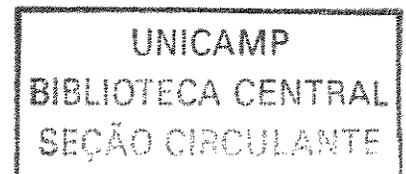


**Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Civil**

**Avaliação de Tensões em Peças Pré-Fissuradas
Usando o Método dos Elementos de Contorno**

Eng. Luís Pedro da Costa Pinto de Figueiredo e Almeida

Setembro – 2003



**Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Civil**

**Avaliação de Tensões em Peças Pré-Fissuradas
Usando o Método dos Elementos de Contorno**

Eng. Luís Pedro da Costa Pinto de Figueiredo e Almeida

Orientador: Prof. Dr. Leandro Palermo Junior

Dissertação de Mestrado apresentada à
Comissão de pós-graduação da faculdade de
Engenharia Civil da Universidade Estadual de
Campinas, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Mestre em Engenharia
Civil, na área de concentração de Estruturas.

Setembro – 2003

iii

Atento que esta é a versão definitiva da dissertação/tese.
Prof. Dr. <i>Leandro Palermo Junior</i>
Matrícula: <i>14683-8</i>

UNIDADE	BC
Nº CHAMADA	UNICAMP
	AL64a
V	EX
TOMBO BC/	58626
PROC.	16.117.04
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	11,00
DATA	29-06-04
Nº CPD	

CM00198153-6

B113 11) 317199

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

AL64a Almeida, Luis Pedro da Costa Pinto de Figueiredo e
Avaliação de tensões em peças pré-fissuradas usando
o método dos elementos de contorno / Luis Pedro da
Costa Pinto de Figueiredo e Almeida.--Campinas, SP:
[s.n.], 2003.

Orientador: Leandro Palermo Junior
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Civil.

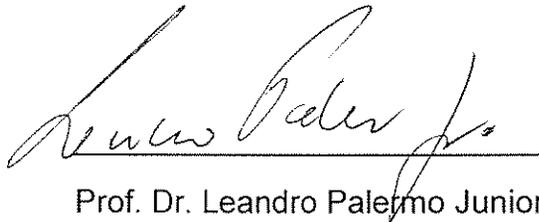
1. Análise numérica. 2. Equações integrais. 3.
Mecânica da fratura. 4. Métodos de elementos de
contorno. I. Palermo Junior, Leandro. II. Universidade
Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil.
III. Título.

**Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Civil**

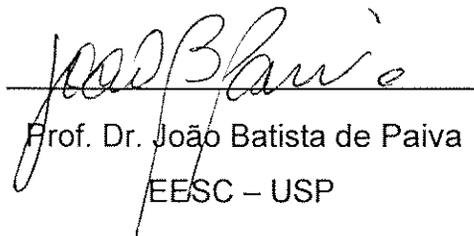
**Avaliação de Tensões em Peças Pré-Fissuradas
Usando o Método dos Elementos de Contorno**

Luis Pedro da Costa Pinto de Figueiredo e Almeida

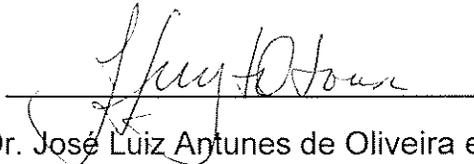
Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:



Prof. Dr. Leandro Palermo Junior
Presidente e Orientador/ FEC – UNICAMP



Prof. Dr. João Batista de Paiva
EESC – USP



Prof. Dr. José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa
FEC – UNICAMP

Campinas, 19 de Setembro de 2003.

DEDICATÓRIA

À memória de minha Mãe, Maria Arlette da
Costa Pinto e Sá de Figueiredo e Almeida.

AGRADECIMENTOS

À CAPES, que concedeu a bolsa de estudos para este trabalho.

À Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Estadual de Campinas.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Leandro Palermo Junior, e aos colegas do grupo de trabalho, Rogério Simões e Carlos Eduardo Foltran.

A Mariana Esteves Mansanares pela paciência e ao incentivo dedicados ao longo de todo o trabalho.

A minha família que sempre esteve perto apesar das distâncias e dos rumos que a vida nos leva.

SUMÁRIO:

Sumário.xi
Lista de Figuras.xv
Lista de Tabelas.xvii
Lista de Símbolos.xix
Resumo.xxiii
Abstract.xxv
1 – Introdução. 1
2 – Revisão Bibliográfica. 3
3 – Estados Planos de Tensão e Deformação. 9
3.1 – Introdução. 9
3.2 – Hipóteses básicas. 9
3.3 – Equilíbrio de um elemento infinitesimal.10
3.4 – Noções sobre deformação em um corpo.13
3.5 – Lei de Hooke. 15
3.6 – Equações de Navier.17
3.7 – Estado plano de tensão.18
3.8 – Estado plano de deformação.19
3.9 – Estado plano de tensão generalizada.20

3.10 – Vetor de Galerkin.	20
3.11 – Solução fundamental de chapas (Problema de Kelvin)	22
4 – Mecânica da Fratura Elástica Linear.	26
4.1 – Introdução.	26
4.2 – Modos de solitação da trinca I, II e III.	27
4.3 – Princípios da mecânica da fratura elástica linear.	28
4.4 – Distribuição de tensões em um corpo de prova co trinca em modo I.	32
4.5 – Distribuição de tensões nos modos II e III na M.F.E.L.	34
4.6 – Dimensões da zona plástica.	35
4.6.1 – Dimensões da zona plástica em condições de tensão plana.	35
4.6.2 – Dimensões da zona plástica em condições de deformação, com carregamento monotônico.	38
4.6.3 – Fator de intensidade de tensão efetivo.	40
4.6.4 – Fator de restrição plástica.	41
5 – Método dos Elementos de Contorno.	43
5.1 – Introdução.	43
5.2 – Equação Integral de chapas.	44
5.3 – Implementação Numérica.	51
5.3.1 – Divisão do contorno em elementos.	52
5.3.2 – Tipos de elementos.	55
5.3.3 – Pontos de carregamento.	57
5.3.4 – Posicionamento de eixos de coordenadas sobre o elemento linear.	58
5.3.5 – Integração Numérica dos Núcleos.	59
5.3.6 – Aplicação das condições de contorno.	65
5.3.7 – Resolução das equações algébricas.	67
5.4 – Determinação das tensões nos pontos internos.	68
5.5 – Implementação analítica.	69
5.5.1 – Relações entre as coordenadas N e S em termos das direções 1 e 2.	69

5.5.2 – Determinação de deslocamentos e forças superficiais no contorno para elementos lineares.	70
5.5.3 – Determinação das tensões no contorno para elementos lineares.	71
6 – Análise de Problemas com trincas pelo Método dos Elementos de Contorno Dual.	73
6.1 – Introdução.	73
6.2 – As duas equações integrais de contorno.	74
6.3 – Estratégia de modelagem da trinca.	76
6.4 – Tratamento das partes finitas das integrais.	77
6.5 – Considerações de corpo rígido.	83
6.6 – Calculo de fatores de intensidade de tensão.	83
7 – Exemplos de Problemas de corpos pré-fissurados em análise pela Mecânica da Fratura Elástica Linear usando o Método dos Elementos de Contorno Dual.	86
7.1 – Introdução.	86
7.2 – Detalhamento do posicionamento de ponto de carregamento em elementos lineares e quadráticos	87
7.3 – Exemplos de problemas de corpos solicitados em regime elástico.	88
7.3.1 – Chapas em estado plano de tensão.	88
7.3.2 – Chapa solicitada em estado plano de deformação.	93
7.4 – Exemplos de problemas de corpos pré-fissurados analisados pela Mecânica da Fratura Elástica Linear.	96
7.4.1 – Corpo com trinca de borda.	96
7.4.2 – Corpo com trinca interna e inclinada.	98
7.4.3 – Corpo com trinca interna em forma de “v”	99
8 – Conclusões.	102
Bibliografia.	105

LISTA DE FIGURAS:

Figura 3.1 – Elemento infinitesimal em forma de cubo.	11
Figura 3.2 – Representação das componentes da forças superficial.	13
Figura 3.3 – Representação de uma linha infinitesimal para o estudo de deformação.	13
Figura 3.4 – Representação de um corpo bidimensional.	25
Figura 4.1 – Modos de aplicação das cargas “F” - Modos de deformação da trinca.	27
Figura 4.2 – Estudo de tensão em um ponto “R” definido por “r” e “ θ ” estando este ponto próximo da ponta da trinca, em uma trinca solicitada em modo I.	33
Figura 4.3 – Esquema da correção da zona plástica de Irwin, para o modo I em tensão plana.	37
Figura 4.4 – Forma esquemática da zona plástica para modo I: a)critério de von Mises e b) critério de Tresca.	39
Figura 4.5 – Esquema da comparação da zona plástica em tensão e deformação planas.	42
Figura 5.1 – Esquemática do contorno com “bolha” de raio ϵ	48
Figura 5.2 – Esquemática do contorno com “bolha” em um canto agudo.	51

Figura 5.3 – Função de forma de um elemento linear e de um elemento quadrático.	55
Figura 5.4 – Tipos de elementos quadráticos e lineares.	56
Figura 5.5 – Esquema do posicionamento dos pontos de carregamento.	57
Figura 5.6 – Sistema de coordenadas em função de “a” de elemento linear.	58
Figura 5.7 – Esquema de uma análise com o MEC para elementos lineares e quadráticos.	65
Figura 5.8 – Figura que mostra a relação entre as coordenadas N e S.	69
Figura 6.1 – Elemento quadrático e o elemento linear de ponta de trinca.	84
Figura 7.1 – Detalhamento do posicionamento do ponto de carregamento em elementos lineares.	87
Figura 7.2 – Detalhamento do posicionamento do ponto de carregamento em elementos quadráticos.	88
Figura 7.3 – Localização dos pontos em que são calculadas as tensões e deslocamentos.	89
Figura 7.4 – Representação da chapa com carregamento no eixo xy	89
Figura 7.5 – Representação da chapa com carregamento no eixo xy	91
Figura 7.6 – Chapas com carregamento no eixo x e restrição em y	92
Figura 7.7 – Esquema da chapa com um furo cilíndrico	93
Figura 7.8 – Localização dos pontos em que são calculadas as tensões e deslocamentos.	94
Figura 7.9 – Esquema da chapa com trinca de borda.	96
Figura 7.10 – Esquema da chapa com trinca interna inclinada.	98
Figura 7.11 – Esquema da chapa com trinca interna em forma de “v”	100

LISTA DE TABELAS:

Tabela 7.1 – Resultados de deslocamentos na chapa carregada no eixo x.	90
Tabela 7.2 – Resultados de tensões na chapa para elementos quadráticos.	90
Tabela 7.3 – Resultados de tensões na chapa para elementos lineares.	90
Tabela 7.4 – Resultados de tensões na chapa carregada no eixo xy.	91
Tabela 7.5 – Resultados de tensões na chapa carregada no eixo xy.	91
Tabela 7.6 – Resultados de deslocamentos na chapa.	92
Tabela 7.7 – Resultados de tensões na chapa para elementos lineares.	92
Tabela 7.8 – Resultados de tensões na chapa para elementos quadráticos.	93
Tabela 7.9 – Resultados de deslocamentos na chapa com furo.	95
Tabela 7.10 – Resultados de tensões na chapa com furo.	95
Tabela 7.11 – Resultados de tensões na chapa com furo.	95
Tabela 7.12 – Resultados de fatores no modo I ($K_I/t \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$) na chapa, para elementos lineares	97
Tabela 7.13 – Resultados de fatores no modo I ($K_I/t \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$) na chapa, para elementos quadráticos.	97
Tabela 7.14 – Resultados de fatores no modo I ($K_I/t \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$) na chapa.	99
Tabela 7.15 – Resultados de fatores no modo II ($K_{II}/t \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$) na chapa.	99
Tabela 7.16 – Resultados de fatores no modo I ($K_I/t \cdot \sqrt{\pi \cdot c}$) na chapa na ponta A.	100

Tabela 7.17 – Resultados de fatores no modo II ($K_{II}/t \cdot \sqrt{\pi \cdot c}$) na chapa na ponta A. . . .	100
Tabela 7.18 – Resultados de fatores no modo I ($K_I/t \cdot \sqrt{\pi \cdot c}$) na chapa na ponta B.	101
Tabela 7.19 – Resultados de fatores no modo II ($K_{II}/t \cdot \sqrt{\pi \cdot c}$) na chapa na ponta B. . . .	101

LISTA DE SÍMBOLOS:

σ_{ij}	Tensor de tensões
ϵ_{ij}	Tensor de deformações
u_i	Campo de deslocamentos
t_i	Campo de forças superficiais
b_i	Campo de forças de corpo
n_i	Componente normal a superfície de contorno
s_i	Componente tangencial a superfície de contorno
δ_{ij}	Delta de Kronecker
C_{ij}	Tensor das constantes elásticas
λ, μ	Constantes de Lamé
E	Módulo de elasticidade longitudinal ou Módulo de Young
G	Módulo de elasticidade transversal
ν	Coefficiente de Poisson
g	Vetor de Galerkin
∇^2	Operador de Laplace
r	Distancia entre o ponto campo e o ponto de carregamento
ϵ	Raio da bolha
G'_c	Valor crítico da taxa de dissipação de energia de deformação

a	Comprimento de trinca
a	Distancia do ponto de carregamento ao elemento na integração analítica para elemento linear
c	Projeção do comprimento de trinca em forma de "v"
c_{ij}	Tensor de correção para deslocamentos no contorno ou fora dele
K_c	Fator de intensidade de tensão crítico
K_{Ic}	Fator de intensidade de tensão crítico no modo I ou tenacidade a fratura em deformação plana
K_I	Fator de intensidade de tensão no modo I
K_{II}	Fator de intensidade de tensão no modo II
K_{III}	Fator de intensidade de tensão no modo III
r_y	Comprimento da zona plástica
R_y	Comprimento da zona plástica corrigido
σ_e	Tensão de escoamento
K_{ef}	Fator de intensidade de tensões efetivo
λ	Fator de correção geométrico
a_{ef}	Comprimento de trinca efetivo
$\Delta(p, Q)$	Delta de Dirac
ϕ	Funções de forma
ξ	Coordenada intrínseca
l	Comprimento do elemento
J	Jacobiano
π	3,14159265358979
T_{ij}	Solução fundamental de forças superficiais
U_{ij}	Solução fundamental de deslocamentos
$[G]$	Matriz do MEC que multiplica o vetor de forças superficiais
$[H]$	Matriz do MEC que multiplica o vetor de deslocamentos
D_{kij}	Solução fundamental de tensões
S_{kij}	Solução fundamental de tensões
h^n_{ij}	Integral Analítica
g^n_{ij}	Integral Analítica

f_{ij}^n	Função regular da integral Analítica
g_{kij}^n	Função regular da integral Analítica
Γ	Variável de contorno
θ	Ângulo que define o sistema de coordenadas na ponta da trinca

RESUMO

Na presente dissertação são estudados problemas de estados planos. A avaliação de fatores de intensidade de tensão em problemas com trincas ou do campo de deslocamentos e de tensões em meio contínuo usando o Método dos Elementos de Contorno é o principal objetivo deste estudo. Problemas elásticos em meio contínuo são resolvidos com a equação integral de contorno de deslocamento e o Método dos Elementos de Contorno Dual (DBEM) é aplicada para resolver os problemas de trinca em análise de mecânica da fratura elástico linear que é baseada em ambas equações integrais de contorno, a de deslocamentos e a de forças superficiais. Os parâmetros das funções de forma são definidos para as extremidades do elemento para elementos de contorno. Elementos contínuos e descontínuos podem ser usados no contorno e na trinca. O ponto de carregamento é posicionado no interior do elemento tanto para elementos contínuos como para descontínuos. Os problemas com ou sem as trincas internas, de borda e em forma de 'v' são analisadas e mostradas com precisão com a formulação presente. Os fatores de intensidade de tensão são obtidos através do método da extrapolação de deslocamentos.

Palavras Chave: método dos elementos de contorno; Métodos dos elementos de contorno dual; mecânica da fratura elástica linear; equações hipersingulares; chapas.

ABSTRACT

Plane problems are studied in this dissertation. The assessment of stress intensity factors of crack problems or displacements and the stress fields in the continuum media using the Boundary Element Method are the aim of this study. Elastostatic problems in the continuum media are solved using the displacement boundary integral equation and the Dual Boundary Element Method (DBEM) is applied to solve the crack problems of the linear elastic fracture mechanics, which is based on both the displacement and the traction boundary integral equations. The shape functions parameters are defined at the ends of the boundary elements. Continuous and discontinuous boundary elements can be used on the boundary or on the crack. The collocation point is placed to the inside of continuous or discontinuous elements. The plane problems without or with embedded, edge and kinked cracks are analyzed to show the accuracy of the present formulation. The stress intensity factors are obtained with the displacement extrapolation method.

1 - INTRODUÇÃO

O estudo de problemas em corpos solicitados em regime elástico tem amplo campo de aplicações dentro da engenharia e o estudo de problemas de corpos que contém trinca tem despertado grande interesse a partir da metade do século XX. O enfoque sobre problemas planos é o principal objetivo deste trabalho, tanto para os problemas de elasticidade como para problemas de mecânica da fratura elástica linear. A seguir são mencionados os conteúdos sobre cada capítulo que se segue.

A revisão bibliográfica sobre a aplicação de problemas de elasticidade ao método dos elementos de contorno e a revisão de problemas de fratura aplicados ao método dos elementos de contorno dual estão contidas no segundo capítulo.

A evolução da teoria que é envolvida na análise de problema de elasticidade é citada no terceiro capítulo, em que se evoluem as equações dos estados planos até as soluções fundamentais para deslocamentos e de forças superficiais.

No quarto capítulo são apresentadas às bases do estudo de mecânica da fratura elástico linear, onde são mostrados os modos de fratura a que uma trinca pode ser solicitada, as hipóteses levantadas para o estudo, o cálculo de tensões nas proximidades da ponta da trinca, o cálculo de fatores de intensidade de tensão para os

modos de trinca, as dimensões de zona plástica à frente da trinca e todos os aspectos envolvidos em fratura frágil.

A aplicação dos problemas de elasticidade ao método dos elementos de contorno é mostrada no quinto capítulo, em que toda a estratégia de desenvolvimento das equações singulares e hipersingulares é mostrada com pontos de carregamento no interior do elemento, além do desenvolvimento dos núcleos das equações integrais para tensões.

O desenvolvimento de uma nova equação integral (equação de forças superficiais) com o uso do método dos elementos de contorno dual e a evolução de equações singulares e hipersingulares para elementos quadráticos com as funções que tratam da parte singular da integral imprópria estão contidos no sexto capítulo, em que também é apresentado o cálculo de fatores de intensidade de tensão através do método da extrapolação de deslocamentos.

O sétimo capítulo é dedicado a exposição de exemplos de problemas de elasticidade e de problemas com trincas solicitadas nos modos I e II analisadas pela mecânica da fratura elástica linear.

As conclusões sobre os exemplos analisados são apresentadas no oitavo capítulo, em que se menciona os aspectos observados nos exemplos na utilização do método.

2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

As equações integrais têm sido usadas com sucesso, desde o século XIX, no tratamento de problemas de mecânica dos fluidos como alternativa à resolução de equações diferenciais.

Betti [40] em 1872 foi o primeiro a estudar a teoria da elasticidade com equações integrais relacionado forças de superfície e deslocamentos aplicados no contorno.

Em 1886, Somigliana apresentou a equação integral que estabelece uma relação entre forças e deslocamentos no contorno de um corpo e seus deslocamentos internos. Esta relação é conhecida como identidade de Somigliana.

Em 1903, Fredholm [41] aplicou equações integrais para formular os problemas de valor de contorno e demonstrou a existência de soluções. O advento de computadores de alta velocidade de processamento permitiu implementações de procedimentos numéricos para a rápida solução dos problemas de engenharia.

Para problemas lineares as equações integrais podem ser formuladas a partir do teorema de Green, como apresentou Kellogg [29] para problemas de potenciais em 1927.

Equações integrais de Fredholm [41] foram aplicadas em problemas de potencial. Kupradze [28] em 1965 introduziu equações integrais vetoriais, no contexto da teoria da elasticidade.

Em 1963, Jawson [30] e Symm [31] apresentaram uma técnica numérica para resolução das equações integrais de Fredholm. A técnica consistia em dividir o contorno em uma série de segmentos (elementos), e as equações integrais de contorno serão aplicadas a um número particular de pontos (nós) pertencente ao contorno. Um sistema de equações lineares é obtido e determinam-se as incógnitas do problema. Entre 1970 e 1977 Jawson [30] e Symm [31] aprimoraram sua técnica.

Hess e Smith em 1967 usaram uma técnica similar para o cálculo do fluxo de um problema potencial em torno de corpos arbitrários. As integrais sobre cada elemento eram calculadas por técnicas de quadratura, e os termos singulares por meio de expansão em séries.

Em 1967, Rizzo [32] propôs a diferenciação da identidade de Somigliana para deslocamentos e, subseqüentemente a aplicação da lei de Hooke obteve através de uma equação integral de contorno tensões no interior do corpo elástico, linear e isotrópico. Em 1969 Cruse derivou uma forma explícita desta representação para corpos elásticos tridimensionais.

Em 1977, Cruse [33] apresentou uma representação bidimensional de tensão, semelhante à identidade de Somigliana e a denominou de identidade de Somigliana para tensões.

Os primeiros textos do Método dos Elementos de Contorno (MEC) foram publicados por Brebbia [42] no fim da década de setenta e início dos anos oitenta, seguindo-se grande volume de trabalhos.

Nos primórdios dos estudos de materiais, a primeira contribuição feita em relação ao estudo da mecânica da fratura foi feita por Leonardo Da Vinci que mediu a resistência de arames de ferro e percebeu que esta resistência variava inversamente com o comprimento dos mesmos. A partir desses resultados concluiu que defeitos ou trincas existentes no material controlavam sua resistência. A um arame mais longo correspondia uma maior probabilidade de amostrar uma região contendo esses defeitos, por conseguinte, uma menor resistência.

Em 1913, Inglis [25] publicou uma análise matemática de tensões para a condição de uma placa finita com orifício elíptico central, modelando uma trinca como uma abertura elíptica longa e estimando fatores de concentração de tensões. Introduziu o conceito da singularidade na ponta da trinca.

Posteriormente em 1920 Griffith [23, 24] usou os trabalhos de Inglis [25] para a partir das Leis da Termodinâmica, formular um critério de energia capaz de prever se uma trinca propagar-se-ia de maneira instável em um material idealmente frágil, resultando em falha. Valeu-se de uma metodologia de energia, abandonando a abordagem de tensões de Inglis [25], por não conseguir explicar fisicamente a singularidade de tensões na ponta da trinca. De acordo com Griffith, considerando-se uma placa trincada de um dado material, se a taxa de variação da energia elástica armazenada nesta placa igualasse ou excedesse o trabalho necessário para produzir uma superfície de fratura, então o crescimento de trinca ocorreria. O modelo de Griffith era capaz de prever corretamente a relação quantitativa entre resistência do material e tamanho de trinca em corpos de prova de vidro. No entanto quanto a materiais mais dúcteis, como os metais, não era capaz de apresentar resultados satisfatórios.

Em 1948 e 1949, trabalhando separadamente, Irwin e Orowan, sugeriram alterações no modelo original de Griffith, de forma a torná-lo aplicável a metais. Foi então definido o Modelo de Griffith Generalizado, onde se admitia que o trabalho de fratura, em um material genérico, seria ocasionado pela combinação de duas parcelas: a primeira, devida à energia superficial, e outra, função do escoamento e da deformação plástica ocorrendo ao redor da ponta da trinca, sendo que para materiais metálicos a parcela da energia superficial é desprezível [20].

Irwin e Kies em 1952 definiram o parâmetro G , (há informações de que G ser devido ao nome Griffith) a partir do Método de Griffith Generalizado. Em 1957 Irwin [26] utilizando-se do trabalho de Westgaard [27] propôs uma abordagem de fratura baseada no campo de tensões na região da ponta da trinca, conhecida como metodologia de K (especula-se na literatura que a metodologia recebeu este nome de K devido ao nome Kies), o fator de intensidade de tensão. Irwin [26] mostrou que a fratura ocorre quando uma determinada distribuição de tensões à frente da ponta da trinca é atingida.

A aplicação da mecânica da fratura ao problema de fadiga em metais foi feita por Paris e Erdogan em 1961, onde observaram que a taxa de crescimento de trinca por fadiga estava relacionada com o intervalo de fatores de intensidade de tensão dos carregamentos cíclicos [20].

Em 1968, Rice desenvolveu a abordagem da integral J para a Mecânica da fratura não-linear (acredita-se que o nome integral J é devido ao nome James Rice) [20]. Em que Rice demonstrou que o valor J é nulo quando a integral é aplicada a um contorno fechado, e levando em conta um contorno artificial fechado ao redor da ponta da trinca em que o contorno é dividido em duas parcelas com sentidos de contorno opostos, concluiu que como as parcelas do contorno artificial coincidem com as superfícies de trinca, o tensor de forças de superfície e a diferencial em relação ao eixo cartesiano perpendicular a trinca são nulos e assim que $J(\Gamma_1) = -J(\Gamma_2)$ o que significa que o valor de J é independente do caminho quando considerado ao redor da ponta da

trinca. A integral J tem aplicação em mecânica da fratura elástico-plástica e também na linear.

Para a modelagem de corpos com trincas em métodos numéricos como o Método dos Elementos de Contorno, há vários tipos de estratégias que podem ser adotadas para discretizar a trinca matemática (trinca em que ambas as superfícies de trinca tem pontos em superfícies opostas com mesmas coordenadas) como se vai mostrar a seguir [21].

A simples aplicação do MEC para problemas de trinca leva a uma degeneração matemática se duas superfícies de trinca são consideradas coplanares [43]. Para corpos de geometrias de trinca simétrica, a dificuldade da modelagem pode ser superada pela imposição da condição de contorno de simetria e então se modela somente uma superfície de trinca. Entretanto, para problemas em que não há geometria com simetria de trinca outros caminhos foram explorados. Cruse e Van Buren [44] analisaram a possibilidade de modelar a trinca com uma trinca elíptica, entretanto esta modelagem requer muitos elementos para discretizar a ponta da trinca elíptica. Esta análise é considerada pobre porque acarreta erros da ordem de quatorze por cento.

Snyder e Cruse [45] introduziram uma forma especial de soluções fundamentais para trincas em meio anisotrópico. A solução fundamental (função de Green) contém a forma exata da trinca livre de forças superficiais em um meio infinito, então a modelagem de superfícies não é requerida. A técnica da função de trinca de Green é precisa, mas limitada a trincas retas bidimensionais. Para trinca que tenham uma parte reta e outra inclinada as duas regiões devem ser divididas em segmentos retos. Entretanto este modelo é ineficiente quando se introduzem elementos no modelo, ou seja, quando se refina a discretização na análise. O primeiro método aplicável de acordo com a presença de duas superfícies de trincas coplanares foi desenvolvido por Blandford *et al* [34]. Esta aproximação, que tem por base a formulação em um domínio múltiplo é geral e pode ser aplicada para problemas de trincas simétricos e anti-simétricos em análise de configuração bidimensional e tridimensional. O método do

domínio múltiplo ou sub-regiões introduz contornos artificiais no corpo, que conectam a trinca ao contorno, de modo que cada região contenha a superfície de trinca. A principal desvantagem deste método é que a introdução de contornos artificiais não é a única, e dificulta a implementação em procedimento automático. Em adição ao dito anteriormente, o método degenera quando um sistema algébrico grande é requerido. Ignorando-se essas desvantagens, o método das sub-regiões pode ser usado amplamente em problemas com trincas.

Mais recentemente, o Método dos Elementos de Contorno Dual (DBEM) tem sido desenvolvido por Portela, Aliabadi e Rooke [18] para problemas de corpos com trincas bidimensionais e por Mi e Aliabadi [35] para problemas de corpos com trincas tridimensionais. Ele vem se mostrando um modelo geral, computacionalmente eficiente, de se modelar problemas com trincas no MEC. Problemas com trincas solicitadas em modo misto podem ser resolvidos com o DBEM, com apenas uma região singular, quando a equação integral de deslocamentos é aplicada em uma superfície de trinca e a equação integral de forças superficiais é aplicada na outra superfície de trinca. Isso é uma grande vantagem em relação ao uso de apenas da parte simétrica do corpo para modelar o problema. No contexto da aplicação direta do MEC, as duas equações integrais de contorno que se usam no método foram primeiramente apresentadas por Watson [39], em formulação baseada na equação de deslocamento e na derivada da equação de deslocamento em relação a normal. Para problemas tridimensionais na elasticidade a formulação do DBEM foi apresentada por Gray *et al.*[36] Muitas outras contribuições foram feitas por Gray e Giles [37], Lutz [38], Hong e Chen [16] no DBEM para vários tipos de aplicações do método para trincas.

3 - ESTADOS PLANOS DE TENSÃO E DEFORMAÇÃO

3.1 – Introdução:

Neste capítulo será inicialmente exposto um resumo sobre elasticidade, onde serão apresentadas as bases para o estudo proposto.

3.2 – Hipóteses básicas:

Serão usadas as seguintes hipóteses:

- 1) É válida a geometria de pequenos deslocamentos;
- 2) O estado deformado do corpo pode ser escrito em função do estado indeformado, ou seja, aproximação Lagrangiana;
- 3) O material que constitui o corpo é elástico linear, contínuo, homogêneo e isotrópico.

3.3 – Equilíbrio de um elemento infinitesimal:

As forças que agem sobre um corpo são classificadas em dois tipos: forças de volume e forças de superfície. As forças de volume agem no volume do corpo (exemplo: gravidade), já as forças superficiais agem sobre uma porção finita de superfície que envolve o corpo (pressão entre dois corpos em contato). As forças de corpo serão determinadas por unidade de volume e as forças de superfície, serão determinadas por unidade de superfície. Na prática as forças aplicadas a um corpo não são pontuais, na realidade elas são distribuídas.

Sejam dois elementos infinitesimais em forma de cubo, onde será analisado no primeiro o equilíbrio devido às tensões aplicadas nas suas faces, e no outro a representação das forças de corpo aplicadas ao corpo, ambos mostrados na figura 3.1, em que se representa o equilíbrio das forças aplicadas em um corpo.

Para representar as tensões nas faces do elemento usou-se uma expansão em séries de Taylor e considerou-se a seguir o primeiro termo da série [1].

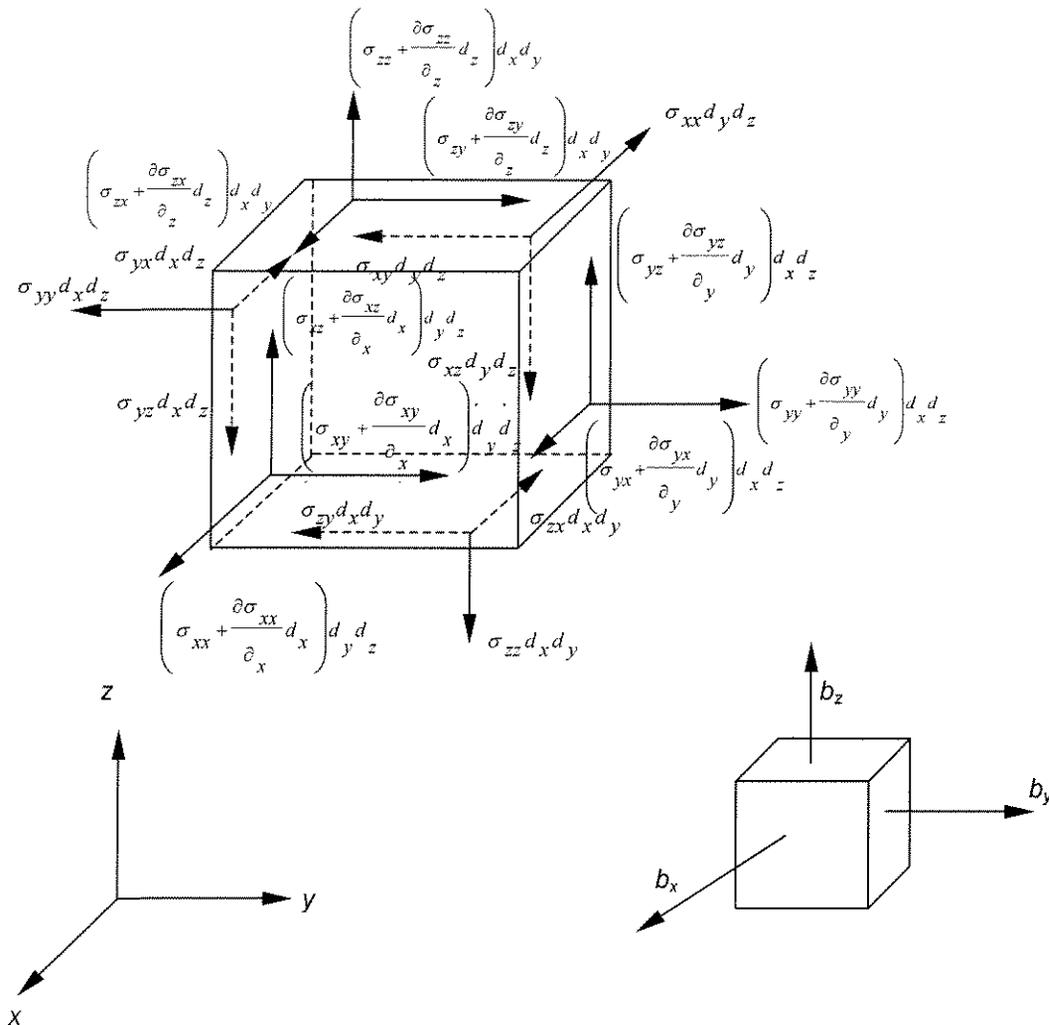


Figura 3.1 – Elemento infinitesimal em forma de cubo

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: & -\sigma_{xx} d_y d_z - \sigma_{yx} d_x d_z - \sigma_{zx} d_x d_y + \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx\right) d_y d_z + \left(\sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy\right) d_x d_z + \\ & + \left(\sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dz\right) d_x d_y + b_x \cdot d_x d_y d_z = 0 \end{aligned}$$

Os outros termos da série podem ser desenvolvidos analogamente nas outras direções.

O equilíbrio resulta em:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + b_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z &= 0\end{aligned}$$

Em notação indicial:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial j} + b_i = 0$$

Admitindo-se que não haja binários aplicados ao elemento infinitesimal, fazendo-se o equilíbrio chega-se:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Assim pode-se escrever a equação de equilíbrio da forma:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (3.1)$$

As componentes do tensor de tensões σ_{ij} estão em equilíbrio com as forças superficiais agindo em um elemento diferencial $d\Gamma$ da superfície com as seguintes equações t_i a seguir [1]:

$$\begin{aligned}t_x &= \sigma_{xx}.n_x + \sigma_{xy}.n_y + \sigma_{xz}.n_z \\ t_y &= \sigma_{yx}.n_x + \sigma_{yy}.n_y + \sigma_{yz}.n_z \\ t_z &= \sigma_{zx}.n_x + \sigma_{zy}.n_y + \sigma_{zz}.n_z \\ t_i &= \sigma_{ij}.n_j \quad (i, j=1, 2, 3)\end{aligned} \quad (3.2)$$

Em que n_1 , n_2 e n_3 são os cossenos diretores da componente normal em relação aos eixos x, y e z .

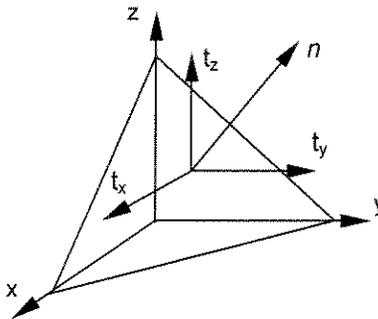


Figura 3.2 – Representação das componentes da força superficial

3.4 – Noções sobre deformação em um corpo:

Seja um elemento infinitesimal linear em um corpo sólido e cujas extremidades na posição indeformada são representadas pelo ponto A de coordenadas x_i e B de coordenadas x_i+dx_i . Após a deformação, a posição final ocupada por suas extremidades será notada por A' nas coordenadas x_i+u_i e B' nas coordenadas $(x_i+dx_i)+(u_i+du_i)$.

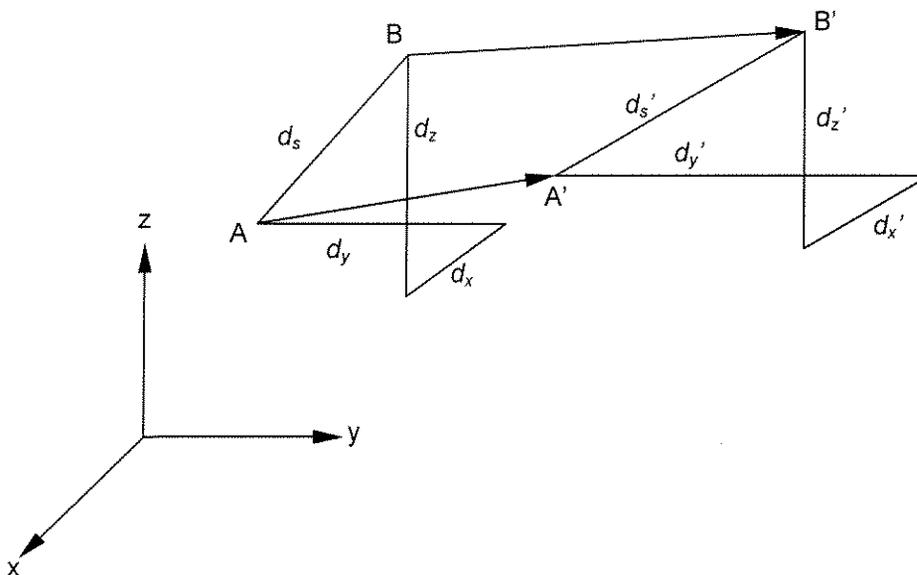


Figura 3.3 – Representação de uma linha infinitesimal para o estudo de deformação

Relações entre o elemento deformado e indeformado, são:

$$x_i' = x_i + u_i$$

$$dx_i' = dx_i + du_i = dx_i + u_{i,j} dx_j = \delta_{ij} dx_j + u_{i,j} dx_j = dx_i' = (\delta_{ij} + u_{i,j}) dx_j$$

$$ds^2 = dx_i dx_i$$

$$(ds')^2 = dx_i' dx_i' = (\delta_{ij} + u_{i,j}) dx_j (\delta_{ik} + u_{i,k}) dx_k$$

A importância do estudo do comprimento da linha infinitesimal na mecânica dos sólidos, antes e depois da deformação, é a de prover a informação necessária para computar as deformações no corpo. Para começar o passo da determinação do campo de deformações em um corpo contendo a linha AB, seja a diferença entre os quadrados dos comprimentos da linha infinitesimal mostrada na figura 3.3 [1].

$$\begin{aligned} (ds')^2 - ds^2 &= (\delta_{ij} + u_{i,j}) (\delta_{ik} + u_{i,k}) dx_j dx_k - dx_i dx_i = \\ &= (\delta_{ij} + u_{i,j}) (\delta_{ik} + u_{i,k}) dx_j dx_k - \delta_{ij} dx_i dx_j \\ &= \delta_{ij} \{ (\delta_{ik} + u_{i,k}) (\delta_{jl} + u_{j,l}) dx_k dx_l - dx_i dx_j \} \\ &= \delta_{ij} \{ \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{ik} u_{j,l} + \delta_{jl} u_{i,k} + u_{i,k} u_{j,l} \} dx_k dx_l - dx_i dx_j \} \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} \delta_{ij} \delta_{ik} \delta_{jl} dx_k dx_l &= \delta_{jk} \delta_{jl} dx_k dx_l = \delta_{kl} dx_k dx_l = dx_A dx_A \\ \delta_{ij} \delta_{ik} u_{j,l} dx_k dx_l &= \delta_{jk} u_{j,l} dx_k dx_l = u_{k,l} dx_k dx_l \\ \delta_{ij} \delta_{jl} u_{i,k} dx_k dx_l &= \delta_{il} u_{i,k} dx_k dx_l = u_{l,k} dx_k dx_l \\ \delta_{ij} u_{i,k} u_{j,l} dx_k dx_l &= u_{j,k} u_{j,l} dx_k dx_l \\ -\delta_{ij} dx_i dx_j &= -dx_A dx_A \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned} (ds')^2 - ds^2 &= 2 \varepsilon_{ij} dx_i dx_j \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \{ u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j} \} \end{aligned}$$

Neste estudo as deformações e os deslocamentos, além da rotação tendem a zero. Assim, poderão ser desprezados os produtos das derivações das deformações e as componentes do tensor de deformações poderão ser expressas na forma a seguir:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.3)$$

3.5 – Lei de Hooke:

Um corpo elástico é definido como um corpo que se deforma quando submetido a uma força e volta a posição inicial quando esta força é removida. A lei de Hooke, mostrada a seguir, exprime uma relação linear entre as componentes do tensor de tensões e deformações para um material elástico.

$$\sigma_{kl} = C_{klmn} \cdot e_{mn} \quad (k, l, m, n = 1, 2, 3) \quad (3.4)$$

Em que a matriz C_{klmn} contém as constantes elásticas e no caso tridimensional a combinação dos índices da matriz C leva a 81 constantes, isso se dá tendo em vista que os tensores de tensão e de deformação têm 9 componentes, respectivamente. Do tensor de tensões sabe-se que σ_{kl} é igual a σ_{lk} , portanto conclui-se que C_{klmn} é igual a C_{lkmn} e que o mesmo vale para o outro par de índices. Logo as constantes são reduzidas para 36. Seguindo o raciocínio da mesma forma do que foi dito na frase anterior, outro fato é a informação que C_{klmn} é igual a C_{mnlk} e chega-se a 21 constantes elásticas. Levando-se em consideração a existência da função densidade da energia de deformação e as propriedades de isotropia o número de constantes é reduzida a 2 constantes elásticas.

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot e_{kk} + 2\mu e_{ij} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (3.5)$$

Os dois símbolos gregos são as constantes de Lamé (λ e μ) que tem relação com o módulo de elasticidade E e o coeficiente de Poisson ν . O símbolo μ é também notado como G e recebe o nome de módulo transversal [1,3]. Valem as relações:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad ; \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} ;$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \quad ; \quad \mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$
(3.6)

Usando-se (3.4) em (3.5) chega-se:

$$\sigma_{ij} = \frac{\nu E \delta_{ij} e_{kk}}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} + \frac{E e_{ij}}{(1 + \nu)}$$

$$\sigma_{kk} = \lambda \delta_{kk} e_{nn} = \lambda(3)e_{nn} + 2\mu e_{nn}$$

ou

$$\sigma_{kk} = (3\lambda + 2\mu)e_{nn}$$

Portanto:

$$e_{nn} = \frac{\sigma_{kk}}{3\lambda + 2\mu}$$

Finalmente:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \left\{ \frac{\sigma_{kk}}{3\lambda + 2\mu} \right\} + 2\mu e_{ij}$$
(3.7)

$$e_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2\mu} - \frac{\lambda \delta_{ij} \sigma_{kk}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}$$
(i, j, k= 1, 2, 3) (3.8)

3.6 – Equações de Navier:

Para o caso de material isotrópico, o problema de elasticidade apresenta solução porque as 15 variáveis presentes são relacionadas com as 15 equações, a seguir:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{deformação – deslocamento})$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij} \quad (\text{tensão – deformação})$$

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (\text{equilíbrio})$$

Substituindo-se o valor das deformações na equação (3.5) por suas relações com deslocamentos dados por (3.3), obtém-se as tensões em função dos deslocamentos e substituindo-se estas na equação (3.1) tem-se as equações de Navier. A esta equação é conhecida como equação de equilíbrio em termos dos deslocamentos.

$$(\lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij})_{,j} + b_i = 0$$

$$2\mu e_{ij,j} + \lambda e_{kk,j} + b_i = 0$$

$$2\mu \cdot \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} + \lambda \cdot \frac{1}{2} (u_{k,k} + u_{k,k})_{,i} + b_i = 0$$

Sendo:

$$\mu (u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} + \lambda (u_{j,j})_{,i} + b_i = 0$$

$$\mu u_{i,jj} + (\mu + \lambda) u_{j,ji} + b_i = 0$$

Sabendo-se que:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} = \frac{\nu}{(1-2\nu)} \cdot \frac{2E}{2(1+\nu)} = \frac{2\nu\mu}{(1-2\nu)}$$

E

$$\lambda + \mu = \frac{2\nu\mu + \mu(1-2\nu)}{(1-2\nu)} = \frac{\mu}{(1-2\nu)}$$

Portanto:

$$\mu u_{i,jj} + \frac{\mu}{(1-2\nu)} u_{j,ji} + b_i = 0 \quad (3.9)$$

3.7 – Estado Plano de Tensão:

Se o estado de tensões em um corpo tem as componentes de tensão σ_z , τ_{xz} e τ_{yz} iguais a zero e este estado de tensão é especificado apenas por σ_x , σ_y e τ_{xy} , então se refere a este estado de estado plano de tensões. Como foi dito as tensões que dependem da coordenada z são iguais a zero ($\sigma_{i3}=0$), mas no estado plano de tensão o corpo é livre para se contrair ou expandir na direção z [2,3].

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{kk}$$

Para a direção 3:

$$\sigma_{33} = 0 = \lambda(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\mu e_{33}$$

$$0 = \lambda(e_{11} + e_{22}) + (\lambda + 2\mu)e_{33}$$

E finalmente:

$$e_{33} = \frac{-\lambda}{(\lambda + 2\mu)}(e_{11} + e_{22}) = \frac{-\lambda}{(\lambda + 2\mu)}e_{kk} \quad (k=1,2) \quad (3.10)$$

Note que e_{33} mostra que a componente de deformação fora do plano pode ser determinada uma vez que as componentes de deformação no plano são conhecidas. Tendo em conta o uso da equação (3.10) na expressão (3.5) chega-se:

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}e_{kk} + 2\mu e_{ij} \quad (i,j,k=1,2) \quad (3.11)$$

3.8 – Estado Plano de Deformação:

Em um corpo que está deformado elasticamente, pode-se considerar, por exemplo, um eixo cartesiano z . Se todos os planos inicialmente normais ao eixo z permanecerem normais ao eixo z depois da deformação e se todas as linhas de deformação, inicialmente paralelas ao eixo z , permanecem paralelas depois da deformação, é dito que o corpo está em estado plano de deformação [2,3].

$$\begin{aligned} u_i &= u_i(x_1, x_2) & (i=1,2) \\ u_3 &= 0 \\ e_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) & (i,j=1,2) \\ e_{i3} &= 0 \\ \sigma_{ii} &= 2\mu e_{ii} + \lambda \delta_{ii} e_{kk} = (2\mu + 2\lambda)e_{ii} & (3.12) \end{aligned}$$

E a tensão fica:

$$\sigma_{33} = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}\sigma_{kk} \quad (3.13)$$

$$\sigma_{33} = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} \sigma_{kk} \quad (3.13)$$

3.9 – Estado Plano de Tensão Generalizado:

Para a consideração apropriada do efeito da espessura no estado plano de tensão trabalha-se com o estado plano de tensão generalizado e os deslocamentos no plano são obtidos com o uso da equação a seguir, em que os deslocamentos são integrados ao longo da espessura, e a equação que descreve esse efeito é dada por:

$$u_i(x_1, x_2) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u_i(x_1, x_2, x_3) dx_3$$

Este efeito corresponde a multiplicar pela espessura as constantes elásticas do estado tridimensional e reduzindo-se ao estado bidimensional [3].

3.10 - Vetor de Galerkin:

Existem muitas aproximações existentes para desacoplar as equações de Navier. Geralmente o desacoplamento é acompanhado por substituições estratégicas de algumas funções por componentes de deslocamento ou tensão, a componente do deslocamento u_i é substituída na equação (3.9) por uma expressão envolvendo um outro vetor g de derivadas de segunda ordem e que será chamado de vetor Galerkin. Seja a relação:

$$2u_i = c \cdot g_{i,jj} - g_{j,ji} \quad (3.14)$$

Substituindo em (3.9):

$$\left(\frac{c}{2}g_{i,kk} - \frac{1}{2}g_{k,ki}\right)_{,jj} + \frac{1}{(1-2\nu)}\left(\frac{c}{2}g_{j,kk} - \frac{1}{2}g_{k,kj}\right)_{,ji} + b_i = 0$$

$$\frac{c}{2}g_{i,kkj} + g_{k,kji}\left(-\frac{1}{2} + \frac{c}{2(1-2\nu)} - \frac{1}{2(1-2\nu)}\right) + b_i = 0$$

Sabendo-se que $g_{k,kij}=g_{j,kki}=g_{k,kji}$, a constante c pode ser agora determinada fazendo a quantidade dentro do parênteses se igualar a zero e obtém-se.

$$-\frac{1}{2} + \frac{c}{2(1-2\nu)} - \frac{1}{2(1-2\nu)} = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{c-1}{(1-2\nu)} - 1\right) = 0$$

Deduz-se que:

$$c-1 = 1-2\nu$$

$$c = 2(1-\nu)$$

Logo:

$$2u_i = 2(1-\nu)g_{i,jj} - g_{j,ji}$$

Arranjando os termos da equação, chega-se:

$$u_i = g_{i,jj} - \frac{g_{j,ji}}{2(1-\nu)} \tag{3.15}$$

Com este valor particular usado para a constante c , as equações de Navier (3.9) em termos do vetor Galerkin vêm a ser:

$$g_{i,kkjj} + \frac{b_i}{\mu} = 0 \quad (3.16)$$

Na forma vetorial:

$$\nabla^2(\nabla^2 g) + \frac{b}{\mu} = 0 \quad (3.17)$$

O operador mostrado nesta equação é chamado de operador biharmônico, quando as forças de corpo são iguais a zero na equação (3.17) é chamada de equação biharmônica [7].

3.11 – Solução Fundamental de Chapas (Problema de Kelvin):

O problema de Kelvin na elasticidade tridimensional envolve a contribuição em um meio elástico infinito, homogêneo e isotrópico de um dado ponto de carregamento. A solução fundamental é a solução que satisfaz as equações de deslocamentos (Navier) e atendem as hipóteses de um carregamento singular em um meio infinito.

$$\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot u) = \frac{-b}{\mu} \quad (3.18)$$

As equações de Navier na forma vetorial (3.18) são de difícil resolução analítica. Entretanto, é possível mostrar o vetor deslocamento em termos de outro vetor (Galerkin) também em notação vetorial:

$$u = \nabla^2 g - \frac{1}{2(1-\nu)} \nabla(\nabla \cdot g) \quad (3.19)$$

A substituição da equação (3.19) em (3.18) leva a uma expressão com derivadas de quarta ordem [4].

$$\nabla^4 g_i = \nabla^2 (\nabla^2 g_i) = \frac{-b_i}{\mu} \quad (3.20)$$

Admitindo-se que a força unitária é aplicada em um ponto p interno do corpo e deseja-se monitorar os efeitos desta força em outro ponto Q em qualquer posição no domínio. A solução deve satisfazer a duas condições:

1) Todas as tensões devem desaparecer quando a distancia entre p e Q tendem ao infinito.

2) As tensões devem ser 'singulares' no próprio ponto p (isto é, tende ao infinito assim como quando a distancia entre p e Q tende a zero).

Pode ser verificado que o vetor de Galerkin a seguir é a solução mais simples da equação (3.20) e satisfaz as duas condições físicas mencionadas [4].

$$g_i = \frac{1}{8\pi\mu} r^2(p, Q) \ln \left[\frac{1}{r(p, Q)} \right] \quad (3.21)$$

Substituindo-se (3.21) na equação de deslocamentos, chega-se:

$$u_i = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu) \ln \left[\frac{1}{r(p,Q)} \right] \delta_{ij} + \frac{\partial r(p,Q)}{\partial x_i} \frac{\partial r(p,Q)}{\partial x_j} \right\} \quad (3.22)$$

Derivando-se esta equação chega-se a equação das forças superficiais:

$$t_i = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r(p,Q)} \left(\frac{\partial r(p,Q)}{\partial n} \right) \left[(1-2\nu)\delta_{ij} + 2 \frac{\partial r(p,Q)}{\partial x_i} \frac{\partial r(p,Q)}{\partial x_j} \right] + \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)r(p,Q)} \left[\frac{\partial r(p,Q)}{\partial x_j} n_i - \frac{\partial r(p,Q)}{\partial x_i} n_j \right] \quad (3.23)$$

O r derivado em relação a normal $\partial r/\partial n$ é dado por:

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \quad (3.24)$$

Em que as derivadas das coordenadas x e y em relação a normal, são as componentes unitárias nas direções x e y.

$$n_x = \frac{\partial x}{\partial n} \quad ; \quad n_y = \frac{\partial y}{\partial n} \quad (3.25)$$

A derivada da distancia $r(p, Q)$ é dada por:

$$\frac{\partial r(p,Q)}{\partial x} = \frac{x_Q - X_p}{r(p,Q)} \quad ; \quad \frac{\partial r(p,Q)}{\partial y} = \frac{y_Q - Y_p}{r(p,Q)} \quad (3.26)$$

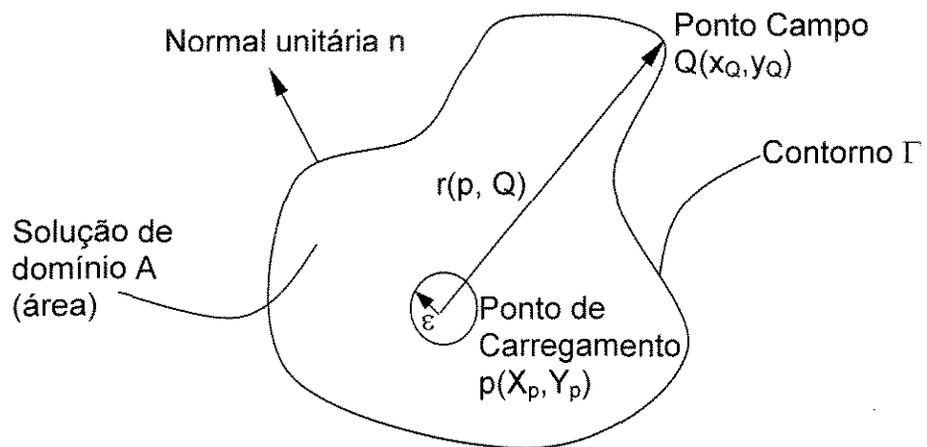


Figura 3.4 – Representação de um corpo bidimensional

4 - MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICA LINEAR

4.1 - Introdução:

Neste capítulo são vistas noções sobre a teoria da Mecânica de Fratura Elástico Linear (MFEL) que serão usadas no desenvolver do capítulo da aplicação do Método dos Elementos de Contorno à MFEL.

Apesar deste campo da engenharia ter experimentado grande avanço nos últimos anos, os estudos das distribuições de tensões e deformações próximas à ponta da trinca encontram-se em desenvolvimento até os nossos dias [10]. Com a definição do fator de intensidade de tensão "K", Irwin [26] simplificou bastante o problema de análise de tensões nas vizinhanças de uma trinca, tendo-se em vista que, uma vez determinado o valor de "K" essas tensões são facilmente determinadas.

4.2 - Modos de solicitação da trinca I, II e III:

O valor de K depende basicamente do nível de tensão no corpo longe da trinca e da geometria do espécime com trinca. A trinca pode ser solicitada de três maneiras independentes como mostra a Figura 4.1 [8].

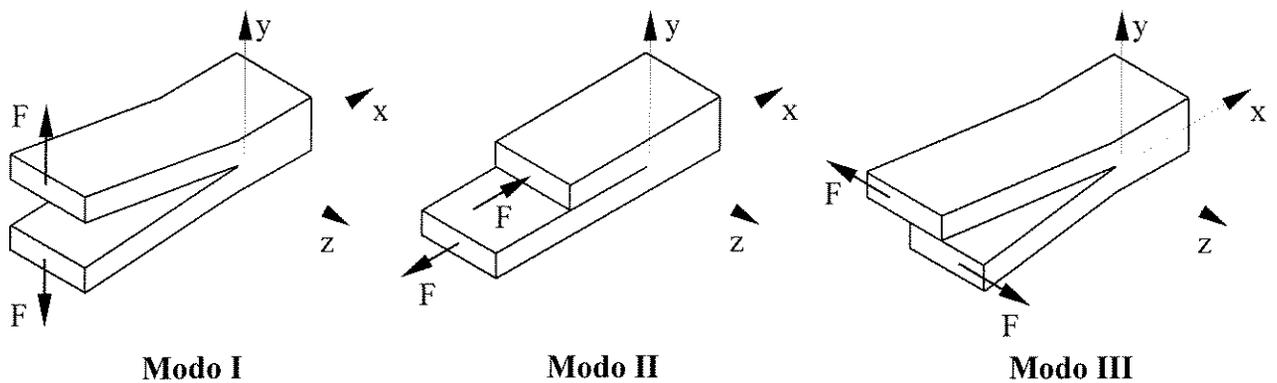


Figura 4.1 – Modos de aplicação das cargas "F" - Modos de deformação da trinca

Modo I - Tensão normal de tração, ensaio Compact Tension.

Modo II - Tensão de cisalhamento na direção "x"

Modo III - Tensão de cisalhamento na direção "z"

4.3 - Princípios da Mecânica da Fratura Elástica Linear:

O comportamento de uma estrutura em relação à fratura depende de três fatores:

- Nível de tensão;
- Dimensão de defeito existente no material;
- Propriedades do material (tenacidade à fratura).

Griffith [23, 24] estabeleceu correlações entre estes fatores para o vidro, em 1920. Mas Orowan, em 1945 e Irwin [26], em 1948, modificaram a teoria de Griffith, estendendo-a para os materiais metálicos, criando a MFEL.

Griffith estabeleceu o critério de propagação de uma trinca. Uma trinca se propaga quando a diminuição de energia de deformação elástica armazenada no corpo é maior do que a energia requerida para criar uma nova superfície da trinca no corpo [9].

Irwin e Orowan sugeriram que a teoria de Griffith fosse modificada para ser aplicada a fraturas frágeis de metais, em que o valor de energia superficial específica por unidade de área fosse substituída por uma quantidade crítica de energia G'_c , energia esta capaz de criar uma área adicional da superfície da trinca. O valor de G'_c era determinado para cada metal em um ensaio de fratura. O valor de G'_c é a taxa de liberação de energia de deformação elástica crítica ou força de extensão de trinca crítica [22].

A trinca se propaga quando a energia "G" atinge o valor de " G'_c ", sendo este valor uma propriedade intrínseca do material dentro de certos limites. Irwin verificou que as tensões junto à extremidade da trinca eram o produto da tensão uniaxial nominal " σ " pela raiz quadrada da metade do comprimento da trinca.

A partir do modelo de Irwin - Orowan, pode-se determinar a tensão de fratura (σ_F) expressões (4.1) e (4.2).

$$\sigma_f = \left(\frac{E.G'_c}{\pi.a} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{para estado plano de tensões} \quad (4.1)$$

$$\sigma_f = \left(\frac{E.G'_c}{\pi.a.(1-\nu^2)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{para estado plano de deformação} \quad (4.2)$$

Em que E é o módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young e "a" o comprimento da trinca.

O fator de intensidade de tensão "K" definido a partir de G' para uma trinca elástica em uma chapa de largura infinita, solicitada em modo I, é dado por:

$$K_I = y.\sigma.\sqrt{\pi.a} \quad (y = f(a/w)) \quad (4.3)$$

Em que σ é a tensão nominal (longe da trinca), e y é um parâmetro adimensional que depende da geometria da trinca e do corpo em função da relação a/w, a é comprimento de trinca e w é a dimensão da largura que esta solicitada pelo carregamento (que não seja a espessura do corpo no caso de a solicitação ser do modo de trinca I).

A norma americana ASTM E 399 define o fator de intensidade de tensão como a magnitude de um campo de tensões na ponta da trinca ideal (uma campo de tensões singular), tendo em conta um modo particular de trinca em um corpo homogêneo, elástico linear.

O valor crítico da taxa de dissipação de energia de deformação "G'_c" pode relacionar-se com o fator de intensidade de tensão crítico "K_c" [10, 11], os valores de of dados pelas expressões (4.1) e (4.2) na expressão (4.3).

Assim no estado plano de tensões, tem-se:

$$\sigma_f^2 = \frac{E.G'_c}{\pi.a}$$
$$K_c = \sigma_f \sqrt{\pi.a}$$

No estado plano de tensão K_c^2 é igual a $E.G'_c$

$$G'_c = \frac{K_c^2}{E} \quad (4.4)$$

No estado plano de deformações tem-se:

$$\sigma_f^2 = \frac{E.G'_c}{\pi.a.(1-\nu^2)}$$
$$\frac{E.G'_c}{(1-\nu^2)} = K_c^2$$

No estado plano de tensão K_c é igual a $\sigma_F \sqrt{\pi a}$

$$G'_c = \frac{K_c^2}{E}(1-\nu^2) \quad (4.5)$$

A mecânica da fratura elástica linear trata da análise de tensões e deformações em corpos com trincas, em situações onde a trinca se propaga de maneira instável, ou seja, em situações onde ocorre fratura frágil do ponto de vista macroscópico, o que normalmente ocorre em materiais de alta resistência mecânica e em metais ccc (estrutura cristalina cúbica de corpo centrado) em baixas temperaturas.

A mecânica da fratura elasto-plástica trata da análise de tensões e deformações em corpos com trincas, em situações onde ocorre propagação da trinca de maneira estável, antes da fratura frágil final.

A propagação da trinca com níveis de K_I inferiores a K_{Ic} , só pode ser possível quando há a ocorrência de:

- Carregamento cíclico (fadiga) – propagação estável da trinca
- Corrosão sob tensão (fratura assistida pelo meio) - propagação estável da trinca
- Irradiação de nêutrons
- Combinação dos efeitos anteriores

K_{Ic} - Fator de intensidade crítica de tensões no modo I e também é usual chamar-se de tenacidade a fratura em estado plano de deformação.

Na prática o K_{Ic} significa a resistência à propagação de trinca, com condições severas de triaxialidade de tensões, em um meio neutro.

Para análise da MFEL considera-se que um material tenaz absorve apreciável quantidade de energia durante o processo de fratura, além de apresentar grande área sob a curva tensão-deformação.

4.4 - Distribuição de tensões em um corpo de prova com trinca em Modo I:

O cálculo de tensões feito em 1952 por Irwin em pontos "R" próximos à ponta da trinca e usando o fator de intensidade de tensões K_I , é dado por [8, 10]:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \left(\frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\ \sigma_{yy} &= \left(\frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\ \tau_{xy} &= \left(\frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \tau_{xy} &= \tau_{yz} = 0\end{aligned}\tag{4.6}$$

No estado plano de tensões σ_{zz} é nulo e no estado plano de deformação.

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] = 0\tag{4.6a}$$

No estado plano de deformação ε_{zz} é nulo e σ_{zz} é obtido a partir de σ_{xx} e σ_{yy} .

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\tag{4.6b}$$

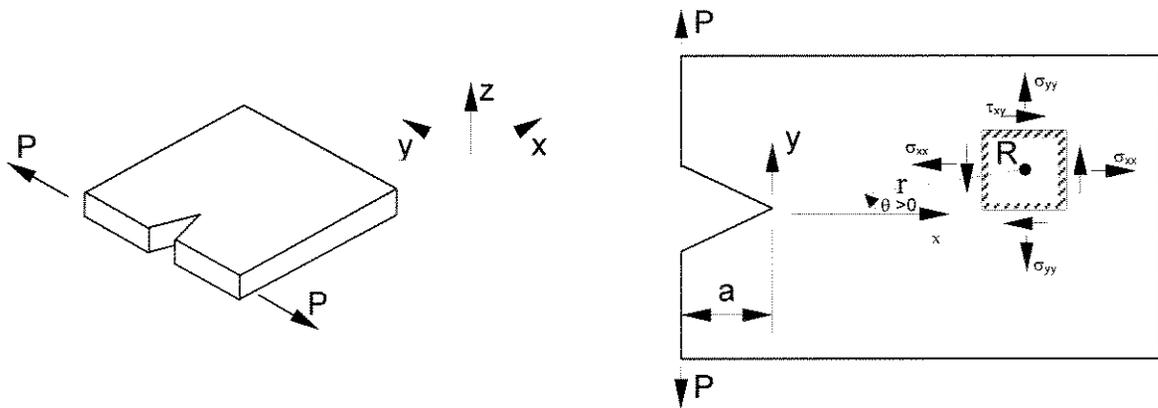


Figura 4.2 - Estado de tensão em um ponto "R" definido por "r" e "θ" estando este ponto próximo da ponta da trinca, em uma trinca solicitada em modo I.

Os deslocamentos (u,v para o modo I de solicitação na MFEL) [8, 12] são dados por:

$$u = \frac{K_I}{2G} \left(\frac{r}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[\beta - 1 + 2 \cdot \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (4.7)$$

$$v = \frac{K_I}{2G} \left(\frac{r}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[\beta + 1 - 2 \cdot \text{cos}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

em que $\beta = 4 - 4\nu$ em análise de deformação plana e $\beta = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$ estado plano de tensões.

4.5 - Distribuição de tensões nos modos II e III na M.F.E.L. :

Modo II:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \left(\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \right) \left[-\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\ \sigma_{yy} &= \left(\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \tau_{xy} &= \left(\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]\end{aligned}\tag{4.8}$$

Modo III:

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \left(\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \right) \left[-\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \\ \tau_{yz} &= \left(\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}\tag{4.9}$$

Os deslocamentos (u,v,w para os modos II e III na M.F.E.L.) [8, 12], são dados:

Modo II:

$$\begin{aligned}u &= \frac{K_{II}}{2G} \cdot \left(\frac{r}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[\beta + 1 + 2 \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \\ v &= \frac{K_{II}}{2G} \cdot \left(\frac{r}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[-\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \cdot \left[\beta - 1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]\end{aligned}\tag{4.10}$$

em que $\beta = 4 - 4\nu$ em análise de deformação plana e $\beta = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$ em estado plano de tensões.

Modo III:

$$w = 2 \cdot \frac{K_{III}}{G} \left(\frac{r}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \text{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (4.11)$$

4.6 - Dimensões da zona plástica:

4.6.1 - Dimensões da zona plástica em estado plano de tensão:

As equações que fornecem a distribuição de tensões na vizinhança de uma trinca apresentam uma singularidade quando "r" tende a zero, ou seja, junto à ponta da trinca as tensões tendem a infinito. Como os materiais usuais possuem resistência ao escoamento finita, isto faz com que apareça uma zona plástica localizada. Esta deformação localizada caracteriza a zona plástica. As dimensões desta zona plástica dependem das tensões na ponta da trinca e do comportamento da material, sendo que a aplicação da MFEL só é válida quando a zona plástica é pequena comparada com o tamanho do comprimento da trinca e da maior dimensão do espécime [10].

Isto só é possível quando a espessura do espécime (B) é relativamente grande havendo triaxilidade de tensões no espécime, sendo que esta triaxilidade decorre da restrição à deformação na direção "z", ou seja, quando há condição de deformação plana em uma faixa relativamente grande no interior do espécime.

A distribuição da tensão no plano da trinca, $\theta = 0$, para o modo I e em condições de estado plano de tensão é a seguinte:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi.r}} \quad (4.12)$$

$$\sigma_{zz} = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Os critérios de escoamento ou de resistência estabelecem que o material escoou quando a tensão equivalente " σ_{eq} " excede o limite de escoamento (σ_e).

O critério de von Mises [13] estabelece que:

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (4.12a)$$

em que σ_1 , σ_2 e σ_3 são as tensões principais.

Neste caso tem-se:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2.\pi.r}} = \sigma_{eq} \quad (4.13)$$

O critério de Tresca [13] estabelece que a "tensão equivalente" é dada por $\sigma_1 - \sigma_3$. Como neste caso $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_{xx}$ e $\sigma_3 = 0$, este critério leva ao mesmo resultado do critério de von Mises.

Rearranjando a Equação (4.12a) obtém-se:

$$r = r_y = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_e} \right)^2 \quad (4.14)$$

em que r_y é o comprimento da zona plástica no plano da trinca ($\theta = 0$, eixo x).

Subseqüentemente tem-se:

$$R_y = 2.r_y = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_e} \right)^2 \quad (4.15)$$

Em que R_y é o comprimento (corrigido) da zona plástica no plano da trinca (direção x). r_y é conhecido como correção da zona plástica de Irwin [14] ou zona plástica ajustada [10]. A Figura 4.4 mostra um esquema da correção da zona plástica de Irwin, sendo que o comprimento efetivo da trinca é considerado como o comprimento inicial da trinca “a” mais o raio da zona plástica r_y , em que “a” é o comprimento da trinca inicial medido a partir do ponto de aplicação da carga no caso de um corpo de prova “Compact Tension”.

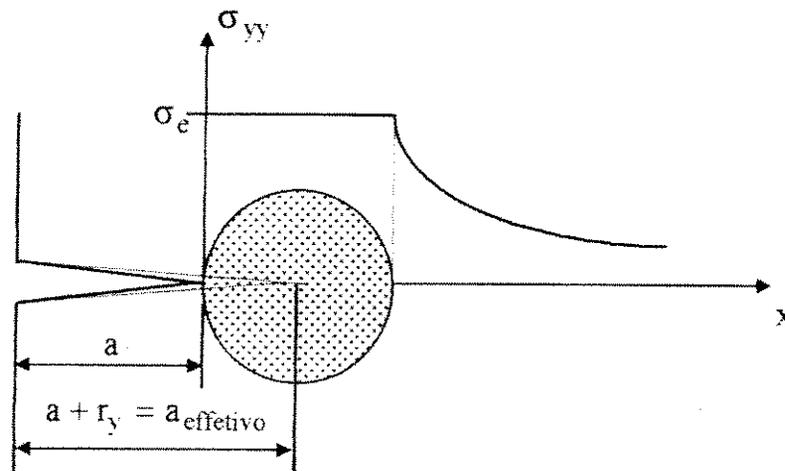


Figura 4.3 - Esquema da correção da zona plástica de Irwin, para o modo I no estado plano de tensão.

4.6.2 - Dimensões da zona plástica em condições de estado plano de deformação:

Em condições de deformação plana - a deformação principal na direção de z, ε_z , é nula - há triaxialidade de tensões em uma faixa central no interior do espécime e nas proximidades da ponta da trinca. Nessas condições, a distribuição de tensão no plano da trinca (eixo x), ou seja $\theta = 0$, as Equações (4.6), se transformam nas Equações (4.16) e (4.17).

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.16)$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 2\nu \frac{K_I}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.17)$$

Pelos critérios de von Mises ou de Tresca obtém-se a Equação (4.18).

$$(1 - 2\nu) \frac{K_I}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} = \sigma_c \quad (4.18)$$

Rearranjando a Equação (4.18) obtém-se:

$$r_y = (1 - 2\nu)^2 \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_c} \right)^2 \quad (4.19)$$

A equação (4.19) estabelece que, em deformação plana, o comprimento da zona plástica depende do coeficiente de Poisson (ν). No estado plástico o coeficiente de Poisson (ν) é assumido como 1/2 para todos os metais e ligas; no elástico é uma constante, dependendo do material, sendo que para muitos metais é da ordem de 1/3. Se for substituído, na equação (4.19), ν por zero se obtém condições de tensão plana (Equação (4.14)) e por 1/2 se obtém $r_y = 0$.

A zona plástica ajustada, em modo I no estado plano de deformação, foi estimada por McClintock e Irwin [46] como sendo:

$$r_y = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_e} \right)^2 \quad (4.20)$$

A forma completa da zona plástica pode ser obtida variando o valor de θ nas Equações de σ_{xx} e σ_{yy} de (4.6), de zero até 180° , e estabelecendo um critério de escoamento. A Figura (4-5) mostra um esquema da forma da zona plástica, nas proximidades da ponta da trinca modo I. Broek [14] fornece a forma da zona plástica para os modos II e III.

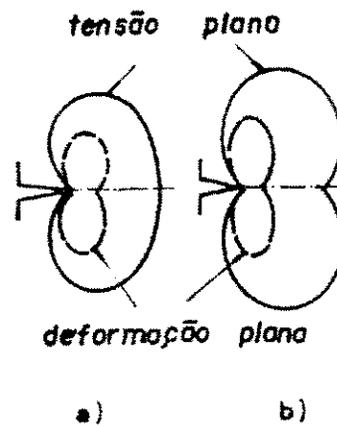


Figura 4.4 - Forma esquemática da zona plástica para modo I: a) critério de von Mises e b) critério de Tresca.

4.6.3 - Fator de intensidade de tensão efetivo:

A correção da zona plástica de Irwin, mostrada na Figura 4.4, mostra que o comprimento efetivo da trinca é o comprimento da trinca somada ao raio da zona plástica. O fator de intensidade de tensões efetivo (K_{ef}) é obtido pela substituição do comprimento da trinca (a) pelo comprimento efetivo da trinca (a_{ef}) nas expressões do fator de intensidade de tensões (K), para a geometria considerada; a Equação (4.21) mostra a expressão geral que fornece o valor de K_{ef} .

$$K_{ef} = \lambda(a_{ef})\sigma\sqrt{\pi a_{ef}} \quad (4.21)$$

Na Equação (4.21) como a_{ef} é também considerado no cálculo do fator de correção geométrico ($\lambda(a_{ef})$), normalmente é necessário uma solução iterativa para se obter K_{ef} . O procedimento normalmente utilizado é o seguinte:

- 1º. Calcula-se K na ausência de correção de plasticidade;
- 2º. Estima-se a_{ef} a partir da Equação (4.22);
- 3º. Calcula-se K_{ef} com este valor inicial de a_{ef} ;
- 4º. Um novo a_{ef} é calculado a partir da Equação (4.22) e do K_{ef} da 1ª iteração.

$$a_{ef} = a + r_y \quad (4.22)$$

O processo de iteração deve continuar até que haja uma convergência razoável de K_{ef} (geralmente não mais de 3 ou 4 iterações). Em certos casos é possível uma solução exata não sendo necessário o procedimento iterativo.

4.6.4 - Fator de restrição plástica:

O raio da zona plástica em deformação plana é muito menor do que em tensão plana (equações (4.15) e (4.20)). A tensão equivalente, segundo o critério de von Mises, suportada pelo material em condições de deformação plana é maior do que em condições de tensão plana. O fator de restrição plástica (f.r.p.) é definido com sendo a relação entre a tensão máxima (σ_{\max}) e o limite de escoamento (σ_e).

$$f.r.p. = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_e} \quad (4.23)$$

No caso de deformação plana, sendo as tensões principais $\sigma_2 = n\sigma_1$ e $\sigma_3 = m\sigma_1$ e adotando o critério de von Mises obtém-se:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_e^2 \quad (4.24)$$

$$\left[(1-n)^2 + (n-m)^2 + (1-m)^2 \right] \sigma_1^2 = 2\sigma_e^2 \quad (4.25)$$

Como $\sigma_{\max} = \sigma_1$, tem-se o fator de restrição plástica dado por:

$$f.r.p. = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_e} = \frac{\sigma_1}{\sigma_e} = \left\{ \frac{2}{\left[(1-n)^2 + (n-m)^2 + (1-m)^2 \right]} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.26)$$

Desenvolvendo-se a equação (4.26) obtém-se:

$$f.r.p. = \left[1 - n - m + n^2 + m^2 - mn \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.27)$$

Utilizando-se as Equações (4.6) e (4.6a) e adotando $\theta = 0$ obtém-se para estado plano de tensão n é igual a 1, m é igual a 0 e f.r.p. é igual a 1, e para estado plano de deformação n é igual a 1, m é igual a 2ν ; ν é igual a $1/3$ (para materiais metálicos),

obtém-se o f.r.p. é igual a 3. Assim, a tensão equivalente (equação (4.12a)) pode atingir valores no plano $\theta=0$ de σ_e (estado plano de tensão) e $3\sigma_e$ (estado plano de deformação). A Figura 4.5 mostra esquematicamente as zonas plásticas em tensão plana e deformação plana.

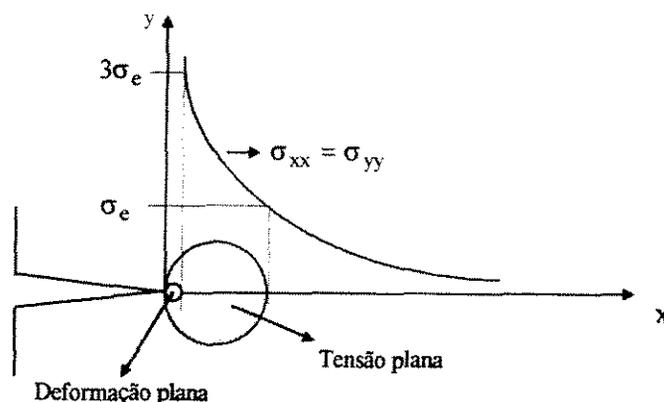


Figura 4.5 - Esquema da comparação da zona plástica em estado plano de tensão e deformação.

Na prática, o valor de f.r.p. é bem menor que 3, uma vez que o estado plano de deformação não acontece na superfície do corpo de prova ou do componente estrutural. Irwin [46] adotou esse argumento para justificar um valor de f.r.p. igual a $\sqrt{2\sqrt{2}}$ para chegar na Equação (4.20).

5 - MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

5.1 – Introdução:

Tendo em conta a generalidade das condições de vinculação e carregamento para um problema físico, a obtenção da solução analítica para as equações de Navier pode tornar-se muito trabalhosa ou até mesmo impossível. Para este fim recorre-se a técnicas numéricas e neste trabalho utiliza-se o método dos elementos de contorno (MEC).

Neste capítulo será apresentado a formulação do MEC para problemas elastostáticos. A formulação aqui apresentada tem por base o teorema da reciprocidade de Betti, por apresentar uma maior semelhança de notação com os problemas de engenharia e, acredita-se que seja de mais fácil compreensão para os engenheiros.

Outra técnica que pode ser usada para deduzir a formulação é a dos resíduos ponderados onde se observa a grande vantagem de se poder fazer o acoplamento do MEC a outros métodos numéricos.

5.2 – Equação Integral de Chapas:

Considerando-se uma solução de domínio para um dado volume V , e uma superfície suave, S , onde a função, f , tem derivadas de primeira ordem com relação às coordenadas cartesianas x, y e z , a integração, a seguir, faz a transformação que leva uma integral de volume a uma integral de superfície.

Em notação vetorial:

$$\int_V \nabla \cdot f \, dV = \int_S f \cdot n \, dS \quad (5.1)$$

Em notação indicial:

$$\int_V \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \, dV = \int_S f_i n_i \, dS \quad (5.2)$$

Em que n é vetor normal unitário a superfície de contorno. A equação mencionada é conhecida como o teorema de Green [7], mas também é largamente conhecida como o teorema da divergência (ou teorema de Gauss).

Uma forma usual do teorema da divergência pode ser obtida para relacionar duas variáveis no volume, ϕ e λ com derivações de primeira e segunda ordem com relação ao volume V [4]:

$$\int_V (\phi \nabla^2 \lambda - \lambda \nabla^2 \phi) \, dV = \int_S \left(\phi \frac{\partial \lambda}{\partial n} - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \, dS \quad (5.3)$$

Em que $\partial/\partial n$ é a derivada das funções na direção do vetor normal. Esta equação é usualmente chamada de segunda identidade de Green, e geralmente é usada na formulação de problema de Potencial.

O teorema da reciprocidade (chamado também de teorema de Betti) estabelece que o trabalho feito pelas tensões do estado (a) para deslocamentos do estado (b) é igual ao trabalho das tensões no estado (b) para deslocamentos no estado (a).

Considerando-se um corpo submetido a dois estados de tensão e deformação diferentes. Sejam os estados a e b onde se tem tensões aplicadas $(\sigma_{ij}^{(a)}, \sigma_{ij}^{(b)})$ e suas respectivas deformações $(\varepsilon_{ij}^{(a)}, \varepsilon_{ij}^{(b)})$, aplicando-se o teorema de Betti, chega-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(a)} \varepsilon_{ij}^{(b)} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(b)} \varepsilon_{ij}^{(a)} d\Omega \quad (5.4)$$

É mais conveniente escrever as deformações em termos de deslocamentos.

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(a)} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]^{(b)} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(b)} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]^{(a)} d\Omega$$

Tendo em vista a vantagem da convenção de soma (usando-se índices repetidos), pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(a)} \frac{\partial u_i^{(b)}}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(b)} \frac{\partial u_i^{(a)}}{\partial x_j} d\Omega \quad (5.5)$$

Para fins deste desenvolvimento será usado o membro esquerdo da equação (5.5) e procedimento similar deve ser aplicado ao membro direito. Aplicando-se a regra da cadeia ao membro esquerdo da equação (5.5), chega-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(a)} \frac{\partial u_i^{(b)}}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}^{(a)} u_i^{(b)}) - \frac{\partial \sigma_{ij}^{(a)}}{\partial x_j} u_i^{(b)} \right] d\Omega$$

A equação de equilíbrio (3.1) pode ser usada para introduzir a força de corpo b_i , no último termo da equação anterior, resultando:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(a)} \frac{\partial u_i^{(b)}}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}^{(a)} u_i^{(b)}) \right] d\Omega + \int_{\Omega} b_i^{(a)} u_i^{(b)} d\Omega$$

O teorema da divergência, equação (5.2), pode agora ser aplicado ao primeiro termo do membro direito da equação anterior e chega-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(a)} \frac{\partial u_i^{(b)}}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Gamma} (\sigma_{ij}^{(a)} u_i^{(b)}) n_j d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^{(a)} u_i^{(b)} d\Omega$$

Usando a definição das forças de superfície (3.2) pode-se eliminar a tensão que está na integral de superfície.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(a)} \frac{\partial u_i^{(b)}}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^{(a)} u_i^{(b)} d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^{(a)} u_i^{(b)} d\Omega$$

Retornando a equação (5.5) e com procedimento análoga ao segundo membro obtém-se a equação que relaciona integrais de superfície e volume [4].

$$\int_{\Gamma} t_i^{(a)} u_i^{(b)} d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^{(a)} u_i^{(b)} d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^{(b)} u_i^{(a)} d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^{(b)} u_i^{(a)} d\Omega \quad (5.6)$$

Note-se que a equação (5.6) contém, integrais de superfície e domínio, esta equação pode ser transformada em uma equação integral de contorno (EIC) se um estado particular de carregamento for considerado [4].

Recordando o problema da carga concentrada de Kelvin onde se define que seria aplicado como uma força de corpo em forma de uma função delta de Dirac. A propriedade seletiva da função delta de Dirac pode ser usada para determinar a contribuição vinda da integral de domínio contendo forças de volume b_i , ou seja:

$$\int_{\Gamma} t_{ik}^* u_k d\Gamma + \int_{\Omega} \delta_{ik} \Delta(p, Q) u_k d\Omega = \int_{\Gamma} u_{ik}^* t_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ik}^* b_k d\Omega \quad (5.7)$$

Em que se notou o estado a por (*) e suprimiu-se a indicação do estado b (Q – ponto campo; p – ponto de carregamento).

Usando-se as propriedades da função delta de Dirac, pode-se escrever o segundo termo da equação anterior, tem-se:

$$\int_{\Omega} \delta_{ik} \Delta(p, Q) u_k d\Omega = c_{ik} u_k \quad (5.8)$$

Reorganizando a equação (5.7) com o uso da equação (5.8), chega-se:

$$c_{ik} u_k(p) = - \int_{\Gamma} t_{ik}^*(p, Q) u_k(Q) d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ik}^*(p, Q) t_k(Q) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ik}^*(p, Q) b_k(Q) d\Omega \quad (5.9)$$

A equação integral de contorno (5.9) é conhecida como identidade de Somigliana; onde se tem o estado (*) relacionado com a solução fundamental.

Até este ponto o símbolo c_{ik} tem sido analisado para casos onde o ponto de carregamento p da carga concentrada esta dentro ou fora do contorno Γ , neste caso.

c_{ik} vale zero quando p está fora do contorno.

c_{ik} vale δ_{ik} quando p está dentro do contorno.

As duas integrais de superfície terão valores tendendo a infinito quando o ponto de carregamento se aproxima do contorno. As integrais serão divididas em duas partes

onde uma refere-se à região ao redor do ponto de carregamento e a outra contendo o restante do contorno.

$$I_k = \int_{\Gamma} t_{ik}^* u_k d\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma-\epsilon} t_{ik}^* u_k d\Gamma + \int_{\epsilon} t_{ik}^* u_k d\Gamma \right\} = I_k^{(1)} + I_k^{(2)}$$

Na figura 5.1 é mostrado o contorno acrescido de uma 'bolha' centrada em p, o raio da bolha ϵ será zero quando a aproximação fica igual ao contorno (sem a bolha) [7].

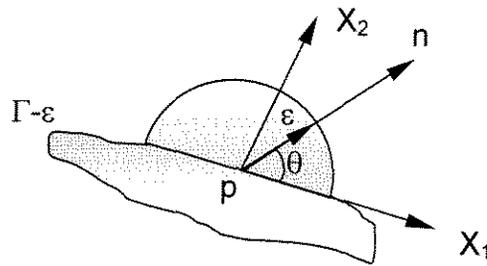


Figura 5.1 – Esquematização do contorno com a 'bolha' de raio ϵ .

O segundo termo da integral mostra a integração ao longo da superfície da bolha, esta quebra da equação em duas integrais de superfície, fazendo a superfície ao redor da singularidade tendendo a zero é chamado de integral no sentido do valor principal de Cauchy [7].

Sabendo-se que n_i é igual à x_i/ε , pode-se substituir esta relação no segundo termo da equação chegando-se a:

$$I_k^{(2)} = \frac{-(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} \int \left\{ \varepsilon^{-1} u_k + \frac{2}{1-2\nu} x_i x_k \varepsilon^{-3} u_i \right\} d\Gamma$$

Na formulação bidimensional:

Considerando o caso onde $k=1$.

$$x_1 = \varepsilon \cdot \cos\theta$$

$$x_2 = \varepsilon \cdot \sen\theta$$

$$d\Gamma = \varepsilon \cdot d\theta$$

$$\alpha = -(1-2\nu)/4\pi(1-\nu)$$

$$\begin{aligned} I_1^{(2)} &= \alpha \int_0^\pi \left\{ u_1 + \frac{2}{1-2\nu} (u_1 \cos^2 \theta + u_2 \cos \theta \sen \theta) \right\} d\theta = \alpha \left[\pi + \frac{2}{1-2\nu} \frac{\pi}{2} \right] u_1 = \\ &= \alpha \pi \frac{1-2\nu+1}{1-2\nu} u_1 = \frac{\alpha \pi 2(1-\nu)}{1-2\nu} u_1 = \frac{-(1-2\nu) \pi 2(1-\nu)}{4\pi(1-\nu) 1-2\nu} u_1 = -\frac{1}{2} u_1 \end{aligned}$$

Para o caso $k=2$:

$$\begin{aligned} I_2^{(2)} &= \alpha \int_0^\pi \left\{ u_2 + \frac{2}{1-2\nu} (u_1 \cos \theta \sen \theta + u_2 \sen^2 \theta) \right\} d\theta = \\ &= \alpha \left[\pi + \frac{2}{1-2\nu} \frac{\pi}{2} \right] u_2 = -\frac{1}{2} u_2 \end{aligned}$$

O contorno Γ é o contorno original mais a bolha. Quando o raio ε tende a zero o contorno da bolha também será zero e retorna-se ao contorno original, chegando-se:

$$\begin{aligned}
 I_k^{(1)} &= \int_{\Gamma} t_{ik}^* u_k d\Gamma \\
 I_k^{(2)} &= -\frac{1}{2} u_i \\
 \int_{\Gamma} t_{ik}^* u_k d\Gamma + u_k - \frac{1}{2} u_i &= \int_{\Gamma} u_{ik}^* t_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ik}^* b_k d\Omega \\
 \frac{1}{2} u_k(p) &= -\int_{\Gamma} t_{ik}^*(p, Q) u_k(Q) d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ik}^*(p, Q) t_k(Q) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ik}^*(p, Q) b_k(Q) d\Omega \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

Para a parte suave do contorno o símbolo c_{ik} valerá $\frac{1}{2}$, nos cantos ou em partes irregulares do contorno c_{ik} , terá que se entrar com os valores de θ_1 e θ_2 na formulação em relação à θ .

$c_{ik} = 1/2 \cdot \delta_{ik}$, p na parte suave do contorno.

Quando se tem um canto agudo têm-se as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
 \beta &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \\
 c_{11} &= \beta \left\{ -4\pi(1-\nu) + 2(1-\nu)(\theta_2 - \theta_1) + \frac{\text{sen } 2\theta_2 - \text{sen } 2\theta_1}{2} \right\} \\
 c_{22} &= \beta \left\{ -4\pi(1-\nu) + 2(1-\nu)(\theta_2 - \theta_1) - \frac{\text{sen } 2\theta_2 - \text{sen } 2\theta_1}{2} \right\} \quad (5.11) \\
 c_{12} &= c_{21} = \beta \{ \text{sen}^2 \theta_2 - \text{sen}^2 \theta_1 \}
 \end{aligned}$$

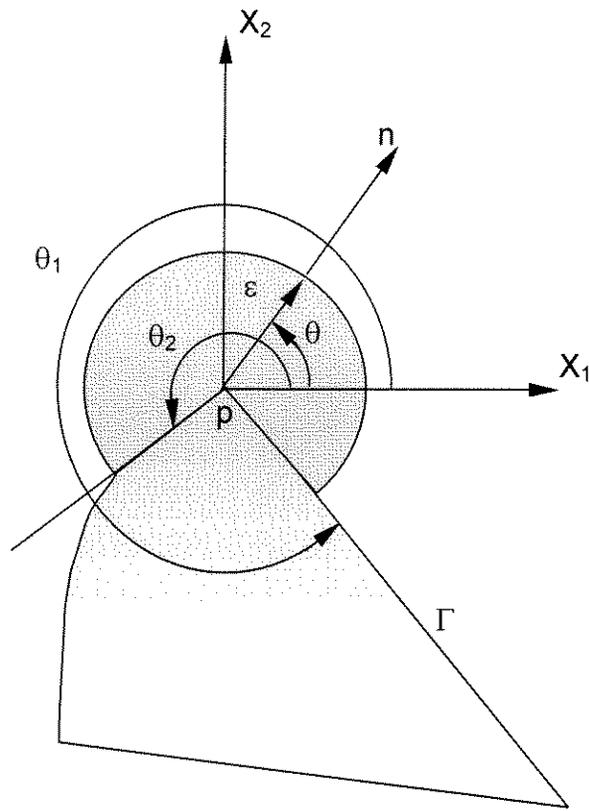


Figura 5.2 – Esquemática de uma 'bolha' em um canto agudo.

5.3 – Implementação Numérica:

A implementação numérica de problemas estáticos em regime elástico pode ser dividida em estágios para maior conveniência.

Para resolver numericamente a equação integral de contorno, este é dividido em elementos e cada elemento é definido por pontos nodais. Partindo-se da idéia que se tem N pontos nodais no contorno, a cada nó são associados quatro parâmetros, dois deslocamentos (u_1 e u_2) e duas forças de superfície (t_1 e t_2). Qualquer problema com uma solução única tem metade das variáveis prescritas em todos os pontos nodais.

Assim, quando o deslocamento (u_1 e/ou u_2) é conhecido a incógnita é a força de superfície correspondente (t_1 e/ou t_2) respectivamente ou vice-versa. Pode-se ter ambos deslocamentos conhecidos e/ou as forças de superfície incógnitas ou vice-versa. Por outro lado, na condição mista, o deslocamento em uma direção e a força de superfície em outra direção são conhecidos e têm-se os correspondentes parâmetros associados como incógnita.

Se com N nós existem $2N$ incógnitas, são necessárias $2N$ equações para resolver o problema. Deste modo para cada nó de contorno associam-se duas equações integrais onde a carga unitária usada na solução fundamental é colocada na direção 1 para primeira equação e na direção 2 para a segunda equação.

Esta operação é repetida para N pontos no contorno de modo a obter-se $2N$ equações. Portanto, finalizando com $2N$ equações e $2N$ variáveis desconhecidas que levam uma solução única [4].

5.3.1 – Divisão do Contorno em Elementos:

O contorno do domínio em questão deve ser dividido em um número de elementos conectados. Em cada elemento tanto a variação de geometria e como dos parâmetros (deslocamentos e forças) devem ser descritos. Essas variações podem ser constantes, lineares, quadráticas, cúbicas ou de ordem maior. É possível permitir que a variação de geometria seja diferente da variação das variáveis (Por exemplo, uma discretização linear para geometria, mas com uma variação de deslocamentos quadrática).

Neste trabalho são usadas aproximações lineares e quadráticas para geometria, forças de superfície e deslocamentos, e os elementos utilizados são isoparamétricos. Elementos isoparamétricos são elementos que usam a mesma ordem

de variação para geometrias e variáveis, ou seja, usam a mesma função de interpolação.

No caso de elementos lineares cada elemento deve ter dois nós, um para cada extremidade do elemento e os elementos quadráticos têm três nós, sendo um no centro do elemento e dois nas extremidades. A variável intrínseca local ξ tem sua origem no ponto médio do elemento e os valores -1 e $+1$ nas extremidades. Portanto, a geometria de um elemento pode ser definida por coordenadas dos seus nós como a seguir [6]:

No caso de elementos lineares:

$$\begin{aligned} x(\xi) &= \sum_{c=1}^2 \phi_c(\xi)x_c = \phi_1(\xi)x_1 + \phi_2(\xi)x_2 \\ y(\xi) &= \sum_{c=1}^2 \phi_c(\xi)y_c = \phi_1(\xi)y_1 + \phi_2(\xi)y_2 \end{aligned} \quad (5.12a)$$

No caso de elementos quadráticos:

$$\begin{aligned} x(\xi) &= \sum_{c=1}^3 \phi_c(\xi)x_c = \phi_1(\xi)x_1 + \phi_2(\xi)x_2 + \phi_3(\xi)x_3 \\ y(\xi) &= \sum_{c=1}^3 \phi_c(\xi)y_c = \phi_1(\xi)y_1 + \phi_2(\xi)y_2 + \phi_3(\xi)y_3 \end{aligned} \quad (5.12b)$$

Igualmente, porque os elementos são isoparamétricos, as mesmas funções de forma são usadas para a variação de deslocamentos e de forças superficiais.

No caso de elementos lineares:

$$\begin{aligned}
 u_x(\xi) &= \sum_{c=1}^2 \phi_c(\xi)(u_x)_c = \phi_1(\xi)(u_x)_1 + \phi_2(\xi)(u_x)_2 \\
 u_y(\xi) &= \sum_{c=1}^2 \phi_c(\xi)(u_y)_c = \phi_1(\xi)(u_y)_1 + \phi_2(\xi)(u_y)_2 \\
 t_x(\xi) &= \sum_{c=1}^2 \phi_c(\xi)(t_x)_c = \phi_1(\xi)(t_x)_1 + \phi_2(\xi)(t_x)_2 \\
 t_y(\xi) &= \sum_{c=1}^2 \phi_c(\xi)(t_y)_c = \phi_1(\xi)(t_y)_1 + \phi_2(\xi)(t_y)_2
 \end{aligned} \tag{5.13a}$$

No caso de elementos quadráticos:

$$\begin{aligned}
 u_x(\xi) &= \sum_{c=1}^3 \phi_c(\xi)(u_x)_c = \phi_1(\xi)(u_x)_1 + \phi_2(\xi)(u_x)_2 + \phi_3(\xi)(u_x)_3 \\
 u_y(\xi) &= \sum_{c=1}^3 \phi_c(\xi)(u_y)_c = \phi_1(\xi)(u_y)_1 + \phi_2(\xi)(u_y)_2 + \phi_3(\xi)(u_y)_3 \\
 t_x(\xi) &= \sum_{c=1}^3 \phi_c(\xi)(t_x)_c = \phi_1(\xi)(t_x)_1 + \phi_2(\xi)(t_x)_2 + \phi_3(\xi)(t_x)_3 \\
 t_y(\xi) &= \sum_{c=1}^3 \phi_c(\xi)(t_y)_c = \phi_1(\xi)(t_y)_1 + \phi_2(\xi)(t_y)_2 + \phi_3(\xi)(t_y)_3
 \end{aligned} \tag{5.13b}$$

As funções de interpolação usadas no caso linear têm as seguintes formas:

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \frac{1}{2}(1 - \xi) \\
 \phi_2 &= \frac{1}{2}(1 + \xi)
 \end{aligned} \tag{5.14a}$$

No caso quadrático as funções de interpolação usadas são:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \xi \left(\frac{\xi}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ \phi_2 &= (1 + \xi)(1 - \xi) \\ \phi_3 &= \xi \left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2} \right)\end{aligned}\tag{5.14b}$$

Representando-se graficamente as funções de interpolação, tem-se:

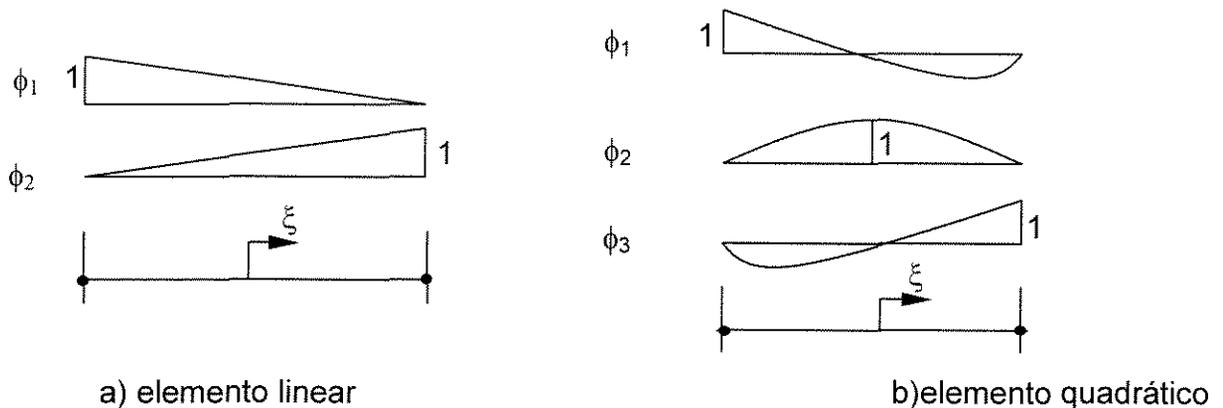


Figura 5.3 – Função de forma de um elemento linear e de um elemento quadrático.

5.3.2 – Tipos de Elementos:

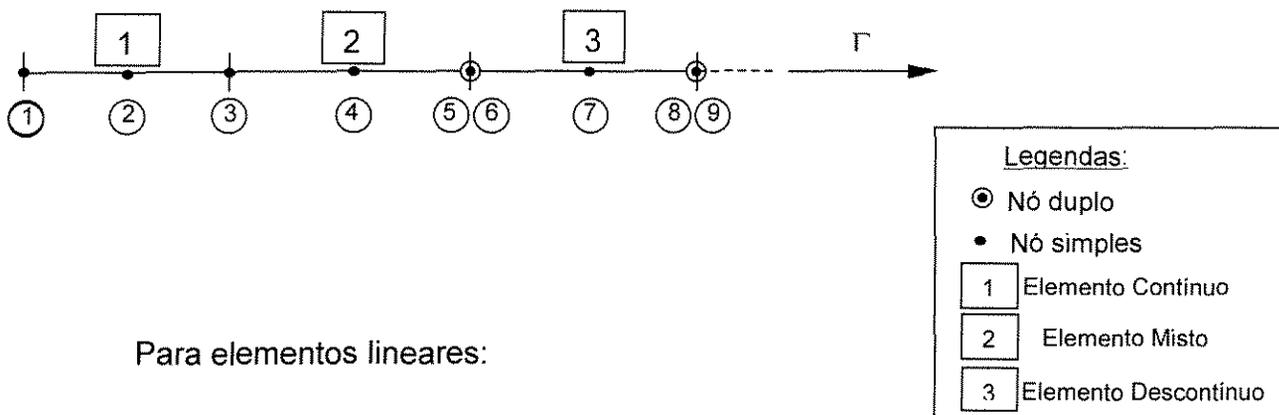
As interfaces entre elementos são chamadas de nós. De modo geral associam-se os valores dos parâmetros incógnitos aqueles que ocorram nos pontos onde se situam os nós. Assim a continuidade do contorno definida pela existência de um nó entre cada elemento leva a continuidade dos parâmetros associados aos nós. Os elementos que satisfazem esta condição são chamados de contínuos.

No entanto, para melhorar a performance da solução numérica pode-se associar dois valores para cada parâmetro nodal que existe em uma interface de elementos. Logo, cada parâmetro estará associado a cada um dos elementos que concorrem ao nó. Assim, permite-se descontinuidade dos parâmetros associados a um nó, mas a geometria permanece contínua.

Os elementos que satisfazem esta condição são chamados de elementos descontínuos neste trabalho. Sabe-se que existem outras técnicas para elementos descontínuos [18], mas que não foram usadas neste trabalho.

Os elementos que possuem continuidade dos parâmetros nodais em um extremo e descontinuidade no outro são chamados de elementos mistos neste trabalho.

Para elementos quadráticos:



Para elementos lineares:

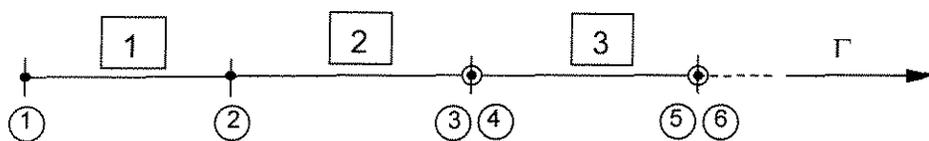


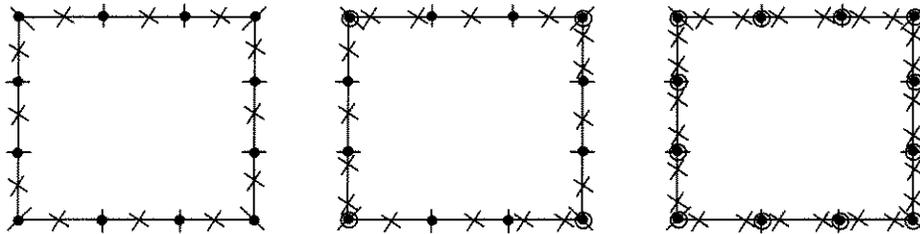
Figura 5.4 – Tipos de elementos quadráticos e lineares.

5.3.3 – Pontos de carregamento:

Os pontos de carregamento (ou colocação) são de contorno onde se escrevem as equações integrais.

É freqüente, na literatura, serem utilizados os nós de contorno como pontos de colocação. Como neste trabalho permitiu-se descontinuidade dos parâmetros nodais em nós de elementos descontínuos, foram usados pontos internos ao elemento como pontos de carregamento.

Elementos lineares:



Elementos quadráticos:

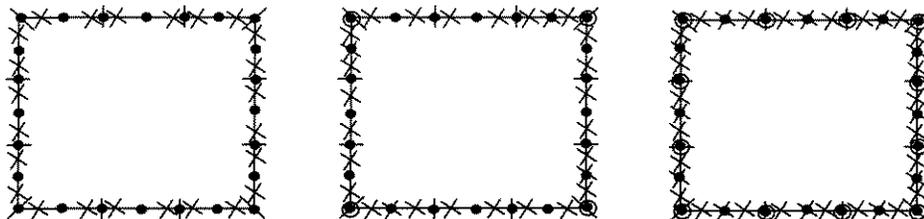


Figura 5.5 – Esquema do posicionamento dos pontos de carregamento.

5.3.4 – Posicionamento de eixos de coordenadas sobre o elemento linear:

Em relação ao uso de coordenadas para o posicionamento espacial de nós dos elementos são usados no MEC dois sistemas de coordenadas: um sistema global onde as coordenadas são expressas em termos da coordenada Γ e um sistema local com a coordenada intrínseca ξ . Esses dois sistemas de coordenadas são relacionados com o uso do Jacobiano como será mostrado em item posterior.

No caso dos elementos lineares ao invés do uso de um sistema local ξ que possui a origem no ponto médio do elemento, substituído-se por um sistema 'r' que tem origem no ponto médio do elemento e evolui os valores do centro aos extremos dos elementos, não tendo assim valores negativos e os limites de integração do elemento são relacionados pela distancia 'a'.

Na figura, a seguir, é mostrado como é relacionado esse novo sistema local de coordenadas e o sistema global de coordenadas Γ .

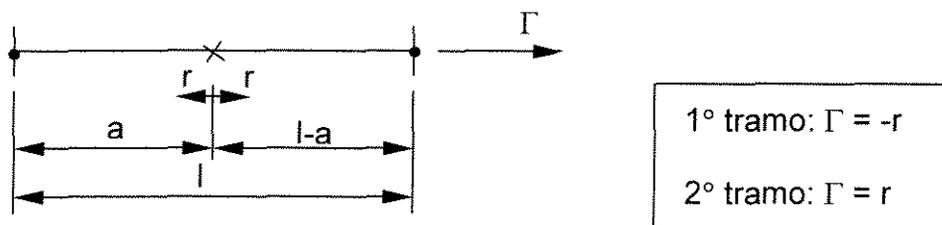


Figura 5.6 – Sistema de coordenadas em função de 'a' de elemento linear.

5.3.5 – Integração Numérica dos Núcleos:

As integrações desenvolvidas em elementos lineares ou quadráticos que não possuíam o ponto de carregamento foram feitas com a quadratura de Gauss-Legendre.

As integrações ao longo do elemento contendo ponto de carregamento foram feitas da seguinte forma:

Elementos Lineares – Foram deduzidas expressões analíticas com as integrais feitas, no sentido do valor principal de Cauchy e da parte finita da integral de Hadamard.

Elementos Quadráticos – Foram deduzidas expressões analíticas com o método da subtração de singularidade para a integral imprópria, no sentido do valor principal de Cauchy e da parte finita da integral de Hadamard.

A escolha dos limites no sistema de coordenadas locais não é arbitrária a faixa de -1 a $+1$ é a mesma usada na integração que usa a quadratura de Gauss padrão (Gauss-Legendre) que foi utilizada neste trabalho. No caso de ter-se elemento quadrático, usa-se a quadratura de Gauss logarítmico para se fazer a integração do núcleo da equação de deslocamento, pois como esse núcleo apresenta uma singularidade fraca ($\ln(1/r)$) e que pode ser resolvida numericamente. A integração de porção regular dos núcleos de integrais de contorno ao longo do elemento quadrático é feita com o uso desse tipo de quadratura. No caso de elementos lineares calcula-se a expressão analítica, pois não há grandes dificuldades quando se usa função de forma linear.

O contorno está agora dividido em elementos e uma integração numérica é feita em todos nós para cada elemento usando o parâmetro de contorno Γ e a coordenada intrínseca ξ .

Para se efetuar a transformação da variável de contorno Γ para a coordenada intrínseca ξ , a transformação do Jacobiano J deve ser calculada como a seguir:

$$J(\xi) = \frac{d\Gamma}{d\xi} = \sqrt{\left[\frac{dx(\xi)}{d\xi}\right]^2 + \left[\frac{dy(\xi)}{d\xi}\right]^2} \quad (5.15)$$

No caso de elementos de contorno, com o objetivo de determinar os componentes tangencial unitária externa, é definido por:

vetor unitário $s = \frac{s_x}{|s|} e_x + \frac{s_y}{|s|} e_y$

Em que a magnitude do vetor s é dada por:

$$|s| = \sqrt{(s_x)^2 + (s_y)^2} = \sqrt{\left[\frac{dx(\xi)}{d\xi}\right]^2 + \left[\frac{dy(\xi)}{d\xi}\right]^2}$$

Em que $|s|$ é igual ao Jacobiano $J(\xi)$. Os componentes do vetor unitário tangencial podem ser escritos como:

$$\begin{aligned} s_x &= \frac{1}{J(\xi)} \left[\frac{dx(\xi)}{d\xi} \right] \\ s_y &= \frac{1}{J(\xi)} \left[\frac{dy(\xi)}{d\xi} \right] \end{aligned} \quad (5.16)$$

Seja o vetor unitário na direção z, e_z (a normal ao plano bidimensional xy). O vetor unitário normal é, portanto, igual ao produto vetorial dos vetores s e e_z como a seguir:

$$\begin{aligned}
 n &= s \times e_z \\
 &= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{1}{J(\xi)} \left[\frac{dx(\xi)}{d\xi} \right] & \frac{1}{J(\xi)} \left[\frac{dy(\xi)}{d\xi} \right] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{J(\xi)} \left[\frac{dy(\xi)}{d\xi} \right] e_x - \frac{1}{J(\xi)} \left[\frac{dx(\xi)}{d\xi} \right] e_y
 \end{aligned}$$

Portanto, os componentes da normal externa unitária (para comprimento unitário) são dados por:

$$\begin{aligned}
 n_x &= \frac{1}{J(\xi)} \left[\frac{dy(\xi)}{d\xi} \right] \\
 n_y &= \frac{-1}{J(\xi)} \left[\frac{dx(\xi)}{d\xi} \right]
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

O diferencial das coordenadas $x(\xi)$ e $y(\xi)$ com relação à ξ são dadas por:

Para elementos lineares:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx(\xi)}{d\xi} &= \frac{d\phi_1(\xi)}{d\xi} x_1 + \frac{d\phi_2(\xi)}{d\xi} x_2 \\
 \frac{dy(\xi)}{d\xi} &= \frac{d\phi_1(\xi)}{d\xi} y_1 + \frac{d\phi_2(\xi)}{d\xi} y_2
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Para elementos quadráticos:

$$\begin{aligned}\frac{dx(\xi)}{d\xi} &= \frac{d\phi_1(\xi)}{d\xi}x_1 + \frac{d\phi_2(\xi)}{d\xi}x_2 + \frac{d\phi_3(\xi)}{d\xi}x_3 \\ \frac{dy(\xi)}{d\xi} &= \frac{d\phi_1(\xi)}{d\xi}y_1 + \frac{d\phi_2(\xi)}{d\xi}y_2 + \frac{d\phi_3(\xi)}{d\xi}y_3\end{aligned}\quad (5.18a)$$

As equações integrais de contorno podem agora ser escritas em termos de coordenadas locais ξ , como a seguir:

Para elementos lineares:

$$\begin{aligned}& \begin{bmatrix} C_{xx}(P) & C_{xy}(P) \\ C_{yx}(P) & C_{yy}(P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x(P) \\ u_y(P) \end{bmatrix} + \sum_{m=1}^M \sum_{c=1}^2 \left(\int_{-1}^1 \begin{bmatrix} T_{xx}(P,Q) & T_{xy}(P,Q) \\ T_{yx}(P,Q) & T_{yy}(P,Q) \end{bmatrix} \phi_c(\xi) J(\xi) d\xi \right) \begin{bmatrix} u_x(Q) \\ u_y(Q) \end{bmatrix} = \\ &= \sum_{m=1}^M \sum_{c=1}^2 \left(\int_{-1}^1 \begin{bmatrix} U_{xx}(P,Q) & U_{xy}(P,Q) \\ U_{yx}(P,Q) & U_{yy}(P,Q) \end{bmatrix} \phi_c(\xi) J(\xi) d\xi \right) \begin{bmatrix} t_x(Q) \\ t_y(Q) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (5.19a)$$

Para elementos quadráticos:

$$\begin{aligned}& \begin{bmatrix} C_{xx}(P) & C_{xy}(P) \\ C_{yx}(P) & C_{yy}(P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x(P) \\ u_y(P) \end{bmatrix} + \sum_{m=1}^M \sum_{c=1}^3 \left(\int_{-1}^1 \begin{bmatrix} T_{xx}(P,Q) & T_{xy}(P,Q) \\ T_{yx}(P,Q) & T_{yy}(P,Q) \end{bmatrix} \phi_c(\xi) J(\xi) d\xi \right) \begin{bmatrix} u_x(Q) \\ u_y(Q) \end{bmatrix} = \\ &= \sum_{m=1}^M \sum_{c=1}^3 \left(\int_{-1}^1 \begin{bmatrix} U_{xx}(P,Q) & U_{xy}(P,Q) \\ U_{yx}(P,Q) & U_{yy}(P,Q) \end{bmatrix} \phi_c(\xi) J(\xi) d\xi \right) \begin{bmatrix} t_x(Q) \\ t_y(Q) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (5.19b)$$

Em que M é o número total de elementos. As integrais das equações anteriores podem ser colocadas em novas funções [H] e [G], como a seguir [4]:

Para elementos lineares:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} C_{xx}(P) & C_{xy}(P) \\ C_{yx}(P) & C_{yy}(P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x(P) \\ u_y(P) \end{bmatrix} + \sum_{m=1}^M \sum_{c=1}^2 \begin{bmatrix} H_{xx} & H_{xy} \\ H_{yx} & H_{yy} \end{bmatrix}_{m,c} \begin{bmatrix} u_x(Q) \\ u_y(Q) \end{bmatrix} = \\ & = \sum_{m=1}^M \sum_{c=1}^2 \begin{bmatrix} G_{xx} & G_{xy} \\ G_{yx} & G_{yy} \end{bmatrix}_{m,c} \begin{bmatrix} t_x(Q) \\ t_y(Q) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.20a)$$

Para elementos quadráticos:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} C_{xx}(P) & C_{xy}(P) \\ C_{yx}(P) & C_{yy}(P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x(P) \\ u_y(P) \end{bmatrix} + \sum_{m=1}^M \sum_{c=1}^3 \begin{bmatrix} H_{xx} & H_{xy} \\ H_{yx} & H_{yy} \end{bmatrix}_{m,c} \begin{bmatrix} u_x(Q) \\ u_y(Q) \end{bmatrix} = \\ & = \sum_{m=1}^M \sum_{c=1}^3 \begin{bmatrix} G_{xx} & G_{xy} \\ G_{yx} & G_{yy} \end{bmatrix}_{m,c} \begin{bmatrix} t_x(Q) \\ t_y(Q) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.20b)$$

Em que as matrizes [H] e [G] contém os núcleos dos integrais T_{ij} e U_{ij} , respectivamente. Note-se que o parâmetro $C_{ij}(P)$ contribui para os coeficientes da diagonal da matriz [H] (quando P é igual a Q). A formulação de matrizes [H] e [G] é muito similar ao da formulação de problemas de Potencial, exceto que cada coeficiente de [H] e [G] é agora uma sub-matriz 2x2, como se segue:

$$\begin{bmatrix} [H]_{11} & [H]_{12} & [H]_{13} & [H]_{14} & \dots \\ [H]_{21} & [H]_{22} & [H]_{23} & [H]_{24} & \dots \\ [H]_{31} & [H]_{32} & [H]_{33} & [H]_{34} & \dots \\ [H]_{41} & [H]_{42} & [H]_{43} & [H]_{44} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u]_1 \\ [u]_2 \\ [u]_3 \\ [u]_4 \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [G]_{11} & [G]_{12} & [G]_{13} & [G]_{14} & \dots \\ [G]_{21} & [G]_{22} & [G]_{23} & [G]_{24} & \dots \\ [G]_{31} & [G]_{32} & [G]_{33} & [G]_{34} & \dots \\ [G]_{41} & [G]_{42} & [G]_{43} & [G]_{44} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [t]_1 \\ [t]_2 \\ [t]_3 \\ [t]_4 \\ \dots \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Em que as sub-matrizes [H] e [G] são definidas, a seguir:

$$[H]_{ij} = \begin{bmatrix} H_{xx} & H_{xy} \\ H_{yx} & H_{yy} \end{bmatrix}_{ij} ; \quad [G]_{ij} = \begin{bmatrix} G_{xx} & G_{xy} \\ G_{yx} & G_{yy} \end{bmatrix}_{ij}$$

Note que os vetores $[u]$ e $[t]$ representam os deslocamentos e forças nas direções x e y, nos pontos nodais:

$$[u]_i = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}_i ; \quad [t]_i = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}_i$$

Ao final do processo obtêm-se duas matrizes $2N \times 2N$ contendo as sub-matrizes.

$$[H][u] = [G][t] \quad (5.22)$$

Em análise estática em regime elástico há um estado físico, nomeado movimento de corpo rígido (deslocamentos unitários em todos os nós em cada direção). Este movimento resulta em forças iguais a zero, onde o lado direito da equação (5.19) é igual a zero [4]:

$$[H][u_c] = 0 \quad (5.23)$$

Em que u_c é uma constante de deslocamento arbitrário em qualquer direção. Portanto, a soma de todos os coeficientes em qualquer linha de $[H]$ deve ser zero. Este processo permite que os termos da diagonal de $[H]$ possam ser determinados com a soma de todos os outros coeficientes fora da diagonal, como a seguir:

$$[H]_{ij} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N [H]_{ij} \quad \text{Para } i=1, 2, 3, \dots, N \quad (5.24)$$

Em que i e j são os contadores de linhas e colunas, respectivamente, onde N é o número total de nós.

Observando-se que este procedimento é feito quando não se utilizam expressões para a matriz C da equação (5.19), para atribuição direta dos valores das diagonais tende a posição do ponto de carregamento e a função de forma.

5.3.6 –Aplicação das Condições de Contorno:

Posteriormente se calculam os coeficientes das matrizes [H] e [G], mas o problema não é único antes que todas as condições de contorno sejam aplicadas. Em um tipo problema de análise estática em regime elástico, dois tipos de condições de contorno possíveis: Deslocamentos prescritos e Forças superficiais prescritas.

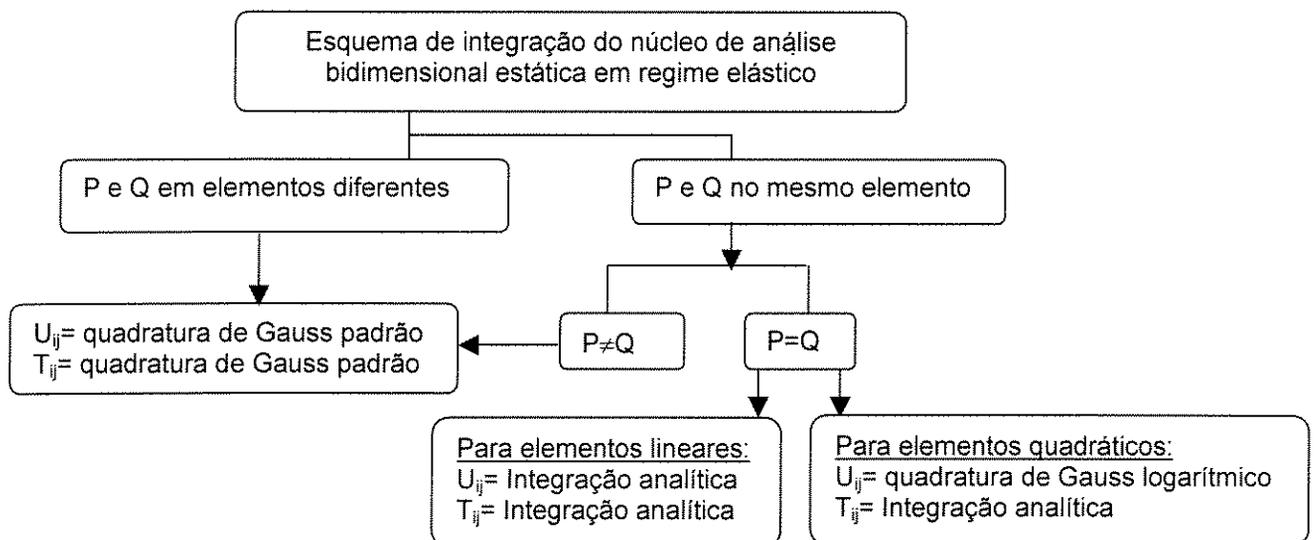


Figura 5.7 – Esquema de uma análise com o MEC para elementos lineares e quadráticos.

Em um dado problema, onde há $2N$ equações, necessitam-se $2N$ valores prescritos. Em outras palavras, cada nó deve ter duas das quatro variáveis (u_x, u_y, t_x, t_y) prescritas.

Para se resolver o sistema de equações, as matrizes $[H]$ e $[G]$ devem ser rearranjadas com todas as variáveis conhecidas no lado direito da equação e todas as variáveis desconhecidas do lado esquerdo da equação que irão resultar no sistema de equações algébricas.

$$[A][x] = [B] \quad (5.25)$$

Logo $[B]$ agora contém os coeficientes conhecidos.

Em que $[x]$ contém as variáveis desconhecidas (se deslocamentos ou forças). Portanto, os sistemas finais das equações algébricas lineares podem ser escritos como na equação (5.25).

Este “entrelaçamento” dos coeficientes $[H]$ e $[G]$ para acomodar as condições de contorno é muito comum no MEC. Para demonstrar a multiplicação das matrizes, se for considerado um exemplo simplificado onde o nó 2 e 4 têm deslocamentos prescritos $[UU]_2$ e $[UU]_4$ e onde os nós 1 e 3 têm forças prescritas $[TT]_1$ e $[TT]_3$, respectivamente [4].

As matrizes $[H]$ e $[G]$ podem ser escritas a seguir:

$$\begin{bmatrix} [H]_{11} & [H]_{12} & [H]_{13} & [H]_{14} & \cdots \\ [H]_{21} & [H]_{22} & [H]_{23} & [H]_{24} & \cdots \\ [H]_{31} & [H]_{32} & [H]_{33} & [H]_{34} & \cdots \\ [H]_{41} & [H]_{42} & [H]_{43} & [H]_{44} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u]_1 \\ [UU]_2 \\ [u]_3 \\ [UU]_4 \\ \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [G]_{11} & [G]_{12} & [G]_{13} & [G]_{14} & \cdots \\ [G]_{21} & [G]_{22} & [G]_{23} & [G]_{24} & \cdots \\ [G]_{31} & [G]_{32} & [G]_{33} & [G]_{34} & \cdots \\ [G]_{41} & [G]_{42} & [G]_{43} & [G]_{44} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [TT]_1 \\ [t]_2 \\ [TT]_3 \\ [t]_4 \\ \cdots \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Os coeficientes da matriz [H] multiplicando os deslocamentos [UU]₂ e [UU]₄ são agora transferidos para o lado direito (com o sinal trocado), e no seu lugar correspondente coeficiente [G] multiplicando [t]₂ e [t]₄ são colocados (com o sinal trocado), como a seguir:

$$\begin{bmatrix} [H]_{11} & -[G]_{12} & [H]_{13} & -[G]_{14} & \dots \\ [H]_{21} & -[G]_{22} & [H]_{23} & -[G]_{24} & \dots \\ [H]_{31} & -[G]_{32} & [H]_{33} & -[G]_{34} & \dots \\ [H]_{41} & -[G]_{42} & [H]_{43} & -[G]_{44} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u]_1 \\ [t]_2 \\ [u]_3 \\ [t]_4 \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [G]_{11} & -[H]_{12} & [G]_{13} & -[H]_{14} & \dots \\ [G]_{21} & -[H]_{22} & [G]_{23} & -[H]_{24} & \dots \\ [G]_{31} & -[H]_{32} & [G]_{33} & -[H]_{34} & \dots \\ [G]_{41} & -[H]_{42} & [G]_{43} & -[H]_{44} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [TT]_1 \\ [UU]_2 \\ [TT]_3 \\ [UU]_4 \\ \dots \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

As equações acima estão agora prontas para serem resolvidas porque o lado direito da equação é completamente conhecido.

Embora o procedimento acima seja simplificado, este pode ser facilmente aplicado a qualquer tamanho de malha.

Resolvido o sistema de equações lineares, separam-se os valores dos deslocamentos e dos valores das forças superficiais em seus respectivos vetores.

5.3.7 – Resolução das Equações Algébricas:

A matriz solução [A] resultante da aplicação das condições de contorno, não é simétrica e gradualmente populada com coeficientes diferentes de zero. Por isso, a escolha do método de solução implementado deve levar em conta métodos como eliminação gaussiana, decomposição LU ou qualquer outra técnica direta (neste trabalho foi adotada a decomposição LU). Deve ser notado que todas as propriedades dos problemas de elastostática resultam em condições de matrizes apropriadas e elas somente virão a ser mal condicionadas ou singulares se há um engano em algum lugar (como dois nós que tenham as mesmas coordenadas, por exemplo).

5.4 – Determinação das tensões nos pontos internos:

Uma equação integral de contorno (EIC) similar à equação para tensões no ponto p pode ser obtida pela diferenciação da equação integral de contorno (EIC) (5.9) que exprime o deslocamento do ponto interno p e a substituição na lei de Hooke como se mostra a seguir [4].

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(p) + \int \left\{ \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial T_{mk}(p, Q)}{\partial x_m} + \mu \left[\frac{\partial T_{ik}(p, Q)}{\partial x_j} + \frac{\partial T_{jk}(p, Q)}{\partial x_i} \right] \right\} u_k(Q) d\Gamma(Q) = \\ = \int \left\{ \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial U_{mk}(p, Q)}{\partial x_m} + \mu \left[\frac{\partial U_{ik}(p, Q)}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{jk}(p, Q)}{\partial x_i} \right] \right\} t_k(Q) d\Gamma(Q) \end{aligned} \quad (5.28)$$

Que pode ser expresso em termos de núcleos de terceira ordem D_{kij} e S_{kij} .

$$\sigma_{ij}(p) + \int S_{kij}(p, Q) u_k(Q) d\Gamma(Q) = \int D_{kij}(p, Q) t_k(Q) d\Gamma(Q) \quad (5.29)$$

Em que os núcleos são definidos por.

$$D_{kij}(p, Q) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left(\frac{1}{r} \right) \left[(1-2\nu) \left(\delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial x_i} + \delta_{ik} \frac{\partial r}{\partial x_j} - \delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right) + 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right] \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} S_{kij}(p, Q) = & \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)} \left(\frac{1}{r^2} \right) n_i \left[2\nu \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial x_k} + (1-2\nu) \delta_{jk} \right] + \\ & + \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)} \left(\frac{1}{r^2} \right) n_j \left[2\nu \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_k} + (1-2\nu) \delta_{ik} \right] + \\ & + \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)} \left(\frac{1}{r^2} \right) n_k \left[2(1-2\nu) \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} - (1-4\nu) \delta_{ij} \right] + \\ & + \frac{\mu}{\pi(1-\nu)} \left(\frac{1}{r^2} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right) \left[(1-2\nu) \delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial x_k} + \nu \left(\delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial x_i} + \delta_{ik} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right) - 4 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right] \end{aligned} \quad (5.31)$$

5.5 – Implementação Analítica:

A implementação analítica se vê necessária à medida que se têm dois pontos de contorno (o de carregamento e o de campo) no mesmo elemento e vem às mesmas coordenadas, ou seja, coincidem ($P=Q$), é necessário se tratar da singularidade lançando-se mão de técnicas matemáticas como o valor principal de Cauchy ou usa a parte finita da integral de Hadamard e de outras simplificações estratégicas ao longo do desenvolvimento das integrais singulares.

5.5.1 – Relações entre as coordenadas N e S em termos das direções 1 e 2:

Neste trabalho foram usados núcleos em função da coordenada tangencial do elemento, e para se fazer a relação entre N e S usa-se o esquema abaixo.

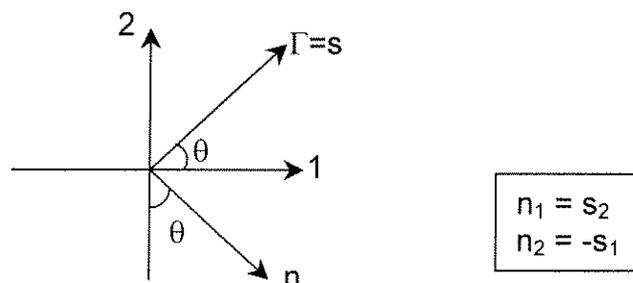


Figura 5.8 – Figura que mostra a relação entre coordenadas N e S.

5.5.2 – Determinação de deslocamentos e forças de superfície no contorno para Elementos Lineares:

Quando o ponto de carregamento esta sobre o elemento as integrais de contorno com singularidade de ordem (1/r) estas se desenvolvem em termos do valor principal de Cauchy, chegando-se:

$$h_{12}^1 = -\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{l-a}{l} \cdot \ln \frac{l-a}{a} - 1 \right\} \quad (5.32)$$

$$h_{12}^2 = -\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{a}{l} \cdot \ln \frac{l-a}{a} + 1 \right\} \quad (5.33)$$

Para o núcleo de função logarítmica a expressão analítica, é escrita como:

$$K_1 = l.s_i.s_j - (3-4\nu).\delta_{ij} \cdot [(l-a)\ln(l-a) + a.\ln a - l]$$

$$K_2 = (3-4\nu).\delta_{ij} \cdot \left\{ a^2 \cdot [1-2.\ln a] - (l-a)^2 \cdot [1-2.\ln(l-a)] \right\} + 2l.(2a-l).s_i.s_j$$

$$g_{ij}^1 = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)l} \left[(l-a).K_1 + \frac{1}{4}.K_2 \right] \quad (5.34)$$

$$g_{ij}^2 = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)l} \left[a.K_1 - \frac{1}{4}.K_2 \right] \quad (5.35)$$

5.5.3 – Determinação das Tensões no Contorno para Elementos Lineares:

Depois de aplicar o processo limitante do ponto de carregamento tendendo ao contorno $p \rightarrow \Gamma$, ou seja, quando $P \in \Gamma$ a equação integral de contorno para o tensor de tensões fica:

$$\frac{1}{2} \cdot \sigma_{ij}(P) = \int_{\Gamma} D_{kij}(P, Q) t_k(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} S_{kij}(P, Q) u_k(Q) d\Gamma(Q) \quad (5.36)$$

A equações (5.36) é válida para contorno com tangente contínua e o ponto de carregamento em região onde existe continuidade da função derivada dos deslocamentos. Nestes como os pontos de carregamento são internos ao elemento, existe continuidade.

Onde a primeira integral com ordem $(1/r)$ é definida como o valor principal de Cauchy e a segunda integral de ordem $(1/r^2)$ é definida como a parte finita da integral [2,5].

Os núcleos apresentados são particularmente usados na solução de problemas com trincas e também em outras aplicações na elasticidade e plasticidade. Como se pretende tratar casos de corpos com fissura inicial em regime elástico será necessário o uso de uma equação adicional. Para o caso de elementos quadráticos a integração analítica se dá em termos dos núcleos f_{ij} e g_{ijk} que serão apresentados no próximo capítulo.

A formulação analítica para o núcleo singular D_{kij} :

$$D_{kij}^1 = \frac{1}{4.\pi.(1-\nu)} \cdot [(1-2\nu)(\delta_{jk} \cdot s_i + \delta_{ik} \cdot s_j - \delta_{ij} \cdot s_k) + 2 \cdot s_i \cdot s_j \cdot s_k] \left\{ \frac{l-a}{l} \cdot \ln \frac{l-a}{a} - 1 \right\} \quad (5.37)$$

$$D_{kij}^2 = \frac{1}{4.\pi.(1-\nu)} \cdot [(1-2\nu)(\delta_{jk} \cdot s_i + \delta_{ik} \cdot s_j - \delta_{ij} \cdot s_k) + 2 \cdot s_i \cdot s_j \cdot s_k] \left\{ \frac{a}{l} \cdot \ln \frac{l-a}{a} + 1 \right\} \quad (5.38)$$

A formulação analítica para o núcleo hipersingular S_{kij} :

$$S' = \begin{bmatrix} 2.S_1^2.S_2 + S_2 & -(2.S_1^3 - S_1) \\ 2.S_1.S_2^2 - S_1 & -(2.S_1^2.S_2 - S_2) \\ 2.S_2^3 - S_2 & -(2.S_1.S_2^2 + S_1) \end{bmatrix}$$

$$S_{kij}^1 = \frac{G}{2.\pi.(1-\nu).l} \cdot S' \cdot \left\{ \ln \frac{a}{l-a} - \frac{l-a}{a} - 1 \right\} \quad (5.39)$$

$$S_{kij}^2 = \frac{G}{2.\pi.(1-\nu).l} \cdot S' \cdot \left\{ \ln \frac{l-a}{a} - \frac{a}{l-a} - 1 \right\} \quad (5.40)$$

6 - ANÁLISE DE PROBLEMAS COM TRINCAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO DUAL

6.1 – Introdução:

Para problemas de elasticidade a equação integral de deslocamento pode ser obtida através do teorema da reciprocidade de Betti, levando à identidade de Somigliana. O teorema da reciprocidade estabelece que o trabalho feito pelas tensões do estado (a) para deslocamentos do estado (b) é igual ao trabalho das tensões no estado (b) para deslocamentos no estado (a).

O método dos elementos de contorno (MEC) é um método muito bem sucedido na análise de problemas de elastostática em regime elástico linear em problemas em que o domínio não tenha grande degeneração de geometria. A degeneração que se apresenta nos exemplos deste trabalho são superfícies internas ou superfícies de borda que não têm área ou volume e através da qual o campo de deslocamentos é descontínuo, este tipo de degeneração é definido como trinca matemática. Para problemas de trinca simétrica somente um lado da trinca necessita ser modelado e uma formulação singular do método dos elementos de contorno pode ser empregada.

Entretanto, a solução geral para problemas com trincas não pode ser alcançada somente com a aplicação direta das equações integrais de deslocamento do MEC porque a coincidência de superfícies na trinca leva a um sistema de equações singular. A equação para um nó colocado em uma das superfícies será idêntica à equação de outro nó com as mesmas coordenadas, mas na superfície oposta.

A base teórica do método das duas equações integrais de contorno (método dual) foi apresentada pela primeira vez por Watson [39] e posteriormente por Hong e Chen [16], em uma formulação geral que incorporava as equações integrais de contorno para deslocamentos e forças de superfície. Assim, o uso de equações diferentes em cada superfície da trinca faz com que os nós de trinca com as mesmas coordenadas tenham equações distintas.

6.2 – As duas equações integrais de contorno:

As duas equações integrais de contorno, que são base do método dos elementos de contorno dual (DBEM), são as equações de deslocamento e das forças de superfície. A representação da integral de contorno para os componentes de deslocamentos u_i , para um ponto interno Q , é dado por:

$$u_i(Q) = \int_{\Gamma} U_{ij}(Q, p) t_j(p) d\Gamma(p) - \int_{\Gamma} T_{ij}(Q, p) u_j(p) d\Gamma(p) \quad (6.1)$$

em que i e j são as componentes Cartesianas; $U_{ij}(Q, p)$ e $T_{ij}(Q, p)$ representam as soluções fundamentais de deslocamentos e de forças de superfície de Kelvin, respectivamente.

As expressões das soluções fundamentais (3.22 e 3.23) são novamente mostradas a seguir:

$$u_i = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu) \ln \left[\frac{1}{r(Q,p)} \right] \delta_{ij} + \frac{\partial r(Q,p)}{\partial x_i} \frac{\partial r(Q,p)}{\partial x_j} \right\}$$

$$t_i = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r(Q,p)} \left(\frac{\partial r(Q,p)}{\partial n} \right) \left[(1-2\nu) \delta_{ij} + 2 \frac{\partial r(Q,p)}{\partial x_i} \frac{\partial r(Q,p)}{\partial x_j} \right] + \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)r(Q,p)} \left[\frac{\partial r(Q,p)}{\partial x_j} n_i - \frac{\partial r(Q,p)}{\partial x_i} n_j \right]$$

Em que a distância entre Q' e p é indicada como r. Os pontos que estão assinalados com ('), significam que esta se tratando do ponto de carregamento.

Usando o processo mostrado no capítulo 5, item 5.5 chega-se à seguinte equação para um nó no contorno.

$$c_{ij}(p') u_j(p') + \int_{\Gamma} T_{ij}(p', p) u_j(p) d\Gamma(p) = \int_{\Gamma} U_{ij}(p', p) t_j(p) d\Gamma(p) \quad (6.2)$$

A integral do núcleo $T_{ij}(Q, p)$ na região contendo p' é representada pelo valor principal de Cauchy e o coeficiente $c_{ij}(p')$ é dado por $\delta_{ij}/2$ para um contorno suave no ponto de colocação p' (δ_{ij} é o delta de Kronecker).

As componentes de tensão σ_{ij} são obtidas pela diferenciação da equação (6.1) quando os deslocamentos forem contínuos no ponto onde é feita a diferenciação. Aplicando-se a lei de Hooke após as operações da diferenciação da equação (1) chega-se:

$$\sigma_{ij}(Q') + \int_{\Gamma} S_{kij}(Q', p) u_k(p) d\Gamma(p) = \int_{\Gamma} D_{kij}(Q', p) t_k(p) d\Gamma(p) \quad (6.3)$$

Na equação (6.3), $S_{kij}(Q', p)$ e $D_{kij}(Q', p)$ são combinações lineares das derivadas do núcleo $T_{ij}(Q', p)$ e $U_{ij}(Q', p)$ respectivamente, se $r \neq 0$ a equação integral é

regular. Quando os pontos internos se aproximam do contorno, isto é se $Q' \rightarrow p'$, a distância r tende a zero o núcleo S_{kij} exibe uma hipersingularidade de ordem $1/r^2$ e o núcleo D_{kij} exibe uma forte singularidade de ordem $1/r$. Levando-se em conta a continuidade das deformações e de forças de superfície, os processos limites conduzem a integrais impróprias na primeira e na segunda integral da equação (6.3) quando o ponto de colocação é levado ao contorno. A equação (6.3) passa a ser escrita:

$$\frac{1}{2} \cdot \sigma_{ij}(p') + \int_{\Gamma} S_{kij}(p', p) u_k(p) d\Gamma(p) = \int_{\Gamma} D_{kij}(p', p) t_k(p) d\Gamma(p) \quad (6.4)$$

em que a primeira integral da equação (6.4) é representada pela parte finita da integral de Hadammard, Portela *et al* [18]. Em um contorno suave, os componentes das forças de superfície t_j são dados por:

$$\frac{1}{2} t_j(p') + n_i(p') \int_{\Gamma} S_{kij}(p', p) u_k(p) d\Gamma(p) = n_i(p') \int_{\Gamma} D_{kij}(p', p) t_k(p) d\Gamma(p) \quad (6.5)$$

n_i representa a componente normal unitária no contorno, em um ponto de colocação p' .

6.3 – Estratégia de modelagem da trinca:

A estratégia de modelagem dos elementos de contorno neste trabalho é feita da seguinte forma. Ao longo trinca foram usados elementos contínuos e elementos mistos concorrentes ao nó da trinca foram adotados porque na ponta da trinca foram usados nós duplos.

Quando trincas de borda são analisadas, os pontos de contorno que também pertenciam à trinca têm nós duplos. Assim dois casos foram considerados:

- a) Os elementos de contorno concorrentes à trinca eram descontínuos.
- b) Os elementos de contorno concorrentes à trinca eram contínuos.

Os elementos de contorno usados neste trabalho foram os isoparamétricos: quadrático e linear. As funções de forma foram sempre referenciadas aos extremos do elemento. Os pontos de colocação foram internamente ao elemento quer fosse elementos contínuos, descontínuos ou mistos.

Os isoparamétricos lineares tiveram pontos de colocação em 0 e $-2/3$ na coordenada intrínseca, cujo comprimento variava de -1 até 1.

Nos elementos quadráticos os pontos de colocação situaram-se a $-2/3$, 0, $2/3$ na coordenada intrínseca, cujo comprimento variava de -1 até 1.

6.4 – Tratamento das partes finitas das integrais:

As integrais impróprias são facilmente tratadas pelo clássico método da subtração da singularidade. A equação integral imprópria original é transformada em uma soma de uma integral regular e uma integral singular. Sendo que esta última é tratada analiticamente e na parte regular se usa quadratura de Gauss-Legendre para a integração numérica, Portela *et al.* [18]

A parte finita da integral de primeira ordem da equação (6.2) pode ser expressa como:

$$\int_{\Gamma_e} T_{ij}(p', p) u_j(p) d\Gamma(p) = u_j^n \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{f_{ij}^n(\xi)}{\xi - \xi'} d\xi \quad (6.6)$$

em que $f_{ij}^n(\xi)$ é a função regular, dada pelo produto da solução fundamental, uma função de forma e o jacobiano de transformação de coordenadas, multiplicadas pelo termo $(\xi - \xi')$. Com a ajuda do primeiro termo da expansão de Taylor da função f_{ij}^n , no ponto de colocação, chega-se:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f_{ij}^n(\xi)}{\xi - \xi'} d\xi = \int_{-1}^{+1} \frac{f_{ij}^n(\xi) - f_{ij}^n(\xi')}{\xi - \xi'} d\xi + f_{ij}^n(\xi') \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\xi - \xi'} \quad (6.7)$$

Com a subtração da singularidade resulta na soma de duas integrais na equação (6.7), portanto a primeira integral é regular e a segunda pode ser obtida analiticamente, resultando em:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\xi - \xi'} = \ln \left| \frac{1 - \xi'}{1 + \xi'} \right| \quad (6.8)$$

No caso de elementos lineares este desenvolvimento leva aos mesmos resultados obtidos com a integração mostrada no capítulo 5. Nos elementos quadráticos este procedimento é necessário pelo uso de funções de forma, jacobino e derivada das funções de forma.

A equação de segunda ordem que trata de integral de parte finita é dada por:

$$\int_{\Gamma_e} S_{kij}(p', p) u_k(p) d\Gamma(p) = u_k^n \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{g_{kij}^n(\xi)}{(\xi - \xi')^2} d\xi \quad (6.9)$$

Em que $g_{kij}^n(\xi)$ é a função regular, é dado pelo o produto da solução fundamental, com a função de forma e o jacobiano da transformação de coordenadas, multiplicado pelo termo $(\xi - \xi')^2$. O termo a direita da equação (6.9) pode ser transformado com a ajuda do primeiro e do segundo termos da expansão de Taylor da função densidade g_{kij}^n , nas vizinhanças do ponto de carregamento [18]. Assim, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \frac{g_{kij}^n(\xi)}{(\xi - \xi')^2} d\xi &= \int_{-1}^{+1} \frac{g_{kij}^n(\xi) - g_{kij}^n(\xi') - g_{kij}^{n(1)}(\xi')(\xi - \xi')}{(\xi - \xi')^2} d\xi + \\ &+ g_{kij}^n(\xi') \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{(\xi - \xi')^2} + g_{kij}^{n(1)}(\xi') \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\xi - \xi'} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Em que $g_{kij}^{n(1)}$ é a derivada de primeira ordem de g_{kij}^n . Do lado direito da equação (6.10) tem-se três termos, sendo o primeiro termo a função regular e o terceiro termo é idêntico à equação (6.8).

O segundo termo pode ser integrado analiticamente, portanto:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{(\xi - \xi')^2} = -\frac{1}{1 + \xi'} - \frac{1}{1 - \xi'} \quad (6.11)$$

As equações (6.7) e (6.10) são respectivamente as equações de primeira e segunda ordem da parte finita da integral.

Levando-se em consideração um elemento quadrático contínuo, com os nós posicionados arbitrariamente nos pontos $\xi = -1$, $\xi = 0$ e $\xi = +1$.

As funções de forma de um elemento quadrático a são dadas por:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \xi \left(\frac{\xi}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ \phi_2 &= (1 + \xi)(1 - \xi) \\ \phi_3 &= \xi \left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2} \right)\end{aligned}$$

Para este tipo de elemento a equação (6.6) pode ser escrita como:

$$\int_{\Gamma_e} T_{ij}(x', x) u_j(x) d\Gamma(x) = u_j^n \cdot \int_{-1}^{+1} T_{ij}(\xi', x(\xi)) \phi_n(\xi) d\xi = h_i^n \cdot u^n \quad (6.12)$$

Em que u^n representa as componentes de deslocamento nos nós e $J(\xi)$ é o Jacobiano de transformação de coordenadas. No caso dos elementos retos o Jacobiano é dado por $J = l/2$, em que l é o comprimento do elemento e matriz h^n é dada por:

$$h^n = \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{bmatrix} \int_{-1}^{+1} \frac{\phi_n(\xi)}{\xi - \xi'} d\xi \quad (6.13)$$

A parte finita das integrais de primeira ordem são integradas analiticamente a seguir:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} \frac{\phi_1}{\xi - \xi'} d\xi &= \frac{1}{2} \left(\xi' (\xi' - 1) \ln \left| \frac{1 - \xi'}{1 + \xi'} \right| + 2\xi' - 2 \right) \\ \int_{-1}^{+1} \frac{\phi_2}{\xi - \xi'} d\xi &= (1 - \xi') (1 + \xi') \ln \left| \frac{1 - \xi'}{1 + \xi'} \right| - 2\xi' \\ \int_{-1}^{+1} \frac{\phi_3}{\xi - \xi'} d\xi &= \frac{1}{2} \left(\xi' (\xi' + 1) \ln \left| \frac{1 - \xi'}{1 + \xi'} \right| + 2\xi' + 2 \right)\end{aligned} \quad (6.14)$$

Para elemento quadrático a equação (6.7) pode ser escrita como:

$$\int_{\Gamma_e} S_{ijk}(x', x) u_k(x) d\Gamma(x) = u_k^n \cdot \int_{-1}^{+1} S_{ijk}(\xi', x(\xi)) \phi_n(\xi) d\xi = h_{ij}^n \cdot u^n \quad (6.15)$$

em que a matriz h^n é dada por:

$$h^n = \frac{G}{2\pi(1-\nu)} \cdot \frac{2}{l} \cdot S' \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{\phi_n(\xi)}{(\xi - \xi')^2} d\xi \quad (6.16)$$

a matriz S' é dado por:

$$S' = \begin{bmatrix} 2 \cdot S_1^2 \cdot S_2 + S_2 & -(2 \cdot S_1^3 - S_1) \\ 2 \cdot S_1 \cdot S_2^2 - S_1 & -(2 \cdot S_1^2 \cdot S_2 - S_2) \\ 2 \cdot S_2^3 - S_2 & -(2 \cdot S_1 \cdot S_2^2 + S_1) \end{bmatrix}$$

em que s_1 e s_2 são as componentes da tangente ao elemento nas direções 1 e 2 das coordenadas cartesianas.

A parte finita das integrais de segunda ordem é integrada analiticamente a seguir:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \frac{\phi_1}{(\xi - \xi')^2} d\xi &= \frac{1}{2} \cdot \left((2\xi'^2 - 1) \cdot \ln \left| \frac{1 - \xi'}{1 + \xi'} \right| + \frac{4\xi'^2 - 2\xi' - 2}{\xi'^2 - 1} \right) \\ \int_{-1}^{+1} \frac{\phi_2}{(\xi - \xi')^2} d\xi &= 2 \left(\xi' \cdot \ln \left| \frac{1 + \xi'}{1 - \xi'} \right| - 2 \right) \\ \int_{-1}^{+1} \frac{\phi_3}{(\xi - \xi')^2} d\xi &= \frac{1}{2} \cdot \left((2\xi'^2 - 1) \cdot \ln \left| \frac{1 - \xi'}{1 + \xi'} \right| + \frac{4\xi'^2 + 2\xi' - 2}{\xi'^2 - 1} \right) \end{aligned} \quad (6.17)$$

Levando-se em consideração um elemento linear, com os nós posicionados arbitrariamente nos pontos $\xi = -1$ e $\xi = +1$. As funções de forma de um elemento linear são dadas por:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{1}{2} \cdot (1 - \xi) \\ \phi_2 &= \frac{1}{2} \cdot (1 + \xi)\end{aligned}\tag{6.18}$$

A parte finita das integrais de primeira ordem são integradas analiticamente a seguir:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} \frac{\phi_1}{\xi - \xi'} d\xi &= \ln \left| \frac{l-a}{a} \right| \cdot (l-a) \\ \int_{-1}^{+1} \frac{\phi_2}{\xi - \xi'} d\xi &= \ln \left| \frac{l-a}{a} \right| \cdot a\end{aligned}\tag{6.19}$$

A parte finita das integrais de segunda ordem é integrada analiticamente a seguir:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} \frac{\phi_1}{(\xi - \xi')^2} d\xi &= \frac{1}{2} \cdot \left(\ln \left| \frac{a}{l-a} \right| - \frac{l-a}{a} - 1 \right) \\ \int_{-1}^{+1} \frac{\phi_2}{(\xi - \xi')^2} d\xi &= \frac{1}{2} \cdot \left(\ln \left| \frac{l-a}{a} \right| - \frac{a}{l-a} - 1 \right)\end{aligned}\tag{6.20}$$

em que 'a' e 'l-a' são as distâncias do ponto de carregamento e as extremidades do elemento, sendo que 'a' é a distância entre o nó da extremidade esquerda do elemento e o ponto de carregamento e 'l' é o comprimento do elemento linear. Portanto 'l-a' é a distância entre o nó da extremidade direita do elemento e o ponto de carregamento.

6.5 – Considerações de corpo rígido:

Quando um ponto de colocação é posto no nó localizado em um elemento de trinca há dois elementos, em faces opostas, contendo o ponto de colocação, porque ambas as superfícies de trinca são discretizadas. Isto significa que ao longo da trinca, as partes finitas das integrais nas equações (6.2) e (6.5) são requisitadas duas vezes: uma vez no elemento que contém o nó de colocação e, de novo, no elemento oposto que contém o nó que seja correspondente ao nó de colocação. Esta característica peculiar do DBEM (Dual Boundary Elements Method) põe restrição no uso da condição de corpo rígido e deve-se avaliar indiretamente os componentes de diagonal para nós de trinca [18].

6.6 – Calculo de fatores de intensidade de tensão:

Seja r e θ um sistema de coordenadas polares, centrada na ponta da trinca, em que $\theta = \pm\pi$ define a trinca. Considerando apenas o primeiro termo da expansão de Williams analogamente ao discutido em de Portela *et al.* [18] o campo de deslocamentos na superfície de trinca pode ser escrito como:

$$u_2(\theta = \pi) - u_2(\theta = -\pi) = \frac{\kappa + 1}{\mu} K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (6.21)$$

em que μ é o modulo transversal e $\kappa = 3 - 4\nu$; para o estado plano de deformação $\eta = \nu$ e para o estado plano de tensão $\eta = \nu / (1 + \nu)$, onde ν é coeficiente de Poisson. Este processo de cálculo de fatores de intensidade de tensões tem o nome de extrapolação de deslocamentos próximo à trinca.

A constante K_I é o fator de intensidade de tensão para modo de trinca I. O fator de intensidade de tensão pode ser obtido quando os deslocamentos nas superfícies de trinca são conhecidos através de uma solução de elemento de contorno.

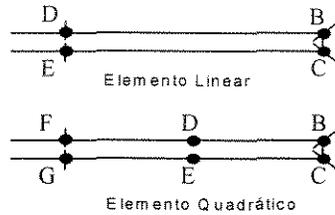


Figura 6.1 – Elemento quadrático contínuo e o elemento linear de ponta de trinca

O fator de intensidade de tensão K_I para o elemento linear, em função dos deslocamentos nos nós D — E, é dado por:

$$K_I^{DE} = (u_2^D - u_2^E) \frac{\mu}{\kappa + 1} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{l}} \quad (6.22)$$

O fator de intensidade de tensão K_I para o elemento quadrático, em função dos deslocamentos nos nós D — E e F — G é dado por:

$$K_I^{DE} = (u_2^D - u_2^E) \frac{\mu}{\kappa + 1} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{l}} \quad (6.23)$$

$$K_I^{FG} = (u_2^F - u_2^G) \frac{\mu}{\kappa + 1} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{l}} \quad (6.24)$$

No caso de elementos quadráticos, existem três nós em cada elemento e um deles está na ponta da trinca. Assim, pode-se extrapolar os resultados para a ponta da trinca usando os valores obtidos para os outros dois nós.

Tendo em conta que esta extrapolação usaria resultados de dois elementos lineares não foi feita a extrapolação para a ponta da trinca com elementos lineares.

Por meio de extrapolação linear através dos nós D — E e F — G para a ponta da trinca, os valores obtidos de fatores de intensidade de tensões extrapolados para a ponta da trinca são dados por:

$$K_I = \left[4.(u_2^D - u_2^E) - \sqrt{2}.(u_2^F - u_2^G) \right] \frac{\mu}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{\pi}{l}} \quad (6.25)$$

Para o caso em que se quer calcular os fatores de intensidade de tensão no modo II tem-se as mesmas equações mencionadas acima, mas os deslocamentos nos pontos D,E,F e G estão relacionados com a direção 1.

7 - CORPOS PRÉ-FISSURADOS EM ANÁLISE PELA MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICO-LINEAR EXEMPLOS DE PROBLEMAS CORPOS SOLICITADOS EM REGIME ELÁSTICO E DE PROBLEMAS DE USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO DUAL

7.1 – Introdução:

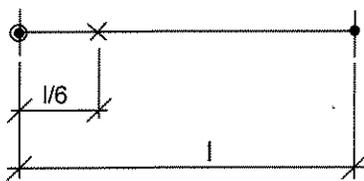
Neste capítulo há exemplos de problemas em regime elástico analisados com elementos lineares e quadráticos na discretização do contorno, incluindo os tipos de elementos que foram citados nos capítulos anteriores.

Também são apresentados problemas de corpos com pré-fissura (ou pré-trinca) analisados pela Mecânica da Fratura Elástico-Linear, em que se usa elementos lineares e quadráticos, e que a trinca matemática tem elementos nas superfícies de trinca (elementos de superfícies opostas) com nós de contorno com coordenadas que coincidem (ou seja, elementos co-planares, que no caso de problemas bidimensionais são colineares).

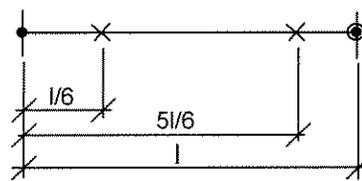
7.2 – Detalhamento do posicionamento de ponto de carregamento em elementos lineares e quadráticos:

Na estratégia do posicionamento de ponto de carregamento nos elementos lineares e quadráticos, têm-se duas situações que serão apresentadas a seguir:

No caso dos elementos lineares a primeira situação que se analisa é a seguinte, se o nó final do elemento é contínuo o ponto de carregamento é colocado na distância de $1/6$ do tamanho do elemento (no sentido do nó inicial para o nó final). A segunda situação é aquela que, se o nó final do elemento é descontínuo, são posicionados dois pontos de carregamento, o primeiro é colocado a distância de $1/6$ do tamanho do elemento, e o segundo a distância de $5/6$ do tamanho do elemento (tendo em conta o sentido do nó inicial para o nó final).



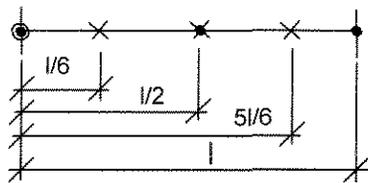
a) nó final simples



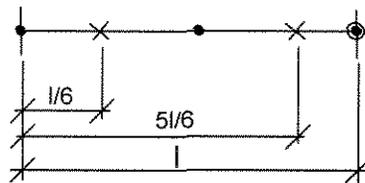
b) nó final duplo

Figura 7.1 – Detalhamento do posicionamento do ponto de carregamento em elementos lineares.

No caso de elementos quadráticos a primeira situação é quando o nó inicial do elemento é duplo, e necessita-se de três posições de colocação do ponto de carregamento dentro do elemento, em que o primeiro está à distância de $1/6$ do tamanho do elemento, o segundo é posicionado sobre o nó central do elemento e o terceiro está a distância de $5/6$ do tamanho do elemento. Na segunda situação o nó inicial do elemento é simples e neste as duas posições de ponto de carregamento são as posições do primeiro e terceiro pontos de carregamento da primeira situação.



a) nó inicial duplo



b) nó inicial simples

Figura 7.2 – Detalhamento do posicionamento do ponto de carregamento em elementos quadráticos.

7.3 – Exemplos de problemas de corpos solicitados em regime elástico:

Neste item são mostrados exemplos de chapas, que estão solicitadas nas bordas da chapa e com restrição aos deslocamentos (apoios) também aplicados às bordas das chapas.

7.3.1 – Chapas solicitadas em estado plano de tensão:

As chapas a seguir estão solicitadas no estado plano de tensão, que tem como propriedade do material as seguintes constantes, $E = 5 \text{ KN/m}^2$, $\nu = 0,3$ e as forças superficiais aplicadas no contorno, $t = 2 \text{ KN/m}^2$, com dimensão $4 \text{ m} \times 4 \text{ m}$.

Para as quatro chapas usadas na análise foram usados 32 elementos de contorno para elementos lineares e 16 elementos de contorno para elementos quadráticos. E em ambos os casos foram usados 36 nós de contorno e os seguintes tipos de elementos: elementos contínuos ao longo do contorno e elementos mistos

concorrendo as bordas das chapas. Para se calcular deslocamentos e tensões no domínio foram usados 9 pontos internos localizados de forma eqüidistante em todo o domínio.

São apresentados valores em 1/4 da chapa, e a solução analítica foi obtida em trabalho de Timoshenko [2]. Os nós de contorno e pontos internos, usados para análise de deslocamentos e tensões calculadas, são mostrados no esquema a seguir:

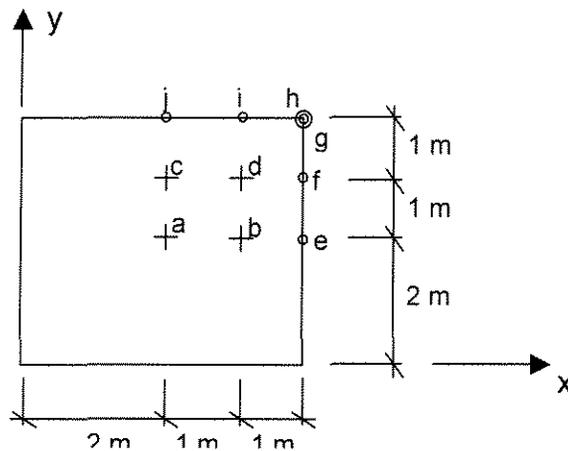


Figura 7.3 – Localização dos pontos em que são calculadas as tensões e deslocamentos.

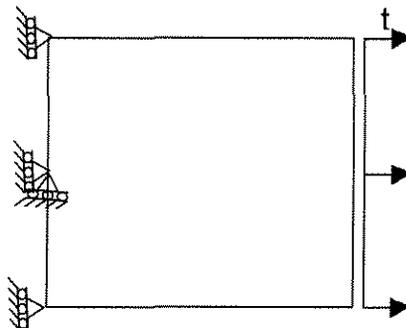


Figura 7.4 – Representação da chapa com carregamento no eixo x .

pontos	solução analítica		elementos lineares		elementos quadráticos	
	Ux	Uy	Ux	Uy	Ux	Uy
a	0,8000	0,0000	0,8000	0,0000	0,8000	0,0000
b	1,2000	0,0000	1,2000	0,0000	1,2000	0,0000
c	0,8000	-0,1200	0,8000	-0,1200	0,8000	-0,1200
d	1,2000	-0,1200	1,2000	-0,1200	1,2000	-0,1200
e	1,6000	0,0000	1,6000	0,0000	1,6000	0,0000
f	1,6000	-0,1200	1,6000	-0,1200	1,6000	-0,1200
g	1,6000	-0,2400	1,6000	-0,2400	1,6000	-0,2400
h	1,6000	-0,2400	1,6000	-0,2400	1,6000	-0,2400
i	1,2000	-0,2400	1,2000	-0,2400	1,2000	-0,2400
j	0,8000	-0,2400	0,8000	-0,2400	0,8000	-0,2400

Tabela 7.1 – Resultados de deslocamentos na chapa carregada no eixo x.

pontos	solução analítica			elementos lineares		
	sigma xx	tau xy	sigma yy	sigma xx	tau xy	sigma yy
a	2,0000	0,0000	0,0000	2,0000	0,0000	0,0000
b	2,0000	0,0000	0,0000	2,0000	0,0000	0,0000
c	2,0000	0,0000	0,0000	2,0000	0,0000	0,0000
d	2,0000	0,0000	0,0000	2,0000	0,0000	0,0000

Tabela 7.2 – Resultados de tensões na chapa para elementos lineares.

pontos	solução analítica			elementos quadráticos		
	sigma xx	tau xy	sigma yy	sigma xx	tau xy	sigma yy
a	2,0000	0,0000	0,0000	2,0000	0,0000	0,0000
b	2,0000	0,0000	0,0000	2,0000	0,0000	0,0000
c	2,0000	0,0000	0,0000	2,0000	0,0000	0,0000
d	2,0000	0,0000	0,0000	2,0000	0,0000	0,0000

Tabela 7.3 – Resultados de tensões na chapa para elementos quadráticos.

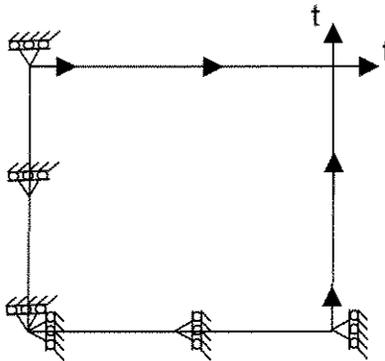


Figura 7.5 – Representação da chapa com carregamento no eixo x e y.

pontos	solução analítica			elementos lineares		
	sigma xx	tau xy	sigma yy	sigma xx	tau xy	sigma yy
a	0,0000	2,0000	0,0000	0,0000	2,0000	0,0000
b	0,0000	2,0000	0,0000	0,0000	2,0000	0,0000
c	0,0000	2,0000	0,0000	0,0000	2,0000	0,0000
d	0,0000	2,0000	0,0000	0,0000	2,0000	0,0000

Tabela 7.4 – Resultados de tensões na chapa com carregamento no eixo xy.

pontos	solução analítica			elementos quadráticos		
	sigma xx	tau xy	sigma yy	sigma xx	tau xy	sigma yy
a	0,0000	2,0000	0,0000	0,0000	2,0000	0,0000
b	0,0000	2,0000	0,0000	0,0000	2,0000	0,0000
c	0,0000	2,0000	0,0000	0,0000	2,0000	0,0000
d	0,0000	2,0000	0,0000	0,0000	2,0000	0,0000

Tabela 7.5 – Resultados de tensões na chapa com carregamento no eixo xy.

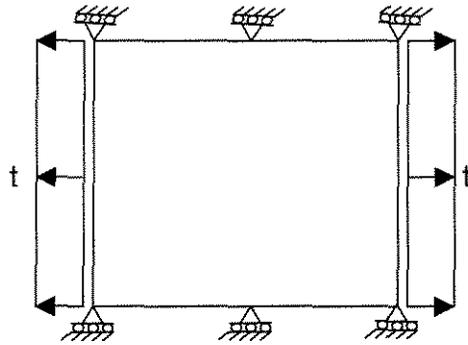


Figura 7.6 –Chapa com carregamento no eixo x e restrição em y.

pontos	solução analítica		elementos lineares		elementos quadráticos	
	Ux	Uy	Ux	Uy	Ux	Uy
a	0,7280	0,0000	0,7280	0,0000	0,7280	0,0000
b	1,0920	0,0000	1,0920	0,0000	1,0920	0,0000
c	0,7280	0,0000	0,7280	0,0000	0,7280	0,0000
d	1,0920	0,0000	1,0920	0,0000	1,0920	0,0000
e	1,4560	0,0000	1,4560	0,0000	1,4560	0,0000
f	1,4560	0,0000	1,4560	0,0000	1,4560	0,0000
g	1,4560	0,0000	1,4560	0,0000	1,4560	0,0000
h	1,4560	0,0000	1,4560	0,0000	1,4560	0,0000
i	1,0920	0,0000	1,0920	0,0000	1,0920	0,0000
j	0,7280	0,0000	0,7280	0,0000	0,7280	0,0000

Tabela 7.6 – Resultados de deslocamentos na chapa.

pontos	solução analítica			elementos lineares		
	sigma xx	tau xy	sigma yy	sigma xx	tau xy	sigma yy
a	2,0000	0,0000	0,6000	2,0000	0,0000	0,6000
b	2,0000	0,0000	0,6000	2,0000	0,0000	0,6000
c	2,0000	0,0000	0,6000	2,0000	0,0000	0,6000
d	2,0000	0,0000	0,6000	2,0000	0,0000	0,6000

Tabela 7.7 – Resultados de tensões na chapa para elementos lineares.

pontos	solução analítica			elementos quadráticos		
	sigma xx	tau xy	sigma yy	sigma xx	tau xy	sigma yy
a	2,0000	0,0000	0,6000	2,0000	0,0000	0,6000
b	2,0000	0,0000	0,6000	2,0000	0,0000	0,6000
c	2,0000	0,0000	0,6000	2,0000	0,0000	0,6000
d	2,0000	0,0000	0,6000	2,0000	0,0000	0,6000

Tabela 7.8 – Resultados de tensões na chapa para elementos quadráticos.

Os resultados de tensões obtidas para os pontos de “e” até “j” tiveram os mesmos resultados que os pontos de “a” até “d” mostrados nas tabelas anteriores.

Foi analisado o uso da equação integral de forças de superfície no contorno para os três casos de carregamento mostrados e os resultados obtidos tiveram erro de ordem menor que 10^{-5} para todos os resultados de tensões.

7.3.2 – Chapa solicitada em estado plano de deformação:

A chapa infinita a seguir está solicitada no estado plano de deformação, que tem como propriedade do material as seguintes constantes, $E = 21 \text{ KN/m}^2$, $\nu = 0,1$ e as forças superficiais aplicadas no contorno, $t = 15 \text{ KN/m}^2$, com o raio do furo de 10 m.

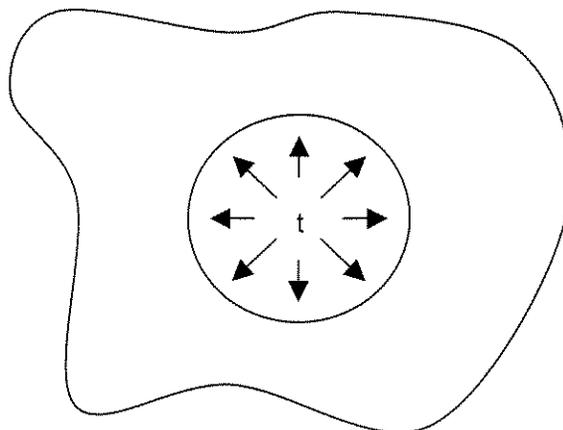


Figura 7.7 – Esquema da chapa com um furo cilíndrico.

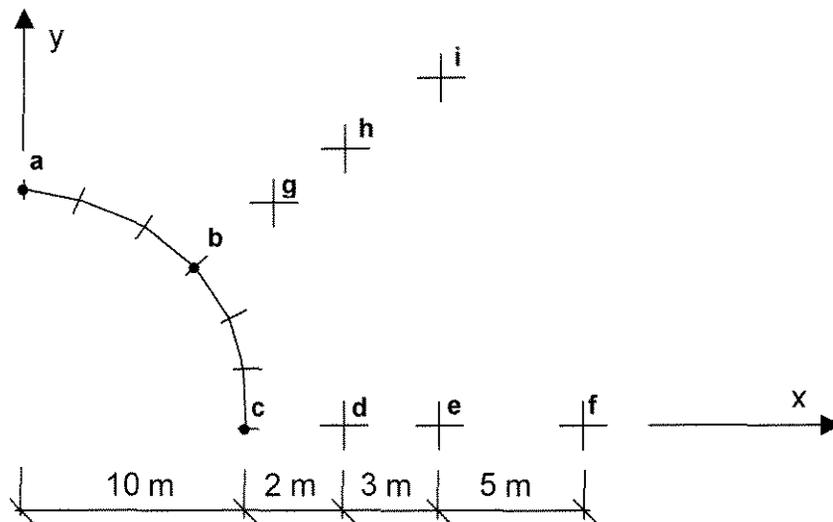


Figura 7.8 – Localização dos pontos em que são calculados as tensões e os deslocamentos.

Foram usados 24 elementos lineares de contorno, todos contínuos e 24 pontos internos (de domínio), os resultados representam 1/4 da discretização do furo completo.

Tendo em conta a simetria radial do problema, foi necessário o uso de uma nova localização de ponto de carregamento em elemento linear de nó final simples. Neste caso em que é usado um elemento reto para a geometria, a localização mais estratégica será no ponto central do elemento, foi o que apresentou os melhores resultados. Nesta análise não são apresentados resultados de tensões em nós de contorno, porque os resultados obtidos são baseados em funções de integrais hipersingulares, o que impossibilita a obtenção de resultados nos extremos do elemento por não haver continuidade da derivada da função aproximadora de deslocamentos e forças nos extremos do elemento. A solução analítica foi aquela mostrada no trabalho de Foltran [19] e os resultados de comparação com o trabalho de Brebbia *et al* [6].

pontos	solução analítica		ref. [6]		elementos lineares	
	Ux	Uy	Ux	Uy	Ux	Uy
a	0,0000	7,8571	0,0000	7,7353	0,0000	7,8793
b	5,5558	5,5558	5,4697	5,4697	5,5715	5,5715
c	7,8571	0,0000	7,7353	0,0000	7,8793	0,0000
d	6,5476	0,0000	6,4100	0,0000	6,4758	0,0000
e	5,2381	0,0000	5,1274	0,0000	5,1801	0,0000
f	3,9286	0,0000	3,8455	0,0000	3,8851	0,0000
g	4,6299	4,6299	4,5325	4,5325	4,5791	4,5791
h	3,7039	3,7039	3,6256	3,6256	3,6631	3,6629
i	2,7779	2,7779	2,7192	2,7192	2,7472	2,7472

Tabela 7.9 – Resultados de deslocamentos na chapa com furo.

pontos	solução analítica			elementos lineares		
	sigma xx	tau xy	sigma yy	sigma xx	tau xy	sigma yy
d	-10,4167	0,0000	10,4167	-10,3268	0,0000	10,3184
e	-6,6667	0,0000	6,6667	-6,5930	0,0000	6,5930
f	-3,7500	0,0000	3,7500	-3,7085	0,0000	3,7085
g	0,0000	-10,4167	0,0000	-0,0042	-10,3226	-0,0042
h	0,0000	-6,6667	0,0000	0,0000	-6,5930	0,0000
i	0,0000	-3,7500	0,0000	0,0000	-3,7085	0,0000

Tabela 7.10 – Resultados de tensões na chapa com furo.

pontos	solução analítica			ref. [6]		
	sigma xx	tau xy	sigma yy	sigma xx	tau xy	sigma yy
d	-10,4167	0,0000	10,4167	-10,2220	0,0000	10,2136
e	-6,6667	0,0000	6,6667	-6,5259	0,0000	6,5259
f	-3,7500	0,0000	3,7500	-3,6707	0,0000	3,6707
g	0,0000	-10,4167	0,0000	-0,0042	-10,2178	-0,0042
h	0,0000	-6,6667	0,0000	0,0000	-6,5259	0,0000
i	0,0000	-3,7500	0,0000	0,0000	-3,6707	0,0000

Tabela 7.11 – Resultados de tensões na chapa com furo.

7.4 – Exemplos de problemas de corpos pré-fissurados analisados pela Mecânica da Fratura Elástica Linear:

Neste item são calculados os fatores de intensidade de tensão para as chapas com trincas solicitadas no modo I e no modo II de fratura. Os tipos de trincas analisadas neste trabalho, que são: de borda, interna (ou de domínio) e inclinadas, além de se ter também à combinação entre dois tipos em uma trinca.

7.4.1 – Corpo com trinca de borda:

São usados 64 elementos lineares na primeira análise e 32 elementos quadráticos na segunda. Os resultados obtidos são para os casos em que $h/w = 0,5$ e cinco casos foram considerados $a/w = 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6$.

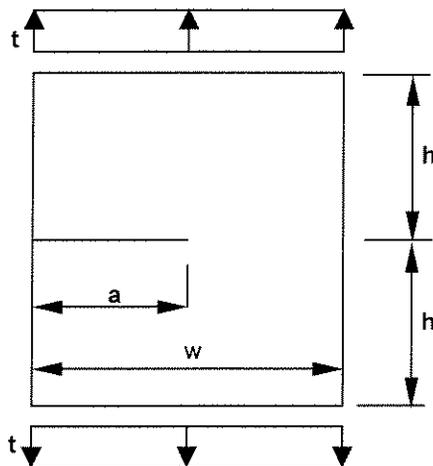


Figura 7.9 – Esquema da chapa com trinca de borda.

Na chapa foram utilizados 4 elementos quadráticos ao longo da trinca e a discretização teve a seguinte razão: 0,4; 0,3; 0,2; 0,1; e no caso de elementos lineares se manteve a proporção mas o dobro de elementos foram usados, sendo que nos dois casos o menor elemento fica na ponta da trinca. Foram avaliados três tipos de discretização, em que na primeira são utilizados elementos descontínuos ao longo da trinca e elementos descontínuos de contorno concorrendo à trinca. Na segunda discretização foram utilizados elementos mistos nos extremos da trinca e contínuos ao longo da trinca, conservando que os dois elementos mistos de contorno foram mantidos nos elementos da face concorrente a trinca. A terceira discretização usou elementos mistos nos extremos da trinca e contínuos ao longo da trinca, sem o uso dos dois elementos mistos de contorno. É necessário salientar que no contorno da chapa são usados elementos contínuos e elementos mistos concorrendo as bordas da chapa.

	ref. [18]	resultados KI (elementos lineares)			ref.[15]
	DE	DE			
a/w	numérico	discretização 1	discretização 2	discretização 3	analítico
0,2	1,566	1,563	1,514	1,511	1,488
0,3	1,962	1,943	1,882	1,882	1,848
0,4	2,230	2,458	2,380	2,380	2,324
0,5	3,268	3,201	3,100	3,100	3,010
0,6	4,580	4,438	4,400	4,397	4,152

Tabela 7.12 – Resultados de fatores no modo I ($K_I/t\sqrt{\pi.a}$) na chapa, para elementos lineares.

	ref. [18]		resultados KI (elementos quadráticos)						ref.[15]
	numérico		discretização 1		discretização 2		discretização 3		analítico
a/w	DE	DE-FG	DE	DE-FG	DE	DE-FG	DE	DE-FG	
0,2	1,566	1,618	1,519	1,582	1,522	1,594	1,557	1,631	1,488
0,3	1,962	2,014	1,959	2,024	1,957	2,035	1,957	2,035	1,848
0,4	2,230	2,537	2,495	2,555	2,503	2,579	2,496	2,571	2,324
0,5	3,268	3,292	3,268	3,313	3,300	3,364	3,292	3,357	3,010
0,6	4,580	4,558	4,586	4,591	4,675	4,705	4,671	4,701	4,152

Tabela 7.13 – Resultados de fatores no modo I ($K_I/t\sqrt{\pi.a}$) na chapa, para elementos quadráticos.

7.4.2 – Corpo com trinca interna inclinada:

Para a chapa é analisado o caso em que $h/w = 2$ e o ângulo de inclinação com a horizontal θ é 45° . São usados 72 elementos lineares de contorno na primeira análise e 36 elementos quadráticos na segunda análise. Os elementos de trinca são discretizados com as seguintes razões: 0,25; 0,15; 0,1 para elementos quadráticos e com elementos lineares se mantém a proporção, mas usa-se o dobro de elementos.

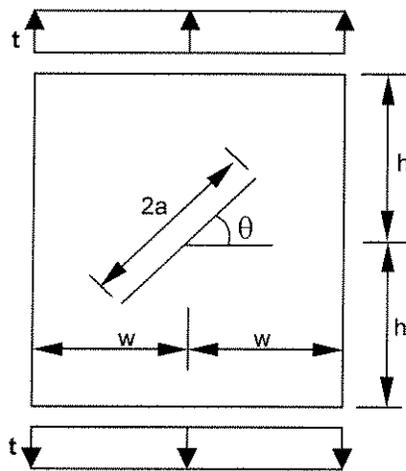


Figura 7.10 – Esquema da chapa com trinca interna inclinada.

Em relação a chapa tem-se duas discretizações adotadas para análise, em que a primeira discretização usou-se elementos descontínuos ao longo da superfície da trinca. Na segunda discretização foram usados elementos mistos nas extremidades da trinca e elementos contínuos ao longo da trinca.

	ref. [18]	resultados KI				ref.[17]
	DE	DE				
	numérico	elemento linear		elemento quadrático		analítico
a/w		discretização 1	discretização 2	discretização 1	discretização 2	
0,2	0,531	0,530	0,513	0,531	0,528	0,518
0,3	0,554	0,553	0,535	0,555	0,551	0,541
0,4	0,588	0,586	0,567	0,588	0,585	0,572
0,5	0,632	0,628	0,608	0,632	0,628	0,612
0,6	0,686	0,682	0,660	0,688	0,684	0,661

Tabela 7.14 – Resultados de fatores no modo I ($K_I/t\sqrt{\pi.a}$) na chapa.

	ref. [18]	resultados KII				ref.[17]
	DE	DE				
	numérico	elemento linear		elemento quadrático		analítico
a/w		discretização 1	discretização 2	discretização 1	discretização 2	
0,2	0,519	0,519	0,502	0,519	0,516	0,507
0,3	0,528	0,528	0,511	0,528	0,525	0,516
0,4	0,541	0,541	0,524	0,541	0,538	0,529
0,5	0,558	0,558	0,540	0,588	0,554	0,546
0,6	0,579	0,579	0,561	0,579	0,576	0,567

Tabela 7.15 – Resultados de fatores no modo II ($K_{II}/t\sqrt{\pi.a}$) na chapa.

7.4.3 – Corpo com trinca interna em forma de “v”:

A chapa tem uma trinca de geometria com duas inclinações, sendo que a parte horizontal da trinca contém a ponta A da trinca e a parte inclinada da trinca, que tem inclinação de 45° com a horizontal e contém a ponta B da trinca. Para a chapa, tem-se a relação $h/w = 2$, e três casos foram analisados: $b/a = 0,2$; $0,4$; $0,6$. Para a projeção horizontal da trinca tem-se a seguinte formula: $2c = a + \sqrt{2}b/2$. Foram utilizados 96 elementos lineares de contorno na primeira análise e 48 elementos quadráticos na segunda análise, sendo que foram utilizados 5 elementos na parte reta e 4 elementos na parte inclinada quadráticos foram usados em cada superfície de trinca e o dobro para elementos lineares.

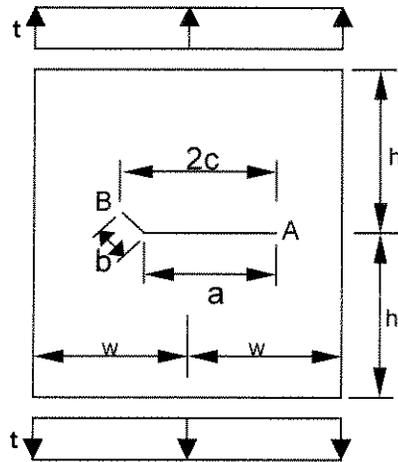


Figura 7.11 – Esquema da chapa com trinca interna em forma de “v”.

As duas discretizações usadas ao longo da trinca na chapa, são as mesmas da chapa anterior.

	ref. [18]	resultados KI em A				ref. [17]
	DE	DE				
		elemento linear		elemento quadrático		
b/a	numérico	discretização 1	discretização 2	discretização 1	discretização 2	analítico
0,2	1,021	1,021	0,988	1,021	1,015	0,995
0,4	1,018	1,018	0,985	1,018	1,012	0,990
0,6	1,017	1,017	0,983	1,016	1,011	0,986

Tabela 7.16 – Resultados de fatores no modo I ($K_I/t\sqrt{\pi.c}$) na chapa na ponta A.

	ref. [18]	resultados KII em A				ref. [17]
	DE	DE				
		elemento linear		elemento quadrático		
b/a	numérico	discretização 1	discretização 2	discretização 1	discretização 2	analítico
0,2	0,030	0,030	0,029	0,030	0,030	0,028
0,4	0,036	0,036	0,035	0,035	0,035	0,033
0,6	0,032	0,032	0,032	0,031	0,031	0,030

Tabela 7.17 – Resultados de fatores no modo II ($K_{II}/t\sqrt{\pi.c}$) na chapa na ponta A.

	ref. [18]	resultados KI em B				ref. [17]
	DE	DE				
		elemento linear		elemento quadrático		
b/a	numérico	discretização 1	discretização 2	discretização 1	discretização 2	analítico
0,2	0,634	0,628	0,636	0,633	0,596	0,598
0,4	0,603	0,600	0,606	0,603	0,569	0,574
0,6	0,595	0,593	0,600	0,596	0,562	0,568

Tabela 7.18 – Resultados de fatores no modo I ($K_I/t\sqrt{\pi.c}$) na chapa na ponta B.

	ref. [18]	resultados KII em B				ref. [17]
	DE	DE				
		elemento linear		elemento quadrático		
b/a	numérico	discretização 1	discretização 2	discretização 1	discretização 2	analítico
0,2	0,589	0,586	0,590	0,589	0,556	0,557
0,4	0,637	0,635	0,639	0,639	0,606	0,607
0,6	0,659	0,656	0,661	0,660	0,628	0,627

Tabela 7.19 – Resultados de fatores no modo II ($K_{II}/t\sqrt{\pi.c}$) na chapa na ponta B.

8 - CONCLUSÕES

Tendo em conta o uso de pontos de carregamento internos aos elementos, o método dos elementos de contorno foi aplicado com sucesso na análise de problemas em regime elástico, onde vários tipos de problemas foram analisados. Os resultados obtidos em chapas quadradas e um furo em uma chapa infinita com pressão aplicada no interior do furo resumiram as boas qualidades da técnica.

Na análise feita em chapas quadradas os resultados obtidos de deslocamentos e de tensão são iguais aos obtidos na solução analítica. As situações de carregamento observadas nos exemplos: carregamentos no eixo x (tração pura), carregamentos no eixo x e y (cisalhamento puro) e carregamento no eixo x e restrição no eixo y (efeito Poisson), ilustram perfeitamente a eficiência da análise com elementos lineares e quadráticos para os exemplos solicitados no estado plano de tensão.

A chapa infinita é carregada no interior do furo. E os resultados obtidos de deslocamentos e de tensões nos pontos analisados são bastante próximos do resultado analítico. Para poder se mostrar uma comparação com um método numérico, foi feita a comparação entre o trabalho de Brebbia *et al* [6] e a solução analítica, e os resultados obtidos na análise do presente trabalho com a estratégia de pontos de carregamento no

interior de elemento. Observam-se resultados melhores do que aqueles obtidos em Brebbia *et al* [6] com a estratégia de pontos de carregamento sobre os nós de contorno, sendo assim a análise feita em problemas de estado plano de deformação teve resultados satisfatórios e a precisão dos dados de saída dão validade a análise.

Nos exemplos de chapas com trincas que são carregadas com carga distribuída nas bordas extremas da chapas foram analisados três tipos de trincas: trinca de borda, trinca interna inclinada e trinca interna com parte inclinada e com parte reta.

Três tipos de discretização foram adotadas na trinca de borda, em que na primeira usa-se elementos descontínuos ao longo da trinca e elementos descontínuos nos elementos na face concorrente à trinca na segunda discretização foi usada a mesma estratégia da primeira discretização, mas os elementos ao longo da trinca são contínuos e finalmente na terceira discretização são usados elementos contínuos ao longo do contorno, mas não há o uso de elementos descontínuos na face concorrente a trinca. Em todos os três tipos de discretização adotadas são usados elementos contínuos ao longo das faces de contorno com o uso de elementos mistos nas bordas da chapa e nos elementos na face concorrente a trinca da terceira discretização.

Observou-se que o uso de elementos contínuos quadráticos ou lineares com pontos de carregamento internos levou a resultados comparáveis àqueles obtidos por Portela *et al* [18]. Deve-se observar que [18] usou elementos descontínuos quadráticos.

Os resultados apresentados tiveram bom desempenho em comparação aos dados obtidos no trabalho de Portela *et al* [18] levando-se em consideração os dados apresentados em Civelek [15], em que neste trabalho se considera como a referência principal de resultados.

Para os elementos lineares os resultados da discretização com elementos contínuos são melhores que as outras discretizações. Já no caso de elementos

quadráticos a análise feita apresenta melhores resultados com elementos descontínuos.

Para a trinca interna inclinada, a situação de solicitação de trinca que se apresenta, é a de modo de trinca misto, ou seja, tem-se modos I e II de trinca, portanto os resultados obtidos são em relação a K_I e K_{II} . Os resultados obtidos nas análises são satisfatórios tanto para elementos lineares quanto para elementos quadráticos quando comparados ao trabalho de Murakami [17] e de Portela *et al* [18]. Na análise, os resultados para os elementos quadráticos são ótimos, com os dois tipos de discretizações adotadas no exemplo, já com o uso de elementos lineares a discretização com elementos descontínuos apresenta melhores resultados àqueles com elementos contínuos.

Cumprir notar que as observações referentes aos dois casos foram rigorosas porque o uso de elementos contínuos lineares ou quadráticos apresentou resultados muito próximos.

Na trinca em forma de “v” este comentário continua válido, porém de acordo com K_I e K_{II} e usando as pontas A e B, chega-se à ligeira vantagem de um tipo de discretização, quando comparados ao trabalho de Murakami [17] e de Portela *et al* [18].

Porém, cabe notar que o uso de elementos contínuos permite menos avaliação do comportamento global dos deslocamentos e melhor qualidade quando se necessita extrapolar os fatores de intensidade de tensão para a ponta da trinca tendo em conta os valores obtidos para deslocamento ao longo da superfície.

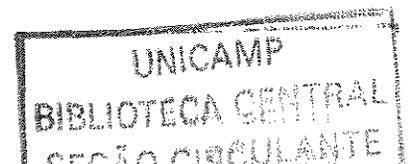
Assim, este trabalho sugere fortemente o uso de elemento contínuo com a estratégia aqui mostrada.

BIBLIOGRAFIA

- [1] CHEN, W. F. and SALEEB, A. F., *Constitutive Equations for Engineering Materials Volume 1: Elasticity and Modeling*, vol.1, West Lafayette, 1994
- [2] TIMOSHENKO, S. P. and GOODIER, J. N., *Theory of Elasticity*, 3^a ed, New York, 1970.
- [3] SAADA, A. S., *Elasticity: Theory and Applications*, Pergamon unified engineering series, New York, USA, 1973
- [4] BECKER, A. A., *The Boundary Element Method in Engineering: a Complete Course*, McGraw-Hill, London, UK, 1992.
- [5] BREBBIA, C. A. and DOMINGUES, J., *Boundary Elements: an Introductory Course*, McGraw-Hill, 2^aed, New York, USA, 1992.
- [6] BREBBIA, C. A., TELLES, J.C.F. and WROBEL, L.C., *Boundary Element Techniques, Theory and Applications in Engineering*, Springer-Verlag, Southampton, 1984.
- [7] KANE, J. H., *Boundary Element Mechanics*, In Continuum Mechanics, Clarkson University, 1994.
- [8] HYDE, T.H. AKSOGAN O. - *A Specimen for determining fracture properties under combined Modes I, II, III crack tip conditions*, Journal of strain analysis, vol 29 n^o 1, 1994.
- [9] HERTZBERG, R.W. – *Deformation of Fracture Mechanics of Engineering Materials*, 4^a edição – John Wiley & Sons 1996.

- [10] DIETER, *Mechanics Metallurgy SI Metric Edition*, Mac Graw Hill 1988.
- [11] FETT, T., H.-A.- BAHR 1999,. *Engineering fracture Mechanics* – Elsevier Science Ltda 1999 – Technical, Mode I – Stress intensity factors and Weight functions for short plates under different boundary conditions.
- [12] B. YANG, K. RAVI – Chandler, *Engineering fracture mechanics*, August 1999.
- [13] BORESIS A, SIDEBOTTOM O., SEELY F., SMITH O. – *Advanced Mechanics of Materials*, third Edition 1978, John Wiley and Sons, Inc.
- [14] BROEK, D. – *Elementary Engineering Fracture Mechanics*, Martinus Nighoff Publishers 1982.
- [15] CIVELEK, M. B. & ERDOGAN, F., 1982, *Crack problems for a rectangular plate and an infinite strip*, International Journal of Fracture, vol.19, pp.139-159.
- [16] HONG, H. & CHEN, J., 1988, *Derivations of integral equations of elasticity*, Journal Engineering Mechanics ASCE, 114, pp. 1028-1044.
- [17] MURAKAMI, Y., 1987, *Stress Intensity Factors Handbook*, Pergamon Press, Oxford.
- [18] PORTELA, A., ALIABADI, M. H. e ROOKE, D. P., 1992, *The Dual Boundary Element Method: Effective implementation for crack problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 33, pp. 1269-1287.
- [19] FOLTRAN, C. E., *Análise de Problemas Planos em Regime Elasto-plástico pelo Método dos Elementos de Contorno*, Campinas, Faculdade de Engenharia Civil – Unicamp, 1999, 227 pp. (Tese de Mestrado, financiada pela FAPESP), (Orientador Leandro Palermo Junior)
- [20] DE AQUINO, C. T. E., FERREIRA I., LANDES J. D., *Introdução à Mecânica da Fratura: Uma Abordagem Histórica*, série: Pesquisas em Engenharia de Materiais, Departamento de Engenharia de Materiais, Faculdade de Engenharia Mecânica – Unicamp, Setembro de 1998, 15 pp.
- [21] ALIABADI, M. H., *Boundary element formulations in fracture mechanics*, Appl. Mech. Rev., no 2, February 1997, pp.83-96.
- [22] ALMEIDA, L. D. F., *Análise de tensões e deformações em um corpo de prova “Compact Tension” experimentalmente por extensimetria e teoricamente por*

- MFEL*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica – Unicamp, 2002, 115 pp. (Tese de Mestrado), (Orientador Itamar Ferreira).
- [23] GRIFFITH, A. A., *The Phenomena of Rupture and Flow in Solids*, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A, Vol. 221, 163-198, 1921.
- [24] GRIFFITH, A. A., *The Theory of Rupture*, Proc. First Int. Cong. Applied Mech., DELFT, 1924.
- [25] INGLIS, C. E., *Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners*, Trans. Inst. Naval Architects, London, Vol. LV, pp. 219-230, 1913.
- [26] IRWIN, G. R., *Analysis of stress and strain near the end of a crack traversing a plate*, Journal of Applied Mechanics, ASME, vol. 79, pp. 361-364, 1957.
- [27] WESTGAARD, H. M., *Bearing Pressures and Cracks*, Journal of Applied Mechanics, A, pp. 49-53, 1939.
- [28] KUPRADZE, O. D., *Potential Methods in Methods in Theory of Elasticity*, Daniel Davy, New York, 1965.
- [29] KELLOG, O. D., *Foundations of Potential Theory*, Springer, Berlin, 1929.
- [30] JASON, M. A., *Integral Equation Methods in Potential Theory – I*, Proc. Roy. Soc. Lond., vol. A275, pp.23-32, 1963.
- [31] SYMM, G. T., *Integral Equation Methods in Potential Theory – I*, Proc. Roy. Soc. Lond., vol. A275, pp.33-46, 1963.
- [32] RIZZO, F. J., *An Integral Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics*, Quat. Appl. Math., vol.25, pp.83-92, 1967.
- [33] CRUSE, T. A., *Numerical Solution in Three Dimensional Elastostatics*, Int. J. Solids and Structures, vol.5, pp. 1259-1274, 1969.
- [34] BLANDFORD, G. E., INGRAFFEA, A. R., LIGGET J. A., *Two-dimensional stress intensity factors computations using the boundary element method*, Int. J. Numer. Methods Eng., vol. 17, pp. 387-404, 1981.
- [35] MI, Y., ALIABADI, M. H., *Dual boundary element method for three-dimensional fracture mechanics analysis*, Eng. Anal with Boundary Elements, vol. 10, pp. 161-171, 1992.



- [36] GRAY L. J., MARTHA L. F., INGRAFFEA A. R., *Hypersingular integrals in boundary element fracture analysis*, Int. J. Numer. Methods Eng., vol. 29, pp.1135-1158, 1990.
- [37] GRAY L. J., GILES G. E., *Application of thin cavity method to shield calculations in electroplating*, Boundary Element X, Brebbia C. A. (ed.),vol. 2, Comput. Mech. Publ., Southampton, pp.441-452, 1988.
- [38] LUTZ E. D., INGRAFFEA A. R., GRAY L. J., *Use of simple solutions for boundary integral methods in elasticity and fracture analysis*, Int. J. Numer. Methods Eng., vol. 35, pp.1737-1751, 1992.
- [39] WATSON J. O., *Singular boundary elements for the analysis of crack in plane strain*, Int. J. Numer. Methods Eng., vol. 38, pp. 2389-2412, 1995.
- [40] BETTI E., *Teoria dell'elasticità*, Il Nuovo Cimento, pp.7-10, 1872.
- [41] FREDHOLM I., *Sur une classe déquations fonctionelles*, Acta Math., v.27, pp.365-390, 1903.
- [42] BREBBIA C. A., *The boundary element method for engineers*, London: Pentech Press, 1978.
- [43] CRUSE T. A., *Numerical evaluation of elastic stress intensity factors by the boundary-integral equation method*, Surface cracks: Physical problems and computational solutions, Swedlow JL (ed.), ASME, pp. 153-170, 1972.
- [44] CRUSE T. A., VAN BUREN W., *Three dimensional elastic stress análisis of a fracture specimen with an edge crack*, Int. J. Fracture Mech. 7, pp. 1-15, 1971.
- [45] SNYDER M. D., CRUSE T. A., *Boundary-integral analysis of anisotropic cracked plates*, Int. J. Fracture Mech. 11, pp.315-328, 1975.
- [46] McCLINTOCK F. A., IRWIN G. R., ASTM STP 381, pp.84, 1965.