



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

ANÁLISE DO DESLIZAMENTO ENTRE AÇO E CONCRETO

Eng^o Joaquim Marins Neto

Campinas, Setembro de 2002

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

ANÁLISE DO DESLIZAMENTO ENTRE AÇO E CONCRETO

Eng^o Joaquim Marins Neto

Orientador: Prof. Dr. Aloisio Ernesto Assan

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão de pós-graduação da Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, na área de concentração de Estruturas.

Atesto que esta é a versão definitiva da dissertação/tese.

23 / 10 / 2002

Prof. Dr. Aloisio E. Assan

Matrícula: 035963

Campinas, Setembro de 2002

UNIDADE	130
Nº CHAMADA	T(UNICAMP) M339a
V	EX
TOMBO BCI	51664
PROC.	16-833-02
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	06-12-02
Nº CPD	

CM00176954-3

31810 271542

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

M339a	<p>Marins Neto, Joaquim</p> <p>Análise do deslizamento entre aço e concreto / Joaquim Marins Neto.--Campinas, SP: [s.n.], 2002.</p> <p>Orientador: Aloisio Ernesto Assan.</p> <p>Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil.</p> <p>1. Método dos elementos finitos. 2. Análise numérica. 3. Concreto armado. 4. Deformações e tensões. I. Assan, Aloisio Ernesto. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil. III. Título.</p>
-------	--

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

ANÁLISE DO DESLIZAMENTO ENTRE AÇO E CONCRETO

Eng^o Joaquim Marins Neto

Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:

Aloisio E. Assan

Prof. Dr. Aloisio Ernesto Assan

Presidente e Orientador / FEC - UNICAMP

Sergio Persival Baronecini Proença

Prof. Dr. Sergio Persival Baronecini Proença

EESC - USP

Maria Cecilia Amorim Teixeira da Silva

Prof^a. Dr^a. Maria Cecilia Amorim Teixeira da Silva

FEC - UNICAMP

Campinas, 24 de Setembro de 2002

Aos meus pais:

Laurindo e

Elizabeth

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Aloisio Ernesto Assan pela orientação, atenção e constante dedicação, necessários para o alcance dos objetivos deste trabalho.

Aos professores e funcionários da Faculdade de Engenharia Civil que contribuíram com incentivo e atenção no decorrer do desenvolvimento deste trabalho.

Aos Professores Doutores Jasson Rodrigues de Figueiredo Filho e Roberto Chust Carvalho, do Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de São Carlos, pelos incentivos que me foram passados ainda na graduação.

A toda minha família, amigos e em especial à Vivian que, direta ou indiretamente, contribuíram com apoio e incentivo de grande importância.

À FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo), pelo apoio financeiro.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	viii
LISTA DE TABELAS	xiv
LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS	xv
RESUMO	xix
ABSTRACT	xx
1. INTRODUÇÃO	01
1.1 GENERALIDADES	01
1.2 TRANSMISSÃO DE ESFORÇOS ENTRE O AÇO E O CONCRETO	03
1.3 FATORES QUE AFETAM A ADERÊNCIA ENTRE O AÇO E CONCRETO	09
1.4 OBJETIVO DO TRABALHO	10
2. HISTÓRICO DO FENÔMENO DE ADERÊNCIA	11
2.1 GENERALIDADES	11
2.2 ESTUDO DO FENÔMENO DE ADERÊNCIA	12
3. MODELAGEM NUMÉRICA	28
3.1 INTRODUÇÃO	28
3.2 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	28
3.2.1 DESENVOLVIMENTO DA MATRIZ DE RIGIDEZ	29
3.2.2 ELEMENTO FINITO BIDIMENSIONAL	32
3.3 A ARMADURA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	38
3.4 RELAÇÕES ENTRE A TENSÃO DE ADERÊNCIA E O DESLIZAMENTO	42
3.5 MODELAGEM DA ADERÊNCIA ENTRE O AÇO E O CONCRETO	46
3.5.1 MODELAGEM DA ADERÊNCIA PELO ELEMENTO DE LIGAÇÃO PROPOSTO POR NGO (1967)	46
3.5.2 MODELAGEM DA ADERÊNCIA PELO ELEMENTO DE INTERFACE	53
3.5.3 MODELAGEM DA ADERÊNCIA PELO MODELO PROPOSTO POR YANKELEVSKY (1985)	60
3.5.3.1 DESCRIÇÃO DO MODELO	60

3.5.4	MODELAGEM DA ADERÊNCIA PELO MODELO PROPOSTO POR YANKELEVSKY (1997)	68
3.5.4.1	DESCRIÇÃO DO MODELO	68
4.	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	81
4.1	INTRODUÇÃO	81
4.2	ENSAIO DE TIRANTE (TRAÇÃO SIMÉTRICA)	82
4.2.1	SIMULAÇÃO NUMÉRICA 1: ELEMENTO DE INTERFACE	82
4.2.2	SIMULAÇÃO NUMÉRICA 2: ELEMENTO DE YANKELEVSKY (1985)	86
4.2.3	SIMULAÇÃO NUMÉRICA 3: ELEMENTO DE YANKELEVSKY (1997)	89
4.3	VIGA SIMÉTRICA BIAPOIADA	92
4.3.1	SIMULAÇÃO SEM FISSURAÇÃO DO CONCRETO	92
4.3.2	SIMULAÇÃO COM FISSURAÇÃO DO CONCRETO	97
5.	APRESENTAÇÃO DOS PROGRAMAS	100
5.1	INTRODUÇÃO	100
5.2	ENSATS 1: ENSAIO DE TRAÇÃO SIMÉTRICA 1	101
5.3	ENSATS 2: ENSAIO DE TRAÇÃO SIMÉTRICA 2	106
5.4	ENSATS 3: ENSAIO DE TRAÇÃO SIMÉTRICA 3	111
5.5	ENSAVS: ENSAIO DE VIGA SIMÉTRICA	116
6.	EXEMPLOS NUMÉRICOS	123
6.1	INTRODUÇÃO	123
6.2	APRESENTAÇÃO DOS EXEMPLOS PARA O ENSAIO DE TRAÇÃO SIMÉTRICA	124
6.2.1	EXEMPLO NUMÉRICO 1	124
6.2.2	EXEMPLO NUMÉRICO 2	134
6.3	APRESENTAÇÃO DOS EXEMPLOS PARA O ENSAIO DE VIGA SIMÉTRICA	138
6.3.1	EXEMPLO NUMÉRICO 1	138
6.3.2	EXEMPLO NUMÉRICO 2	143
7.	CONSIDERAÇÕES FINAIS	146
BIBLIOGRAFIA		148
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	148
	BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR	155

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO 1

Figura 1.2.1	-Distribuição das forças nas nervuras decorrentes da força de arrancamento aplicada na barra.	04
Figura 1.2.2	-Ensaio de arrancamento.	05
Figura 1.2.3	-Ensaio de deslocamento por compressão.	05
Figura 1.2.4	-Ensaio de tirante (tração simétrica).	06
Figura 1.2.5	-Ensaio de tração em vigas.	06
Figura 1.2.6	-Diagramas da tensão média de aderência em função do deslizamento da barra. (1) barras lisas; (2) barras com saliências (fonte: PFEIL, 1985).	07
Figura 1.2.7	-Obtenção da tensão média de aderência pelo equilíbrio de forças.	07
Figura 1.2.8	-Obtenção da tensão de aderência pelo equilíbrio de forças a partir de um elemento infinitesimal.	08

CAPÍTULO 2

Figura 2.2.1	-Representação dos ensaios analisados.	14
Figura 2.2.2	-Representação do ensaio realizado nas amostras prismáticas.	16
Figura 2.2.3	-Relação local da tensão de aderência x deslizamento.	18
Figura 2.2.4	-Representação da viga desmembrada - armadura e concreto.	20
Figura 2.2.5	-Distribuição da tensão de aderência ao longo da barra.	21
Figura 2.2.6	-Propagação das fissuras.	23
Figura 2.2.7	-Estágios decorrentes da propagação das fissuras.	23

Figura 2.2.8	-Modelo da viga de concreto armado.	24
CAPÍTULO 3		
Figura 3.2.1.1	-Viga isostática - meio contínuo.	29
Figura 3.2.1.2	-Viga isostática - meio discreto, divisão em elementos finitos (malha).	29
Figura 3.2.1.3	-Elemento finito.	29
Figura 3.2.2.1	-Elemento finito retangular (LSR).	32
Figura 3.2.2.2	-Dimensões dos elementos finitos.	33
Figura 3.3.1	-Representação distribuída da armadura.	38
Figura 3.3.2	-Representação embutida da armadura.	39
Figura 3.3.3	-Representação discreta da armadura.	39
Figura 3.3.4	-Elementos de representação da armadura.	40
Figura 3.3.5	-Fissuração - aderência perfeita.	41
Figura 3.3.6	-Fissuração - deslocamento relativo.	41
Figura 3.4.1	-Curva tensão de aderência x deslizamento, NILSON (1968) .	43
Figura 3.4.2	-Curva tensão de aderência x deslizamento, MIRZA (1979) .	44
Figura 3.4.3	-Curva tensão de aderência x deslizamento, YANKELEVSKY (1985) .	44
Figura 3.5.1.1	-Elemento de ligação, NGO (1967) .	46
Figura 3.5.1.2	-Elemento de ligação, deslocamentos nodais.	47
Figura 3.5.1.3	-Elemento de ligação, forças nodais.	48
Figura 3.5.1.4	-Inclinação da curva tensão de aderência x deslizamento.	50
Figura 3.5.1.5	-Seção transversal de um elemento de concreto armado.	51
Figura 3.5.1.6	-Área de influência dos elementos de ligação.	52
Figura 3.5.1.7	-Elemento de ligação: topo e base das barras de aço.	52
Figura 3.5.1.8	-Seção modificada (unitária) de um elemento de concreto armado.	53

Figura 3.5.2.1	-Elemento de interface.	53
Figura 3.5.2.2	-Elemento de interface linear.	54
Figura 3.5.2.3	-Elemento de interface linear no sistema de coordenada global.	57
Figura 3.5.3.1.1	-Arranjo do elemento finito.	60
Figura 3.5.3.1.2	-Equilíbrio das forças atuantes na interface.	61
Figura 3.5.3.1.3	-Relação local da tensão de aderência x deslizamento.	62
Figura 3.5.4.1.1	-Arranjo do elemento apresentado.	68
Figura 3.5.4.1.2	-a) Ação das forças no elemento finito - b) Deslocamento no elemento.	69
Figura 3.5.4.1.3	-Relação local da tensão de aderência x deslizamento.	72
Figura 3.5.4.1.4	-Forças nodais em um elemento finito.	75
 CAPÍTULO 4		
Figura 4.2.1	-Ensaio de tirante.	82
Figura 4.2.1.1	-Fluxograma do programa: simulação numérica 1.	83
Figura 4.2.1.2	-Transformação da seção circular em retangular.	85
Figura 4.2.2.1	-Relação local da tensão de aderência x deslizamento.	86
Figura 4.2.2.2	-Fluxograma do programa: simulação numérica 2.	87
Figura 4.2.3.1	-Configuração dos elementos finitos.	89
Figura 4.2.3.2	-Fluxograma do programa: simulação numérica 3.	90
Figura 4.3.1	-Viga biapoiada simétrica.	92
Figura 4.3.1.1	-Consideração da simetria.	93
Figura 4.3.1.2	-Transformação da largura da viga.	93
Figura 4.3.1.3	-Fluxograma do programa: viga biapoiada sem fissura.	94
Figura 4.3.1.4	-Conexão entre a barra de aço e o concreto.	95
Figura 4.3.2.1	-Sobreposição de nós para a modelagem das fissuras.	97

Figura 4.3.2.2	-Separação entre os elementos de concreto e de interface.	98
Figura 4.3.2.3	-Fluxograma do programa: viga biapoiada com fissuração.	99
 CAPÍTULO 5		
Figura 5.2.1	-Tela inicial (Ensats1).	101
Figura 5.2.2	-Tela entrada de dados (Ensats1).	102
Figura 5.2.3	-Tela resultados (Ensats1).	104
Figura 5.2.4	-Tela gráfico (Ensats1).	105
Figura 5.3.1	-Tela inicial (Ensats2).	106
Figura 5.3.2	-Tela entrada de dados (Ensats2).	107
Figura 5.3.3	-Tela resultados (Ensats2).	109
Figura 5.3.4	-Tela gráfico (Ensats2).	110
Figura 5.4.1	-Tela inicial (Ensats3).	111
Figura 5.4.2	-Tela entrada de dados (Ensats3).	112
Figura 5.4.3	-Tela resultados (Ensats3).	114
Figura 5.4.4	-Tela gráfico (Ensats3).	115
Figura 5.5.1	-Tela inicial (Ensavs).	116
Figura 5.5.2	-Tela entrada de dados (Ensavs).	117
Figura 5.5.3	-Tela resultados (Ensavs).	120
Figura 5.5.4	-Tela gráfico (Ensavs).	121
Figura 5.5.5	-Tela de modelagem das fissuras (Ensavs).	122
 CAPÍTULO 6		
Figura 6.2.1	-Conformação geométrica do ensaio de tração simétrica.	124
Figura 6.2.1.1	-Distribuição do deslizamento entre o aço e o concreto (F=1000 Kgf).	125

Figura 6.2.1.2	-Distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto (F=1000 Kgf).	126
Figura 6.2.1.3	-Distribuição da deformação no aço (F=1000 Kgf).	126
Figura 6.2.1.4	-Distribuição do deslizamento entre o aço e o concreto (F=3000 Kgf).	127
Figura 6.2.1.5	-Distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto (F=3000 Kgf).	128
Figura 6.2.1.6	-Distribuição da deformação no aço (F=3000 Kgf).	128
Figura 6.2.1.7	-Distribuição do deslizamento entre o aço e o concreto (F=5000 Kgf).	129
Figura 6.2.1.8	-Distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto (F=5000 Kgf).	130
Figura 6.2.1.9	-Distribuição da deformação no aço (F=5000 Kgf).	130
Figura 6.2.1.10	-Distribuição do deslizamento entre o aço e o concreto (F=7000 Kgf).	131
Figura 6.2.1.11	-Distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto (F=7000 Kgf).	132
Figura 6.2.1.12	-Distribuição da deformação no aço (F=7000 Kgf).	132
Figura 6.2.1.13	-Distribuição da deformação no concreto (Ensats3).	133
Figura 6.2.2.1	-Conformação geométrica do ensaio de arrancamento apresentado por KWAK (2001).	134
Figura 6.2.2.2	-Distribuição da tensão no aço (F=15708 lb).	136
Figura 6.2.2.3	-Distribuição da tensão no aço (F=47123 lb).	136
Figura 6.3.1	-Conformação geométrica da viga simétrica.	138
Figura 6.3.1.1	-Distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto (F=1000 lb).	140
Figura 6.3.1.2	-Distribuição da deformação no aço (F=1000 lb).	140
Figura 6.3.1.3	-Deslocamento vertical no centro do vão da viga (sem fissuração).	141
Figura 6.3.1.4	-Distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto (F=3000 lb).	142

Figura 6.3.1.5	-Distribuição da deformação no aço (F=3000 lb).	142
Figura 6.3.2.1	-Viga com uma fissura.	143
Figura 6.3.2.2	-Viga com duas fissuras.	143
Figura 6.3.2.3	-Viga com três fissuras.	143
Figura 6.3.2.4	-Distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto (1 fissura).	144
Figura 6.3.2.5	-Distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto (2 fissuras).	144
Figura 6.3.2.6	-Distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto (3 fissuras).	145
Figura 6.3.2.7	-Deslocamento vertical no centro do vão da viga (1 fissura).	145

LISTA DE TABELAS

CAPÍTULO 2

Tabela 2.2.1 -Relações básicas entre os materiais a partir de um elemento infinitesimal.

17

LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

- A_c - Área da seção transversal do concreto
- A, A_s - Área da seção transversal do aço
- $[A]$ - Matriz das funções aproximadoras
- b - Largura
- $C_{1...6}$ - Constantes das equações dos deslizamentos
- $[C]$ - Matriz das rigidez ao deslizamento
- $D_{1...4}$ - Constantes das equações dos deslizamentos
- d_b - Diâmetro da barra de aço
- dS - Deslizamento local entre o aço e o concreto
- dx - Comprimento de um elemento infinitesimal
- $\{d\}$ - Incógnitas nodais
- E - Módulo de elasticidade
- E_c - Módulo de elasticidade do concreto
- E_s - Módulo de elasticidade do aço
- F, f, P - Força aplicada
- $F_{(x)}$ - Força axial no concreto
- F_1 - Reação da força
- g - Deslocamentos nodais global
- h - Altura

- k - Matriz de rigidez local
- K - Matriz de rigidez global
- K_h - Rigidez ao deslizamento horizontal
- K_v - Rigidez ao deslizamento vertical
- L - Comprimento
- L_b - Comprimento de aderência
- $[M]$ - Matriz de transformação dos deslocamentos
- r - Deslocamento nodal
- \tilde{r} - Deslocamento nodal virtual
- R - Esforços nodais externos
- $S, S_{(x)}$ - Deslizamento entre o aço e o concreto
- S_y - Deslizamento correspondente à tensão limite de aderência
- $S_{1...3}$ - Deslizamentos limite
- $T_{(x)}$ - Força axial no aço
- u - Deslocamento interno
- $u(x,y)$ - Função aproximadora dos deslocamentos horizontal
- $U_{(c)x}$ - Campo de deslocamento no concreto
- $U_{(s)x}$ - Campo de deslocamento no aço
- $[u]$ - Vetor dos deslocamentos nodais
- v - Deslocamento interno
- $v(x,y)$ - Função aproximadora dos deslocamentos vertical
- W_e - Trabalho virtual externo
- W_i - Trabalho virtual interno

δ	- Abertura da fissura
Δ	- Diferença relativa
ε_c	- Deformação no concreto
ε_v	- Deformação horizontal entre dois nós
ε_v	- Deformação vertical entre dois nós
$\bar{\varepsilon}_c$	- Deformação média no concreto
$\bar{\varepsilon}_s$	- Deformação média no aço
$\varepsilon_{c(x)}$	- Deformação axial no concreto
$\varepsilon_{s(x)}$	- Deformação axial no aço
ϕ	- Diâmetro da barra de aço
φ	- Função dos deslocamentos
$[\rho]$	- Matriz de operadores diferenciais
σ_c	- Tensão no concreto
σ_s	- Tensão no aço
$d\sigma_c$	- Tensão no concreto para um elemento infinitesimal
$d\sigma_s$	- Tensão no aço para um elemento infinitesimal
Σ	- Perímetro da barra de aço
τ_b	- Tensão de aderência local
τ_{bm}	- Tensão média de aderência
τ_u	- Tensão última de aderência
τ_y	- Tensão limite de aderência
$\tau(x)$	- Tensão de aderência em um ponto
Ω_d	- Energia de deformação

[ξ] - Matriz das incógnitas das funções aproximadoras

[ψ] - Matriz função de operadores diferenciais

MEF - Método dos elementos finitos

RESUMO

Marins Neto, J. – *Análise do deslizamento entre aço e concreto*. Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, 2002. 156 pág. Dissertação (Mestrado).

Neste trabalho são apresentados aspectos da interação entre o aço e o concreto, para estruturas de concreto armado, com particular interesse no mecanismo de deslizamento que ocorre na interface entre esses dois materiais. Foram desenvolvidos modelos computacionais (programas computacionais), que podem simular o comportamento aderência-deslizamento entre a armadura de aço e o concreto, para análise de estruturas de concreto armado submetidas ao ensaio de tração simétrica e de viga simétrica submetida a flexão. O método dos elementos finitos é utilizado para prever o comportamento de estruturas de concreto armado baseado nas propriedades do concreto, da armadura de aço, e da relação aço-concreto na interface. As rigidezes dos modelos, de elemento finito, usados para simular a deterioração progressiva da aderência entre o aço e o concreto são baseadas em estágio da relação entre a tensão de aderência local e o deslizamento relativo da barra, para um processo incremental de cargas.

Exemplos numéricos comparando a distribuição da tensão de aderência, a tensão e a deformação ao longo da barra de aço, obtidos com os programas e com valores providos de outros autores são apresentados, mostrando muito bons resultados.

Palavras-chave: tensão de aderência, aderência-deslizamento, elemento finito, modelagem computacional, concreto armado.

ABSTRACT

Marins Neto, J. – *Analysis of slip between steel and concrete*. Campinas, Faculty of Civil Engineering, State University of Campinas, 2002. 156 pages. Dissertation (Master).

In this work aspects of interaction between steel and concrete, for reinforced concrete structures, with particular interest in the mechanism of slip that occurs in the interface between these two materials are presented. Computational models (computational programs) that can simulate the bond-slip behavior between reinforcing steel and concrete for analysis of the reinforced concrete structures subjected to symmetric uniaxial tension (transfer test) and for symmetric beam subjected to bending, were developed. The finite element method is used to predict the behavior of reinforced concrete structures based on the properties of the concrete, of the reinforcing steel, and in the relationship of the steel-concrete interface. The stiffnesses of the finite element models used to simulate the progressive deterioration of bond between the steel and the concrete are based on the stages of relationship between the local bond stress and the relative slip of the bar, for incremental load process.

Numerical examples comparing the bond stress distribution, stress and strain along steel bar, obtained with the computational programs and with values provided by other authors, are presented, showing very good agreements among them.

Keywords: bond stress, bond-slip, finite element, computational modeling, reinforced concrete.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 GENERALIDADES

O comportamento global de estruturas, ou sistemas estruturais de concreto armado, submetidos a carregamentos ou outras ações externas, está associado aos efeitos e conseqüências dessas ações no comportamento interno dessas estruturas, através da resposta dada pelo trabalho conjunto do aço e do concreto endurecido no complexo estado de tensão e deformação em que são submetidos.

A necessidade da associação desses dois materiais, aço e concreto, deve-se ao fato que a resistência à compressão do concreto endurecido é alta, porém sua resistência à tração é da ordem de 10% da resistência à compressão. Assim, a disposição de armaduras de aço no interior de elementos de concreto, convenientemente posicionadas, aumenta a capacidade de resistência à tração, além de absorverem tensões de cisalhamento provocadas por esforços cortantes ou momentos de torção, podendo, ainda, auxiliar o concreto a resistir às tensões de compressão.

A associação desses dois materiais, de naturezas diferentes, é possível graças à coincidência de duas propriedades físicas essenciais:

Aderência: impede o deslocamento entre a armadura e o concreto e transmite os esforços internos de um para outro material, sendo, ela, a propriedade fundamental para o trabalho conjunto;

Dilatação térmica: o aço e o concreto sofrem dilatações térmicas, sem que provoquem deslocamentos recíprocos entre os dois materiais, o que destruiria a aderência, tornando impossível o trabalho conjunto.

Das propriedades apresentadas acima, apenas a aderência será abordada no decorrer do presente trabalho.

A seguir, temos um resumo cronológico dos fatos mais importantes do início da utilização do concreto armado, **CARVALHO (1997)**:

1824: J. Aspdin (francês) desenvolve o cimento Portland;

1855: J. L. Lambot (francês) constrói um barco com argamassa de cimento reforçada com ferro;

1861: J. Monier (francês) constrói um vaso de flores de concreto com armadura de arame;

1861: F. Coignet (francês) publica os princípios básicos para as construções em concreto armado;

1867: J. Monier obtém uma patente para seus vasos. Nos anos seguintes obtém outras para tubos, placas, etc;

1867: F. Coignet apresenta na Exposição Internacional de Paris, vigas e tubos de concreto armado;

1873: W. E. Ward (americano) constrói uma casa de concreto armado, o Ward's Castle;

1888: Dohring, de Berlim, obtém uma patente segundo a qual é possível aumentar a resistência das placas e pequenas vigas por meio de protensão da armadura;

1900: início do desenvolvimento da teoria do concreto armado, por Koenen. Posteriormente, Mörsch desenvolve a teoria iniciada por Koenen, com base em numerosos ensaios, e os conceitos desenvolvidos constituíram-se, ao longo de décadas, e em quase todo o mundo, nos fundamentos da teoria do Concreto Armado. Esses conceitos, em seus princípios fundamentais, são válidos até hoje;

1904: são publicadas, na Alemanha, as “Instruções provisórias para preparação, execução e ensaios de construções de Concreto Armado”.

1.2 TRANSMISSÃO DE ESFORÇOS ENTRE O AÇO E O CONCRETO

O trabalho associado das armaduras de aço e do concreto se faz por transmissão de esforços internos, de um para outro material, através de tensões cisalhantes paralelas à barra de aço na interface com o concreto. Essa transferência de tensões, tensões de aderência, modifica o comportamento e a distribuição da tensão da barra de aço ao longo de seu comprimento.

A aderência serve para ancorar as armaduras e, ainda, para impedir o escorregamento dessas armaduras nos segmentos entre fissuras, limitando a abertura dessas fissuras.

A transferência de tensões de aderência para as barras lisas envolve dois elementos:

Adesão entre o aço e o concreto: forças na interface, entre os dois materiais, provocadas pelo efeito de colagem que a nata de cimento provoca na superfície do aço, sendo de natureza físico-química;

Resistência por atrito: força de contato entre os dois materiais que se manifesta após a ruptura da adesão, quando há tendência ao deslocamento relativo entre a barra de aço e o concreto.

No caso de barras com nervuras (Figura 1.2.1), após a ruptura da adesão, as saliências se intertravam no concreto, constituindo um terceiro elemento resistente ao escorregamento da barra.

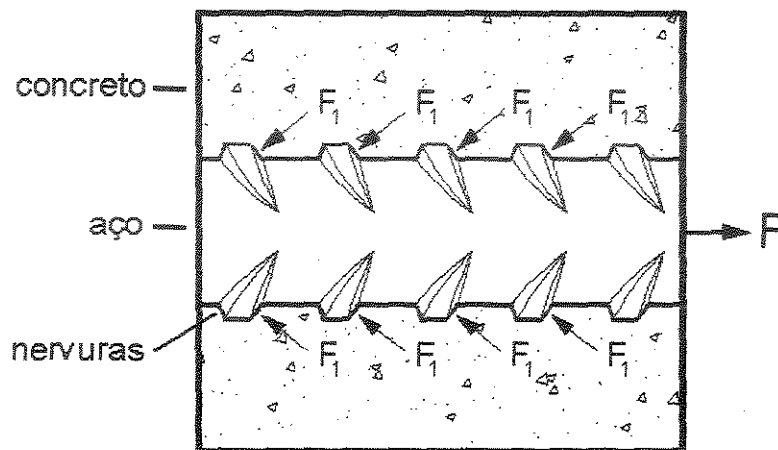


Figura 1.2.1- Distribuição das forças nas nervuras decorrentes da força de arrancamento aplicada na barra.

A tensão de aderência entre o aço e o concreto pode ser medida por diversos tipos de ensaios que possibilitam encontrar valores médios dessa tensão. Entre os principais ensaios efetuados nos laboratórios de pesquisas podemos destacar, **BARBOSA (1998):**

Ensaio de arrancamento (*pull-out test*):

Consiste da extração, por tração, de uma barra ancorada dentro de um bloco de concreto apoiado sobre uma plataforma (prensa), onde se mede seu escorregamento (Figura 1.2.2).

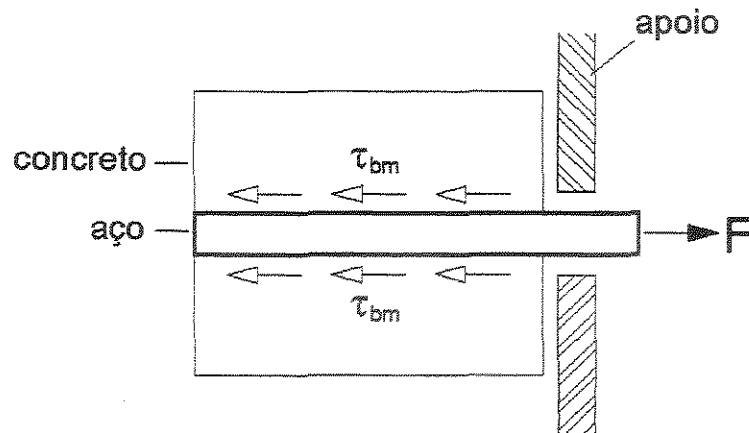


Figura 1.2.2- Ensaio de arrancamento.

Ensaio de descolamento por compressão:

Consiste da extração, por compressão, de uma barra ancorada dentro de um bloco de concreto apoiado sobre uma plataforma (prensa) (Figura 1.2.3).

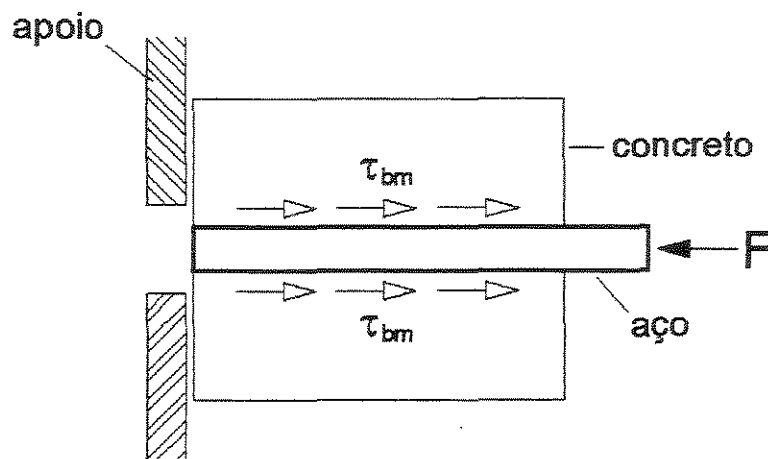


Figura 1.2.3- Ensaio de deslocamento por compressão.

Ensaio de tirante (tração simétrica):

Consiste de um ensaio onde se aplicam duas forças contrárias de tração nas extremidades de uma barra de aço ancorada dentro de um bloco de concreto (Figura 1.2.4).

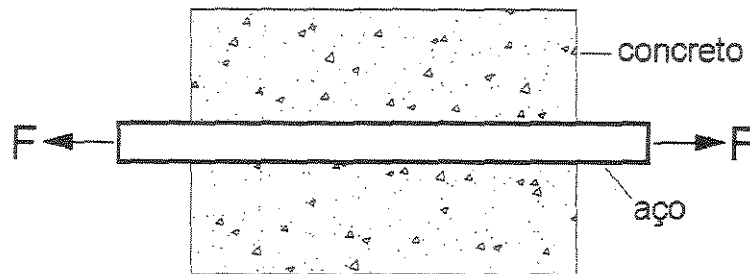


Figura 1.2.4- Ensaio de tirante (tração simétrica).

Ensaio de tração em vigas:

Consiste de um ensaio onde se solicita, por flexão, uma viga que tem, em sua parte inferior, uma armadura. Apesar deste ensaio ser mais oneroso que o ensaio de arrancamento, permite considerar a influência das fissuras de flexão sobre a aderência (Figura 1.2.5).

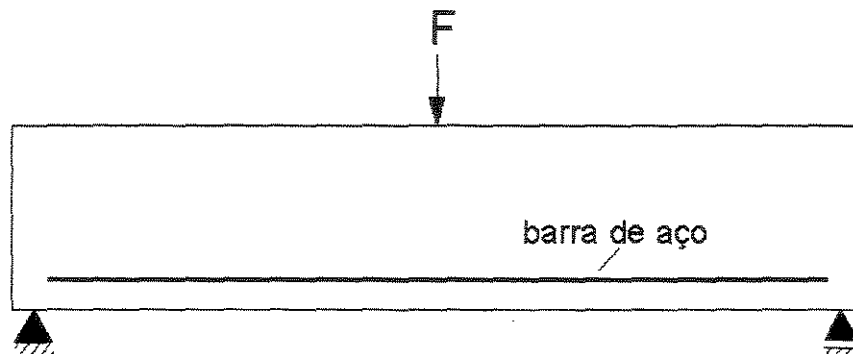


Figura 1.2.5- Ensaio de tração em vigas.

A Figura 1.2.6 mostra curvas da tensão de aderência x deslizamento da barra:

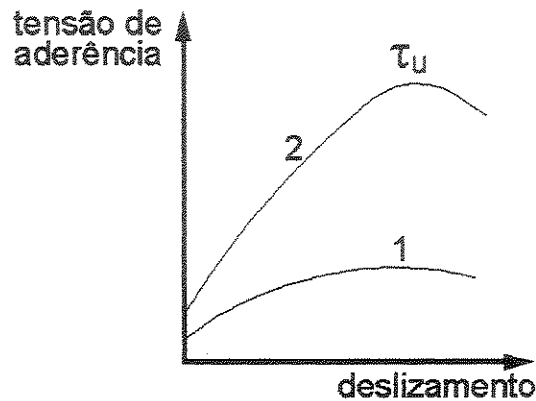


Figura 1.2.6- Diagramas da tensão média de aderência em função do deslizamento da barra. (1) barras lisas, (2) barras com saliências (fonte: PFEIL (1985)).

A tensão média de aderência (1.1) pode ser encontrada pelo equilíbrio de forças conforme a Figura 1.2.7:

$$\tau_{bm} = \frac{F}{\pi \cdot \phi \cdot L_b} \quad (1.1)$$

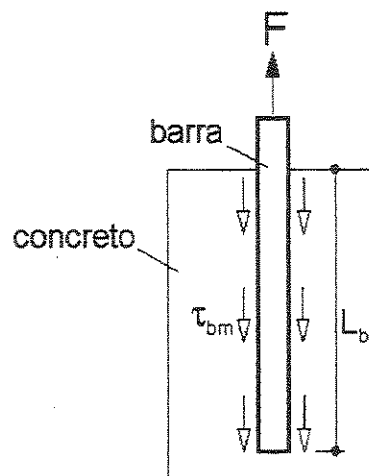


Figura 1.2.7- Obtenção da tensão média de aderência pelo equilíbrio de forças.

A tensão de aderência (1.4) também pode ser encontrada, analiticamente, considerando-se um elemento infinitesimal (Figura 1.2.8), efetuando o equilíbrio de forças atuantes na barra de aço e no concreto:

$$A_s \cdot \sigma_s + \tau_b \cdot \pi \cdot \phi \cdot dx = A_s \cdot \sigma_s + A_s \cdot d\sigma_s \quad (1.2)$$

$$\tau_b \cdot \pi \cdot \phi \cdot dx = A_s \cdot d\sigma_s \quad (1.3)$$

$$\tau_b = \frac{A_s \cdot d\sigma_s}{\pi \cdot \phi \cdot dx} \quad (1.4)$$

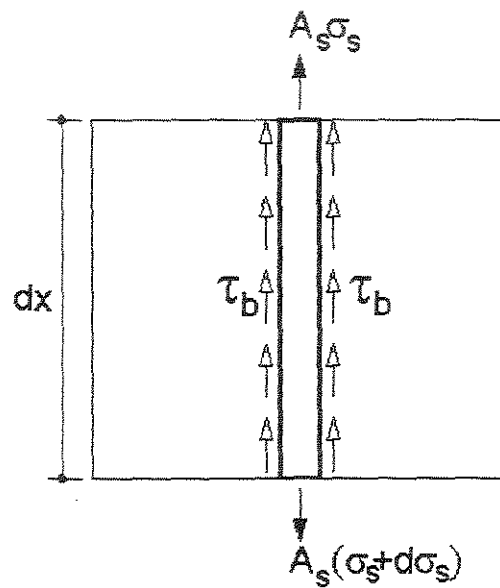


Figura 1.2.8- Obtenção da tensão de aderência pelo equilíbrio de forças a partir de um elemento infinitesimal.

1.3 FATORES QUE AFETAM A ADERÊNCIA ENTRE O AÇO E O CONCRETO

O comportamento da tensão de aderência entre o aço e o concreto pode ser afetado pelas diversas características e propriedades dos materiais que constituem o concreto armado e também pelo histórico do carregamento ao qual a estrutura está submetida.

Abaixo, temos alguns elementos que influenciam a aderência:

- a) resistência à compressão do concreto;
- b) limite de escoamento do aço;
- c) diâmetro das barras de aço;
- d) espaçamento entre as barras;
- e) cobrimento de concreto ao redor das barras de aço;
- f) formas e dimensões das nervuras das barras;
- g) ângulo de inclinação das faces das nervuras e de seu eixo em relação ao corpo da barra;
- h) espaçamento entre nervuras das barras;
- i) tratamento superficial do aço;
- j) tipo e tamanho dos agregados que constituem o concreto;
- k) condições de mistura e moldagem dos elementos de concreto armado;
- l) plasticidade;
- m) cura do concreto;
- n) natureza e tempo de aplicação do carregamento;
- o) distribuição e tipos de micro fissuras e fissuras ao longo da estrutura.

1.4 OBJETIVO DO TRABALHO

Os aspectos da interação entre o aço e o concreto são estudados, com particular interesse no mecanismo de deslizamento que ocorre na interface entre os dois materiais. O objetivo é o desenvolvimento de programas de computador capazes de simular, de forma mais realista, o comportamento de estruturas de concreto armado submetidas ao ensaio de tração simétrica e de viga simétrica submetida a flexão, considerando o efeito do deslizamento entre a armadura de aço e o concreto. A modelagem computacional é feita em linguagem Pascal avançado, no ambiente Delphi. O método dos elementos finitos é utilizado para modelar o comportamento do aço, do concreto e da deterioração progressiva da aderência na interface entre os dois materiais, a partir de um processo incremental de cargas. Os elementos finitos utilizados na interface utilizam curvas que relacionam a tensão de aderência x deslizamento para a obtenção da rigidez na interface.

Exemplos numéricos são analisados para ilustrar e validar a eficiência dos programas desenvolvidos.

CAPÍTULO 2

HISTÓRICO DO FENÔMENO DE ADERÊNCIA

2.1 GENERALIDADES

Os sistemas estruturais em concreto armado e os elementos que os constituem podem, sob ações externas, apresentar esforços acompanhados por deformações. O comportamento dessas estruturas sempre foi pouco ou mal conhecido, onde a busca do conhecimento, através de estudos e análises práticas, quase sempre originou a elaboração de teorias que procuravam representar o comportamento real das estruturas. Com a rápida evolução e expansão dos computadores, as teorias e formulações, conhecidas há tempo, passaram a ser aperfeiçoadas, e novas teorias foram difundidas. Através de algum método de resolução numérica esses modelos teóricos começaram a ser adaptados e implementados em programas de computador para simularem o comportamento das estruturas de concreto armado. Os recursos e as facilidades para a análise de estruturas utilizando ferramentas computacionais vêm trazendo resultados cada vez mais precisos e realistas.

2.2 ESTUDO DO FENÔMENO DE ADERÊNCIA

O interesse em se conhecer o complexo mecanismo da aderência, ou a quebra da aderência, entre o aço e o concreto nas estruturas, vem, a partir da década de 40, crescendo substancialmente. Através de análises teóricas e/ou ensaios práticos, pesquisadores têm tido como interesse a explicação desse fenômeno para que, conceituada de forma mais realista, permita o desenvolvimento de métodos e modelos que serão aplicados na análise comportamental e no cálculo de estruturas.

WATSTEIN (1941) analisou a distribuição da tensão de aderência, ao longo de barras de aço, a partir do ensaio de arrancamento (pull-out test). Com o auxílio de extensômetros mecânicos, mediu o alongamento e a tensão na barra da parte encravada no cilindro de concreto.

MYLREA (1948), através do ensaio e da análise da resistência ao arrancamento de barras encravadas no concreto, e de trechos de barras ancoradas em vigas simples submetidas à flexão, apresentou um estudo da distribuição e progressão da tensão de aderência e da diminuição da segurança causada pela falha na aderência.

McHENRY (1948) descreveu um método de ensaio laboratorial para medir a distribuição da tensão ao longo de barras de aço, em elementos de concreto armado, obtida com o auxílio de medidores elétricos. Os resultados da distribuição da tensão ao longo das barras de aço de vigas, antes e depois da sua fissuração, puderam ser comparados com resultados computados por métodos convencionais.

CLARK (1949) comparou e correlacionou os dados da resistência ao deslizamento do aço em relação ao concreto, obtidos a partir de vários ensaios feitos em vigas submetidas à flexão e a partir de ensaios de arrancamento, variando, por exemplo, a resistência do concreto e o comprimento e diâmetro das barras ancoradas no interior do concreto.

MAINS (1951) mediu a distribuição da tensão de aderência ao longo da barra de aço a partir de ensaios de arrancamento (pull-out test) e de vigas biapoiadas submetidas a carregamentos concentrados. Utilizou extensômetros elétricos para medir a deformação específica do aço e do concreto. Foram evidenciados os efeitos das fissuras, nas vigas, sobre a magnitude e a distribuição da tensão de aderência na barra de aço.

FERGUSON (1954) investigou o espaçamento mínimo, entre as barras de aço, necessário para uma perfeita transmissão das tensões cisalhantes entre o aço e o concreto, através de ensaios de arrancamento excêntrico.

BROMS (1965) desenvolveu um método para a análise da largura e espaçamento de fissuras de elementos de concreto armado, considerando a relação da aderência entre o aço e o concreto. A validade do método foi verificada através de dados obtidos por ensaios experimentais.

PERRY (1966) analisou a distribuição da tensão de aderência ao longo de barras de aço a partir de três ensaios diferentes: ensaio de uma viga biapoiada submetida a carregamentos concentrados em dois pontos diferentes com uma fissura no meio do vão (Figura 2.2.1.a); ensaio de uma viga biapoiada com as barras de aço principais posicionadas somente nas extremidades, com ancoragem livre no centro, submetida a carregamentos concentrados em dois pontos diferentes (Figura 2.2.1.b); ensaio de arrancamento, pull-out test, (Figura 2.2.1.c). Com os resultados dos ensaios, verificou a influência da distribuição do momento fletor, ao longo do elemento, na relação entre a tensão de aderência e o deslizamento ao longo da barra de aço.

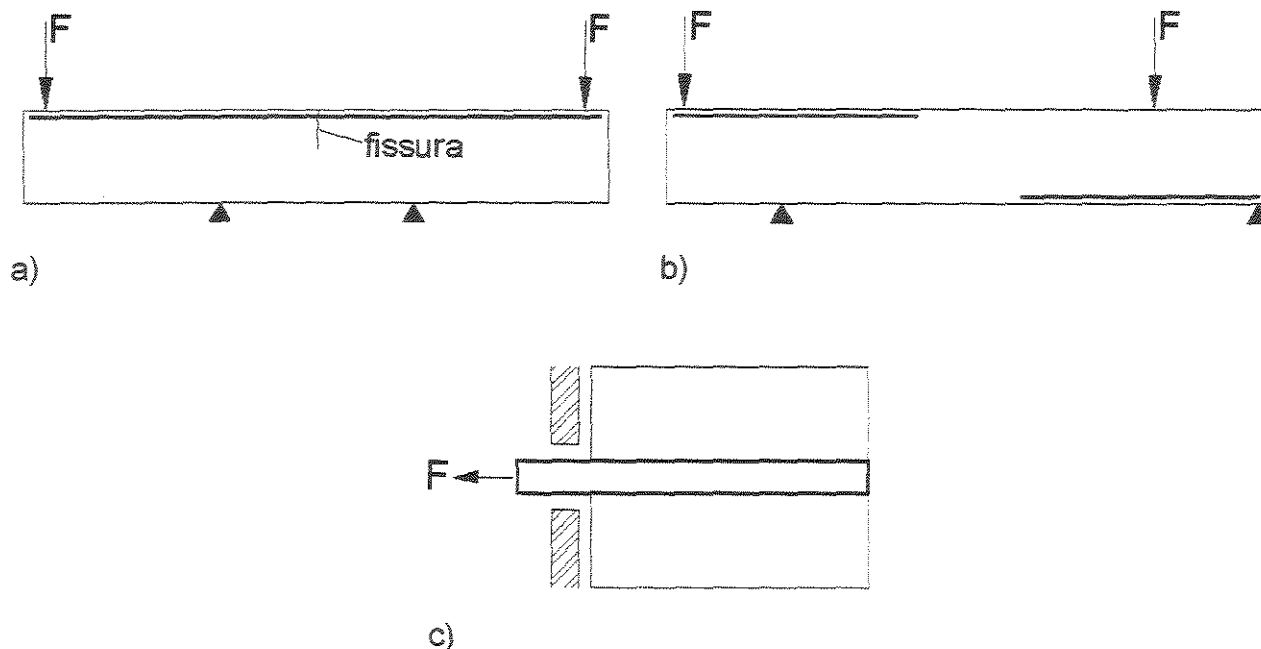


Figura 2.2.1- Representação dos ensaios analisados.

FERGUSON (1966) discutiu a natureza da falha na aderência entre o aço e o concreto e a sua influência no fendilhamento do concreto, destacando a importância, na resistência da aderência, da largura da viga e do espaçamento das barras de aço na seção transversal.

ABELES (1966), utilizando uma camada de material foto sensível (método da foto-tensão) colocada na superfície de vigas com diferentes características, ensaiadas em laboratório, observou a distribuição da tensão e da propagação das fissuras para diversos ciclos de carregamento.

NGO (1967) utilizou o método dos elementos finitos para a construção de um modelo numérico, para estudar o comportamento de vigas de concreto armado considerando os efeitos das tensões de aderência. Para a representação da rigidez da aderência entre as barras de aço e o concreto, foi desenvolvido e apresentado um elemento finito de ligação adimensional (bond link), colocado entre os elementos finitos que representam o concreto e os elementos finitos que representam as barras de aço.

LUTZ (1967) examinou a ação das forças de aderência, associadas ao deslizamento e à fissuração, em barras com diversas propriedades superficiais. Foi discutida a mecânica do deslizamento de barras nervuradas, onde a aderência é formada por três componentes: adesão química, fricção e interação mecânica entre o aço e o concreto.

BRESLER (1968) investigou a contribuição da história do carregamento e do meio ambiente na deterioração de estruturas de concreto armado a partir de ensaios de arrancamento submetidos a ciclos de carregamento e descarregamento. Este estudo foi baseado no efeito acumulativo de diversos danos: fissuração, redução da rigidez, etc, sendo verificadas as suas influências na transferência de tensão entre o aço e o concreto.

NILSON (1968), utilizando o método dos elementos finitos e o elemento de ligação apresentado por **NGO (1967)**, desenvolveu modelos analíticos de representação de amostras de concreto armado submetidas a ensaio de arrancamento excêntrico. A rigidez dos elementos de ligação, utilizada nos cálculos, foi obtida a partir do desenvolvimento de uma função polinomial de terceiro grau que relaciona a tensão de aderência com o deslizamento entre a barra de aço e o concreto. Para o desenvolvimento dessa equação foram utilizados os resultados experimentais obtidos por **BRESLER (1968)**.

PERRY (1969), através de ensaios de arrancamento excêntrico submetidos a cargas repetidas estáticas e dinâmicas, determinou o efeito dessas repetições na distribuição da tensão de aderência ao longo de barras de aço. Teve como variáveis: a resistência do concreto, número de repetições das cargas e o nível das cargas aplicadas.

GOTO (1971) mostrou, através de ensaios, a formação e o comportamento das fissuras de aderência no concreto ao redor da barra, decorrentes das fortes pressões atuantes na frente das nervuras, devido aos mecanismos de transferência de tensões e aderência.

MIRZA (1979), a partir de amostras prismáticas ensaiadas com tensão axial de arrancamento aplicada nas extremidades da barra inserida no concreto (Figura 2.2.2), estudou o comportamento entre a tensão de aderência e o deslizamento entre o aço e o concreto, sob influência da variação do diâmetro das barras, da resistência à compressão do concreto e do carregamento, entre outros, obtendo, com isso, uma relação empírica entre a tensão de aderência e o deslizamento para ser utilizada na modelagem de um elemento finito.

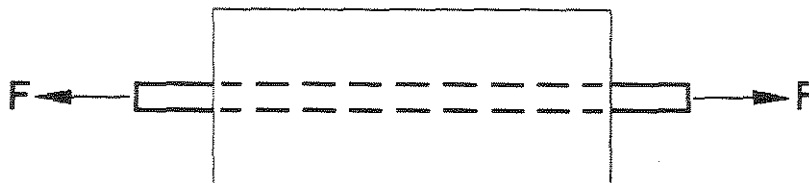


Figura 2.2.2- Representação do ensaio realizado nas amostras prismáticas.

TASSIOS (1981) apresentou um modelo que pode ser incrementado em programas computacionais para a análise da tensão e deformação de elementos de concreto armado. O desenvolvimento conceitual é feito a partir do estudo analítico das relações entre a tensão de aderência local e o deslizamento local ao longo de uma barra, assumindo leis não-lineares locais com diferentes estágios do comportamento global da interface, e em algumas expressões empíricas das propriedades dos materiais. Na tabela 2.2.1 temos algumas das equações utilizadas no desenvolvimento do modelo.

Tabela 2.2.1- Relações básicas entre os materiais a partir de um elemento infinitesimal.

aço	aço e concreto	deslizamento local
$d\sigma_s = \frac{4 \cdot \tau_b \cdot dx}{\phi}$	$d\sigma_c = \frac{A_s \cdot d\sigma_s}{A_c}$	$ds = (\bar{\varepsilon}_s - \bar{\varepsilon}_c) \cdot dx$

SOMAYAJI (1981) propôs um modelo analítico para investigação do comportamento das fissuras, e do efeito do enrijecimento à tração (tension-stiffening), em elementos de concreto armado submetidos à tensão uniaxial, a ser usado com o método dos elementos finitos ou com outro método, baseado no desenvolvimento teórico e diferenciação de equações de equilíbrio e em expressões representativas das propriedades do concreto e do aço. A validade dos resultados, obtidos por esse modelo, foi justificada com a comparação dos resultados obtidos por ensaio prático.

TASSIOS (1984) apresentou uma investigação experimental, baseada no método "Moiré", para a visualização da tensão de aderência desenvolvida para algum ponto da interface aço-concreto, depois de um deslocamento local específico. As amostras experimentais consistem em uma barra de aço vinculada a blocos de concreto submetidos a carregamento lateral de compressão, e ao arrancamento dessa barra.

JIANG (1984), através de investigações analíticas e experimentais, apresentou um modelo experimental utilizado para medir a aderência local e o deslizamento local, observar as fissuras secundárias e observar a distribuição da tensão no concreto ao redor da barra de aço.

YANKELEVSKY (1985), fundamentado em equações de equilíbrio das forças atuantes na interface entre a barra e o concreto, para um elemento infinitesimal, e na relação local entre a tensão de aderência e o deslizamento, propôs um elemento finito unidimensional para consideração da tensão de aderência e o deslizamento na interface aço-concreto. Na Figura 2.2.3 temos os quatro estágios em que foi dividido o

comportamento do fenômeno de aderência a partir da relação tensão de aderência x deslizamento: I- contato inicial entre o aço e o concreto em que o deslizamento entre os dois materiais tem um correspondente aumento da tensão de aderência até o limite τ_y ; II- início da quebra da aderência onde o deslizamento entre os dois materiais ocorre sem um acréscimo da tensão de aderência; III- há uma redução da tensão de aderência até chegar a uma tensão última onde a transferência de tensão, provocada pelo deslizamento entre os dois materiais, passa a ser dada também por fricção (estágio IV).

Abaixo, temos as equações básicas utilizadas para o desenvolvimento do modelo para uma barra em regime elástico-linear:

$$\tau(x) = \frac{E_s \cdot \phi \cdot d \varepsilon(x)}{4 \cdot dx} \quad \varepsilon_s(x) = \frac{dS(x)}{dx}$$

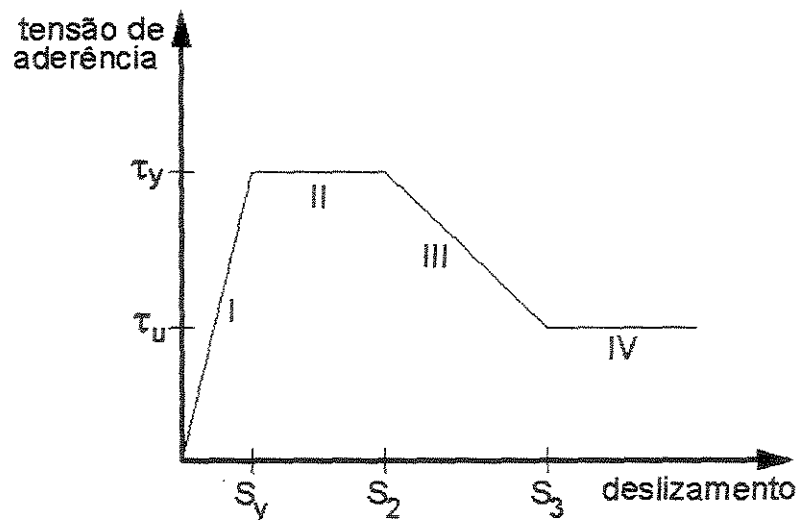


Figura 2.2.3- Relação local da tensão de aderência x deslizamento.

KEMP (1986) apresentou critérios para considerar a tensão de aderência entre o aço e o concreto sob condições de carregamento último e de serviço. Os critérios foram baseados em pesquisas experimentais e em estudos sobre a influência, no comportamento da aderência, de diversos fatores: comprimento e espaçamento das barras de aço encravadas no concreto, estribos, cobrimento de concreto e a interação entre o cisalhamento e a flexão.

KEUSER (1987) investigou a influência na qualidade dos resultados obtidos na análise da tensão de aderência entre o aço e o concreto, com o método dos elementos finitos, através da variação do tipo de função de deslizamento, da densidade dos elementos da malha e da relação entre a tensão de aderência e o deslizamento utilizados na implementação desses elementos.

YANG (1988), através da resolução teórica das equações diferenciais referentes à distribuição da tensão de aderência e do deslizamento do aço em relação ao concreto, e na análise das características desses materiais, apresentou procedimentos e formulações para o cálculo da tensão de aderência, deslizamento, deformação dos materiais e largura das fissuras, para um elemento de concreto armado, comparando com resultados experimentais obtidos na literatura.

ALLWOOD (1989) descreveu um método baseado em elementos finitos para a análise de vigas biapoiadas de concreto armado onde o aço e o concreto são analisados separadamente (Figura 2.2.4) e as forças de interface, entre eles, são consideradas usando um método iterativo de convergência, o qual traz soluções conjuntas. O concreto é representado por elementos quadriláteros com oito nós e o aço por elementos de barra com dois nós.

$$\begin{aligned} \text{força no concreto} &= \text{carregamento aplicado no concreto} + \text{forças de interface} \\ \text{força no aço} &= \text{carregamento aplicado no aço} - \text{forças de interface} \end{aligned}$$

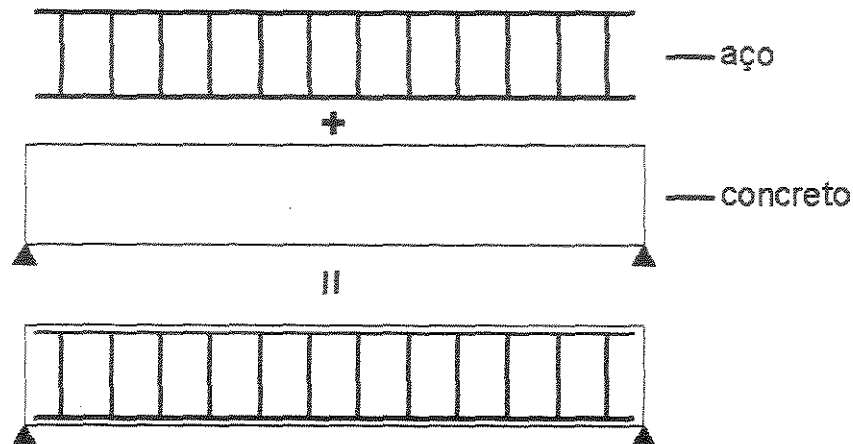


Figura 2.2.4- Representação da viga desmembrada - armadura e concreto.

RUSSO (1990) apresentou uma solução analítica de sistemas de equações diferenciais governadas pelo comportamento da ancoragem da barra de aço sob excitação generalizada. A solução usa um modelo bilinear do aço e assume uma relação local da tensão de aderência x deslizamento expressa por função exponencial, monomial ou por função linear.

GAJER (1990), baseado na fissuração em banda e na energia de fraturamento, com auxílio do método dos elementos finitos, apresentou uma teoria capaz de considerar o processo do amolecimento ao esforço (*strain-softening*), na tração e compressão, em estruturas de concreto armado.

CHAN (1992) propôs um modelo analítico para analisar fissuras em elementos tracionados de concreto armado a partir de funções de distribuição não uniforme da tensão de aderência e das relações entre o esforço e a tensão, propostas por outros autores, sendo considerada do tipo geométrica a função que rege a tensão de aderência (Figura 2.2.5).

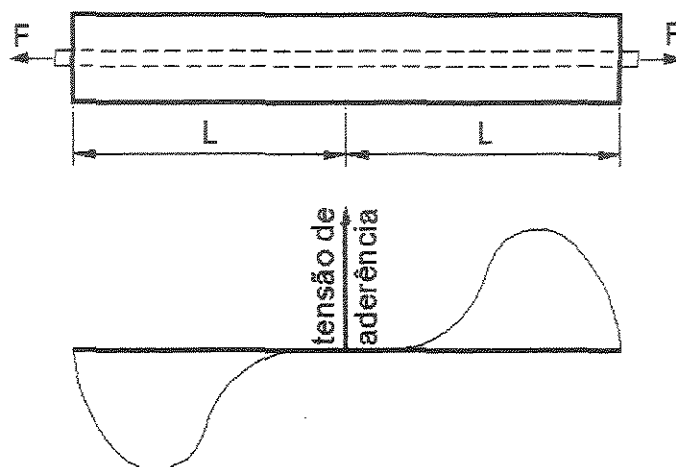


Figura 2.2.5- Distribuição da tensão de aderência ao longo da barra.

DUCATTI (1993) estudou a aderência entre o concreto de alto desempenho e a armadura através da realização de ensaios de arrancamento. Entre os objetivos visados destacaram-se: determinação da curva de comportamento de aderência e a comparação dos parâmetros obtidos para estas curvas com os regulamentados por normas internacionais de concreto comum; quantificação de diversos parâmetros sobre a relação tensão de aderência e deslizamento, e o desenvolvimento de um ensaio de arrancamento capaz de eliminar o efeito do confinamento do concreto circunvizinho à barra de arrancamento.

YAO (1993) apresentou detalhes de uma abordagem utilizada para prever a distribuição discreta de fissuras na análise do concreto armado pelo método dos elementos finitos, sendo utilizados, para o concreto e para a interface aço-concreto, diferentes critérios para o início das fissuras. A distribuição e a progressão das fissuras são simuladas a partir do controle do deslocamento, da abertura e da energia de fraturamento dos elementos da malha, baseando-se em análises e abordagens tratadas por outros pesquisadores.

ROSA (1994) apresentou uma análise comparativa das várias curvas de aderência x deslizamento entre o aço e o concreto, proposta na literatura, quando aplicadas ao método dos elementos finitos. Foi analisado o desempenho quanto ao tempo de processamento, número de interações necessárias, facilidade de utilização e precisão dos resultados obtidos quando comparados com os resultados de ensaio.

KWAK (1995) apresentou uma formulação, para implementação em programas computacionais, da modelagem de elementos de concreto armado onde os efeitos da aderência e do deslizamento, na interface entre o aço e o concreto, são considerados a partir do desenvolvimento do modelo analítico das barras de aço. Resultados analíticos e experimentais são comparados estabelecendo uma validade do modelo proposto.

UIJL (1996), considerando uma barra de aço encravada em um cilindro de concreto, desenvolveu um modelo baseado na capacidade de confinamento do concreto ao redor da barra (Figura 2.2.6), sendo descrita a relação entre o deslocamento radial e a tensão de compressão radial na interface dos dois materiais. A aderência entre a barra e o concreto é descrita em três estágios diferentes (Figura 2.2.7): estágio I – o contato inicial entre o aço e o concreto é mantido pela adesão e o entrelaçamento da cimentação na superfície do aço. Nesse estágio é assumido um comportamento elástico da aderência, onde a tensão tem pequenos valores; estágio II – inicia a quebra da aderência, onde a aderência é principalmente governada pelo apoio das saliências da barra no concreto. A concentração das forças na frente das saliências causa a formação de um cone formado pelas fissuras, iniciado na crista dessas saliências; estágio III – as fissuras alcançam a superfície externa e a tensão de aderência é reduzida repentinamente. O mecanismo de transferência da tensão é dado, agora, também pela fricção.

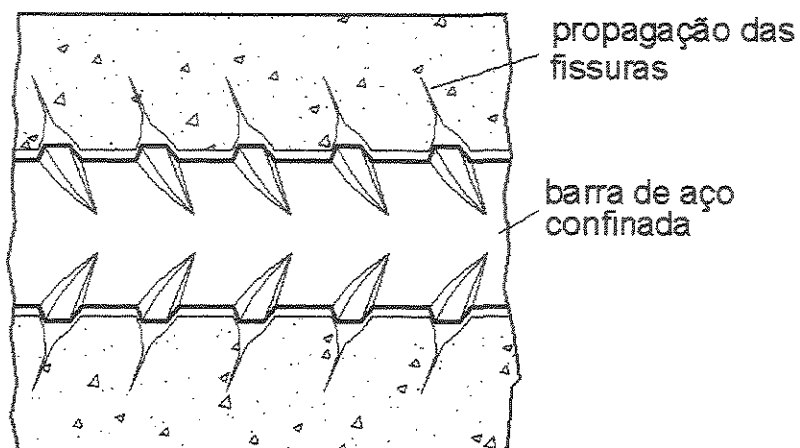


Figura 2.2.6- Propagação das fissuras.

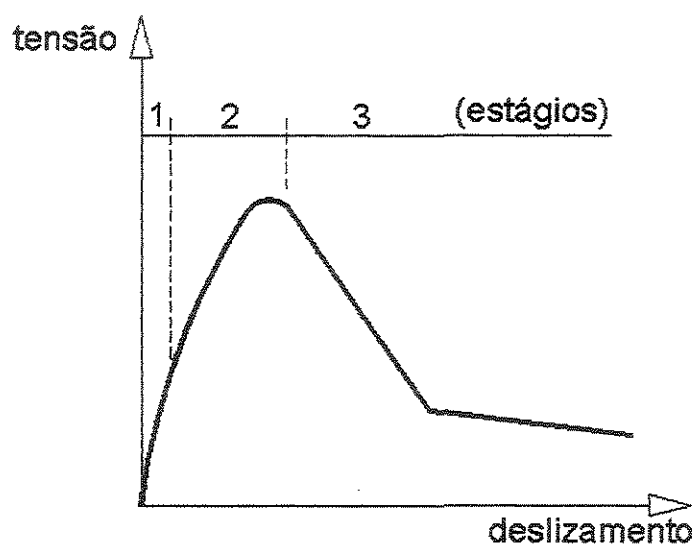


Figura 2.2.7- Estágios decorrentes da propagação das fissuras.

ALLWOOD (1996) expôs a abordagem do uso de um modelo não-linear da relação aderência x deslizamento em conjunto com um método para incorporação da rigidez da aderência, em elemento finito, para a análise de estruturas de concreto armado, sendo considerada a pressão radial e a fricção entre o aço e o concreto.

YANKELEVSKY (1997) apresentou o desenvolvimento de elementos finitos bidimensionais, que representam o comportamento da interface entre o aço e o concreto, para estruturas submetidas a ensaio de tração. A rigidez dos elementos incorpora parâmetros do aço, do concreto e da relação entre a tensão de aderência x deslizamento.

MANFREDI (1998) apresentou um modelo para análise de vigas contínuas de concreto armado (Figura 2.2.8) que inclui, em sua formulação, a relação tensão de aderência x deslizamento, introduzida no desenvolvimento da matriz de rigidez utilizada no método. Esse método leva em conta os detalhes dos modelos dos materiais e as suas interações, e o comportamento não-linear das vigas de concreto armado considerando a largura das fissuras e o efeito da tensão de enrijecimento.



Figura 2.2.8- Modelo da viga de concreto armado.

BARBOSA (1998) fez estudo experimental e numérico sobre estruturas de concreto de alto desempenho armadas com aço de elevado limite elástico. Entre os principais objetivos destacaram-se: quantificação de alguns parâmetros influentes na relação tensão de aderência e deslizamento, dentre eles a posição das barras tendo em vista o lançamento do concreto e, o comportamento de vigas fletidas influenciadas pelas características mecânicas dos materiais que constituem o concreto armado de elevado desempenho.

DESIR (1998) propôs um modelo numérico para simular o comportamento do fenômeno da aderência entre o aço e o concreto utilizando leis constitutivas baseadas nos conceitos da termodinâmica clássica, o qual considera a interface como sendo uma superfície de descontinuidade. Este modelo numérico foi incorporado na formulação de um elemento finito que representa tanto o aço quanto o concreto, onde cada material tem um comportamento próprio definido por uma lei constitutiva separada.

SHEHATA (1999) verificou a influência da aderência entre o aço e o concreto na capacidade de rotação de vigas biapoiadas de concreto de alta resistência e de resistência normal. Dependendo do grupo, foram ensaiadas vigas que possuíam variação dos diâmetros das barras principais, levando a diferentes tensões de aderência entre o concreto e o aço para a mesma variação da tensão no aço e, portanto, diferentes valores de deslizamento. Os resultados obtidos com os ensaios práticos da capacidade de rotação foram comparados com resultados obtidos através de equações teóricas propostas na literatura.

OLIVEIRA (2000) apresentou um modelo para representação de vigas de concreto armado, em elementos finitos, levando em conta as relações constitutivas dos materiais e as interações entre eles, de acordo com o "CEB-FIP mode CODE 1990". A função de deslizamento foi considerada como contínua para eliminar sub-divisões no procedimento do elemento finito, e os resultados, que descrevem a tensão de aderência na interface entre o aço e o concreto e as tensões ao longo do aço e do concreto, foram também apresentados como contínuos.

MONTI (2000) apresentou um modelo em elementos finitos para vigas de concreto armado considerando o deslizamento entre a barra de aço e o concreto circunvizinho. O modelo pressupõe a conservação plana da seção e as tensões no aço são computadas como sendo a soma de duas contribuições: a deformação da barra e o deslizamento da ancoragem.

ZUO (2000), estudando a relação entre as diferentes características do concreto armado em vigas e a tensão de aderência entre o aço e concreto, para poder chegar a um modelo numérico mais realista dessa tensão, após ensaiar 64 vigas de concreto armado com diferentes propriedades, propôs uma equação para o comprimento de ancoragem de barras de aço em vigas, onde esse comprimento depende da tensão de aderência.

ELMORSI (2000) mostra uma modelagem, pelo método dos elementos finitos, da junção entre viga e pilar de concreto armado considerando os efeitos da aderência e do deslizamento da ancoragem das barras de aço e da deformação por cisalhamento do painel na região da junção. A capacidade do modelo em simular a deterioração da aderência e o eventual arrancamento das barras de ancoragem, sob carregamentos cíclicos, são demonstrados através de comparações feitas com outros resultados analíticos e experimentais.

SPACONE (2000) discutiu a importância da modelagem da aderência e do deslizamento no comportamento de estruturas de concreto armado sob carregamento estático e dinâmico, apresentando formulações para implementação em modelos de elementos finitos, considerando o fenômeno aderência e deslizamento na análise dessas estruturas.

KWAK (2001) desenvolveu um modelo analítico o qual simula o comportamento da aderência x deslizamento entre a armadura de aço e o concreto. A resolução do modelo é feita a partir da determinação das condições de contorno das extremidades da barra de aço, e por meio de equações baseadas no equilíbrio de cada nó dos elementos em que a barra foi dividida e nas condições de compatibilidade entre o aço e o concreto; são determinadas as deformações do aço pela técnica de substituição do primeiro elemento até o último elemento da barra.

SALARI (2001) apresentou duas formulações gerais, para elementos unidimensionais, considerando os efeitos da aderência e do deslizamento na interface entre o aço e o concreto. Essas formulações são derivadas do equilíbrio e compatibilidade de equações diferenciais baseadas no equilíbrio de deslocamento e no equilíbrio de forças.

A primeira formulação é feita para um elemento finito baseado no deslocamento, sendo expresso em termos dos deslocamentos nodais através de interpolação de funções apropriadas aos deslocamentos. A segunda formulação é baseada no equilíbrio de forças dos elementos, através de procedimentos iterativos.

CAPÍTULO 3

MODELAGEM NUMÉRICA

3.1 INTRODUÇÃO

As propriedades, os modelos e os métodos de resolução numérica, que representam o comportamento e as características do aço e do concreto e as interações e influências que um material pode exercer sobre o outro, serão apresentados a seguir.

3.2 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A complexidade de modelos matemáticos em representar o comportamento de muitos materiais e estruturas levou à criação de vários métodos que possibilitaram resolver inúmeros problemas. Entre esses métodos destaca-se o método dos elementos finitos (MEF) por apresentar uma boa precisão e ser de fácil manuseio.

A seguir será demonstrado, de forma simplificada, como se desenvolve a matriz de rigidez e o vetor de cargas para os elementos finitos em geral. Uma demonstração mais detalhada, desse desenvolvimento, e matrizes de rigidez de vários elementos poderão ser encontradas em **ASSAN (1999)**.

3.2.1 DESENVOLVIMENTO DA MATRIZ DE RIGIDEZ

O método dos elementos finitos prevê a divisão do domínio, contínuo, em um número finito de pequenas regiões (elementos finitos), tornando o meio contínuo (Figura 3.2.1.1) em discreto (Figura 3.2.1.2). A matriz de rigidez de cada elemento finito (Figura 3.2.1.3) pode ser determinada usando o princípio do trabalho virtual.

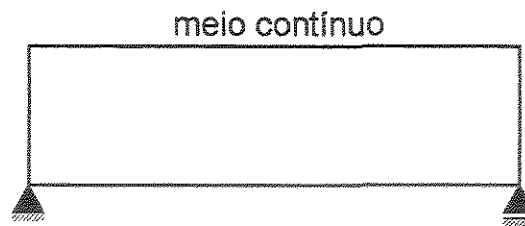


Figura 3.2.1.1- Viga isostática – meio contínuo.

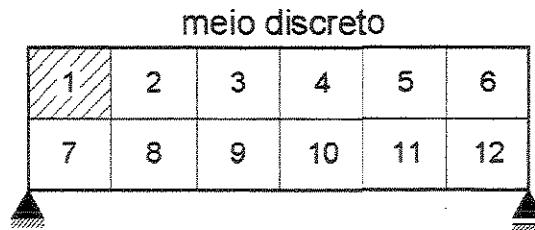


Figura 3.2.1.2- Viga isostática – meio discreto, divisão em elementos finitos (malha).

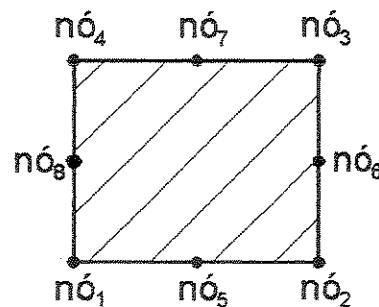


Figura 3.2.1.3- Elemento finito.

A seguir, temos alguns passos simplificados aplicados no desenvolvimento da formulação do método dos elementos finitos:

- a) definir os deslocamentos internos v em função de deslocamentos nodais r , em qualquer ponto dentro do elemento, através de funções de forma, adequadas ao comportamento real do elemento contínuo:

$$\{v\} = [\phi] \{r\} \quad (3.1)$$

- b) estabelecer uma relação deformação-deslocamento:

$$\{\varepsilon\} = [B] \{r\} \quad (3.2)$$

- c) estabelecer uma relação tensão-deformação apropriada:

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (3.3)$$

- d) substituir a equação (3.2) na (3.3):

$$\{\sigma\} = [D] [B] \{r\} \quad (3.4)$$

- e) trabalho virtual externo obtido através da imposição arbitrária de um deslocamento nodal virtual \tilde{r} :

$$W_e = \{\tilde{r}\}^t \{f\} \quad (3.5)$$

- f) trabalho virtual interno:

$$W_i = \int \{\tilde{\varepsilon}\}^t \{\sigma\} dv \quad (3.6)$$

- g) da equação (3.2):

$$\{\tilde{\varepsilon}\}^t = \{\tilde{r}\}^t [B]^t \quad (3.7)$$

h) substituindo (3.7) em (3.6):

$$W_i = \{\tilde{r}\}^t \left(\int [B]^t \{\sigma\} dv \right) \quad (3.8)$$

i) substituindo (3.4) em (3.8):

$$W_i = \{\tilde{r}\}^t \left(\int [B]^t [D] [B] dv \right) \{r\} \quad (3.9)$$

j) igualando W_e e W_i :

$$\{f\} = \left(\int [B]^t [D] [B] dv \right) \{r\} \quad (3.10)$$

$$\{f\} = [k] \{r\} \quad (3.11)$$

onde a matriz de rigidez é dada por:

$$[k] = \int [B]^t [D] [B] dv \quad (3.12)$$

A partir da definição da matriz de rigidez $[k]$ de cada elemento finito, nas coordenadas locais, é obtida a matriz de rigidez global $[K]$ da estrutura somando a rigidez de cada elemento nas coordenadas globais.

Abaixo, temos a relação do vetor $\{R\}$ (esforços nodais externos conhecidos) com a matriz de rigidez global $[K]$ e os deslocamentos nodais globais $\{g\}$ (a ser encontrado com a resolução do sistema):

$$\{R\} = [K] \{g\} \quad (3.13)$$

Após serem encontrados os deslocamentos nodais global, obtemos da equação (3.14) as tensões em cada elemento:

$$\{\sigma\} = [D] [B] \{g\} \quad (3.14)$$

3.2.2 ELEMENTO FINITO BIDIMENSIONAL

Um dos elementos finitos bidimensionais eficientes é o elemento retangular que aqui será denominado como LSR (*Linear Strain Rectangle*). Este elemento é composto por 8 nós, com 2 graus de liberdade por nó (2 translações) (Figura 3.2.2.1).

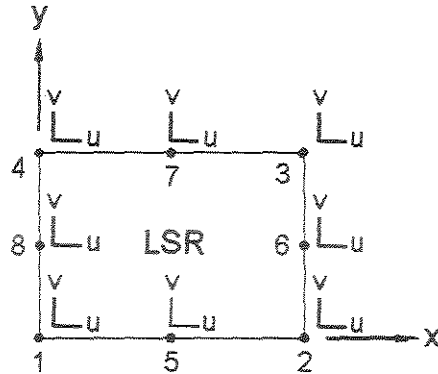


Figura 3.2.2.1- Elemento finito retangular (LSR).

Seja $\{u\}$ o vetor que contém as funções aproximadoras das componentes dos deslocamentos para cada nó (incógnitas nodais):

$$\{u\} = \{u, v\}^t \quad (3.15)$$

Para este elemento as funções aproximadoras têm variação quadrática sobre os lados, cujo sistema de referência está localizado no nó 1, sendo dadas por:

$$u(x,y) = d_1 + d_2x + d_3y + d_4x^2 + d_5y^2 + d_6xy + d_7x^2y + d_8xy^2 \quad (3.16)$$

$$v(x,y) = d_9 + d_{10}x + d_{11}y + d_{12}x^2 + d_{13}y^2 + d_{14}xy + d_{15}x^2y + d_{16}xy^2 \quad (3.17)$$

Considerando o vetor das incógnitas nodais como sendo $\{d\}$, podemos escrever $\{u\}$ na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & x & y & x^2 & y^2 & xy & x^2y & xy^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x^2 & y^2 & xy & x^2y & xy^2 \end{Bmatrix} \cdot \{d\} \quad (3.18)$$

onde,

$$\{d\} = \{ d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4 \ d_5 \ d_6 \ d_7 \ d_8 \ d_9 \ d_{10} \ d_{11} \ d_{12} \ d_{13} \ d_{14} \ d_{15} \ d_{16} \}^t \quad (3.19)$$

Fazendo,

$$[\xi] = \begin{Bmatrix} 1 & x & y & x^2 & y^2 & xy & x^2y & xy^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x^2 & y^2 & xy & x^2y & xy^2 \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

obtemos,

$$\{u\} = [\xi] \cdot \{d\} \quad (3.21)$$

Para um elemento com largura L e altura H (Figura 3.2.2.2) podemos escrever, na forma matricial (3.22), os deslocamentos nodais considerando as funções aproximadoras, como se segue.

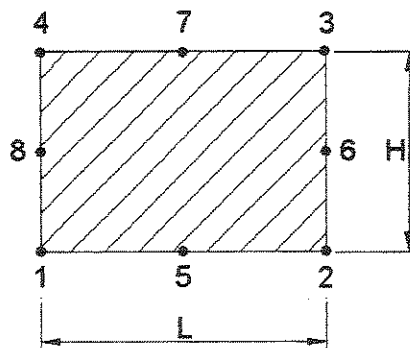


Figura 3.2.2.2- Dimensões dos elementos finitos.

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_8 \\ v_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 1 & 0 & L & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & h & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_9 \\ d_2 \\ d_{10} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_8 \\ d_{16} \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\{r\} = [A] \{d\} \quad (3.23)$$

onde,

$$\{r\} = \{ u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4 \ u_5 \ v_5 \ u_6 \ v_6 \ u_7 \ v_7 \ u_8 \ v_8 \}^t \quad (3.24)$$

A matriz de rigidez $[k]$ de cada elemento finito, destacada em (3.12), pode ser obtida, para o caso em que não se tem explicitada a matriz $[B]$, fazendo:

$$[B] = [\psi] [A^{-1}] \quad (3.25)$$

onde, $[\psi]$ é em função de operadores diferenciais e a matriz $[A]$ é obtida de (3.22).

Assim, obtemos:

$$[K] = [A^{-1}]^t \int_V \psi^t D \psi dv [A^{-1}] \quad (3.26)$$

Após a integração de $\int_V \psi^i D \psi^j dv$ obtemos os seguintes coeficientes matriciais:

$$\begin{array}{lll}
 l_{2,2} = LHQ_1 & l_{2,4} = L^2HQ_1 & l_{2,6} = LH^2Q_1/2 \\
 l_{2,7} = L^2H^2Q_1/2 & l_{2,8} = LH^3Q_1/3 & l_{2,11} = LHQ_2 \\
 l_{2,13} = LH^2Q_2 & l_{2,14} = L^2HQ_2/2 & l_{2,15} = L^3HQ_2/3 \\
 l_{2,16} = L^2H^2Q_2/2 & l_{3,3} = LHQ_3 & l_{3,5} = LH^2Q_3 \\
 l_{3,6} = L^2HQ_3/2 & l_{3,7} = L^3HQ_3/3 & l_{3,8} = L^2H^2Q_3/2 \\
 l_{3,10} = LHQ_3 & l_{3,12} = L^2HQ_3 & l_{3,14} = LH^2Q_3/2 \\
 l_{3,15} = L^2H^2Q_3/2 & l_{3,16} = LH^3Q_3/3 & l_{4,4} = 4L^3HQ_1/3 \\
 l_{4,6} = L^2H^2Q_1/2 & l_{4,7} = 2L^3H^2Q_1/3 & l_{4,8} = L^2H^3Q_1/3 \\
 l_{4,11} = L^2HQ_2 & l_{4,13} = L^2H^2Q_2 & l_{4,14} = 2L^3HQ_2/3 \\
 l_{4,15} = L^4HQ_2/2 & l_{4,16} = 2L^3H^2Q_2/3 & l_{5,5} = 4LH^3Q_3/3 \\
 l_{5,6} = L^2H^2Q_3/2 & l_{5,7} = L^3H^2Q_3/3 & l_{5,8} = 2L^2H^3Q_3/3 \\
 l_{5,10} = LH^2Q_3 & l_{5,12} = L^2H^2Q_3 & l_{5,14} = 2LH^3Q_3/3 \\
 l_{5,15} = 2L^2H^3Q_3/3 & l_{5,16} = LH^2Q_3/2 & l_{6,6} = (LH^3Q_1 + L^3HQ_3)/3 \\
 l_{6,7} = L^2H^3Q_1/3 + L^4HQ_3/4 & l_{6,8} = LH^4Q_1/4 + L^3H^2Q_3/3 & l_{6,10} = L^2HQ_2/2 \\
 l_{6,11} = LH^2Q_2/2 & l_{6,12} = 2L^3HQ_3/3 & l_{6,13} = 2LH^3Q_2/3 \\
 l_{6,14} = L^2H^2(Q_2 + Q_3)/4 & l_{6,15} = L^3H^2(Q_2 + 2Q_3)/6 & l_{6,16} = L^2H^3(2Q_2 + Q_3)/6 \\
 l_{7,7} = 4L^3H^3Q_1/9 + L^5HQ_3/5 & l_{7,8} = L^2H^4Q_1/4 + L^4H^2Q_3/4 & l_{7,10} = L^3HQ_3/3 \\
 l_{7,11} = L^2H^2Q_2/2 & l_{7,12} = L^4HQ_3/2 & l_{7,13} = 2L^2H^3Q_2/3 \\
 l_{7,14} = L^3H^2(2Q_2 + Q_3)/6 & l_{7,15} = L^4H^2(Q_2 + Q_3)/4 & l_{7,16} = L^3H^3(4Q_2 + Q_3)/9 \\
 l_{8,8} = LH^5Q_1/5 + 4L^3H^3Q_3/9 & l_{8,10} = L^2H^2Q_3/2 & l_{8,11} = LH^3Q_2/3 \\
 l_{8,12} = 2L^3H^2Q_3/3 & l_{8,13} = LH^4Q_2/2 & l_{8,14} = L^2H^3(Q_2 + 2Q_3)/6 \\
 l_{8,15} = L^3H^3(Q_2 + 4Q_3)/9 & l_{8,16} = L^2H^4(Q_2 + Q_3)/4 & l_{10,10} = LHQ_3 \\
 l_{10,12} = L^2HQ_3 & l_{10,14} = LH^2Q_3/2 & l_{10,15} = L^2H^2Q_3/2 \\
 l_{10,16} = LH^3Q_3/3 & l_{11,11} = LHQ_1 & l_{11,13} = LH^2Q_1 \\
 l_{11,14} = L^2HQ_1/2 & l_{11,15} = L^3HQ_1/3 & l_{11,16} = L^2H^2Q_1/2 \\
 l_{12,12} = 4L^3HQ_3/3 & l_{12,14} = L^2H^2Q_3/2 & l_{12,15} = 2L^3H^2Q_3/3 \\
 l_{12,16} = L^2H^3Q_3/3 & l_{13,13} = 4LH^3Q_1/3 & l_{13,14} = L^2H^2Q_1/2 \\
 l_{13,15} = L^3H^2Q_1/3 & l_{13,16} = 2L^2H^3Q_1/3 & l_{14,14} = (L^3HQ_1 + LH^3Q_3)/3 \\
 l_{14,15} = L^4HQ_1/4 + L^2H^3Q_3/3 & l_{14,16} = L^3H^2Q_1/3 + LH^4Q_3/4 & l_{15,15} = L^5HQ_1/5 + 4L^3H^3Q_3/9 \\
 l_{15,16} = L^4H^2Q_1/4 + L^2H^4Q_3/4 & l_{16,16} = 4L^3H^3Q_1/9 + LH^5Q_3/5 &
 \end{array}$$

onde,

$$Q_1 = \frac{E\epsilon}{1-\nu^2}$$

$$Q_2 = \nu Q_1$$

$$Q_3 = \frac{1-\nu}{2} Q_1$$

sendo,

E – módulo de elasticidade;

ν – coeficiente de Poisson;

e – espessura do elemento.

Com isso, podemos obter os valores de $[k]$ que somados, nas coordenadas globais, constituirão a matriz de rigidez global da estrutura conforme (3.13).

Para a obtenção das deformações $\{\varepsilon\}$ e das tensões $\{\sigma\}$, nos elementos, primeiramente isolamos $\{d\}$ da expressão (3.23) dos deslocamentos nodais e substituímos em (3.21):

$$\{d\} = [A]^{-1} \{r\} \quad (3.27)$$

$$\{u\} = [\xi] [A]^{-1} \{r\} \quad (3.28)$$

Sendo:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{- deformação no eixo (x)}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{- deformação no eixo (y)}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{- distorção}$$

temos,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

$$\{\varepsilon\} = [\rho] \{u\} \quad (3.30)$$

Substituindo (3.28) em (3.30) obtemos a deformação:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [\rho] [\xi] [A]^{-1} \{r\} \quad (3.31)$$

A tensão é obtida de:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

3.3 A ARMADURA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Pelo método dos elementos finitos podemos representar a armadura de aço, das estruturas de concreto armado, de três formas diferentes, A. S. C. E. (1982):

Representação Distribuída:

A rigidez da armadura de aço é distribuída no elemento de concreto, sendo usada uma relação constitutiva que combina as características do aço e do concreto. Para este caso é assumida uma perfeita aderência entre os dois materiais e o aço assume uma orientação particular conforme a Figura 3.3.1.

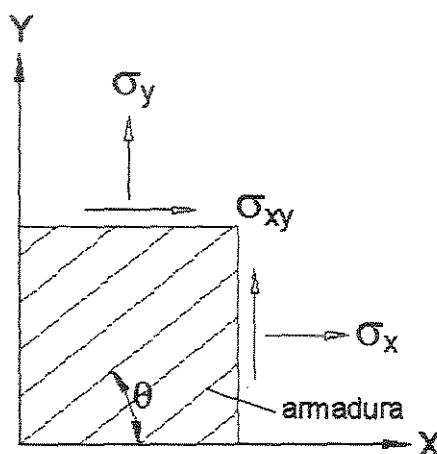


Figura 3.3.1- Representação distribuída da armadura.

Representação Embutida:

Esta representação é utilizada considerando a armadura de aço como membro axial ligado ao elemento de concreto isoparamétrico, tal que os deslocamentos da armadura são consistentes com os dos elementos, assumindo perfeita aderência entre os dois materiais (Figura 3.3.2).

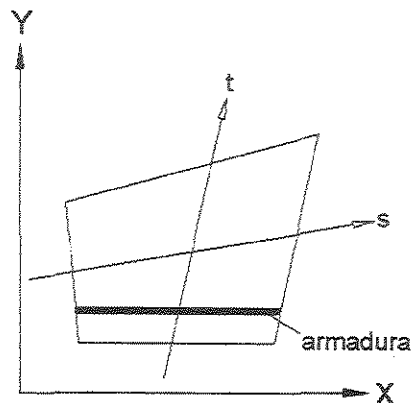


Figura 3.3.2- Representação embutida da armadura.

Representação Discreta:

A armadura, na representação discreta (Figura 3.3.3), pode ser considerada como sendo composta por elementos unidimensionais, devido às próprias características de barra da armadura, tendo dois graus de liberdade por nó, ou, também, como elementos de viga, assumindo capacidade de resistir aos esforços axiais, cortantes e também momentos, podendo ter três graus de liberdade por nó. A vantagem desse tipo de representação é que se pode considerar os deslocamentos relativos entre a armadura e o concreto, através da sobreposição de nós dos elementos do aço e do concreto, sendo conectados por elementos finitos especiais na interface.

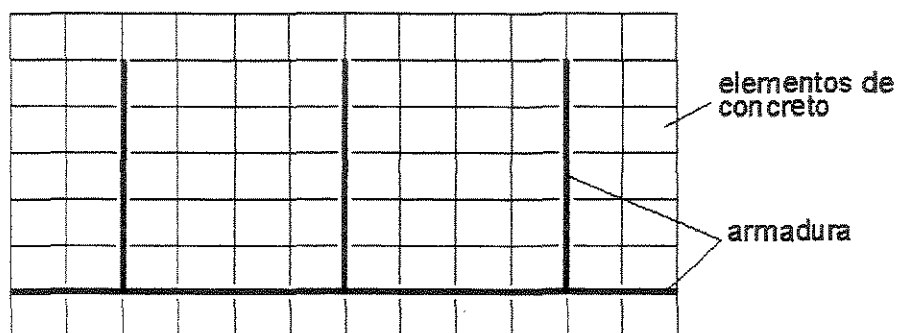


Figura 3.3.3- Representação discreta da armadura.

Para a modelagem de uma mesma estrutura, por exemplo uma viga, podemos combinar os elementos unidimensionais com os elementos de viga (bidimensionais), sobrepondo-os em uma malha bidimensional de elementos de concreto (Figura 3.3.4), onde os elementos de viga representam a armadura principal e os elementos unidimensionais representam os estribos. O mesmo elemento finito que é utilizado para representar o concreto pode ser utilizado para representar o aço, com as respectivas características a serem assumidas na modelagem.

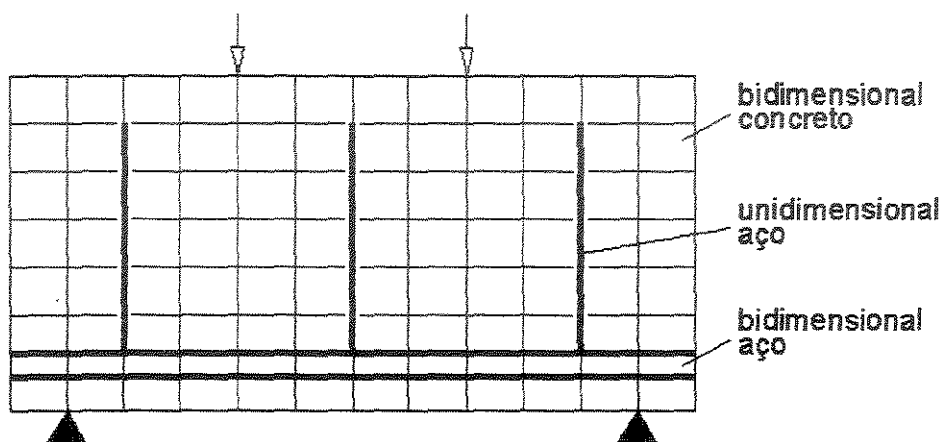


Figura 3.3.4- Elementos de representação da armadura.

A representação realística do deslizamento entre o aço e o concreto (aderência) se faz necessária nas regiões de grandes tensões na interface entre os dois materiais, nas proximidades de fissuras ou nas regiões de ancoragem das barras de aço, pois pode ocorrer o deslocamento relativo da armadura em relação ao concreto.

Assim, a análise de estruturas de concreto armado, através da modelagem numérica pelo método dos elementos finitos, poderá ser profundamente influenciada pelas propriedades da interface entre o aço e o concreto, podendo levar a resultados que não condizem com a realidade de funcionamento da estrutura como, por exemplo, a formação e distribuição de fissuras.

Na Figura 3.3.5, ensaio de tração, é assumida perfeita aderência entre o aço e o concreto, assim as deformações específicas longitudinais no concreto terão um valor máximo na face externa, já que são idênticas à deformação específica do aço nesta face e naquelas da barra exposta.

Porém, pode ocorrer deslizamento da barra na face aliviando um pouco a tração no concreto; com isso, as fissuras surgirão a uma certa distância das faces onde a tração é suficiente para as suas formações (Figura 3.3.6).

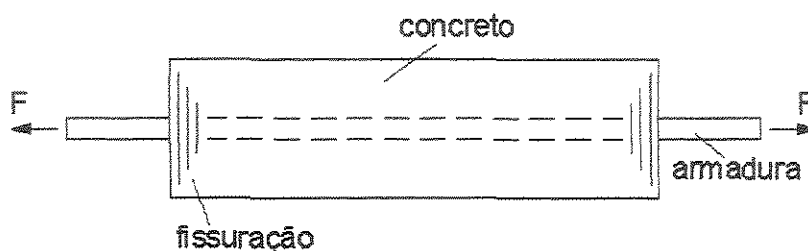


Figura 3.3.5- Fissuração – aderência perfeita.

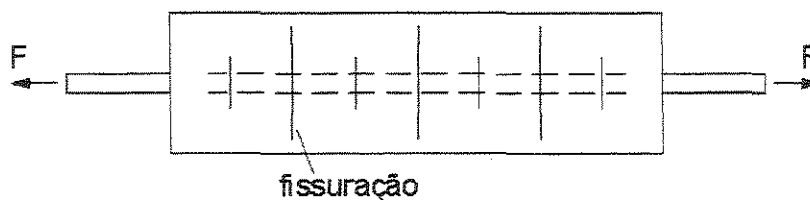


Figura 3.3.6- Fissuração – deslocamento relativo.

3.4 RELAÇÕES ENTRE A TENSÃO DE ADERÊNCIA E O DESLIZAMENTO

O fenômeno da aderência entre o aço e o concreto é extremamente complexo, onde numerosas investigações práticas são realizadas na busca de uma lei que exprima a evolução da tensão de aderência (τ) em função do deslizamento (S).

Um caminho simples para estudar essa evolução é relacionar, a partir de ensaios de arrancamento ou de tirante (tração simétrica), o esforço total aplicado na barra ao deslizamento medido a partir de uma face da amostra. Essa relação encontrada é utilizada para a modelagem em elementos finitos, sendo necessário desenvolver uma relação entre a tensão de aderência local e o deslizamento local ao longo da interface entre os dois materiais.

A tensão de aderência local pode ser calculada a partir da variação da tensão do aço ao longo da barra através da deformação específica. Extensômetros elétricos são colocados em um centro oco da barra serrada longitudinalmente, sendo reconstruída por solda, posteriormente. Assim, a tensão de aderência local é calculada como a variação da tensão axial na barra por unidade de comprimento, dividida pelo perímetro da barra.

O deslizamento local pode ser determinado em posições específicas ao longo da interface, sendo baseado na diferença entre o deslocamento do aço e do concreto em cada posição. O deslocamento do aço é encontrado por integração numérica de suas deformações específicas, lidas pelos extensômetros internos. O deslocamento do concreto é determinado a partir de medidores especiais de deformação específica de resistência elétrica, embutidos a uma pequena distância da interface entre o aço e o concreto, espaçados ao longo da interface.

Os resultados obtidos por **BRESLER (1968)**, em suas investigações experimentais sobre as deformações do aço e do concreto, foram utilizados por **NILSON (1968)** na formulação de uma lei teórica correlacionando a tensão de aderência e o deslizamento, chegando a um polinômio de terceiro grau (Figura 3.4.1):

$$\tau_{(x)} = 3606 \times 10^3 \times (S_{(x)}) - 5356 \times 10^6 \times (S_{(x)})^2 + 1986 \times 10^9 \times (S_{(x)})^3$$

onde a tensão de aderência é dada em “psi” e o deslizamento em “in”.

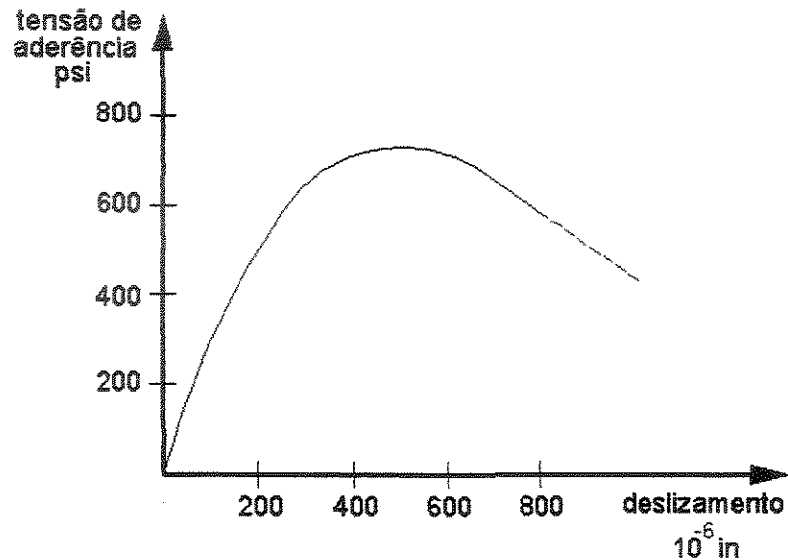


Figura 3.4.1- Curva tensão de aderência x deslizamento, NILSON (1968).

Em MIRZA (1979) é apresentado um polinômio de quarta ordem, como se segue abaixo, baseado nos resultados experimentais de 62 amostras de concreto armado, onde se incluem, nos ensaios, variações nos níveis de carregamento, na espessura de cobrimento do concreto e na resistência de compressão do concreto (Figura 3.4.2):

$$\tau_{(x)} = 1.95 \times 10^6 \times (S_{(x)}) - 2.35 \times 10^9 \times (S_{(x)})^2 + 1.39 \times 10^{12} \times (S_{(x)})^3 - 0.33 \times 10^{15} \times (S_{(x)})^4$$

onde a tensão de aderência é dada em “psi” e o deslizamento em “in”.

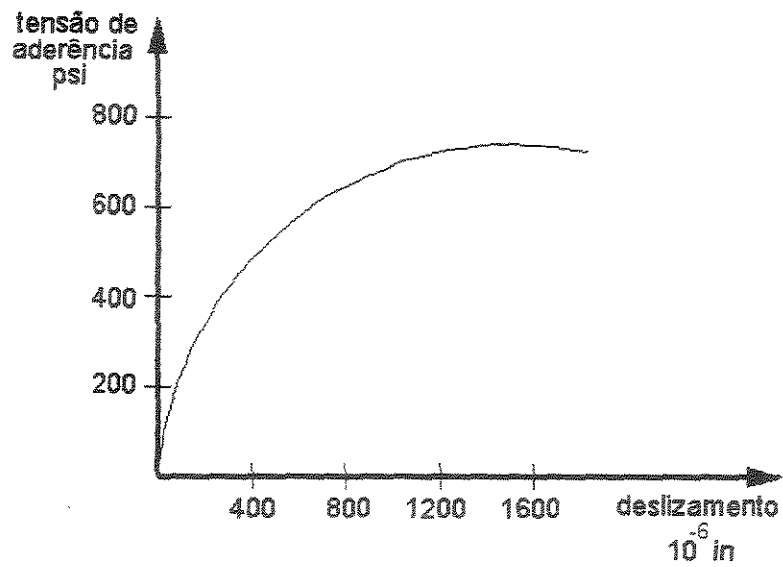


Figura 3.4.2- Curva tensão de aderência x deslizamento, MIRZA (1979).

A Figura 3.4.3 mostra a curva apresentada por YANKELEVSKY (1985) representada por quatro estágios:

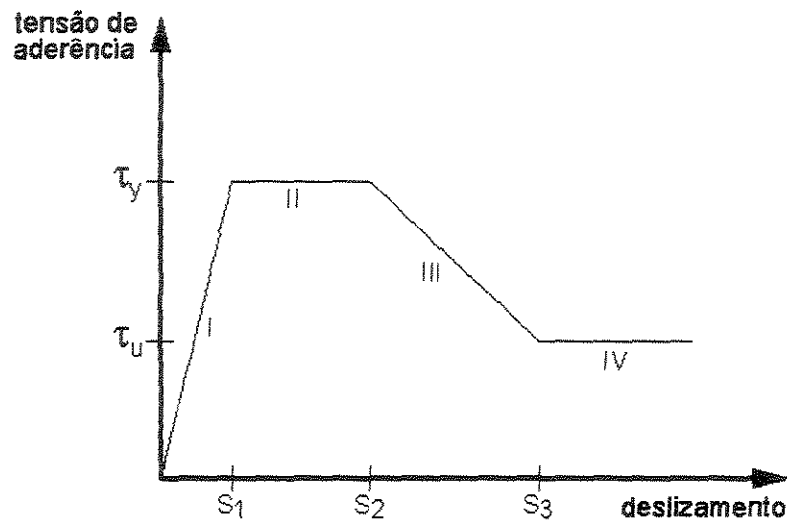


Figura 3.4.3- Curva tensão de aderência x deslizamento, YANKELEVSKY (1985).

Outras curvas, referentes às formulações das relações entre a tensão de aderência e o deslizamento, podem ser encontradas em **TASSIOS (1981)** e **SOMAYAJI (1981)**.

Entre as inúmeras leis que exprimem a dependência da tensão de aderência pelo deslizamento, podemos classificar, quanto à forma geométrica, os tipos de suas curvas, existentes na literatura, em:

Poligonal: representadas por segmentos de retas caracterizando os estágios da relação tensão de aderência x deslizamento, ex: **YANKELEVSKY (1985)**.

Polinomial: representadas por um polinômio definido pelo grau de interpolação dos resultados obtidos nos ensaios, ex: **NILSON (1968)**, **MIRZA (1979)**.

Exponencial: representadas pela variação da tensão de aderência em função exponencial do deslizamento ao longo da barra, ex: **SOMAYAJI (1981)**.

Mista: combinação das outras formas apresentadas.

A análise de estruturas de concreto armado, utilizando a representação discreta da armadura através da modelagem numérica pelo método dos elementos finitos, poderá ser influenciada pelo tipo de curva utilizada na representação do modelo, por esta definir a rigidez da interface entre o aço e o concreto.

3.5 MODELAGEM DA ADERÊNCIA ENTRE O AÇO E O CONCRETO

Os elementos finitos são utilizados para representar o aço, o concreto e a aderência entre as barras de aço e o concreto.

A seguir, serão apresentados elementos finitos que podem ser utilizados para a modelagem da aderência.

3.5.1 MODELAGEM DA ADERÊNCIA PELO ELEMENTO DE LIGAÇÃO PROPOSTO POR NGO (1967)

O elemento finito proposto por NGO (1967) (Figura 3.5.1.1), chamado de elemento de ligação, é constituído de duas “molas” perpendiculares, que representam as rigidezes de interface, conectando os nós i e j .

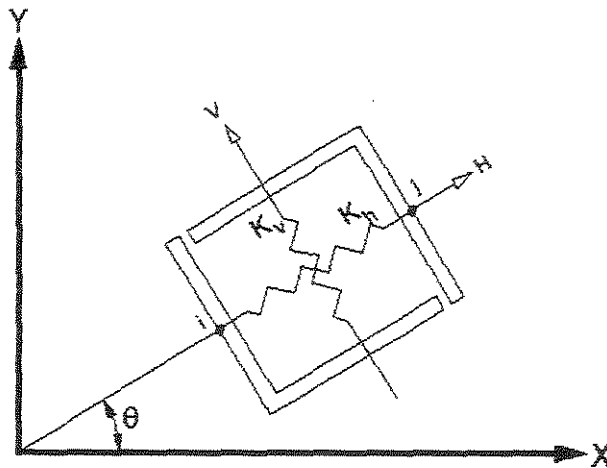


Figura 3.5.1.1- Elemento de ligação, NGO (1967).

A utilização desse elemento na modelagem não interfere na geometria da estrutura por não ter dimensões físicas, sendo composto por nós duplos, onde somente

as suas propriedades mecânicas são importantes, podendo ser orientado por um ângulo arbitrário θ com o eixo horizontal ao que se pretende trabalhar.

O elemento de ligação pode ser utilizado para conectar elementos de aço e de concreto, conectar elementos de aço e de aço ou de concreto e de concreto, sendo necessário definir a rigidez de interface para cada caso. Nas estruturas de concreto armado, esses elementos são utilizados para simular o fenômeno da aderência x deslizamento entre o aço e o concreto, transmitindo os esforços de cisalhamento e normal entre os dois materiais.

A relação constitutiva entre a tensão – deformação, dos elementos de ligação, é dada por:

$$\{\sigma\} = [C] \cdot \{\varepsilon\} \quad (3.33)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_h \\ \sigma_v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_h & 0 \\ 0 & k_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_h \\ \varepsilon_v \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

onde, ε_h e ε_v são deformações relativas aos deslocamentos entre os nós i e j (Figura 3.5.1.2).

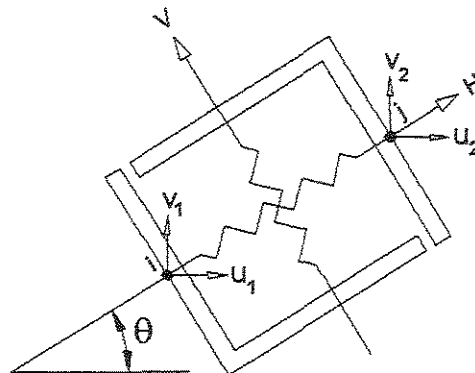


Figura 3.5.1.2- Elemento de ligação, deslocamentos nodais.

A seguir, temos a relação entre a deformação e os deslocamentos (3.35), a partir da matriz de transformação dos deslocamentos [M]:

$$\{\varepsilon\} = [M] \{r\} \quad (3.35)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_h \\ \varepsilon_v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & -s & c & s \\ s & -c & -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

onde:

$$c = \cos \theta, \quad s = \sin \theta;$$

u_1 e u_2 , v_1 e v_2 são deslocamentos dos nós i e j nas direções H e V, respectivamente.

Abaixo, temos a relação entre os esforços e os deslocamentos (Figura 3.5.1.3):

$$\{f\} = [k] \{r\} \quad (3.11)$$

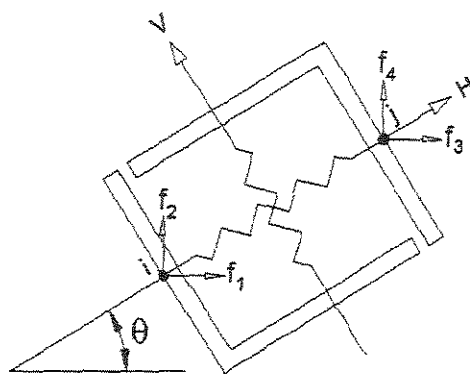


Figura 3.5.1.3- Elemento de ligação, forças nodais.

Assim, temos como matriz de rigidez:

$$[K] = [M]^t [C] [M] \quad (3.37)$$

$$[k] = \begin{bmatrix} -c & s \\ -s & -c \\ c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_h & 0 \\ 0 & k_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c & -s & c & s \\ s & -c & -s & c \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

A matriz de Rigidez $[k]$ é dada abaixo:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_h c^2 + k_v s^2 & k_h s c - k_v s c & -k_h c^2 - k_v s^2 & -k_h s c + k_v s c \\ k_h s c - k_v s c & k_h s^2 + k_v c^2 & -k_h s c + k_v s c & -k_h s^2 - k_v c^2 \\ -k_h c^2 - k_v s^2 & -k_h s c + k_v s c & k_h c^2 + k_v s^2 & k_h s c - k_v s c \\ -k_h s c + k_v s c & -k_h s^2 - k_v c^2 & k_h s c - k_v s c & k_h s^2 + k_v c^2 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

A forma de manipulação dessa matriz de rigidez é semelhante a qualquer outra matriz de rigidez de elementos finitos. Assim, somando a matriz de rigidez de cada elemento de ligação obtemos a rigidez total na interface.

Para as estruturas de concreto armado o valor da rigidez ao deslizamento vertical k_v refere-se à força de transferência vertical (normal) entre a barra de aço e o concreto. Para as estruturas em geral, considera-se um valor alto para essa rigidez, já que na conexão nodal, entre o aço e o concreto, o deslizamento vertical é praticamente desprezível.

O valor da rigidez ao deslizamento horizontal k_h refere-se à rigidez de cisalhamento na interface, podendo ser obtida a partir das relações entre a tensão de aderência e o deslizamento na interface entre o aço e o concreto.

Um valor grande da rigidez, "tendendo ao infinito", significa grande aderência ou contato perfeito, e um valor nulo significa nenhuma aderência ou deslizamento livre.

Para obtermos o valor da rigidez ao deslizamento entre a barra de aço e o concreto, determinamos a derivada da função da curva da tensão de aderência em função do respectivo deslizamento. Assim, considerando como exemplo a curva apresentada por NILSON (1968), temos a inclinação da curva da tensão de aderência x deslizamento (3.40) (Figura 3.5.1.4):

$$\tau_{(x)} = 3606 \times 10^3 \times (S_{(x)}) - 5356 \times 10^6 \times (S_{(x)})^2 + 1986 \times 10^9 \times (S_{(x)})^3$$

$$\frac{d\tau_{(x)}}{dS_{(x)}} = 3.606 \times 10^6 - 10.712 \times 10^9 \times (S_{(x)}) + 5.958 \times 10^{12} \times (S_{(x)})^2 \quad (3.40)$$

onde, a tensão de aderência é dada em "psi", o deslizamento em "in" e $\frac{d\tau_{(x)}}{dS_{(x)}}$ é dada

em $\frac{lb}{in^3}$.

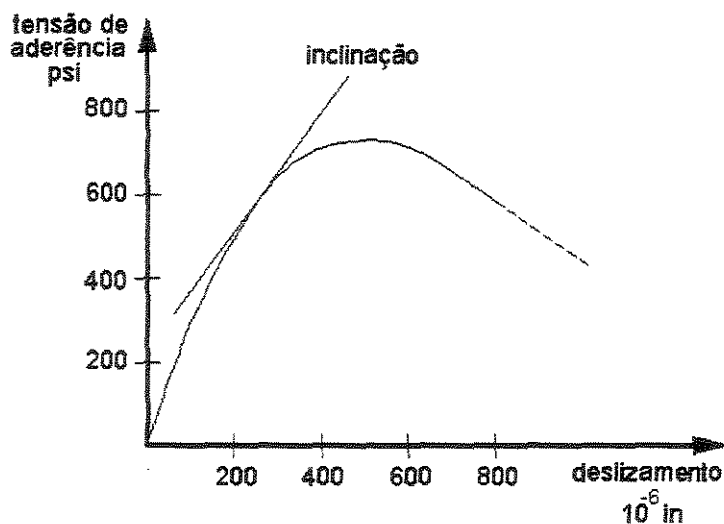


Figura 3.5.1.4- Inclinação da curva tensão de aderência x deslizamento.

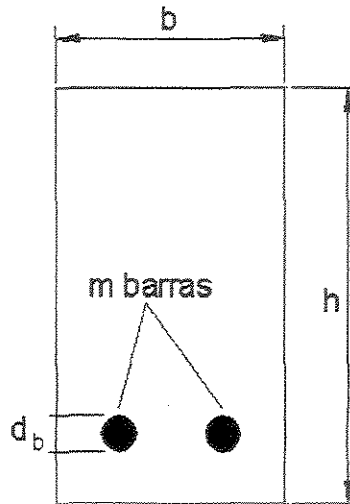


Figura 3.5.1.5- Seção transversal de um elemento de concreto armado.

Agora, a expressão (3.40) é multiplicada pela área de influência superficial de contato entre os materiais:

$$\text{Área de influência superficial} = \frac{m \cdot \pi \cdot d_b \cdot L}{2} \quad (3.41)$$

onde m é o número de barras na seção e d_b é o diâmetro da barra (Figura 3.5.1.5), L é a distância de influência dos elementos de ligação (Figura 3.5.1.6) e o fator 2, no denominador, aparece quando são usados elementos de ligação no topo e na base das barras (Figura 3.5.1.7). Esta área pode ser dividida, por exemplo, pela largura b da seção transversal do elemento de concreto armado, quando estamos trabalhando por unidade de comprimento, pela seção modificada, na modelagem dos elementos finitos.

Abaixo, temos a rigidez ao deslizamento horizontal:

$$k_h = \frac{d\tau_{(x)}}{dS_{(x)}} \cdot \frac{m \cdot \pi \cdot d_b \cdot L}{2 \cdot b} \quad (3.42)$$

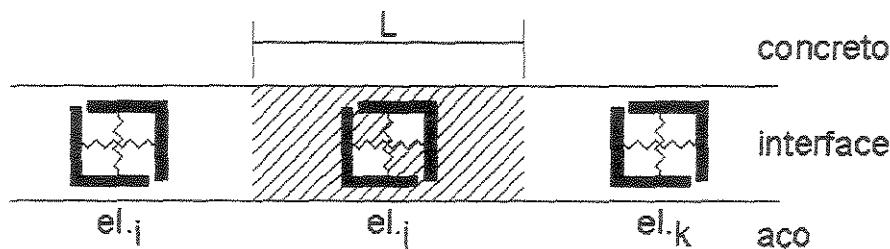


Figura 3.5.1.6- Área de influência dos elementos de ligação.

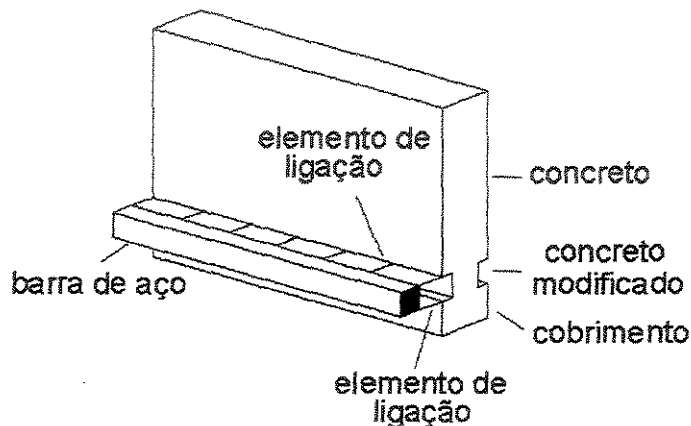


Figura 3.5.1.7- Elemento de ligação: topo e base das barras de aço.

A Figura 3.5.1.8 mostra uma seção de um elemento de concreto armado contendo m barras de aço de diâmetro d_b , distribuídas dentro de uma seção de largura b . Por conveniência essas barras circulares foram transformadas em barras quadradas de mesma área. Como, pelo método dos elementos finitos, a representação é baseada em uma fatia unitária da largura (b), do elemento de concreto, então é considerada uma fração referente à soma das larguras das barras na seção modificada. No nível das barras de aço a largura do concreto é considerada subtraindo a largura das barras.

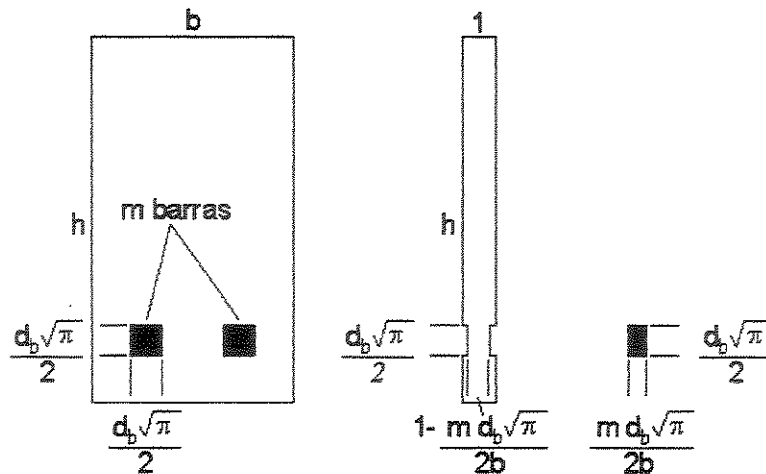


Figura 3.5.1.8- Seção modificada (unitária) de um elemento de concreto armado.

3.5.2 MODELAGEM DA ADERÊNCIA PELO ELEMENTO DE INTERFACE

O elemento de interface (Figura 3.5.2.1) tem o mesmo princípio de funcionamento que o elemento de ligação. A diferença reside no fato de que o elemento de ligação descreve o comportamento da aderência x deslizamento entre o aço e o concreto apenas nos pontos nodais ao longo da interface, sendo necessário calcular a sua área de influência.

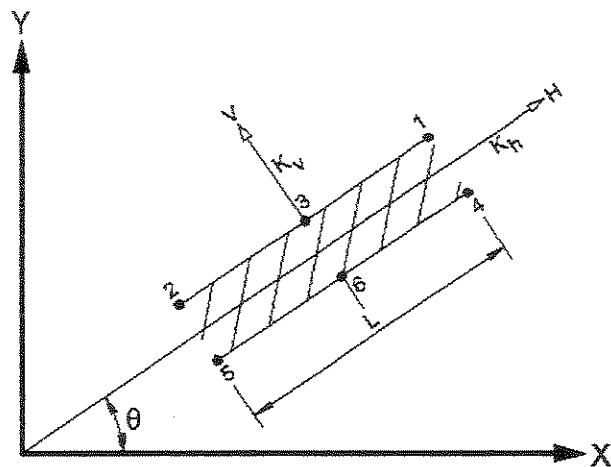


Figura 3.5.2.1- Elemento de Interface.

Para o elemento de interface, que é constituído de nós que se sobrepõem tendo altura nula, o comportamento da aderência x deslizamento se dá ao longo do seu comprimento que define a sua área de influência.

O desenvolvimento da relação constitutiva, para um elemento de interface linear constituído por dois pares de nós que se sobrepõem (Figura 3.5.2.2), será apresentado a seguir.

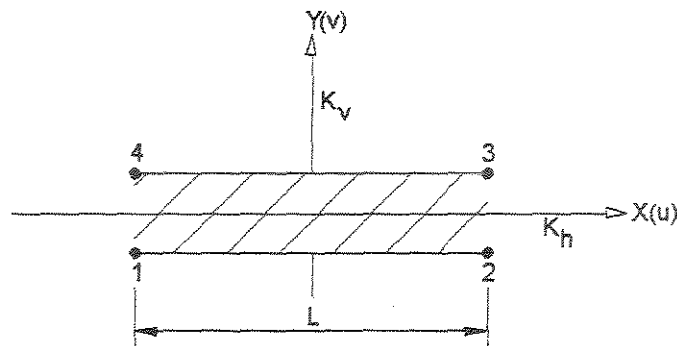


Figura 3.5.2.2- Elemento de Interface linear.

Seja $\{u\}$ o vetor que contém as funções das componentes dos deslocamentos relativos para cada nó:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta u_{12} - \Delta u_{34} \\ \Delta v_{12} - \Delta v_{34} \end{Bmatrix} \quad (3.43)$$

Considerando u e v os deslocamentos nodais nos eixos x e y , respectivamente, temos para o nível inferior do elemento:

$$\begin{Bmatrix} \Delta u_{12} \\ \Delta v_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \frac{2x}{L} & 0 & 1 + \frac{2x}{L} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{2x}{L} & 0 & 1 + \frac{2x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

Para o nível superior do elemento, temos:

$$\begin{Bmatrix} \Delta u_{34} \\ \Delta v_{34} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{2x}{L} & 0 & 1 - \frac{2x}{L} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{2x}{L} & 0 & 1 - \frac{2x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (3.45)$$

Fazendo $A = 1 - \frac{2x}{L}$ e $B = 1 + \frac{2x}{L}$, temos para o vetor $\{u\}$:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -A & 0 & -B & 0 & B & 0 & A & 0 \\ 0 & -A & 0 & -B & 0 & B & 0 & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (3.46)$$

$$\{u\} = \frac{1}{2} [H] \{r\} \quad (3.47)$$

A energia de deformação é dada por:

$$\Omega_d = \frac{1}{2} \int \{\sigma\} \{\varepsilon\} dv \quad (3.48)$$

$$\Omega_d = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{4} \{r\} [H]^T [C] [H] \{r\} dx \quad (3.49)$$

onde, a matriz de rigidez $[k]$ é dada por:

$$[k] = [H]^T [C] [H] \quad (3.50)$$

$$[k] = \begin{bmatrix} -A & 0 \\ 0 & -A \\ -B & 0 \\ 0 & -B \\ B & 0 \\ 0 & B \\ B & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_H & 0 \\ 0 & k_V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A & 0 & -B & 0 & B & 0 & A & 0 \\ 0 & -A & 0 & -B & 0 & B & 0 & A \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Para:

$$A^2 = \int_{-L/2}^{L/2} \left(1 - \frac{2x}{L}\right)^2 dx = \frac{4}{3}L$$

$$B^2 = \int_{-L/2}^{L/2} \left(1 + \frac{2x}{L}\right)^2 dx = \frac{4}{3}L$$

temos a matriz de rigidez $[k]$ para o sistema de coordenada local:

$$[k] = \frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2k_h & 0 & k_h & 0 & -2k_h & 0 & -k_h & 0 \\ 0 & 2k_v & 0 & k_v & 0 & -2k_v & 0 & -k_v \\ k_h & 0 & 2k_h & 0 & -k_h & 0 & -2k_h & 0 \\ 0 & k_h & 0 & 2k_v & 0 & -k_v & 0 & -k_v \\ -2k_h & 0 & -k_h & 0 & 2k_h & 0 & k_h & 0 \\ 0 & -2k_v & 0 & -k_v & 0 & 2k_v & 0 & k_v \\ -k_h & 0 & -2k_h & 0 & k_h & 0 & 2k_h & 0 \\ 0 & -k_v & 0 & -k_v & 0 & k_v & 0 & 2k_h \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Para passar a matriz de rigidez $[k]$ do sistema de coordenada local para o sistema de coordenada global (Figura 3.5.2.3) fazemos:

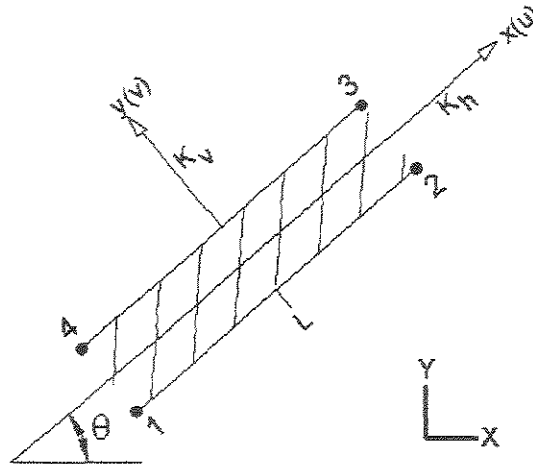


Figura 3.5.2.3- Elemento de Interface linear no sistema de coordenada global.

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \quad (3.53)$$

$$\{x\} = [m] \{X\} \quad (3.54)$$

onde, $s = \text{sen } \theta$ e $c = \text{cos } \theta$.

Para o elemento (oito graus de liberdade), temos como matriz parcial de mudança de coordenadas:

$$[M] = \begin{bmatrix} [m] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [m] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [m] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [m] \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Fazendo,

$$[D] = [H][M] \quad (3.56)$$

onde $[H]$ é obtido de (3.47), e multiplicando por (3.52), obtemos a matriz de rigidez para o sistema de coordenada global:

$$[K] = [D]^t [k] [D] \quad (3.57)$$

A matriz de rigidez para o elemento de interface de seis nós (Figura 3.5.2.1), na coordenada local, é apresentada a seguir:

$$[k] = \frac{L}{30} \begin{bmatrix} 4k_h & 0 & -k_h & 0 & 2k_h & 0 & -4k_h & 0 & k_h & 0 & -2k_h & 0 \\ & 4k_v & 0 & -k_v & 0 & 2k_v & 0 & -4k_v & 0 & k_v & 0 & -2k_v \\ & & 4k_h & 0 & 2k_h & 0 & k_h & 0 & -4k_h & 0 & -2k_h & 0 \\ & & & 4k_v & 0 & 2k_v & 0 & k_v & 0 & -4k_v & 0 & -2k_v \\ & & & & 16k_h & 0 & -2k_h & 0 & -2k_h & 0 & -16k_h & 0 \\ & & & & & 16k_v & 0 & -2k_v & 0 & -2k_v & 0 & -16k_v \\ & & & & & & 4k_h & 0 & -k_h & 0 & 2k_h & 0 \\ & & & & & & & 4k_v & 0 & -k_v & 0 & 2k_v \\ & s & i & m & e & t. & & & 4k_h & 0 & 2k_h & 0 \\ & & & & & & & & & 4k_v & 0 & 2k_v \\ & & & & & & & & & & 16k_h & 0 \\ & & & & & & & & & & & 16k_v \end{bmatrix}$$

O valor da rigidez ao deslizamento vertical k_v refere-se à força de transferência vertical (normal), entre a barra de aço e o concreto, como já definido para os elementos de ligação.

O valor da rigidez ao deslizamento horizontal k_h , referente à rigidez de cisalhamento na interface, é obtido da mesma forma que obtivemos para o elemento de ligação, porém, como nesse elemento já se define nas propriedades de sua matriz de

rigidez o seu comprimento de influência, não precisamos multiplicar a área de influência superficial pela distância de influência, como é feito para o elemento de ligação.

$$\text{Área de influência superficial} = \frac{m \cdot \pi \cdot d_b}{2b} \quad (3.58)$$

onde m é o número de barras na seção, d_b é o diâmetro da barra, o fator 2, no denominador, aparece quando são usados elementos de ligação no topo e na base das barras e b é a largura da seção transversal do elemento de concreto armado.

Multiplicando $\frac{d\tau_{(x)}}{dS_{(x)}}$ pela área de influência superficial de contato entre os materiais obtemos k_h :

$$k_h = \frac{d\tau_{(x)}}{dS_{(x)}} \cdot \frac{m \cdot \pi \cdot d_b}{2b} \quad (3.59)$$

3.5.3 MODELAGEM DA ADERÊNCIA PELO MODELO PROPOSTO POR YANKELEVSKY (1985)

No trabalho de YANKELEVSKY (1985), que aqui será descrito, é proposta uma solução exata das equações diferenciais de equilíbrio para cada zona da relação linear da tensão de aderência x deslizamento, onde as propriedades do aço e da interface são incorporadas à matriz de rigidez de um elemento finito unidimensional, para simular o deslizamento relativo entre o aço e o concreto. A rigidez do concreto foi idealizada como sendo muito alta, não sendo levada em conta.

3.5.3.1 DESCRIÇÃO DO MODELO

O modelo apresentado por YANKELEVSKY (1985), (Figura 3.5.3.1.1), considera um elemento finito de barra de diâmetro D , área de seção transversal A_s e comprimento L .

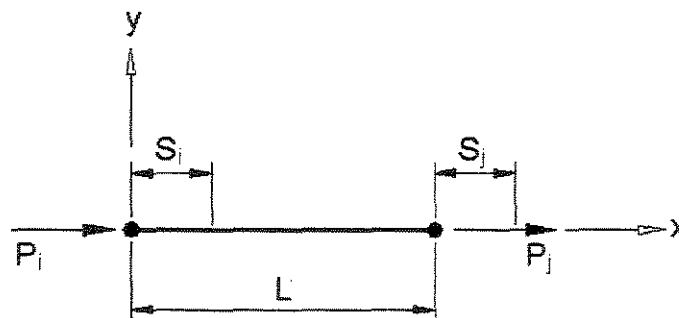


Figura 3.5.3.1.1- Arranjo do elemento finito.

O elemento pressupõe um comportamento entre o aço e o concreto representado pelos deslizamentos nodais. A formulação matemática é fundamentada em equações de equilíbrio das forças atuantes na interface entre a barra e o concreto (Figura 3.5.3.1.2), e na relação local entre a tensão de aderência e o deslizamento.

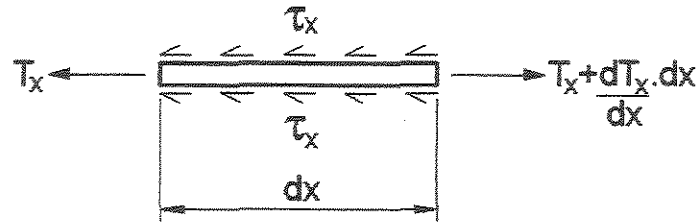


Figura 3.5.3.1.2- Equilíbrio das forças atuantes na interface.

A seguir, temos a equação de equilíbrio da tensão de aderência na interface aço – concreto, tendo em vista a Figura 3.5.3.1.2:

$$\tau(x) \cdot \pi \cdot D \cdot dx + T(x) - T(x) - \frac{dT(x)}{dx} \cdot dx = 0 \quad (3.60)$$

$$\tau(x) = \frac{1}{\pi \cdot D} \cdot \frac{dT(x)}{dx} \quad (3.61)$$

sendo $T(x)$ a força axial no aço.

Para um comportamento elástico linear, a equação (3.61) pode ser escrita como:

$$\tau(x) = \frac{E \cdot D}{4} \cdot \frac{d\varepsilon(x)}{dx} \quad (3.62)$$

onde E é o módulo de elasticidade do aço e $\varepsilon(x)$ a deformação axial da barra.

Ignorando a deformação do concreto comparada com a do aço, a relação entre a deformação e o deslizamento $S(x)$ é obtida:

$$\frac{dS(x)}{dx} = \varepsilon(x) \quad (3.63)$$

Substituindo em (3.62) a equação (3.63), obtemos:

$$\tau(x) = \frac{E.D}{4} \cdot \frac{d^2 S(x)}{dx^2} \quad (3.64)$$

A lei local da tensão de aderência x deslizamento pode ser descrita por uma relação linear de cada parte da Figura 3.5.3.1.3.

$$\tau(x) = a.S(x) + b \quad (3.64a)$$

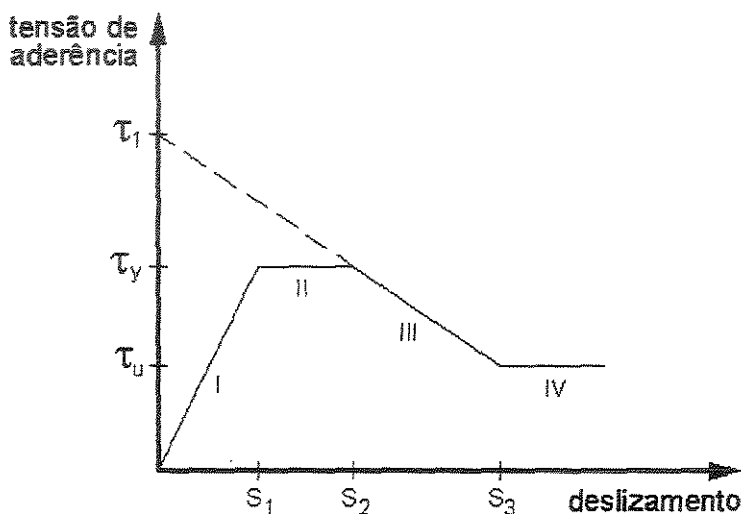


Figura 3.5.3.1.3- Relação local da tensão de aderência x deslizamento.

A partir da equação (3.64) e (3.64a) obtemos a função deslizamento $S(x)$ para os diferentes trechos (estágios) da lei local da tensão de aderência x deslizamento, onde temos um coeficiente a com sinal diferente, o qual afeta a solução da equação, sendo considerada quatro situações. O estágio I refere-se ao contato inicial entre o aço e o concreto mantido pela adesão até iniciar a perda da aderência, onde ela passa a ser, principalmente, governada pelo apoio das saliências da barra no concreto (estágio II). No estágio III a tensão de aderência se reduz, onde o mecanismo de transferência da tensão é dado também pela fricção. No estágio IV a aderência se dá pela fricção. Os limites para cada situação (estágio) são obtidos a partir de ensaios práticos.

CASO 1: $a > 0$, $0 \leq S(x) \leq S_1$

Para este caso a solução da equação (3.64a) será:

$$S(x) = C_1 \cdot e^{\alpha_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot x} \quad (3.65)$$

onde:

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot \tau_y}{S_y \cdot E \cdot D}} \quad (3.66)$$

As constantes C_1 e C_2 são determinadas pelas condições de contorno.

Substituindo a equação (3.65) em (3.63), temos:

$$\varepsilon(x) = \alpha_1 \cdot (C_1 \cdot e^{\alpha_1 \cdot x} - C_2 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot x}) \quad (3.67)$$

Considerando um elemento finito de comprimento L e assumindo as condições de contorno, temos:

$$S(0) = S_i \quad (3.68a)$$

$$S(L) = S_j \quad (3.68b)$$

O deslizamento positivo coincide com a direção positiva de x . Com essas condições são determinadas as constantes C_1 e C_2 .

$$C_1 = \frac{S_j - S_i \cdot e^{-\alpha_1 \cdot L}}{2 \cdot \sinh(\alpha_1 \cdot L)} \quad (3.69a)$$

$$C_2 = \frac{S_i \cdot e^{\alpha_1 \cdot L} - S_j}{2 \cdot \sinh(\alpha_1 \cdot L)} \quad (3.69b)$$

Substituindo as equações (3.69a) e (3.69b) na equação (3.65) e (3.67), nós obtemos as várias condições de deslizamento e deformação ao longo do elemento:

$$\varepsilon_i = \frac{\alpha_1}{\sinh(\alpha_1.L)} [S_j - S_i \cdot \cosh(\alpha_1.L)] \quad (3.70a)$$

$$\varepsilon_j = \frac{\alpha_1}{\sinh(\alpha_1.L)} [-S_i + S_j \cdot \cosh(\alpha_1.L)] \quad (3.70b)$$

As forças nas extremidades são:

$$P_i = \frac{\alpha_1.E.A}{\sinh(\alpha_1.L)} [-S_i + S_j \cdot \cosh(\alpha_1.L)] \quad (3.71a)$$

$$P_j = \frac{\alpha_1.E.A}{\sinh(\alpha_1.L)} [-S_j + S_i \cdot \cosh(\alpha_1.L)] \quad (3.71b)$$

onde A é a área da seção transversal da barra.

Abaixo, temos a matriz de rigidez escrita a partir dessas equações:

$$\begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_i \\ S_j \end{Bmatrix} \quad (3.72)$$

sendo:

$$K_{11}^1 = K_{22}^1 = \frac{\alpha_1.E.A}{\tanh(\alpha_1.L)}$$

$$K_{12}^1 = K_{21}^1 = -\frac{\alpha_1.E.A}{\sinh(\alpha_1.L)}$$

CASO 2: $a = 0$, $S_1 \leq S_{(x)} \leq S_2$

Para este caso a solução da equação (3.64a) será:

$$S(x) = \frac{2 \cdot \tau_y}{E \cdot D} \cdot x^2 + C_3 \cdot x + C_4 \quad (3.73)$$

As constantes C_3 e C_4 são determinadas pelas condições de contorno. Substituindo a equação (3.73) em (3.63), temos:

$$\varepsilon(x) = \frac{4 \cdot \tau_y}{E \cdot D} \cdot x + C_3 \quad (3.74)$$

Considerando um elemento finito de comprimento L e assumindo as condições de contorno, temos:

$$S(0) = S_i \quad (3.75a)$$

$$S(L) = S_j \quad (3.75b)$$

O deslizamento positivo coincide com a direção positiva de x . Com essas condições são determinadas as constantes C_3 e C_4 .

$$C_3 = \frac{S_j - S_i}{L} - \frac{2 \cdot \tau_y}{E \cdot D} \cdot L \quad (3.76a)$$

$$C_4 = S_i \quad (3.76b)$$

Idem ao caso anterior, temos:

$$\varepsilon_i = \frac{S_j - S_i}{L} - \frac{2\tau_y}{ED} \cdot L \quad (3.77a)$$

$$\varepsilon_j = \frac{S_j - S_i}{L} + \frac{2\tau_y}{ED} \cdot L \quad (3.77b)$$

As forças nas extremidades são:

$$P_i = \frac{E.A}{L}(S_i - S_j) - \frac{\pi.D.\tau_y}{2} \cdot L \quad (3.78a)$$

$$P_j = \frac{E.A}{L}(S_j - S_i) + \frac{\pi.D.\tau_y}{2} \cdot L \quad (3.78b)$$

Abaixo, temos a matriz de rigidez escrita a partir dessas equações:

$$\begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_i^2 \\ P_j^2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11}^2 & K_{12}^2 \\ K_{21}^2 & K_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_i \\ S_j \end{Bmatrix} \quad (3.79)$$

sendo:

$$K_{11}^2 = K_{22}^2 = \frac{E.A}{L}$$

$$K_{12}^2 = K_{21}^2 = -\frac{E.A}{L}$$

$$P_i^2 = P_j^2 = \frac{\pi.D.\tau_y \cdot L}{2}$$

CASO 3: $a < 0, S_2 \leq S_{(x)} \leq S_3$

Para este caso tem-se com solução:

$$S(x) = C_5 \cdot \text{sen}(\alpha_2 \cdot x) + C_6 \cdot \text{cos}(\alpha_2 \cdot x) + \frac{\tau_1}{K_2} \quad (3.80)$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot K_2}{E \cdot D}} \quad (3.81)$$

$$\text{sendo, } K_2 = \frac{\tau_y - \tau_u}{S_3 - S_2}$$

Abaixo, temos a matriz de rigidez escrita a partir dessas equações:

$$\begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_i^3 \\ P_j^3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11}^3 & K_{12}^3 \\ K_{21}^3 & K_{22}^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} S_i \\ S_j \end{Bmatrix} \quad (3.82)$$

sendo:

$$K_{11}^3 = K_{22}^3 = \frac{\alpha_2 \cdot E \cdot A}{\text{tg}(\alpha_2 \cdot L)}$$

$$K_{12}^3 = K_{21}^3 = -\frac{\alpha_2 \cdot E \cdot A}{\text{sen}(\alpha_2 \cdot L)}$$

$$P_j^3 = P_i^3 = \frac{\alpha_2 \cdot \tau_1 \cdot E \cdot A}{K_2} \cdot \text{tg}\left(\frac{\alpha_2 \cdot L}{2}\right)$$

CASO 4: $a = 0, S_3 \leq S_{(x)}$

Similar ao caso 2, onde a tensão de aderência é τ_u (tensão de aderência última).

3.5.4 MODELAGEM DA ADERÊNCIA PELO MODELO PROPOSTO POR YANKELEVSKY (1997)

No trabalho de YANKELEVSKY (1997), que aqui será descrito, são consideradas as propriedades reais do concreto. As equações de equilíbrio são apresentadas como relações entre as forças axiais e o correspondente deslocamento axial das extremidades de um elemento finito bidimensional, em que sua matriz de rigidez incorpora parâmetros do aço, do concreto e da lei de aderência x deslizamento.

3.5.4.1 DESCRIÇÃO DO MODELO

O modelo apresentado por YANKELEVSKY (1997) considera um elemento de concreto cilíndrico, com comprimento H , diâmetro externo D e diâmetro interno d , e área da seção transversal A_c . Este cilindro de concreto tem, em seu interior, uma barra de aço de diâmetro d e área de seção transversal A_s (Figura 3.5.4.1.1).

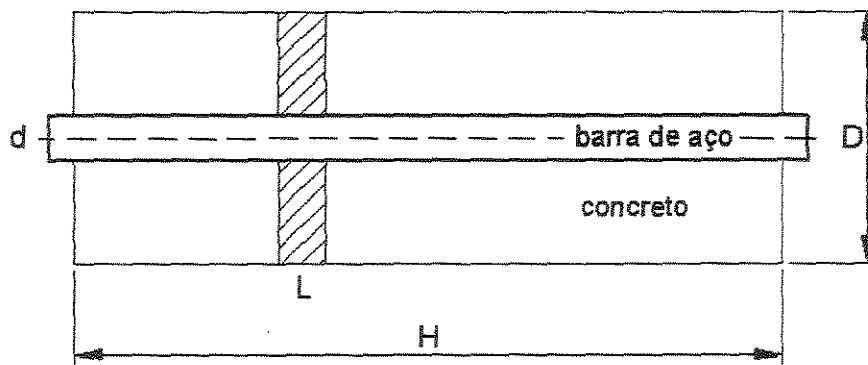


Figura 3.5.4.1.1- Arranjo do elemento apresentado.

O elemento composto assume um comportamento representado através de um modelo unidimensional, onde a deformação do concreto pode ser considerada a partir da coordenada radial. A formulação matemática é focada em um elemento finito típico

de comprimento L , sendo definido por um nó i no lado esquerdo e um nó j no lado direito.

A Figura 3.5.4.1.2.a mostra o elemento finito e a ação das forças nesse elemento. A Figura 3.5.4.1.2.b mostra os deslocamentos, os quais são afetados pela relação aderência x deslizamento na interface da barra de aço – concreto.

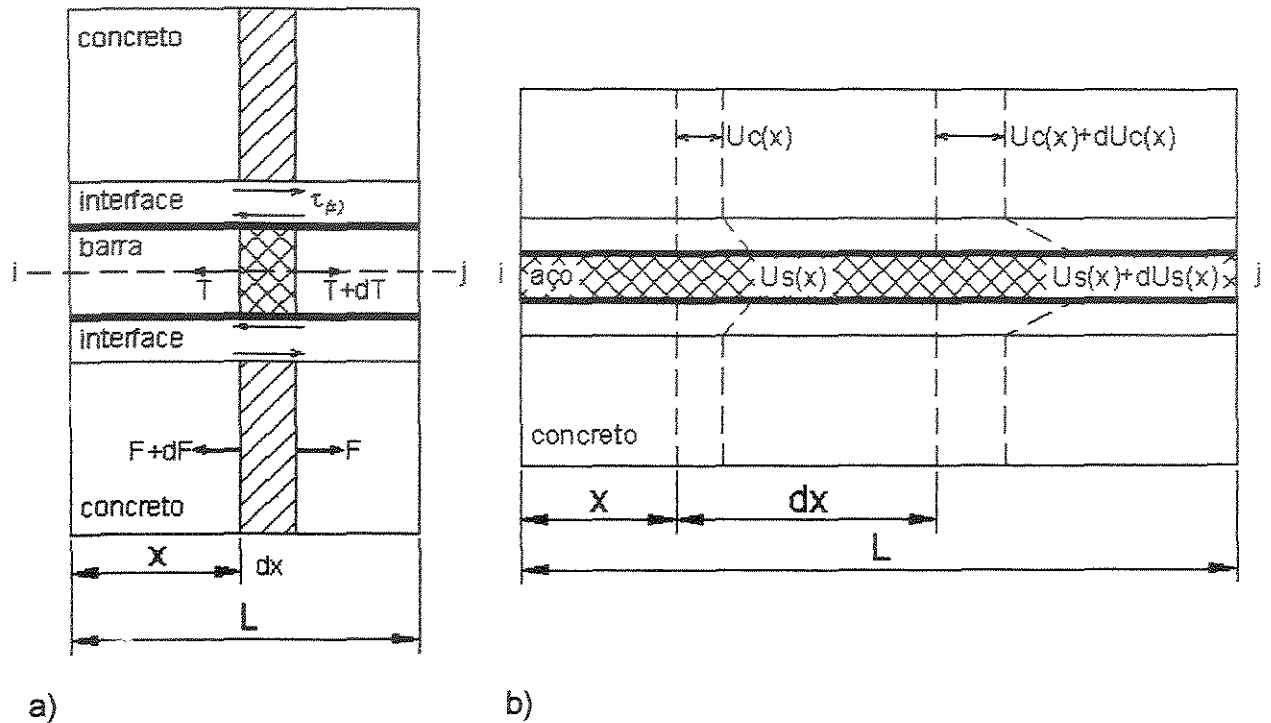


Figura 3.5.4.1.2- a) Ação das forças no elemento finito – b) Deslocamento no elemento.

A seguir temos, respectivamente, as equações de equilíbrio para o concreto e o aço:

$$\frac{dF(x)}{dx} = -\tau(x) \cdot \Sigma \quad (3.83)$$

$$\frac{dT(x)}{dx} = \tau(x) \cdot \Sigma \quad (3.84)$$

sendo:

- $T(x)$ – força axial no aço;
- $F(x)$ – força axial no elemento de concreto;
- Σ – perímetro da barra por unidade de comprimento.

A relação entre o deslocamento da barra e do concreto, para uma posição x , é:

$$U_s(x) = U_c(x) + S(x) \quad (3.85)$$

onde $S(x)$ é o deslocamento relativo entre o aço e o concreto.

As relações cinemáticas para o concreto e o aço são, respectivamente:

$$\frac{dU_c(x)}{dx} = \varepsilon_c(x) \quad (3.86)$$

$$\frac{dU_c(x)}{dx} + \frac{dS(x)}{dx} = \varepsilon_s(x) \quad (3.87)$$

Para um material de concreto elástico-linear com módulo de elasticidade E_c , podemos escrever a equação (3.83) como:

$$\frac{dF(x)}{dx} = E_c A_c \frac{d\varepsilon_c(x)}{dx} = -\tau(x) \cdot \Sigma \quad (3.88)$$

Derivando a equação (3.86) e substituindo-a na equação (3.88), temos:

$$\tau(x) = -\frac{E_c A_c}{\Sigma} \cdot \frac{d^2 U_c(x)}{dx^2} \quad (3.89)$$

Agora, trabalhando a equação (3.84) e a equação (3.87), temos a tensão tangencial em função dos deslocamentos relativos entre concreto e aço:

$$\tau(x) = \frac{E_s A_s}{\Sigma} \left[\frac{d^2 U_c(x)}{dx^2} + \frac{d^2 S(x)}{dx^2} \right] \quad (3.90)$$

Igualando as equações (3.89) e (3.90), obtemos:

$$\left[\frac{E_c A_c}{\Sigma} + \frac{E_s A_s}{\Sigma} \right] \frac{d^2 U_c(x)}{dx^2} + \frac{E_s A_s}{\Sigma} \cdot \frac{d^2 S(x)}{dx^2} = 0 \quad (3.91)$$

na qual a relação entre os campos de deslocamentos é apresentada a seguir:

$$\frac{d^2 U_c(x)}{dx^2} = \frac{n \cdot \varpi}{1 + n \cdot \varpi} \cdot \frac{d^2 S(x)}{dx^2} \quad (3.92)$$

onde:

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad \text{– proporção entre os módulos de elasticidade;}$$

$$\varpi = \frac{A_s}{A_c} \quad \text{– proporção entre as áreas na seção transversal.}$$

A lei local da tensão de aderência x deslizamento pode ser, aproximadamente, descrita por uma relação linear de cada parte da Figura 3.5.4.1.3.

$$\tau(x) = a \cdot S(x) + b \quad (3.93)$$

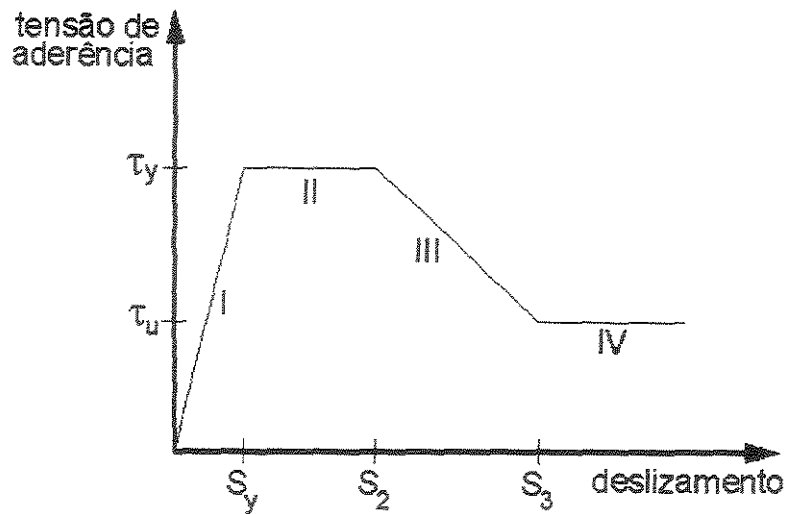


Figura 3.5.4.1.3- Relação local da tensão de aderência x deslizamento.

Substituindo as equações (3.92) e (3.93) na equação (3.90), temos:

$$\frac{E_s A_s}{\Sigma} \cdot \frac{1}{1+n\omega} \cdot \frac{d^2 S(x)}{dx^2} = a \cdot S(x) + b \quad (3.94)$$

A equação (3.94) é uma equação diferencial de segunda ordem cuja solução fornece a função deslizamento $S(x)$. Para os diferentes ramos da lei local da tensão de aderência x deslizamento temos um coeficiente a com sinal diferente, o qual afeta a solução da equação (3.94).

São consideradas quatro situações (I, II, III e IV), determinadas nos casos 1, 2, 3 e 4, vistas na Figura 3.5.4.1.3.

CASO 1: $a > 0$, $0 \leq S(x) \leq S_i$

Para este caso a solução da equação (3.94) será:

$$S(x) = D_1 \cdot e^{\alpha_1 \cdot x} + D_2 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot x} - \frac{b}{a} \quad (3.95)$$

onde:

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{\Sigma \cdot a \cdot (1 + n \cdot \varpi)}{E_s \cdot A_s}} \quad (3.95a)$$

As constantes D_1 e D_2 são determinadas pelas condições de contorno do elemento finito de comprimento L :

$$S(0) = S_i \quad (3.96a)$$

$$S(L) = S_j \quad (3.96b)$$

O deslizamento positivo coincide com a direção positiva de x . Com essas condições são determinadas as constantes D_1 e D_2 .

$$D_1 = \frac{S_j - S_i \cdot e^{-\alpha_1 \cdot L}}{2 \cdot \sinh(\alpha_1 \cdot L)} + \frac{b}{a} \cdot \frac{1 - e^{-\alpha_1 \cdot L}}{2 \cdot \sinh(\alpha_1 \cdot L)} \quad (3.97a)$$

$$D_2 = \frac{S_i \cdot e^{\alpha_1 \cdot L} - S_j}{2 \cdot \sinh(\alpha_1 \cdot L)} - \frac{b}{a} \cdot \frac{1 - e^{\alpha_1 \cdot L}}{2 \cdot \sinh(\alpha_1 \cdot L)} \quad (3.97b)$$

Substituindo a equação (3.95) na equação (3.92), obtemos:

$$\frac{d^2 U_c(x)}{dx^2} = -\frac{n \cdot \varpi}{1 + n \cdot \varpi} \cdot \alpha_1^2 \cdot [D_1 \cdot e^{\alpha_1 \cdot x} + D_2 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot x}] \quad (3.98)$$

Assim, o deslocamento no concreto será:

$$U_c(x) = -\frac{n \cdot \varpi}{1+n \cdot \varpi} \cdot [D_1 \cdot e^{\alpha_1 \cdot x} + D_2 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot x}] + F_1 \cdot x + F_2 \quad (3.99)$$

As constantes F_1 e F_2 são determinadas através das seguintes condições de contorno:

$$U_c(0) = U_i \quad (3.100a)$$

$$U_c(L) = U_j \quad (3.100b)$$

$$F_1 = \frac{U_j - U_i}{L} - \frac{n \cdot \varpi}{1+n \cdot \varpi} \cdot \frac{S_j - S_i}{L} \quad (3.101a)$$

$$F_2 = \frac{n \cdot \varpi}{1+n \cdot \varpi} \cdot \left(S_i + \frac{b}{a} \right) + U_i \quad (3.101b)$$

Da equação (3.99) obtemos:

$$\varepsilon_c(x) = -\frac{n \cdot \varpi}{1+n \cdot \varpi} \cdot \alpha_1 \cdot [D_1 \cdot e^{\alpha_1 \cdot x} - D_2 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot x}] + F_1 \quad (3.102)$$

Agora, substituímos as equações (3.97a), (3.97b) e (3.101a) na equação (3.102) e resolvemos para as duas condições relacionadas ao concreto (3.100a) e (3.100b):

$$\varepsilon_c(0) = \frac{U_j - U_i}{L} - \alpha_1 \cdot \frac{n \cdot \varpi}{1+n \cdot \varpi} \left\{ S_i \left[\frac{1}{\alpha_1 \cdot L} - \frac{1}{\tanh(\alpha_1 \cdot L)} \right] - S_j \left[\frac{1}{\alpha_1 \cdot L} - \frac{1}{\sinh(\alpha_1 \cdot L)} \right] + G1 \right\} \quad (3.103a)$$

$$G1 = \frac{b}{a} \left[\frac{1}{\sinh(\alpha_1 \cdot L)} - \frac{1}{\tanh(\alpha_1 \cdot L)} \right]$$

$$\varepsilon_c(L) = \frac{U_j - U_i}{L} - \alpha_1 \cdot \frac{n \cdot \varpi}{1 + n \cdot \varpi} \left\{ S_i \left[\frac{1}{\alpha_1 \cdot L} - \frac{1}{\sinh(\alpha_1 \cdot L)} \right] - S_j \left[\frac{1}{\alpha_1 \cdot L} - \frac{1}{\tanh(\alpha_1 \cdot L)} \right] + G2 \right\} \quad (3.103b)$$

$$G2 = \frac{b}{a} \left[\frac{1}{\tanh(\alpha_1 \cdot L)} - \frac{1}{\sinh(\alpha_1 \cdot L)} \right]$$

Analogamente para o aço utilizamos as equações (3.87), (3.95), (3.97a), (3.97b), (3.101a) e (3.102):

$$\varepsilon_s(0) = \frac{U_j - U_i}{L} - \alpha_1 \cdot \frac{n \cdot \varpi}{1 + n \cdot \varpi} \left\{ S_i \left[\frac{1}{\alpha_1 \cdot L} + \frac{1}{n \cdot \varpi} \cdot \frac{1}{\tanh(\alpha_1 \cdot L)} \right] - S_j \left[\frac{1}{\alpha_1 \cdot L} + \frac{1}{n \cdot \varpi} \cdot \frac{1}{\sinh(\alpha_1 \cdot L)} \right] + G3 \right\} \quad (3.104a)$$

$$G3 = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{n \cdot \varpi} \left[\frac{1}{\tanh(\alpha_1 \cdot L)} - \frac{1}{\sinh(\alpha_1 \cdot L)} \right]$$

$$\varepsilon_s(L) = \frac{U_j - U_i}{L} - \alpha_1 \cdot \frac{n \cdot \varpi}{1 + n \cdot \varpi} \left\{ S_i \left[\frac{1}{\alpha_1 \cdot L} + \frac{1}{n \cdot \varpi} \cdot \frac{1}{\sinh(\alpha_1 \cdot L)} \right] - S_j \left[\frac{1}{\alpha_1 \cdot L} + \frac{1}{n \cdot \varpi} \cdot \frac{1}{\tanh(\alpha_1 \cdot L)} \right] + G4 \right\} \quad (3.104b)$$

$$G4 = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{n \cdot \varpi} \left[\frac{1}{\sinh(\alpha_1 \cdot L)} - \frac{1}{\tanh(\alpha_1 \cdot L)} \right]$$

A Figura 3.5.4.1.4 mostra forças aplicadas nos nós correspondentes ao aço (F_s) e ao concreto (F_c) e os respectivos deslocamentos (U_s) e (U_c).

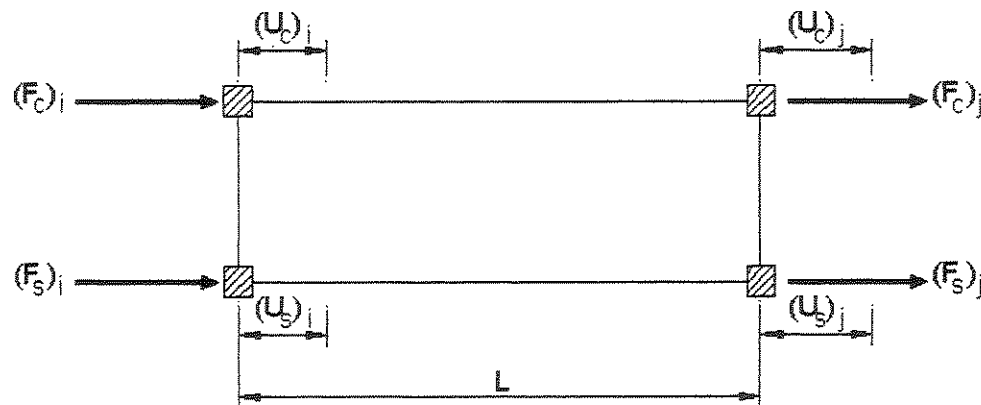


Figura 3.5.4.1.4- Forças nodais em um elemento finito.

Para efeito de diferenciação, os deslocamentos no aço e no concreto serão renomeados:

$$U_s(0) = W_i \qquad U_s(L) = W_j$$

$$U_c(0) = U_i \qquad U_c(L) = U_j$$

A partir das equações (3.103) e (3.104) obtemos as forças nodais utilizando as seguintes relações:

$$S_i = W_i - U_i \qquad (3.105a)$$

$$S_j = W_j - U_j \qquad (3.105b)$$

As forças nodais são dadas pelas expressões:

$$\begin{aligned} \Delta F_c(0) = (\Delta F_c)_i &= \frac{E_c \cdot A_c}{L} (\Delta U_i - \Delta U_j) + \frac{\alpha_1 \cdot n \cdot \varpi}{1 + n \cdot \varpi} \cdot E_c \cdot A_c \cdot \{ (\Delta W_i - \Delta U_i) \left[\frac{1}{\alpha_1 \cdot L} - \frac{1}{\tanh(\alpha_1 \cdot L)} \right] - \right. \\ &\quad \left. - (\Delta W_j - \Delta U_j) \left[\frac{1}{\alpha_1 \cdot L} - \frac{1}{\sinh(\alpha_1 \cdot L)} \right] \right\} \end{aligned} \qquad (3.106a)$$

$$\begin{aligned} \Delta F_c(L) = (\Delta F_c)_j &= \frac{E_c \cdot A_c}{L} (\Delta U_j - \Delta U_i) + \frac{\alpha_1 \cdot n \cdot \varpi}{1 + n \cdot \varpi} \cdot E_c \cdot A_c \cdot \{ (\Delta U_i - \Delta W_i) \left[\frac{1}{\alpha_1 \cdot L} - \frac{1}{\sinh(\alpha_1 \cdot L)} \right] - \right. \\ &\quad \left. - (\Delta W_j - \Delta U_j) \left[\frac{1}{\alpha_1 \cdot L} - \frac{1}{\tanh(\alpha_1 \cdot L)} \right] \right\} \end{aligned} \qquad (3.106b)$$

$$\begin{aligned} \Delta F_s(0) = (\Delta F_s)_i &= \frac{E_s \cdot A_s}{L} (\Delta U_i - \Delta U_j) + \frac{\alpha_1 \cdot n \cdot \varpi}{1 + n \cdot \varpi} \cdot E_s \cdot A_s \cdot \{ (\Delta W_i - \Delta U_i) \left[\frac{1}{\alpha_1 \cdot L} - \frac{1}{n \cdot \varpi \cdot \tanh(\alpha_1 \cdot L)} \right] - \right. \\ &\quad \left. - (\Delta W_j - \Delta U_j) \left[\frac{1}{\alpha_1 \cdot L} + \frac{1}{n \cdot \varpi \cdot \sinh(\alpha_1 \cdot L)} \right] \right\} \end{aligned} \qquad (3.106c)$$

$$\Delta F_s(L) = (\Delta F_s)_j = \frac{E_s \cdot A_s}{L} (\Delta U_j - \Delta U_i) - \frac{\alpha_1 \cdot n \cdot \varpi}{1 + n \cdot \varpi} E_s \cdot A_s \cdot \left\{ (\Delta W_i - \Delta U_i) \left[\frac{1}{\alpha_1 \cdot L} + \frac{1}{n \cdot \varpi \cdot \sinh(\alpha_1 \cdot L)} \right] - (\Delta W_j - \Delta U_j) \left[\frac{1}{\alpha_1 \cdot L} + \frac{1}{n \cdot \varpi \cdot \tanh(\alpha_1 \cdot L)} \right] \right\} \quad (3.106d)$$

Abaixo, temos a matriz de rigidez escrita a partir dessas equações:

$$\begin{Bmatrix} (\Delta F_s)_i \\ (\Delta F_c)_i \\ (\Delta F_s)_j \\ (\Delta F_c)_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 & K_{34}^1 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & K_{43}^1 & K_{44}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta W_i \\ \Delta U_i \\ \Delta W_j \\ \Delta U_j \end{Bmatrix} \quad (3.107)$$

sendo:

$$K_{11}^1 = K_{33}^1 = \beta_1 \cdot \left[\frac{n \cdot \varpi}{\alpha_1 \cdot L} + \frac{1}{\tanh(\alpha_1 \cdot L)} \right]$$

$$K_{22}^1 = K_{44}^1 = \beta_1 \cdot \left[\frac{1}{n \cdot \varpi \cdot \alpha_1 \cdot L} + \frac{1}{\tanh(\alpha_1 \cdot L)} \right]$$

$$K_{12}^1 = K_{21}^1 = K_{34}^1 = K_{43}^1 = \beta_1 \cdot \left[\frac{1}{\alpha_1 \cdot L} - \frac{1}{\tanh(\alpha_1 \cdot L)} \right]$$

$$K_{23}^1 = K_{32}^1 = K_{14}^1 = K_{41}^1 = \beta_1 \cdot \left[-\frac{1}{\alpha_1 \cdot L} + \frac{1}{\sinh(\alpha_1 \cdot L)} \right]$$

$$K_{13}^1 = K_{31}^1 = -\beta_1 \cdot \left[\frac{n \cdot \varpi}{\alpha_1 \cdot L} + \frac{1}{\sinh(\alpha_1 \cdot L)} \right]$$

$$K_{24}^1 = K_{42}^1 = -\beta_1 \cdot \left[\frac{1}{n \cdot \varpi \cdot \alpha_1 \cdot L} + \frac{1}{\sinh(\alpha_1 \cdot L)} \right]$$

onde:

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1 \cdot E_s \cdot A_s}{1 + n \cdot \varpi}$$

CASO 2: $a = 0, S_1 \leq S_{(x)} \leq S_2$

Para este caso a solução da equação (3.94) será:

$$S(x) = D_3 \cdot x + D_4 \quad (3.108)$$

Abaixo, temos a matriz de rigidez escrita a partir do desenvolvimento dessa equação:

$$\begin{Bmatrix} (\Delta F_s)_i \\ (\Delta F_c)_i \\ (\Delta F_s)_j \\ (\Delta F_c)_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^2 & 0 & K_{13}^2 & 0 \\ 0 & K_{22}^2 & 0 & K_{24}^2 \\ K_{31}^2 & 0 & K_{33}^2 & 0 \\ 0 & K_{42}^2 & 0 & K_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta W_i \\ \Delta U_i \\ \Delta W_j \\ \Delta U_j \end{Bmatrix} \quad (3.109)$$

sendo:

$$K_{11}^2 = K_{33}^2 = \beta_2$$

$$K_{22}^2 = K_{44}^2 = \beta_2 \cdot \frac{1}{n \cdot w}$$

$$K_{13}^2 = K_{31}^2 = -\beta_2$$

$$K_{24}^2 = K_{42}^2 = -\beta_2 \cdot \frac{1}{n \cdot w}$$

onde:

$$\beta_2 = \frac{\varepsilon_s \cdot A_s}{L}$$

CASO 3: $a < 0$, $S_2 \leq S_{(x)} \leq S_3$

Para este caso tem-se com solução da equação (3.94):

$$S(x) = D_5 \cdot \text{sen}(\alpha_2 \cdot x) + D_6 \cdot \text{cos}(\alpha_2 \cdot x) \quad (3.110)$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{-\Sigma \cdot a \cdot (1 + n \cdot \varpi)}{E_s \cdot A_s}} \quad (3.111)$$

Abaixo temos a matriz de rigidez desenvolvida para este caso:

$$\begin{Bmatrix} (\Delta F_s)_i \\ (\Delta F_c)_i \\ (\Delta F_s)_j \\ (\Delta F_c)_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^3 & K_{12}^3 & K_{13}^3 & K_{14}^3 \\ K_{21}^3 & K_{22}^3 & K_{23}^3 & K_{24}^3 \\ K_{31}^3 & K_{32}^3 & K_{33}^3 & K_{34}^3 \\ K_{41}^3 & K_{42}^3 & K_{43}^3 & K_{44}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta W_i \\ \Delta U_i \\ \Delta W_j \\ \Delta U_j \end{Bmatrix} \quad (3.112)$$

sendo:

$$K_{11}^3 = K_{33}^3 = \beta_3 \cdot \left[\frac{n \cdot \varpi}{\alpha_2 \cdot L} + \frac{1}{\tanh(\alpha_2 \cdot L)} \right]$$

$$K_{22}^3 = K_{44}^3 = \beta_3 \cdot \left[\frac{1}{n \cdot \varpi \cdot \alpha_2 \cdot L} + \frac{1}{\tanh(\alpha_2 \cdot L)} \right]$$

$$K_{12}^3 = K_{21}^3 = K_{34}^3 = K_{43}^3 = \beta_3 \cdot \left[\frac{1}{\alpha_2 \cdot L} - \frac{1}{\tanh(\alpha_2 \cdot L)} \right]$$

$$K_{23}^3 = K_{32}^3 = K_{14}^3 = K_{41}^3 = \beta_3 \left[-\frac{1}{\alpha_2 \cdot L} + \frac{1}{\sinh(\alpha_2 \cdot L)} \right]$$

$$K_{13}^3 = K_{31}^3 = -\beta_3 \left[\frac{n \cdot \varpi}{\alpha_2 \cdot L} + \frac{1}{\sinh(\alpha_2 \cdot L)} \right]$$

$$K_{24}^3 = K_{42}^3 = -\beta_3 \left[\frac{1}{n \cdot \varpi \cdot \alpha_2 \cdot L} + \frac{1}{\sinh(\alpha_2 \cdot L)} \right]$$

onde:

$$\beta_3 = \frac{\alpha_2 \cdot E_s \cdot A_s}{1 + n \cdot \varpi}$$

CASO 4: $a = 0, S_3 \leq S_{(x)}$

Similar ao caso 2, onde a tensão de aderência é τ_u (tensão de aderência última).

CAPÍTULO 4

IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentados os procedimentos necessários para incorporar os modelos numéricos, descritos no capítulo anterior, nas modelagens pelos programas computacionais de estruturas de concreto armado considerando os efeitos do fenômeno da aderência. As modelagens são feitas para: simulação de estrutura submetida ao ensaio de tirante (tração simétrica) e viga simétrica biapoiada submetida à flexão, considerando ou não a fissuração do concreto.

Os programas foram desenvolvidos no ambiente Delphi 5.0, em linguagem Pascal avançado. Assim, a capacidade e o tempo de processamento das estruturas dependem principalmente da capacidade do computador que está sendo utilizado para o processamento dessas estruturas.

4.2 ENSAIO DE TIRANTE (TRAÇÃO SIMÉTRICA)

Consiste de um ensaio onde se aplicam duas forças contrárias de tração nas extremidades de uma barra de aço ancorada dentro de um bloco de concreto (Figura 4.2.1).

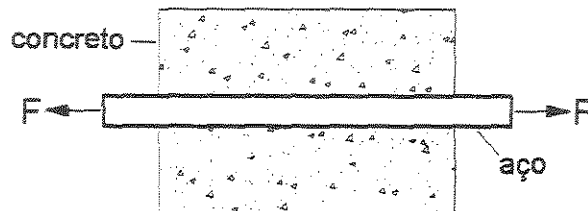


Figura 4.2.1- Ensaio de tirante.

Para a modelagem desse ensaio foram desenvolvidos três programas com diferentes simulações numéricas da aderência entre o aço e o concreto. A seguir, será apresentada cada uma das implementações numéricas.

4.2.1 SIMULAÇÃO NUMÉRICA 1: ELEMENTO DE INTERFACE

Nesta implementação é utilizado, para a configuração da malha que representa o concreto, o elemento finito bidimensional retangular com oito nós (LSR), visto no capítulo 3. A armadura é representada pela forma discreta, sendo modelada pelo mesmo tipo de elemento finito do concreto (LSR). Para a modelagem da aderência é utilizado o elemento de interface de seis nós. A curva a ser utilizada para a obtenção do valor da rigidez ao deslizamento k_h , pode ser definida externamente pelo usuário, tendo como opções as curvas polinomiais de **NILSON (1968)** e **MIRZA (1979)** e a curva poligonal de **YANKELEVSKY (1985)**. Já para a rigidez normal k_v é adotado um valor alto (ordem de 10^{15}) que não venha a causar incompatibilidades numéricas na resolução dos sistemas. Para ganhar em capacidade e tempo de processamento, é modelado apenas um quarto da estrutura, já que ela tem comportamento simétrico.

A seguir (Figura 4.2.1.1), é apresentado o fluxograma de processamento do programa:

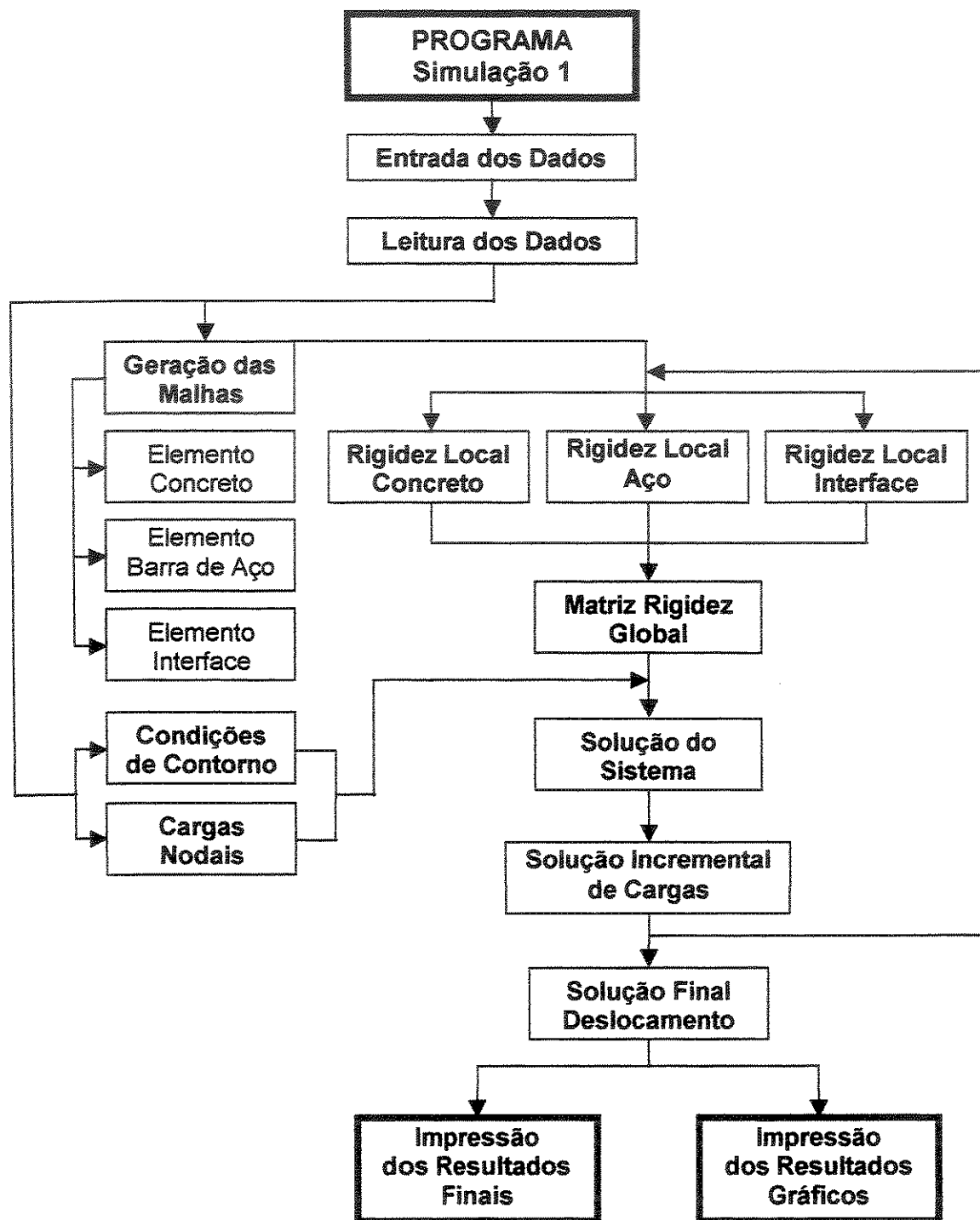


Figura 4.2.1.1- Fluxograma do programa: simulação numérica 1.

Como dados de entrada temos:

Geométricos: diâmetro externo do concreto, diâmetro da barra de aço, comprimento referente à metade da amostra;

Características dos materiais: módulo de elasticidade do aço, módulo de elasticidade do concreto, coeficiente de Poisson do aço, coeficiente de Poisson do concreto;

Elementos finitos: número de elemento finitos na horizontal, número de elemento finitos na vertical. Nesta etapa, há a geração dos elementos e nós do concreto, do aço e da interface.

Carregamento: força de tração aplicada na barra, número de incrementos do sistema. O número de incrementos consiste no número de resolução que deverá ter o sistema para chegar-se ao valor total da carga;

Curva tensão de aderência x deslizamento: escolha do tipo de curva e entrada de suas características, quando necessário.

A partir da leitura dos dados temos:

Montagem do vetor de carregamento: o vetor é montado considerando a divisão, em partes iguais, da força pelo número de iterações;

Condições de contorno: as restrições nodais são definidas internamente pelo programa a partir das condições de dupla simetria desse tipo de estrutura;

Montagem da matriz de rigidez global: a matriz de rigidez global é feita pela soma das matrizes locais de todos os elementos: concreto, aço e interface.

Como característica do tipo de elemento finito que é utilizado para gerar as malhas de concreto e aço, temos uma transformação das seções circulares em retangulares, feita internamente pelo programa, permanecendo as mesmas áreas nas seções modificadas (Figura 4.2.1.2), para serem implementadas nos elementos. É utilizada apenas uma linha de elementos de interface ligando o aço ao concreto, já que apenas um quarto da estrutura está sendo simulado.

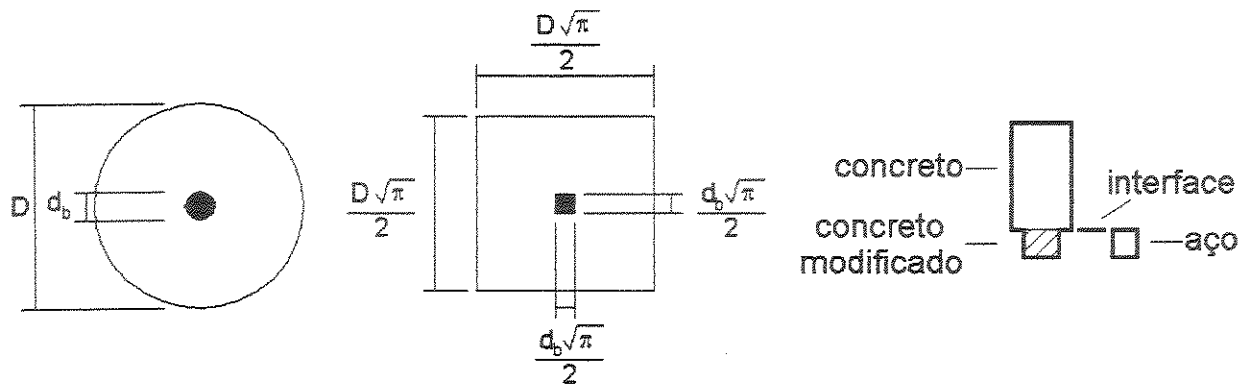


Figura 4.2.1.2- Transformação da seção circular em retangular.

Depois de definidos os sistemas de equações a partir da matriz de rigidez global, dos vetores de carregamento e restrições nodais, o próximo passo é a resolução desses sistemas que é feita pelo método de Cholesky, tendo como respostas os deslocamentos nodais. Para a primeira iteração o deslizamento entre o aço e o concreto é admitido como sendo nulo para definir a rigidez ao deslizamento na interface. Esse passo é repedido até chegar ao número de incrementos de carga definido inicialmente, com os deslocamentos nodais sendo somados para cada carga. Como respostas finais teremos os deslocamentos nodais, os deslizamentos ao longo da barra de aço, as tensões de aderência ao longo da barra, as deformações e as tensões no concreto e as deformações e as tensões na barra de aço.

4.2.2 SIMULAÇÃO NUMÉRICA 2: ELEMENTO DE YANKELEVSKY (1985)

Nesta implementação são utilizados os elementos finitos desenvolvidos a partir da formulação da matriz de rigidez proposta por YANKELEVSKY (1985) para simulação de ensaios de tração considerando os efeitos da aderência entre o aço e o concreto, visto no capítulo 3. Esses elementos unidimensionais têm como característica a representação da interface, considerando as características do aço e da interface entre o aço e o concreto, porém, não levam em consideração as características diretas dos elementos de concreto. Como na simulação anterior, para ganhar em capacidade e tempo de processamento, é modelada apenas metade da estrutura, já que ela tem comportamento simétrico. Para cada um dos estágios (Figura 4.2.2.1) a relação tensão de aderência x deslizamento tem uma lei que a rege, descrita no item 3.5.3.1.

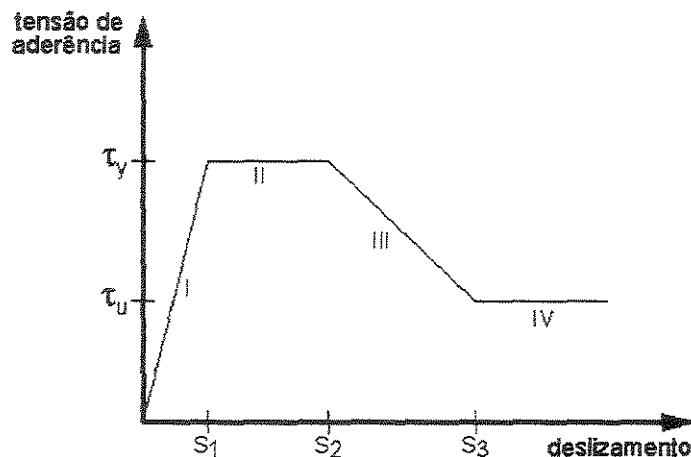


Figura 4.2.2.1- Relação local da tensão de aderência x deslizamento.

Para a resolução do problema está sendo adotado um método incremental de carregamento. A interface é dividida em elementos finitos e, para a primeira solução tensão x deslizamento, atribuem-se a todos os elementos as propriedades do estágio I. Verifica-se se todos os elementos estão dentro desse estágio, se confirmado, é obtida uma solução final, pois são compatíveis as propriedades do estágio I com a tensão e o deslizamento apresentados. Caso algum elemento tenha o seu deslizamento superior a S_1 , determina-se o estágio correspondente a ser utilizado no próximo incremento.

A seguir (Figura 4.2.2.2), é apresentado o fluxograma de processamento do programa:

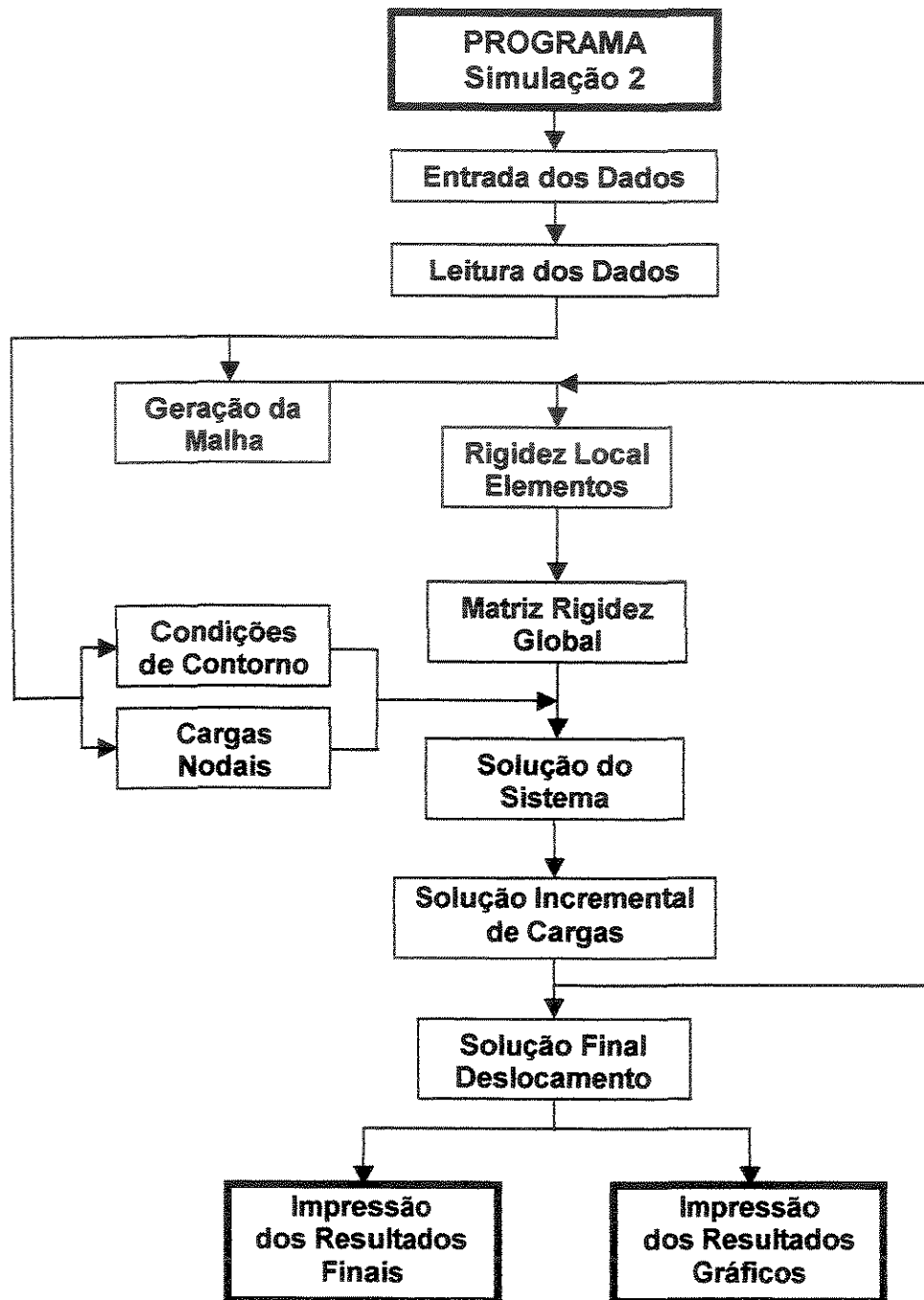


Figura 4.2.2.2- Fluxograma do programa: simulação numérica 2.

Como dados de entrada temos:

Geométricos: diâmetro da barra de aço, comprimento referente à metade da amostra;

Características do material: módulo de elasticidade do aço;

Elementos finitos: número de elemento finitos na horizontal. Nesta etapa, há a geração dos elementos e nós da interface.

Carregamento: força de tração aplicada na barra e número de incrementos do sistema;

Curva tensão de aderência x deslizamento: deslizamentos limites, tensão de aderência limite e tensão de aderência última.

A partir da leitura dos dados temos:

Montagem do vetor de carregamento: o vetor é montado considerando a divisão da força pelo número de incrementos;

Condições de contorno: as restrições nodais são definidas pelo programa a partir das condições de simetria desse tipo de estrutura;

Montagem da matriz de rigidez global: a matriz de rigidez global é feita pela soma das matrizes locais.

Utilizando o processo incremental de carregamento, são obtidos, a partir da relação local da tensão de aderência x deslizamento, os deslocamentos e deslizamentos nodais, a deformação ao longo da barra de aço e a tensão de aderência entre o aço e o concreto ao longo da amostra ensaiada.

4.2.3 SIMULAÇÃO NUMÉRICA 3: ELEMENTO DE YANKELEVSKY (1997)

Nesta implementação são utilizados os elementos finitos propostos por YANKELEVSKY (1997) para simulação de ensaios de tração considerando os efeitos da aderência entre o aço e o concreto, visto no capítulo 3. Esses elementos bidimensionais têm como característica a representação da interface entre o aço e o concreto, incorporando em suas matrizes de rigidez parâmetros do aço, do concreto e da lei de aderência x deslizamento.

Como nas simulações anteriores, é modelada apenas metade da estrutura, já que ela tem comportamento simétrico.

Para a modelagem é utilizada a mesma curva poligonal apresentada em YANKELEVSKY (1985), onde para cada uma das zonas (estágios) a relação tensão de aderência x deslizamento tem uma lei que a rege.

Para a resolução do problema está sendo adotado um método incremental. A interface, entre a barra de aço e o concreto, é dividida em elementos finitos (Figura 4.2.3.1). Para a primeira solução tensão x deslizamento atribuem-se a todos os elementos as propriedades do estágio i . Verifica-se se todos os elementos estão dentro desse estágio, se confirmado é obtida uma solução final. Caso algum elemento tenha o seu deslizamento superior a S_i , determina-se o estágio correspondente a ser utilizado no próximo incremento.

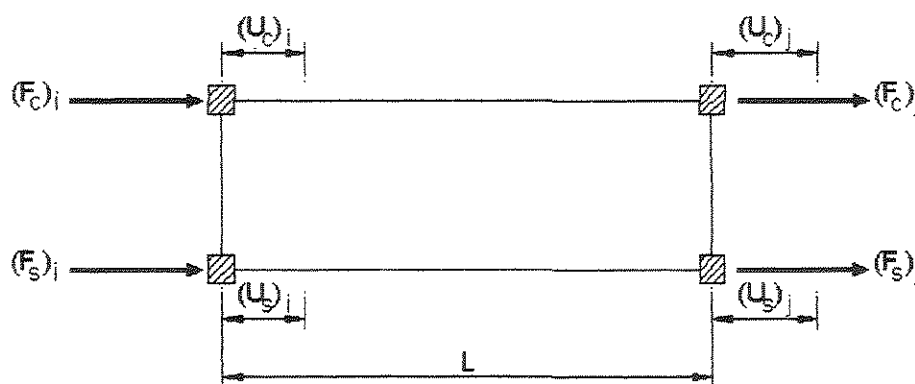


Figura 4.2.3.1- Configuração dos elementos finitos.

A seguir (Figura 4.2.3.2), é apresentado o fluxograma de processamento do programa:

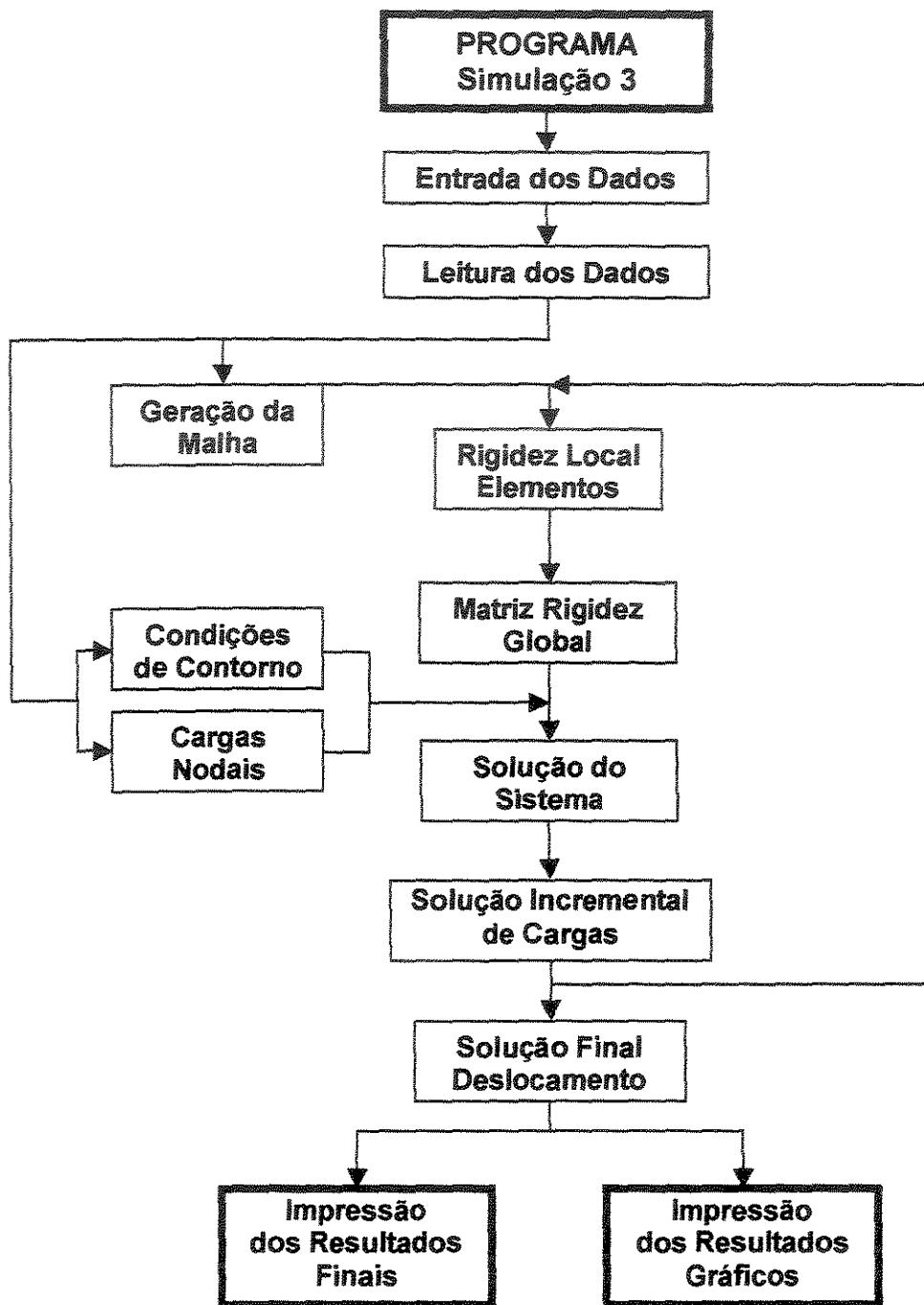


Figura 4.2.3.2- Fluxograma do programa: simulação numérica 3.

Como dados de entrada temos:

Geométricos: diâmetro externo do concreto, diâmetro da barra de aço e comprimento referente à metade da amostra;

Características dos materiais: módulo de elasticidade do aço e módulo de elasticidade do concreto;

Elementos finitos: número de elemento finitos na horizontal. Nesta etapa, há a geração dos elementos e nós da interface.

Carregamento: força de tração aplicada na barra e número de incrementos do sistema;

Curva tensão de aderência x deslizamento: deslizamentos limites, tensão de aderência limite e tensão de aderência última.

A partir da leitura dos dados temos:

Montagem do vetor de carregamento: o vetor é montado considerando a divisão da força pelo número de incrementos;

Condições de contorno: as restrições nodais são definidas pelo programa a partir das condições de simetria desse tipo de estrutura;

Montagem da matriz de rigidez global: a matriz de rigidez global é feita pela soma das matrizes locais de todos os elementos de interface.

Como respostas finais teremos os deslocamentos nodais, os deslizamentos entre a barra de aço e o concreto, as tensões de aderência ao longo da barra, as deformações no concreto e as deformações na barra de aço.

4.3 VIGA SIMÉTRICA BIPOIADA

Trata-se de uma viga de concreto armado com as barras de aço localizadas na parte inferior, tendo como característica as simetrias de apoio e carregamento (Figura 4.3.1).

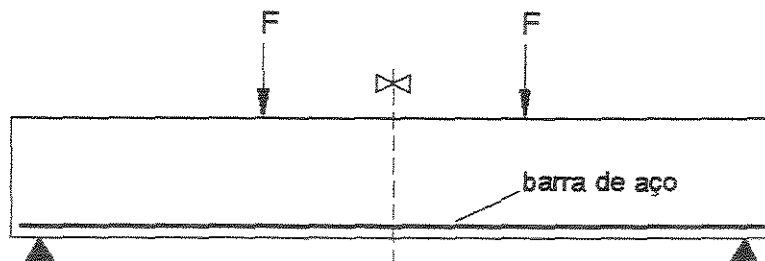


Figura 4.3.1- Viga biapoada simétrica.

Para a modelagem dessa estrutura tem-se como opção a consideração ou não da fissuração do concreto. A seguir, será apresentada a implementação numérica do programa desenvolvido.

4.3.1 SIMULAÇÃO SEM FISSURAÇÃO DO CONCRETO

Para a configuração da malha que representa o concreto é utilizado o elemento finito LSR, visto no capítulo 3. A armadura é representada pela forma discreta, sendo modelada pelo mesmo tipo de elemento finito do concreto. Para a modelagem da aderência é utilizado o elemento de interface de seis nós que é compatível com o elemento LSR.

A curva a ser utilizada para a obtenção do valor de rigidez ao deslizamento k_h pode ser definida externamente pelo usuário, tendo como opções as curvas polinomiais de NILSON (1968) e MIRZA (1979) e a curva poligonal de YANKELEVSKY (1985). Para a rigidez normal k_v é adotado um valor alto (ordem de 10^{15}).

Considerando o comportamento simétrico, é modelada apenas metade da estrutura (Figura 4.3.1.1).

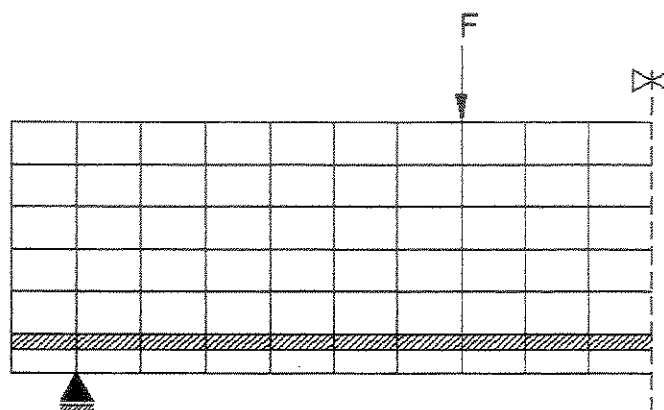


Figura 4.3.1.1- Consideração da simetria.

Usando o conceito da seção modificada a viga é convertida em uma viga com largura unitária, com redução do volume de concreto no nível das barras de aço (Figura 4.3.1.2). Assim, a viga tridimensional é transformada em uma viga bidimensional no modelo analítico.

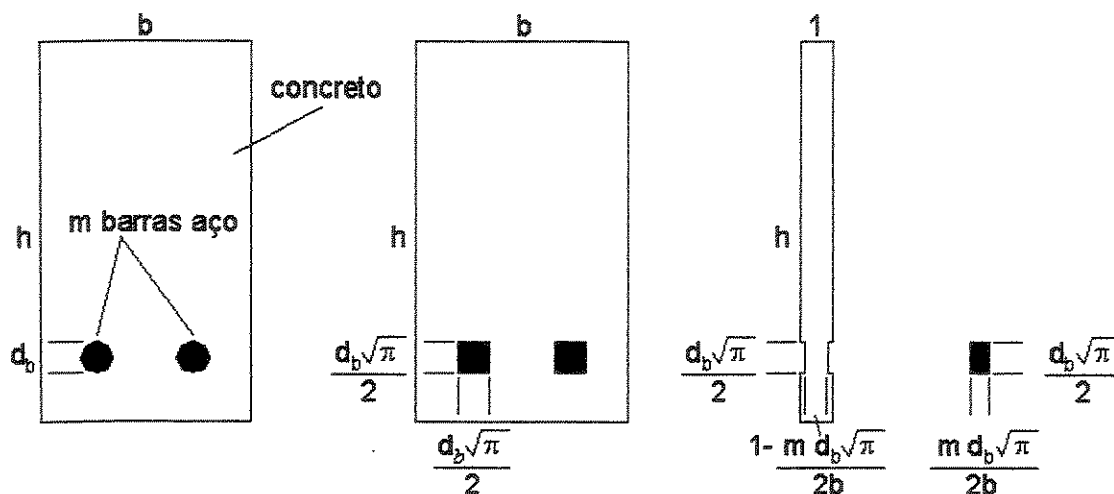


Figura 4.3.1.2- Transformação da largura da viga.

A seguir (Figura 4.3.1.3), é apresentado o fluxograma de processamento do programa:

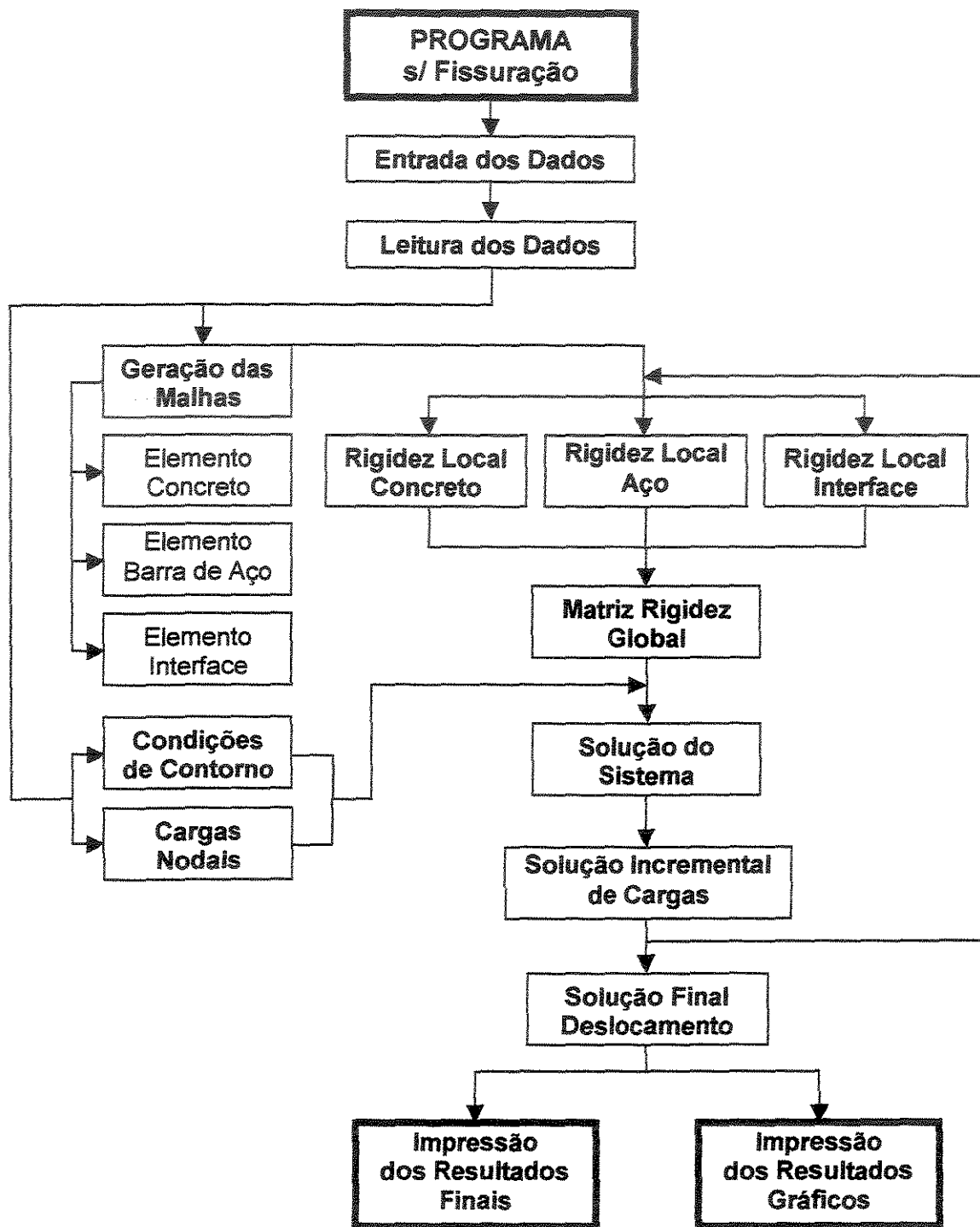


Figura 4.3.1.3- Fluxograma do programa: viga biapoçada sem fissura.

Os elementos de aço são conectados aos elementos de concreto por dois níveis de elementos de interface (Figura 4.3.1.4), localizados no topo e na base dos elementos de aço, exceto no final da barra e no meio da viga onde o aço é conectado diretamente ao concreto por causa da ancoragem na extremidade da barra, e da simetria no meio da viga. Além dessa ancoragem pontual na extremidade da barra pode ser utilizada uma rigidez maior dos elementos de interface perto dessa extremidade, para simular uma região de maior aderência devido a ancoragem. Essa rigidez pode ser definida externamente no programa.

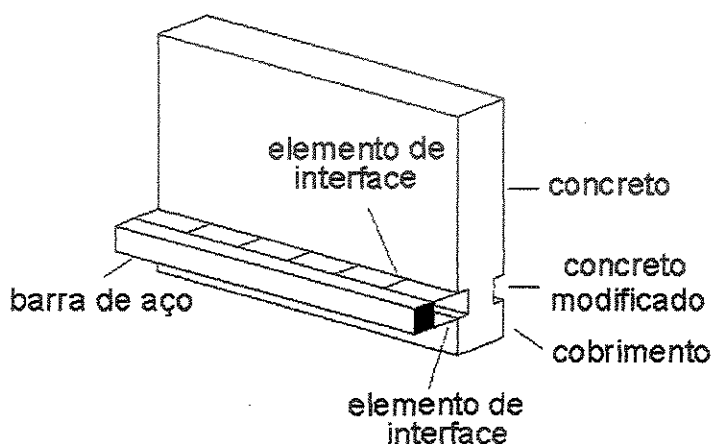


Figura 4.3.1.4- Conexão entre a barra de aço e o concreto.

Como dados de entrada temos:

Características da viga: Altura da viga, largura da viga, comprimento referente a metade da viga, diâmetro da barra de aço, número de barras, cobrimento da capa de concreto e distância do apoio até a face da viga;

Características dos materiais: módulo de elasticidade do aço, módulo de elasticidade do concreto, coeficiente de Poisson do aço e coeficiente de Poisson do concreto;

Elementos finitos: número de elemento finitos na horizontal, número de elemento finitos na vertical. Nesta etapa, há a geração dos elementos e nós do concreto, do aço e da interface.

Carregamento: número de nós carregados referente a metade da estrutura, nós de aplicação, valor do carregamento e número de incrementos do sistema;

Restrições nodais: número total de nós restritos referente a metade da estrutura, nós restritos e eixo restrito. A restrição deve ser feita nos nós localizados próximos da linha neutra da viga, devido ao efeito de rotação;

Curva tensão de aderência x deslizamento: escolha do tipo de curva, e entrada de suas características, quando necessário.

A partir da leitura dos dados temos:

Montagem do vetor de carregamento: o vetor é montado considerando a divisão da força pelo número de incrementos;

Condições de contorno: as restrições nodais são definidas pelo programa a partir das condições de simetria desse tipo de estrutura;

Montagem da matriz de rigidez global: a matriz de rigidez global é feita pela soma das matrizes locais de todos os elementos: concreto, aço e interface.

A resolução do sistema segue o método incremental. Como respostas finais teremos os deslocamentos nodais, os deslizamentos ao longo da barra de aço, as tensões de aderência ao longo da barra, as deformações e as tensões no concreto e as deformações e as tensões no aço.

4.3.2 SIMULAÇÃO COM FISSURAÇÃO DO CONCRETO

A modelagem da viga considerando a fissuração, primeiramente, segue os mesmos passos da modelagem anterior, sendo as fissuras modeladas após a definição de todos os parâmetros a serem considerados. A modelagem (discreta) se dá através da colocação arbitrária, no concreto, das fissuras que têm seu tamanho já definido. Essas fissuras são verticais e seguem as faces dos elementos finitos, sendo impostas através da separação nodal desses elementos, pela atribuição de novos nós sobrepostos aos nós onde passarão as fissuras (Figura 4.3.2.1). Essa separação se dá entre os elementos de concreto que são faces das fissuras e também entre os nós dos elementos de interface que estão ligados aos nós por onde passam as fissuras (Figura 4.3.2.2).

Abaixo temos um exemplo da modelagem das fissuras através da separação nodal dos elementos de concreto, sendo a abertura δ igual a zero.

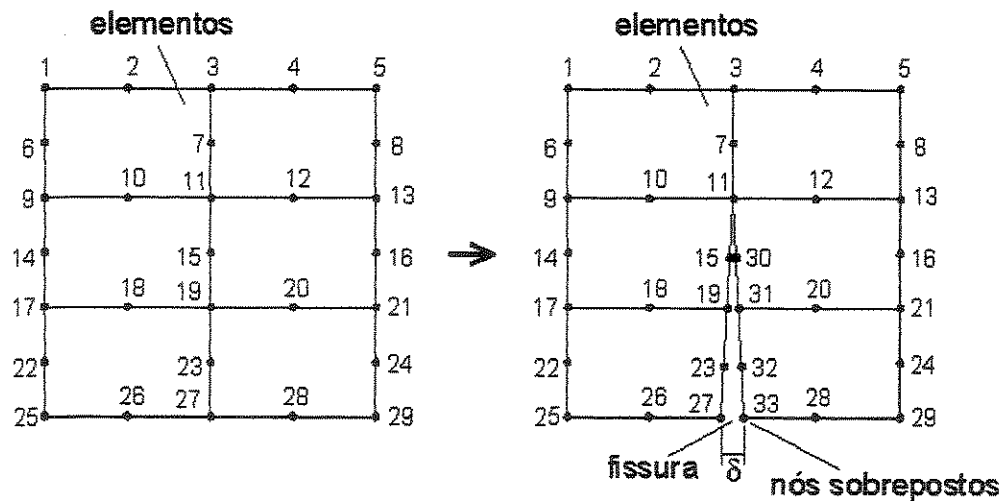


Figura 4.3.2.1- Sobreposição de nós para a modelagem das fissuras.

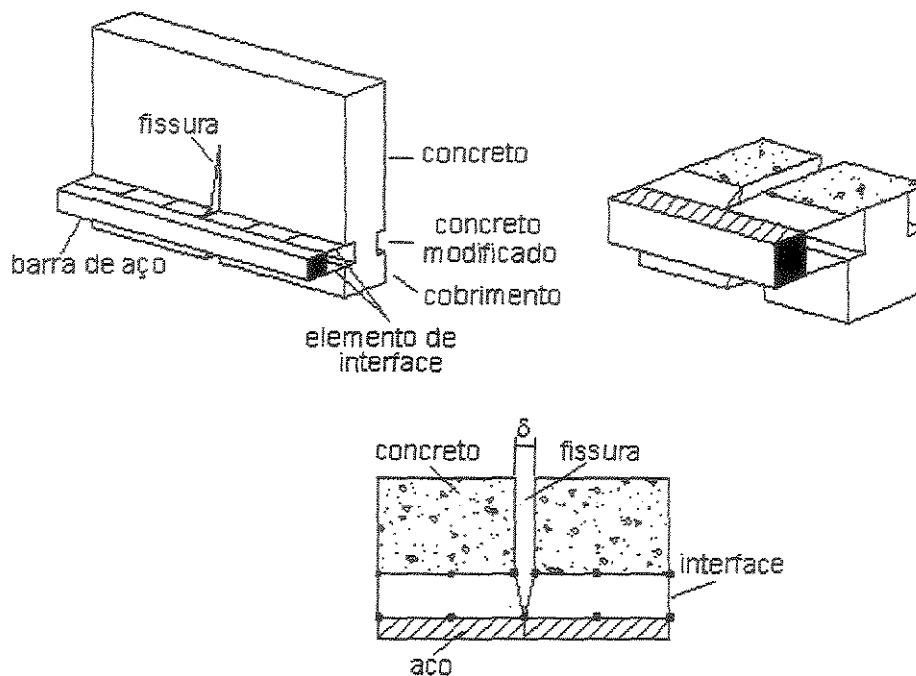


Figura 4.3.2.2- Separação entre os elementos de concreto e de interface.

Como dados de entrada para modelagem das fissuras temos:

Características das fissuras: Número de linhas de fissuras e definição dos elementos de concreto onde as fissuras iniciam e terminam.

Os passos de resolução são iguais aos da não consideração das fissuras. Como respostas finais teremos os deslocamentos nodais, os deslizamentos ao longo da barra de aço, as tensões de aderência ao longo da barra, as deformações e as tensões no concreto e as deformações e as tensões no aço.

A seguir (Figura 4.3.2.3), é apresentado o fluxograma de processamento do programa:

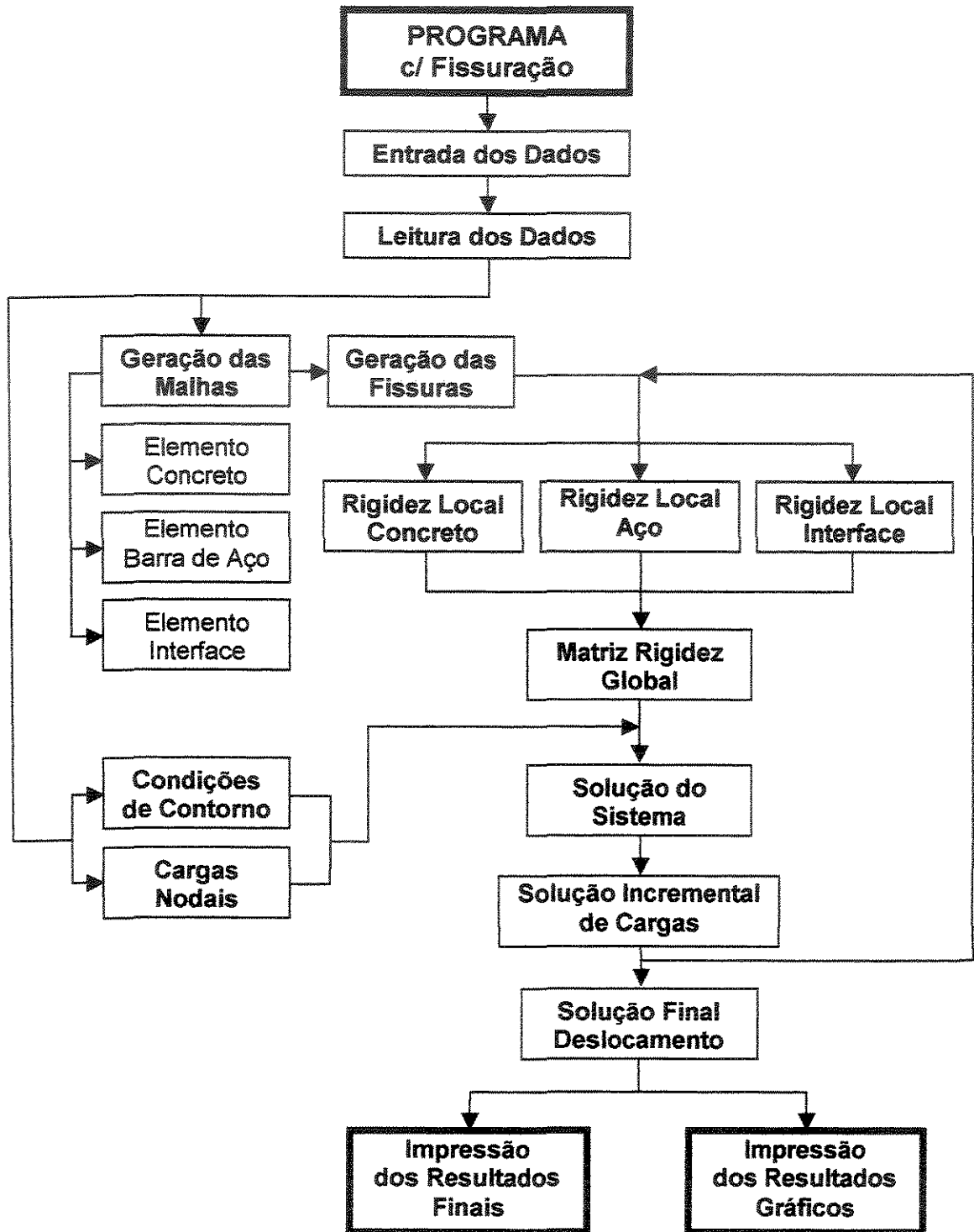


Figura 4.3.2.3- Fluxograma do programa: viga biapoada com fissuração.

CAPÍTULO 5

APRESENTAÇÃO DOS PROGRAMAS

5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentados os quatro programas computacionais desenvolvidos para modelar estruturas de concreto armado, considerando os efeitos da aderência entre o aço e o concreto. Os programas foram separados em dois grupos de acordo com o tipo de simulação realizada. Assim, temos:

I - Modelagem de estrutura submetida ao ensaio de tração simétrica:

Programa ENSATS1: elemento de interface, simulação numérica 1 (item 4.2.1);

Programa ENSATS2: elemento de YANKELEVSKY (1985), simulação numérica 2 (item 4.2.2);

Programa ENSATS3: elemento de YANKELEVSKY (1997), simulação numérica 3 (item 4.2.3).

II - Modelagem de viga simétrica biapoiada submetida à flexão, considerando ou não a fissuração do concreto:

Programa ENSAVS, (item 4.3);

5.2 ENSATS 1: ENSAIO DE TRAÇÃO SIMÉTRICA 1

O arquivo executável desse programa é designado por *Ensats1.exe*.

1 – Executar o programa *Ensats1.exe*:

A Figura 5.2.1 mostra a tela inicial.



Figura 5.2.1- Tela inicial (Ensats1).

2 – Em *Sistema* clicar em *Iniciar* para começarmos a entrar com os dados:

→ Sistema → Iniciar

Na Figura 5.2.2 temos a tela de entrada de dados.

ENSATS 1 - ENTRADA DE DADOS

Arquivo Editar Dados Análise Ajuda

ENTRADA DE DADOS

Ensaio: 1

Dimensões da Amostra: 1, 20, 50

Cargamento: 1000, 1

Elementos Finitos: 6, 5

Nºs Elementos de Concreto

Elemento	Nº 1	Nº 2	Nº 3	Nº 4	Nº 5
1	1	23	3	1	22
2	23	25	5	3	24

Nºs Elementos de Barras

Elemento	Nº 1	Nº 2	Nº 3	Nº 4	Nº 5
1	24	136	116	114	135
2	136	138	118	116	137

Nºs Elementos da Interface

Elemento	Nº 1	Nº 2	Nº 3	Nº 4	Nº 5
1	81	81	82	116	114
2	85	83	84	118	116

TRAÇÃO SIMÉTRICA 1

UNICAMP

FAPESP

<< Voltar Processar Resultados

Seja vindo ao sistema

Figura 5.2.2- Tela entrada de dados (Ensats1).

Conforme o mouse caminha sobre os campos de entrada de dados, uma caixa de diálogo explicativa é ativada ao lado da tela.

3 – Como dados de entrada, temos:

Dimensões da Amostra

- d – diâmetro da barra de aço;
- D – diâmetro do cilindro de concreto;
- L/2 – comprimento referente à metade da amostra.

Elementos Finitos

- h – número de elementos finitos na horizontal;
- v – número de elementos finitos na vertical.

Carregamento

- F – força de tração aplicada na barra de aço;
- Interações – incrementos para resolução da estrutura.

Curva Tensão de Aderência x Deslizamento

Constante de Rigidez

- Kv – rigidez vertical do elemento de interface.

Materiais

- Ea – módulo de elasticidade do aço;
- Pa – coeficiente de Poisson do aço;
- Ec – módulo de elasticidade do concreto;
- Pc – coeficiente de Poisson do concreto.

A geração dos nós e dos elementos é feita internamente pelo programa.

4 – Processamento da estrutura:

→ Análise → Processar

5 – Apresentação dos resultados:

→ Análise → Resultados

A Figura 5.2.3 mostra a tela de resultados.

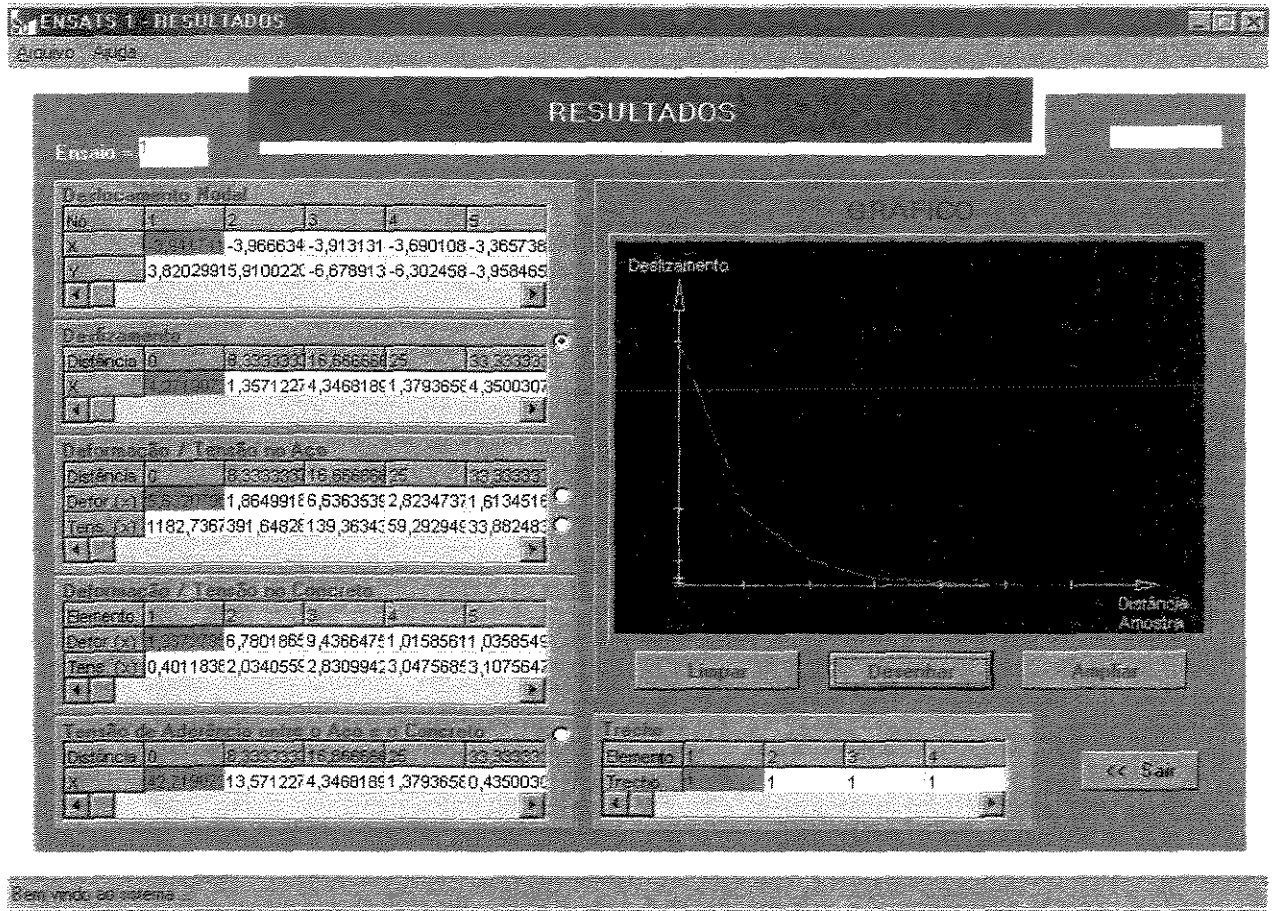


Figura 5.2.3- Tela resultados (Ensats1).

6 – Os resultados poderão ser apresentados em forma de gráficos. Para isso tem que ser selecionado o resultado desejado e clicar em < *Desenhar* >. Esses gráficos poderão ser ampliados em uma outra tela (Figura 5.2.4), sendo visualizados com mais detalhes.

A seguir (Figura 5.2.4) vemos a tela de representação dos gráficos:

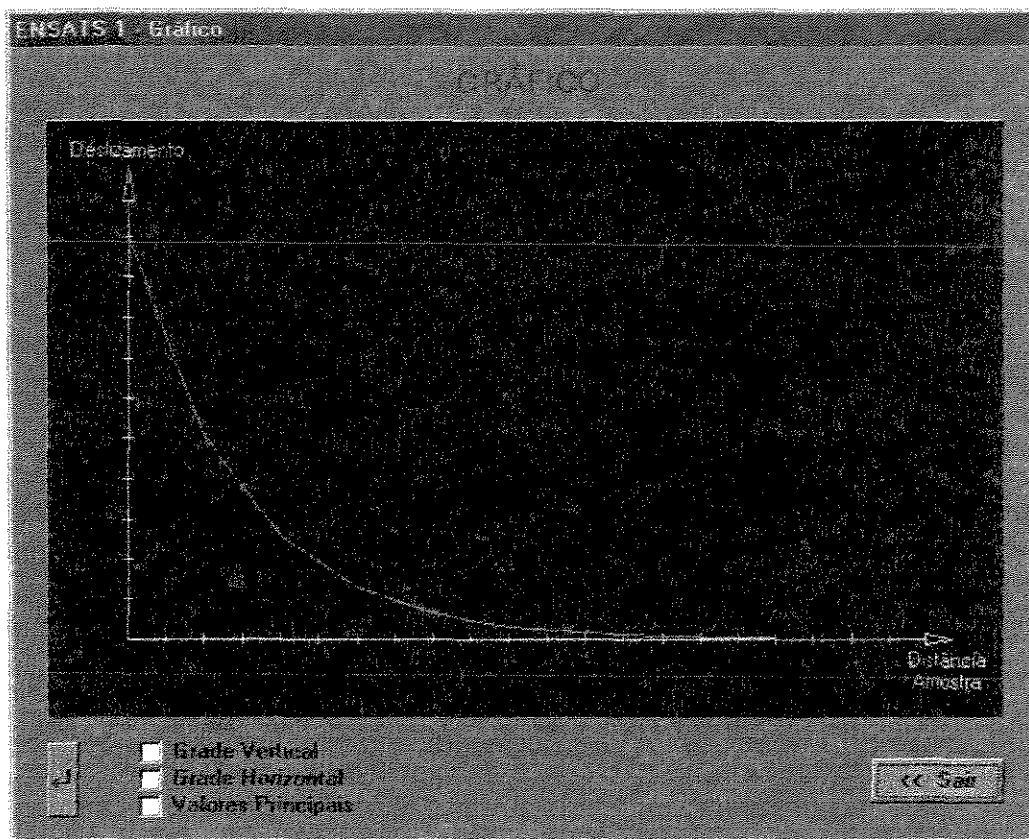


Figura 5.2.4- Tela gráfico (Ensats1).

7 – Os dados de entrada poderão ser gravados em arquivos (*.dat, *.txt) e os resultados em arquivos (*.rst).

5.3 ENSATS 2: ENSAIO DE TRAÇÃO SIMÉTRICA 2

O arquivo executável desse programa é designado por *Ensats2.exe*.

1 – Executar o programa *Ensats2.exe*:

A Figura 5.3.1 mostra a tela inicial.

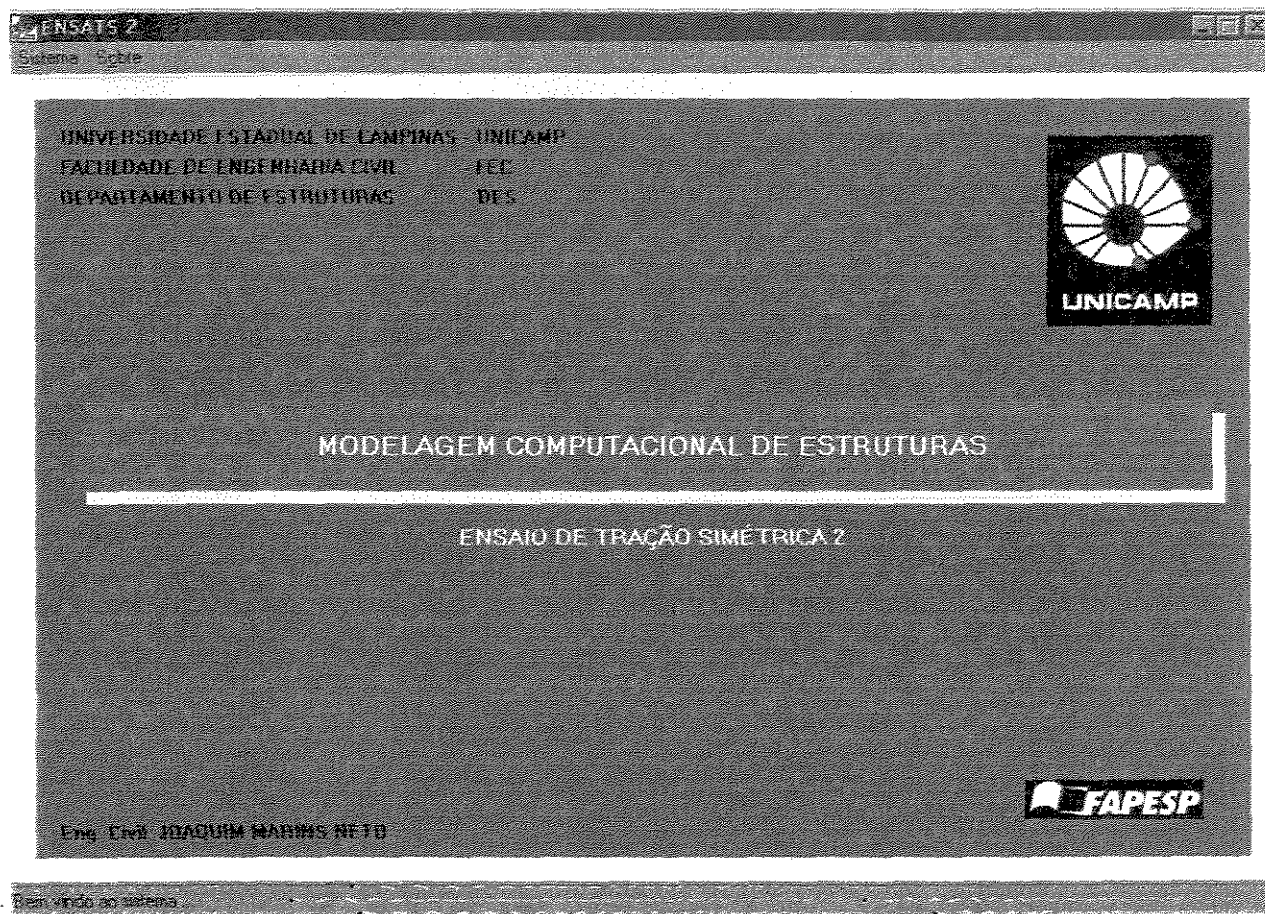


Figura 5.3.1- Tela inicial (Ensats2).

2 – Em *Sistema* clicar em *Iniciar*.

→ Sistema → Iniciar

A Figura 5.3.2 mostra a tela de entrada de dados.

ENSATS 2 - ENTRADA DE DADOS

Arquivo Editar Análise Ajuda

ENTRADA DE DADOS

Ensaio = 1

Dimensões da Amostra

1000

50

Cargamento

1000

10

Material - Módulo de Elasticidade

2100000

Tensão de Aderência e Deslizamento

0.01 0.1 0.5

100 1

Número de Elementos Finitos

10

Nos - Elementos Finitos

Elemento	1	2	3	4	5
Nó 1	1	2	3	4	5
Nó 2	2	3	4	5	6

UNICAMP

TRAÇÃO SIMÉTRICA 2

FAPESP

<< Sair Processar Resultados

Bem vindo ao sistema

Figura 5.3.2- Tela entrada de dados (Ensats2).

Conforme o *mouse* caminha sobre os campos de entrada de dados, uma caixa de diálogo explicativa é ativada ao lado da tela.

3 – Como dados de entrada, temos:

Dimensões da Amostra

d – diâmetro da barra de aço;

L/2 – comprimento referente à metade da amostra.

Número de Elementos Finitos

h – número de elementos finitos na horizontal.

Carregamento

F – força de tração aplicada na barra de aço;

Interações – incrementos para resolução da estrutura.

Tensão de Aderência x Deslizamento

S1 – deslizamento limite, estágio 1;

S2 – deslizamento limite, estágio 2;

S3 – deslizamento limite, estágio 3;

τ_y – tensão de aderência limite;

τ_u – tensão de aderência última.

Materiais

Ea – módulo de elasticidade do aço;

A geração dos nós e dos elementos é feita internamente pelo programa.

4 – Processamento da estrutura:

→ Análise → Processar

5 – Apresentação dos resultados:

→ Análise → Resultados

Na Figura 5.3.3 temos a tela de apresentação dos resultados.

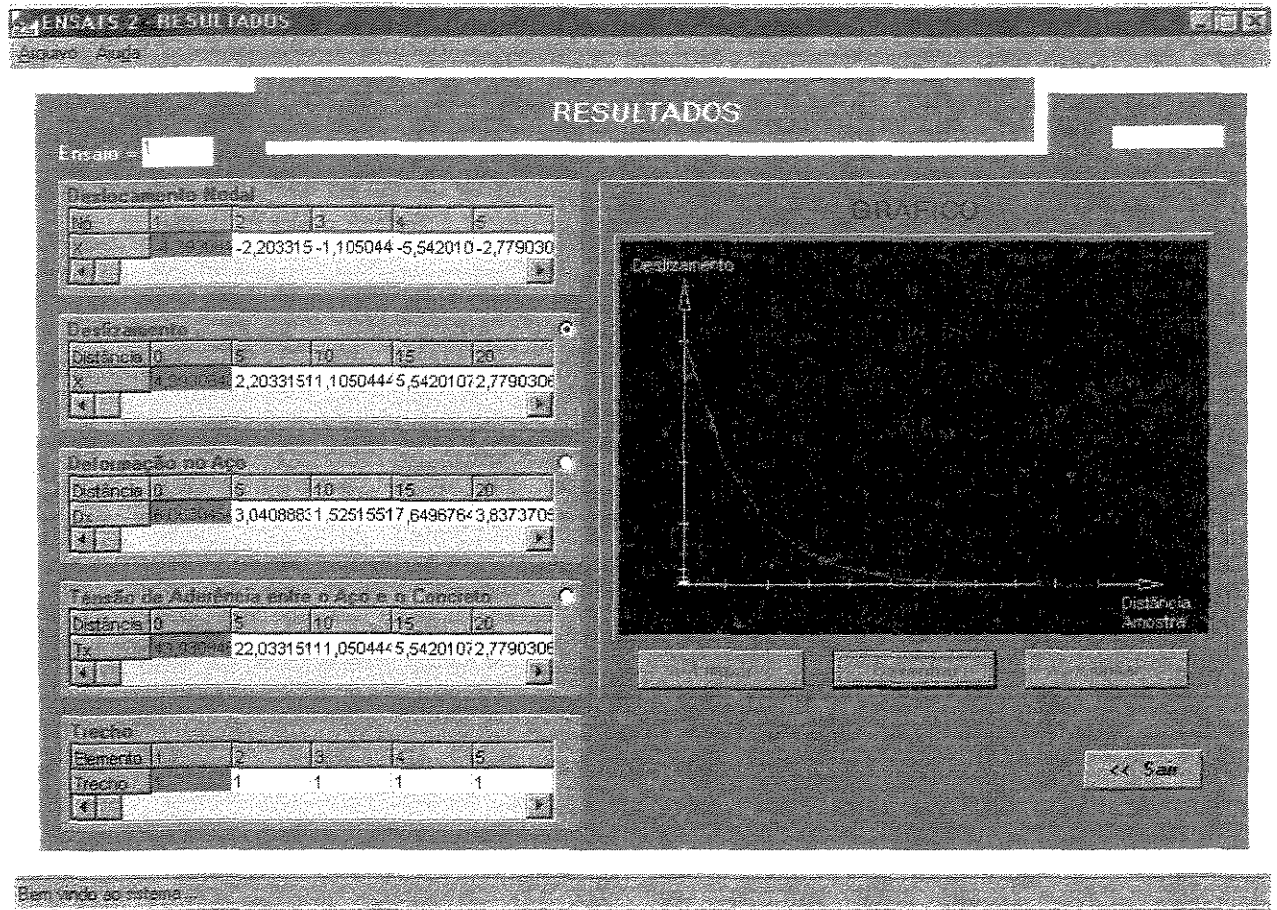


Figura 5.3.3- tela resultados (Ensats2).

6 – Os resultados poderão ser apresentados em forma de gráficos. Para isso tem que ser selecionado o resultado desejado e < *Desenhar* >. Esses gráficos poderão ser ampliados em uma outra tela (Figura 5.3.4), sendo visualizados com mais detalhes.

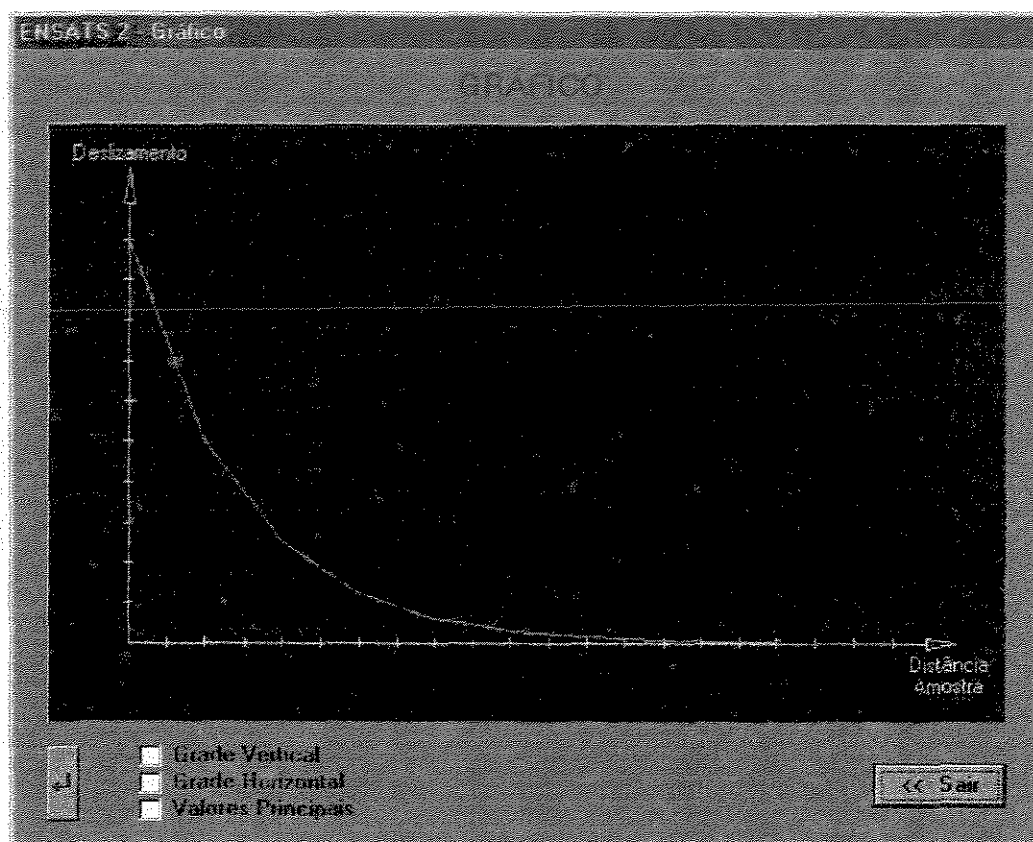


Figura 5.3.4- Tela gráfico (Ensats2).

5.4 ENSATS 3: ENSAIO DE TRAÇÃO SIMÉTRICA 3

O arquivo executável desse programa é designado por *Ensats3.exe*.

1 – Executar o programa *Ensats3.exe*:

A Figura 5.4.1 mostra a tela inicial.

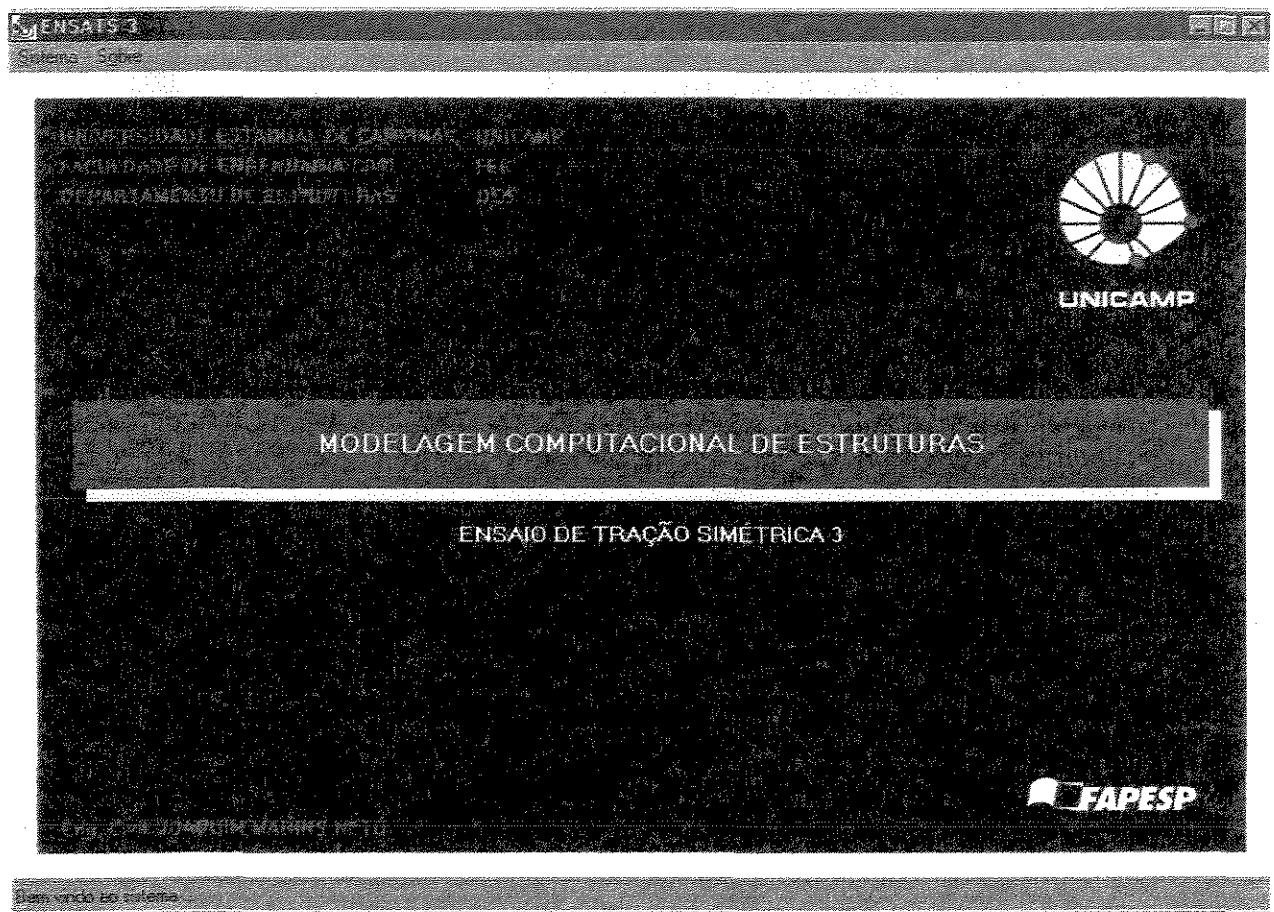


Figura 5.4.1- Tela inicial (Ensats3).

2 – Para iniciar o sistema entramos em:

→ Sistema → Iniciar

Na Figura 5.4.2 temos a tela de entrada de dados.

The screenshot shows the 'ENSATS 3 - ENTRADA DE DADOS' window. The main title is 'ENTRADA DE DADOS'. The test name is 'Ensaio = 1'. The material is 'Materiais - Módulo de Elasticidade' with values 2100000 and 300000. The loading is 'Carregamento' with values 1000 and 10. The adhesion and slip parameters are 'Tensão de Adesão x Deslizamento' with values 0.01, 0.1, 0.5, 100, and 1. The number of finite elements is 'Número de Elementos Finitos' with value 10. The nodes are 'Nós - Elementos Finitos' with a table of 3 elements and 8 nodes.

Elemento	Nº 1	Nº 2	Nº 3	Nº 4
1	1	2	3	4
2	3	4	5	6
3	5	6	7	8

Buttons at the bottom: << Voltar, Processar, Resultados.

Figura 5.4.2- Tela entrada de dados (Ensats3).

3 – Como dados de entrada, para este programa, temos:

Dimensões da Amostra

d – diâmetro da barra de aço;

D – diâmetro do cilindro de concreto;

L/2 – comprimento referente à metade da amostra.

Número de Elementos Finitos

h – número de elementos finitos na horizontal.

Carregamento

F – força de tração aplicada na barra de aço;

Interações – incrementos para resolução da estrutura.

Tensão de Aderência x Deslizamento

S1 – deslizamento limite, estágio 1;

S2 – deslizamento limite, estágio 2;

S3 – deslizamento limite, estágio 3;

τ_y – tensão de aderência limite;

τ_u – tensão de aderência última.

Materiais

Ea – módulo de elasticidade do aço;

Ec – módulo de elasticidade do concreto.

A geração dos nós e dos elementos é feita internamente pelo programa.

4 – Processamento da estrutura:

→ Análise → Processar

5 – Apresentação dos resultados:

→ Análise → Resultados

Na Figura 5.4.3 temos a tela de resultados.

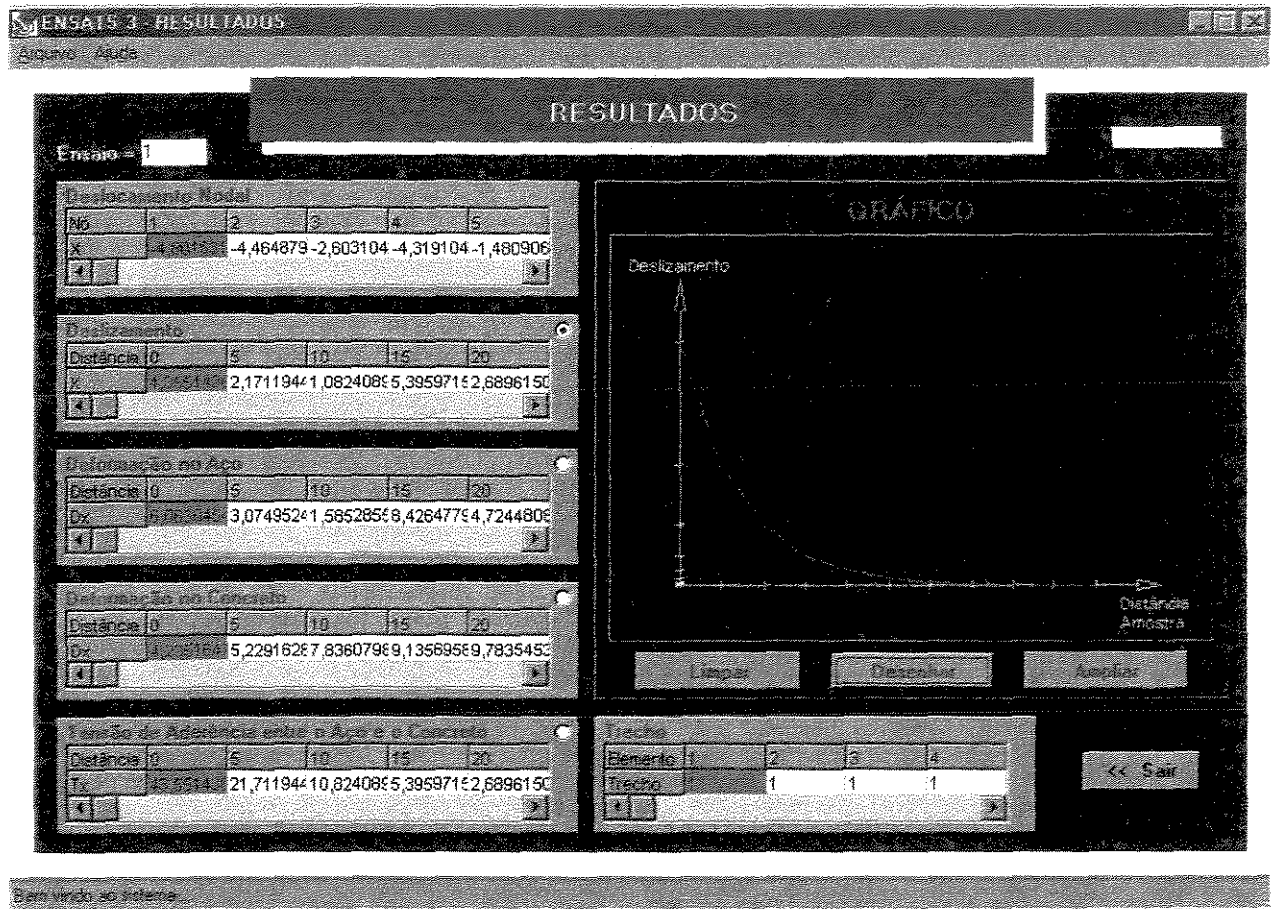


Figura 5.4.3- Tela resultados (Ensats3).

6 – Como os programas anteriores, os resultados poderão ser apresentados em forma de gráficos. Esses gráficos poderão ser ampliados em uma outra tela (Figura 5.4.4) sendo visualizados com mais detalhes.

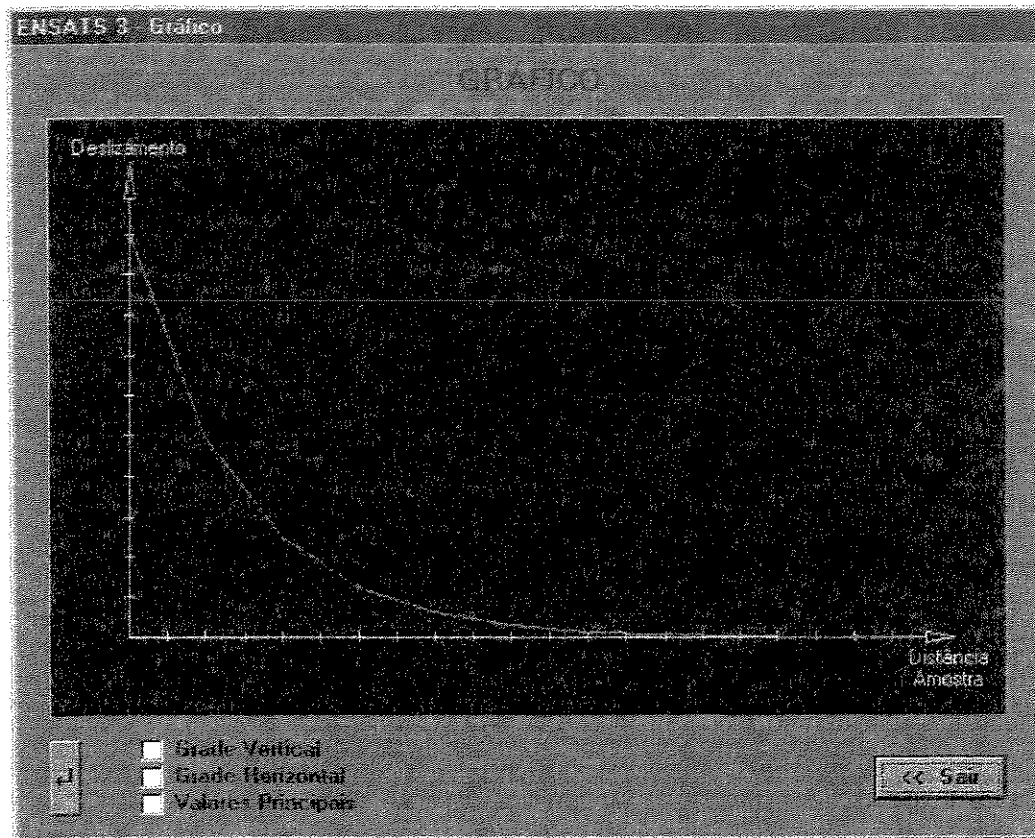


Figura 5.4.4- Tela gráfico (Ensats3).

5.5 ENSAVS: ENSAIO DE VIGA SIMÉTRICA

O arquivo executável desse programa é designado por *Ensavs.exe*.

1 – Executar o programa *Ensavs.exe*:

A Figura 5.5.1 mostra a tela inicial.

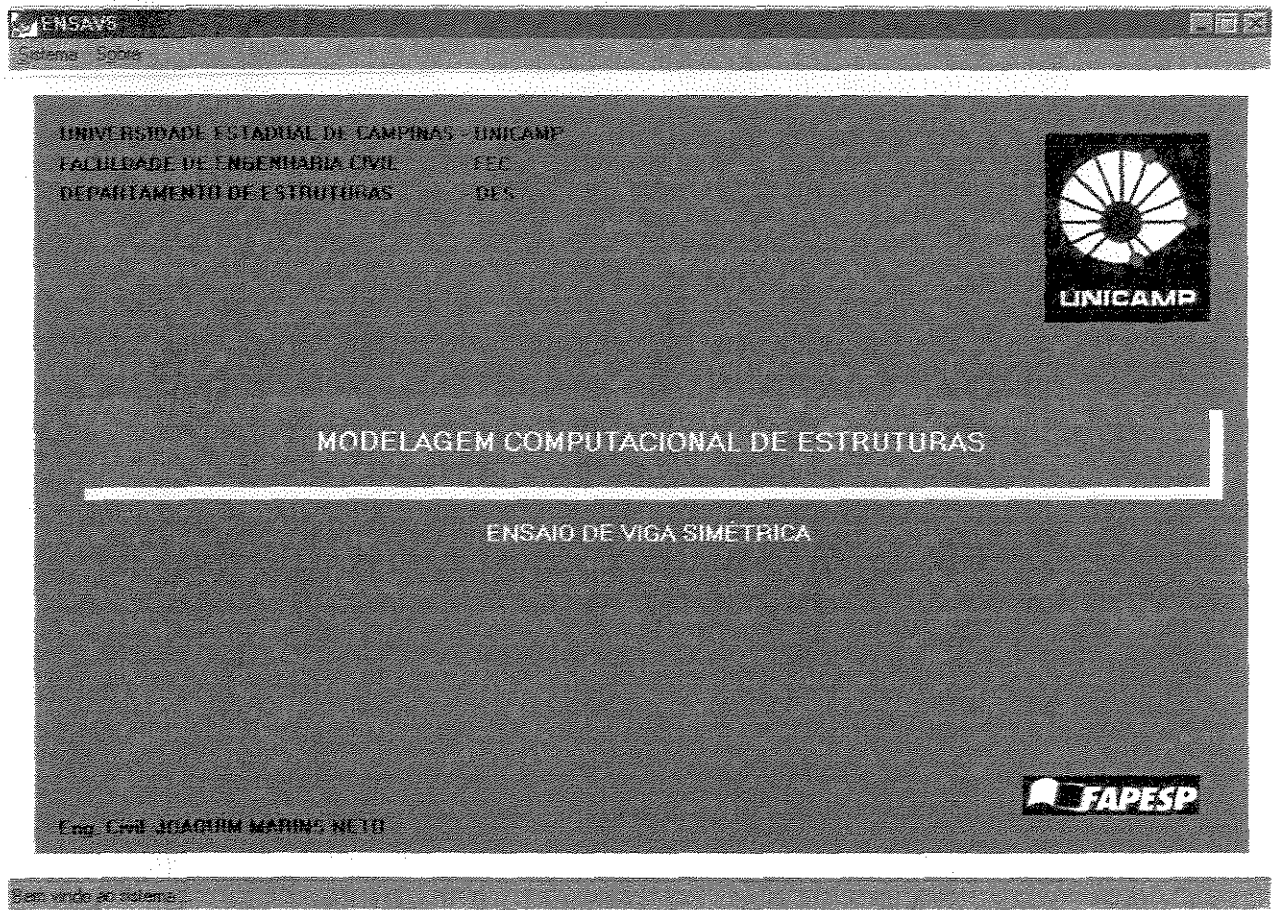


Figura 5.5.1- Tela inicial (Ensavs).

2 – Em *Sistema* clicar em *Iniciar* para começarmos a entrar com os dados:

→ Sistema → Iniciar

A Figura 5.5.2 mostra a tela de entrada de dados.

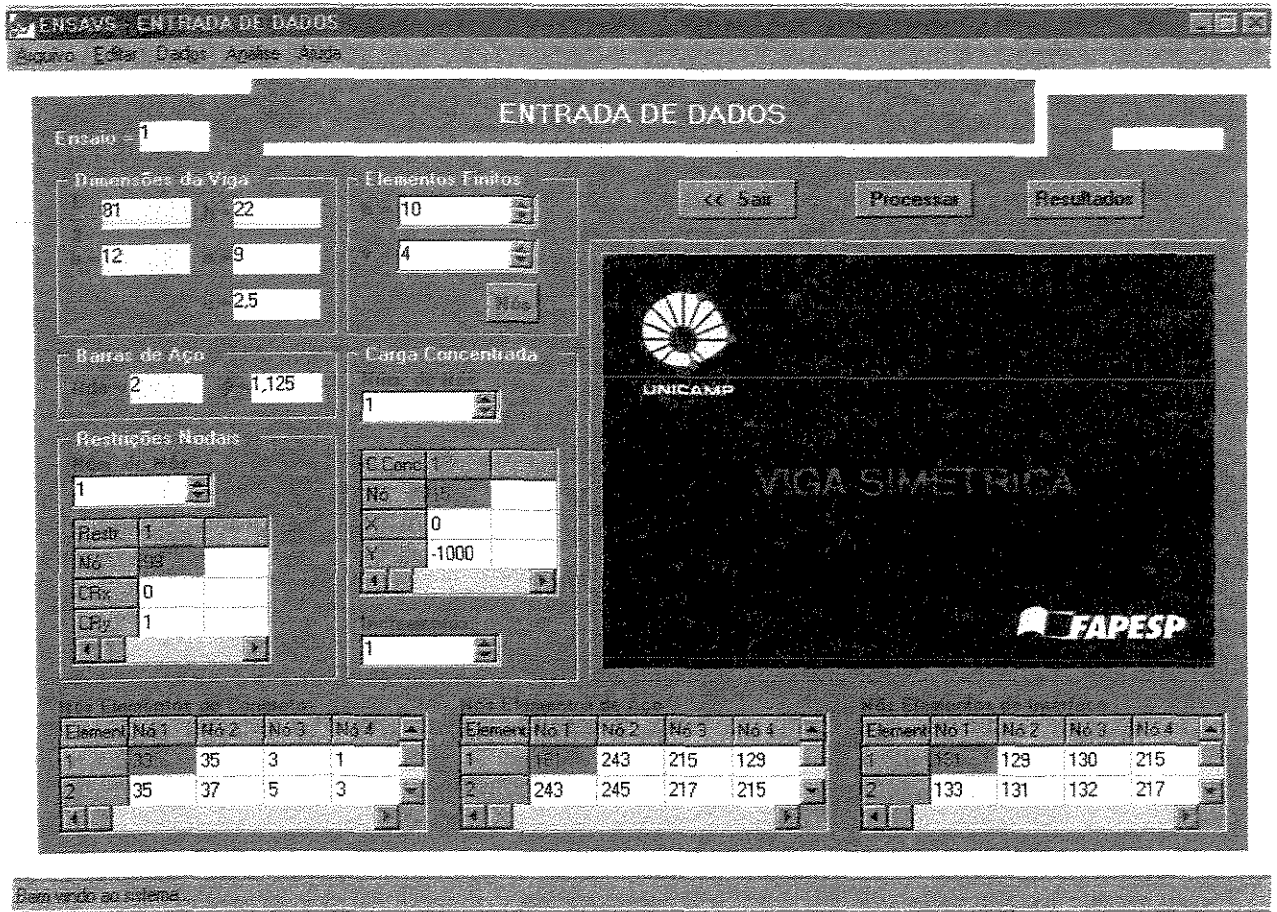


Figura 5.5.2- Tela entrada de dados (EnsavS).

Conforme o *mouse* caminha sobre os campos de entrada de dados, uma caixa de diálogo explicativa é ativada ao lado da tela.

3 – Como dados de entrada, temos:

Dimensões da Viga

$L/2$ – comprimento referente à metade da viga;

h – altura total da viga;

b – largura da viga;

e – distância do apoio da viga;

c – cobrimento da barra de aço.

Número de Elementos Finitos

h – número de elementos finitos na horizontal;

v – número de elementos finitos na vertical.

Barras de Aço

Q_{de} – número de barras de aço;

ϕ – diâmetro das barras de aço.

Restrições Nodais

Num. Nós – número total de nós restritos;

Nó – número do nó restrito;

CR_x – restrição nodal no eixo x ;

CR_y – restrição nodal no eixo y ;

0 – livre, 1 – impedido.

A restrição deverá ser colocada, preferencialmente, próxima a linha neutra.

Carga Concentrada

Num. Nós – número total de nós carregados;

Nó – número do nó carregado;

X – carregamento no eixo x ;

Y – carregamento no eixo y ;

Interações – incrementos para resolução da estrutura.

Curva Tensão de Aderência x Deslizamento

Ancoragem / Rigidez

Materiais

- Ea – módulo de elasticidade do aço;
- Pa – coeficiente de Poisson do aço;
- Ec – módulo de elasticidade do concreto;
- Pc – coeficiente de Poisson do concreto.

A viga poderá ser simulada considerando ou não a fissuração do concreto.

Fissuração

- definição do número de linhas de fissuras;
- definição dos elementos finitos do concreto por onde passam as fissuras.

A geração dos nós e dos elementos é feita internamente pelo programa.

4 – Processamento da estrutura:

→ **Análise** → **Processar**

5 – Apresentação dos resultados:

→ **Análise** → **Resultados**

A Figura 5.5.3 mostra a tela de resultados.

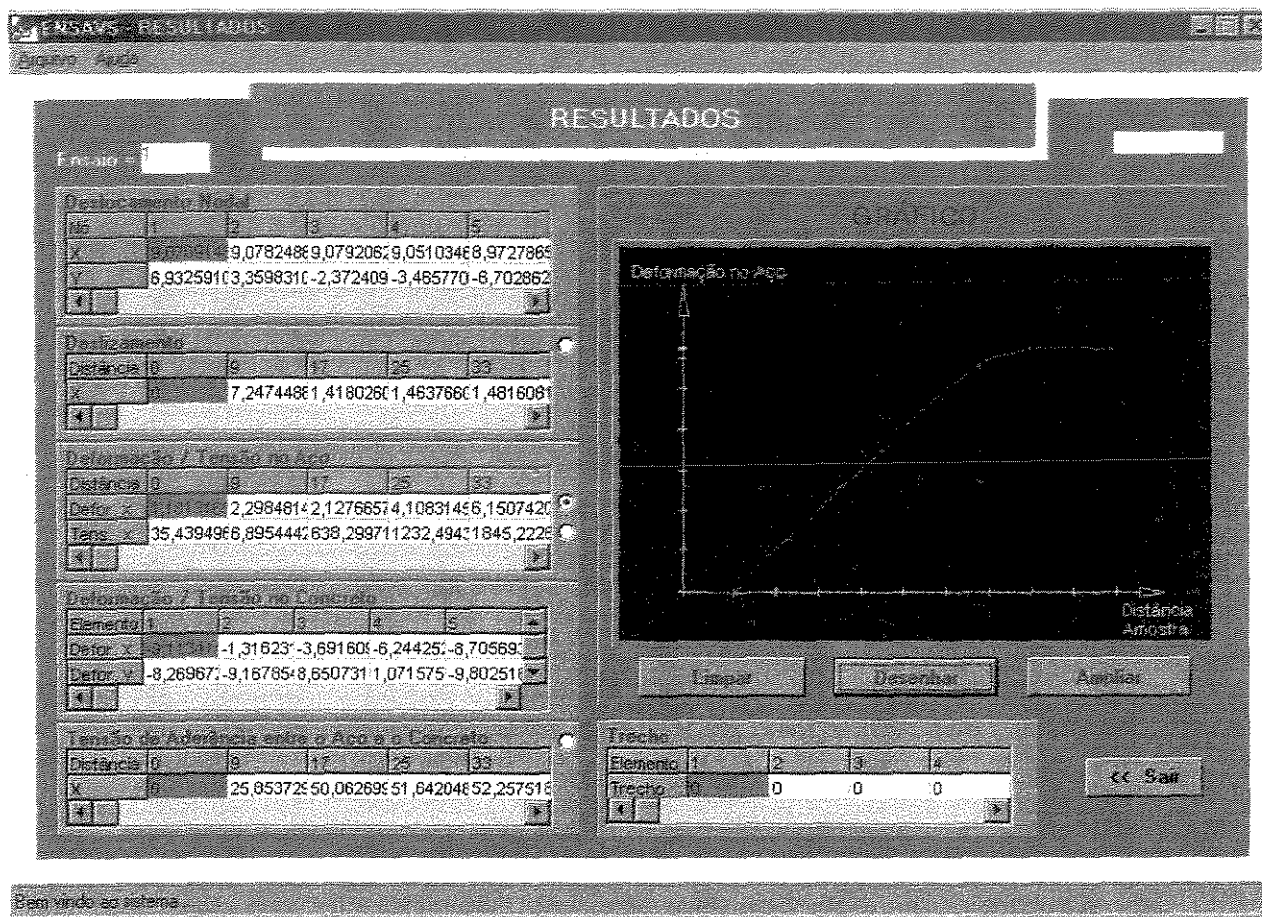


Figura 5.5.3- Tela resultados (Ensavs).

6 – Como os programas anteriores, os resultados poderão ser apresentados em forma de gráficos. Esses gráficos poderão ser ampliados em uma outra tela (Figura 5.5.4) sendo visualizados com mais detalhes.

A seguir (Figura 5.5.4) vemos a tela de representação dos gráficos:

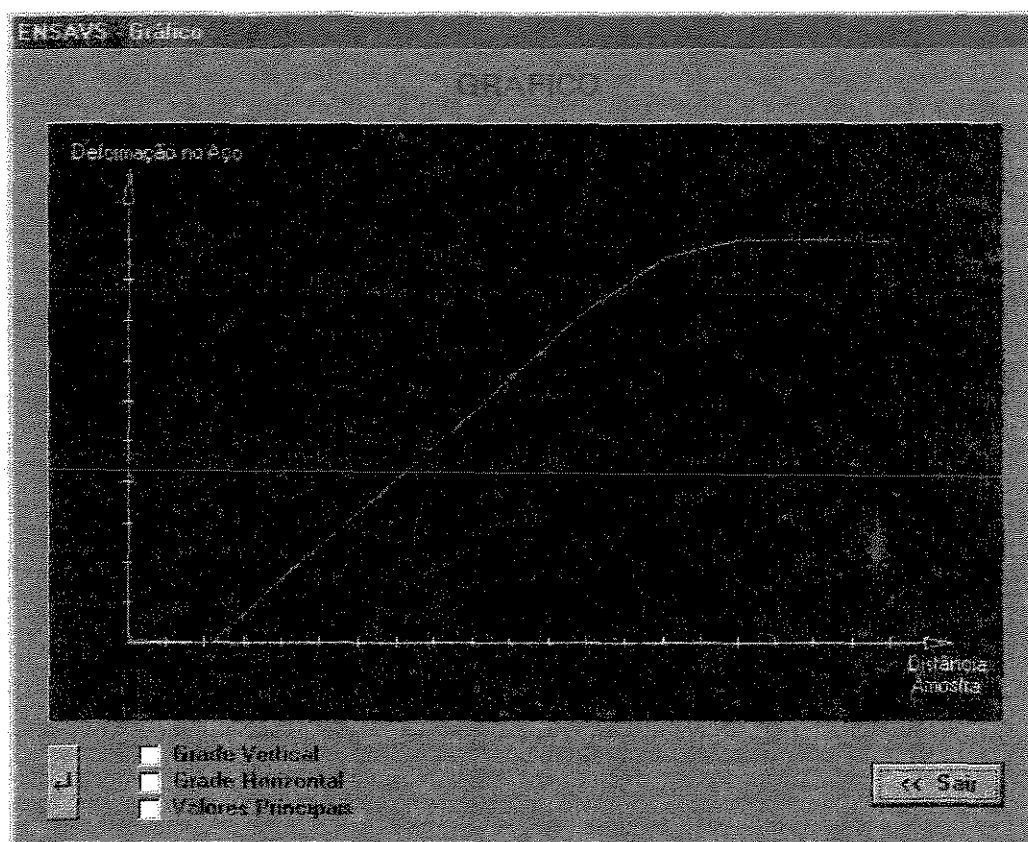


Figura 5.5.4- Tela gráfico (Ensavs).

7 – Os dados de entrada poderão ser gravados em arquivos (*.dat, *.txt) e os resultados em arquivos (*.rst).

Na Figura 5.5.5 temos a tela de modelagem das fissuras:

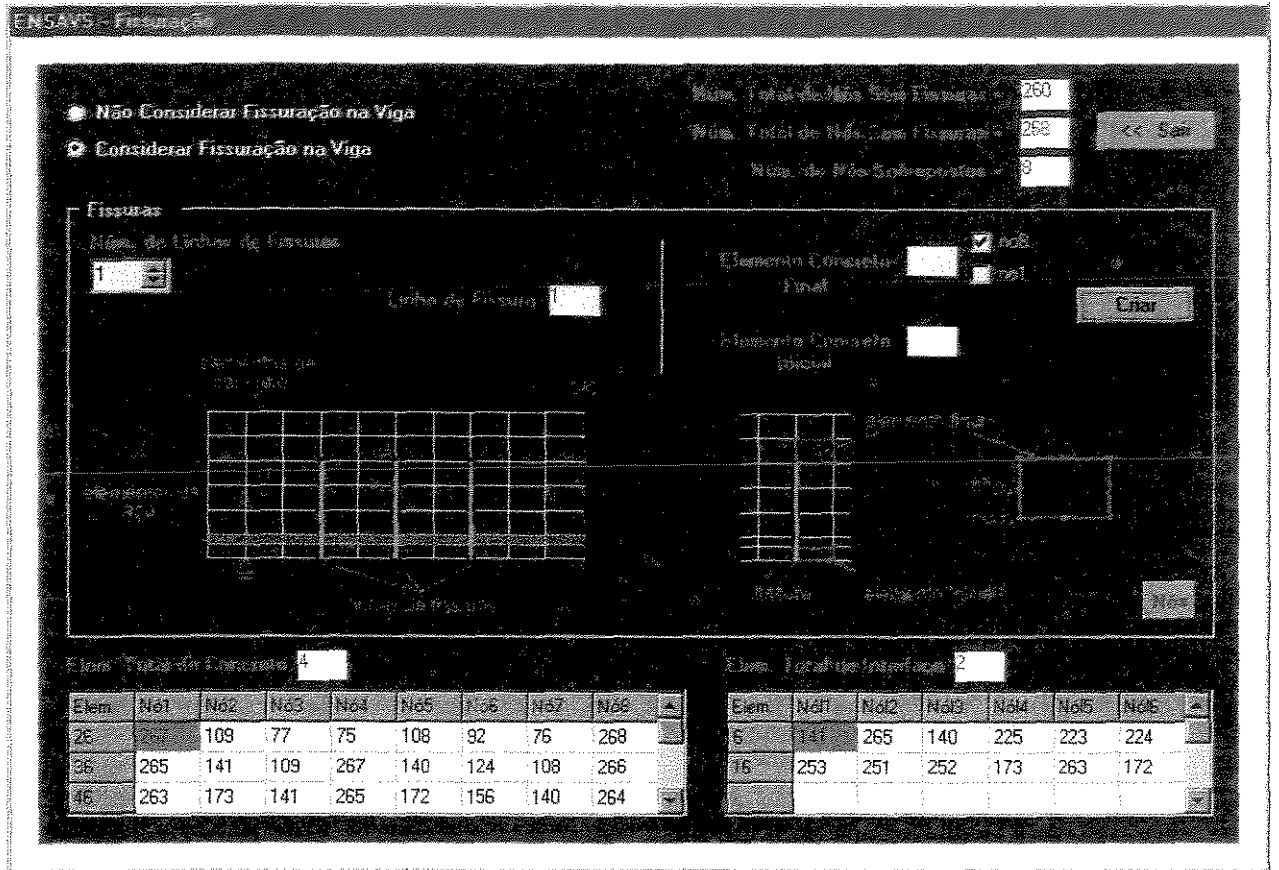


Figura 5.5.5- Tela de modelagem das fissuras (EnsavS).

CAPÍTULO 6

EXEMPLOS NUMÉRICOS

6.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentados resultados numéricos, através de exemplos comparativos, calculados pelos programas desenvolvidos neste trabalho e também obtidos na literatura. A apresentação dos resultados se dará, principalmente, através de gráficos onde teremos a distribuição do deslizamento entre a barra de aço e o concreto, a distribuição da tensão de aderência na interface aço-concreto, a distribuição da deformação e da tensão ao longo da barra de aço e a distribuição da deformação ao longo do concreto.

Primeiro serão apresentados os exemplos numéricos para a modelagem de estruturas submetidas ao ensaio de tração simétrica e, depois, para a modelagem de vigas simétricas sem e com fissuras.

6.2 APRESENTAÇÃO DOS EXEMPLOS PARA O ENSAIO DE TRAÇÃO SIMÉTRICA

Nestes exemplos serão analisados resultados obtidos com os programas *Ensats1* (elemento de interface), *Ensats2* (elemento de YANKELEVSKY (1985)) e *Ensats3* (elemento de YANKELEVSKY (1997)) e também com resultados apresentados em YANKELEVSKY (1997) e KWAK (2001).

Abaixo (Figura 6.2.1) temos a conformação geométrica do ensaio de tração simétrica e a origem das coordenadas, utilizados nestes exemplos:

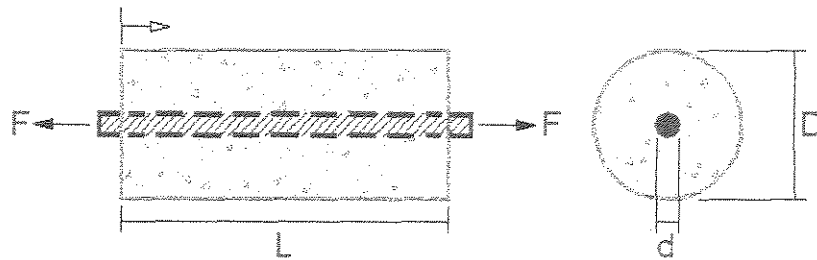


Figura 6.2.1- Conformação geométrica do ensaio de tração simétrica.

6.2.1 EXEMPLO NUMÉRICO 1

Para este exemplo temos, considerando a simetria da amostra, a distribuição do deslizamento e da tensão de aderência entre o aço e o concreto e a distribuição da deformação na barra de aço e no concreto.

Como características físicas e geométricas, utilizadas neste exemplo, temos:

Diâmetro da barra de aço	- $d = 1\text{ cm};$
Diâmetro externo da amostra	- $D = 20\text{ cm};$
Comprimento total da amostra	- $L = 100\text{ cm};$
Módulo de elasticidade do aço	- $E_a = 2100000\text{ Kgf/cm}^2;$
Módulo de elasticidade do concreto	- $E_c = 300000\text{ Kgf/cm}^2;$

Ensats1: elementos finitos	- h = 20 elementos, v = 5 elementos;
Ensats2: elementos finitos	- h = 10 elementos;
Ensats3: elementos finitos	- h = 10 elementos.

Os parâmetros da relação tensão de aderência x deslizamento são:

Tensão de aderência limite	- $\tau_y = 100 \text{ Kgf/cm}^2$;
Tensão de aderência última	- $\tau_u = 1 \text{ Kgf/cm}^2$;
Deslizamentos limites:	- $S_1 = 0,01 \text{ cm}$ (estágio I);
	- $S_2 = 0,1 \text{ cm}$ (estágio II);
	- $S_3 = 0,5 \text{ cm}$ (estágio III).

Forças de tração aplicadas nas extremidades da barra:

F = 1000 Kgf, F = 3000 Kgf, F = 5000 Kgf, F = 7000 Kgf.

• **CARREGAMENTO 1: F = 1000 Kgf**

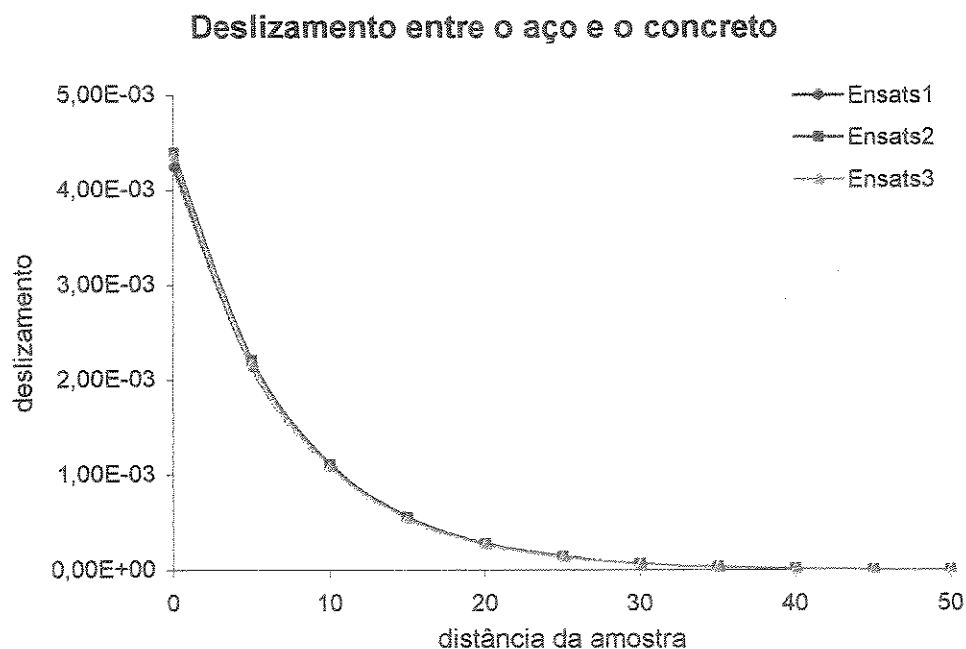


Figura 6.2.1.1- Distribuição do deslizamento entre o aço e o concreto (F=1000 Kgf).

Tensão de aderência entre o aço e o concreto

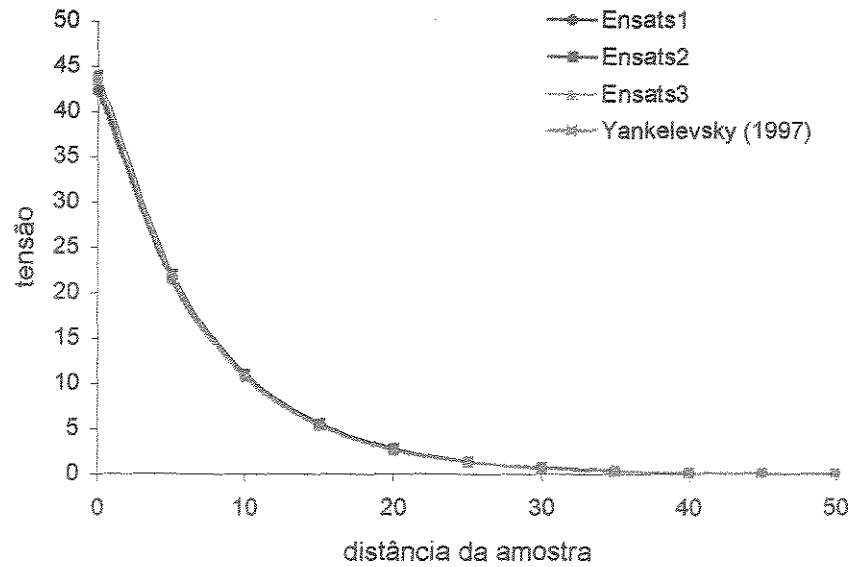


Figura 6.2.1.2- Distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto (F=1000 Kgf).

Deformação no aço

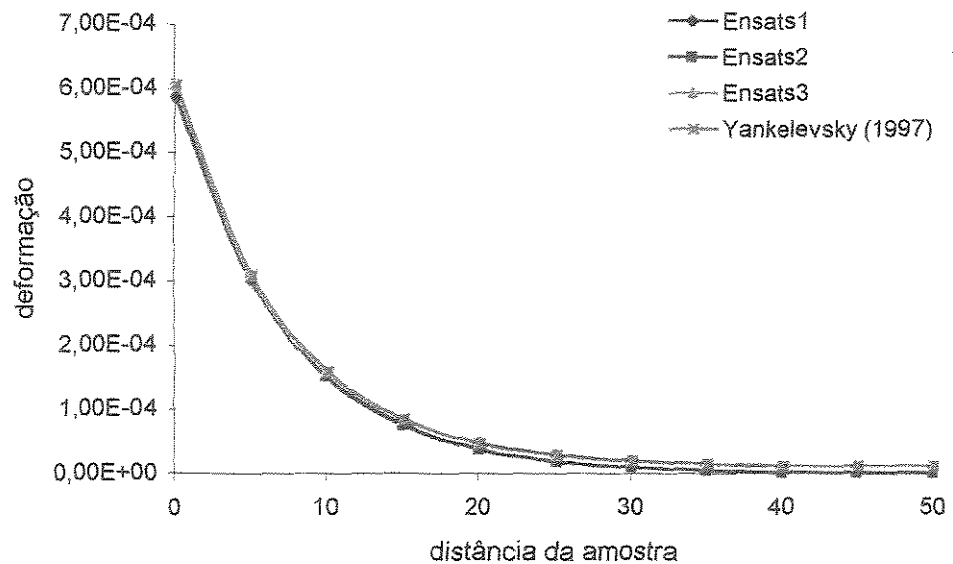


Figura 6.2.1.3- Distribuição da deformação no aço (F=1000 Kgf).

As curvas apresentadas na Figura 6.2.1.1 possuem uma distribuição coincidente do deslizamento entre o aço e o concreto, para os três programas. Esse tipo de distribuição não foi apresentado por YANKELEVSKY (1997). A distribuição das curvas da tensão de aderência, apresentadas na Figura 6.2.1.2, caminham de forma semelhante, tanto para as curvas obtidas pelos três programas, quanto para a curva apresentada por YANKELEVSKY (1997). As curvas da deformação no aço, apresentadas na Figura 6.2.1.3, também caminham de forma semelhante com uma pequena diferença para a curva obtida pelo programa *Ensats2*, o qual não considera, na modelagem do ensaio, as características do concreto.

Para esse carregamento, a função entre a tensão de aderência e o deslocamento relativo, entre o aço e o concreto, se encontra no estágio I da curva poligonal da relação tensão de aderência x deslizamento, já que o deslizamento ainda não atingiu o deslizamento limite (S_1) da curva.

• **CARREGAMENTO 2: $F = 3000$ Kgf**

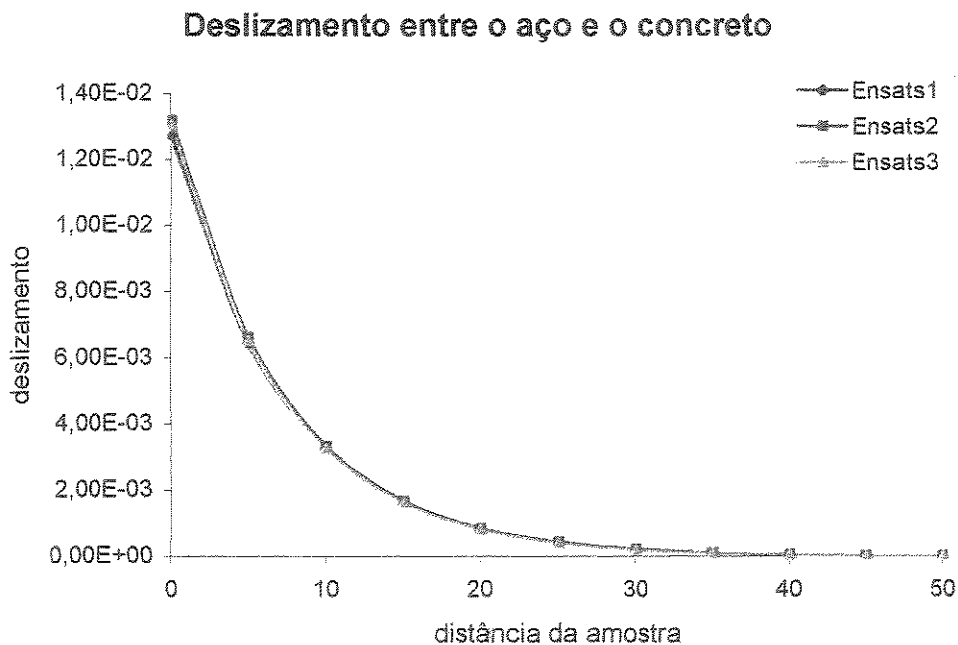


Figura 6.2.1.4- Distribuição do deslizamento entre o aço e o concreto ($F=3000$ Kgf).

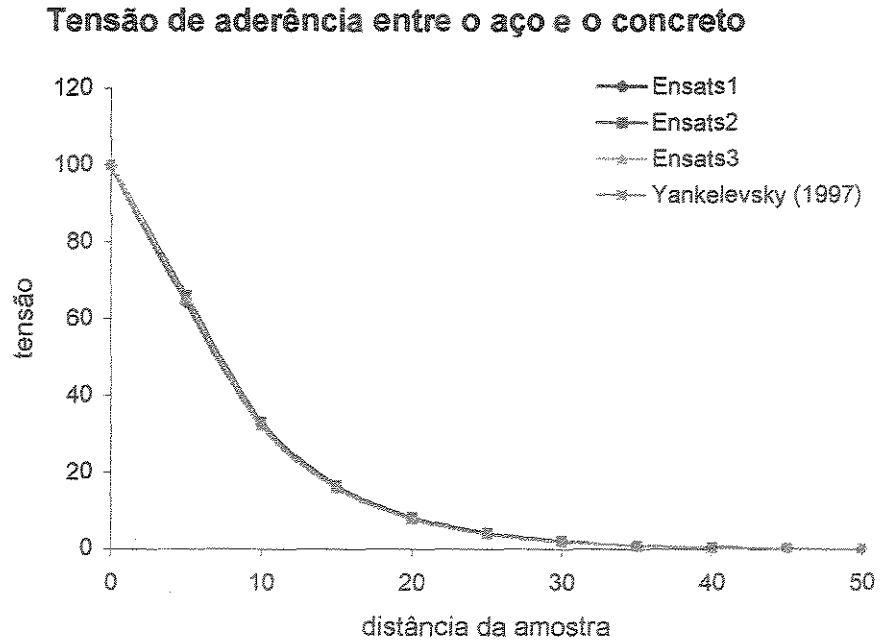


Figura 6.2.1.5- Distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto (F=3000 Kgf).

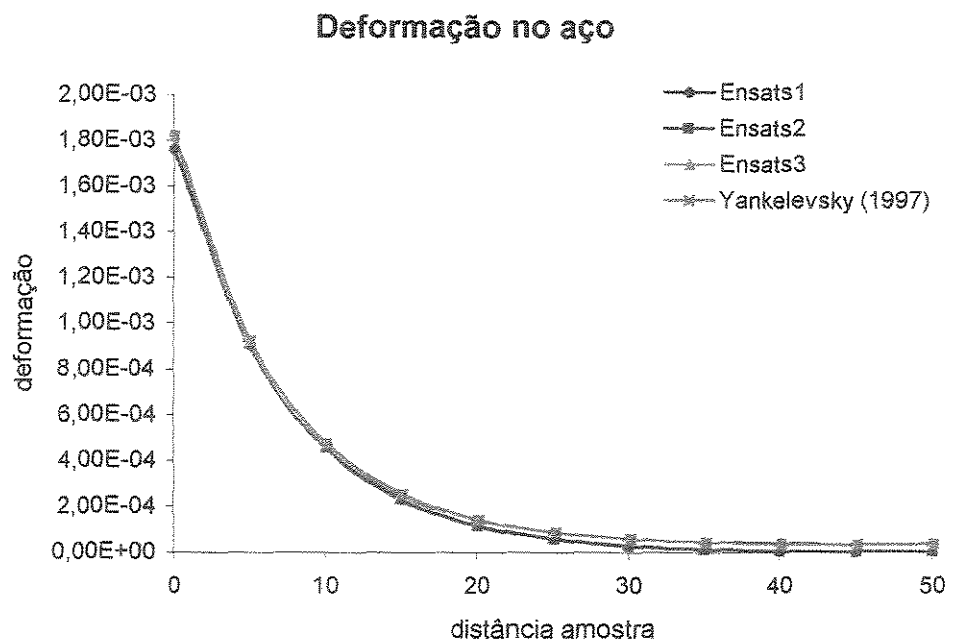


Figura 6.2.1.6- Distribuição da deformação no aço (F=3000 Kgf).

As curvas apresentadas na Figura 6.2.1.4 possuem uma distribuição coincidente do deslizamento entre o aço e o concreto, para os três programas. A distribuição das curvas da tensão de aderência, apresentadas na Figura 6.2.1.5, e das curvas da deformação no aço, apresentadas na Figura 6.2.1.6, caminham de forma semelhante, tanto para as curvas obtidas pelos três programas, quanto para as curvas apresentadas por YANKELEVSKY (1997).

Para esse carregamento, a função entre a tensão de aderência e o deslocamento relativo, entre o aço e o concreto, passa a se encontrar, no início da barra, no estágio II da curva poligonal da relação tensão de aderência x deslizamento, onde o deslizamento é superior ao deslizamento limite (S_1) e inferior ao deslizamento limite (S_2) da curva.

• **CARREGAMENTO 3: $F = 5000$ Kgf**

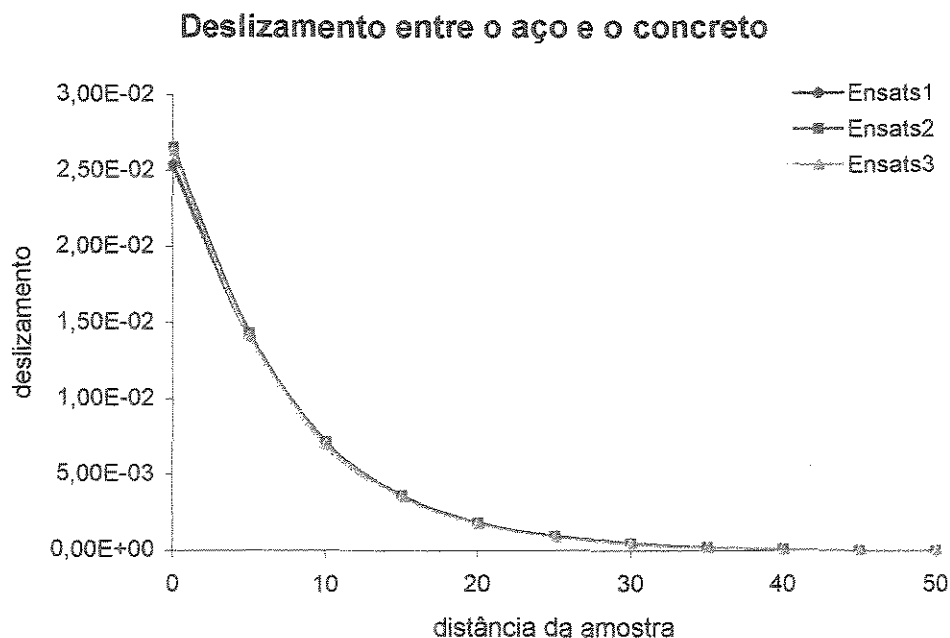


Figura 6.2.1.7- Distribuição do deslizamento entre o aço e o concreto ($F=5000$ Kgf).

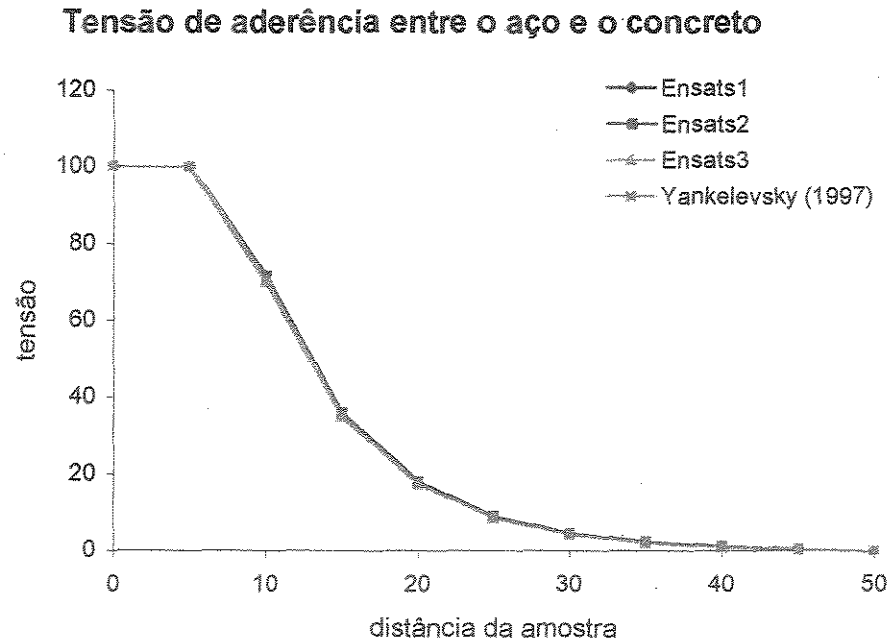


Figura 6.2.1.8- Distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto (F=5000 Kgf).

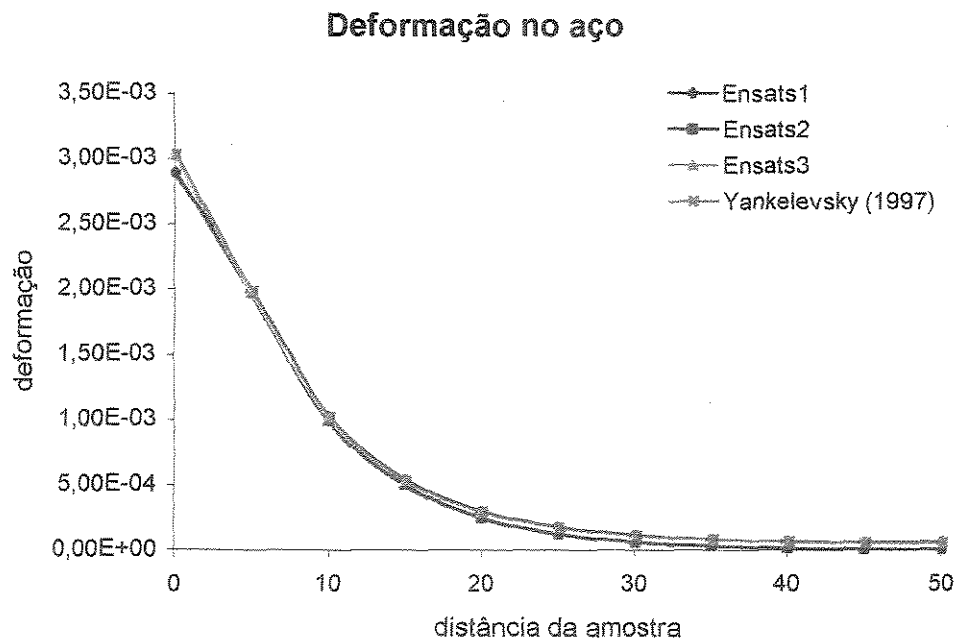


Figura 6.2.1.9- Distribuição da deformação no aço (F=5000 Kgf).

As curvas apresentadas na Figura 6.2.1.7 possuem uma distribuição coincidente do deslizamento entre o aço e o concreto, para os três programas. A distribuição das curvas da tensão de aderência, apresentadas na Figura 6.2.1.8, e das curvas da deformação no aço, apresentadas na Figura 6.2.1.9, caminham de forma semelhante, tanto para as curvas obtidas pelos três programas, quanto para as curvas apresentadas por YANKELEVSKY (1997).

Para esse carregamento, como no carregamento anterior, a função entre a tensão de aderência e o deslocamento relativo, entre o aço e o concreto, passa a se encontrar, no início da barra, no estágio II da curva poligonal da relação tensão de aderência x deslizamento, onde o deslizamento é superior ao deslizamento limite (S_1) e inferior ao deslizamento limite (S_2) da curva.

• **CARREGAMENTO 4: $F = 7000$ Kgf**



Figura 6.2.1.10- Distribuição do deslizamento entre o aço e o concreto ($F=7000$ Kgf).

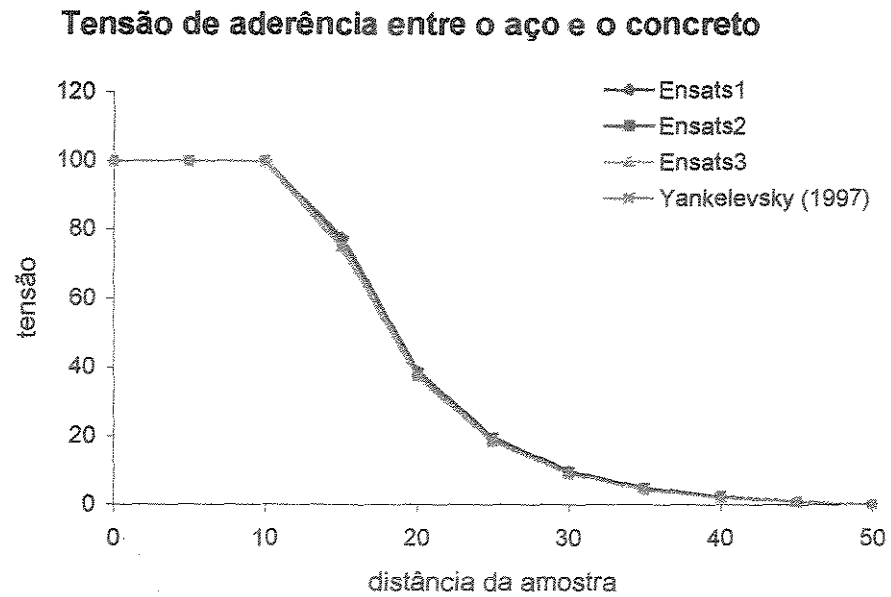


Figura 6.2.1.11- Distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto ($F=7000$ Kgf).

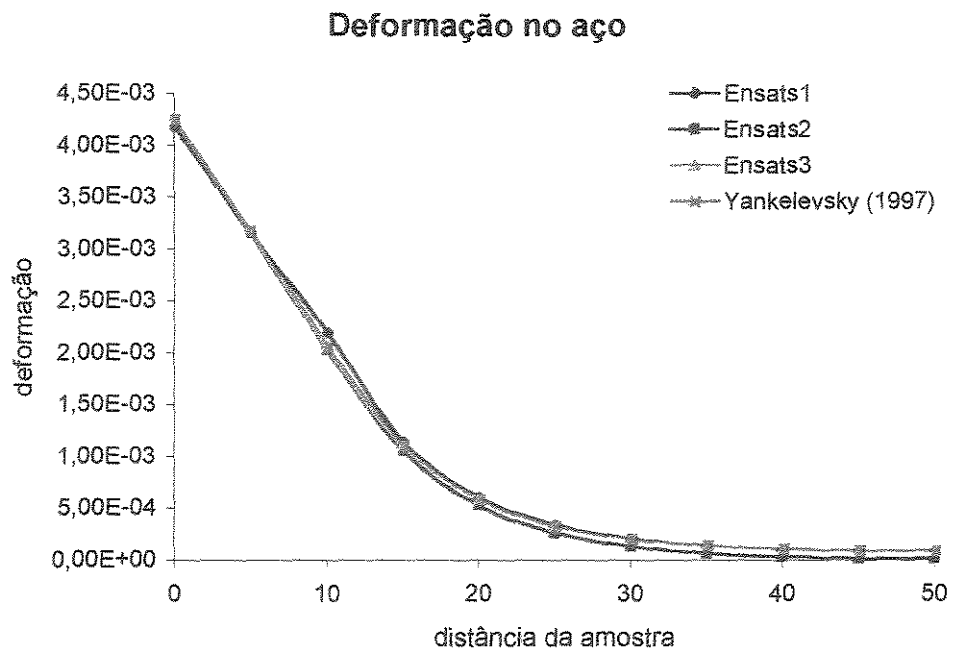


Figura 6.2.1.12- Distribuição da deformação no aço ($F=7000$ Kgf).

As curvas apresentadas na Figura 6.2.1.10 possuem uma distribuição coincidente do deslizamento entre o aço e o concreto, para os três programas. A distribuição das curvas da tensão de aderência, apresentadas na Figura 6.2.1.11, e das curvas da deformação no aço, apresentadas na Figura 6.2.1.12, caminham de forma semelhante, tanto para as curvas obtidas pelos três programas, quanto para as curvas apresentadas por YANKELEVSKY (1997).

Para esse carregamento, uma região maior da barra passa a ter a função, entre a tensão de aderência e o deslocamento relativo, localizada no intervalo, da curva poligonal da relação tensão de aderência x deslizamento, correspondente ao estágio II.

Abaixo (Figura 6.2.1.13) temos a distribuição da deformação no concreto, para os quatro carregamentos, obtidos pelo programa Ensats3.

• DEFORMAÇÃO NO CONCRETO: ENSATS 3

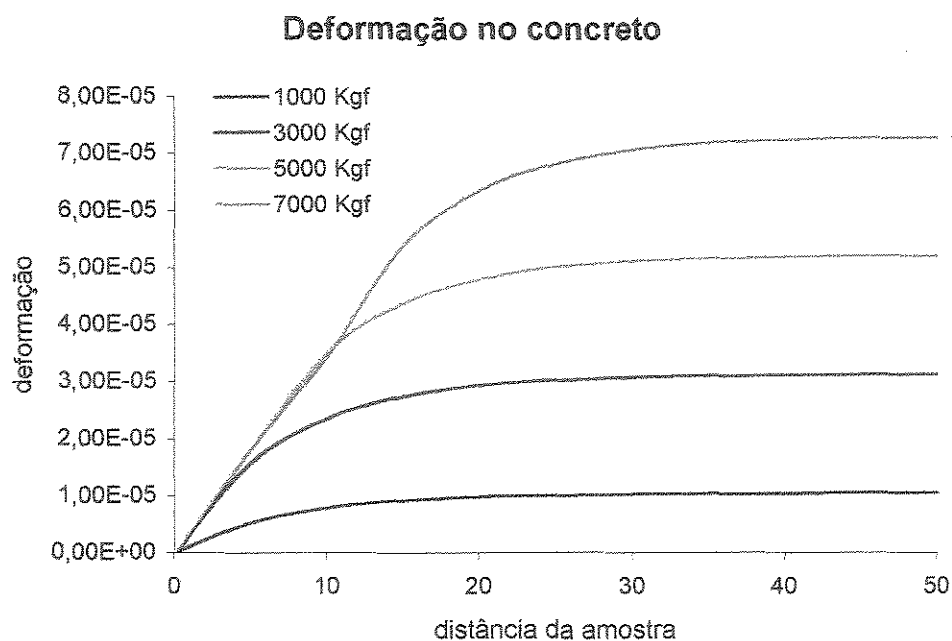


Figura 6.2.1.13- Distribuição da deformação no concreto (Ensats3).

6.2.2 EXEMPLO NUMÉRICO 2

A seguir, serão apresentados gráficos, obtidos em KWAK (2001), onde ele compara, através da distribuição da tensão no aço, resultados obtidos por ele com resultados teóricos e experimentais obtidos por outros pesquisadores, para o ensaio de arrancamento (*pull-out test*) (Figura 6.2.2.1). Neste ensaio, a força de tração é aplicada em apenas uma das extremidades da barra onde a outra extremidade fica livre. Será possível, com isso, observar as distribuições da tensão no aço, para esse tipo de ensaio, com as distribuições obtidas pelos três programas de ensaio de tração simétrica (Figura 6.2.1). Também foram feitas algumas modificações particulares no programa *Ensats1* (elemento de interface), através da liberação das restrições da extremidade da barra de aço, no eixo de simetria, configurando, assim, o ensaio de arrancamento, onde esse programa modificado será chamado de *Ensats1 (Modificado)*, sendo utilizado, apenas nesse exemplo, para ser mais uma fonte de comparação das distribuições da tensão no aço. O comprimento, para a comparação da distribuição da tensão no aço, da amostra do ensaio de tração simétrica corresponde à metade do seu comprimento total.

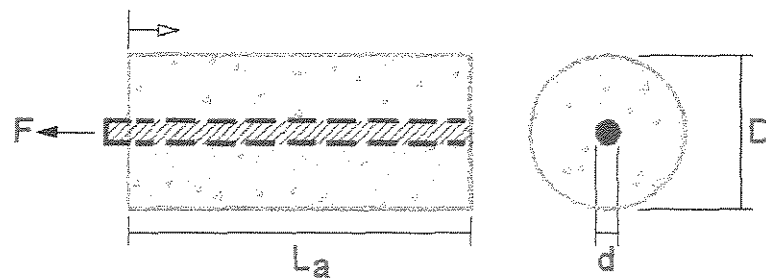


Figura 6.2.2.1- Conformação geométrica do ensaio de arrancamento apresentado por KWAK (2001).

Como características físicas e geométricas utilizadas neste exemplo, temos:

Diâmetro da barra de aço	- $d = 1\text{ in};$
Comprimento total da amostra	- $L = 50\text{ in}$ (tração simétrica);
Comprimento total da amostra	- $L_a = 25\text{ in}$ (arrancamento);
Módulo de elasticidade do aço	- $E_a = 30000000\text{ psi};$
Módulo de elasticidade do concreto	- $E_c = 4500000\text{ psi};$
Ensats1: elementos finitos	- $h = 10\text{ elementos}, v = 5\text{ elementos};$
Ensats2: elementos finitos	- $h = 10\text{ elementos};$
Ensats3: elementos finitos	- $h = 10\text{ elementos};$
Ensats1(Modificado): elementos finitos	- $h = 10\text{ elementos}, v = 5\text{ elementos}.$

Os parâmetros da relação tensão de aderência x deslizamento são:

Tensão de aderência limite	- $\tau_y = 2350\text{ psi};$
Tensão de aderência última	- $\tau_u = 1500\text{ psi};$
Deslizamentos limites:	- $S_1 = 0,02756\text{ in}$ (estágio I);
	- $S_2 = 0,07874\text{ in}$ (estágio II);
	- $S_3 = 0,2756\text{ in}$ (estágio III).

Para a força de tração (F), aplicada nas extremidades da barra de aço, temos:

$$F = 15708\text{ lb e } F = 47123\text{ lb.}$$

• **CARREGAMENTO 1: $F = 15708 \text{ lb}$**

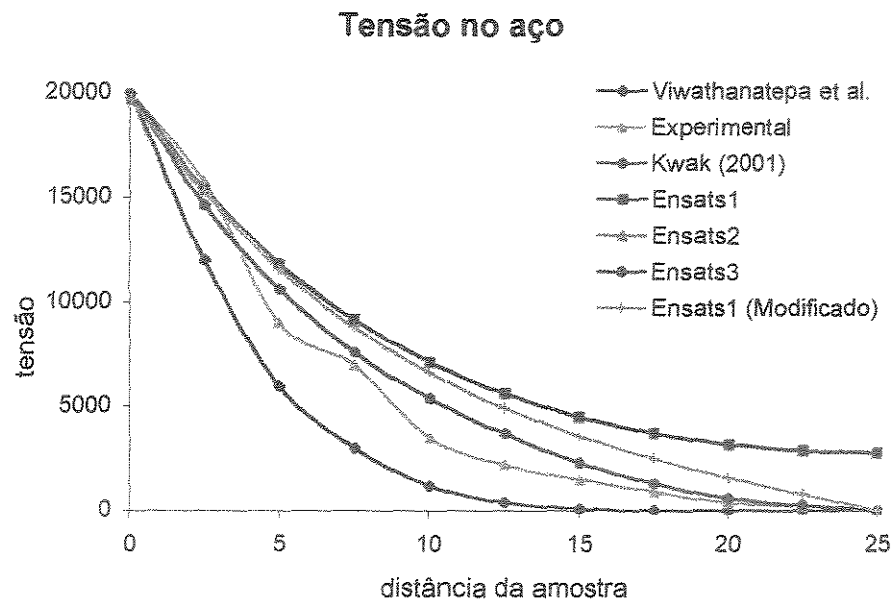


Figura 6.2.2.2- Distribuição da tensão no aço ($F=15708 \text{ lb}$).

• **CARREGAMENTO 2: $F = 47123 \text{ lb}$**

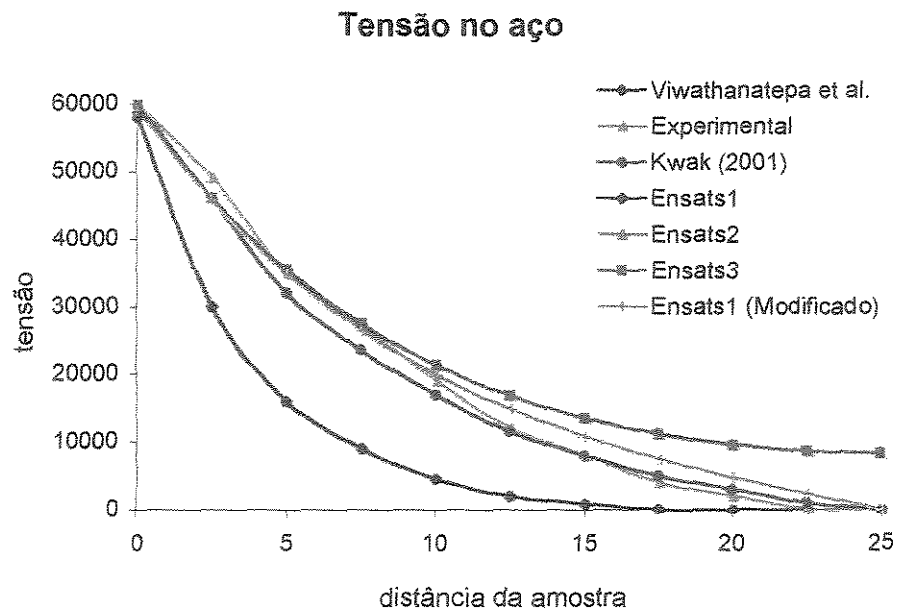


Figura 6.2.2.3- Distribuição da tensão no aço ($F=47123 \text{ lb}$).

As curvas apresentadas na Figura 6.2.2.2 e Figura 6.2.2.3 (Viwathanatepa, Experimental e KWAK (2001)), para o ensaio de arrancamento, mostram que as distribuições da tensão no aço caem para zero na extremidade livre da barra, devido ao deslizamento e transferência de tensão para o concreto. O mesmo ocorre com as curvas obtidas pelo programa *Ensats1 (Modificado)*, que caminham próximas das curvas experimentais apresentadas em KWAK (2001). As curvas obtidas com os programas *Ensats1*, *Ensats2* e *Ensats3*, para o ensaio de tração simétrica, possuem distribuições coincidentes entre elas, onde a tensão no aço, no meio da amostra, apresenta um certo valor, já que a barra tem o deslizamento impedido no centro devido às características simétricas.

6.3 APRESENTAÇÃO DOS EXEMPLOS PARA O ENSAIO DE VIGA SIMÉTRICA

Nestes exemplos serão comparados resultados obtidos com o programa *Ensavs* (viga simétrica – elemento de interface), considerando ou não a fissuração do concreto, com resultados apresentados em **NGO (1967)**.

Abaixo (Figura 6.3.1) temos a conformação geométrica da viga simétrica utilizada nestes exemplos:

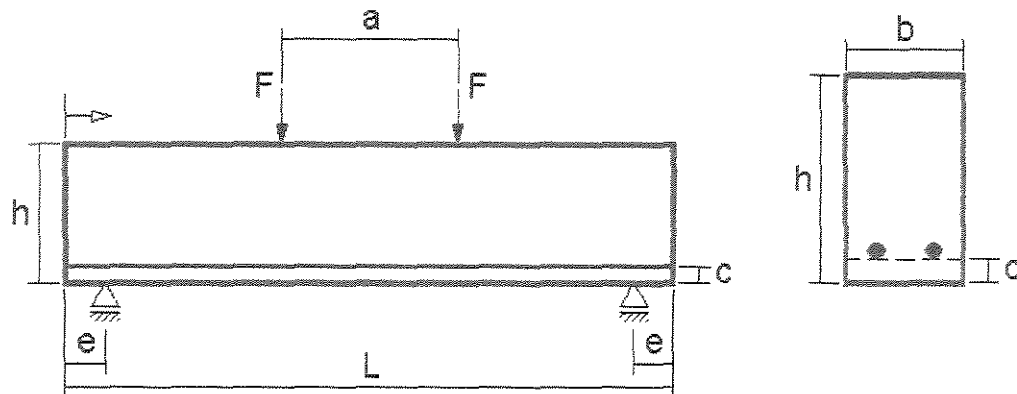


Figura 6.3.1- Conformação geométrica da viga simétrica.

6.3.1 EXEMPLO NUMÉRICO 1

Para este exemplo temos, considerando a simetria da viga, a distribuição da tensão de aderência ao longo da interface aço-concreto e a distribuição da deformação na barra de aço. Serão comparados, para o mesmo exemplo, os resultados obtidos com o programa *Ensavs* utilizando cada uma das três curvas da relação tensão de aderência x deslizamento, curvas polinomiais de **NILSON (1968)** e **MIRZA (1979)** e a curva poligonal de **YANKELEVSKY (1985)**, para a obtenção da rigidez ao deslizamento na interface. A viga está sendo considerada sem fissuras.

Como características físicas e geométricas utilizadas neste exemplo, temos:

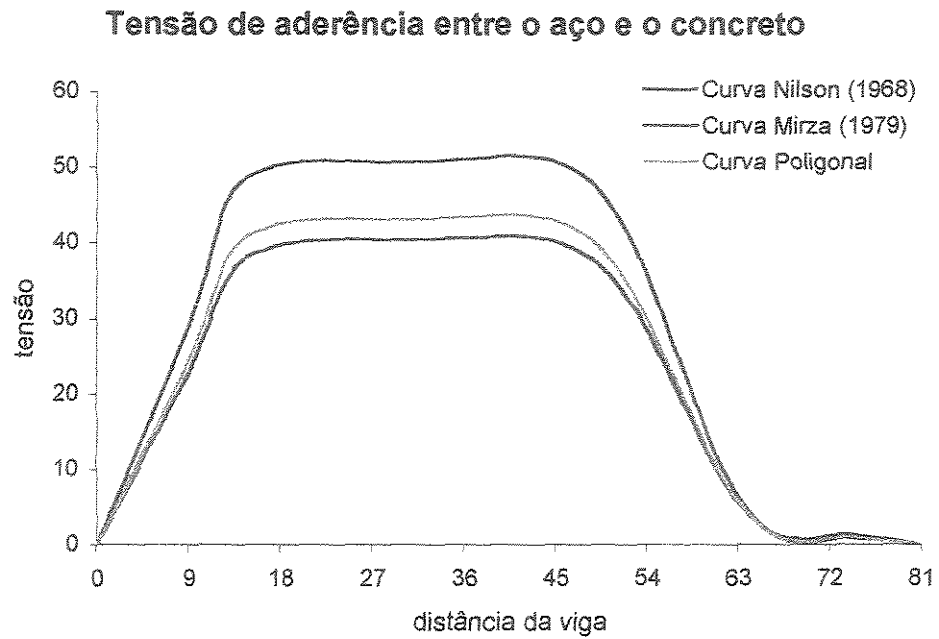
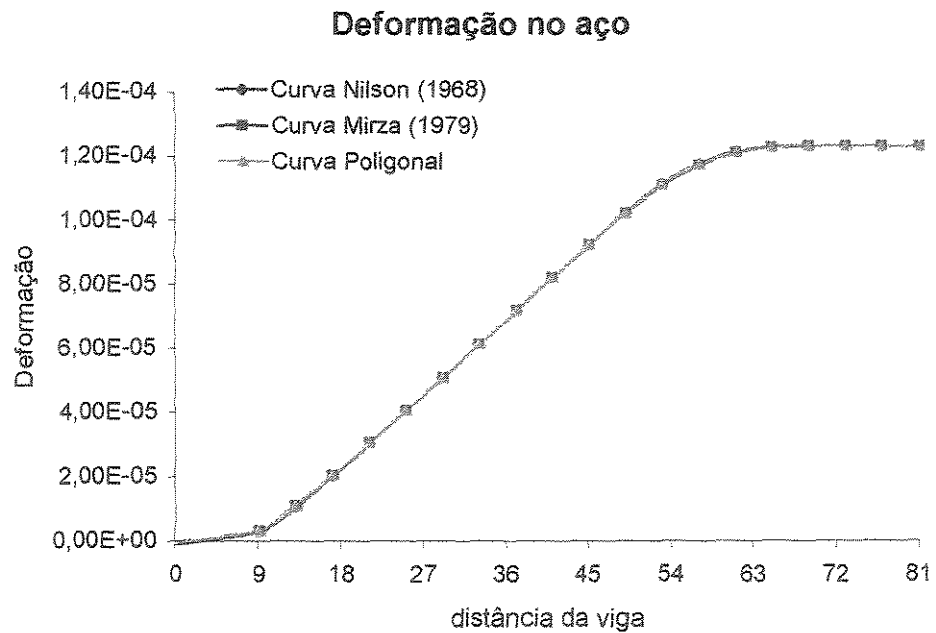
Comprimento total da viga	- $L = 162$ in;
Largura da viga	- $b = 12$ in;
Altura da viga	- $h = 22$ in;
Distância do apoio	- $e = 9$ in;
Cobrimento	- $c = 2.5$ in;
Distância entre as cargas	- $a = 48$ in;
Número de barras de aço	- 2 barras;
Diâmetro das barras de aço	- $d = 1.125$ in;
Módulo de elasticidade do aço	- $E_a = 30000000$ psi;
Módulo de elasticidade do concreto	- $E_c = 3000000$ psi;
Malha: elementos finitos	- $h = 19$ elementos, $v = 5$ elementos;
Nó de apoio	- nó 121;
Nó carregado	- nó 27.

Os parâmetros da relação tensão de aderência x deslizamento, para a curva poligonal, são:

Tensão de aderência limite	- $\tau_y = 654$ psi;
Tensão de aderência última	- $\tau_u = 430$ psi;
Deslizamentos limites:	- $S_1 = 0,0003$ in (estágio I);
	- $S_2 = 0,0006$ in (estágio II);
	- $S_3 = 0,0008$ in (estágio III).

Para o carregamento concentrado (F), aplicado a cada $1/3$ do vão dos apoios, temos:

$$F = 1000 \text{ lb e } F = 3000 \text{ lb.}$$

• CARREGAMENTO 1: $F = 1000 \text{ lb}$ Figura 6.3.1.1- Distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto ($F=1000 \text{ lb}$).Figura 6.3.1.2- Distribuição da deformação no aço ($F=1000 \text{ lb}$).

As distribuições da tensão de aderência, apresentadas na Figura 6.3.1.1, caminham de forma semelhante para as três curvas. A diferença que ocorre, entre elas, se refere aos limites, que são fixos, das relações entre a tensão de aderência x deslizamento, dados pelas formulações dos diferentes polinômios, das curvas de **NILSON (1968)** e **MIRZA (1979)**. Para a curva poligonal há uma maior flexibilidade desses limites.

As curvas da tensão de aderência e da deformação no aço, obtidas com o programa *Ensavs*, são semelhantes às curvas apresentadas em **NGO (1967)**.

Abaixo (Figura 6.3.1.3), temos o deslocamento vertical, no centro do vão da viga, apresentado por **NGO (1967)**, para este exemplo.

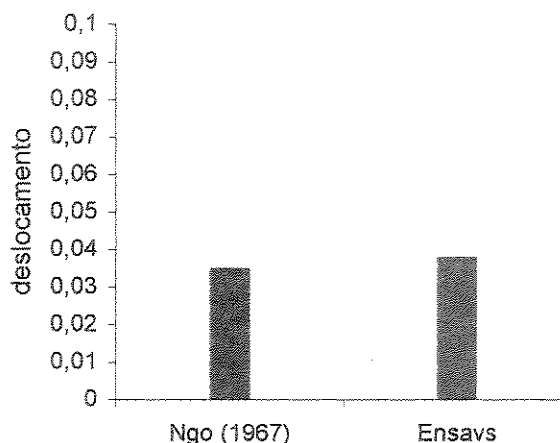


Figura 6.3.1.3- Deslocamento vertical no centro do vão da viga (sem fissuração).

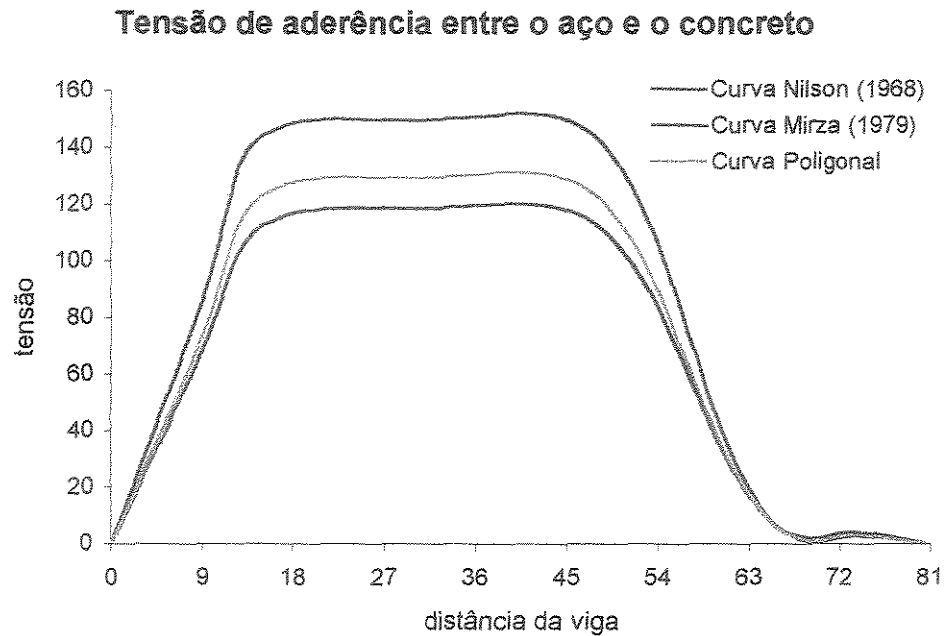
• **CARREGAMENTO 2: $F = 3000 \text{ lb}$** 

Figura 6.3.1.4- Distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto ($F=3000 \text{ lb}$).

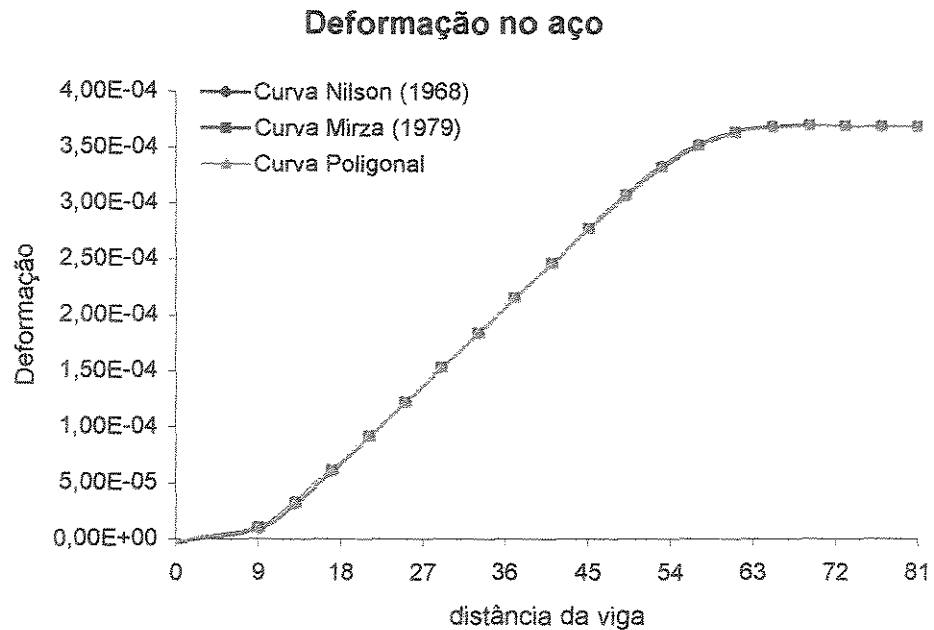


Figura 6.3.1.5- Distribuição da deformação no aço ($F=3000 \text{ lb}$).

6.3.2 EXEMPLO NUMÉRICO 2

Para este exemplo temos, considerando a mesma viga do exemplo anterior e a sua simetria, a distribuição da tensão de aderência ao longo da interface aço-concreto, para três casos de vigas com fissuração vertical.

Abaixo (Figura 6.3.2.1), (Figura 6.3.2.2) e (Figura 6.3.2.3), temos o posicionamento das fissuras nas vigas:

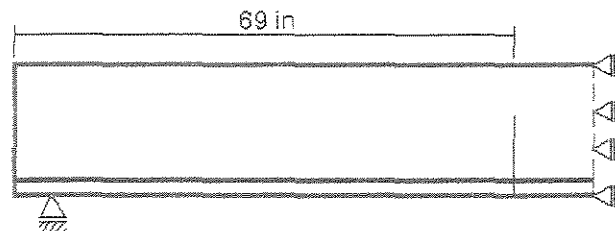


Figura 6.3.2.1- Viga com uma fissura.

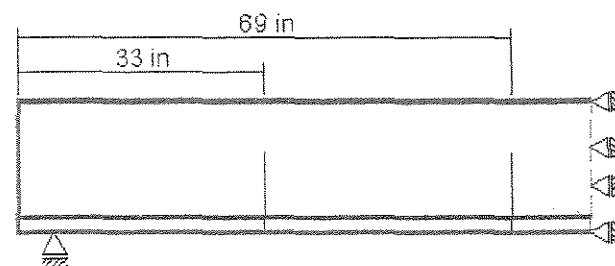


Figura 6.3.2.2- Viga com duas fissuras.

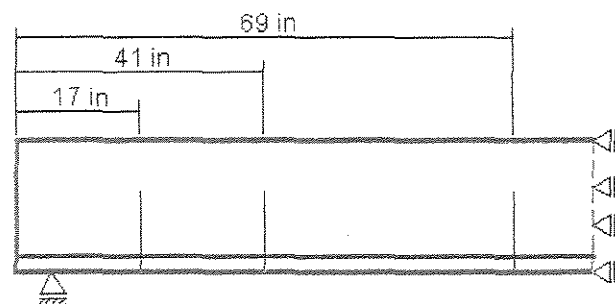


Figura 6.3.2.3- Viga com três fissuras.

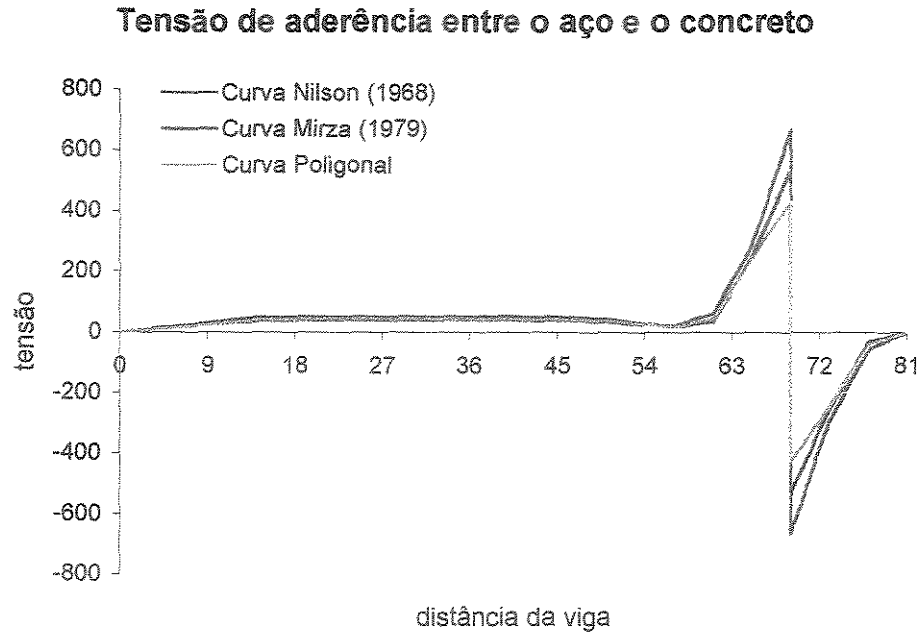


Figura 6.3.2.4- Distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto (1 fissura).

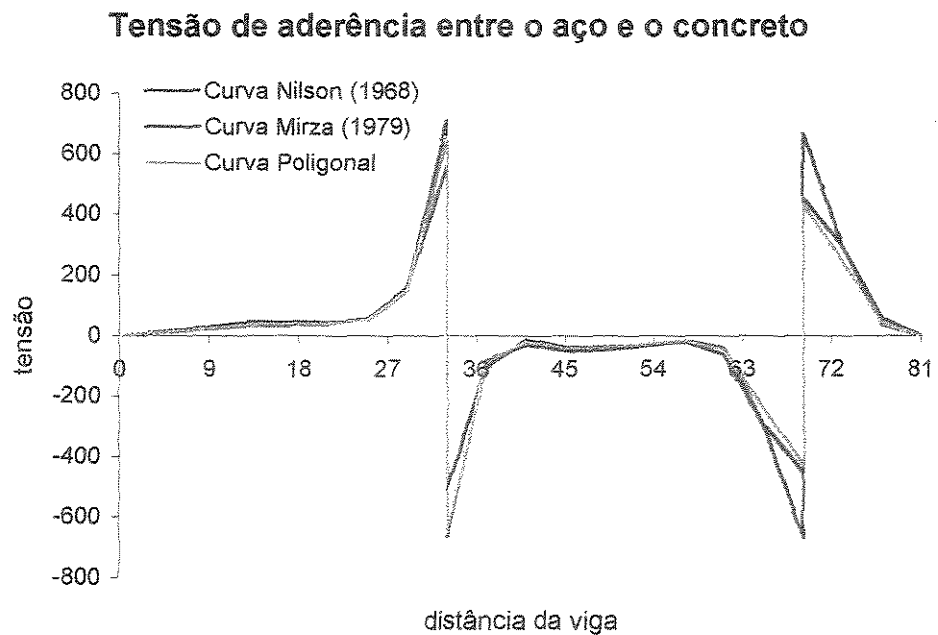


Figura 6.3.2.5- Distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto (2 fissuras).

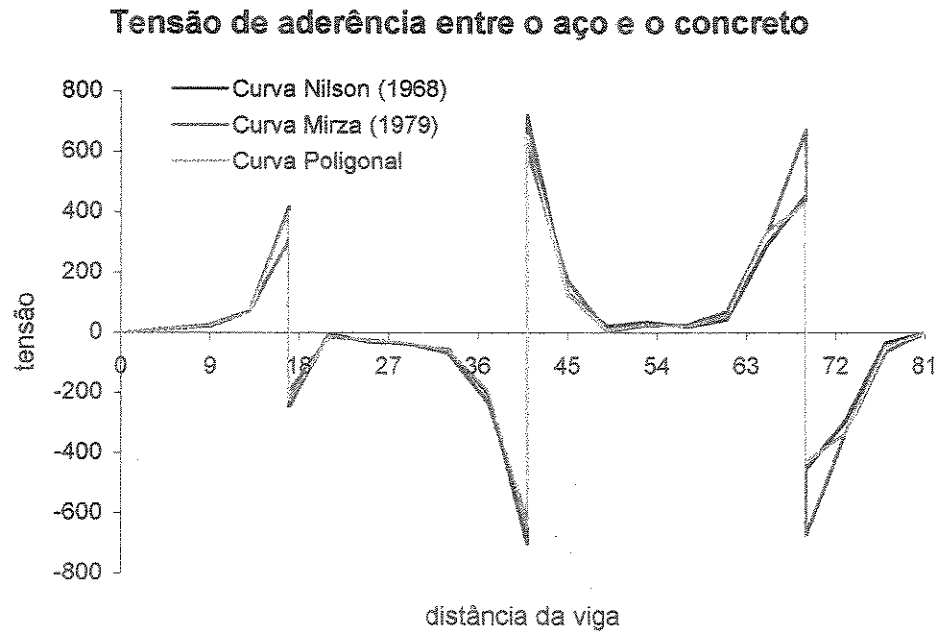


Figura 6.3.2.6- Distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto (3 fissuras).

As curvas da tensão de aderência (Figura 6.3.2.4), (Figura 6.3.2.5), (Figura 6.3.2.6), obtidas com o programa *Ensavs*, considerando fissuras, são semelhantes às curvas apresentadas em **NGO (1967)**.

Abaixo (Figura 6.3.2.7), temos o deslocamento vertical, no centro do vão da viga, apresentado por **NGO (1967)**, para a viga com uma fissura.

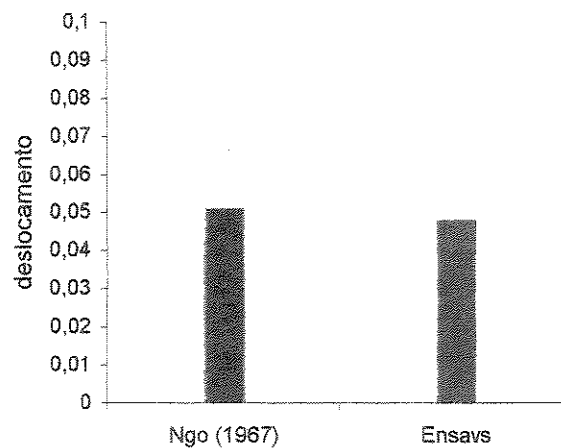


Figura 6.3.2.7- Deslocamento vertical no centro do vão da viga (1 fissura).

CAPÍTULO 7

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A introdução dos efeitos da interação entre o aço e o concreto, na análise de estruturas de concreto armado, se mostra de grande importância quando se quer uma modelagem mais realista do funcionamento dessas estruturas. Os modelos numéricos apresentados, para a modelagem da aderência, possibilitaram a incrementação de tal fenômeno nos programas desenvolvidos nesta dissertação. Procurou-se, com isso, oferecer ferramentas para a análise de estruturas de concreto armado submetidas ao ensaio de tração simétrica, também conhecido como ensaio de tirante, e também de vigas fletidas de concreto armado, podendo ser considerada a fissuração discreta do concreto.

A representação do comportamento dos materiais, aço e concreto, e as suas interações, foram desenvolvidas a partir do Método dos Elementos Finitos. Os programas desenvolvidos para o primeiro ensaio, citado acima, utilizam modelos de elementos finitos, para a modelagem da aderência, distintos entre si. Esses elementos utilizam a relação da tensão de aderência x deslizamento para compor os estágios da rigidez ao deslizamento, a partir de um processo incremental de carregamento. O mesmo ocorre para a rigidez do elemento de interface utilizado no ensaio de viga.

A comparação entre os valores obtidos pelos programas desenvolvidos para o ensaio de tração simétrica, para os mesmos exemplos, mostrou uma relevante

concordância na distribuição da tensão de aderência na interface aço-concreto, caracterizando a eficácia dos três diferentes modelos utilizados nas modelagens. Esses mesmos exemplos quando comparados com dados teóricos e experimentais, apresentados na literatura, mostraram ser de grande confiabilidade e eficiência.

Os resultados apresentados pelo programa desenvolvido para a análise de viga simétrica mostraram-se de grande confiabilidade e coerência com os resultados apresentados por **NGO (1967)**, que utiliza elementos de ligação para a modelagem da interface entre o aço e o concreto. Para essa mesma modelagem foram comparados resultados obtidos através do uso de diferentes curvas da tensão de aderência x deslizamento, mostrando as suas influências na rigidez da interface entre o aço e o concreto, devido à diferença dos limites da tensão de aderência e do deslizamento. Para as curvas comparadas temos a curva poligonal como a de melhor flexibilidade, já que os seus limites são definidos externamente ao programa.

A produção e disseminação bibliográfica se mostram de grande importância, quando se trata da aderência entre o aço e o concreto, devido ao complexo fenômeno da interação entre esses dois materiais. Inúmeras investigações práticas são realizadas para procurar englobar, cada vez mais, os mais diversos tipos de estruturas que têm o seu comportamento influenciado pela falha da aderência entre o aço e o concreto. O presente trabalho apresentou a modelagem para dois tipos de estruturas diferentes. Como sugestões, as modelagens poderiam ser adaptadas para outros tipos de estruturas como, por exemplo, para pilares, pórticos ou lajes. As fissuras na viga, que foram tratadas como discretas com tamanhos definidos, poderiam ser definidas através do modelo de fissuração discreta coesiva, onde, a variação dos valores da aderência aço-concreto e das tensões nos dois materiais modifica a extensão das fissuras, sendo consideradas, também, as não linearidades geométricas e dos materiais.

BIBLIOGRAFIA

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABELES, P. W. (1966). *Cracking and bond resistance in high strength reinforced concrete beams, illustrated by photoelastic coating*; ACI Journal, Proc. Vol. 63, November, pp. 1265-1278.

ALLWOOD, R. J. (1989); BAJARWAN, A. A. . *A new method for modelling reinforcement and bond in finite element analyses of reinforced concrete*; International Journal For Numerical Methods In Engineering, Vol. 28, pp. 833-844.

ALLWOOD, R. J. (1996); BAJARWAN, A. A. . *Modeling nonlinear bond-slip behavior for finite element analyses of reinforced concrete structures*; ACI Structural Journal, Vol. 93, No. 5, September-October, pp. 538-544.

A. S. C. E. (1982). *State-of-the-art report on finite element analysis of reinforced concrete*; American Society of Civil Engineers, New York – USA.

ASSAN, A. E. (1999). *Método dos elementos finitos: primeiros passos*; Editora da Unicamp, Campinas – SP, Brasil.

BARBOSA, M. P. (1998). *Uma contribuição experimental e numérica sobre estruturas de concreto armado de elevado desempenho: estudo da aderência-ancoragem e do comportamento de vigas fletidas*; Tese Livre-Docência, Universidade Estadual Paulista – UNESP, Ilha Solteira – SP, Brasil.

BRESLER, B. (1968); BERTERO, V. . *Behavior of reinforced concrete under repeated load*; ASCE, Journal of the Structural Division, Vol. 94, No. ST6, June, pp. 1567-1590.

BROMS, B. B. (1965). *Crack width and crack spacing in reinforced concrete members*; ACI Journal, Proc. Vol. 62, October, pp. 1237-1256.

CARVALHO, R. C. (1997); FIGUEIREDO, Filho J. R. . *Construções de concreto*; Notas de aula, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de São Carlos – UFSCar, São Carlos – SP, Brasil.

CARVALHO, R. C. (2001); FIGUEIREDO, Filho J. R. . *Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado*; Vol. 1, Editora da Universidade Federal de São Carlos – EDUFSCar, São Carlos – SP, Brasil.

CHAN, H. C. (1992); CHEUNG, Y. K. ; HUANG, Y. P. . *Crack analysis of reinforced concrete tension members*; ASCE, Journal of Structural Engineering, Vol. 118, No. 8, August, pp. 2118-2131.

CLARK, A. P. (1949). *Bond of concrete reinforcing bars*; ACI Journal, Proc. Vol. 46, November, pp. 161-184.

DESIR, J. M. (1998). *Interface aço-concreto: reformulando os modelos constitutivos e numéricos*; Tese Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Rio de Janeiro – RJ, Brasil.

DUCATTI, V. A. (1993). *Concreto de elevado desempenho: estudo da aderência com a armadura*; Tese Doutorado, Universidade de São Paulo, São Paulo – SP, Brasil.

ELMORSI, M. (2000); KIANOUSH, M. R. ; TSO, W. K. . *Modeling bond-slip deformations in reinforced concrete beam-column joints*; Journal of Civil Engineering, Vol. 27, pp. 490-505.

FERGUSON, P. M. (1954); TURPIN, R. D. ; THOMPSON, J. N . *Minimum bar spacing as a function of bond and shear strength*; ACI Journal, Proc. Vol. 50, June, pp. 869-887.

FERGUSON, P. M. (1966). *Bond stress – the state of the art*, ACI Journal, Proc. Vol. 63, November, pp. 1161-1190.

FROSCH, R. J. (2000). . *Behavior of large-scale reinforced concrete beams with minimum shear reinforced*; ACI Structural Journal, Vol. 97, No. 6, November-December, pp. 814-820.

GAJER, G. (1990); DUX, P. F. . *Crack band based model for FEM analysis of concrete structures*; ASCE, Journal of Structural Engineering, Vol. 116, No. 6, June, pp. 1696-1714.

GOTO, Y. (1971). *Cracks formed in concrete around deformed tension bars*; ACI Journal, Proc. Vol. 68, April, pp. 244-251.

GROOT, A. K. (1981); KUSTERS, G. M. A. ; MONNIER, T. . *Numerical modeling of bond-slip behavior*, Heron, Conc. Mech., Vol. 26.

HERRMANN, L. R. (1978). *Finite element analysis of contact problems*; ASCE, Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 104, No. EM5, October, pp. 1043-1057.

ISMAIL, M. A. F. (1972); JIRSA, J. O. . ***Bond deterioration in reinforced concrete subject to low cycle loads***; ACI Journal, *Proc.* Vol. 69, June, pp. 334-343.

JIANG, D. H. (1984); SHAH, S. P. ; ANDONIAN, A. T. . ***Study of the transfer of tensile forces by bond***; ACI Journal, *Proc.* Vol. 81, May-June, pp. 251-259.

KEMP, E. L. (1986). ***Bond in reinforced concrete: behavior and design criteria***; ACI Journal, *Proc.* Vol. 83, January-February, pp. 50-57.

KEUSER, M. (1987); MEHLHORN, G. . ***Finite element models for bond problems***; ASCE, Journal of Structural Engineering, Vol. 113, No. 10, October, pp. 2160-2173.

KWAK, H. G. (1995); FILIPPOU, F. C. . ***A new reinforcing steel model with bond-slip***; Journal Structural Engineering and Mechanics, Vol. 3, No. 4, pp. 299-312.

KWAK, H. G. (2001); KIM, S. P. . ***Bond-slip behavior under monotonic uniaxial loads***; Elsevier, Engineering Structures, Vol. 23, pp. 298-309.

LUTZ, L. A. (1967); GERGELY, P. . ***Mechanics of bond and slip of deformed bars in concrete***; ACI Journal, *Proc.* Vol. 64, November, pp. 711-721.

MAINS, R. M. (1951). ***Measurement of the distribution of tensile and bond stresses along reinforcing bars***; ACI Journal, *Proc.* Vol. 48, November, pp. 225-252.

MANFREDI, G. (1998); PECCE, M. . ***A refined R. C. beam element including bond-slip relationship for the analysis of continuous beams***; Computers & Structures, Vol. 69, pp. 53-62.

McHENRY, D. (1948); WALKER, W. T. . ***Laboratory measurements of stress distribution in reinforcing steel***; ACI Journal, *Proc.* Vol. 44, June, pp. 1041-1054.

MIRZA, S. M. (1979); HOUDE, J. . *Study of bond stress-slip relationships in reinforced concrete*; ACI Journal, Proc. Vol. 76, January, pp. 19-46.

MONTI, G. (2000); SPACONE, E. . *Reinforced concrete fiber beam element with bond-slip*; ASCE, Journal of Structural Engineering, Vol. 126, No. 6, June, pp. 654-661.

MYLREA, T. D. (1948). *Bond and anchorage*; ACI Journal, Proc. Vol. 44, March, pp. 521-552.

NGO, D. (1967); SCORDELIS, A. C. . *Finite element analysis of reinforced concrete beams*; ACI Journal, Proc. Vol. 64, March, pp. 152-163.

NILSON, A. H. (1968). *Nonlinear analysis of reinforced concrete by the finite element method*; ACI Journal, Proc. Vol. 65, September, pp. 757-766.

NILSON, A. H. (1972). *Internal measurement of bond slip*; ACI Journal, Proc. Vol. 69, July, pp. 439-441.

OLIVEIRA, R. S. (2000); CORRÊA, M. R. S. ; RAMALHO, M. A. . *A refined reinforced concrete beam element including bond-slip relationship*; Computational Concrete Structures Technology, Civil-Comp Press, Edinburgh – Scotland, pp. 107-113.

PERRY, E. S. (1966); THOMPSON, J. N. . *Bond stress distribution on reinforcing steel in beams and pullout specimens*; ACI Journal, Proc. Vol. 63, August, pp. 865-875.

PERRY, E. S. (1969); JUNDI, N. . *Pullout bond stress distribution under static and dynamic repeated loadings*; ACI Journal, Proc. Vol. 66, May, pp. 377-380.

PFEIL, W. (1985). *Concreto armado*; Vol. 1, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. , Rio de Janeiro – RJ, Brasil.

ROSA, W. A. (1994). *Modelagem do deslizamento entre o aço e o concreto com tensão de aderência não-linear*, Dissertação Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Rio de Janeiro – RJ, Brasil.

RUSSO, G. (1990); ZINGONE, G. ; ROMANO, F. . *Analytical solution for bond-slip of reinforcing bars in R. C. joints*; ASCE, Journal of Structural Engineering, Vol. 116, No. 2, February, pp. 336-355.

SALARI, M. R. (2001); SPACONE, E. . *Finite element formulations of one-dimensional elements with bond-slip*; Elsevier, Engineering Structures, Vol 23, pp. 815-826.

SHEHATA, A. E. M. (1999); VENTORINI, L. A. ; SHEHATA, L. C. D. . *Bond influence on rotation capacity of high-strength and normal strength concrete beams*; ACI International Conference, Gramado – RS, Brazil, pp. 231-252.

SOH, C. K. (1999); CHIEW, S. P.; DONG, Y. X. . *Damage model for concrete-steel interface*; ASCE, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 125, No. 8, August, pp. 979-983.

SOMAYAJI, S. (1981); SHAH, S. P. . *Bond stress versus slip relationship and cracking response of tension members*; ACI Journal, Proc. Vol. 78, May-June, pp. 217-225.

SPACONE, E. (2000); LIMKATANYU, S. . *Responses of reinforced concrete members including bond-slip effects*; ACI Structural Journal, Vol. 97, No. 6, November-December, pp. 831-839.

TASSIOS, T. P. (1981); YANNOPOULOS, P. J. . *Analytical studies on reinforced concrete members under cyclic loading based on bond stress-slip relationships*; ACI Journal, Proc. Vol. 78, May-June, pp. 206-216.

TASSIOS, T. P. (1984); KORONEOS, E. G. . *Local bond-slip relationships by means of the moiré method*; ACI Journal, Proc. Vol. 81, January-February, pp. 27-34.

UIJL, J. A. D. (1996); BIGAJ, A. J. . *A bond model for ribbed bars based on concrete confinement*; Heron, Vol. 41, No. 3, pp. 201-226.

WATSTEIN, D. (1941). . *Bond stress in concrete pull-out specimens*; ACI Journal, Proc. Vol. 38, September, pp. 37-50.

YANG, S. (1988); CHEN, J. . *Bond slip and crack width calculations of tension members*; ACI Structural Journal, Vol. 85, July-August, pp. 414-422.

YANKELEVSKY, D. Z. (1985). *New finite element for bond-slip analysis*; ASCE, Journal of Structural Engineering, Vol. 111, No. 7, July, pp. 1533-1542.

YANKELEVSKY, D. Z. (1997). *A two-phase one dimensional model for steel-concrete interaction*; Computers & Structures, Vol. 65, No. 6, pp. 781-794.

YAO, B. (1993); MURRAY, D. W. . *Prediction of distributed discrete concrete cracking in RC analysis*; ASCE, Journal of Structural Engineering, Vol. 119, No. 10, October, pp. 2813-2834.

ZUO, J. (2000); DARWIN, D. . *Splice strength of conventional and high relative rib area bars in normal and high-strength concrete*; ACI Structural Journal, Vol. 97, No. 4, July-August, pp. 630-641.

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

ACHARYA, D. N. (1965); KEMP, K. O. . *Significance of dowel forces on the shear failure of rectangular reinforced concrete beams without web reinforced*; ACI Journal, *Proc.* Vol. 62, October, pp. 1265-1279.

AYOUB, A. (1999); FILIPPOU, F. C. . *Mixed formulation of bond-slip problems under cyclic loads*; ASCE, Journal of Structural Engineering, Vol. 125, No. 6, June, pp. 661-671.

BAZĀNT, Z. P. (1980); CEDOLIN, L. . *Fracture mechanics of reinforced concrete*; ASCE, Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 106, No. EM6, December, pp. 1287-1306.

CEDOLIN, L. (1977); POLI, S. D. . *Finite element studies of shear-critical r/c beams*; ASCE, Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 103, No. EM3, June, pp. 395-410.

CHEN, A. C. T. (1975); CHEN, W. F. . *Constitutive relations for concrete*; ASCE, Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 101, No. EM4, August, pp. 465-481.

FERNANDES, R. M. (2000); DEBS, A. L. H. . *A influência das ações repetidas na aderência aço-concreto*; XXIX Jornadas Sudamericanas de Ingenieria Estructural, Punta Del Este, Uruguay.

HAMOUINE, A. (1996). *Contribution à l'étude de l'adhérence acier-béton de hautes performances*; Tese Doutorado, L'Institut National Des Sciences Appliquées de Toulouse, Toulouse, França.

JIMENEZ, R. (1979); WHITE, R. N. ; GERGELY, P. . *Bond and dowel capacities of reinforced concrete*; ACI Journal, Proc. Vol. 76, January, pp. 73-85.

JOFRIET, J. C. (1971); McNEICE, G. M. . *Finite element analysis of reinforced concrete slabs*; ASCE, Journal of the Structural Division, Vol. 97, No. ST3, March, pp. 785-805.

MARINS NETO, J. (1999). *Estudo de pavimentos de lajes pré-moldadas: determinação das reações nas vigas do contorno*; Relatório Científico, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de São Carlos – UFSCar, FAPESP, São Carlos – SP, Brasil.

NOVAES, C. C. (1997). *Introdução aos sistemas estruturais*; Notas de aula, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de São Carlos – UFSCar, São Carlos – SP, Brasil.