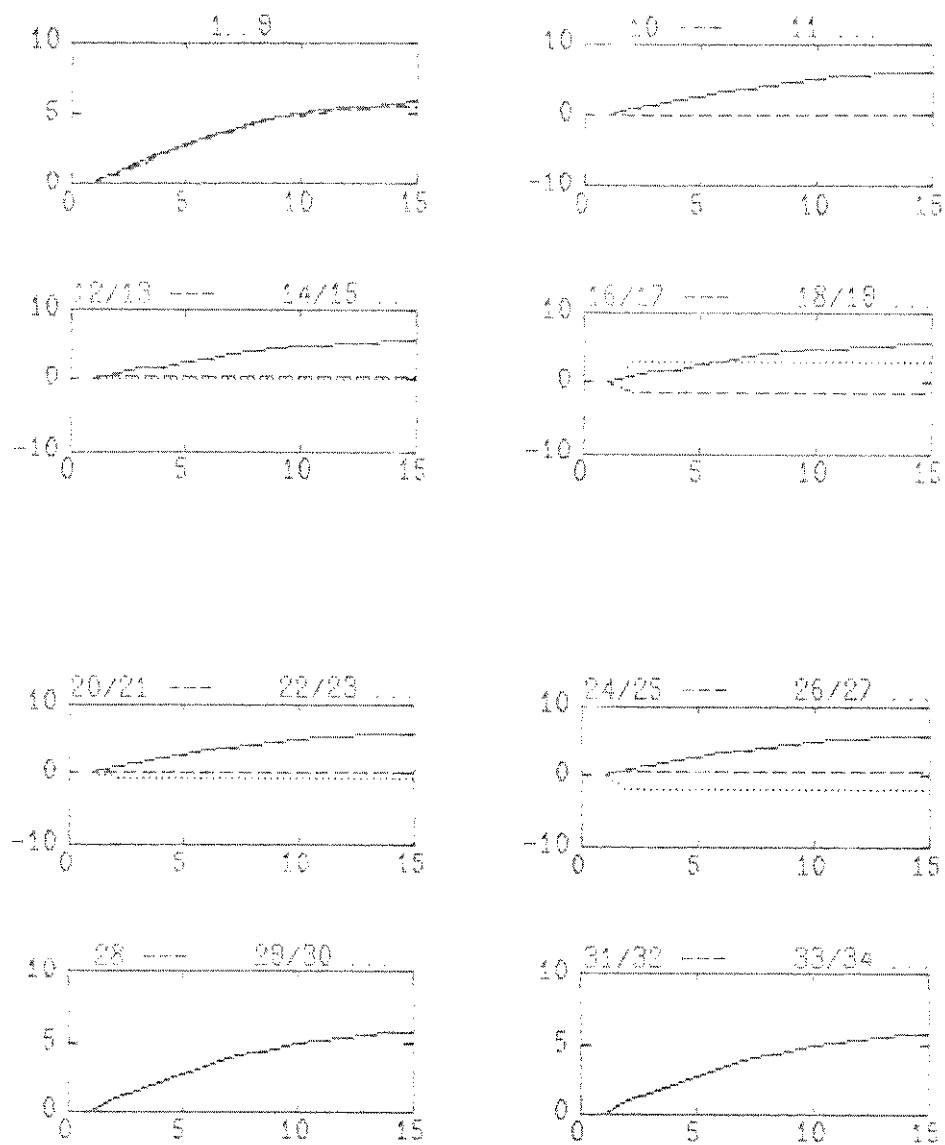


Figura 5.g. Contribuição dos autovalores no transitório de x_{17}

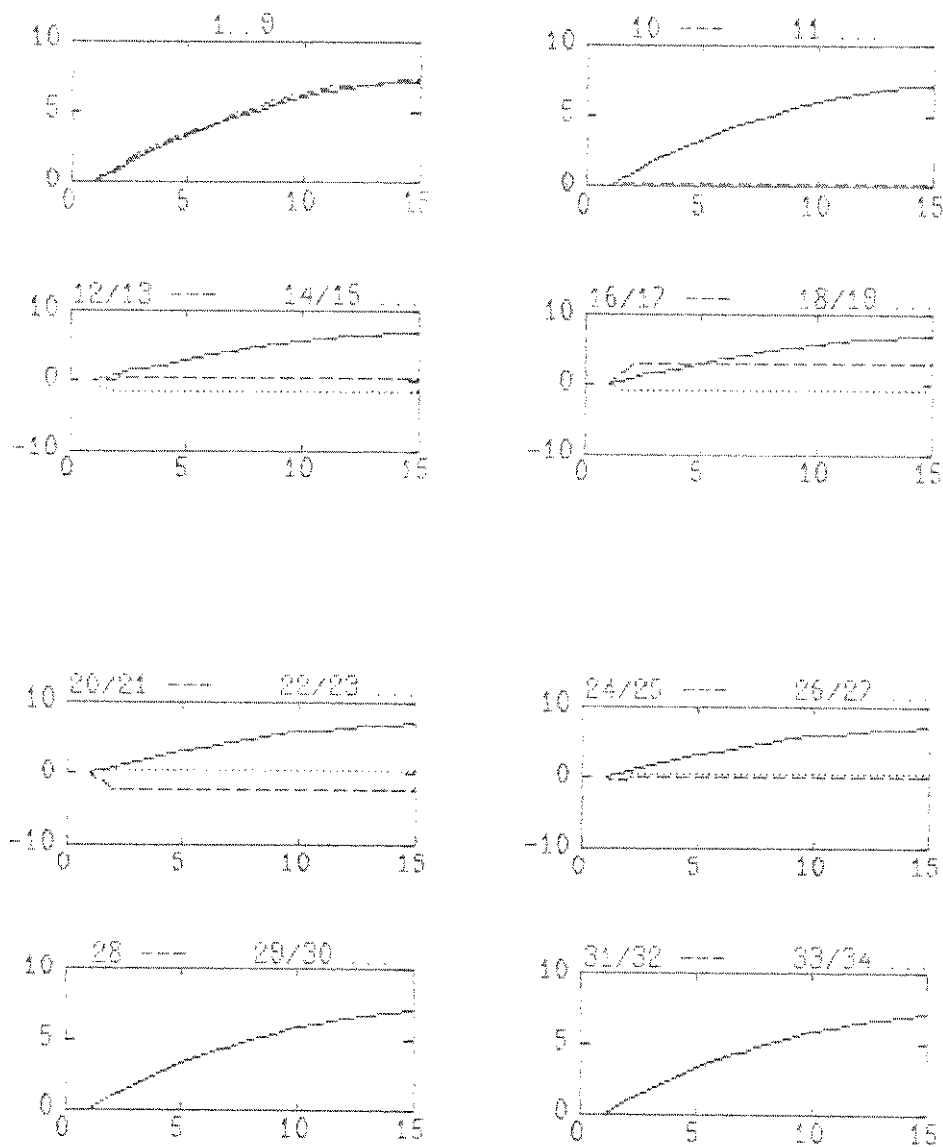


Figura 5.h. Contribuição dos autovalores no transitório de x_{19}

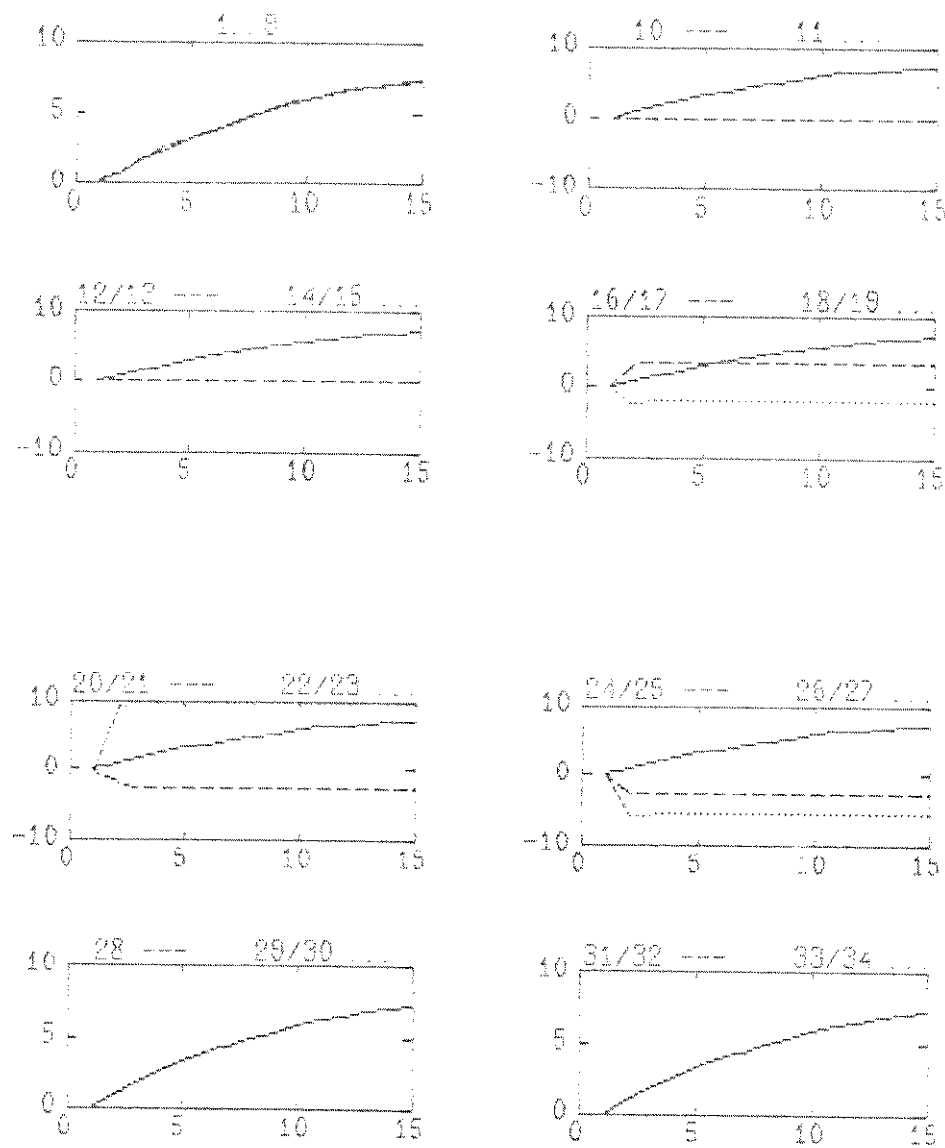


Figura 5.1. Contribuição dos autovalores no transitório de x_{z1}

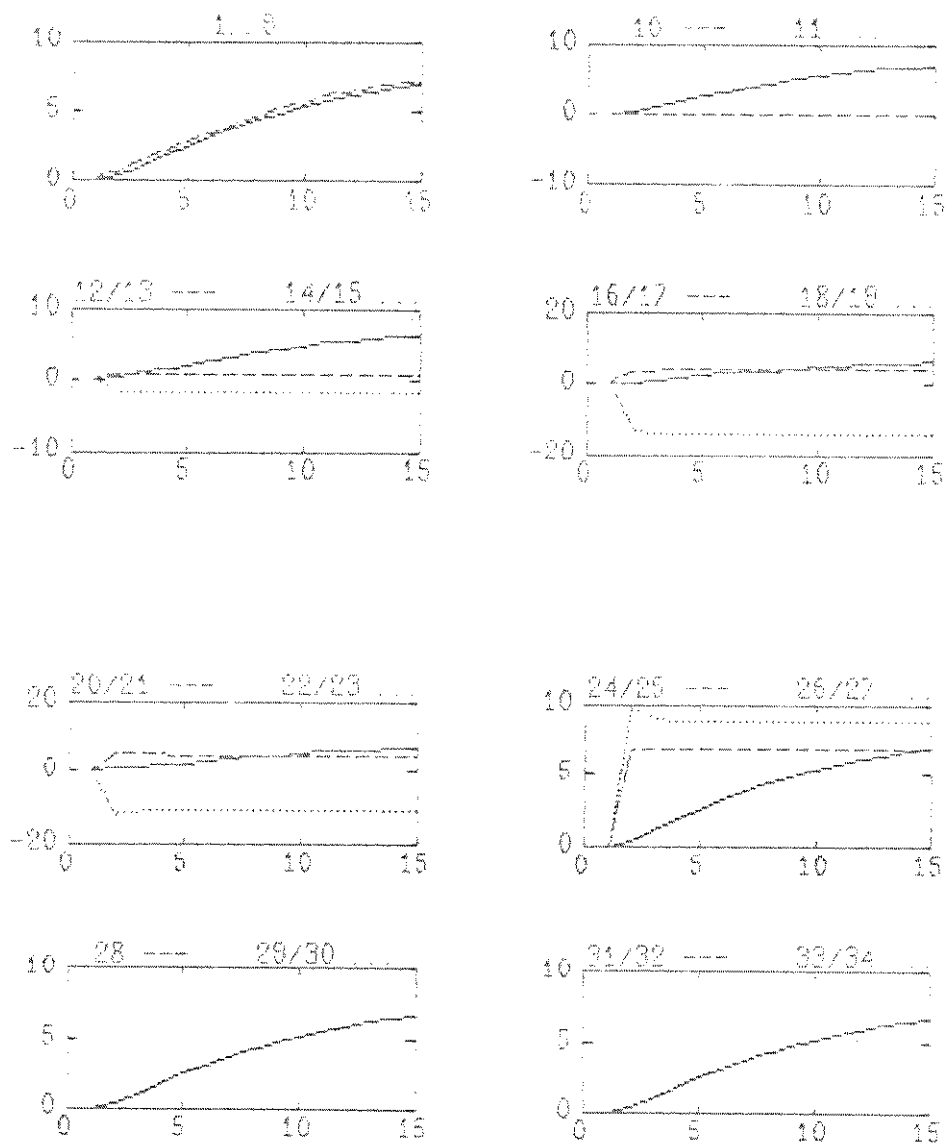


Figura 5.j. Contribuição dos autovalores no transitório de x_{23}

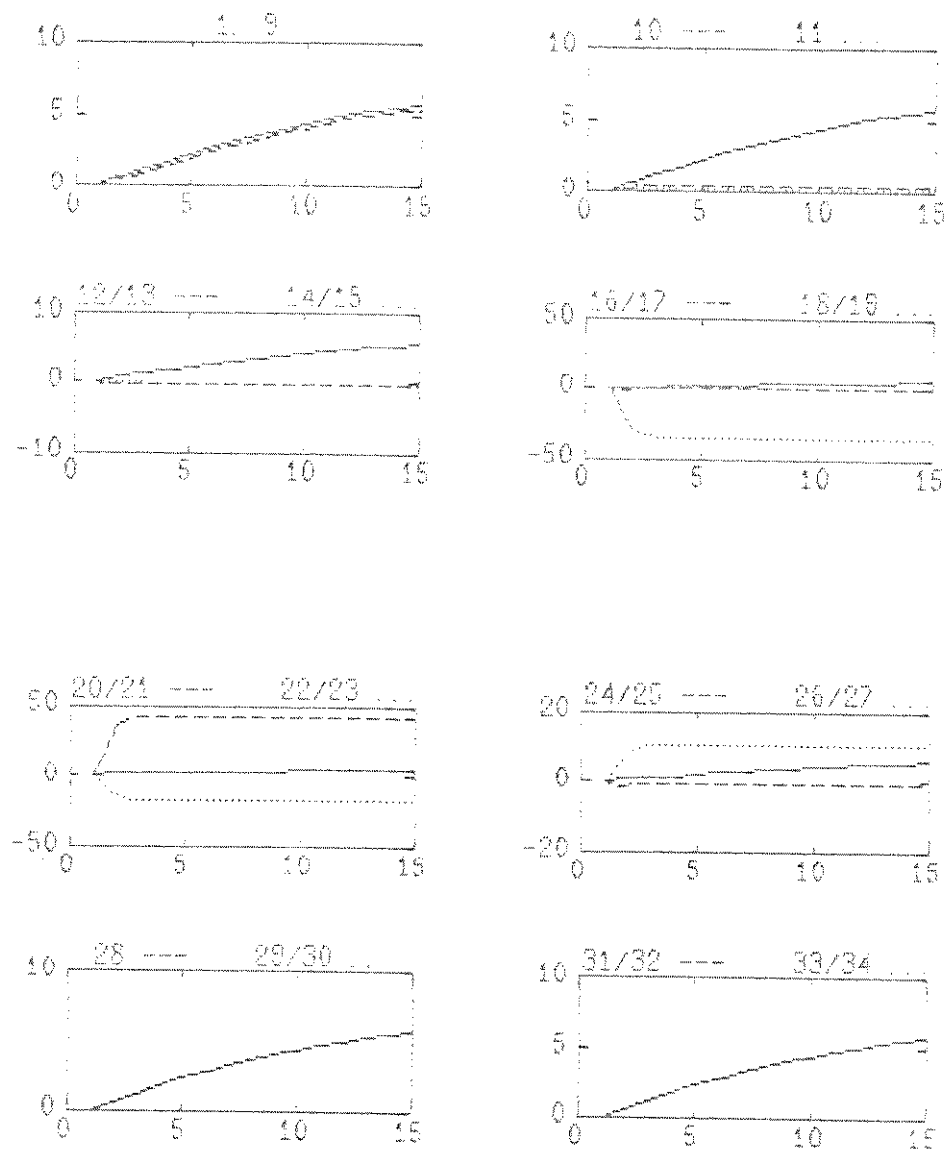


Figura 5.k. Contribuição dos autovalores no transitório de x_{25}

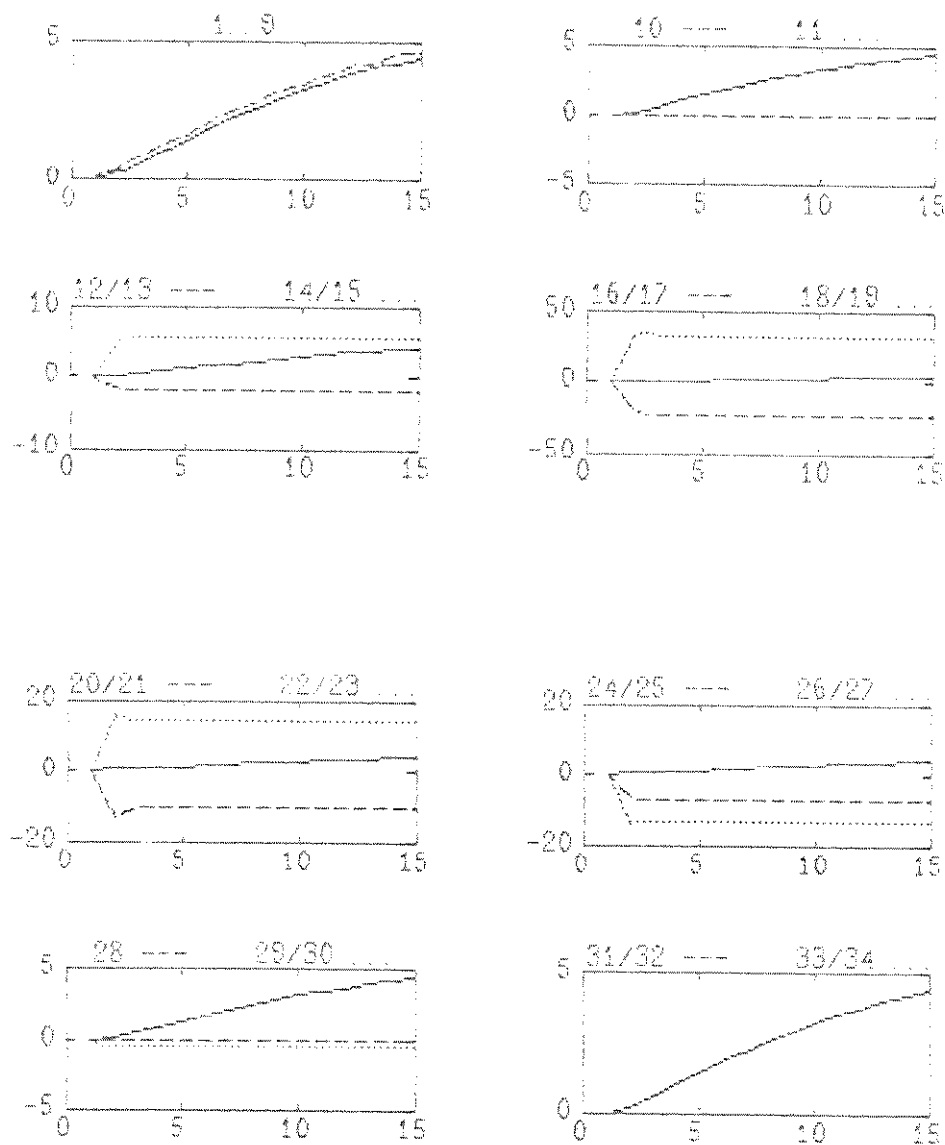


Figura 5.1. Contribuição dos autovalores no transitório de x_{27}

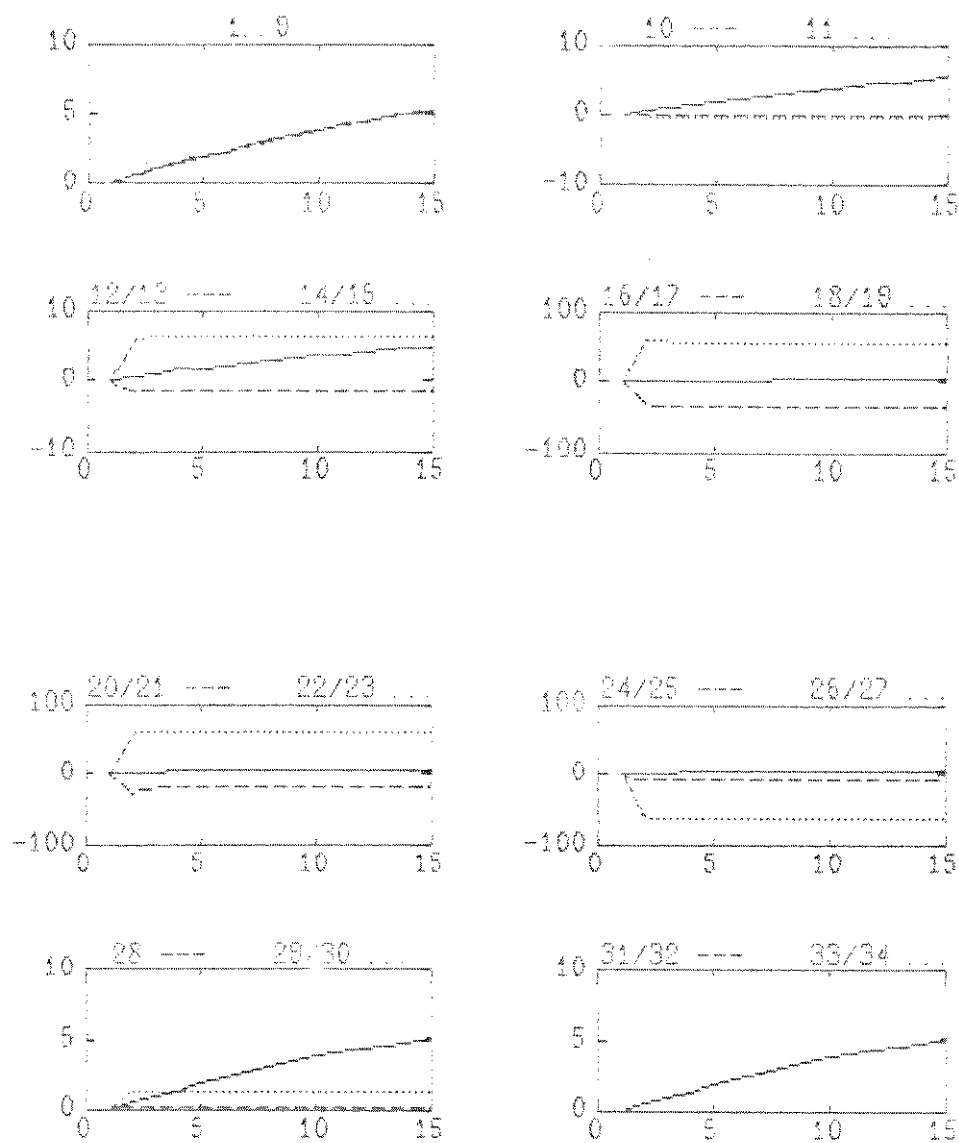


Figura 5.m. Contribuição dos autovalores no transitório de x_{29}

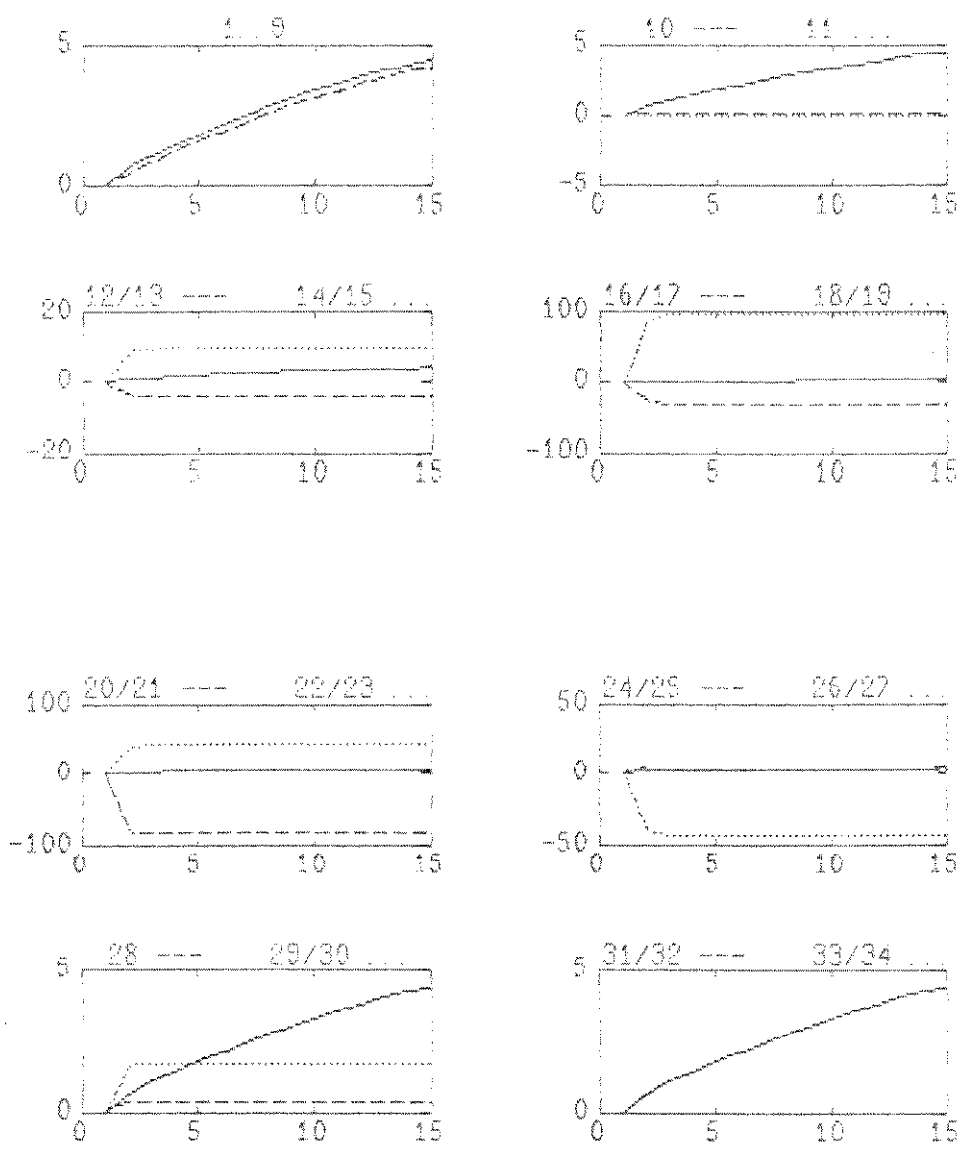


Figura 5.n. Contribuição dos autovalores no transitório de x_{31}

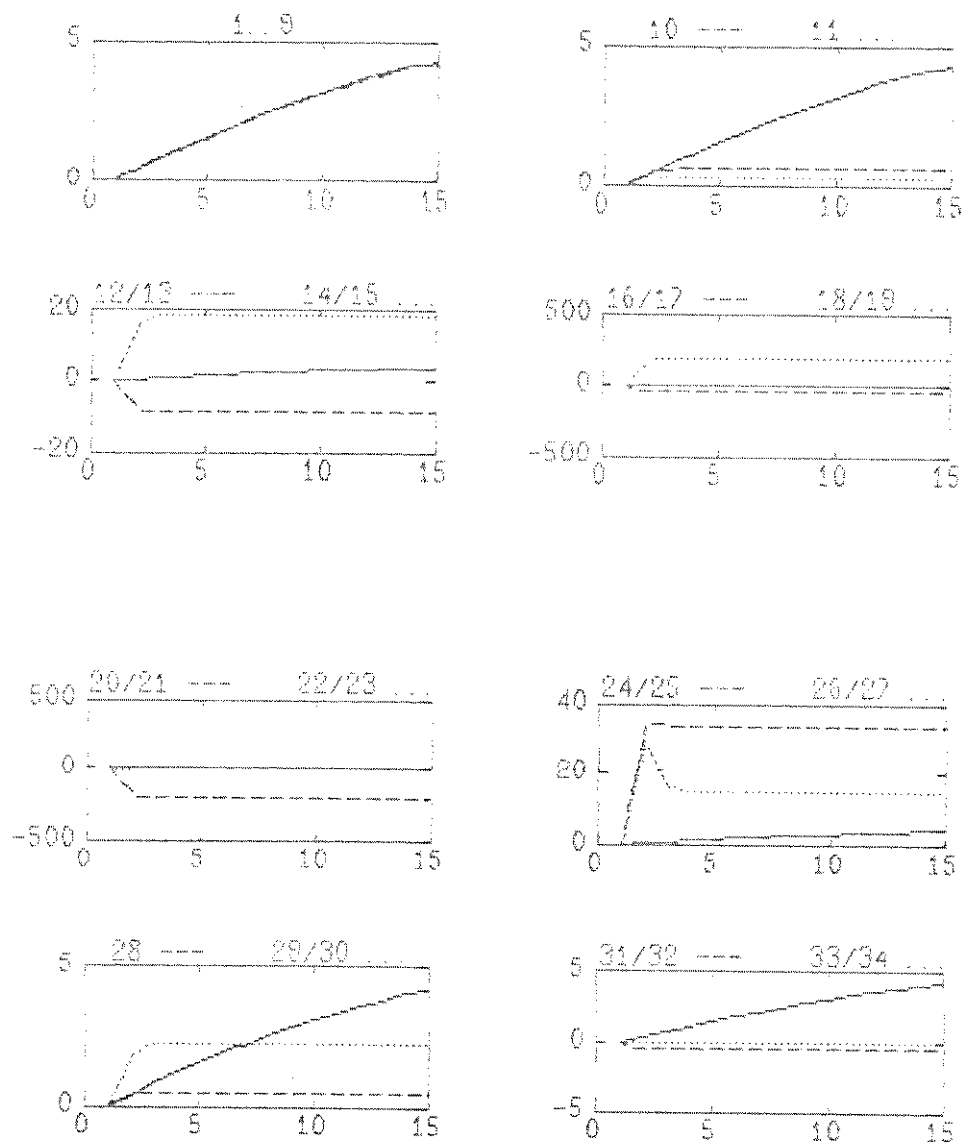


Figura 5.6. Contribuição dos autovalores no transitório de x_{33}

instantes discretos. Esta influência é obtida da seguinte forma : usando (89) do cap.3 calcula-se a influência de cada modo sobre cada estado a cada instante. O número de instantes é escolhido de forma a envolver suficientemente bem o transitório. Cada curva representa a influência no tempo de um autovalor sobre o estado. Como os modos 1 a 9 têm grande influência no transitório, devendo portanto ser retidos, seu efeito é somado para facilitar esta análise. Junto com a curva de influência do autovalor é mostrada a trajetória do estado em estudo. Isto facilita a escolha de autovalores por semelhança das curvas.

O uso das figuras 4 e 5 depende do método empregado para redução. Nos métodos II e III, basta escolher nos gráficos destas figuras um conjunto de modos cuja soma das curvas represente com boa precisão os estados que se deseja reter no modelo reduzido. Para o método I a escolha deve ser mais criteriosa, uma vez que o efeito dos modos não retidos é incluído no modelo reduzido. Este tipo de análise será feita na obtenção dos diferentes modelos reduzidos na seção seguinte.

4.3.2 MODELOS REDUZIDOS DE ORDEM 9

Pelos gráficos das figuras 5.a,b,c, observa-se que a contribuição dos 9 primeiros modos do sistema já permite obter uma boa aproximação para os 15 estados mais lentos analisados. Usando o método de redução II com estes modos retidos, as curvas do modelo reduzido terão um comportamento idêntico às da figura 5, para uma mesma entrada. O mesmo não pode ser afirmado a respeito do método de redução

I, para o qual o efeito dos modos restantes é incluído na resposta do sistema, podendo deformar as curvas. Optou-se por representar pelos modelos reduzidos o conjunto de estados $(x_3, x_7, x_9, x_{11}, x_{13}, x_{15}, x_{17}, x_{19}, x_{21})$, por serem os estados lentos menos influenciados pelos modos mais rápidos. Nos gráficos de simulações de sistemas que serão apresentados até o final deste trabalho, é adotada a convenção de uma linha contínua para representar a trajetória do estado no modelo original e uma linha tracejada para a mesma trajetória obtida via modelo reduzido. As abscissas dos gráficos representam os instantes discretos e as ordenadas a trajetória do estado que dá o título ao gráfico.

Nas figuras 6 e 7 é mostrado o resultado das simulações dos sistemas reduzidos obtidos pelos métodos I e II, respectivamente, à entrada degrau unitário. Estes resultados mostram estar correta a análise feita sobre escolha dos modos a reter para o método de redução II. Para o método I, faz-se necessário informações adicionais que permitam avaliar a degradação do modelo pelo efeito dos modos não retidos. Na figura 8, é mostrado o resultado da simulação do modelo obtido via método de redução III.

A prática tem mostrado que quando obtemos modelos reduzidos via método II que representam bem o transitório, então a correção de regime fornecida pelo método III permite aproximar os estados correspondentes do sistema original com bastante precisão tanto no período transitório quanto no de regime. Para simplificar a explicação dos resultados, os modelos reduzidos obtidos pelos métodos I, II e III serão referenciados como modelos I, II e III, respectivamente.

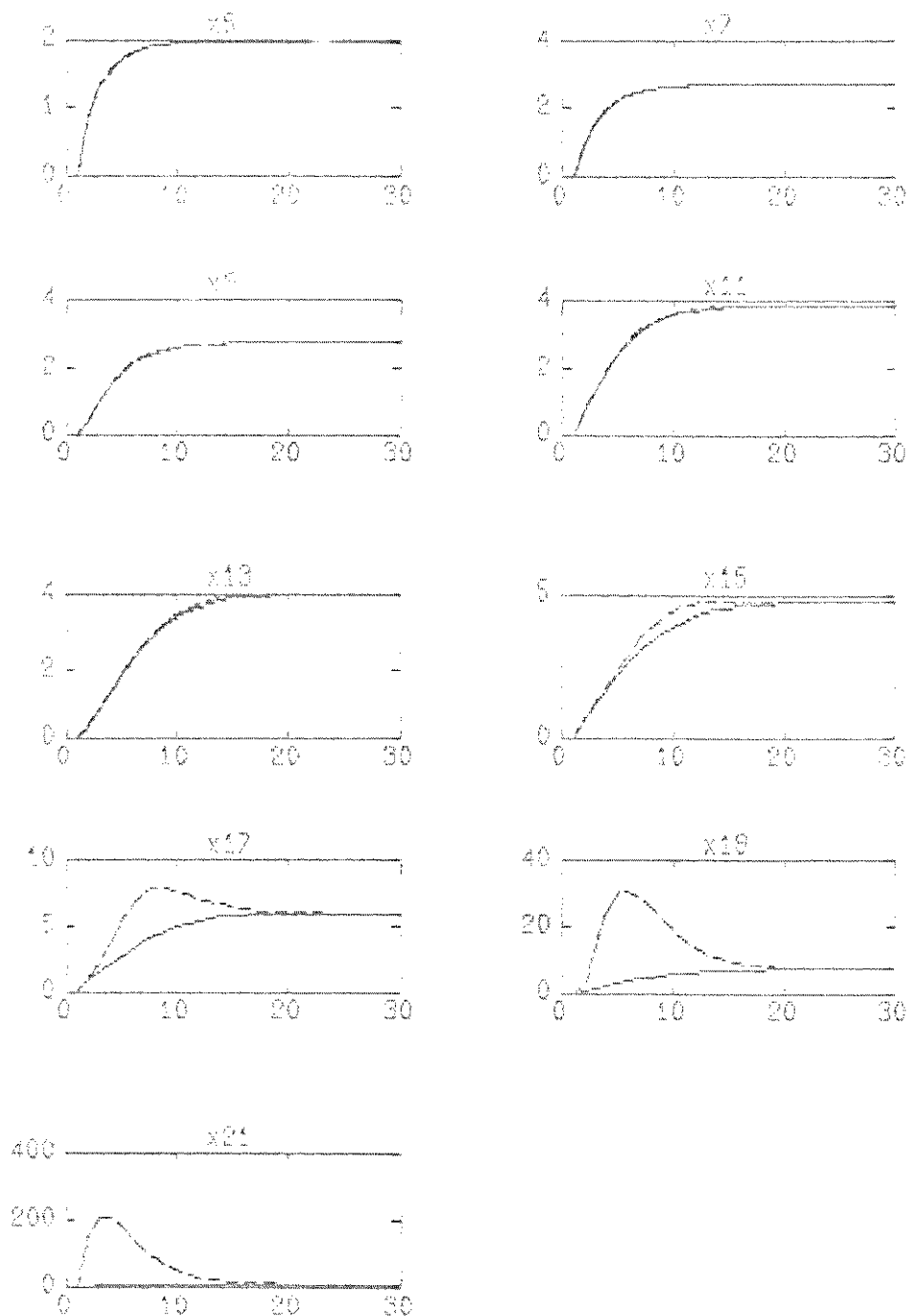


Figura 6. Modelo reduzido de ordem 9 obtido via método I

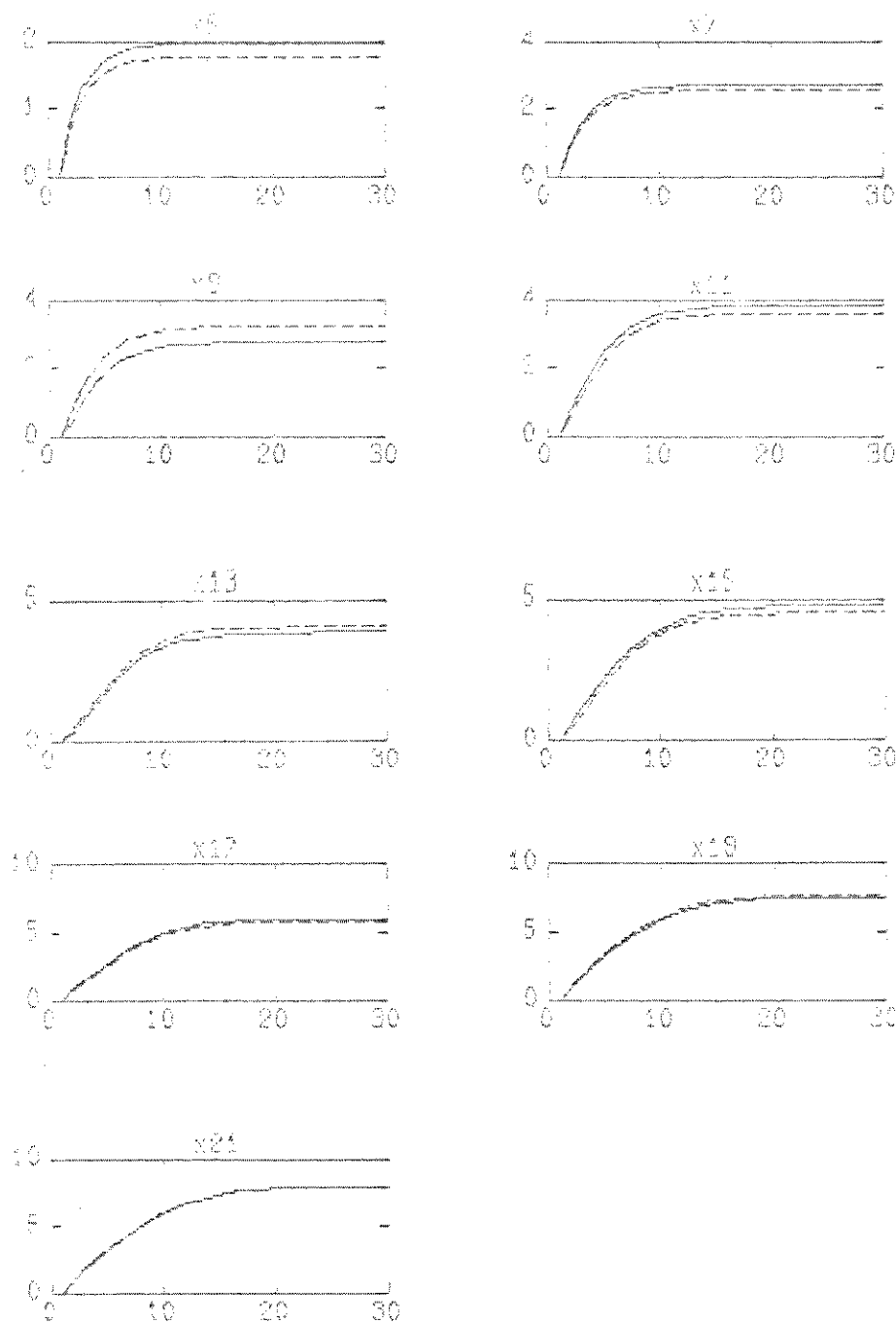


Figura 7. Modelo reduzido de ordem 9 obtido via método II

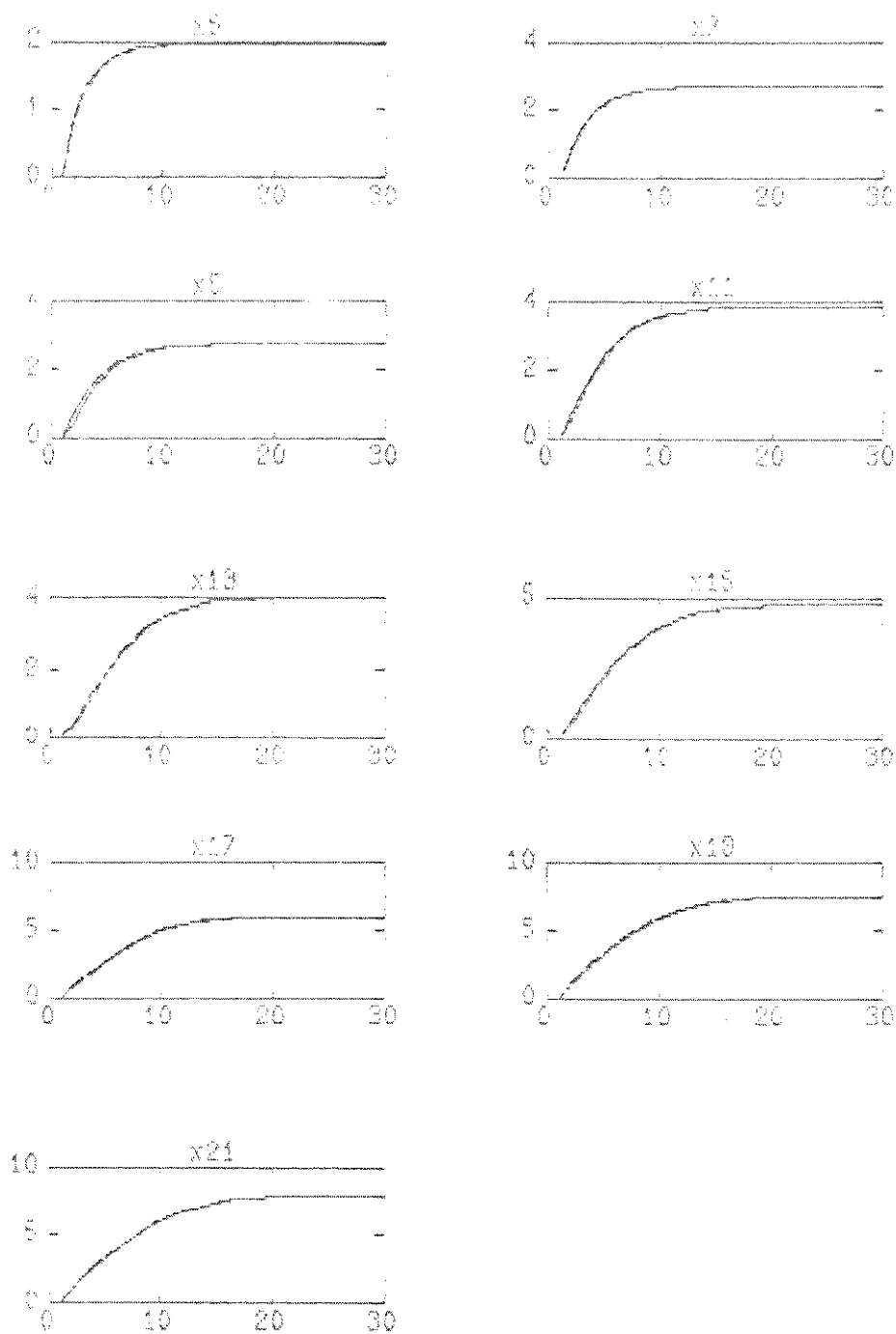


Figura 8. Modelo reduzido de ordem 9 obtido via método III

4.3.3 MODELOS REDUZIDOS DE ORDEM 11

Passa-se agora à obtenção de modelos reduzidos de ordem 11 tal que os 11 estados $(x_5, x_7, x_9, x_{11}, x_{13}, x_{15}, x_{17}, x_{19}, x_{21}, x_{23}, x_{25})$ do sistema sejam por eles representados. Em uma primeira tentativa, serão retidos nos modelos reduzidos os 11 modos mais lentos (1 a 11 na tabela 1). As simulações dos modelos reduzidos I, II e III são mostradas nas figuras 9, 10 e 11. O modelo I representa melhor os 9 estados mais lentos do sistema do que o modelo anterior de ordem 9. Os modelos II e III novamente representam bastante bem a parte do sistema em estudo, mostrando-se superiores ao modelo I também para este caso.

Para avaliar o efeito da retenção de diferentes modos no modelo reduzido, pode-se usar as figuras 4 e 5 para tentar melhorar a resposta do modelo II, onde o efeito desta escolha é mais notada, para este caso. Observa-se que os modos 10 e 11 têm uma contribuição muito pequena nas trajetórias dos 11 estados mais lentos. Procura-se então substituir estes modos por outros que melhorem o modelo. No entanto, a contribuição dos modos escolhidos deve ser pequena, uma vez que o modelo já obtido está bastante próximo do original. Opta-se então por substituir os modos 10 e 11 pelos modos 14 e 15, os quais preenchem estes requisitos.

O resultado da simulação deste novo modelo é mostrado na figura 12. Comparado à figura 10 observa-se que, com exceção aos estados x_{23} e x_{25} , os estados em geral melhoraram sua resposta em relação ao modelo anterior, aprovando portanto a escolha dos modos feita.

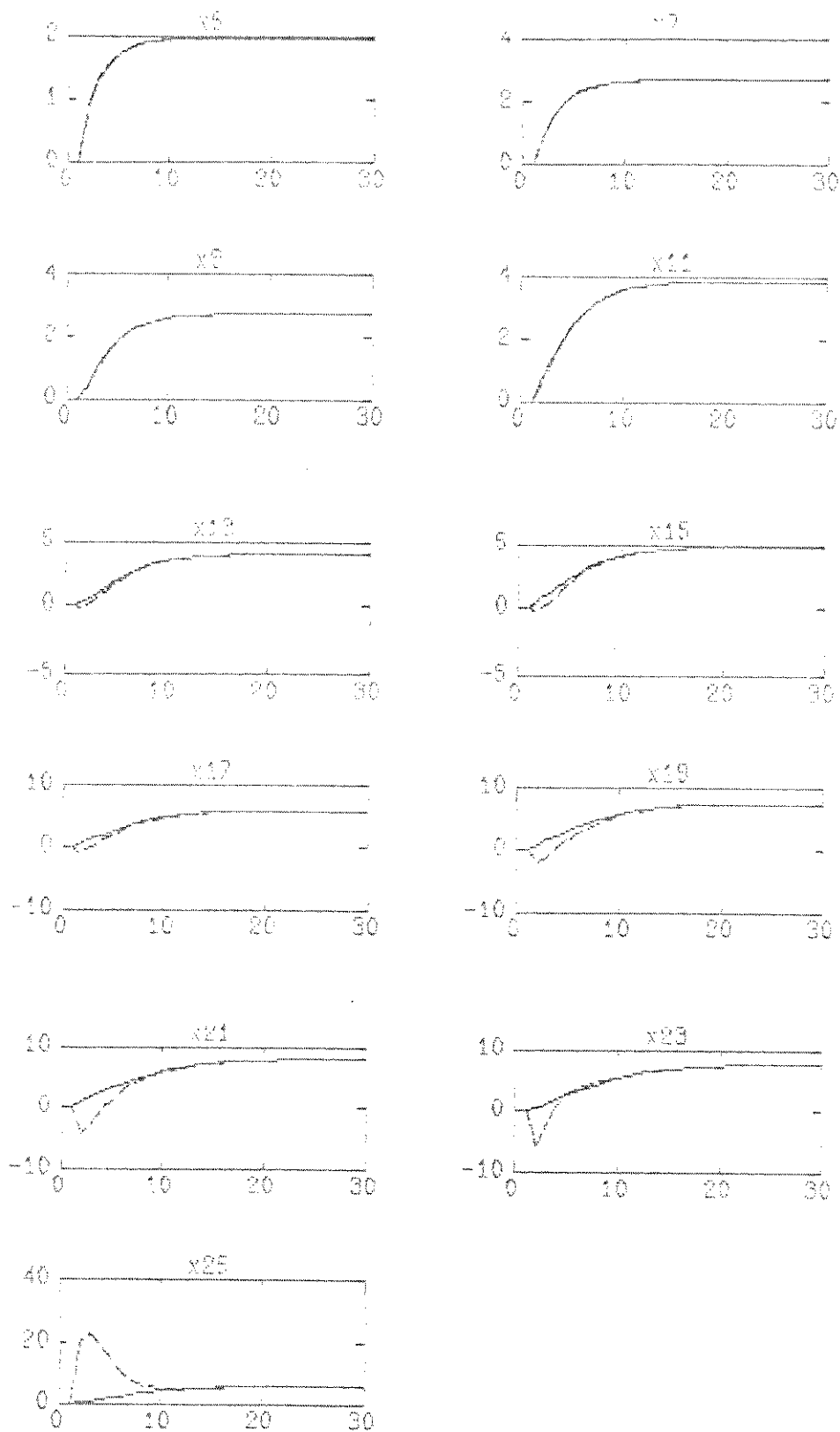


Figura 9. Modelo reduzido de ordem 11 obtido via método I

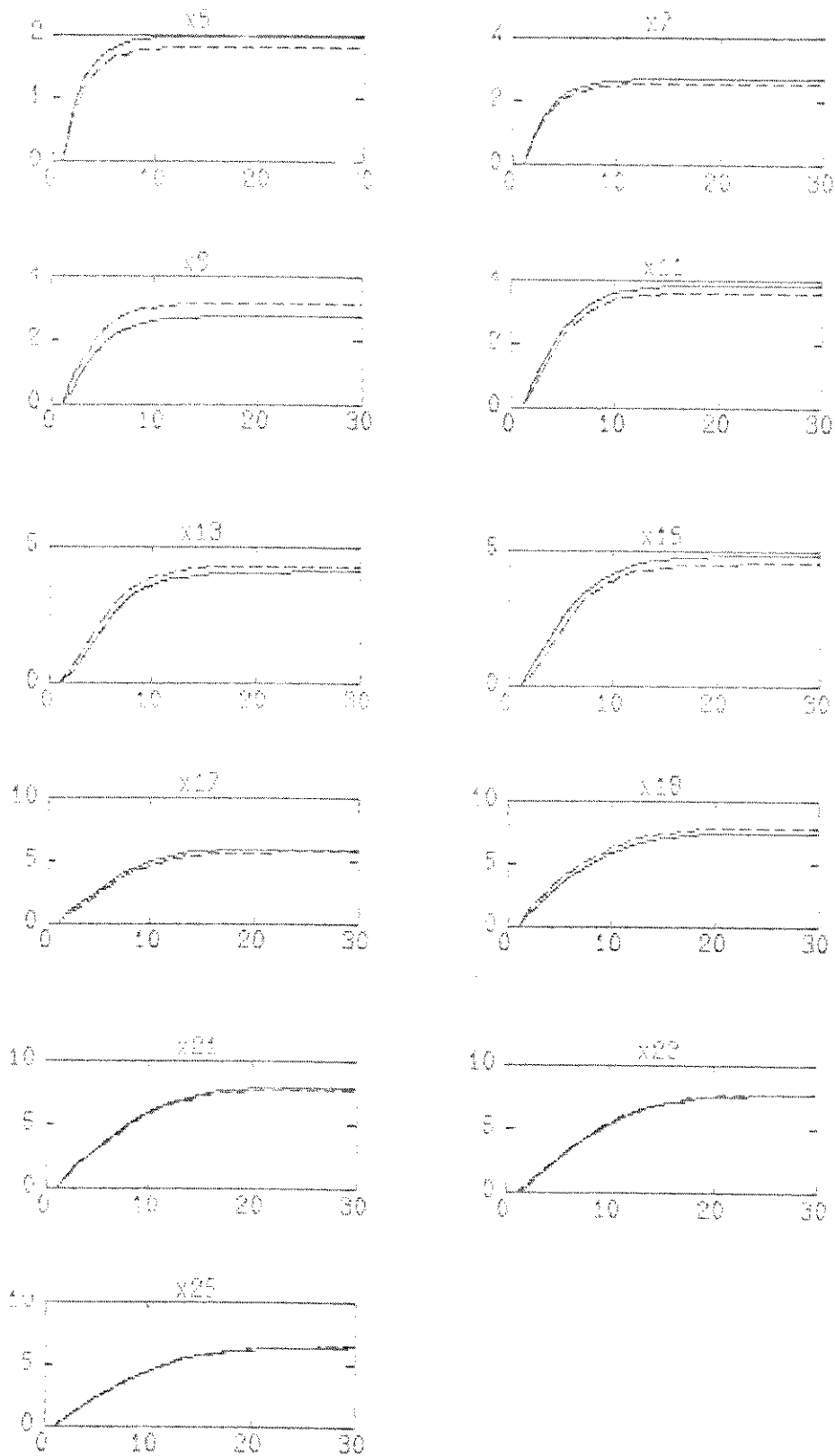


Figura 10. Modelo reduzido de ordem 11 obtido via método II

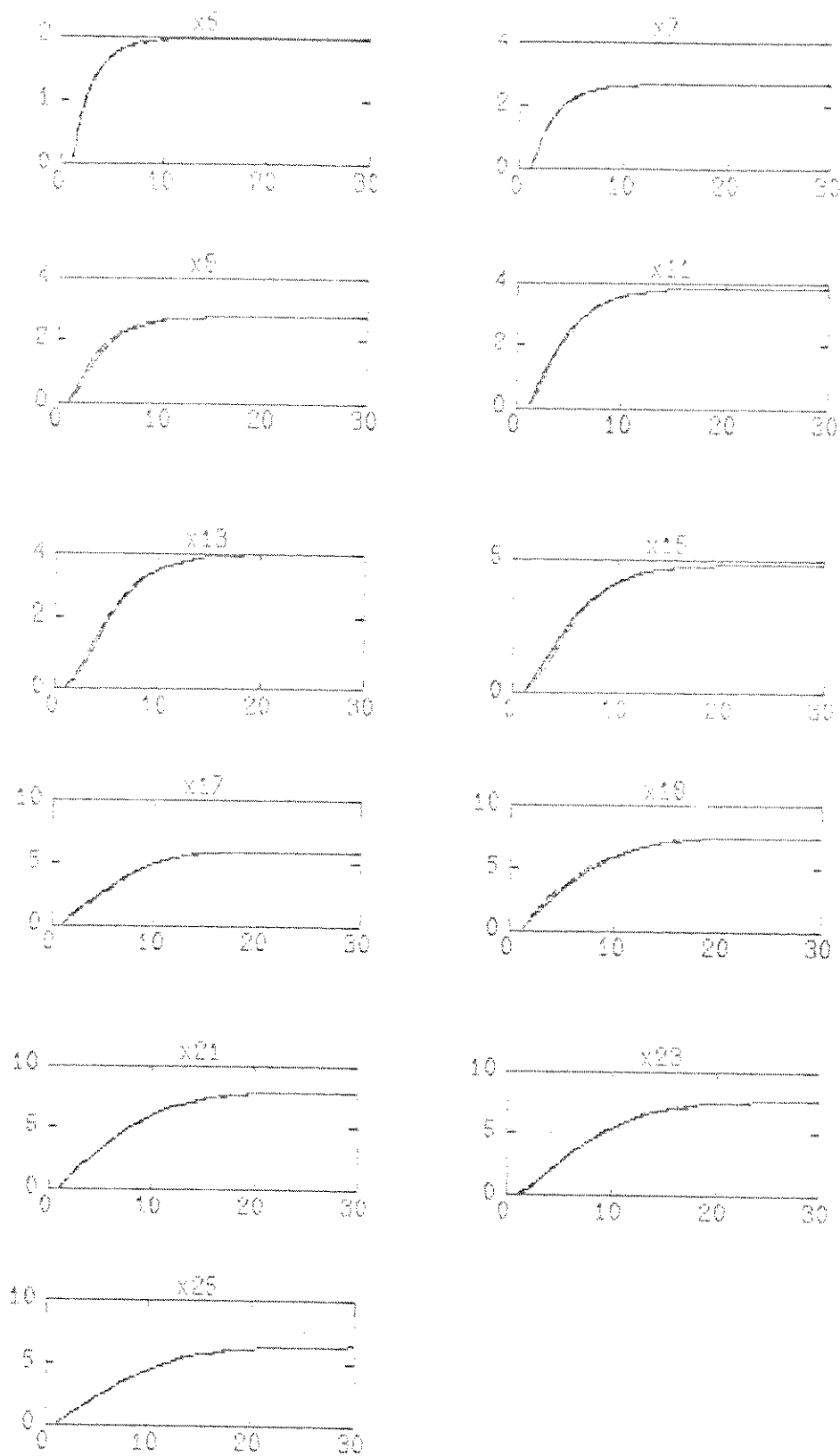


Figura 11. Modelo reduzido de ordem 11 obtido via método III

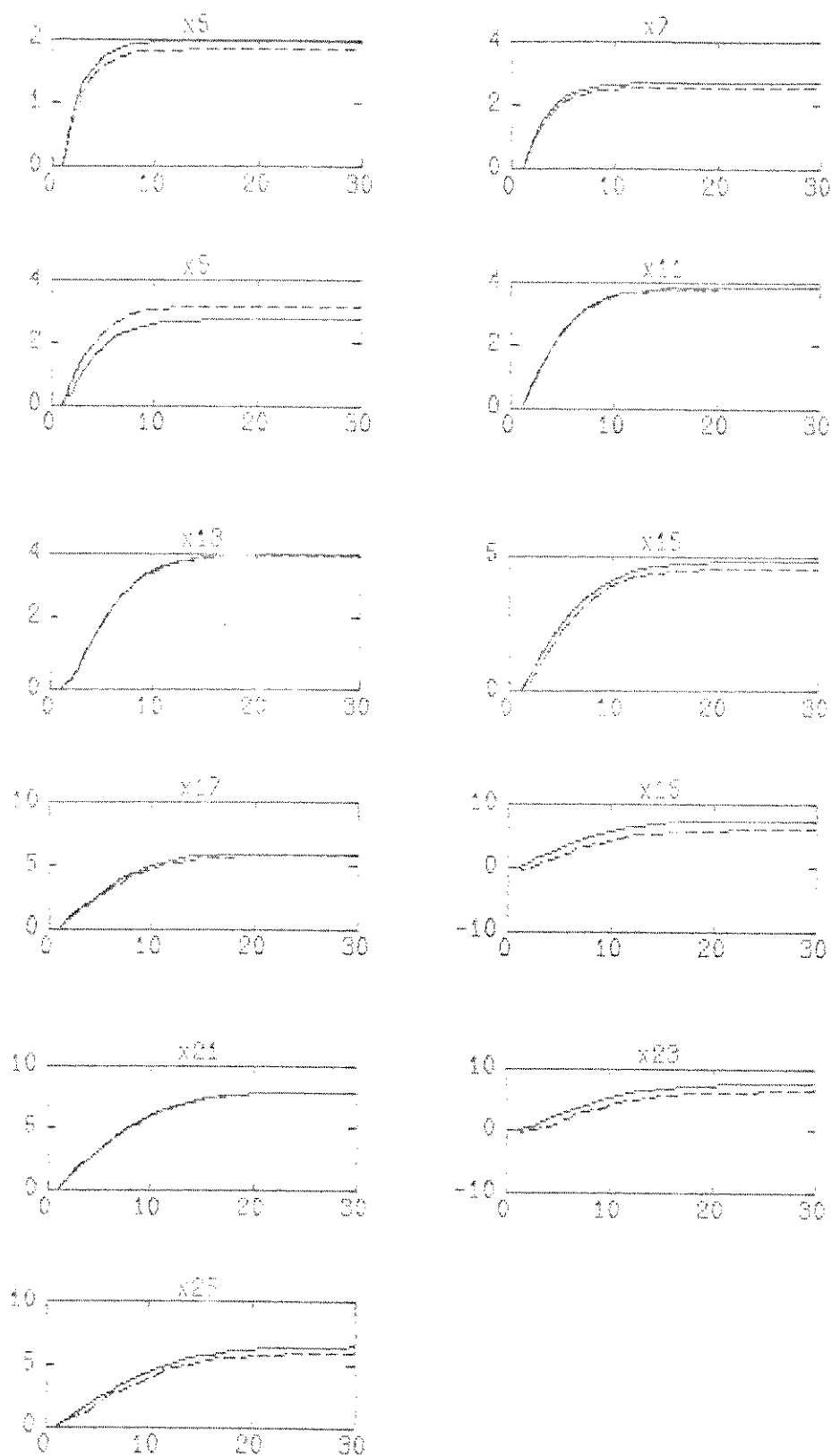


Figura 12. Modelo reduzido de ordem 11 obtido via método II com nova seleção de autovalores

4.3.4 MODELOS REDUZIDOS DE ORDEM 15

São obtidos agora modelos reduzidos de ordem 15, com o objetivo de representar os 15 estados mais lentos do sistema. Com isto, espera-se obter bons modelos reduzidos pelos 3 métodos, uma vez que toda dinâmica lenta da via expressa estará incluída nos modelos. Inicialmente, são retidos nos modelos reduzidos os modos mais lentos.

O resultado da simulação destes modelos à entrada degrau é mostrado nas figuras 13,14 e 15. Neste caso, o modelo reduzido I mostrou-se superior aos demais. Os modelos II e III apresentaram problemas para os últimos 4 estados do modelo. Observando a figura 4, vemos que os modos 14 e 15 possuem contribuições de regime significativas para estes estados, o que explica a distorção presente nestas trajetórias. O modelo III apresenta valores de regime corretos para estes quatro estados, no entanto, também não representa bem seu transitório.

Voltando às figuras 4 e 5, procura-se outros modos para serem retidos em substituição aos modos 14 e 15 para o modelo II. São então selecionados os modos 29 e 30 por terem uma influência muito pequena sobre os 15 estados do modelo reduzido. Isto permite obter o modelo cujo resultado da simulação é mostrado na figura 16. O resultado agora obtido pelo método II é satisfatório, como se pode ver, embora ainda seja inferior ao modelo I.

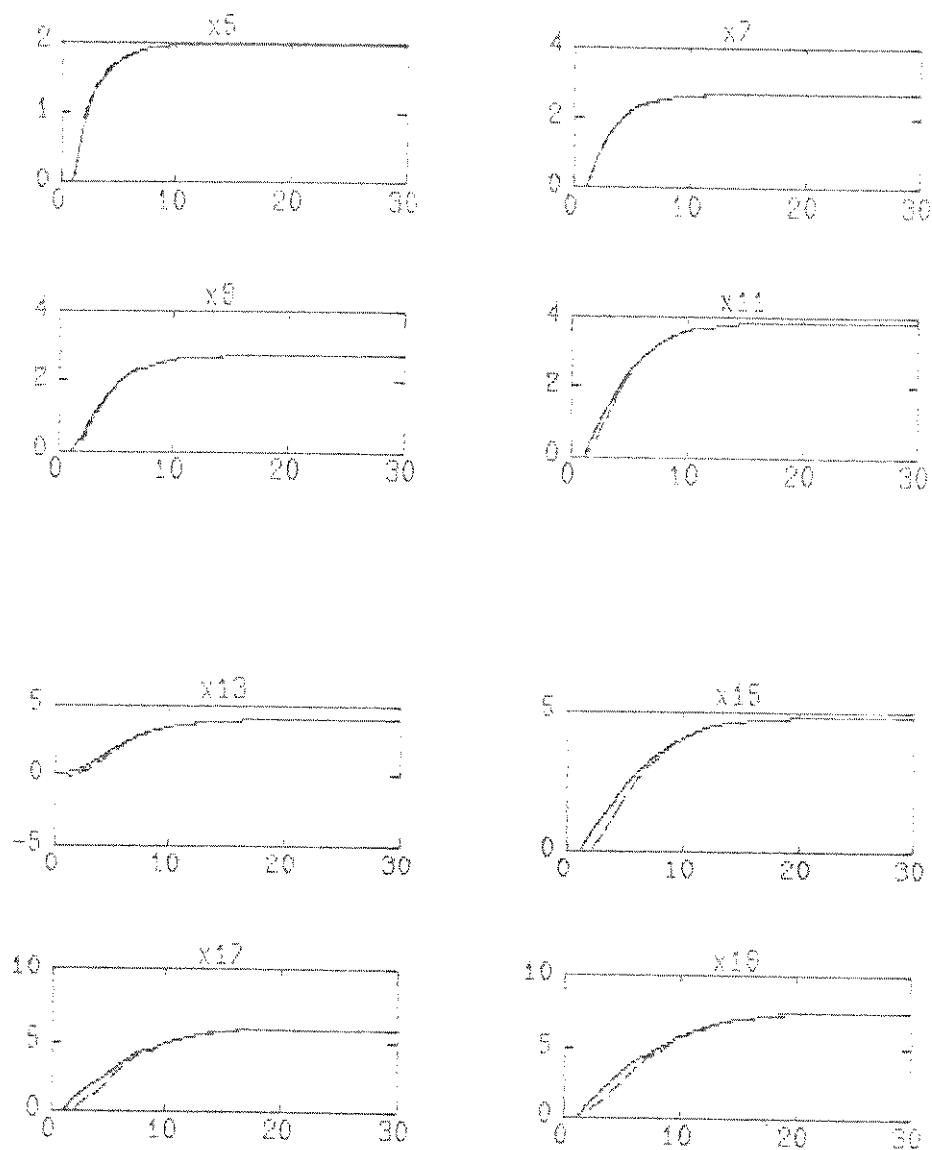


Figura 13.a. Modelo reduzido de ordem 15 obtido via método I

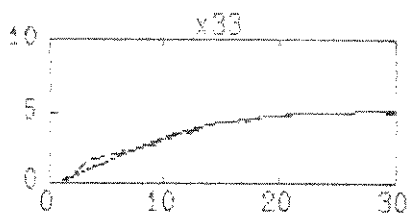
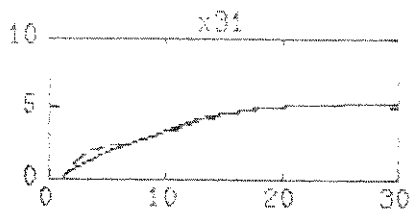
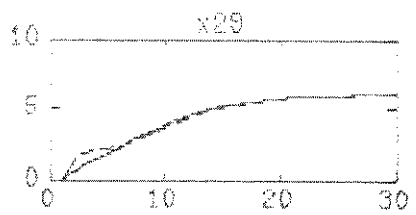
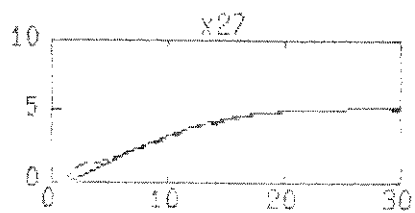
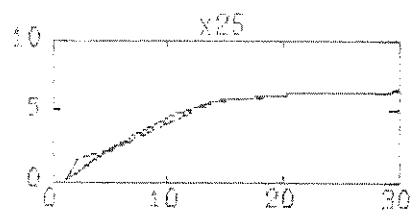
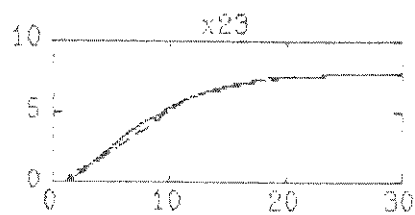
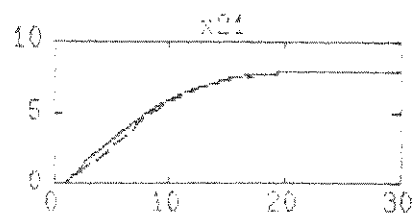


Figura 13.b. Idem 13.a

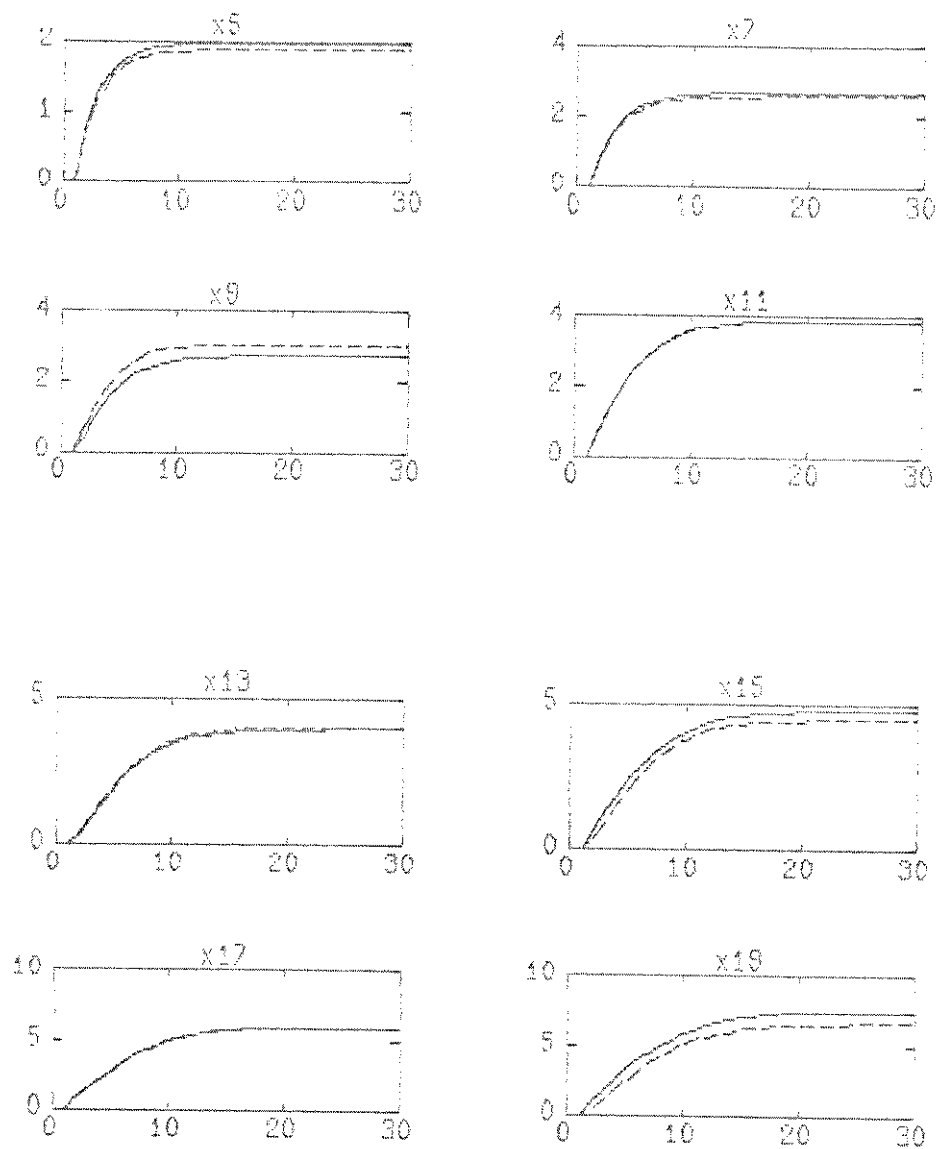


Figura 14.a. Modelo reduzido de ordem 15 obtido via método II

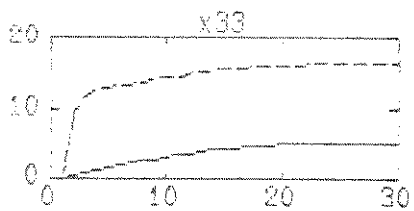
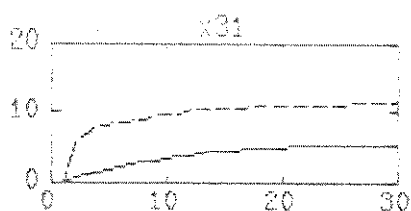
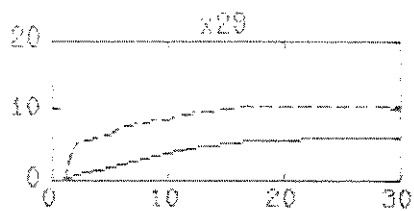
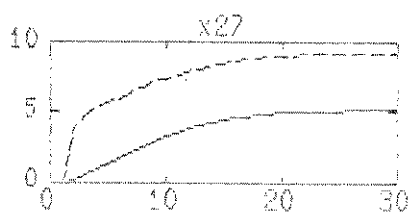
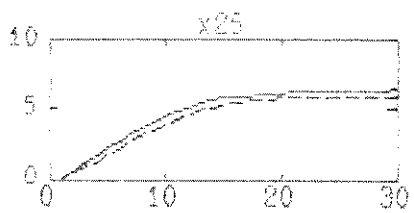
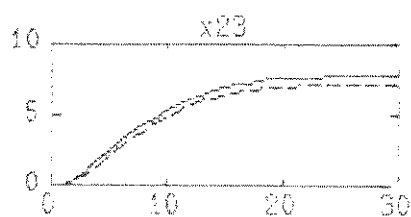
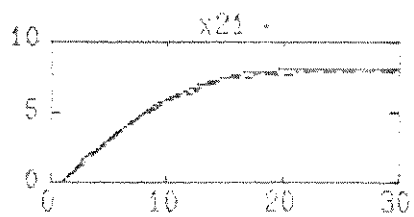


Figura 14.b. Idem 14.a

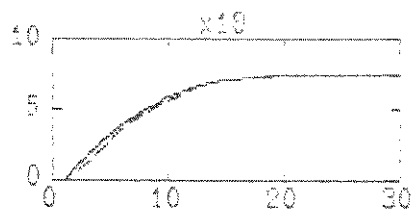
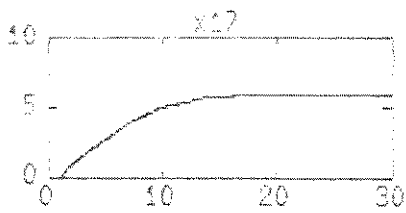
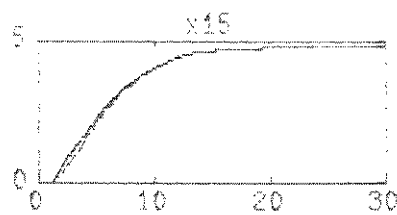
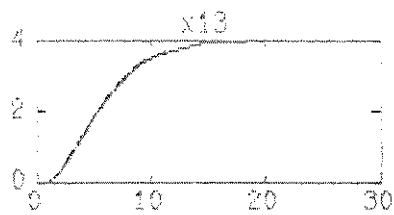
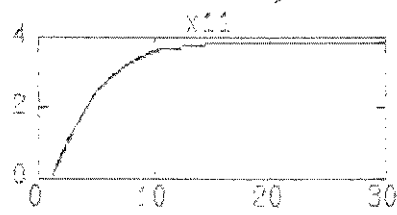
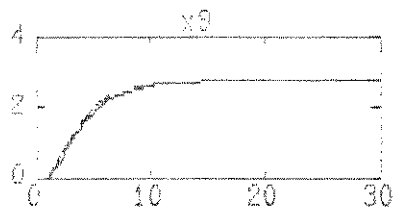
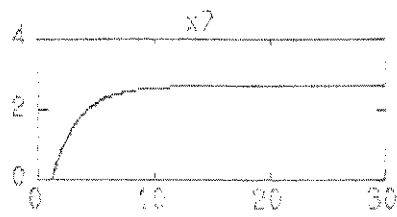
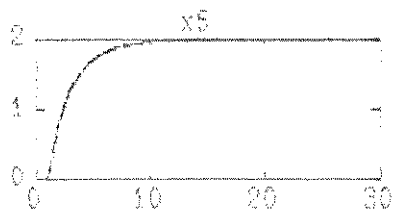


Figura 15.a. Modelo reduzido de ordem 15 obtido via método III

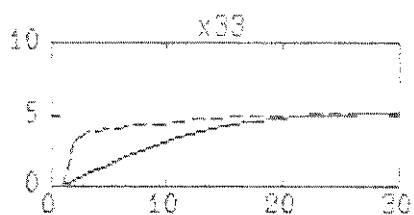
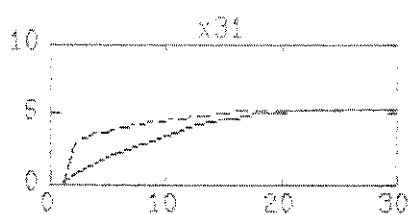
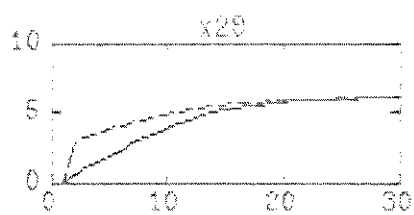
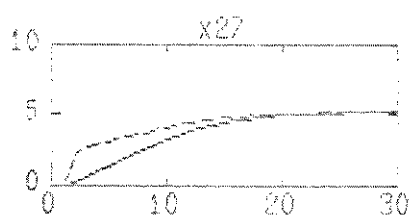
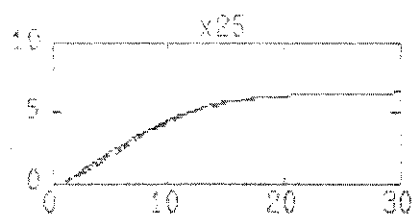
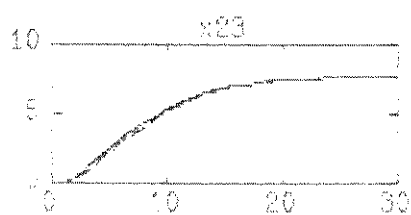
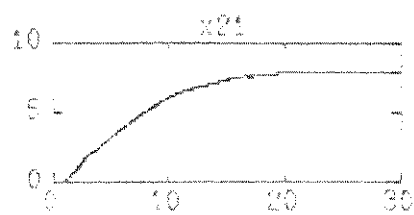


Figura 15.b. Idem 15.a

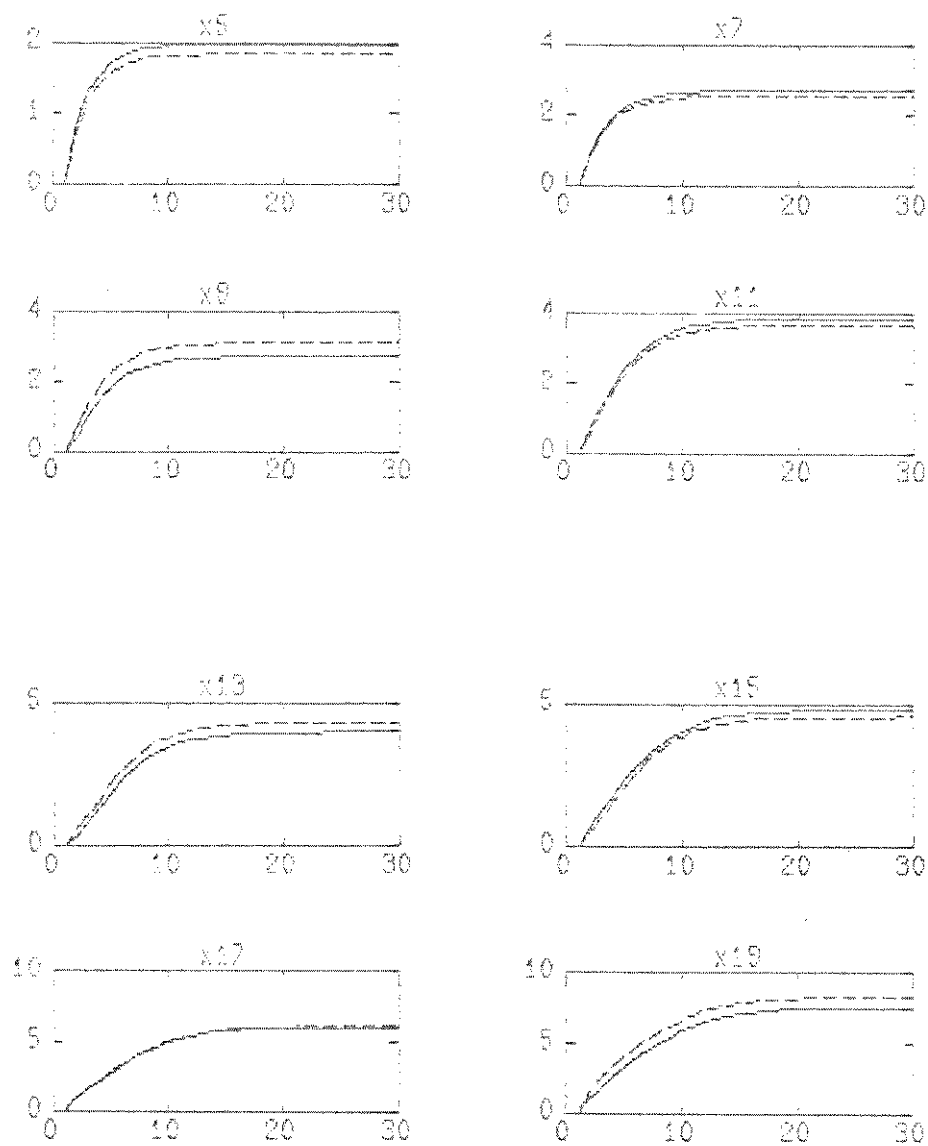


Figura 16.a. Modelo reduzido de ordem 15 obtido via método II com nova seleção de autovalores

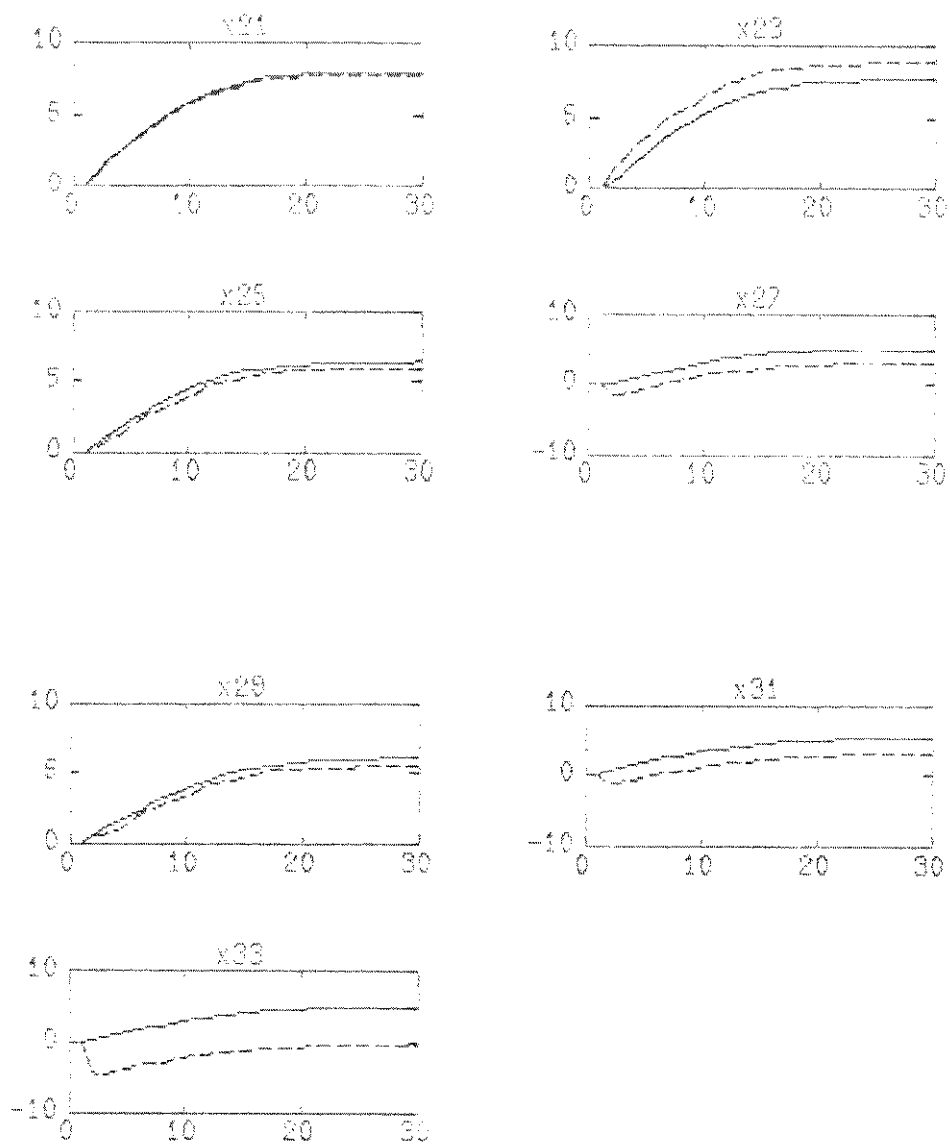


Figura 16.b. Idem figura 16.a

4.3.5 COMENTÁRIOS SOBRE AS TÉCNICAS DE REDUÇÃO

A aplicação das técnicas de redução à via expressa, resultando nos diferentes modelos reduzidos apresentados, permitiu conhecer as estratégias que devem ser utilizadas para obter modelos reduzidos que representem com boa aproximação o sistema original.

Para o método de redução I , o melhor modelo obtido foi o de ordem 15, o qual representa toda a dinâmica lenta do sistema. Isto está de acordo com o objetivo do método, que consiste em aproximar a parte lenta do sistema incorporando o efeito da parte rápida. No entanto, as informações desenvolvidas na seção 3.1.8 do cap.3 são insuficientes para que se possa afirmar algo sobre a escolha dos modos a reter, de forma a obter bons modelos reduzidos por este método.

Para os métodos de redução II e III, as informações contidas nas figuras 4 e 5 são fundamentais para a escolha dos modos a reter bem como para a escolha da ordem do sistema reduzido. A obtenção de diferentes modelos reduzidos mostrou que para estes métodos nem sempre um aumento na ordem significa uma melhoria no modelo.

Nestes métodos, deve-se escolher um conjunto de estados que possam ser bem representados por um conjunto de autovalores. Desta forma, pode-se conseguir bons modelos reduzidos , sendo que os modelos obtidos pelo método III são , em geral, superiores aos obtidos pelo método II.

As técnicas de redução de sistemas usando decomposição de Schur foram empregadas em conjunto às técnicas modais. Uma vez que ambas

técnicas levam a um mesmo resultado, cabem neste ponto apenas comentários acerca da eficiência.

Devido às técnicas computacionais empregadas, não foi possível fazer-se uma comparação relativa ao esforço computacional exigido por cada técnica. Estas conclusões são, portanto, baseadas na literatura [14],[46] .

Para obter os modelos do método de redução I, o método usando a decomposição de Schur exige um esforço menor do que o método modal, pois computar a forma de Schur é um processo muito mais simples do que computar os autovetores do sistema.

Para os métodos II e III, a técnica usando a decomposição de Schur emprega mais esforço do que o dispendido para o método de redução I, enquanto para a técnica modal o esforço é igual. Ainda assim, a técnica que usa a decomposição de Schur é superior pois se utiliza de procedimentos numéricos mais estáveis do que a técnica modal.

4.4 CONTROLE DA VIA EXPRESSA

Como os estados da via expressa estão todos acessíveis, não há sentido em se fazer uma realimentação de saídas na mesma, uma vez que a realimentação de estados, como discutido no cap.2, permite obter um controle melhor para o sistema. Serão empregados os algoritmos de alocação estudados de duas formas : aplicando-os primeiro diretamente ao modelo de grande ordem e depois aos modelos reduzidos derivados deste sistema. Nos gráficos de simulação dos sistemas, adotar-se-á a convenção de uma linha contínua para o sistema em malha aberta e uma linha tracejada para o sistema de malha fechada.

4.4.1 APLICAÇÃO DIRETA AO MODELO DE ORDEM 34

Serão aplicados agora os algoritmos de alocação de pólos por realimentação de estados estudados no cap.2 ao modelo da VE original, iniciando pelo algoritmo I.

Optou-se por modificar os 15 autovalores mais lentos do sistema, com o objetivo de acelerar sua dinâmica. Como para o algoritmo I os autovalores de malha fechada devem ser diferentes dos de malha aberta, foi introduzida uma pequena perturbação nos 10 autovalores mais rápidos que não deviam ser alterados. Na tabela 2 estão os autovalores de malha fechada, que podem ser comparados aos de malha aberta da tabela 1.

1	0.6592
2	0.6232
3	0.5624
4	0.5300
5	0.4462
6	0.3999
7	0.3220
8	0.2796
9	0.1999
10	0.1591
11	0.1489
12 e 13	0.1293+/- 0.0392i
14 e 15	0.1195+/- 0.0688i
16 e 17	0.1369+/- 0.1000i
18 e 19	0.1123+/- 0.0994i
20 e 21	0.1009+/- 0.1035i
22 e 23	0.0603+/- 0.1304i
24 e 25	0.0459+/- 0.1310i
26 e 27	0.0605+/- 0.1158i
28	0.1282
29 e 30	0.0338+/- 0.0921i
31 e 32	-0.0136+/- 0.0612i
33 e 34	-0.0278+/- 0.0506i

Tabela 2. Autovalores de malha fechada

A matriz de realimentação K foi calculada usando a estratégia para diminuir a norma da matriz de ganho, como discutido na seção 2.1.3 do cap.2 , o que permitiu obter

$$||K|| = 2.4535$$

Aplicou-se então o algoritmo II para alocar apenas o conjunto dos 15 pólos mais lentos do sistema. Para isto, a matriz do sistema foi decomposta na forma de Schur, fazendo com que os autovalores mais lentos estivessem contidos na matriz triangular inferior da mesma. Obteve-se então o modelo de ordem 15 no qual foi feita a alocação dos pólos. Também aqui o esforço da realimentação foi ser minimizado. Usando (29) do cap.2, obteve-se o controle para o sistema original.A

norma da matriz de ganho para este algoritmo resultou em

$$|| K || = 2.4644$$

Esta matriz de realimentação é praticamente igual à obtida pelo algoritmo anterior. A diferença é devida à atuação da realimentação anterior sobre os 19 pólos mais rápidos, embora seja desprezível. Como o sistema original, usado no algoritmo I, e o sistema na forma de Schur, usado no algoritmo II, são o mesmo sistema em bases diferentes, o resultado obtido pelos dois algoritmos usando as mesmas condições deverá ser o mesmo. Portanto, a diferença entre os dois estará na eficiência com que o problema de alocação é resolvido. Para este problema, o tempo gasto pelo algoritmo II foi cerca de 7 vezes menor que o dispendido pelo algoritmo I, compensando enormemente sua utilização.

Na figura 17 é mostrada a simulação do sistema de malha fechada comparado ao sistema de malha aberta para entrada nula e estado inicial unitário. Na figura 18 é mostrado o controle que é aplicado à VE em malha fechada, o qual, como se pode ver têm pequena magnitude. Da figura 17, pode-se observar que o controle projetado para atuar sobre os modos mais lentos do sistema modificou apenas as dinâmicas mais lentas deste, quase não alterando as rápidas, como era desejado. Isto mostra que controles deste tipo podem ser usados com sucesso para aumentar a velocidade das dinâmicas mais lentas do sistema. Quanto o sistema melhorará seu desempenho dependerá do conhecimento que o projetista do controle possuir a seu respeito

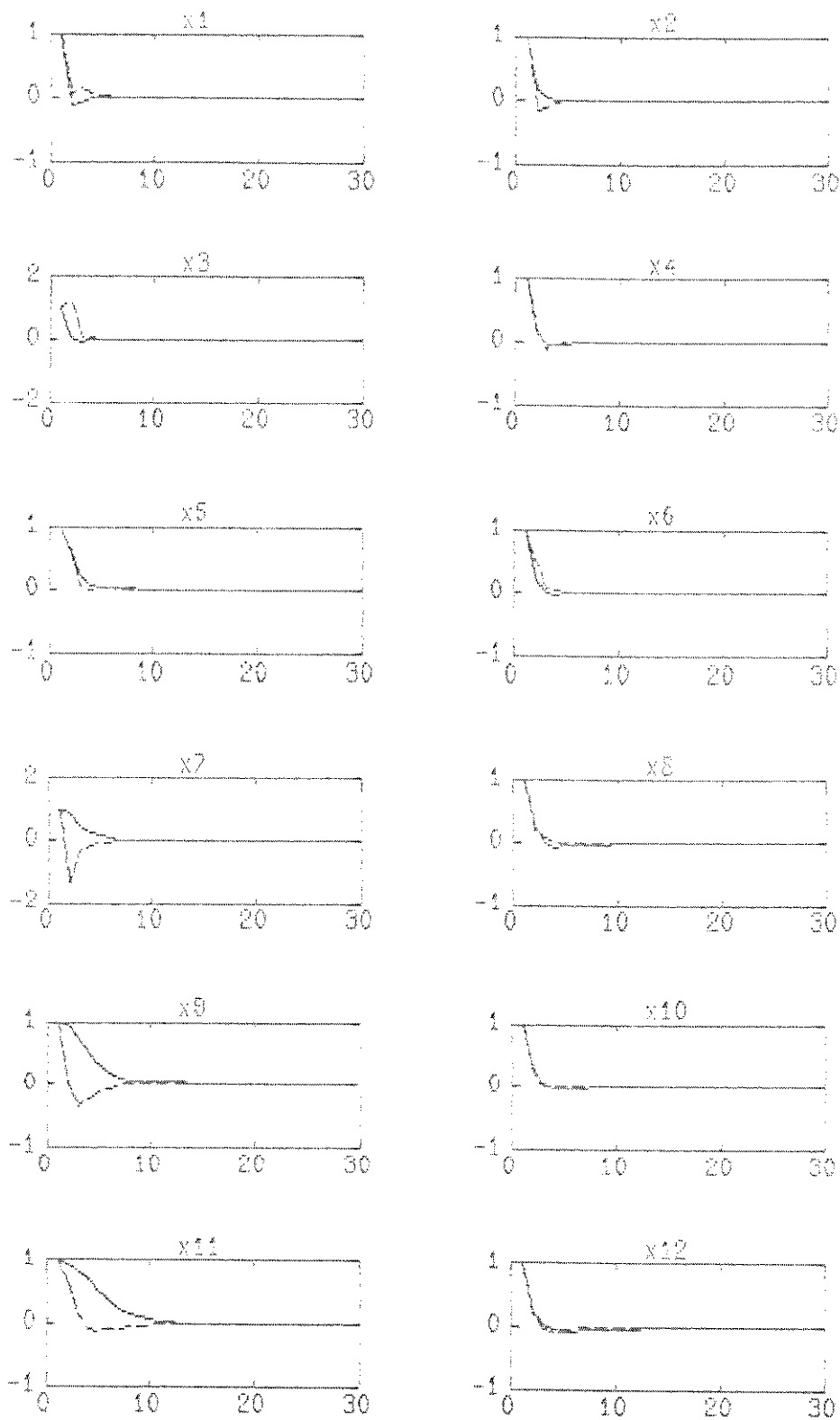


Figura 17.a. Via expressa em malha aberta e com controle que aloca 15 pólos do sistema

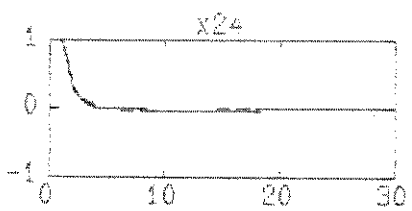
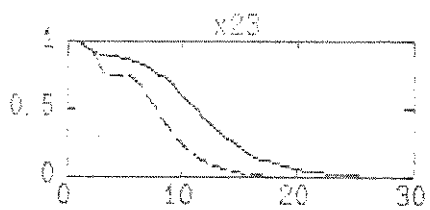
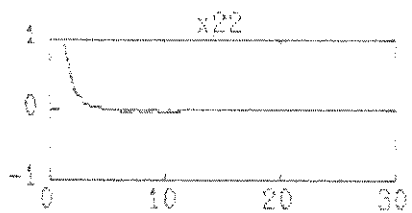
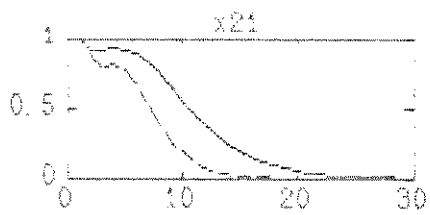
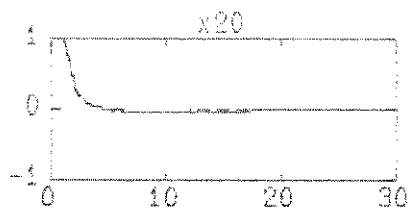
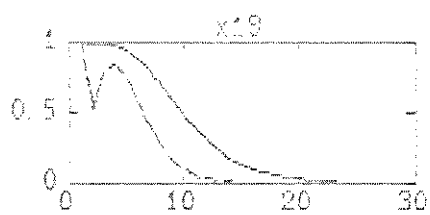
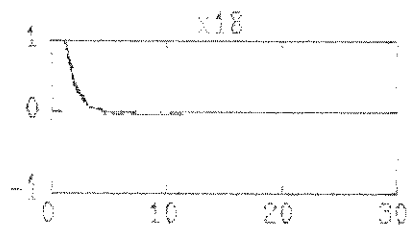
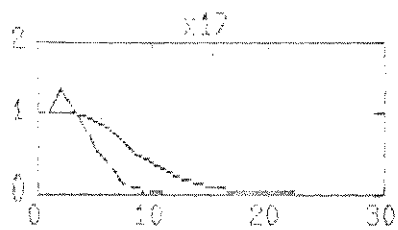
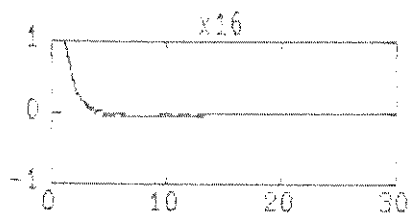
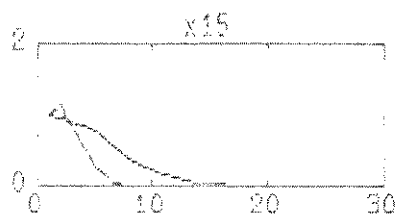
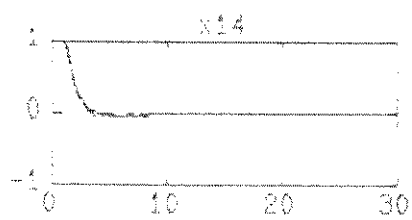
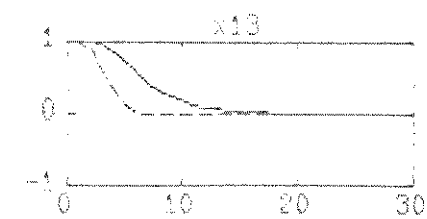


Figura 17.b. Idem 17.a

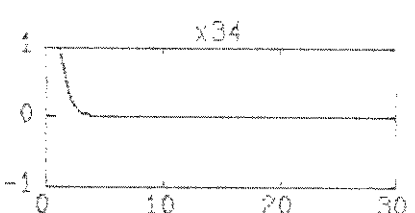
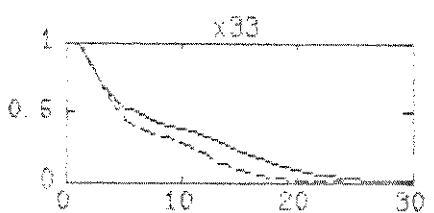
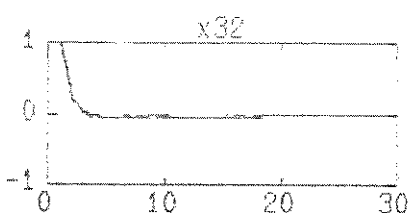
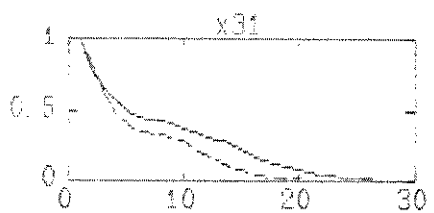
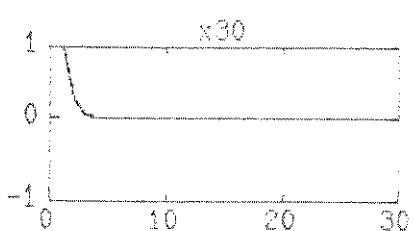
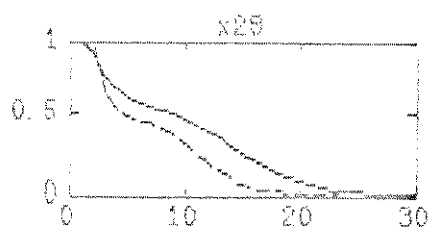
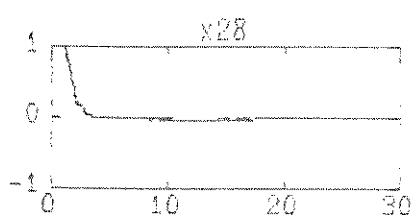
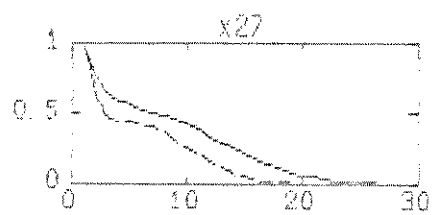
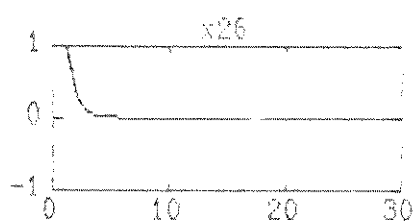
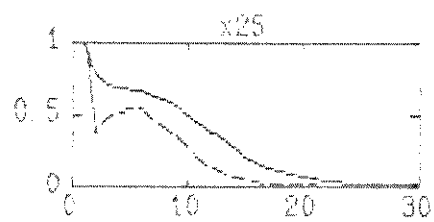


Figura 17.c. Idem 17.a

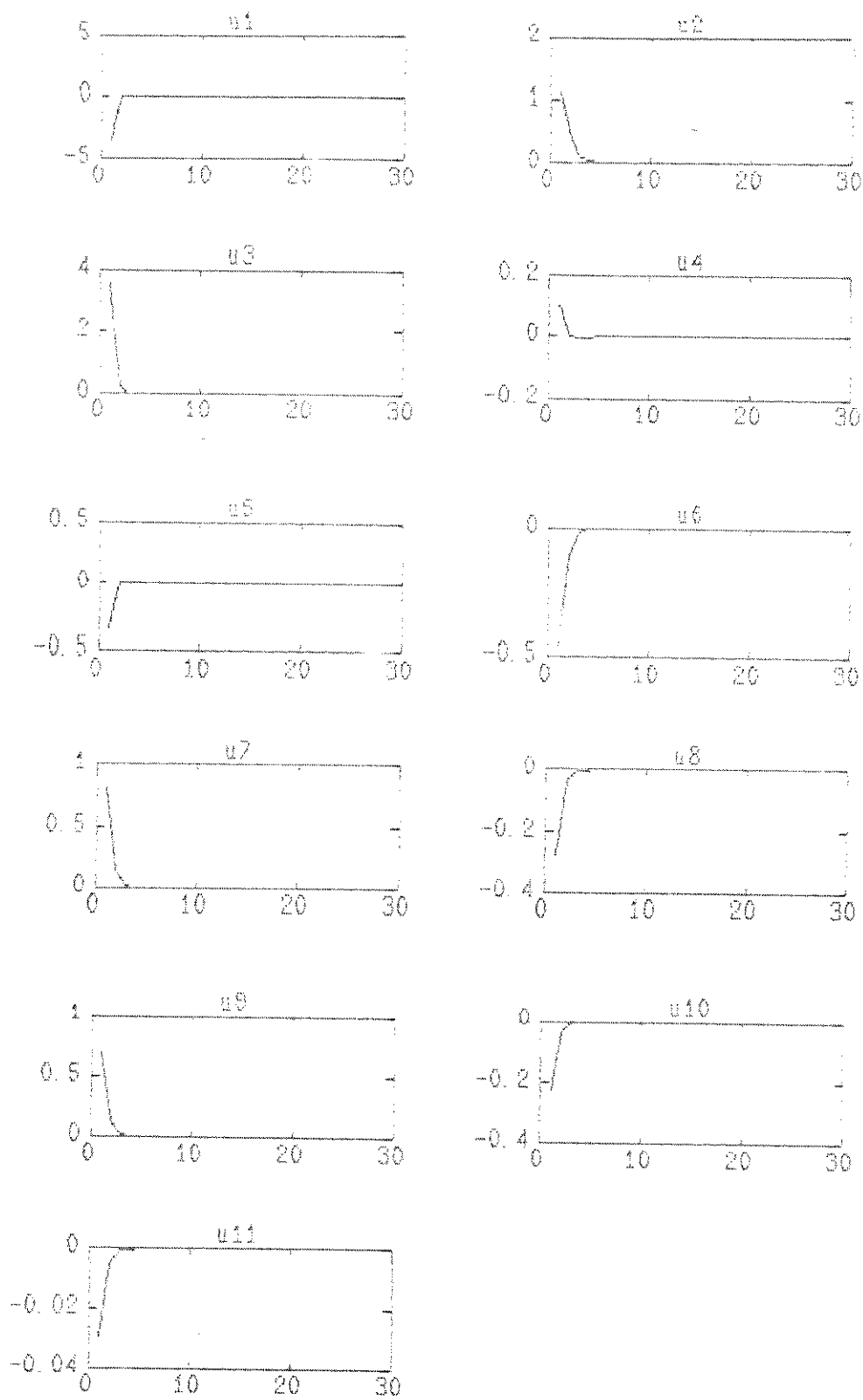


Figura 18. Controle aplicado à via expressa

4.4.3 APLICAÇÃO AOS MODELOS REDUZIDOS DE ORDEM 15

Calculou-se o controle para alocar os pólos dos modelos reduzidos II e III de ordem 15 para as mesmas posições que na seção anterior e usando o algoritmo I com os mesmos vetores arbitrários. A matriz de realimentação K , que para o sistema original é obtida usando (115.1) do cap.3 para cada um dos modelos, foi exatamente a mesma para ambos os modelos e resultou igual à matriz obtida pelo algoritmo II anteriormente aplicado. Quanto ao modelo reduzido I, ele é mais conveniente para simular o sistema do que para projetar controles, pelas razões expostas no cap.3.

É analisada agora a semelhança que existe entre alocar 15 autovalores usando o algoritmo II aplicado direto ao sistema original e aplicar o algoritmo I aos modelos reduzidos de ordem 15. No cap. 2, observa-se que (28) representa um sistema reduzido cuja matriz de agregação é obtida usando (26) e (29). Portanto, no contexto de alocação de pólos, as duas abordagens são semelhantes. Se for desejado apenas alocar os pólos do sistema original, a primeira abordagem é mais vantajosa, pois envolve procedimentos numéricos mais estáveis. A segunda abordagem torna-se superior quando o objetivo for projetar controles mais complexos (via otimização, por exemplo) para o sistema original.

4.4.3 APLICAÇÃO AOS MODELOS REDUZIDOS DE ORDEM 11

Mostrou-se acima a utilidade de um modelo reduzido para controle e simulação. Explora-se agora um pouco mais estes modelos, tomando desta vez os modelos reduzidos de ordem 11 contendo os modos mais lentos do sistema .

É feita uma realimentação de estados semelhante à que foi feita para o modelo de ordem 15, alocando os 11 pólos do sistema reduzido para as mesmas posições daquele modelo.

Para este caso , usando o algoritmo de alocação I, obteve-se uma matriz de realimentação no sistema reduzido, que aplicada ao sistema original resultou em

$$\| K \| = 0.8650$$

Nas Figuras 19.a,b,c é mostrada a simulação do sistema original com este controle . Na figura 20 é mostrado o controle aplicado em malha fechada, o qual possui menor amplitude que o mostrado na figura 19. O efeito dos controles pode ser observado nas trajetórias dos estados, onde o controle obtido via modelo de ordem 15 , de maior amplitude, produz oscilações maiores nas trajetórias.

É interessante observar a semelhança entre os gráficos das figuras 17 e 19. Os dois controles afetam praticamente os mesmos estados . Isto se deve ao fato de que os estados afetados dependem muito dos modos que estão sendo alocados pelos controles . Neste caso, portanto, pode-se obter um controle que atua de forma semelhante no sistema usando qualquer um dos dois modelos reduzidos para fazê-lo.

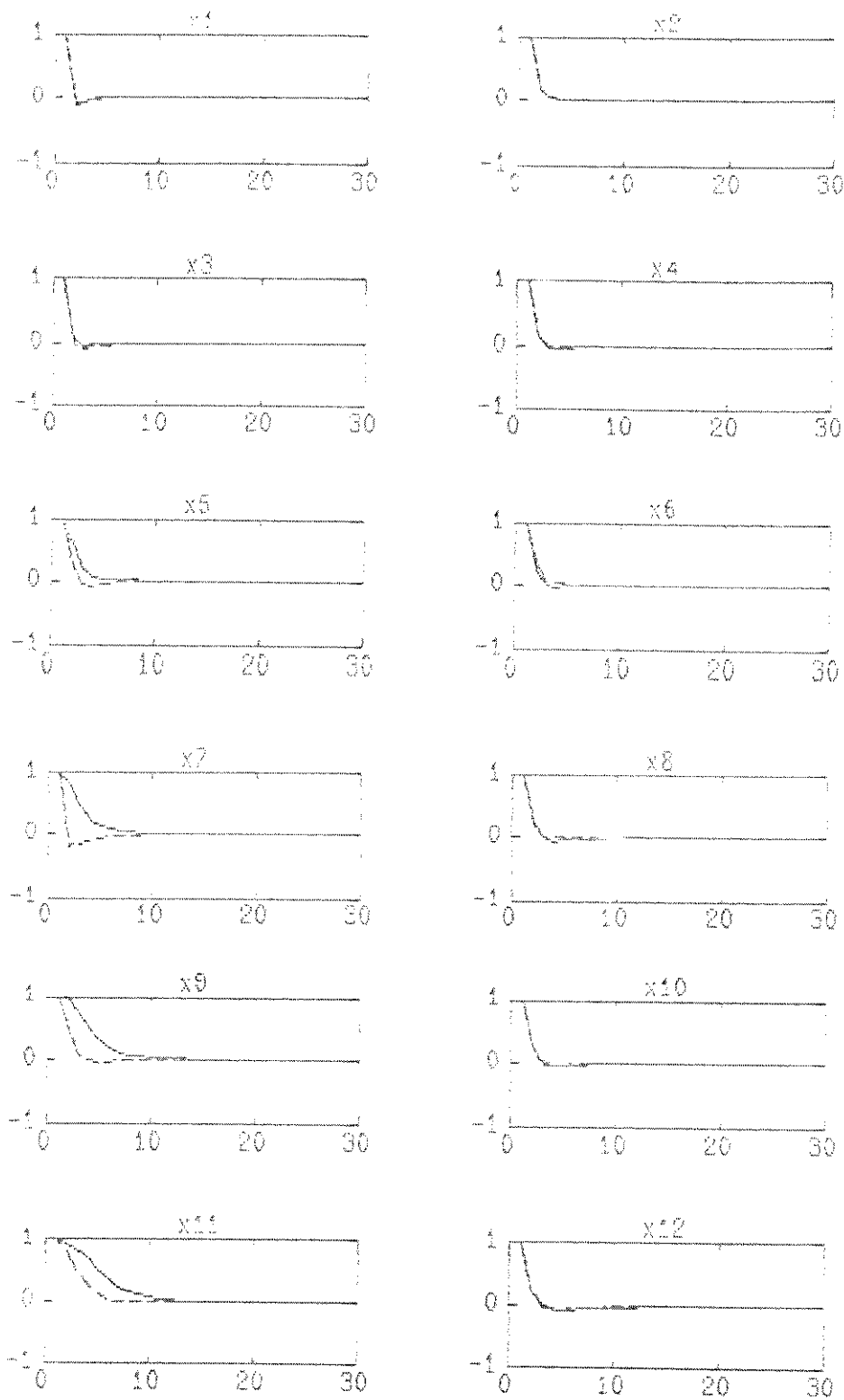


Figura 19.2. Via expressa em malha aberta e com controle que aloca 11 pólos do sistema

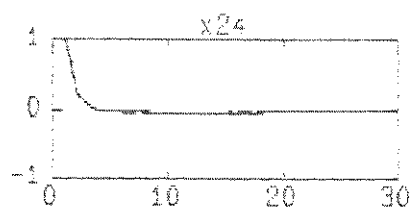
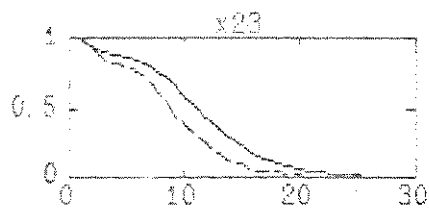
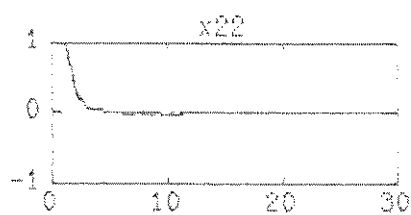
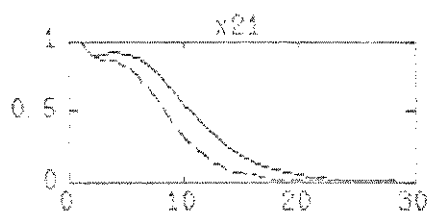
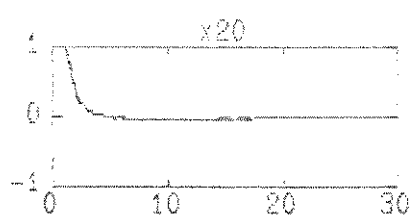
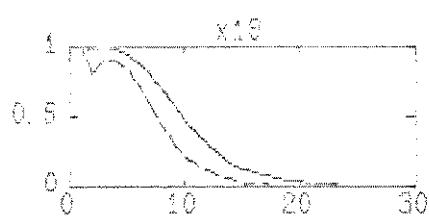
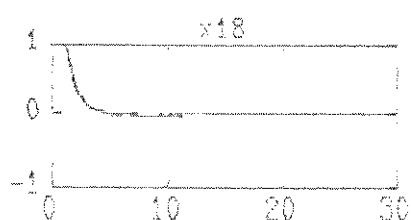
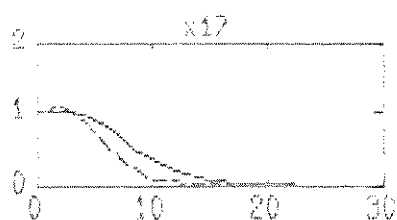
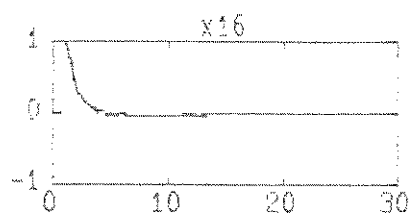
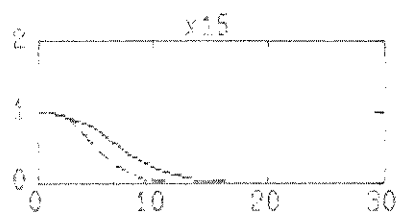
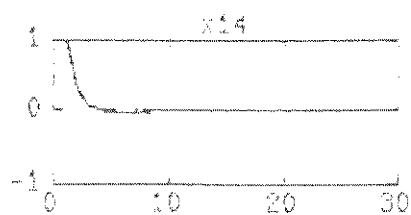
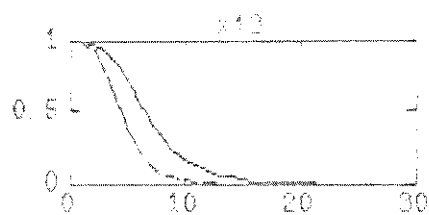


Figura 19.b. Idem 19.a

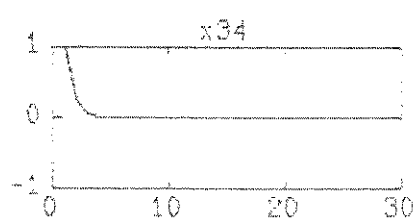
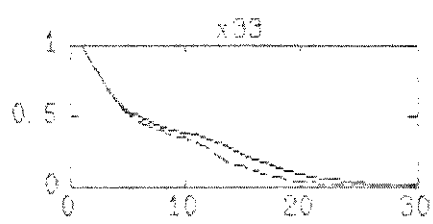
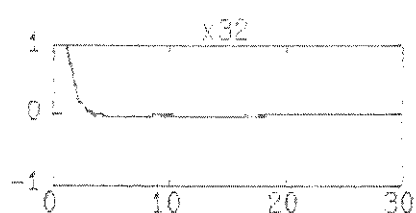
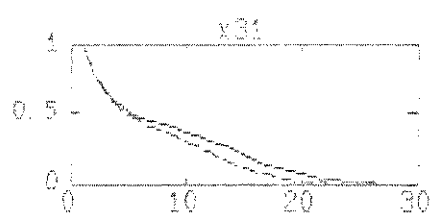
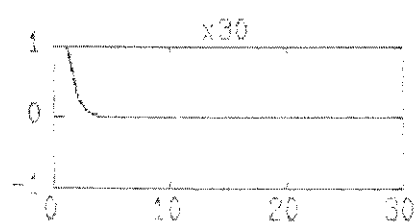
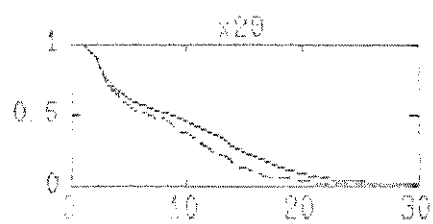
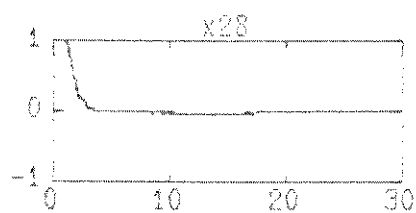
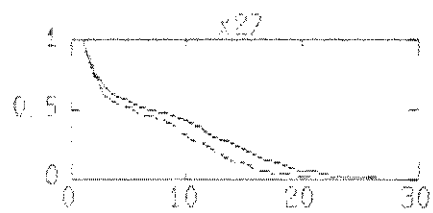
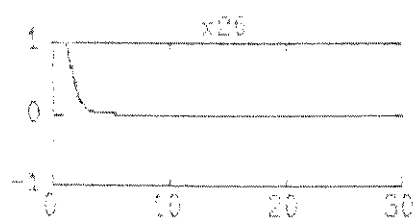
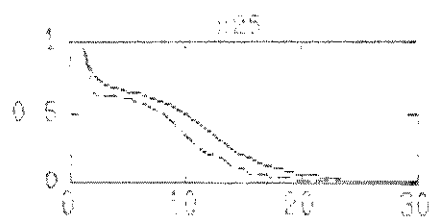


Figura 19.c. Idem 19.a

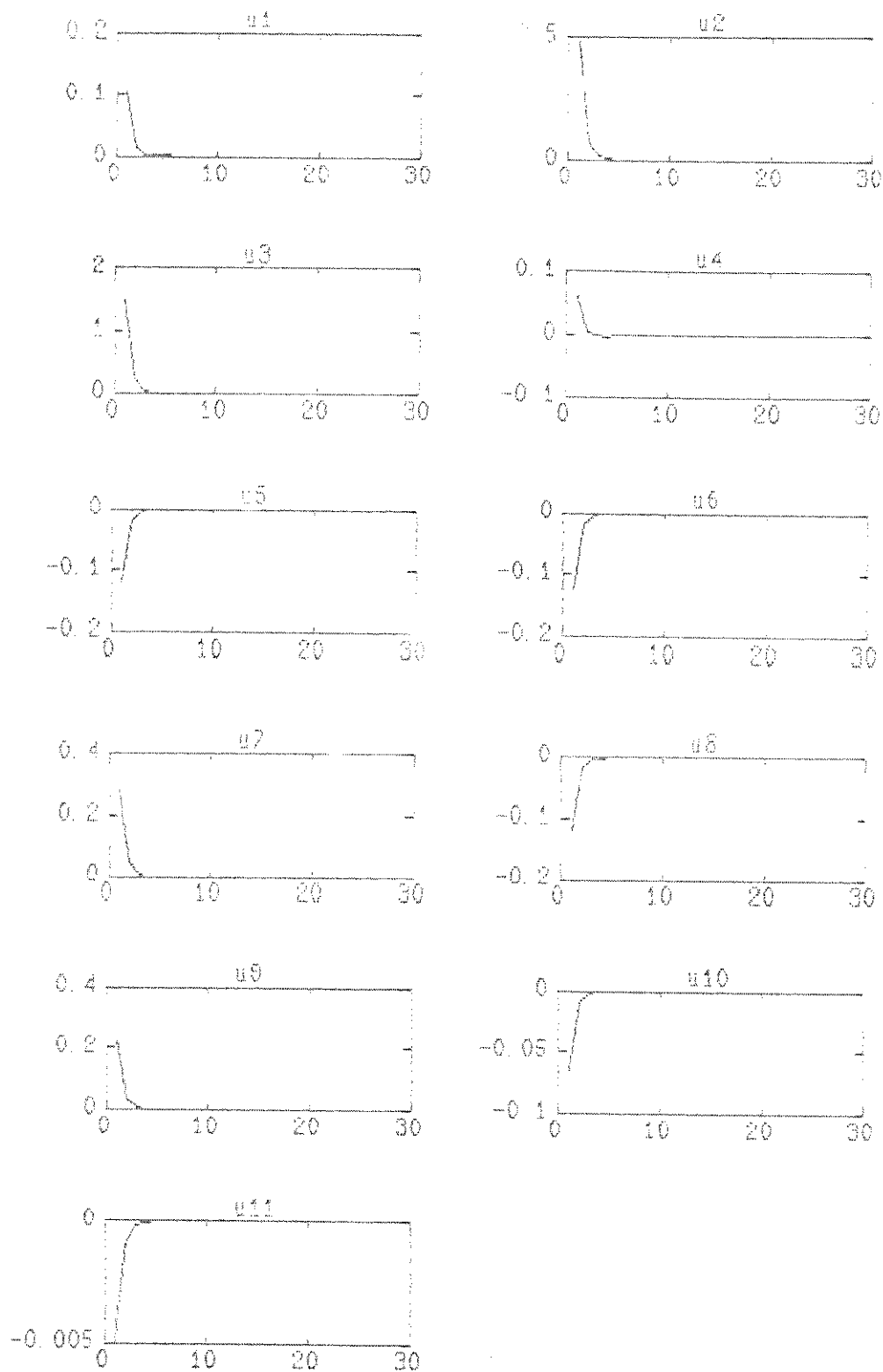


Figura 20. Controle que aloca 11 pólos da via expressa

4.4.4 COMENTÁRIOS SOBRE OS RESULTADOS OBTIDOS

Para fazer alocação parcial de pólos, o algoritmo II demonstrou ser mais eficiente que o algoritmo I . Também é menos trabalhoso empregar o algoritmo II do que reduzir o sistema para então empregar o algoritmo I.

Usou-se apenas os modelos II e III para calcular controles, pois com controles obtidos via modelo I os pólos do sistema original não são movidos para as posições desejadas, mas para posições próximas a elas.

Os resultados obtidos com os modelos reduzidos de ordem 15 e de ordem 11 mostram que se a estratégia de controle for adequada pode-se projetar bons controles mesmo com modelos reduzidos de ordem bem inferior à ordem do modelo original.

4.5 REDUÇÃO DE ORDEM DE SISTEMA DE POTÊNCIA

Um exemplo típico onde pode-se empregar os métodos de redução por separação temporal é um sistema de potência. Neste tipo de sistema existem modos lentos (constantes mecânicas) e modos rápidos (constantes elétricas), ao mesmo tempo que há conjuntos de estados associados a estes grupos de modos.

O modelo do sistema de potência empregado é um modelo clássico utilizado para controle carga-frequência [49].

Procurar-se-á obter modelos reduzidos para este sistema através da teoria da separação temporal, modelos estes que podem vir a ser utilizados para obter controles para o sistema original. Inicia-se verificando as condições para aplicabilidade da técnica e em seguida são derivados os modelos reduzidos para o sistema.

Calculando os autovalores da matriz do sistema, obtém-se
 $\sigma(A) = (1, 1, .8950 \pm j .3251i, .8510 \pm j .2115i, .8462, .2541, .2535).$

Observa-se que é possível separá-los em dois grupos, um com 7 modos lentos e outro com 2 modos rápidos. Usando (120) do cap.3, obtém-se

$$\left| \frac{\lambda_7}{\lambda_8} \right| = \left| \frac{.8462}{.2541} \right| = 3.3304$$

donde conclui-se que o sistema possui a propriedade da separação temporal. Procurar-se-á agora a transformação linear explicitamente inversível que desacopla os dois subsistemas desejados. Para tanto,

deve-se conseguir uma ordenação dos estados, tal que isto seja alcançado. Após algumas tentativas, escolheu-se para o subsistema lento os estados $(x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_6 \ x_7 \ x_8)$ e os estados $(x_5 \ x_9)$ para o outro subsistema. Com esta ordenação e usando os processos iterativos (136-137) do cap.3 foi possível desacoplar os subsistemas. Entretanto as equações (138-139) do cap.3 não são satisfeitas para estas condições. Portanto, como se pode ver, estas equações dão apenas uma análise aproximada [12] sobre a possibilidade de separar os subsistemas, podendo apresentar resultados errôneos, como para este caso. Com uma aproximação de primeira ordem, obtém-se

$$\alpha(A_l) \cup \alpha(A_r) = (1, 1, .8879 \pm .3222i, .8418 \pm .2083i, .8425, .2720, .2720)$$

Como se pode ver, esta solução representa um bom resultado, no qual os dois subsistemas dados por A_l e A_r são uma aproximação de primeira ordem do sistema original.

Após 4 iterações é possível obter os dois subsistemas cujo conjunto de autovalores é exatamente igual ao do sistema original.

Na figura 21 pode-se ver a simulação do sistema original comparada à dos subsistemas quando neles é aplicada uma entrada degrau unitário. O subsistema lento, como se observa, representa com boa aproximação os estados correspondentes do sistema original. Nos estados do subsistema rápido verifica-se que há diferença entre os valores do sistema original e o reduzido para a condição de regime, resultante das suposições feitas para derivar o modelo.

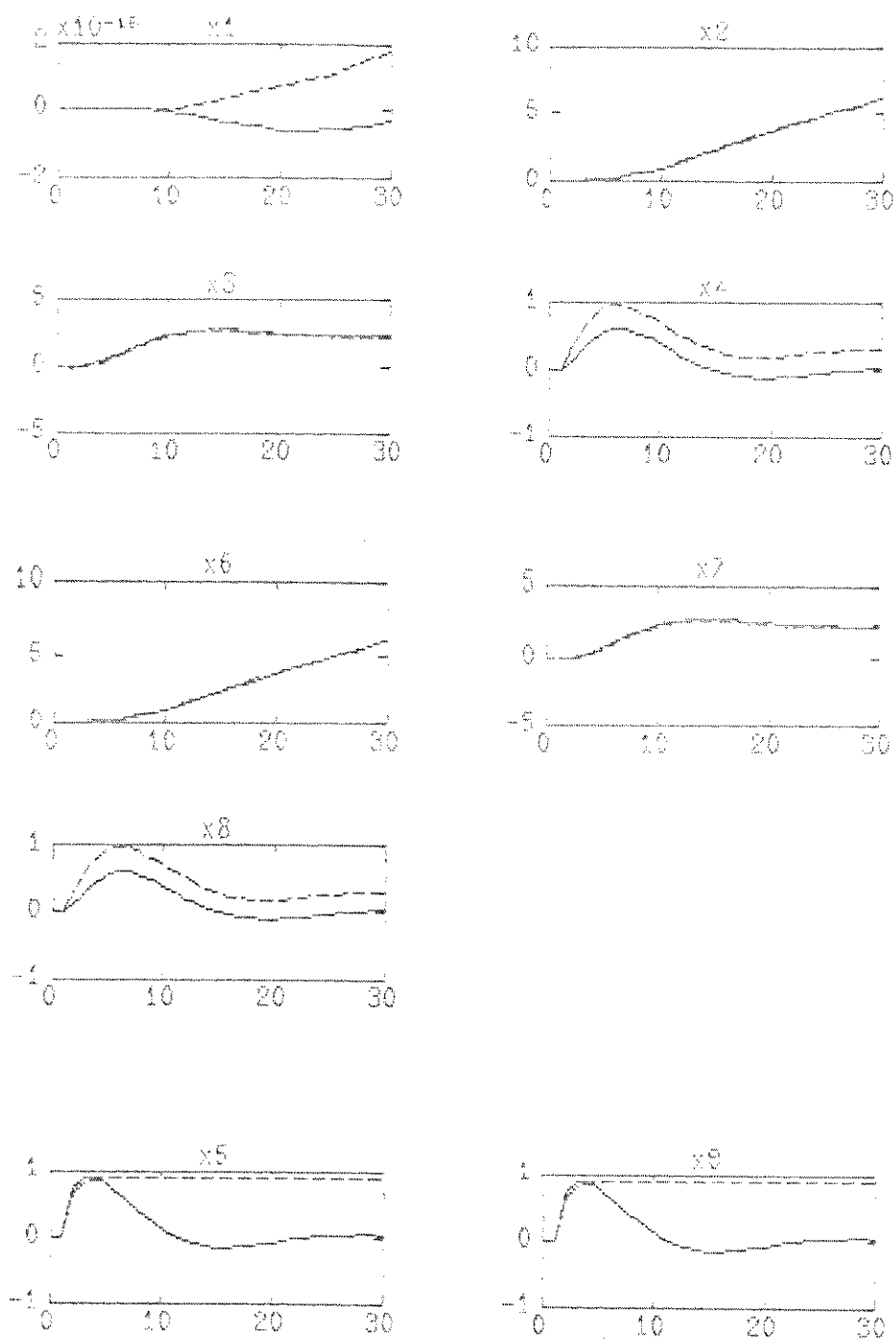


Figura 21. Simulação do modelo original do sistema de potência e dos modelos reduzidos

4.6 CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE SAÍDAS

São feitos agora alguns ensaios de realimentação de saída para o sistema de potência, aproveitando os estudos desenvolvidos na seção 2.2.2 do capítulo 2. Como este sistema tem 4 saídas independentes e é controlável, pode-se alocar 4 de seus 9 pólos. Usar-se-á inicialmente (42) do cap.2 para verificar os pólos mais afetados pela realimentação de saída. Aplicando esta equação e calculando a norma dos vetores coluna, obtém-se para cada autovalor a tabela 3

Autovalor		Fator de influência
λ_1	= 1	1.4142
λ_2	= 1	.6222
λ_3	= .8950 - .3251i	.2198
λ_4	= .8950 + .3251i	.4070
λ_5	= .8510 - .2115i	.3156
λ_6	= .8510 + .2115i	.6058
λ_7	= .8462	1.3278
λ_8	= .2541	.4487
λ_9	= .2535	.4478

Tabela 3. Influência das saídas sobre os autovalores

De acordo com esta tabela , pode-se escolher os autovalores 1,2,7 e 8 como os mais fortemente associados às saídas. Para verificar isto, mudar-se-á a posição destes pólos para as novas posições (.98 , .96 , .82 , .22) , que são próximas às suas posições atuais. Calculando a realimentação de saída usando (39) do cap.2 , obtém-se o

sistema de malha fechada cujos autovalores são

λ_1	= .98
λ_2	= .96
λ_3	= .9085 - .3129i
λ_4	= .9085 + .3129i
λ_5	= .8775 - .2102i
λ_6	= .8775 + .2102i
λ_7	= .8200
λ_8	= .2200
λ_9	= .2951

Tabela 4. Autovalores de malha fechada

Comparando a tabela 4 com a tabela 3, observa-se que os autovalores menos associados às saídas modificaram pouco suas posições com a aplicação da realimentação. Portanto, este estudo nos dá uma indicação de possibilidade de projeto para alocação de pólos. Se em conjunto a este estudo os demais graus de liberdade presentes na alocação de pólos em sistemas multivariáveis também forem utilizados adequadamente, será possível obter resultados muito bons com realimentação de saída.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO

As contribuições presentes neste trabalho demonstraram-se muito úteis em aplicações de redução de ordem e de controle de sistemas discretos multivariáveis. Os modelos da via expressa e do sistema de potência permitiram explorar amplamente estas técnicas. O primeiro modelo recebeu maior atenção, pois no contexto de redução de ordem desconhece-se trabalhos aplicados a ele e no contexto de projeto de controles, o enfoque utilizado é em geral o de controle ótimo.

Na alocação de pólos, a forma de explorar os parâmetros livres para reduzir a norma da matriz de realimentação, permite uma compreensão simples, dada a interpretação física que a acompanha. Os resultados obtidos com esta técnica foram bastante bons e talvez fossem interessantes novos estudos com o objetivo de assegurar um resultado ótimo.

A alteração proposta no algoritmo de alocação estudado, empregando a decomposição de Schur, permite resolver com maior eficiência problemas como o de alocação parcial de pólos. Seu uso pode ser pesquisado para resolver outros problemas que possam surgir em sistemas mal condicionados. Pode-se ainda estender seu uso para alocação de pólos por realimentação de saídas.

Para o caso de realimentação de saídas, o estudo realizado sobre a escolha dos pólos a alocar é uma idéia que surgiu da

experiência do autor com algoritmos de redução e de controle. Sem dúvida, trata-se de um assunto que deve receber um estudo mais detalhado, podendo tornar-se uma grande ferramenta no controle de sistemas por realimentação de saídas.

A utilização da decomposição de Schur para redução de ordem de sistemas é outra contribuição importante deste trabalho. Seu uso permite a obtenção de modelos reduzidos sem a necessidade de calcular os autovetores do sistema, o que representa a parte mais trabalhosa e problemática nos algoritmos de redução por agregação modal.

A análise sobre a escolha dos modos a reter no modelo reduzido além de simples, mostrou ser de grande utilidade para os métodos de redução II e III. Para o método de redução I, faz-se necessário um outro critério de escolha, dadas as suposições diferentes que são utilizadas para obter os modelos reduzidos por este método.

O método da separação temporal apresenta grandes vantagens sobre o método da agregação modal, pois o esforço computacional é reduzido grandemente. Sua desvantagem é não poder ser aplicável a todos os casos, como ocorreu com a via expressa, por exemplo.

O modelo da via expressa representou um importante teste para os algoritmos de redução e controle empregados. Por se tratar de um sistema de grande porte, qualquer procedimento aplicado a ele exige um esforço computacional considerável. As contribuições no sentido de melhorar a eficiência dos algoritmos de redução de ordem e de controle visaram solucionar problemas deste tipo, entre outros. Os modelos reduzidos bem como os controles obtidos mostram a validade das

técnicas empregadas.

O modelo do sistema de potência permitiu utilizar outras técnicas discutidas neste trabalho. A redução usando a teoria da separação temporal, por exemplo, permite obter modelos reduzidos deste sistema com grande facilidade. O emprego de realimentação de saídas para este sistema também é uma estratégia de controle muito viável . O uso do algoritmo de alocação estudado aliado a um conhecimento mais detalhado deste sistema pode levar a bons resultados.

BIBLIOGRAFIA

- [1] - Davison ,E.J.: "A Method for Simplifying Linear Dynamic Systems"
IEEE Trans. on Automatic Control, AC-11, p.93, 1966
- [2] - Chidambara,M.R.and Davison ,E.J.: "On 'A Method for Simplifying
Linear Dynamic Systems'". IEEE Trans. on Automatic Control,
AC-12, p.119,1967
- [3] - ——— : "Further Remarks on Simplifying Linear Dynamic
Systems". IEEE Trans. on Automatic Control, AC-12, p.213, 1967
- [4] - ——— : "Further Comments on 'A Method for Simplifying
Linear Dynamic Systems'". IEEE Trans. on Automatic Control,
AC-12, p.799 , 1967
- [5] - Davison , E.J.: "A New Method for Simplifying Large Dynamic
Systems". IEEE Trans. on Automatic Control, AC-13, p.214, 1968
- [6] - Aoki,M.: "Control of Large Scale Dynamic Systems by Aggregation"
IEEE Trans. on Automatic Control, AC-13, p.246, 1968
- [7] - Wilson,R.G., Fisher,D.G., Seborg,D.E. : "Model Reduction For
Discrete Time Systems". Int. J. Control, vol.16, p.519, 1972
- [8] - Arbel,A., Tse,E. : "Reduced Order Models , Canonical Forms and
Observers". Int. J. Control, vol.30, p.513, 1979
- [9] - Marshall,S.A. : "An Approximate Method for Reducing the Order of
a Linear System". Control, 10, p.642, 1966
- [10] - Mahmoud,M.S., Singh,M.G. : "Discrete Systems". Springer Verlag,
1984 .
- [11] - Mahmoud,M.S., Chen,Y., Singh,M.G. : "Discrete Two-Time Scale
Systems", UMIST Control Systems Ceter Report N_o 497, Dez.1980.
- [12] - Mahmoud,M.S. : "Order Reduction and Control of Discrete Systems"
Proc. IEE, vol.129, p.129, 1982

- [13] - Chen, C.T. : Linear System Theory and Design . Holt, Rinehart and Winston, 1984.
- [14] - Golub, G.H. , Van Loan, C.F. : Matrix Computations . The Johns Hopkins University Press, 1989.
- [15] - Fahmy, M.M. , O'Reilly, J. : "On Eigenstructure Assignment in Linear Multivariable Systems ". IEEE Trans. on Automatic Control, AC-27, p.690, 1982.
- [16] - Wonham, W.M. : "On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems". IEEE Trans. on Automatic Control, AC-12, p.660, 1967.
- [17] - Davison, E.J. : "On Pole Assignment in Linear Systems with Incomplete State Feedback". IEEE Trans. on Automatic Control, AC-15, p348, 1970.
- [18] - Moore, B.C. : "Principal Component Analysis in Linear Systems : Controlability, Observability and Model Reduction". IEEE Trans. on Automatic Control, AC-26, p.17, 1981.
- [19] - Tse, E.C.Y, Medanic, J.V., Perkins, W.R. : "Generalized Hessenberg Transformations for Reduced Order Modelling of Large Scale Systems". Int. J. Control, vol.27, p.493, 1978
- [20] - Lamba, S.S., Rao, S.V. : "Derivation of Aggregation Matrices for Simplified Models of Linear Dynamic Systems and Their Application for Optimal Control". Proc. JACC, p.498, 1972.
- [21] - Hickin, J., Sinha, N.K. : "Aggregation Matrices for a Class of Low Order Models for Large Scale Systems". Electron. Lett., vol.11, p.186, 1975.
- [22] - Mahapatra, G.B. : "A Note on Selecting a Low Order System by Davison's Model Simplification Technique". IEEE Trans. on Automatic Control, AC-22, p.677, 1977.

- [23] - —————: "A Further Note on Selecting a Low Order System Using the Dominant Eigenvalue Concept". IEEE Trans. on Automatic Control, p.135, 1979.
- [24] - Iway, Z., Cubo, Y. : "Determination of Eigenvalues in Marshall's Model Reduction". Int. J. Control, vol.30, p.823, 1979.
- [25] - Rao, A.S., Lamba, S.S., Rao, S.V. : "Comments on a Note on Selecting a Low Order System by Davison's Simplification Technique". IEEE Trans. on Automatic Control, AC-24, p.141, 1979.
- [26] - Enright, W.H., Kamel, M.S. : "On Selecting a Low Order Model Using the Dominant Mode Concept". IEEE Trans. on Automatic Control, AC-25, p.976, 1980.
- [27] - Gopal, M., Mehta, S.I. : "On the Selection of Eigenvalues to be Retained in the Reduced Order Models". IEEE Trans. on Automatic Control, AC-27, PP.688, 1982.
- [28] - Elrazaz, Z., Sinha, N.K. : "On the Selection of Dominant Poles of a Systems to be Retained in a Low Order Model". IEEE Trans. on Automatic Control, AC-24, p.792, 1979.
- [29] - Kokotovic, P.V., O'Malley, R.E. Jr., Sannuti, P. : "Singular Perturbations and Order Reduction in Control Theory - An Overview". Automatica, 12, p.123, 1976.
- [30] - Kokotovic, P.V., Allemong, J.J., Winkelman, J.R., Chow, J.H. : "Singular Perturbations and Iterative Separation of Time Scales". Automatica, 16, p.23, 1980.
- [31] - Moore, B.C. : "On the Flexibility Offered by State Feedback in Multivariable Systems Beyond Closed Loop Eigenvalue Assignment". IEEE Trans. on Automatic Control, AC-21, p.689, 1976.

- [32] - Moore, B. C. : "Eigenvalue-Generalized Eigenvector Assignment With State Feedback". IEEE Trans. on Automatic Control, AC-22, p.140, 1977.
- [33] - Porter, B., D'Azzo, J. J. : "Closed Loop Eigenstructure Assignment by State Feedback in Multivariable Systems". Int. J. Control, vol.27, p.487, 1978.
- [34] - Porter, B., D'Azzo, J. J. : "Algorithm for Closed Loop Eigenstructure Assignment by State Feedback in Multivariable Linear Systems". Int. J. Control, vol.27, p.493, 1978.
- [35] - Brogan, W. L. : "Applications of a Determinant Identity to Pole-Placement and Observer Problems". IEEE Trans. on Automatic Control, AC-19, p.612, 1974.
- [36] - Fahmy, M. M., O'Reilly, J. : "On Eigenstructure Assignment in Linear Multivariable Systems". IEEE Trans. on Automatic Control, AC-22, p.690, 1982.
- [37] - Fahmy, M. M., Tantawy, : "Eigenstructure Assignment via Linear State Feedback Control". Int. J. Control, vol.40, p.161, 1984.
- [38] - Cameron, R. G. : "New Pole Assignment Algorithm with Reduced Norm Feedback Matrix". IEE Proc., vol.135, p.111, 1988.
- [39] - Bingulac, S. P., Bottura, C. P., Fartes Filho, A. M. : "Algoritmo de Esforço Mínimo para Alocação de Pólos em Sistemas Lineares Multivariáveis". Anais 1º Congresso SBA, 1976.
- [40] - Varga, A. : "A Schur Method for Pole Assignment". IEEE Trans. on Automatic Control, p.517, 1981.
- [41] - Minimis, G. S., Paige, C. C. : Int. J. Control, p.341, 1982.
- [42] - Kautsky, J., Nichols, N. K., Van Dooren, P. : "Robust Pole Assignment in Linear State Feedback". Int. J. Control, vol.41, p.1129, 1985.

- [43] - Payne,H.J., Isaksen,L. : "Suboptimal Control of Linear Systems by Augmentation with Application to Freeway Traffic Regulation". IEEE Trans. on Automatic Control, AC-18,p.210,1973
- [44] - Rabah,W.A., Khalil,H.K.: "A Real Schur Form Method for Modeling Singularly Perturbed Systems". IEEE Trans. on Automatic Control, AC-34, p.856, 1989.
- [45] - Pernebo,L., Silverman,L.M. : "Model Reduction via Balanced State Space Representations". IEEE Trans. on Automatic Control, AC-27, p.332, 1982.
- [46] - Stewart,G.W. : "Introduction to Matrix Computation". New York Academic, 1973.
- [47] - Bottura,C.P. : "Controle Ótimo de Turbina Hidráulica". Anais do 4º Congresso Brasileiro de Eng. Mecânica, Florianópolis, 1977.
- [48] - Mahmoud,M.S. : "Structural Properties of Discrete Systems with Slow and Fast Modes". Large Scale Systems,3,p.227, 1982.
- [49] - Elgerd,O.I., Fosha,C.E.,Jr. : "Optimum Megawatt-Frequency Control of Multiarea Electric Energy Systems". IEEE Trans., 1970, PAS-89, p.556.

zado com $t=0.1\text{ s}$)

A **category**
category

DT =

C = 1000000

MODELO CONTÍNUO DA VIA EXPRESSA (na tese discretizado com $t=1s$)

i	$a_{i,i-2}$	$a_{i,i-1}$	$a_{i,i}$	$a_{i,i+1}$	j^*
1			-1.758	-1.666	
2		.664	-1.300	-.697	
3	1.955	1.853	-2.371	-1.956	1
4	1.983	.725	-3.122	-.583	
5	1.194	.926	.946	-1.059	2
6	1.333	.273	-2.467	-.325	
7	.870	.975	-.964	-1.011	3
8	.950	-.332	-2.130	-.356	
9	.964	1.011	-.962	-1.013	
10	.962	.271	-2.161	-.303	
11	.677	.713	-.718	-.734	4
12	.824	.243	-2.029	-.267	
13	.706	.722	-.703	-.725	
14	.708	.301	-1.905	-.317	
15	1.037	1.071	-1.033	-1.123	5
16	.825	.394	-2.007	-.298	
17	1.106	1.203	-1.079	-1.266	6
18	1.041	.285	-2.215	-.299	
19	.652	.765	-.648	-.805	7
20	.801	.266	-1.980	-.285	
21	.915	1.137	-1.001	-1.278	8
22	.782	.314	-1.975	-.347	
23	.934	1.138	-.963	-1.153	
24	.996	.269	-2.226	-.338	
25	.680	.815	-.925	-.963	9
26	.996	.339	-2.250	-.371	
27	.716	.895	-.931	-.881	
28	.960	.451	-2.175	-.449	
29	1.571	1.487	-1.513	-1.487	10
30	1.170	.454	-2.399	-.554	
31	1.253	1.232	-1.619	-1.334	11
32	1.591	.611	-2.844	-.652	
33	1.626	1.339	-1.659	-1.312	
34	1.656	-.029	-2.839		

* j é a coluna
para a qual
 $b_{i,j} = 1$

MATRIZ A

Colunas 1 a 7

0.7249	-0.2519	0.2196	-0.0502	0.0195	-0.0085	0.0020
0.4411	0.1214	0.2485	-0.0308	0.0105	-0.0042	0.0011
0.2047	0.1310	0.4046	0.0541	0.0012	0.0062	-0.0001
0.0466	0.1643	0.2812	0.4331	0.0645	-0.0075	0.0020
0.0719	-0.1821	0.2059	0.2246	0.4100	0.0937	-0.0067
0.1299	-0.2730	0.3246	0.1432	0.3315	0.3127	0.0799
0.3618	-0.7462	0.6710	-0.0624	0.2616	0.1686	0.3525
1.2636	-2.5335	2.2990	-0.7214	0.0819	0.1211	0.1390
109.7396	-230.3025	221.0339	-38.0666	75.1061	-12.0462	12.6453

Colunas 8 a 9

-0.0000	0.0000
-0.0001	0.0000
0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000
0.0010	-0.0001
0.0012	0.0001
0.0056	0.0019
0.4061	0.0756
-4.0903	1.2160

MATRIZ B

Colunas 1 a 7

0.2935	0.3850	0.1107	-0.0212	0.0001	-0.0043	0.0007
-0.0104	0.5020	0.4150	-0.0461	0.0043	-0.0046	-0.0006
-0.0871	0.2090	0.4209	0.0978	-0.0006	0.0005	-0.0015
0.2030	-0.2784	0.0899	0.5810	-0.0223	0.0016	0.0009
-0.0680	0.0680	-0.0788	0.4225	0.0834	-0.0310	-0.0033
-0.1448	0.1871	-0.0278	0.1063	0.2897	0.1032	-0.0160
0.0097	0.0467	0.0395	-0.1988	0.4617	0.3349	0.1064
0.0812	-0.0822	0.0386	-0.0744	0.2051	0.3459	0.5520
-0.2906	0.2549	0.1237	0.0096	-0.0546	0.0724	0.5419

Colunas 8 a 11

0.0016	-0.0015	0.0004	-0.0001
0.0024	-0.0023	0.0006	-0.0001
-0.0029	0.0027	-0.0007	0.0001
-0.0041	0.0040	-0.0010	0.0001
0.0011	-0.0010	0.0003	-0.0001
-0.0008	0.0009	-0.0006	0.0001
-0.0054	0.0051	-0.0007	0.0001
0.0060	-0.0058	0.0006	-0.0001
0.0057	-0.0055	0.0005	0.0001

MODELO REDUZIDO DISCRETO DE ORDEM 11 OBTIDO VIA MÉTODO 3

MATRIZ A

Colunas 1 a 7

0.7582	-0.3083	0.2670	-0.0745	0.0379	-0.0212	0.0073
0.4242	0.1764	0.1934	-0.6093	-0.0212	0.0276	-0.0150
0.1391	0.2885	0.2565	0.1247	-0.0656	0.4621	-0.0402
-0.0761	0.4714	-0.0189	0.5753	-0.1019	0.1740	-0.0882
-0.2462	0.5745	-0.5752	0.5396	0.0125	0.4694	-0.1935
-0.5472	1.1689	-1.0774	0.8258	-0.5600	1.1879	-0.3556
-0.9417	2.0324	-2.0369	1.2916	-1.3804	1.8667	-0.4946
-1.3642	3.0458	-3.1047	1.7561	-2.6233	2.9193	-1.2287
-2.7028	5.9927	-6.0639	3.3486	-5.2160	5.4207	-2.5076
-3.3407	7.5206	-7.5766	4.0408	-6.3172	6.4506	-3.1971
0.0351	-10.1661	19.1442	-19.6467	30.4390	-35.5203	10.2750

Colunas 8 a 11

-0.0010	0.0001	0.0000	-0.0000
0.0001	-0.0015	0.0006	-0.0001
0.0121	-0.0041	0.0012	-0.0001
0.0233	-0.0096	0.0029	-0.0003
0.0397	-0.0195	0.0059	-0.0007
0.1298	-0.0464	0.0143	-0.0017
0.3373	-0.0467	0.0280	-0.0033
0.9062	-0.0632	0.0406	-0.0046
1.1912	0.0190	0.2106	-0.0094
1.0425	-0.1161	0.4382	0.0320
-0.5967	5.0721	-2.4660	1.0300

(CONTINUAÇÃO)

MATRIZ B

Colunas 1 a 7

0.2867	0.4142	0.0922	-0.0024	-0.0042	-0.0007	0.0019
-0.0067	0.5284	0.4153	-0.0091	0.0010	-0.0043	0.0026
0.0051	0.1021	0.4710	0.0046	0.0080	0.0022	-0.0032
0.1937	-0.2512	0.0707	0.5570	-0.0219	0.0043	0.0022
-0.1731	0.1680	-0.0446	0.7577	0.0060	-0.0129	0.0125
0.0501	-0.1066	0.0470	0.0051	0.3146	0.0907	-0.0107
0.2167	-0.2927	0.1160	-0.2060	0.4942	0.0275	0.1000
-0.5694	0.2609	0.1347	0.0029	0.1421	0.0016	0.5000
0.0000	-0.0000	0.0001	-0.1400	-0.0026	0.0074	0.5728
0.1425	-0.0001	0.5193	-0.1732	-0.1173	-0.1560	0.2966
-0.2042	0.2403	-0.0540	0.2169	-0.0019	0.0235	-0.0057

Colunas 8 a 11

-0.0012	0.0010	-0.0002	0.0001
0.0001	0.0009	-0.0003	-0.0001
0.0018	-0.0013	0.0002	-0.0001
-0.0001	0.0017	-0.0002	0.0002
0.0034	0.0036	-0.0015	-0.0005
-0.0014	-0.0004	-0.0002	-0.0002
-0.0038	0.0130	-0.0044	0.0000
0.0477	0.0257	-0.0057	-0.0018
0.3118	-0.0199	0.0025	0.0002
0.4135	0.1524	-0.0031	0.0000
0.1366	0.4610	-0.0096	-0.0052

MATRIZ A

Colunas 1 a 7

0.7750	-0.3481	0.2974	-0.0984	0.0553	-0.0081	0.0170
0.4400	0.1634	0.1993	0.0076	-0.0933	0.1021	-0.0792
0.1134	0.3042	0.2404	0.1056	-0.2573	0.3169	-0.1240
-0.0573	0.3839	0.0276	0.6302	-0.0719	0.5366	-0.3267
-0.1109	0.3475	-0.1610	0.5046	-0.2987	0.9607	-0.5094
-0.1819	0.3873	-0.3316	0.6604	-0.7603	1.6660	-0.0043
-0.1406	0.3071	-0.3534	0.5861	-0.9724	1.7585	-0.5397
-0.0107	0.0041	-0.1016	0.3836	-0.5932	1.0071	-0.1994
0.1936	-0.2035	0.1709	-0.1109	0.3100	-0.3173	0.4010
0.2290	-0.5257	0.5915	-0.7202	1.9931	-2.4919	1.6631
0.1413	-0.3842	0.5143	-0.8497	2.5851	-3.3441	2.0702
0.0173	-0.0941	0.1864	-0.4633	1.5116	-1.9936	1.1864
-0.0419	0.0120	0.1173	-0.5479	1.9089	-2.5500	1.4714
-0.0712	0.0960	0.0000	-0.3432	1.3096	-1.7430	1.6029
-0.0664	0.1069	-0.0445	-0.1969	0.7725	-1.0000	0.3539

Colunas 8 a 14

-0.0099	0.3135	-0.0116	0.0082	-0.0391	0.0636	-0.0024
0.0136	0.0125	-0.0164	0.0163	-0.0033	0.1434	-0.1350
0.0069	0.0145	-0.0259	0.0281	-0.1568	0.2546	-0.0200
0.0524	0.0491	-0.0647	0.0639	-0.3444	0.5569	-0.7209
0.0699	0.1104	-0.1254	0.1150	-0.5989	0.9702	-1.2520
0.0697	0.2538	-0.2532	0.2220	-1.1123	1.7945	-2.3147
0.0598	0.4213	-0.3950	0.3269	-1.5324	2.4529	-3.1574
0.2644	0.7312	-0.5193	0.3637	-1.4750	2.2697	-2.8316
-0.1664	1.0829	-0.4669	0.3631	-1.0405	1.5625	-1.5979
-0.1000	0.8152	0.0114	0.2477	.4991	-1.4437	2.2278
-0.1343	0.3864	0.1097	0.3250	-1.7732	-3.5032	3.1086
-0.2103	-0.0668	0.1587	0.0453	1.5244	-2.6497	4.1161
-0.1874	-0.2602	0.2540	0.0326	1.7072	-3.2483	6.0415
-0.0998	-0.2268	0.1592	0.0794	0.8851	-2.3210	4.4035
-0.0364	-0.1617	0.0792	0.1171	0.1447	-1.0549	2.4326

Coluna 15

0.0475
0.0996
0.1765
0.3891
0.6764
1.2469
1.7300
1.5410
1.5290
1.2717
-2.9693
-2.3409
-3.4127
-2.3463
-1.1347

MATRIZ B

Colunas 1 a 7

0.2350	0.4951	0.6050	0.0120	0.0007	0.0007	-0.0004
-0.1170	0.5044	0.4356	-0.0120	-0.0017	-0.0000	0.0000
0.0411	0.3389	0.4925	0.0456	0.0047	-0.0009	0.0005
0.2406	-0.0642	-0.0092	0.0943	-0.0020	0.0059	-0.0026
-0.2180	0.0076	0.0205	0.1011	0.0550	-0.0201	0.0126
0.6722	-0.0541	-0.2626	-0.0992	0.0492	0.0323	-0.0137
0.4140	-0.0421	-0.2536	-0.2021	0.0132	0.0311	0.0630
-0.5033	-0.7124	0.4763	-0.2001	0.0900	0.4676	0.6029
0.0802	-0.0753	-0.0636	-0.1253	0.0661	0.0354	0.0233
-0.2779	1.1961	0.9930	0.5832	-0.0931	0.0977	0.0503
-0.2889	0.9797	0.7704	0.5279	-0.1107	0.0431	-0.1421
-1.9696	0.0535	-0.0410	0.7344	0.2137	-0.1551	-0.0606
-0.1193	4.1363	0.1616	1.1000	0.2725	-0.1092	-0.1001
-0.0077	0.6210	-0.7927	0.4259	0.3406	-0.0117	0.0502
1.6874	2.1755	-1.4382	0.1487	0.3987	-0.4298	0.1519

Colunas 8 a 11

0.0001	-0.0000	-0.0000	-0.0000
-0.0001	-0.0000	0.0000	-0.0000
0.0002	0.0001	-0.0000	0.0000
0.0004	-0.0002	-0.0000	-0.0000
-0.0010	0.0013	0.0000	0.0001
0.0015	-0.0013	0.0001	-0.0002
-0.0100	-0.0025	0.0000	-0.0000
0.0470	0.0056	-0.0009	-0.0011
0.3700	-0.0400	-0.0010	-0.0069
0.0127	0.0408	-0.0003	-0.0137
0.1000	0.4968	-0.0005	-0.0147
0.1003	0.2642	0.0092	-0.0206
0.1002	0.1671	0.0727	0.0195
0.0993	0.1180	0.0516	0.0250
0.0506	0.1443	0.0052	0.1127

MATRIZ DE REALIMENTAÇÃO K QUE ALOCA 15 PÓLOS DO SISTEMA

MATRIZ K

Colunas 1 a 7

-0.6282	-1.1556	3368	-0.6000	0.1760	-0.5282	0.6627
0.5681	-0.6279	.4672	-0.1531	0.6411	-0.2636	0.9587
0.8960	0.9326	1.2303	0.6030	-0.1874	0.3900	-0.0164
0.1245	-0.0110	0.6634	-0.0291	0.1519	-0.0908	0.0706
-0.0441	-0.1184	0.0402	-0.0732	0.0305	-0.0707	0.0677
-0.0627	-0.0109	-0.0264	-0.0269	-0.0212	-0.0120	-0.0291
0.1155	0.6670	0.0249	0.0674	0.0561	0.0742	0.0465
-0.0488	-0.0303	-0.0050	-0.0270	-0.0116	-0.0320	-0.0165
0.0955	0.0681	0.0173	0.0502	0.0510	0.0764	0.0200
-0.0297	-0.022	-0.0049	-0.0157	-0.0094	-0.0248	-0.0115
-0.0029	-0.001	0.0001	-0.0027	-0.0002	-0.0035	-0.0007

Colunas 8 a 14

-0.4980	0.105	-0.4622	-0.0185	-0.1171	0.0241	-0.0582
-0.1738	0.134	-0.1477	0.1939	-0.1645	0.0629	-0.0724
0.5682	-0.495	0.5122	0.0006	0.1478	0.0128	0.1064
-0.0191	0.0388	-0.0500	0.0371	-0.0635	0.0101	-0.0334
-0.0343	0.0204	-0.0547	0.0049	-0.0262	0.0000	-0.0125
-0.0469	0.0008	-0.0520	-0.0139	-0.0392	-0.0112	-0.0225
0.0780	0.0067	0.0914	0.0184	0.0623	0.0192	0.0200
-0.0258	-0.0011	-0.0310	-0.0032	-0.0197	-0.0071	-0.0060
0.0668	0.0041	0.0779	0.0149	0.0528	0.0162	0.0251
-0.0278	-0.0009	-0.0256	-0.0047	-0.0170	-0.0049	-0.0002
-0.0035	0.0003	-0.0037	-0.0004	-0.0025	-0.0004	-0.0016

Colunas 15 a 21

0.0030	-0.0671	-0.0044	0.0020	-0.0201	0.0167	0.0235
0.0264	-0.0479	0.0102	-0.0171	-0.0021	-0.0018	0.0074
-0.0137	0.1140	0.0007	0.0107	0.0356	-0.0218	-0.0292
0.0060	-0.0232	-0.0001	-0.0050	-0.0041	-0.0013	0.0040
0.0042	-0.0116	0.0005	-0.0010	-0.0037	0.0000	0.0001
0.0010	-0.0176	-0.0019	-0.0034	-0.0061	0.0010	0.0002
-0.0031	0.0281	0.0010	0.0061	0.0103	-0.0046	-0.0060
0.0013	-0.0090	0.0003	-0.0023	-0.0035	0.0023	0.0019
-0.0026	0.0236	0.0007	0.0054	0.0085	-0.0037	-0.0049
0.0008	-0.0077	-0.0003	-0.0017	-0.0027	0.0011	0.0016
0.0001	-0.0011	-0.0001	-0.0002	-0.0003	0.0000	0.0002

(CONTINUAÇÃO)

Colunas 22 a 28

-0.0477	0.0007	-0.0025	-0.0291	0.0065	0.0064	-0.0133
-0.0159	0.0033	-0.0025	-0.0172	0.0074	0.0016	-0.0029
0.0654	-0.0130	0.0077	0.0195	-0.0109	-0.0098	0.0176
-0.0109	0.0013	-0.0013	-0.0058	0.0013	0.0014	-0.0024
-0.0067	0.0015	-0.0008	-0.0041	0.0040	-0.0010	-0.0012
-0.0097	0.0016	-0.0014	-0.0057	0.0038	0.0011	-0.0023
0.0131	-0.0030	0.0024	0.0092	-0.0094	-0.0020	0.0037
-0.0047	0.0011	-0.0009	-0.0029	0.0036	0.0016	-0.0012
0.0123	-0.0025	0.0020	0.0075	-0.0073	-0.0016	0.0030
-0.0041	0.0008	-0.0006	-0.0024	0.0023	0.0005	-0.0010
-0.0006	0.0001	-0.0001	-0.0003	0.0003	0.0001	-0.0001

Colunas 29 a 34

0.0171	-0.0112	-0.0005	0.0011	-0.0042	0.0035
0.0021	-0.0032	0.0002	0.0001	-0.0011	0.0012
-0.0109	0.0161	0.0002	-0.0012	0.0039	-0.0056
0.0017	-0.0026	0.0001	0.0001	-0.0009	0.0009
0.0011	-0.0016	-0.0000	0.0001	-0.0006	0.0006
0.0016	-0.0023	0.0001	0.0001	-0.0009	0.0009
-0.0026	0.0039	-0.0001	-0.0002	0.0014	-0.0014
0.0008	-0.0017	0.0000	0.0001	-0.0004	0.0004
-0.0021	0.0032	-0.0001	-0.0002	0.0012	-0.0011
0.0007	-0.0010	0.0000	0.0001	-0.0004	0.0004
0.0001	-0.0001	0.0000	0.0000	-0.0001	0.0001