

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

**Estudo de formulações de placas laminadas apoiadas sobre base
elástica**

Eng.º Rodrigo Ribeiro Paccola
Orientador: Prof. Dr. Francisco Antonio Menezes

Campinas, Agosto de 2001.



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

**Estudo de formulações de placas laminadas apoiadas sobre base
elástica**

Eng.º Rodrigo Ribeiro Paccola

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, na área de Engenharia de Estruturas.

Campinas, Agosto de 2001.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

P114e Paccola, Rodrigo Ribeiro
Estudo de formulações de placas laminadas apoiadas
sobre base elástica / Rodrigo Ribeiro Paccola. --
Campinas, SP: [s.n.], 2001.

Orientador: Francisco Antonio Menezes.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Civil.

1. Placas (Engenharia). 2. Placas e cascas elásticas. 3.
Método dos elementos finitos. I. Menezes, Francisco
Antonio. II. Universidade Estadual de Campinas.
Faculdade de Engenharia Civil. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

**Estudo de formulações de placas laminadas apoiadas sobre base
elástica**

Eng.º Rodrigo Ribeiro Paccola

Dissertação de Mestrado apresentada à banca examinadora constituída por:

Prof. Dr. Francisco Antonio Menezes
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP – Campinas

Prof. Dr. Philippe Remy Bernard Devloo
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP – Campinas

Prof. Dr. João Batista de Paiva
Universidade de São Paulo – USP – São Carlos

Campinas, Agosto de 2001.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a DEUS pela minha vida.

Aos meus Pais e Familiares pelo apoio incondicional.

À minha Namorada pela paciência e incentivo nos momentos de trabalho.

Ao meu Orientador Prof. Dr. Francisco Antonio Menezes por todo o tempo e atenção dedicados e pela confiança em mim depositada.

Aos Amigos de Turma pela amizade e incentivo e aos Professores do departamento pelo apoio acadêmico.

À Capes – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pelo auxílio oferecido.

“O homem que venceu na vida é aquele que viveu bem, riu muitas vezes e amou muito; que conquistou o respeito dos homens inteligentes e o amor das crianças; que preencheu um lugar e cumpriu uma missão; que deixou o mundo melhor do que encontrou, seja com uma flor, um poema perfeito ou o salvamento de uma alma; que procurou o melhor nos outros e deu o melhor de si.”

Sumário

Lista de Figuras	xv
Lista de Tabelas	xvii
Lista de Símbolos, Siglas e Abreviaturas	xix
Resumo	xxi
Objetivo	xxiii
1 – INTRODUÇÃO	1
2 – UMA BREVE REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	3
2.1 O Estudo das Placas	3
2.2 O Estudo da Fundação Elástica	6
2.3 O Método dos Elementos Finitos	7
3 – FORMULAÇÃO DO ELEMENTO DE PLACA	9
3.1 Introdução	9
3.2 Hipóteses	10
3.3 Formulação para uma Camada Paralela ao Plano Horizontal e Fibras na Direção de “X”	11
3.3.1 Hipóteses Cinemáticas do Elemento de Placa	12
3.3.2 Deformações e Tensões num Ponto P da Camada “a”	13
3.3.3 Esforços Solicitantes nos Elementos da Camada “a”	14
3.3.4 Aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais – (PTV)	16
3.4 Formulação para uma Camada numa Posição qualquer e Fibras na Direção de um Eixo “e1”	18
3.4.1 Matriz de Rotação	19
3.4.2 Hipóteses Cinemáticas do Elemento de Placa	20
3.4.3 Deformações e Tensões num Ponto P da Camada “a”	22

3.4.4 Esforços Solicitantes nos Elementos da Camada “a”	23
3.4.5 Aplicação do Princípio dos trabalhos Virtuais – (PTV)	25
4 – IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	29
4.1 Introdução	29
4.2 Pré-Processamento	29
4.2.1 Geração dos Nós	30
4.2.2 Propriedades dos Materiais das Camadas	30
4.2.3 Geração dos Elementos	30
4.2.4 Base Elástica	31
4.2.5 Carregamento Distribuído na Superfície dos Elementos	31
4.2.6 Carregamento Nodal	32
4.2.7 Carregamento Distribuído nos Lados dos Elementos	32
4.2.8 Condições de Contorno	32
4.3 Processamento	33
4.3.1 Matriz dos Coeficientes de Contribuição	33
4.3.2 Funções de Forma	33
4.3.3 Jacobiano	34
4.3.4 Matriz de Rigidez e Vetor de Cargas dos Elementos	35
4.3.5 Integração Reduzida nas Parcelas de Cisalhamento	37
4.3.6 Contribuição na Matriz de Rigidez e Vetor de Cargas da Estrutura	37
4.3.7 Aplicação dos Carregamentos	38
4.3.8 Aplicação das Condições de Contorno	39
4.3.9 Resolução do Sistema Linear	39
4.3.10 Rotação da solução do Problema	39
4.4 Pós-Processamento	40
4.4.1 Impressão dos Dados de Entrada	40
4.4.2 Impressão dos Resultados	40
4.4.3 Impressão de Arquivo para o Programa “Mathematica”	41
4.5 Exemplo de Arquivo de Entrada de Dados	41
4.6 Visão Geral do Programa	45

5 – EXEMPLOS	47
5.1 Introdução	47
5.2 Apresentação dos Exemplos e Comparações	47
5.2.1 Exemplo 1	48
5.2.2 Exemplo 2	50
5.2.3 Exemplo 3	52
5.2.4 Exemplo 4	54
5.2.5 Exemplo 5	56
5.2.6 Exemplo 6	58
5.2.7 Exemplo 7	61
5.2.8 Exemplo 8	65
5.2.9 Exemplo 9	68
5.2.10 Exemplo 10	70
5.2.11 Exemplo 11	72
5.2.12 Exemplo 12	74
5.2.13 Exemplo 13	76
5.2.14 Exemplo 14	79
5.2.15 Exemplo 15	81
5.2.16 Exemplo 16	84
5.2.17 Exemplo 17	91
5.2.18 Exemplo 18	93
5.2.19 Exemplo 19	96
6 – CONCLUSÕES	101
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	105
Abstract	109
APÊNDICE	111

Lista de Figuras

FIGURA 3.1	- Deslocamento do ponto <i>P</i> da camada “a” no plano <i>xz</i>	12
FIGURA 3.2	- Esforços solicitantes positivos por unidade de comprimento na camada “a” de excentricidade <i>f</i>	15
FIGURA 3.3	- Eixos de referência de um ponto <i>P</i> da camada “a” de excentricidade “ <i>f</i> ”	19
FIGURA 4.1	- Elemento Mestre de 9 nós e Função de Forma do nó 1	34
FIGURA 4.2	- Fluxograma do Programa	45
FIGURA 5.1	- Vinculação da Placa	48
FIGURA 5.2	- Deslocamento Vertical em metros nos nós para Malha 10x10	49
FIGURA 5.3	- Vinculação da Placa	50
FIGURA 5.4	- Deslocamento Vertical em metros nos nós para Malha 10x10	51
FIGURA 5.5	- Vinculação da Placa	52
FIGURA 5.6	- Deslocamento Vertical em metros nos nós para Malha 10x10	53
FIGURA 5.7	- Vinculação da Placa	54
FIGURA 5.8	- Deslocamento Vertical em metros nos nós para Malha 10x10	55
FIGURA 5.9	- Vinculação da Placa	56
FIGURA 5.10	- Deslocamento Vertical em metros nos nós para Malha 10x10	57
FIGURA 5.11	- Vinculação da Placa	58
FIGURA 5.12	- Deslocamento Vertical nos nós para Malha 10x10	60
FIGURA 5.13	- Vinculação da Placa	61
FIGURA 5.14	- Elemento “Shell 63” – Manual do Usuário do programa ANSYS	63
FIGURA 5.15	- Esforços e Tensões no elemento “Shell 63”	64
FIGURA 5.16	- Deslocamento Vertical em metros nos nós para Malha 8x8	64
FIGURA 5.17	- Vinculação da Placa	65
FIGURA 5.18	- Deslocamento Vertical em metros nos nós para Malha 8x8.	67
FIGURA 5.19	- Vinculação da Placa	68
FIGURA 5.20	- Deslocamento Vertical nos nós para Malha 10x10.	69
FIGURA 5.21	- Vinculação da Placa	70

FIGURA 5.22	- <i>Deslocamento Vertical em metros nos nós para Malha 10x10.</i>	71
FIGURA 5.23	- <i>Vinculação da Placa</i>	72
FIGURA 5.24	- <i>Deslocamento Vertical em metros nos nós para Malha 10x10</i>	73
FIGURA 5.25	- <i>Vinculação da Placa</i>	74
FIGURA 5.26	- <i>Vinculação da Placa</i>	76
FIGURA 5.27	- <i>Vinculação da Placa</i>	79
FIGURA 5.28	- <i>Deslocamento Vertical em metros nos nós para Malha 10x10 para carga concentrada e placa com 4 bordas engastadas</i>	80
FIGURA 5.29	- <i>Vinculação e Seção Transversal da Placa</i>	81
FIGURA 5.30	- <i>Deslocamento Vertical nos nós para Malha 10x10</i>	83
FIGURA 5.31	- <i>Vinculação da Placa e casos de carregamento</i>	84
FIGURA 5.32	- <i>Modelo 1º Caso de Carregamento – Sússekind^[31]</i>	85
FIGURA 5.33	- <i>Deslocamento Vertical segundo a equação 5.2.16.1</i>	86
FIGURA 5.34	- <i>Deslocamento Vertical em metros nos nós da placa</i>	87
FIGURA 5.35	- <i>Modelo 2º Caso de Carregamento - Sússekind^[31]</i>	87
FIGURA 5.36	- <i>Deslocamento Vertical segundo a equação 5.2.16.3</i>	88
FIGURA 5.37	- <i>Deslocamento Vertical em metros nos nós da placa</i>	89
FIGURA 5.38	- <i>Vinculação e Direções de Ortotropia</i>	91
FIGURA 5.39	- <i>Deslocamento Vertical em metros nos nós para Malha 10x10</i>	92
FIGURA 5.40	- <i>Vinculação e Direções de Ortotropia</i>	94
FIGURA 5.41	- <i>Seção Transversal da Placa Multi-Camada</i>	94
FIGURA 5.42	- <i>Vinculação e Direções de Ortotropia</i>	97
FIGURA 5.43	- <i>Seção Transversal da Placa Multi-Camada</i>	97
FIGURA 5.44	- <i>Diagrama do momento fletor M_x para simulação da placa com elemento de 9 nós</i>	98
FIGURA 5.45	- <i>Diagrama do momento fletor M_y para simulação da placa com elemento de 9 nós</i>	99
FIGURA 5.46	- <i>Diagrama do momento volvente M_{xy} para simulação da placa com elemento de 9 nós</i>	99

Lista de Tabelas

TABELA 5.1	- Deslocamento vertical no centro da placa	48
TABELA 5.2	- Deslocamento vertical no centro da placa	50
TABELA 5.3	- Deslocamento vertical no centro da placa	52
TABELA 5.4	- Deslocamento vertical no centro da placa	54
TABELA 5.5	- Deslocamento vertical no centro da placa	56
TABELA 5.6	- Deslocamento vertical no centro da placa	59
TABELA 5.7	- Momento Fletor no centro da placa	59
TABELA 5.8	- Deslocamento vertical no centro da placa	62
TABELA 5.9	- Tensão no topo da placa	62
TABELA 5.10	- Deslocamento vertical nos pontos P_1 e P_2	65
TABELA 5.11	- Momento Fletor nos pontos P_1 e P_2	66
TABELA 5.12	- Deslocamento vertical no centro da placa	69
TABELA 5.13	- Deslocamento vertical no centro da placa	70
TABELA 5.14	- Deslocamento vertical no centro da placa	72
TABELA 5.15	- Deslocamento vertical no centro da placa	75
TABELA 5.16	- Deslocamento vertical no centro da placa	77
TABELA 5.17	- Deslocamento vertical no centro da placa	77
TABELA 5.18	- Deslocamento vertical no centro da placa	78
TABELA 5.19	- Deslocamento vertical no centro da placa	80
TABELA 5.20	- Deslocamento vertical no centro da placa	82
TABELA 5.21	- Tensão no centro da placa na direção de X na interface das camadas 1 e 2	82
TABELA 5.22	- Deslocamento vertical no centro da placa	85
TABELA 5.23	- Deslocamento vertical no centro da placa	88
TABELA 5.24	- Coeficiente de Recalque do Solo – Sússekind ^[31]	90
TABELA 5.25	- Deslocamento vertical no ponto P_1	92
TABELA 5.26	- Deslocamento vertical no centro da placa	95
TABELA 5.27	- Dados elásticos das 3 camadas da placa	96
TABELA 5.28	- Deslocamento vertical para os pontos da placa simulada com elementos de 4, 8 ou 9 nós	98
TABELA 5.29	- Momentos e direções principais nos pontos de Gauss próximos de P_5 para simulação da placa com elementos de 9 nós	100

Lista de Símbolos, Siglas e Abreviaturas

a	- Camada de placa
h_i	- Espessura da camada i
f_i	- Excentricidade da camada i
E_i	- Módulo de Elasticidade Longitudinal
G_{ij}	- Módulo de Elasticidade Transversal
ν_i	- Coeficiente de Poisson
$\{\sigma\}$	- Tensões
$\{\varepsilon\}$	- Deformações
N	- Forças Normais
V	- Forças Cortantes
M	- Momentos
k	- Coeficiente de correção da Tensão de Cisalhamento
$\hat{\phi}_i$	- Função de Forma do nó i do Elemento Mestre
J	- Jacobiano
K_{ij}^b, B_{ij}^b	- Matrizes de Contribuição – Parcela de Flexão
K_{ij}^s, B_{ij}^s	- Matrizes de Contribuição – Parcela de Cisalhamento
X, Y, Z	- Coordenadas Cartesianas
u, v, w	- Deslocamentos na direção X, Y e Z respectivamente
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	- Rotação em torno de X, Y e Z respectivamente
e_1, e_2, e_3	- Direção das fibras do elemento
n_1, n_2, n_3	- Projeção da direção das fibras no plano de referência
f_x, f_y, f_z	- Carregamento distribuído nas direções x, y e z respectivamente
W_{int}	- Trabalho Virtual Interno
W_{ext}	- Trabalho Virtual Externo
PTV	- Princípio dos Trabalhos Virtuais
K_{mola}	- Coeficiente de Rigidez da Base Elástica

RESUMO

Paccola, R. R., **Estudo de formulações de placas laminadas apoiadas sobre base elástica**. Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, 2001. 115 páginas. Dissertação.

Este trabalho trata da formulação teórica de placas laminadas apoiadas sobre base elástica. São adotadas Hipóteses de Reissner-Mindlin de placas espessas com cinemática de pequenos deslocamentos. Utiliza-se de técnicas de integração reduzida para o cálculo das contribuições dos esforços de cisalhamento, sendo assim melhor tratado o problema de enrijecimento conhecido na literatura com o nome de efeito de travamento. A formulação foi implementada num programa de Elementos Finitos utilizando-se elementos quadrilaterais de 4, 8 ou 9 nó e funções de forma lineares e quadráticas. No programa é possível obter como resultados os deslocamentos nodais, tensões e esforços solicitantes nos pontos de Gauss. A base elástica é considerada segundo as Hipóteses de Winkler e sua contribuição na formulação foi levada em conta no cálculo do Princípio dos Trabalhos Virtuais. São apresentados alguns exemplos para validação da formulação, cujos resultados foram comparados com a literatura.

Palavras-chave: Placas Laminadas, Elementos Finitos, Fundação Elástica, Integração Reduzida.

OBJETIVO

Este trabalho tem como objetivo o estudo de placas laminadas apoiadas sobre base elástica por ser este um problema de engenharia de interesse prático. Além de se apresentar um estudo teórico acompanhado de uma formulação matemática do problema, implementa-se um programa computacional para a determinação de esforços e deslocamentos em placas de qualquer dimensão e com um certo número de camadas, com possibilidade de vinculação elástica e submetidas a carregamentos variados. As camadas são superpostas compatibilizando-se os deslocamentos na região de interface das mesmas. As hipóteses adotadas, bem como as técnicas numéricas utilizadas são apresentadas no decorrer do trabalho.

CAPÍTULO 1

Introdução

O estudo do comportamento de placas laminadas compostas por várias camadas tem se desenvolvido muito ultimamente por ser de grande interesse em várias áreas da engenharia.

Cada camada da placa pode ser constituída por materiais com características elásticas diferentes das demais e até mesmo com disposição das fibras em diferentes direções entre as camadas, simulando um comportamento anisotrópico do conjunto.

Para a obtenção das equações da cinemática e de equilíbrio de um elemento de placa isolado, foi adotada uma superfície de referência distante de “ f ” da superfície média do elemento. A formulação foi desenvolvida para um elemento isolado em qualquer posição no espaço, permitindo com isso que se possa lançar mão desta formulação para representação tanto de placas como também de cascas laminadas, buscando obter-se boa aproximação para ambas.

Os coeficientes de rigidez de cada camada são calculados em relação à superfície de referência e superpostos para obtenção dos coeficientes de rigidez da placa laminada. Esses coeficientes estão dispostos em 9 matrizes de contribuição que foram obtidas da equação do PTV que permitem encontrar os coeficientes de rigidez de forma sistemática e consistente.

Devido à complexidade de solução das equações diferenciais que regem a análise das placas, atualmente tem-se utilizado métodos numéricos na modelagem

destes sistemas estruturais, podendo-se destacar o Método dos Elementos Finitos e o Método dos Elementos de Contorno.

Neste trabalho desenvolve-se um programa baseado no Método dos Elementos Finitos para cálculo de tensões, esforços, deslocamentos e deformações em placas laminadas dispostas em qualquer posição no espaço. São utilizadas hipóteses de regime elástico linear, pequenos deslocamentos e pequenas deformações.

A questão da base elástica é incluída na formulação como um acréscimo da rigidez nos elementos através da integração da rigidez da base elástica em toda a superfície dos elementos. Essa rigidez é acrescida com relação ao deslocamento na direção perpendicular ao plano da placa. Feita a integração, a rigidez é distribuída proporcionalmente para todos os nós que compõem cada elemento da placa para fins de contribuição na matriz de rigidez global da estrutura. A consideração e inclusão da parcela correspondente a base elástica na formulação poderá ser visualizada quando da aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais apresentada no Capítulo 3.

Com o programa elaborado pretende-se fazer-se a análise de esforços e tensões em placas laminadas. Para validar a formulação e a implementação computacional uma série de exemplos para os quais se tem resultados obtidos por outros autores foram analisados e seus resultados comparados.

CAPÍTULO 2

Uma Breve Revisão Bibliográfica

2.1 O ESTUDO DAS PLACAS

A tentativa de se desenvolver modelos analíticos para a representação do comportamento das placas vem desde meados de 1800 com trabalhos desenvolvidos por *Sophie Germain*, *Lagrange* e *Poisson*. (Pilkey & Wunderlich^[24])

Em 1828, *Poisson* prescreveu 3 condições de contorno como necessárias para o problema de placas. Em 1850, *Kirchhoff* reduziu de 3 para 2 as condições de contorno apresentadas por *Poisson*, desprezando o efeito de cisalhamento na deformação e tornando compatíveis a equação diferencial de quarta ordem por ele encontrada e as 2 condições de contorno propostas. Com isso assumiu-se que linhas retas normais à superfície média da placa permanecem retas e normais enquanto a placa se deforma. Assumiu-se ainda que as deformações e tensões normais ao plano médio da placa são suficientemente pequenas podendo-se despreza-las.

O fato de se desprezar o efeito de cisalhamento na deformação significa assumir que as rotações que fazem parte dos deslocamentos de um ponto qualquer da placa são assumidas como sendo as derivadas do deslocamento vertical do ponto em relação aos eixos nos quais as rotações estão sendo tomadas.

Esta Teoria apresentada por *Kirchhoff* é o que hoje conhecemos como *Teoria Clássica de Placas de Kirchhoff*, aplicada às placas consideradas “finas”.

A classificação das placas segundo a espessura pode variar de acordo com cada autor. Em geral, uma placa é classificada como fina quando a relação entre sua espessura e a menor dimensão no plano não ultrapassa 1/10.

Com o passar do tempo, o estudo do comportamento estrutural das placas foi se desenvolvendo com o propósito de cada vez mais se aproximar a representação matemática ao comportamento real da estrutura.

Partindo-se da *Teoria de Kirchhoff*, podemos verificar inúmeras evoluções na formulação do problema com o intuito de se incluir os efeitos de deformação por força cortante e também considerar a influência da relação entre a espessura e as dimensões da placa no plano.

Foi em 1945 que *Reissner*, introduzindo o efeito de deformação por cortante e assumindo uma distribuição de tensões internas na formulação do problema de placas, obteve, baseado na teoria da elasticidade tridimensional, um sistema de equações diferenciais de sexta ordem que atende às 3 condições de contorno apresentadas por Poisson.

Segundo **Andrade**^[1], *Mindlin* em 1951, apresentou uma formulação próxima à de *Reissner*, também baseada na teoria da elasticidade tridimensional mas com imposição de deformações ao invés de imposição de tensões. *Mindlin* obteve com isso, uma equação diferencial de sexta ordem análoga a equação obtida por *Reissner*, que satisfaz as 3 condições de contorno necessárias para o problema de placas.

Tanto para *Reissner* quanto para *Mindlin*, o fato de considerar o efeito de deformação por cortante significa assumir que as rotações apresentadas por *Kirchhoff* como dependentes do deslocamento vertical, agora são variáveis independentes do problema.

Pode-se dizer, baseando-se nas partes comuns das teorias apresentadas, que tem-se com isso a *Teoria de Placas de Reissner-Mindlin*, aplicada às placas consideradas “espessas” ou “moderadamente espessas” de acordo com cada autor.

O trabalho é baseado numa formulação de placas laminadas espessas em desenvolvimento por **Menezes e Devloo**^[19]. Parte das Hipóteses de *Reissner* e *Mindlin*

e busca representar o comportamento de placas com características de anisotropia, ou seja, considerando que cada camada possa ter características elásticas diferentes e também fibras em diferentes direções entre as camadas. Considera-se a superposição de efeitos de cada camada para se obter a formulação do conjunto.

O inconveniente da formulação do elemento de placa pela *Teoria de Reissner e Mindlin* quando da utilização de um modelo tradicional de elementos finitos é o surgimento de problemas numéricos indesejáveis. Esses inconvenientes surgem devido à consideração do efeito de cisalhamento na deformação. A formulação torna-se sensível à relação da espessura da placa com as demais dimensões, podendo levar a resultados distantes da realidade quando aplicada às placas consideradas “finas”.

O que ocorre é que quando a espessura da placa torna-se muito pequena, ou seja, tendendo a “zero”, a deformação transversal devida ao cisalhamento torna-se desprezível, causando um enrijecimento na matriz de rigidez dos elementos. Com isso, os resultados obtidos são distantes da solução real para o problema.

Este fenômeno é conhecido como efeito de travamento por força cortante ou “shear locking” e pode ser contornado de algumas maneiras como, por exemplo, com a utilização de integração reduzida nos termos que envolvam o efeito de cisalhamento, tal como apresentado por **Reddy**^[27]. Uma outra maneira seria aumentar o grau dos polinômios de aproximação das funções de forma.

Menezes e Devloo^[19] esquematizaram a obtenção dos coeficientes de rigidez de um elemento de placa partindo-se de um estudo cinemático de uma camada de placa paralela ao plano horizontal e fibras na direção do eixo “x”. Esta camada dista de uma dada excentricidade “f” do plano horizontal.

Com os coeficientes encontrados, permitiu-se montar as matrizes de rigidez de uma camada disposta em uma posição qualquer no espaço de forma sistemática e consistente. Com isso, foram alcançados bons resultados tanto na análise de placas quanto na análise de cascas laminadas.

A formulação apresentada por **Menezes e Devloo**^[19], no que diz respeito a análise de cascas, se difere das demais no fato de que o sistema de referência adotado para os nós da casca mantém-se fixo, enquanto que tradicionalmente, como pode ser

encontrado na literatura, esse sistema de referência é tomado com relação a cada ponto que está sendo analisado acompanhando a curvatura da casca.

O presente trabalho não entra no âmbito do estudo das cascas mas se prende única e exclusivamente na formulação e análise das placas propostas pelos autores acima citados.

2.2 O ESTUDO DA FUNDAÇÃO ELÁSTICA

A análise de placas apoiadas sobre fundação elástica tem alcançado larga aplicação no campo da engenharia estrutural. Devido a complexidade do comportamento da fundação, vários modelos simplificados foram idealizados e podem ser encontrados na literatura.

O mais simples destes modelos foi proposto em 1867 por *Winkler* e considera que a fundação funciona como um sistema de elementos de mola independentes e que a reação da fundação é assumida como sendo uma função linear do deslocamento da estrutura em cada ponto.

Portanto, a base elástica pode ser considerada diretamente na aplicação do Princípio dos trabalhos Virtuais funcionando como um acréscimo de rigidez no elemento. Essa rigidez é posteriormente distribuída para cada um dos nós pertencentes ao elemento, isto é, dá-se um acréscimo da rigidez nodal na direção perpendicular à superfície média da placa, pois a rigidez da base elástica é tomada segundo esta direção.

Os inconvenientes da *Hipótese de Winkler* que podem ser citados são a descontinuidade entre os deslocamentos por serem independentes entre si e também a consideração de que a base elástica funciona da mesma forma na compressão e na tração, o que geralmente não ocorre nos casos reais.

O atrativo para a utilização da *Hipótese de Winkler* é a facilidade e simplicidade matemática e conseqüentemente de implementação computacional apresentadas.

2.3 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Os primeiros passos em direção ao hoje conhecido Método dos Elementos Finitos foram dados por volta de 1906. Em 1941 Hrenikoff introduziu o chamado método das estruturas, no qual um meio elástico plano era apresentado como um conjunto de barras e vigas.

Em seguida, em 1943, Courant aparece como sendo o primeiro a propor o Método dos Elementos Finitos como é apresentado atualmente. Ele utilizou o Princípio da Minimização da Energia Potencial e interpolação polinomial por elementos, aplicados sobre sub-regiões triangulares para estudar o problema de torção de Saint-Venant.

Segundo **Reddy**^[27], embora algumas características do Método dos Elementos Finitos possam ser encontradas nos trabalhos de Hrenikoff e Courant, a apresentação formal do Método é atribuída para Turner, Clough, Martin e Topp (1956) e também à Argyris e Kelsey (1960).

Turner em 1953 sugeriu a utilização de elementos triangulares para modelar o revestimento de uma asa delta. Neste período, como pode ser visto em **Cook et al**^[6], grande número dos trabalhos utilizando-se elementos finitos eram aplicados na indústria aeroespacial. O nome “Métodos dos Elementos Finitos” foi utilizado pela primeira vez em 1960 por Clough.

O surgimento de avanços no desenvolvimento de computadores digitais e nas linguagens de programação proporcionou uma melhor utilização do método, possibilitando a resolução de um grande número de equações algébricas simultaneamente.

Em 1963 o método foi reconhecido pela sua fundamentação matemática podendo ser considerado como uma solução de problemas variacionais através da minimização de um funcional. Com isso o método passou a ser aplicado em qualquer tipo de problema que possa ser representado na forma variacional.

A partir disso começaram a surgir inúmeros trabalhos e aplicabilidades para o método. A representação matricial das equações de rigidez proporcionou o surgimento de programas computacionais para solução dessas equações algébricas. Programas

como ANSYS, ASKA e NASTRAN surgiram nas décadas de 60 e 70. Hoje existem inúmeros outros programas bem como a atualização dos acima citados. Podemos citar como exemplo o SAP2000 e também o PZ (**Devloo**^[7]), o qual será utilizado para efeito de comparação e validação do programa desenvolvido.

Em **Cook et al**^[6] podemos encontrar alguns passos que são tipicamente envolvidos numa análise de elementos finitos e que podem ser úteis na concepção de um programa computacional.

Na seqüência do trabalho alguns artigos técnicos, encontrados na literatura, foram utilizados para efeito de comparação.

CAPÍTULO 3

Formulação do Elemento de Placa

3.1 INTRODUÇÃO

As placas são elementos estruturais planos com espessura muito menor que as demais dimensões.

As placas podem ser classificadas em “finas” ou “espessas” de acordo com a relação entre a espessura e a menor dimensão da placa no plano. Essa classificação pode variar de autor para autor mas, de maneira geral não existe muita discrepância.

Placas cuja relação entre a espessura e a menor dimensão no plano não ultrapasse $1/10$ são classificadas pela maioria dos autores como “finas” e são englobadas no que é conhecido na literatura com o nome de Teoria de Placas de Kirchhoff.

Nos casos em que a relação acima citada ultrapasse $1/10$, as placas são consideradas em geral como espessas, embora alguns autores ainda façam outras divisões na classificação de acordo com o valor desta relação, tratando de placas espessas ou medianamente espessas. Essas placas são representadas utilizando-se o que é conhecido como Teoria de Placas de Reissner e Mindlin.

O presente trabalho apresenta a formulação baseando-se nas Hipóteses de Placas “espessas” de Reissner e Mindlin e na análise de placas apresentada em **Menezes e Devloo**^[19], permitindo que se utilizem materiais ortotrópicos na composição

das camadas da placa, podendo-se assim chegar a uma configuração de anisotropia quando se aplica a formulação para placas laminadas.

3.2 HIPÓTESES

As principais hipóteses admitidas em relação às placas e aos materiais considerados na formulação estão apresentadas a seguir:

1. A placa foi considerada espessa, obedecendo assim as Hipóteses de Reissner-Mindlin, ou seja, admitindo-se que uma linha reta, perpendicular ao plano da placa, é inextensível e permanece reta enquanto a placa se deforma, sofrendo uma rotação tal que não fica obrigatoriamente perpendicular à tangente da superfície deformada.
2. A lei constitutiva admitida foi a de regime elástico linear e também admitiu-se cinemática de pequenos deslocamentos e pequenas deformações.
3. Foram admitidas propriedades ortotrópicas em relação a duas direções para os materiais de cada camada.
4. O estudo do elemento finito de placa foi tratado como sendo um problema de elasticidade plana, sendo aplicadas simplificações do estado plano de tensões, ou seja, a tensão normal ao plano da placa foi adotada nula.
5. Os parâmetros elásticos para cada camada são: módulos de elasticidade longitudinal E_1 e E_2 , coeficientes de Poisson ν_1 e ν_2 e módulos de elasticidade transversal G_{12} , G_{13} e G_{23} , todos em relação aos eixos e_1 , e_2 e e_3 . Devido às condições de ortotropia deve ser imposta a seguinte condição:

$$E_1\nu_2 = E_2\nu_1 \quad (3.1)$$

3.3 FORMULAÇÃO PARA UMA CAMADA PARALELA AO PLANO HORIZONTAL E FIBRAS NA DIREÇÃO DE “X”

Uma camada a tem espessura h_a e seu plano médio dista de f_a de um plano de referência adotado paralelo e comum para todas as camadas. Essa excentricidade f_a é provida de sinal, sendo positiva se a superfície média da camada estiver “acima” do plano de referência. Admite-se inicialmente que a camada “ a ” é paralela ao plano horizontal.

Admitem-se propriedades ortotrópicas em relação a duas direções para as camadas. Para tanto, define-se no plano médio de cada camada um par de eixos cartesianos e_1 e e_2 , nas direções de ortotropia do material da camada, sendo que a direção e_1 é designada neste trabalho como “*direção das fibras*”. Seguiu-se no trabalho a formulação e a nomenclatura utilizadas em **Menezes e Devloo**^[19]. Na superfície de referência define-se outro par de eixos cartesianos paralelo ao da direção das fibras sendo representado por n_1 e n_2 , formando através do produto vetorial $n_1 \times n_2$ um terceiro eixo n_3 perpendicular ao plano de referência. Define-se um sistema de eixos cartesianos xyz no plano médio da camada (figura 3.1). O material da camada tem fibras na direção do eixo x , portanto as direções e_1 , e_2 e e_3 coincidem com os eixos x , y e z respectivamente.

Para cada ponto de integração define-se um sistema de referência auxiliar $\hat{O}a_1a_2a_3$ sendo que a_1 e a_2 estão contidos no plano médio da camada em questão e a_3 dá a direção do eixo ξ . (ver figura 4.1 do capítulo 4).

Apresentam-se as hipóteses cinemáticas para o problema e a partir disso montam-se as equações de deformações bem como de tensões e esforços solicitantes para um ponto P genérico. Tendo-se os valores de deformações e esforços solicitantes apresenta-se a equação do Princípio dos Trabalhos Virtuais que rege o problema do equilíbrio. Partindo-se dessas equações, a exemplo do que pode ser visto em **Menezes e Devloo**^[19], obtém-se as matrizes de contribuição associadas à camada em questão para serem usadas nos cálculos dos coeficientes de rigidez para os pontos de integração dos elementos da malha de elementos finitos.

3.3.1 HIPÓTESES CINEMÁTICAS DO ELEMENTO DE PLACA

No estudo das hipóteses cinemáticas de um ponto P localizado em uma camada “a”, a exemplo do que é apresentado em **Menezes e Devloo**^[19], adota-se um sistema cartesiano local $\hat{O}xyz$ no plano médio da camada com eixo z vertical e apontado para cima. Esse sistema será designado SRL . Adota-se um plano de referência paralelo à camada da placa. O plano médio da camada dista de uma excentricidade f do plano de referência adotado. Adota-se ainda um sistema cartesiano $\hat{O}_r x_r z_r$ designado SRG com x_r e y_r no plano de referência adotado. Os eixos z e z_r por sua vez são alinhados e possuem mesmo sentido. Ainda deve ser dito que os eixos x e y são respectivamente paralelos a x_r e y_r .

No estudo cinemático o ponto O , origem do sistema SRG translada passando para uma posição O' . As componentes da translação desse ponto em relação a SRG são: $u = u(x_r, y_r)$, $v = v(x_r, y_r)$ e $w = w(x_r, y_r)$.

Um ponto P localizado numa camada “a”, com coordenadas (x, y, z) em relação ao SRL passa para uma posição P' após a deformação e as componentes do seu deslocamento podem ser escritas em função da translação OO' e das rotações da placa expressas no SRG , sendo elas: $\theta_x = \theta_x(x_r, y_r)$, $\theta_y = \theta_y(x_r, y_r)$ e $\theta_z = \theta_z(x_r, y_r)$.

As componentes da translação do ponto P em relação a SRL estão indicadas a seguir e a Figura 3.1 ilustra como se obter a componente \bar{u} na direção do eixo x .

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, y, z) &= u(x_r, y_r) + (f + z)\theta_y & \bar{v}(x, y, z) &= v(x_r, y_r) - (f + z)\theta_x \\ \bar{w}(x, y, z) &= w(x_r, y_r) \end{aligned} \tag{3.2}$$

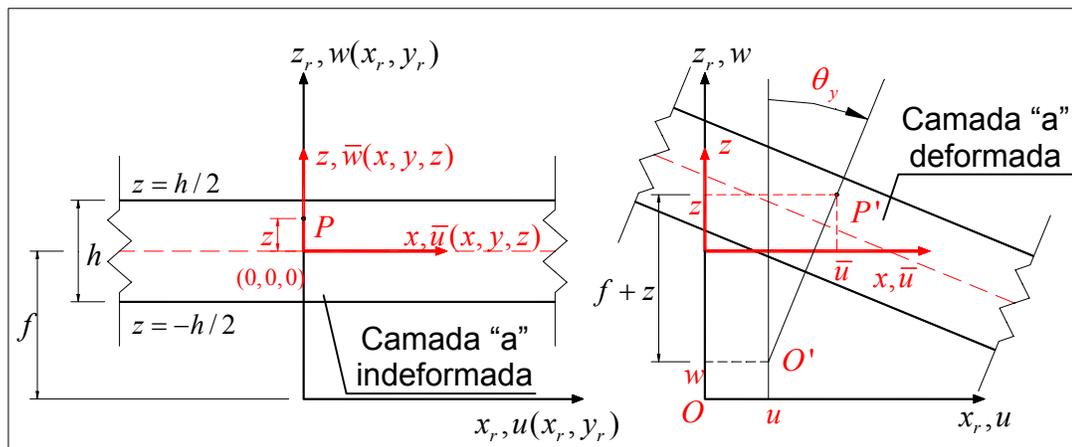


Figura 3.1 – Deslocamento do ponto P da camada “a” no plano xz.

Portanto, são 6 as variáveis deslocamentos fundamentais associadas a um ponto P , sendo 3 componentes de translação de OO' medidas no SRG e 3 componentes de rotação do elemento também medidas no SRG. Esses deslocamentos podem ser armazenados num único vetor da seguinte forma:

$$\{u\}^T = \{u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z\} \quad (3.3)$$

3.3.2 DEFORMAÇÕES E TENSÕES NUM PONTO P DA CAMADA “a”

Admite-se que a direção das fibras seja a direção do eixo x , ou seja, as direções de ortotropia do material são as direções dos eixos x e y . Admite-se ainda estado plano de tensões.

Assumindo-se que a placa poderá estar disposta numa posição qualquer do espaço visando a aproximação de problemas de cascas, incorporou-se na formulação a rotação absoluta θ_z da camada que contém o ponto P em torno do eixo perpendicular ao plano da placa.

A essa rotação, fez-se corresponder uma deformação fictícia ε_{θ_z} calculada no plano de referência (abscissa “ $-f$ ”). Essa deformação fictícia associa uma medida de deformação à diferença entre θ_z e o movimento de corpo rígido correspondente à rotação infinitesimal do plano de referência em torno do eixo z e é dada por:

$$\theta_z(x_r, y_r) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}(x, y, -f)}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}(x, y, -f)}{\partial y} \right) \quad (3.4)$$

As deformações do ponto P são calculadas em função dos seus deslocamentos de translação no SRL e são apresentadas na equação (3.5).

Em (3.6) são apresentadas as tensões num ponto do elemento de placa cujas fibras da camada que contém o ponto estão alinhadas com o eixo local x , ou seja, os eixos e_1 , e_2 e e_3 coincidem com os eixos x , y e z respectivamente.

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{u}(x, y, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{v}(x, y, z)}{\partial y} \\ \theta_z(x_r, y_r) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}(x, y, -f)}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}(x, y, -f)}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial \bar{w}(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}(x, y, z)}{\partial z} \right) \\ \left(\frac{\partial \bar{w}(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}(x, y, z)}{\partial z} \right) \\ \left(\frac{\partial \bar{u}(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}(x, y, z)}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{\theta z} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{E_x (\varepsilon_x + \nu_y \varepsilon_y)}{1 - \nu_x \nu_y} \\ \frac{E_y (\varepsilon_y + \nu_x \varepsilon_x)}{1 - \nu_x \nu_y} \\ 0 \\ G_{xz} \gamma_{xz} \\ G_{yz} \gamma_{yz} \\ G_{xy} \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

$$(3.5)$$

As propriedades elásticas do material são representadas pelas constantes: módulo de elasticidade longitudinal E_x e E_y , coeficientes de Poisson ν_x e ν_y e módulos de elasticidade transversal G_{xy} , G_{xz} e G_{yz} . O material deve respeitar as condições indicadas em (3.1) e estado plano de tensões, garantido pela tensão normal nula na direção do eixo z.

3.3.3 ESFORÇOS SOLICITANTES NOS ELEMENTOS DA CAMADA “a”

Os esforços solicitantes por unidade de comprimento num elemento de placa paralelo ao plano xy são indicados a seguir nas equações de (3.7) à (3.9) e seus sentidos positivos apresentados na figura 3.2. Vale salientar que esses esforços são calculados no *Plano de Referência* – no sistema SRG.

1. Forças normais no elemento paralelo ao plano xy:

$$N_x = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz \quad \text{e} \quad N_{xy} = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz \quad (3.7)$$

2. Forças cortantes no elemento paralelo ao plano xy:

$$V_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} k\tau_{xz} dz \quad \text{e} \quad V_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} k\tau_{yz} dz \quad (3.8)$$

A constante “k” que aparece em (3.8) é um coeficiente de correção entre a distribuição de tensões devido à força cortante adotada constante ao longo da espessura da placa e a real distribuição parabólica dessas tensões de cisalhamento. Para este trabalho, da mesma forma que em Reddy^[27] e Menezes e Devloo^[19], “k” assume o valor de 5/6.

3. Momentos no elemento paralelo ao plano xy:

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (z + f)\sigma_x dz \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (z + f)\sigma_y dz \quad \text{e} \quad M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (z + f)\tau_{xy} dz \quad (3.9)$$

Os momentos M_x e M_y são denominados *Momentos Fletores* e M_{xy} é designado de *Momento Volvente*.

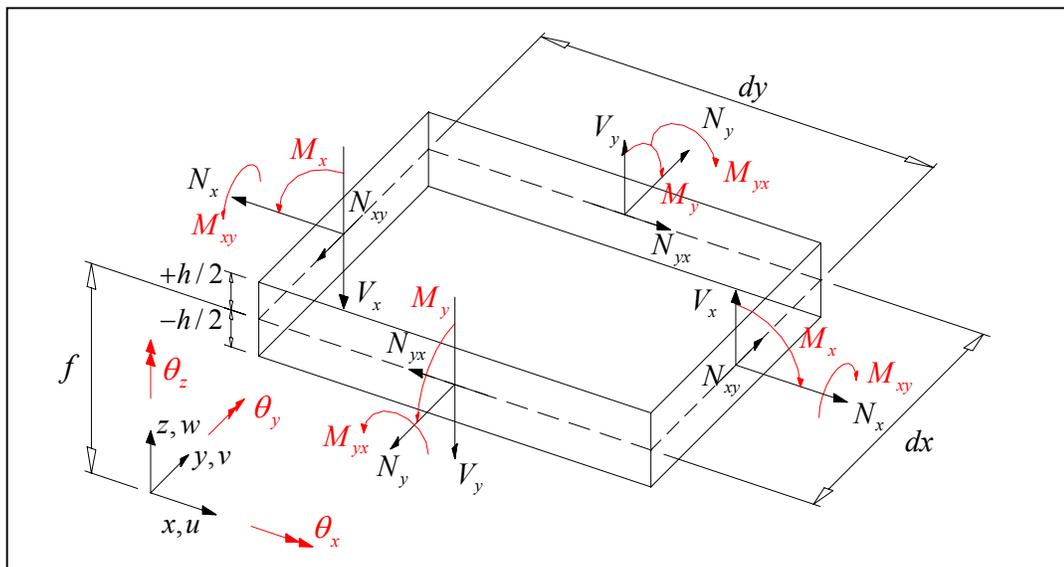


Figura 3.2 – Esforços solicitantes positivos por unidade de comprimento na camada “a” de excentricidade “f”.

Além destes, para tornar possível a representação do problema das cascas, considera-se também um momento fictício $M_{\theta_z} = Sh\varepsilon_{\theta_z}$, associado à deformação fictícia correspondente à θ_z . O valor da constante S utilizado neste trabalho é um valor considerado pequeno e igual a $10^{-6}E_x$.

3.3.4 APLICAÇÃO DO PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS – (PTV)

A aplicação do PTV envolve duas parcelas distintas e geralmente conhecidas como *Trabalho Virtual Interno*, realizado pelos esforços solicitantes internos e *Trabalho Virtual Externo* conseqüentemente realizado pelas forças externas aplicadas sobre o corpo e seu contorno.

$$W_{\text{int}} = W_{\text{ext}} \quad (3.10)$$

A parcela do *Trabalho Virtual Interno* W_{int} da equação acima pode ser calculada através dos esforços solicitantes e das variações dos deslocamentos essenciais em relação ao plano de referência. Inclui-se nesta parcela a influência da base elástica, sendo esta dada pelo produto entre a rigidez do solo (K_{mola}), e o deslocamento vertical \bar{w} na direção z e suas variações. Desta maneira, tem-se a contribuição da base elástica dada de forma direta na rigidez de cada elemento. Portanto tem-se a equação referente à parcela do Trabalho Virtual interno:

$$\begin{aligned} W_{\text{int}} = & \int_A \left[N_x \frac{\partial \delta \bar{u}(x, y, -f)}{\partial x} + N_y \frac{\partial \delta \bar{v}(x, y, -f)}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta \bar{u}(x, y, -f)}{\partial y} + \frac{\partial \delta \bar{v}(x, y, -f)}{\partial x} \right) + \right. \\ & V_x \left(\frac{\partial \delta \bar{u}(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial \delta \bar{w}(x, y, z)}{\partial x} \right) + V_y \left(\frac{\partial \delta \bar{v}(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial \delta \bar{w}(x, y, z)}{\partial y} \right) + \\ & M_x \frac{\partial \delta \theta_y(x_r, y_r)}{\partial x} - M_y \frac{\partial \delta \theta_x(x_r, y_r)}{\partial y} + M_{xy} \left(\frac{\partial \delta \theta_y(x_r, y_r)}{\partial y} - \frac{\partial \delta \theta_x(x_r, y_r)}{\partial x} \right) + \\ & \left. M_{\theta_z} \left(\delta \theta_z(x_r, y_r) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta \bar{v}(x, y, -f)}{\partial x} - \frac{\partial \delta \bar{u}(x, y, -f)}{\partial y} \right) \right) + K_{\text{mola}} \bar{w} \cdot \delta \bar{w} \right] dx dy \end{aligned} \quad (3.11)$$

A exemplo do que foi feito com os deslocamentos na equação (3.3), cria-se um vetor para as variações dos deslocamentos fundamentais:

$$\{\delta u\}^T = \{\delta u, \delta v, \delta w, \delta \theta_x, \delta \theta_y, \delta \theta_z\} \quad (3.12)$$

Quatro novos vetores podem ser criados para armazenar as derivadas parciais envolvidas na equação do PTV com a finalidade de agrupar matricialmente o integrando que dá o trabalho virtual dos esforços internos associados a um ponto.

Assim juntamente com os 2 vetores já criados, tem-se os 6 vetores seguintes:

- Vetor de deslocamentos: $\{u\}$
- Vetor das derivadas parciais dos deslocamentos em relação a x: $\frac{\partial \{u\}}{\partial x}$
- Vetor das derivadas parciais dos deslocamentos em relação a y: $\frac{\partial \{u\}}{\partial y}$
- Vetor das variações dos deslocamentos: $\{\delta u\}$
- Vetor das derivadas parciais das variações dos deslocamentos em relação a x: $\frac{\partial \{\delta u\}}{\partial x}$
- Vetor das derivadas parciais das variações dos deslocamentos em relação a y: $\frac{\partial \{\delta u\}}{\partial y}$

É importante salientar que o *Trabalho Virtual Interno* W_{int} é bilinear em relação a

$$\left(\{u\}, \frac{\partial \{u\}}{\partial x}, \frac{\partial \{u\}}{\partial y} \right) \text{ e } \left(\{\delta u\}, \frac{\partial \{\delta u\}}{\partial x}, \frac{\partial \{\delta u\}}{\partial y} \right).$$

A exemplo do que pode ser visto nos trabalhos realizado por **Menezes e Devloo**^[19], foi possível com a utilização do programa Mathematica simplificar analiticamente o integrando apresentado em (3.11) e agrupar as parcelas em 9 matrizes, conforme indicado a seguir:

$$\begin{aligned}
W_{\text{int}} = \int_A & \left[\left(\frac{\partial \{\delta u\}}{\partial x} \right)^T K_{xx} \frac{\partial \{u\}}{\partial x} + \left(\frac{\partial \{\delta u\}}{\partial y} \right)^T K_{yy} \frac{\partial \{u\}}{\partial y} + \left(\frac{\partial \{\delta u\}}{\partial x} \right)^T K_{xy} \frac{\partial \{u\}}{\partial y} + \right. \\
& \left. \left(\frac{\partial \{\delta u\}}{\partial y} \right)^T K_{yx} \frac{\partial \{u\}}{\partial x} + \{\delta u\}^T B_{0x} \frac{\partial \{u\}}{\partial x} + \{\delta u\}^T B_{0y} \frac{\partial \{u\}}{\partial y} + \right. \\
& \left. \left(\frac{\partial \{\delta u\}}{\partial x} \right)^T B_{x0} \{u\} + \left(\frac{\partial \{\delta u\}}{\partial y} \right)^T K_{y0} \{u\} + \{\delta u\}^T B_{00} \{u\} \right] dx dy
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Os autores anteriormente citados denominaram as matrizes de ordem 6x6 que aparecem no integrando de (3.13) de “matrizes de contribuição”. As expressões analíticas dos coeficientes dessas matrizes estão apresentadas no Apêndice do presente trabalho.

Essas matrizes serão utilizadas em deduções de novas matrizes nos próximos itens deste capítulo.

3.4 FORMULAÇÃO PARA UMA CAMADA NUMA POSIÇÃO QUALQUER E FIBRAS NA DIREÇÃO DE UM EIXO “e1”

Neste item, como apresentado em **Menezes e Devloo**^[19], admite-se que o elemento de placa de uma camada “a” esteja colocado numa posição qualquer do espaço. Adotou-se uma superfície de referência paralela ao plano do elemento. O plano médio da camada tem uma excentricidade “f” em relação ao plano de referência.

No plano médio da camada “a” define-se um par de vetores e_1 e e_2 nas direções de ortotropia do material que compõe a camada. Como já foi dito anteriormente, a direção e_1 é designada neste trabalho como “direção das fibras”. O produto vetorial $e_1 \times e_2$ define um terceiro vetor e_3 normal à superfície da camada “a”. Na superfície de referência define-se os vetores n_1 e n_2 paralelos a e_1 e e_2 respectivamente e cujo produto vetorial define um terceiro vetor n_3 perpendicular ao plano de referência.

Define-se um sistema cartesiano de referência global $\hat{O}x_r y_r z_r$ com o eixo z_r orientado na vertical e para cima denominado por SRG. Na superfície de referência define-se um sistema de coordenadas $\hat{O}n_1 n_2 n_3$ representado pelos vetores n_1 , n_2 e n_3 denominado SRN, de tal forma que o eixo n_3 seja paralelo e de mesmo sentido que o

vetor e_3 . Adota-se também um sistema de coordenadas $\hat{O}e_1e_2e_3$ no plano médio da camada “a”, com eixos representados pelos vetores e_1 , e_2 e e_3 denominado SRE.

Para cada ponto de integração definido no elemento finito de placa é também definido um vetor a_1 , que como já foi visto, dá a direção do eixo ξ que pode ser visto na Figura 4.1 no Capítulo 4. Define-se ainda um vetor a_2 que dá a direção do eixo η perpendicular e de orientação destrógrica em relação ao vetor a_1 . Os vetores a_1 e a_2 formam um plano paralelo ao plano médio da superfície de referência e o produto vetorial $a_1 \times a_2$ define um vetor a_3 de mesma direção que o vetor n_3 .

Os vetores a_1 , a_2 e a_3 e os vetores n_1 , n_2 e n_3 podem ser representados no SRG através de suas coordenadas como apresentado em (3.14) e (3.15) e a visualização da figura 3.3 ajuda a entender o que foi apresentado até aqui.

$$\begin{aligned} a_1 &= (a_{00}, a_{01}, a_{02}) \\ a_2 &= (a_{10}, a_{11}, a_{12}) \\ a_3 &= (a_{20}, a_{21}, a_{22}) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} n_1 &= (n_{00}, n_{01}, n_{02}) \\ n_2 &= (n_{10}, n_{11}, n_{12}) \\ n_3 &= (n_{20}, n_{21}, n_{22}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

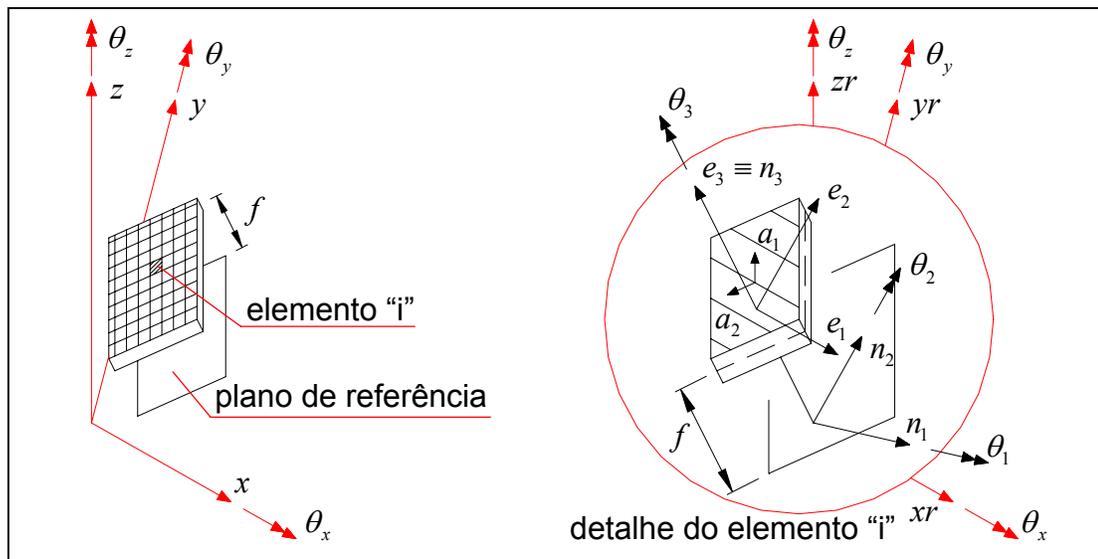


Figura 3.3 – Eixos de referência num ponto P da camada “a” de excentricidade “f”

3.4.1 MATRIZ DE ROTAÇÃO

Um vetor “t” qualquer pode ser representado tanto no sistema SRG quanto no sistema SRN e pode-se obter uma matriz de rotação que permite escrever as

componentes de “t” no sistema SRN em função das componentes no SRG. Os coeficientes desta matriz de rotação nada mais são que os cossenos diretores dos ângulos entre os vetores n_1 , n_2 e n_3 e os versores que representam o SRG. Portanto tem-se:

$$[r] = \begin{bmatrix} n_{00} & n_{01} & n_{02} \\ n_{10} & n_{11} & n_{12} \\ n_{20} & n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\begin{Bmatrix} t_{n1} \\ t_{n2} \\ t_{n3} \end{Bmatrix} = [r] \begin{Bmatrix} t_{xr} \\ t_{yr} \\ t_{zr} \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\begin{Bmatrix} t_{xr} \\ t_{yr} \\ t_{zr} \end{Bmatrix} = [r]^T \begin{Bmatrix} t_{n1} \\ t_{n2} \\ t_{n3} \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

3.4.2 HIPÓTESES CINEMÁTICAS DO ELEMENTO DE PLACA

O estudo de um ponto P de uma camada “a” de uma placa numa posição qualquer do espaço é similar ao que já foi apresentado para placa paralela ao plano horizontal. Seguindo a mesma linha de raciocínio apresentada por **Menezes e Devloo**^[19], o ponto P passa para uma posição P’ e essa translação é expressa no SRE.

O ponto O, origem de SRN na superfície de referência passa para uma posição O’, podendo essa translação ser expressa tanto no SRN por $u_n = u_n(n_1, n_2)$, $v_n = v_n(n_1, n_2)$, e $w_n = w_n(n_1, n_2)$, quanto no SRG por $u = u(x_r, y_r, z_r)$, $v = v(x_r, y_r, z_r)$ e $w = w(x_r, y_r, z_r)$.

A translação do ponto P é associada à translação do ponto O para O’ e às componentes da rotação da placa que da mesma forma podem ser expressas tanto no SRN por $\theta_1 = \theta_1(n_1, n_2)$, $\theta_2 = \theta_2(n_1, n_2)$ e $\theta_3 = \theta_3(n_1, n_2)$ quanto no SRG por $\theta_x = \theta_x(x_r, y_r, z_r)$, $\theta_y = \theta_y(x_r, y_r, z_r)$ e $\theta_z = \theta_z(x_r, y_r, z_r)$.

Tem-se então como variáveis deslocamentos fundamentais, a translação de OO’ e as componentes da rotação do elemento multi-camada. Essas variáveis podem ser expressas tanto no sistema de referência SRN quanto no sistema SRG através da definição de um vetor 6x1 para cada sistema, contendo cada um 3 componentes de translação e 3 de rotação obtidas nos respectivos sistemas de referência. Vale lembrar que o vetor definido para o SRG é o mesmo apresentado na equação (3.3).

Esses dois vetores podem se relacionar usando a matriz de rotação apresentada na equação (3.16).

A seguir são apresentados os vetores no SRN e no SRG respectivamente:

$$\begin{aligned}\{u_n\}^T &= \{u_n, v_n, w_n, \theta_1, \theta_2, \theta_3\} \\ \{u\}^T &= \{u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z\}\end{aligned}\quad (3.19)$$

Tem-se então a relação entre os vetores:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} [r] & 0 \\ 0 & [r] \end{Bmatrix}}_{[R]} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{u_n\} \end{Bmatrix} \quad (3.20) \quad \begin{Bmatrix} [r]^T & 0 \\ 0 & [r]^T \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{u_n\} \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

A translação de um ponto P expressa no SRE, definido no plano médio da camada “a” pode ser escrita a partir da translação de OO’ e da rotação absoluta do ponto P do elemento finito. As expressões dessas translações estão indicadas a seguir:

$$\begin{aligned}u_e(e_1, e_2, e_3) &= u_n(n_1, n_2) + (f + e_3)\theta_2 \\ v_e(e_1, e_2, e_3) &= v_n(n_1, n_2) - (f + e_3)\theta_1 \\ w_e(e_1, e_2, e_3) &= w_n(n_1, n_2)\end{aligned}\quad (3.22)$$

Os eixos e_1 e n_1 e os eixos e_2 e n_2 são respectivamente paralelos entre si e portanto vale a igualdade $\partial/\partial e_1 = \partial/\partial n_1$ e $\partial/\partial e_2 = \partial/\partial n_2$.

Nos cálculos apresentados a seguir são utilizados os deslocamentos u_e , v_e e w_e , as rotações absolutas da camada “a” que contém o ponto P e as derivadas dessas grandezas nas direções e_1 e e_2 .

A exemplo do que pode ser visto em **Menezes e Devloo**^[19] e também como foi utilizado no Programa de elementos finitos PZ, as variáveis fundamentais utilizadas na formulação do programa deste trabalho são os deslocamentos expressos no SRG e as derivadas direcionais desses deslocamentos em relação às direções dos vetores a_1 e a_2 que como já foi visto, definem os eixos ξ e η . Para tanto, haverá necessidade de transformar as variáveis deslocamento utilizado-se a matriz de rotação apresentada na equação (3.16). Haverá também a necessidade de uma substituição das derivadas direcionais. Para tanto, é possível definir uma matriz de rotação 2x2 que faz a devida mudança de direção. Essa matriz denominada no trabalho por $[r^*]$, pode ser escrita

como sendo os cossenos diretores formados entre os pares de eixos (n_1, n_2) e (a_1, a_2) ou entre (e_1, e_2) e (a_1, a_2) que é o mesmo. Com essa matriz pode-se escrever as derivadas em relação aos eixos (n_1, n_2) a partir das derivadas em relação aos eixos (a_1, a_2) da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} r^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1.a_1 & n_1.a_2 \\ n_2.a_1 & n_2.a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial n_1} & \frac{\partial a_2}{\partial n_1} \\ \frac{\partial a_1}{\partial n_2} & \frac{\partial a_2}{\partial n_2} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial n_1} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial n_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial a_1} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial a_2} \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

3.4.3 DEFORMAÇÕES E TENSÕES NUM PONTO P DA CAMADA “a”

Admite-se que a direção das fibras seja a direção do eixo e_1 , ou seja, as direções de ortotropia do material são as direções dos eixos e_1 e e_2 . Deve ser respeitada a equação (3.1) e admite-se estado plano de tensões, sendo garantido pela tensão normal nula na direção do eixo e_3 . Os parâmetros elásticos E_1 , E_2 , ν_1 , ν_2 , G_{12} , G_{13} e G_{23} do material devem ser tomados em relação às direções de ortotropia do material sendo dadas pelos eixos e_1 e e_2 .

As deformações do ponto P são calculadas em função dos deslocamentos de translação do ponto em relação ao sistema de referência SRE e da rotação absoluta da camada “a” em relação ao sistema de referência SRN. Para se estender a formulação para a análise de cascas, utilizou-se a rotação absoluta θ_3 em torno do eixo perpendicular ao plano do elemento e fez-se corresponder a essa rotação uma deformação fictícia ε_{θ_3} calculada no plano de referência de abscissa “-f” em relação ao eixo local e_3 . Essa deformação fictícia associa uma medida de deformação à diferença entre θ_3 e o movimento de corpo rígido correspondente à rotação infinitesimal do plano de referência em torno do eixo e_3 e é dada por:

$$\theta_3(n_1, n_2) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_e(e_1, e_2, -f)}{\partial e_1} - \frac{\partial u_e(e_1, e_2, -f)}{\partial e_2} \right) \quad (3.25)$$

A seguir são apresentadas as tensões e deformações num ponto P da camada “a” disposta numa posição qualquer:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{\theta 3} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u_e(e_1, e_2, e_3)}{\partial e_1} \\ \frac{\partial v_e(e_1, e_2, e_3)}{\partial e_2} \\ \theta_3(n_1, n_2) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_e(e_1, e_2, -f)}{\partial e_1} - \frac{\partial u_e(e_1, e_2, -f)}{\partial e_2} \right) \\ \left(\frac{\partial u_e(e_1, e_2, e_3)}{\partial e_3} + \frac{\partial w_e(e_1, e_2, e_3)}{\partial e_1} \right) \\ \left(\frac{\partial v_e(e_1, e_2, e_3)}{\partial e_3} + \frac{\partial w_e(e_1, e_2, e_3)}{\partial e_2} \right) \\ \left(\frac{\partial u_e(e_1, e_2, e_3)}{\partial e_2} + \frac{\partial v_e(e_1, e_2, e_3)}{\partial e_1} \right) \end{array} \right\} \quad (3.26)$$

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{\theta 3} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{E_1(\varepsilon_1 + \nu_2 \varepsilon_2)}{1 - \nu_1 \nu_2} \\ \frac{E_2(\varepsilon_2 + \nu_1 \varepsilon_1)}{1 - \nu_1 \nu_2} \\ 0 \\ G_{13} \gamma_{13} \\ G_{23} \gamma_{23} \\ G_{12} \gamma_{12} \end{array} \right\} \quad (3.27)$$

3.4.4 ESFORÇOS SOLICITANTES NOS ELEMENTOS DA CAMADA “a”

Os esforços solicitantes por unidade de comprimento num elemento de placa paralelo a um plano de referência colocado numa posição qualquer são calculados em relação aos eixos do sistema de referência SRN e são indicados a seguir sendo equivalentes àqueles mostrados nas equações de (3.7) a (3.9), cujos sentidos positivos estão indicados na Figura 3.2:

1. Forças normais no elemento paralelo ao plano xy:

$$N_1 = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_1 de_3, \quad N_2 = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_2 de_3 \quad \text{e} \quad N_{12} = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{12} de_3 \quad (3.28)$$

2. Forças cortantes no elemento paralelo ao plano xy:

$$V_1 = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} k\tau_{12} de_3 \quad \text{e} \quad V_2 = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} k\tau_{23} de_3 \quad (3.29)$$

Como já foi visto anteriormente, a constante “k” que aparece em (3.29) é um coeficiente de correção entre a distribuição de tensões devido à força cortante adotada constante ao longo da espessura da placa e a real distribuição parabólica dessas tensões de cisalhamento. Para este trabalho, da mesma forma que em **Reddy**^[27] e **Menezes e Devloo**^[19], “k” assume o valor de 5/6.

3. Momentos no elemento paralelo ao plano xy:

$$M_1 = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} (e_3 + f)\sigma_1 de_3, \quad M_2 = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} (e_3 + f)\sigma_2 de_3 \quad \text{e} \quad M_{12} = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} (e_3 + f)\tau_{12} de_3 \quad (3.30)$$

Os momentos M_1 e M_2 são denominados Momentos Fletores e M_{12} é designado de Momento Volvente.

Analogamente ao que foi apresentado para a placa paralela ao plano horizontal, para tornar possível a representação do problema das cascas, considera-se também um momento fictício $M\theta_3 = S h \varepsilon \theta_3$, associado à deformação fictícia correspondente à θ_3 . O valor da constante S utilizado neste trabalho é um valor considerado pequeno e igual à $10^{-6}E_1$.

3.4.5 APLICAÇÃO DO PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS – (PTV)

Como já foi apresentado, a aplicação do PTV envolve duas parcelas distintas e geralmente conhecidas como *Trabalho Virtual Interno*, realizado pelos esforços solicitantes internos e *Trabalho Virtual Externo* conseqüentemente realizado pelas forças externas aplicadas sobre o corpo e seu contorno.

$$W_{\text{int}} = W_{\text{ext}} \quad (3.31)$$

A parcela do *Trabalho Virtual Interno* W_{int} pode ser calculada através dos esforços solicitantes supostos aplicados no plano de referência, multiplicados pelas variações dos deslocamentos essenciais em relação ao plano de referência. A exemplo do que foi apresentado no item 3.3.4, inclui-se nesta parcela a influência da base elástica, sendo esta, como já foi visto, dada pelo produto entre a rigidez do solo (K_{mola}), e o deslocamento vertical w_e na direção e_3 e suas variações, tendo-se com isso a contribuição da base elástica dada de forma direta na rigidez de cada elemento. Portanto tem-se a equação referente à parcela do Trabalho Virtual interno:

$$\begin{aligned} W_{\text{int}} = \int_A & \left[N_1 \frac{\partial \delta u_e(e_1, e_2, -f)}{\partial n_1} + N_2 \frac{\partial \delta v_e(e_1, e_2, -f)}{\partial n_2} + N_{12} \left(\frac{\partial \delta u_e(e_1, e_2, -f)}{\partial n_2} + \frac{\partial \delta v_e(e_1, e_2, -f)}{\partial n_1} \right) \right] + \\ & V_1 \left(\frac{\partial \delta u_e(e_1, e_2, e_3)}{\partial n_3} + \frac{\partial \delta w_e(e_1, e_2, e_3)}{\partial n_1} \right) + V_2 \left(\frac{\partial \delta v_e(e_1, e_2, e_3)}{\partial n_3} + \frac{\partial \delta w_e(e_1, e_2, e_3)}{\partial n_2} \right) + \\ & M_1 \frac{\partial \delta \theta_2(n_1, n_2)}{\partial n_1} - M_2 \frac{\partial \delta \theta_1(n_1, n_2)}{\partial n_2} + M_{12} \left(\frac{\partial \delta \theta_2(n_1, n_2)}{\partial n_2} - \frac{\partial \delta \theta_1(n_1, n_2)}{\partial n_1} \right) + \\ & M_{\theta_3} \left(\delta \theta_3(n_1, n_2) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta v_e(e_1, e_2, -f)}{\partial n_1} - \frac{\partial \delta u_e(e_1, e_2, -f)}{\partial n_2} \right) \right) + K_{\text{mola}} \cdot w_e \cdot \delta w_e \Big] dn_1 dn_2 \end{aligned} \quad (3.32)$$

A exemplo do que foi feito no item 3.3.4, quatro novos vetores são criados para armazenar as derivadas parciais envolvidas na equação do PTV com a finalidade de agrupar matricialmente o integrando que dá o trabalho virtual dos esforços internos associados a um ponto. Portanto, tem-se os 6 vetores seguintes em relação ao sistema de referência SRN:

- Vetor de deslocamentos: $\{u_n\}$
- Vetor das derivadas parciais dos deslocamentos em relação a n_1 : $\frac{\partial\{u_n\}}{\partial n_1}$
- Vetor das derivadas parciais dos deslocamentos em relação a n_2 : $\frac{\partial\{u_n\}}{\partial n_2}$
- Vetor das variações dos deslocamentos: $\{\delta u_n\}$
- Vetor das derivadas parciais das variações dos deslocamentos em relação a n_1 :

$$\frac{\partial\{\delta u_n\}}{\partial n_1}$$

- Vetor das derivadas parciais das variações dos deslocamentos em relação a n_2 :

$$\frac{\partial\{\delta u_n\}}{\partial n_2}$$

Seguindo o proposto e apresentado em **Menezes e Devloo**^[19], que implementaram computacionalmente essa formulação no programa PZ, os deslocamentos foram escritos em coordenadas globais (SRG) e as derivadas desses deslocamentos calculadas nas direções a_1 e a_2 associadas aos eixos ξ e η respectivamente. Para tanto, é necessário que sejam feitas algumas transformações com relação aos sistemas de referência utilizados até aqui.

Utilizando-se a transposta da matriz de rotação [R] definida anteriormente em (3.20) e (3.21), é possível efetuar a troca de sistemas de referência passando-se de $\{u_n\}$ para $\{u\}$ e de $\{\delta u_n\}$ para $\{\delta u\}$. Usando-se a matriz de rotação $[r^*]$ é possível efetuar uma troca das derivadas direcionais $\partial/\partial n_1$ e $\partial/\partial n_2$ pelas equivalentes $\partial/\partial a_1$ e $\partial/\partial a_2$.

Utilizando a mesma nomenclatura usada por **Menezes e Devloo**^[19], as 9 matrizes que aparecem no integrando da equação seguinte multiplicando as formas quadráticas dos deslocamentos e suas variações são chamadas de “matrizes de contribuição” para os coeficientes de rigidez do elemento. Os autores acima citados

escreveram um programa para o software Mathematica que permite encontrar as expressões analíticas dessas matrizes para cada problema que se esteja estudando.

Aplicando o programa desenvolvido para o problema de placa tem-se:

$$\begin{aligned}
 W_{\text{int}} = \int_A & \left[\left(\frac{\partial \{\delta u\}}{\partial a_1} \right)^T K_{11} \frac{\partial \{u\}}{\partial a_1} + \left(\frac{\partial \{\delta u\}}{\partial a_2} \right)^T K_{22} \frac{\partial \{u\}}{\partial a_2} + \left(\frac{\partial \{\delta u\}}{\partial a_1} \right)^T K_{12} \frac{\partial \{u\}}{\partial a_2} + \right. \\
 & \left. \left(\frac{\partial \{\delta u\}}{\partial a_2} \right)^T K_{21} \frac{\partial \{u\}}{\partial a_1} + \{\delta u\}^T B_{01} \frac{\partial \{u\}}{\partial a_1} + \{\delta u\}^T B_{02} \frac{\partial \{u\}}{\partial a_2} + \right. \\
 & \left. \left. \left(\frac{\partial \{\delta u\}}{\partial a_1} \right)^T B_{10} \{u\} + \left(\frac{\partial \{\delta u\}}{\partial a_2} \right)^T K_{20} \{u\} + \{\delta u\}^T B_{00} \{u\} \right] dn_1 dn_2
 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Menezes e Devloo^[19], também encontraram uma forma equivalente mais simples para se efetuar a implementação computacional desta formulação, onde essas 9 matrizes K_{ij} , B_{0i} e B_{i0} (i e $j = 1,2$) podem ser calculadas numericamente a partir das 9 matrizes de contribuição encontradas no item 3.3.4 para o caso em que a placa se encontrava posicionada paralelamente ao plano horizontal. Essas matrizes de contribuição são encontradas no Apêndice deste trabalho divididas em 18 matrizes de contribuição, sendo 9 com as parcelas referentes à flexão e 9 com as parcelas referentes ao cisalhamento. Essa separação das parcelas é feita com o intuito de possibilitar a realização de integração reduzida nas parcelas de cisalhamento, buscando com isso, contornar o efeito de travamento por cortante, que pode ocorrer caso esta formulação seja aplicada para placas consideradas “finas”. Com isso tem-se as matrizes de contribuição para o elemento de placa disposto numa posição qualquer do espaço como apresentado a seguir:

$$K_{11} = [R]^T \left(K_{xx} \frac{\partial a_1}{\partial n_1} \frac{\partial a_1}{\partial n_1} + K_{yy} \frac{\partial a_1}{\partial n_2} \frac{\partial a_1}{\partial n_2} + K_{xy} \frac{\partial a_1}{\partial n_1} \frac{\partial a_1}{\partial n_2} + K_{yx} \frac{\partial a_1}{\partial n_2} \frac{\partial a_1}{\partial n_1} \right) [R]$$

$$K_{22} = [R]^T \left(K_{xx} \frac{\partial a_2}{\partial n_1} \frac{\partial a_2}{\partial n_1} + K_{yy} \frac{\partial a_2}{\partial n_2} \frac{\partial a_2}{\partial n_2} + K_{xy} \frac{\partial a_2}{\partial n_1} \frac{\partial a_2}{\partial n_2} + K_{yx} \frac{\partial a_2}{\partial n_2} \frac{\partial a_2}{\partial n_1} \right) [R]$$

$$\begin{aligned}
K_{12} &= [R]^T \left(K_{xx} \frac{\partial a_1}{\partial n_1} \frac{\partial a_2}{\partial n_1} + K_{yy} \frac{\partial a_1}{\partial n_2} \frac{\partial a_2}{\partial n_2} + K_{xy} \frac{\partial a_1}{\partial n_1} \frac{\partial a_2}{\partial n_2} + K_{yx} \frac{\partial a_1}{\partial n_2} \frac{\partial a_2}{\partial n_1} \right) [R] \\
K_{21} &= [R]^T \left(K_{xx} \frac{\partial a_2}{\partial n_1} \frac{\partial a_1}{\partial n_1} + K_{yy} \frac{\partial a_2}{\partial n_2} \frac{\partial a_1}{\partial n_2} + K_{xy} \frac{\partial a_2}{\partial n_1} \frac{\partial a_1}{\partial n_2} + K_{yx} \frac{\partial a_2}{\partial n_2} \frac{\partial a_1}{\partial n_1} \right) [R] \\
B_{01} &= [R]^T \left(B_{0x} \frac{\partial a_1}{\partial n_1} + B_{0y} \frac{\partial a_1}{\partial n_2} \right) [R] \\
B_{10} &= [R]^T \left(B_{x0} \frac{\partial a_1}{\partial n_1} + B_{y0} \frac{\partial a_1}{\partial n_2} \right) [R] \\
B_{02} &= [R]^T \left(B_{0x} \frac{\partial a_2}{\partial n_1} + B_{0y} \frac{\partial a_2}{\partial n_2} \right) [R] \\
B_{20} &= [R]^T \left(B_{x0} \frac{\partial a_2}{\partial n_1} + B_{y0} \frac{\partial a_2}{\partial n_2} \right) [R] \\
B_{000} &= [R]^T (B_{00}) [R]
\end{aligned} \tag{3.34}$$

CAPÍTULO 4

Implementação Computacional

4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentadas algumas das partes mais importantes da implementação da formulação de placas e cascas no programa computacional aqui desenvolvido. São também apresentados alguns dos pontos do Método dos Elementos Finitos envolvidos na implementação.

Pode-se dizer, a exemplo do que é visto em **Oden et al**^[21] e **Reddy**^[27], que o programa se divide em três partes distintas, facilitando assim o entendimento do seu funcionamento global. São elas: pré-processamento, processamento e pós-processamento, as quais são definidas e apresentadas nos itens que se seguem.

4.2 PRÉ-PROCESSAMENTO

No Pré-processamento são encontradas as rotinas de leitura de dados para o problema, tais como, coordenadas dos nós, conectividades dos elementos, tipos de materiais de cada camada, carregamentos e condições de contorno.

Esses dados são fornecidos para o programa através de um arquivo de entrada de dados no formato ASCII previamente preparado pelo usuário do programa, seguindo

alguns critérios de formatação para a entrada destes dados, os quais são interpretados pelas rotinas do Pré-processamento.

A seguir são apresentados alguns comentários sobre as funções de algumas das rotinas que compõem o Pré-processamento.

4.2.1 GERAÇÃO DOS NÓS

A rotina de geração dos nós permite que uma linha de nós seja gerada automaticamente através da utilização de incrementos nas coordenadas nodais. A rotina também permite que nós individualmente sejam gerados para casos em que a geração automática não seja satisfatória.

O programa tem uma limitação com relação ao número de nós aceitando um número máximo de 500 nós.

4.2.2 GERAÇÃO DOS ELEMENTOS

Da mesma forma que a geração dos nós, a rotina permite a geração tanto de elementos individualmente quanto automática, sendo gerados pela última, elementos em linha através do incremento nos nós dos elementos.

O programa também tem uma limitação com relação ao número de elementos da placa aceitando um número máximo de 200 elementos.

4.2.3 PROPRIEDADES DOS MATERIAIS DAS CAMADAS

As propriedades dos materiais são fornecidas com relação às camadas da placa, ou seja, para cada camada de placa é introduzida uma linha de propriedades dos materiais no arquivo de entrada, sendo também fornecidas as direções das fibras (eixos de ortotropia) dos materiais para cada camada que constitui a placa.

O programa limita o número máximo das camadas em 5.

4.2.4 BASE ELÁSTICA

A constante elástica referente à rigidez do solo é fornecida no arquivo de dados em função da direção e_3 (SRN), ou seja, em relação à direção das fibras.

No caso de consideração da placa estar apoiada sobre uma base elástica, o programa não permite que isso seja feito parcialmente, ou seja, o programa apóia a placa como um todo na base elástica.

Isso se dá pelo fato de o programa realizar uma integração da rigidez da base elástica em toda a superfície de todos os elementos que compõem a placa, considerando assim a placa completamente apoiada na base elástica.

Para prever o apoio parcial da placa na base elástica, seriam necessárias algumas modificações no código do programa. Uma delas seria incluir a leitura, no arquivo de entrada, do valor da constante elástica para cada elemento que constitui a placa, possibilitando que os elementos com constante elástica atribuída igual a “zero” não estejam sendo considerados como apoiados na base elástica.

4.2.5 CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO NA SUPERFÍCIE DOS ELEMENTOS

Esta rotina, a exemplo das rotinas de geração de nós e elementos, permite que carregamentos distribuídos por toda a superfícies dos elementos sejam aplicados individualmente nos elementos ou através de geração automática desses carregamentos facilitando assim a aplicação do carregamento em vários elementos ao mesmo tempo.

O programa, a partir do valor do carregamento aplicado no elemento, distribui o carregamento para os nós do elemento de forma proporcional através da integração do carregamento por toda a superfícies do elemento. Essas parcelas nodais de cada elemento contribuirão posteriormente no vetor de cargas da estrutura.

Vale lembrar que o carregamento distribuído deve ser aplicado nas direções globais (SRG) adotadas para o problema.

4.2.6 CARREGAMENTO NODAL

A rotina de carregamento nodal permite a geração do carregamento em um certo número de nós através do incremento no número dos nós onde a carga será aplicada.

A carga aplicada nos nós contribui diretamente no vetor de cargas da estrutura. Portanto, os carregamentos nodais devem ser considerados em relação ao sistema de referência global (SRG) adotado para o problema.

4.2.7 CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO NOS LADOS DOS ELEMENTOS

Neste caso a rotina permite apenas a geração de carregamentos lineares individualmente, ou seja, deve ser fornecido no arquivo de dados o carregamento para cada lado dos elementos que estão carregados.

Os carregamentos aplicados nos lados dos elementos são transferidos para os nós que fazem parte deste lado do elemento e contribuem diretamente no vetor de cargas da estrutura.

Para tanto, a exemplo dos outros carregamentos anteriormente citados, os carregamentos lineares aplicados nos lados dos elementos devem ser tomados em relação ao sistema de referência global (SRG) adotado para a estrutura.

4.2.8 CONDIÇÕES DE CONTORNO

As condições de contorno para o problema podem ser geradas automaticamente ou individualmente e são aplicadas nos nós da placa em relação ao sistema de referência global (SRG).

No caso de necessidade de aplicação de vinculação no lado do elemento, basta vincular todos os nós que fazem parte deste lado obtendo-se assim a vinculação completa do lado.

4.3 PROCESSAMENTO

No Processamento são apresentadas as rotinas responsáveis pela montagem e resolução do sistema de equações de equilíbrio que regem o problema, fornecendo assim a solução nodal para o equilíbrio.

São apresentados na seqüência alguns dos pontos principais de algumas das rotinas que constituem o Processamento do programa com a finalidade de visualizar o funcionamento das mesmas.

4.3.1 MATRIZ DOS COEFICIENTES DE CONTRIBUIÇÃO

As matrizes de contribuição são calculadas para cada camada da placa e são utilizadas na obtenção da matriz de rigidez de cada elemento da camada correspondente de placa. São montadas 18 matrizes de contribuição sendo: 9 matrizes de ordem 6 x 6 com as parcelas de flexão e 9 matrizes também de ordem 6 x 6 com as parcelas de cisalhamento, sendo isso feito para permitir a realização de integração reduzida nas parcelas referentes ao cisalhamento quando necessário.

A obtenção dessas matrizes de contribuição já foi apresentada no capítulo anterior e as expressões analíticas dos coeficientes dessas matrizes se encontram no Apêndice do presente trabalho.

4.3.2 FUNÇÕES DE FORMA

Foram implementadas no programa funções de forma lineares e quadráticas, através da utilização de elementos quadrilaterais de 4 nós e de 8 e 9 nós respectivamente.

As funções de forma apresentadas em (4.1) são para o elemento de 9 nós. A figura 4.1 representa a posição dos nós no elemento e o gráfico da função de forma do nó 1 obtido através do programa Mathematica respectivamente.

$$\begin{aligned}
 \hat{\phi}_1 &= \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - \eta); & \hat{\phi}_2 &= \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - \eta); & \hat{\phi}_3 &= \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 + \eta); \\
 \hat{\phi}_4 &= \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 + \eta); & \hat{\phi}_5 &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(\eta^2 - \eta); & \hat{\phi}_6 &= \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi)(1 - \eta^2); \\
 \hat{\phi}_7 &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(\eta^2 + \eta); & \hat{\phi}_8 &= \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi)(1 - \eta^2); & \hat{\phi}_9 &= (1 - \xi^2)(1 - \eta^2).
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

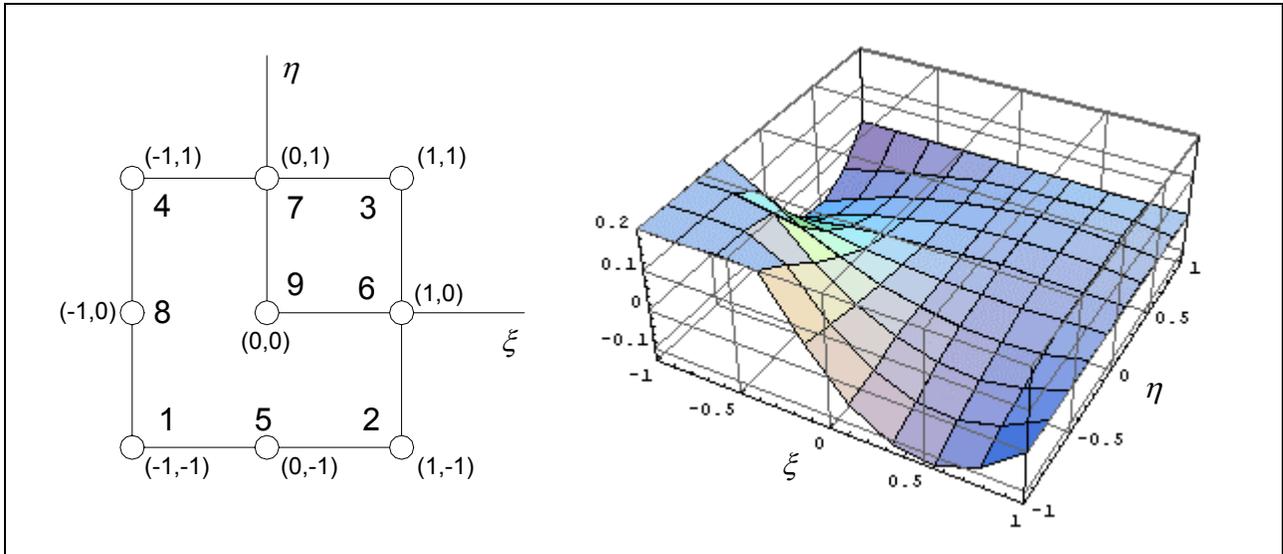


Figura 4.1 – Elemento Mestre de 9 nós e Função de Forma do nó 1.

4.3.3 JACOBIANO

O jacobiano é o gradiente da função de mapeamento entre o elemento mestre e o elemento deformado. Segundo a literatura, supõe-se que o elemento deformado encontra-se no mesmo espaço que o elemento mestre ou seja, um elemento bi-dimensional existe no plano xy . Em **Menezes e Devloo**^[18] encontra-se a definição do jacobiano espacial como sendo o conjunto de uma matriz na dimensão do elemento e três vetores ortogonais que definem a orientação do elemento. O jacobiano espacial estende o conceito do jacobiano plano para funções de mapeamento entre $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

A dedução da extensão do jacobiano bi-dimensional para o tri-dimensional apresentada a seguir pode ser encontrada tanto em **Menezes e Devloo**^[18] quanto em **Devloo**^[7].

Define-se um vetor V_1 através das derivadas das funções de forma em relação a ξ e um vetor \tilde{V}_2 através das derivadas das funções de forma em relação a η . Para facilitar os cálculos define-se também J_ξ e J_η como apresentado a seguir.

$$J_\xi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2} \quad J_\eta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2} \quad (4.2)$$

Logo:

$$V_1 = \frac{1}{J_\xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \quad \tilde{V}_2 = \frac{1}{J_\eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \eta}, \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \quad (4.3)$$

Define-se um vetor V_2 como sendo ortogonal a V_1 contido no plano formado pelos vetores V_1 e \tilde{V}_2 da seguinte forma:

$$V_2 = \frac{\tilde{V}_2 - (\tilde{V}_2 \cdot V_1)V_1}{\|\tilde{V}_2 - (\tilde{V}_2 \cdot V_1)V_1\|} \quad (4.4)$$

Define-se ainda o vetor V_3 perpendicular ao plano formado por V_1 e V_2 como sendo:

$$V_3 = V_1 \times V_2 \quad (4.5)$$

Portanto, usando as definições de V_1 , V_2 e V_3 , o jacobiano espacial é igual a:

$$J = \begin{bmatrix} J_\xi & V_1 \cdot \tilde{V}_2 J_\eta \\ 0 & V_2 \cdot \tilde{V}_2 J_\eta \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Vale lembrar que o elemento $J_{(2,1)}$ é nulo devido ao fato de V_1 e V_2 serem ortogonais.

4.3.4 MATRIZ DE RIGIDEZ E VETOR DE CARGAS DOS ELEMENTOS

A matriz de rigidez do elemento finito e o vetor das ações nodais são calculados através das contribuições dos pontos de integração para cada elemento da malha. Os deslocamentos fundamentais descritos em função dos vetores a_1 e a_2 , bem como suas

variações, são discretizados através das funções de forma geradas segundo o Método dos Elementos Finitos.

No programa desenvolvido, calcula-se a matriz de rigidez através das contribuições dos pontos de integração sobre o elemento e faz-se a contribuição na matriz global da estrutura, acontecendo o mesmo para o vetor das ações nodais.

Para isso é necessário que sejam calculados para cada ponto de integração, os valores das funções de forma bem como de suas derivadas e as direções dos eixos jacobianos, podendo-se com isso calcular a matriz de rigidez dos elementos.

Portanto tem-se a expressão para os elementos da matriz de rigidez de cada elemento finito:

$$\begin{aligned}
 & \text{Loop}(i = 1 \rightarrow npe) \\
 & \quad \text{Loop}(j = 1 \rightarrow npe) \\
 & \quad \quad \text{Loop}(l = 5 \rightarrow 0) \\
 & \quad \quad \quad \text{Loop}(m = 5 \rightarrow 0) \\
 & \quad \quad \quad EK(6i-l, 6j-m) = EK(6i-l, 6j-m) + \left[(K_{11})_{l,m} \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial a_1} \frac{\partial \hat{\phi}_j}{\partial a_1} + \right. \\
 & \quad \quad \quad (K_{12})_{l,m} \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial a_1} \frac{\partial \hat{\phi}_j}{\partial a_2} + (K_{21})_{l,m} \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial a_2} \frac{\partial \hat{\phi}_j}{\partial a_1} + \\
 & \quad \quad \quad (K_{22})_{l,m} \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial a_2} \frac{\partial \hat{\phi}_j}{\partial a_2} + (K_{01})_{l,m} \hat{\phi}_i \frac{\partial \hat{\phi}_j}{\partial a_1} + \\
 & \quad \quad \quad (K_{10})_{l,m} \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial a_1} \hat{\phi}_j + (B_{02})_{l,m} \hat{\phi}_i \frac{\partial \hat{\phi}_j}{\partial a_2} + \\
 & \quad \quad \quad \left. (B_{20})_{l,m} \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial a_2} \hat{\phi}_j + (B_{000})_{l,m} \hat{\phi}_i \hat{\phi}_j \right] \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

A contribuição das forças por unidade de área (f_x, f_y, f_z) no vetor de cargas do elemento envolve apenas os valores das funções de forma em cada nó e vale:

$$\begin{aligned}
& \text{Loop}(i = 1 \rightarrow npe) \\
& \quad EF(6i - 5) = EF(6i - 5) + \hat{\phi}_i f_x \\
& \quad EF(6i - 4) = EF(6i - 4) + \hat{\phi}_i f_y \\
& \quad EF(6i - 3) = EF(6i - 3) + \hat{\phi}_i f_z
\end{aligned} \tag{4.8}$$

4.3.5 INTEGRAÇÃO REDUZIDA NAS PARCELAS DE CISALHAMENTO

A utilização da integração reduzida na implementação das parcelas que envolvem cisalhamento é um dos modos para se contornar o efeito de travamento conhecido na literatura como “shear locking”.

A exemplo do que é apresentado por Reddy^[27], o presente programa utiliza-se da técnica de integração reduzida nas parcelas que envolvem cisalhamento.

O que ocorre é que, quando se utilizam elementos quadrilaterais de 4 nós, utiliza-se 1 ponto de integração nas parcelas de cisalhamento e 2 nas demais parcelas. No caso de elementos quadrilaterais de 8 ou 9 nós, utilizam-se 2 pontos de integração para as parcelas de cisalhamento e 3 para as demais.

4.3.6 CONTRIBUIÇÃO NA MATRIZ DE RIGIDEZ E VETOR DE CARGAS DA ESTRUTURA

A contribuição na matriz de rigidez da estrutura nada mais é que a contribuição da matriz de rigidez de cada elemento obtida no item 4.3.4 levando-se em conta a numeração dos nós da estrutura. Em termos de implementação tem-se:

$$\begin{aligned}
& \text{loop}(i = 1 \rightarrow npe) \\
& \quad ni = \text{nod}(iel, i) \\
& \quad \text{loop}(j = 1 \rightarrow npe) \\
& \quad \quad nj = \text{nod}(iel, j) \\
& \quad \quad \text{loop}(l = 5 \rightarrow 0) \\
& \quad \quad \quad \text{loop}(m = 5 \rightarrow 0) \\
& \quad \quad \quad \quad K(6ni - l, 6nj - m) = K(6ni - l, 6nj - m) + \\
& \quad \quad \quad \quad \quad EK(6i - l, 6j - m)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Na obtenção do vetor de cargas da estrutura o processo se repete, ou seja, o vetor de cargas para cada elemento obtido no item 4.3.4 contribui no vetor de cargas globais da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 &loop(i = 1 \rightarrow npe) \\
 &\quad ni = nod(iel, i) \\
 &\quad F(6ni - 5) = F(6ni - 5) + EF(6i - 5) \\
 &\quad F(6ni - 4) = F(6ni - 4) + EF(6i - 4) \\
 &\quad F(6ni - 3) = F(6ni - 3) + EF(6i - 3)
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

4.3.7 APLICAÇÃO DOS CARREGAMENTOS

Na parte de aplicação dos carregamentos, o programa assume os valores desses carregamentos que foram lidos no arquivo de entrada e contribui no vetor de carregamento da estrutura.

Os carregamentos aplicados nos elementos são integrados por toda a superfícies do elemento e contribuem, como já foi visto, proporcionalmente em cada nó do elemento. Essa contribuição é posteriormente feita para o vetor de cargas da estrutura.

No caso de carregamento linear a integração é feita previamente e entram apenas os fatores de contribuição para cada nó no programa, ou seja, quando o programa recebe os dados lidos do arquivo, são aplicados os fatores correspondentes às parcelas de cada nó que faz parte do lado carregado fazendo-se assim a transferência do carregamento do lado do elemento para os nós. A contribuição é feita diretamente no vetor de cargas da estrutura.

Para carregamentos nodais, como já foi visto, o vetor de cargas da estrutura recebe a contribuição direta dessas cargas aplicadas com relação ao sistema de referência global (SRG).

4.3.8 APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

A aplicação das condições de contorno é feita com a utilização da Técnica de Zeros e Um, ou seja, quando se tem uma direção com deslocamento conhecido coloca-se o valor do deslocamento no vetor de carga na posição correspondente a da posição do deslocamento em questão. Na diagonal principal da matriz de rigidez, na posição referente ao deslocamento conhecido, coloca-se o valor 1 e zera-se os demais valores da linha em questão. Além disso, são efetuadas outras alterações no vetor de cargas para que o sistema mantenha-se inalterado e preserve as relações entre as equações de equilíbrio, não alterando com isso a solução do problema. Essas modificações são feitas antes de serem alterados os membros da matriz de rigidez.

Deste modo, tem-se conhecido o valor do deslocamento no ato da resolução do sistema e tem-se então a condição de contorno imposta.

4.3.9 RESOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR

Para a resolução do sistema linear gerado pelo programa é utilizada a técnica de Eliminação de Gauss.

O que ocorre é a triangularização da matriz de rigidez da estrutura obtendo-se uma matriz triangular superior e posterior cálculo dos deslocamentos nodais através da retro-substituição para solução das equações envolvidas no sistema linear.

Com isso os valores de deslocamentos nodais (3 translações e 3 rotações) em relação ao sistema de coordenadas globais (SRG) são obtidos.

4.3.10 ROTAÇÃO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA

Como foi dito no item anterior, a solução do sistema de equações fornece os deslocamentos no sistema de coordenadas globais (SRG) sendo necessário rotacionar estes valores para que os resultados sejam apresentados em relação aos eixos de ortotropia dos materiais das camadas.

Essa rotação dos deslocamentos é obtida através da utilização dos cossenos diretores entre os eixos de ortotropia do material da camada e os eixos do SRG.

4.4 PÓS-PROCESSAMENTO

No Pós-processamento são realizados os cálculos de tensões e esforços com base nos resultados de deslocamentos e suas derivadas obtidos na solução do problema. E é também nesta parte do programa que são impressos em um arquivo de saída, os dados de entrada e os resultados referentes à solução do problema, bem como os valores de tensões e esforços obtidos a partir das equações de equilíbrio.

Como nos itens anteriores, apresentam-se algumas das características e funções das rotinas constituintes do Pós-processamento.

4.4.1 IMPRESSÃO DOS DADOS DE ENTRADA

A rotina de impressão dos dados de entrada, como o próprio nome diz, imprime de forma formatada e ordenada, os dados referentes ao problema que está sendo resolvido pelo programa. Esta impressão é feita em um arquivo de resultados no formato ASCII criado automaticamente pelo programa.

4.4.2 IMPRESSÃO DOS RESULTADOS

A função desta rotina é similar a função da rotina anterior. Neste caso, a rotina imprime, também de forma formatada e ordenada, os resultados obtidos pelo programa, sendo eles, deslocamentos nos nós da placa e tensões e esforços nos pontos de Gauss.

As tensões e os esforços são calculados com base nos valores dos deslocamentos e suas derivadas através das equações apresentadas no capítulo 3.

4.4.3 IMPRESSÃO DE ARQUIVO PARA O PROGRAMA “MATHEMATICA”

O programa imprime ainda um arquivo de saída também no formato ASCII que pode ser interpretado pelo programa “Mathematica” que, através dos dados fornecidos, gera um gráfico com os deslocamentos verticais dos nós da placa, facilitando assim a visualização da posição final da placa deformada.

4.5 EXEMPLO DE ARQUIVO DE ENTRADA DE DADOS

Este item tem o intuito de exemplificar e apresentar a confecção e formatação de um arquivo de entrada para ser utilizado pelo programa aqui desenvolvido.

Para tanto, adota-se um exemplo de placa buscando abranger os mais diversos pontos envolvidos no arquivo de entrada desde a geração dos nós até a aplicação dos carregamentos e condições de contorno.

Adota-se então uma placa quadrada com duas camadas, com duas bordas opostas apoiadas e as demais livres. A placa está submetida a carregamento distribuído em todos os elementos da malha a ser gerada. As dimensões e propriedades dos materiais estão apresentadas a seguir.

Dimensões: 4 m x 4 m.

Módulo de Elasticidade Longitudinal: $E_1, E_2 = 10^6 \text{ KN} / \text{m}^2$.

Módulo de Elasticidade Transversal: $G_{12}, G_{13}, G_{23} : 5 \times 10^5 \text{ KN} / \text{m}^2$.

Coefficiente de Poisson: $\nu_{12}, \nu_{21} = 0.0$.

Espessura das camadas: $h_1, h_2 = 0.50 \text{ m}$.

Excentricidade das camadas: $f_1 = + 0.25 \text{ m}$;

$f_2 = - 0.25 \text{ m}$.

Carregamento distribuído: $q = - 20 \text{ KN} / \text{m}^2$.

Tipo de integração para as parcelas de cisalhamento:

Camada 1: Reduzida;

Camada 2: Reduzida.

Malha: 2 x 2 elementos quadrados de 9 nós.

Outros dados estão apresentados e explicados a seguir no próprio arquivo de entrada.

O símbolo sustentado (#) indica onde começam a ser fornecidos dados para leitura. Portanto, antes desses símbolos e depois dos dados fornecidos, podem ser colocados quaisquer números de linhas de comentários quanto forem necessárias para facilitar o entendimento futuro dos dados utilizados no arquivo de entrada.

Segue o exemplo:

Dados	Explicações
título do arquivo (máximo de 50 caracteres) # Exemplo Teste.	Este título serve para identificação do problema que está sendo rodado.
número de nos por elemento / número de camadas de placa (máximo número de nós da placa: 500) # 9 2	Dados referentes ao número de nós por elemento (9) e o número de camadas de placa (2).
número de gerações dos nos # 5	Número de gerações de nós em linha (5).
no inicial / número de nos a gerar / incremento / X0 / Y0 / Z0 / Xf / Yf / Zf # 1 5 1 0 0 0 4 0 0 6 5 1 0 1 0 4 1 0 11 5 1 0 2 0 4 2 0 16 5 1 0 3 0 4 3 0 21 5 1 0 4 0 4 4 0	Gerações dos nós em linha, sendo na seqüência: nó inicial, número de nós a serem gerados, incremento na numeração dos nós, coordenadas do nó inicial e final.
número de gerações de elementos (máximo número de elementos da placa: 200) # 2	Número de gerações de elementos em linha (2).
número de elementos a gerar / nos do elemento	Geração dos elementos,

<pre># 2 1 2 3 6 7 8 11 12 13 2 11 12 13 16 17 18 21 22 23</pre>	<p>sendo: número de elementos a serem gerados, nós do 1º elemento da seqüência seguindo de baixo para cima e da esquerda para a direita.</p> <p>A numeração dos elementos é feita automaticamente pelo programa e segue a geração fornecida pelo usuário.</p>
<pre>propriedades dos materiais das camadas (máximo número de camadas da placa: 5) E1 / E2 / G12 / G13 / G23 / ni12 / h / f / coordz / tipo de integração # 1000000 1000000 500000 500000 500000 0 0.5 0.25 0 2 1000000 1000000 500000 500000 500000 0 0.5 -0.25 0 2</pre>	<p>Propriedades dos materiais das camadas da placa fornecidas em relação à direção das "fibras" (direções de ortotropia).</p> <p>A seqüência dos dados é apresentada pelo rótulo ao lado, sendo: E = Módulo de Elasticidade Longitudinal, G = Módulo de Elasticidade Transversal, ν = Coeficiente de Poisson, h = espessura da camada, f = excentricidade do plano médio da camada em relação ao plano de referência e coordz = coordenada z da camada onde as tensões serão calculadas.</p>
<pre>cossenos diretores #</pre>	<p>Cossenos entre os eixos de ortotropia (SRE) e o</p>

<p>1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 1 0 -1 0 0 0 0 1</p>	<p>Sistema de Referência Global adotado (SRG).</p>
<p>número de elementos carregados elemento carregado / carregamento distribuído em Fx / Fy / Fz # 0</p>	<p>Aplicação de carregamento distribuído em elementos individualmente.</p>
<p>número de gerações de carregamento nos elementos número de elementos a gerar / elemento inicial / incremento / Fx / Fy / Fz # 1 4 1 1 0 0 -20</p>	<p>Geração de carregamento distribuído nos elementos, sendo: 1 o número de gerações, 4 o número de elementos a serem carregados, 1 o elemento inicial, 1 o incremento no número dos elementos, 0 a carga distribuída na direção X Global, 0 a carga distribuída na direção Y global e -20 a carga distribuída na direção z também global.</p>
<p>constante elástica do solo # 0</p>	<p>Coefficiente de rigidez da Base Elástica.</p>
<p>número de nos vinculados número do no / número de direções direção / valor deslocamento # 0</p>	<p>Aplicação de condições de contorno individualmente nos nós.</p>
<p>número de gerações de nos vinculados número de nos a vincular / no inicial / incremento / número de direções direção / valor do deslocamento # 2 5 1 1 3 1 0 2 0 3 0</p>	<p>Geração das condições de contorno, sendo a seqüência de dados fornecida de acordo com o rótulo ao lado.</p>

5 21 1 3 1 0 2 0 3 0	
número de nos carregados número do no / número de direções direção / valor carregamento # 0	Aplicação de carregamento nodal.
número de lados carregados número dos nos / número de direções / eixo carregado direção / valor carregamento # 0	Aplicação de carregamento no lado dos elementos para serem transferidos para os nós.

4.6 VISÃO GERAL DO PROGRAMA

Segue fluxograma do programa desenvolvido.

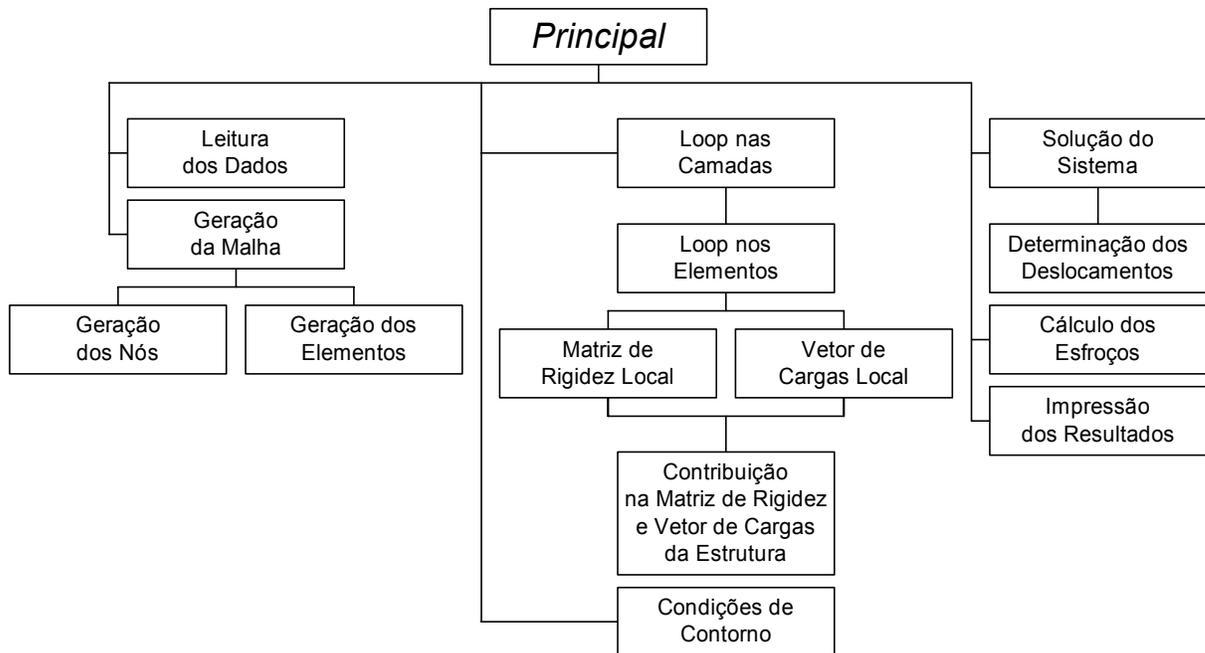


Figura 4.2 – Fluxograma do Programa.

CAPÍTULO 5

Exemplos

5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados 19 exemplos numéricos de placas com a finalidade de comparação entre os resultados obtidos pelo programa aqui desenvolvido e resultados obtidos em outros programas existentes, bem como em trabalhos já publicados.

Com isso busca-se verificar a validação e confiabilidade da formulação e implementação do programa da dissertação de mestrado.

A seguir são apresentados os exemplos com suas características e comparação dos resultados.

5.2 APRESENTAÇÃO DOS EXEMPLOS E COMPARAÇÕES

Para facilitar a interpretação dos exemplos apresentados, criou-se uma representação para as vinculações utilizadas. Logo:

Borda Livre	Borda Apoiada	Borda Engastada
-----	—————	///////

5.2.1 EXEMPLO 1

- Placa simplesmente apoiada nas quatro bordas submetida a carregamento uniformemente distribuído:

DADOS GERAIS:

- $E_1 = E_2 = 2.05 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
- $G_{12} = G_{13} = G_{23} = E_1 / (2 (1 + \nu_{12})) = 1.025 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
- Espessura $h = 0.06 \text{ m}$
- Carga Distribuída $q = -400 \text{ N/m}^2$
- $a = b = 2 \text{ m}$
- Malhas de elementos finitos: 4 x 4, 8 x 8 e 10 x 10 elementos de 9 nós
- Coeficiente de Poisson $\nu_{12} = \nu_{21} = 0.0$
- Excentricidade da Camada = 0.0 m
- Integração Reduzida nas parcelas de cisalhamento

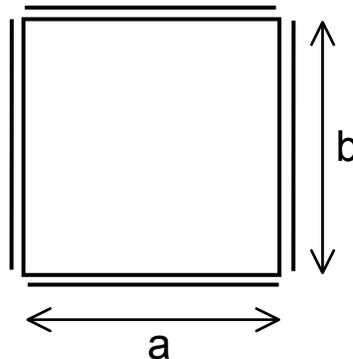


Figura 5.1 – Vinculação da Placa.

Os resultados a seguir foram obtidos para o centro da placa.

	Bares ^[2]	Andrade ^[1]	Programa		
			Malha 4x4	Malha 8x8	Malha 10x10
Deslocamento Vertical ($\times 10^{-6} \text{ m}$)	-7.04	-7.07	-7.08	-7.07	-7.07

Tabela 5.1 – Deslocamento vertical no centro da placa.

A seguir são apresentados graficamente os deslocamentos verticais em cada nó dos elementos da placa. A malha que aparece desenhada não é a representação da malha de elementos finitos adotada no exemplo, mas simplesmente a malha de ligação entre os nós da placa.

A figura foi obtida com auxílio do Programa “Mathematica” utilizando-se uma das rotinas de pós-processamento mencionadas no capítulo anterior e é referente aos deslocamentos para a malha 10x10 adotada no exemplo.

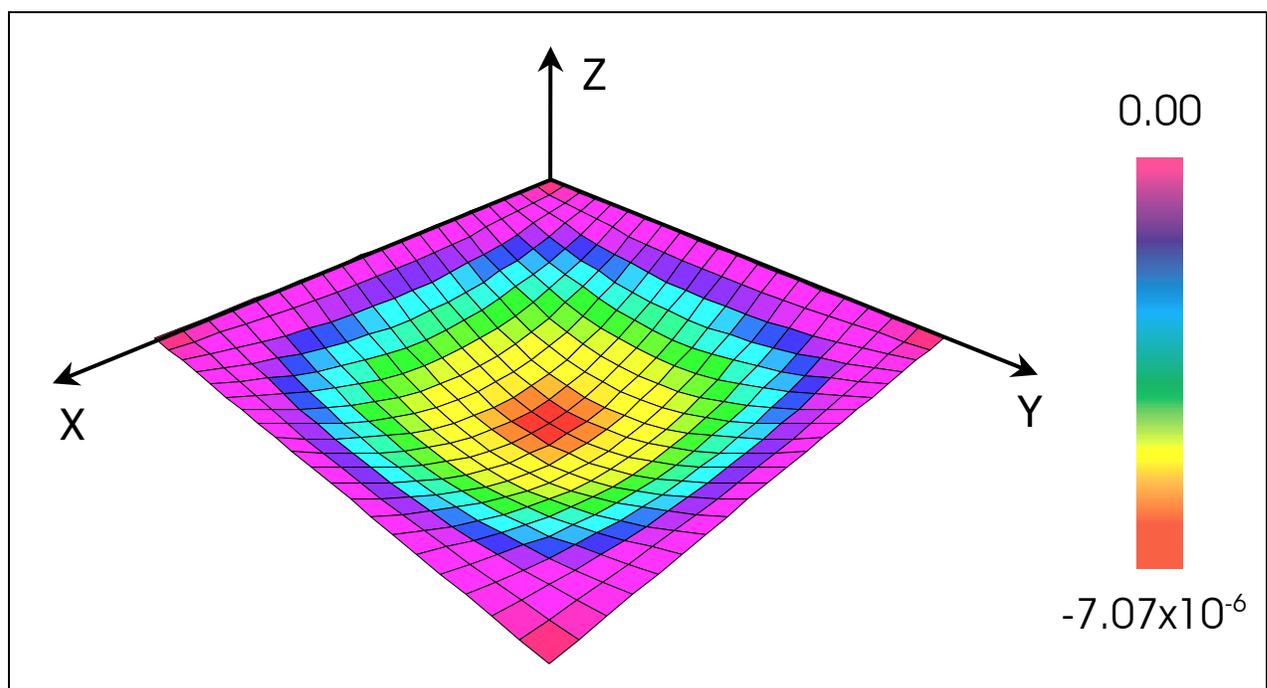


Figura 5.2 – Deslocamento Vertical em metros nos nós para Malha 10x10.

Comparam-se os valores obtidos no programa desenvolvido neste trabalho com resultados apresentados em **Andrade**^[1] que são referentes à análise de placas através do Método dos Elementos de Contorno com a utilização do conceito de “apoio HARD” apresentado por *Mindlin* em um de seus trabalhos. A comparação é feita ainda com valores teóricos, como pode ser visto na tabela 5.2.1.1, obtidos em **Bares**^[2].

5.2.2 EXEMPLO 2

- Placa engastada nas quatro bordas submetida a carregamento uniformemente distribuído:

O dados do problema são idênticos aos do exemplo 1, modificando-se apenas o tipo de vinculação como apresentado na figura abaixo:

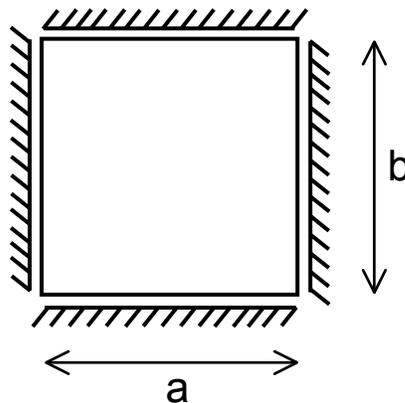


Figura 5.3 – Vinculação da Placa.

Os resultados a seguir foram obtidos para o centro da placa.

	Bares ^[2]	Andrade ^[1]	Programa		
			Malha 4x4	Malha 8x8	Malha 10x10
Deslocamento Vertical ($\times 10^{-6}$ m)	-2.211	-2.222	-2.243	-2.223	-2.223

Tabela 5.2 – Deslocamento vertical no centro da placa.

A apresentação dos resultados para malhas diferentes de elementos finitos se dá com a finalidade de verificação da convergência dos resultados dos exemplos apresentados. Tanto no exemplo 1 quanto neste exemplo, foi utilizada integração reduzida nas parcelas referentes ao cisalhamento com a finalidade de contornar o efeito de travamento por cortante, pois se tratam de placas consideradas finas.

A figura a seguir refere-se aos deslocamentos verticais nos nós da placa.

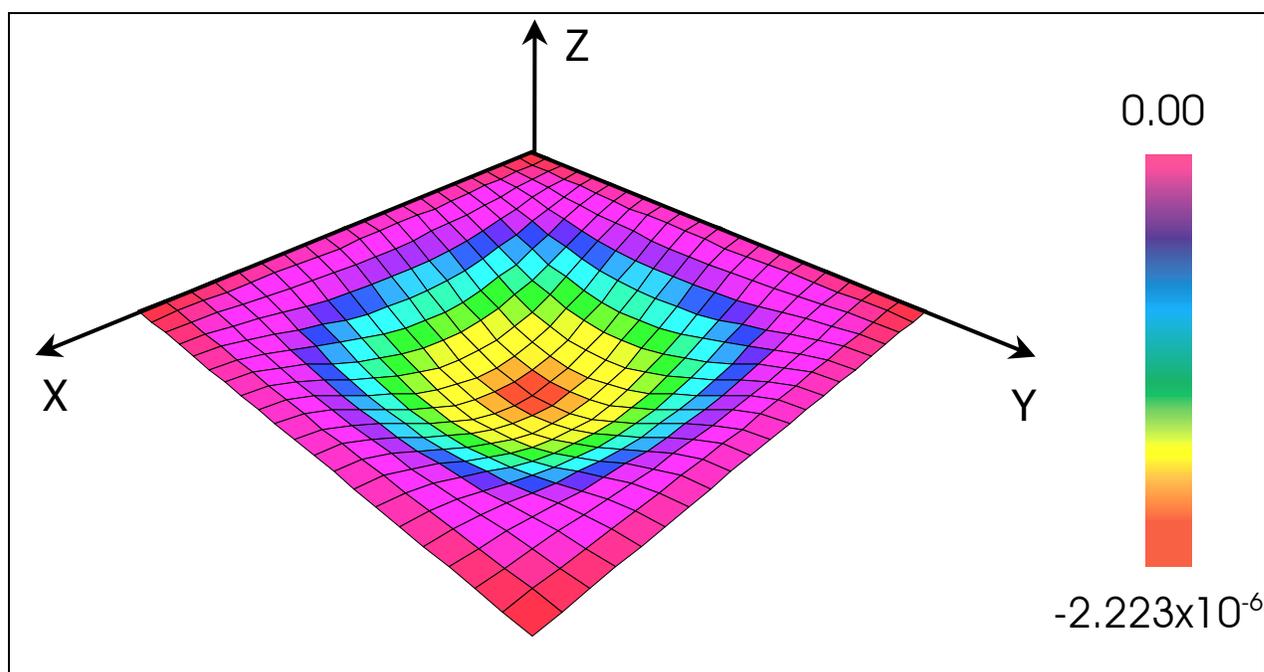


Figura 5.4 – Deslocamento Vertical em metros nos nós para Malha 10x10.

5.2.3 EXEMPLO 3

- Placa com três bordas engastadas e uma livre submetida a carregamento uniformemente distribuído:

O dados do problema são idênticos aos do exemplo 1, modificando-se apenas o tipo de vinculação e os Coeficientes de Poisson:

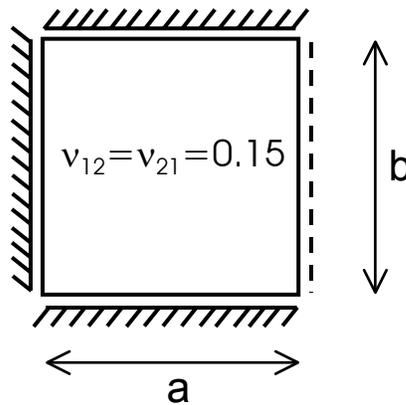


Figura 5.5 – Vinculação da Placa.

Os resultados a seguir foram obtidos para o centro da placa.

	Bares ^[2]	Andrade ^[1]	Programa		
			Malha 4x4	Malha 8x8	Malha 10x10
Deslocamento Vertical ($\times 10^{-6}$ m)	-3.266	-3.248	-3.264	-3.252	-3.252

Tabela 5.3 – Deslocamento vertical no centro da placa.

Vale lembrar que os resultados obtidos em **Bares**^[2] são baseados nas Hipóteses de *Poisson* e *Kirchhoff* para placas consideradas finas e que o presente trabalho tem sua formulação fundamentada na Teoria de Placas espessas ou moderadamente espessas apresentada por *Reissner* e *Mindlin*. Esse fato pode explicar algumas diferenças entre os resultados obtidos pelo programa aqui desenvolvido e resultados teóricos obtidos na literatura.

A figura a seguir é referente aos deslocamentos verticais nos nós dos elementos da placa.

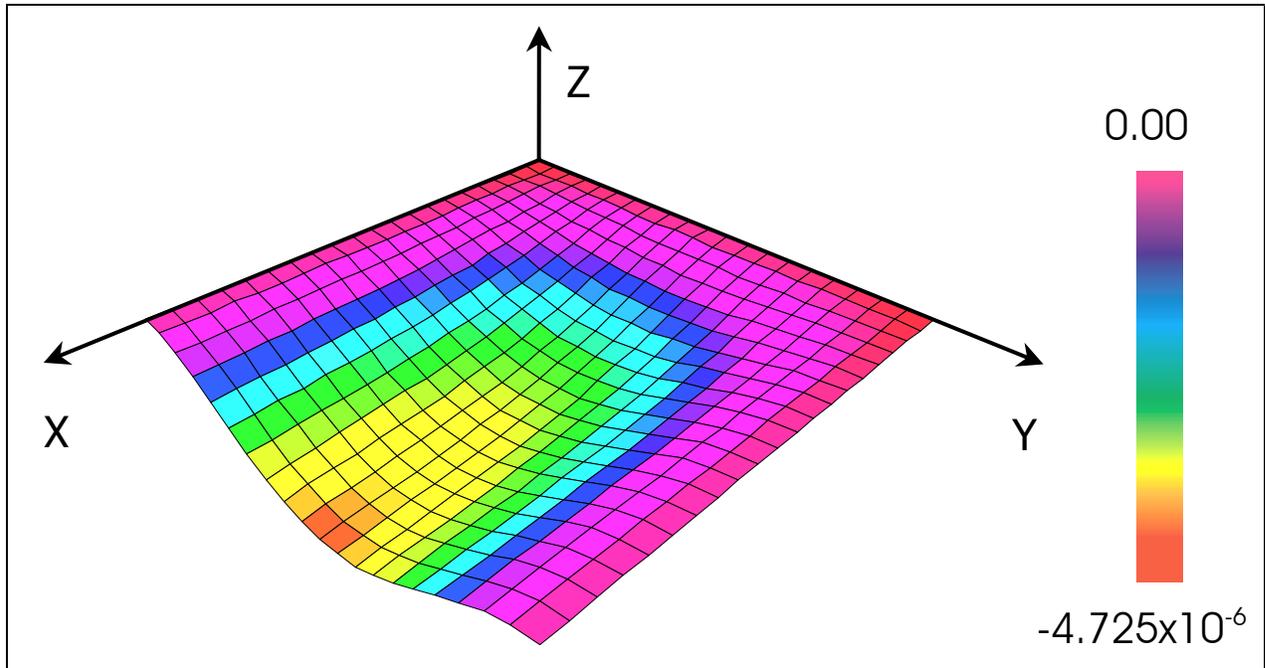


Figura 5.6 – Deslocamento Vertical em metros nos nós para Malha 10x10.

5.2.4 EXEMPLO 4

- Placa com duas bordas engastadas e as demais livres submetida a carregamento uniformemente distribuído:

O dados do problema são idênticos aos dos exemplos anteriores, modificando-se apenas o tipo de vinculação e os Coeficientes de Poisson:

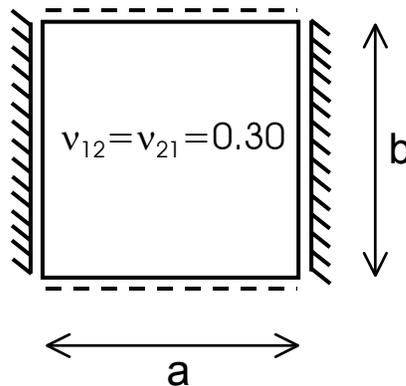


Figura 5.7 – Vinculação da Placa.

Os resultados a seguir foram obtidos para o centro da placa.

	Bares ^[2]	Andrade ^[1]	Programa		
			Malha 4x4	Malha 8x8	Malha 10x10
Deslocamento Vertical ($\times 10^{-6}$ m)	-4.09	-4.09	-4.09	-4.09	-4.09

Tabela 5.4 – Deslocamento vertical no centro da placa.

Pode-se verificar, através dos resultados apresentados na tabela 5.4, a convergência dos resultados já com a menor malha utilizada, sendo confirmada pelos resultados obtidos para as demais malhas.

Verifica-se ainda que os resultados não sofrem influência do efeito de travamento cortante, visto que a relação entra a espessura e as dimensões da placa no plano é de 3%, o que caracteriza a placa como sendo fina.

Novamente, com auxílio do programa “Mathematica”, apresentam-se graficamente os deslocamento verticais nos nós dos elementos da placa para a malha 10x10

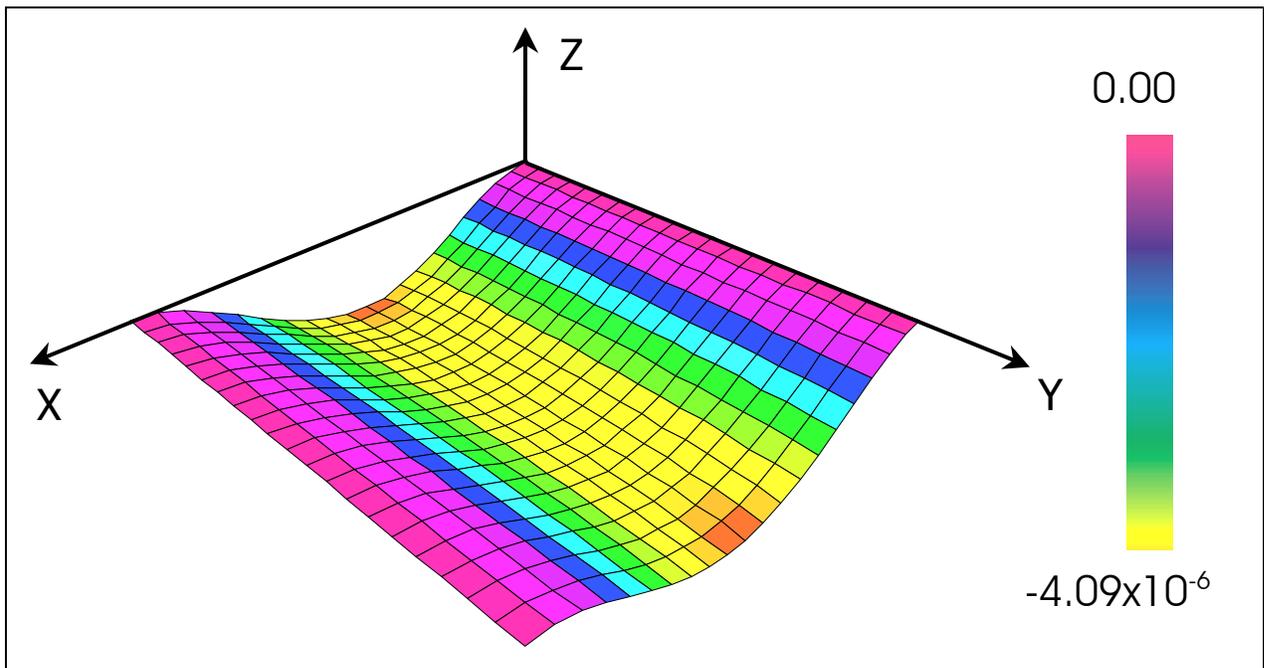


Figura 5.8 – Deslocamento Vertical em metros nos nós para Malha 10x10.

5.2.5 EXEMPLO 5

- Placa com três bordas apoiadas e uma livre submetida a carregamento uniformemente distribuído:

O dados do problema são idênticos aos dos exemplos anteriores, modificando-se apenas o tipo de vinculação e os Coeficientes de Poisson:

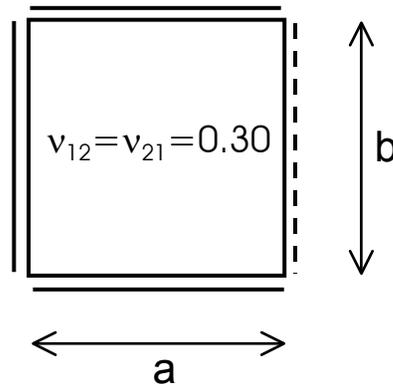


Figura 5.9 – Vinculação da Placa.

Os resultados a seguir foram obtidos para o centro da placa.

	Bares ^[2]	Andrade ^[1]	Programa		
			Malha 4x4	Malha 8x8	Malha 10x10
Deslocamento Vertical ($\times 10^{-5}$ m)	-1.251	-1.257	-1.257	-1.257	-1.256

Tabela 5.5 – Deslocamento vertical no centro da placa.

Novamente verifica-se a rápida convergência dos resultados com a variação do número de elementos da malha de elementos finitos adotada para o exemplo.

A figura é referente aos deslocamentos verticais nos nós dos elementos da placa.

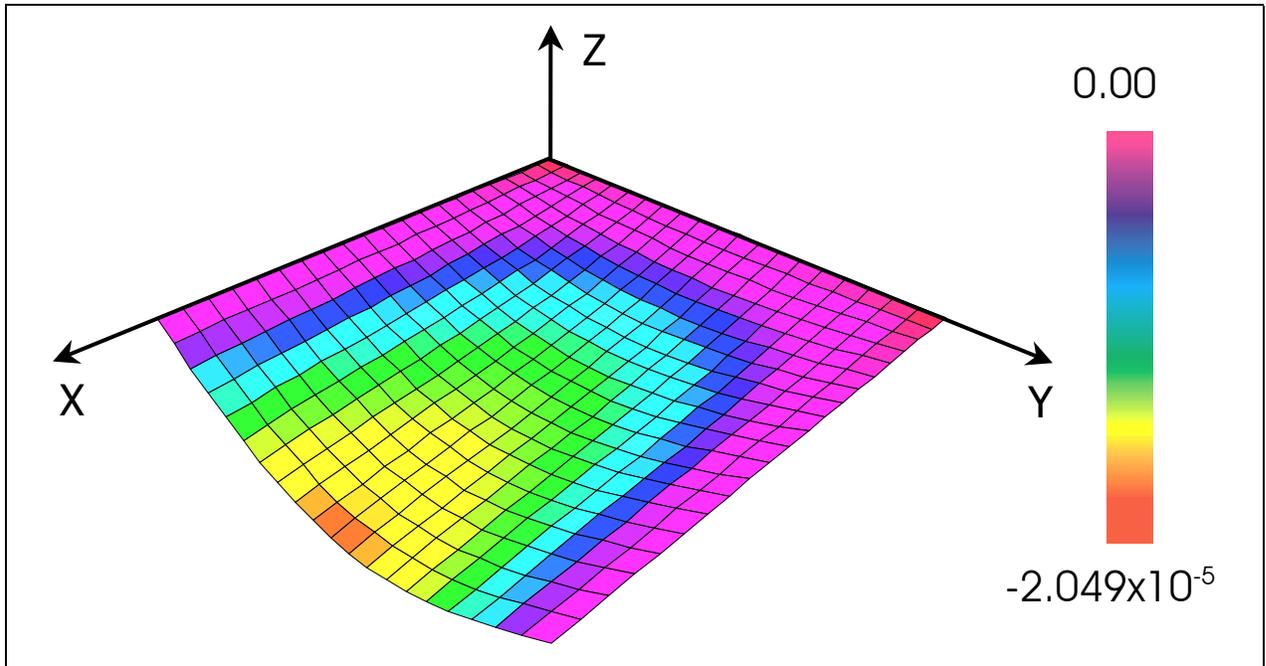


Figura 5.10 – Deslocamento Vertical em metros nos nós para Malha 10x10.

5.2.6 EXEMPLO 6

- Placa simplesmente apoiada nas 4 bordas submetida a carregamento uniformemente distribuído:

DADOS GERAIS:

Os valores apresentados a seguir são adimensionais como apresentado em **Hinton e Owen^[11]** e são:

- $E_1 = E_2 = 10920 (F/d^2)$
- $G_{12} = G_{13} = G_{23} = E_1 / (2 (1 + \nu_{12})) = 4200 (F/d^2)$
- Espessura $h = 0.1 d$
- Carga Distribuída $q = - 1.00 (F/d^2)$
- $a = b = 1.00 d$
- Malhas de elementos finitos: 4 x 4, 8 x 8 e 10 x 10 elementos de 9 nós
- Coeficiente de Poisson $\nu_{12} = \nu_{21} = 0.3$
- Excentricidade da Camada = 0.0 d
- Integração Completa nas parcelas de cisalhamento

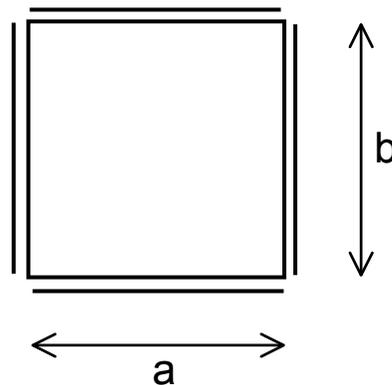


Figura 5.11 – Vinculação da Placa.

Os resultados da Tabela 5.6 que são referentes ao deslocamento vertical e da Tabela 5.7 referentes aos momentos fletores por unidade de comprimento, são apresentados a seguir e foram obtidos para o centro da placa.

	Hinton e Owen ^[11]	Programa PZ (malha 8x8)	Programa		
			Malha 4x4	Malha 8x8	Malha 10x10
Deslocamento Vertical ($\times 10^{-2}$ d)	-0.4272	-0.4256	-0.4256	-0.4272	-0.4272

Tabela 5.6 – Deslocamento vertical no centro da placa.

O exemplo apresenta convergência rápida para os valores de deslocamento vertical quando se aumenta o número de elementos utilizados na malha de elementos finitos.

	Hinton e Owen ^[11]	Programa PZ (malha 8x8)	Programa		
			Malha 4x4	Malha 8x8	Malha 10x10
$M_{xx} = M_{yy}$ (F.d)/d	0.0479	0.0486	0.0468	0.0477	0.0477

Tabela 5.7 – Momento Fletor no centro da placa.

O programa PZ, como pode ser visto em **Devloo**^[7], é na realidade um ambiente de programação orientada a objetos baseado no Método dos Elementos finitos, no qual se encontram implementados elementos finitos uni e bidimensionais, com ordem de interpolação arbitrária, aplicáveis a variados sistemas de equações diferenciais.

Este ambiente de programação encontra-se em desenvolvimento e constante aperfeiçoamento na Faculdade de Engenharia Civil da UNICAMP, sob responsabilidade do Prof. Dr. Philippe Remy Bernard Devloo.

Como apresentado nos exemplos anteriores, segue figura obtida através do Programa “Mathematica” representando os deslocamentos verticais nos nós dos elementos da placa.

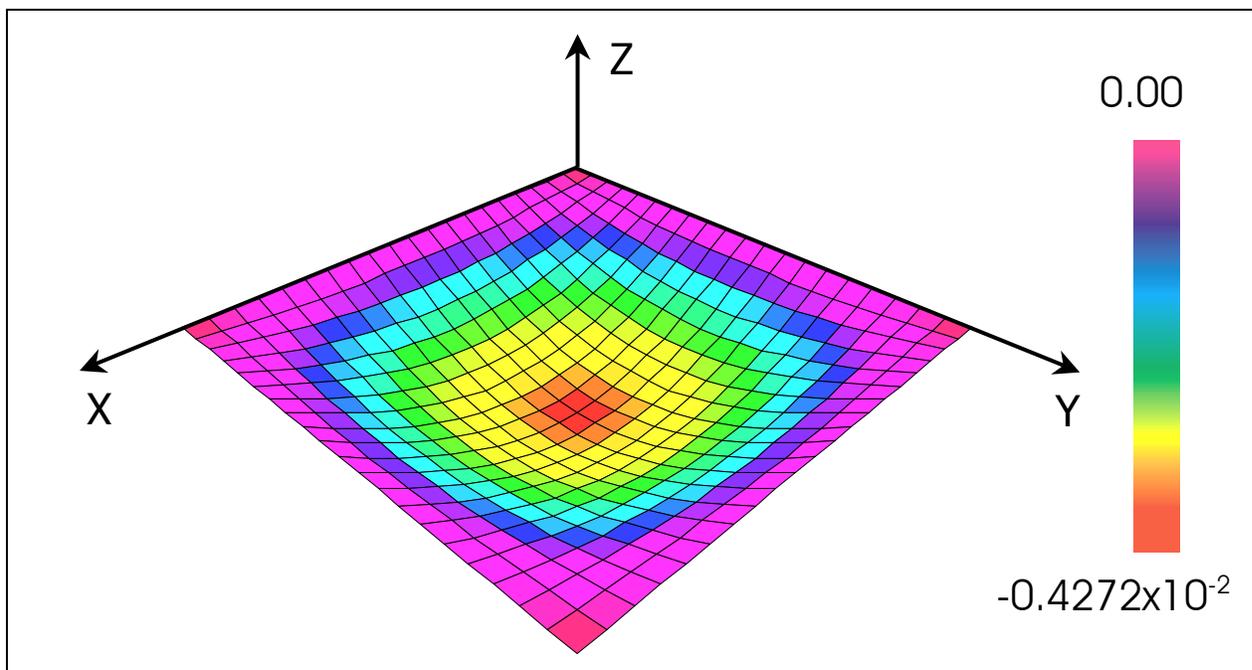


Figura 5.12 – Deslocamento Vertical nos nós para Malha 10x10.

5.2.7 EXEMPLO 7

- Placa com duas bordas apoiadas e demais livres, submetida a carregamento uniformemente distribuído:

DADOS GERAIS:

- $E_1 = E_2 = 1.0 \times 10^9 \text{ N/m}^2$
- $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 5.0 \times 10^8 \text{ N/m}^2$
- Espessura $h = 0.25 \text{ m}$
- Carga Distribuída $q = -200 \text{ N/m}^2$
- $a = b = 2 \text{ m}$
- Malha de elementos finitos: 8×8 elementos de 9 nós
- Coeficiente de Poisson $\nu_{12} = \nu_{21} = 0.0$
- Excentricidade da Camada = 0.0 m
- Integração Reduzida nas parcelas de cisalhamento

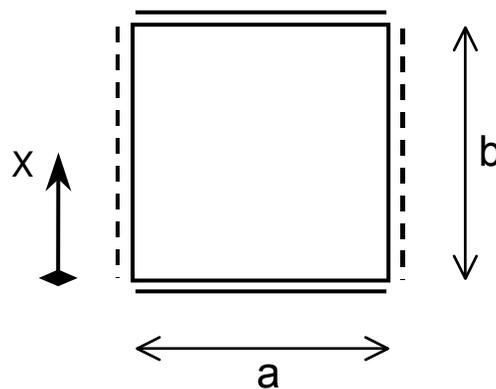


Figura 5.13 – Vinculação da Placa.

Os resultados a seguir foram obtidos para o centro da placa e são comparados com resultados obtidos utilizando-se o programa de elementos finitos ANSYS, bem como com resultados teóricos segundo apresentado em **Bares**^[2].

	Programa Ansys	Bares ^[2]	Programa Malha 8x8
Deslocamento Vertical ($\times 10^{-5}$ m)	-3.164	-3.360	-3.296

Tabela 5.8 – Deslocamento vertical no centro da placa.

Os resultados a seguir são referentes às tensões ao longo de uma das bordas livres na direção das mesmas e foram obtidas para os pontos de Gauss utilizados no programa desenvolvido.

Para isso, com as tensões obtidas nos nós através do programa ANSYS, foram calculadas as tensões nos pontos de Gauss através de interpolação dos valores nodais utilizando-se funções quadráticas.

Esses valores são apresentados na Tabela 5.9 abaixo.

	Tensão em (N/m^2)/m	
Posição x (m)	Programa Ansys	Programa Malha 8x8
0.0528	-1257.09	-987.564
0.1972	-3566.65	-3412.436
0.3028	-5014.36	-4933.975
0.4472	-6664.06	-6666.025
0.5528	-7629.21	-7680.385
0.6972	-8619.06	-8719.625
0.8028	-9101.65	-9226.795
0.9472	-9431.64	-9573.205

Tabela 5.9 – Tensão no topo da placa.

No Programa ANSYS, utilizou-se o elemento “Shell 63” para se efetuar a análise do exemplo proposto. Esse elemento, segundo o manual do usuário do programa, pode ser aplicado às placas classificadas entre finas e moderadamente espessas e possui capacidade de considerar tanto efeito de flexão quanto efeito de

membrana para análise linear elástica. O elemento de placa pode ser composto por material com propriedades ortotrópicas cujas direções de ortotropia correspondem com as direções das coordenadas do elemento. São permitidos carregamentos tanto perpendiculares como também no plano dos elementos. O elemento possui 6 graus de liberdade, sendo: 3 translações (nas direções x , y e z) e 3 rotações (em torno dos eixos x , y e z). Na Figura 5.14 estão apresentadas as características geométricas do elemento, com a apresentação dos nós, faces e sistemas de coordenadas que compõem o elemento.

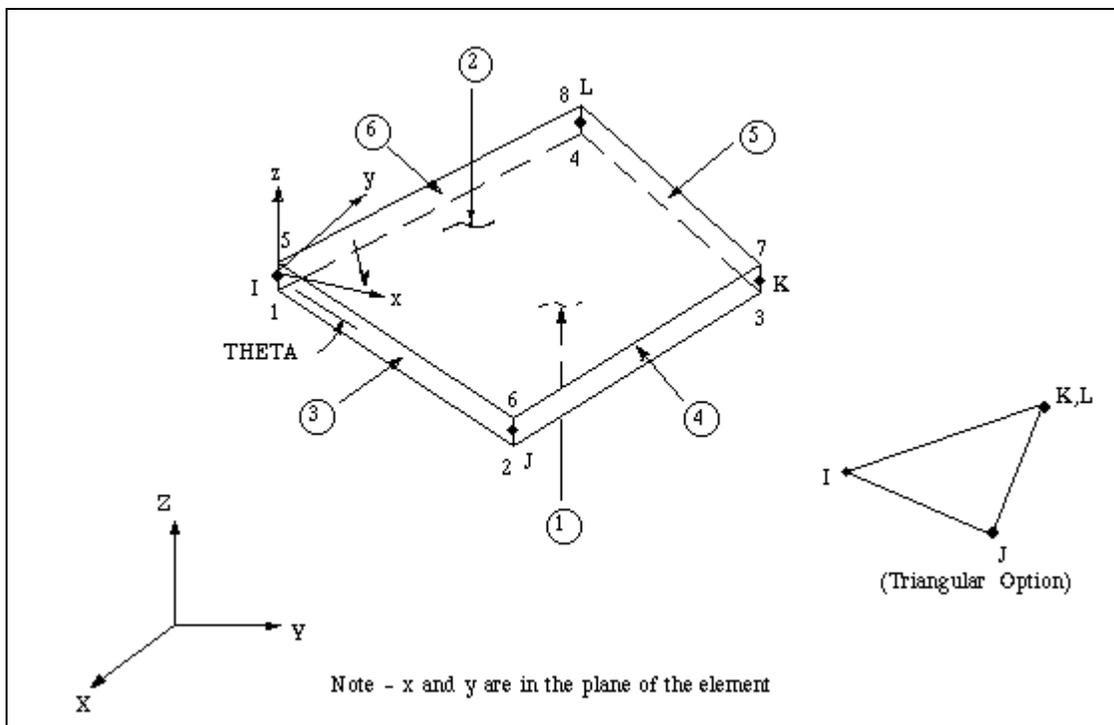


Figura 5.14 – Elemento “Shell 63” – Manual do Usuário do Programa ANSYS.

(Figura extraída do Manual do Usuário do Programa ANSYS 5.2)

O programa fornece como solução os deslocamentos nodais (translações e rotações) bem como os esforços e tensões numa dada posição dos elementos da malha adotada segundo uma notação adequada como ilustrado na figura 5.15 que segue abaixo.

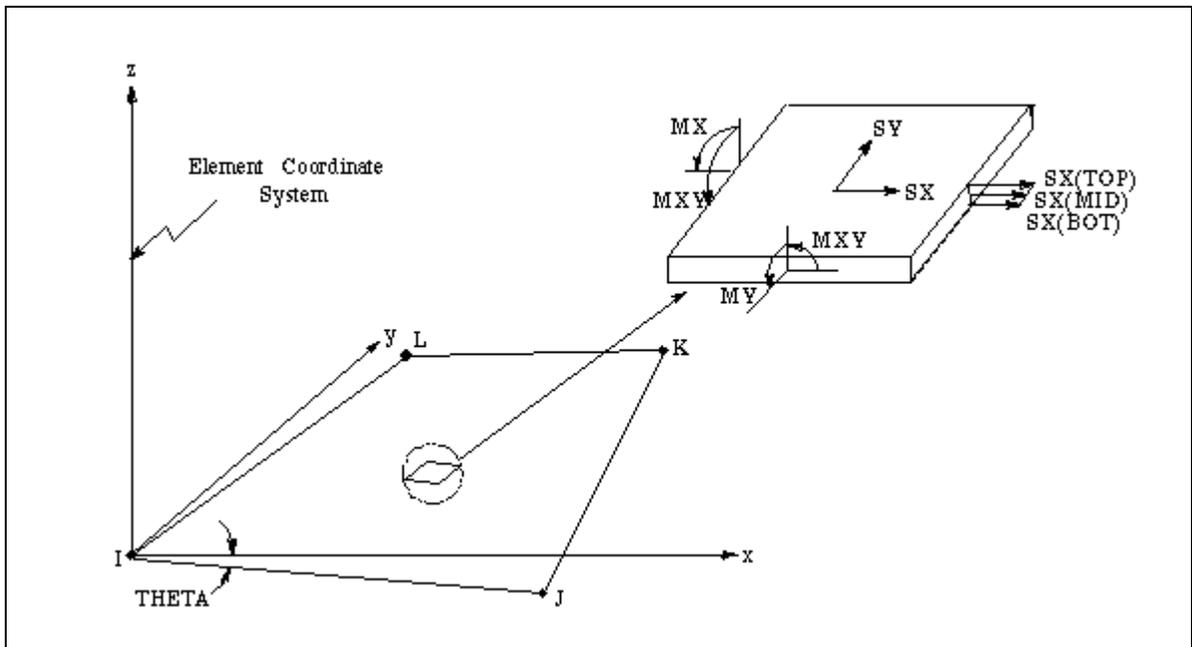


Figura 5.15 – Esforços e Tensões no elemento “Shell 63”.
 (Figura extraída do Manual do Usuário do Programa ANSYS 5.2)

A figura abaixo é referente aos deslocamentos verticais nos nós dos elementos da placa.

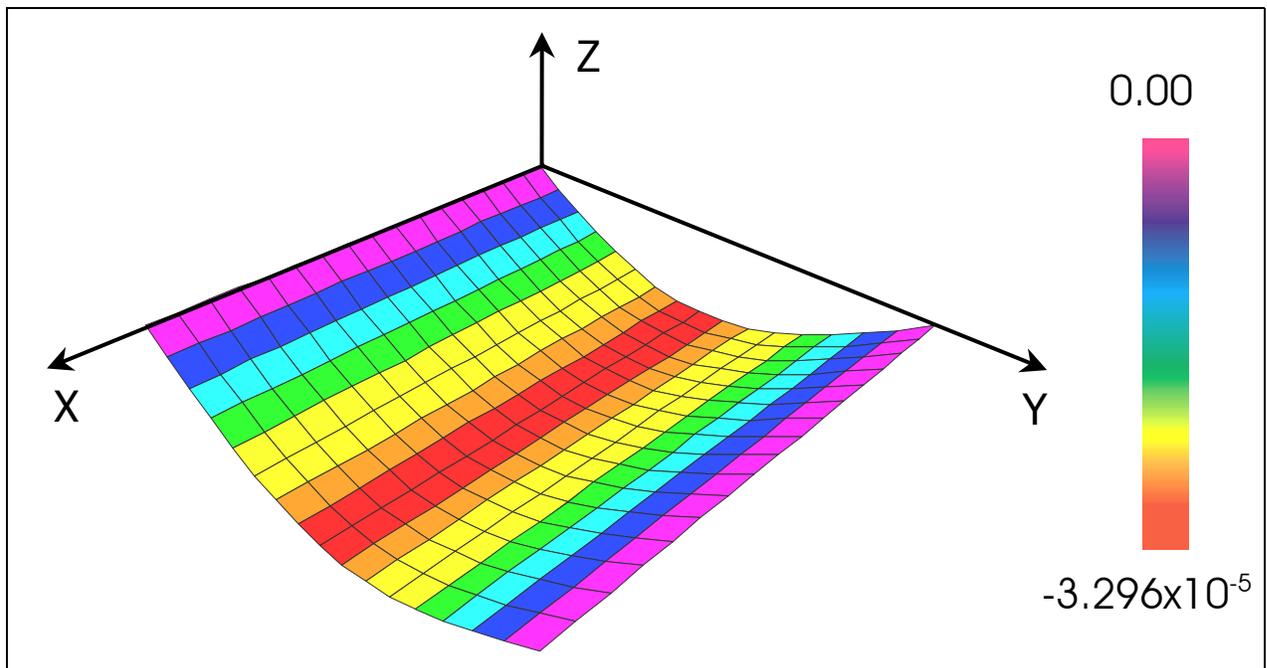


Figura 5.16 – Deslocamento Vertical em metros nos nós para Malha 8x8.

5.2.8 EXEMPLO 8

- Placa com uma borda engastada e demais bordas livres, submetida a carregamento uniformemente distribuído:

O dados do problema são idênticos aos do exemplo anterior, modificando-se apenas o tipo de vinculação:

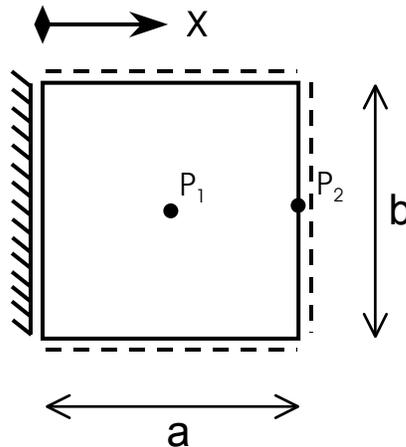


Figura 5.17 – Vinculação da Placa.

Os resultados a seguir foram obtidos para o ponto P_1 no centro da placa e para o ponto P_2 no centro da borda livre oposta à borda engastada.

Pode-se comparar esses resultados aos obtidos através da Resistência dos Materiais para uma viga isostática engastada em uma borda e em balanço na outra, pelo fato de os Coeficientes de Poisson terem sido adotados iguais a zero o que significa que a placa assume um comporta isotrópico.

Deslocamento Vertical ($\times 10^{-4}$ m)	Resistência Dos Materiais	Programa Malha 8x8
P_1	-1.1168	-1.1170
P_2	-3.1104	-3.1100

Tabela 5.10 – Deslocamento vertical nos pontos P_1 e P_2 .

Vale salientar que os resultados obtidos segundo a Resistência dos Materiais foram calculados levando-se em consideração tanto o efeito de flexão quanto o efeito de cisalhamento na deformação.

Para o momento fletor, os valores são calculados nos pontos de Gauss, novamente pelo fato de o programa fornecer os resultados nos referidos pontos.

Posição x (m)	Momento Fletor (N.m)/m	
	Resistência dos Materiais	Programa Malha 8x8
0.0528	-379.159	-379.147
0.1972	-325.009	-325.020
0.3028	-288.049	-288.038
0.4472	-241.119	-241.128
0.5528	-209.439	-209.430
0.6972	-169.729	-169.737
0.8028	-143.329	-143.321
0.9472	-110.839	-110.845
1.0528	-89.719	-89.713
1.1972	-64.449	-64.454
1.3028	-48.609	-48.604
1.4472	-30.559	-30.562
1.5528	-19.999	-19.996
1.6972	-9.169	-9.171
1.8028	-3.889	-3.888
1.9472	-0.279	-0.279

Tabela 5.11 – Momento Fletor nos pontos P_1 e P_2 .

O sinal negativo é referente a tração na parte superior da seção transversal da placa.

A figura a seguir é referente aos deslocamentos verticais nos nós da placa obtidos no programa desenvolvido e plotados com auxílio do programa “Mathematica” como vem sendo feito em todos os exemplos até aqui apresentados.

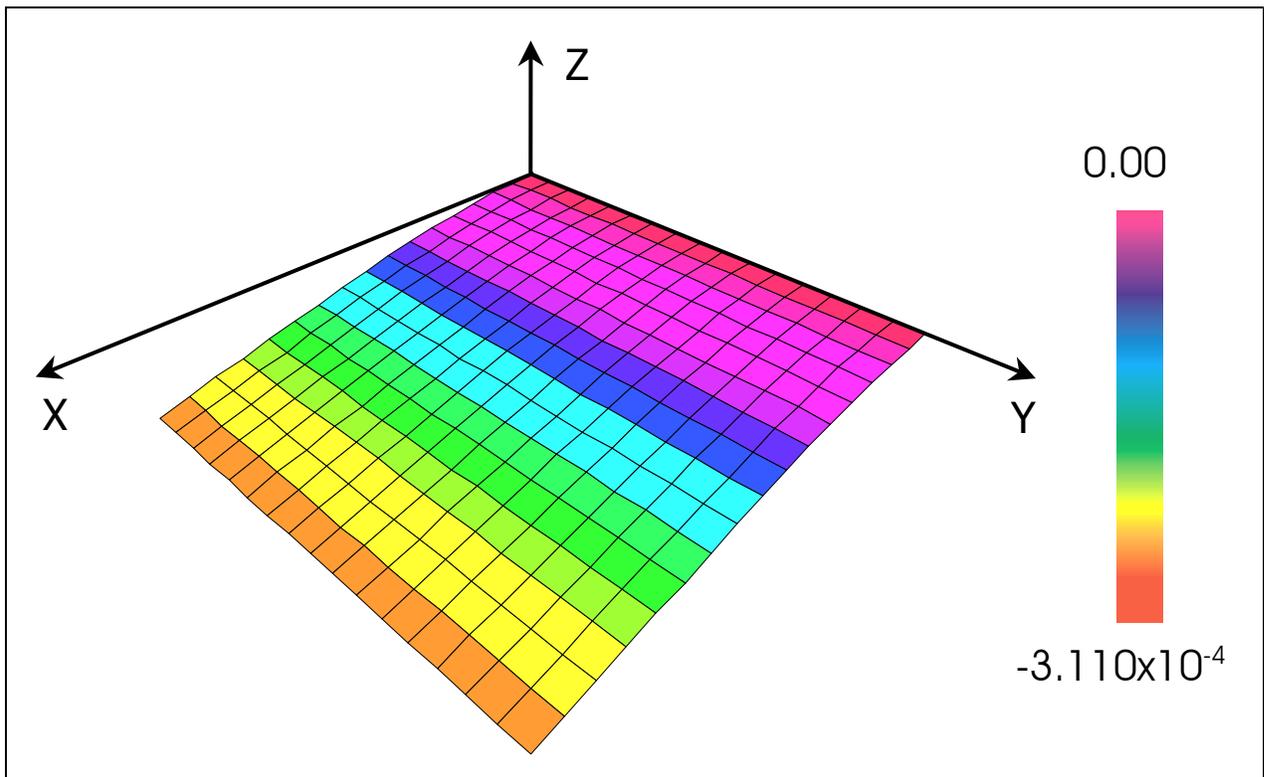


Figura 5.18 – Deslocamento Vertical em metros nos nós para Malha 8x8.

5.2.9 EXEMPLO 9

- Placa engastada nas 4 bordas com carregamento concentrado aplicado no centro da placa na direção “z”:

DADOS GERAIS:

Os valores apresentados a seguir são adimensionais como apresentado em **Klinkel et al^[13]** e são:

- $E_1 = E_2 = 10000$
- $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 3846.154$
- Espessura $h = 1$
- Carga Concentrada no Centro da Placa $F = - 16.367$
- $a = b = 100$
- Malha de elementos finitos: 10 x 10 elementos de 9 nós
- Coeficiente de Poisson $\nu_{12} = \nu_{21} = 0.3$
- Excentricidade da Camada = 0.0
- Integração Reduzida nas parcelas de cisalhamento

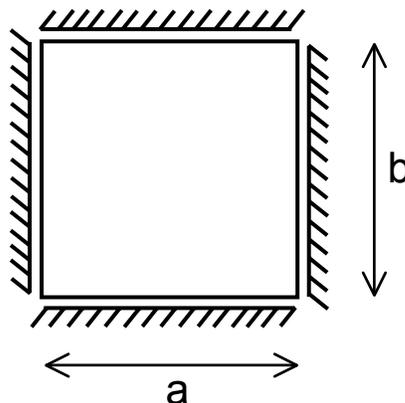


Figura 5.19 – Vinculação da Placa.

Os deslocamentos verticais foram obtidos para o centro da placa e são comparados com diversos autores bem como com resultados obtidos utilizando-se o programa “ANSYS” e são apresentados na Tabela 5.12 a seguir.

	Timoshenko & Woinowsky-Krieger ^[36]	Klinkel et al ^[13]	Liu ^[17]	Programa Ansys	Programa Malha 10x10
Deslocamento Vertical	-1.001	-0.867	-1.001	-1.019	-1.009

Tabela 5.12 – Deslocamento vertical no centro da placa.

A figura abaixo é referente aos deslocamentos verticais nos nós dos elementos da placa.

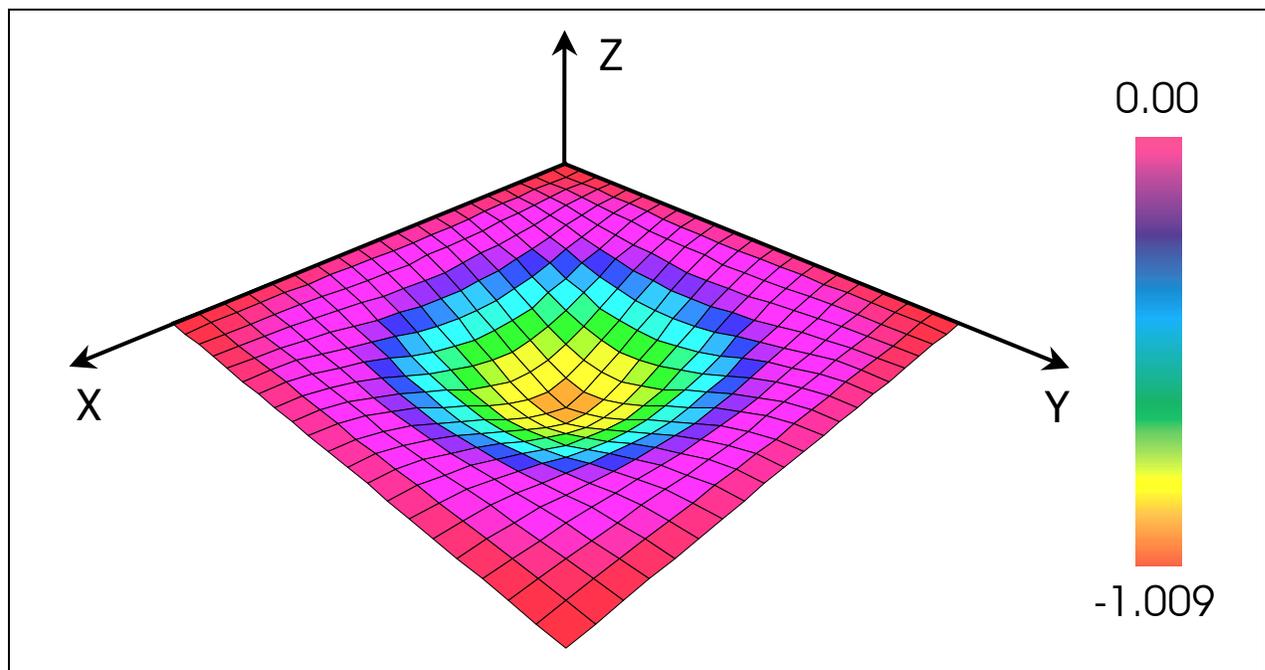


Figura 5.20 – Deslocamento Vertical nos nós para Malha 10x10.

5.2.10 EXEMPLO 10

- Placa simplesmente apoiada sobre base elástica com carga concentrada aplicada no centro da placa:

DADOS GERAIS:

- $E_1 = E_2 = 2 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$
- $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 8568980.291 \text{ kN/m}^2$
- Espessura $h = 0.5 \text{ m}$
- Carga Concentrada no Centro da Placa $F = -1 \text{ kN}$
- $a = b = 10 \text{ m}$
- Malha de elementos finitos: 10×10 elementos de 9 nós
- Coeficiente de Poisson $\nu_{12} = \nu_{21} = 0.167$
- Excentricidade da Camada = 0.0 m
- Integração: 2 casos - Completa e Reduzida nas parcelas de cisalhamento
- Constante elástica do solo $k_{\text{solo}} = 562 \text{ kN/m}^3$

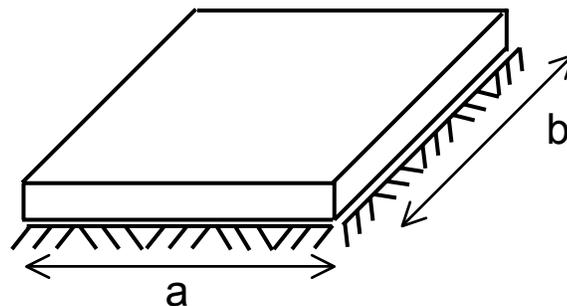


Figura 5.21 – Vinculação da Placa.

	Timoshenko & Woinowsky-Krieger apud ^[9]	Eratil & Aköz ^[9]	Programa Integração Reduzida	Programa Integração Completa
Deslocamento Vertical ($\times 10^{-4} \text{ m}$)	-4.5339	-5.1070	-4.6597	-0.2104

Tabela 5.13 – Deslocamento vertical no centro da placa.

A representação de vinculação que aparece na Figura 5.21 e não se encontra listada na legenda apresentada no início do capítulo, representa a placa totalmente apoiada sobre uma fundação elástica não possuindo nenhum outro tipo de vinculação.

Os resultados apresentados na Tabela 5.13 são referentes ao deslocamento vertical no centro da placa.

O valor do deslocamento no centro da placa obtido pelo programa elaborado com a formulação em estudo, usando integração reduzida, e os valores encontrados na literatura na referência [9] são bastante próximos. Esses valores, entretanto, são bastante discrepantes daquele encontrado com o programa da dissertação usando integração completa. Pelos resultados encontrados, percebe-se nitidamente que a placa modelada com integração completa está excessivamente rígida, fato que parece constatar o aparecimento do fenômeno de travamento (shear-locking).

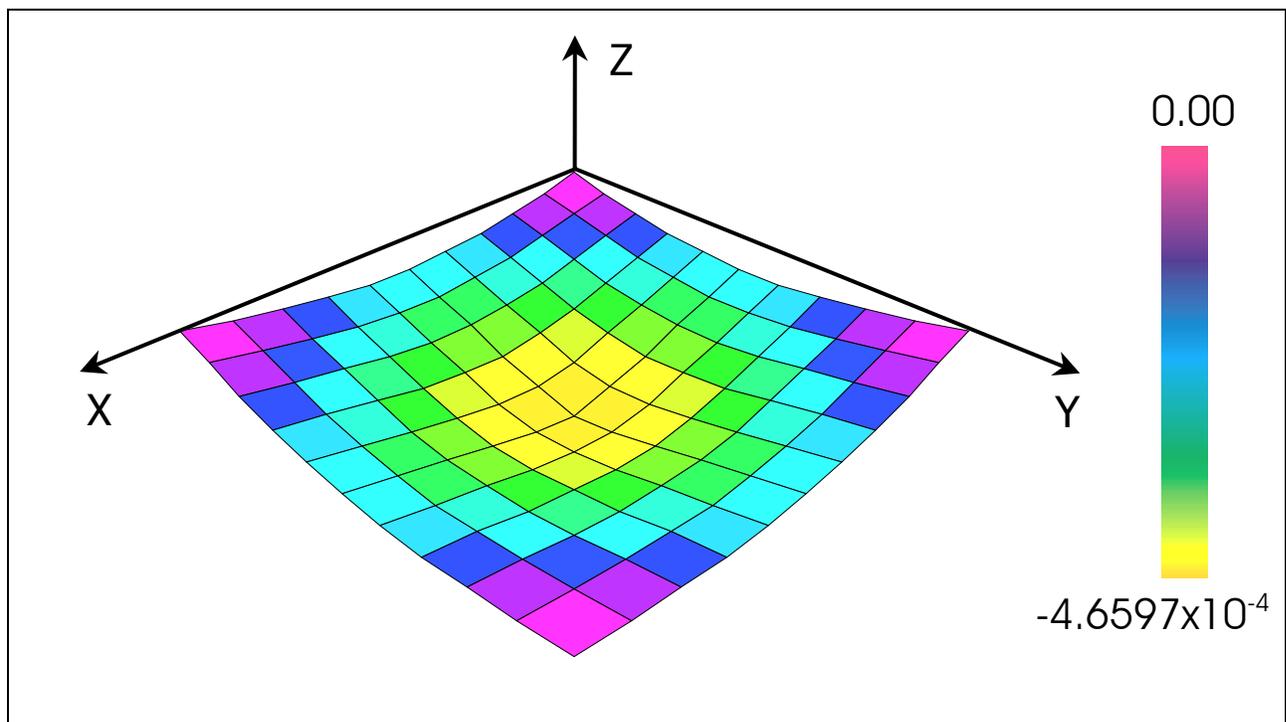


Figura 5.22 – Deslocamento Vertical em metros nos nós para Malha 10x10.

5.2.11 EXEMPLO 11

- Placa simplesmente apoiada sobre base elástica com carregamento uniformemente distribuído:

Os dados do problema são idênticos ao do exemplo anterior, modificando-se apenas o tipo de carregamento aplicado. Neste exemplo aplica-se uma carga distribuída em toda a placa de valor $q = -3 \text{ kN/m}^2$:

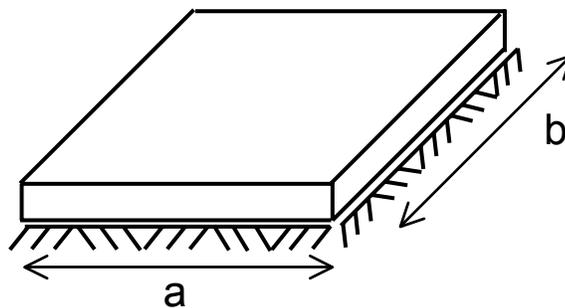


Figura 5.23 – Vinculação da Placa.

Os resultados a seguir foram obtidos para o centro da placa, embora sejam constantes para toda a placa como pode ser visto na Figura 5.24.

	Timoshenko & Woinowsky-Krieger apud ^[9]	Eratil & Aköz ^[9]	Programa Ansys	Programa Malha 10x10
Deslocamento Vertical ($\times 10^{-3} \text{ m}$)	-5.4514	-5.2660	-5.3381	-5.3381

Tabela 5.14 – Deslocamento vertical no centro da placa.

Tanto no exemplo anterior quanto neste exemplo, a comparação com o programa ANSYS foi feita utilizando-se o mesmo elemento “Shell 63” apresentado no Exemplo 7 deste Capítulo. Para este elemento, a rigidez da fundação elástica é definida pressão requerida para realizar uma deformação normal unitária na fundação. A rigidez

da fundação incluída nos elementos, é transferida para os nós desses elementos como sendo molas na direção normal ao plano dos mesmos. Cada nó receberá uma contribuição correspondente da rigidez da fundação sendo,

$$K_{f,i} = \frac{\Delta K_f}{N_d} \quad (5.1)$$

onde: $K_{f,i}$ = Rigidez do nó "i";
 Δ = Área do elemento;
 K_f = Rigidez da Fundação;
 N_d = Número de nós do elemento;

A figura a seguir representa os deslocamentos verticais nodais da placa e deixa claro que quando a placa é submetida a um carregamento uniformemente distribuído em toda a sua superfície, estando apenas e totalmente apoiada sobre a base elástica, os deslocamentos verticais nodais são uniformes e iguais para toda a placa, não aparecendo portanto tensões ou esforços internos na placa.

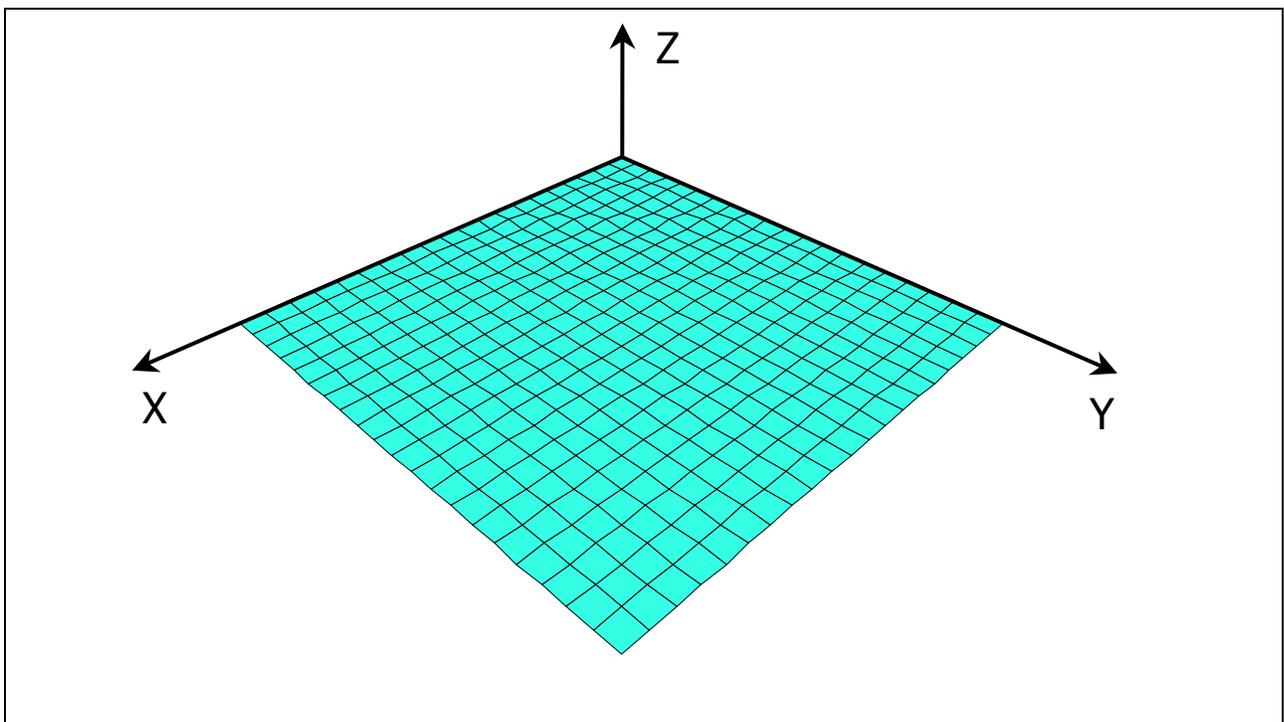


Figura 5.24 – Deslocamento Vertical em metros nos nós para Malha 10x10.

5.2.12 EXEMPLO 12

- Placa com 2 bordas engastadas e demais livres, submetida a carregamento uniformemente distribuído:

DADOS GERAIS:

- $E_1 = E_2 = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
- $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
- Espessura $h = 0.1 \text{ m}$
- Carga Distribuída $q = -200 \text{ N/m}^2$
- $a = b = 2.0 \text{ m}$
- Malha de elementos finitos: variável
- Coeficiente de Poisson $\nu_{12} = \nu_{21} = 0.0$
- Excentricidade da Camada = 0.0 m
- Integração reduzida nas parcelas de cisalhamento

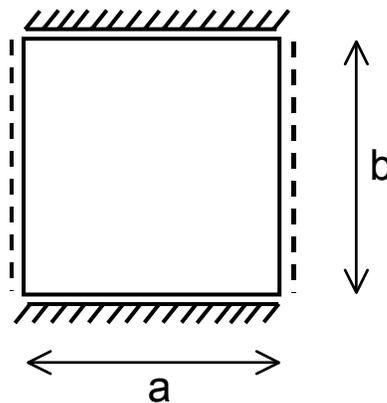


Figura 5.25 – Vinculação da Placa.

Este exemplo tem a finalidade de comparar os resultados dos deslocamentos obtidos para um mesmo problema, variando-se o número de elementos utilizados na malha de elementos finitos, bem como comparar os resultados utilizando uma mesma malha e modificando o tipo de elemento finito da malha, ou seja, utilizando elementos de 4, 8 e 9 nós.

Os resultados apresentados na Tabela 5.15 que se segue foram obtidos para o centro da placa.

Nós por Elemento	Malha	Deslocamento Vertical ($\times 10^{-6}$ m)
4	4x4	-0.3870
	8x8	-0.4808
	10x10	-0.4920
8	4x4	-0.5120
	8x8	-0.5120
	10x10	-0.5120
9	4x4	-0.5120
	8x8	-0.5120
	10x10	-0.5120
Resistência dos Materiais		-0.5120

Tabela 5.15 – Deslocamento vertical no centro da placa.

Nota-se, analisando-se os valores apresentados na Tabela 5.15, que a convergência é rápida, pelo menos com relação aos elementos de 8 e 9 nós. Nota-se ainda que os valores obtidos para estes elementos são iguais ao valor obtido segundo a Resistência dos Materiais para uma viga bi-engastada. Essa comparação pode ser feita pelo fato de os Coeficientes de Poisson terem sido adotados iguais a zero o que significa que a placa assume um comporta isotrópico.

Vale salientar que os resultados obtidos segundo a Resistência dos Materiais foram calculados levando-se em consideração tanto o efeito de flexão quanto o efeito de cisalhamento na deformação.

5.2.13 EXEMPLO 13

- Placa com 3 casos de vinculação submetida a carregamento uniformemente distribuído, calculada para diversas espessuras para fins de comparação entre resultados com integração completa e integração reduzida:

DADOS GERAIS:

- $E_1 = E_2 = 2 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$
- $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 1 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$
- Espessura h variável
- Carga Distribuída $q = -10 \text{ kN/m}^2$
- $a = b = 2.0 \text{ m}$
- Malha de elementos finitos: 10×10 elementos de 9 nós
- Coeficiente de Poisson $\nu_{12} = \nu_{21} = 0.0$
- Excentricidade da Camada = 0.0 m

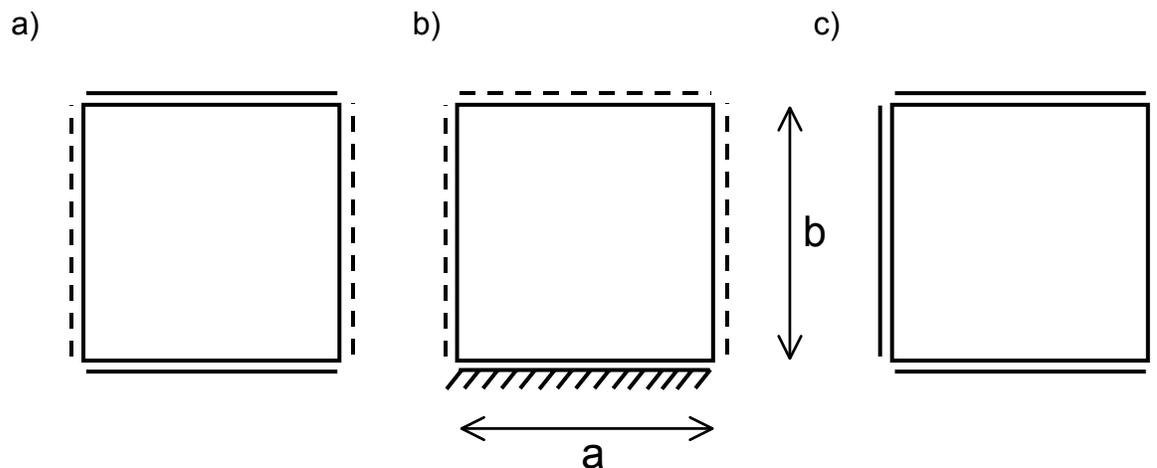


Figura 5.26 – Vinculação da Placa.

Os resultados de deslocamentos verticais a seguir apresentados foram obtidos para integração completa e reduzida nas parcelas de cisalhamento, variando-se a relação h/a da placa.

O primeiro caso é de uma placa com duas bordas apoiadas e duas livres simulando uma viga bi-apoiada, sendo os deslocamentos verticais tomados no centro da placa.

Relação h/a	Deslocamento Vertical em metros		
	Resistência dos Materiais	Integração Completa	Integração Reduzida
1/1	-0.0000045625	-0.0000045625	-0.0000045625
1/2	-0.0000185000	-0.0000184997	-0.0000185000
1/5	-0.0002103130	-0.0002102806	-0.0002103125
1/10	-0.0015925000	-0.0015915385	-0.0015925000
1/20	-0.0125600000	-0.0125350000	-0.0125600000
1/50	-0.1954630000	-0.1944067568	-0.1954625000
1/100	-1.5628000000	-1.5516392857	-1.5628000000

Tabela 5.161 – Deslocamento vertical no centro da placa.

O segundo caso representa uma placa com uma borda engastada e as demais livres, simulando o comportamento de uma viga em balanço. Os deslocamentos são tomados no centro da borda livre oposta à borda engastada.

Relação h/a	Deslocamento Vertical em metros		
	Resistência dos Materiais	Integração Completa	Integração Reduzida
1/1	-0.0000270000	-0.0000270000	-0.0000270000
1/2	-0.0001440000	-0.0001439987	-0.0001440000
1/5	-0.0019350000	-0.0019348724	-0.0019350000
1/10	-0.0151200000	-0.0151161538	-0.0151200000
1/20	-0.1202400000	-0.1201400000	-0.1202400000
1/50	-1.8756000000	-1.8713770270	-1.8755999999
1/100	-15.0012000000	-14.9565571407	-15.0011999981

Tabela 5.17 – Deslocamento vertical no centro da borda em balanço.

O terceiro caso de vinculação é uma placa simplesmente apoiada nas quatro bordas. Os deslocamentos são tomados no centro da placa.

Relação H/a	Deslocamento Vertical em metros		
	Bares ^[2]	Integração Completa	Integração Reduzida
1/1	-0.0000004870	-0.0000022556	-0.0000022557
1/2	-0.000003896	-0.0000074362	-0.0000074363
1/5	-0.000060875	-0.0000697744	-0.0000697786
1/10	-0.000487000	-0.0005050693	-0.0005051841
1/20	-0.003896000	-0.0039324362	-0.0039353831
1/50	-0.060875000	-0.0609020538	-0.0610262199
1/100	-0.487000000	-0.4863669461	-0.4876793091

Tabela 5.18 – Deslocamento vertical no centro da placa.

Nota-se, analisando-se os dois primeiros casos de vinculação, que os valores de deslocamento vertical obtidos utilizando-se integração reduzida, são iguais aos valores obtidos segundo a Resistência dos Materiais, podendo esta comparação ser feita pelo fato de os Coeficientes de Poisson terem sido adotados iguais a zero o que significa que a placa assume um comporta isotrópico. Os resultados obtidos segundo a Resistência dos Materiais foram calculados levando-se em consideração tanto o efeito de flexão quanto o efeito de cisalhamento na deformação.

Analisando-se os resultados obtidos para o terceiro caso de vinculação, pode-se concluir que para valores de $h/a > 1/10$, os resultados são distantes dos valores teóricos usados para fins de comparação. Isso se deve pelo fato de a formulação utilizada no programa ser aplicável às placas espessas com adaptação para as placas finas e os resultados apresentados por Bares^[2] serem referentes as placas finas, ou seja, desconsiderando o efeito do cisalhamento na deformação.

No caso da adaptação do programa para aplicação às placas finas, não se verificou o surgimento do efeito de travamento cortante, visto que os resultados obtidos aplicando-se integração reduzida, são bem próximos dos resultados teóricos utilizados na comparação.

5.2.14 EXEMPLO 14

- Placa com dois casos de vinculação e dois casos de carregamento:

DADOS GERAIS:

- $E_1 = E_2 = 2.6 \times 10^8 \text{ N/m}^2$
- $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 1 \times 10^8 \text{ N/m}^2$
- Espessura $h = 0.1 \text{ m}$
- Carregamento 1: Carga Distribuída $q = -200 \text{ N/m}^2$
- Carregamento 2: Carga Concentrada no centro da placa $P = -100 \text{ N}$
- $a = b = 2.0 \text{ m}$
- Malha de elementos finitos: 10×10 elementos de 9 nós
- Coeficiente de Poisson $\nu_{12} = \nu_{21} = 0.3$
- Excentricidade da Camada = 0.0 m
- Integração reduzida nas parcelas de cisalhamento

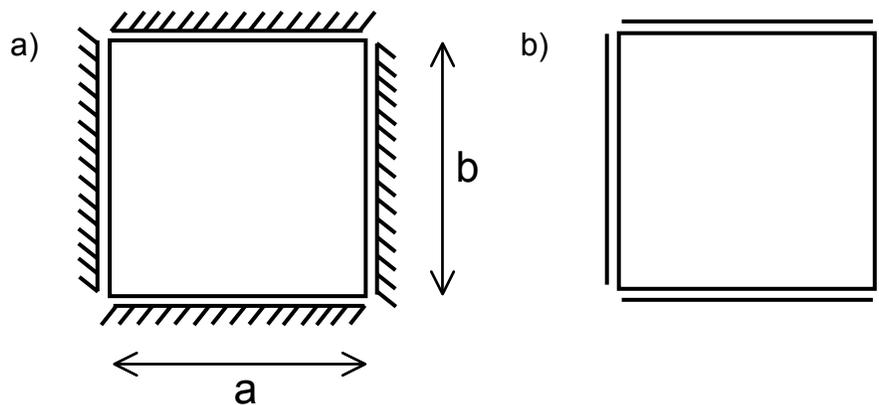


Figura 5.27 – Vinculação da Placa.

Os resultados a seguir foram obtidos no centro da placa para combinações entre os 2 tipos de carregamentos e vinculações apresentados acima. A figura representa os deslocamentos verticais para o caso de carregamento concentrado e 4 bordas simplesmente apoiadas.

Carregamento e Vinculação das Placas	Deslocamento Vertical (m)	
	Liu ^[17]	Programa Malha 10x10
- Carregamento Concentrado - 4 Bordas Simplesmente Apoiadas	-0.0001948800	-0.0002082448
- Carregamento Concentrado - 4 Bordas Engastadas	-0.0000940800	-0.0001080746
- Carregamento Distribuído - 4 Bordas Simplesmente Apoiadas	-0.0005456640	-0.0005530754
- Carregamento Distribuído - 4 Bordas Engastadas	-0.0001693440	-0.0001784243

Tabela 5.19 – Deslocamento vertical no centro da placa.

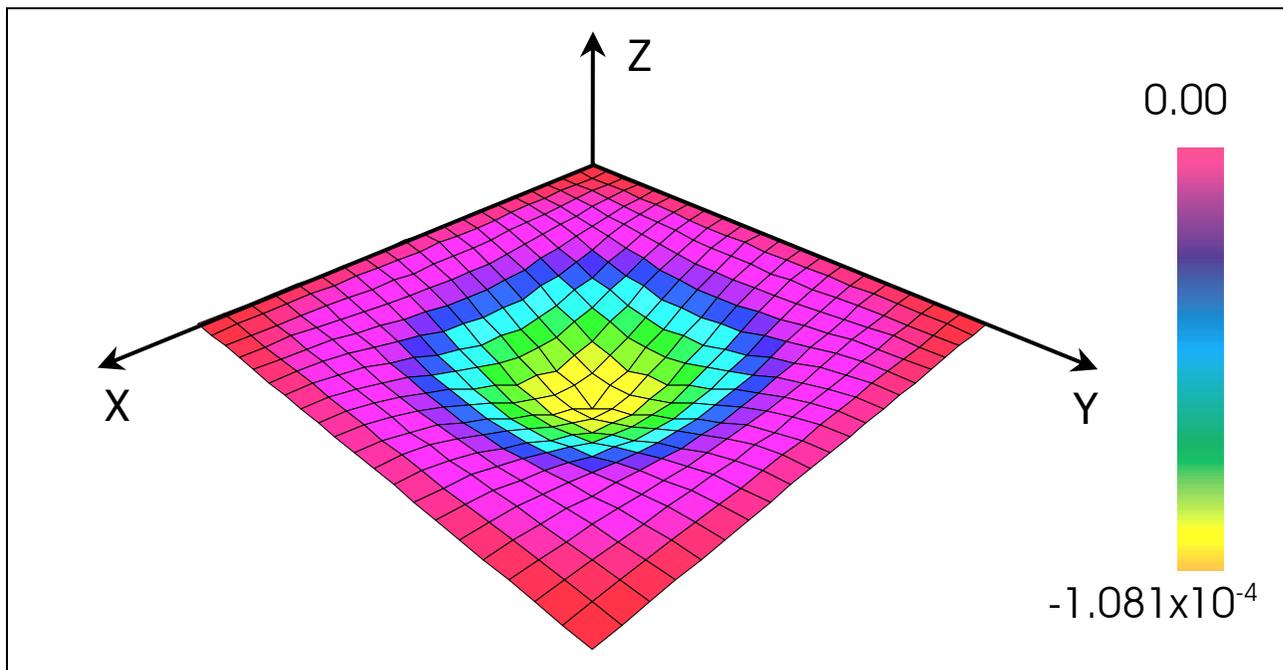


Figura 5.28 – Deslocamento Vertical em metros nos nós para Malha 10x10 para carga concentrada e placa com 4 bordas engastadas.

5.2.15 EXEMPLO 15

- Placa laminada com 3 camadas com direções das fibras nas mesmas direções dos eixos globais, simplesmente apoiada nas 4 bordas e submetida a carregamento uniformemente distribuído:

DADOS GERAIS:

Os valores apresentados a seguir são adimensionais como apresentado em **Lardeur & Batoz**^[15] e são:

- $E_1 = 3.4156$
- $E_2 = 1.7931$
- $G_{12} = 1.000$
- $G_{13} = 0.608$
- $G_{23} = 1.015$
- Carregamento: Carga Distribuída $q = - 10.00$
- $a = b = 1000.00$
- Malha de elementos finitos: 4x4, 8x8 e 10x10 elementos de 9 nós
- Coeficiente de Poisson
 - $\nu_{12} = 0.440$
 - $\nu_{21} = 0.231$
- Espessuras
 - $h_1 = 10.00$
 - $h_2 = 80.00$
 - $h_3 = 10.00$
- Excentricidade das Camadas
 - $f_1 = -45.00$
 - $f_2 = 0.00$
 - $f_3 = 45.00$
- Integração reduzida nas parcelas de cisalhamento.

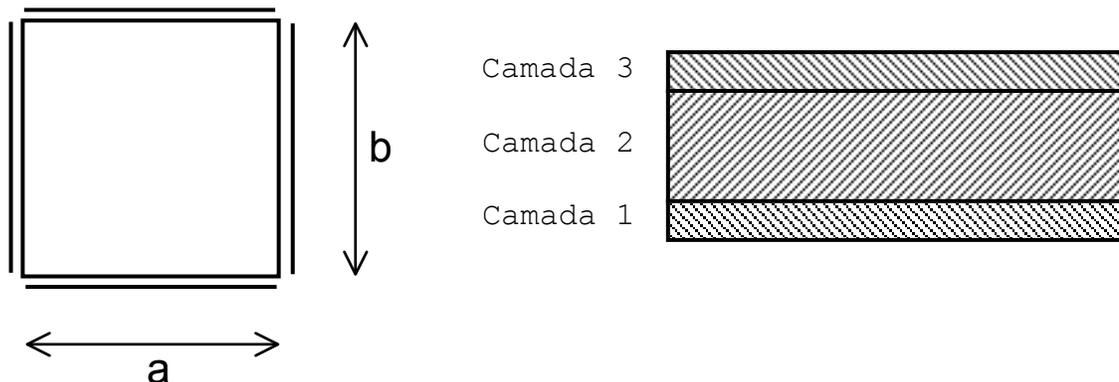


Figura 5.29 – Vinculação e Seção Transversal da Placa.

As excentricidades das camadas são as distâncias entre o plano médio de cada camada e o plano de referência adotado para o problema, como apresentado na formulação do Capítulo 3.

Para este exemplo, o plano de referência foi adotado no plano médio da camada 2 sendo este o motivo de somente a excentricidade desta camada ser igual a zero. O valor da excentricidade da camada 1 aparece com sinal negativo por estarem abaixo do plano de referência adotado.

Nos exemplos anteriores, a excentricidade é sempre tomada como sendo igual a zero, por ter-se adotado o plano de referência no plano médio das placas.

Vale destacar ainda que a direção principal, ou direção das fibras, das 3 camadas coincidem umas com as outras e conseqüentemente coincidem com as direções X e Y globais adotadas.

Os resultados a seguir foram obtidos para o centro da placa e aparecem como grandezas adimensionais segundo o que está apresentado em **Lardeur & Batoz**^[15].

	Lardeur & Batoz ^[15]	Programa		
		Malha 4x4	Malha 8x8	Malha 10x10
Deslocamento Vertical	-180880	-181653	-181372	-181362

Tabela 5.20 – Deslocamento vertical no centro da placa.

Baseando-se nos resultados apresentados na tabelas 5.20 verifica-se uma diferença em torno de 0.27% entre o resultado obtido pelo programa para malha de elementos finitos 10x10 e o resultado apresentado em **Lardeur & Batoz**^[15].

	Lardeur & Batoz ^[15]	Programa		
		Malha 4x4	Malha 8x8	Malha 10x10
Tensão	-274.80	-279.86	-283.60	-284.08

Tabela 5.21 – Tensão no centro da placa na direção de X na interface das camadas 1 e 2 para Malha 10x10.

Para a tensão, a diferença encontrada entre o valor obtido pelo programa para a malha de elementos finitos 10x10 e o valor apresentado em **Lardeur & Batoz**^[15] é igual a 3.4%.

Como vem sendo apresentado até aqui, segue figura representando os deslocamentos verticais nos nós dos elementos da placa obtida com auxílio do Programa “Mathematica” através de arquivo gerado pelo programa desenvolvido.

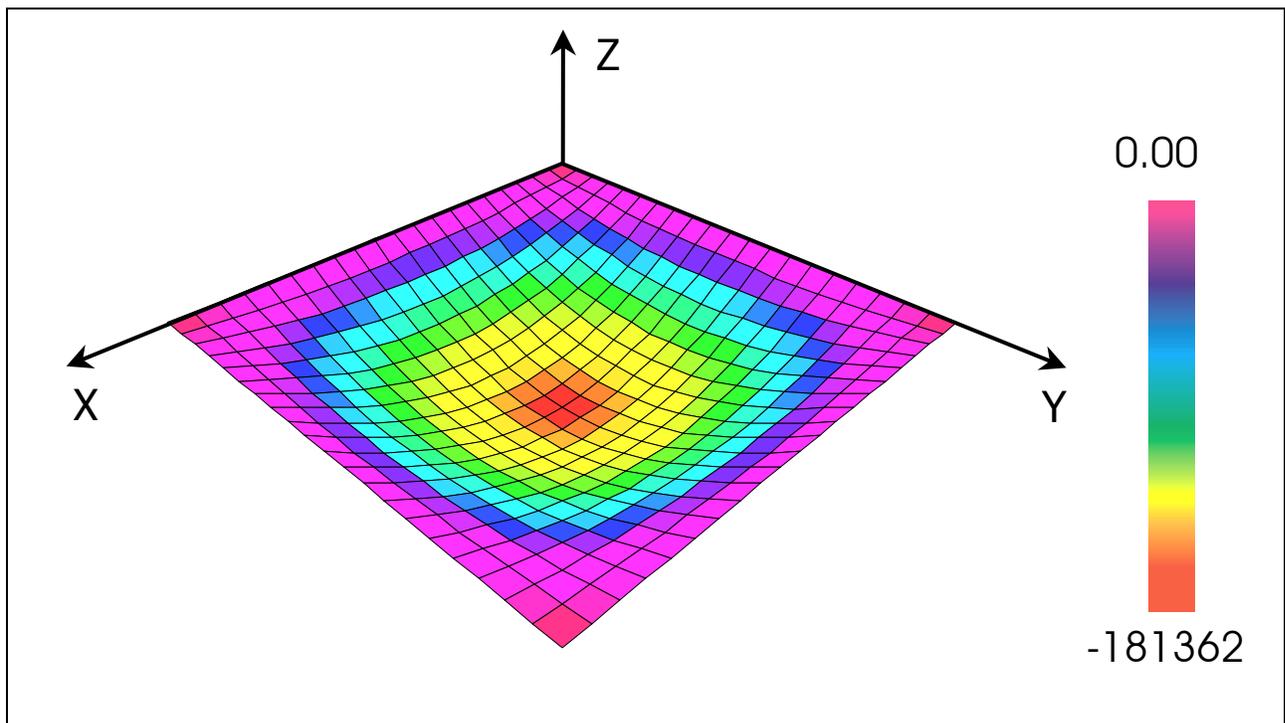


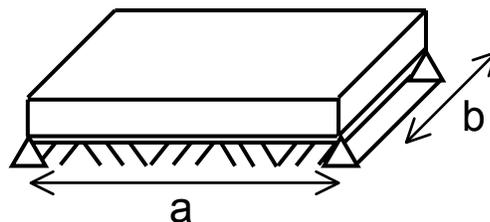
Figura 5.30 – Deslocamento Vertical nos nós para Malha 10x10.

5.2.16 EXEMPLO 16

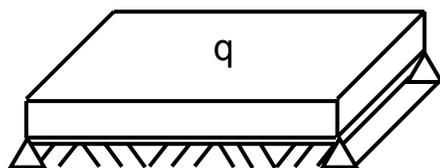
- Placa apoiada sobre base elástica com duas bordas opostas simplesmente apoiadas e demais bordas livres, submetida a 2 tipos de carregamento: 1) carregamento uniformemente distribuído e 2) carregamento linear aplicado ao longo do meio da placa entre as bordas apoiadas:

DADOS GERAIS:

- $E_1 = E_2 = 2 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$
- $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$
- Espessura $h = 0.1 \text{ m}$
- 1) Carregamento Uniformemente Distribuído $q = -5 \text{ kN/m}^2$
- 2) Carregamento Linear $P = -10 \text{ kN/m}$
- $a = 10.0 \text{ m}$; $b = 1.0 \text{ m}$
- Malha de elementos finitos: 10×10 elementos de 9 nós
- Coeficiente de Poisson $\nu_{12} = \nu_{21} = 0.0$
- Excentricidade da Camada = 0.0 m
- Integração Reduzida nas parcelas de cisalhamento
- Constante elástica do solo $k_{\text{solo}} = 8000 \text{ kN/m}^3$



Caso 1) Distribuída Uniformemente



Caso 2) Distribuída Linearmente

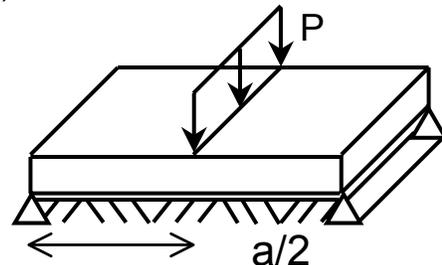


Figura 5.31 – Vinculação da Placa e casos de carregamento.

Os resultados obtidos para os dois casos de carregamento são comparados com os resultados obtidos através de equações propostas por Süsssekind^[31] de casos particulares de vigas finitas sobre base elástica.

Essas equações, bem como os resultados comparativos são apresentados a seguir para os dois casos de carregamento.

1º Caso: Carregamento uniformemente distribuído em toda a placa:

Em Süsssekind^[31] podemos encontrar a equação que rege o deslocamento vertical de uma viga finita apoiada sobre base elástica para o primeiro caso de carregamento, cujos resultados podem ser comparados aos da placa proposta no exemplo, por terem sido adotados Coeficientes de Poisson iguais a zero e portanto podendo-se considerar o comportamento da placa similar ao da viga. Logo tem-se:

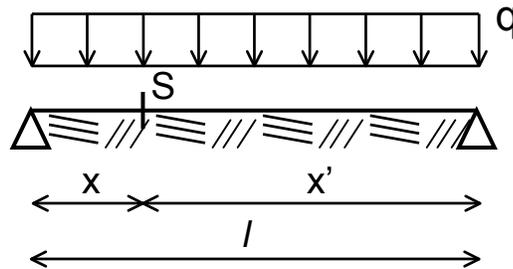


Figura 5.32 – Modelo 1º Caso de Carregamento - Süsssekind^[31].

$$y(x) = \frac{q}{k} \left(1 - \frac{\text{Cosh}(\lambda x) \text{Cos}(\lambda x') + \text{Cosh}(\lambda x') \text{Cos}(\lambda x)}{\text{Cosh}(\lambda l) + \text{Cos}(\lambda l)} \right) \quad (5.2)$$

Os resultados obtidos para o centro da placa utilizando-se tanto a equação 5.2 obtida em Süsssekind^[31] quanto o programa desenvolvido são:

	Süsssekind ^[31]	Programa
Deslocamento Vertical (m)	-0.000621681	-0.0006216297

Tabela 5.22 – Deslocamento vertical no centro da placa.

Vale lembrar que a constante λ que aparece na equação 5.2 é dada por:

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} \quad (5.3)$$

onde:

k = Constante Elástica do Solo (Coeficiente de recalque);

E = Módulo de Elasticidade Longitudinal da Viga;

J = Momento de Inércia da Viga.

Graficamente, a equação 5.2, que representa os deslocamentos verticais para a viga apresentada na figura 5.32, assume a seguinte forma:

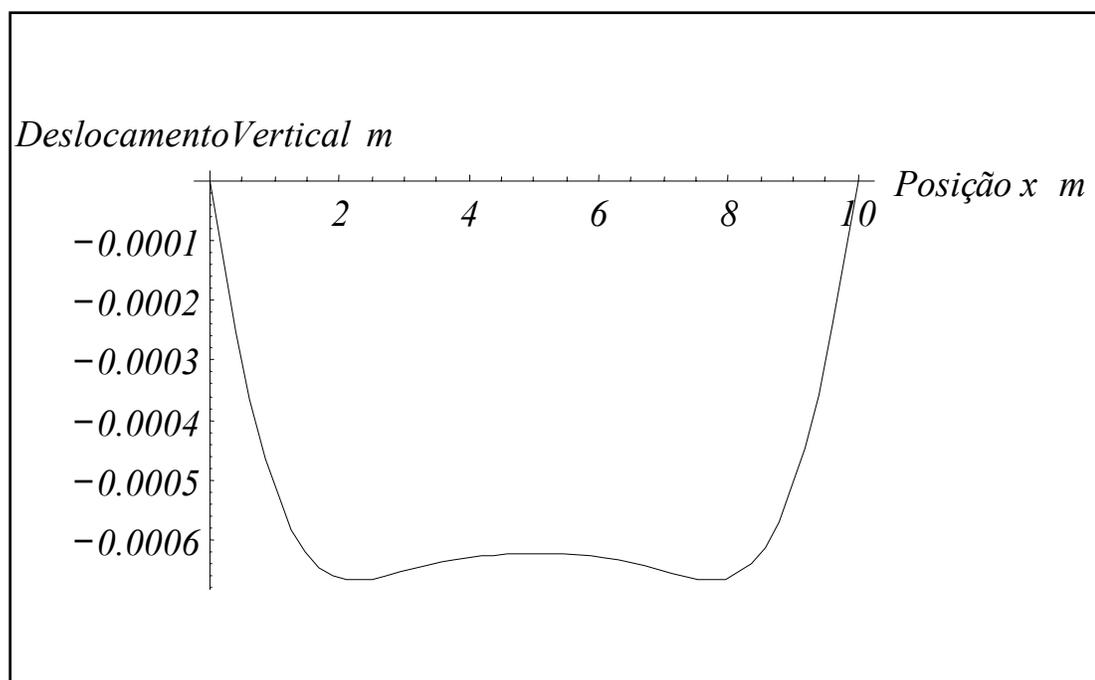


Figura 5.33 – Deslocamento Vertical segundo a equação 5.2.

Para efeito de comparação, a figura apresentada a seguir é referente aos deslocamentos verticais obtidos pelo programa desenvolvido e foi gerada com auxílio do programa “Mathematica” .

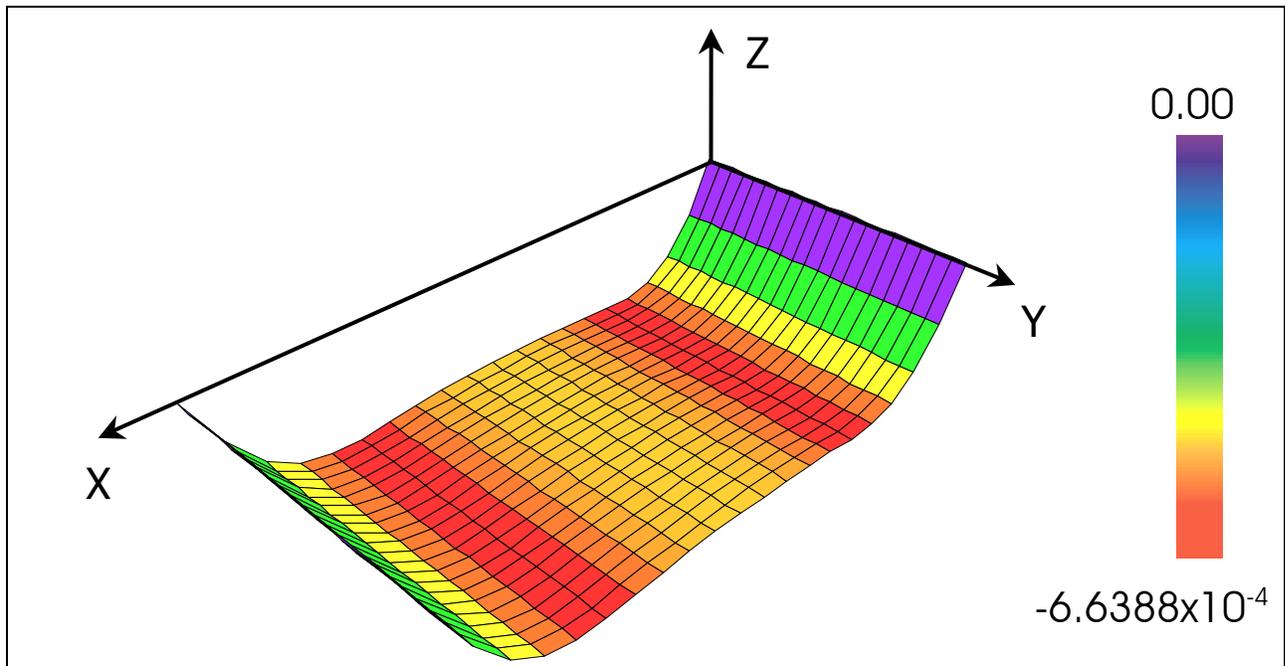


Figura 5.34 – Deslocamento Vertical em metros nos nós da placa.

Comparando-se os valores do deslocamento vertical no centro da placa apresentados na Tabela 5.22 e as representações gráficas das figuras 5.33 e 5.34 conclui-se que o comportamento da placa ficou bem próximo ao da viga como era esperado.

2º Caso: Carregamento linearmente distribuído no meio da placa:

Em Süsserkind^[31] também podemos encontrar a equação que rege o deslocamento vertical de uma viga finita apoiada sobre base elástica para o segundo caso de carregamento, cujos resultados podem ser comparados da mesma maneira que para o caso anterior. Logo tem-se:

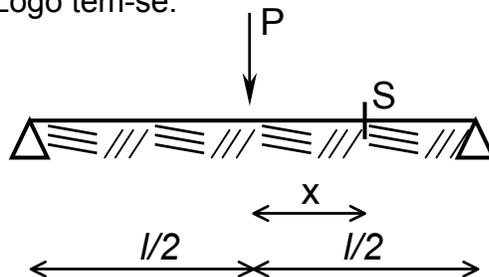


Figura 5.35 – Modelo 2º Caso de Carregamento - Süsserkind^[31].

$$y(x) = \frac{P\lambda}{2k(\text{Cosh}(\lambda l) + \text{Cos}(\lambda l))} \left[\text{Cos}(\lambda x)\text{Senh}(\lambda(l-x)) - \text{Cosh}(\lambda x)\text{Sen}(\lambda(l-x)) + \text{Sen}(\lambda x)\text{Cosh}(\lambda(l-x)) - \text{Senh}(\lambda x)\text{Cos}(\lambda(l-x)) \right]$$

(5.4)

Os resultados obtidos para o centro da placa utilizando-se tanto equação 5.4 obtida em Sússekind^[31] quanto o programa desenvolvido são:

	Sússekind ^[31]	Programa
Deslocamento Vertical (m)	-0.000654198	-0.0006557581

Tabela 5.23 – Deslocamento vertical no centro da placa.

Graficamente, da mesma forma que para o 1º caso, a equação 5.4 que representa os deslocamentos verticais para a viga apresentada na figura 5.35 assume a seguinte forma:

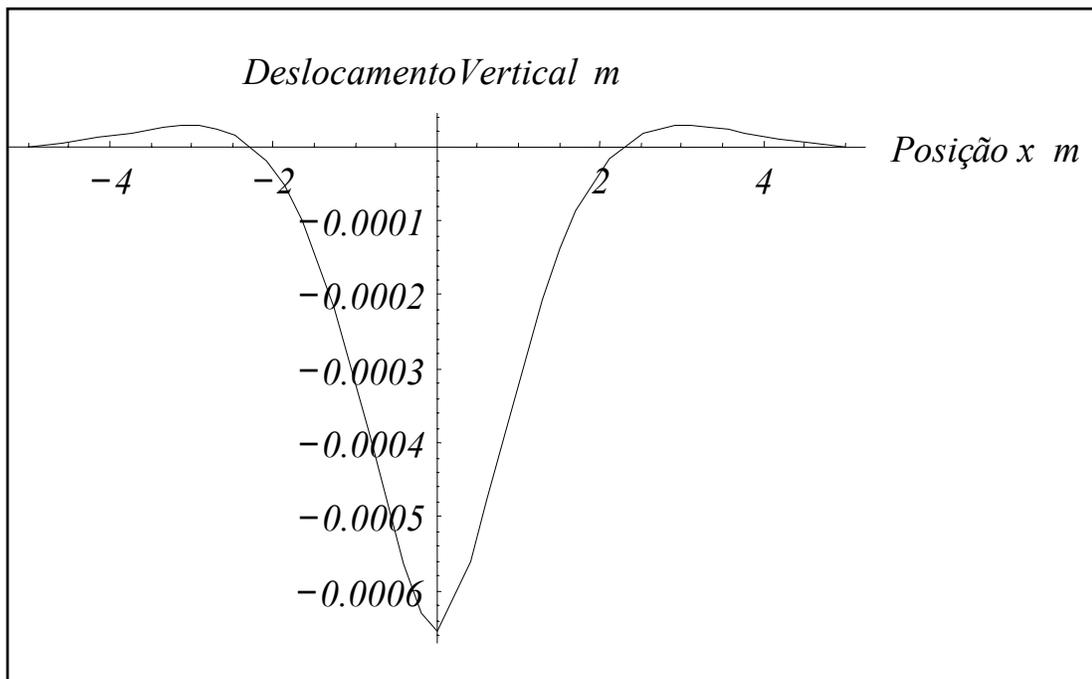


Figura 5.36 – Deslocamento Vertical segundo a equação 5.4.

Também para efeito de comparação, a figura apresentada a seguir é referente aos deslocamentos verticais obtidos pelo programa desenvolvido e foi gerada com auxílio do programa “Mathematica” .

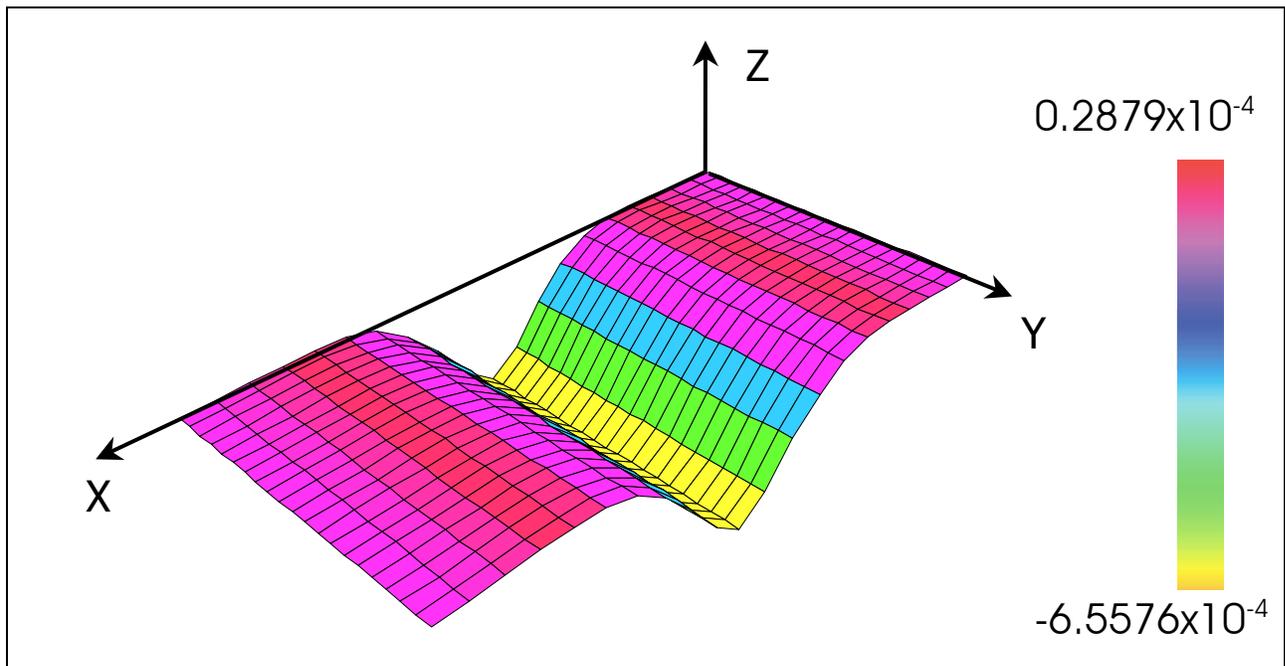


Figura 5.37 – Deslocamento Vertical em metros nos nós da placa.

Da mesma forma que para o caso anterior de carregamento, comparando-se os valores do deslocamento vertical no centro da placa apresentados na Tabela 5.23 e as representações gráficas das figuras 5.36 e 5.37 conclui-se que o comportamento da placa ficou bem próximo ao da viga como era esperado. Nota-se ainda que ocorreu um levantamento da placa em uma região entre a borda apoiada e o centro da placa, podendo este levantamento ser também visualizado na figura 5.36 obtida através da equação 5.4 apresentada em Süsskind^[31]. O valor do resultado do levantamento em ambos os casos está mascarado pelo fato de a formulação considerar um comportamento igual para tração e compressão, o que não ocorre na realidade. Portanto, os valores reais do levantamento poderão ser maiores do que os valores encontrados.

Na seqüência apresenta-se uma tabela com valores de coeficientes de recalque que podem ser utilizados para alguns tipos de solos. Esta tabela foi obtida em

Süssekind^[31]. Para este exemplo, o tipo de solo adotado foi uma areia submersa com consistência fofa, cujo valor do coeficiente de recalque é de 8.000 kN/m³ como pode ser visto na tabela citada.

Tipo de Solo		K (kN/m ³)
Areia Seca	Fofa	1.3 x 10 ⁴
	Média	4.5 x 10 ⁴
	Compacta	17.0 x 10 ⁴
Areia Submersa	Fofa	0.8 x 10 ⁴
	Média	2.7 x 10 ⁴
	Compacta	10.0 x 10 ⁴
Argila Pré-Adensada	Rija	2.5 x 10 ⁴
	Muito Rija	5.0 x 10 ⁴
	Dura	10.0 x 10 ⁴

Tabela 5.24 – Coeficiente de Recalque do Solo – Süssekind^[31].

5.2.17 EXEMPLO 17

- Placa com duas bordas engastadas e demais livres, submetida a carregamento uniformemente distribuído aplicado em $\frac{1}{4}$ da placa:

DADOS GERAIS:

- $E_1 = E_2 = 2.6 \times 10^8 \text{ N/m}^2$
- $G_{12} = G_{13} = G_{23} = E_1 / (2 (1 + \nu_{12})) = 1.0 \times 10^8 \text{ N/m}^2$
- Espessura $h = 0.1 \text{ m}$
- Carga Distribuída aplicada em $\frac{1}{4}$ da placa $q = -10 \text{ N/m}^2$
- $a = b = 2 \text{ m}$
- Malhas de elementos finitos: 4×4 , 8×8 e 10×10 elementos de 9 nós
- Coeficiente de Poisson $\nu_{12} = \nu_{21} = 0.3$
- Excentricidade da Camada = 0.0 m
- Direções de Ortotropia $\theta = 30^\circ$
- Integração Reduzida nas parcelas de cisalhamento

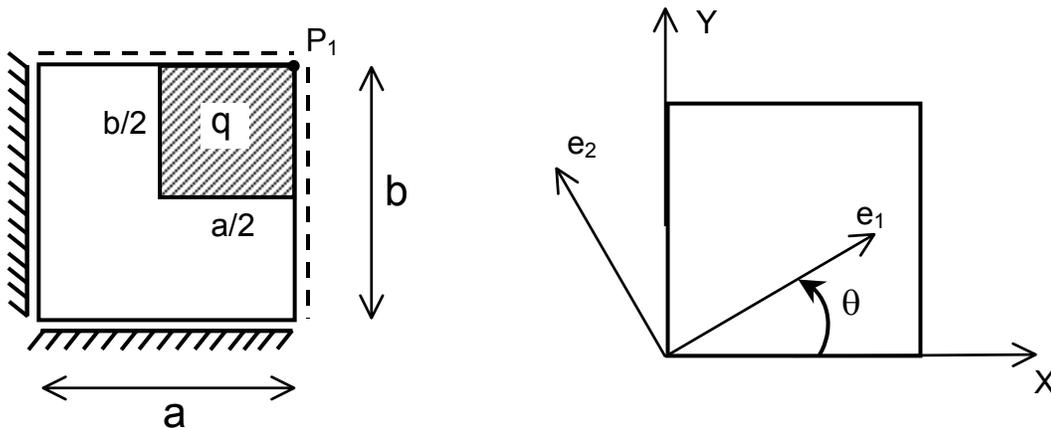


Figura 5.38 – Vinculação e Direções de Ortotropia.

A comparação dos resultados obtidos utilizando-se o programa desenvolvido é feita com resultados obtidos no programa ANSYS, utilizando-se o mesmo elemento “Shell 63” apresentado no exemplo 7.

Os resultados a seguir foram obtidos para o ponto P_1 .

	ANSYS	Programa		
		Malha 4x4	Malha 8x8	Malha 10x10
Deslocamento Vertical ($\times 10^{-3}$ m)	-0.2098190	-0.2161515	-0.2162038	-0.2162200

Tabela 5.25 – Deslocamento vertical no ponto P_1 .

A diferença entre os resultados apresentados na Tabela 5.25, aproximadamente 3%, pode ser considerada satisfatória sabendo-se que a formulação utilizada no programa do trabalho não é exatamente a mesma utilizada no programa ANSYS – elemento “shell 63”.

A figura a seguir é referente a os deslocamentos verticais nos nós dos elementos da placa.

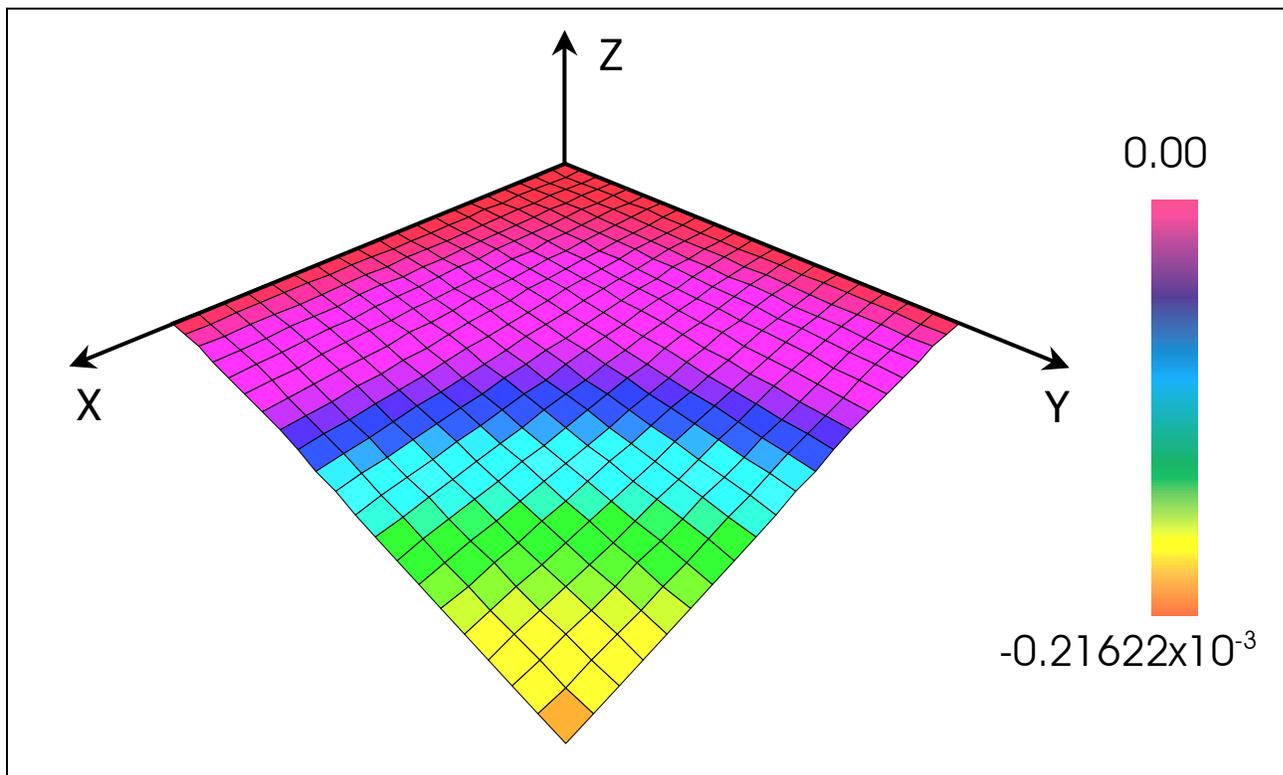


Figura 5.39 – Deslocamento Vertical em metros nos nós para Malha 10x10.

5.2.18 EXEMPLO 18

- Placa isotrópica engastada nas 4 bordas e submetida a carregamento uniformemente distribuído, calculada para 1 e 5 camadas com direções diferentes de fibras:

DADOS GERAIS: para os dois casos.

- $E_1 = E_2 = 2.05 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
- $G_{12} = G_{13} = G_{23} = E_1 / (2 (1 + \nu_{12})) = 1.025 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
- Carregamento Distribuído $q = - 800 \text{ N/m}^2$
- $a = b = 2.00 \text{ m}$
- Malha de elementos finitos: 10 x 10 elementos de 9 nós
- Coeficiente de Poisson $\nu_{12} = \nu_{21} = 0.0$
- Integração Reduzida nas parcelas de cisalhamento

DADOS ESPECÍFICOS:

➤ Camada Única

Espessura $h = 0.10 \text{ m}$

Excentricidade da camada = 0.0 m

Direções de Ortotropia $\theta = 0.0^\circ$

➤ 5 Camadas:

Espessuras:

$$h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h_5 = 0.02 \text{ m}$$

Excentricidades:

$$f_1 = -0.04 \text{ m}; f_2 = -0.02 \text{ m}$$

$$f_3 = 0.00 \text{ m}; f_4 = 0.02 \text{ m}$$

$$f_5 = 0.04 \text{ m};$$

Direções de Ortotropia:

$$\theta_1 = -41.0^\circ; \theta_2 = 0.0^\circ;$$

$$\theta_3 = 30.0^\circ \theta_4 = 37.0^\circ;$$

$$\theta_5 = 90.0^\circ$$

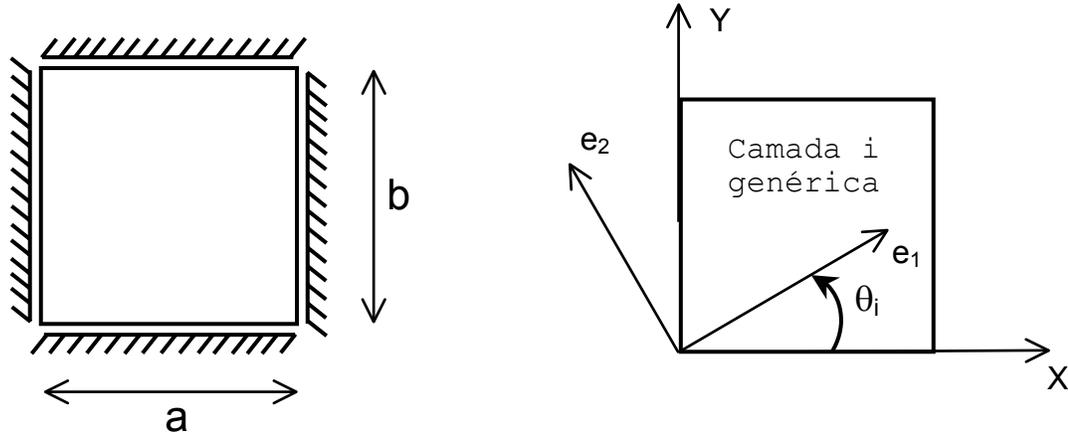


Figura 5.40 – Vinculação e Direções de Ortotropia.

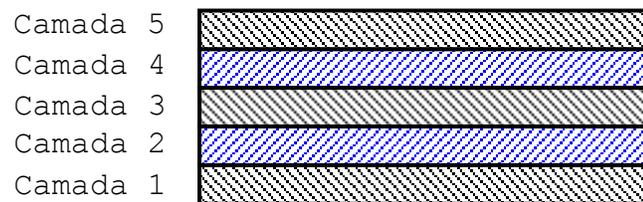


Figura 5.41 – Seção Transversal da Placa Multi-Camada.

As excentricidades das camadas são as distâncias entre o plano médio de cada camada e o plano de referência adotado para o problema, como apresentado na formulação do Capítulo 3.

Para este exemplo, o plano de referência foi adotado no plano médio da camada 3 sendo este o motivo de somente a excentricidade desta camada ser igual a zero. Os valores das excentricidades das camadas 1 e 2 aparecem com sinal negativo por estarem abaixo do plano de referência adotado.

No caso da placa com 5 camadas as direções das fibras são diferentes em cada camada, o que permitiria ao modelo captar um comportamento anisotrópico. No exemplo entretanto, as propriedades das camadas foram propositalmente consideradas isotrópicas. Espera-se portanto que os resultados encontrados para o caso de camada única e o caso de 5 camadas sejam idênticos.

A comparação dos resultados obtidos utilizando-se placa com camada única e também placa composta por 5 camadas com direções de fibras diferentes entre si estão apresentados na tabela 5.26 a seguir e são referentes aos deslocamentos verticais no centro da placa para carga concentrada aplicada perpendicular à superfície da placa e no centro da mesma.

	Placa com Camada Única	Placa Composta por 5 Camadas
Deslocamento Vertical ($\times 10^{-7}$ m)	-9.808	-9.808

Tabela 5.26 – Deslocamento vertical no centro da placa.

Como era esperado, os resultados obtidos tanto para a placa com camada única quanto para a placa com 5 camadas foram iguais.

5.2.19 EXEMPLO 19

- Placa quadrada constituída por 3 camadas, com diferentes direções de ortotropia, apoiada sobre base elástica, com duas bordas opostas engastadas e demais bordas apoiadas, submetida a carregamento uniformemente distribuído:

DADOS GERAIS:

- $a = b = 12.00$ m
- Carregamento Distribuído $q = - 10$ kN/m²
- Constante elástica do solo $k_{\text{solo}} = 1000$ kN/m³
- Malha de elementos finitos: 10 x 10 elementos de 4, 8 ou 9 nós
- Integração Reduzida nas parcelas de cisalhamento para as 3 camadas

DADOS ESPECÍFICOS:

	Camada 01	Camada 02	Camada 03
E_1 (kN/m ²)	5×10^7	1×10^7	5×10^7
E_2 (kN/m ²)	3×10^7	2×10^7	3×10^7
$G_{12} = G_{13} = G_{23}$ (kN/m ²)	2×10^6	2×10^7	2×10^6
ν_{12}	0.25	0.15	0.25
ν_{21}	0.15	0.30	0.15
Espessura "h" (m)	0.40	1.60	0.40
Excentricidade "f" (m)	1.00	0.00	-1.00
θ (°)	30	50	70

Tabela 5.27 – Dados elásticos das 3 camadas da placa.

onde θ é a direção de um dos eixos de ortotropia da camada (direção das fibras) como apresentado na Fig. 5.42:

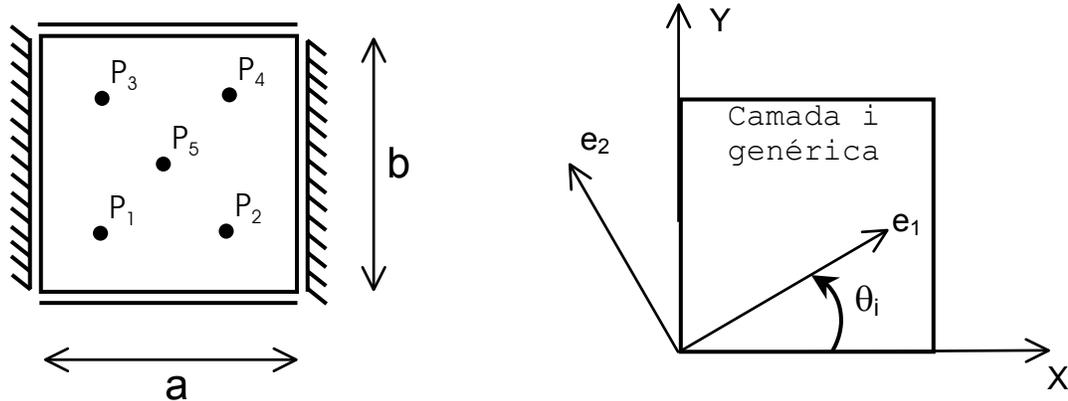


Figura 5.42 – Vinculação e Direções de Ortotropia.

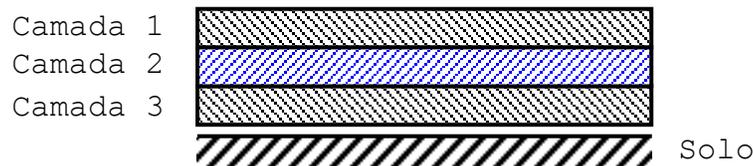


Figura 5.43 – Seção Transversal da Placa Multi-Camada.

Os pontos P_1 , P_2 , P_3 , P_4 e P_5 , indicados na Fig. 5.42, que possuem as coordenadas cartesianas indicadas a seguir, foram escolhidos para se mostrar os resultados de deslocamentos.

- P_1 : (3.00,3.00);
- P_2 : (9.00,3.00);
- P_3 : (3.00,9.00);
- P_4 : (9.00,9.00);
- P_5 : (6.00,6.00);

As excentricidades das camadas são as distâncias entre o plano médio de cada camada e o plano de referência adotado para o problema, como apresentado na formulação do Capítulo 3.

Para este exemplo, o plano de referência foi adotado no plano médio da camada 2 sendo este o motivo de somente a excentricidade desta camada ser igual a zero. O valor da excentricidade da camada 3 aparece com sinal negativo por estar abaixo do plano de referência adotado.

Cada camada é ortotrópica, sendo que as direções de ortotropia são diferentes em cada camada, conforme indicado pelo ângulo θ mostrado na tabela 5.27. Pode-se dizer que o modelo, no seu conjunto, possui um comportamento anisotrópico.

A tabela 5.28 apresenta os deslocamentos verticais para os pontos P_1 a P_5 , para a simulação da placa com elementos de 4, 8 ou 9 nós, usando integração reduzida.

Nós por Elemento	Deslocamento Vertical ($\times 10^{-4}$ m)				
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
4	-0.241995	-0.238249	-0.238249	-0.241995	-0.424707
8	-0.240575	-0.237027	-0.237012	-0.241137	-0.422387
9	-0.240541	-0.236926	-0.236926	-0.240541	-0.422150

Tabela 5.28 – Deslocamento vertical para os pontos da placa simulada com elementos de 4, 8 ou 9 nós.

A seguir são apresentados os diagramas de momentos fletores M_x e M_y e do momento volvente M_{xy} para a placa.

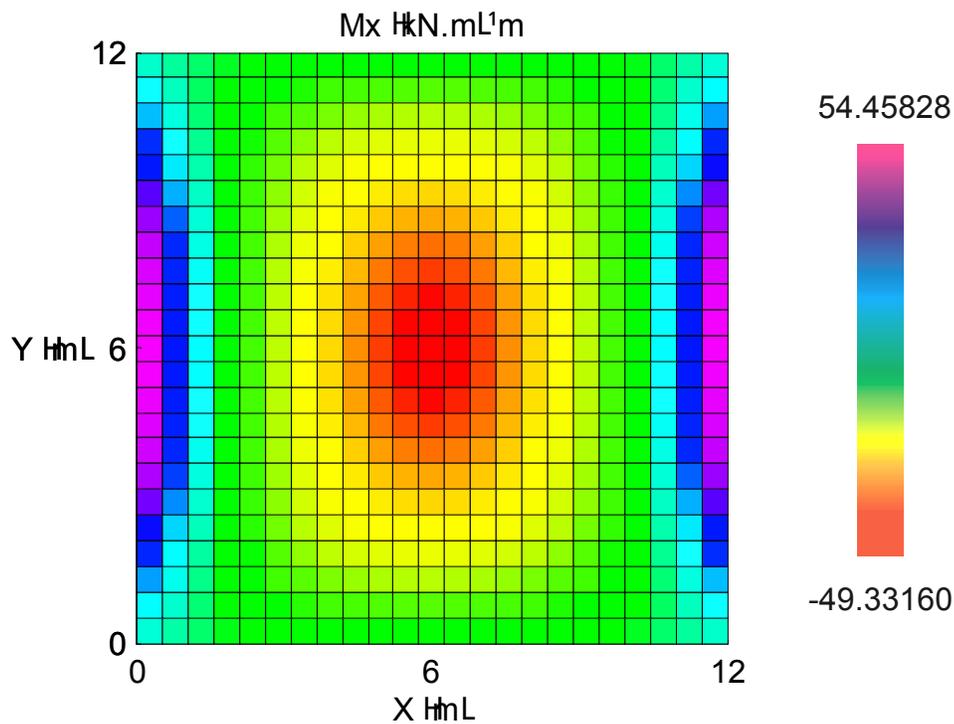


Figura 5.44 – Diagrama do momento fletor M_x para simulação da placa com elemento de 9 nós.

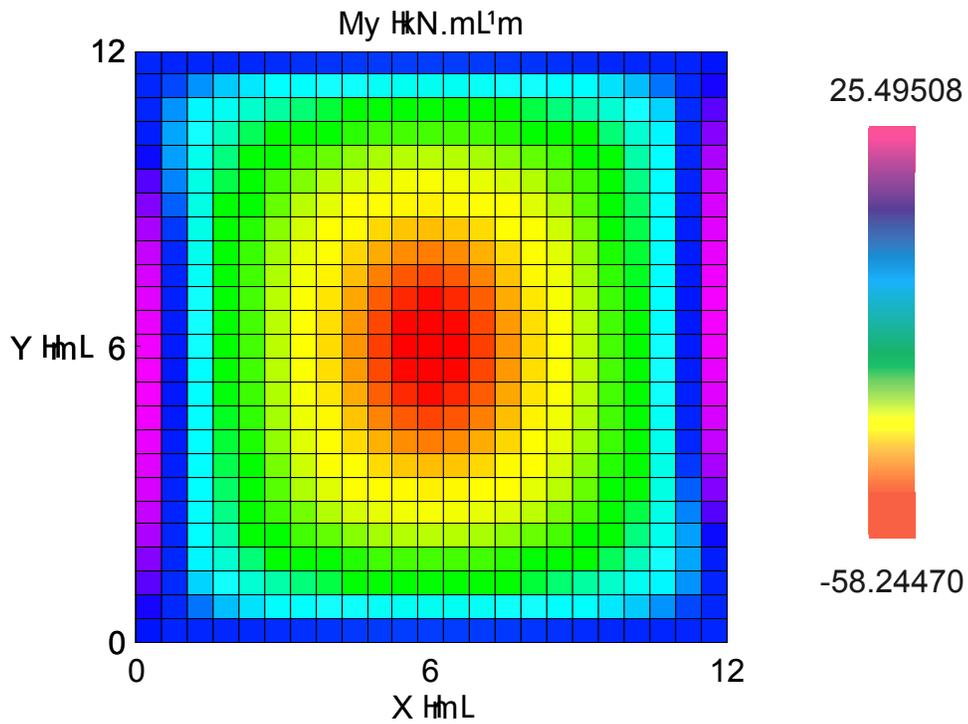


Figura 5.45 – Diagrama do momento fletor M_y para simulação da placa com elemento de 9 nós.

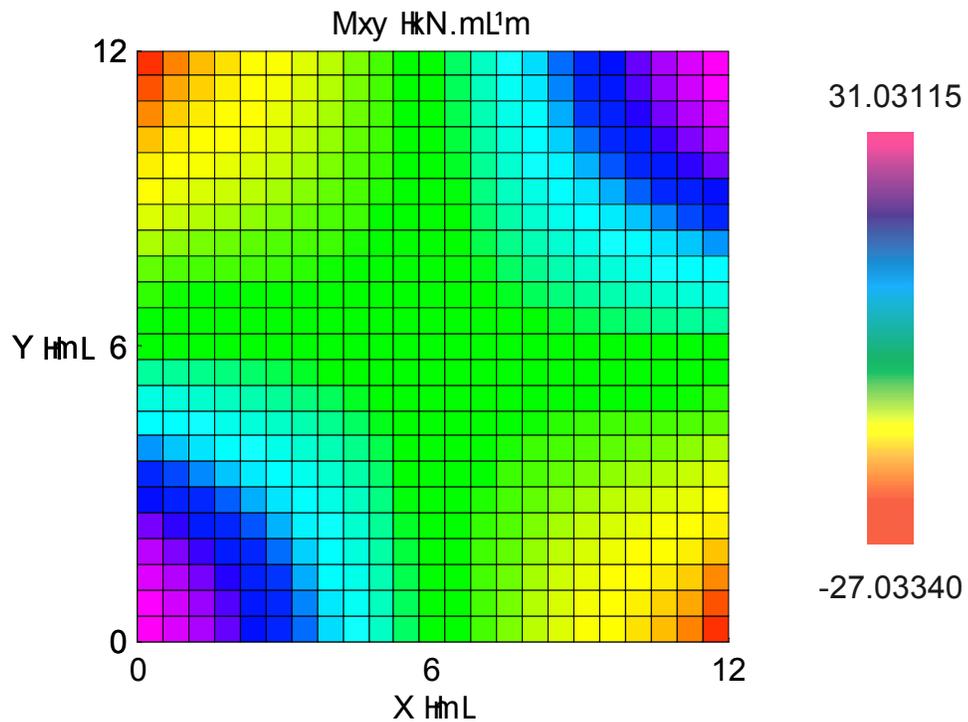


Figura 5.46 – Diagrama do momento volvente M_{xy} para simulação da placa com elemento de 9 nós.

Os gráficos de momentos apresentados foram traçados a partir dos valores de momentos calculados pelo programa para os pontos de Gauss.

Os valores dos momentos principais e suas respectivas direções, para os pontos de Gauss próximos de P_5 foram obtidos e estão apresentados na tabela 5.29 a seguir, sendo referentes a simulações com elementos de 9 nós.

(m)		(kN.m)/m					Cosseno	Seno
x	y	M_x	M_y	$M_{xy}=M_{yx}$	M1	M2		
5.7887	5.7887	-49.33165	-58.23989	-3.17487	-88.8991	36.3925	-0.82716	-0.56196
6.2113	5.7887	-49.33037	-58.24468	-3.29228	-88.9397	36.3171	-0.82691	-0.56234
5.7887	6.2113	-49.33037	-58.24468	-3.29228	-88.9397	36.3171	-0.82691	-0.56234
6.2113	6.2113	-49.33165	-58.23989	-3.17487	-88.8991	36.3925	-0.82716	-0.56196

Tabela 5.29 – Momentos e direções principais nos pontos de Gauss próximos de P_5 para simulação da placa com elementos de 9 nós.

Os sinais dos momentos apresentados na tabela 5.29 estão de acordo com os sentidos positivos adotados e apresentados na figura 3.2 do Capítulo 3.

CAPÍTULO 6

Conclusões

O estudo de formulações de placas laminadas possibilitou a implementação de um programa de elementos finitos que permite a obtenção de deslocamentos nos nós dos elementos e tensões e esforços solicitantes nos pontos de Gauss de sistemas estruturais formados por placas multi-camadas. Os deslocamentos essenciais em cada nó são: 3 translações (X,Y,Z) e 3 rotações $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$. Os nós gerados estão localizados no plano de referência adotado para o sistema de coordenadas. O trabalho fundamentou-se nas hipóteses de Reissner-Mindlin para placas espessas e cinemática de pequenos deslocamentos e pequenas deformações.

Os coeficientes das matrizes de rigidez foram obtidos analiticamente com auxílio do Programa Mathematica. O uso de tal programa permitiu uma grande confiabilidade nos extensos termos da matriz de rigidez.

O programa implementado não necessita que a placa esteja contida no plano horizontal. A placa pode ocupar qualquer lugar no espaço. Os resultados de deslocamentos são obtidos em relação ao Sistema Global (X,Y,Z) . Os esforços e tensões são calculados em relação ao plano da placa.

Os resultados apresentados nos exemplos do capítulo 5, comparados com resultados encontrados na literatura, foram bastante satisfatórios principalmente quando as dimensões das placas guardam relações de placas espessas. Alguns exemplos possuíam as dimensões com relações de placas finas e mesmo assim,

devido a implementação de técnicas de integração reduzida, os resultados obtidos foram bem próximos dos calculados por outros autores. Nas comparações realizadas com resultados obtidos através do Programa ANSYS notou-se uma pequena diferença dos valores da ordem de 3%, diferença essa justificada pelo fato de que o elemento finito utilizado no programa ANSYS (Shell 63) aplica-se às placas consideradas finas.

A consideração da base elástica segundo as hipóteses de Winkler apresentou bons resultados em problemas nos quais o solo não é solicitado à tração, como apresentado em comparação realizada com modelos de vigas finitas encontrados em Süsskind^[31]. Existe uma limitação na formulação utilizada uma vez que não se despreza a contribuição do solo quando solicitado a tração.

Para os exemplos mostrados, o uso da integração reduzida foi importante como forma de contornar o surgimento do efeito de travamento por força cortante. No exemplo 13, a comparação e verificação dos modos de rigidez quando se utiliza integração completa ou integração reduzida, para várias relações de espessura / comprimento mostrou um enrijecimento das placas finas analisadas pelo programa com integração completa, como era esperado, o mesmo não acontecendo quando se utilizou a integração reduzida.

A técnica utilizada de superposição de camadas com propriedades diferentes mostrou-se eficiente para pontos distantes da interface entre as camadas. Existe uma deficiência da formulação no tratamento do cisalhamento na região de interface das camadas, devendo ser objeto de próximos estudos.

Procurou-se apresentar os resultados na forma gráfica e isso foi feito com auxílio do Programa Mathematica.

Para estudos futuros, podem ser propostas complementações de alguns pontos abordados no trabalho, tais como:

- Inclusão de elemento finito triangular;
- Cálculo das tensões e esforços solicitantes nos nós dos elementos – atualmente apresentam-se resultados calculados nos pontos de Gauss;

- Estudo de maneiras diferentes de se contornar o efeito de travamento cortante na formulação quando aplicada a placas consideradas finas;
- Saída gráfica utilizando-se de ferramentas como por exemplo o Software Data Explorer (DX);
- O programa implementado está escrito na linguagem Delphi; utiliza atualmente técnicas de matrizes cheias. O programa poderá ser significativamente melhorado com a implementação de técnicas que possibilitem a otimização de armazenagem de dados tais como matrizes de banda, técnicas de tratamento de matrizes esparsas, etc.

Finalizando pode-se dizer que o objetivo da dissertação foi alcançado com êxito.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Andrade, R.C., - (2000). **Uma Análise das Soluções Fundamentais Aplicáveis a Placas Espessas pelas Teorias de Reissner e Mindlin e suas Relações com a Teoria Clássica para o Uso do Método dos Elementos de Contorno**, Exame de Qualificação, Faculdade de Engenharia Civil, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil.
- [2] Bares, R., - (1970). **Tablas para el calculo de placas y vigas pared**, Editorial Gustavo Gili, S. A., Barcelona.
- [3] Bathe, K.J., Bucalem, M.L., - (2000). **State of the Art Modeling in Finite Element Analysis**, Palestra, Departamento de Engenharia de Estrutura e Fundações, USP, São Paulo, SP, Brasil.
- [4] Carvalho, C.A.T., - (1998). **Resistência dos Materiais III**, Notas de Aula, Faculdade de Engenharia Civil, UNESP, Bauru, SP, Brasil.
- [5] Chinosi, C., Lavadina, C., - (1999). **Remarks on partial selective reduced integration method for Reissner-Mindlin plate problem**, Computers and Structures, vol. 73, 73-78.
- [6] Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E., - (1989). **Concepts and applications of Finite Element Analysis**, John Wiley and Sons, Inc, 3d. edition, ISBN 0-471-84788-7.

- [7] Devloo, P.R.B., - (1997). **PZ: An object oriented environment for scientific programming**, Computer methods in applied mechanics and engineering, Elsevier, 20 pgs.
- [8] Devloo P.R.B., Menezes, F.A., Bravo, C.M.A.A., - (1999). **Formulação e implementação de cálculo de placas de material composto**, COBEM99 – Congresso de Engenharia Mecânica, in CDROM, Águas de Lindóia, SP, Brasil.
- [9] Eratil, N., Aköz, A.Y., - (1997). **The mixed finite element formulation for the thick plates on elastic foundations**, Computers and Structures, vol. 65, nº 4, 515-529.
- [10] Fernandes, G.B., - (1974). **Introdução à teoria das placas elásticas**, Notas de Aula, Faculdade de Engenharia Civil, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil.
- [11] Hinton, E., Owen, D.R.J., - (1984). **Finite element software for plates and shells**, Pineridge Press Limited, Swansea, U.K..
- [12] Jaeger, L.G., - (1964). **Elementary Theory of Elastic Plates**, The Macmillan Company, New York.
- [13] Klinkel, S., Gruttmann, F., Wagner, W., - (1999). **A Continuum based three-dimensional shell element for laminated structures**, Computers and Structures, vol. 77, 43-62.
- [14] Kosmatka, J.B., - (1994). **An Accurate Shear-Deformable Six-Node Triangular Plate Element for Laminated Composite Structures**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 37, 431-455.
- [15] Lardeur, P., Batoz, J.L., - (1989). **Composite plate analysis using a new discrete shear triangular finite element**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 27, 343-359.
- [16] Liu, F.-L., - (2000). **Rectangular thick plates on Winkler foundation: differential quadrature element solution**, International Journal of Solids and Structures, vol. 37, 1743-1763.
- [17] Liu, Y., - (1999). **Introduction do Finite Element Method**, Lecture Notes, University. Of Cincinnati.
- [18] Menezes, F.A., Devloo, P.R.B., - (1999) . **Elementos Finitos adaptativos ao cálculo de cascas de material composto**, XX CILAMCE – Congresso Ibero

- Latino Americano de Métodos Computacionais para Engenharia, in CDROM, São Paulo, SP, Brasil.
- [19] Menezes, F.A. e Devloo, P.R.B., - (2000). **Análise comparativa entre duas formulações para placas multi-camadas**, XXIX Jornadas Sudamericanas de Ingenieria Estructural, in CDROM, Punta del Este, Uruguay.
- [20] Montanari, I. e Martinelli, D.A.O., - (1976). **Placas Elásticas – Equações Gerais e Placas Retangulares**, Notas de Aula, Escola de Engenharia de São Carlos, Departamento de Estruturas, USP, São Carlos, SP, Brasil.
- [21] Oden, J.T., Becker, E.B., Carey, G.F., - (1981). **FINITE ELEMENTS - An Introduction**, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 2d. edition, Vol. 1, ISBN 0-07-112799-2, Singapore.
- [22] Paccola, R.R., - (1998). **Aplicação de viga semi-infinita sobre base elástica**, Trabalho de Graduação, Faculdade de Engenharia Civil, UNESP, Bauru, SP, Brasil.
- [23] Paiva, J.D., Butterfield, R., - (1997). **Boundary element analysis of plate-soil interaction**, Computers and Structures, vol. 64, nº 1-4, 319-328.
- [24] Pilkey, W.D. & Wunderlich, W., - “**Mechanics of structures: variational and computational methods**”, CRC Press, Inc Boca Raton, Florida, USA. ISBN 0-8493-4435-2
- [25] Polit, O., Touratier, M., Lory, P., - (1994). **A new eight-node quadrilateral shear-bending plate finite element**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 37, 387-411.
- [26] Reddy, J.N., - (1989). **On refined computational models of composite laminates**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 27, 361-382.
- [27] Reddy, J.N., - (1993). **An Introduction do the Finite Element Method**, McGraw-Hill International Editions, McGraw-Hill series in Mechanics Engineering, 2d. edition, ISBN 0-07-112799-2, Singapore.
- [28] Sadek, E.A., Tawfik, S.A., - (2000). **A finite element model for the analysis of stiffened laminated plates**, Computers and Structures, vol. 75, 369-383.

- [29] Subramanian, P., - (1993). **A higher order theory for bending of isotropic plates**, Computers and Structures, vol. 49, nº 1, 199-204.
- [30] Subramanian, P., - (1999). **Finite element analysis of thick homogeneous plates**, Computers and Structures, vol. 71, 469-480.
- [31] Süsskind, J.C., - (1976). **Curso de análise estrutural**, Porto Alegre, Globo, São Paulo, Ed. da Universidade de São Paulo.
- [32] Sydenstricker, R.M., Landau, L., - (2000). **A study of some triangular discrete Reissner-Mindlin plate and shell elements**, Computers and Structures, vol. 78, 21-33.
- [33] Szilard, R., - (1974). **Theory and analysis of Plates**, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- [34] Tapia, L.G.S., - (1998). **Análise de Placas Laminadas de Materiais Compostos pelo Método dos Elementos Finitos**, Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia Civil, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil.
- [35] Taylor, M.W., Vasiliev, V.V., Dillard - (1997). **One the problem of shear-locking in finite elements based on shear deformable plate theory**, International Journal of Solids and Structures, vol. 34, nº 7, 859-875.
- [36] Timoshenko, S.P., Woinowsky-Krieger, S., - (1959). **Theory of Plates and Shells**, 2d. edition, McGraw-Hill, New York.
- [37] Volterra, E., Gaines, J.H., - (1971) "**Advanced Strength of Materials**, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs.

ABSTRACT

Paccola, R. R., **Study of formulation of laminated plates supported on elastic base.**

Campinas, College of Civil Engineering, State University of Campinas, 2001. 115 pages. Dissertation.

This work treats of the theoretical formulation of laminated plates supported on elastic base. Are adopted Reissner-Mindlin hypotheses of thick plates with kinematics of small displacements. Reduced integration techniques are used to compute the contributions of the shear efforts, providing a better treatment to the stiffness problem known in the literature as shear locking effect. The formulation was implemented in a Finite Element Program. It was used quadrilateral elements with 4, 8 or 9 nodes and linear or quadratic shape functions. With the program is possible to obtain the nodal displacements, stress and efforts on the Gauss points. The elastic base is considered in agreement to the Winkler hypotheses and its contribution in the formulation was taken account in the Principle of Virtual Work. Finally, some examples for the validation are presented and the results were compared with the literature.

Keywords: Laminated Plates, Finite Element, Elastic Foundation, Reduced Integration.

APÊNDICE

Matrizes de contribuição para a camada “a” de placa paralela ao plano horizontal.

$$\begin{aligned}
 K_{xx} &= (K_{xx}^b + K_{xx}^s) & K_{yy} &= (K_{yy}^b + K_{yy}^s) & K_{xy} &= (K_{xy}^b + K_{xy}^s) \\
 K_{yx} &= (K_{yx}^b + K_{yx}^s) & B_{0x} &= (B_{0x}^b + B_{0x}^s) & B_{x0} &= (B_{x0}^b + B_{x0}^s) \\
 B_{0y} &= (B_{0y}^b + B_{0y}^s) & B_{y0} &= (B_{y0}^b + B_{y0}^s) & B_{00} &= (B_{00}^b + B_{00}^s)
 \end{aligned}$$

Sendo: 9 matrizes de contribuição de ordem 6 x 6 referentes à parcela de flexão:

$$K_{xx}^b = \begin{bmatrix} -E_x h \mu & 0 & 0 & 0 & -E_x h f \mu & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} h S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -E_x h f \mu & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{12} E_x h^3 - E_x f^2 h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{yy}^b = \begin{bmatrix} \frac{Sh}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E_y h \mu & 0 & E_y h f \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_y h f \mu & 0 & \frac{-1}{12} E_y h^3 - E_y f^2 h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{xy}^b = \begin{bmatrix} 0 & -E_x h \nu_y \mu & 0 & E_x f h \nu_y \mu & 0 & 0 \\ -\frac{hS}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E_x f h \nu_y \mu & 0 & \frac{E_x \nu_y h^3 \mu}{12} + E_x f^2 \nu_y h \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{yx}^b = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{hS}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -E_x h \nu_y \mu & 0 & 0 & 0 & -E_x f h \nu_y \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_x f h \nu_y \mu & 0 & 0 & 0 & \frac{E_x \nu_y h^3 \mu}{12} + E_x f^2 \nu_y h \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{0x}^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-hS}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{x0}^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-hS}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{0y}^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{hS}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{y0}^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{hS}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{00}^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{mola} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & hS \end{bmatrix}$$

Sendo: $\mu = \frac{1}{(\nu_x \nu_y - 1)}$

$$S \approx 10^{-6} E_1$$

$$k = \frac{5}{6}$$

Sendo ainda K_{mola} o valor do coeficiente de rigidez da Base Elástica.

E sendo: 9 matrizes de contribuição de ordem 6 x 6 referentes à parcela de cisalhamento:

$$K_{xx}^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & hG_{xy} & 0 & -hfG_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & hkG_{xz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -hfG_{xy} & 0 & \frac{1}{12}G_{xy}h^3 + f^2G_{xy}h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{yy}^s = \begin{bmatrix} G_{xy}h & 0 & 0 & 0 & G_{xy}h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & hkG_{yz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{xy}h & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12}G_{xy}h^3 + f^2G_{xy}h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{xy}^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{xy}h & 0 & 0 & 0 & fG_{xy}h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -fG_{xy}h & 0 & 0 & 0 & \frac{-G_{xy}h^3}{12} - f^2G_{xy}h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{yx}^s = \begin{bmatrix} 0 & G_{xy}h & 0 & -fG_{xy}h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & fG_{xy}h & 0 & \frac{-G_{xy}h^3}{12} - f^2G_{xy}h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{0x}^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{xz}hk & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{x0}^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{xz}hk & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{0y}^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -G_{yz}hk & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{y0}^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G_{yz}hk & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{00}^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{yz}hk & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{xz}hk & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Sendo: } \mu = \frac{1}{(v_x v_y - 1)} ; S \approx 10^{-6} E_1 \quad \text{e } k = \frac{5}{6} .$$