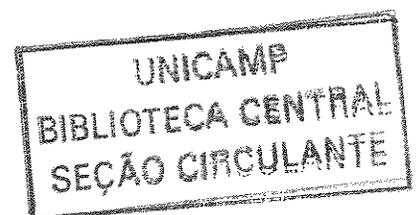


**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL**

**ANÁLISE DINÂMICA DE PLACAS LAMINADAS DE  
MATERIAIS COMPÓSITOS PELO MÉTODO DOS  
ELEMENTOS FINITOS**

**Jeferson Cassiano**

**Campinas**  
**2002**



UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL**

**ANÁLISE DINÂMICA DE PLACAS LAMINADAS DE**  
**MATERIAIS COMPÓSITOS PELO MÉTODO DOS**  
**ELEMENTOS FINITOS**

Jeferson Cassiano

Orientador: Prof. Dr. Aloisio Ernesto Assan

Dissertação de mestrado apresentada à Comissão de pós-graduação da Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, na área de concentração de Estruturas.

Campinas, SP  
2002

Atesto que esta é a versão definitiva da dissertação/tese.

05/8/02

Prof. Dr. Aloisio E. Assan  
Matrícula: 03596-3

UNIDADE BB  
Nº CHAMADA T/UNICAMP  
C273a  
V \_\_\_\_\_ EX \_\_\_\_\_  
TOMBO BCI 51018  
PROC 16.827102  
C \_\_\_\_\_ D<sup>x</sup> \_\_\_\_\_  
PREÇO R\$ 11,00  
DATA 27/09/02  
Nº CPD \_\_\_\_\_

CM00174305-6

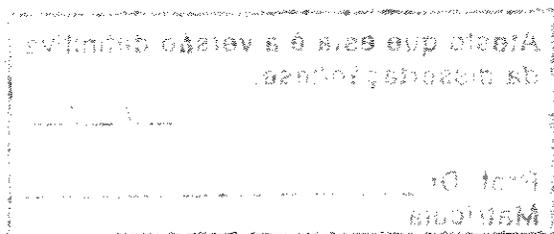
BIB ID 259197

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

C273a Cassiano, Jeferson  
Análise dinâmica de placas laminadas de materiais  
compósitos pelo método dos elementos finitos / Jeferson  
Cassiano.--Campinas, SP: [s.n.], 2002.

Orientador: Aloísio Ernesto Assan  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Civil.

1. Dinâmica. 2. Métodos dos elementos finitos. 3.  
Autovalores. 4. Jacobi, métodos de. I. Assan, Aloísio  
Ernesto.  
II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de  
Engenharia Civil. III. Título.



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL**

**ANÁLISE DINÂMICA DE PLACAS LAMINADAS DE  
MATERIAIS COMPÓSITOS PELO MÉTODO DOS  
ELEMENTOS**

**JEFERSON CASSIANO**

**Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca examinadora, constituída por:**

*Aloisio E. Assan*

**Prof.<sup>o</sup> Dr. Aloisio Ernesto Assan**

**Presidente e Orientador**

**Faculdade de Engenharia Civil -UNICAMP**

*Leandro Palermo Júnior*

**Prof.<sup>o</sup> Dr. Leandro Palermo Júnior**

**Faculdade de Engenharia Civil -UNICAMP**

*Renato Pavanullo*

**Prof.<sup>o</sup> Dr. Renato Pavanullo**

**Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP**

**CAMPINAS, 22 de Fevereiro de 2002**

**Dedico este trabalho  
aos meus familiares.**

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Prof. Dr. Aloisio Ernesto Assan, pela orientação no trabalho.

Aos professores Flávio, Leandro, Lucila, Mário, Renato, Philippe, Nílson, Antunes, Chico, Pêrsio, Requena e Vinicius pelo auxílio no aprendizado.

Ao LABMEC pelo suporte computacional.

Aos colegas Elias, Everaldo, Júlio, Edvaldo, Fred, Paccola, Márcia, Sérgio, Alberto, Fernando, Leandro, Renata, Rogerio, Gustavo, Cesar, Fábio pela colaboração no desenvolvimento do programa de pós- graduação.

“Os mortos governam os vivos.”

Karl Marx

## **SUMÁRIO**

<b>FOLHA DE APROVAÇÃO</b>	iii
<b>DEDICATÓRIA</b>	v
<b>AGRADECIMENTOS</b>	vi
<b>EPÍGRAFE</b>	vii
<b>LISTA DE FIGURAS</b>	xii
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b>	xiii
<b>LISTA DE TABELAS</b>	xvi
<b>RESUMO</b>	xvii
<b>ABSTRACT</b>	xviii
<b>INTRODUÇÃO</b>	1
<b>1 Objetivos</b>	1
<b>2 Etapas</b>	1
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	3
<b>1 Objetivos</b>	3
<b>2 Revisão de Publicações</b>	4
<b>3 DINÂMICA DE SISTEMAS CONTÍNUOS</b>	6

<b>1 Modelagem de Sistema Contínuo</b>	6
<b>1.1 Equação de Equíbrio Dinâmico</b>	6
<b>1.2 Reologia</b>	9
<b>1.2.1 Funções de Mapeamento</b>	9
<b>1.2.2 Decomposição Espectral e Tensor de Deformação Infinitesimal</b>	10
<b>1.3 Relações Constitutivas</b>	12
<b>2 O Sistema e suas Condições Iniciais e de Contorno</b>	14
<b>2.1 Síntese do Problema</b>	14
<b>2.2 Condições Iniciais</b>	15
<b>2.3 Condições de Contorno</b>	15
<b>3 Principio de Hamilton</b>	16
<b>4 Conclusão</b>	16
<b>4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS</b>	18
<b>1 Introdução</b>	18
<b>1.1 Definição dos Elementos</b>	18
<b>1.2 Aproximação da Solução</b>	18
<b>2 Métodos de Aproximação</b>	19
<b>2.1 Métodos Residuais</b>	19
<b>2.2 Métodos Variacionais</b>	20
<b>3 Aplicação do Método dos Elementos Finitos ao Problema</b>	20
<b>3.1 Formulação do Elemento</b>	23
<b>3.1.1 Quadratura Gaussiana</b>	28

<b>4 Conclusão</b>	30
<b>5 EXEMPLOS</b>	31
<b>1 Introdução</b>	31
<b>2 Exemplo I</b>	31
<b>3 Exemplo II</b>	32
<b>4 Exemplo III</b>	34
<b>5 Exemplo IV</b>	35
<b>6 Conclusão</b>	35
<b>6 RESULTADOS</b>	36
<b>1 Introdução</b>	36
<b>2 Resultado I</b>	36
<b>3 Resultado II</b>	37
<b>4 Resultado III</b>	39
<b>5 Resultado IV</b>	40
<b>6 Conclusão</b>	41
<b>7 CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE TRABALHO</b>	42
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	44
<b>Apêndice: SISTEMAS DINÂMICOS DISCRETOS</b>	47
<b>1 Modelagem Matemática de Sistemas Dinâmicos Discretos</b>	47
<b>1.1 Discussão Sobre a Estabilidade de Sistemas</b>	49
<b>1.2 Linearização de Sistemas</b>	52
<b>1.3 Transformada de Laplace</b>	53

<b>1.4 Resolução de Sistemas Dinâmicos Lineares</b>	55
<b>1.4.1 Resolução por Transformada de Laplace</b>	55
<b>1.4.2 Resolução por Equações Desacopladas</b>	59
<b>1.4.2.1 Solução do Sistema Homogêneo</b>	59
<b>1.4.2.2 Solução do Sistema Completo</b>	60
<b>1.5 Resolução de Sistemas Lineares Genéricos</b>	62
<b>2 Sistemas Mecânicos</b>	63
<b>2.1 Princípio de Hamilton para Sistemas Mecânicos Discretos</b>	63
<b>2.2 Modelos Físicos de Sistemas Mecânicos</b>	65
<b>2.2.1 Massa</b>	66
<b>2.2.2 Amortecimento</b>	66
<b>2.2.2.1 Amortecimentos Dependentes da Velocidade</b>	66
<b>2.2.2.1.1 Amortecimento Viscoso</b>	66
<b>2.2.2.1.2 Amortecimento de Arraste</b>	68
<b>2.2.2.1.3 Amortecimento de Coulomb (atrito seco)</b>	68
<b>2.2.2.2 Amortecimento Histerético</b>	69
<b>2.2.3 Rigidez</b>	70
<b>2.3 Sistemas Mecânicos Lineares</b>	70
<b>3 Discussão Sobre a Causalidade de Sistemas Dinâmicos</b>	72
<b>4 Conclusão</b>	72

## LISTA DE FIGURAS

<b>FIGURA 3-1</b>	Domínio sob ação de forças externas	7
<b>FIGURA 3-2</b>	Mapeamento	10
<b>FIGURA 3-3</b>	Representação gráfica do modelo de sólido padrão	14
<b>FIGURA 4-1</b>	Sistema de coordenadas espaciais para os deslocamentos	25
<b>FIGURA 4-2</b>	Exemplo de mapeamento de elemento mestre a um elemento genérico	30
<b>FIGURA 5-1</b>	Placa do exemplo I	33
<b>FIGURA 5-2</b>	Discretizações da placa	34
<b>FIGURA 5-3</b>	Placa do exemplo II	35
<b>FIGURA 5-4</b>	Discretizações do exemplo II para $n = 1$ e $n = 2$	35
<b>FIGURA 5-5</b>	Discretização para $n = 4$	36
<b>FIGURA 5-6</b>	Discretizações do exemplo III	36
<b>FIGURA 5-7</b>	Discretização do exemplo IV	37
<b>FIGURA 1</b>	Diagrama de blocos representando o sistema linearizado acima no domínio do tempo	57
<b>FIGURA 2</b>	Diagrama de blocos representando o sistema no domínio da frequência	60
<b>FIGURA 3</b>	Efeito da viscosidade na interface de superfícies	71
<b>FIGURA 4</b>	Alsa histerética. Área hachurada corresponde à energia dissipada na deformação	73

## LISTA DE SÍMBOLOS

<b>M</b>	: Matriz de massa
<b>C</b>	: Matriz de amortecimento
<b>K</b>	: Matriz de rigidez
<b>y</b>	: Deslocamento generalizado
$\delta$	: variação
<b>L</b>	: Lagrangeano
$W_{nc}$	: Trabalho das forças não - conservativas
<b>Q</b>	: Força generalizada
<b>x</b>	: Vetor no espaço de estados
$\dot{\mathbf{x}}$	: Derivada do vetor de estado no tempo
<b>f, g</b>	: Funções vetoriais
<b>u</b>	: Função de entrada
<b>W</b>	: Trabalho
<b>t</b>	: tempo
<b>L</b>	: Transformada de Laplace (vetorial)
<b>e</b>	: Constante de Euler (= 2,71828182846...)
<b>I</b>	: Matriz identidade
$\lambda_i$	: autovalores

$\mathbf{T}$	: Matriz de transformação para a base diagonalizada
$\Lambda$	: Matriz diagonal
$\mathbf{F}_i$	: Força
$m_i$	: massa
$\mathbf{a}_i$	: aceleração
$U$	: Energia potencial
$T$	: Energia cinética
$\tau_{ij}$	: Tensão de cisalhamento
$\mu$	: Coeficiente de viscosidade
$\mathbf{v}$	: Velocidade
$A$	: Área
$c_d$	: Coeficiente de arrasto
$A_d$	: Projeção plana da área frontal
$\rho$	: Massa específica
$\mu_{\text{din}}$	: Coeficiente de atrito seco dinâmico
$N$	: Força normal
$\eta$	: Fator de perda
$\mathbf{f}$	: Esforços (coordenadas globais)
$\mathbf{0}$	: Matriz nula
$\Omega$	: Domínio
$\partial\Omega$	: Contorno do domínio
$B$	: Sub - domínio

$\partial B$	: Contorno do sub - domínio
$\mathbf{n}$	: Versor
$\mathbf{T}_n$	: Força superficial por unidade de área
$\mathbf{b}$	: Força de campo
$\mathbf{T}$	: Tensor de tensões
$V$	: Volume
$\nabla$	: Operador nabla
$\psi_i$	: Funções de forma
$\theta$	: Rotação
$\zeta_i$	: Coordenadas homogêneas

## LISTA DE TABELAS

<b>TABELA 6-1</b>	Valores das frequências naturais (Hz) do exemplo I	39
<b>TABELA 6-2</b>	Frequências Naturais do exemplo II para $n = 1$ segundo Kosmatka, LAMIST e experimental	40
<b>TABELA 6-3</b>	Frequências Naturais do exemplo II para $n = 2$ segundo Kosmatka, LAMIST e experimental	41
<b>TABELA 6-4</b>	Frequências Naturais do exemplo II para $n = 4$ segundo Kosmatka, LAMIST e experimental	41
<b>TABELA 6-5</b>	Resultados da 1 <sup>o</sup> discretização do exemplo III entre LAMIST, Palermo Jr. e teórico	42
<b>TABELA 6-6</b>	Resultados da 2 <sup>o</sup> discretização do exemplo III entre LAMIST, Palermo Jr. e teórico	43
<b>TABELA 6-7</b>	Frequências naturais obtidas por BRUCH, LAMIST e teóricas	43

## **RESUMO**

CASSIANO, Jeferson. **Análise dinâmica de placas laminadas de materiais compósitos pelo Método dos Elementos Finitos.** Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, 2000. Dissertação de Mestrado.- Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, 2000.

Este trabalho tem como objetivo contribuir na análise de placas de compósitos pois tais materiais tem sendo utilizados em larga escala na engenharia. A análise feita neste trabalho é a dinâmica, complementando anterior abordagem estática. O processo numérico utilizado para tal é o Método dos Elementos Finitos, processo já bastante consagrado na engenharia para resolução de equações diferenciais lineares.

**Palavras-chave:** dinâmica; compósito; elementos finitos.

## **ABSTRACT**

This work has as objective to contribute in the analysis of boards of composites therefore such materials he is being used in wide scale in engineering. The analysis made in this work is the dynamics, complementing previous static boarding. The used numerical process for such is the Method of the Finite Elements, process already sufficiently consecrated in engineering for resolution of linear distinguishing equations.

**Key-words:** Dynamic; Composite; Finite Elements.

# 1 Introdução

## 1 Objetivos

Este trabalho visa abordar a questão da aplicação de métodos numéricos (em particular o Método dos Elementos Finitos) na resolução de problemas de Dinâmica. O problema em questão é a análise dinâmica de placas laminadas de compósito utilizando o Método dos Elementos Finitos, dando continuidade a trabalho anterior (Tápia, 1998). No presente texto apresentamos os aspectos matemáticos do problema. Esta abordagem é dividida em três módulos: Sistemas Contínuos, Sistemas Discretos e Aplicação do MEF. Apresentamos, inicialmente, os sistemas contínuos e discretos em separado e, em seguida, transformamos problemas contínuos em discretos utilizando o MEF.

Após a etapa de modelagem do problema com a apresentação dos respectivos algoritmos, o passo seguinte é a implementação de tais algoritmos no programa LAMIST (programa desenvolvido em linguagem FORTRAN) e testar alguns exemplos.

## 2 Etapas

Nesta primeira etapa, procurou-se realizar o desenvolvimento matemático do problema visando a sua posterior implementação algorítmica. Foram analisados casos genéricos inclusive cobrindo abordagens que não serão analisadas neste programa (como por exemplo a solução de sistemas com amortecimento  $C$  qualquer) pois estes podem ser objeto de análise futura em outros planos de pesquisa.

Em princípio, será abordado o caso de sistemas sem amortecimento pois perde-se a simetria das matrizes além de dobrar a dimensão destas tornando a resolução do autop problema

muito mais dispendiosa. Para evitar as consequências anteriormente descritas a matriz de amortecimento costuma ser proposta por outras vias (costuma-se considerar  $C$  como combinação linear das matrizes de rigidez  $K$  e de massa  $M$ , pois pode-se transformá-lo em um problema matemático análogo não - amortecido). Também será analisado o caso de vibrações livres (que recaem em problemas de autovalor e autovetor). Para vibrações forçadas requer-se ainda uma integração no tempo.

Na chamada análise modal os modelos costumam ter a massa concentrada em posições discretas. Ao contrário de tal abordagem, aqui trabalhamos com o conceito da massa distribuída ao longo de todo o elemento na modelagem da matriz de massa.

Em suma, aplicamos o MEF ao Princípio de Hamilton e, dele, encontramos expressões para as matrizes de rigidez, massa e o vetor de esforços definindo assim o sistema linear. Dada a dificuldade de determinar a matriz de amortecimento a partir deste procedimento, tal caso não será contemplado na rotina a ser desenvolvida. Este tema poderá servir a trabalhos futuros. O sistema linear resultante será resolvido por desacoplamento das equações (vide capítulo 3) e resolução numérica das equações escalares resultantes (no caso de vibrações forçadas).

## **2 Revisão Bibliográfica**

### **1 Introdução**

Os estudos de Dinâmica vêm acompanhando a História da Humanidade desde os primórdios através da resolução de problemas práticos do cotidiano. A partir do século XVI, a Dinâmica passou por um grande salto de desenvolvimento com Galileu entre outros. Neste período, Newton enunciou as principais Leis da Mecânica cuja linguagem é caracterizada pela descrição vetorial desta última (Mecânica Vetorial).

Seguiu-se, a partir de então, um grande esforço intelectual no sentido de formular escalarmente a Mecânica (Mecânica Analítica). Neste sentido foram bastante explorados os conceitos de trabalho e energia. Deste esforço surgiram resultados bastante gerais como o Princípio de D'Alembert (ou Princípio dos Trabalhos Virtuais), Princípio de Hamilton e a abordagem variacional da Mecânica (Equações de Euler-Lagrange). Paralelamente a este desenvolvimento, avançavam os estudos das propriedades mecânicas dos materiais (sólidos e fluidos) e suas relações constitutivas (propriedades reológicas). Dentre as propriedades reológicas podemos citar como exemplo a Lei da Viscosidade de Newton para fluidos (ditos fluidos newtonianos) e a Lei de Hooke que admite a relação de linearidade entre os campos tensoriais de tensão e deformação para sólidos. A união do problema dinâmico com os modelos de comportamento reológico dos materiais sólidos formam a Dinâmica dos sólidos reais. No século XX, foram desenvolvidas ferramentas numéricas que permitiram uma maior abordagem de tais problemas discretizando o contínuo, dentre as quais os Elementos Finitos e os de Contorno. Do ponto de vista de desenvolvimento de novos materiais, tem-se procurado combinar materiais diferentes de forma a explorar as melhores características de cada constituinte no conjunto. A tais materiais compostos dá-se o nome de compósitos. O âmbito atual de estudos é como tais materiais comportam-se estaticamente e dinamicamente.

## 2. Revisão de Publicações

Dentre as publicações sobre modelamento numérico de comportamento estático de placas de laminados compósitos temos o trabalho de Tapias (1998) que, para fazer a análise estática, utilizou o Método dos Elementos Finitos onde fez uso de elementos triangulares de 7 nós e 31 graus de liberdade pois tal elemento mostrou-se eficiente para placas espessas, prevenindo efeitos como o travamento ao cisalhamento. A. K. Ghosh / S. S. Dey (1992) e S. C. Panda / R. Natarajan (1979), como Tapia, fizeram a análise estática de placas de compósito por elementos finitos. Reddy, J. N. (1984) também formula o problema de placa laminada de material compósito via elementos finitos. Já Cardelli (2001), para o mesmo problema, utilizou o Método dos Elementos de Contorno.

K. L. Lo e outros (1977) estudaram algumas propostas de solução teórica para placas homogêneas e laminadas, comparando os resultados obtidos pelos modelos adotados (solução exata, modelo de Reissner-Mindlin e um modelo onde são desprezados os termos acima de terceira ordem). Vale ressaltar aqui que o modelo de Reissner-Mindlin foi predominantemente utilizado nos outros trabalhos estudados. O trabalho de J. N. Reddy trata, também do estudo dos modelos adotados às placas (como o de Reissner-Mindlin).

Guadalupe (1993) aborda, de forma básica, a questão da análise dinâmica nos pórticos de edifícios dando uma maior ênfase ao efeito de vibração transmitido a partir da base (fenômenos sísmicos). Palermo Jr. e Klafke (2000) procuraram determinar as menores frequências em vigas (elementos unidimensionais). Cordovil, A. G. D. P. (1991) utilizou superposição modal para analisar colunas de perfuração, fazendo uso do Método dos Elementos Finitos para a obtenção das matrizes.

Kosmatka (1992) fez a abordagem dinâmica (vibrações forçadas não amortecidas) de placas laminadas de compósito por elementos finitos utilizando, inicialmente, elementos triangulares de 13 nós (34 graus de liberdade ao todo); numa segunda etapa, aplicando técnica de condensação (ou redução) de Guyan, transformou o elemento em um elemento triangular de 6

nós (5 graus de liberdade por nó). O artigo de A. Chate e K. Mäkinen (1994) também versou sobre a análise dinâmica usando elementos triangulares de 6 nós e 5 graus de liberdade por nó. Já Y. Xiang e outros (1993) discute a mesma abordagem utilizando coordenadas cilíndricas para placas com o formato de setores anulares. Bruch, Y. A. (1973) também abordou o problema livre não amortecido de placas. Palermo Jr. e Simões R. (2001) abordaram o problema de vibração livre não amortecida através do Método dos Elementos de Contorno.

O trabalho de M. Ohga e T. Shigematsu (1988) consiste em resolver sistemas lineares massa – mola – amortecimento utilizando integração direta no tempo. Já A. T. Jones / J. E. Grant (1973) e E. L. Wilson / J. Penzien (1972) abordam a solução a partir da diagonalização de sistemas. Qian, G. L., Hoa, S. V. e Xiao, X. (1998) aborda o modelamento via elementos finitos do problema livre amortecido de placas laminadas.

### 3 Dinâmica de Sistemas Contínuos

#### 1 Modelagem de Sistema Contínuo

##### 1.1 Equação de Equilíbrio Dinâmico

Dado um domínio  $\Omega$  como abaixo, destacamos um sub- domínio B. Na figura 1-1, tem-se:

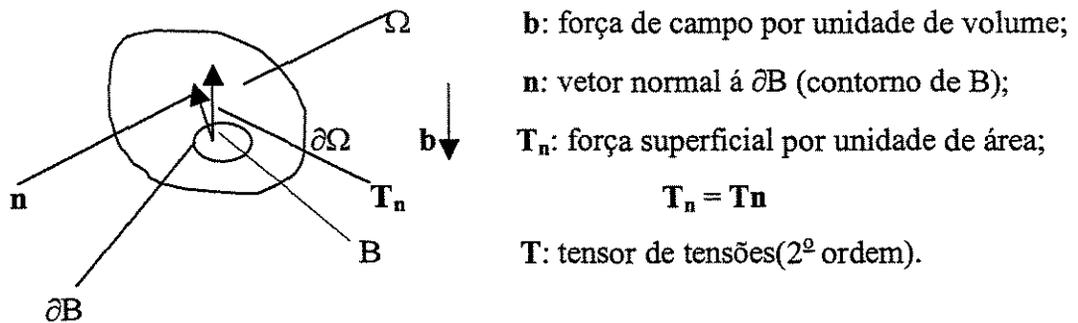


Figura (3-1): Domínio sob ação de forças externas

A resultante das forças de superfície atuantes em B é dada por:

$$\mathbf{F}_{\text{superfície}} = \int_{\partial B} \mathbf{T}\mathbf{n}dA \quad (3-1).$$

A resultante das forças de campo é dada por:

$$\mathbf{F}_{\text{campo}} = \int_B \mathbf{b}dV \quad (3-2).$$

No domínio, uma posição  $\mathbf{r}_0$  de um certo ponto  $\mathbf{P} \in B$ , num instante  $t$  qualquer, é mapeado como sendo a posição de translação deste ponto pelo deslocamento de corpo rígido mais o deslocamento de deformação  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u} \quad (3-3).$$

Aplicando a 2ª Lei de Newton e substituindo (3-1) e (3-2), temos:

$$\mathbf{F}_{\text{superfície}} + \mathbf{F}_{\text{campo}} = m \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \Rightarrow \int_{\partial B} \mathbf{T} \mathbf{n} dA + \int_B \mathbf{b} dV = m \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} \quad (3-4).$$

No caso presente, apesar do campo de deslocamentos alterar o volume (e, portanto, a massa específica), será desconsiderado tal efeito, postulando que:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (3-5),$$

sendo  $\rho$  a densidade (massa específica) do material. Caso quiséssemos levar tal hipótese em consideração, a aplicação da Lei de Newton deveria ser de acordo com o original, ou seja, a somatória das forças igual à taxa de variação do *momentum*.

Retomando a expressão (3-1), aplicamos o Teorema da Divergência ao lado direito da igualdade, como segue:

$$\int_{\partial B} \mathbf{T} \mathbf{n} dA = \int_B \text{div}(\mathbf{T}) dV \quad (3-6).$$

Substituindo (3-6) em (3-4), tem-se:

$$\int_B \text{div}(\mathbf{T}) dV + \int_B \mathbf{b} dV = m \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} \quad (3-7).$$

Sabendo que:

$$m = \int_B \rho dV \quad (3-8).$$

Considerando B suficientemente pequeno a ponto de se poder desprezar a variação de  $\mathbf{u}$  com a posição  $\mathbf{r}$  e substituindo (3-8), pode-se escrever:

$$\int_B \text{div}(\mathbf{T})dV + \int_B \mathbf{b}dV = \int_B \rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} dV \Rightarrow \int_B \text{div}(\mathbf{T})dV + \int_B \mathbf{b}dV - \int_B \rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} dV = 0$$

ou

$$\int_B \left[ \text{div}(\mathbf{T}) + \mathbf{b} - \rho \left( \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} \right) \right] dV = 0 \quad (3-9)$$

como  $dV$  é qualquer, para que a integral seja nula é necessário que o integrando seja nulo, o que resulta em:

$$\text{div}(\mathbf{T}) + \mathbf{b} = \rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} \quad (3-10).$$

Esta é a equação diferencial genérica de equilíbrio dinâmico de corpos sólidos deformáveis. Como as forças de campo externas são dados dos problemas usuais, nossas incógnitas são o campo de tensões e de deslocamentos. Como temos duas incógnitas, é necessário uma nova equação que relacione o campo de deslocamento com o de tensões.

## 1.2 Reologia

A Reologia é um sub – ramo da Mecânica de Meios Contínuos que estuda modelos matemáticos de relações entre esforços internos e deslocamentos. Antes de discutirmos tais relações é necessário introduzirmos algumas definições.

### 1.2.1 Funções de Mapeamentos

Dado um domínio  $B$ , após uma translação com deslocamento, define-se função de mapeamento como sendo uma correspondência dos pontos entre o domínio indeformado e o deformado como segue:

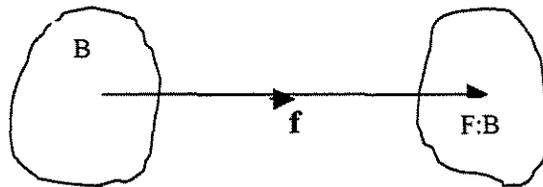


Figura (3-2): mapeamento.

Para o caso particular de translação de corpo rígido, a função de mapeamento será da forma:

$$\mathbf{f}(\mathbf{p},t) = \mathbf{p} + \mathbf{c} \quad (3-11),$$

sendo  $\mathbf{c}$  uma constante. Na Análise Real, a função  $\mathbf{f}$  é diferenciável em  $\mathbf{p}$  se tivermos:

$$\mathbf{f}(\mathbf{p}+\mathbf{u},t) = \mathbf{f}(\mathbf{p},t) + \mathbf{T}\mathbf{u} + \mathbf{o}(\mathbf{u},t) \quad (3-12)$$

sendo  $\mathbf{T}$  um operador linear e  $\mathbf{o}(\mathbf{u},t)$  um resíduo tal que:

$$\lim_{\|\mathbf{u}\|=0} \frac{\mathbf{o}(\mathbf{u}, t)}{\|\mathbf{u}\|} = \mathbf{0} \quad (3-13).$$

Nestas condições, o operador linear  $\mathbf{T}$  é definido como a diferenciação de  $\mathbf{f}$  e é dado por:

$$\mathbf{T} = \mathbf{Df} \quad (3-14).$$

Fazendo  $\mathbf{u} = a\mathbf{e}$  onde 'a' é um escalar arbitrário e  $\mathbf{e}$  é um vetor unitário, substituímos em (3-12):

$$\mathbf{f}(\mathbf{p}+a\mathbf{e}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{p}) + a\mathbf{Df} \mathbf{e} + \mathbf{o}(a\mathbf{e}, t) \quad (3-15).$$

O termo  $\mathbf{Df} \mathbf{e}$  é denominado de derivada direcional de  $\mathbf{f}$  na direção de  $\mathbf{u}$  e o operador linear  $\mathbf{Df}$  é denominado gradiente de  $\mathbf{f}$  ou:

$$\mathbf{Df} = \text{grad } \mathbf{f} = \nabla \mathbf{f} \quad (3-16)$$

sendo  $\nabla$  o operador vetorial "nabla".

O volume do sólido deformado é dado por:

$$V = \int_B \det(\nabla \mathbf{f}) dV \quad (3-17).$$

### 1.2.2 Decomposição Espectral e Tensor de Deformação Infinitesimal

Definiremos aqui o conceito de tensor de deformação infinitesimal a partir da função de mapeamento  $\mathbf{f}$  e da decomposição espectral de seu gradiente (do mapeamento).

Teorema:  $\nabla \mathbf{f} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$  onde  $\mathbf{R}$  é o tensor de rotação ( $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^t$ ) e  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{U}$  são tensores simétricos. Este é o teorema da decomposição ou fatoração espectral de  $\nabla \mathbf{f}$ .

Os chamados tensores de Cauchy – Green são definidos como:

$$\mathbf{C} = (\nabla \mathbf{f})^t \nabla \mathbf{f} = \mathbf{U}^2 \quad (3-18)$$

e

$$\mathbf{B} = \nabla \mathbf{f} (\nabla \mathbf{f})^t = \mathbf{V}^2 \quad (3-19).$$

O tensor de deformação de Saint Venant – Green, por sua vez, é definido como:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (3-20)$$

sendo  $\mathbf{I}$  o tensor identidade.

No caso de pequenos deslocamentos, pode-se aproximar  $\mathbf{f}$  por:

$$\mathbf{f} \approx \mathbf{p} + \mathbf{u}(\mathbf{p}, t) \quad (3-21)$$

(sendo  $\mathbf{p}$  uma translação finita e  $\mathbf{u}$  um deslocamento infinitesimal) e onde conclui-se que:

$$\nabla \mathbf{f} \approx \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} \quad (3-22).$$

Substituindo (3-22) em (3-18), o tensor de Cauchy – Green fica como segue:

$$\mathbf{C} \approx \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t + (\nabla \mathbf{u})^t \nabla \mathbf{u} \quad (3-23).$$

Desprezando a parcela quadrática  $(\nabla \mathbf{u})^t \nabla \mathbf{u}$  e substituindo em (3-20), ficamos com:

$$\mathbf{E} \approx \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t] \quad (3-24)$$

que é denominado tensor de deformação infinitesimal. Salvo menção em contrário, é a este tensor que nos referiremos no presente texto.

Observação: todos os tensores mencionados acima são de segunda ordem.

### 1.3 Relações Constitutivas

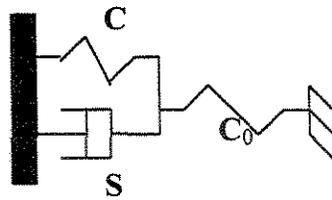
São ditas relações constitutivas as relações matemáticas entre o tensor de tensões  $\mathbf{T}$  e o de deformações  $\mathbf{E}$ . No regime elástico linear a relação utilizada é  $\mathbf{T}$  como um operador linear aplicado a  $\mathbf{E}$ , ou:

$$\mathbf{T}_e = \mathbf{T}(\mathbf{E}) = \mathbf{C}\mathbf{E} \quad (3-25),$$

sendo  $\mathbf{C}$  denominado tensor constitutivo que é de quarta ordem. Para o comportamento viscoso, o tensor de tensões é uma operação linear sob a derivada da deformação no tempo, ou seja:

$$\mathbf{T}_v = \mathbf{S} \dot{\mathbf{E}} \quad (3-26).$$

Neste desenvolvimento utilizaremos o modelo do chamado sólido padrão que pode ser, esquematicamente, representado por:



**Figura (3-3):** Representação gráfica do modelo de sólido padrão.

sendo  $C_0$  o tensor constitutivo instantaneamente após a aplicação da carga; num tempo muito grande, o tensor constitutivo final será uma combinação em série entre  $C$  e  $C_0$  ( $C_\infty$ );  $S$  é o tensor referente ao efeito viscoso. Salientamos aqui que este não é o único modelo reológico existente. Foi escolhido apenas por sua simplicidade matemática e por sua coerência nos resultados. Temos também os modelos de Maxwell que consistem em uma mola em série com um pistão (este modelo é ineficiente no momento em que prevê um aumento ilimitado de deformação para uma dada tensão constante) e o de Kelvin que trata-se de uma mola em paralelo com um pistão (este modelo é falho na medida que prevê uma tensão infinita instantânea no ato da aplicação da carga).

Considerando que a tensão total é a soma das tensões viscosas( $T_v$ ) e elásticas( $T_e$ ):

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_e + \mathbf{T}_v \quad (3-27)$$

sendo que:

$$\mathbf{T} = C_0 \mathbf{E}_e \quad (3-28)$$

sendo  $\mathbf{E}_e$  o tensor de deformações elásticas,

$$\mathbf{T}_e = C(\mathbf{E} - \mathbf{E}_e) \quad (3-29)$$

sendo  $\mathbf{E}$  o tensor de deformações total; e

$$\mathbf{T}_v = S(\dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}}_e) \quad (3-30)$$

sendo  $\dot{\mathbf{E}}$  e  $\dot{\mathbf{E}}_e$  as derivadas temporais dos tensores de deformação. Multiplicamos (3-28) por  $\mathbf{C}_0^{-1}$  e substituindo o resultado em (3-29) e (3-30) (expressão de  $\mathbf{E}_e$  em função de  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{C}_0$ ). Substituindo tudo em (3-27), tem-se:

$$\mathbf{T} = \mathbf{C}\mathbf{E} - \mathbf{C}\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{T} + \mathbf{S}\mathbf{E}' - \mathbf{S}\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{T}, \quad (3-31)$$

sendo que:

$$\mathbf{C} = (\mathbf{C}_\infty^{-1} - \mathbf{C}_0)^{-1} \quad (3-32)$$

sendo  $\mathbf{C}$  um tensor constitutivo equivalente.

## 2 O Sistema e suas Condições Iniciais e de Contorno

### 2.1 Síntese do Problema

Note que a equação (3-9) relaciona o campo de tensões  $\mathbf{T}$  com o campo de deslocamentos  $\mathbf{u}$ . Expressões como, por exemplo, (3-24) definem o campo de deformações  $\mathbf{E}$  a partir do campo  $\mathbf{u}$  e uma relação constitutiva como (3-25) relaciona os tensores  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{E}$  (note que pode-se mudar os modelos a serem adotados nas relações). Portanto, sendo conhecidas as ações externas, as características do meio ( $\rho$ ,  $\mathbf{C}_0$ ,  $\mathbf{C}_\infty$  e  $\mathbf{S}$ ) e as condições de contorno do problema, este é possível de solução  $(\mathbf{T}, \mathbf{E}, \mathbf{u})$ .

## 2.2 Condições Iniciais

Definimos como condições iniciais os campos conhecidos (no domínio) em um dado instante de tempo  $t_0$ . No caso analisado, são conhecidos os campos de deslocamentos e o de velocidades:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t_0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) \text{ e } \mathbf{u}'(\mathbf{r}, t_0) = \mathbf{u}'_0(\mathbf{r}) \quad (3-33),$$

sendo  $\mathbf{r}$  o vetor – posição.

## 2.3 Condições de Contorno

São chamadas condições de contorno os parâmetros conhecidos ao longo do contorno do domínio em questão. Temos três tipos de condições de contorno:

- a) Condição de Dirichlet: quando em uma dada sub-região do contorno sabemos o valor da função (no nosso caso o valor do campo  $\mathbf{u}$ );
- b) Condição de Newmann: quando em uma dada sub-região do contorno sabemos o valor do fluxo da função (no caso, o campo de tensões  $\mathbf{T}$ );
- c) Condição Mista: quando é conhecida uma combinação linear entre a função e o fluxo.

Neste problema, os vínculos determinam as condições de Dirichlet pois nestas regiões é conhecido o campo de deslocamento  $\mathbf{u}$ . As superfícies não vinculadas determinam as condições de Newmann pois lá é conhecido o campo de tensões  $\mathbf{T}$ . No caso de termos a ocorrência de um vínculo elástico, teremos uma condição de contorno mista pois, mesmo não conhecendo  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{T}$ , tem-se uma relação entre eles.

### 3 O Princípio de Hamilton

A formulação de Hamilton para sistemas contínuos é similar ao caso discreto, ou seja:

$$\delta \int_0^t (L + W_{nc}) dt = 0 \quad (3-34)$$

sendo  $L = T - U$  a Lagrangeana,  $T$  a energia cinética,  $U$  a energia potencial e  $W_{nc}$  o trabalho das forças não – conservativas. A energia cinética é dada por:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 dV \quad (3-35)$$

sendo  $\rho$  a massa específica,  $r$  o vetor deslocamento e  $V$  o volume considerado. A energia potencial é:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{T} \cdot \mathbf{E} dV \quad (3-36)$$

sendo  $\mathbf{T}$  o tensor de tensões e  $\mathbf{E}$  o de deformações.

### 4 Conclusão

Devido à similaridade da formulação de Hamilton para sistemas contínuos e discretos, devemos encontrar expressões alternativas para  $T$  e  $U$  através de Elementos Finitos análogas aos modelos discretos da forma a seguir:

$$T = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{x}}^t \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}) \quad \text{e} \quad U = \frac{1}{2} (\mathbf{x}^t \mathbf{K} \mathbf{x}) \quad (3-37),$$

definindo assim matrizes de rigidez  $\mathbf{K}$  (já obtida por TÁPIA, 1998) e massa  $\mathbf{M}$ .

## 4 Método dos Elementos Finitos

### 1 Introdução

O Método dos Elementos Finitos consiste em uma técnica de resolução numérica de equações diferenciais em domínios finitos contidos em espaços Euclidianos  $n$ -dimensionais. A razão de tal nome é devido ao fato de dividir-se o domínio em questão em sub-domínios menores.

#### 1.1 Definição dos Elementos

Seja o domínio  $\Omega \subset E^n$ . Definimos um número finito 'm' de pontos  $r_i \in \Omega$  ( $i = 1, \dots, m$ ) que por sua vez definem uma aproximação  $\Omega'$  sobre  $\Omega$  de forma que  $r_i \in \Omega'$ . Tais pontos são chamados de *nós globais*. A diferença entre  $\Omega$  e  $\Omega'$  corresponde ao erro de aproximação de  $\Omega$ . Definem-se, então, um número finito 'p' de subdomínios desconexos  $\Omega_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) ditos elementos finitos, de forma que:

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

. A reunião  $\Omega^* = \bigcup_{i=1}^p \Omega_i$  é dita região desconectada. Para cada elemento  $\Omega_i$  associa-se um número finito 'k' de pontos  $r_j^i \in \Omega_i$  ( $j = 1, \dots, k$ ) que são ditos *nós locais*.

O próximo passo é mapear  $\Omega^*$  sobre  $\Omega'$ , ou seja, fazendo uma correspondência entre os nós de um dado subdomínio  $\Omega_i$  e  $\Omega'$ . A isso dá-se o nome de conexão (Loula & Galeão, 1976).

#### 1.2 Aproximação da Solução

Seja uma função  $f: \Omega \rightarrow V$  que queremos aproximar. Seja  $f^*: \Omega' \rightarrow V$  uma função que deve aproximar  $f$ . Cada um dos elementos  $\Omega_i$  é domínio de funções locais  $f_i$  de forma que  $f_i, f \in$

$W$  ( $i = 1, \dots, p$ ), onde  $W \subset H$  (ou  $R^\infty$ : espaço de Hilbert). Cada uma das funções locais  $f_i$  é aproximada por funções  $f_i^* \in V$  (onde  $V$  é um subespaço finito de funções de dimensão  $k$ ), onde  $V$  é previamente definido através de uma base  $\alpha = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k]$ ; geralmente utiliza-se do espaço das funções polinomiais pela simplicidade deste e pelo fato de ele ser denso em  $H$ . Para determinar as funções  $f_i^*$  aplicam-se os chamados métodos de aproximação.

## 2 Métodos de Aproximação

### 2.1 Métodos Residuais

São chamados métodos residuais todos os critérios de aproximação que são expressos sob a forma:

$$\int_{\Omega} w \Phi(r) d\Omega = 0 \quad (4-1)$$

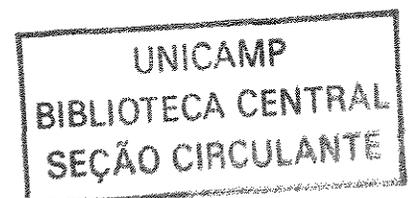
sendo que

$$r = T(f^*) - g, \quad \Phi(r) = 0 \Leftrightarrow r = 0 \quad (4-2)$$

e

$w$  é chamada função peso.

A definição de  $\Phi$  e  $w$  dá origem aos vários métodos residuais dentre os quais temos Galerkin e Mínimos Quadrados dentre outros (LOULA e GALEÃO, 1976).



## 2.2 Métodos Variacionais

Os métodos variacionais trabalham o problema variacional correspondente ao problema de valor de contorno.

Seja  $A$  um operador linear sob  $H$ , simétrico e positivo definido; então, existe o seguinte funcional:

$$I(f) = \langle A(f), f \rangle - 2 \langle g, f \rangle \quad (4-3),$$

cujo valor estacionário é alcançado pela função  $f$  que satisfaz o problema de valor de contorno. A solução do problema é dada pela resolução da equação de Euler - Lagrange (e as condições de contorno associadas correspondente ao funcional acima), e, por isso mesmo, corresponde ao próprio P. V. C..

Estes métodos operam diretamente com o funcional ao invés das equações diferenciais (como fazem os métodos residuais) e, por consequência, são chamados de métodos diretos. Entre tais métodos destacamos, como exemplo, o de Rayleigh - Ritz onde substitui-se  $f^*$  no funcional e impõe-se que o gradiente deste (em  $V$ ) seja nulo.

## 3 Aplicação do Método dos Elementos Finitos ao Problema Dinâmico

O Método dos Elementos Finitos, do ponto de vista matemático, é uma técnica de resolução numérica de equações diferenciais lineares. O primeiro passo neste sentido é a transformação da equação diferencial (formulação forte) em uma equação integral (formulação fraca ou variacional). Dentre os métodos que fazem tal conversão, podemos citar o dos Resíduos Ponderados que utiliza da imposição de condição de ortogonalidade. Para os casos onde podemos

ter um funcional associado ao problema, podemos utilizar o método de Rayleigh – Ritz que tem por metodologia a busca de valores dos parâmetros que minimizam o funcional associado.

Neste trabalho o funcional adotado é dado pelo Princípio de Hamilton e a Lagrangeana, dada pela diferença entre a energia cinética e a potencial (vide apêndice). Sabemos que a energia cinética  $T$  é dada por:

$$T = \frac{1}{2} \int_m (\dot{\mathbf{u}})^2 dm \quad (4-4)$$

sendo  $m$  a massa e  $\dot{\mathbf{u}}$  a velocidade. A energia potencial, por sua vez, é dada por :

$$V = \frac{1}{2} \int_v (\mathbf{T} \cdot \mathbf{E}) dv \quad (4-5)$$

sendo  $\mathbf{T}$  o tensor das tensões e definido a partir da expressão da força resultante  $\mathbf{F}$  sobre uma superfície e  $\mathbf{E}$  é o tensor de deformação infinitesimal de deformação:

$$\mathbf{F} = \int_A \mathbf{T} \mathbf{n} dA \quad (4-6)$$

sendo  $\mathbf{n}$  um vetor unitário normal à superfície e  $A$  a superfície onde procede-se a integração.  $\mathbf{E}$  é dado por :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t] \quad (4-7)$$

sendo  $\mathbf{u}$  o vetor deslocamento. Como trabalhamos com a hipótese de linearidade física, a relação constitutiva entre  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{E}$  é dada por:

$$\mathbf{T} = \mathbf{DE} \quad (4-8)$$

sendo  $\mathbf{D}$  o tensor constitutivo e é função apenas do material. Não entraremos em detalhes do procedimento para a obtenção da matriz de rigidez a partir da expressão da energia potencial acima pois tal aspecto foge ao escopo deste texto e já foi objeto de estudo de trabalhos anteriores, inclusive do trabalho de análise (estática) de placas (TÁPIA, 1998) a qual o presente trabalho pretende complementar com a implementação da análise dinâmica.

O trabalho das ações externas é dado por:

$$W_e = \int_v (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) dv \quad (4-9)$$

sendo  $\mathbf{f}$  a força por unidade de volume. A determinação da ação externa  $\mathbf{f}$  a partir de (4-9) também já foi objeto de estudo de TÁPIA (1998) e, portanto, não será apresentada aqui.

Sabendo que :

$$dm = \rho dv \quad ,$$

podemos substituir em (4-4), ficando então:

$$T = \frac{1}{2} \int_v \rho (\dot{\mathbf{u}})^2 dv \quad (4-10).$$

Adotando a base do subespaço vetorial das funções de aproximação  $[\psi_i]$ , adotamos que:

$$\dot{\mathbf{u}} \approx \Sigma (\dot{u}_i \psi_i) \quad (4-11)$$

sendo  $\dot{u}_i = \dot{u}_i(t)$  as componentes da função aproximadora da solução na base acima definida e  $\psi_i = \psi_i(\mathbf{r})$ . Elevando ao quadrado, ficamos com:

$$(\dot{\mathbf{u}})^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \psi_i \psi_j \dot{u}_i \dot{u}_j = \dot{\mathbf{u}}^T (\Psi \dot{\mathbf{u}}) \quad (4-12)$$

sendo  $\Psi = [\psi_i \psi_j]_{n \times n}$  e  $\dot{\mathbf{u}} = [\dot{u}_i]_{n \times 1}$ . Substituindo (4-12) em (4-10), ficamos com:

$$T = \frac{1}{2} \int_v \rho [\dot{\mathbf{u}} \cdot (\Psi \dot{\mathbf{u}})] dv = \frac{1}{2} \left[ \dot{\mathbf{u}} \cdot \left( \int_v \rho \Psi dv \right) \dot{\mathbf{u}} \right] = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{M} \dot{\mathbf{u}})] \quad (4-13)$$

sendo  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{M} = \int_v \rho \Psi dv \quad (4-14).$$

A expressão (4-13) tem o formato análogo ao da energia potencial, que é dado por:

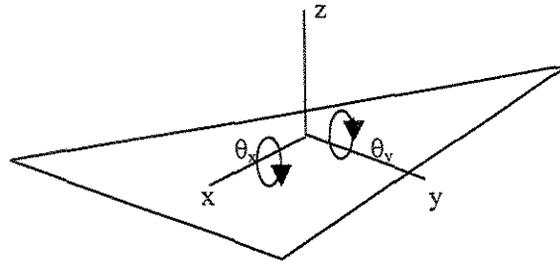
$$V = \frac{1}{2} [\mathbf{u} \cdot (\mathbf{K} \mathbf{u})] \quad (4-15)$$

sendo  $\mathbf{K}$  a matriz de rigidez e  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$  o vetor de deslocamentos com relação às coordenadas locais. Os termos entre colchetes de (4-13) e de (4-15) é a forma quadrática de  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{K}$  respectivamente. Como  $\mathbf{M}$  é função de parâmetros ligados à inércia ao movimento, esta matriz é denominada matriz de massa. Por (4-12) podemos verificar que  $\mathbf{M}$  é simétrica e da própria definição de energia cinética sabemos que esta jamais pode assumir valores negativos; concluímos, então, que a forma quadrática de  $\mathbf{M}$  deve sempre ser positiva, o que resulta em  $\mathbf{M}$  ser positiva definida.

### 3.1 Formulação do Elemento

Neste trabalho, o elemento a ser utilizado na discretização é um elemento do tipo plano triangular onde os graus de liberdade são deslocamentos de translação no plano do elemento e

normal a ele (sistema de coordenadas ortonormal) e rotação em torno dos eixos paralelos à superfície plana.



**Figura (4-1):** Sistema de coordenadas espaciais para os deslocamentos.

Tais deslocamentos são justificados pelo desenvolvimento abaixo relativo ao cisalhamento.

Desenvolvendo a função de estado  $\mathbf{u}$  em série de Taylor em torno de  $z = 0$  e desprezando os termos de segunda ordem em diante, temos:

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_0 + z \nabla(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})(z = 0) \quad (4-16)$$

sendo  $\mathbf{k}$  o versor na direção de  $z$ .

Admitindo que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} &\cong 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} &\cong \theta_y \\ \frac{\partial w}{\partial y} &\cong -\theta_x \end{aligned} \quad (4-17)$$

este resultado fica

conhecido por Teoria de Deformação de Cisalhamento de Primeira Ordem (Reissner/ Mindlin), segundo K. H. Lo, R. M. Christensen e E. M. Wu (1977); A. Chate e K. Makinen (1994); A. K. Ghosh e S. S. Dey (1992); J. N. Reddy (1984) e Tapia (1998). Por tal teoria, os nós são passíveis

de até 5 graus de liberdade. Como na expressão da energia cinética está presente o quadrado da norma da velocidade, temos:

$$(\dot{u})^2 = (\dot{u}_0)^2 + 2[\mathbf{u}_0 \cdot \nabla(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})] + [\nabla(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})]^2 \quad (4-18).$$

Definindo um novo vetor de deslocamentos como segue:

$$\delta^t = [u_0 \ v_0 \ w_0 \ \theta_x \ \theta_y] \quad (4-19),$$

podemos escrever (4-18) como uma forma quadrática em  $\delta$  :

$$\dot{\delta}^t \mathbf{A} \dot{\delta} = [\dot{u}_0 \ \dot{v}_0 \ \dot{w}_0 \ \dot{\theta}_x \ \dot{\theta}_y] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -z & 0 & z^2 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 & z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_0 \\ \dot{v}_0 \\ \dot{w}_0 \\ \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \end{bmatrix} \quad (4-20)$$

Note que A é função apenas de z. Admitindo que cada laminado de compósito tenha massa específica uniforme, temos:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\delta}^t \mathbf{A} \dot{\delta} dV = \frac{1}{2} \int_A \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \dot{\delta}^t [\rho \mathbf{A}] \dot{\delta} dz dA = \frac{1}{2} \int_A \dot{\delta}^t \left[ \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \mathbf{A} dz \right] \dot{\delta} dA \quad (4-21)$$

$$I_0 = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \mathbf{A} dz = \sum_{i=1}^n \left[ \rho_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \mathbf{A} dz \right] \quad (n: \text{número de lâminas}) \quad (4-22).$$

$$I_0 = \sum_{i=1}^n \rho_i \begin{bmatrix} h_{i+1} - h_i & 0 & 0 & 0 & \frac{h_{i+1}^2 - h_i^2}{2} \\ 0 & h_{i+1} - h_i & 0 & \frac{h_i^2 - h_{i+1}^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & h_{i+1} - h_i & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_i^2 - h_{i+1}^2}{2} & 0 & \frac{h_{i+1}^3 - h_i^3}{3} & 0 \\ \frac{h_{i+1}^2 - h_i^2}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{h_{i+1}^3 - h_i^3}{3} \end{bmatrix} \quad (4-23).$$

No caso presente, estamos trabalhando com elementos triangulares de 7 nós onde temos um nó central com um grau de liberdade (deslocamento  $w_0$ ) e os outros 5 graus de liberdade ( $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ ,  $\theta_x$  e  $\theta_y$ ). Segundo KOSMATKA, 1992, ao mapearmos um elemento triangular genérico por um elemento isoparamétrico, temos:

$$x = \mathbf{H}_q \mathbf{X} \quad (4-24),$$

sendo:

$$\mathbf{H}_q = [\zeta_1(2\zeta_1-1) \quad \zeta_2(2\zeta_2-1) \quad \zeta_3(2\zeta_3-1) \quad 4\zeta_1\zeta_2 \quad 4\zeta_2\zeta_3 \quad 4\zeta_1\zeta_3] \quad (4-25),$$

$$\mathbf{X} = [X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4 \quad X_5 \quad X_6] \text{ (vetor das coordenadas x locais)} \quad (4-26)$$

e

$$\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = 1 \quad (4-27).$$

Ainda segundo KOSMATKA, 1992, através de processos de condensação estática pode-se mostrar que:

$$w = \mathbf{H}_3 \mathbf{W}^* + \mathbf{H}_1 \Theta_x + \mathbf{H}_2 \Theta_y \quad (4-28)$$

sendo

$$\mathbf{W}^{*t} = [W_1 \quad W_2 \quad W_3 \quad W_4 \quad W_5 \quad W_6 \quad W_{13}] \quad (4-29)$$

(o nó 13 é remanescente do elemento original de 13 nós anterior à condensação estática),

$$\Theta_x^t = [\Theta_{x1} \quad \Theta_{x2} \quad \Theta_{x3} \quad \Theta_{x4} \quad \Theta_{x5} \quad \Theta_{x6}] \quad (4-30),$$

$$\Theta_y^t = [\Theta_{y1} \ \Theta_{y2} \ \Theta_{y3} \ \Theta_{y4} \ \Theta_{y5} \ \Theta_{y6}] \quad (4-31)$$

(os vetores anteriores referem-se a deslocamentos dos nós do elemento em coordenadas locais),

$$H_1' = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\zeta_1 [b_2\zeta_3(\zeta_3 - \zeta_1) + b_3\zeta_2(\zeta_1 - \zeta_2)] \\ \frac{1}{3}\zeta_2 [b_1\zeta_3(\zeta_2 - \zeta_3) + b_3\zeta_1(\zeta_1 - \zeta_2)] \\ \frac{1}{3}\zeta_3 [b_1\zeta_2(\zeta_2 - \zeta_3) + b_2\zeta_1(\zeta_3 - \zeta_1)] \\ \frac{2}{3}b_3\zeta_1\zeta_2(\zeta_2 - \zeta_1) \\ \frac{2}{3}b_1\zeta_2\zeta_3(\zeta_3 - \zeta_2) \\ \frac{2}{3}b_2\zeta_1\zeta_3(\zeta_1 - \zeta_3) \end{bmatrix}, H_2' = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\zeta_1 [a_2\zeta_3(\zeta_1 - \zeta_3) + a_3\zeta_2(\zeta_2 - \zeta_1)] \\ \frac{1}{3}\zeta_2 [a_1\zeta_3(\zeta_3 - \zeta_2) + a_3\zeta_1(\zeta_2 - \zeta_1)] \\ \frac{1}{3}\zeta_3 [a_1\zeta_2(\zeta_3 - \zeta_2) + a_2\zeta_1(\zeta_1 - \zeta_3)] \\ \frac{2}{3}a_3\zeta_1\zeta_2(\zeta_1 - \zeta_2) \\ \frac{2}{3}a_1\zeta_2\zeta_3(\zeta_2 - \zeta_3) \\ \frac{2}{3}a_2\zeta_1\zeta_3(\zeta_3 - \zeta_1) \end{bmatrix},$$

$$H_3' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\zeta_1(3\zeta_1 - 2)(3\zeta_1 - 1) + 3\zeta_1^2(\zeta_2 + \zeta_3) - \frac{1}{2}\zeta_1[\zeta_2(3\zeta_2 + 1) + \zeta_3(3\zeta_3 + 1)] \\ \frac{1}{2}\zeta_2(3\zeta_2 - 2)(3\zeta_2 - 1) + 3\zeta_2^2(\zeta_1 + \zeta_3) - \frac{1}{2}\zeta_2[\zeta_1(3\zeta_1 + 1) + \zeta_3(3\zeta_3 + 1)] \\ \frac{1}{2}\zeta_3(3\zeta_3 - 2)(3\zeta_3 - 1) + 3\zeta_3^2(\zeta_1 + \zeta_2) - \frac{1}{2}\zeta_3[\zeta_1(3\zeta_1 + 1) + \zeta_2(3\zeta_2 + 1)] \\ \zeta_1\zeta_2(12\zeta_1 - 8 + 12\zeta_2) \\ \zeta_3\zeta_2(12\zeta_2 - 8 + 12\zeta_3) \\ \zeta_1\zeta_3(12\zeta_1 - 8 + 12\zeta_3) \\ 27\zeta_1\zeta_2\zeta_3 \end{bmatrix} \quad (4-32)$$

sendo

$$a_1 = X_3 - X_1, \ a_2 = X_1 - X_3, \ a_3 = X_2 - X_1, \ b_1 = Y_3 - Y_2, \ b_2 = Y_1 - Y_3 \ e \ b_3 = Y_2 - Y_1 \quad (4-33).$$

Pelo que foi visto acima, podemos dizer que:

$$\delta = \mathbf{H}^* \Delta^* \quad (4-34)$$

sendo

$$\mathbf{H}^* = \begin{bmatrix} H_q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_3 & H_1 & H_2 \\ 0 & 0 & 0 & H_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_q \end{bmatrix} \quad (4-35),$$

$$\Delta^{*t} = [\mathbf{U}^t \quad \mathbf{V}^t \quad \mathbf{W}^{*t} \quad \Theta_x^t \quad \Theta_y^t] \quad (4-36)$$

sendo

$$\mathbf{U}^t = [U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad U_4 \quad U_5 \quad U_6] \quad (4-37)$$

e

$$\mathbf{V}^t = [V_1 \quad V_2 \quad V_3 \quad V_4 \quad V_5 \quad V_6] \quad (4-38).$$

A expressão da energia cinética fica como segue abaixo:

$$T = \frac{1}{2} \int_A \dot{\delta}^t \mathbf{I}_0 \delta^t dA = \frac{1}{2} \int_A \dot{\Delta}^{*t} \mathbf{H}^{*t} \mathbf{I}_0 \mathbf{H}^* \Delta^* dA = \frac{1}{2} \dot{\Delta}^{*t} \left[ \int_A \mathbf{H}^{*t} \mathbf{I}_0 \mathbf{H}^* dA \right] \dot{\Delta}^* = \frac{1}{2} \dot{\Delta}^{*t} \mathbf{M} \dot{\Delta}^* \quad (4-39),$$

$$\mathbf{M} = \int_A \mathbf{H}^{*t} \mathbf{I}_0 \mathbf{H}^* dA \quad (\text{matriz de massa do problema}) \quad (4-40).$$

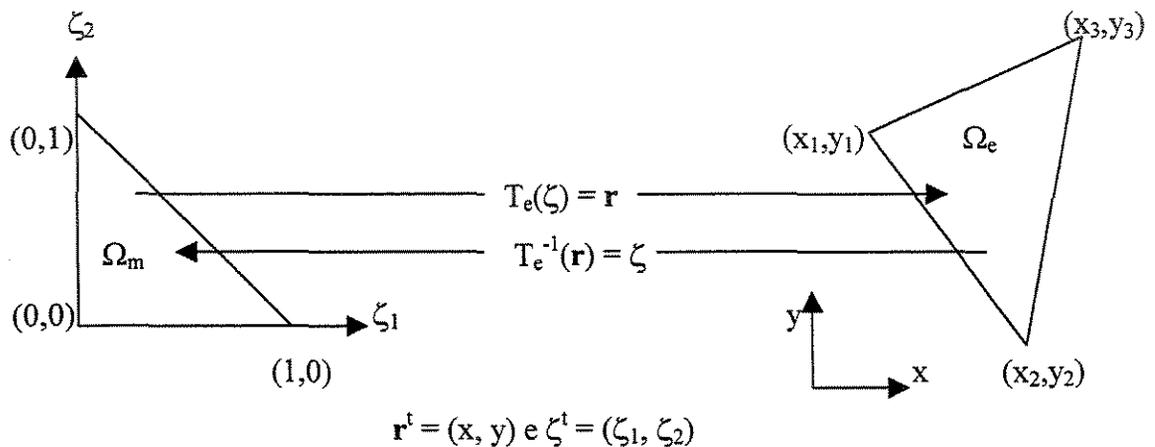
O próximo passo é resolver a integral numericamente fazendo uso da quadratura Gaussiana.

### 3.1.1 Quadratura Gaussiana

A quadratura Gaussiana é um método de integração numérica que, como a maioria, baseia-se em interpolação polinomial do integrando, o que resulta em expressões do tipo:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i) w_i \quad (4-41)$$

sendo  $a \leq x_i \leq b$  e  $w_i$  o peso associado. A definição dos pontos de interpolação e dos pesos definem cada um dos métodos de integração numérica. Na quadratura Gaussiana os pontos de interpolação são as raízes dos polinômios utilizados na integração. No caso do polinômio interpolador ser de grau  $n$ , a integração será exata para polinômios de ordem  $2n + 1$ . Ao aplicar a quadratura costuma-se mapear os elementos por um elemento denominado mestre com a devida mudança para coordenadas adimensionais.



**Figura (4-2):** Exemplo de mapeamento de elemento mestre a um elemento genérico.

Pode-se provar que:

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{f}(\mathbf{r}) d\Omega = \int_{\Omega_m} \frac{1}{2} \mathbf{f}(\zeta) |\mathbf{J}| d\zeta_1 d\zeta_2 \quad (4-42)$$

sendo  $\mathbf{J}$  a matriz Jacobiana. A quadratura deverá ser aplicada ao elemento mestre:

$$\int_{\Omega_m} \frac{1}{2} \mathbf{f}(\zeta) |\mathbf{J}| d\zeta_1 d\zeta_2 \cong \sum_{i=1}^{n_p} \frac{1}{2} \mathbf{f}(\zeta_{1i}, \zeta_{2i}) |\mathbf{J}_i| w_i \quad (4-43)$$

Segundo Kosmatka, 1992, a matriz Jacobiana para este caso pode ser expressa por :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial x}{\partial \zeta_3} & \frac{\partial y}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial y}{\partial \zeta_3} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial x}{\partial \zeta_3} & \frac{\partial y}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial y}{\partial \zeta_3} \end{bmatrix} \quad (4-44).$$

#### 4 Conclusão

A modelagem por Elementos Finitos é o gancho entre o problema contínuo e o discreto onde definem-se as matrizes (rigidez e massa) e o vetor de cargas. Procuramos esclarecer esta modelagem com este capítulo adicional.

## 5 Exemplos

### 1 Introdução

Alguns exemplos presentes em KOSMATKA, 1992, PALERMO JR. & SIMÕES, 2001 e BRUCH, 1973 foram executados para fins de comparação com os resultados destes. Neste capítulo estão expostos os exemplos tratados neste trabalho.

### 2 Exemplo I

Este exemplo foi extraído de KOSMATKA,1992. Consiste de uma placa triangular de aço engastada em uma das bordas e livre no resto conforme a figura (2-1):

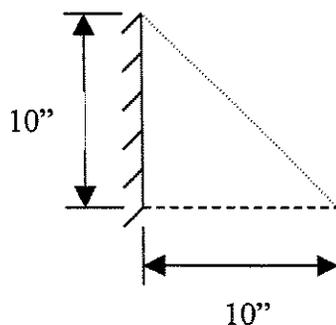


Figura (5-1): Placa do exemplo I

Dados do material:

$$E = 3 \times 10^7 \text{ Psi};$$

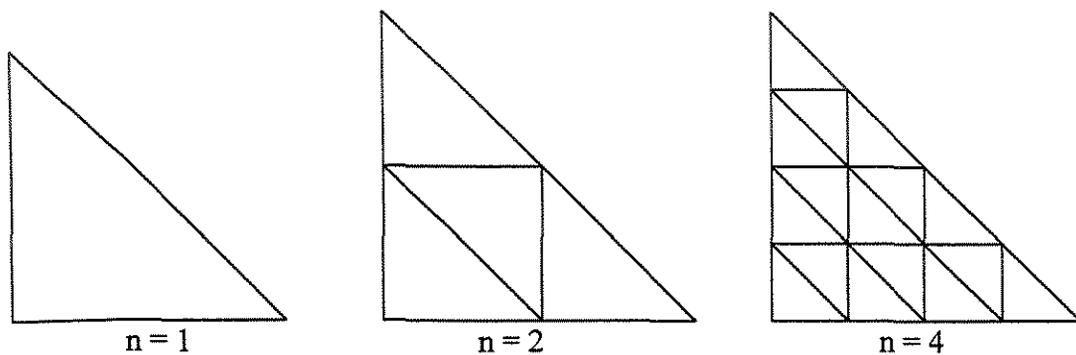
$$G = 12 \times 10^6 \text{ Psi};$$

$$\nu = 0,2750;$$

$$\rho = 0,283 \text{ lb/in}^3;$$

$$h = 0,061 \text{ in.}$$

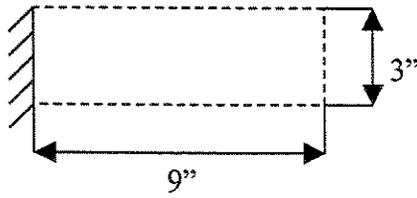
Este exemplo foi testado com as seguintes discretizações:



**Figura (5-2):** Discretizações da placa

### 3 Exemplo II

Este exemplo, como o anterior, foi extraído de KOSMATKA, 1992. Trata-se de uma placa retangular laminada (composta de 20 lâminas) engastada em uma das bordas e livre no resto como disposto na figura abaixo:



**Figura (5-3):** Placa do exemplo II

Dados do material (grafite/ epoxi):

$$E_L = 22,43 \times 10^6 \text{ Psi};$$

$$E_T = 1,45 \times 10^6 \text{ Psi};$$

$$G_{LT} = 9,17 \times 10^5 \text{ Psi};$$

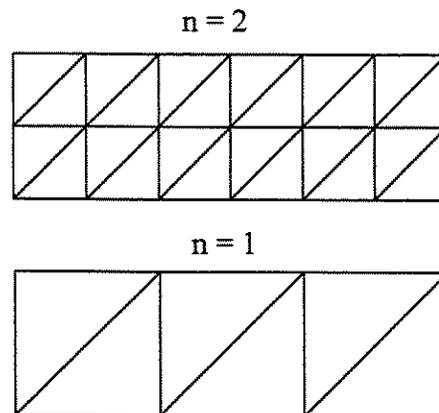
$$\nu_{LT} = 0,250;$$

$$\nu_{TT} = 0,400;$$

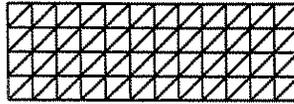
$$\rho = 0,05781 \text{ lb/in}^3;$$

$$h = 0,005 \text{ in.}$$

A discretização proposta apresenta-se na figura (3-2):



**Figura (5-4):** Discretizações do exemplo II para  $n = 1$  e  $n = 2$



**Figura (5-5):** Discretização para  $n = 4$

#### 4 Exemplo III

Este exemplo foi extraído de PALERMO & SIMÕES, 2001. Trata-se de uma placa quadrada de 2m de lado com todos os lados apoiados onde foi aproveitada a propriedade de dupla simetria na primeira discretização apresentada na figura (4-1). Suas características são:

$$E = 2,05 \times 10^{11} \text{ Pa};$$

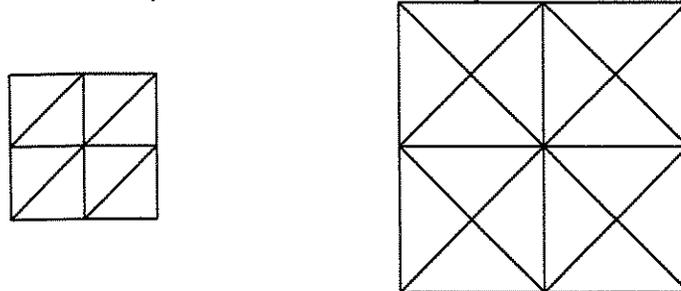
$$G = 78.846.153.846,2 \text{ Pa};$$

$$\nu = 0,3;$$

$$\rho = 7.850 \text{ kg/m}^3;$$

$$h = 0,06 \text{ m}.$$

As discretizações adotadas nas simulações feitas via LAMIST são as seguintes:



**Figura (5-6):** Discretizações do exemplo III

## 5 Exemplo IV

Este exemplo foi extraído de BRUCH, 1973. Trata-se de uma placa quadrada de 5,0m de lado simplesmente apoiada. Suas características são:

$$E = 2,1 \times 10^6 \text{ tf/m}^2;$$

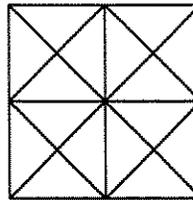
$$G = 889.830,508475 \text{ tf/m}^2;$$

$$\nu = 0,18;$$

$$\rho = 0,245 \text{ ts}^2 / \text{m}^4;$$

$$h = 0,1 \text{ m.}$$

A discretização adotada é ilustrada na figura (5-1):



**Figura (5-7):** Discretização do exemplo IV

## 6 Conclusão

A seleção de tais exemplos atende a objetivos específicos. O primeiro exemplo, extraído de KOSMATKA, 1992, serve para ilustrar o impacto do refinamento da discretização nos resultados (teste de convergência). O segundo, também extraído de KOSMATKA, 1992, testa o desempenho para o caso de placas com mais de uma lâmina. O terceiro exemplo, extraído de PALERMO JR. & SIMÕES, 2001, objetiva-se a aplicação da metodologia a exemplos abordados sobre outra ótica (elementos de contorno) e confrontar os resultados do LAMIST com os do trabalho citado acima e teóricos. Uma observação que deve ser feita é a de que a simulação feita neste ultimo exemplo por PALERMO JR. & KLAFKE, 2000 dividia a viga em oito elementos justificando-se assim a forma de discretização proposta no presente trabalho.

## 6 Resultados

### 1 Introdução

São apresentados aqui os resultados dos exemplos citados no capítulo anterior confrontados com os obtidos pelas fontes dos exemplos (KOSMATKA, 1992, PALERMO JR. & SIMÕES, 2001 e BRUCH, 1973). São comparados os valores das menores frequências naturais.

### 2 Resultado I

Abaixo está a tabela (7-1) com os valores das seis primeiras frequências naturais em Hz obtidas juntamente com os valores de KOSMATKA, 1994:

	<i>n=1</i>		<i>n=2</i>		<i>n=4</i>		<i>experimental</i>
1	39,26	39,25692	37,53	37,73361	36,8	37,76558	34,5
2	173,8	174,865	153,5	154,2863	143,3	144,2575	136
3	350,9	353,1779	231,8	232,7049	200,7	201,2431	190
4	3.408	3.436,292	440,1	442,5095	356,0	357,7286	325
5	-----	7.111,934	856,1	859,5098	509,5	511,6886	441
6	-----	10.443,77	1.039,0	1.044,519	677,0	680,3211	578

**Tabela (6-1):** Valores das frequências naturais (Hz) do exemplo I.

Para cada “n” são apresentadas duas colunas. Nas colunas à esquerda são apresentados os valores de KOSMATKA, 1994 e à direita, os valores obtidos no presente trabalho. Os valores experimentais foram extraídos de KOSMATKA, 1994.

### 3 Resultado II

Os resultados das frequências naturais em Hz para o segundo exemplo de KOSMATKA, 1992 para  $n = 1$  estão na tabela (7-2) abaixo (Kosmatka, LAMIST e experimental):

	<i>KOSMATKA, 1992</i>	<i>LAMIST</i>	<i>Experimental</i>
1	70,60	73,02848	69
2	279,7	258,7326	270
3	437,9	455,6538	427
4	952,8	896,7102	890
5	1.227,2	1.275,509	1.155
6	1.614,4	1.549,618	1.426
7	1.787	1.806,920	-----
8	2.016,9	1.924,532	1.738

**Tabela (6-2):** Frequências Naturais do exemplo II para  $n = 1$  segundo Kosmatka, LAMIST e experimental.

Os resultados experimentais são extraídos de KOSMATKA, 1994.

	<i>KOSMATKA, 1992</i>	<i>LAMIST</i>	<i>Experimental</i>
1	70,15	72,84673	69
2	272,4	252,4146	270
3	434,7	453,6366	427
4	898,9	847,5839	890
5	1.202,1	1.247,686	1.155
6	1.387,5	1.332,494	1.426
7	1.739,6	1.713,925	-----
8	1.770,3	1.760,135	1.738

**Tabela (6-3):** Frequências Naturais do exemplo II para  $n = 2$  segundo Kosmatka, LAMIST e experimental.

	<i>KOSMATKA, 1992</i>	<i>LAMIST</i>	<i>Experimental</i>
1	70,0	86,41910	69
2	271,5	335,1345	270
3	433,8	399,3535	427
4	888,3	838,7531	890
5	1.196,5	1.242,617	1.155
6	1.370,9	1.318,919	1.426
7	1.730,3	1.686,388	-----
8	1.737,1	1.749,94	1.738

**Tabela (6-4):** Frequências Naturais do exemplo II para  $n = 4$  segundo Kosmatka, LAMIST e experimental.

#### 4 Resultado III

Este exemplo foi extraído de PALERMO JR. & SIMÕES, 2001. Os resultados da primeira discretização (figura (4-1)) são apresentados na tabela (7-5) e da segunda na (7-6) (todas as frequências deste exemplo estão expressas em rad/s):

	<i>PALERMO JR.</i>	<i>Frequências teóricas</i>	<i>LAMIST</i>
1	459,02	457,88	457,1267
2	1.153,90	1.144,70	2.293,855
3	1.153,90	1.144,70	2.310,276
4	1.855,13	1.831,52	4.427,774
5	2.329,40	2.289,40	-----
6	2.320,40	2.289,40	-----
7	3.038,84	2.976,22	-----
8	3.038,88	2.976,22	-----
9	4.000,24	3.891,98	-----
10	4.000,25	3.891,98	-----
11	4.238,08	4.120,92	-----

**Tabela (6-5):** Resultados da 1ª discretização do exemplo III entre LAMIST, Palermo Jr. e teórico

Os resultados de PALERMO JR. & SIMÕES, 2001 referem-se à discretização de 512 células.

	<i>PALERMO JR.</i>	<i>Frequências teóricas</i>	<i>LAMIST</i>
1	459,02	457,88	458,0980
2	1.153,90	1.144,70	1.170,787
3	1.153,90	1.144,70	1.170,787
4	1.855,13	1.831,52	1.824,126
5	2.329,40	2.289,40	2.497,433
6	2.320,40	2.289,40	2.570,597
7	3.038,84	2.976,22	3.337,126
8	3.038,88	2.976,22	3.337,127
9	4.000,24	3.891,98	4.641,352
10	4.000,25	3.891,98	4.641,356
11	4.238,08	4.120,92	4.891,581

**Tabela (6-6):** Resultados da 2<sup>o</sup> discretização do exemplo III entre LAMIST, Palermo Jr. e teórico

## 5 Resultado IV

Na tabela (7-7) são apresentadas as frequências naturais (em rad/s) obtidas por BRUCH, 1973 com uma malha de 8 x 8 células, os valores teóricos apresentados pelo mesmo e os valores obtidos via LAMIST:

	<i>BRUCH</i>	<i>Teórico</i>	<i>LAMIST</i>
1	66,875	67,838	68,00992
2	167,135	169,597	174,6101
3	262,653	271,355	272,0895
4	331,54	339,194	375,1330

**Tabela (6-7):** Frequências naturais obtidas por BRUCH, LAMIST e teóricas

## **6 Conclusão**

Os resultados evidenciam um bom desempenho do elemento quando confrontado com outros resultados. Os testes mostram, porém, que os resultados divergem a partir de um certo refinamento da malha. Tal ocorrência deve-se ao aumento do erro numérico a ponto de tornar-se preponderante sobre o erro teórico de aproximação do MEF.

## 7 Conclusões e Propostas de Trabalho

Pelo observado nos resultados (capítulo 7), o elemento obteve um bom desempenho. Seus resultados são bastante próximos dos valores teóricos de frequências naturais obtidos em outros trabalhos. Com o aumento das frequências, o erro vai aumentando. A razão dos valores não coincidirem com os de KOSMATKA,1992 devem-se ao tipo de integração adotado além de erros de precisão computacional.

A grande dificuldade neste trabalho (que levou a um excessivo consumo de tempo) foi a alteração de código de um programa original (LAMIST). Tal opção mostrou-se extremamente contraproducente. O código não estava estruturado o que tornava difícil a compreensão do que havia sido implementado. Isto acabou por gerar muitas idas e vindas no trabalho. O grande “gargalo” do trabalho foi a confecção do código. Muita coisa referente ao que já estava implementado acabou por ser alterada.

Uma forma de evitar os problemas descritos acima seria através da mudança de paradigma. A adoção da filosofia da Orientação a Objetos é de grande valia para projetos executados a muitas mãos como é o caso. Além de disciplinar o processo de programação, encapsula o que já está implementado poupando o programador de precisar entender módulos pré-existentes. A sugestão não consiste de migrar de uma linguagem estruturada (no caso o FORTRAN) para uma Orientada a Objetos mas apenas mudar a filosofia de programação (mantendo a mesma linguagem).

Com relação a propostas de trabalhos futuros poderia citar:

- 1) implementação da matriz de amortecimento proposta por QIAN, 1998;
- 2) otimizar a solução do autoproblema com vista a aumentar a velocidade de execução;
- 3) tratar o problema não-homogêneo no domínio do tempo via integração neste ( vide soluções completas no capítulo 3);
- 4) implementar a análise dinâmica (incluindo os itens (1), (2) e (3)) às cascas.

Pensando nesta continuidade muitos dos modelos matemáticos necessários (como o tratamento de sistemas não-homogêneos amortecidos) foram apresentados no presente trabalho. O passo seguinte seria a formulação da matriz de amortecimento  $\mathbf{C}$  via capacidade de amortecimento específica (QIAN, 1998) para o elemento proposto.

## Referências Bibliográficas

- 1.- **Tapia, L. G. S.** *Análise de Placas Laminadas de Materiais Compósitos pelo Método dos Elementos Finitos*. Dissertação de Mestrado, Campinas, Brasil. 1998.
- 2.- **Loula, A. e Galeão, A. C.** *Vibrações de Sistemas Elásticos Lineares*. Publicação Didática, Rio de Janeiro, Brasil. 1976.
- 3.- **Kosmatka, J. B.** *An Accurate Shear-Deformable Six-Node Triangular Plate Element for Laminated Composite Structures*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 37, 431-455, U.S.A.. 1994.
- 4.- **Lo, K. H., Christensen, R. M. and Wu, E. M.** *A High-Order Theory of Plate Deformation*. Journal of Applied Mechanics, U.S.A.. 1977.
- 5.- **Chate, A. and Mäkinen, K.** *Plane Finite Element for Static and Free Vibration Analysis of Sandwich Plates*. Mechanics of Composite Materials, vol. 30, no. 2. 1994.
- 6.- **Ghosh, A. K. and Dey, S. S.** *A Simple Finite Element for the Analysis of Laminated Plates*. Computer & Structures, vol. 44, no. 3. pp.585-596, India. 1992.
- 7.- **Reddy, J. N.** *A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates*. Journal of Applied Mechanics, vol. 51. 1984.
- 8.- **Guadalupe, U. B.** *Análise Dinâmica de Edifícios*. Campinas. 1993.
- 9.- **Xiang, Y., Liew, K. M. and Kitipornchai, S.** *Transverse Vibration of Thick Annular Sector Plates*. Journal of Engineering Mechanics, vol. 119, no. 8. 1993.
- 10.- **Ohga, M. and Shigematsu, T.** *Large Deformation Dynamic Analysis of Plates*. Journal of Engineering Mechanics, vol. 114, no. 4. 1988.
- 11.- **Jones, A. T. and Grant, J. E.** *Generation and Properties of Banded Viscous Damping Matrices*. Computers & Structures, vol. 3, pp. 1037-1051. 1973.
- 12.- **Wilson, E. L. and Penzien, J.** *Evaluation of Orthogonal Damping Matrices*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 4, 5-10. 1972.
- 13.- **Panda, S. C. and Natarajan, R.** *Finite Element Analysis of Laminated Composite Plates*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 14, 69-79. 1979.
- 14.- **Ewins, D. J.** *Modal Testing: Theory and Practice*. John Wiley & Sons. 1984.

- 15.- **Cook, R. D.; Malkus, D. S. and Plesha, M. E.** *Concepts and Applications of Finite Element Analysis.*
- 16.- **Cordovil, A. G. D. P.** *Análise Dinâmica de Colunas de Perfuração via Superposição Modal.* Dissertação de Mestrado. Campinas. 1991.
- 17.- **Ogata, M.** *Engenharia de Controle Moderno.* Prentice-Hall. 1997.
- 18.- **Boyce, W. E. e DiPrima, R. C.** *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.* Guanabara Koogan, 5<sup>o</sup> edição, Rio de Janeiro. 1994.
- 19.- **Moura, C. A., Kubrusly, R. S. e Kritz, M. V.** *Elementos Finitos e Aplicações à Mecânica dos Fluidos.* V Escola de Matemática Aplicada. Rio de Janeiro. 1984.
- 20.- **Becker, E. B.; Carey, G. F. and Oden, J. T.** *Finite Element: An Introduction.* Prentice-Hall. 1981.
- 21.- **Simões, R. e Palermo Jr, L.** *O Cálculo das Menores Frequências Naturais em Placas Usando o Método dos Elementos de Contorno.* 2001.
- 22.- **Inman, D. J.** *Engineering Vibration.* Prentice-Hall. 1996.
- 23.- **Thomson, W. T. e Dahleh, M. D.** *Theory of Vibration with Applications.* Prentice-Hall. 1998.
- 24.- **Klafke, M. A. C. e Palermo Jr., L.** *Um Estudo Sobre a Vibração em Vigas Utilizando o Método dos Elementos Finitos.* Relatório de Iniciação Científica à FAPESP. 2000.
- 25.- **Bruch, Y. A.** *Análise Dinâmica de Placas pelo Método dos Elementos Finitos.* Dissertação de Mestrado. 1973.
- 26.- **Bathe, K. J.** *Finite Element Procedures.* Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA. 1996.
- 27.- **Qian, G. L., Hoa, S. V. e Xiao, X.** *A New Rectangular Plate Element for Vibration Analysis of Laminated Composites.* Journal of Vibration and Acoustics. January 1998.
- 28.- **Oliveira, E. C. e Rodrigues, W. A.** *Variáveis Complexas.* Coleção IMECC. Volume I. 1999.
- 29.- **Lathi, B. P.** *Sistemas de Comunicação.* Guanabara. 1987.
- 30.- **Ássy, T. M.** *Mecânica dos Fluidos.* Plêiade. São Paulo. 1996.

- 31.- **Gurtin, M. E.** *An Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press. 1981.
- 32.- **Farrer, H.** et al. *Fortran Estruturado*. Guanabara Koogan.
- 33.- **Cardelli, R. A.** *Uma Análise das Soluções Fundamentais Aplicáveis às Placas Espessas pela Teoria de Reissner e Mindlin e suas Relações com a Teoria Clássica para o Uso no Método dos Elementos de Contorno*. Dissertação de Mestrado. 2001.

## Apêndice

### Sistemas Dinâmicos Discretos

#### 1 Modelagem Matemática de Sistemas Dinâmicos Discretos

Observação: no presente texto, salvo menção em contrário, as funções em negrito referem-se a tensores de primeira e segunda ordens (vetores e matrizes respectivamente); as outras, a escalares (tensores de ordem zero) e a expressão sistemas dinâmicos discretos referem-se ao espaço pois neste texto o sistema é contínuo no tempo.

Os métodos clássicos de análise de sistemas dinâmicos discretos consistem em determinar as equações que modelam o sistema ( $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ ) através de relações diferenciais incluindo suas condições iniciais ( $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0)$ ,  $\mathbf{y}'_0 = \mathbf{y}'(t_0)$ , ...,  $\mathbf{y}^{(p-1)}_0 = \mathbf{y}^{(p-1)}(t_0)$ ). Dizemos que um sistema dinâmico é discreto se o número de variáveis que definem o estado é finito.

Usualmente, os métodos empregados são baseados nos chamados métodos variacionais (Equações de Euler-Lagrange) para a determinação das equações diferenciais de estado. Dado um problema, define-se uma base  $\alpha = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_j, \dots, \mathbf{y}_m]$  para o espaço de estados ( $j=1, \dots, n$ : dimensão do espaço de estados). Aplica-se, então, o Princípio de Hamilton de forma que tenhamos uma expressão do tipo:

$$\delta \int_0^t (L + W_{nc}) dt = 0 \quad (1)$$

sendo o campo escalar  $L = L(\mathbf{y})(\mathbf{y}^t = (y_1, \dots, y_i, \dots, y_m))$  conhecido como Lagrangeano,  $W_{nc} = \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{y}$  é o trabalho das forças não-conservativas e a integral é aplicada a todo o domínio  $\Omega$ ,  $\mathbf{Q}^t =$

$(Q_1, \dots, Q_i, \dots, Q_m)$  e  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t)$  é a chamada força generalizada e  $(\delta \mathbf{y})^t = (\delta y_1, \dots, \delta y_i, \dots, \delta y_m)$ . Com a formulação de Hamilton, pode-se aplicar as Equações de Lagrange dadas a seguir:

$$\sum_{j=0}^p \left[ (-1)^j \frac{d^{p-j}}{dt^{p-j}} \left( \frac{\partial L}{\partial y_i^{(p-j)}} \right) \right] = Q_i \quad i = 1, \dots, m \quad (2)$$

sendo

$$y_i^{(p-j)} = \frac{d^{(p-j)} y_i}{dt^{(p-j)}} \quad (3).$$

Aplicando as equações acima, chega-se em algo do tipo:

$$\mathbf{y}^{(p)} = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \dots, \mathbf{y}^{(p+1)}, \mathbf{Q}) \quad \text{c.i.: } \mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0), \quad \mathbf{y}'_0 = \mathbf{y}'_0(t_0), \quad \dots, \quad \mathbf{y}_0^{(p-1)} = \mathbf{y}^{(p-1)}(t_0) \quad (4)$$

sendo c.i. as condições iniciais.

Existe uma propriedade dos sistemas de equações diferenciais que estabelece que qualquer sistema onde seja possível isolar a derivada de maior ordem pode ser transformado em um sistema de primeira ordem. A utilidade de tal procedimento é a de padronizar o formato do sistema para facilitar o emprego de um eventual método de resolução numérica (por exemplo o método de Runge-Kutta que é empregado em pacotes computacionais como o MATLAB). É o que é feito a seguir.

Fazendo :

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \text{ e } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (5)$$

ficamos com

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$$

$$\text{c.i.: } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (6)$$

sendo esta denominada equação de estado.

Em sistemas dinâmicos, a chamada função de saída ( $\mathbf{u}$  é a função de entrada) geralmente pode ser obtida por outros métodos de acordo com o tipo de sistema que está sendo utilizado (note que foi usado um método variacional como exemplo para a obtenção da equação de estado devido à sua generalidade de aplicação). A função de saída é dada por:

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (7).$$

As equações (6) e (7) são chamadas equações na forma de estado.

Como exemplo, no caso de sistemas dinâmicos estruturais, que é o abordado neste trabalho, a função de entrada é dada pelo vetor de ações externas, a função de saída é o vetor de esforços solicitantes (cuja expressão pode ser obtida a partir da 2ª Lei de Newton) e o estado são os deslocamentos (cuja expressão pode ser obtida pelas equações de Lagrange).

### 1.1 Discussão Sobre Estabilidade de Sistemas

O próximo passo é determinarmos a condição estacionária, ou seja, determinarmos o(s) valor(es) de  $\mathbf{x}_e = \mathbf{x}$  para o qual verifica-se a expressão abaixo:

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_e, \mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (8).$$

É importante também definirmos a(s) região(ões) do espaço  $W$  para o qual seus pontos interiores, escolhidos como condição inicial, geram soluções que convergem para um dado equilíbrio (ou seja, um subdomínio de  $W$  para cada ponto estacionário  $\mathbf{x}_e$ ).

Determinado(s) este(s) valor(es), deve-se analisar a estabilidade do sistema na(s) vizinhança(s) deste(s) ponto(s). Uma possibilidade para proceder a essa análise é provocar um

pequeno deslocamento arbitrário em relação à sua condição estacionária e verificar o efeito resultante :

- 1) equilíbrio instável : as trajetórias, em  $W$ , divergem de  $x_e$  com o aumento de  $t$ , ou seja, a solução tende a afastar-se deste equilíbrio;
- 2) equilíbrio indiferente : o sistema permanece em regime estacionário na nova condição imposta;
- 3) equilíbrio estável : as trajetórias, em  $W$ , convergem para  $x_e$  com o aumento de  $t$ , ou seja, a solução tende a retornar ao equilíbrio.

O exemplo anterior é bastante elucidativo do ponto de vista físico, porém é pouco operacional matematicamente. Um método bastante consagrado para analisar a estabilidade de sistemas é o chamado Segundo Método de Liapunov, que permite-nos investigar a estabilidade sem a necessidade de solucionarmos a equação (em geral, a solução de equações não-lineares é muito difícil).

Definição: Dizemos que uma função escalar invariante no tempo  $V(x)$  é positiva - definida em um domínio  $\Omega$  ( $0 \in \Omega$ ) se :

$$V(x) > 0 \text{ e } V(0) = 0 \quad \forall x \in \Omega \text{ e } x \neq 0 \quad (9);$$

uma função  $V(t, x)$  é positiva - definida em  $\Omega$  se existir  $V(x)$ , como definida acima tal que :

$$V(t, x) > V(x) \text{ e } V(t, 0) = 0 \quad \forall t \geq t_0 \quad (10).$$

Uma função  $V(t, x)$  é definida negativa se  $-V(t, x)$  for positiva-definida.

Com as definições acima, podemos enunciar o Teorema da Estabilidade Principal de Liapunov.

Teorema: Dado um sistema cuja equação de estado seja dada por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (11)$$

sendo

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad \forall t \text{ real} \quad (12), \text{ se}$$

existir uma função escalar  $V(t, \mathbf{x})$  tal que:

- 1)  $V(t, \mathbf{x})$  é definida positiva;
- 2)  $\dot{V}(t, \mathbf{x})$  é definida negativa

então o equilíbrio na origem é uniforme e assintoticamente estável (OGATA, 1996).

No caso do sistema ser conservativo, as trajetórias não convergem para o ponto estacionário, mas descrevem trajetórias fechadas em  $W$ .

Pode ocorrer também de sistemas dinâmicos apresentarem comportamento caótico. Tal comportamento consiste em o sistema ser extremamente sensível às suas condições iniciais de tal forma que as regiões de convergência no espaço de estados confundem-se a tal ponto de compor uma geometria de natureza fractal. Fractais são entidades geométricas cuja definição mais aceita é a de que suas dimensões, dadas pela fórmula:

$$d = -\log_E(n) \quad (13)$$

sendo  $n$  é o número de partições e  $E$  é a escala são superiores às suas dimensões topológicas e inferiores às dimensões euclidianas do espaço em que estão imersos. Como sistemas caóticos são muito sensíveis às condições iniciais, os resultados gerados por processos numéricos têm pouco significado físico devido às incertezas associadas ao sistema e à sua solução e, neste caso, faz-se uma abordagem de natureza topológica do sistema, procurando classificá-lo em algum grupo de sistemas que tenham comportamento qualitativo semelhante.

## 1.2 Linearização de Sistemas

Supondo que a análise feita tenha concluído que o sistema é estável em um dado domínio do espaço  $W$ , o passo seguinte é estudar o comportamento da solução nas vizinhanças da condição estacionária. Admitindo ser  $f$  de classe  $C^1$  na vizinhança do ponto estacionário em questão, pode-se expandí-la em série de Taylor até os termos de primeira ordem em  $x$ :

$$f(t, x, u) \approx f(t, x_0, u) + [\text{grad}_x[f(t, x_0, u)]](x - x_0) = [\text{grad}_x[f(t, x_0, u)]](x - x_0) = A(x - x_0) \quad (14).$$

Expandindo os termos restantes em relação a  $u$  em torno de  $u_0 = 0$ , temos:

$$\begin{aligned} -[\text{grad}_x[f(t, x_0, u)]]x_0 &\approx -[\text{grad}_x[f(t, x_0, 0)]]x_0 - [\text{grad}_u[\text{grad}_x[f(t, x_0, 0)]]x_0]u = \\ = -[\text{grad}_u[\text{grad}_x[f(t, x_0, 0)]]x_0]u &= Bu \end{aligned} \quad (15).$$

Substituindo (14) e (15), temos a função linearizada:

$$f(t, x, u) = A(t) x(t) + B(t) u(t) \quad (16),$$

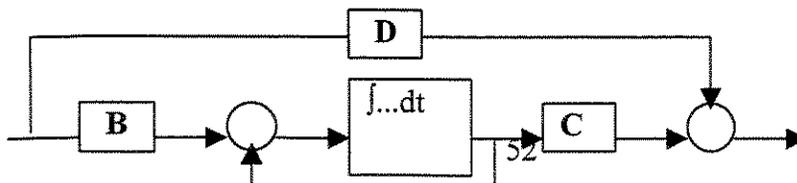
portanto:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ \text{condições iniciais: } x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (17).$$

Podemos utilizar procedimento análogo para a função de saída, tendo então:

$$y = Cx + Du \quad (18).$$

Nesta abordagem, incorporamos referências a OGATA (1996), porém optando por formular as expressões apenas através de matrizes quadradas e colunas (vetores), ao contrário deste que trabalha com matrizes retangulares. Através da representação de diagrama de blocos no domínio do tempo, temos:





**Figura (1):** Diagrama de blocos representando o sistema linearizado acima no domínio do tempo.

Temos, então, um sistema linear não-homogêneo onde  $u$  é dita função de entrada,  $y$  é a função de saída e  $x$  é a função de estado. Temos:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dB}{dt} = \frac{dC}{dt} = \frac{dD}{dt} = 0 \quad (19),$$

dizemos que o sistema é invariante no tempo. Supondo ser este o caso presente, podemos resolver o sistema com o auxílio da *Transformada de Laplace*.

### 1.3 Transformada de Laplace

As transformadas de funções são definidas da seguinte forma:

$$\mathbf{T}[f(t)] = \int_{\Omega} f(t)k(s,t)dt = \mathbf{F}(s) \quad (20)$$

sendo a função  $k(s,t)$  chamada de núcleo da transformada,  $f(t)$  é uma função real na variável  $t$  e  $\mathbf{F}(s)$  é uma função complexa na variável  $s$ .

No caso de termos:

$$k(s,t) = e^{-st} \quad (21),$$

e, definirmos o domínio de integração de 0 até  $+\infty$ , esta transformada é conhecida por Transformada de Laplace representada por  $L[f(t)]$ :

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (22).$$

A Transformada de Laplace possui uma série de propriedades que iremos destacando conforme necessidade oportuna. Como aplicação imediata da Transformada, temos a resolução de sistemas lineares. A Transformada de Laplace permite transformarmos um sistema linear (de equações diferenciais) em um sistema linear algébrico. Tal método de resolução é possível devido a duas propriedades: a linearidade da transformada e a diferenciação real.

a) Teorema: dados uma função  $f(t)$  e uma constante escalar 'a', temos:

$$L[af(t)] = aL[f(t)] \quad (23) \text{ e}$$

dados  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$ , temos:

$$L[f_1(t) + f_2(t)] = L[f_1(t)] + L[f_2(t)] \quad (24).$$

Prova:

$$L[af(t)] = \int_0^{\infty} af(t)e^{-st} dt = a \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = aL[f(t)] \quad (25).$$

Pode-se provar que o teorema acima também é válido para uma matriz constante ao invés de um escalar

$$\begin{aligned} L[f_1(t) + f_2(t)] &= \int_0^{\infty} [f_1(t) + f_2(t)]e^{-st} dt = \int_0^{\infty} [f_1(t)e^{-st} + f_2(t)e^{-st}] dt = \\ &= \int_0^{\infty} f_1(t)e^{-st} dt + \int_0^{\infty} f_2(t)e^{-st} dt = L[f_1(t)] + L[f_2(t)] \end{aligned} \quad (26).$$

b) Teorema: dada uma função  $f(t)$ , temos:

$$L[f'(t)] = sL[f(t)] - f(0) \quad (27).$$

Prova:

$$\mathbf{L}\left[\frac{d\mathbf{f}(t)}{dt}\right] = \int_0^{\infty} \frac{d\mathbf{f}(t)}{dt} e^{-st} dt \quad \frac{d\mathbf{f}(t)}{dt} dt = d\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{f}(t) \quad u = e^{-st} \Rightarrow du = -se^{-st} \quad (28)$$

$$\Rightarrow \mathbf{L}\left[\frac{d\mathbf{f}(t)}{dt}\right] = \left[e^{-st} \mathbf{f}(t)\right]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} \mathbf{f}(t) e^{-st} dt \Rightarrow \mathbf{L}\left[\frac{d\mathbf{f}(t)}{dt}\right] = s\mathbf{L}[\mathbf{f}(t)] - \mathbf{f}(0) \quad (29).$$

Estas propiedades da Transformada de Laplace são muito úteis para a resolução de sistemas dinâmicos lineares.

## 1.4 Resolução de Sistemas Dinâmicos Lineares com Coeficientes Constantes

### 1.4.1 Resolução por Transformada de Laplace

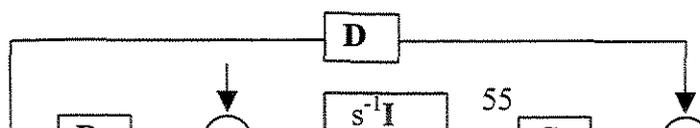
Arbitrando  $t_0 = 0$  e aplicando a Transformada em (17), temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}[\dot{\mathbf{x}}] &= \mathbf{L}[\mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}] \Rightarrow s \mathbf{L}[\mathbf{x}] - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A} \mathbf{L}[\mathbf{x}] + \mathbf{B} \mathbf{L}[\mathbf{u}] \Rightarrow s \mathbf{L}[\mathbf{x}] - \mathbf{A} \mathbf{L}[\mathbf{x}] = \mathbf{x}_0 + \mathbf{B} \mathbf{L}[\mathbf{u}] \Rightarrow \\ (s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{L}[\mathbf{x}] &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{B} \mathbf{L}[\mathbf{u}] \end{aligned} \quad (30).$$

Chamando  $\mathbf{L}[\mathbf{x}] = \mathbf{X}(s)$ : função de entrada no chamado domínio de Laplace,  $\mathbf{x}_0 + \mathbf{B} \mathbf{L}[\mathbf{u}] = \mathbf{R}(s)$ : função de saída (no domínio de Laplace), e multiplicando toda a sentença por  $\mathbf{G}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$  denominada função de transferência, temos:

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{G}(s) \mathbf{R}(s) \Rightarrow \mathbf{L}[\mathbf{x}] = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} [\mathbf{x}_0 + \mathbf{B} \mathbf{L}[\mathbf{u}]] \quad (31).$$

O diagrama de blocos que representa o problema no domínio da frequência é apresentado a seguir:



$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \mathbf{P}(s) & & & & \\
 \mathbf{U}(s) & + & + \mathbf{E}(s) & \mathbf{X}(s) & + & & \\
 & & - & & + & & \mathbf{Y}(s)
 \end{array}$$

**Figura (2):** Diagrama de blocos representando o sistema no domínio da frequência.

Aqui, a perturbação  $\mathbf{P}(s) = \mathbf{x}_0$  surge devido às condições iniciais do problema e  $\mathbf{E}(s) = (\mathbf{B}\mathbf{U} + \mathbf{P}) - \mathbf{A}\mathbf{X}$  é o erro.

No caso de procedermos a uma abordagem no chamado domínio da frequência, o problema está resolvido, pois tratá-lo neste domínio equivale a tratá-lo no domínio de Laplace, fazendo a variável  $s$  igual a  $\omega j$  onde  $\omega$  é a frequência natural e ‘ $j$ ’ é a unidade imaginária. Neste caso temos a Transformada de Fourier (muito utilizada em Análise de Sinais pois desconsidera o efeito do transitório). Note que a resolução do problema acima, na variável ‘ $s$ ’, corresponde à resolução de um sistema linear algébrico. No passado, era usual o tratamento dos problemas no domínio da frequência pela sua simplicidade matemática já que a grande dificuldade do método é a volta ao domínio real. Na teoria moderna, tem-se explorado mais a abordagem no domínio real pois com os recursos computacionais disponíveis na atualidade, tornou-se mais fácil o caminho de volta. A seguir faremos o caminho de volta; antes, porém, devemos apresentar o chamado Teorema da Convolução que será de grande valia para este procedimento. Nas figuras (1) e (2), o sistema foi representado através de diagramas de blocos com finalidade ilustrativa (tal representação é comum na Análise de Sinais e em Teoria de Controle, apesar de não ser o caso). Para apresentarmos tal teorema é necessário inicialmente definirmos o chamado produto de convolução.

Definição: dadas duas funções  $\mathbf{f}(t)$  e  $\mathbf{G}(t)$  (matrizes), define-se o produto de convolução:

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{G}(t) * \mathbf{f}(t) = \int \mathbf{G}(\tau) \mathbf{f}(t - \tau) d\tau \quad (32).$$

A seguir é apresentado o Teorema da Convolução.

Teorema: dadas três funções  $\mathbf{f}(t)$ ,  $\mathbf{G}(t)$  e  $\mathbf{h}(t)$ , se:

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{G}(t) * \mathbf{f}(t) \Leftrightarrow \mathbf{H}(s) = \mathbf{G}(s) \mathbf{F}(s) \quad (33)$$

ou seja, a convolução no domínio do tempo é equivalente ao produto algébrico no domínio de Laplace.

Prova:

Sejam  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$  e  $\mathbf{h} = \mathbf{G} * \mathbf{f}$ :

$$\mathbf{F}(s) = \int_0^{\infty} \mathbf{f}(\xi) e^{-s\xi} d\xi \quad \text{e} \quad \mathbf{G}(s) = \int_0^{\infty} \mathbf{G}(\eta) e^{-s\eta} d\eta \quad (34)$$

$$\mathbf{G}(s)\mathbf{F}(s) = \int_0^{\infty} \mathbf{G}(\eta) e^{-s\eta} d\eta \int_0^{\infty} \mathbf{f}(\xi) e^{-s\xi} d\xi = \int_0^{\infty} \mathbf{G}(\eta) d\eta \int_0^{\infty} \mathbf{f}(\xi) e^{-s(\xi+\eta)} d\xi \quad (35),$$

fazendo  $\xi = t - \eta$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(s)\mathbf{F}(s) &= \int_0^{\infty} \mathbf{G}(\eta) d\eta \int_{\eta}^{\infty} \mathbf{f}(t - \eta) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-s\eta} \int_0^{\infty} \mathbf{G}(\eta) \mathbf{f}(t - \eta) d\eta dt = L[\mathbf{f}(t) * \mathbf{g}(t)] = \\ &= L[\mathbf{h}(t)] = \mathbf{H}(s) \end{aligned} \quad (36).$$

Aplicando o teorema da convolução em (31), tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} [\mathbf{x}_0 + \mathbf{B} L[\mathbf{u}]]] = L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0 + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} L[\mathbf{u}]] = \\ &= L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0] + L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} L[\mathbf{u}]] \end{aligned} \quad (37).$$

Para a primeira parcela da expressão (31), é necessário que determinemos a Transformada inversa de Laplace. Pode-se provar que a expressão entre colchetes é a transformada de  $e^{\mathbf{A}t}$ .

Prova:

$$L[e^{At}] = \int_0^{\infty} e^{At} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(A-sI)t} dt = \left[ (A-sI)^{-1} e^{(A-sI)t} \right]_0^{\infty} = (A-sI)^{-1} \quad \forall |s| > |\lambda_{\max}| \quad (38).$$

$\lambda_{\max}$  : maior dos autovalores de  $A$ . A função exponencial para matrizes é definida a partir da série de Maclaurin:

$$e^M = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n!} M^n \right) \quad (39).$$

Para a segunda parcela de (1-14), aplicamos o teorema da convolução, ficando, então:

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau = e^{At} \left[ \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{-A\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \right] \quad (40).$$

Esta é a solução completa do sistema linearizado e invariante no tempo nas vizinhanças de um equilíbrio estável.

#### 1.4.2 Resolução por Equações Desacopladas

O problema dinâmico a ser resolvido frequentemente aparece na seguinte forma:

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \mathbf{x} = \mathbf{g} \quad (41).$$

Sabemos que a solução geral deste tipo de sistema é a soma da solução geral do sistema homogêneo com uma solução particular do sistema não – homogêneo.

### 1.4.2.1 Solução do sistema homogêneo

Seja a equação diferencial homogênea associada a (41):

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (42),$$

assumindo:  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = -\lambda \mathbf{x}_0 e^{-\lambda t} \quad (43).$

Substituindo (43) em (42), tem-se:

$$(-\lambda \mathbf{A} + \mathbf{B}) \mathbf{x}_0 e^{-\lambda t} = \mathbf{0} \quad (44).$$

Como  $e^{-\lambda t} \neq 0 \quad \forall t$ , temos:

$$(-\lambda \mathbf{A} + \mathbf{B}) \mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \quad (45).$$

A equação (45) é um sistema homogêneo. Como não convém a solução trivial  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ , para o sistema admitir outras soluções é necessário que:

$$\det(-\lambda \mathbf{A} + \mathbf{B}) = 0 \quad (46).$$

A equação anterior exprime na forma matricial o polinômio característico do chamado problema generalizado de autovalor e autovetor, que é escrito na forma:

$$\lambda \mathbf{A} \mathbf{x}_0 = \mathbf{B} \mathbf{x}_0 \quad (47).$$

Resolvendo inicialmente (46) determinando todas as raízes e substituindo cada uma em (47), determina-se o autovetor correspondente. Pode-se provar que para sistemas holonômicos (que corresponde ao caso presente) sempre teremos como solução um conjunto de autovetores que compõem uma base para o espaço de estados (mesmo havendo multiplicidade de autovalores).

No caso de sistemas não – holonômicos, a base é obtida a partir da matriz de autovalores na chamada forma de Jordan, forma esta que foge aos objetivos deste texto.

A solução do sistema homogêneo fica:

$$\mathbf{x}_h = \mathbf{T} \boldsymbol{\psi} \quad (48)$$

sendo  $\mathbf{T}$  a matriz de transformação para a base diagonalizada (cada coluna corresponde a um autovetor) e  $\boldsymbol{\psi} = [c_i e^{-\lambda_i t}]_{n \times 1}$  onde  $c_i$  são as constantes a serem determinadas pelas condições iniciais.

#### 1.4.2.2 Solução do Sistema Completo

Para encontrarmos a solução particular, inicialmente multiplicamos (17) por  $\mathbf{A}^{-1}$ :

$$\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{g} \quad (49).$$

Assumindo  $\mathbf{x} = \mathbf{T} \mathbf{y}$  e substituindo em (49):

$$\mathbf{T} \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{T} \mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{g} \quad (50).$$

Multiplicando por  $\mathbf{T}^{-1}$ :

$$\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{T} \mathbf{y} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{g} \quad (51).$$

É fácil observar que  $\mathbf{T}$  é a matriz de diagonalização de  $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$ . Sendo assim, (51) pode ser escrita como:

$$\dot{\mathbf{y}} + \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{y} = \mathbf{h} \quad (52)$$

sendo  $\Lambda$  a matriz diagonal (dos autovalores) e  $\mathbf{h}$  é tal que:

$$(\mathbf{A}\mathbf{T}) \mathbf{h} = \mathbf{g} \quad (53).$$

A equação (52) está desacoplada de forma que as equações escalares correspondentes são da forma:

$$\dot{y}_i + \lambda_i y_i = h_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (54).$$

Pode-se mostrar que as soluções das  $n$  equações desacopladas (54) são:

$$y_i = e^{-\lambda_i t} \left[ \int h_i e^{\lambda_i t} dt + c_i \right] \quad (55).$$

Como  $\mathbf{y} = [y_i]_{n \times 1}$ , e sabendo que:

$$\mathbf{T} \mathbf{y} = \mathbf{x} \quad (56),$$

determina-se  $\mathbf{x}$  e as condições iniciais permitem encontrar as constantes  $c_i$ .

### 1.5 Resolução de Sistemas Lineares Genéricos

Supondo que em (17)  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  não mais são constantes e sim funções de  $t$ . Rearranjando (17) e multiplicando tudo por uma função  $\mu$  tem-se:

$$\mu \frac{d\mathbf{x}}{dt} - \mu \mathbf{A}\mathbf{x} = \mu \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (57).$$

Assumindo que:

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = -\boldsymbol{\mu} \mathbf{A} \Rightarrow \boldsymbol{\mu} = e^{-\int \mathbf{A} dt} \quad (58)$$

tem-se que:

$$\frac{d}{dt} \left( e^{-\int \mathbf{A} dt} \mathbf{x} \right) = e^{-\int \mathbf{A} dt} \mathbf{B} \mathbf{u} \Rightarrow e^{-\int \mathbf{A} dt} \mathbf{x} = \int e^{-\int \mathbf{A} dt} \mathbf{B} \mathbf{u} dt + \mathbf{c} \quad (59).$$

Impondo a condição inicial a (59):

$$\mathbf{c} = e^{-\left[ \int \mathbf{A} dt \right]_{t=t_0}} \mathbf{x}_0 - \left[ \int e^{-\int \mathbf{A} dt} \mathbf{B} \mathbf{u} dt \right]_{t=t_0} \quad (60).$$

A solução do problema de valor inicial (17) é:

$$\mathbf{x} = e^{\int \mathbf{A} dt} \left[ \int e^{-\int \mathbf{A} dt} \mathbf{B} \mathbf{u} dt + e^{-\left[ \int \mathbf{A} dt \right]_{t=t_0}} \mathbf{x}_0 - \left[ \int e^{-\int \mathbf{A} dt} \mathbf{B} \mathbf{u} dt \right]_{t=t_0} \right] \quad (61).$$

Esta solução é uma generalização das soluções anteriores supõe os coeficientes como funções.

## 2 Sistemas Mecânicos

### 2.1 Princípio de Hamilton para Sistemas Mecânicos Discretos

Sabemos que, para um sistema onde não há perda de massa, a Segunda Lei de Newton é dada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i \quad (62)$$

sendo  $\mathbf{F}_i$  a força resultante externa, ' $m_i$ ' é a massa do corpo 'i' e  $\mathbf{a}_i$ , a aceleração a que este é submetido. Aplicando deslocamentos virtuais infinitesimais a cada um dos corpos do sistema, o trabalho resultante será dado por:

$$\delta W = \Sigma(\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = \Sigma(\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (63).$$

A expressão (63) é conhecida por Princípio de D'Alembert ou *Princípio dos Trabalhos Virtuais*.

Sabemos que:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i) = \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_i \quad (64) \text{ e}$$

$$\delta\left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i\right) = \frac{1}{2} (\delta \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_i) = \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_i \quad (65).$$

Fazendo com que:

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= m_i \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_i = m_i \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i) - m_i \delta\left(\frac{1}{2} |\dot{\mathbf{r}}_i|^2\right) = \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i) - \\ \delta\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right) &= \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i) - \delta T_i \Rightarrow \delta W = \Sigma \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i) - \Sigma \delta T_i = \Sigma \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i) - \delta T \end{aligned} \quad (66)$$

sendo  $\delta T$  referente à energia cinética.

Sabemos que o trabalho total realizado é dado por:

$$\delta W = \delta W_{nc} - \delta U \quad (67)$$

sendo  $\delta W_{nc}$  o trabalho das forças não – conservativas e  $\delta U$  é a variação da energia potencial do sistema. Substituindo (67) em (66), tem-se:

$$\begin{aligned} \delta W_{nc} - \delta U &= \sum \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i) - \delta T \Rightarrow \delta T - \delta U + \delta W_{nc} = \sum \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i) \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta(T-U) + \delta W_{nc} &= \sum \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i) \end{aligned} \quad (68).$$

Quando aplicamos um deslocamento virtual, geramos trajetórias virtuais genéricas cujas restrições impomos ao seu contorno, ou seja, os pontos inicial e final de todas as trajetórias virtuais devem coincidir com os respectivos pontos inicial e final da trajetória real em análise, ou seja:

$$\delta \mathbf{r}_i(t_A) = \delta \mathbf{r}_i(t_B) = \mathbf{0} \quad (69).$$

Integrando (68) no tempo, temos:

$$\int_A^B [\delta(T-U) + \delta W_{nc}] dt = \int_A^B \sum_i \frac{d(m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_i)}{dt} dt = \int_A^B \frac{d}{dt} \left[ \sum_i (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_i) \right] dt = \left[ \sum_i (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_i) \right]_{t_A}^{t_B} \quad (70)$$

pelas condições de contorno impostas em (69), podemos verificar que o termo da direita é identicamente nulo. Rearranjando o termo da direita da igualdade, tem-se:

$$\int_A^B [\delta(T-U) + \delta W_{nc}] dt = \delta \int_A^B (T-U + W_{nc}) dt = 0 \quad (71).$$

Comparando (71) com (1), observamos que a expressão da Lagrangeana é dada por:

$$L = T - U \quad (72).$$

Em sistemas dinâmicos discretos linearizados T e U podem ser expressos na forma quadrática da seguinte forma:

$$T = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{x}}^t \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}) \quad \text{e} \quad U = \frac{1}{2} (\mathbf{x}^t \mathbf{K} \mathbf{x}) \quad (73)$$

sendo  $\mathbf{x}$  o vetor dos graus de liberdade,  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{K}$  são respectivamente as matrizes de massa e rigidez cujas explicações mais detalhadas seguem nas próximas seções.

## 2.2. Modelos Físicos em Sistemas Mecânicos

Os modelos dinâmicos lineares geralmente são idealizados como analogias a sistemas massa – amortecedor – mola. Nestes modelos, consideramos massas pontuais nos nós e estes ligados entre si por combinações de molas e amortecedores. Cada elemento (massa, mola ou amortecedor) simboliza um determinado fenômeno físico presente na dinâmica de sistemas mecânicos que são definidos a seguir:

### 2.2.1 Massa

É a grandeza utilizada para quantificar o efeito de segunda ordem (inércia) do sistema ao movimento. Em deslocamentos de translação, a grandeza associada é um escalar também denominado massa ( $m$ ). Já em rotações, a grandeza associada é o chamado tensor de inércia ( $\mathbf{I}$ ) que é função de ‘ $m$ ’ e das dimensões geométricas do corpo.

### 2.2.2 Amortecimento

O amortecimento é o mecanismo que dissipa energia do sistema, convertendo-o para formas como calor ou ondas. Existem varios tipos de amortecimento:

### 2.2.2.1 Amortecimentos dependentes da velocidade

Tais amortecimentos ocorrem em deslocamentos em meios fluidos. Temos três tipos possíveis apresentados a seguir.

#### 2.2.2.1.1 Amortecimento viscoso

Este tipo de amortecimento baseia-se na dissipação de energia devido ao escoamento de um fluido newtoniano, valendo a relação:

$$\tau_{ij} = -\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (74)$$

sendo  $\tau_{ij}$  a tensão de cisalhamento no plano 'j' na direção de 'i',  $\mu$  é o coeficiente de viscosidade cinemática,  $x_j$  é uma coordenada normal ao plano 'j'. Supondo que a velocidade varie linearmente com a altura da lâmina fluida, (74) fica:

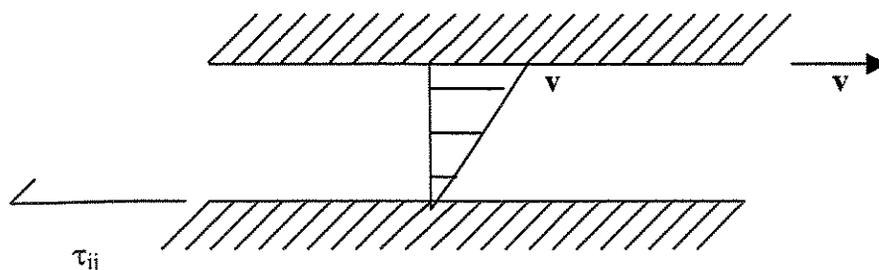
$$\tau_{ij} = -(\mu x_j^{-1})v_i \quad (75).$$

Se multiplicarmos toda a expressão por uma área qualquer contida no plano 'j',teremos então:

$$F_i = -(A\mu x_j^{-1})v_i = -c v_i \quad (76).$$

Note que o módulo da força é diretamente proporcional à velocidade. A constante de proporcionalidade 'c' é denominada coeficiente de amortecimento viscoso:

$$F = -c v = -c \dot{r} \quad (77).$$



**Figura (3):** Efeito da viscosidade na interface de superfícies.

#### 2.2.2.1.2 Amortecimento de arraste

No caso anterior fizemos uma simplificação ao considerar a variação da velocidade linear em relação à coordenada normal à superfície em questão. Tal hipótese não é, em geral, verdadeira pois, para lidarmos com a dinâmica de escoamento de fluidos de forma rigorosa, deveríamos resolver o sistema de equações diferenciais não-lineares que regem a Mecânica dos Fluidos e, determinados o campo de pressões e o campo de velocidades, integrar o tensor no contorno sólido e, assim, determinar a força atuante. Através de métodos que fogem aos objetivos do presente texto, pode-se provar que a força de arrasto é dada por:

$$F = \frac{1}{2} c_d \rho A_d v^2 = c_{ad} v^2 \quad (78),$$

ou seja, o módulo de força é diretamente proporcional ao quadrado do módulo da velocidade, sendo  $c_d$  o chamado coeficiente de arrasto,  $\rho$  a massa específica do fluido e  $A_d$  a projeção plana da área frontal.

#### **2.2.2.1.3 Amortecimento de Coulomb (atrito seco)**

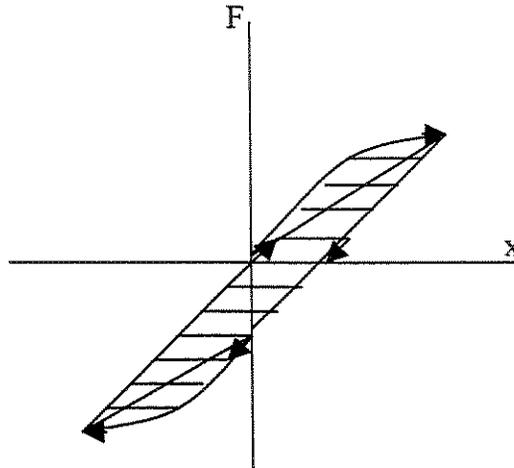
O amortecimento de Coulomb é o atrito presente entre superfícies secas deslizando entre si, e é regido pela seguinte lei:

$$F = \mu_{\text{din}}N \quad (79),$$

sendo  $\mu_{\text{din}}$  o coeficiente de atrito dinâmico e  $N$  é a força normal à superfície de contato. A força de atrito sempre atua no sentido contrário ao da velocidade. Este atrito deve-se, em nível microscópico, ao contato entre as duas superfícies que, por serem irregulares, têm uma área de contato efetiva extremamente reduzida, o que leva a altíssimos valores de tensão provocando soldagem a frio nas regiões de contato além da abrasão. A força é a necessária para quebrar tais ligações e vencer os obstáculos das irregularidades superficiais.

#### **2.2.2.2 Amortecimento Histerético (Amortecimento Estrutural ou Interno)**

Geralmente, o modelo de comportamento conservativo (elástico) do material é uma simplificação matemática do modelo físico real onde, para deformações de qualquer magnitude, ocorre dissipação de energia. Este fenômeno é denominado histerese. Em situações estáticas, tal efeito pode ser desprezado, porém no caso de comportamento dinâmico do material, esta variável toma grande importância. Um exemplo de material onde a histerese é uma variável fundamental para efeito de controle são os chamados materiais com memória de forma.



**Figura (4):** Alça histerética na deformação. A área hachurada corresponde à energia dissipada na deformação.

A histerese está intimamente ligada a um modelo não conservativo de comportamento dos materiais denominado *viscoelasticidade*, onde o regime de deformação é uma combinação de regime elástico com regime de escoamento viscoso:

$$F = kx + c \frac{dx}{dt} \quad (80).$$

Aos dispositivos de dissipação de energia, costuma-se associar uma grandeza denominada fator de perda, que é definido da seguinte forma:

$$\eta = \Delta E / (2\pi U_{\text{máx}}) \quad (81),$$

sendo  $\Delta E$  é a energia dissipada e  $U_{\text{máx}}$  é a máxima energia potencial.

### 2.2.3 Rigidez

O conceito de rigidez está intimamente ligado à idéia de elasticidade linear do material, onde os esforços guardam uma relação de proporcionalidade com os deslocamentos obtidos:

$$F = kx \quad (82).$$

### 2.3 Sistemas Mecânicos Lineares

Os sistemas lineares de ordem zero são da forma:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (83),$$

sendo  $\mathbf{f}$  é a função de entrada,  $\mathbf{u}$  é a função de estado e  $\mathbf{K}^{-1}$  é a função de transferência do sistema. Nestes sistemas, a resposta a um sinal de entrada é instantânea. Tais sistemas surgem como resultado da aplicação de alguns tipos de métodos numéricos que transformam problemas de valores de contorno lineares (independentes do tempo) em problemas do tipo (83), como, por exemplo, o método dos elementos finitos, das diferenças finitas ou dos valores de contorno; da própria modelagem de um sistema linear independente do tempo ou da linearização de um sistema não – linear (também independente do tempo).

Em sistemas mecânicos, este tipo de equação está associado a problemas de corpos deformáveis em regime elástico – linear e onde são desprezados os efeitos de segunda ordem, em condições estáticas. Neste caso,  $\mathbf{u}$  é o vetor dos deslocamentos,  $\mathbf{f}$  é o vetor das ações e  $\mathbf{K}$  é denominada matriz de rigidez do sistema.

Sistemas lineares de ordem um são do tipo:

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (84),$$

sendo que a primeira parcela da esquerda confere um “amortecimento” no tempo para o sinal de saída em relação ao de entrada (efeito de primeira ordem), ou seja, surge um transitório no tempo. Ainda citando os sistemas mecânicos, este comportamento corresponde à fluência, presente nos modelos reológicos da viscoelasticidade. Neste caso, a matriz **C** é chamada de amortecimento.

A forma mais geral de exprimirmos matematicamente um sistema de segunda ordem por um sistema linear é a seguinte:

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + \mathbf{C} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (85),$$

onde temos a presença de efeito de segunda ordem no primeiro monômio do lado esquerdo da igualdade. No caso de sistemas mecânicos, tal efeito é a inércia do sistema. Por este raciocínio, a matriz **M** é chamada de matriz de massa do sistema.

As condições iniciais são do tipo:

$$\text{c.i.: } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \text{ e } \dot{\mathbf{x}}(t_0) = \dot{\mathbf{x}}_0 \quad (86).$$

Neste trabalho, as matrizes de rigidez e de massa são obtidas via Método dos Elementos Finitos. A matriz de amortecimento, como não pode ser obtida por este método, pode ser montada a partir de dispositivo mecânico equivalente às matrizes de massa e rigidez obtidas (que gere o mesmo tipo de matrizes) e serão feitas combinações de amortecedores com as molas do dispositivo segundo os modelos reológicos para simular o modelo viscoelástico.

### **3 Discussão sobre a Causalidade de Sistemas Dinâmicos**

Uma propriedade fundamental em todos os sistemas dinâmicos clássicos é serem causais.

Definimos um evento como causal quando a causa do evento precede seu efeito. No caso de sistemas dinâmicos como os que estão em estudo isso é traduzido pelo fato de um dado sinal de saída sempre ser precedido pelo correspondente sinal de entrada obrigatoriamente.

#### 4 Conclusão

Com a aplicação do MEF ao modelo contínuo através do Princípio de Hamilton, caímos em problemas do tipo descrito aqui, e seus processos de resolução podem, então, ser aplicados. A discussão sobre sistemas não-lineares justifica-se na medida em que se procura situar o problema em um contexto mais amplo pois poderiam-se propor problemas em que as equações dinâmicas resultantes englobassem os de não – linearidades geométricas, e seria necessário estudar uma forma coerente de abordagem.

A discussão prolongada do amortecimento é pertinente pois, pelo fato da aplicação do Princípio de Hamilton a sistemas dissipativos ser de grande dificuldade matemática, esta transfere-se aos métodos numéricos que fazem uso de tal princípio, em particular o MEF, levando a várias propostas de expressão para  $C$  (por exemplo a feita por QUIAN et al, 1998). Uma opção interessante seria que esta fosse obtida a partir de analogias físicas com sistemas discretos (é comum propor  $C$  como combinação linear de  $M$  e  $K$  o que justifica-se apenas por facilitar os cálculos).

