

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA

CONTROLE DE SISTEMAS LINEARES INCERTOS

Via

Realimentação de Saída

Ali Milad Khalifa ALMUGLA

ORIENTADOR : Prof. Dr. José Claudio GEROMEL

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica
da Universidade Estadual de CAMPINAS - UNICAMP, como
parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título
de MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA

JANEIRO 1991.

Este exemplar corresponde à redação final da tese
defendida por ALI MILAD K. ALMUGLA
e aprovada pela Comissão
 julgadora em 11 / 01 / 91.


Orientador

ملخص البحث

هذا البحث يدرس الأنظمة التي تتلائم عناصرها مع التغيرات الخارجية والتي تشتغل سوا في الزمن المستمر أو الزمن اللحظي ، فنتيجة لهذه الدراسة أمكن وضع معادلات وقوانين للتحكم في استقرار النظم حتى لا تتأثر النتائج المستهدفة بفعل التغيرات الخارجية المتوترة . هذه المعادلات والقوانين يمكن تلخيصها رياضيا بطريقة مبسطة على أنها أدوات أولية للحصول على الكسب الحقيقي بفرض استعماله في استقرارية الأنظمة التي قد يكون استقرارها محدودا في نطاق أصغر بدون هذا الكسب .

والجدير بالذكر أن هذه القوانين والمعادلات المبتكرة قد استعملت في تجارب تقليدية ومعروفة في مجال استقرارية الأنظمة وأثبتت فعاليتها ومزايا استعمالها وخاصة بأنها معادلات غير معقدة مما تتشى مع أساليب البحث العلمي الحديث .

AGRADECIMENTOS

Expresso aqui os meus agradecimentos aos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Ao especialmente Prof. Dr. J. C. Geromel, pela oportunidade que me concedeu de trabalhar consigo durante dois anos, período no qual norteou-me de forma segura, foi amigo e conselheiro nos momentos em que optar era muito difícil e, pela eficiente orientação e apoio à realização deste trabalho.

Ao prof. P. L. D. Peres pelas discussões, e sugestões na parte de programação, pela dedicação e ajuda relevante e pela correção final do texto.

Ao prof. Akebo Yamakami, pelo suporte oferecido no laboratório e discussões valiosas que vieram enriquecer o trabalho.

Aos professores da Unicamp, pelas discussões, e pelos incentivos e agradável convivência durante a realização deste trabalho.

Ao meu amigo Abdalla Ibrahim Elusta, pelo auxílio financeiro no início do trabalho e pelo apoio durante sua execução.

Aos meus amigos da Unicamp, pelos incentivos e agradável convivência, e pelas discussões do dia-a-dia, nas quais muito aprendi.

À Minha família pelo auxílio financeiro e apoio que tem me dado.

Conteúdo

1	Proposição do Problema e Resultados da Literatura	8
1.1	Introdução	8
1.1.1	Método 1	9
1.1.2	Método 2	13
1.1.3	Método 3	14
1.2	Conclusões	17
2	Síntese Via Realimentação de Estado	20
2.1	Introdução	20
2.2	Sistemas Contínuos	23
2.3	Sistemas Discretos	31
2.4	Conclusões	38
3	Síntese Via Realimentação de Saída	39
3.1	Introdução	39

3.2	Sistemas Contínuos	42
3.3	Sistemas Discretos	46
3.4	Conclusões	51
4	Implementação Numérica e Exemplos	53
4.1	Introdução	53
4.2	Exemplos	58
4.2.1	Sistema Contínuo - Matriz A incerta	58
4.2.2	Sistemas Contínuos - Matrizes A e B incertas	61
4.2.3	Sistemas Discretos - Matriz A incerta	68
4.3	Conclusões	70

Sumário

Este trabalho trata de sistemas lineares incertos, invariantes no tempo, contínuos ou discretos e representados por equações de estado. Objetiva-se construir uma lei de realimentação linear de saída para garantir sua robustez, frente a variações de parâmetros do sistema original. As incertezas afetam diretamente as matrizes do modelo matemático do sistema. A técnica utilizada consiste em obter um problema de programação convexa que, ao ser resolvido fornece o ganho de realimentação procurado. Igualmente, condições necessárias e suficientes, para existência de solução do problema de controle robusto enunciado são obtidas e analisadas. Os métodos numéricos propostos são testados com exemplos clássicos da literatura.

Capítulo 1

Proposição do Problema e Resultados da Literatura

1.1 Introdução

Nos últimos anos, muito se tem feito para o desenvolvimento de novas metodologias de controle para os chamados sistemas incertos. No caso linear, invariante no tempo, os sistemas incertos podem ser caracterizados por :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad ; \quad (A, B) \in \mathcal{D} \quad (1.1)$$

Onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado e $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle . Deve-se notar que as matrizes A e B que definem o modelo em questão não são exatamente conhecidas. Sabe-se apenas que o par (A, B) pertence ao conjunto convexo $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m}$. É claro que o conjunto \mathcal{D} é perfeitamente conhecido. Via realimentação de estado dois importantes problemas, para esta classe de

sistemas dinâmicos, foram resolvidos :

- **Problema 1 (Estabilidade)** : Determinar o conjunto dos ganhos de realimentação $k \in \mathcal{K}$ que estabilizam (1.1) para qualquer $(A, B) \in \mathcal{D}$.
- **Problema 2 (Otimização)** : No caso em que $\mathcal{K} \neq \emptyset$, determinar a solução de

$$\min \{f(k) : k \in \mathcal{K}\} \quad (1.2)$$

onde $f(\cdot) : \mathcal{K} \rightarrow \mathfrak{R}$ é uma função dada .

O objetivo desta tese é resolver os problemas (1) e (2) considerando realimentação de saída ($y = Cx \in \mathfrak{R}^r$) e realimentação dinâmica. Em seguida, apresentamos algumas abordagens clássicas para análise e solução desses problemas, em particular para o problema de estabilidade.

1.1.1 Método 1

Steinberg e Corless em [1], introduziram condições suficientes de estabilidade, generalizando os resultados de estabilização de sistemas lineares incertos, via realimentação de estado, para realimentação de saída. Considere o seguinte sistema dinâmico :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Be(t, x) \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{1.3}$$

Onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle e $y \in \mathbb{R}^r$ é o vetor de saída com $r \geq m$. Supõe-se que A seja uma matriz assintoticamente estável e a função $e(t, x)$ representa as incertezas do modelo. Note que, as incertezas atuam no modelo através da matriz de entrada B . É claro que esta hipótese é muito restritiva. Ademais, assumindo que :

$$\|e(t, x)\| \leq \rho \|x\|, \rho \geq 0\tag{1.4}$$

e considerando o par (A, B) controlável e o par (A, C) observável, é possível determinar γ de tal forma que [2] o controlador linear :

$$u = -\gamma B' P x\tag{1.5}$$

estabilize (1.3) para toda incerteza satisfazendo (1.4). A constante γ depende de ρ . A matriz P , simétrica e definida positiva, satisfaz a equação de Lyapunov:

$$PA + A'P + Q = 0\tag{1.6}$$

onde $Q = Q' \geq 0$. Se for possível determinar Q , de tal forma que para algum G ocorra :

$$B'P = GC\tag{1.7}$$

então a realimentação de estado (1.5), torna-se uma lei de realimentação de saída, com as propriedades anteriormente enunciadas. Isto é, o controle linear :

$$u = -\gamma Gy \quad (1.8)$$

estabiliza (1.3). A solução do problema proposto é muito difícil. De fato, $G \in \mathbb{R}^{m \times r}$ existe se e somente se a função de transferência $g_F(s)$ for Estritamente Real Positiva (ERP) :

$$g_F(s) = GC[sI - A]^{-1}B \quad (1.9)$$

Note que esta condição de existência envolve a matriz G , não sendo portanto adequada. Em [1], os autores analisam o caso SISO, isto é $m = r = 1$. É claro que neste caso, G é um escalar e conseqüentemente o seguinte resultado pode ser estabelecido.

Lema 1.1.1 *Dado (A, B, C) onde A é assintoticamente estável, o par (A, B) é controlável, o par (A, C) é observável e $m = r = 1$. Se a função de transferência*

$$g(s) = C[sI - A]^{-1}B \quad (1.10)$$

é (ERP) então existe $\gamma \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$u = -\gamma y \quad (1.11)$$

estabiliza (1.9).

No caso geral, isto é m e r quaisquer (menores que n), a determinação da matriz $G \in \mathbb{R}^{m \times r}$ pode ser feita a partir da solução ótima do seguinte problema convexo :

$$\min \left\{ \|B'PH\|^2 \mid P \geq \epsilon I, A'P + PA \leq 0 \right\} \quad (1.12)$$

Onde $H = [I - C'(CC')^{-1}C]$ e $\epsilon > 0$ é um escalar arbitrariamente pequeno.

A solução ótima deste problema permite concluir que existe G satisfazendo as restrições (1.6) e (1.7), se e somente se

$$\|B'PH\|^2 = 0 \quad (1.13)$$

Neste caso, a matriz de realimentação de saída é dada por

$$G = B'PC'(CC')^{-1} \quad (1.14)$$

Como veremos nos capítulos seguintes, problemas de otimização como (1.12) podem ser resolvidos por métodos numericamente eficientes. Ademais, sendo convexo, sua solução ótima global sempre pode ser determinada, permitindo portanto explicitar numericamente a condição necessária e suficiente acima enunciada.

Embora (1.12) seja uma generalização importante do lema anterior, na medida que permite calcular um ganho de realimentação de saída no caso multi-

variável, sua utilização é extremamente limitada, devido às hipóteses feitas a respeito das incertezas que podem ocorrer no modelo original (1.3).

1.1.2 Método 2

Em [3], os autores introduziram um método que permite determinar uma lei de realimentação de saída linear que estabiliza assintoticamente uma classe de sistemas dinâmicos incertos. Esta classe é definida na forma :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + B(\Delta Ax + \Delta Bu) \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{1.15}$$

Onde, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^r$. Por hipótese, a tripla (A, B, C) é estabilizável e a incerteza no controle é tal que

$$2I + \Delta B + \Delta B' > 0 \tag{1.16}$$

É importante novamente salientar que as perturbações ocorrem através da matriz de controle B . Portanto trata-se de um modelo muito particular. No artigo acima citado, os autores introduzem o chamado Problema de Lyapunov Restrito(PLR) : Determine $P > 0$ e G com dimensões apropriadas tais que

$$\begin{aligned}
T'(AP^{-1} + P^{-1}A')T &< 0 \\
B'P &= GC
\end{aligned}
\tag{1.17}$$

onde T define uma base ortonormal no espaço nulo de B' , isto é $B'T = 0$ com $T'T = I$. Supondo que este problema admite solução, pode-se estabelecer o seguinte resultado.

Teorema 1.1.2 *Considere o sistema (1.15), satisfazendo as hipóteses anteriormente definidas. Se o Problema de Lyapunov Restrito admite solução então a lei de controle*

$$u = -\gamma Gy \tag{1.18}$$

para $\gamma > 0$ suficientemente grande, estabiliza o sistema em consideração para toda incerteza factível.

1.1.3 Método 3

Em [4] Keel, Bhattacharyya e Howze estudaram a determinação de uma lei de realimentação de saída robusta para o seguinte sistema linear

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)u \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{1.19}$$

Por hipótese, as incertezas são modeladas da seguinte forma :

$$\begin{aligned}\Delta A &= \sum_{i=1}^r p_i A_i \\ \Delta B &= \sum_{i=1}^r p_i B_i\end{aligned}\tag{1.20}$$

Onde as matrizes A_i e B_i são conhecidas. Definido as matrizes

$$\begin{aligned}A_f &= A - BGC \\ E_i &= A_i - B_iGC \quad ; \quad i = 1, \dots, r\end{aligned}\tag{1.21}$$

no artigo acima citado, o seguinte resultado é estabelecido.

Teorema 1.1.3 *Com as hipóteses acima consideradas, o sistema (1.19) é assintoticamente estável se :*

$$\sum_{i=1}^r p_i^2 < \rho(G, L)\tag{1.22}$$

onde

$$\rho(G, L) = \frac{\lambda_{\min}^2(L'L)}{\|E_f'P + PE_f\|^2} \quad (1.23)$$
$$A_f'P + PA_f + L'L = 0.$$

É importante notar que o Teorema acima fornece somente uma condição suficiente de estabilidade para o sistema incerto (1.19) e pode ser provado considerando a função de Lyapunov $v(x) = x'Px$. Para tentar minimizar o caráter conservativo deste resultado, os autores definem o seguinte problema de otimização, que ao ser resolvido permite determinar o ganho de realimentação de saída procurado

$$\min_{G,L} \rho(G, L)^{-1} \quad (1.24)$$

Embora os autores não tenham notado, o problema acima é extremamente difícil de ser resolvido, pois sua função objetivo não é diferenciável em todos os pontos do seu domínio. Apesar deste fato, introduzem um método baseado em gradientes que não tem nenhum embasamento teórico para funcionar. Esta afirmação será melhor avaliada a partir de exemplos numéricos considerados nos capítulos seguintes.

1.2 Conclusões

Neste capítulo introdutório, apresentamos três procedimentos que permitem sintetizar controladores, via realimentação de saída para modelos lineares incertos.

É preciso enfatizar alguns aspectos negativos dos métodos analisados. Infelizmente, nos restringimos a estes métodos pois são os mais importantes que existem atualmente na literatura.

1. Só tratam modelos contínuos no tempo .
2. Os dois primeiros métodos consideram uma classe de incertezas extremamente restrita. De fato as variações paramétricas no modelo nominal devem estar no espaço - range da matriz nominal de entrada. Esta hipótese limita, em muito, os resultados conseguidos.
3. O método 3 não apresenta esta restrição mas por outro lado não tem um embasamento teórico adequado, no que diz respeito ao procedimento numérico proposto. Praticamente, pode ser mostrado (ver exemplo numérico no artigo original [4]) que as magnitudes das incertezas que o controlador pode suportar são extremamente pequenas.

Neste sentido, o objetivo desta tese é sanar estas limitações e propor um método de análise de estabilidade e síntese de controladores, via realimentação de saída, com as seguintes características :

1. Seja possível manipular sistemas dinâmicas incertos, contínuos e discretos no tempo.
2. As incertezas são modeladas em uma forma suficientemente geral. De fato, consideraremos que em (1.1)

$$A \in D_A \triangleq \left\{ A : A = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i \ , \ \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \ , \ \alpha_i \geq 0 \right\} \quad (1.25)$$

$$B \in D_B \triangleq \left\{ B : B = \sum_{j=1}^M \mu_j B_j \ , \ \sum_{j=1}^M \mu_j = 1 \ , \ \mu_j \geq 0 \right\} \quad (1.26)$$

Ou seja $(A, B) \in D_A \times D_B$ onde D_A e D_B denotam obviamente conjuntos convexos limitados. Por exemplo, poderemos considerar situações práticas onde os elementos das matrizes A e B pertencem a um intervalo real dado.

3. O problema numérico a ser resolvido terá uma geometria simples (convexidade). Isso o torna atrativo do ponto de vista algoritmo, na medida que os mais importantes e eficientes métodos de programação matemática, podem ser utilizados para a determinação de seu ótimo global.

4. O problema de controle ótimo (1.2) poderá também ser resolvido. Objetiva-se neste caso, expressar a melhor performance do sistema em malha fechada, tendo sido a priori assegurada sua estabilidade assintótica.

Capítulo 2

Síntese Via Realimentação de Estado

2.1 Introdução

Como vimos no capítulo anterior, os métodos existentes na literatura para o estudo de estabilidade de sistemas incertos só se aplicam em casos muito particulares. O objetivo deste trabalho é desenvolver novos métodos que permitam manipular modelos mais gerais. Neste sentido, neste capítulo, introduzimos as idéias de base para o caso de realimentação linear de estado. Serão estudadas as propriedades básicas do problema de estabilização, sobretudo no que diz respeito a sua convexidade. Este capítulo baseia-se essencialmente em [11], [12].

Consideramos os seguintes modelos dinâmicos. No caso contínuo no tempo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.1)$$

e no caso discreto no tempo:

$$x(t + 1) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.2)$$

Em ambos os casos, assumimos que os modelos são multivariáveis isto é, $x \in \mathfrak{R}^n$, $u \in \mathfrak{R}^m$. As matrizes A e B são tais que $A \in D_A$ e $B \in D_B$, sendo estes conjuntos convexos e limitados. Conseqüentemente, podemos definir

$$D_A = \left\{ A = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\} \quad (2.3)$$

$$D_B = \left\{ B = \sum_{j=1}^M \mu_j B_j, \sum_{j=1}^M \mu_j = 1, \mu_j \geq 0 \right\} \quad (2.4)$$

A seguir, as seguintes definições de estabilidade quadrática serão importantes :

Definição 1 : (caso contínuo) : O sistema contínuo (2.1) é quadraticamente estabilizável via realimentação de estado se existirem $W = W' > 0$ e K , com dimensões apropriadas, tais que :

$$(A - BK)'W^{-1} + W^{-1}(A - BK) < 0 \quad : \quad A \in D_A, B \in D_B \quad (2.5)$$

Definição 2 : (caso discreto) : O sistema discreto (2.2) é quadraticamente

estabilizável via realimentação de estado se existirem $W = W' > 0$ e K , com dimensões apropriadas, tais que :

$$(A - BK)W(A - BK)' - W < 0 \quad : \quad A \in D_A, B \in D_B \quad (2.6)$$

A interpretação é simples. As definições 1 e 2 exigem que um único ganho de realimentação estabilize todos os modelos possíveis.

Com o objetivo de simplificar a análise de estabilidade, introduzimos o chamado sistema dinâmico aumentado, onde as matrizes A e B em (2.1), (2.2) são substituídas respectivamente pelas matrizes F e E assim definidas ($p = n + m$)

$$F \triangleq \begin{bmatrix} A & -B \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad ; \quad E \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times m} \\ \mathbf{1}_{m \times m} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Dois fatos importantes devem ser observados. Em primeiro lugar, as matrizes de controlabilidade dos pares (A, B) e (F, E) são relacionadas por

$$\text{rank} [\text{Con}(F, E)] = m + \text{rank} [\text{Con}(A, B)] \quad (2.8)$$

isto implica que as propriedades estruturais do par (A, B) são exatamente as mesmas do par (F, E) . Ademais, as incertezas nos modelos (2.1) e (2.2) podem ser descritas da forma

$$D_F = \left\{ F = \sum_{\ell=1}^L \xi_{\ell} F_{\ell} \quad , \quad \sum_{\ell=1}^L \xi_{\ell} = 1 \quad , \quad \xi_{\ell} \geq 0 \right\} \quad (2.9)$$

com $L \triangleq N \times M$.

2.2 Sistemas Contínuos

Antes de estudarmos os sistemas contínuos incertos, apresentamos a seguir alguns resultados relativos aos sistemas dinâmicos lineares.

Teorema 2.2.1 *O sistema linear contínuo, definido pelo par (A, B) é estabilizável via controle linear de realimentação de estado se e somente se existir uma matriz $W = W' \in \mathbb{R}^{p \times p}$, escrita na forma*

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

com a submatriz W_1 definida positiva, tal que

$$z' [FW + WF'] z < 0 \quad \forall z \neq 0 \quad : \quad E'z = 0. \quad (2.11)$$

Prova : Suponha inicialmente que o par (A, B) é estabilizável. Neste caso, existem matrizes K e $P = P' > 0$ tais que

$$(A - BK)'P^{-1} + P^{-1}(A - BK) < 0 \quad (2.12)$$

Formando a matriz W como

$$W = \begin{bmatrix} P & PK' \\ KP & ? \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

onde (?) indica uma matriz simétrica arbitraria ($m \times m$) e lembrando que $E'z = 0$ implica em termos $z' = \begin{bmatrix} x' & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$, obtemos

$$\begin{aligned} z'[F\mathcal{W} + \mathcal{W}F']z &= x'[(A - BK)P + P(A - BK)']x \\ &= (Px)'[(A - BK)'P^{-1} + P^{-1}(A - BK)](Px) < 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

como o vetor z é arbitrário no espaço nulo de E' , a primeira parte do Teorema está provada. Suponha agora a situação inversa, isto é, que para uma certa matriz \mathcal{W}' , a desigualdade (2.11) seja satisfeita. Particionado-a como indicado em (2.10) obtemos

$$AW_1 - BW_2' + W_1A' - W_2B' < 0 \quad (2.15)$$

e definindo $P = W_1$ e $K = W_2'W_1^{-1}$ vem

$$\begin{aligned} [(A - BK)'P^{-1} + P^{-1}(A - BK)] &= \\ = W_1^{-1}[AW_1 - BW_2' + W_1A' - W_2B']W_1^{-1} &< 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

isto prova do Teorema proposto.

Teorema 2.2.2 *O sistema incerto (2.1), é quadraticamente estabilizável via controle linear de realimentação de estado se e somente se existir uma matriz*

$\mathcal{W} = \mathcal{W}' \in \mathbb{R}^{p \times p}$, escrita na forma

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

com a submatriz W_1 definida positiva, tal que

$$z' [F_\ell \mathcal{W} + \mathcal{W} F_\ell'] z < 0 \quad \forall z \neq 0 : E' z = 0 \quad (2.18)$$

$$\ell = 1 \dots L$$

Prova : Suponha novamente que o sistema (2.1) é quadraticamente estabilizável.

Neste caso, existem matrizes K e $P = P' > 0$ tais que $\forall A \in D_A$ e $\forall B \in D_B$

$$(A - BK)' P^{-1} + P^{-1} (A - BK) < 0 \quad (2.19)$$

Em particular, a desigualdade acima vale para $A = A_i$ e $B = B_j$ onde $i = 1 \dots N$ e $j = 1 \dots M$. Ademais, com F_ℓ formada pelo par (A_i, B_j) , considerando $W_1 = P$ e $W_2 = PK'$ e lembrando que $E' z = 0$ implica em termos $z' = \begin{bmatrix} x' & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$, obtemos

$$\begin{aligned} z' [F_\ell \mathcal{W} + \mathcal{W} F_\ell'] z &= x' [(A_i - B_j K) P + P (A_i - B_j K)'] x \\ &= (Px)' [(A_i - B_j K)' P^{-1} + P^{-1} (A_i - B_j K)] (Px) < 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

como o vetor z é arbitrário no espaço nulo de E' , a primeira parte do Teorema

está provada. Suponha agora a situação inversa, isto é, que para uma certa matriz W , a desigualdade (2.18) seja satisfeita. Particionado-a como indicado em (2.17) obtemos

$$A_i W_1 - B_j W_2' + W_1 A_i' - W_2 B_j' < 0 \quad (2.21)$$

Definindo $P = W_1$ e $K = W_2' W_1^{-1}$, para qualquer $A \in D_A$ e $B \in D_B$ temos

$$\begin{aligned} & [(A - BK)' P^{-1} + P^{-1} (A - BK)] = \\ & = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \alpha_i \mu_j \{ (A_i - B_j K)' P^{-1} + P^{-1} (A_i - B_j K) \} = \quad (2.22) \\ & = W_1^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \alpha_i \mu_j (A_i W_1 - B_j W_2' + W_1 A_i' - W_2 B_j') \right\} W_1^{-1} < 0 \end{aligned}$$

com (2.21), a prova do Teorema decorre da definição 1. Dois comentários são importantes. Em primeiro lugar, o Teorema acima permite concluir que a estabilidade de um número infinito de modelos pode ser testada somente com um número finito de restrições (igual a $L+1$). Os modelos que definem as restrições (2.17) são chamados de modelos **Extremos**.

A segunda observação diz respeito à geometria das restrições acima mencionadas. Definindo a matriz

$$F_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

é fácil verificar que as matrizes \mathcal{W} factíveis no Teorema 2.2.2 são tais que $\mathcal{W} \in \mathcal{C}$, onde

$$\mathcal{C} \triangleq \{\mathcal{W} = \mathcal{W}' : z'(F_\ell \mathcal{W} + \mathcal{W} F_\ell')z < 0, \ell = 0 \cdots L, E'z = 0\} \quad (2.24)$$

Teorema 2.2.3 *O conjunto \mathcal{C} tem as seguintes propriedades*

1. $\mathcal{C} \neq \emptyset$ se e somente se o sistema incerto é quadraticamente estável.
2. \mathcal{C} é um cone convexo.
3. Se $\mathcal{W}_* \notin \mathcal{C}$ então existe $X_* \in \mathbb{R}^{p \times p}$ tal que o hiperplano $\langle \mathcal{W}, X_* \rangle = 0$, separa \mathcal{W}_* de \mathcal{C} .

Prova: A prova do item 1 é dada no Teorema anterior. A prova do item 2 é imediata pois \mathcal{C} é a intersecção de um número infinito de restrições lineares e se $\mathcal{W} \in \mathcal{C}$ então $\lambda \mathcal{W} \in \mathcal{C}, \forall \lambda > 0$. A prova do item 3 será feita por construção.

Defina

$$\rho_\ell = \max_{\|z\|=1} \{z'(F_\ell \mathcal{W} + \mathcal{W} F_\ell')z : E'z = 0\}, \ell = 0 \cdots L \quad (2.25)$$

e z_ℓ o vetor ótimo associado. Defina ainda os parâmetros ótimos.

$$\begin{aligned} \rho_* &= \max \{\rho_\ell : \ell = 0 \cdots L\} \\ z_* &= z_\ell \\ F_* &= F_\ell \end{aligned} \quad (2.26)$$

que permitem determinar a matriz

$$X_* = z_* z_*' F_* + F_*' z_* z_*' \quad (2.27)$$

Neste caso, podemos calcular com $\langle W, X_* \rangle \triangleq \text{Tr} \{W' X_*\}$:

$$\begin{aligned} \langle W_*, X_* \rangle &= z_*' (F_* W_* + W_* F_*') z_* \\ &= \rho_* \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

pois $W_* \in \mathcal{C}$. Por outro lado, para $\forall W \in \mathcal{C}$ temos

$$\begin{aligned} \langle W, X_* \rangle &= z_*' (F_* W + W F_*') z_* \\ &< 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Isto implica que o hiperplano $\langle W, X_* \rangle = 0$ separa W_* de \mathcal{C} . A prova do Teorema proposto está concluída.

Neste ponto, algumas observações são importantes. É fácil verificar que o conjunto \mathcal{C} definido em (2.24) não depende da submatriz $W_3 \in \mathfrak{R}^{m \times m}$. Neste caso esta submatriz pode sempre ser calculada de tal forma a tornar a matriz W semidefinida positiva.

Por outro lado, sendo \mathcal{C} um cone aberto, sem perda de generalidade, podemos torna-lo fechado após a escolha conveniente de um escalar positivo.

Estas duas observações permitem redefinir o seguinte cone convexo fechado (para simplicidade usaremos a mesma notação) que satisfaz os Teoremas anteriores.

$$\mathcal{C} \triangleq \{W = W' \geq 0 : z'[F_\ell W + W F_\ell']z \leq -1, \ell = 0 \dots L, E'z = 0\} \quad (2.30)$$

Como já foi dito, a normalização adotada é arbitrária. Sendo \mathcal{C} não vazio, resta definir uma função objetivo conveniente para a determinação final de uma matriz particular $W \in \mathcal{C}$. Neste trabalho esta função objetivo será determinada de forma a obtermos ganhos de realimentação de estado os menores possíveis. Neste sentido temos para $\forall W \in \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} W_1 &\geq I \\ W &\geq 0 \implies W_3 \geq W_2' W_1^{-1} W_2 \\ K &= W_2' W_1^{-1} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Consequentemente temos :

$$K K' \leq K W_1 K' = W_2' W_1^{-1} W_2 \leq W_3 = E' W E \quad (2.32)$$

Portanto a norma espectral do ganho satisfaz a seguinte desigualdade que permite determinar a função objetivo a ser minimizada

$$\|K\|^2 \leq \lambda_{\max}(E'W E) \triangleq f(W) \quad (2.33)$$

O próximo Lema define as propriedades geométricas da função objetivo acima definida.

Lema 2.2.4 *A função $f(W) \triangleq \lambda_{\max}(E'W E) : \mathcal{C} \implies \mathfrak{R}$ é convexa.*

Prova : A convexidade do conjunto \mathcal{C} é uma consequência imediata do Teorema 2.2.3 e do fato que o conjunto das matrizes simétricas semidefinidas positiva é convexo.

Considerando agora W_1 e W_2 arbitrárias em \mathcal{C} e $\lambda \in [0, 1]$ temos

$$\begin{aligned} & f(\lambda W_1 + (1 - \lambda)W_2) \\ &= \max \{z'(\lambda E'W_1 E + (1 - \lambda)E'W_2 E)z : \|z\| = 1\} \\ &\leq \lambda \max \{z'E'W_1 E z : \|z\| = 1\} + (1 - \lambda) \max \{z'E'W_2 E z : \|z\| = 1\} \\ &= \lambda f(W_1) + (1 - \lambda)f(W_2) \end{aligned} \quad (2.34)$$

isto prova o Lema proposto.

Com base nestes resultados, o ganho de realimentação de estado que estabiliza e (de certa forma) otimiza o sistema linear incerto em consideração é

determinado a partir do problema :

$$\min \{f(W) \quad : \quad W \in C\} \quad (2.35)$$

Este problema é convexo e sua solução ótima permite determinar $K = W_2'W_1^{-1}$ que é o ganho de realimentação de estado procurado. Nos capítulos seguintes proporemos um método numérico capaz de resolver (2.35), detectando inclusive quando $C = \emptyset$.

2.3 Sistemas Discretos

O estudo de sistemas discretos é similar ao estudo apresentado anteriormente para os sistemas contínuos. De fato, apenas a função de Lyapunov é diferente, sem que isto altere as propriedades geométricas dos problemas de programação matemática a serem resolvidos.

Para o estudo de sistemas discretos sujeitos a incertezas necessitamos do seguinte resultado fundamental.

Lema 2.3.1 *Assuma que $W = W' \geq 0$, então*

$$FWF' \leq \sum_{\ell=1}^L \xi_{\ell} F_{\ell} W F_{\ell}' \quad , \forall F \in D_F \quad , \quad \sum_{\ell=1}^L \xi_{\ell} = 1 \quad , \quad \xi_{\ell} \geq 0 \quad (2.36)$$

Prova : Considerando $z \in \mathfrak{R}^r$ arbitrário porém fixo, definimos a função $g(\cdot)$:

$\mathfrak{R}^{P \times P} \implies \mathfrak{R}$

$$g(F) \triangleq z' F \mathcal{W} F' z \quad (2.37)$$

Esta função é convexa. Realmente, para $\forall F, \Gamma \in \mathfrak{R}^{P \times P}$ temos

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} g(F + \alpha\Gamma) = 2z'\Gamma\mathcal{W}\Gamma'z \geq 0 \quad (2.38)$$

onde a desigualdade ocorre devido a não negatividade de \mathcal{W} . Usando este fato

em conjunto com a definição de D_F temos

$$\begin{aligned} z' F \mathcal{W} F' z &= g(\sum_{\ell=1}^L \xi_{\ell} F_{\ell}) \\ &\leq \sum_{\ell=1}^L \xi_{\ell} g(F_{\ell}) \\ &= z' \left\{ \sum_{\ell=1}^L \xi_{\ell} F_{\ell} \mathcal{W} F'_{\ell} \right\} z \end{aligned} \quad (2.39)$$

Como $z \in \mathfrak{R}^p$ é arbitrário, (2.39) implica em (2.36). Isto prova o Lema proposto.

Teorema 2.3.2 *O sistema linear discreto, definido pelo par (A, B) é estabilizável via controle linear de realimentação de estado se e somente se existir uma matriz $\mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq 0 \in \mathfrak{R}^{P \times P}$, escrita na forma*

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

com a submatriz W_1 definida positiva, tal que

$$z' [FWF' - W] z < 0 \quad \forall z \neq 0 \quad : \quad E'z = 0. \quad (2.41)$$

Prova : Suponha inicialmente que o par (A, B) é estabilizável. Neste caso, existem matrizes K e $P = P' > 0$ tais que

$$(A - BK)P(A - BK)' - P < 0 \quad (2.42)$$

Formando a matriz W como

$$W = \begin{bmatrix} P & PK' \\ KP & KPK' \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Lembrando novamente que $E'z = 0$ implica em termos $z' = \begin{bmatrix} x' & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$, obtemos

$$z' [FWF' - W] z = x' [(A - BK)P(A - BK)' - P] x < 0 \quad (2.44)$$

como o vetor z é arbitrário no espaço nulo de E' , a primeira parte do Teorema está provada. Suponha agora a situação inversa, isto é, que para uma certa matriz W , a desigualdade (2.41) seja satisfeita. Particionado-a como indicado em (2.40) obtemos

$$AW_1A' - AW_2B' - BW_2'A' + BW_3B' - W_1 < 0 \quad (2.45)$$

que pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned}
 & (A - BW_2'W_1^{-1})W_1(A - BW_2'W_1^{-1})' - W_1 + \\
 & \quad + B[W_3 - W_2'W_1^{-1}W_2]B' \\
 & < 0
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

A matriz $B[W_3 - W_2'W_1^{-1}W_2]B'$ é sempre semidefinida positiva pois $\mathcal{W} \geq 0$.

Definindo $P = W_1$ e $K = W_2'W_1^{-1}$ vem

$$\begin{aligned}
 & [(A - BK)P(A - BK)' - P] < \\
 & \quad - B[W_3 - W_2'W_1^{-1}W_2]B' < 0
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

isto prova do Teorema proposto.

Teorema 2.3.3 *O sistema incerto (2.2), é quadraticamente estabilizável via controle linear de realimentação de estado se e somente se existir uma matriz $\mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq 0 \in \mathbb{R}^{r \times p}$, escrita na forma*

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \tag{2.48}$$

com a submatriz W_1 definida positiva, tal que

$$z' [F_\ell \mathcal{W} F_\ell' - \mathcal{W}] z < 0 \quad \forall z \neq 0 \quad : \quad E'z = 0 \quad (2.49)$$

$$\ell = 1 \cdots L$$

Prova : Suponha novamente que o sistema (2.2) é quadraticamente estabilizável. Neste caso, existem matrizes K e $P = P' > 0$ tais que $\forall A \in D_A$ e $\forall B \in D_B$

$$(A - BK)P(A - BK)' - P < 0 \quad (2.50)$$

Em particular, a desigualdade acima vale para $A = A_i$ e $B = B_j$ onde $i = 1 \cdots N$ e $j = 1 \cdots M$. Ademais com F_ℓ formada pelo par (A_i, B_j) , considerando $W_1 = P$, $W_2 = PK'$ e $W_3 = KPK'$ e lembrando que $E'z = 0$ implica em termos $z' = \begin{bmatrix} x' & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^p$, obtemos

$$z' [F_\ell \mathcal{W} F_\ell' - \mathcal{W}] z = x' [(A_i - B_j K)P(A_i - B_j K)' - P] x < 0 \quad (2.51)$$

como o vetor z é arbitrário no espaço nulo de E , a primeira parte do Teorema está provada. Suponha agora a situação inversa, isto é, que para uma certa matriz \mathcal{W} , a desigualdade (2.49) seja satisfeita. Particionado-a como indicado em (2.48) obtemos

$$A_i W_1 A_i' - A_i W_2' B_j' - B_j W_2' A_i' + B_j W_3 B_j' - W_1 < 0 \quad (2.52)$$

Definindo $P = W_1$ e $K = W_2'W_1^{-1}$, para qualquer $A \in D_A$ e $B \in D_B$ temos (ver

Lema 2.3.1) :

$$\begin{aligned} & (\sum_{i=1}^N \alpha_i A_i) P (\sum_{i=1}^N \alpha_i A_i') \leq \\ & \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i P A_i' = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \alpha_i \mu_j A_i P A_j' \end{aligned} \quad (2.53)$$

e

$$\begin{aligned} & (\sum_{j=1}^M \mu_j B_j K) P (\sum_{j=1}^M \mu_j K' B_j') \leq \\ & \leq \sum_{j=1}^M \mu_j B_j K P K' B_j' = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \alpha_i \mu_j B_j K P K' B_j' \end{aligned} \quad (2.54)$$

consequentemente podemos calcular

$$\begin{aligned} & |(A - BK)P(A - BK)' - P| \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \alpha_i \mu_j \{A_i W_1 A_i' - A_i W_2' B_j' - B_j W_2' A_i' + B_j W_3 B_j' - W_1\} \quad (2.55) \\ & < 0 \end{aligned}$$

sendo que a última desigualdade é uma conseqüência direta de (2.52). Portanto, a prova do Teorema decorre da definição 2. Os comentários feitos para o caso de sistemas contínuos continuam válidos para os modelos discretos. O mesmo ocorre com as propriedades do cone \mathcal{C} definido em (2.30). É claro que este cone, para o caso de sistemas discretos, deve ser assim definido :

$$\mathcal{C} \triangleq \{W = W' \geq 0 : z'[F_\ell W F_\ell' - W]z \leq -1, \ell = 0 \dots L, E'z = 0\} \quad (2.56)$$

é fácil observamos que o cone definido acima (2.56) satisfaz todas as propriedades estabelecidas no Teorema 2.2.3.

Em conclusão, definindo as funções matriciais $\Theta_\ell(\cdot) : \ell = 0 \cdots L$ como sendo:

$$\Theta_\ell(\mathcal{W}) = F_\ell \mathcal{W} + \mathcal{W} F_\ell' \quad (2.57)$$

para o caso contínuo e

$$\Theta_\ell(\mathcal{W}) = F_\ell \mathcal{W} F_\ell' - \mathcal{W} \quad (2.58)$$

para o caso discreto podemos fazer um tratamento unificado para ambos definindo o cone generalizado

$$C \triangleq \{ \mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq 0 : z' \Theta_\ell(\mathcal{W}) z \leq -1, \ell = 0 \cdots L, E' z = 0 \} \quad (2.59)$$

Neste ponto é importante salientar que o cálculo do hiperplano separador é diferente do caso contínuo mas igualmente simples. Nas mesmas condições do Teorema 2.2.3 temos :

$$\rho_\ell = \max_{\|z\|=1} \{ z' \Theta_\ell(\mathcal{W}) z : E' z = 0 \} \quad (2.60)$$

$$X_\star = F_\star' z_\star z_\star' F_\star - z_\star z_\star' \quad (2.61)$$

Finalmente, é importante observar que mesmo para o caso discreto, a desigualdade (2.33) continua válida, conseqüentemente o problema (2.35) representa

uma versão unificada do problema de controle ótimo de norma mínima para os sistemas contínuos e discretos.

2.4 Conclusões

Neste capítulo apresentamos condições de estabilidade para sistemas lineares contínuos e discretos no tempo. Estas condições são fáceis de serem generalizadas para sistemas dinâmicos incertos. É importante salientar que, no caso de realimentação de estado, os resultados são obtidos via condições necessárias e suficientes. Ademais, a síntese do ganho de realimentação é feita mediante a solução de um problema convexo de programação matemática.

Capítulo 3

Síntese Via Realimentação de Saída

3.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar condições suficientes de estabilidade quadrática via realimentação de saída para sistemas lineares incertos. Este capítulo generaliza os resultados do capítulo anterior para este tipo de realimentação. Desde logo, é importante enfatizar que, para o caso de realimentação de saída, só serão apresentadas condições suficientes de estabilidade. Até o momento, não existe na literatura (nas mais importantes publicações que pudemos consultar) qualquer resultado que estabeleça condições necessárias e suficientes de estabilidade de sistemas lineares com controle via realimentação de saída.

O aspecto fundamental dos resultados é que o ganho de realimentação poderá ser calculado pela solução de um problema convexo de otimização. De

fato, através de uma transformação de similaridade, podemos desenvolver um algoritmo eficiente para a solução do problema proposto.

Consideramos os seguintes modelos dinâmicos. No caso contínuo no tempo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

e no caso discreto no tempo:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Em ambos os casos, assumimos que os modelos são multivariáveis, isto é, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^r$. Ademais, a matriz C é suposta ter rank completo. Como no capítulo anterior, assumimos que $A \in D_A$ e $B \in D_B$. Para o caso realimentação de saída, as seguintes definições de estabilidade quadrática serão importantes :

Definição 1 : (caso contínuo) : O sistema contínuo (3.1) é quadraticamente estabilizável via realimentação de saída se existirem $P = P' > 0$ e G , com

dimensões apropriadas, tais que :

$$(A - BGC)'P^{-1} + P^{-1}(A - BGC) < 0 \quad : \quad A \in D_A, B \in D_B \quad (3.3)$$

Definição 2 : (caso discreto) : O sistema discreto (3.2) é quadraticamente estabilizável via realimentação de saída se existirem $P = P' > 0$ e G , com dimensões apropriadas, tais que :

$$(A - BGC)P(A - BGC)' - P < 0 \quad : \quad A \in D_A, B \in D_B \quad (3.4)$$

Novamente, a interpretação é simples. As definições 1 e 2 exigem que um único ganho de realimentação de saída estabilize todos os modelos possíveis.

É claro que como o sistema dinâmico aumentado, por não depender da matriz de saída C , continua válido. Como no capítulo anterior consideramos $F \in D_F$.

Para simplificar a notação, definimos as matrizes

$$C_o = \begin{bmatrix} C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$D_o = \begin{bmatrix} D' \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

onde $C_o \in \mathbb{R}^{(r-m) \times p}$ e $D_o \in \mathbb{R}^{p \times (n-r)}$ é uma matriz qualquer que deve ser determinada de forma que a matriz

$$T = \begin{bmatrix} C \\ \dots \\ D \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

seja inversível.

3.2 Sistemas Contínuos

Antes de estudarmos os sistemas contínuos incertos, apresentamos alguns resultados relativos aos sistemas dinâmicos lineares.

Teorema 3.2.1 *O sistema linear contínuo, definido pelo par (A, B) é estabilizável via controle linear de realimentação de saída se existir uma matriz $\mathcal{W} = \mathcal{W}' \in \mathbb{R}^{p \times p}$, escrita na forma*

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

com a submatriz W_1 definida positiva e $D \in \mathbb{R}^{(n-r) \times n}$ tal que T^{-1} existe e

$$\begin{aligned} z' [F\mathcal{W} + \mathcal{W}F'] z < 0 \quad \forall z \neq 0 \quad : \quad E'z = 0 \\ C_o \mathcal{W} D_o = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Prova : Suponha que existe uma matriz W que satisfaça as hipóteses acima enunciadas. Neste caso temos

$$\begin{aligned}
 & AW_1 - BW_2' + W_1A' - W_2B' = \\
 & = (A - BW_2'W_1^{-1})W_1 + W_1(A - BW_2'W_1^{-1})' = \\
 & = W_1 \left[(A - BW_2'W_1^{-1})'W_1^{-1} + W_1^{-1}(A - BW_2'W_1^{-1}) \right] W_1 \\
 & < 0
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Definindo $P = W_1$ e $G = W_2'C'(CW_1C')^{-1}$ obtemos

$$\begin{aligned}
 W_2'W_1^{-1} & = (W_2'T')(TW_1T')^{-1}T \\
 & = W_2' \left[C' \quad ; \quad D' \right] \left[\begin{array}{cc} CW_1C' & CW_1D' \\ DW_1C' & DW_1D' \end{array} \right]^{-1} \begin{bmatrix} C \\ \dots \\ D \end{bmatrix} \\
 & = \left[W_2'C' \quad W_2'D' \right] \left[\begin{array}{cc} CW_1C' & CW_1D' \\ DW_1C' & DW_1D' \end{array} \right]^{-1} \begin{bmatrix} C \\ \dots \\ D \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

usando o fato que $C_oWD_o = 0$, vem :

$$\begin{aligned}
W_2'W_1^{-1} &= \begin{bmatrix} W_2'C' & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (CW_1C')^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (DW_1D')^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ D \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} W_2'C' & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (CW_1C')^{-1}C \\ (DW_1D')^{-1}D \end{bmatrix} \\
&= W_2'C'(CW_1C')^{-1}C \\
&= GC
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Então, (3.10) pode ser reescrita na forma

$$P \left[(A - BGC)'P^{-1} + P^{-1}(A - BGC) \right] P < 0 \tag{3.13}$$

Consequentemente, pela definição 1, o sistema é estabilizável via realimentação de saída. Isto prova o Teorema proposto.

Teorema 3.2.2 *O sistema incerto (3.1), é quadraticamente estabilizável via controle linear de realimentação de saída se existir uma matriz $W = W' \in \mathbb{R}^{p \times p}$, escrita na forma*

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

com a submatriz W_1 definida positiva e $D \in \mathbb{R}^{(n-r) \times n}$, tal que T^{-1} existe e

$$\begin{aligned}
z' [F_\ell \mathcal{W} + \mathcal{W} F_\ell'] z < 0 \quad \forall z \neq 0 \quad : \quad E' z = 0 \\
\ell = 1 \cdots L \\
C_o \mathcal{W} D_o = 0
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Prova : Suponha que existe uma matriz \mathcal{W} que satisfaça as hipóteses acima enunciadas, tais que $\forall i = 1 \cdots N$ e $j = 1 \cdots M$ obtemos

$$A_i W_1 - B_j W_2' + W_1 A_i' - W_2 B_j' < 0 \tag{3.16}$$

Definindo $P = W_1$ e $G = W_2' C' (C W_1 C')^{-1}$ como na prova do Teorema anterior, então $\forall A \in D_A$ e $B \in D_B$ temos

$$\begin{aligned}
& [(A - BGC)' P^{-1} + P^{-1} (A - BGC)] = \\
& = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \alpha_i \mu_j \{ (A_i - B_j GC)' P^{-1} + P^{-1} (A_i - B_j GC) \} = \\
& = W_1^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \alpha_i \mu_j (A_i W_1 - B_j W_2' + W_1 A_i' - W_2 B_j') \right\} W_1^{-1} < 0
\end{aligned} \tag{3.17}$$

e isto prova o Teorema proposto.

Estes resultados permitem, na verdade, generalizar aqueles do capítulo 2 para o caso de realimentação de saída. Em particular, podemos definir o cone C_o que satisfaz as mesmas propriedades do cone C :

$$C_o = C \cap \{ \mathcal{W} = \mathcal{W}' : C_o \mathcal{W} D_o = 0 \} \tag{3.18}$$

A afirmação acima decorre do fato que C_o é um subconjunto de C , obtido pela intersecção de C com um conjunto de restrições lineares. Como veremos em seguida, este conjunto de restrições adicionais poderá ser removido por uma transformação de similaridade, definida com a matriz T .

Finalmente, é importante notar que a função convexa $f(W) \triangleq \lambda_{\max}(E'WE)$ satisfaz

$$\|GC\|^2 \leq f(W) \quad (3.19)$$

Dentro deste contexto, o problema de otimização a ser resolvido é :

$$\min \{f(W) \quad : \quad W \in C_o\} \quad (3.20)$$

Este problema é convexo. Se $C_o \neq \emptyset$, sua solução ótima permite determinar o ganho de realimentação de saída procurado, $G = W_2' C' (C W_1 C')^{-1}$.

3.3 Sistemas Discretos

O estudo de sistemas discretos é similar àquele já feito no capítulo anterior e portanto não será repetido. Basta lembrar que a restrição linear $C_o W D_o = 0$ faz com que a seguinte fatorização seja possível :

$$\begin{aligned} K &= W_2' W_1^{-1} = GC \\ G &= W_2' C' (C W_1 C')^{-1} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Teorema 3.3.1 *O sistema linear discreto, definido pelo par (A, B) é estabilizável via controle linear de realimentação de saída se existir uma matriz $\mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq 0$, escrita na forma*

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

com a submatriz W_1 definida positiva e $D \in \mathbb{R}^{(n-r) \times n}$ tal que T^{-1} existe e

$$z' [F\mathcal{W}F' - \mathcal{W}] z < 0 \quad \forall z \neq 0 \quad : \quad E'z = 0. \quad (3.23)$$

$$C_o \mathcal{W} D_o = 0$$

Teorema 3.3.2 *O sistema incerto (3.2), é quadraticamente estabilizável via controle linear de realimentação de saída se existir uma matriz $\mathcal{W} = \mathcal{W}' \geq 0 \in \mathbb{R}^{p \times p}$ escrita na forma*

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

com a submatriz W_1 definida positiva e $D \in \mathbb{R}^{(n-r) \times n}$ tal que T^{-1} existe e

$$\begin{aligned}
z' [F_\ell \mathcal{W} F'_\ell - \mathcal{W}] z < 0 \quad \forall z \neq 0 : E' z = 0 \\
\ell = 1 \dots L \\
C_o \mathcal{W} D_o = 0
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Nosso objetivo agora é simplificar o cone C_o . Neste sentido considere a seguinte transformação de similaridade:

$$\begin{aligned}
A &\sim TAT^{-1} \\
B &\sim TB \\
C &\sim CT^{-1}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$F \sim SFS^{-1} \quad \text{com} \quad S = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

onde T é a matriz definida em (3.7). Neste novo sistema de coordenadas, é fácil verificar que

$$C \sim CT^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

sendo I a matriz identidade de dimensão $(r \times r)$. Ainda no atual sistema de coordenadas podemos escolher

$$D = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

aqui, I denota a matriz identidade de dimensão $(n - r \times n - r)$. Consequentemente, as restrições de igualdade podem ser escritas na forma

$$\begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} W_1 \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} = 0 \quad (3.29)$$

$$W_2' \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} = 0 \quad (3.30)$$

Então, observamos que todas as matrizes \mathcal{W} que satisfazem as equações acima, devem necessariamente apresentar a estrutura

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_o = \underbrace{\begin{bmatrix} \left. \begin{array}{ccc} \ddots & \mathbf{0} & \ddots \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \underbrace{\ddots}_{r} & \underbrace{\mathbf{0}}_{n-r} & \underbrace{\ddots}_m \end{array} \right\} & \begin{array}{c} r \\ n-r \\ m \end{array} \end{bmatrix}}_P \quad (3.31)$$

Devemos notar que o índice “o” indica que a matriz \mathcal{W} em consideração tem a

estrutura acima definida. Resta agora, determinar o ganho no sistema inicial de coordenadas :

$$\begin{aligned}
 K &= W_2' W_1^{-1} T \\
 &= \left[\underbrace{\begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix}}_r \quad \underbrace{\mathbf{0}}_{n-r} \right] \overbrace{\begin{bmatrix} C \\ \dots \\ D \end{bmatrix}}^n = \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}}_r C \\
 &= GC
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Isto mostra que o ganho de realimentação de saída pode ser calculado no novo sistema de coordenadas a partir da solução do seguinte problema convexo (ver (3.20)) :

$$\min \{ f(W_o) \quad : \quad W_o \in C \}. \tag{3.33}$$

onde C é definido como no capítulo anterior (2.59) mas as matrizes extremas F_ℓ são substituídas por suas similares $SF_\ell S^{-1}$. Estes resultados, podem ser resumidos no seguinte algoritmo :

- **Passo 1** : Defina $D \in \mathfrak{R}^{(n-r) \times n}$ tal que T seja inversível. Calcule a matriz S .

• **Passo 2** : Defina o conjunto de matrizes extremas $\{SF_\ell S^{-1}, \ell = 1 \cdots L\}$.

• **Passo 3** : Resolva o problema de otimização :

$$\min \{f(\mathcal{W}_o) \quad : \quad \mathcal{W}_o \in \mathcal{C}\}. \quad (3.34)$$

• **Passo 4** : Se $\mathcal{C} = \emptyset$ então tente redefinir a matriz D e volte ao passo 1.

• **Passo 5** : Determine o ganho de realimentação de saída $G \in \mathbb{R}^{m \times r}$

$$W_2' W_1^{-1} = [G \quad 0]. \quad (3.35)$$

3.4 Conclusões

Neste capítulo apresentamos condições suficientes para garantir a estabilidade quadrática de sistemas lineares incertos via realimentação de saída. É preciso enfatizar que, embora somente suficientes, condições similares não são encontradas na literatura consultada, com a generalidade do conjunto de incertezas admissíveis aqui considerado.

É importante salientar que, do ponto de vista numérico, o problema de estabilização via realimentação de saída é mais simples que o seu similar via realimentação de estado. De fato, após a escolha de uma matriz D conveniente, mostramos como construir uma transformação de similaridade de forma a termos que impor $\mathcal{W}_o \in \mathcal{C}$ onde \mathcal{W}_o é uma matriz com uma estrutura especial.

Isto é, \mathcal{W}_c apresenta vários elementos nulos e que portanto não participam do processo de otimização.

Capítulo 4

Implementação Numérica e Exemplos

4.1 Introdução

Neste capítulo, propomos um método numérico, baseado no SIMPLEX para a solução do problema básico definido no capítulo anterior. Em seguida, com este algoritmo, resolveremos vários exemplos da literatura.

O problema em questão pode ser assim definido (ver passo 3 do algoritmo definido no capítulo anterior)

$$\min \{f(W_o) \quad : \quad W_o \in C\} \tag{4.1}$$

onde $f(\cdot) \quad : \quad \mathbb{R}^{p \times p} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função convexa, C é um cone convexo e W_o é uma matriz simétrica com a estrutura anteriormente definida.

Nestas condições, o problema acima pode ser escrito na forma

$$\min \{ \rho \quad : \quad (\rho, \mathcal{W}_o) \in C_f \} \quad (4.2)$$

onde $C_f \triangleq \{ \mathcal{W}_o : \mathcal{W}_o \in C, (\rho, \mathcal{W}_o) \in \text{epi } f \}$ é um conjunto convexo.

A solução deste problema (verificando inclusive se $C_f = \emptyset$) pode ser obtida por métodos do tipo “Plano de Corte”. Em cada iteração um plano separador da solução atual em relação a C_f é gerado. Isto é repetido até que um critério de otimalidade seja satisfeito.

Portanto, numa iteração g nerica, devemos poder resolver de maneira eficiente o seguinte problema de programac o linear:

$$\begin{aligned} \min \quad & \rho \\ & \langle Z^k, \mathcal{W}_o \rangle + \gamma^k \leq \rho \\ & k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.3)$$

Definindo o vetor ω como sendo composto dos elementos n os de \mathcal{W}_o ordenados por colunas, os elementos da diagonal principal e por  ltimo ρ , o problema acima pode ser escrito na forma:

$$\begin{aligned}
& \min c'\omega \\
& A\omega \leq b \\
& \omega_1 \cdots \omega_r \text{ irrestritos} \\
& \omega_{r+1} \cdots \omega_g \geq 0
\end{aligned} \tag{4.4}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{it \times q}$, $b \in \mathbb{R}^{it}$, $c \in \mathbb{R}^q$. Nestas condições, o problema dual de (4.4)

pode ser escrito na forma :

$$\max_{\lambda \geq 0} \min_{\omega} \{c'\omega + \lambda'(A\omega - b) \mid \omega_{r+1} \cdots \omega_g \geq 0\} \tag{4.5}$$

A minimização acima indicada é finita desde que :

$$\begin{aligned}
|c + A'\lambda|_i &= 0 & : & \quad i = 1 \cdots r \\
|c + A'\lambda|_i &\geq 0 & : & \quad i = r + 1 \cdots g
\end{aligned} \tag{4.6}$$

consequentemente, obtemos o problema dual equivalente

$$\begin{aligned}
& \min (0 \quad b') \begin{pmatrix} \eta \\ \lambda \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} 0 & \vdots \\ \cdots & \vdots & -A' \\ J & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \lambda \end{pmatrix} = c \\
& \begin{pmatrix} \eta \\ \lambda \end{pmatrix} \geq 0
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Devemos notar dois fatos importantes relativos ao problema dual acima definido. Em primeiro lugar, encontrada a solução dual ótima, a solução primal ótima é obtida imediatamente por

$$\omega' = - \begin{bmatrix} 0 & b' \end{bmatrix}_{Base} [Base]^{-1} \quad (4.8)$$

Ademais, a infactibilidade do primal é verificada pela existência de uma solução dual ilimitada.

Em segundo lugar, é fácil verificar que uma base dual ótima permanece dual factível mesmo com a adição de uma restrição no problema primal (4.4).

Após estas considerações, o algoritmo que foi implementado numericamente, pode ser descrito da seguinte maneira

- **Passo 1** : Defina $D \in \mathbb{R}^{(n-r) \times r}$ tal que T seja inversível. Calcule a matriz S .
- **Passo 2** : Defina o conjunto de matrizes extremas $\{SF_t S^{-1}\}$.
- **Passo 3** : Defina o contador de iterações : $i = 1$ e $\mathcal{W}_o^i \geq 0$.

- **Passo 4** : Determine os parâmetros (Z^i, γ^i) do corte linear e resolva o problema linear (4.7).
- **Passo 5** : Se sua solução é ilimitada então $C_f = \emptyset$. Pare, o problema original pode não admitir solução.
- **Passo 6** : Determine a solução primal ω^{i+1} e correspondentemente (W_o^{i+1}, ρ^{i+1}) .
- **Passo 7** : Sendo ϵ^{i+1} a distância de (ρ^{i+1}, W_o^{i+1}) a C_f , verifique com uma certa precisão se ϵ^{i+1} é suficientemente pequeno. Em caso afirmativo vá ao passo 9.
- **Passo 8** : Faça $i \rightarrow i + 1$ e retorne ao passo 4.
- **Passo 9** : Determine o ganho de realimentação de saída $G \in \mathfrak{R}^{m \times r}$

$$(W_2^{i+1})'(W_1^{i+1})^{-1} = \begin{bmatrix} G & 0 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Em seguida, incluímos alguns exemplos, envolvendo sistemas dinâmicos contínuos e discretos que serão resolvidos pelo algoritmo acima descrito. Será possível verificar a performance do método numérico proposto.

4.2 Exemplos

4.2.1 Sistema Contínuo – Matriz A incerta

Este exemplo, apresentado em [3], corresponde ao modelo dinâmico contínuo de um avião sob condições específicas de vôo. Os dados numéricos são os seguintes:

$$A = \begin{bmatrix} -2.98 & q + 0.93 & 0 & -0.034 \\ -0.99 & -0.21 & 0.35 & -0.0011 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.39 & -5.555 & 0 & -1.89 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.032 & 0 & 0 & -1.6 \end{bmatrix}' \quad (4.11)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Onde q representa um parâmetro incerto que satisfaz $-1.5 \leq q \leq 1.5$. Na formulação anteriormente definida, é fácil verificar que devemos impor $A \in D_A$, onde D_A é dado pela combinação convexa de duas matrizes extremas :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2.98 & -0.57 & 0 & -0.034 \\ -0.99 & -0.21 & 0.35 & -0.0011 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.39 & -5.555 & 0 & -1.89 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2.98 & 2.43 & 0 & -0.034 \\ -0.99 & -0.21 & 0.35 & -0.0011 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.39 & -5.555 & 0 & -1.89 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Para utilizarmos o algoritmo anterior, definimos a matriz D como sendo:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

é claro que esta escolha observa as condições teóricas definidas no capítulo anterior.

O algoritmo convergiu em 211 iterações e forneceu a seguinte solução :

$$W_o = \begin{bmatrix} 765.5 & -692.0 & 0 & 0 & -767.2 \\ -692.0 & 7054.1 & 0 & 0 & -3301.7 \\ 0 & 0 & 195.4 & 57.7 & 0 \\ 0 & 0 & 57.7 & 59.7 & 0 \\ -767.2 & -3301.7 & 0 & 0 & 3251.7 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 765.5 & -692.0 & 0 & 0 \\ -692.0 & 7054.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 195.4 & 57.7 \\ 0 & 0 & 57.7 & 59.7 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$W_2' = \begin{bmatrix} -767.2 & -3301.7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$G = \begin{bmatrix} -1.5640 & -0.6215 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

É importante observar que $\|G\|= 1.6829$, enquanto que no artigo acima citado os autores determinaram um ganho de realimentação de saída que apresenta $\|G\|=181.01$.

Nas paginas seguintes incluímos alguns gráficos que representam :

- Evolução de ρ^i em relação a i (número de iterações).
- Evolução de ϵ^i em relação a i (número de iterações).
- Lugar das raízes em relação aos parâmetros da combinação convexa que definem o conjunto de incertezas que atuam no sistema em malha fechada.

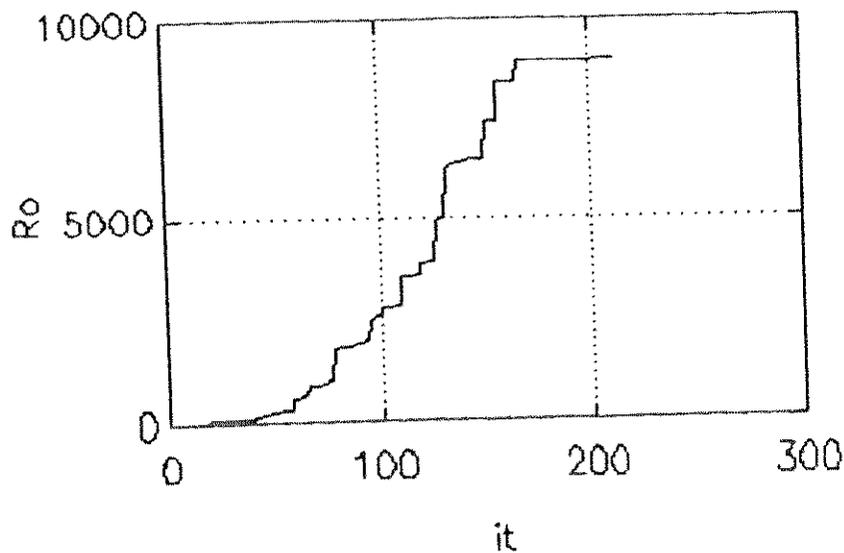


Figura 4.1: -Evolução de $\rho^i \times i$: Ex.1

Não se trata de um lugar das raízes “clássico”. Todos os modelos factíveis (com uma certa precisão), são gerados e seus polos, em malha fechada, são representados no plano complexo.

- Simulação no tempo para o sistema em malha fechada.

4.2.2 Sistemas Contínuos – Matrizes A e B incertas

Trata-se do controle de voo de um helicóptero sujeito a perturbações específicas. Os dados numéricos são fornecidos em [4].

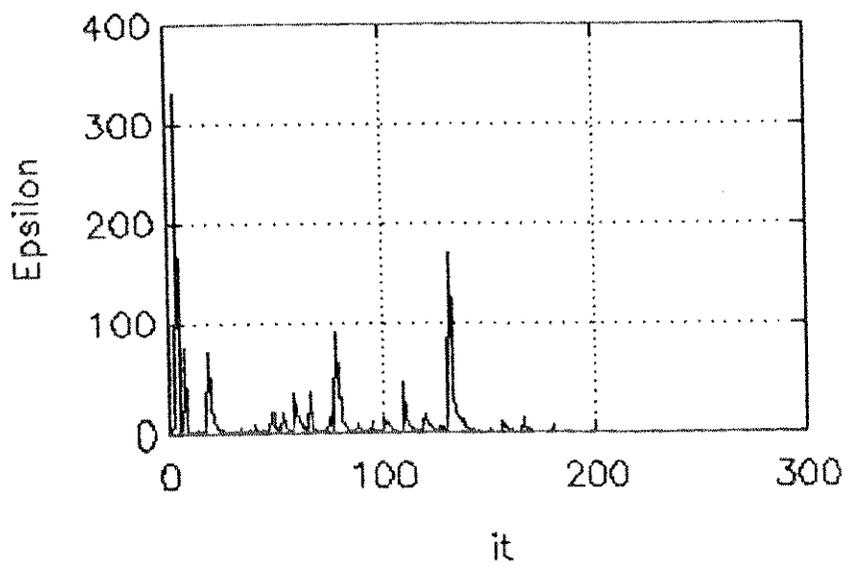


Figura 4.2: - Evolução de $\epsilon^i \times i$: Ex.1

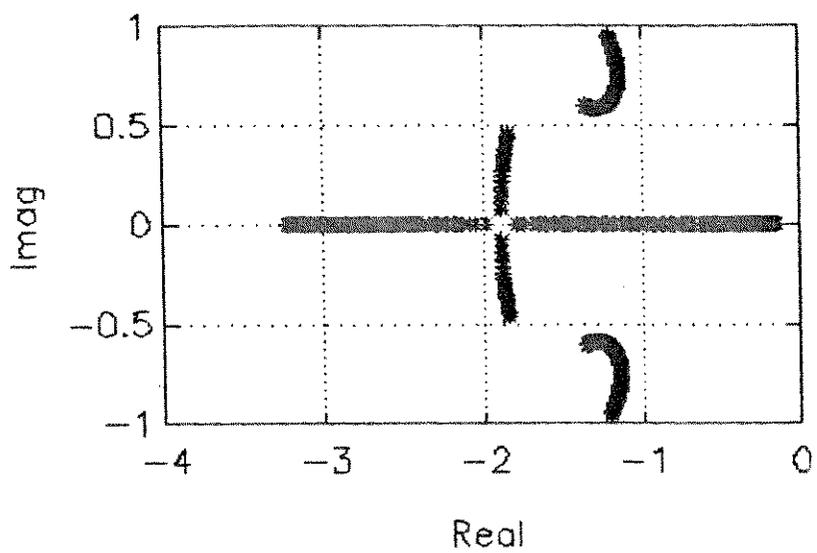


Figura 4.3: - Lugar das raízes : Ex.1

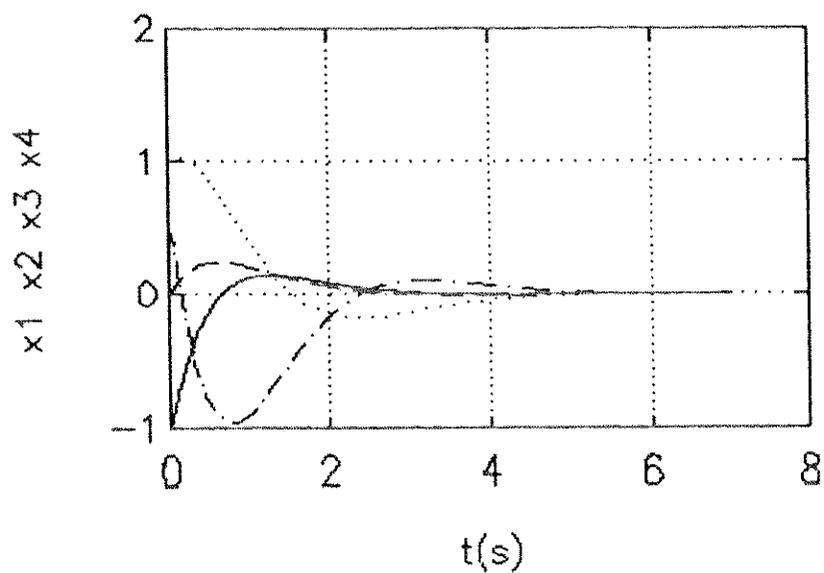


Figura 4.4: - Simulação no tempo : Ex.1

$$A = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.010 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & p_1 & -0.707 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.4422 & 0.1761 \\ p_3 & -7.5922 \\ -5.52 & 4.49 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

e a matriz de saída

$$C = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \quad (4.22)$$

Os parâmetros p_1 , p_2 e p_3 são tais que :

$$\begin{aligned}
 p_1 &= 0.3681 \pm 20\Delta p_1 & -0.05 \leq \Delta p_1 \leq 0.05 \\
 p_2 &= 1.4200 \pm 20\Delta p_2 & -0.01 \leq \Delta p_2 \leq 0.01 \\
 p_3 &= 3.5446 \pm 20\Delta p_3 & -0.04 \leq \Delta p_3 \leq 0.04
 \end{aligned}
 \tag{4.23}$$

é importante observar que estamos considerando perturbações vinte vezes maiores que aquelas propostas no artigo original [4]. Para perturbações com as magnitudes aqui consideradas, o método proposto no artigo citado, falha na determinação de um controle de realimentação de saída.

O algoritmo anterior foi aplicado neste exemplo com

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \tag{4.24}$$

após 103 iterações a seguinte solução foi obtida :

$$\mathcal{W}_o = \begin{bmatrix} 4.2782 & 0 & 0 & 0 & 16.9246 & -15.2413 \\ 0 & 55.3596 & 56.9121 & 2.9178 & 0 & 0 \\ 0 & 56.9121 & 79.1850 & -0.9148 & 0 & 0 \\ 0 & 2.9178 & -0.9148 & 8.7107 & 0 & 0 \\ 16.9246 & 0 & 0 & 0 & 122.9957 & 2.0749 \\ -15.2413 & 0 & 0 & 0 & 2.0749 & 123.4720 \end{bmatrix}
 \tag{4.25}$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 4.2782 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 55.3596 & 56.9121 & 2.9178 \\ 0 & 56.9121 & 79.1850 & -0.9148 \\ 0 & 2.9178 & -0.9148 & 8.7107 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$W_2' = \begin{bmatrix} 16.9246 & 0 & 0 & 0 \\ -15.2413 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

consequentemente, o ganho de realimentação de saída é dado por :

$$G = \begin{bmatrix} 3.9560 \\ -3.5626 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

onde $\|G\|=5.3237$. Devemos notar que, em [4], para perturbações com magnitudes vinte vezes menores, o ganho de realimentação de saída fornecido apresenta $\|G\|=2.0590$.

Em seguida apresentamos alguns gráficos relativos a este exemplo. Dizem respeito à evolução do algoritmo e ao comportamento do sistema em malha fechada. As descrições desses gráficos são as mesmas das do exemplo anterior.

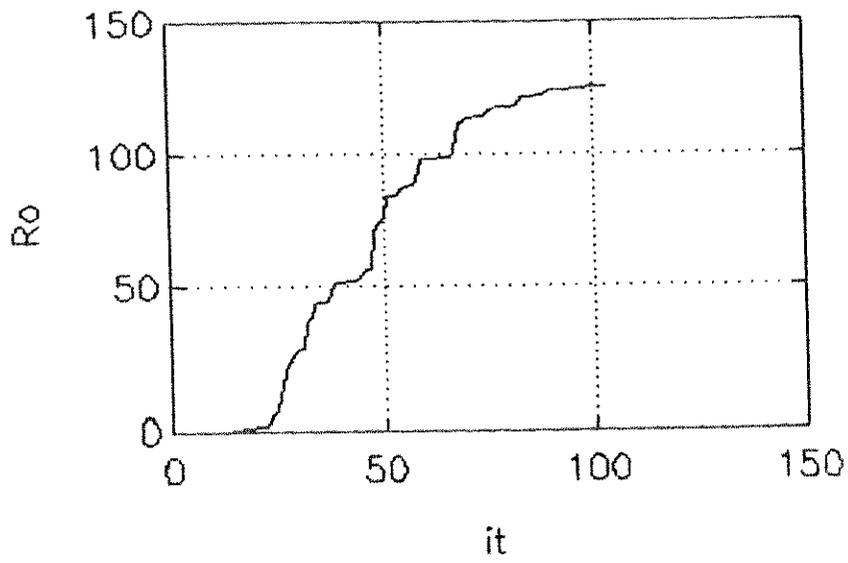


Figura 4.5: -Evolução de $\rho^i \times i$: Ex.2

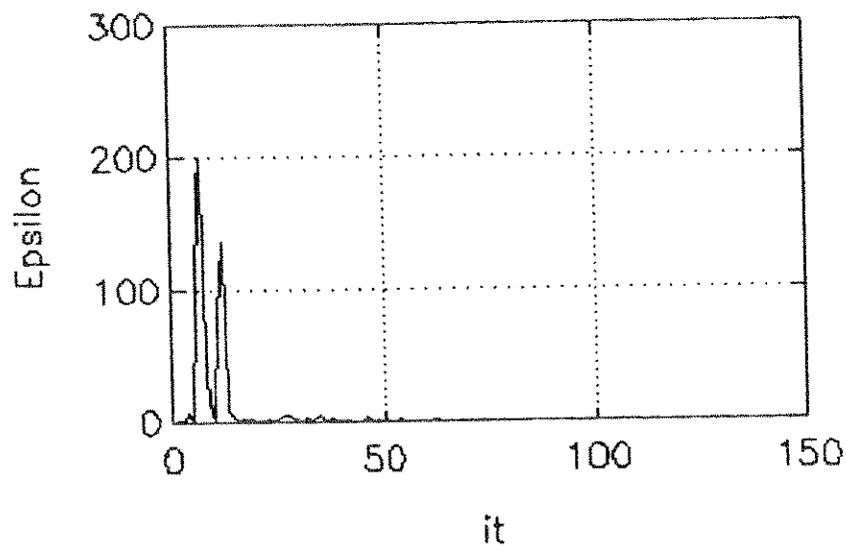


Figura 4.6: - Evolução de $\epsilon^i \times i$: Ex.2

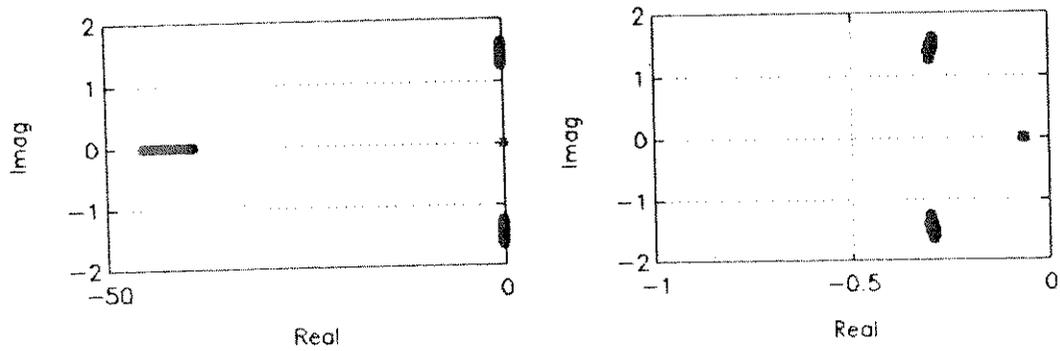


Figura 4.7: - Lugar das raízes : Ex.2

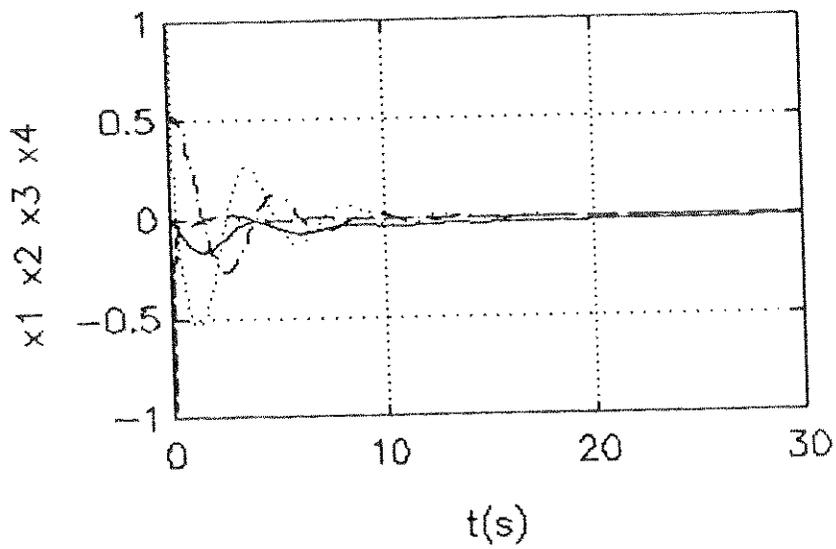


Figura 4.8: - Simulação no tempo : Ex.2

4.2.3 Sistemas Discretos – Matriz A incerta

O exemplo a seguir foi incluído somente para ilustrar a determinação de um controle de realimentação de saída, pelo mesmo algoritmo anteriormente apresentado, porém no caso de sistemas discretos no tempo. Os dados numéricos são os seguintes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & q & 0 \\ 0 & -0.1 & -1.5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}' \quad (4.30)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

O parâmetro q satisfaz $-1 \leq q \leq 1$. Após algumas tentativas, foi possível determinar a matriz D :

$$D = \begin{bmatrix} 0.2654 & 0.9316 & 0.2483 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

para a qual algoritmo convergiu em 77 iterações, fornecendo a seguinte solução para o problema proposto :

$$W_0 = \begin{bmatrix} 5.4687 & -0.0023 & 0 & 11.2815 & 0.0009 \\ -0.0023 & 1 & 0 & -0.8196 & 2.9998 \\ 0 & 0 & 2.6202 & 0 & 0 \\ 11.2815 & -0.8196 & 0 & 23.9364 & -2.4423 \\ 0.0009 & 2.9998 & 0 & -2.4423 & 8.9990 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 5.4687 & -0.0023 & 0 \\ -0.0023 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2.6202 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$W_2' = \begin{bmatrix} 11.2815 & -0.8196 & 0 \\ 0.0009 & 2.9998 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Podemos então afirmar que o ganho de realimentação de saída :

$$G = \begin{bmatrix} 2.0626 & -0.8148 \\ 0.0014 & 2.9998 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

com $\|G\|=3.1844$ estabiliza, com ganho de norma mínima o sistema linear dis-

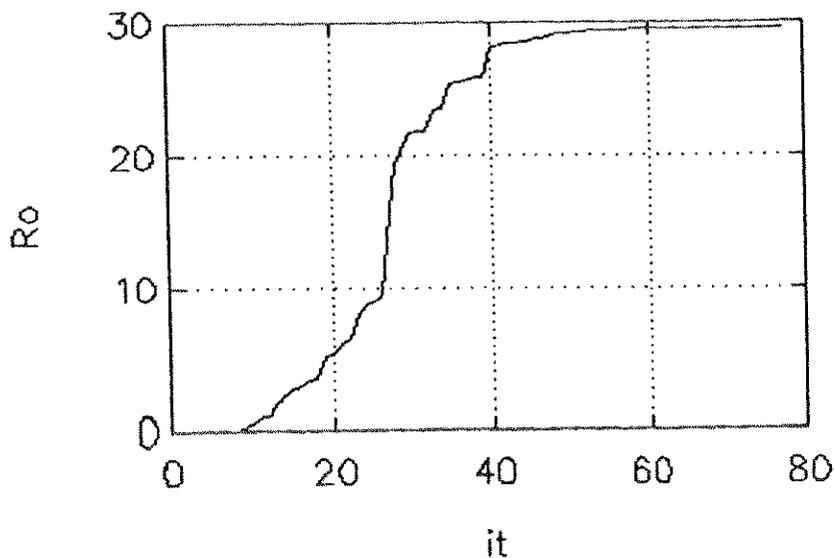


Figura 4.9: -Evolução de $\rho^i \times i$: Ex.3

creto (incerto) anteriormente definido. Novamente incluímos os gráficos já comentados anteriormente.

4.3 Conclusões

Neste capítulo apresentamos um método numérico, baseado no método simplex para resolver o problema de controle ótimo via realimentação de saída definido no capítulo anterior. A idéia central do método baseia-se na manipulação do problema dual associado. Com isto, a introdução de novos cortes no primal corresponde à criação de novas variáveis no dual e conseqüentemente, dois aspectos fundamentais devem ser ressaltados :

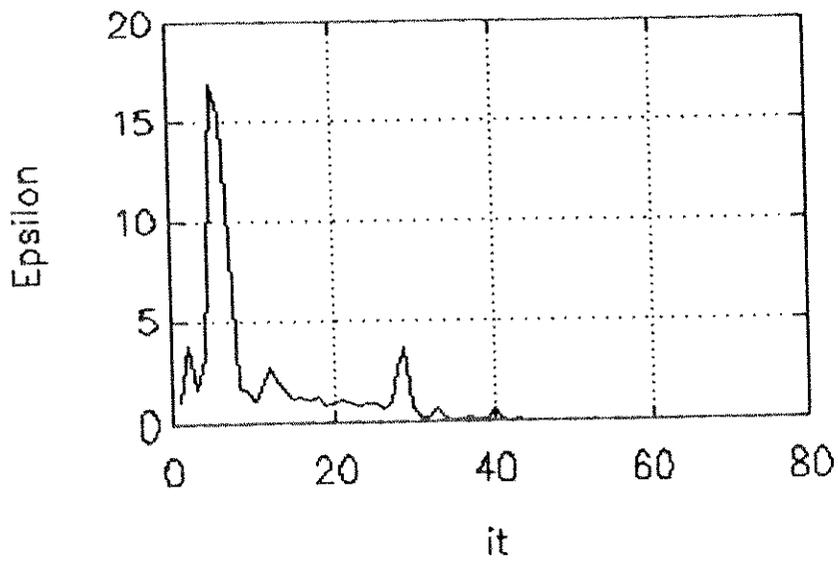


Figura 4.10: - Evolução de $\epsilon^i \times i$: Ex.3

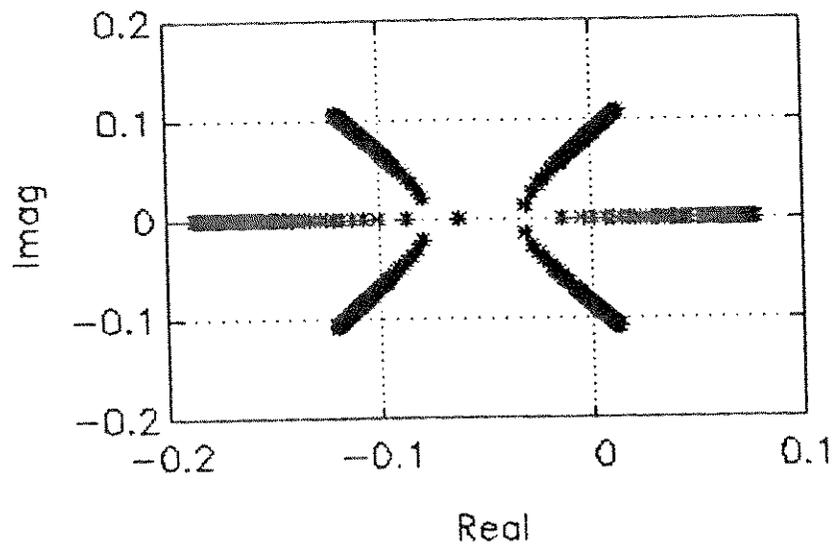


Figura 4.11: - Lugar das raízes : Ex.3

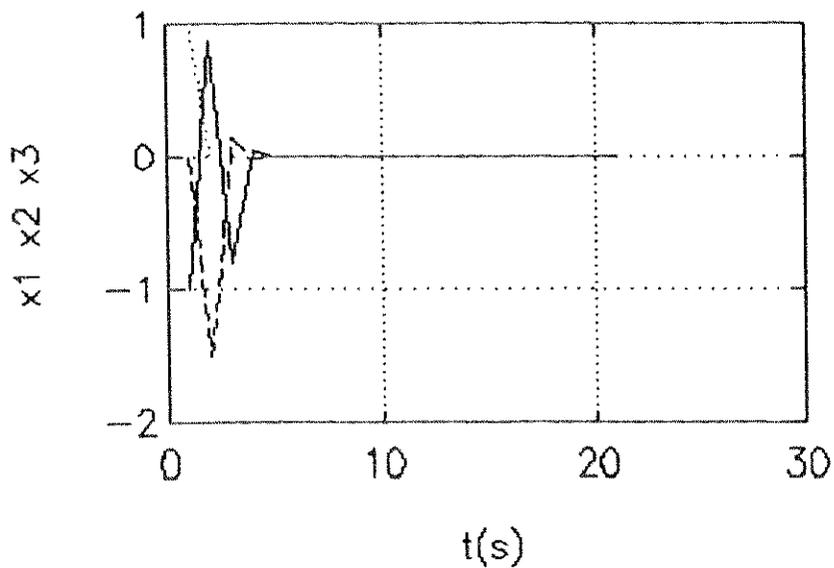


Figura 4.12: - Simulação no tempo : Ex.3

- A cada novo corte introduzido, uma base inicial factível do dual é determinada trivialmente.
- O esforço computacional para a inversão de base é constante pois sua dimensão só depende do número de variáveis e não do número de restrições do primal.

Os ensaios numéricos mostram uma boa performance do algoritmo proposto, sobretudo quando comparado com outros métodos baseados exclusivamente no gradiente da função objetivo [4]. Isto era esperado pois utilizamos o fato do problema em questão ser convexo.

Conclusão Geral

Neste trabalho desenvolvemos o novo método de análise de estabilidade quadrática para sistemas lineares incertos. Como consequência, foi também desenvolvido um novo método de síntese de controladores lineares via realimentação de saída.

Quando comparado com outros métodos existentes na literatura (ver capítulo 1), o método aqui apresentado tem as seguintes vantagens importantes:

- Todo o seu desenvolvimento baseou-se no estudo da geometria de certos cones previamente definidos. De fato, todos os problemas de programação matemática que tiverem que ser resolvidos são convexos. Este fato permitiu a determinação de lei de controle ótima de maneira simples e eficaz.
- Modelos incertos ou não, são tratados de forma semelhante.
- Como pode ser observado em alguns exemplos (ver capítulo 4) os resultados obtidos com nosso método são melhores que aqueles obtidos com

varios métodos clássicos.

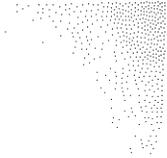
Devemos ainda salientar que sistemas contínuos ou discretos no tempo podem ser tratados pelo mesmo algoritmo. As propriedades básicas (convexidade e estabilidade) permanecem inalteradas. Deixa portanto de existir a necessidade de desenvolver-se algoritmos especializados em tratar sistemas contínuos ou sistemas discretos no tempo.

Finalmente, devemos enfatizar que as hipóteses necessárias para descrever as incertezas são as mais fracas e por conseqüência as mais abrangentes que existem na literatura atual. Em particular, não impomos nenhum tipo de “matching conditions” as quais, sem dúvida limitam em muito a aplicabilidade dos métodos em sistemas reais. Ademais, generalizações para outros problemas clássicos de controle ótimo (incluindo H^∞) podem ser resolvidos por esta mesma metodologia [14].

Bibliografia

- [1] A. Steinberg and Martin. Corless, Output Feedback Stabilization of Uncertain Dynamical Systems, *IEEE Transactions On Automatic Control*, Vol. AC - 30, No. 10, pp. 1025-1027, October 1985
- [2] B. R. Barmish, M. Corless, and G. Leitmann, A New Class of Stabilizing Controllers for Uncertain Dynamical Systems, *SIAM Journal of Control and Optimization*, Vol. 21, No. 2, pp. 246-255, March 1983
- [3] A. R. Galimidi And B. Ross Barmish The Constrained Lyapunov Problem and Its Application to Robust Output Feedback Stabilization, *IEEE Transactions On Automatic Control*, Vol.AC - 31, No. 5, pp. 410-418 , May 1986
- [4] L. H. Keel, S. P. Bhattacharyya, and Jo W. Howze, Robust Cotrol With Structured Perturbations, *IEEE Transactions On Automatic Control*, Vol. 33, No. 1, pp. 68-77 , January 1988

- [5] E. Zeheb, A Sufficient Condition for Output Feedback Stabilization of Uncertain Systems, *IEEE Transactions On Automatic Control*, Vol. Ac - 31, No. 11, pp. 1055-1057, November 1986
- [6] Avraham Steinberg, A Sufficient Condition for Output Feedback Stabilization of Uncertain Dynamical Systems, *IEEE Transactions On Automatic Control*, Vol. 33, No. 7, pp. 676-677, July 1988
- [7] P. A. Ioannou and G. Tao, "Frequency domain conditions for strictly positive real functions", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-32, pp. 53-54, Jan. 1987.
- [8] R. V. Patel and M. Toda, " Quantitative measures of robustness for multivariable systems," in *Proc. Joint Automat. Contr. Conf.*, San Francisco, CA, 1985.
- [9] R. K. Yedavalli, "Improved measures of stability robustness for linear state space models," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-30, pp. 577-579, June 1985.
- [10] S. P. Bhattacharyya, Robust Stabilization Against Structured perturbations(*Lecture Notes in Control and Information Sciences*)., Vol. 99 , New York: Springer-Veriag, 1987.

- 
- [11] J. C. Geromel, P. L. D. Peres and J. Bernussou, On a convex Parameter Space Method for Linear Control Design of Uncertain Systems, *SIAM Journal on control and Optimization* - To appear.
- [12] Peres, P. L. D. (1989). " Sur la Robustesse des Systèmes Lineaire : Approche par Programmation Lineaire". *Thèse de Doctorat de l'UPS-LAAS du CNRS, Toulouse, França.*
- [13] P. L. D. Peres, J. C. Geromel and A. M. K. Almgla, Quadratic Stabilizability of Linear Uncertain Systems by Linear Output Feedback, submetido á European Control Conference, July 2-5, Grenoble, France, 1991.
- [14] J. C. Geromel, P. L. D. Peres and S. R. Souza, Quadratic Stabilizability of Linear Uncertain Systems with Prescribed H^∞ Norm Bounds, Submetido á 1st IFAC Symposium on Design Methods of Control Systems, September, Zurich, Switzerland, 1991.