

CONFERIDO
PROC. N.º 116258013
RUB 1987
PRPG 28/01/14

ERRATA

Eu, Éder Murilo Parizzoto Sabino, ex-aluno do curso de Engenharia Civil, nível:
Mestrado, informo que deve-se considerar a seguinte errata em folha iii:

Onde se lê: Estruturas

Leia-se: Estruturas e Geotécnica

Sem mais.



Éder Murilo Parizzoto Sabino



Prof. Dr. Isaias Vizotto

Orientador



Prof. Dr. José Roberto Guimarães

Coordenador Geral dos Cursos Pós-graduação - FEC



ÉDER MURILO PARIZZOTO SABINO

**GERAÇÃO DE ESTRUTURAS EM CASCAS DE
FORMAS LIVRES E ANALÍTICAS DE PLANTAS
POLIGONAIS REGULARES**

**CAMPINAS
2013**



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO

ÉDER MURILO PARIZZOTO SABINO

**GERAÇÃO DE ESTRUTURAS EM CASCAS DE
FORMAS LIVRES E ANALÍTICAS DE PLANTAS
POLIGONAIS REGULARES**

Orientador: Prof. Dr. Isaias Vizotto

Dissertação de Mestrado apresentada a Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Unicamp, para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, na área de Estruturas.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO ÉDER MURILO PARIZZOTO SBINO E ORIENTADO PELO PROF. DR. ISAIAS VIZOTTO.

ASSINATURA DO ORIENTADOR

CAMPINAS
2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

Sa13g Sabino, Éder Murilo Parizzoto, 1989-
Geração de estruturas em cascas de formas livres e analíticas de plantas poligonais regulares / Éder Murilo Parizzoto Sabino. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Isaias Vizotto.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo.

1. Cascas (Engenharia). 2. Método dos elementos finitos. I. Vizotto, Isaias, 1955-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Generation of shell structures of free and analytical forms of regular polygonal plants

Palavras-chave em inglês:

Shell Structures

Finite element method

Área de concentração: Estruturas e Geotécnica

Titulação: Mestre em Engenharia Civil

Banca examinadora:

Isaias Vizotto [Orientador]

José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa

Marco Lúcio Bittencourt

Data de defesa: 07-11-2013

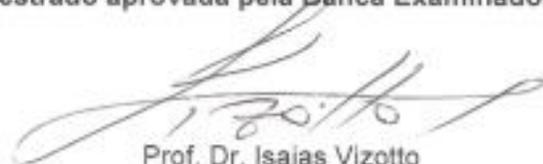
Programa de Pós-Graduação: Engenharia Civil

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO

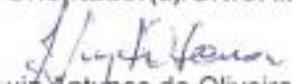
**GERAÇÃO DE ESTRUTURAS EM CASCAS DE FORMAS LIVRES E
ANALÍTICAS DE PLANTAS POLIGONAIS REGULARES**

Éder Murilo Parizzoto Sabino

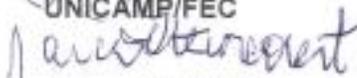
Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:



Prof. Dr. Isaias Vizotto
Presidente e Orientador(a)/UNICAMP/FEC



Prof. Dr. José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa
UNICAMP/FEC



Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt
UNICAMP/FEM

Campinas, 07 de Novembro de 2013.

RESUMO

Esse trabalho foi inspirado principalmente em obras projetadas por Heinz Isler e Félix Candela, e apresenta uma contribuição ao pré-processamento e geração computacional de cascas otimizadas de formas livres e cascas de formas analíticas. São abordados dois modelos de concepção de estruturas para cobertura: as cascas de formas livres, geradas a partir da simulação computacional de modelos físicos experimentais em que as superfícies médias não podem ser descritas por meio de funções matemáticas; e as definidas por formas analíticas ou geométricas, em que as superfícies médias podem ser determinadas por funções analíticas através de modelos de geração por processos de translação ou revolução. O objetivo principal é a concepção de estruturas em cascas em concreto por meio de modelo computacional de geração otimizada de formas com a aplicação do Método dos Elementos Finitos e técnicas de programação matemática, com a proposição de metodologias computacionais de pré-processamento para geração da malha inicial de elementos finitos e a posterior obtenção de estruturas em cascas de formas livres e analíticas. São propostos modelos para geração de malhas de estruturas em cascas de formas livres com projeções poligonais regulares e quadriláteras com arestas retas e/ou parabólicas. As malhas planas que constituem membranas finas e flexíveis, através da ação do peso próprio da membrana ou da aplicação de pressão sobre as superfícies com quaisquer configurações de apoios, são utilizadas para geração de cascas de formas livres por meio de um programa computacional desenvolvido por Vizotto (1993), e que também podem ser geradas por meio do software ANSYS. A geração das formas analíticas tridimensionais das estruturas em cascas é realizada através de curvas diretrizes e geratrizes a partir das malhas planas. Variando-se alguns parâmetros obtêm-se composições de paraboloides hiperbólicos, paraboloides elípticos, cilindros parabólicos, etc. Após a geração das formas tridimensionais, são realizadas análises estruturais de algumas estruturas em cascas de concreto armado observando os estados de tensão das estruturas. Diversas estruturas são geradas e os resultados obtidos apresentados.

Palavras Chave: Estruturas em Cascas, Cascas de Formas Livres, Cascas de Formas Analíticas, Malhas para Elementos Finitos.

ABSTRACT

This work was mainly inspired in structures designed by Heinz Isler and Félix Candela, and it presents a contribution to preprocessing and computational generation of optimized free-form shells and the analytical shells. Two models of conceptions of roofs structures are discussed: the free-form shells, generated by computational simulation of the experimental physical models, and the structures defined by analytical functions. The middle surfaces of the first model cannot be determined by analytical equations. On the second model, however, they can be generated by translational and revolution processes. The main objective is the conception of concrete shell structures using a computational model to generate optimized shapes with the application of the Finite Element Method and mathematical programming techniques. Computational methodologies for the generation of the finite elements initial mesh and the obtention of the free-form shells and analytical shells structures are proposed. Models are proposed for the meshing of the free-form shells structures with either regular polygonal projections or quadrilateral with straight and / or parabolic edges. Properties of thin and flexible membranes are attributed to the planar meshes with any support configuration. Free form shells are generated using a software developed by Vizotto (1993) which is able to generate free-form shells by applying pressure on the surfaces or by the action of the membrane's own weight. Free form shells can also be generated using the software ANSYS. As a result, the three-dimensional shapes of the shells are obtained. From the plane meshes obtained the three-dimensional shapes of the analytical form shells are determined through guidelines and generatrices curves. By varying some parameters compositions of hyperbolic paraboloids, elliptic paraboloids, cylinders parabolic, etc, are obtained. After the generation of three-dimensional shapes, structural analyses of some reinforced concrete shell structures are performed and the tension states of the structures are observed. Several structures are generated and the results obtained are presented.

Keywords: Shell Structures, Finite Element Meshes, Free-Form Shells, Analytical Form Shells.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Justificativa	1
1.2	Objetivos	3
1.3	Metodologia	3
1.4	Organização da Dissertação	5
2	ESTRUTURAS EM CASCAS	7
2.1	Breve Histórico Sobre Estruturas em Cascas de Concreto Armado	7
2.2	Classificação das Estruturas em Cascas	16
2.2.1	Estruturas em Cascas de Formas Livres	16
2.2.2	Estruturas em Cascas de Formas Analíticas	19
2.3	Cascas Finas e Regime de Membrana	22
3	GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE MALHAS DE ELEMENTOS FINITOS	23
3.1	Método dos Elementos Finitos (MEF)	23
3.2	Geração de Malhas	25
4	GERAÇÃO COMPUTACIONAL DAS MALHAS PLANAS	29
4.1	Plantas Poligonais Regulares	30
4.1.1	Cálculo das Coordenadas Nodais	32
4.1.2	Numeração Nodal	37
4.1.3	Incidência Nodal dos Elementos	40
4.1.4	Aplicação de Restrições e Ajustes Finais	42
4.1.5	Malhas Planas Geradas	46
4.2	Plantas Quadriláteras	47
4.2.1	Cálculo das Coordenadas Nodais	49
4.2.2	Incidência Nodal dos Elementos	54

4.2.3	Aplicação de Restrições e Ajustes Finais	59
4.2.4	Malhas Planas Geradas	62
5	GERAÇÃO DE FORMAS TRIDIMENSIONAIS DE ESTRUTURAS EM CASCAS... 65	
5.1	Estruturas em Cascas de Formas Analíticas	65
5.1.1	Formas Geradas com Segmentos de Retas	65
5.1.2	Formas Curvas de Translação Para Plantas Poligonais Regulares	67
5.1.3	Formas Analíticas Geradas	75
5.2	Estruturas em Cascas de Formas Livres	82
5.2.1	Modelo Computacional Desenvolvido por Vizotto.....	83
5.2.2	Estruturas em Cascas de Formas Livres Geradas	86
5.2.3	Geração das Formas Tridimensionais com o Software ANSYS	95
5.2.4	Validação das Malhas Através da Comparação das Formas Livres Geradas.....	96
6	ANÁLISE NUMÉRICA DE ESTRUTURAS EM CASCAS DE CONCRETO	103
6.1	Análise Numérica de uma Estrutura em Casca de Forma Livre com Projeção Heptagonal Submetida ao Peso Próprio	104
6.2	Análise Numérica de uma Estrutura em Casca de Forma Livre com Projeção Retangular Submetida ao Peso Próprio com Apoios Pontuais ao Longo das Bordas	109
6.3	Análise Numérica de Estruturas em Cascas de Formas Analíticas com Projeções Heptagonais Submetidas ao Peso Próprio	113
6.3.1	Estrutura em Casca de Forma Analítica Composta por Paraboloides Hiperbólicos .	113
6.3.2	Estrutura em Casca de Forma Analítica Composta por Paraboloides Elípticos.....	118
6.3.3	Estrutura em Casca de Forma Analítica Composta por Cilindros Parabólicos	121
7	CONCLUSÕES.....	125
	REFERÊNCIAS	129

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, Antônio Carlos e Ângela Maria; meus irmãos, Elaine e Ricardo; minha noiva, Bárbara e em memória a minha avó Leonice, que não pode estar conosco para a concretização deste sonho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por sua fidelidade em minha vida e pelas pessoas que colocou no meu caminho que possibilitaram chegar até aqui.

Agradeço aos meus pais, Antônio Carlos e Ângela Maria e meus irmãos, Elaine e Ricardo pelo incentivo e por despertarem em mim o gosto pelos estudos desde cedo.

Agradeço aos meus tios, Modesto e Judite por me acolherem durante o início da graduação.

Agradeço à minha noiva Bárbara pelo apoio incondicional.

Agradeço ao Prof. Dr. Isaias Vizotto pela paciência, apoio e por acreditar no potencial deste trabalho.

Agradeço à Profa. Dra. Maria Cecília Amorim Teixeira da Silva pelo auxílio prestado não apenas nas disciplinas de Concreto Armado, mas também com esclarecimentos sobre o programa de Pós-Graduação.

Agradeço aos demais professores da Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Unicamp e aos colegas do Departamento de Estruturas.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1: Etapas simplificadas de evolução de um projeto de engenharia civil.....	2
Figura 2.1: Panteão em Roma.....	8
Figura 2.2: Igreja de Santa Sofia.	8
Figura 2.3: Basílica de São Pedro.	9
Figura 2.4: Palácio Taj Mahal.	9
Figura 2.5: Mesquita de <i>Constantza</i>	10
Figura 2.6: Mercado de Algeciras.	11
Figura 2.7: Centro Nacional de Indústria e Tecnologia (CNIT).....	11
Figura 2.8: <i>Palazetto dello Sport</i> , construído para as Olimpíadas de 1960 em Roma.	12
Figura 2.9: Restaurante <i>Los Manantiales</i>	12
Figura 2.10: <i>Sicli Company Building</i> . Estrutura em casca de forma livre projetada por Heinz Isler.	13
Figura 2.11: <i>Brühl Sports Center</i> na Suíça.....	13
Figura 2.12: Igreja São Francisco de Assis.	14
Figura 2.13: Memorial da América Latina.	14
Figura 2.14: Estruturas em cascas de formas livres geradas computacionalmente pelo modelo desenvolvido por Vizotto (1993).....	15
Figura 2.15: Esquema de geração computacional de estruturas em cascas de formas livres por analogia ao método de membrana pênsil invertida.	18
Figura 2.16: Cobertura em casca cilíndrica múltipla.....	20
Figura 2.17: Tipos de paraboloides hiperbólicos utilizados como estrutura em casca: a) <i>Umbrella shell</i> . b) Bordas retas. c) Bordas curvas.....	20
Figura 3.1: Esquema genérico de interpolação linear entre dois pontos ou duas curvas.	26
Figura 3.2: Esquema genérico de interpolação linear entre dois pontos ou duas curvas.	27
Figura 3.3: Malha <i>QuadTree</i> pra um domínio irregular.....	27
Figura 3.4: Esquema da triangulação de Delaunay.	28
Figura 4.1: Padrão geométrico triangular presente em qualquer polígono regular.	30
Figura 4.2: Mapeamento transfinito a) bilinear e b) trilinear.	31
Figura 4.3: Identificação de variáveis para a determinação das equações das retas para a discretização do domínio.....	32

Figura 4.4: Representação das retas y_1ix	33
Figura 4.5: Representação das retas y_2ix	33
Figura 4.6: Representação das retas y_3ix	34
Figura 4.7: Representação das coordenadas nodais para o domínio triangular.....	35
Figura 4.8: Representação da rotação para a determinação das coordenadas nodais de todo o domínio da planta poligonal.	36
Figura 4.9: Representação das coordenadas nodais de todo o domínio poligonal para polígonos de três a seis lados.	36
Figura 4.10: Sequência de numeração nodal para o primeiro domínio triangular.	38
Figura 4.11: Esquema genérico de numeração nodal para todo o domínio poligonal.....	38
Figura 4.12: Exemplificação de numeração nodal dos domínios triangulares para uma planta pentagonal com quatro divisões da malha.....	39
Figura 4.13: Exemplificação da sequência de numeração nodal para uma planta pentagonal e quatro divisões da malha.	40
Figura 4.14: Sequência de numeração dos elementos e determinação das incidências nodais.	41
Figura 4.15: Exemplificação do sentido de identificação das arestas da planta poligonal.....	42
Figura 4.16: Identificação de inconformidades estéticas e estruturais na estrutura em casca de forma livre gerada sem suavização dos vértices.....	43
Figura 4.17: Detalhe e ampliação do vértice suavizado.	44
Figura 4.18: Suavização dos vértices para o primeiro domínio triangular.	45
Figura 4.19: Coordenadas nodais após suavização dos vértices.	45
Figura 4.20: Malha para planta triangular e quadrilátera.	46
Figura 4.21: Malha para planta pentagonal e hexagonal.	46
Figura 4.22: Malha para planta heptagonal e octogonal.....	47
Figura 4.23: Malha para planta circular.....	47
Figura 4.24: Domínio contido entre duas curvas $y_1(x)$ e $y_n(x)$	48
Figura 4.25: Representação do domínio retangular com arestas parabólicas.....	49
Figura 4.26: Interpolação linear na direção x	50
Figura 4.27: Interpolação linear na direção y	52
Figura 4.28: Malha de elementos quadriláteros.....	54
Figura 4.29: Possibilidades para geração de malhas.	55

Figura 4.30: Representação genérica da numeração nodal.....	56
Figura 4.31: Esquema de incidência nodal e numeração dos elementos para as malhas do Tipo 1 ou (MALHA i).....	56
Figura 4.32: Representação genérica de elementos com diagonais invertidas ou MALHA ii.....	57
Figura 4.33: Localização dos quadrantes na planta.....	58
Figura 4.34: Composição das malhas para geração das malhas simétricas: a) Malha Tipo 2. b) Malha Tipo 3.	58
Figura 4.35: Suavização dos vértices para as malhas simétricas do Tipo 2.	59
Figura 4.36: Vértices suavizados: (a) para malha tipo 2 e (b) tipo 3.....	61
Figura 4.37: Malhas estruturadas simétricas do Tipo 2, antes e após a suavização dos vértices da planta.	61
Figura 4.38: Malhas estruturadas simétricas do Tipo 3, antes e após a suavização dos vértices da planta.	62
Figura 4.39: Malha gerada com lados descritos por parábolas com concavidades opostas.	62
Figura 4.40: Malha gerada lados descritos por parábolas com mesmo sentido de concavidades internas à projeção retangular.....	63
Figura 4.41: Malha gerada com duas arestas descrita por parábolas e duas arestas retas com vértices suavizados.	63
Figura 4.42: Malha gerada com arestas descritas por parábolas externas à projeção retangular. .	64
Figura 5.1: Superfície curva gerada pela composição de segmentos de retas.....	65
Figura 5.2: Representação das retas diretrizes.....	66
Figura 5.3: Esquema da mudança de base das coordenadas (x,y) para determinação das coordenadas z	67
Figura 5.4: Sistemas de eixos locais.....	68
Figura 5.5: Corte B-B representando a função $z(x')$	70
Figura 5.6: Corte A-A representando a função $z(y')$	71
Figura 5.7: Coordenadas verticais em função de x' para $y'=0$	74
Figura 5.8: Coordenadas verticais em função de y' e $x'=d1$	74
Figura 5.9: <i>Umbrella Shell</i>	75
Figura 5.10: Casca para aplicação em fundação (<i>Umbrella Shell</i> invertida).	76

Figura 5.11: Estrutura em casca com paraboloides hiperbólicos gerada com segmentos de retas e alturas no centro da aresta e no centro da planta iguais.....	76
Figura 5.12: Paraboloides hiperbólicos com arestas retas e alturas diferentes no centro das arestas e no centro da planta.....	77
Figura 5.13: Paraboloides hiperbólicos com planta quadrilátera e arestas parabólicas e alturas no centro da planta e no centro das arestas diferentes.....	77
Figura 5.14: Estrutura em casca geométrica de planta triangular (cm).....	78
Figura 5.15: Estrutura em casca geométrica com planta quadrilátera (cm).....	79
Figura 5.16: Estrutura em casca geométrica com planta pentagonal (cm).....	79
Figura 5.17: Estrutura em casca geométrica com planta hexagonal (cm).....	80
Figura 5.18: Estrutura em casca geométrica com planta heptagonal (cm).....	81
Figura 5.19: Estrutura em casca geométrica com planta octogonal (cm).....	81
Figura 5.20: Esquema de geração das estruturas em cascas de formas livres.....	83
Figura 5.21: Estrutura em casca de forma livre com planta triangular (cm).....	86
Figura 5.22: Estrutura em casca de forma livre com planta quadrada (cm).....	87
Figura 5.23: Estrutura em casca de forma livre com planta pentagonal (cm).....	88
Figura 5.24: Estrutura em casca de forma livre com planta hexagonal (cm).....	88
Figura 5.25: Estrutura em casca de forma livre com planta heptagonal (cm).....	89
Figura 5.26: Estrutura em casca de forma livre com planta octogonal (cm).....	90
Figura 5.27: Estrutura em casca de forma livre com planta circular (cm).....	90
Figura 5.28: Estrutura em casca de forma livre com planta retangular (cm).....	91
Figura 5.29: Estrutura em casca de forma livre com planta quadrilátera e arestas parabólicas (cm).....	92
Figura 5.30: Estrutura em casca de forma livre com planta quadrilátera e duas arestas parabólicas (cm).....	92
Figura 5.31: Planta retangular e apoios intermediários (cm).....	93
Figura 5.32: Estrutura em casca de forma livre com apoios intermediários.....	93
Figura 5.33: Planta retangular e apoios intermediários não simétricos (cm).....	94
Figura 5.34: Estrutura em casca de forma livre com apoios intermediários não simétricos (cm).....	95
Figura 5.35: Elemento SHELL41.....	96
Figura 5.36: Domínio triangular (cm).....	97

Figura 5.37: Malhas planas geradas: (a) SABINO e (b) GID 10.0.4.	97
Figura 5.38: Superfícies médias das estruturas em cascas de formas livres: (a) SABINO e (b) GID 10.0.4.	98
Figura 5.39: Comparação entre as formas tridimensionais: SABINO x GID 10.0.4 (cm).....	98
Figura 5.40: Domínio quadrilátero com arestas parabólicas (cm).	99
Figura 5.41: Malha plana para planta quadrilátera e arestas parabólicas: (a) SABINO e (b) GID 10.0.4.	99
Figura 5.42: Superfícies médias das estruturas em cascas de formas livres: (a) SABINO e (b) GID 10.0.4.	100
Figura 5.43 Comparação entre as formas tridimensionais: SABINO x GID10.0.4 (cm).....	100
Figura 5.44: Planta poligonal pentagonal circunscrita em um raio de 750 cm com vértices suavizados por circunferência de raio 725 cm.....	101
Figura 5.45: Malhas planas geradas: (a) SABINO e (b) GID 10.0.4.	101
Figura 5.46: Estruturas em cascas obtidas a partir da malha gerada com o software desenvolvido (a) SABINO e com o software GID 10.0.4 (b).....	102
Figura 5.47: Comparação entre as formas tridimensionais: SABINO x GID10.0.4 (cm).....	102
Figura 6.1: ANSYS: Elemento para casca SHELL63.	103
Figura 6.2: Planta heptagonal para estrutura em casca de forma livre (cm).	104
Figura 6.3: Vista lateral da estrutura com as principais dimensões (cm).	105
Figura 6.4: Malha de elementos finitos para análise da estrutura.	105
Figura 6.5: Tensões principais S11 para a superfície média da estrutura em casca de concreto armado de planta heptagonal com espessura variável de 0,35 m na base e 0,075 m no topo submetida ao peso próprio (MPa).....	106
Figura 6.6: Tensões principais S22 para a superfície média da estrutura em casca de concreto armado de planta heptagonal com espessura variável de 0,35 m na base e 0,075 m no topo submetida ao peso próprio (MPa).....	107
Figura 6.7: Tensões principais S33 para a superfície média da estrutura em casca de concreto armado de planta heptagonal com espessura variável de 0,35 m na base e 0,075 m no topo submetida ao peso próprio (MPa).....	107
Figura 6.8: Deslocamento verticais da superfície média da estrutura com espessura variável ao longo da altura com de 0,35m na base e 0,075m no topo devidos ao peso próprio (m).	108

Figura 6.9: Representação vetorial das tensões principais da superfície média da estrutura (vista lateral).....	108
Figura 6.10: Representação vetorial das tensões principais da superfície média da estrutura (vista superior).....	109
Figura 6.11: Malha da estrutura em casca de forma livre com apoios intermediários.	110
Figura 6.12: Deslocamentos nodais na direção vertical (m).	110
Figura 6.13: Tensão Principal S11 (MPa).	111
Figura 6.14: Tensão principal S22 (MPa).	111
Figura 6.15: Tensão Principal S33 (MPa).	112
Figura 6.16: Representação vetorial das tensões principais (vista superior).....	112
Figura 6.17: Forma tridimensional da estrutura em casca com projeção heptagonal composta por paraboloides hiperbólicos (m).	113
Figura 6.18: Malha da estrutura em casca composta por paraboloides hiperbólicos.	114
Figura 6.19: Deslocamentos nodais na direção vertical (m).	115
Figura 6.20: Tensão principal S11 na superfície média (MPa).	115
Figura 6.21: Tensão principal S22 na superfície média (MPa).	116
Figura 6.22: Tensão principal S33 na superfície média (MPa).	116
Figura 6.23: Representação vetorial das tensões principais (vista em planta).	117
Figura 6.24: Representação vetorial das tensões principais (vista lateral).	117
Figura 6.25: Malha para estrutura em casca composta por paraboloides elípticos.	118
Figura 6.26: Deslocamentos nodais na direção vertical (m).	119
Figura 6.27: Tensão principal S11 (MPa).	119
Figura 6.28: Tensão principal S22 (MPa).	120
Figura 6.29: Tensão Principal S33 (MPa).	120
Figura 6.30: Representação vetorial das tensões principais (vista superior).....	121
Figura 6.31: Representação vetorial das tensões principais (vista lateral).	121
Figura 6.32: Malha da estrutura composta por cilindros parabólicos.....	122
Figura 6.33: Deslocamentos nodas na direção vertical (m).....	122
Figura 6.34: Tensão principal S11 (MPa).	123
Figura 6.35: Tensão principal S22 (MPa).	123
Figura 6.36: Tensão principal S33 (MPa).	124

Figura 6.37: Representação vetorial das tensões principais (vista superior)..... 124

1 INTRODUÇÃO

Estruturas em cascas destacam-se por suas formas diferenciadas dentre os projetos de engenharia. Quando utilizadas como coberturas, têm a propriedade de vencer grandes vãos com pequenas espessuras e consumo reduzido de materiais.

As primeiras estruturas em cascas utilizadas como coberturas foram abóbodas com grandes espessuras construídas baseadas na experiência dos projetistas e no empirismo. A descoberta do concreto armado possibilitou aos projetistas a elaboração de obras mais ousadas e mais leves.

Félix Candela nos anos 1940 consolida a aplicação das formas analíticas como os paraboloides hiperbólicos. Na década de 1950 o engenheiro suíço Heinz Isler introduziu o conceito de cascas de formas livres que eram concebidas através de analogias físicas com modelos reduzidos. Esses tipos de estruturas apresentam geometrias complexas e não podem ser descritas por funções analíticas.

Para as análises estruturais em que as soluções analíticas são mais complexas, podem ser utilizados métodos numéricos, como o Método dos Elementos Finitos. Os métodos numéricos aliados à evolução dos computadores e softwares possibilitam aos projetistas as análises de estruturas com formas geométricas complexas por meio de modelos computacionais mais atuais.

1.1 Justificativa

O presente trabalho tem o objetivo de proporcionar uma conexão entre a concepção e a análise das estruturas em cascas de formas analíticas e livres através de softwares de pré-processamento. Estas ferramentas visam facilitar a transição entre a concepção, a análise estrutural e o projeto final destas estruturas (Figura 1.1).

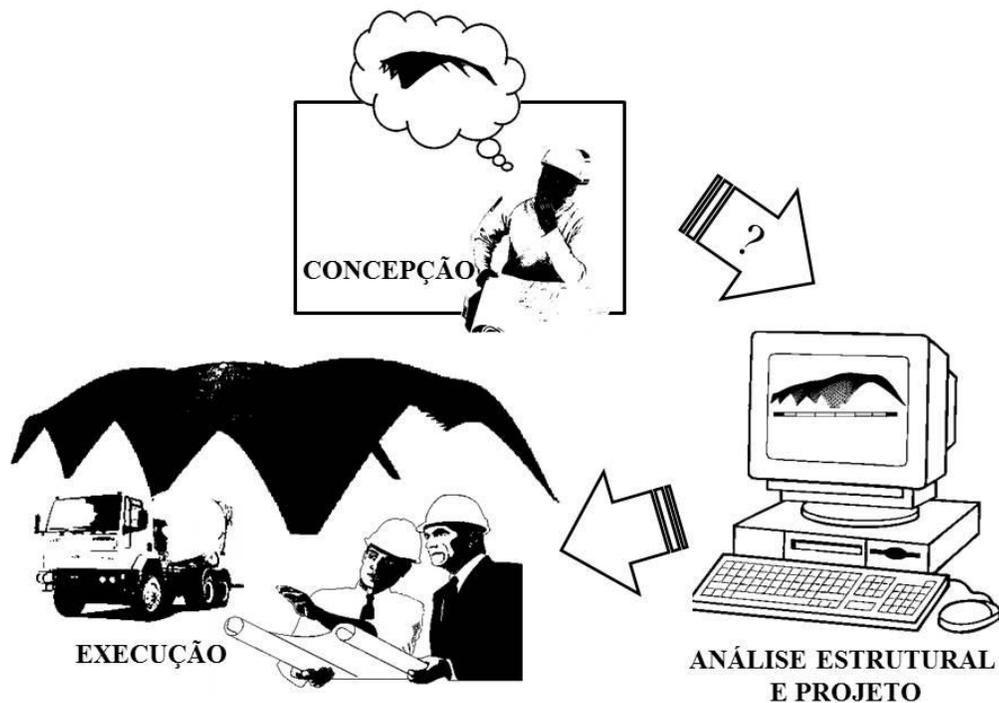


Figura 1.1: Etapas simplificadas de evolução de um projeto de engenharia civil.

Apesar das superfícies médias das estruturas em cascas de formas analíticas serem determinadas por expressões matemáticas, a geração computacional dessas estruturas para posterior análise numérica é uma tarefa que demanda tempo e um bom conhecimento dos softwares geradores de malhas. Com isso é interessante o desenvolvimento de um software de pré-processamento, capaz de gerar a malha de elementos finitos da forma tridimensional da estrutura a partir de poucas informações, a fim de agilizar o processo e sem exigir que o usuário tenha um grande conhecimento em softwares.

As estruturas em cascas de formas livres não têm suas superfícies médias regidas por expressões matemáticas. A superfície média dessas estruturas é determinada por analogias físicas (ISLER, 1994). Com o software desenvolvido por Vizotto (1993) é possível obter automaticamente as formas tridimensionais dessas estruturas a partir de uma membrana de malha plana com qualquer configuração de apoio através do peso próprio ou por aplicação de pressão na superfície. Entretanto, é necessária a geração da malha plana para posterior obtenção da forma tridimensional. Com isso, justifica-se o desenvolvimento de um software gerador de malhas

planas, que aliado com o programa computacional desenvolvido pelo orientador, é capaz de gerar automaticamente estruturas em cascas de formas livres.

Fundamentado na revisão bibliográfica, apresentam-se algoritmos de geração de malhas adaptados para estruturas em cascas a fim de desenvolver programas computacionais de pré-processamento para automatizar a geração dessas estruturas.

1.2 Objetivos

O objetivo do trabalho é apresentar a metodologia desenvolvida para a geração automática de malhas planas de elementos finitos de plantas poligonais regulares e também de plantas quadriláteras com arestas retas e/ou parabólicas, assim como os processos de geração das formas tridimensionais de estruturas em cascas. Trata-se de uma contribuição para a concepção de estruturas em cascas de formas livres e analíticas, através do desenvolvimento de programas computacionais de pré-processamento.

Pretende-se apresentar o processo de geração de cascas de formas livres, inspiradas nas obras de Heinz Isler (1994, 1995) com base no modelo computacional desenvolvido por Vizotto (1993), além da concepção de cascas de formas analíticas, inspiradas principalmente, nas obras de Félix Candela, apresentadas em trabalhos de Garlock (2011), Draper (2008), e Billington (2010) entre outros.

1.3 Metodologia

São abordados dois tipos de estruturas para coberturas: as cascas de formas livres, geradas a partir da simulação computacional de modelos físicos experimentais, e as definidas por formas analíticas. As superfícies médias das cascas de formas livres geralmente não podem ser descritas por meio de expressões matemáticas; já as formas analíticas podem ser determinadas por expressões matemáticas através modelos de geração por processos de translação ou revolução.

Propõe-se um modelo para geração de malhas de elementos finitos para estruturas em cascas com quaisquer projeções poligonais regulares, com o desenvolvimento de ferramentas

computacionais de pré-processamento para a concepção de estruturas em cascas de formas livres e analíticas de translação.

Para a concepção de formas livres, a partir das malhas planas com propriedades de membranas finas e flexíveis, são processadas por meio de um programa computacional desenvolvido por Vizotto (1993), com resultados que também pode ser obtidos pelo software ANSYS (2010), para geração de formas livres e obter as formas tridimensionais das cascas através da aplicação do peso próprio ou de pressão sobre superfície da membrana com quaisquer configurações de apoios.

Para a concepção de formas analíticas, são geradas estruturas com projeções em planta poligonais regulares com quaisquer números de lados. A partir das malhas planas obtidas no pré-processamento, também é possível conceber, através de curvas diretrizes e geratrizes, as formas tridimensionais de estruturas em cascas apoiadas nos vértices dos polígonos. Com a variação de alguns parâmetros é possível obter composições de paraboloides hiperbólicos, paraboloides elípticos, cilindros parabólicos, etc.

Após a geração das formas tridimensionais, são apresentadas as análises estruturais de algumas estruturas em cascas de concreto armado, observando-se o comportamento estrutural das diversas cascas. Diversas formas são geradas para confirmação dos resultados obtidos.

Para a concepção das formas tridimensionais, esse trabalho pode ser dividido em duas fases. A primeira fase é referente ao desenvolvimento de programas computacionais para geração de malhas planas de elementos finitos triangulares para superfícies planas de plantas poligonais regulares, e também de plantas quadriláteras com arestas retas e/ou parabólicas. São apresentados os conceitos utilizados para o desenvolvimento de dois programas em linguagem C de programação:

- a) Programa computacional para geração de malhas de elementos finitos triangulares para plantas quadriláteras com composições de arestas parabólicas e/ou retas;
- b) Programa computacional para geração de malhas de elementos finitos triangulares para plantas poligonais regulares.

A segunda fase consiste na obtenção das formas tridimensionais das estruturas em cascas dividida em dois grupos:

- a) Geração computacional de estruturas em cascas de formas livres para todos os tipos de malhas planas geradas, com variações de vinculações utilizando o programa desenvolvido por Vizotto (1993) e o software ANSYS;
- b) Geração computacional de estruturas em cascas de formas analíticas com o desenvolvimento de um programa computacional apropriado.

Tanto as malhas planas quanto as malhas tridimensionais das estruturas em cascas livres ou analíticas podem ser visualizadas com o software AutoCAD facilitando o desenvolvimento dos projetos arquitetônicos das cascas.

Após a geração das formas tridimensionais das estruturas, são realizadas comparações com as formas geradas com malhas obtidas por meio do software GID 10.0.4(2010).

Por fim são realizadas análises estruturais para verificação do comportamento de diferentes cascas de concreto para coberturas obtidas com as formas geradas com os modelos apresentados. Todo esse desenvolvimento visa facilitar o pré-processamento e geração computacional dessas estruturas aos pesquisadores e profissionais atuantes nessa área da engenharia.

1.4 Organização da Dissertação

Um pequeno histórico sobre estruturas em cascas é apresentado no Capítulo 2 mostrando a evolução dessas estruturas relacionada ao surgimento do concreto armado. Nesse mesmo capítulo é apresentada a classificação das estruturas em cascas e o método de análise relacionado com o regime de membrana.

No Capítulo 3 são apresentados conceitos básicos sobre a aplicação do Método dos Elementos Finitos, e em seguida são apresentadas algumas metodologias para geração automática de malhas de elementos finitos para malhas planas bidimensionais.

Com base nos conceitos expostos no Capítulo 3 sobre a geração de malhas bidimensionais de elementos finitos, no Capítulo 4 são apresentadas formulações para geração automática de malhas planas para plantas de quadriláteras com arestas retas e/ou parabólicas e de plantas poligonais regulares.

No Capítulo 5 são desenvolvidas formulações analíticas para geração das formas tridimensionais das malhas planas do Capítulo 4, assim como a obtenção das formas tridimensionais das estruturas em cascas de formas livres por analogias físicas obtidas computacionalmente com o auxílio do programa desenvolvido por Vizotto (1993), e também pelo software ANSYS. Nesse mesmo capítulo são realizadas comparações entre estruturas obtidas com as malhas geradas pelos softwares desenvolvido nesse trabalho e malhas geradas com o GID 10.0.4.

No Capítulo 6 são apresentadas análises estruturais utilizando o software ANSYS para algumas das estruturas em cascas geradas. E no Capítulo 7 são apresentadas as conclusões do trabalho e sugestões para pesquisas futuras. As referências utilizadas nesse trabalho podem ser verificadas após a capítulo 7.

2 ESTRUTURAS EM CASCAS

A evolução das estruturas em cascas nos projetos de engenharia está ligada ao desenvolvimento de novas metodologias e materiais, e ao avanço dos processos de análise dessas estruturas.

O desenvolvimento do concreto armado foi fundamental para a evolução das estruturas em cascas finas e mais leves. A capacidade do concreto de ser moldado praticamente em qualquer forma levou projetistas a explorar esse potencial projetando estruturas com formas mais complexas.

2.1 Breve Histórico Sobre Estruturas em Cascas de Concreto Armado

Conforme Gioncu (1974), as primeiras estruturas para coberturas de superfícies curvas, construídas na Mesopotâmia, eram de tijolos e tinham formas cilíndricas ou semiesféricas para plantas circulares. O aperfeiçoamento dos projetos se dava de forma empírica pelo processo de tentativa e erro. E nesse contexto foi construída a mais representativa obra em melhores condições de preservação até a atualidade, o Panteão em Roma (Figura 2.1), concluída em 126 d.C., com 43,20 m de diâmetro e espessura variando de 6,00 m na base a 1,00 m no topo. A construção dessa cúpula apenas foi possível devido à experiência adquirida nas construções de cúpulas menores.

Segundo Gavin (2012), as cúpulas eram empregadas principalmente como coberturas de templos religiosos. Entre 532 e 537 d.C. foi construída em Istambul a igreja de Santa Sofia (Figura 2.2), com cúpula de 28,00 m de diâmetro.

Segundo Brandão (2005), no final da idade média as construções em concreto tiveram um declínio. De acordo com Gavin (2012), as estruturas em cascas ressurgem no renascimento com os domos em alvenaria, com exemplos como o domo de Florença, com 39,00 m de diâmetro, construído entre 1420 e 1436; e o domo da Basílica de São Pedro mostrado na Figura 2.3, com 49,00 m de diâmetro, cuja construção iniciou-se em 1506 e teve supervisão de Michelangelo.



Figura 2.1: Panteão em Roma.¹

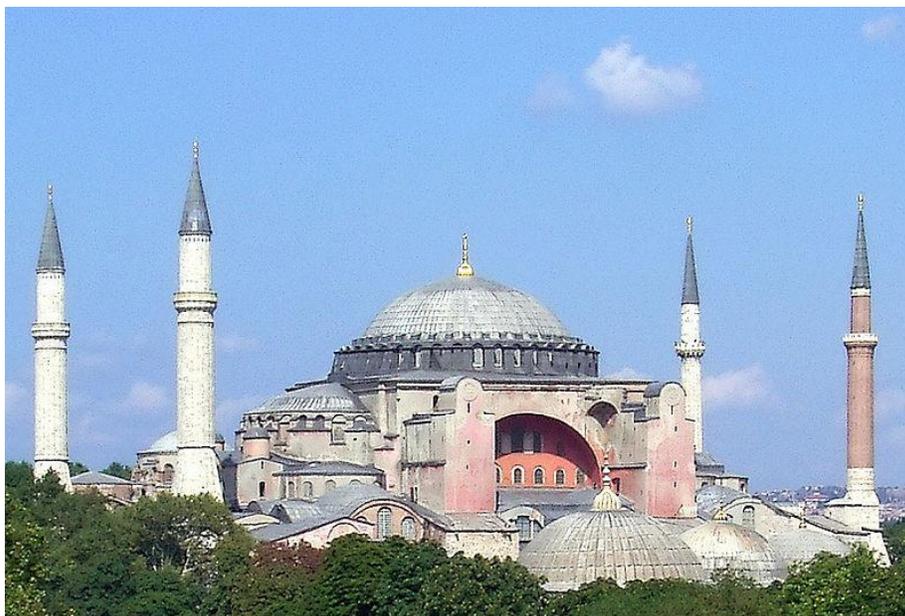


Figura 2.2: Igreja de Santa Sofia.²

¹ Imagem extraída de <http://historiadaarte.pbworks.com/w/page/18413911/Pante%C3%A3o> em 18/11/2012

² Imagem extraída de: http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Aya_sofya.jpg em 18/11/2012



Figura 2.3: Basílica de São Pedro.³

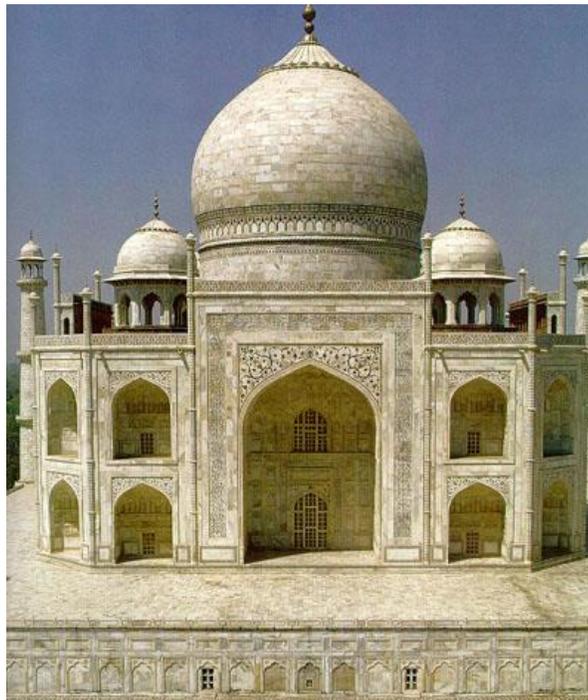


Figura 2.4: Palácio Taj Mahal.⁴

³ Imagem extraída de <http://www.panoramio.com/photo/56613361> em 06/03/2013.

⁴ Imagem extraída de <http://www.islamicity.com/culture/taj/default.htm> em 18/11/2012.

De 1630 a 1650 foi construído na Índia o palácio Taj Mahal, com uma cúpula central com 21,30 m de diâmetro e acabamento em mármore branco, conforme ilustra a Figura 2.4.

De acordo com Pedreschi (2008), o surgimento do concreto armado no início do século XX abriu grandes possibilidades para o desenvolvimento das estruturas em cascas finas.

Em 1905 o engenheiro romeno Gogu Constantinescu construiu uma das primeiras cúpulas de concreto armado, a mesquita de Constantza, na Romênia, mostrada na Figura 2.5 (GIONCU, 1974).

Com a possibilidade de explorar novas formas proporcionadas pelo concreto armado, as cúpulas e domos deixaram de ser exclusividade entre as estruturas em cascas para cobertura. Segundo Salinas (2007), Giorgio Baroni construiu os primeiros paraboloides hiperbólicos em 1934.

Também em 1934, Eduardo Torroja construiu a primeira casca com projeção poligonal, o mercado de Algeciras (Figura 2.6). Na França, em 1957, foi construído o salão de exibição do Centro Nacional de Indústria e Tecnologia, uma enorme estrutura em casca com projeção triangular e dupla curvatura, que pode ser visualizada na Figura 2.7. (POPOV, 1991).

Vale ressaltar nesse mesmo período as obras de Luigi Nervi, como o Palazetto (Figura 2.8), construído para as Olimpíadas em Roma (LESLIE, 2003).



Figura 2.5: Mesquita de *Constantza*.⁵

⁵ Imagem extraída de <http://www.panoramio.com/photo/65535487> em 27/02/2013.



Figura 2.6: Mercado de Algeiras.⁶



Figura 2.7: Centro Nacional de Indústria e Tecnologia (CNIT)⁷.

⁶ Imagem extraída de <http://www.monolithic.com/stories/the-history-of-thin-shells-and-monolithic-domes/photos/7> em 18/11/2012.

⁷ Imagem extraída de <http://www.cristinamello.com.br/?p=5276> em 18/11/2012



Figura 2.8: *Palazzetto dello Sport*, construído para as Olimpíadas de 1960 em Roma.

Nas décadas de 1930 e 1940 projetistas, como Félix Candela, destacaram-se pelos seus projetos de estruturas em cascas baseadas em modelos matemáticos, como paraboloides hiperbólicos e formas cônicas e cilíndricas. Uma das obras mais marcantes desse projetista é o restaurante em Los Manantiales, em Xochimilco, conforme Figura 2.9.



Figura 2.9: Restaurante *Los Manantiales*.⁸

⁸ Imagem extraída de <http://www.architecture-balar.com/2012/06/los-manantiales-xochimilco-mexico.html> em 06/03/2013.

O pesquisador e engenheiro suíço Heinz Isler na década de 1950 desenvolveu métodos para geração de cascas de formas livres através de analogias físicas com modelos reduzidos com ótimo comportamento estrutural (ISLER, 1994). Um grande número de estruturas em cascas com diversas formas foram geradas e construídas na Europa, principalmente na Suíça, França e Alemanha entre 1954 e 1991. A Figura 2.10 apresenta uma das estruturas concebidas por Isler por analogia de membrana pênsil invertida com projeção irregular. A Figura 2.11 apresenta uma estrutura com projeção retangular muito utilizada por Isler como cobertura de centros esportivos.



Figura 2.10: *Sicli Company Building*. Estrutura em casca de forma livre projetada por Heinz Isler.



Figura 2.11: *Brühl Sports Center* na Suíça.

No Brasil, o profissional com maior reconhecimento na área de projetos de estruturas em cascas foi o arquiteto Oscar Niemeyer que projetou diversas obras como a Igreja São Francisco de Assis da Pampulha em Belo Horizonte (1943) (Figura 2.12), Congresso Nacional (1958), o Memorial da América Latina (1989) (Figura 2.13), o Museu de Arte Contemporânea (MAC) de Niterói (1996), o Prédio do Museu Nacional de Brasília (2006), etc.



Figura 2.12: Igreja São Francisco de Assis⁹.



Figura 2.13: Memorial da América Latina¹⁰.

⁹ Extraída de <http://horizontebelo1.blogspot.com.br/2008/12/regio-da-pampulha.html>

¹⁰ Imagem extraída de <http://cantinhodacher.blogspot.com.br/2012/11/memorial-da-america-latina-sao-paulo.html>

No início da década de 1990, com a aplicação do Método dos Elementos Finitos aliada à programação matemática possibilitou a Vizotto (1993) o desenvolvimento de um programa de geração cascas de formas livres. Teixeira (1999) utilizou o programa computacional desenvolvido por Vizotto (1993) para geração e construção de cascas tipo sanduiche, com modelos ensaiados comprovando a capacidade resistente e a predominância de esforços de membrana nas estruturas em cascas de formas livres.

A Figura 2.14 apresenta estruturas em cascas de formas livres geradas computacionalmente utilizando o modelo desenvolvido por Vizotto (1993). A Figura 2.14 (a) apresenta uma estrutura em casca com projeção triangular (VIEIRA, 2003). Em (b) tem-se uma estrutura em casca com projeção retangular (VIZOTTO, 2009). Na Figura 2.14 (c) é apresentada uma estrutura em casca com projeção pentagonal (FIDALGO, 2012).

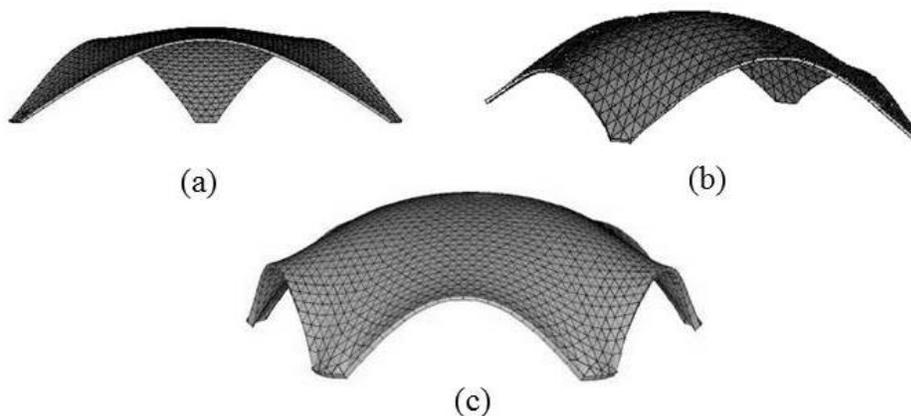


Figura 2.14: Estruturas em cascas de formas livres geradas computacionalmente pelo modelo desenvolvido por Vizotto (1993).

Vieira (2003) apresentou uma abrangente revisão sobre os processos construtivos das estruturas em cascas finas em seu trabalho de mestrado orientado por Vizotto.

Atualmente as estruturas em cascas são utilizadas para coberturas, reservatórios, túneis, silos, fundações, sendo arquitetonicamente elegantes e estruturalmente eficientes, e vêm despertando a atenção de pesquisadores e projetistas.

2.2 Classificação das Estruturas em Cascas

A classificação das estruturas em cascas segundo Isler (1989) abrange três grupos: as cascas geométricas, estruturais e esculturais.

As cascas geométricas são estruturas tridimensionais cujas superfícies podem ser definidas por equações matemáticas que descrevem suas superfícies curvas no espaço.

As cascas estruturais são estruturas tridimensionais que apresentam bom comportamento estrutural. Isler utilizava analogias físicas com modelos reduzidos para a geração de suas formas (VIZOTTO, 1993). Essas analogias físicas, segundo Vizotto (1999), estão relacionadas a um estado de tensões pré-definido de acordo com a Teoria de Membrana para cascas, e a partir deste, é determinada a superfície média da estrutura em casca.

As cascas esculturais são estruturas cujas formas são definidas de maneira arbitrária, como obras de arte. Podem ser concebidas a partir de reprodução de formas da natureza, ou esculpidas livremente. Cascas geométricas e estruturais também podem ser esculturais quando empregadas como elementos estéticos.

De acordo com Billington (1982) as cascas podem ser classificadas através da curvatura gaussiana determinada pelo inverso das curvaturas principais. As cascas são sinclásticas quando apresentam as duas curvaturas na mesma direção e conseqüentemente, curvatura Gaussiana positiva. Nesse grupo, enquadram-se as cascas esféricas e os paraboloides elípticos. Quando a curvatura de Gauss é negativa, ou seja, curvaturas em sentidos opostos, as cascas são denominadas anticlásticas, e é o caso dos paraboloides hiperbólicos. Há ainda as cascas que apresentam apenas uma família de curvas como as cascas cilíndricas, com curvatura gaussiana nula.

2.2.1 Estruturas em Cascas de Formas Livres

Popov (1991) definiu as cascas de formas livres como sendo aquelas que têm suas geometrias selecionadas de forma arbitrária com o objetivo de proporcionar uma obra com estética diferenciada para reduzir a ação da carga de peso próprio das estruturas convencionais.

Expressões analíticas não podem ser usadas para definir geometricamente as cascas de formas livres. As superfícies médias das estruturas em cascas de formas livres são obtidas através de um estado de tensões predefinido que equilibra os carregamentos atuantes na estrutura de acordo com a Teoria de Membrana para cascas.

Os métodos experimentais utilizados por Heinz Isler para geração de cascas de formas livres são apresentados de forma sucinta como:

- a) Membranas pneumáticas: uma membrana elástica é presa pelas bordas e inflada com ar comprimido;
- b) Membranas pênseis invertidas: define-se uma forma geométrica plana em tecido em que são fixados os pontos onde serão os apoios (Figura 2.15 a), aplica-se uma mistura que pode ser do tipo resina ou gel congelante, deixando a membrana se deformar livremente até atingir a forma desejada (Figura 2.15-b). Essa configuração deformada da membrana apresenta apenas esforços de tração sob ação do peso próprio; ao inverter-se a forma, obtém-se a forma final da estrutura em casca sujeita a apenas esforços de compressão sob o mesmo carregamento (Figura 2.15-c) dificultando assim o aparecimento e/ou abertura de fissuras;
- c) Membranas fluídas: aplicação de espuma expansiva sobre a planta do modelo reduzido para o qual a cobertura será projetada, definindo a forma final da casca que se deseja construir.

Segundo Billington (1982), Heinz Isler considerava o método das membranas pênseis invertidas como o melhor dentre os métodos por ele empregados, pois as estruturas geradas a partir deste modelo físico dispensam elementos de borda e é possível criar estruturas com formas diferenciadas com projeções irregulares quaisquer.

Inspirado principalmente nos métodos de membrana pênseil invertida e membranas pneumáticas, Vizotto (1993) desenvolveu um modelo computacional de geração otimizada de estruturas baseado no Método dos Elementos Finitos e programação matemática para geração de estruturas em cascas de formas livres através simulação computacional de analogias físicas como os modelos experimentais de Isler. Como inspiração para esse trabalho para a concepção das estruturas em cascas de formas livres, as principais obras de Heinz Isler são apresentadas na Tab. 2.2.1.1.

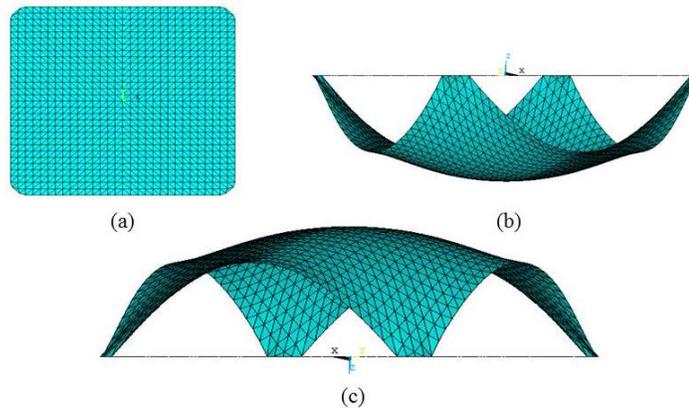


Figura 2.15: Esquema de geração computacional de estruturas em cascas de formas livres por analogia ao método de membrana pênsil invertida.

Tab. 2.2.1.1. Obras de Heinz Isler em ordem cronológica¹¹.

Ano	Obra	Local
1954	<i>Gold- und Silberscheideanstalt</i>	Alemanha
1960	<i>Coop Distribution Center</i>	Suíça
1961	<i>Wyss Garden Center</i>	Suíça
1963	<i>Centro Coop</i>	Suíça
1964	<i>Migros Supermarket</i>	Suíça
1966	<i>Truffaut Plaisir</i>	França
1967	<i>Church of the Holy Spirit</i>	Suíça
1968	<i>Deitingen Service Station</i>	Suíça
1970	<i>Sicli Company Building</i>	Suíça
1971	<i>Richard Bozon Sports Center - Swimming Pool</i>	França
1972	<i>Hotel Splendide Royal - Swimming Pool</i>	Suíça
1973	<i>Blaser Swissslube AG</i>	Suíça
1973	<i>Bürgi Garden Center</i>	Suíça
1974	<i>Ecole Nationale de Skiet d'Alpinisme (ENSA)</i>	França
1975	<i>Café-Restaurant Wiesentalstrasse</i>	Suíça
1977	<i>Truffaut Villeparisis</i>	França
1977	<i>Aichtal Outdoor Theater</i>	Alemanha
1978	<i>Düdingen Sports Center - Tennis Hall</i>	Suíça
1978	<i>Heimberg Swimming Pool</i>	Suíça
1978	<i>Heimberg Tennis Hall</i>	Suíça

¹¹ Retiradas de <http://en.structurae.de/persons/data/index.cfm?id=d000017> em agosto de 2011.

1978	<i>Tennishalle Grenchen AG</i>	Suíça
1980	<i>HausBalz</i>	Alemanha
1981	<i>BadiBrugg</i>	Suíça
1982	<i>Brühl Sports Center</i>	Suíça
1983	<i>La Tène Tennis Center</i>	Suíça
1987	<i>Swiss Air Force Museum</i>	Suíça
1990	<i>Theater unter den Kuppeln</i>	Alemanha
1991	<i>Norwich Sports Village Hotel</i>	Inglaterra

2.2.2 Estruturas em Cascas de Formas Analíticas

As estruturas em cascas de formas analíticas ou cascas geométricas são as estruturas cujas superfícies são descritas por formulações analíticas. As formas tridimensionais dessas estruturas podem ser obtidas por revolução ou por translação, ou pela combinação das mesmas.

As cascas de revolução têm uma superfície média gerada por meio de rotação de uma curva por movimento de revolução. Esta superfície pode ser gerada pela rotação de uma curva plana em torno de um eixo de revolução. As cascas de translação são geradas por uma curva que se desloca sobre outra curva, mantendo-se constante o ângulo entre elas e o ângulo com o plano vertical.

Com exemplo de estruturas em cascas de formas analíticas ou geométricas podem ser citadas as cúpulas, as cascas cilíndricas, os paraboloides hiperbólicos e elípticos, etc.

As cúpulas semiesféricas são geradas por revolução. A teoria de membrana para essas estruturas apresentada em 1886 por Johann Schwendler é considerada adequada e de aplicação satisfatória até hoje (BILLINGTON, 1982).

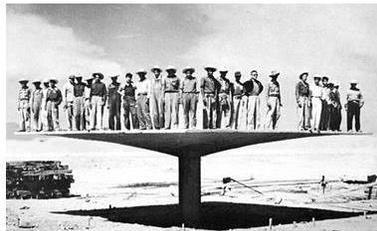
As cascas cilíndricas podem ser geradas tanto por revolução quanto por translação. Essas estruturas podem ser utilizadas, dentre diversas aplicações, como coberturas e reservatórios para diversos materiais, como fluidos e grãos. Segundo Billington (1982), as cascas cilíndricas para cobertura (Figura 2.16) com única curvatura surgiram para cobrir áreas retangulares como correspondentes às cúpulas que cobrem áreas circulares. Algumas aplicações e considerações para dimensionamento podem ser vistas em Reissner (1941) e Reissner (1959).



Figura 2.16: Cobertura em casca cilíndrica múltipla¹².

Os paraboloides hiperbólicos utilizados como coberturas são gerados por translação, também podem ser facilmente gerados através de segmentos de retas.

Os paraboloides hiperbólicos podem apresentar três formas diferentes: *Umbrella shell* (guarda-chuva) (Figura 2.17-a); paraboloides hiperbólicos com bordas retas gerados com segmentos de retas (Figura 2.17-b); e paraboloides hiperbólicos com bordas curvas (Figura 2.17-c).



(a)



(b)



(c)

Figura 2.17: Tipos de paraboloides hiperbólicos utilizados como estrutura em casca: a) *Umbrella shell*. b) Bordas retas. c) Bordas curvas.

¹² Imagem obtida em <http://www.ketchum.org/milopix/milo02-475x800.jpg> em 06/03/2013.

Atribui-se a Aimond a primeira aparição dessa forma para estruturas em cascas em 1933 (BILLINGTON, 1982). Entretanto, o maior projetista desse tipo de estrutura foi o arquiteto espanhol Félix Candela. Em 1951, ele projetou sua primeira estrutura em casca paraboloide hiperbólica; em 1954 foi convidado para falar na Primeira Conferência Americana de Cascas Finas. Em 1963, o livro “Candela, *the Shell Builder*”, confirmou-o como um dos melhores projetistas e conhecedores de estruturas em cascas de concreto armado do mundo.

As formas analíticas que serão concebidas e pesquisadas nesse trabalho foram inspiradas nas obras de Félix Candela, e algumas de suas principais obras obtidas de La Conquista de *la Esbeltez* (2010) são apresentadas cronologicamente na Tab. 2.2.2.1.

Tab. 2.2.2.1: Principais obras de Félix Candela.

Ano	Obra
1951	Pavilhão de Raios Cósmicos, na Cidade do México.
1953	Igreja de Nossa Senhora da Medalha Milagrosa, na Cidade do México. Fábrica Celestino Fernandez, Colonia Vallejo, México.
1955	Bolsa de Valores, Cidade do México, México. Capela de Nossa Senhora da Soledad em Coyoacán , Cidade do México. Mercado de Coyoacán.
1956	Coreto, Santa Fé (Distrito Federal). Capela de San Antonio de lasHuertas, Tacuba, Cidade do México. O Clube Jacaranda, Acapulco, México.
1957	Estações de San Lazaro. Los Manantiales Restaurante em Xochimilco, Cidade do México.
1958	Convento de São Vicente de Paulo.
1959	Igreja de São José Obreiro, Monterey. Capela de São Vicente de Paulo, em Coyoacán, Cidade do México.
1960	Capela de Santa Mônica, San Lorenzo de Xochimancas, México.
1962	Igreja de Nossa Senhora de Guadalupe, em Madrid, Espanha.
1966	Paróquia do Senhor do Campo Florido, Cidade do México.
1967	Estação de metrôCandelaria.
1968	Palacio de los Deportes (México) para a Olimpíada XIX na Cidade do México.

2.3 Cascas Finas e Regime de Membrana

Kirchhoff apresenta em 1850 hipóteses sobre a distribuição de tensões e desenvolveu a teoria das placas. Aron iniciou os estudos teóricos e derivou as equações de energia potencial adaptando-as para as cascas. Esses estudos serviram de base para que Love desenvolvesse as equações de equilíbrio das cascas. Esses trabalhos deram origem à Teoria das Cascas Finas.

Segundo Vizotto (1993), para estudar as estruturas em cascas pode-se utilizar a Teoria da Elasticidade da qual se deriva a teoria das cascas finas. Entre outros autores, Chapelle (2003) descreve de forma bem simplificada as cascas como estruturas tridimensionais com uma dimensão (a espessura) bem menor em relação às outras duas. Muitos autores associam a relação entre espessura e raio de curvatura da casca para considerar a casca fina. Para Billington (1982) essa relação deve estar entre 1/1000 e 1/20. Segundo Vieira (2003), Novozhilov (1970), foi o primeiro a definir a relação limite entre espessura e raio de curvatura 1/20 para se considerar as cascas como finas.

O comportamento estrutural ideal das cascas finas é obtido quando efeitos de flexão são desprezíveis, esse comportamento é caracterizado como regime de membrana. Na teoria de membrana, o equilíbrio estático das cascas é obtido apenas com esforços contidos no plano tangente em cada ponto da superfície média. Com a hipótese de regime de membrana a análise é simplificada, entretanto devem-se atender algumas condições de geometria, carregamento e apoio. Segundo Billington (1982), a estrutura deve ter uma superfície suave e contínua e sem variações bruscas de espessura; carregamentos contínuos ou suavemente variáveis; a vinculação dos apoios deve garantir o deslocamento na direção normal à superfície média da casca; as solicitações de borda devem estar contidas no plano tangente da superfície média da casca. Segundo Zagottis (1973), quando as condições do regime de membrana não forem atendidas, existem duas situações possíveis associados à curvatura de Gauss (K_G). A primeira situação refere-se às cascas com $K_G \geq 0$, nesse caso existem pequenas regiões onde os momentos fletores e torçores são importantes e devem ser analisados pela teoria da flexão de cascas ao invés da teoria de membrana. A segunda situação diz respeito às cascas com $K_G < 0$, para esse caso existem grandes zonas de perturbação do regime de membrana tornando a teoria de membrana não adequada para descrever o comportamento da estrutura.

3 GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE MALHAS DE ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma excelente ferramenta proporcionada pelo avanço dos computadores para a resolução de problemas estruturais na área de engenharia. Primeiramente é necessário discretizar a estrutura a ser analisada em elementos denominados elementos finitos. Esse processo denomina-se geração de malhas.

A maior complexidade decorrente das formas de estruturas em cascas inevitavelmente leva a uma maior complexidade de geração das malhas que descrevem o comportamento da estrutura.

3.1 Método dos Elementos Finitos (MEF)

O Método dos Elementos Finitos surgiu como uma possibilidade de resolução de problemas de elasticidade baseados em métodos aproximados de Rayleigh-Ritz e Galerkin.

No método de Rayleigh-Ritz, a função suposta exata que minimiza um determinado funcional é substituída por uma combinação linear de funções mais simples linearmente independentes. Cada uma dessas funções mais simples devem ser admissíveis, ou seja, devem satisfazer as condições de compatibilidade e as condições essenciais de contorno (COOK et al, 1989). Substituindo as funções no funcional, e minimizando-o e com auxílio das condições de contorno, obtêm-se os parâmetros a serem determinados. A convergência do método é verificada comparando o funcional de duas funções aproximadoras consecutivas.

O método de Galerkin é um caso particular de resíduos ponderados. O método dos resíduos ponderados utiliza diretamente a equação diferencial do problema, não necessitando de um funcional a ser minimizado. O método consiste em substituir no sistema de equações diferenciais, funções aproximadoras que satisfaçam as condições de contorno do problema. Como resultado da aproximação, surgem resíduos que são ponderados por funções ponderadoras. O produto entre a função residual e cada função ponderadora deve ser nulo no domínio de integração. Desse modo as constantes procuradas são determinadas pela resolução de um sistema linear (COOK et al, 1989).

Segundo Becker (1981) o MEF prevê a divisão do domínio de integração em pequenos elementos finitos, tornando o meio contínuo em discreto para aproximação da solução do sistema de equações diferenciais do problema em estudo.

Assan (1999) introduz de forma didática os conceitos básicos da formulação do MEF. Esse método numérico de aproximação da solução de sistemas de equações diferenciais define funções admissíveis no domínio de cada elemento finito e obtém-se um funcional para cada elemento, o funcional para todo o domínio é obtido somando-se os funcionais dos elementos. A resolução da minimização do funcional resulta em um sistema de equações e os parâmetros da resolução desse sistema, são parâmetros nodais dos elementos, e podem ser deslocamentos ou forças internas dependendo da formulação.

Segundo Gupta e Meek (1996), podem ser considerados cinco grupos de trabalhos no desenvolvimento do MEF: Courant (1942); Argyris (1954); Turner et al (1956); Clough (1989), que foi o primeiro a utilizar o termo elemento finito; e Zienkiewicz (1965) . Em seu trabalho Gupta e Meek (1996), analisaram a contribuição de cada autor para o desenvolvimento do MEF.

De forma simplificada Bittencourt (2010) apresenta os passos para análise estática pelo método dos deslocamentos de uma estrutura pelo MEF. O primeiro passo é determinar a matriz de rigidez da estrutura em função das coordenadas nodais; propriedades geométricas; e materiais que constituem a estrutura. Com informações referentes às ações que atuam na estrutura, é obtido o vetor de carregamentos global. Ao final, obtém-se um sistema de equações onde as incógnitas são os deslocamentos nodais.

Vários tipos de elementos finitos foram formulados e desenvolvidos para diversos programas para análise computacional de estruturas, como os elementos lineares para estruturas reticuladas de pórticos planos e/ou espaciais, de chapa, de placa, de cascas e elementos de sólidos.

Entre os principais softwares de análise de estruturas pelo Método dos Elementos Finitos disponíveis no mercado, destaca-se o ANSYS pela sua vasta biblioteca de elementos e opções de análise. Bittencourt (2010) apresenta exemplos de aplicação desse programa possibilitando um contato inicial com simulação numérica computacional de problemas estruturais.

Nesse trabalho, o ANSYS é utilizado para análise de estruturas em casca com malhas de elementos finitos triangulares com polinômio interpolador linear (três pontos nodais) e para a geração das formas tridimensionais das estruturas em cascas através da análise não linear geométrica de uma membrana fina e flexível. Utiliza-se o elemento SHELL41 para processamento das membranas, e o elemento SHELL63 para análise das estruturas em cascas de concreto.

3.2 Geração de Malhas

A geração de malha para aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF) é realizada pela decomposição do domínio em subdomínios para aproximação da solução de problemas regidos por sistemas de equações diferenciais.

Segundo Sakamoto (2007) e Batista (2005), as primeiras análises com o MEF eram realizadas com malhas geradas de modo não automatizado, sendo apenas a partir dos avanços dos computadores que se começou a discretizar automaticamente domínios mais complexos.

Segundo Gonçalves (2007) as malhas podem ser agrupadas em malhas ortogonais estruturadas e malhas não ortogonais, sendo que estas podem ser estruturadas ou não estruturadas.

Malhas ortogonais, segundo Marques (2005), são aquelas em que um segmento de reta que une os centros geométricos de dois elementos vizinhos seja perpendicular à aresta em comum.

As malhas estruturadas são caracterizadas por seus nós internos possuírem número constante de elementos adjacentes e seguirem uma sequência definida de geração, enquanto as malhas não-estruturadas possuem nós internos com número de elementos adjacentes variável (BATISTA, 2005).

Segundo Thompson (1985), os principais métodos de geração de malhas são por interpolação algébrica ou método direto, e por solução de um sistema de equações diferenciais ou método indireto. Em geometrias muito complexas, os métodos indiretos podem exigir mais esforço computacional para a geração da malha, que é a própria resolução do problema pelo MEF.

Segundo Gonçalves (2004) os métodos diretos algébricos geram a malha no domínio baseados em alguns algorítmicos algébricos definidos, que podem ser subdivididos em geração de malhas por transformação de coordenadas; mapeamentos isoparamétricos; mapeamentos transfinitos; e decomposição do domínio entre outros.

O mapeamento isoparamétrico consiste em obter os valores das coordenadas dos pontos do domínio a partir de valores especificados no contorno através do uso de funções de interpolação.

Gordon (1973) define mapeamentos transfinitos como sendo a combinação de interpolação linear de Lagrange em duas direções concorrentes obtendo uma quantidade infinita de pontos. Esse método estabelece sistemas de coordenadas curvilíneas definidas pelo contorno do domínio,

sendo capaz de modelar o contorno de superfícies com precisão da geometria. A função interpoladora para a coordenada $r(\xi)$ é dada pela Equação 3.2.1, e os parâmetros referentes à interpolação podem ser visualizados na Figura 3.1.

$$r(\xi) = \left(1 - \frac{\xi}{N}\right)r_1 + \left(\frac{\xi}{N}\right)r_2 \quad (3.2.1)$$

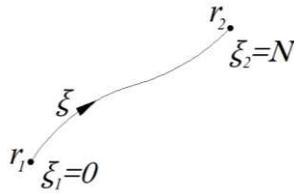


Figura 3.1: Esquema genérico de interpolação linear entre dois pontos ou duas curvas.

As coordenadas dos pontos nodais do domínio no mapeamento transfinito são determinadas por interpolação com o auxílio de projetores. Haber (1981) define projetor como o operador linear que mapeia uma superfície real em uma superfície aproximada.

Em Thompson (1985) pode-se encontrar a formulação e o algoritmo do projetor bilinear, que é ideal para mapear domínios quadrangulares com contornos curvos dos quatro lados. A malha gerada com esse método apresenta elementos finitos quadriláteros, para obter elementos finitos triangulares, basta traçar uma diagonal dividindo um elemento quadrilátero em dois triangulares.

De acordo com Haber (1981), quando se pretende mapear elementos triangulares, pode-se utilizar o mapeamento transfinito trilinear. Para isso o domínio precisa ser limitado por três curvas, como o caso de domínios triangulares. A malha gerada com esse método apresenta elementos finitos triangulares.

Segundo Gonçalves (2004) quando o domínio que se deseja discretizar é delimitado por curvas em apenas duas faces, pode se utilizar o projetor *lofting* que permite modelar de forma exata as duas curvas que delimitam o domínio com aproximação linear das outras faces.

O projetor *lofting* efetua interpolação entre duas curvas do contorno do domínio conforme Figura 3.2 e sua expressão é dada pela Equação 3.2.2:

$$P_{lofting} \equiv \psi_i = (1 - v)\psi_1(u) + v\psi_n(u) \quad (3.2.2)$$

para $0 \leq u \leq 1$ e $0 \leq v \leq 1$, onde u é uma variável paramétrica normalizada ao longo de ψ_1 e ψ_n , e v é uma variável normalizada que vale zero em ψ_1 e um em ψ_n .

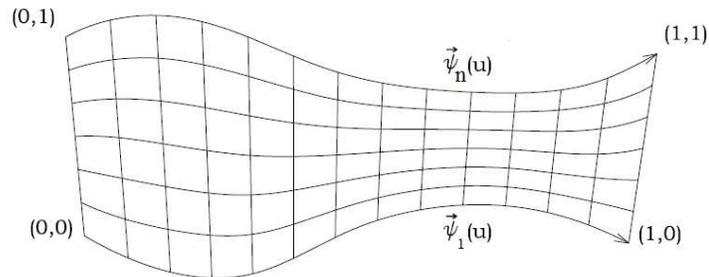


Figura 3.2: Esquema genérico de interpolação linear entre dois pontos ou duas curvas.

Os métodos de decomposição do domínio são alternativas para os casos de domínios muito complexos, ou quando deseja-se variar drasticamente a densidade dos elementos ao longo do domínio. Os principais métodos de geração de malha por decomposição do domínio são: Árvore Quaternária (*QuadTree*); Avanço de Fronteira; ou Triangulação de Delaunay (SAKAMOTO, 2007).

O método *QuadTree* desenvolvido por Mark Shephard e Rensselaer, baseia-se na decomposição do espaço em quadrados acompanhados da fronteira do domínio com divisões recursivas até que se atinja boa aproximação conforme ilustra Figura 3.3. Os quadrados que interceptam a fronteira são substituídos por um polígono escolhido e depois triangulado juntamente como os demais quadrados.

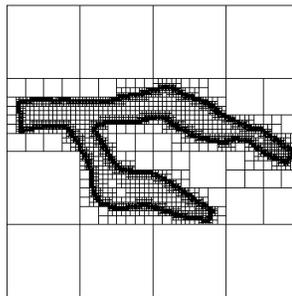


Figura 3.3: Malha *QuadTree* pra um domínio irregular¹³.

¹³ . Extraído de (http://www.staff.ncl.ac.uk/qiuhua.liang/Research/grid_generation.html).

O avanço de fronteira concebido por S. H. Lo em 1985 surgiu para a geração de malhas de domínios bidimensionais arbitrários. De acordo com Lo (1985) o funcionamento do método baseia-se em subdividir a fronteira do domínio com nós organizados no sentido anti-horário e inserir pontos no interior da fronteira formando uma nova fronteira com os nós organizados no sentido horário. Procede-se a triangulação dessa região e avança-se para regiões ainda não trianguladas.

A triangulação de Delaunay baseia-se no critério de círculo vazio. Para um conjunto de pontos no plano, a triangulação de Delaunay é a triangulação cujo circuncírculo dos triângulos não possui nenhum dos pontos do conjunto em seu interior (Figura 3.4). Segundo Machado (2008), a triangulação de Delaunay é destaque na comunidade de geometria computacional por apresentar resultados teóricos que asseguram a qualidade e organização da malha gerada.

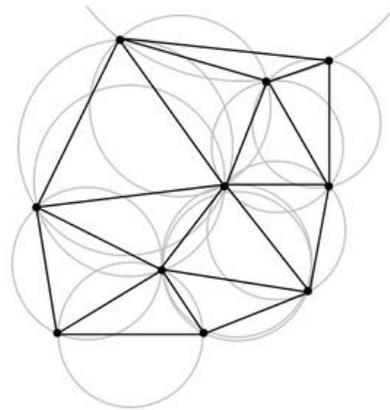


Figura 3.4: Esquema da triangulação de Delaunay.

Há ainda as malhas adaptativas que são geradas e analisadas paralelamente e refinadas nas regiões necessárias do domínio. A aproximação do Método dos Elementos Finitos é melhor quanto maior for o refinamento da malha, entretanto esse refinamento uniforme do domínio aumenta os graus de liberdade do problema. Entre outros, Rylo (2002) estuda processos auto adaptativos para minimização de erros do método através da alteração do grau do polinômio interpolador e/ou do tamanho do elemento finito, buscando a relação ótima para cada elemento.

4 GERAÇÃO COMPUTACIONAL DAS MALHAS PLANAS

Nesse trabalho são utilizados os processos diretos de geração de malhas combinados com transformação de coordenadas.

Para domínios quadriláteros é utilizado mapeamento transfinito bilinear adaptado. Isto é, ao invés de utilizar o projetor bilinear, é utilizado o projetor *lofting* para interpolar linearmente entre pares de curvas da fronteira do domínio independentemente, obtendo-se equações de curvas. Em seguida determinam-se as coordenadas nodais de todos os pontos nodais do domínio através da intersecção das curvas.

Para as plantas poligonais, decompõe-se o domínio poligonal em triângulos iguais, e procede a geração da malha para apenas um triângulo. Para isso é apresentado um método, onde as coordenadas nodais são obtidas através da intersecção de retas paralelas às arestas do triângulo. A malha final obtida para esse triângulo com o método proposto, é semelhante à malha obtida com a utilização de projetor trilinear, a diferença é que, segundo Gordon (1982), com o projetor trilinear, as coordenadas de cada ponto nodal são determinadas diretamente com a interpolação das três curvas que delimitam o domínio.

Para suavizar os vértices dos polígonos ou das plantas quadriláteras, os pontos nodais dessa região são submetidos à transformação de coordenadas.

Esse capítulo destina-se à apresentação da geração das malhas de elementos finitos triangulares para plantas geométricas poligonais regulares. São geradas algumas configurações de malhas para plantas retangulares, plantas poligonais regulares, e plantas de quatro lados com arestas retas e/ou parabólicas utilizando métodos de interpolação algébrica aliados à transformação de coordenadas.

São apresentados dois programas computacionais desenvolvidos em linguagem de programação C que se destinam a geração automática das malhas planas para plantas quadriláteras com arestas retas e/ou curvas e plantas poligonais regulares. Os algoritmos utilizados são descritos nas respectivas seções desse capítulo.

Os programas computacionais desenvolvidos geram automaticamente, a partir de poucos dados de entrada, as coordenadas nodais; incidência nodal dos elementos; pontos nodais com condições de contorno. Atribui propriedades aos materiais de todos os elementos e geram

arquivos compatíveis para análises com o software desenvolvido por Vizotto (1993), e também com software comercial ANSYS. Além disso, são gerados arquivos para visualização no AutoCAD das malhas e arquivos compatíveis com Microsoft EXCEL com dados de geração da malha e coordenadas nodais.

4.1 Plantas Poligonais Regulares

Para qualquer polígono regular é apresentado o desenvolvimento de um software capaz de gerar malhas de elementos finitos a partir de apenas um algoritmo de geração.

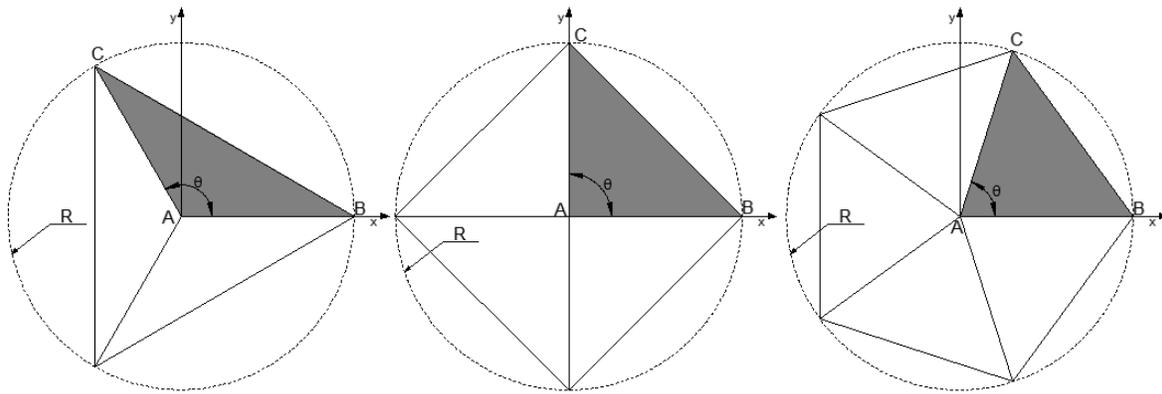


Figura 4.1: Padrão geométrico triangular presente em qualquer polígono regular.

A procura por um padrão geométrico presente em qualquer polígono levou a exploração da simetria em torno de um ponto central. Conforme mostrado na Figura 4.1, fixa-se a origem do sistema de coordenadas no ponto $A(0,0)$ no centro do polígono. Um próximo ponto é obtido na extremidade do seguimento de reta R , $B(R,0)$, onde R é o raio externo do polígono, ou seja, o raio da circunferência que circunscribe o polígono. A aresta formada pelo seguimento que liga a origem a um dos vértices do polígono contido no eixo x , \overline{AB} , é submetida a uma rotação por um ângulo θ no sentido anti-horário a partir da origem de forma a determinar mais um ponto, $C(R \cos \theta, R \sin \theta)$. O ângulo θ pode ser expresso em função do número de lados conforme a Equação 4.1.1:

$$\theta = \frac{360^\circ}{N} = \frac{2\pi}{N} \quad (4.1.1)$$

onde N é o número de lados do polígono.

De acordo com a Figura 4.1 é possível observar que o triângulo ABC repete-se N vezes submetido à uma rotação de $i \times \theta$ em torno do ponto central (A), com $i = 1, \dots, (N - 1)$. Desse modo basta determinar a malha de elementos finitos apenas para o triângulo ABC e extrapolar esta para todo o domínio.

Para a geração de malhas com domínios triangulares, podem-se utilizar, entre outros métodos, o mapeamento transfinito bilinear e/ou trilinear. As malhas geradas com mapeamento transfinito trilinear, geram elementos mais uniformes (Figura 4.2), por isso, esse trabalho apresenta um método inspirado na malha gerada por esse tipo de mapeamento.

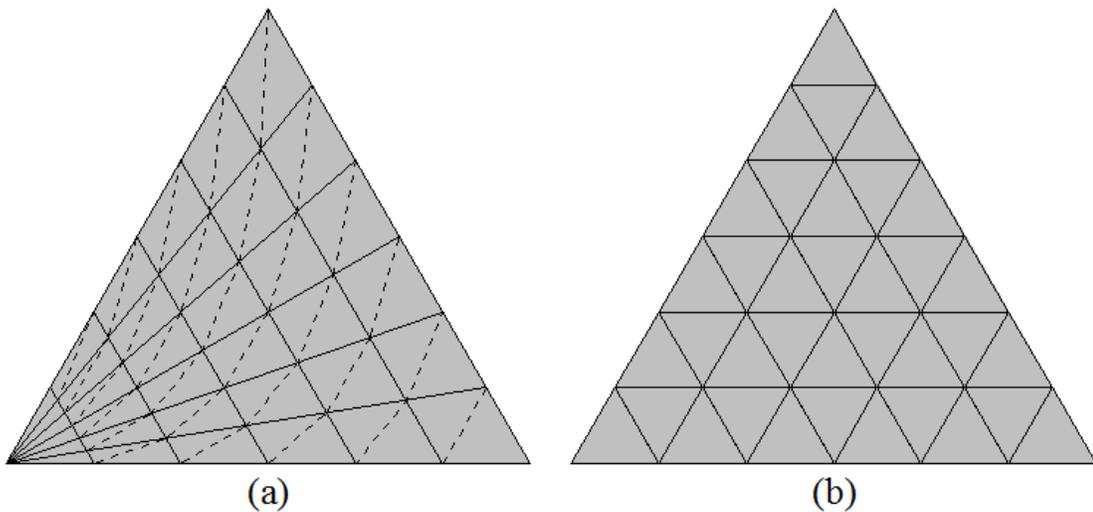


Figura 4.2: Mapeamento transfinito a) bilinear e b) trilinear.

Os dados de entrada para o software com relação à geração da geometria são:

- a) N : Número de lados do polígono;
- b) R : Raio da circunferência que circunscreve a planta;
- c) N_r : Número de divisões da malha (divisões do segmento \overline{AB});
- d) R_{ef} : Raio efetivo para suavização dos vértices dos polígonos.

4.1.1 Cálculo das Coordenadas Nodais

As coordenadas nodais para o domínio triangular qualquer são obtidas pela intersecção das retas paralelas às fronteiras com espaçamentos uniformes dentro do domínio. Desse modo, conhecendo-se a geometria da planta e o espaçamento desejado entre as retas, podem-se determinar as equações das retas e, conseqüentemente, as coordenadas nodais de todos os pontos.

A Figura 4.3 apresenta todas as variáveis necessárias para determinação das equações das retas utilizadas para a discretização do domínio.

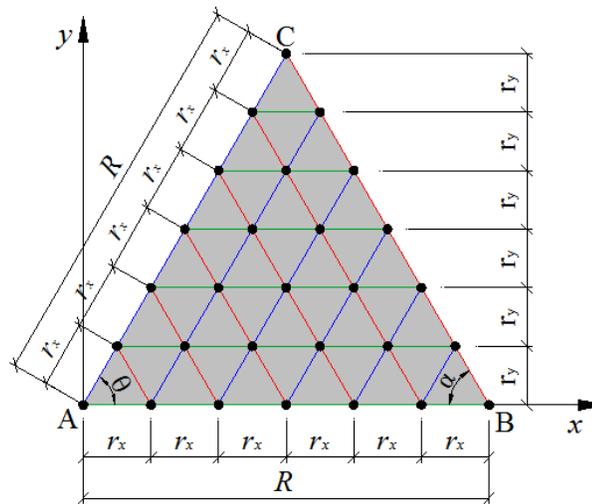


Figura 4.3: Identificação de variáveis para a determinação das equações das retas para a discretização do domínio.

Os espaçamentos entre as retas r_x e r_y apresentados na Figura 4.3 podem ser determinados respectivamente pelas Equações 4.1.1.1 e 4.1.1.2.

$$r_x = \frac{R}{N_r} \quad (4.1.1.1)$$

$$r_y = r_x \sin \theta \quad (4.1.1.2)$$

Para facilitar o equacionamento, cada grupo de retas será tratado isoladamente. As retas paralelas ao segmento \overline{AC} receberam o nome de retas $y_{1i}(x)$ (Figura 4.4); as retas paralelas ao segmento \overline{BC} receberam o nome de retas $y_{2i}(x)$ (Figura 4.5); e as retas paralelas a segmento \overline{AB}

receberam o nome de retas $y_{3_i}(x)$ (Figura 4.6). As equações das retas podem ser determinadas em função de r_x , r_y e θ de acordo com as Equações 4.1.1.3, 4.1.1.4 e 4.1.1.6.

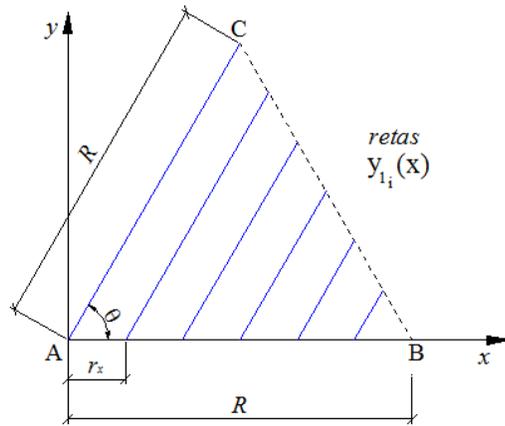


Figura 4.4: Representação das retas $y_{1_i}(x)$.

$$y_{1_i}(x) = \tan \theta x - \sum_{j=1}^{i-1} r_x \tan \theta \quad (4.1.1.3)$$

com $1 \leq i \leq N_r + 1$.

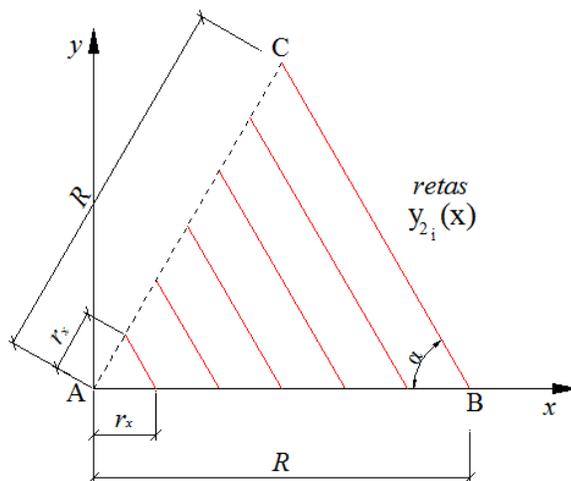


Figura 4.5: Representação das retas $y_{2_i}(x)$.

$$y_{2_i}(x) = -\tan \alpha x + \sum_{j=1}^{i-1} r_x \tan \alpha \quad (4.1.1.4)$$

com $1 \leq i \leq N_r + 1$, onde α é a metade do ângulo suplementar do ângulo θ calculado com a Equação 4.1.1.5.

$$\alpha = \frac{\pi - \theta}{2} \quad (4.1.1.5)$$

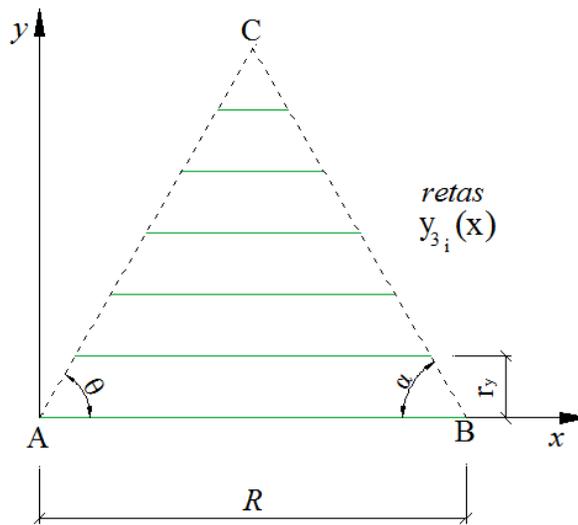


Figura 4.6: Representação das retas $y_{3_i}(x)$.

$$y_{3_i}(x) = \sum_{j=1}^{i-1} r_y \quad (4.1.1.6)$$

com $1 \leq i \leq N_r + 1$.

Combinando-se as Equações (4.1.1.3 a 4.1.1.5) podem-se determinar as coordenadas de todos os pontos nodais do domínio triangular através da intersecção das retas. A Figura 4.7 apresenta as coordenadas nodais dos pontos do referido domínio triangular.

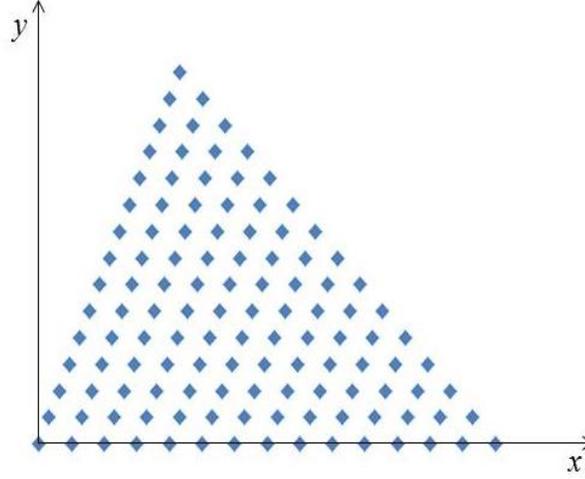


Figura 4.7: Representação das coordenadas nodais para o domínio triangular.

Cada ponto nodal P no domínio triangular tem um ponto correspondente P^* em outro domínio triangular submetido a uma rotação com o ângulo θ , expressa pelas Equações 4.1.1.7 e 4.1.1.8.

$$x_i = \left(\sqrt{x_{i-1}^2 + y_{i-1}^2} \right) \cos \left(\varphi_k + \sum_{k=1}^j \theta \right) \quad (4.2.1.7)$$

$$y_i = \left(\sqrt{x_{i-1}^2 + y_{i-1}^2} \right) \sin \left(\varphi_k + \sum_{k=1}^j \theta \right) \quad (4.1.1.8)$$

onde $1 \leq j \leq N - 1$ e φ_k é o ângulo formado entre o eixo x e o segmento de reta \overline{OP} conforme ilustra a Figura 4.8. Este ângulo é determinado pela Equação 4.1.1.9:

$$\varphi_k = \tan^{-1} \left(\frac{y_{i-1}}{x_{i-1}} \right) \quad (4.1.1.9)$$

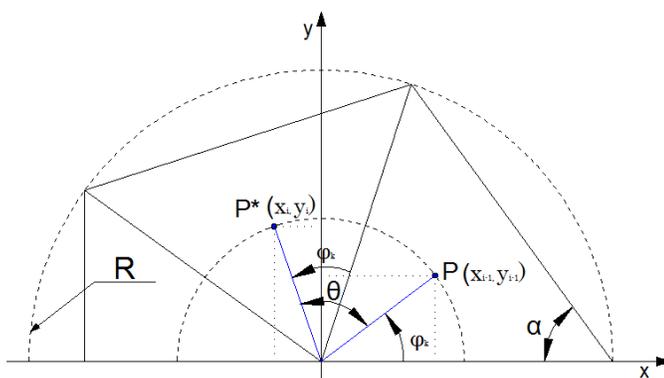


Figura 4.8: Representação da rotação para a determinação das coordenadas nodais de todo o domínio da planta poligonal.

Fazendo as operações das Equações (4.1.1.7) e (4.1.1.8) para todos os pontos do domínio triangular $(N-1)$ vezes, podem-se determinar as coordenadas nodais de todos os pontos nodais desejados do domínio poligonal, as coordenadas são armazenadas na matriz $Coord_{[N_{os} \times 2]}$. Onde o número de linhas é o número de pontos nodais de todo o domínio e o número de colunas é igual a dois, para as coordenadas x e y . Exemplos de polígonos com pontos nodais gerados são apresentados na Figura 4.9.

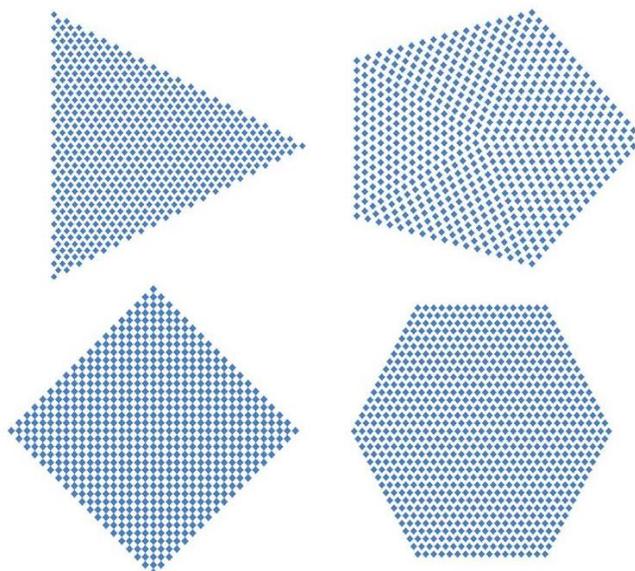


Figura 4.9: Representação das coordenadas nodais de todo o domínio poligonal para polígonos de três a seis lados.

4.1.2 Numeração Nodal

A numeração nodal é feita acompanhando a sequência do cálculo de coordenadas nodais, sendo realizada do centro para a aresta de baixo para cima conforme ilustra a Figura 4.10.

Algumas variáveis importantes para proceder com a numeração nodal são apresentadas e determinadas a seguir:

- a) S_0 : Número referente ao ponto nodal na extremidade da primeira aresta do domínio triangular determinado pela Equação 4.1.2.1.

$$S_0 = N_r + 1 \quad (4.1.2.1)$$

- b) S_1 : Número referente ao último ponto nodal a ser numerado no primeiro domínio triangular. Essa variável pode ser calculada como a soma dos $(N_r + 1)$ termos de uma progressão aritmética de ordem 1 com primeiro termo $S_0 = N_r + 1$, e último termo igual a 1. De outra maneira cada reta do tipo $y_{3_i}(x)$ apresentada na seção anterior possui quantidades variáveis de pontos nodais começando em $(N_r + 1)$, para $i = 1$; e terminando em 1, para $i = (N_r + 1)$. Com isso pode-se escrever a Equação 4.1.2.1:

$$S_1 = \frac{N_r + 2}{2}(N_r + 1) \quad (4.1.2.1)$$

- c) N_{2t} : Quantidade de pontos nodais pertencentes a cada domínio triangular. Cada domínio apresenta uma aresta em comum com o domínio anterior, dessa maneira N_{2t} pode ser determinado pela Equação 4.1.2.2.

$$N_{2t} = S_1 - S_0 \quad (4.1.2.2)$$

- d) NOS : Número total de pontos nodais da planta poligonal determinado pela Equação 4.1.2.3.

$$NOS = N(N_{2t}) + 1 \quad (4.1.2.3)$$

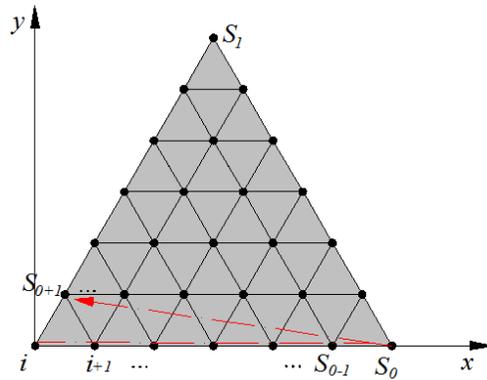


Figura 4.10: Sequência de numeração nodal para o primeiro domínio triangular.

A numeração nodal de cada domínio é armazenada em submatrizes triangulares $No^i_{[S_0 \times S_0]}$ de numeração nodal para posterior montagem da matriz global de numeração nodal $No^G_{[N(S_0) \times S_0]}$ e determinação das incidências nodais dos elementos.

Cada linha da matriz $No^i_{[S_0 \times S_0]}$ é preenchida pelo número referente aos pontos nodais pertencentes a reta do tipo $y_{3_i}(x)$. Desse modo essa matriz é uma matriz triangular superior.

Cada domínio triangular apresenta uma aresta em comum com o domínio anterior. Com isso, a primeira linha da matriz $No^{i+1}_{[S_0 \times S_0]}$ repete a primeira coluna da matriz $No^i_{[S_0 \times S_0]}$. A Figura 4.11 ilustra a sequência de numeração e a interação entre domínios triangulares subsequentes.

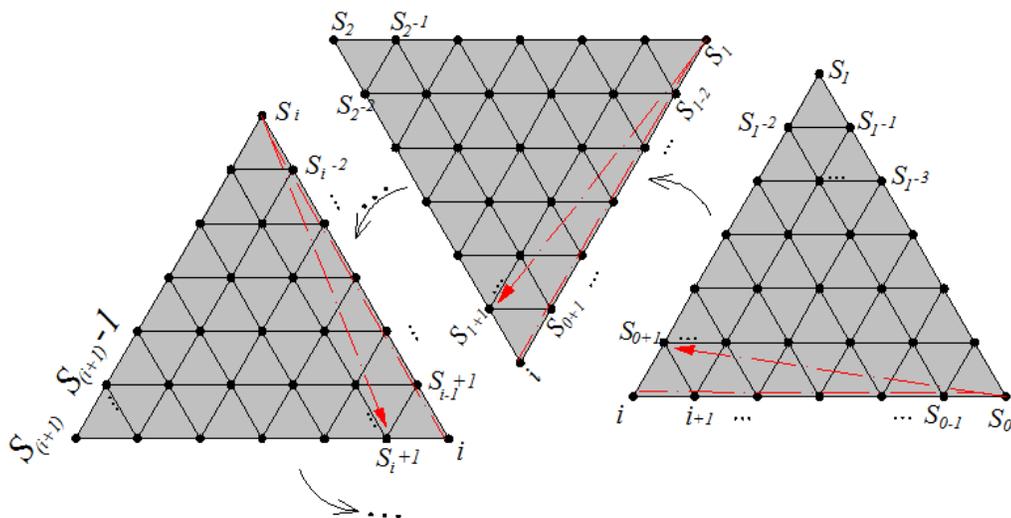


Figura 4.11: Esquema genérico de numeração nodal para todo o domínio poligonal.

Para a última submatriz de numeração nodal, $No^N_{[S_0 \times S_0]}$, além do domínio referente a ela possuir uma aresta em comum com o domínio anterior, também possui uma aresta comum ao primeiro domínio. Com isso a primeira linha da matriz $No^N_{[S_0 \times S_0]}$ repete a primeira coluna da matriz $No^{N-1}_{[S_0 \times S_0]}$ e a primeira coluna de $No^N_{[S_0 \times S_0]}$ é igual á primeira linha da primeira matriz $No^1_{[S_0 \times S_0]}$.

Para facilitar o entendimento, toma-se uma planta pentagonal ($N=5$) com quatro divisões da malha ($N_r = 4$). A Figura 4.12 apresenta a numeração nodal na planta e as submatrizes de numeração nodal.

A matriz geral de numeração nodal $No^G_{[N(S_0) \times S_0]}$ é formada pela composição das submatrizes conforme a Equação 4.1.2.4:

$$\begin{cases} No^G[k, j] = No^{q+1}[k, j] \text{ para } 1 \leq j \leq S_0 + 1 - i \\ No^G[k, j] = 0 \text{ para } j > S_0 + 1 - i \end{cases} \quad (4.1.2.4)$$

onde $0 \leq q < N$ e $k = q \times S_0 + i$, com $1 < i \leq S_0$.

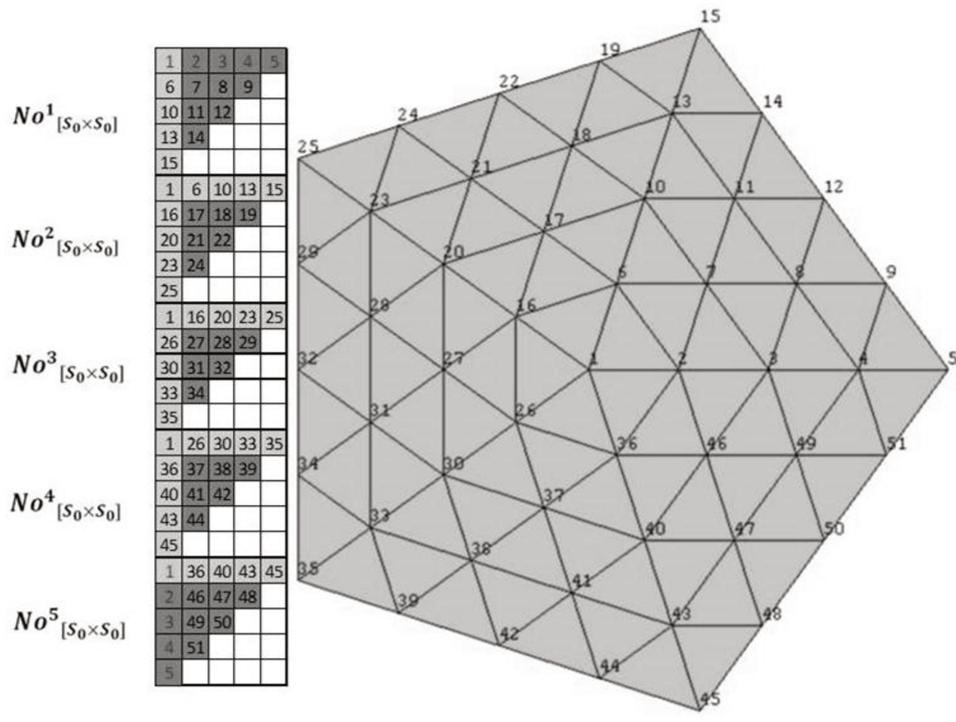


Figura 4.12: Exemplificação de numeração nodal dos domínios triangulares para uma planta pentagonal com quatro divisões da malha.

4.1.3 Incidência Nodal dos Elementos

A incidência nodal dos elementos é obtida diretamente da matriz global de numeração nodal $No^G_{[N(S_0) \times S_0]}$ e é armazenada na matriz $INCD_{[Nel \times 3]}$. O número total de elementos da planta poligonal pode ser determinado pela Equação 4.1.3.1:

$$Nel = N_r \times N_r \times N \quad (4.1.3.1)$$

Os elementos são numerados seguindo a ordem de numeração nodal conforme apresentado na Figura 4.13. A determinação das incidências nodais é realizada simultaneamente com a numeração nodal. Cada elemento possui três pontos nodais, um para cada vértice, organizados no sentido anti-horário. Um esquema genérico para determinação das incidências nodais para o primeiro domínio triangular pode ser observado na Figura 4.14.

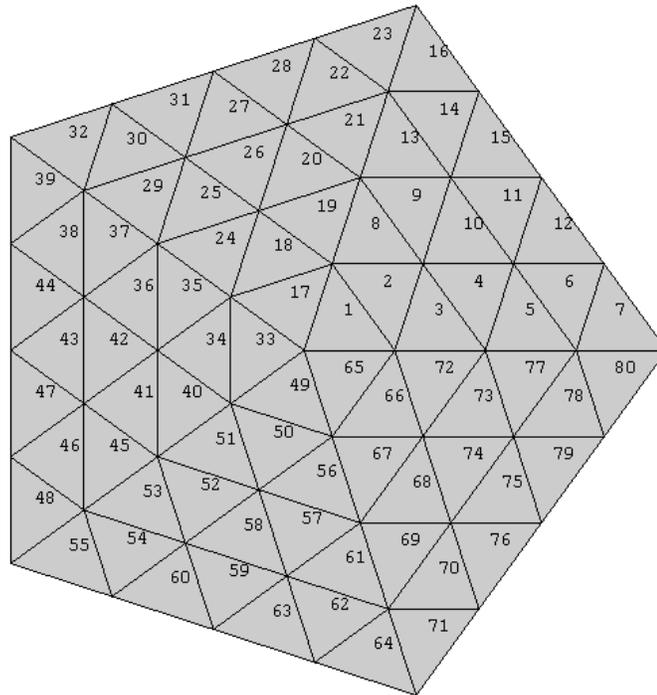


Figura 4.13: Exemplificação da sequência de numeração nodal para uma planta pentagonal e quatro divisões da malha.

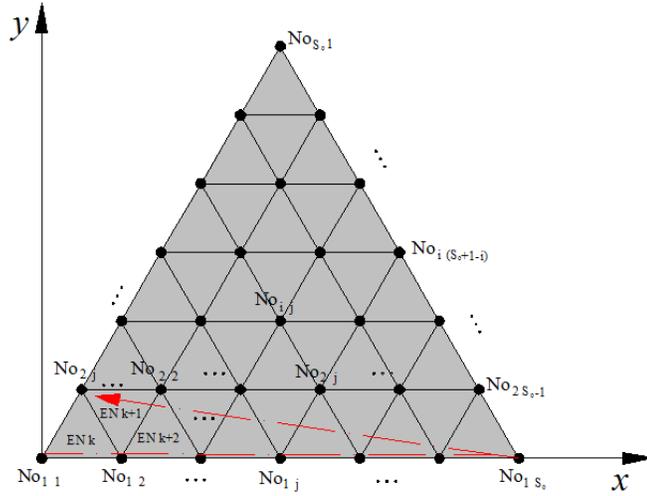


Figura 4.14: Sequência de numeração dos elementos e determinação das incidências nodais.

A incidência nodal dos elementos é obtida para pares de elementos, com exceção para o último elemento de cada dupla de linhas das submatrizes de numeração nodal, isso porque entre duas linhas das submatrizes há sempre um número ímpar de elementos.

As Equações 4.1.3.2 e 4.1.3.3 permitem determinar a incidência nodal dos elementos de todo o domínio poligonal:

$$\begin{cases} \mathbf{INCD}[k, 1] = \mathbf{No}^G[(q \times S_0 + i), j] \\ \mathbf{INCD}[k, 2] = \mathbf{No}^G[(q \times S_0 + i), (j + 1)] \\ \mathbf{INCD}[k, 3] = \mathbf{No}^G[(q \times S_0 + i + 1), j] \end{cases} \quad (4.1.3.2)$$

com $0 \leq q < N$; $1 \leq i \leq N_r$; $1 \leq j \leq (S_0 - i)$ e $1 \leq k \leq Nel$;

$$\begin{cases} \mathbf{INCD}[k + 1, 1] = \mathbf{No}^G[(q \times S_0 + i), (j + 1)] \\ \mathbf{INCD}[k + 1, 2] = \mathbf{No}^G[(q \times S_0 + i + 1), (j + 1)] \\ \mathbf{INCD}[k + 1, 3] = \mathbf{No}^G[(q \times S_0 + i + 1), j] \end{cases} \quad (4.1.3.3)$$

com $0 \leq q < N$; $1 \leq i \leq N_r$; $1 \leq j \leq (S_0 - (i + 1))$ e $1 \leq k \leq Nel$.

O termo q é utilizado como multiplicador de S_0 para variar de submatriz em submatriz dentro da matriz global $\mathbf{No}^G_{[N(S_0) \times S_0]}$, pois cada uma das N submatriz $\mathbf{No}^i_{[S_0 \times S_0]}$ apresenta S_0 linhas, e dessa forma pode-se, a partir de um algoritmo genérico para o primeiro domínio triangular, determinar as incidências nodais de todo o domínio poligonal.

4.1.4 Aplicação de Restrições e Ajustes Finais

Para impor deslocamentos a pontos específicos da malha, localizam-se os pontos desejados na matriz global de numeração nodal $No^G_{[N(S_0) \times S_0]}$. O software desenvolvido permite aplicar restrições automaticamente a pontos nodais localizados nos vértices ou a todo o contorno da planta poligonal.

Em um dos arquivos de saída do software é possível identificar por arestas numeradas no sentido anti-horário, todos os pontos nodais localizados no contorno da planta. Desse modo o usuário pode aplicar restrições a qualquer ponto do contorno sem grande esforço. A Figura 4.15 apresenta um exemplo de identificação das arestas para uma planta heptagonal.

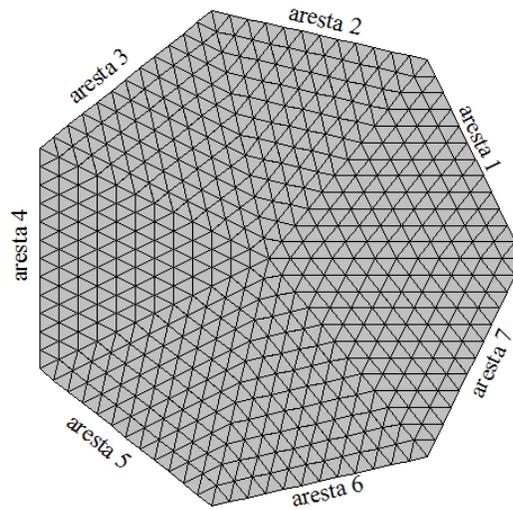


Figura 4.15: Exemplificação do sentido de identificação das arestas da planta poligonal.

Da maneira como cada submatriz foi montada, sua diagonal secundária, contém todos os pontos contidos no contorno de cada domínio triangular (ver exemplo na Figura 4.12). Com isso os pontos nodais das bordas da planta podem ser facilmente identificados.

A Equação (4.1.4.1) apresenta a identificação das diagonais das submatrizes na matriz global.

$$No^G[(q \times S_0 + i), (S_0 + 1 - i)] \quad (4.1.4.1)$$

Com relação aos vértices da planta poligonal regular, o software permite suavizá-los automaticamente, a fim de que a forma livre posteriormente gerada, seja esteticamente

satisfatória e o estado de tensões da estrutura não sofra alterações significativas que podem ser evidenciadas com a presença do vértice do polígono. A Figura 4.16 apresenta as possíveis inconformidades estéticas e/ou estruturais que podem ocorrer nas estruturas em cascas de formas livres simplesmente apoiadas nos vértices, geradas a partir de plantas poligonais sem suavização dos vértices.

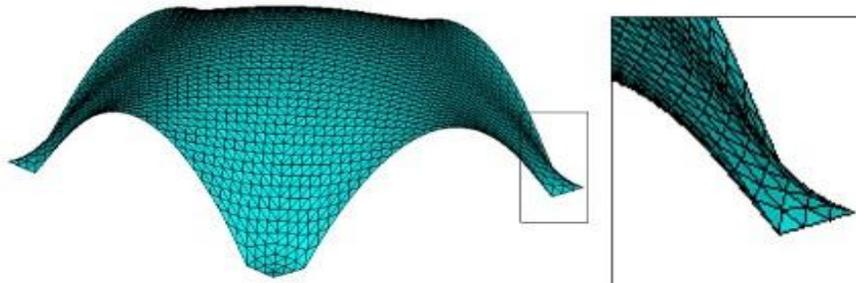


Figura 4.16: Identificação de inconformidades estéticas e estruturais na estrutura em casca de forma livre gerada sem suavização dos vértices.

A suavização é obtida através da transformação de coordenadas dos pontos nodais localizados próximos aos vértices. Esses pontos nodais são identificados na matriz de numeração global. As novas coordenadas são limitadas por um novo raio, o raio efetivo (R_{ef}) menor que o raio da circunferência que circunscreve a planta poligonal.

O processo de suavização nodal é realizado apenas para o primeiro domínio triangular, visto que o restante da planta é obtido a partir deste. O processo segue os seguintes passos:

1. Identificam-se os pontos nodais do primeiro domínio triangular através da matriz de numeração nodal $No[i, j]$;
2. Obtém-se as coordenadas nodais do ponto na matriz de coordenadas $Coord[No[i, j], 1]$;
3. Calcula-se o comprimento do vetor \vec{r}_i , que o ponto nodal forma com a origem do sistema de coordenadas com a Equação 4.1.4.2;

$$\vec{r}_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \quad (4.1.4.2)$$

4. Se $\vec{r}_i \leq R_{ef}$, não há nada a fazer;

5. $\vec{r}_i > R_{ef}$, então, calcula-se o ângulo φ_i formado entre o eixo x as antigas coordenadas com a Equação 4.1.4.3:

$$\varphi_i = \tan^{-1} \left(\frac{y_i}{x_i} \right) \quad (4.1.4.3)$$

6. Calculam-se as novas coordenadas a partir das coordenadas polares R_{ef} e φ_i .
7. Faz-se $R_{ef} = R_{ef} - (\delta_r)r_x$ e volta ao passo 1.

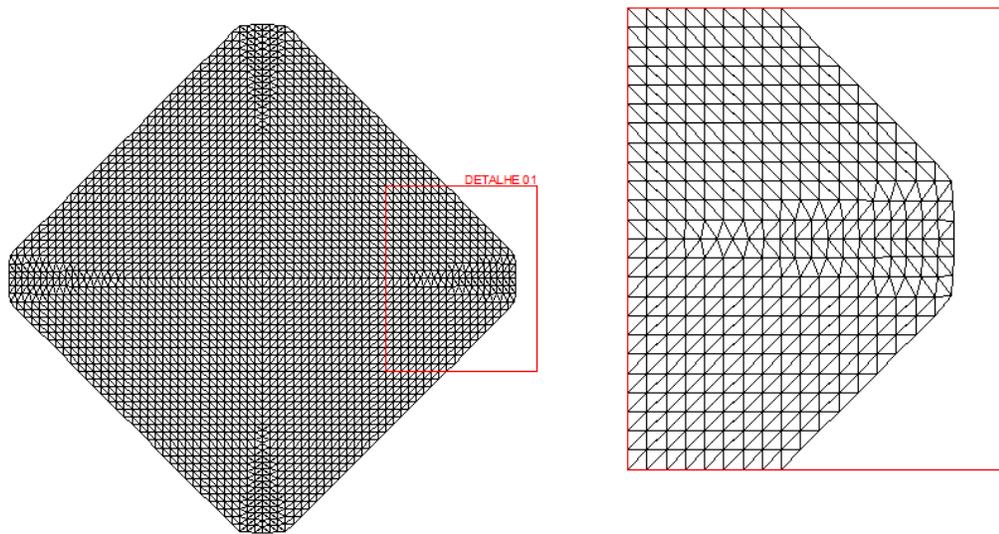


Figura 4.17: Detalhe e ampliação do vértice suavizado.

O passo 7 garante que faixas sucessivas que acompanham a fronteira do domínio passem pelo processo de transformação de coordenadas. O valor de δ_r é estipulado pelo usuário, sendo que deve ser menor que um. Esse coeficiente garante a melhor distribuição das novas coordenadas nodais e impede que ocorra uma variação brusca dos elementos. Como resultado, os elementos da região dos apoios apenas diminuem, mas não há distorção. O detalhe ampliado na Figura 4.17 ilustra os elementos alterados nas regiões dos vértices.

A Figura 4.18 ilustra o processo de suavização dos vértices para apenas para os pontos nodais da aresta do primeiro domínio triangular.

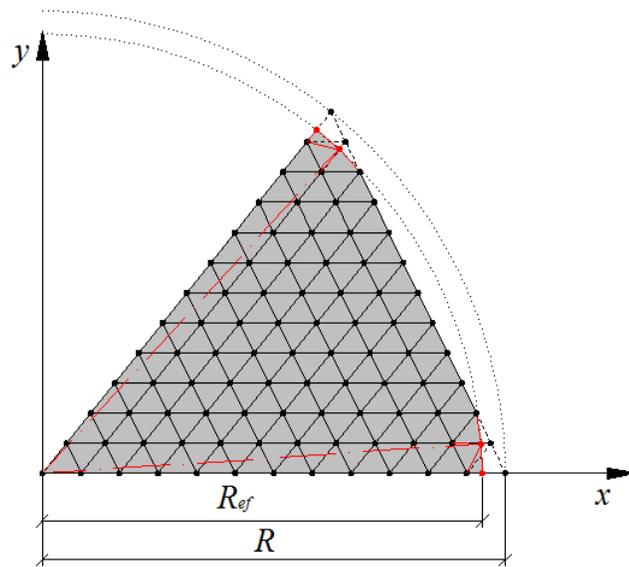


Figura 4.18: Suavização dos vértices para o primeiro domínio triangular.

Na Figura 4.19 podem-se visualizar as coordenadas nodais de alguns polígonos após a suavização dos vértices.

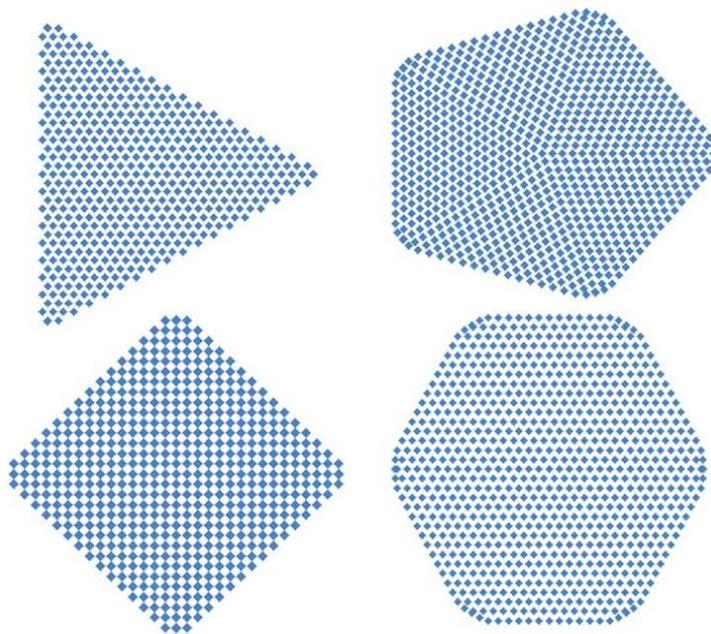


Figura 4.19: Coordenadas nodais após suavização dos vértices.

4.1.5 Malhas Planas Geradas

As imagens a seguir (Figura 4.20 a Figura 4.23) ilustram os resultados obtidos com as malhas geradas já com o tratamento dos vértices para diversas plantas poligonais.

Quanto maior o número de lados do polígono, mais as plantas se aproximam de uma planta circular, entretanto, com manipulação adequada dos dados de entrada do programa computacional, podem-se obter plantas circulares a partir de plantas poligonais. A Figura 4.23, por exemplo, apresenta uma planta circular obtida a partir de uma planta hexagonal.

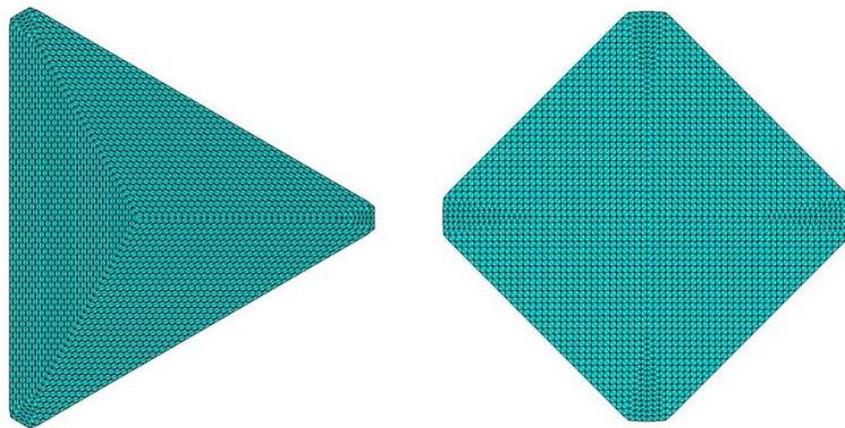


Figura 4.20: Malha para planta triangular e quadrilátera.

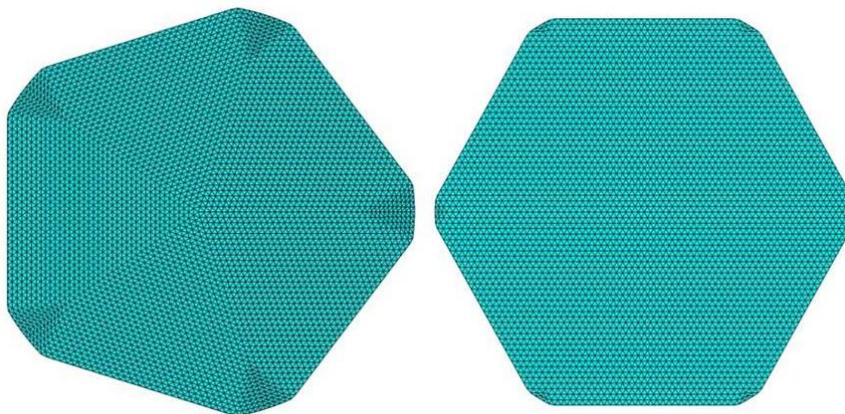


Figura 4.21: Malha para planta pentagonal e hexagonal.

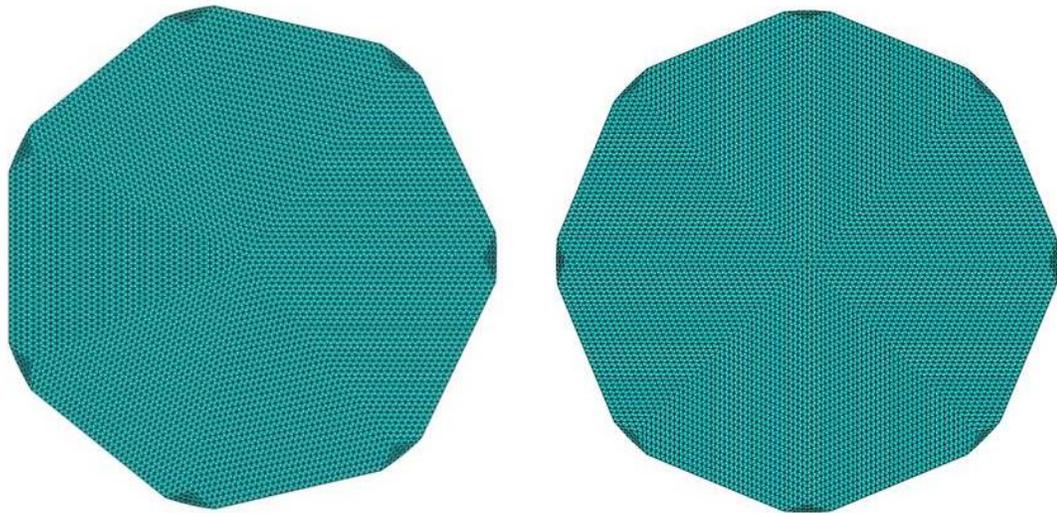


Figura 4.22: Malha para planta heptagonal e octogonal.

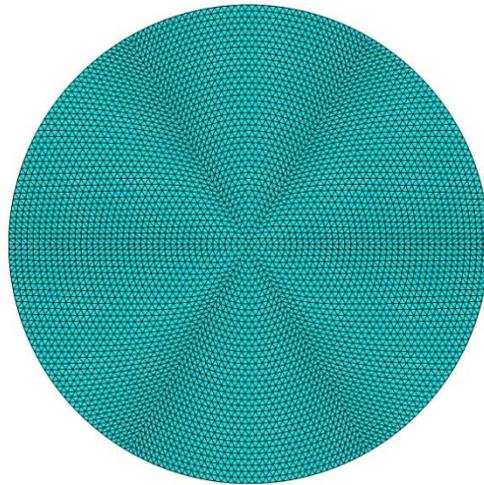


Figura 4.23: Malha para planta circular.

4.2 Plantas Quadriláteras

Para as malhas com domínios quadriláteros, utiliza-se o projetor *lofting* para interpolar entre duas curvas do contorno. Pode-se reescrever a equação 3.2.2 e adaptando para as variáveis desse trabalho como:

$$y_i = y_1 + v (y_n - y_1) \quad (4.2.1)$$

Como v vale zero em y_1 e um em y_n :

$$v = \frac{i}{n} \quad (4.2.2)$$

com, $0 \leq i \leq n$, onde $n = Ny + 1$

Substituindo em (4.2.1) tem-se:

$$y_i = y_1 + i \left(\frac{y_n - y_1}{n} \right) \quad (4.2.3)$$

Analogamente na outra direção pode-se escrever:

$$x_j = x_1 + j \left(\frac{x_m - x_1}{m} \right) \quad (4.2.4)$$

onde $m = Nx + 1$.

Com isso, basta determinar as equações x_1 , x_m , y_1 e y_n em função dos parâmetros de entrada do programa para determinar as curvas x_j e y_i genérica entre as fronteiras do domínio.

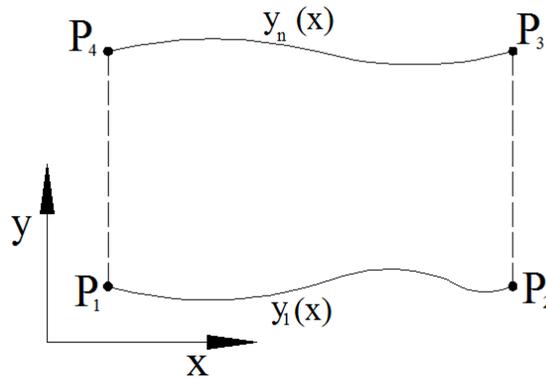


Figura 4.24: Domínio contido entre duas curvas $y_1(x)$ e $y_n(x)$.

A Figura 4.24 apresenta um domínio contido entre duas funções. Os dados de entrada referentes à geometria para a geração da malha são:

- a) L_x : Dimensão paralela ao eixo x ;
- b) L_y : Dimensão paralela ao eixo y ;
- c) N_x : Número de divisões da malha na direção paralela ao eixo x ;
- d) N_y : Número de divisões da malha para a direção paralela ao eixo y ;
- e) fx : parâmetro de geração das parábolas nas arestas paralelas a L_y ;

f) f_y : parâmetro de geração das parábolas nas arestas paralelas a L_x .

Para gerar malhas de plantas retangulares, basta adotar $f_x = f_y = 0$. Com apenas esses dados de entrada é possível determinar automaticamente as coordenadas de todos os pontos nodais. O programa computacional desenvolvido possibilita a montagem de três configurações diferentes de malhas variando a incidência nodal dos elementos.

4.2.1 Cálculo das Coordenadas Nodais

Adotou-se a origem do sistema de coordenadas no centro da planta de modo a utilizar a simetria para facilitar a geração da malha. A Figura 4.25 apresenta a origem do sistema de coordenadas, assim como os demais parâmetros para geração das malhas.

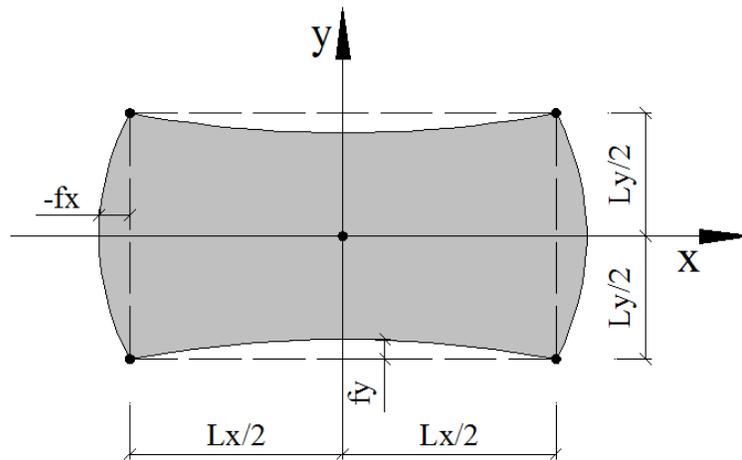


Figura 4.25: Representação do domínio retangular com arestas parabólicas.

É importante definir outras variáveis calculadas a partir dos dados de entrada. Essas variáveis são o espaçamento entre as curvas que serão interpoladas no domínio. Esse espaçamento varia entre a aresta e o centro em função do comprimento da aresta, e da distância da parábola à projeção retangular da aresta.

Nesse trabalho, adotou-se que quando a parábola está dentro da projeção retangular, o valor de f_x e/ou f_y é positivo, e negativo caso contrário.

As Equações 4.2.1.1 e 4.2.1.2 permitem calcular o espaçamento entre as curvas nas arestas e no centro da planta para a direção x (Figura 4.26), a fim de determinar os coeficientes da expressão $x_j(y)$ da Equação 4.2.1.3. Essas expressões são determinadas apenas para metade esquerda da planta devido à simetria.

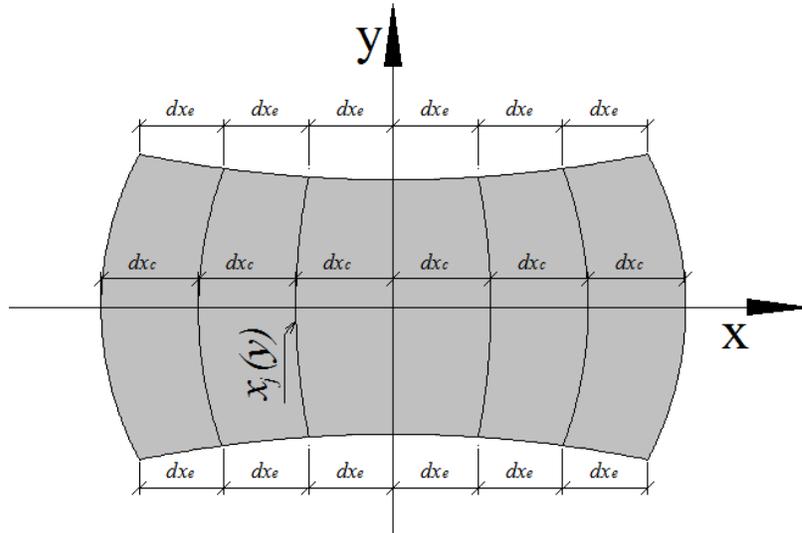


Figura 4.26: Interpolação linear na direção x .

$$dx_c = \frac{x_n(0) - x_1(0)}{N_x} = \frac{Lx}{N_x} \quad (4.2.1.1)$$

$$dx_e = \frac{x_n\left(\frac{Ly}{2}\right) - x_1\left(\frac{Ly}{2}\right)}{N_x} = \frac{Lx - 2fx}{N_x} \quad (4.2.1.2)$$

$$x_j(y) = a_{x_j}y^2 + b_{x_j}y + c_{x_j} \quad (4.2.1.3)$$

As condições de contorno para determinação dos coeficientes da expressão (4.2.1.3) são apresentadas nas Equações 4.2.1.4 a 4.2.1.6:

$$\frac{dx_j(0)}{dy} = 0 \quad (4.2.1.4)$$

$$x_j\left(-\frac{Ly}{2}\right) = -\frac{Lx}{2} + \sum_{k=1}^{j-1} dx_e \quad (4.2.1.5)$$

$$x_j(0) = -\frac{Lx}{2} + fx + \sum_{k=1}^{j-1} dx_c \quad (4.2.1.6)$$

com, $1 \leq j \leq m/2$.

Substituindo as Equações 4.2.1.4 a 4.2.1.6 em 4.2.1.3 e sua derivada, após manipulação matemática, podem-se determinar os coeficientes c_{x_j} , b_{x_j} e a_{x_j} apresentado nas expressões 4.2.1.7, 4.2.1.8 e 4.2.1.9 respectivamente.

$$c_{x_j} = -\frac{Lx}{2} + fx + \sum_{k=1}^{j-1} dx_c \quad (4.2.1.7)$$

$$b_{x_j} = 0 \quad (4.2.1.8)$$

$$a_{x_j} = \frac{-fx + \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{2fx}{N_x}\right)}{\left(\frac{Ly}{2}\right)^2} \quad (4.2.1.9)$$

com, $1 \leq j \leq m/2$.

À medida que a curva $x_j(y)$ se aproxima do centro da planta, isto é, quanto mais j se aproxima de $m/2$, a_{x_j} tende a zero e mais suave se torna a curva.

Pode-se demonstrar que a Equação 4.2.1.3 após a substituição dos coeficientes c_{x_j} , b_{x_j} e a_{x_j} é o projetor *lofting* da Equação 4.2.4. De acordo com as expressões 4.2.1.7 a 4.2.1.9, quando $fx = 0$, então resta apenas c_{x_j} , desse modo, x_j pode ser representado pela Equação (4.2.1.10).

$$x_j = -\frac{Lx}{2} + \sum_{k=1}^{j-1} dx_c = -\frac{Lx}{2} + (j-1)dx_c \quad (4.2.1.10)$$

e dx_c pode ser escrito com a expressão 4.2.1.11, como:

$$dx_c = \frac{Lx}{N_x} \quad (4.2.1.11)$$

Ao tomar $fx = 0$, as curvas da fronteira do domínio x_1 e x_m são retas dadas genericamente pela Equação 4.2.1.10 com $j = 0$ e $j = m$. Em outras palavras, as arestas do domínio na direção y são retas, onde $x_1 = -\frac{Lx}{2}$ e $x_m = \frac{Lx}{2}$. A Equação 4.2.1.12 apresenta a subtração entre x_m de x_1 :

$$x_m - x_1 = Lx \quad (4.2.1.12)$$

Chamando $(j - 1)$ de ξ e substituindo tem-se a Equação 4.2.1.13:

$$x_j = x_1 + \xi \left(\frac{x_m - x_1}{N_x} \right) \quad (4.2.1.13)$$

Desse modo, pode ser constatado que a Equação 4.2.1.13 é idêntica à equação 4.2.4 de interpolação referente ao projetor *lofting*. O mesmo pode ser realizado para verificar a expressão de y_i .

As coordenadas obtidas substituindo as expressões 4.2.1.7 a 4.2.1.9 em 4.2.1.3 para os pontos nodais da metade esquerda da planta são armazenadas em uma matriz $X_{[m \times n]}$ e em seguida espelhadas em torno do eixo y para determinação das coordenadas de todos os pontos nodais da planta. Esse processo é genericamente representado pela expressão 4.2.1.14:

$$X[m - i, j] = -X[i, j] \quad (4.2.1.14)$$

com $1 \leq i \leq m/2$ e $1 \leq j \leq n$.

Para a direção y , procede-se da mesma forma que na outra direção para determinação dos coeficientes da $y_i(x)$ da Equação 4.2.1.17 para a metade inferior da planta. As Equações 4.2.1.15 e 4.2.1.16 apresenta o cálculo do espaçamento entre as curvas na extremidade e no centro das arestas respectivamente conforme ilustra a Figura 4.27.

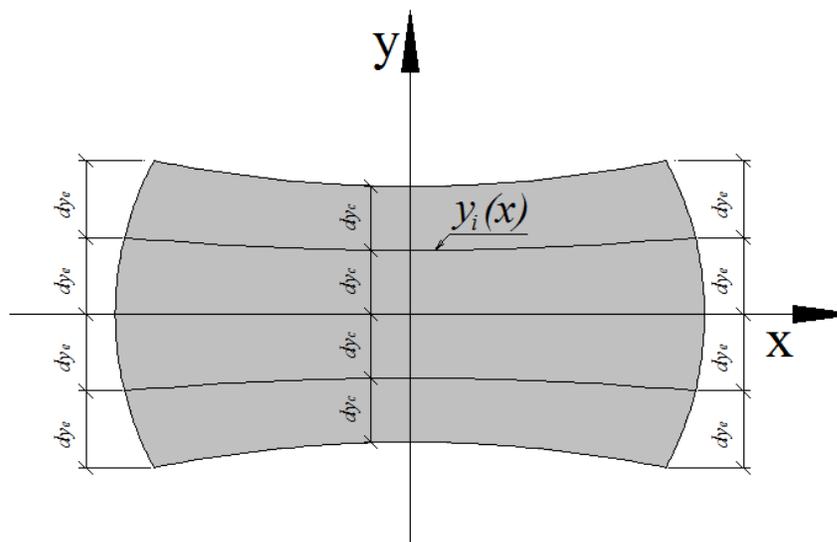


Figura 4.27: Interpolação linear na direção y .

$$dy_e = \frac{Ly}{N_y} \quad (4.2.1.15)$$

$$dy_c = \frac{Ly - 2fy}{N_y} \quad (4.2.1.16)$$

$$y_i(x) = a_{y_i}x^2 + b_{y_i}x + c_{y_i} \quad (4.2.1.17)$$

As condições de contorno para determinação dos coeficientes da expressão (4.2.1.17) são apresentadas nas equações 4.2.1.18 a 4.2.1.20:

$$\frac{dy_i(0)}{dx} = 0 \quad (4.2.1.18)$$

$$y_i\left(-\frac{Lx}{2}\right) = -\frac{Ly}{2} + \sum_{k=1}^i dy_e \quad (4.2.1.19)$$

$$y_i(0) = -\frac{Ly}{2} + fy + \sum_{k=1}^i dy_c \quad (4.2.1.20)$$

com, $2 \leq i \leq n/2$.

Aplicando-se as condições de contorno e depois de algumas manipulações algébricas podem-se determinar os coeficientes apresentado nas expressões 4.2.1.21 a 4.2.1.23:

$$c_{y_i} = -\frac{Ly}{2} + fy + \sum_{k=1}^{i-1} dy_c \quad (4.2.1.21)$$

$$b_{y_i} = 0 \quad (4.2.1.22)$$

$$a_{x_i} = \frac{-fy + \sum_{k=1}^{i-1} \left(\frac{2fy}{N_y}\right)}{\left(\frac{Lx}{2}\right)^2} \quad (4.2.1.23)$$

com, $1 \leq i \leq n/2$.

Da mesma maneira que para a direção x, obtêm-se as coordenadas y para os pontos da metade da planta, armazena-se estes dados em uma matriz $Y_{[n \times m]}$ e espelha-se as coordenadas em

torno do eixo x para o restante dos pontos nodais da planta. Genericamente o espelhamento pode ser expresso pela Equação 4.2.1.24:

$$Y[n - i, j] = -Y[i, j] \quad (4.2.1.24)$$

com $1 \leq i \leq n/2$ e $1 \leq j \leq m$.

Combinando-se $Y_{[i \times j]}$ com $X_{[j \times i]}$ obtêm-se as coordenadas (x, y) de todos os pontos nodais da planta. Essas coordenadas são armazenadas em uma matriz $\text{Coord}_{[\text{Nos} \times 2]}$. O número de linhas da matriz é igual ao número de pontos nodais (Nos) da malha; e o número de colunas é igual a dois, uma para armazenar as coordenadas x e outra para as coordenadas y . O número de pontos nodais da estrutura pode ser determinado com a Equação 4.2.1.25:

$$\text{Nos} = m \times n \quad (4.2.1.25)$$

4.2.2 Incidência Nodal dos Elementos

Ligando-se por retas os pontos nodais para os quais se determinou as coordenadas de modo horizontal e verticalmente, obtêm-se malha de elementos quadriláteros, apresentada na Figura 4.28.

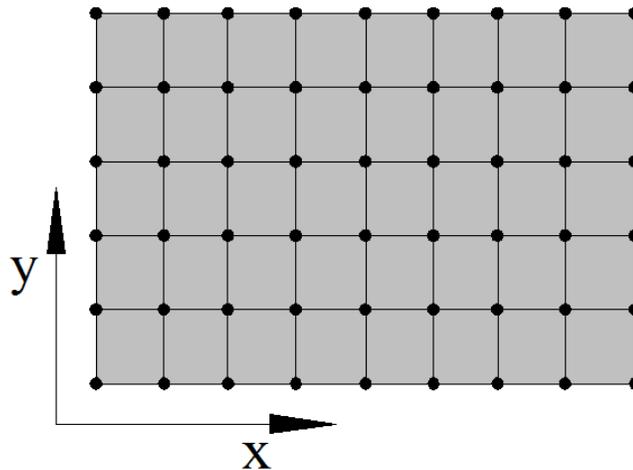


Figura 4.28: Malha de elementos quadriláteros.

Para malhas de elementos triangulares, basta dividir cada elemento quadrilátero em dois outros elementos triangulares iguais. O programa computacional desenvolvido permite a geração de três tipos diferentes de malhas estruturadas:

- a) Tipo 1: Malha de elementos triangulares estruturada não simétrica com origem do sistema de coordenadas no vértice inferior esquerdo da planta retangular (Figura 4.29-*a*);
- b) Tipo 2: Malha de elementos triangulares estruturada simétrica com origem do sistema de coordenada no centro da planta com dois elementos para cada vértice da planta (ver Figura 4.29- *b*);
- c) Tipo 3: Malha de elementos triangulares estruturada simétrica com origem do sistema de coordenada no centro da planta com apenas um elemento para cada ponto nodal do vértice da planta conforme (Figura 4.29- *c*).

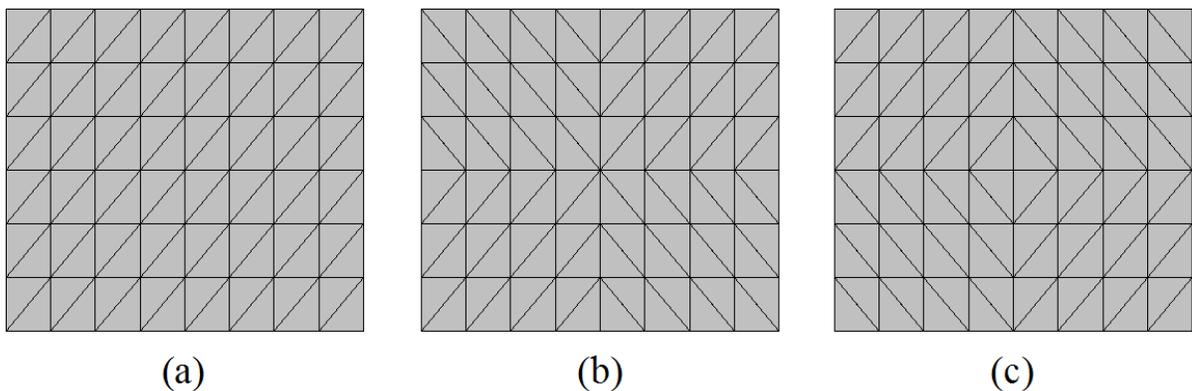


Figura 4.29: Possibilidades para geração de malhas.

Os três tipos de malha seguem a mesma sequência de numeração nodal. A diferença entre elas está em como a incidência nodal dos elementos é determinada. A Figura 4.30 apresenta de maneira genérica a numeração nodal da malha.

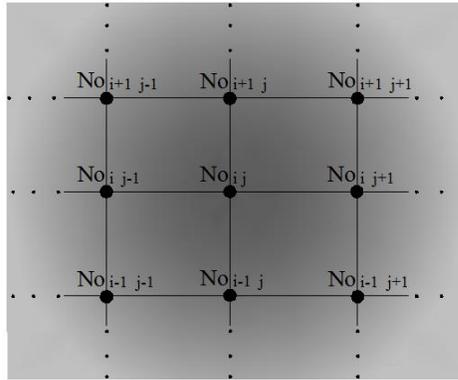


Figura 4.30: Representação genérica da numeração nodal.

Independente do tipo de malha, os pontos nodais dos elementos são identificados no sentido anti-horário. A numeração nodal é realizada da esquerda para direita, de baixo para cima na planta e é armazenada em uma matriz $No_{[n \times m]}$. A incidência nodal dos elementos é obtida aos pares diretamente da matriz de numeração nodal de acordo com o tipo de malha desejado.

As malhas do Tipo 1 são mais simples exigindo apenas um algoritmo de determinação das incidências nodais dos elementos de todo o domínio. A numeração dos elementos procede-se da esquerda para direita, de baixo para cima na planta da mesma maneira que a numeração nodal.

O esquema de incidência nodal das malhas do Tipo 1, também denominadas nesse trabalho de “MALHA i” pode ser observado na Figura 4.31.

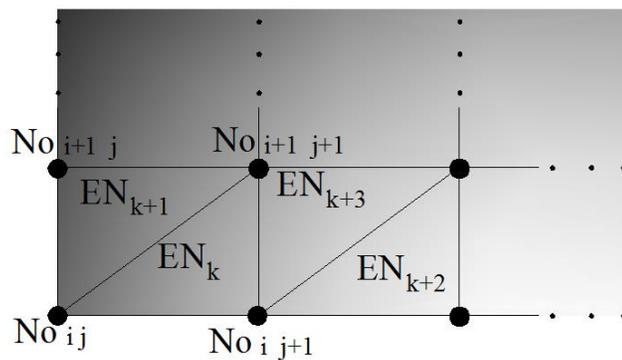


Figura 4.31: Esquema de incidência nodal e numeração dos elementos para as malhas do Tipo 1 ou (MALHA i).

A incidência nodal dos elementos é armazenada em uma matriz $INCD_{[Nel \times 3]}$. Para os elementos EN_k e EN_{k+1} apresentados na Figura 4.31, genericamente a incidência nodal para MALHA i será determinada pelas Equações 4.2.2.1 e 4.2.2.2:

$$\begin{cases} INCD[k, 1] = No[i, j] \\ INCD[k, 2] = No[i, j + 1] \\ INCD[k, 3] = No[i + 1, j + 1] \end{cases} \quad (4.2.2.1)$$

$$\begin{cases} INCD[k + 1, 1] = No[i, j] \\ INCD[k + 1, 2] = No[i + 1, j + 1] \\ INCD[k + 1, 3] = No[i + 1, j] \end{cases} \quad (4.2.2.2)$$

com $1 \leq k \leq Nel$; $1 \leq i < n$; $1 \leq j < m$, onde:

$m = Nx + 1$ é o número de colunas da matriz $No_{[n \times m]}$;

$n = Ny + 1$ é o número de linhas da matriz $No_{[n \times m]}$;

Nel é o número de elementos da malha calculado com a expressão 4.2.2.3:

$$Nel = 2(m \times n) \quad (4.2.2.3)$$

As malhas do Tipo 2 e Tipo 3 são constituídas de combinações dos dois tipos de malhas cujas incidências nodais foram obtidas de diferentes maneiras. Para facilitar a identificação, chama-se a malha apresentada na Figura 4.31 como malha inicial (MALHA i) e a apresentada na Figura 4.32, como malha modificada (MALHA ii). Existem quadrantes nos quais as diagonais dos elementos são invertidas (MALHA ii) em relação às diagonais dos elementos da malha inicial (MALHA i). A Figura 4.32 apresenta a nova configuração de elementos. Essa nova configuração é apenas a forma espelhada da configuração inicial.

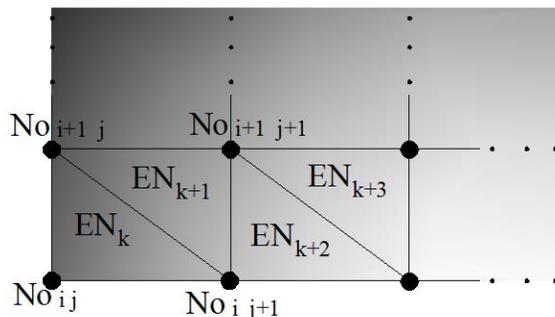


Figura 4.32: Representação genérica de elementos com diagonais invertidas ou MALHA ii .

Genericamente, para incidência nodal da MALHA ii tem-se as expressões 4.2.2.4 e 4.2.2.5:

$$\begin{cases} \mathbf{INCD}[k, 1] = \mathbf{No}[i, j] \\ \mathbf{INCD}[k, 2] = \mathbf{No}[i, j + 1] \\ \mathbf{INCD}[k, 3] = \mathbf{No}[i + 1, j] \end{cases} \quad (4.2.2.4)$$

$$\begin{cases} \mathbf{INCD}[k + 1, 1] = \mathbf{No}[i, j + 1] \\ \mathbf{INCD}[k + 1, 2] = \mathbf{No}[i + 1, j + 1] \\ \mathbf{INCD}[k + 1, 3] = \mathbf{No}[i + 1, j] \end{cases} \quad (4.2.2.5)$$

Para determinar a incidência nodal dos elementos das malhas simétricas, basta utilizar as equações 4.2.2.1; 4.2.2.2; 4.2.2.4 e 4.2.2.5 por quadrantes da planta, isto é, alterando o intervalo de i e j conforme o quadrante em questão. A Figura 4.33 identifica os quadrantes adotados e sua localização na planta.

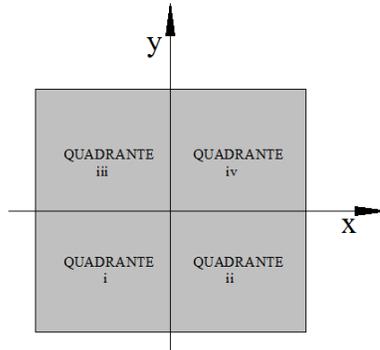


Figura 4.33: Localização dos quadrantes na planta.

A Figura 4.34 apresenta a combinação de malhas por quadrantes para a geração das malha de todo o domínio da planta.

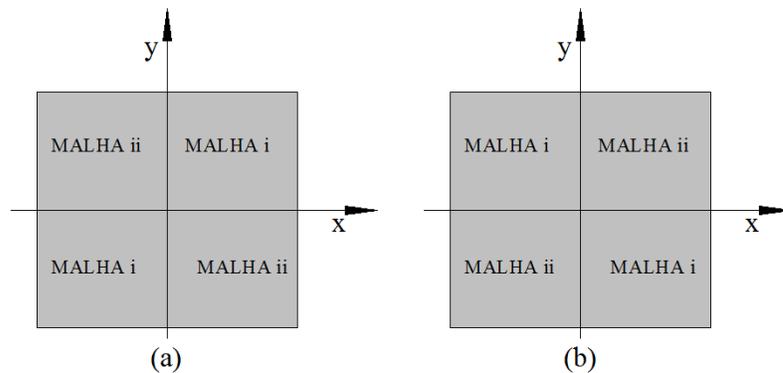


Figura 4.34: Composição das malhas para geração das malhas simétricas: a) Malha Tipo 2. b) Malha Tipo 3.

4.2.3 Aplicação de Restrições e Ajustes Finais

Diretamente da matriz $No_{[n \times m]}$ de numeração nodal é possível identificar todos os pontos nodais da fronteira do domínio possibilitando a aplicação automática de restrições de deslocamentos nos pontos desejados. O software permite restringir os deslocamentos de duas arestas paralelas ou de apenas alguns pontos igualmente espaçados nas arestas paralelas. O software permite ainda, aplicar restrições apenas aos pontos nodais dos vértices. Essa última opção é válida apenas para as malhas simétricas Tipo 2 e 3, pois é utilizada a dupla simetria da planta para proceder os ajustes.

Quando se opta por restringir os deslocamentos apenas dos pontos nodais dos vértices da planta, o software desenvolvido permite arredondar automaticamente os vértices de forma a garantir que as formas livres posteriormente geradas com essas malhas não tenham mudanças bruscas de curvatura nas duas direções e nem sofram interferências estéticas nas regiões dos apoios.

Os vértices são arredondados por um processo de transformação de coordenadas na qual se contraem os pontos nodais próximos aos vértices em duas etapas, conforme ilustra a Figura 4.35. Primeiramente contraem-se os pontos nodais pertencentes à fronteira do domínio (Figura 4.35 a) e em seguida os pontos nodais subsequentes (Figura 4.35 b).

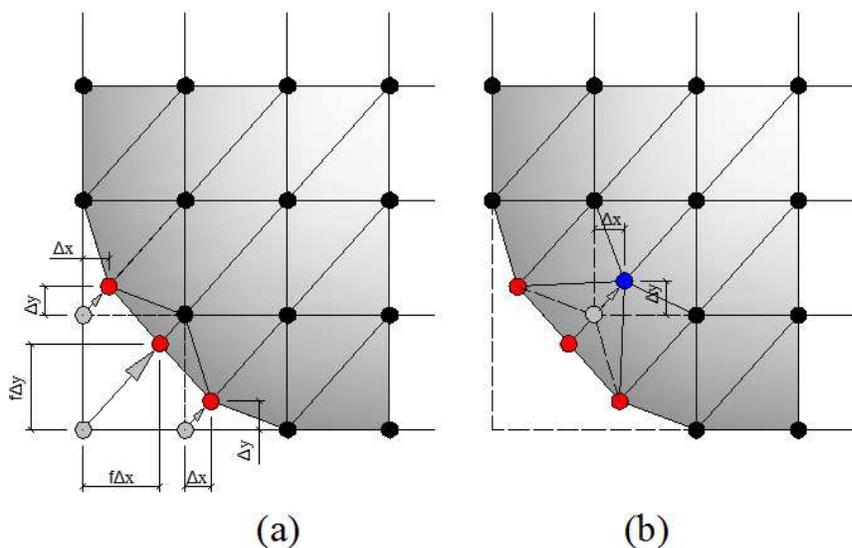


Figura 4.35: Suavização dos vértices para as malhas simétricas do Tipo 2.

Como a origem do sistema de coordenadas está localizado no centro da planta, basta fazer a suavização para apenas um dos vértices e espelhar as novas coordenadas para os demais vértices. Para que isso seja possível, os números de divisões da malha nas duas direções (N_x e N_y) devem ser pares.

Os valores de Δx e Δy apresentados na Figura 4.35 são proporcionais ao espaçamento da malha nas respectivas direções. O coeficiente f que multiplica Δx e Δy mantem a proporção da contração desejada.

Para proceder a suavização dos vértices, o software identifica automaticamente os pontos nodais dos vértices da planta. Na posição referente a esses pontos na matriz de coordenadas $\mathbf{Coord}_{[Nos \times 2]}$ aplica-se a transformação de coordenadas.

A transformação é realizada apenas para quatro pontos nodais por vértice de forma a manter o número de elementos da malha. A Tab.4.2.3.1 apresenta a posição dos pontos na matriz de numeração nodal $\mathbf{No}_{[n \times m]}$.

Tab.4.2.3.1: Posição na matriz de numeração nodal \mathbf{No} dos pontos nodais localizados próximos aos vértices da planta e que têm suas coordenadas transformadas.

Vértice 1	Vértice 2	Vértice 3	Vértice 4
$No[2, 1]$	$No[1, m-1]$	$No[n-1, 1]$	$No[n, m-1]$
$No[1, 1]$	$No[1, m]$	$No[n, 1]$	$No[n, m]$
$No[1, 2]$	$No[2, m]$	$No[n, 2]$	$No[n-1, m]$
$No[2, 2]$	$No[2, m-1]$	$No[n-1, 2]$	$No[n-1, m-1]$

Genericamente, a transformação de coordenadas é dada pela Equação 4.2.3.1:

$$\begin{cases} \mathbf{Coord}[No[i, j], 1] = \mathbf{Coord}[No[i, j]] + \delta x \\ \mathbf{Coord}[No[i, j], 2] = \mathbf{Coord}[No[i, j]] + \delta y \end{cases} \quad (4.2.3.1)$$

com i e j identificados de acordo com o vértice na Tab.4.2.3.1. O valor de δ pode ser $\pm\Delta$ ou $\pm f\Delta$ de acordo com o ponto nodal e sua localização conforme Figura 4.35.

Para a malha do Tipo 3, a suavização dos vértices poderia levar a geração de elementos com ângulos muito pequenos ou até com área nula nessa região. A fim de evitar esse problema, o programa inverte automaticamente as diagonais dos elementos dos vértices. A Figura 4.36 apresenta os vértices suavizados para malha do tipo 2 e 3.

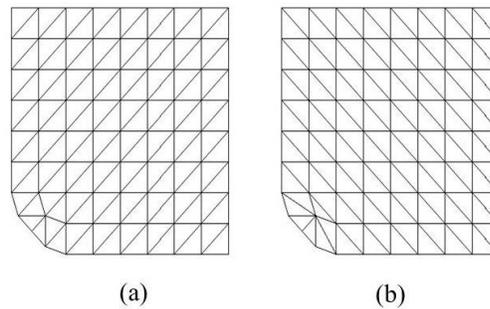


Figura 4.36: Vértices suavizados: (a) para malha tipo 2 e (b) tipo 3.

Nas figuras que se seguem, podem ser visualizadas as malhas com e sem suavização dos vértices para as malhas do Tipo 2 (Figura 4.37) e as malhas do Tipo 3 (Figura 4.38).

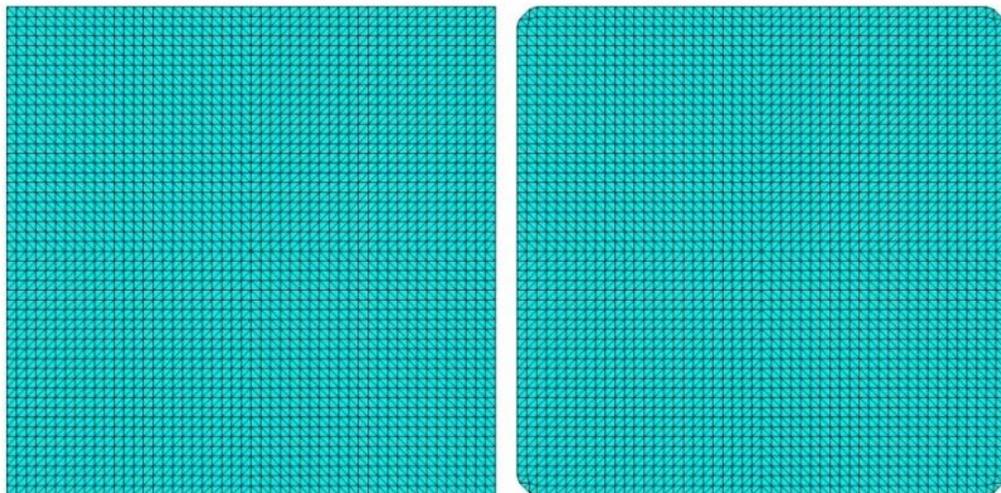


Figura 4.37: Malhas estruturadas simétricas do Tipo 2, antes e após a suavização dos vértices da planta.

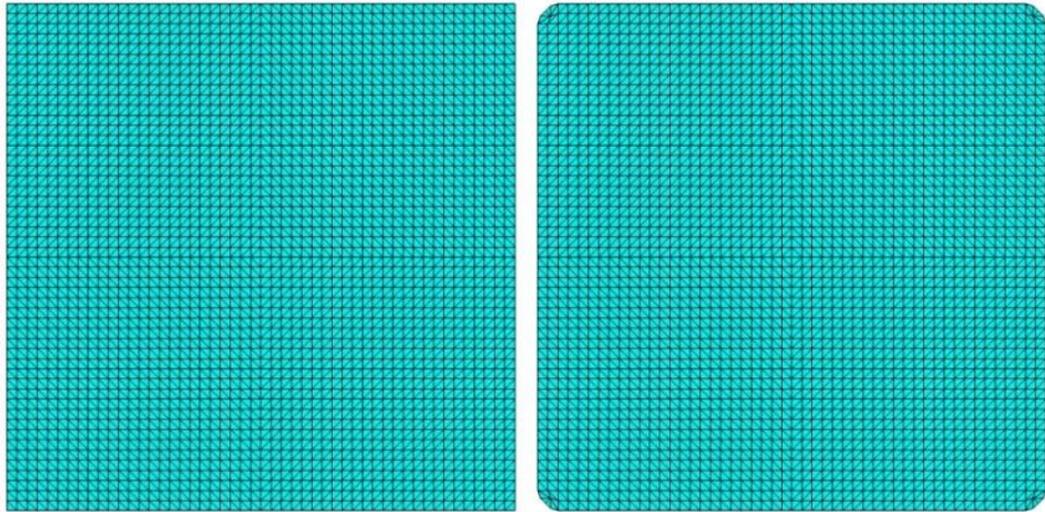


Figura 4.38: Malhas estruturadas simétricas do Tipo 3, antes e após a suavização dos vértices da planta.

4.2.4 Malhas Planas Geradas

Podem-se combinar os tipos de arestas opostas para gerar diversas configurações de plantas. Alguns exemplos de malhas são apresentados nas Figura 4.39 a Figura 4.42.

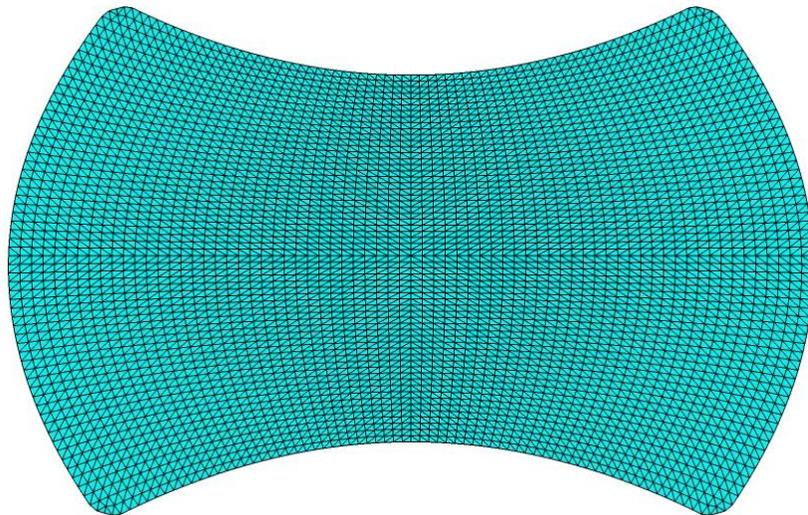


Figura 4.39: Malha gerada com lados descritos por parábolas com concavidades opostas.

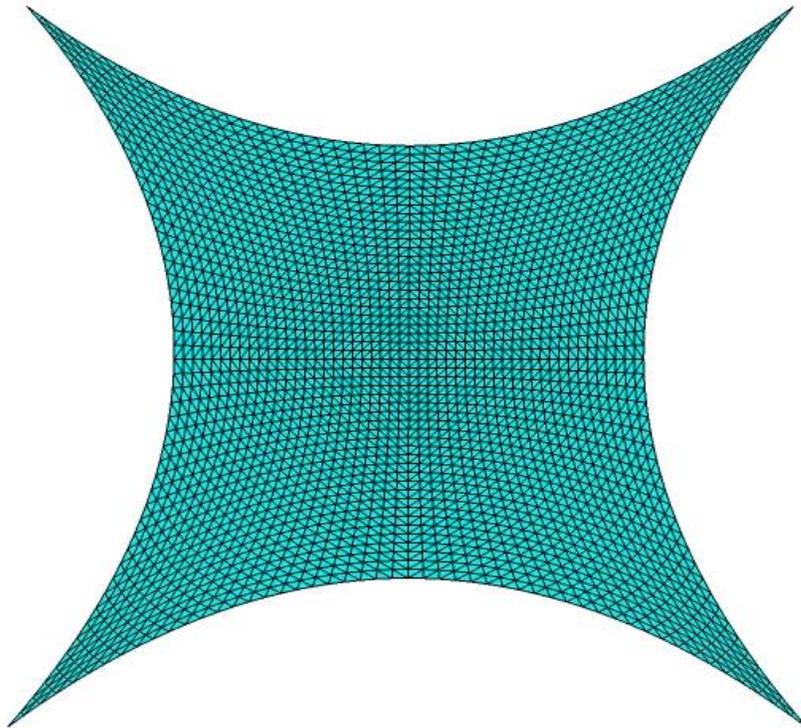


Figura 4.40: Malha gerada lados descritos por parábolas com mesmo sentido de concavidades internas à projeção retangular.

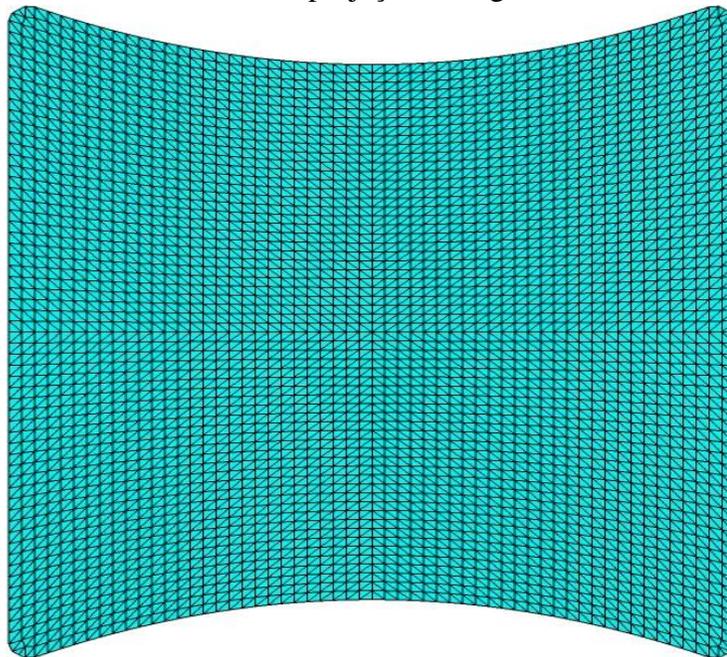


Figura 4.41: Malha gerada com duas arestas descrita por parábolas e duas arestas retas com vértices suavizados.

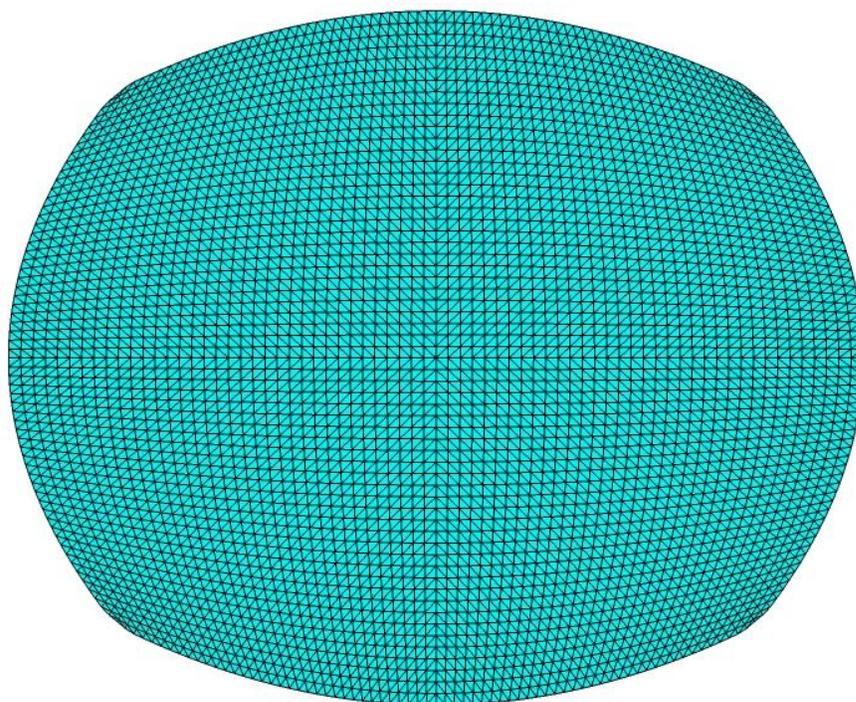


Figura 4.42: Malha gerada com arestas descritas por parábolas externas à projeção retangular.

5 GERAÇÃO DE FORMAS TRIDIMENSIONAIS DE ESTRUTURAS EM CASCAS

5.1 Estruturas em Cascas de Formas Analíticas

As estruturas em cascas de formas analíticas abordadas nesse trabalho são geradas por translação de uma curva geratriz sobre outra curva (diretriz). Tanto as curvas diretrizes quanto as geratrizes podem ser representadas por quaisquer funções matemáticas. Nesse trabalho optou-se por utilizar segmentos de retas como curvas diretrizes e geratrizes para as plantas quadriláteras com arestas retas e/ou parabólicas, e parábolas para as plantas poligonais.

5.1.1 Formas Geradas com Segmentos de Retas

A partir da composição de segmentos de retas é possível gerar superfícies curvas como os paraboloides hiperbólicos. São geradas as formas tridimensionais para esse tipo de estrutura para plantas retangulares com arestas retas e /ou parabólicas.

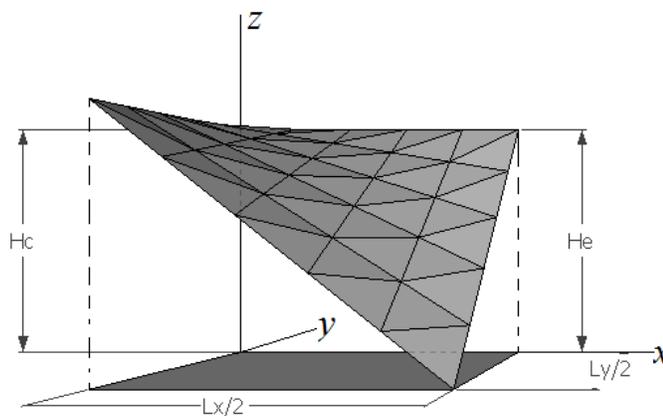


Figura 5.1: Superfície curva gerada pela composição de segmentos de retas.

A metodologia adotada para geração das formas tridimensionais é determinar as equações das retas diretrizes no centro da planta $z_{cx}(x_i)$, e na aresta da planta $z_{ex}(x_i)$ (ver Figura 5.1 e Figura 5.2) em função das coordenadas (x_i) já determinadas no plano. Posteriormente

determinam-se as retas geratrizes $Z_j(y_j)$ que dependem das equações $z_{cx}(x_i)$ e $z_{ex}(x_i)$. Desse modo Z_j é função de (x_i, y_j) . As coordenadas (x_i, y_j) são obtidas da matriz de coordenadas nodais da malha no plano apresentadas nas seções anteriores. A incidência nodal dos elementos não se altera (é a mesma determinada no plano). As coordenadas z fora do plano são determinadas apenas para um quadrante e depois espelhadas para os demais quadrantes.

Os dados de entrada do software, quanto à geometria, para geração das formas tridimensionais, além dos dados para geração da malha no plano apresentados em seções anteriores são:

- a) H_c : Altura no centro da estrutura;
- b) H_e : Altura no centro da projeção das arestas da estrutura.

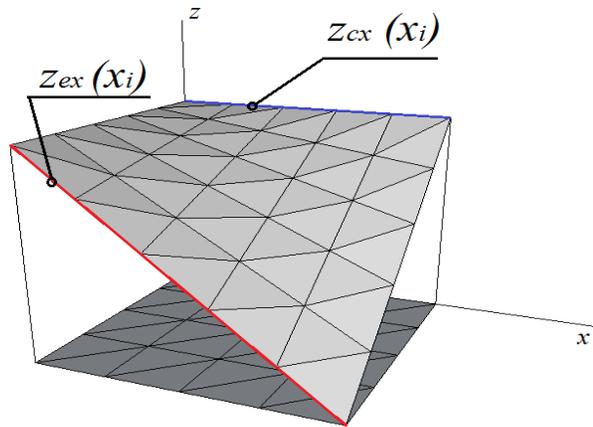


Figura 5.2: Representação das retas diretrizes.

As equações em função de (x_i) para a extremidade e o centro da planta podem ser determinadas respectivamente pelas expressões 5.1.1.1 e 5.1.1.2:

$$z_{ex}(x_i) = H_e - \left(\frac{H_e}{\frac{Lx}{2}} \right) x_i \quad (5.1.1.1)$$

$$z_{cx}(x_i) = H_c + \left(\frac{H_e - H_c}{\frac{Lx}{2}} \right) x_i \quad (5.1.1.2)$$

com $1 \leq i \leq \left(\frac{N_x}{2} + 1\right)$, onde L_x e L_y são as dimensões em planta e N_x e o número de divisões da malha na direção x .

As expressões $Z_j(x_i, y_j)$ podem ser escritas como:

$$Z_j(x_i, y_j) = z_{cx}(x_i) + \left[\frac{z_{cx}(x_i) - z_{ex}(x_i)}{\frac{L_y}{2}} \right] y_j \quad (5.1.1.3)$$

com $1 \leq i \leq \left(\frac{N_x}{2} + 1\right)$ e $1 \leq j \leq \left(\frac{N_y}{2} + 1\right)$.

5.1.2 Formas Curvas de Translação Para Plantas Poligonais Regulares

É apresentada a formulação para determinação das malhas tridimensionais das estruturas em cascas geométricas para plantas poligonais regulares. Através de um pequeno tratamento das coordenadas no plano (x, y) é possível determinar a superfície média da estrutura em casca utilizando-se parábolas em direções concorrentes.

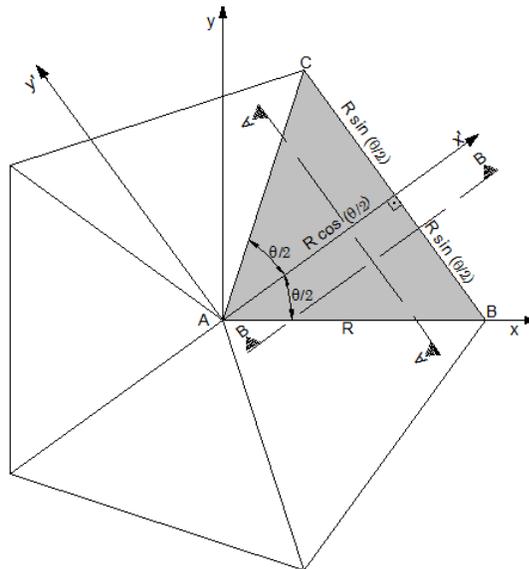


Figura 5.3: Esquema da mudança de base das coordenadas (x, y) para determinação das coordenadas z .

As coordenadas z_i de cada ponto nodal são calculadas apenas para o primeiro domínio triangular (triângulo \overline{ABC}) da Figura 5.3.

Um novo sistema de coordenadas é adotado de modo a simplificar a determinação das coordenadas fora do plano. Um dos eixos no novo sistema de coordenadas passa pelo vértice A do triângulo \overline{ABC} e pelo ponto médio do segmento de reta \overline{BC} , e o segundo eixo perpendicular a este. As coordenadas do novo sistema (x', y') podem ser calculadas em função das coordenadas (x, y) e a matriz de rotação M_{Rot} conforme a transformação linear da Equação 5.1.2.1:

$$\{x', y'\}^T = [M_{Rot}]\{x, y\}^T \quad (5.1.2.1)$$

onde a matriz de rotação é expressa pela Equação 5.1.2.2:

$$M_{Rot} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (5.1.2.2)$$

Processando as operações, tem-se:

$$\begin{cases} x' = x \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + y \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ y' = -x \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + y \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{cases} \quad (5.1.2.3)$$

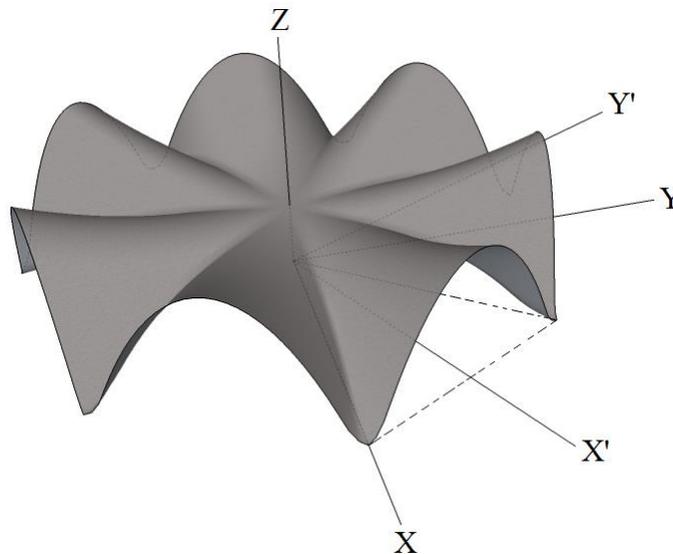


Figura 5.4: Sistemas de eixos locais.

Conhecendo-se as coordenadas (x', y') , é possível determinar as coordenadas $z_i(x', y')$. Para efeito de simplificação, primeiramente é determinada $z(x')$ de forma independente e posteriormente $z(y')$ que depende de $z(x')$. A Figura 5.5 apresenta o corte B-B da Figura 5.3 que mostra a função $z(x')$ e alguns parâmetros que serão utilizados para sua determinação.

O parâmetro H_c é a altura da estrutura no centro da casca, enquanto H_e é altura da estrutura na extremidade da casca no ponto médio do segmento \overline{BC} . A função $z(x')$ pode ser qualquer função, mas para esse trabalho escolheu-se uma função quadrática conforme Equação 5.1.2.4:

$$z(x') = a x'^2 + b x' + c \quad (5.1.2.4)$$

As constantes $a, b, e c$ são determinadas a partir de pontos conhecidos da curva apresentados nas Equações 5.1.2.5 e 5.1.2.6:

$$z(0) = H_c \quad (5.1.2.5)$$

$$z(d_1) = H_e \quad (5.1.2.6)$$

onde:

$$d_1 = R \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (5.1.2.7)$$

Para a casca não apresentar variações bruscas de curvatura no centro é recomendável que a primeira derivada de $z_i(x')$ no centro da casa ($x' = 0$) seja nula conforme Equação 5.1.2.8.

$$\frac{dz(0)}{dx'} = 0 \quad (5.1.2.8)$$

Desse modo, há informações suficientes para determinação dos coeficientes da equação que são apresentados nas Equações 5.1.2.9 a 5.1.2.11.

$$c = H_c \quad (5.1.2.9)$$

$$b = 0 \quad (5.1.2.10)$$

$$a = \frac{H_e - H_c}{d_1^2} \quad (5.1.2.11)$$

$$z(x') = \frac{H_e - H_c}{d_1^2} x'^2 + H_c \quad (5.1.2.12)$$

Note-se que a concavidade da equação (5.1.2.12) pode ser invertida ou até se anular em função dos valores de H_e e H_c (Figura 5.5). Com isso, e sabendo que $z(y')$ também é uma função quadrática, pode-se gerar:

- Paraboloides hiperbólicos: para $(H_e - H_c) > 0$;
- Cilindros parabólicos: para $(H_e - H_c) = 0$;
- Paraboloides elípticos: para $(H_e - H_c) < 0$.

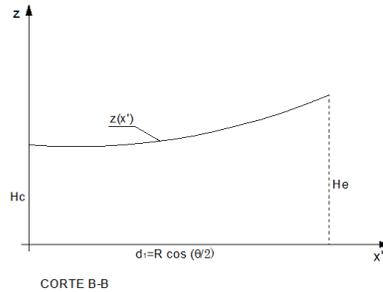


Figura 5.5: Corte B-B representando a função $z(x')$.

Para determinar $z(y')$ que, assim como $z(x')$, também é uma função do segundo grau, apenas uma função do tipo $z(y') = ay'^2 + by' + c$, deixaria a região do apoio com uma variação brusca da curvatura além de ser uma região de concentração de tensões. Para minimizar esses problemas optou-se por descrever a função $z(y')$ como uma composição de outras três funções, $z_1(y')$; $z_2(y')$ e $z_3(y')$ (Equações 5.1.2.13 a 5.1.2.15).

Do mesmo modo que adotado para as cascas de formas livres, podem-se escolher os comprimentos dos apoios localizados nos vértices do polígono. Para isso basta designar quantos pontos nodais devem ser afixados pelo software. Conhecendo o número de pontos nodais fixos por apoio, pode-se determinar o parâmetro d_3 mostrado na Figura 5.6. Esse parâmetro determina os pontos (P_1) e (P_2) nos quais se dão a intersecção entre as funções $z_1(y')$ e $z_2(y')$, e $z_2(y')$ e $z_3(y')$ respectivamente.

As equações podem ser escritas genericamente por:

$$z_1(y') = a_1 y'^2 + b_1 y' + c_1 \quad (5.1.2.13)$$

$$z_2(y') = a_2 y'^2 + b_2 y' + c_2 \quad (5.1.2.14)$$

$$z_3(y') = a_3 y'^2 + b_3 y' + c_3 \quad (5.1.2.15)$$

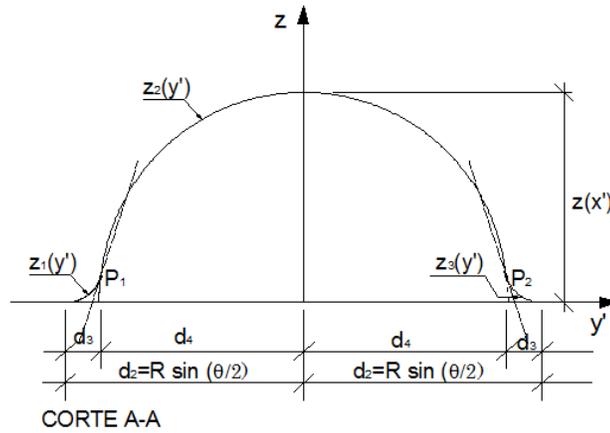


Figura 5.6: Corte A-A representando a função $z(y')$.

O valor de d_3 pode ser determinado em função do número de pontos fixos por apoio, pela expressão 5.1.2.16:

$$d_3 = \frac{(Nnf - 1) r_y}{2 \sin \alpha} \quad (5.1.2.16)$$

onde r_y é obtido da equação (4.1.1.2), Nnf é o número de pontos nodais fixos por apoio e α é obtido pela equação (4.1.1.5).

Observando a Figura 5.6, d_4 pode ser expresso em função de d_2 e d_3 pela Equação 5.1.2.17:

$$d_4 = d_2 - d_3 \quad (5.1.2.17)$$

onde:

$$d_2 = R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (5.1.2.18)$$

As condições de contorno para determinação das constantes das Equações 5.1.2.13 a 5.1.2.15 são apresentadas nas Equações 5.1.2.19 a 5.1.2.26.

$$z_1(-d_2) = 0 \quad (5.1.2.19)$$

$$\frac{dz_1(-d_2)}{dy'} = 0 \quad (5.1.2.20)$$

$$z_2(0) = z(x') \quad (5.1.2.21)$$

$$\frac{dz_2(0)}{dy'} = 0 \quad (5.1.2.22)$$

Para os pontos P_1 e P_2 utilizados para garantir a continuidade e suavidade da superfície, tem-se:

$$z_2(-d_4) = z_1(-d_4) \quad (5.1.2.23)$$

$$\frac{dz_2}{dy'}(-d_4) = \frac{dz_1}{dy'}(-d_4) \quad (5.1.2.24)$$

$$z_3(-d_4) = z_1(-d_4) \quad (5.1.2.25)$$

$$\frac{dz_3}{dy'}(-d_4) = \frac{dz_1}{dy'}(-d_4) \quad (5.1.2.26)$$

De (5.1.2.20):

$$-2a_1 \times d_2 + b_1 = 0 \rightarrow b_1 = 2a_1d_2 \quad (5.1.2.27)$$

De (5.1.2.19):

$$a_1(-d_2)^2 + b_1(-d_2) + c_1 = 0 \rightarrow c_1 = b_1d_2 - a_1d_2^2 \quad (5.1.2.28)$$

Substituindo (5.1.2.27) em (5.1.2.28):

$$c_1 = 2a_1d_2^2 - a_1d_2^2 \rightarrow c_1 = a_1d_2^2 \quad (5.1.2.28)$$

De (5.1.2.21):

$$c_2 = z(x') \quad (5.1.2.30)$$

De (5.1.2.22):

$$b_2 = 0 \quad (5.1.2.31)$$

De (5.1.2.24):

$$2a_2(-d_4) + b_2 = 2a_1(-d_4) + b_1 \quad (5.1.2.32)$$

Substituindo (5.1.2.27) e (5.1.2.30) em (5.1.2.31) e reescrevendo tem-se:

$$-2a_2d_4 = -2a_1d_4 + 2a_1d_2 \rightarrow a_2 = a_1 \left(1 - \frac{d_2}{d_4}\right) \quad (5.1.2.33)$$

De (5.1.2.23):

$$a_1(-d_4)^2 + b_1(-d_4) + c_1 = a_2(-d_4)^2 + b_2(-d_4) + c_2 \quad (5.1.2.34)$$

Substituindo (5.1.2.27), (5.1.2.29), (5.1.2.30), (5.1.2.31) e (5.1.2.32) em (5.1.2.34) e reescrevendo:

$$a_1 d_4^2 - d_4 2a_1 d_2 + a_1 d_2^2 = a_1 \left(1 - \frac{d_2}{d_4}\right) d_4^2 + z(x') \quad (5.1.2.35)$$

$$a_1 = \frac{z(x')}{d_4^2 - 2d_4 d_2 + d_2^2 - \left(1 - \frac{d_2}{d_4}\right) d_4^2} \quad (5.1.2.36)$$

Por simetria tem-se que:

$$c_1 = c_3 \quad (5.1.2.37)$$

$$a_1 = a_3 \quad (5.1.2.38)$$

$$b_1 = -b_3 \quad (5.1.2.39)$$

Com os coeficientes determinados é possível obter as equações $z_1(y')$; $z_2(y')$ e $z_3(y')$. E finalmente a equação, $z(x', y')$ pode ser expressa como:

$$\begin{cases} z(x', y') = z_1(y') \text{ para } y' < -d_4 \\ z(x', y') = z_2(y') \text{ para } -d_4 \leq y' \leq d_4 \\ z(x', y') = z_3(y') \text{ para } y' > d_4 \end{cases} \quad (5.1.2.40)$$

Para verificar a modelagem computacional das funções $z(x')$ e $z(y')$, foram elaborados gráficos para reproduzi-las. Foram adotados os seguintes parâmetros para o exemplo: $N = 5$; $Nr = 20$; $R = 1000$ cm; $H_e = 500$ cm; $H_c = 280$ cm; $Nnf = 7$.

A Figura 5.7 apresenta o gráfico para $z(x')$ para $y' = 0$, ou seja, a curva de $z(x')$ sobre o eixo x' . A Figura 5.8 apresenta $z(x', y')$ para $x' = d_1$.

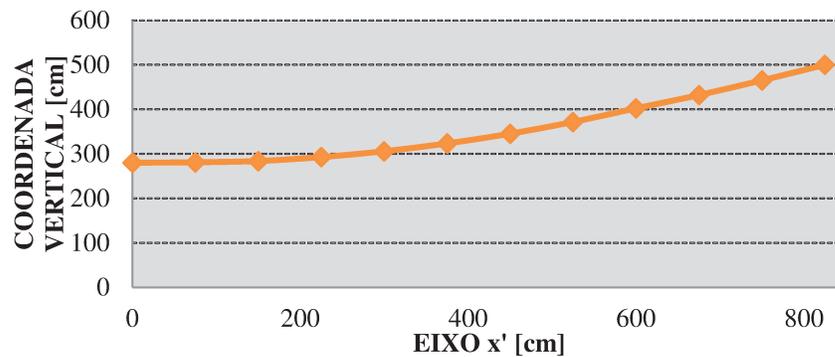


Figura 5.7: Coordenadas verticais em função de x' para $y'=0$.

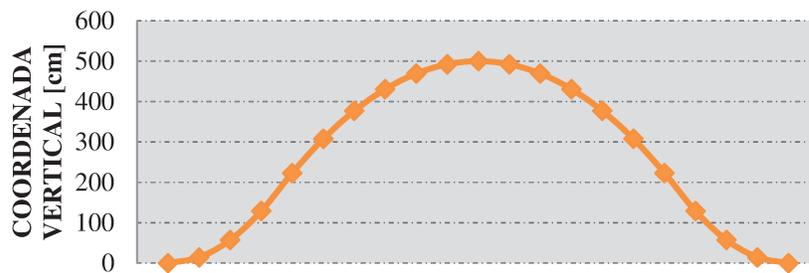


Figura 5.8: Coordenadas verticais em função de y' e $x'=d1$.

Computacionalmente as coordenadas verticais expressas por $z(x',y')$ são determinadas após o cálculo das coordenadas no plano (x,y) seguindo a mesma ordem de cálculo que a descrita para a determinação das coordenadas no plano. A ordem de cálculo das coordenadas $z(x',y')$ é a seguinte:

1. Obtém-se (x_i, y_i) da malha plana;
2. Aplica-se a rotação para mudança de base das coordenadas através da expressão (5.1.2.3);
3. Calculam-se os parâmetros d_1, d_2, d_3 e d_4 ;
4. Calcula-se $z(x')$ pela expressão (5.1.2.12);
5. Calculam-se os coeficientes para determinação de $z_1(y')$; $z_2(y')$ e $z_3(y')$;
6. Calcula-se $z(x',y')$ através de (5.1.2.40).

A incidência nodal dos elementos não se altera, é a mesma determinada para a projeção no plano, desse modo basta definir as características do material e a espessura da casca para se obter os arquivos de pré-processamento do software para visualização e análise da estrutura em softwares específicos.

5.1.3 Formas Analíticas Geradas

Variando-se alguns parâmetros, são geradas malhas de elementos finitos para estruturas em cascas como *Umbrella Shell*, e outras formas de paraboloides hiperbólicos. Os resultados obtidos são apresentados nas figuras a seguir.

Para a geração das estruturas em cascas conforme ilustra a Figura 5.9, bastam estipular as dimensões da projeção retangular da estrutura e fornecer ao programa $H_e = 0$ e $H_c < 0$ (ver Figura 5.1).

Caso os dados de entrada do programa sejam escolhidos com $H_e = 0$ e $H_c > 0$, obtêm-se as estruturas mostradas na Figura 5.10. Esse tipo de estrutura é a *Umbrella Shell* invertida e pode ser empregada como elemento de fundação.

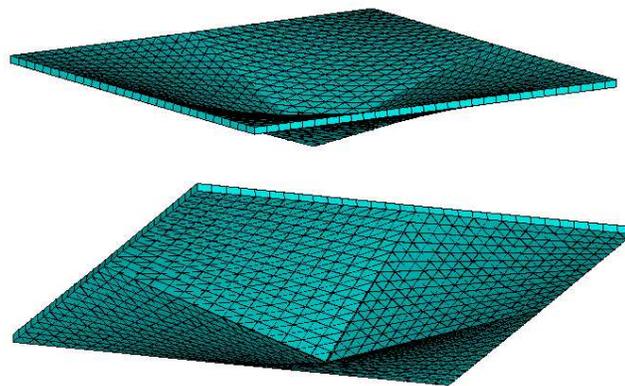


Figura 5.9: *Umbrella Shell*.

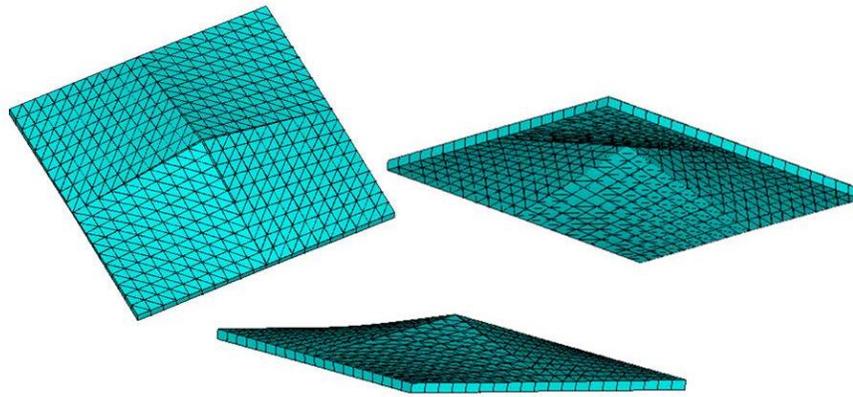


Figura 5.10: Casca para aplicação em fundação (*Umbrella Shell* invertida).

Outra opção é adotar $H_e = H_c > 0$. Com isso, a malha obtida pelo programa desenvolvido apresentará a aparência de parabolóide hiperbólico como a apresentada na Figura 5.11. Pode-se ainda utilizar $H_e \neq H_c$ e obter as formas apresentadas na Figura 5.12 $H_e > H_c$ e $H_e < H_c$.

O programa desenvolvido possibilita ainda, a introdução de arestas parabólicas na planta quadrilátera, com isso podem-se obter formas não convencionais, conforme pode ser observado na Figura 5.13.

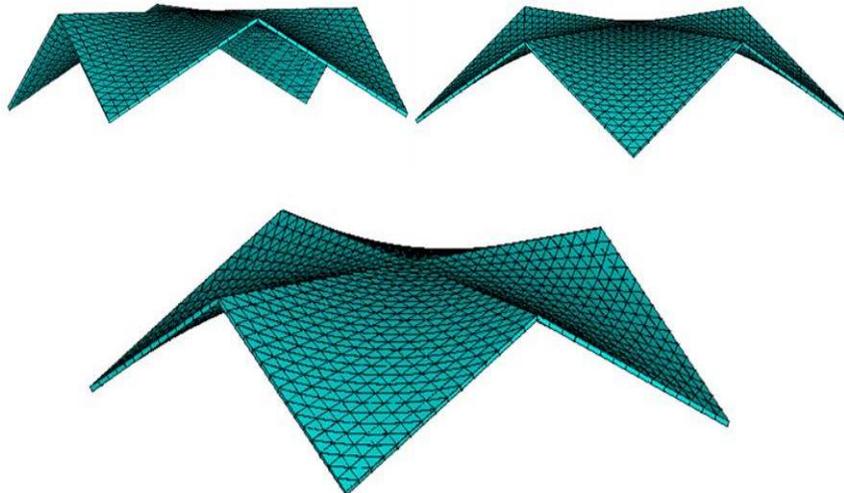


Figura 5.11: Estrutura em casca com parabolóides hiperbólicos gerada com segmentos de retas e alturas no centro da aresta e no centro da planta iguais.

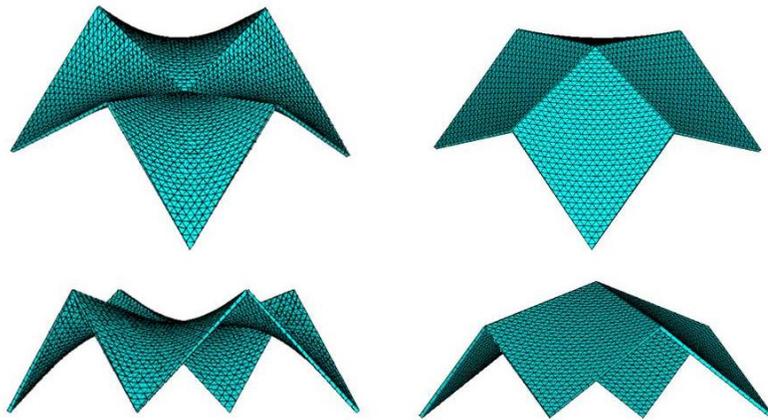


Figura 5.12: Paraboloides hiperbólicos com arestas retas e alturas diferentes no centro das arestas e no centro da planta.

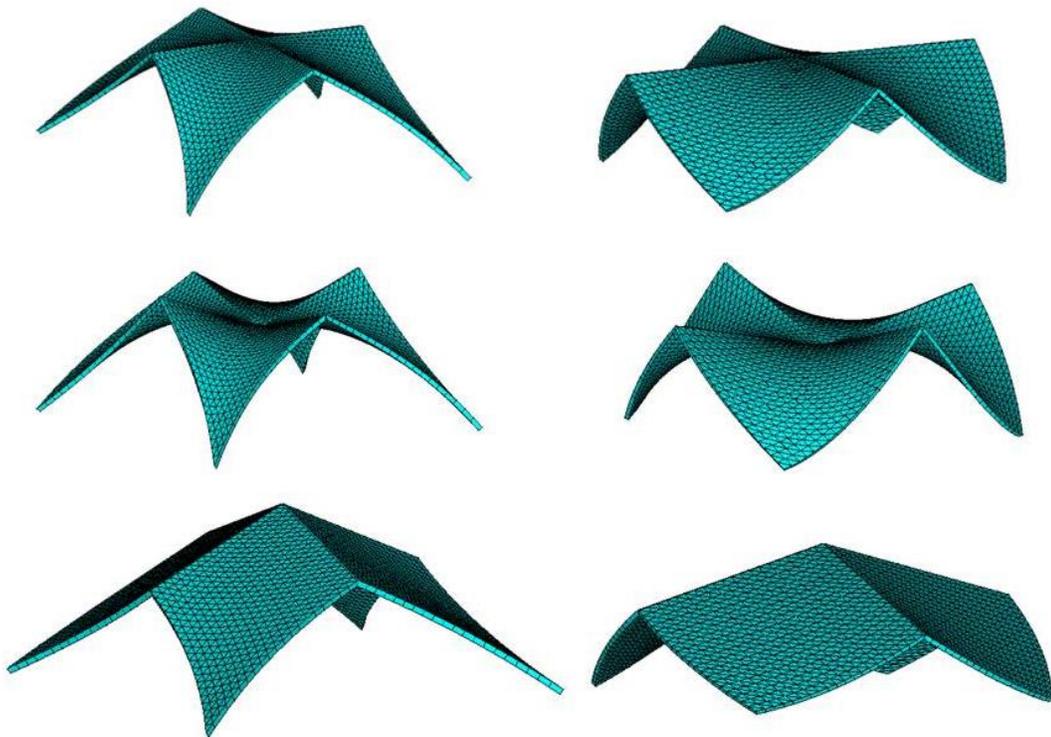


Figura 5.13: Paraboloides hiperbólicos com planta quadrilátera e arestas parabólicas e alturas no centro da planta e no centro das arestas diferentes.

Com as plantas poligonais podem ser gerados três tipos de estrutura em casca de forma analítica: paraboloides hiperbólicos; paraboloides elípticos e cilindros parabólicos. As figuras a seguir ilustram as formas obtidas para alguns polígonos.

A Figura 5.14 apresenta a estrutura em casca com planta triangular circunscrita em um raio de 850 cm, com 30 divisões radiais resultando em 1396 pontos nodais e 2700 elementos. Na Figura 5.14 (b) encontra-se uma estrutura em casca composta por paraboloides elípticos com altura no centro da casca de 450 cm e no centro das arestas de 300 cm. Em (c) pode-se visualizar uma estrutura em casca composta por cilindros parabólicos com 300 cm de altura. Já em (d) encontra-se uma estrutura em casca composta por paraboloides hiperbólicos com 300 cm de altura no centro e 450 cm de altura nas arestas da casca.

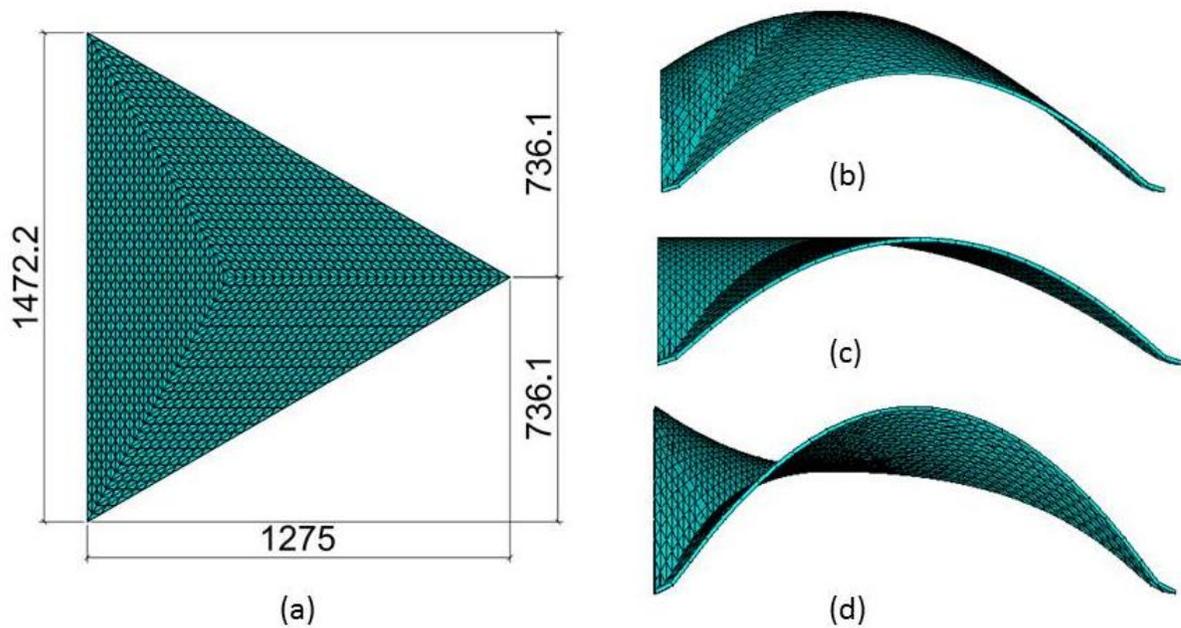


Figura 5.14: Estrutura em casca geométrica de planta triangular (cm).

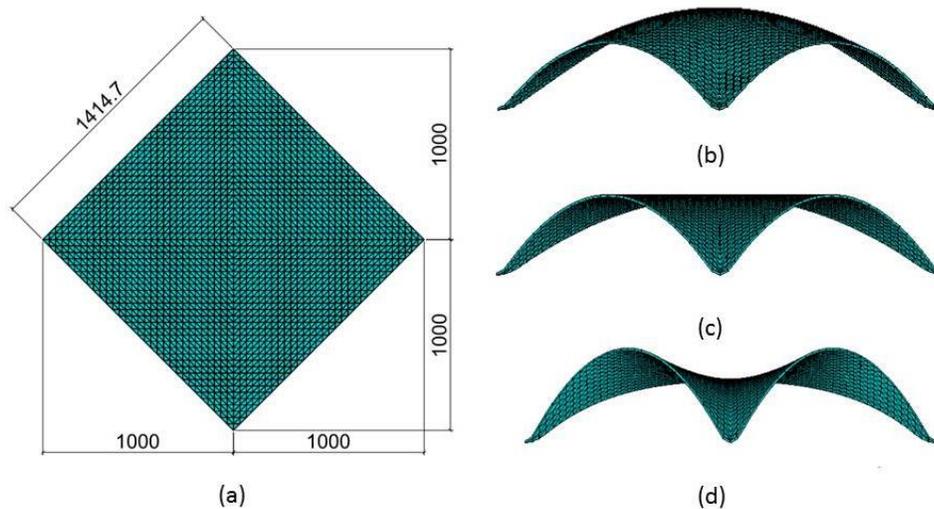


Figura 5.15: Estrutura em casca geométrica com planta quadrilátera (cm).

A Figura 5.15 mostra a estrutura em casca com planta quadrilátera circunscrita em um raio de 1000 cm, com 30 divisões radiais resultando em 1861 pontos nodais e 3600 elementos. Em (b) está uma estrutura em casca composta por paraboloides elípticos com altura no centro da casca de 450 cm e no centro das arestas de 300 cm. Em (c) uma estrutura em casca composta por cilindros parabólicos com 350 cm de altura. E em (d) uma estrutura em casca composta por paraboloides hiperbólicos com 300 cm de altura no centro e 450 cm de altura nas arestas da casca.

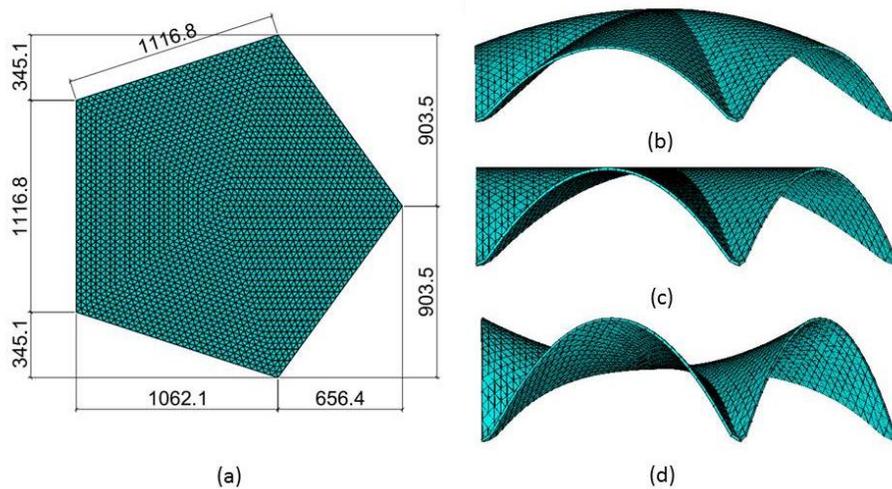


Figura 5.16: Estrutura em casca geométrica com planta pentagonal (cm).

Na Figura 5.16, pode-se visualizar a estrutura em casca com planta pentagonal circunscrita em um raio de 950 cm, com 30 divisões radiais resultando em 2326 pontos nodais e 4500 elementos. Em (b) trata-se de uma estrutura em casca composta por paraboloides elípticos com altura no centro da casca de 450 cm e no centro das arestas de 300 cm. Em (c) uma estrutura em casca composta por cilindros parabólicos com 350 cm de altura. E em (d) estrutura em casca composta por paraboloides hiperbólicos com 300 cm de altura no centro e 500 cm de altura nas arestas da casca.

A Figura 5.17 apresenta a estrutura em casca com planta hexagonal circunscrita em um raio de 1200 cm, com 30 divisões radiais resultando em 2791 pontos nodais e 5400 elementos. Na Figura 5.17 (b) está uma estrutura em casca composta por paraboloides elípticos com altura no centro da casca de 500 cm e no centro das arestas de 300 cm. Em (c) uma estrutura em casca composta por cilindros parabólicos com 500 cm de altura. Em (d) uma estrutura em casca composta por paraboloides hiperbólicos com 300 cm de altura no centro e 600 cm de altura nas arestas da casca.

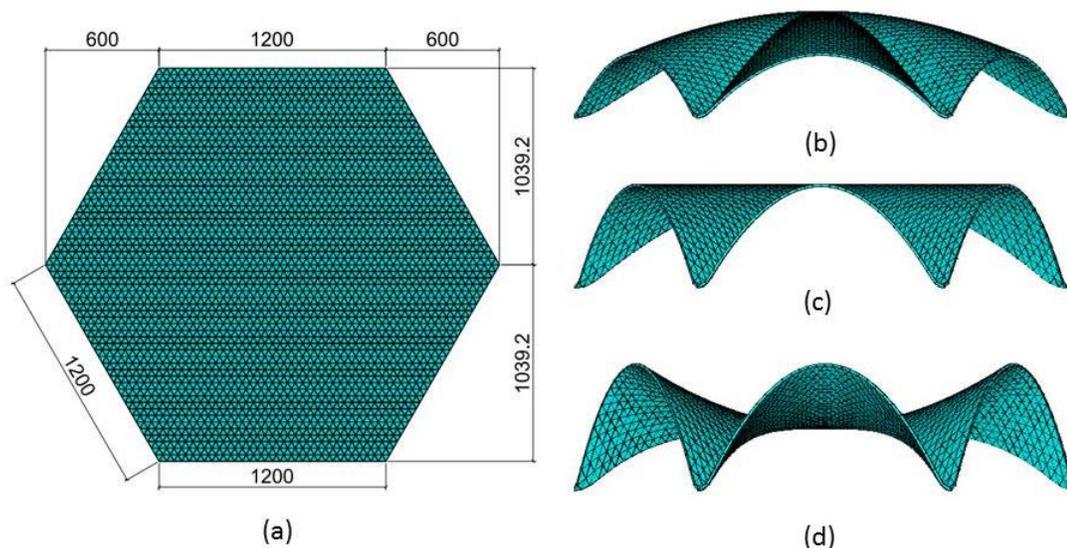


Figura 5.17: Estrutura em casca geométrica com planta hexagonal (cm).

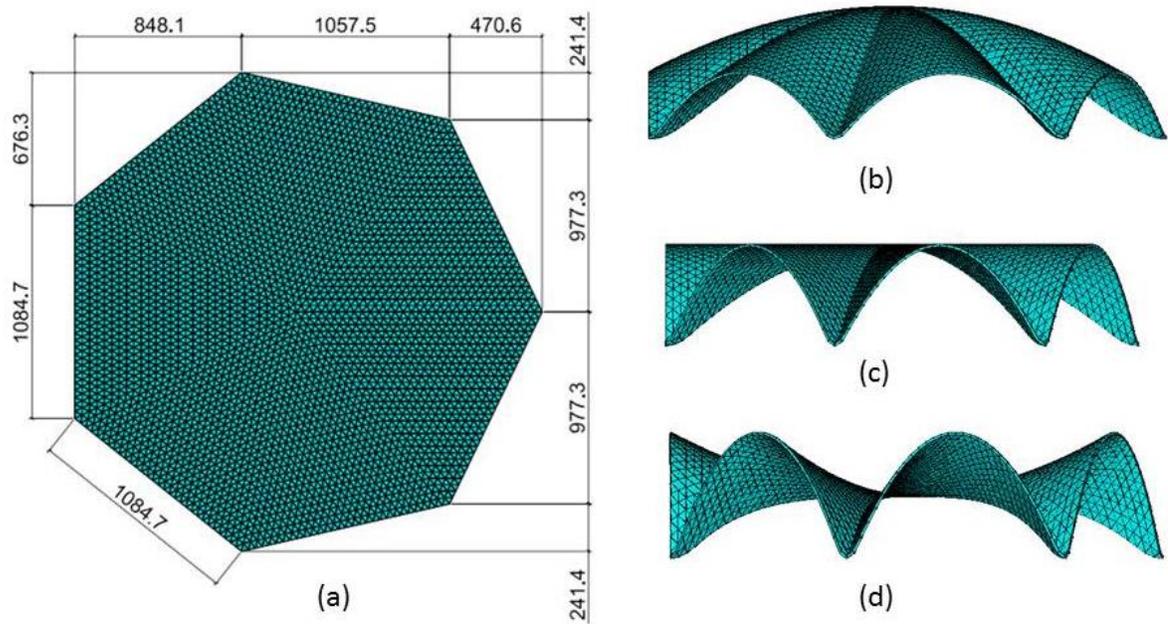


Figura 5.18: Estrutura em casca geométrica com planta heptagonal (cm).

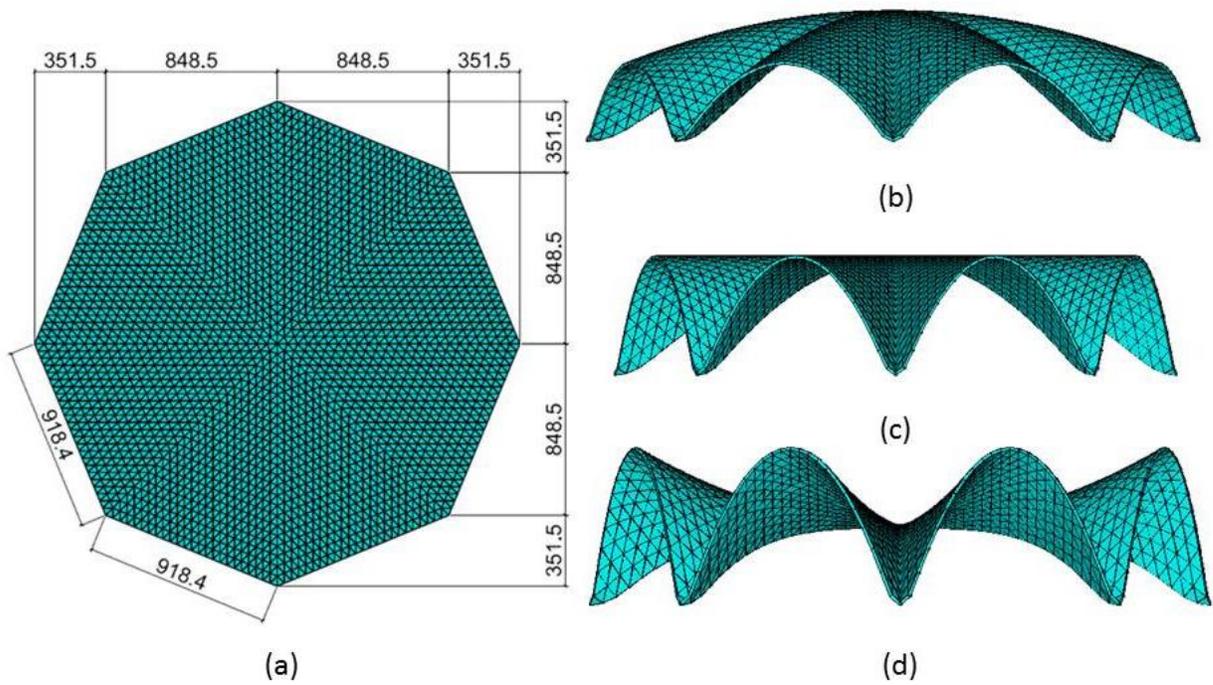


Figura 5.19: Estrutura em casca geométrica com planta octogonal (cm).

Uma planta de heptagonal circunscrita em um raio de 1250 cm, com 30 divisões radiais resultando em 3256 pontos nodais e 6300 elementos, é apresentada na Figura 5.18. Em (b) a estrutura em casca composta por paraboloides elípticos com altura no centro da casca de 600 cm e no centro das arestas de 300 cm. Em (c) uma estrutura em casca composta por cilindros parabólicos com 500 cm de altura. E em (d) uma estrutura em casca composta por paraboloides hiperbólicos com 300 cm de altura no centro e 600 cm de altura nas arestas da casca.

A Figura 5.19 apresenta uma estrutura com planta octogonal circunscrita em um raio de 1200 cm, com 24 divisões radiais resultando em 2401 pontos nodais e 46080 elementos. Em (b) encontra-se uma estrutura em casca composta por paraboloides elípticos com altura no centro da casca de 500 cm e no centro das arestas de 300 cm. Em (c) uma estrutura em casca composta por cilindros parabólicos com 500 cm de altura. E em (d) uma estrutura em casca composta por paraboloides hiperbólicos com 300 cm de altura no centro e 600 cm de altura nas arestas da casca.

5.2 Estruturas em Cascas de Formas Livres

A geração das formas tridimensionais de estruturas em cascas de formas livres consiste em um processo de geração otimizada por meio de análise não linear de uma membrana plana, fina e flexível, em que é determinado o estado de mínima energia potencial total da membrana submetida ao peso próprio ou a uma pressão uniformemente distribuída que caracteriza a configuração de equilíbrio da estrutura.

Neste trabalho a geração das formas por meio da otimização da membrana foi realizada utilizando o programa desenvolvido por Vizotto (1993) e pelo software ANSYS conforme esquema da Figura 5.20.

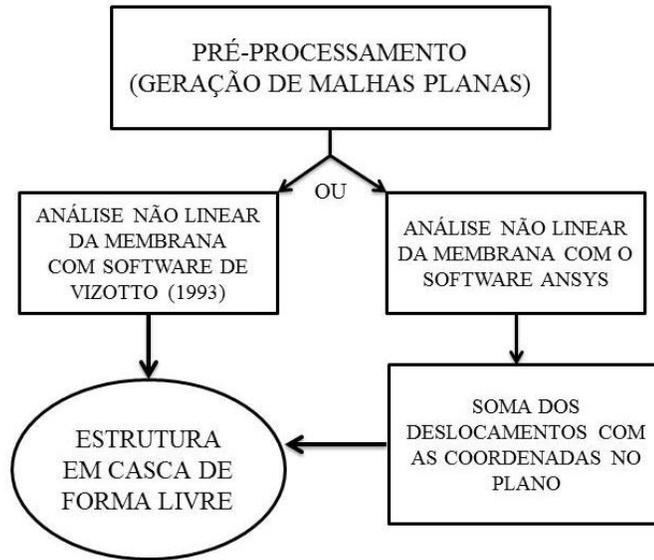


Figura 5.20: Esquema de geração das estruturas em cascas de formas livres.

Conforme ilustra a Figura 5.20, a geração da estrutura em casca de forma livre através do software desenvolvido por Vizotto (1993) é automática enquanto que a utilização do ANSYS implica na realização de uma etapa para somar os deslocamentos obtidos do relatório após o processamento do ANSYS com as coordenadas da malha no plano.

5.2.1 Modelo Computacional Desenvolvido por Vizotto

A geração de cascas de formas otimizadas envolve um tratamento matemático envolvendo o método dos elementos finitos e técnicas de programação matemática. No modelo computacional para a geração de formas livres de estruturas em cascas, desenvolvido por Vizotto (1993), é assumido que o material a ser utilizado possui uma relação tensão-deformação linear, com a seguinte equação constitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.2.1.1)$$

sendo que para o estado plano de tensão os vetores $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$ e a matriz \mathbf{D} , são:

$$\boldsymbol{\sigma}^t = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.2.1.2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.2.1.3)$$

$$D = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \quad (5.2.1.4)$$

Após a configuração das características do material a ser utilizado, é definido o tipo de elemento compatível com o comportamento adotado. Assim, o elemento finito escolhido foi o triangular plano CST (*Constant Strain Triangle*), no qual são consideradas as hipóteses de tensão e deformação constantes. O elemento foi modificado para permitir deslocamentos ortogonais ao seu plano, deixando o elemento com nove graus de liberdade, sendo três deslocamentos por ponto nodal nos vértices do triângulo.

As funções aproximadoras para os deslocamentos no elemento finito são:

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 \\ u_y(x,y) &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 \\ u_z(x,y) &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 \end{aligned} \quad (5.2.1.5)$$

sendo as constantes α_k , β_k e γ_k , com $(k=1, 2, 3)$ escritas em função das coordenadas iniciais e deslocamentos nodais:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= c_{11} u_k + c_{12} u_{k+3} + c_{13} u_{k+6} \\ \beta_k &= c_{21} u_k + c_{22} u_{k+3} + c_{23} u_{k+6} \\ \gamma_k &= c_{31} u_k + c_{32} u_{k+3} + c_{33} u_{k+6} \end{aligned} \quad (5.2.1.6)$$

com as constantes c_{ij} ($i=1, 2, 3; j=1, 2, 3$) apresentadas na *Tab. 5.2.1*.

Tab. 5.2.1: Constantes para as expressões α_k , β_k e γ_k ($k=1, 2, 3$)		
$c_{11} = (y_2 - y_3) \delta$	$c_{12} = (y_3 - y_1) \delta$	$c_{13} = (y_1 - y_2) \delta$
$c_{21} = (x_3 - x_2) \delta$	$c_{22} = (x_1 - x_3) \delta$	$c_{23} = (x_2 - x_1) \delta$
$c_{13} = (x_2 y_3 - x_3 y_2) \delta$	$c_{23} = (x_3 y_1 - x_1 y_3) \delta$	$c_{33} = (x_1 y_2 - x_2 y_1) \delta$
$\delta = 1 / [(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1) - (x_1 y_3 + x_2 y_1 + x_3 y_2)]$		

Considerando o estado plano de tensões, as componentes de deformação são baseadas na definição de deformação quadrática de Green, em que grandes deslocamentos e grandes deformações são considerados de modo exato:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{yy} &= \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]\end{aligned}\quad (5.2.1.7)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \right]$$

Definindo V como um elemento de volume indeformado, e considerando o elemento com espessura constante, a energia potencial de deformação $\pi(u)$ pode ser escrita como:

$$\pi(u) = \frac{1}{2} \int_V (\sigma^t \varepsilon) dV = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon^t D \varepsilon) dV = \frac{1}{2} V (\varepsilon^t D \varepsilon) \quad (5.2.1.10)$$

Considerando o Princípio da Mínima Energia Potencial Total, as posições de equilíbrio estável correspondem aos pontos de mínimo local da função de energia potencial total. Aplicando técnicas de programação matemática para otimização de funções não lineares, é possível determinar os pontos de mínimo destas funções. As expressões a seguir apresentam o cálculo do gradiente e da matriz Hessiana necessários para a determinação dos pontos referente às condições de equilíbrio da membrana.

$$G(\pi) = \frac{\partial \pi}{\partial u_i} = V \sigma^t \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial u_i} \right) \quad (5.2.1.11)$$

$$H(\pi) = \frac{\partial^2 \pi}{\partial u_i \partial u_j} = V \left[\left(\frac{\partial \varepsilon^t}{\partial u_i} \right) D \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial u_j} \right) + \sigma^t \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial u_i \partial u_j} \right) \right] \quad (5.2.1.12)$$

O programa computacional desenvolvido por Vizotto (1993) permite a geração de estruturas em cascas de formas livres com quaisquer configurações de apoio e carregamento. É possível aplicar a ação do peso próprio, ou pressão sobre a membrana e/ou ainda, aplicar cargas concentradas em pontos específicos. É necessário um arquivo de entrada com a malha de elementos finitos triangulares com as restrições aos pontos de apoio e o carregamento aplicado.

Como resultado do processamento é possível obter automaticamente a forma tridimensional da estrutura.

O software desenvolvido nesse trabalho gera um arquivo com a malha plana de elementos finitos para posterior geração da forma tridimensional da estrutura em casca.

5.2.2 Estruturas em Cascas de Formas Livres Geradas

Variando-se o tipo de planta, a localização dos apoios e a densidade ou pressão sobre a membrana, pode-se obter diversos tipos de estruturas em cascas de forma livre. Alguns dos resultados obtidos são apresentados a seguir.

A Figura 5.21 apresenta a estrutura obtida com uma planta triangular circunscrita em uma circunferência de raio de 1250 cm com vértices suavizados por uma circunferência de raio 1050 cm. Com 1999 pontos nodais e 3888 elementos. A forma tridimensional da estrutura é gerada com o programa desenvolvido por Vizotto (1993), considerando-se 9 pontos nodais fixos por vértice. A estrutura em casca com planta triangular apresenta altura máxima no centro de 404 cm e 348 cm no centro das aberturas laterais entre os apoios nos vértices.

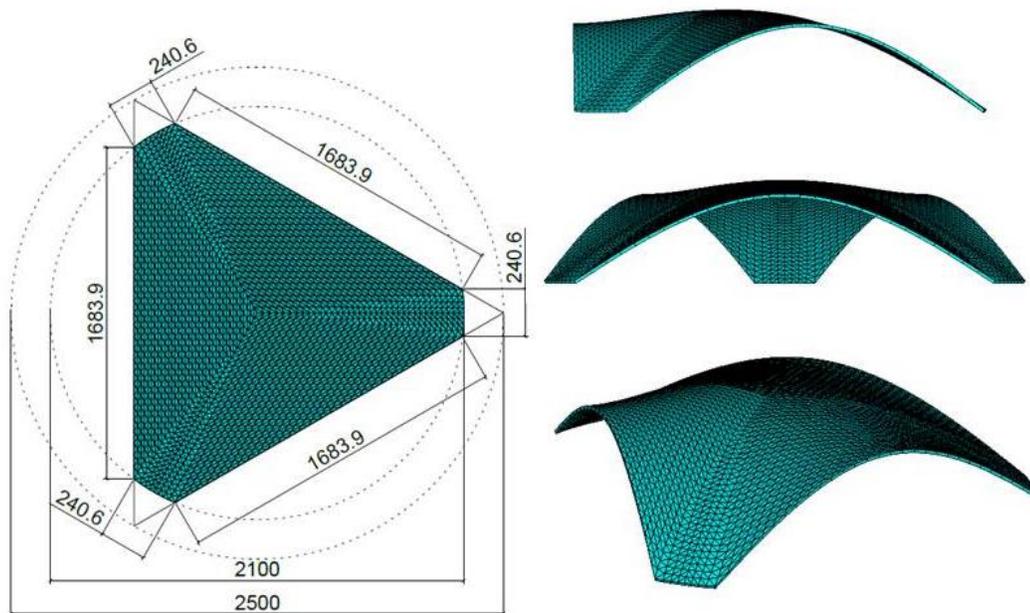


Figura 5.21: Estrutura em casca de forma livre com planta triangular (cm).

A Figura 5.22 apresenta a estrutura com planta quadrilátera circunscrita em uma circunferência de raio de 1200 cm com vértices suavizados por uma circunferência de raio 1140 cm. Com 3281 pontos nodais e 6400 elementos. A forma tridimensional da estrutura é gerada com o programa desenvolvido por Vizotto (1993), considerando-se 5 pontos nodais fixos por vértice. A estrutura em casca com planta quadrilátera apresenta altura máxima no centro de 500 cm e 362 cm no centro das aberturas laterais.

Na Figura 5.23 pode-se visualizar uma estrutura com planta pentagonal circunscrita em uma circunferência de raio de 1200 cm com vértices suavizados por uma circunferência de raio 1150 cm. Com 3151 pontos nodais e 6125 elementos. A forma tridimensional da estrutura é gerada com o programa desenvolvido por Vizotto (1993), considerando-se 5 pontos nodais fixos por vértice. A estrutura em casca com planta pentagonal apresenta altura máxima no centro de 493 cm e 291 cm no centro das aberturas laterais.

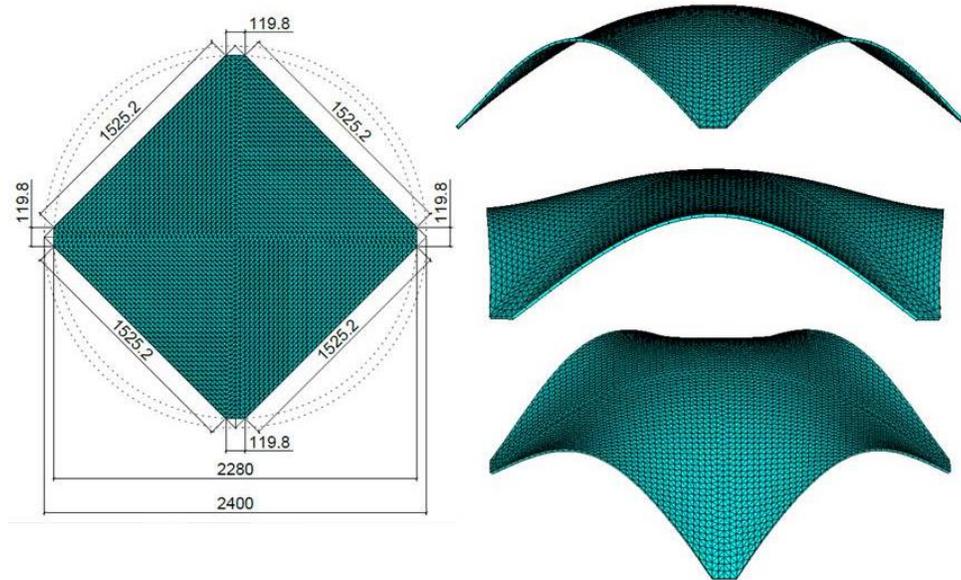


Figura 5.22: Estrutura em casca de forma livre com planta quadrada (cm).

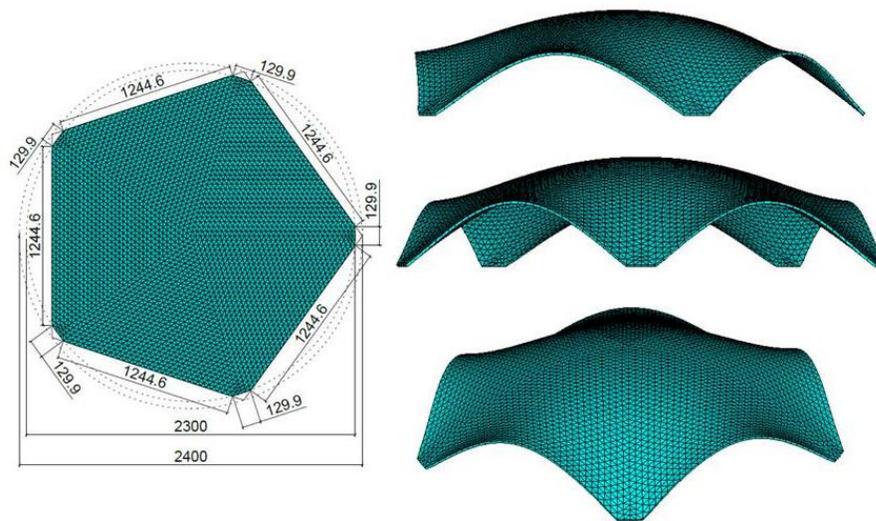


Figura 5.23: Estrutura em casca de forma livre com planta pentagonal (cm).

A Figura 5.24 apresenta uma estrutura com planta hexagonal circunscrita em uma circunferência de raio de 1200 cm com vértices suavizados por uma circunferência de raio 1150 cm. Com 4921 pontos nodais e 9600 elementos. A forma tridimensional da estrutura é gerada com o programa desenvolvido por Vizotto (1993), considerando-se 7 pontos nodais fixos por vértice. A estrutura em casca com planta hexagonal apresenta altura máxima no centro de 598 cm e 291 cm no centro das aberturas laterais.

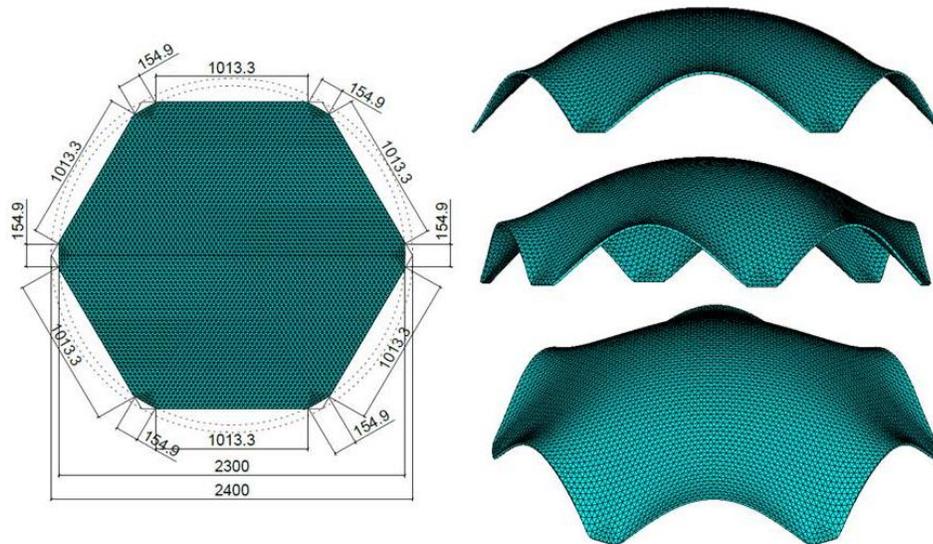


Figura 5.24: Estrutura em casca de forma livre com planta hexagonal (cm).

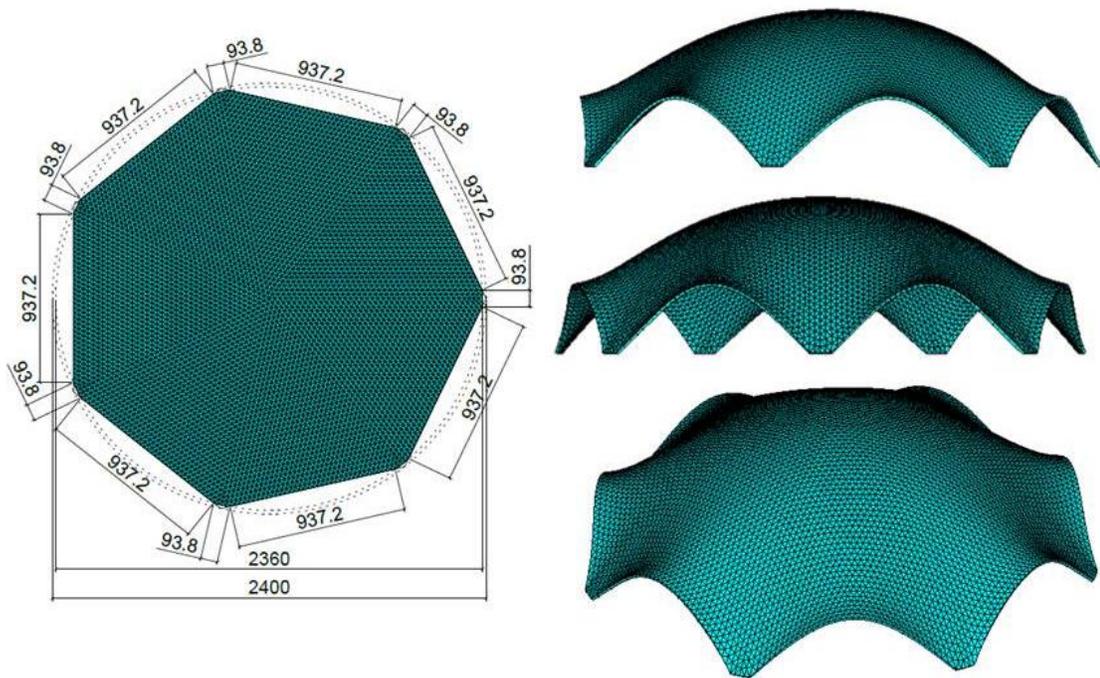


Figura 5.25: Estrutura em casca de forma livre com planta heptagonal (cm).

A Figura 5.24 apresenta a estrutura com planta heptagonal circunscrita em uma circunferência de raio de 1200 cm com vértices suavizados por uma circunferência de raio 1180 cm. Com 5741 pontos nodais e 11200 elementos. A forma tridimensional da estrutura é gerada com o programa desenvolvido por Vizotto (1993), considerando-se 5 pontos nodais fixos por vértice. A estrutura em casca com planta heptagonal apresenta altura máxima no centro de 675 cm e 297 cm no centro das aberturas laterais.

Na Figura 5.26 pode-se observar uma estrutura com planta octogonal circunscrita em uma circunferência de raio de 1200 cm com vértices suavizados por uma circunferência de raio 1180 cm. Com 5329 pontos nodais e 10368 elementos. A forma tridimensional da estrutura é gerada com o programa desenvolvido por Vizotto (1993), considerando-se 5 pontos nodais fixos por vértice. A estrutura em casca com planta octogonal apresenta altura máxima no centro de 609 cm e 230 cm no centro das aberturas laterais.

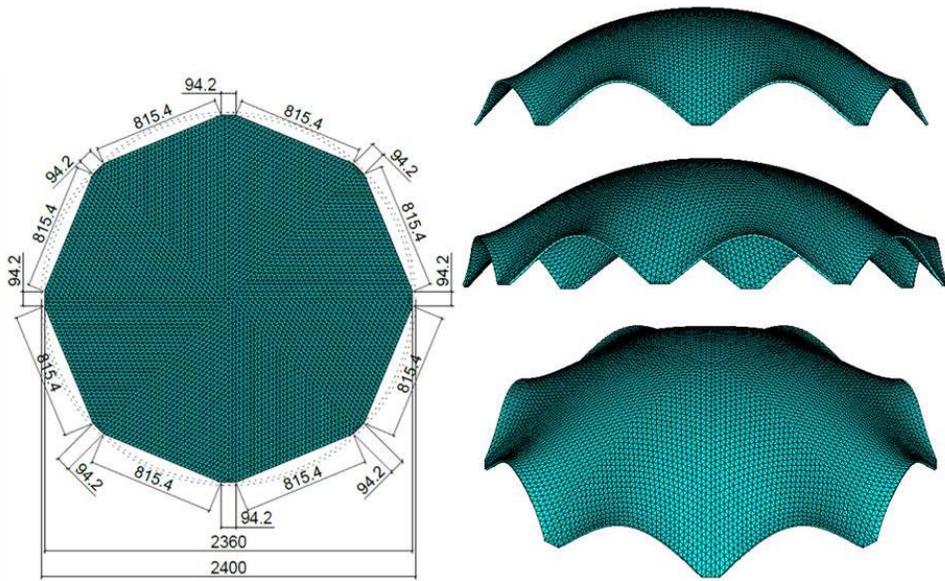


Figura 5.26: Estrutura em casca de forma livre com planta octogonal (cm).

A Figura 5.27 apresenta uma estrutura com planta circular de raio 1200 cm, gerada a partir de um hexágono circunscrito em uma circunferência de raio 2400 cm. Com 2977 pontos nodais e 5766 elementos. A forma tridimensional da estrutura é gerada com o programa desenvolvido por Vizotto (1993), considerando-se todos os pontos da fronteira fixos. A estrutura em casca apresenta altura máxima no centro de 522 cm.

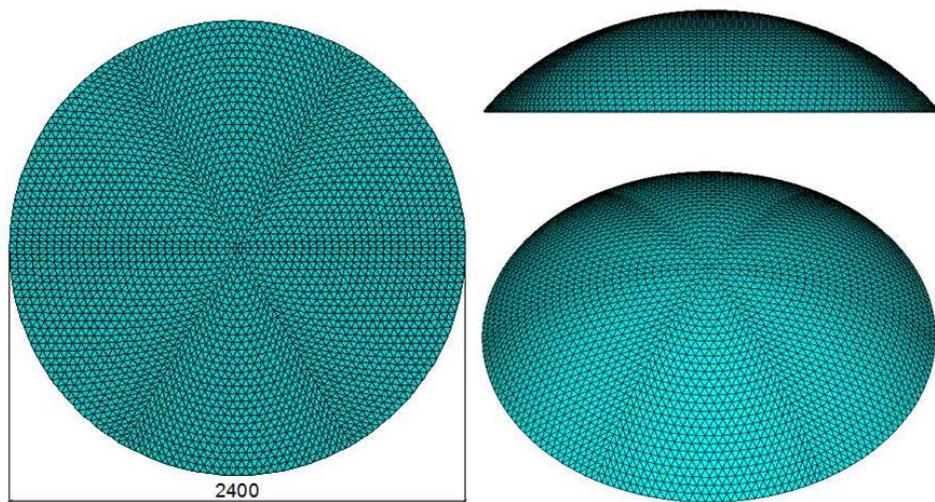


Figura 5.27: Estrutura em casca de forma livre com planta circular (cm).

Na Figura 5.28 é apresentada uma estrutura com planta retangular (1200 cm x 800 cm) com vértices suavizados resultando em vãos de 7 e 11 metros nas arestas menores e maiores respectivamente. Com 1617 pontos nodais e 3072 elementos. A forma tridimensional da estrutura é gerada com o programa desenvolvido por Vizotto (1993), considerando-se 5 pontos nodais fixos por apoio. A estrutura em casca com planta retangular apresenta altura máxima de 3.16 m no centro da estrutura. No centro do maior vão lateral, a altura é de 280 cm e 160 cm no centro do menor vão lateral.

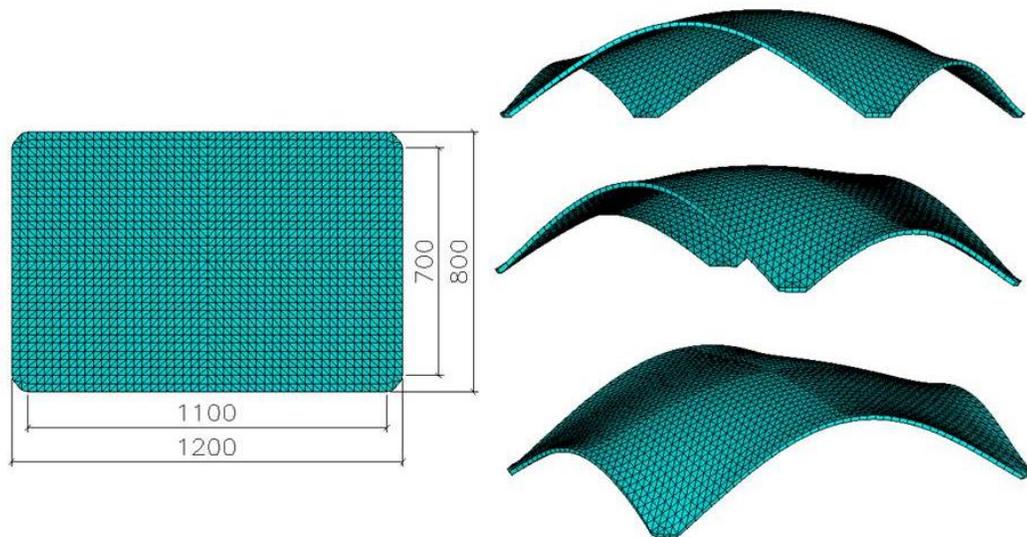


Figura 5.28: Estrutura em casca de forma livre com planta retangular (cm).

A Figura 5.29 apresenta uma estrutura com planta quadrilátera com arestas parabólicas, com 2501 pontos nodais e 4800 elementos e sua respectiva forma tridimensional gerada considerando 5 pontos nodais fixos em cada vértice.

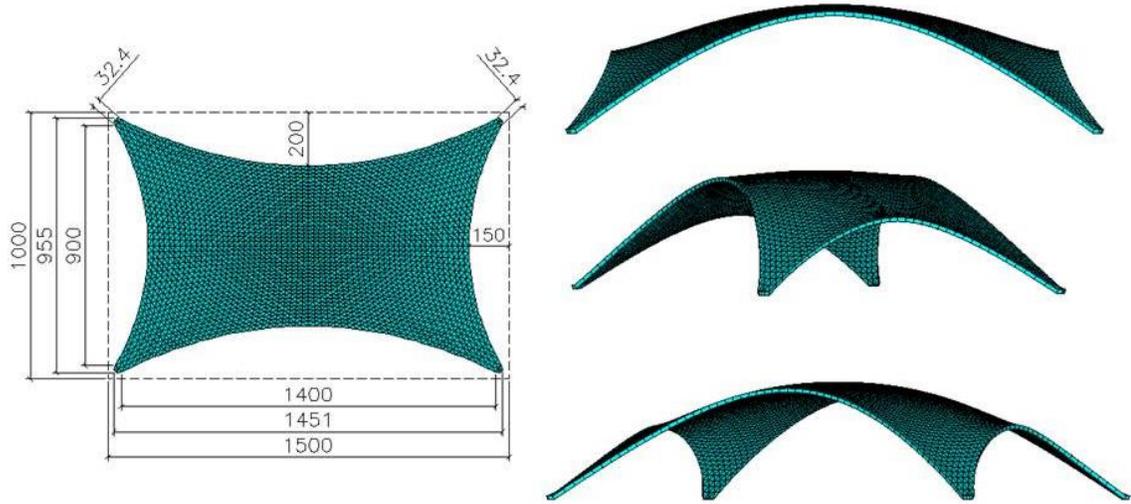


Figura 5.29: Estrutura em casca de forma livre com planta quadrilátera e arestas parabólicas (cm).

Na Figura 5.30 pode se observar uma estrutura com planta quadrilátera com duas arestas parabólicas e as outras duas retas, com 2501 pontos nodais e 4800 elementos e sua respectiva forma tridimensional gerada considerando 5 pontos nodais fixos em cada vértice.

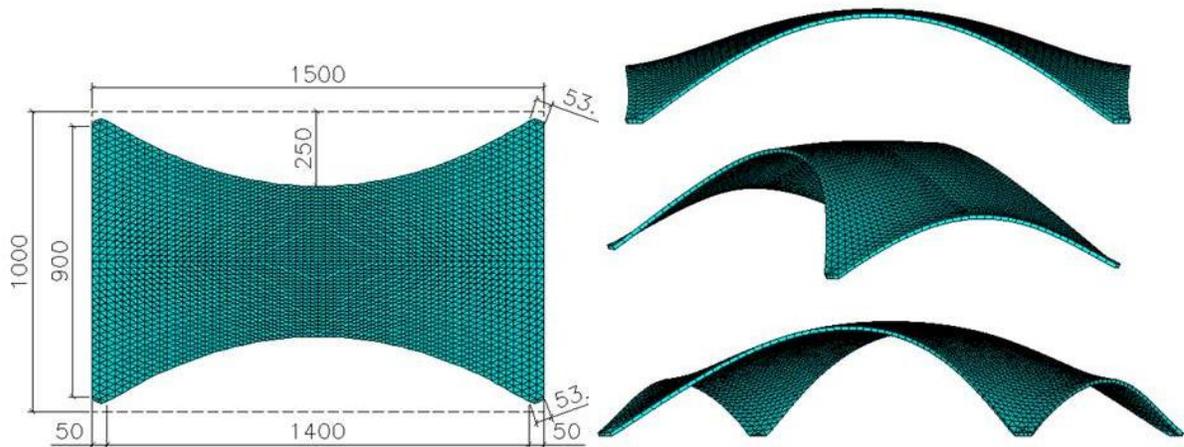


Figura 5.30: Estrutura em casca de forma livre com planta quadrilátera e duas arestas parabólicas (cm).

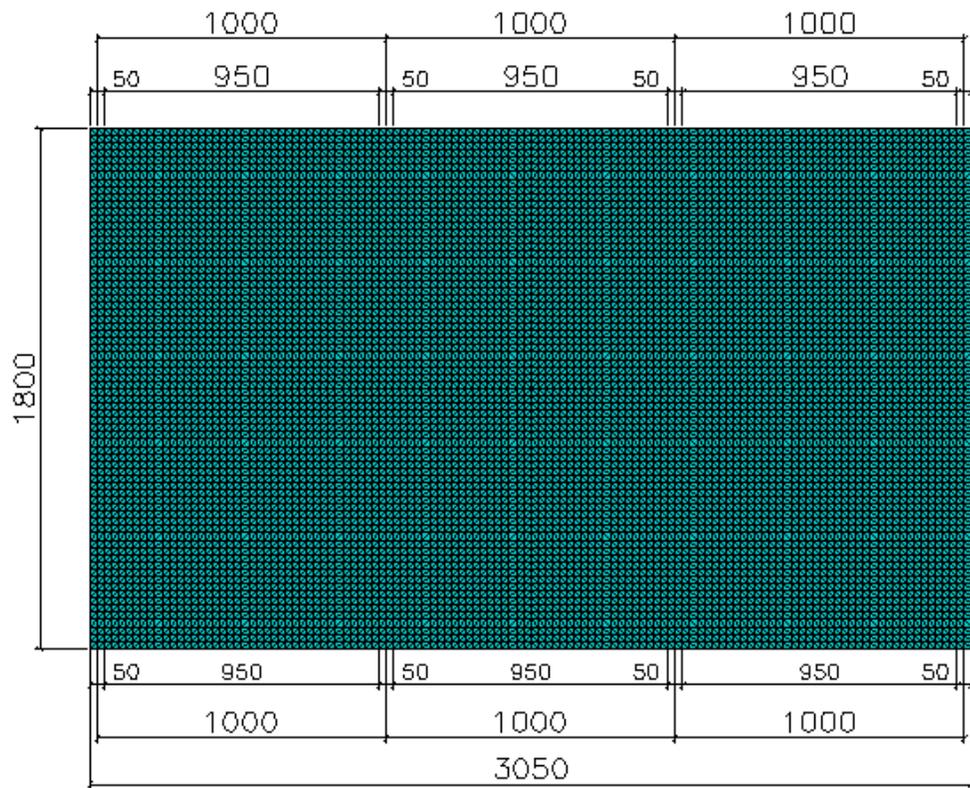


Figura 5.31: Planta retangular e apoios intermediários (cm).

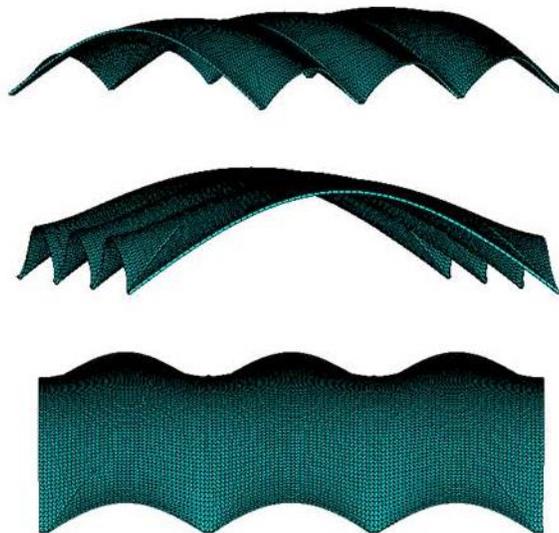


Figura 5.32: Estrutura em casca de forma livre com apoios intermediários.

A Figura 5.31 apresenta uma planta retangular (3050 cm x 1800 cm) com apoios intermediários nas maiores arestas espaçados eixo a eixo de 10 metros. Com 8979 pontos nodais e 17568 elementos. A forma tridimensional da estrutura apresentada na Figura 5.32, é gerada considerando-se 3 pontos nodais fixos por apoio, apresenta altura máxima de 464 cm. No centro do maior vão lateral, a altura é de 418 cm e 216 cm no centro do menor vão lateral.

Com a mesma planta retangular (3050 cm x 1800 cm) os dois apoios intermediários foram mantidos em uma das maiores arestas espaçados eixo a eixo de 10 cm e na aresta oposta colocou-se apenas um apoio intermediário no centro da aresta.

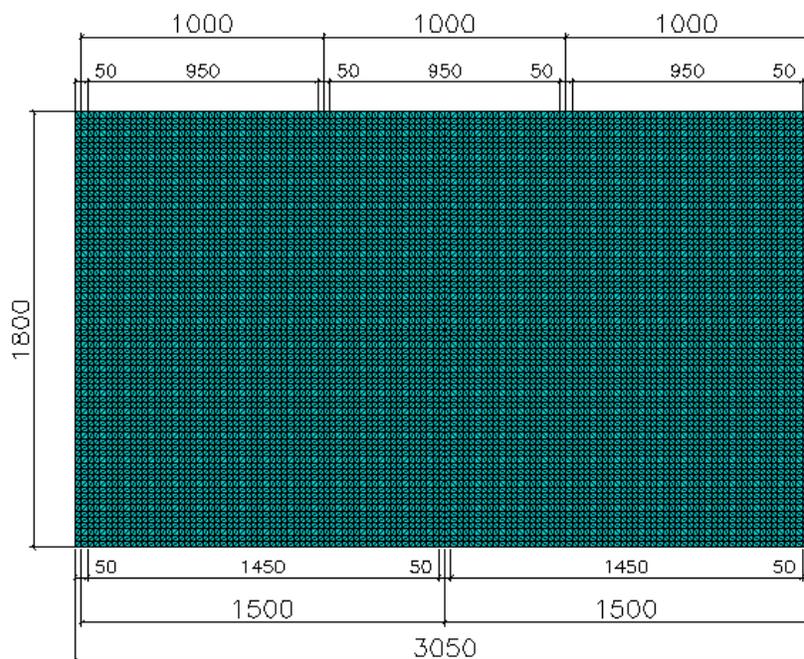


Figura 5.33: Planta retangular e apoios intermediários não simétricos (cm).

A Figura 5.34 apresenta a forma tridimensional da estrutura gerada considerando-se 3 pontos nodais fixos por apoio, apresenta altura máxima de 5.04 metros. No centro das aberturas laterais menores, a altura é de 211 cm e 369 cm no centro das aberturas laterais da aresta oposta. As aberturas das arestas perpendiculares apresentam altura de 428 cm.

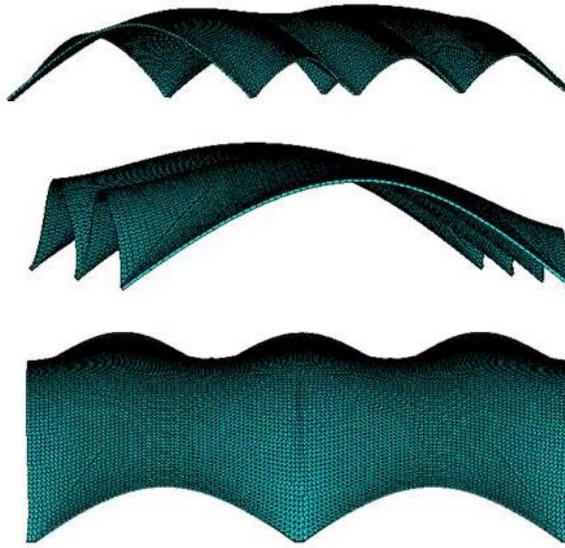


Figura 5.34: Estrutura em casca de forma livre com apoios intermediários não simétricos (cm).

5.2.3 Geração das Formas Tridimensionais com o Software ANSYS

O programa computacional desenvolvido nesse trabalho possibilita também o pré-processamento para a geração das formas tridimensionais das estruturas em cascas de forma livre por meio do ANSYS.

Para geração das formas das estruturas em cascas através da simulação de membranas finas e flexíveis com o software ANSYS, utiliza-se o elemento SHELL41 considerando o comportamento do material de acordo com a elasticidade linear e a análise não-linear geométrica em que ocorrem grandes deslocamentos e grandes deformações.

O elemento SHELL41 possui três graus de liberdade por ponto nodal, sendo as translações nas três direções. Há a possibilidade de utilização de elemento finito quadrilátero ou triangular, conforme ilustra a Figura 5.35.

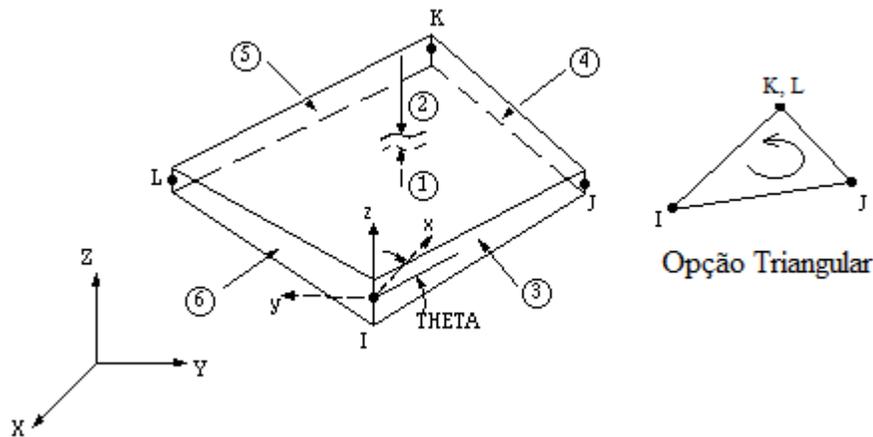


Figura 5.35: Elemento SHELL41.

O software desenvolvido nesse trabalho gera a malha plana de elementos finitos com propriedades de membrana fina e flexível. Essas informações são armazenadas em um arquivo compatível com a entrada para o software ANSYS. Para obtenção das formas finais das estruturas em cascas é necessário somar os deslocamentos dos pontos nodais da membrana deformada com as coordenadas iniciais da membrana no plano horizontal.

Trabalhos de Vizotto (1999) e Fidalgo (2012), entre outros, comparam as formas das estruturas obtidas com o modelo computacional de Vizotto (1993) e o ANSYS e concluíram que são idênticas.

5.2.4 Validação das Malhas Através da Comparação das Formas Livres Geradas

Para verificação dos programas computacionais geradores de malhas, optou-se pela comparação das formas livres geradas com as malhas obtidas a partir dos softwares desenvolvido nesse trabalho e as obtidas através do GID 10.0.4.

A versão do software GID 10.0.4 utilizada tem a limitação de mil pontos nodais por isso, as comparações a serem realizadas devem conter em torno de mil pontos nodais.

As formas tridimensionais são obtidas tanto com o programa desenvolvido por Vizotto (1993) quanto por meio do ANSYS.

a) Planta triangular.

Com uma planta triangular circunscrita em uma circunferência de raio 1200 cm e com vértices suavizados com raio de 1100 cm conforme ilustra a Figura 5.36, foram geradas malhas com o programa desenvolvido nesse trabalho e com o GID 10.0.4. Ambas as malhas apresentam trinta e um pontos nodais nas arestas. As formas das estruturas em cascas foram obtidas pela simulação computacional da membrana com o programa desenvolvido por Vizotto (1993).

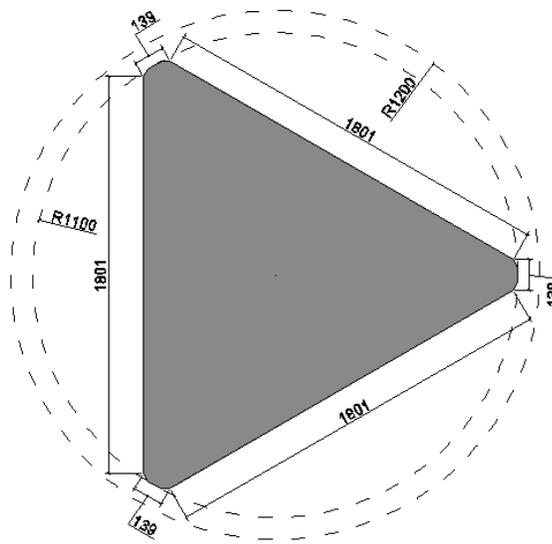


Figura 5.36: Domínio triangular (cm).

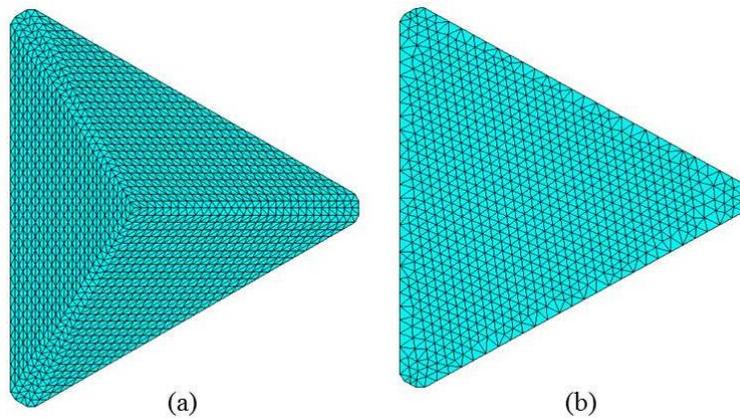


Figura 5.37: Malhas planas geradas: (a) SABINO e (b) GID 10.0.4.

A malha gerada com o programa desse trabalho apresenta 1396 pontos nodais e 2700 elementos, enquanto a malha gerada com o GID 10.0.4 apresentam 858 pontos nodais e 1624 elementos.

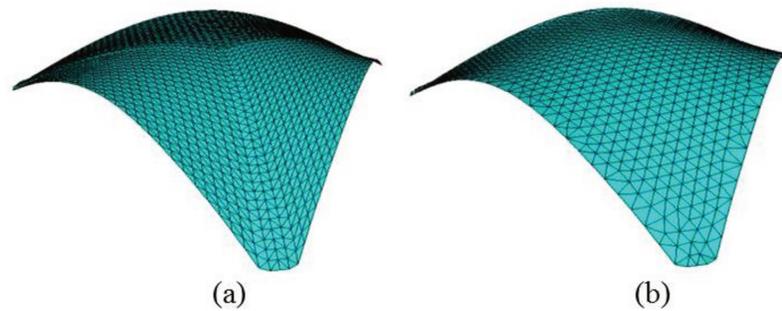


Figura 5.38: Superfícies médias das estruturas em cascas de formas livres: (a) SABINO e (b) GID 10.0.4.

Após a simulação computacional de analogias física com o programa desenvolvido por Vizotto (1993), obtém-se a forma tridimensional da estrutura em casca de forma livre. Plotando os deslocamentos verticais da membrana em uma das arestas da planta para as duas malhas, pode-se constatar que são idênticos.

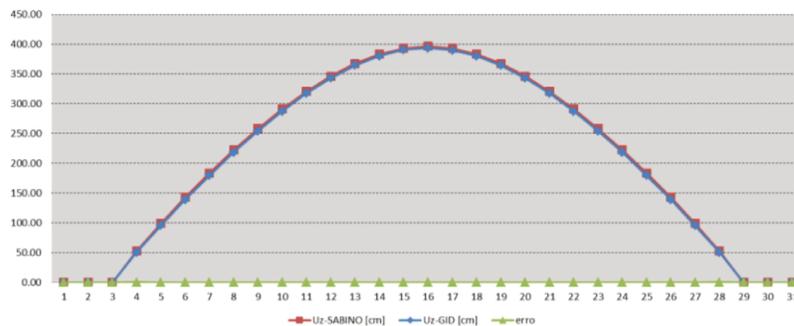


Figura 5.39: Comparação entre as formas tridimensionais: SABINO x GID 10.0.4 (cm).

b) Planta quadrilátera com arestas curvas.

A fim de verificar o programa desenvolvido para geração de malhas planas de plantas quadriláteras com arestas reta e/ou parabólicas, adotou-se uma planta com arestas parabólicas

contida em um retângulo (900x840)cm² conforme ilustra Figura 5.40. Os parâmetros para a geração computacional desse domínio através do programa desenvolvido nesse trabalho foram: $L_x = 900$ cm; $L_y = 840$ cm; $f_x = 150$ cm; e $f_y = 120$ cm.

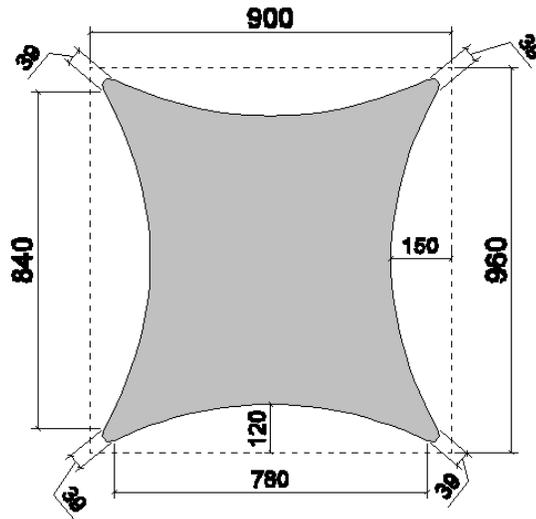


Figura 5.40: Domínio quadrilátero com arestas parabólicas (cm).

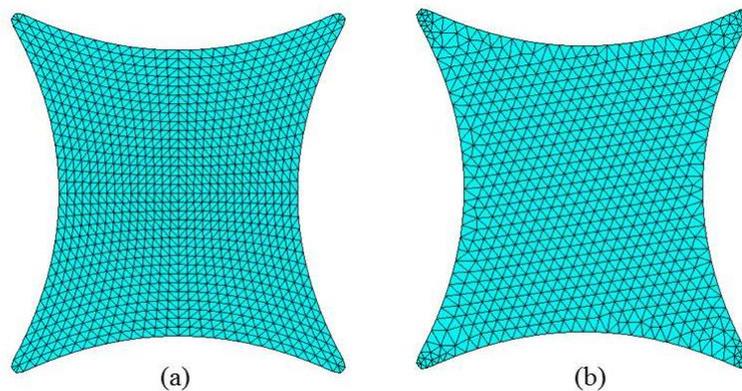


Figura 5.41: Malha plana para planta quadrilátera e arestas parabólicas: (a) SABINO e (b) GID 10.0.4.

A malha gerada com o programa desse trabalho apresentam 1023 pontos nodais e 1920 elementos. A malha gerada com o GID 10.0.4 apresenta 736 pontos nodais e 1333 elementos. As malhas podem ser visualizadas Figura 5.41.

A malha da Figura 5.41(a) apresenta variação suave do tamanho dos elementos. Já a malha gerada com o GID 10.0.4, apresenta elementos menores próximos aos vértices da planta, elementos maiores próximos às arestas e uma maior homogeneidade dos elementos nas regiões centrais da planta conforme da Figura 5.41(b).

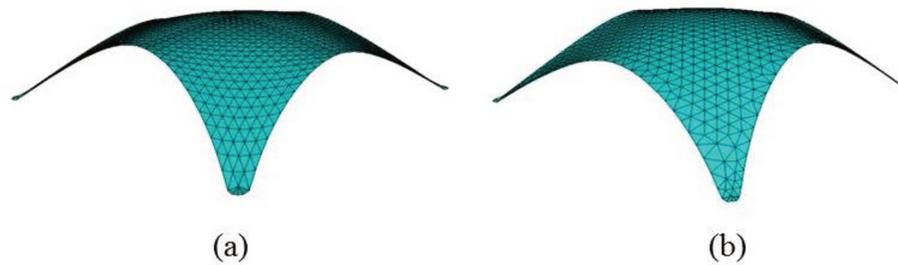


Figura 5.42: Superfícies médias das estruturas em cascas de formas livres: (a) SABINO e (b) GID 10.0.4.

Conforme ilustra a Figura 5.42, as formas tridimensionais das estruturas em cascas geradas com o modelo computacional proposto por Vizotto (1993) são muito parecidas, o gráfico da posição vertical dos pontos nodais de uma das arestas confirma que a diferença entre as formas tridimensionais das cascas é praticamente nula.

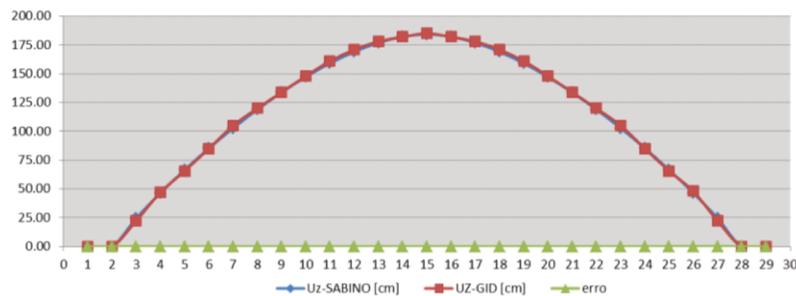


Figura 5.43 Comparação entre as formas tridimensionais: SABINO x GID10.0.4 (cm).

c) Planta pentagonal.

Com o domínio apresentado na Figura 5.44, gerou-se a malha no GID 10.0.4 mantendo-se o mesmo número de pontos nodais nas arestas em relação à malha gerada com o software desenvolvido nesse trabalho de forma a manter um fator de comparação. A malha gerada pelo

gerador de malhas desenvolvido nesse trabalho apresenta 856 pontos nodais e 1620 elementos triangulares.

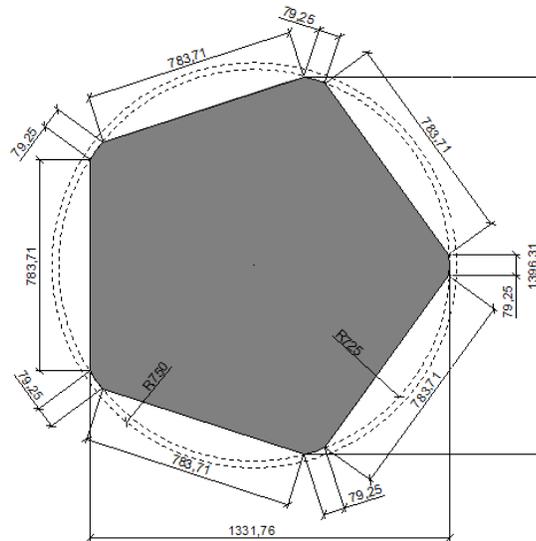


Figura 5.44: Planta poligonal pentagonal circunscrita em um raio de 750 cm com vértices suavizados por circunferência de raio 725 cm.

A malha gerada com o GID 10.0.4 apresenta 969 pontos nodais e 1846 elementos. Tanto a malha da Figura 5.45 (a) gerada pelo software desenvolvido nesse trabalho, quanto a malha da Figura 5.45 (b) gerada com o GID 10.0.4 apresentam 19 pontos nodais em cada aresta. Esses pontos nodais são identificados para comparação das coordenadas verticais U_z após geração das formas tridimensionais.

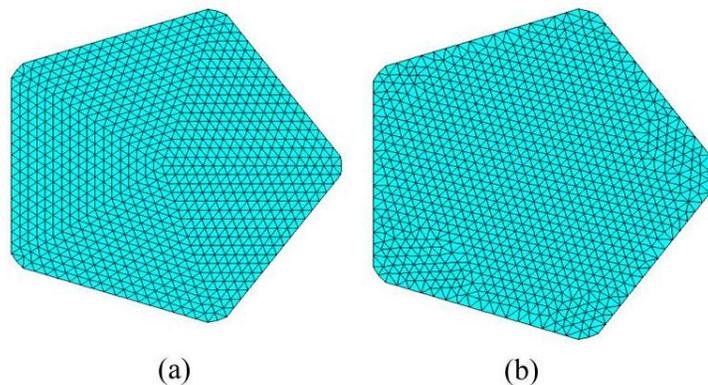


Figura 5.45: Malhas planas geradas: (a) SABINO e (b) GID 10.0.4.

Conforme o algoritmo apresentado para a geração da malha da Figura 5.45 (a), pode-se notar simetria radial com praticamente todos os elementos idênticos. Já a malha gerada a partir do GID 10.0.4 apresentada na Figura 5.45 (b) não apresenta simetria e possui alguns elementos próximos às arestas com formas diferentes em relação a grande maioria dos elementos situados no centro da planta.

Para a planta pentagonal optou-se por gerar as formas tridimensionais através da simulação computacional de analogias físicas com o software ANSYS. Visualmente, a partir da Figura 5.46, pode-se constatar que as formas tridimensionais das estruturas em cascas obtidas são muito parecidas.

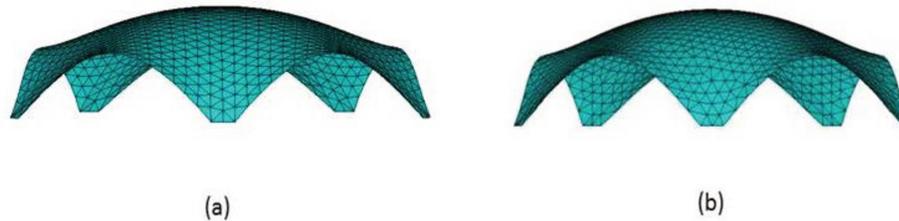


Figura 5.46: Estruturas em cascas obtidas a partir da malha gerada com o software desenvolvido (a) SABINO e com o software GID 10.0.4 (b).

Para quantificar os resultados foi elaborado um gráfico comparativo para uma das arestas que é apresentado na Figura 5.47. Com isso pode-se verificar que o erro entre as os deslocamento da membrana para as duas malhas é desprezível.

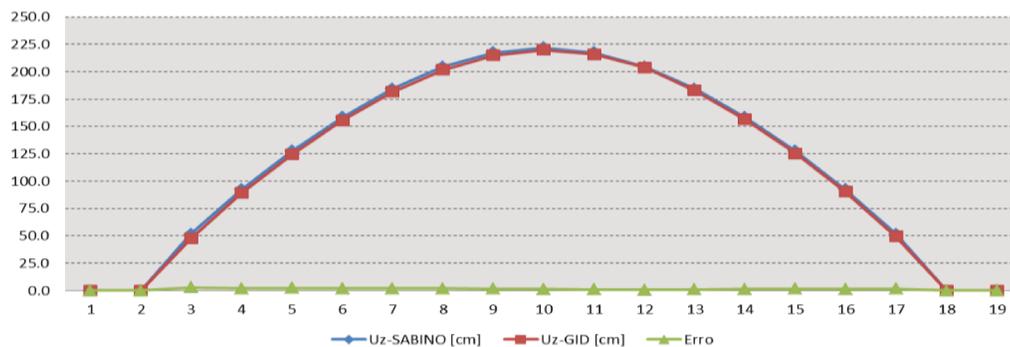


Figura 5.47: Comparação entre as formas tridimensionais: SABINO x GID10.0.4 (cm).

6 ANÁLISE NUMÉRICA DE ESTRUTURAS EM CASCAS DE CONCRETO

As análises numéricas foram realizadas com o software ANSYS utilizando o elemento de casca SHELL63. Este elemento finito pode ser adotado para cascas sob flexão e em regime de membrana, e apresenta seis graus de liberdade por ponto nodal, sendo três translações e três rotações referentes ao sistema de eixos no espaço. É possível utilizar o elemento quadrilátero ou triangular, conforme ilustra a Figura 6.1.

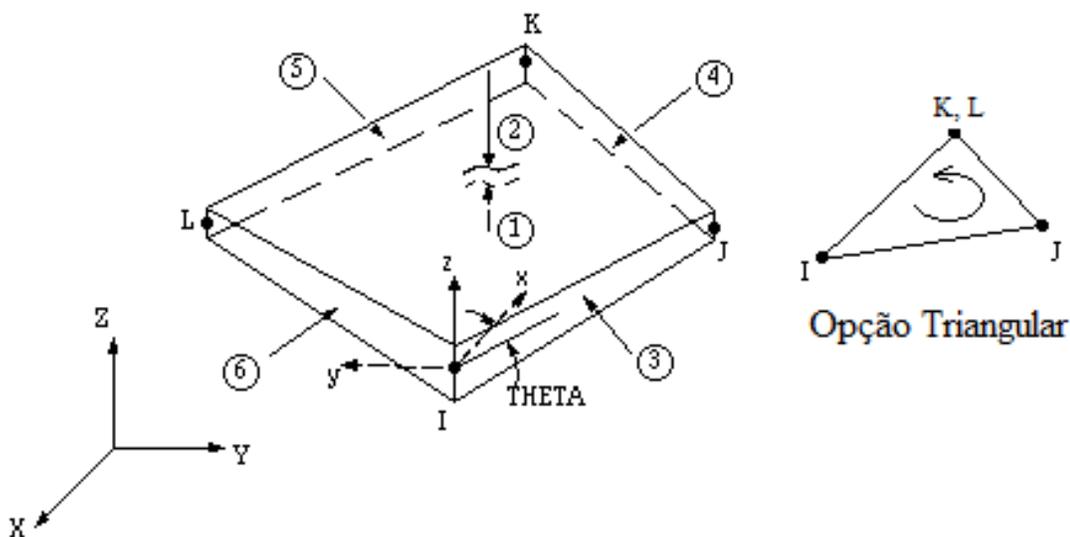


Figura 6.1: ANSYS: Elemento para casca SHELL63.

As características elásticas dos materiais constituintes da estrutura em concreto foram adotadas para as análises das estruturas de acordo com a NBR 6118/2007:

- $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$;
- $\gamma_c = 25 \text{ kN/m}^3$;
- $E = 0,85 \times 5600\sqrt{f_{ck}} = 0,85 \times 5600\sqrt{25} = 23800 \text{ MPa}$;
- $\nu = 0,20$

6.1 Análise Numérica de uma Estrutura em Casca de Forma Livre com Projeção Heptagonal Submetida ao Peso Próprio

Para a obtenção da forma final da casca, a espessura para alguns modelos foi variada para se estabelecer o regime de membrana para a estrutura, ou seja, o estado em que as tensões perpendiculares ao plano são desprezíveis ou nulas, e o equilíbrio pode ser obtido por meio dos esforços contidos somente no plano tangente à superfície média da casca. Baseado em estudos apresentados por Fidalgo (2012), para a casca de forma livre com planta pentagonal, optou-se por adotar espessura linearmente variável ao longo da altura para otimizar a forma da estrutura.

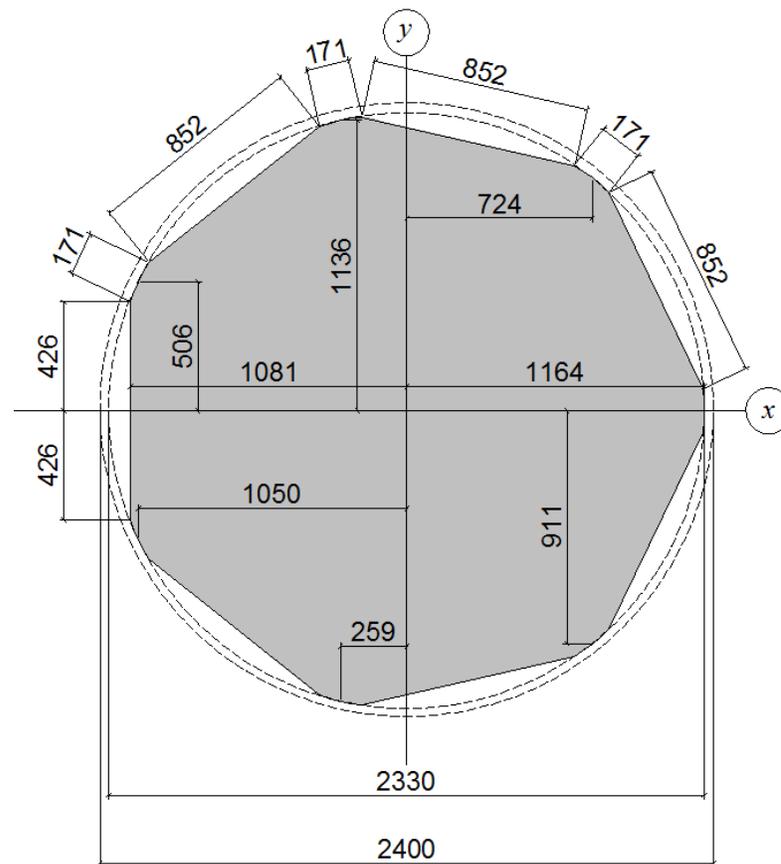


Figura 6.2: Planta heptagonal para estrutura em casca de forma livre (cm).

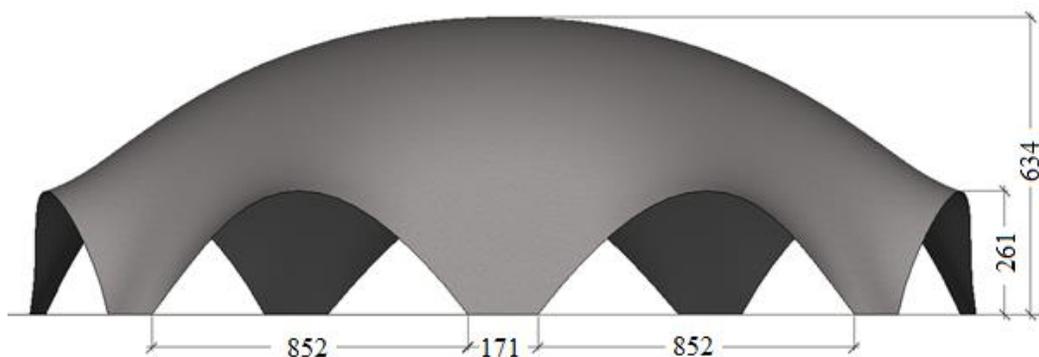


Figura 6.3: Vista lateral da estrutura com as principais dimensões (cm).

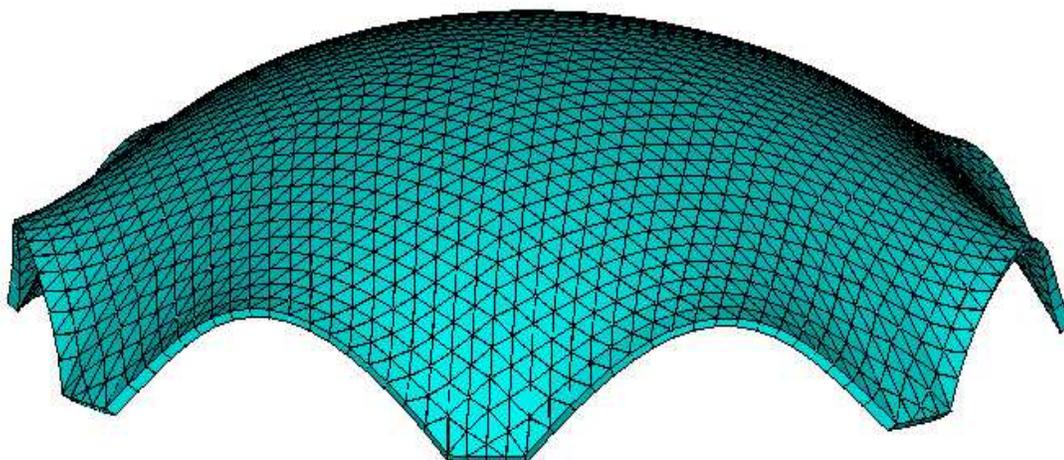


Figura 6.4: Malha de elementos finitos para análise da estrutura.

A análise numérica da estrutura de concreto com a geometria da casca de forma livre obtida por meio da membrana sob a ação do peso próprio foi realizada considerando um modelo adotado dentre quatro opções conforme apresentados na Tab. 6.1.1. Dentre os quatro modelos que apresentaram bom comportamento estrutural, o modelo 4 (espessura na base de 35 cm e no topo de 7,5 cm) é o que apresentou melhores resultados de acordo com o regime de membrana. Foi adotada a espessura mínima de 7,5 cm no topo da casca por questões construtivas. As tensões que agem na estrutura são praticamente todas de compressão e em valores muito menores que a resistência à compressão do concreto. Entretanto recomenda-se a utilização de duas camadas de armadura construtiva na estrutura.

Tab. 6.1.1: Modelos de estruturas em cascas de formas livres de planta heptagonal.

Modelo	Espessura na base (m)	Espessura no topo (m)	Tensão S11 máxima (MPa)	Flecha máxima (m)
1	0,40	0,12	0,029	0,259E-3
2	0,30	0,10	0,051	0,306E-3
3	0,30	0,08	0,030	0,263E-3
4	0,35	0,075	0,010	0,216E-3

A Figura 6.5, Figura 6.6 e Figura 6.7 apresentam as tensões na superfície média da casca (S11, S22 e S33). De acordo com as figuras, nota-se que as tensões no plano da estrutura são predominantemente de compressão, com valores muito inferiores a resistência à compressão do concreto. Os deslocamentos nodais na direção vertical podem ser observados na Figura 6.8.

Observando a representação vetorial das tensões principais (Figura 6.9 e Figura 6.10) da estrutura, nota-se que as tensões sempre apresentam trajetórias para os apoios, e aumentam de intensidade na base.

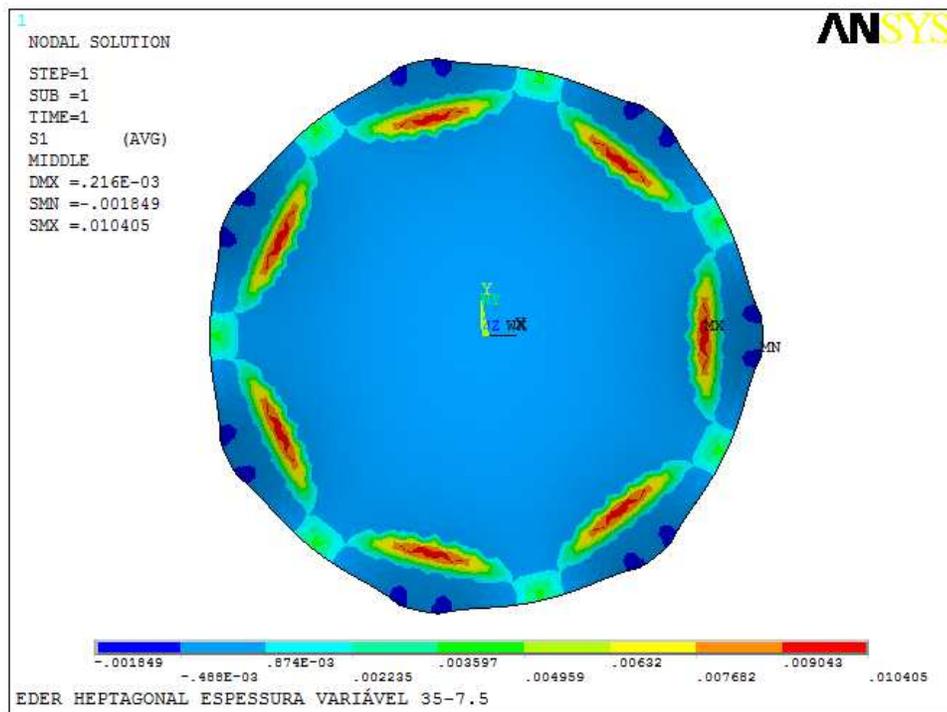


Figura 6.5: Tensões principais S11 para a superfície média da estrutura em casca de concreto armado de planta heptagonal com espessura variável de 0,35 m na base e 0,075 m no topo submetida ao peso próprio (MPa).

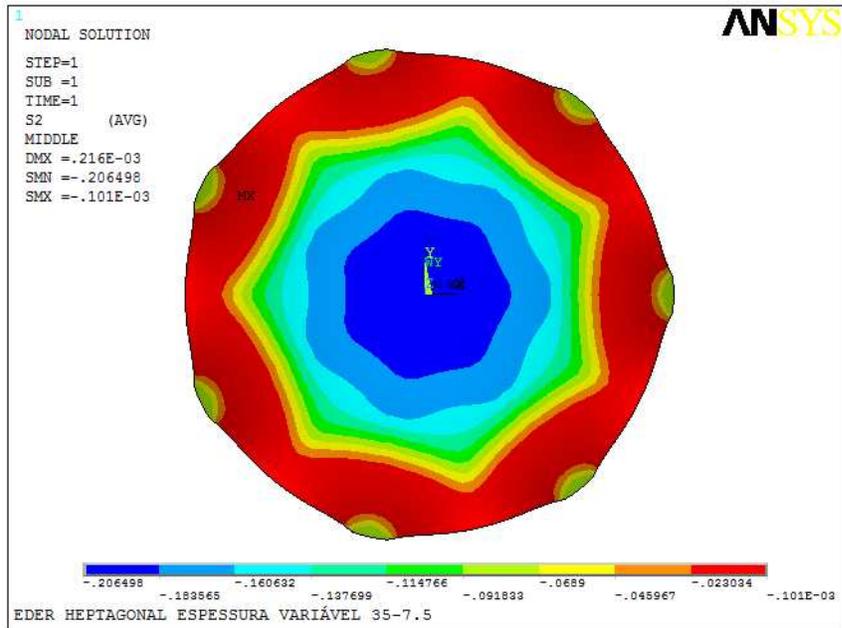


Figura 6.6: Tensões principais S22 para a superfície média da estrutura em casca de concreto armado de planta heptagonal com espessura variável de 0,35 m na base e 0,075 m no topo submetida ao peso próprio (MPa).

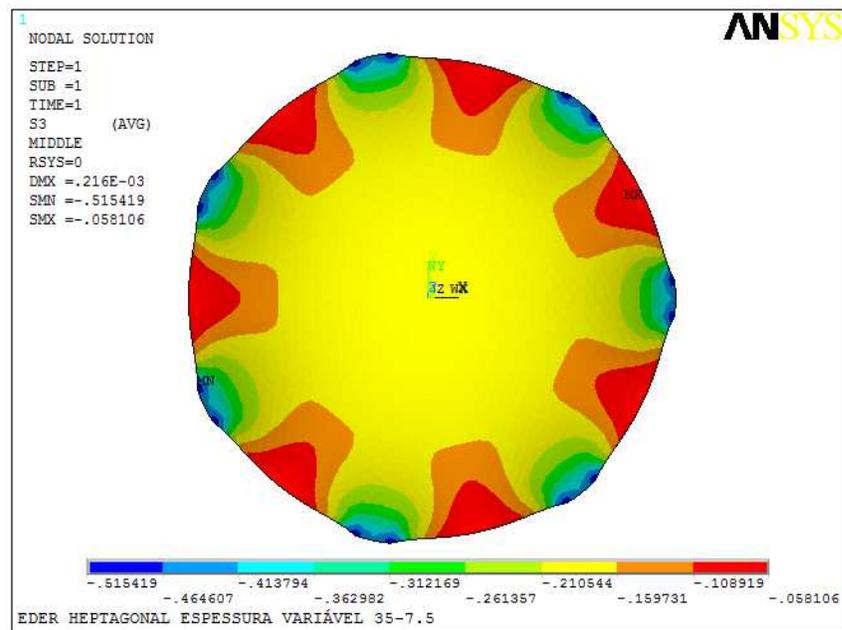


Figura 6.7: Tensões principais S33 para a superfície média da estrutura em casca de concreto armado de planta heptagonal com espessura variável de 0,35 m na base e 0,075 m no topo submetida ao peso próprio (MPa).

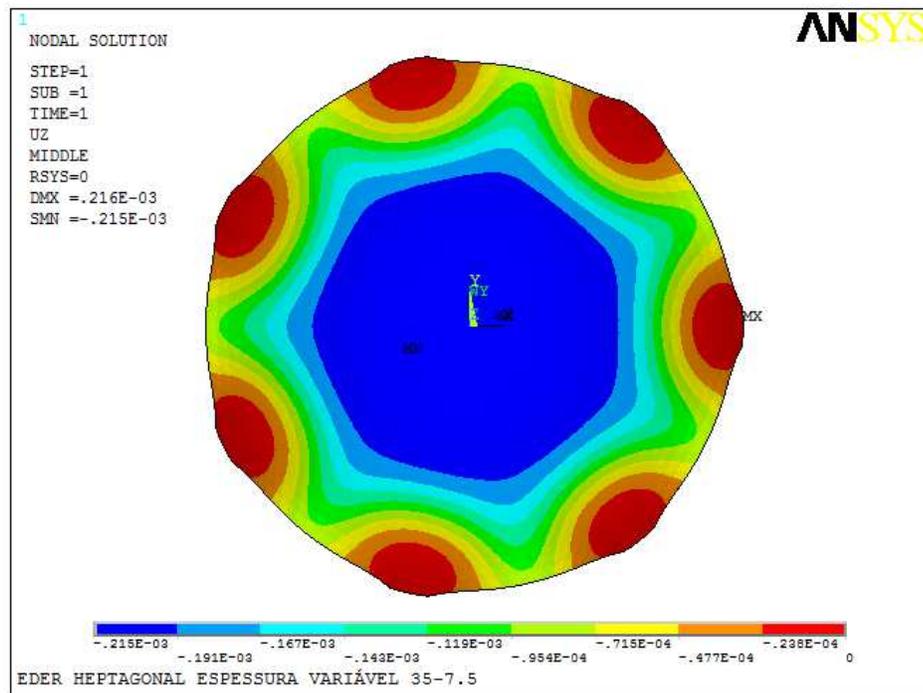


Figura 6.8: Deslocamento verticais da superfície média da estrutura com espessura variável ao longo da altura com de 0,35m na base e 0,075m no topo devidos ao peso próprio (m).

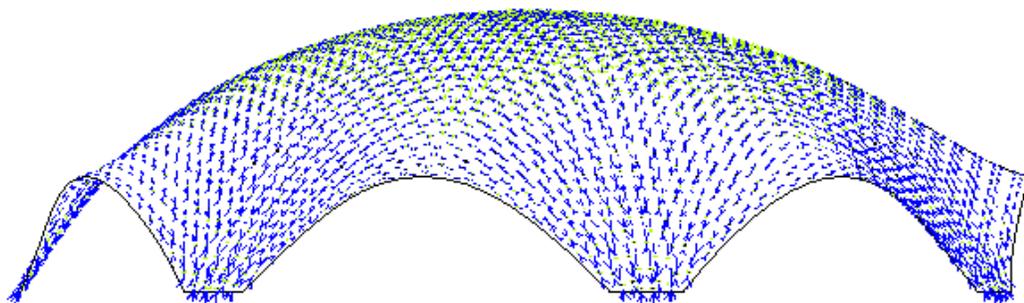


Figura 6.9: Representação vetorial das tensões principais da superfície média da estrutura (vista lateral).

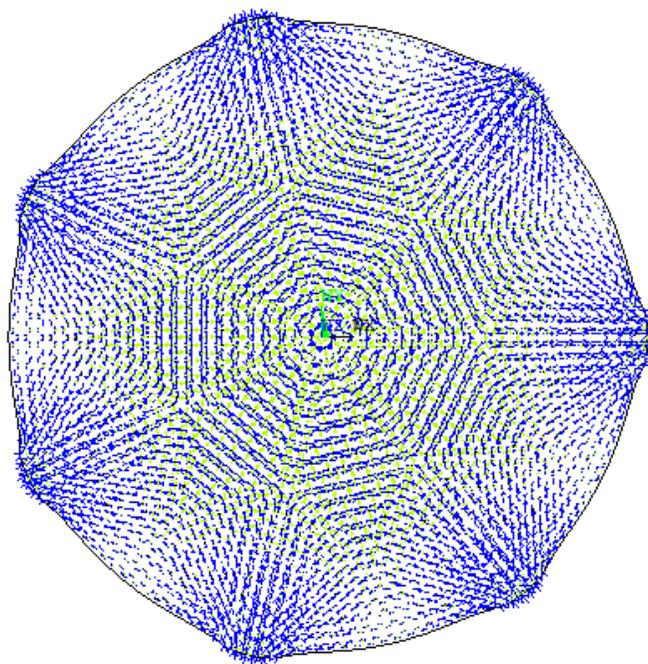


Figura 6.10: Representação vetorial das tensões principais da superfície média da estrutura (vista superior).

6.2 Análise Numérica de uma Estrutura em Casca de Forma Livre com Projeção Retangular Submetida ao Peso Próprio com Apoios Pontuais ao Longo das Bordas

Esse tipo de estrutura com planta retangular apoiada em pontos intermediários das maiores arestas é ideal para ser empregada como cobertura de centros poliesportivos. A Figura 6.11 apresenta a estrutura com projeção em planta de (3050 cm x 1800 cm) com apoios intermediários ao longo das maiores arestas, espaçados de 10 metros entre eixos, com altura máxima de 464 centímetros no centro da estrutura. No centro do maior vão, a altura é de 418 centímetros, e 216 centímetros no centro do menor vão. Variou-se a espessura da estrutura de 20 centímetros na base a 12 centímetros no topo.

Os deslocamentos nodais na direção vertical da estrutura podem ser visualizados na Figura 6.12 com valores inferiores a 0,07 centímetros. As tensões S11 apresentadas na Figura 6.13 são desprezíveis para praticamente toda a superfície da estrutura. As figuras Figura 6.14 e Figura 6.15 indicam a predominância de esforços de compressão.

A Figura 6.16 mostra a representação vetorial das tensões principais com concentração de tensões apenas nas regiões dos apoios, conformando o bom comportamento estrutural da casca de forma livre.

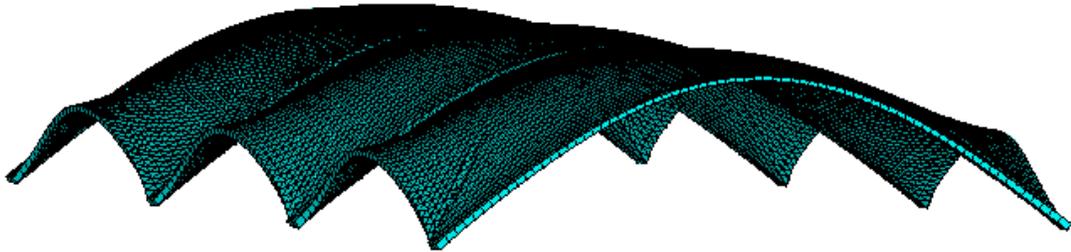


Figura 6.11: Malha da estrutura em casca de forma livre com apoios intermediários.

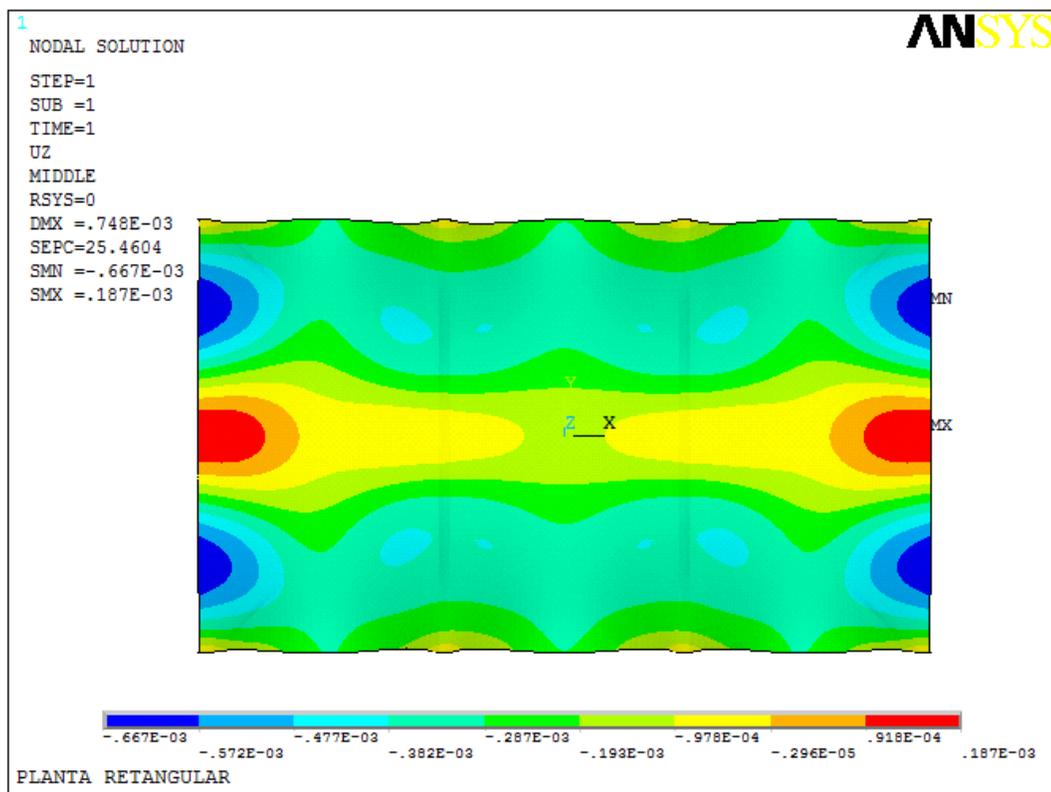


Figura 6.12: Deslocamentos nodais na direção vertical (m).

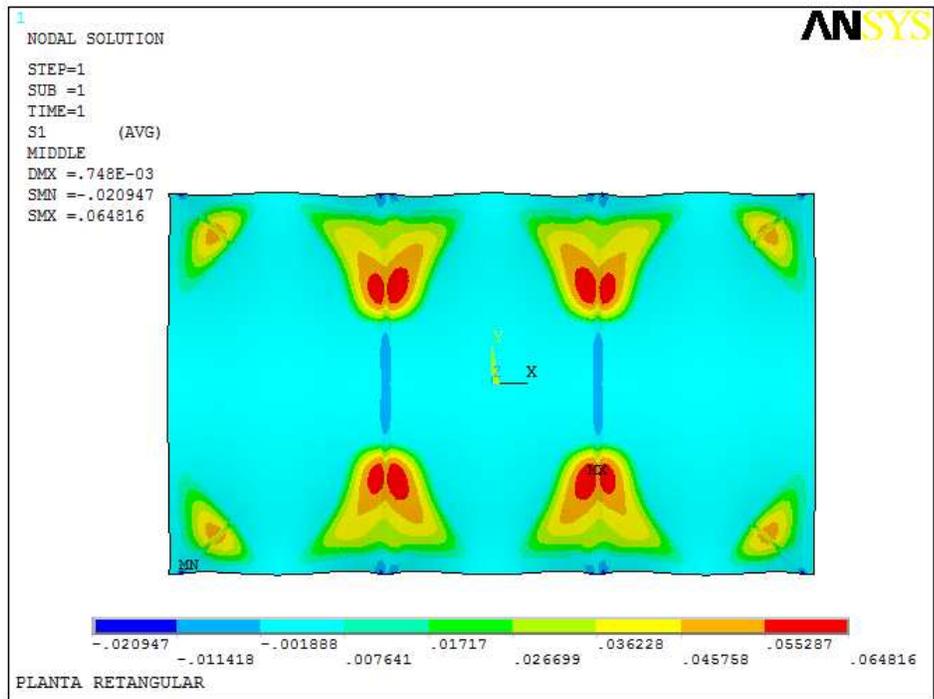


Figura 6.13: Tensão Principal S11 (MPa).

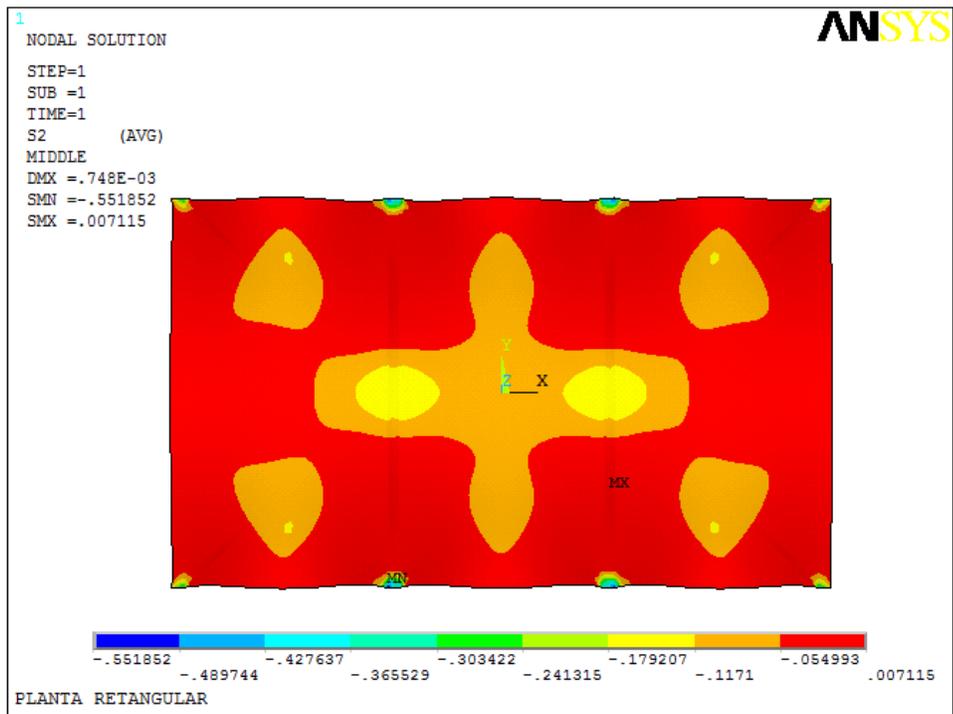


Figura 6.14: Tensão principal S22 (MPa).

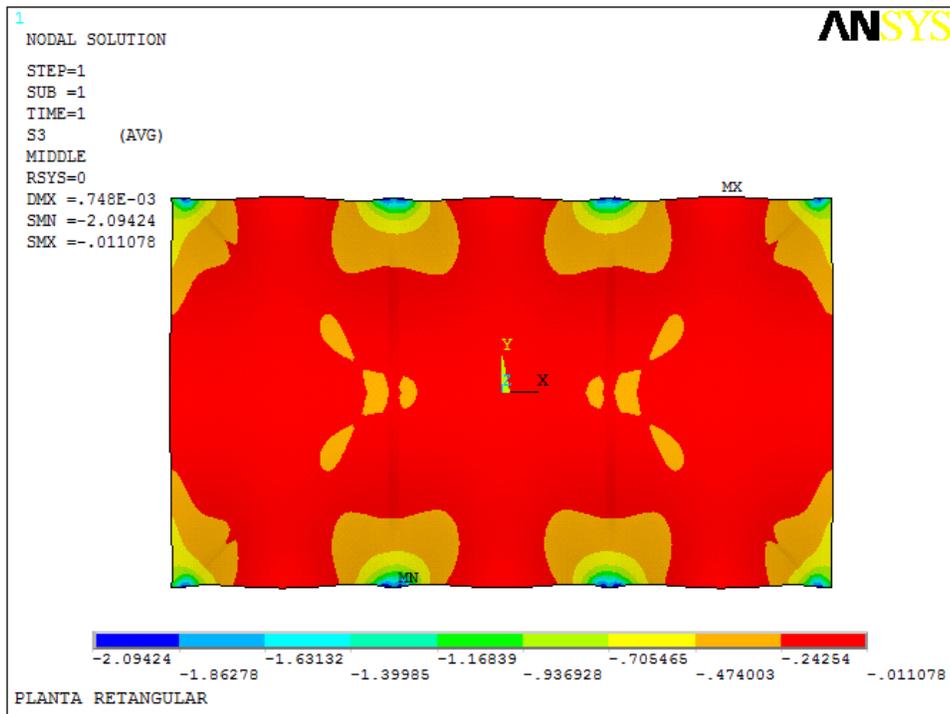


Figura 6.15: Tensão Principal S33 (MPa).

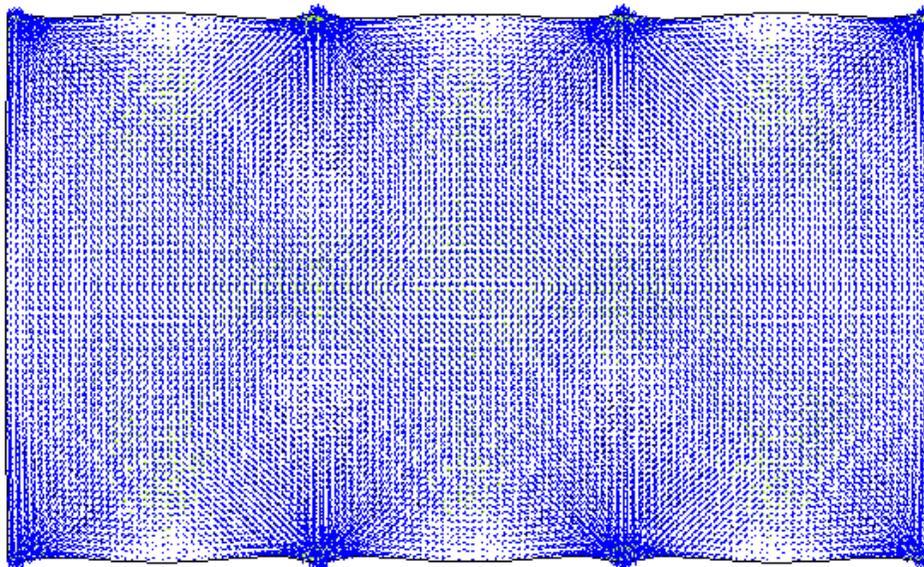


Figura 6.16: Representação vetorial das tensões principais (vista superior).

6.3 Análise Numérica de Estruturas em Cascas de Formas Analíticas com Projeções Heptagonais Submetidas ao Peso Próprio

As estruturas analisadas possuem as mesmas dimensões em planta da estrutura de forma livre com projeção heptagonal já apresentada no item 6.1. Foram analisadas estruturas composta por paraboloides hiperbólicos, paraboloides elípticos e cilindros parabólicos. Os resultados obtidos da análise numérica estão apresentados nos itens 6.3.1; 6.3.2; 6.3.3 dessa seção.

6.3.1 Estrutura em Casca de Forma Analítica Composta por Paraboloides Hiperbólicos

Para a estrutura em casca de forma analítica composta por paraboloides hiperbólicos com projeção heptagonal submetida ao peso próprio adotou-se a altura máxima nas arestas da estrutura de seis metros e três metros no centro da casca conforme apresentado na Figura 6.17. A espessura da casca adotada foi de 35 centímetros na base e 8 centímetros no topo, essa variação pode ser visualizada na malha da Figura 6.18.

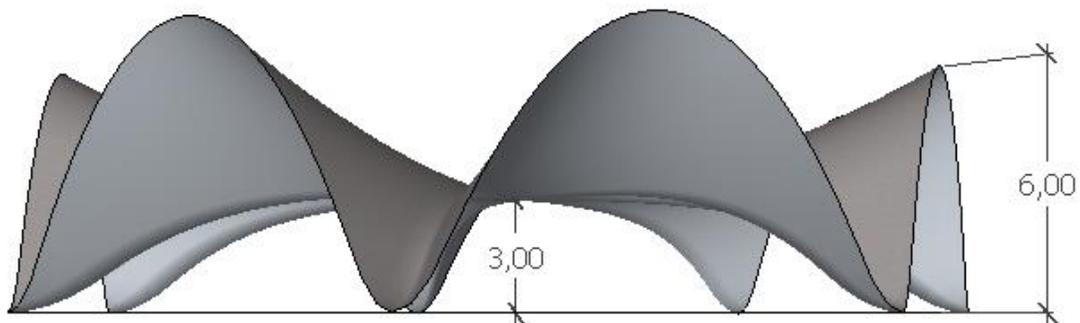


Figura 6.17: Forma tridimensional da estrutura em casca com projeção heptagonal composta por paraboloides hiperbólicos (m).

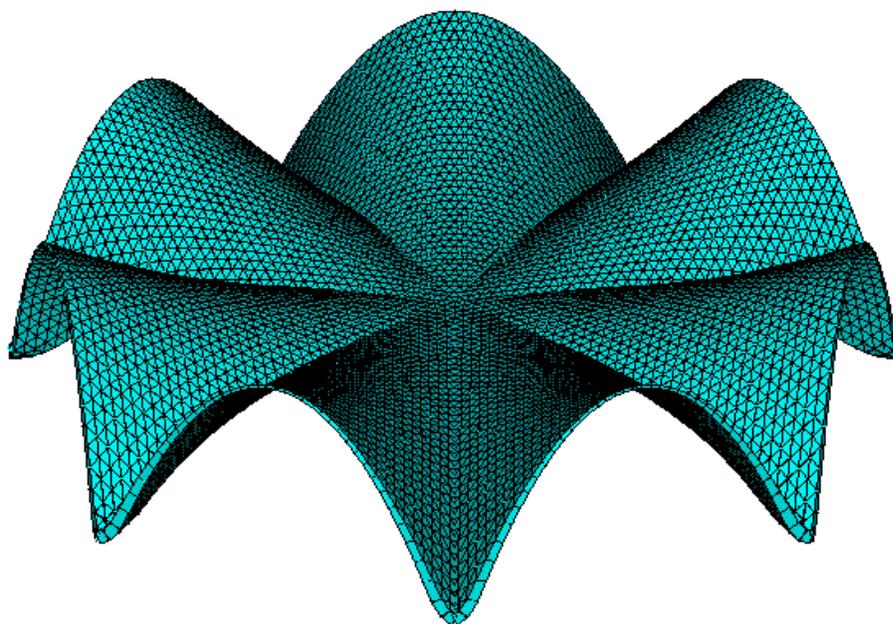


Figura 6.18: Malha da estrutura em casca composta por paraboloides hiperbólicos.

Os resultados para as tensões principais e deslocamentos são apresentados nas Figuras 6.13 a 6.18. A Figura 6.19 mostra que os deslocamentos nodais verticais da estrutura não passam de 3.31 milímetros. De acordo com a Figura 6.20, as tensões perpendiculares ao plano S11 apresentam valores baixos na maior parte da estrutura. Porém em algumas regiões são da mesma ordem de grandeza das demais tensões principais S22 e S33, desse modo o efeito da flexão não pode ser negligenciado e deve ser levado em conta na análise e dimensionamento da estrutura.

Verificando a representação vetorial das tensões na estrutura (Figura 6.23 e Figura 6.24), observa-se a concentração de tensões nos vales entre dois paraboloides, com aparecimento, próximo à região dos apoios, de tensões perpendiculares ao plano caracterizando flexão. Entretanto, para a maior parte da superfície da estrutura as tensões S11 são bem próximas de zero e as demais tensões são de compressão.

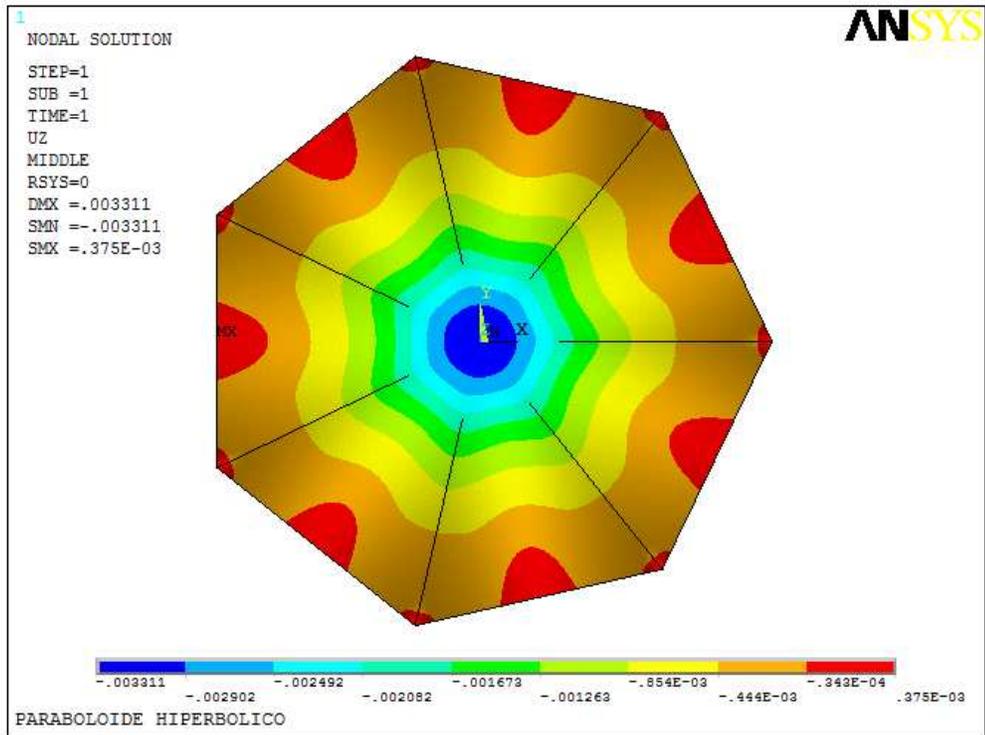


Figura 6.19: Deslocamentos nodais na direção vertical (m).

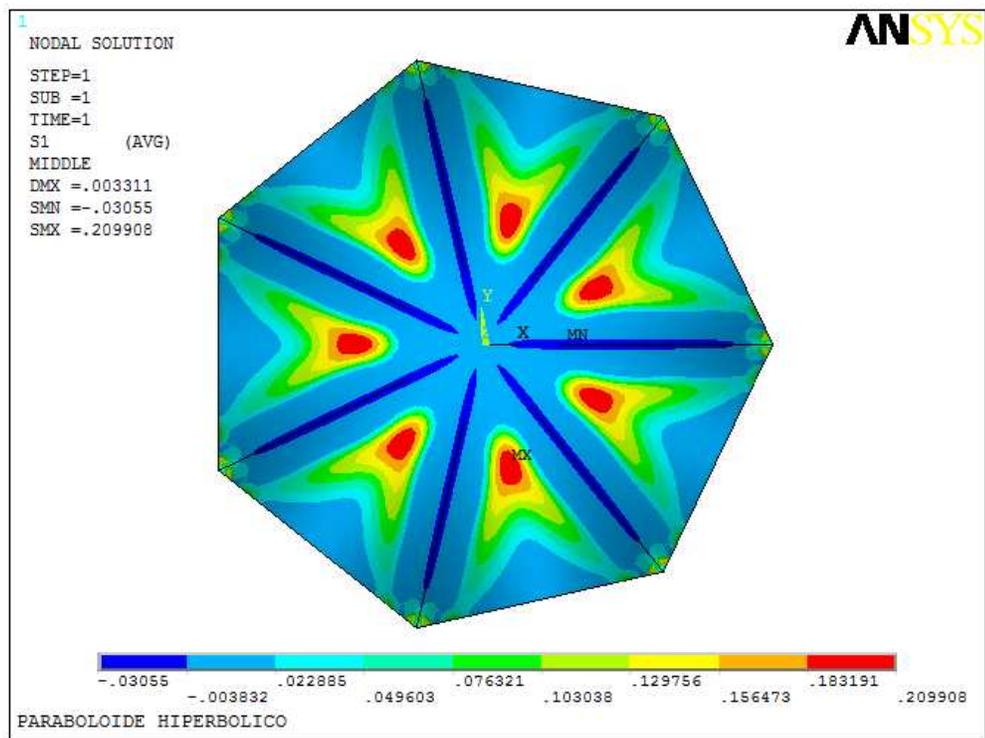


Figura 6.20: Tensão principal S11 na superfície média (MPa).

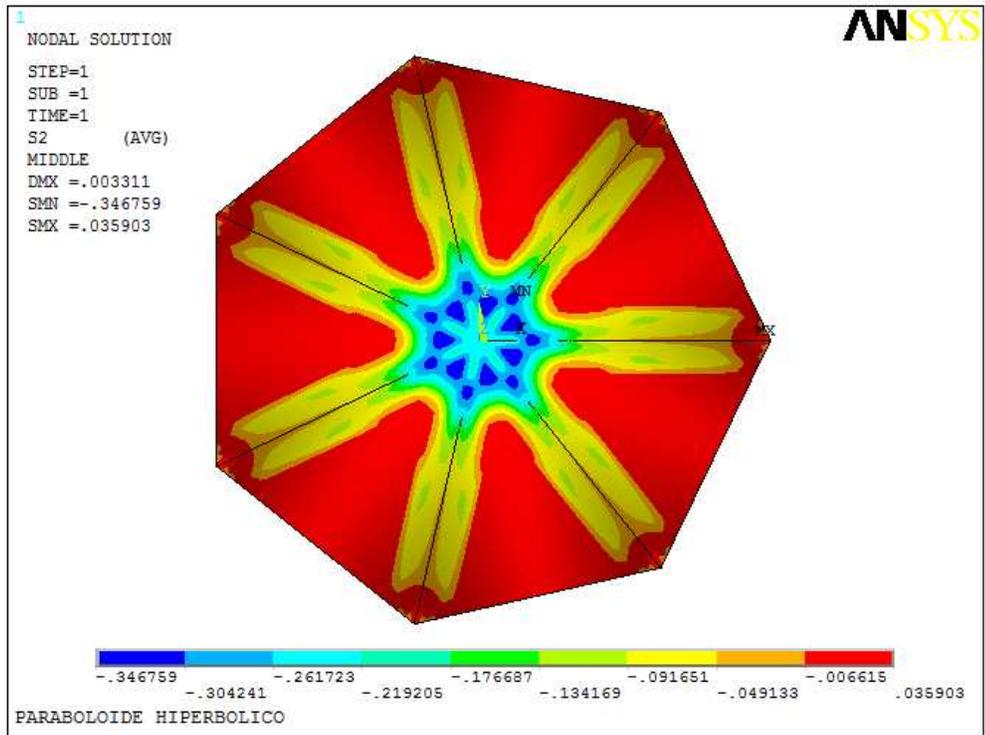


Figura 6.21: Tensão principal S22 na superfície média (MPa).

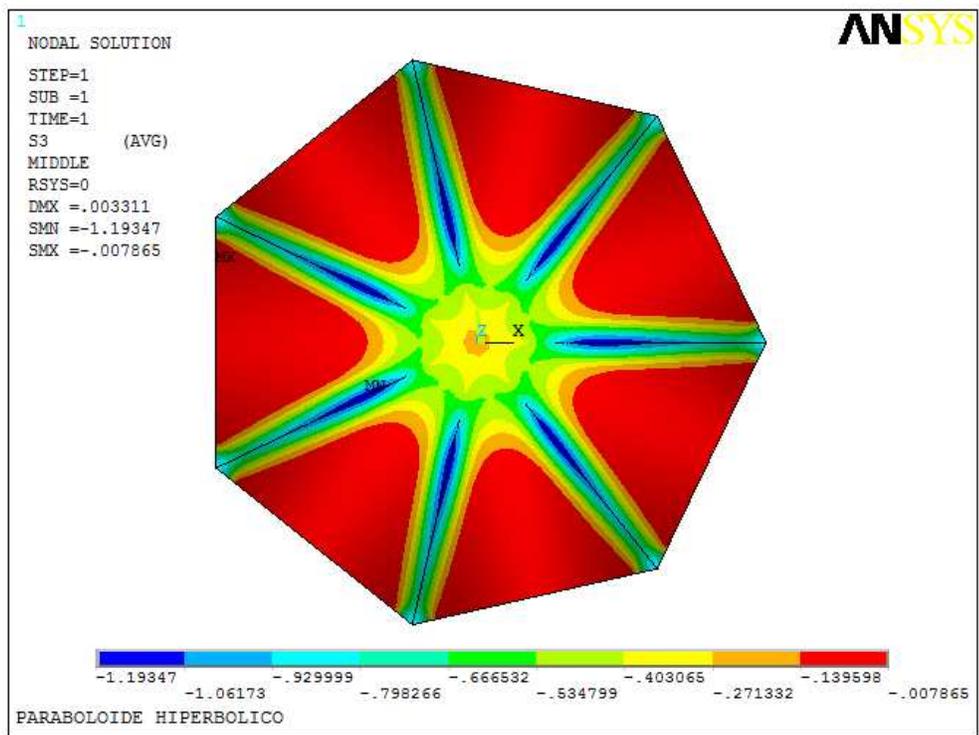


Figura 6.22: Tensão principal S33 na superfície média (MPa).

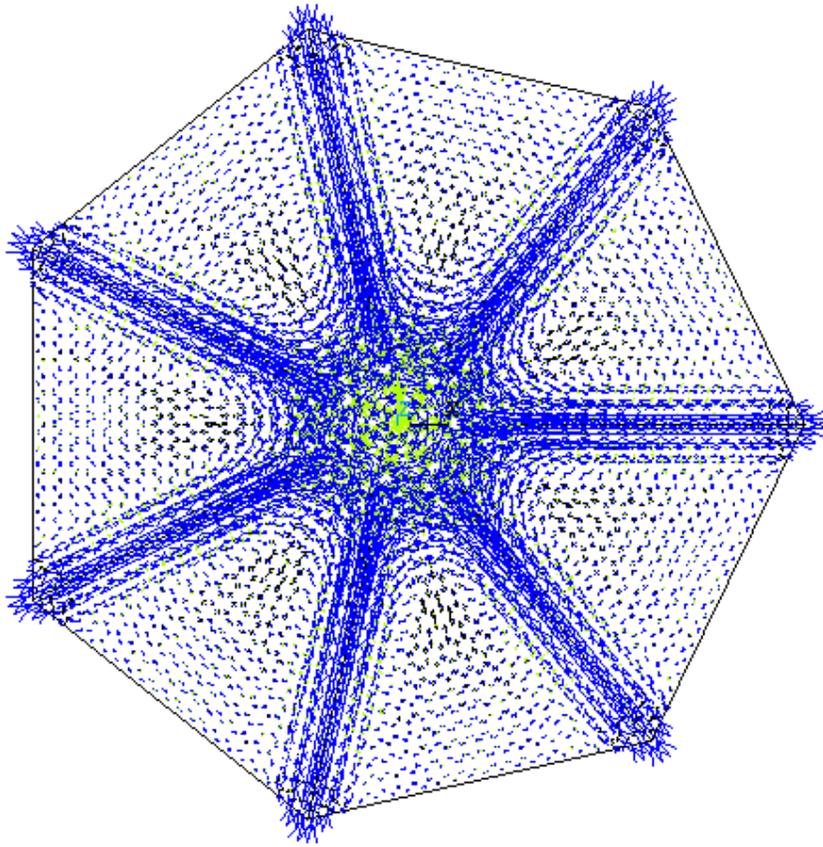


Figura 6.23: Representação vetorial das tensões principais (vista em planta).

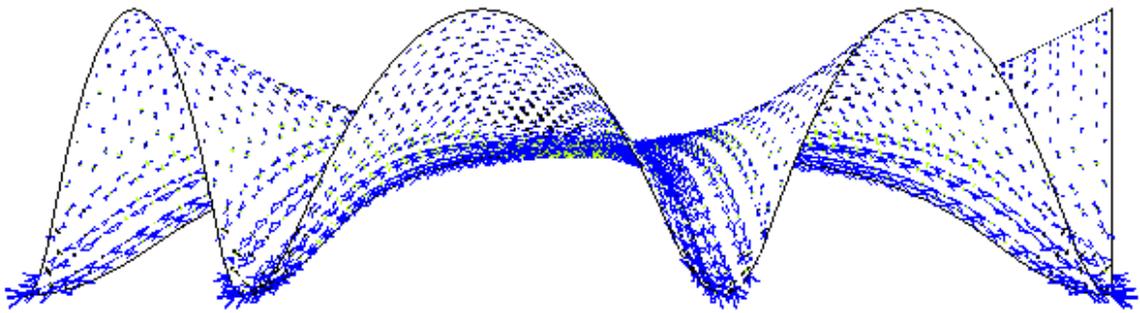


Figura 6.24: Representação vetorial das tensões principais (vista lateral).

6.3.2 Estrutura em Casca de Forma Analítica Composta por Paraboloides Elípticos

Para a estrutura em casca de forma analítica composta por paraboloides elípticos com projeção heptagonal submetida ao peso próprio foi adotada altura máxima nas aberturas laterais de três metros e seis metros no centro da estrutura. Variou-se a espessura linearmente de 35 centímetros na base e 8 centímetros no topo da estrutura. A malha para análise numérica é apresentada na Figura 6.25.

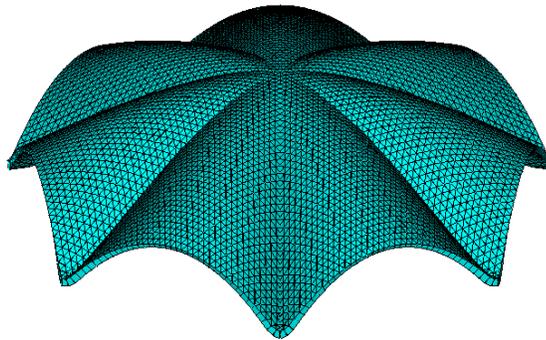


Figura 6.25: Malha para estrutura em casca composta por paraboloides elípticos.

O deslocamento nodal na direção vertical no centro da estrutura é 0,203 centímetros no sentido oposto ao da gravidade (Figura 6.26). Isso se deve ao fato das regiões entre paraboloides elípticos consecutivos, que são como arcos, se deformem devido a flexão e transmitem as tensões aos apoios e a extremidade superior da estrutura. Como os apoios são fixos, a extremidade superior da estrutura se desloca para cima.

Devido a deformação da estrutura, a flexão é mais acentuada que para a casca em paraboloides hiperbólicos, com valores de S_{11} próximos de 0,80 MPa (Figura 6.27) contra o máximo de 0,21 MPa da estrutura anterior.

Comparando os valores das tensões principais, verifica-se que na superfície média as tensões S_{11} apresentam valores próximos das tensões S_{22} (Figura 6.28) e S_{33} (Figura 6.29). Com isso os efeitos de flexão devem ser obrigatoriamente considerados no dimensionamento da estrutura. De acordo com a Figura 6.30 e Figura 6.31, pode-se observar que há concentração de tensões no encontro dos paraboloides elípticos e nas regiões dos apoios.

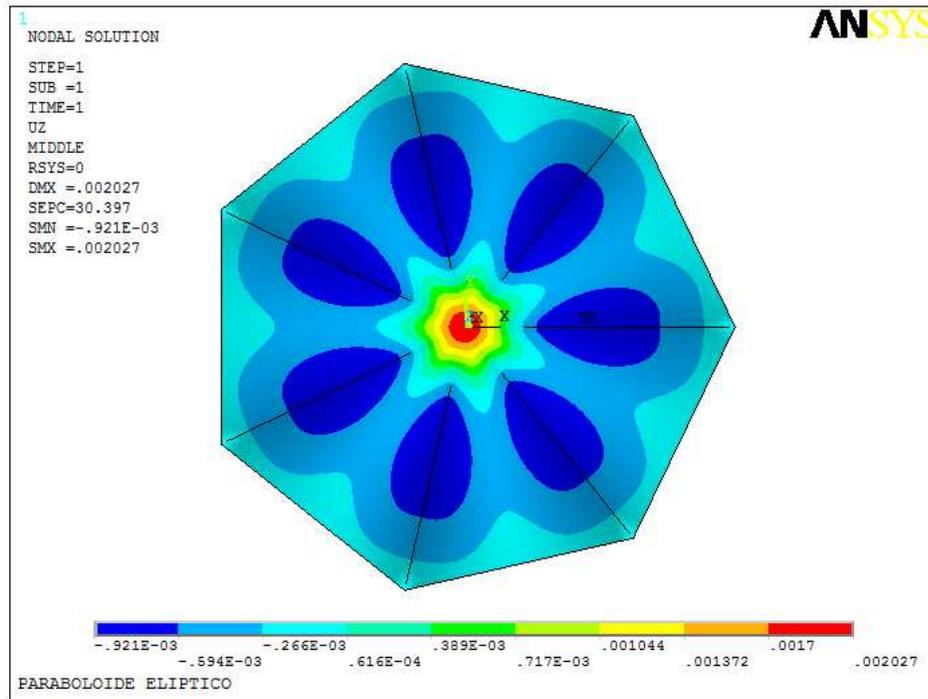


Figura 6.26: Deslocamentos nodais na direção vertical (m).

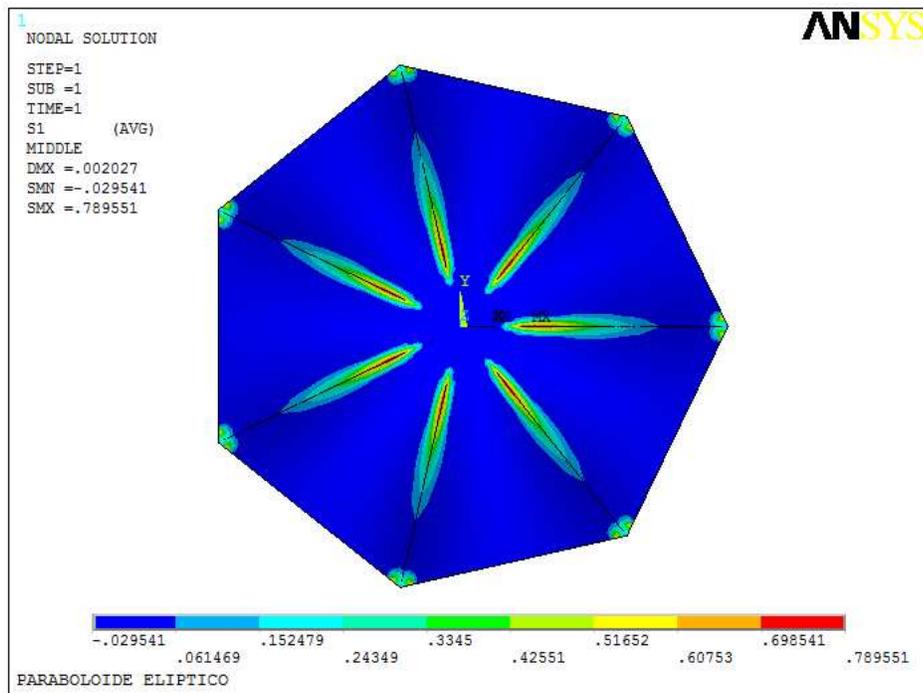


Figura 6.27: Tensão principal S11 (MPa).

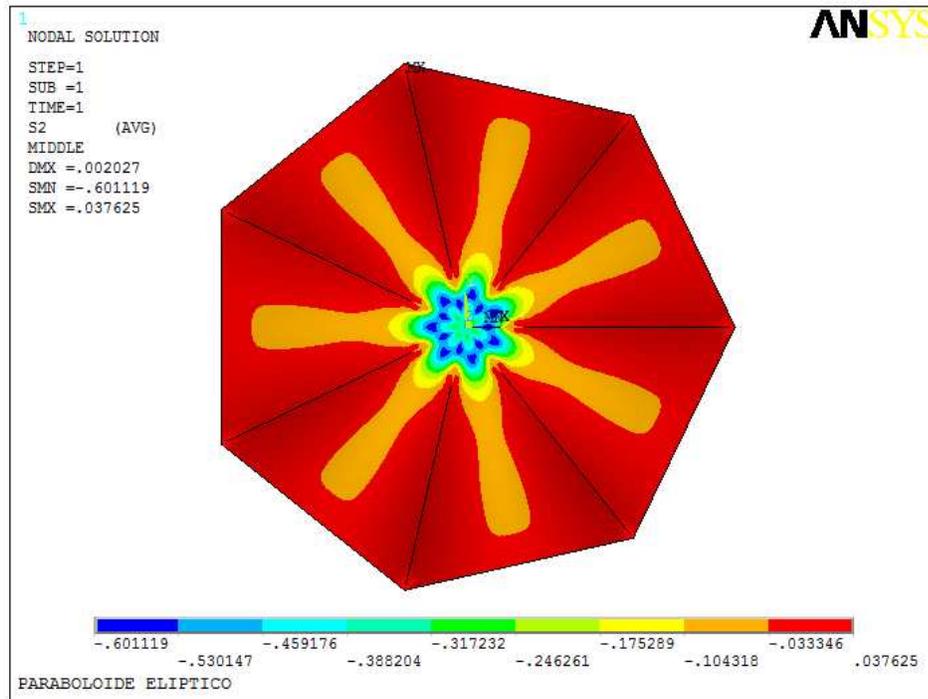


Figura 6.28: Tensão principal S22 (MPa).

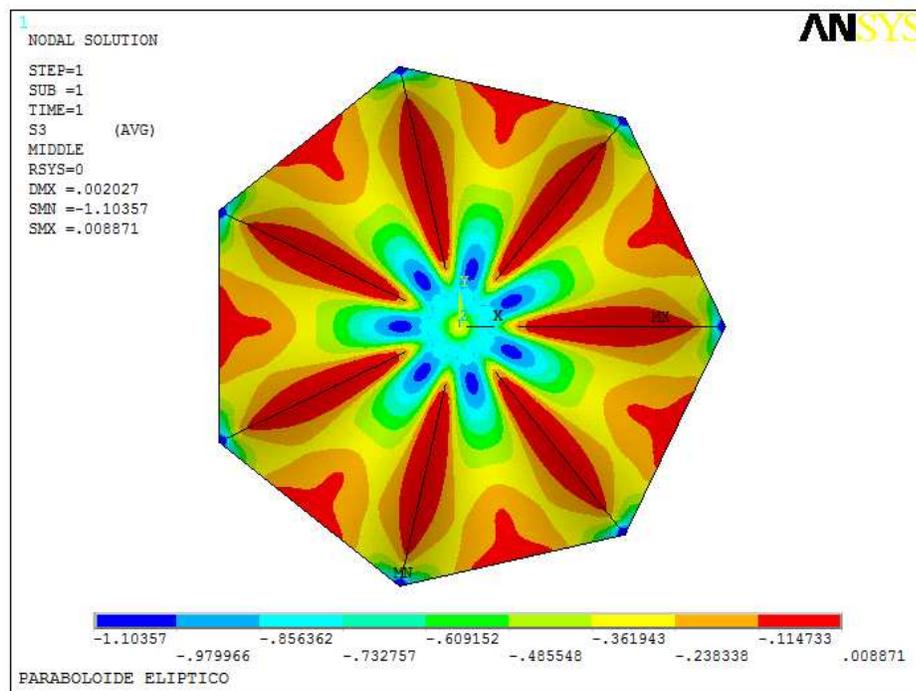


Figura 6.29: Tensão Principal S33 (MPa).

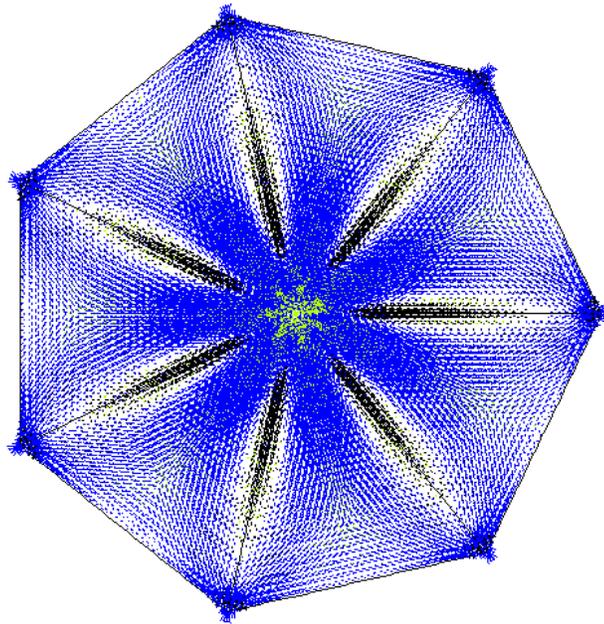


Figura 6.30: Representação vetorial das tensões principais (vista superior).

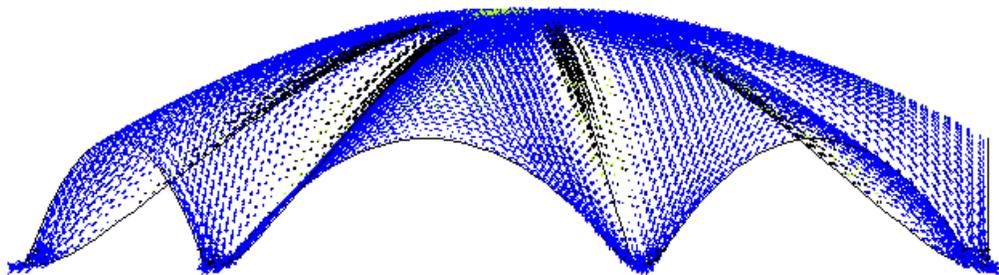


Figura 6.31: Representação vetorial das tensões principais (vista lateral).

6.3.3 Estrutura em Casca de Forma Analítica Composta por Cilindros Parabólicos

Para a estrutura em casca de forma analítica composta por cilindros parabólicos com projeção heptagonal submetida ao peso próprio optou-se por analisar a estrutura com 450 centímetros de altura no centro e nas bordas laterais entre os apoios e espessura varável de 35 centímetros na base e 8 centímetros no topo (Figura 6.32).

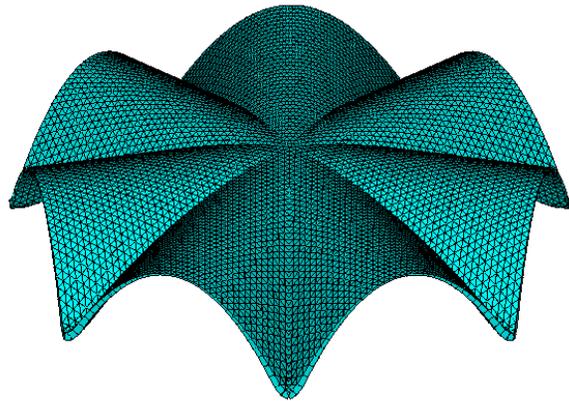


Figura 6.32: Malha da estrutura composta por cilindros parabólicos.

Com a análise numérica dessa estrutura constatou-se o bom comportamento estrutural. Ocorre o mesmo fenômeno descrito na casca com composições de paraboloides elípticos de um pequeno deslocamento no centro da casca para cima (oposto à ação da gravidade), entretanto os valores são bem pequenos. Assim, se observa tensões de tração apenas nas regiões dos apoios, com predominância de esforços de compressão na maior parte da casca.

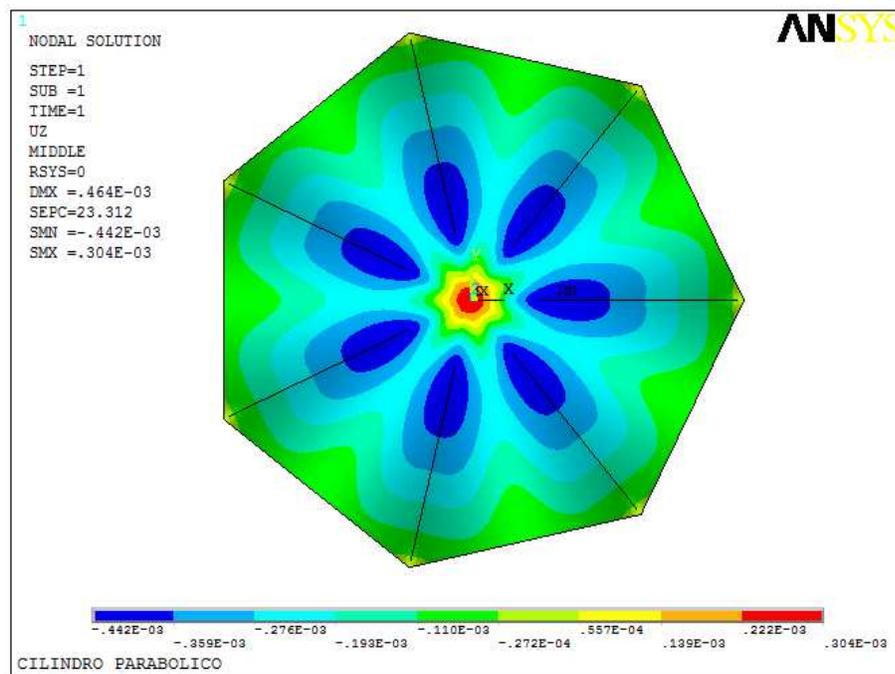


Figura 6.33: Deslocamentos nodas na direção vertical (m).

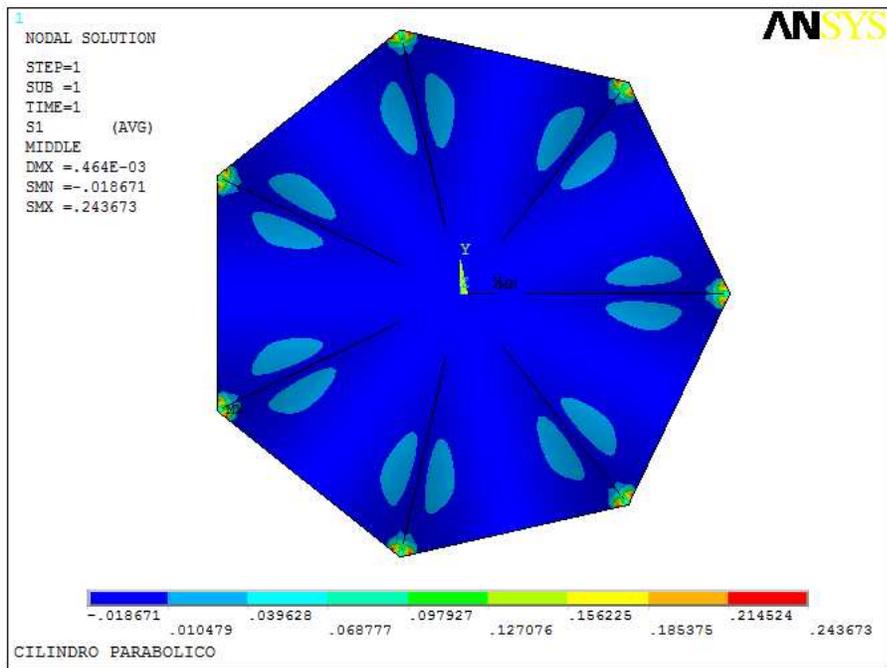


Figura 6.34: Tensão principal S11 (MPa).

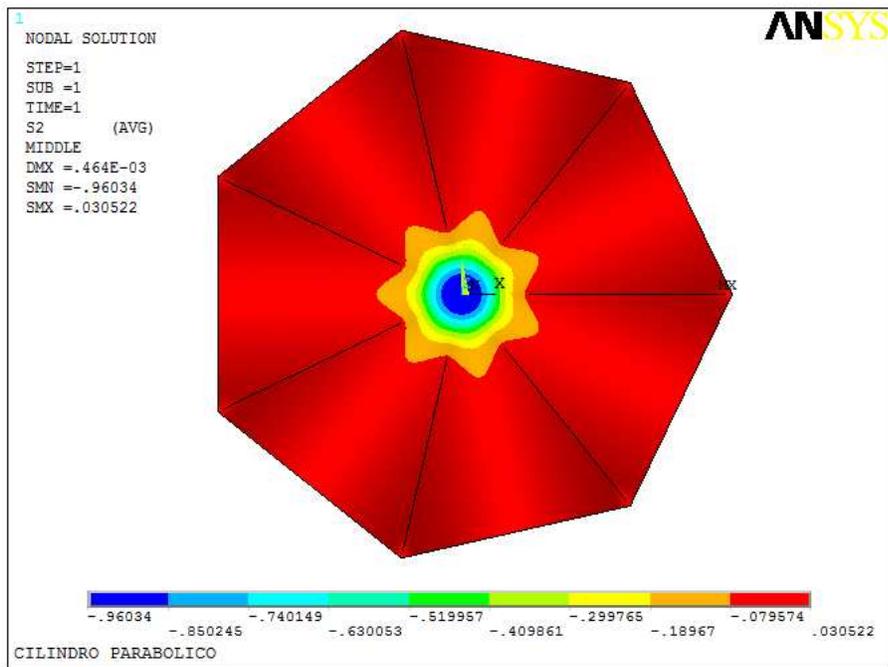


Figura 6.35: Tensão principal S22 (MPa).

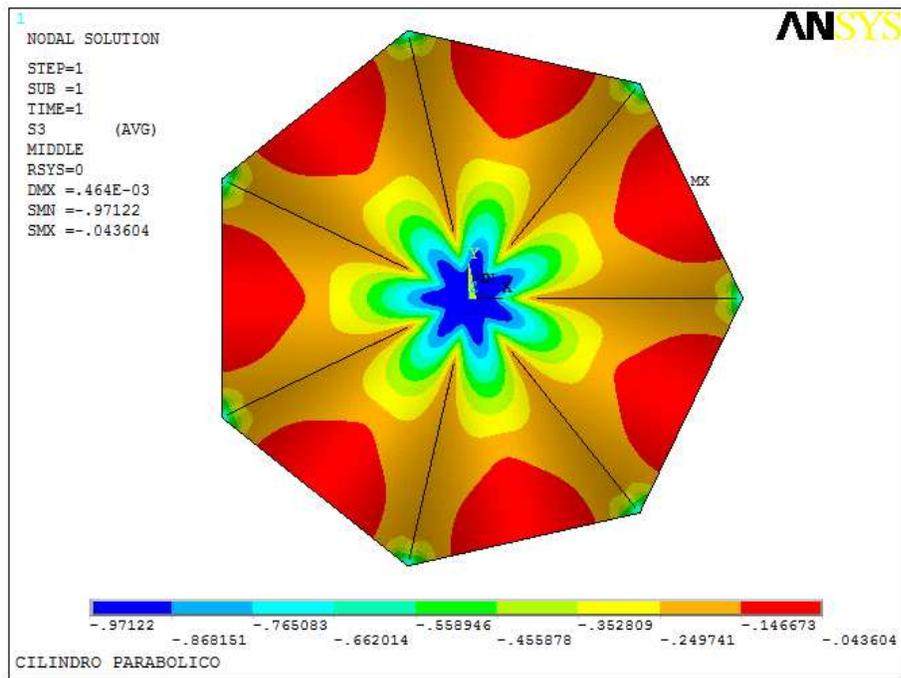


Figura 6.36: Tensão principal S33 (MPa).

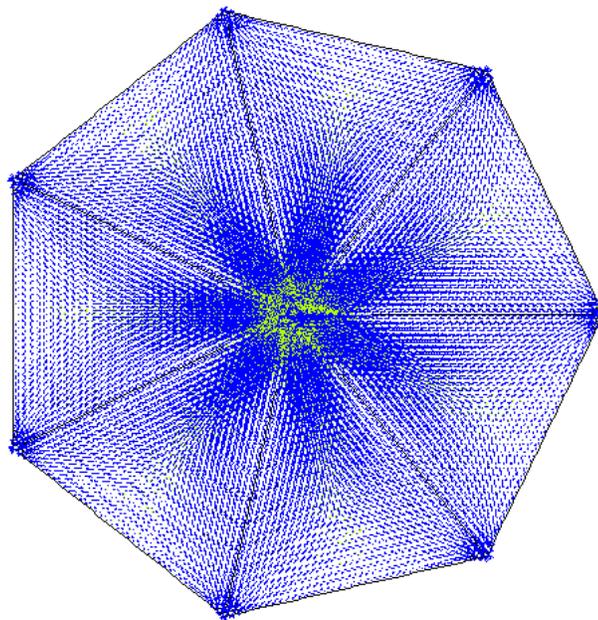


Figura 6.37: Representação vetorial das tensões principais (vista superior).

7 CONCLUSÕES

Esse trabalho apresenta formulações para pré-processamento e geração de estruturas em cascas de formas livres e analíticas de plantas poligonais regulares. Conforme apresentado, há uma divisão dos resultados em duas fases. A primeira fase é a obtenção da malha plana de elementos finitos para plantas poligonais quaisquer, e também de plantas quadriláteras com arestas retas e/ou parabólicas. A segunda fase diz respeito à obtenção das formas tridimensionais das estruturas em cascas de formas livres ou analíticas com o emprego das malhas planas inicialmente geradas.

Em relação às superfícies planas, foram apresentadas as formulações necessárias ao desenvolvimento das malhas de elementos finitos abordando o cálculo das coordenadas nodais, montagem da matriz de incidência nodal dos elementos e ajustes finais das malhas nas regiões dos apoios.

Para as plantas poligonais regulares foram desenvolvidas formulações para determinação das coordenadas nodais explorando a simetria em torno do ponto central do polígono. Foi mostrado que, ao dividir um polígono regular qualquer em domínios triangulares, é suficiente determinar as coordenadas nodais apenas para um domínio triangular e as coordenadas dos demais pontos nodais dos outros domínios podem ser obtidas a partir do domínio inicial.

Mostrou-se também que, com apenas um algoritmo, é possível gerar as malhas de elementos finitos para qualquer polígono regular e aplicando a técnica apresentada para suavização dos vértices, podem-se obter malhas para plantas circulares.

Para as plantas quadriláteras de arestas retas e/ou parabólicas, apresentou-se um processo de geração de malhas baseado no processo de mapeamento transfinito com projetores lofting. Assim, é possível a geração de diversas estruturas com diferentes combinações de bordas retas e/ou parabólicas.

A segunda fase contemplou a geração de formas tridimensionais de estruturas em cascas de forma livre e analíticas, e posterior análise estrutural das formas geradas por meio do software ANSYS.

Para as estruturas em cascas de formas analíticas foram apresentadas formulações para a determinação das coordenadas espaciais em função das coordenadas no plano para geração de dois tipos de estrutura em casca de forma analítica.

Com o auxílio de retas diretrizes e geratrizes, foi possível determinar a superfície média de estruturas em forma de paraboloides hiperbólicos para as plantas quadriláteras com arestas retas e/ou parabólicas.

Através de parábolas diretrizes e geratrizes, mostrou-se a formulação para obtenção das formas tridimensionais das estruturas para as plantas poligonais. Nesse processo foram obtidas estruturas formadas por paraboloides hiperbólicos, paraboloides elípticos e cilindros parabólicos.

Também foram geradas estruturas em cascas de formas livres, através da simulação computacional de analogias físicas utilizando o programa computacional desenvolvido por Vizotto (1993) e o ANSYS. Variando-se o tipo de planta, a posição e número de apoios, e a densidade da membrana (ou pressão), foi possível gerar um grande número de estruturas em cascas de formas livres. As imagens apresentadas comprovam os resultados obtidos.

Após a apresentação da geração das formas tridimensionais das estruturas em cascas de formas livres foi possível, através da comparação entre as formas espaciais obtidas com as malhas planas desenvolvida nesse trabalho e as malhas geradas com o GID 10.0.4, confirmar a empregabilidade das malhas planas desenvolvidas. Verificou-se a semelhança entre as formas tridimensionais geradas a partir das duas malhas planas.

Com as formas tridimensionais geradas, foram realizadas as análises numéricas para verificar o comportamento estrutural das cascas utilizando o software ANSYS. Todas as estruturas em cascas de formas livres e de formas analíticas apresentaram bom comportamento estrutural, entretanto as de formas livres tiveram resultados das tensões principais um pouco melhores.

Esse trabalho apresentou uma contribuição na geração e pré-processamento de estruturas em cascas de formas livres e analíticas com a finalidade de facilitar a geração e análise computacional dessas estruturas.

Os programas desenvolvidos nesse trabalho geram as malhas de elementos finitos em arquivos neutros e necessita de outro software para visualização das mesmas e deste modo, não permite a alteração de dados geométricos da malha após a geração. Para trabalho futuros, seria

interessante o desenvolvimento de interface gráfica e mecanismos interativos de pós-processamento das malhas planas de elementos finitos.

Para as estruturas em cascas de formas analíticas e plantas poligonais, esse trabalho apresentou a formulação para a determinação da forma tridimensional a partir de parábolas diretrizes e geratrizes, para trabalhos futuros, seria interessante a utilização de outras curvas, em substituição às parábolas e posterior comparação do estado de tensões e deformações das estruturas em cascas obtidas.

Para as estruturas em cascas de forma livre, foram apresentados apenas uma pequena amostra de formas geradas, diversas configurações de apoios podem ser utilizadas para a obtenção de formas diferentes das apresentadas. Com isso fica em aberto para futuros trabalhos a exploração de novas formas tridimensionais de estruturas em cascas de formas livres.

Ainda sobre as estruturas em cascas de formas livres, esse trabalho propôs a integração entre o pré-processamento das malhas e a geração da forma tridimensional com o programa desenvolvido por Vizotto (1993). Com isso abre-se a possibilidade da geração de um sistema que integre os programas de pré-processamento e geração da forma tridimensional explorando as ferramentas de interface gráfica disponíveis em diversas linguagens de programação.

REFERÊNCIAS

- ANSYS. **Ansys Program**, version 13: Finite Element Software. [S.I.]: Ansys Incorporation, 2010.
- ASSAN, A. E. **Método dos Elementos Finitos – primeiros passos**. 1 ed. Campinas: Editora da Unicamp, 1999.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro. 2007.
- BATISTA, H. F. V. **Geração de malhas não-estruturadas tetraédricas utilizando um método de avanço de fronteira**. 2005, 98p. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro.
- BECKER, A.; CAREY, G. F.; ODEN, J. T. **Finite Elements: An Introduction**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1981.
- BILLINGTON, D. P. **Thin shell concrete structures**. 2 ed. New York: Mc Graw-Hill, 1982.
- BILLINGTON, D.; MOREYRA GARLOCK, M. **Structural Art and the Example of Félix Candela**. J. Struct. Eng., 136(4): 339–342, 2010.
- BITTENCOURT, M. L. **Análise Computacional de Estruturas: com aplicação do Método dos Elementos Finitos**. Campinas: Editora da Unicamp, 2010.
- BRANDÃO, H. J. **Análise experimental e numérica de cascas de concreto de ultra-alto desempenho reforçado com fibras**. 2005, 144p. Tese de Doutorado – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- CHAPELLE, D.; BATHE, K. J. **The finite element analysis of shells – fundamentals**. 1 ed. Berlin: Springer, 2003.
- COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 3 ed. New York: John Wiley & Sons, 1989.
- CUPTA, K. K.; MEEK, J. L. **A brief history of the beginning of the Finite Element Method**. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 39:3761-3774, 1996.

DRAPER, P.; GARLOCK, M.; BILLINGTON, D. **Finite-Element Analysis of Félix Candela's Chapel of Lomas de Cuernavaca.** Journal Of Architecture and Engineering, 14(2): 47–52, 2008.

DUQUE, C. **Félix Candela, La conquista de la Esbeltez.** Exposición Conmemorativa. Sala de las Bóvedas. Edição impressa: Madri, 2010.

FIDALGO, A. M.; VIZOTTO, I. **Análise Teórica e Computacional de Estrutura em Casca de Forma Livre de Planta Pentagonal.** In: XXXV Jornadas Sul Americanas de Engenharia Estrutural, 2012, Rio de Janeiro. XXXV Jornadas Sul Americanas de Engenharia Estrutural - Infraestrutura e Desenvolvimento, 2012.

GARLOCK, M.; BILLINGTON, D. **Félix Candela and the Origins of Inspiration.** Structures Congress: 2309-2319, 2011.

GAVIN, S. **Architecture: George Gilbert Scott described the dome as 'the noblest of all forms', and it appears as a powerful symbol in secular and religious architecture throughout history. On the island of Malta, however, the craze for dome-building reached astonishing heights.** Apollo. 175(595):74, 2012.

GID. **GID Reference Manual.** Disponível em:
http://www.mmech.com/images/stories/Standard_Products/GiD/GiD_10/GiD_User_Manual.pdf.
Acesso em 07/2013.

GIONCU, V. **Thin Reinforced Concrete Shells special analysis problems.** 1 ed. Bucaresti. Eitora Academiei, 1974.

GONÇALVES, B. A. M. **Geração de Malhas bidimensionais de elementos finitos baseada em mapeamentos transfinitos.** 2004, 109p. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte.

GONÇALVES, F.D. N. **Método dos Volumes Finitos em Malhas Não-estruturadas.** 2007, 71p. Dissertação de Mestrado – Faculdade de Ciência da Universidade do Porto. Porto. Portugal.

GORDON, W.J., HALL, C.A **Transfinite element methods: Blending-function interpolation over arbitrary curved element domains.** Numerische Mathematik. 21(2): 109-129, 1973.

GORDON, W.J., THIEL, L.C. **Transfinite mappings and their application to grid generation.** Applied Mathematics and Computation 10-11 (C). 171-233, 1982.

- HABER, R.; SHEPHARD, M. S.; GREENBERG, D. P.; ABEL, J. F. AND GALLAGHER, R. H. - **“A General Two-dimensional, Graphical Finite Element Preprocessor”**, International Journal for Numerical Methods in Engineering. 17: 1015-1044, 1981.
- ISLER, H. **50 Years of Shells**. In: J.B. Obreęski, Editor, Proceeding of International Conference on Lightweight Structures in Civil Engineering, magat®—Magdalena Burska, Warsaw, p. 31-42, 1995.
- ISLER, H. **Concrete Shells derived from experimental shapes**. In: Journal of the International Association for Bridge and Structural Engineering (IABSE). 4 (3): 142-147, 1994.
- LESLIE, T. **Form as Diagram of Forces: The Equiangular Spiral in the Work of Pier Luigi Nervi**. In: Journal of Architectural Education. 57(2): 45-54, 2003.
- LO, S. H., **A New Mesh Generation Scheme for Arbitrary Planar Domains**, International Journal for Numerical Methods in Engineering. 21(8): 1403-1426, 1985.
- MACHADO, P. G. L. **Malhas adaptativas em domínios definidos por fronteiras curvas**. 2008, 91p. Dissertação de Mestrado – Instituto de Ciências Matemáticas e Computação. Universidade de São Paulo. São Carlos.
- MARQUES, C. A. **Desenvolvimento de Modelo Numérico Utilizando o Método dos Volumes Finitos em Malhas Não-estruturadas**. 2005, 93p. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória.
- PEDRESCHI, R. **Form, Force and Structure: A Brief History**. Architectural design. 78: 12-19, 2008.
- POPOV, P. E. **Progress in analysis and design of RC shells** Engineering Structures. 13(2): 128-14, 1991.
- REISSNER, E. **A New Derivation of the Equations for the Deformation of Elastic Shells**. American Journal of Mathematics. 63(1): 177-184, 1941.
- REISSNER, E. **On the solution of a class of problems in membrane theory of thin shells**. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 7(4): 242-246, 1959.
- RYLO, E. C. **Adaptatividade hp aplicada em malhas de elementos finitos**. 2002. 171 f. Tese de Mestrado - Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

SAKAMOTO, M. M. **Algoritmo de Refinamento Delaunay a Malhas Sequenciais Adaptativas e com Processamento Paralelo.** 2007, 150p. Tese de Doutorado- Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo.

SALINAS, J. G. O. **Ulrich Müther (1934-2007) El Maestro Constructor de la Provincia de Rügen.** In: Anales Del Instituto de Investigaciones Estéticas, 2007.

TEIXEIRA, P. W.G.N. **Projeto e execução de coberturas em casca de concreto com forma de membrana pênsil invertida e seção tipo sanduíche.** 1999. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos.

THOMPSON J. F.; WARSI Z. U. A.; MASTIN C.W. **Numerical Grid Generation: Foundations and Application.** Elsevier Science Publishing Co., 1985.

VIEIRA, V.L. **Modelo teórico e processos construtivos de estruturas em casca de concreto.** 2003. 138 f. Tese de Mestrado – Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

VIZOTTO, I. **Geração computacional de formas livres de estruturas em casca.** 1993. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

VIZOTTO, I. **A computational model of non-geometrical shells generation.** *Thin-Walled Structures.* 47 (2): 163–171, 2009.

VIZOTTO, I. **Computational generation of free-form shells in architectural design and civil engineering.** *Automation in Construction.* 19(8):1087 –1105, 2010.

ZAGOTTIS, D. **Pontes e Grandes Estruturas: V – Introdução à Teoria das Placas e das Cascas.** Escola Politécnica – USP, São Paulo, 1973.