

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE COMUNICAÇÕES

"ESQUEMAS DE MODULAÇÃO CODIFICADA DE BLOCO
COM CONSTRUÇÃO MULTI-LINHA"

AUTOR: ENG. ANTONIO CLAUDIO FRANÇA PESSOA ^{m.t.}

ORIENTADOR: PROF. DR. DALTON SOARES ARANTES ^{ant.}

Este exemplar corresponde à redação final da tese
defendida por Antonio Claudio França
Pessoa e aprovada pela Comissão
em 01/06/1990.

Dalton Soares Arantes
Orientador

Tese apresentada à Faculdade de
Engenharia Elétrica, da Universidade
Estadual de Campinas - UNICAMP, como
parte dos requisitos exigidos para a
obtenção do título de MESTRE EM
CIÊNCIAS.

BC/9100752

MAIO 1990

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Aos meus pais e irmãos,
por tudo que representam
e pelo alcance da nossa união.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dalton Soares Arantes, pelas condições oferecidas para realizar este trabalho, pelo interesse demonstrado, orientação e confiança.

Ao Prof. Renato Baldini, pelo tempo em que diariamente, a troca de idéias foi imprescindível.

Aos meus professores no Curso de Mestrado, pelos ensinamentos.

A Maritza, pelo seu apoio e pela paciência durante o período em que foi desenvolvido este trabalho.

Ao CNPq, CPqD/TELEBRÁS e UNICAMP, pelo apoio financeiro e recursos diversos oferecidos.

A Rita, pela boa vontade na paciente datilografia do texto.

A todos os meus amigos e familiares, pelo constante apoio e companhia, tornando esta tarefa possível.

A todos os outros profissionais que contribuíram para este trabalho de alguma forma.

RESUMO

Os esquemas de modulação codificada de bloco com construção multi-linha, controlados por códigos lineares e binários, são estudados em vários de seus aspectos de interesse como solução para o projeto de sistemas de comunicação digital eficientes.

São apresentadas as melhores configurações para diversas constelações multi-dimensionais usuais, e propostos esquemas que, explorando uma melhor distribuição dos sinais, possibilitam desempenho superior ao daqueles.

As características espectrais dos esquemas relatados são obtidas através do desenvolvimento de um método específico.

É proposto um procedimento de decodificação que, basicamente, transforma o problema numa série de decodificações unidimensionais binárias. O desempenho dos sistemas tratados é considerado através de relações aproximadas e limitantes para a probabilidade de erro bem como de simulação computacional dos mesmos.

ÍNDICE

CAPÍTULO I	- INTRODUÇÃO	1
I.1	- Considerações Gerais	ii
I.2	- Objetivos	iii
CAPÍTULO II	- ASPECTOS GERAIS DO PROBLEMA	1
II.1	- Introdução	2
II.2	- O Sistema Considerado	2
II.3	- Representação Vetorial dos Sinais	5
II.4	- Parâmetros Relevantes	8
II.4.1	- Codificação	8
II.4.2	- Modulação	10
CAPÍTULO III	- MODULAÇÃO CODIFICADA DE BLOCO	12
III.1	- Introdução	13
III.2	- O Mapeamento entre Símbolos de Saída do Codificador e os Sinais da Constelação	13
III.3	- Uma Classe de Códigos de Bloco para Modulação Codificada	17
III.4	- Relações para Distância Euclidiana Mínima e o Número de Vizinhos mais Próximos	18
III.5	- A Busca de Bons Códigos	22
APÊNDICE III.1		24
CAPÍTULO IV	- ESQUEMAS TÍPICOS	27
IV.1	- Introdução	28
IV.2	- Esquemas em 1 Dimensão	28
IV.3	- Esquemas em 2 Dimensões	31
IV.4	- Esquemas em 3 e 4 Dimensões	49
IV.5	- Capacidade de Canal e Comparação entre Esquemas	65

CAPÍTULO V	- CARACTERÍSTICAS ESPECTRAIS DOS ESQUEMAS DE MODULAÇÃO CODIFICADA	75
V.1	- Introdução	76
V.2	- Representação dos Sinais	76
V.3	- Densidade Espectral de Potência do Sinal Codificado	78
V.4	- Espectro dos Sistemas de Referência	89
V.5	- Espectro de Sistemas com Fonte de Máxima Entropia	91
APÊNDICE V.1		98
APÊNDICE V.2		99
APÊNDICE V.3		100
APÊNDICE V.4		101
APÊNDICE V.5		103
CAPÍTULO VI	- ESQUEMAS DE MODULAÇÃO CODIFICADA COM ASSIMETRIA ESPECTRAL	106
VI.1	- Introdução	107
VI.2	- Constelações com Assimetria Espectral	107
VI.3	- Mapeamentos Binários e Relações de Distância ..	112
VI.4	- A Busca de Bons Códigos	114
VI.5	- Características Espectrais	117
CAPÍTULO VII	- DECODIFICAÇÃO PARA OS ESQUEMAS DE MODULAÇÃO CODIFICADA DE BLOCO	130
VII.1	- Introdução	131
VII.2	- Decodificação ótima e Etapa-por-Etapa	131
VII.2.1	- Decodificação ótima	132
VII.2.2	- Decodificação Etapa-por-Etapa	133
VII.3	- Decodificação Etapa-por-Etapa Unidimensional ..	139
VII.4	- Simplificação e Comentários sobre Implementação	144
VII.5	- Resultados de Simulações	147

CAPÍTULO VIII	- RELAÇÕES PARA A PROBABILIDADE DE ERRO	151
VIII.1	- Introdução	152
VIII.2	- Limitantes para a Probabilidade de Erro	152
VIII.3	- Comportamento Assintótico	162
CAPÍTULO IX	- CONCLUSÃO E SUGESTÕES	167
REFERÊNCIAS		170

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Nos últimos anos, com a implantação de sistemas de comunicação com transmissão digital, a preocupação com a eficiência dos mesmos com relação à sua confiabilidade e ao aproveitamento otimizado dos recursos disponíveis de potência e faixa de transmissão tem originado vários estudos que efetivamente almejam, através do projeto combinado de codificação para correção de erros e modulação digital, o objetivo supramencionado.

A adoção de técnicas de codificação para correção de erros com códigos de bloco ou convolucionais visando a proteção de dados em redes de comunicação digital, em sistemas de armazenamento ou gerados por sondas espaciais tem sido abordada com ênfase por pesquisadores. Porém, inicialmente, nestas aplicações não havia congestionamento do espectro e limitações rígidas quanto à potência disponível e necessária à transmissão com a eficiência requerida. Em função disto, os esquemas de codificação e modulação eram estudados separadamente.

Mais recentemente, com o advento da transmissão digital via rádio a altas taxas, onde a faixa de transmissão é limitada e a potência restringida, para evitar interferência entre canais, o tratamento disjunto dos problemas de codificação e modulação não suscitava perspectivas alentadoras.

Embora Shannon [31,32] já previsse, há quarenta anos, a existência de esquemas eficientes combinando adequadamente codificação e modulação, somente com o recente desenvolvimento da tecnologia de processamento de sinais e a demanda de sistemas espectralmente eficientes, o estudo conjunto de modulação e codificação tem incrementado.

Massey [22], em 1974, foi um dos primeiros a alertar para as vantagens de adequar a modulação ao processo de codificação com o objetivo de projetar sistemas de comunicação digital eficientes.

A partir da proposta de esquemas TCM ("Trellis-Coded Modulation") em 1977 por Ungerboeck/Csaika [34] e da publicação, em 1982, de um trabalho mais detalhado por Ungerboeck [35], apresentando ganhos em termos de potência sobre sistemas não-codificados e mantendo suas características espectrais, uma série de trabalhos têm sido realizados nesta linha, denominada modulação codificada, que trata de esquemas onde o modulador é controlado por códigos binários convolucionais ou de bloco através de um mapeamento que maximiza a distância Euclidiana entre os sinais codificados, denominado mapeamento por partição de conjuntos ("mapping by set partitioning" [35]).

Alguns estudos [07,17,21,24,28] foram efetuados no desenvolvimento de algoritmos de busca de esquemas de modulação codificada controlados por códigos convolucionais. Outros trabalhos [04,06,08,09,13,14,15,27,38,39] trataram da construção e desempenho destes esquemas aplicados a constelações típicas (M-PAM, M-QAM, M-PSK, CPFMD), constelações em mais de duas dimensões e constelações irregulares considerando canais mais realísticos e discutindo problemas ligados à implementação.

Ultimamente, características particulares dos códigos de bloco como inexistência de propagação de erros, estrutura algébrica mais rica e disponibilidade de eficientes algoritmos de decodificação sub-ótimos [11,19,25,33] têm motivado o estudo de aplicação dos mesmos aos esquemas de modulação codificada [02,12,18,30].

Este trabalho de dissertação trilha por esse caminho e aborda aspectos relevantes do projeto de esquemas de modulação codificada controlados por códigos de bloco, como otimização dos mesmos, determinação de suas características espectrais e solução do problema de decodificação.

I.2. OBJETIVOS

Nesta dissertação, uma classe de esquemas de modulação codificada controlados por códigos de bloco binários é discutida em vários de seus aspectos. Seu processo de construção, creditado a Imai/Hirakawa [18], foi posteriormente utilizado por Cusack [12] no projeto de esquemas combinando constelações M-QAM com códigos de Reed-Muller e generalizado por Sayegh [30].

Resumidamente, o escopo do presente estudo é exposto a seguir na ordem de sua apresentação.

Capítulo II - É apresentado o sistema de comunicação digital tratado nesta dissertação e são relatados os parâmetros relevantes para avaliação do mesmo.

Capítulo III - Descrição do mapeamento por partição de conjuntos proposto por Ungerboeck [35] e da classe de esquemas de modulação codificada de bloco considerada. São desenvolvidas relações para alguns parâmetros relevantes destes esquemas e o processo de busca de códigos ótimos é descrito.

Capítulo IV - Apresentação dos esquemas de modulação codificada de bloco ótimos que utilizam as constelações típicas.

Capítulo V - Desenvolvimento de método matricial para determinação de características espectrais dos esquemas de modulação codificada discutidos.

Capítulo VI - Proposta de uma classe de esquemas de modulação codificada que utilizam constelações regulares em 3 e 4 dimensões mas com características espectrais particulares, em que se verifica assimetria espectral, com ganhos em relação aos que adotam constelações com espectro simétrico.

Capítulo VII - A questão de decodificação é abordada e o procedimento de decodificação etapa-por-etapa desenvolvido, reduzindo cada etapa a um problema unidimensional e possibilitando a utilização de algoritmos simplificados e sub-ótimos de decodificação. Particularmente, o emprego dos algoritmos de Chase [11,13] é comentado.

Capítulo VIII - São obtidas relações para a probabilidade de erro e o comportamento assintótico dos decodificadores tratados no capítulo prévio é verificado.

Capítulo IX - São feitos comentários sobre os resultados mais relevantes deste trabalho e propostas para futuros estudos.

CAPÍTULO II

ASPECTOS GERAIS DO PROBLEMA

II.1. INTRODUÇÃO

Inicialmente, com o objetivo de apresentar o problema de modulação codificada de maneira sistemática e possibilitar a sugestão fundamentada de soluções, neste capítulo são apresentados o sistema digital de comunicações considerado e parâmetros relevantes utilizados como critérios na busca de esquemas ótimos e sub-ótimos.

II.2. O SISTEMA CONSIDERADO

Os elementos básicos de um sistema digital de comunicações são indicados no diagrama de blocos da Fig. II.1.

A fonte digital é considerada binária, ou seja, tem como saída uma sequência de dígitos $\{u_i\}$, onde $u_i = 0$ ou 1 . Não será feita, por ora, nenhuma restrição com relação às propriedades estatísticas da fonte. A sequência de dígitos binários ocorre a uma taxa uniforme de R_f bits por segundo.

O codificador acrescenta redundâncias à informação recebida, de maneira conveniente e que será discutida nos próximos capítulos, e fornece como saída uma sequência de símbolos pertencentes a um alfabeto M-ário A,

$$A = \{ 0, 1, 2, \dots, M-1 \} \quad (\text{II.1})$$

Estes símbolos são enviados ao modulador a uma taxa de R símbolos por segundo. No sistema considerado, são tratados códigos de bloco, ou seja, para cada L dígitos binários na entrada do codificador obtem-se, em sua saída, um conjunto de N símbolos pertencentes ao alfabeto A. Desse modo,

$$L \cdot T_f = N \cdot T \quad (\text{II.2})$$

onde $T_f = 1/R_f$ segundos e $T = 1/R$ segundos.

Considerar-se-á somente os casos em que M é da forma $M=2^m$, onde m é um inteiro maior que 1; desse modo, pode-se associar a cada símbolo do alfabeto A uma representação binária em m bits.

Define-se a taxa de codificação R_c como a razão entre o número de bits de cada bloco de informação e o correspondente número de bits das palavras-código,

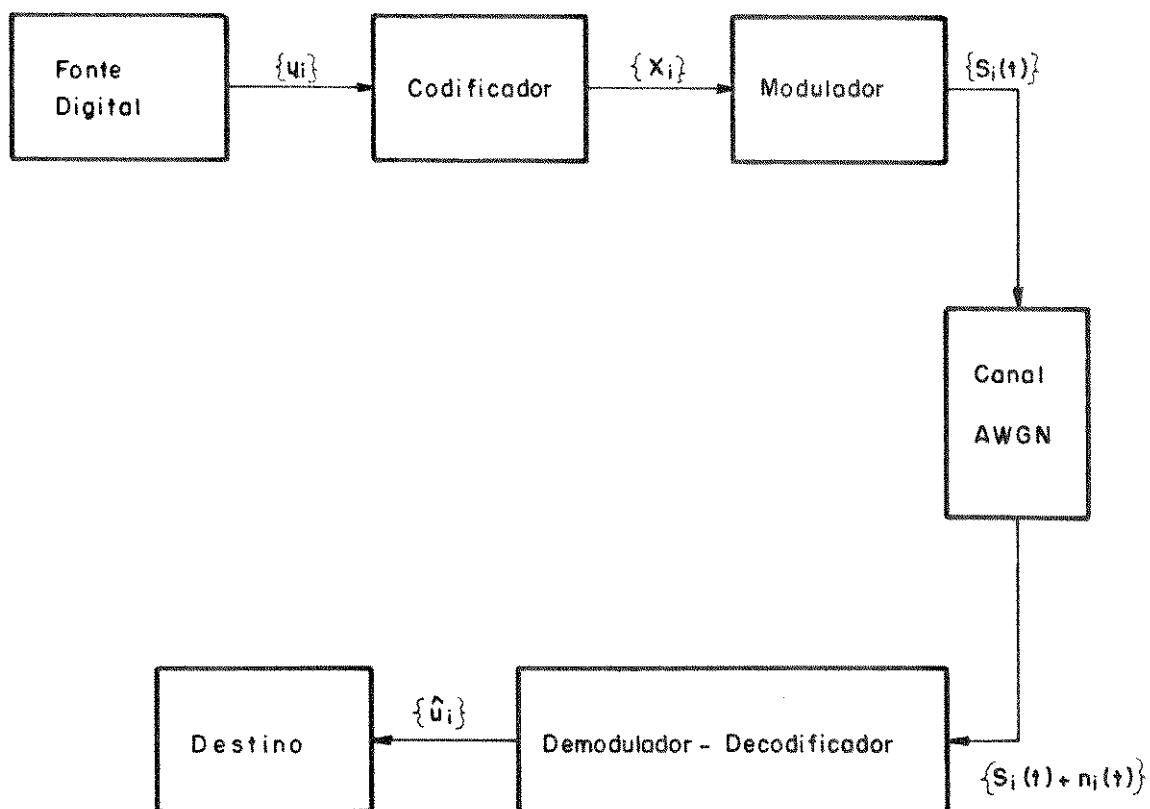


Figura II.1 - O Sistema de Comunicações Digitais Considerado

ou seja,

$$R_c = \frac{L}{Nm} = \frac{R_f}{mR} \tag{II.3}$$

Cada bloco de L bits de entrada do codificador é descrito pelo vetor

$$\underline{u} = [u_0, u_1, \dots, u_{L-1}] \tag{II.4}$$

onde $u_i = 0$ ou 1 , e as palavras-código de N símbolos são dadas por

$$\underline{X} = [X_0, X_1, \dots, X_{N-1}] \tag{II.5}$$

onde $X_i \in A$.

O alfabeto A está relacionado biunivocamente com um conjunto C de M sinais.

$$C = \{c_0(t), c_1(t), \dots, c_{M-1}(t)\} \tag{II.6}$$

onde $c_i(t)$ tem duração T para $i = 0, 1, \dots, M-1$.

O modulador associa a cada símbolo de saída do codificador um dos M sinais do conjunto C , ou seja, a cada símbolo X_j é associado um sinal $s_j(t)$ pertencente a C ; conseqüentemente, a cada bloco de L bits gerados pela fonte corresponde um sinal da forma

$$z(t) = \sum_{j=0}^{N-1} s_j(t-jT) \tag{II.7}$$

onde $s_j(t) = 0$ fora do intervalo $0 \leq t < T$, para $j = 0, 1, \dots, N-1$.

O canal, através do qual a seqüência de formas de onda $\{s_j(t)\}$ é transmitida, é assumido como não tendo restrição de faixa e os sinais são corrompidos por ruído Gaussiano e aditivo

$$n(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} n_j(t-jT) \tag{II.8}$$

Na recepção, o conjunto demodulador-decodificador tem como objetivo estimar a seqüência transmitida $\{u_i\}$ através da seqüência $\{\hat{u}_i\}$. O problema da recepção será tratado no capítulo VII.

O sistema descrito até então será analisado tendo como referência um sistema sem codificação. Neste caso, a fonte também gera em sua saída uma sequência de dígitos binários à taxa de R_f bits por segundo.

Neste sistema de referência, o número de sinais disponíveis para transmissão é $M/2 = 2^{m-1}$. A justificativa para esta escolha é apresentada na seção II.4. Portanto, a cada conjunto de $(m-1)$ bits é associado um dos $M/2$ sinais do conjunto C' ,

$$C' = \left\{ c'_0(t), c'_1(t), \dots, c'_{M/2-1}(t) \right\} \tag{II.9}$$

onde cada sinal transmitido, $s'_j(t)$, pertencente conjunto C' , ocupa, para efeito de comparação com esquema anterior, o intervalo de T segundos. Consequentemente, em ambos os sistemas a taxa de sinalização é de $R = 1/T$ sinais por segundo.

Desse modo,

$$R = \frac{R_f}{m-1} \tag{II.10}$$

Combinando as expressões (II.3) e (II.10) obtém-se

$$R_c = \frac{m-1}{m} \tag{II.11}$$

Portanto, neste estudo, apenas esquemas codificados que empreguem a taxa de codificação expressa em (II.11) serão analisados.

II.3. REPRESENTAÇÃO VETORIAL DOS SINAIS

Os sinais do conjunto C são funções reais de t , cada qual com energia

$$E_i = \int_0^T c_i^2(t) dt ; \quad i = 0, 1, \dots, M-1 \tag{II.12}$$

Pode-se representar cada sinal $c_i(t)$ na forma vetorial, adotando para isso um conjunto ψ de funções ortonormais,

$$\psi = \left\{ \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_Q(t) \right\} \tag{II.13}$$

onde Q é a dimensionalidade do espaço de sinais considerado [01] e cada sinal $\varphi_q(t)$ é nulo fora do intervalo $0 \leq t < T$, para $q = 1, 2, \dots, Q$.

Os sinais do conjunto ψ satisfazem

$$\int_0^T \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

de modo que cada sinal do conjunto C pode ser especificado completamente pelo vetor de coeficientes normalizados

$$c_i = [c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{iQ}] \quad (\text{II.15})$$

ou seja,

$$c_i(t) = P \sum_{q=1}^Q c_{iq} \varphi_q(t) \quad (\text{II.16})$$

para $i = 0, 1, \dots, M-1$, onde

$$P = \left[\frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} E_i \right]^{1/2} \quad (\text{II.17})$$

é uma constante de normalização que implica em

$$\frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{q=1}^Q c_{iq}^2 = 1 \quad (\text{II.18})$$

Serão considerados, neste trabalho, esquemas em até 4 dimensões.

Em cada caso, constelações de sinais típicas foram escolhidas e o conjunto de funções ortonormais mais usual é adotado.

1 dimensão

Tipo de constelação: PAM

Forma dos sinais: $c_i(t) = A_i$, $0 \leq t < T$

Função ortonormal: $\varphi_1(t) = 1/\sqrt{T}$, $0 \leq t < T$

2 dimensões

Tipos de contelação: QAM, PSK

Forma dos sinais: $c_i(t) = A_i \cos w_c t + B_i \sin w_c t$, $0 \leq t < T$

Funções ortonormais: $\varphi_1(t) = \sqrt{2/T} \cos w_c t$, $0 \leq t < T$

$$\varphi_2(t) = \sqrt{2/T} \sin w_c t, \quad 0 \leq t < T$$

3 e 4 dimensões

Tipos de constelação: FSK/PSK

Forma dos sinais:

$$c_i(t) = A \left[\cos \left(w_c t + \pi h t / T + \theta_i \right) + \cos \left(w_c t - \pi h t / T + \phi_i \right) \right], \quad 0 \leq t < T$$

Funções ortonormais: $\varphi_1(t) = \sqrt{2/T} \cos \left(w_c t + \pi h t / T \right)$, $0 \leq t < T$

$$\varphi_2(t) = -\sqrt{2/T} \sin \left(w_c t + \pi h t / T \right), \quad 0 \leq t < T$$

$$\varphi_3(t) = \sqrt{2/T} \cos \left(w_c t - \pi h t / T \right), \quad 0 \leq t < T$$

$$\varphi_4(t) = -\sqrt{2/T} \sin \left(w_c t - \pi h t / T \right), \quad 0 \leq t < T$$

Convém observar que, nas expressões acima, w_c é da forma $w_c = 2\pi k/T$, onde k é um inteiro positivo.

Utilizando a representação vetorial, o sistema apresentado na Fig. II.1 pode ser modelado por um sistema discreto. De acordo com o que foi considerado na seção II.2, não ocorre interferência intersimbólica e o ruído é do tipo Gaussiano, aditivo e branco. Supõe-se também perfeita sincronização temporal e de fase na recepção.

Devido às características do ruído suposto, ele pode ser expresso como

$$n_i(t) = \sum_{q=1}^Q n_{iq} \varphi_q(t) \quad (\text{II.19})$$

ou, na forma vetorial, como

$$\underline{n}_i = [n_{i1}, n_{i2}, \dots, n_{iQ}] \quad (\text{II.20})$$

onde n_{iq} é Gaussiano com média zero e variância $N_0/2$, e N_0 é a densidade espectral unilateral de potência do ruído.

A saída do canal discreto, para cada bloco de N símbolos de entrada, é o vetor

$$\underline{r} = (r_0, r_1, \dots, r_{N-1}) \quad (\text{II.21})$$

onde

$$r_n = P \underline{s}_n + n_n \quad (\text{II.22})$$

O vetor de sinais $\underline{s}$,

$$\underline{s} = (s_0, s_1, \dots, s_{N-1}) \quad (\text{II.23})$$

onde $\underline{s}_n$ é o vetor de coeficientes normalizados associado ao sinal $s_n(t)$, corresponde à palavra-código enviada

$$\underline{X} = (X_0, X_1, \dots, X_{N-1}) \quad (\text{II.24})$$

onde X_n pertence ao alfabeto A .

II.4. PARÂMETROS RELEVANTES

Alguns parâmetros têm especial importância quando é necessário realizar comparação entre esquemas. Particularmente, há o interesse em determinar critérios que possibilitem a avaliação de sistemas de modulação codificada e a obtenção de esquemas ótimos e sub-ótimos. Muito embora a otimização se processe conjuntamente, as duas entidades, modulador e codificador, têm parâmetros de mérito próprios.

II.4.1 Codificação

O codificador, como foi apresentado na seção II.2, realiza o mapeamento de cada vetor de entrada de L bits em palavras-código de N símbolos pertencentes ao alfabeto A . Existem 2^L palavras-código distintas dadas por

$$\underline{X}^{(i)} = \left[X_0^{(i)}, X_1^{(i)}, \dots, X_{N-1}^{(i)} \right]; i = 1, 2, \dots, 2^L \quad (\text{II.25})$$

onde $X_n^{(i)}$ é a n -ésima componente da i -ésima palavra-código e pertence ao conjunto A .

A cada símbolo de saída do codificador associa-se um sinal pertencente ao conjunto C de sinais escolhido. Consequentemente, à cada palavra-código corresponde um vetor de sinais definido como

$$\underline{s}^{(i)} = \left[\underline{s}_0^{(i)}, \underline{s}_1^{(i)}, \dots, \underline{s}_{N-1}^{(i)} \right]; i = 1, 2, \dots, 2^L \quad (\text{II.26})$$

onde $\underline{s}_n^{(i)}$ é o vetor de coeficientes normalizados relacionado com o n-ésimo sinal da i-ésima palavra-código.

Seja D_{ij}^2 a distância Euclidiana ao quadrado entre os vetores $\underline{s}^{(i)}$ e $\underline{s}^{(j)}$, ou seja,

$$D_{ij}^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \left| \underline{s}_n^{(i)} - \underline{s}_n^{(j)} \right|^2 \quad (\text{II.27})$$

A mínima distância Euclidiana ao quadrado do código é dada por

$$D^2 = \min_{i \neq j} D_{ij}^2; i, j = 1, 2, \dots, 2^L \quad (\text{II.28})$$

A assunção de ruído Gaussiano e do critério de máxima verossimilhança na decodificação sugere a escolha de códigos que apresentem a maior mínima distância Euclidiana possível.

Seja D^2 a mínima distância Euclidiana ao quadrado de um código que utiliza um conjunto de $M=2^m$ sinais, com uma taxa de codificação $R_c = (m-1)/m$, e D_{ref}^2 a mínima distância Euclidiana ao quadrado entre os $M/2$ sinais de um sistema de referência sem codificação. O Ganho Assintótico, dado por

$$G_A = 10 \log_{10} \left[\frac{D^2}{D_{ref}^2} \right] \text{ dB} \quad (\text{II.29})$$

expressa o ganho obtido com o sistema que utiliza modulação codificada em termos de relação sinal-ruído por bit de informação transmitido quando a probabilidade de erro tende a zero. A dedução da expressão acima é feita no capítulo VIII.

Um segundo critério de interesse é o número médio de vizinhos mais próximos das palavras-código. É conveniente a utilização de códigos em que este parâmetro seja menor possível, por implicar em vantagens no que diz respeito à probabilidade de erro após a decodificação. Relações para o número médio de vizinhos mais próximos das palavras-código são obtidas no capítulo III.

II.4.2 Modulação

De acordo com resultados bem conhecidos [02, 03, 04], escolhendo-se apropriadamente os códigos, pode-se fazer a probabilidade de erro tender a zero exponencialmente com o aumento do comprimento do bloco, para qualquer taxa (bits por intervalo de sinalização) inferior à capacidade do canal sem memória considerado.

Assumindo que a saída do canal assume valores contínuos, ou seja, que não ocorre quantização na etapa de demodulação, a capacidade do canal da Fig. II.1 é dada por [35]

$$C = \max_{Q(m)} \sum_{m=0}^{M-1} Q(m) \int_{-\infty}^{+\infty} p\left(\underline{r}/\underline{c}_m\right) \log_2 \left[\frac{p\left(\underline{r}/\underline{c}_m\right)}{\sum_{i=0}^{M-1} Q(i) p\left(\underline{r}/\underline{c}_i\right)} \right] d\underline{r} \tag{II.30}$$

Da suposição de ruído Gaussiano e aditivo,

$$p\left(\underline{r}/\underline{c}_m\right) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{Q/2}} \exp \left[- \frac{\left| \underline{r} - \underline{c}_m \right|^2}{2\sigma^2} \right] \tag{II.31}$$

onde $\sigma^2 = N_o/2$.

Considerando equiprobabilidade dos sinais na entrada do canal, obtém-se

$$C = \log_2 M - \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} E \left[\log_2 \sum_{i=0}^{M-1} \exp \left(- \frac{\left| \underline{c}_m - \underline{c}_i + \underline{n} \right|^2}{2\sigma^2} \right) \right] \tag{II.32}$$

onde $\underline{n}$ é um vetor

$$\underline{n} = \left(n_1, n_2, \dots, n_Q \right)$$

com n_i Gaussiano de média zero e variância $\sigma^2 = N_o/2$.

Para os diversos conjuntos de sinais avaliados, a estimação da capacidade foi realizada através de técnicas de Monte Carlo [23]. Os resultados são apresentados nos próximos capítulos e servem como critério de comparação entre as constelações adotadas. Além disto, indicam que praticamente quase todo o ganho em termos de capacidade é obtido dobrando-se o número de sinais do sistema de referência e, por consequência, adotando-se a taxa de codificação dada em (II.11) para os sistemas de modulação codificada.

CAPÍTULO III

MODULAÇÃO CODIFICADA DE BLOCO

III.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são tratados aspectos construtivos de uma classe de esquemas de modulação codificada utilizando códigos de bloco. Inicialmente, apresenta-se o mapeamento entre os símbolos do alfabeto de saída do codificador e os sinais da constelação adotada pelo modulador. O processo da construção dos códigos é exposto em seguida, bem como relações que possibilitem a avaliação dos códigos projetados.

III.2. O MAPEAMENTO ENTRE SÍMBOLOS DE SAÍDA DO CODIFICADOR E OS SINAIS DA CONSTELAÇÃO

A etapa inicial no projeto dos esquemas de modulação codificada apresentados é o estabelecimento de uma relação entre os símbolos de saída do codificador e os sinais da constelação considerada.

Conforme foi observado no Cap. II, os M símbolos do alfabeto A de saída do codificador podem ser representados distintamente em m bits, pois é suposto M da forma $M=2^m$.

A relação entre os símbolos, ou m -uplas binárias, do alfabeto A e os sinais da constelação segue os princípios do mapeamento por partição de conjuntos (MPC) proposto por Ungerboeck [07].

Basicamente, o MPC é realizado da seguinte maneira. Seja Δ_o a mínima distância Euclidiana entre os sinais da constelação, ou seja,

$$\Delta_o = \min_{i \neq j} |c_i - c_j| \tag{III.1}$$

onde c_i , $i = 0, 1, \dots, M-1$, pertence ao conjunto de sinais

$$C = \{c_o, c_1, \dots, c_{M-1}\} \tag{III.2}$$

e terá, após o MPC, uma representação binária

$$\underline{b}^{(i)} = \left[b_o^{(i)}, b_1^{(i)}, \dots, b_{m-1}^{(i)} \right] \tag{III.3}$$

Inicialmente, divide-se o conjunto em dois subconjuntos com estruturas espaciais idênticas, tais que a distância Euclidiana mínima entre os sinais de cada subconjunto, Δ_1 , seja maior ou igual a Δ_0 . Aos sinais de um subconjunto atribui-se $b_0^{(1)} = 0$ e aos sinais do segundo subconjunto, $b_0^{(1)} = 1$. A possibilidade de igualdade entre Δ_0 e Δ_1 é levada em consideração para viabilizar o tratamento de alguns esquemas com mais de duas dimensões.

O processo acima é repetido m vezes, ou seja, cada subconjunto gerado dá origem a outros dois novos subconjuntos com as mesmas restrições indicadas anteriormente. Também, a representação binária é atribuída de maneira análoga.

Ao final, cada sinal do conjunto C terá a si associado um vetor binário de dimensão m , relacionado com um dos símbolos do alfabeto A .

Seja $C^{(i,j)}$ o subconjunto dos sinais que apresentam nas $(i+1)$ primeiras posições dos vetores binários a si associados a representação de j na base 2, ou seja, tais que

$$\sum_{k=0}^i 2^k b_k^{(r)} = j \tag{III.4}$$

Este subconjunto apresenta 2^{m-i-1} sinais.

Sejam $\underline{c} \in C$, o sinal associado ao vetor binário

$$\underline{b}^{(r)} = \left[b_0^{(r)}, b_1^{(r)}, \dots, b_{m-1}^{(r)} \right] \tag{III.5}$$

e $\underline{c}_s \in C$, correspondente a

$$\underline{b}^{(s)} = \left[b_0^{(s)}, b_1^{(s)}, \dots, b_{m-1}^{(s)} \right] \tag{III.6}$$

onde

$$b_k^{(r)} = b_k^{(s)} \quad \text{para } 0 \leq k < k' \tag{III.7}$$

As seguintes condições, úteis à formulação de parâmetros relatados no decorrer do trabalho, são verificadas para as constelações regulares consideradas.

$$\underline{C_1} \quad c_r \text{ e } c_s \in C^{(k', j)}$$

onde

$$j = \sum_{l=0}^{k'} 2^l b_l^{(r)} = \sum_{l=0}^{k'} 2^l b_l^{(s)}$$

$$\underline{C_2} \quad \Delta_{k', +1} = \min_{r \neq s} |c_r - c_s| \quad ; \quad c_r, c_s \in C^{(k', j)} ; \quad \forall j ; \quad \forall k'$$

$$\begin{aligned} \underline{C_3} \quad & \text{Se} \quad b_{k''}^{(r)} \neq b_{k''}^{(s)} \quad \text{para algum } k'' \\ & \text{e} \quad b_k^{(r)} = b_k^{(s)} \quad \text{para } k \neq k'' \\ & \text{então} \quad D_{rs}^2 = |c_r - c_s|^2 = \Delta_{k''}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{C_4} \quad & \text{Se} \quad b_{k''}^{(r)} \neq b_{k''}^{(s)} \quad \text{para algum } k'' \\ & \text{e} \quad b_k^{(r)} = b_k^{(s)} \quad \text{para } k < k'' \\ & \text{então} \quad D_{rs}^2 = |c_r - c_s|^2 \geq \Delta_{k''}^2 \end{aligned}$$

$$\underline{C_5} \quad \Delta_0 \leq \Delta_1 \leq \dots \leq \Delta_{m-1}$$

Um exemplo do MPC é exposto na Fig. III.1.

Definido o mapeamento entre as m-uplas do alfabeto A e os sinais do conjunto C, alguns parâmetros, utilizados na seção III.4, são introduzidos.

Seja c_r um sinal da constelação com a representação binária

$$\underline{b}^{(r)} = [b_0^{(r)}, b_1^{(r)}, \dots, b_{m-1}^{(r)}].$$

Define-se $E_i^{(r)}$ como o número de sinais pertencentes a C com representações binárias tais que

$$\begin{cases} b_k^{(j)} = b_k^{(r)} & , k=0, 1, \dots, i-1 \quad , \text{ se } i > 0 \\ b_i^{(j)} \neq b_i^{(r)} \end{cases}$$

(III.8)

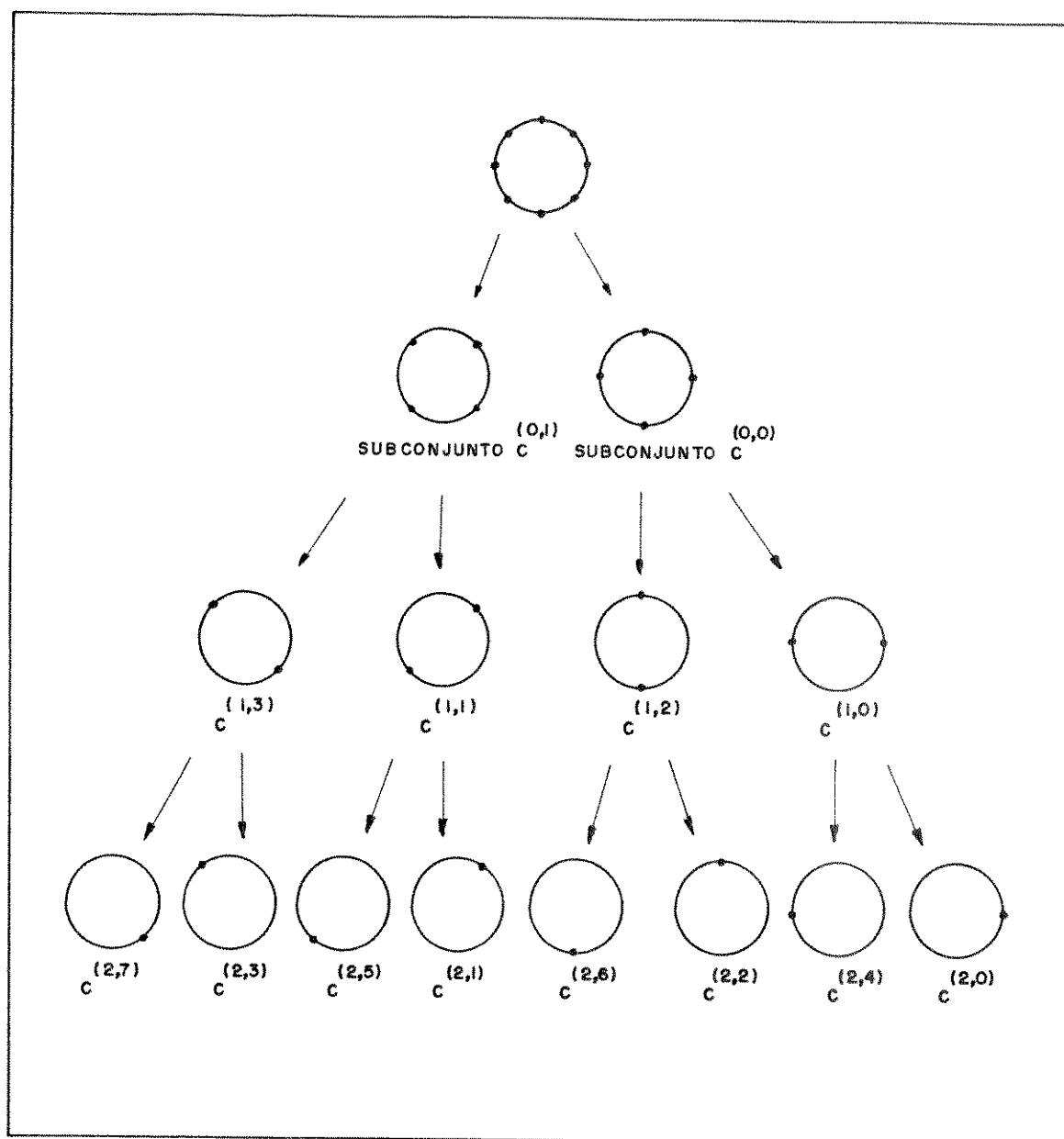


Figura III. 1 - MPC da Constelação 8 - PS K

e que satisfazem

$$D_{jr}^2 = \left| \underline{c}_j - \underline{c}_r \right|^2 = \Delta_i^2 \quad (\text{III.9})$$

Define-se

$$E_i = \begin{cases} \max_{0 \leq r \leq M-1} E_i^{(r)}, & i = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

Para exemplificar, considerando a constelação da Fig. III.1, obtêm-se $E_0=2$, $E_1=2$ e $E_2=1$.

III.3 UMA CLASSE DE CÓDIGOS DE BLOCO PARA MODULAÇÃO CODIFICADA

Sayegh [30] propôs uma classe de códigos para modulação codificada construídos a partir de códigos de bloco binários, generalizando um trabalho de Cusack [12], que considerou conjuntos de sinais do tipo QAM e códigos de Reed-Muller, e utilizando o processo de construção multi-linha introduzido por Imai/Hirakawa [18].

Em seu estudo, Sayegh apresentou um esquema simplificado e sub-ótimo para decodificação destes códigos. Este tema será tratado com detalhes no capítulo VII. Por ora será exposto o processo de construção destes códigos para modulação codificada.

Seja V uma matriz $m \times N$, onde m é o logaritmo na base 2 do número de sinais e N o comprimento das palavras do código,

$$V = \begin{bmatrix} v_{0,0} & v_{0,1} & \dots & v_{0,N-1} \\ v_{1,0} & v_{1,1} & \dots & v_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{m-1,0} & v_{m-1,1} & \dots & v_{m-1,N-1} \end{bmatrix} \quad (\text{III.11})$$

A cada linha i de V , $i=0,1,\dots, m-1$, é atribuída uma palavra-código de um código de bloco binário $B_i(N, K_i, d_i)$, onde K_i é o número de bits de informação deste código e d_i , sua distância mínima de Hamming.

Cada coluna j de V , $j=0,1,\dots,N-1$, é associada a um símbolo do alfabeto A com representação vetorial $\{v_{0,j}, v_{1,j}, \dots, v_{m-1,j}\}$, obtendo-se, então, uma palavra-código

$$\underline{X} = \{X_0, X_1, \dots, X_{N-1}\}, X_i \in A \quad (\text{III.12})$$

Finalmente, é enviado o bloco de sinais

$$\underline{s} = \{s_0, s_1, \dots, s_{N-1}\} \quad (\text{III.13})$$

onde s_j , $j=0,1,\dots,N-1$, pertence ao conjunto de sinais C e tem a si associada a representação binária $\{v_{0,j}, v_{1,j}, \dots, v_{m-1,j}\}$, de acordo com o mapeamento definido na sessão anterior.

O número de bits de entrada do codificador, por bloco, é

$$L = \sum_{i=0}^{m-1} K_i \quad (\text{III.14})$$

Se R_c é a taxa de codificação, tem-se

$$\sum_{i=0}^{m-1} K_i = mNR_c \quad (\text{III.15})$$

Como considerar-se-á somente códigos de taxa

$$R_c = \frac{m-1}{m} \quad (\text{III.16})$$

obtem-se

$$\sum_{i=0}^{m-1} K_i = (m-1)N \quad (\text{III.17})$$

III.4. RELAÇÕES PARA A DISTÂNCIA EUCLIDIANA MÍNIMA E O NÚMERO DE VIZINHOS MAIS PRÓXIMOS

Nesta seção, apresenta-se uma expressão para a mínima distância Euclidiana ao quadrado, D^2 , dos códigos apresentados na prévia seção, bem como limitantes para o número de vizinhos mais próximos das palavras-código. Estes parâmetros são utilizados como critérios para avaliação de códigos e utilizados no desenvolvimento de relações para a probabilidade de erro, no Cap. VIII.

Teorema 1 A mínima distância Euclidiana ao quadrado de um código pertencente à classe exposta na seção III.3, utilizando um alfabeto M -ário e construído a partir de códigos binários de bloco $B_0, B_1, \dots$,

Teorema 1 A mínima distância Euclidiana ao quadrado de um código pertencente à classe exposta na seção III.3, utilizando um alfabeto M-ário e construído a partir de códigos binários de bloco $B_0, B_1, \dots, B_{m-1}$, com distâncias mínimas de Hamming $d_0, d_1, \dots, d_{m-1}$, respectivamente, é dada por

$$D^2 = \min \left\{ \Delta_0^2 d_0, \Delta_1^2 d_1, \dots, \Delta_{m-1}^2 d_{m-1} \right\} \quad (\text{III.18})$$

onde Δ_i , $i=0,1,\dots,m-1$, depende da constelação de M sinais escolhida.

Prova Seja $D^2 = \Delta_{i_1}^2 d_{i_1} = \Delta_{i_2}^2 d_{i_2} = \dots = \Delta_{i_p}^2 d_{i_p}$ (III.19)

onde $i_1, i_2, \dots, i_p \in \{0,1,\dots,m-1\}$.

Observa-se que, como $\Delta_0^2 \leq \Delta_1^2 \leq \dots \leq \Delta_{m-1}^2$, então, para os bons códigos, $d_0 \geq d_1 \geq \dots \geq d_{m-1}$.

Seja $\underline{x}^{(r)}$ uma palavra-código de referência, associada ao vetor de sinais

$$\underline{s}^{(r)} = \left[s_0^{(r)}, s_1^{(r)}, \dots, s_{N-1}^{(r)} \right] \quad (\text{III.20})$$

e à matriz-código

$$V^{(r)} = \begin{bmatrix} v_{0,0}^{(r)} & \dots & v_{0,N-1}^{(r)} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{m-1,0}^{(r)} & \dots & v_{m-1,N-1}^{(r)} \end{bmatrix} \quad (\text{III.21})$$

Feitas estas suposições, a prova será dada em duas etapas.

(1) Seja a matriz-código, associada à palavra-código $\underline{x}^{(s)}$,

$$V^{(s)} = \begin{bmatrix} v_{0,0}^{(r)} & \dots & v_{0,N-1}^{(r)} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{j,0}^{(r)} + z_0 & \dots & v_{j,N-1}^{(r)} + z_{N-1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{m-1,0}^{(r)} & \dots & v_{m-1,N-1}^{(r)} \end{bmatrix} \quad (\text{III.22})$$

onde $(z_0, z_1, \dots, z_{N-1})$ é uma palavra-código de B_j com peso de Hamming d_j e j é uma linha qualquer do conjunto de linhas $\{i_1, i_2, \dots, i_p\}$.

De acordo com a condição, C 3, apresentada na seção III.2,

$$D_{rs}^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \left| \underline{s}_i^{(r)} - \underline{s}_i^{(s)} \right|^2 = d_j \Delta_j^2 = D^2 \quad (\text{III.23})$$

Portanto, há pelo menos uma palavra-código que dista D de $\underline{x}^{(r)}$.

(2) Seja a matriz-código, associada à palavra-código $\underline{x}^{(s)}$,

$$V^{(s)} = \begin{bmatrix} v_{0,0}^{(r)} & \dots & v_{0,N-1}^{(r)} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{j-1,0}^{(r)} & \dots & v_{j-1,N-1}^{(r)} \\ v_{j,0}^{(r)} + z_{j,0} & \dots & v_{j,N-1}^{(r)} + z_{j,N-1} \\ v_{j+1,0}^{(r)} + z_{j+1,0} & \dots & v_{j+1,N-1}^{(r)} + z_{j+1,N-1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{m-1,0}^{(r)} + z_{m-1,0} & \dots & v_{m-1,N-1}^{(r)} + z_{m-1,N-1} \end{bmatrix} \quad (\text{III.24})$$

onde $(z_{i,0}, z_{i,1}, \dots, z_{i,N-1})$ é uma palavra-código qualquer do código B_i , $i=j, j+1, \dots, m-1$, e j indica uma linha qualquer.

Se j pertence ao conjunto $\{i_1, i_2, \dots, i_p\}$, de acordo com a condição C 4, indicada na seção III.2,

$$D_{rs}^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \left| \underline{s}_i^{(r)} - \underline{s}_i^{(s)} \right|^2 \geq D^2 \quad (\text{III.25})$$

Caso j não pertença àquele conjunto,

$$D_{rs}^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \left| \underline{s}_i^{(r)} - \underline{s}_i^{(s)} \right|^2 \geq d_j \Delta_j^2 > D^2 \quad (\text{III.26})$$

Portanto, nenhuma palavra-código dista de $\underline{x}^{(r)}$ menos que D .

que maximiza(m)

$$D^2 = \min \left[\Delta_{0 K_0}^2 W_{K_0}^{(N)}, \Delta_{1 K_1}^2 W_{K_1}^{(N)}, \dots, \Delta_{m-1 K_{m-1}}^2 W_{K_{m-1}}^{(N)} \right] \quad (\text{III.33})$$

com a restrição

$$\sum_{i=0}^{m-1} K_i = (m-1)N \quad (\text{III.34})$$

Observa-se que, como

$$\Delta_0 \leq \Delta_1 \leq \dots \leq \Delta_{m-1} \quad (\text{III.35})$$

a busca pode ser restringida aos conjuntos que satisfaçam

$$K_0 \leq K_1 \leq \dots \leq K_{m-1} \quad (\text{III.36})$$

O problema de otimização pode ser resolvido por busca exaustiva com reduzido esforço computacional para os comprimentos de código e contelações tratados.

APÊNDICE III.1

Nas tabelas III.1 a III.3 são apresentados parâmetros dos códigos de bloco lineares e binários considerados na otimização dos esquemas de modulação codificada de bloco definidos neste capítulo. As fontes de referência utilizadas foram MacWilliams/Sloane [20] e Verhoeff [36]. O dado de saída das tabelas é a distância mínima de Hamming do código com parâmetros (N,K).

$N \backslash K$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	2	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	3	2	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4	4	2	2	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5	5	3	2	2	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6	6	4	3	2	2	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	7	4	4	3	2	2	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
8	8	5	4	4	2	2	2	1	—	—	—	—	—	—	—	—
9	9	6	4	4	3	2	2	2	1	—	—	—	—	—	—	—
10	10	6	4	4	4	3	2	2	2	1	—	—	—	—	—	—
11	11	7	5	4	4	4	3	2	2	2	1	—	—	—	—	—
12	12	8	6	5	4	4	4	3	2	2	2	1	—	—	—	—
13	13	8	7	6	5	4	4	4	3	2	2	2	1	—	—	—
14	14	9	8	7	6	5	4	4	4	3	2	2	2	1	—	—
15	15	10	8	8	7	6	5	4	4	4	3	2	2	2	1	—
16	16	10	8	8	8	6	6	4	4	4	4	2	2	2	2	1

Tabela III.1 - $N \leq 16$

$\begin{smallmatrix} K \\ N \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
17	17	11	8	8	8	7	6	5	4	4	4	3	2	2	2	2
18	18	12	8	8	8	8	7	6	5	4	4	4	3	2	2	2
19	19	12	9	8	8	8	8	7	6	5	4	4	4	3	2	2
20	20	13	11	9	8	8	8	8	7	6	5	4	4	4	3	2
21	21	14	12	10	9	8	8	8	8	7	6	5	4	4	4	3
22	22	14	12	10	10	9	8	8	8	8	7	6	5	4	4	4
23	23	15	12	11	10	10	9	8	8	8	8	7	6	5	4	4
24	24	16	13	12	11	10	10	8	8	8	8	8	6	6	4	4
25	25	16	14	12	12	11	10	9	8	8	8	8	6	6	5	4
26	26	17	14	12	12	12	11	10	9	8	8	8	7	6	6	5
27	27	18	15	13	12	12	12	10	10	8	8	8	8	7	6	6
28	28	18	16	14	13	12	12	11	10	9	8	8	8	8	6	6
29	29	19	16	15	14	13	12	12	11	10	9	8	8	8	7	6
30	30	20	16	16	15	14	12	12	12	11	10	9	8	8	8	7
31	31	20	17	16	16	15	13	12	12	12	11	10	8	8	8	8
32	32	21	18	16	16	16	14	12	12	12	12	10	8	8	8	8

Tabela III.2 - $17 \leq N \leq 32; K \leq 16$

N \ K	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
17	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
18	2	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
19	2	2	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
20	2	2	2	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
21	2	2	2	2	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
22	3	2	2	2	2	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
23	4	3	2	2	2	2	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
24	4	4	3	2	2	2	2	1	—	—	—	—	—	—	—	—
25	4	4	4	3	2	2	2	2	1	—	—	—	—	—	—	—
26	4	4	4	4	3	2	2	2	2	1	—	—	—	—	—	—
27	5	4	4	4	4	3	2	2	2	2	1	—	—	—	—	—
28	6	5	4	4	4	4	3	2	2	2	2	1	—	—	—	—
29	6	6	5	4	4	4	4	3	2	2	2	2	1	—	—	—
30	6	6	6	5	4	4	4	4	3	2	2	2	2	1	—	—
31	6	6	6	6	5	4	4	4	4	3	2	2	2	2	1	—
32	7	6	6	6	6	5	4	4	4	4	2	2	2	2	2	1

Tabela III.3 - $17 \leq N, K \leq 32$

CAPÍTULO IV

ESQUEMAS TÍPICOS

IV.1. INTRODUÇÃO

A classe de códigos para modulação codificada definida no capítulo anterior é, a seguir, aplicada a constelações típicas em até 4 dimensões. Para os diversos espaços de sinais tratados são apresentadas curvas de capacidade de canal versus relação sinal-ruído.

As características espectrais destes esquemas de modulação codificada são discutidas no capítulo V. Em geral, o processo de codificação conserva a faixa de transmissão do sistema de referência. Nos casos em 3 e 4 dimensões que combinam modulações FSK e PSK, e utilizam sistemas do tipo PSK como referência, pode ocorrer expansão ou redução de faixa, dependendo do critério de ocupação adotado [39].

Os códigos relacionados foram obtidos através de procura exaustiva, de acordo com o critério de otimização indicado na seção III.5.

IV.2. ESQUEMAS EM 1 DIMENSÃO

Na categoria de esquemas em 1 dimensão serão consideradas constelações M-PAM, onde M é a forma $M=2^m$. Os M sinais são dados por

$$c_i(t) = (2i+1-M)A, \quad 0 \leq t < T, \quad i=0,1,\dots,M-1 \tag{IV.1}$$

onde A é uma constante.

A função ortogonal adotada é

$$\phi(t) = 1/\sqrt{T}, \quad 0 \leq t < T \tag{IV.2}$$

de modo que obtêm-se os vetores de coeficientes normalizados referentes aos M sinais

$$c_i = c_i = (2i+1-M) \sqrt{3/(M^2-1)}, \quad i=0,1,\dots,M-1 \tag{IV.3}$$

As constelações 4-PAM, 8-PAM e 16-PAM são apresentadas nas figuras IV.1, IV.2 e IV.3, respectivamente. Aos sinais são atribuídas representações binárias em consonância com o mapeamento por partição de conjuntos descrito na seção III.2.

A tabela IV.1 relaciona dados de cada constelação que são utilizados na determinação de parâmetros dos sistemas de modulação codificada expostos na tabela IV.2. Estes parâmetros são a mínima distância Euclidiana ao quadrado, dada por

$$D^2 = \min \left\{ \Delta_0^2 d_0, \Delta_1^2 d_1, \dots, \Delta_{m-1}^2 d_{m-1} \right\} \tag{IV.4}$$

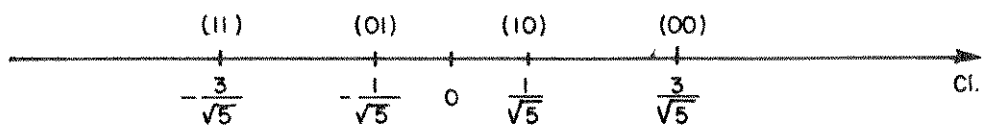


FIG. IV. 1 — CONSTELAÇÃO 4-PAM

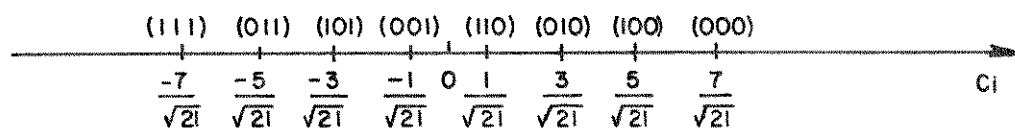


FIG. IV. 2 — CONSTELAÇÃO 8-PAM.

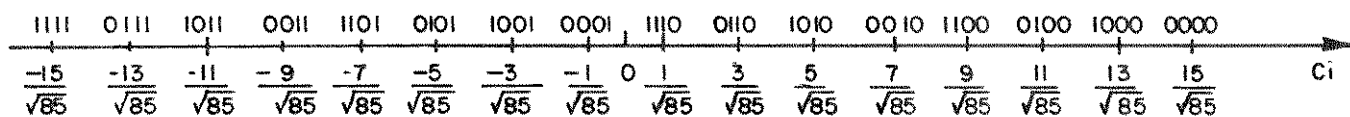


FIG. IV. 3 — CONSTELAÇÃO 16-PAM

SISTEMA	SISTEMA DE REFERÊNCIA	D_{ref}^2	Δ_0^2	Δ_1^2	Δ_2^2	Δ_3^2	$E(0)$	$E(1)$	$E(2)$	$E(3)$
4-PAM	2-PAM	4	$\frac{4}{5}$	$\frac{16}{5}$	—	—	2	1	—	—
8-PAM	4-PAM	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{16}{21}$	$\frac{64}{21}$	—	2	2	1	—
16-PAM	8-PAM	$\frac{4}{21}$	$\frac{4}{85}$	$\frac{16}{85}$	$\frac{64}{85}$	$\frac{256}{85}$	2	2	2	1

TABELA IV. 1

SIST./SIST. REF.	R_c	D^2	D^2/D_{ref}^2	m	$\sum_{i=0}^{m-1} K_i$
4-PAM/2-PAM	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5} \times \min [d_0, 4d_1]$	$\frac{\min [d_0, 4d_1]}{5}$	2	N
8-PAM/4-PAM	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{21} \times \min [d_0, 4d_1, 16d_2]$	$\frac{\min [d_0, 4d_1, 16d_2]}{(21/5)}$	3	2N
16-PAM/8-PAM	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{85} \times \min [d_0, 4d_1, 16d_2, 64d_3]$	$\frac{\min [d_0, 4d_1, 16d_2, 64d_3]}{(85/21)}$	4	3N

TABELA IV. 2

e a razão D^2/D_{ref}^2 , relacionada com o Ganho Assintótico

$$G_A = 10 \log_{10} \left[D^2/D_{ref}^2 \right] \text{ dB} \tag{IV.5}$$

conforme a expressão (II.29).

Os códigos obtidos através de busca exaustiva para os três esquemas considerados são relacionados nas tabelas IV.3, IV.4 e IV.5. Para os valores do comprimento do código N não citados, o mesmo Ganho Assintótico é obtido com um código de menor comprimento.

IV.3. ESQUEMAS EM 2 DIMENSÕES

As constelações bidimensionais tratadas são do tipo M-PSK e M-QAM. Para os dois casos, as funções ortonormais assumidas são

$$\varphi_1(t) = \sqrt{2/T} \cos w_c t \quad , \quad 0 \leq t < T \tag{IV.6}$$

$$\varphi_2(t) = -\sqrt{2/T} \sin w_c t \quad , \quad 0 \leq t < T \tag{IV.7}$$

onde $w_c = 2\pi k/T$ para k inteiro.

Os M sinais dos esquemas M-PSK são da forma

$$c_i(t) = A \cos \left(w_c t + 2\pi i/M + \theta \right) \quad , \quad 0 \leq t < T \tag{IV.8}$$

onde θ é uma fase inicial que, por motivo de simplificação e sem perda de generalidade, é considerada igual a zero.

Consequentemente, os vetores de coeficientes normalizados obtidos são

$$\underline{c}_i = \left(\cos 2\pi i/M , \sin 2\pi i/M \right) \quad , \quad i=0,1,\dots, M-1 \tag{IV.9}$$

Para os sinais das costelações M-QAM, têm-se

$$c_i(t) = A_i \cos w_c t + B_i \sin w_c t \quad , \quad 0 \leq t < T \tag{IV.10}$$

Os vetores de coeficientes normalizados são expressos por

$$\underline{c}_i = \left(A_i/S , B_i/S \right) \quad , \quad i = 0,1,\dots,M-1 \tag{IV.11}$$

onde

$$S = \left[\frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \left(A_i^2 + B_i^2 \right) \right]^{1/2} \tag{IV.12}$$

N	K_0	K_1	d_0	d_1	D^2	G_a (dB)
8	1	7	8	2	6,4	2,04
21	5	16	9	3	7,2	2,55
22	5	17	10	3	8,0	3,01
24	5	19	11	3	8,8	3,42
25	5	20	12	3	9,6	3,80
29	6	23	13	4	10,4	4,15
30	6	24	14	4	11,2	4,47
31	6	25	15	4	12,0	4,77
32	6	26	16	4	12,8	5,05

TABELA IV.3 - 4-PAM ; $R_c=1/2$

SISTEMA DE REF.: 2-PAM

N	K_0	K_1	K_2	d_0	d_1	d_2	D^2	G_a (dB)
8	1	7	8	8	2	1	1,52	2,80
21	5	16	21	9	3	1	1,71	3,31
22	5	17	22	10	3	1	1,90	3,77
24	5	19	24	11	3	1	2,10	4,18
25	5	20	25	12	3	1	2,29	4,56
29	6	23	29	13	4	1	2,48	4,91
30	6	24	30	14	4	1	2,67	5,23
31	6	25	31	15	4	1	2,86	5,53
32	6	26	32	16	4	1	3,05	5,81

TABELA IV.4 - 8-PAM ; $R_c=2/3$

SISTEMA DE REF.: 4-PAM

N	K ₀	K ₁	K ₂	K ₃	d ₀	d ₁	d ₂	d ₃	D ²	G _a (dB)
8	1	7	8	8	8	2	1	1	0,38	2,96
21	5	16	21	20	9	3	1	1	0,42	3,47
22	5	17	22	21	10	3	1	1	0,47	3,93
24	5	19	24	23	11	3	1	1	0,52	4,34
25	5	20	25	24	12	3	1	1	0,56	4,72
29	6	23	29	29	13	4	1	1	0,61	5,07
30	6	24	30	30	14	4	1	1	0,66	5,39
31	6	25	31	31	15	4	1	1	0,71	5,69
32	6	26	32	32	16	4	1	1	0,75	5,97

TABELA IV.5 - 16-PAM ; Rc=3/4

SISTEMA DE REF.: 8-PAM

As constelações M-PSK e M-QAM consideradas são expostas nas figuras IV.4 a IV.10, juntamente com os mapeamentos binários correspondentes.

Nas tabelas IV.6 a IV.9 são listados parâmetros referentes aos esquemas de modulação codificada discutidos. As tabelas IV.10 a IV.16 apresentam os códigos obtidos.

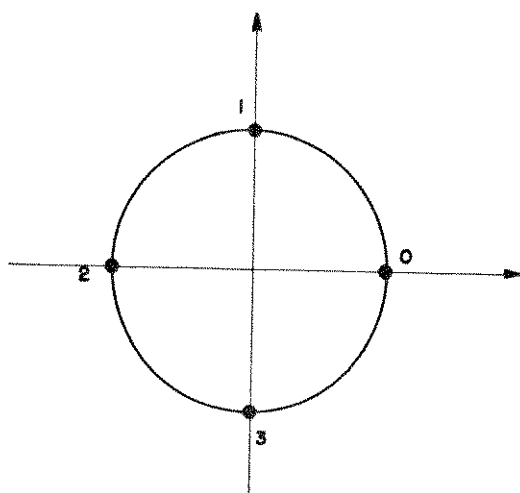


Figura IV.4 - Constelação 4-PSK

Obs: O valor associado a cada sinal
significa a representação decimal do
seu código binário

$$(b_0^{(r)}, b_1^{(r)}, \dots, b_{m-1}^{(r)}), \text{ ou seja, } \sum_{i=0}^{m-1} b_i^{(r)} \times z^i$$

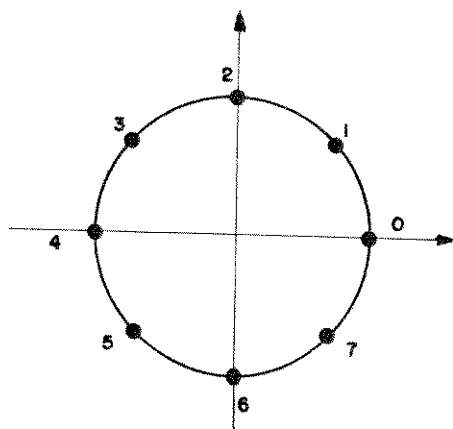


Figura IV.5 - Constelação 8-PSK

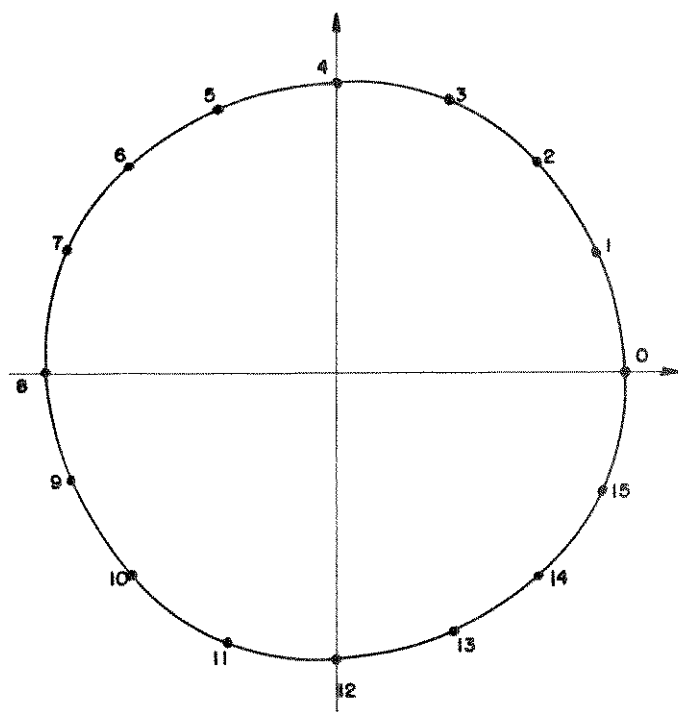


Figura IV.6 - Constelação 16-PSK

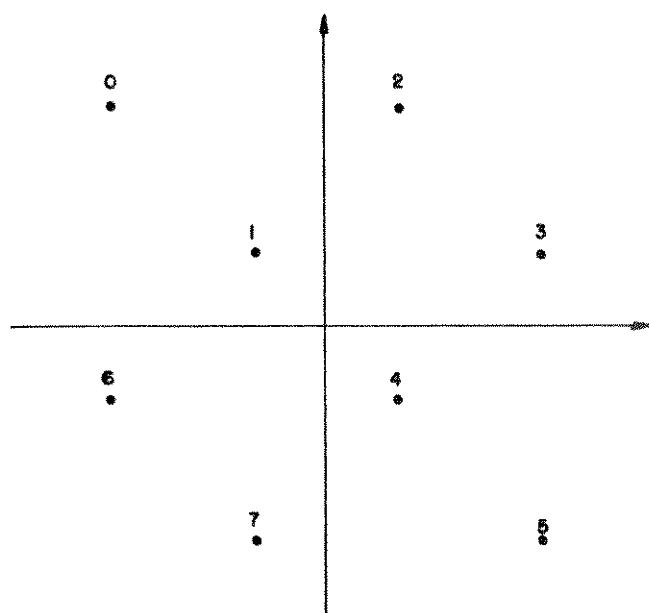


Figura IV.7 - Constelação 8 - QAM

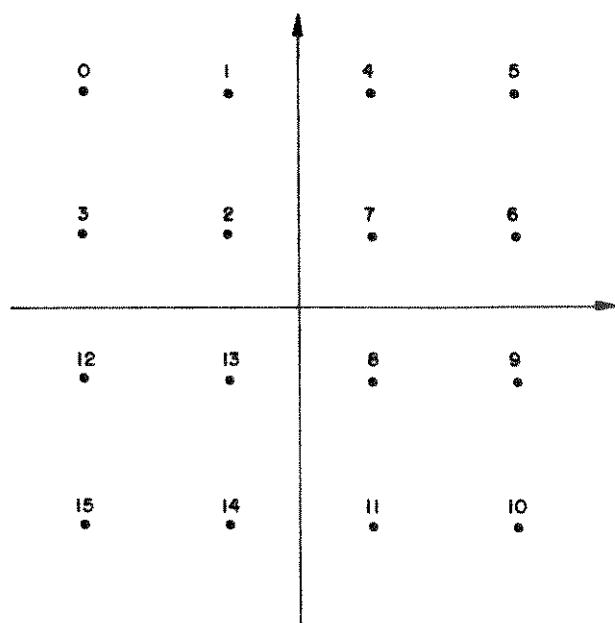


Figura IV.8 - Constelação 16 - QAM

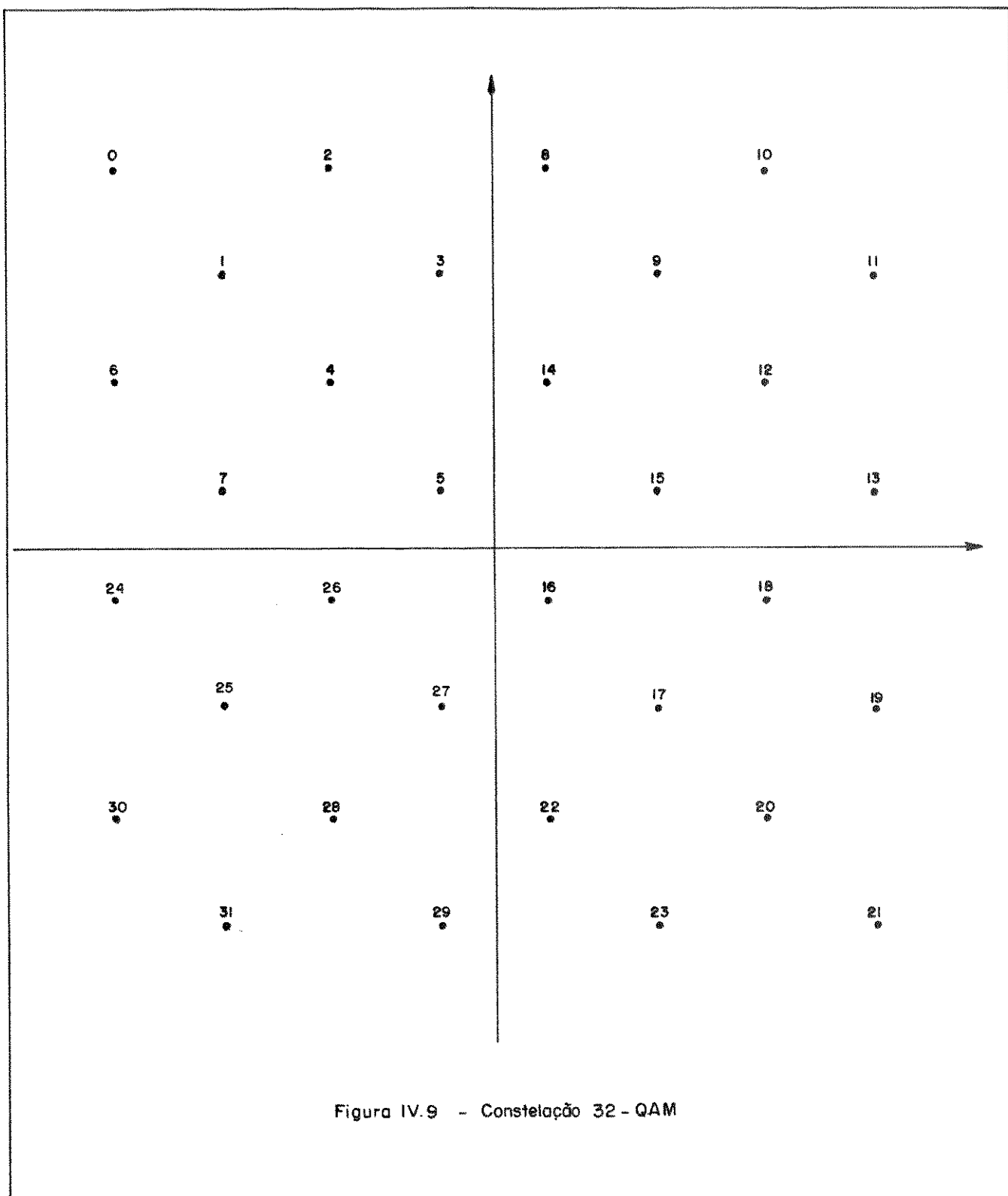


Figura IV.9 - Constelação 32 - QAM

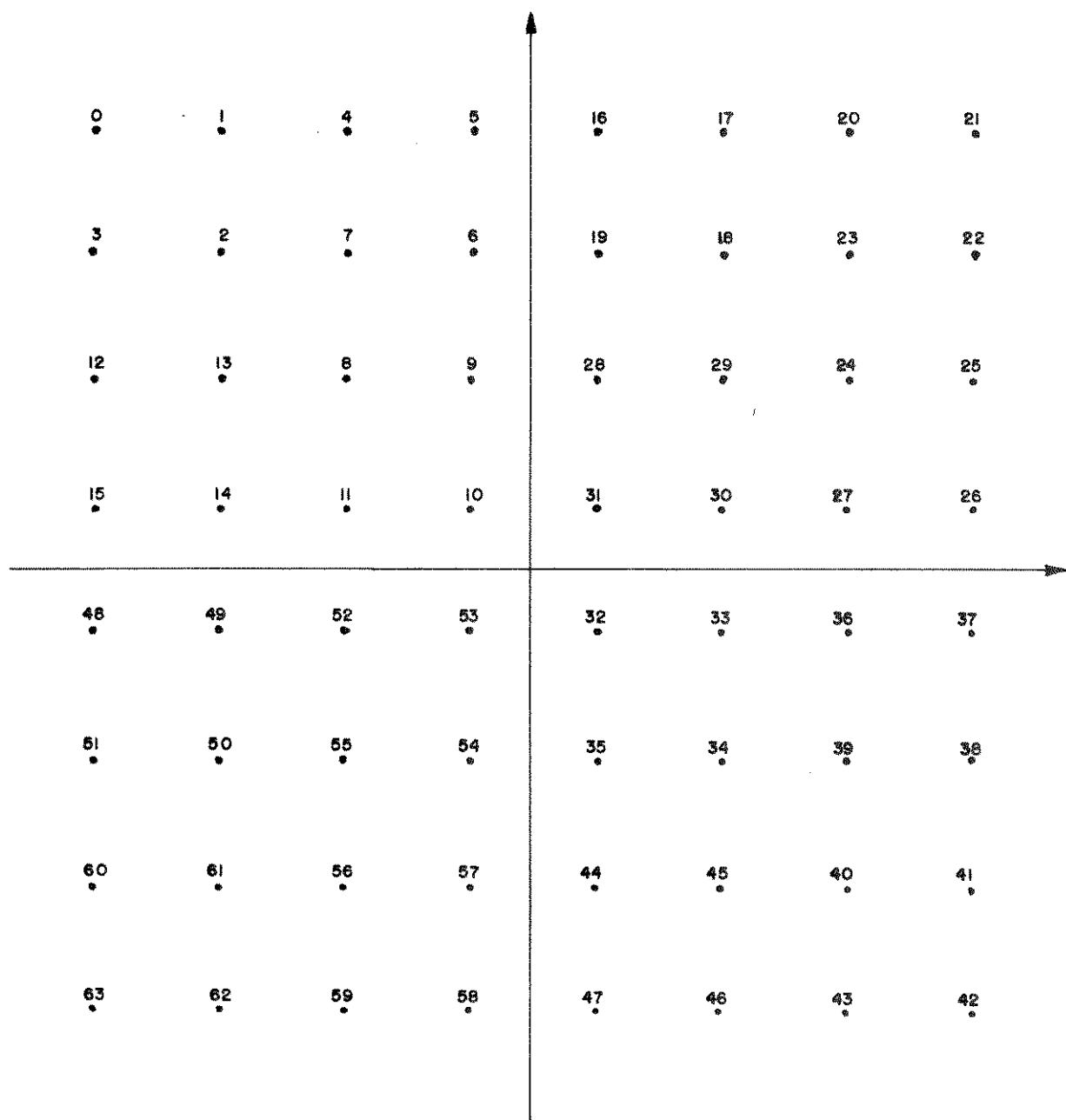


Figura IV. 10 - Constelação 64-QAM

Sistema	Sistema de Referência	D_{ref}^2	Δ_0^2	Δ_1^2	Δ_2^2	Δ_3^2	E(0)	E(1)	E(2)	E(3)
4-PSK	2-PSK	4	2	4	—	—	2	1	—	—
8-PSK	4-PSK	2	0,586	2	4	—	2	2	1	—
16-PSK	8-PSK	0,586	0,152	0,586	2	4	2	2	2	1

TABELA IV.6 - M-PSK

Sistema	Sistema de Referência	D_{ref}^2	Δ_0^2	Δ_1^2	Δ_2^2	Δ_3^2	Δ_4^2	Δ_5^2	E(0)	E(1)	E(2)	E(3)	E(4)	E(5)
8-QAM	4-PSK	2	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{16}{5}$	—	—	—	4	2	1	—	—	—
16-QAM	8-QAM	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{16}{5}$	—	—	4	4	2	1	—	—
32-QAM	16-QAM	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{16}{21}$	$\frac{32}{21}$	$\frac{64}{21}$	—	4	4	4	2	1	—
64-QAM	32-QAM	$\frac{4}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{16}{21}$	$\frac{32}{21}$	$\frac{64}{21}$	4	4	4	4	2	1

TABELA IV.7 - M-QAM

sifr/sifr. ref.	R_c	D^2	m	$\sum_{i=0}^{m-1} k_i$
4-PSK/2-PSK	$\frac{1}{2}$	$2 \times \min(d_0, 2d_1)$	2	N
8-PSK/4-PSK	$\frac{2}{3}$	$\min(0,586 d_0, 2d_1, 4d_2)$	3	2N
16-PSK/8-PSK	$\frac{3}{4}$	$\min(0,293 d_0, 0,586 d_1, 2d_2, 4d_3)$	4	3N

Tabela IV.8 - M-PSK

sist/sist ref.	R_c	D^2	m	$\sum_{i=0}^{m-1} k_i$
8-QAM/4-PSK	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5} \min(d_0, 2d_1, 4d_2)$	3	2N
16-QAM/8-QAM	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{5} \min(d_0, 2d_1, 4d_2, 8d_3)$	4	3N
32-QAM/16-QAM	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{21} \min(d_0, 2d_1, 4d_2, 8d_3, 16d_4)$	5	4N
64-QAM/32-QAM	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{21} \min(d_0, 2d_1, 4d_2, 8d_3, 16d_4, 32d_5)$	6	5N

Tabela IV.9 - M-QAM

N	K ₀	K ₁	d ₀	d ₁	D ²	G _a (dB)
4	1	3	4	2	8	3,01
12	4	8	5	3	10	3,98
13	4	9	6	3	12	4,77
15	5	10	7	4	14	5,44
16	5	11	8	4	16	6,02
28	10	18	9	5	18	6,53
29	10	19	10	5	20	6,99
31	11	20	11	6	22	7,40
32	11	21	12	6	24	7,78

TABELA IV.10 - 4-PSK $R_c = \frac{1}{2}$

SISTEMA DE REF: 2-PSK

N	K_0	K_1	K_2	d_0	d_1	d_2	D^2	G_a (dB)
6	1	5	6	6	2	1	3,51	2,45
7	1	6	7	7	2	1	4,00	3,01
18	6	13	17	8	3	2	4,69	3,70
22	6	17	21	9	3	2	5,27	4,21
23	6	18	22	10	3	2	5,86	4,67
25	6	20	24	11	3	2	6,00	4,77
26	7	20	25	11	4	2	6,44	5,08
27	7	21	26	12	4	2	7,03	5,46
31	7	25	30	13	4	2	7,62	5,81
32	7	26	31	14	4	2	8,00	6,02

TABELA IV.11 - 8-PSK $R_c = \frac{2}{3}$

SISTEMA DE REF.: 4-PSK

N	K ₀	K ₁	K ₂	K ₃	d ₀	d ₁	d ₂	d ₃	D ²	G _a (dB)
7	1	6	7	7	7	2	1	1	1,07	2,60
8	1	7	8	8	8	2	1	1	1,17	3,01
15	4	11	15	15	8	3	1	1	1,22	3,18
21	5	16	21	21	9	3	1	1	1,37	3,69
22	5	17	22	22	10	3	1	1	1,52	4,15
24	5	19	24	24	11	3	1	1	1,67	4,56
25	5	20	25	25	12	3	1	1	1,76	4,77
26	6	20	26	26	12	4	1	1	1,83	4,94
29	6	23	29	29	13	4	1	1	1,98	5,29
30	6	24	30	30	14	4	1	1	2,00	5,33
32	7	26	31	32	14	4	2	1	2,13	5,60

TABELA IV.12 - 16-PSK $R_c = \frac{3}{4}$

... SISTEMA DE REF: 8-PSK

N	K ₀	K ₁	K ₂	d ₀	d ₁	d ₂	D ²	G _a (dB)
4	1	3	4	4	2	1	3,2	2,04
13	5	9	12	5	3	2	4,0	3,01
14	5	10	13	6	3	2	4,8	3,80
18	7	12	17	7	4	2	5,6	4,47
19	7	13	18	8	4	2	6,4	5,05

TABELA IV.13 - 8-QAM $R_c = \frac{2}{3}$

SISTEMA DE REF.: 4-PSK

N	K ₀	K ₁	K ₂	K ₃	d ₀	d ₁	d ₂	d ₃	D ²	G _a (dB)
4	1	3	4	4	4	2	1	1	1,6	3,01
13	5	9	12	13	5	3	2	1	2,0	3,98
14	5	10	13	14	6	3	2	1	2,4	4,77
18	7	12	17	18	7	4	2	1	2,8	5,44
19	7	13	18	19	8	4	2	1	3,2	6,02

TABELA IV.14 - 16-QAM $R_c = \frac{3}{4}$

SISTEMA DE REF.: 8-QAM

N	K ₀	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	d ₀	d ₁	d ₂	d ₃	d ₄	D ²	G _a (dB)
4	1	3	4	4	4	4	2	1	1	1	0,76	2,80
13	5	9	12	13	13	5	3	2	1	1	0,95	3,76
14	5	10	13	14	14	6	3	2	1	1	1,14	4,56
18	7	12	17	18	18	7	4	2	1	1	1,33	5,23
19	7	13	18	19	19	8	4	2	1	1	1,52	5,81

TABELA IV.15 - 32-QAM $R_c = \frac{4}{5}$

SISTEMA DE REF.: 16-QAM

N	K ₀	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	d ₀	d ₁	d ₂	d ₃	d ₄	d ₅	D ²	G _a (dB)
4	1	3	4	4	4	4	4	2	1	1	1	1	0,38	3,01
13	5	9	12	13	13	13	5	3	2	1	1	1	0,48	3,98
14	5	10	13	14	14	14	6	3	2	1	1	1	0,57	4,77
18	7	12	17	18	18	18	7	4	2	1	1	1	0,67	5,44
19	7	13	18	19	19	19	8	4	2	1	1	1	0,76	6,02

TABELA IV.16 - 64-QAM $R_c = \frac{5}{6}$
SISTEMA DE REF.: 32-QAM

IV.4. ESQUEMAS EM 3 E 4 DIMENSÕES

Nesta classe considerar-se-á somente esquemas que combinam FSK e PSK, com envoltória constante, adequados para aplicação em canais não-lineares [06].

As constelações em 3 e 4 dimensões tratadas foram estudadas por Markman [21] e Wolf/Padovani [39], na utilização de códigos convolucionais à modulação codificada.

As funções ortonormais adotadas são dadas por

$\varphi_1(t) = \sqrt{2/T} \cos \left(w_c t + \pi h t / T \right) , \quad 0 \leq t < T$ (IV.13)

$\varphi_2(t) = -\sqrt{2/T} \sin \left(w_c t + \pi h t / T \right) , \quad 0 \leq t < T$ (IV.14)

$\varphi_3(t) = \sqrt{2/T} \cos \left(w_c t - \pi h t / T \right) , \quad 0 \leq t < T$ (IV.15)

$\varphi_4(t) = -\sqrt{2/T} \sin \left(w_c t - \pi h t / T \right) , \quad 0 \leq t < T$ (IV.16)

onde h é um inteiro e $w_c = 2\pi k / T$ para k inteiro.

As constelações em 3 dimensões tratadas por Markman, denominadas 2F/2x(M/2)PSK, apresentam M sinais da forma.

$c_i(t) = A \sqrt{\frac{1}{T}} \left[\cos \left(w_c t + \pi h t / T + \theta_i \right) + \cos \left(w_c t - \pi h t / T + \phi_i \right) \right] , \quad 0 \leq t < T$ (IV.17)

onde $\theta_i \in \left\{ 0, 4\pi/M, 8\pi/M, \dots, 2\pi(1-2/M) \right\}$ e $\phi_i \in \left\{ 0, \pi \right\}$.

Desse modo, os vetores de coeficientes normalizados referentes aos sinais são dados por

$c_i = \left[\sqrt{1/2} \cos \theta_i , \sqrt{1/2} \sin \theta_i , \pm \sqrt{1/2} \right]$ (IV.18)

Serão considerados os esquemas 2F/2x4PSK, 2F/2x8PSK e 2F/2x16PSK.

As constelações em 4 dimensões constituem os esquemas 2-FSK/(M/2)-PSK e 2F/PxQ PSK, onde $P \times Q = M$, estudados por Wolf/Padovani e Markman, respectivamente.

Os sinais das constelações 2-FSK/(M/2)-PSK são descritos por

$c_i(t) = \sqrt{2/T} \cos \left(w_c t + a_i \pi h t / T + \theta_i \right) , \quad 0 \leq t < T$ (IV.19)

onde $a_i = \pm 1$ e $\theta_i \in \left\{ 0, 4\pi/M, 8\pi/M, \dots, 2\pi(1-2/M) \right\}$.

θ_i	$\phi_i = 0$	$\phi_i = \pi$
0	000	011
$\frac{\pi}{2}$	100	111
π	010	001
$\frac{3\pi}{2}$	110	101

TABELA IV.17 - 2F/4-PSK
MAPEAMENTO BINÁRIO

θ_i	$\phi_i = 0$	$\phi_i = \pi$
0	0000	0011
$\frac{\pi}{4}$	1000	1011
$\frac{\pi}{2}$	0100	0111
$\frac{3\pi}{4}$	1100	1111
π	0010	0001
$\frac{5\pi}{4}$	1010	1001
$\frac{3\pi}{2}$	0110	0101
$\frac{7\pi}{4}$	1110	1101

TABELA IV.18 - 2F/8-PSK
MAPEAMENTO BINÁRIO

θ_i	$\phi_i = 0$	$\phi_i = \pi$
0	00000	00011
$\frac{\pi}{8}$	10000	10011
$\frac{\pi}{4}$	01000	01011
$\frac{3\pi}{8}$	11000	11011
$\frac{\pi}{2}$	00100	00111
$\frac{5\pi}{8}$	10100	10111
$\frac{3\pi}{4}$	01100	01111
$\frac{7\pi}{8}$	11100	11111
π	00010	00001
$\frac{9\pi}{8}$	10010	10001
$\frac{5\pi}{4}$	01010	01001
$\frac{11\pi}{8}$	11010	11001
$\frac{3\pi}{2}$	00110	00101
$\frac{13\pi}{8}$	10110	10101
$\frac{7\pi}{4}$	01110	01101
$\frac{15\pi}{8}$	11110	11101

TABELA IV.19 - 2F/16-PSK
MAPEAMENTO BINÁRIO

SISTEMA	SIST. DE REF.	D_{ref}^2	Δ_0^2	Δ_1^2	Δ_2^2	Δ_3^2	Δ_4^2	E(0)	E(1)	E(2)	E(3)	E(4)
2F/4-PSK	4-PSK	2	1	2	4	--	--	2	2	1	--	--
2F/8-PSK	8-PSK	0,586	0,293	1	2	4	--	2	2	2	1	--
2F/16-PSK	16-PSK	0,152	0,076	0,293	1	2	4	2	2	2	2	1

TABELA IV.20 - CONSTELAÇÕES $2F/\frac{M}{2}$ - PSK

SISTEMA (SIST.REF)	R_c	D^2	D^2/D_{ref}^2	m	$\sum_{i=0}^{m-1} K$
2F/4-PSK (4-PSK)	$\frac{2}{3}$	$\min [d_0, 2d_1, 4d_2]$	$\frac{\min [d_0, 2d_1, 4d_2]}{2}$	3	2 N
2F/8-PSK (8-PSK)	$\frac{3}{4}$	$\min [0,293d_0, d_1, 2d_2, 4d_3]$	$\frac{\min [0,293d_0, d_1, 2d_2, 4d_3]}{0,586}$	4	3 N
	$\frac{4}{5}$	$\min [0,076d_0, 0,293d_1, d_2, 2d_3, 4d_4]$	$\frac{\min [0,076d_0, 0,293d_1, d_2, 2d_3, 4d_4]}{0,152}$	5	4 N

TABELA IV.21 - SISTEMAS DE MODULAÇÃO CODIFICADA
 $2F/\frac{M}{2}$ - PSK

θ_i	L = +1	L = -1
0	000	100
$\frac{\pi}{2}$	010	110
π	001	101
$\frac{3\pi}{2}$	011	111

TABELA IV.22 - 2FSK/4PSK
MAPEAMENTO BINÁRIO

θ_i	L = +1	L = -1
0	0000	0100
$\frac{\pi}{4}$	1000	1100
$\frac{\pi}{2}$	0010	0110
$\frac{3\pi}{4}$	1010	1110
π	0001	0101
$\frac{5\pi}{4}$	1001	1101
$\frac{3\pi}{2}$	0011	0111
$\frac{7\pi}{4}$	1011	1111

TABELA IV.23 - 2FSK/8-PSK
MAPEAMENTO BINÁRIO

θ_i	L = +1	L = -1
0	00000	00100
$\frac{\pi}{8}$	10000	10100
$\frac{\pi}{4}$	01000	01100
$\frac{3\pi}{8}$	11000	11100
$\frac{\pi}{2}$	00010	00110
$\frac{5\pi}{8}$	10010	10110
$\frac{3\pi}{4}$	01010	01110
$\frac{7\pi}{8}$	11010	11110
π	00001	00101
$\frac{9\pi}{8}$	10001	10101
$\frac{5\pi}{4}$	01001	01101
$\frac{11\pi}{8}$	11001	11101
$\frac{3\pi}{2}$	00011	00111
$\frac{13\pi}{8}$	10011	10111
$\frac{7\pi}{4}$	01011	01111
$\frac{15\pi}{8}$	11011	11111

TABELA IV.24 - 2FSK/16-PSK
MAPEAMENTO BINÁRIO

Sistema	sist. de ref.	D_{ref}^z	Δ_0^z	Δ_1^z	Δ_2^z	Δ_3^z	Δ_4^z	$E_{(0)}$	$E_{(1)}$	$E_{(2)}$	$E_{(3)}$	$E_{(4)}$
2PSK/4PSK	4 PSK	2	2	2	4	-	-	4	2	1	-	-
2FSK/8PSK	8 PSK	0,586	0,586	2	2	4	-	2	4	2	1	-
2FSK/16PSK	16 PSK	0,152	0,152	0,586	2	2	4	2	2	4	2	1

Tabela IV.25 - Constelações 2 FSK / $\frac{M}{2}$ PSK

Sistema (sist.ref.)	R_c	D^2	m	$\sum_{i=0}^{m-1} k_i$
2FSK/4PSK (4PSK)	$\frac{2}{3}$	$2 \times \min \{d_0, d_1, 2d_2\}$	3	2 N
2 FSK/8PSK (8 PSK)	$\frac{3}{4}$	$\min \{0,586 d_0, 2d_1, 2d_2, 4d_3\}$	4	3 N
2 FSK/16PSK (16 PSK)	$\frac{4}{5}$	$\min \{0,152 d_0, 0,586 d_1, 2d_2, 2d_3, 4d_4\}$	5	4 N

Tabela IV. 26 - Sistemas de Modulação
Codificada 2 FSK / $\frac{M}{2}$ PSK

θ_i	$\phi_i = 0$	$\phi_i = \frac{\pi}{2}$	$\phi_i = \pi$	$\phi_i = \frac{3\pi}{2}$
0	0000	1100	0011	1111
$\frac{\pi}{2}$	1000	0100	1011	0111
π	0010	1110	0001	1101
$\frac{3\pi}{2}$	1010	0110	1001	0101

TABELA IV.27 - 2F/4x4 PSK
MAPEAMENTO BINÁRIO

θ_i	$\phi_i = 0$	$\phi_i = \frac{\pi}{2}$	$\phi_i = \pi$	$\phi_i = \frac{3\pi}{2}$
0	00000	01100	00011	01111
$\frac{\pi}{4}$	10000	11100	10011	11111
$\frac{\pi}{2}$	01000	00100	01011	00111
$\frac{3\pi}{4}$	11000	10100	11011	10111
π	00010	01110	00001	01101
$\frac{5\pi}{4}$	10010	11110	10001	11101
$\frac{3\pi}{2}$	01010	00110	01001	00101
$\frac{7\pi}{4}$	11010	10110	11001	10101

TABELA IV.28 - 2F/4x8 PSK
MAPEAMENTO BINÁRIO

Sistema	sist. de ref.	D_{14}^2	Δ_0^2	Δ_1^2	Δ_2^2	Δ_3^2	Δ_4^2	$E_{(0)}$	$E_{(1)}$	$E_{(2)}$	$E_{(3)}$	$E_{(4)}$
2F/4x4 PSK	8 PSK	0,586	1	2	2	2	-	4	4	2	1	-
2F/4x8 PSK	16 PSK	0,152	0,293	1	2	2	4	2	4	4	2	1

Tabela IV.29 - Constelações 2F / P x Q - PSK

Sistema (sist.ref.)	R_c	D^2	m	$\sum_{i=0}^{m-1} k_i$
2F/4x4 PSK (8-PSK)	$\frac{3}{4}$	$\min(d_0, Z d_1, Z d_2, 4 d_3)$	4	3 N
2F/4x8 PSK (16-PSK)	$\frac{4}{5}$	$\min(0,293 d_0, d_1, 2 d_2, 2 d_3, 4 d_4)$	5	4 N

Tabela IV.30 - Sistemas de Modulação Codificada
2F / P x Q - PSK

N	K_0	K_1	K_2	d_0	d_1	d_2	D^2	G_a (dB)
4	1	3	4	4	2	1	4	3,01
13	5	9	12	5	3	2	5	3,98
14	5	10	13	6	3	2	6	4,77
18	7	12	17	7	4	3	7	5,44
19	7	13	18	8	4	2	8	6,02

TABELA IV.31 - $2F/2x4PSK$ $R_c = 2/3$

SISTEMA DE REFERÊNCIA: 4-PSK

N	K ₀	K ₁	K ₂	K ₃	d ₀	d ₁	d ₂	d ₃	D ²	G _a (dB)
4	1	3	4	4	4	2	1	1	1,17	3,01
5	1	4	5	5	5	2	1	1	1,46	3,98
6	1	5	6	6	6	2	1	1	1,76	4,77
7	1	6	7	7	7	2	1	1	2,00	5,33
18	6	13	17	18	8	3	2	1	2,34	6,02
22	6	17	21	22	9	3	2	1	2,64	6,53
23	6	18	22	23	10	3	2	1	2,93	6,99
25	6	20	24	25	11	3	2	1	3,00	7,09
26	7	20	25	26	11	4	2	1	3,22	7,40
27	7	21	26	27	12	4	2	1	3,52	7,78
31	7	25	30	31	13	4	2	1	3,81	8,13
32	7	26	31	32	14	4	2	1	4,00	8,34

TABELA IV.32 - 2F/2x8 PSK Rc=3/4
SISTEMA DE REF. : 8-PSK

N	K_0	K_1	K_2	K_3	K_4	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	D^2	G_a (dB)
4	1	3	4	4	4	4	2	1	1	1	0,30	3,01
5	1	4	5	5	5	5	2	1	1	1	0,38	3,98
6	1	5	6	6	6	6	2	1	1	1	0,46	4,77
7	1	6	7	7	7	7	2	1	1	1	0,53	5,44
8	1	7	8	8	8	8	2	1	1	1	0,59	5,86
15	4	11	15	15	15	8	3	1	1	1	0,61	6,02
21	5	16	21	21	21	9	3	1	1	1	0,69	6,53
22	5	17	22	22	22	10	3	1	1	1	0,76	6,99
24	5	19	24	24	24	11	3	1	1	1	0,84	7,40
25	5	20	25	25	25	12	3	1	1	1	0,88	7,61
26	6	20	26	26	26	12	4	1	1	1	0,91	7,78
29	6	23	29	29	29	13	4	1	1	1	0,99	8,13
32	7	26	31	32	32	14	4	1	1	1	1,06	8,45

TABELA IV.33 - 2F/2x16 PSK $R_c=4/5$

SISTEMA DE REF.: 16-PSK

N	K_0	K_1	K_2	d_0	d_1	d_2	D^2	G_a (dB)
2	1	1	2	2	2	1	4	3,01
7	4	4	6	3	3	2	6	4,77
11	6	6	10	4	4	2	8	6,02
25	15	15	20	5	5	3	10	6,99
27	16	16	22	6	6	3	12	7,78

TABELA IV.34 - 2FSK/4PSK $R_c=2/3$

SISTEMA DE REF.: 4-PSK

N	K_0	K_1	K_2	K_3	d_0	d_1	d_2	d_3	D^2	G_a (dB)
2	1	1	2	2	2	2	1	1	1,17	3,01
3	1	2	3	3	3	2	1	1	1,76	4,77
4	1	3	4	4	4	2	1	1	2,00	5,33
6	2	5	5	6	4	2	2	1	2,34	6,02
8	2	7	7	8	5	2	2	1	2,93	6,99
9	2	8	8	9	6	2	2	1	3,52	7,78
11	2	10	10	11	7	2	2	1	4,00	8,34
23	11	18	18	22	8	3	3	2	4,69	9,03
29	11	24	24	28	9	3	3	2	5,27	9,54
30	11	25	25	29	10	3	3	2	5,86	10,00
31	11	26	26	30	11	3	3	2	6,00	10,10

TABELA IV.35 - 2FSK/8-PSK $R_c = 3/4$

SISTEMA DE REF.: 8-PSK

N	K ₀	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	d ₀	d ₁	d ₂	d ₃	d ₄	D ²	G _a (dB)
2	1	1	2	2	2	2	2	1	1	1	0,30	3,01
3	1	2	3	3	3	3	2	1	1	1	0,46	4,77
4	1	3	4	4	4	4	2	1	1	1	0,61	6,02
5	1	4	5	5	5	5	2	1	1	1	0,76	6,99
6	1	5	6	6	6	6	2	1	1	1	0,91	7,78
7	1	6	7	7	7	7	2	1	1	1	1,06	8,45
8	1	7	8	8	8	8	2	1	1	1	1,17	8,86
15	4	11	15	15	15	8	3	1	1	1	1,22	9,03
21	5	16	21	21	21	9	3	1	1	1	1,37	9,54
22	5	17	22	22	22	10	3	1	1	1	1,52	10,00
24	5	19	24	24	24	11	3	1	1	1	1,67	10,41
25	5	20	25	25	25	12	3	1	1	1	1,76	10,62
26	6	20	26	26	26	12	4	1	1	1	1,83	10,79
29	6	23	29	29	29	13	4	1	1	1	1,98	11,14
30	6	24	30	30	30	14	4	1	1	1	2,00	11,18

TABELA IV.36 - 2FSK/16-PSK Rc=4/5

SISTEMA DE REF.: 16-PSK

N	K_0	K_1	K_2	K_3	d_0	d_1	d_2	d_3	D^2	G_a (dB)
2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	5,33
5	2	4	4	5	3	2	2	1	3	7,09
6	2	5	5	6	4	2	2	1	4	8,34
20	11	15	15	19	5	3	3	2	5	9,31
21	11	16	16	20	6	3	3	2	6	10,10
26	13	20	20	25	7	4	4	2	7	10,77
27	13	21	21	26	8	4	4	2	8	11,35

TABELA IV.37 - 2F/4x4 PSK $R_c=3/4$
SISTEMA DE REF.: 8-PSK

N	K ₀	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	d ₀	d ₁	d ₂	d ₃	d ₄	D ²	G _a (dB)
2	1	1	2	2	2	2	2	1	1	1	0,59	5,86
3	1	2	3	3	3	3	2	1	1	1	0,88	7,62
4	1	3	4	4	4	4	2	1	1	1	1,17	8,86
5	1	4	5	5	5	5	2	1	1	1	1,46	9,83
6	1	5	4	4	4	4	2	1	1	1	1,76	10,62
7	1	6	7	7	7	7	2	1	1	1	2,00	11,18
19	7	14	18	18	19	8	3	2	2	1	2,34	11,87
23	7	18	22	22	23	9	3	2	2	1	2,64	12,38
24	7	19	23	23	24	10	3	2	2	1	2,93	12,84
28	8	22	27	27	28	11	4	2	2	1	3,22	13,26
29	8	23	28	28	29	12	4	2	2	1	3,51	13,63

TABELA IV.38 - 2F/4x8 PSK Rc=4/5

SISTEMA DE REF.: 16-PSK

IV.5. CAPACIDADE DE CANAL E COMPARAÇÃO ENTRE ESQUEMAS

Nesta seção são realizadas avaliações qualitativas dos resultados apresentados nas seções anteriores tomando como referência a capacidade de canal para os diversos sistemas tratados.

De acordo com o que foi apresentado na seção II.4, a capacidade do canal descrito naquela ocasião é expresso por

$$C = \log_2 M - \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} E \left[\log_2 \sum_{i=0}^{M-1} \exp \left\{ - \frac{|\underline{c}_m - \underline{c}_i - \underline{n}|^2 - |\underline{n}|^2}{2\sigma^2} \right\} \right] \tag{IV.24}$$

onde $\underline{n}$ é um vetor

$$\underline{n} = (n_1, n_2, \dots, n_Q) \tag{IV.25}$$

com n_i Gaussiano de média zero e variância $\sigma^2 = N_0/2$, e Q é a dimensionalidade do espaço de sinais considerado.

Utilizando técnicas de Monte Carlo [23], foram obtidas curvas de capacidade de canal versus relação sinal-ruído por sinal transmitido, dada por

$$RSR = 1/N_0 = 1/2\sigma^2 \tag{IV.26}$$

para todas as constelações consideradas.

Nas figuras IV.11 e IV.12, estas curvas são apresentadas para esquemas em 1 e 2 dimensões, respectivamente. Como pode ser verificado, dobrando-se o número de sinais do sistema de referência, para uma taxa de sinalização fixa, praticamente obtem-se todo o ganho em termos de capacidade.

Objetivando verificar a suficiência em se dobrar o número de sinais no projeto de esquemas de modulação codificada dentro da classe de códigos tratada, analisa-se a seguir a possibilidade de utilizar constelações com maior número de sinais, com taxas de codificação devidamente definidas para manter a taxa de sinalização do sistema de referência.

Mais explicitamente, se $M_{ref} = 2^{m_{ref}}$ é o número de sinais da constelação de referência e $M = 2^m$, $m > m_{ref}$, é o número de sinais do esquema de modulação codificada, a taxa de codificação deve ser

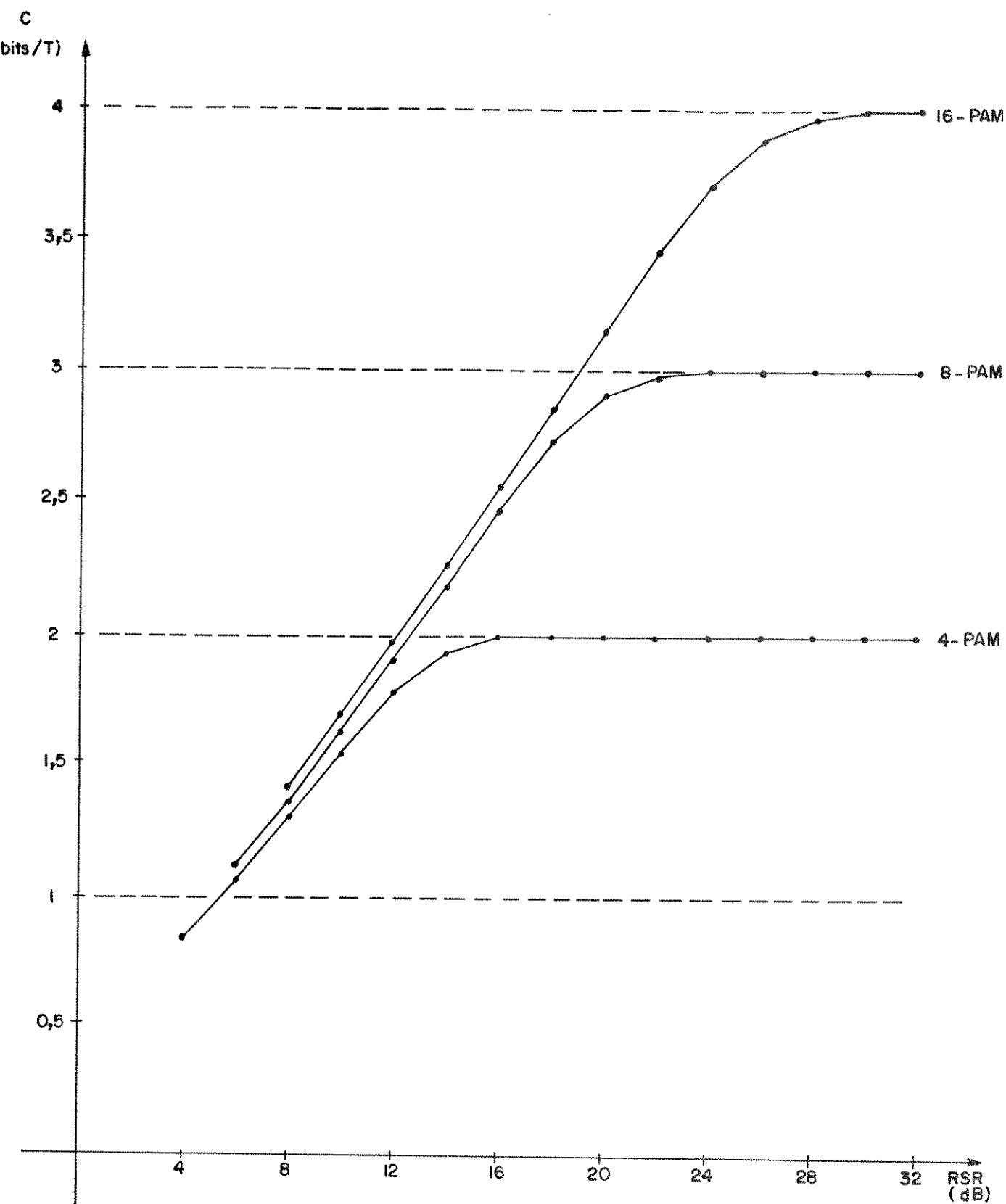


FIG. IV . 11 — Capacidade de canal versus RSR de sistemas unidimensionais.

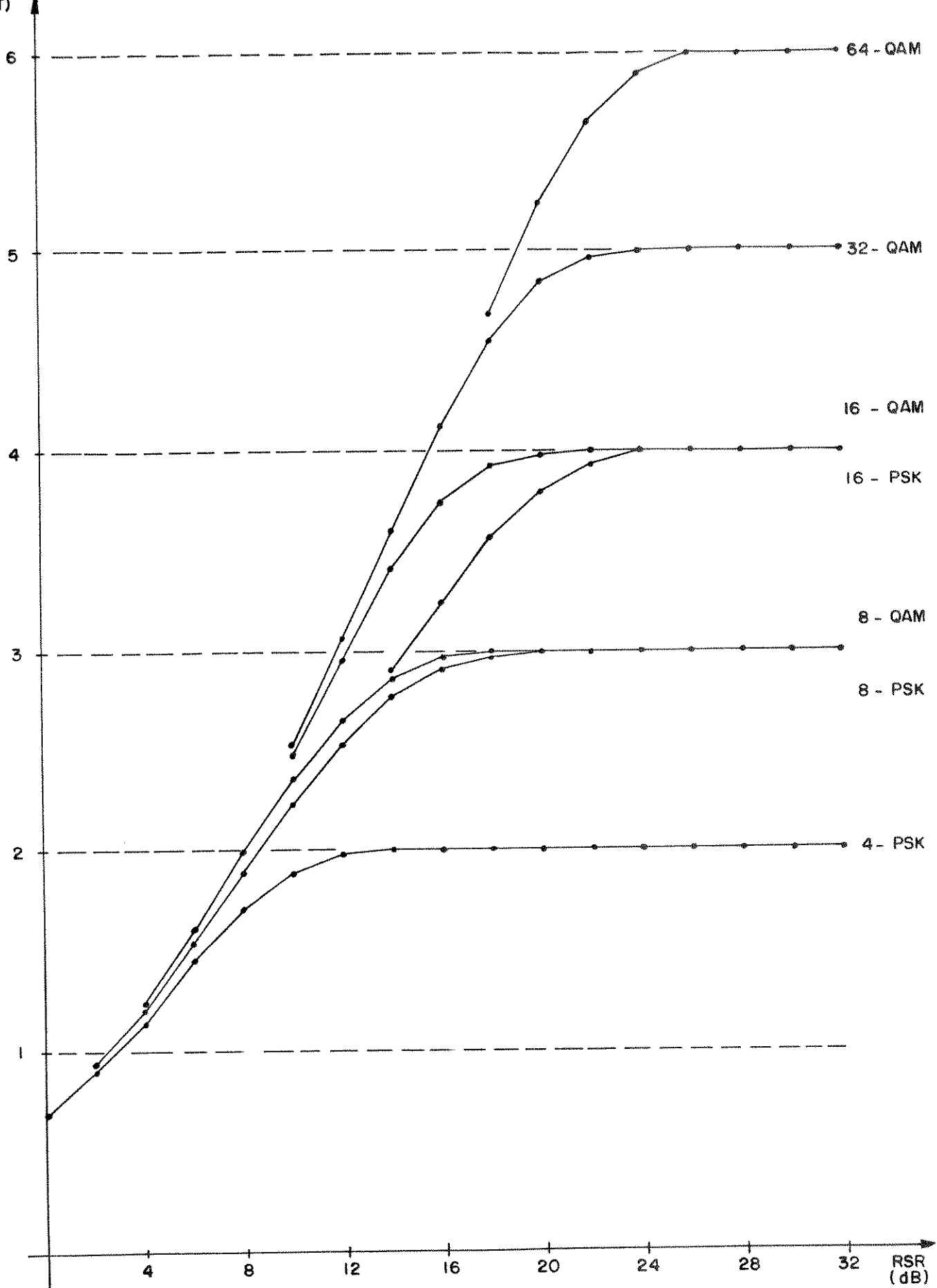


FIG. IV.12 — Capacidade de canal versus RSR de sistemas bidimensionais.

$$R_c = \frac{m_{ref}}{m} \quad (IV.27)$$

para preservar a taxa de sinalização.

Como

$$\sum_{i=0}^{m-1} K_i = NR_c \quad (IV.28)$$

e

$$d_i \leq N - K_i + 1 \quad (IV.29)$$

tem-se, para qualquer sistema de modulação codificada da classe considerada,

$$D^2 \leq D_{sup}^2 = \min_{0 \leq i \leq m-1} (N - K_i + 1) \Delta_i^2 \quad (IV.30)$$

Consequentemente,

$$G_A \leq 10 \log_{10} \frac{D_{sup}^2}{D_{ref}^2} \text{ dB} \quad (IV.31)$$

onde D_{ref}^2 é a mínima distância Euclidiana ao quadrado entre os sinais da constelação de referência.

As Figs. IV.13 a IV.15 expõem limitantes superiores para o Ganho Assintótico de alguns esquemas de modulação codificada em função do comprimento N das palavras-código, parâmetro diretamente relacionado com a complexidade do sistema. Também são traçados os Ganhos Assintóticos obtidos, e apresentados nas seções anteriores, por esquemas com o dobro do número de sinais do sistema de referência.

Em geral, a escolha de constelações com o dobro do número de sinais do sistema de referência é a mais acertada, para os sistemas de modulação codificada tratados. Porém, em alguns casos, como o do exemplo da Fig. IV.14, é possível obter, para um mesmo comprimento N , ganhos levemente superiores aos obtidos com constelações de $2M_{ref}$ sinais.

As Figs. IV.16 a IV.18 apresentam a capacidade de canal versus relação sinal-ruído para os esquemas em 3 e 4 dimensões. Verifica-se que, segundo este critério e para o mesmo número de sinais, os esquemas $2F/PxQ$ PSK são mais eficientes que os do tipo $2\text{-FSK}/(M/2)\text{-PSK}$, e estes mais interessantes que as constelações $2F/2x(M/2)$ PSK. Isto se deve a uma melhor distribuição espacial dos sinais.

Estas características refletem os resultados obtidos na seção IV.4. As Figs. IV.19 a IV.21 apresentam comparações de Ganhos Assintóticos destes esquemas para vários sistemas de referência.

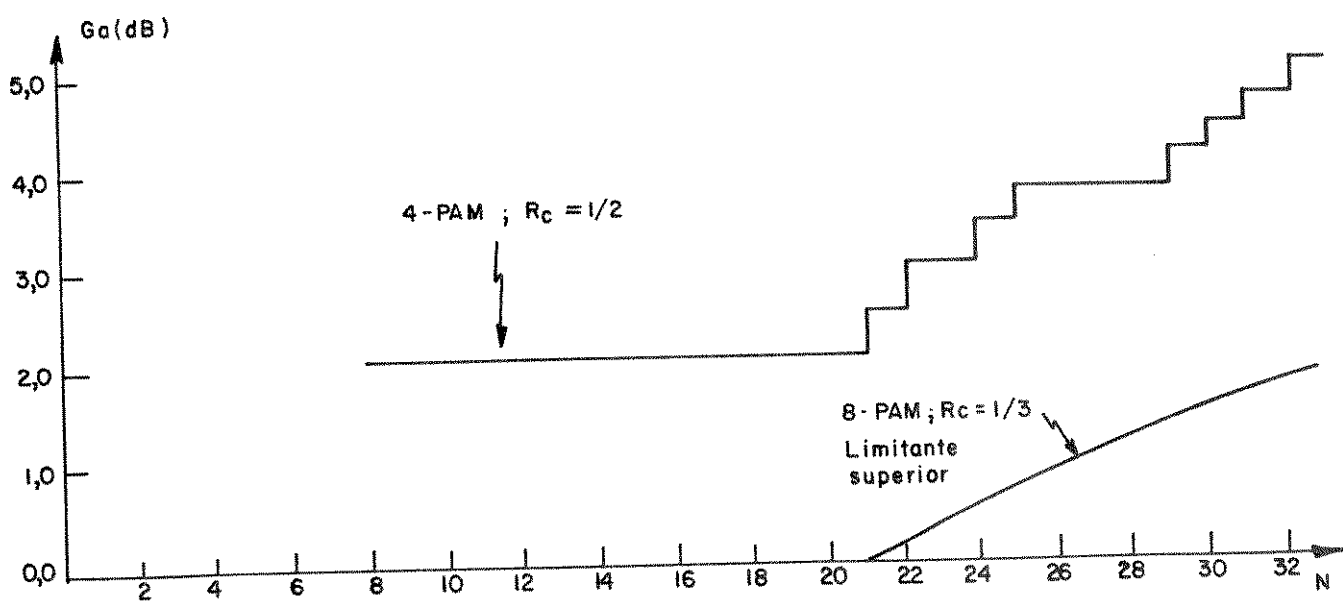


FIGURA IV. 13 - SISTEMA DE REFERÊNCIA = 2-PAM

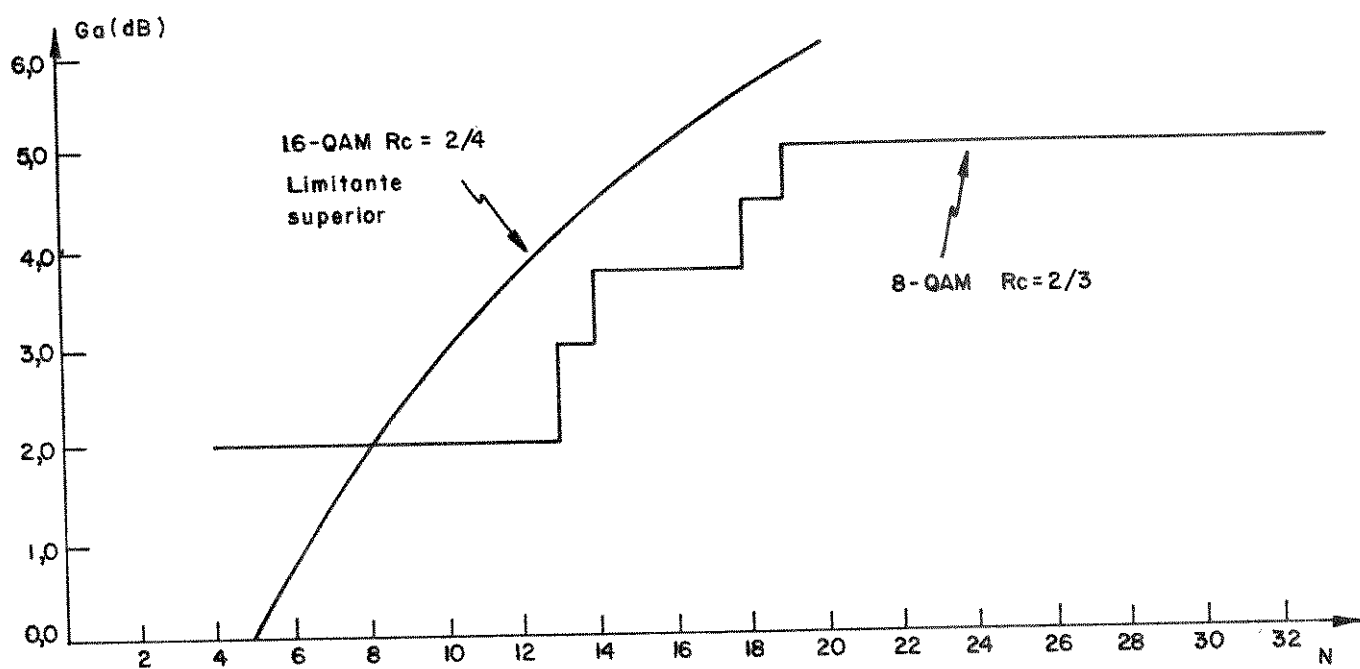


FIGURA IV. 14 - SISTEMA DE REFERÊNCIA - PSK

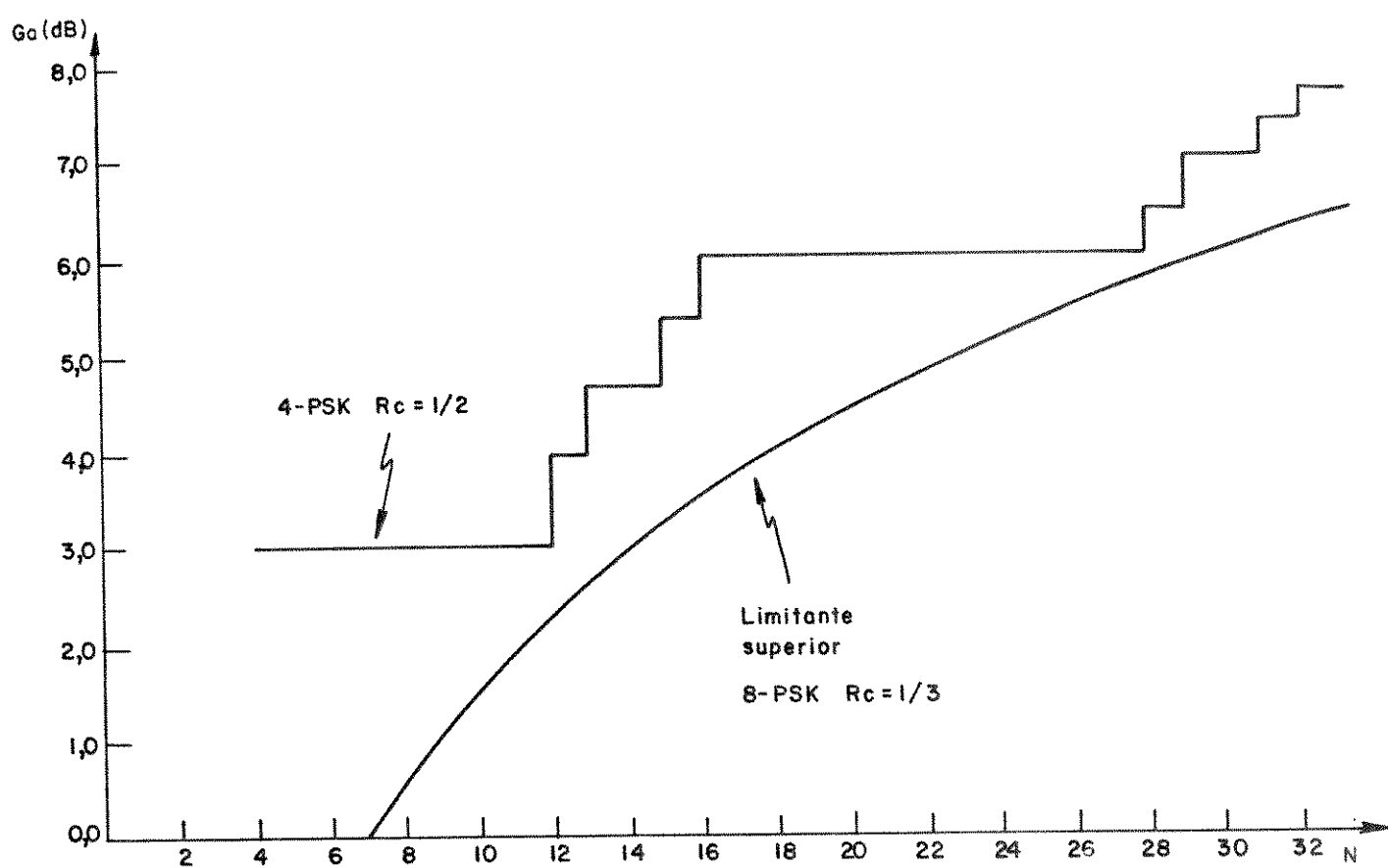


FIGURA IV. 15 - SISTEMA DE REFERÊNCIA 2-PSK

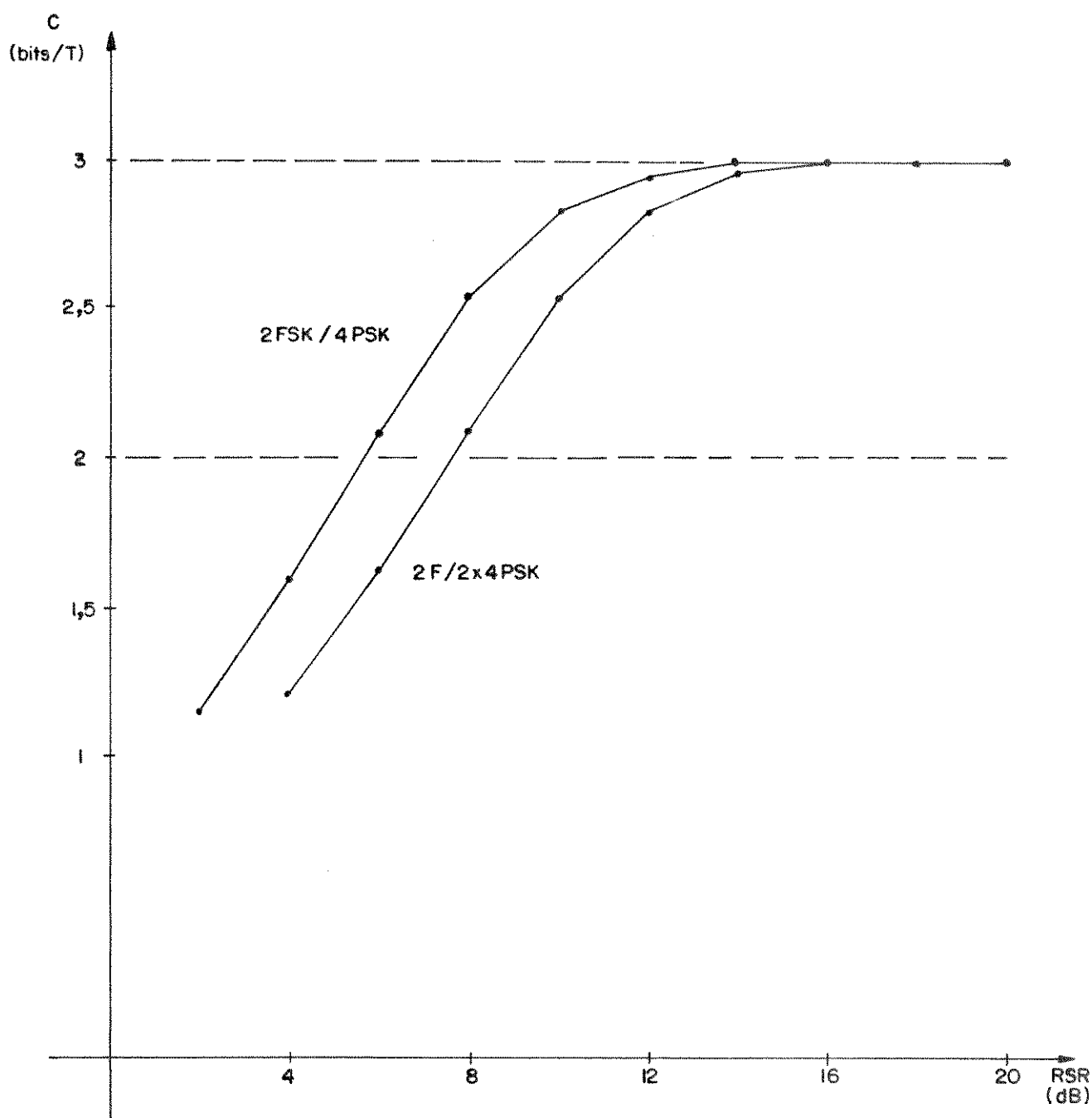


FIG. IV. 16 — Capacidade de canal versus RSR de sistema com dimensionalidade superior a 2 e 8 sinais

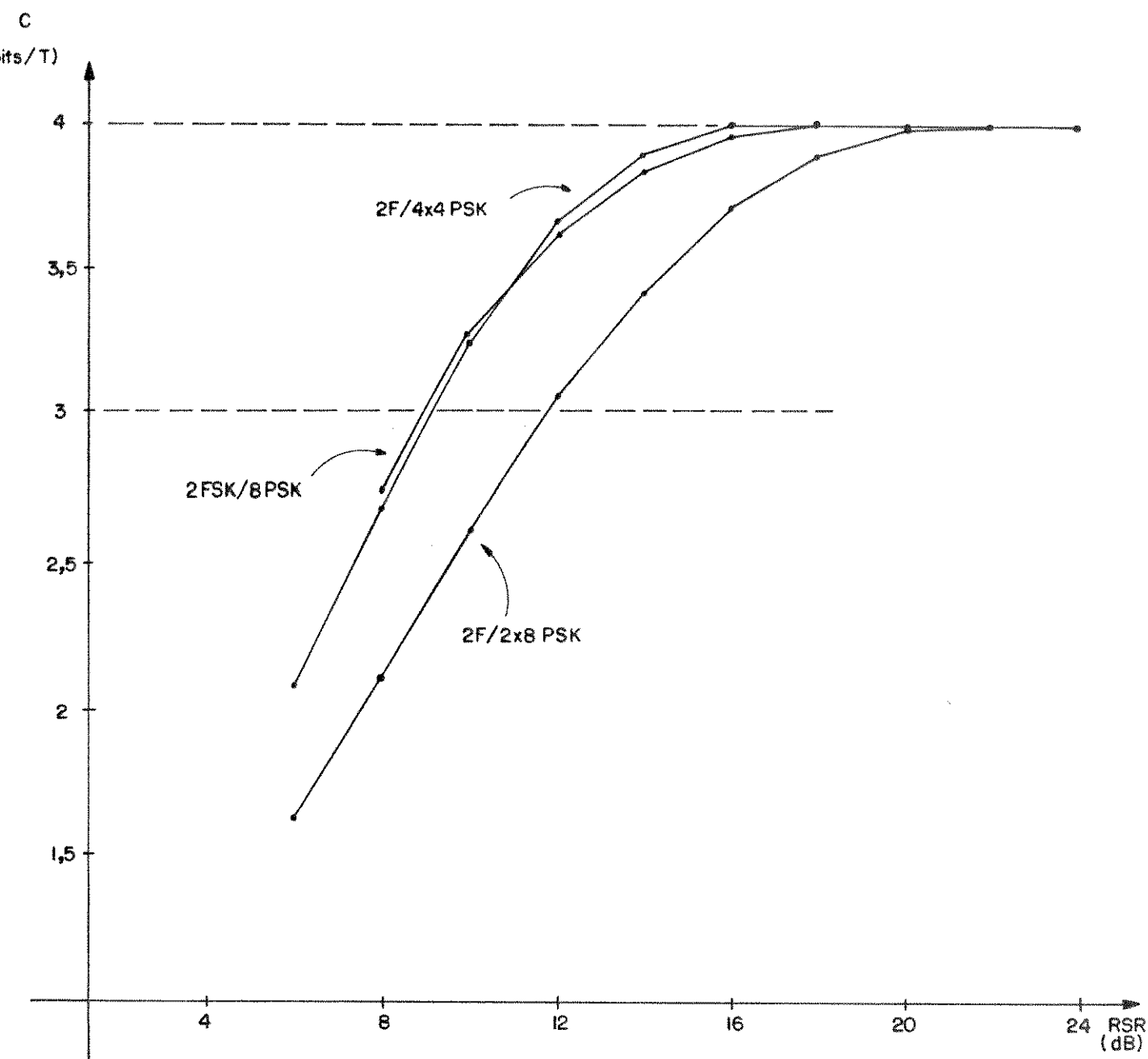


FIG. IV. 17 — Capacidade de canal versus RSR de sistemas com dimensionalidade superior a 2 e 16 sinais

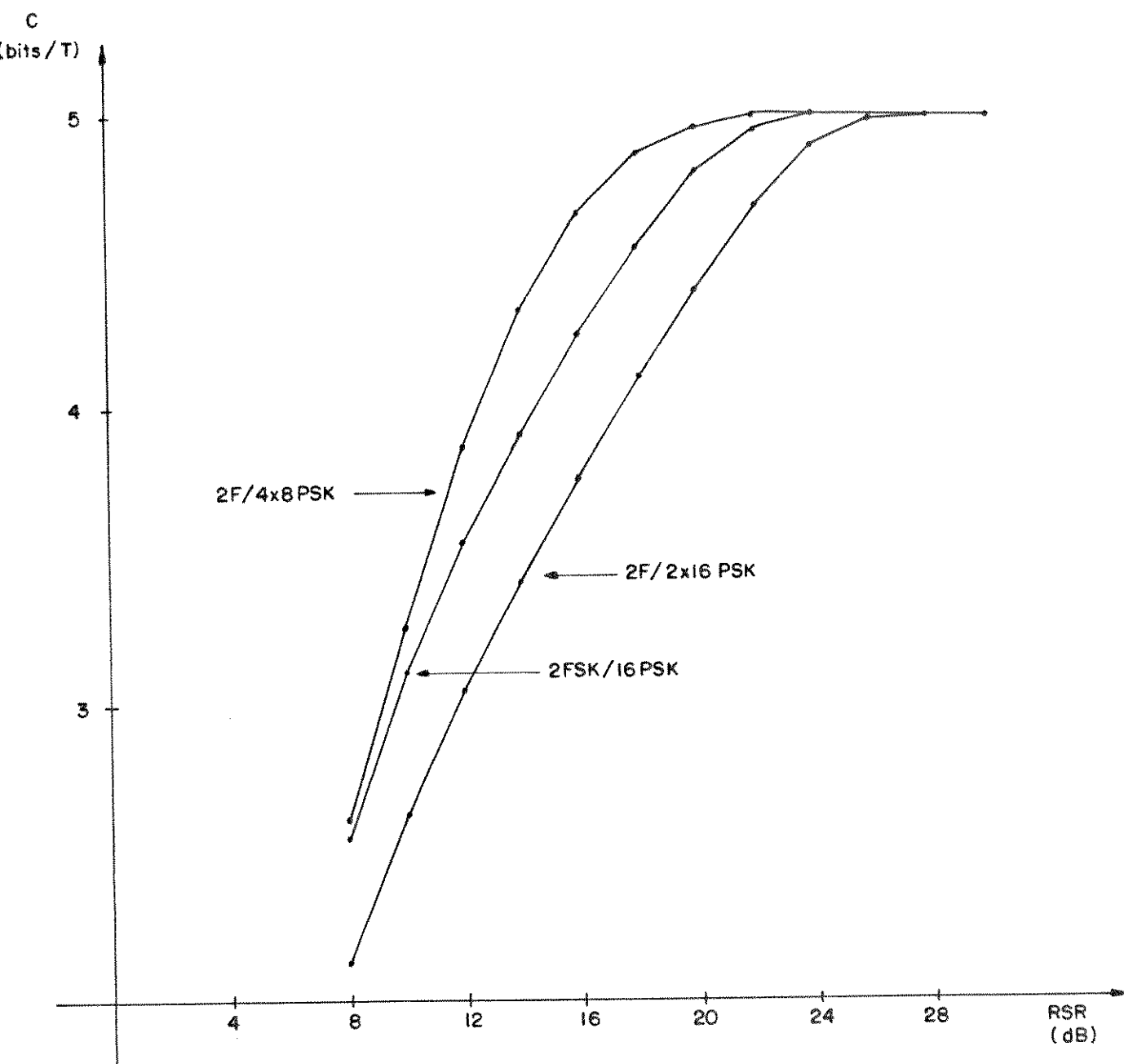


FIG. IV. 18 — Capacidade de canal versus RSR de sistemas com dimensionalidade superior a 2 e 16 sinais.

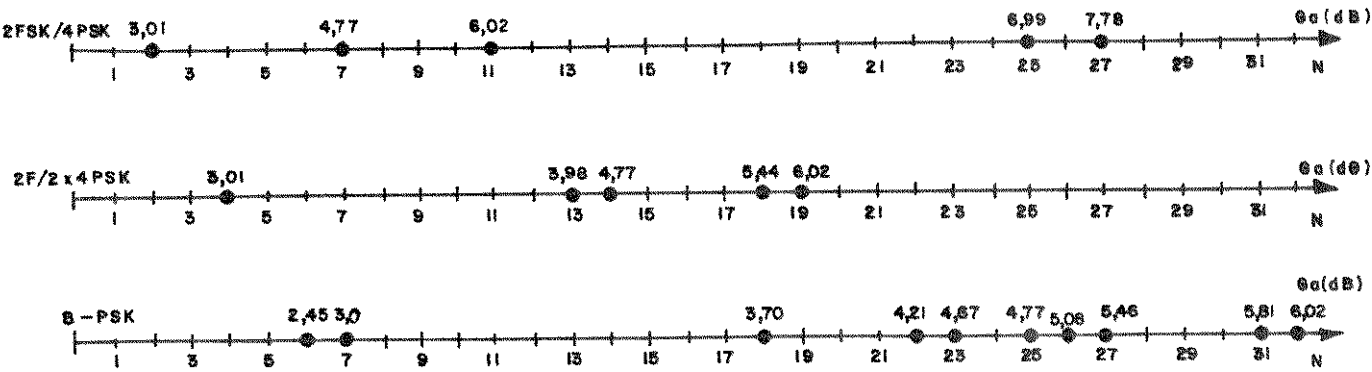


FIGURA IV-19 - SISTEMA DE REFERÊNCIA: 4-PSK

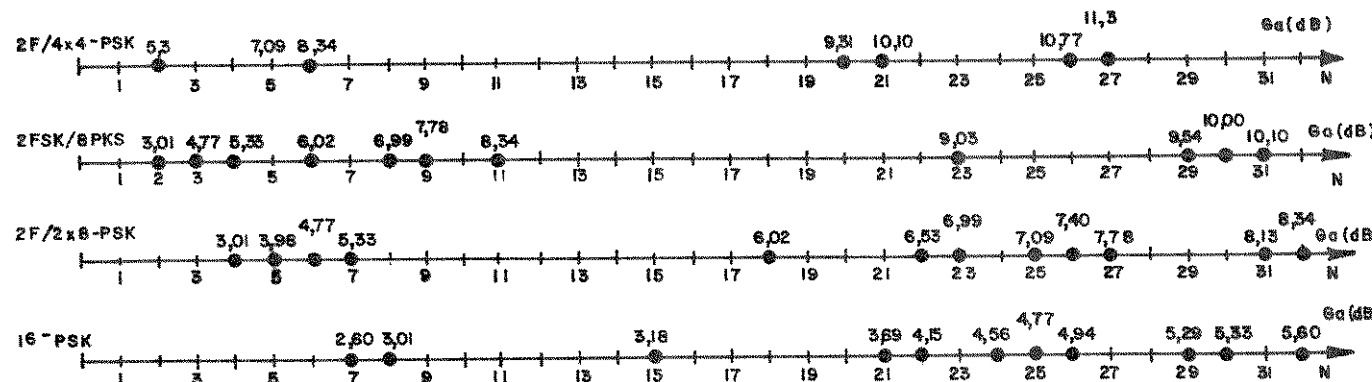


FIGURA IV-20 - SISTEMA DE REFERÊNCIA: 8-PSK

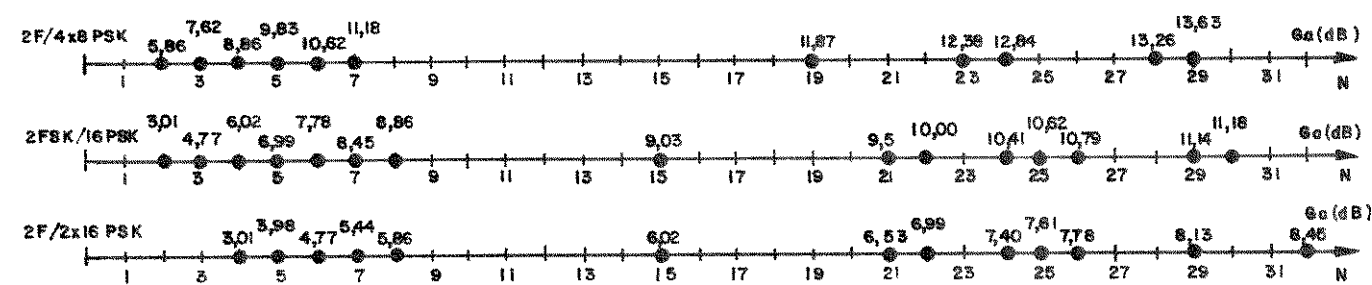


FIGURA IV-21 - SISTEMA DE REFERÊNCIA: 16-PSK

CAPÍTULO V

CARACTERÍSTICAS ESPECTRAIS DOS ESQUEMAS DE MODULAÇÃO CODIFICADA

V.1. INTRODUÇÃO

O principal objetivo dos sistemas de modulação codificada é garantir ganhos em termos de potência com relação a um sistema de referência mantendo, em contrapartida, a faixa de transmissão requerida. Faz-se, portanto, necessária uma análise mais profunda das propriedades espectrais dos sinais codificados.

O desenvolvimento de relações que expressem as propriedades espectrais de sistemas de modulação codificada controlados por códigos convolucionais foi efetuado recentemente em trabalho de Bezerra/Arantes [05]. Estes resultados representam uma extensão de estudos anteriores de Cariolaro/Tronca [10], que trataram de códigos de bloco com sinalização multinível.

Em geral, o processo de codificação mantém a regularidade dos símbolos transmitidos e, com isto, as características espectrais da constelação sem codificação são mantidas. Porém, o controle imposto pelo codificador pode causar conformação espectral e consequente compressão de faixa.

A determinação das características espectrais da classe de sinais codificados apresentada por Sayegh [30] é tratada neste estudo e segue o procedimento matricial desenvolvido por Cariolaro/Tronca [10], particularmente apropriado à implementação computacional. Na análise realizada a seguir, os símbolos binários de entrada do codificador são considerados estatisticamente independentes.

V.2. REPRESENTAÇÃO DOS SINAIS

Para efeito de simplificação, os sinais do conjunto C, definido na seção II.2, serão representados em banda base. Para tal, das funções do tempo $\varphi_q(t)$, $q = 1, 2, \dots, Q$, que caracterizam a base ortonormal de dimensionalidade Q apresentada na seção II.3 é obtida uma matriz linha $\underline{\lambda}$, com componentes $\lambda_q(t)$, $q = 1, 2, \dots, Q$, em banda base, dada por

$$\underline{\lambda} = [\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_Q(t)] \tag{V.1}$$

onde

$$\varphi_q(t) = \text{Re} \left[\lambda_q(t) e^{j\omega_c t} \right], \quad q = 1, 2, \dots, Q \tag{V.2}$$

Por consequência, os sinais em banda base associados às funções ortonormais indicadas na seção II.3 são

1 Dimensão

$$\lambda_1(t) = 1/\sqrt{T} , \quad 0 \leq t < T \quad (V.3)$$

2 Dimensões

$$\lambda_1(t) = \sqrt{2/T} , \quad 0 \leq t < T \quad (V.4)$$

$$\lambda_2(t) = j\sqrt{2/T} , \quad 0 \leq t < T \quad (V.5)$$

3 e 4 Dimensões

$$\lambda_1(t) = \sqrt{2/T} e^{j\pi h t/T} , \quad 0 \leq t < T \quad (V.6)$$

$$\lambda_2(t) = j\sqrt{2/T} e^{j\pi h t/T} , \quad 0 \leq t < T \quad (V.7)$$

$$\lambda_3(t) = \sqrt{2/T} e^{-j\pi h t/T} , \quad 0 \leq t < T \quad (V.8)$$

$$\lambda_4(t) = j\sqrt{2/T} e^{-j\pi h t/T} , \quad 0 \leq t < T \quad (V.9)$$

onde h é inteiro.

Deste modo, os sinais do conjunto C , $c_i(t)$, $i=0,1,\dots,M-1$, podem ser expressos pelos sinais em banda base $p_i(t)$, $i=0,1,\dots,M-1$, dados por

$$p_i(t) = P \sum_{q=1}^Q c_{iq} \lambda_q(t) , \quad 0 \leq t < T \quad (V.10)$$

onde

$$c_i(t) = \text{Re} \left[p_i(t) e^{j\omega_c t} \right] \quad (V.11)$$

Além disso, P é dado pela expressão (II.17) e c_{iq} , $q = 1,2,\dots,Q$, são os coeficientes normalizados referentes ao sinal $c_i(t)$ e definidos na seção II.3.

Usando $P=1$ sem perda de generalidade e adotando uma representação matricial têm-se

$$p_i(t) = \underline{c}_i \underline{\lambda}^T , \quad i = 0,1,\dots,M-1 \quad (V.12)$$

onde $\underline{c}_i$ é o vetor de coeficientes normalizados associado a $c_i(t)$ e $(.)^T$ significa transposta.

A cada palavra-código de saída do codificador

$$\underline{X}^{(i)} = \left[X_0^{(i)}, X_1^{(i)}, \dots, X_{N-1}^{(i)} \right] \quad i = 1, 2, \dots, 2^L \quad (V.13)$$

onde L é o número de bits por bloco de entrada do codificador, é associado um sinal em banda base

$$w^{(i)}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} w_n^{(i)}(t-nT) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, 2^L \quad (V.14)$$

onde $w_n^{(i)}(t)$ está associado ao símbolo $X_n^{(i)}$ e pertence ao conjunto de sinais em banda base.

Consequentemente, a cada palavra-código transmitida é associado um sinal de duração $T_N = NT$ da forma descrita pela expressão (V.14) pertencente ao conjunto $\{w^{(1)}(t), w^{(2)}(t), \dots, w^{(2^L)}(t)\}$.

Seja $r^{(j)}(t)$ o sinal associado à j -ésima palavra-código transmitida, pertencente ao conjunto acima.

$$r^{(j)}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} r_n^{(j)}(t-nT) \quad (V.15)$$

O sinal em banda base obtido na saída do modulador é, portanto, dado por

$$r(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} r_n^{(j)}(t-nT-jT_N) \quad (V.16)$$

e o que se pretende é determinar a densidade espectral de potência deste sinal.

V.3. DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA DO SINAL CODIFICADO

Por se tratar de codificação de bloco, a sequência de palavras-código é um processo estacionário no sentido amplo. Porém o mesmo não ocorre com a sequência de símbolos de saída do codificador. O sinal $r(t)$ representa na verdade um processo ciclo estacionário com período T_N . A primeira etapa do desenvolvimento da densidade espectral de potência deste processo consiste em determinar sua função de autocorrelação

$$R_r(t, t+\tau) = R_r(\tau) = E [r(t)r(t+\tau)] \quad (V.17)$$

onde $E [\cdot]$ representa média estatística.

O apêndice V.1 apresenta os passos seguidos na evolução de (V.17), que resultam em

$$R_r(\tau) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_N} \sum_{u=1}^{2^L} \sum_{v=1}^{2^L} \int_{-\infty}^{\infty} dt \, w^{(u)}(t) \, w^{(v)}(t+\tau-sT_N) \, p_s^{uv} \tag{V.18}$$

onde

$$p_s^{uv} = \begin{cases} q_u \, \delta_{uv} & , \quad s = 0 \\ q_u q_v & , \quad s \neq 0 \end{cases} \tag{V.19}$$

$$\delta_{uv} = \begin{cases} 1 & , \quad u = v \\ 0 & , \quad u \neq v \end{cases} \tag{V.20}$$

e q_u é a probabilidade de transmissão da palavra-código $\underline{x}^{(u)}$.

Seja $W^{(u)}(f)$ a transformada de Fourier de $w^{(u)}(t)$. De acordo com o desenvolvimento apresentado no Apêndice V.2, a densidade espectral de potência do processo caracterizado pela função de autocorrelação dada em (V.18) é

$$R(f) = -\frac{1}{T_N} \sum_{u=1}^{2^L} \sum_{v=1}^{2^L} W^{(u)*}(f) \sum_{s=-\infty}^{\infty} p_s^{uv} \exp \left[-j2\pi f s T_N \right] W^{(v)}(f) \tag{V.21}$$

onde $*$ significa conjugado ou, tratando-se de matriz, conjugada transposta.

Sejam as matrizes

$$W = \begin{bmatrix} W_0^{(1)}(f) & \dots & W_{N-1}^{(1)}(f) \\ W_0^{(2)}(f) & \dots & W_{N-1}^{(2)}(f) \\ \vdots & & \vdots \\ W_0^{(2^L)}(f) & \dots & W_{N-1}^{(2^L)}(f) \end{bmatrix} \tag{V.22}$$

onde $W_n^{(u)}(f)$ é a transformada de Fourier de $w_n^{(u)}(t)$,

$$\underline{\Omega}^T = [1, \exp(-j2\pi fT), \dots, \exp(-j2\pi f(N-1)T)] \quad (\text{V.23})$$

e

$$P_s = \begin{bmatrix} p_s^{1,1} & \dots & p_s^{1,2^L} \\ p_s^{2,1} & \dots & p_s^{2,2^L} \\ \vdots & & \vdots \\ p_s^{2^L,1} & & p_s^{2^L,2^L} \end{bmatrix} \quad (\text{V.24})$$

Então,

$$R(f) = \frac{1}{T_N} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi fsT_N) \underline{\Omega}^* W^* P_s W \underline{\Omega} \quad (\text{V.25})$$

A equação (V.25) pode ser expressa como

$$R(f) = \frac{1}{T_N} [R_c(f) + R_d(f)] \quad (\text{V.26})$$

onde $R_c(f)$ e $R_d(f)$ denotam as partes contínua e discreta de $R(f)$, respectivamente, e são dadas por

$$R_c(f) = \underline{\Omega}^* D_o \underline{\Omega} - \underline{\Omega}^* D_{\infty} \underline{\Omega} \quad (\text{V.27})$$

$$R_d(f) = \frac{1}{T_N} \underline{\Omega}^* D_{\infty} \underline{\Omega} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \delta(f-s/T_N) \quad (\text{V.28})$$

onde

$$D_o = W^* P_o W \quad (\text{V.29})$$

$$D_{\infty} = W^* P_{\infty} W \quad (\text{V.30})$$

de acordo com a dedução apresentada no apêndice V.3.

Definindo as matrizes

$$\underline{W}_u = [W_c^{(u)}(f), W_1^{(u)}(f), \dots, W_{N-1}^{(u)}(f)] \quad , \quad u=1,2,\dots,2^L \quad (\text{V.31})$$

chega-se

$$D_o = \sum_{u=1}^{2^L} \sum_{v=1}^{2^L} q_u \delta_{uv} \underline{W}_u^* \underline{W}_u = \sum_{u=1}^{2^L} q_u \underline{W}_u^* \underline{W}_u \quad (\text{V.32})$$

Considerem-se as matrizes de coeficientes normalizados e reais

$$S^{(u)} = \begin{bmatrix} s_{1,1}^{(u)} & \dots & s_{N-1,1}^{(u)} \\ s_{1,2}^{(u)} & \dots & s_{N-1,2}^{(u)} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{1,q}^{(u)} & \dots & s_{N-1,q}^{(u)} \end{bmatrix}, \quad u=1,2,\dots,2^L \quad (V.33)$$

onde

$$\underline{s}_n^{(u)T} = \left[s_{n,1}^{(u)}, s_{n,2}^{(u)}, \dots, s_{n,q}^{(u)} \right] \quad (V.34)$$

é o vetor de coeficientes normalizados do n-ésimo sinal da u-ésima palavra-código, e

$$\underline{\Lambda} = \left[\Lambda_1(f), \Lambda_2(f), \dots, \Lambda_q(f) \right] \quad (V.35)$$

onde $\Lambda_q(f)$ é a transformada de Fourier de $\lambda_q(t)$.

Utilizando as matrizes dadas em (V.33) e (V.35) obtem-se

$$\underline{W}_u = \underline{\Lambda} S^{(u)} \quad (V.36)$$

e

$$D_o = \sum_{u=1}^{2^L} q_u S^{(u)T} \underline{\Lambda}^* \underline{\Lambda} S^{(u)} \quad (V.37)$$

A matriz quadrada D_o de ordem N é da forma

$$D_o = \begin{bmatrix} D_o(0,0) & \dots & D_o(0,N-1) \\ D_o(1,0) & \dots & D_o(1,N-1) \\ \vdots & & \vdots \\ D_o(N-1,0) & \dots & D_o(N-1,N-1) \end{bmatrix} \quad (V.38)$$

onde

$$D_o(i,j) = \sum_{u=1}^{2^L} q_u \underline{\Lambda} \underline{s}_i^{(u)} \underline{s}_j^{(u)T} \underline{\Lambda}^* \quad (V.39)$$

Analogamente, obtem-se

$$D_{\infty} = \begin{bmatrix} D_{\infty}(0,0) & \dots & D_{\infty}(0,N-1) \\ D_{\infty}(1,0) & \dots & D_{\infty}(1,N-1) \\ \vdots & & \vdots \\ D_{\infty}(N-1,0) & \dots & D_{\infty}(N-1,N-1) \end{bmatrix} \quad (V.40)$$

onde

$$D_{\infty}(i,j) = \sum_{u=1}^{2^L} \sum_{v=1}^{2^L} q_u q_v \underline{\Lambda} \underline{s}_j^{(v)} \underline{s}_i^{(u)T} \underline{\Lambda}^* \quad (V.41)$$

Portanto,

$$D_o(i,j) = \underline{\Lambda} H_c^{i,j} \underline{\Lambda}^* \quad (V.42)$$

e

$$D_{\infty}(i,j) = \underline{\Lambda} H_{\infty}^{i,j} \underline{\Lambda}^* \quad (V.43)$$

para

$$H_{\ell}^{i,j} = \begin{bmatrix} H_{\ell}^{i,j}(1,1) & \dots & H_{\ell}^{i,j}(1,Q) \\ H_{\ell}^{i,j}(2,1) & \dots & H_{\ell}^{i,j}(2,Q) \\ \vdots & & \vdots \\ H_{\ell}^{i,j}(Q,1) & \dots & H_{\ell}^{i,j}(Q,Q) \end{bmatrix}, \quad \ell = 0, \infty \quad (V.44)$$

onde

$$H_o^{i,j}(r,s) = \sum_{u=1}^{2^L} q_u s_{i,r}^{(u)} s_{j,s}^{(u)} \quad (V.45)$$

e

$$H_{\infty}^{i,j}(r,s) = \sum_{u=1}^{2^L} \sum_{v=1}^{2^L} q_u q_v s_{j,r}^{(v)} s_{i,s}^{(u)} = F_{j,r} F_{i,s} \quad (V.46)$$

com

$$F_{\ell,t} = \sum_{u=1}^{2^L} q_u s_{\ell,t}^{(u)} \quad (V.47)$$

Seja j , $0 \leq j \leq N-1$, uma posição qualquer da palavra-código. Esta posição está associada à j -ésima coluna da matriz-código definida na seção III.3

$$V = \begin{bmatrix} v_{0,0} & \cdots & v_{0,N-1} \\ v_{1,0} & \cdots & v_{1,N-1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{m-1,0} & \cdots & v_{m-1,N-1} \end{bmatrix} \quad (V.48)$$

onde m é o logaritmo na base 2 do número de sinais.

Cada elemento $v_{i,j}$ desta matriz depende de um determinado número $N(i,j)$, $1 \leq N(i,j) \leq K_i$, de distintos dígitos binários de entrada $z_1(i,j)$, $z_2(i,j)$, ..., $z_{N(i,j)}(i,j)$ pertencentes ao bloco de entrada

$$\underline{u} = (u_0, u_1, \dots, u_{L-1}) \quad (V.49)$$

ou seja,

$$v_{i,j} = z_1(i,j) \oplus z_2(i,j) \oplus \dots \oplus z_{N(i,j)}(i,j) \quad (V.50)$$

onde $\oplus$ significa soma módulo 2. Convém lembrar que K_i é o número de bits de informação do código B_i .

Seja $c_k(t)$, $0 \leq k \leq M-1$, um determinado sinal da constelação com representação binária

$$\underline{b}^{(k)} = [b_c^{(k)}, b_1^{(k)}, \dots, b_{m-1}^{(k)}] \quad (V.51)$$

Define-se

$$G_\infty(j,k) = \Pr [v_{0,j} = b_c^{(k)}, \dots, v_{m-1,j} = b_{m-1}^{(k)}] \quad (V.52)$$

Como os símbolos binários de entrada do codificador são considerados estatisticamente independentes, obtém-se

$$G_\infty(j,k) = \prod_{i=0}^{m-1} \Pr [v_{i,j} = b_i^{(k)}] \quad (V.53)$$

Se p é a probabilidade de ocorrência de dígito binário 1 na entrada do codificador e, por consequência, $(1-p)$ a de bit 0, então, de acordo com o apêndice V.4

$$G_{\infty}(j,k) = \prod_{i=0}^{m-1} \frac{1}{2} \left[1 + \left(1 - 2b_i^{(k)} \right) (1-2p)^{N(i,j)} \right] \quad (V.54)$$

A equação (V.47) pode ser reescrita como

$$F_{\ell,t} = \sum_{k=0}^{M-1} G_{\infty}(\ell,k) c_t^{(k)} \quad (V.55)$$

onde

$$\underline{c}^{(k)} = \left[c_1^{(k)}, c_2^{(k)}, \dots, c_a^{(k)} \right] \quad (V.54)$$

é o vetor de coeficientes normalizados referente a $c_k(t)$.

Considerem-se duas posições j e j' não necessariamente distintas da palavra-código. Cada elemento $v_{i,j}$, $0 \leq i \leq m-1$, da matriz-código V depende de $N(i,j,j')$ bits de entrada que não interferem em $v_{i,j'}$. Por outro lado, $N(i,j',j)$ bits de entrada influenciam $v_{i,j'}$ sem interferir em $v_{i,j}$ e $M(i,j,j') = M(i,j',j)$ bits intervêm tanto em $v_{i,j}$ como em $v_{i,j'}$.

Sendo $c_k(t)$ e $c_{k'}(t)$ dois sinais da constelação não necessariamente distintos, com representações binárias

$$\underline{b}^{(k)} = \left[b_c^{(k)}, b_1^{(k)}, \dots, b_{m-1}^{(k)} \right] \quad (V.57)$$

e

$$\underline{b}^{(k')} = \left[b_c^{(k')}, b_1^{(k')}, \dots, b_{m-1}^{(k')} \right] \quad (V.58)$$

respectivamente, define-se

$$\begin{aligned}
 G(j,j',k,k') = \Pr \left[v_{0,j} = b_0^{(k)}, \dots, v_{m-1,j} = b_{m-1}^{(k)}, \right. \\
 \left. v_{0,j'} = b_0^{(k')}, \dots, v_{m-1,j'} = b_{m-1}^{(k')} \right] \tag{V.59}
 \end{aligned}$$

Verifica-se, de acordo com o apêndice V.5, que, para $j \neq j'$

$$\begin{aligned}
 G_o(j,j',k,k') = \prod_{i=0}^{m-1} \frac{1}{4} \left[1 + \left(1 - 2b_i^{(k)} \right) \left(1 - 2b_i^{(k')} \right) \times \right. \\
 \times (1-2p)^{N(i,j)+N(i,j')-M(i,j,j')} + \left(1 - 2b_i^{(k)} \right) (1-2p)^{N(i,j)} + \\
 \left. + \left(1 - 2b_i^{(k')} \right) (1-2p)^{N(i,j')} \right] \tag{V.60}
 \end{aligned}$$

Para $j=j'$ obtem-se

$$G_o(j,j',k,k') = \begin{cases} 0 & , \quad k \neq k' \\ G_\infty(j,k) & , \quad k = k' \end{cases} \tag{V.61}$$

Finalmente chega-se a

$$H_o^{l,j}(r,s) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{k'=0}^{M-1} G_o(i,j,k,k') c_r^{(k)} c_s^{(k')} \tag{V.62}$$

para $i \neq j$, e também a

$$H_c^{l,i}(r,s) = \sum_{k=0}^{M-1} G_\infty(i,k) c_r^{(k)} c_s^{(k)} \tag{V.63}$$

O procedimento para determinação da densidade espectral de potência $R(f)$ é resumido a seguir.

1. Definidos a constelação e o mapeamento, obter as matrizes $\underline{A}$, $\underline{c}^{(k)}$ e $\underline{b}^{(k)}$, $k=0,1,\dots,M-1$, dadas pelas expressões (V.35), (V.56) e (V.51), respectivamente.
2. Escolhidos os códigos $B_0, B_1, \dots, B_{m-1}$, determinar os parâmetros $G_o(j,j',k,k')$, dado pelas expressões (V.60) e (V.61), para $j,j'=0,1,\dots,N-1$, $k,k'=0,1,\dots,M-1$, e $G_\infty(j,k)$, dado pela expressão (V.54), para $j=0,1,\dots,N-1$, $k=0,1,\dots,M-1$.

3. Calcular as matrizes $H_c^{l,j}$, dada pelas expressões (V.44), (V.62) e (V.63), e $H_\infty^{l,j}$, dada pelas expressões (V.44), (V.46) e (V.55), para $i,j=0,1,\dots,N-1$.
4. Determinar as matrizes D_o , dada pelas expressões (V.38) e (V.42), e D_∞ , dada pelas expressões (V.40) e (V.43).
5. Obter $R(f)$ através das expressões (V.26), (V.27), (V.28) e (V.23).

EXEMPLO 1 Considerar-se-á $p=0,4$

1. Constelação: 4-PSK.
Mapeamento: apresentado na Figura IV.4.

$$\underline{A} = \left[\sqrt{2T} \operatorname{Sa}(\pi f T) \exp(-j\pi f T) \; , \; \sqrt{2T} \operatorname{Sa}(\pi f T) \exp(-j\pi/2-j\pi f T) \right]$$

$\underline{c}^{(0)} = (1,0)$	$\underline{b}^{(0)} = (0,0)$
$\underline{c}^{(1)} = (0,1)$	$\underline{b}^{(1)} = (1,0)$
$\underline{c}^{(2)} = (-1,0)$	$\underline{b}^{(2)} = (0,1)$
$\underline{c}^{(3)} = (0,-1)$	$\underline{b}^{(3)} = (1,1)$

2. Códigos escolhidos de comprimento $N=4$:
 - * $B_o(4,1,4)$, código de repetição com matriz geradora

$$MG_o = [1 \; 1 \; 1 \; 1]$$
 - * $B_1(4,3,2)$, código de paridade com matriz geradora

$$MG_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz-código

$$V = \begin{bmatrix} v_{0,0} & v_{0,1} & v_{0,2} & v_{0,3} \\ v_{1,0} & v_{1,1} & v_{1,2} & v_{1,3} \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned}
 v_{0,0} &= v_{0,1} = v_{0,2} = v_{0,3} = u_0 \\
 v_{1,0} &= u_1 \\
 v_{1,1} &= u_2 \\
 v_{1,2} &= u_3 \\
 v_{1,3} &= u_1 \oplus u_2 \oplus u_3
 \end{aligned}$$

e $\underline{u} = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ é a mensagem binária de entrada do codificador.

$$\begin{aligned}
 NC(i,j) &= 1, \quad \text{para } i,j=0,1,2,3, \ i \neq 1, \ j \neq 3 \\
 &\quad 3, \quad \text{para } i=1 \text{ e } j=3 \\
 NC0(i,j) &= 0, \text{ para } i,j=0,1,2,3 \\
 NC1(i,j) &= 1, \text{ para } i,j=0,1,2, \ i \neq j \\
 NC1(i,i) &= 0, \text{ para } i=0,1,2,3 \\
 NC1(i,3) &= 0, \text{ para } i=0,1,2 \\
 NC1(3,j) &= 2, \text{ para } j=0,1,2 \\
 MC0(i,j) &= 1, \text{ para } i,j=0,1,2,3 \\
 MC1(i,j) &= 0, \text{ para } i,j=0,1,2, \ i \neq j \\
 MC1(i,i) &= 1, \text{ para } i=0,1,2 \\
 MC1(i,3) &= 1, \text{ para } i=0,1,2 \\
 MC1(3,3) &= 3
 \end{aligned}$$

$G_{\infty}(j,k)$	j	
	0,1,2	3
k		
0	9/25	189/625
1	6/25	126/625
2	6/25	186/625
3	4/25	124/625

$$G_o(i,i',k,k') = \begin{cases} 0, & k \neq k', \ i=0,1,2,3 \\ G_{\infty}(i,k), & k=k', \ i=0,1,2,3 \end{cases}$$

Para $j, j' = 0, 1, 2$:

$G(j, j', k, k')$	k'			
k	0	1	2	3
0	27/125	0	18/125	0
1	0	18/125	0	12/125
2	18/125	0	12/125	0
3	0	12/125	0	8/125

Para $j=0, 1, 2$:

$G(j, 3, k, k')$	k'			
k	0	1	2	3
0	117/625	0	108/625	0
1	0	78/625	0	72/625
2	72/625	0	78/625	0
3	0	48/625	0	52/625

3.

$$H_{\infty}^{i,j} = \begin{bmatrix} 9/625 & 6/625 \\ 6/625 & 4/625 \end{bmatrix} \quad \text{para } i, j=0, 1, 2$$

$$H_{\infty}^{i,3} = H_{\infty}^{3,i} = \begin{bmatrix} 9/15625 & 6/15625 \\ 6/15625 & 4/15625 \end{bmatrix} \quad \text{para } i=0, 1, 2$$

$$H_o^{3,3} = \begin{bmatrix} 9/390625 & 6/390625 \\ 6/390625 & 4/390625 \end{bmatrix}$$

$$H_{\infty}^{i,j} = \begin{bmatrix} 3/125 & 0 \\ 0 & 2/125 \end{bmatrix} \quad \text{para } i, j=0, 1, 2, 3, \quad i \neq j$$

$$H_o^{i,i} = \begin{bmatrix} 3/5 & 0 \\ 0 & 2/5 \end{bmatrix} \quad \text{para } i=0, 1, 2, 3$$

4.

$$D_o = 2T Sa^2(\pi f T) \begin{bmatrix} 1 & 1/25 & 1/25 & 1/25 \\ 1/25 & 1 & 1/25 & 1/25 \\ 1/25 & 1/25 & 1 & 1/25 \\ 1/25 & 1/25 & 1/25 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_{\infty} = 2T Sa^2(\pi f T) \begin{bmatrix} 13/625 & 13/625 & 13/625 & 13/15625 \\ 13/625 & 13/625 & 13/625 & 13/15625 \\ 13/625 & 13/625 & 13/625 & 13/15625 \\ 13/15625 & 13/15625 & 13/15625 & 13/15625 \end{bmatrix}$$

5.

$$R(f) = \frac{1}{990625} Sa^2(\pi f T) [769056 + 30300 \cos 2\pi f T + 22800 \cos 4\pi f T + 15300 \cos 6\pi f T] + \frac{1}{1562500 T} Sa^2(\pi f T) [12194 + 16575 \cos 2\pi f T + 8450 \cos 4\pi f T + 325 \cos 6\pi f T] \sum_{s=-\infty}^{\infty} \delta(f - s/4T)$$

V.4. ESPECTRO DOS SISTEMAS DE REFERÊNCIA

A determinação do espectro dos esquemas de referência pode se efetivar aplicando-se o procedimento exposto na seção V.3 com N=1. Neste caso, o sistema possui $M^{ref} = 2^{m_{ref}}$ sinais com representações binárias

$$\underline{b}^{(k)} = \left[b_c^{(k)}, b_1^{(k)}, \dots, b_{m_{ref}-1}^{(k)} \right], \quad k=0,1,\dots, M_{ref}-1 \quad (V.64)$$

e vetores de coeficientes normalizados referentes à base de funções ortonormais

$$\underline{c}^{(k)} = \left[c_1^{(k)}, c_2^{(k)}, \dots, c_Q^{(k)} \right], \quad k = 0,1, \dots, M_{ref}-1 \quad (V.65)$$

onde Q é a dimensionalidade do espaço de sinais.

Do fato do sistema não efetuar codificação e da aplicação dos parâmetros acima às expressões (V.52) e (V.59), obtêm-se

$$G_{\infty}(0,k) = \sum_{i=c}^{m_{ref}-1} (1-p) \left[1 - b_i^{(k)} \right] + p b_i^{(k)} \quad (V.66)$$

$$G_o(0,0,k,k') = \begin{cases} 0, & k \neq k' \\ G_{\infty}(0,k), & k = k' \end{cases} \quad (V.67)$$

Consequentemente,

$$H_{\infty}^{o,o}(r,s) = \sum_{k=c}^{M_{ref}-1} G_{\infty}(0,k) c_r^{(k)} \sum_{k'=c}^{M_{ref}-1} G_{\infty}(0,k') c_s^{(k')} \quad (V.68)$$

$$H_o^{o,o}(r,s) = \sum_{k=0}^{M_{ref}-1} G_{\infty}(0,k) c_r^{(k)} c_s^{(k)} \quad (V.69)$$

$$D_o = \underline{\Lambda} H_o^{o,o} \underline{\Lambda}^* \quad (V.70)$$

$$D_{\infty} = \underline{\Lambda} H_{\infty}^{o,o} \underline{\Lambda}^* \quad (V.71)$$

Por fim,

$$R(f) = \frac{1}{T_N} \left[R_c(f) + R_d(f) \right] \quad (V.72)$$

onde

$$R_c(f) = \underline{\Omega}^* \left[H_o^{o,o} - H_{\infty}^{o,o} \right] \underline{\Omega} \quad (V.73)$$

$$R_d(f) = \frac{1}{T_N} \underline{\Omega}^* H_{\infty}^{o,o} \underline{\Omega} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \delta(f-s/T) \quad (V.74)$$

EXEMPLO 2

Considerar-se-á $p=0,4$.

1. Constelação: 2-PSK

$$\underline{A} = \left[\sqrt{2T} \operatorname{Sa}(\pi f T) \exp(-j\pi f T) \right]$$

$$\underline{c}^{(0)} = (1) \quad \underline{b}^{(0)} = (0)$$

$$\underline{c}^{(1)} = (-1) \quad \underline{b}^{(1)} = (1)$$

$$2. \quad G_{\infty}(0,0) = 0,6$$

$$G_{\infty}(0,1) = 0,4$$

$$3. \quad H_{\infty}^{0,0}(1,1) = 0,04$$

$$H_0^{0,0}(1,1) = 1$$

$$4. \quad D_{\infty} = 0,08T \operatorname{Sa}^2(\pi f T)$$

$$D_0 = 2T \operatorname{Sa}^2(\pi f T)$$

$$5. \quad R(f) = 1,92 \operatorname{Sa}^2(\pi f T) + \frac{1}{T} 0,08 \delta(f)$$

V.5. ESPECTRO DE SISTEMAS COM FONTE DE MÁXIMA ENTROPIA

Quando os símbolos binários de entrada do codificador são equiprováveis, simplificações significativas no procedimento de cálculo do espectro do sistema de modulação codificada são obtidas.

Inicialmente, serão apresentadas algumas relações que os esquemas de modulação codificada expostos no capítulo III e otimizados no capítulo IV satisfazem.

$$\underline{R_1} \quad \sum_{k=0}^{M-1} c_r^{(k)} = 0, \quad r = 1, 2, \dots, Q$$

R_2

Se $\Lambda_r(f)\Lambda_s^*(f) + \Lambda_s^*(f)\Lambda_r(f) \neq 0$, $r \neq s$,

então $Z_{rs}^{(i)} = 0$, $i=1,2,\dots,m$

$$\text{onde } Z_{rs}^{(i)} = \frac{2^i}{M^2} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{k'=0}^{M-1} \Delta^{(i)}(k,k') c_r^{(k)} c_s^{(k')} \quad (\text{V.75})$$

$$\text{e } \Delta^{(i)}(k,k') = \begin{cases} 1 & , \text{ se } b_j^{(k)} = b_j^{(k')}, j=0,1,\dots,i-1 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (\text{V.76})$$

R_3

$$\sum_{r=1}^Q Z_r = 1$$

$$\text{onde } Z_r = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \left[c_r^{(k)} \right]^2 \quad (\text{V.77})$$

R_4 Se o código B_i é tal que determine $v_{i,j} = v_{i,j'}$, $j \neq j'$, na matriz-código V dada em (V.48), para qualquer bloco de entrada $\underline{u} = (u_0, u_1, \dots, u_{L-1})$, então os códigos $B_0, B_1, \dots, B_{i-1}$ definem $v_{\ell,j} = v_{\ell,j'}$, $\ell=0,1,\dots,i-1$, para qualquer vetor mensagem $\underline{u}$. Além disto, o código B_{m-1} não impõe dependência total entre qualquer par de posições da linha $m-1$ da matriz V .

As relações acima permitem enunciar o seguinte teorema.

Teorema 3 Se um esquema de modulação codificada projetado segundo os requisitos definidos no Capítulo III atende as relações R_1 e R_4 acima e a fonte é de máxima entropia, ou seja os símbolos binários de entrada do codificador são equiprováveis, então a densidade espectral de potência do sistema em banda base é dada por

$$R(f) = \frac{1}{T} \sum_{r=1}^Q Z_r \left| \Lambda_r(f) \right|^2 + \frac{2}{T_N} \sum_{n=1}^{N-1} \cos(2\pi f n T) \sum_{r=1}^Q \left| \Lambda_r(f) \right|^2 \times \\ \times \sum_{i=0}^{N-n-1} Z_{rr}^{(Y(i,i+n))} \quad (\text{V.78})$$

onde Z_r é expresso pela equação (V.77), $Z_{rr}^{(i)}$ pela expressão (V.75) e $Y(j,j')$ é o número de pares de elementos da matriz-código V pertencentes às colunas j e j' distintas e à mesma linha sujeitos à dependência total, conforme a relação R_4.

Prova A demonstração do teorema 3 segue os passos do procedimento apresentado no final da seção V.3.

Da expressão (V.53) e do fato dos símbolos de entrada do codificador serem equiprováveis, obtêm-se

$$G_{\infty}(j,k) = \frac{1}{M}, \quad j=0,1,\dots,N-1, \quad k=0,1,\dots,M-1 \quad (V.79)$$

Seja $Y(j,j')$, onde j e j' designam colunas distintas da matriz-código V , o número de pares de elementos destas colunas sujeitos à dependência total de acordo com a relação R_4, ou seja, que satisfazem $N(i,j,j') = N(i,j',j) = 0$. Então, a partir da equação (V.59), para $j,j'=0,1,\dots,N-1$, $j \neq j'$, $k,k'=0,1,\dots,M-1$, obtêm-se

$$G(j,j',k,k') = \frac{2^{Y(j,j')}}{M^2} \Delta^{(Y(j,j'))}(k,k') \quad (V.80)$$

onde $\Delta^{(i)}(k,k')$ é dado pela expressão (V.76).

Por outro lado, das expressões (V.61) e (V.79),

$$G_0(j,j',k,k') = \begin{cases} 1/M & , \quad k=k' \\ 0 & , \quad k \neq k' \end{cases} \quad (V.81)$$

Aplicando os resultados acima às expressões (V.46), (V.55), (V.62) e (V.63), chega-se a

$$H_{\infty}^{i,j}(r,s) = \frac{1}{M^2} \sum_{k=0}^{M-1} c_r^{(k)} \sum_{k'=0}^{M-1} c_s^{(k')} \quad (V.82)$$

$$H_c^{i,j}(r,s) = \frac{2^{Y(j,j')}}{M^2} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{k'=0}^{M-1} \Delta^{(Y(i,j))}(k,k') c_r^{(k)} c_s^{(k')}, \quad i \neq j \quad (V.83)$$

$$H_c^{i,i}(r,s) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} c_r^{(k)} c_s^{(k)} \quad (V.84)$$

Observando as relações R_1 e R_3 e a expressão (V.75) verifica-se

$$H_{\infty}^{i,j}(r,s) = 0 \quad , \quad \forall r,s \quad (V.85)$$

$$H_o^{i,j}(r,s) = Z_{rs}^{(Y(i,j))} \quad , \quad i \neq j \quad (V.86)$$

$$H_o^{i,i}(r,s) = \begin{cases} Z_r & , \quad r=s \\ Z_{rs}^{(m)} & , \quad r \neq s \end{cases} \quad (V.87)$$

De acordo com as expressões (V.42) e (V.43),

$$D_{\infty}(i,j) = 0 \quad , \quad i,j=0,1,\dots,N-1 \quad (V.88)$$

$$D_o(i,j) = \sum_{r=1}^Q \sum_{s=1}^Q Z_{rs}^{(Y(i,j))} \Lambda_r(f) \Lambda_s^*(f) \quad , \quad i \neq j \quad (V.89)$$

$$D_o(i,i) = \sum_{r=1}^Q Z_r |\Lambda_r(f)|^2 + \sum_{r=1}^Q \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^Q Z_{rs}^{(m)} \Lambda_r(f) \Lambda_s^*(f) \quad (V.90)$$

As expressões (V.89) e (V.90) podem ser reescritas como

$$D_o(i,j) = \sum_{r=1}^Q Z_{rr}^{(Y(i,j))} |\Lambda_r(f)|^2 + \sum_{r=1}^{Q-1} \sum_{s=r+1}^Q Z_{rs}^{(Y(i,j))} [\Lambda_r(f) \Lambda_s^*(f) + \Lambda_r^*(f) \Lambda_s(f)] \quad , \quad i \neq j \quad (V.91)$$

$$D_o(i,i) = \sum_{r=1}^Q Z_r |\Lambda_r(f)|^2 + \sum_{r=1}^{Q-1} \sum_{s=r+1}^Q Z_{rs}^{(m)} [\Lambda_r(f) \Lambda_s^*(f) + \Lambda_r^*(f) \Lambda_s(f)] \quad (V.92)$$

A relação R_2 determina

$$D_o(i,j) = \sum_{r=1}^Q Z_{rr}^{(Y(i,j))} |\Lambda_r(f)|^2 \quad , \quad i \neq j \quad (V.93)$$

$$D_o(i,i) = \sum_{r=1}^Q Z_r \left| \Lambda_r(f) \right|^2 \quad (V.94)$$

A partir das expressões (V.23), (V.38) e (V.40),

$$\underline{\Omega}^* D_o \underline{\Omega} = 0 \quad (V.95)$$

$$\underline{\Omega}^* D_o \underline{\Omega} = N \sum_{r=1}^Q Z_r \left| \Lambda_r(f) \right|^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\substack{n'=0 \\ n' \neq n}}^{N-1} D_o(n,n') \exp[j2\pi f(n-n')T] \quad (V.96)$$

Como $D_o(n,n') = D_o(n',n)$, verifica-se que

$$\begin{aligned} \underline{\Omega}^* D_o \underline{\Omega} = N \sum_{r=1}^Q Z_r \left| \Lambda_r(f) \right|^2 + 2 \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{n'=n+1}^{N-1} \cos[2\pi f(n-n')T] \sum_{r=1}^Q \\ Z_{rr}^{(Y(n,n'))} \left| \Lambda_r(f) \right|^2 \end{aligned} \quad (V.97)$$

Finalmente, utilizando as expressões (V.26), (V.27) e (V.28), obtem-se

$$\begin{aligned} R(f) = \frac{1}{T} \sum_{r=1}^Q Z_r \left| \Lambda_r(f) \right|^2 + \frac{2}{T_N} \sum_{n=1}^{N-1} \cos(2\pi f n T) \sum_{r=1}^Q \\ \left| \Lambda_r(f) \right|^2 \sum_{i=0}^{N-n-1} Z_{rr}^{(Y(i,i+n))} \end{aligned} \quad (V.98)$$

como se desejava demonstrar.

As tabelas V.1 e V.2 apresentam os valores de alguns parâmetros utilizados na expressão (V.78) para as constelações tratadas neste trabalho.

A observação de características particulares das constelações e dos dados das tabelas V.1 e V.2 permite enunciar os seguintes corolários.

Dimensionalidade do Sistema	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
1	1	---	---	---
2	1/2	1/2	---	---
3	1/4	1/4	1/2	---
4	1/4	1/4	1/4	1/4

TABELA V.1 - VALOR DE Z_r , $r=1,2,\dots,Q$

SISTEMA	$Z_{rr}^{(1)}$	$Z_{rr}^{(2)}$	$Z_{rr}^{(3)}$	$Z_{rr}^{(4)}$	$Z_{rr}^{(5)}$	$Z_{rr}^{(6)}$
4-PAM	1/5	1/2	---	---	---	---
8-PAM	1/21	5/21	1/2	---	---	---
16-PAM	1/85	5/85	21/85	1/2	---	---
8-QAM	1/10	1/10	1/2	---	---	---
16-QAM	0	1/10	1/10	1/2	---	---
32-QAM	1/42	1/17	5/42	5/42	1/2	---
64-QAM	0	1/42	1/17	5/42	5/42	1/2
M-PSK	$Z_{rr}^{(i)}=0, i=1,\dots,m-1$		$Z_{11}^{(m)} = \frac{1}{2}$ $Z_{22}^{(m)} = \frac{1}{2}$			
2F(2x(M/2)PSK	$Z_{rr}^{(i)}=0, i=1,\dots,m-1$		$Z_{11}^{(m)} = \frac{1}{4}$ $Z_{22}^{(m)} = \frac{1}{4}$ $Z_{33}^{(m)} = \frac{1}{2}$			
2F/PxQ PSK	$Z_{rr}^{(i)}=0, i=1,\dots,m-1$		$Z_{11}^{(m)} = \frac{1}{4}$ $Z_{22}^{(m)} = \frac{1}{4}$ $Z_{33}^{(m)} = \frac{1}{4}$ $Z_{44}^{(m)} = \frac{1}{4}$			
2FSK/($\frac{M}{2}$) PSK	$Z_{rr}^{(i)}=0, i=1,\dots,m-1$		$Z_{11}^{(m)} = \frac{1}{4}$ $Z_{22}^{(m)} = \frac{1}{4}$ $Z_{33}^{(m)} = \frac{1}{4}$ $Z_{44}^{(m)} = \frac{1}{4}$			

TABELA V.2 - VALOR DE $Z_{rr}^{(i)}$, $r=1,2,\dots,Q$, $i=1,2,\dots,m$

Corolário 1 Se nenhum par de posições da matriz-código V está sujeito à dependência total, ou seja, se $Y(i,j)=0$, $\forall i,j, i \neq j$, então

$$R(f) = \frac{1}{T} \sum_{r=1}^Q Z_r \left| \Lambda_r(f) \right|^2 \quad (V.99)$$

Corolário 2 Para os sistemas de referência,

$$R(f) = \frac{1}{T} \sum_{r=1}^Q Z_r \left| \Lambda_r(f) \right|^2 \quad (V.100)$$

Corolário 3 Para os sistemas de modulação codificada aplicados a constelações do tipo M-PSK, 2-FSK/(M/2)-PSK, 2F/2x(M/2) PSK e 2F/PxQ PSK, que têm $Z_{rr}^{(i)}=0$, $i=1,2,\dots,m-1$,

$$R(f) = \frac{1}{T} \sum_{r=1}^Q Z_r \left| \Lambda_r(f) \right|^2 \quad (V.101)$$

Portanto, para os sistemas de referência, sistemas em que nenhum par de posições da matriz-código V está sujeito à dependência total, sistemas M-PSK, 2-FSK/(M/2)-PSK, 2F/2x(M/2) PSK ou 2F/PxQ PSK, a densidade espectral de potência é dada por uma das expressões abaixo.

SISTEMAS EM 2 DIMENSÕES:

$$R(f) = 2 Sa^2(\pi f T) \quad (V.102)$$

SISTEMAS EM 3 OU 4 DIMENSÕES:

$$R(f) = Sa^2[\pi T(f-h/2T)] + Sa^2[\pi T(f+h/2T)] \quad (V.103)$$

Do corolário 3 conclui-se que, quando a fonte é de máxima entropia e o sistema de modulação codificada aplicado a uma constelação do tipo M-PSK, 2-FSK/(M/2)-PSK, 2F/2x(M/2) PSK ou 2F/PxQ PSK atende as relações R_1 a R_4, o processo de codificação não introduz qualquer tipo de alteração nas características espectrais impostas pela constelação utilizada.

Por outro lado, os sistemas que usam constelações M-PAM ou M-QAM estão sujeitos à conformação espectral. Porém, como a maior parte dos códigos expostos no capítulo IV não determinam dependência total entre posições da matriz-código V, estes sistemas, em geral, apresentam densidade espectral de potência descrita pela expressão (V.99).

APENDICE V.1

A função de autocorrelação do processo cicloestacionário $r(t)$ é dada pela expressão (V.17). Utilizando a notação da sessão V.2, obtem-se

$$\begin{aligned}
 R_r(\tau) &= E [r(t)r(t+\tau)] \\
 &= E \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{j'=-\infty}^{\infty} r^{(j)}(t-jT_N) r^{(j')}(t+\tau-j'T_N) \right] \\
 &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} E \left[r^{(j)}(t-jT_N) r^{(j+s)}(t+\tau-jT_N-sT_N) \right]
 \end{aligned}
 \tag{V.1.1}$$

A média a ser efetuada em (V.1.1) é tomada considerando-se os 2^L sinais codificados distintos, ou seja,

$$\begin{aligned}
 R_r(\tau) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{u=1}^{2^L} \sum_{v=1}^{2^L} \frac{1}{T_N} \int_0^{T_N} dt w^{(u)}(t-jT_N) w^{(v)}(t+\tau- \\
 &\quad -jT_N-sT_N) \text{ Prob} [r^{(j)}(t) = w^{(u)}(t), r^{(j+s)}(t) = w^{(v)}(t)]
 \end{aligned}
 \tag{V.1.2}$$

Aplicando as expressões (V.19) e (V.20),

$$R_r(\tau) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{u=1}^{2^L} \sum_{v=1}^{2^L} \frac{1}{T_N} \int_0^{T_N} dt \, w^{(u)}(t-jT_N) w^{(v)}(t+\tau-jT_N-sT_N) P_s^{uv} \quad (V.1.3)$$

Fazendo-se $t'=t-jT_N$, chega-se a

$$R_r(\tau) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{u=1}^{2^L} \sum_{v=1}^{2^L} \frac{1}{T_N} \int_0^{T_N} dt' \, w^{(u)}(t') P_s^{uv} w^{(v)}(t'+\tau-sT_N) \quad (V.1.4)$$

que corresponde à expressão (V.18) desejada pois $w^{(u)}(t') = 0$ fora do intervalo $[0, T_N]$.

APENDICE V.2

A transformada de Fourier de $R_r(\tau)$ é dada por

$$\begin{aligned} R(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_r(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp(-j2\pi f\tau) \left[\sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_N} \sum_{u=1}^{2^L} \sum_{v=1}^{2^L} \int_{-\infty}^{\infty} dt \, w^{(u)}(t) \right. \\ &\quad \left. P_s^{uv} w^{(v)}(t+\tau-sT_N) \right] \end{aligned} \quad (V.2.1)$$

Trocando a ordem das integrações,

$$\begin{aligned}
 R(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_N} \sum_{u=1}^{2^L} \sum_{v=1}^{2^L} w^{(u)}(t) P_s^{uv} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp(-j2\pi f\tau) \\
 &\quad w^{(v)}(t+\tau-sT_N) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_N} \sum_{u=1}^{2^L} \sum_{v=1}^{2^L} w^{(u)}(t) P_s^{uv} W^{(v)}(f) \exp[-j2\pi \\
 &\quad f(t-sT_N)]
 \end{aligned} \tag{V.2.2}$$

onde $W^{(v)}(f)$ é a transformada de Fourier de $w^{(v)}(t)$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
 R(f) &= \frac{1}{T_N} \sum_{u=1}^{2^L} \sum_{v=1}^{2^L} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dt w^{(u)}(t) \exp(j2\pi ft) \right] \left[\sum_{s=-\infty}^{\infty} P_s^{uv} \right. \\
 &\quad \left. \exp(-j2\pi fsT_N) W^{(v)}(f) \right] \\
 &= \frac{1}{T_N} \sum_{u=1}^{2^L} \sum_{v=1}^{2^L} W^{(u)*}(f) \sum_{s=-\infty}^{\infty} P_s^{uv} \exp(-j2\pi fsT_N) W^{(v)}(f)
 \end{aligned} \tag{V.2.3}$$

que é a expressão desejada, dada em (V.21)

APENDICE V.3

A partir da expressão (V.25) obtem-se,

$$\begin{aligned}
 R(f) &= \frac{1}{T_N} \underline{\Omega}^* W^* P_o W \underline{\Omega} + \frac{1}{T_N} \sum_{s \neq 0} \exp(-j2\pi fsT_N) \underline{\Omega}^* W^* P_s W \underline{\Omega} \\
 &= \frac{1}{T_N} \underline{\Omega}^* W^* P_o W \underline{\Omega} + \frac{1}{T_N} \underline{\Omega}^* W^* P_{\infty} W \underline{\Omega} \sum_{s \neq 0} \exp(-j2\pi fsT_N)
 \end{aligned} \tag{V.3.1}$$

Utilizando as expressões (V.29) e (V.30), consegue-se

$$R(f) = \frac{1}{T_N} \left[\underline{\Omega}^* D_o \underline{\Omega} - \underline{\Omega}^* D_{\infty} \underline{\Omega} \right] + \frac{1}{T_N} \underline{\Omega}^* D_{\infty} \underline{\Omega} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi fsT_N) \tag{V.3.2}$$

ou melhor,

$$R(f) = \frac{1}{T_N} [R_c(f) + R_d(f)] \quad (V.3.3)$$

onde

$$R_c(f) = \underline{\Omega}^* D_0 \underline{\Omega} - \underline{\Omega}^* D_\infty \underline{\Omega} \quad (V.3.4)$$

$$R_d(f) = \frac{1}{T_N} \underline{\Omega}^* D_\infty \underline{\Omega} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \delta(f - s/T_N) \quad (V.3.5)$$

que são as expressões (V.26), (V.27) e (V.28) almejadas.

APENDICE V.4

Seja $c_k(t)$ um sinal da constelação, com representação binária

$$\underline{b}^{(k)} = [b_c^{(k)}, b_1^{(k)}, \dots, b_{m-1}^{(k)}] \quad (V.4.1)$$

onde m é o logaritmo na base 2 do número de sinais.

Se os elementos da j -ésima coluna da matriz-código V são determinados, de acordo com a notação introduzida na seção V.3, por

$$V_{i,j} = z_1(i,j) \oplus \dots \oplus z_{N(i,j)}(i,j), \quad i=0,1,\dots,m-1 \quad (V.4.2)$$

então

$$\Pr [v_{i,j} = b_i^{(k)}] = \Pr [z_1(i,j) \oplus \dots \oplus z_{N(i,j)}(i,j) = b_i^{(k)}] \quad (V.4.3)$$

Como

$$\Pr [z_\ell(i,j)=1] = 1 - \Pr [z_\ell(i,j)=0] = p, \quad \forall_\ell \quad (V.4.4)$$

onde p é a probabilidade de ocorrência de dígito binário 1 na entrada do codificador, obtem-se

$$\Pr [v_{i,j} = 0] = 1 - \left[\Pr [v_{i,j} = 1] \right] = \sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell \text{ par}}}^{N(i,j)} \binom{N(i,j)}{\ell} p^{\ell} (1-p)^{N(i,j)-\ell} \quad (\text{V. 4.5})$$

Sabe-se que

$$\sum_{\ell=0}^{N(i,j)} \binom{N(i,j)}{\ell} p^{\ell} (1-p)^{N(i,j)-\ell} = 1 \quad (\text{V. 4.6})$$

e

$$\sum_{\ell=0}^{N(i,j)} \binom{N(i,j)}{\ell} (-1)^{\ell} p^{\ell} (1-p)^{N(i,j)-\ell} = (1-2p)^{N(i,j)} \quad (\text{V. 4.7})$$

Somando as expressões (V.4.6) e (V.4.7), e dividindo o resultado por 2, obtém-se

$$\sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell \text{ par}}}^{N(i,j)} \binom{N(i,j)}{\ell} p^{\ell} (1-p)^{N(i,j)-\ell} = \frac{1}{2} \left[1 + (1-2p)^{N(i,j)} \right] \quad (\text{V. 4.8})$$

Portanto,

$$\Pr [v_{i,j} = 0] = 1 - \Pr [v_{i,j} = 1] = \frac{1}{2} \left[1 + (1-2p)^{N(i,j)} \right] \quad (\text{V. 4.9})$$

ou seja,

$$\Pr [v_{i,j} = b_i^{(k)}] = \frac{1}{2} \left[1 + (1-2b_i^{(k)}) (1-2p)^{N(i,j)} \right] \quad (\text{V. 4.10})$$

Consequentemente, a expressão (V.53),

$$G_{\infty}(j, k) = \prod_{i=0}^{m-1} \Pr [v_{i,j} = b_i^{(k)}] \quad (\text{V. 4.11})$$

pode ser dada por

$$G_{\infty}(j,k) = \prod_{i=0}^{m-1} \frac{1}{2} \left[1 + \left(1 - 2b_i^{(k)} \right) (1-2p)^{N(i,j)} \right] \tag{V.4.12}$$

APENDICE V.5

Considerem-se $c_k(t)$ e $c_{k'}(t)$ dois sinais não necessariamente distintos da constelação, com representações binárias

$$\underline{b}^{(k)} = \left[b_0^{(k)}, b_1^{(k)}, \dots, b_{m-1}^{(k)} \right] \tag{V.5.1}$$

e

$$\underline{b}^{(k')} = \left[b_0^{(k')}, b_1^{(k')}, \dots, b_{m-1}^{(k')} \right] \tag{V.5.2}$$

respectivamente.

Seja um par de posições da matriz-código V , $v_{i,j}$ e $v_{i,j'}$, $0 \leq i \leq m-1$, $j \neq j'$, com parâmetros $N(i,j,j')$, $N(i,j',j)$ e $M(i,j,j')$, definidos na seção V.3.

Pode-se escrever

$$v_{i,j} = a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_{N(i,j,j')} \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus \dots \oplus c_{M(i,j,j')} \tag{V.5.3}$$

e

$$v_{i,j} = b_1 \oplus b_2 \oplus \dots \oplus b_{N(i,j,j')} \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus \dots \oplus c_{M(i,j,j')} \tag{V.5.4}$$

onde a_ℓ , $\ell = 1, 2, \dots, N(i,j,j')$; b_ℓ , $\ell = 1, 2, \dots, N(i,j',j)$; c_ℓ , $\ell=1, 2, \dots, M(i,j,j')$, denotam elementos distintos pertencentes ao vetor mensagem $\underline{u} = [u_0, u_1, \dots, u_{L-1}]$.

Definindo

$$S_1 = a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_{N(i,j,j')} \quad (V.5.5)$$

$$S_2 = b_1 \oplus b_2 \oplus \dots \oplus b_{N(i,j',j)} \quad (V.5.6)$$

$$S_3 = c_1 \oplus c_2 \oplus \dots \oplus c_{M(i,j,j')} \quad (V.5.7)$$

obtem-se

$$\begin{aligned} \Pr \left[v_{i,j} = b_i^{(k)}, v_{i,j'} = b_i^{(k')} \right] &= \Pr \left[S_1 = b_i^{(k)} \right] \Pr \left[S_2 = b_i^{(k')} \right] \Pr \left[S_3 = 0 \right] + \\ &+ \Pr \left[S_1 = 1 \oplus b_i^{(k)} \right] \Pr \left[S_2 = 1 \oplus b_i^{(k')} \right] \Pr \left[S_3 = 1 \right] \end{aligned} \quad (V.5.8)$$

Utilizando resultados do apêndice V.4,

$$\begin{aligned} \Pr \left[v_{i,j} = b_i^{(k)}, v_{i,j'} = b_i^{(k')} \right] &= \frac{1}{8} \left[1 + \left(1 - 2b_i^{(k)} \right) (1-2p)^{N(i,j,j')} \right] \times \\ &\times \left[1 + \left(1 - 2b_i^{(k')} \right) (1-2p)^{N(i,j',j)} \right] \left[1 + (1-2p)^{M(i,j,j')} \right] + \frac{1}{8} \left[1 - \right. \\ &- \left. \left(1 - 2b_i^{(k)} \right) (1-2p)^{N(i,j,j')} \right] \left[1 - \left(1 - 2b_i^{(k')} \right) (1-2p)^{N(i,j',j)} \right] \times \\ &\times \left[1 - (1-2p)^{M(i,j,j')} \right] \end{aligned} \quad (V.5.9)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \Pr \left[v_{i,j} = b_i^{(k)}, v_{i,j'} = b_i^{(k')} \right] &= \frac{1}{4} \left[1 + \left(1 - 2b_i^{(k)} \right) \left(1 - 2b_i^{(k')} \right) (1 - \right. \\ &- 2p)^{N(i,j)+N(i,j')-M(i,j,j')} + \left. \left(1 - 2b_i^{(k)} \right) (1-2p)^{N(i,j)} + \left(1 - 2b_i^{(k')} \right) (1-2p)^{N(i,j')} \right] \times \\ &\times (1-2p)^{N(i,j')} \end{aligned} \quad (V.5.10)$$

Consequentemente, a equação (V.59), também dada por

$$G_o(j,j',k,k') = \prod_{i=0}^{m-1} \Pr \left[v_{i,j} = b_i^{(k)}, v_{i,j'} = b_i^{(k')} \right] \quad (V.5.11)$$

pode ser expressa como

$$G_c(j, j', k, k') = \prod_{i=0}^{m-1} \frac{1}{4} \left[1 + \left(1 - 2b_i^{(k)} \right) \left(1 - 2b_i^{(k')} \right) (1-2p)^{N(i, j) + N(i, j') + M(i, j, j')} + \left(1 - 2b_i^{(k)} \right) (1-2p)^{N(i, j)} + \left(1 - 2b_i^{(k')} \right) (1-2p)^{N(i, j')} \right] \quad (V.5.12)$$

Se $j=j'$, da expressão (V.59), obtem-se

$$G_o(j, j', k, k') = G_o(j, j, k, k') = \prod_{i=0}^{m-1} \Pr \left[v_{i,j} = b_i^{(k)}, v_{i,j} = b_i^{(k')} \right] \quad (V.5.13)$$

Como

$$\prod_{i=0}^{m-1} \Pr \left[v_{i,j} = b_i^{(k)}, v_{i,j} = b_i^{(k')} \right] = \begin{cases} \prod_{i=0}^{m-1} \Pr \left[v_{i,j} = b_i^{(k)} \right], & k=k' \\ 0, & k \neq k' \end{cases} \quad (V.5.14)$$

então

$$G_o(j, j', k, k') = \begin{cases} G_{\infty}(j, k), & k=k' \\ 0, & k \neq k' \end{cases} \quad (V.5.15)$$

CAPÍTULO VI

ESQUEMAS DE MODULAÇÃO CODIFICADA COM ASSIMETRIA ESPECTRAL

VI.1. INTRODUÇÃO

O projeto dos esquemas de modulação codificada tratados nos capítulos III e IV envolve a otimização do código para uma dada constelação anteriormente escolhida, ou seja, não há uma simultânea otimização da distribuição de pontos no espaço de sinais que constitui a constelação.

Recentemente, Divsalar/Simon/Yuen [14] propuseram uma classe de esquemas de modulação codificada controlados por códigos convolucionais aplicados a constelações assimétricas. A otimização efetivada considerava parâmetros do código e da assimetria de constelações típicas. Pequenos ganhos em relação aos esquemas com constelações simétricas foram obtidos. Contudo, este procedimento não se aplica aos esquemas de modulação codificada controlados por códigos de bloco tratados neste trabalho.

Neste capítulo, será apresentada uma classe de sistemas de modulação codificada que utilizam constelações regulares mas com características espectrais particulares, em que se verifica assimetria espectral, ou seja, ocorre um desbalanceamento do espectro em torno da frequência central. Estes esquemas podem ser também ser projetados aplicando-se códigos convolucionais.

VI.2. CONTELAÇÕES COM ASSIMETRIA ESPECTRAL

Os conjuntos de sinais apresentados nesta seção constituem essencialmente uma generalização da classe de constelações tratada por Markman [21], em que se explora uma melhor distribuição dos pontos no espaço de sinais. Tais constelações agrupam sinais do tipo.

$$c_i(t) = A \sqrt{\frac{2}{T}} \left[\frac{1}{\sqrt{1+\delta}} \cos\left(w_c t + \pi h t / T + \theta_i\right) + \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{1+\delta}} \cos\left(w_c t - \pi h t / T + \phi_i\right) \right],$$
$$0 \leq t < T, \quad i=0,1,\dots,M-1 \quad (\text{VI.1})$$

onde δ , denominado fator de simetria, expressa o desbalanceamento espectral e A é uma constante. Considerar-se-á $0 \leq \delta < 1$, pois neste intervalo ganhos podem ser obtidos em relação aos sistemas simétricos espectralmente, que apresentam $\delta=1$. O estudo será concentrado nos casos em que h é inteiro.

As funções ortonormais consideradas são as mesmas adotadas anteriormente no capítulo II, para sistemas em 3 ou 4 dimensões. Desse modo, os vetores de coeficientes normalizados aos sinais dados em (VI.1) são da forma

$$c_i = \left[\frac{1}{\sqrt{1+\delta}} \cos\theta_i, \frac{1}{\sqrt{1+\delta}} \sin\theta_i, \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{1+\delta}} \cos\phi_i, \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{1+\delta}} \sin\phi_i \right],$$

$i=0,1,\dots,M-1$ (VI.2)

Os esquemas em 3 e 4 dimensões especificados a seguir serão discutidos.

Sistemas em 3 dimensões

Denominação: A2F/2x(M/2) PSK

$\theta_i \in [0, 4\pi/M, \dots, 2\pi(1-2/M)]$

$\phi_i \in [0, \pi]$

Sistemas em 4 dimensões

Denominação: A2F/PxQ PSK (PxQ=M, o número de sinais)

$\theta_i \in [0, 4\pi/Q, \dots, 2\pi(1-2/Q)]$

$\phi_i \in [0, 4\pi/P, \dots, 2\pi(1-2/P)]$

As curvas de capacidade de canal para as constelações citadas são apresentadas nas figuras VI.1 a VI.3, para diversos valores de δ e M.

Observa-se que a região ótima de δ em relação à capacidade de canal para o sistema A2F/2x4 PSK está em torno de $\delta = 0,5$. Para o sistema A2F/2x8 PSK, esta região fica em torno de $\delta = 0,25$ e para o sistema A2F/ 4x4 PSK, em torno de $\delta = 1,0$.

Ganhos teóricos de aproximadamente 0,3 dB são obtidos por sistemas A2F/2x4 PSK, com δ na região mais favorável, em relação ao sistema simétrico espectralmente 2F/2x4 PSK. Ganhos teóricos de 0,8 dB são verificados pelo sistema 2F/2x8 PSK em relação aos sistemas 2F/2x8 PSK. Para o sistema A2F/4x4 PSK, o esquema espectralmente simétrico é o mais indicado teoricamente.

As características espectrais dos sistemas com assimetria espectral são discutidas na seção VI.5.

SISTEMA A2F/2x4-PSK

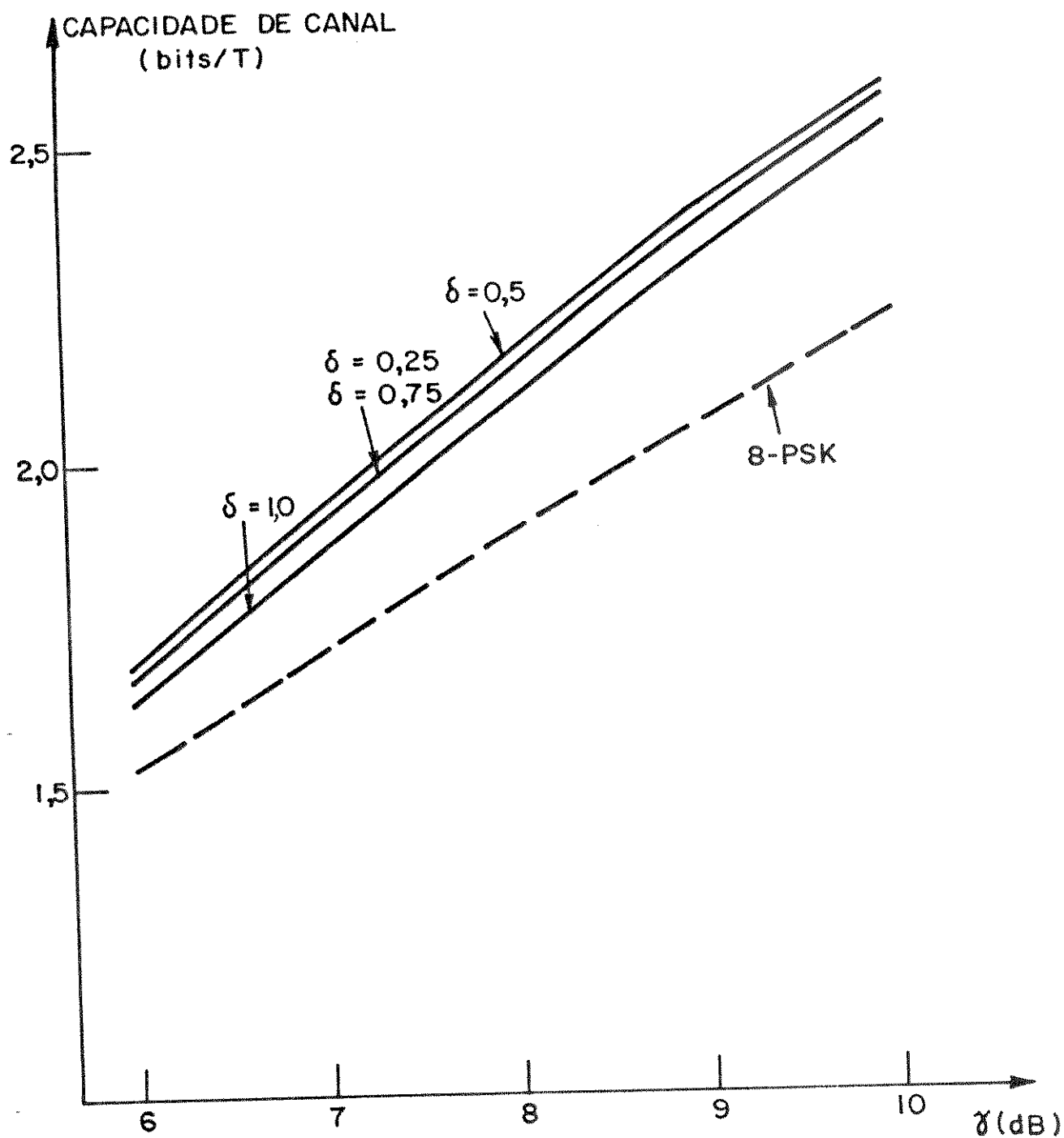


FIGURA VI.1
CAPACIDADE DE CANAL PARA O SISTEMA A2F/2x4-PSK

SISTEMA A2F/2x8-PSK

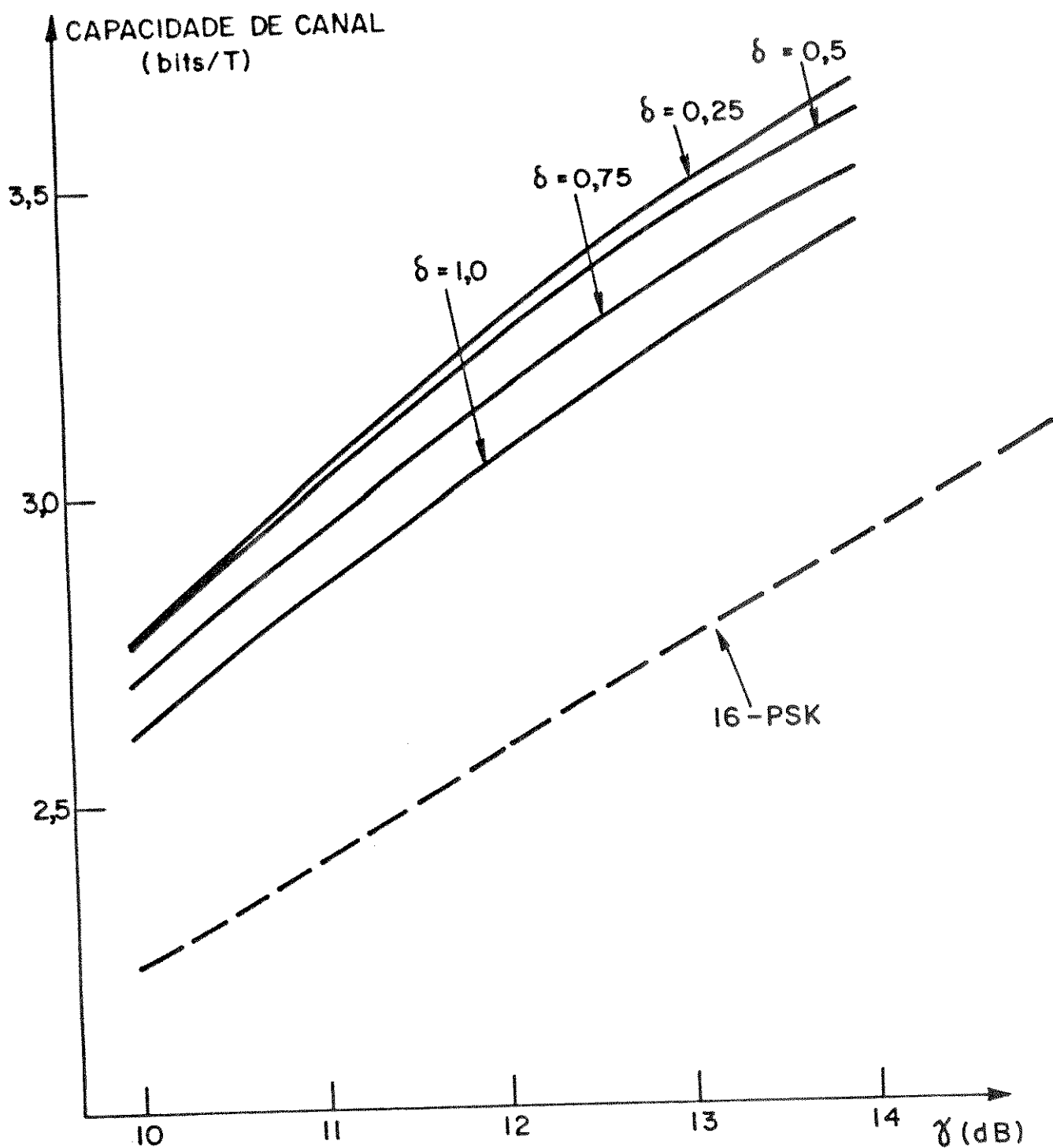


FIGURA VI.2
CAPACIDADE DE CANAL PARA O SISTEMA A2F/2x8-PSK

SISTEMA A2F / 4x4 PSK

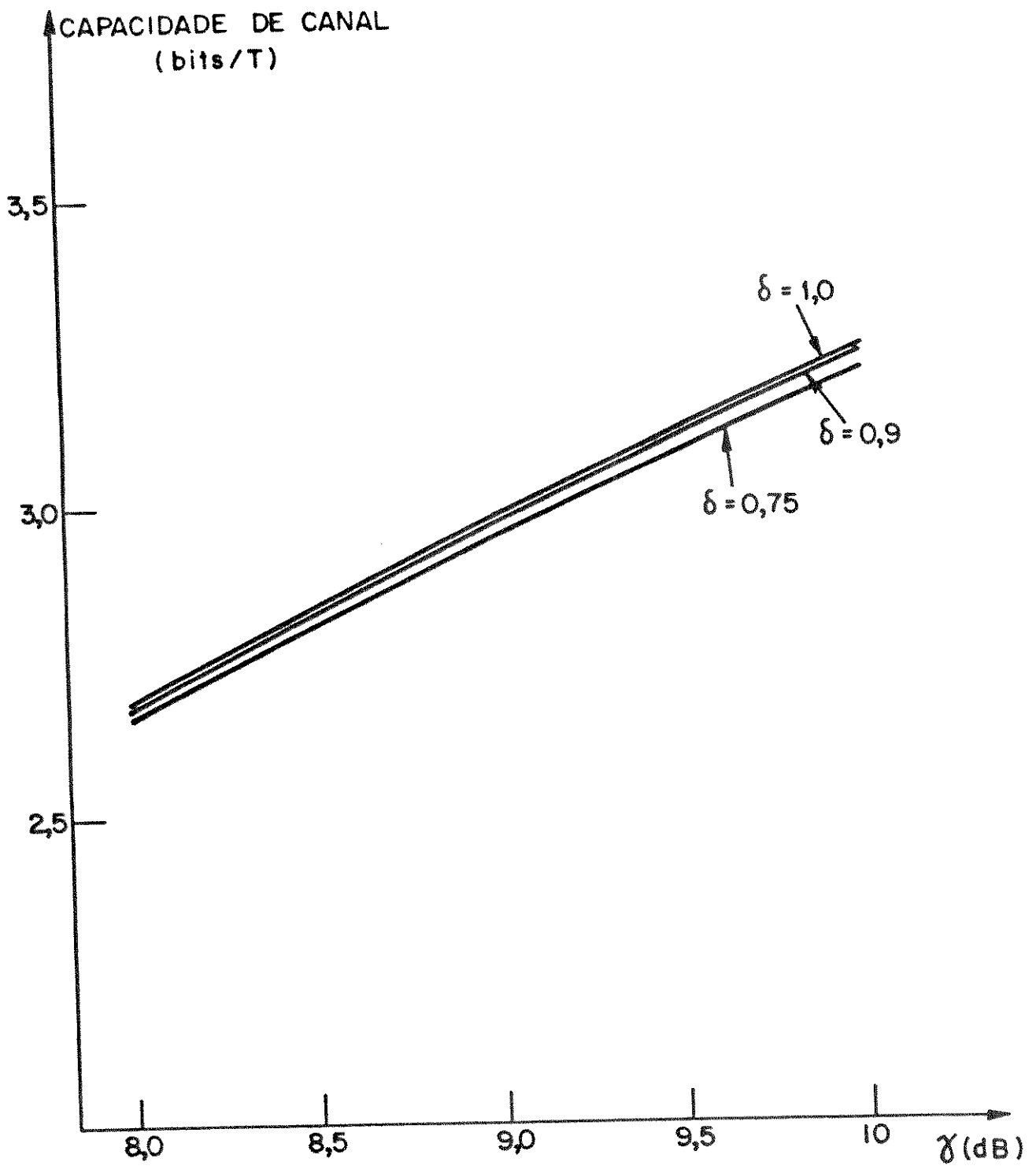


FIGURA VI. 3
CAPACIDADE DE CANAL PARA O SISTEMA A2F/4x4-PSK

VI.3. MAPEAMENTOS BINÁRIOS E RELAÇÕES DE DISTÂNCIA

Ao contrário da classe dos esquemas tratados até o capítulo IV, a classe de constelações apresentada na seção anterior possibilita a definição de vários bons mapeamentos binários por partição de conjuntos satisfazendo as condições impostas na seção III.2, com diferentes parâmetros de distância $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{m-1}$ que dependem do fator de simetria δ .

O procedimento para determinação de mapeamentos interessantes e suas respectivas relações de distância é simples para constelações com poucos sinais e é exemplificado a seguir para a constelação A2F/2x4 PSK.

Para esta constelação, os vetores de coeficientes normalizados referentes aos 8 sinais são:

$$\underline{c}_0 = \left(1/\sqrt{1+\delta}, 0, \sqrt{\delta}/\sqrt{1+\delta} \right) \quad (\text{VI.3})$$

$$\underline{c}_1 = \left(0, 1/\sqrt{1+\delta}, \sqrt{\delta}/\sqrt{1+\delta} \right) \quad (\text{VI.4})$$

$$\underline{c}_2 = \left(-1/\sqrt{1+\delta}, 0, \sqrt{\delta}/\sqrt{1+\delta} \right) \quad (\text{VI.5})$$

$$\underline{c}_3 = \left(0, -1/\sqrt{1+\delta}, \sqrt{\delta}/\sqrt{1+\delta} \right) \quad (\text{VI.6})$$

$$\underline{c}_4 = \left(1/\sqrt{1+\delta}, 0, -\sqrt{\delta}/\sqrt{1+\delta} \right) \quad (\text{VI.7})$$

$$\underline{c}_5 = \left(0, 1/\sqrt{1+\delta}, -\sqrt{\delta}/\sqrt{1+\delta} \right) \quad (\text{VI.8})$$

$$\underline{c}_6 = \left(-1/\sqrt{1+\delta}, 0, -\sqrt{\delta}/\sqrt{1+\delta} \right) \quad (\text{VI.9})$$

$$\underline{c}_7 = \left(0, -1/\sqrt{1+\delta}, -\sqrt{\delta}/\sqrt{1+\delta} \right) \quad (\text{VI.10})$$

As distâncias Euclidianas ao quadrado entre os sinais desta constelação dependem do fator de simetria δ e estão relacionadas na tabela VI.1, que utiliza os seguintes parâmetros:

$$e_1 = 2/(1+\delta) \quad (\text{VI.11})$$

$$e_2 = 4/(1+\delta) \quad (\text{VI.12})$$

$$e_3 = 4\delta/(1+\delta) \quad (\text{VI.13})$$

$$e_4 = (4\delta+2)/(1+\delta) \quad (\text{VI.14})$$

$$e_5 = 4 \quad (\text{VI.15})$$

$ c_i - c_j ^2$		j							
		0	1	2	3	4	5	6	7
j	0	0	E_1	E_2	E_1	E_3	E_4	E_5	E_6
	1	E_1	0	E_1	E_2	E_4	E_3	E_4	E_5
	2	E_2	E_1	0	E_1	E_5	E_4	E_3	E_4
	3	E_1	E_2	E_1	0	E_4	E_5	E_4	E_3
	4	E_3	E_4	E_5	E_4	0	E_1	E_2	E_1
	5	E_4	E_3	E_4	E_5	E_1	0	E_1	E_2
	6	E_5	E_4	E_3	E_4	E_2	E_1	0	E_1
	7	E_3	E_5	E_4	E_3	E_1	E_2	E_1	0

TABELA VI.1 - DISTÂNCIA EUCLIDEANA AO QUADRADO
ENTRE SINAIS DA CONSTELAÇÃO
A2F/2x4 PSK

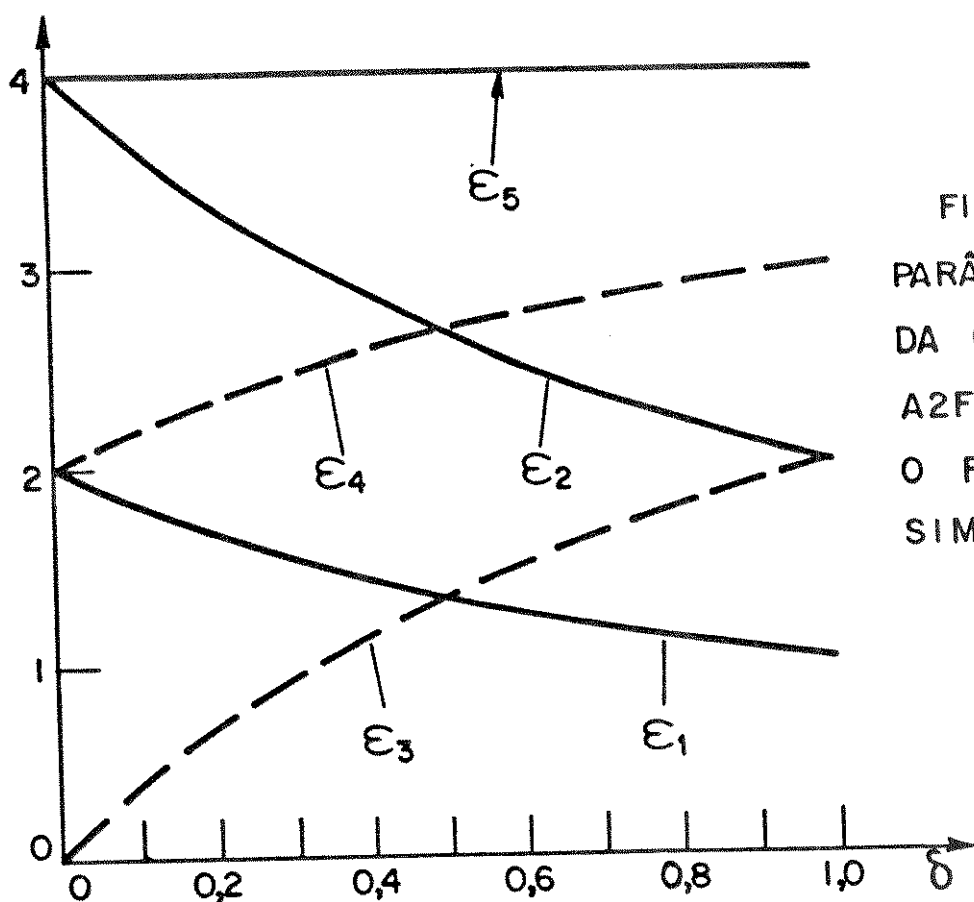


FIGURA VI. 4
PARÂMETROS DE DISTÂNCIA
DA CONSTELAÇÃO
A2F/2x4 - PSK VERSUS
O FATOR DE
SIMETRIA δ

δ	$0 \leq \delta \leq 0,5$		$0,5 \leq \delta \leq 1,0$	
MAPEAMENTO	1	2	3	4
$C^{(0,0)}$	0,1,6,7	0,2,5,7	0,2,4,6	0,2,5,7
$C^{(0,1)}$	2,3,4,5	1,3,4,6	1,3,5,7	1,3,4,6
$C^{(1,0)}$	0,6	0,2	0,6	0,5
$C^{(1,1)}$	2,4	4,6	1,7	1,6
$C^{(1,2)}$	1,7	5,7	2,4	2,7
$C^{(1,3)}$	3,5	1,3	3,5	3,4
$C^{(2,0)}$	0	0	0	0
$C^{(2,1)}$	4	4	1	1
$C^{(2,2)}$	1	5	4	2
$C^{(2,3)}$	5	1	5	3
$C^{(2,4)}$	6	2	6	5
$C^{(2,5)}$	2	6	7	6
$C^{(2,6)}$	7	7	2	7
$C^{(2,7)}$	3	3	3	4
Δ_0^2	E_3	E_3	E_1	E_1
Δ_1^2	E_1	E_4	E_3	E_2
Δ_2^2	E_5	E_2	E_5	E_4

TABELA VI.2 - MAPEAMENTOS PARA CONSTELAÇÃO A2F/2x4 PSK

Evidentemente, o problema de otimização definido acima é mais complexo que aquele introduzido no capítulo III. Porém, o esforço computacional necessário para determinação dos melhores códigos, cada qual associado a um mapeamento por partição de conjuntos e um fator de simetria específicos, continua reduzido para sistemas com poucos sinais.

A tabela VI.3 apresenta os melhores esquemas e os ganhos assintóticos obtidos para constelações do tipo $A2F/2 \times 4$ PSK considerando-se o sistema 4-PSK como referência.

Na figura VI.5, os esquemas $A2F/2 \times 4$ PSK e $2F/2 \times 4$ PSK são comparados no que diz respeito ao ganho assintótico em função de N , o comprimento do código. Observa-se que o novo sistema é razoavelmente mais eficiente. Essa vantagem fica mais evidente quando o número de sinais é maior.

As tabelas VI.4 e VI.7 expõem os melhores esquemas obtidos com as constelações $A2F/2 \times 8$ PSK e $A2F/4 \times 4$ PSK. As tabelas VI.5, VI.6, VI.8 e VI.9 apresentam os mapeamentos selecionados no processo de otimização. Curvas de comparação destes esquemas com os que utilizam constelações $2F/2 \times 8$ PSK e $2F/4 \times 4$ PSK são dadas nas figuras VI.6 e VI.7.

Os resultados obtidos refletem o comportamento sugerido pelas curvas de capacidade de canal apresentadas nas figuras VI.1 a VI.3, tanto no que se refere aos ganhos obtidos com relação às constelações espectralmente simétricas quanto às regiões favoráveis do fator de simetria, com algumas variações impostas pelas condições de processo de codificação e disponibilidade de bons códigos binários.

VI.5. CARACTERÍSTICAS ESPECTRAIS

Nesta seção, os resultados alcançados no capítulo V são utilizados para determinar a densidade espectral de potência dos sistemas de modulação codificada com assimetria espectral tratados no presente capítulo.

Todos os esquemas otimizados atendem as relações R_1 a R_4 dadas na seção V.5. Portanto, quando a fonte é de máxima entropia, o espectro desses sistemas é obtido através da expressão (V.78). Os parâmetros utilizados nesta expressão são apresentados na tabela VI.10.

Quando nenhum par de elementos da matriz-código está sujeito à dependência total, a densidade espectral de potência desses esquemas, em banda base, é dada, a partir da expressão (V.99), por

$$R(f) = \frac{2}{1+\delta} S_a^2 [\pi T(f+h/2T)] + \frac{2\delta}{1+\delta} S_a^2 [\pi T(f-h/2T)] \quad (\text{VI.22})$$

Para $\delta < 1$, existe uma maior concentração de potência em torno de $-\pi h/T$. Consequentemente, ocorre uma redução de faixa em relação aos sistemas espectralmente simétricos.

Quando a fonte é desbalanceada, ou seja, não é de máxima entropia, a densidade espectral de potência desses esquemas espectralmente assimétricos, em banda base, pode ser obtida através do procedimento indicado na seção V.3.

N	δ	MAPEAMENTO	D^2	G_A (dB)	K_0	K_1	K_2	d_0	d_1	d_2
2	0,5	3/4	2,67	1,25	1	1	2	2	2	1
3	0,75	3	3,43	2,34	1	2	3	3	2	1
4	1,0	3	4,00	3,01	1	3	4	4	2	1
6	0,5	4	5,33	4,26	2	5	5	4	2	2
13	0,75	4	5,71	4,56	5	9	12	5	3	2
14	0,625	3	6,15	4,88	6	9	13	5	4	2
15	0,75	3	6,86	5,35	6	10	14	6	4	2
18	0,875	3	7,47	5,72	7	12	17	7	4	2
19	1,0	3	8,00	6,02	7	13	18	8	4	2
22	0,667	4	8,40	6,23	11	16	17	7	4	3
23	0,5	4	9,33	6,69	12	17	17	7	4	4
24	0,5	4	10,67	7,27	12	18	18	8	4	4

TABELA VI.3 - CONSTELAÇÃO A2F/2x4 PSK: MELHORES ESQUEMAS
SISTEMA DE REFERÊNCIA: 4-PSK

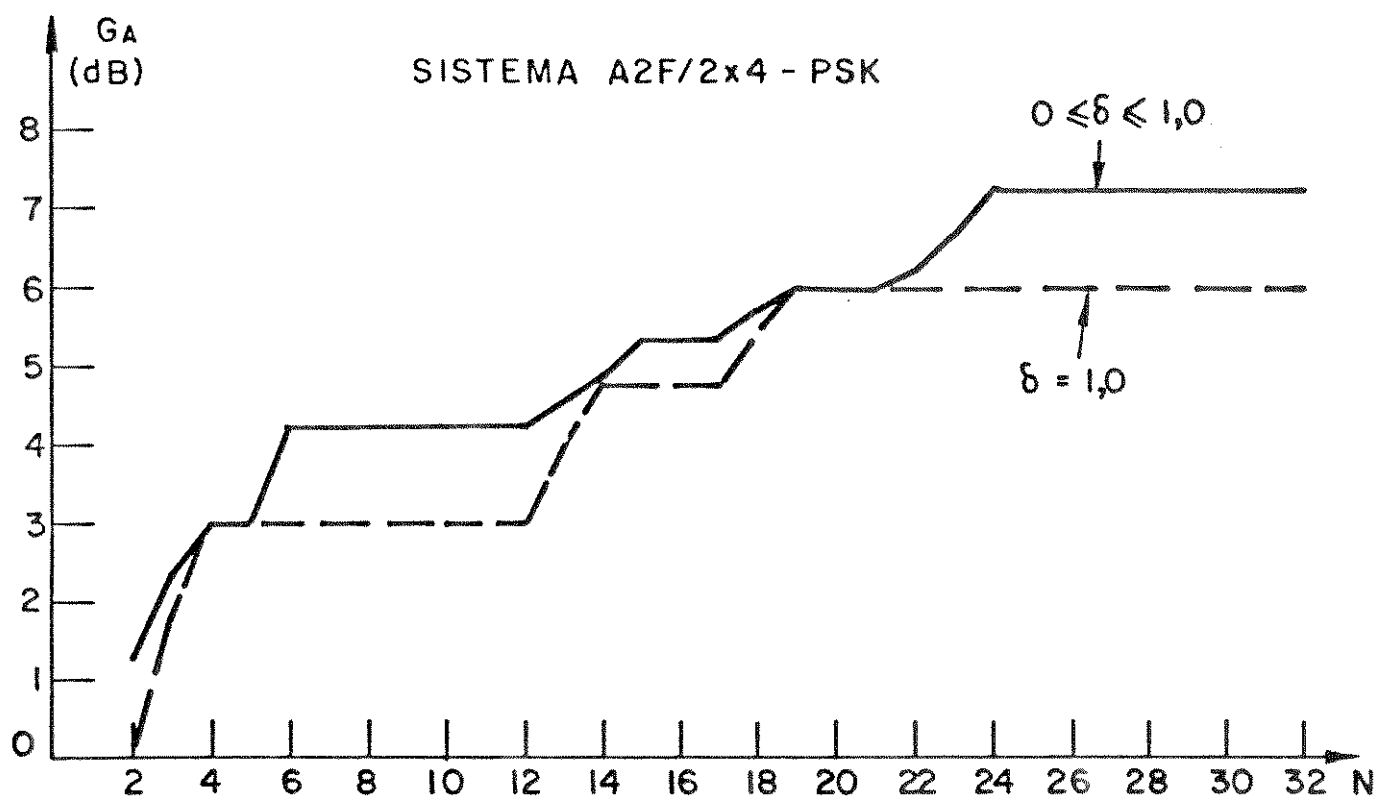


FIGURA VI.5

N	δ	MAPEA- MENTO	D ²	G _A (dB)	K ₀	K ₁	K ₂	K ₃	d ₀	d ₁	d ₂	d ₃
2	0,14645	1	1,02	2,42	1	1	2	2	2	2	1	1
3	0,14645	1	1,53	4,18	1	2	3	3	3	2	1	1
4	0,29289	2	1,81	4,91	1	3	4	4	4	2	1	1
5	0,36612	2	2,14	5,63	1	4	5	5	5	2	1	1
6	0,43934	2	2,44	6,20	1	5	6	6	6	2	1	1
7	0,5	2	2,67	6,58	1	6	7	7	7	2	1	1
11	0,35355	3	2,96	7,03	2	10	10	11	7	2	2	1
14	0,14645	1	3,07	7,19	5	10	13	14	6	3	2	1
15	0,18689	1	3,37	7,60	5	11	14	15	7	3	2	1
18	0,14286	1	3,50	7,76	7	12	17	18	7	4	2	1
20	0,29289	2	3,62	7,92	8	14	19	19	8	4	2	2
23	0,23431	2	3,80	8,12	11	14	22	22	8	5	2	2
24	0,14645	1	4,09	8,44	12	18	19	23	8	4	3	2

TABELA VI.4 - CONSTELAÇÃO A2F/2x8 PSK: MELHORES ESQUEMAS
SISTEMA DE REFERÊNCIA: 8 PSK

i	C_{i1}	C_{i2}	C_{i3}
0	γ_1	0	γ_3
1	γ_2	γ_2	γ_3
2	0	γ_1	γ_3
3	$-\gamma_2$	γ_2	γ_2
4	$-\gamma_1$	0	γ_3
5	$-\gamma_2$	$-\gamma_2$	γ_3
6	0	$-\gamma_1$	γ_3
7	γ_2	$-\gamma_2$	γ_3
8	γ_1	0	$-\gamma_3$
9	γ_2	γ_2	$-\gamma_3$
10	0	γ_1	$-\gamma_3$
11	$-\gamma_2$	γ_2	$-\gamma_3$
12	$-\gamma_1$	0	$-\gamma_3$
13	$-\gamma_2$	$-\gamma_2$	$-\gamma_3$
14	0	$-\gamma_1$	$-\gamma_3$
15	$-\gamma_2$	$-\gamma_2$	$-\gamma_3$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\delta}}$$

$$\gamma_2 = \frac{2}{2\sqrt{1+\delta}}$$

$$\gamma_3 = \frac{\delta}{\sqrt{1+\delta}}$$

TABELA VI.5 - CONSTELAÇÃO
A2F/2x8 PSK: COEFICIENTES
NORMALIZADOS

MAPEA- MENTO	1	2	3
$C^{(0,0)}$	0,2,4,6,9,11,13,15	0,2,4,6,8,10,12,14	0,2,4,6,9,11,13,15
$C^{(0,1)}$	1,3,5,7,8,10,12,14	1,3,5,7,9,11,13,15	1,3,5,7,8,10,12,14
$C^{(1,0)}$	0,2,4,6	0,4,10,14	0,4,9,13
$C^{(1,1)}$	8,10,12,14	1,5,11,15	1,5,8,12
$C^{(1,2)}$	9,11,13,15	2,6,8,12	2,6,11,15
$C^{(1,3)}$	1,3,5,7	3,7,9,13	3,7,10,14
$C^{(2,0)}$	0,4	0,4	0,13
$C^{(2,1)}$	8,12	1,5	1,12
$C^{(2,2)}$	9,13	8,12	2,15
$C^{(2,3)}$	1,5	9,13	3,14
$C^{(2,4)}$	2,6	10,14	4,9
$C^{(2,5)}$	10,14	11,15	5,8
$C^{(2,6)}$	11,15	2,6	6,11
$C^{(2,7)}$	3,7	3,7	7,10
$C^{(3,0)}$	0	0	0
$C^{(3,1)}$	8	1	1
$C^{(3,2)}$	9	8	2
$C^{(3,3)}$	1	9	3
$C^{(3,4)}$	2	10	9
$C^{(3,5)}$	10	11	8
$C^{(3,6)}$	11	2	11
$C^{(3,7)}$	3	3	10
$C^{(3,8)}$	4	4	13
$C^{(3,9)}$	12	5	12
$C^{(3,10)}$	13	12	15
$C^{(3,11)}$	5	13	14
$C^{(3,12)}$	6	14	4
$C^{(3,13)}$	14	15	5
$C^{(3,14)}$	15	6	6
$C^{(3,15)}$	7	7	7
Δ_0^2	$\frac{4\delta}{1+\delta}$	$\frac{2 - \sqrt{2}}{1+\delta}$	$\frac{2 - \sqrt{2}}{1+\delta}$
Δ_1^2	$\frac{4\delta + 2 - \sqrt{2}}{1+\delta}$	$\frac{4\delta}{1+\delta}$	$\frac{2}{1+\delta}$
Δ_2^2	$\frac{2}{1+\delta}$	$\frac{4\delta + 2}{1+\delta}$	$\frac{4\delta + 2 - \sqrt{2}}{1+\delta}$
Δ_3^2	$\frac{4}{1+\delta}$	$\frac{4}{1+\delta}$	$\frac{4\delta + 2 + \sqrt{2}}{1+\delta}$

TABELA VI.6 - MAPEAMENTOS PARA CONSTELAÇÃO A2F/2x8 PSK

N	δ	IMPROVEMENT TO	D^2	G_A (dB)	K_0	K_1	K_2	K_3	d_0	d_1	d_2	d_3
2	1,0	1/2	2,0	5,33	1	1	2	2	2	2	1	1
3	0,667	2	2,4	6,12	1	2	3	3	3	2	1	1
4	0,5	2	2,67	6,58	1	3	4	4	4	2	1	1
5	1,0	1	3,0	7,09	2	4	4	5	3	2	1	1
6	1,0	1	4,0	8,34	2	5	5	6	4	2	2	1
15	0,8	2	4,44	8,80	7	10	14	14	5	4	2	2
16	0,667	2	4,8	9,13	7	11	15	15	6	4	2	2
19	0,571	2	5,09	9,39	8	13	18	18	7	4	2	2
20	0,5	2	5,33	9,59	8	14	19	19	8	4	2	2
21	1,0	1	6,0	10,10	11	16	16	20	6	3	3	2
26	1,0	1	7,0	10,77	13	20	20	25	7	4	4	2
27	1,0	1	8,0	11,35	13	21	21	26	8	4	4	2

TABELA VI.7 - CONSTELAÇÃO A2F/4x4 PSK : MELHORES ESQUEMAS
SISTEMA DE REFERÊNCIA: 8-PSK

i	C_{i1}	C_{i2}	C_{i3}	C_{i4}
0	γ_1	0	γ_2	0
1	0	γ_1	γ_2	0
2	$-\gamma_1$	0	γ_2	0
3	0	$-\gamma_1$	γ_2	0
4	γ_1	0	0	γ_2
5	0	γ_1	0	γ_2
6	$-\gamma_1$	0	0	γ_2
7	0	$-\gamma_1$	0	γ_2
8	γ_1	0	$-\gamma_2$	0
9	0	γ_1	$-\gamma_2$	0
10	$-\gamma_1$	0	$-\gamma_2$	0
11	0	$-\gamma_1$	$-\gamma_2$	0
12	γ_1	0	0	$-\gamma_2$
13	0	γ_1	0	$-\gamma_2$
14	$-\gamma_1$	0	0	$-\gamma_2$
15	0	$-\gamma_1$	0	$-\gamma_2$

TABELA VI.8 - CONSTELAÇÃO A2F/4x4 PSK:
COEFICIENTES NORMALIZADOS

δ	$0,5 \leq \delta \leq 1,0$	$0,5 \leq \delta \leq 1$
MAPEA- MENTO	1	2
$C^{(0,0)}$ $C^{(0,1)}$	0,2,5,7,8,10,13,15 1,3,4,6,9,11,12,14	0,1,2,3,8,9,10,11 4,5,6,7,12,13,14,15
$C^{(1,0)}$ $C^{(1,1)}$	0,5,10,15 3,4,9,14	0,2,9,11 4,6,13,15
$C^{(1,2)}$ $C^{(1,3)}$	2,7,8,13 1,6,11,12	1,3,8,10 5,7,12,14
$C^{(2,0)}$ $C^{(2,1)}$	0,10 4,14	0,9 4,13
$C^{(2,2)}$ $C^{(2,3)}$	2,8 6,12	1,8 5,12
$C^{(2,4)}$ $C^{(2,5)}$	5,15 3,9	2,11 6,15
$C^{(2,6)}$ $C^{(2,7)}$	7,13 1,11	3,10 7,14
$C^{(3,0)}$ $C^{(3,1)}$	0 4	0 4
$C^{(3,2)}$ $C^{(3,3)}$	8 12	1 5
$C^{(3,4)}$ $C^{(3,5)}$	5 9	2 6
$C^{(3,6)}$ $C^{(3,7)}$	13 1	3 7
$C^{(3,8)}$ $C^{(3,9)}$	10 14	9 13
$C^{(3,10)}$ $C^{(3,11)}$	2 6	8 12
$C^{(3,12)}$ $C^{(3,13)}$	15 3	11 15
$C^{(3,14)}$ $C^{(3,15)}$	7 11	10 14
Δ_0^2	$\frac{2\delta}{1+\delta}$	$\frac{2\delta}{1+\delta}$
Δ_1^2	$\frac{4\delta}{1+\delta}$	$\frac{2}{1+\delta}$
Δ_2^2	2	$\frac{4}{1+\delta}$
Δ_3^2	4	$\frac{4\delta+2}{1+\delta}$

TABELA VI.9 - MAPEAMENTOS PARA CONSTELAÇÃO A2F/4x4 PSK

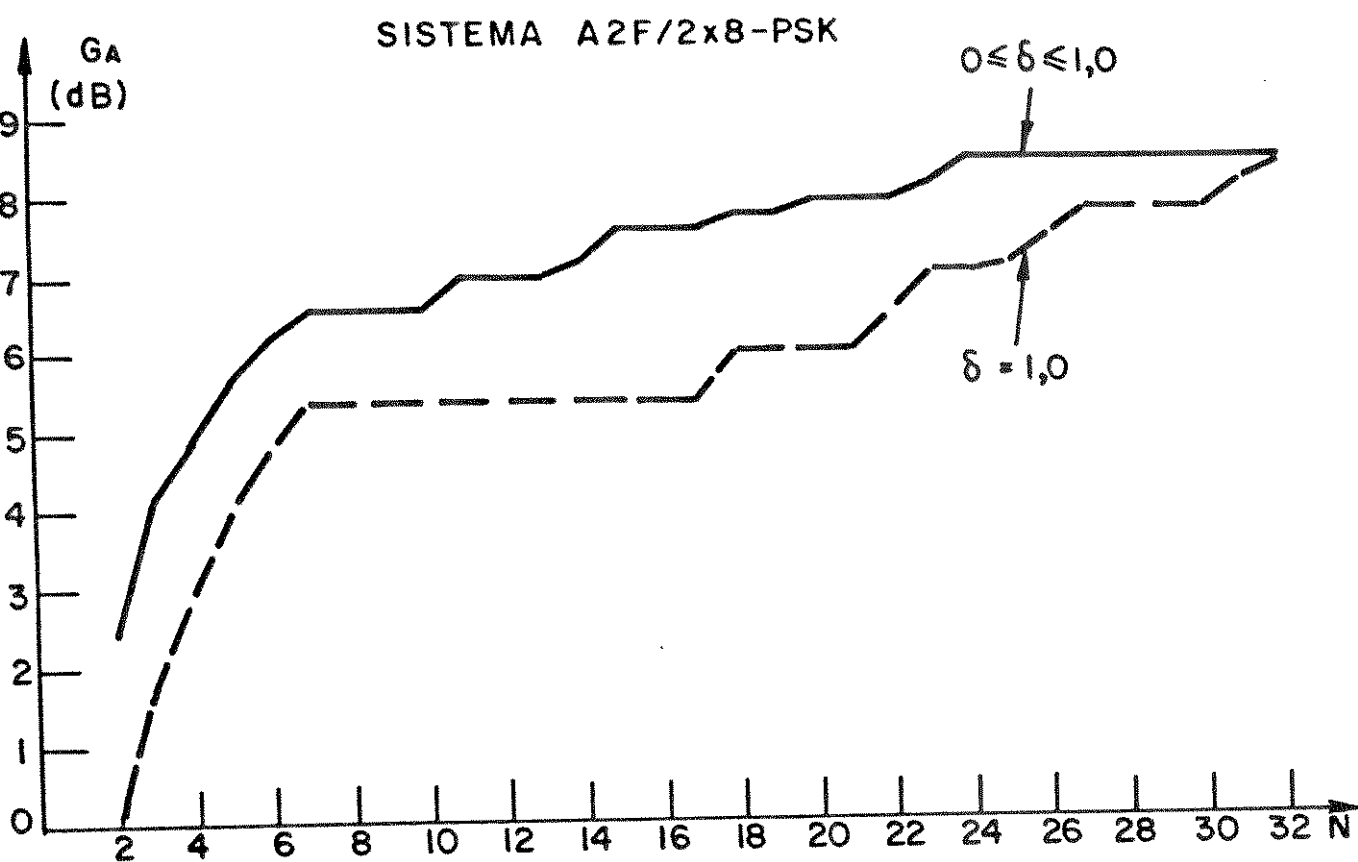


FIGURA VI. 6

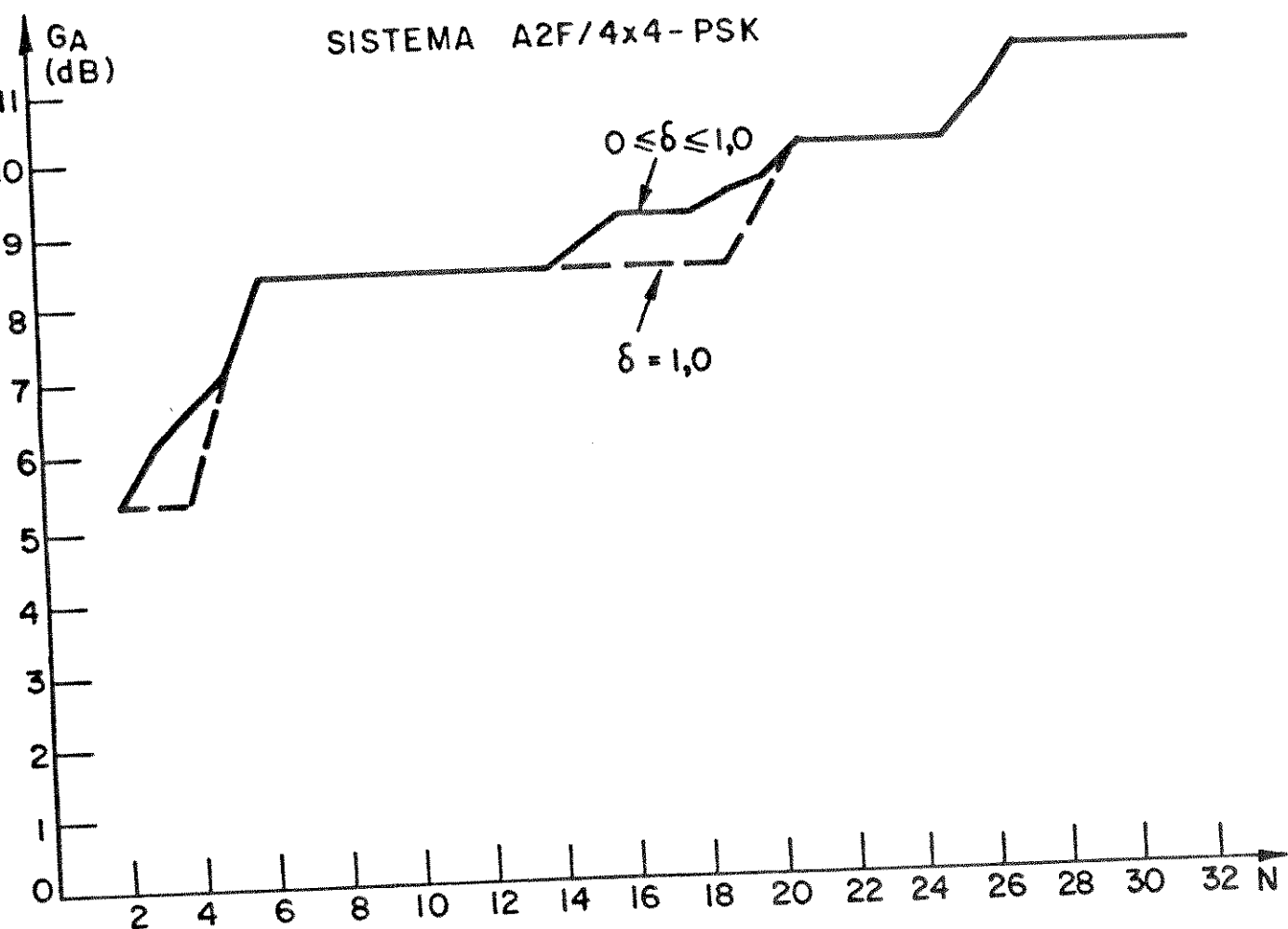


FIGURA VI. 7

SISTEMA	A2F/2x4 PSK		A2F/2x8 PSK			A2F/4x4 PSK	
MAPEAMENTO	3	4	1	2	3	1	2
Z_1, Z_2	$\frac{1}{2(1+\delta)}$	$\frac{1}{2(1+\delta)}$	$\frac{1}{2(1+\delta)}$	$\frac{1}{2(1+\delta)}$	$\frac{1}{2(1+\delta)}$	$\frac{1}{2(1+\delta)}$	$\frac{1}{2(1+\delta)}$
Z_3	$\frac{\delta}{1+\delta}$	$\frac{\delta}{1+\delta}$	$\frac{\delta}{1+\delta}$	$\frac{\delta}{1+\delta}$	$\frac{\delta}{1+\delta}$	$\frac{\delta}{2(1+\delta)}$	$\frac{\delta}{2(1+\delta)}$
Z_4	—	—	—	—	—	$\frac{\delta}{2(1+\delta)}$	$\frac{\delta}{2(1+\delta)}$
$Z_{11}^{(1)}, Z_{22}^{(1)}$	0	0	0	0	0	0	0
$Z_{33}^{(1)}$	0	0	0	0	0	0	0
$Z_{44}^{(1)}$	—	—	—	—	—	0	0
$Z_{11}^{(2)}, Z_{22}^{(2)}$	0	$\frac{1}{4(1+\delta)}$	0	0	0	0	0
$Z_{33}^{(2)}$	0	0	0	$\frac{\delta}{1+\delta}$	0	0	0
$Z_{44}^{(2)}$	—	—	—	—	—	0	0
$Z_{11}^{(3)}, Z_{22}^{(3)}$	$\frac{1}{2(1+\delta)}$	$\frac{1}{2(1+\delta)}$	0	0	$\frac{2-\sqrt{2}}{8(1+\delta)}$	0	$\frac{1}{4(1+\delta)}$
$Z_{33}^{(3)}$	$\frac{\delta}{1+\delta}$	$\frac{\delta}{1+\delta}$	$\frac{\delta}{1+\delta}$	$\frac{\delta}{1+\delta}$	0	0	0
$Z_{44}^{(3)}$	—	—	—	—	—	0	0
$Z_{11}^{(4)}, Z_{22}^{(4)}$	—	—	$\frac{1}{2(1+\delta)}$	$\frac{1}{2(1+\delta)}$	$\frac{1}{2(1+\delta)}$	$\frac{1}{2(1+\delta)}$	$\frac{1}{2(1+\delta)}$
$Z_{33}^{(4)}$	—	—	$\frac{\delta}{1+\delta}$	$\frac{\delta}{1+\delta}$	$\frac{\delta}{1+\delta}$	$\frac{\delta}{2(1+\delta)}$	$\frac{\delta}{2(1+\delta)}$
$Z_{44}^{(4)}$	—	—	—	—	—	$\frac{\delta}{2(1+\delta)}$	$\frac{\delta}{2(1+\delta)}$

TABELA VI.10 - PARÂMETROS UTILIZADOS NO CÁLCULO DE ESPECTRO DOS SISTEMAS ESPECTRALMENTE ASSIMÉTRICOS TRATADOS.

CAPÍTULO VII

DECODIFICAÇÃO PARA OS ESQUEMAS DE MODULAÇÃO CODIFICADA DE BLOCO

VII.1. INTRODUÇÃO

Sayegh, em seu trabalho [30], propôs um esquema de decodificação sub-ótimo e assintoticamente ótimo para a classe de sistemas de modulação codificada apresentada então. Trata-se de um decodificador etapa-por-etapa e com esta denominação será especificado a partir deste ponto. Uma prova formal de que este decodificador é assintoticamente ótimo, fato sugerido por Sayegh [30], é deduzida no próximo capítulo.

Neste capítulo, este decodificador é relatado. Além disso, simplificações são obtidas para o algoritmo transformando a decodificação de cada etapa num problema unidimensional sem qualquer perda. Um procedimento voltado à aplicabilidade do algoritmo é desenvolvido.

A transformação da decodificação por etapas sucessivas em problemas unidimensionais possibilita a utilização de algoritmos sub-ótimos de decodificação de códigos binários nestas etapas [11,19, 25,33]. A redução da complexidade de decodificação obtida compensa, em geral, a inferioridade de desempenho consequente. Especificamente, os algoritmos sub-ótimos de Chase [11] são comentados nesta aplicação.

Curvas de desempenho de algumas configurações, obtidas através de simulação computacional, são também apresentadas.

VII.2. DECODIFICAÇÃO ÓTIMA E ETAPA-POR-ETAPA

Neste momento, os critérios de decisão para os decodificadores ótimo e etapa-por-etapa para os esquemas de modulação codificada de bloco apresentados por Sayegh são expostos.

Seja

$$w^{(u)}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} w_n^{(u)}(t-nT) \quad (\text{VII.1})$$

o sinal transmitido, associado ao vetor

$$\underline{w}^{(u)} = \left[\frac{w_c^{(u)}}{T}, \frac{w_1^{(u)}}{T}, \dots, \frac{w_{N-1}^{(u)}}{T} \right] \quad (\text{VII.2})$$

onde $\frac{w_n^{(u)}}{T}$ é o vetor de coeficientes normalizados do n-ésimo sinal desta palavra-código, $w_n^{(u)}(t)$, e a matriz-código

$$V^{(u)} = \begin{bmatrix} v_{0,0}^{(u)} & \dots & v_{0,N-1}^{(u)} \\ v_{1,0}^{(u)} & \dots & v_{1,N-1}^{(u)} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{m-1,0}^{(u)} & \dots & v_{m-1,N-1}^{(u)} \end{bmatrix} \quad (\text{VII.3})$$

onde $\left[v_{j,0}^{(u)}, v_{j,1}^{(u)}, \dots, v_{j,N-1}^{(u)} \right]$ pertence ao código B_j .

Considerar-se-á que o sinal $w^{(u)}(t)$ é corrompido por ruído Gaussiano, aditivo e branco $n(t)$. Desse modo, o sinal recebido é da forma

$$r(t) = \sum_{n=0}^{N-1} r_n(t-nT) \quad (\text{VII.4})$$

associado ao vetor

$$\underline{r} = \left[r_0, r_1, \dots, r_{N-1} \right] \quad (\text{VII.5})$$

onde

$$\underline{r}_n = \underline{w}_n^{(u)} + \underline{n}_n \quad (\text{VII.6})$$

com $\underline{n}_n$, o vetor-ruído referente a n -ésima posição, dado por

$$\underline{n}_n = \left[n_{n1}, n_{n2}, \dots, n_{nQ} \right] \quad (\text{VII.7})$$

onde n_{nq} , $q = 1, 2, \dots, Q$, é Gaussiano com média zero e variância $N_0/2$. N_0 é a densidade espectral unilateral de potência do ruído e Q é a dimensionalidade do espaço de sinais.

VII.2.1. Decodificação ótima

A decodificação ótima, no sentido de minimizar a probabilidade de erro, para os esquemas de modulação codificada e tipos de canal e ruído considerados empreende o seguinte critério de decisão: a palavra-código escolhida satisfaz

$$\min_i \sum_{n=0}^{N-1} \left| \underline{w}_n^{(i)} - \underline{r}_n \right|^2 \quad (\text{VII.8})$$

onde

$$\underline{w}^{(i)} = \left[\underline{w}_0^{(i)}, \underline{w}_1^{(i)}, \dots, \underline{w}_{N-1}^{(i)} \right] \quad (\text{VII.9})$$

corresponde à matriz-código

$$V^{(i)} = \begin{bmatrix} v_{0,0}^{(i)} & \dots & v_{0,N-1}^{(i)} \\ v_{1,0}^{(i)} & \dots & v_{1,N-1}^{(i)} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{m-1,0}^{(i)} & \dots & v_{m-1,N-1}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (\text{VII.10})$$

com $\left[v_{j,0}^{(i)}, v_{j,1}^{(i)}, \dots, v_{j,N-1}^{(i)} \right]$ pertencente ao código B_j .

A decodificação terá sido correta se a palavra escolhida for aquela associada à matriz $V^{(u)}$ enviada.

O número de palavras-código testados na decodificação ótima é

$$2^{N(m-1)}$$

pois

$$N(m-1) = \sum_{j=0}^{m-1} K_j \quad (\text{VII.11})$$

onde K_j é o número de símbolos de informação por palavra do código B_j .

VII.2.2. Decodificação Etapa-por-Etapa

A decodificação sub-ótima etapa-por-etapa é realizada em m iterações, onde m é o logaritmo na base 2 do número de sinais do sistema de modulação adotado.

O processo de decodificação irá produzir a matriz decodificada

$$V^{(d)} = \begin{bmatrix} v_{0,0}^{(d)} & \dots & v_{0,N-1}^{(d)} \\ v_{1,0}^{(d)} & \dots & v_{1,N-1}^{(d)} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{m-1,0}^{(d)} & \dots & v_{m-1,N-1}^{(d)} \end{bmatrix} \quad (\text{VII.12})$$

onde $\left[v_{j,0}^{(d)}, v_{j,1}^{(d)}, \dots, v_{j,N-1}^{(d)} \right]$, j -ésima linha de $V^{(d)}$, pertence ao código B_j .

A decodificação etapa-por-etapa empreende decodificações sucessivas das linhas $0,1,\dots,m-1$, nesta ordem. Na etapa j , $j=0,1,\dots,m-1$ realiza-se uma decodificação ótima da linha j , utilizando decisão suave, com relação ao código B_j , considerando corretas as decodificações das linhas anteriores, mais especificamente as linhas $0,1,\dots,j-1$. O algoritmo de decodificação etapa-por-etapa é formulado a seguir.

Na etapa j , a palavra-código de B_j escolhida satisfaz

$$\min_i \sum_{n=0}^{N-1} \left| \frac{w_n^{(i)}}{r_n} - \underline{r}_n \right|^2 \quad (\text{VII.13})$$

com

$$\underline{w}^{(i)} = \left[\frac{w_0^{(i)}}{r_0}, \frac{w_1^{(i)}}{r_1}, \dots, \frac{w_{N-1}^{(i)}}{r_{N-1}} \right] \quad (\text{VII.14})$$

associado à matriz

$$T^{(i)} = \begin{bmatrix} T_{0,0}^{(i)} & \dots & T_{0,N-1}^{(i)} \\ T_{1,0}^{(i)} & \dots & T_{1,N-1}^{(i)} \\ \vdots & & \vdots \\ T_{m-1,0}^{(i)} & \dots & T_{m-1,N-1}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (\text{VII.15})$$

onde

$$\left[T_{\ell,0}^{(i)}, T_{\ell,1}^{(i)}, \dots, T_{\ell,N-1}^{(i)} \right] = \left[T_{\ell,0}, T_{\ell,1}, \dots, T_{\ell,N-1} \right] \quad (\text{VII.16})$$

é a palavra do código B_ℓ escolhida na ℓ -ésima etapa para $\ell=0,1,\dots,j-1$ e qualquer i .

Além disto, $\left[T_{j,0}^{(i)}, T_{j,1}^{(i)}, \dots, T_{j,N-1}^{(i)}\right]$ pertence ao código B_j e $T_{\ell,n}^{(i)} \in \{0,1\}$, $\ell=j+1,j+2, \dots,m-1$; $n=0,1,\dots,N-1$.

Aparentemente, o número de testes necessárias na etapa j é

$$2^{K_j} 2^{N(m-j-1)}$$

onde K_j é o número de bits de informação por palavra do código B_j , pois cada vetor $\left[T_{j+1,n}^{(i)}, T_{j+2,n}^{(i)}, \dots, T_{m-1,n}^{(i)}\right]$, $n=0,1,\dots,N-1$, tem elementos pertencentes a $GF(2)$ sem restrição.

Porém, uma simplificação pode ser efetivada. Sejam $w_{0,n}^{(j)}(t)$ e $w_{1,n}^{(j)}(t)$ os sinais da constelação com vetores de coeficientes normalizados $\underline{w}_{0,n}^{(j)}$ e $\underline{w}_{1,n}^{(j)}$ e representações binárias

$$\underline{b}_{0,n}^{(j)} = \left[T_{0,n}, T_{1,n}, \dots, T_{j-1,n}, 0, b_{0,n}^{j,j+1}, b_{0,n}^{j,j+2}, \dots, b_{0,n}^{j,m-1}\right]$$

(VII.17)

e

$$\underline{b}_{1,n}^{(j)} = \left[T_{0,n}, T_{1,n}, \dots, T_{j-1,n}, 1, b_{1,n}^{j,j+1}, b_{1,n}^{j,j+2}, \dots, b_{1,n}^{j,m-1}\right]$$

(VII.18)

respectivamente, mais próximos de $\underline{r}_n$ com respeito à distância Euclidiana.

A decodificação na etapa j pode então ser enunciada da seguinte maneira: a palavra-código de B_j escolhida satisfaz

$$\min_i \sum_{n=0}^{N-1} \left| \underline{w}_n^{(i)} - \underline{r}_n \right|^2$$

(VII.19)

com

$$\underline{w}_n^{(i)} = \underline{w}_{0,n}^{(j)} \quad \text{ou} \quad \underline{w}_{1,n}^{(j)}$$

(VII.20)

associado à matriz $T^{(i)}$ dada em (VII.15), onde

$$T_{\ell,n}^{(u)} = \begin{cases} b_{0,n}^{j,\ell}, & \text{se } T_{j,n}^{(u)} = 0 \\ b_{1,n}^{j,\ell}, & \text{se } T_{j,n}^{(u)} = 1 \end{cases} \quad (\text{VII.21})$$

para $\ell = j+1, j+2, \dots, m-1$; $n = 0, 1, \dots, m-1$.

Portanto o número de testes necessários na etapa j é 2^{K_j} e o número total de testes nas m etapas é

$$\sum_{j=0}^{m-1} 2^{K_j} \quad (\text{VII.22})$$

O decodificador etapa-por-etapa é assintoticamente ótimo, como será demonstrado no capítulo VIII. Por ora é interessante citar que a probabilidade P_c de decodificação correta,

$$P_c = P_r [V^{(d)} = V^{(u)}] \quad (\text{VII.23})$$

é dada por

$$P_c = P_0 P_{1/0} P_{2/0,1} \dots P_{m-1/0,1,\dots,m-2} \quad (\text{VII.24})$$

onde $P_{j/0,1,\dots,j-1}$ é a probabilidade de decodificação correta da linha j dado que as linhas $0, 1, \dots, j-1$ foram corretamente decodificadas.

Nesta última configuração da decodificação etapa-por-etapa, em sua j -ésima etapa, $0 \leq j \leq m-1$, é necessária a determinação, para cada posição n , $0 \leq n \leq N-1$, do par de sinais mais próximos do ponto recebido r_n que diferem no j -ésimo bit de sua representação binária e possuem o resultado das decodificações anteriores nos símbolos iniciais. A solução deste problema fica facilitada a partir da determinação de Regiões de Decisão, definidas a seguir.

Definição: Uma região no espaço de sinais é dita uma Região de Decisão se a escolha do par de sinais mais próximos em cada etapa independe do ponto recebido, desde que pertença a esta região.

Seja D o número de Regiões de Decisão distintas. As D Regiões de Decisão, cada qual denotada por R_d , $1 \leq d \leq D$, são disjuntas e cobrem, unidas, todo o espaço de sinais.

Como exemplo, na figura VII.1 observa-se o espaço de sinais da constelação 8-PSK. A representação binária dos sinais está indicada. Há um total de 8 Regiões de Decisão, R_d , $d=1,2,\dots,D$, apontadas na figura.

Para um ponto recebido r_n na Região R_1 poder-se-ia montar a seguinte tabela.

ETAPA DA DECODIFICAÇÃO	RESULTADOS DAS DECODIFICAÇÕES ANTERIORES	REPRESENTAÇÕES BINÁRIAS DOS SINAIS MAIS PRÓXIMOS
0	-	000 e 100
1	0	000 e 010
	1	100 e 111
2	00	000 e 001
	01	010 e 011
	10	100 e 101
	11	110 e 111

TABELA VII.1 - TABELA DE VIZINHOS MAIS PRÓXIMOS DO PONTO RECEBIDO NA REGIÃO R_1 DO ESPAÇO DE SINAIS DO SISTEMA 8-PSK

Os diversos sistemas em uma e duas dimensões apresentados no capítulo IV têm os seguintes parâmetros.

CONSTELAÇÃO	m	n° de Regiões de Decisão D
4-PSK	2	4
8-PSK	3	8
16-PSK	4	16
8-QAM	3	20
16-QAM	4	44
32-QAM	5	120
64-QAM	6	244
4-PAM	2	3
8-PAM	3	7
16-PAM	4	15

TABELA VII.2 - NÚMERO DE REGIÕES DE DECISÃO DE SISTEMAS EM UMA E DUAS DIMENSÕES

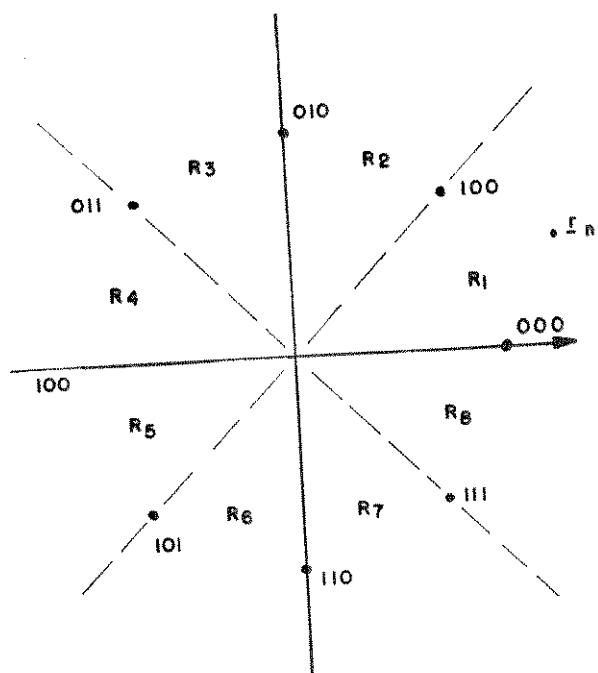


Figura VII.1 - Regiões de Decisão da
Constelação 8 - PSK

É interessante observar que a distância Euclidiana entre os sinais mais próximos do ponto recebido na etapa j , $0 \leq j \leq m-1$, que diferem no j -ésimo bit de sua representação binária e apresentam o resultado das decodificações anteriores nos bits iniciais é constante e igual a Δ_j para quaisquer resultados anteriores, independente da região de decisão que abrange o ponto recebido nos espaços de sinais tratados.

Este fato pode ser expresso da seguinte maneira. Seja R a Região de Decisão a que pertence o n -ésimo sinal recebido, ou seja,

$$r_n \in R$$

Então

$$\left| \frac{w_{0,n}^{(j)}}{w_{1,n}^{(j)}} - \frac{w_{1,n}^{(j)}}{w_{0,n}^{(j)}} \right| = \Delta_j^2, \quad \forall j, \quad \forall R \quad (\text{VII.25})$$

Com este resultado, simplificações significativas podem ser obtidas e isto é feito na próxima seção.

VII.3. DECODIFICAÇÃO ETAPA-POR-ETAPA UNIDIMENSIONAL

Nesta seção, o decodificador etapa-por-etapa é desenvolvido com a finalidade de converter as etapas deste algoritmo em problemas unidimensionais, ou seja, em decodificações tratadas como se a sinalização fosse binária antipodal.

Embora este procedimento seja aqui deduzido para esquemas em uma e duas dimensões, a generalização do mesmo para sistemas de maior dimensionalidade é simples.

Considere a j -ésima etapa e sejam

$$\underline{X}_i = \{X_{i,0}, X_{i,1}, \dots, X_{i,N-1}\}, \quad i=1,2,\dots,2^{K_j} \quad (\text{VII.26})$$

as palavras binárias do código B_j , $X_{m,n} = 0$ ou 1 .

O critério de decisão descrito pelas equações (VII.19) a (VII.21) equivale a escolher a palavra de B_j que satisfaz

$$\underline{X}_i \in B_j \quad \sum_{n=0}^{N-1} |r_n - \underline{X}_{i,n}|^2 \quad (\text{VII.27})$$

onde

$$\underline{w}(X_{i,n}) = \begin{cases} \frac{w_{0,n}^{(j)}}{1} & \text{se } X_{i,n} = 0 \\ \frac{w_{1,n}^{(j)}}{1} & \text{se } X_{i,n} = 1 \end{cases} \quad (\text{VII.28})$$

A expressão (VII.27) equivale a

$$\min_{X_i \in B_j} \sum_{n=0}^{N-1} [\epsilon^2(X_{i,n}) + \delta_n^2] \quad (\text{VII.29})$$

onde

$$\epsilon^2(X_{i,n}) = |\underline{a}_n - \underline{w}(X_{i,n})|^2 \quad (\text{VII.30})$$

e

$$\delta_n^2 = |\underline{a}_n - \underline{r}_n|^2 \quad (\text{VII.31})$$

Portanto, a expressão (VII.29) significa o mesmo que

$$\min_{X_i \in B_j} \sum_{n=0}^{N-1} \epsilon^2(X_{i,n}) \quad (\text{VII.32})$$

Como

$$\left| \frac{w_{0,n}^{(j)}}{1} - \frac{w_{1,n}^{(j)}}{1} \right|^2 = \Delta_j^2, \quad \forall n \quad (\text{VII.33})$$

para os sistemas considerados, a expressão (VII.32) pode ser reescrita como

$$\min_{X_i \in B_j} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{\Delta_j^2}{2} - (-1)^{X_{i,n}} \beta_n \right]^2 \quad (\text{VII.34})$$

onde

$$\beta_n = \begin{cases} |\underline{a}_n - \underline{h}_n| & \text{se } \left| \frac{w_{0,n}^{(j)}}{1} - \underline{a}_n \right| \leq \left| \frac{w_{1,n}^{(j)}}{1} - \underline{a}_n \right| \\ -|\underline{a}_n - \underline{h}_n| & \text{se } \left| \frac{w_{0,n}^{(j)}}{1} - \underline{a}_n \right| > \left| \frac{w_{1,n}^{(j)}}{1} - \underline{a}_n \right| \end{cases} \quad (\text{VII.35})$$

e

$$\underline{h}_n = \frac{1}{2} \left[\frac{w_{0,n}^{(j)}}{1} + \frac{w_{1,n}^{(j)}}{1} \right] \quad (\text{VII.36})$$

Assim, a expressão (VII.34) equivale a

$$\max_{\underline{x} \in B_j} \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^{x_{l,n}} \beta_n \quad (\text{VII.37})$$

que é o critério para decodificação ótima de um sistema binário antipodal onde o vetor recebido é

$$\underline{\beta} = [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{N-1}] \quad (\text{VII.38})$$

Para os sistemas em duas dimensões pode-se verificar que β_n pode ser expresso como

$$\beta_n = L_n r_{n,1} + M_n r_{n,2} + N_n \quad (\text{VII.39})$$

onde $r_{n,1}$ e $r_{n,2}$ são os coeficientes obtidos da decomposição ortogonal de $\underline{r}_n$ e as métricas L_n , M_n e N_n são dadas por

$$L_n = \frac{w_{0,n,1}^{(j)} - w_{1,n,1}^{(j)}}{\Delta_j} \quad (\text{VII.40})$$

$$M_n = \frac{w_{0,n,2}^{(j)} - w_{1,n,2}^{(j)}}{\Delta_j} \quad (\text{VII.41})$$

$$N_n = \frac{1}{2\Delta_j} \left[E_{1,n}^{(j)} - E_{0,n}^{(j)} \right] \quad (\text{VII.42})$$

onde

$$E_{\ell,n}^{(j)} = \left[w_{\ell,n,1}^{(j)^2} + w_{\ell,n,2}^{(j)^2} \right] \quad (\text{VII.43})$$

e $\left[w_{\ell,n,1}^{(j)}, w_{\ell,n,2}^{(j)} \right]$ representa $\underline{w}_{\ell,n}^{(j)}$, $\ell=0,1$, no espaço de sinais.

Para sistemas em uma dimensão

$$\beta_n = r_n + N_n \quad (\text{VII.44})$$

onde N_n é dado pela expressão (VII.42) com

$$E_{\ell,n}^{(j)} = \left[w_{\ell,n}^{(j)} \right]^2 \quad (\text{VII.45})$$

A principal vantagem de transformar as decodificações nas m etapas em problemas unidimensionais é possibilitar a utilização de algoritmos sub-ótimos para decodificação de sistemas com sinalização binária antipodal.

Particularmente, neste estudo, a utilização dos algoritmos de Chase [11] nesta aplicação será comentada.

Com este objetivo, definem-se os vetores

$$\underline{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1}) \quad (\text{VII.46})$$

$$\underline{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}) \quad (\text{VII.47})$$

$$\alpha_n = |\beta_n| \quad (\text{VII.48})$$

$$y_n = \begin{cases} 0 & \text{se } \beta_n \geq 0 \\ 1 & \text{se } \beta_n < 0 \end{cases} \quad (\text{VII.49})$$

O vetor $\underline{y}$, portanto, é obtido a partir de uma decisão abrupta realizada sobre o vetor $\underline{\beta}$, dado em (VII.38). Por outro lado, o vetor $\underline{\alpha}$ carrega a informação de confiabilidade das decisões efetuadas para gerar $\underline{y}$. Uma decisão y_{n1} é mais confiável que outra y_{n2} quando $\alpha_{n1} > \alpha_{n2}$.

Nos algoritmos de Chase [11], um conjunto de padrões de teste,

$$\underline{Y}_p = (Y_{p,0}, Y_{p,1}, \dots, Y_{p,N-1}) \quad , \quad p = 1, 2, \dots, P \quad (\text{VII.50})$$

é obtido perturbando o vetor $\underline{y}$ com padrões de erros

$$\underline{T}_p = (T_{p,0}, T_{p,1}, \dots, T_{p,N-1}) \quad , \quad p = 1, 2, \dots, P \quad (\text{VII.51})$$

Ou seja,

$$\underline{Y}_p = \underline{y} \oplus \underline{T}_p \quad , \quad p = 1, 2, \dots, P \quad (\text{VII.52})$$

onde P é o número de testes utilizados e depende de alguns parâmetros discutidos proximamente.

Cada vetor $\underline{Y}_p$ é decodificado através de um decodificador binário corretor de t' erros, com

$$t' \leq t = \left\lceil \frac{d-1}{2} \right\rceil \quad (\text{VII.53})$$

onde d é a distância mínima de Hamming do código em questão, produzindo um bloco decodificado

$$\underline{Z}_p = \underline{Y}_p + \underline{E}_p, \quad p = 1, 2, \dots, P \quad (\text{VII.54})$$

onde $\underline{E}_p$ é o padrão de erros detectado pelo decodificador binário.

Sejam

$$\underline{U}_p = \underline{Z}_p \oplus \underline{Y} = (U_{p,0}, U_{p,1}, \dots, U_{p,N-1}) \quad , \quad p = 1, 2, \dots, P \quad (\text{VII.55})$$

Então, com o auxílio das expressões (VII.52) e (VII.54),

$$\underline{U}_p = \underline{I}_p + \underline{E}_p \quad , \quad p = 1, 2, \dots, P \quad (\text{VII.56})$$

O decodificador de Chase escolhe a palavra $\underline{Z}_d$,

$$\underline{Z}_d \in \left\{ \underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \dots, \underline{Z}_P \right\},$$

de maior correlação com $\underline{\beta}$, ou seja,

$$\underline{Z}_d = \min_{1 \leq p \leq P} \sum_{n=0}^{N-1} U_{p,n} \alpha_n \quad (\text{VII.57})$$

Existem três métodos de decodificação Chase, que diferem quanto à maneira de escolher os padrões de erros, $\underline{I}_p$, $p = 1, 2, \dots, P$.

Considerar-se-á o algoritmo II de Chase [11], que apresenta vantagens sobre os outros dois numa análise preocupada com o compromisso complexidade-desempenho [11, 33].

No método II, o conjunto de padrões de erros é formado pelos vetores $\underline{I}_p$, $p = 1, 2, \dots, P$, que apresentam as combinações possíveis de 1's localizados nas s posições menos confiáveis, incluindo o padrão $\underline{0}$. Portanto,

$$P = 2^s \quad (\text{VII.58})$$

padrões de erros são utilizados.

Tendolkar e Hartman [33] determinaram o valor de s como função de t' e outros parâmetros do código que garante ao algoritmo um comportamento assintoticamente ótimo. Verificaram que para tal

$$s = \begin{cases} N - t' & , \text{ se } 0 \leq t' \leq \frac{d}{4} - 1 \\ \frac{d-1}{2} & , \text{ se } d \text{ é ímpar e } t' = \frac{d-1}{2} \\ \min \left\{ N-t' , \left\lceil \frac{(t'+1)d}{4(t'+1)-d} \right\rceil \right\} & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

(VII.59)

Portanto, quando o decodificador binário é completo, ou seja, quando $t' = t = \left\lceil \frac{d-1}{2} \right\rceil$,

$$s = \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil$$

(VII.60)

O algoritmo II de Chase pode ser adotado como decodificador nas etapas em que a redução de complexidade obtida é significativa, garantindo o mesmo desempenho assintótico do decodificador ótimo

Na seção VII.5 é apresentado, um exemplo que expõe quantitativamente a afirmação do parágrafo anterior.

VII.4. SIMPLIFICAÇÃO E COMENTÁRIOS SOBRE IMPLEMENTAÇÃO

A implementação do decodificador etapa-por-etapa para os esquemas de modulação codificada de bloco tratados neste estudo é discutida, em alguns dos seus detalhes nesta seção. Tal decodificador realiza, como relatado anteriormente, as seguintes funções.

1. Determinação das Regiões de Decisão dos N pontos recebidos $r_0, r_1, \dots, r_{N-1}$, denotadas por $R(0), R(1), \dots, R(N-1)$, respectivamente.

2. Em cada etapa,

2.a) definição das palavras do código da linha correspondente que serão testadas de acordo com o algoritmo de decodificação adotado;

2.b) escolha da palavra do conjunto supramencionado com maior correlação com o vetor $\underline{\beta}$.

Os detalhes ligados a implementação discutidos presentemente são:

- utilização de métricas inteiras;
- determinação das métricas associadas a cada posição na etapa corrente em função das decodificações anteriores e da Região de Decisão do ponto recebido correspondente.

Os problemas de quantização e determinação da Região de Decisão dos pontos recebidos não serão comentados pois, em princípio, as soluções convencionais podem ser adotadas.

Retornando à discussão dos aspectos considerados relevantes, a expressão (VII.39), para sistemas em duas dimensões, formula

$$\beta_n = L_n r_{n,1} + M_n r_{n,2} + N_n \quad (\text{VII.61})$$

onde as métricas L_n , M_n e N_n são dadas pelas equações (VII.40) a (VII.43) e β_n é utilizado no processo de decodificação através da expressão (VII.37). As métricas L_n , M_n e N_n dependem da Região de Decisão de r_n e das decodificações anteriores na posição n .

Do ponto de vista de implementação, é interessante adotar inteiros como métricas. As métricas L_n , M_n e N_n podem ser modificadas para $L_{n'} = cL_n$, $M_{n'} = cM_n$ e $N_{n'} = cN_n$, onde c é qualquer número real positivo sem afetar o desempenho do decodificador. Desse modo, as métricas podem ser aproximadas por inteiros e a perda decorrente em desempenho pode ser negligenciável se o erro de aproximação for pequeno.

Além deste aspecto, é conveniente empregar uma tabela (memória) para determinação das métricas como função das decodificações anteriores e Região de Decisão de um determinado ponto.

Na etapa j , $0 \leq j \leq m-1$, o número de possíveis resultados das decodificações anteriores numa posição n , $0 \leq n \leq N-1$, é 2^j . Portanto, as informações de identificação da etapa e dos resultados das decodificações anteriores apresenta um conjunto de

$$\sum_{j=0}^{m-1} 2^j = 2^m - 1$$

possibilidades e podem ser codificadas em m bits.

A informação de Região de Decisão referente à posição n , $R(n)$, $0 \leq n \leq N-1$, pode ser apresentada em

$$\lfloor \log_2 D \rfloor \text{ bits}$$

onde D é o número de Regiões de Decisão.

Concluindo, o número de bits de endereçamento da tabela citada é

$$m + \lfloor \log_2 D \rfloor$$

Para os esquemas em duas dimensões tratados, este número, denotado por E , é apresentado na tabela VII.3.

SISTEMA	m	D	E(bits)
4-PSK	2	4	4
8-PSK	3	8	6
16-PSK	4	16	8
8-QAM	3	20	8
16-QAM	4	44	10
32-QAM	5	120	12
64-QAM	6	244	14

TABELA VII.3. - NÚMERO DE BITS DE ENDEREÇAMENTO DAS TABELAS DE MÉTRICAS DOS SISTEMAS EM DUAS DIMENSÕES

Os comentários anteriores são igualmente válidos para sistemas unidimensionais. A tabela VII.4 expõe os resultados obtidos

SISTEMA	m	D	E(bits)
4-PAM	2	3	4
8-PAM	3	7	6
16-PAM	4	15	8

TABELA VII.4. - NÚMERO DE BITS DE ENDEREÇAMENTO DAS TABELAS DE MÉTRICAS DOS SISTEMAS EM UMA DIMENSÃO

VII.5. RESULTADOS DE SIMULAÇÕES

Na sequência, são apresentados alguns exemplos e resultados de simulações com o objetivo de ilustrar os comentários feitos neste capítulo.

Exemplo VII.1

. Dados do sistema

Constelação: 4-PSK

Códigos Adotados: B_0 (4,1,4)

B_1 (4,3,2)

Ganho Assintótico: 3 dB sobre 2-PSK

- . **Objetivo do exemplo**: comparar decodificação ótima com decodificação etapa-por-etapa para o esquema acima.
- . **Resultados das simulações**: ver figura VII.2.
- . **Comentários**: Para o sistema considerado, a perda em desempenho causada pela utilização de decodificação etapa-por-etapa é desprezível quando comparada com a decodificação ótima, mesmo para baixa relação sinal-ruído. Evidentemente, para sistemas mais complexos, a perda deve ser maior. Observa-se também que para uma probabilidade de erro por bit de 10^{-4} um ganho de 2 dB em relação ao sistema de referência 2-PSK já é obtido.

Exemplo VII.2

. Dados do Sistemas

Constelação: 8-QAM

Códigos adotados: B_0 (18,7,7)

B_1 (18,12,4)

B_2 (18,17,2)

Ganho assintótico: 4,5 dB sobre 4-PSK

- . **Objetivo do exemplo**: Observar desempenho do decodificador etapa-por-etapa simplificado utilizando o algoritmo de Chase nas etapas de interesse e verificar convergência para ganho assintótico teórico.

Na etapa inicial, o algoritmo II de Chase é adotado e um total de 8 testes são realizados. Nas etapas 1 e 2, utiliza-se o mesmo algoritmo e 4 e 2 palavras são testadas respectivamente. Portanto, um total de 14 testes são realizados por bloco.

. Resultados das simulações: ver figura VII.3.

. Comentários: A curva de desempenho obtida expressa um ganho de 2,5 dB em relação ao sistema 4-PSK de referência para uma taxa de erro de aproximadamente 10^{-5} , o que é bastante satisfatório dado o número reduzido de testes realizados por decodificação. A perda em relação ao decodificador ótimo basicamente deve derivar da adoção de decodificação por etapas, mais que da utilização do algoritmo de Chase em algumas delas; porém o desempenho do decodificador etapa-por-etapa completo não foi aferido em virtude da complexidade computacional requerida.

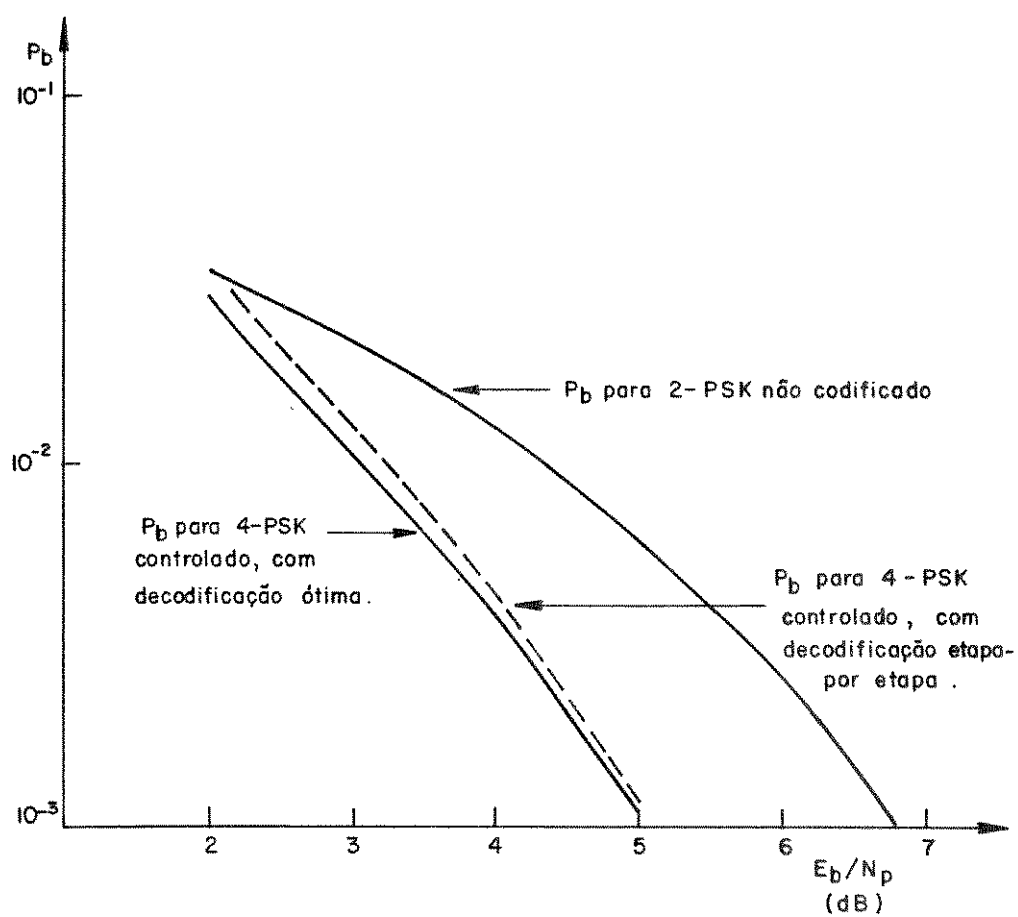


FIG.VII.2 - Exemplo VII.1

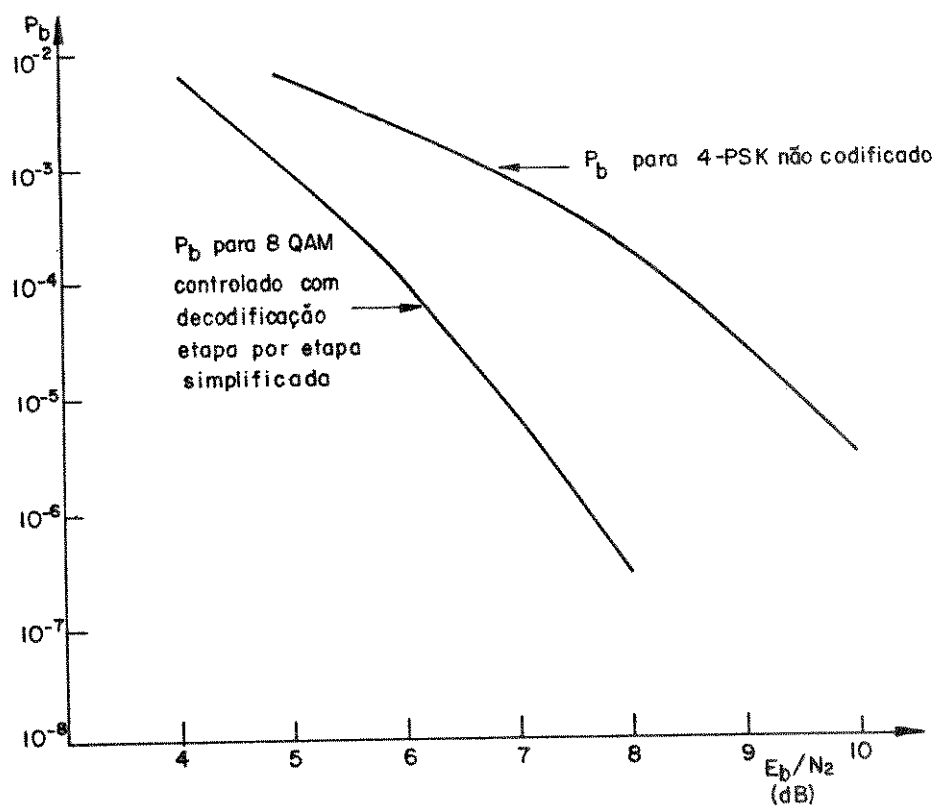


FIG.VII.3 — Exemplo VII.2

CAPÍTULO VIII
RELAÇÕES PARA A PROBABILIDADE DE ERRO

VIII.1. INTRODUÇÃO

A determinação de limitantes e relações aproximadas para a probabilidade de erro de sistemas codificados viabiliza sua avaliação e a comparação de esquemas específicos de decodificação de modo mais rápido protelando para uma etapa posterior a obtenção de resultados através de simulação computacional.

Para os sistemas de modulação codificada de bloco considerados neste estudo, tais resultados, e conclusões baseadas nestes, são apresentados neste capítulo.

O comportamento assintótico, para alta relação sinal-ruído, do desempenho adotando os decodificadores etapa-por-etapa completo e simplificado, é verificado. Prova-se que tais algoritmos são assintoticamente ótimos.

A expressão do Ganho Assintótico com relação a um sistema de referência, apresentada em capítulos anteriores, é desenvolvida formalmente.

VIII.2. LIMITANTES PARA A PROBABILIDADE DE ERRO

Teorema VIII.1- A probabilidade de erro por bloco para os sistemas estudados utilizando o decodificador ótimo, P_{e_o} , é limitada inferiormente por

$$P_{e_o} > \max_{0 \leq j \leq m-1} \left\{ Q \left[\sqrt{\frac{\Delta_j^2}{2N_0}} \right] \right\}^{d_j} \quad (\text{VIII.1})$$

onde $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-y^2/2} dy$ e N_0 é a densidade espectral unilateral de potência do ruído Gaussiano, aditivo e branco considerado.

Prova: Sejam $V^{(u)}$ a matriz-código transmitida e $V^{(l)}$ uma matriz-código que difere de $V^{(u)}$ na linha j , $0 \leq j \leq m-1$, por uma palavra de peso de Hamming d_j .

Considerem-se

$$\underline{w}^{(u)} = \left[w_0^{(u)}, w_1^{(u)}, \dots, w_{N-1}^{(u)} \right] \quad (\text{VIII.2})$$

e

$$\underline{w}^{(t)} = \left\{ \underline{w}_0^{(t)}, \underline{w}_1^{(t)}, \dots, \underline{w}_{N-1}^{(t)} \right\} \quad (\text{VIII.3})$$

os vetores de sinais associados a essas matrizes.

Utilizando o decodificador ótimo, haverá com certeza um erro de decodificação se

$$d_{\epsilon}^2 \left[\underline{w}^{(u)}, \underline{r} \right] > d_{\epsilon}^2 \left[\underline{w}^{(t)}, \underline{r} \right] \quad (\text{VIII.4})$$

onde

$$\underline{r} = \left[r_0, r_1, \dots, r_{N-1} \right] \quad (\text{VIII.5})$$

é o vetor recebido e

$$d_{\epsilon}^2 \left[\underline{w}^{(t)}, \underline{r} \right] = \sum_{n=0}^{N-1} \left| \underline{w}_n^{(t)} - r_n \right|^2 \quad (\text{VIII.6})$$

Seja

$$P_j = \left\{ p_1, p_2, \dots, p_{d_j} \right\} \quad (\text{VIII.7})$$

o conjunto das posições na linha j em que $v^{(u)}$ difere de $v^{(r)}$, $0 \leq p_i \leq N-1$.

Então

$$d_{\epsilon}^2 \left[\underline{w}^{(u)}, \underline{r} \right] = \sum_{n \in P_j} \left| \underline{w}_n^{(u)} - r_n \right|^2 + \sum_{n \notin P_j} \left| \underline{w}_n^{(u)} - r_n \right|^2 \quad (\text{VIII.8})$$

e

$$d_{\epsilon}^2 \left[\underline{w}^{(t)}, \underline{r} \right] = \sum_{n \in P_j} \left| \underline{w}_n^{(t)} - r_n \right|^2 + \sum_{n \notin P_j} \left| \underline{w}_n^{(t)} - r_n \right|^2 \quad (\text{VIII.9})$$

Seja

$$c = d_{\epsilon}^2 \left[\underline{w}^{(u)}, \underline{r} \right] - d_{\epsilon}^2 \left[\underline{w}^{(t)}, \underline{r} \right] \quad (\text{VIII.10})$$

Portanto, utilizando expressões prévias,

$$P_{e_o} \geq P_r[c > 0] > \prod_{n=p_1}^{p_{d_j}} P_r[C_n > 0] \quad (\text{VIII.11})$$

onde

$$C_n = \left| \underline{w}_n^{(u)} - \underline{r}_n \right|^2 - \left| \underline{w}_n^{(t)} - \underline{r}_n \right|^2 \quad (\text{VIII.12})$$

Como

$$\left| \underline{w}_n^{(u)} - \underline{w}_n^{(t)} \right|^2 = \Delta_j^2 \quad ; \quad n = p_1, p_2, \dots, p_{d_j} \quad (\text{VIII.13})$$

pode-se escrever

$$P_{e_o} > [Pr(e > 0)]^{d_j} \quad (\text{VIII.14})$$

onde

$$Pr(e > 0) = \int_{\frac{\Delta_j}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp \left[-\frac{n^2}{2\sigma^2} \right] dn \quad (\text{VIII.15})$$

com $\sigma^2 = N_0/2$.

Consequentemente,

$$P_{e_o} > \left\{ Q \left[\sqrt{\frac{\Delta_j^2}{2N_0}} \right] \right\}^{d_j} \quad (\text{VIII.16})$$

Uma vez que não foi feita nenhuma ressalva com relação à linha j ,

$$P_{e_o} > \max_{0 \leq j \leq m-1} \left\{ Q \left[\sqrt{\frac{\Delta_j^2}{2N_0}} \right] \right\}^{d_j} \quad (\text{VIII.17})$$

como desejava-se demonstrar.

Definição VIII.1: Um esquema de decodificação é dito de raio de correção R se garante correta decodificação quando

$$d_{\epsilon}^2 \left[\underline{w}^{(u)}, \underline{r} \right] < R^2 \quad (\text{VIII.18})$$

onde $\underline{w}^{(u)}$ é o vetor de sinais transmitido e $\underline{r}$ o recebido.

Teorema VIII.2 : O decodificador etapa-por-etapa completo é um decodificador de raio de correção $D/2$ onde D^2 é a mínima distância Euclidiana ao quadrado do esquema considerado.

Prova : Seja

$$D^2 = \min \left[d_0 \Delta_0^2, d_1 \Delta_1^2, \dots, d_{m-1} \Delta_{m-1}^2 \right] \quad (\text{VIII.19})$$

a distância Euclidiana mínima ao quadrado entre duas palavras-código do sistema adotado.

O conjunto de matrizes testadas na primeira etapa da decodificação reúne matrizes da forma

$$T^{(i)} = \begin{bmatrix} \underline{T}_0^{(i)} \\ \underline{T}_1^{(i)} \\ \vdots \\ \underline{T}_{m-1}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (\text{VIII.20})$$

onde $\underline{T}_0^{(i)} \in B_0$ e $\underline{T}_j^{(i)} \in Z_2^N$, $j=1,2,\dots,m-1$.

Nesta etapa, o decodificador escolhe a matriz que satisfaz

$$d_{\epsilon}^2 \left[\underline{w}^{(d)}, \underline{r} \right] < d_{\epsilon}^2 \left[\underline{w}^{(i)}, \underline{r} \right], \quad i \neq d, \quad \forall i \quad (\text{VIII.21})$$

onde $\underline{r}$ é o vetor recebido e $\underline{w}^{(i)}$ é o vetor de sinais associado à matriz $T^{(i)}$.

Seja $V^{(u)}$ a matriz-código transmitida.

Como

$$d_{\epsilon}^2 \left[\underline{w}^{(i)}, \underline{w}^{(D)} \right] \geq d_0 \Delta_0^2, \quad i \neq \ell \quad (\text{VIII.22})$$

então

$$d_{\epsilon}^2 \left[\underline{w}^{(u)}, \underline{r} \right] < d_{\epsilon}^2 \left[\underline{w}^{(i)}, \underline{r} \right], \quad i \neq u, \quad \forall i \quad (\text{VIII.23})$$

se

$$d_{\epsilon}^2 \left[\underline{w}^{(u)}, \underline{r} \right] < \frac{d_o \Delta_o^2}{4} \quad (\text{VIII.24})$$

Portanto, haverá decodificação correta nesta etapa se

$$d_{\epsilon}^2 \left[\underline{w}^{(u)}, \underline{r} \right] < \frac{d_o \Delta_o^2}{4} \quad (\text{VIII.25})$$

Adotando o mesmo raciocínio, supondo que houve correta decodificação na 1ª etapa, a linha 1 será também corretamente decidida se

$$d_{\epsilon}^2 \left[\underline{w}^{(u)}, \underline{r} \right] < \frac{d_1 \Delta_1^2}{4} \quad (\text{VIII.26})$$

Sem a necessidade de prosseguir até a última etapa, pode-se afirmar que todas as linhas serão decodificadas corretamente se

$$d_{\epsilon}^2 \left[\underline{w}^{(u)}, \underline{r} \right] < \min \left[\frac{d_o \Delta_o^2}{4}, \frac{d_1 \Delta_1^2}{4}, \dots, \frac{d_{m-1} \Delta_{m-1}^2}{4} \right] \quad (\text{VIII.27})$$

Com o auxílio da equação (VIII.19), a expressão acima equivale a

$$d_{\epsilon}^2 \left[\underline{w}^{(u)}, \underline{r} \right] < \frac{D^2}{4} \quad (\text{VIII.28})$$

Consequentemente, o decodificador etapa-por-etapa completo é um método de decodificação de raio de correção $D/2$.

Teorema VIII.3 - A probabilidade de erro por bloco P_{e_L} para os sistemas estudados utilizando o decodificador etapa-por-etapa completo é limitada superiormente por

$$P_{e_L} \leq \begin{cases} e^{-\frac{D^2}{4N_0}} \sum_{i=0}^{\ell-1} \frac{(D^2/4N_0)^i}{\Gamma(i+1)} & , \text{ se } NQ \text{ é par} \\ e^{-\frac{D^2}{4N_0}} \sum_{i=0}^{\ell-1} \frac{(D^2/4N_0)^{i-\frac{1}{2}}}{\Gamma(i+\frac{1}{2})} + 2\sqrt{2} Q \left[\sqrt{\frac{D}{4N_0}} \right] & , \text{ se } NQ \text{ é ímpar} \end{cases}$$

(VIII.29)

onde

$$\ell = \left\lfloor \frac{NQ}{2} \right\rfloor \quad \text{(VIII.30)}$$

ou seja, ℓ é o menor inteiro maior ou igual a $NQ/2$, Q é a dimensionalidade do espaço de sinais considerado, N é o comprimento das palavras do código e $\Gamma(\cdot)$ é a função Gama.

Prova: O decodificador etapa-por-etapa completo é um decodificador de raio de correção $D/2$. Sejam $\underline{w}^{(u)}$ o vetor de sinais transmitido e $\underline{r}$ o recebido. Então

$$P_{e_L} \leq P_r \left\{ d_{\in}^2 \left[\underline{w}^{(u)}, \underline{r} \right] \geq \frac{D^2}{4} \right\} \quad \text{(VIII.31)}$$

onde

$$d_{\in}^2 \left[\underline{w}^{(u)}, \underline{r} \right] = \sum_{n=0}^{N-1} \left| w_n^{(u)} - r_n \right|^2 \quad \text{(VIII.32)}$$

A expressão (VIII.32) pode ser reescrita, utilizando as componentes do vetor de coeficientes normalizados respectivo, como

$$d_{\in}^2 \left[\underline{w}^{(u)}, \underline{r} \right] = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{q=1}^Q n_{iq}^2 \quad \text{(VIII.33)}$$

onde

$$n_{iq} = w_{iq}^{(u)} - r_{iq} \quad \text{(VIII.34)}$$

adotando a notação introduzida no capítulo II. Observa-se que n_{iq} é Gaussiano com média zero e variância $\sigma^2 = N_0/2$.

Seja

$$U_{iq}^2 = \frac{n_{iq}^2}{N\alpha/2} \quad (\text{VIII.35})$$

Então,

$$U^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{q=1}^Q U_{iq}^2 \quad (\text{VIII.36})$$

tem uma distribuição qui-quadrada com NQ graus de liberdade e

$$P_{e_L} \leq P_r \left[U^2 \geq \frac{D^2}{2N\alpha} \right] \quad (\text{VIII.37})$$

Portanto,

$$P_{e_L} \leq \int_{\frac{D^2}{2N\alpha}}^{\infty} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{NQ}{2}\right) 2^{NQ/2}} y^{\left(\frac{NQ}{2}-1\right)} e^{-y} dy \quad (\text{VIII.38})$$

onde $\Gamma(\cdot)$ é a função Gama.

Utilizando a expressão (VIII.30) e $\theta = D^2/4N_0$ obtem-se, para $y=2x$,

$$P_{e_L} \leq \int_{\theta}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\ell)} x^{\ell-1} e^{-x} dx \quad (\text{VIII.39})$$

se NQ é par e

$$P_{e_L} \leq \int_{\theta}^{\infty} \frac{1}{\Gamma\left(\ell-\frac{1}{2}\right)} x^{\ell-(3/2)} e^{-x} dx \quad (\text{VIII.40})$$

se NQ é ímpar.

A solução das integrais acima fornece

$$P_{e_L} \leq e^{-\theta} \sum_{i=0}^{\ell-1} \frac{\theta^i}{\Gamma(i+1)} \quad , \text{ para } NQ \text{ par} \quad (\text{VIII.41})$$

e

$$P_{e_L} \leq e^{-\theta} \sum_{i=1}^{\ell-1} \frac{\theta^{i-(1/2)}}{\Gamma\left(i+\frac{1}{2}\right)} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\theta^{1/2}}^{\infty} e^{-x^2} dx \quad \text{para } NQ \text{ ímpar} \quad (\text{VIII.42})$$

que representam os resultados desejados.

Teorema VIII.4 - A probabilidade de erro por bloco para os sistemas estudados adotando o decodificador etapa-por-etapa completo é também limitada superiormente por

$$P_{e_L} \leq N_{\min} Q \left[\sqrt{\frac{D^2}{2N_0}} \right] \quad (\text{VIII.43})$$

onde $N_{\min}$ é o número mínimo de vizinhos mais próximos de qualquer palavra do esquema considerado.

Prova: Sejam $\underline{w}^{(u)}$ o vetor de sinais transmitido e $\underline{w}^{(t)}$ o vetor de sinais associado a uma palavra-código, com

$$d_{\in}^2 \left[\underline{w}^{(u)}, \underline{w}^{(t)} \right] = d_t^2 \quad (\text{VIII.44})$$

O vetor recebido $\underline{r}$ é dado por

$$\underline{r} = \underline{w}^{(u)} + \underline{n} \quad (\text{VIII.45})$$

onde

$$\underline{n} = \left(n_0, n_1, \dots, n_{N-1} \right) \quad (\text{VIII.46})$$

é o vetor referente à contribuição do ruído.

Sejam

$$V_u = d_{\in}^2 \left[\underline{w}^{(u)}, \underline{r} \right] \quad (\text{VIII.47})$$

e

$$V_t = d_{\in}^2 \left[\underline{w}^{(t)}, \underline{r} \right] \quad (\text{VIII.48})$$

Então, utilizando a notação introduzida no Capítulo II

$$V_u = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{q=1}^Q \left[r_{iq} - w_{iq}^{(u)} \right]^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{q=1}^Q n_{iq}^2 \quad (\text{VIII.49})$$

$$\begin{aligned}
 V_t &= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{q=1}^Q \left[r_{iq} - w_{iq}^{(t)} \right]^2 = \\
 &= E_t + E_u - 2\rho_{ut} + 2 \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{q=1}^Q \left[n_{iq}^2 + n_{iq} \left(w_{iq}^{(u)} - w_{iq}^{(t)} \right) \right] \quad (\text{VIII.50})
 \end{aligned}$$

onde

$$E_t = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{q=1}^Q w_{iq}^{(t)2} \quad (\text{VIII.51})$$

$$\rho_{ut} = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{q=1}^Q w_{iq}^{(u)} w_{iq}^{(t)} \quad (\text{VIII.52})$$

A probabilidade de $\underline{r}$ estar mais afastada de $\underline{w}^{(u)}$ do que de $\underline{w}^{(t)}$, denotada por P_{e_t} , é dada por

$$\begin{aligned}
 P_{e_t} &= \Pr \left[V_t - V_u \leq 0 \right] = \\
 &= \Pr \left[E_t + E_u - 2\rho_{ut} + 2 \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{q=1}^Q n_{iq} \left(w_{iq}^{(u)} - w_{iq}^{(t)} \right) \leq 0 \right] \quad (\text{VIII.53})
 \end{aligned}$$

Como n_{iq} é Gaussiano com média zero e variância $\sigma^2 = N_0/2$, $(V_t - V_u)$ também é Gaussiano com média

$$\bar{v} = E_t + E_u - 2\rho_{ut} \quad (\text{VIII.54})$$

e variância

$$\sigma_v^2 = 2N_0 \left[E_t + E_u - 2\rho_{ut} \right] \quad (\text{VIII.55})$$

Portanto

$$P_{e_t} = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_v} \exp \left[-\frac{(v - \bar{v})^2}{2\pi \sigma_v^2} \right] dv \quad (\text{VIII.56})$$

que vale

$$P_{e_t} = Q \left[\sqrt{\frac{E_u + E_t - 2\rho_{ut}}{2N_0}} \right] \quad (\text{VIII.57})$$

onde $Q(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$

Porém é fácil verificar que

$$E_u + E_t - 2\rho_{ut} = d_t^2 \quad (\text{VIII.58})$$

Por consequência,

$$P_{e_t} = Q \left[\sqrt{\frac{d_t^2}{2N_0}} \right] \quad (\text{VIII.59})$$

Este resultado será utilizado no desenvolvimento de um limitante superior para a probabilidade de erro por bloco empregando decodificação etapa-por-etapa.

Para isso, considerar-se-á que as etapas iniciais realizaram decodificações corretas. Na j -ésima etapa, uma palavra do código B_j será escolhida.

Sejam $\underline{v}_j^{(u)}$ a palavra-código de B_j correspondente a j -ésima linha da matriz-código transmitida e $\underline{v}_j^{(t)}$ uma palavra de B_j tais que a distância de Hamming entre elas seja $d_H(u,t)$. Além disso, $\underline{w}^{(u)}$ e $\underline{w}^{(t)}$ serão considerados os vetores de sinais associados à matrizes quaisquer com $\underline{v}_j^{(u)}$ e $\underline{v}_j^{(t)}$ respectivamente na j -ésima linha e os resultados das decodificações anteriores nas linhas iniciais.

Em decorrência das propriedades construtivas da classe de códigos tratada,

$$d_e^2 \left[\underline{w}^{(u)}, \underline{w}^{(t)} \right] \geq d_H(u,t) \Delta_j^2 \quad (\text{VIII.60})$$

Utilizando o resultado expresso em (VIII.59),

$$\Pr \left[d_e^2 \left(\underline{w}^{(u)}, \underline{r} \right) \geq d_e^2 \left(\underline{w}^{(t)}, \underline{r} \right) \right] \leq Q \left[\sqrt{\frac{d_H(u,t) \Delta_j^2}{2N_0}} \right] \quad (\text{VIII.61})$$

Portanto, a probabilidade de erro na decodificação da j -ésima linha considerando corretas as decodificações anteriores, P_j , pode ser limitada superiormente por

$$P_j \leq \sum_{t \neq u} Q \left[\sqrt{\frac{d_H(u,t) \Delta_j^2}{2N_0}} \right] \quad (\text{VIII.62})$$

ou aproximadamente por

$$P_j \leq N(j) Q \left[\sqrt{\frac{d_j \Delta_j^2}{2N_0}} \right] \quad (\text{VIII.63})$$

onde $N(j)$ é o número de palavras de peso d_j no código B_j e d_j é a distância mínima de Hamming deste código.

A probabilidade de erro por bloco empregando decodificação etapa-por-etapa pode ser expressa como

$$P_{e_L} = 1 - (1-P_0) (1-P_1) \dots (1-P_{m-1}) \leq \sum_{j=0}^{m-1} P_j \quad (\text{VIII.64})$$

Portanto,

$$\begin{aligned} P_{e_L} &\leq \sum_{j=0}^{m-1} N(j) Q \left[\sqrt{\frac{d_j \Delta_j^2}{2N_0}} \right] \leq \sum_{j=0}^{m-1} N(j) Q \left[\sqrt{\frac{D^2}{2N_0}} \right] = \\ &= N_{\min} Q \left[\sqrt{\frac{D^2}{2N_0}} \right] \end{aligned} \quad (\text{VIII.65})$$

onde

$$N_{\min} = \sum_{j=0}^{m-1} N(j) \quad (\text{VIII.66})$$

é o número mínimo de vizinhos mais próximos que qualquer palavra do esquema considerado.

VIII.3 - COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO

Enunciado VIII.1 - O decodificador etapa-por-etapa completo é assintoticamente ótimo para alta relação sinal-ruído.

Prova - O teorema VIII.1 apresenta um limitante inferior para a probabilidade de erro por bloco utilizando decodificador ótimo, P_{e_0} , dado por

$$P_{e_0} \geq \max_{0 \leq j \leq m-1} \left\{ Q \left[\sqrt{\frac{\Delta_j^2}{2N_0}} \right] \right\}^{d_j} \quad (\text{VIII.67})$$

A expressão acima pode ser reescrita como

$$P_{e_0} \geq \max_{0 \leq j \leq m-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha_j}} \exp \left[-\frac{\alpha_j}{2} \right] + g(\alpha_j) \right\} \quad (\text{VIII.68})$$

onde

$$\alpha_j = \frac{d_j \Delta_j^2}{2N_0} \quad (\text{VIII.69})$$

$g(\alpha_j)$ é uma função decrescente de α_j tal que

$$\frac{g(\alpha_j)}{\exp \left[-\frac{\alpha_j}{2} \right]} \Rightarrow 0 \quad (\text{VIII.70})$$

quando $\alpha_j \Rightarrow \infty$, ou seja, para alta relação sinal-ruído.

Portanto, para alta relação sinal-ruído,

$$P_{e_0} \gtrsim \max_{0 \leq j \leq m-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha_j}} \exp \left[-\frac{\alpha_j}{2} \right] \quad (\text{VIII.71})$$

que pode ser reformulado como

$$P_{e_0} \gtrsim \max_{0 \leq j \leq m-1} \exp \left\{ -\left[\frac{1}{2} - \frac{\ln \sqrt{2\pi\alpha_j}}{\alpha_j} \right] \alpha_j \right\} \quad (\text{VIII.72})$$

Como $\ln x/x \Rightarrow 0$ quando $x \Rightarrow \infty$, para alta relação sinal-ruído,

$$\begin{aligned} P_{e_0} &\gtrsim \max_{0 \leq j \leq m-1} \exp \left[-\frac{\alpha_j}{2} \right] = \\ &= \max_{0 \leq j \leq m-1} \exp \left[-\frac{d_j \Delta_j^2}{4N_0} \right] \end{aligned} \quad (\text{VIII.73})$$

Consequentemente para alta relação sinal-ruído

$$P_{e_o} \gtrsim \exp \left[- \frac{D^2}{4N_o} \right] \quad (\text{VIII.74})$$

onde D^2 é a mínima distância Euclidiana ao quadrado do esquema considerado.

Por outro lado, a probabilidade de erro por bloco usando decodificação etapa-por-etapa completa, P_{e_L} , é limitada superiormente por

$$P_{e_o} \leq h(\gamma) \exp \left[- \frac{D^2 \gamma}{4} \right] \quad (\text{VIII.75})$$

de acordo com o teorema VIII.3, onde

$$\gamma = \frac{1}{N_o} \quad (\text{VIII.76})$$

e

$$h(\gamma) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\ell-1} \frac{(D^2 \gamma / 4)^i}{\Gamma(i+1)} & , \text{ se } N_Q \text{ é par} \\ \sum_{i=1}^{\ell-1} \frac{(D^2 \gamma / 4)^{i-(1/2)}}{\Gamma(i+1/2)} + 2\sqrt{2} Q \left[\sqrt{\frac{D^2 \gamma}{4}} \right] & , \text{ se } N_Q \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (\text{VIII.77})$$

com $\ell = \lfloor N_Q/2 \rfloor$.

Será provado que o decodificador etapa-por-etapa é assintoticamente ótimo para alta relação sinal-ruído mostrando que quando $\gamma \Rightarrow \infty$, o limitante superior acima aproxima-se de $e^{-D^2 \gamma / 4}$, que é o comportamento assintótico em alta relação sinal-ruído de probabilidade de erro por bloco empregando decodificação ótima.

A expressão (VIII.75) pode ser reescrita como

$$P_{e_o} \leq \exp \left\{ - \left[\frac{D^2}{4} - \frac{\ln h(\gamma)}{\gamma} \right] \gamma \right\} \quad (\text{VIII.78})$$

Como

$$\lim_{\gamma \Rightarrow \infty} \frac{\ln h(\gamma)}{\gamma} = 0 \quad (\text{VIII.79})$$

tem-se

$$P_{e_o} \lesssim \exp \left[- \frac{D^2}{4N_o} \right] \quad \text{para } \gamma = \frac{1}{N_o} \Rightarrow \infty \quad (\text{VIII.80})$$

como se desejava demonstrar.

Concluído VIII.2- O decodificador etapa-por-etapa simplificado, que adota em algumas etapas os algoritmos sub-ótimos de Chase [11,33], é assintoticamente ótimo para alta relação sinal-ruído.

Prova: A probabilidade de erro por bloco para o decodificador etapa-por-etapa completo é dada por, de acordo com a expressão (VIII.64)

$$P_{e_L} = 1 - \prod_{j=0}^{m-1} (1 - P_j) \quad (\text{VIII.81})$$

onde P_j é a probabilidade de decodificação incorreta da j -ésima linha supondo que as linhas anteriores foram corretamente decodificadas.

Da mesma maneira, a probabilidade de erro por bloco para o decodificador etapa-por-etapa simplificado, $P_{e'_L}$, pode ser expressa como

$$P_{e'_L} = 1 - \prod_{j=0}^{m-1} (1 - P'_j) \quad (\text{VIII.82})$$

onde

$$P'_j = P_j \quad (\text{VIII.83})$$

quando a j -ésima linha é decodificada otimamente e

$$P'_j = P_j + \delta(\gamma) \quad (\text{VIII.84})$$

quando é adotado o algoritmo de Chase na decodificação da j -ésima linha, com $\delta(\gamma)$ representando uma função decrescente de γ , a relação sinal-ruído.

Chase [11] e Tendolkar/Hartmann [33] demonstram que estes algoritmos são assintoticamente ótimos, ou seja, que

$$P'_j \rightarrow P_j \quad \text{quando } \gamma \Rightarrow \infty \quad (\text{VIII.85})$$

Por consequência, para alta relação sinal-ruído,

$$P_{eL}' \cong P_{eL} \quad (\text{VIII.86})$$

como se desejava demonstrar.

Corolário VIII.3 - O Ganho Assintótico em alta relação sinal-ruído obtido com um sistema de modulação codificada de bloco sobre o seu sistema de referência é

$$G_A = 10 \log_{10} \frac{D^2}{D_{\text{ref}}^2} \text{ dB} \quad (\text{VIII.87})$$

onde D_{ref}^2 é a distância Euclidiana mínima ao quadrado entre os sinais do sistema de referência.

Prova - Diretamente dos corolário VIII.1 e VIII.2, verifica-se que a probabilidade de erro por bloco empregando qualquer dos decodificadores discutidos em alta relação sinal-ruído é dada por

$$P_e \cong \exp \left[- \frac{D^2}{4N_0} \right] \quad (\text{VIII.88})$$

Analogamente, a probabilidade de erro do sistema de referência, P_{ref} , em alta relação sinal-ruído, é

$$P_{\text{ref}} \cong \exp \left[- \frac{D_{\text{ref}}^2}{4N_0} \right] \quad (\text{VIII.89})$$

O ganho em termos de potência obtido com o sistema de modulação codificada é portanto, para alta relação sinal-ruído,

$$\begin{aligned} G_A &= 10 \log \frac{D^2/4N_0}{D_{\text{ref}}^2/4N_0} \text{ dB} = \\ &= 10 \log \frac{D^2}{D_{\text{ref}}^2} \text{ dB} \end{aligned} \quad (\text{VIII.90})$$

que é a expressão almejada.

CAPÍTULO IX

CONCLUSÃO E SUGESTÕES

CONCLUSÃO E SUGESTÕES

Em última análise, este trabalho de dissertação tentou demonstrar a viabilidade dos esquemas de modulação codificada controlados por códigos de bloco binários como solução ao projeto de sistemas de comunicação digital eficientes.

Com esta intenção, vários aspectos de interesse prático foram abordados e sintetizados nos resultados citados abaixo:

- determinação dos códigos ótimos (Cap. IV);
- desenvolvimento de método para cálculo de espectro dos sinais codificados (Cap. V);
- desenvolvimento de métodos simplificados de decodificação (Cap. VII);
- Determinação de limitantes para a probabilidade de erro (Cap. VIII).

Além dos tópicos apresentados acima, outros de mesma relevância conduzidos neste estudo foram:

- formulação de condições que o mapeamento por partição de conjuntos dos sistemas considerados satisfazem. (Cap. III);
- Proposta dos esquemas de modulação codificada em três e quatro dimensões espectralmente assimétricos (Cap. VI).

Para finalizar, são expostas algumas idéias que podem incentivar pesquisas interessantes na linha desta tese de mestrado:

a) Comparação dos esquemas de modulação codificada de bloco com aqueles controlados por código convolucionais em termos de complexidade x desempenho e identificação das vantagens particulares de cada uma das configurações.

b) Estudo de esquemas de modulação codificada controlados por códigos de bloco não-binários e construídos segundo a filosofia dos esquemas tratados neste estudo, ou seja, linha-a-linha.

c) Construção de esquemas codificados com alta eficiência empregando construção linha-a-linha através de códigos de bloco binários ou não-binários, análise de complexidade de decodificação etapa-por-etapa e avaliação de desempenhos destes esquemas, para aplicação em sistemas de Rádio Digital.

Além destes tópicos, vale a pena ressaltar que a implementação de um dos sistemas de modulação codificada tratados e o estudo associado para a escolha da estrutura de decodificação mais apropriada são tarefas que merecem ser viabilizadas.

REFERÊNCIAS

REFERENCIAS

- [011] ARTHURS, E. e DYM, H. : "On the Optimum Detection of Digital Signals in the Presence of White Gaussian Noise - A Geometric Interpretation and a Study of Three Basic Data Transmission Systems", IRE Trans. On. Commun. Syst., Dezembro, 1962.
- [021] BENELLI, G. e FANTACCI, R.: "Euclidean Distance for Combinations of Some Hamming Codes and Binary CPFSK Modulation", IEEE Trans. Inform. Theory, IT-33, p.290, Março, 1987.
- [031] BELERKAMP, E. R.: "Algebraic Coding Theory", McGraw-Hill, New York, 1968.
- [041] BEZERRA, J. B.: "Codigos Convolucionais para Modulacao Codificada", Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, SP, Março, 1987.
- [051] BEZERRA, J. B. e ARANTES, D. S.: "Spectral Analysis of q-ary Digital Signals Encoded by p-ary Convolutional Codes", IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-32, p. 313, Março, 1986.
- [061] BIGLIERI, E.: "High Level Modulation and Coding for Nonlinear Satellite Channels", IEEE Trans. Commun., vol. COM-32, p. 616, Maio, 1984.
- [071] BORELLI, W. C.: "Convolutional Codes for Multilevel Data Transmission", Ph.D Thesis, University of Kent at Canterbury, England Junho, 1983.
- [081] CALDERBANK, A. R. e MAZO, J. E.: "A New Description of Trellis Codes", IEEE Trans. Inform. Theory, vol IT-30, p. 784, Novembro, 1984.
- [091] CALDERBANK, A. R. e SLOANE, N. J. A.: "New Trellis Codes Based on Lattices and Cosets", IEEE Trans. Inform. Theory, IT-33 p. 177, Março, 1987.

- [10] CARIOLARO, G.L. e TRONCA, G.P.: "*Spectra of Block Coded Digital Signals*", IEEE Trans. Commun., vol. COM-22, p. 1555, Outubro, 1974.
- [11] CHASE, D.: "*A Class of Algorithms for Decoding Block Codes with Channel Measurement Information*", IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-18, p. 179, Janeiro, 1972.
- [12] CUSACK, E. L.: "*Error Control Codes for QAM Signalling*", Electron. Lett., vol. 20, p. 62, 1984.
- [13] DIVSALAR, D. e SIMON, M.K.: "*Multiple Trellis Coded Modulation*", IEEE Trans. Commun., vol. COM-36, p. 410, Abril, 1988.
- [14] DIVSALAR, D., SIMON, M.K. e YUEN, J.M.: "*Trellis Coding with Asymmetric Modulations*", IEEE Trans. Commun., vol. COM-35, p.130, Fevereiro, 1987.
- [15] FORNEY JR., G.D., GALLAGER, R.G., LANG, G.R., LONGSTAFF, F.M. e QURESHI, S.V.: "*Efficient Modulation for Band-Limited Channels*", IEEE J. Select. Areas Commun., vol. SAC-2, p. 632, Setembro, 1984.
- [16] GALLAGER, R.G.: "*Information Theory and Reliable Communication*", John Wiley & Sons. Inc., 1968.
- [17] HONIG, M. L.: "*On Constructing Embedded Multilevel Trellis Codes*", IEEE Trans. Commun., vol. COM-36, p. 218, Fevereiro, 1988.
- [18] IMAI, H. e HIRAKAWA, S.: "*A New Multilevel Coding Method Using Error-Correcting Codes*", IEEE Trans. Inform. Theory, IT-23, p.371, Maio, 1977.
- [19] LEVITIN, L.B. e HARTMANN, C.R.P.: "*A New Approach to the General Maximum Distance Decoding Problem: The Zero-Neighbors Algorithm*", IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-31, p. 378, Maio, 1985.

- [20] MACWILLIAMS, F.J. e SLOANE, N.J.A.: "*The Theory of Error-Correcting Codes*", North-Holland, 1977.
- [21] MARKMAN, I.: "*Esquemas de Modulação Codificada em Tres e Quatro Dimensões*", Tese de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, SP, Junho, 1987.
- [22] MASSEY, J. L.: "*Coding and Modulation in Digital Communications*", Proc. 1974 Int. Zurich Seminar Digital Commun., Zurich, Switzerland, p. E2(1), Março, 1974.
- [23] MIHRAM, G. A.: "*Simulation Statistical Foundations and Methodology*", Academic Press, New York, 1972.
- [24] MULLIGAN, M. G. e WILSON, S. G.: "*An Improved Algorithm for Evaluating Trellis Phase Codes*", IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-31, p. 530, Novembro, 1985.
- [25] PESSOA, A.C.F. e ARANTES, D.S.: "*Um Esquema Não-Algebrico para a Decodificação de Códigos de Bloco Binários, utilizando Decisão Suave*", Anais do 5º Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, Campinas, SP, p. 130, Setembro, 1987.
- [26] PETERSON, W. W. e WELDON, E.S.: "*Error-Correcting Codes*", MIT Press, Cambridge, Mass., USA, 1972.
- [27] PIZZI, S. V. e WILSON, S.G.: "*Convolutional Coding Combined with Continuous Phase Modulation*", IEEE Trans. Commun., vol. COM-33, p. 20, Janeiro, 1985.
- [28] POTTIE, G. J. e TAYLOR, D.P.: "*An Approach to Ungerboeck Coding for Rectangular Signals Sets*", IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-33, p. 285, Março, 1987.
- [29] PROAKIS, J.G.: "*Digital Communications*", McGraw Hill, 1983.
- [30] SAYEGH, S. I.: "*A Class of Optimum Block Codes in Signal Space*", IEEE Trans. Commun., vol. COM-34, p. 1043, Outubro, 1986.

- [31] SHANNON, C. E.: "*A Mathematical Theory of Communications*", Bell Syst. Tech. J., vol. 27, p. 379, Julho, 1948.
- [32] SHANNON, C. E.: "*A Mathematical Theory of Communications*", Bell Syst. Tech. J., vol. 27, p. 623, Outubro, 1948.
- [33] TENDOLKAR, W. W. e HARTMANN, C. R. P.: "*Generalization of Chase Algorithms for Soft Decision Decoding of Binary Linear Codes*", IEEE Trans. Inform. Theory. vol. IT-30, p. 714, Setembro, 1984.
- [34] UNGERBOECK, G. e CSAIKA, I.: "*On Improving Data Link Performance By Increasing the Channel Alphabet and Introducing Sequence Coding*", presented at 1976 IEEE Intern. Symp. Inform. Theory, Ronneby, Sweden, Junho, 1976.
- [35] UNGERBOECK, G.: "*Channel Coding with Multilevel/Phase Signals*", IEEE Trans. Inform. Theory. vol. IT-28, p. 55, Janeiro, 1982.
- [36] VERHOEFF, T.: "*An Update Table of Minimum-Distance Bounds for Binary Linear Codes*", IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-33, p. 665, Setembro, 1987.
- [37] VITERBI, A.J. e OMURA, J.K.: "*Principles of Digital Communication and Coding*", McGraw Hill Kogakusha, LTD., 1979.
- [38] WEI, L.F.: "*Trellis-Coded Modulation with Multidimensional Constellations*", IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-33, p. 483, Julho, 1987.
- [39] WOLF, J. K. e PADOVANI, R.: "*Coded Phase/Frequency Modulation*", IEEE Trans. Commun., vol. COM-34, p. 446, Maio, 1986.