



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

**ANÁLISE DE ESTRUTURAS METÁLICAS RETICULADAS
PLANAS CONSIDERANDO A NÃO-LINEARIDADE FÍSICA
EM SISTEMAS NÃO-CONSERVATIVOS**

Eng^o Rogério Mitsuo dos Santos

Orientador: Prof. Dr. João Alberto Venegas Requena

Dissertação de Mestrado apresentada à
Faculdade de Engenharia Civil como parte
dos requisitos exigidos para obtenção do
título de Mestre em Engenharia Civil, na
área de concentração em Engenharia de
Estruturas.

Campinas, Fevereiro de 2002

Atesto que esta é a versão definitiva
da dissertação/tese.

15/4/02

Prof. Dr. JOÃO A. V. REQUENA

UNIDADE 80
Nº CHAMADA T/UNICAMP
Sa 59a
V EX
TOMBO BCI 49115
PROC 16-837/00
C DX
PREÇO R\$ 11,00
DATA _____
Nº CPD _____

CM00167660-1

BID 240597

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Sa59a

Santos, Rogério Mitsuo dos

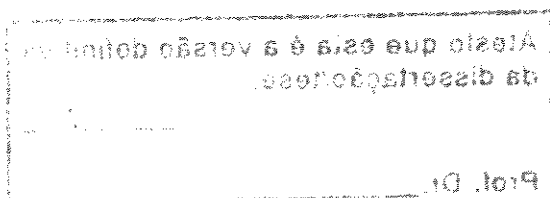
Análise de estruturas metálicas reticuladas planas considerando a não-linearidade física em sistemas não-conservativos / Rogério Mitsuo dos Santos.--Campinas, SP: [s.n.], 2002.

Orientador: João Alberto Venegas Requena.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil.

1. Plasticidade. 2. Estruturas metálicas. I. Requena, João Alberto Venegas.

II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil. III. Título.

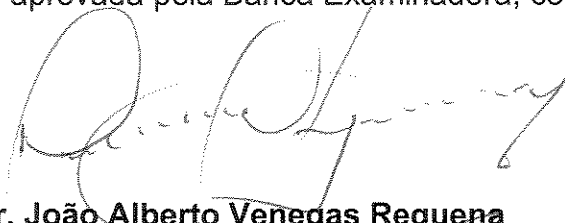


UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

**ANÁLISE DE ESTRUTURAS METÁLICAS RETICULADAS PLANAS
CONSIDERANDO A NÃO-LINEARIDADE FÍSICA EM SISTEMAS
NÃO-CONSERVATIVOS**

Eng^o Rogério Mitsuo dos Santos

Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:



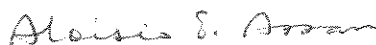
Prof. Dr. João Alberto Venegas Requena

Presidente e Orientador / FEC - UNICAMP



Prof. Dr. Renato Bertolino Junior

FEIS - UNESP



Prof. Dr. Aloísio Ernesto Assan

FEC – UNICAMP

Campinas, 27 de Fevereiro de 2002

200222349

Aos meus pais Nelson e Toshiko.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. João Alberto Venegas Requena pela atenção, dedicação e orientação no desenvolvimento deste trabalho.

À minha esposa Ana Laura pelo apoio, carinho e compreensão.

A todos professores que me incentivaram e contribuíram no desenvolvimento deste trabalho.

Ao CNPq pela bolsa de estudos concedida por intermédio da UNICAMP.

Sumário

Lista de Figuras	i
Lista de Tabelas	iii
Lista de Símbolos	iv
Resumo	viii
Capítulo 1 - Introdução	1
1.1 <i>Considerações Gerais</i>	1
1.2 <i>Estado da arte</i>	3
1.2.1 Flambagem elástica de barras por flexão	3
1.2.2 Flambagem inelástica de barras por flexão	6
1.2.3 A teoria da plasticidade	10
1.2.4 O comportamento cíclico das estruturas	15
1.3 <i>Proposta do trabalho</i>	16
Capítulo 2 - Estudo da Inelasticidade das Barras	19
2.1 <i>Introdução</i>	19
2.2 <i>Módulo de elasticidade tangente</i>	20
2.2.1 Curva proposta pelo "Column Research Council - CRC"	20
2.2.2 Curva proposta pela "AISC Load and Resistance Factor Design - LRFD"	22
2.3 <i>Laminação a frio e encruamento</i>	23
2.4 <i>Carregamento cíclico</i>	25
2.5 <i>O efeito Bauschinger</i>	28
2.5.1 <i>Introdução</i>	28
2.5.2 <i>Características do efeito Bauschinger</i>	28
2.5.3 <i>Causas do efeito Bauschinger</i>	31
2.5.4 <i>A influência do efeito Bauschinger na flambagem de barras metálicas</i>	33
2.5.5 <i>A influência do carbono sobre o efeito Bauschinger</i>	36

Capítulo 3 - Modelos Físicos Não-lineares para o Aço Estrutural	39
3.1 <i>Introdução</i>	39
3.2 <i>Comportamento uniaxial do aço</i>	39
3.2.1 Carregamento unidirecional	40
3.2.2 Descarregamento e recarregamento	41
3.2.3 Carregamento reverso	44
3.3 <i>Modelos elasto-plásticos unidimensionais para elementos estruturais de aço</i>	45
3.3.1 Modelo elasto-plástico perfeito	46
3.3.2 Modelo elasto-plástico com encruamento linear	47
3.3.3 Modelo elasto-plástico com encruamento exponencial	48
3.3.4 Modelo de Ramberg-Osgood	49
3.4 <i>Modelos com encruamento linear para carregamentos cíclicos</i>	49
3.4.1 Modelo Isotrópico	50
3.4.2 Modelo Independente	51
3.4.3 Modelo Cinemático	52
Capítulo 4 - Análise de Estruturas Reticuladas	55
4.1 <i>Introdução</i>	55
4.2 <i>Procedimentos utilizados na análise não-linear geométrica</i>	55
4.3 <i>Procedimentos utilizados na análise não-linear física</i>	58
4.4 <i>Resolução de sistemas não-lineares</i>	62
Capítulo 5 - Exemplos Numéricos	67
5.1 <i>Introdução</i>	67
5.2 <i>Exemplo numérico 1</i>	67
5.3 <i>Exemplo numérico 2</i>	68
5.4 <i>Exemplo numérico 3</i>	73
5.5 <i>Exemplo numérico 4</i>	76
5.6 <i>Exemplo numérico 5</i>	81

Capítulo 6 - Considerações Finais	85
Anexo A - Funções de Rigidez	89
Anexo B - Fluxograma Resumido	109
Referências Bibliográficas	113
Abstract	119
Apêndice - Processo Incremental-iterativo de Newton-Raphson	

Lista de Figuras

Figura 2.1 - Efeitos do encruamento além do limite elástico.	24
Figura 2.2 - Representação gráfica da estabilidade dos deslocamentos.	27
Figura 2.3 - Características do Efeito Bauschinger.	30
Figura 2.4 - Gráfico tensão-deformação.	34
Figura 2.5 - Gráfico força de compressão-encurtamento.	35
Figura 3.1 - Relação tensão-deformação elasto-plástica: carregamento.	40
Figura 3.2 - Relação tensão-deformação elasto-plástica: descarregamento.	41
Figura 3.3 - Relação tensão-deformação elasto-plástica: recarregamento.	42
Figura 3.4 - Ciclo de carregamento e descarregamento na fase plástica.	43
Figura 3.5 - Ciclo de carregamento e descarregamento na fase elástica.	43
Figura 3.6 - Relação tensão-deformação elasto-plástica: carregamento reverso.	44
Figura 3.7 - Modelo elasto-plástico perfeito.	46
Figura 3.8 - Modelo elasto-plástico com encruamento linear.	47
Figura 3.9 - Modelo elasto-plástico com encruamento exponencial.	48
Figura 3.10 - Modelo de Ramberg-Osgood.	49
Figura 3.11 - Modelo com encruamento linear isotrópico.	50
Figura 3.12 - Modelo com encruamento linear independente.	51
Figura 3.13 - Modelo com encruamento linear cinemático.	52
Figura 4.1 - Matriz de rigidez da barra com funções de rigidez.	57
Figura 4.2 - Iteração de Newton-Raphson para um incremento de carga.	64
Figura 5.1 - Treliza metálica de banzos paralelos.	68
Figura 5.2 - Viga metálica em balanço.	69
Figura 5.3 - Relação força-deslocamento: 1º ciclo.	70
Figura 5.4 - Relação força-deslocamento: 2º ciclo.	71
Figura 5.5 - Relação força-deslocamento: 3º ciclo.	72
Figura 5.6 - Relação força-deslocamento: 4º ciclo.	73
Figura 5.7 - Pórtico plano.	74
Figura 5.8 - Deformações totais no carregamento.	75
Figura 5.9 - Deformações plásticas no descarregamento.	75

Figura 5.10 - Viga metálica sob carregamento reverso.	76
Figura 5.11 - Relação força-deslocamento: 1ª simulação.	77
Figura 5.12 - Relação força-deslocamento: 2ª simulação.	78
Figura 5.13 - Relação força-deslocamento: 3ª simulação.	79
Figura 5.14 - Gráfico: redução de σ_0 X nº de inversões de carregamento.	81
Figura 5.15 - Treliça metálica sob carregamento reverso.	82
Figura 5.16 - Configuração deformada da treliça: 1ª simulação.	83
Figura 5.17 - Configuração deformada da treliça: 2ª simulação.	83
Figura A.1 - Sistema de coordenadas locais para barra.	89
Figura A.2 - Estados de deslocamentos: translação unitária horizontal nas direções (1) e (4); translação unitária vertical nas direções (2) e (5) e giro unitário nas direções (3) e (6).	90
Figura A.3 - Matriz de rigidez da barra com funções de rigidez.	91

Lista de Tabelas

Tabela 4.1 - Funções de rigidez de barra de pórticos planos.	58
Tabela 4.2 - Funções de rigidez de barra com o módulo de elasticidade tangente.	62
Tabela 5.1 - Deslocamentos verticais do nó 3.	68
Tabela 5.2 - Deslocamentos horizontais do nó 2: 1º ciclo.	69
Tabela 5.3 - Deslocamentos horizontais do nó 2: 2º ciclo.	71
Tabela 5.4 - Deslocamentos horizontais do nó 2: 3º ciclo.	72
Tabela 5.5 - Deslocamentos horizontais do nó 2: 4º ciclo.	73
Tabela 5.6 - Giro do nó 3 no sentido anti-horário.	74
Tabela 5.7 - Deslocamentos horizontais do nó 2: 1ª simulação.	76
Tabela 5.8 - Deslocamentos horizontais do nó 2: 2ª simulação.	77
Tabela 5.9 - Deslocamentos horizontais do nó 2: 3ª simulação.	79
Tabela 5.10 - Redução do limite de proporcionalidade: CRC.	80
Tabela 5.11 - Redução do limite de proporcionalidade: AISC-LRFD.	80
Tabela 5.12 - Deslocamentos verticais do nó 3.	82
Tabela A.1 - Funções de rigidez de barra de pórticos planos.	108

Lista de Símbolos

a) Letras romanas maiúsculas

A	- área da seção transversal da barra
B	- constante de interseção entre a hipérbole de Euler e a parábola do campo inelástico
$C_1...C_4$	- coeficientes da solução da equação diferencial a ser resolvida
C_c	- ponto de interseção entre a hipérbole de Euler e a parábola do campo inelástico
D_n	- vetor deslocamento da n-ésima iteração
E	- módulo de elasticidade longitudinal
E_{ef}	- módulo de elasticidade efetivo
E_r	- módulo de elasticidade reduzido
E_s	- módulo de elasticidade secante
E_t	- módulo de elasticidade tangente
F_n	- vetor força da n-ésima iteração
G	- módulo de elasticidade transversal
I	- momento de inércia da seção transversal
I_d	- momento de inércia relativo a parte da seção transversal comprimida
I_e	- momento de inércia relativo a parte da seção transversal tracionada
J_2	- tensão de cisalhamento octaédrica
K_B	- matriz de rigidez da barra
K_n	- matriz de rigidez da n-ésima iteração
K^2	- propriedade dimensional da barra, segundo Euler
KL	- comprimento efetivo de flambagem
L	- comprimento da barra
M	- momento fletor
P	- força axial atuando na barra
P_{cr}	- carga crítica de flambagem
P_{Euler}	- carga crítica de Euler

P_s	- carga estabilizadora
P_u	- capacidade última de compressão
Q	- esforço cortante em uma posição qualquer da seção transversal
R_n	- resíduo de cargas da n-ésima iteração
R_c^1	- tensão crítica de flambagem
R_c^2	- tensão crítica de flambagem levando em consideração a deformação plástica
$S_1...S_5$	- coeficientes de rigidez para a análise não-linear de pórticos planos pelo método das funções de rigidez
W	- módulo resistente elástico

b) Letras romanas minúsculas

a	- constante do material determinada experimentalmente
a_1	- coeficiente dado por " $1 - cP/GA$ "
a_2	- coeficiente dado por " $1 + cP/GA$ "
b	- constante do material determinada experimentalmente
c	- coeficiente de forma da seção transversal
f_y	- tensão de escoamento do aço
g	- coeficiente dado por " $6cEI/GAL^2$ "
i	- número de barras
k	- constante do material determinada experimentalmente
m	- constante do material determinada experimentalmente
n	- número de iterações para o incremento analisado
r	- raio de giração da seção transversal
t	- constante do material determinada experimentalmente

c) Letras gregas maiúsculas

ΔD_n	- acréscimo dos deslocamentos da n-ésima iteração
$\Delta \sigma_p$	- amolecimento permanente

d) Letras gregas minúsculas

α	- valor escalar positivo
α_f	- coeficiente dado por " $\sqrt{ P /a_1EI}$ " ou " $\sqrt{P/a_2EI}$ "
β	- deformação de Bauschinger
γ	- distorção da seção transversal
ε	- vetor das deformações
$\varepsilon_1 \dots \varepsilon_3$	- deformações principais
ε_f	- coeficiente dado por " αL "
ε_p	- deformação inicial
ε_R	- deformação reversa
ε_y	- deformação de escoamento
ϕ	- giro da seção transversal
ϕ_c	- coeficiente dado por " $2 - 2\cos\varepsilon_f - a_1\varepsilon_f \sin\varepsilon_f$ "
ϕ_t	- coeficiente dado por " $2 - 2\cosh\varepsilon_f + a_2\varepsilon_f \sinh\varepsilon_f$ "
λ_c	- parâmetro de esbeltez
λ_i	- parâmetro de esbeltez, proposto por Tetmajer
λ_g	- valor limite do parâmetro de esbeltez, proposto por Tetmajer
π	- constante $\pi=3.14159265359$
θ	- inclinação da linha elástica
σ	- vetor das tensões
σ_0	- limite de proporcionalidade da relação tensão-deformação
$\sigma_1 \dots \sigma_3$	- tensões principais
σ_{cr}	- tensão crítica da barra
σ_{max}	- tensão máxima calculada
$\sigma_{max,c}$	- tensão de escoamento na compressão
$\sigma_{max,t}$	- tensão de escoamento na tração
σ_p	- tensão máxima alcançada
σ_R	- tensão de escoamento reversa

σ_{sub}	- tensão de escoamento subsequente
$\sigma_{\text{sub,c}}$	- tensão de escoamento subsequente para compressão
$\sigma_{\text{sub,t}}$	- tensão de escoamento subsequente para tração
σ_y	- tensão de escoamento do aço
τ	- tolerância que determina o critério de parada
ψ	- função que representa a trajetória do centro elástico

Resumo

Neste trabalho são apresentadas análises de estruturas metálicas planas constituídas de barras deformáveis por flexão, por força cortante e por força axial. Nestas análises é considerado o efeito de não-linearidade física em sistemas não-conservativos. Um programa computacional foi desenvolvido, em teoria dos pequenos deslocamentos, para possibilitar a determinação do comportamento global da estrutura. A técnica empregada foi a matricial, utilizando funções de rigidez. Esta técnica possibilita análises considerando a não-linearidade física de barras, com pouco esforço computacional. Para a resolução dos sistemas não-lineares foi adotado o método incremental-iterativo de Newton-Raphson. O processo incremental de cargas foi adotado para possibilitar o acompanhamento das deformações nas barras da estrutura nos carregamentos, descarregamentos e carregamentos reversos, de acordo com a análise solicitada; sendo que para as estruturas sujeitas a carregamentos reversos foi considerado o efeito Bauschinger no sistema. No carregamento incremental da estrutura as barras seguem o comportamento elástico ou elasto-plástico dependendo do estado de tensões. No descarregamento as barras seguem somente o comportamento elástico fazendo com que apareça um resíduo plástico de deformação. Desta forma, o sistema pode ser considerado não-conservativo aproximando-se do comportamento real. O regime elasto-plástico foi considerado para barras axialmente solicitadas, predominantemente, utilizando curvas de flambagem do CRC¹⁴ (Column Research Council) e da AISC-LRFD¹ (Load and Resistance Factor Design). São apresentados exemplos numéricos comparando os tipos de análises nos regimes elástico e elasto-plástico.

Palavras-chaves: Não-linearidade, Plasticidade, Funções de Rigidez, Estruturas Metálicas.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações Gerais

Um projeto de engenharia estrutural envolve, geralmente, dois estágios: a definição dos esforços internos que atuam no material que compõe a estrutura e a determinação da resposta que este material apresentará. O primeiro estágio envolve uma análise das tensões atuantes e o segundo o conhecimento das propriedades físicas e geométricas dos materiais. Uma relação linear entre tensão e deformação forma a base da teoria da elasticidade linear, a qual tem sido largamente utilizada nos projetos estruturais da atualidade. As tensões atuantes na estrutura devem ser menores que as tensões admitidas no material que a compõe, que são determinadas como sendo apenas uma parcela da resistência de escoamento do material. Um projeto seguro nem sempre é desenvolvido baseado numa análise estrutural adequada e num conhecimento total das propriedades dos materiais envolvidos, mas nas experiências de décadas.

Uma estrutura possui, na realidade, um estado de tensões extremamente complexo. Várias tensões secundárias surgem nos processos de fabricação, transporte e montagem. A combinação da tensão inicial desconhecida, tensões secundárias e da

concentração e da redistribuição das tensões devida às descontinuidades da estrutura, faz com que um cálculo, baseado na teoria da elasticidade, torne-se impreciso. A teoria da plasticidade representa uma extensão necessária da teoria da elasticidade e é concebida com a análise de tensões e deformações da estrutura nos regimes elástico e plástico. Ela fornece uma estimativa mais realista da capacidade portante da estrutura e um melhor entendimento das respostas dos elementos estruturais quando submetidos a esforços externos. A teoria da plasticidade ocupa-se de dois aspectos importantes:

a) a determinação de relações tensão-deformação para materiais elasto-plásticos não viscosos (sem a influência do tempo), tanto nos casos de encruamento como nos de amolecimento (CHEN & HAN⁶);

b) o procedimento geral de solução de estruturas em regime elasto-plástico sob efeito de cargas ou deslocamentos impostos. Estes procedimentos utilizam normalmente processos numéricos, pelo caráter não-linear das respostas em regimes plásticos (CHEN & HAN⁶).

Em estruturas reticuladas, as barras que estão solicitadas a um nível de tensão inferior ao limite de proporcionalidade obedecem a lei de Hooke. Entretanto, durante a análise de uma estrutura reticulada, existirão barras que estarão solicitadas acima do limite de proporcionalidade do material. A consideração deste efeito na análise se torna importante para poder representar o real comportamento da estrutura.

Quando as barras de uma estrutura alcançam um certo estágio de solicitação, acima do limite de proporcionalidade do material, pontos da seção transversal começam a plastificar, e a inclusão dos efeitos de não-linearidade física na análise, propicia a representação do comportamento de uma estrutura reticulada de forma mais precisa.

No dimensionamento das estruturas somente a variação dos carregamentos é considerada. Entretanto, se a maior parte dos carregamentos forem completamente removidos da estrutura e reaplicados em intervalos freqüentes, pode ser mostrado, na teoria, que um diferente modo de colapso pode ocorrer. Isto é caracterizado pela perda de estabilidade, pois sob aplicações repetidas de uma determinada seqüência de

carregamentos, um incremento de deformação plástica pode aparecer durante cada ciclo de carregamento. Se o deslocamento de uma viga ou pilar continuar indefinidamente após ciclos de carregamentos, a estrutura é considerada instável do ponto de vista dos deslocamentos (BEEDLE³). Com a consideração das deformações plásticas (permanentes), provenientes de carregamentos e descarregamentos, a estrutura transforma-se num sistema não-conservativo aproximando-se, ainda mais, do comportamento real.

1.2 Estado da arte

1.2.1 Flambagem elástica de barras por flexão

A equação de Euler para flambagem de barras elásticas por flexão é uma das fórmulas da engenharia que hoje é ainda muito utilizada. Esta equação e suas modificações realizadas por Engesser, Considère e Shanley, para o comportamento inelástico, fornece a base da história da análise de instabilidade das estruturas. É importante mencionar que o estudo da instabilidade vem se desenvolvendo por mais de 257 anos, desde o seu início realizado por Euler.

Robert Hooke, em 1678, verificou que o deslocamento de um corpo elástico era proporcional ao carregamento que provocava este deslocamento. Este não podia saber que mais tarde esta relação proveria a base para o desenvolvimento da teoria da flambagem elástica. Hooke afirmou que esta relação, chamada hoje de lei de Hooke, poderia ser aplicada a "...todos os corpos elásticos, seja metal, madeira, pedras, (...), vidro, e coisas parecidas." (TIMOSHENKO³³). Suas deduções foram obtidas através de experimentos realizados.

Jacob Bernoulli estudou o deslocamento e a curvatura de uma viga retangular (TIMOSHENKO³³). Em 1705, este afirmou, baseando-se na lei de Hooke, que a curvatura de qualquer ponto em uma viga fletida era proporcional ao momento

resistente desenvolvido ao longo do comprimento desta. Esta afirmação foi usada por outros matemáticos incluindo Euler em suas considerações sobre curvas elásticas.

Daniel Bernoulli, sobrinho de Jacob Bernoulli e professor de Euler, além de matemático era um experimentador e suas experiências forneciam novos problemas matemáticos a Euler. Daniel sugeriu a Euler que aplicasse o cálculo variacional para obter as equações das curvas elásticas (TIMOSHENKO³³). Assim, baseado na sugestão de Daniel Bernoulli e na teoria de seu irmão Jacob Bernoulli de que a curvatura de uma barra elástica em um dado ponto é proporcional ao momento resistente atuando neste ponto, Euler apresentou a fórmula para a flambagem de barras que leva hoje o seu nome. A carga de Euler é a carga crítica para a qual uma barra esbelta elástica pode suportar um carregamento axial em uma configuração na eminência da flexão.

Euler baseou sua fórmula na hipótese de que o momento de rigidez em qualquer ponto da barra era igual a $E k^2 / \rho$, sendo que $E k^2$, segundo ele, deveria ser determinado através de muitos experimentos e ρ definido como o raio de curvatura da barra fletida (TIMOSHENKO³³). Euler teve idéias errôneas a respeito da relação entre a forma geométrica da seção transversal e $E k^2$. Mais tarde, em tratado publicado em 1759, Euler disse “Parece que o momento de rigidez é proporcional ao quadrado da espessura, ou mesmo, ao cubo; desta forma, pode-se dizer que se a barra for cilíndrica, seu momento de resistência será proporcional à terceira potência, ou possivelmente à quarta potência do diâmetro da base.” (JOHNSTON¹³). Euler demonstrou, desta forma, que não conhecia o conceito de momento de inércia da seção transversal, das distribuições das tensões e da localização do eixo neutro de uma barra fletida. É importante ressaltar que Christian Huygens foi o primeiro a estabelecer o conceito de momento de inércia (TIMOSHENKO³³).

Assim, a força necessária para fletir uma barra, de acordo com Euler, é dada por:

$$P_{\text{Euler}} = \frac{\pi^2 E k^2}{L^2} \quad (1.1)$$

sendo para Euler “E” como uma propriedade elástica e “k²” como uma propriedade dimensional da barra. Segundo THÜRLIMANN³², esta não foi apenas a primeira solução teórica para um problema de instabilidade, mas também a primeira solução de um problema de autovalores.

Apesar de referenciar a carga crítica de Euler como a de uma barra bi-articulada, na realidade, Euler, em seu trabalho, estudou uma barra engastada em uma extremidade e livre na outra (TIMOSHENKO³³). A transição de “Ek²” para “EI” requer a aplicação da lei de Hooke em conjunto com a corrente avaliação das distribuições das tensões internas de um membro fletido.

Huygens, Beeckman e Hooke verificaram que em uma viga (engastada em uma extremidade e livre na outra) fletida, as fibras superiores mais afastadas da linha neutra estavam estendidas, enquanto que as fibras inferiores mais afastadas da linha neutra estavam encurtadas (TIMOSHENKO³³). Mariote, em 1680, realizou experimentos em vigas. Resultados publicados posteriormente à sua morte, em 1686, confirmaram as observações mencionadas anteriormente pelos pesquisadores (TIMOSHENKO³³).

Leibniz publicou em 1684 a primeira análise de tensões nas fibras interiores de uma viga carregada. Baseado na hipótese de que as tensões variam linearmente na seção transversal, ele concluiu que o momento de flexão é proporcional ao momento de inércia da seção transversal (TIMOSHENKO³³).

Jacob Bernoulli descobriu através de experimentos que existia uma relação linear entre o alongamento e a tensão produzida pela força. Parent mostrou em 1713 a correta distribuição de tensões para uma viga retangular fletida. Em 1773, 39 anos depois de Euler ter divulgado sua fórmula para prever a capacidade de uma barra comprimida, Coulomb aplicou corretamente a lei de Hooke e as equações de equilíbrio da estática, desenvolvendo a expressão que relaciona o momento devido à flexão com

as tensões normais em uma viga retangular fletida (TIMOSHENKO³³). O efeito das deformações por cisalhamento foram negligenciadas por este. Uma teoria mais geral da elasticidade foi desenvolvida somente mais tarde por Navier e Saint-Venant.

Embora a fórmula de Euler seja hoje em dia universalmente conhecida, servindo como base para o dimensionamento de barras esbeltas de aço, ela foi bastante criticada no início de 1800 porque não conseguia prever, com precisão, a capacidade de resistência à compressão dos materiais utilizados naquela época (JOHNSTON¹³).

Em 1840, E. Hodgkinson realizou testes em barras esbeltas de ferro. Após a análise destes resultados, Todhunter e Pearson deram crédito ao trabalho de Euler. Em 1905, Johnson, Bryan e Turneaure publicaram o livro “Modern Framed Structures” onde recomendaram a fórmula de Euler precedida por uma constante de modificação que foi obtida através de experimentos. Estava estabelecida a teoria de Euler (JOHNSTON¹³).

1.2.2 Flambagem inelástica de barras por flexão

Apesar de Euler ser considerado o pai da flambagem elástica, ele mesmo impôs um limite para a aplicação de sua fórmula, demonstrando, desta forma, o entendimento do comportamento da flambagem inelástica. Em um dos seus trabalhos Euler disse: “para começar, eu gostaria de indicar que este momento de rigidez não está apenas limitado a corpos elásticos...” (VAN DEN BROEK³⁴). Quando Euler utilizava a expressão momento de rigidez, ele estava se referindo ao termo que é hoje conhecido como rigidez “EI” (no campo elástico). Sua declaração a respeito do comportamento inelástico demonstrou sua intuitiva compreensão do processo de flambagem.

Progresso, além das declarações de Euler, somente foi possível após a descoberta das relações entre tensão-deformação, curvatura e momento de flexão no campo inelástico. Em 1889, Engesser sugeriu que a capacidade resistente de uma barra no campo inelástico poderia ser obtida pela simples substituição do módulo de elasticidade elástico “E” pelo módulo de elasticidade tangente “E_t” (CHEN & LUI⁷).

Assim, para uma barra bi-articulada nas extremidades, a carga crítica para uma barra no campo inelástico pode ser obtida pela seguinte equação:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E_t I}{L^2} \quad (1.2)$$

sendo “ E_t ” definido como o módulo tangente do material obtido do diagrama tensão-deformação para cada tensão particular no campo inelástico; “ I ” o momento de inércia da barra e “ L ” o comprimento da barra. A expressão acima é conhecida como “fórmula do módulo tangente”.

Paralelamente ao trabalho de Engesser, Considère, em 1889, com base no trabalho de Euler, realizou uma série de 32 ensaios em barras. Como resultado, sugeriu que a flambagem ocorre acima do limite de proporcionalidade do módulo efetivo “ E_{eff} ”. Ele declarou que o módulo efetivo teria um valor numérico entre o módulo elástico e o módulo tangente (JOHNSTON¹³).

Jasinski, em 1895, trouxe o trabalho de Considère para Engesser. No mesmo ano Engesser publicou a fórmula correta e geral do módulo reduzido, cujo valor numérico também deveria estar contido entre os de “ E_t ” e “ E ”. Entretanto, este declarou que o módulo reduzido não dependia somente de “ E_t ” e “ E ”, mas também da forma geométrica da seção transversal. Em 1910, Theodor von Kármán obteve expressões para o módulo reduzido para barras de seção transversal retangular e perfis “H” (JOHNSTON¹³). A equação para carga crítica, utilizando o conceito de módulo reduzido para uma barra bi-articulada, é dada por:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E_r I}{L^2} \quad (1.3)$$

$$E_r = E \frac{I_e}{I} + E_t \frac{I_d}{I} \quad (1.4)$$

sendo, " I_e " a inércia relativa à parte da seção transversal tracionada com relação ao momento fletor provocado na bifurcação, descarregamento; " I_d " a inércia relativa à parte da seção transversal comprimida com relação ao momento fletor provocado na bifurcação, carregamento; e, " I " é a inércia da seção transversal. " I_e " e " I_d " estão relacionados com a posição da linha neutra. $E_r = f(E_t, E)$ é definido como módulo reduzido. Nas equações (1.3) e (1.4) é assumido que a barra pode estar em equilíbrio tanto na posição em que ela se encontra (perfeitamente reta) ou em uma configuração ligeiramente fletida.

Pela necessidade da utilização dos dois módulos de elasticidade " E " e " E_t ", o módulo reduzido " E_r " também é chamado de duplo módulo. Por mais de 35 anos houve controvérsias sobre a aplicação do módulo tangente ou duplo módulo na equação de Euler. É importante ressaltar que para vários ensaios feitos em laboratório, foram obtidos resultados em que as barras flambaram e atingiram o colapso com cargas ligeiramente acima das cargas previstas pelo módulo tangente. Muitos pesquisadores, através de ensaios realizados, chegaram a afirmar que a fórmula de Engesser, que utilizava o conceito do módulo tangente, estava em concordância com os resultados obtidos.

Em 1946, SHANLEY²⁹ conciliou a controvérsia entre as teorias do módulo tangente e duplo módulo. Ele mostrou que era possível para uma barra fletir com um aumento da carga axial com um carregamento previsto através do módulo de elasticidade tangente. Desta forma, dada uma imperfeição infinitesimal para provocar flexão na barra, a carga proposta pela teoria do duplo módulo não poderia jamais ser encontrada. Um ano após a divulgação do seu conceito em 1946, Shanley validou sua teoria através da análise de um modelo de flambagem com duas barras rígidas. Em uma carta publicada juntamente com o artigo de Shanley de 1947, von Kármán redefiniu o conceito de carregamento crítico tangente, tendo como suporte o conceito de SHANLEY²⁹, dizendo:

"O carregamento crítico tangente é o menor valor da carga axial para o qual a bifurcação do equilíbrio pode ocorrer, apesar da transição para a posição fletida requerer ou não um aumento do carregamento axial".

Dessa forma, von Kármán definiu o conceito de carregamento crítico tangente. Shanley, 57 anos mais tarde, acrescentou o conceito de carregamento crítico de bifurcação. Duberg e Wilder aplicaram o conceito de Shanley a uma seção “H” idealizada. Eles assumiram um material com uma curva tensão-deformação não-linear desenvolvida por Ramberg e Osgood. Esta curva fornece a relação tensão-deformação para o campo inelástico a qual é expressa através de uma simples expressão. Eles analisaram o comportamento inelástico ao longo de todo o comprimento da barra, e confirmaram o conceito de Shanley, melhorando a definição:

“Se o comportamento de uma barra perfeitamente reta for considerado como o comportamento limite de uma barra fletida quando sua imperfeição inicial desaparece, então o carregamento crítico tangente é o carregamento crítico da barra, ou seja, o carregamento para o qual a flexão se inicia” (JOHNSTON¹³).

Duberg e Wilder (JOHNSTON¹³) mostraram que se uma barra estiver suportada lateralmente para permanecer perfeitamente reta, acima do carregamento do módulo tangente e abaixo do módulo reduzido, e ocorrer a retirada do suporte lateral a barra começará a fletir para um pequeno aumento de carregamento. Por outro lado, se a barra estiver suportada lateralmente, acima do carregamento do módulo reduzido, a retirada do suporte lateral fará com que ocorra o colapso, uma vez que a barra não suportará nenhum acréscimo de carregamento. JOHNSTON¹² analisou um modelo de flambagem similar ao utilizado por Shanley. E em vários estágios, acima do carregamento do módulo tangente, a distribuição das tensões previstas intuitivamente por Shanley foram determinadas quantitativamente, e então, o máximo carregamento foi determinado. Malvick e Lee, mais tarde, divulgaram resultados de estudos de flambagem inelástica realizados ao longo de uma barra retangular bi-articulada. Em 1967, Batterman desenvolveu um programa de computador para determinar o máximo carregamento para barras de alumínio de seção transversal “H” com abas de áreas finitas, fletidas em torno do eixo de maior e menor inércia (JOHNSTON¹³). Em ambos os eixos de flexão foram determinados os máximos carregamentos, tanto para a configuração perfeitamente reta quanto para barras com curvaturas iniciais.

A definição de Engesser-Shanley para a carga crítica é hoje, geralmente, aceita para barras constituídas por materiais que apresentam uma relação tensão-deformação não-linear. Dentro de certos limites, uma modificação do mesmo procedimento é aplicável para barras estruturais de aço.

1.2.3 A teoria da plasticidade

Há séculos, egípcios, romanos e gregos executavam obras cujas dimensões e durabilidade impressionam até hoje, mas foi apenas em 1594 com Galileo que o estudo da resistência dos materiais teve seu primeiro grande impulso no aspecto teórico, com a publicação do tratado de mecânica intitulado “Della Scienza Le Meccaniche”. A crescente complexidade das obras e a dificuldade em se produzir modelos adequados para ensaio, impulsionou decisivamente o desenvolvimento de modelos matemáticos capazes de descrever a geometria, as deformações e os esforços nas estruturas.

Com o avanço dos trabalhos experimentais e da teoria das estruturas, os ensaios de laboratório tornaram-se mais sofisticados e as técnicas matemáticas ganharam corpo, permitindo avaliar de modo melhor o comportamento de um número cada vez maior de estruturas. Um exemplo deste fato diz respeito à plasticidade. Em 1868, Tresca apresentou resultados experimentais sobre o comportamento plástico de metais submetidos a grande pressões. Neste trabalho ele propôs a primeira condição de escoamento, ou seja, o estado em que o material escoava quando a tensão máxima atingia um valor crítico. Estes resultados logo despertaram o interesse de outro grande estudioso da época. Em 1870 Saint-Venant introduziu as relações constitutivas para materiais perfeitamente plásticos no plano de tensões, baseado em três suposições (CHEN & HAN⁶):

- o volume do material permanece inalterado durante a deformação plástica;
- a direção das deformações principais coincide com a direção das tensões principais;

- a máxima tensão de cisalhamento em cada ponto é igual a uma constante específica.

Iniciava-se, assim, o estudo de um campo totalmente novo da resistência dos materiais: a plasticidade. Ainda no mesmo ano, Levy estendeu as equações gerais de Saint-Venant para três dimensões.

Em 1886 um notável trabalho sobre estudos experimentais das propriedades mecânicas do ferro e do aço foi apresentado em uma publicação em Munique. O título deste trabalho foi: “Variações do limite elástico e da resistência do ferro e do aço devido a esforços de tração e de compressão, por aquecimento e resfriamento e por carregamento repetido freqüentemente”. O autor foi Johann Bauschinger, professor de Mecânica Aplicada e Estática Gráfica da Universidade de Munique (MUGHRABI¹⁹).

Uma das descobertas descritas em seu trabalho mereceu a atenção da comunidade científica do mundo inteiro e ficou conhecido, desde então, como efeito Bauschinger. A exploração científica do efeito Bauschinger em termos das propriedades mecânicas e microestruturas continua sendo muito intensa nos dias de hoje.

Dentre as contribuições de Bauschinger estão o aperfeiçoamento de técnicas de ensaios de materiais, o desenvolvimento de instrumentos de medições altamente sensíveis, tal como o extensômetro de espelho. O uso da máquina de ensaios mais desenvolvida da época e a aplicação de novas técnicas de medições permitiram que Bauschinger realizasse um grande número de ensaios precisos em diferentes tipos de materiais, tais como: metais, madeiras, cimentos e rochas. Outra importante máquina de ensaios usada freqüentemente por Bauschinger foi a máquina para ensaios de fadiga que foi desenvolvida por outro pioneiro de ensaios de materiais, August Wöhler (MUGHRABI¹⁹). A comunidade científica reconheceu Johann Bauschinger como uma das principais personalidades da época e acompanhou seus esforços para a padronização dos métodos de ensaios de materiais.

Outra importante contribuição ao estudo da resistência dos materiais foi dada por Alberto Castigliano que, em 1873, formulou o teorema que leva o seu nome. A

generalização do teorema de Castigliano, feita em 1889 por Engesser, eliminou a limitação de sua aplicação a casos em que a relação entre forças externas aplicadas e deslocamentos é linear. A noção da energia complementar introduzida por Engesser permitiu tratar problemas cuja relação entre forças externas aplicadas e deslocamentos era não-linear.

Um trabalho escrito em 1909 por Leonard Bairstow, com o título: “O limite elástico do ferro e do aço sob variação cíclica de tensões”, abordou a Teoria da Fadiga, ou seja, o colapso devido a repetição de tensões. De acordo com esta teoria, barras submetidas a tensões repetitivas iniciam o processo de fadiga quando as tensões aplicadas em cada ciclo são tão grandes que a barra não se comporta mais elasticamente. Bairstow também percebeu que após um determinado número de repetições o ferro e o aço são capazes de se ajustarem às variações de tensões, aplicadas ciclicamente. Quando este ajuste é completo, a barra torna-se perfeitamente elástica através do ciclo completo e o processo de fadiga é interrompido. A capacidade de ajuste é limitada, e se o nível de tensões do ciclo for suficientemente grande, a barra torna-se inelástica e o encruamento começa a atuar durante cada ciclo (ABEL²).

Uma generalização similar aos resultados de Levy foi atribuída a von Mises, que em uma marcante publicação em 1913 determinou o critério de escoamento a pequenas pressões que é conhecido nos dias de hoje como a teoria do “ J_2 ”, ou condição de escoamento da tensão de cisalhamento octaédrica (CHEN & HAN⁶).

Em 1924 Prandtl estendeu as equações de Saint-Venant, Levy e von Mises para o problema plano, incluindo a componente elástica da deformação. Reuss, em 1930, conduziu estes estudos para três dimensões. Em 1928 von Mises generalizou seu trabalho inicial para um sólido perfeitamente plástico, no intuito de incluir uma função de escoamento geral e discutir a relação que o incremento de deformação plástica tinha com a suave superfície de escoamento. Dessa forma este conceito foi introduzido considerando a função de escoamento como um potencial plástico na relação tensão-deformação incremental da teoria da fluência. A regra de fluência

associada à condição de escoamento de Tresca, em regimes singulares, foi discutida por Reuss em 1932 e 1933 (CHEN & HAN⁶).

Ainda em 1928, Prandtl tentou formular as relações gerais para o comportamento do encruamento. Melan, em 1938, generalizou os já conhecidos conceitos da plasticidade perfeita e forneceu relações incrementais para o encruamento de sólidos com superfícies de escoamento suaves. Além disso, no mesmo ano, Melan discutiu teoremas de unicidade para problemas elasto-plástico incrementais (CHEN & HAN⁶).

Após os anos 40 observou-se um intenso desenvolvimento dos conceitos básicos e fundamentais da como é conhecida atualmente Teoria Clássica da Plasticidade dos Metais. Independente do trabalho de Melan, em 1949, Prager, numa relevante publicação, determinou uma regra geral para as relações constitutivas plásticas de encruamento de materiais com superfícies de escoamento suaves. A função de escoamento (também conhecida com função de carregamento) e as condições de carregamento e descarregamento foram precisamente formuladas. Outras condições, como a condição de continuidade (próxima ao carregamento nulo), condição de consistência (para carregamento no estado plástico), condições de unicidade e condições de irreversibilidade de deformações plásticas foram formuladas e discutidas. Observou-se também a dificuldade para a determinação do limite de proporcionalidade na relação tensão-deformação do aço. Em 1958 Prager estendeu estas regras gerais para incluir efeitos térmicos (deformação plástica não-isotérmica), assumindo uma mudança na superfície de escoamento de acordo com a variação da temperatura (CHEN & HAN⁶).

Um importante conceito de encruamento, denominado Postulado de Estabilidade dos Materiais, foi proposto por Drucker em 1951 e estendido em outras publicações. No seu conceito, as relações tensão-deformação plásticas juntamente com outros aspectos fundamentais relacionados ao assunto são tratados de maneira única. Drucker, em 1959, acrescentou ao seu postulado os fenômenos dependentes do tempo, tal como a viscoelasticidade linear. Baseado em seu postulado, a unicidade de

sólidos perfeitamente plástico, e com encruamento, foi provada e vários teoremas foram formulados (CHEN & HAN⁶).

Postulados baseados em hipóteses e funções, equivalentes às relações de plasticidade já desenvolvidas, foram mostrados por Hill em 1948 e complementados por Bishop e Hill em 1951 em estudos sobre agregados cristalinos (CHEN & HAN⁶).

Também em 1951 Polakowski associou a magnitude do efeito Bauschinger com a quantidade de carbono, baseado em resultados de testes realizados em diferentes aços carbono (DODD & RESTREPO-POSADA⁹).

Formulações precisas de dois fundamentais teoremas de análises limites (conhecidos como teoremas do limite superior e do limite inferior) foram apresentadas em duas publicações de Drucker, Greenberg e Prager em 1951 e 1952 para um material elasto-plástico perfeito (ou ideal), e por Hill, na mesma época, a respeito de material rígido-plástico perfeito.

Uma generalização além das relações tensão-deformação plástica para superfícies simples de escoamento, ou seja, a presença de descontinuidades na direção do vetor normal à superfície de escoamento, bem como os teoremas de unicidade e variacional para tais casos, se devem a Koiter que os publicou em 1953. Ele introduziu o uso de mais de uma função de escoamento na relação tensão-deformação, onde cada incremento de deformação plástica receberia a contribuição da superfície de escoamento correspondente. Este conceito foi estendido por Sanders, em 1955, que também propôs um mecanismo para a formulação das superfícies de escoamentos subseqüentes. Ainda em 1953, Koiter mostrou que a então conhecida teoria do deslizamento plástico era um tipo particular da teoria da fluência, com uma condição de escoamento singular composta por infinitos e independentes planos de funções de escoamento. Em 1961 Ilyushin deu sua contribuição à teoria da plasticidade através do trabalho não-negativo em um ciclo de deformações, conhecido como postulado de Ilyushin para estabilidade dos materiais (CHEN & HAN⁶).

Uma análise realista da resposta dos materiais sob carregamentos reversos simétricos, assimétricos ou randômicos no regime plástico é um assunto muito complexo da teoria da plasticidade. Na segunda metade do século passado alguns modelos foram desenvolvidos com o objetivo de descrever a resposta da estrutura devida a essas condições de carregamentos. Em um desses modelos, em 1967, Mroz propôs o modelo de superfícies múltiplas, no qual ele aproximava a curva de tensão-deformação não-linear para vários segmentos lineares. Em 1975, Dafalias e Popov propuseram um modelo de superfície dupla, utilizando as variáveis internas plásticas. Como o próprio nome diz, este modelo utiliza somente duas superfícies de escoamento e define uma variação contínua do módulo plástico entre estas duas superfícies. Em 1977, Chaboche desenvolveu o modelo de encruamento não-linear cinemático, cujos estudos foram iniciados em 1966 por Armstrong e Frederick. Este modelo foi deduzido a partir das equações constitutivas não-lineares, da variável do encruamento cinemático (KHAN & HUANG¹⁵).

1.2.4 O comportamento cíclico das estruturas

Em 1971 POPOV & PINKNEY²² observaram que quando uma estrutura recebia carregamentos cíclicos (tal como terremotos), ela estaria sujeita a consideráveis ações inelásticas e repetidas, principalmente nas ligações. Este fato os motivou a estudar o comportamento das barras e ligações metálicas submetidas a carregamentos repetidos e reversos. Algum tempo depois, em 1986, POPOV et al²¹ conduziram uma série de experimentos para verificar os critérios de projetos que deveriam ser utilizados nas ligações das estruturas sob extremas condições sísmicas. Dessa forma, concluíram que as ligações deveriam receber uma atenção especial, tal como: o uso de enrijecedores e um cuidadoso controle de qualidade no processo de soldagem.

Em 1994 KNIGHT & SANTHAKUMAR¹⁶ analisaram o comportamento de perfis cantoneiras simples submetidos a carregamentos reversos e cíclicos, onde observaram que o grau de degradação da rigidez das cantoneiras, devido a carregamentos reversos, dependia do tipo de transferência de esforços aos quais o perfil era submetido, ou seja, através do centro de cisalhamento ou através de chapas de ligação.

No mesmo ano LEE & LEE¹⁷ estudaram a flambagem local de barra sob carregamentos cíclicos, concluindo que a influência da flambagem local no comportamento de flexão simples para carregamentos unidirecionais e cíclicos é pequena. Por outro lado, quando ocorre a flexão composta, a influência da flambagem local é grande.

SHEN et al³⁰ e MAMAGHANI et al¹⁸, em 1995, demonstraram o comportamento das estruturas de aço sob carregamentos cíclicos não proporcionais, através de estudos analíticos e experimentais. Algumas características importantes do aço doce no regime plástico foram demonstradas nos experimentos. Já nos estudos teóricos se deu o desenvolvimento de um novo modelo multiaxial de superfície de escoamento dupla.

Em 2001 SOH et al³¹ realizaram ensaios numéricos e experimentais em ligações de barras de aço tubulares sob carregamentos cíclicos. Do ponto de vista da energia, observaram que a ligação dissipou muito mais energia na compressão do que na tração, devido a ocorrência de flambagem local das barras, uma vez que as ligações dissipam a maior parte da energia aplicada na estrutura.

1.3 Proposta do trabalho

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de um programa computacional capaz de realizar análises de estruturas metálicas reticuladas planas, considerando a não-linearidade física em sistemas não-conservativos. Este programa é baseado na teoria dos pequenos deslocamentos e é aplicada a técnica matricial utilizando funções de rigidez. Também são interpretados os modelos analíticos, da teoria da plasticidade, capazes de retratar o comportamento uniaxial do aço no carregamento, descarregamento, recarregamento e carregamento reverso das estruturas, de acordo com a análise solicitada. No carregamento da estrutura as barras seguem o comportamento elástico ou elasto-plástico dependendo do estado de tensões. No descarregamento da estrutura as barras seguem somente o comportamento elástico. Desta forma, o sistema pode ser considerado não-conservativo aproximando-se do comportamento real. O regime elasto-plástico é considerado para barras predominantemente solicitadas axialmente, utilizando-se as curvas de flambagem do

CRC¹⁴ (Column Research Council) e da LRFD¹ (Load and Resistance Factor Design). Para a resolução dos sistemas não-lineares, que uma análise não-linear gerará, é utilizado o processo incremental-iterativo de Newton-Raphson, que vem sendo empregado em diversos programas e fornecendo bons resultados.

Por fim, através de exemplos numéricos, serão analisadas as respostas fornecidas pelo programa, das estruturas metálicas devidas a carregamentos cíclicos.

Capítulo 2

Estudo da Inelasticidade das Barras

2.1 Introdução

Em algumas barras, nas quais o material permanece totalmente elástico e obedecendo à lei de Hooke, a flambagem ocorre somente por uma tensão com uma intensidade inferior ao limite de proporcionalidade da relação tensão-deformação do material. A instabilidade ocorre quando for atingida a carga de Euler. Mas para muitas barras isso não é realidade, pois a flambagem é causada por uma tensão com intensidade superior ao limite de proporcionalidade. Este tipo de flambagem é conhecido como flambagem no regime inelástico. Para barras que flambam inelasticamente, algumas das fibras da seção transversal apresentam plastificação antes da flambagem ocorrer. Como resultado, somente as fibras que permanecem elásticas são capazes de resistir à força adicional aplicada.

Desde que apenas uma parte da seção transversal seja capaz de resistir à força axial e à flambagem, o módulo de elasticidade elástico “ E ” deve ser trocado por um módulo de elasticidade efetivo “ E_{ef} ” para descrever o comportamento da estrutura no regime inelástico.

Para retratar o comportamento de barras no regime inelástico serão abordados, neste capítulo, alguns fenômenos causadores da não-linearidade física.

2.2 Módulo de elasticidade tangente

O módulo de elasticidade tangente é utilizado para reduzir a capacidade portante de uma peça estrutural de aço devido ao efeito de não-linearidade física do material. Sua determinação é feita através das curvas de tensão-deformação. Estas curvas podem ser obtidas através de dois métodos: experimental e numérico. Pelo método experimental, a curva tensão-deformação é obtida através de ensaios de corpos-de-prova de pequenos comprimentos e pequenas esbeltezes. O aparecimento do trecho não-linear é um fenômeno atribuído à presença das tensões residuais e das imperfeições geométricas na barra. Caso não houvesse a presença desses efeitos, o material apresentaria o comportamento elasto-plástico perfeito. Já no método numérico, a determinação da curva tensão-deformação é feita através de um modelo matemático, assumindo uma distribuição de tensões residuais na seção transversal da barra e uma dada imperfeição geométrica. Determinada a curva de tensão-deformação do material, é possível então encontrar o módulo de elasticidade tangente.

A seguir, serão apresentadas algumas curvas de flambagem, utilizadas por normas ou especificações, que serão utilizadas neste trabalho para se determinar a redução da capacidade portante de uma barra, ou seja, a obtenção do módulo tangente.

2.2.1 Curva proposta pelo “Column Research Council - CRC”

Baseado no estudo de colunas idealizadas com distribuição linear e parabólica das tensões residuais, bem como em ensaios experimentais, em perfis laminados utilizados em estruturas metálicas, as recomendações do CRC¹⁴ - Column Research Council - na primeira e Segunda edição do seu guia propõem, para representar o comportamento da barra no regime inelástico, a seguinte curva parabólica:

$$\sigma_{cr} = f_y - B \left(\frac{KL}{r} \right)^2 \quad (2.1)$$

sendo, “ σ_{cr} ” a tensão crítica na barra, “ f_y ” a tensão de escoamento do material, “ KL ” o comprimento efetivo de flambagem e “ r ” o raio de giração da seção transversal da barra.

Entretanto, a flambagem das barras no regime elástico será representada pela fórmula de Euler. O ponto limite entre o comportamento no regime elástico e inelástico será encontrado quando $\sigma_{cr} = 0,5f_y$ (CHEN & LUI⁷). Para obter uma transição suave da hipérbole de Euler para a parábola, dada pelas recomendações do CRC¹⁴, representando o comportamento inelástico, a constante “ B ” da equação (2.1) deverá ser tomada como $f_y^2 / 4\pi^2 E$. A esbeltez correspondente a $\sigma_{cr} = 0,5f_y$ é denominada de “ C_c ”, sendo:

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{f_y}} \quad (2.2)$$

Substituindo o valor de “ B ” na equação (2.1) e lembrando que o valor de “ C_c ” dado pela equação (2.2) é o ponto limite entre o comportamento elástico e inelástico da barra, pode-se obter:

$$\sigma_{cr} = \begin{cases} f_y \left[1 - \frac{(KL/r)^2}{2C_c^2} \right] & ; \quad \frac{KL}{r} \leq C_c \\ \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2} & ; \quad \frac{KL}{r} > C_c \end{cases} \quad (2.3)$$

Com o propósito de comparação, a equação (2.3) pode ser rescrita em função dos seguintes termos adimensionais, “ σ_{cr}/f_y ” e “ λ_c ” como:

$$\frac{\sigma_{cr}}{f_y} = \begin{cases} 1 - 0,25\lambda_c^2 & ; \lambda_c \leq \sqrt{2} \\ \lambda_c^{-2} & ; \lambda_c > \sqrt{2} \end{cases} \quad (2.4)$$

sendo, “ λ_c ” um parâmetro de esbeltez dado por $\lambda_c = (KL/r)\sqrt{f_y/\pi^2 E}$ ou $\lambda_c = \sqrt{f_y/\sigma_{Euler}}$.

Utilizando a teoria do módulo tangente, pode-se dizer que $\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{Euler}} = \frac{E_t}{E}$ e pode-se encontrar, fazendo-se as devidas transformações algébricas, a equação (2.4) como:

$$\frac{E_t}{E} = \begin{cases} \frac{4\sigma}{f_y} \left(1 - \frac{\sigma}{f_y}\right) & ; \sigma > 0,5f_y \\ 1 & ; \sigma \leq 0,5f_y \end{cases} \quad (2.5)$$

Nota-se que o módulo de elasticidade permanece constante até a tensão atingir a metade da tensão de plastificação do material caracterizando o regime elástico. A partir deste ponto o módulo de elasticidade é reduzido gradativamente, através da substituição do módulo elástico pelo módulo tangente, caracterizando o comportamento do regime inelástico. Quando toda a seção transversal da barra estiver plastificada, o módulo de elasticidade tangente neste ponto será aproximadamente nulo.

2.2.2 Curva proposta pela “AISC Load and Resistance Factor Design - LRFD”

Nas especificações da LRFD¹ a resistência de cálculo a uma solicitação de compressão simples é dada pelas seguintes expressões:

$$\frac{\sigma_{cr}}{f_y} = \begin{cases} 0,658^{\lambda_c^2} & ; \lambda_c \leq 1,5 \\ \frac{0,877}{\lambda_c^2} & ; \lambda_c > 1,5 \end{cases} \quad (2.6)$$

Esta curva considera as tensões residuais e imperfeições geométricas, sendo que “ λ_c ” já foi definido anteriormente. Como pode-se observar, quando a barra

encontra-se no regime elástico a carga crítica de Euler é reduzida por um fator de segurança constante de 0,877. Pode-se encontrar uma relação entre as expressões dadas pela LRFD¹, no regime elástico e no regime inelástico, para encontrarmos uma curva que relacione o módulo de elasticidade tangente com o módulo de elasticidade elástico, “ E_t/E ”, como:

$$\frac{E_t}{E} = \frac{0,658^{\lambda_c^2}}{0,877/\lambda_c^2} \leq 1,0 \quad (2.7)$$

A equação (2.7) pode ser expressa em função de “ σ/f_y ”, como:

$$\frac{E_t}{E} = \begin{cases} -2,7243 \frac{\sigma}{f_y} \ln\left(\frac{\sigma}{f_y}\right) & ; \quad \sigma > 0,39f_y \\ 1 & ; \quad \sigma \leq 0,39f_y \end{cases} \quad (2.8)$$

Nota-se que o módulo de elasticidade dado pelas especificações da LRFD¹ permanece constante até a tensão atingir 0,39 da tensão de escoamento (regime elástico) e que a partir deste ponto o módulo de elasticidade é reduzido gradativamente através do módulo tangente (regime inelástico), até praticamente zero. Na expressão fornecida pela LRFD¹ o regime inelástico se dá a uma tensão inferior ao dado pelo CRC¹⁴, uma vez que as especificações da LRFD¹ levam em consideração, além das tensões residuais, o acréscimo de tensão devido a flexão causada pelas imperfeições geométricas (CALLEJAS et al⁴).

2.3 Laminação a frio e encruamento

Quando uma barra de aço sofre uma deformação além de $\varepsilon_y = f_y/E$, relativa ao primeiro escoamento, e é descarregada na seqüência, um recarregamento fará com que ela apresente uma relação tensão-deformação diferente daquela observada durante o carregamento inicial. Os carregamentos e os descarregamentos que ocorrem no regime elástico não apresentam deformações residuais; entretanto, um

carregamento inicial além do ponto de escoamento, tal como o ponto “A” da figura 2.1, resulta em um descarregamento com uma deformação no ponto “B”. Surgindo, dessa forma, um trecho permanente “OB”. A ductilidade do material é reduzida da deformação “OF” para a deformação “BF”. O recarregamento se comporta como se a origem da relação tensão-deformação fosse no ponto “B”; a região plástica original de encruamento é também reduzida (SALMON & JOHNSON²⁶).

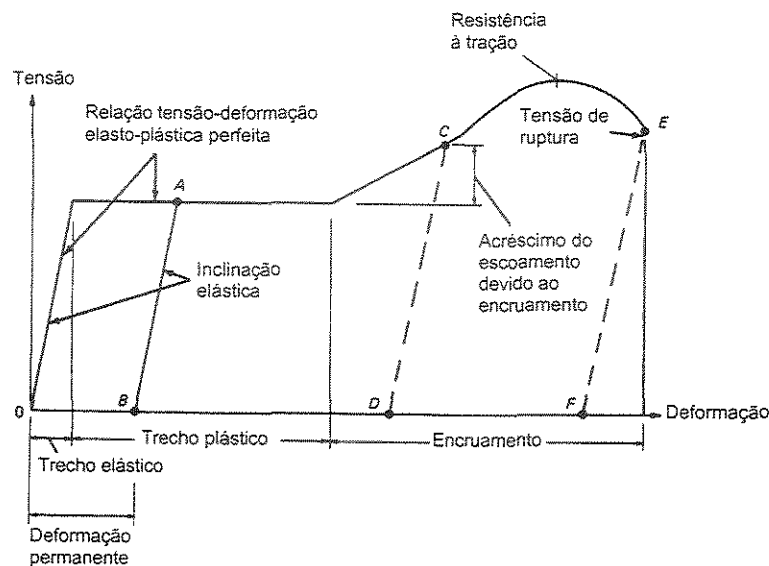


Figura 2.1 - Efeitos do encruamento além do limite elástico.

Quando a barra é descarregada novamente, até atingir o ponto “C”, o descarregamento segue a linha tracejada até o ponto “D”; ou seja, a origem para o novo carregamento passa a ser, agora, o ponto “D”. O comprimento da linha “CD” é maior, indicando que o ponto de escoamento sofreu um acréscimo. Este acréscimo da tensão de escoamento é devido ao efeito do encruamento. O processo de carregamento além do limite elástico altera o valor da ductilidade disponível; quando feito a uma temperatura ambiente, é conhecido como laminação a frio.

De acordo com SALMON & JOHNSON²⁶, quando uma estrutura é composta por chapas laminadas a frio, à temperatura ambiente, ocorrem deformações plásticas nas dobras. A laminação a frio na fase de encruamento aumenta a resistência ao

escoamento nos locais de dobras. Existem especificações de projetos que permitem que este efeito seja levado em conta.

2.4 Carregamento cíclico

Várias hipóteses têm sido elaboradas a respeito de carregamentos cíclicos, nos quais a carga última é independente da seqüência em que os vários carregamentos são aplicados na estrutura. Dessa forma, é suposto que um certo grau de variação na magnitude dos diferentes carregamentos pode ser tolerado enquanto o número de ciclos não se aproximar dos valores associados com a fadiga da estrutura, no caso do projeto em questão ser controlado por um limite de utilização e não por um limite de resistência plástica (BEEDLE³).

A importância da consideração da fadiga ou do carregamento cíclico no cálculo de vigas na fase plástica é observada nos testes de fadiga conduzidos por W. M. Wilson e seus associados. Existem fundamentos que permitem que boa parte dos projetistas considerem que qualquer estrutura será submetida a 100.000 ciclos de cargas ou menos em sua vida útil. Ciclos cujos carregamentos variam de zero a um valor máximo de tensão. Neste sentido, vigas metálicas fabricadas com seções transversais uniformes e com soldas contínuas possuem resistência à fadiga e tensões superiores ao ponto de escoamento inicial do material. Por outro lado, vigas construídas com enrijecedores intermitentes (dispostos nos pontos de concentração de tensões) possuem uma menor resistência à fadiga do que as vigas com seções transversais constantes. De acordo com Beedle “qualquer perfil laminado sem ligações ou flanges possuirá uma resistência à fadiga maior do que qualquer outro perfil com enrijecedores, ou do que um perfil com um módulo de resistência elástica igual ou um pouco maior”. Dessa forma, a aplicação do dimensionamento no regime plástico é mais apropriada para vigas e pilares com seções uniformes, uma vez que tais elementos possuem uma melhor resistência à fadiga (BEEDLE³).

A incerteza da ocorrência da fadiga em ligações articuladas, tais como as utilizadas em estruturas aporticadas, representa uma limitação no dimensionamento

nos regimes elástico e plástico, sendo, dessa forma, necessária a realização de mais testes de fadiga destas ligações. As ligações de estruturas aporticadas do tipo retangular quase sempre incluem soldas de filete na região de momento máximo. O colapso por fadiga em tal ligação se dará, provavelmente, após 1000 ciclos de carregamentos. A falta de informações mais precisas faz com que o dimensionamento das estruturas no regime plástico seja limitado a poucas repetições dos maiores carregamentos.

No dimensionamento das estruturas somente a variação dos carregamentos é considerada. Entretanto, se a maior parte dos carregamentos forem completamente removidos da estrutura e reaplicados em intervalos freqüentes, pode ser mostrado, na teoria, que um diferente modo de colapso pode ocorrer. Isto é caracterizado pela perda de estabilidade, pois sob aplicações repetidas de uma determinada seqüência de carregamentos, um incremento de deformação plástica pode aparecer durante cada ciclo de carregamento. Se o deslocamento de uma viga ou pilar continuar indefinidamente após ciclos de carregamentos a estrutura é considerada instável do ponto de vista dos deslocamentos.

De acordo com BEEDLE³, a perda de estabilidade por deformação progressiva é caracterizada pelo comportamento representado pela linha $P > P_s$ na figura 2.2. Se o carregamento for variável, repetido e maior que a carga estabilizadora " P_s ", então os deslocamentos tenderão a aumentar a cada ciclo. Por outro lado, se o carregamento variável for igual ou menor que " P_s ", então, após ciclos de carregamentos, os deslocamentos se estabilizarão num valor máximo constante e o comportamento se tornará elástico. A trajetória $P < P_s$ representa esta situação.

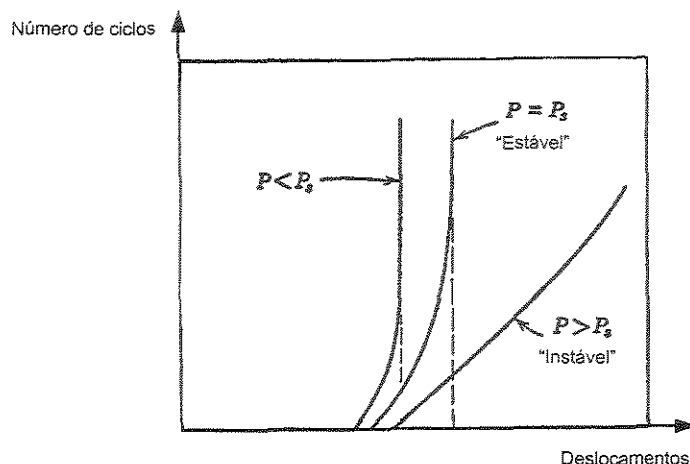


Figura 2.2 - Representação gráfica da estabilidade dos deslocamentos.

No caso de uma situação rara de carregamentos, outros métodos são utilizados para a determinação da carga " P_s " e o dimensionamento pode ser modificado conseqüentemente. Entretanto, esta modificação não será necessária na maioria dos casos. Em primeiro lugar, a proporção entre as cargas variáveis e permanentes deve ser grande para que " P_s " seja significativamente menor que " P_u ", e esta situação é bastante incomum. Em segundo lugar, o fator de segurança das cargas é composto por vários outros fatores que proporcionam um aumento na magnitude do carregamento (tais como: variações nas dimensões e propriedades físicas do material, erros de fabricação e montagem etc.). Alterações nas cargas variáveis, somente, não são capazes de consumir todo o valor do coeficiente de segurança e, dessa forma, a carga permanente mais a carga variável jamais alcançariam " P_s ". Neste caso, o colapso da estrutura é acompanhado por um aviso de que a perda de estabilidade está iminente. Isto implica que é apropriada uma diminuição do fator de segurança das cargas tanto em " P_s " quanto em " P_u ".

O dimensionamento no regime plástico é aconselhável para estruturas com carregamento estático. Para tais casos o problema da repetição do carregamento pode ser desprezado. Quando a magnitude total do carregamento principal for passível de variações, a carga última pode ser modificada de acordo com análises de estabilidade (BEEDLE³).

2.5 O efeito Bauschinger

2.5.1 Introdução

A anisotropia dos cristais simples em relação às propriedades físicas e mecânicas é bem conhecida e pode ser encontrada em alguns materiais na natureza. Porém, a anisotropia pode ser introduzida, principalmente em policristais por soldagem, forjamento, laminação ou de qualquer outra forma e esta anisotropia influenciará no projeto que fará uso destes materiais. Além das propriedades adquiridas pelos cristais simples ou pelos policristais, uma anisotropia ainda maior pode ser introduzida por uma deformação plástica e este fenômeno é conhecido como efeito Bauschinger (ABEL²).

Apesar dos estudos de Bauschinger terem sido baseados na redução da resistência ao escoamento, devido à inversão do carregamento após uma deformação plástica, o efeito é mais complexo e envolve não somente a resistência ao escoamento reverso inicial, mas, também, os subseqüentes obtidos da relação tensão-deformação.

2.5.2 Características do efeito Bauschinger

A preocupação entre 1873 e 1886 com a variação do limite elástico além do trecho elástico inicial, explica porque Bauschinger não mencionou, em seu trabalho, nenhuma observação a respeito da influência da deformação plástica na curva tensão-deformação do material, restringindo suas declarações simplesmente ao efeito da redução do limite de escoamento devido ao carregamento reverso. ABEL³ resumiu os resultados de Bauschinger da seguinte maneira:

a) a deformação plástica aumenta o limite elástico na mesma direção da deformação inicial;

b) a deformação plástica diminui o limite elástico na direção contrária da deformação inicial. Se a magnitude da deformação plástica for aplicada, o limite elástico na direção contrária pode ser reduzido a zero;

c) o tempo entre os ciclos das deformações plásticas não influencia na magnitude do limite elástico;

d) deformação reversa reduz o limite elástico, deformações em direções alternadas reduzem cada vez mais o limite elástico e sua magnitude nunca ultrapassará o valor original do limite elástico.

Observa-se que as descobertas de Bauschinger abordaram somente uma parte dos fenômenos envolvidos e que o comportamento direcional na relação tensão-deformação é mais complexa do que ele imaginava. Em função destas complexidades, várias diferentes características foram utilizadas por diversos autores para descrever o efeito Bauschinger. ABEL³ cita, em seu trabalho, as descrições dos seguintes pesquisadores:

- Cottrell: “Se uma barra for altamente deformada em uma direção e depois recarregada na direção contrária, ela escoará nesta direção a uma tensão reduzida. Este é o efeito Bauschinger”.

- Buckley e Entwistle: “Efeito Bauschinger é medido pela deformação de Bauschinger (β)”.

- Van Bueren: “Originalmente observado em policristais e posteriormente encontrado, também, em cristais simples, o efeito Bauschinger indica uma certa dependência da tensão de escoamento e da magnitude do encruamento no histórico das deformações do metal”.

- Dieter: “A redução da tensão de escoamento quando a deformação em uma direção é seguida por uma deformação na direção oposta é chamada de efeito Bauschinger”.

- McClintock e Argon: “Efeito Bauschinger envolve não somente um escoamento prévio, mas também apresenta um amolecimento permanente”.

Algumas destas características mencionadas estão ilustradas na figura 2.3.

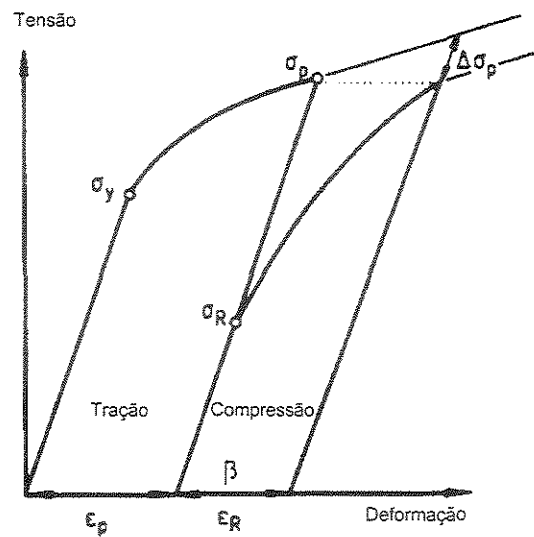


Figura 2.3 - Características do Efeito Bauschinger.

onde " σ_y " é a tensão de escoamento inicial, " σ_p " a tensão máxima alcançada, " σ_R " a tensão de escoamento reversa, " $\Delta\sigma_p$ " o amolecimento permanente, " ϵ_p " a deformação inicial, " ϵ_R " a deformação reversa e " β " é a deformação de Bauschinger. Cabe ressaltar que quando ocorrer um carregamento reverso completo teremos $\beta = \epsilon_R$.

Um trabalho escrito em 1909 por Leonard Bairstow, com o título: "O limite elástico do ferro e do aço sob variação cíclica de tensões", abordou a teoria da fadiga, ou seja, o colapso devido à repetição de tensões. De acordo com esta teoria, barras submetidas a tensões repetitivas iniciam o processo de fadiga quando as tensões aplicadas em cada ciclo são tão grandes que a barra não se comporta mais elasticamente (ABEL³).

Bairstow também percebeu que, após um determinado número de repetições, o ferro e o aço são capazes de se ajustarem às variações de tensões, aplicadas ciclicamente. Quando este ajuste é completo, a barra torna-se perfeitamente elástica através do ciclo completo e o processo de fadiga é interrompido (ABEL³).

A capacidade de ajuste é limitada, e se os níveis de tensões do ciclo forem suficientemente grandes, a barra torna-se inelástica e o encruamento começa a atuar durante cada ciclo.

2.5.3 Causas do efeito Bauschinger

Em recentes estudos sobre o efeito Bauschinger, descobriu-se que tensões internas e consideráveis tensões residuais desenvolvem-se devido a uma deformação não-homogênea das fibras individuais do material, a qual acreditava-se ser a principal causa do fenômeno. Orowan, por outro lado, propôs uma explicação alternativa baseada na anisotropia das forças direcionais, responsáveis pelos deslocamentos, devido às deformações plásticas. Na sequência segue-se a descrição dos dois métodos.

Método das tensões Internas

Este método é baseado nos estudos de Heyn que, em 1918, desenvolveu uma teoria para explicar a redução da tensão de escoamento observada em carregamentos reversos (ABEL³).

Três hipóteses foram utilizadas por Heyn:

- a) O material é composto por pequenos volumes de elementos, cada qual com sua curva de tensão-deformação ideal, ou seja, a resposta elástica é mudada a cada deformação plástica a um nível de tensão constante;
- b) Cada um dos vários volumes de elementos possui seu próprio limite elástico;
- c) O valor absoluto do limite elástico de cada volume de elemento é independente da direção da deformação, ou seja, é o mesmo na tração e na compressão.

Com estas hipóteses a teoria a respeito do método estabelece que:

- Existe uma curvatura na transição do regime elástico para o regime plástico na curva de tensão-deformação inicial;
- A deformação elástica é homogênea e uniforme na seção carregada;
- Durante a deformação plástica, a distribuição de tensão não é uniforme;
- Após o descarregamento, surgem as tensões residuais que são responsáveis pelo efeito de redução do escoamento sob carregamento reverso.

Método proposto por Orowan

Observando ensaios realizados em outros estudos, Orowan concluiu que: “considerando o baixo valor do amolecimento permanente do cobre, somente a inversão de tensões não seria a causadora do efeito Bauschinger”. Orowan sugeriu que deveria existir um outro mecanismo que também contribuiria, que seria uma resistência direcional dos deslocamentos (ABEL³).

O modelo sugere que os deslocamentos têm que transpor os obstáculos impostos pelas várias resistências e estes obstáculos não estão distribuídos uniformemente no material. Dessa forma, os deslocamentos que ocorrem devidos às tensões aplicadas tendem a percorrer áreas onde a resistência direcional é menor, sendo interrompidos nas regiões onde os obstáculos são mais densos e fortes. Quando os deslocamentos são bloqueados encontram uma resistência direcional maior na direção avante do que na direção reversa. Por isso, quando a deformação é invertida, é mais fácil para os deslocamentos reversos se moverem através de uma região de alta resistência situada no sentido contrário ao dos deslocamentos iniciais (ABEL³).

Orowan deu a Deak a tarefa de encontrar uma descrição quantitativa da curva reversa de tensão-deformação e identificar a causa do efeito Bauschinger. Em seguida, analisando os resultados obtidos por Deak, Orowan chegou às seguintes conclusões:

- a) um corpo-de-prova descarregado e deformado plasticamente deve ser aquecido a várias temperaturas enquanto o progresso das deformações é monitorado;

b) o corpo-de-prova deve ser deformado na direção avante e reversa para a obtenção das curvas tensão-deformação, nas quais será observado o efeito do aquecimento.

Orowan argumentou que se o efeito Bauschinger é causado por uma anisotropia das forças direcionais responsáveis pelos deslocamentos, nenhuma deformação deve ser esperada durante o aquecimento de um corpo-de-prova com deformação plástica, uma vez que não existem forças atuando na condição descarregada. Por outro lado, o desaparecimento do efeito Bauschinger pode ser esperado somente após o aquecimento a uma temperatura na qual a recristalização ou, no mínimo, um grande deslocamento na estrutura ocorrer, resultando no desaparecimento da anisotropia na resistência direcional (ABEL³).

2.5.4 A influência do efeito Bauschinger na flambagem de barras metálicas

O comportamento de flambagem das barras é normalmente analisado considerando a teoria de Euler. Para um dado parâmetro de esbeltez $\lambda_i > \lambda_g$, ou seja, para uma dada geometria e condições de vinculação, é esperado que a flambagem ocorra se a carga de flambagem, “ P_{cr} ”, dada por:

$$P_{cr} = \frac{A\pi^2 E}{\lambda_i^2} = R_c^1 A \quad (2.9)$$

for alcançada. Onde “ A ” é a seção transversal da barra, “ E ” é o módulo de elasticidade longitudinal, “ λ_g ” o valor limite do parâmetro de esbeltez proposto por Tetmajer e “ R_c^1 ” a tensão de flambagem (SCHOLTES et al²⁷). O parâmetro de esbeltez considera a influência do modo de flambagem e as características geométricas da barra no comportamento de flambagem. De acordo com a equação (2.9), a única propriedade física que influencia na carga de flambagem é o módulo de elasticidade longitudinal “ E ”. Valores de “ E ” determinados em testes de tração são normalmente utilizados para avaliar o comportamento dos materiais quanto à flambagem. Por outro lado, tem sido mostrado em vários ensaios experimentais que, após uma deformação plástica, os

materiais metálicos exibem um comportamento de deformação completamente diferente quando a direção da deformação é mudada (efeito Bauschinger). Estudos minuciosos mostraram que após a inversão da direção do carregamento ocorre um comportamento não-linear da relação tensão-deformação durante o descarregamento, devendo-se a uma transição contínua da deformação elástica para a deformação elasto-plástica. Em testes de compressão após deformações iniciais de tração, um comportamento puramente elástico nunca é observado. Conseqüentemente, o formato de curva tensão-deformação no início do carregamento de compressão não pode ser descrito pelo módulo de elasticidade longitudinal. Entretanto, o módulo secante " E_s ", como ilustrado na figura 2.4, pode ser determinado. O valor de " E_s " será sempre menor que " E " e pode ser considerado como sendo um parâmetro característico de Bauschinger. Segundo SCHOLTES et al²⁷, é esperado que o efeito Bauschinger influencie no comportamento de flambagem dos materiais com deformação inicial.

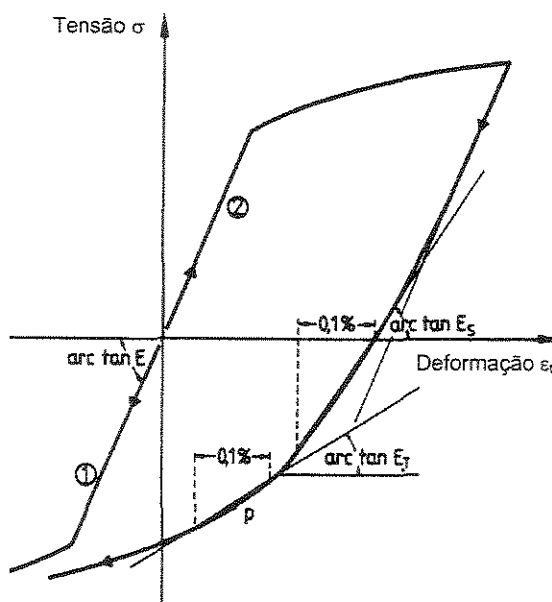


Figura 2.4 - Gráfico tensão-deformação.

No gráfico tensão-deformação da figura 2.4 a curva (1) corresponde ao carregamento de compressão agindo isoladamente, enquanto que a curva (2) corresponde ao carregamento de tração com uma compressão subsequente. Estão

definidos, também, o módulo de elasticidade longitudinal “E”, o módulo secante “ E_s ” e o módulo tangente “ E_t ” em um ponto “P”.

Na figura 2.5 são mostrados os resultados de ensaios experimentais, obtidos por SCHOLTES et al²⁷, em gráficos de força de compressão-encurtamento para barras de aço carbono no estado virgem e com deformação plástica de 1,8%.

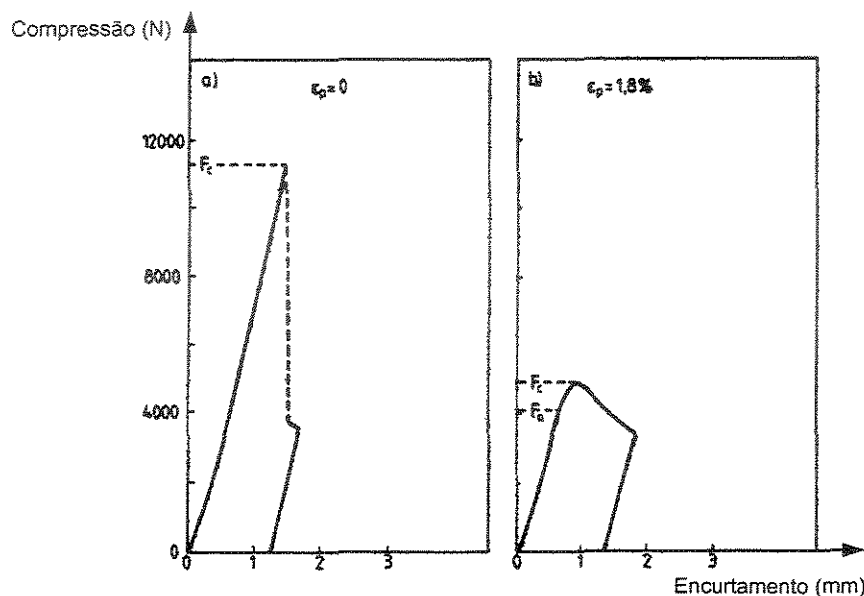


Figura 2.5 - Gráfico força de compressão-encurtamento.

A barra de aço no estado virgem mostra uma relação linear entre a força de compressão e o encurtamento até atingir a carga crítica “ P_{cr} ” (que na figura 2.5 é representada por “ F_c ”) onde a flambagem, indicada por uma descontinuidade abrupta, ocorre repentinamente. Por outro lado, a barra de aço com uma deformação plástica de $\epsilon_p = 1,8\%$ mostra uma relação não-linear entre força de compressão e encurtamento sob carregamentos relativamente pequenos e também flexão contínua, a qual se inicia em “ F_0 ”. Obtém-se uma carga crítica “ F_c ” muito menor, que ocorre em torno de 40% da carga crítica da barra sem deformação plástica. Como se observa, a flambagem para barras com deformação plástica não ocorre repentinamente.

De acordo com os dados experimentais, observa-se o comportamento não-linear das deformações devido a carregamento de compressão em barras com deformação plástica, ou seja, o efeito Bauschinger propriamente dito. Neste sentido, a inclinação da curva tensão-deformação, referente à compressão, ver figura 2.4, deve ser levada em consideração.

Para se analisar os resultados experimentais de uma forma mais precisa, os efeitos de deformação plástica e flexão no comportamento de flambagem devem ser levados em consideração.

Se uma barra submetida a esforços de compressão atingir o momento de plastificação antes da tensão de flambagem “ R_c ”, um novo valor de “ R_c ” deve ser estimado. Neste sentido, a equação (2.9) não pode ser aplicada. Entretanto, a flexão da barra pode, teoricamente, ser levada em consideração se “ E_t ” for usado na equação (2.9) ao invés de “ E ”. Dessa forma tem-se:

$$R_c^2 = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda^2} \quad (2.10)$$

O valor de “ E_t ” pode ser obtido a partir da inclinação da curva tensão-deformação referente à compressão no ponto de tensão correspondente à força “ F_0 ”.

SCHOLTES et al²⁷ concluíram que: “a influência da deformação plástica no comportamento de flambagem é quantitativamente atribuída à deformação característica da barra de aço devido ao efeito Bauschinger”.

2.5.5 A influência do carbono sobre o efeito Bauschinger

Em 1951, Polakowski associou a magnitude do efeito Bauschinger com a quantidade de carbono, baseado em resultados de testes realizados em diferentes aços carbono. Aços com uma baixa quantidade de carbono mostraram um efeito Bauschinger mais acentuado do que em aços com alta quantidade de carbono. Bate e Wilson, em 1986, mostraram que para aços com variáveis teores de carbono, o efeito

Bauschinger mostrou um comportamento similar ao observado por Polakowski (DODD & RESTREPO-POSADA⁹).

A magnitude do efeito Bauschinger não depende da curva tensão-deformação referente ao carregamento unidirecional. Além disso, a curva unidirecional é abandonada quando ocorrem deformações reversas após o início do encruamento (DODD & RESTREPO-POSADA⁹).

A quantidade de carbono é uma importante variável que afeta a magnitude do efeito Bauschinger; de acordo com o seu acréscimo a curva de Bauschinger torna-se mais suave e distancia-se cada vez mais do modelo bi-linear.

Capítulo 3

Modelos Físicos Não-lineares para o Aço Estrutural

3.1 Introdução

O estudo da não-linearidade física é caracterizado pela relação não-linear entre tensão e deformação, decorrente da modificação das propriedades físicas do material estrutural. Dessa forma, neste capítulo, será considerado o efeito da não-linearidade física na análise de estruturas metálicas planas, cujo comportamento segue os preceitos da teoria da plasticidade.

3.2 Comportamento uniaxial do aço

Segundo CHEN & HAN⁶, o estudo de problemas unidimensionais na plasticidade estrutural é representado pela condição uniaxial de tensões. Podendo ser um ensaio de tração simples onde, em termos de tensões principais, $\sigma_1 > 0$ e $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, ou um ensaio de compressão simples, onde $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ e $\sigma_3 < 0$, não se esquecendo da convenção: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Em função das diversas tensões aplicadas na barra, podem-se calcular as respectivas deformações e obter o diagrama de tensão-deformação, no qual as tensões axiais principais " σ_1 " (ou " σ_3 ") são analisadas em

função das deformações axiais principais " ε_1 " (ou " ε_3 "), proporcionando a representação do comportamento elástico e plástico do material.

3.2.1 Carregamento unidirecional

Supondo-se que uma barra de aço seja submetida a um esforço de tração crescente, o comportamento típico do material pode ser descrito pela figura 3.1.

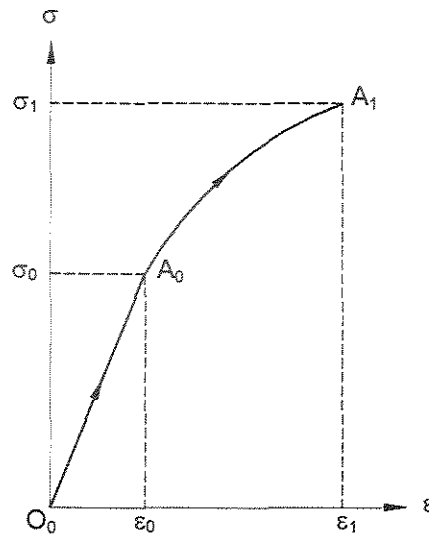


Figura 3.1 - Relação tensão-deformação elasto-plástica: carregamento.

A figura 3.1 mostra que até o nível de tensão " σ_0 ", correspondente ao trecho " O_0-A_0 ", a relação tensão-deformação é linear, valendo, portanto, a Lei de Hooke ($\sigma = E\varepsilon$), que caracteriza o regime elástico linear. Uma vez ultrapassada a tensão " σ_0 ", o material inicia o processo de plastificação com o surgimento de deformações permanentes, o módulo de elasticidade longitudinal começa a modificar-se e com isso a inclinação da curva tensão-deformação, dada pelo trecho " A_0-A_1 ", começa a diminuir progressivamente. Devido a este comportamento o nível de tensão " σ_0 " é conhecido como limite de proporcionalidade.

3.2.2 Descarregamento e recarregamento

Supondo-se que a mesma barra já descrita anteriormente seja agora descarregada, existem dois caminhos exeqüíveis, que estão indicados na figura 3.2.

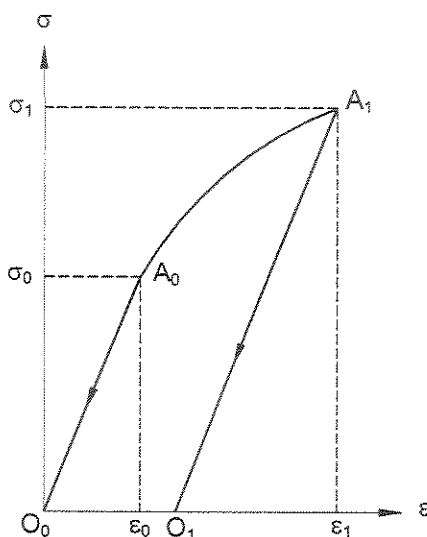


Figura 3.2 - Relação tensão-deformação elasto-plástica: descarregamento.

A primeira possibilidade está indicada no trecho “ O_0-A_0 ” da figura 3.2, onde a tensão inicial aplicada não ultrapassou o valor de “ σ_0 ” e o descarregamento segue o caminho inverso do carregamento inicial. A outra possibilidade está indicada no trecho “ A_1-O_1 ”, onde a tensão aplicada já ultrapassou o valor de “ σ_0 ”. O descarregamento se dá, de maneira elástica, pela reta “ A_1-O_1 ”, que é aproximadamente paralela à reta “ O_0-A_0 ”. Neste caso, havendo um descarregamento completo, a barra ficará com uma deformação residual permanente, ou seja, uma deformação plástica representada pelo trecho “ O_0-O_1 ”, e recuperar a deformação elástica representada pelo trecho “ $O_1-\epsilon_1$ ”.

Uma vez completado o descarregamento, pode-se carregar a barra novamente, conforme ilustra a figura 3.3.

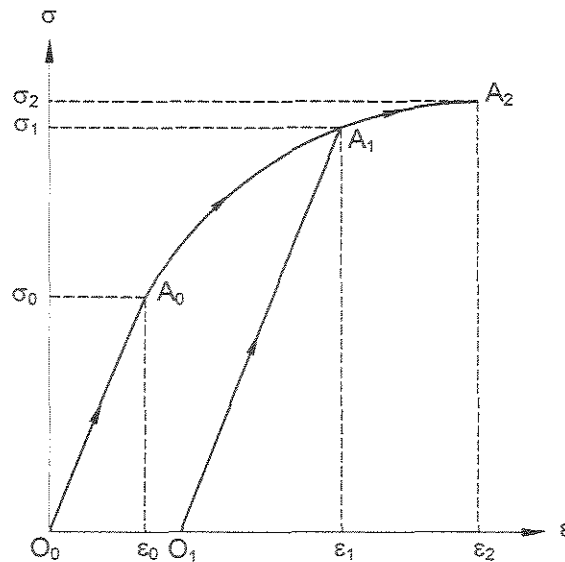


Figura 3.3 - Relação tensão-deformação elasto-plástica: recarregamento.

A figura 3.3 mostra que o recarregamento segue o caminho inverso do descarregamento, ou seja, as tensões se relacionam com as deformações de maneira elástica (trecho “O₁-A₁”). O ponto “A₁” é chamado de tensão de escoamento subsequente e além dele irão aparecer novas deformações plásticas, uma vez que as tensões voltam a se relacionar com as deformações através da curva original, não-linear “A₀-A₂”, como se o descarregamento e o recarregamento nunca tivessem ocorrido (CHEN & ZHANG⁸).

Segundo CHEN & HAN⁶, em boa parte dos materiais, após o ponto inicial de escoamento, a relação tensão-deformação expressa-se através de uma curva crescente, apesar da inclinação diminuir. Isto leva a um crescimento do módulo da tensão de escoamento subsequente, de acordo com as deformações. O efeito de um material apresentar tensões superiores após a deformação plástica é chamado de encruamento.

De acordo com RUBERT²⁵, a deformação permanente resultante está associada à energia dissipada ao longo do processo de carga e descarga, ver figura 3.4.

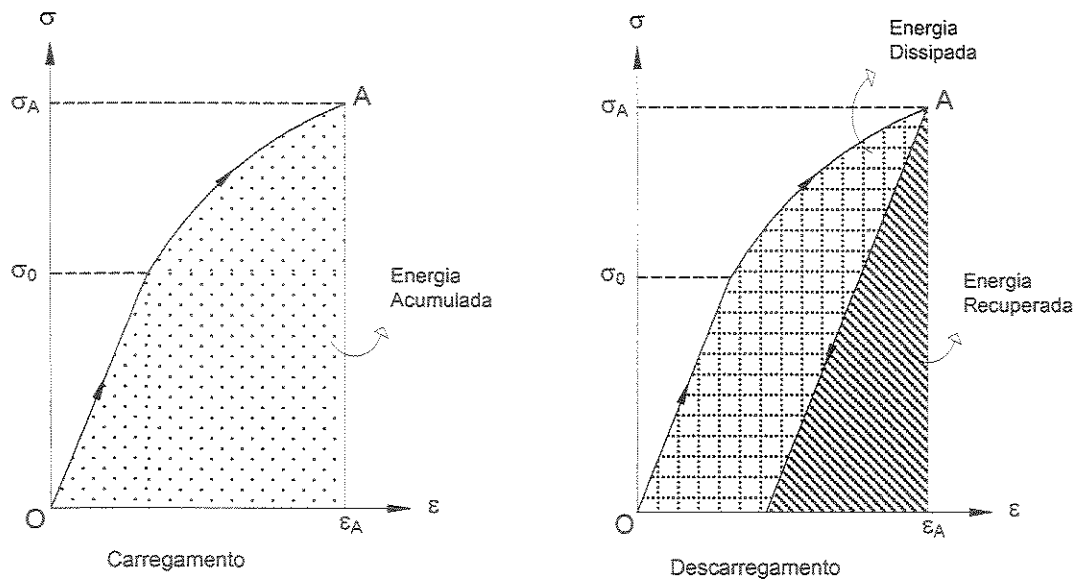


Figura 3.4 - Ciclo de carregamento e descarregamento na fase plástica.

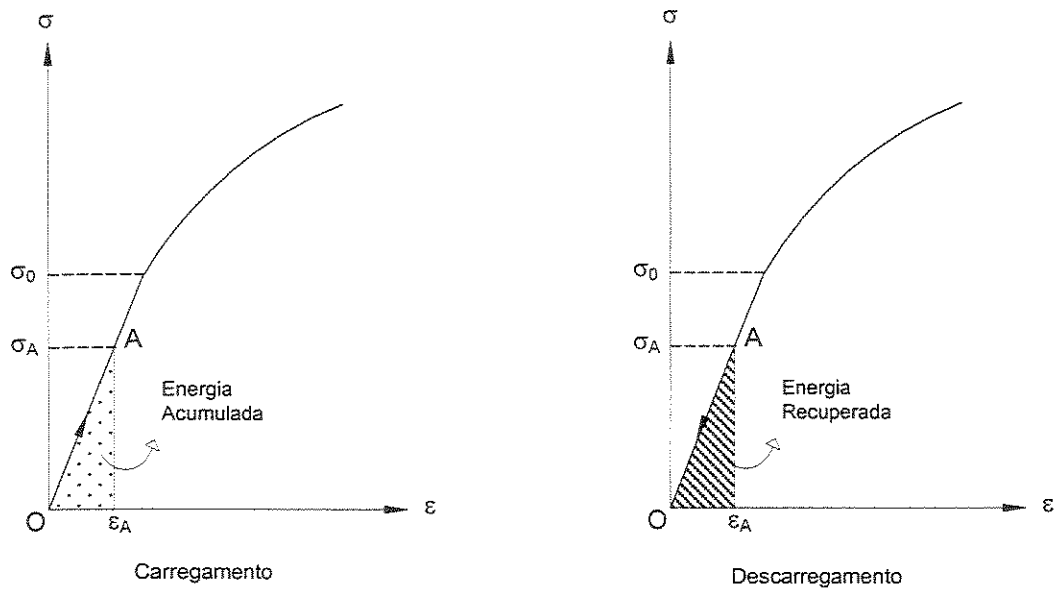


Figura 3.5 - Ciclo de carregamento e descarregamento na fase elástica.

No caso uniaxial, pode-se calcular a energia dissipada determinando a área delimitada pelas curvas de carregamento e descarregamento. Evidentemente, se um

sistema está solicitado apenas na sua fase elástica, a área correspondente é nula, o que significa não haver dissipação de energia, como é mostrado na figura 3.5.

3.2.3 Carregamento reverso

Retomando-se o caso do descarregamento dado pela figura 3.2, pode-se supor que após o descarregamento completo, dado pelo trecho “O₁-A₁”, haja uma inversão do carregamento aplicado, de tal forma que a barra começa a ser comprimida. Neste caso, a relação tensão-deformação é mostrada pela figura 3.6.

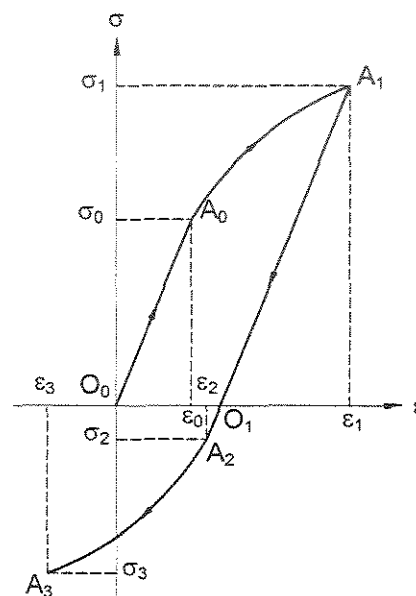


Figura 3.6 - Relação tensão-deformação elasto-plástica: carregamento reverso.

A princípio, o comportamento do material é o mesmo tanto na tração como na compressão, de tal forma que a relação tensão-deformação seja a mesma para os dois casos. Entretanto, pelo fato da barra ter iniciado a plastificação anteriormente, a tensão de escoamento para o carregamento reverso é modificada, de modo que o módulo da nova tensão de escoamento “ $|\sigma_2|$ ” seja menor que a tensão de escoamento inicial “ $|\sigma_0|$ ” e muito menor que a tensão de escoamento subsequente “ $|\sigma_1|$ ”, ou seja, $|\sigma_2| < |\sigma_0| < |\sigma_1|$. Este fenômeno é o chamado efeito Bauschinger e a partir deste ponto o comportamento do material é mantido conforme a descrição anterior.

Segundo CHEN⁵, devido à natureza do processo, a deformação plástica é um processo de anisotropia. O efeito Bauschinger é um caso particular de anisotropia direcional induzida por uma deformação plástica, já que uma deformação plástica inicial em uma direção reduz a tensão de escoamento na direção oposta durante o carregamento reverso subsequente. Este fenômeno corresponde à interação e aos efeitos transversais entre as tensões de escoamento em diferentes direções no caso de tensões multiaxiais. A consideração do efeito Bauschinger é muito importante em problemas multidimensionais envolvendo complexos históricos de tensões com significantes mudanças nas direções dos carregamentos, tais como as tensões reversas e condições de carregamentos cíclicos.

Observa-se que as deformações não são somente funções das tensões, mas dependem do histórico do carregamento (CHEN & HAN⁶).

Por outro lado, não se fez menção ao efeito do tempo nas deformações, ou seja, está se assumindo não viscosidade ou independência do tempo. Está se considerando que o material esteja à temperatura ambiente e sob carregamento estático. O efeito do tempo torna-se muito importante em carregamentos dinâmicos (CHEN & HAN⁶).

3.3 Modelos elasto-plásticos unidimensionais para elementos estruturais de aço

Para a solução de um problema elasto-plástico unidimensional, deve-se idealizar o comportamento do material através da utilização de modelos matemáticos que permitam a simulação da relação tensão-deformação real.

Dentre os vários modelos disponíveis para este tipo de estudo destacam-se o modelo elasto-plástico perfeito e o modelo elasto-plástico com encruamento linear (CHEN⁵), que serão vistos na sequência.

3.3.1 Modelo elasto-plástico perfeito

A figura 3.7 ilustra a relação tensão-deformação do aço através do modelo elasto-plástico perfeito.

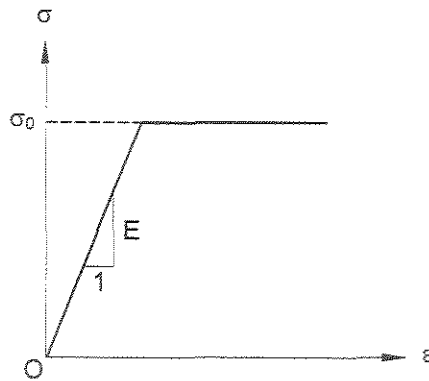


Figura 3.7 - Modelo elasto-plástico perfeito.

Neste modelo, quando a tensão atuante atingir a tensão de escoamento “ σ_0 ”, o elemento estrutural perde a capacidade de absorver um acréscimo de tensão e a deformação fica indefinida. Ou seja, o efeito do encruamento é desprezado. Tal modelo pode ser expresso pelas seguintes relações:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \Rightarrow \sigma < \sigma_0 \quad (3.1)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} + \alpha \Rightarrow \sigma = \sigma_0 \quad (3.2)$$

onde “E” é o módulo de elasticidade longitudinal do material e “ α ” é um escalar positivo. Para o aço estrutural, este modelo é largamente utilizado.

3.3.2 Modelo elasto-plástico com encruamento linear

Neste modelo, a curva contínua é aproximada por duas retas, substituindo a suave transição das curvas por uma descontinuidade abrupta no ponto de tensão “ σ_0 ”. A primeira reta tem como inclinação o módulo de elasticidade “E”. A segunda reta representa a ação do encruamento e tem como inclinação o módulo de elasticidade tangente “ E_t ”, cujo valor é menor do que “E” (CHEN⁵).

A figura 3.8 ilustra a relação tensão-deformação do aço através do modelo elasto-plástico com encruamento linear.

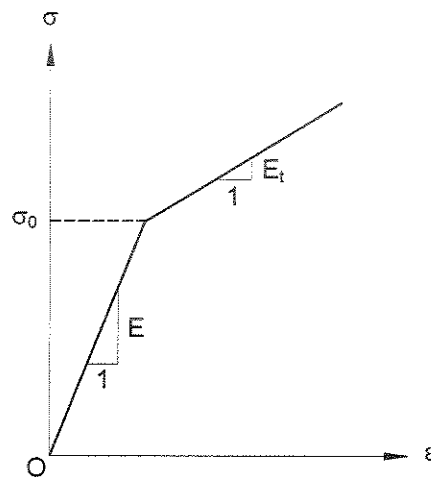


Figura 3.8 - Modelo elasto-plástico com encruamento linear.

Tal modelo pode ser expressado pelas seguintes relações:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \Rightarrow \sigma \leq \sigma_0 \quad (3.3)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{1}{E_t}(\sigma - \sigma_0) \Rightarrow \sigma > \sigma_0 \quad (3.4)$$

vários outros modelos foram construídos baseados neste, que pode ser chamado, também, de bi-linear.

3.3.3 Modelo elasto-plástico com encruamento exponencial

A figura 3.9 ilustra a relação tensão-deformação do aço através do modelo elasto-plástico com encruamento exponencial.

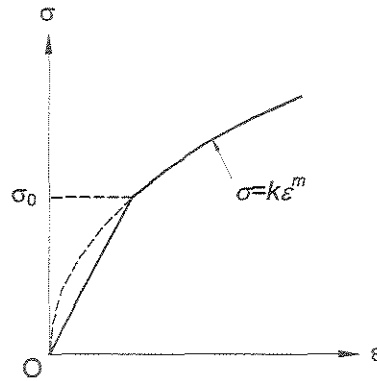


Figura 3.9 - Modelo elasto-plástico com encruamento exponencial.

O encruamento da maioria dos materiais se comporta de maneira não-linear. Dessa forma, uma simples expressão exponencial pode ser empregada:

$$\sigma = E\varepsilon \Rightarrow \sigma \leq \sigma_0 \quad (3.5)$$

$$\sigma = k\varepsilon^m \Rightarrow \sigma > \sigma_0 \quad (3.6)$$

onde “k” e “m” são constantes do material determinadas experimentalmente. Neste modelo, a relação tensão-deformação é dividida em duas partes: uma expressão linear para o trecho elástico e uma exponencial para o trecho plástico. Observe que as constantes do material, “k” e “m” não são independentes, pois a curva tensão-deformação deve ser contínua em $\sigma = \sigma_0$, ou seja, a condição $\sigma_0 = k(\sigma_0/E)^m$ deve ser satisfeita (CHEN⁵).

3.3.4 Modelo de Ramberg-Osgood

A figura 3.10 ilustra a relação tensão-deformação do aço através do modelo de Ramberg-Osgood.

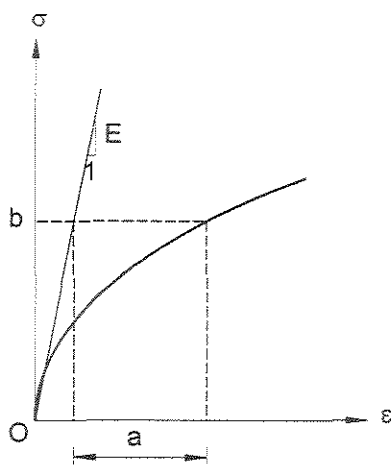


Figura 3.10 - Modelo de Ramberg-Osgood.

Segundo CHEN⁵, neste modelo, uma expressão suavemente não-linear é empregada para representar por completo a relação tensão-deformação:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + a \left(\frac{\sigma}{b} \right)^t \quad (3.7)$$

onde “a”, “b” e “t” são constantes do material determinadas experimentalmente. Neste modelo, a definição do ponto de escoamento não é clara e a inclinação inicial da curva é dada pelo valor do módulo de elasticidade longitudinal “E” quando a tensão for nula, $\sigma = 0$, e decresce unidirecionalmente de acordo com o aumento do carregamento.

3.4 Modelos com encruamento linear para carregamentos cíclicos

Os limites elásticos de um material mudam de acordo com a ocorrência dos carregamentos. A tensão de escoamento subsequente superior e inferior ou as

Neste modelo a tensão de escoamento do material é dada pela máxima tensão calculada, devendo ser sempre maior ou igual a “ σ_0 ”. Esse valor permanecerá constante, tanto para a tração como para a compressão, até que um valor maior de tensão seja obtido. Tal mecanismo é mostrado pela figura 3.11, onde uma barra submetida a um esforço de tração tem como tensão atuante o valor “ σ_1 ”. Como “ σ_1 ” é maior que “ σ_0 ”, tal valor passa a ser o novo valor da tensão de escoamento. Efetuando-se uma inversão de carregamento, a tensão de escoamento na compressão é dada por $\sigma_2 = -\sigma_{\max} = \sigma_1$. Aumentando-se a compressão na barra a mesma começa a escoar até atingir o ponto “ A_3 ”, com tensão “ σ_3 ”. Como “ $|\sigma_3|$ ” é maior que “ σ_1 ”, o valor de “ σ_3 ” passa a ser a nova tensão de escoamento do material, e assim sucessivamente. Dessa forma, a tensão de escoamento subsequente “ σ_{sub} ” é dada pela seguinte equação:

$$|\sigma_{\text{sub}}| = |\sigma_{\max}| \quad (3.8)$$

Este modelo negligencia a ocorrência do efeito Bauschinger.

3.4.2 Modelo Independente

A figura 3.12 ilustra o modelo com encruamento linear independente através do gráfico tensão-deformação do aço.

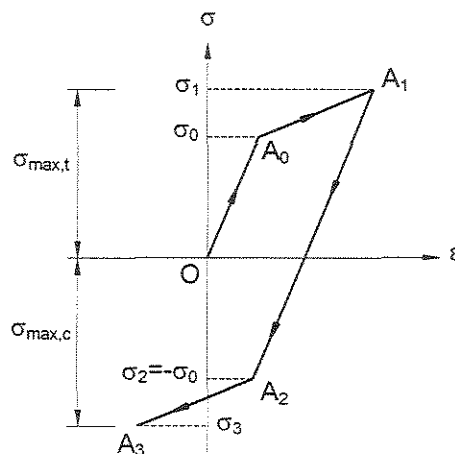


Figura 3.12 - Modelo com encruamento linear independente.

Neste modelo a tensão de escoamento do material é dada pela máxima tensão calculada para o caso da tração e da compressão, de tal forma que o valor da tensão de escoamento na tração " $\sigma_{\max,t}$ " independa do valor da tensão de escoamento na compressão " $\sigma_{\max,c}$ ". A figura 3.12 mostra tal mecanismo onde, após o descarregamento e a inversão do carregamento, a tensão de escoamento inicial na compressão é dada por $\sigma_2 = -\sigma_0$, passando posteriormente para $\sigma_{\text{sub},c} = \sigma_{\max,c}$, enquanto que $\sigma_{\text{sub},t} = \sigma_{\max,t}$ permanece inalterada. Analiticamente, a tensão de escoamento é dada por:

$$|\sigma_{\text{sub},c}| = |\sigma_{\max,c}| \quad (3.9)$$

$$|\sigma_{\text{sub},t}| = |\sigma_{\max,t}| \quad (3.10)$$

Neste modelo, quando a barra é submetida a um carregamento reverso após a ação do encruamento no sentido oposto, esta barra comporta-se como se nunca tivesse sido carregada.

3.4.3 Modelo Cinemático

A figura 3.13 ilustra o modelo com encruamento linear cinemático através do gráfico tensão-deformação do aço.

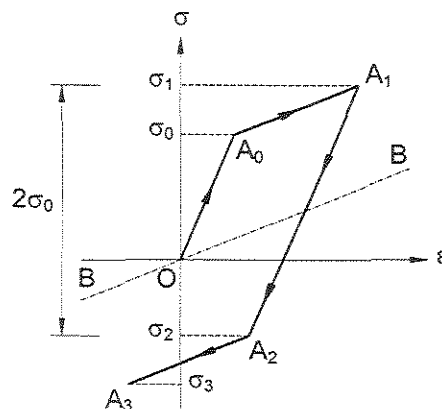


Figura 3.13 - Modelo com encruamento linear cinemático.

Neste modelo a diferença entre a tensão de escoamento para carregamentos de tração e de compressão é mantida constante com valor igual ao dobro da tensão de escoamento “ σ_0 ”. Tal mecanismo é mostrado pela figura 3.13, onde o valor da tensão de escoamento referente ao ponto “A₂” é dado por $|\sigma_2| = |2\sigma_0 - \sigma_1|$. Dessa forma, a equação que rege tal modelo é dada por:

$$\sigma_{\text{sub,t}} + |\sigma_{\text{sub,c}}| = 2\sigma_0 \quad (3.11)$$

onde “ $\sigma_{\text{sub,t}}$ ” e “ $\sigma_{\text{sub,c}}$ ” são as tensões de escoamento para a tração e para a compressão, respectivamente.

Cabe ressaltar que este modelo reproduz de forma simplificada o efeito Bauschinger, uma vez que o centro elástico é movido ao longo da reta “B-B”. Alternativamente, pode-se expressar tal modelo pela seguinte equação:

$$|\sigma - \psi| = |\sigma_0| \quad (3.12)$$

onde “ ψ ” é a função que representa a trajetória do centro elástico, sendo $\psi = 0$ para $\sigma = 0$.

Capítulo 4

Análise de Estruturas Reticuladas

4.1 Introdução

Uma análise de estruturas tem o objetivo de compreender o comportamento das estruturas quando sujeitas a carregamentos externos. Existem vários tipos de análises para retratar este comportamento. Estas análises podem ser realizadas tendo como hipótese pequenos deslocamentos com o equilíbrio da estrutura feito na posição indeslocada (teoria de primeira ordem) e na posição deslocada (teoria de segunda ordem). Na teoria de segunda ordem apresentam-se fatores que influenciam o comportamento das estruturas devido às forças axiais, interferindo na rigidez da estrutura.

4.2 Procedimentos utilizados na análise não-linear geométrica

A instabilidade de uma estrutura reticulada é ocasionada pela degradação de sua capacidade portante. Os efeitos da não-linearidade física e da não-linearidade geométrica são uns dos principais ocasionadores da perda da capacidade portante de uma estrutura reticulada. A degeneração geométrica da estrutura é ocasionada à medida que o carregamento é aplicado, e esta passa da posição indeslocada para a

deslocada. Para se levar em conta o efeito da não-linearidade geométrica será empregado o método das funções de estabilidade, também conhecido como funções de rigidez.

As hipóteses assumidas na análise não-linear geométrica de pórticos planos são apresentadas a seguir:

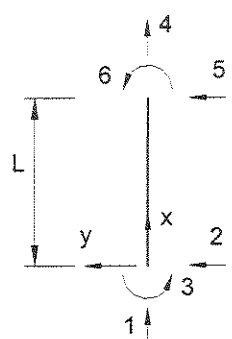
- Os elementos de barra são considerados perfeitamente retos;
- As forças axiais são aplicadas ao longo do eixo centroidal das barras;
- O material obedece à lei de Hooke, ou seja, as tensões são proporcionais às deformações;
- As seções permanecem planas após a deformação;
- A estrutura do pórtico é considerada constituída de elementos de barra deformáveis por flexão, força axial e força cortante em seu plano;
- O desenvolvimento matricial é feito com base no processo dos deslocamentos;
- As ações são aplicadas apenas no plano do pórtico;
- A não-linearidade geométrica é levada em consideração através da influência da força axial nos elementos de barra;
- O desenvolvimento matricial é baseado na teoria dos pequenos deslocamentos.

A matriz de rigidez do elemento de barra será obtida fazendo o equilíbrio desta na posição deformada e deslocada, o que caracteriza considerar os efeitos de segunda ordem nas barras. Baseado no que foi dito, é possível através das condições de equilíbrio da barra determinar os diferentes tipos de equações diferenciais que regem os problemas. Dependendo do tipo do esforço axial presente na barra, diferentes equações diferenciais serão obtidas. A solução destas fornecem os coeficientes de

rigidez que serão utilizados para se fazer a análise não-linear. Estes coeficientes também são denominados de funções de rigidez ou funções de estabilidade.

A matriz de rigidez de barra para a análise de pórticos planos com funções de rigidez são apresentadas por CHEN & LUI⁷ e GERE & WEAVER¹¹. Esta matriz é capaz de considerar as deformações nos elementos de barra através da interação entre forças axiais e flexão somente. YAGUI³⁵, SERRA²⁸ e REQUENA²³ apresentaram matrizes com novas funções de rigidez capazes de levar em consideração simultaneamente as deformações por força axial, força cortante e flexão. Desta forma, as funções apresentadas por eles são capazes de levar em consideração os efeitos da não-linearidade geométrica de forma mais completa.

A matriz de rigidez do elemento de barra será obtida em função de suas coordenadas locais apresentadas na figura 4.1.



$$K_B = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & -S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & S_3 & 0 & -S_2 & S_3 \\ 0 & S_3 & S_4 & 0 & -S_3 & S_5 \\ -S_1 & 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & -S_2 & -S_3 & 0 & S_2 & -S_3 \\ 0 & S_3 & S_5 & 0 & -S_3 & S_4 \end{bmatrix}$$

Figura 4.1 - Matriz de rigidez da barra com funções de rigidez.

Na tabela 4.1 são mostrados os coeficientes de rigidez que serão calculados conforme a condição de influência da força cortante ou sob a variação da força axial.

As deduções dos coeficientes de rigidez “S₁”, “S₂”, “S₃”, “S₄” e “S₅” são apresentadas no Anexo A.

Tabela 4.1 - Funções de rigidez de barra de pórticos planos.

S\P	Compressão (P<0)	(P=0)	Tração (P>0)
S1	$\frac{EA}{L}$	$\frac{EA}{L}$	$\frac{EA}{L}$
S2	$\frac{EI(a_1)^2 \varepsilon_f^3 \text{sen} \varepsilon_f}{L^3 \phi_c}$	$\frac{12EI}{L^3(1+2g)}$	$\frac{EI(a_2)^2 \varepsilon_f^3 \text{senh} \varepsilon_f}{L^3 \phi_t}$
S3	$\frac{EI a_1 \varepsilon_f^2 (1 - \cos \varepsilon_f)}{L^2 \phi_c}$	$\frac{6EI}{L^2(1+2g)}$	$\frac{EI a_2 \varepsilon_f^2 (\cosh \varepsilon_f - 1)}{L^2 \phi_t}$
S4	$\frac{EI \varepsilon_f (\text{sen} \varepsilon_f - a_1 \varepsilon_f \cos \varepsilon_f)}{L \phi_c}$	$\frac{2EI(2+g)}{L(1+2g)}$	$\frac{EI \varepsilon_f (a_2 \varepsilon_f \cosh \varepsilon_f - \text{senh} \varepsilon_f)}{L \phi_t}$
S5	$\frac{EI \varepsilon_f (a_1 \varepsilon_f - \text{sen} \varepsilon_f)}{L \phi_c}$	$\frac{2EI(1-g)}{L(1+2g)}$	$\frac{EI \varepsilon_f (\text{senh} \varepsilon_f - a_2 \varepsilon_f)}{L \phi_t}$
	$\phi_c = 2 - 2 \cos \varepsilon_f - a_1 \varepsilon_f \text{sen} \varepsilon_f$ $a_1 = 1 - \frac{c P }{GA}$ $\alpha = \sqrt{\frac{ P }{a_1 EI}}$	$g = \frac{6cEI}{GAL^2}$ $\varepsilon_f = \alpha L$	$\phi_t = 2 - 2 \cosh \varepsilon_f + a_2 \varepsilon_f \text{senh} \varepsilon_f$ $a_2 = 1 + \frac{cP}{GA}$ $\alpha = \sqrt{\frac{P}{a_2 EI}}$

4.3 Procedimentos utilizados na análise não-linear física

A análise não-linear física do material proposta neste trabalho é baseada no fato da rigidez à flexão da seção transversal da barra se reduzir gradualmente da rigidez elástica (fase em que as tensões na barra são inferiores ao limite de proporcionalidade) para a rigidez inelástica (fase acima do limite de proporcionalidade do material em que parte da seção transversal está plastificada) até praticamente zero (quando a seção transversal está completamente plastificada).

As hipóteses assumidas na análise não-linear física de pórticos planos são apresentadas a seguir:

- O sistema é considerado não-conservativo, ou seja, ocorre a dissipação de energia no sistema;
- A curva tensão-deformação é considerada elasto-plástica, ou seja, até o limite de proporcionalidade do material a relação tensão-deformação é linear, após este limite, a relação torna-se não-linear;
- A relação tensão-deformação é igual tanto na tração quanto na compressão;
- A tensão de plastificação do material é igual a “ f_y ” (limite de escoamento do aço utilizado);
- Será considerado que a redução da capacidade portante da barra, devida ao efeito de não-linearidade física do material, seja provocada pelas tensões normais de compressão ou tração e pelas tensões normais de flexão.

Conforme mencionado, existem algumas formas de se fazer a redução da rigidez à flexão da barra. Neste trabalho, serão utilizados os procedimentos propostos pela AISC-LRFD¹ e pelo CRC¹⁴ que serão descritos na sequência.

O procedimento de redução da rigidez, proposta pela CRC (GALAMBOS¹⁰), considera os seguintes casos: barras que durante a análise estejam com tensão inferior a “ $0,50f_y$ ” são consideradas trabalhando no regime elástico; barras com tensão acima de “ $0,50f_y$ ” são consideradas no regime inelástico e barras com tensão igual ou superior a “ f_y ” são consideradas plastificadas. Desta forma, utiliza-se como critério de plastificação da seção a tensão de escoamento “ f_y ” do aço utilizado. Assim, o módulo tangente na análise pode ser determinado da seguinte forma:

$$\frac{\sigma}{f_y} \leq 0,50 \Rightarrow E_t = E \quad (4.1)$$

$$\frac{\sigma}{f_y} > 0,50 \Rightarrow \frac{E_t}{E} = \frac{4\sigma}{f_y} \left(1 - \frac{\sigma}{f_y} \right) \quad (4.2)$$

$$\frac{\sigma}{f_y} \geq 1,00 \Rightarrow E_t = 0 \quad (4.3)$$

sendo “ σ ” a tensão atuante na barra; “ f_y ” a tensão de escoamento do material; “ E ” o módulo de elasticidade longitudinal elástico do material e “ E_t ” o módulo tangente do material. É importante ressaltar que este procedimento leva em consideração apenas os efeitos de tensões residuais no campo inelástico.

A tensão atuante na barra é determinada pela expressão tradicional da resistência dos materiais, dada por:

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M}{W} \quad (4.4)$$

sendo, “ P ” o esforço axial presente na seção transversal da barra, “ M ” o momento fletor atuante na seção, “ A ” a área da seção transversal da barra e “ W ” o módulo elástico resistente da barra.

O procedimento de redução da rigidez, proposta pela AISC-LRFD¹, considera os seguintes casos: barras que durante a análise estejam com tensão inferior a “ $0,39f_y$ ” são consideradas no regime elástico; barras com tensão acima de “ $0,39f_y$ ” são consideradas no regime inelástico e barras com tensão igual ou superior a “ f_y ” são consideradas plastificadas. Da mesma forma que no procedimento anterior, utiliza-se como critério de plastificação da seção a tensão de escoamento “ f_y ” do aço utilizado. Assim, o módulo tangente na análise pode ser determinado da seguinte forma:

$$\frac{\sigma}{f_y} \leq 0,39 \Rightarrow E_t = E \quad (4.5)$$

$$\frac{\sigma}{f_y} > 0,39 \Rightarrow \frac{E_t}{E} = -2,7243 \frac{\sigma}{f_y} \ln \left(\frac{\sigma}{f_y} \right) \quad (4.6)$$

$$\frac{\sigma}{f_y} \geq 1,00 \Rightarrow E_t = 0 \quad (4.7)$$

sendo “ σ ” a tensão axial atuante na barra; “ f_y ” a tensão de escoamento do material; “ E ” o módulo de elasticidade longitudinal elástico do material e “ E_t ” o módulo tangente do material. É importante ressaltar que o procedimento para a análise não-linear leva em consideração os efeitos de tensões residuais e imperfeições geométricas no campo inelástico.

Nesta norma a tensão atuante na barra é determinada apenas pela tensão axial:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (4.8)$$

sendo “ P ” o esforço axial presente na seção transversal da barra e “ A ” a área da seção transversal da barra.

Para se introduzir o efeito de não-linearidade física do material na análise de pórticos planos, torna-se necessário modificar a matriz de rigidez do elemento prismático de barra plano apresentado na análise não-linear geométrica. Esta modificação é feita substituindo o módulo de elasticidade elástico “ E ” pelo módulo tangente “ E_t ”. Com a introdução do módulo tangente na matriz de rigidez do elemento, é possível representar o comportamento elástico e inelástico das barras. A matriz modificada é apresentada na tabela 4.2.

Tabela 4.2 - Funções de rigidez de barra com o módulo de elasticidade tangente.

S\P	Compressão (P<0)	(P=0)	Tração (P>0)
S1	$\frac{E_t A}{L}$	$\frac{E_t A}{L}$	$\frac{E_t A}{L}$
S2	$\frac{E_t I (a_1)^2 \varepsilon_f^3 \sin \varepsilon_f}{L^3 \phi_c}$	$\frac{12 E_t I}{L^3 (1+2g)}$	$\frac{E_t I (a_2)^2 \varepsilon_f^3 \sinh \varepsilon_f}{L^3 \phi_t}$
S3	$\frac{E_t I a_1 \varepsilon_f^2 (1 - \cos \varepsilon_f)}{L^2 \phi_c}$	$\frac{6 E_t I}{L^2 (1+2g)}$	$\frac{E_t I a_2 \varepsilon_f^2 (\cosh \varepsilon_f - 1)}{L^2 \phi_t}$
S4	$\frac{E_t I \varepsilon_f (\sin \varepsilon_f - a_1 \varepsilon_f \cos \varepsilon_f)}{L \phi_c}$	$\frac{2 E_t I (2+g)}{L (1+2g)}$	$\frac{E_t I \varepsilon_f (a_2 \varepsilon_f \cosh \varepsilon_f - \sinh \varepsilon_f)}{L \phi_t}$
S5	$\frac{E_t I \varepsilon_f (a_1 \varepsilon_f - \sin \varepsilon_f)}{L \phi_c}$	$\frac{2 E_t I (1-g)}{L (1+2g)}$	$\frac{E_t I \varepsilon_f (\sinh \varepsilon_f - a_2 \varepsilon_f)}{L \phi_t}$
	$\phi_c = 2 - 2 \cos \varepsilon_f - a_1 \varepsilon_f \sin \varepsilon_f$ $a_1 = 1 - \frac{c P }{GA}$ $\alpha = \sqrt{\frac{ P }{(a_1 E_t I)}}$	$g = \frac{6cE_t I}{GAL^2}$ $\varepsilon_f = \alpha L$	$\phi_t = 2 - 2 \cosh \varepsilon_f + a_2 \varepsilon_f \sinh \varepsilon_f$ $a_2 = 1 + \frac{cP}{GA}$ $\alpha = \sqrt{\frac{P}{(a_2 E_t I)}}$

4.4 Resolução de sistemas não-lineares

Uma vez bem fundamentados os estudos teóricos acerca do comportamento não-linear das estruturas, um problema de natureza prática surge: as estruturas que manifestam comportamento não-linear originam sistemas de equações também não-lineares cuja solução só é possível com a aplicação de procedimentos incrementais-iterativos (RUBERT²⁵).

Tradicionais técnicas numéricas, e a correspondente estratégia computacional, encontram aplicação na solução de problemas de não-linearidade física, tanto em estruturas complexas formadas por elementos planos ou tridimensionais, como em estruturas de barras, em geral compondo sistemas mais simples.

A estratégia de solução numérica de problemas que envolvem não-linearidades é concebida, tradicionalmente, segundo algoritmos que combinam duas etapas sucessivas. A primeira, que leva a uma aproximação para o vetor incógnito de deslocamentos, emprega a matriz de rigidez global da estrutura, atualizada, e o vetor das cargas nodais equivalentes calculado para um determinado nível de carga; a segunda, consiste na determinação das forças residuais que deverão ser reduzidas por um procedimento iterativo.

Segundo PAIXÃO²⁰, a base do processo incremental é a divisão da carga total aplicada em vários incrementos menores. Se o incremento for suficientemente pequeno, é possível que o comportamento da estrutura se aproxime do linear ao longo de cada incremento. Usualmente estes incrementos de carga apresentam a mesma magnitude, sendo esta a forma utilizada neste trabalho, uma vez que a utilização de incrementos de tamanhos variados requereria um conhecimento prévio do comportamento da estrutura para que se pudesse atribuir incrementos menores nas faixas em que se tenha um maior desvio da condição linear.

Num processo incremental-iterativo de resolução de sistemas de equações não-lineares se busca uma condição de equilíbrio entre o carregamento externo e as forças internas atuantes na estrutura, que é verificado através de um critério de energia. Neste trabalho foi implementado o tradicional método incremental-iterativo de Newton-Raphson.

No método incremental-iterativo de Newton-Raphson aqui utilizado, a matriz de rigidez da estrutura é montada a cada iteração e posteriormente resolve-se um sistema de equações lineares com a nova matriz.

Dessa forma, para um incremento aplicam-se as forças “F” para uma dada rigidez estrutural inicial “K₀” e, resolvendo-se o sistema de equações, obtém-se os deslocamentos “D₀” e, em função destes, os respectivos esforços internos. Em função dos esforços internos, especificamente dos esforços axiais, atualiza-se a matriz de rigidez “K₁”, processa-se a estrutura novamente, agora aplicando-se “D₀” em “K₁” e calculando-se “F₀”. Se “F₀” for diferente de “F” significa que existe um resíduo não nulo

“ R_0 ”, que é determinado fazendo-se a diferença de força “ $F-F_0$ ”. Aplica-se o resíduo “ R_0 ” na estrutura já deformada e calcula-se o acréscimo dos deslocamentos “ ΔD_1 ”. Na seqüência, faz-se uma correção nos deslocamentos onde se obtém “ D_1 ”. Calculam-se os novos esforços internos e procede-se a uma nova atualização na matriz de rigidez “ K_2 ”, obtendo-se, dessa forma, o valor de “ F_1 ”. A representação gráfica desse procedimento é dada pela figura 4.2. Repete-se esta sistemática até se atingir a igualdade entre as forças internas e externas. Portanto, quando o resíduo for suficientemente pequeno admite-se que houve o equilíbrio estrutural.

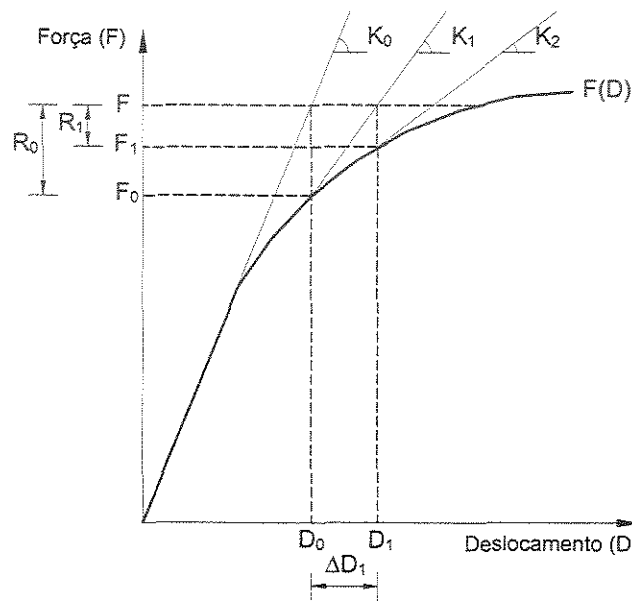


Figura 4.2 - Iteração de Newton-Raphson para um incremento de carga.

Para que os resíduos de forças possam ser considerados suficientemente pequenos, adota-se um critério de parada para o processo iterativo, segundo RUBERT²⁵, que consiste na seguinte expressão:

$$\frac{\|F - F_n\|}{\|F\|} \leq \tau \quad (4.9)$$

onde “n” é o número de iterações para o incremento analisado, “ $\|F-F_n\|$ ” e “ $\|F\|$ ” correspondem as normas Euclidianas do vetor de resíduos e do vetor de forças nodais aplicadas respectivamente. O valor de “ τ ” é a precisão desejada.

Uma vez encontrada a posição final de equilíbrio para um determinado nível de carregamento, estes valores serão conservados para que possam ser somados aqueles a serem obtidos nos incrementos seguintes.

Capítulo 5

Exemplos Numéricos

5.1 Introdução

Serão apresentados cinco exemplos numéricos calculados pelo programa desenvolvido neste trabalho. Serão estudados os valores dos deslocamentos e os gráficos de tensão-deformação para vários tipos de análises.

5.2 Exemplo numérico 1

Este exemplo, analisado por RODRIGUES²⁴, é composto por uma treliça metálica de banzos paralelos, cujos apoios estão situados nas extremidades do banzo inferior, conforme ilustra a figura 5.1.

A treliça é solicitada por uma carga concentrada de 60 kN no nó 3, de cima para baixo. Com este carregamento foram feitas análises considerando os comportamentos: elasto-linear, não-linear geométrico e não-linear físico, que por sua vez, utilizou o diagrama tensão-deformação do tipo bi-linear.

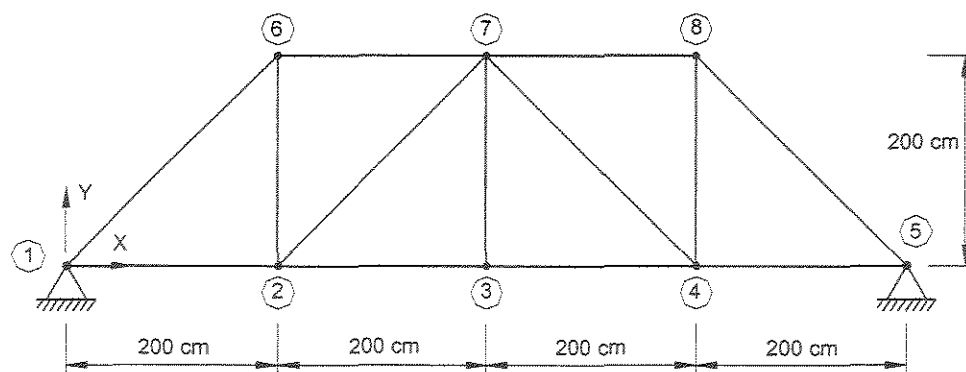


Figura 5.1 - Treliça metálica de banzos paralelos.

As características físicas e geométricas de todos os elementos que compõem a treliça são:

$$A = 1,0 \text{ cm}^2 \quad E = 21000,0 \text{ kN/cm}^2 \quad E_t = 5000,0 \text{ kN/cm}^2 \quad \sigma_y = 24,0 \text{ kN/cm}^2$$

Os valores dos deslocamentos verticais do nó 3, para os diferentes tipos de análises, são apresentados na tabela 5.1 e comparados com os valores obtidos por RODRIGUES²⁴.

Tabela 5.1 - Deslocamentos verticais do nó 3.

Comportamento	Deslocamentos verticais do nó 3 (cm)		Variação (%)
	Programa do Autor	RODRIGUES ²⁴	
Elasto-linear	-2,902	-2,902	0
Não-linear geométrico	-2,916	-2,922	0,21
Não-linear físico	-6,585	-6,611	0,39

5.3 Exemplo numérico 2

Neste exemplo, figura 5.2, uma barra metálica, com uma extremidade engastada e a outra livre, foi submetida a vários ciclos de carregamentos (na tração),

descarregamentos e recarregamentos. Seu comportamento foi analisado considerando os efeitos da não-linearidade física em sistemas não-conservativos. As reduções da capacidade portante da barra foram feitas utilizando as curvas de flambagem propostas pelo CRC¹⁴ e pela AISC-LRFD¹.

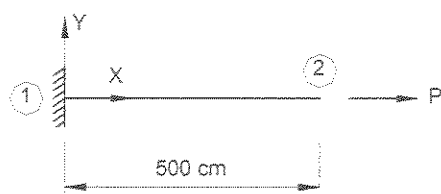


Figura 5.2 - Viga metálica em balanço.

As características físicas e geométricas da viga metálica são:

$$A = 10,0 \text{ cm}^2 \quad I = 50,0 \text{ cm}^4 \quad E = 20500,0 \text{ kN/cm}^2 \quad \sigma_y = 25,0 \text{ kN/cm}^2$$

Os valores do limite de proporcionalidade para a viga metálica são:

$$\text{Para o CRC} \quad \Rightarrow \quad \sigma_0 = 12,5 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{Para o AISC-LRFD} \quad \Rightarrow \quad \sigma_0 = 9,75 \text{ kN/cm}^2$$

1º ciclo de carregamento

Neste ciclo a barra é submetida a carregamentos e descarregamentos, cujos valores e os respectivos deslocamentos estão dispostos na tabela 5.2 e na figura 5.3.

Tabela 5.2 - Deslocamentos horizontais do nó 2: 1º ciclo.

Natureza da solicitação	P (kN)	σ (kN/cm ²)	Deslocamentos horizontais do nó 2 (cm)			Trajetórias	
			Elasto-linear	CRC	AISC-LRFD	CRC	AISC-LRFD
carregamento	50	5	0,122	0,122	0,122	0-A	0-A
descarregamento	0	0	0	0	0	A-0	A-0
recarregamento	90	9	0,220	0,220	0,220	0-B	0-B
descarregamento	0	0	0	0	0	B-0	B-0
recarregamento	50	5	0,122	0,122	0,122	0-A	0-A
descarregamento	0	0	0	0	0	A-0	A-0

Na tabela 5.2, observa-se que a barra recupera sua configuração inicial após os descarregamentos, indicando que a barra se manteve no regime elástico que, por sua vez, é comprovado pelo comportamento linear do gráfico força-deslocamento da figura 5.3.

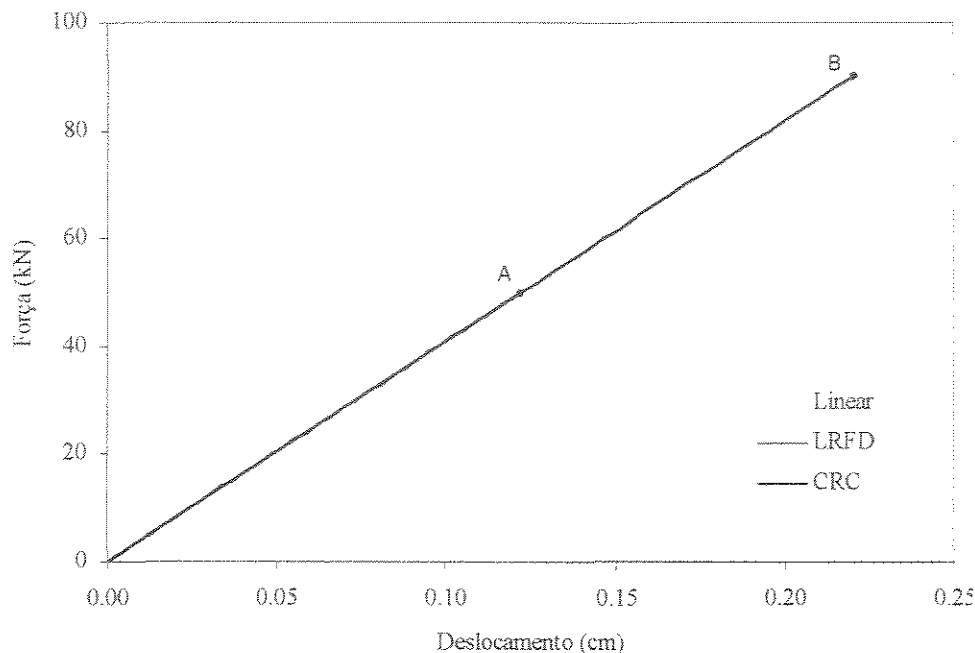


Figura 5.3 - Relação força-deslocamento: 1º ciclo.

Para este ciclo de carregamento e para os ciclos seguintes trabalhou-se com 50 incrementos de carga e uma tolerância dos resíduos de carga da ordem de 10^{-4} .

2º ciclo de carregamento

Neste ciclo a barra é submetida a carregamentos e descarregamentos similares aos do 1º ciclo. Mas neste ciclo o primeiro recarregamento tem uma maior intensidade fazendo com que a relação força-deslocamento se torne não-linear, como é observado na tabela 5.3 e na figura 5.4.

Tabela 5.3 - Deslocamentos horizontais do nó 2: 2º ciclo.

Natureza da solicitação	P (kN)	σ (kN/cm ²)	Deslocamentos horizontais do nó 2 (cm)			Trajetórias	
			Elasto-linear	CRC	AISC-LRFD	CRC	AISC-LRFD
carregamento	50	5	0,122	0,122	0,122	0-A	0-A
descarregamento	0	0	0	0	0	A-0	A-0
recarregamento	200	20	0,488	0,519	0,568	0-B	0-D
descarregamento	0	0	0	0,032	0,081	B-0,032	D-0,081
recarregamento	50	5	0,122	0,154	0,203	0,032-C	0,081-E
descarregamento	0	0	0	0,032	0,081	C-0,032	E-0,081

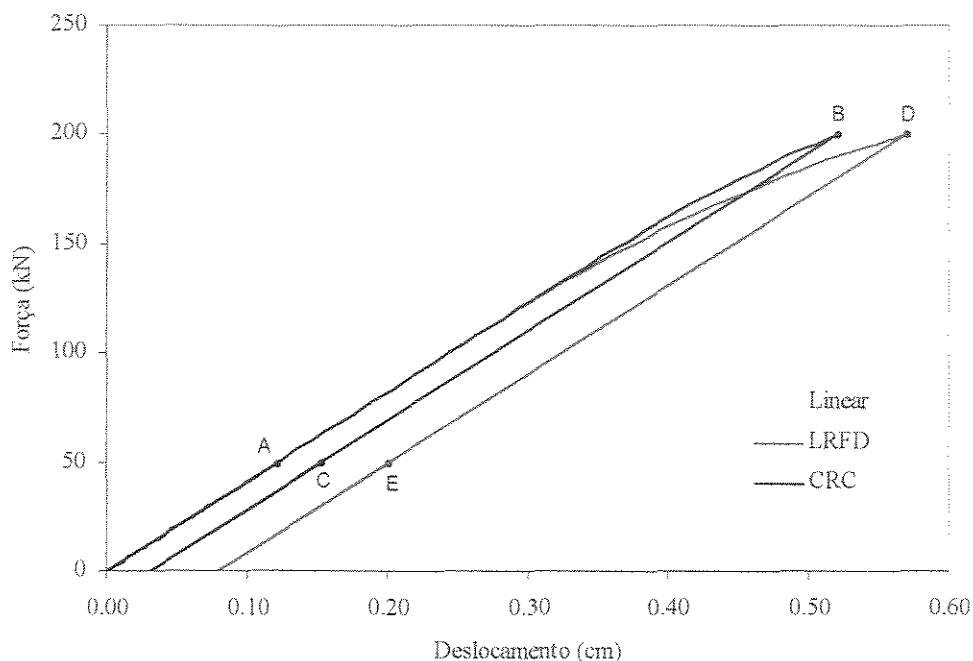


Figura 5.4 - Relação força-deslocamento: 2º ciclo.

3º ciclo de carregamento

Neste ciclo a barra é submetida a vários carregamentos e descarregamentos. Os recarregamentos são sempre crescentes e a relação força-deslocamento se comporta linearmente até que a tensão anterior seja alcançada. A partir daí obedece uma relação não-linear de acordo com a curva utilizada.

Tabela 5.4 - Deslocamentos horizontais do nó 2: 3º ciclo.

Natureza da solicitação	P (kN)	σ (kN/cm ²)	Deslocamentos horizontais do nó 2 (cm)			Trajetórias	
			Elasto-linear	CRC	AISC-LRFD	CRC	AISC-LRFD
carregamento	50	5	0,122	0,122	0,122	0-A	0-A
descarregamento	0	0	0	0	0	A-0	A-0
recarregamento	90	9	0,220	0,220	0,220	0-B	0-B
descarregamento	0	0	0	0	0	B-0	B-0
recarregamento	170	17	0,415	0,420	0,438	0-C	0-F
descarregamento	0	0	0	0,005	0,024	C-0,005	F-0,024
recarregamento	200	20	0,488	0,519	0,565	0,005-C-D	0,024-F-G
descarregamento	0	0	0	0,031	0,078	D-0,031	G-0,078
recarregamento	230	23	0,561	0,701	0,824	0,031-D-E	0,078-G-H
descarregamento	0	0	0	0,140	0,263	E-0,140	H-0,263

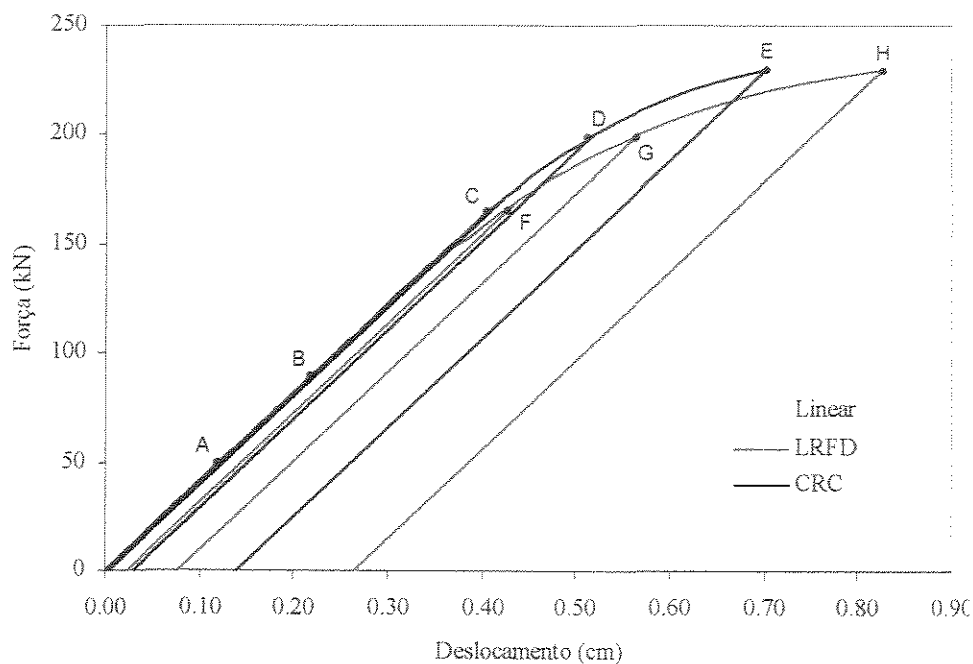


Figura 5.5 - Relação força-deslocamento: 3º ciclo.

4º ciclo de carregamento

Neste ciclo a barra é carregada e descarregada uma única vez, mostrando que o valor do deslocamento para esta carga será igual ao do ciclo anterior para a mesma carga, ou seja, é como se os descarregamentos e recarregamentos nunca tivessem ocorrido.

Tabela 5.5 - Deslocamentos horizontais do nó 2: 4º ciclo.

Natureza da solicitação	P (kN)	σ (kN/cm ²)	Deslocamentos horizontais do nó 2 (cm)			Trajetórias	
			Elasto-linear	CRC	AISC-LRFD	CRC	AISC-LRFD
carregamento	200	20	0,488	0,519	0,568	0-A	0-B
descarregamento	0	0	0	0,032	0,081	A-0,032	B-0,081

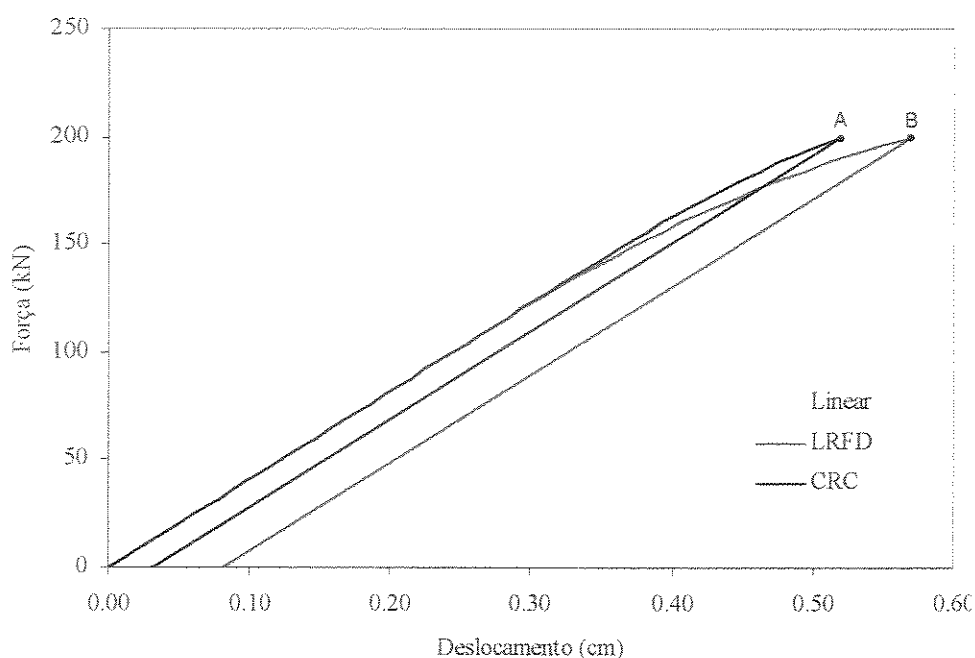


Figura 5.6 - Relação força-deslocamento: 4º ciclo.

5.4 Exemplo numérico 3

Neste exemplo, figura 5.7, um pórtico plano, constituído por 3 perfis de aço com as mesmas características físicas e geométricas, foi carregado com duas cargas concentradas de 50 kN nos nós 2 e 3, que por sua vez foram constantes durante a análise. E um momento concentrado no sentido anti-horário foi aplicado no nó 3 de intensidade variável. O pórtico sofreu carregamentos, descarregamentos e recarregamentos no seu plano. Os carregamentos foram aplicados em 50 incrementos de cargas.

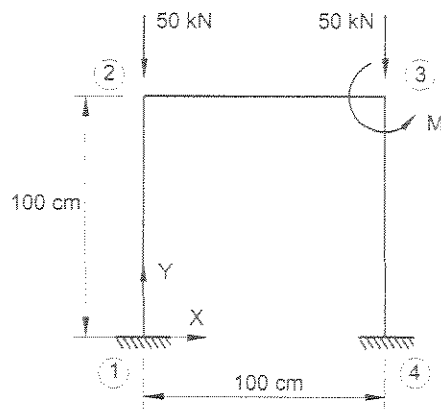


Figura 5.7 - Pórtico plano.

As características físicas e geométricas das barras do pórtico plano são:

$$A = 12,0 \text{ cm}^2 \quad I = 35,0 \text{ cm}^4 \quad E = 20500,0 \text{ kN/cm}^2 \quad \sigma_y = 25,0 \text{ kN/cm}^2$$

Para a análise dos resultados obtidos serão analisados os valores dos giros apresentados pelo nó 3 durante o carregamento do pórtico e os giros permanentes após os descarregamentos, sendo estes devidos à ocorrência das deformações plásticas. Os resultados obtidos estão dispostos na tabela 5.6 e nas figuras 5.8 e 5.9.

Tabela 5.6 - Giro do nó 3 no sentido anti-horário.

Natureza da solicitação	M (kN.cm)	Giro do nó 3 (rad)		
		Elasto-linear	CRC	AISC-LRFD
carregamento	10000	0,216	0,216	0,216
descarregamento	0	0	0	0
recarregamento	15000	0,325	0,325	0,326
descarregamento	0	0	0	0,001
recarregamento	20000	0,433	0,434	0,437
descarregamento	0	0	0,001	0,005
recarregamento	25000	0,541	0,550	0,560
descarregamento	0	0	0,009	0,018
recarregamento	27000	0,584	0,601	0,616
descarregamento	0	0	0,017	0,032

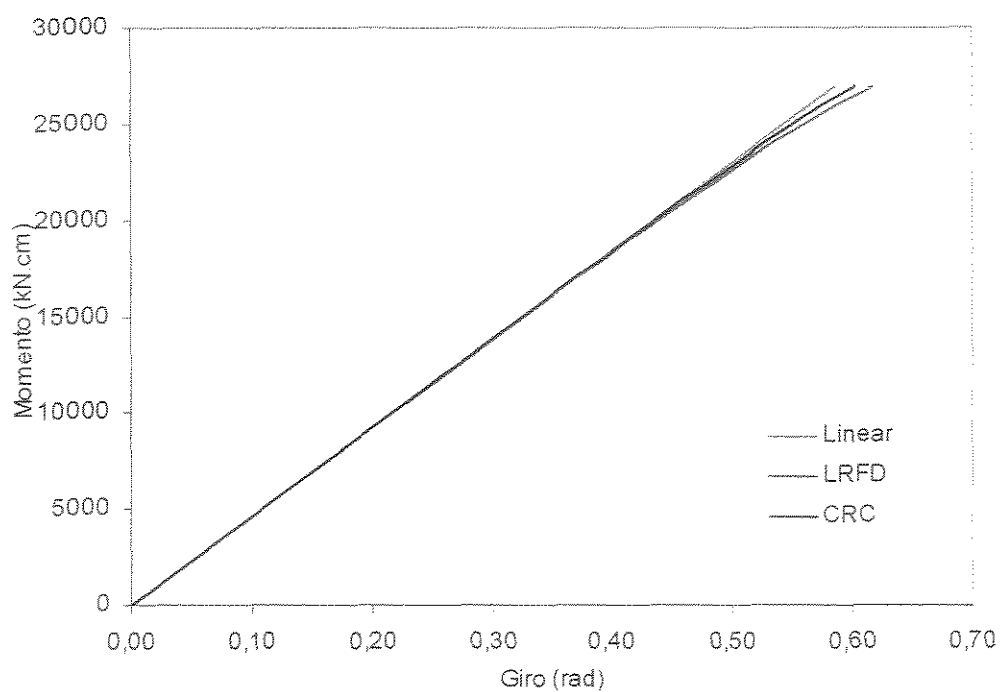


Figura 5.8 - Deformações totais no carregamento.

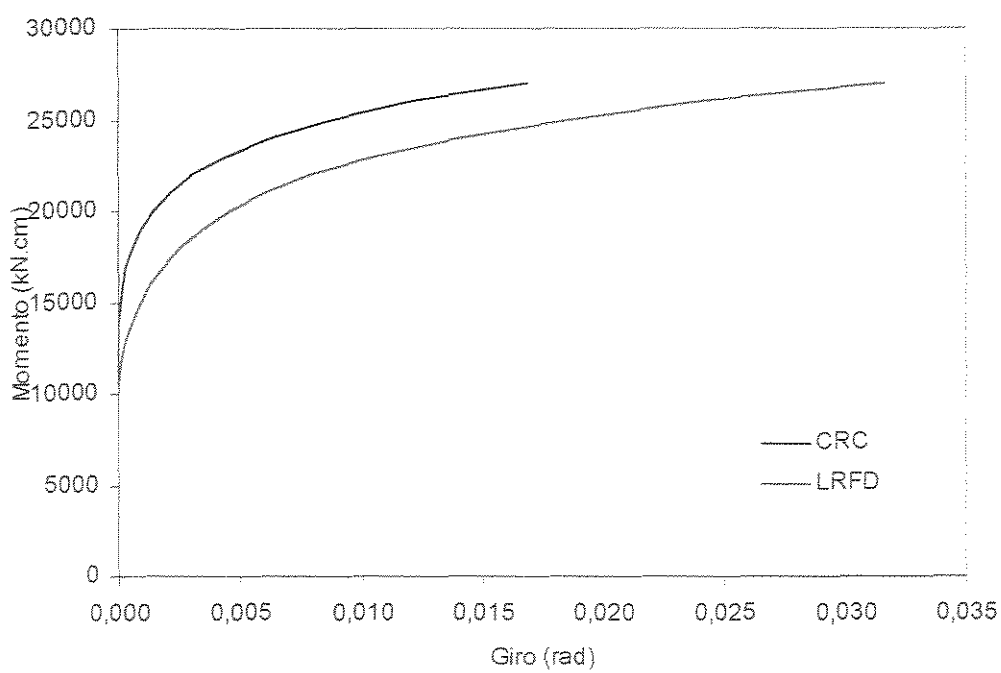


Figura 5.9 - Deformações plásticas no descarregamento.

5.5 Exemplo numérico 4

Neste exemplo, figura 5.10, a mesma barra metálica da figura 5.2 foi submetida a carregamentos reversos representados por quatro simulações distintas.

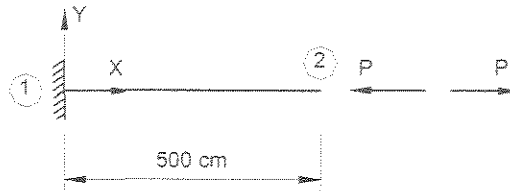


Figura 5.10 - Viga metálica sob carregamento reverso.

As características físicas e geométricas da viga metálica são:

$$A = 10,0 \text{ cm}^2 \quad I = 50,0 \text{ cm}^4 \quad E = 20500,0 \text{ kN/cm}^2 \quad \sigma_y = 25,0 \text{ kN/cm}^2$$

1ª simulação

Nesta simulação a barra é tracionada por um esforço axial de 120 kN e na sequência sofre uma inversão de carregamento, representada por uma compressão de 145 kN e logo depois é descarregada. Os resultados obtidos estão dispostos na tabela 5.7 e na figura 5.11.

Tabela 5.7 - Deslocamentos horizontais do nó 2: 1ª simulação.

Natureza da solicitação	P (kN)	σ (kN/cm ²)	σ_0 (kN/cm ²)	Deslocamentos (cm)		Trajetória AISC-LRFD
				Elasto-linear	AISC-LRFD	
carregamento	120	12,00	9,75	0,293	0,293	0-A
carregamento	-145	-14,50	-7,50	-0,354	-0,390	A-B
descarregamento	0	0	-	0	-0,036	B-(-0,036)

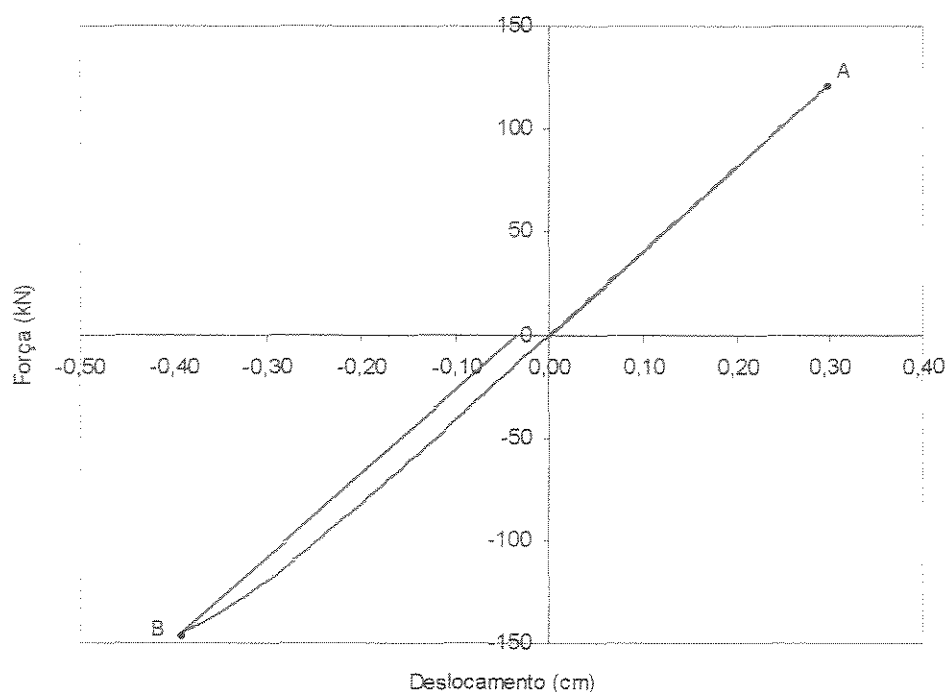


Figura 5.11 - Relação força-deslocamento: 1ª simulação.

2ª simulação

Nesta simulação os carregamentos são os mesmos da 1ª simulação, só que desta vez têm a seqüência invertida, ou seja, primeiro ocorre a compressão e depois a tração, seguidos também de um descarregamento. Cabe ressaltar que nestas duas simulações foi utilizada somente a curva de flambagem proposta pela AISC-LRFD¹. Os resultados obtidos estão dispostos na tabela 5.8 e na figura 5.12.

Tabela 5.8 - Deslocamentos horizontais do nó 2: 2ª simulação.

Natureza da solicitação	P (kN)	σ (kN/cm ²)	σ_0 (kN/cm ²)	Deslocamentos (cm)		Trajetória AISC-LRFD
				Elasto-linear	AISC-LRFD	
carregamento	-145	-14,50	-9,75	-0,354	-0,360	0-A
carregamento	120	12,00	5,00	0,293	0,518	A-B
descarregamento	0	0	-	0	0,226	B-(0,226)

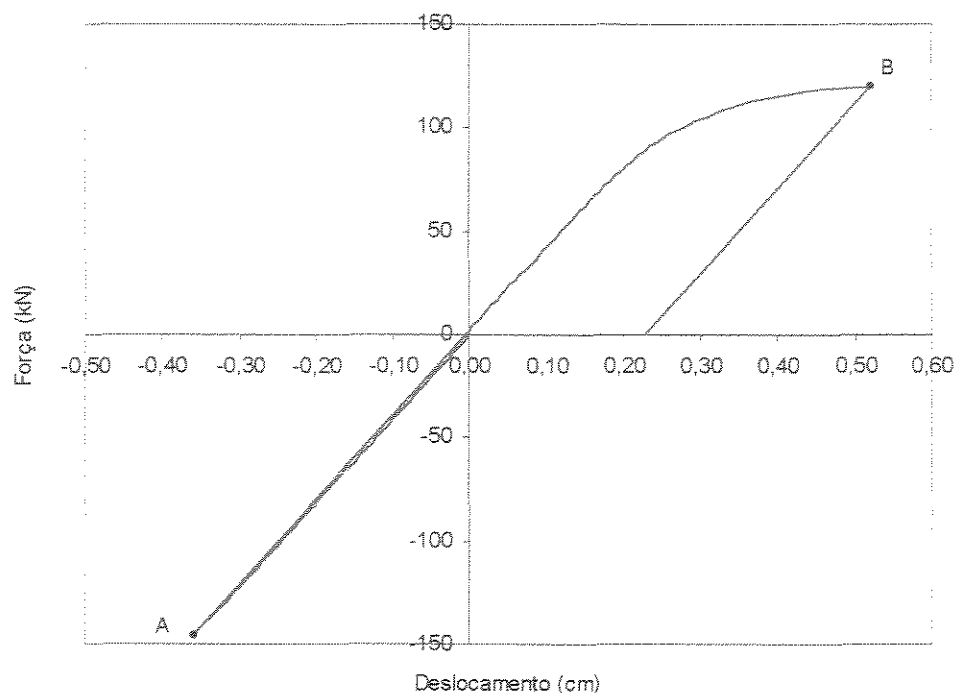


Figura 5.12 - Relação força-deslocamento: 2ª simulação.

De acordo com os resultados obtidos nestas duas simulações de carregamentos, observa-se que o material apresenta reduções significativas no seu limite de proporcionalidade " σ_0 ". Este fenômeno se dá devido a ocorrência do efeito Bauschinger, ou seja, a resposta de um material submetido a um determinado esforço tem uma dependência direta do esforço aplicado anteriormente no sentido oposto.

3ª simulação

Nesta simulação a barra é tracionada por um esforço axial de 178 kN e na seqüência sofre uma inversão de carregamento, representada por uma compressão de 40 kN e logo depois é descarregada. Com estas seqüências de cargas comparou-se a resposta da estrutura ora com a consideração do efeito Bauschinger na inversão dos esforços, ora sem a consideração de tal efeito no sistema. Os resultados obtidos estão dispostos na tabela 5.9 e na figura 5.13.

Tabela 5.9 - Deslocamentos horizontais do nó 2: 3ª simulação.

Natureza da solicitação	P (kN)	σ (kN/cm ²)	Com efeito Bauschinger			Sem efeito Bauschinger		
			σ_0 (kN/cm ²)	Desloc. (cm)	Trajectoria	σ_0 (kN/cm ²)	Desloc. (cm)	Trajectoria
carregamento	178	17,80	9,75	0,4647	0-A	9,75	0,4647	0-A
carregamento	-40	-4,00	-1,75	-0,1336	A-B	-9,75	-0,0670	A-C
descarregamento	0	0	-	-0,0360	B-(-0,0360)	-	0,0306	C-0,0306

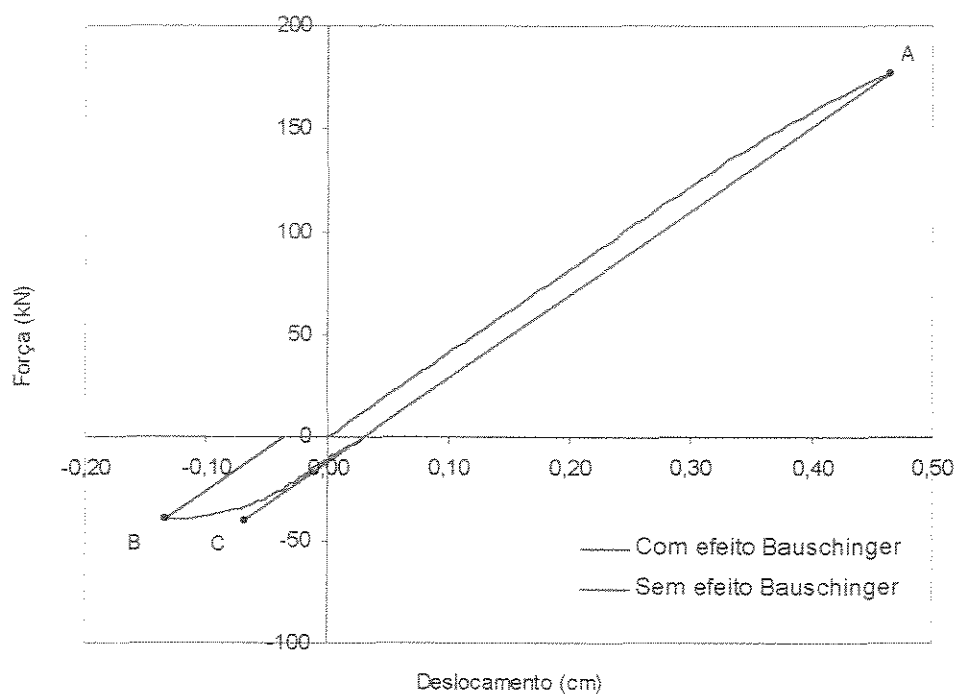


Figura 5.13 - Relação força-deslocamento: 3ª simulação.

Comparando-se os desenvolvimentos das curvas, figura 5.13, e os dados da tabela 5.9 observa-se que quando consideramos o efeito Bauschinger a relação tensão-deformação torna-se não-linear logo no início da compressão, uma vez que o limite de proporcionalidade " σ_0 " é -1,75 kN/cm². Com isso, obteve-se um valor final de deslocamento maior do que quando não se considerou tal efeito, pois nesta outra situação a tensão final não ultrapassa o limite de proporcionalidade, ou seja, a relação tensão-deformação comporta-se linearmente.

4ª simulação

Nesta simulação a barra é submetida a esforços axiais com valores 1% acima dos limites de proporcionalidade originais estabelecidos pelas normas utilizadas, alternando-se entre tração e compressão, na qual é analisado o comportamento dos limites de proporcionalidade do aço utilizado nas análises, para as curvas de flambagem propostas pelo CRC¹⁴ e pela AISC-LRFD¹. Os resultados obtidos estão dispostos nas tabelas 5.10 e 5.11 na figura 5.14.

Tabela 5.10 - Redução do limite de proporcionalidade: CRC.

Nº de inversões de carregamento	P (kN)	σ (kN/cm ²)	σ_0 (kN/cm ²)	Redução $ \sigma_0 $ %
0	126,25	12,63	12,50	100,00
1	-126,25	-12,63	-12,25	98,00
2	126,25	12,63	12,00	96,00
3	-126,25	-12,63	-10,75	86,00
4	126,25	12,63	7,25	58,00
5	Ocorreu a plastificação da barra			

Tabela 5.11 - Redução do limite de proporcionalidade: AISC-LRFD.

Nº de inversões de carregamento	P (kN)	σ (kN/cm ²)	σ_0 (kN/cm ²)	Redução $ \sigma_0 $ %
0	98,48	9,85	9,75	100,00
1	-98,48	-9,85	-9,75	100,00
2	98,48	9,85	9,25	94,87
3	-98,48	-9,85	-8,50	87,18
4	98,48	9,85	5,50	56,41
5	Ocorreu a plastificação da barra			

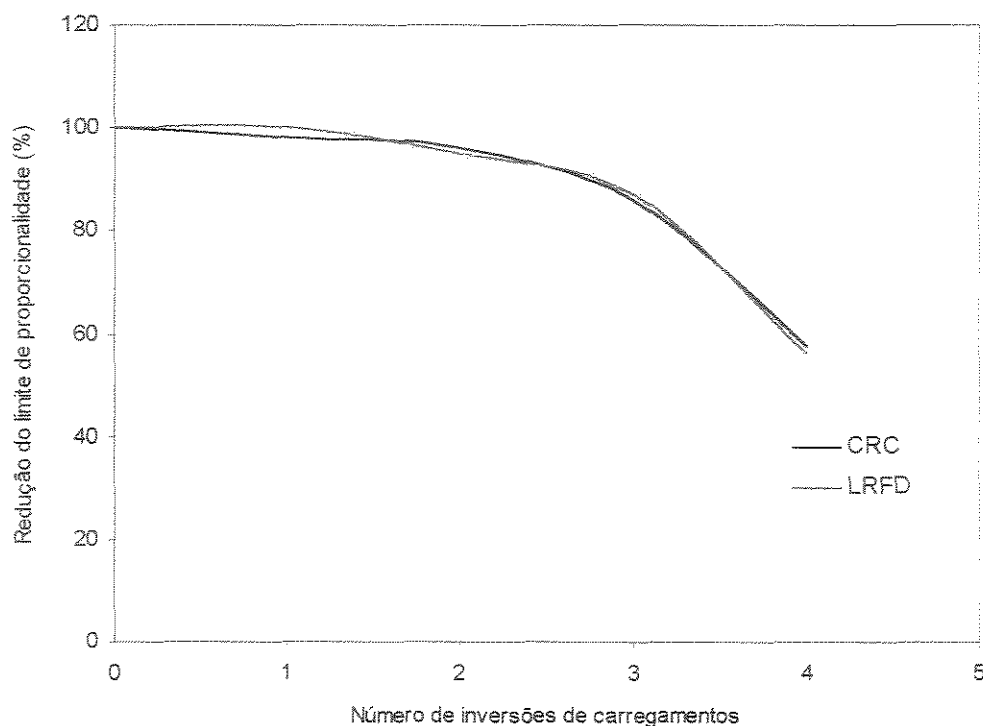


Figura 5.14 - Gráfico: redução de $\sigma_0 \times n^\circ$ de inversões de carregamento.

Analisando-se a figura 5.14, observa-se que as curvas propostas pela AISCLRFD¹ e pelo CRC¹⁴ apresentam o mesmo grau de sensibilidade às ações de carregamentos reversos, uma vez que as curvas da figura 5.14 praticamente se sobrepõem e nas duas situações a barra plastificou na 5ª inversão de carga.

5.6 Exemplo numérico 5

Este exemplo, figura 5.15, é composto por uma treliça metálica, bi-apoiada e com 8 metros de vão entre apoios. A treliça é submetida às ações de ventos de sucção e de pressão, que são representados por forças verticais concentradas no nó 7. As ações externas são aplicadas em duas simulações de carregamento. Na 1ª simulação a treliça sofre a ação de um vento de pressão de 10 kN, seguido de um vento de sucção de 13 kN e na sequência um descarregamento. Na 2ª simulação a mesma carga de ventos é aplicada na estrutura, só que desta vez a ocorrência se dá em ordem inversa,

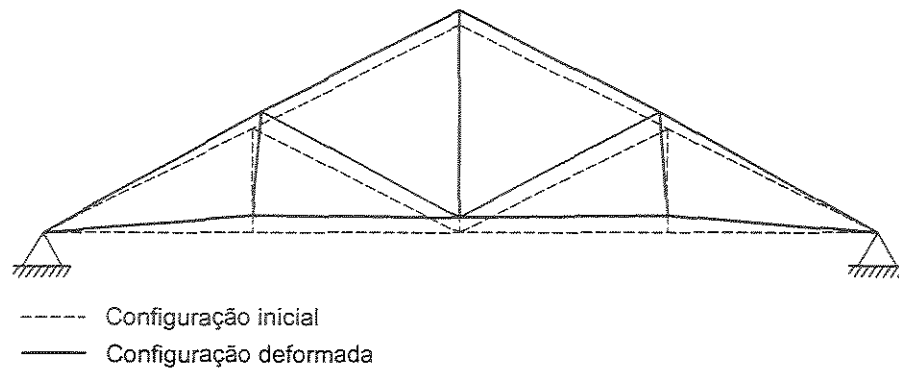


Figura 5.16 - Configuração deformada da treliça: 1ª simulação.

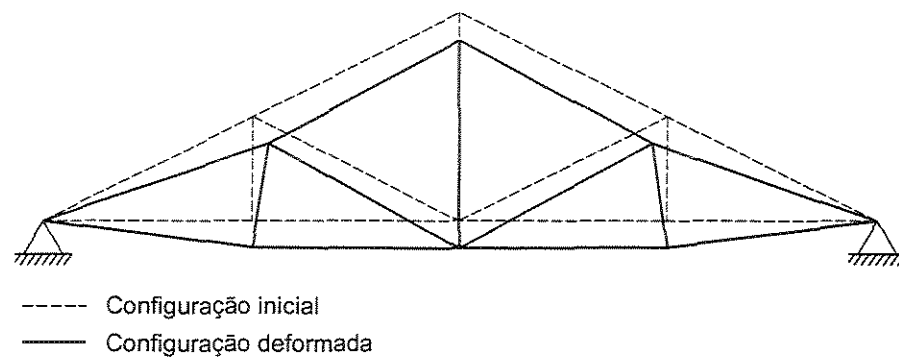


Figura 5.17 - Configuração deformada da treliça: 2ª simulação.

Comparando-se as figuras 5.16 e 5.17 nota-se que a configuração final da treliça depende da ordem de ocorrência dos carregamentos, ou seja, os mesmos conjuntos de cargas resultaram em configurações finais diferentes, devido a ação do efeito Bauschinger.

Capítulo 6

Considerações Finais

A introdução do efeito da não-linearidade física permite que se analise o comportamento das estruturas de uma forma mais completa. O processo apresentado possibilitou o desenvolvimento de um programa computacional capaz de determinar os deslocamentos de estruturas reticuladas planas, considerando os efeitos da não-linearidade física e da não-linearidade geométrica em sistemas não-conservativos. Ao se considerar estes efeitos nas diversas análises estruturais, verificou-se que tais efeitos podem modificar os resultados dos esforços e dos deslocamentos das barras das estruturas, quando comparados com a análise no regime elasto-linear.

O trabalho desenvolvido foi baseado no método dos deslocamentos com o auxílio da técnica matricial e utilizando-se as funções de rigidez (estabilidade). Este processo possui a facilidade de não necessitar de subdivisões dos elementos de barra, como no método dos elementos finitos.

Para a resolução dos sistemas não-lineares presentes nas análises o programa desenvolvido utilizou o processo incremental-iterativo de Newton-Raphson. Neste processo, a cada iteração, uma nova matriz de rigidez era montada e posteriormente resolvia-se um sistema de equações lineares, utilizando-se desta vez a resolução de Cholesky.

A utilização de um processo incremental de cargas possibilitou o acompanhamento das deformações nas barras das estruturas em todas as situações de carregamentos. O número de subdivisões das cargas totais variou de acordo com a estrutura analisada. Em alguns exemplos numéricos trabalhou-se com 30 incrementos de cargas, já em outros os valores dos deslocamentos só se estabilizaram em torno de 60 incrementos de cargas.

Como critério de parada utilizou-se uma tolerância dos resíduos de cargas da ordem de 10^{-4} , uma vez que o uso de tolerâncias menores apresentava, praticamente, os mesmos resultados.

No Exemplo numérico 1 observou-se que os resultados obtidos via comportamento linear e não-linear geométrico apresentaram, entre si, diferenças desprezíveis. Por outro lado, quando se considerou a não-linearidade física, os valores dos deslocamentos tiveram um aumento significativo em relação à análise linear, demonstrando a importância de se considerar tal efeito.

Nos Exemplos numéricos 2 e 3, analisando-se os diversos ciclos de carregamentos, observou-se que quando a barra ultrapassa o limite de proporcionalidade, devido a um determinado carregamento, e logo em seguida sofre um descarregamento, tal barra apresenta deformações plásticas permanentes. Se a mesma barra for recarregada, sem inversão de esforços, a relação força-deslocamento permanece linear até que a intensidade do maior carregamento seja alcançada. A partir daí a relação torna-se não-linear e passa a obedecer, novamente, a curva utilizada na análise.

Nos Exemplos numéricos 4 e 5 analisaram-se as respostas das estruturas sob a ação de carregamentos reversos, considerando a atuação do efeito Bauschinger no sistema. Com isso, o material apresentou reduções significativas no seu limite de proporcionalidade " σ_0 ", à medida que as estruturas sofriam inversões de carregamentos. Concluiu-se, também, que a configuração final de uma estrutura submetida a carregamentos reversos depende da ordem de ocorrência das cargas, desde que estas cargas ultrapassem os limites de proporcionalidade do material.

Outro fato observado nos exemplos foi que a utilização da curva proposta pela AISC-LRFD¹ fornece valores de deslocamentos maiores do que os obtidos quando utiliza-se a curva do CRC¹⁴. Dessa forma, a utilização da curva da AISC-LRFD¹ para a consideração da não-linearidade física no cálculo de estruturas metálicas nos conduz a resultados mais conservativos e com um maior grau de segurança.

Como não se pode prever quando os efeitos não-lineares serão relevantes, é necessário que se processe todas as alternativas de análise para que se possa avaliar o comportamento da estrutura de forma precisa. Desse modo, a consideração das deformações plásticas faz com que as análises se aproximem, ainda mais, do comportamento real da estrutura.

Como sugestão para estudos futuros, visando uma melhor compreensão do real comportamento das estruturas metálicas e como complemento da teoria aqui abordada, pode-se citar: a influência do efeito Bauschinger na instabilidade das estruturas, bem como a utilização de curvas de flambagem mais específicas e as propostas pela teoria da elasticidade que permitam retratar a não-linearidade física de uma forma mais precisa. Outra abordagem interessante seria a analisar a influência que todos efeitos não-lineares, seja atuando isoladamente ou em conjunto, têm no dimensionamento de estruturas metálicas sujeitas a carregamentos cíclicos.

Anexo A

Funções de Rigidez

Nesta parte do trabalho, será apresentada a dedução destes coeficientes de rigidez apresentados por YAGUI³⁵, SERRA²⁸ e REQUENA²³. A matriz de rigidez do elemento de barra será obtida em função de suas coordenadas locais apresentadas na figura A.1.

Considere a barra mostrada na figura A.1. É admitido que esta esteja totalmente engastada em ambas as extremidades denominadas de “j” e “k”. As rigidezes da barra serão determinadas tendo como base o conjunto de eixos ortogonais orientados com o eixo da barra conforme apresentado na figura A.1. O comprimento da barra será denominado de “L”, a área da seção transversal de “A” e o momento de inércia da seção transversal no plano “xy” de “I”.

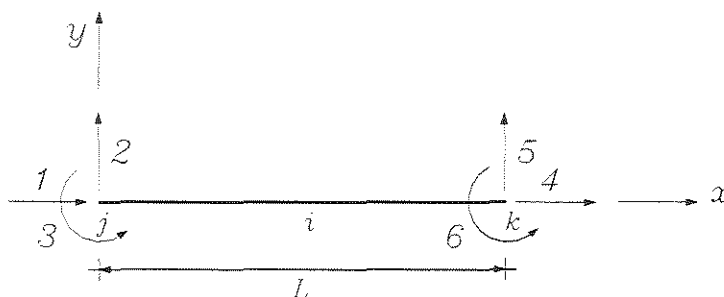


Figura A.1 - Sistema de coordenadas locais para barra.

Os coeficientes de rigidez da barra bi-engastada apresentados na figura A.2 são os esforços resultantes sobre a barra pelas restrições quando são impostos a cada extremidade da barra deslocamentos unitários independentes de translações e giros. Estes deslocamentos unitários são considerados como produzidos um de cada vez enquanto todos os outros deslocamentos de extremidade se mantêm nulos. Os deslocamentos unitários são considerados positivos nas direções de "x", "y" e "z". Os sentidos positivos das translações e rotações em cada extremidade são apresentados na figura A.2.

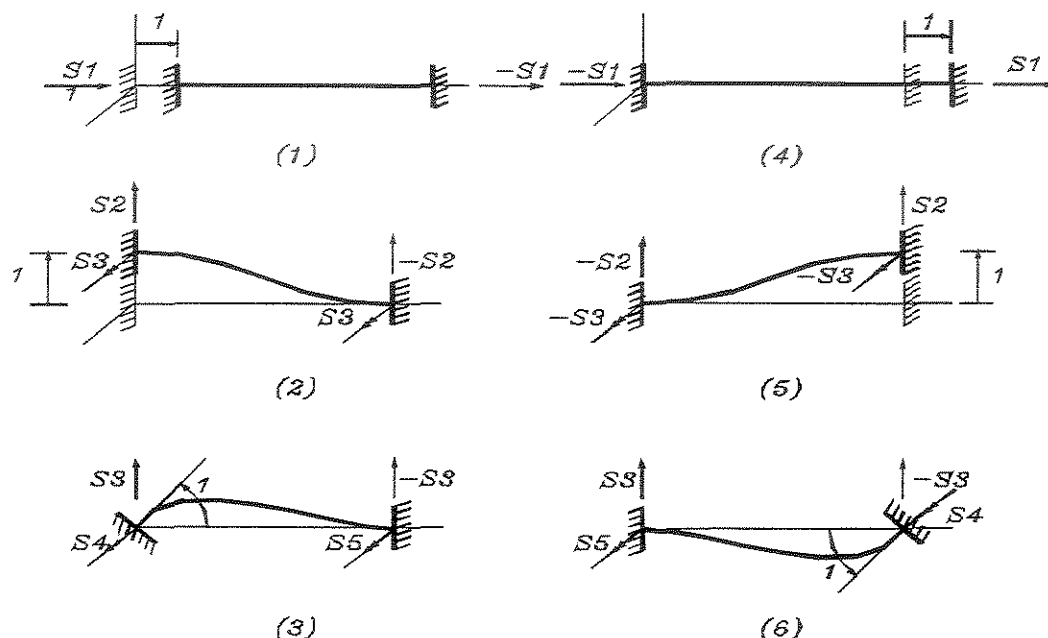


Figura A.2 - Estados de deslocamentos: translação unitária horizontal nas direções (1) e (4); translação unitária vertical nas direções (2) e (5) e giro unitário nas direções (3) e (6).

Para determinar a matriz de rigidez de barra de pórticos planos são dados deslocamentos unitários nas direções das coordenadas apresentadas na figura A.2. Devido aos deslocamentos impostos nas coordenadas "1", "2", "3", "4", "5" e "6" surgem ações de extremidade necessárias para manter o equilíbrio da barra na posição deformada. Desta forma, é possível obter uma matriz que relaciona os deslocamentos "D" com os esforços "F". Esta matriz é da ordem de 6×6 onde cada coluna representa as ações de extremidade originadas devido aos deslocamentos unitários impostos na

barra. Esta matriz é apresentada na figura A.3. Os valores não nulos são designados por “S1”, “S2”, “S3”, “S4” e “S5”. Devido ao teorema da reciprocidade, é possível mostrar que esta matriz é simétrica conforme apresentada na figura A.3.

$$\begin{Bmatrix} F1 \\ F2 \\ F3 \\ F4 \\ F5 \\ F6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & -S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & S_3 & 0 & -S_2 & S_3 \\ 0 & S_3 & S_4 & 0 & -S_3 & S_5 \\ -S_1 & 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & -S_2 & -S_3 & 0 & S_2 & -S_3 \\ 0 & S_3 & S_5 & 0 & -S_3 & S_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D1 \\ D2 \\ D3 \\ D4 \\ D5 \\ D6 \end{Bmatrix}$$

Figura A.3 - Matriz de rigidez da barra com funções de rigidez.

O coeficiente “S1” cujo valor é a rigidez axial da barra é afetado pela presença do esforço normal “P” ao longo da barra. Entretanto, como o efeito de encurtamento da barra é desprezado, a rigidez axial é obtida conforme apresentado no método dos deslocamentos onde o efeito de segunda ordem não é levado em consideração. Assim, tem-se que $S_{11} = -S_{41} = S1$.

Adotando a notação tradicional para as características geométricas da seção e propriedades elásticas do material, chega-se em:

$$S1 = \frac{EA}{L} \quad (A.1)$$

Fazendo a somatória dos momentos no nó inicial da barra, aplicada no estado de deslocamento da figura A.2(2), admitindo que haja um esforço “P” de tração na barra, obtém-se:

$$S3 + S3 - S2L + P = 0 \quad (A.2)$$

$$S2 = \frac{2S3 + P}{L} \quad (A.3)$$

Para o estado de deslocamento da figura A.2(3), obtém-se:

$$S_4 + S_5 - S_3L = 0 \quad (A.4)$$

$$S_5 = S_3L - S_4 \quad (A.5)$$

Conforme verificado através de (A.3) e (A.5), para a montagem da matriz de rigidez é necessário apenas o cálculo dos coeficientes “S1”, “S3” e “S4”.

O esforço normal “P” afeta o valor dos coeficientes “S3” e “S4”. Desta forma, o valor do momento fletor e sua derivada também serão afetados. A distorção “ γ ” definida pela diferença entre o giro “ ϕ ” da seção transversal e a inclinação “ θ ” da linha elástica independe do valor e sentido de “P”, ou seja:

$$y' = \theta = \phi + \gamma \quad (A.6)$$

$$\gamma = \frac{cQ}{GA} \quad (A.7)$$

Substituindo a equação (A.7) em (A.6), tem-se:

$$y' = \phi + \frac{cQ}{GA} \quad (A.8)$$

Derivando y' e lembrando que $\phi' = -\frac{M}{EI}$, resulta em:

$$y'' = -\frac{M}{EI} + \frac{c}{GA} \left(\frac{dQ}{dx} \right) \quad (A.9)$$

sendo “P” a força axial no elemento de barra; “A” a área da seção transversal; “I” o momento de inércia em relação ao eixo z; “G” o módulo de elasticidade transversal; “E”

o módulo de elasticidade longitudinal; “c” o coeficiente de forma; e “L” o comprimento da barra.

- a) Determinação dos coeficientes de rigidez para o caso de esforço axial igual zero ($P=0$)

Utilizando a condição de equilíbrio de momento em uma posição “x” na figura A.2(3), obtém-se:

$$M = S_4 - S_3x \quad (\text{A.10})$$

$$Q = \frac{dM}{dx} = -S_3 \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{dQ}{dx} = 0 \quad (\text{A.12})$$

Substituindo a equação (A.11) em (A.8), resulta:

$$y' = \phi - \frac{cS_3}{GA} \quad (\text{A.13})$$

Substituindo a equação (A.10) e (A.12) em (A.9), tem-se:

$$y'' = -\frac{(S_4 - S_3x)}{EI} = -\frac{S_4}{EI} + \frac{S_3}{EI}x \quad (\text{A.14})$$

Aplicando as condições de contorno na equação (A.14) para $x = 0$ e $x = L$, chega-se em:

$$y''_{(0)} = -\frac{S_4}{EI} \quad (\text{A.15})$$

$$y''_{(L)} = -\frac{S_4}{EI} + \frac{S_3 L}{EI} \quad (\text{A.16})$$

Derivando duas vezes a equação (A.14), obtém-se:

$$y^{IV} = 0 \quad (\text{A.17})$$

A solução geral da equação diferencial (A.17) de quarta ordem é dada por:

$$y = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4 \quad (\text{A.18})$$

Fazendo-se a primeira e segunda derivada da solução geral da equação diferencial:

$$y' = 3C_1 x^2 + 2C_2 x + C_3 \quad (\text{A.19})$$

$$y'' = 6C_1 x + 2C_2 \quad (\text{A.20})$$

Aplicando as condições de contorno em (A.20) para $x = 0$ e $x = L$, resulta em:

$$y''_{(0)} = 2C_2 \quad (\text{A.21})$$

$$y''_{(L)} = 6C_1 L + 2C_2 \quad (\text{A.22})$$

Comparando a equação (A.21) com (A.15), obtém-se:

$$C_2 = -\frac{S_4}{2EI} \quad (A.23)$$

Igualando a equação (A.22) com (A.16) , chega-se em:

$$6C_1L + 2C_2 = -\frac{S_4}{EI} + \frac{S_3L}{EI} \quad (A.24)$$

Substituindo o valor de “ C_2 ” obtido na equação (A.23) na (A.24) e fazendo as devidas simplificações, o valor de “ C_1 ” fica dado por:

$$C_1 = \frac{S_3}{6EI} \quad (A.25)$$

Aplicando as condições de contorno em (A.18), para $x = 0$ e $x = L$, resulta em:

$$C_4 = 0 \quad (A.26)$$

$$C_1L^3 + C_2L^2 + C_3L + C_4 = 0 \quad (A.27)$$

Aplicando as condições de contorno na equação (A.13) e (A.19) para $x = 0$ e lembrando que $\phi_j = 1$ no nó inicial da barra, obtém-se:

$$y'_{(0)} = 1 - \frac{cS_3}{GA} \quad (A.28)$$

$$y'_{(0)} = C_3 \quad (A.29)$$

Igualando a equação (A.28) com (A.29), resulta em:

$$C_3 = 1 - \frac{cS3}{GA} \quad (A.30)$$

Aplicando as condições de contorno na equação (A.13) e (A.19) para $x = L$ e lembrando que $\phi_k = 0$ no nó final da barra, obtém-se:

$$y'_{(L)} = -\frac{cS3}{GA} \quad (A.31)$$

$$y'_{(L)} = 3C_1L^2 + 2C_2L + C_3 \quad (A.32)$$

Igualando a equação (A.31) com (A.32), resulta em:

$$3C_1L^2 + 2C_2L + C_3 = -\frac{cS3}{GA} \quad (A.33)$$

As equações (A.23), (A.25), (A.26), (A.27), (A.30) e (A.33) formam um sistema de seis equações e seis incógnitas, sendo as incógnitas “ C_1 ”, “ C_2 ”, “ C_3 ”, “ C_4 ”, “ $S3$ ” e “ $S4$ ”. Fazendo a eliminação das quatro primeiras incógnitas, chamando $g = 12cEI/GAL^2$ e $I' = I/(1+g)$, chega-se em:

$$S3 = \frac{6EI'}{L^2} \quad (A.34)$$

$$S4 = \frac{EI'}{L}(4 + g) \quad (A.35)$$

O valor de “ $S2$ ” dado pela equação (A.3) pode ser obtido substituindo o valor de “ $S3$ ” dado por (A.34) fazendo $P=0$, portanto:

$$S2 = \frac{12EI'}{L^3} \quad (A.36)$$

Para obter o valor de “S5”, substitui-se em (A.5) o valor de “S3” e “S4” dado por (A.34) e (A.35). Ao se fazer as devidas simplificações, pode-se chegar:

$$S5 = \frac{EI'}{L}(2 - g) \quad (A.37)$$

b) Determinação dos coeficientes de rigidez para caso de esforço axial de compressão ($P < 0$)

Fazendo-se o equilíbrio de momentos em uma posição “x” da barra para o caso mostrado na figura A.2(3) e levando em consideração a atuação de uma força normal “P” de compressão, obtém-se:

$$M = S4 - S3x + Py \quad (A.38)$$

$$Q = \frac{dM}{dx} = -S3 + Py' \quad (A.39)$$

$$\frac{dQ}{dx} = Py'' \quad (A.40)$$

Substituindo a equação (A.29) em (A.3), resulta:

$$y' = \phi + \frac{c}{GA}(-S3 + Py') = \phi - \frac{cS3}{GA} + \frac{cP}{GA}y' \quad (A.41)$$

Fazendo $a_1 = 1 - cP/GA$ e agrupando os termos semelhantes na equação (A.41), chega-se em:

$$y' = \frac{1}{a_1} \left(\phi - \frac{cS3}{GA} \right) \quad (A.42)$$

Substituindo as equações (A.38) e (A.40) em (A.9), tem-se:

$$y'' = -\frac{(S_4 - S_3x + Py)}{EI} + \frac{c}{GA}Py'' = -\frac{S_4}{EI} + \frac{S_3}{EI}x - \frac{Py}{EI} + \frac{cP}{GA}y'' \quad (A.43)$$

Lembrando que $a_1 = 1 - cP/GA$ e agrupando os termos semelhantes na equação (A.43), tem-se:

$$y'' = \frac{1}{a_1EI}(-S_4 + S_3x - Py) \quad (A.44)$$

Derivando duas vezes (A.44) e fazendo $\alpha^2 = P/a_1EI$, obtém-se:

$$y^{IV} + \alpha^2 y'' = 0 \quad (A.45)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{a_1EI}}$$

A equação diferencial de quarto grau para o caso de “P” de compressão tem como solução geral a seguinte expressão:

$$y = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + C_3 x + C_4 \quad (A.46)$$

Fazendo-se a primeira e segunda derivada da solução geral da equação diferencial:

$$y' = \alpha C_1 \cos \alpha x - \alpha C_2 \sin \alpha x + C_3 \quad (A.47)$$

$$y'' = -\alpha^2 (C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x) \quad (A.48)$$

Aplicando as condições de contorno na equação (A.44) para $x = 0$ e $x = L$ e lembrando que para o dois casos $y = 0$, obtém-se:

$$y''_{(0)} = \frac{1}{a_1 EI} (-S4) \quad (A.49)$$

$$y''_{(L)} = \frac{1}{a_1 EI} (-S4 + S3L) \quad (A.50)$$

Aplicando as condições de contorno em (A.48) para $x = 0$ e $x = L$, resulta:

$$y''_{(0)} = -\alpha^2 C_2 \quad (A.51)$$

$$y''_{(L)} = -\alpha^2 (C_1 \sin \alpha L + C_2 \cos \alpha L) \quad (A.52)$$

Comparando a (A.49) com a (A.51), obtém-se o seguinte valor para " C_2 ":

$$C_2 = \frac{S4}{a_1 EI \alpha^2} \quad (A.53)$$

Lembrando que $\alpha^2 = P/a_1 EI$ e substituindo em " C_2 ", tem-se:

$$C_2 = \frac{S4}{P} \quad (A.54)$$

Igualando a equação (A.50) com (A.52), obtém-se:

$$\frac{1}{a_1 EI} (-S4 + S3L) = -\alpha^2 (C_1 \sin \alpha L + C_2 \cos \alpha L) \quad (A.55)$$

Substituindo o valor de “ C_2 ” obtido em (A.54) na (A.55), lembrando que $\alpha^2 = P/a_1EI$ e fazendo as devidas simplificações, o valor de “ C_1 ” fica dado por:

$$C_1 = \frac{-S3L + S4(1 - \cos \alpha L)}{P \sin \alpha L} \quad (A.56)$$

Aplicando as condições de contorno em (A.46) para $x = 0$ e $x = L$, tem-se:

$$C_2 + C_4 = 0 \quad (A.57)$$

$$C_1 \sin \alpha L + C_2 \cos \alpha L + C_3 L + C_4 = 0 \quad (A.58)$$

Aplicando as condições de contorno na equação (A.42) e (A.47) para $x = 0$ e lembrando que $\phi_j = 1$ no nó inicial da barra, obtém-se:

$$y'_{(0)} = \frac{1}{a_1} \left(1 - \frac{cS3}{GA} \right) \quad (A.59)$$

$$y'_{(0)} = \alpha C_1 + C_3 \quad (A.60)$$

Igualando a equação (A.59) com (A.60), resulta:

$$\alpha C_1 + C_3 = \frac{1}{a_1} \left(1 - \frac{cS3}{GA} \right) \quad (A.61)$$

Aplicando as condições de contorno nas equações (A.42) e (A.47) para $x = L$ e lembrando que $\phi_k = 0$ no nó final da barra, obtém-se:

$$y'_{(L)} = -\frac{cS3}{a_1 GA} \quad (A.62)$$

$$y'_{(L)} = \alpha C_1 \cos \alpha L - \alpha C_2 \sin \alpha L + C_3 \quad (\text{A.63})$$

Igualando a equação (A.62) com (A.63), tem-se:

$$\alpha C_1 \cos \alpha L - \alpha C_2 \sin \alpha L + C_3 = -\frac{cS_3}{a_1 GA} \quad (\text{A.64})$$

As equações (A.54), (A.56), (A.57), (A.58), (A.61) e (A.64) formam um sistema de seis equações e seis incógnitas, sendo as incógnitas “C₁”, “C₂”, “C₃”, “C₄”, “S₃” e “S₄”. Fazendo a eliminação das quatro primeiras incógnitas, chega-se em:

$$2\alpha (1 - \cos \alpha L) S_4 - \alpha L (1 - \cos \alpha L) S_3 = \frac{P \sin \alpha L}{a_1} \quad (\text{A.65})$$

$$\alpha (1 - \cos \alpha L) S_4 + \left(\frac{\sin \alpha L}{a_1} - \alpha L \right) S_3 = \frac{P \sin \alpha L}{a_1} \quad (\text{A.66})$$

Resolvendo o sistema apresentado acima por substituição e utilizando a igualdade $P = \alpha^2 a_1 EI$, chega-se aos valores de “S₃” e “S₄” apresentados a seguir:

$$S_3 = \frac{\alpha^2 a_1 EI \sin \alpha L}{(2 \sin \alpha L - a_1 \alpha L - a_1 \alpha L \cos \alpha L)} \quad (\text{A.67})$$

$$S_4 = \frac{\alpha EI (\sin \alpha L - a_1 \alpha L \cos \alpha L)}{(2 - 2 \cos \alpha L - a_1 \alpha L \sin \alpha L)} \quad (\text{A.68})$$

Para facilitar a programação é conveniente que o denominador das equações (A.67) e (A.68) se tornem iguais. Multiplica-se o numerador e o denominador de (A.67) por “(1-cosαL)” e fazendo as devidas simplificações, chega-se em:

$$S3 = \frac{\alpha^2 a_1 EI (1 - \cos \alpha L)}{(2 - 2 \cos \alpha L - a_1 \alpha L \sin \alpha L)} \quad (A.69)$$

Através das condições de equilíbrio dado pela equação (A.3), lembrando que “P” é de compressão, pode-se escrever:

$$S2 = \frac{2S3 - P}{L}$$

Substituindo o valor de “S3” dado pela equação (A.69) e fazendo as devidas multiplicações e simplificações, obtém-se:

$$S2 = \frac{\alpha^3 (a_1)^2 EI \sin \alpha L}{(2 - 2 \cos \alpha L - a_1 \alpha L \sin \alpha L)} \quad (A.70)$$

Através das condições de equilíbrio dado pela equação (A.5), pode-se fazer:

$$S5 = S3L - S4$$

Substituindo o valor de “S3” e “S4” dado pelas equações (A.69) e (A.68) e fazendo as devidas simplificações, chega-se em:

$$S5 = \frac{\alpha EI (\alpha a_1 L - \sin \alpha L)}{(2 - 2 \cos \alpha L - a_1 \alpha L \sin \alpha L)} \quad (A.71)$$

c) Determinação dos coeficientes de rigidez para o esforço axial de tração ($P > 0$)

Fazendo-se o equilíbrio de momentos em uma posição “x” da barra para o caso mostrado na figura A.2(3) e levando em consideração a atuação de uma força normal “P” de tração, obtém-se:

$$M = S_4 - S_3x - Py \quad (\text{A.72})$$

$$Q = \frac{dM}{dx} = -S_3 - Py' \quad (\text{A.73})$$

$$\frac{dQ}{dx} = -Py'' \quad (\text{A.74})$$

Substituindo a equação (A.73) em (A.8), resulta em:

$$y' = \phi + \frac{c}{GA}(-S_3 - Py') = \phi - \frac{cS_3}{GA} - \frac{cP}{GA}y' \quad (\text{A.75})$$

Fazendo $a_2 = 1 + cP/GA$ e agrupando os termos semelhantes na equação (A.75), chega-se em:

$$y' = \frac{1}{a_2} \left(\phi - \frac{cS_3}{GA} \right) \quad (\text{A.76})$$

Substituindo as equações (A.72) e (A.74) em (A.9), tem-se:

$$y'' = -\frac{(S_4 - S_3x - Py)}{EI} + \frac{c}{GA}(-Py'') = -\frac{S_4}{EI} + \frac{S_3}{EI}x + \frac{Py}{EI} - \frac{cP}{GA}y'' \quad (\text{A.77})$$

Lembrando que $a_2 = 1 + cP/GA$ e agrupando os termos semelhantes na equação (A.77), chega-se em:

$$y'' = \frac{1}{a_2EI}(-S_4 + S_3x + Py) \quad (\text{A.78})$$

Derivando duas vezes a equação (A.78) e fazendo $\alpha^2 = P/a_2EI$, obtém-se:

$$y^{IV} - \alpha^2 y'' = 0 \quad (\text{A.79})$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{a_2 EI}}$$

A equação diferencial de quarto grau para o caso de “P” de tração tem como solução geral a seguinte expressão:

$$y = C_1 \sinh \alpha x + C_2 \cosh \alpha x + C_3 x + C_4 \quad (\text{A.80})$$

Fazendo-se a primeira e segunda derivada da solução geral da equação diferencial, obtém-se:

$$y' = \alpha C_1 \cosh \alpha x + \alpha C_2 \sinh \alpha x + C_3 \quad (\text{A.81})$$

$$y'' = \alpha^2 (C_1 \sinh \alpha x + C_2 \cosh \alpha x) \quad (\text{A.82})$$

Aplicando as condições de contorno na equação (A.78) para $x = 0$ e $x = L$, lembrando que para o dois casos $y = 0$, obtém-se:

$$y''_{(0)} = \frac{1}{a_2 EI} (-S4) \quad (\text{A.83})$$

$$y''_{(L)} = \frac{1}{a_2 EI} (-S4 + S3L) \quad (\text{A.84})$$

Aplicando as condições de contorno na equação (A.82) para $x = 0$ e $x = L$, resulta em:

$$y''_{(0)} = \alpha^2 C_2 \quad (\text{A.85})$$

$$y''_{(L)} = \alpha^2 (C_1 \sinh \alpha L + C_2 \cosh \alpha L) \quad (\text{A.86})$$

Igualando a equação (A.83) com (A.85), chega-se em:

$$C_2 = -\frac{S4}{a_2 EI \alpha^2} \quad (\text{A.87})$$

Lembrando $\alpha^2 = P/a_2 EI$ e substituindo em "C₂", tem-se:

$$C_2 = -\frac{S4}{P} \quad (\text{A.88})$$

Igualando a equação (A.84) com (A.86), tem-se:

$$\frac{1}{a_2 EI} (-S4 + S3L) = \alpha^2 (C_1 \sinh \alpha L + C_2 \cosh \alpha L) \quad (\text{A.89})$$

Substituindo o valor de "C₂" obtido na equação (A.88) em (A.89), lembrando que $\alpha^2 = P/a_2 EI$ e fazendo as devidas simplificações, o valor de "C₁" fica dado por:

$$C_1 = \frac{S3L + S4(\cosh \alpha L - 1)}{P \sinh \alpha L} \quad (\text{A.90})$$

Aplicando as condições de contorno em (A.80) para $x = 0$ e $x = L$, tem-se:

$$C_2 + C_4 = 0 \quad (\text{A.91})$$

$$C_1 \sinh \alpha L + C_2 \cosh \alpha L + C_3 L + C_4 = 0 \quad (\text{A.92})$$

Aplicando as condições de contorno nas equações (A.76) e (A.81) para $x = 0$ lembrando que $\phi_j = 1$ no nó inicial da barra, obtém-se:

$$y'_{(0)} = \frac{1}{a_2} \left(1 - \frac{cS3}{GA} \right) \quad (A.93)$$

$$y'_{(0)} = \alpha C_1 + C_3 \quad (A.94)$$

Igualando a equação (A.93) com (A.94), resulta em:

$$\alpha C_1 + C_3 = \frac{1}{a_2} \left(1 - \frac{cS3}{GA} \right) \quad (A.95)$$

Aplicando as condições de contorno nas equações (A.76) e (A.81) para $x = L$ lembrando que $\phi_k = 0$ no nó final da barra, obtém-se:

$$y'_{(L)} = -\frac{cS3}{a_2 GA} \quad (A.96)$$

$$y'_{(L)} = \alpha C_1 \cosh \alpha L + \alpha C_2 \sinh \alpha L + C_3 \quad (A.97)$$

Igualando a equação (A.96) com (A.97), resulta em:

$$\alpha C_1 \cosh \alpha L + \alpha C_2 \sinh \alpha L + C_3 = -\frac{cS3}{a_2 GA} \quad (A.98)$$

As equações (A.88), (A.90), (A.91), (A.92), (A.95) e (3.98) formam um sistema de seis equações e seis incógnitas, sendo as incógnitas “C₁”, “C₂”, “C₃”, “C₄”, “S3” e “S4”. Fazendo a eliminação das quatro primeiras incógnitas, chega-se em:

$$2\alpha (\cosh \alpha L - 1) S4 - \alpha L (\cosh \alpha L - 1) S3 = \frac{P \sinh \alpha L}{a_2} \quad (A.99)$$

$$\alpha (\cosh \alpha L - 1) S_4 + \left(\alpha L - \frac{\sinh \alpha L}{a_2} \right) S_3 = \frac{P \sinh \alpha L}{a_2} \quad (\text{A.100})$$

Resolvendo o sistema apresentado acima por substituição e utilizando a igualdade $P = \alpha^2 a_2 EI$, chega-se aos valores de “S3” e “S4” apresentados a seguir:

$$S_3 = \frac{\alpha^2 a_2 EI \sinh \alpha L}{(a_2 \alpha L - 2 \sinh \alpha L + a_2 \alpha L \cosh \alpha L)} \quad (\text{A.101})$$

$$S_4 = \frac{\alpha EI (a_2 \alpha L \cosh \alpha L - \sinh \alpha L)}{(2 - 2 \cosh \alpha L + a_2 \alpha L \sinh \alpha L)} \quad (\text{A.102})$$

Para facilitar a programação, é conveniente que o denominador das equações (A.101) e (A.102) se tornem iguais. Para tanto, multiplica-se o numerador e o denominador da equação (A.101) por “(cosh αL-1)” e fazendo as devidas simplificações, chega-se em:

$$S_3 = \frac{\alpha^2 a_2 EI (\cosh \alpha L - 1)}{(2 - 2 \cosh \alpha L + a_2 \alpha L \sinh \alpha L)} \quad (\text{A.103})$$

Através das condições de equilíbrio dado pela equação (A.3) e lembrando que “P” é de tração, pode-se escrever:

$$S_2 = \frac{2S_3 + P}{L}$$

Substituindo o valor de “S3” dado pela equação (A.103) e fazendo as devidas multiplicações e simplificações, obtém-se:

$$S_2 = \frac{\alpha^3 (a_2)^2 EI \sinh \alpha L}{(2 - 2 \cosh \alpha L + a_2 \alpha L \sinh \alpha L)} \quad (\text{A.104})$$

Através das condições de equilíbrio dado pela equação (A.5), pode-se fazer:

$$S5 = S3L - S4$$

Substituindo o valor de “S3” e “S4” dado pelas equações (A.103) e (A.102) e fazendo as devidas multiplicações e simplificações, obtém-se:

$$S5 = \frac{\alpha EI (\sinh \alpha L - a_2 \alpha L)}{(2 - 2 \cosh \alpha L + a_2 \alpha L \sinh \alpha L)} \quad (A.105)$$

Para facilitar a utilização das matrizes, é mostrado a seguir um esquema de matriz de rigidez do elemento de barra com seus termos representados por fatores que podem ser alterados conforme a condição de influência da força cortante ou sob a variação da força axial, como mostra a tabela A.1.

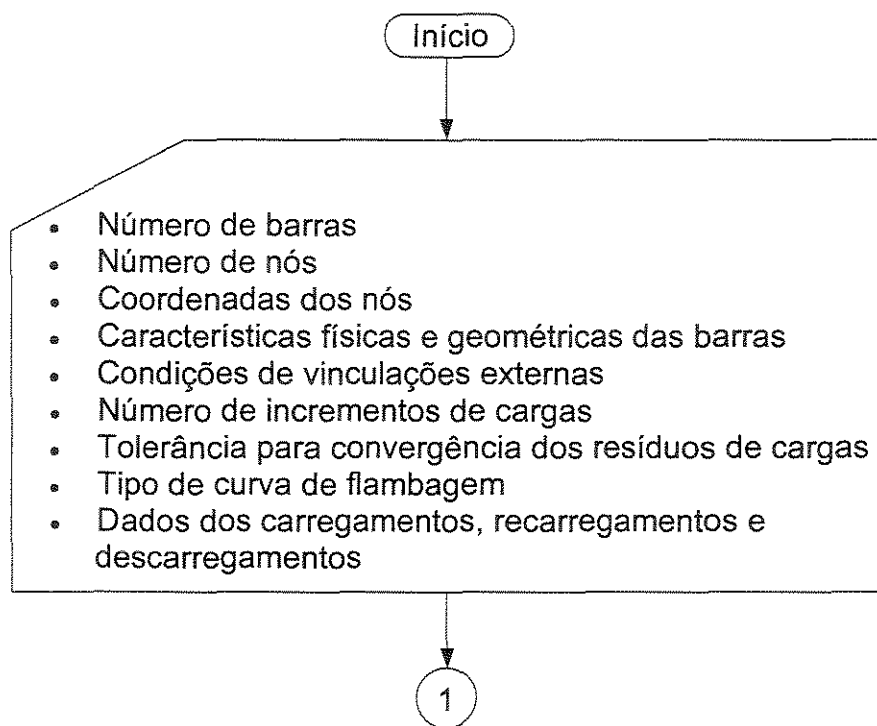
Tabela A.1 - Funções de rigidez de barra de pórticos planos.

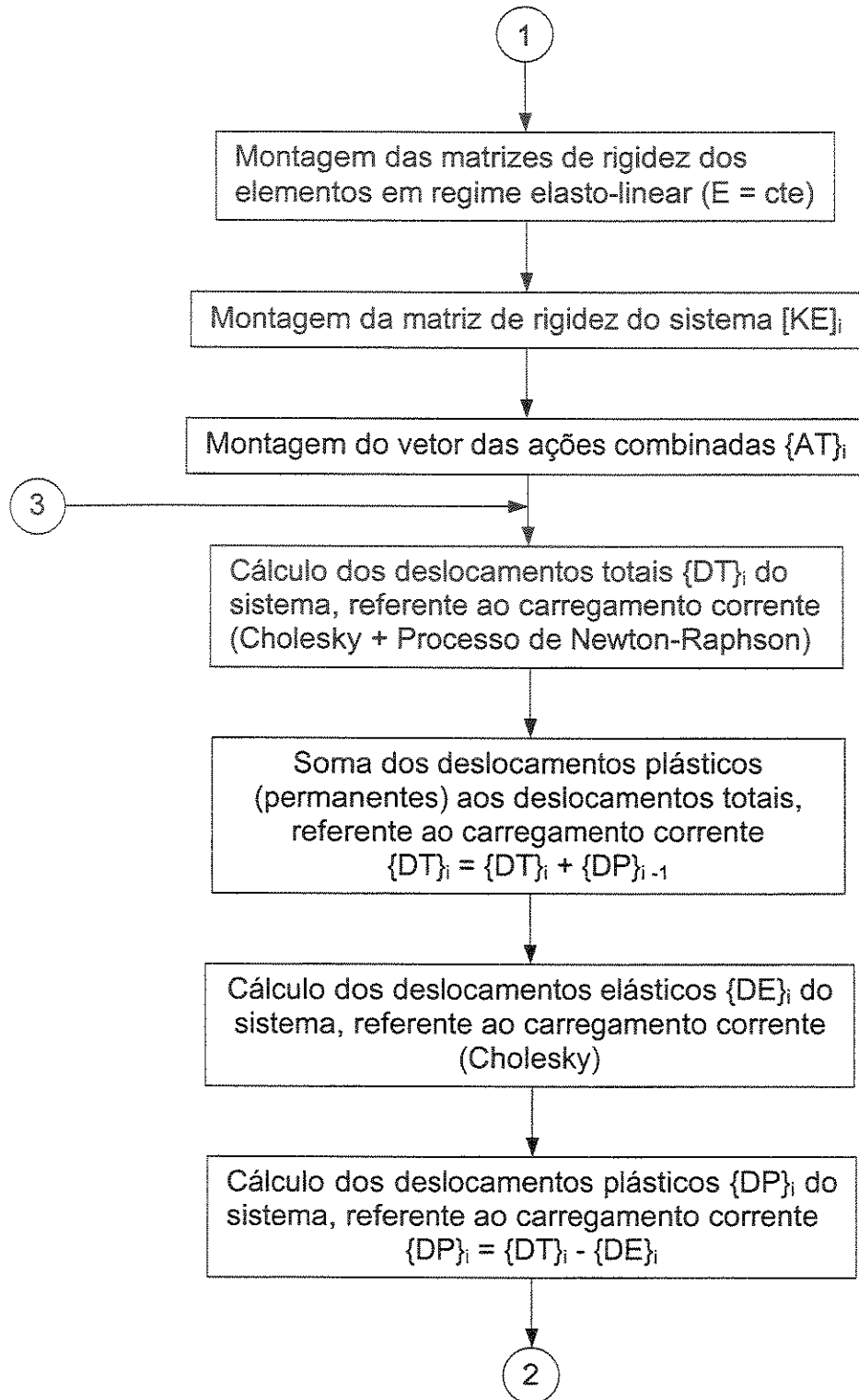
S/P	Compressão (P<0)	(P=0)	Tração (P>0)
S1	$\frac{EA}{L}$	$\frac{EA}{L}$	$\frac{EA}{L}$
S2	$\frac{EI(a_1)^2 \varepsilon_f^3 \operatorname{sen} \varepsilon_f}{L^3 \phi_c}$	$\frac{12EI}{L^3(1+2g)}$	$\frac{EI(a_2)^2 \varepsilon_f^3 \sinh \varepsilon_f}{L^3 \phi_t}$
S3	$\frac{EI a_1 \varepsilon_f^2 (1 - \cos \varepsilon_f)}{L^2 \phi_c}$	$\frac{6EI}{L^2(1+2g)}$	$\frac{EI a_2 \varepsilon_f^2 (\cosh \varepsilon_f - 1)}{L^2 \phi_t}$
S4	$\frac{EI \varepsilon_f (\operatorname{sen} \varepsilon_f - a_1 \varepsilon_f \cos \varepsilon_f)}{L \phi_c}$	$\frac{2EI(2+g)}{L(1+2g)}$	$\frac{EI \varepsilon_f (a_2 \varepsilon_f \cosh \varepsilon_f - \sinh \varepsilon_f)}{L \phi_t}$
S5	$\frac{EI \varepsilon_f (a_1 \varepsilon_f - \operatorname{sen} \varepsilon_f)}{L \phi_c}$	$\frac{2EI(1-g)}{L(1+2g)}$	$\frac{EI \varepsilon_f (\sinh \varepsilon_f - a_2 \varepsilon_f)}{L \phi_t}$
	$\phi_c = 2 - 2 \cos \varepsilon_f - a_1 \varepsilon_f \operatorname{sen} \varepsilon_f$ $a_1 = 1 - \frac{c P }{GA}$ $\alpha = \sqrt{\frac{ P }{(a_1 EI)}}$	$g = \frac{6cEI}{GAL^2}$ $\varepsilon_f = \alpha L$	$\phi_t = 2 - 2 \cosh \varepsilon_f + a_2 \varepsilon_f \sinh \varepsilon_f$ $a_2 = 1 + \frac{cP}{GA}$ $\alpha = \sqrt{\frac{P}{(a_2 EI)}}$

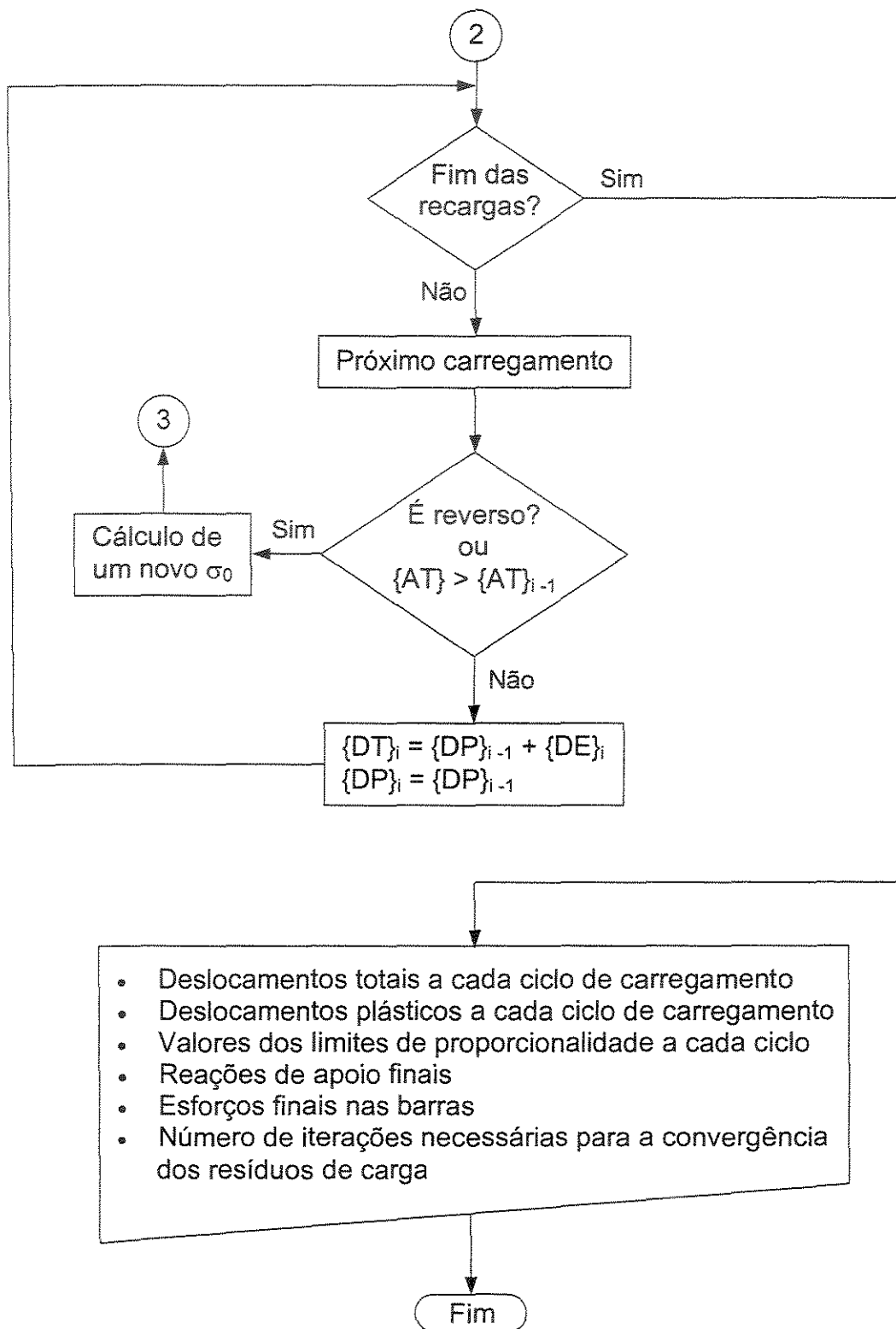
Anexo B

Fluxograma Resumido

Neste Anexo é apresentado, de forma resumida, o fluxograma utilizado para a programação computacional do cálculo de estruturas metálicas planas em sistemas não-conservativos.







Referências Bibliográficas

- 1) AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION, Chicago. **AISC - Load and Resistance Factor Design Specification for Structural Steel Buildings**. Chicago, 1993.
- 2) ABEL, A. Historical Perspectives and some of the Main Features of the Bauschinger Effect. **Materials Forum**. Woodville, v.10, n.1, p.11-26, First Quarter 1987.
- 3) BEEDLE, L. S. **Plastic Design of Steel Frames**. New York: John Wiley & Sons, 1958. 406p.
- 4) CALLEJAS, I. J. A., VIEIRA, R. F., REQUENA, J. A. V. Instabilidade Global de Pórticos Planos Considerando a Não-linearidade Geométrica no Regime Elástico e Inelástico das Barras. In: **XVIII CILAMCE - Congresso Íbero Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia**. Brasília, v.1, p.71-78, Out. 1997.
- 5) CHEN, W. F. **Constitutive Equations for Engineering Materials: Plasticity and Modeling**. Amsterdam: Elsevier Science, 1994. p.583-1129.
- 6) CHEN, W. F., HAN, D. J. **Plasticity for Structural Engineers**. New York: Springer-Verlag, 1988. 606p.

- 7) CHEN, W. F., LUI, E. M. **Structural Stability: Theory and Implementation**. London: Elsevier Science Publishing Co., 1987. 489p.
- 8) CHEN, W. F., ZHANG, H. **Structural Plasticity: Theory, Problems, and CAE Software**. New York: Springer-Verlag, 1991. 250p.
- 9) DODD, L. L., RESTREPO-POSADA, J. I. Model for Predicting Cyclic Behavior of Reinforcing Steel. **Journal of Structural Engineering**. New York, v.121, n.3, p.433-445, Mar. 1995.
- 10) GALAMBOS, T. V. **Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures**. New York: John Wiley, 1988. 786p.
- 11) GERE, W. F., WEAVER, W. JR. **Análise de Estruturas Reticuladas**. Rio de Janeiro: Guanabara, 1987.
- 12) JOHNSTON, B. G. Buckling Behavior Above the Tangent Modulus Load. **Journal of the Engineering Mechanics Division**. New York, v.87, n.EM6, p.79-99, Dez. 1961.
- 13) JOHNSTON, B. G. Column Buckling Theory: Historic highlights. **Journal of Structural Engineering**. New York, v.109, n.9, p.2086-2096, Set. 1983.
- 14) JOHNSTON, B. G. **Guide to Design Criteria for Metal Compression Members**. Column Research Council. New York, v.109, n.9, p.2086-2096, Set. 1983.
- 15) KHAN, A. S., HUANG, S. **Continuum Theory of Plasticity**. New York: John Wiley & Sons, 1995. 421p.

- 16) KNIGHT, G. M. S., SANTHAKUMAR, A. R. Behaviour of Single Angle Beam-Column Element Subjected to Load Reversal. **Journal of Constructional Steel Research**. Oxford, v.30, n.2, p.107-124, 1994.
- 17) LEE, G. C., LEE, E. T. Local Buckling of Steel Sections under Cyclic Loading. **Journal of Constructional Steel Research**. Oxford, v.29, p.55-70, 1994.
- 18) MAMAGHANI, I. H. P., SHEN, C., MIZUNO, E., USAMI, T. Cyclic Behavior of Structural Steels I: Experiments. **Journal of Engineering Mechanics**. v.121, n.11, p.1158-1164, Nov. 1995.
- 19) MUGHRABI, H. Johann Bauschinger, Pioneer of Modern Materials Testing. **Materials Forum**. Woodville, v.10, n.1, p.5-10, First Quarter 1987.
- 20) PAIXÃO, C. L. **Análise Não-linear Geométrica de Estruturas Reticuladas com Aplicação ao Lançamento de Oleodutos Submarinos**. Campinas: UNICAMP, 1990. Dissertação de Mestrado - Faculdade de Engenharia Mecânica, 1990. 170p.
- 21) POPOV, E. P., AMIN, N. R., LOUIE, J. C., STEPHEN, R. M. Cyclic Behavior of Large Beam-column Assemblies. **Engineering Journal**. v.23, n.1, p.9-24, First Quarter 1986.
- 22) POPOV, E. P., PINKNEY, R. B. Cyclic Yield Reversal in Steel Building Connections. **Engineering Journal**. v.8, n.3, p.66-79, Jul. 1971.
- 23) REQUENA, J. A. V. **Carregamento Crítico de Instabilidade Geral de Pilares de Seção Composta Variável de Edifícios Industriais Metálicos**. São Carlos: EESC-USP, 1995. Tese de Doutorado - Faculdade de Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos, 1995. 157p.

- 24) RODRIGUES, R. O. **Análise Dinâmica Bidimensional Não-linear Física e Geométrica de Treliças de Aço e Pórticos de Concreto Armado**. São Carlos: EESC-USP, 1997. Tese de Doutorado - Faculdade de Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos, 1997. 275p.
- 25) RUBERT, J. B. **Estudo do Desempenho de Algoritmos Numéricos na Solução de Sistemas Não-lineares de Estruturas Formadas por Barras de Treliça**. São Carlos: EESC-USP, 1993. Dissertação de Mestrado - Faculdade de Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos, 1993. 97p.
- 26) SALMON, C. G., JOHNSON, J. E. **Steel Structures: Design and Behavior**. New York: HarperCollins, 1996. 1024p.
- 27) SCHOLTES, B., VÖHRINGER, O., MACHERAUCH, E. The Influence of the Bauschinger Effect on the Buckling Behaviour of Steel Specimens. **Materials Forum**. Woodville, v.10, n.1, p.54-57, First Quarter 1987.
- 28) SERRA, J. L. F. A. **Contribuição ao Estudo de Núcleos Resistentes de Concreto Armado**. São Carlos: EESC-USP, 1994. Tese de Doutorado - Faculdade de Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos, 1994. 128p.
- 29) SHANLEY, F. R. Inelastic Column Theory. **Journal of the Aeronautical Sciences**. New York, v.14, n.5, p.261-267, Mai. 1947.
- 30) SHEN, C., MAMAGHANI, I. H. P., MIZUNO, E., USAMI, T. Cyclic Behavior of Structural Steels II: Theory. **Journal of Engineering Mechanics**. v.121, n.11, p.1165-1172, Nov. 1995.
- 31) SOH, C. K., FUNG, T. C., QIN, F., GHO, W. M. Behavior of Completely Overlapped Tubular Joints under Cyclic Loading. **Journal of Structural Engineering**. New York, v.127, n.2, p.122-128, Fev. 2001.

- 32) THÜRLIMANN, B. Column Buckling - Historical and Actual Notes. **Journal of Constructional Steel Research**. Oxford, v.17, p.95-111, 1990.
- 33) TIMOSHENKO, S. **History of Strenght of Materials**. New York: McGraw-Hill, 1953. 452p.
- 34) VAN DEN BROEK, J. A. Euler's Classic Paper "On the Strenght of Columns". **Journal of Physics**. v.15, p.309, 1947.
- 35) YAGUI, T. Critical Loading of Tall Core-Supported Structures. **Computer & Structures**. Oxford, v.26, n.2, p.223-235, 1990.

Abstract

In this work, analyses of steel plane framed structures, consisting of deformable frames by bending, shear and axial load are presented. In these analyses the effect of material nonlinearity in nonconservative systems are considered. According to the theory of small displacements, a computational program was developed to make possible the determination of the global structure behavior. The employed technique was the matrix method, using stiffness functions. This technique makes possible analyses considering the material nonlinearity of frames with little computational effort. For the nonlinear systems resolution the Newton-Raphson incremental-iterative method was adopted. The incremental load process was adopted to make possible the accompaniment of the deformations in the frames of the structure in the loading, unloading, and reverse loading, in accordance with the requested analysis. In the structures submitted to reverse loading, the acting of Bauschinger effect in the system was considered. In the incremental loading of the structure the frames follow the elastic or elastic-plastic behavior depending on the stress state. During the unloading of the structure the frames only follow the elastic behavior. Thus, the system can be considered nonconservative coming close to the real behavior. The elastic-plastic behavior was considered mainly for frames under axial loading using the column curve of CRC¹⁴ (Column Research Council) and the column curve of AISC-LRFD¹ (Load and Resistance Factor Design). Numerical examples are presented comparing the types of analyses, in elastic and elastic-plastic behavior of the frames.

Keywords: Nonlinearity, Plasticity, Stiffness Functions, Steel Structures.

Apêndice

Processo Incremental-iterativo de Newton-Raphson

Neste Apêndice é apresentado, na forma de fluxograma, o processo incremental-iterativo de Newton-Raphson utilizado para a resolução de sistemas não-lineares. Serão descritos os procedimentos principais, onde:

- $\{A\}$ - vetor ação global da estrutura
- $\{D\}$ - vetor deslocamento global para um único incremento de carga
- $\{D\}_{\text{atual}}$ - vetor deslocamento global atualizado para um único incremento de carga
- $\{d\}$ - vetor deslocamento local para um único incremento de carga
- $\{F\}$ - vetor ação global para um único incremento de carga
- $\{F\}_{\text{atual}}$ - vetor ação global atualizado para um único incremento de carga
- INC - incremento de carga
- $[K]$ - matriz de rigidez global
- $[K]_{\text{atual}}$ - matriz de rigidez global atualizada
- P - carga axial da barra
- $\{R\}$ - vetor dos resíduos de cargas
- TOL - tolerância adotada
- $\{\Delta D\}$ - vetor dos acréscimos dos deslocamentos devido aos resíduos de cargas

