

Universidade Estadual de Campinas  
Faculdade de Engenharia Civil  
Departamento de Estruturas

# ESTUDO COMPARATIVO DE TÉCNICAS DE DETERMINAÇÃO DE SOLICITAÇÕES NA ASSOCIAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE PAINÉIS DE CONTRAVENTAMENTO EM EDIFÍCIOS ALTOS

**Newton Damasio dos Santos**

Orientador: Prof. Dr. Francisco Antonio Menezes

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Estadual de Campinas, como requisitos pra obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, na área de concentração de Estruturas.

Campinas , 2002  
SP – Brasil

Atesto que esta é a versão definitiva da dissertação/tese. 09/03/04  
Prof. Dr.   
Matrícula. 03 94 20

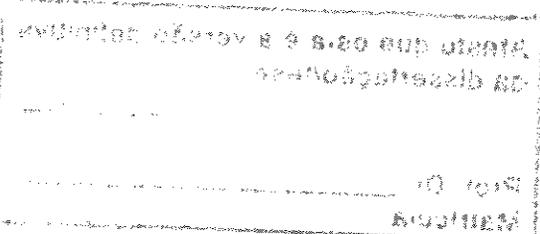
UNIDADE	PC
Nº CHAMADA	UNICAMP
	Sa59e
V	EX
TOMBO BCI	58629
PROC.	16-11-04
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	1,00
DATA	24-06-04
Nº CPD	

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

CM00198204-2

BIB ID 317185

Sa59e	<p>Santos, Newton Damasio dos</p> <p>Estudo comparativo de técnicas de determinação de solicitações na associação tridimensional de painéis de contraventamento em edifícios altos / Newton Damasio dos Santos. --Campinas, SP: [s.n.], 2002.</p> <p>Orientador: Francisco Antonio Menezes.</p> <p>Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil.</p> <p>1. Edifícios altos. 2. Pórticos espaciais. 3. Painéis de parede. I. Menezes, Francisco Antonio. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil. III. Título.</p>
-------	---





Universidade Estadual de Campinas  
Faculdade de Engenharia Civil  
Departamento de Estruturas

Dissertação de Mestrado

**ESTUDO COMPARATIVO DE TÉCNICAS DE DETERMINAÇÃO  
DE SOLICITAÇÕES NA ASSOCIAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE  
PAINÉIS DE CONTRAVENTAMENTO EM EDIFÍCIOS ALTOS**

Autor: Newton Damasio Dos Santos

Orientador: Prof. Dr. Francisco Antonio Menezes

Prof. Dr. Francisco Antonio Menezes

Instituição: FEC / UNICAMP

Prof. Dr. Philippe Remy Bernard Devloo

Instituição: FEC / UNICAMP

Prof. Dr. Walter Savassi

Instituição: EESC / USP



Campinas, 2002



*“O lucro do nosso estudo é  
tornamo-nos melhores e mais sábios.”*

**Michel De Montaigne**

## Agradecimentos

Ao Departamento de Estruturas da Faculdade de Engenharia Civil – UNICAMP pela infraestrutura.

À FAPESP pelo bolsa de estudos e reserva técnica.

Ao amigo e orientador, prof. Dr. Francisco Antonio Menezes pelo empenho e compreensão na ultrapassagem dos obstáculos enfrentados para a conclusão deste trabalho.

À minha esposa Renata, pelo incentivo, paciência e pelo apoio incondicional.

À minha família pela torcida e pela presença.

Aos amigos e professores do Departamento de Estruturas da FEC, que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Em especial aos amigos do Laboratório de Mecânica Computacional da FEC, pelo apoio e companheirismo.

À DEUS pela minha vida.

## RESUMO

**Santos, N. D.** – *Estudo comparativo de técnicas de determinação de solicitações na associação tridimensional de painéis de contraventamento em edifícios altos* – Dissertação de Mestrado, 236 p, Faculdade de Engenharia Civil da UNICAMP, Campinas (SP) Brasil, 2002.

O objetivo do trabalho foi realizar um estudo comparativo entre dois modos de obtenção de deslocamentos e esforços em edifícios altos submetidos a cargas laterais: a “*técnica do meio elástico contínuo*” e a “*técnica discreta*”, baseada no método dos elementos finitos.

Na técnica dos meios elásticos contínuos as equações foram deduzidas apenas para ações uniformes, sem variação ao longo da altura. As lajes foram admitidas como diafragmas rígidos e o problema de análise com esta formulação recaiu num sistema de equações diferenciais parciais de ordem três, nas variáveis deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $\theta$ , respectivamente translação de direção  $x$ , translação de direção  $y$  e rotação, calculados ao longo de um eixo global vertical  $z$ . O sistema de equações diferenciais foi resolvido numericamente, utilizando dois programas alternativos elaborados pelo autor: o primeiro baseado no método das diferenças finitas e o outro baseado no método de Runge-Kutta de quarta ordem. A partir dos deslocamentos no eixo global, os deslocamentos de qualquer ponto foram calculados com cinemática de pequenos deslocamentos. A partir dos deslocamentos de um dado ponto, e de suas derivadas parciais, calculadas por diferenças finitas, foram obtidos os esforços solicitantes.

Utilizou-se para as comparações pretendidas o software de elementos finitos SAP2000<sup>®</sup>, que permite o acoplamento de elementos reticulares denominados FRAME, com dois nós de extremidade e seis graus de liberdade por nó, com elementos SHELL, usados para a modelagem de cascas, placas e/ou membranas.

Foram apresentados alguns exemplos para associações simples de painéis pórticos e painéis paredes, comparando-se os resultados obtidos pela técnica dos meios contínuos e pelo programa SAP2000<sup>®</sup>, com resultados bastante próximos.

## ABSTRACT

**Santos, N. D.** – *Estudo comparativo de técnicas de determinação de solicitações na associação tridimensional de painéis de contraventamento em edifícios altos* – MSc. Thesis, 236 p, Civil Engineering College at UNICAMP, Campinas (SP) Brazil, 2002.

The goal of this work was to perform a comparative study between two modes of determination of displacements and stresses in tall buildings subjected to lateral loads: solutions based on the “*continuous elastic medium technique*” and the “*discrete technique*”, solutions based on the finite element method

The continuous technique the equations were deduced only for uniform loads with no variations along its heights. The slabs were assumed as being rigid diaphragms and the resulting problem for such analysis falls back to third order PDE problem on the displacements variables  $u$ ,  $v$  and  $\theta$  representing direction  $x$  translation, direction  $y$  translation and rotation respectively, obtained along a global vertical axis  $z$ . The resulting system of differential equations was solved numerically, using two alternative computational programs developed by the author: a first one based on finite differences method and a second one based on the fourth order Runge-Kutta method. Relatively to the displacements on the global axis, the displacement of any point is obtained with the small displacements kinematics methodology. From the displacements of a given point and its partial derivatives (obtained with finite differences) the resulting stresses are obtained.

The structural analysis software SAP 2000<sup>®</sup> was used for the proposed comparisons. This package provides the coupling of different shape elements such as frame, shell, membrane, plate and so on. Specifically for the current modelling, two nodes FRAME elements, with six degrees of freedom per node are combined with SHELL elements.

Examples were presented for the simple association of wall frames and wall panel and the results obtained through the continuous technique were compared with those obtained with SAP 2000<sup>®</sup> package with very similar results.

## SUMÁRIO

<b>Capítulo 1.....</b>	<b>1</b>
1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Objetivos do trabalho.....	2
1.2 Técnica do meio contínuo.....	2
1.2.1 Uma breve revisão bibliográfica sobre a técnica do meio contínuo.....	4
1.3 Técnica Discreta.....	8
<b>Capítulo 2.....</b>	<b>11</b>
TÉCNICA DO MEIO CONTÍNUO.....	11
2. ASSOCIAÇÕES PLANAS DE PAREDES E PÓRTICOS.....	11
2.1 Painel Parede.....	11
2.2 Painel Pórtico.....	14
2.3 Painel Geral.....	16
2.3.1 Associação de parede e pórtico por barras bi-articuladas.....	17
2.3.2 Associação de parede e pórtico através de lintéis.....	20
2.3.3 Associação plana de paredes por lintéis.....	23
<b>Capítulo 3.....</b>	<b>29</b>
TÉCNICA DO MEIO CONTÍNUO.....	29
3. NÚCLEOS.....	29
3.1 Núcleo de seção aberta sem contraventamento.....	29
3.2 Núcleo de seção aberta contraventado por lintéis.....	38

## SUMÁRIO – (continuação)

<b>Capítulo 4.....</b>	<b>45</b>
TÉCNICA DO MEIO CONTÍNUO.....	45
4. ASSOCIAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE PAREDES E PÓRTICOS.....	45
4.1 Forças cortantes externas devidas ao carregamento vertical p.....	49
4.1.1 Forças cortantes externas numa parede w devidas ao carregamento p.....	50
4.1.2 Forças cortantes externas num pórtico f devidas ao carregamento p.....	53
4.2 Forças cortantes externas devidas à ação lateral q .....	56
4.3 Forças cortantes externas devidas ao carregamento total.....	56
 <b>Capítulo 5.....</b>	 <b>59</b>
TÉCNICA DO MEIO CONTÍNUO.....	59
5. EDIFÍCIOS COM DOIS NÚCLEOS.....	59
5.1 Núcleos sem contraventamento.....	59
5.1.1 Generalização para n núcleos sem contraventamento.....	64
5.1.2 Forças cortantes externas na associação de núcleos sem contraventamento	65
5.1.2.1 Forças cortantes externas devidas à cargas verticais p na associação	
de núcleos sem contraventamento.....	65
5.1.2.2 Forças cortantes externas devidas a ações laterais q na	
associação de núcleos sem contraventamento.....	66
5.2 Associação de dois núcleos contraventados por lintéis.....	68
 <b>Capítulo 6.....</b>	 <b>89</b>
TÉCNICA DISCRETA.....	89
6.1 Algumas propostas para a simulação discreta de edifícios.....	89
6.1.1 Modelo estrutural proposto por Edgar Sousa Júnior.....	90
6.2 Modelo discreto utilizado nesta dissertação.....	93
6.2.1 Os elementos de barra (FRAME) no programa SAP2000.....	94
6.2.1.a Conectividade dos nós.....	94
6.2.1.b Graus de liberdade.....	95
6.2.1.c Sistema de Coordenadas locais.....	95

## SUMÁRIO – (continuação)

6.2.1.d Propriedades da seção.....	96
6.2.2 O elemento de casca.....	97
6.2.2.a Conectividade.....	98
6.2.2.b Graus de liberdade.....	100
6.2.2.c Sistema de Coordenadas locais.....	100
6.2.2.d Coordenadas Angulares .....	101
6.2.2.e Propriedades de seção.....	101
6.2.2.f Tipo de seção do elemento SHELL.....	102
<b>Capítulo 7.....</b>	<b>105</b>
<b>EXEMPLOS.....</b>	<b>105</b>
7.1 Estruturas Testes.....	109
7.1.1 Estrutura Teste 01.....	109
7.1.2 Estrutura Teste 02.....	111
7.1.3 Estrutura Teste 03.....	113
7.1.4 Estrutura Teste 04.....	117
7.2 Exemplo 02 - Núcleo de seção aberta e paredes delgadas c/ carga simétrica.....	122
7.3 Exemplo 03 – Núcleo de seção aberta e paredes delgadas com carregamento não simétrico.....	129
7.4 Exemplo 04 – Edifício retangular com pórticos e núcleo.....	137
7.5 Exemplo 05 – Estrutura constituída por dois núcleos.....	149
<b>Capítulo 8.....</b>	<b>169</b>
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES.....</b>	<b>169</b>
<b>APÊNDICE A.....</b>	<b>175</b>
Resumo teórico sobre flexo torção.....	175
A1. Hipóteses Fundamentais.....	175
A1.1. Geometria da Seção.....	175
A2 Tensões de Cisalhamento.....	176

## SUMÁRIO – (continuação)

A2.1 Tensões de Cisalhamento devidas à torção livre ( $\tau_V$ ) .....	176
A2.2 Obtenção do Centro de Cisalhamento.....	177
A3 Deformação da seção transversal.....	183
A4 Torção livre de peças de seção aberta de paredes delgadas.....	183
A4.1 Condições para a torção livre.....	183
A5 Deslocamentos.....	185
A6 Torção não uniforme de barras de seção aberta de paredes delgadas.....	187
A6.1 Tensão normal ou Flexo –Torção.....	188
A6.2 Tensão tangencial de Flexo – Torção.....	189
A6.3 Momento de Flexo – Torção.....	191
A.7 Equação diferencial de Flexo – Torção.....	193
A7.1 Caso geral.....	194
A7.2 Condições de contorno.....	195
<b>APÊNDICE B.....</b>	<b>197</b>
DETERMINAÇÃO DOS COEFICIENTES DE RIGIDEZ PARA OS PÓRTICOS E ASSOCIAÇÕES PÓRTICOS/PAREDES.....	197
B1 Pórtico isolado – coeficiente de rigidez à força cortante – $s_f$ ....	197
B2 Associação de pórticos e paredes ligados por lintéis: coeficientes $s$ de rigidez à força cortante do pórtico e coeficientes de rigidez $K_1$ e $K_2$ ao giro da parede.....	199
B2.1 Efeito da flexão - rotação $\phi_B$ - Coeficientes de rigidez $s$ e $K_1$ .....	200
B2.2 Coeficientes de rigidez $K_2$ devidos ao efeito da força cortante.....	205
<b>APÊNDICE C.....</b>	<b>209</b>
<b>SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS.....</b>	<b>209</b>
C1 Introdução .....	209
C2 Série de Taylor para funções $y(x)$ .....	210
C3 Método das diferenças finitas.....	211
C3.1 $y(x)$ ajustada por função polinomial.....	212

---

C4 Métodos de Runge-Kutta.....	216
C4.1 – Série de Taylor para funções $f(x,y)$ .....	217
C4.2 – Métodos de Runge-Kutta para Equação diferencial de primeira ordem.....	217
C4.2.1 Método de Runge-Kutta de 2 <sup>a</sup> . ordem.....	218
C4.2.2 Método de Runge-Kutta de 4 <sup>a</sup> . ordem.....	219
C4.3 – Sistemas de equações diferenciais de primeira ordem.....	220
C4.4 – Equações diferenciais de ordem m .....	221
C5 – Problema do Edifício – Sistema de equações diferenciais de ordem 3 nas variáveis $u$ , $v$ e $\theta$ .....	222
<b>BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>229</b>
<b>Manuais de Referência.....</b>	<b>235</b>

## SUMÁRIO DE FIGURAS

Figura 2.1 – Painel Parede.....	12
Figura 2.2 – Painel Pórtico.....	14
Figura 2.3 – Associação de Painéis por barras bi-articuladas.....	17
Figura 2.4 – Associação de Paredes e Pórticos por Lintéis.....	20
Figura 2.5 – Associação de Paredes por Lintéis.....	23
Figura 2.6 – Deslocamentos dos centros dos vãos dos Lintéis.....	25
Figura 2.7 – N Paredes unidas por Lintéis.....	28
Figura 3.1 – Núcleo de seção aberta sem contraventamento.....	29
Figura 3.2 – Convecção de $M_t$ de $\theta$ positivos.....	32
Figura 3.3 – Deslocamentos do centro de torção e do elemento de área $dA$ .....	34
Figura 3.4 – Deslocamentos do centro de torção e do elemento de área $dA$ .....	35
Figura 3.5 – Núcleo de seção aberta contraventado por Lintéis.....	38
Figura 3.6 – Forças Cortantes nos Lintéis nos pontos de seccionamento.....	40
Figura 3.7 – Deslocamento de um Lintel seccionado.....	41
Figura 4.1 – Associação tridimensional em planta.....	45
Figura 4.2 – Parede se seção aberta.....	46
Figura 4.3 – Convenção para os esforços externos positivos.....	50
Figura 4.4 – Elemento de parede.....	50
Figura 4.5 – Representação das ações externas num elemento de parede $dA$ .....	51
Figura 4.6 – Forças cortantes em um pilar de um pórtico genérico $f$ .....	53
Figura 4.7 – Deslocamento devi ao giro $\theta$ .....	54
Figura 4.8 – Forças cortantes em um pilar de pórtico genérico.....	54
Figura 5.1 – Núcleos de seção aberta sem contraventamento.....	60

## SUMÁRIO DE FIGURAS (continuação)

Figura 5.2 – Convenção para as forças cortantes internas positivas.....	61
Figura 5.3 – Rotação do vetor $\{V_i\}$ para $\{\bar{V}_i\}$ .....	63
Figura 5.4 – Núcleos contraventados por lintéis.....	68
Figura 5.5 – Coordenadas dos pontos $CT_i$ e $C_{gi}$ .....	69
Figura 5.6 – Seccionamento de um elemento $dz$ nos pontos médios dos lintéis.....	70
Figura 5.7 – Elementos genéricos dos núcleos.....	71
Figura 5.8 – Momentos torçores e forças cortantes nos núcleos, devidos à força cortante distribuída vertical $VL/h$ nos lintéis, levados para os centros de torção dos núcleos 1 e 2.....	74
Figura 5.9 Deslocamentos do ponto $\bar{o}$ dos lintéis ligados ao núcleo 1.....	79
Figura 5.10 – Coordenadas da origem $O$ em relação aos eixos $o_i^* x_i^* y_i^* z_i^*$ e $\overline{xyz}$ .....	83
Figura 6.1 – Elementos estruturais utilizados por Sousa Junior.....	91
Figura 6.2 – Elementos Estruturais.....	92
Figura 6.3 – Condensação estática dos elementos de placa e viga.....	92
Figura 6.4 – Situação padrão do elemento do FRAME no SAP2000®.....	95
Figura 6.5 Orientações para o sistema de do elemento FRAME.....	96
Figura 6.6 – Representação das direções e sentidos positivos dos esforços.....	97
Figura 6.7 - Elemento de casca, pontos de conexão e definições de face.....	99
Figura 6.8 - Elemento de casca, com a coordenada angular respeitando a orientação...102	
Figura 6.9 – Descrição e posicionamento de forças e tensões.....	103
Figura 6.10 – Descrição e posicionamento dos momentos.....	103
Figura 7.1 Seção delgada aberta.....	109
Figura 7.2 – Esquema de carregamento da parede.....	111
Figura 7.3 – Deslocamento de translação da parede da Estrutura Teste 02.....	112
Figura 7.4 – Momento Fletor na parede da Estrutura Teste 02.....	113
Figura 7.5 – Força Cortante na parede da Estrutura Teste 02.....	113
Figura 7.6 – Esquema de carregamento do pórtico.....	114
Figura 7.7 – Deslocamento de translação ao longo da altura da Estrutura Teste 03.....	115
Figura 7.8 – Força Cortante numa prumada de pilares da Estrutura Teste 03.....	116

## SUMÁRIO DE FIGURAS (continuação)

Figura 7.9 – Esquema de carregamento lateral da Estrutura Teste 04.....	117
Figura 7.10 – Deslocamento ao longo dos andares da Estrutura Teste 04.....	118
Figura 7.11 - Força Cortante para o pilar esquerdo da Estrutura Teste 04.....	120
Figura 7.12 – Força Cortante para a parede da Estrutura Teste 04.....	121
Figura 7.13 – Gráfico de Momento para a parede da Estrutura Teste 04.....	122
Figura 7.14 – Edifício formado por núcleo de seção aberta e paredes delgadas sujeito à carga lateral $q_y=0,96 \text{ tf/m}$ .....	123
Figura 7.15 – Deslocamento na direção y do núcleo ( $p=0$ ).....	129
Figura 7.16 – Núcleo sob atuação de cargas $q_x$ e $q_y$ . ( $p=0$ ).....	129
Figura 7.17 Deslocamentos na direção x do núcleo do exemplo 03.....	130
Figura 7.18 Deslocamentos na direção y do núcleo do exemplo 03.....	131
Figura 7.19 Rotações do núcleo do exemplo 03.....	132
Figura 7.20 – Pontos do núcleo onde foram analisadas as tensões normais.....	132
Figura 7.21– Diagrama de tensões normais num trecho de paredes do núcleo do Exemplo 03 calculadas pelo SAP2000.....	133
Figura 7.22 – Tensões Normais nos pontos 1 até 7 das paredes, na cota $Z=42\text{m}$ .....	133
Figura 7.23 – Tensões Normais nos pontos 1 até 7 das paredes, na cota $Z=45\text{m}$ .....	134
Figura 7.24 – Disposição geométrica da estrutura do exemplo 04.....	137
Figura 7.25 – Disposição da estrutura do exemplo 04 adotada para o modelo contínuo.....	139
Figura 7.26 – Deslocamentos na direção y para o edifício do exemplo 04.....	144
Figura 7.27 – Deslocamento na direção x do exemplo 04.....	145
Figura 7.28 – Rotação em torno do eixo z do exemplo 04.....	145
Figura 7.29 – Deslocamento em x do edifício do Exemplo 04 - Variação da espessura da laje e do modelo de simulação.....	147
Figura 7.30 – Deslocamentos y da Estrutura do Exemplo 04 - Variação da espessura da laje e do modelo de simulação.....	148
Figura 7.31 – Rotação em torno de z do edifício do Exemplo 04 - Variação da espessura da laje e do modelo de espessura.....	149
Figura 7.32 – Estrutura e carregamento para o Exemplo 05.....	150
Figura 7.33 – Deslocamentos x do edifício do exemplo 05 sob carga lateral.....	158

## SUMÁRIO DE FIGURAS (continuação)

Figura 7.34 – Deslocamentos y do edifício do exemplo 05 sob carga lateral.....	159
Figura 7.35 – Rotações em torno do eixo vertical z do edifício do exemplo 05 sob carga lateral.....	159
Figura 7.36 – Diagrama de tensões normais (em kgf/m <sup>2</sup> ) nas paredes dos núcleos – Resultados obtidos com o programa SAP2000.....	162
Figura 7.37 – Tensões normais em pontos do esqueleto do núcleo 1.(Z=36m).....	163
Figura 7.38 – Tensões normais em pontos do esqueleto do núcleo 2.(Z=36m).....	163
Figura 7.39 – Diagrama de força cortante nos lintéis (kgf) para o exemplo 05 – Resultados obtidos com o programa SAP2000.....	162
Figura 7.40 – Diagrama momento nos lintéis (kgfm) para o exemplo 05 – Resultados obtidos com o programa SAP2000.....	167
Figura A1 – Peça de seção aberta de parede fina.....	175
Figura A2 – Distribuição de $\tau_{ty}$ .....	176
Figura A3 – Distribuição de $\tau_v$ .....	178
Figura A4 – Sistema de Referência.....	178
Figura A5 – Área setorial.....	180
Figura A6 – Esquema para área setorial.....	181
Figura A7 – Posição do C.C e do polo P.....	182
Figura A8 – Análise de deslocamento.....	185
Figura A9 – Análise de tensões e equilíbrio de forças longitutinais.....	190
Figura A10 – Tensão $\tau_{ft}$ de flexo-torção.....	192
Figura A11 – Elemento sujeito à torção.....	194
Figura B1 – Elástica de deformação em torno de um nó de Pórtico.....	197
Figura B2 – Deformação do painel devida a $\phi_B$ .....	200
Figura B3 – Deformação do painel devida a $\phi_s$ .....	205
Figura C1 – Valores da função $f(z)$ .....	213
Figura C2 – Algoritmo de Runge-Kutta de segunda ordem.....	219
Figura C3 – Algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem.....	220
Figura C4 – Algoritmo de Runge-Kutta de 4 <sup>a</sup> ordem para sistema de equações.....	221

## SUMÁRIO DE TABELAS

Tabela 7.1 – Deslocamentos do ponto O e do ponto 4.....	136
Tabela 7.2 – Derivada segundo dos deslocamentos do ponto 4.....	136
Tabela 7.3 – coeficientes dos pórticos.....	140
Tabela 7.4 – coeficientes das Paredes Associadas.....	141
Tabela 7.5 - Deslocamentos do ponto O.....	160
Tabela 7.6 – Deslocamentos do ponto 1 do núcleo 2.....	160
Tabela 7.7 – Derivadas segunda dos deslocamentos do ponto 1 do núcleo 2.....	161
Tabela 7.8 – Tabela de tensões do núcleo 1 e 2 na cota Z=36m.....	162
Tabela 7.9 - Tabela dos deslocamentos do ponto <sup>e</sup> .....	165
Tabela 7.10 – Tabela dos deslocamentos do centro do lintel.....	165
Tabela 7.11 – Derivadas primeiras dos deslocamentos no meio do lintel da cota z=36m.....	165

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

O contínuo crescimento das populações das zonas urbanas tem gerado um aumento da densidade demográfica das grandes e médias cidades, onde a falta de espaço horizontal e a grande valorização dos terrenos têm dado ensejo ao emprego cada vez maior das construções verticalizadas.

Existem alguns parâmetros medidos em termos de custos de infra-estrutura urbana que avaliam e justificam a necessidade das construções em múltiplos andares. Entretanto, não são apenas parâmetros dessa natureza técnica que às vezes ditam a construção de grandes edifícios. Às vezes a própria vaidade ou personalidade de algum governante, acabam por serem fatores que determinaram alguns empreendimentos marcantes.

Para se construir edifícios altos um fator extremamente importante que deve ser levado em conta é o efeito do vento. Um verdadeiro desafio à engenharia é o modelo estrutural a ser usado a fim de se representar o mais adequadamente possível a realidade do comportamento estrutural, com as várias possibilidades de carregamentos proporcionadas pela natureza.

O objetivo principal deste trabalho, que pretendemos defender como dissertação de mestrado junto ao curso de pós-graduação em Engenharia Civil, área de Estruturas, da Faculdade de Engenharia Civil da UNICAMP, é uma breve comparação entre dois tipos de análise que são usados para este tipo de estrutura: “Técnica do Meio Contínuo” ou “Método do Contínuo” e o que chamaremos de “Técnica Discreta”, baseada no método dos elementos finitos.

Não é objetivo do autor defender uma ou outra técnica, mas sim, despertar o interesse para pesquisas futuras. A primeira, adequada para um pré – dimensionamento,

pela sua simplicidade de aplicação; a segunda, mais detalhada, indicada para a fase de detalhamento, ou quando a geometria do andar tipo for bastante complexa. A técnica discreta apresenta um custo computacional mais elevado.

## 1.1 Objetivos do trabalho

Pretendemos fazer um estudo comparativo de formulações normalmente utilizadas para a análise estrutural da associação tridimensional de pórticos e paredes de edifícios altos sob carga lateral. Deverão ser comparados resultados obtidos por duas formulações distintas:

- § **Técnica do meio contínuo** - através da utilização de programas computacionais elaborados pelo autor, neste trabalho denominados por NEWTON, que proporcionam a solução do sistema de equações diferenciais parciais de terceira ordem, que regem o problema através do método de diferenças finitas ou pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem.
- § **Técnica Discreta** - através da utilização do programa de elementos finitos SAP2000<sup>®</sup>, com associação de elementos FRAME para modelar vigas e pilares e elementos do tipo SHELL para modelar as paredes, núcleos estruturais e lajes.

## 1.2 Técnica do meio contínuo

Uma primeira formulação a ser apresentada deverá ser baseada na “técnica do meio elástico contínuo”. Por essa técnica, para efeito do cálculo estático, o conjunto de vigas é substituído por uma lâmina contínua de rigidez equivalente, uniformemente distribuída pela altura. Foram utilizados como referência artigos recentes publicados em revistas ou congressos e algumas dissertações de mestrado ou teses de doutorado defendidas na EESC/USP. Uma ótima fonte de referência é a monografia da tese de livre docência de MANCINI [15], onde aquele pesquisador apresenta de forma bastante didática todo um legado sobre o assunto, mostrando os inúmeros trabalhos que teve a oportunidade de produzir ou orientar naquela instituição.

A análise de estruturas tridimensionais pela técnica do meio contínuo pode ser expressa por três equações diferenciais não homogêneas de terceira ordem, cuja solução fornece os deslocamentos da estrutura, indicados por  $u$ ,  $v$ , e  $\theta$  em relação a um sistema de eixos de referência global OXYZ. Para formular essas equações diferenciais foram aqui estabelecidas algumas hipóteses:

- Os lintéis são engastados em suas extremidades e nos pontos médios de seus vãos o momento fletor é nulo;
- As lajes são consideradas diafragmas na horizontal e de rigidez infinita ao longo de seu plano, não apresentando rigidez transversal alguma;
- Os núcleos estruturais, ou simplesmente paredes de seção aberta são deformáveis por momento fletor e rígidos para esforços cortantes;
- As seções permanecem planas depois de fletidas;
- Os núcleos se comportam como barras de seção aberta de paredes delgadas quando sujeitos a torção, podendo-se, então, estudá-los através da teoria de flexo-torção, considerando inclusive o efeito de bimomento.
- As características elásticas e geométricas dos elementos que compõem a estrutura permanecem constantes ao longo de sua altura.

Para efeito deste trabalho, vamos classificar os edifícios altos de acordo com os elementos estruturais que os compõem, adotando hipóteses específicas e fazendo para cada um deles o equacionamento adequado.

Serão abordados os seguintes problemas:

- Painel Parede
- Painel Pórtico
- Painel Geral
- Núcleos de seção aberta sem contraventamento.
- Núcleos de seção aberta contraventados por lintéis.

A formulação para os casos estudados foi baseada fundamentalmente na dissertação de mestrado da engenheira Maria Ângela P. XAVIER [48], defendida no Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, USP.

Baseado na formulação apresentada foram elaborados dois programas alternativos, que permitem encontrar os deslocamentos fundamentais  $u$ ,  $v$  e  $\theta$ , em cada andar, numa vertical ao longo do eixo global OZ adotado: o primeiro programa foi baseado no método das diferenças finitas e o segundo, mais eficiente, baseado no método de Runge-Kutta de quarta ordem.

### 1.2.1. Uma breve revisão bibliográfica sobre a técnica do meio contínuo

Um edifício, por definição, conforme FRANCO [8], é uma construção que apresenta pisos superpostos. Por essa definição um prédio de vários andares é um edifício. Uma chaminé ou uma caixa d'água é denominada edificação e não edifício. Segundo o referido autor, para a classificação de um prédio como edifício alto, esse conceito de altura é relativo: os problemas causados pela altura ditarão o enquadramento de um edifício na categoria de edifícios altos. FRANCO [8] exemplifica que um edifício de 12 andares será considerado alto se a sua esbelteza causar problemas de deslocamentos laterais excessivos ou oscilações exageradas. Num local onde os edifícios têm média de 20 andares um novo prédio de 35 andares seria considerado como edifício alto. Na cidade de Nova York, onde existem muitos prédios acima de 50/60 andares, o prédio de 35 andares não seria um edifício alto.

O planejamento e o projeto de um edifício alto, além dos problemas urbanísticos e arquitetônicos, traz consigo um desafio tecnológico importante no que diz respeito à concepção estrutural.

Nos edifícios altos haverá a necessidade de se prever uma estrutura eficiente para fazer frente aos esforços oriundos de ações laterais horizontais, tais como o vento, os sismos, etc. No Brasil, ao contrário da maioria dos países, não é usual a verificação e o dimensionamento de edifícios levando em conta a atuação de sismos, uma vez que eles são relativamente raros, de baixa intensidade e os poucos efeitos conhecidos normalmente acontecem em regiões não densamente habitadas. Ao contrário dos sismos, no entanto, os efeitos da ação dos ventos são importantíssimos e devem ser levados em conta no cálculo das solicitações da estrutura resistente de um edifício.

A concepção e criação de mecanismos capazes de absorver, de forma eficiente, as ações horizontais têm uma importância cada vez maior nos projetos estruturais de edifícios altos.

Atualmente é freqüente a tendência dos arquitetos e projetistas de substituírem as antigas e rígidas paredes de alvenaria por painéis divisórios ou paredes de vedação leves que não contribuem para a rigidez do sistema estrutural. O uso de aços e concretos de alta resistência mecânica tem possibilitado que as estruturas se tornem cada vez mais esbeltas e, portanto, mais sensíveis às ações laterais.

Conforme já foi dito na Introdução, a modelagem de edifícios altos tem sido feito de duas maneiras distintas: técnicas discretas, como a Análise Matricial de Estruturas, Método dos Elementos Finitos e a técnica do meio elástico contínuo.

O país possui inúmeros engenheiros de renome que se dedicaram ou se dedicam à análise de edifícios altos. Pode-se indicar o Dr. Mário Franco como um dos expoentes desse conjunto de projetistas.

A técnica do meio elástico contínuo, considerada uma ótima abordagem para análise do comportamento de edifícios, de custos sensivelmente menores que as técnicas discretas, possibilitou a criação de uma frutífera linha de pesquisa no Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, onde inúmeros trabalhos de dissertações e teses têm sido desenvolvidos. Nessa escola o Prof. Dr. Miguel Carlos STAMATO [34] foi o pesquisador que no início da década de 1970 fez as primeiras publicações sobre associações de painéis de contraventamento em edifícios altos calculados pela técnica do contínuo. Essa linha de pesquisa encontrou seguidores na EESC/USP, onde talvez as maiores expressões sejam os professores Dr. Edie MANCINI e Dr. Walter SAVASSI.

Utilizando como referência publicações de FRANCO [8], STAMATO [34] e MANCINI [15], apresentamos abaixo os sistemas estruturais normalmente concebidos e utilizados para a absorção das cargas laterais em edifícios:

- a) **Alvenarias estruturais:** em princípio utilizadas para edifícios de pequena altura
- b) **Pórticos rígidos:** usados por muito tempo como únicos sistemas de contraventamento, tanto para estruturas metálicas como para estruturas de concreto armado. As ações laterais (ex. vento) se distribuem para os diversos pórticos em virtude da presença das lajes.
- c) **Pilares paredes:** têm uso cada vez mais freqüente nos edifícios altos, concentrando-se na maioria das vezes nas caixas de escada e elevadores. Atribuem grande rigidez ao sistema estrutural. Funcionam como vigas em balanço engastadas na base.

- d) **Associações entre pórticos e pilares parede:** Constituem um sistema bastante eficiente que reduz bastante os deslocamentos relativos entre andares.
- e) **Associações de pilares parede:** Constituem sistemas estruturais de contraventamento bastante eficientes. Muito utilizados atualmente, possibilitando a criação de núcleos rígidos dentro do edifício, complementados ou não por paredes isoladas de contraventamento, com ou sem aberturas.
- f) **Tubos:** Pilares dispostos na periferia do edifício, exceto os de sustentação das escadas e elevadores. Os pilares possuem pequeno espaçamento entre si, sendo travados rigidamente por vigas, que servem de peitoril e apoio para caixilharia.
- g) **Feixes de Tubos:** quando as dimensões do edifício são tais que resultariam vãos internos muito grandes, utilizam-se nesse tipo de solução a concepção de feixes de tubos, como foi o caso das duas torres do World Trade Center em Nova York, que foram derrubadas em acidentes aéreos, no ano de 2001.
- h) **Tubos estaiados:** Sistema estrutural em tubos acrescidos de sub-sistemas rígidos treliçados (ou às vezes pórticos) na parte superior, onde são ancorados elementos estaiados normalmente servindo de suporte para a fachada.

Tomando por base o “Estado da Arte” apresentado por MANCINI [15], mostra-se a seguir uma breve revisão bibliográfica sobre o emprego da técnica do meio contínuo para a análise de edifícios altos, com ênfase para os trabalhos desenvolvidos na EESC-USP.

Os primeiros trabalhos na EESC-USP sobre o assunto foram feitos por STAMATO [34]. Seus trabalhos, datados de 1971, trataram inicialmente de estruturas planas constituídas de pórticos e paredes. As paredes são supostas deformáveis por momento fletor e rígidas à força cortante e os pórticos são deformáveis por cortante e rígidos por momento fletor.

Em 1972, MANCINI [13], analisou paredes elasticamente engastadas na base utilizando a técnica do meio contínuo e com algumas mudanças no equacionamento simularam uma flexibilidade nas fundações.

Em 1973, MANCINI [14], em sua tese de doutorado, tratou de edifícios altos sob ações do vento, os casos de aplicação da técnica do contínuo. Foi introduzido o conceito de painel geral: uma associação de painéis pórticos e painéis paredes. Adotou-se nesses primeiros trabalhos que os pilares dos pórticos eram indeformáveis axialmente.

Na busca de se adequar cada vez mais o processo de cálculo, outros trabalhos foram publicados na seqüência. RACHID [24], por exemplo, descreve o processo de instabilidade de barras submetidas à torção, seguindo a teoria de peças longas, desenvolvida por VLASSOV [45], acrescentando confiança e credibilidade, melhorando os processos de cálculo.

Durante este longo caminho a principal dificuldade era uma formulação matemática que representasse os diversos casos analisados e a própria solução do sistema de equações diferenciais.

SAVASSI [27], em 1975, utilizou o método dos elementos finitos, superando uma das hipóteses adotadas até então: a restrição de rigidez constante ao longo da altura da estrutura, ou seja, a estrutura poderia variar sua rigidez ao longo da altura.

Em 1978 BARBOSA [1], em sua dissertação de mestrado, desenvolveu um estudo analisando núcleos de seção aberta contraventados por lintéis e deduziu que a rigidez deste núcleo é aumentada devido ao surgimento de uma força cortante, devido ao lintel, que provoca o aparecimento do bimomento, proporcionando ao núcleo a diminuição do efeito da torção, aumentando assim, a rigidez das paredes.

CARVALHO [5], em 1982, fez o estudo dos efeitos que as forças verticais provocam nas estruturas dos edifícios altos, levando em conta os efeitos de segunda ordem, pois as cargas não são baixas e os deslocamentos são consideráveis, provocando assim o surgimento de um momento, exigindo das estruturas uma maior rigidez.

Dentro da técnica do meio contínuo surgiram caracterizações de estruturas como tubulares, reticuladas, sob fundações flexíveis, etc., onde cada vez mais se constatou a importância de se levar em conta o efeito de segunda ordem e as características físicas e geométricas dos materiais. Destacaram-se entre vários trabalhos analisados: VASCONCELOS [44], XAVIER[48,49], RIBEIRO[25], SANTANA [26], MORI & RACHID [21], entre muitos outros.

Na Faculdade de Engenharia Civil da UNICAMP, o Prof. Dr. José Luiz F. A. Serra abordou a técnica do meio contínuo e, sob sua orientação, devemos aqui destacar os trabalhos GOMES [9] e GUILIARDI [10], tratando edifícios altos utilizando a técnica do meio contínuo e técnicas discretas, baseada na análise matricial, respectivamente.

A análise de edifícios altos por técnicas discretas normalmente tem sido feita com a utilização de programas de computador comerciais, dentre os quais poderíamos nos referir aos programas SAP, COSMOS, ANSYS, NASTRAN, ADINA, entre os mais usados.

Atualmente poderíamos destacar programas que já fazem o dimensionamento das estruturas, como o CYPECAD, TQS e SYSTRUT, entre outros.

Uma das maiores autoridades no campo dos edifícios altos é o professor Brian Sttaford Smith que dedica-se ao assunto há mais de três décadas. Segundo manuscrito de SAVASSI [30], dentre as atividades profissionais o professor Smith esteve envolvido com o projeto, análise e comportamento de vários edifícios esbeltos da cidade de Nova York, trabalhando para “Rosenwasser/Grossman Consulting Engineers, PC, NYC”, empresa que sempre esteve na vanguarda do tratamento desse tipo de construção. O professor Sttaford Smith sempre se dedicou à pesquisas baseadas na técnica do meio contínuo, podendo citar-se trabalhos relativamente recentes como STTAFORD SMITH [37,38]. Ainda conforme [30], há artigos recentes de pesquisadores na Escócia, Coréia do Sul, etc., onde aparecem aprimoramentos diversos nas formulações pela técnica do meio contínuo, permitindo inferir que a mesma continua tendo interesse, se considerada de maneira adequada.

### 1.3 Técnica Discreta

Com o uso do programa SAP 2000<sup>®</sup>, baseado no método dos elementos finitos, via processo dos deslocamentos, será mostrada uma outra análise do edifício, onde as paredes serão simuladas como constituídas de elementos finitos de cascas, ou membranas rígidas, em estado plano de tensão. Os pilares dos pórticos serão simulados como elementos de barras sujeitas à flexão, levando-se em conta as contribuições das deformações por força cortante e por força normal. As vigas poderão ou não ser consideradas rígidas axialmente. As lajes, por sua vez, também poderão ser simuladas como diafragmas rígidos em seu plano, ou simuladas como elementos finitos de cascas. Essa abordagem está sendo chamada neste estudo como Técnica discreta.

A concepção estrutural, nesse caso, depende das simplificações assumidas pelo projetista. Inúmeras possibilidades de combinações de elementos estruturais normalmente são utilizadas:

- Há cerca de 30/40 anos era comum analisar-se um edifício como vigas e pilares isolados. As vigas contínuas ou de um único tramo recebiam a ação das lajes. As ações nos apoios das vigas atuavam como cargas axiais nos pilares.

- Com a possibilidade de uso dos primeiros computadores os modelos de edifícios foram um pouco mais sofisticados. Eram feitos cálculos em separado das lajes e passou-se a utilizar modelos estruturais constituídos por pórticos, sob a ação do carregamento das lajes e das ações laterais.
- Uma outra simulação ainda simplificada, mas muito utilizada por projetistas era a análise do andar tipo como grelhas, cujas ações verticais eram usadas para o dimensionamento de pilares.
- A seguir, pela possibilidade de uso de computadores pessoais mais potentes e de custos mais acessíveis, os projetistas de estruturas de edifícios passaram a criar modelos discretos como pórticos tridimensionais, incorporando o efeito das lajes como diafragmas, com função de compatibilizar os deslocamentos horizontais numa mesma cota.
- Nos edifícios altos, para enrigecimento das estruturas é usual a utilização de paredes e núcleos estruturais. Os núcleos estruturais são formados por uma combinação de pilares-parede formando uma seção transversal aberta ou semi-fechada. A simulação dessas paredes e/ou núcleos como elementos reticulados (vigas e pilares) foge bastante do comportamento estrutural que se espera desses elementos. Assim, o uso de programas de computador de pórticos, com ou sem diafragmas para a análise de edifício não é satisfatória. É necessário que os programas, além dos elementos reticulados, para simular vigas, pilares, pórticos, tenham uma melhor capacidade de modelar as paredes e núcleos.

Uma possibilidade é a confecção de programas onde se tenha incorporado na biblioteca de elementos, um elemento reticulado que leva em conta o efeito do empenamento. Por exemplo, SOUSA JUNIOR [33] em sua tese de doutorado formulou e apresentou um elemento de barra com dois nós de extremidade, com 7 graus de liberdade por nó: três translações, três rotações e o empenamento, associados respectivamente à três forças, três momentos e ao bimomento. Com a associação desse elemento aquele autor simulou núcleo estrutural de edifícios.

Uma outra possibilidade é a utilização de softwares de elementos finitos que permitam a associação de elementos reticulados (barras) com

elementos finitos de superfície (cascas). Com a utilização de programas desta natureza é possível fazer simulações de edifícios com o uso de elementos de barras, para a simulação de vigas, pilares e pórticos, e elementos de cascas para a simulação de paredes, núcleos e das lajes. Há projetistas que utilizam elementos finitos de placas para simular as lajes, embora esta escolha possa ser temerária, pela falta de uma total compatibilização de deslocamentos entre as lajes, paredes e núcleos. Uma das grandes desvantagens, até recentemente, dos processos ditos discretos, baseados em elementos finitos, é o grande número de parâmetros de entrada de dados, para caracterizar a estrutura e os carregamentos. Essa dificuldade, por sua vez, pelo menos para as estruturas com poucas variações da geometria, tem sido aliviada pela incorporação nos programas de análise estrutural, de geradores de malha, e editores gráficos. O mesmo se diz da fase de pós-processamento: o que antes era feito baseado em extensas listagens, onde os usuários tinham que pesquisar os resultados de seu interesse, tem-se hoje a possibilidade de uso de computação gráfica que permite a expressão visual de esforços, tensões, deslocamentos, etc.

## Capítulo 2

### TÉCNICA DO MEIO CONTÍNUO

## 2. ASSOCIAÇÕES PLANAS DE PAREDES E PÓRTICOS

### 2.1 Painel Parede

Denominamos como **Painel Parede** o painel plano de seção constante ao longo da altura  $H$ , deformável predominantemente à ação do momento fletor.

Consideramos neste tipo de estrutura um carregamento horizontal uniformemente distribuído ao longo da altura  $H$ , e uma carga gravitacional uniformemente distribuída ao longo do eixo vertical que passa pelo centro de gravidade de sua seção transversal.

Na Fig 2.1 são indicados a notação e os sentidos positivos para os esforços e deslocamentos. Um sistema de referência  $Oxyz$  tem o eixo  $Oz$  vertical apontando para cima e os eixos  $Ox$  e  $Oy$  nas direções dos eixos principais de inércia das seções transversais. A origem  $O$  está na projeção do CG das seções transversais.

Pelo equilíbrio do elemento infinitesimal de altura  $dz$  (Fig 2.1b) temos:

$$\frac{dM_w}{dz} = -V_w \quad (2.1)$$

O índice  $(w)$  origina-se do inglês “*wall*”, significando parede.

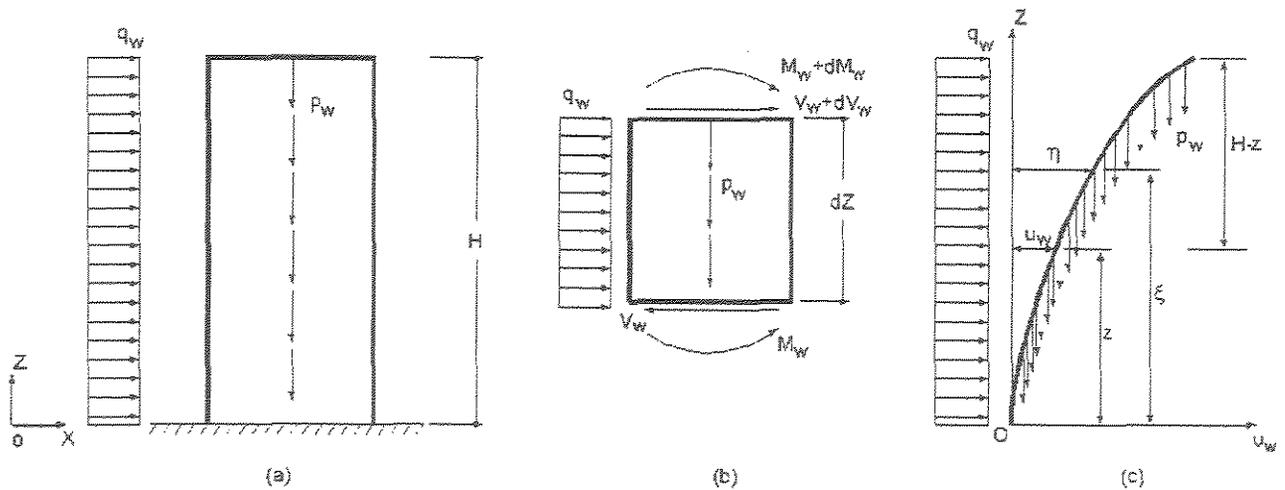


Figura 2.1 – Painei Parede

Se desprezarmos a deformação por força cortante na parede, a equação da linha elástica da parede pode ser expressa da seguinte forma:

$$u_w'''' = \frac{M_{w,int}}{E_w J_w} \quad (2.2)$$

onde:

$u_w$ : deslocamento da parede  $w$  na direção  $x$

$M_{w,int}$ : momento fletor na parede  $w$

$EJ_w$ : produto de rigidez da parede  $w$

Da combinação das equações (2.1) e (2.2) e derivando-se uma vez em relação a  $z$  obtemos a equação da força cortante interna no painei:

$$V_{w,int} = -j_w u_w''' \quad (2.3)$$

onde:

$V_{w,int}$ : força cortante na parede  $w$

$j_w$ : produto de rigidez  $E_w J_w$

O momento fletor externo em uma seção genérica distanciada  $z$  da base do painei é calculado levando-se em conta a ação simultânea da horizontal  $q_w$  e da carga vertical  $p_w$ . O momento fletor é calculado na posição deformada da parede, conforme Fig. 2.1c, levando em conta um efeito de segunda ordem. O momento fletor na referida seção vale:

$$M_{w,ext} = \int_z^H p_w [\eta(\xi) - u_w] d\xi + q_w \frac{(H-z)^2}{2} \quad (2.4)$$

A primeira derivada da equação (2.4) em relação a  $z$  fornece:

$$\frac{dM_{w,ext}}{dz} = -p_w \eta(z) - p_w (H-z) u'_w + p_w u_w - q_w (H-z) \quad (2.5)$$

A equação (2.5) expressa a força cortante externa do painel parede. De acordo com a equação (2.1) e conforme a Fig. 2.1.c, numa cota  $z$  temos que  $\eta(z) = u_w$ . Utilizando-se deste valor na própria equação (2.5), obtemos:

$$V_{w,ext} = p_w (H-z) u'_w + q_w (H-z) \quad (2.6)$$

O equilíbrio da estrutura é mantido quando igualamos os esforços internos aos esforços externos. Desta maneira a igualdade entre as equações (2.3) e (2.6) conduz à:

$$-j_w u_w''' = p_w (H-z) u'_w + q_w (H-z) \quad (2.7)$$

ou

$$j_w u_w''' + p_w (H-z) u'_w = -q_w (H-z) \quad (2.8)$$

Para obtermos a solução da equação (2.8) existe a necessidade de serem impostas 3 condições de contorno:

a) Supondo engastamento da base da parede.

$$u_w(0) = 0 \quad (2.9a)$$

$$u'_w(0) = 0 \quad (2.9b)$$

b) Supondo a ausência de momento fletor indicado no topo da estrutura.

$$u_w''(H) = 0 \tag{2.9c}$$

## 2.2 Painel Pórtico

Damos o nome de **Pórtico** para os painéis planos com a característica de serem extremamente rígidos à ação de momento fletor e deformável pela ação de forças cortantes.

Para esse tipo de estrutura iremos considerar um carregamento constituído de uma ação horizontal  $q_f$  uniformemente distribuída ao longo da altura  $H$  do painel pórtico e de uma carga  $\alpha_i p_i$  uniformemente distribuída e aplicada ao longo dos eixos verticais dos pilares “ $i$ ” do painel pórtico e repartida entre eles de acordo com os coeficientes de distribuição  $\alpha_i$ .

Serão considerados positivos os esforços e os deslocamentos coincidentes com aqueles definidos anteriormente na Fig. 2.1.b para o Painel Parede.

As expressões que se seguem, referente aos pórticos, possuirão o índice inferior “ $f$ ”, que se origina do inglês “frame”.

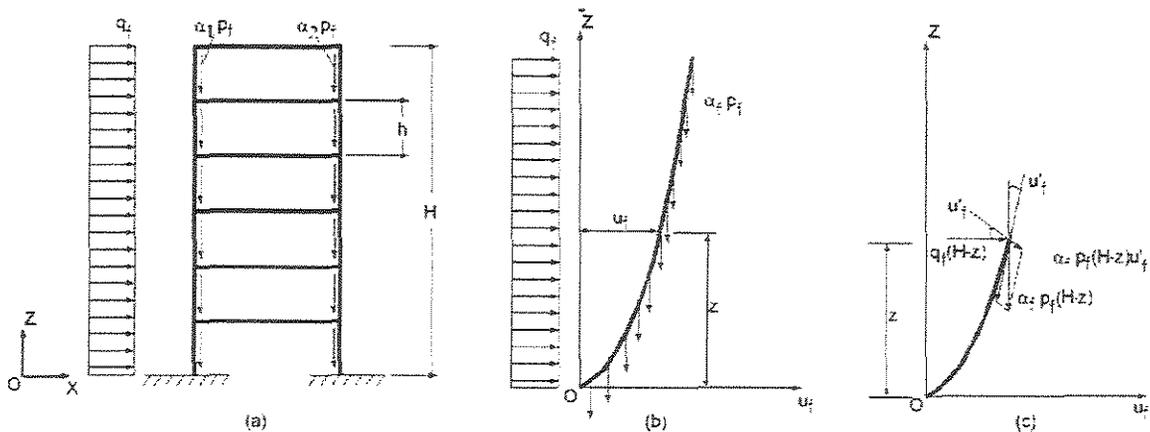


Figura 2.2 – Painel Pórtico

A equação da linha elástica da Fig 2.2.b expressa-se conforme Stamato [34] por:

$$V_{f,int} = S_f u_f' \tag{2.10}$$

onde:

$V_{f,int}$ : força cortante interna no painel pórtico

$s_f$ : coeficiente de rigidez do painel pórtico à força cortante

$u_f$ : deslocamento horizontal do painel pórtico na direção do seu plano

Para os painéis pórticos aqui analisados teremos vigas e pilares de seções constantes, considerando assim, rigidez constante ao longo da altura. Desprezaremos as variações locais que ocorrem na base devidas ao engastamento e no topo pela ausência dos tramos superiores dos pilares, que conduzem a perturbações da solução e erros nos resultados obtidos nas proximidades desses pontos. PROENÇA [23], em sua dissertação de mestrado, levou em conta a influência da posição do ponto de inflexão dos pilares na região da base, indicando que esses pontos devem ser considerados à 0,4h da base, no térreo e 0,4h entre a primeira e segundas lajes. A solução indicada por PROENÇA [23] foi deixada para futuras implementações.

No cálculo de  $s_f$  utiliza-se então a expressão (2.11), cuja dedução encontra-se na seção B.1 do Apêndice B.

$$s_f = \frac{12E}{h} \sum_{na} \left[ K_{pn} \frac{\sum K_v}{\sum_{bn} K_b} \right] \quad (2.11)$$

onde:

E: módulo de elasticidade longitudinal

h: pé direito do andar

K: relação  $J/\ell$  da viga ou pilar considerado, onde  $\ell$  é o comprimento do elemento.

$K_{pn}$ : relação  $J/\ell$  do pilar acima do nó considerado

$K_v$ : relação  $J/\ell$  de uma viga que concorre no nó considerado

$K_b$ : relação  $J/\ell$  de uma barra (viga ou pilar) que concorre no nó considerado

na: número de nós do andar

vn: número de vigas que concorrem no nó

bn: número de barras (vigas+pilares) que concorrem no nó

A força cortante externa em uma seção distante z da base do painel pórtico (devida às cargas  $q_f$  e  $p_f$ ), conforme indicado na Fig 2.2.c, é dada por:

$$V_{f,ext} = \alpha_f p_f (H - z) u'_f + q_f (H - z) \quad (2.12)$$

onde:

$\alpha_f = \sum \alpha_i$ : quinhão de carga gravitacional absorvida pelo painel pórtico

$p_f$ : ação externa vertical uniformemente distribuída que atua no edifício

$q_f$ : ação externa horizontal uniformemente distribuída

$z$ : altura da seção onde se está efetuando o cálculo do esforço

$H$ : altura total do edifício

Na condição de equilíbrio do painel pórtico à força cortante é exigido que os esforços internos igualem-se aos esforços externos. Em vista disso e das equações (2.10) e (2.12) podemos escrever a equação diferencial (2.13), que rege o equilíbrio do painel pórtico, onde o significado de cada grandeza envolvida já foi explicado anteriormente:

$$[s_f - \alpha_f p_f (H - z)] u'_f = q_f (H - z) \quad (2.13)$$

### 2.3 Painel Geral

Podemos considerar que o **Painel Geral** é uma associação de Parede e Pórtico, sendo assim, um conjunto que apresente uma deformabilidade tanto por momento fletor como por força cortante.

Este conjunto apresenta um comportamento que contribui favoravelmente para a rigidez lateral, reduzindo assim, a disparidade entre os esforços e deslocamentos da base ao topo.

Os painéis podem se associar de três maneiras diferentes, que são:

- Associação de Parede e Pórtico por barras biarticuladas.
- Associação de Parede e Pórtico por lintéis.
- Associação de Paredes por lintéis.

Para cada tipo de associação devemos considerar um carregamento uniformemente distribuído na vertical e outro horizontal, na lateral da estrutura.

Vejamos agora com mais detalhes a formulação diferencial de cada associação e conseqüentemente as expressões destas associações:

### 2.3.1 Associação de parede e pórtico por barras bi-articuladas.

Conforme indicado na Fig 2.3, o painel geral é formado pela associação de Parede e Pórtico unidos por barras bi-articuladas. Pela técnica do meio elástico contínuo supomos que essas barras bi-articuladas estejam uniformemente distribuídas ao longo da altura  $H$  do painel.

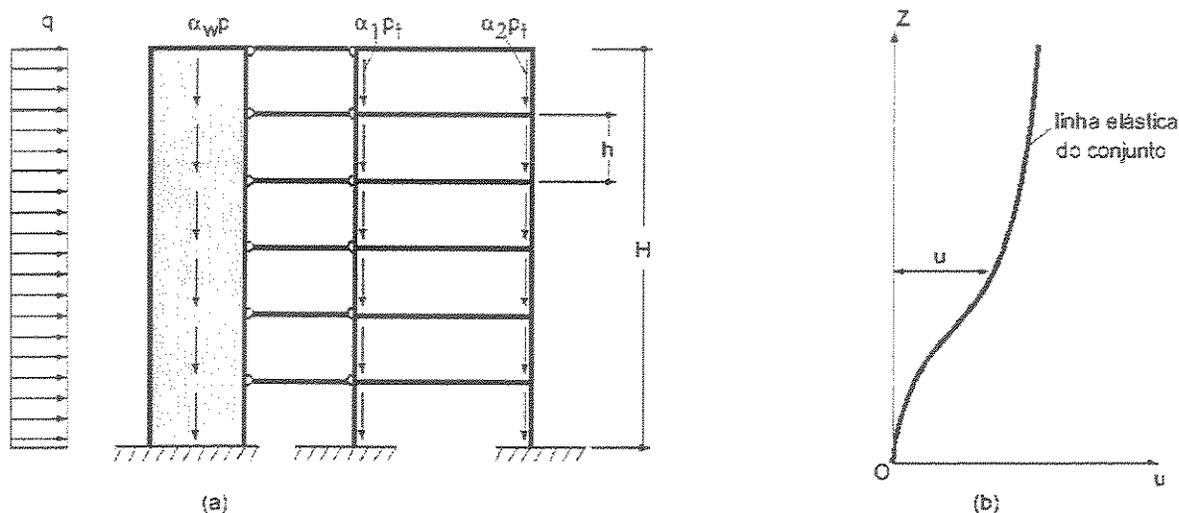


Figura 2.3 – Associação de Painéis por barras bi-articuladas

O carregamento externo é constituído de uma carga lateral horizontal  $q$ , uniformemente distribuída ao longo da altura  $H$  do painel e de uma carga vertical  $\alpha p$ , uniformemente distribuída ao longo dos eixos verticais pelos centros de gravidade dos pilares do pórtico e da parede.

A rigidez infinita das barras de ligação (barras bi-articuladas) garante a igualdade dos deslocamentos entre a parede e o pórtico, ou seja,  $u_f = u_w$ . Assim, podemos considerar uma única elástica para descrever o comportamento do conjunto.

A força cortante interna na estrutura é obtida pela soma das forças cortantes internas  $V_{w,int}$  na parede e  $V_{f,int}$  no pórtico, ou seja:

$$V_{int} = V_{w,int} + V_{f,int} \quad (2.14)$$

Usando (2.3) e (2.10) em (2.14) temos:

$$V_{int} = -j_w u''' + s_f u' \quad (2.15)$$

onde:

$V_{int}$ : força cortante interna na associação parede/pórtico ligados por barras bi-articuladas

$u$ : deslocamento horizontal numa cota  $z$

$j_w$ : produto de rigidez de flexão da parede

$s_f$ : coeficiente de rigidez à força cortante do pórtico

Em uma cota  $z$ , ao longo da altura do painel, a força cortante externa total devida ao carregamento, considerando-se a estrutura em sua posição deformada, será obtida pela soma das forças cortantes na parede e no pórtico, provenientes dos quinhões de cargas externas absorvidas por estes elementos, ou seja:

$$V_{ext} = V_{w,ext} + V_{f,ext} \quad (2.16)$$

onde:

$V_{ext}$ : força cortante externa na associação parede/pórtico c/ barras bi-articuladas

$V_{w,ext}$ : força cortante externa na parede

$V_{f,ext}$ : força cortante externa no pórtico

A força cortante externa na parede, calculada numa seção de cota  $z$  vale:

$$V_{w,ext} = \alpha_w p (H - z) u'_w + V_{w,q} \quad (2.17a)$$

onde:

$\alpha_w$ : quinhão da carga vertical absorvido pela parede

$p$ : valor da carga vertical uniformemente distribuída na estrutura

$V_{w,q}$ : força cortante externa produzida na parede pela carga lateral  $q$

$V_{w,ext}$ : força cortante externa na parede

A força cortante externa no pórtico, calculada numa seção de cota  $z$ , vale:

$$V_{f,ext} = \alpha_f p (H - z) u'_f + V_{f,q} \quad (2.17b)$$

onde:

$\alpha_f$ : quinhão da carga vertical absorvido pelo pórtico

$p$ : valor da carga vertical uniformemente distribuída na estrutura

$V_{f,q}$ : força cortante externa produzida no pórtico pela carga lateral  $q$

$V_{f,ext}$ : força cortante externa no pórtico

Substituindo-se as equações (2.17a) e (2.17b) na equação (2.16) e utilizando a igualdade de deslocamentos numa mesma cota  $z$  de parede e pórtico, resulta:

$$V_{ext} = \alpha p(H - z)u' + q(H - z) \quad (2.18)$$

onde:

$V_{ext}$ : força cortante externa na associação parede/pórtico com barras bi-articuladas

$\alpha = \alpha_w + \alpha_f$ : quinhão de carga vertical absorvido pela associação em estudo

$p$  e  $q$ : cargas uniformemente distribuídas vertical e horizontal no edifício

Como a força cortante proveniente das cargas externas, calculada pela equação (2.18) é, em qualquer cota  $z$ , equilibrada pelas forças cortantes internas, calculadas conforme (2.15), é válida a seguinte equação:

$$j_w u''' - [s_f - \alpha p(H - z)]u' = -q(H - z) \quad (2.19)$$

onde:

$j_w$ : produto de rigidez à flexão da parede

$s_f$ : coeficiente de rigidez à força cortante do pórtico

$\alpha = \alpha_w + \alpha_f$ : quinhão de carga vertical absorvido pela associação em estudo

$u$ : deslocamento horizontal numa cota  $z$

$p$  e  $q$ : cargas uniformemente distribuídas vertical e horizontal no edifício

Obtemos os deslocamentos resolvendo a equação diferencial (2.19) e utilizando as seguintes condições de contorno:

a) Referentes ao engastamento da base.

$$u(0) = 0 \quad (2.20a)$$

$$u'(0) = 0 \quad (2.20b)$$

b) Ausência de momento fletor no topo.

$$u''(H) = 0 \tag{2.21}$$

Observamos que o painel obtido deforma-se tanto pela força cortante quanto pelo momento fletor; podemos, assim, escrever a equação do **painel geral**, que é dada por:

$$j_g u''' - [s_g - \alpha p(H - z)]u' = -q(H - z) \tag{2.22}$$

onde:

$j_g = j_w$ : é o produto de rigidez à flexão do painel geral (associação parede/ pórtico c/ barras bi-articuladas)

$s_g = s_f$ : é o coeficiente de rigidez à força cortante do painel geral.

### 2.3.2 Associação de parede e pórtico através de lintéis

Admitiremos que os lintéis são rígidos axialmente garantindo a igualdade dos deslocamentos horizontais da parede e do pórtico ( $u_w = u_f$ ), designados simplesmente  $u$ .

A reação do pórtico sobre a parede, através dos lintéis, consiste de um momento distribuído  $m_s$  aplicado ao longo do eixo vertical da parede e uma força distribuída vertical aplicada também sobre este eixo. O efeito desta força será desprezado devido à suposição de indeformabilidade axial da parede.

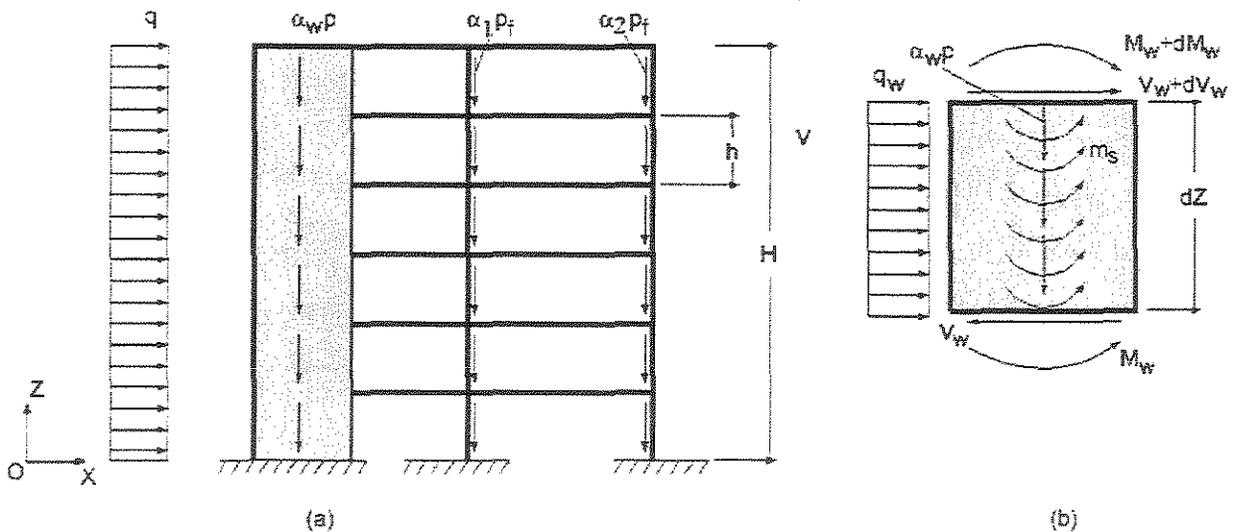


Figura 2.4 – Associação de Paredes e Pórticos por Lintéis

Na Fig. 2.4a vemos esta associação Pórtico e Parede e o carregamento, e na Fig. 2.4b é mostrado um elemento de parede de altura  $dz$ .

A força cortante interna na parede é dada por:

$$V_{w,int} = -j_w u''' + m_s \quad (2.23)$$

Definimos  $\phi_B$  e  $\phi_s$  como sendo os ângulos de giro das seções da parede provocados pelos esforços momento fletor e força cortante, respectivamente, Conforme é demonstrado no Apêndice B é possível descrever o momento  $m_s$  como sendo:

$$m_s = K_1 \phi_B + K_2 \phi_s \quad (2.24)$$

onde:

$K_1$ : coeficiente de rigidez ao giro devido à flexão, calculado conforme (B23)

$K_2$ : coeficiente de rigidez ao giro devido ao cisalhamento, calculado conforme (B30)

Se chamarmos de  $\phi$ , que é igual a  $u'$ , o ângulo total de giro, temos:

$$\phi = \phi_B + \phi_s \quad (2.25)$$

E se adotarmos a expressão aproximada,

$$\phi_s = \frac{3V_{w,int}}{AE} \quad (2.26)$$

obtemos:

$$m_s = K_1 u' + (K_2 - K_1) \frac{3V_{w,int}}{AE} \quad (2.27)$$

onde:

A: área da seção transversal da parede

E: módulo de elasticidade longitudinal

$V_{w,int}$ : força cortante interna na parede

$K_1$ : coeficiente de rigidez ao giro devido à flexão, calculado conforme (B23)

$K_2$ : coeficiente de rigidez ao giro devido ao cisalhamento, calculado conforme (B30)

Substituindo a equação (2.27) na equação (2.23), obtemos para força cortante interna na parede a expressão:

$$V_{w,int} = -\frac{j_w}{\gamma} u''' + \frac{K_1}{\gamma} u' \quad (2.28)$$

onde:

$$\gamma = 1 - \frac{3}{AE} (K_2 - K_1) \quad (2.29)$$

A força cortante no pórtico obedece à convenção positiva para os esforços da Figura 2.4b, e vale:

$$V_{f,int} = s_f u' \quad (2.30)$$

onde:

$s_f$ : coeficiente de rigidez do pórtico à força cortante, calculado conforme (2.11)

A soma da equação (2.28) e (2.30) conduz a equação da força cortante interna total, expressa por:

$$V_{int} = j_g u''' + s_g u' \quad (2.31)$$

onde:

$$j_g = \frac{j_w}{\gamma} \quad (2.32)$$

$$e \quad s_g = \frac{K_1}{\gamma} + s_f \quad (2.33)$$

A força cortante externa total, numa seção de cota  $z$  pode ser expressa conforme (2.18), já mostrada anteriormente:

$$V_{ext} = \alpha p(H-z) u' + q(H-z) \quad (2.34)$$

Igualando a força cortante externa com a força cortante interna para que tenhamos equilíbrio, chegamos na equação diferencial de terceira ordem na variável  $u$ , dada em (2.35), onde o significado de cada termo já foi explicado acima:

$$j_s u''' - [s_s - \alpha p(H-z)] u' = -q(H-z) \quad (2.35)$$

Esta expressão é equivalente à expressão encontrada quando utilizamos a associação de pórticos e paredes por barras bi-articuladas.

As condições de contorno para resolvermos a equação diferencial (2.35), referente à associação de parede e pórtico ligados por lintéis são as mesmas dadas em (2.20a), (2.20b) e (2.21).

### 2.3.3 Associação plana de paredes por lintéis

A associação destes elementos é utilizada para resistir à cargas verticais. Admitimos que o conjunto funciona como uma única parede de rigidez igual à soma das rigidezes de cada parede. A Fig. 2.5 mostra a associação plana de duas paredes com lintéis iguais e espaçadas entre si de uma distância  $l_L$ . Consideramos positivos os sentidos dos esforços e deslocamentos indicados nesta figura.

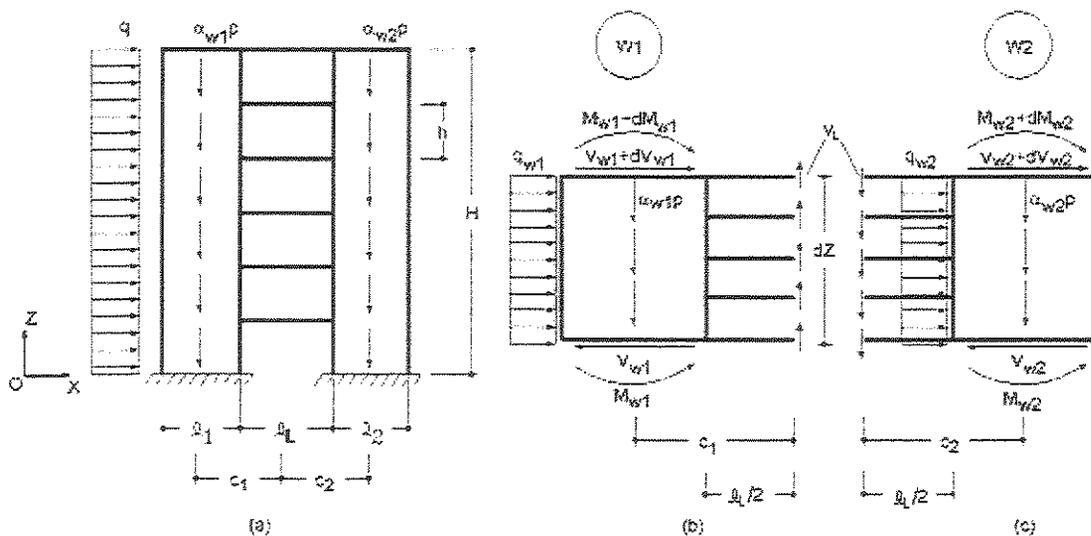


Figura 2.5 – Associação de Paredes por Lintéis

Admitimos neste estudo que os lintéis são perfeitamente engastados nas paredes e supomos que os pontos médios dos lintéis são pontos de momento nulo. Admitimos também que os lintéis são indeformáveis axialmente. Pela técnica do contínuo consideramos que os lintéis são espaçados uniformemente na altura H. Assim, se

seccionarmos os lintéis nos seus pontos médios, devemos considerar a troca de forças cortantes  $v_L$  distribuídas uniformemente espaçadas ao longo da altura  $H$ .

Denominamos respectivamente de  $EJ_{w1}$ ,  $EJ_{w2}$  e  $EJ_L$  os produtos de rigidez da parede 1, da parede 2 e dos lintéis. Da equação de equilíbrio de momentos fletores de um elemento genérico, de altura  $dz$ , conforme mostrado na Fig. 2.5b, podemos encontrar a força cortante interna na parede 1:

$$V_{w1,int} = -\frac{dM_{w1}}{dz} + V_L c_1 \quad (2.36)$$

onde:

$V_{w1}$ : força cortante interna na parede 1

$M_{w1}$ : momento fletor interno na parede 1

$v_L$ : força cortante uniformemente distribuída no meio do lintel

$c_1$ : distância do centro da parede 1 até o meio do lintel

Utilizando a equação (2.3), podemos escrever:

$$V_{w1,int} = -j_{w1} u''' + V_L c_1 \quad (2.37)$$

onde:

$j_{w1}$ : produto de rigidez  $EJ_{w1}$  da parede 1

Da mesma maneira, do equilíbrio de momentos fletores no elemento genérico de altura  $dz$  da parede 2, conforme indicado na Fig. 2.5c, juntamente com a equação (2.3), podemos escrever:

$$V_{w2,int} = -j_{w2} u''' + V_L c_2 \quad (2.38)$$

onde:

$j_{w2}$ : produto de rigidez  $EJ_{w2}$  da parede 2

$c_2$ : distância do centro da parede 2 até o meio do lintel

Obtemos a força cortante interna da associação plana de duas paredes somando-se as forças cortantes internas de cada elemento isolado. Desta forma, de acordo com a equação (2.37) e (2.38) temos:

$$V_{w,int} = -j_g u''' + V_L (c_1 + c_2) \quad (2.39)$$

onde

$j_g$  pode ser considerado o produto de rigidez equivalente da associação plana de duas paredes, dado por:

$$j_g = j_{w1} + j_{w2} \quad (2.40)$$

Para se determinar a força cortante  $v_L$  no lintel, imaginemos um lintel seccionado no ponto de momento nulo (centro do vão), de acordo com o indicado na Fig. 2.6:

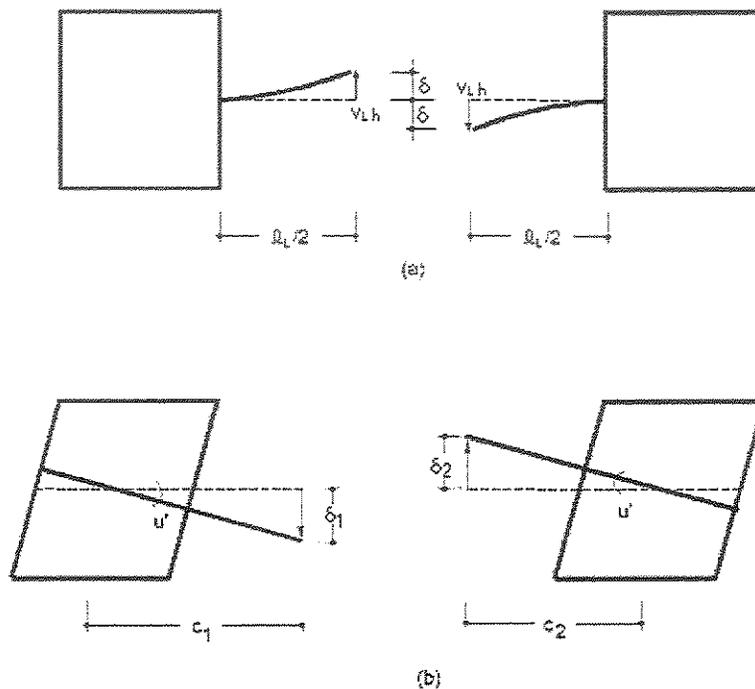


Figura 2.6 – Deslocamentos dos centros dos vãos dos Lintéis

Podemos dizer que o lintel seccionado deforma-se diferentemente, conforme pertença de uma ou da outra parede, devido:

- À deformação  $\delta$  de meio lintel, por flexão e força cortante (Fig. 2.6a);
- Às deformações  $\delta_1$  e  $\delta_2$  das paredes 1 e 2 por flexão (Fig. 2.6b) e
- À deformação da parede por força normal. Desprezamos essa última deformação, conforme hipótese anterior, de que as paredes sejam indeformáveis axialmente. Se o edifício for bastante alto essa influência não será pequena. Pretendemos levar em conta a deformação axial das paredes em futuras pesquisas.

A equação de compatibilidade para tais deslocamentos será:

$$-\delta_1 + \delta = \delta_2 - \delta \quad (2.41)$$

onde:

$$\delta = \frac{V_L h \left( \frac{\ell_L}{2} \right)^3}{3 j_L} + \frac{V_L h \left( \frac{\ell_L}{2} \right)}{G A_L} \quad (2.42)$$

onde:

$j_L$ : produto de rigidez à flexão do lintel

$G$ : módulo de elasticidade transversal do material do lintel

$A_L$ : área da seção transversal do lintel

$\ell_L$ : comprimento do lintel

$v_L$ : força cortante no lintel, distribuída ao longo da altura  $H$

$$\delta_1 = c_1 u' \quad (2.43.a)$$

$$\delta_2 = c_2 u' \quad (2.43.b)$$

Substituindo (2.42), (2.43a) e (2.43b) na equação (2.41) temos:

$$-c_1 u' + \left( \frac{v_L h \ell_L^3}{24 j_L} + \frac{v_L h \ell_L}{2 G A_L} \right) = c_2 u' - \left( \frac{v_L h \ell_L^3}{24 j_L} + \frac{v_L h \ell_L}{G A_L} \right) \quad (2.44)$$

Explicitando  $v_L$  em (2.44) chegamos à expressão (2.45), que dá o valor da força cortante nos lintéis, suposta uniformemente distribuída pela altura  $H$ :

$$v_L = \frac{s_g}{(c_1 + c_2)} u' \quad (2.45)$$

onde:

$$s_g = \frac{(c_1 + c_2)^2}{h \left( \frac{\ell_L^3}{12 j_L} + \frac{\ell_L}{G A_L} \right)} \quad (2.46)$$

Se substituirmos a equação (2.45) na equação (2.39) obtemos a expressão para a força cortante interna no painel formado pela associação de duas paredes:

$$V_{w,int} = -j_g u''' + s_g u' \quad (2.47)$$

onde:

$j_g = j_{w1} + j_{w2}$ : produto de rigidez à flexão equivalente da associação de 2 paredes ligadas por lintéis

$s_g$ : coeficiente de rigidez à cortante da associação de 2 paredes ligadas por lintéis

A força cortante externa total, devido ao carregamento, será obtida pela soma das forças cortante em cada parede, provenientes dos quinhões de carga externa absorvida por estes elementos, de acordo com a equação (2.6) valem:

$$V_{w1,ext} = \alpha_{w1} p(H-z) u' + V_{w1,q} \quad (2.48.a)$$

$$V_{w2,ext} = \alpha_{w2} p(H-z) u' + V_{w2,q} \quad (2.48.b)$$

A soma dos esforços cortantes  $V_{w1,ext}$ ,  $V_{w2,ext}$  nas duas paredes, conforme equações (2.48a) e (2.48b), conduz a:

$$V_{ext} = \alpha_w p(H-z) u' + q(H-z) \quad (2.49)$$

onde:

$\alpha_w = \alpha_{w1} + \alpha_{w2}$ : quinhão de carga absorvido pela associação

q: carregamento lateral

p: carregamento vertical

Em qualquer cota z, a força cortante externa é equilibrada pela força cortante interna. Portanto, igualando-se (2.47) e (2.49), obtemos a equação diferencial referente à ao painel geral formado pela associação de duas paredes ligadas por lintéis:

$$j_g u''' - [s_g - \alpha_w p(H-z)] u' = -q(H-z) \quad (2.50)$$

Nota-se novamente a equivalência entre a equação (2.50) e a equação (2.22) obtida para a associação de um pórtico com uma parede, ligada por barras bi-articuladas. Isto indica que o painel analisado se comporta como um painel geral que apesar das

paredes deformarem-se apenas à ação do momento fletor, a estrutura resultante da associação destes elementos verticais ligados por lintéis torna-se um conjunto semelhante a um pórtico e, sendo assim, sujeito a deformação também pela força cortante.

As condições de contorno utilizadas para esse tipo de associação são as mesmas expressas nas associações anteriores.

É possível generalizar a equação (2.50) para o número de  $n$  paredes, para  $m$  lintéis. A Fig. 2.7 ilustra uma associação de  $n$  paredes ligadas por lintéis.

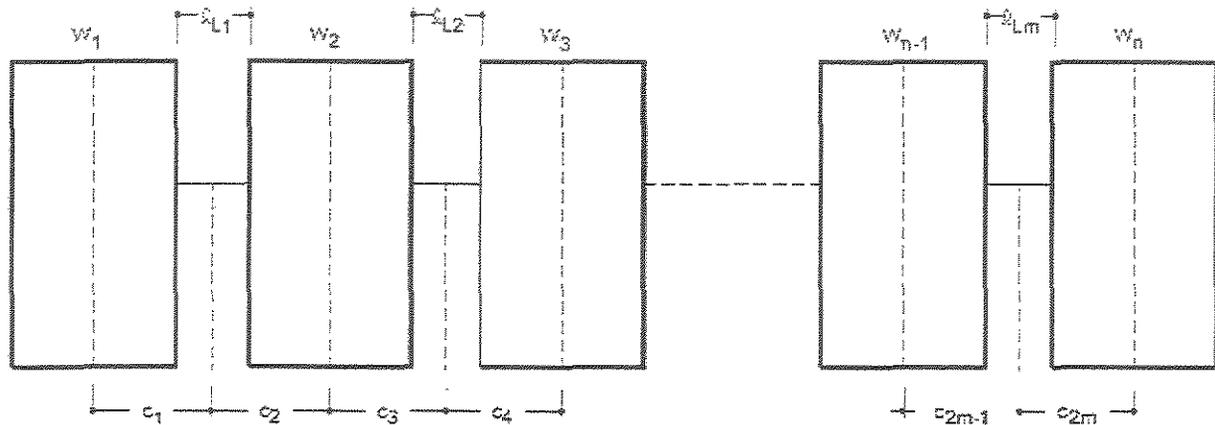


Figura 2.7 – N Paredes unidas por Lintéis

Nesse caso os parâmetros de rigidez para o painel geral são fornecidos pelo seguinte conjunto de equações:

$$j_g = \sum_{i=1}^n j_{wi} \quad (2.51.a)$$

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_{wi} \quad (2.51.b)$$

e

$$s_g = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^m \frac{(c_{2i-1} + c_{2i})^2}{\left( \frac{\ell_{Li}^3}{12j_{Li}} + \frac{\ell_{Li}}{GA_{Li}} \right)} \quad (2.51.c)$$

## Capítulo 3

### TÉCNICA DO MEIO CONTÍNUO

#### 3. NÚCLEOS

##### 3.1 Núcleo de seção aberta sem contraventamento

Denominamos núcleo de seção aberta à combinação de paredes planas ligadas entre si, formando uma seção transversal contínua e aberta de uma espessura muito menor que as outras dimensões.

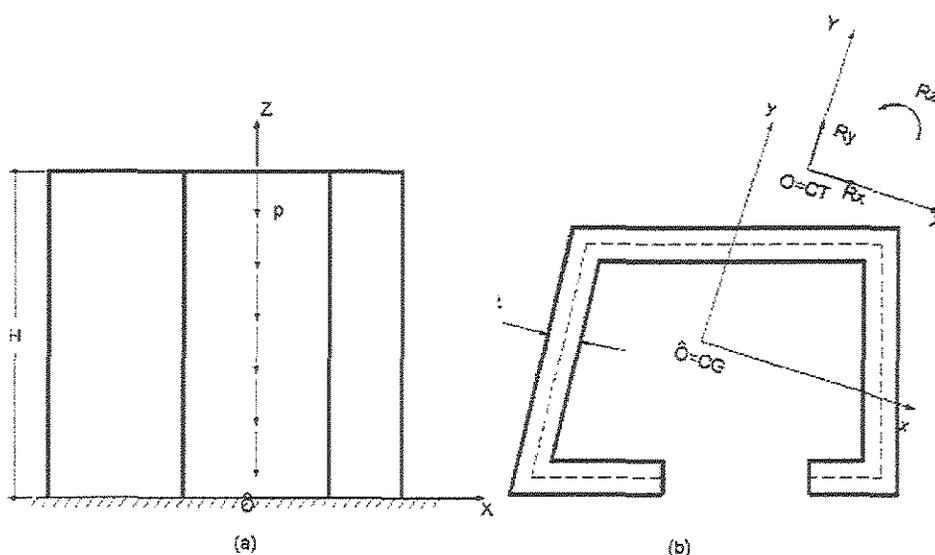


Figura 3.1 Núcleo de seção aberta sem contraventamento

Temos na Fig. 3.1 uma estrutura de seção aberta de altura  $H$ , referenciada pelos seguintes sistemas de eixo:

- a) **Sistema Local** – Com a origem em  $\hat{O}$  na base da estrutura, coincidente com o centro de gravidade CG da seção transversal. Os eixos  $\hat{O}x$  e  $\hat{O}y$  são eixos principais de inércia, e o eixo  $\hat{O}z$  é vertical, apontando para cima.
- b) **Sistema Global** – Com a origem O na base da estrutura, coincidente com o centro de torção CT da seção transversal. Os eixos OX e OY estão nas direções dos eixos principais de inércia da seção e o eixo OZ é vertical, com sentido positivo da base para o topo.

Podemos considerar o carregamento constituído de:

- a) ações gravitacionais  $p$ , uniformemente distribuídas ao longo do eixo  $\hat{O}z$ , conforme indicado na Fig. 3.1a;
- b) Ações horizontais uniformemente distribuídas, com componentes de valores  $q_x$  e  $q_y$  nas direções dos eixos principais de inércia, aplicadas segundo os eixos globais OX e OY.
- c) Momento de torção  $m$ , uniformemente distribuído ao longo do eixo OZ e positivo se de sentido horário para um observador olhando na direção positiva do eixo.

Segundo hipóteses da teoria das barras de seção delgada, a seção transversal do núcleo não se deforma em seu plano. Assim podemos garantir o comportamento das lajes como diafragmas. Devido a estas hipóteses, podemos dizer que o movimento de qualquer ponto da seção transversal, numa dada ordenada  $z$ , fica caracterizado pelas seguintes funções de  $z$ :

- a)  $u$  – deslocamento do centro de torção na direção global do eixo OX;
- b)  $v$  – deslocamento do centro de torção na direção global OY;
- c)  $\theta$  – giro da seção, tendo como polo de rotação o centro de torção CT.

Os núcleos, devido à geometria da seção transversal, apresentam rigidez à flexão nas duas direções principais, além da rigidez a torção. Consideramos que estes elementos comportam-se à flexão simples como uma barra, ou melhor, como uma parede única.

As equações que expressam as forças cortantes internas, de acordo com a equação (2.3), são as seguintes:

$$V_{x,int} = -EJ_y u''' \quad (3.1.a)$$

onde:

$V_{x,int}$ : força cortante na direção do eixo principal de inércia  $\hat{O}_x$

$EJ_y$ : produto de rigidez à flexão em torno do eixo principal de inércia  $\hat{O}_y$

$$V_{y,int} = -EJ_x v''' \quad (3.1.b)$$

onde:

$V_{y,int}$ : força cortante na direção do eixo principal de inércia  $\hat{O}_y$

$EJ_x$ : produto de rigidez à flexão em torno do eixo principal de inércia  $\hat{O}_x$

De acordo com a teoria de Flexo – Torção (veja Apêndice A), uma barra de seção delgada aberta, submetida à torção, tem seu comportamento expresso através da seguinte equação:

$$M_t = M_\ell + M_{ft} \quad (3.2)$$

onde:

$M_t$ : Momento torçor total na seção

$M_\ell$ : Momento de torção livre (Saint-Venant)

$M_{ft}$ : Momento de flexo-torção

A parcela do momento torçor total, referente à torção livre de Saint-Venant na seção transversal de cota  $z$  do núcleo, vale:

$$M_\ell = GJ_t \theta' \quad (3.3)$$

onde:

$M_\ell$ : Momento de torção livre (Saint-Venant)

$G$ : módulo de elasticidade transversal

$J_t$ : constante de torção

$\theta$ : rotação da seção, função da ordenada  $z$

A parcela do momento total denominada momento de flexo-torção, pode ser calculado conforme (3.4):

$$M_{ft} = -EJ_w \theta''' \quad (3.4)$$

onde:

$M_{ft}$ : Momento de flexo-torção

$E$ : módulo de elasticidade longitudinal

$J_w$ : momento de inércia de flexo - torção

$\theta$ : rotação de torção da seção, função da ordenada  $z$

Substituindo (3.3) e (3.4) em (3.2), resulta:

$$M_t = -EJ_w \theta''' + GJ_t \theta' \quad (3.5)$$

O momento torçor é convencionado positivo quando no sentido horário para um observador olhando do topo para a base, conforme indicada na Fig. 3.2:

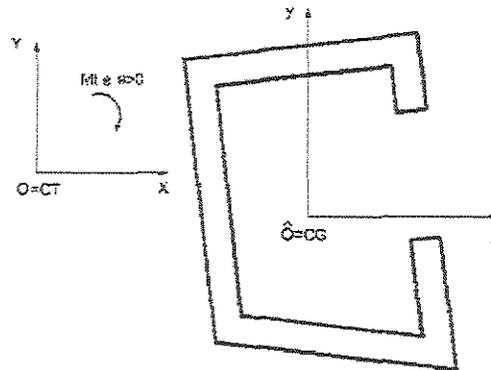


Figura 3.2 – Convenção de  $M_t$  e  $\theta$  positivos

As equações (3.1a), (3.1b) e (3.5) correspondem, respectivamente, às forças cortantes internas nas direções  $OX$  e  $OY$  e ao momento torçor interno total  $M_t$ , numa seção de ordenada  $z$ . Com a finalidade de homogeneizar a notação adotada para os esforços o momento torçor total passa a ser denotado  $V_{\theta, \text{int}}$ . Esses 3 esforços internos, para uma seção de ordenada  $z$ , podem ser agrupados matricialmente, como segue:

$$\{V_{\text{int}}\} = -[J]\{U'''\} + [K_T]\{U'\} \quad (3.6)$$

onde:

$$\{V_{int}\} = \begin{Bmatrix} V_{x,int} \\ V_{y,int} \\ V_{\theta,int} \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

$$[J] = \begin{bmatrix} EJ_y & 0 & 0 \\ 0 & EJ_x & 0 \\ 0 & 0 & EJ_\omega \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$[K_T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GJ_t \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\{U'''\} = \begin{Bmatrix} u''' \\ v''' \\ \theta''' \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\{U''\} = \begin{Bmatrix} u'' \\ v'' \\ \theta'' \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

Em uma seção de cota  $z$  da estrutura, as forças cortantes externas nas direções OX e OY e o momento de torção que se deve às cargas laterais  $q$ , levadas do CG para o CT, são dados por:

$$V_{x,q} = q_x(H - z) \quad (3.12.a)$$

$$V_{y,q} = q_y(H - z) \quad (3.12.b)$$

$$V_{\theta,q} = -m(H - z) \quad (3.12.c)$$

Devido à ação do carregamento, um elemento de área  $dA$  da seção transversal da parede se deslocará, passando de uma posição  $A$  para uma posição  $A'$ , conforme ilustrado na Fig. 3.3. As translações desse elemento  $dA$ , em relação aos eixos globais, valem respectivamente  $u_A$  e  $v_A$ . Podemos relacionar estes deslocamentos  $u_A$  e  $v_A$  com os deslocamentos  $u$  e  $v$  do centro de torção nas direções OX e OY e com o giro  $\theta$  da seção em torno do seu centro de torção. Esta relação pode ser expressa pelas seguintes equações:

$$u_A = u - (y_D - y)\theta \quad (3.13.a)$$

$$v_A = v + (x_D - x)\theta \quad (3.13.b)$$

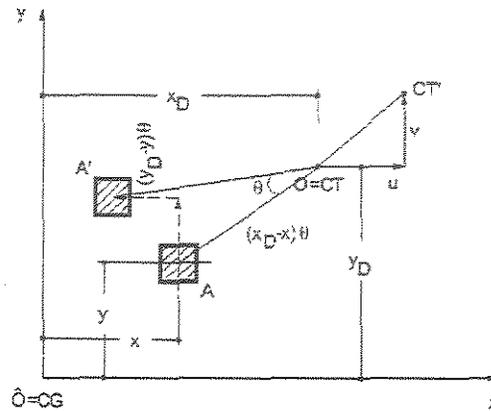


Figura 3.3 - Deslocamentos do centro de torção e do elemento de área dA

Em uma cota genérica z do núcleo, a força normal que atua na seção transversal, proveniente de uma carga vertical e uniformemente distribuída p, é dada por:

$$F_N = p(H - z) \quad (3.14)$$

A seção transversal ficará submetida à tensões normais  $\sigma$  e um elemento de área dA desta seção, terá uma força normal elementar  $dF_N$ , expressa por:

$$dF_N = \sigma dA \quad (3.15)$$

Pela equação (2.6), do capítulo anterior, observamos que a força cortante externa horizontal numa parede, proveniente de uma carga vertical, é obtida pelo produto da força axial que solicita a seção, pela derivada primeira do deslocamento na direção considerada. Concluímos então, que um elemento de área dA do núcleo, que se desloca  $u_A$  na direção de OX e  $v_A$  na direção de OY, as forças cortantes elementares devido à ação da carga vertical podem ser escritas como:

$$dV_{x,p} = dF_N u'_A \quad (3.16.a)$$

$$dV_{y,p} = dF_N v'_A \quad (3.16.b)$$

Substituindo-se (3.15) em (3.16), temos:

$$dV_{x,p} = \sigma \cdot dAu'_A \quad (3.17.a)$$

$$dV_{y,p} = \sigma \cdot dAv'_A \quad (3.17.b)$$

Vamos denotar  $dV_{z,p}$  o diferencial de momento de torção do carregamento externo, num elemento de área  $dA$ , em relação ao centro de torção CT. Obedecendo aos sentidos positivos dos deslocamentos e dos carregamentos indicados pela Fig. 3.4, esse diferencial de momento de torção externo vale:

$$dV_{z,p} = -\sigma \cdot dAu'_A (y_D - y) + \sigma \cdot dAv'_A (x_D - x) \quad (3.18)$$

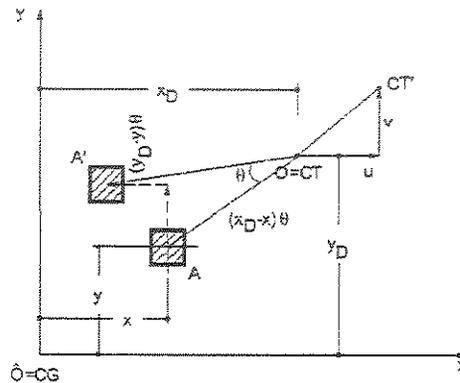


Figura 3.4 – Deslocamentos do Centro de Torção e do elemento de área  $dA$ .

Se substituirmos a derivada primeira em relação a  $z$ , dos deslocamentos do elemento de área  $A$ , calculados com (3.13a) e (3.13b) nas equações (3.17) e (3.18) e integrarmos as equações resultantes na área  $A$  da seção transversal, resulta:

$$V_{x,p} = \int_A \sigma [u' - (y_D - y)\theta'] dA \quad (3.19)$$

$$V_{y,p} = \int_A \sigma [v' - (x_D - x)\theta'] dA \quad (3.20)$$

$$V_{z,p} = \int_A \sigma \{ -[u' - (y_D - y)\theta'](y_D - y) + [v' - (x_D - x)\theta'](x_D - x) \} dA \quad (3.21)$$

Como os eixos  $\hat{O}x$  e  $\hat{O}y$  são eixos principais de inércia, valem as equações:

$$\int_A x^2 dA = J_y \qquad \int_A y^2 dA = J_x \qquad (3.22)$$

$$\int_A y dA = 0 \qquad \int_A x dA = 0$$

A tensão normal  $\sigma$  é constante na área A da seção transversal e de acordo com as equações (3.14) e (3.15), valem:

$$\sigma = \frac{p(H-z)}{A} \qquad (3.23)$$

Efetuada-se as operações de integração indicadas nas equações (3.19) a (3.21) e tendo em vista as equações (3.22) e (3.23), obtemos:

$$V_{x,p} = p(H-z)(u'-y_D\theta') \qquad (3.24.a)$$

$$V_{y,p} = p(H-z)(v'-x_D\theta') \qquad (3.24.b)$$

$$V_{z,p} = p(H-z)(-u'y_D + v'x_D + i_D^2\theta') \qquad (3.24c)$$

onde:

$x_D$  e  $y_D$ : coordenadas do CT em relação ao CG

$i_D$ : denominado raio de giração polar é definido como:

$$i_D^2 = x_D^2 + y_D^2 + \frac{J_x + J_y}{A} \qquad (3.25)$$

As equações (3.12) e (3.24) correspondem às forças cortantes externas e momento de torção, provenientes da ação da carga lateral e da carga vertical respectivamente.

A soma desses esforços, nas direções X, Y e Z, conduz respectivamente às equações das forças cortantes externas e momento torçor externo totais:

$$V_{x,p} = p(H-z)(u'-y_D\theta') + q_x(H-z) \qquad (3.26.a)$$

$$V_{y,p} = p(H-z)(v'-x_D\theta') + q_y(H-z) \qquad (3.26.b)$$

$$V_{z,p} = p(H - z)(-u' y_D + v' x_D + i_D^2 \theta') - m(h - z) \quad (3.26.c)$$

Expressando estas equações em forma matricial, temos:

$$\{V_{ext}\} = p(H - z)[L_T]\{U'\} + (H - z)\{V_q\} \quad (3.27)$$

onde:

$$\{V_{ext}\} = \begin{Bmatrix} V_{x,ext} \\ V_{y,ext} \\ V_{z,ext} \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

$$[L_T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_D \\ 0 & 1 & x_D \\ -y_D & x_D & i_D^2 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$\{V_q\} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ -m \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\{U'\} = \begin{Bmatrix} u' \\ y' \\ \theta' \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

Para que o equilíbrio da estrutura seja mantido os esforços internos devem ser igualados aos esforços externos, ou seja:

$$\{V_{int}\} = \{V_{ext}\} \quad (3.32)$$

Se substituirmos (3.6) e (3.27) na equação (3.32), obtemos:

$$-[J]\{U'''\} + [K_T]\{U'\} = p(H - z)[L_T]\{U'\} + (H - z)\{V_q\} \quad (3.33)$$

O sistema de equações diferenciais, representado em (3.33), expressa o comportamento de uma parede de seção aberta, sem contraventamento, submetida a um carregamento composto de cargas laterais, momento de torção e carga vertical. Esta equação após um rearranjo pode ser escrita na seguinte forma:

$$[J]\{U'''\} + (p(H - z)[L_T] - [K_T])\{U'\} = -(H - z)\{V_q\} \quad (3.34)$$

A solução do sistema de equações diferenciais (3.34), fornece os deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $\theta$  do centro de torção CT do núcleo, em relação ao sistema global OXYZ. As condições de contorno necessárias para a solução destas equações diferenciais, são:

a) Supondo engastamento na base do núcleo:

$$[U(0)] = [0] \quad (3.35.a)$$

$$[U'(0)] = [0] \quad (3.35.b)$$

b) Supondo que no topo do edifício não se tem momento de flexão e nem bimomentos aplicados:

$$[U''(H)] = [0] \quad (3.36)$$

### 3.2 Núcleo de seção aberta contraventado por lintéis

Na Fig. 3.5 mostramos um núcleo de seção aberta contraventado por lintéis, introduzidos aos níveis dos andares. Os sistemas de eixos de referências, indicados na figura são os mesmos considerados na seção 3.1, ou seja, eixos locais  $\hat{O}xyz$  e eixos globais OXYZ.

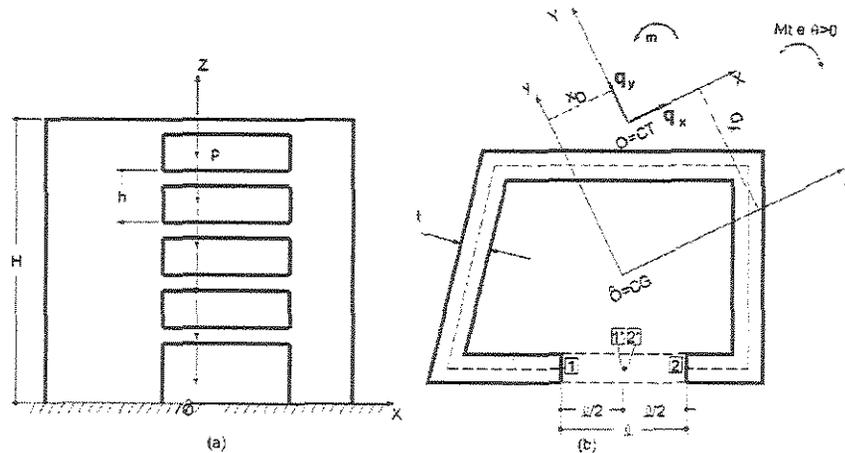


Figura 3.5 – Núcleo de seção aberta contraventado por Lintéis

O carregamento atuante na estrutura, também será igual ao utilizado na seção 3.1. Admitiremos que os lintéis sejam engastados nas faces externas das paredes onde estão ligados e que em seus pontos médios o momento fletor seja nulo.

Admitiremos também que o edifício tenha seção constante. Assim, os centros de gravidade de todas as seções transversais estão numa linha vertical, o mesmo acontecendo com os centros de torção das seções transversais.

Conforme a técnica do meio elástico contínuo, os lintéis e os esforços que eles transmitem são supostos continuamente distribuídos ao longo da altura  $H$ .

Seccionando um lintel no seu ponto médio, onde o momento fletor é nulo, é necessário a introdução de um par de forças cortantes  $v_L$  na direção  $z$ , para garantir o equilíbrio da seção. Pela hipótese de indeformabilidade axial das paredes estas forças  $v_L$ , produzem o empenamento dos pontos onde o lintel encontra a parede.

Por hipótese os esforços cortantes dos lintéis não contribuem para o momento fletor no núcleo, as equações que exprimem as forças cortantes internas deduzidas na seção anterior permanecem válidas:

$$V_{x,int} = -EJ_y u''' \quad (3.37.a)$$

$$V_{y,int} = -EJ_x v''' \quad (3.37.b)$$

A equação de momento torçor para o núcleo contraventado por lintéis é diferente, pelo aparecimento do momento de flexo-torção dos lintéis, denominado  $M_{ft,L}$ . Desta maneira basta acrescentar na equação (3.5) o efeito provocado pelo lintel. Obtemos assim:

$$M_t = -EJ_\omega \theta''' + GJ_t \theta' + M_{ft,L} \quad (3.38)$$

Para a determinação do momento de flexo – torção consideremos um elemento longitudinal  $dz$  do núcleo seccionado nos pontos médios dos vão dos lintéis, conforme se indica na Fig. 3.6.

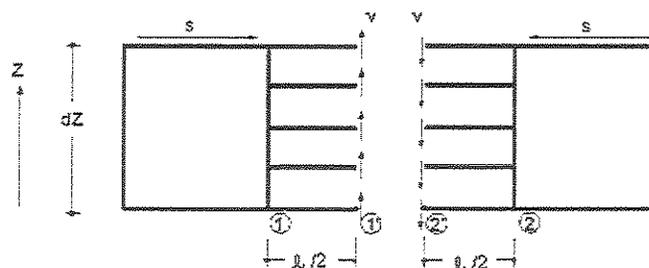


Figura 3.6 – Forças Cortantes nos Lintéis nos pontos de seccionamento.

Seja  $V_L$  a força cortante concentrada que aparecem nos pontos 1' e 2' de um lintel. Distribuindo essa força cortante pela altura  $h$  de um andar, encontramos a força cortante distribuída  $\bar{v}$  ao longo da altura de um andar. Os sentidos positivos indicados estão mostrados na Fig. 3.6. Essa força cortante distribuída vale:

$$\bar{v} = \frac{V_L}{h} \quad (3.39)$$

Estas forças distribuídas  $\bar{v}$  atuam na direção do eixo OZ das paredes e de acordo com a teoria de flexo-torção, produzem um acréscimo de bimomento  $dB$  no elemento longitudinal  $dz$ . Esse acréscimo de bimomento é dado por:

$$dB = \bar{v}dz\omega_{1'} - \bar{v}dz\omega_{2'} \quad (3.40)$$

Pela teoria de flexo-torção sabemos que o momento de flexo-torção é igual à derivada do bimomento em relação a  $z$ , com sinal trocado, isto é:

$$M_{f,t} = -\frac{dB}{dz} \quad (3.41)$$

Substituindo-se a equação (3.40) na equação (3.41), e tendo em vista a equação (3.39), resulta:

$$M_{f,t} = -\frac{V_L}{h}(\omega_{1'} - \omega_{2'}) \quad (3.42)$$

Devido ao carregamento aplicado, a parede ficará submetida à flexão nas duas direções principais, além da torção.

Observa-se, porém, que a flexão da parede nas direções OX e OY não produzem deslocamentos verticais relativos no ponto de seccionamento dos lintéis. Isto se deve ao fato que nas flexões simples as seções permanecem planas depois de fletidas e as ações dos momentos fletores produzem deslocamentos verticais nos pontos 1' e 2' na mesma direção e sentido. Portanto, o deslocamento vertical relativo do lintel é referente apenas da ação de torção no núcleo e da própria flexão dos lintéis.

Como na estrutura real os pontos 1' e 2' são coincidentes, será válida a seguinte equação de compatibilização destes deslocamentos verticais.

$$w_{1'} + \delta_{1'} = w_{2'} + \delta_{2'} \quad (3.43)$$

Os deslocamentos  $w_{1'}$  e  $w_{2'}$  são denominados empenamentos e calculados através das expressões:

$$w_{1'} = \omega_1 \theta' \quad (3.44.a)$$

$$w_{2'} = \omega_2 \theta' \quad (3.44.b)$$

onde:

$w_{1'}$  e  $w_{2'}$ : empenamentos dos pontos 1' e 2' (na direção do eixo OZ)

$\theta = \theta(z)$ : rotação da seção em torno do centro de torção

$\omega_1$  e  $\omega_2$ : áreas setoriais calculadas nos pontos 1' e 2'

Na Fig. 3.7 procuramos mostrar os empenamentos provocados por um momento torçor positivo.

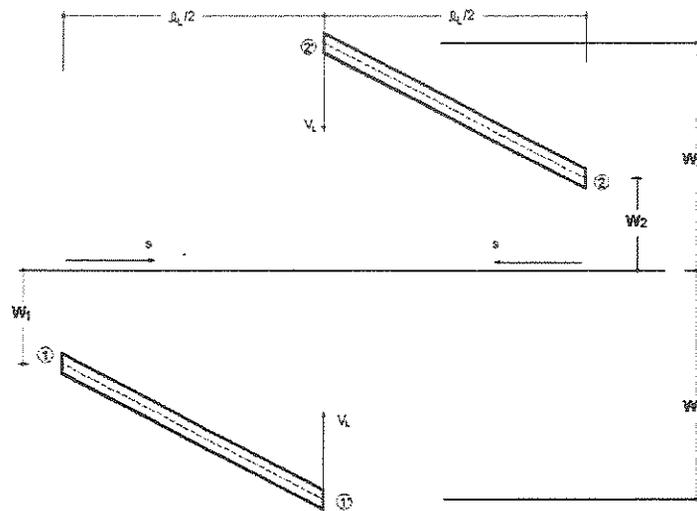


Figura 3.7 – Deslocamento de um Lintel seccionado

Se considerarmos positivos os deslocamentos no sentido positivo do eixo OZ, de acordo com a Resistência dos Materiais, os deslocamentos  $\delta_{1'}$  e  $\delta_{2'}$ , devidos à flexão do lintel, valem:

$$\delta_{1'} = \frac{v_L}{2} \left[ \frac{l^3}{12EJ_L} + \frac{l}{GA_L} \right] \quad (3.45.a)$$

$$\delta_{2'} = -\frac{v_L}{2} \left[ \frac{l^3}{12EJ_L} + \frac{l}{GA_L} \right] \quad (3.45.b)$$

onde:

$\delta_1$  e  $\delta_2$ : deslocamentos devidos à flexão das metades do lintel

$V_L$ : força cortante distribuída devidas a um lintel

$\ell_L$ : comprimento do lintel

$J_L$ : momento de inércia de flexão da seção transversal do lintel

$A_L$ : área da seção transversal do lintel

$E$ : módulo de elasticidade longitudinal

$G$ : módulo de elasticidade transversal

Substituindo-se as equações (3.44a), (3.44b), (3.45a) e (3.45b) na equação (3.43) encontramos para a força cortante concentrada  $V_L$  do lintel, na seguinte expressão:

$$V_L = - \frac{(\omega_1' - \omega_2')}{\left[ \frac{\ell^3}{12EJ_L} \right] + \left[ \frac{\ell}{GA_L} \right]} \theta' \quad (3.46)$$

Se substituirmos a equação (3.46) na equação (3.42) obtemos, para o momento de flexo-torção, a expressão:

$$M_{f,L} = \frac{(\omega_1' - \omega_2')^2}{\left[ \frac{\ell^3}{12EJ_L} \right] + \left[ \frac{\ell}{GA_L} \right]} \cdot \theta' \quad (3.47)$$

Sabemos que para o tipo da seção aqui analisada a diferença entre as áreas setoriais  $\omega_1'$  e  $\omega_2'$  é igual ao dobro da área interna do esqueleto  $A_i$ , ou seja:

$$\omega_1' - \omega_2' = 2A_i \quad (3.48.a)$$

E se definirmos  $K_L$  como uma constante de rigidez à torção do lintel como segue:

$$K_L = \frac{4A_i^2}{h \left[ \frac{\ell^3}{12EJ_L} + \frac{\ell}{GA_L} \right]} \quad (3.48.b)$$

podemos reescrever a equação (3.47), como:

$$M_{f,L} = K_L \theta' \quad (3.49)$$

A substituição da equação (3.49) na equação (3.38) nos conduz à seguinte expressão para o momento torçor interno total:

$$M_t = -EJ_w \theta''' + (GJ_t + K_L) \theta' \quad (3.50)$$

onde:

$M_t$ : momento torçor interno total

$J_t$ : constante de torção

$J_w$ : momento setorial de inércia

$K_L$ : constante de rigidez à torção do lintel

$\theta = \theta(z)$ : rotação da seção em torno do centro de torção

$E$ : módulo de elasticidade longitudinal

$G$ : módulo de elasticidade transversal

As equações (3.37a), (3.37b) e (3.50) expressam as componentes x e y da força cortante e do momento torçor total internos na estrutura. Agrupando estas equações de forma matricial podemos escrever:

$$\{V_{int}\} = -[J]\{U'''\} + ([K_T] + [K_L])\{U'\} \quad (3.51)$$

onde:

$$\{V_{int}\} = \begin{Bmatrix} V_{x,int} \\ V_{y,int} \\ V_{\theta,int} \end{Bmatrix} \quad (3.52.a)$$

$$[J] = \begin{bmatrix} EJ_y & 0 & 0 \\ 0 & EJ_y & 0 \\ 0 & 0 & EJ_w \end{bmatrix} \quad (3.52.b)$$

$$[K_T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GJ_t \end{bmatrix} \quad (3.52.c)$$

$$[K_L] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_L \end{bmatrix} \quad (3.52.d)$$

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (3.52.e)$$

As forças externas numa seção de cota  $z$  pode ser calculadas exatamente como na seção anterior, pois o carregamento aplicado na estrutura é o mesmo:

$$\{V_{ext}\} = p(H-z)[L_T]\{U'\} + (H-z)\{V_q\} \quad (3.53)$$

onde:

$[L_T]$  é uma matriz dada em (3.29);  $\{V_q\}$  vetor dado em (3.30)

e

$$\{V_{ext}\} = \begin{Bmatrix} V_{x,ext} \\ V_{y,ext} \\ V_{\theta,ext} \end{Bmatrix} \quad \text{é um vetor cujo significado é dado em (3.28)}$$

No equilíbrio da estrutura teremos os esforços externos iguais aos esforços internos. Desse modo, igualando (3.51) e (3.53), encontramos o sistema de equações diferenciais para o núcleo contraventado por lintéis:

$$[J]\{U'''\} + \{p(H-z)[L_T] - ([K_T] + [K_L])\}\{U'\} = -(H-z)\{V_q\} \quad (3.54)$$

As condições de contorno são as mesmas fornecidas em (3.35a), (3.35b) e (3.36).

## Capítulo 4

### TÉCNICA DO MEIO CONTÍNUO

#### 4. ASSOCIAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE PAREDES E PÓRTICOS

Na Fig. 4.1, representam-se em planta uma estrutura de edifício alto constituída pela associação tridimensional de paredes, pórticos e molas de torção, ligadas através das lajes. Admitimos que as lajes apresentam rigidez infinita em seu plano e nenhuma rigidez transversal (perpendicular aos seus planos).

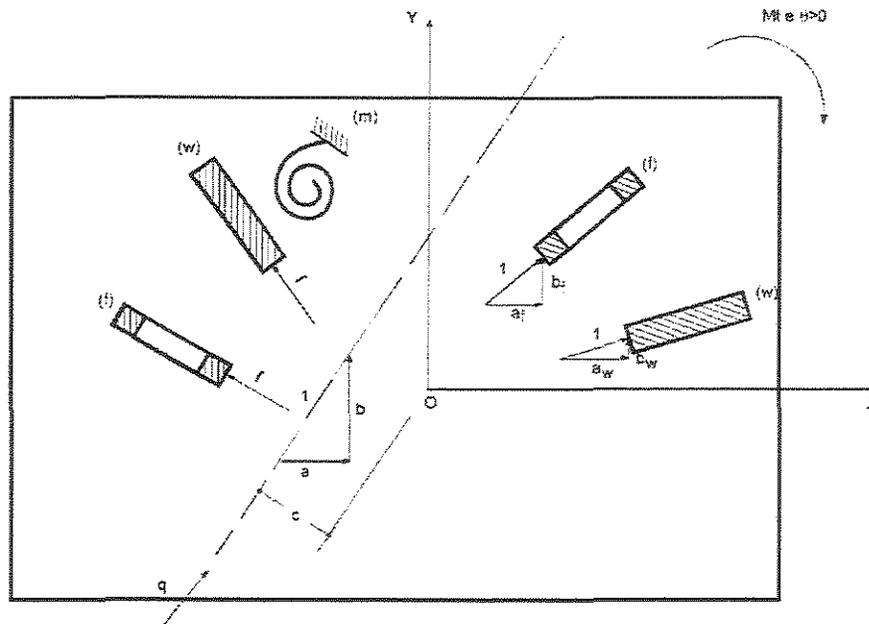


Figura 4.1 – Associação tridimensional em planta  
(figura extraída de Mancini[13])

A estrutura será referida a um sistema de eixos tri – ortogonais OXYZ com a origem O na base do edifício e OZ como o eixo vertical, com sentido positivo para cima.

Em cada elemento estrutural pórtico(f) e/ou parede(w) iremos definir um sistema de referência local,  $o_i x_i y_i z_i$ , sendo  $o_i z_i$  vertical, apontando para cima e  $o_i x_i$  contido no plano do elemento estrutural, com origem  $o_i$  na base do edifício.

No plano vertical de cada parede ou pórtico convencionamos um vetor unitário horizontal, de componentes  $a_i$  e  $b_i$ , segundo os eixos OX e OY, respectivamente, e por  $c_i$ , que é o momento deste versor em relação ao eixo OZ, convencionado positivo no sentido horário.

No caso de existirem núcleos de seção aberta, substituiremos estes por duas paredes planas equivalentes e por uma mola (m) que absorverá o esforço de torção.

As paredes planas equivalentes ao núcleo são independentes, sendo orientadas segundo os eixos principais de inércia da seção transversal, ambas passando pelo centro de torção da seção. Essas paredes equivalentes possuem produtos de rigidez à flexão  $EJ_x$  e  $EJ_y$  em relação aos eixos principais de inércia OX e OY, respectivamente.

A mola de torção terá produto de rigidez  $GJ_t$  para torção de Saint-Venant e  $EJ_w$  para flexo-torção.

A Fig. 4.2 ilustra a substituição de um núcleo de seção delgada aberta por paredes e mola equivalentes.

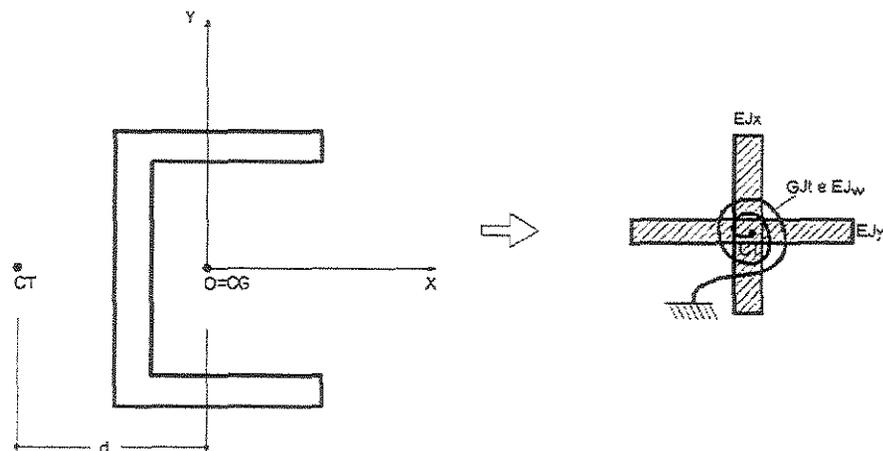


Figura 4.2 – Parede de seção aberta

As cargas aplicadas à estrutura constituem de:

a) carga  $q$  horizontal e uniformemente distribuída ao longo da altura  $H$  da estrutura. A posição desta carga é dada pelas componentes  $a$  e  $b$  do seu vetor unitário,

segundo os eixos OX e OY, respectivamente e pela componente  $c$  que é o momento deste versor em relação ao eixo OZ, positivo no sentido horário.

b) Carga  $\alpha_p$  vertical e uniformemente distribuída ao longo do eixo vertical, que passa pelo centro de gravidade da seção transversal de cada parede e de cada pilar dos pórticos.

Em relação ao sistema global de referências definiremos os deslocamentos dos diafragmas genéricos através das seguintes funções de Z:

- a)  $u=u(Z)$ : desl. do ponto de cota Z, contido no eixo OZ, no sentido de OX;
- b)  $v=v(Z)$ : desl. do ponto de cota Z, contido no eixo OZ, no sentido de OY;
- c)  $\theta=\theta(Z)$ : rotação dos pontos de cota Z, em torno do eixo OZ, positivo se for no sentido horário.

As forças cortantes internas nas direções dos eixos globais OX e OY e o momento em torno do eixo OZ (positivo no sentido horário) são obtidos de acordo com [8], através das equações:

$$V_{x,int} = -\sum_w j_w u_w''' a_w + \sum_f j_f u_f''' a_f \quad (4.1.a)$$

$$V_{y,int} = -\sum_w j_w u_w''' b_w + \sum_f j_f u_f''' b_f \quad (4.1.b)$$

$$V_{\theta,int} = -\sum_w j_w u_w''' c_w + \sum_f j_f u_f''' c_f + \sum_m M_t \quad (4.1.c)$$

onde

$\theta_m$ : giro na mola de torção.

$u_w$ : deslocamento da parede w na direção do seu plano

$u_f$ : deslocamento do pórtico f na direção do seu plano

$j_w$ : produto de rigidez da parede w

$j_f$ : produto de rigidez equivalente do pórtico f

$M_t$ : momento de torção total na mola de torção m

e

$$M_t = -EJ_w \theta_m'' + GJ_t \theta_m' \quad (4.2)$$

onde:

$J_w$ : momento setorial de inércia

$J_t$ : constante de torção do núcleo

Os somatórios devem ser feitos sobre todas as paredes, pórticos e molas de torção do conjunto e os versores utilizados em (4.1a), (4.1b) e (4.1c) têm sinal.

Os deslocamentos  $u_w$ ,  $u_f$  e  $\theta_m$  de cada painel e das molas são expressos em função dos deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $\theta$  do diafragma genérico, calculados para o ponto do diafragma cortado pelo eixo global OZ:

$$u_w = a_w u + b_w v + c_w \theta \quad (4.3.a)$$

$$u_f = a_f u + b_f v + c_f \theta \quad (4.3.b)$$

$$\theta_m = \theta \quad (4.3.c)$$

Se substituirmos as equações (4.2) e (4.3a), (4.3b) e (4.3c) nas equações (4.1a), (4.1b) e (4.1c) resulta:

$$V_{x,int} = -\sum_w j_w (a_w u''' + b_w v''' + c_w \theta''') \cdot a_w + \sum_f s_f (a_f u' + b_f v' + c_f \theta') \cdot a_f \quad (4.4.a)$$

$$V_{y,int} = -\sum_w j_w (a_w u''' + b_w v''' + c_w \theta''') \cdot b_w + \sum_f s_f (a_f u' + b_f v' + c_f \theta') \cdot b_f \quad (4.4.b)$$

$$V_{\theta,int} = -\sum_w j_w (a_w u''' + b_w v''' + c_w \theta''') \cdot c_w + \sum_f s_f (a_f u' + b_f v' + c_f \theta') \cdot c_f + \sum_m (-j_w \theta''' + j_t \theta') \quad (4.4.c)$$

As equações (4.4a), (4.4b) e (4.4c) podem ser escritas em forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} V_{int,X} \\ V_{int,Y} \\ V_{int,\theta} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} J_{aa} & J_{ab} & J_{ac} \\ J_{ba} & J_{bb} & J_{bc} \\ J_{ca} & J_{cb} & J_{cc} + \sum_m j_w \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u''' \\ v''' \\ \theta''' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_m j_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{aa} & S_{ab} & S_{ac} \\ S_{ba} & S_{bb} & S_{bc} \\ S_{ca} & S_{cb} & S_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

onde:

$$J_{gh} = \sum_w j_w g_w h_w \quad (4.6.a)$$

$$S_{gh} = \sum_f s_f g_f h_f \quad (4.6.b)$$

com  $g$  e  $h$  representando qualquer uma das coordenadas  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

O sistema de equações (4.5) pode ainda ser escrito na forma:

$$\{V_{\text{int}}\} = -[J]\{U^m\} + ([K_T] + [S])\{U'\} \quad (4.7)$$

onde:

$\{V_{\text{int}}\}$ : vetor das forças cortantes internas

$\{U\}$ : vetor dos deslocamentos do diafragma genérico

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{aa} & J_{ab} & J_{ac} \\ J_{ba} & J_{bb} & J_{bc} \\ J_{ca} & J_{cb} & J_{cc} + \sum_m j_w \end{bmatrix} \quad (4.8.a)$$

$$[K_T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_m j_t \end{bmatrix} \quad (4.8.b)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{aa} & S_{ab} & S_{ac} \\ S_{ba} & S_{bb} & S_{bc} \\ S_{ca} & S_{cb} & S_{cc} \end{bmatrix} \quad (4.8.c)$$

As forças cortantes externas na direção dos eixos OX e OY e o momento de torção em torno do eixo OZ, de sentidos positivos conforme indicado na Fig. 4.3, serão calculados considerando-se a ação das cargas verticais e das cargas laterais atuantes na estrutura.

#### 4.1 Forças cortantes externas devidas ao carregamento vertical p:

Os esforços cortantes externos devidos à ação da carga vertical serão calculados considerando-se separadamente as contribuições das paredes e dos pórticos.

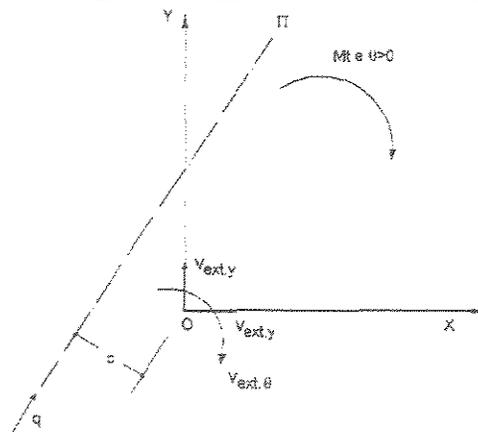


Figura 4.3 - Convenção para os esforços externos positivos

A determinação destes esforços pode ser encontrada em [48].

#### 4.1.1 Forças cortantes externas numa parede $w$ devidas ao carregamento $p$ :

Na Fig. 4.4a indica-se um elemento de parede de área  $dA$ , cuja posição em relação aos eixos globais  $OX$  e  $OY$  é dada pelas coordenadas  $(X_w$  e  $Y_w)$ .

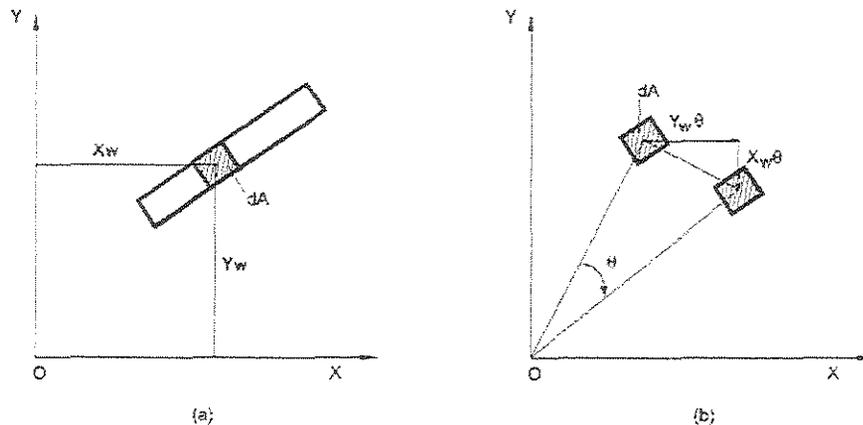


Figura 4.4 – Elemento de parede

Numa certa cota  $Z$ , devido aos deslocamentos  $u$ ,  $v$  e a rotação  $\theta$  do centro de torção o elemento de parede  $dA$  sofre deslocamentos  $u_A$ ,  $v_A$  e  $\theta_A$  em relação ao sistema global  $OXYZ$ , os quais podem ser descritos como:

$$u_A = u + Y_w \theta \tag{4.9a}$$

$$v_A = v - X_w \theta \tag{4.9b}$$

$$\theta_A = \theta \tag{4.9c}$$

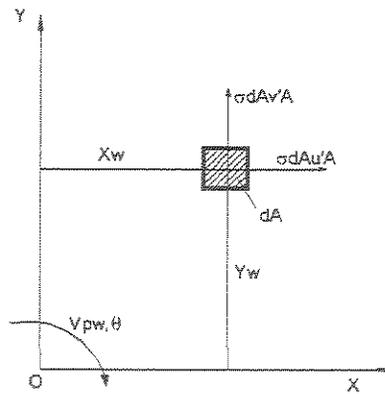


Figura 4.5 – Representação das ações externas num elemento de parede  $dA$

As forças cortantes elementares externas nas direções  $OX$  e  $OY$ , indicadas na Fig. 4.5, num elemento de parede de área  $dA$ , que está sob a ação de uma carga vertical uniformemente distribuída  $\alpha p$ , obedecendo ao mesmo raciocínio do item (3.3) e com base nas equações (3.16) e (3.17), podem ser expressos por:

$$dV_{w_{x,p}} = \sigma dAu'_A \quad (4.10.a)$$

$$dV_{w_{y,p}} = \sigma dAv'_A \quad (4.10.b)$$

O momento de torção elementar, de acordo com o sentido positivo indicado na Fig. 4.5 pode ser dado por:

$$dV_{w\theta,p} = \sigma \cdot dAu'_A Y_w - \sigma \cdot dAv'_A X_w \quad (4.11)$$

Se efetuarmos a derivada primeira de  $u_A$ ,  $v_A$  e  $\theta_A$  dados em (4.9.a), (4.9.b), e (4.9.c), em relação à  $Z$ , e substituirmos esses valores nas equações (4.10.a), (4.10.b) e (4.11) e integremos na área da seção transversal da parede, encontramos as seguintes expressões para a contribuição do carregamento vertical  $p$  nas ações numa parede  $w$ :

$$V_{w_{x,p}} = \alpha_w p (H - z) (u' + Y_{CG} \theta') \quad (4.12.a)$$

$$V_{w_{y,p}} = \alpha_w p (H - z) (v' + X_{CG} \theta') \quad (4.12.b)$$

$$V_{w\theta,p} = \alpha_w p (H - z) \left( Y_{CG} u' - X_{CG} v' + \frac{I_o}{A} \theta' \right) \quad (4.12.c)$$

Expressando estas equações (4.12) em forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} V_{w_x,p} \\ V_{w_y,p} \\ V_{w_\theta,p} \end{Bmatrix} = \alpha_w p (H - z) \begin{bmatrix} 1 & 0 & Y_{CG} \\ 0 & 1 & -X_{CG} \\ Y_{CG} & -X_{CG} & I_o/A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

Ou ainda, utilizando uma notação compacta:

$$\{V_{w,p}\} = \alpha_w p (H - z) [L_w] \{U'\} \quad (4.14)$$

onde:

$$\{V_{pw}\} = \begin{Bmatrix} V_{w_x,p} \\ V_{w_y,p} \\ V_{w_\theta,p} \end{Bmatrix} \quad (4.15.a)$$

$$[L_w] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Y_{CG} \\ 0 & 1 & -X_{CG} \\ Y_{CG} & -X_{CG} & I_o/A \end{bmatrix} \quad (4.15.b)$$

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (4.15.c)$$

Para as paredes de seção aberta, permanecem válidas as equações (4.14), pois no desenvolvimento do equacionamento para paredes não fizemos nenhuma restrição quanto à forma da seção transversal. Portanto, se existem  $n$  paredes podemos escrever:

$$\{V_{Tp_w}\} = p(H - z) [L_{T_w}] \{U'\} \quad (4.16)$$

onde

$\{V_{Tp_w}\}$  – é o vetor das forças cortantes externas devidas às cargas verticais aplicadas no conjunto de paredes.

$$[L_{T_w}] = \sum_{w=1}^n \alpha_w [L_w] \quad (4.17)$$

#### 4.1.2 Forças cortantes externas num pórtico f devidas ao carregamento vertical p:

De modo análogo ao feito para paredes obtemos as forças cortantes que aparecem nas três direções globais devidas ao carregamento vertical  $p$  num pórtico plano f. A carga vertical  $\alpha_j p$  do pórtico plano distribui-se  $\alpha_j p$  para cada pilar, conforme já explicado anteriormente. Representamos na Fig. 4.6 um pórtico plano genérico, sendo  $x_j$  e  $y_j$  as coordenadas do pilar j em relação ao sistema de eixos global.

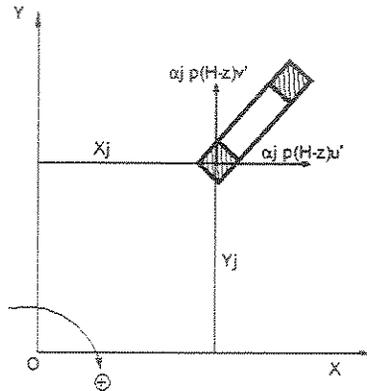


Figura 4.6 - Forças cortantes em um pilar de um pórtico genérico f

Devido às translações  $u$  e  $v$  do diafragma nas direções  $OX$  e  $OY$ , aparecem no pilar j em uma cota  $Z$ , forças cortantes nas três direções dos eixos globais. Os sentidos positivos dos esforços estão na Fig. 4.6. Estes esforços podem ser expressos através das equações:

$$\bar{V}_{jx,p} = \alpha_j p(H-z) \cdot u' \quad (4.18.a)$$

$$\bar{V}_{jy,p} = \alpha_j p(H-z) \cdot v' \quad (4.18.b)$$

$$\bar{V}_{jz,p} = \alpha_j p(H-z)(Y_j u' - X_j v') \quad (4.18.c)$$

Se impusermos aos diafragmas uma rotação positiva  $\theta$ , conforme é observado na Fig. 4.7, o pilar j desloca-se nas direções  $OX$  e  $OY$  de:

- a)  $Y_j \cdot \theta \Rightarrow$  na direção de  $OX$
- b)  $-X_j \cdot \theta \Rightarrow$  na direção de  $OY$

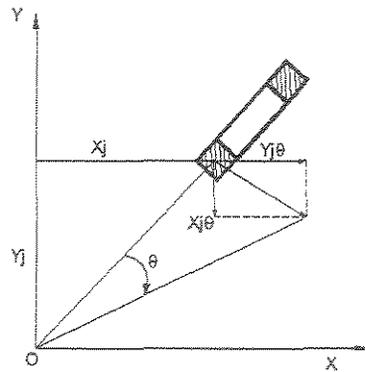


Figura 4.7 – Deslocamentos devido ao giro  $\theta$

Isto conduz ao aparecimento de forças cortantes mostradas na Fig. 4.8, nas direções desses deslocamentos. As forças cortantes podem ser calculadas a partir das equações:

$$\bar{V}_{jx,p} = \alpha_j p (H - z) Y_j \theta' \quad (4.19.a)$$

$$\bar{V}_{jy,p} = \alpha_j p (H - z) X_j \theta' \quad (4.19.b)$$

O momento de torção proveniente das forças cortantes  $\bar{V}_{pj,x}$  e  $\bar{V}_{pj,y}$ , de acordo com o sentido positivo indicado na Fig. 4.8, é dado por:

$$\bar{V}_{j\theta,p} = \alpha_j p (H - z) (X_j^2 + Y_j^2) \theta' \quad (4.19.c)$$

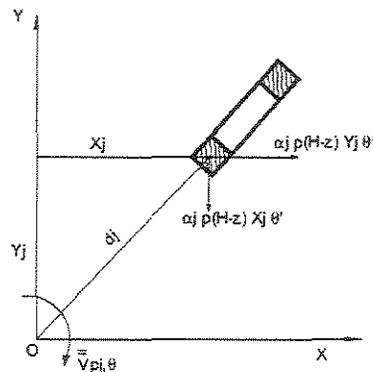


Figura 4.8 – Forças cortantes em um pilar de pórtico genérico

Somando-se os efeitos das translações do diafragma com os deslocamentos de corpo rígido referentes à excentricidade do pilar  $j$  em relação ao sistema global de

referência, encontramos as forças cortantes num pilar. Para um pórtico com  $n$  prumadas temos as seguintes expressões para as forças cortantes devidas ao carregamento vertical  $p$  do conjunto de pórticos:

$$V_{f_{x,p}} = \sum_j \alpha_j p (H - z) (u' + Y_j^2 \theta') \quad (4.20.a)$$

$$V_{f_{y,p}} = \sum_j \alpha_j p (H - z) (v' + X_j^2 \theta') \quad (4.20.b)$$

$$V_{f_{\theta,p}} = \sum_j \alpha_j p (H - z) (Y_j u' - X_j v' + d_j^2 \theta') \quad (4.20.c)$$

onde:

$j$ : indica que o somatório estende-se para todas as colunas dos pórticos e

$$d_j^2 = X_j^2 + Y_j^2 \quad (4.21)$$

As equações (4.20) em forma matricial podem ser expressas por:

$$\begin{Bmatrix} V_{f_{x,p}} \\ V_{f_{y,p}} \\ V_{f_{\theta,p}} \end{Bmatrix} = \sum_j \alpha_j p (H - z) \begin{bmatrix} 1 & 0 & Y_j \\ 0 & 1 & -X_j \\ Y_j & -X_j & d_j^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

ou, de forma compacta:

$$\{V_p\} = p(H - z) [L_f] \{U'\} \quad (4.23)$$

onde:

$\{V_p\}$ : vetor das forças cortantes devido a carga vertical do conjunto de pórticos.

$$[L_f] = \sum_j \alpha_j [L_{j,p}] \quad (4.24)$$

com

$$[L_{j,p}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Y_j \\ 0 & 1 & -X_j \\ Y_j & -X_j & d_j^2 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

A força cortante externa, devido às cargas verticais atuantes nos pórticos e paredes, é obtida somando-se as contribuições de cada painel. Desta forma, a soma das equações (4.16) e (4.23) conduz à:

$$\{V_{p,ext}\} = p(H-z)[L_{TW}]\{U'\} + p(H-z)[L_f]\{U'\} \quad (4.26)$$

ou

$$\{V_{p,ext}\} = p(H-z)[L_{ST}]\{U'\} \quad (4.27)$$

onde

$\{V_{p,ext}\}$  é o vetor das forças cortantes externas devido a carga vertical.

$$[L_{ST}] = [L_{TW}] + [L_f] \quad (4.28)$$

#### 4.2 Forças cortantes externas devidas à ação lateral $q$ :

As forças cortantes externas, em uma cota  $Z$ , devido somente a carga lateral  $q$ , são dadas por:

$$V_{x,q} = q(H-z)a \quad (4.29.a)$$

$$V_{y,q} = q(H-z)b \quad (4.29.b)$$

$$V_{\theta,q} = q(H-z)c \quad (4.29.c)$$

onde:

$a, b, c$ : versores que indicam a posição do carregamento  $q$  em relação ao sistema global

$q$ : carga lateral

Em forma matricial podemos escrever:

$$\{V_{q,ext}\} = (H-z)\{V_q\} \quad (4.30)$$

onde:

$\{V_{q,ext}\}$ : vetor das forças cortantes devido à carga lateral

$$\{V_q\} = \begin{Bmatrix} qa \\ qb \\ qc \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

### 4.3 Forças cortantes externas devidas ao carregamento total:

Se somarmos as equações (4.27) e (4.30), obtemos a força cortante externa total na estrutura, devido ao carregamento gravitacional  $p$  e ao carregamento lateral  $q$ :

$$\{V_{ext}\} = p(H - z)[L_{ST}]\{U'\} + (H - z)\{V_q\} \quad (4.32)$$

onde:

$$\{V_{ext}\} = \begin{Bmatrix} V_{x,ext} \\ V_{y,ext} \\ V_{\theta,ext} \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

A condição de equilíbrio exige que os esforços internos igualem-se aos esforços externos. Deste modo a igualdade entre as equações (4.7) e (4.32), conduzem a:

$$-[J]\{U'''\} + ([K_T] + [S])\{U'\} = p(H - z)[L_{ST}]\{U'\} + (H - z)\{V_q\} \quad (4.33)$$

Ou, agrupando os termos de (4.33) em uma forma mais conveniente, chega-se ao sistema de equações diferenciais de terceira ordem para a associação tridimensional de painéis planos.

$$[J]\{U'''\} + (p(H - z)[L_{ST}] - ([K_T] + [S]))\{U'\} = -(H - z)\{V_q\} \quad (4.34)$$

As condições de contorno utilizadas são:

a) Supondo engastamento na base da estrutura:

$$\{U(0)\} = \{0\} \quad (4.35.a)$$

$$\{U'(0)\} = \{0\} \quad (4.35.b)$$

b) Supondo que não exista momento aplicado no topo da estrutura

$$\{U''(H)\} = \{0\} \quad (4.34.c)$$

onde:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix}$$

$u=u(Z)$  deslocamento de translação na direção do eixo global OX;

$v=v(Z)$  deslocamento de translação na direção do eixo global Oy;

$\theta=\theta(Z)$  rotação do andar.

## Capítulo 5

### TÉCNICA DO MEIO CONTÍNUO

#### 5. EDIFÍCIOS COM DOIS NÚCLEOS

##### 5.1 Núcleos sem contraventamento

Na Fig. 5.1 representamos em planta, dois núcleos de seção delgada aberta, ligados entre si através das lajes. A análise desta estrutura é análoga à desenvolvida no Capítulo 4, quando se considerou apenas um núcleo de seção aberta, e semelhante também, ao indicado em XAVIER [48]. A estrutura tem altura total  $H$  e é definida geometricamente através dos seguintes sistemas de eixos:

a) Sistema global de eixos  $OXYZ$  com origem na base do edifício. Os eixos  $OX$  e  $OY$  são eixos horizontais e  $OZ$  é o eixo vertical, orientado da base para o topo. A origem  $O$  pode ser tomado numa posição qualquer do plano da base e as orientações dos eixos  $OX$  e  $OY$  são escolhidas arbitrariamente.

b) Sistema local de eixos  $o_ixyz$  em cada núcleo, sendo  $o_ix$  e  $o_iy$  os eixos horizontais paralelos aos eixos principais de inércia e  $o_iz$  o eixo orientado da base para o topo da estrutura. A origem  $o_i$  do sistema é coincidente com o centro de torção do núcleo  $i$  ( $i=1,2$ ).

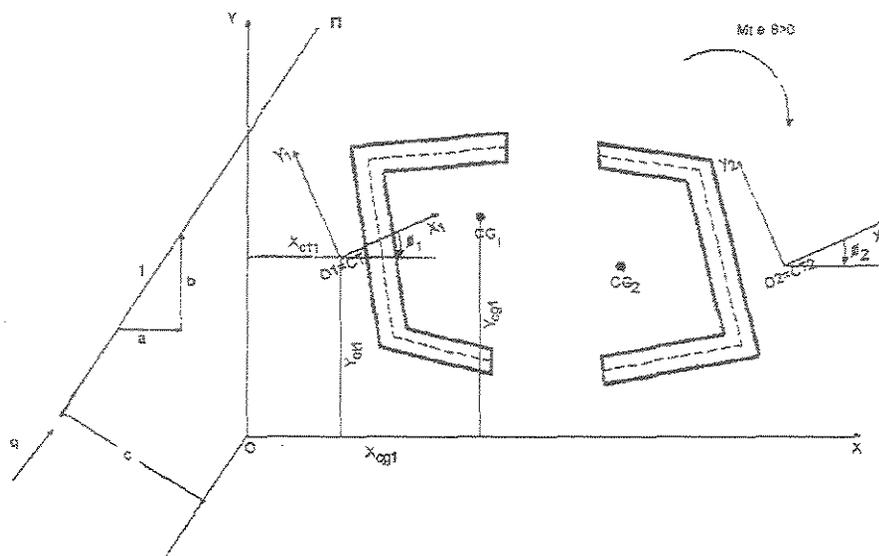


Figura 5.1 – Núcleos de seção aberta sem contraventamento

A localização do centro de torção e do centro de gravidade de cada núcleo, em relação aos eixos globais é definida através das coordenadas  $(X_{CTi}, Y_{CTi})$  e  $(X_{CGi}, Y_{CGi})$ , respectivamente. Definiremos ainda  $c_{ix}$ ,  $c_{iy}$  como as coordenadas da origem global e em relação aos sistemas locais  $o_ixyz$ . O ângulo que o eixo local  $o_ix$  forma com o eixo global OX será denotado  $\phi_i$  onde  $i=(1,2)$ .

O carregamento é constituído de carga lateral  $q$  uniformemente distribuída ao longo da altura da estrutura, atuando em um plano  $\pi$  vertical. A posição desta carga é definida pelas componentes  $\underline{a}$  e  $\underline{b}$  do seu vetor unitário, segundo os eixos OX e OY, e pela componente  $\underline{c}$  que é o momento deste versor em relação ao eixo OZ, positivo no sentido horário. Além desta carga lateral, atuam na estrutura cargas verticais  $\alpha_i p$  uniformemente distribuídas ao longo dos eixos verticais que passam pelos centros de gravidade do núcleo.

Em relação ao sistema global, os deslocamentos dos diafragmas ficam caracterizados pelas seguintes funções de Z:

$u$  – deslocamento de translação na direção do eixo OX;

$v$  – deslocamento de translação na direção do eixo OY;

$\theta$  – rotação em torno do eixo OZ, positiva conforme sentido indicado na Fig. 5.1.

No capítulo anterior se observou que o núcleo de seção aberta apresenta rigidez à flexão nas duas direções principais, além da rigidez à torção. Pode-se, então, escrever, para a estrutura em análise, que as forças cortantes internas no núcleo  $i$ , positivas nos sentidos indicados na Fig. 5.2, podem ser expressas de acordo com as equações:

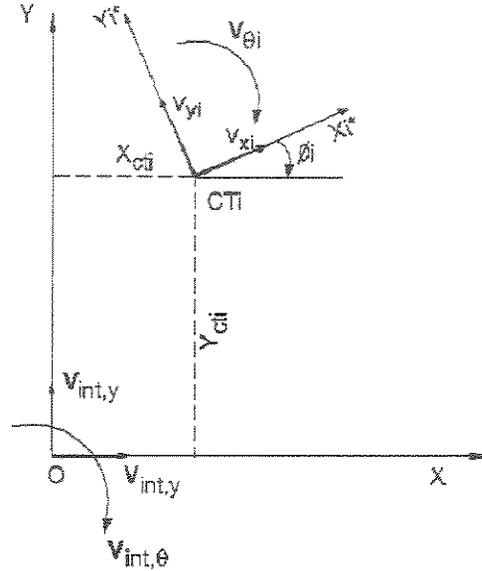


Figura 5.2 – Convenção para as forças cortantes internas positivas.

$$V_{x_i} = -EJ_{y_i} u_i'''' \quad (5.1.a)$$

$$V_{y_i} = -EJ_{x_i} v_i'''' \quad (5.1.b)$$

$$V_{\theta_i} = -EJ_{\omega_i} \theta_i'''' + GJ_i \theta_i' \quad (5.1.c)$$

Exprimindo-se as equações (5.1) na forma matricial, resulta:

$$\begin{Bmatrix} V_{x_i} \\ V_{y_i} \\ V_{\theta_i} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} EJ_{y_i} & 0 & 0 \\ 0 & EJ_{x_i} & 0 \\ 0 & 0 & EJ_{\omega_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i'''' \\ v_i'''' \\ \theta_i'''' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GJ_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i' \\ v_i' \\ \theta_i' \end{Bmatrix} \quad (5.2.a)$$

ou de forma compacta:

$$\{V_i\} = [J_i] \{U_i''''\} + [K_T] \{U_i'\} \quad (5.2.b)$$

onde:

$\{V_i\}$ : vetor das forças cortantes internas na parede  $i$  nas direções de seus eixos principais;

$$[J_i] = - \begin{bmatrix} EJ_{y_i} & 0 & 0 \\ 0 & EJ_{x_i} & 0 \\ 0 & 0 & EJ_{w_i} \end{bmatrix} \quad (5.3.a)$$

$$[K_{T_i}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GJ_{t_i} \end{bmatrix} \quad (5.3.b)$$

$$\{U'_i\} = \begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ \theta'_i \end{Bmatrix} \quad (5.3.c)$$

Os deslocamentos dos núcleos nas direções dos seus respectivos sistemas de eixos são escritos em função dos deslocamentos das lajes nas direções dos eixos globais OXYZ, como:

$$u_i = u \cos \phi_i + v \operatorname{sen} \phi_i - c_{y_i} \theta \quad (5.4.a)$$

$$v_i = -u \operatorname{sen} \phi_i + v \cos \phi_i + c_{x_i} \theta \quad (5.4.b)$$

$$\theta_i = \theta \quad (5.4.c)$$

ou em forma matricial

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_i & -\operatorname{sen} \phi_i & -c_{y_i} \\ -\operatorname{sen} \phi_i & \cos \phi_i & c_{x_i} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (5.4.d)$$

ou ainda:

$$\{U_i\} = [L_{E_i}] \{U\} \quad (5.4.e)$$

onde:

$\{U\}$ : vetor dos deslocamentos na cota  $Z$ , nas direções OXYZ

$\{U_i\}$ : vetor dos deslocamentos na cota  $z$ , nas direções  $o_ixyz$  da parede  $i$

$c_{x_i}$  e  $c_{y_i}$ : coordenadas do ponto  $O$  (origem do sistema global) em relação a  $o_ixyz$

$$-c_{x_i} = X_{CT_i} \cos \phi_i + Y_{CT_i} \sin \phi_i \quad (5.5.a)$$

$$-c_{y_i} = -X_{CT_i} \sin \phi_i + Y_{CT_i} \cos \phi_i \quad (5.5.b)$$

e

$$[L_{E_i}] = \begin{bmatrix} \cos \phi_i & -\sin \phi_i & -c_{y_i} \\ -\sin \phi_i & \cos \phi_i & c_{x_i} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

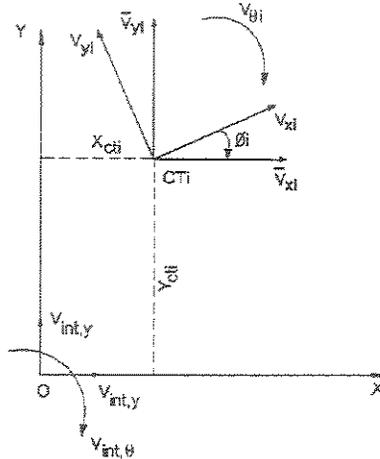


Figura 5.3 – Rotação do vetor  $\{V_i\}$  para  $\{\bar{V}_i\}$

Uma vez determinadas as forças cortantes internas  $\{V_i\}$  em cada parede  $i$ , nas direções do sistema local  $oxyz$  associado à parede  $i$ , através de uma rotação de eixos  $\phi_i$  é possível determinar as forças cortantes internas  $\{\bar{V}_i\}$  na parede  $i$ , nas direções dos eixos globais  $OXYZ$ . A Fig. 5.3 ilustra essa rotação de eixos.

As componentes do vetor  $\{\bar{V}_i\}$  que contém os valores de forças cortante na parede  $i$ , expressos nas direções globais, são dadas por:

$$\bar{V}_{x_i} = V_{x_i} \cos \phi_i - V_{y_i} \sin \phi_i \quad (5.7.a)$$

$$\bar{V}_{y_i} = V_{x_i} \sin \phi_i + V_{y_i} \cos \phi_i \quad (5.7.b)$$

$$\bar{V}_{\theta_i} = V_{\theta_i} \quad (5.7.c)$$

As forças cortantes internas  $V_{x,int}$  e  $V_{y,int}$  e o momento torçor total  $V_{\theta,int}$  no núcleo são obtidos respectivamente por superposição das forças cortantes nas direções  $OX$  e  $OY$  e dos momentos em torno do eixo  $OZ$ , provenientes de cada um dos dois núcleos.

### 5.1.1 Generalização para n núcleos sem contraventamento

Obedecendo-se os sentidos positivos dos esforços indicados na Fig. 5.3 e considerando uma estrutura constituída de n núcleos sem contraventamento, obtemos:

$$V_{X,int} = \sum_{i=1}^n \bar{V}_{X_i} \quad (5.8.a)$$

$$V_{Y,int} = \sum_{i=1}^n \bar{V}_{Y_i} \quad (5.8.b)$$

$$V_{\theta,int} = \sum_{i=1}^n (\bar{V}_{X_i} Y_{CT_i} - \bar{V}_{Y_i} X_{CT_i} + \bar{V}_{\theta_i}) \quad (5.8.c)$$

Substituindo as equações (5.7) em (5.8) e tendo em vista as equações (5.6), temos:

$$V_{X,int} = \sum_{i=1}^n (V_{x_i} \cos \phi_i - V_{y_i} \sin \phi_i) \quad (5.9.a)$$

$$V_{Y,int} = \sum_{i=1}^n (V_{x_i} \sin \phi_i + V_{y_i} \cos \phi_i) \quad (5.9.b)$$

$$V_{\theta,int} = \sum_{i=1}^n (-V_{x_i} c_{y_i} + V_{y_i} c_{x_i} + V_{\theta_i}) \quad (5.9.c)$$

onde:

$V_{X,int}$ : força cortante interna na associação de núcleos na direção do eixo global OX

$V_{Y,int}$ : força cortante interna na associação de núcleos na direção do eixo global OY

$V_{\theta,int}$ : momento torçor interno na associação de núcleos em torno do eixo global OZ

Ou em forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} V_{X,int} \\ V_{Y,int} \\ V_{\theta,int} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \cos \phi_i & -\sin \phi_i & 0 \\ \sin \phi_i & \cos \phi_i & 0 \\ -c_{y_i} & c_{x_i} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{x_i} \\ V_{y_i} \\ V_{\theta_i} \end{Bmatrix} \quad (5.10.a)$$

ou ainda, de forma compacta:

$$\{V_{int}\} = \sum_{i=1}^n [L_{E_i}]^T \{V_i\} \quad (5.10.b)$$

onde,

$\{V_{int}\}$ : vetor das forças cortantes internas da estrutura nas direções globais.

$\{V_i\}$ : vetor das forças cortantes internas no núcleo  $i$  nas direções dos seus sistemas locais

$O_iXYZ$

$[L_{E_i}]$ : matriz de posição do núcleo  $i$ , dada pela equação (5.6)

Substituindo as equações (5.3) e (5.4) na equação (5.10) podemos escrever:

$$\{V_{int}\} = \sum_{i=1}^n (-[L_{E_i}]^T [J_i] [L_{E_i}] \{U'''\}) + [L_{E_i}]^T [K_T] [L_{E_i}] \{U'\} \quad (5.11.a)$$

ou definindo

$$[J] = \sum_{i=1}^n ([L_{E_i}]^T [J_i] [L_{E_i}]) \{U'''\}) \quad (5.11.b)$$

e

$$[K_T] = \sum_{i=1}^n ([L_{E_i}]^T [K_T] [L_{E_i}]) \{U'\} \quad (5.11.c)$$

resulta:

$$\{V_{int}\} = -[J] \{U'''\} + [K_T] \{U'\} \quad (5.12)$$

### 5.1.2 Forças cortantes externas na associação de núcleos sem contraventamento:

As forças cortantes externas atuantes na estrutura, referidas ao sistema global OXYZ, provenientes das cargas verticais  $p$  e da carga lateral  $q$ , são obtidas seguindo raciocínio análogo ao utilizado no Capítulo 4.

#### 5.1.2.1 Forças cortantes externas devidas à cargas verticais $p$ na associação de núcleos sem contraventamento

As forças cortantes externas, numa cota  $Z$ , nas direções globais, devidas às cargas verticais atuantes em cada núcleo, são obtidas utilizando-se como na equação (4.16), ou seja:

$$\{V_{p,ext}\} = P(H - Z)[L_w]\{U'\} \quad (5.13)$$

onde,

$\{V_{p,ext}\}$ : vetor das forças cortantes externas devido as cargas verticais nas paredes.

$$[L_w] = \sum_{i=1}^n \alpha_i [L_i] \quad (5.14)$$

com

$$[L_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Y_{CG_i} \\ 0 & 1 & -X_{CG_i} \\ Y_{CG_i} & -X_{CG_i} & I_{o,i}/A_i \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

$I_{o,i}$ : momento polar de inércia da parede  $i$  em relação a origem global O.

$A_i$ : área da seção transversal da parede  $i$ .

### 5.1.2.2 Forças cortantes externas devidas à ações laterais $q$ na associação de núcleos sem contraventamento

Devido à carga lateral  $q$ , as forças cortantes externas, nas direções globais, em uma cota  $Z$ , são expressas pela equação:

$$\{V_{q,ext}\} = (H - Z)\{V_q\} \quad (5.16)$$

onde,

$\{V_{q,ext}\}$ : vetor das forças cortantes externas devidas à carga lateral  $q$

$$\{V_q\} = \begin{Bmatrix} qa \\ qb \\ qc \end{Bmatrix} \quad (5.17)$$

As forças cortantes externas totais atuantes na estrutura, segundo as direções OXYZ, são obtidas somando-se as equações (5.13) e (5.16), ou seja:

$$\{V_{ext}\} = p(H - Z)[L_w]\{U'\} + (H - Z)\{V_g\} \quad (5.18)$$

onde,

$$\{V_{ext}\} = \begin{Bmatrix} V_{X,ext} \\ V_{eY,xt} \\ V_{\theta,ext} \end{Bmatrix} \quad (5.19)$$

Para que haja equilíbrio da estrutura é necessário que os esforços internos, expressos pela equação (5.12) igualem-se aos esforços externos, expressos pela equação (5.18). Logo:

$$-[J]\{U'''\} + [K_T]\{U'\} = p(H - Z)[L_w]\{U'\} + (H - Z)\{V_g\}$$

ou, reagrupando:

$$[J]\{U'''\} + (p(H - Z)[L_w] - [K_T])\{U'\} = -(H - Z)\{V_g\} \quad (5.20)$$

A solução do sistema de equações diferenciais (5.20) é obtida através de processos numéricos, utilizando-se as seguintes condições de contorno:

a) Supondo engastamento na base da estrutura:

$$\{U(0)\} = \{0\} \quad (5.21.a)$$

$$\{U'(0)\} = \{0\} \quad (5.21.b)$$

b) Supondo que não existam bimomentos nem momentos fletores aplicados no topo das paredes:

$$\{U''(H)\} = \{0\} \quad (5.21.c)$$

## 5.2 Associação de dois núcleos contraventados por lintéis

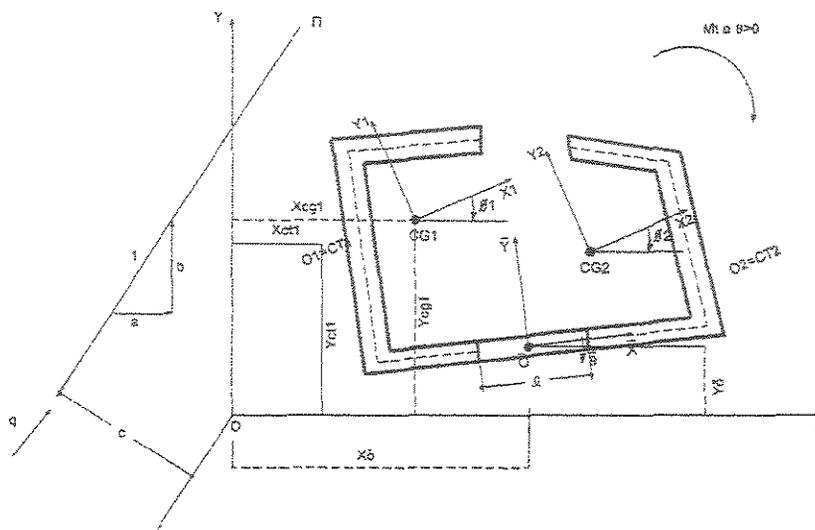


Figura 5.4 – Núcleos contraventados por lintéis

A Fig. 5.4 representa em planta um edifício de altura total  $H$  formado por dois núcleos contraventados por lintéis, ao nível dos andares, submetido à carga lateral  $q$  uniformemente distribuída atuando em um plano vertical  $\pi$  e à cargas  $\alpha_i p$  uniformemente distribuídas aplicadas ao longo dos eixos verticais que passam pelos centros de gravidade de cada núcleo.

A estrutura será referenciada aos seguintes sistemas de eixos:

a) Sistema global de eixos  $OXYZ$  com eixos horizontais  $OX$  e  $OY$  na base da estrutura e  $OZ$  o eixo vertical. A posição do centro  $O$  e as direções de  $OX$  e  $OY$  são arbitrárias.

b) Sistema de eixos locais  $o_i x_i y_i z_i$  em cada núcleo, sendo  $o_i x_i$  e  $o_i y_i$  os eixos principais de inércia e o eixo  $o_i z_i$  vertical. Posiciona-se a origem  $o_i$  na base da estrutura, coincidindo com o centro gravidade da seção transversal do núcleo  $i$ .

c) Sistema de eixos locais paralelo a  $o_i x_i y_i z_i$  em cada núcleo, com origem nos centros de torção de cada núcleo.

d) Sistema local  $\overline{oxyz}$  com eixo  $\overline{ox}$  na direção dos lintéis, com  $\overline{oz}$  sendo o eixo vertical passando através dos pontos médios dos lintéis e  $\overline{oy}$  um eixo plano horizontal perpendicular ao eixo  $\overline{ox}$ , conforme Fig. 5.4.

A posição do centro de gravidade e do centro de torção do núcleo  $i$ , em relação ao sistema de global  $OXYZ$ , ficam definidas através das coordenadas  $(X_{CGi}, Y_{CGi})$  e  $(X_{CTi}, Y_{CTi})$ , respectivamente. A posição da origem  $\bar{o}$ , em relação a este mesmo sistema de eixos, fica definida através das coordenadas  $(X_{\bar{o}}, Y_{\bar{o}})$ .

Supomos que os eixos  $o_i x_i$  e  $\bar{o}x$  formam com o eixo global  $OX$  os ângulos  $\phi_i$  e  $\bar{\phi}$ , respectivamente, conforme ilustrado na Fig. 5.5, o que equivale dizer que os eixos  $o_i x_i$  formam com o eixo  $\bar{o}x$ , um ângulo  $\beta_i$ , que vale:

$$\beta_i = \phi_i - \bar{\phi} \quad (5.22)$$

De acordo com a Fig. 5.5, definimos:

$\ell$  - comprimento do lintel

$\bar{\ell}_i, \bar{e}_i$  - distância do centro de gravidade do núcleo  $j$  até os eixos  $\bar{o}x$  e  $\bar{o}y$ , respectivamente.

$\ell_i, e_i$  - distância da origem  $\bar{o}$  (ponto médio dos lintéis) até os eixos  $o_i x_i$  e  $o_i y_i$

$\bar{x}_i, \bar{y}_i$  - distância do centro de torção  $CT_i$  do núcleo  $j$  até os eixos  $\bar{o}y$  e  $\bar{o}x$

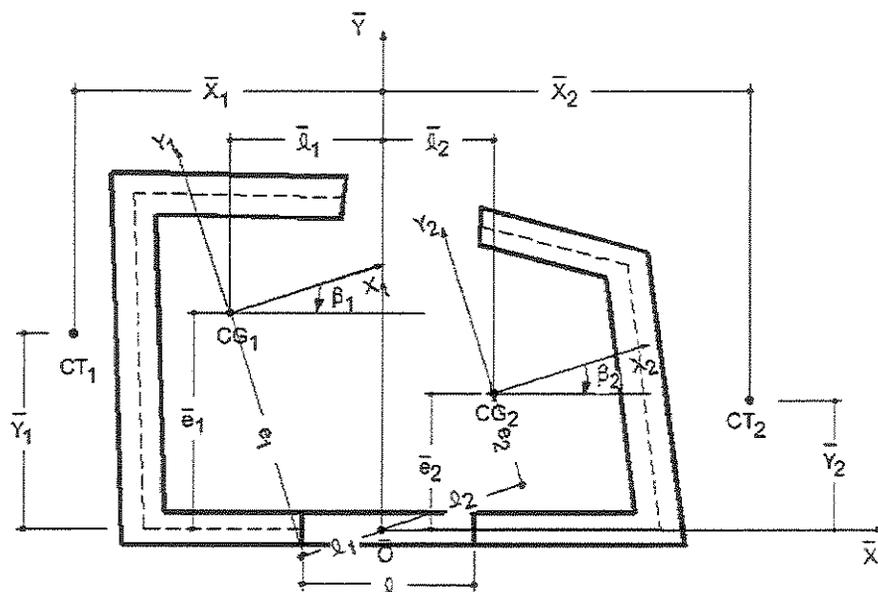


Figura 5.5 – Coordenadas dos pontos  $CT_i$  e  $CG_i$

Admitimos, conforme XAVIER [48], que os lintéis são engastados nas faces das paredes e que os pontos médios de seus vãos são pontos de momentos nulos.

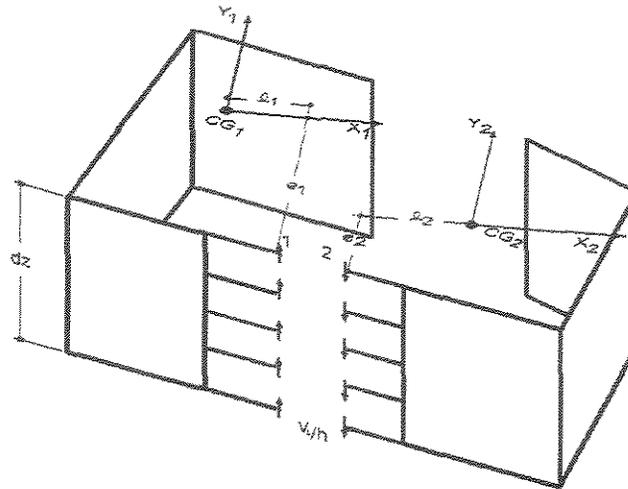


Figura 5.6 – Seccionamento de um elemento  $dz$  nos pontos médios dos lintéis.

Se considerarmos um corte ao longo dos pontos médios dos lintéis, observamos o aparecimento de forças cortantes  $V_L$  de mesmo valor e sentidos opostos, produzindo esforços nas paredes 1 e 2.

Pela da técnica do meio contínuo consideraremos que essas forças cortantes  $v_L$  em um lintel são distribuídas ao longo do pé direito de um andar, de tal modo que podemos considerar uma força cortante distribuída vertical  $v_L = V_L/h$ .

Definimos os seguintes deslocamentos da estrutura, em uma cota genérica  $Z$ :

- a) Deslocamentos de translação  $u$  e  $v$  dos diafragmas nas direções globais  $OX$ ,  $OY$  e rotação  $\theta$  destes elementos em torno do eixo  $OZ$ .
- b) Deslocamentos de translação  $u_i$  e  $v_i$  do cento de torção  $CT_i$  do núcleo  $i$  ( $i=1,2$ ) nas direções dos eixos principais  $o_i x_i$  e  $o_i y_i$  respectivamente, e giro  $\theta_i$  de toda a seção transversal do núcleo  $i$  em torno do seu centro de torção.
- c) Deslocamentos de translação das lajes, denominados de  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$ , nas direções  $\bar{o}x$  e  $\bar{o}y$ , respectivamente, e o giro  $\bar{\theta}$  destes elementos em relação ao eixo  $\bar{o}z$ .

As forças cortantes internas, que atuam em cada núcleo isoladamente, são obtidas quando fazemos o equilíbrio do momento fletor em torno dos eixos  $o_i x_i$  e  $o_i y_i$ , produzido pelos esforços internos no núcleo e no segmento de lintel ligado a ele, num segmento de altura  $dz$ .

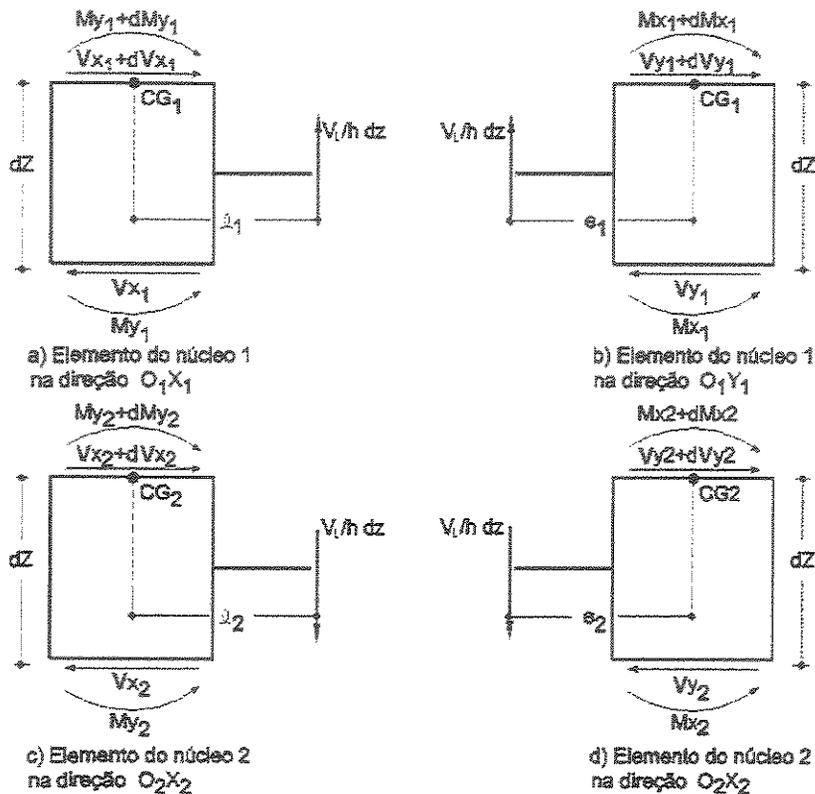


Figura 5.7 – Elementos genéricos dos núcleos

Obedecendo-se aos sentidos positivos indicados na Fig. 5.7, temos:

a) Equilíbrio de momentos em torno do eixo local  $o_1y_1$  do núcleo 1: Os esforços a considerar são os momentos  $M_{y1}$  no núcleo 1, forças cortantes internas horizontais  $V_{x1}$  aplicadas no centro de gravidade do núcleo 1 na direção  $o_1x_1$  e força cortante vertical uniformemente distribuída na seção média do lintel, de acordo com as Fig. (5.7a):

$$V_{x1} = -EJ_{y1}u_1''' + \frac{V_L}{h} \ell_1 \quad (5.23.a)$$

onde:

$V_{x1}$ : força cortante interna no núcleo 1, na direção do eixo local  $o_1x_1$

$V_L / h$ : força cortante vertical distribuída aplicada no trecho de lintel ligado ao núcleo 1

$h$ : pé direito de um andar

$J_{y1}$ : momento principal de inércia à flexão do núcleo 1 em torno do eixo  $o_1y_1$

b) Equilíbrio de momentos em torno do eixo local  $o_1x_1$  do núcleo 1. Os esforços a considerar são os momentos  $M_{x_1}$  no núcleo 1, forças cortantes internas horizontais  $V_{y_1}$  aplicadas no centro de gravidade do núcleo 1 na direção  $o_1y_1$  e força cortante vertical  $V_L/h$  uniformemente distribuída na seção média do lintel, de acordo com as Fig. (5.7b):

$$V_{y_1} = -EJ_{x_1} v_1''' + \frac{V_L}{h} e_1 \quad (5.23.b)$$

onde:

$V_{y_1}$ : força cortante interna no núcleo 1, na direção do eixo local  $o_1y_1$

$V_L/h$ : força cortante vertical distribuída aplicada no techo de lintel ligado ao núcleo 1

$h$ : pé direito de um andar

$J_{x_1}$ : momento principal de inércia à flexão do núcleo 1 em torno do eixo  $o_1x_1$

c) Equilíbrio de momentos em torno do eixo local  $o_2y_2$  do núcleo 2: Os esforços a considerar são os momentos  $M_{y_2}$  no núcleo 2, forças cortantes internas horizontais  $V_{x_2}$  aplicadas no centro de gravidade do núcleo 2 na direção  $o_2x_2$  e força cortante vertical uniformemente distribuída na seção média do lintel, de acordo com as Fig. (5.7c):

$$V_{x_2} = -EJ_{y_2} u_2''' + \frac{V_L}{h} \ell_2 \quad (5.23.c)$$

onde:

$V_{x_2}$ : força cortante interna no núcleo 2, na direção do eixo local  $o_2x_2$

$V_L/h$ : força cortante vertical distribuída aplicada no techo de lintel ligado ao núcleo 2

$h$ : pé direito de um andar

$J_{y_2}$ : momento principal de inércia à flexão do núcleo 2 em torno do eixo  $o_2y_2$

d) Equilíbrio de momentos em torno do eixo local  $o_2x_2$  do núcleo 2: Os esforços a considerar são os momentos  $M_{x_2}$  no núcleo 2, forças cortantes internas horizontais  $V_{y_2}$  aplicadas no centro de gravidade do núcleo 1 na direção  $o_2y_2$  e força cortante vertical  $V_L/h$  uniformemente distribuída na seção média do lintel, de acordo com as Fig. (5.7d):

$$V_{y_2} = -EJ_{x_2} v_2''' + \frac{V_L}{h} e_2 \quad (5.23.d)$$

onde:

$V_{y_2}$ : força cortante interna no núcleo 2, na direção do eixo local  $o_2y_2$

$V_L/h$ : força cortante vertical distribuída aplicada no techo de lintel ligado ao núcleo 2

$h$ : pé direito de um andar

$J_{x_2}$ : momento principal de inércia à flexão do núcleo 2 em torno do eixo  $o_2x_2$ .

As forças cortantes distribuídas  $V_L/h$  que agem ao longo dos pontos médios dos lintéis seccionados atuam axialmente sobre os núcleos 1 e 2, produzindo bimomentos. Observamos nos elementos longitudinais de altura  $dz$  da estrutura, representados na Fig. 5.7, que o núcleo 1 fica submetido a tração e o núcleo 2 à compressão.

Considerando que na convenção adotada na teoria da flexo-torção os bimomentos produzidos por forças de tração são positivos e por força de compressão são negativos, concluímos então que os acréscimos de bimomentos  $dB_i$  em cada elemento diferencial  $dz$ , produzidos pelas ações dos lintéis, são dados por:

$$dB_1 = \frac{V_L}{h} dz \omega_1 \quad (5.24.a)$$

$$dB_2 = -\frac{V_L}{h} dz \omega_2 \quad (5.24.b)$$

onde:

$\omega_1$  e  $\omega_2$ : áreas setoriais nos pontos os lintéis foram seccionados;

$V_L/h$ : força cortante distribuída nos pontos médios 1 e 2 do lintel;

$dB_1$  e  $dB_2$ : acréscimo infinitesimal de bimomentos devido à força vertical no lintel.

O momento de flexo-torção é igual à derivada do bimomento em relação à  $z$ , com sinal trocado. Em vista disto, as parcelas de momento de flexo-torção nos núcleos 1 e 2, devidas à força cortante nos lintéis seccionados podem ser calculadas a partir das equações (5.24a) e (5.24b). Temos então:

$$M_{\theta_1}^i = -\frac{V_L}{h} \omega_1 \quad (5.25.a)$$

$$M_{\theta_2} = \frac{V_L}{h} \omega_2 \quad (5.25.b)$$

O momento torçor total  $M_{ti}$  em cada núcleo  $i$  será a soma do efeito do momento de torção livre de Saint-Venant devido ao carregamento no núcleo  $i$ , com o momento de flexo-torção devido à torção causada pelo carregamento no núcleo e mais uma parcela de momento de flexo-torção advindo do bimomento causado pelas forças axiais no núcleo  $i$  (iguais às forças cortantes distribuídas  $V_L/h$  nos pontos 1 e 2 dos lintéis), cujos valores são dados pelas equações (5.25.a) e (5.25.b).

Os momentos torçores totais na associação de dois núcleos contraventados por lintéis, então, podem ser escritos como:

$$M_{t_1} = -EJ_{\omega_1} \theta_1''' + GJ_{t_1} \theta_1' - \frac{V_L}{h} \omega_1 \quad (5.26.a)$$

$$M_{t_2} = -EJ_{\omega_2} \theta_2''' + GJ_{t_2} \theta_2' - \frac{V_L}{h} \omega_2 \quad (5.26.b)$$

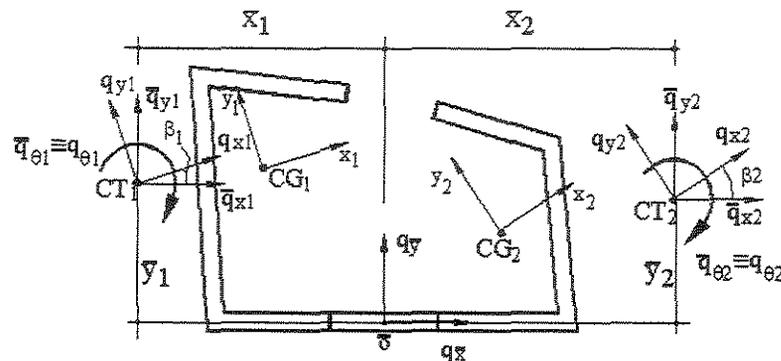


Figura 5.8 – Momentos torçores e forças cortantes nos núcleos, devidos à força cortante distribuída vertical  $V_L/h$  nos lintéis, levados para os centros de torção dos núcleos 1 e 2

Comparando-se as equações (5.26.a) e (5.26.b) e (5.23a), (5.23b), (5.23c) e (5.23d) com as equações (5.1.a), (5.1.b) e (5.1.c) concluímos que numa determinada cota  $z$  os lintéis introduzem nos núcleos 1 e 2 forças cortantes na direção dos eixos principais de inércia  $o_1x_1$  e  $o_1y_1$ . O equivalente estático a essas forças, aplicados nos centros de torção, são forças cortantes iguais, em direções paralelas à  $o_1x_1$  e  $o_1y_1$  e momentos torçores aplicados nos centros de torção de cada núcleo, conforme indicado na Fig. 5.8. Os valores das forças internas nos centros de torção dos núcleos valem:

- Para o núcleo 1:

$$q_{x_1} = \frac{V_L}{h} \ell_1 \quad q_{y_1} = -\frac{V_L}{h} e_1 \quad \text{e} \quad q_{\theta_1} = -\frac{V_L}{h} \omega_1 \quad (5.27.a)$$

- Para o núcleo 2:

$$q_{x_2} = \frac{V_L}{h} \ell_2 \quad q_{y_2} = \frac{V_L}{h} e_2 \quad \text{e} \quad q_{\theta_2} = \frac{V_L}{h} \omega_2 \quad (5.27.b)$$

As forças cortantes e momentos torçores indicados em (5.27.a) e (5.27.b), estão expressos em relação às direções dos sistemas locais definidos nos centros de torção dos núcleos  $i(i=1,2)$ . Através de rotações de coordenadas de valores respectivamente iguais a  $\beta_1$  para o núcleo 1 e  $\beta_2$  para o núcleo 2, é possível expressar esses esforços internos adicionais devidos ao lintel em relação às direções paralelas aos eixos do sistema local  $\overline{oxyz}$ .

Podemos escrever:

- Para o núcleo 1:

$$\overline{q}_{x_1} = q_{x_1} \cos \beta_1 - q_{y_1} \sin \beta_1 \quad (5.28.a)$$

$$\overline{q}_{y_1} = q_{x_1} \sin \beta_1 + q_{y_1} \cos \beta_1 \quad (5.28.b)$$

$$\overline{q}_{\theta_1} = q_{\theta_1} \quad (5.28.c)$$

- Para o núcleo 2:

$$\overline{q}_{x_2} = q_{x_2} \cos \beta_2 - q_{y_2} \sin \beta_2 \quad (5.28.d)$$

$$\overline{q}_{y_2} = q_{x_2} \sin \beta_2 + q_{y_2} \cos \beta_2 \quad (5.28.e)$$

$$\overline{q}_{\theta_2} = q_{\theta_2} \quad (5.28.f)$$

onde

$\overline{q}_{x_i}$ ,  $\overline{q}_{y_i}$ : forças cortantes em cada núcleo  $i$ , nas direções  $\overline{ox}$  e  $\overline{oy}$ , respectivamente, devidas à força cortante no lintel;

$\overline{q}_{\theta_i}$ : momento de torçor em relação ao centro de torção  $CT_i$  do núcleo  $i$ , devido à força cortante no lintel.

Para obtermos as forças cortantes resultantes e o momento torçor resultante, calculados em relação aos eixos  $\overline{oxyz}$ , devidos ao esforço cortante nos lintéis, basta somarmos as contribuições correspondentes dos núcleos 1 e 2, conforme equações (5.28.a) até (5.28.f).

$$q_{\bar{x}} = \bar{q}_{x_1} + \bar{q}_{x_2} \quad (5.29.a)$$

$$q_{\bar{y}} = \bar{q}_{y_1} + \bar{q}_{y_2} \quad (5.29.b)$$

$$q_{\bar{\theta}} = \bar{q}_{x_1} \bar{y}_1 + \bar{q}_{y_1} \bar{x}_1 + \bar{q}_{\theta_1} + \bar{q}_{x_2} \bar{y}_2 - \bar{q}_{y_2} \bar{x}_2 + \bar{q}_{\theta_2} \quad (5.29.c)$$

onde:

$q_{\bar{x}}$ ,  $q_{\bar{y}}$  e  $q_{\bar{\theta}}$ : forças cortantes e momento torçor internos introduzidas na estrutura pelos lintéis, expressos no sistema local  $\overline{oxyz}$ .

$\bar{x}_i, \bar{y}_i$ : distância do CT<sub>i</sub> do núcleo i até os eixos do sistema local  $\overline{oxyz}$ .

As distâncias  $(\bar{\ell}_i, \bar{e}_i)$  do centro de gravidade do núcleo i até os eixos  $\overline{oxyz}$ , conforme ilustra a Fig. 5.5, podem ser escritas em função de  $(\ell_i, e_i)$ , que são as distâncias da origem  $\bar{o}$  em relação aos eixos  $o_i x_i y_i z_i$ . As equações (5.30.a) até (5.30.d) mostram as relações entre essas grandezas:

$$\bar{\ell}_1 = \ell_1 \cos \beta_1 + e_1 \sin \beta_1 \quad (5.30.a)$$

$$\bar{e}_1 = e_1 \cos \beta_1 - \ell_1 \sin \beta_1 \quad (5.30.b)$$

$$\bar{\ell}_2 = \ell_2 \cos \beta_2 - e_2 \sin \beta_2 \quad (5.30.c)$$

$$\bar{e}_2 = \ell_2 \sin \beta_2 - e_2 \cos \beta_2 \quad (5.30.d)$$

Substituindo-se as equações (5.28a) até (5.28.f) nas equações (5.29a) até (5.29.c) e levando-se em conta as expressões (5.30.a) até (5.30.d) encontramos os valores das forças cortantes internas e momento torçor, introduzidos pelos lintéis na associação de 2 núcleos contraventados por lintéis:

$$q_{\bar{x}} = \frac{V_L}{h} (\bar{\ell}_1 + \bar{\ell}_2) \quad (5.31.a)$$

$$q_{\bar{y}} = \frac{V_L}{h} (\bar{e}_1 - \bar{e}_2) \quad (5.31.b)$$

$$q_{\bar{\omega}} = \frac{V_L}{h} (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \quad (5.31.c)$$

onde:

$$\bar{\omega}_1 = \bar{\ell}_1 \bar{y}_1 - \bar{e}_1 \bar{x}_1 - \omega_1 \quad \text{e} \quad \bar{\omega}_2 = -\bar{\ell}_2 \bar{y}_2 + \bar{e}_2 \bar{x}_2 - \omega_2$$

O valor da força cortante  $V_L$  nos lintéis pode ser determinada compatibilizando os deslocamentos dos pontos 1 e 2, na metade dos lintéis, onde os mesmos são seccionados para efeito de cálculo.

Considerando o seccionamento ao longo dos pontos médios dos lintéis, conforme Fig. 5.7, se cada núcleo deformasse independentemente, existiria um deslocamento vertical à esquerda e outro à direita do corte imaginário.

Para o lintel ligado ao núcleo 1, o deslocamento de translação vertical, numa cota  $z$ , na extremidade livre do lintel seccionado, considerado neste estudo como engastado no núcleo, é a superposição de efeitos devidos à:

### 1. deslocamento $\Delta_1$ efeito da deformação do núcleo 1

Esse deslocamento é composto de 3 parcelas:

1.1.translação para baixo devido à flexão do núcleo 1 em torno do eixo  $o_1y_1$ , obtido pelo produto da rotação do núcleo 1 em torno desse eixo, pela distância  $\ell_1$  do ponto  $\bar{o}$  até o eixo.

1.2.translação para cima devido à flexão do núcleo 1 em torno do eixo  $o_1x_1$ , obtido pelo produto da rotação do núcleo 1 em torno desse eixo, pela distância  $e_1$  do ponto  $\bar{o}$  até o eixo.

1.3.translação para baixo devido à torção do núcleo 1, igual ao produto do empenamento da seção considerada pela área setorial  $\omega_1$  no ponto  $\bar{o}$ .

## 2. deslocamento $\delta_1$ efeito da deformação do lintel

Esse deslocamento no ponto  $\bar{o}$  é devido à deformação dos lintéis por momento fletor e força cortante.

Para o lintel ligado ao núcleo 2, o deslocamento de translação vertical, numa cota  $z$ , na extremidade livre do lintel seccionado, considerado neste estudo como engastado no núcleo, é a superposição de efeitos devidos à:

### 1. deslocamento $\Delta_2$ efeito da deformação do núcleo 2

Esse deslocamento é composto de 3 parcelas:

1.1. translação para cima devido à flexão do núcleo 2 em torno do eixo  $o_2y_2$ , obtido pelo produto da rotação do núcleo 2 em torno desse eixo, pela distância  $l_2$  do ponto  $\bar{o}$  até o eixo.

1.2. translação para cima devido à flexão do núcleo 2 em torno do eixo  $o_2x_2$ , obtido pelo produto da rotação do núcleo 2 em torno desse eixo, pela distância  $e_2$  do ponto  $\bar{o}$  até o eixo.

1.3. translação para cima devido à torção do núcleo 2, igual ao produto do empenamento da seção considerada pela área setorial  $\omega_2$  no ponto  $\bar{o}$ .

### 2. deslocamento $\delta_2$ efeito da deformação do lintel

Esse deslocamento no ponto  $\bar{o}$  é devido à deformação dos lintéis por momento fletor e força cortante.

Na Fig. 5.9 representamos os deslocamentos verticais à esquerda do corte imaginário, no ponto  $\bar{o}$  do lintel ligado ao núcleo 1, devido aos 4 efeitos mencionados.

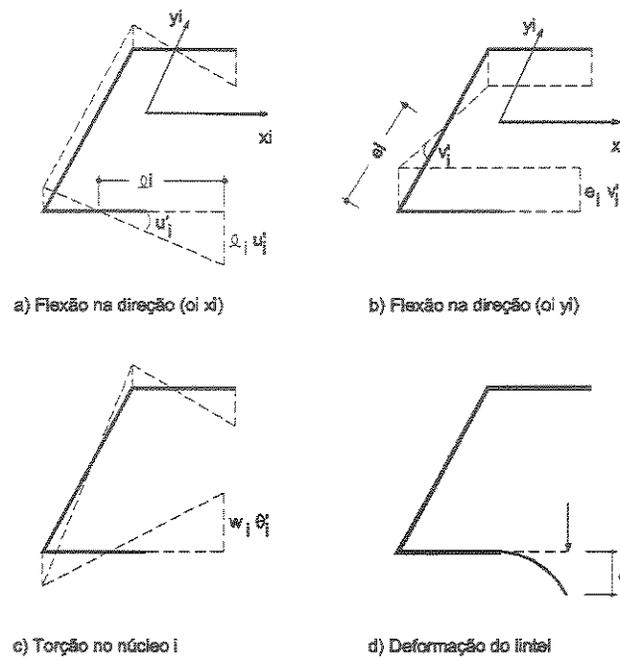


Figura 5.9 Deslocamentos do ponto  $\bar{o}$  dos lintéis ligados ao núcleo 1

Os deslocamentos verticais no ponto de seccionamento dos lintéis, devido aos efeitos dos núcleos e das deformações dos lintéis valem:

- **efeito dos núcleos**

$$\Delta_1 = -u_1' \ell_1 + v_1' e_1 + \omega_1 \theta_1' \quad (5.32.a)$$

$$\Delta_2 = u_2' \ell_2 + v_2' e_2 + \omega_2 \theta_2' \quad (5.32.b)$$

onde:

$\theta_i$  e  $\omega_i$ : rotação em torno do eixo  $o_i z_i$  e empenamentos da seção no ponto médio do lintel

$\ell_i$  e  $e_i$ : distância do ponto médio do lintel aos eixos principais  $o_i x_i y_i z_i$

$u_i'$  e  $v_i'$ : distorções, na cota  $z$ , em função dos deslocamentos dos CGs dos núcleos

- **efeito das deformações dos lintéis**

Os deslocamentos  $\delta$  das extremidades seccionadas dos lintéis, provocada pelas deformações por forças cortantes  $V_L$ , de acordo com a Resistência dos Materiais, é expressa por:

$$\delta = \frac{V_L \ell^3}{24EJ_L} + \frac{V_L \ell}{2A_L G} \quad (5.32.c)$$

onde:

E: módulo de elasticidade longitudinal

G: módulo de elasticidade transversal

$A_L$ : área da seção transversal do lintel

$J_L$ : momento de inércia à flexão do lintel

$\ell$ : comprimento do lintel

$V_L$ : força cortante no lintel

No núcleo 1 esse deslocamento  $\delta$  é para cima e no núcleo 2 esse deslocamento é para baixo.

Para satisfazer as condições de compatibilidade de deslocamento nos pontos à esquerda e direita do corte, é necessário que:

$$\Delta_1 + \delta = \Delta_2 - \delta \quad (5.33)$$

Substituindo as equações (5.32.a) e (5.32.b) na equação (5.33), resulta:

$$-u'_1 \ell_1 + v'_1 e_1 + \omega_1 \theta'_1 + \delta = u'_2 \ell_2 + v'_2 e_2 + \omega_2 \theta'_2 - \delta \quad (5.34)$$

onde:

$\theta_i$  e  $\omega_i$ : rotação em torno do eixo  $o_i z_i$  e empenamentos da seção no ponto médio do lintel

$\ell_i$  e  $e_i$ : distância do ponto médio do lintel aos eixos principais  $o_i x_i y_i z_i$

$u'_i$  e  $v'_i$ : distorções, na cota  $z$ , em função dos deslocamentos dos CGs dos núcleos

Os deslocamentos dos centros de torção dos núcleos, expressos pelas componentes  $u_i$ ,  $v_i$  e  $\theta_i$  em relação ao sistema local paralelo a  $o_i x_i y_i z_i$ , em cada núcleo  $i$  ( $i=1,2$ ), podem ser escritos em função de deslocamentos segundo direções paralelas ao sistema local colocado no lintel. Isso equivale a uma rotação de eixos de valor  $\beta_i$ :

$$u_i = \bar{u}_i \cos \beta_i + \bar{v}_i \sin \beta_i \quad (5.35.a)$$

$$v_i = -\bar{u}_i \sin \beta_i + \bar{v}_i \cos \beta_i \quad (5.35.b)$$

$$\theta_i = \bar{\theta}_i \quad (5.35.c)$$

onde:

$\bar{u}_i$  e  $\bar{v}_i$  ;  $u_i$  e  $v_i$  : deslocam/ de translação dos CT<sub>i</sub> nas direções ( $\bar{o}x_i$  e  $\bar{o}y_i$ ) e ( $o_i x_i$  e  $o_i y_i$ )

Derivando-se uma vez as equações (5.35), em relação à  $z_i$ , e substituindo as equações resultantes na equação (5.34), considerando que o índice  $i$  assume o valor 1 para os deslocamentos do núcleo 1 e o valor 2 para deslocamentos do núcleo 2, resulta:

$$\begin{aligned} -\bar{u}'_1(\ell_1 \cos \beta_1 + e_1 \sin \beta_1) + \bar{v}'_1(e_1 \cos \beta_1 - \ell_1 \sin \beta_1) + \omega_1 \bar{\theta}'_1 + \delta = \\ \bar{u}'_2(\ell_2 \cos \beta_2 - e_2 \sin \beta_2) + \bar{v}'_2(\ell_2 \sin \beta_2 + e_2 \cos \beta_2) + \omega_2 \bar{\theta}'_2 - \delta \end{aligned} \quad (5.36)$$

Substituindo valores de (5.30a) até (5.30.d) na equação (5.36) podemos escrever:

$$-\bar{u}'_1 \cdot \bar{\ell}_1 + \bar{v}'_1 \cdot \bar{e}_1 + \omega_1 \cdot \bar{\theta}'_1 + \delta = \bar{u}'_2 \cdot \bar{\ell}_2 + \bar{v}'_2 \cdot \bar{e}_2 + \omega_2 \cdot \bar{\theta}'_2 - \delta \quad (5.37)$$

Os deslocamentos de translação  $\bar{u}_i$  e  $\bar{v}_i$  dos centros de torção dos núcleos  $i(i=1,2)$ , nas direções paralelas aos eixos  $\bar{o}xyz$ , podem ser escritos em função dos deslocamentos dos diafragmas referenciados ao sistema  $\bar{o}xyz$ . A rotação do diagrama tem o mesmo valor, independente do sistema de referência. Assim podemos escrever:

- **Para o núcleo 1:**

$$\bar{u}_1 = \bar{u} + \bar{y}_1 \bar{\theta} \quad (5.38.a)$$

$$\bar{v}_1 = \bar{v} + \bar{x}_1 \bar{\theta} \quad (5.38.b)$$

$$\bar{\theta}_1 = \bar{\theta} \quad (5.38.c)$$

- **Para o núcleo 2**

$$\bar{u}_2 = \bar{u} + \bar{y}_2 \bar{\theta} \quad (5.38.d)$$

$$\bar{v}_2 = \bar{v} - \bar{x}_2 \bar{\theta} \quad (5.38.e)$$

$$\bar{\theta}_2 = \bar{\theta} \quad (5.38.f)$$

onde:

$\bar{u}$  e  $\bar{v}$ : translações do ponto médio o lintel nas direções de  $\overline{oxyz}$ ;

$\bar{u}_i$  e  $\bar{v}_i$ : translações do CT<sub>i</sub> dos núcleos i(i=1,2) nas direções de  $\overline{oxyz}$ ;

$\bar{\theta}$ ,  $\bar{\theta}_1$  e  $\bar{\theta}_2$ : representações da rotação do diafragma.

Substituindo o valor de  $\delta$ , calculado conforme (5.32.c), levando em conta (5.31) na equação (5.37) resulta:

$$-(\bar{\ell}_1 + \bar{\ell}_2)\bar{u}' - (\bar{e}_2 - \bar{e}_1)\bar{v}' - (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2)\bar{\theta}' = V_L \left( \frac{\ell^3}{12EJ_L} + \frac{\ell}{A_L G} \right) \quad (5.39)$$

onde:

$\bar{\omega}_1$  e  $\bar{\omega}_2$ : parâmetros associados aos empenamentos, calculados em (5.31).

O valor da força cortante  $V_L$  no lintel, de acordo com a equação (5.39), vale:

$$V_L = \frac{1}{f} [(\bar{\ell}_1 + \bar{\ell}_2)\bar{u}' + (\bar{e}_2 - \bar{e}_1)\bar{v}' + (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2)\bar{\theta}'] \quad (5.40.a)$$

onde:

$$f = \frac{\ell^3}{12EJ_L} + \frac{\ell}{A_L G} \quad (5.40.b)$$

O valor de  $V_L$  fornecido pela expressão (5.40), levado nas equações (5.31) permite calcular os valores das parcelas de esforços internos produzidos pelo lintel, expressos no sistema de coordenadas  $\overline{oxyz}$ :

$$q_x = \frac{(\bar{\ell}_1 + \bar{\ell}_2)}{h \cdot f} [(\bar{\ell}_1 + \bar{\ell}_2)\bar{u}' + (\bar{e}_2 - \bar{e}_1)\bar{v}' + (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2)\bar{\theta}'] \quad (5.41.a)$$

$$q_y = \frac{(\bar{e}_2 - \bar{e}_1)}{h \cdot f} [(\bar{\ell}_1 + \bar{\ell}_2)\bar{u}' + (\bar{e}_2 - \bar{e}_1)\bar{v}' + (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2)\bar{\theta}'] \quad (5.41.b)$$

$$q_\theta = \frac{(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2)}{h \cdot f} [(\bar{\ell}_1 + \bar{\ell}_2)\bar{u}' + (\bar{e}_2 - \bar{e}_1)\bar{v}' + (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2)\bar{\theta}'] \quad (5.41.c)$$

Em forma matricial as equações (5.41) são representadas como:

$$\begin{Bmatrix} q_{\bar{x}} \\ q_{\bar{y}} \\ q_{\bar{\theta}} \end{Bmatrix} = \frac{1}{h \cdot f} \begin{bmatrix} (\bar{\ell}_1 + \bar{\ell}_2) & 0 & 0 \\ 0 & (\bar{e}_2 - \bar{e}_1) & 0 \\ 0 & 0 & (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (\bar{\ell}_1 + \bar{\ell}_2) & (\bar{e}_2 - \bar{e}_1) & (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \\ (\bar{\ell}_1 + \bar{\ell}_2) & (\bar{e}_2 - \bar{e}_1) & (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \\ (\bar{\ell}_1 + \bar{\ell}_2) & (\bar{e}_2 - \bar{e}_1) & (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}' \\ \bar{v}' \\ \bar{\theta}' \end{Bmatrix} \quad (5.42.a)$$

ou

$$\{\bar{q}\} = [K_L^*] \{\bar{U}'\} \quad (5.42.b)$$

onde:

$$[K_L^*] = \frac{1}{h \cdot f} \begin{bmatrix} (\bar{\ell}_1 + \bar{\ell}_2) & 0 & 0 \\ 0 & (\bar{e}_2 - \bar{e}_1) & 0 \\ 0 & 0 & (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (\bar{\ell}_1 + \bar{\ell}_2) & (\bar{e}_2 - \bar{e}_1) & (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \\ (\bar{\ell}_1 + \bar{\ell}_2) & (\bar{e}_2 - \bar{e}_1) & (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \\ (\bar{\ell}_1 + \bar{\ell}_2) & (\bar{e}_2 - \bar{e}_1) & (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \end{bmatrix} \quad (5.42.c)$$

e

$$\{\bar{q}\} = \begin{Bmatrix} q_{\bar{x}} \\ q_{\bar{y}} \\ q_{\bar{\theta}} \end{Bmatrix} \quad (5.42.d)$$

$$\{\bar{U}'\}^T = \{\bar{u}' \quad \bar{v}' \quad \bar{\theta}'\} \quad (5.42.e)$$

$$\{\bar{U}\}^T = \{\bar{u} \quad \bar{v} \quad \bar{\theta}\} \quad (5.43)$$

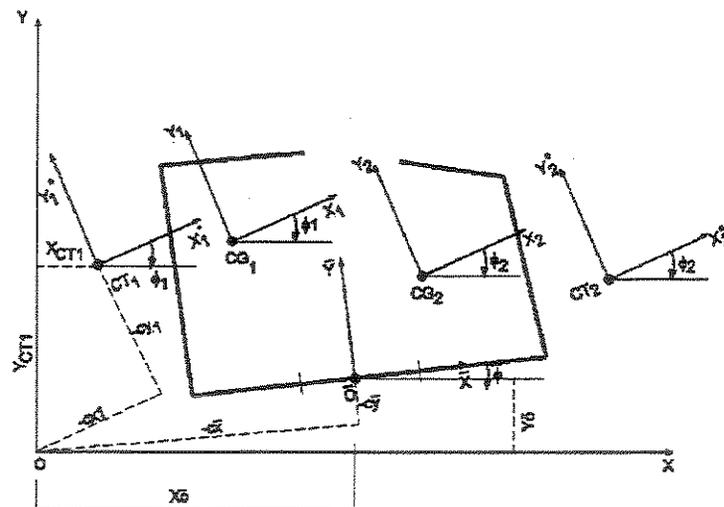


Figura 5.10 – Coordenadas da origem O em relação aos eixos  $o_1^* x_1^* y_1^* z_1^*$  e  $o_2^* x_2^* y_2^* z_2^*$  e  $oxyz$ .

Indicam-se na Fig. 5.10 as coordenadas da origem global  $O$  em relação aos eixos  $o_i^* x_i^* y_i^* z_i^*$  e  $\overline{oxyz}$  (o sistema local de eixos,  $o_i^* x_i^* y_i^* z_i^*$ , é paralelo ao sistema de eixos  $o_i x_i y_i z_i$ , com origem  $o_i^*$  posicionadas na base da estrutura e coincidente com o centro de torção do núcleo  $i$ ). De acordo com as equações (5.5) estas coordenadas podem ser escritas em função das coordenadas do  $CT_i$  ( $X_{CTi}, Y_{CTi}$ ) e das coordenadas da origem  $\bar{o}$  ( $X_{\bar{o}}, Y_{\bar{o}}$ ) em relação aos eixos globais, como:

$$-c_{xi} = X_{CTi} \cos \phi_i + Y_{CTi} \operatorname{sen} \phi_i \quad (5.44.a)$$

$$-c_{yi} = -X_{CTi} \operatorname{sen} \phi_i + Y_{CTi} \cos \phi_i \quad (5.44.b)$$

e

$$-c_{\bar{x}i} = X_{\bar{o}} \cos \phi_i + Y_{\bar{o}} \operatorname{sen} \phi_i \quad (5.44.c)$$

$$-c_{\bar{y}i} = -X_{\bar{o}} \operatorname{sen} \phi_i + Y_{\bar{o}} \cos \phi_i \quad (5.44.d)$$

Os deslocamentos dos diafragmas, relativos aos eixos  $\overline{oxyz}$ , são referenciados aos eixos globais OXYZ através da seguinte expressão:

$$\{\bar{U}\} = [L_{\bar{E}}] \{U\} \quad (5.45)$$

onde:

$\{\bar{U}\}$ : vetor dos deslocamentos dos diafragmas em relação aos eixos  $\overline{oxyz}$ .

$\{U\}$ : vetor dos deslocamentos dos diafragmas em relação ao sistema global de eixos OXYZ.

$$[L_{\bar{E}}] = \begin{bmatrix} \cos \bar{\phi} & \operatorname{sen} \bar{\phi} & -c_{\bar{y}} \\ -\operatorname{sen} \bar{\phi} & \cos \bar{\phi} & c_{\bar{x}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

com  $c_{\bar{x}}$  e  $c_{\bar{y}}$  calculados através das equações (5.44.c) e (5.44.d)

A equação matricial das forças cortantes internas, escrita em relação ao sistema global OXYZ, sem levar em conta o efeito dos lintéis, é dada, conforme a equação (5.12), por:

$$\{V_{int}\} = -[J]\{U''\} + [K_T]\{U'\} \quad (5.47.a)$$

onde:

$$[J] = [L_{E_1}]^T [J_1] [L_{E_1}] + [L_{E_2}]^T [J_2] [L_{E_2}] \quad (5.47.b)$$

$$[K_T] = [K_{T_1}] + [K_{T_2}] \quad (5.47.c)$$

com

$$[L_{E_1}] = \begin{bmatrix} \cos\phi_1 & \text{sen}\phi_1 & -c_{y1} \\ -\text{sen}\phi_1 & \cos\phi_1 & c_{x1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.47.d)$$

$$[L_{E_2}] = \begin{bmatrix} \cos\phi_2 & \text{sen}\phi_2 & -c_{y2} \\ -\text{sen}\phi_2 & \cos\phi_2 & c_{x2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.47.d1)$$

$$[J_1] = \begin{bmatrix} EJ_{y_1} & 0 & 0 \\ 0 & EJ_{x_1} & 0 \\ 0 & 0 & EJ_{\omega_1} \end{bmatrix} \quad (5.47.e)$$

$$[J_2] = \begin{bmatrix} EJ_{y_2} & 0 & 0 \\ 0 & EJ_{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & EJ_{\omega_2} \end{bmatrix} \quad (5.47.f)$$

$$[K_{T_1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GJ_{t_1} \end{bmatrix} \quad (5.47.g)$$

$$[K_{T_2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GJ_{t_2} \end{bmatrix} \quad (5.47.h)$$

As coordenadas  $(cx_1, cy_1)$  e  $(cx_2, cy_2)$  da origem global, em relação aos eixos  $o_1^*x_1^*y_1^*z_1^*$  e  $o_2^*x_2^*y_2^*z_2^*$ , respectivamente, são calculadas através das equações (5.44.a) e (5.44.b).

O vetor  $\{q_L\}$ , relativo aos lintéis, referenciado ao sistema global OXYZ, é expresso por:

$$\{q_L\} = [K_L]\{U'\} \quad (5.48.a)$$

onde:

$$\{q_L\} = \begin{Bmatrix} q_{X,L} \\ q_{Y,L} \\ q_{\theta,L} \end{Bmatrix} \quad (5.48.b)$$

$$[K_L] = [L_{\bar{E}}]^T [K_L^*] [L_{\bar{E}}] \quad (5.48.c)$$

com  $[K_L^*]$  calculada conforme (5.42.a) e  $[L_{\bar{E}}]$  calculada conforme (5.46).

Os esforços internos da estrutura nas direções globais são obtidos somando-se os esforços oriundos dos núcleos e dos lintéis, dados pelas equações (5.47.a) e (5.48.a), ou seja:

$$\{V_{Tint}\} = \{V_{int}\} + \{q_L\} \quad (5.49)$$

onde:

$\{V_{int}\}$ : vetor dos esforços internos oriundos do núcleo, conforme (5.47.a);

$\{q_L\}$ : vetor dos esforços internos oriundos dos lintéis, conforme (5.48.a).

Os esforços externos na estrutura, em uma cota Z, provenientes das cargas verticais e da carga lateral, tomados em relação ao sistema global OXYZ, são obtidos da mesma maneira que na seção 5.1 deste capítulo, de acordo com as equações (5.13) e (5.16). Assim, temos:

$$\{V_{ext}\} = p(H-Z)[L_w]\{U'\} + (H-Z) \begin{Bmatrix} q.a \\ q.b \\ q.c \end{Bmatrix} \quad (5.50.a)$$

onde:

p: carga vertical uniformemente distribuída;

q: carga lateral uniformemente distribuída atuando num plano vertical  $\pi$ ;

H: altura total do edifício;

a,b: versores referentes à direção do plano  $\pi$  em relação aos eixos OX e OY;

c: distância do plano  $\pi$  à origem O do sistema global;

$\{V_{ext}\}$  – é o vetor das forças externas, numa cota Z, nas direções globais.

$$[L_w] = \alpha_1 [L_1] + \alpha_2 [L_2] \quad (5.50.b)$$

com

$$[L_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Y_{CG_1} \\ 0 & 1 & -X_{CG_1} \\ Y_{CG_1} & -X_{CG_1} & I_{o,1}/A_1 \end{bmatrix} \quad (5.50.c)$$

$$[L_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Y_{CG_2} \\ 0 & 1 & -X_{CG_2} \\ Y_{CG_2} & -X_{CG_2} & I_{o,2}/A_2 \end{bmatrix} \quad (5.50.d)$$

sendo:

$I_{o,i}$ : momento de inércia polar da parede  $i$  em relação à origem  $O$  do sistema global;

$A_i$ : área da seção transversal da parede  $i$ ;

$(X_{CGi}, Y_{CGi})$ : coordenadas dos centros de gravidade das paredes  $i$  em relação a  $OXYZ$ .

O equilíbrio da estrutura é mantido igualando-se os esforços internos, calculados conforme (5.49), com os esforços externos, calculados conforme (5.50.a), resultando o seguinte sistema de equações diferenciais de terceira ordem:

$$[J]\{U'''\} + [p(H-Z)][L_w] - ([K_T] + [K_L])\{U'\} = -(H-Z) \begin{Bmatrix} q.a \\ q.b \\ q.b \end{Bmatrix} \quad (5.51)$$

A resolução do sistema de equações diferenciais de terceira ordem mostrada em (5.51) é feita utilizando-se as seguintes condições de contorno:

a) Supondo engastamento na base dos núcleos na base do edifício temos:

$$\{U(0)\} = \{0\} \quad (5.52.a)$$

$$\{U'(0)\} = \{0\} \quad (5.52.b)$$

b) Supondo não existir bimomentos e momentos fletores aplicados no topo dos núcleos

$$\{U''(H)\} = \{0\} \quad (5.52.c)$$

## Capítulo 6

### TÉCNICA DISCRETA

Os processos discretos utilizam a técnica de subdividir a estrutura em elementos mais simples, interligados entre si através dos nós.

A técnica mais adequada para o tratamento discreto do cálculo de edifícios é o processo dos deslocamentos, onde a matriz de rigidez de cada elemento integrante da estrutura tem que ser previamente determinada e contribuirá para a formação da matriz de rigidez global da estrutura. O “*Método dos Elementos Finitos*” é a ferramenta mais utilizada para a aplicação computacional do processo dos deslocamentos.

Com o passar do tempo e o avanço das técnicas computacionais, inúmeros modelos de elementos finitos foram sendo desenvolvidos e aperfeiçoados para que, da melhor forma possível, pudessem representar significativamente o comportamento dos elementos estruturais que compõe a estrutura como um todo.

Não iremos descrever aqui como calcular estas matrizes de rigidez e nem o processo detalhado da utilização pelo método dos elementos finitos.

#### 6.1 Algumas propostas para a simulação discreta de edifícios

Um dos trabalhos consultados, que trata da simulação discreta de edifícios altos, que mais chamou a atenção, foi a recente tese de doutorado defendida por SOUSA JUNIOR [33]. Na sua tese aquele autor apresenta uma interessante revisão bibliográfica para a análise de edifícios. Dentre as referências citadas têm-se um levantamento das

teses e dissertações desenvolvidas no Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, da USP.

No presente trabalho procuramos tomar contacto com boa parte das obras citadas por SOUSA JUNIOR [33], em especial as que trataram da simulação discreta de edifícios – algumas não foram possíveis de se conseguir. Das citações, parte dos trabalhos que utilizaram técnicas discretas, adotam hipóteses de simulação em primeira ordem. SILVA [25] desenvolveu um estudo considerando o efeito  $P-\Delta$ . MORI [21] introduziu a não linearidade geométrica no estudo de estruturas tridimensionais de edifícios altos contendo núcleos estruturais.

Na Faculdade de Engenharia Civil da Unicamp, os trabalhos que trataram da análise de edifícios pela técnica discreta foram os de YAGUI [46], SERRA [31] e GUILARD[10].

### 6.1.1 Modelo estrutural proposto por Edgard Sousa Junior

Nas simulações propostas por SOUSA JUNIOR [33], usando a técnica discreta, no processo para analisar um edifício alto composto por lajes, núcleos estruturais, pilares e vigas, foram adotados os seguintes elementos estruturais:

- Lajes – modeladas com elementos finitos triangulares / quadrilaterais de placas. Utilizou-se um elemento finito do tipo DKT para tal simulação.
- Vigas – elementos de barras com nós de extremidade, com os graus de liberdade do elemento de grelha, ou seja, três graus de liberdade por nó: duas rotações e uma translação vertical.
- Pilares – elementos de barras dispostas na vertical, com dois nós de extremidade, com 6 graus de liberdade por nó: 3 translações e 3 rotações em cada nó
- Barras de núcleo – elementos de barras, dispostas na vertical, com dois nós de extremidade, com 7 graus de liberdade por nó: 3 translações, 3 rotações e mais o empenamento.

A Fig. 6.1, extraída de SOUSA JUNIOR [33], ilustra os elementos estruturais utilizados por aquele autor. O problema é analisado pelo Processo dos Deslocamentos.

A matriz de rigidez global da estrutura é formada por contribuição das matrizes de rigidez dos elementos. Como os pontos nodais dos diversos tipos de elementos não têm os mesmos graus de liberdade, foi necessário fazer um cuidadoso acoplamento entre os elementos, para compatibilização dos deslocamentos correspondentes.

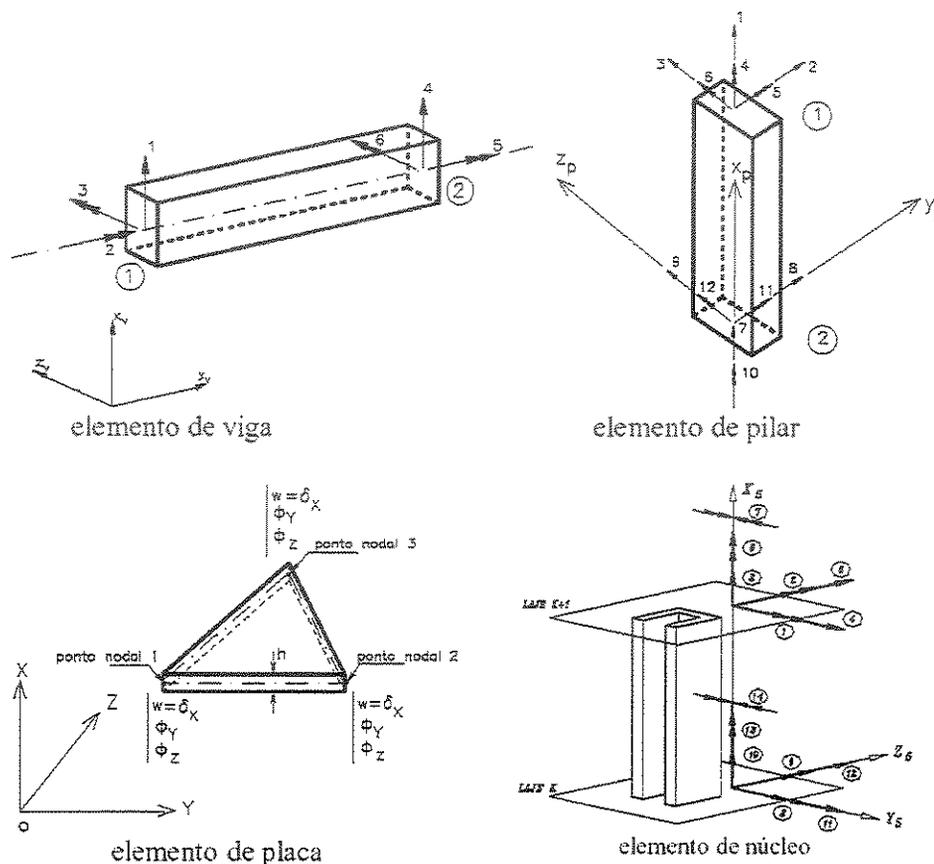


Figura 6.1 – Elementos estruturais utilizados por Sousa Junior.  
(figura extraída de SOUSA JUNIOR [33])

No texto de sua tese o autor mostra, de forma bastante didática, as características dos acoplamentos efetuados. Os graus de liberdade dos pilares que coincidem com os graus de liberdade das vigas foram classificados como independentes. Os demais foram classificados como dependentes e foram calculados a partir do movimento das lajes.

O elemento estrutural barra de núcleo foi dividido em duas partes: uma parte chamada de “Perfil do Núcleo” e outra de “Barra do Núcleo”. O Perfil do Núcleo é constituído dos nós de placa que coincidem com o esqueleto da seção transversal do núcleo. A Barra de Núcleo é definida por dois pontos nodais tomados na intersecção das lajes superior e inferior em cada andar com um eixo vertical pelo centro de torção da seção transversal do núcleo. Os graus de liberdade das Barras de Núcleo que coincidem

com os graus de liberdade de vigas e os graus de liberdade referentes aos empenamentos são ditos independentes e os demais são dependentes.

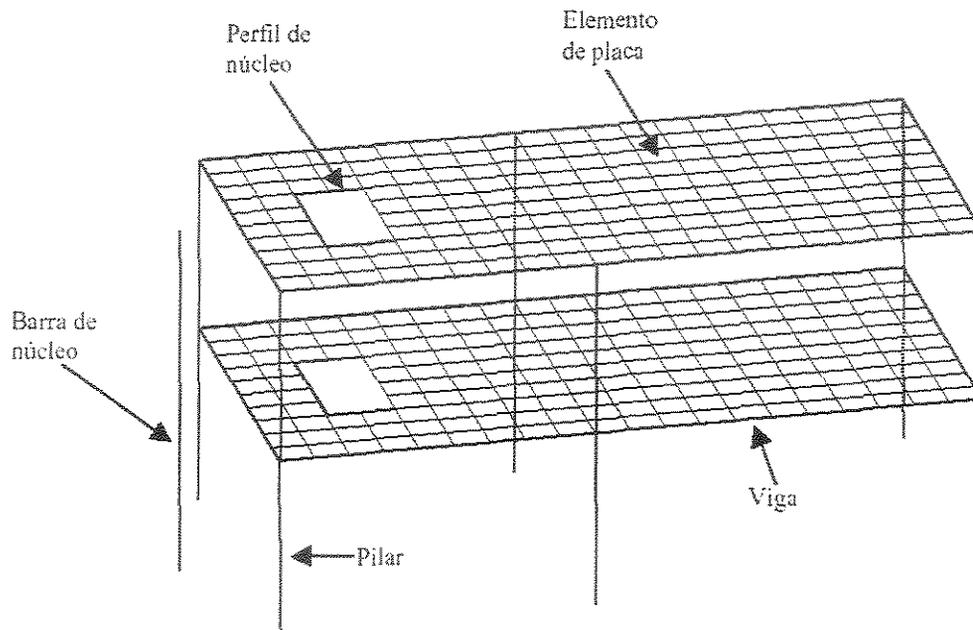


Figura 6.2 – Elementos Estruturais.

(figura extraída de SOUSA JUNIOR [33])

Os pontos nodais de um pavimento foram classificados por Sousa Junior em dois tipos: externos e internos. Os pontos externos são pertencentes aos elementos de pilar ou pertencentes também ao esqueleto do núcleo. Os demais são pontos internos. Foi feita uma condensação estática, onde os elementos de viga e de placa são eliminados e as suas respectivas rigidezes foram distribuídas pelos pontos nodais externos. Melhores detalhes podem ser encontrados na tese daquele autor.

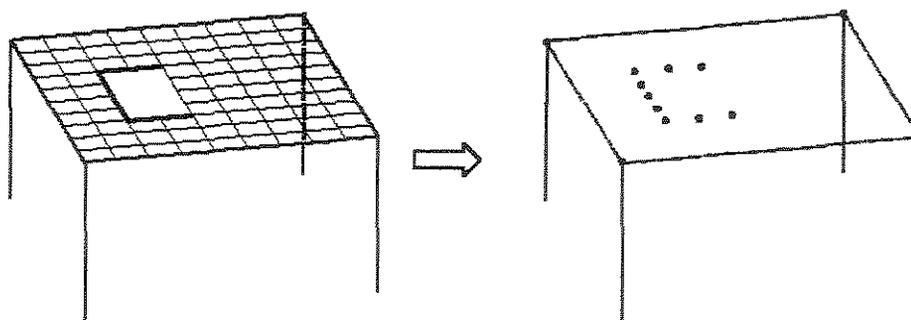


Figura 6.3 – Condensação estática dos elementos de placa e viga.

(figura extraída de SOUSA JUNIOR [33])

Com base na formulação de sua proposta, usando técnicas de subestruturação, o autor elaborou um programa computacional para cálculo de deslocamentos em edifícios altos.

Para a validação dos resultados obtidos com o seu programa aquele autor comparou resultados calculados com o programa Ansys, e resultados anteriormente obtidos por MATIAS JUNIOR [20] e por SILVA [32].

Na simulação, usando o programa Ansys, as vigas, pilares, lajes e paredes dos núcleos, foram utilizados os seguintes elementos finitos da biblioteca interna daquele programa:

- Lajes e paredes dos núcleos: elemento finito SHELL63;
- Elementos de barras: elemento finito BEAM4.

## 6.2 Modelo discreto utilizado nesta dissertação

Como comentado na Introdução, no presente trabalho optou-se pela utilização do software comercial SAP2000<sup>®</sup> para a simulação discreta de edifícios com núcleos estruturais.

A simulação discreta dos edifícios tridimensionais foi feita utilizando-se dois tipos de elementos finitos disponíveis na biblioteca interna do programa SAP2000<sup>®</sup>:

- **Elementos FRAME** – utilizados para a simulação de vigas, pilares e pórticos
- **Elementos SHELL** – utilizados para simulação de paredes, núcleos estruturais e lajes. Esse tipo de elemento, no programa SAP2000<sup>®</sup> pode ser subdividido em três sub-tipos de elementos:
  - **Elementos MEMBRANE** - foram utilizados para a simulação da laje como diafragma rígido, para efeito de comparação de resultados com os obtidos pela técnica do meio contínuo.
  - **Elementos PLATE** – foram utilizados para a simulação da laje como placa, para efeito de comparação com outros autores.
  - **Elementos SHELL** – foram utilizados para a simulação das paredes e núcleos e para algumas simulações das lajes

Uma das grandes potencialidades do software SAP2000<sup>®</sup> é a sua extrema facilidade de uso, com inúmeros recursos de edição gráfica, que facilitam enormemente a entrada de dados. Apresenta também saída de resultados muito eficiente, em forma de tabelas ou na forma gráfica.

### **6.2.1 Os Elementos de Barra (FRAME) no programa SAP2000<sup>®</sup>**

O elemento de barra é usado para simular o comportamento de vigas e colunas de estruturas planas e tridimensionais.

Algumas estruturas que podem ser modeladas com este elemento incluem:

- Pórticos tridimensionais;
- Treliças tridimensionais;
- Barras Planas;
- Grelhas Planas;
- Treliças Planas;

Um elemento do tipo FRAME é modelado como uma barra reta, conectada por dois nós, um em cada extremidade. O carregamento pode ser aplicado nos nós da estrutura ou ao longo dos elementos do tipo FRAME. O programa pode incluir automaticamente, a critério do usuário, o efeito do peso próprio. As cargas nos elementos podem ser distribuídas, ou concentradas, num total de até quatro cargas concentradas por elemento.

#### **6.2.1.a - Conectividade dos nós**

Um elemento de barra é representado por uma linha que conecta dois nós *i* e *j*. Os dois nós não podem compartilhar da mesma localização no espaço. As extremidades do elemento barra (FRAME) são conectadas a pontos do espaço denominados nós (JOINTS).

### 6.2.1.b - Graus de liberdade

Cada nó de extremidade de um elemento FRAME tem seis graus de liberdade associados: 3 translações e 3 rotações graus de liberdade de rotação.

### 6.2.1.c - Sistema de coordenadas locais

Cada elemento de barra tem seu próprio sistema de coordenada local, onde se definem propriedades da seção, cargas e onde são fornecidos os resultados. No elemento são definidos três eixos do sistema local: eixos 1, 2 e 3. O primeiro eixo é dirigido ao longo do comprimento do elemento; com os dois outros eixos no plano perpendicular ao elemento com uma orientação específica. É importante que se entenda a definição do elemento e do sistema de coordenada local 1-2-3 e suas relações com o sistema de coordenadas global X-Y-Z. Ambos os sistemas de coordenadas são destros.

Na maioria das estruturas a definição do sistema de coordenada local é extremamente simples.

#### **Eixo local 1**

Eixo local 1: sempre é o eixo longitudinal do elemento, na direção positiva que é dirigida do nó inicial I para o nó final J.

#### **Orientação Padrão dos eixos locais 2 e 3**

A orientação padrão dos eixos locais 2 e 3 é determinada pela relação entre o 1 eixo local e o eixo de Z global. Para a situação padrão temos as seguintes constatações:

- O plano local 1-2 é vertical;
- O eixo local 2 está inicialmente sempre na mesma direção do (+Z) a menos que o elemento seja vertical, no qual o eixo local 2 é levado para estar horizontal ao longo da direção global (+X)
- O eixo local 3 é horizontal

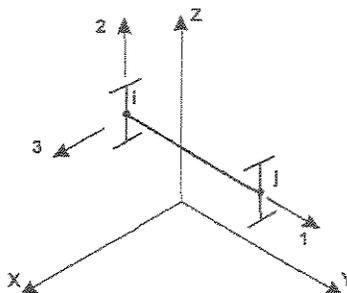


Figura 6.4 – Situação padrão do elemento do FRAME no SAP2000®

Esta situação padrão pode ser modificada indicando um ângulo de giro na peça. Algumas das situações são expostas na Fig. 6.5.

É considerado que um elemento é vertical se o seno do ângulo entre o eixo local 1 e o eixo de Z é menor que  $10^{-3}$ .

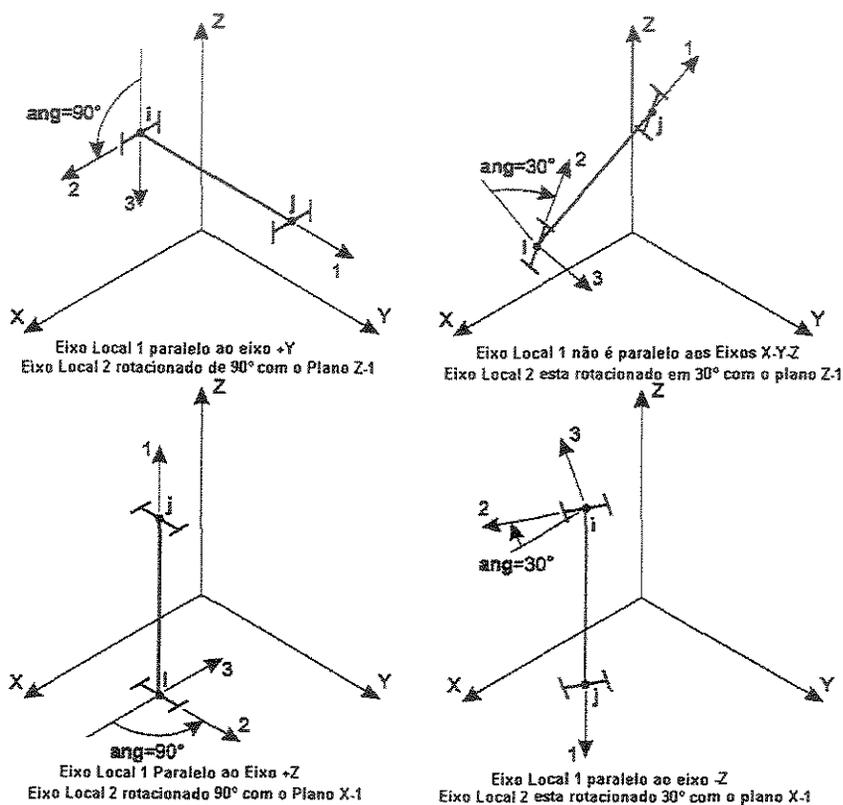


Figura 6.5 Orientações para o sistema de do elemento FRAME

#### 6.2.1.d - Propriedades da seção

Numa seção transversal de barra podem ser definidos conjuntos de propriedades geométricas que descrevem o corte transversal de um ou mais elementos de barra.

Podem ser definidas seções independentemente dos elementos de barra, e nomeadas aos elementos através da geometria e dos materiais.

São definidas propriedades da seção com respeito ao sistema de coordenadas locais de um elemento de barra como segue:

- A direção 1 está ao longo do eixo do elemento, correspondendo ao eixo normal à seção e passa pela interseção dos dois eixos (2 e 3) planos à seção;
- As direções 2 e 3 são paralelas ao plano da seção. Normalmente a direção 2 é disposta ao longo da dimensão principal (altura) da seção, e a direção 3 ao longo de sua dimensão secundária (largura).

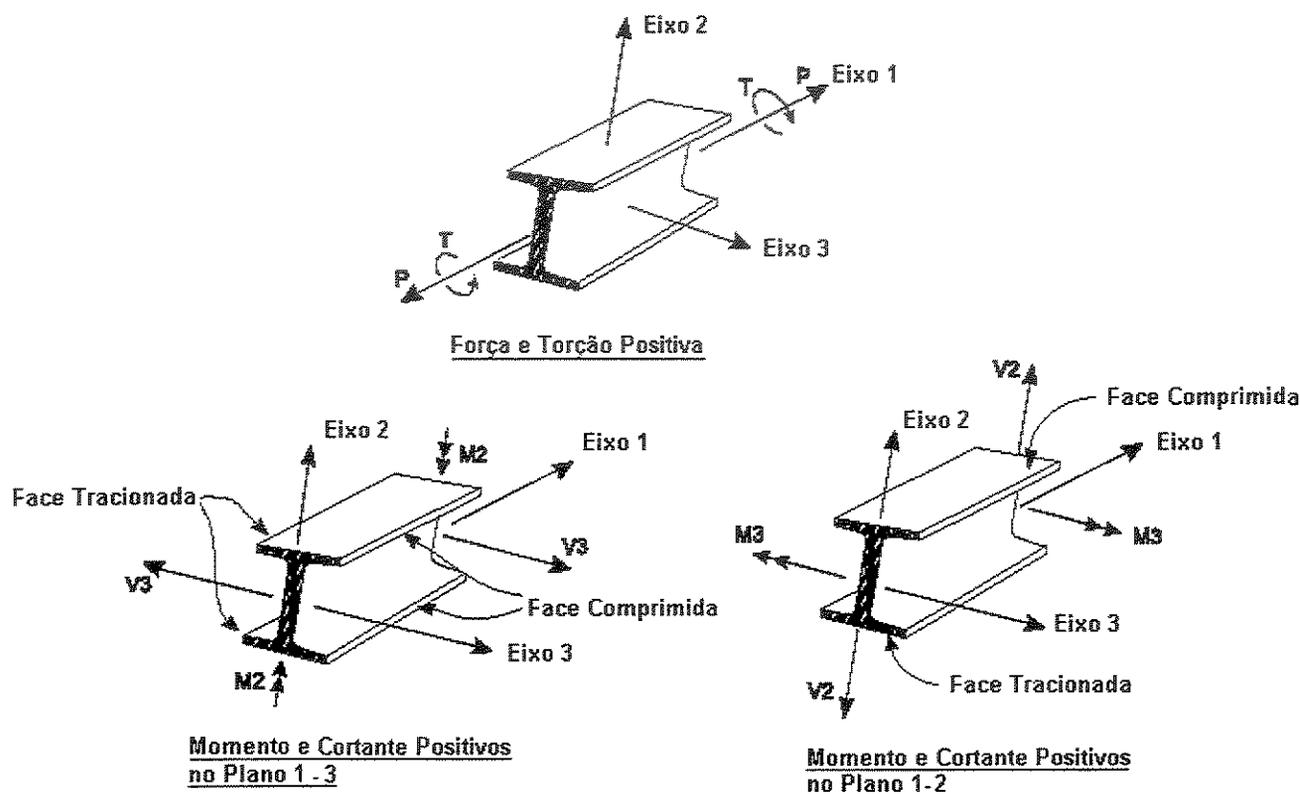


Figura 6.6 – Representação das direções e sentidos positivos dos esforços

### 6.2.2 O Elemento de Casca

O elemento SHELL é usado para simular cascas, membranas e placas em estruturas tridimensionais. Este elemento pode ter uma formulação para três ou quatro nós, podendo combinar efeitos de membrana ou comportamento de flexão de placas.

O comportamento de membrana usa uma formulação isoparamétrica que inclui translação no plano de rigidez e juntamente com um componente de rigidez rotacional na direção normal ao plano do elemento.

O comportamento de flexão das placas inclui dois modos, fora do plano, placas com componentes de rigidez rotacional e um componente de rigidez translacional na direção normal ao plano do elemento.

Por definição do programa SAP2000®, para uma placa espessa é usada a formulação de (Mindlin/Reissner) que inclui os efeitos de deformação por cisalhamento transversal. Opcionalmente, é possível escolher a formulação para placas finas com teoria de Kirchhoff, que negligencia a deformação por cisalhamento transversal.

As estruturas que podem ser modeladas com estes elementos incluem:

- Cascas tridimensionais, como tanques e cúpulas;
- Estruturas de placas, como lajes de piso;
- Membranas estruturais.

Para cada elemento de casca na estrutura, você pode escolher o modelo como sendo membrana pura, placa pura ou o comportamento de casca. Geralmente é recomendado que você use o comportamento de casca a menos que a estrutura inteira seja plana.

Cada elemento de casca tem seu próprio sistema de coordenada local podendo definir propriedades, materiais e cargas e saídas de resultados. Cada elemento pode ser carregado por forças gravitacionais ou ações distribuídas em qualquer direção.

### 6.2.2.a – Conectividade

Cada elemento de casca pode ter uma das formas seguintes, como mostrado na Fig. 6.7:

- Quadrilátero, definida pelos quatro nós  $j_1$ ,  $j_2$ ,  $j_3$ , e  $j_4$ ;
- Triangular, definida pelos três nós  $j_1$ ,  $j_2$ , e  $j_3$ .

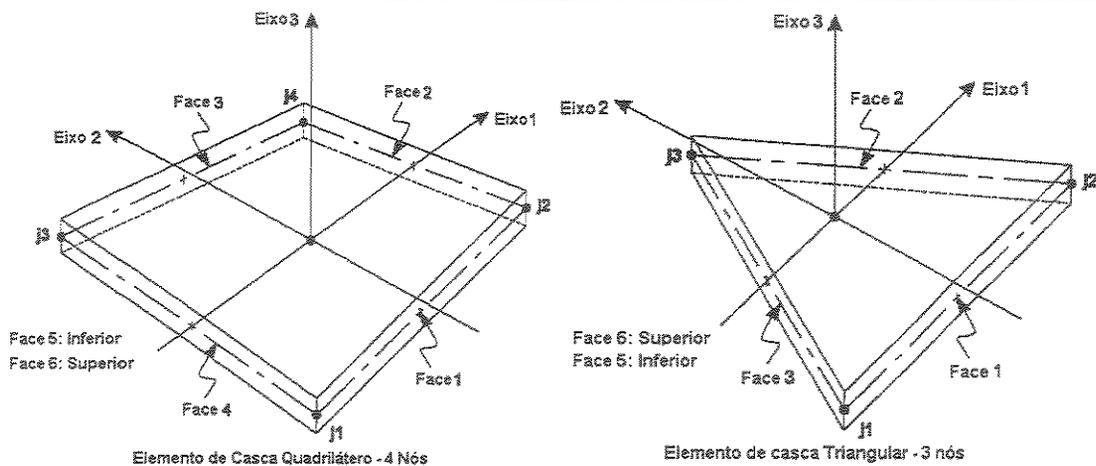


Figura 6.7 - Elemento de casca, pontos de conexão e definições de face.

A formulação quadrilátera normalmente é a mais precisa das duas. O elemento triangular só é recomendado para transições. Para escolher as localizações dos nós deve-se conhecer as seguintes condições de geometria:

- O ângulo interior a cada canto deve ser menor que  $180^\circ$ . Melhor resultado para o quadrilátero será obtido quando estes ângulos estão próximos  $90^\circ$ , ou pelo menos entre  $45^\circ$  a  $135^\circ$ .
- A melhor relação de malha geométrica (relação de aspecto) de uma malha de elementos finitos para um elemento de casca pode ser definida fazendo-se as seguintes considerações:
  - § Para o triângulo, é a relação do lado mais longo e o menor lado.
  - § Para o quadrilátero, é a relação da distância mais longa entre os pontos centrais de lados opostos e a menor distância entre dois pontos.

São obtidos melhores resultados para relações de aspecto próximas à unidade, ou pelo menos menores que quatro. A relação de aspecto não deverá exceder dez. Para o quadrilátero, se as quatro articulações não forem co-planares, uma pequena torção aparecerá no elemento e será considerada pelo programa SAP2000®.

O ângulo entre a normal aos cantos fornecem uma noção do grau de torção do elemento não co-planar. A normal a um canto é a perpendicular aos dois lados que se encontram no canto. São obtidos melhores resultados se o ângulo maior entre qualquer par de cantos é menor que  $30^\circ$ . Este ângulo não deverá exceder  $45^\circ$ .

Estas condições normalmente podem ser conhecidas e melhoradas com o refinamento adequado da malha.

### 6.2.2.b – Graus de liberdade

O uso do elemento SHELL sempre ativa todos os seis graus de liberdade em cada um dos nós dos elementos. Quando o elemento é usado como uma membrana pura, é necessário assegurar que sejam providas as restrições aos apoios e aos graus de liberdade para a normal e para as rotações de flexão.

Quando o elemento SHELL é usado como uma placa pura, é necessário restringir a liberdade de translações no plano e a rotação sobre a normal.

O uso do comportamento de casca (membrana mais placa) é recomendado para estruturas tridimensionais.

### 6.2.2.c – Sistema de coordenadas locais

Cada elemento de casca tem seu próprio sistema de coordenada local, onde são definidas as propriedades dos materiais, cargas e saída de resultados. São denotados os eixos deste sistema local 1, 2 e 3. Os dois primeiros eixos no plano do elemento com uma orientação que você especifica; o terceiro eixo é normal.

É importante que se entenda claramente a definição do sistema de coordenada local 1-2-3 do elemento e sua relação para o sistema global de coordenada X-Y-Z. Ambos os sistemas são sistemas de coordenadas destros. Deve-se definir sistemas locais para simplificar a introdução de dados e a interpretação dos resultados.

Na maioria das estruturas a definição do sistema de coordenada local é extremamente simples e o programa possui uma orientação padrão para o elemento de casca.

#### Eixo Normal 3

O eixo local 3 sempre é normal ao plano do elemento de casca. Este eixo é dirigido para o observador, quando o caminho  $j_1-j_2-j_3$  aparece no sentido horário. Para

elementos quadriláteros, o plano do elemento é definido pelos vetores que conectam os pontos centrais dos dois pares de lados opostos.

### Orientação padrão

A orientação padrão dos eixos locais 1 e 2 é determinada pela relação entre o eixo local 3 e o eixo global Z:

- O plano local 3-2 é utilizado para ser vertical, comparado ao eixo de Z;
- O eixo local 2 é posto no mesmo sentido do eixo (+Z) a menos que o elemento esteja na horizontal no qual o eixo local 2 esta na horizontal ao longo da direção de +Y global;
- O 1 eixo local sempre está horizontal, normalmente no plano de X-Y.

É considerado que o elemento está na horizontal se o seno do ângulo entre o eixo local 3 e o eixo de Z é menor que  $10^{-3}$ .

O eixo local 2 faz o mesmo ângulo com o eixo vertical como o eixo local 3 faz com o plano horizontal. Isto significa que o eixo local 2 aponta verticalmente para cima para elementos verticais.

#### 6.2.2.d – Coordenadas angulares

O elemento casca possui uma coordenada ângulo, **ang**, que é usada para definir orientações do elemento que difere da orientação padrão. É o ângulo pelo qual os eixos locais 1 e 2 são girados sobre eixo local 3 positivo na orientação padrão do programa SAP2000. A rotação para um valor positivo de **ang** aparece como sendo horária quando o eixo local 3 está apontando para o observador.

Para elementos horizontais, **ang** é o ângulo entre o eixo local 2 e o eixo +Y horizontal. Caso contrário, **ang** é o ângulo entre o eixo local 2 e o plano vertical que contém o eixo local 3. Veja Fig. 6.8 para exemplos.

#### 6.2.2.e – Propriedades de seção

Numa seção de casca tem um conjunto propriedades como material e geometrias que descrevem a corte transversal de um ou mais elementos de casca. São definidas seções independentemente dos elementos de casca e nomeadas aos elementos.

#### 6.2.2.f – Tipo de seção do elemento SHELL

Os tipos de seções podem ser especificados pelo tipo de parâmetro, que determina o tipo de comportamento dos elementos de casca correspondentes:

- **Tipo MEMBRANA:** comportamento de membrana pura; só podem ser suportados as forças no plano e o momento normal;
- **Tipo PLACA:** comportamento de placa pura; podem ser suportado só os momentos fletores e a força transversal;
- **Tipo CASCA:** comportamento de casca, uma combinação do comportamento de membrana e de placa; podem ser avaliadas todas as forças e momentos. Geralmente é recomendado que você use o comportamento de casca a menos que a estrutura inteira seja plana e esteja adequadamente contida.

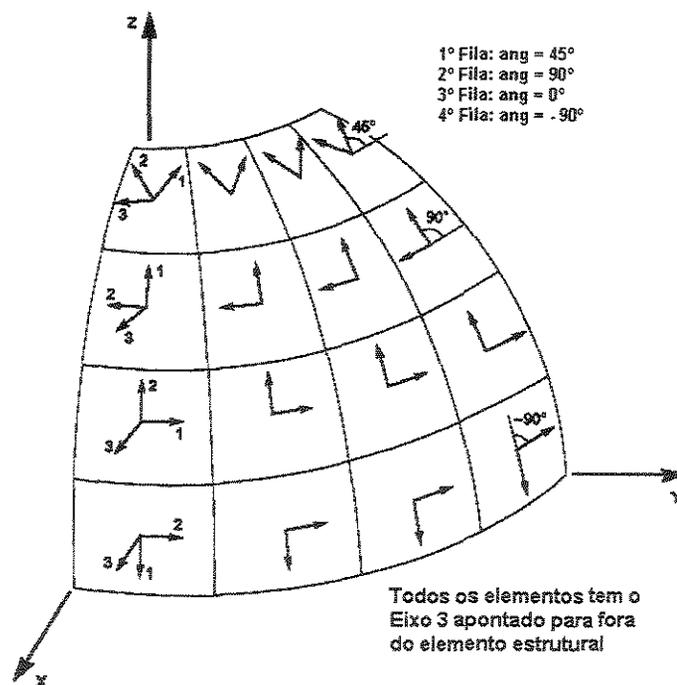


Figura 6.8 - Elemento de casca, com a coordenada angular respeitando a orientação padrão.

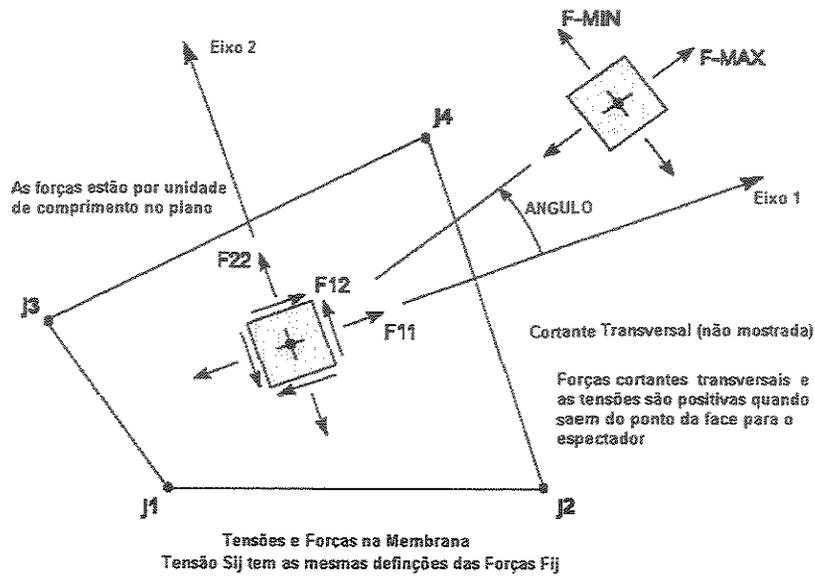


Figura 6.9 – Descrição e posicionamento de forças e tensões.

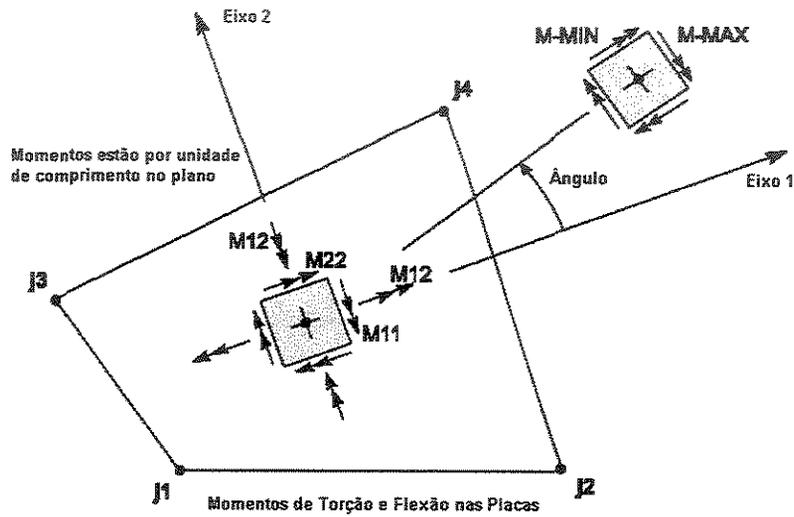


Figura 6.10 – Descrição e posicionamento dos momentos.

## Capítulo 7

### EXEMPLOS

Foram elaborados 4 programas de computador para auxiliar na análise de edifícios altos pela técnica do meio contínuo.

São resumidas, a seguir, as equações diferenciais para cada estrutura analisada nos capítulos 2 ao 5, referentes à técnica do meio contínuo.

#### a) ASSOCIAÇÕES PLANAS DE PAREDES E PÓRTICOS

- Painel Parede:

$$j_w u_w''' + p_w (H - z) u_w' = -q_w (H - z)$$

- Painel Pórtico:

$$[s_f - \alpha_f p_f (H - z)] u_f' = q_f (H - z)$$

- Painel Geral:

- Associação de parede e pórtico por barras bi-articuladas.

$$j_g u_g''' - [s_g - \alpha p (H - z)] u' = -q (H - z)$$

- Associação da Parede e Pórtico através de lintéis

$$j_g u_g''' - [s_g - \alpha_w p (H - z)] u' = -q (H - z)$$

- Associação de paredes por lintéis

$$j_g u_g''' - [s_g - \alpha_w p (H - z)] u' = -q (H - z)$$

## b) NÚCLEOS

- Núcleo de seção aberta sem contraventamento

$$[J]\{U'''\} + (p(H-z)[L_T] - [K_T])\{U'\} = -(H-z)\{V_q\}$$

- Núcleo de seção aberta contraventado por lintéis

$$[J]\{U'''\} + \{p(H-z)[L_T] - ([K_T] + [K_L])\}\{U'\} = -(H-z)\{V_q\}$$

## c) ASSOCIAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE PAREDES E PÓRTICOS

$$[J]\{U'''\} + (p(H-z)[L_{ST}] - ([K_T] + [S]))\{U'\} = -(H-z)\{V_q\}$$

## d) EDIFÍCIOS COM DOIS NÚCLEOS

- Núcleos sem contraventamento

$$[J]\{U'''\} + (p(H-Z)[L_W] - [K_T])\{U'\} = -(H-Z)\{V_q\}$$

- Núcleos contraventados por lintéis

$$[J]\{U'''\} + \{p(H-Z)[L_W] - ([K_T] + [K_L])\}\{U'\} = -(H-Z) \begin{Bmatrix} q.a \\ q.b \\ q.b \end{Bmatrix}$$

As equações diferenciais indicadas acima, para os problemas classificados como b), c) ou d), na verdade são um sistema de equações diferenciais de terceira ordem, nas variáveis deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $\theta$ . Elas estão escritas compactamente de forma matricial, usando o vetor  $\{U\}$  para representar os deslocamentos:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix}$$

Podemos generalizar todas estas equações em uma única equação diferencial matricial global de terceira ordem, com a seguinte forma:

$$[J]\{U'''\} + [G]\{U'\} = -(H - Z)\{V_q\}$$

onde

$$\{V_q\} = \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_\theta \end{Bmatrix} \text{ valores das forças externas nas direções } x, y \text{ e valor do momento externo}$$

$$[G] = p(H - Z)[L_G] - ([K_T] + [K_G])$$

$[L_G]$ ,  $[K_T]$  e  $[K_G]$ , matrizes variando para cada tipo de estrutura que está sendo analisada, de acordo com o indicado nos capítulos 2 a 5.

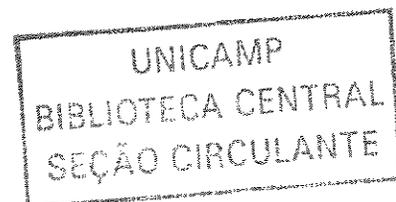
Deste modo foi elaborado um programa que resolvesse o sistema de equação diferencial global, tornando possível analisar as várias estruturas propostas.

- **Newton1- Programa para cálculo de características geométricas em seção delgada aberta**

O programa automatiza os cálculos de determinação das principais características geométricas de uma seção delgada aberta composta de trechos retos.

As grandezas calculadas pelo programa são as seguintes:

- Centro de gravidade;
- Momentos de inércia à flexão em relação a eixos cartesianos x e y;
- Momentos principais de inércia;
- Área setorial em relação a um polo qualquer;
- Centro de torção;
- Área setorial principal para todos os nós da seção;
- Momento setorial de inércia;
- Momento polar



- **Newton2 - Programa para solução do sistema de equações diferenciais de terceira ordem pelo método das diferenças finitas.**

O segundo programa foi elaborado para a solução de um sistema das equações diferenciais e obtenção dos deslocamentos da estrutura, pelo Método das Diferenças Finitas. Foi utilizado um esquema semelhante ao utilizado por XAVIER [48].

O programa calcula os deslocamentos ao longo da altura  $Z$ , segundo um sistema global de eixos  $OXYZ$  adotado pelo usuário. Com a hipótese do método do meio elástico contínuo, em que as lajes são consideradas diafragmas rígidos em seus planos, sendo juntamente com os lintéis consideradas uniformemente distribuídas ao longo da altura. Uma vez encontrados os deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $\theta$ , de pontos de coordenadas  $(0,0,Z)$  em relação ao sistema global, podemos somar um deslocamento de corpo rígido e encontrar deslocamentos em qualquer outro ponto de cota  $Z$ .

- **Newton 3 - Programa para a solução de sistema de equações diferenciais de terceira ordem pelo método de Runge – Kutta de quarta ordem**

Por sugestão da banca examinadora do exame de qualificação foi elaborado um programa para a solução do sistema de equações diferenciais de terceira ordem usando o método de Runge – Kutta de quarta ordem. O programa mostrou-se mais rápido do que o programa elaborado baseado em diferenças finitas. A solução pareceu melhor aproximada pela natureza do tratamento das condições de contorno.

- **Newton 4 – Programa para o cálculo de deslocamentos e esforços em pontos da estrutura, a partir dos deslocamentos e suas derivadas.**

Baseado em geometria dos pequenos deslocamentos, conhecido os deslocamentos do nó mestre e rotação do piso do andar (considerado como diafragma rígido) o programa calcula os deslocamentos num dado ponto da estrutura no painel pórtico ou parede Usando os deslocamentos de 5 pontos sucessivos ao longo de uma linha vertical, ao longo dos andares, calcula as derivadas dos deslocamentos no ponto em análise, usando uma

aproximação por diferenças finitas. A partir destes valores foi possível calcular os esforços em um determinado ponto da estrutura.

Para o cálculo de deslocamentos e esforços pela técnica discreta, foi utilizado o programa SAP2000®. As paredes e núcleos foram modelados como cascas finas e as lajes foram modeladas com uma das seguintes hipóteses: como membranas muito rígidas, procurando simular os diafragmas utilizados na técnica do contínuo; como placas espessas e como cascas.

Apresentam-se alguns exemplos para comparação de resultados obtidos pelas duas técnicas, os quais foram comparados entre si e comparados também com resultados obtidos nas referências bibliográficas indicadas.

Nos resultados apresentados a indicação NEWTON refere-se aos valores obtidos com a formulação deduzida pela técnica do contínuo.

## 7.1 Estruturas Testes

### 7.1.1 Estrutura Teste 01

Este exemplo mostra a funcionalidade do programa elaborado para o cálculo das características geométricas de um perfil delgado aberto. Admitamos que a unidade de comprimento seja centímetro.

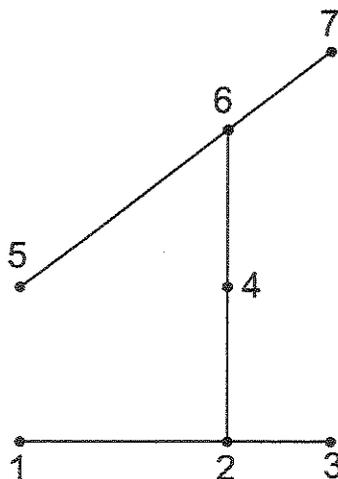


Figura 7.1 Seção delgada aberta.

Os dados geométricos que caracterizam o perfil são fornecidos para o programa através de um arquivo ASCII de entrada de dados. Os resultados podem ser mostrados

diretamente na tela do computador ou também podem ser armazenados num arquivo de saída em formato ASCII.

O perfil analisado tem todas as paredes com espessura  $t=0.5\text{cm}$ . Os dados da seção, cuja forma está mostrada na Fig. 7.1, estão na cópia do arquivo de saída transcrita abaixo. O programa não faz conversões de unidades. As respostas saem em unidades compatíveis com os dados de entrada. Para o exemplo as dimensões de comprimento estão todas em centímetros.

```

Numero de nos=          7

** Coordenadas dos nos do esqueleto
No      Xglobal      Yglobal
1       00.000      00.000
2       08.000      00.000
3       12.000      00.000
4       08.000      06.000
5       00.000      06.000
6       08.000      12.000
7       12.000      15.000

Polo arbitrario P
x=08.000
y=06.000

Origem arbitraria OS
OS=04

** Dados dos ramos
Numero de Ramos= 6
Ramo    Inicio    Final    t      L      Cosseno x    Cosseno y
1       2.000    1.000    0.500  08.000  -01.000     00.000
2       2.000    3.000    0.500  04.000  01.000     00.000
3       4.000    2.000    0.500  06.000  00.000     -01.000
4       4.000    6.000    0.500  06.000  00.000     01.000
5       6.000    5.000    0.500  10.000  -00.800     -00.600
6       6.000    7.000    0.500  05.000  00.800     00.600

Área Total= 019.500

Constante de Torção Jt
Jt= 001.625

** Coordenadas do Centro de gravidade
Xglobal= 06.615      Yglobal= 05.885

** Momentos de inercia nos eixos centrais de inércia
IxxpS= 504.98099      CosX= 00.97847      CosY= -00.20641
Iyy pS= 164.28103      CosX= 00.20641      CosY= 00.97847

** Coordenadas dos nos em relação aos Eixos Principais
Eixos Globais      Eixos principais
No      Xglobal      Yglobal      Xprinc      Yprinc
1       00.000      00.000      -05.258     -07.123
2       08.000      00.000      02.569      -05.472
3       12.000      00.000      06.483      -04.646
4       08.000      06.000      01.331      00.399
5       00.000      06.000      -06.497     -01.253
6       08.000      12.000      00.093      06.269
7       12.000      15.000      03.387      10.031

** Diagrama de W em relação ao pólo arbitrário P (08.000,06.000)
Ramo    No Inicio    Winicio    No Final    Wfinal
1       02          00.00000    01          48.00000
2       02          00.00000    03          -24.00000
3       04          00.00000    02          00.00000

```

4	04	00.00000	06	00.00000
5	06	00.00000	05	-48.00000
6	06	00.00000	07	24.00000

\*\* Coordenadas do Centro de Torção  
 xD(eixos principais)= 02.123  
 yD(eixos principais)= 01.653

xD(eixos cartesianos p/ C.G.)= 02.419  
 yD(eixos cartesianos p/ C.G.)= 01.179

xD(eixos cartesianos globais)= 09.034  
 yD(eixos cartesianos globais)= 07.064

\*\* Diagrama de W em relação ao Centro de Torção D( 9.03431020453966 , 7.06404357581409 )

Ramo	No Início	Winicio	No Final	Wfinal
1	02	-06.20586	01	50.30649
2	02	-06.20586	03	-34.46204
3	04	00.00000	02	-06.20586
4	04	00.00000	06	06.20586
5	06	06.20586	05	-39.48765
6	06	06.20586	07	29.05262

\*\* Diagrama de W PRINCIPAL

Correção C=0.43087

Ramo	No Início	Winicio	No Final	Wfinal
1	02	-06.63673	01	49.87562
2	02	-06.63673	03	-34.89291
3	04	-00.43087	02	-06.63673
4	04	-00.43087	06	05.77499
5	06	05.77499	05	-39.91852
6	06	05.77499	07	28.62175

Teste: Integral(Wprinc.da)= 0.00000

\*\* Momento de inércia Setorial  
 Jw= 7183.10039

## 7.1.2 Estrutura Teste 02

**Parede isolada** – material com módulo de elasticidade longitudinal  $E = 2,0 \times 10^6$  tf/m<sup>2</sup>. Parede com 60m de altura, seção retangular 1,5m x 0,2 m, com carregamento lateral horizontal uniformemente distribuído  $q=0,4$  tf/m, conforme mostrado na Fig. 3.2. Não se levou em conta o peso próprio.

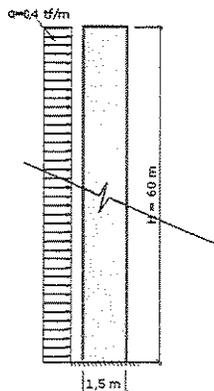


Figura 7.2 – Esquema de carregamento da parede

As Fig. 7.3 a 7.5 indicam respectivamente os resultados obtidos da translação  $u$ , em metros, e do momento fletor, em tfm e força cortante em tf, ao longo da parede.

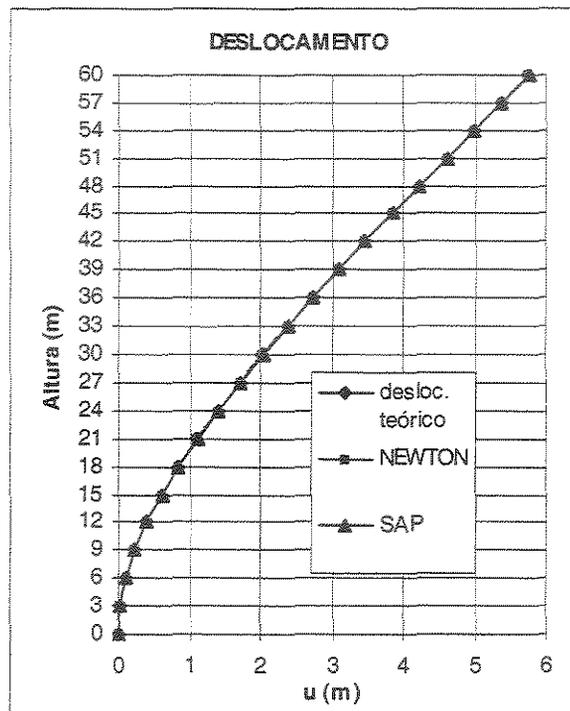


Figura 7.3 – Deslocamento de translação da parede da Estrutura Teste 02

Verifica-se pela Fig. 7.3 que os resultados da translação obtidos com a equação diferencial deduzida para a flexão da parede, conforme Capítulo 2, o resultado obtido com o programa elaborado pelo autor e o resultado obtido pelo programa SAP2000® são praticamente os mesmos.

Convém ressaltar aqui que os deslocamentos na parede, para efeito de validação foram calculados pelo autor de duas maneiras: a primeira usando o programa de diferenças finitas e a segunda usando o programa baseado no Método de Runge – Kutta de 4ª ordem. Os resultados foram os mesmos, porém a segunda maneira obteve o resultado de maneira mais rápida.

A partir dos deslocamentos e suas derivadas foram calculados os esforços solicitantes: momento fletor e força cortante. Os resultados obtidos pelo autor, indicados nos gráficos como NEWTON, foram muito parecidos com os resultados obtidos com as equações diferenciais deduzidas no Capítulo 2.

As Figs. 7.4 e 7.5 ilustram os gráficos de momento fletor e força cortante para a parede deste Exemplo Teste 02, mostrando a coincidência de resultados.

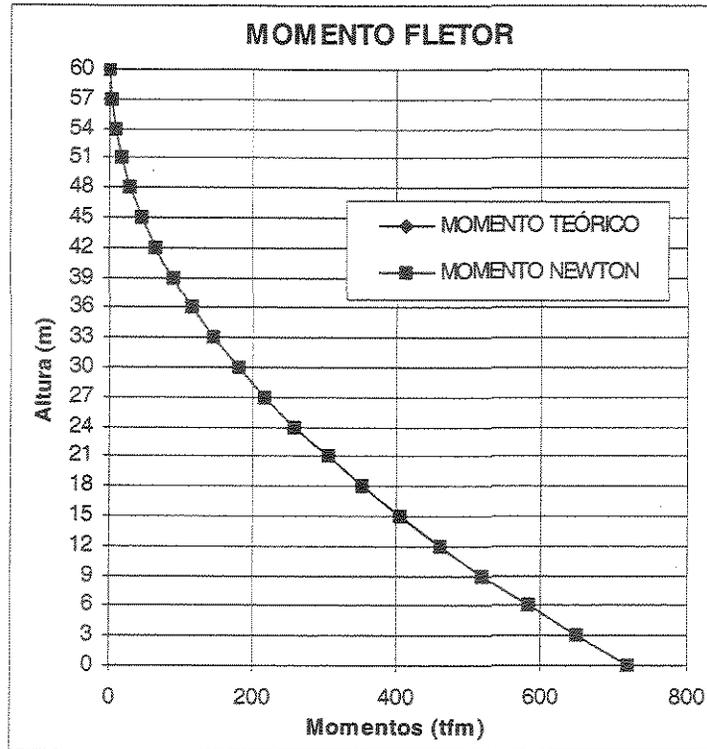


Figura 7.4 – Momento Fletor na parede da Estrutura Teste 02

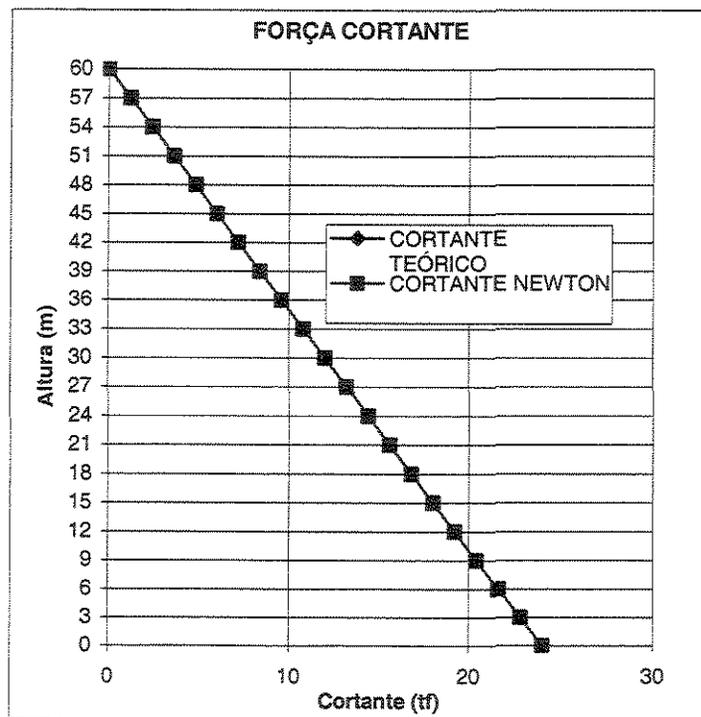


Figura 7.5 – Força Cortante na parede da Estrutura Teste 02

### 7.1.3 Estrutura Teste 03

**Pórtico Plano** – 20 pavimentos com pé-direito dos andares de 3,00 m. Os pilares tem seção  $0,4 \times 0,4 \text{ m}$  e as vigas tem seção  $0,2 \text{ m} \times 0,4 \text{ m}$ . O módulo de elasticidade longitudinal vale  $E = 2,0 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$ . O carregamento atuante é lateral, constante ao longo da altura, valendo  $q = 0,4 \text{ tf/m}$ , conforme ilustrado na Fig. 7.6.

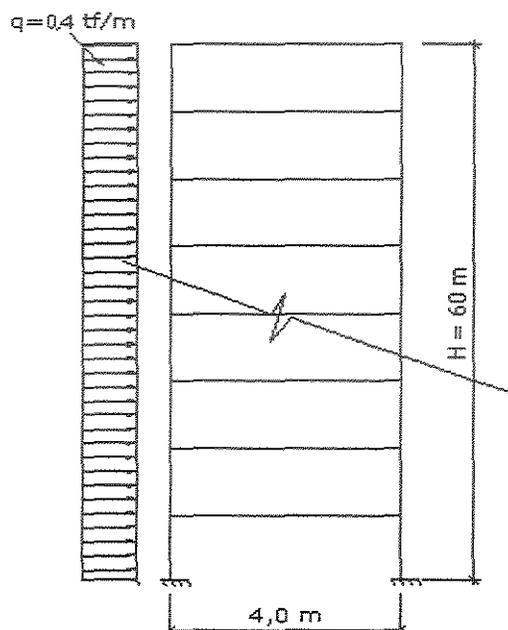


Figura 7.6 – Esquema de carregamento do pórtico.

Os resultados obtidos para o deslocamento lateral, ao longo dos andares, estão mostrados na Fig. 7.7. São mostrados resultados obtidos com a técnica do contínuo, com a hipótese de existência de diafragma, e resultados calculados pela técnica discreta, com o auxílio do programa SAP2000®.

Os valores da força cortante ao longo da prumada de pilares esquerdo, onde atua a ação externa, obtidos através dos programas NEWTON (Método Contínuo) e os resultados obtidos com o programa SAP2000® estão indicados na Fig. 7.8

Os resultados da força cortante, obtidos pela técnica do meio contínuo, na região perto da base (abaixo de 6,0m de altura) da estrutura diferem no exemplo cerca de 20% dos valores obtidos pela técnica discreta. Explica-se esta diferença pela adoção, pela adoção da hipótese de momento fletor nulo no pilar na seção ao meio da altura de cada andar. É sabido que para os andares mais baixos, e para o andar de topo o comportamento da estrutura difere desta hipótese.

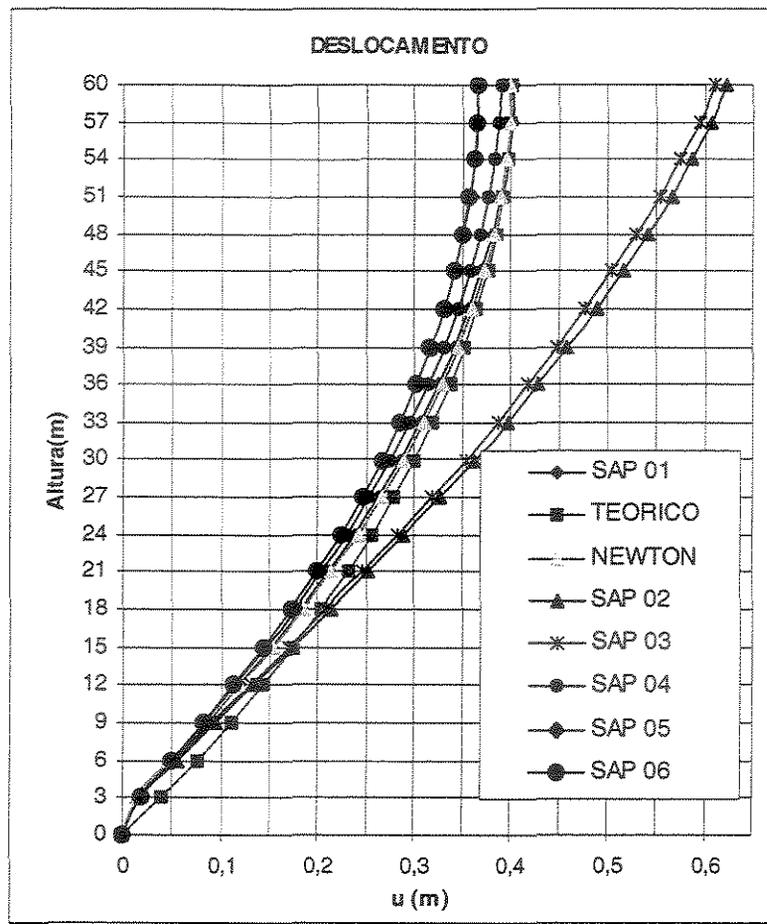


Figura 7.7 – Deslocamento de translação ao longo da altura da Estrutura Teste 03

No gráfico de deslocamento lateral indicado na Fig. 7.7 estão apresentados os resultados de várias modelagens descritas abaixo:

- Teórico – equações diferenciais do método do contínuo
- Newton – programas do autor, baseados no método do contínuo
- SAP 01- elemento de pilar com coef. de área = 10 com o efeito da cortante;
- SAP 02- elemento de pilar com coef. de área = 1 com o efeito da cortante;
- SAP 03- elemento de pilar com coef. de área = 1 sem o efeito da cortante;
- SAP 04- elemento de pilar com coef. de área = 10 sem o efeito da cortante;
- SAP 05- elemento de pilar com coef. de área = 1000 sem efeito da cortante;
- Sap 06- elemento de pilar com coef. de área = 10000 sem efeito da cortante.

Nota-se no gráfico de deslocamento da Fig. 7.7, que a escolha do tipo de análise deve ser criteriosa, intervindo aí a experiência do projetista, pois, os resultados de deslocamentos diferem significativamente, dependendo das hipóteses adotadas. Percebe-se que o efeito da força cortante foi grande, e não foi considerado no modelo teórico do equacionamento deste trabalho pela técnica do contínuo.

O efeito da força cortante foi analisado sobre a prumada de pilares onde está sendo aplicado o carregamento, por isso o gráfico da cortante apresenta variação linear de resultados entre pavimentos. Caso o pilar analisado fosse o pilar da direita, sem carregamento aplicado externamente, o gráfico da força cortante apresentar-se-ia constante entre pavimentos, com um salto de um pavimento para o outro, devido à força normal transmitida pelas vigas.

Para os pavimentos inferiores, foram corrigidos manualmente os valores de força cortante encontrados, fazendo uma interpolação dos resultados a partir dos valores obtidos para os andares vizinhos.

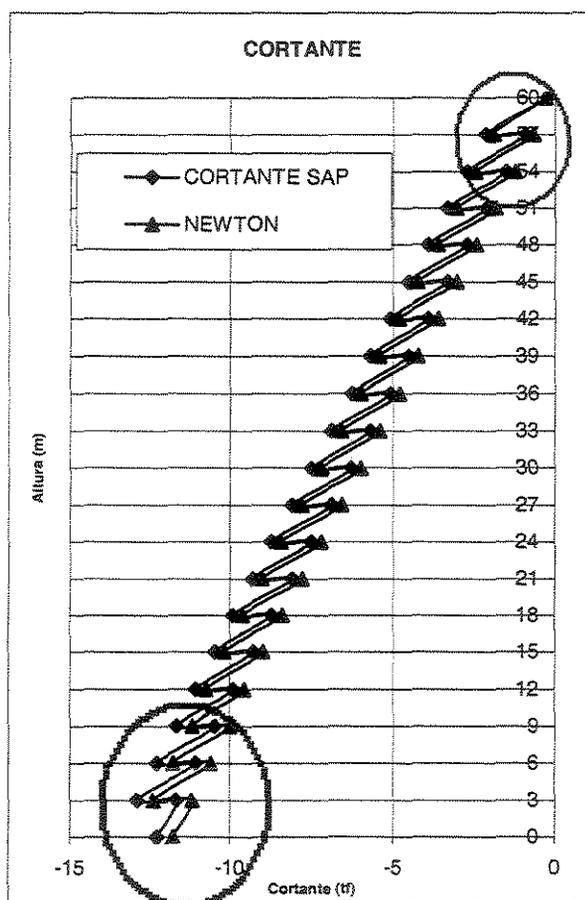


Figura 7.8 – Força Cortante numa prumada de pilares da Estrutura Teste 03.

### 7.1.4 Estrutura Teste 04

**Associação plana de parede e pórtico** – a estrutura deste exemplo é a associação plana de uma parede e um pórtico ligados por lintéis bi-articulados, garantindo a imposição de translações iguais na parede e no pórtico em pontos de mesma altura. O lintel tem seção  $0,2m \times 0,4m$ , o carregamento é lateral vale  $q=0,4 \text{ tf/m}$ , conforme indicado na Fig. 7.9. Adotou-se no exemplo, para todos os elementos, um módulo de elasticidade  $E = 2,0 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$ .

O modelo foi analisado pela técnica do contínuo, utilizando os programas elaborados por Newton, e utilizando-se o programa SAP2000®. No modelo discreto foi considerado um valor de coeficiente de área de 10000 para as barras de pórtico, para tentar simular a não contribuição da deformação axial.

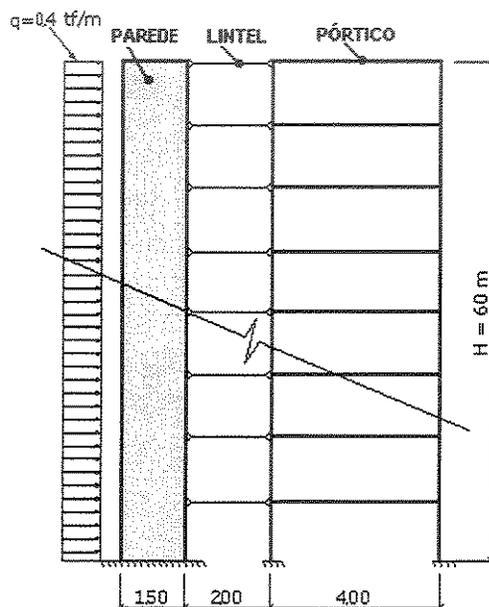


Figura 7.9 – Esquema de carregamento lateral da Estrutura Teste 04

A Fig. 7.10 mostra o deslocamento horizontal, no plano da estrutura, ao longo da altura. Os deslocamentos obtidos pela técnica do contínuo e pela técnica discreta, através do programa SAP2000® foram muito parecidos para os andares intermediários, tendo uma pequena diferença próximo ao topo e perto da base.

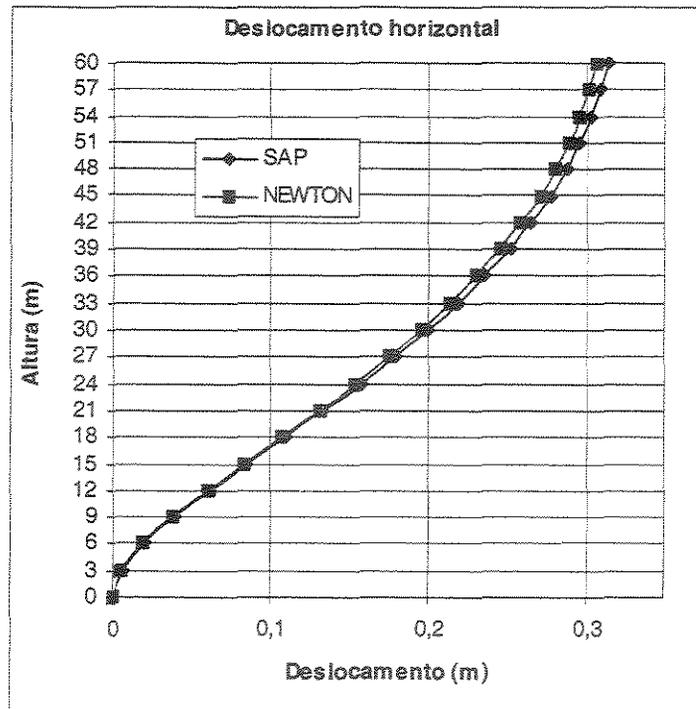


Figura 7.10 – Deslocamento ao longo dos andares da Estrutura Teste 04

Para a obtenção dos esforços é necessária a obtenção dos valores das derivadas do deslocamento ( $u'$ ,  $u''$  e  $u'''$ ).

A partir do vetor deslocamento  $u$  é possível se conseguir os valores das derivadas, através de uma aproximação numérica pelo método de diferenças finitas. Na dissertação foi ajustado um polinômio de quarto grau, utilizando o valor dos deslocamentos em cinco pontos. O procedimento está mostrado no Apêndice C.

Sejam as expressões de diferenças finitas centrais deduzidas no Apêndice C transcritas a seguir, onde  $h$  significa a altura de um andar:

$$F_i''' = \frac{1}{2h^3} [-Fee + 2Fe - 2Fd + Fdd]$$

$$F_i'' = \frac{1}{12h^2} [-Fee + 16Fe - 30Fi + 16Fd - Fdd]$$

$$F_i' = \frac{1}{12h} [Fee - 8Fe + 8Fd - Fdd]$$

É possível, por exemplo, encontrar o valor de  $u'$  utilizando-se da terceira expressão mostrada acima. Deste modo, tem-se:

$$u_i' = \frac{1}{12h} [uee - 8ue + 8ud - udd]$$

Para obter a primeira derivada na posição do 5º pavimento, são precisos os valores dos deslocamentos dos pavimentos 3º (uee), 4º (ue), 6º (ud) e 7º (udd). Deste modo tem-se:

$$u_5' = \frac{1}{12h} [u_3 - 8u_4 + 8u_6 - u_7]$$

No topo da estrutura, utilizam-se as diferenças finitas adiante ou a direita. Na base utilizam-se as expressões de diferenças finitas atrasadas ou à esquerda.

Apresenta-se na Fig. 7.11 um gráfico ilustrando a variação da força cortante no pilar esquerdo do pórtico plano da associação em estudo. Os saltos nos diagramas da força cortante, ao nível de cada andar, se devem à força axial trocada entre parede e pórtico plano, via lintel, e devido à força normal nas vigas do pórtico plano.

Para o traçado deste gráfico de força cortante no pilar esquerdo do pórtico, no caso dos resultados obtidos pela técnica do contínuo, foi necessário obter manualmente os resultados para o primeiro andar de forma interpolada, a partir dos resultados para os andares superiores. No caso do gráfico para a simulação através da técnica discreta, usando o programa SAP2000® foi utilizada a consideração de desprezar o efeito da contribuição da força cortante nas barras de pórtico.

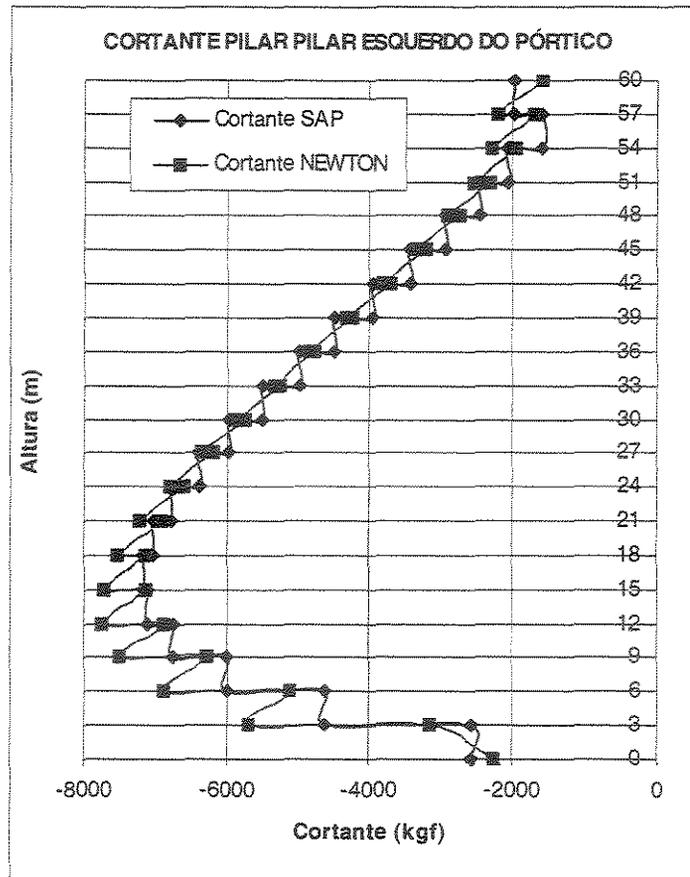


Figura 7.11 - Força Cortante para o pilar esquerdo da Estrutura Teste 04

A Fig. 7.12 mostra a variação da força cortante na parede da associação plana em estudo. Apesar do cálculo obtido com o programa SAP2000<sup>®</sup> ser elástico linear e o cálculo pela técnica do contínuo ser feito a partir de uma formulação não linear, os resultados mostrados são bastante próximos.

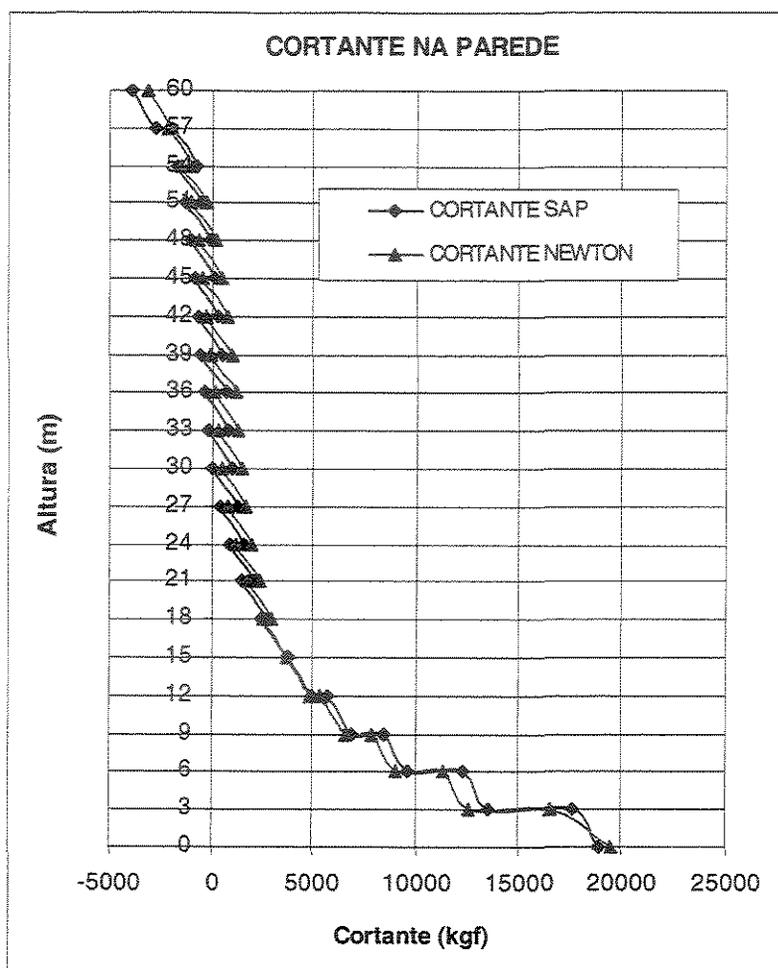


Figura 7.12 – Força Cortante para a parede da Estrutura Teste 04

A Fig. 7.13 mostra a variação do momento fletor ao longo da parede da associação plana. Verifica-se que os valores obtidos pelas duas simulações foram muito próximos.

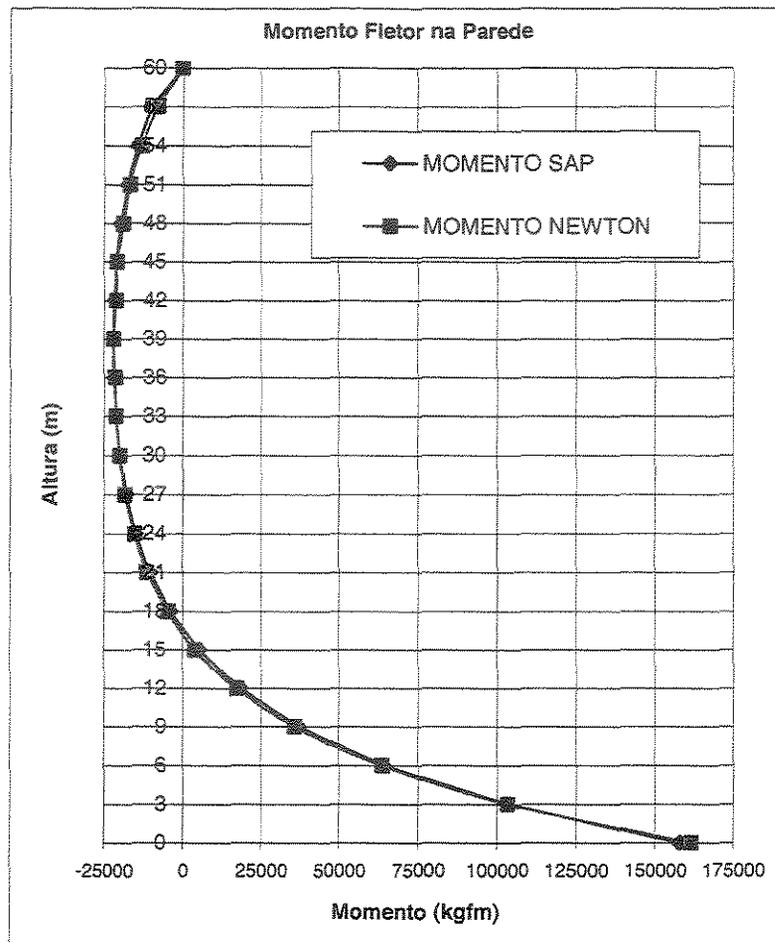


Figura 7.13 – Gráfico de Momento para a parede da Estrutura Teste 04

## 7.2 Exemplo 02 - Núcleo de seção aberta e paredes delgadas c/ carga simétrica

Na Fig. 7.14 representa-se a planta de um edifício de 30 andares, formada por um único núcleo de seção aberta, de características elástico-geométricas constantes na altura. Admite-se que o pé direito de cada andar é 3,00 metros.

O edifício está sujeito a uma carga lateral  $q=0,96 \text{ tf/m}$  aplicada ao longo de um eixo vertical que passa pelo CG. Adotando-se um par de eixos cartesianos  $xy$  passando pelo CG, a direção do carregamento lateral coincide com a do eixo  $y$ , e o sentido do carregamento está indicada na Fig. 3.14.

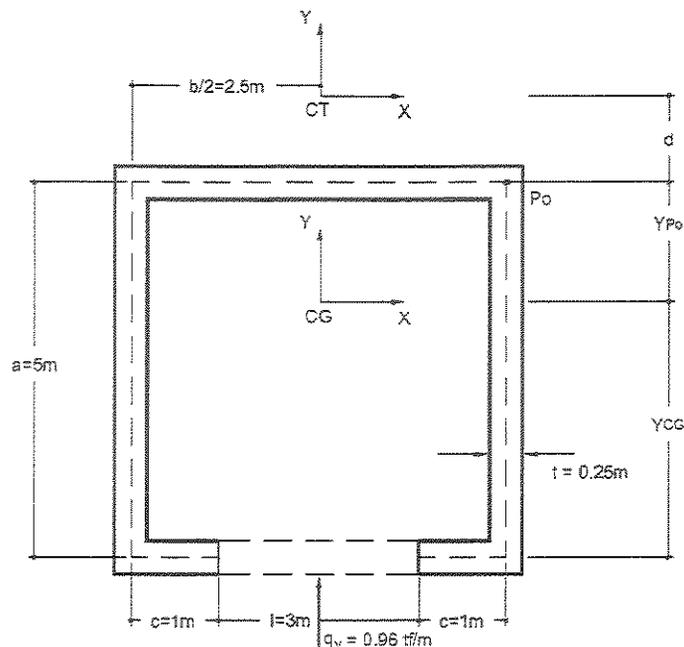


Figura 7.14 – Edifício formado por núcleo de seção aberta e paredes delgadas sujeito à carga lateral  $q_y=0,96 \text{ tf/m}$ .

O edifício está sujeito também a um carregamento vertical axial  $P$ , uniformemente distribuído, aplicado ao longo de um eixo que passa pelo centro de gravidade da seção.

O objetivo neste exemplo é variar o valor da carga  $P$ , até o valor da carga crítica de flambagem  $P_{crit}$ .

O material tem módulo de elasticidade  $E=2,0 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$ . O módulo de elasticidade transversal vale  $G=0,8 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$ .

Admite-se a existência de uma laje de piso em cada andar. Na modelagem pelo método do contínuo essa laje é considerada um diafragma rígido. No caso da modelagem discreta poderá ser um diafragma modelado como membrana rígida ou casca espessa. As paredes, na modelagem usando o programa SAP2000<sup>®</sup>, foram consideradas cascas. No exemplo é mostrado o resultado discreto obtido com a modelagem das lajes como membrana rígida, simulando diafragmas.

Este problema foi resolvido pela técnica do contínuo na dissertação de mestrado de XAVIER [48].

**Dedução das características geométricas da seção transversal do núcleo de seção aberta e paredes delgadas da estrutura indicada na Fig. 7.14:**

A dedução que se segue é dispensável, uma vez que as características geométricas dessa seção transversal poderiam ser obtidas através do primeiro programa computacional elaborado pelo autor desta dissertação. Transcreve-se de modo sucinto a forma de obtê-las, com a finalidade de dar confiabilidade ao programa.

### Centro de gravidade:

Adota-se um par de eixos arbitrários, para efeito de localizar o CG. Esses eixos foram escolhidos no ponto de coordenadas (2.5;0) em relação ao canto inferior esquerdo da seção transversal.

Como OY é eixo de simetria da seção transversal, temos:

$$X_{CG}=0$$

Calculando a ordenada  $Y_{CG}$  tem-se:

$$Y_{CG} = \frac{5 \times 0.25 \times 5 + 2(5 \times 0.25 \times 5) + 2(0 \times 1 \times 0.25)}{5 \times 0.25 + 2 \times 5 \times 0.25 + 2 \times 1 \times 0.25} = 2.94m$$

### Momentos de Inércia:

$$J_x = 2 \left[ \frac{0.25 \times 5^3}{12} + 0.25 \times 5(2.94 - 2.5)^2 + \frac{1 \times 0.25^3}{12} + 0.25 \times 1 \times 2.94^2 \right] + \frac{5 \times 0.25^3}{12} + 0.25 \times 5(5 - 2.94)^2$$

$$J_x = 15.32m^4$$

$$J_y = 2 \left[ \frac{5 \times 0.25^3}{12} + 0.25 \times 5(2.5)^2 + \frac{0.25 \times 1^3}{12} + 0.25 \times 1 \times 2^2 \right] + \frac{0.25 \times 5^3}{12}$$

$$J_y = 20.28m^4$$

### Centro de torção:

Sendo o eixo OY um eixo de simetria da seção transversal:

$$X_D=0$$

$$Y_D = Y_{po} - \frac{1}{J_y} \int_S \omega_{po} dS$$

ou

$$Y_D - Y_{po} = -\frac{1}{J_y} \int_S \omega_{po} dS = d$$

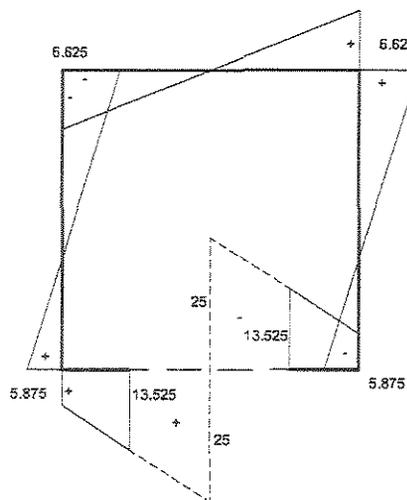
$$d = \frac{1}{J_y} \cdot \frac{ta}{12} [3b^2a + 2b^3 - \ell^2(3b - \ell)]$$

$$d = \frac{1}{20.28} \cdot \frac{0.25 \times 5}{12} [3 \times 5^2 \times 5 + 2 \times 5^3 - 3^2(3 \times 5 - 3)] = 2.65m$$

logo,

$$Y_D = 2.65 + 2.06 = 4.71m$$

Diagrama da área setorial:



Momento Setorial de Inércia,  $J_{\omega}$ :

$$J_{\omega} = 2 \times 0.25 \times \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{3} \times 6.625 \times 6.625 \times 2.5 + \\ & + \frac{1}{6} [(2 \times 6.625 - 5.875) \times 6.625 + (6.625 + 2 \times 1 \times (-5.875)) \times (-5.875)] \times 5 + \\ & + \frac{1}{6} [(2 \times 13.525 + 5.875) \times 13.525 + (13.525 + 2 \times 5.875) \times 5.875] \times 1 \end{aligned} \right\}$$

$$J_{\omega} = 100.67m^6$$

Constante de torção  $J_t$ :

$$J_t = \frac{1}{3} \times 0.25^3 \times (3 \times 5 + 2 \times 1) = 8.85 \times 10^{-2} m^4$$

Área da seção transversal:

$$A = 0.25 \times (3 \times 5 + 2 \times 1) = 4.25 m^2$$

Raio de giração polar:

$$i_D^2 = 0 + (4.71)^2 + \frac{15.32 + 20.28}{4.25} = 30.55 m^2$$

**Montagem das matrizes contendo os parâmetros de rigidez do edifício formado por um núcleo**

Uma vez determinadas as posições do centro de gravidade CG e do centro de torção D do núcleo, adota-se um sistema de coordenadas global OXY com origem no centro de torção D.

A carga vertical é considerada aplicado num eixo passando no CG e a carga lateral, e os seus momentos são transferidas para o ponto D (origem do sistema global). No problema em questão tem-se que o carregamento lateral será representado por um vetor  $q$ , de componentes  $q_x$ ,  $q_y$  e  $q_z$ . A terceira componente representa o momento distribuído que o carregamento causa em torno da origem do sistema global:

$$q = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,96 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Utilizando as equações do Capítulo 3, obtém-se para as matrizes:

§ Matriz [J] de produtos de rigidez à flexão e à flexo – torção:

$$[J] = \begin{bmatrix} 40.56 & 0 & 0 \\ 0 & 30.64 & 0 \\ 0 & 0 & 201.34 \end{bmatrix} \times 10^6$$

§ Matriz de rigidez à torção livre, matriz  $[K_T]$ :

$$[K_T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 70.8 \end{bmatrix} \times 10^3$$

§ Matriz  $[L_T]$  de posicionamento dos esforços externos provenientes da carga vertical  $p$

$$[L_T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4.71 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4.71 & 0 & 30.55 \end{bmatrix}$$

Sistema das equações diferenciais:

$$\begin{bmatrix} 40.56 & 0 & 0 \\ 0 & 30.64 & 0 \\ 0 & 0 & 201.34 \end{bmatrix} \times 10^6 \begin{Bmatrix} u''' \\ v''' \\ \theta''' \end{Bmatrix} + \left( p(90-Z) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4.71 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4.71 & 0 & 30.55 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 70.8 \end{bmatrix} \times 10^3 \right) \times \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} = (90-Z) \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.96 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Observa-se neste problema que a equação de equilíbrio à força cortante, na direção  $O_Y$ , é independente da equação de equilíbrio à força cortante, na direção  $O_X$  e da equação de equilíbrio ao momento torçor. O sistema de equações pode ser desacoplado em dois: o primeiro usando só a segunda equação, e outro usando simultaneamente a primeira e terceira equações.

Na procura da carga crítica, considerando o problema de primeira espécie (sistema homogêneo), foram executados dois cálculos, sendo o primeiro por instabilidade por flambagem tipo EULER ou flexão pura no plano YZ, expresso pela segunda das equações diferenciais do sistema, e o segundo cálculo, de instabilidade lateral, isto é,

flambagem por torção e flexão, expressos pelas duas equações restantes. A carga crítica para este tipo de estrutura é o menor dos dois valores obtidos.

A segunda equação diferencial forneceu o valor para  $P_{crit} = 329,40$  tf/m. A solução simultânea das outras duas equações do sistema homogêneo forneceu o valor para  $P_{crit} = 114,27$  tf/m. Admitiu-se então, que a carga crítica é o menor dos dois valores.

Esse exemplo foi obtido da referência XAVIER [38], que obteve resultados idênticos aos aqui obtidos.

O arquivo de solução deste programa é extenso e inapropriado para ser mostrado neste trabalho. Mostram-se os deslocamentos ocorridos no último pavimento da estrutura.

DESLOCAMENTOS DA ESTRUTURA NO ULTIMO PAVIMENTO			
P	U	V	W
0	0	0.256958224543293	0
05	0	0.260958447187623	0
10	0	0.265084397750724	0
15	0	0.269342091005675	0
20	0	0.273737931527353	0
25	0	0.278278745793498	0
30	0	0.282971817501041	0
35	0	0.287824926502829	0
40	0	0.292846391777664	0
45	0	0.298045118959335	0
50	0	0.303430652973426	0
55	0	0.309013236452327	0
60	0	0.314803874668071	0
65	0	0.3208144078608	0
70	0	0.327057591946906	0
75	0	0.333547188794054	0
80	0	0.340298067365507	0
85	0	0.347326317339754	0
90	0	0.354649376999858	0
95	0	0.362286177558451	0
100	0	0.370257306413226	0
105	0	0.378585192308264	0
110	0	0.387294315904183	0
114.27	0	0.39505381201553	0

Esta estrutura foi analisada com o objetivo de comparação de resultados entre a simulação do núcleo pelo método do contínuo, com resultados de deslocamentos calculados pelos programas Newton (do autor desta dissertação) e a simulação do núcleo usando elementos de cascas com o programa SAP2000®.

Os resultados de deslocamentos na direção do carregamento lateral aplicado (direção y), para o caso de carga vertical nula ( $P=0$  tf/m) podem ser vistos no gráfico da Fig. 7.15, onde se pode observar uma boa concordância entre os resultados obtidos pelo modelo contínuo (programa Newton) e o modelo Discreto (SAP).

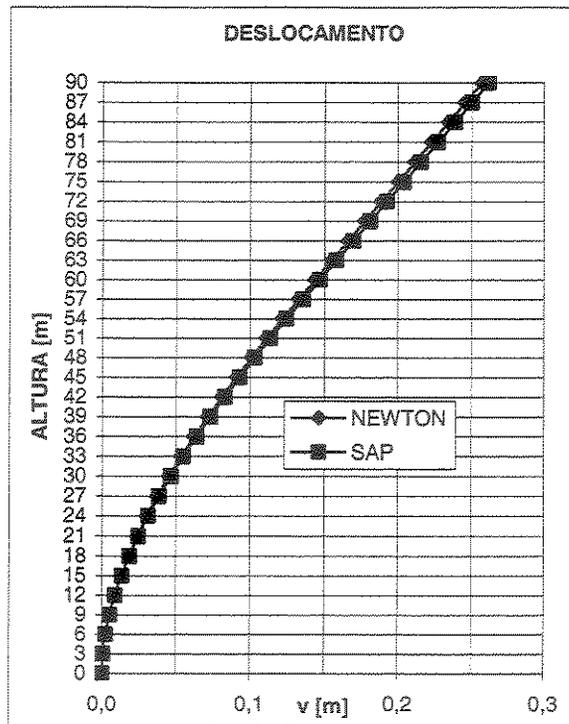


Figura 7.15 – Deslocamento na direção y do núcleo ( $p=0$ )

**7.3 Exemplo 03 – Núcleo de seção aberta e paredes delgadas com carregamento não simétrico.**

Estudou-se a mesma estrutura do exemplo 2, mudando apenas o carregamento, o qual, para este Exemplo 03 foi considerado formado por duas cargas laterais de 0,96 tf/m, atuando bem no centro de gravidade do núcleo, nas direções x e y, admitindo a não existência de carga vertical axial ( $p=0$  tf).

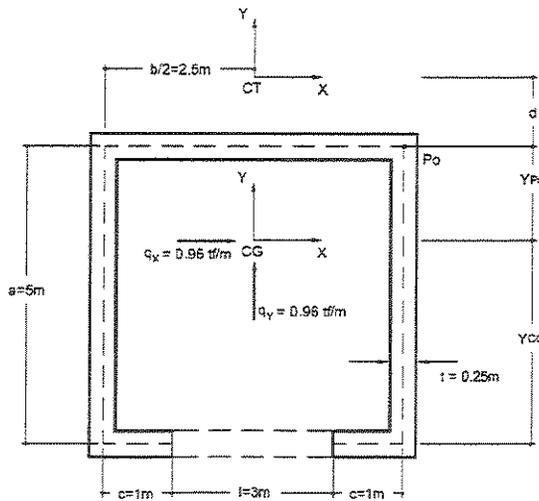


Figura 7.16 – Núcleo sob atuação de cargas  $q_x$  e  $q_y$ . ( $p=0$ )

Levando o carregamento para a origem do sistema global, tomado no centro de torção CT do núcleo, tem-se que o vetor  $q$ , que representa o carregamento lateral, é dado por:

$$q = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,96 \text{ tf/m} \\ 0,96 \text{ tf/m} \\ 4,944 \text{ tf.m} \end{Bmatrix}$$

Os resultados para este exemplo, obtidos usando o programa NEWTON, com a formulação pela técnica do contínuo, foram comparados com os resultados obtidos através da utilização do programa SAP2000®, fazendo uma simulação das paredes do núcleo como casca e a laje como membrana rígida, simulando diafragma.

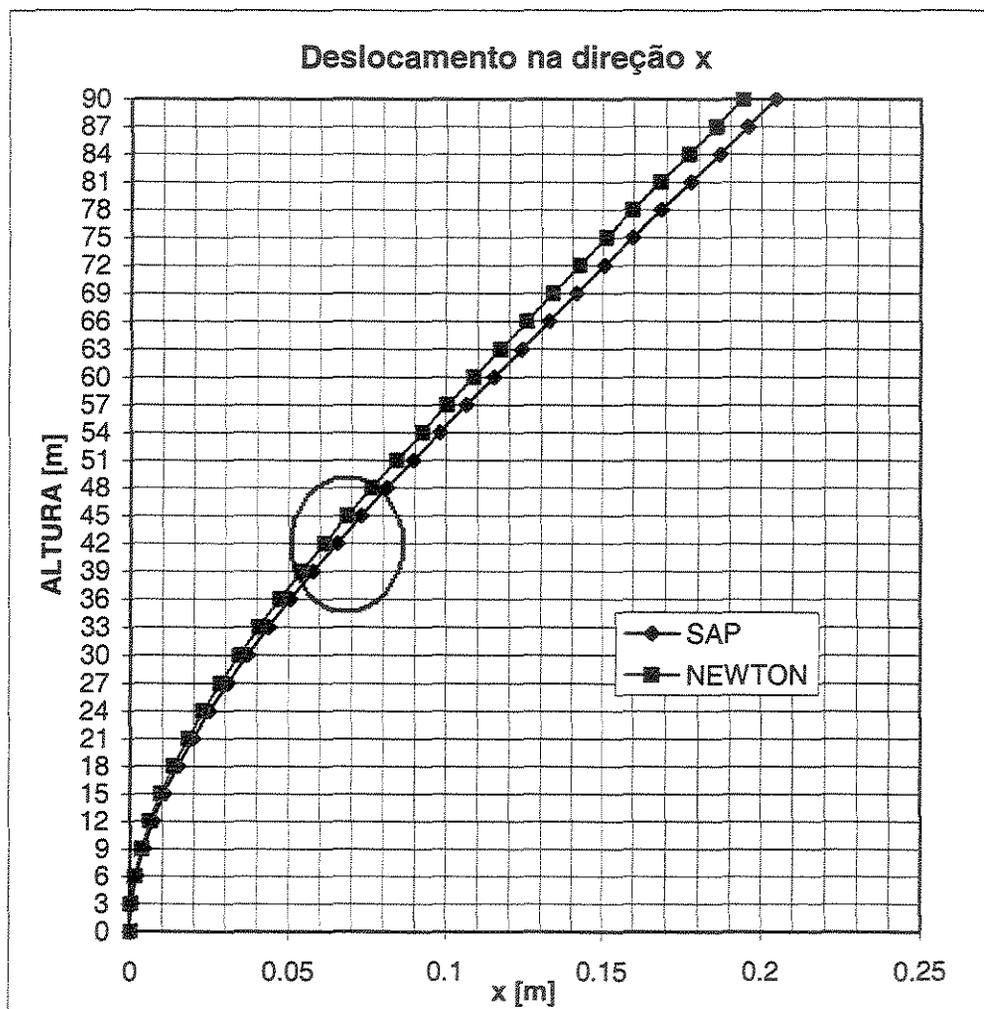


Figura 7.17 Deslocamentos na direção x do núcleo do exemplo 03

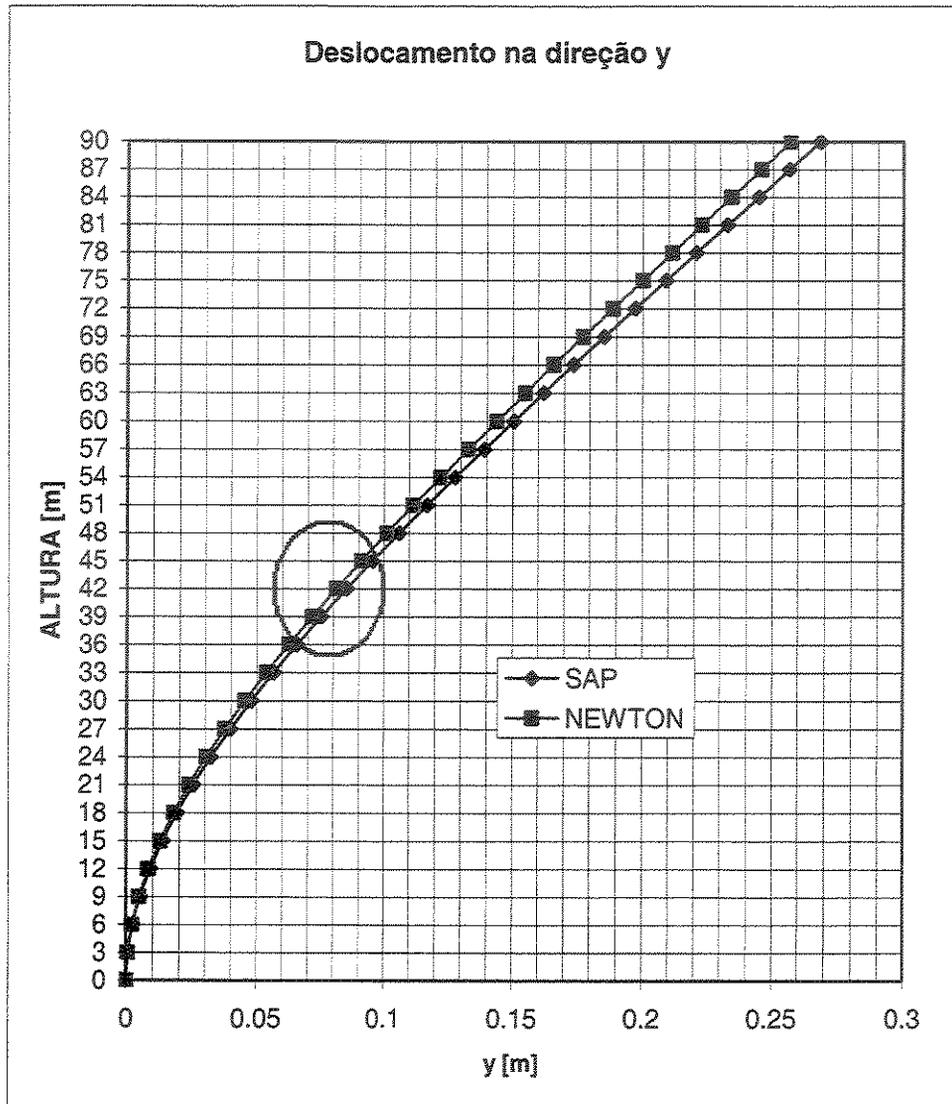


Figura 7.18 Deslocamentos na direção y do núcleo do exemplo 03

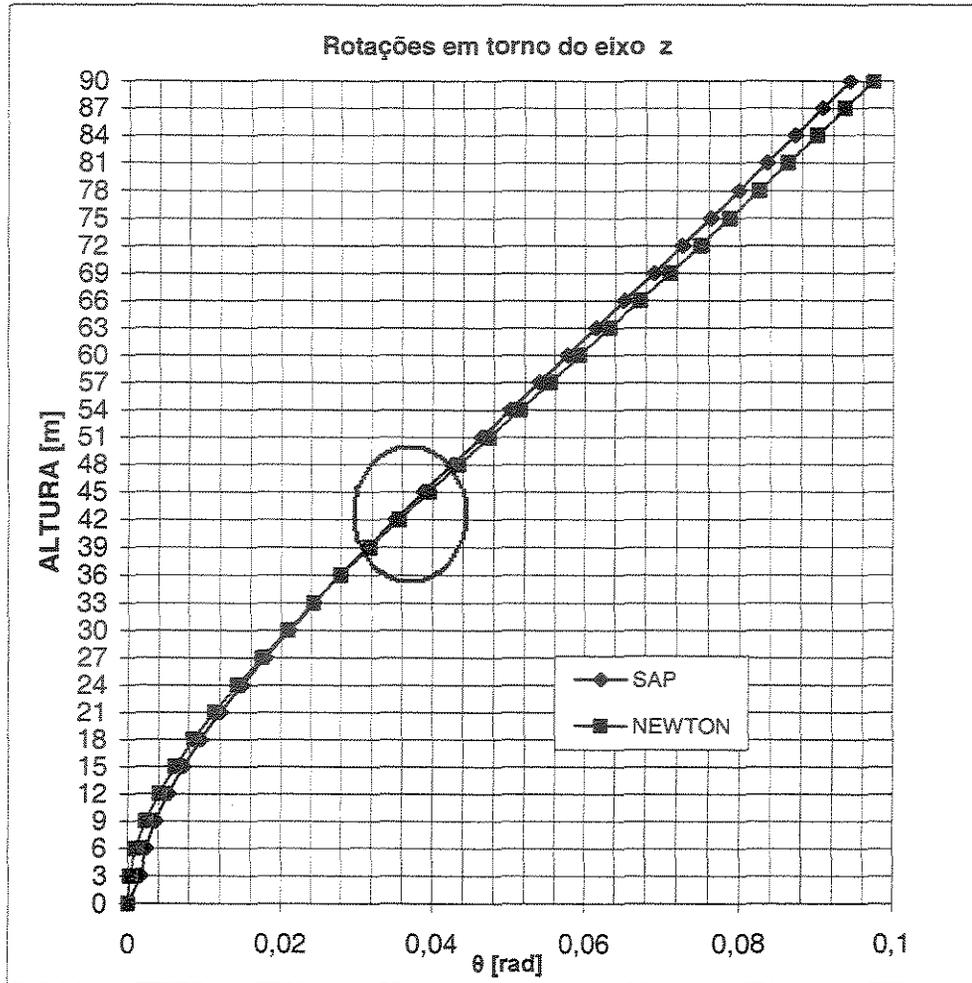


Figura 7.19 Rotações do núcleo do exemplo 03

**Análise de Tensões Normais em pontos no esqueleto do núcleo**

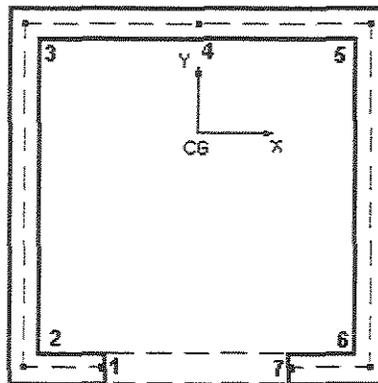


Figura 7.20 – Pontos do núcleo onde foram analisadas as tensões normais.

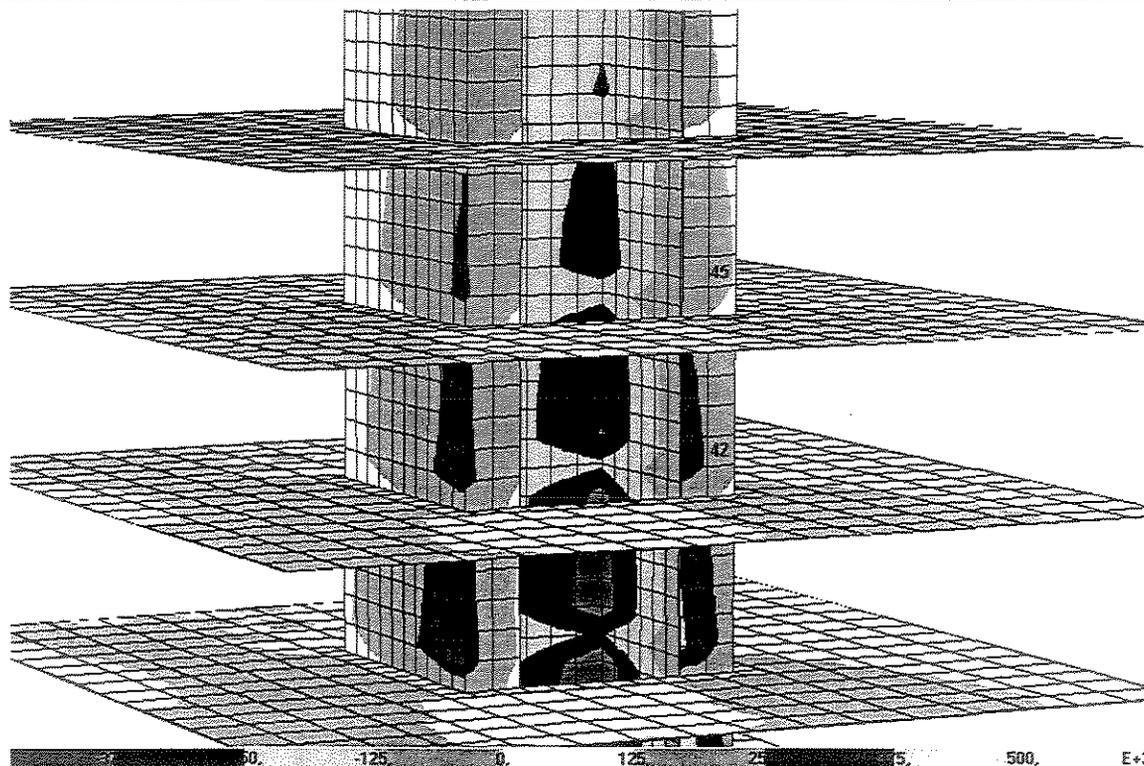


Figura 7.21– Diagrama de tensões normais num trecho de paredes do núcleo do exemplo 03, calculadas pelo programa SAP2000®

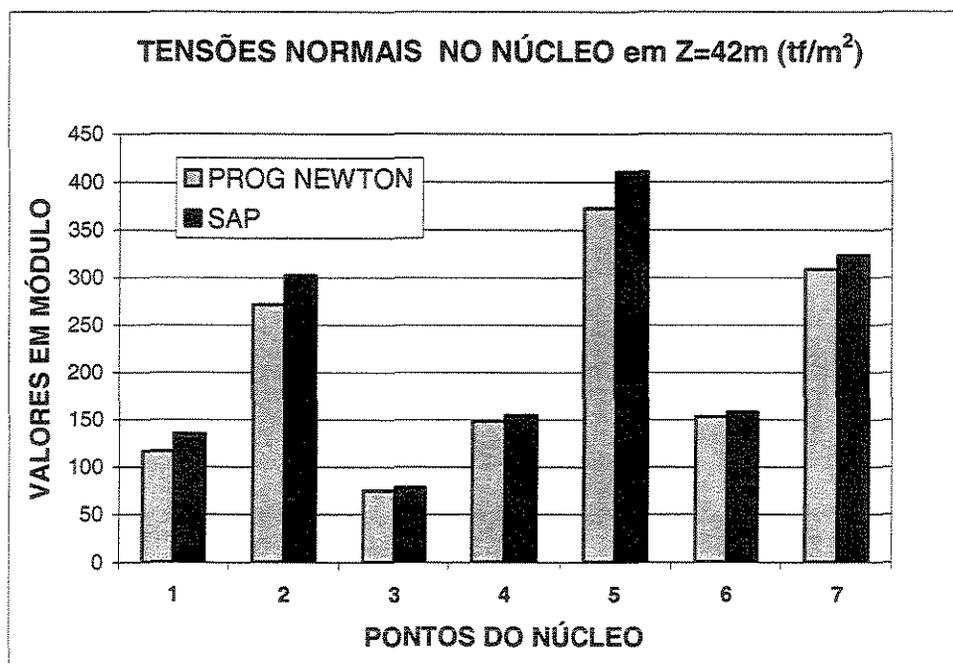


Figura 7.22 – Tensões Normais nos pontos 1 até 7 das paredes, na cota Z=42m.

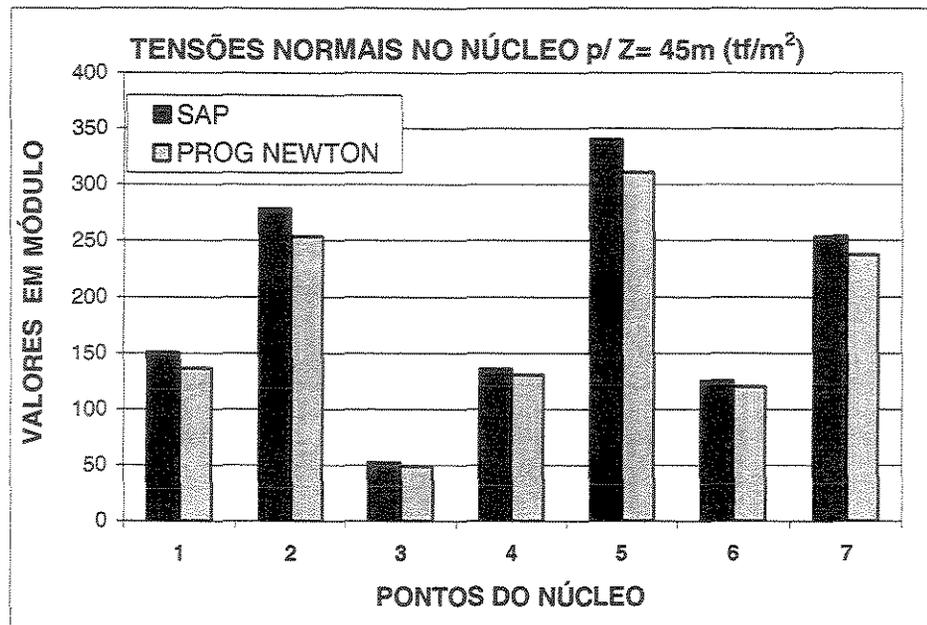


Figura 7.23 – Tensões Normais nos pontos 1 até 7 das paredes, na cota Z=45m.

Foi possível verificar na análise de tensões que quanto maior a diferença entre os deslocamentos e giros do programa Newton para o programa SAP2000® maior será a diferença entre as tensões.

Existiu dificuldade na modelagem desta estrutura no SAP2000®. Para que se pudesse realizar uma comparação dos resultados entre o modelo contínuo e o modelo discreto foi necessário refinar bastante a malha de elementos finitos usada no programa SAP2000® (modelo discreto).

Na base do núcleo, ocorre uma grande diferença nos valores de tensão normais entre os dois métodos de cálculo, o que se tornou impossível a obtenção de valores confiáveis e dignos de comparação.

A geometria do núcleo também é extremamente relevante. Foram feitos alguns testes, não mostrados na dissertação, com outras formas de núcleo, e os resultados foram sensíveis à forma do núcleo.

Caso se tivessem cargas axiais aplicadas, haveria duas parcelas de tensão normal de flexão: uma devido à flexão e outra devido ao efeito de Bi-momento devido ao empenamento causado pela carga axial. Para uma melhor compreensão de como se obter as tensões nos pontos do núcleo, segue uma breve descrição do processo de cálculo realizado no 4º programa.

Quando se calculam os deslocamentos pelo método do contínuo, os mesmos são obtidos na origem do sistema global OXYZ em cada cota Z. Desta forma, tem-se a necessidade de se transportar estes deslocamentos para os pontos do núcleo onde se deseja calcular a tensão. Isso é feito com geometria de pequenos deslocamentos, admitindo rotação única do diafragma no andar. Este procedimento está explicado no Capítulo 4. Para o cálculo da tensão normal  $\sigma_z$  foram consideradas três parcelas:  $\frac{M_x}{J_y}x$  e  $\frac{M_y}{J_x}y$  devido aos momentos na direção x e y, respectivamente e a parcela  $\frac{B}{J_w}\omega$  devido o efeito da flexo - torção. Teríamos então a seguinte expressão:

$$\sigma_{z,i} = \frac{M_x}{J_y}x_i + \frac{M_y}{J_x}y_i + \frac{B}{J_w}\omega_i$$

onde:

- $Y_i$  e  $X_i$ : coordenadas em relação ao CG nos pontos considerados;
- B sendo o valor do bimomento atuante no núcleo que depende diretamente de  $\theta''$ , veja Apêndice A
- $M_y$  e  $M_x$  valores dos momentos atuantes na parede que dependem diretamente de  $u''$  e  $v''$ , veja Capítulo 2;
- $J_y$  e  $J_x$  são os momento de inércia do núcleo;
- $\omega_i$  corresponde ao valor da área setorial dos pontos considerados.

Desta forma, em uma rotina computacional, fica muito simples calcular os valores de tensão para vários pontos do núcleo.

Para exemplificar faremos o cálculo da tensão do ponto 4, devemos lembrar que para este cálculo utilizaremos a expressão de diferenças finitas centrais, transcritas abaixo, para o cálculo da segunda derivada dos deslocamentos.

$$F_i'' = \frac{1}{12h^2} [-Fee + 16Fe - 30Fi + 16Fd - Fdd]$$

onde,

h, é a distância entre os pavimentos, neste exemplo vale 3,0m metros.

Coordenadas Globais

$X=0$  e  $Y=2,06$

Tabela 7.1 – Deslocamentos do ponto O e do ponto 4.

Z [m]	DESLOCAMENTO PONTO O			DESLOCAMENTO PONTO 4		
	u	v	$\theta$	u	v	$\theta$
36 (fee)	4,72E-02	6,25E-02	2,80E-02	1,05E-01	6,25E-02	2,80E-02
39 (fé)	5,41E-02	7,16E-02	3,18E-02	1,20E-01	7,16E-02	3,18E-02
<b>42 (fi)</b>	<b>6,13E-02</b>	<b>8,12E-02</b>	<b>3,56E-02</b>	<b>1,35E-01</b>	<b>8,12E-02</b>	<b>3,56E-02</b>
45 (fd)	6,87E-02	9,10E-02	3,95E-02	1,50E-01	9,10E-02	3,95E-02
48 (fdd)	0,0764	0,101135	4,35E-02	1,66E-01	1,01E-01	4,35E-02

Tabela 7.2 – Derivada segundo dos deslocamentos do ponto 4

DERIVADA SEGUNDA PONTO 4 A 42 m		
u''	v''	$\theta''$
4,08E-05	3,61E-05	6,58E-06

Calculo dos momentos

$$M_y = v'' \cdot E \cdot J_x$$

$$M_y = 3,61E-05 \cdot 2E6 = 72,2 \cdot J_x$$

Como a posição x do ponto 4 é zero não iremos calcular o valor do momento  $M_x$

Calculo do Bimomento (B):

$$B = E \cdot J_w \cdot \theta''$$

$$B = 2E6 \cdot 6,58E-06 = 13,16 \cdot J_w$$

Considerando os seguintes valores para o ponto 4:

$$Y_G = 2,06 \text{ e } w \text{ do ponto 4} = 0$$

Portanto a tensão fica apenas em função do momento  $M_y$ :

$$\sigma_{z,42} = 0 + \frac{72,20J_y}{J_y} * 2,06 + 0 = 148,732 \text{tf} / \text{m}^2$$

#### 7.4 Exemplo 04 – Edifício retangular com pórticos e núcleo

Neste exemplo será feita a análise e a comparação de resultados para uma estrutura de edifícios apresentada no trabalho de SOUSA JUNIOR [33]. Na referência em questão o autor comparou os resultados de sua tese de doutorado com resultados obtidos com o programa Ansys. O edifício tem 20 andares, de planta retangular, com 10 pilares no contorno, vigas de borda e um núcleo em forma de U. A Fig. 7.24 ilustra o edifício analisado, mostrando as dimensões da estrutura, dos pilares e do núcleo.

As vigas são todas iguais, com dimensões 20cmx60cm. Os pilares são retangulares com dimensões 25cmx50cm. A disposição dos pilares está mostrada na Fig. 7.24. O núcleo tem seção transversal em forma de U, com paredes de 15 cm de espessura. Os módulos de elasticidade longitudinal e transversal valem  $2,0 \times 10^6 \text{tf/m}^2$  e  $8,0 \times 10^5 \text{tf/m}^2$ , respectivamente. O pé direito dos andares é de 3,00 m.

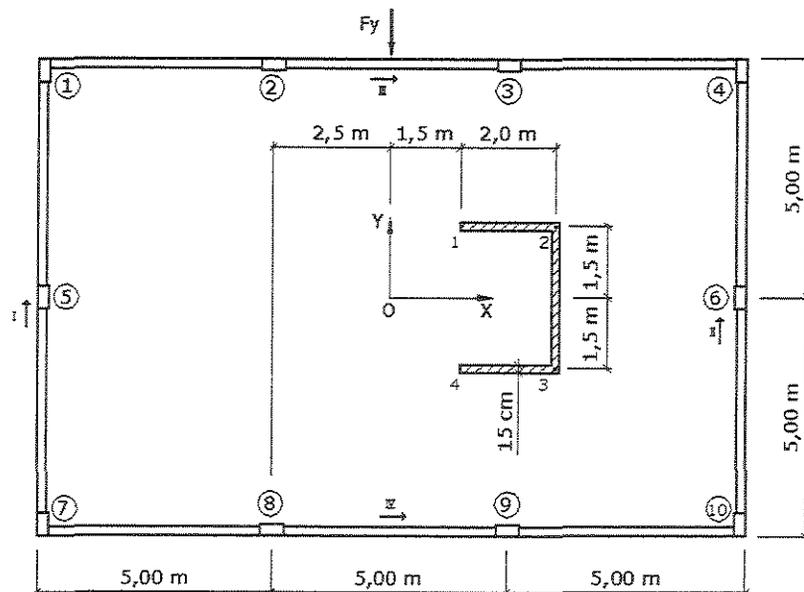


Figura 7.24 – Disposição geométrica da estrutura do exemplo 04  
(extraída de SOUSA JUNIOR [33])

O carregamento analisado por aquele autor era formado pelas seguintes ações:

- Ações verticais:
  - Ações verticais uniformemente distribuídas aplicadas nas vigas de bordo em cada andar: 2000 kgf/m
  - Cargas aplicadas nos pontos 1, 2, 3 e 4, situados na seção transversal do núcleo, em cada pavimento:  
Ponto 1 - 7000 kgf  
Ponto 2 - 18000 kgf  
Ponto 3 - 18000 kgf  
Ponto 4 - 7000 kgf
- Ações horizontais
  - Ações horizontais concentradas, aplicadas na direção e sentido do eixo Y de 5100 kgf, aplicadas no meio das vigas longitudinais à barlavento, ilustradas na Fig. 7.22 como  $F_y$
- Carregamento no último pavimento:
  - Carregamento vertical uniformemente distribuído ao longo das vigas de bordo em cada andar: 1000 kgf/m
  - Cargas aplicadas nos pontos 1, 2, 3 e 4 situados na seção transversal do núcleo:  
Ponto 1 - 3500 kgf  
Ponto 2 - 9000 kgf  
Ponto 3 - 9000 kgf  
Ponto 4 - 3500 kgf
- Ações horizontais
  - aplicadas na direção e sentido do eixo Y de 2550 kgf na metade da viga longitudinal à barlavento.

Na formulação utilizada nesta dissertação, para o tratamento de estruturas pelo método contínuo, umas das simplificações adotadas foi carregamento vertical uniformemente distribuído ao longo da altura e carregamento lateral uniformemente distribuído. Desse modo não foi possível adotar na modelagem pelo método do contínuo deste exemplo um carregamento exatamente igual ao proposto por Sousa Junior. Assim foi procurado adotar um carregamento equivalente.

As ações externas admitidas por Sousa Junior somam 150kgf de carga vertical por andar tipo e uma carga horizontal  $F_y=5100\text{kgf}$  por andar tipo. Nos andares do topo foi admitida a metade dessas ações.

Para modelarmos tal estrutura pelo método contínuo foi feita idealização abaixo descrita, onde se assumiu que  $2/3$  da carga de cada andar vai ser transmitida aos pilares e  $1/3$  vai ser transmitida ao núcleo. Esta situação é similar à proposta de distribuição de cargas adotada por SOUSA JUNIOR [33]:

1. carga vertical uniformemente distribuída de  $2,5\text{ tf/m}$  aplicada em cada pilar de contorno;
2. carga vertical uniformemente distribuída de  $12,5\text{ tf/m}$  aplicada no CG do núcleo
3. carga lateral horizontal uniformemente distribuída de  $1275\text{kgf/m}$ , aplicada ao longo da altura, na direção  $y$ , no centro da laje retangular de dimensões  $15\text{ m} \times 10\text{ m}$ .

Conforme visto no Capítulo 4, um núcleo pode ser substituído por duas paredes planas equivalentes e por uma mola ( $m$ ) que só absorverá o esforço de torção. As paredes planas equivalentes ao núcleo são independentes, sendo orientadas segundo os eixos principais de inércia da seção transversal, ambas passando pelo centro de torção do núcleo como pode ser observado na Fig. 7.25. Essas paredes equivalentes possuem produtos de rigidez à flexão  $EJ_x$  e  $EJ_y$  iguais ao produtos de rigidez do núcleo.

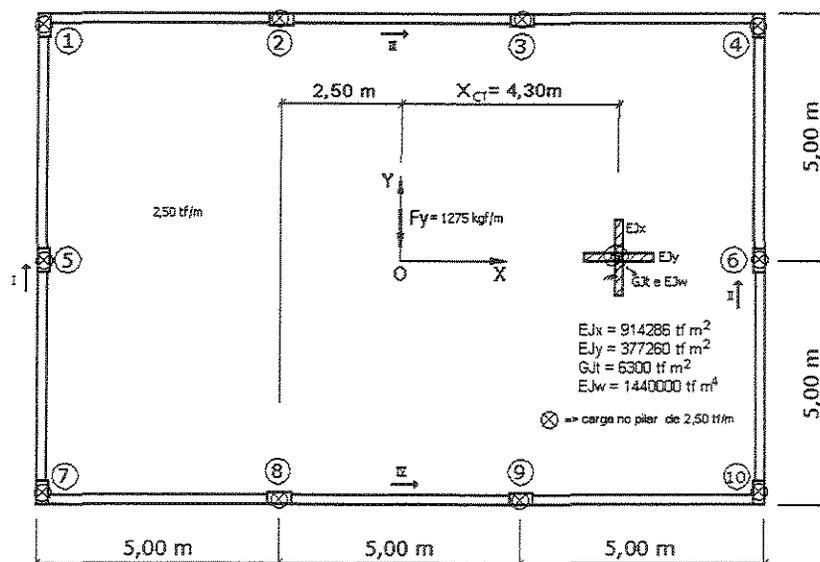


Figura 7.25 – Disposição da estrutura do exemplo 04 adotada para o modelo contínuo

Cálculo dos parâmetros de rigidez dos pórticos:

Momento de inércia dos pilares:

$$J_p = \frac{0.25 \times 0.5^3}{12} = 2.604 \times 10^{-3} m^4$$

$$K_p = \frac{J_p}{h} = \frac{2.604 \times 10^{-3}}{4} = 6.51 \times 10^{-4} m^3$$

$$J_p = \frac{0.5 \times 0.25^3}{12} = 6.510 \times 10^{-4} m^4$$

$$K_p = \frac{J_p}{h} = \frac{6.510 \times 10^{-4}}{4} = 1.628 \times 10^{-4} m^3$$

Momento de inércia das vigas:

$$J_v = \frac{0.2 \times 0.6^3}{12} = 3.60 \times 10^{-3} m^4$$

$$K_v = \frac{J_v}{h} = \frac{3.60 \times 10^{-3}}{5} = 7.2 \times 10^{-4} m^3$$

Obedecendo aos sentido dos vetores unitários de cada painel, calculamos os parâmetros  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{c}$  e  $s_f$  para os pórticos componentes da associação.

O coeficiente de rigidez à força cortante dos pórticos é calculado de acordo com a equação (B6) do Apêndice B:

$$s_f = \frac{12E}{h} \sum_{n.a} \left[ K_{p,n} \frac{\sum_{v.n} K}{\sum_{b.n} K} \right]$$

Tabela 7.3 – coeficientes dos pórticos

PAINEL	$\underline{a}_f$	$\underline{b}_f$	$\underline{c}_f$	$s_f$
I	0	1	7,5	4833,0121
II	0	1	-7,5	4833,0121
III	1	1	5	5448,9683
IV	1	1	-5	5448,9683

Componentes do vetor de posicionamento da carga lateral:

$$a=0 \qquad b=1 \qquad c=0$$

Características geométricas do núcleo:

Os valores das características geométricas da seção do núcleo foram calculados usando o primeiro programa elaborado. As unidades são coerentes com as unidades de força e comprimento adotadas no exemplo.

$$EJ_x = 914286 \text{ tfm}^2 \qquad EJ_y = 3377260 \text{ tfm}^2$$

$$GJ_t = 6300 \text{ tfm}^2 \qquad EJ_\omega = 1440000 \text{ tfm}^4$$

Tabela 7.4 – coeficientes das Paredes Associadas

Paredes Associadas	$a_w$	$b_w$	$c_w$	$j_w$
em x	1	0	0	914286
em y	0	1	4.3	3377260

Cálculo das Matrizes:

As matrizes de rigidez a flexão [J], matriz de rigidez à torção [ $K_T$ ] e de rigidez à força cortante [S] possuem os seguintes valores:

$$[J] = \begin{bmatrix} 914286 & 0 & 0 \\ 0 & 3377260 & 14522218 \\ 0 & 14522218 & 63885537 \end{bmatrix}$$

$$[K_t] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6300 \end{bmatrix}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} 10898 & 0 & 0 \\ 0 & 9666 & 0 \\ 0 & 0 & 894229 \end{bmatrix}$$

Cálculo das matrizes de localização dos pilares em relação ao sistema de eixos XYZ.

$$[L_{P1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 7.5 \\ 5 & 7.5 & 81.25 \end{bmatrix}$$

$$[L_{P2}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2.5 \\ 5 & 2.5 & 31.25 \end{bmatrix}$$

$$[L_{P3}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2.5 \\ 5 & -2.5 & 31.25 \end{bmatrix}$$

$$[L_{P4}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -7.5 \\ 5 & -7.5 & 81.25 \end{bmatrix}$$

$$[L_{P5}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7.5 \\ 0 & 7.5 & 56.25 \end{bmatrix}$$

$$[L_{P6}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7.5 \\ 0 & -7.5 & 56.25 \end{bmatrix}$$

$$[L_{P7}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 7.5 \\ -5 & 7.5 & 81.25 \end{bmatrix}$$

$$[L_{P8}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2.5 \\ -5 & 2.5 & 31.25 \end{bmatrix}$$

$$[L_{P9}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2.5 \\ -5 & -2.5 & 31.25 \end{bmatrix}$$

$$[L_{P10}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -7.5 \\ -5 & -7.5 & 81.25 \end{bmatrix}$$

A matriz  $[L_f]$  vale:

$$[L_f] = \begin{bmatrix} 0.66 & 0 & 0 \\ 0 & 0.66 & 0 \\ 0 & 0 & 37.4963 \end{bmatrix}$$

Montagem do sistema de equações:

Sendo a matriz  $[LG]$  dada pela matriz abaixo:

$$[L_{st}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1.43 \\ 0 & -1.43 & 44.98 \end{bmatrix}$$

Podemos escrever o sistema como se segue:

$$\begin{bmatrix} 914286 & 0 & 0 \\ 0 & 3377260 & 14522218 \\ 0 & 14522218 & 63885537 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u''' \\ v''' \\ \theta''' \end{Bmatrix} + \left( p(60-Z) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1.43 \\ 0 & -1.43 & 44.98 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10898 & 0 & 0 \\ 0 & 9666 & 0 \\ 0 & 0 & 894229 \end{bmatrix} \right) \times \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} = (60-Z) \begin{Bmatrix} 0 \\ 1.275 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A Fig. 7.26 mostra os valores de deslocamentos na direção y, do ponto 0, do centro geométrico da laje, calculados com o programa NEWTON, utilizando o método do contínuo, e valores correspondentes calculados pelo método discreto, usando o programa SAP2000®, para várias situações distintas:

1. **SAP M-SJ 10cm** – utilizou-se um carregamento idêntico ao usado por Sousa Junior, considerando a laje como membrana de espessura 10 cm;
2. **SAP S-SJ 10cm** – utilizou-se um carregamento idêntico ao utilizado por Sousa Júnior, considerando a laje como casca fina de espessura 10 cm.
3. **SAP M-N 10 cm** – utilizou-se um carregamento idêntico ao usado por NEWTON, usando o programa para a técnica do meio contínuo, e simulou-se a laje como membrana rígida de espessura 10cm.
4. **SAP S-N 10 cm** – utilizou-se um carregamento idêntico ao usado por Newton usando o programa pelo técnica do contínuo, e simulou-se a laje como casca fina de espessura 10cm.
5. **ANSYS** – imprimiu-se também os resultados obtidos por Sousa Junior usando o programa ANSYS.

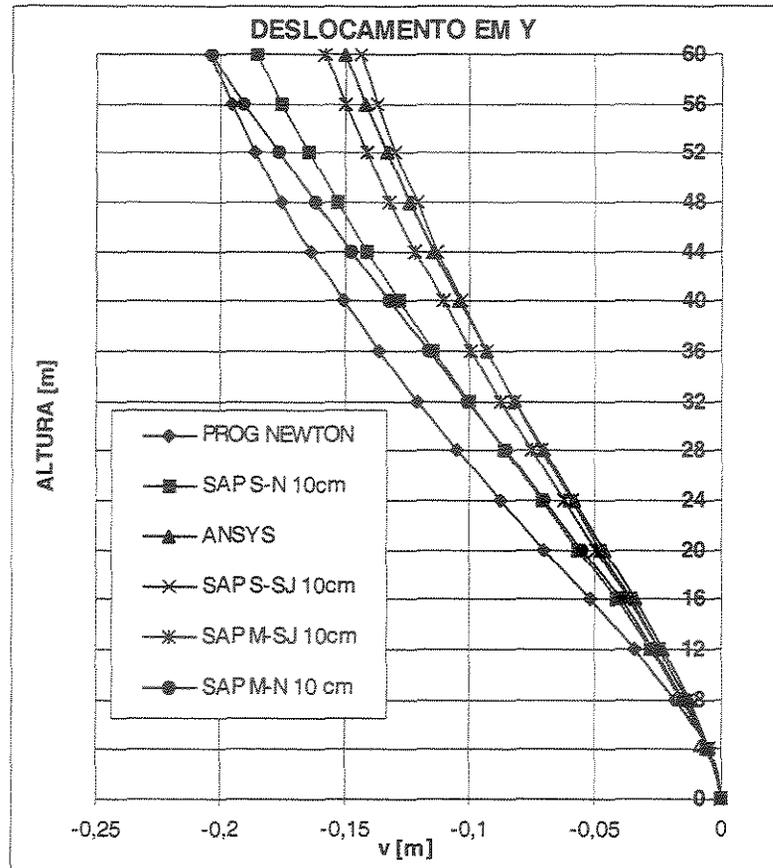


Figura 7.26 – Deslocamentos na direção y para o edifício do exemplo 04

Devido à quase simetria da estrutura e do carregamento em relação ao eixo y, os deslocamentos horizontais na direção x foram muito pequenos. A Fig. 7.27 mostra resultados obtidos para tais deslocamentos. Vê-se que a maior diferença no topo se dá entre NEWTON e SOUSA JUNIOR [33], com o modelo de NEWTON se mostrando mais flexível. Na Fig. 7.28 temos as rotações ao nível das lajes de cada andar.

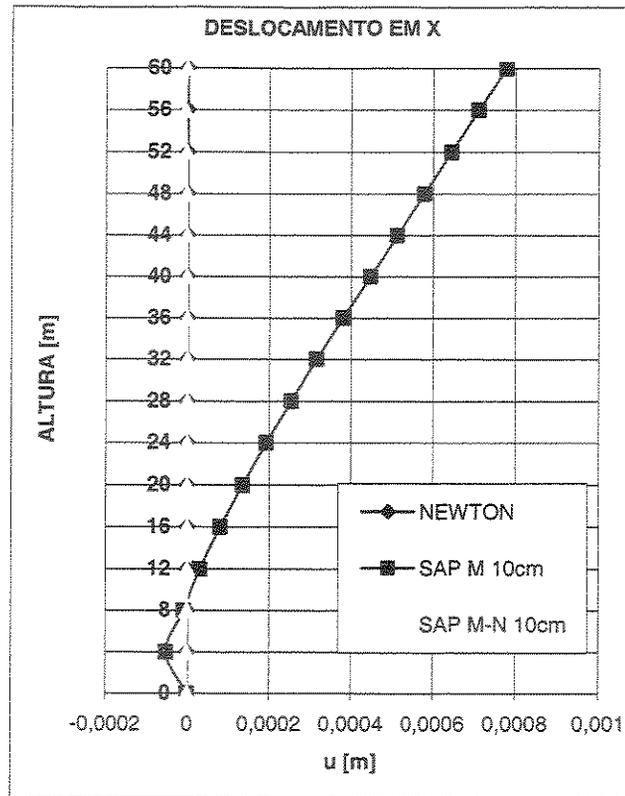


Figura 7.27 – Deslocamento na direção x do edifício do exemplo 04

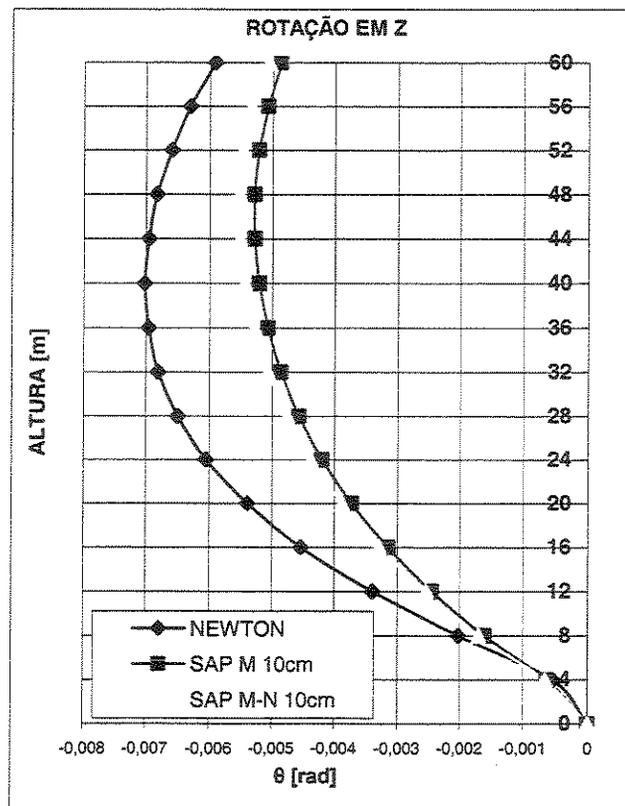


Figura 7.28 – Rotação em torno do eixo z do edifício do exemplo 04

Na modelagem pelo método discreto deste exemplo, também foram elaboradas análises considerando uma variação das espessuras das lajes, e do tipo de análise da laje como membrana (**M**) rígida ou como casca (**S**). Utilizou-se para esta análise a mesma estrutura da Fig. 7.25, sendo considerado apenas um carregamento lateral uniformemente distribuído  $F_y = -1700 \text{ kgf/m}$ . Os resultados obtidos são apresentados nos gráficos a seguir.

Nas figuras 7.29 a 7.31 são mostrados gráficos para deslocamentos de translação  $x$ , translação  $y$  e rotação  $\theta$  ao longo da altura, para a estrutura analisada com as seguintes simulações:

1. **M10** – Programa SAP2000, considerando a laje como uma membrana de 10 cm de espessura
2. **M20** – Programa SAP2000, considerando a laje como uma membrana de 20 cm de espessura
3. **M50** – Programa SAP2000, considerando a laje como uma membrana de 50 cm de espessura
4. **S10** – Programa SAP2000, considerando a laje como uma casca de 50 cm de espessura
5. **S20** – Programa SAP2000, considerando a laje como uma casca de 20 cm de espessura
6. **S50** – Programa SAP2000, considerando a laje como uma casca de 50 cm de espessura
7. **NEWTON** – Programa pela técnica do meio contínuo elaborado pelo autor

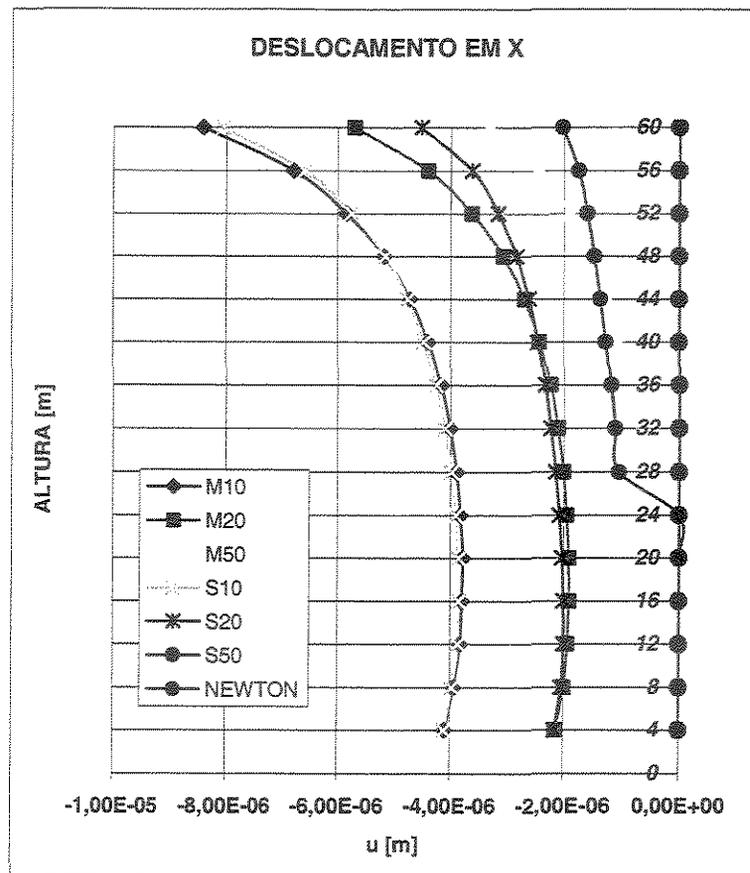


Figura 7.29 – Deslocamento em x do edifício do Exemplo 04.  
 Variação da espessura da laje e do modelo de simulação

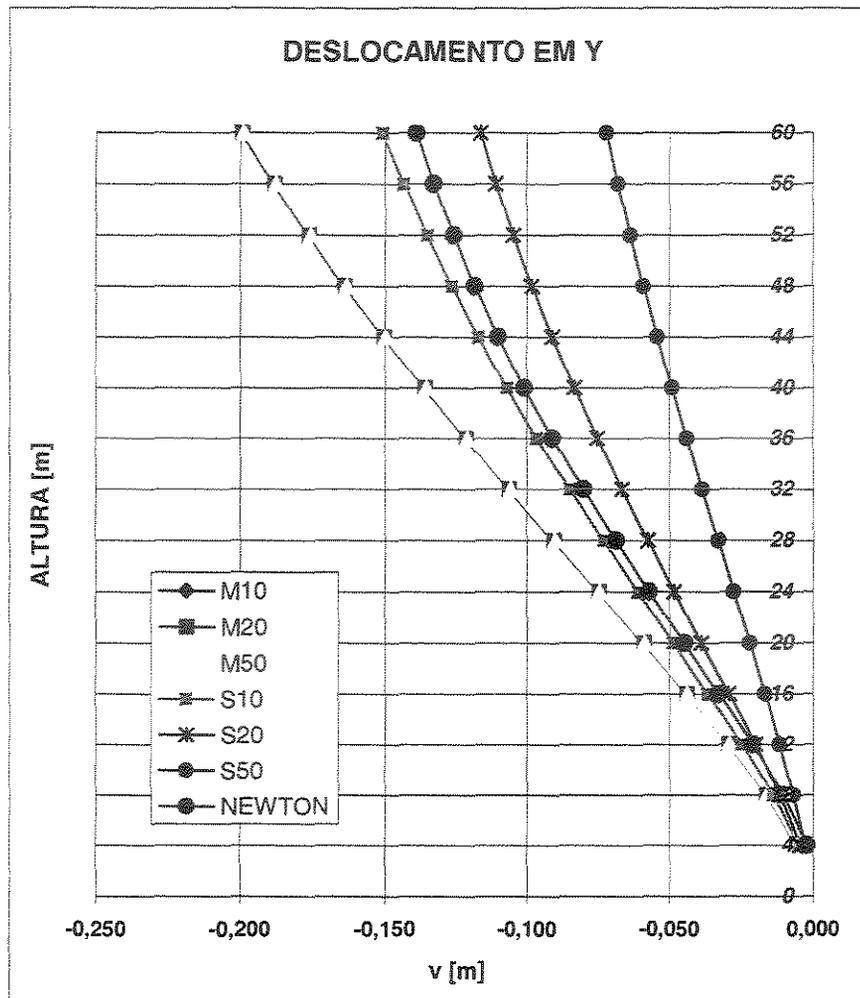


Figura 7.30 – Deslocamentos y da Estrutura do Exemplo 04.  
 Variação da espessura da laje e do modelo de simulação

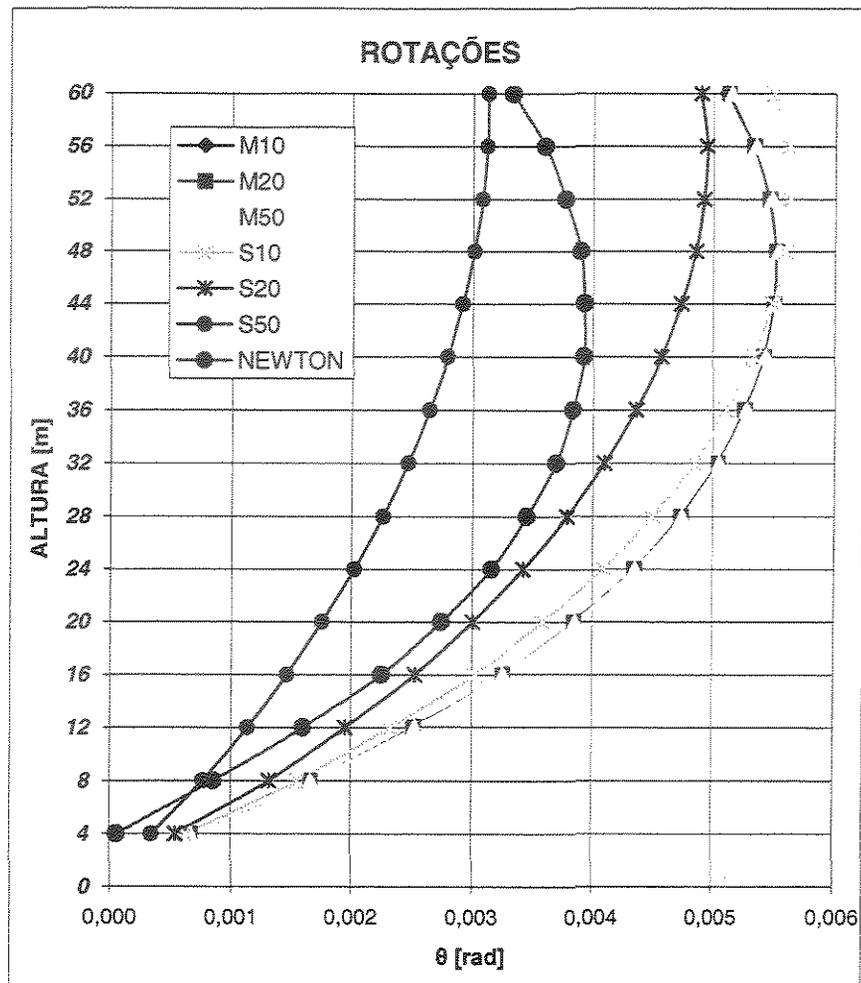


Figura 7.31– Rotação em torno do eixo z, com variação da espessura da laje  
Variação da espessura da laje e do modelo de simulação

### 7.5 Exemplo 05 – Estrutura constituída por dois núcleos

Neste último exemplo são apresentados os resultados da análise de uma estrutura formada pela associação de dois núcleos sob carga lateral. Trata-se do caso particular de um exemplo analisado na referência XAVIER [48], onde os dois núcleos estavam sob a ação da carga lateral e de cargas axiais passando pelos CG dos núcleos.

A estrutura é uma associação de dois núcleos unidos por lintéis. Os lintéis têm dimensões 20x30 cm e as paredes dos núcleos têm espessura de 20 cm.

Os módulos de elasticidade longitudinal e transversal são  $2,0 \times 10^6$  tf/m<sup>2</sup> e  $8,0 \times 10^5$  tf/m<sup>2</sup>, respectivamente. O carregamento vertical foi considerado nulo. O carregamento lateral é constituído por duas forças uniformemente distribuídas:  $q_x=0,72$ tf/m e

$q_y=0,96\text{tf/m}$ . Essas forças são admitidas aplicadas no ponto de ordenadas (2,75 ; 2,00) em relação ao canto inferior esquerdo. O pé-direito dos andares é de 3,0 m e a estrutura é composta por 15 pavimentos, com todas as características constantes ao longo da altura. A planta baixa é definida conforme Fig 7.32, onde se pode observar mais detalhes da disposição dos elementos estruturais e do carregamento lateral.

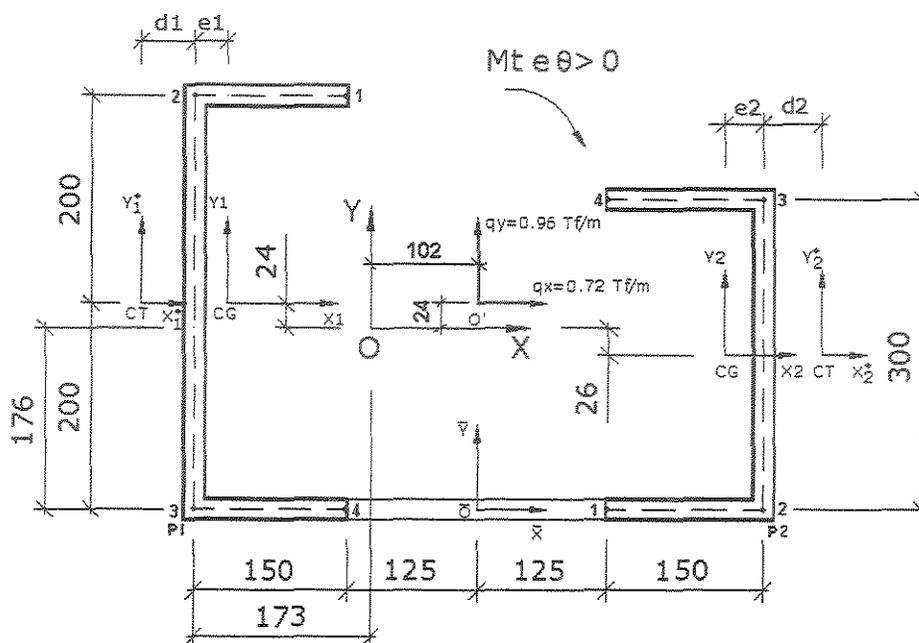


Figura 7.32 – Estrutura e carregamento para o Exemplo 05 (medidas em centímetros) (exemplo extraído de Xavier [38])

Apresenta-se a seguir os cálculos preliminares dos parâmetros para a montagem do sistema de equações diferenciais de 3ª. ordem para a análise do edifício pelo método contínuo:

### a) CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DO NÚCLEO 1

#### a1) Centro de gravidade

$$e_1^* = \frac{2(1,5 \times 0,2 \times 0,75)}{2 \times 1,5 \times 0,2 + 4 \times 0,2} = 0,321\text{m}$$

#### a2) Momento de inércia em relação ao eixo $O_1X_1$

$$J_{x1} = \frac{0.2 \times 4^3}{12} + 2 \left[ \frac{1.5 \times 0.2^3}{12} + 0.2 \times 1.5 \times 2^2 \right] = 3.468 m^4$$

a3) Momento de inércia em relação ao eixo  $O_1 Y_1$

$$J_{y1} = \frac{4 \times 0.2^3}{12} + 3 \times 0.2 \times (0.32)^2 \left[ \frac{0.2 \times 1.5^3}{12} + 0.2 \times 1.5 \times 0.429^2 \right] = 0.307 m^4$$

a4) Centro de Torção

Sendo o eixo  $O_1 X_1$  o eixo de simetria da seção transversal do núcleo 1,

$$Y_{D1} = 0$$

E para este tipo de seção tem-se:

$$x_{D1} = x_{p01} + d_1$$

com

$$d_1 = -\frac{t}{J_1} \times \frac{a_1^2 b_1^2}{4} = -\frac{0.2}{3.468} \times \frac{1.5^2 \times 4^2}{4} = -0.519 m$$

logo,

$$x_{D1} = -(0.519 + 0.32) = -0.839 m$$

a5) Momento Setorial de Inércia  $J_{\omega 1}$

$$J_{\omega 1} = 0.865 m^6$$

a6) Momento de Inércia à Torção  $J_{t1}$

$$J_{t1} = \frac{1}{3} \times 0.2^3 (2 \times 1.5 + 4) = 1.86 \times 10^{-2} m^4$$

## a7) Área da seção Transversal

$$A_1 = 0.2(2 \times 1.5 + 4) = 1.4m^2$$

## a8) Coordenadas do Centro de Gravidade em relação aos eixos Globais OXYZ

$$X_{CG1} = -1.409m$$

$$Y_{CG1} = 0.24m$$

## a9) Momento Polar de Inércia em relação ao eixo Global O

$$I_{O,1} = (X_{CG1}^2 + Y_{CG1}^2)A_1 + J_{x1} + J_{y1}$$

$$I_{O,1} = 6.635m^4$$

## a10) Coordenadas do Centro de Torção em relação aos eixos Globais OXYZ

$$X_{CT1} = -2.249m$$

$$Y_{CT1} = 0.24m$$

b) CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DO NÚCLEO 2

## b1) Centro de gravidade

$$e_2^* = \frac{2(1.5 \times 0.2 \times 0.75)}{2 \times 1.5 \times 0.2 + 3 \times 0.2} = 0.375m$$

b2) Momento de inércia em relação ao eixo  $O_2X_2$ 

$$J_{x2} = \frac{0.2 \times 3^3}{12} + 2 \left[ \frac{1.5 \times 0.2^3}{12} + 0.2 \times 1.5 \times 1.5^2 \right] = 1.802m^4$$

b3) Momento de inércia em relação ao eixo  $O_1Y_1$

$$J_{y_2} = \frac{3 \times 0.2^3}{12} + 3 \times 0.2 \times (0.375)^2 \left[ \frac{0.2 \times 1.5^3}{12} + 0.2 \times 1.5 \times 0.375^2 \right] = 0.283 m^4$$

b4) Centro de Torção

Sendo o eixo  $O_2X_2$  o eixo de simetria da seção transversal do núcleo 2,

$$Y_{D2} = 0$$

Para este tipo de seção tem-se:

$$x_{D2} = x_{p02} + d_2$$

com

$$d_2 = -\frac{t}{J_2} \times \frac{a_2^2 b_2^2}{4} = -\frac{0.2}{1.802} \times \frac{1.5^2 \times 3^2}{4} = 0.562 m$$

logo,

$$x_{D1} = (0.375 + 0.562) = 0.937 m$$

b5) Momento Setorial de Inércia  $J_{\omega 2}$

$$J_{\omega 2} = 0.443 m^6$$

b6) Momento de Inércia à Torção  $J_{t2}$

$$J_{t1} = \frac{1}{3} \times 0.2^3 (2 \times 1.5 + 3) = 1.6 \times 10^{-2} m^4$$

## b7) Área da seção Transversal

$$A_1 = 0.2(2 \times 1.5 + 3) = 1.2m^2$$

## b8) Coordenadas do Centro de Gravidade em relação aos eixos Globais OXYZ

$$X_{CG2} = 3.395m$$

$$Y_{CG1} = -0.26m$$

## b9) Momento Polar de Inércia em relação ao eixo Global O

$$I_{O,2} = (X_{CG2}^2 + Y_{CG2}^2)A_2 + J_{x2} + J_{y2}$$

$$I_{O,2} = 15.997m^4$$

## b10) Coordenadas do Centro de Torção em relação aos eixos Globais OXYZ

$$X_{CT2} = 4.332m$$

$$Y_{CT2} = -0.26m$$

c) NÚCLEOS SEM CONTRAVENTAMENTO

## c1) Matrizes referentes ao núcleo 1

$$[L_{E1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.24 \\ 0 & 1 & 2.249 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[L_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.24 \\ 0 & 1 & 1.409 \\ 0.24 & 1.409 & 4.739 \end{bmatrix}$$

$$[J_1] = \begin{bmatrix} 0.614 & 0 & 0 \\ 0 & 6.936 & 0 \\ 0 & 0 & 1.73 \end{bmatrix} \times 10^6$$

$$[K_{T1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14.88 \end{bmatrix} \times 10^3$$

c2) Matrizes referentes ao núcleo 2

$$[L_{E2}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.26 \\ 0 & 1 & -4.332 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[L_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.26 \\ 0 & 1 & -3.395 \\ -0.26 & -3.395 & 13.331 \end{bmatrix}$$

$$[J_2] = \begin{bmatrix} 0.566 & 0 & 0 \\ 0 & 3.604 & 0 \\ 0 & 0 & 0.886 \end{bmatrix} \times 10^6$$

$$[K_{T2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12.8 \end{bmatrix} \times 10^3$$

c3) Montagem do sistema de equações diferenciais

$$[J] = [L_{E1}]^T [J_1] [L_{E1}] + [L_{E2}]^T [J_2] [L_{E2}]$$

$$[J] = \begin{bmatrix} 1.18 & 0 & 0 \\ 0 & 10.54 & 0 \\ 0 & 0 & 105.4 \end{bmatrix} \times 10^6$$

$$[K_T] = [L_{E1}]^T [K_{T1}] [L_{E1}] + [L_{E2}]^T [K_{T2}] [L_{E2}]$$

$$[K_T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 27.68 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$[L_W] = \alpha_1 [L_1] + \alpha_2 [L_2],$$

como  $\alpha_1=2.5$  e  $\alpha_2=1$ , resulta:

$$[L_w] = \begin{bmatrix} 3.5 & 0 & 0.34 \\ 0 & 3.5 & 0.1275 \\ 0.34 & 0.1275 & 25.1785 \end{bmatrix}$$

c4) Componentes do vetor de carga lateral em relação ao sistema global

$$q_a = 0.72 \text{ tf/m}$$

$$q_b = 0.96 \text{ tf/m}$$

$$q_c = 0.72 \times .24 - 0.96 \times 1.02 = - 0.8064 \text{ tfm/m}$$

c5) Parâmetros geométricos do lintel:

Área da seção transversal:

$$A_L = 0.2 \times 0.3 = 0.06 m^2$$

Momento de Inércia,  $J_L$ :

$$J_L = \frac{0.2 \times 0.3^3}{12} = 4.5 \times 10^{-4} m^4$$

Parâmetro  $f$ :

$$f = \frac{(2.5)^3}{12 \times 2 \times 10^6 \times 4.5 \times 10^{-4}} + \frac{2.5}{0.06 \times 8 \times 10^5} = 1.498 \times 10^{-3} m/tf$$

Parâmetros  $\bar{\omega}_1$  e  $\bar{\omega}_2$

$$\bar{\omega}_1 = -6.64 m^2$$

$$\bar{\omega}_2 = 4.6875 m^2$$

Matriz  $[K_L^*]$

$$[K_L^*] = \begin{bmatrix} 5137.522 & -534.601 & -11576.265 \\ -534.601 & 55.629 & 1204.606 \\ -11576.265 & 1204.606 & 26084.541 \end{bmatrix}$$

Coordenadas da origem  $\bar{o}$

$$X_{\bar{o}} = 1.02m$$

$$Y_{\bar{o}} = -1.76m$$

Cálculo da matriz  $[L_E]$

$$[L_E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1.76 \\ 0 & 1 & -1.02 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cálculo da matriz  $[K_L]$

$$[K_L] = [L_E^T] \cdot [K_L^*] \cdot [L_E]$$

$$[K_L] = \begin{bmatrix} 5137.522 & -534.601 & -20073.011 \\ -534.601 & 55.629 & 2088.7622 \\ -20073.011 & 2088.7622 & 78428.031 \end{bmatrix}$$

### Sistema de equações diferenciais de terceira ordem

$$\begin{bmatrix} 1180000 & 0 & 0 \\ 0 & 10540000 & 0 \\ 0 & 0 & 10540000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u''' \\ v''' \\ \theta''' \end{Bmatrix} +$$

$$\left( p(45-Z) \begin{bmatrix} 3.5 & 0 & 0.34 \\ 0 & 3.5 & 0.1275 \\ 0.34 & 0.1275 & 25.1785 \end{bmatrix} - \left( \begin{bmatrix} 5137.522 & -534.601 & -20073.011 \\ -534.601 & 55.629 & 2088.7622 \\ -20073.011 & 2088.7622 & 78428.031 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 27680 \end{bmatrix} \right) \right) \times \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} =$$

$$= (45-Z) \begin{Bmatrix} 0.72 \\ 0.96 \\ -0.8064 \end{Bmatrix}$$

É importante ressaltar que neste exemplo o carregamento axial vale  $p=0$

Utilizando-se o programa NEWTON, os deslocamentos em cada ponto O, origem do sistema de coordenadas OXY adotado, foram calculados ao longo da altura Z, ao nível de cada laje. Estes deslocamentos foram os mesmos calculados por Xavier [38] para exemplo similar, para carga axiais nulas.

Utilizando o programa SAP2000® essa mesma estrutura do exemplo 05, do edifício formado por dois núcleos sob carga lateral foi analisada, modelando-se a laje do edifício como membrana rígida.

Apresenta-se a seguir os gráficos de deslocamentos e rotação calculados pelo método contínuo e usando o programa SAP2000®:

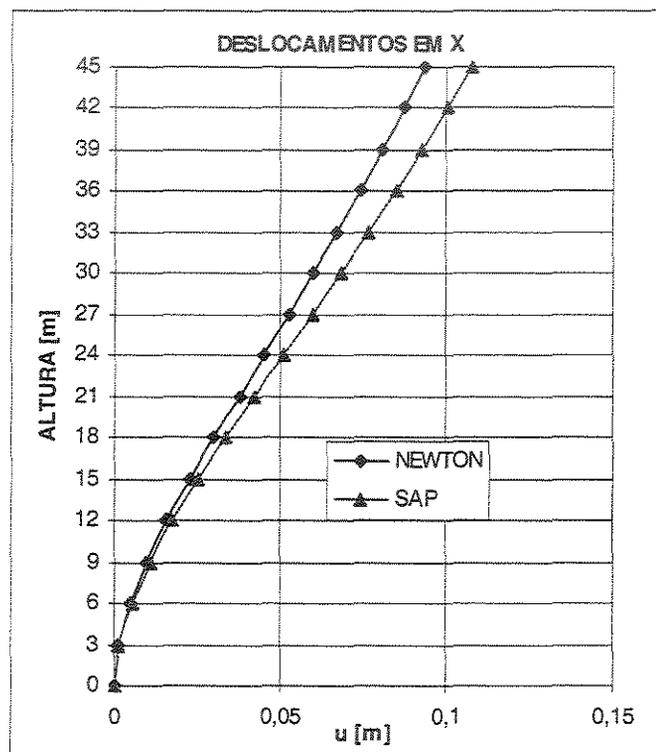


Figura 7.33 – Deslocamentos x do edifício do exemplo 05 sob carga lateral

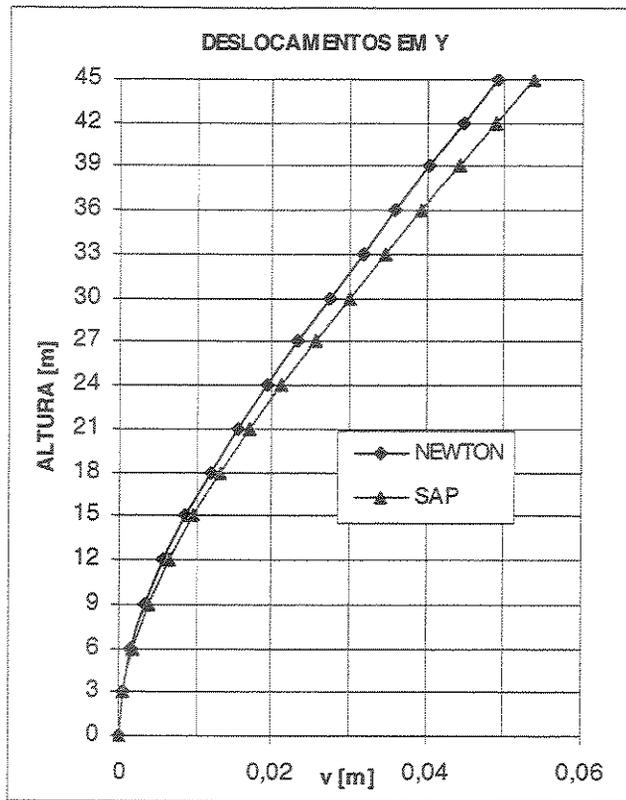


Figura 7.34 – Deslocamentos y do edifício do exemplo 05 sob carga lateral

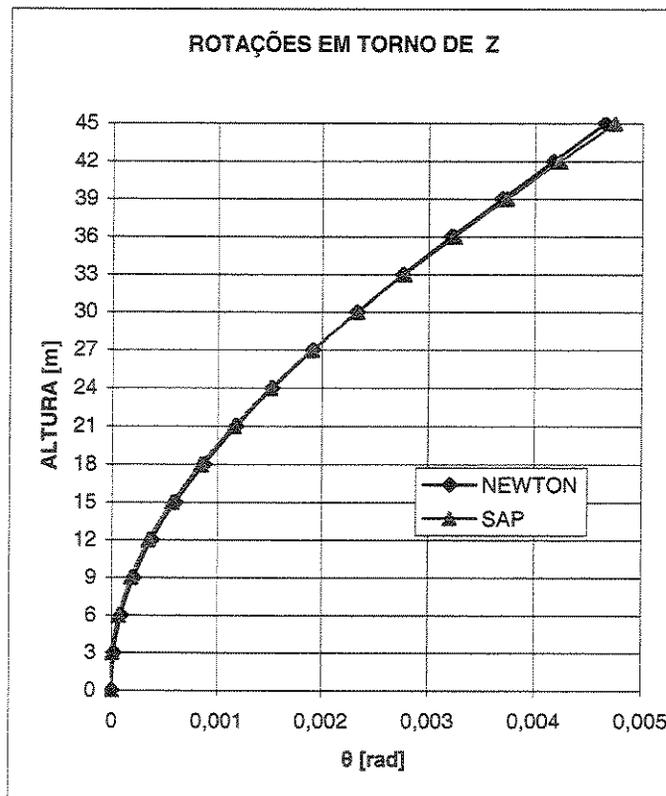


Figura 7.35 – Rotações do edifício do exemplo 5 sob carga lateral

## Tensões normais nos pontos do esqueleto do núcleo:

Para exemplificar o procedimento de como foram obtidas as tensões normais quando se usa a técnica do meio do contínuo, num ponto do esqueleto de um núcleo, mostra-se os cálculos dessa tensão na cota  $Z=36\text{m}$ , para o ponto 1 do núcleo 2:

O ponto 1 do núcleo 2 tem as seguintes coordenadas globais OXY:

$$X_{G1} = 2,27\text{m}$$

$$Y_{G1} = -1,79\text{m}$$

Esse ponto tem a seguinte área setorial:

$$w1 = -1,47$$

Indica-se na Tab. 7.5 os valores dos deslocamentos do ponto O, origem do sistema global, nas cotas 30 a 42m:

Tabela 7.5 - Deslocamentos do ponto O

ALTURA	u[m]	v[m]	$\theta$ [rad]
30m	6,02E-02	2,66E-02	2,32E-03
33m	0,067371	3,17E-02	0,00276
36m	7,43E-02	3,61E-02	3,22E-03
39m	8,09E-02	4,04E-02	3,69E-03
42m	0,087323	4,30E-02	4,17E-03

Transferindo estes deslocamentos para o ponto em estudo, os valores dos deslocamentos no ponto 1, nas direções dos eixos principais de inércia do núcleo 2 valem:

Tabela 7.6 – Deslocamentos do ponto 1 do núcleo 2

ALTURA	u[m]	v[m]	$\theta$ [rad]
30m	5,61E-02	2,13E-02	2,32E-03
33m	6,25E-02	2,55E-02	0,00276
36m	6,86E-02	2,88E-02	3,22E-03
39m	7,44E-02	3,21E-02	3,69E-03
42m	8,00E-02	4,30E-02	4,17E-03

Seguindo o mesmo procedimento de cálculo apresentado no exemplo 3, baseado em diferenças finitas, obtemos as derivadas segunda dos deslocamentos do ponto 1 em relação à variável Z, calculadas na cota Z=36m:

Tabela 7.7 – Derivadas segunda dos deslocamentos do ponto 1 do núcleo 2

ALTURA	u''	v''	θ''
36m	-3,19E-05	-6,21E-05	1,66E-06

Cálculo dos momentos principais de inércia:

$$M_y = v'' * E * J_x$$

$$M_y = -6,21E-05 * 2E6 = -124,24 * J_x$$

$$M_x = u'' * E * J_y$$

$$M_x = -3,19E-05 * 2E6 = -63,8 * J_y$$

Cálculo do Bimomento (B):

$$B = E * J_w * \theta''$$

$$B = 2E6 * 1,66E-06 = -3,32 * J_w$$

Portanto a tensão normal no ponto 1 do núcleo 2, vale:

$$\sigma_{z,i} = \frac{M_x}{J_y} x_i + \frac{M_y}{J_x} y_i + \frac{B}{J_w} \omega_i$$

$$\sigma_{z,36} = \frac{-124,24 J_x}{J_x} (-1,79) + \frac{-63,8 J_y}{J_y} (2,27) + \frac{-3,32 J_w}{J_w} (-1,47)$$

$$\sigma_{z,36} = 222,3896 - 144,826 + 4,8804 = 82,444 \text{ tf} / \text{m}^2$$

Do mesmo modo calculam-se as tensões normais nos demais pontos de interesse. A Tabela 7.8 indica os valores das tensões normais obtidas para os pontos do esqueleto dos dois núcleos, calculadas na cota Z=36m.

Tabela 7.8 – Tabela de tensões do núcleo 1 e 2 na cota Z=36m

Pontos	Núcleo 1		Núcleo 2	
	SAP [tf/m <sup>2</sup> ]	NEWTON [tf/m <sup>2</sup> ]	SAP [tf/m <sup>2</sup> ]	NEWTON [tf/m <sup>2</sup> ]
1	16,6856	12,30884	73,3854	82,4485
2	64,19934	72,12897	0,660345	0,731926
3	54,69138	49,36439	5,71257	6,247838
4	146,0567	133,8022	6,000115	6,80353

A seguir é apresentada uma figura, com um gráfico em escala de cores, com os valores das tensões normais nas paredes dos núcleos 1 e 2, entre os pavimentos de cota Z=33m à Z=39m.

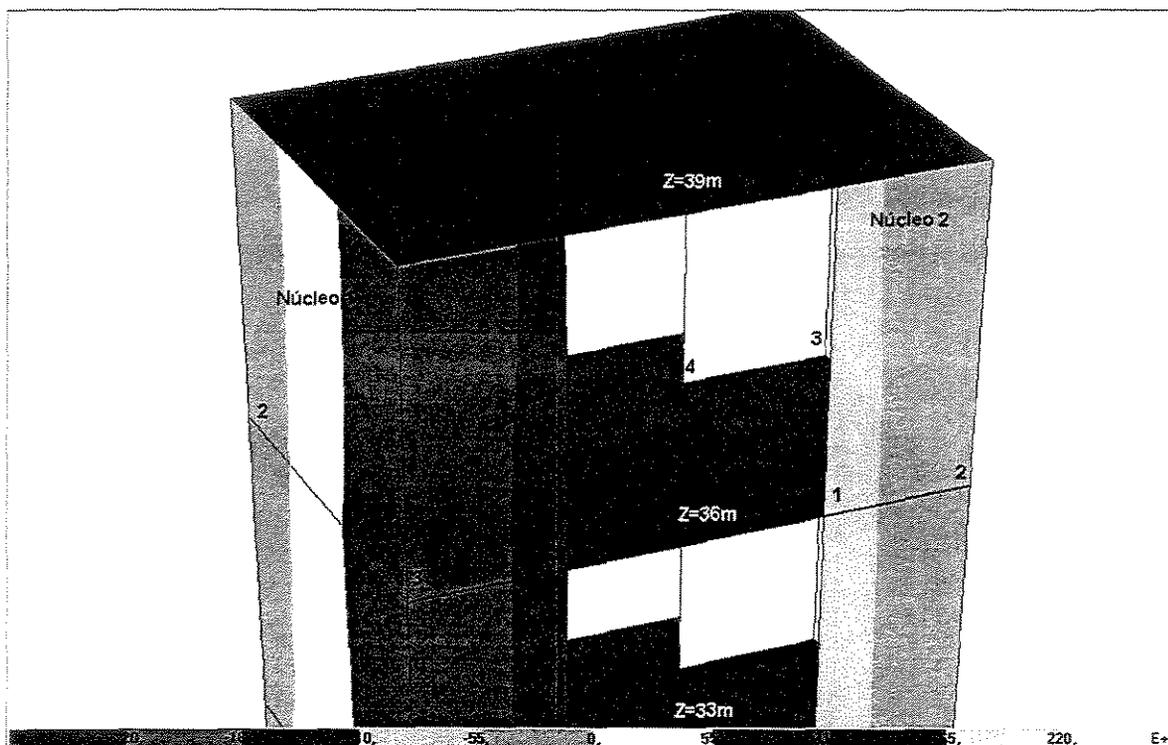


Figura 7.36 – Diagrama de tensões normais (em kgf/m<sup>2</sup>) nas paredes dos núcleos. Resultados obtidos com o programa SAP2000<sup>®</sup>

Apresentam-se a seguir dois gráficos com os resultados de tensões normais, calculadas pela técnica do contínuo e usando o programa SAP2000<sup>®</sup>, calculadas na cota Z=36m, correspondente ao 12<sup>o</sup> pavimento, em 4 pontos de cada núcleo, tomados ao longo do esqueleto. Os 8 pontos estão ilustrados na Fig. 7.30, numerados de 1 até 4 em cada núcleo.

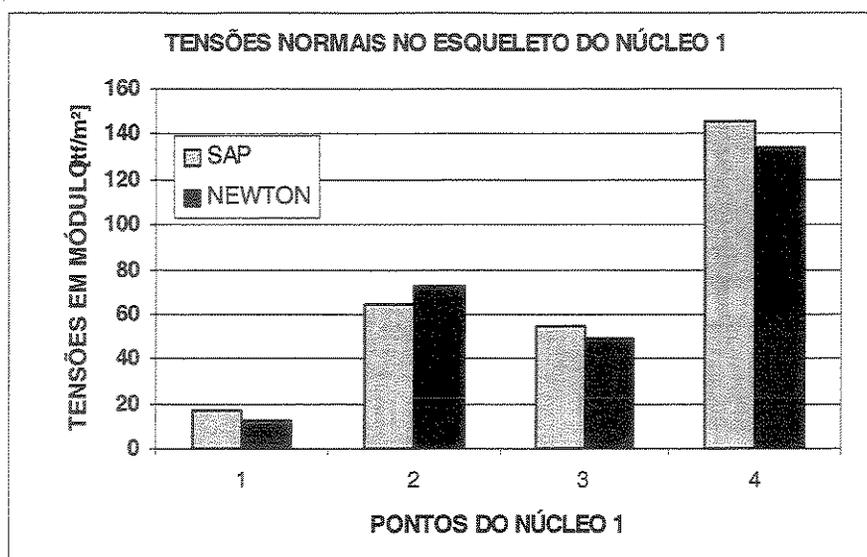


Figura 7.37 – Tensões normais em pontos do esqueleto do núcleo 1.(Z=36m)

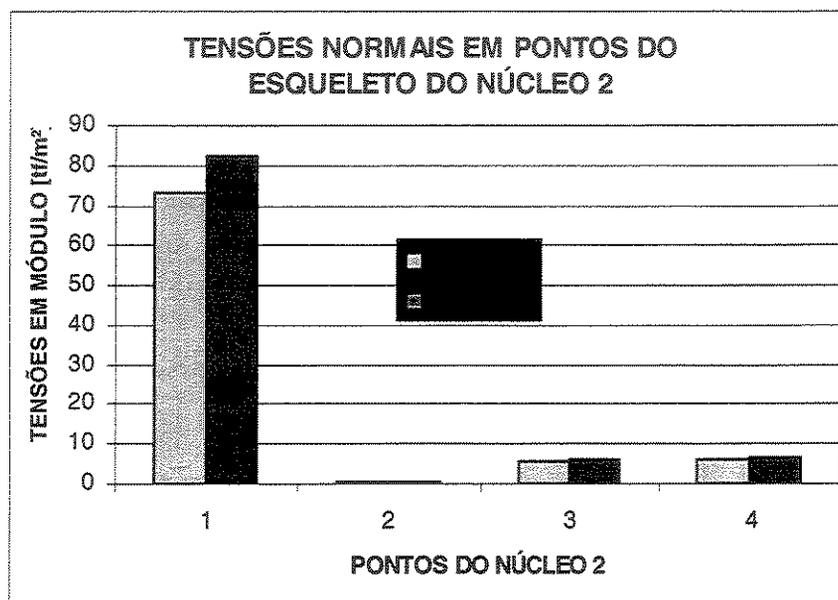


Figura 7.38 – Tensões normais em pontos do esqueleto do núcleo 2.(Z=36m)

Para o ponto 1 do núcleo 2 a diferença entre as tensões normais obtidas pela técnica do contínuo e usando o programa SAP2000® vale 12,35%, conforme expresso abaixo:

$$dif = \left( \frac{82,44}{73,38} - 1 \right) * 100 = 12,35\%$$

## Esforços solicitantes nos lintéis:

### a) Força cortante

Para o cálculo do esforço cortante que surge no meio do lintel recorreremos à fórmula apresentada no Capítulo 5, transcrita abaixo:

$$V_L = \frac{1}{f} [(\bar{\ell}_1 + \bar{\ell}_2)\bar{u}' + (\bar{e}_2 - \bar{e}_1)\bar{v}' + (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2)\bar{\theta}']$$

onde,

- $\bar{\ell}_i, \bar{e}_i \Rightarrow$  distância do centro de gravidade CG do núcleo i até os eixos  $\overline{OX}$  e  $\overline{OY}$ ;
- $\bar{\omega}_i \Rightarrow$  parâmetros associados aos empenamentos, conforme:
  - $\bar{\omega}_i = \bar{\ell}_i y_i - e_i x_i - \omega_i$ ;

onde:

- $\bar{x}_i, \bar{y}_i \Rightarrow$  Correspondem distância do centro de torção CT do núcleo i até os eixos  $\overline{OX}$  e  $\overline{OY}$ ;
- $\omega_i \Rightarrow$  Corresponde à área setorial no ponto de engaste do núcleo e o lintel.
- $f = \frac{\ell^3}{12EJ_L} + \frac{\ell}{A_L G}$

onde,

- $\ell \Rightarrow$  Comprimento do lintel.

De acordo com a geometria acima mostrada a expressão da cortante fica:

$$V_L = 667,5567 [(4,805)\bar{u}' + (-0,5_1)\bar{v}' + (-11,3275)\bar{\theta}']$$

Observa-se nesta expressão que a força cortante pode ser calculada em função das derivadas primeiras de cada deslocamento. A expressão da derivada primeira de deslocamentos, calculada por diferenças finitas, conforme Apêndice C, é transcrita abaixo:

$$u'_i = \frac{1}{12h} [uee - 8ue + 8ud - udd]$$

Os deslocamentos do ponto O, dois pontos acima e dois pontos abaixo do pavimento com cota Z=36m é mostrado na Tab. 7.9:

Tabela 7.9 - Tabela dos deslocamentos do ponto O

ALTURA	u[m]	v[m]	$\theta$ [rad]
30m	6,02E-02	2,66E-02	2,32E-03
33m	0,067371	3,17E-02	0,00276
36m	7,43E-02	3,61E-02	3,22E-03
39m	8,09E-02	4,04E-02	3,69E-03
42m	0,087323	4,30E-02	4,17E-03

Os deslocamentos para o ponto no meio do lintel são calculados a partir dos deslocamentos do ponto O. Mostra-se na Tab. 7.10 os valores dos deslocamentos calculados no meio dos lintéis localizados nas cotas de 30m à 42m.

Tabela 7.10 – Tabela dos deslocamentos do centro do lintel

ALTURA	u[m]	v[m]	$\theta$ [rad]
30 m	6,26E-02	3,07E-02	2,32E-03
33 m	7,02E-02	3,66E-02	0,00276
36 m	7,75E-02	4,17E-02	3,22E-03
39m	8,47E-02	4,69E-02	3,69E-03
42m	9,16E-02	4,30E-02	4,17E-03

Assim, as derivadas primeiras dos deslocamentos no meio do lintel localizado na cota Z=36m valem:

Tabela 7.11 – Derivadas primeiras dos deslocamentos no meio do lintel da cota z=36m

ALTURA	u'	v'	$\theta'$
36m	2,41E-03	1,96E-03	1,55E-04

Deste modo o valor da cortante no ponto médio do lintel da cota  $z=36\text{m}$ , calculado pela técnica do meio contínuo vale:

$$V_L = 5,909 \text{ t/m}^2$$

Apresenta-se a Fig. 7.39, onde são mostrados os valores de força cortante calculados nos lintéis utilizando o programa SAP2000®.

A diferença de valores da força cortante no meio do lintel da cota  $Z=36\text{m}$ , calculadas pela técnica do contínuo e pelo programa SAP2000® vale:

$$dif = \left( \frac{5909}{5771} - 1 \right) * 100 = 2,39\%$$

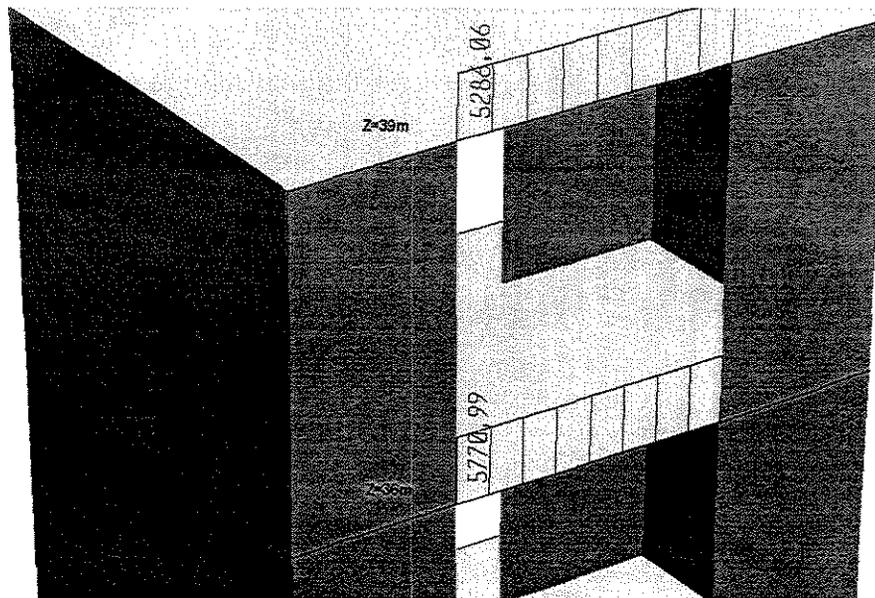


Figura 7.39 – Diagrama de força cortante no Lintel (kgf) do exemplo 5 na cota  $Z=36\text{m}$ .  
Resultados obtidos com o programa SAP2000®

#### b) Momento fletor no lintel

O momento na extremidade do lintel, na junção com a parede do núcleo, vale:

$$M_L = V_L \frac{\ell}{2}$$

Para o lintel da cota Z=36m o momento nas extremidades do lintel vale:

$$M_L = 5909 * \frac{2,5}{2}$$

$$M_L = 7386,25 \text{kgfm}$$

Mostra-se na Fig. 7.40 os diagramas de momento nos lintéis de um trecho da estrutura do exemplo 05, incluindo o lintel de cota Z=36m.

Para o lintel da cota Z=36m, a diferença de valores de momento fletor na extremidade do lintel (junção com a parede), calculados pela técnica do contínuo e pelo programa SAP2000® vale:

$$dif = \left( \frac{7386,25}{7213,79} - 1 \right) * 100 = 2,39\%$$

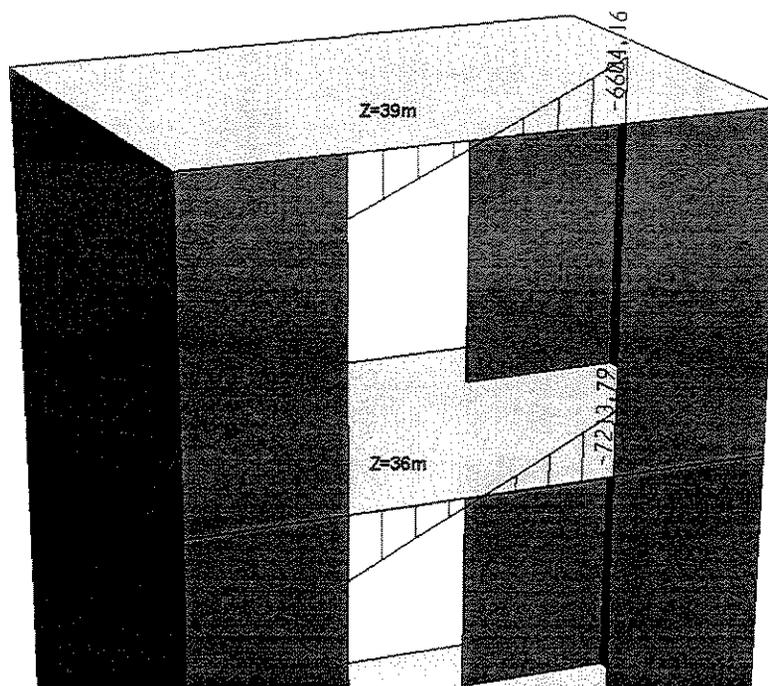


Figura 7.40 – Diagrama de Momento fletor nos Lintéis (kgfm) para o exemplo 05 na cota z=36m.

Resultados obtidos com o programa SAP2000®

## Capítulo 8

### CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

O trabalho tratou do estudo de duas abordagens para a análise de edifícios altos sob a ação de cargas laterais: formulação pelo “*técnica dos meios contínuos*” e obtenção de resultados por “*técnicas discretas*”, através de elementos finitos. Neste último caso, os exemplos foram analisados usando o programa SAP2000<sup>®</sup>, onde as vigas e pilares foram simulados como barras; as paredes, os núcleos foram simulados como elementos finitos de cascas e as lajes foram modeladas ora como cascas, ora como elementos de membrana rígida. Mostrou-se, de forma sucinta, uma proposta defendida como tese de doutorado por SOUZA JUNIOR [33], onde os pilares e vigas foram modelados como barras, as lajes modeladas como placas e os núcleos estruturais foram modelados como elementos reticulares de barras, com o acréscimo da variável empenamento em cada extremidade, levando em conta os bimomentos, além dos esforços axiais, torção e flexão.

Como mencionado na Introdução, este trabalho não teve qualquer pretensão de julgar as técnicas utilizadas. Tem-se a consciência que não são concorrentes – cada um tem os seus méritos e as suas deficiências. O objetivo foi a comparação de resultados, obtidos com um e com outro. Cabe sempre ao engenheiro saber em que contexto está concebendo a sua estrutura, podendo optar por um ou por outro.

A técnica do meio contínuo exige é de fácil aplicação, em especial em estruturas de formas e com carregamentos regulares. Os resultados obtidos são bastante razoáveis face às simplificações adotadas. Com as hipóteses normalmente utilizadas, as lajes são admitidas como diafragmas rígidos e o problema recai num sistema de equações

diferenciais parciais de terceira ordem, nas variáveis deslocamentos translação  $u$ , translação  $v$  e rotação  $\theta$  em cada nó, tomados ao longo da altura do edifício.

Neste trabalho, a técnica dos meios contínuos foi aplicada para alguns dos casos mais comuns de associação tridimensional de elementos em edifícios altos: associação plana de pórticos e paredes, núcleos abertos, associação de núcleos contraventados por lintéis, e associação tridimensional de pórticos e paredes. Simulou-se a associação tridimensional de pórticos, paredes e núcleos, substituindo esse último por duas paredes e uma mola de torção. Tomou-se como base para este estudo a dissertação de mestrado de XAVIER [48]. No equacionamento deduzido não se permite a variação de carregamento, de propriedades físicas e geométricas ao longo da altura. Uma conclusão do trabalho é que esta restrição adotada não permite uma modelagem eficiente de muitas estruturas da prática, pois quando estamos analisando estruturas de grande altura, normalmente a carga lateral deveria variar com a altura, e existe uma tendência muito forte dos arquitetos e projetistas de variar a geometria com a altura.

A formulação apresentada para a técnica dos meios contínuos foi deduzida com hipóteses de não linearidade geométrica, levando em conta o momento fletor da carga axial produzido pela excentricidade devido à flexão. Adotou-se um sistema de coordenadas globais com um eixo vertical OZ. Em cada nível de altura  $z$ , os deslocamentos calculados, para o ponto do eixo OZ foram  $u$ ,  $v$  e  $\theta$ . A partir desses valores, com a hipótese de que as lajes conferem aos andares um movimento de corpo rígido, obteve-se os deslocamentos de cada ponto da estrutura. A partir desses deslocamentos e suas derivadas parciais em relação à abscissa  $z$ , foram calculados os esforços solicitantes.

Neste trabalho, onde o objetivo foi a de comparação de resultados obtidos pela técnica do contínuo com os resultados calculados por técnicas denominadas “discretas”, a modelagem com discretização de elementos baseou-se no método dos elementos finitos, via processo dos deslocamentos e, de forma deliberada, optou-se pela utilização do software SAP2000<sup>®</sup>, um programa comercial consagrado, de grande confiabilidade, disponível em muitos escritórios de projeto.

Ressalte-se que programas da categoria do SAP2000<sup>®</sup> existem vários no mercado. A escolha foi motivada pela facilidade de acesso para fins acadêmicos, de licença do software SAP2000<sup>®</sup> disponível na Faculdade de Engenharia Civil da Unicamp.

Pode-se destacar como sendo uma grande vantagem do uso do método dos elementos finitos a possibilidade de acoplamento de elementos de natureza diferentes, podendo combinar as peculiaridades de comportamento dos elementos reticulares com o comportamento dos elementos de cascas ou membranas, simulando-se de maneira bem realista as estruturas tridimensionais de edifícios altos. O fato de programas como o SAP2000 ou similares terem embutidas ferramentas gráficas de edição muito versáteis facilitam sobremaneira a entrada de dados, sendo muito útil para a concepção de estruturas. O projetista pode editar os dados elásticos e/ou geométricos facilmente, bem como modificar ou combinar vários carregamentos que atuam na estrutura. A saída de resultados no SAP2000<sup>®</sup> se dá em forma de tabelas, diagramas, e gráficos de cores, que podem ser exibidos com muita versatilidade na tela do computador ou impresso num dispositivo de saída gráfica como um plotter, por exemplo.

Optou-se, na modelagem com o programa SAP2000<sup>®</sup>, utilizar apenas comportamento linear do material e da estrutura.

Os mesmos exemplos estudados pela técnica dos meios contínuos foram também analisados usando o programa SAP2000<sup>®</sup>.

Os exemplos estudados comprovaram que a técnica dos meios contínuos, quando aplicada em estruturas de formas regulares simples, sob a ação de cargas laterais, tiveram resultados de deslocamentos e esforços bem próximos dos obtidos pela modelagem discreta, usando o método dos elementos finitos, através do software SAP2000<sup>®</sup>. Para o estudo de formas mais complexas, outras associações tridimensionais de elementos precisarão ser estudadas e terem suas formulações de esforços deduzidas.

Em exemplos cujos resultados não foram mostrados no capítulo 7 - EXEMPLOS, onde além das cargas laterais as estruturas tinham também cargas verticais de valores significativos, os resultados de esforços apresentaram uma diferença da ordem de 10% ou maior entre os dois métodos. O fato se explica pelo efeito da não linearidade geométrica contida na formulação pela técnica do meio contínuo, mas que não foi levada em conta na simulação linear estudada com o software SAP2000<sup>®</sup>.

Foram apresentados 5 exemplos, que de forma didática procuraram comparar resultados de deslocamentos, esforços ou tensões, calculados pela técnica dos meios contínuos e/ ou usando o método dos elementos finitos, via programa SAP2000<sup>®</sup>.

Na estrutura teste 02 (parede simples) e 03 (pórtico simples) devido à simplicidade estrutural, os resultados obtidos com a técnica discreta e com o programa elaborado com a formulação da técnica dos meios contínuo foram quase idênticos.

Para a estrutura teste 03 os valores no topo e na base possuem algumas perturbações. Isto ocorreu devido às simplificações adotadas para a formulação dos pilares dos pórticos. Foram assumidos, momentos nulos na metade da altura dos pilares, em cada andar. Para trabalhos futuros recomenda-se adotar o que já foi feito por PROENÇA [23], que deduziu valores de coeficientes de rigidez a esforço cortante assumindo momento nulo, no térreo e no primeiro andar, a uma distância  $0,4h$ , onde  $h$  é o pé direito dos andares.

Na estrutura teste 04 (Associação plana de pórtico e parede), apesar de ser uma estrutura simples e com carregamentos simples, os resultados principalmente nas extremidades da estrutura tiveram pequenas diferenças nos deslocamentos e conseqüentemente nos esforços. Estas diferenças são pequenas e não teriam grandes influências em um processo de pré-dimensionamento.

Nos exemplos 2 e 3, onde se fez a análise isolada de um núcleo, os deslocamentos obtidos com os processos discreto e contínuo são bastante próximos, apesar das pequenas diferenças nas extremidades.

No exemplo 4 foi feito um estudo de uma estrutura constituída de associações de pórticos e um núcleo, estrutura analisada por SOUSA JUNIOR [33]. As dificuldades de uma boa simulação de tal estrutura pela técnica do contínuo proporcionaram eventuais aumentos nas diferenças de deslocamentos.

No exemplo 5, análise de dois núcleos conectados por um lintel, o cálculo dos esforços pela técnica do contínuo foi extremamente árdua, devido a quantidade de fatores à serem calculados e pela não automatização computacional de tais cálculos. Neste exemplo as diferenças nos resultados entre as duas técnicas, numa cota  $Z=36m$ , para o momento fletor na ligação do lintel com o núcleo e para a força cortante na metade do lintel foram de 2,39%.

Devido às características do programa SAP2000®, nas estruturas que continham núcleos, foram comparados resultados de tensões normais, ao invés da comparação de esforços.

Finalizando, da experiência adquirida com o uso da técnica dos meios contínuos seria muito proveitoso se trabalhos futuros investissem numa maior automatização computacional da entrada e preparação de dados, e uma eficiente obtenção de esforços solicitantes, a partir dos resultados de deslocamentos e suas derivadas, quando da solução numérica do sistema de equações diferenciais em que recai o problema dos edifícios altos.

## Apêndice A

### Resumo Teórico sobre Flexo-Torção

Para complementar o trabalho apresentamos uma breve abordagem da teoria de Flexo – Torção tomando por base as referências [21], [24] e [48]. Um bom entendimento do fenômeno da Flexo – Torção é imperioso para o desenvolvimento do trabalho.

#### A1. Hipóteses Fundamentais

##### A1.1 Geometria da Seção

Seja a barra de seção aberta de parede fina representada pela Fig. A1.

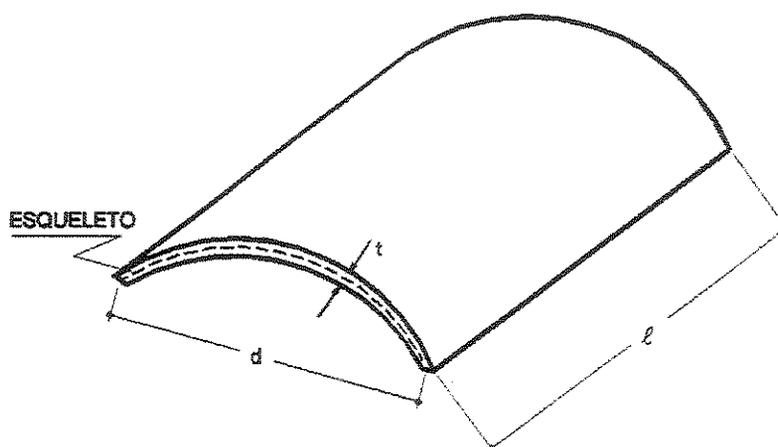


Figura A1 – Peça de seção aberta de parede fina

As hipóteses normalmente utilizadas na literatura (vide [21]) sobre as relações entre as medidas: espessura, comprimento e largura de uma peça de seção delgada aberta, para serem aplicadas às equações do modelo ideal de Vlasov [45] sobre a teoria de Flexo – Torção são:

$$\frac{t}{d} \leq 0,1 \quad \frac{d}{\ell} \leq 0,1 \quad (\text{A1})$$

onde:

t: espessura da parede;

d: uma dimensão característica da seção transversal parede (largura, comprimento, diâmetro,...);

$\ell$ : dimensão na direção do eixo longitudinal

A linha de esqueleto é representada na Fig. A1 como sendo aquela que divide a espessura t ao meio.

## A2 Tensões de Cisalhamento

### A2.1 Tensões de Cisalhamento devidas à torção livre ( $\tau_{\text{tl}}$ )

Para as tensões de cisalhamento oriundas da torção livre, utilizamos a hipótese simplificadora, que leva a resultados aceitáveis, confirmados experimentalmente, de que as tensões se distribuem anticamente linear em relação à linha média, como se vê na Fig A2.

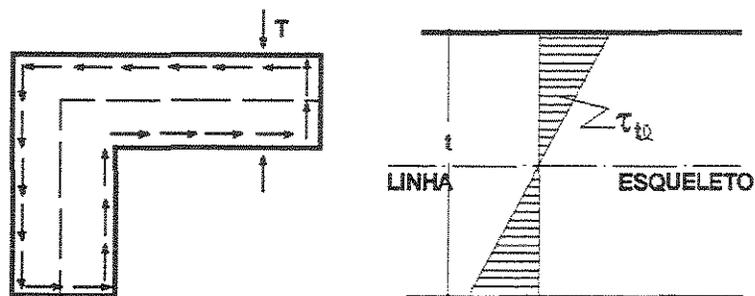


Figura A2 – Distribuição de  $\tau_{\text{tl}}$

$$\tau_{tl} = \frac{M_{tl}}{J_t} t \quad (A2)$$

onde:

$M_{tl}$ : Momento de Torção Livre

$J_t$ : Constante de Torção

t: espessura

## A2.2 Obtenção do Centro de Cisalhamento

O centro de cisalhamento (C.C.) ou centro de torção (C.T.) é um ponto do plano da seção transversal por onde deve passar a linha de ação das cargas transversais para que a peça estrutural fique submetida somente a esforços de flexão.

Da Resistência dos Materiais, sabemos que as tensões de cisalhamento provocadas por forças cortantes  $V_y$  e  $V_x$  podem ser expressas por:

$$\tau_{V_y} = \frac{V_y M_s}{t J_x} \quad \tau_{V_x} = \frac{V_x M_s}{t J_y} \quad (A3)$$

onde:

t: espessura

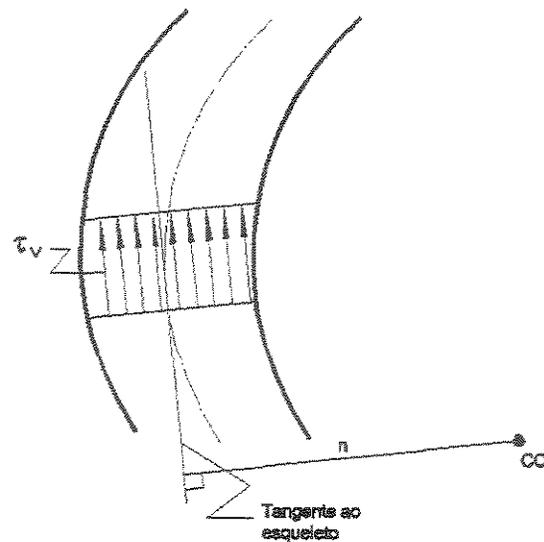
$J_x$  e  $J_y$ : momentos de inércia à flexão

$V_x$  e  $V_y$ : força cortante na seção considerada

$M_s$ : momento estático no ponto do esqueleto onde se está calculando a tensão cisalhante devido à flexão

$\tau_{V_x}$  e  $\tau_{V_y}$ : tensões de cisalhamento

Para determinarmos este centro de torção consideraremos que a tensão de cisalhamento  $\tau_v$  provocada pela força cortante  $V$ , se distribua uniformemente na espessura, conforme ilustrado na Fig. A3.

Figura A3 – Distribuição de  $\tau_v$ 

Observamos que  $n$  é a distância do (C.C.) à tangente no ponto da linha do esqueleto onde se calcula as tensões de cisalhamento  $\tau_v$ .

Na Fig. A4 temos uma representação de um sistema de eixos XYZ, sendo X e Y eixos principais de inércia e Z um eixo longitudinal passando pelos centros de gravidade (C.G.) das seções transversais.

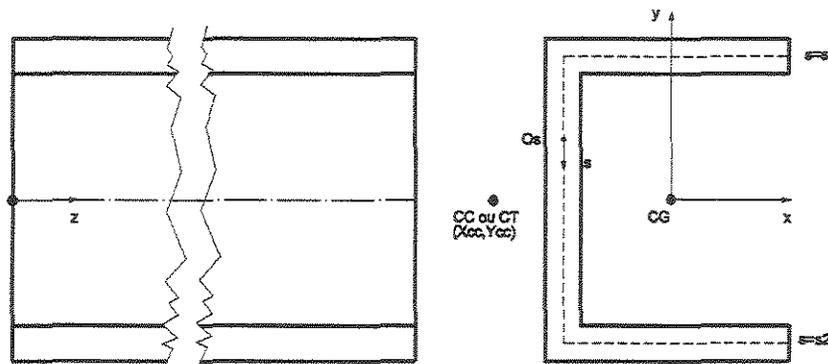


Figura A4 – Sistema de Referência

Na linha do esqueleto adotamos uma ordenada  $s$  com origem  $O_s$  a ser estabelecida convenientemente, sendo  $s = s_1$  e  $s = s_2$  as abscissas do início e do final da linha de esqueleto. A espessura de  $t$  pode variar com  $s$  e o elemento de área da seção é dado por:

$$dS = t \cdot ds \quad (A4)$$

Vamos supor inicialmente um carregamento paralelo ao eixo Y. De (A1) tem-se então:

$$V = V_y \quad (A.5.a)$$

$$J = J_x \quad (A.5.b)$$

$$Ms = \int_{s_1}^s y dS \quad (A.5.c)$$

Se impusermos que o momento de torção da resultante das tensões  $\tau_{vy}$  devidas à  $V_y$  em relação ao (C.C.) seja nulo, uma condição que fornece a posição do centro de cisalhamento (C.C.) é dada pela seguinte expressão:

$$\int_{s_1}^{s_2} \tau_{vy} dSn = 0 \quad (A6)$$

Substituindo-se (A3-a), (A4) e (A5) em (A6) temos:

$$\int_{s_1}^{s_2} \left( \int_{s_1}^s y dS \right) nds = 0 \quad (A.7.a)$$

Efetuando-se a integração por partes e lembrando que o momento estático é nulo nos pontos extremos da seção, obtemos:

$$\int_{s_1}^{s_2} \left( \int_{s_1}^s nds \right) y dS = 0 \quad (A.7.b)$$

Fazendo a mesma análise supondo um carregamento paralelo ao eixo X, de maneira análoga chegamos a seguinte condição para a posição do (C.C.).

$$\int_{s_1}^{s_2} \left( \int_{s_1}^s nds \right) x dS = 0 \quad (A8)$$

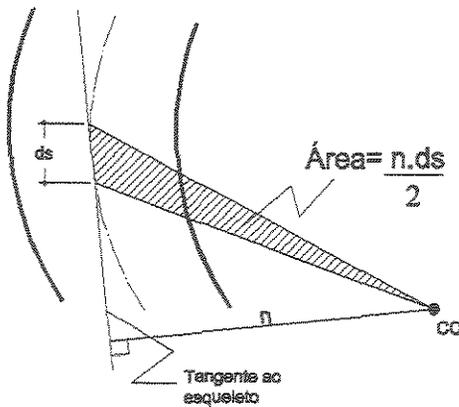


Figura A5 – Área setorial

Definimos como **área setorial** a seguinte característica geométrica:

$$\omega = \int_{s_1}^s n ds \quad (\text{A9})$$

Na Fig. A5 o elemento de área setorial  $d\omega$  é o dobro da área do setor elementar com polo no (C.C.) e que compreende o arco elementar  $ds$ . A área setorial  $\omega$  é então escrita em função da ordenada  $s$ .

Utilizando-se (A9), as condições (A7.b) e (A8) para o (C.C.) podem ser escritas como:

$$\int_s \omega y dS = 0 \quad \text{e} \quad \int_s \omega x dS = 0 \quad (\text{A10})$$

As integrais em (A10) devem ser estendidas a toda a seção. As equações (A10) independem da origem  $O_s$  da coordenada  $s$ . De fato, a mudança de origem provocaria o acréscimo de uma constante na área setorial, a qual daria contribuição nula para integrais de (A10), por ser nulo o momento estático quando se considera a seção inteira.

Tendo em vista facilitar outros cálculos, escolhe-se a origem  $O_s$  de maneira que a área setorial seja considerada principal, satisfazendo a condição:

$$\int_s \omega dS = 0 \quad (\text{A 11})$$

Caso se tenha a área setorial  $\bar{\omega}$  com origem arbitrária e se queira a área setorial  $\omega$  satisfazendo (A11), faz-se como segue:

$$\omega = \bar{\omega} + C \quad (A12)$$

Substituindo (A12) em (A11) encontra-se o valor de C:

$$C = -\frac{1}{S} \int_S \bar{\omega} dS \quad (A13)$$

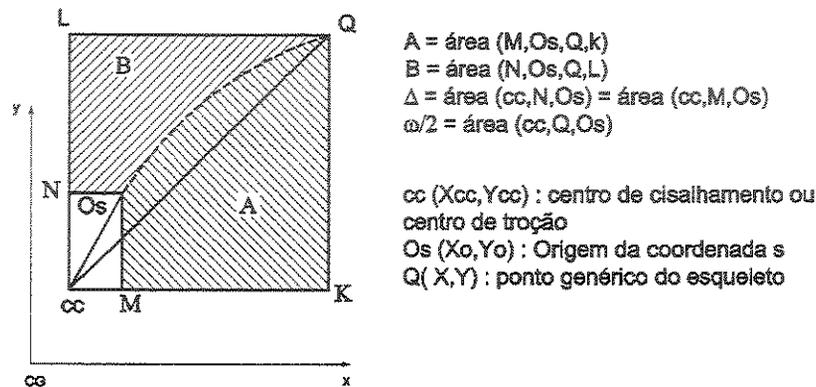


Figura A6 – Esquema para área setorial

A Fig. A6 permite uma interpretação geométrica para a área setorial e, também, sendo fácil a determinação de expressões explícitas para as coordenadas  $(X_{cc}, Y_{cc})$  do centro de torção.

Na Fig. A6 temos que o ponto Q, de coordenadas  $(x, y)$ , representa um ponto genérico do esqueleto e  $O_s$ , de coordenadas  $(x_o, y_o)$  é a origem da coordenada  $s$ . Pelos pontos C.C.,  $O_s$  e Q são traçadas retas paralelas aos eixos principais de inércia X e Y. Sendo  $\Delta$  a área do triângulo C.C., M,  $O_s$  (ou C.C., N,  $O_s$ ), tem-se que a área do quadrilátero C.C., K, Q, L é o dobro da área do triângulo C.C., Q, L podendo-se escrever:

$$\text{Área}(C.C., K, Q, L) = 2\text{Área}(C.C., Q, L)$$

$$A + B + 2\Delta = 2\left(\frac{\omega}{2} + B + \Delta\right) \quad (A14)$$

onde:

A e B: áreas hachuradas da Figura A.6.

Da igualdade indica em (A.14) se tira:

$$\omega = A - B \quad (\text{A15})$$

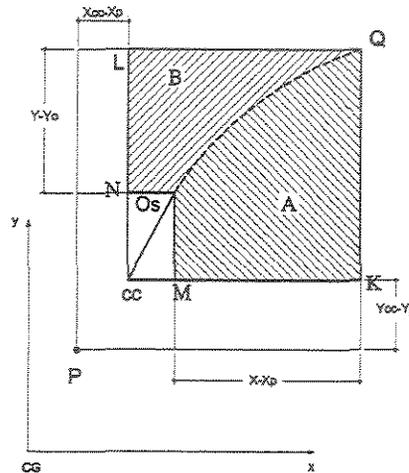


Figura A7 – Posição do C.C e do polo P

Na Fig. A7, o centro de cisalhamento (C.C) tem coordenadas  $(X_{CC}, Y_{CC})$ . Adotamos um ponto  $P(X_P, Y_P)$ , escolhido arbitrariamente, o qual servirá como polo provisório para a área setorial. Sendo  $\omega_P$  a área setorial com o polo provisório, P e considerando a propriedade (A15) da área setorial aplicada à esquematização da Fig. A7, escrevemos que:

$$\omega_P = A + (x - x_0)(y_{CC} - y_P) - B(y - y_0)(x_{CC} - x_P) \quad (\text{A16})$$

Ou, ajustando os termos convenientemente e utilizando (A15):

$$\omega = \omega_P - (x - x_0)(y_{CC} - y_P) + (y - y_0)(x_{CC} - x_P) \quad (\text{A17})$$

Substituindo-se esta expressão de  $\omega$  nas integrais de (A10), obtemos:

$$\int_s \omega y dS = \int_s \omega_p y dS + (x_{CC} - x_p) J_x = 0 \quad (\text{A.18.a})$$

$$\int_s \omega y dS = \int_s \omega_p x dS - (y_{CC} - y_p) J_y = 0 \quad (\text{A.18.b})$$

onde:

$$\int_s y^2 dS = J_x; \int_s x^2 dS = J_y \text{ e } \int_s y dS = \int_s x dS = \int_s xy dS = 0$$

Resolvendo as expressões obtidas nas coordenadas  $x_{CC}$  e  $Y_{CC}$ , obtemos as expressões para as coordenadas do centro de cisalhamento:

$$x_{CC} = x_p + \frac{1}{J_x} \int_s \omega_p y dS \quad (\text{A.19.a})$$

$$y_{CC} = y_p - \frac{1}{J_y} \int_s \omega_p x dS \quad (\text{A.19b})$$

### A3 Deformação da seção transversal

Devemos supor que a seção transversal é indeformável em seu plano, assim qualquer deslocamento que exista neste plano, será considerado um deslocamento de corpo rígido. Desse modo, em caso de empenamento, a linha do esqueleto mantém sua projeção no plano da seção transversal

### A4 Torção livre de peças de seção aberta de paredes delgadas

Para a torção livre ou torção uniforme ou de SAINT-VENANT será suposto que o centro de cisalhamento, ou de torção, não se desloca durante a torção, assim o centro de torção é o centro de rotação no deslocamento por torção.

#### A4.1 Condições para a torção livre

Se numa peça de seção constante em relação ao seu eixo longitudinal (Z), o momento de torção for constante em relação a seu eixo longitudinal (Z) e se os vínculos

extremos desta peça não impedem o deslocamento na direção longitudinal, tem-se o caso de torção livre.

Desta forma, podemos destacar as seguintes condições:

- § Momento torçor  $M_t$  constante em Z;
- § Seção constante em Z;
- § Os vínculos não impedem deslocamento em Z.

Podemos retirar da Resistência dos Materiais que em seções delgadas temos que nos casos de torção livre a tensão tangencial de torção ( $\tau_{tt}$ ) é dada por:

$$\tau_{tt} = \frac{M_{tt}}{J_t} t \quad (\text{A20})$$

onde:

$M_{tt}$ : momento de torção livre

$J_t$ : constante de torção

$t$ : espessura

$\tau_{tt}$ : tensão de torção livre

A derivada do ângulo de giro ( $\theta$ ) é dada por:

$$\theta' = \frac{M_{tt}}{GJ_t} \quad (\text{A21})$$

onde:

$M_{tt}$ : momento de torção livre

$G$ : módulo de elasticidade transversal

$J_t$ : constante de torção

No caso geral temos:

$$J_t = \frac{1}{3} \int_s t^3 ds \quad (\text{A22})$$

onde a integração se faz ao longo da linha média ou linha do esqueleto da seção transversal.

Se a seção transversal é formada por vários segmentos de espessuras diferentes, podemos escrever:

$$J_t = \frac{1}{3} \sum_i d_i t_i^3 \quad (\text{A23})$$

onde:

$d_i$ : comprimento da linha média para o segmento  $i$  da seção transversal

$t_i$ : espessura

$i$ : ramos que formam o esqueleto

## A5 Deslocamentos

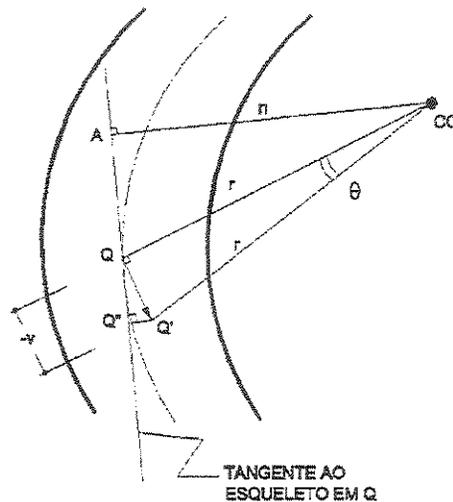


Figura A8 – Análise de deslocamento.

Denominamos  $w$  os deslocamentos na direção Z e  $v$  os deslocamentos no plano da seção transversal, conforme ilustrado na Fig. A8. Na figura está representado o deslocamento de um ponto genérico Q do esqueleto devido à rotação  $\theta$  da seção em torno do centro de cisalhamento (C.C.).

Usando geometria de pequenos deslocamentos esta translação  $\overline{QQ'}$ , no plano da seção transversal vale:

$$\overline{QQ'} = r\theta \quad (\text{A.24})$$

onde:

r: raio vetor que une o centro de cisalhamento com o ponto genérico Q do esqueleto

$\theta$ : rotação de torção da seção em torno de um eixo longitudinal que passa pelo centro de torção

Seja  $\overline{QQ''}$  a projeção do deslocamento  $\overline{QQ'}$  na direção da tangente do esqueleto. Esta projeção  $\overline{QQ''}$  é tomada negativa devido as hipóteses de convenção de giro  $\theta$  (positivo no sentido anti-horário) para um observador olhando no sentido positivo de Z) e da ordenada S (positiva quando o raio vetor gira no sentido horário). Da semelhança de dos triângulos (C.C, A e Q) e (Q,Q'' e Q') tem-se:

$$\frac{\overline{QQ''}}{\overline{QQ'}} = \frac{\overline{CCA}}{\overline{CCQ}} \quad (\text{A.25})$$

Ou seja,

$$\frac{-v}{r\theta} = \frac{n}{r} \quad (\text{A.26})$$

Assim

$$-v = n\theta \quad (\text{A.27})$$

Derivando em relação a Z, obtém-se:

$$v' = -n\theta' \quad (\text{A.28})$$

Seja  $\gamma$  a distorção de um elemento  $ds.dz$  situado no esqueleto. Da teoria da elasticidade podemos escrever:

$$\gamma = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (\text{A.29})$$

Como a tensão tangencial é suposta nula no esqueleto, pela Lei de Hooke, concluímos que a distorção  $\gamma$  também será nula.

Sabendo que a distorção  $\gamma$  é nula no esqueleto e utilizando as expressões acima (A28) em (A29), obtemos:

$$\frac{\partial w}{\partial s} = n\theta' \quad (\text{A.30})$$

Notamos que o deslocamento longitudinal  $w$  é função só de  $s$ , ou seja  $w = w(s)$ . Integrando-se a expressão acima (A30) desde a origem  $O_s$  de  $s$  até o ponto genérico  $Q$  do esqueleto, obtém-se a expressão abaixo:

$$w = \theta' \int_{s_0}^s n ds \quad (\text{A.31})$$

onde:

$$\omega = \int_{s_0}^s n ds : \text{área setorial } (\omega)$$

Logo:

$$w = \omega\theta' \quad (\text{A.32})$$

Os deslocamentos  $w$  são convencionados positivos no sentido do eixo longitudinal  $Z$ .

## **A6 Torção não uniforme de barras de seção aberta de paredes delgadas**

Na seção anterior deste Apêndice vimos como podemos tratar a torção livre, ou uniforme, na qual admitimos que as seções das barras são livres em relação ao deslocamento longitudinal, portanto não há vínculos que impeçam estes deslocamentos.

No caso de torção não uniforme ou Flexo – Torção ocorre que algumas seções não são livres ao empenamento (deslocamento longitudinal) e o momento de torção pode variar ao longo do comprimento da barra.

Considerem-se somente as barras de seção constante em Z (eixo longitudinal), assim a ocorrência de flexo–torção ou torção não uniforme dar-se-á nos casos em que o momento de torção variar ao longo do comprimento da barra ou quando houver vínculos que impeçam, parcial ou totalmente, os deslocamentos longitudinais.

Em resumo temos as seguintes condições:

- § Impedimento parcial ou total dos deslocamentos longitudinais;
- § Variação do momento de torção.

Na flexo–torção supõe-se válida a equação  $w = \omega\phi'$  sendo que a derivada da rotação não é constante como na torção livre.

### A6.1 Tensão normal ou Flexo - Torção

Sendo  $\sigma_z$  a tensão longitudinal e  $\varepsilon_z$  a deformação longitudinal, utilizando-se da Lei de Hooke pode-se escrever:

$$\sigma_z = E\varepsilon_z \quad (\text{A.33})$$

onde:

$E$ : módulo de elasticidade longitudinal.

Da teoria da elasticidade temos:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{A.34})$$

Substituindo na expressão (A33), temos a tensão normal de Flexo – Torção:

$$\sigma_z = E\omega\phi'' \quad (\text{A.35})$$

A equação (A35) nos indica a proporcionalidade entre  $\sigma_z$  e  $\omega$  e podemos concluir, através das áreas setoriais, que as tensões longitudinais não tem força nem momento fletor resultante na seção, sendo sua resultante um novo esforço na seção denominado **Bimomento**.

Podemos assim, definir o bimomento como:

$$B = \int_S \sigma_z \omega dS \quad (\text{A.36})$$

Utilizando-se da equação(A35) em (A36) temos:

$$B = E\phi'' \int_S \omega^2 dS \quad (\text{A.37})$$

A integral  $\int_S \omega^2 dS$  que aparece em (A.37) é denominada *Momento Setorial de Inércia* ( $J_\omega$ ).

Podemos então escrever o bimomento como sendo:

$$B = EJ_\omega \phi'' \quad (\text{A.38})$$

Substituindo a expressão do bimomento na expressão da tensão normal, encontraremos a expressão da tensão normal em função do bimomento:

$$\sigma_z = \frac{B}{J_\omega} \omega \quad (\text{A.39})$$

## A6.2 Tensão tangencial de Flexo - Torção

Consideremos o equilíbrio do elemento longitudinal de comprimento  $dz$  representado na Fig. A9.

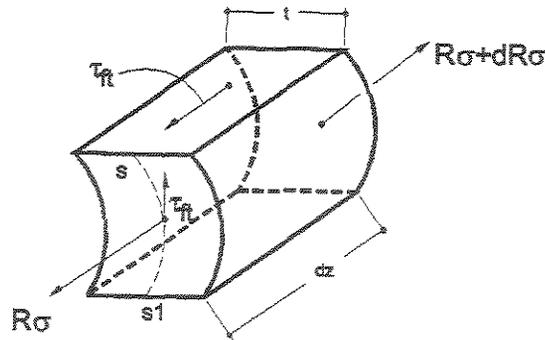


Figura A9 – Análise de tensões e equilíbrio de forças longitudinais.

Como indicado na Fig. A9, pela variação da tensão normal entre seções distintas, concluímos pela existência de tensão tangencial ao longo do comprimento \$dz\$. Pelo teorema de Cauchy também haverá tensão tangencial na seção transversal. Essa tensão tangencial é suposta uniforme na espessura e denominada **tensão tangencial de flexo-torção**

Na mesma Fig. A9 está representada a resultante as tensões \$\sigma\_z\$ por \$R\_\sigma\$ dada por:

$$R_\sigma = \int_{s_1}^s \sigma_z dS \quad (\text{A.40})$$

Substituindo (A35) em (A40) temos:

$$R_\sigma = E\phi'' \int_{s_1}^s \omega dS \quad (\text{A.41})$$

Derivando em relação a \$Z\$, temos:

$$\frac{dR_\sigma}{dz} = E\phi''' \int_{s_1}^s \omega dS \quad (\text{A.42})$$

Do equilíbrio longitudinal do elemento representado na Fig. A9 obtemos:

$$\tau_{ft} dz = dR_{\sigma} \quad (\text{A.43})$$

Substituindo (A42) em (A43) encontramos a expressão de  $\tau_{ft}$ :

$$\tau_{ft} = \frac{E\phi'''}{t} \int_{s_1}^s \omega dS \quad (\text{A.44})$$

Definindo  $S_{\omega} = \int_{s_1}^s \omega dS$  como Momento Estático Setorial obtemos a seguinte expressão para a tensão tangencial de Flexo - Torção:

$$\tau_{ft} = \frac{E\phi'''}{t} S_{\omega} \quad (\text{A.45})$$

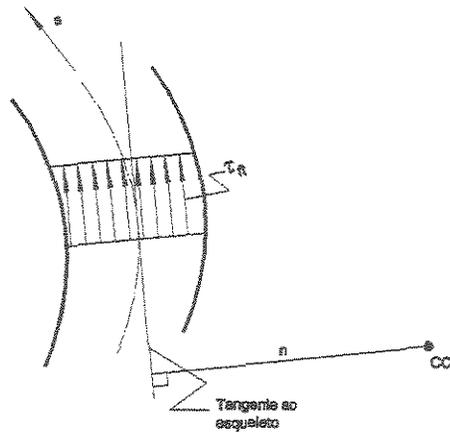
### A6.3 Momento de Flexo – Torção

O momento torçor total  $M_t$  numa dada seção será a soma de duas parcelas: a parcela referente ou momento  $M_{t\ell}$  de torção livre ou de Saint-Venant e a parcela  $M_{ft}$  referente ao momento de Flexo – Torção. Deste modo teremos:

$$M_t = M_{t\ell} + M_{ft} \quad (\text{A.46})$$

Utilizando a representação da Fig. A10 que indica as tensões  $\tau_{ft}$  e a distância  $n$  ao centro de cisalhamento (C.C.), podemos calcular o momento de Flexo – Torção ( $M_{ft}$ ) como segue:

$$M_{ft} = \int_{s_1}^{s_2} \tau_{ft} dSn \quad (\text{A.47})$$

Figura A10 – Tensão  $\tau_{ft}$  de flexo-torção

Aplicando a equação (A44) e a relação da área da seção, onde  $dS = t \cdot ds$ , na expressão (A47), temos:

$$M_{ft} = E\phi''' \int_{s_1}^{s_2} \left( \int_{s_1}^s \omega dS \right) n ds \quad (\text{A.48})$$

Efetuada a integração por partes e utilizando as noções de área setorial, obtemos:

$$M_{ft} = -E\phi''' \int_{s_1}^{s_2} \omega^2 dS \quad (\text{A.49})$$

Sabendo que  $J_\omega = \int_{s_1}^{s_2} \omega^2 dS$  é uma característica da seção transversal denominada

Momento Setorial de Inércia, podemos escrever finalmente:

$$M_{ft} = -EJ_\omega \phi''' \quad (\text{A.50})$$

Substituindo (A50) na expressão (A43), da tensão tangencial de flexo-torção temos:

$$\tau_{ft} = -\frac{M_{ft} S_{\omega}}{t J_{\omega}} \quad (\text{A.51})$$

onde:

$M_{ft}$ : momento de flexo-torção

t: espessura

$J_{\omega}$ : momento setorial de inércia

$S_{\omega}$ : momento estático setorial

Das expressões anteriores chegamos em:

$$M_{ft} = -B' \quad (\text{A.52})$$

Substituindo a equação (A52) em (A51), chegamos em:

$$\tau_{ft} = \frac{B' S_{\omega}}{t J_{\omega}} \quad (\text{A.53})$$

## A.7 Equação diferencial de Flexo – Torção

Utilizando-se das equações (A46), (A52) e (A21), obtemos a equação diferencial de Flexo – Torção em função da rotação:

$$EJ_{\omega} \phi''' - GJ_t \phi' = -M_t \quad (\text{A.54})$$

De um outro modo podemos escrever a seguinte expressão:

$$Mt = GJ_t \phi' - B' \quad (\text{A.55})$$

Derivando a expressão (A55) acima em relação a Z, temos:

$$M'_t = GJ_t \phi'' - B'' \quad (\text{A.56})$$

Utilizando a expressão do bimomento na expressão acima, temos:

$$M'_t = \frac{GJ_t}{EJ_\omega} B - B'' \quad (\text{A.57})$$

### A7.1 Caso geral

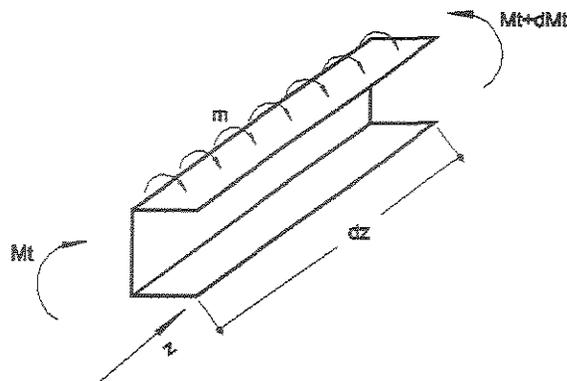


Figura A11 – Elemento sujeito à torção

Somente a título de exemplo, faremos análise de um elemento de comprimento  $dz$  como mostra a Fig. A11. Nele também estão representados os sentidos positivos das cargas torçoras  $M_t$  e  $m$ . Da Fig. A11 obtemos que:

$$M_t + mdz = M_t + dM_t \quad (\text{A.58})$$

Resolvendo, temos:

$$\frac{dM_t}{dz} = m \quad (\text{A.59})$$

Substituindo a expressão (A59) na (A57), obtemos:

$$B'' - K^2 B = -m \quad (\text{A.60.a})$$

onde:

$$K^2 = \frac{GJ_t}{EJ_w} \quad (\text{A.60.b})$$

Para o caso de  $m$  nulo, constante ou variando linearmente em  $Z$ , a solução geral da equação diferencial é dada por:

$$B = C_1 \sinh(K.z) + C_2 \cosh(K.z) + m_1 \quad (\text{A61})$$

onde:

$$m_1 = \frac{m}{K^2} \quad (\text{A.61.b})$$

$C_1$  e  $C_2$ : constantes a determinar, calculadas a partir das condições de contorno.

## A7.2 Condições de contorno

### 1. Na extremidade livre

Se  $\sigma_z = 0$ , da equação do bimomento, concluímos que:

$$B = 0$$

### 2. Na extremidade engastada

Sendo o empenamento  $w$  (deslocamento longitudinal) nulo para qualquer ponto do esqueleto da seção engastada temos:

$$\phi' = 0$$

Substituindo em (A21), temos:

$$M_{tt} = 0$$

De (A.54) temos então:

$$M_t = -M_{jt}$$

Do bimomento (A.55) tiramos:

$$B' = -M_t$$

3. Na extremidade com distribuição conhecida de tensões

Nesse caso se utiliza a equação do bimomento (A39) para a determinação de B

4. Extremidades com cargas concentradas axiais

No caso em que sejam aplicadas cargas axiais  $P_i$  concentradas em pontos de área setorial  $\omega_i$ , o bimomento será dado por:

$$B = \sum_i P_i \omega_i$$

## APÊNDICE B

### DETERMINAÇÃO DOS COEFICIENTES DE RIGIDEZ PARA OS PÓRTICOS E ASSOCIAÇÕES PÓRTICOS/PAREDES.

As deduções que se seguem foram aproveitadas quase na sua totalidade das referências [13], [34] e [48].

#### B1 Pórtico isolado – coeficiente de rigidez à força cortante – $s_f$

Nos pórticos regulares sujeitos à carga lateral e vertical, supõe-se próximas as rotações de todos os nós da viga de um andar e também as rotações de nós consecutivos de uma mesma prumada de pilar. Isto equivale afirmar que os centros dos vãos das barras são pontos de momentos nulos.

Na Fig B1 notamos três nós consecutivos A, B e C da viga e D, B e E do pilar, sendo  $\phi$  a distorção do andar e  $a$  rotação do nó B.

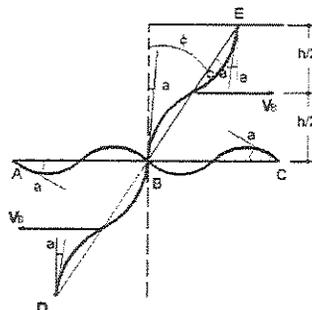


Figura B1 – Elástica de deformação em torno de um nó de Pórtico.

Definindo os parâmetros de rigidez das barras como sendo a relação  $K_i = \frac{J_i}{l_i}$  e considerando os momentos que as barras aplicam ao nó B, positivos se no sentido horário, valerão:

$$M_{BE} = 6EK_E(\phi - a)$$

$$M_{BD} = 6EK_D(\phi - a)$$

$$M_{BA} = -6EK_A a$$

$$M_{BC} = -6EK_C a \quad (B.1)$$

Pelo equilíbrio do nó B segue:

$$a = \frac{K_E + K_D}{K_A + K_C + K_E + K_D} \phi \quad (B.2)$$

Admitindo que o momento é nulo na meia altura de um andar, a força cortante  $V_B$  no meio do pilar BE é dada por:

$$V_B = \frac{2M_{BE}}{h} \quad (B.3)$$

tem-se pelas equações (B.1) e (B.2) que:

$$V_B = \frac{12E}{h} K_E \frac{\sum_v K}{\sum_b K} \phi \quad (B.4)$$

onde os índices  $v$  e  $b$  nos somatórios indicam serem estes estendidos só às vigas ou à totalidade das barras que concorrem no nó B, respectivamente.

Podemos definir um coeficiente  $s_B$  como a contribuição do pilar à rigidez do pórtico à força cortante. Esse coeficiente pode ser obtido da equação (B.4):

$$s_B = \frac{12}{h} EK_E \frac{\sum_v K}{\sum_b K} \quad (\text{B.5})$$

Se somarmos as contribuições dos pilares ao nível do andar considerado, calculadas através da equação (B.5), obtemos o coeficiente de rigidez do pórtico à força cortante expresso por:

$$s_f = \frac{12E}{h} \sum_{n.a} \left[ K_{p,n} \frac{\sum_{v,n} K}{\sum_{b,n} K} \right] \quad (\text{B.6})$$

onde:

$E$ : módulo de elasticidade longitudinal

$h$ : pé direito do andar

$K$ : relação  $J/\ell$  do tramo da viga ou pilar considerado

$na$ : nós do andar (O somatório em  $na$  é estendido a todos os nós do andar)

$pn$ : pilar acima do nó

$vn$ : número de vigas concorrentes no nó

$bn$ : número de barras concorrentes no nó

$K_{p,n}$ : relação  $J/\ell$  do pilar acima do nó considerado

## **B2 Associação de pórticos e paredes ligados por lintéis: coeficientes $s$ de rigidez à força cortante do pórtico e coeficientes de rigidez $K_1$ e $K_2$ ao giro da parede**

O pórtico e a parede podem sofrer simultaneamente efeito de flexão (rotação  $\phi_B$  na parede e distorção  $\phi_B$  no pórtico) e o efeito de cisalhamento (rotação  $\phi_S$  na parede e distorção  $\phi_S$  no pórtico).

Os índices subscritos indicam : B flexão (bending) e S cisalhamento (shear).

### B2.1 Efeito da flexão - rotação $\phi_B$ - Coeficientes de rigidez $s$ e $K_1$

Na Fig. B2 encontramos a deformação de um andar genérico do painel, correspondente ao giro  $\phi_B$  da parede devido à flexão.

A relação do pórtico sobre a parede constitui-se de uma força vertical distribuída  $q_v$  (positiva se produz compressão na parede) e de um momento distribuído  $m$  aplicado ao longo do eixo vertical da parede, considerado positivo no sentido anti-horário.

Expressamos este momento  $m$  como uma função de  $\phi_B$  através da equação:

$$m = K_1 \phi_B \quad (B.7)$$

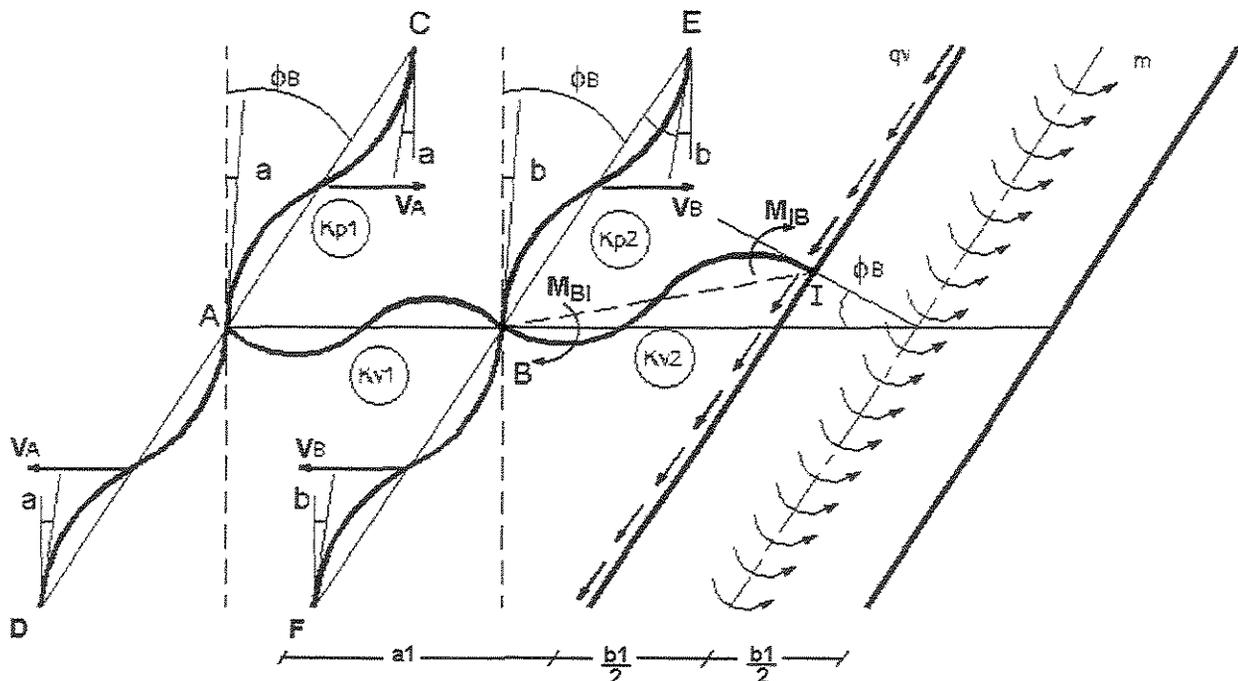


Figura B2 – Deformação do painel devida a  $\phi_B$

Designamos  $K_{p_i} = J_p / \ell_i$  e  $K_{v_i} = J_v / \ell_i$  as relações entre os momentos de inércia e respectivos comprimentos dos pilares e das vigas que concorrem nos nós A e B.

Para os pilares que possuem diferentes relações  $J_p / \ell_i$ , abaixo e acima do andar considerado, tomamos para  $K_{p_i}$  a média destas relações.

A partir da força cortante que os momentos  $M_{BI}$  e  $M_{IB}$  produzem no trecho de viga B-I, que une pórtico e parede, distribuída na altura de um andar, encontra-se o valor do carregamento distribuído  $q_v$ , que na técnica do meio contínuo se supõe atuar ao longo da face da parede.

$$q_v = \frac{M_{BI} + M_{IB}}{a_1 h} \quad (\text{B.8})$$

Admitindo que o momento fletor  $M_{IB}$  a viga de conexão aplica sobre a parede também possa ser considerado distribuído ao longo da altura da parede, por equilíbrio de momentos fletores em relação ao eixo da parede podemos encontrar o momento distribuído  $m$ :

$$m = \frac{M_{IB}}{h} + q_v \frac{b_1}{2} \quad (\text{B.9})$$

Vamos admitir que o nó A e os seus nós vizinhos sofram todos a mesma distorção de valor  $\phi_B$  (positiva de sentido horário). Vamos admitir que na prumada de pilares que contenham o nós A, os nós, superior e inferior ao nó A, sofrem adicionalmente uma deformação angular de valor  $a$ . Desse modo os momentos fletores que as barras deformadas aplicam ao nó A e seus vizinhos valem:

$$M_{AC} = 6EK_{p1}(\phi_B - a) \quad (\text{B.10.a})$$

$$M_{AD} = 6EK_{p1}(\phi_B - a) \quad (\text{B.10.b})$$

$$M_{AB} = -4EK_{v1}a - 2EK_{v1}b \quad (\text{B.10.c})$$

Pelo equilíbrio dos momentos no nó A temos:

$$(12K_{p1} + 4K_{v1})a + 2K_{v1}b = 12K_{p1}\phi_B \quad (\text{B.11})$$

Da mesma maneira, supomos que os nós da prumada que contém o nós B sofram distorções de valor  $\phi_B$  (positiva de sentido horário). Adicionalmente os nós da prumada que contém B sofrem uma deformação angular  $b$ . Supondo que os momentos nos nós são positivos se tiverem sentido horário, podemos escrever:

$$M_{BI} = -4EK_{v2}b - 2EK_{v2}\phi_B - 6EK_{v2}\left(\phi_B \frac{b_1}{2a_1}\right) \quad (\text{B.12.a})$$

$$M_{BA} = -4EK_{v1}b - 2EK_{v1}a \quad (\text{B.12.b})$$

$$M_{BE} = 6EK_{p2}(\phi_B - b) \quad (\text{B.12.c})$$

$$M_{BF} = 6EK_{p2}(\phi_B - b) \quad (\text{B.12.d})$$

E pelo equilíbrio de momentos fletores no nó B resulta:

$$2K_{v1}a + (4K_{v1} + 12K_{p2} + 4K_{v2})b = \left[ 12K_{p2} - 2K_{v2}\left(1 + \frac{3b_1}{2a_1}\right) \right] \phi_B \quad (\text{B.13})$$

A solução do sistema formado pelas equações (B.11) e (B.13) fornece:

$$a = \omega\phi_B \quad (\text{B.14.a})$$

$$b = \beta\phi_B \quad (\text{B.14.b})$$

onde

$\omega$  e  $\beta$ : são parâmetros auxiliares usados para simplificar as expressões

Chamando

$$\theta = \frac{4K_{V1} + 12K_{P2} + 4K_{V2}}{2K_{V1}} \quad (\text{B.15.a})$$

e

$$\varphi = \frac{12K_{P1} + 4K_{V1}}{2K_{V1}} \quad (\text{B.15.b})$$

podemos escrever:

$$\omega = \frac{\left[ 12(K_{P2} - K_{P1}\theta) - 2K_{V2} \left( 1 + \frac{3b_1}{2a_1} \right) \right]}{[2K_{V1} - \theta(12K_{P1} + 4K_{V1})]} \quad (\text{B.16.a})$$

e

$$\beta = \frac{\left\{ 12K_{P1} - \varphi \left[ 12K_{P2} - 2K_{V2} \left( 1 + \frac{3b_1}{2a_1} \right) \right] \right\}}{[2K_{V1} - \varphi(12K_{P2} + 4K_{V1} + 4K_{V2})]} \quad (\text{B.16.b})$$

As forças cortantes nos pilares que contém os nós A e B são dadas respectivamente, por:

$$V_A = \frac{2M_{AC}}{h} \quad (\text{B.17.a})$$

e

$$V_B = \frac{2M_{BE}}{h} \quad (\text{B.17.b})$$

Ou, tendo em vista as equações (B.10), (B.12) e (B.14),

$$V_A = \frac{12EK_{P1}}{h} (1 - \omega) \phi_B \quad (\text{B.18.a})$$

e

$$V_B = \frac{12EK_{P2}}{h} (1 - \beta) \phi_B \quad (\text{B.18.b})$$

De acordo com as equações (B.18), obtemos, para os coeficientes de rigidez dos pilares à força cortante, expressas pelas seguintes expressões:

$$s_A = \frac{V_A}{\phi_B} = \frac{12EK_{P1}}{h}(1-\omega) \quad (\text{B.19.a})$$

e

$$s_B = \frac{V_B}{\phi_B} = \frac{12EK_{P2}}{h}(1-\beta) \quad (\text{B.19.b})$$

Assim o coeficiente de rigidez total  $s$  do pórtico à força cortante resulta da soma:

$$s = s_A + s_B \quad (\text{B.20.a})$$

$$s = \frac{12E}{h} [K_{P1}(1-\omega) + K_{P2}(1-\beta)] \quad (\text{B.20.b})$$

O momento  $M_{IB}$  que a viga de ligação do pórtico com a parede aplica sobre esta última vale:

$$M_{IB} = 4EK_{v2}\phi_B + 2EK_{v2}b + 6K_{v2}\phi_B \frac{b_1}{2a_1} \quad (\text{B.21})$$

Usando as equações (B.9), (B.8), (B.12.A) e (B.14), obtemos:

$$m = \frac{EK_{v2}}{h} \left[ 4 + 2\beta + \frac{3b_1}{a_1} \left( 2 + \beta + \frac{b_1}{a_1} \right) \right] \phi_B \quad (\text{B.22})$$

Comparando-se com as equações (B7) e (B.22) encontramos o valor do coeficiente de rigidez ao giro  $K_1$  da parede da associação, quando se despreza o giro do cisalhamento:

$$K_1 = \frac{EK_{v2}}{h} \left[ 4 + 2\beta + \frac{3b_1}{a_1} \left( 2 + \beta + \frac{b_1}{a_1} \right) \right] \quad (\text{B.23})$$



$$b = \beta\theta \quad (\text{B.25.b})$$

com

$$\omega = \frac{12(K_{P2} - K_{P1}\theta) - 2K_{V2}}{2K_{V1} - (12K_{P1} + 4K_{V1})\theta} \quad (\text{B.26.a})$$

e

$$\beta = \frac{12K_{P1} - \varphi(12K_{P2} - 2K_{V2})}{2K_{V1} - (12K_{P2} + 4K_{V2} + 4K_{V1})\varphi} \quad (\text{B.26.b})$$

onde:

$\theta$  e  $\varphi$ : parâmetros auxiliares calculares como nas equações (B.15).

Calculando o momento  $M_{IB}$  para esse caso temos:

$$M_{IB} = 4EK_{V2}\phi_S + 2EK_{V2}b \quad (\text{B.27})$$

A força cortante distribuída  $q_v$  na face da parede e momento distribuído  $m_s$  ao longo do eixo da parede podem ser calculados pela seguintes expressões:

$$q_v = \frac{M_{BI} + M_{IB}}{a_1 h} \quad (\text{B.28.a})$$

e

$$m_s = \frac{M_{IB}}{h} + q_v \frac{b_1}{2} \quad (\text{B.28.b})$$

Usando (B.28.a), (B.27), (B.26.a) e (B.26.b) em (B.28.b) encontramos:

$$m_s = \frac{EK_{V2}}{h} \left[ 4 + 2\beta \left( 1 + \frac{3b_1}{2a_1} \right) + \frac{3b_1}{a_1} \right] \phi_S \quad (\text{B.29})$$

Se compararmos as equações (B.24) e (B.29) obtemos o coeficiente  $K_2$  de rigidez ao giro da parede devido à giro  $\phi_s$  devido ao efeito de cisalhamento no pórtico.

O coeficiente  $K_2$  vale:

$$K_2 = \frac{EK_v^2}{h} \left[ 4 + 2\beta \left( 1 + \frac{3b_1}{2a_1} \right) + \frac{3b_1}{a_1} \right] \quad (\text{B.30})$$

onde:

$\omega$  e  $\beta$ : parâmetros auxiliares calculados com as equações (B.26.a) e (B.26.b)

$\theta$ : parâmetro auxiliar calculado com a equação (B.15.a)

## APÊNDICE C

### SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

#### C1 Introdução

Muitos fenômenos de engenharia podem ser simulados por modelos matemáticos que envolvem equações diferenciais: equações que envolvem uma função e algumas de suas derivadas. Uma equação diferencial que envolve derivadas de ordem até  $n$  é chamada *equação diferencial de ordem  $n$*  e pode ser escrita como abaixo:

$$y^{(n)}(x) = F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad x \in [a, b] \quad (\text{C.1})$$

A solução é uma função  $y=f(x)$  definida no intervalo  $[a,b]$ , com  $n$  derivadas, e que satisfaz a Eq. (C.1).

Se a função é de uma única variável, como a explicitada em (C.1) tem-se uma *equação diferencial ordinária*. É o caso do edifício alto enrigecido por núcleos estruturais em estudo. Do contrário tem-se uma *equação diferencial parcial*.

Para que seja definida uma única função  $y(x)$  é necessário o fornecimento de dados adicionais à equação diferencial. Os dados adicionais definem o tipo de problema: *problema de valor inicial* e *problema de valor de contorno*

Num problema de valor inicial (PVI) a meta é a obtenção de uma função  $y(x)$  definida num domínio  $[a,b]$ , que além de satisfazer a equação diferencial que rege o problema, atenda também às condições pré-estabelecidas para o início do domínio:

$$y(a) = y_1 \quad y'(a) = y_2 \quad y''(a) = y_3 \quad \dots \quad y^{(n-1)}(a) = y_n \quad (\text{C.2})$$

Nos problemas de valor de contorno (PVC) a equação diferencial deverá ser satisfeita num intervalo  $[a,b]$  e são pré-estabelecidos valores para  $y(x)$  nos extremos do intervalo:

$$y(a) = y_0 \quad \text{e} \quad y(b) = y_n \quad (\text{C.3})$$

As soluções analíticas para as equações diferenciais dos problemas de engenharia normalmente são difíceis de serem obtidas. Na falta de soluções analíticas, os métodos numéricos podem ser utilizados.

O desenvolvimento de funções em série de Taylor pode ser considerado a base dos mais antigos métodos de aproximação.

O primeiro passo de qualquer método destinado à solução numérica de equações diferenciais é discretizar a região onde a solução é procurada. Define-se *malha* como um conjunto finito de pontos onde a função é definida.

Seja  $x_0$  um ponto de referência e  $h$  um número positivo. A *malha* de passo  $h$  associada à  $x_0$  é o conjunto de pontos definidos por:

$$x_i = x_0 \pm ih, \quad i = 1, 2, \dots$$

As aproximações de  $y(x)$  são calculadas nos pontos da malha.

## C2 Série de Taylor para funções $y(x)$

A expansão em série de Taylor de uma função  $y(x)$ , que tem derivadas até ordem  $n+1$  em  $x$  é a seguinte:

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(x) + \dots + \frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi) \quad (\text{C.4})$$

onde  $\xi$  está entre  $x$  e  $x+h$ . O último termo da expressão representa o erro da aproximação de  $y(x+h)$  pelos  $n+1$  primeiros termos da série de Taylor.

### C3 Método das diferenças finitas

Tomando  $n=1$  na Eq. (C.4) temos a chamada *fórmula avançada* para a discretização da derivada e de seu erro:

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{h}{2} y''(\xi) \quad (\text{C.5})$$

Tomando o passo como  $-h$  na Eq. (C.4) obtém-se a *fórmula atrasada* e seu erro:

$$y'(x) = \frac{y(x) - y(x-h)}{h} + \frac{h}{2} y''(\xi) \quad (\text{C.6})$$

Seguindo a mesma idéia, tome-se  $n=2$ . A série de Taylor para um passo  $+h$  e para um passo  $-h$  são as seguintes:

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + \frac{h^3}{3!} y^{(n)}(\xi_1) \quad (\text{C.7})$$

$$y(x-h) = y(x) - hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) - \frac{h^3}{3!} y^{(n)}(\xi_2) \quad (\text{C.8})$$

Subtraindo a Eq. (C.8) de (C.7) obtém-se a chamada *fórmula centrada* para a discretização da derivada e o seu erro:

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{3!} y'''(\xi) \quad (\text{C.9})$$

Ressalte-se o fato de que a *fórmula centrada* dada pela Eq. (C.9) fornece uma aproximação para a derivada na qual o erro é da ordem de  $h^2$ . As *fórmulas adiantada* e

*fórmula atrasada* da aproximação da derivada da função, conforme Eqs. (C.5) e (C.6) têm erro de ordem  $h$ .

É importante ressaltar que poder-se-ia chegar em outras expressões da derivada primeira com erro de ordem  $h^2$  de uma função  $y(x)$  a partir de manipulações da série de Taylor.

A expressão para a derivada segunda pode ser obtida com o mesmo raciocínio.

Tome-se  $n=3$  na Eq. (C.4):

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + \frac{h^3}{3!} y'''(x) + \frac{h^4}{4!} y^{(iv)}(\xi_1) \quad (\text{C.10})$$

e

$$y(x-h) = y(x) - hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) - \frac{h^3}{3!} y'''(x) + \frac{h^4}{4!} y^{(iv)}(\xi_1) \quad (\text{C.11})$$

Somando membro a membro as Eqs. (C.10) e (C.11) e explicitando  $y''(x)$  tem-se:

$$y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} y^{(iv)}(\xi) \quad (\text{C.12})$$

### C3.1 $y(x)$ ajustada por função polinomial

A aplicação do método das diferenças finitas à solução de equações diferenciais pode ser encontrada em várias referências que abordam este assunto.

Em particular, o sistema de equações diferenciais geradas pelo tratamento contínuo em edifícios altos sob carga lateral pode ser resolvido numericamente usando o Método das Diferenças Finitas.

Na sua dissertação de mestrado XAVIER [48] escreveu um programa de computador para resolver numericamente um sistema de painéis planos onde usou o método das diferenças finitas para resolver o sistema de equações diferenciais. Em seguida, baseado em BARBOSA [1], escreveu um outro programa mais geral, que trata de vários casos de associações. A leitura destas duas referências nos facilitou o desenvolvimento de um programa para a solução numérica de um sistema de equações

diferencias de terceira ordem, nas variáveis  $u$ ,  $v$  e  $\theta$  em que recaem os vários tipos de associações tridimensionais entre pórticos/paredes/núcleos.

Ao invés de usar o tratamento clássico baseado na expansão em série de Taylor, optou-se por aproximar a função por um polinômio de grau  $r$ .

Por esta técnica as derivadas da função desconhecida  $f(z)$  são aproximadas às derivadas a um polinômio  $F(z)$  de grau  $r$  ( $r \geq$  ordem da equação diferencial) que intercepta a função em  $r+1$  pontos, escolhidos igualmente distribuídos de  $h$ , sobre o eixo das abscissas. Na aplicação do método ao problema do edifício, as abscissas da função  $f(z)$  estão ao longo do eixo vertical  $OZ$ .

Segue-se neste desenvolvimento a mesma dedução utilizada por Xavier [48]. Com o propósito de obtermos operadores com números simétricos de pontos, optamos pelo polinômio de interpolação do quarto grau:

$$F(z) = Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E \quad (C.13)$$

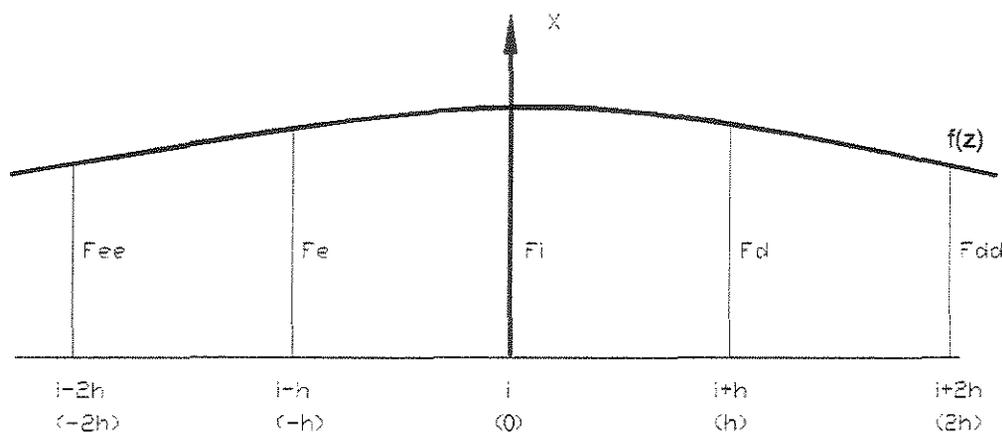


Figura C1 – Valores da função  $f(z)$

onde os valores nos pontos de interpolação ( $i-2h$ ,  $i-h$ ,  $i$ ,  $i+h$ ,  $i+2h$ ) devem coincidir com os valores da função desconhecida  $f(z)$ , que de acordo com a Figura C.1 valem:

$$F(i-2h) = F_{ee} \quad (C.14-a)$$

$$F(i-h) = F_e \quad (C.14-b)$$

$$F(i) = F_i \quad (C.14-c)$$

$$F(i+h) = F_d \quad (C.14-d)$$

$$F(i+2h) = F_{dd} \quad (\text{C.14-e})$$

Se passarmos um polinômio  $p(z)$  pelos cinco pontos de interpolação e tomarmos a abscissa do ponto  $i$  como origem, resulta o sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} (2h)^4 & -(2h)^3 & (2h)^2 & -2h & 1 \\ h^4 & -h^3 & h^2 & -h & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ h^4 & h^3 & h^2 & h & 1 \\ (2h)^4 & (2h)^3 & (2h)^2 & 2h & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Fee \\ Fe \\ Fi \\ Fd \\ Fdd \end{bmatrix} \quad (\text{C.15})$$

A solução do sistema linear (C.15) fornece os coeficientes do polinômio, expressos por:

$$A = \frac{1}{24h^4} [Fee - 4Fe + 6Fi - 4Fd + Fdd] \quad (\text{C.16.a})$$

$$B = \frac{1}{12h^3} [-Fee + 2Fe - 2Fd + Fdd] \quad (\text{C.16.b})$$

$$C = \frac{1}{24h^2} [-Fee + 16Fe - 30Fi + 16Fd - Fdd] \quad (\text{C.16.c})$$

$$D = \frac{1}{12h} [Fee - 8Fe + 8Fd + Fdd] \quad (\text{C.16.d})$$

$$E = Fi \quad (\text{C.16.e})$$

Como a função  $f(z)$  é aproximada pelo polinômio  $p(z)$  no intervalo  $(-2h, 2h)$ , pode-se obter todas as derivadas de  $f(z)$  neste intervalo.

Para o ponto  $i$  as expressões das derivadas são denominadas **diferenças finitas centrais**. Para os demais pontos recebem o nome de **diferenças finitas assimétricas atrasadas ou adiantadas**, conforme o ponto esteja à antes ou depois do ponto central  $i$ .

Desta maneira, as expressões para as terceiras, segundas e primeiras derivadas de  $f(z)$  nos pontos em que  $z$  vale respectivamente zero,  $-h$  e  $h$  são:

1. derivadas no ponto de abscissa  $z=0$ 

$$\begin{aligned}
 F_i'' &= F''(0) = 6B \\
 F_i' &= F'(0) = 2C \\
 F_i &= F(0) = D
 \end{aligned}
 \tag{C.17}$$

2. derivadas no ponto de abscissa  $z=-h$ 

$$\begin{aligned}
 F_e'' &= F''(-h) = -24Ah + 6B \\
 F_e' &= F'(-h) = 12Ah^2 - 6Bh + 2C \\
 F_e &= F(-h) = -4Ah^3 + 3Bh^2 - 2Ch + D
 \end{aligned}
 \tag{C.18}$$

3. derivadas no ponto de abscissa  $z=+h$ 

$$\begin{aligned}
 F_d'' &= F''(h) = 24Ah + 6B \\
 F_d' &= F'(h) = 12Ah^2 + 6Bh + 2C \\
 F_d &= F(h) = 4Ah^3 + 3Bh^2 + 2Ch + D
 \end{aligned}
 \tag{C.19}$$

Tendo em vista as expressões (C.16), obtém-se:

## a) Diferenças finitas centrais:

$$\begin{aligned}
 F_i'' &= \frac{1}{2h^3} [-Fee + 2Fe - 2Fd + Fdd] \\
 F_i' &= \frac{1}{12h^2} [-Fee + 16Fe - 30Fi + 16Fd - Fdd] \\
 F_i &= \frac{1}{12h} [Fee - 8Fe + 8Fd - Fdd]
 \end{aligned}
 \tag{C.20}$$

## b) Diferenças finitas assimétricas atrasadas

$$\begin{aligned}
 F_e'' &= \frac{1}{2h^3} [-3Fee + 10Fe - 12Fi + 6Fd - Fdd] \\
 F_e' &= \frac{1}{12h^2} [-11Fee - 20Fe + 6Fi + 4Fd - Fdd] \\
 F_e &= \frac{1}{12h} [-3Fee - 10Fe + 18Fi - 6Fd + Fdd]
 \end{aligned}
 \tag{C.21}$$

c) Diferenças finitas assimétricas adiantadas

$$\begin{aligned}
 F_d'' &= \frac{1}{2h^3} [Fee - 6Fe + 12Fi - 10Fd + 3Fdd] \\
 F_d' &= \frac{1}{12h^2} [-Fee + 4Fe + 6Fi - 20Fd + 11Fdd] \\
 F_d &= \frac{1}{12h} [-Fee + 6Fe - 18Fi + 10Fd + 3Fdd]
 \end{aligned}
 \tag{C.22}$$

Para a aplicação no problema da associação de painéis deve-se dividir a altura total em intervalos de espaçamento  $\delta$ . Deve-se considerar 2 nós fictícios adicionais nas abscissas  $z=-2\delta$  e  $z=-\delta$ , sendo a base do edifício ( $z=0$ ) o terceiro ponto da rede. No topo deve-se considerar um nó adicional. No engastamento deve-se usar diferença finita assimétrica atrasada. No topo deve-se usar diferença finita assimétrica adiantada, e nos intervalos que estão ao longo da dimensão do edifício deve-se usar diferença finita central.

#### C4 Métodos de Runge-Kutta

Os Métodos de Runge-Kutta são os mais usados para os problemas de valor inicial. Têm a vantagem de não necessitarem o cálculo de derivadas, podendo ser usadas com alto grau de aproximação. É concebido para a resolução de equação diferencial de primeira ordem, mas pode ser aplicado também à equações diferenciais de ordem  $n>1$ . Pode também ser aplicado a um sistema de equações diferenciais.

O texto que segue é uma adaptação do conteúdo das referências (Métodos Numéricos – CUNHA[7]) e (Numerical Analysis – BURDEN[4]).

O método de Runge-Kutta mais utilizado é o de quarta ordem, devido a sua boa relação custo-benefício, aliando simplicidade e eficiência. Foi o escolhido para o

desenvolvimento de um algoritmo computacional para a resolução do sistema de equações diferenciais de terceira ordem em que recai o problema da análise tridimensional de edifícios.

Apenas para efeito didático, serão apresentados antes os algoritmos para a equação diferencial de primeira ordem, e para uma equação diferencial de ordem 2, para finalmente apresentar-se o algoritmo para um sistema de equações de ordem  $n$ .

#### C4.1 – Série de Taylor para funções $f(x,y)$

O desenvolvimento de funções  $f(x,y)$  em série de Taylor permite uma aproximação com erro de quarta ordem com a expressão abaixo:

$$\begin{aligned}
 y_{k+1} = & y_k + hf(x_k, y_k) + \frac{h^2}{2} [f_x(x_k, y_k) + f_y(x_k, y_k)f(x_k, y_k)] + \\
 & \frac{h^3}{3!} [f_{xx}(x_k, y_k) + 2f_{xy}(x_k, y_k)f(x_k, y_k) + f_{yy}(x_k, y_k)f^2(x_k, y_k) + \\
 & f_y(x_k, y_k)f_x(x_k, y_k) + f_y^2(x_k, y_k)f(x_k, y_k)] + O(h^4)
 \end{aligned} \tag{C.23}$$

#### C4.2 – Métodos de Runge-Kutta para Equação diferencial de primeira ordem

Seja a equação diferencial de primeira ordem, com um valor inicial para a função:

$$\begin{aligned}
 y'(x) &= f(x, y) \\
 y(x_0) &= y_0
 \end{aligned} \tag{C.24}$$

Usando a fórmula de diferenças finitas adiantada mostrada na Eq. (C.5) para discretizar a derivada primeira de  $y(x)$  no ponto  $x_k$  de uma malha de passo  $h$  tem-se:

$$y'(x) = \frac{y_{k+1} - y_k}{h} = f(x_k, y_k) \tag{C.25}$$

A Eq. (C.25) define o conhecido Método de Euler. A idéia do Método de Euler foi aprimorada nos trabalhos de Runge (1805) e Kutta (1901), para o caso de sistemas de equações diferenciais de primeira ordem.

#### C4.2.1 Método de Runge-Kutta de 2ª. ordem

Os métodos de Runge-Kutta de segunda ordem são definidos pela expressão:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = \beta_0 f(x_k, y_k) + \beta_1 f(x_k + \gamma h, y_k + \delta h) \quad (\text{C.26})$$

O último termo do lado direito da Eq. (C.26) pode ser desenvolvido através da série de Taylor para funções de duas variáveis. Levando esta expansão em (C.26) e agrupando os termos de potências iguais de  $h$  tem-se:

$$y_{k+1} = y_k + h[(\beta_0 - \beta_1) f(x_k, y_k)] + \frac{h^2}{2} [2\beta_1 \gamma f_x(x_k, y_k) + 2\beta_1 \delta f_y(x_k, y_k)] + \frac{h^3}{6} [3\beta_1 \gamma^2 f_{xx}(x_k, y_k) + 6\beta_1 \gamma \delta f_{xy}(x_k, y_k) + 3\beta_1 \delta^2 f_{yy}(x_k, y_k)] + O(h^4) \quad (\text{C.27})$$

onde:

$$f_x = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad ; \quad f_y = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \quad ; \quad f_{xx} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial x} \quad ; \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \quad ; \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial y}$$

Os quatro parâmetros  $\alpha$   $\beta_1$   $\beta_2$   $\gamma$  são escolhidos igualando-se os termos até segunda ordem de (C.27) com termos correspondentes da aproximação por série de Taylor, indicada em (C.23):

Poder-se-ia então adotar uma das seguintes soluções:

$$\beta_0 = \beta_1 = \frac{1}{2} ; \gamma = 1 \text{ e } \delta = f(x_k, y_k)$$

ou

$$\beta_0 = 0 ; \beta_1 = 1 ; \gamma = \frac{1}{2} \text{ e } \delta = \frac{1}{2} f(x_k, y_k)$$
(C.28)

Adotando a segunda solução mostrada na Eq. (C.28) um algoritmo simplificado para o Método de Runge-Kutta de segunda ordem está mostrado na Fig. (C2):

Runge-Kutta de segunda ordem:  
 Dados:  $y_0, h$  e  $f(x, y)$   
 1: Para  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ , faça 2 a 4  
 2:  $m_0 = hf(x_k, y_k)$   
 3:  $m_1 = hf(x_k + h, y_k + h)$   
 4:  $y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}(m_0 + m_1)$

Figura C2 – Algoritmo de Runge-Kutta de segunda ordem

#### C4.2.2 Método de Runge-Kutta de 4ª. ordem

Para estabelecer uma fórmula de Runge-Kutta que coincida com a aproximação da série de Taylor de ordem  $h^4$  faz-se uma generalização da Eq. (C.26)

$$y_{k+1} = y_k + h[\beta_0 f(x_k, y_k) + \beta_1(x_k + \gamma_1 h, y_k + \delta_1 h) + \beta_2(x_k + \gamma_2 h, y_k + \delta_2 h) + \beta_3(x_k + \gamma_3 h, y_k + \delta_3 h) + \dots]$$
(C.29)

Igualando-se termo a termo nas Eq. (C.23) e (C.29) até os termos em  $h^4$  encontram-se os valores dos parâmetros usados em (C.29), dando origem ao seguinte algoritmo para o método de Runge-Kutta de 4ª. ordem de uma equação diferencial de primeira ordem:

<p>Runge-Kutta de 4a. ordem</p> <p>Dados <math>y_0; h</math> e <math>f(x, y)</math></p> <p>1: Para <math>k=0, 1, 2, 3, \dots</math>, faça 2 até 5</p> <p>2: <math>m_0 = hf(x_k, y_k)</math></p> <p>3: <math>m_1 = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{m_0}{2})</math></p> <p>4: <math>m_2 = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{m_1}{2})</math></p> <p>5: <math>m_3 = hf(x_{k+1} + \frac{h}{2}, y_k + m_2)</math></p> <p>6: <math>y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(m_0 + 2m_1 + 2m_2 + m_3)</math></p>
---

Figura C3 – Algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem

### C4.3 – Sistemas de equações diferenciais de primeira ordem

Um sistema de ordem  $m$  de equações diferenciais de primeira ordem em problemas de valor inicial pode ser expresso da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \frac{du_1}{dt} &= f_1(t, u_1, u_2, \dots, u_m) \\
 \frac{du_2}{dt} &= f_2(t, u_1, u_2, \dots, u_m) \\
 &\vdots \\
 \frac{du_m}{dt} &= f_m(t, u_1, u_2, \dots, u_m)
 \end{aligned}
 \tag{C.30}$$

para  $a \leq t \leq b$  com as condições iniciais:

$$u_1(a) = \lambda_1 \ ; \ u_2(a) = \lambda_2 \ ; \ \dots \ u_m(a) = \lambda_m \tag{C.31}$$

Seja uma malha igualmente espaçada de passo  $h$ , com  $(N+1)$  intervalos.

```

Algoritmo de Runge-Kutta para sistema de equações
Entrada : pontos de extremidade [a,b]
          numero de equações m
          numero de intervalos
          condições iniciais  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 
Saídas: aproximações  $w_j$  para  $u_j$  para (N+1) valores de t
Passo 1: Faça  $h = \frac{(b-a)}{N}$ 
          Faça  $t = a$ 
Passo 2: Loop  $j = 1, 2, \dots, m$ 
          Faça  $w_j = \lambda_j$ 
Passo 3: Imprima ( $t, w_1, w_2, \dots, w_m$ )
Passo 4: Loop  $i = 1, 2, \dots, N$  Faça os passos 5-11
          Passo 5: Loop  $j = 1, 2, \dots, m$  calcule
                   $m_{0,j} = f_j(t, w_1, w_2, \dots, w_m)$ 
          Passo 6: Loop  $j = 1, 2, \dots, m$  calcule
                   $m_{1,j} = f_j(t + \frac{h}{2}, w_1 + \frac{1}{2}m_{0,1}, w_2 + \frac{1}{2}m_{0,2}, \dots, w_m + \frac{1}{2}m_{0,m})$ 
          Passo 7: Loop  $j = 1, 2, \dots, m$  calcule
                   $m_{2,j} = f_j(t + \frac{h}{2}, w_1 + \frac{1}{2}m_{1,1}, w_2 + \frac{1}{2}m_{1,2}, \dots, w_m + \frac{1}{2}m_{1,m})$ 
          Passo 8: Loop  $j = 1, 2, \dots, m$  calcule
                   $m_{3,j} = f_j(t + h, w_1 + m_{2,1}, w_2 + m_{2,2}, \dots, w_m + m_{2,m})$ 
          Passo 9: Loop  $j = 1, 2, \dots, m$  calcule
                   $w_j = w_j + (m_{0,j} + 2m_{1,j} + 2m_{2,j} + m_{3,j})$ 
          Passo 10: Faça  $t = a + ih$ 
          Passo 11: Imprima ( $t, w_1, w_2, \dots, w_m$ )
Passo 12 : fim

```

Figura C4 – Algoritmo de Runge-Kutta de 4ª ordem para sistema de equações

#### C4.4 – Equações diferenciais de ordem m

Um problema de valor inicial geral é dito de ordem  $m$  quando é regido por uma equação diferencial parcial de ordem  $m$ , podendo ser descrito da seguinte forma:

$$y^{(m)}(t) = f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}); \quad a \leq t \leq b \quad (\text{C.32})$$

com condições iniciais:

$$y(a) = \lambda_1 ; y'(a) = \lambda_2 ; \dots y^{(m-1)}(a) = \lambda_m \quad (C.33)$$

A equação diferencial parcial de ordem  $m$  descrita em (C.32) pode ser transformada num sistema de equações diferenciais de primeira ordem, conforme descrito em (C.30) e (C.31).

Faça  $u_1(t) = y(t)$ ,  $u_2(t) = y'(t)$ ,  $\dots$  e  $u_m(t) = y^{(m-1)}(t)$ . Isso produz um sistema de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \frac{dy}{dt} = u_2 \\ \frac{du_2}{dt} &= \frac{dy'}{dt} = u_3 \\ &\vdots \\ \frac{du_{m-1}}{dt} &= \frac{dy^{(m-2)}}{dt} = u_m \end{aligned} \quad (C.34)$$

e

$$\frac{du_m}{dt} = \frac{dy^{(m-1)}}{dt} = y_m = f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}) = f(t, u_1, u_2, \dots, u_m)$$

com condições iniciais:

$$u_1(a) = \lambda_1 ; u_2(a) = \lambda_2 ; \dots u_m(a) = \lambda_m \quad (C.35)$$

O problema descrito por (C.34) e (C.35) pode ser resolvido usando o algoritmo mostrado na Fig. (C4).

### C5 – Problema do Edifício – Sistema de equações diferenciais de ordem 3 nas variáveis $u$ , $v$ e $\theta$

Seja o problema da análise tridimensional de edifícios, regido por um sistema de equações diferenciais de ordem 3, nas variáveis  $u$ ,  $v$  e  $\theta$ , com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} u(0) = 0 & v(0) = 0 & \theta(0) = 0 \\ u'(0) = 0 & v'(0) = 0 & \theta'(0) = 0 \\ u''(H) = 0 & v''(H) = 0 & \theta''(H) = 0 \end{cases}$$

O sistema de equações diferenciais que rege o problema do edifício é o seguinte:

$$[J] \begin{Bmatrix} u''' \\ v''' \\ \theta''' \end{Bmatrix} + p(H-z)[LST] \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} - [KT] \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} = -(H-z) \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_\theta \end{Bmatrix} \quad (C.36)$$

onde:

[J] é a matriz dos produtos de rigidez à flexão e de flexo-torção

[LST] é a matriz de localização

[KT] é a matriz de rigidez à torção não uniforme

[q] é a matriz do carregamento

p é a carga axial

H é a altura do edifício

z é a abscissa vertical com origem na base

Usando a matriz  $[J]^{-1}$ , inversa da matriz [J], pode-se reescrever (C.36) da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} u''' \\ v''' \\ \theta''' \end{Bmatrix} = -p(H-z)[J]^{-1}[LST] \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} + [J]^{-1}[KT] \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} - (H-z)[J]^{-1} \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_\theta \end{Bmatrix} \quad (C.37)$$

$$\begin{Bmatrix} u''' \\ v''' \\ \theta''' \end{Bmatrix} = [J]^{-1}[-p(H-z)[LST] + [KT]] \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} - (H-z)[J]^{-1} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \quad (C.38)$$

De forma genérica o sistema de equações diferenciais de (C.38) é do seguinte tipo:

$$\begin{cases} u_1''' = f_1(z, u, u', u'') \\ v''' = f_2(z, v, v', v'') \\ \theta''' = f_3(z, \theta, \theta', \theta'') \end{cases} \quad (C.39)$$

A solução utilizando o método de Runge-Kutta de 4ª. ordem poderia ser feito usando o algoritmo mostrado na Fig. (C.3). É interessante, entretanto, abordar as equações de forma vetorial.

Sejam os seguintes vetores:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} ; \quad \mathbf{u}' = \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} ; \quad \mathbf{u}'' = \begin{Bmatrix} u'' \\ v'' \\ \theta'' \end{Bmatrix} ; \quad \mathbf{u}''' = \begin{Bmatrix} u''' \\ v''' \\ \theta''' \end{Bmatrix} \quad (C.40)$$

Seja também o vetor:

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}, \mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} f_x(u, u', u'') \\ f_y(v, v', v'') \\ f_\theta(\theta, \theta', \theta'') \end{Bmatrix} \quad (C.41)$$

O sistema de equações diferenciais de ordem 3 mostrado em (C.38) pode ser reescrito como:

$$\{\mathbf{u}'''\} = \mathbf{f}(\mathbf{z}, \mathbf{u}) \quad (C.42)$$

Deve-se transformar o sistema de equações diferenciais de terceira ordem de (C.42) num sistema de equações diferenciais de primeira ordem.

Para tal adotam-se as seguintes funções vetoriais:

$$\mathbf{w}_1' = \mathbf{u}' = \mathbf{w}_2 \quad ; \quad \mathbf{w}_2' = \mathbf{u}'' = \mathbf{w}_3 \quad ; \quad \mathbf{w}_3' = \mathbf{f}(\mathbf{z}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3) \quad (C.43)$$

Assim, o sistema de equações diferenciais de 3ª. ordem se transforma no sistema de equações de primeira ordem, formado por 9 equações, uma vez que cada um dos vetores de (C.44) tem ordem 3x1:

$$\begin{cases} \mathbf{w}_1' = \mathbf{u}' \\ \mathbf{w}_2' = \mathbf{u}'' \\ \mathbf{w}_3' = \mathbf{f}(\mathbf{z}, \mathbf{u}) \end{cases} \quad (\text{C.44})$$

Como já foi visto as condições de contorno do problema do edifício são translação nula na base, tangente à linha do esqueleto vertical na base, e momento nulo no topo do edifício. Essas condições não formam um problema de valor inicial PVI, pois uma das condições de contorno está no topo e não na base, onde se adotou origem da abscissa  $z$ .

A estratégia de solução é a de se obter a solução por combinação linear de soluções particulares. Para o resultado da combinação linear será imposta a condição de momento nulo no topo. Foi feito o seguinte: primeiramente, utilizando o algoritmo de Runge-Kutta de 4ª ordem indicado na Fig.C.3, encontra-se a solução no topo, para um problema com momento nulo na base:

a.1) condição inicial:

$$\mathbf{u}|_{z=0} = \quad ; \quad \mathbf{u}'|_{z=0} = \quad ; \quad \mathbf{u}''|_{z=0} =$$

a.2) solução no topo com momento nulo na base:

$$= \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{u}|_{z=H} = \begin{Bmatrix} u|_{z=H} \\ v|_{z=H} \\ \theta|_{z=H} \end{Bmatrix}$$

em seguida, utilizando o algoritmo de Runge-Kutta de 4ª ordem indicado na Fig.C.3, encontram-se soluções de 3 problemas PVI, com:

b.1) momento unitário na base na direção  $x$

b.1.1) condição inicial

$$\mathbf{u}|_{z=0} = \quad ; \quad \mathbf{u}'|_{z=0} = \quad ; \quad \mathbf{u}''|_{z=0} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b1.2) solução no topo como momento unitário na base na direção x:

$$= \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{u}|_{z=H} = \begin{Bmatrix} u|_{z=H, u''(0)=1} \\ v|_{z=H, u''(0)=1} \\ \theta|_{z=H, u''(0)=1} \end{Bmatrix}$$

b.2) momento unitário na base na direção y

b.2.1) condição inicial:

$$\mathbf{u}|_{z=0} = \quad ; \quad \mathbf{u}'|_{z=0} = \quad ; \quad \mathbf{u}''|_{z=0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b.2.2) solução no topo como momento unitário na base na direção y:

$$= \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{u}|_{z=H} = \begin{Bmatrix} u|_{z=H, v''(0)=1} \\ v|_{z=H, v''(0)=1} \\ \theta|_{z=H, v''(0)=1} \end{Bmatrix}$$

b.3) momento unitário na base na direção  $\theta$

b.3.1) condição inicial:

$$\mathbf{u}|_{z=0} = \quad ; \quad \mathbf{u}'|_{z=0} = \quad ; \quad \mathbf{u}''|_{z=0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

b.3.2) solução no topo como momento unitário na base na direção  $\theta$

$$= \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{u}|_{z=H} = \begin{Bmatrix} u|_{z=H, \theta'(0)=1} \\ v|_{z=H, \theta'(0)=1} \\ \theta|_{z=H, \theta'(0)=1} \end{Bmatrix}$$

Combinação linear:

$$\mathbf{u}''(z) = \mathbf{u}''(z)|_{u''(0)=0} + \alpha (\mathbf{u}''(z)|_{u'(0)=1}) + \mathbf{u}''(z)|_{u''(0)=0} + \beta (\mathbf{u}''(z)|_{v'(0)=1}) + \mathbf{u}''(z)|_{u''(0)=0} + \gamma (\mathbf{u}''(z)|_{\theta'(0)=1}) + \mathbf{u}''(z)|_{u''(0)=0} = \quad (C.45)$$

Resolvendo a equação vetorial dada em (C.45) encontram-se os valores dos escalares  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ .

Encontrados os valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  tem-se a solução para  $u$ ,  $u'$  e  $u''$  ao longo da altura  $z$ .

## BIBLIOGRAFIA

- [1] - BARBOSA, J. A., *“Edifícios com paredes de seção aberta contraventadas por lintéis sob carga lateral”*, Dissertação de Mestrado, São Carlos, Depto. de Publicações da Escola de Engenharia de São Carlos – USP, 1978.
- [2] - BATTISTELLE, R. A. G. - *“Cálculo de deslocamentos laterais de painéis planos considerando deformação axial das colunas e efeitos de segunda ordem”* – Dissertação de Mestrado, São Carlos, 1991.
- [3] - BEZZERA, P. D. *“Análise de estruturas tridimensionais de edifícios altos considerando a rigidez à flexão das lajes”*. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos – USP, 1995.
- [4] - BURDEN, RICHARD L. and FAIRES, J. DOUGLAS - *“Numerical analysis”* - 6th ed. Brooks/Cole Publishing Company , ITP International Thomson Publishing, ISBN 0-534-95532-0, Pacific Grove - CA, USA, 1997
- [5] - CARVALHO, FRANCISCO A. C., *“Instabilidade de edifícios com paredes de secao aberta contravertadas por lintéis”*, 142p., São Carlos, Depto. de Publicações da Escola de Engenharia de São Carlos – USP, 1980.
- [6] - CARVALHO, FLÁVIO A. C., *“Efeitos de cargas verticais em estruturas de edifícios altos”*, dissertação de mestrado, São Carlos, Depto. de Publicações da Escola de Engenharia de São Carlos – USP, 1982.
- [7] - CUNHA, CRISTINA - *“Métodos Numéricos”*, 2a. ed. rev. ampl, Editora da Unicamp, Campinas - SP,2000
- [8] - FRANCO, M., *“Edifícios altos de concreto armado”*, 2vol, notas de aula da disciplina PEF-717, São Paulo, Escola Politécnica – USP, 1996.

---

**BIBLIOGRAFIA (continuação)**

- [9] - GOMES, T. C. M., *“Estudo comparativo de processos contínuos para a análise de núcleos estruturais submetidos a torção”*, dissertação de mestrado, 106p., Campinas, Faculdade de Engenharia Civil – UNICAMP, 1999.
- [10] - GUILIARDI, S. L. M., *“Sobre os problemas inerentes aos processos discretos na análise de núcleos estruturais”*, dissertação de mestrado, 161p., Campinas, Faculdade de Engenharia Civil – UNICAMP, 1999.
- [11] - HEIDEBRECH, A.C., and SWIFT, R.D., *“Analysis of asymmetrical coupled shear walls”* Journal of the Structural Division, proc. ASCE, may, pp 1407-1422, 1971.
- [12] - KWAN, A.K.H. & CHAN, W.T., *“Effective Stiffness of Coupling Beams Connected to Walls in Out-Of-Plane Directions”*, in Computers and Structures 75, p. 385-394, 2000.
- [13] - MANCINI, E., *“Associação contínua tridimensional de pórticos e paredes com engastamentos elásticos”*, dissertação de mestrado, 140p. , São Carlos, Depto. de Publicações da Escola de Engenharia de São Carlos –USP, 1972.
- [14] - MANCINI, E., *“Análise contínua de estruturas de edifícios elevados sujeitas à ação do vento”*, tese de doutorado, 140p, São Carlos, Depto. de Publicações da Escola de Engenharia de São Carlos –USP, 1973.
- [15] - MANCINI, E., *“Aplicação da técnica do meio contínuo a problemas relativos a estruturas de edifícios altos”*, tese de livre docência, 100p., São Carlos, Depto. de Publicações da Escola de Engenharia de São Carlos – USP, 1995.
- [16] - MANCINI, E., *“Painéis de contraventamento”*. Apostila, 131p. , São Carlos, Depto. de Publicações da Escola de Engenharia de São Carlos – USP, 1999.

## BIBLIOGRAFIA (continuação)

- [17] - MANCINI, E and SAVASSI, W. - *“Tall building structures unified plane panels behavior”* - The Structural Design of Tall Buildings, 8:213-229, 1999.
- [18] - MANCINI, E and SAVASSI, W. - *“Three-dimensional association of bending moment and shear force deformable panels”* - The Structural Design of Tall Buildings, 10: 27-42, 2001
- [19] - MARTINS, C.H., *“Contribuição da rigidez transversal à flexão das lajes na distribuição dos esforços em estruturas de edifícios de andares múltiplos em teoria da segunda ordem”*. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos – USP, 1998.
- [20] - MATIAS JUNIOR, I. G. *“Análise não linear de estruturas tridimensionais de edifícios altos com núcleos resistentes sobre fundações flexíveis”*. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos – USP, 1997.
- [21] - MORI, D.D. & RACHID, M, *“Flambagem de barras de seção delgada por torção e flexão”*, apostila, São Carlos, Depto. de Publicações da Escola de Engenharia de São Carlos – USP, 1993.
- [22] - PEREIRA, G. S.; RAMALHO, M.A.; CORRÊA, M.R.S. (1997). *“Análise de núcleos de rigidez em contraventamento de edifícios altos”* – Jornadas Sul Americanas de Engenharia Estrutural, São Carlos, 1997.
- [23] - PROENÇA, S. P. B. - *“Diferenças Finitas na Integração de Equações da Técnica do Meio Contínuo”* – Dissertação de Mestrado, Depto. de Engenharia de Estruturas, EESC – USP, São Carlos, 1985.
- [24] - RACHID, M., *“Instabilidade de barras de seção delgada”*, Tese Doutorado, São Carlos, Depto. de Publicações da Escola de Engenharia de São Carlos – USP, 1975.

**BIBLIOGRAFIA (continuação)**

- [25] - RIBEIRO, S. R. S., *“Associação tridimensional de pórticos e paredes de seção aberta de estruturas de edifícios altos”*, dissertação de mestrado, 224p., São Carlos, Departamento de Publicações da Escola de Engenharia de São Carlos –USP, 1987.
- [26] - SANTANA, M. J., *“Características geométricas para o estudo da flexão, flexo torção e instabilidade de barras de seção delgada”*, Iniciação Científica - FAPESP, São Carlos, Departamento de Publicações da Escola de Engenharia de São Carlos –USP, 1978.
- [27] - SAVASSI, W., *“Aplicação do método dos elementos finitos aos edifícios altos”*, XVII Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, Caracas, Venezuela, 1975.
- [28] - SAVASSI, W. – *‘Formulação analítica e numérica do cálculo do efeito do vento em estruturas de painéis planos e edifícios de planta poligonal regular convexa’* – Tese de Livre Docência, Depto. de Engenharia de Estruturas, EESC-USP, São Carlos, 1988.
- [29] - SAVASSI, W, - *“Non-uniform tall building structures: Global discrete solution base on the continuous medium technique”*- Computer and Structures,, 46(3): 413-419, 1993.
- [30] - SAVASSI, W – *“Considerações sobre o uso do método do meio contínuo para análise de estruturas de edifícios altos”*- manuscrito, São Carlos, 2002.
- [31] - SERRA, J. L. F. A. *“Contribuição ao estudo de núcleos resistentes de concreto armado”*. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, USP, 1994.
- [32] - SILVA, R. M. *“Análise de estruturas tridimensionais de edifícios altos com núcleos resistentes considerando o efeito  $P-\Delta$ ”*, dissertação de mestrado, São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos – USP, 1989.

**BIBLIOGRAFIA (continuação)**

- [33] - SOUSA JUNIOR, E. *“Análise da interação de núcleos estruturais e lajes em edifícios altos”*. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, USP, 2001.
- [34] - STAMATO, M. C., *“Associação contínua de painéis de contraventamento”*, São Carlos, 72p., Depto. de Publicações da Escola de Engenharia de São Carlos – USP, 1971.
- [35] - STAFFORD SMITH, B and ABATE, A. *“Analysis of non-planar shear wall assemblies by analogous frame”*- Proc. Instn. Civ. Engrs., part 2, June, pp 395-406, 1981.
- [36] - STAFFORD SMITH, B and GIRGIS, A. *“Simple analogous frames for shear wall analysis”*- Journal of Structure Division, proc, ASCE nov, pp 2655-2666, 1984
- [37] - STAFFORD SMITH, B – *“Behavior of curtailed wall-frame structures”* – Journal of Structural Engineering, 119, n°. 10, October, 1993
- [38] - STAFFORD SIMTH, B – *“Stiffened-story wall frame tall building structure”* – Computer and Structures, 66, n°. 2-3, 1998.
- [39] - TARANATH, B.S. *“Analysis of interconnected open section shear wall structure”*, Journal of Structure Division, proc, ASCE nov, pp. 2367-2384, 1975
- [40] - TARANATH, B.S. *“Torsional behavior of open section shear wall structures”*, Southampton, England, University of Southampton, 1968.
- [41] - TORRES, I.F.R., *“Efeito da deformação por cortante no calculo de edifícios de andares múltiplos com núcleos estruturais”*. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos – USP, 1999.
- [42] - TIMOSHENKO, S.P. & GERE, J.M., *“Theory of elastic stability”*, New York, McGraw-Hill, 1961.

---

**BIBLIOGRAFIA (continuação)**

- [43] - TIMOSHENKO, S.P. & GOODIER, J.N. Teoria da elasticidade. (Theory of elasticity). Rio de Janeiro, Editora Guanabara Dois, 1980.
- [44] - VASCONCELOS, A.C., “*Critérios para dispensa de consideração do efeito de segunda ordem*”, in Colóquio IBRACON, 37p., São Paulo, 1985.
- [45] - VLASSOV, B.Z., “*Pieces longues en voiles minces*”, Paris, Eyrolles, 1962.
- [46] - YAGUI, T. “*Análise de estruturas de edifícios altos constituídas de núcleo de concreto armado e pilares ou pendurais de aço*” Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia de Limeira, Departamento de Construção Civil, 1978.
- [47] - WEAVER, W & GERE, J.M., “*Analysis of framed structures*”, New York, Van Nostrand, 1965.
- [48] - XAVIER, M. A. P., “*Análise de efeitos de segunda ordem em estruturas de edifícios altos pela técnica do contínuo*”, dissertação de mestrado, 317p., São Carlos, Depto. de Publicações da Escola de Engenharia de São Carlos – USP, 1989.
- [49] - XAVIER, M. A. P., “*Análise do comportamento estático de painéis planos de edifícios altos utilizando a técnica contínua*”, Tese de Doutorado, São Carlos, Departamento de Publicações da Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1994.

## Manuais de Referência

A – Sap2000<sup>®</sup>, *“Integrated Finite Element Analysis and Design of Structures – GETTING STARTED”*, CSI<sup>®</sup> – Computers & Structures Inc. – Berkeley, California, USA – Version 7.1 – Revised November 1999.

B – Sap2000<sup>®</sup>, *“Integrated Finite Element Analysis and Design of Structures – BASIC ANALYSIS REFERENCE”*, CSI<sup>®</sup> – Computers & Structures Inc. – Berkeley, California, USA – Version 7.0 – Revised November 1998.

C – Sap2000<sup>®</sup>, *“Integrated Finite Element Analysis and Design of Structures – ANALYSIS REFERENCES 1”*, CSI<sup>®</sup> – Computers & Structures Inc. – Berkeley, California, USA – Version 7.0 – Revised November 1998.

D – Sap2000<sup>®</sup>, *“Integrated Finite Element Analysis and Design of Structures – INPUT FILE FORMAT”*, CSI<sup>®</sup> – Computers & Structures Inc. – Berkeley, California, USA – Version 7.0 – Revised November 1998.