



Luiz Antonio dos Reis

**ACOPLAMENTO MEC-MEF PARA ANÁLISE DE
PÓRTICO LINEAR SOBRE BASE ELÁSTICA**

**CAMPINAS
2014**



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO

Luiz Antonio dos Reis

**ACOPLAMENTO MEC-MEF PARA ANÁLISE DE
PÓRTICO LINEAR SOBRE BASE ELÁSTICA**

Orientador: Prof. Dr. Leandro Palermo Junior

Dissertação de Mestrado apresentada a Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Unicamp, para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, na área de Estruturas.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO LUIZ ANTONIO DOS REIS E ORIENTADO PELO PROF. DR. LEANDRO PALERMO JUNIOR.

ASSINATURA DO ORIENTADOR

CAMPINAS
2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

R277a Reis, Luiz Antonio, 1975-
Acoplamento MEC-MEF para análise de pórtico linear sobre base elástica /
Luiz Antonio dos Reis. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Leandro Palermo Junior.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de
Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo.

1. Métodos de elementos de contorno. 2. Métodos dos elementos finitos. 3.
Mínimos quadrados. 4. Interação solo-estrutura. I. Palermo Junior, Leandro, 1960-
II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil,
Arquitetura e Urbanismo. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Coupling BEM/FEM to linear frames analysis on elastic foundation

Palavras-chave em inglês:

Boundary element methods

Finite element methods

Least squares

Soil-structure interaction

Área de concentração: Estruturas

Titulação: Mestre em Engenharia Civil

Banca examinadora:

Leandro Palermo Junior [Orientador]

João Batista de Paiva

Humberto Breves Coda

Data de defesa: 22-05-2014

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Civil

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO**

**ACOPLAMENTO MEC-MEF PARA ANÁLISE DE PÓRTICO
LINEAR SOBRE BASE ELÁSTICA**

Luiz Antonio dos Reis

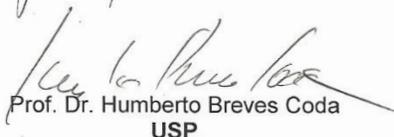
Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:



Prof. Dr. Leandro Palermo Junior
Presidente e Orientador/UNICAMP



Prof. Dr. João Batista de Paiva
USP



Prof. Dr. Humberto Breves Coda
USP

Campinas, 22 de Maio de 2014

REIS, L. A. (2014). Acoplamento MEC-MEF para análise de pórtico linear sobre base elástica. Campinas, 2014, 122p. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo - UNICAMP, Departamento de Estruturas.

RESUMO.

O presente trabalho está dividido em quatro partes.

Na primeira parte, utilizando o método dos elementos de contorno (MEC), se fez a análise de problemas bidimensionais com aproximação linear. Foi considerada a possibilidade de se aplicar a técnica de sub-regiões para se levar em conta a diversidade de materiais, bem como a suavização do contorno por mínimos quadrados para evitar as possíveis perturbações. Foi considerado a possibilidade de colocação de uma linha de carga no domínio.

Na segunda parte, utilizando o método dos elementos finitos (MEF), se fez a análise linear de pórticos planos. Para este estudo foram utilizadas barras com dois nós e essas com três graus de liberdade.

Na terceira parte, a análise elástica linear de meios contínuos (Estado Plano de Tensão Generalizado) enrijecidos com elementos lineares (barras) é estudada fazendo-se um acoplamento entre elementos modelados com o MEC e com o MEF. As fibras são modeladas pelo MEF com elementos lineares de três graus de liberdade por nó e quatro nós por barra. Os elementos planos são modelados pelo MEC com elementos isoparamétricos lineares no perímetro. É permitido o uso de sub-regiões com objetivo de generalizar o tratamento do meio elástico.

Na quarta parte, utilizando o acoplamento MEF/MEF, se fez a análise linear de pórticos planos sobre base elástica. O acoplamento se dá entre as barras do pórtico e as barras introduzidas como enriquecedor no problema elástico bidimensional.

Tendo em conta estes aspectos da formulação desenvolvida, alguns exemplos são apresentados para avaliação de seu desempenho nos problemas de engenharia.

Palavras-chave: Elementos de Contorno, Elementos Finitos, Mínimos quadrados, Acoplamento MEC/MEF.

REIS, L. A. (2014). Coupling BEM/FEM to linear frames analysis on elastic foundation. Campinas, 2014, 122p. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo - UNICAMP, Departamento de Estruturas.

ABSTRACT.

This paper is divided into four parts .

In the first part , using the boundary element method (BEM) , we did the analysis of two-dimensional problems with linear approximation . We considered the possibility of applying the technique of sub - regions to take into account different materials, as well as smoothing the contour by least squares to avoid possible disturbances . We considered the possibility of placing a load line in the field.

In the second part, the linear analysis for plane frames was carried out with the finite element method (FEM). Bars with two nodes and three degrees of freedom were used in this study .

In the third part, the linear elastic analysis of continuous media (Generalized Plane Stress problems) stiffened with one-dimensional elements (bars) is studied through between elements of the BEM and the FEM. The fibers are modeled by FEM with three degrees of freedom linear elements and using four-nodes. The plane domain is modeled with the BEM and using isoparametric elements. The use of sub - regions in order to generalize the treatment of the elastic medium is allowed.

In the fourth part , using the FEM / FEM coupling , a linear analysis of plane frames on elastic foundation is carried out.

Some examples are presented to evaluate the formulation behavior engineering problems.

Keywords: Boundary Element Method, Finite Element Method, Least Squares Method, BEM/
FEM coupling.

SUMÁRIO.

LISTA DE FIGURAS	<i>xix</i>
LISTA DE GRÁFICOS	<i>xxi</i>
LISTA DE SIMBOLOS	<i>xxiii</i>
LISTA DE SIGLAS E ABREVIACÕES	<i>xxv</i>
1. INTRODUÇÃO.....	01
1.1. REVISÃO DA BIBLIOGRAFIA.....	01
1.2. OBJETIVOS DESTE TRABALHO.....	09
1.3. JUSTIFICATIVA.....	09
1.4. METODOLOGIA DE TRABALHO.....	10
2. TEORIA DA ELASTICIDADE.....	13
2.1. ELEMENTOS DE ÁLGEBRA.....	13
2.1.1. Notação Indicial.....	13
2.1.2. Delta de Kronecker.....	15
2.2. INTRODUÇÃO.....	15
2.3. EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO (Navier).....	19
2.4. RELAÇÕES ENTRE DEFORMAÇÃO E DESLOCAMENTO.....	21
2.5. LEI DE HOOKE GENERALIZADA.....	22
2.6. EQUAÇÕES DE NAVIER.....	23

3. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.....	25
3.1. GENERALIDADES.....	25
3.2. SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS.....	28
3.2.1. Solução fundamental de Kelvin.....	29
3.2.2. Equação integral de contorno.....	30
3.3. EQUAÇÕES ALGÉBRICAS.....	33
3.4. INTEGRAIS COM RELAÇÃO AOS ELEMENTOS DE CONTORNO.....	36
3.4.1. Integrando numericamente: Deslocamentos [H] , [G] e [S].....	36
3.4.2. Integrando analiticamente: Deslocamentos - [H] , [G] e [S].....	38
3.4.2.1. Mudança de variável.....	40
3.4.2.2. Formulação condensada.....	44
3.4.3. Deslocamentos dos pontos internos- Matrizes [H'] , [G'] e [S'] :.....	45
3.4.4. Tensões nos pontos internos – Matrizes [D] e [E]:	45
3.5. SUB-REGIÕES.....	46
4. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	49
4.1. GENERALIDADES.....	49
4.2. ELEMENTOS FINITOS UNIDIMENSIONAIS.....	50
4.3. ELEMENTOS FINITOS PARA PÓRTICO PLANO.....	52
4.3.1. Funções aproximadoras para os deslocamentos.....	52
4.3.1.1. Deslocamentos devido ao carregamento axial a barra considerando dois nós por barra.....	52
4.3.1.2. Deslocamentos devido ao carregamento axial a barra considerando quatro nós por barra.....	54
4.3.1.3. Deslocamentos Devido ao Carregamento Perpendicular a Barra considerando dois nós por barra.....	54
4.3.1.4. Deslocamentos Devido ao Carregamento Perpendicular a Barra considerando quatro nós por barra.....	58
4.3.2. Matriz de rigidez do elemento finito.....	59
4.3.2.1. Matriz de Rigidez do elemento com dois nós.....	60
4.3.2.2. Matriz de Rigidez do elemento com quatro nós por barra.....	61

4.3.3. Vetor de carga nodal.....	63
4.3.3.1. Barras com dois nós.....	63
4.3.3.2. Barras com quatro nós.....	64
4.4. MATRIZ DE ROTAÇÃO.....	64
4.5. ESFORÇOS SOLICITANTES NAS BARRAS.....	68
5. MÍNIMOS QUADRADOS.....	69
5.1. GENERALIDADES.....	69
5.2. SISTEMAS DETERMINADO.....	70
5.3. SISTEMA SOBREDETERMINADO.....	70
5.4. SISTEMAS SUBDETERMINADOS.....	71
6. ANÁLISE DE PÓRITCO LINEAR SOBRE BASE LÁSTICA.....	73
6.1. GENERALIDADES.....	73
6.2. ENRIJECEDORES.....	73
6.3. ACOPLAMENTO MEC-MEF.....	74
6.3.1. Regularização pela Técnica dos Mínimos Quadrados.....	77
6.4. ACOPLAMENTO PÓRTICO PLANO COM O ENRIJECEDOR.....	77
7. O PROGRAMA.....	81
7.1. PRÉ E PÓS PROCESSAMENTO.....	81
7.1.1 Delphi®.....	81
7.1.2 Gerenciador de programas.....	82
7.1.3 Sistema gráfico.....	84
7.2. PROCESSAMENTO.....	86
7.2.1 Fortran®.....	86
7.2.2. Rotinas de Processamento.....	86
7.2.2.1. Calsoles.....	87
7.2.2.2. Malha.....	88

8. EXEMPLOS NUMÉRICOS.....	89
8.1. TIRANTE REFORÇADO COM ENRIJECEDORES.....	89
8.2. VIGA ENGASTADA SUBMETIDA A UMA CARGA DISTRIBUÍDA NA FACE SUPERIOR REFORÇADA COM UM ENRIJECEDOR EM SUA FACE INFERIOR.....	91
8.3. PÓRTICO PLANO SOBRE UM MEIO ELÁSTICO.....	94
 CONCLUSÃO.....	 99
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	 101
 ANEXO A – Rotina em MATHCAD® para matriz de rigidez	 109
ANEXO B – Integração Numérica.....	119

*Á DEUS
Aos meus pais e minha filha Maria
Carolina com todo amor e carinho.*

AGRADECIMENTOS.

A DEUS e a Nossa Senhora Aparecida por ter me dado força, esperança e paz nesta caminhada.

Ao Prof. Dr. Leandro Palermo Junior pela excelente orientação, confiança e amizade ao longo desta dissertação.

Ao amigo Prof. Dr. Wilson Sérgio Venturini (in memoriam) pelos grandes conhecimentos a mim passados.

Ao amigo Prof. Dr. José Gabriel Maluf Soler pela paciência e confiança a mim depositados.

A Minha Esposa Simone pelo incentivo, paciência e compreensão, bem como pelas artes gráficas.

A PUC Minas pela imensa oportunidade.

Ao Assistente técnico Eduardo Estevam da Silva (Secretaria de Pós-Graduação da Unicamp) pela grande atenção e colaboração referentes os assuntos da secretaria.

A todos os professores e funcionários do Departamento de Estruturas da EESC-USP, que de alguma forma colaboraram para a realização deste trabalho.

Aos demais funcionários e professores do Departamento de Estruturas da Unicamp.

LISTA DE FIGURAS.

FIGURA 2.1 – Elemento Infinitesimal.....	19
FIGURA 2.2 – Força de Superfície.....	20
FIGURA 3.1 – Corpo em Equilíbrio.....	25
FIGURA 3.2 – Região em Equilíbrio.....	26
FIGURA 3.3 – Soluções Fundamentais.....	29
FIGURA 3.4 – Ponto de Carga S no Contorno.....	31
FIGURA 3.5 – Ângulos do Ponto S Pertencente ao Contorno com Angulosidades.....	32
FIGURA 3.6 – Discretização do Elemento de Contorno.....	33
FIGURA 3.7 a) Elementos com nós contínuos.....	34
FIGURA 3.7 b) Elementos com nós descontínuos.....	34
FIGURA 3.8 – Função Aproximadora.....	34
FIGURA 3.9 – Elemento de integração com aproximação linear.....	37
FIGURA 3.10 – Ponto de colocação pertencente ao elemento.....	38
FIGURA 3.11 – Mudança de Variável.....	40
FIGURA 3.12 – Sub-Regiões.....	46
FIGURA 3.13 – Duas Sub-Regiões.....	46
FIGURA 3.14 – Sub-Região Ω_1	47
FIGURA 3.15 – Sub-Região Ω_2	47
FIGURA 4.1 (a) – Elemento Finito para treliça com dois nós.....	51
FIGURA 4.1 (b) – Elemento Finito para treliça com quatro nós.....	51
FIGURA 4.2 (a) – Elemento Finito de vigas com dois nós.....	51
FIGURA 4.2 (b) – Elemento Finito de vigas com quatro nós.....	51
FIGURA 4.3 (a) – Elmento Finito de Pórtico com dois nós.....	52
FIGURA 4.3 (b) – Elemento Finito de Pórtico com quatro nós.....	52
FIGURA 4.4 – Deslocamentos e Esforços Nodais.....	55
FIGURA 4.5 –Carregamentos em relação aos eixos $x'1$ e $x'2$	65
FIGURA 4.6 – Coordenadas no Sistema Local.....	65
FIGURA 4.7 – Coordenadas no Sistema Global.....	66
FIGURA 6.1 – Corpo Elástico Enrijecido.....	73
FIGURA 6.2 – Corpo Elástico Enrijecido+Linha de Carga.....	74

FIGURA 6.3 – Esquema onde é visualizado a linha de carga e a barra rígida.....	75
FIGURA 6.4 – Nós internos para deslocamentos no MEC.....	76
FIGURA 6.5 – Sistema de coordenadas locais.....	78
FIGURA 6.6– Sistema de coordenadas globais.....	79
FIGURA 6.7 – Esquema de coordenadas para forças de superfície.....	80
FIGURA 7.1 – Tela Inicial do Programa que faz o pré e o pós processamento.....	81
FIGURA 7.2 – Tela do Gerenciador.....	82
FIGURA 7.3 – Tela de Impressão de Dados.....	83
FIGURA 7.4 – Tela com os Dados de Resposta Obtido no Contorno.....	83
FIGURA 7.5– Resposta do Pórtico Linear.....	84
FIGURA 7.6– Tela do Programa Gráfico.....	85
FIGURA 7.7 – Tela de Apresentação das respostas em forma de cores.....	86
FIGURA 8.1 - Tirante enrijecido proposto no primeiro exemplo.....	89
FIGURA 8.2 - Dimensões e condições de contorno impostos no segundo exemplo.....	91
FIGURA 8.3 - Barra parcialmente imersa em um domínio semi-infinito.....	95

LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 5.1 – Exemplo da aplicação dos mínimos quadrados.....	69
GRÁFICO 8.1 – Deslocamentos na direção do eixo x da barra.....	90
GRÁFICO 8.2 – Forças na direção do eixo x, de superfície nas barras.....	90
GRÁFICO 8.3 – Deslocamentos na direção do eixo x.....	92
GRÁFICO 8.4 – Deslocamentos na direção do eixo y.....	92
GRÁFICO 8.5 – Forças de superfície na direção do eixo x.....	93
GRÁFICO 8.6 – Forças de superfície na direção do eixo y.....	93
GRÁFICO 8.7 – Rotação na barra erijecedora.....	94
GRÁFICO 8.8 – Gráfico deslocamento na direção x.....	95
GRÁFICO 8.9 – Gráfico de Rotação.....	96
GRÁFICO 8.10 – Força em x no Enrijecedor.....	96
GRÁFICO 8.11 – Força em y no Enrijecedor.....	97

LISTA DE SÍMBOLOS.

\bar{u}, u	<i>Deslocamentos.</i>
\bar{b}	<i>Força de massa ou volumétrica.</i>
\bar{p}	<i>Força de superfície.</i>
$\bar{\sigma}$	<i>Tensão.</i>
ϕ	<i>Funções de forma.</i>
η	<i>Cossenos diretores.</i>
E	<i>Módulo de elasticidade de Young.</i>
ν	<i>Coefficiente de Poisson.</i>
G	<i>Módulo de elasticidade transversal.</i>
Ω	<i>Domínio</i>
Γ	<i>Contorno</i>
Ω^*	<i>Domínio do problema fundamental.</i>
Γ^*	<i>Contorno do problema fundamental.</i>
$\delta(s, q)$	<i>Função delta de Dirac.</i>
δ_{ij}	<i>Função delta de Kronecker.</i>
ε_{ij}	<i>Tensor de deformações de Cauchy.</i>
u_i	<i>Componente do vetor de deslocamentos.</i>

LISTA DE SIGLAS E ABREVIACOES.

MEC..... Método dos Elementos de Contorno

MEF..... Método dos Elementos Finitos.

txt..... Aplicativo de texto do Windows.

1. INTRODUÇÃO.

1.1. REVISÃO DA BIBLIOGRAFIA.

Na engenharia, os problemas físicos são formulados através de um conjunto de equações diferenciais onde, somente em alguns casos mais simples é possível uma solução analítica, caso contrário, são utilizados os métodos numéricos.

Entre os vários métodos numéricos, empregados na resolução de problemas de engenharia, devemos citar o método dos elementos finitos e o método dos elementos de contorno, como os principais.

O método dos elementos finitos (MEF), inicialmente proposto nos trabalhos de ARGYRIS (1960), ADINI e CLOUGH (1961), MELOSH (1961) e outros, tem como idéia básica a divisão do domínio do problema em um número finito de sub-domínios, denominados de elementos finitos, que são interligados através de pontos nodais.

Para cada elemento, é possível definir de maneira aproximada as variáveis do problema e escrevê-las como combinações lineares das funções de interpolação multiplicadas por parâmetros incógnitos. O comportamento de cada elemento é analisado de forma isolada através de uma relação causa-efeito entre deslocamentos nodais e tensões ou forças e, posteriormente, o comportamento global é estruturado de tal forma que se tenha um sistema de equações algébricas com coeficientes de rigidez ou flexibilidade. Com a definição das condições de contorno e do carregamento da estrutura, o sistema de equações é resolvido e as incógnitas básicas do problema são determinadas.

Atualmente, o MEF encontra-se em um estágio bastante avançado, constituindo-se no método numérico mais utilizado para solução dos mais variados problemas de engenharia de forma que, tem se mostrado como uma boa opção de cálculo, principalmente nos problemas com domínios finitos, não-homogêneos, anisotrópicos e, também, no estudo do comportamento não-linear.

O método dos elementos de contorno (MEC), inicialmente, foi conhecido como método das equações integrais de contorno, pois os problemas eram resolvidos através de equações integrais sobre o contorno do domínio. Posteriormente, BREBBIA (1978a e 1978b) tratou o método das equações integrais de contorno de uma maneira mais conveniente, denominando-o método dos elementos de contorno.

Na evolução do MEC, encontram-se os chamados métodos indiretos onde as variáveis envolvidas não são as variáveis físicas do problema e, os métodos diretos nos quais a formulação é desenvolvida considerando-se as variáveis reais do problema.

Em uma determinada estrutura, as equações integrais de contorno são transformadas em equações algébricas. O contorno do domínio é discretizado em uma série de elementos de contorno e, o domínio em sub-domínios, nos quais são admitidas funções de interpolação, tanto para a geometria do elemento quanto para as variáveis envolvidas.

Os pontos de colocação são escolhidos em número suficiente para se obter um sistema de equações determinado. Definindo-se o carregamento e as condições de contorno da estrutura, o sistema de equações é resolvido e as variáveis do contorno determinadas. A análise de qualquer ponto no interior do domínio é feita em função dos valores das variáveis, obtidos para os pontos do contorno.

De acordo com TELLES e BREBBIA (1979, 1980a e 1980b), é possível estudar o comportamento não-linear das estruturas através do MEC e resolver problemas elasto-plásticos e visco-plásticos, empregando-se tensões ou deformações iniciais.

VENTURINI (1982 e 1984) e VENTURINI e BREBBIA (1983 e 1984), utilizaram o MEC para resolver problemas geotécnicos, considerando o comportamento plástico, visco-plástico e materiais rochosos sem resistência à tração e, também, com descontinuidades.

O MEC se apresenta como uma boa opção de cálculo em problemas de domínios infinitos, semi-infinitos e regiões de grande concentração de tensões, entretanto, sua utilização na análise de problemas de engenharia ficaria restrita se não permitisse a combinação entre partes de diferentes naturezas, tendo muitas vezes também que serem tratados por métodos numéricos diferentes.

A idéia da combinação do método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos parece ter sido utilizados, inicialmente, em 1972 por McDONALD e WEXLER, para análise de problemas na área de engenharia elétrica e em 1974 por CHEN e MEI em mecânica dos fluidos.

Os trabalhos de ZIENKIEWICZ et al (1977), SHAW e FALBY (1977) e de OSIAS et al (1977), foram os primeiros a tratar sólidos onde uma parte é analisada via elementos de contorno e o restante do domínio é discretizado e analisado pelo método dos elementos finitos.

BREBBIA e GEORGIU (1980) analisaram problemas bidimensionais através da combinação MEC-MEF. O programa desenvolvido combina elementos de contorno constantes com elementos finitos quadráticos e, embora esta combinação não seja totalmente compatível, foram obtidos bons resultados.

WOOD e CREED (1982) estudaram a interação solo-estrutura apresentando resultados da análise de uma plataforma “off-shore” apoiada em fundação composta por estacas.

MITSUI (1985) apresentou um esquema de combinação MEC-MEF utilizando-o no estudo de problemas elasto-dinâmicos bidimensionais.

BEER (1985 e 1986) analisou problemas geomecânicos de domínio infinito, modelando-se as regiões de comportamento plástico através do método dos elementos finitos e as regiões de comportamento elástico através do método dos elementos de contorno.

KOBAYASHI e MORI (1986), DANGLA (1988), ESTORFF e KAUSEL (1989), estudaram problemas de interação solo-estrutura onde fizeram uma análise estática e dinâmica para os casos bidimensional e tridimensional.

ZAILU e JIGUANG (1987) mostraram que a combinação MEC-MEF é vantajosa em relação ao MEF, no estudo de tensões em vigas de alma esbelta e estruturas celulares compostas de placas finas na região onde existe grande gradiente de tensão.

CEN e DU (1987) aplicaram a combinação MEC-MEF em problemas com domínios de formas geométricas complexas.

RAMALHO e VENTURINI (1990) e RAMALHO (1990), analisaram no caso estático, estruturas interagindo com o meio contínuo onde o solo é modelado pelo MEC e, uma sapata rígida é utilizada como artifício para determinar as constantes de mola dos vínculos da estrutura global que é tratada pelo MEF.

CODA (1993) apresentou uma formulação tridimensional dinâmica transiente para a análise específica da ligação estrutura-solo, onde a estrutura (casca, barra) é modelada pelo MEF e o solo, admitindo-se comportamento elástico linear, é modelado pelo MEC.

FERRO e VENTURINI (1991 e 1992) e FERRO (1993) aplicaram a combinação MEC-MEF para analisar a interação entre estacas e o solo. As estacas são consideradas como elementos de barras e modeladas pelo método dos elementos finitos e, o solo como um domínio infinito, tridimensional, homogêneo elástico linear é tratado pelo método dos elementos de contorno. Com isto, resulta um sólido infinito tridimensional enrijecido.

FOLTRAN (1999) estuda problemas planos em regime elástico e elasto-plástico pelo método dos elementos de contorno, onde ele propõe o uso de expressões analíticas para as integrais sobre o contorno para elementos isoparamétricos lineares. Inclui também expressões analíticas para o tratamento de carregamentos de domínio com células lineares.

LEITE, CODA e VENTURINI (2003) apresentam um estudo bidimensional de sólidos reforçados com barras usando o método dos elementos de contorno. Estes reforços feitos por fibras são feitos com sub-regiões onde é realizada uma redução dos graus de liberdade do contorno através de uma aproximação linear de deslocamento da seção transversal do enrijecedor. Fazendo a integração da solução fundamental de Kelvin de forma totalmente analítica, tanto para as integrais singulares como para as não singulares.

FERNANDES e VENTURINI (2002) e FERNANDES (2003), também aplica a técnica de redução de graus de liberdade no acoplamento MEC-MEC, para problemas em placas.

De forma semelhante, LOVÓN (2003), MACIEL (2003) obtiveram a integração totalmente analítica da solução fundamental de Kelvin, LOVÓN (2003) empregando-as para análise de erro em modelos auto-adaptativos e MACIEL (2003) utilizando também de forma analítica as equações dos gradientes de tensão para estudo de problemas de fissuras.

BOTTA e VENTURINI (2003) desenvolve o acoplamento MEC-MEF em chapas, estudando problemas de contato, na interface entre o domínio e o enrijecedor, e ainda para

minimizar perturbações indesejáveis nos resultados nesta interface é aplicada à técnica de suavização do contorno com mínimos quadrados. Este trabalho ainda trata de problemas de localização.

BOTTA (2003) estuda o acoplamento MEC/MEF para modelar o meio contínuo com fibras. Para isso o autor utiliza uma técnica com mínimos quadrados para reduzir o número de equações do problema, geradas a mais do que o número de incógnitas em função da adoção de diferentes aproximações polinomiais para aproximar deslocamentos e forças nas fibras. O autor desenvolve uma formulação não-linear com o método dos elementos de contorno para análise numérica de sólidos danificados, considerando-se o fenômeno da localização de deformações.

WUTZOW (2003) aplica a formulação linear do MEC para meios elásticos enrijecidos. O método do acoplamento entre o meio contínuo e o enrijecedor é abordado de duas maneiras: A primeira utilizando sub-regiões e a segunda, condensando as variáveis de contorno para a linha central do enrijecedor, que juntamente com a integração analítica dos termos da equação Somigliana apresentam segundo o autor, bons resultados, eliminando perturbações em enrijecedores finos. O autor ainda apresenta a técnica de suavização por meio de mínimos quadrados como alternativa para melhorar oscilações de forças ocorridas na superfície de contato.

FERNANDES (2003) apresenta uma formulação do MEC, onde considera vigas como sendo uma variação da espessura da placa. Os enrijecedores, neste caso as vigas, são apresentadas por seus eixos médios, a fim de reduzir o número de graus de liberdade do problema.

ALMEIDA (2003) e RIBEIRO (2005) utilizam a solução fundamental de Kelvin, para a modelagem do solo tridimensionalmente pelo MEC. A superestrutura é modelada pelo MEF,

sendo composta por elementos planos e reticulares com seis graus de liberdade por nó. A fim de evitar recalques diferenciais significativos, o autor aborda a importância em considerar a superfície de deslocamento nulo ou não.

WAIDEMAM (2007) propõe uma formulação do MEC, com campos de tensões iniciais, consistindo assim em uma alternativa à forma clássica de tratamento de problemas desse gênero, que é por sub-regiões, para a análise de placas enrijecidas, considerando-se não-linearidades física e geométrica.

De forma semelhante AZEVEDO (2007) apresenta uma formulação alternativa do MEC o com campos de tensões iniciais. O autor propõe a inclusão de domínios anisotrópicos em meios isotrópicos, ou ainda, o estudo de domínios completamente anisotrópicos.

RIBEIRO (2009) apresenta um estudo do acoplamento solo-estrutura, onde o maciço é considerado não-homogêneo, ampliando a técnica proposta por VENTURINI (1992). O autor emprega a solução de Kelvin e uma técnica alternativa que é baseada no relacionamento das soluções fundamentais de deslocamento dos diferentes domínios, permitido que sejam analisados com um único sólido sem a necessidade de equações de equilíbrio e compatibilidade. O acoplamento MEC/MEF é feito transformando as cargas de superfície do MEC em carregamentos nodais reativos no MEF.

KZAM (2009) utiliza o MEC para análise de problemas da mecânica da fratura. O autor propõe a utilização de elementos de contorno curvos de qualquer ordem, através dos polinômios de Lagrange. Destaca-se ainda a técnica de subtração de singularidades para utilização de pontos fonte sobre o contorno do problema.

ROCHA (2009) realiza o acoplamento MEC/MEF para o estudo de meios elásticos bidimensionais enrijecidos considerando modelo de aderência no contato e um estudo sobre

erros de integração numérica. O autor utiliza os mínimos quadrados para tentar melhorar a qualidade das respostas, mas segundo o autor, esta técnica não é suficiente para suavizar as oscilações de força de superfície nos extremos dos elementos acoplados.

SILVA (2010) desenvolve uma formulação alternativa para o acoplamento MEC/MEF para análise não linear geométrica de estruturas reticuladas ligadas a meios contínuos bidimensionais heterogêneos, aplicado a problemas de interação solo-estrutura. O autor utiliza uma generalização do grau de aproximação dos elementos através dos polinômios de Lagrange, o que permite a utilização de elementos curvos de alta ordem e utiliza ainda a técnica dos mínimos quadrados para reduzir as oscilações de forças de superfície no contato.

O método dos elementos finitos e o método dos elementos de contorno são duas técnicas numéricas amplamente difundidas e de grande aplicação em problemas relevantes da engenharia. A principal vantagem de combinação MEC-MEF é a possibilidade de se utilizar o método mais apropriado para cada sub-estrutura. Uma desvantagem que se destaca são as dificuldades encontradas no tratamento do sistema de equações, onde do MEF resulta uma matriz simétrica e do MEC uma matriz cheia e não simétrica.

As equações são escritas para cada uma das duas sub-estruturas e o acoplamento é executado impondo-se o equilíbrio das forças de superfície e a compatibilidade dos deslocamentos nos pontos de interface MEC-MEF.

Dois procedimentos podem ser utilizados para montar o sistema de equações. O primeiro consiste em tratar a região do MEC como elemento finito transformando-se adequadamente as matrizes, sendo o sistema de equações montado para o MEF. No segundo, o MEF é tratado como um elemento de contorno manipulando-se as matrizes de modo a serem implementadas

no sistema de equações montado para o MEC. A utilização de outro procedimento depende basicamente de qual sub-estrutura, MEF ou MEC é predominante.

1.2. OBJETIVOS DESTE TRABALHO.

Este trabalho tem como objetivo principal utilizar a combinação MEC-MEF para se determinar os esforços solicitantes em um pórtico plano, apoiado sobre um meio contínuo e elástico, considerando a análise linear.

Entretanto outros objetivos foram estabelecidos. O primeiro foi desenvolver um programa orientado a objeto que pudesse auxiliar a na entrada e saída de dados e com isto tornar a utilização do método dos Elementos de Contorno e Método dos elementos finitos mais amigáveis. O segundo foi desenvolver uma rotina para se fazer a discretização do contorno para aplicação dos elementos de contorno. O terceiro foi o desenvolvimento de uma rotina para solução de sub-regiões. O quarto e último foi o desenvolvimento de uma rotina para resolver domínio enrijecido com barras, aplicando a técnica dos mínimos quadrados para se evitar possíveis perturbações.

1.3. JUSTIFICATIVA.

Nas últimas décadas a análise estrutural vem sofrendo inúmeras modificações. Os projetistas passaram a automatizar os cálculos e paralelamente o meio científico e acadêmico vem tentando entender cada vez melhor o comportamento das estruturas.

As estruturas de concreto armado ou de aço são dimensionadas até hoje, com raras exceções, sobre apoios indeslocáveis, este modelo de cálculo é um modelo simplificado, e não representa a realidade, pois, o solo, base de apoio, é deslocável. O deslocamento do apoio pode afetar toda

a estrutura, sendo assim, a análise solo-estrutura torna-se cada vez mais importante e necessária, principalmente em grandes obras e em solos heterogêneos.

1.4. METODOLOGIA DE TRABALHO.

Para a realização deste trabalho fez-se um programa de computador utilizando as linguagens DELPHI® e FORTRAN®.

Com o intuito de tornar a utilização mais amigável fez-se um pré e um pós- processamento em DELPHI®. Este programa além de contar com uma tela que faz o gerenciamento de tudo, possui um módulo de desenho assistido por computador, ou seja, utiliza um módulo semelhante ao AUTOCAD® para fazer a entrada de dados e fazer a visualização dos resultados.

Todas as informações utilizadas no programa feitas em DELPHI® foram gravadas ou lidas a partir de bancos de dados ou de arquivo de documentos não formatados – txt. Para o caso particular do modulo gráfico, os dados são gravados e lidos a partir de um arquivo de documentos não formatados que contém informações como coordenadas dos nós, incidências e características físicas das barras.

Além do gerenciamento e do módulo gráfico o programa permite manipular e visualizar os dados em forma de tabelas e de forma gráfica, onde todas as informações podem ser impressas.

Fez-se um gerador de malha em FORTRAN® para facilitar a discretização das peças. Apesar de que para os métodos dos elementos de contorno haver a necessidade de discretização apenas do contorno, o gerador faz a discretização do domínio para que se possa fazer os gráficos em forma de iso-valores.

Para o processamento foi utilizado à linguagem FORTRAN®, por se tratar de uma linguagem matemática, este processamento faz a leitura da entrada de dados e grava as respostas em um arquivo de documentos não formatado – txt e resolve:

- Problemas elásticos bidimensional utilizando o método dos elementos de contorno com ou sem sub-regiões, bem como a utilização sub-elementos para melhorar a solução de integração numérica;
- Problemas elásticos bidimensional utilizando o método dos elementos de contorno mais mínimos quadrados. As equações extras podem ser geradas a partir da colocação do ponto fonte em cima da barra ou fora dela;
- Problemas elásticos bidimensional utilizando o método dos elementos de contorno com o uso de enrijecedores de barras com três graus de liberdade por nó e quatro nós por barra;
- Análise de pórtico plano considerando análise linear em conjunto ou não com os itens anteriores.

Fez-se também um programa, em MATHCAD®, que se encontra no anexo A que faz a dedução das funções de forma e das matrizes de rigidez e de carregamento para um número qualquer de pontos sobre a barra de Pórtico ou Treliça.

2. TEORIA DA ELASTICIDADE.

Neste capítulo serão apresentados alguns dos conceitos básicos da teoria da elasticidade, baseados em TIMOSHENKO & GOODIER (1980). Estes conceitos servirão para uma melhor compreensão deste trabalho.

2.1 ELEMENTOS DE ÁLGEBRA.

2.1.1. Notação Indicial.

Foi introduzida por Einstein para denotar grandezas em espaços de dimensões superior a 3.

A notação indicial é bastante útil quando se quer escrever grandes equações de forma compacta é uma notação vantajosa e frequentemente encontrada, sendo assim, ela será bastante utilizada neste trabalho.

a) Definição.

Um conjunto de variáveis x, y, z é geralmente denotado por x_i ($i = 1, 2, 3$), um sistema de notações utilizando índices e definido como notação indicial. O intervalo do índice deve ser sempre fornecido.

b) Somatório.

Considere a equação geral do plano:

$$ax+by+cz+d=0 \tag{2.1}$$

Podemos escrever em notação indicial a Equação (2.1), ficando:

$$a_1 x_1+ a_2 x_2+ a_3 x_3 = - d \tag{2.2}$$

Escrevendo a Equação (2.2) de forma compacta, temos:

$$\sum_{i=1}^3 a_i x_i = -d \quad (2.3)$$

Ou simplesmente a Equação (2.3) fica:

$$a_i x_i = -d \quad (2.4)$$

A repetição de um índice num termo representará um somatório com respeito a este índice num intervalo de variação. Este índice por se repetir é chamado de índice mudo ou repetido.

Quando o índice aparece somente uma vez como é o caso do j da Equação (2.5) é chamado de livre e indica o número de equações.

$$G = a_{ij} x_i \quad (2.5)$$

c) Diferenciação.

As operações de diferenciação também podem ser representadas por notação indicial. A vírgula acompanhada por índices representa a derivada com relação às coordenadas referidas a estes:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = f_{i,j} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k} = f_{i,jk} \quad (2.7)$$

2.1.2. Delta de Kronecker.

O delta de Kronecker é um operador linear denominado por δ_{ij} , onde:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (2.8)$$

Para o espaço bidimensional os índices i e j variam de 1 a 2 e para o espaço tridimensional de 1 a 3.

2.2. INTRODUÇÃO.

Para as definições aqui apresentadas serão consideradas verdadeiras todas as seguintes suposições:

- Considera-se o material elástico-linear.
- Considera-se pequenos deslocamentos e rotações.
- Admite-se material homogêneo, contínuo e isotrópico.

Analisar uma estrutura com as características descritas acima, em qualquer um de seus infinitos pontos, representa verificar através dos fundamentos físicos, os campos de deslocamentos, tensões e deformações, para um dado condicionamento externo de carregamento e de vinculação no seu contorno.

O problema elástico, portanto, fica formulado mediante equações diferenciais e algébricas, descritas a seguir:

- 3 equações de equilíbrio;
- 6 relações deformação-deslocamento;
- 6 relações tensão-deformação.

Equações estas que envolvem variáveis independentes x, y, z que são:

- 6 componentes de tensão;
- 6 componentes de deformação;
- 3 componentes de deslocamento.

As variáveis com suas componentes para um problema tridimensional que satisfaz as suposições acima são:

- Deslocamento:

$$\bar{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}$$

Em notação indicial:

$$\bar{u} = u_i \quad (i = 1,3)$$

- Força de massa ou volumétrica:

$$\bar{b} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix}$$

Em notação indicial:

$$\bar{b} = b_i \quad (i = 1,3)$$

- Força de superfície:

$$\bar{P} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix}$$

Em notação indicial:

$$\bar{P} = P_i \quad (i = 1,3)$$

- Deformação:

$$\bar{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{Bmatrix}$$

Em notação indicial:

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \quad (i = 1,3 ; j = 1,3)$$

- Tensão:

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Em notação indicial:

$$\bar{\sigma} = \sigma_{ij} \quad (i = 1,3 ; j = 1,3)$$

Os problemas da teoria da elasticidade se dividem basicamente em dois planos:

- Os problemas de estado plano de tensões;
- Os problemas de estado plano de deformações;

O estado plano de tensão é caracterizado por elementos em forma de chapas planas, com uma das dimensões do corpo for muito menor que as outras duas, com carregamentos constantes no seu plano, então se supõem que as tensões ao longo da terceira direção são nulas;

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (2.9)$$

E o estado plano de deformações é caracterizado por elementos que possuem a sua dimensão no eixo z , muito maior que no plano x - y . As cargas são paralelas ao plano x - y e não variam no eixo z , então se supõem que todas as seções transversais estão com as mesmas condições, sendo assim pode-se considerar que os deslocamentos e , portanto, as deformações na direção de z serão nulas.

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (2.10)$$

2.3. EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO (Navier).

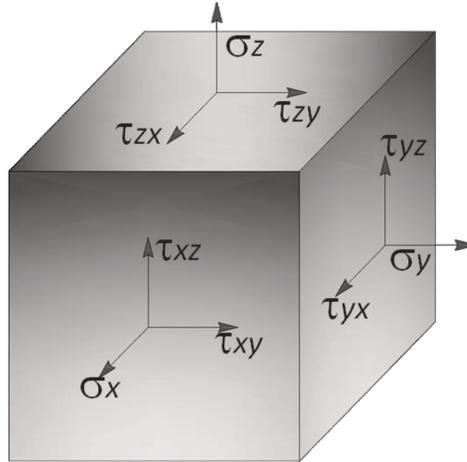


FIGURA 2.1 – Elemento infinitesimal.

Se tais condições abaixo forem satisfeitas, o elemento da FIGURA 2.1 está em equilíbrio em qualquer um de seus pontos.

De acordo com a FIGURA 2.1 temos:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + b_y = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z = 0 \quad (2.13)$$

Em notação indicial:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (i, j = 1,3) \quad (2.14)$$

Onde:

$\sigma_{ij,j}$ - São tensões internas;

b_i - São forças externas por unidade de volume;

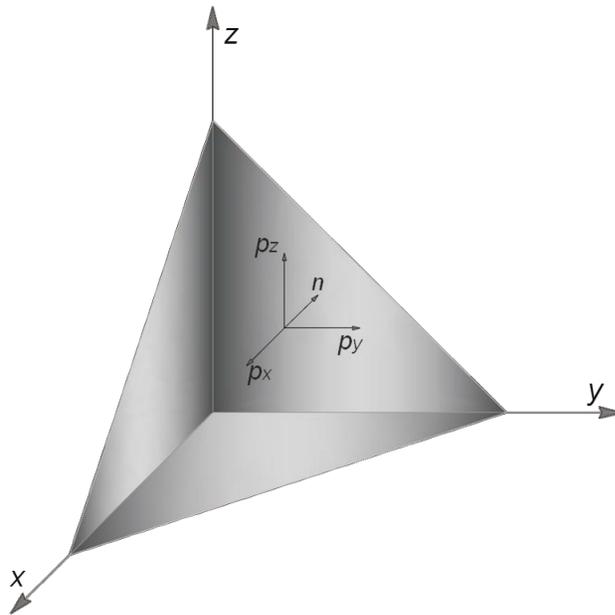


FIGURA 2.2 – Forças de superfície.

De acordo com a FIGURA 2.2 temos as condições de contorno dadas pela Fórmula de Cauchy:

$$P_i = \sigma_{ji}\eta_j \quad (2.15)$$

Onde:

σ_{ji} - São tensões internas;

P_i - São forças externas por unidade de superfície;

η_j - São os co-senos diretores;

Considerando também, o equilíbrio de momentos:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy} \text{ e } \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (2.16)$$

2.4 RELAÇÕES ENTRE DEFORMAÇÃO E DESLOCAMENTO.

A deformação é a variação dos deslocamentos em relação ao espaço cartesiano, descrição

Lagrangeana, assim:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (2.17)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (2.18)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2.19)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (2.20)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \quad (2.21)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad (2.22)$$

E pela notação indicial:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.23)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.24)$$

2.5 LEI DE HOOKE GENERALIZADA.

Na teoria da Elasticidade a relação linear entre tensão e deformação é chamada de lei de Hooke Generalizada.

Para materiais isotrópicos a relação é dada por:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.25)$$

Onde C_{ijkl} é um tensor de quarta ordem, contendo as propriedades elásticas do material.

Podemos simplificar o tensor C_{ijkl} reduzindo-o a apenas duas constantes com as suposições feitas já mencionadas. Em geral as constantes são:

E – Módulo de elasticidade longitudinal;

ν - Coeficiente de Poisson;

Assim pode se escrever a relação tensão deformação como sendo:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (2.26)$$

Onde:

$$\lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \quad (2.27)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.28)$$

As expressões (2.27) e (2.28) são as chamadas Constantes de Lamè, e são válidas para estado plano de deformação e tridimensionais, para problemas planos de tensão será mostrado adiante.

Podemos colocar a deformação em função da tensão invertendo a expressão (2.26) que resulta na expressão (2.29) abaixo:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (2.29)$$

2.6. EQUAÇÕES DE NAVIER.

A Equação (2.30) representa a equação diferencial em tensões, que pode ser escrita em função dos deslocamentos, também conhecida como Equação de Navier.

$$\frac{1}{(1-2\nu)} u_{j,ij} + u_{i,ij} + \frac{b_i}{G} = 0 \quad i, j = 1, \dots, 3 \quad (2.30)$$

3. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.

Neste capítulo serão apresentados conceitos e formulações sobre o método dos elementos de contorno encontrados em BREBBIA(1978) e FOLTRAN(1999).

3.1. GENERALIDADES.

O método dos elementos de contorno é um método numérico, assim como o método dos elementos finitos, utilizado para resolver equações integrais. Pode ser obtido de várias formas, como por exemplo, através do teorema da reciprocidade de Betti ou através do método dos resíduos ponderados. Neste trabalho utilizará do teorema da reciprocidade de Betti.

O MEC possui vantagens e desvantagens em relação aos outros métodos. Como vantagem pode citar: Melhor solução para problemas infinitos, eficiência comprovada em zonas de concentração de tensões, menor trabalho computacional, menor número de equações a serem resolvidas e simplificação dos dados de entrada. Como desvantagens têm uma matriz cheia e não simétrica e exige solução de integrais singulares.

Seja um estado de equilíbrio sob a ação de cargas ou deslocamentos:

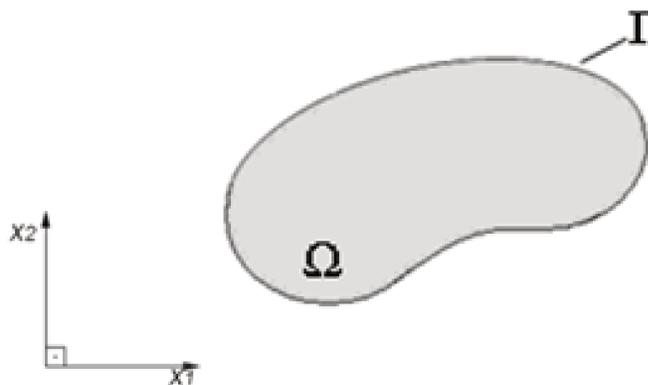


FIGURA 3.1 – Corpo em equilíbrio.

As condições de contorno para o problema da FIGURA 3.1 podem ser:

- Condições de contorno essenciais: Estas condições equivalem no problema elástico aos deslocamentos.

$$u = \bar{u} \quad (3.1)$$

- Condições de contorno naturais: equivalem as forças de superfície:

$$P = \bar{P} \quad (3.2)$$

Considerando uma região exterior a região da FIGURA 3.1, ela também está em equilíbrio.

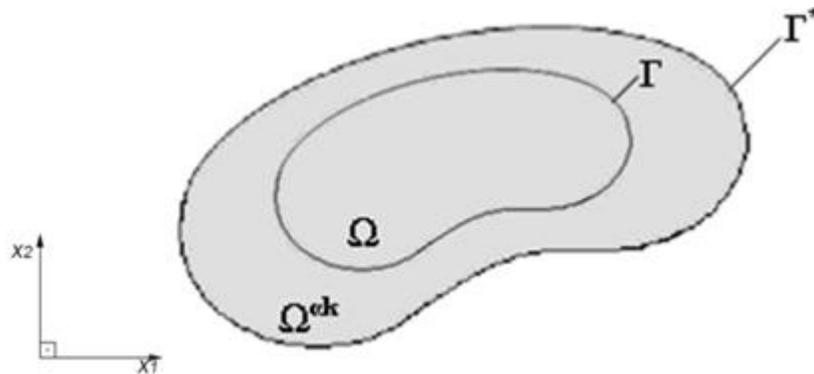


FIGURA 3.2 – Região em equilíbrio.

Aplicando a Lei de Hooke Generalizada nos domínios da FIGURA 3.2 temos:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.3)$$

$$\sigma_{ij}^* = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^* \quad (3.4)$$

Multiplicando a Equação (3.3) por ε_{ij}^* :

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{kl} (C_{klij} \varepsilon_{ij}^*) \quad (3.5)$$

Sabe-se que:

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad (3.6)$$

Substituindo a Equação (3.6) e Equação (3.4) na Equação (3.5), chegamos:

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{kl} (C_{klij} \varepsilon_{ij}^*) = \varepsilon_{kl} \sigma_{kl}^* \quad (3.7)$$

A partir da Equação (3.7) podemos escrever:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega \quad (3.8)$$

Podemos escrever a Equação (3.8) em termos de deslocamentos fazendo a substituição das deformações pela expressão (2.24).

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \cdot u_{i,j} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \cdot u_{i,j}^* d\Omega \quad (3.9)$$

Integrando por partes ambos dos lados da Equação (3.9) e utilizando a equação de equilíbrio (2.24) juntamente com a equação de Cauchy (2.15), chega-se na expressão:

$$\int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega + \int_{\Gamma} p_i^* u_i d\Gamma = \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_i u_i^* d\Gamma \quad (3.10)$$

A Equação (3.10) corresponde ao segundo Teorema de Betti.

Se considerarmos b^* como forças concentrada aplicadas em um ponto s em cada uma das direções, temos:

$$b_i^* = \delta(s, q)\delta_{ki} \quad (3.11)$$

$\delta(s, q)$ é a função Delta de Dirac representada por:

$$\begin{aligned} \delta(s, q) &= 0 \quad \text{se } s \neq q \\ \delta(s, q) &= \infty \quad \text{se } s = q \end{aligned} \quad (3.12)$$

Substituindo a Equação (3.11) em (3.10) obtemos:

$$u_i(s) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, q)P_j(q)d\Gamma(q) - \int_{\Gamma} P_{ij}^*(s, q)u_j(q)d\Gamma(q) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(s, q)b_j(q)d\Omega(q) \quad (3.13)$$

A Equação (3.13) é conhecida como Identidade Somigliana para deslocamentos e permite calcular os deslocamentos nos pontos internos a partir dos valores obtidos para o contorno.

3.2. SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS.

Em um corpo deformável com domínio Ω e um contorno Γ , para um ponto qualquer S , as equações de equilíbrio em função dos deslocamentos é representada por:

$$Gu_{i,jj}^* + \frac{G}{1-2\nu}u_{j,ij}^* + \delta(s, q)P_j = 0 \quad (3.14)$$

Existem soluções diferentes que podem ser empregadas, que variam tanto em relação à região como as condições de contorno. Neste trabalho será utilizada somente a solução

fundamental de Kelvin que corresponde à ação no ponto “q” (ponto campo) devido a uma aplicação de uma carga unitária no ponto “s” (ponto fonte).

3.2.1. Solução fundamental de Kelvin.

Admite-se de acordo com a FIGURA 3.3 um domínio Ω^* e um contorno Γ^*

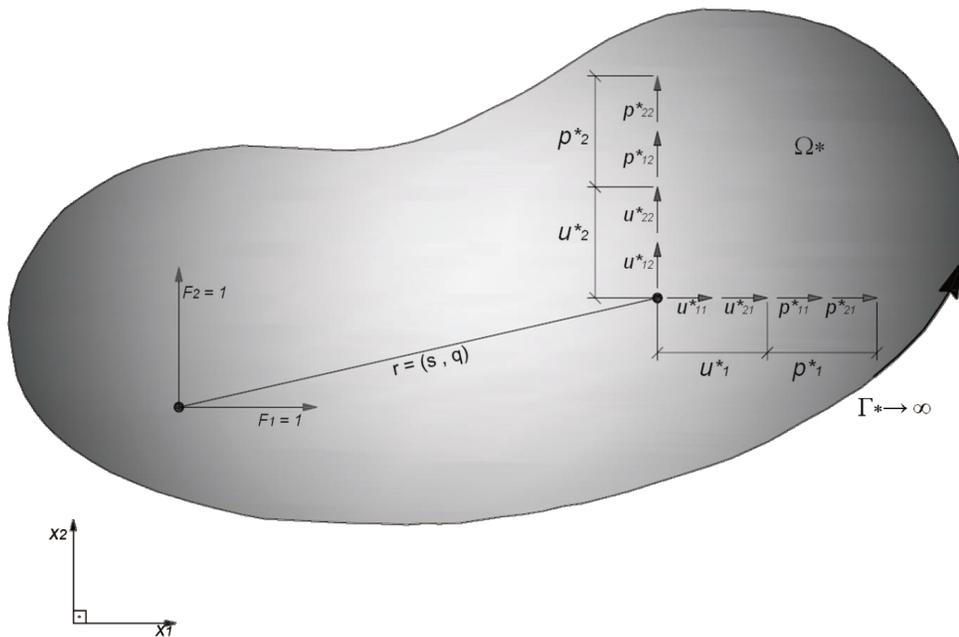


FIGURA 3.3 – Soluções fundamentais.

Resolvendo a Equação (3.14) e admitindo estado plano de deformação, obtém-se a seguinte solução fundamental para os deslocamentos:

$$u^*_{ij} = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[-(3 - 4\nu) \ln(R) \delta_{ij} + R_{,i} R_{,j} \right] \quad (3.15)$$

Utilizando as relações da teoria da elasticidade já apresentadas chega-se a solução fundamental para a deformação (Equação (3.16)), para a tensão (Equação (3.17)) e para as forças de superfície (Equação (3.18)):

$$\varepsilon_{ijk}^* = \frac{-1}{8\pi G(1-\nu)R} [(1 - 2\nu)(R_{,k}\delta_{ij} + R_{,j}\delta_{ik}) - R_{,i}\delta_{jk} + 2R_{,i}R_{,j}R_{,k}] \quad (3.16)$$

$$\sigma_{ijk}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)R} [(1 - 2\nu)(R_{,k}\delta_{ij} + R_{,j}\delta_{ik}) - R_{,i}\delta_{jk} + 2R_{,i}R_{,j}R_{,k}] \quad (3.17)$$

$$p_{ij}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)R} [(1 - 2\nu)(R_{,n}\delta_{ij} + R_{,j}\eta_i - R_{,i}\eta_j) + 2R_{,i}R_{,j}R_{,n}] \quad (3.18)$$

Onde:

- R é a distância do ponto fonte (s) até o ponto campo (q);

- $\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n}$;

Para estado plano de tensão basta substituir, nas equações anteriores o ν por um valor aparente $\bar{\nu} = \frac{\nu}{1+\nu}$.

3.2.2. Equação integral de contorno.

Quando o ponto fonte está sobre o contorno ocorre uma singularidade do tipo $1/r$ como pode observado nas Equações (3.17) e (3.18).

Com o intuito de eliminar a singularidade utiliza-se de um artifício que soma ao contorno um semicírculo de raio infinitesimal ε de acordo com a FIGURA 3.4, fazendo com que o ponto fique interno.

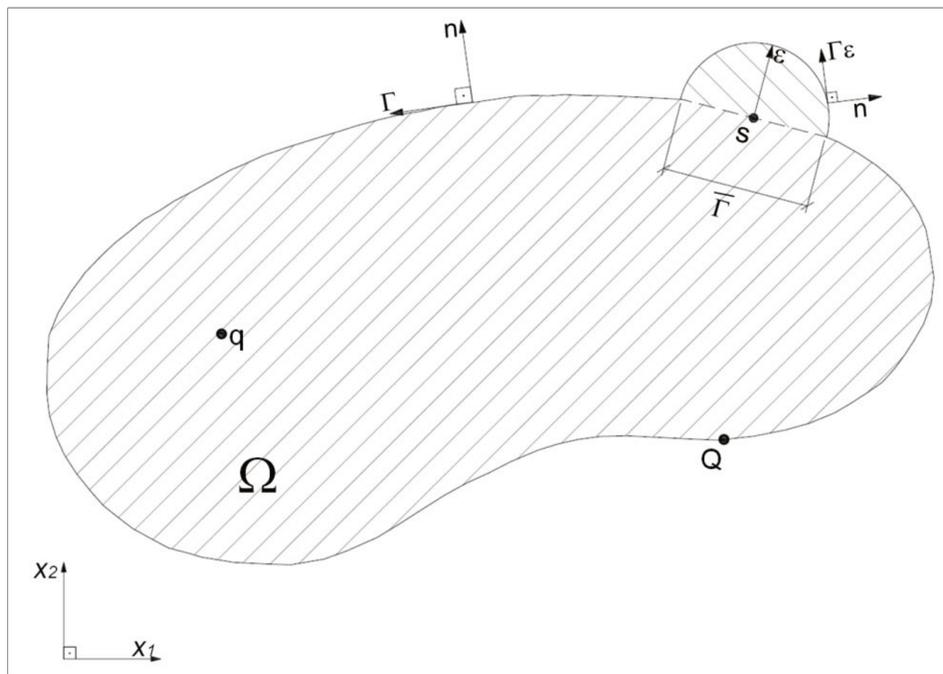


FIGURA 3.4 – Ponto de carga s no contorno.

Sendo assim é possível resolver a equação integral (Equação (3.13)) fazendo:

$$u_i(s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, q) P_j(q) d\Gamma(q) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma} P_{ij}^*(s, q) u_j(q) d\Gamma(q) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{ij}^*(s, q) b_j(q) d\Omega(q) \quad (3.19)$$

Resolvendo adequadamente os limites da expressão (3.19) encontramos a Somagliana para pontos de contorno:

$$c_{ij}u_i(s) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, q) P_j(q) d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{ij}^*(s, q) u_j(q) d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ij}^*(s, q) b_i(q) d\Omega \quad (3.20)$$

Os coeficientes de “c” podem ser expressos Matricialmente por:

- $c_{ij} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$ - Para pontos no contorno sem angulosidade;

- $c_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ - Para pontos fora do domínio;

- $c_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ - Para pontos internos;

$$c = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\cos(2\gamma)\sin(\alpha)}{4\pi(1-\nu)} & \frac{\sin(2\gamma)\sin(\alpha)}{4\pi(1-\nu)} \\ \frac{\sin(2\gamma)\sin(\alpha)}{4\pi(1-\nu)} & \frac{\alpha}{2\pi} - \frac{\cos(2\gamma)\sin(\alpha)}{4\pi(1-\nu)} \end{bmatrix} \text{ - Para contornos com angulosidades;}$$

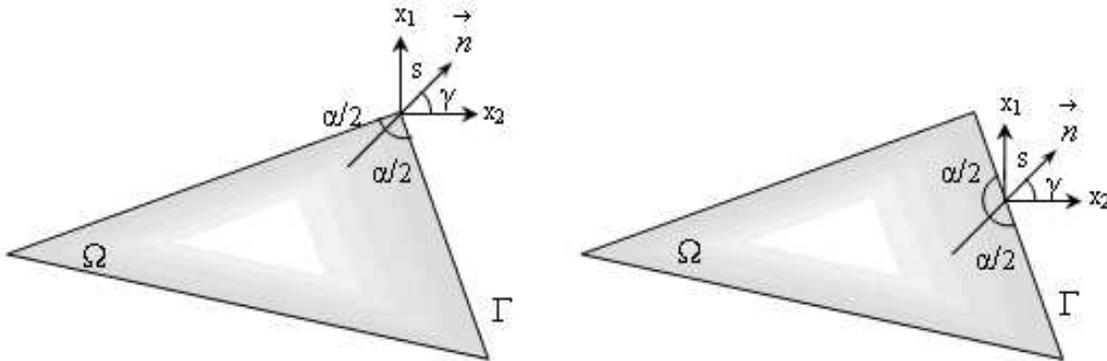


FIGURA 3.5 – Ângulos do ponto s pertencente ao contorno com angulosidades.

Tendo em conta a solução de problemas planos, a solução para carga unitária em domínio planos, análoga à de Kelvin, LOVE (1984) para problemas tridimensionais.

O vetor de forças de domínio b_j pode ser empregado para tratar o efeito de uma linha de cargas (f_j), sendo assim a Equação (3.20) pode ser escrita:

$$c_{ij}(s)u_i = \int_{\Gamma} u_{ij}^* P_j d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{ij}^* u_j d\Gamma + \int_{\Gamma_f} f_j u_{ij}^* d\Gamma_f \quad (3.21)$$

3.3. EQUAÇÕES ALGÉBRICAS.

As equações integrais descritas anteriormente, apresentam soluções analíticas não muito simples de se resolver, tornando-se recomendável um procedimento numérico. Neste item as equações integrais se transformaram em um sistema linear de equações algébricas. Teoricamente é possível escrever-se infinitas equações algébricas em pontos dentro e fora do domínio.

De acordo com a FIGURA 3.6 podemos discretizar o contorno em segmentos de retas onde se precisa saber apenas a coordenada inicial e final da barra.

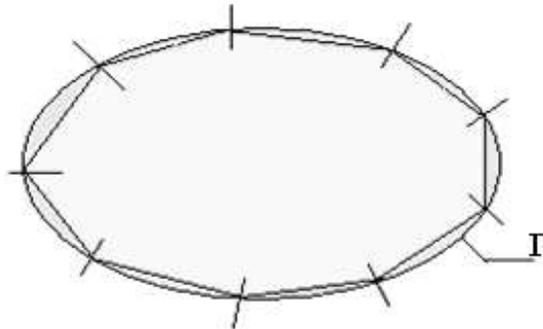


FIGURA 3.6 – Discretização do Elemento de Contorno.

Na discretização do contorno Γ , são utilizados pontos simples e pontos duplos, FIGURA 3.7 (a) e (b). Quando o ponto pertence a dois elementos consecutivos é denominado ponto simples, caso contrário são considerados pontos duplos.

Os pontos duplos possuem a mesma posição geométrica, porém, pertencem a elementos de contorno diferentes, e permitem considerar descontinuidade de forças de superfície.

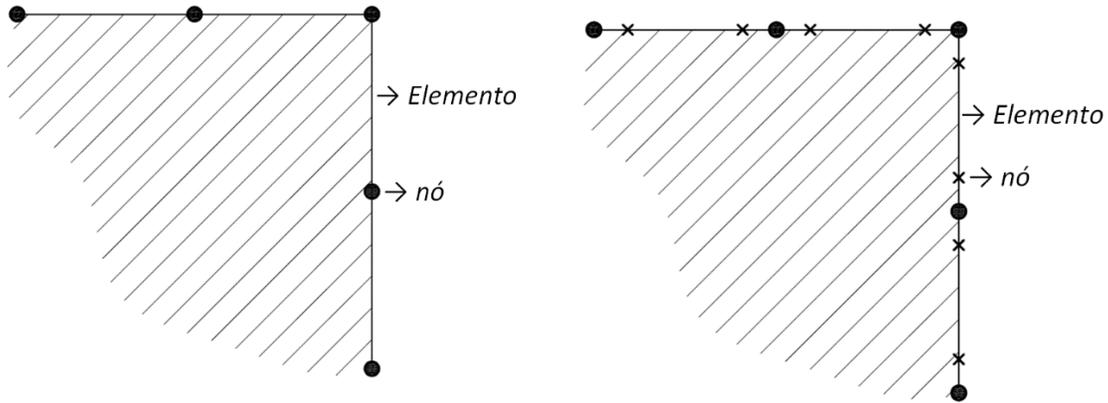


FIGURA 3.7. (a) – Elementos com nós contínuos , (b) Elementos com nós descontínuos

Admite-se uma função aproximadora linear, de acordo com a FIGURA 3.8, para definir a geometria dos elementos de contorno.

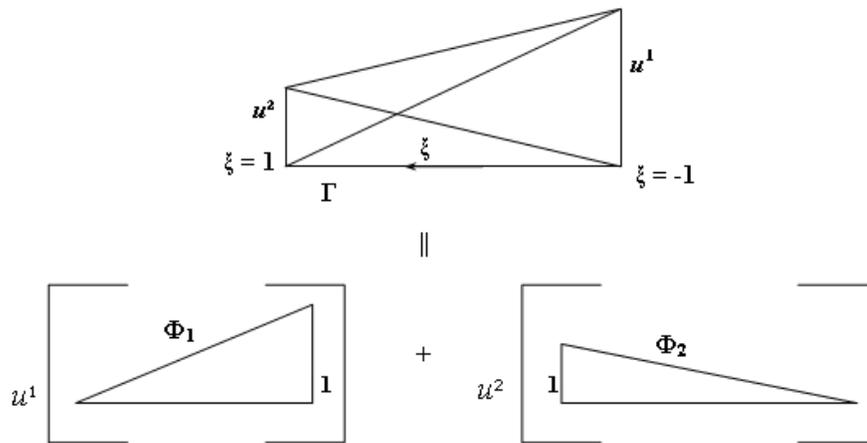


FIGURA 3.8 - Funções aproximadoras lineares.

As coordenadas de um ponto qualquer Q, FIGURA 3.9 , pertencente ao contorno, são escritas em termos de funções aproximadoras e de valores nodais.

$$X_j(q) = \phi_m(q)X_j^{K,m} = \phi_1(q)X_j^{K,1} + \phi_2(q)X_j^{K,2} \quad (3.22)$$

Onde:

j – Direção dos eixos;

m – ponto utilizado na aproximação;

k – número do elemento considerado;

Com as devidas aproximações das variáveis, a equação integral dos deslocamentos de um determinado ponto (s) do contorno (Equação 3.21), é discretizada da seguinte forma,

$$c_{ij}u_j = \sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j} u_{ij}^* p_j d\Gamma - \sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j} p_{ij}^* u_j d\Gamma + \sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j} u_{ij}^* f_j d\Gamma \quad (3.23)$$

Onde u e p são expressos em funções aproximadoras:

$$u_j^k = \phi_m U_j^{km} \quad (3.24)$$

$$p_j^k = \phi_m P_j^{km} \quad (3.25)$$

O índice k representa o elemento, m o nó, j a direção da componente e ϕ_m a função aproximadora.

Neste trabalho será adotado tanto para os deslocamentos quanto para as forças uma aproximação linear, sendo assim ϕ_m fica expresso por:

$$\phi_m = [\phi_1 \quad \phi_2] \quad (3.26)$$

Onde \emptyset_1 e \emptyset_2 serão:

$$\emptyset_1 = \frac{1-\xi}{2} \quad (3.27)$$

$$\emptyset_2 = \frac{1+\xi}{2} \quad (3.28)$$

Substituindo as Equações (3.24) e (3.25), em (3.23):

$$c_{ij}u_j = -\sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} P_{ij}^* \phi_m d\Gamma_j \right) U_j^m + \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} U_{ij}^* \phi_m d\Gamma_j \right) P_j^m + \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} U_{ij}^* \phi_m d\Gamma_j \right) f_j^m \quad (3.29)$$

As integrais que aparecem na Equação (3.29) podem ser resolvidas numericamente ou analiticamente, na sequencia são mostradas as formulações dos dois procedimentos:

3.4. INTEGRAIS COM RELAÇÃO AOS ELEMENTOS DE CONTORNO.

3.4.1. Integrando numericamente: Deslocamentos - [H], [G] e [S].

Para o ponto (s) não pertencente ao elemento de contorno Γ_e que está sendo integrado, FIGURA (3.9), utiliza-se um procedimento numérico no cálculo das integrais.

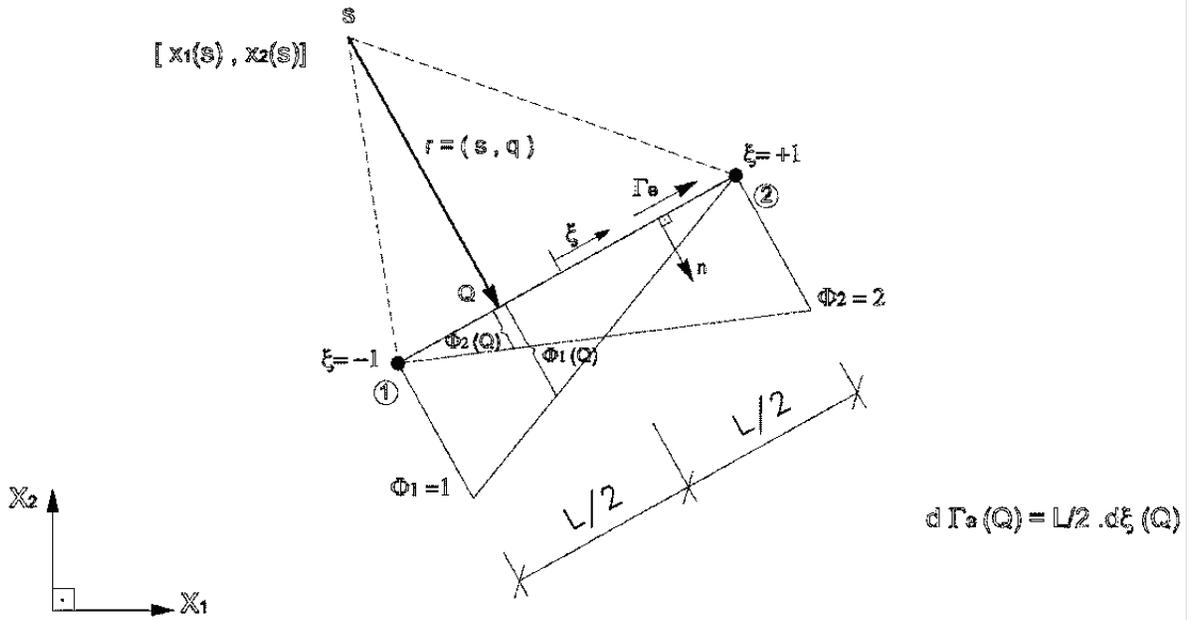


FIGURA 3.9 – Elemento de integração com aproximação linear.

Sendo assim as integrais da Equação (3.29) são expressas por:

$$G_{ij} = \int_{\Gamma} u^* d\Gamma = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \int_{\Gamma} [-(3-4\nu)\ln(R)\delta_{ij} + R_{,i}R_{,j}] d\Gamma \quad (3.30)$$

$$G_{ij} = \frac{L}{16\pi\mu(1-\nu)} * \sum_{ig=1}^{NPG} \{[-(3-4\nu)\ln(R_{ig})\delta_{ik} + R_{,i}R_{,j}]w_{ig}\} \quad (3.31)$$

$$H_{ij} = \int_{\Gamma} p^* d\Gamma \quad (3.32)$$

$$H_{ij} = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \int_{\Gamma} \frac{1}{R} [(1-2\nu)(R_{,n}\delta_{ij} + R_{,j}\eta_i - R_{,i}\eta_j) + 2R_{,i}R_{,j}R_{,n}] d\Gamma \quad (3.33)$$

$$H_{ij} = \frac{-L}{8\pi(1-\nu)} \sum_{ig=1}^{NPG} \left\{ \frac{1}{R_{ig}} [(1-2\nu)(R_{,n}\delta_{ij} + R_{,j}\eta_i - R_{,i}\eta_j) + 2R_{,i}R_{,j}R_{,n}] w_{ig} \right\} \quad (3.34)$$

Para se determinar a matriz S, o elemento de contorno Γ_e passa a ser a linha de carga no interior do domínio, explicitada por:

$$S_{ij} = \int_{\Gamma} u^* d_{\Gamma} = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \int_{\Gamma} [-(3-4\nu)\ln(R)\delta_{ij} + R_{,i}R_{,j}] d\Gamma \quad (3.35)$$

Os índices ‘i’ e ‘j’ representam respectivamente o sentido da força no ponto S e o sentido da reação no ponto Q.

Para um domínio 2D os índices i e j podem variar,

$$i = 1,2;$$

$$j = 1,2;$$

Variando os índices temos:

$$G = \begin{bmatrix} G^{11} & G^{12} \\ G^{21} & G^{22} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$H = \begin{bmatrix} H^{11} & H^{12} \\ H^{21} & H^{22} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$S = \begin{bmatrix} S^{11} & S^{12} \\ S^{21} & S^{22} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

3.4.2. Integrando analiticamente: Deslocamentos - [H], [G] e [S].

De acordo com FOLTRAN (1999) quando o ponto pertence ao elemento, as integrais devem ser avaliadas em termos do valor principal de Cauchy. Esta situação está representada na FIGURA 3.10:

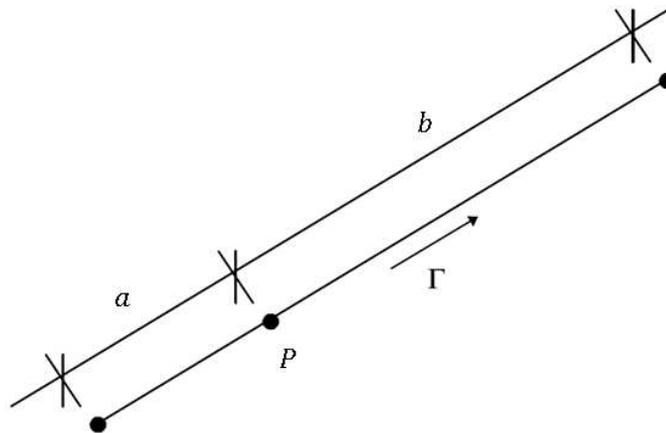


FIGURA 3.10 - Ponto de colocação pertencente ao elemento.

A formulação para esta situação da matriz h é:

$$h_{12}^1 = -\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)L} \left[b \ln\left(\frac{b}{a}\right) - L \right] \quad (3.39)$$

$$h_{12}^2 = -\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)L} \left[a \ln\left(\frac{b}{a}\right) + L \right] \quad (3.40)$$

As equações Equações (3.39) e Equação (3.40) podem ser utilizadas para calcular a matriz h tanto para nós contínuos quanto para nós descontínuos.

Quando o ponto está sobre o nó inicial (a=0)ou final (b=0) a formulação é utilizada para nós contínuos, sendo assim substituindo a=0 na Equação (3.39) ,

$$h_{12}^1 = -\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)L} [b \ln(b) - L] \quad (3.41)$$

$$h_{12}^2 = -\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \quad (3.42)$$

Substituindo b = 0 na Equação (3.40) ,

$$h_{12}^1 = -\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \quad (3.43)$$

$$h_{12}^2 = -\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)L} [a \ln(a) - L] \quad (3.44)$$

Para valores de “a” e “b” diferentes de zero a formulação é utilizada para nós descontínuos.

Trocando o sentido da força no ponto S as equações anteriores podem ser expressas:

$$h_{21}^1 = -h_{12}^1 \quad (3.45)$$

$$h_{21}^2 = -h_{12}^2 \quad (3.46)$$

Para as matrizes G_{ij} e S_{ij} , tanto para nós contínuos quanto para nós descontínuos temos,

$$G_{ij}^1 = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)L} \left\{ r_{,i}r_{,j}L^2 - \delta_{ij}(3-4\nu) \left[\ln(a^{a^2+2ab}b^b) - L\left(\frac{L}{2} + b\right) \right] \right\} \quad (3.47)$$

$$G_{ij}^2 = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)L} \left\{ r_{,i}r_{,j}L^2 - \delta_{ij}(3-4\nu) \left[\ln(b^{b^2+2ab}a^a) - L\left(\frac{L}{2} + a\right) \right] \right\} \quad (3.48)$$

$$S_{ij}^1 = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)L} \left\{ r_{,i}r_{,j}L^2 - \delta_{ij}(3-4\nu) \left[\ln(a^{a^2+2ab}b^b) - L\left(\frac{L}{2} + b\right) \right] \right\} \quad (3.49)$$

$$S_{ij}^2 = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)L} \left\{ r_{,i}r_{,j}L^2 - \delta_{ij}(3-4\nu) \left[\ln(b^{b^2+2ab}a^a) - L\left(\frac{L}{2} + a\right) \right] \right\} \quad (3.50)$$

O índice sobrescrito de G, H e S representam a função aproximadora e os índices 'i' e 'j' representam respectivamente o sentido da força no ponto S e o sentido da reação no ponto Q.

3.4.2.1. Mudança de variável.

Passando as incógnitas 'a' e 'b' das expressões analíticas anteriores para a variável adimensional ξ e condensando temos:

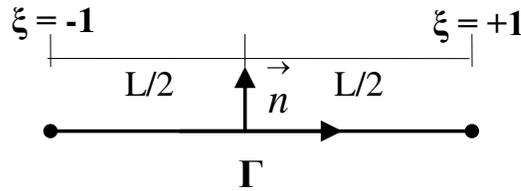


FIGURA 3.11 – Mudança de variável.

Adotando-se uma aproximação linear para ξ ,

$$\xi = ax + b \quad (3.51)$$

$$\text{Para } x = 0 \rightarrow \xi = -1$$

$$\text{Para } x = L \rightarrow \xi = 1$$

$$\begin{cases} -1 = 0 * a + b \\ 1 = L * a + b \end{cases} \quad (3.52)$$

Resolvendo o sistema de Equações (3.52) obtêm-se:

$$\xi = \frac{2}{L}x - 1 \quad (3.53)$$

Fazendo $x = a$ e substituindo na Equação (3.53),

$$\xi = \frac{2a}{L} - 1 \quad (3.54)$$

Colocando a Equação (3.54) em função de ξ temos:

$$a = \frac{L}{2}(\xi + 1) \quad (3.55)$$

Para a variável 'b' fazemos:

$$b = L - a \quad (3.56)$$

Substituindo a Equação (3.55) na Equação (3.56) obtêm-se:

$$b = \frac{L}{2}(1 - \xi) \quad (3.57)$$

Substituindo as Equações (3.57) e (3.55) nas Equações (3.39) e (3.40), temos para nós descontinuos:

$$h_{12}^1 = -\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \left[1 - \frac{1}{2}(1-\xi) \ln \left(\frac{(1-\xi)}{(1+\xi)} \right) \right] \quad (3.58)$$

$$h_{12}^2 = -\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \left[-1 - \frac{1}{2}(1+\xi) \ln \left(\frac{(1-\xi)}{(1+\xi)} \right) \right] \quad (3.59)$$

Generalizando as Equações (3.56) e (3.57) temos:

$$h_{ij}^m = (j-i) \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \left[(-1)^m - \frac{1}{2}(1+(-1)^m \xi) \ln \left(\frac{(1-\xi)}{(1+\xi)} \right) \right] \quad (3.60)$$

Onde m representa a função aproximadora.

Substituindo as Equações (3.57) e (3.55) nas Equações (3.47), (3.48), temos para nós contínuos e descontinuos:

$$G_{ij}^1 = \frac{L}{16\pi\mu(1-\nu)} \left\{ r_{,i} r_{,j} - \delta_{ij} (3-4\nu) \frac{Fat}{L^2} \right\} \quad (3.61)$$

Onde Fat é dado,

$$Fat = L^2 \ln(0,5) + \frac{L^2}{4} (\xi - 1)^2 \ln(L(1 - \xi)) + \frac{L^2}{4} (2\xi - \xi^2 + 3) \ln(L(1 + \xi)) + \frac{L^2}{2} (\xi - 2) \quad (3.62)$$

Simplificando as Expressões (3.61) e (3.62) temos:

$$G_{ij}^1 = \frac{L}{16\pi\mu(1-\nu)} \left\{ r_{,i} r_{,j} - \delta_{ij} (3-4\nu) Fat \right\} \quad (3.63)$$

$$Fat = \ln(0,5) + 0,25(\xi - 1)^2 \ln(L(1 - \xi)) + 0,25(3 + 2\xi - \xi^2) \ln(L(1 + \xi)) + \frac{(\xi-2)}{2} \quad (3.64)$$

$$G_{ij}^2 = \frac{L}{16\pi\mu(1-\nu)} \{r_i r_j - \delta_{ij}(3 - 4\nu)Fat\} \quad (3.65)$$

$$Fat = \frac{1}{L^2} \left[L^2 * \ln(0,5) + \frac{L^2}{4} (\xi + 1)^2 \ln(L(1 + \xi)) - \frac{L^2}{4} (\xi^2 + 2\xi - 3) \ln(L(1 - \xi)) - \frac{L^2}{2} (\xi + 2) \right] \quad (3.66)$$

Simplificando as expressões (3.65) e (3.66) obtêm-se:

$$G_{ij}^2 = \frac{L}{16\pi\mu(1-\nu)} \{r_i r_j - \delta_{ij}(3 - 4\nu)Fat\} \quad (3.67)$$

$$Fat = \ln(0,5) + 0,25(\xi + 1)^2 \ln(L(1 + \xi)) - 0,25(\xi^2 + 2\xi - 3) \ln(L(1 - \xi)) - \frac{(\xi+2)}{2} \quad (3.68)$$

Condensando as Equações (3.41), (3.42), (3.43), (3.44):

Fazendo $b = L$ na Equação (3.37), obtêm-se para o ponto no nó inicial:

$$h_{12}^1 = -\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)L} (L \ln(L) - L) \quad (3.69)$$

$$\begin{cases} h_{12}^{11} = -\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} (\ln(L) + (-1)) \\ h_{12}^{21} = -\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \end{cases} \quad (3.70)$$

Fazendo $a = L$ na Equação (3.38), obtêm-se para o ponto no nó final:

$$\begin{cases} h_{12}^{12} = -\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \\ h_{12}^{22} = -\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} (\ln(L) - 1) \end{cases} \quad (3.71)$$

Generalizando as Equações (3.70) e (3.71) :

$$h_{ij}^{mn} = (-1)^n (i - j) (\delta_{mn} * \ln(L) + (-1)^{\delta mn}) \left(\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \right) \quad (3.72)$$

3.4.2.2 . *Formulação condensada.*

- Formulação final para a matriz H: Nós contínuos:

$$h_{ij}^{mn} = (-1)^n (i - j) \left(\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \right) (\delta_{mn} \ln(L) + (-1)^{\delta mn}) \quad (3.73)$$

- Formulação final para a matriz H: Nós descontínuos:

$$h_{ij}^m = (j - i) \left(\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \right) \left((-1)^{m-1} - \frac{1}{2} (1 + (-1)^m * \xi) \right) \ln \left(\frac{1-\xi}{1+\xi} \right) \quad (3.74)$$

- Formulação final para a matriz G: Nós contínuos e descontínuos:

$$G_{ij}^m = \frac{L}{16\pi\mu(1-\nu)} \{r_{,i}r_{,j} - \delta_{ij}(3 - 4\nu)Fat\} \quad (3.75)$$

$$Fat = \ln(0,5) + 0,25((-1)^{m-1}\xi - 1)^2 [\ln(L) + \ln(1 - (-1)^{m-1}\xi)] + 0,25[3 + 2(-1)^{m-1}\xi - \{(-1)^{m-1}\xi\}^2] [\ln(L) + \ln(1 + (-1)^{m-1}\xi)] + 0,5[(-1)^{m-1}\xi - 2] \quad (3.76)$$

- Formulação final para a matriz S: Nós contínuos e descontínuos:

$$S_{ij}^m = \frac{L}{16\pi\mu(1-\nu)} \{r_{,i}r_{,j} - \delta_{ij}(3 - 4\nu)Fat\} \quad (3.77)$$

Os índices m e n representam respectivamente a função aproximadora e o nó.

Para cada elemento é gerado um conjunto de matrizes e vetores que somados fica, considerando o ponto fora:

$$[C] \{U\} = [H] \{U\} + [G] \{P\} + [S] \{f\} \quad (3.78)$$

Caso o corpo tenha movimento de corpo rígido às forças resultantes serão nulas, neste caso a matriz [H] possui uma propriedade bastante útil:

$$[H]\{I\} = \{0\} \quad (3.79)$$

Sendo {I} um vetor deslocamento de corpo rígido para todos os nós.

Impondo as condições de contorno, o sistema de Equações (3.78) será dado pela expressão:

$$[A]\{X\} = \{B\} \quad (3.80)$$

3.4.3. Deslocamentos dos pontos internos- Matrizes [H'], [G'] e [S']:

Impondo [C] igual a zero na Equação (3.73),

$$\{U^i\} = -[H'] \{U\} + [G'] \{P\} + [S'] \{f\} \quad (3.81)$$

3.4.4 . Tensões nos pontos internos – Matrizes [D] e [E]:

$$\sigma_{ij}(s) = - \int_{\Gamma} E_{ijk}(s, q) u_k d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{ijk}(s, q) p_k d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{ijk}(s, q) f_k d\Gamma \quad (3.82)$$

Onde:

$$E_{ijk} = \frac{2G}{4\pi(1-\nu)R^2} \left\{ 2R_m \left[(1 - 2.\nu)\delta_{ij} R_{,k} + \nu(\delta_{ik} R_{,j} + \delta_{jk} R_{,i}) - 4R_{,i} R_{,j} R_{,k} \right] + 2\nu(\eta_i R_{,j} + \eta_j R_{,i}) R_{,k} + (1 - 2.\nu)(2\eta_k R_{,i} R_{,j} + \eta_j \delta_{ik} + \eta_i \delta_{jk}) - (1 - 4.\nu)\eta_k \delta_{ij} \right\} \quad (3.83)$$

$$D_{ijk} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)R} \left\{ (1 - 2\nu)(\delta_{ik} R_{,j} + \delta_{jk} R_{,i} - \delta_{ij} R_{,k}) + 2R_{,i} R_{,j} R_{,k} \right\} \quad (3.84)$$

3.5. SUB-REGIÕES.

A técnica das sub-regiões é bastante útil quando se tem um corpo formado por mais de um material.

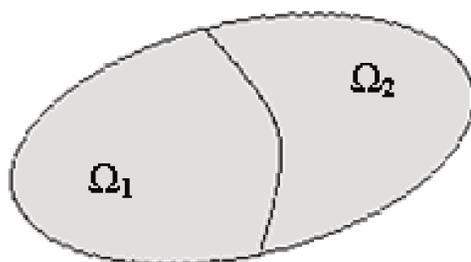


FIGURA 3.12 – Sub-regiões.

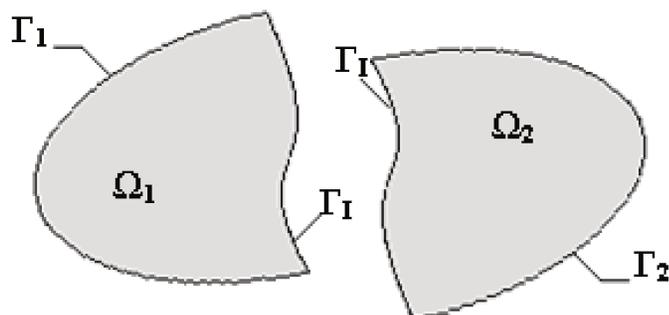


FIGURA 3.13 – Duas sub-regiões.

Podemos formular o Método dos Elementos de Contorno para cada região em separado de acordo com a FIGURA 3.13.

Analisando o domínio Ω_1 de acordo com a FIGURA 3.14, temos:

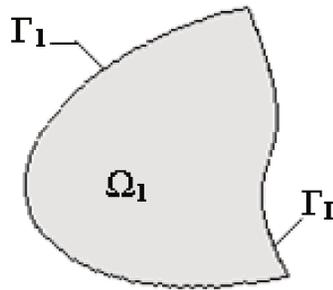


FIGURA 3.14 – Sub-região Ω_1 .

$$[[H]^1 \quad [H]_I^1] \begin{Bmatrix} \{u\}^1 \\ \{u\}_I^1 \end{Bmatrix} = [[G]^1 \quad [G]_I^1] \begin{Bmatrix} \{p\}^1 \\ \{p\}_I^1 \end{Bmatrix} \quad (3.85)$$

Onde,

$\{u\}^1$ e $\{p\}^1$ são deslocamento e força de superfície respectivamente.

Analisando a região Ω_2 de acordo com a FIGURA 3.15, chegamos:

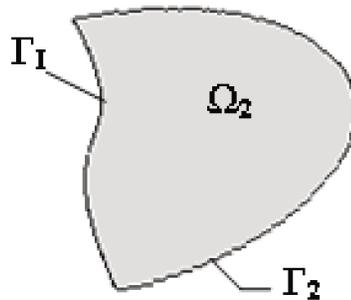


FIGURA 3.15 - Sub-região Ω_2 .

$$[[H]^2 \quad [H]_I^2] \begin{Bmatrix} \{u\}^2 \\ \{u\}_I^2 \end{Bmatrix} = [[G]^2 \quad [G]_I^2] \begin{Bmatrix} \{p\}^2 \\ \{p\}_I^2 \end{Bmatrix} \quad (3.86)$$

Impondo a condição de compatibilidade:

$$\{u\}_I^1 = \{u\}_I^2 = \{u\}_I \quad (3.87)$$

Impondo a condição de equilíbrio:

$$\{p\}_I^1 = -\{p\}_I^2 = \{p\}_I \quad (3.88)$$

Substituindo as expressões (3.87) e (3.88) na expressão (3.85):

$$[[H]^1 \quad [H]_I^1 \quad -[G]_I^1] \begin{Bmatrix} \{u\}^1 \\ \{u\}_I \\ \{p\}_I \end{Bmatrix} = [G]^1 \{p\}^1 \quad (3.89)$$

Substituindo as expressões (3.87) e (3.88) na expressão (3.85):

$$[[H]^2 \quad [H]_I^2 \quad +[G]_I^2] \begin{Bmatrix} \{u\}^2 \\ \{u\}_I \\ \{p\}_I \end{Bmatrix} = [G]^2 \{p\}^2 \quad (3.90)$$

Colocando as expressões (3.88) e (3.89) em um só sistema:

$$\begin{bmatrix} [H]^1 & [H]_I^1 & -[G]_I^1 & [0] \\ [0] & [H]_I^2 & [G]_I^2 & [H]^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\}^1 \\ \{u\}_I \\ \{p\}_I \\ \{u\}^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G]^1 & [0] \\ [0] & [G]^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{p\}^1 \\ \{p\}^2 \end{Bmatrix} \quad (3.91)$$

4. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Neste capítulo serão apresentados conceitos e formulações dos Métodos dos Elementos Finitos.

4.1. GENERALIDADES.

De acordo com ASSAN (1999) o método dos elementos finitos surgiu em detrimento da dificuldade de aplicação e problemas dos métodos de Rayleigh-Rits, Galerkin, Diferenças finitas e outros.

O método dos elementos finitos é baseado no método de Rayleigh-Rits com a divisão do domínio de integração em um número finito de elementos chamados de Elementos finitos. Para cada elemento é montado um funcional Π que somado a todos os elementos resulta em um funcional para todo o domínio.

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \Pi_i \quad (4.1)$$

Para cada elemento i adota-se uma função aproximadora v , esta função é uma combinação linear de outras funções que chamamos de função de forma e de variáveis referidas aos nós, ficando com a forma:

$$v = \sum_{j=1}^m a_j \phi_j \quad (4.2)$$

Substituindo Equação (4.2) na Equação (4.1), o funcional fica expresso por:

$$\Pi(a_j) = \sum_{i=1}^n \Pi_i(a_j) \quad (4.3)$$

A condição de estacionariedade gera como no método de Rayleigh-Ritz, um sistema de equações algébricas lineares:

$$\delta \Pi(a_j) = \sum_{i=1}^n \delta \Pi_i(a_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial \Pi_i(a_j)}{\partial a_j} = 0 \quad (4.4)$$

4.2. ELEMENTOS FINITOS UNIDIMENSIONAIS.

Elementos unidimensionais são representados pelos seus eixos, são elementos que possuem uma dimensão muito maior que as outras duas, pode-se citar como exemplo vigas, treliças, pórticos planos e espaciais e grelhas.

Em geral um elemento é composto por uma barra com dois nós, apesar de que neste trabalho, considera-se dois tipos de elemento. O primeiro é um elemento finito com dois nós por barra e três graus de liberdade por nó utilizado no pórtico plano e o segundo um elemento com quatro nós por barra e três graus de liberdade por nó utilizados no enrijecedor.

A consideração de barra com quatro nós foi utilizada para satisfazer a equação diferencial em função dos deslocamentos. Uma vez que foi considerada uma aproximação linear para os carregamentos nada mais natural que adotar para os deslocamentos axiais uma aproximação de quarto grau e para os deslocamentos transversais e giros uma aproximação de sétimo grau.

Para a barra de treliça as incógnitas são os deslocamentos horizontais u_1 e u_2 para barras com dois nós ou u_1, u_2, u_3, u_4 , com quatro nós conforme mostra a FIGURA 4.1 (a) e (b) respectivamente.

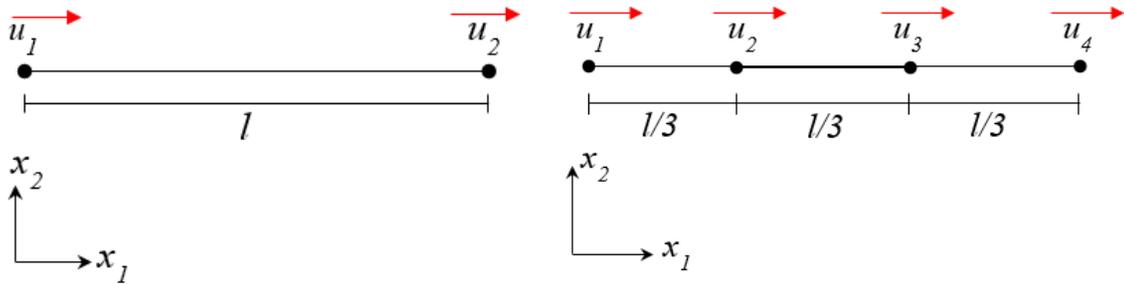


FIGURA 4.1 – (a) Elemento finito para Treliça com dois nós. (b) Elemento finito para treliça com quatro nós.

As vigas possuem duas translações v_1 e v_2 e duas rotações θ_1 e θ_2 para barra com dois nós e quatro translações v_1, v_2, v_3 e v_4 e quatro rotações $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ e θ_4 para barra com quatro nós conforme mostra a FIGURA 4.2 (a) e (b) respectivamente.

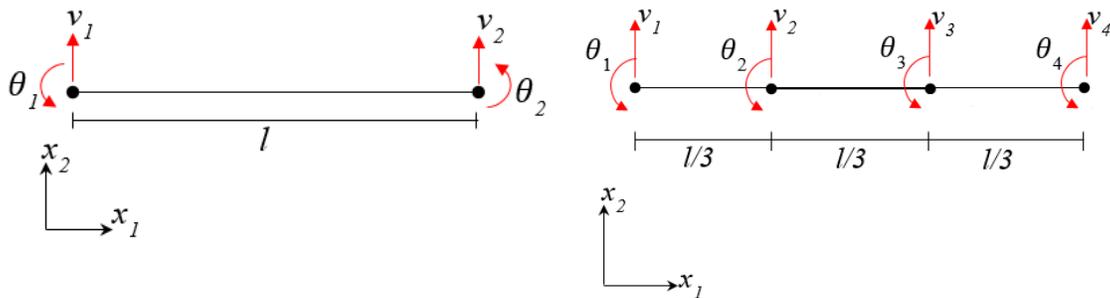


FIGURA 4.2 – (a) Elemento finito de vigas com dois nós. (b) Elemento finito de vigas com quatro nós.

Para os pórticos planos temos a soma das incógnitas das vigas e das treliças, conforme FIGURA 4.3 (a) e (b).

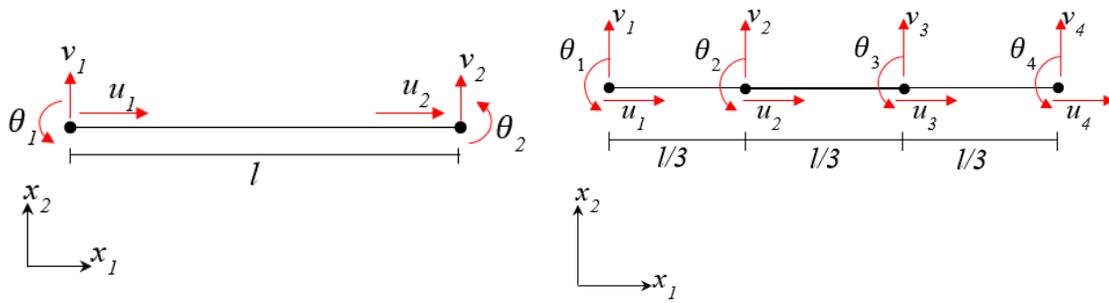


FIGURA 4.3 – (a) Elemento finito de pórtico com dois nós. (b) Elemento finito de pórtico com quatro nós.

4.3 ELEMENTOS FINITOS PARA PÓRTICO PLANO.

4.3.1 Funções aproximadoras para os deslocamentos.

4.3.1.1 Deslocamentos devido ao carregamento axial a barra considerando dois nós por barra.

Para os deslocamentos horizontais FIGURA 4.1 (a) adota-se uma função aproximadora linear.

$$u(x) = \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 \quad (4.5)$$

Adotando uma função linear para θ_1

$$\phi_1 = ax + b \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} \phi_1^1(x=0) = 1 \\ \phi_1^2(x=L) = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

Resolvendo o sistema de Equações (4.7) obtêm-se:

$$\phi_1 = -\frac{1}{L}x + 1 \quad (4.8)$$

Passando a expressão (4.8) para a variável adimensional ξ :

$$\xi = \frac{x}{L} \quad (4.9)$$

$$\phi_1 = -\xi + 1 \quad (4.10)$$

Adotando uma função linear para θ_2

$$\phi_2 = ax + b \quad (4.11)$$

$$\begin{cases} \phi_2^1(x=1) = 1 \\ \phi_2^2(x=L) = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

Resolvendo o sistema de Equações (4.12) obtêm-se:

$$\phi_2 = \frac{1}{L}x \quad (4.13)$$

Passando a expressão (4.13) para a variável adimensional ξ :

$$\xi = \frac{x}{L} \quad (4.14)$$

$$\phi_2 = \xi \quad (4.15)$$

Da Equação (4.5) podemos obter a função aproximadora (4.16) para deslocamentos horizontais:

$$u = u_1(1 - \xi) + u_2\xi \quad (4.16)$$

Sendo:

$$\phi_1^u = 1 - \xi \quad (4.17)$$

$$\phi_2^u = \xi \quad (4.18)$$

Escrevendo Matricialmente:

$$u(\xi) = \{\phi_1^u \quad \phi_2^u\} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

4.3.1.2 Deslocamentos devido ao carregamento axial a barra considerando quatro nós por barra.

Para os deslocamentos horizontais adota-se uma função aproximadora de terceiro grau FIGURA 4.1 (b).

$$u(x) = \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 + \phi_3 u_3 + \phi_4 u_4 \quad (4.20)$$

Realizando o mesmo procedimento que no item 4.3.1.1 chegamos a função aproximadora Equação (4.21):

$$u(x) = \left(\frac{-9}{2}\xi^3 + 9\xi^2 - \frac{11}{2}\xi + 1\right)u_1 + \left(\frac{27}{2}\xi^3 - \frac{45}{2}\xi^2 + 9\xi\right)u_2 + \left(\frac{-27}{2}\xi^3 + 18\xi^2 - \frac{9}{2}\xi\right)u_3 + \left(\frac{9}{2}\xi^3 - \frac{9}{2}\xi^2 + \xi\right)u_4 \quad (4.21)$$

4.3.1.3 Deslocamentos Devido ao Carregamento Perpendicular a Barra considerando dois nós por barra.

Considerando um elemento finito com os parâmetros nodais de acordo com a FIGURA 4.4, ou seja, um elemento finito de viga.

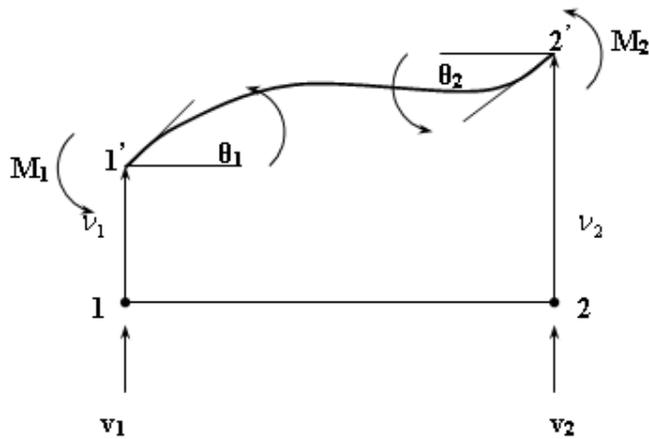


FIGURA 4.4 – Deslocamentos e esforços nodais.

Os deslocamentos transversais devem ser representados, por um polinômio do 3º grau:

$$w(x) = \phi_1 w_1 + \phi_2 \theta_i + \phi_3 w_f + \phi_4 \theta_f \quad (4.22)$$

Adotando uma função aproximadora para ϕ_1 :

$$\phi_1 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \quad (4.23)$$

$$\begin{cases} \phi_1^1(x=1) = 1 \\ \phi_1^2(x=L) = 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

$$\begin{cases} \phi_1^{1'}(x=1) = 0 \\ \phi_1^{2'}(x=L) = 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

Resolvendo o sistema de Equações (4.25) obtêm-se:

$$\phi_1 = \frac{2}{L^3} x^3 - \frac{3}{L^2} x^2 + 1 \quad (4.26)$$

Passando a Equação (4.26) para a variável adimensional ξ :

$$\xi = \frac{x}{L} \quad (4.27)$$

$$\phi_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \quad (4.28)$$

Adotando uma função aproximadora para ϕ_2 :

$$\phi_2 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \quad (4.29)$$

$$\begin{cases} \phi_2^1(x=1) = 0 \\ \phi_2^2(x=L) = 0 \end{cases} \quad (4.30)$$

$$\begin{cases} \phi_2^{1'}(x=1) = 1 \\ \phi_2^{2'}(x=L) = 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

Resolvendo o sistema de Equações (4.30) e (4.31) obtêm-se:

$$\phi_2 = \frac{1}{L^2} x^3 - \frac{2}{L} x^2 + x \quad (4.32)$$

Passando a equação 4.32 para a variável adimensional ξ :

$$\xi = \frac{x}{L} \quad (4.33)$$

$$\phi_2 = L\xi^3 - 2L\xi^2 + L\xi \quad (4.34)$$

Adotando uma função aproximadora para ϕ_3 :

$$\phi_3 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \quad (4.35)$$

$$\begin{cases} \phi_3^1(x=1) = 0 \\ \phi_3^2(x=L) = 1 \end{cases} \quad (4.36)$$

$$\begin{cases} \phi_3^{1'}(x=1) = 0 \\ \phi_3^{2'}(x=L) = 0 \end{cases} \quad (4.37)$$

$$\phi_3 = \frac{3}{L^2} x^2 - \frac{2}{L^3} x^3 \quad (4.38)$$

Passando a Equação (4.38) para a variável adimensional ξ :

$$\xi = \frac{x}{L} \quad (4.39)$$

$$\phi_3 = 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad (4.40)$$

Adotando uma função aproximadora para θ_4 :

$$\phi_4 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \quad (4.41)$$

$$\begin{cases} \phi_4^1(x=1) = 0 \\ \phi_4^2(x=L) = 0 \end{cases} \quad (4.42)$$

$$\begin{cases} \phi_4^{1'}(x=1) = 0 \\ \phi_4^{2'}(x=L) = 1 \end{cases} \quad (4.43)$$

Resolvendo o sistema de Equações (4.42) e Equação (4.43) obtêm-se:

$$\phi_4 = \frac{1}{L^2} x^3 - \frac{1}{L} x^2 \quad (4.44)$$

Passando a Equação (4.44) para a variável adimensional ξ :

$$\xi = \frac{x}{L} \quad (4.45)$$

$$\phi_4 = L\xi^3 - L\xi^2 \quad (4.46)$$

Da Equação (4.22) podemos obter a função aproximadora para os deslocamentos:

$$v = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)v_1 + (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)\theta_1 + (3\xi^2 - 2\xi^3)v_2 + (\xi^3 - \xi^2)\theta_2 \quad (4.47)$$

Sendo:

$$\phi_1^v = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$$

$$\phi_2^v = \xi - 2\xi^2 + \xi^3$$

$$\phi_3^v = \xi - 2\xi^2 + \xi^3$$

$$\phi_4^v = \xi - 2\xi^2 + \xi^3$$

Escrevendo de forma matricial temos:

$$v(\xi) = \{\phi_1^v \quad \phi_2^v \quad \phi_3^v \quad \phi_4^v\} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.48)$$

4.3.1.4 Deslocamentos Devido ao Carregamento Perpendicular a Barra considerando quatro nós por barra.

Seja um elemento de barra com modulo de Elasticidade E , área A e Inercia I de acordo com a FIGURA.4.3 (b).

Admite-se variação de sétimo grau para o deslocamento transversal ao eixo da barra, assim a função aproximadora pode ser escrita,

$$w(x) = \phi_1 w_1 + \phi_2 \theta_1 + \phi_3 w_2 + \phi_4 \theta_2 + \phi_5 w_3 + \phi_6 \theta_3 + \phi_7 w_4 + \phi_8 \theta_4 \quad (4.49)$$

$$\begin{Bmatrix} \emptyset_1 \\ \emptyset_2 \\ \emptyset_3 \\ \emptyset_4 \\ \emptyset_5 \\ \emptyset_6 \\ \emptyset_7 \\ \emptyset_8 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{891}{4} \cdot \xi^7 - \frac{3483}{4} \cdot \xi^6 + \frac{2709}{2} \cdot \xi^5 - \frac{2115}{2} \cdot \xi^4 + \frac{1691}{4} \cdot \xi^3 - \frac{291}{4} \cdot \xi^2 + 1 \\ \frac{81}{4} \cdot L \cdot \xi^7 - 81 \cdot L \cdot \xi^6 + \frac{261}{2} \cdot L \cdot \xi^5 - 108 \cdot L \cdot \xi^4 + \frac{193}{4} \cdot L \cdot \xi^3 - 11 \cdot L \cdot \xi^2 + L \cdot \xi \\ \frac{2187}{4} \cdot \xi^7 - \frac{3645}{2} \cdot \xi^6 + \frac{8991}{4} \cdot \xi^5 - 1215 \cdot \xi^4 + 243 \cdot \xi^3 \\ \frac{729}{4} \cdot L \cdot \xi^7 - \frac{2673}{4} \cdot L \cdot \xi^6 + \frac{3807}{4} \cdot L \cdot \xi^5 - \frac{2619}{4} \cdot L \cdot \xi^4 + 216 \cdot L \cdot \xi^3 - 27 \cdot L \cdot \xi^2 \\ \frac{-2187}{4} \cdot \xi^7 + \frac{8019}{4} \cdot \xi^6 - \frac{5589}{2} \cdot \xi^5 + \frac{3645}{2} \cdot \xi^4 - \frac{2187}{4} \cdot \xi^3 + \frac{243}{4} \cdot \xi^2 \\ \frac{729}{4} \cdot L \cdot \xi^7 - \frac{1215}{2} \cdot L \cdot \xi^6 + \frac{1539}{2} \cdot L \cdot \xi^5 - 459 \cdot L \cdot \xi^4 + \frac{513}{4} \cdot L \cdot \xi^3 - \frac{27}{2} \cdot L \cdot \xi^2 \\ \frac{-891}{4} \cdot \xi^7 + \frac{1377}{2} \cdot \xi^6 - \frac{3231}{4} \cdot \xi^5 + 450 \cdot \xi^4 - 119 \cdot \xi^3 + 12 \cdot \xi^2 \\ \frac{81}{4} \cdot L \cdot \xi^7 - \frac{243}{4} \cdot L \cdot \xi^6 + \frac{279}{4} \cdot L \cdot \xi^5 - \frac{153}{4} \cdot L \cdot \xi^4 + 10 \cdot L \cdot \xi^3 - L \cdot \xi^2 \end{pmatrix}$$

(4.50)

4.3.2. Matriz de rigidez do elemento finito.

A energia total potencial é representada por um funcional de acordo com Equação (4.1). Este funcional é a soma da energia de deformação mais a energia de cargas externas de acordo com a expressão abaixo:

$$\Pi = U + \delta \quad (4.51)$$

Onde:

U – Energia de Deformação;

δ - Energia de Cargas Externas;

De acordo com ASSAN (1999) a energia de deformação para um pórtico plano pode ser representada:

$$\Pi = \frac{1}{2L^3} \int_0^1 EI(v'')^2 d\xi + \frac{1}{L} \int_0^1 EA(u')^2 d\xi - L \int_0^1 q_y v d\xi - L \int_0^1 q_x u d\xi \quad (4.52)$$

Onde a primeira integral é relativa à energia de deformação considerando uma viga, a segunda integral é relativa à energia de deformação da barra de treliça, a terceira integral e referente à energia de carga externa devido ao carregamento constante e perpendicular a barra e a última integral é referente à energia de cargas externas devido ao carregamento constante e horizontal.

4.3.2.1. – Matriz de Rigidez do elemento com dois nós.

Calculando a derivada segunda das Equações (4.16) e (4.47) e substituindo na expressão (4.52), integrando e derivando o funcional em relação a cada variável e igualando a zero chegamos a um sistema de equações que podem ser representado por:

$$[k]\{u\} = \{F\} \quad (4.53)$$

Onde $[k]$ é a matriz de rigidez do elemento expressa por:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

E $\{Fe\}$ é o vetor de cargas nodais equivalentes.

4.3.2.2 – Matriz de Rigidez do Elemento com quatro nós por barra.

Fazendo o procedimento análogo ao item anterior, calculando a derivada segunda das Equações (4.21) e (4.50) e substituindo na expressão (4.52) chega-se a matriz de rigidez,

$$Hf = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

Onde os valores de K_1 , K_2 , K_3 e K_4 podem ser expressos por:

$$K_1 = \begin{bmatrix} \frac{37EA}{10L} & 0 & 0 & -\frac{189EA}{40L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4539EI}{7L^3} & \frac{2517EI}{28L^2} & 0 & -\frac{2187EI}{16L^3} & \frac{12393EI}{56L^2} \\ 0 & \frac{2517EI}{28L^2} & \frac{6157EI}{385L} & 0 & -\frac{10935EI}{308L^2} & \frac{148959EI}{6160L} \\ -\frac{189EA}{40L} & 0 & 0 & \frac{54EA}{5L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2187EI}{16L^3} & -\frac{10935EI}{308L^2} & 0 & \frac{177147EI}{154L^3} & \frac{6561EI}{44L^2} \\ 0 & \frac{12393EI}{56L^2} & \frac{148959EI}{6160L} & 0 & \frac{6561EI}{44L^2} & \frac{45198EI}{385L} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} \frac{27EA}{20L} & 0 & 0 & \frac{-13EA}{40L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-10935EI}{28L^3} & \frac{729EI}{7L^2} & 0 & \frac{-13575EI}{112L^3} & \frac{165EI}{14L^2} \\ 0 & \frac{-6561EI}{154L^2} & \frac{4131EI}{385L} & 0 & \frac{-165EI}{14L^2} & \frac{6893EI}{6160L} \\ -\frac{297EA}{40L} & 0 & 0 & \frac{27EA}{20L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-767637EI}{1232L^3} & \frac{164025EI}{616L^2} & 0 & \frac{-10935EI}{28L^3} & \frac{6561EI}{154L^2} \\ 0 & \frac{-164025EI}{616L^2} & \frac{490617EI}{6160L} & 0 & \frac{-729EI}{7L^2} & \frac{4131EI}{385L} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} \frac{27EA}{20L} & 0 & 0 & \frac{-297EA}{40L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-10935EI}{28L^3} & \frac{-6561EI}{154L^2} & 0 & \frac{-767637EI}{1232L^3} & \frac{-164025EI}{616L^2} \\ 0 & \frac{729EI}{7L^2} & \frac{4131EI}{385L} & 0 & \frac{164025EI}{616L^2} & \frac{490617EI}{6160L} \\ -\frac{13EA}{40L} & 0 & 0 & \frac{27EA}{20L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-13575EI}{112L^3} & \frac{-165EI}{14L^2} & 0 & \frac{-10935EI}{28L^3} & \frac{-729EI}{7L^2} \\ 0 & \frac{165EI}{14L^2} & \frac{6893EI}{6160L} & 0 & \frac{6561EI}{154L^2} & \frac{4131EI}{385L} \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} \frac{54EA}{5L} & 0 & 0 & \frac{-189EA}{40L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{177147EI}{154L^3} & \frac{-6561EI}{44L^2} & 0 & \frac{-2187EI}{16L^3} & \frac{10935EI}{308L^2} \\ 0 & \frac{-6561EI}{44L^2} & \frac{45198EI}{385L} & 0 & \frac{-12393EI}{56L^2} & \frac{148959EI}{6160L} \\ -\frac{189EA}{40L} & 0 & 0 & \frac{37EA}{10L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2187EI}{16L^3} & \frac{-12393EI}{56L^2} & 0 & \frac{4539EI}{7L^3} & \frac{-2517EI}{28L^2} \\ 0 & \frac{10935EI}{308L^2} & \frac{148959EI}{6160L} & 0 & \frac{-2517EI}{28L^2} & \frac{6157EI}{385L} \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

4.3.3 Vetor de carga nodal.

O vetor de carga nodal $\{F\}$ explicitado na Equação (4.53) pode ser composto de um vetor de cargas nodais equivalentes $\{Fe\}$ mais vetor de esforço aplicado diretamente sobre o nó $\{Fn\}$.

$$\{F\} = \{Fe\} + \{Fn\} \quad (4.60)$$

Utilizando uma variação linear para os carregamentos o vetor $\{Fe\}$ pode ser escrito,

4.3.3.1. Barras com dois nós.

a) Forças de superfície aplicadas na direção de x:

$$p_x(\xi) = (1 - \xi)p_{1x} + \xi p_{2x} \quad (4.61)$$

Considerando uma aproximação linear para o deslocamento e substituindo a Equação (4.61) na quarta integral da Equação (4.52) e resolvendo obtemos:

$$\{Fe\}_x = \begin{bmatrix} L/3 & L/6 \\ L/6 & L/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{1x} \\ p_{2x} \end{Bmatrix} \quad (4.62)$$

b) Forças de superfície aplicadas na direção de y:

$$p_y(\xi) = (1 - \xi)p_{1y} + \xi p_{2y} \quad (4.63)$$

Considerando uma variação cúbica para os deslocamentos e substituindo a Equação (4.63) na Expressão (4.52) e integrando chega-se:

$$\{Fe\}_y = \begin{bmatrix} 0,35.L & 0,15.L \\ 1,5.L^2/30 & L^2/30 \\ 0,15.L & 0,35.L \\ -L^2/30 & -1,5.L^2/30 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{1y} \\ p_{2y} \end{Bmatrix} \quad (4.64)$$

Matricialmente para o carregamento nas duas direções é:

$$\{Fe\} = \begin{bmatrix} L/3 & 0 & L/6 & 0 \\ 0 & 0,35.L & 0 & 0,15.L \\ 0 & 1,5.L^2/30 & 0 & L^2/30 \\ L/6 & 0 & L/3 & 0 \\ 0 & 0,15.L & 0 & 0,35.L \\ 0 & -L^2/30 & 0 & -1,5.L^2/30 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{1x} \\ p_{1y} \\ p_{2x} \\ p_{1y} \end{Bmatrix} = [Gf]\{p\} \quad (4.65)$$

4.3.3.2. Barras com quatro nós.

Adotando-se uma variação de sétimo grau para o deslocamento e realizando o mesmo processo do item anterior, temos:

$$\{Fe\} = [Gf] \begin{Bmatrix} p_{1x} \\ p_{1y} \\ p_{2x} \\ p_{1y} \end{Bmatrix} = [Gf]\{p\} \quad (4.66)$$

Onde, Gf transposto é,

$$Gf^T = \begin{pmatrix} \frac{13L}{120} & 0 & 0 & \frac{3L}{10} & 0 & 0 & \frac{3L}{40} & 0 & 0 & \frac{1L}{60} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{67}{560} & \frac{1L}{224} & 0 & \frac{243}{1120} & \frac{-9L}{560} & 0 & \frac{81}{560} & \frac{-9L}{1120} & 0 & \frac{3}{160} & \frac{-1L}{840} \\ \frac{1L}{60} & 0 & 0 & \frac{3L}{40} & 0 & 0 & \frac{3L}{10} & 0 & 0 & \frac{13L}{120} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{160} & \frac{1L}{840} & 0 & \frac{81}{560} & \frac{9L}{1120} & 0 & \frac{243}{1120} & \frac{9L}{560} & 0 & \frac{67}{560} & \frac{-1L}{224} \end{pmatrix} \quad (4.67)$$

4.4 MATRIZ DE ROTAÇÃO.

Para que se possa utilizar a barras inclinadas precisa-se fazer a rotação da matriz de rigidez e do vetor de forças nodais, para o sistema global, de acordo com as FIGURAS 4.5, 4.6 e 4.7.

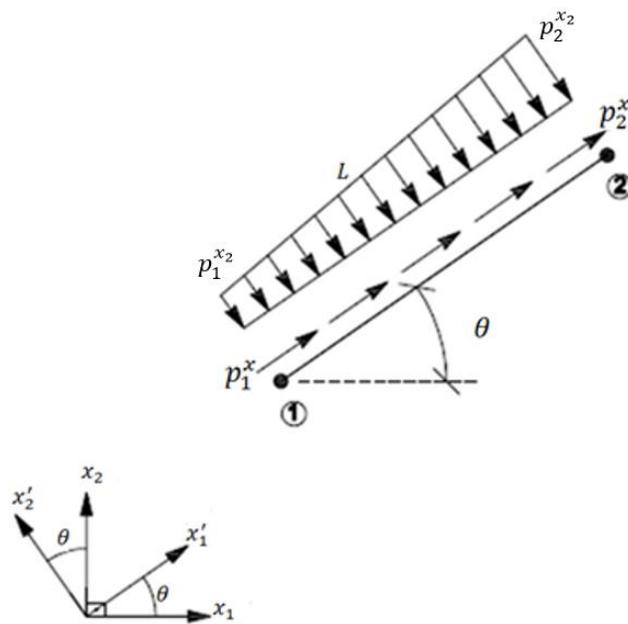


FIGURA 4.5 – Carregamento em relação aos eixos x'_1 e x'_2 .

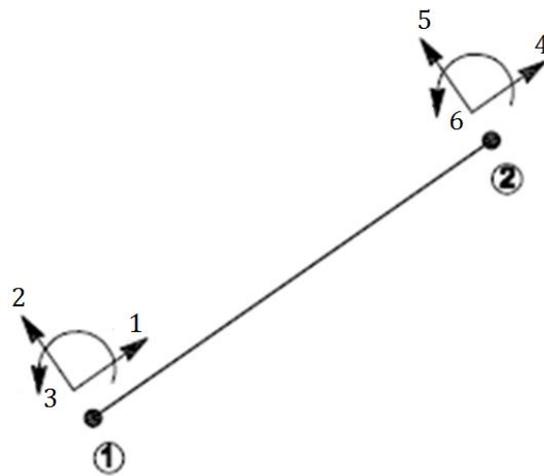


FIGURA 4.6 – Coordenadas no sistema local.

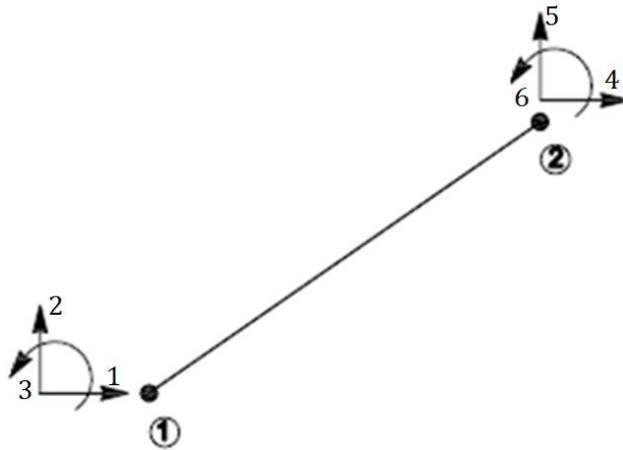


FIGURA 4.7 – Coordenadas no sistema global.

a) Matriz de Rotação :

A matriz de rotação $[\beta]$ é obtida facilmente:

$$\beta = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

b) Matriz de Rigidez segundo os eixos x_1 e x_2

Para se transformar um vetor $\{u\}$ orientado segundo um sistema de eixos x_1 e x_2 para um vetor $\{u'\}$ orientado segundo um sistema de eixos x'_1 e x'_2 precisamos:

$$\{u'\} = [\beta] * \{u\} \quad (4.69)$$

Para se rotacionar um tensor de segunda ordem é um pouco mais complexo que rotacionar um ponto ou até mesmo tensor de primeira ordem (vetor).

Seja a expressão (4.70) em um sistema de eixos x_1 e x_2 .

$$[k] * \{u\} = \{F\} \quad (4.70)$$

A Equação (4.70) em um sistema x'_1 e x'_2 fica:

$$[k'] * \{u'\} = \{F'\} \quad (4.71)$$

A relação entre u e u' é:

$$\{u'\} = [\beta] * \{u\} \quad (4.72)$$

A relação entre F e F' pode ser expressa por:

$$\{F'\} = [\beta] * \{F\} \quad (4.73)$$

Substituindo a Equação (4.72) e a Equação (4.73), na Equação (4.71) temos:

$$[k'] * [\beta] * \{u\} = [\beta] * \{F\} \quad (4.74)$$

Multiplicando a Equação (4.74) por $[\beta]^T$ temos:

$$[\beta]^T * [k'] * [\beta] * \{u\} = [\beta]^T * [\beta] * \{F\} \quad (4.75)$$

Comparando as equações 4.75 e 4.70 conclui-se que:

$$[k] = [\beta]^T * [k'] * [\beta] \quad (4.76)$$

c) Vetor de forças nodais segundo os eixos x_1 e x_2 :

Considerando a matriz $[Gf']$ em relação ao sistema $x'_1 \circ x'_2$ e a matriz de rotação (4.68) a matriz de forças nodais $[Gf]$ segundo os eixos $x_1 \circ x_2$ fica explicitada por:

$$[Gf] = [\beta]^T * [Gf'] \quad (4.77)$$

4.5 ESFORÇOS SOLICITANTES NAS BARRAS DO PÓRTICO PLANO.

Calculados os deslocamentos podemos facilmente determinar os esforços solicitantes.

a) Esforço normal.

A normal pode ser obtida derivando-se a expressão (4.16):

$$N(\xi) = \frac{du}{d\xi} = \frac{-1}{L} \cdot \xi u_1 + \frac{1}{L} u_2 \quad (4.78)$$

Onde: $0 \leq \xi \leq 1$

b) Esforço de cortante e Momento fletor.

O momento fletor é a derivada segunda dos deslocamentos, sendo assim derivando duas vezes a Equação (4.47),

$$M(\xi) = \frac{d^2u}{d\xi^2} = \frac{12\xi-6}{L^2} v_1 + \frac{6\xi-4}{L} \theta_1 + \frac{6-12\xi}{L^2} v_2 + \frac{6\xi-2}{L} \theta_2 \quad (4.79)$$

A cortante é a derivada terceira do deslocamento, sendo assim temos:

$$V(\xi) = \frac{d^3u}{d\xi^3} = \frac{12}{L^2} v_1 + \frac{6}{L} \theta_1 + \frac{-12}{L^2} v_2 + \frac{6}{L} \theta_2 \quad (4.80)$$

Onde: $0 \leq \xi \leq 1$

5 - MÍNIMOS QUADRADOS.

5.1. GENERALIDADES.

É comum gerar uma tabela de pares ordenados a partir de uma função $f(x)$, no entanto quando se tem uma tabela de valores $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \dots, (x_n, f(x_n))$ e quer descobrir uma função que seja uma boa aproximação para estes valores tabelados deve-se fazer um ajuste de curvas pelo método dos mínimos quadrados.

O problema de ajuste de curvas por mínimos quadrados consiste em escolher n funções aproximadoras, contínuas em $[a,b]$, de tal forma a obter n constantes c_1, c_2, \dots, c_n tais que a função : $g(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \dots + c_n g_n(x)$ se aproxime ao máximo de $f(x)$.

A escolha das funções pode ser feita observando o gráfico dos pontos tabelados. Portanto dado uma tabela, deve-se em primeiro lugar colocar os pontos em um gráfico cartesiano chamado de diagrama de dispersão de acordo com o Gráfico 5.1.

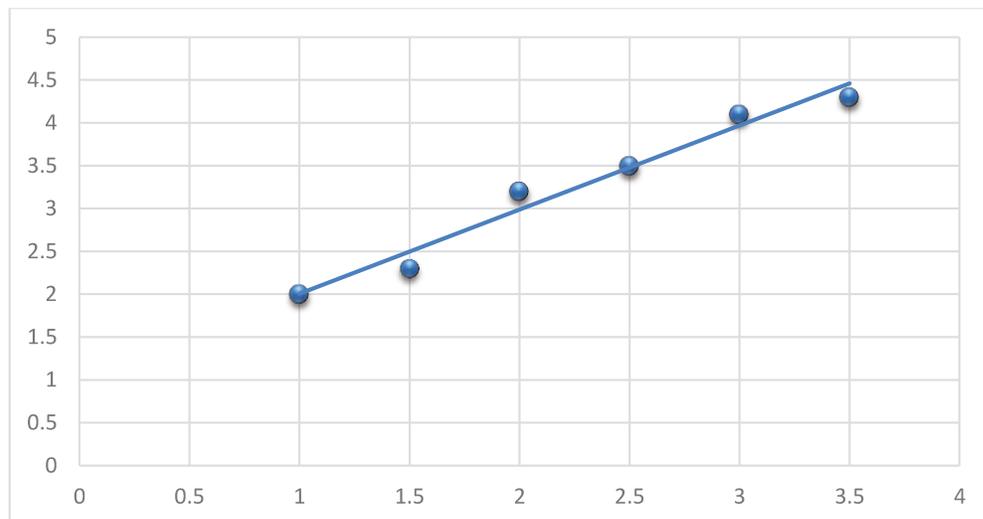


GRÁFICO 5.1 – Exemplo da aplicação dos mínimos quadrados.

5.2. SISTEMA DETERMINADO

Segundo RUGGIERO (1996) o método dos mínimos quadrados consiste em escolher c_1 e c_2 de tal forma que a soma dos quadrados dos desvios seja mínima.

$$\sum_{k=1}^m (d_k)^2 = \sum_{k=1}^m (f(x) - g(x))^2 \quad (5.1)$$

Utilizando cálculo diferencial, sabemos que, para obter um ponto de mínimo de $f(c_1, c_2, \dots, c_n)$ temos de, inicialmente, encontrar seus pontos críticos, ou seja, os (c_1, c_2, \dots, c_n) tais que:

$$\frac{df}{dc_j} = 0, j = 1, 2, \dots, n \quad (5.2)$$

Derivando a Equação (5.1) de acordo com a Equação (5.2) chegamos ao sistema linear:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^m g_1(x)g_1(x) \right) c_1 + \dots + \left(\sum_{i=1}^m g_1(x)g_n(x) \right) c_n = \sum_{i=1}^m g_1(x)f(x) \\ \vdots \\ \left(\sum_{i=1}^m g_n(x)g_1(x) \right) c_1 + \dots + \left(\sum_{i=1}^m g_n(x)g_n(x) \right) c_n = \sum_{i=1}^m g_n(x)f(x) \end{cases}$$

5.3. SISTEMA SOBREDERMINADO.

Os sistemas lineares sobredeterminados $Ax=B$, onde o número de equações é maior que o número de incógnitas, não tem solução.

Nestes casos o que se faz é calcular \bar{b} como sendo a projeção de B sobre a $\text{Im}(A)$ na norma 2 e então toma-se como solução do sistema $Ax=B$, a solução única do sistema $Ax = \bar{b}$.

O vetor \bar{b} , projeção de B sobre $\text{Im}(A)$ na norma 2 é o vetor $\bar{b} = A\bar{x}$.

Chamando de $r(x) = Ax-B$ de resíduo em x , acha-se a solução de \bar{x} de resíduo mínimo. Para achar esta solução é o mesmo que encontrar x que minimize:

$$f(x) = \frac{1}{2} \|x\|_2^2 = \frac{1}{2} \|Ax - B\|_2^2 \quad (5.3)$$

Do cálculo diferencial e integral, sabemos que, se $\min (f(x) = f(\bar{x}))$, então:

$$\frac{df(\bar{x})}{dx_i} = 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (5.4)$$

Resolvendo a Equação (5.3) de acordo com a Equação (5.4) temos que a solução de \bar{x} será:

$$A^T A x = A^T B \quad (5.5)$$

Verifique que a Equação (5.5) é exatamente o sistema normal a ser resolvido para encontrar a solução que melhor aproxima a tabela no sentido dos mínimos quadrados.

5.4. SISTEMAS SUBDETERMINADOS.

Para os sistemas subdeterminados, onde o número de equações é menor que o número de incógnitas, a solução é semelhante ao sobredeterminados.

Como este sistema possui infinitas soluções o vetor solução do sistema $Ax=B$ é aquele que possui dentre todos os vetores de x uma norma euclidiana mínima e pode ser representado pela expressão (5.6).

$$x = A^T * Y \quad (5.6)$$

Onde o X é dado pela expressão (5.7).

$$A * A^T * Y = B \quad (5.7)$$

6. ANÁLISE DE PÓRTICO PLANO SOBRE BASE ELÁSTICA.

6.1. GENERALIDADES.

Para a análise do pórtico sobre base elástica primeiramente foi considerado um domínio elástico enrijecido de acordo com o item 6.3.

Ao domínio enrijecido, mais especificamente à barra rígida acoplada, foi ligado os nós de apoio do pórtico plano de acordo com a FIGURA 6.1 e descrito no item 6.4.

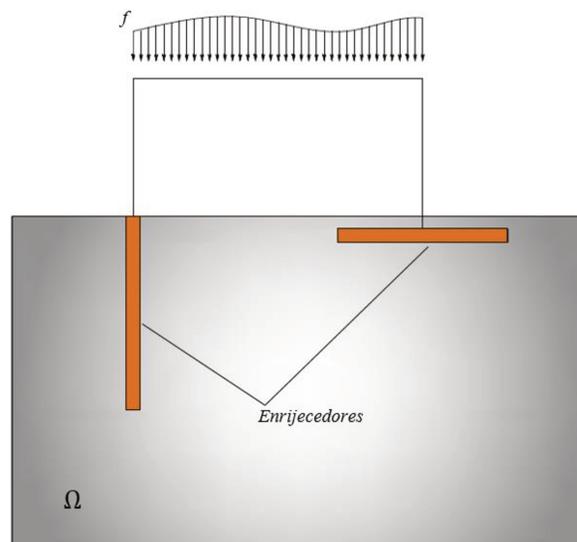


FIGURA 6.1 – Modelo do pórtico sobre base elástica.

6.2. ENRIJECEDORES.

Os enrijecedores são aqui representados por uma barra rígida em meio a um corpo elástico contínuo Ω como mostra a FIGURA 6.2.



FIGURA 6.2 – Corpo elástico enrijecido.

A barra rígida, como já foi dito, é modelada pelo método dos elementos finitos e o corpo elástico contínuo pelo método dos elementos de contorno.

6.3. ACOPLAMENTO MEC-MEF.

A consideração de um domínio plano enrijecido com uma barra é feita através de uma imposição de compatibilidade de deslocamento e equilíbrio de forças, ou seja:

$$\begin{aligned}
 U^c - U^f &= 0 \\
 f^c + f^f &= 0
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$

Onde U^c e f^c são respectivamente os deslocamentos e as forças distribuídas que aparecem nas equações do elemento de contorno e U^f e f^f São respectivamente os deslocamentos e as forças da barra enrijecedora. As forças que aparecem no domínio plano tem sinal oposto as forças da barra, agindo assim como forças de reação. Para o problema discretizado a Equação (6.1) fica:

$$\{f^c\} = -\{f^f\} = \{f\}$$

$$\{U^c\} = \{U^f\} = \{u\} \tag{6.2}$$

Para o problema tratado, ou seja, elemento plano enrijecido com fibras, a reação das fibras sobre a matriz equivale a uma linha de carga de acordo com a FIGURA 6.3.

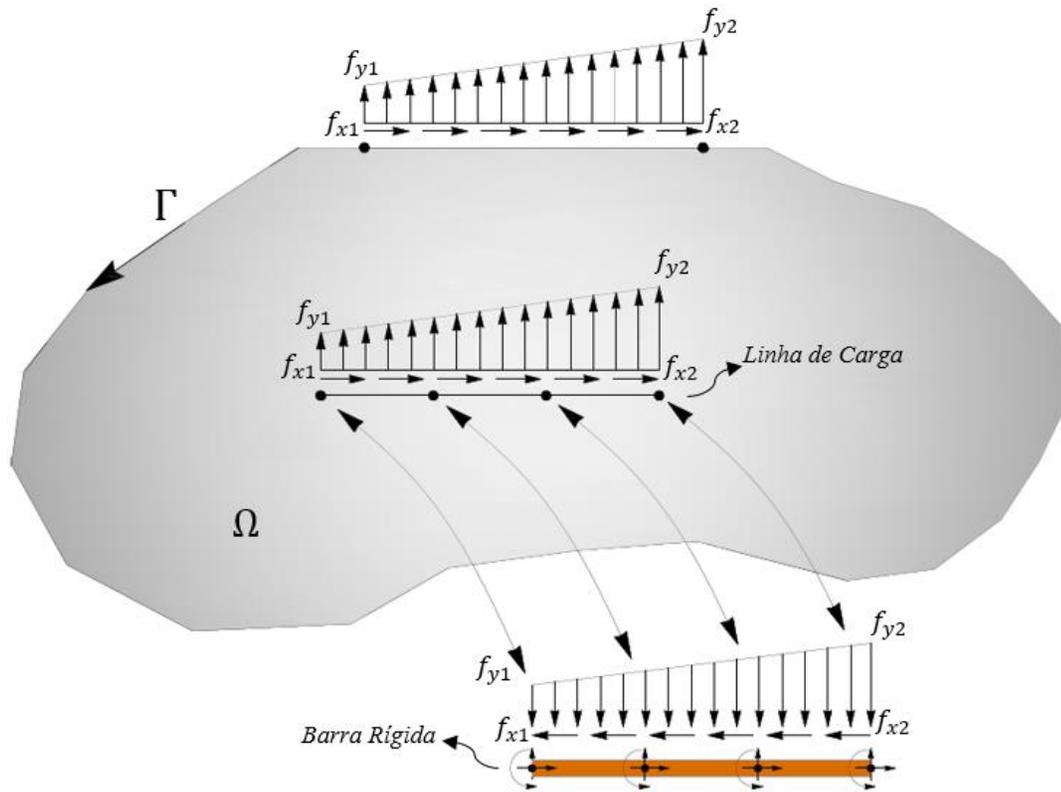


FIGURA 6.3. Esquema onde é visualizado a linha de carga e a barra rígida.

O sistema de equações é composto pelas equações algébricas de deslocamentos do método dos elementos de contorno escritas para os pontos do contorno Equação (6.3), pelas equações algébricas de deslocamentos do método dos elementos de contorno escritas para os pontos internos de interface Equação (6.4) e pelas equações de deslocamentos dos métodos dos elementos finitos da barra enrijecedora Equação(6.5) , como segue:

$$[H^c]\{U^c\} = [G^c]\{P^c\} + [S]\{f^I\} \quad (6.3)$$

$$\{U^I\} = -[H^c]\{U^c\} + [G^c]\{P^c\} + [S]\{f^I\} \quad (6.4)$$

$$[H^f]\{U^I\} = -[G^f]\{f^I\} \quad (6.5)$$

Nas Equações(6.3), Eq.(6.4) e Eq.(6.5) os índices sobrescritos “c”, “f” e “I” representam respectivamente contorno, barra enrijecedora e interface. As matrizes H^c , G^c e S representam as matrizes de influência de integração, a matriz H^f é a matriz de rigidez da barra e G^f a matriz que se multiplicada pelo vetor de forças distribuídas f , fornece o vetor de cargas nodais.

Na FIGURA 6.4 está mostrado o esquema de colocação dos pontos internos, para realizar a compatibilidade de deslocamentos no acoplamento e que de modo diferente de BOTTA (2003) os pontos das extremidades não são deslocados para o interior.

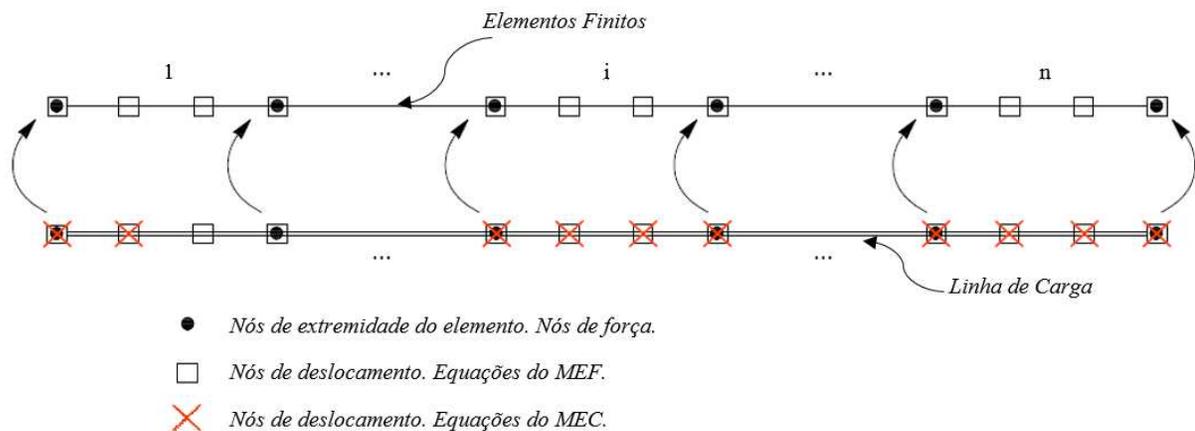


FIGURA 6.4. Nós internos para deslocamentos no MEC.

6.3.1. Regularização pela Técnica dos Mínimos Quadrados

Observando o sistema de equações a ser resolvido as variáveis incógnitas são: U^c , P^c , U^I e f , observa-se no entanto que existem mais variáveis U^I do que forças f , onde a causa disto é a adoção de diferentes graus para os polinômios aproximadores.

O número de número de variáveis de cada vetor é:

$$\{f\} = 2 \times (n_{bar} + 1)$$

$$\{U\} = 3 \times (3 \times n_{bar}) + 1$$

Onde, n_{bar} é o número de barras de elemento finito.

Para que o problema possa ter solução, aplica-se a técnica dos mínimos quadrados. Como o número de equações é maior que o número de incógnitas é necessário reduzi-las a um número conveniente para que o sistema seja resolvível.

A técnica dos mínimos quadrados consiste em reduzir no número de equações e minimizando os erros. Para tanto, neste trabalho, bastou multiplicar a Equação (6.4) pela matriz $[S]$ Transposta que ficou de acordo com a Equação(6.6) abaixo.

$$[S^T]\{U^I\} = -[S^T][H^C]\{U^c\} + [S^T][G^c]\{P^c\} + [S^T][S]\{f^I\} \quad (6.6)$$

Para o caso de haver mais de uma barra enrijcedora, a matriz $[S^T]$ será multiplicada pelo vetor $\{U^I\}$ considerando todos os nós da interface, mesmo que as barras não sejam continuas.

As Equações (6.3), Eq.(6.5) e Eq (6.6) podem ser escritas de forma matricial, ficando:

$$\begin{bmatrix} H^c & -S & 0 \\ S^T H^c & -S^T S & S^T \\ 0 & +G^F & H^F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^c \\ f \\ U^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^c \\ S^T G^c \\ 0 \end{bmatrix} \{p^c\} \quad (6.7)$$

6.4. ACOPLAMENTO PÓRTICO PLANO COM O ENRIJECEDOR

Resolvendo-se uma estrutura reticulada pelo método dos elementos finitos. Obtém-se a seguinte equação,

$$[k^p] \{u^p\} = \{F^p\} \quad (6.8)$$

Onde:

$[k^p]$ é a matriz de Rigidez do pórtico plano, $[u^p]$ é o vetor deslocamentos e $\{F^p\}$ o vetor de forças nodais.

Seja um elemento de barra com módulo de deformação longitudinal de material E, área da seção transversal A, comprimento L e momento de inércia I, com sistemas de coordenadas indicadas na FIGURA 6.5 e 6.6.

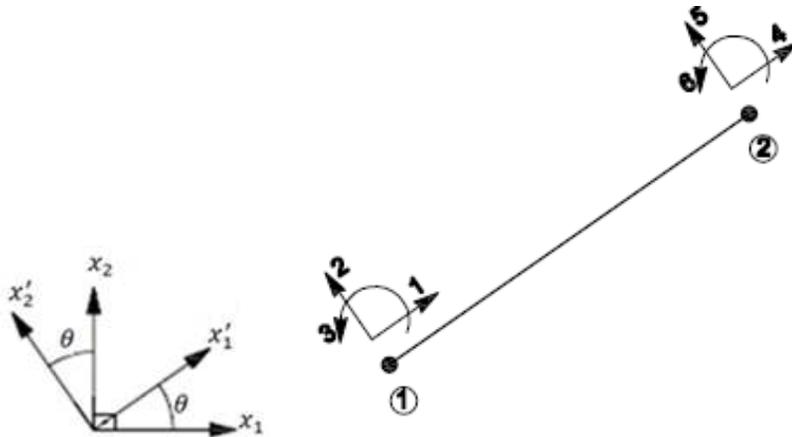


FIGURA 6.5. Sistema de coordenadas locais

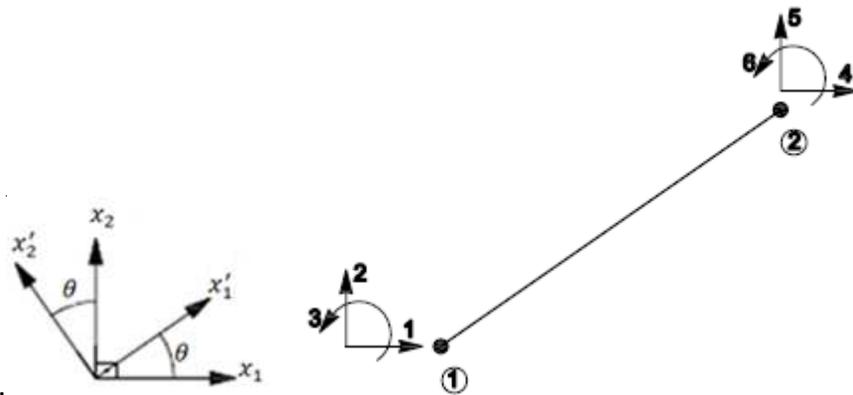


FIGURA 6.6 – Sistema de coordenadas globais

Admite-se para o pórtico uma variação linear para os deslocamentos. Assim a matriz de rigidez é dada da seguinte forma,

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

O vetor de forças nodais pode ser constituído de um carregamento aplicado diretamente nos nós $\{ f^n \}$ e, de um carregamento nodal equivalente $\{ f^e \}$, devido as forças de superfícies aplicadas ao longo do elemento.

$$\{ F^p \} = \{ f^n \} + \{ f^e \} \quad (6.10)$$

Admite-se aproximação linear para as forças de superfície. Sendo assim o esquema de coordenadas e o esquema de forças de superfície são mostrados na FIGURA. 6.7,

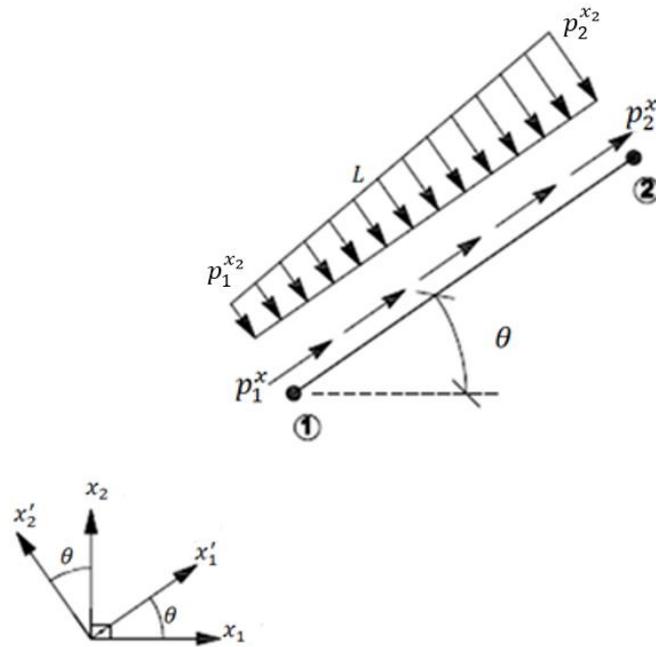


FIGURA.6.7 – Esquema de coordenadas para forças de superfície

Incorporando o sistema de Equação (6.8) no sistema de Equação (6.7) chegamos ao sistema,

$$\begin{bmatrix}
 H^c & -S & 0 & 0 & 0 \\
 S^T \cdot H^c & -S^T \cdot S & S_i^T & S_{iP}^T & 0 \\
 0 & G_i^f & H_i^f & 0 & 0 \\
 0 & G_{iP}^f & 0 & (H_i^f + K^{iP}) & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & K^P
 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U^c \\ f \\ U^i \\ U^{iP} \\ U^P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^c \\ S^T G^c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \{p^c\} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F^{iP} \\ F^P \end{Bmatrix}$$

(6.11)

Onde:

Os índices ‘c’, ‘i’, ‘T’, ‘f’, ‘P’, ‘iP’ significam respectivamente, contorno, interno, transposto, finito, pórtico, interface com o pórtico.

Resolvendo o sistema (6.11) chega-se aos deslocamentos no enrijecedor e no pórtico, bem como as forças no enrijecedor.

7. O PROGRAMA

7.1. PRÉ E PÓS-PROCESSAMENTO.

7.1.1. Delphi®.

O Delphi® é uma linguagem de programação orientada a objetos baseada na linguagem Pascal, que permite o desenvolvimento de aplicações para o sistema Windows®. O Delphi® conta com uma paleta de componentes que são aplicações já prontas para serem utilizadas na hora de desenvolver o programa, estes componentes têm como objetivo principal facilitar a programação.

Para que se fizesse a análise do pórtico utilizando o método dos Elementos finitos juntamente com o método dos elementos de contorno a entrada de dados seria extremamente trabalhosa. Para isto optou-se por fazer um pré e um pós- processamento orientado a objetos de acordo a tela inicial mostrada na FIGURA 7.1.

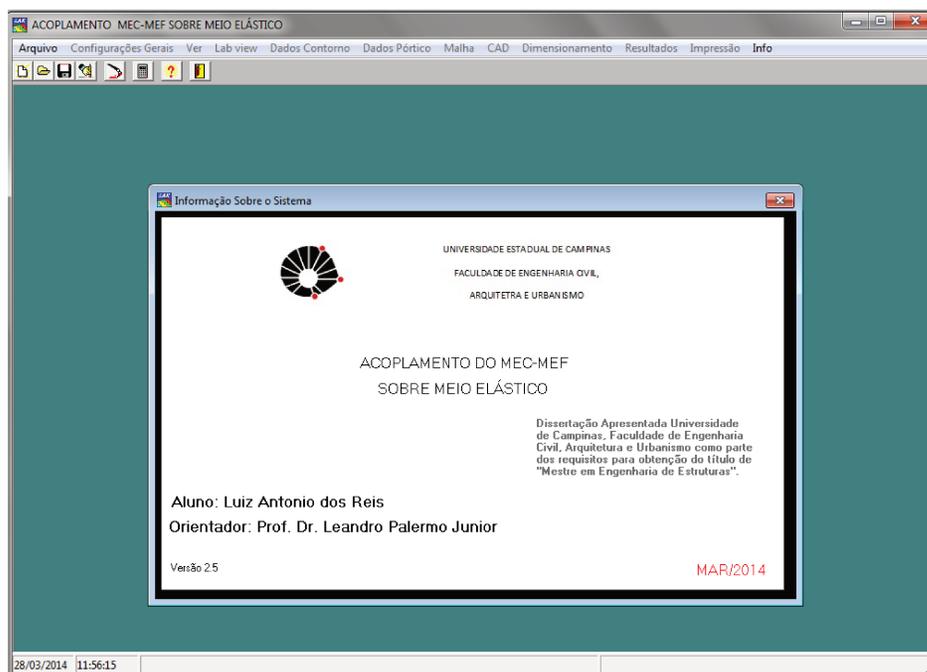


FIGURA 7.1 - Tela inicial do programa que faz o pré e o pós-processamento.

7.1.2. Gerenciador de programas.

Foi criado um gerenciador, ou seja, um programa principal, que pudesse fazer o controle de todas as rotinas de cálculo. Este gerenciador é responsável por acionar o programa gráfico, o programa gerador de malha, organizar em forma de tabelas e fazer a impressão dos dados de entrada e saída de acordo com as FIGURAS 7.2, 7.3 , 7.4 e 7.5. A comunicação entre o gerenciador e as rotinas de cálculo é feita através de arquivos de documentos não formatados – txt, ou seja, o gerenciador gera os arquivos que serão a entrada de dados do processamento, aciona o programa de cálculo, espera o processamento e faz a leitura dos arquivos contendo as respostas gravando-as em um banco de dados.

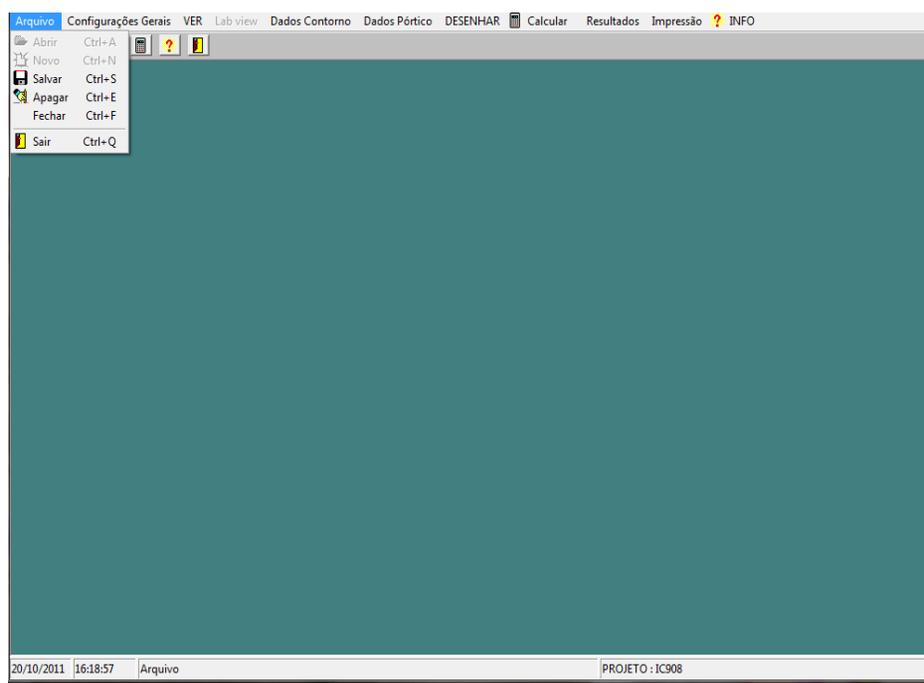


FIGURA 7.2– Tela do gerenciador com a paleta de comando contendo: Arquivo, configurações, dados do contorno, dados do pórtico, desenhar, calcular, resultados e impressão.

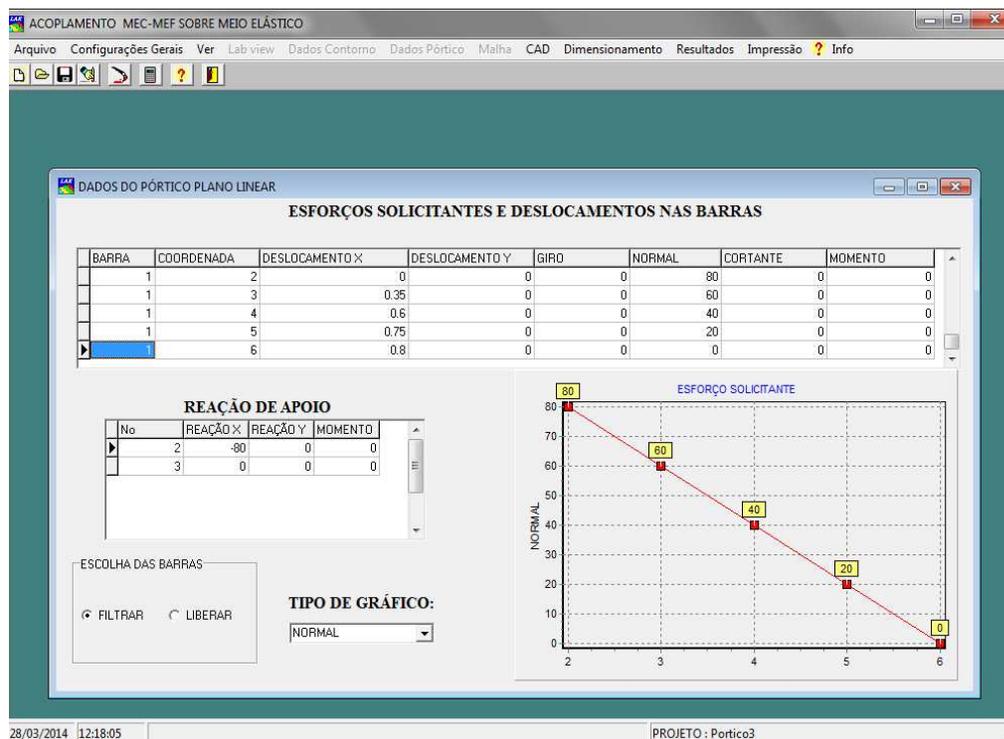


FIGURA 7.5 – Resposta do Pórtico Linear.

7.1.3. Sistema gráfico.

Denominado de “REISCAD” o programa permite fazer o desenho da estrutura em duas dimensões de acordo com a FIGURA 7.5. Este programa interpreta as linhas como sendo barras de pórtico ou como barras de contorno e os pontos como sendo nós da estrutura. As propriedades dos nós são: coordenadas, vinculação e forças e as propriedades das barras são: área, inércia, módulo de elasticidade, incidência e forças. O programa permite ainda mostrar a numeração dos nós e das barras que serão utilizadas no processamento da estrutura.

O “REISCAD” está vinculado ao gerenciador, mas é um programa independente, sua entrada e saída de dados são através de arquivos-txt, portanto ele pode ser utilizado juntamente com outros programas que fazem o processamento de estruturas através dos métodos dos elementos finitos ou dos métodos dos elementos de contorno.

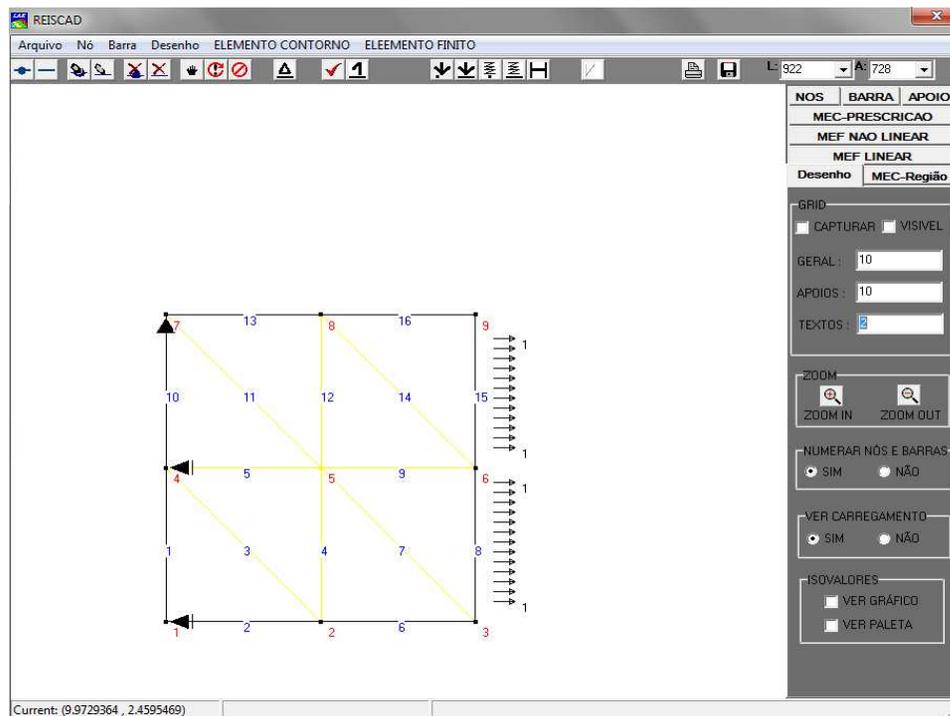


FIGURA 7.6 – Tela do programa gráfico .

O programa gráfico também é capaz mostrar, em forma de cores, os valores de tensões e deslocamentos no domínio e no contorno analisado pelo método dos elementos de contorno de acordo com a FIGURA 7.7.

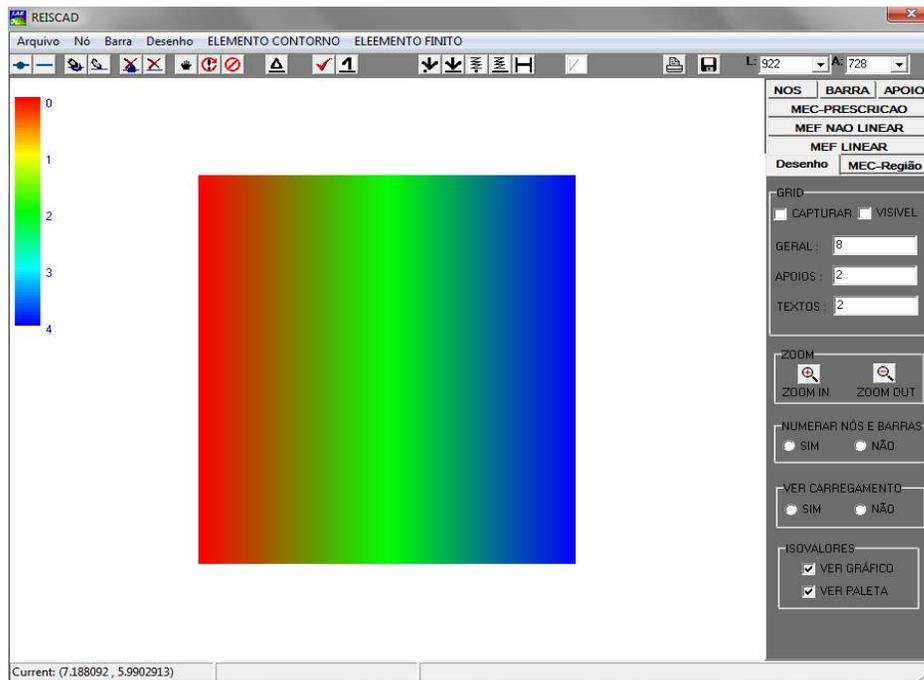


FIGURA 7.7 – Tela de apresentação das respostas em forma de cores.

7.2. PROCESSAMENTO.

7.2.1. Fortran®

Surgida em 1956 a linguagem Fortran (FORmula TRANslation) foi a primeira linguagem de programação em alto nível a ser proposta. Muito difundida no meio técnico e científico esta linguagem vem sofrendo melhorias até hoje.

7.2.2. Rotinas De Processamento.

O processamento está dividido em dois programas. Um corresponde ao gerador de malha chamado de “Malha” e o outro ao cálculo utilizando o método dos elementos de contorno e método dos elementos finitos Chamado de “calsoles”.

7.2.2.1. *Calsoles.*

O programa “calsoles” é composto de um programa principal e vinte oito sub-rotinas.

- Solest.F90 - Programa principal
- Ajdrmod.F90 - Módulo que contém algumas sub-rotinas matemática e de operação com arquivos entre elas estão a que verifica o tamanho de arquivos, manipula matriz, calcula o delta de cronesker e calcula distância de um ponto a uma reta.
- Sub_angulo.F90 – Determina o ângulo das barras do pórtico plano.
- Sub_bloc_no_Total.F90 - Calcula o número de nós por barras e o número de blocos de barras.
- Sub_cal_interno.F90 - Sub-Rotina que calcula os deslocamentos e as tensões nos pontos internos.
- Sub_comprimeto.F90 – Calcula o comprimento das barras do pórtico plano.
- Sub_continuidade.F90 – Verifica a continuidade de um grupo de barras.
- Sub_discreta_barra.F90 – Discretiza a barra do enrijecedor.
- Sub_Elastico.F90 – Gerencia o processo através do MEC.
- Sub_engasta_perfeito.F90 – Calcula o coeficiente de Engastamento perfeito para o pórtico plano.
- Sub_esfocos_lin.F90 – Determina os esforços solicitantes para o pórtico plano.
- Sub_forcas.F90 – Determina os esforços nodais para o pórtico plano.
- Sub_hgs_barra.F90 - Sub-Rotina que calcula, a matriz H, a matriz G e a Matriz S para os pontos de interface entre o domínio e o enrijecedor.
- Sub_impre.F90 - Sub-Rotina que faz a gravação dos resultados em arquivos.
- Sub_integ.F90 - Sub-Rotina que faz a integração numérica e analítica dos elementos de contorno considerando nós descontínuos e contínuos.
- Sub_integ_pint - Sub-Rotina que calcula a integral numérica para as tensões e deslocamentos nos pontos internos.
- Sub_mat_cinetica.F90 – Calcula as matrizes cinemáticas do pórtico plano.
- Sub_matg_math.F90 - Sub-Rotina que calcula as matriz G , H e S referente ao contorno.
- Sub_matr_rigidez.F90 – Calcula a matriz de rigidez para o pórtico plano.

- Sub_num_barra_Reg.F90 - Determina o número de barras por região.
- Sub_org_matgh.f90 – Impõe a condição de contorno no MEC.
- Sub_port_linear.F90 - Gerencia os cálculos do pórtico através do MEF.
- Sub_reg_barra.F90 – Saída de dados dos enrijecedores.
- Sub_reg_eln.F90 - Determina o número de sub-regiões e o número de enrijecedores em cada uma delas.
- Sub_reg_ghsi.F90 - Impões a condição de contorno nas matrizes utilizadas no acoplamento.
- Sub_rotacar.F90 – Rotaciona o carregamento para o pórtico plano.
- Sub_rotaeixo.F90 – Sub-Rotina que faz a rotação de eixos para o métodos dos elementos finitos.
- Sub_vinculacao.F90 - Determina a vinculação para o Pórtico plano.
- Tipo_erro.F90 – Sub-Rotina que contém os tipos de erros conhecidos para que a Sub-Rotina que verifica erros poder identificá-los.
- Veriferro.F90 - Sub-Rotina que verifica o tipo de erro dado pelo programa e grava em um arquivo-txt para futura análise.

7.2.2.2. Malha.

O programa “malha” é composto de um programa principal e três Sub-Rotinas.

- MALHA.F90 – Programa Principal
- DISCRETA.F90 – Sub-Rotina que discretiza uma figura qualquer em triângulos retângulos.
- SEMIDISCRETA.F90 – Sub-Rotina que divide uma figura grande em outras figuras menores. Este processo é útil quanto se que variar o tamanho da malha em uma figura.
- SEPARA.F90 – Sub-Rotina que separa os nós do domínio dos nós do contorno, uma vez que os nos do domínio servem apenas para a avaliação dos resultados com cores.

8. RESULTADOS

Para demonstrar o emprego do modelo acima descrito, são apresentados três exemplos para verificar a performance e a precisão da combinação MEC/MEF para um problema bidimensional reforçado com fibras.

8.1. TIRANTE REFORÇADO COM ENRIJECEDORES

O primeiro exemplo é mostrado para verificar a capacidade da formulação na análise da distribuição das tensões de cisalhamento ao longo da interface da ligação barra matriz em um teste de arrancamento clássico. Na FIGURA 8.1, uma barra é parcialmente imersa em um bloco. Assim, uma pequena parte da barra não está imerso para permitir a aplicação das forças de tração.

Os dados geométricos escolhidos para realizar esta análise são mostrados na FIGURA 8.1 .

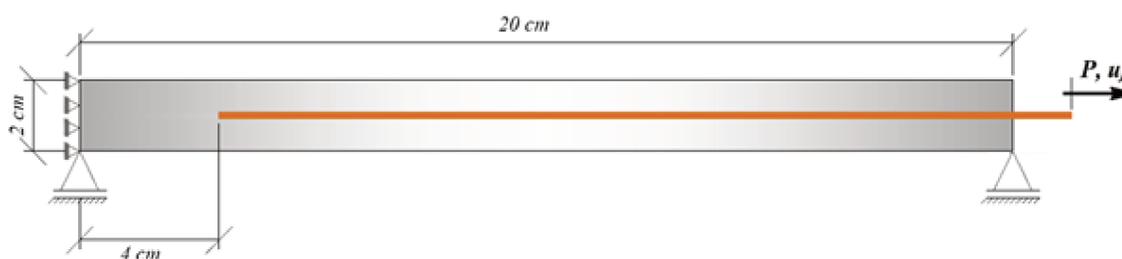


Figura 8.1. Tirante enrijecido proposto no primeiro exemplo.

Os deslocamentos são prescritos iguais a zero ao longo da lateral vertical esquerda do domínio, enquanto que na extremidade oposta, a carga é aplicada prescrevendo, na barra, um deslocamento de 0,5 cm para a direita. A extremidade direita do domínio é livre para se mover. As propriedades elásticas assumidas para esta análise são:

Elemento Plano: módulo de Young, $E_{ep} = 30.000,00 \text{ kN/cm}^2$, relação de Poisson $\nu = 0,0$, Elemento enrijecedor : $E_f = 21.000,00 \text{ kN/cm}^2$, $A_f = 1 \text{ cm}^2$.

Foram considerados 160 elementos finitos para representar o enrijecedor e sessenta elementos lineares foram definidas para aproximar os valores de limite do domínio.

Os resultados obtidos em termos de deslocamentos são mostrados no GRÁFICO 8.1 em conjunto com a solução obtida por BOTTA (2003).

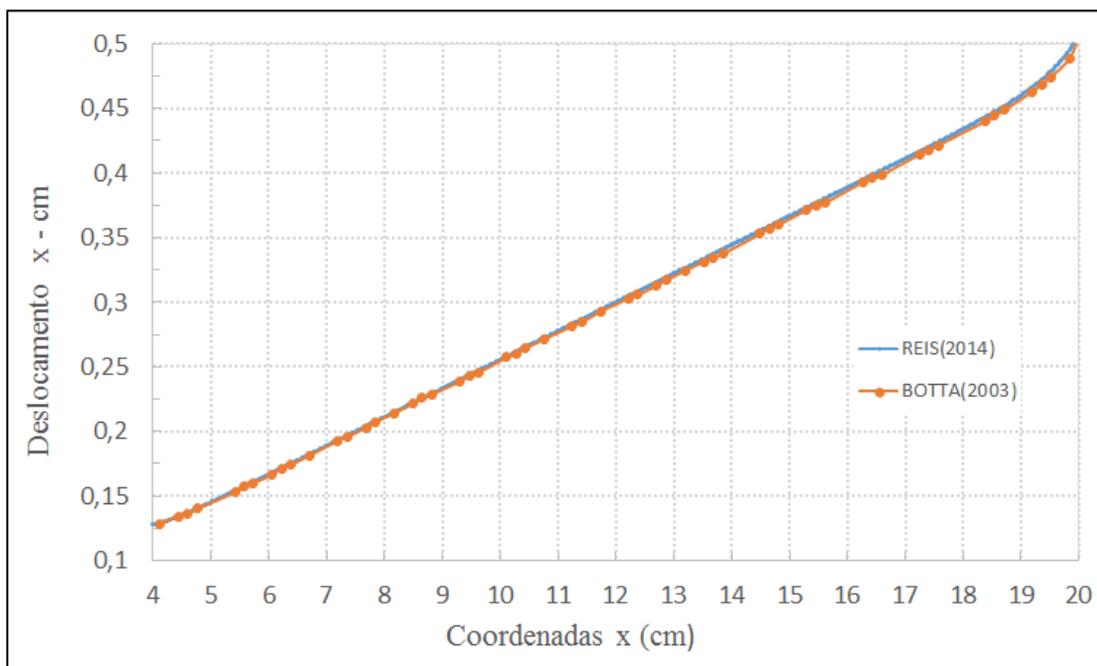


GRÁFICO 8.1. Deslocamentos na direção do eixo x da barra.

A solução numérica é completada pelos resultados apresentados no GRÁFICO 8.2, onde as forças de interface são exibidos, em conjunto com a solução obtida por BOTTA (2003).

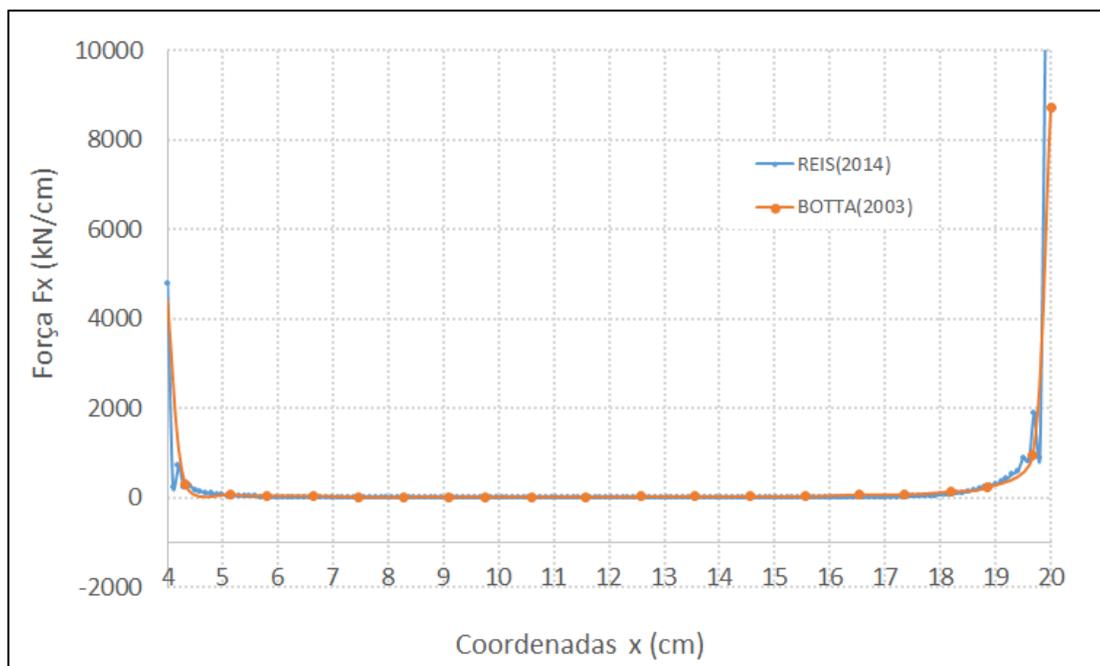


GRÁFICO 8.2. Forças na direção do eixo x, de superfície nas barras.

8.2. VIGA ENGASTADA SUBMETIDA A UMA CARGA DISTRIBUÍDA NA FACE SUPERIOR REFORÇADA COM UM ENRIJECEDOR EM SUA FACE INFERIOR.

Este exemplo mostra a capacidade da formulação na análise de tensões ao longo da interface fibra-matriz. Na FIGURA 8.2, uma viga biengastada está sendo solicitada na face superior por um carregamento uniformemente distribuído. Uma barra enrijecedora foi colocada na parte inferior reforçando a viga.

Os dados geométricos e físicos da estrutura bem como as condições de contorno estão apresentados na FIGURA. 8.2.

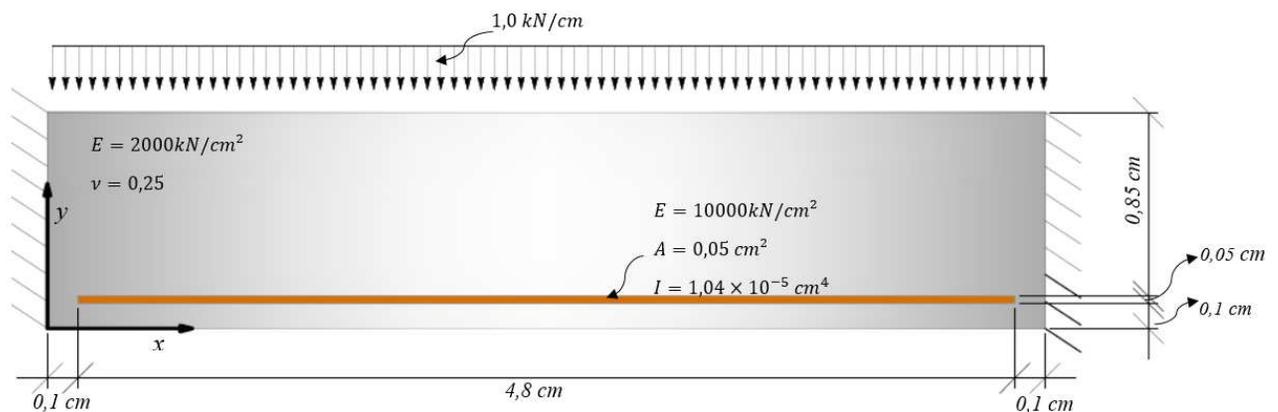


FIGURA 8.2. Dimensões e condições de contorno impostos no segundo exemplo.

Foi considerado 160 elementos finitos para representar o elemento enrijecedor e 120 elementos lineares para aproximar o contorno do domínio.

Os resultados obtidos são mostrados nos GRÁFICO 8.3, GRÁFICO 8.4, GRÁFICO 8.5, GRÁFICO 8.6 e GRÁFICO 8.7 em conjunto com a solução obtida por WUTZOW(2003).

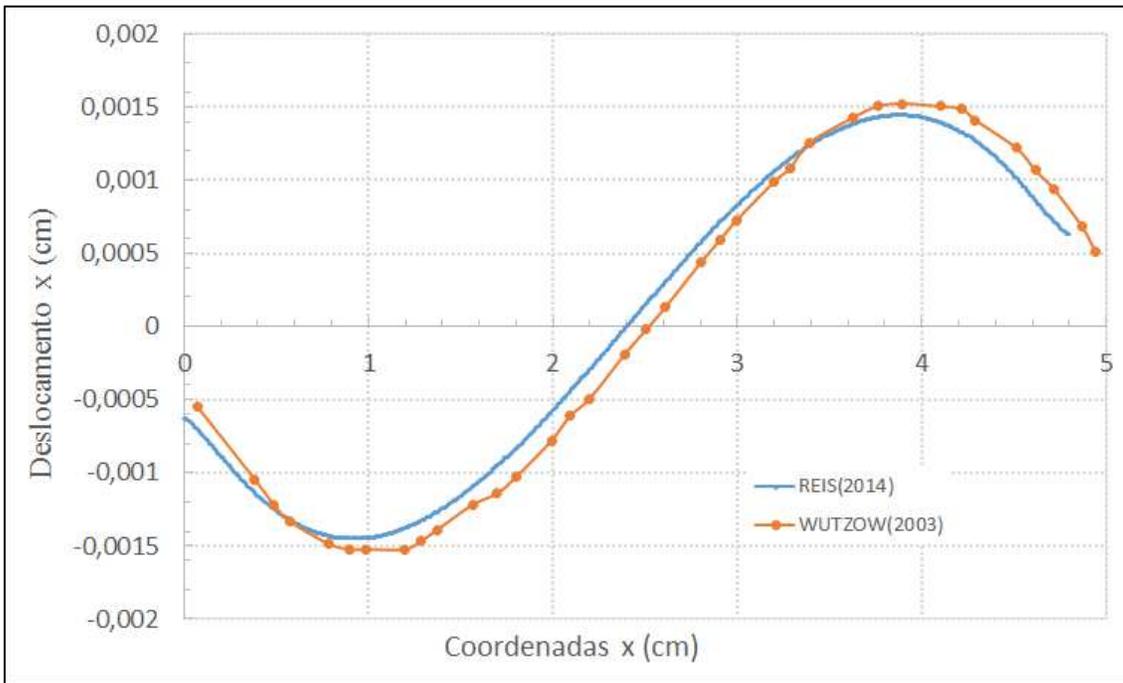


GRÁFICO 8.3. Deslocamentos na direção do eixo x.

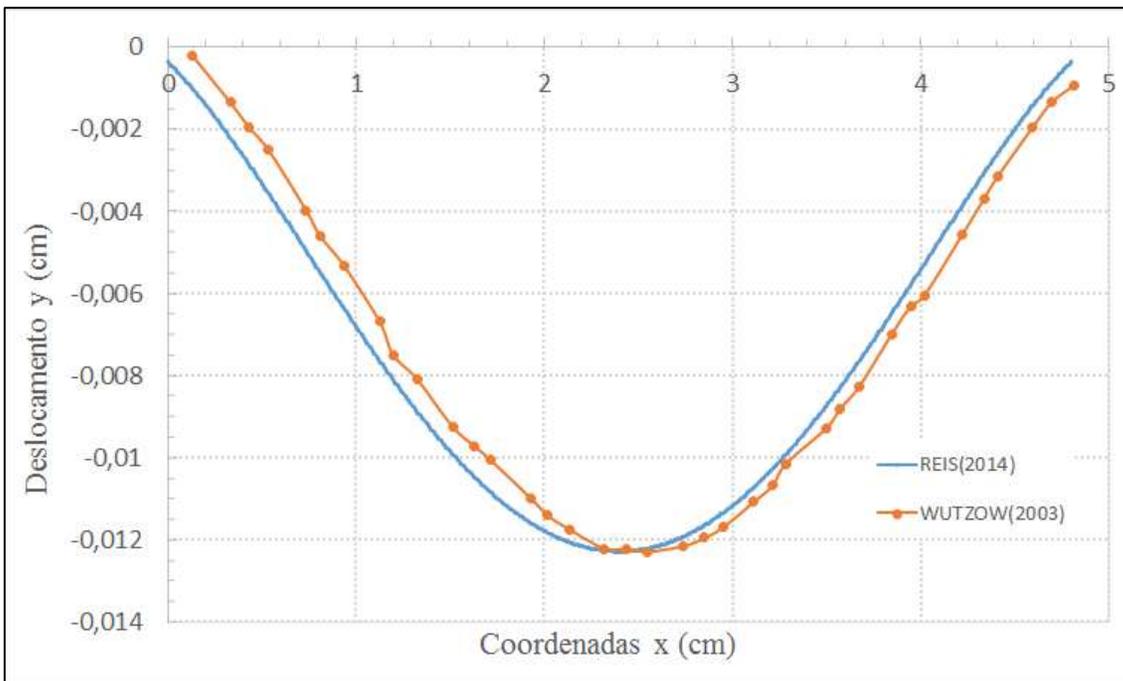


GRÁFICO 8.4. Deslocamentos na direção do eixo y.

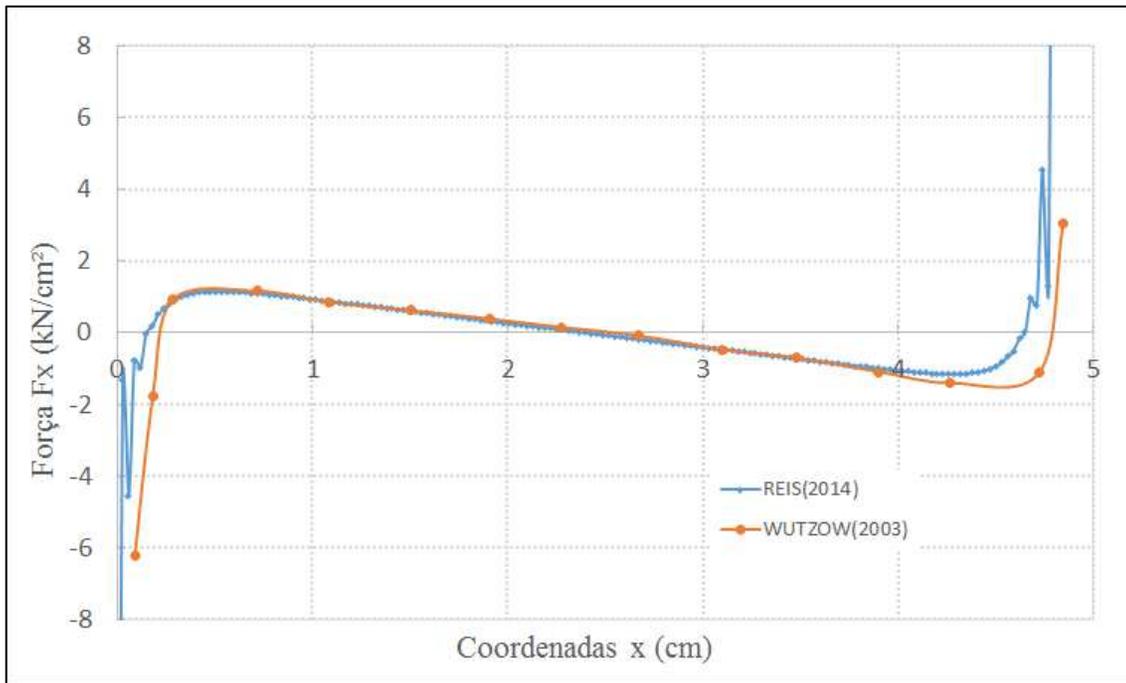


GRÁFICO 8.5. Forças de superfície na direção do eixo x.

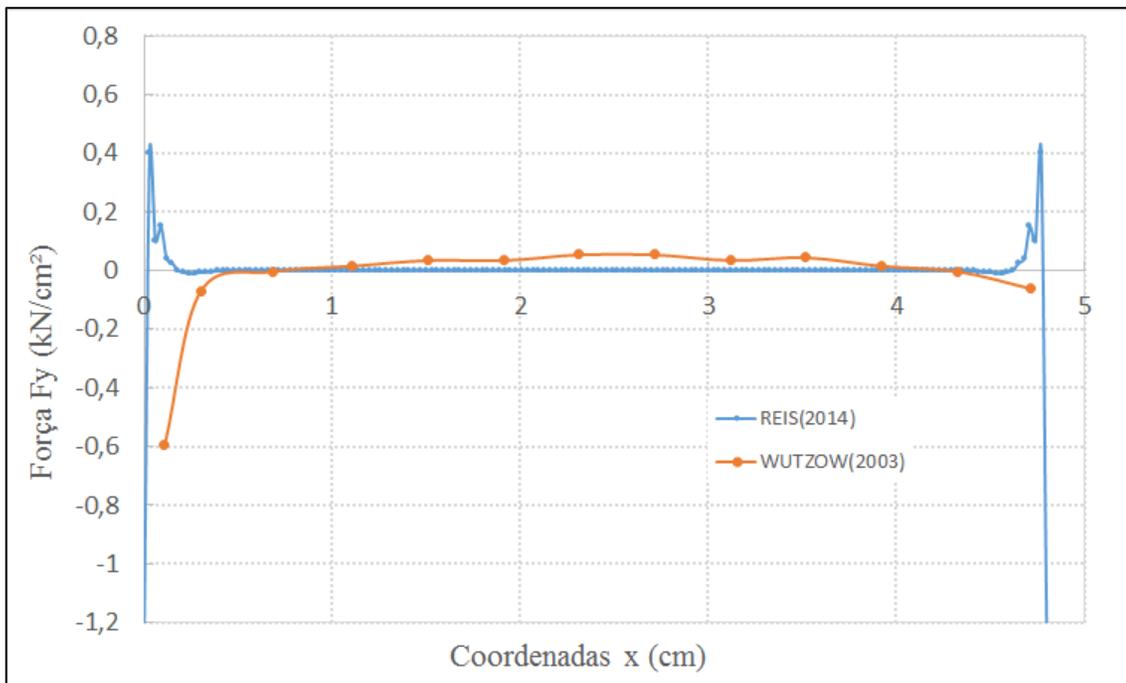


GRÁFICO 8.6. Forças de superfície na direção do eixo y.

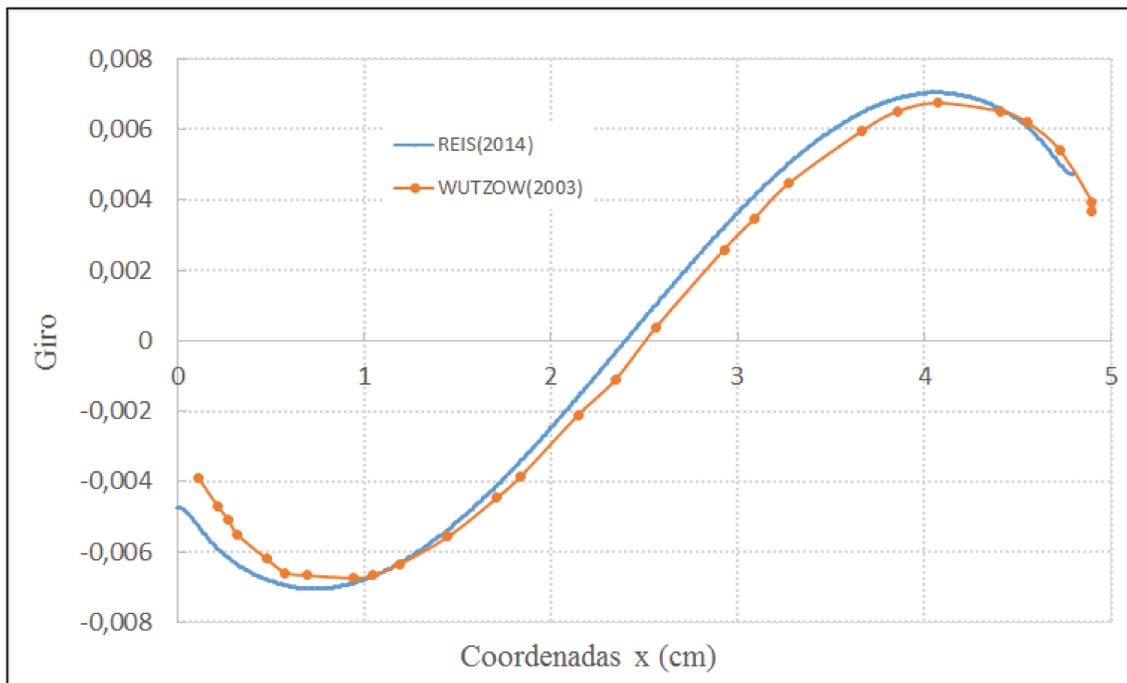


GRÁFICO 8.7. Rotação na barra erijecedora.

8.3. PÓRTICO PLANO SOBRE UM MEIO ELÁSTICO.

Este exemplo como nos anteriores mostra a capacidade da formulação quando é acoplado um pórtico plano no enrijecedor. Apresenta-se na FIGURA 8.3, o caso de uma estrutura reticulada a ser colocada parcialmente em uma sub-região com domínio infinito.

Resolve-se este problema no estado plano de deformação considerando-se os seguintes valores para as características do material do domínio infinito:

- Modulo de Elasticidade Longitudinal : $E = 221.000.000 \text{ kN/m}^2$
- Coeficiente de Poisson : $\nu = 0.3$

Aplica-se uma força horizontal $F = 10 \text{ kN}$ na extremidade livre da estrutura reticulada que apresenta as seguintes características:

- Módulo de Elasticidade longitudinal: $E = 10.000.000 \text{ kN/m}^2$
- Área da seção Transversal: $A = 0.3 \text{ m}^2$
- Momento de Inércia : $I = 0.00225 \text{ m}^4$

A estrutura reticulada colocada dentro do domínio foi discretizada em cinquenta elementos e a parte fora do domínio em quatro elementos.

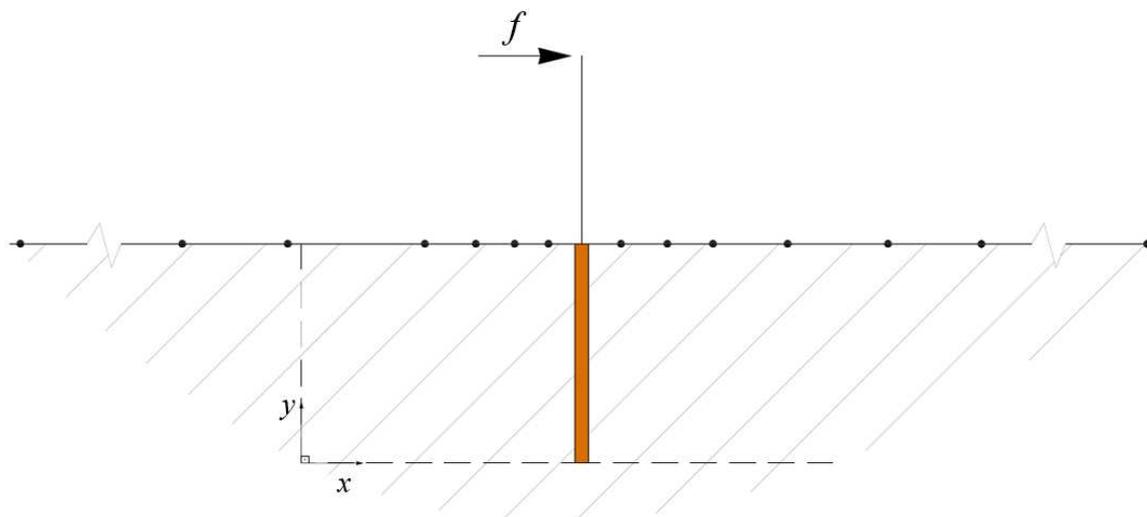


FIGURA 8.3 – Barra parcialmente imersa em um domínio semi-infinito.

O resultado pode ser observado nos gráficos a seguir:

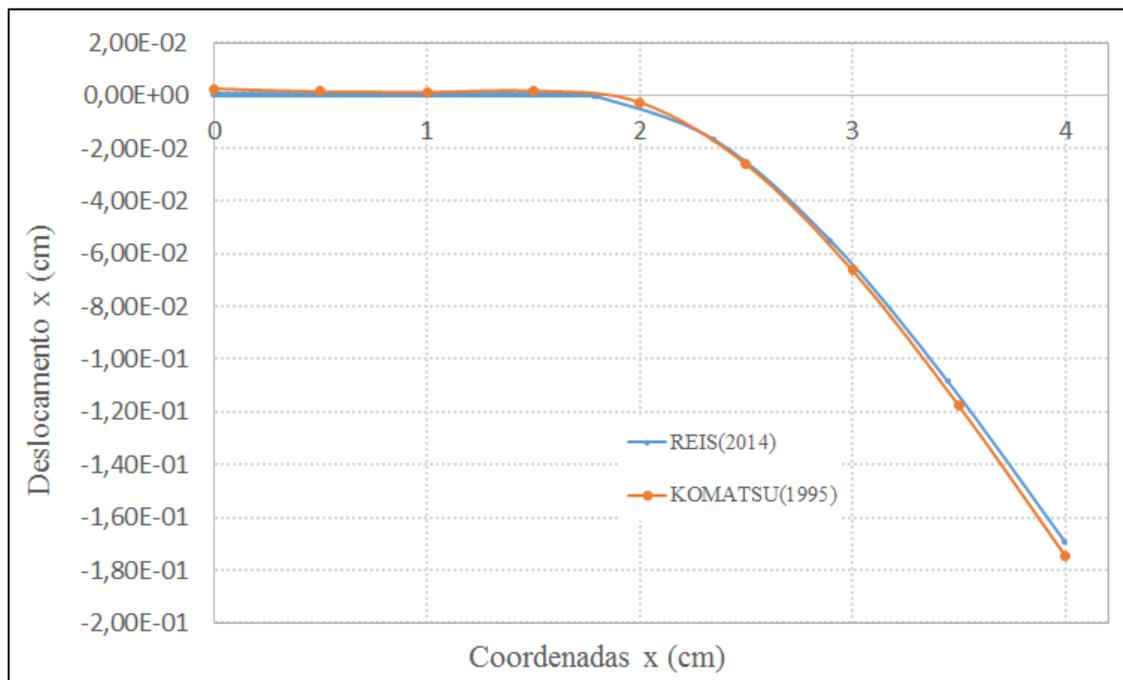


GRÁFICO. 8.8 – Gráfico deslocamento na direção x

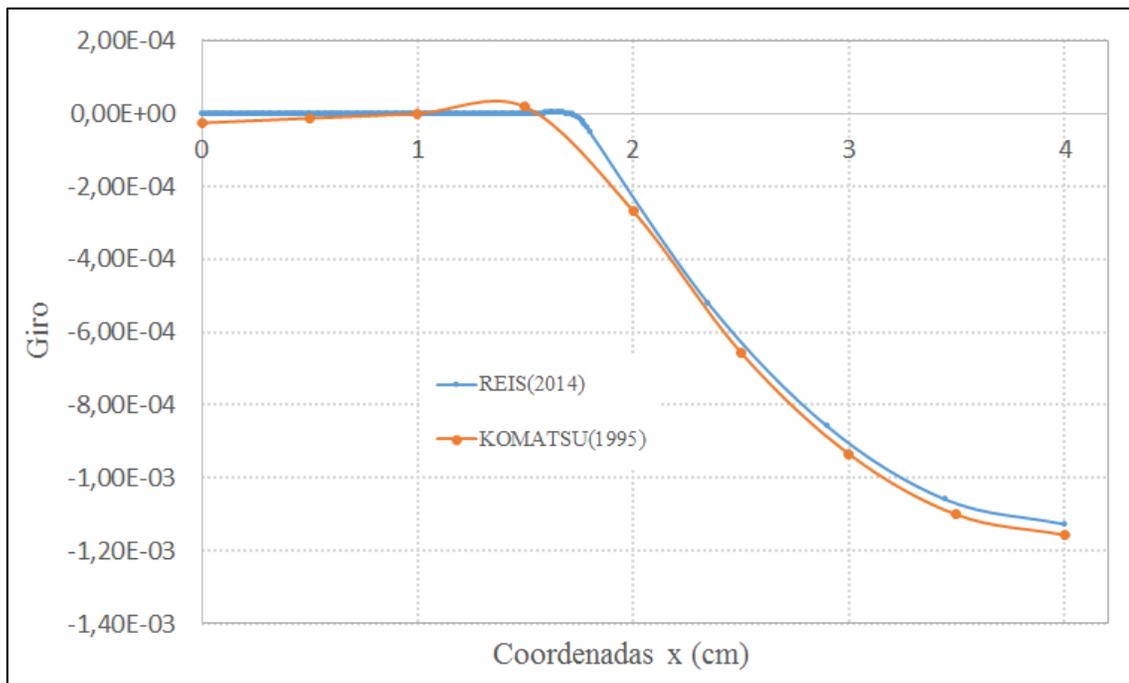


GRÁFICO 8.9 – Gráfico de Rotação.

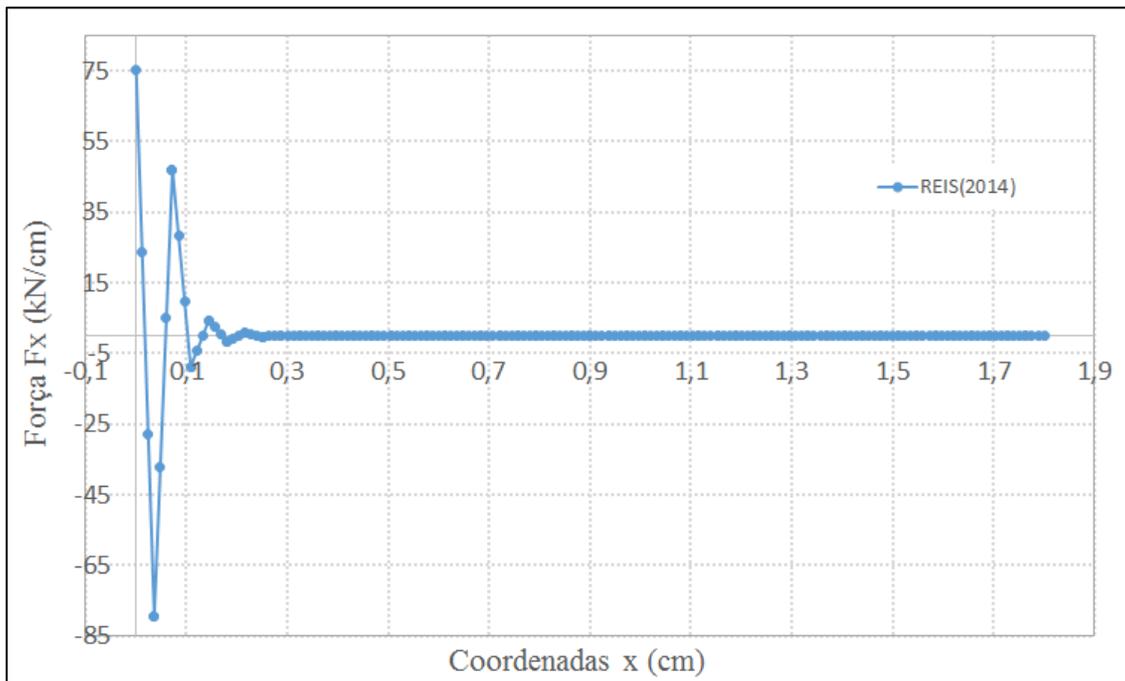


GRÁFICO 8.10 – Força em x no Enrijecedor

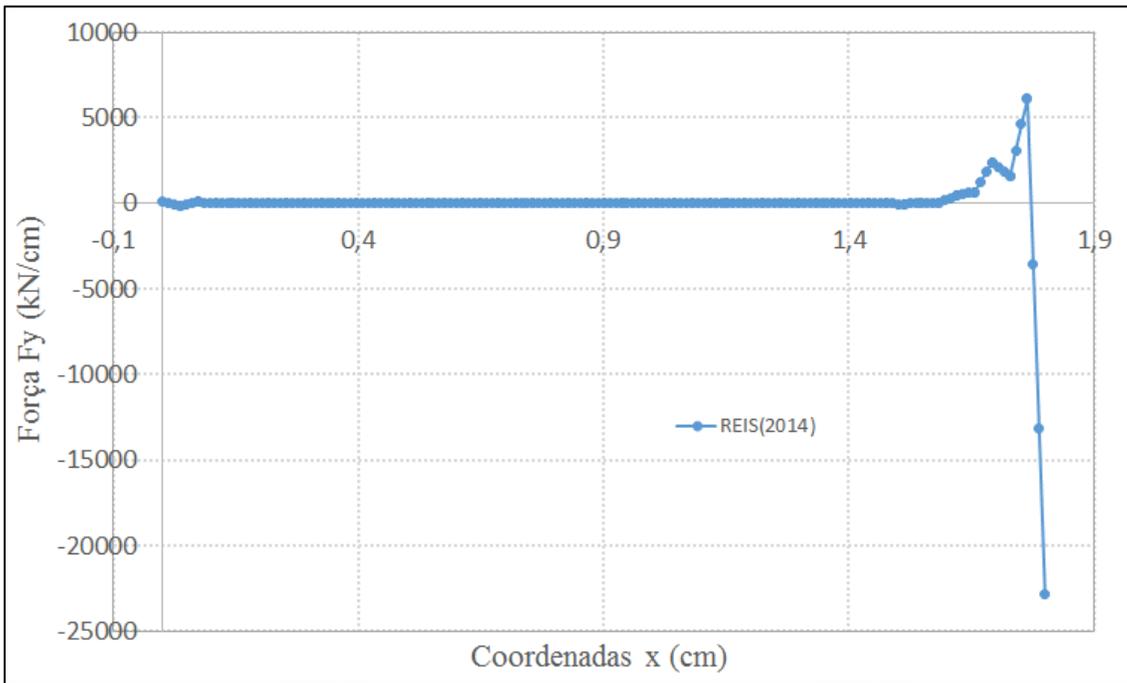


GRÁFICO 8.11 – Força em y no Enrijecedor

Com estes resultados mostra-se que o procedimento utilizado neste trabalho, é adequado para solução de problemas desta natureza.

CONCLUSÃO

A grande vantagem em se utilizar o acoplamento MEC-MEF é a possibilidade de se utilizar o método ideal para cada tipo de domínio. Neste trabalho o método dos elementos de contorno-MEC foi aplicado a um meio elástico contínuo bidimensional e o método dos elementos finitos-MEF a estrutura reticulada.

A técnica não é inédita, vários pesquisadores já veem utilizando esta combinação de várias maneiras, porém neste trabalho foi feito o acoplamento utilizando enrijecedores e impondo deslocamentos ao pórtico.

Os deslocamentos encontrados são impostos como condição de contorno no pórtico plano. De acordo com o já exposto o problema é resolvido através de solução de sistema linear.

Conforme se observa nos exemplos, a regularização proposta por mínimos quadrados se apresenta bastante eficiente para carregamentos axiais, mas para carregamentos perpendiculares as barras uma perturbação ainda persiste. Entretanto, considerando carregamento axial, para que a solução seja satisfatória as fibras devem ser bem discretizadas.

Como se pode ver no primeiro exemplo, a presente formulação mostra resultados muito estáveis com uma curva suave e compatível com os resultados apresentados por Botta (2003)

No segundo exemplo, os resultados obtidos foram muito próximos ao de Wutzow (2003) que fez a análise utilizando somente elementos de contorno e acoplando sub-regiões.

No terceiro exemplo quando é acoplado um pórtico ao enrijecedor, se comparado a komatsu(1995), os resultados apresentaram bastante próximos.

Com a realização deste trabalho também foi possível tornar-se disponível um pré e um pós-processamento, utilizando a linguagem de programação DELPHI® e uma biblioteca gráfica OPENGL.

O programa que conta com um gerenciador, um sistema de desenho assistido por computador (CAD), um gerador de malha, um sistema para interpretação de dados através de cores e de tabelas e um sistema para impressão dos resultados vem para facilitar bastante o lançamento dos dados e a interpretação dos resultados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADINI, A., CLOUGH, R.W. (1961). **Analysis of plate bending by the finite element method.** Report National Science Foundation, Grant 973337.

ALMEIDA, F.P.A. (2003). **Aplicação do acoplamento entre o MEC e o MEF para o estudo da interação dinâmica elastoplástica entre o solo e estruturas.** São Carlos. Tese (Doutorado)- Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo.

ALMEIDA, V.S. (2003). **Análise da interação solo não homogêneo/estrutura via acoplamento MEC/MEF.** São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo.

ASSAN, A.E. (1999). **Método dos elementos finitos, primeiros passos.** UNICAMP, Campinas, Brasil, 1ª Edição.

ARGYRIS, J.H., KELSEY, S. (1960). **Energy theorems and structural analysis.** London: Butterworth's.

AZEVEDO, C. A. C. (2007). **Formulação alternativa para análise de domínios não-homogêneos e inclusões anisotrópicas via MEC.** São Carlos. 153p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

BEER, G. (1985). **An isoparametric joint/interface element for finite element analysis.** Int. J. Num. Meth. Eng., v.21, p. 585-600.

BEER, G. (1986). **Implementation of combined boundary element-finite element analysis with application in geomechanics.** In: BANERJEE, D.K.; WATSON, J.O., eds. Developments in boundary element methods-4. London, Appl. Sci. Publ.

BREBBIA, C.A.; GEORGIU, P. (1980). **Combination of boundary and finite elements for elastostatics**. Appl. Math. Modeling, V.3, P. 212-220.

BOTTA, A.S. (2003). **Método dos elementos de contorno para análise de corpos danificados com ênfase no fenômeno da localização de deformações**. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, São Carlos - SP.

BOTTA, A. S.; VENTURINI, W. S. (2003). **Reinforced 2D domain analysis using BEM and regularized BEM/FEM combination**.

CEN, Z.Z.; DU, Q.H. (1987). **Some further works on the combination of hybrid/mixed finite elements to boundary elements**. In: JAPAN-CHINA SYPOSIUM ON BOUNDARY ELEMENT METHODS, 1st, Kauizawa, Japn, June 1-5. Proceedings.

CHEN, H.S.; MEI, C.C. (1974). **Oscillations and wave forces in a man-made harbour**. In: NAVAL HYDRO SYMP., 10th, Dept. of Civil Eng., MIT., Cambridge, USA.

CODA, H.B. (1993). **Análise tridimensional transiente de estruturas pela combinação entre o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos**. São Carlos. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

CODA, H.B. (2000). **Contribuição à Análise Dinâmica Transiente de Meios Contínuos pelo Método dos Elementos de Contorno**. São Carlos. Tese (Livre Docência) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

CODA, H.B. (2003). **An exact FEM geometric non-linear analysis of frames based on position description**. In: XVIII Congresso Brasileiro De Engenharia Mecânica, São Paulo.

CODA, H.B.; GRECO, M. (2004). **A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description**. Computer methods in applied mechanics and engineering, v.193, p.3541-3557.

DANGLA, P. (1988). **Plane strain soil-structure interaction model**. Earthquake Engineering e Structural Dynamics, v.16, n.8, p.1115-1128.

ESTORFF, O.; KAUSEL, E. (1989). **Coupling of boundary and finite elements for soil-structure interaction problems**. Earthquake Engineering e Structural Dynamics, v.18, n.7, p.1065-1075.

FERNANDES, G. R. (2003). **Análise Não Linear de Estruturas de Pavimento de Edifícios Através do Método dos Elementos de Contorno**. 272 p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

FERRO, N.C.P. (1993). **Uma combinação MEC/MEF para análise de fundações enrijecidas por estacas**. São Carlos. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

FERRO, N.C.P.; VENTURINI, W.S. (1991). **Formulação de um elemento de fundação através do método dos elementos de contorno**. In: JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, 25., Porto Alegre. Anais. V.1, p.421-430.

FERRO, N.C.P.; VENTURINI, W.S. (1992). **BEM-FEM coupling for building structure analysis**. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON METHODS, 14th., Seville, November. Proceedings

FOLTRAN, C.E. (1999). **Análise de problemas planos em regime elasto-plástico pelo método dos elementos de contorno**. Campinas. Dissertação (mestrado) – Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas.

KOBAYASHI, S.; MORI, K. (1986). **Three-dimensional dynamic analysis of soil-structure interactions by boundary integral equation- finite combined method**. In: SHAW, R. P., ed. Innovative numerical methods in engineering. Berlin, Springer-Verlag, p.613-618.

KZAM, A.K.L. (2009) **Formulação Dual em Mecânica da Fratura Utilizando Elementos de Contorno Curvos de Ordem Qualquer**. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

LEITE, L.G.S.; CODA, H.B.; VENTURINI, W.S. (2003). **Two-dimensional solids reinforced by thin bars using the boundary element method**. Engineering analysis with boundary elements, v. 27, pp. 193-201.

LOVÓN, O. (2003). **Formulação adaptativa do MEC para problemas elásticos**. São Carlos. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

MACIEL, D.N. (2003). **Determinação dos fatores de intensidade de tensão estáticos e dinâmicos via MEC com integração analítica em coordenadas locais**. São Carlos. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

McDONALD, B. H.; WEXLER, A. (1972). **Finite element solution of unbounded field problems**. IEE Tras. Microwave Theory and Techniques, MTT-20, p. 841-47.

MELOSH, R.S. (1961). **A stiffness matrix for the analysis of thin plates in bending**. Journal Aeronaut. Science, v.28, n.1, p.34-42.

MITSUI, Y. et al (1985). **A coupling scheme for boundary and finite elements using a joint element**. Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., v.9, p. 161-172.

OSIAS et al (1977). **Combined boundary integral equation finite element analysis of solids**. In: SYMPOSIUM ON INNOVATIVE NUMERICAL ANALYSIS IN APLPLIED ENGINEERING SCIENCE, 1st, Versailles, CETIM- Proc.

PAIVA, J. B.; ALIABADI, M. H. (2000). **Boundary element analysis of zoned plates in bending**. Computational Mechanics, 25(6):560-566.

PAIVA, J. B.; ALIABADI, M. H. (2004). **Bending moments at interfaces of thin zoned plates with discrete thickness by the boundary element method**. Engineering analysis with boundary elements, 28:747-751.

QUIM, F. (2010). **Análise de escavações de túneis com revestimento utilizando o método dos elementos de contorno**. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, São Carlos.

RAMALHO, M.A. (1990). **Sistema para análise de estruturas considerando interação com o meio elástico**. São Carlos. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

RAMALHO, M.A. ; VENTURINI, W.S. (1990). **Formulação de um elemento para a discretização de sapatas rígidas com base no método dos elementos de contorno**. In: CONGRESSO IBERO LATINO AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 11., Rio de Janeiro. Anais. V.2, p.903-912.

RIBEIRO, D. B. (2009). **Estudo e aplicação de um elemento de contorno infinito na análise da interação solo-estrutura via combinação MEC/MEF**. Tese (Doutorado) -Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, São Carlos.

RIBEIRO, D. B.; PAIVA, J. B. (2009). **Estudo e aplicação de um elemento de contorno infinito na análise da interação solo-estrutura via combinação MEC/MEF**. Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos, v.11, n. 50, p. 57-74, 2009.

ROCHA, F. C. (2009). **Análise de domínios reforçados através da combinação MEC/MEF considerando modelos de aderência**. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, São Carlos.

RUGGIERO, M. A. G. ; LOPES, V. L (1996) . **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais** – São Paulo: Pearson Macron Books.

SILVA, W. Q. (2010) ; **Análise não linear geométrica do acoplamento solo-estrutura através da combinação MEC-MEF**. Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, São Carlos.

SHAW, R. P.; FALBY, W. (1977) **FEBIE: A combined finite element-boundary integral equations method**. In: SYMPOSIUM ON INNOVATIVE NUMERICAL ANALYSIS IN APPLIED ENGINEERING SCIENCE, 1 st, Versailles. Proceedings.

TELLES, J.C.F.; BREBBIA, C.A. (1979). **On the application of the boundary element method to plasticity**. Appl. Math. Modelling, v.3, p.466-470.

TELLES, J.C.F.; BREBBIA, C.A. (1980a). **The boundary element method in plasticity**. In: BREBBIA, C.A., ED. New development in boundary element methods. CML Publications, p.295-317.

TELLES, J.C.F.; BREBBIA, C.A. (1980b). **Elastoplastic boundary element analysis**. In: WUNDERLICH, W. et alii, eds. Proc. Europe-U.S. Workshop on nonlinear finite element analysis in structural mechanics. Springer-Verlag, p. 403-434.

TIMOSHENKO, S.P.; GOODIER, J.N. (1980) **Teoria da elasticidade**. Rio de Janeiro, Ed. Guanabara Dois S.A.

VENTURINI, W.S. (1982). **Application of the boundary element formulation to solve geomechanical problems**. Southampton, Ph. D. Thesis – University of Southampton.

VENTURINI, W.S. (1984). **Boundary element method in geomechanics**. Springer-Verlag. (Lecture Notes in Engineering).

VENTURINI, W.S. ; BREBBIA, C.A. (1983). **Some applications of the boundary element method in geomechanics.** Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., v.7, p.419-434.

VENTURINI, W.S. ; BREBBIA, C.A. (1984). **Boundary element formulation for nonlinear applications in geomechanics.** Appl. Math. Modelling, v.8, p.251-260.

WAIDERMAN, L.; (2007) Venturin,W.S., **BEM formulation for reinforced plates.** In: Advances in Boundary Element Techniques VIII, Eds. V. Minutolo & M.H.Aliabadi, EC, Ltd, Eastleigh, UK.

WOOD, L.A.; CREED, S.G. (1982). **The application of boundary elements in offshore engineering.** In: BREBBIA, C.A., ed. Boundary element methods in engineering. Springer-Verlag.

WUTZOW, W. W. (2003). **Formulação do método dos elementos de contorno para análise de chapas com enrijecedores.** Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos- Universidade de São Paulo, São Carlos.

ZAILU, J.; JIGUANG, S. (1987). **Some coupling usage of BEM and FEM for structures composed of thin plates.** In: JAPAN-CHINA SYMPOSIUM ON BOUNDARY ELEMENT METHODS, 1st, Karuizawa, Japan, p.1-5. Proceedings.

ZIENKIEWICZ, O.C., et al. (1977). **The coupling of the finite element method and boundary solution procedures.** Int. J. Num. Meth. Engng., v.11, p.355-375.

A.1 - Rotina em MATHCAD® para matriz de rigidez

A seguir está a listagem do programa em MATHCAD® que deduz a função de Forma e a matriz de Rigidez, para barras de treliça, considerando um número qualquer de nós por barras. Para o caso abaixo está representado à dedução com quatro nós por barras que corresponde ao enrijecedor utilizado.

Número de Nós:

NN:= 4

Graus de liberdade:

tipo :=

horizontal

gl := 1

gl → 1

Posição dos Nós:

inicio := 0

fim := 1

incr := $\frac{(\text{fim} - \text{inicio})}{\text{NN} - 1}$

```

posi(NN) :=
  cont ← 0
  val ← inicio
  for i ∈ 1..NN
    v
    | v
    | cont ← val
    | cont ← cont + 1
    | val ← val + incr
  v

```

$$\text{posi(NN)}^T \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

```

funfor (ξ) :=
  cont ← 0
  for i ∈ 1..NN·gl
    lin ← 0
    col ← 0
    for j ∈ 1..NN·gl
      matblin,0 ← 1 if j = i
      matblin,0 ← 0 otherwise
      lin ← lin + 1
    lin ← 0
    for k ∈ 1..NN
      col ← 0
      for n ∈ 1..NN·gl
        matalin,col ← [ (posi(NN)k-1)NN·gl-n ] if posi(NN)k-1 ≠ 0
        matalin,col ← 0 if posi(NN)k-1 = 0 ∧ n ≠ NN·gl
        matalin,col ← 1 if posi(NN)k-1 = 0 ∧ n = NN·gl
        col ← col + 1
      lin ← lin + 1
    x ← Isolve(mata,matb)
    ficont ← ∑m=0gl·NN-1 ( ( ( xm,0 · ξgl·NN-m-1 ) ) )
    cont ← cont + 1
  fi

```

Funções de Forma:

$$\text{forma} := \text{funfor}(\xi) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-9}{2} \cdot \xi^3 + 9 \cdot \xi^2 - \frac{11}{2} \cdot \xi + 1 \\ \frac{27}{2} \cdot \xi^3 - \frac{45}{2} \cdot \xi^2 + 9 \cdot \xi \\ \frac{-27}{2} \cdot \xi^3 + 18 \cdot \xi^2 - \frac{9}{2} \cdot \xi \\ \frac{9}{2} \cdot \xi^3 - \frac{9}{2} \cdot \xi^2 + \xi \end{pmatrix}$$

$$\text{matrizrigidez}(E, A, L) := \begin{array}{l} \text{for } i \in 0.. \text{NN} \cdot \text{gl} - 1 \\ \quad \text{for } j \in 0.. \text{NN} \cdot \text{gl} - 1 \\ \quad \quad k_{i,j} \leftarrow \int_0^1 \left[E \cdot \frac{A}{L} \cdot \left(\frac{d^1}{d\xi^1} \text{forma}_i \right) \cdot \left(\frac{d^1}{d\xi^1} \text{forma}_j \right) \right] d\xi \\ k \end{array}$$

Matriz de Rigidez:

$$\text{matrizrigidez}(E, A, L) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{37}{10} \cdot E \cdot \frac{A}{L} & \frac{-189}{40} \cdot E \cdot \frac{A}{L} & \frac{27}{20} \cdot E \cdot \frac{A}{L} & \frac{-13}{40} \cdot E \cdot \frac{A}{L} \\ \frac{-189}{40} \cdot E \cdot \frac{A}{L} & \frac{54}{5} \cdot E \cdot \frac{A}{L} & \frac{-297}{40} \cdot E \cdot \frac{A}{L} & \frac{27}{20} \cdot E \cdot \frac{A}{L} \\ \frac{27}{20} \cdot E \cdot \frac{A}{L} & \frac{-297}{40} \cdot E \cdot \frac{A}{L} & \frac{54}{5} \cdot E \cdot \frac{A}{L} & \frac{-189}{40} \cdot E \cdot \frac{A}{L} \\ \frac{-13}{40} \cdot E \cdot \frac{A}{L} & \frac{27}{20} \cdot E \cdot \frac{A}{L} & \frac{-189}{40} \cdot E \cdot \frac{A}{L} & \frac{37}{10} \cdot E \cdot \frac{A}{L} \end{pmatrix}$$

$$\text{matrizfo}(L, q) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0.. \text{NN} \cdot \text{gl} - 1 \\ \text{ff}_i \leftarrow \int_0^1 [L \cdot q \cdot (\text{forma}_i)] d\xi \\ \text{ff} \end{array} \right.$$

$$\text{vforc} := \begin{pmatrix} 1 - \xi \\ \xi \end{pmatrix}$$

Matriz de Força Nodal:

$$\text{matrizfo}(L, q) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \cdot L \cdot q \\ \frac{3}{8} \cdot L \cdot q \\ \frac{3}{8} \cdot L \cdot q \\ \frac{1}{8} \cdot L \cdot q \end{pmatrix}$$

$$\text{gf} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0.. \text{NN} \cdot \text{gl} - 1 \\ \text{for } j \in 0.. 1 \\ \text{gf}_{i,j} \leftarrow L \cdot \int_0^1 [(\text{forma}_i) \cdot \text{vforc}_j] d\xi \\ \text{gf} \end{array} \right.$$

Matriz de Forças Distribuídas:

$$gf \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{13}{120} \cdot L & \frac{1}{60} \cdot L \\ \frac{3}{10} \cdot L & \frac{3}{40} \cdot L \\ \frac{3}{40} \cdot L & \frac{3}{10} \cdot L \\ \frac{1}{60} \cdot L & \frac{13}{120} \cdot L \end{pmatrix}$$

A baixo está a listagem do programa em MATHCAD® que deduz a função de Forma e a matriz de Rigidez, para barras de vigas, considerando um número qualquer de nós por barras.

Número de Nós:

NN := 4

Graus de liberdade:

tipo := 

gl := $\begin{cases} 1 & \text{if tipo} = 1 \vee \text{tipo} = 2 \\ 2 & \text{if tipo} = 3 \end{cases}$

gl → 1

Posição dos Nós:

inicio := 0

fim := 1

incr := $\frac{(\text{fim} - \text{inicio})}{\text{NN} - 1}$

```

posi(NN) :=
  | cont ← 0
  | val ← inicio
  | for i ∈ 1..NN
  |   | vcont ← val
  |   | cont ← cont + 1
  |   | val ← val + incr
  | v

```

$$\text{posi(NN)}^T \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

```

funfor ( $\xi, L$ ) := cont  $\leftarrow$  0
for i  $\in$  1..NN·gl
  lin  $\leftarrow$  0
  col  $\leftarrow$  0
  for j  $\in$  1..NN·gl
    matblin,0  $\leftarrow$  1 if j = i
    matblin,0  $\leftarrow$  0 otherwise
    lin  $\leftarrow$  lin + 1
  lin  $\leftarrow$  0
  for k  $\in$  1..NN
    col  $\leftarrow$  0
    for n  $\in$  1..NN·gl
      matalin,col  $\leftarrow$   $\left[ \left( \text{posi}(\text{NN})_{k-1} \right)^{\text{NN} \cdot \text{gl} - n} \right]$  if (tipo = 1  $\vee$  tipo = 3)  $\wedge$  posi(NN)k-1  $\neq$  0
      matalin,col  $\leftarrow$  0 if (tipo = 1  $\vee$  tipo = 3)  $\wedge$  posi(NN)k-1 = 0  $\wedge$  n  $\neq$  NN·gl
      matalin,col  $\leftarrow$  1 if (tipo = 1  $\vee$  tipo = 3)  $\wedge$  posi(NN)k-1 = 0  $\wedge$  n = NN·gl
      col  $\leftarrow$  col + 1
    gl1  $\leftarrow$  NN·gl - 1
    gl1  $\leftarrow$  (NN·gl) if tipo = 2
    col  $\leftarrow$  0
    lin  $\leftarrow$  (lin + 1) if (tipo = 2  $\vee$  tipo = 3)  $\wedge$  (tipo = 1  $\vee$  tipo = 3)
    for n  $\in$  1..NN·gl
      mata(lin,col)  $\leftarrow$   $\left[ \left[ \frac{(\text{gl1} - n + 1)}{L} \right] \cdot \left( \text{posi}(\text{NN})_{k-1} \right)^{\text{gl1} - n} \right]$  if (tipo = 2  $\vee$  tipo = 3)  $\wedge$  posi(NN)k-1  $\neq$  0
      matalin,col  $\leftarrow$  0 if (tipo = 2  $\vee$  tipo = 3)  $\wedge$  posi(NN)k-1 = 0  $\wedge$  n  $\neq$  gl1
      matalin,col  $\leftarrow$   $\frac{(\text{gl1} - n + 1)}{L}$  if (tipo = 2  $\vee$  tipo = 3)  $\wedge$  posi(NN)k-1 = 0  $\wedge$  n = gl1
      col  $\leftarrow$  col + 1
    lin  $\leftarrow$  lin + 1
  x  $\leftarrow$  lsolve(mata, matb)
  ficont  $\leftarrow$   $\sum_{m=0}^{\text{gl} \cdot \text{NN} - 1} \left( \left( x_{m,0} \cdot \xi^{\text{gl} \cdot \text{NN} - m - 1} \right) \right)$ 
  cont  $\leftarrow$  cont + 1
fi

```

Função de Forma:

$$\text{forma} := \text{funfor}(\xi, L) \rightarrow \left(\begin{array}{l} \frac{891}{4} \cdot \xi^7 - \frac{3483}{4} \cdot \xi^6 + \frac{2709}{2} \cdot \xi^5 - \frac{2115}{2} \cdot \xi^4 + \frac{1691}{4} \cdot \xi^3 - \frac{291}{4} \cdot \xi^2 + 1 \\ \frac{81}{4} \cdot L \cdot \xi^7 - 81 \cdot L \cdot \xi^6 + \frac{261}{2} \cdot L \cdot \xi^5 - 108 \cdot L \cdot \xi^4 + \frac{193}{4} \cdot L \cdot \xi^3 - 11 \cdot L \cdot \xi^2 + L \cdot \xi \\ \frac{2187}{4} \cdot \xi^7 - \frac{3645}{2} \cdot \xi^6 + \frac{8991}{4} \cdot \xi^5 - 1215 \cdot \xi^4 + 243 \cdot \xi^3 \\ \frac{729}{4} \cdot L \cdot \xi^7 - \frac{2673}{4} \cdot L \cdot \xi^6 + \frac{3807}{4} \cdot L \cdot \xi^5 - \frac{2619}{4} \cdot L \cdot \xi^4 + 216 \cdot L \cdot \xi^3 - 27 \cdot L \cdot \xi^2 \\ \frac{-2187}{4} \cdot \xi^7 + \frac{8019}{4} \cdot \xi^6 - \frac{5589}{2} \cdot \xi^5 + \frac{3645}{2} \cdot \xi^4 - \frac{2187}{4} \cdot \xi^3 + \frac{243}{4} \cdot \xi^2 \\ \frac{729}{4} \cdot L \cdot \xi^7 - \frac{1215}{2} \cdot L \cdot \xi^6 + \frac{1539}{2} \cdot L \cdot \xi^5 - 459 \cdot L \cdot \xi^4 + \frac{513}{4} \cdot L \cdot \xi^3 - \frac{27}{2} \cdot L \cdot \xi^2 \\ \frac{-891}{4} \cdot \xi^7 + \frac{1377}{2} \cdot \xi^6 - \frac{3231}{4} \cdot \xi^5 + 450 \cdot \xi^4 - 119 \cdot \xi^3 + 12 \cdot \xi^2 \\ \frac{81}{4} \cdot L \cdot \xi^7 - \frac{243}{4} \cdot L \cdot \xi^6 + \frac{279}{4} \cdot L \cdot \xi^5 - \frac{153}{4} \cdot L \cdot \xi^4 + 10 \cdot L \cdot \xi^3 - L \cdot \xi^2 \end{array} \right)$$

$$\text{matrizrigidez}(E, I, L) := \left\{ \begin{array}{l} \text{for } i \in 0.. \text{NN} \cdot \text{gl} - 1 \\ \text{for } j \in 0.. \text{NN} \cdot \text{gl} - 1 \\ k_{i,j} \leftarrow \int_0^1 \left[E \cdot \frac{I}{L^3} \cdot \left(\frac{d^2}{d\xi^2} \text{forma}_i \right) \cdot \left(\frac{d^2}{d\xi^2} \text{forma}_j \right) \right] d\xi \end{array} \right. \quad k$$

Matriz de Rigidez:

$$\text{matrig} := \text{matrizrigidez}(E, I, L) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{4539}{7} \cdot E \cdot \frac{I}{L^3} & \frac{2517}{28} \cdot E \cdot I & \frac{-2187}{16} \cdot E \cdot \frac{I}{L^3} & \frac{12393}{56} \cdot E \cdot I & \frac{-10935}{28} \cdot E \cdot \frac{I}{L^3} & \frac{729}{7} \cdot E \cdot I & \frac{-13575}{112} \cdot E \cdot \frac{I}{L^3} & \frac{165}{14} \cdot E \cdot I \\ \frac{2517}{28} \cdot E \cdot I & \frac{6157}{385} \cdot E \cdot I & \frac{-10935}{308} \cdot E \cdot I & \frac{148959}{6160} \cdot E \cdot I & \frac{-6561}{154} \cdot E \cdot I & \frac{4131}{385} \cdot E \cdot I & \frac{-165}{14} \cdot E \cdot I & \frac{6893}{6160} \cdot E \cdot I \\ \frac{-2187}{16} \cdot E \cdot \frac{I}{L^3} & \frac{-10935}{308} \cdot E \cdot I & \frac{177147}{154} \cdot E \cdot \frac{I}{L^3} & \frac{6561}{44} \cdot E \cdot I & \frac{-767637}{1232} \cdot E \cdot \frac{I}{L^3} & \frac{164025}{616} \cdot E \cdot I & \frac{-10935}{28} \cdot E \cdot \frac{I}{L^3} & \frac{6561}{154} \cdot E \cdot I \\ \frac{12393}{56} \cdot E \cdot I & \frac{148959}{6160} \cdot E \cdot I & \frac{6561}{44} \cdot E \cdot I & \frac{45198}{385} \cdot E \cdot I & \frac{-164025}{616} \cdot E \cdot I & \frac{490617}{6160} \cdot E \cdot I & \frac{-729}{7} \cdot E \cdot I & \frac{4131}{385} \cdot E \cdot I \\ \frac{-10935}{28} \cdot E \cdot \frac{I}{L^3} & \frac{-6561}{154} \cdot E \cdot I & \frac{-767637}{1232} \cdot E \cdot \frac{I}{L^3} & \frac{-164025}{616} \cdot E \cdot I & \frac{177147}{154} \cdot E \cdot \frac{I}{L^3} & \frac{-6561}{44} \cdot E \cdot I & \frac{-2187}{16} \cdot E \cdot \frac{I}{L^3} & \frac{10935}{308} \cdot E \cdot I \\ \frac{729}{7} \cdot E \cdot I & \frac{4131}{385} \cdot E \cdot I & \frac{164025}{616} \cdot E \cdot I & \frac{490617}{6160} \cdot E \cdot I & \frac{-6561}{44} \cdot E \cdot I & \frac{45198}{385} \cdot E \cdot I & \frac{-12393}{56} \cdot E \cdot I & \frac{148959}{6160} \cdot E \cdot I \\ \frac{-13575}{112} \cdot E \cdot \frac{I}{L^3} & \frac{-165}{14} \cdot E \cdot I & \frac{-10935}{28} \cdot E \cdot \frac{I}{L^3} & \frac{-729}{7} \cdot E \cdot I & \frac{-2187}{16} \cdot E \cdot \frac{I}{L^3} & \frac{-12393}{56} \cdot E \cdot I & \frac{4539}{7} \cdot E \cdot \frac{I}{L^3} & \frac{-2517}{28} \cdot E \cdot I \\ \frac{165}{14} \cdot E \cdot I & \frac{6893}{6160} \cdot E \cdot I & \frac{6561}{154} \cdot E \cdot I & \frac{4131}{385} \cdot E \cdot I & \frac{10935}{308} \cdot E \cdot I & \frac{148959}{6160} \cdot E \cdot I & \frac{-2517}{28} \cdot E \cdot I & \frac{6157}{385} \cdot E \cdot I \end{pmatrix}$$

$$\text{matrizfor}(q, L) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..NN-1 \\ \text{ff}_i \leftarrow \int_0^1 [L \cdot q(\text{forma}_i)] d\xi \\ \text{ff} \end{cases}$$

$$\text{vfor}(\xi) := \begin{pmatrix} 1 - \xi \\ \xi \end{pmatrix}$$

Matriz de Força nodal:

$$\text{matfor} := \text{matrizfo}(q, L) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{31}{224} \cdot L \cdot q \\ \frac{19}{3360} \cdot L^2 \cdot q \\ \frac{81}{224} \cdot L \cdot q \\ \frac{-9}{1120} \cdot L^2 \cdot q \\ \frac{81}{224} \cdot L \cdot q \\ \frac{9}{1120} \cdot L^2 \cdot q \\ \frac{31}{224} \cdot L \cdot q \\ \frac{-19}{3360} \cdot L^2 \cdot q \end{pmatrix}$$

$$\text{gf}(L) := \begin{array}{l} \text{for } i \in 0.. \text{NN} \cdot \text{gl} - 1 \\ \text{for } j \in 0.. 1 \\ \text{gf}_{i,j} \leftarrow \int_0^1 [(\text{forma}_i) \cdot \text{vfor}(\xi)_j] d\xi \end{array}$$

gf

Matriz de forças distribuídas:

$$\text{gff} := \text{gf}(L) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{67}{560} & \frac{3}{160} \\ \frac{1}{224} \cdot L & \frac{1}{840} \cdot L \\ \frac{243}{1120} & \frac{81}{560} \\ \frac{-9}{560} \cdot L & \frac{9}{1120} \cdot L \\ \frac{81}{560} & \frac{243}{1120} \\ \frac{-9}{1120} \cdot L & \frac{9}{560} \cdot L \\ \frac{3}{160} & \frac{67}{560} \\ \frac{-1}{840} \cdot L & \frac{-1}{224} \cdot L \end{pmatrix}$$

B.1 - Integração Numérica

Este trabalho utilizou de integrais analíticas e integrais numéricas.

De acordo com os professores ASSAN (1999) e BREBBIA & DOMINGUES (1992), a integração numérica tem grande importância no estudo dos Métodos dos Elementos de Contorno e nos Métodos dos Elementos Finitos. No método dos Elementos Finitos quando da determinação da Matriz de Rigidez como já foi visto no capítulo 4. No método dos Elementos de Contorno quando da solução das equações integrais como já visto no capítulo 3.

Há diversas técnicas para se integrar numericamente dentre elas podemos citar regra dos trapézios, regra de Simpson e a Quadratura de Gauss.

Neste trabalho optou-se pela utilização da Quadratura de Gauss por necessitar de menos pontos de integração.

B.1.1 – Quadratura de Gauss-Legendre

Seja uma função $f(x)$ definida e continua num intervalo $a \leq x \leq b$, a solução numérica de $f(x)$ utilizando a quadratura Gaussiana é dada por uma combinação linear dos valores de $f(x)$ em certos pontos x_i e valores de w_i , que são os pesos, de modo que a integral seja transformada em um somatório dos produtos de valores da função em um ponto pelo seu peso. Os valores de x_i deve estar compreendido entre a e b , ou seja : $a \leq x_i \leq b$.

$$\int_a^b f(x) \cong w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + \dots + w_n f(x_n) \quad \mathbf{B.1}$$

Os pontos x_i e os pesos w_i São determinados de tal forma que a solução seja exata para qualquer polinômio de grau $2.n-1$ sendo n o número de pontos tomados entre $[-1,1]$.

Para que o intervalo seja de $[-1,1]$ precisamos fazer uma mudança de variável na equação

B1:

$$\int_a^b f(x) dx = J \int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \quad \text{B.2}$$

O fator J é o jacobiano da transformação, que pode ser encontrado por:

$$\begin{vmatrix} x & \xi & 1 \\ a & -1 & 1 \\ b & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Onde resulta:

$$x = \frac{b-a}{2} \xi + \frac{b+a}{2} \quad \text{B.3}$$

Derivando B3 temos:

$$dx = \frac{b-a}{2} d\xi \quad \text{B.4}$$

Substituindo B4 e B3 em B2 :

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 g(\xi) d\xi$$

B.1.2 – Determinação da Tabela de Gauss-Legendre

Os valores de w e ξ são encontrados resolvendo um sistema não linear do Tipo:

$$\begin{cases} w_1(\xi_1)^0 + w_2(\xi_2)^0 + \dots + w_n(\xi_n)^0 = \int_{-1}^1 (\xi_1)^0 d\xi \\ w_1(\xi_1)^1 + w_2(\xi_2)^1 + \dots + w_n(\xi_n)^1 = \int_{-1}^1 (\xi_1)^1 d\xi \\ \vdots + \vdots + \dots + \vdots = \vdots \\ w_1(\xi_1)^m + w_2(\xi_2)^m + \dots + w_n(\xi_n)^m = \int_{-1}^1 (\xi_1)^m d\xi \end{cases}$$

Onde:

n – é o número de Pontos de Gauss

$m = 2n-1$