

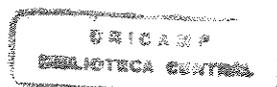


**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL  
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS**

**CÁLCULO AUTOMÁTICO DE LAJES  
PROTENDIDAS SIMULADAS COMO  
GRELHA UTILIZANDO O MÉTODO DOS  
ELEMENTOS FINITOS**

**Eng. Antônio de Oliveira Fernandes Teixeira  
Orientador: Prof. Dr. Aloísio Ernesto Assan  
Abril/1998**

**UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SEÇÃO CIRCULANTE**



8468700e

UNIDADE BE  
N.º CHAMADA:  
T/ UNICAMP  
T 235c  
V. \_\_\_\_\_ Ex: \_\_\_\_\_  
TOMBO BC/ 46209  
PROC. 6-392/01  
C  D   
PREÇO R\$ 11,00  
DATA 13/09/04  
N.º CPD \_\_\_\_\_

CM00159475-1

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL  
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS**

**CÁLCULO AUTOMÁTICO DE LAJES  
PROTENDIDAS SIMULADAS COMO  
GRELHA UTILIZANDO O MÉTODO DOS  
ELEMENTOS FINITOS**

**Eng. Antônio de Oliveira Fernandes Teixeira**

**Orientador: Prof. Dr. Aloísio Ernesto Assan**

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Estadual de Campinas, Departamento de Estruturas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Estruturas.

**Campinas, 1998  
S.P. - Brasil**

Algo que este é a versão definitiva da dissertação.	
Prof. Dr. <i>AA</i>	13 / 8 / 98
Matrícula: 03596-3	

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

T235c

Teixeira, Antônio de Oliveira Fernandes

Cálculo automático de lajes protendidas simuladas como grelha utilizando o método dos elementos finitos / Antônio de Oliveira Fernandes Teixeira. --Campinas, SP: [s.n.], 1998.

Orientador: Aloísio Ernesto Assan.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil.

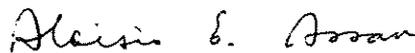
1. Concreto protendido. 2. Lajes de concreto. 3. Vigas de concreto protendido. 4. Engenharia de estruturas. I. Assan, Aloísio Ernesto. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL  
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

**CÁLCULO AUTOMÁTICO DE LAJES  
PROTENDIDAS SIMULADAS COMO  
GRELHA UTILIZANDO O MÉTODO DOS  
ELEMENTOS FINITOS**

Eng. Antônio de Oliveira Fernandes Teixeira

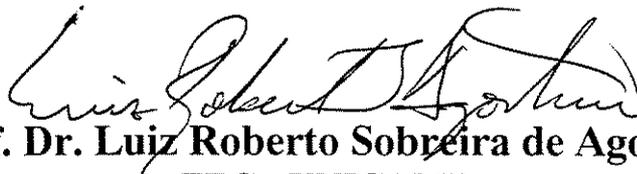
Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:



**Prof. Dr. Aloísio Ernesto Assan**  
Presidente e Orientador - FEC - UNICAMP



**Prof. Dr. Roberto Chust Carvalho**  
Departamento de Engenharia Civil - UFSCar



**Prof. Dr. Luiz Roberto Sobreira de Agostini**  
FEC - UNICAMP

Campinas, 05 de maio de 1998

## **Dedicatória**

Aos meus pais e irmãos.

## **Agradecimentos**

O autor agradece à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo FAPESP, pois sem a mesma não seria possível a elaboração deste trabalho.

Agradece à família Azevedo, em especial ao amigo Luiz Alberto(Beto). Agradece à família Adler Ralho, em especial(Tia Edí), que mesmo estando longe me incentivaram a levar em frente o trabalho com responsabilidade e profissionalismo.

Agradece aos amigos de Itatiba: Eng. Huederson(Alemão) ,Enga. Maria Alice, Prof. Adão Marques, Prof. Werner Mertzig, Prof. André Bartolomeu, Prof. João Moro pelo incentivo no ingresso ao curso de Pós Graduação.

Agradece ao professor Susumo por ter me ensinado o prazer de poder ensinar.

Agradece ao amigo Leonardo Shessarenko Filho pelo companheirismo e amizade compartilhados neste período de mestrado.

Agradece ao Prof. Luiz Roberto Sobreira de Agostini, professor de concreto protendido e pontes da Universidade Estadual de Campinas pelo excelente curso de concreto protendido ministrado nesta Universidade e pela ajuda no desenvolvimento do programa na parte de protensão.

Agradece aos amigos e colegas da Universidade Estadual de Campinas que de uma forma ou de outra ajudaram na elaboração deste trabalho.

Finalmente agradece ao pai deste trabalho , o Prof. Aloisio Ernesto Assan, que durante todo o período de orientação não mediu esforço, humildade, paciência, carinho, dedicação e companheirismo na elaboração deste trabalho.

O segredo da vida é saber desfrutar a passagem do tempo.  
James Taylor

## SUMÁRIO

	<b>Página</b>
<b>LISTA DE TABELAS</b> .....	<b>xix</b>
<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	<b>xxi</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS</b> .....	<b>xxv</b>
<b>RESUMO</b> .....	<b>xxvii</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>01</b>
1.1 Histórico do Concreto Protendido .....	01
1.2 Tipos de Concreto Protendido .....	03
1.2.1 Concreto Protendido com Aderência .....	03
1.2.1.1 Concreto Protendido com Aderência Inicial ( Armadura de Protensão Pré-Tracionada) .....	03
1.2.1.2 Concreto Protendido com Aderência Posterior ( Armadura de Protensão Pós-Tracionada ) .....	05
1.2.2 Concreto Protendido sem Aderência .....	08
1.2.2.1 Concreto Protendido sem Aderência com armadura de protensão externo .....	09
1.2.2.2 Concreto Protendido sem Aderência com Armadura de Protensão Internos.....	09
1.3 Sistemas de Protensão no Brasil .....	10
1.3.1 Sistema Freyssinet .....	10
1.3.1.1 Aplicações no Brasil Utilizando o Sistema Freyssinet .....	11
1.3.1.1.1 Os Primeiros Projetos Brasileiros Desenvolvidos sob Orientação do Engo Carlos Freire Machado .....	11
1.3.2 Sistema Rudloff .....	11
1.3.2.1 Aplicações no Brasil Utilizando o Sistema Rudloff .....	12
1.3.3 Sistema Ferraz.....	12

1.3.3.1	Aplicações no Brasil Utilizando o Sistema Ferraz .....	13
1.3.4	Sistema Pfeil .....	13
1.3.4.1	Aplicações no Brasil Utilizando o Sistema Pfeil .....	14
1.3.5	Sistema VSL .....	14
1.3.5.1	Aplicações no Brasil Utilizando o Sistema VSL .....	14
1.3.6	Fusão VSL Rudloff .....	15
1.3.7	Sistema Baur - Leonhardt e a Ponte do Guaíba .....	15
<b>2</b>	<b>LAJES PROTENDIDAS .....</b>	<b>17</b>
2.1	Histórico das Lajes Protendidas .....	17
2.2	Funcionamento da Protensão .....	19
2.3	Pré-dimensionamento das Lajes Maciças Protendidas .....	21
2.4	Vantagens de Utilização das Lajes Maciças Protendidas .....	22
2.5	Aplicação das Lajes Maciças Protendidas .....	23
<b>3</b>	<b>MANUAL PARA ENTRADA DE DADOS DO PROGRAMA GRPROT .....</b>	<b>25</b>
3.1	Introdução .....	25
3.2	Cálculo da Grelha .....	25
3.2.1	Subrotina GERAL .....	27
3.2.1.1	Descrição das Variáveis da Subrotina GERAL .....	27
3.2.1.2	Explicação da Subrotina GERAL .....	27
3.2.1.3	Exemplo Ilustrativo do Arquivo de Entrada da Subrotina GERAL .....	28
3.2.2	Subrotina CONTORNO .....	28
3.2.2.1	Descrição das Variáveis da Subrotina CONTORNO .....	28
3.2.2.2	Explicação da subrotina CONTORNO .....	29
3.2.2.3	Exemplo Ilustrativo do Arquivo de Entrada da Subrotina CONTORNO .....	29
3.2.3	Subrotina ACAONODAL .....	30
3.2.3.1	Descrição das Variáveis da Subrotina ACAONODAL .....	30
3.2.3.2	Explicação da Subrotina ACAONODAL .....	30
3.2.3.3	Exemplo Ilustrativo do Arquivo de Entrada da Subrotina ACAONODAL .....	31
3.2.4	Subrotina SEQUENCIAL .....	31
3.2.4.1	Descrição das Variáveis da Subrotina SEQUENCIAL .....	31
3.2.4.2	Explicação da Subrotina SEQUENCIAL .....	32

3.2.4.3	Exemplo Ilustrativo do Arquivo de Entrada da Subrotina SEQUENCIAL.....	32
3.2.5	Subrotina NUMBARRA.....	34
3.2.5.1	Descrição das Variáveis da Subrotina NUMBARRA.....	34
3.2.5.2	Explicação da Subrotina NUMBARRA .....	34
3.2.5.3	Exemplo Ilustrativo do Arquivo de Entrada da Subrotina NUMBARRA.....	35
3.2.6	Subrotina MATERIAL .....	38
3.2.6.1	Descrição das Variáveis da Subrotina MATERIAL .....	38
3.2.6.2	Explicação da Subrotina MATERIAL.....	38
3.2.6.3	Exemplo Ilustrativo do Arquivo de Entrada da Subrotina MATERIAL .....	38
3.2.7	Subrotina CARREGAMENTO.....	39
3.2.7.1	Descrição das Variáveis da Subrotina CARREGAMENTO .....	39
3.2.7.2	Explicação da Subrotina CARREGAMENTO .....	39
3.2.7.3	Exemplo Ilustrativo do Arquivo de Entrada da Subrotina CARREGAMENTO .....	40
3.3	Cálculo da Protensão.....	41
3.3.1	Subrotina GERAL.....	43
3.3.1.1	Descrição das Variáveis da Subrotina GERAL .....	43
3.3.1.2	Explicação da Subrotina GERAL .....	43
<b>4</b>	<b>FORMULAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ E DO VETOR DE CARGAS.....</b>	<b>45</b>
4.1	Introdução .....	45
4.2	Introdução ao Método dos Elementos Finitos .....	45
4.3	Métodos Aproximados.....	47
4.3.1	Introdução aos Métodos Aproximados .....	47
4.3.2	Método de Rayleigh Ritz .....	47
4.3.3	Exemplo de Utilização do Método de Rayleigh Ritz.....	48
4.4	Formulação da Matriz de Rigidez e do Vetor de Cargas do Elemento .....	52
4.4.1	Deformações .....	53
4.4.2	Deslocamento Independentes.....	53
4.4.3	Deslocamentos Dependentes.....	53
4.4.4	Matriz Considerando Apenas Deslocamentos Independentes - Matriz C.....	54
4.4.5	Matriz Considerando Apenas as Deformações dos Deslocamentos Independente -	

	Matriz J .....	55
4.4.6	Graus de Liberdade .....	55
4.4.7	Esforços.....	57
4.5	Formação do Vetor de Cargas do Elemento .....	61
4.6	Formação da Matriz de Rotação do Elemento .....	64
4.7	Formação da Matriz Global em Banda .....	67
4.8	Formação do Vetor de Carga Global da Estrutura.....	70
<b>5</b>	<b>CÁLCULO DA FORÇA DE PROTENSÃO .....</b>	<b>71</b>
5.1	Introdução .....	71
5.2	Estados Limites de Utilização.....	71
5.3	Tipos de Protensão .....	72
5.3.1	Protensão Completa .....	72
5.3.2	Protensão Limitada .....	75
5.3.3	Protensão Parcial.....	77
5.4	Escolha do Tipo de Protensão.....	80
5.5	Restrição de Uso ( Item 4.3 NBR 7197 ) .....	80
5.6	Fatores de Combinação e Fatores de Utilização( Item 5.1.4.4 - NBR 7197).....	81
5.7	Estados Limites ( Item 6 NBR 7197 ).....	82
5.7.1	Dimensionamento para o Estado Limite Último Devido as Solicitações Normais .....	84
5.7.2	Cálculo do Valor da Força de Protensão.....	88
<b>6</b>	<b>TRAÇADO DO CABO DE PROTENSÃO .....</b>	<b>91</b>
6.1	Introdução .....	91
6.2	Cálculo do Fuso Limite.....	92
6.2.1	Fuso Limite Referente ao Momento Máximo Positivo.....	92
6.2.1.1	Fase de Utilização .....	92
6.2.1.2	Fase em Serviço .....	93
6.2.2	Fuso Limite Referente ao Momento Máximo Negativo .....	94
6.2.2.1	Fase em Utilização .....	94
6.2.2.2	Fase em Serviço .....	95
6.3	Traçado do Fuso Limite .....	95
6.4	Cabo Concordante.....	97

6.5	Transformação Linear .....	98
6.6	Traçado Parabólico Automático do Cabo de Protensão.....	100
<b>7</b>	<b>PERDAS DE PROTENSÃO .....</b>	<b>105</b>
7.1	Introdução .....	105
7.2	Perdas Imediatas .....	105
7.2.1	Perdas por Atrito .....	105
7.2.1.1	Cálculo do ângulo $\alpha$ .....	108
7.2.2	Perdas por Acomodação das Ancoragens .....	108
7.3	Perdas Progressivas.....	111
7.3.1	Perdas por Fluência do Concreto .....	112
7.3.2	Perdas por Retração do Concreto.....	113
7.3.3	Cálculo Prático da Fluência e Retração do Concreto.....	115
7.3.3.1	Observações segundo Rudloff [ 22 .....	116
<b>8</b>	<b>EXEMPLOS DE LAJES E VIGA CONTÍNUA PROTENDIDA .....</b>	<b>117</b>
8.1	Introdução .....	117
8.2	Exemplo 1- Laje Apoiada nas Quatro Bordas .....	117
8.3	Exemplo 2 - Laje Contínua sem Viga de Borda ( Laje Cogumelo ) .....	126
8.4	Exemplo 3 - Viga Contínua 4 Apoios.....	128
<b>9</b>	<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>137</b>
<b>10</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>139</b>
	<b>ABSTRACT .....</b>	<b>143</b>

## LISTA DE TABELAS

	<b>Página</b>
5.1	Escolha do tipo de protensão ..... 80
5.2	Valores dos fatores de combinação e dos fatores de utilização ..... 81
7.1	Valores do coeficiente de perdas por metro, provocadas por curvaturas não intencionais ..... 107
7.2	Cordoalha de 7 fios = $\varnothing$ 1/2" (RB) ..... 107
7.3	Cordoalha de 7 fios = $\varnothing$ 5/8" (RB) ..... 107
7.4	Valores particulares para estimativas preliminares ou para obras correntes realizadas com concreto plástico (NBR 7197)..... 114
8.1	Forças de protensão e perdas de protensão na viga ..... 125
8.2	Forças de protensão e perdas de protensão na viga ..... 128

## LISTA DE FIGURAS

	<b>Página</b>
1.1	Barras de aço distendida na pista de protensão ..... 04
1.2	Peça concretada na pista de protensão ..... 04
1.3	Corte da armadura após a peça concretada ..... 04
1.4	Exemplo de laje alveolar e vigota protendida ..... 05
1.5	Concreto protendido com aderência posterior ..... 06
1.6	Fixação das cordoalhas no estribo da armadura de pele da peça ..... 06
1.7	Protensão da peça de concreto ..... 07
1.8	Injeção de nata de cimento na peça de concreto ..... 08
1.9	Concreto protendido sem aderência – elementos externos ..... 09
2.1	Vigotas pré-moldadas protendidas ..... 20
2.2	Painel da laje alveolar protendida ..... 20
2.3	Exemplo de aplicação e corte do painel de laje alveolar ..... 21
3.1	Fluxograma referente a parte do programa grelha ..... 26
3.2	Viga com dois elementos ..... 28
3.3	Viga bi-apoiada mostrando condições de contorno ..... 29
3.4	Viga com carregamento nodal ..... 31
3.5	Viga numerada com nós ..... 32
3.6	Exemplo de grelha numerada por linhas ..... 33
3.7	Exemplo de grelha com numeração dos nós e elementos ..... 35
3.8	Exemplo de grelha com carregamento distribuído ..... 40
3.9	Fluxograma referente a parte do programa de protensão ..... 42
4.1	Rede de elementos finitos ..... 46
4.2	Exemplo de viga com carregamento distribuído ..... 48

4.3	Sistema de coordenadas global do elemento finito.....	52
4.4	Graus de liberdade do elemento finito .....	55
4.5	Carregamento na grelha .....	61
4.6	Carregamento distribuído trapezoidal .....	62
4.7	Exemplo de pórtico plano .....	64
4.8	Sistema local e numeração de coordenadas para grelha .....	65
4.9	Sistema global e numeração de coordenadas para grelha.....	65
4.10	Rotação de eixos para um elemento de pórtico espacial no plano XZ .....	66
4.11	Viga dividida em 10 elementos.....	68
4.12	Matriz quadrada de 6 elementos considerando 2 coordenadas por nó.....	68
4.13	Matriz retangular decomposta em banda .....	69
5.1	Diagrama de tensões respeitando o estado limite de descompressão .....	73
5.2	Diagrama de tensões respeitando o estado limite de formação de fissuras .....	74
5.3	Diagrama de tensões respeitando o estado limite de descompressão .....	75
5.4	Diagrama de tensões respeitando o estado limite de formação de fissuras .....	76
5.5	Diagrama de tensões respeitando o estado limite de descompressão .....	77
5.6	Diagrama de tensões respeitando o estado limite de formação de fissuras .....	78
5.7	Tensão na peça de concreto considerando protensão parcial.....	79
5.8	Tensão no concreto considerando somente a força de protensão .....	82
5.9	Tensão no concreto considerando cargas externas .....	82
5.10	Diagrama de tensões para o estado limite último devido as solicitações normais.....	84
6.1	Esquema de solicitação .....	92
6.2	Esquema de solicitação .....	93
6.3	Esquema de solicitação .....	94
6.4	Esquema de solicitação .....	95
6.5	Fuso limite para os estados limites ( utilização e último ).....	96
6.6	Cabo de protensão respeitando as tensões admissíveis do fuso limite .....	96
6.7	Fuso limite delimitado pelo cobrimento mínimo.....	96
6.8	Fuso limite com limites coincidentes.....	97
6.9	Transformação linear da linha do centro de gravidade da armadura .....	98
6.10	Momentos isostáticos de protensão .....	99

6.11	Traçado do cabo para uma viga contínua.....	100
7.1	Ângulo de curvatura do cabo de protensão.....	108
7.2	Perdas devido a acomodação das ancoragens.....	109
7.3	Calculo da área A3 proporcional ao valor da penetração da cunha.....	110
8.1	Laje apoiada nas quatro bordas.....	118
8.2	Traçado do cabo concordante respeitando o fuso limite.....	123
8.3	Laje de piso de um edificio de estacionamento.....	126
8.4	Traçado do cabo concordante respeitando o fuso limite.....	127
8.5	Viga contínua com três tramos.....	129
8.6	Traçado do cabo concordante respeitando o fuso limite.....	133

## LISTA de SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

$\mu$	Coefficiente de atrito entre o aço e a bainha
$\varepsilon_{2s}$	Coefficiente dependente da espessura fictícia da peça
$\varepsilon_{1s}$	Coefficiente dependente da umidade relativa do ambiente e da consistência do concreto
$P_0(x)$	Força de protensão na seção da abscissa $x$ , no tempo $t=0$
$P_0$	Força de protensão na seção da abscissa $x=0$ ; no tempo $t=0$
$\alpha$	Somatório dos ângulos de inflexão do cabo, não considerando a inclinação $\alpha_0$
$\varphi_\infty$	Coefficiente final de fluência
$\phi_a$	Coefficiente de fluência rápida
$\varepsilon_{c\infty}$	Retração final
$\phi_d$	Coefficiente de deformação lenta reversível
$\phi_f$	Coefficiente de deformação lenta irreversível
$\sigma_s'$	Tensão na borda inferior
‰	Pormil
$A_c$	Área de concreto da seção analisada
$A_p$	Seção transversal da armadura de protensão
$A_p$	Área do cabo de protensão
$A_s$	Área de aço
$e$	Excentricidade do cabo na seção considerada
$E_c$	Módulo de deformação do concreto
$e_p$	Distância do centro de gravidade da peça até o centro de gravidade da armadura
$E_p$	Módulo de deformação do aço de protensão
$f_{ck}$	Resistência à compressão do concreto
$I_c$	Momento de Inércia da seção analisada

$k$	Coefficiente de rigidez da seção considerada
$k'$	Distância do antipólo da borda inferior ao C.G. da seção
$k''$	Distância do antipólo da borda superior ao C.G. da seção
kN	QuiloNewton
$M$	Momento em cada nó da viga
$M_g$	Momento devido ao carregamento permanente
$M_{g_{max}}$	Maior momento da viga contínua ou maior momento da faixa da laje
MPa	MegaPascal
$M_q$	Momento devido ao carregamento acidental
$N_p$	Componente normal de P na seção
$P_\infty$	Força de protensão para um tempo infinito
$R_s$	Resultante das tensões de tração
$t$	Idade fictícia do concreto no instante considerado, em dias
$t_0$	Idade fictícia do concreto no instante em que o efeito da retração na peça começa a ser considerado, em dias.
$W_{cp}$	Módulo de resistência da seção, na altura do cabo
$y'$	Distância do C.G. à borda inferior da seção
$y''$	Distância do C.G. à borda superior da seção

## RESUMO

**TEIXEIRA, ANTÔNIO DE OLIVEIRA FERNANDES** – Cálculo automático de lajes protendidas simuladas como grelha utilizando o método dos elementos finitos – Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, 1998, 172 páginas – Dissertação de Mestrado.

Pretende-se com este trabalho automatizar o cálculo de lajes protendidas, utilizando como simulação o método das grelhas, dividindo-se a peça em várias vigas no plano horizontal. O cálculo analítico de placas é complexo e nas tabelas usuais são fornecidas expressões que permitem calcular os momentos fletores máximos considerando algumas condições de contorno, o que limita o uso destas tabelas.

Com o programa desenvolvido neste trabalho são calculados tensões, esforços e deslocamentos em qualquer seção da peça com condições de contorno variadas. Os resultados são fornecidos para cada viga da grelha.

A força de protensão é calculada utilizando os tipos de protensão definidos pela Norma Brasileira: completa, limitada e parcial, escolhidos no arquivo de entrada do programa. O valor final da força de protensão é obtida analisando comparativamente os estados limites de utilização e o estado limite último, sendo assumido o valor que respeitar as condições prescritas pela Norma.

Com a força de protensão definida é determinada a região ao longo da peça onde deve estar localizada a linha de pressão no concreto ( fuso limite ). Tendo-se por base esta limitação, é

traçada a linha que define o centro de gravidade da armadura ao longo da peça respeitando o conceito de cabo concordante, cujo equacionamento está proposto na programação. Se o cabo concordante não respeitar o fuso limite, com o conceito de transformação linear calcula-se um cabo discordante que respeita as limitações impostas pelo fuso limite.

Com um traçado de cabo definido serão calculadas as perdas por atrito e as forças de protensão ao longo deste cabo, usando o conceito de carga equivalente à protensão e todas as seções serão analisadas dentro dos limites impostos por Norma. O programa foi elaborado considerando que as armaduras são pós-tensionadas existindo aderência entre o concreto e aço, garantindo a compatibilidade de deformações entre os dois materiais.

Espera-se com o modelo adotado obter resultados competitivos com os de outros modelos considerados mais elaborados.

O programa desenvolvido permite também a análise de vigas protendidas contínuas isoladas.

**Palavras Chave:** Concreto protendido, Lajes de concreto, Vigas de concreto protendido, Engenharia de estruturas.

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1 HISTÓRICO DO CONCRETO PROTENDIDO

A idéia da execução da protensão é tão antiga quanto a do próprio concreto armado. Verificou-se que o concreto possuía grande resistência a compressão e pequena resistência a tração, cerca de 1/10 daquele valor. Sendo assim, o concreto fissurava na região tracionada sob cargas bem inferiores à carga de ruptura, tornando-se ineficiente na parte tracionada e somente com sua parte comprimida absorvendo os esforços, desta forma, a parte tracionada do concreto podia ser desprezada cabendo à armadura, no caso do concreto armado, resistir aos esforços de tração.

Muitas foram as tentativas para evitar a fissuração indesejável do concreto. Uma das maneiras mais eficazes consistia em tracionar previamente cabos de aço internos a estrutura de concreto que ao serem liberados desses esforços transferiam-nos por aderência ao concreto, comprimindo-os. Os cabos de aço foram denominados cabos de protensão e as forças foram chamadas de força de protensão. Os cabos de protensão formam a armadura ativa.

A força de protensão era de tal modo que, mesmo sob carregamentos máximos, não produziria normais na seção transversal de tração, mantendo assim toda a seção de concreto comprimida, impedindo o aparecimento de fissuras. O concreto submetido a um estado inicial de compressão, capaz de contrariar as tensões provenientes da carga externa, é denominado concreto protendido na nomenclatura brasileira.

Para a utilização da protensão não é possível utilizar qualquer tipo de aço, fato entretanto não percebido desde o início. As primeiras peças de concreto protendido fabricadas foram produzidas com o mesmo aço utilizado no concreto armado. Inicialmente nos primeiros meses a peça se comportava muito bem, resistindo aos esforços dos carregamentos externos, sem fissurar,

conforme a previsão dos cálculos, entretanto, devido aos efeitos da retração e da deformação lenta, ainda não conhecidos na época, o efeito da protensão se dissipava.

A primeira idéia de se pré-tensionar o concreto foi aplicada em 1886 por P. H. Jackson de São Francisco, Califórnia, que obteve patentes para protender pedras artificiais e arcos de concreto.

Em torno de 1888, o alemão Doehring conseguiu patente para fabricar elementos de pisos com argamassa e arame estirado; ele usou este concreto para a construção de laje de piso.

No ano de 1906, Koenen aplicou pela primeira vez a pré-tensão com o interesse de se eliminar a fissuração. Como ainda não existiam os aços de alta resistência, Koenen sistematizou a fabricação das peças estirando o aço a  $6 \text{ kg/mm}^2$  obtendo uma deformação  $\epsilon_s=3\%$  alongamento que com o decorrer do tempo se perdia devido à retração e deformação lenta do concreto.

Em 1908 o americano Steiner sugeriu que se fizesse um re-estiramento após ocorrerem as perdas por retração e deformação lenta do concreto, afim de se recuperarem as perdas; no entanto, dificuldades construtivas levaram a idéia de evitar a fissuração por pré-tensão a ser deixada de lado. Passaram-se então 20 anos até chegar o segundo período de desenvolvimento, quando começaram os êxitos.

Em 1919, K. Wettstein fabricou pranchas de concreto de pequenas espessuras (as denominadas pranchas de Wettstein) com cordas de piano fortemente tencionadas. Ele foi o primeiro a usar aço de alta resistência sob elevadas tensões, embora sem ter plena consciência de que estas eram as condições prévias decisivas para o êxito do concreto protendido.

O primeiro a reconhecer que se deveria utilizar fios de alta resistência sob elevadas tensões foi R. H. Dill, de Alexandria, Nebraska, em 1923.

As hipóteses fundamentais necessárias para o êxito obtido pelo concreto protendido foram pela primeira vez estabelecidas e descritas de maneira absolutamente correta por Eugene Freyssinet, o qual em 1928 patenteou um sistema de protensão com tensões no aço superiores a  $4000 \text{ kgf/cm}^2$ . O mérito especial de Freyssinet está no fato dele ter pesquisado a retração e a deformação lenta do concreto, tendo daí retirado as conclusões corretas aplicáveis ao concreto protendido.

Freyssinet foi também quem executou a primeira obra de concreto protendido. Em 1941 projetou a ponte em pórtico biarticulado sobre o rio Marne em Lucancy, a qual só pôde ser concluída após o término da 2ª Guerra Mundial. Posteriormente mais cinco pontes do mesmo tipo foram construídas sobre o rio Marne.

## **1.2. TIPOS DE CONCRETO PROTENDIDO**

Os tipos de concreto protendido se dividem em: concreto protendido com aderência e concreto protendido sem aderência.

### **1.2.1 CONCRETO PROTENDIDO COM ADERÊNCIA**

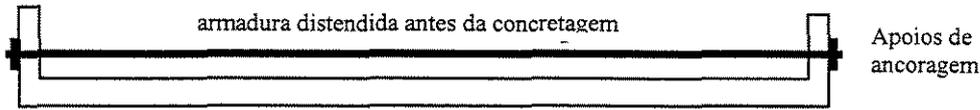
O concreto protendido com aderência se divide em dois tipos: aderência inicial e aderência posterior.

#### **1.2.1.1 CONCRETO PROTENDIDO COM ADERÊNCIA INICIAL ( ARMADURA DE PROTENSÃO PRÉ- TRACIONADA )**

É aquele em que o estiramento da armadura de protensão é feito utilizando apoios independentes da peça, antes do lançamento do concreto, sendo a ligação da armadura de protensão com os referidos apoios desfeita após o endurecimento do concreto, a concretagem no concreto realiza-se por aderência.

Pode-se dizer que este processo é dividido em três fases, sendo a primeira referente somente a distensão da armadura independente da peça de concreto, onde os apoios de ancoragem da armadura estão dispostos fora da peça

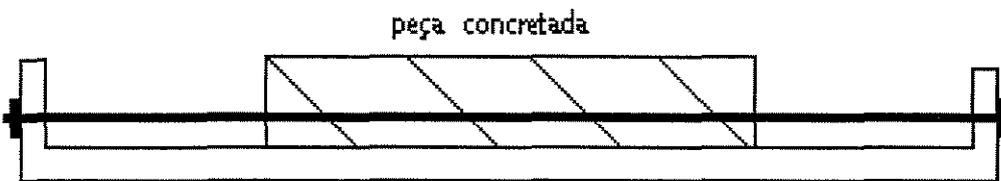
### 1º Fase



**FIGURA 1.1 - Barras de aço distendida na pista de protensão**

Após as armaduras serem distendidas com o valor real de cálculo, já somadas todas as perdas, é concretada a peça.

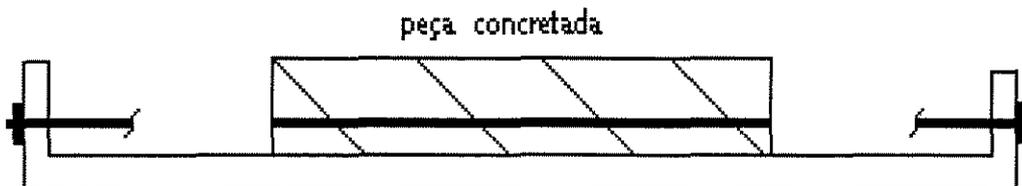
### 2º Fase



**FIGURA 1.2 - Peça concretada na pista de protensão**

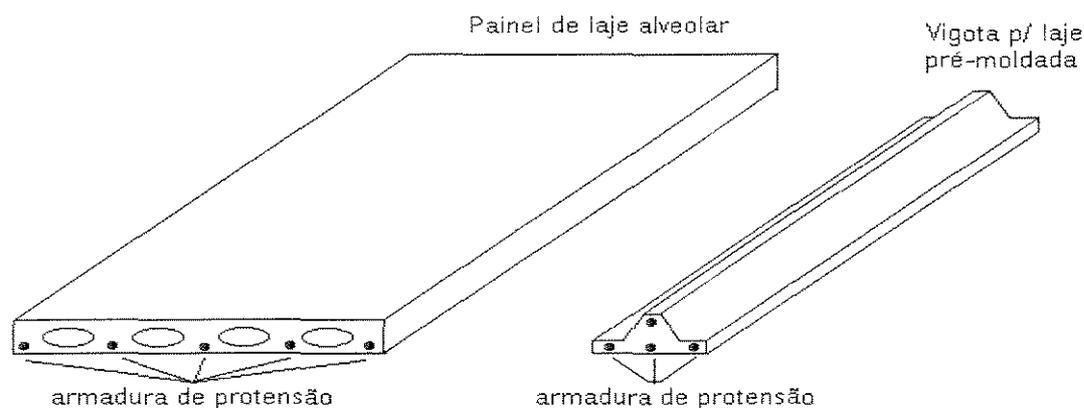
Após o concreto atingir a resistência de cálculo a armadura é cortada com a manifestação da aderência entre a armadura e o concreto, ambos passam a trabalhar como peça única.

### 3º Fase



**FIGURA 1.3 - Corte da armadura após a peça concretada**

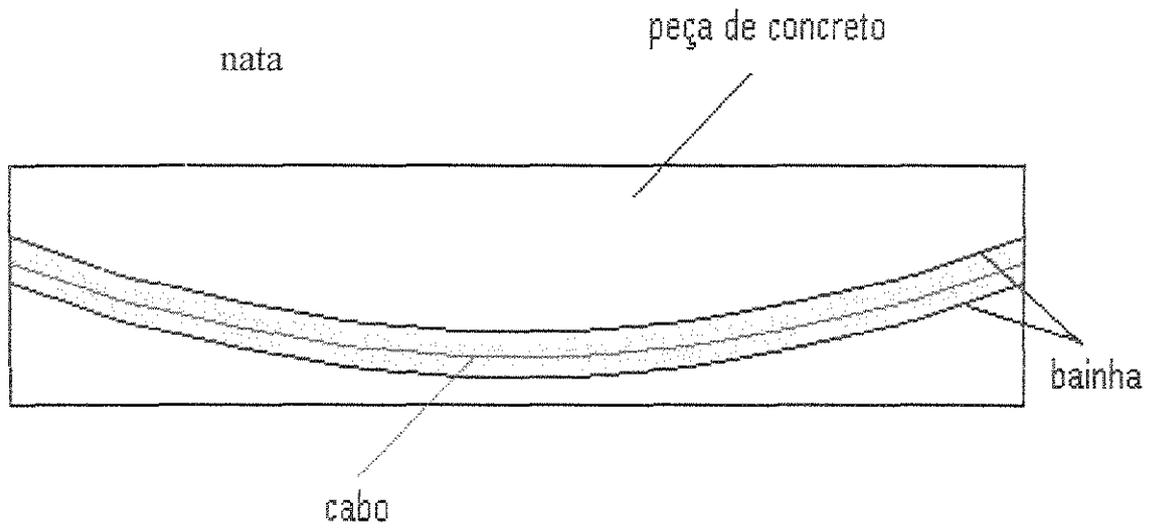
Este tipo de protensão é muito utilizado em pistas de protensão, onde são fabricadas lajes alveolares e vigotas protendidas. Uma pista de protensão pode medir mais de 200 metros. As formas dessas lajes são concretadas ao longo desse comprimento. Após o endurecimento do concreto painéis são cortados na medida desejada e transportados para a obra.



**FIGURA 1.4 - Exemplo de laje alveolar e vigota protendida**

### **1.2.1.2 CONCRETO PROTENDIDO COM ADERÊNCIA POSTERIOR (ARMADURA DE PROTENSÃO PÓS-TRACIONADA)**

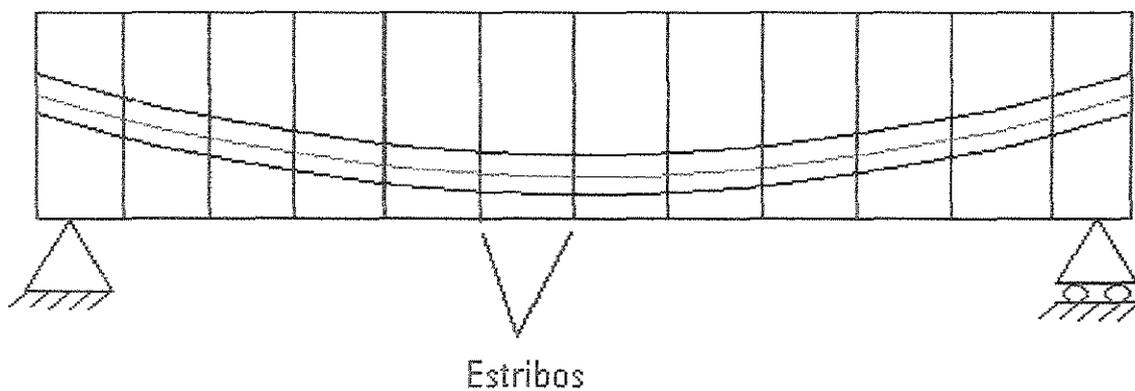
É aquele em que o estiramento da armadura de protensão é realizado após o endurecimento do concreto utilizando-se, como apoios, partes da própria peça, criando-se posteriormente aderência com o concreto de modo permanente. A aderência da peça de concreto com a armadura é feita injetando nata de cimento nos vazios da armadura com a bainha. Além da aderência a injeção de nata serve para proteger a armadura de protensão contra a corrosão. A injeção de nata de cimento deve ser feita imediatamente após a protensão, caso seja preciso de uma reprotensão dos cabos, é necessário tomar providências que impeçam o ataque da armadura durante o tempo em que o cabo não está injetado. Para injeção de nata algumas exigências devem ser tomadas: o cimento deve ser portland sem conter cloreto de cálcio, ou halogenetos capazes de provocar corrosão na armadura tensionada, e a água deve ser isenta de corpos estranhos sobretudo cloretos.



**FIGURA 1.5 - Concreto protendido com aderência posterior**

Podemos dizer que a protensão com aderência posterior se divide em 4 fases.

1º fase



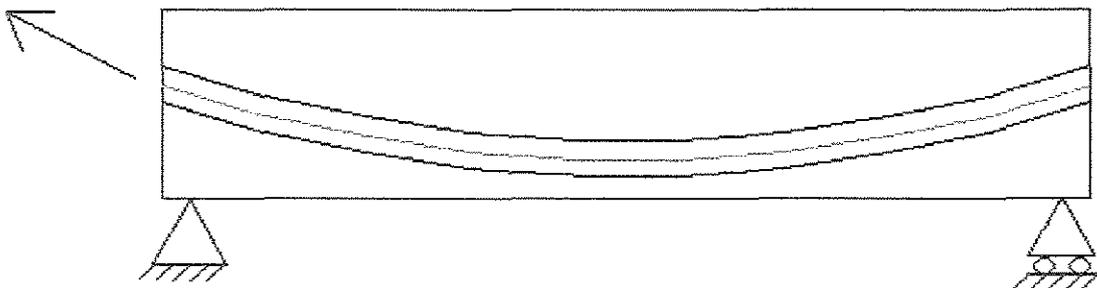
**FIGURA 1.6 - Fixação das cordoalhas no estribo e armadura de pele da peça**

Na montagem dos estribos e da armadura passiva, a bainha metálica com as cordoalhas em seu interior são fixadas nos estribos, já com a curvatura projetada nos cálculos.

#### 2º fase

Após a montagem das armaduras ativa e passiva, são colocadas as formas e concretada a peça de concreto.

#### 3º fase

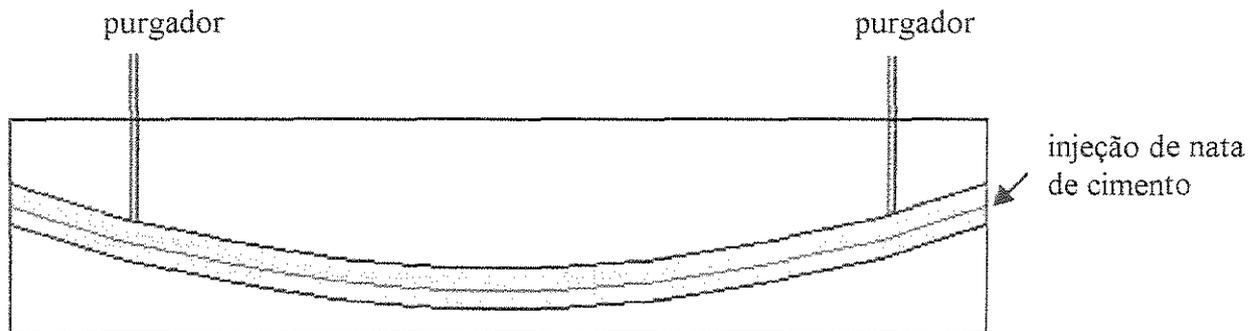


**FIGURA 1.7 Protensão da peça de concreto**

Após o concreto adquirir a resistência necessária é feita a protensão na peça de concreto.

#### 4º fase

Para garantir a aderência entre a peça de concreto e a armadura, é feita a injeção de nata de cimento.



**FIGURA 1.8 - Injeção de nata de cimento na peça de concreto**

Para se certificar que toda a bainha esteja preenchida com nata de cimento são deixados respiros (purgadores) que permitem visualizar a saída de nata, impedindo assim a formação de vazios no interior da bainha.

A utilização da bainha metálica e nata de cimento na protensão com aderência posterior, devemos agradecer ao professor Figueiredo Ferraz que, no final da década dos anos 50, idealizou o sistema baseado somente na aderência dos fios dentro da calda de injeção, o que evidentemente só funcionava no interior de uma bainha metálica.

Há cerca de quatro anos foi introduzido no Brasil a monocordoalha engraxada, para a utilização em protensão não aderente, sendo sua principal aplicação no campo de lajes planas e pisos de aeroportos. Suas principais vantagens são a baixa perda de atrito e por não haver necessidade de injeção de nata de cimento.

## **1.2.2 CONCRETO PROTENDIDO SEM ADERÊNCIA**

Existem dois tipos de concreto protendido sem aderência: o concreto protendido sem aderência com elementos de armadura externa e o concreto protendido com elementos de armadura de protensão internos .

### 1.2.2.1 CONCRETO PROTENDIDO SEM ADERÊNCIA DA ARMADURA DE PROTENSÃO EXTERNA

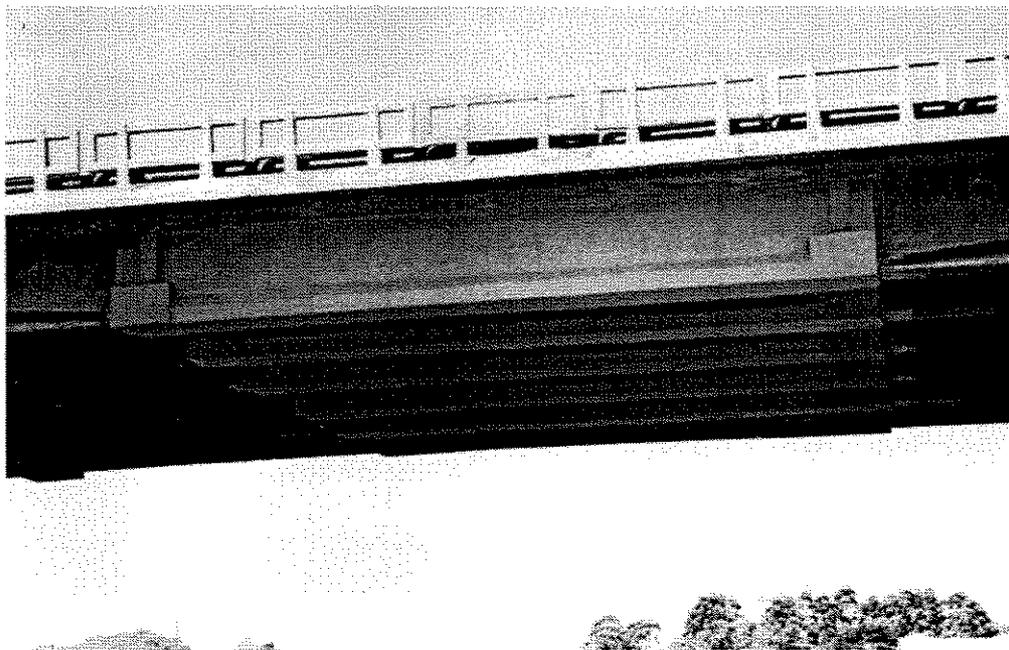


FIGURA 1.9 - Concreto protendido sêm aderência - elementos externos

### 1.2.2.2 CONCRETO PROTENDIDO SEM ADERÊNCIA COM ELEMENTOS DE ARMADURA DE PROTENSÃO INTERNOS

É idêntico ao concreto protendido com aderência posterior sem a injeção da nata de cimento, podemos citar como exemplo os cabos engraxados.

A utilização de concreto protendido sem aderência, segundo o item 4.3 da NBR 7197 / 1989, só é permitido em peças que na sollicitação final ( protensão + carga permanente + sobrecarga ) não possuam tensões de tração no concreto. Para pontes ferroviárias a prescrição é de que só poderá ser empregado concreto protendido com aderência.

Segundo Vasconcelos, no Brasil na ausência de aços nacionais de alta resistência, até meados do final da década de 50, era necessário usar aço importado ou aço menos resistente com previsão de perdas percentualmente mais elevadas. Para a construção da primeira obra, em 1947, a ponte do Galeão, tudo foi importado, desde o projeto até o aço, as ancoragens e o equipamento

para a aplicação da protensão. Em 1952 a Companhia Siderúrgica Belgo Mineira iniciou a fabricação do aço de protensão, mas apenas o tipo de fio de aço denominado “ patenting ” de diâmetro 5mm. A segunda obra brasileira, a ponte de Joalheiro, foi feita com esse aço brasileiro.

Duffes Andrade, o pioneiro no Brasil na produção de concreto protendido “ Sistema Hoyer”, em 1956, não existindo ainda arames finos de alta resistência de fabricação nacional usou os fios de arame para prego. Estes arames possuíam, pelo fato de serem muito finos, uma resistência suficientemente elevada.

Em 1958 começou-se a efetuar o tratamento térmico de alívio de tensões o que melhorou bastante o desempenho do aço. Foram também produzidos diâmetros de 7 e 8mm.

### **1.3 SISTEMAS DE PROTENSÃO NO BRASIL**

#### **1.3.1 SISTEMA FREYSSINET**

Durante cerca de 6 anos , a partir do início em 1947, a única patente explorada no Brasil foi a Freyssinet. A primeira grande aplicação da patente Freyssinet no mundo se deu na Ponte do Galeão, que une a ilha do Governador à ilha do Fundão no Rio de Janeiro.

A Stup, logo que foi fundada no Brasil em 1950, orientava o usuário desde a fase de projeto até a execução dos cabos e colocação das ancoragens, como também na aplicação da protensão e sua medida. Os equipamentos de protensão e de injeção das bainhas eram alugados ao usuário e o acompanhamento dos trabalhos era feito por pessoal especializado da própria Stup.

Para que a patente Freyssinet pudesse ser aplicada em todo o país, sem necessidade de recorrer ao escritório da Stup em cada concorrência, e para cada projeto, o engenheiro Carlos Freire Machado, (outro pioneiro das aplicações do concreto protendido no Brasil ), designou em cada centro importante um representante credenciado, capaz de levar a cabo a difícil tarefa de desenvolver projetos econômicos e de execução segura.

### **1.3.1.1 APLICAÇÕES NO BRASIL UTILIZANDO O SISTEMA FREYSSINET**

Os primeiros projetos de obras em concreto protendido foram desenvolvidos na França pela Stup francesa. As três primeiras obras feitas no Brasil nestas condições foram:

- Ponte do Galeão Rio de Janeiro ( primeira obra de concreto protendido construída no continente das Américas, sendo recorde Mundial;
- Ponte sobre o Rio São Francisco em Juazeiro, na Bahia;
- Barragem de Ernestina no rio Jacuí, Rio Grande do Sul.

#### **1.3.1.1.1 OS PRIMEIROS PROJETOS BRASILEIROS DESENVOLVIDOS SOB ORIENTAÇÃO DO ENGº CARLOS FREIRE MACHADO**

- Ponte sobre o canal do Mangue, Rio de Janeiro;
- Viaduto do Deodoro, Rio de Janeiro;
- Ponte sobre o Rio Grande na Via Anchieta, Rod. São Paulo- Santos;
- Ponte em viga contínua sobre o Rio Suassui, Minas Gerais;
- Marquise do Hipódromo de Porto Alegre, Rio Grande do Sul.

### **1.3.2 SISTEMA RUDLOFF**

Depois do Sistema Freyssinet, o Sistema Rudloff foi o que teve a maior repercussão no Brasil, tendo como vantagem de ser um sistema genuinamente brasileiro sem necessidade de pagar “ royalties ”. Seu idealizador o Eng.º José E. Rudloff Manns, formado em 1943 na “ Universidade do Chile, em Santiago, como engenheiro civil e mecânico. Seu primeiro contato no Brasil com obras de concreto protendido o entusiasmou de tal forma que, em outubro de 1953, tomou a decisão que iria revolucionar sua vida profissional e mais tarde influenciar grandemente o desenvolvimento desta tecnologia no Brasil. Rudloff dominava o alemão, inglês e francês, indispensáveis ao estudo da literatura especializada da época. Sua meta escolhida era projetar

uma unidade de ancoragem de pequena capacidade, ( digamos dois arames de aço de 5mm, os únicos existentes no Brasil ) , com possibilidade de aumentar seu número gradativamente, formando cabos mais possantes. De início começou a protender peças relativamente pequenas. O problema era encontrar estas ancoragens. A primeira conclusão importante era que a cunha mais econômica deveria ser inteiramente plana para ancorar dois arames por vez. A fabricação de uma cunha reduzia-se a um só golpe de prensa de estampar e seria possível produzir milhares de cunhas por dia. O uso da cunha tronco-cônica de concreto cintado tipo Freyssinet, também muito econômica, estava vedado pois era protegido por patente.

### **1.3.2.1 APLICAÇÕES NO BRASIL UTILIZANDO O SISTEMA RUDLOFF**

- Em 1954 foram construídas 3000 vigotas de 5 e 6 metros para terças de telhado, para a fábrica Elclor na estação Rio Grande ( alto da Serra em São Paulo ), utilizando 2 fios de 5mm em cada viga;

- Em 1956 foi realizada a primeira ponte em Porto Ferrão, sobre o Rio Tietê, São Paulo;

- Até 1974 foram protendidas, com diversas firmas construtoras cerca de 1000 obras, sendo a que merece destaque por sua repercussão a Obra Elevado Costa e Silva, cognominado de “ Minhocão ”, em São Paulo.

### **1.3.3 SISTEMA FERRAZ**

Quando Rudloff iniciou a fabricação de vigas de concreto protendido de fios aderentes de  $\phi$  5mm em pistas de protensão em 1957, o sucesso técnico do empreendimento despertou interesse no Prof<sup>o</sup> José Carlos de Figueiredo Ferraz, Este talvez um tanto incrédulo na época, influenciado eventualmente pelas publicações alemãs que só aceitavam o sistema da ordem de  $\phi$  2mm, quis apreciar com os próprios olhos o não escorregamento dos fios de  $\phi$  5mm. Ferraz fez a seguinte reflexão: se é possível realizar a aderência com fios grossos de  $\phi$  5mm previamente tracionados numa pista de protensão, com configuração retilínea, por que não se pode fazer o mesmo dentro de um duto metálico embutido no concreto, com o qual se pode garantir a

aderência após a injeção. Esta pergunta amadureceu no espírito de Ferraz e deu origem ao seu processo de protensão.

### **1.3.3.1 APLICAÇÕES NO BRASIL UTILIZANDO SISTEMA FERRAZ**

- A primeira obra executada com este sistema foi uma ponte sobre o Rio Tietê em Jurumin;

- Edifício do Jornal “ A Gazeta”, na Av. Paulista em São Paulo, ano de 1960.

- Centro de Abastecimento de São Pulo, construído pela Cia Construtora Nacional em 1962 ( 35 metros de vão, 400 metros de extensão).

- Museu de Arte de São Paulo, concluído em 1969, recorde mundial de viga de concreto protendido em edifícios, com 74 metros de vão, construção de Sociedade Construtora Heleno & Fonseca S/A .

### **1.3.4 SISTEMA PFEIL**

O Prof. Walter Pfeil desenvolveu dois sistemas de protensão, sendo o primeiro desenvolvido em 1960, inicialmente chamado de “ Sistema Pré-load” e o segundo desenvolvido em 1965 baseado num cintamento contínuo, aplicado numa face da viga, sem utilização de grandes macacos, geralmente conhecido como sistema Pfeil. No sistema Pfeil os cabos constituídos por um número qualquer de fios correm normalmente do lado externo da viga, junto à alma, dispendo-se simetricamente dos dois lados. Como os cabos são externos, não há necessidade de bainhas, existindo apenas um berço de aço nos pontos de desvios do cabo. Uma das extremidades do cabo entra na peça de concreto de um comprimento suficiente para resistir por aderência a força total de protensão. Na outra extremidade, onde se aplica a força de protensão, o cabo fica imerso no concreto de um bloco, separado da viga, em que a extremidade do bloco é móvel permitindo aplicar um alongamento ao cabo de protensão.

Com a mudança para cordoalhas, o sistema Pfeil perdeu o interesse pois se tornava impraticável sem equipamentos mais poderosos para protensão e fixação provisórias de cada elemento do cabo.

### **1.3.4.1 APLICAÇÕES NO BRASIL UTILIZANDO O SISTEMA PFEIL**

- Ponte sobre o rio Paraíba, na BR 116, com 214 metros, Rio de Janeiro;
- 3 viadutos de acesso a Pindamonhangaba, a Santa Isabel e a Bonsucesso, na Via Dutra, com vão de 28 metros;
- Ponte sobre o rio Araguari, com 200 metros de comprimento( Minas Gerais );
- Ponte sobre o rio Mucuri com 150 metros ( Bahia );
- Viaduto sobre o Ribeirão Grande com 340 metros, BR 116 (Paraná ).

### **1.3.5 SISTEMA VSL**

Sistema suíço, introduzido no Brasil por Giovani Crivelli, em 1968 na Barragem de Estreito. As letras VSL significam “Vorspann System Losinger”, do nome do seu criador Vinzenz Losinger. Criado nos anos 50 o sistema Losinger nada tem a ver com o atual pois na época não se realizava cordoalhas e sim fios ou barras. Pela necessidade de concorrer economicamente com outros Losinger foi obrigado a reestudar o problema colocando sua equipe de engenheiros em Berna em intensa pesquisa a partir de 1956.

O novo Sistema VSL foi o primeiro a existir com protensão simultânea de um número variável de cordoalhas ancoradas uma por uma com cunhas tronco-cônicas. Para conseguir este feito foi necessário também re-projetar macacos capazes de exercer uma força de protensão inicial de quase 500 tf em 31 cordoalhas de  $\phi$  12,7 mm simultaneamente.

#### **1.3.5.1 APLICAÇÕES NO BRASIL UTILIZANDO O SISTEMA VSL**

As primeiras obras realizadas com o sistema VSL, tiveram de enfrentar “ encarniçada ” concorrência com os outros sistemas então vigentes no país foram:

- Viga de Munhão da barragem de Ilha Solteira, São Paulo, projeto da Themag Engenharia;

- Ponte Colombo Salles em Florianópolis, projeto do escritório Técnico Figueiredo Ferraz;
- Edifício da Venerável Ordem 3º de São Francisco da Penitência, no Rio de Janeiro, projeto de VSL - Alfredo Simões;
- Centro Empresarial de São Paulo, projeto do escritório técnico Figueiredo Ferraz (1974 /77), maior aplicação do sistema VSL no mundo com extensão fora do comum em área de lajes protendidas ( 143.500 m<sup>2</sup> ).

### **1.3.6 FUSÃO VSL E RUDLOFF**

As duas firmas se fundiram em 1981. Da firma resultante merece destaque a protensão da pista de taxiamento da base militar de Canoas. O dimensionamento foi feito para o avião Boeing 727-200, tendo o revestimento uma espessura de 15 cm e os trechos entre as juntas um comprimento de 115 metros. A protensão foi realizada nas direções longitudinal e transversal utilizando cordoalhas. Foi a primeira pista de pouso brasileira, em que o projeto ( M. Schmid ) da protensão e as próprias juntas de dilatação (Metálicas J. Rudloff) foram de procedência brasileira.

Foram no total 12 lajes totalizando 1360 metros, concretadas e protendidas em 7 meses. A protensão dos cabos longitudinais foi feita na região central das lajes.

### **1.3.7 SISTEMA BAUR - LEONHARDT E A PONTE DO GUAIBA**

Entre 1955 e 1960 foi executado após muitos “percalços ” financeiros, o conjunto de pontes sobre o delta do Rio Guaíba em Porto Alegre. O conjunto das obras totalizou 5665 metros de pontes, com grande variedade de tipos.

Após uma criteriosa concorrência, em que não dependia somente da construtora que desse o menor preço, a firma Azevedo Bastian e Castilho foi a vencedora, tendo sido os cálculos encomendados ao prof. Leonhard, detentor dos direitos de uso de seu processo de protensão com cabos de grande potência.

Para a construção da obra o mestre W. Baur, sócio de Leonhardt e profissional de ensino médio, esteve duas vezes durante longo tempo na obra para ensinar a execução do processo, que

era uma novidade no Brasil. Mesmo com a assistência técnica desse profissional não foi possível evitar um fato desagradável. Para conseguir uma superfície lisa no apoio dos macacos fizeram um recapeamento com enxofre derretido, como se utiliza em corpos de prova em ensaios de laboratório . As conseqüências foram que os vapores de anidrido sulfuroso corroeu o aço alemão provocando ruptura frágil. Felizmente a viga estava apoiada no cimbramento não ocasionando nada de grave, a não ser o prejuízo com a armadura .

Não se sabe se por motivos do não recebimentos de honorários ou de dificuldades de remessa de dinheiro para o estrangeiro Leonhardt faz menção do mau comportamento dos brasileiros. Os motivos verdadeiros nunca foram conhecidos; entretanto, Leonhardt elogia muito o desempenho da firma empreiteira e, em especial, de Jorge Vieira Bastian, de cujos esforços resultou o sucesso da obra.

## **2. LAJES PROTENDIDAS**

### **2.1 HISTÓRICO DAS LAJES PROTENDIDAS**

Segundo FREYSSINET [ 14 ], as lajes de piso em concreto armado, maciças e de espessuras constantes, foram desenvolvidas no mundo inteiro, mas especialmente nos EE.UU.( Estados Unidos ) a partir de 1944, graças às suas incomparáveis vantagens de velocidade e de simplicidade de execução.

O concreto protendido, cuja principal utilização era destinada a construções de pontes para vencer grandes vãos e sobrecargas, teve seu campo de aplicação ampliado sendo empregado nas construções de lajes protendidas com a mesma finalidade. Em 1955, e sobre um projeto da Stup Freyssinet, o primeiro modelo reduzido de laje de piso em concreto protendido comprovava as excepcionais qualidade deste tipo de estrutura.

Anos mais tarde, a primeira realização prática ocorria nos EE.UU.( Estados Unidos), e até fins dos anos 80 mais de 10 milhões de metros quadrados de lajes de piso em concreto protendido já tinham sido realizados nesse país, consumindo mais da metade da sua produção anual de aço de protensão.

No período entre 1967 e 1983 pesquisas realizadas pelo Post - Tensioning - Institute Phoenix , Arizona apontou que mais de 180 milhões de metros quadrados de lajes pós-tensionadas estavam concretadas, utilizando aproximadamente 200.000 toneladas de material de pós-tensão.

A primeira laje pós-tensionada nos Estados Unidos foi construída em meados de 1950. A maior parte das lajes pós-tensionadas construídas nesta época foi associada ao método de construção de laje suspensa. Nesta aplicação o pós- tensionamento foi introduzido para solucionar problemas de peso, deflexão e de fissuração.

Canadá e Austrália são dois outros países em que essa técnica se expandiu consideravelmente; na Austrália, por exemplo, a metade do aço de protensão produzido anualmente é empregado em lajes de concreto protendido.

Embora as lajes maciças protendidas tenham chegado ao Brasil na década de 70, ainda existe muita resistência à sua aplicação; técnicos da área atribuem isso à própria inércia da construção civil no Brasil, à falta de programas específicos para estruturas protendidas no mercado e à pequena carga horária destinada ao concreto protendido nas escolas de engenharia, sendo esta a maior crítica dos projetistas estruturais.

No Brasil, a técnica do pós-tensionamento de lajes absorveu nos últimos anos, cerca de 40 % do aço de protensão empregado no país, mas, em vista de suas vantagens, prevê-se um desenvolvimento cada vez mais rápido.

No início da utilização das lajes protendidas, pouco se conhecia sobre seu comportamento; por esta razão, critérios de cálculo tendiam a ser conservadores, sendo as técnicas de cálculo difíceis e com muito tempo gasto na sua elaboração. Possivelmente a razão mais importante para o crescimento das lajes pós-tensionadas foi o desenvolvimento e disseminação de técnicas que simplificaram grandemente o cálculo e análise dos elementos pós-tensionados linearmente independentes. A técnica de “Load-Balancing” (Balanceamento de Cargas) foi introduzida pelo Professor Lin T. Y. [17], em 1963, consistindo numa tentativa de balancear uma parcela das ações verticais atuantes na estrutura. Ela considera os efeitos da protensão como forças verticais atuantes na estrutura, e os efeitos da protensão como forças externas agindo em sentido contrário ao dessas ações; deste modo os esforços da protensão agem ao contrário dos carregamentos aplicados na peça. Este conceito elimina muitos dos métodos de cálculo utilizados anteriormente e quase todos os difíceis trabalhos matemáticos associados com análise de membros pós-tensionados.

## 2.2 FUNCIONAMENTO DA PROTENSÃO

Quando se traciona um cabo ondulado este tende a se retificar , criando desta maneira um carregamento dirigido para o centro de curvatura do cabo considerado.

Desta forma, com uma escolha criteriosa da força de protensão e da curvatura do cabo, é possível criar artificialmente um carregamento oposto ao carregamento externo a compensar.

No concreto protendido, as tensões prévias e de caráter permanente são introduzidas através de cabos de aço tracionados e ancorados no próprio concreto. Estes esforços anulam ou limitam em muito as tensões de tração, retardando o aparecimento de fissuras, permitindo assim trabalhar com toda a peça de concreto à compressão, visto que no concreto armado utilizamos somente a pequena parcela comprimida, sendo a parcela tracionada desprezada para cálculo.

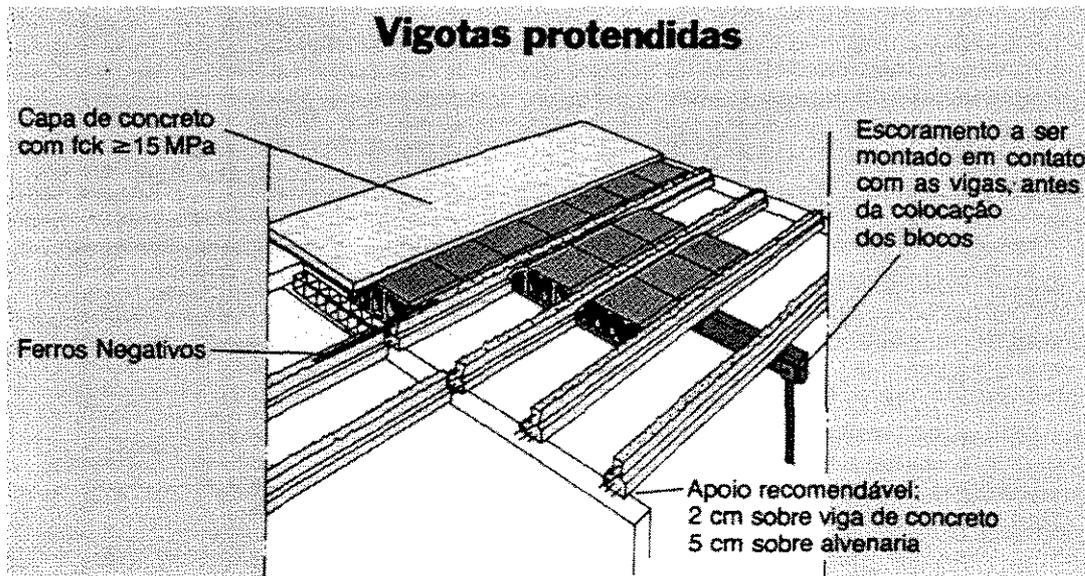
A protensão é um artifício utilizado para introduzir numa estrutura tensões prévias com a finalidade de melhorar sua resistência e seu comportamento, sob diversos tipos de carregamento, permitindo assim reduzir o peso próprio da estrutura e aumentar vãos e sobrecargas, já que os materiais empregados são de alta resistência.

As lajes maciças protendidas foram introduzidas nos canteiros brasileiros na década de 70, e possibilitava vencer vãos bem maiores do que as lajes concreto armado. Em uma viga protendida podemos chegar a adotar metade da altura da viga de concreto armado de mesmo vão, em lajes protendidas podemos chegar a alturas bem inferiores às lajes de concreto armado, adotando com sobrecargas bem acima das utilizadas em concreto armado.

O fato de vencermos vãos maiores indica que os pilares poderão ser mais convenientemente espaçados , acarretando maiores possibilidades arquitetônicas. Um bom exemplo é a garagem de um edifício, em que muitas vezes o projetista estrutural precisa fazer o posicionamento e calcular várias vezes a estrutura até que viabilize o trajeto ideal de veículos. Como as lajes protendidas possibilitam maiores vãos entre pilares, este trabalho de posicionamento é amenizado. As lajes de concreto protendido são sempre mais esbeltas do que as lajes de concreto armado

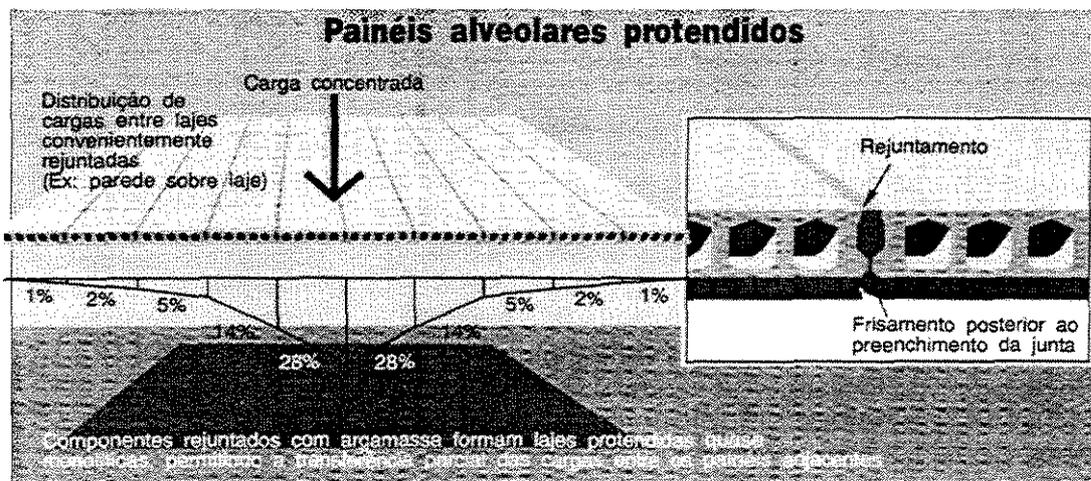
Além das lajes maciças protendidas moldadas “in loco”, podemos utilizar as lajes protendidas pré-fabricadas . Quando a protensão de lajes na obra se torna inviável por razões técnicas e econômicas, a melhor alternativa são as peças protendidas pré-fabricadas. Utilizadas

em obras de menores dimensões, estações de metrô, edifícios, em que se eliminam do canteiro as etapas críticas de colocação dos cabos, concretagem e cura da laje.

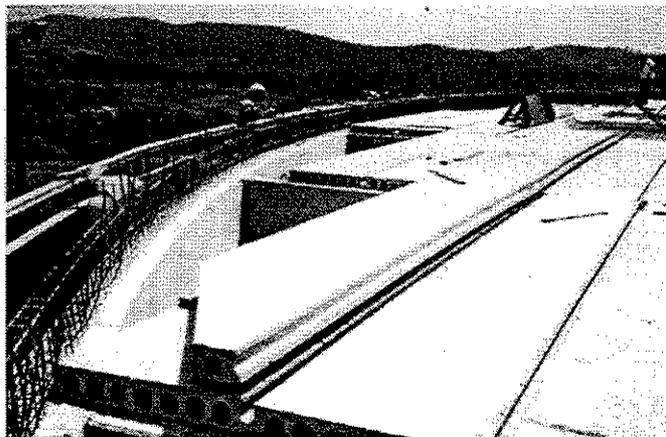


**FIGURA 2.1 - Vigotas Pré-Moldadas Protendidas**

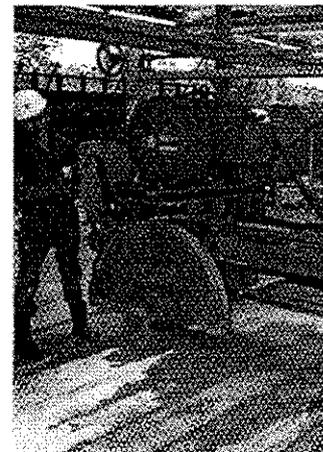
No Brasil possuímos uma grande variedade de sistemas protendidos para a montagem de lajes, desde vigotas para composição de blocos cerâmicos até painéis alveolares que possibilitam vencer vãos de até 15 metros para forro com apenas 15cm de altura.



**FIGURA 2.2 - Painel de Laje Alveolar Protendida**



O corte de peças protendidas pré fabricadas é feito com serra diamantada. As lajes protendidas alveolares podem ser adaptadas às necessidades de projeto, mediante estudos prévios, com cortes curvos ou diagonais.



**FIGURA 2.3 - Exemplo de Aplicação e Corte do Painel de Laje Alveolar**

## **2.3 PRÉ-DIMENSIONAMENTO DAS LAJES MACIÇAS PROTENDIDAS**

A Norma de Concreto Protendido NBR 7197 / 1989 no tocante a lajes protendidas é omissa, pois só descreve lajes maciças sem vigas e sem capitéis.

De acordo com o item 9.5.1.1, da NBR 7197, a espessura das lajes protendidas sem vigas não deve ser inferior a 16cm.

O item 9.5.1.2 da NBR 7197 não permite esbeltez  $\lambda/h$  (relação entre o menor vão  $\lambda$  e a espessura  $h$ ) superior a 60. No caso de lajes de piso com carga acidental superior a  $3 \text{ KN/m}^2$ , somente é permitida esbeltez superior a 40 mediante comprovação da segurança em relação aos estados limites de utilização de deformações e de vibrações excessivas.

A espessura do concreto entre a face da laje e a face da bainha deve ser, no mínimo, igual ao seu diâmetro. O cobrimento do cabo deve ser igual ou superior a 30mm, devendo levar em conta as condições de exposição da estrutura e a segurança contra incêndios.

Como para lajes simplesmente apoiadas e contínuas com vigas nas bordas a Norma não fez nenhuma especificação, recorreu-se a uma publicação da Stup Freyssinet Ltda. Onde são dadas informações sobre o pré-dimensionamento de cada tipo de laje, ou seja:

Lajes maciças com faixa contínua:

$$h \geq \frac{l}{48}$$

Lajes maciças com faixas bi-engastadas:

$$h \geq \frac{l}{42}$$

Lajes maciças com faixa isostáticas:

$$h \geq \frac{l}{37}$$

Convém lembrar que o passo decisivo para a elaboração de projetos de lajes protendidas é a modulação dos vãos, que deve ser feita visando obter um projeto econômico eficiente. Como a espessura da laje é determinada pelo maior vão, é interessante ter vãos com valores próximos uns dos outros para que se possa ter maior aproveitamento dos materiais empregados na execução das lajes protendidas.

## **2.4 VANTAGENS DE UTILIZAÇÃO DAS LAJES MACIÇAS PROTENDIDAS**

- 1) Maior liberdade arquitetônica devido à possibilidade de vencer grandes vãos, permitindo assim maior espaçamento entre pilares;
- 2) redução do peso próprio por possuir seções menores que as de concreto armado, possibilitando com isso menores cargas para os pilares, conseqüentemente menor área de concreto e aço para pilares e menor carregamento transferido para a fundação;

- 3) as peças em concreto protendido são sempre mais esbeltas do que as de concreto armado, isto porque se utiliza CAD, acima de 30MPa, e aço de alta resistência CP175 e CP190;
- 4) os materiais empregados, especialmente o aço, são praticamente ensaiados no momento da protensão;
- 5) em garagens, além de permitir melhor circulação de veículos, função dos maiores vãos entre pilares, a ausência de vigas elimina as interferências com as tubulações de águas servidas.

## **2.5 APLICAÇÃO DAS LAJES MACIÇAS PROTENDIDAS**

Não há limitação teórica às aplicações dessa solução; no entanto, ela é especialmente interessante para vãos de 6 a 12 metros. Além de 12 metros é recomendável recorrer às vigas, nervuras, ou peças com caixão perdido. Para lajes alveolares pré- moldadas pode-se chegar a 15 metros de comprimento para laje de forro com altura apenas de 15cm. As vigotas protendidas podem chegar a 10 metros de comprimento.

Por suas vantagens, a solução com laje maciça em concreto protendido é aplicável em todos os tipos de construção: edifício-garagem, supermercado, sala de conferência, hotel, banco, armazém, guarda móvel, biblioteca, edifício industrial, comercial, administrativo ou residencial, cobertura de silo ou reservatórios, etc.

Também deve-se acrescentar o caso da laje de piso em concreto protendido apoiada diretamente sobre o terreno, laje de piso industrial, de armazenamento, de fundo de reservatórios, pistas de aeroportos, etc. Essa aplicação apresenta sobre solução tradicional da laje em concreto não armado, ou armado com aço comum, as vantagens seguintes:

- Ausência de juntas, até 300 metros de comprimento;
- Ausência de fissuração, tornando-a estanque;
- Grande capacidade de carga admissível mesmo com pequenas espessuras: 13 cm para piso industrial, 18 cm para pista de aeroporto moderno.

### **3. MANUAL PARA ENTRADA DE DADOS DO PROGRAMA GRPROT**

#### **3.1 INTRODUÇÃO**

Este capítulo será dedicado a quem venha estudar o programa para a explicação da entrada de dados do programa GRPROT, pode se dizer que a entrada de dados está dividida em duas partes, sendo a primeira relacionada ao cálculo da grelha e a segunda ao cálculo da protensão.

#### **3.2 CÁLCULO DA GRELHA**

Para o cálculo da grelha o programa se divide em 4 rotinas, sendo elas: DADOS, MATRIZELEM, DESLOCAMENTOS e AÇÃONODAL.

A rotina DADOS, como o próprio nome diz, é a rotina responsável pela entrada de dados do programa. Esta rotina divide-se em 6 subrotinas: GERAL, CONTORNO, AÇÃONODAL, SEQUENCIAL, NUMBARRA e CARREGAMENTO. Cada uma dessas subrotinas será explicada individualmente, visto que a entrada de dados referente a grelha depende desta rotina.

A rotina MATRIZELEM é responsável pela formação da matriz de rigidez e do vetor de cargas de cada elemento. É feita também a transformação da matriz de cada elemento transformando a matriz local em matriz global. Esta rotina está dividida em 7 subrotinas: MATBV, GJRIV, JTDJV, ROTAÇÃO, CARGA, MATRIZRETANGULAR e CARGAGLOBAL.

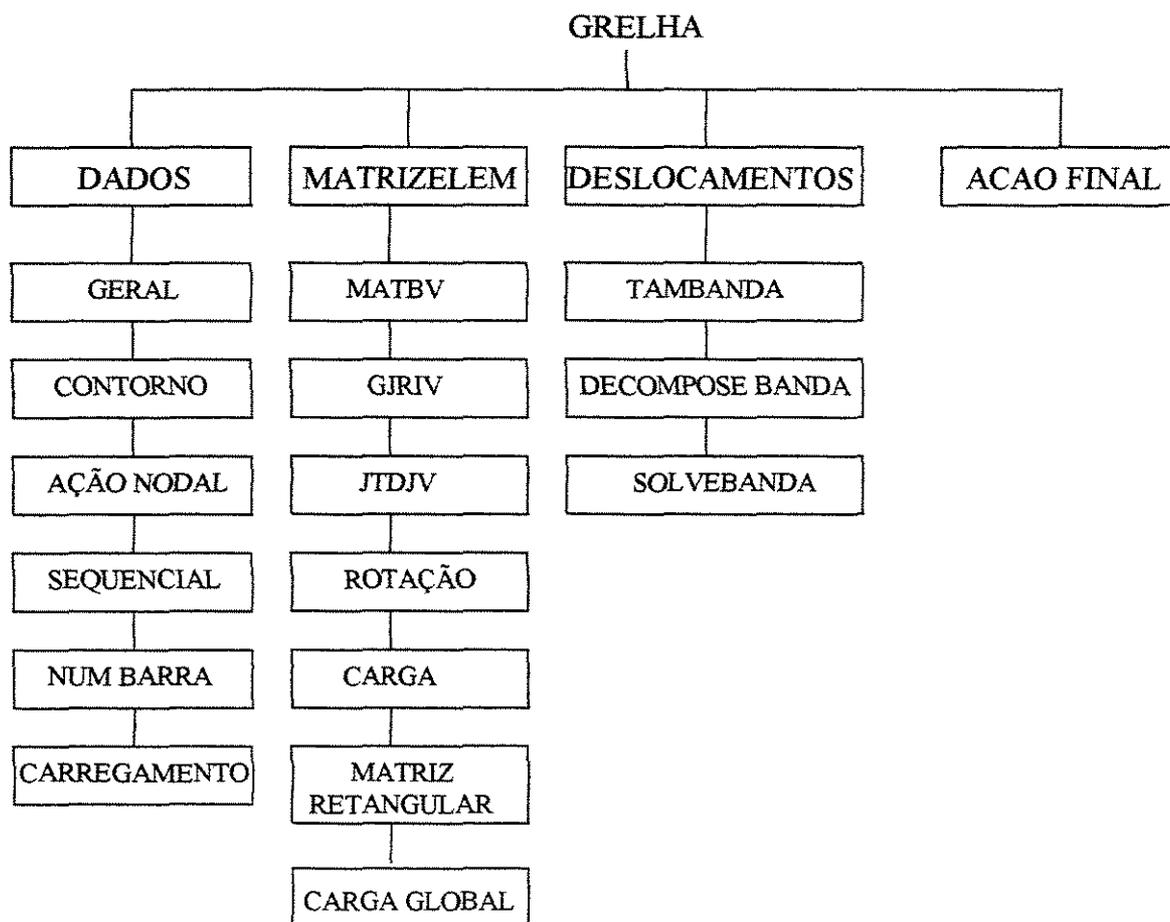
Para elaboração da rotina MATRIZELEM foi utilizado o Método dos Elementos Finitos baseado no modelo dos deslocamentos para gerar a matriz de rigidez do elemento e o vetor de cargas. No capítulo 4 será desenvolvida a formulação da matriz de rigidez e do vetor de carga,

será apresentado resumido do Método dos Elementos Finitos e explicadas as demais subrotinas da rotina MATRIZELEM.

A rotina DESLOCAMENTOS é responsável pelo cálculo dos deslocamentos no sistema global de referência. Esta rotina está dividida em outras 3 subrotinas, sendo elas: TAMBANDA, DECOMPOSEBANDA e SOLVEBANDA.

A rotina AÇÃOFINAL é responsável pela mudança dos deslocamentos do sistema global para o sistema local de referência. Também são calculados nesta rotina esforços e reações de apoio para cada viga da grelha.

A seguir é mostrado na figura 3.1 o fluxograma da parte relacionada ao programa grelha com as rotinas e subrotinas conforme exposto na introdução.



**Figura 3.1-Fluxograma referente a parte do programa de grelha**

### **3.2.1 SUBROTINA GERAL**

#### **3.2.1.1 DESCRIÇÃO DAS VARIÁVEIS DA SUBROTINA GERAL**

NB.....→ Número de barras;

NELEM.....→ Número de elementos;

NTNOS..... → Número total de nós;

NOSCC.....→ Número de nós com carga aplicada;

NNOSR.....→ Número de nós restringidos( Apoios);

NMAT..... → Número de materiais.

#### **3.2.1.2 EXPLICAÇÃO DA SUBROTINA**

Esta subrotina fornece ao programa estes valores sendo que os mesmos serão utilizados nas rotinas posteriores. Estes valores estão como valores globais, ou seja, permanecem constantes até a execução da última rotina.

Para agilizar o fornecimento de dados, no arquivo de entrada foram escritas no mesmo palavras ou abreviaturas que facilitam memorizar os valores a serem fornecidos. Esses valores deverão estar na linha logo abaixo das palavras que auxiliam na sua identificação

---

OBS: Na linguagem FORTRAN as palavras começadas com as letras i, j, k, l, m, n, são entendidas como valores inteiros; devido a isso existem várias palavras em que a primeira letra será mudada propositadamente para indicar ao programa que a variável é inteira ou real.

### 3.2.1.3 EXEMPLO ILUSTRATIVO DO ARQUIVO DE ENTRADA DA SUBROTINA

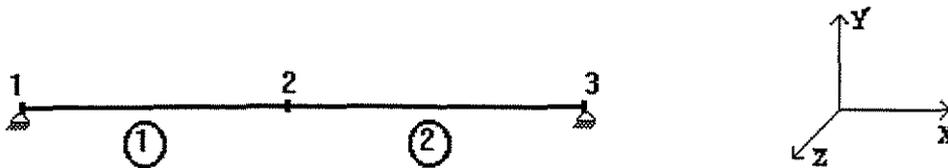


Figura 3.2 - Viga com dois elementos

[ N.º BARRAS] [N.º ELEM].[N.º NÓS][CARGA NODAL]..[RESTRICÇÕES]..[N.º MAT]  
1            2            3            0            2            1

Após serem fornecidos os valores é necessário deixar uma linha em branco, isto se deve para auxiliar a visualização . Esta linha em branco está imposta no programa como uma linha de comentário. Caso não colocada, o programa apresentará mensagem de erro.

### 3.2.2 SUBROTINA CONTORNO

#### 3.2.2.1 DESCRIÇÃO DAS VARIÁVEIS DA SUBROTINA CONTORNO

IA..... →Nó restringido;

L1..... →Graus de liberdade no nó ( 6 graus por nó ).

### 3.2.2.2 EXPLICAÇÃO DA SUBROTINA CONTORNO

Para cada nó existem 6 graus de liberdade, sendo entre eles 3 deslocamentos em (x, y, z) e 3 rotações em (x, y, z). O “looping” se dará tantas vezes quantas forem os números de nós restringidos, e para cada nó restringido será necessário fornecer 6 valores de graus de liberdade, sendo :

- 0 → Livre para deslocamento e rotação;
- 1 → Impedido para deslocamento e rotação;

Nesta subrotina são fornecidas as condições de contorno do exemplo a ser executado pelo programa., nos nós onde foram impostas restrições, serão fornecidas as reações de apoio.

Os valores a serem dados deverão estar logo abaixo das palavras que auxiliam a identificação.

### 3.2.2.3 EXEMPLO ILUSTRATIVO DO ARQUIVO DE ENTRADA DA SUBROTINA CONTORNO

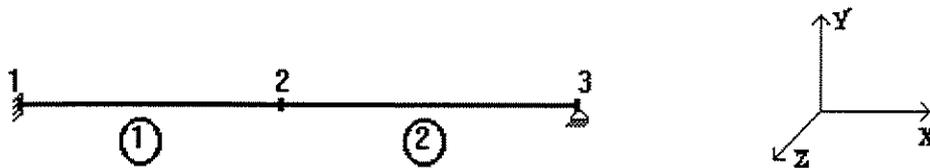


Figura 3.3 Viga bi-apoiada mostrando condições de contorno

[NÓ]	[DX]	[DY]	[DZ]	[RX]	[RY]	[RZ]
1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	0	1	0

[NÓ] : Nó onde existe restrição;

[DX] : Deslocamento no eixo x;

[DY] : Deslocamento no eixo y;

[DZ] : Deslocamento no eixo z;

[RX] : Rotação no eixo x;

[RY] : Rotação no eixo y;

[RZ] : Rotação no eixo z.

### **3.2.3 SUBROTINA AÇÃO NODAL**

#### **3.2.3.1 DESCRIÇÃO DAS VARIÁVEIS DA SUBROTINA AÇÃO NODAL**

IA.....→ Nó que possui carga

AN..... → Carga nodal aplicada ( 6 possíveis ).

#### **3.2.3.2 EXPLICAÇÃO DA SUBROTINA**

Para cada nó existem 6 possíveis cargas, sendo elas: três forças nas direções (x, y, z) e três momentos nas direções (x, y, z); o “looping” se dará tantas vezes quantas forem os números de nós com carga aplicada, e para cada nó restringido será necessário fornecer 6 valores de carga : Fx, Fy, Fz, Mx, My, Mz.

Os valores a serem fornecidos deverão estar logo abaixo das palavras que auxiliam a identificação.

### 3.2.3.3 EXEMPLO ILUSTRATIVO DO ARQUIVO DE ENTRADA DA SUBROTINA AÇÃO NODAL

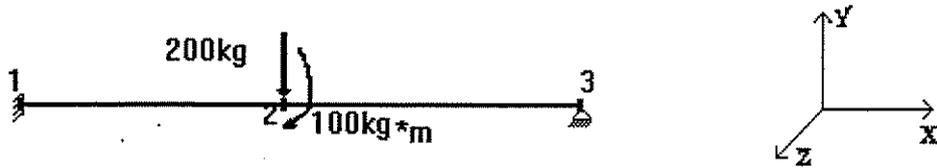


Figura 3.4 - Viga com carregamento nodal

[NÓ]	[FX]	[FY]	[FZ]	[MX]	[MY]	[MZ]
2	0	-200	0	0	0	100

Caso não tenha carregamento, deixar uma linha em branco abaixo das palavras que auxiliam a identificação.

### 3.2.4 SUBROTINA SEQUENCIAL

#### 3.2.4.1 DESCRIÇÃO DAS VARIÁVEIS DA SUBROTINA SEQUENCIAL

- NLINHAS..→ Número de linhas;
- N1..... → Nó inicial;
- NUM..... → Número de nós na linha;
- INC.....→ Incremento de um nó a outro na linha;
- XI.....→ Coordenada inicial referente ao eixo x;
- YI.....→ Coordenada inicial referente ao eixo y;
- ZI.....→ Coordenada inicial referente ao eixo z;
- XF..... → Coordenada final referente ao eixo x;
- YF.....→ Coordenada final referente ao eixo y;
- ZF..... → Coordenada final referente ao eixo z;

### 3.2.4.2 EXPLICAÇÃO DA SUBROTINA

Esta subrotina faz a geração automática das coordenadas da barra, sendo necessário fornecer somente as coordenadas iniciais e finais de cada barra, sendo geradas automaticamente as coordenadas intermediárias, isto é, dos nós dos demais elementos finitos.

### 3.2.4.3 EXEMPLO ILUSTRATIVO DO ARQUIVO DE ENTRADA DA SUBROTINA SEQUENCIAL

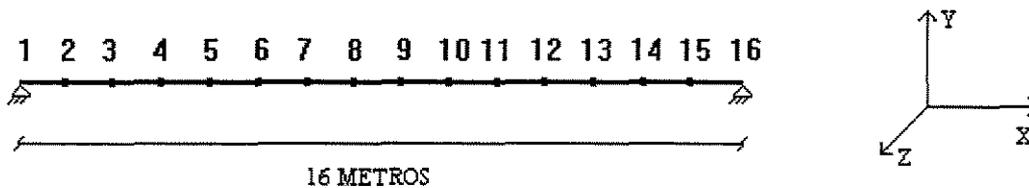


Figura 3.5 - Viga numerada com nós

Para este exemplo serão fornecidos ao programa somente as coordenadas dos nós 1 e 16, sendo as demais coordenadas geradas automaticamente. Para a viga acima o valor de NLINHA será igual a 1.

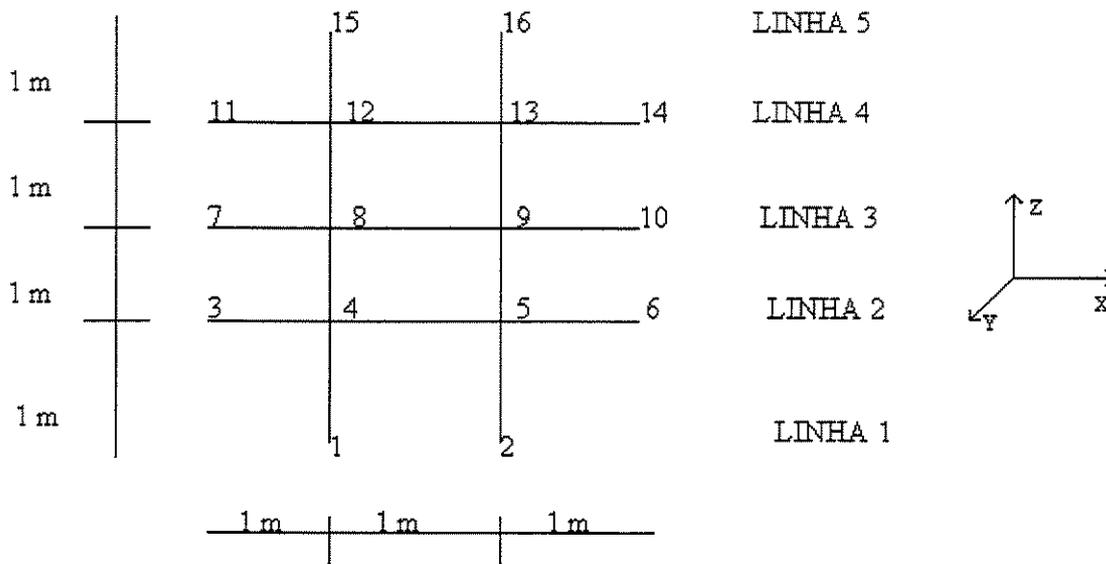
[ N° LINHAS ]

1

[NO] [N° NOS] [INCREMENTO] [XI] [YI] [ZI] [XF] [YF] [ZF]

1 16 1 0 0 0 16 0 0

para a grelha abaixo, o valor de NLINHA será o número de nós existentes no eixo Z da estrutura, ou seja:



**Figura 3.6 - Exemplo de grelha numerada por linhas**

Para o exemplo da figura 3.6 o número de linhas será igual a 5, pois o número de nós existentes em Z é igual a 5, sendo que para a primeira linha terão que ser fornecidas as coordenadas dos nós 1 e 2. Para a segunda linha será necessário fornecer as coordenadas dos nós 3 e 6, sendo os nós 4 e 5 gerados automaticamente. Para a terceira linha terão que ser fornecidas as coordenadas dos nós 7 e 10, sendo as coordenadas dos nós 8 e 9 geradas automaticamente. Para as demais linhas segue-se o mesmo raciocínio, ou seja:

[ N° LINHAS ]

5

[NO]	[N° NOS]	[INCREMENTO]	[XI]	[YI]	[ZI]	[XF]	[YF]	[ZF]
1	2	1	1	0	0	2	0	0
3	4	1	0	0	1	3	0	1
7	4	1	0	0	2	3	0	2
11	4	1	0	0	3	3	0	3
15	2	1	1	0	4	2	0	4

### **3.2.5 SUBROTINA NUMBARRA**

#### **3.2.5.1 DESCRIÇÃO DAS VARIÁVEIS DA SUBROTINA NUMBARRA**

NBARRAS.....→ Número de barras;

INELEM..... → Número de elementos em cada barra;

IELINI..... → Elemento inicial da barra;

NII..... → Nó inicial da barra;

INC..... → Incremento referente à diferença entre o nó inicial do elemento ao nó final

#### **3.2.5.2 EXPLICAÇÃO DA SUBROTINA**

Esta subrotina fornece ao programa os nós inicial e final de cada elemento; com isso é calculada a dimensão longitudinal de cada elemento e o valor dos cossenos diretores no sistema de referência (x, y, z).

### 3.2.5.3 EXEMPLO ILUSTRATIVO DO ARQUIVO DE ENTRADA DA SUBROTINA SEQÜENCIAL

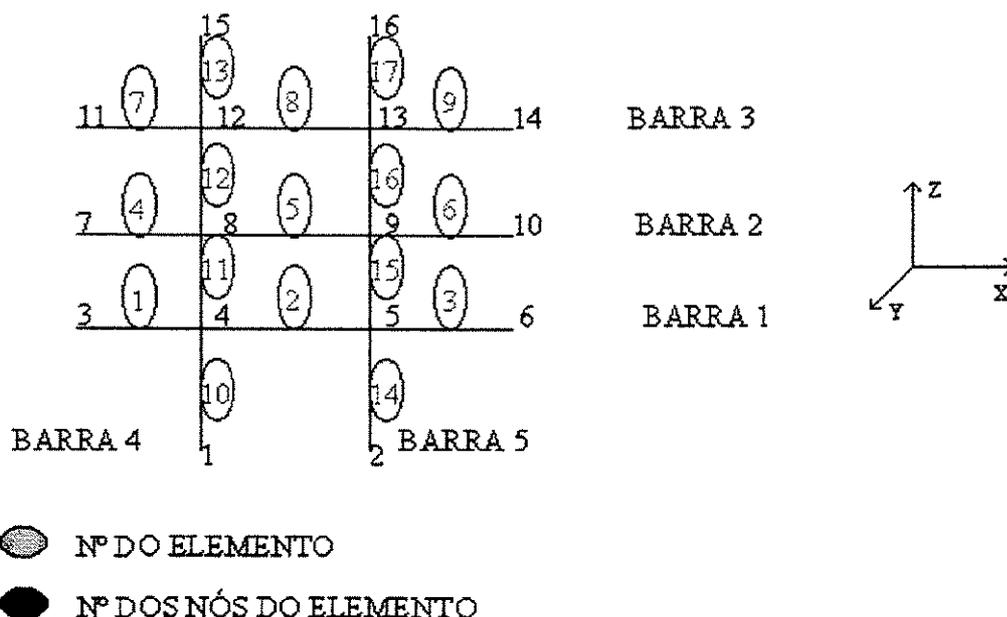


Figura 3.7 - Exemplo de grelha com numeração dos nós e elementos

Esta subrotina faz a geração automática do nó inicial e final de cada elemento; isto se o incremento do nó inicial e final permanecerem constantes ao longo da barra.

Incremento nada mais é que a diferença algébrica dos dois nós do elemento. Exemplo: Na figura 3.7 o incremento do nó inicial do elemento 1 para o nó final do elemento 2 é 1, e o nó final do elemento 1 para o nó final do elemento 2 é também 1. Do elemento 2 para o elemento 3 o incremento do nó inicial e final também é 1, note que as barras 2 e 3 seguem o mesmo raciocínio, pois o incremento é constante ao longo da barra. Caso só existissem as 3 barras no eixo X, a entrada de dados ficaria assim:

[ NBARRAS ]

3

[ INELEM ]	[ IELINI ]	[ NII ]	[ INC ]
3	1	3	1
3	4	7	1
3	7	11	1

Note que só foi preciso indicar os dados do 1º elemento da barra, sendo os dados demais elementos gerados automaticamente.

Agora é montado o arquivo de dados das barras em relação ao eixo Z, isto considerando que só existissem estas duas barras

Estes exemplos estão sendo feitos separadamente para melhor entendimento, pois no arquivo de entrada o NBARRAS terá que ter o valor único para a estrutura e não em partes como está sendo feito aqui, mas aqui, para melhor entendimento, será feito em partes e no final será montado o arquivo de entrada para a estrutura inteira.

Deve-se notar que na barra, em relação ao eixo Z, a diferença dos nós do elemento 10 não é igual à do elemento 11 para o elemento 12, pois, do elemento 10 para o 11, a diferença entre o nó inicial é 3 e do nó final é 4 e do elemento 11 para o elemento 12 a diferença do nó inicial é 4 e do nó final é 4, não sendo possível fazer a geração automática para a barra inteira.

Para este caso dividiremos a barra de 4 elementos em 3 NBARRAS, pois nos elementos nº11 e nº12 a diferença permanece constante, onde no elemento nº11 a diferença do nó inicial é 4 e do nó final é 4 sendo que no elemento 12 a diferença permaneceu constante, pois para o nó inicial a diferença é 4 e para o nó final a diferença é 4. No elemento nº13 volta a mudar o diferença sendo o nó inicial igual a 4 e o nó final é igual a 3. Então para as duas barras em relação ao eixo Z o arquivo de entrada ficará como mostrado na página seguinte.

[ NBARRAS ]

6

[ INELEM ]   [ IELINI ]   [ NII ]   [ INC ]

1	10	1	3
2	11	4	4
1	13	12	3
1	14	2	3
2	15	5	4
1	17	13	3

⇒ DADOS DA BARRA Nº4

⇒ DADOS DA BARRA Nº5

Agora montaremos o arquivo de entrada para a estrutura inteira.

[ NBARRAS ]

9

[ INELEM ]   [ IELINI ]   [ NII ]   [ INC ]

3	1	3	1
3	4	7	1
3	7	11	1
1	10	1	3
2	11	4	4
1	13	12	3
1	14	2	3
2	15	5	4
1	17	13	3

## **3.2.6 SUBROTINA MATERIAL**

### **3.2.6.1 DESCRIÇÃO DAS VARIÁVEIS DA SUBROTINA MATERIAL**

ITIPO.....→ Tipo do material (1, 2, 3 dependendo da quantidade do NMAT );

ELINI.....→ Elemento inicial que contenha o dado material;

ELFIN.....→ Elemento final que contenha o dado material;

CP.....→ Coeficiente de Poisson;

AMY.....→ Módulo de elasticidade do material ( Módulo de Young );

GAMA.....→ Peso específico do material;

BASE.....→ Largura da seção transversal;

ALTURA.→ Altura da seção transversal ;

Supõe-se que a peça tem seção retangular

### **3.2.6.2 EXPLICAÇÃO DA SUBROTINA MATERIAL**

Esta sub rotina fornece ao programa as propriedades do material da estrutura a ser analisada. Estes valores serão utilizados na formação da matriz de rigidez de cada elemento para posteriormente serem agrupados na matriz de rigidez global da estrutura.

Os valores a serem fornecidos no arquivo de entrada deverão ficar logo abaixo das palavras que auxiliam a identificação.

### **3.2.6.3 EXEMPLO ILUSTRATIVO DO ARQUIVO DE ENTRADA DA SUBROTINA MATERIAL**

```
[MAT][ELEM INIC][ELEM FINAL] [POISSON] [ELAST] [P ESPEC] [B] [H]  
1      1      5      0      100.000  0      .333 .07
```

### **3.2.7 SUBROTINA CARREGAMENTO**

#### **3.2.7.1 DESCRIÇÃO DAS VARIÁVEIS DA SUBROTINA CARREGAMENTO**

TKARGA..... → Tipo de carga ( 0 não existe carga distribuída 1 existe carga distribuída )

NBARRAS..... → Número de barras carregadas

IELEMINI.....→ Número do elemento inicial da barra carregada

ITOTALELEM...→ Total de elementos carregados na barra

INC.....→ Incremento de elemento a elemento

CARGAY.....→ Carga em relação ao eixo y ( Carga uniforme )

CARGAZ..... → Carga em relação ao eixo z (Carga uniforme )

#### **3.2.7.3 EXPLICAÇÃO DA SUBROTINA CARREGAMENTO**

Esta rotina fornece ao programa os dados referentes aos carregamentos distribuídos, já que os carregamentos pontuais foram explicados na subrotina ACAONODAL. A subrotina possibilita a inserção de dois tipos de carregamento, o carregamento distribuído uniformemente e o carregamento distribuído trapezoidal.

Estes valores serão utilizados para formar o vetor de cargas do elemento para posterior contribuição ao vetor de cargas globais.

### 3.2.7.3 EXEMPLO ILUSTRATIVO DO ARQUIVO DE ENTRADA DA SUBROTINA CARREGAMENTO

Para exemplificar o arquivo de entrada será usado como exemplo uma grelha com carregamento distribuído uniformemente, mostrada na figura 3.9.

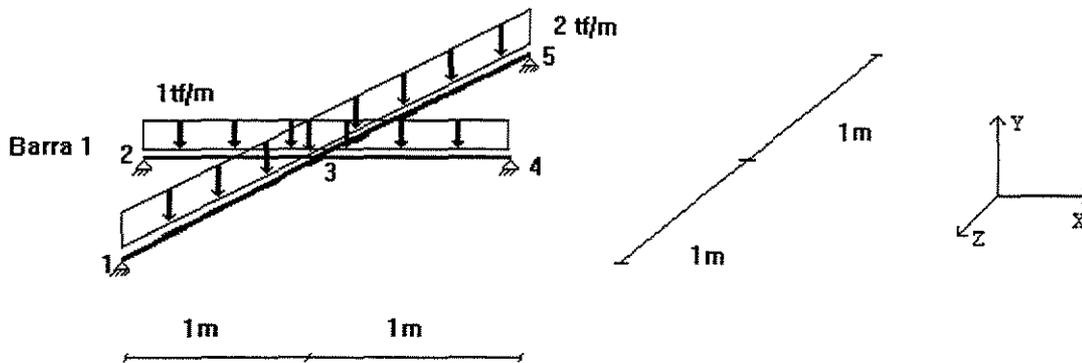


Figura 3.8 Exemplo de grelha com carregamento distribuído

[ TIPO DE CARREGAMENTO ]

1

[ NÚMERO DE BARRAS CARREGADAS ]

2

LINHA EM BRANCO

[ EL INI DA BARRA ] [ TOTAL DE ELEM NA BAR ] [ INCREMENTO ] [ CARGA ]

1

2

1

2

[ CARGA EIXO Y ]

[ CARGA EIXO Z ]

-1

0

3

2

2

2

-2

0

Obs 1: - Notar que somente para a 1ª barra foram escritas as palavras que auxiliam a identificação, para a segunda barra, não foram escritas, isto porque em arquivos grandes o texto ficaria muito carregado.

Obs 2: Para as demais barras é só colocar os valores idêntico aos da primeira barra, apenas tomando o cuidado para não deixar nenhuma linha em branco.

Obs 3: Esta rotina faz a geração automática das cargas, isto se o incremento de um nó para outro permanecer constante, caso não seja constante, as numerações da barra terão que ser iguais da subrotina NUMBARRA.

### 3.3 CÁLCULO DA PROTENSÃO

Para o cálculo da protensão o programa se divide em 4 rotinas, sendo elas : DADOS, ESTADO\_UTILIZACAO, ESTADO\_ULTIMO, TRACADO\_CABO, PERDAS.

A rotina DADOS , como o próprio nome diz, é a rotina responsável pela entrada de dados do programa . esta rotina está dividida em apenas uma subrotina: MAIORES\_ESFORCOS e CARACTERISTICA\_MATERIAL.

A rotina ESTADO\_UTILIZACAO é responsável pelo cálculo da força de protensão para um tempo infinito, utilizando os tipos de protensão definidos pela norma brasileira como o estado limite de utilização; esta rotina se divide em 3 subrotinas,: PROTENSAO\_LIMITADA, PROTENSAO\_COMPLETA, PROTENSAO\_PARCIAL, em que a escolha é feita na rotina DADOS.

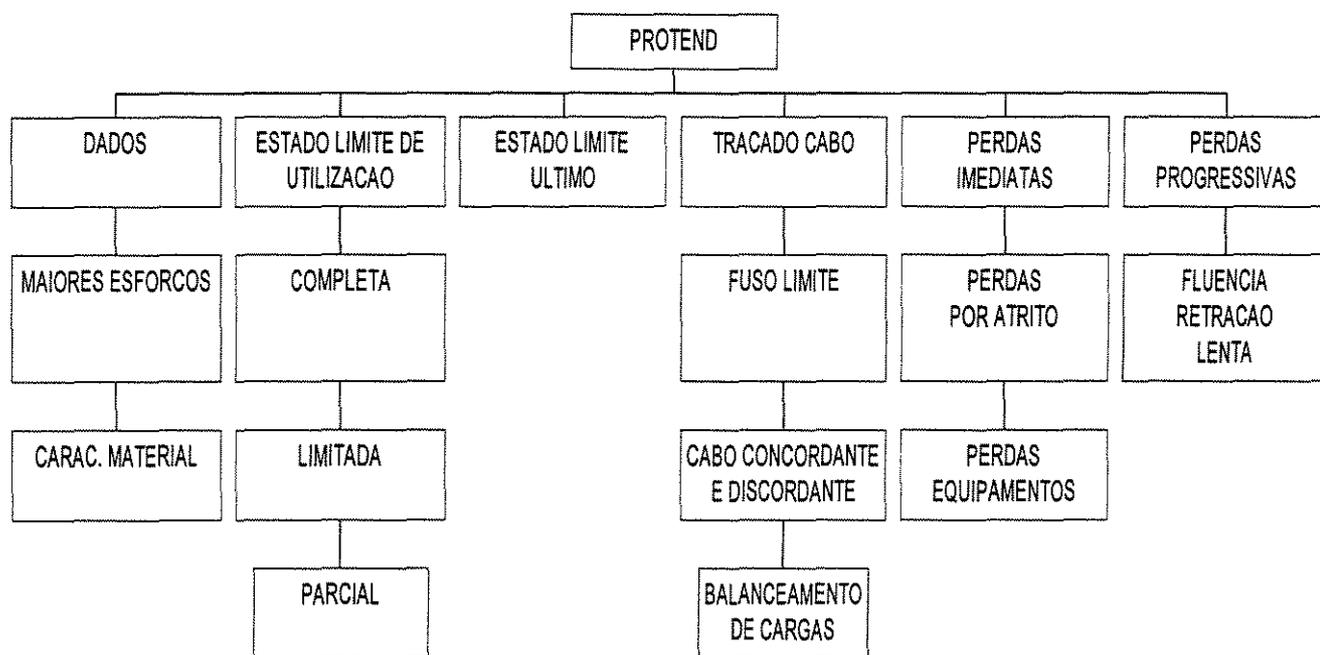
A rotina ESTADO\_ULTIMO é responsável pelo cálculo da força de protensão para um tempo infinito utilizando o estado limite último. Após o cálculo da força de protensão no estado limite último o programa compara este valor com a força de protensão calculada no estado limite de utilização, sendo assumido o valor que respeitar ambas as condições prescritas pela Norma.

A rotina TRACADO\_CABO é responsável pela determinação da região ao longo da peça onde deve estar localizada a linha de pressão no concreto ( fuso limite ). Tendo por base esta limitação , é traçada a linha que define o centro de gravidade da armadura ao longo da peça respeitando o conceito de cabo concordante , cujo equacionamento está proposto na programação.

Se o cabo concordante não respeitar o fuso limite, usa-se o conceito de transformação linear para definir um cabo discordante que respeite as limitações impostas pelo fuso limite.

A rotina PERDAS é responsável pelo cálculo das perdas de protensão ao longo da peça analisada, As perdas estão divididas em perdas imediatas e perdas progressivas. As perdas imediatas estão relacionadas com as perdas por atrito, perdas por acomodação das ancoragens e perdas no equipamento de protensão, as perdas progressivas estão relacionadas com a fluência e retração do concreto.

A seguir é mostrado na figura 3.10 o fluxograma da parte relacionada ao programa protensão com as rotinas e subrotinas conforme mostradas na introdução.



**Figura 3.9-Fluxograma referente a parte do programa de protensão**

### 3.3.1 SUBROTINA GERAL

#### 3.3.1.1 DESCRIÇÃO DAS VARIÁVEIS DA SUBROTINA GERAL

ITIP.....→ Escolha do tipo de protensão (1=limitada, 2=completa, 3=parcial );  
ICARGAMOV.→ Carga acidental ( 1=ponte pedestre,2= veículo,3= ferroviária );  
% MG.....→ Porcentagem do carregamento permanente em relação ao carregamento total;  
% MQ1.....→ Porcentagem do carregamento acidental 1 em relação ao carregamento total;  
% MQ2.....→ Porcentagem do carregamento acidental 2 em relação ao carregamento total;  
FCK..... → Resistência do concreto à compressão;  
RECB.....→ Recobrimento da armadura de protensão;  
VIGATIPO.....→ Tipo de viga (1=edifício, 2=ponte );  
ACO.....→ Tipo de aço escolhido (1= AÇO 175, 2= AÇO 190 )  
PERDAS.....→ Perdas estimadas inicialmente para o cálculo da força de protensão;

#### 3.3.1.2 EXPLICAÇÃO DA SUBROTINA

Esta rotina é responsável pela entrada de todos os dados referentes ao cálculo da protensão, desde o cálculo da força de protensão até as perdas imediatas e progressivas, como comentado anteriormente.

Os primeiros dados a serem fornecidos à rotina dados são referentes ao tipo de protensão para um tempo infinito, utilizando os tipos de protensão definidos pela norma brasileira, como o estado limite de utilização. Esta entrada de dados é simples pois é necessário digitar 1,2 ou 3, conforme mostrado abaixo:

\*\*\*\*\* [ DADOS DA ESTRUTURA ] \*\*\*\*\*

[TIPO DE PROTENSAO ] 1= LIMITADA 2= COMPLETA 3= PARCIAL

Após o cálculo da força de protensão no estado limite de utilização o programa calcula a força de protensão para o estado limite último, sendo assumido o valor que respeitar as condições prescritas pela Norma.

Os próximos dados a serem fornecidos ao programa referem-se ao tipo de carga acidental, isto para calcular a força no estado limite de utilização. Como anteriormente é preciso digitar 1, 2, 3 e 4 conforme mostrado em seguida.

[ CARGA ACI ] 1= EDIFÍCIO 2= P. PEDESTRE 3=P. VEÍCULO 4=P.FERROVIA

Em seguida é fornecida a porcentagem da carga permanente e acidental referida ao carregamento total, isto se deve aos diferentes tipos de coeficientes das cargas que majoram ou minoram o carregamento. Estes coeficientes serão mostrados no capítulo referente ao cálculo da força de protensão inicial. Ao lado é indicado o fck e o recobrimento da peça, como mostrado abaixo:

[MG(%)] [MQ1(%)] [MQ2(%)] [FCK(Kgf/cm<sup>2</sup>)] [RECOBRIMENTO(m)]

Em seguida é indicado ao programa o tipo de aço a ser utilizado e as perdas estimadas, conforme mostrado abaixo:

[ACO] [PERDAS(%)] ACO 175 = 1 ACO 190 = 2

Após fornecidos todos os dados, o programa na parte de protensão faz o cálculo da estrutura fornecendo: a força de protensão para o estado limite de utilização, a força de protensão para o estado limite último, a força de protensão adotada, os pontos do traçado do fuso limite, o traçado do cabo concordante, caso necessário o traçado do cabo discordante, as perdas por atrito, indicando a força de protensão em cada nó da viga ou faixa de laje analisada, as perdas por acomodação de ancoragem, as perdas por retração deformação lenta do concreto, e finalmente a carga equivalente de protensão.

## **4. FORMULAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ E DO VETOR DE CARGAS**

### **4.1 INTRODUÇÃO**

Pretende-se com este capítulo desenvolver as formulações variacionais da matriz de rigidez e do vetor de cargas do elemento, utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF) baseado no método de Rayleigh Ritz. Após a montagem da matriz de rigidez e do vetor de cargas de cada elemento, é feita a rotação da matriz de rigidez e do vetor de cargas do elemento, transformando a matriz local em matriz global.

Para melhor entendimento faremos uma introdução ao MEF com um exemplo de cálculo de uma viga biapoiada utilizando o Método de Rayleigh Ritz e finalmente mostraremos a formulação da matriz de rigidez e do vetor de cargas do elemento.

### **4.2 INTRODUÇÃO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

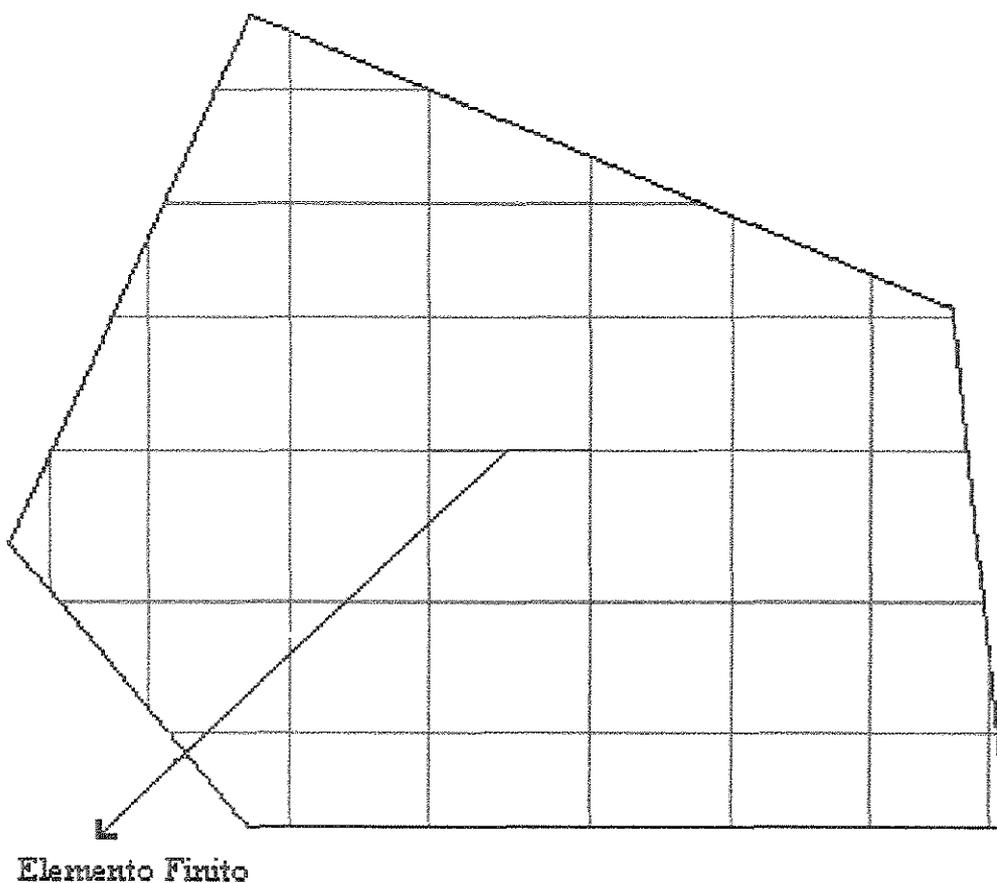
O MEF é uma ferramenta matemática que permite a solução de problemas de valores de contorno, superando as dificuldades inerentes a métodos como: Diferenças Finitas, Resíduos Ponderados e outros.

O MEF é baseado em outros métodos matemáticos. Os métodos mais utilizados são os Métodos de Rayleigh Ritz e Galerkin, sendo que o Método de Galerkin tem apelo mais matemático do problema, e o Método de Rayleigh Ritz se identifica com a parte física.

O MEF prevê a divisão do domínio de integração, contínuo, em um número finito de pequenos elementos denominados elementos finitos, neste trabalho os elementos finitos são elementos de barra.

No exemplo a seguir mostraremos um exemplo de uma laje de formato irregular, ou melhor dizendo uma laje esconsa, dividida em várias vigas, onde cada viga é dividida em vários elementos, sendo cada elemento denominado elemento finito e a rede denominada rede de elementos finitos. Perceba que graças à simulação da laje como grelha é fácil tratar a laje com qualquer formato, resultando assim uma ferramenta poderosa, onde podemos criar uma malha de elementos finitos conforme a necessidade do problema em questão.

Segundo DUARTE[ 13 ], no que diz respeito aos esforços de flexão para lajes esconsas, notou-se que para as direções de maiores momentos fletores, os valores encontrados utilizando o método das grelhas é da ordem de 10% maiores que os obtidos pelo MEF para placa, e para deslocamentos se deu na faixa de 15 a 25% maiores que pelo MEF.



**FIGURA 4.1 - Rede de Elementos Finitos**

DUARTE[ 13 ] afirma ainda que se utilizarmos elementos de 1,00m x 1,00m em vez de elementos de 0,50m x 0,50m a diferença é da ordem de 4%.

## **4.3 MÉTODOS APROXIMADOS**

### **4.3.1 INTRODUÇÃO**

A complexidade dos métodos matemáticos que representam o comportamento de muitos problemas de engenharia levou ao desenvolvimento de métodos aproximados para sua solução, podendo destacar dois tipos de métodos: os varacionais e os resíduos ponderados, onde no primeiro o método mais utilizado é o Método de Rayleigh Ritz, e no segundo o Método de Galerkin, dos quais se originou o MEF.

### **4.3.2 MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ**

No cálculo variacional procura-se a função  $y(x)$  que dentre todas as funções admissíveis é a que representa a solução exata para minimizar um determinado funcional. Funcional é uma entidade que depende de uma função, ou seja, é função de uma função.

No Método de Rayleigh Ritz a função  $y(x)$  (suposta exata) é substituída por uma função aproximada  $v(x)$ , formada por uma combinação linear de funções  $v_i(x)$ . Após a substituição de  $v(x)$  no funcional este é minimizado como veremos a seguir.

A função  $v(x)$  é uma solução aproximada e não exata, devido a isso a escolha adequada das funções  $v_i(x)$  é importante para se obter uma boa aproximação para a solução do problema.

### 4.3.3. EXEMPLO DE UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ

Considerando uma viga biapoada de comprimento  $\ell$  e carga  $q$ , calcularemos para a viga a equação da elástica e a flecha no meio do vão.

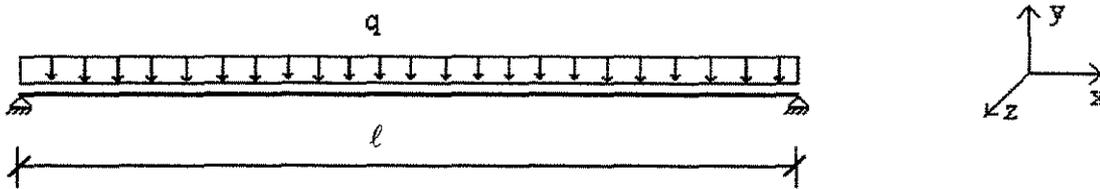


FIGURA 4.2 - Exemplo de viga com carregamento distribuído

$$\pi = \int_0^{\ell} \left( \frac{1}{2} E I v''^2(x) - q v(x) \right) dx \quad (4.1)$$

A expressão acima representa um funcional, onde a sua primeira parte está relacionada com a energia interna da peça analisada, e a segunda parte está relacionada com a energia potencial das cargas, neste caso o carregamento externo é representado pela carga uniforme  $q$ .

Iniciaremos considerando uma função polinômio de 2<sup>o</sup> grau.

$$v(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad (4.2)$$

Impondo as condições de contorno obtemos:

$$p/ v(x)= 0 \Leftrightarrow a_0= 0 \quad (4.3)$$

$$p/ v(\ell)= 0 \Leftrightarrow a_1= -a_2 \ell \quad (4.4)$$

Inserindo as variáveis encontradas na expressão resulta:

$$v(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad (4.5)$$

$$v(x) = 0 + (-a_2 \ell)x + a_2 x^2 \quad (4.6)$$

$$v(x) = -a_2 \ell x + a_2 x^2 \quad (4.7)$$

Nota-se que no funcional a energia interna está indicada pela 2ª derivada da função, sendo assim necessário derivar duas vezes a expressão encontrada após a utilização das condições de contorno, ou seja:

$$v'(x) = -a_2 \ell + 2a_2 x \quad (4.8)$$

$$v''(x) = -a_2 \ell + 2a_2 \quad (4.9)$$

$$\boxed{v''(x) = +2a_2} \quad (4.10)$$

Substituindo no funcional obtemos:

$$\pi = \int_0^{\ell} \left( \frac{1}{2} EI v''(x)^2 - qv(x) \right) dx \quad (4.11)$$

$$\pi = \int_0^{\ell} \left( \frac{1}{2} EI (2a_2)^2 - q(-a_2 \ell x + a_2 x^2) \right) dx \quad (4.12)$$

Derivando esta função em relação à constante 2 temos

$$\frac{\partial \pi}{\partial a_2} = EI 4a_2 \ell + q \frac{\ell^3}{6} = 0 \quad (4.13)$$

$$EI 4a_2 \ell = -q \frac{\ell^3}{6} \quad (4.14)$$

$$\boxed{a_2 = -\frac{q \ell^2}{24EI}} \quad (4.15)$$

Substituindo na função  $v(x)$  encontramos a expressão da elástica:

$$v(x) = -\frac{q\ell^2}{24EI}x^2 + \frac{q\ell^3x}{24EI} \quad (4.16)$$

Derivando a expressão da elástica encontramos a expressão do giro:

$$v'(x) = -\frac{q\ell^2}{24EI}2x + \frac{q\ell^3}{24EI} \quad (4.17)$$

Derivando a expressão do giro encontramos a expressão da curvatura aproximada:

$$v''(x) = -\frac{M}{EI} \quad (4.18)$$

Derivando a expressão anterior encontramos que a cortante é nula:

$$v'''(x) = 0 \quad (4.19)$$

Como isto não é verdadeiro, temos que aumentar a ordem do polinômio.

Como segunda aproximação tomaremos uma polinômio cúbico:

$$v(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (4.20)$$

Utilizando os mesmos métodos de cálculo como no exemplo anterior obtemos:

$$a_0 = 0; \quad a_1 = -a_2\ell - a_3\ell^2; \quad a_2 = -\frac{q\ell^2}{24EI}; \quad a_3 = 0 \quad (4.21)$$

Substituindo os valores de (4.21) em (4.20) encontramos a mesma expressão da elástica do cálculo anterior, concluindo deste modo que temos que aumentar mais um grau do polinômio resultando em:

$$v(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \quad (4.22)$$

Utilizando os mesmos métodos de cálculo do exemplo anterior obtemos:

$$a_0 = 0; \quad a_1 = 0; \quad a_2 = 0; \quad a_3 = -\frac{q\ell}{12EI}; \quad a_4 = \frac{q}{24EI} \quad (4.23)$$

Substituindo esses valores na expressão (4.22) temos a equação da elástica:

$$v(x) = \frac{q\ell^4}{48EI} \left[ 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - 4\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + 2\left(\frac{x}{\ell}\right) \right] \quad (4.24)$$

Para encontrarmos a flecha máxima no meio do vão substituímos o valor de  $x$  da expressão (4.24) por  $\ell / 2$  encontrando o seguinte valor:

$$v(x) = \frac{5q\ell^4}{384EI} \quad (4.25)$$

sendo este o valor exato.

Os esforços internos: momento e cortante são:

$$v''(x) = M\left(\frac{\ell}{2}\right) = -\frac{q\ell^2}{8} \quad (4.26)$$

$$v'''(x) = V(0) = \frac{q\ell}{2} \quad (4.27)$$

Esses valores também estão corretos. Observa-se também que a derivada quarta de  $v(x)$  é igual à carga aplicada à viga.

Concluimos que cada vez que aumentamos a ordem do polinômio, os valores se aproximam dos valores exatos, isto, porém, se satisfizer as condições de contorno. Caso aumentemos ainda mais a ordem do polinômio não teremos mais diferenças, ou esta será insignificante perante o valor exato, uma vez que já houve convergência aos valores corretos.

#### 4.4 FORMULAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ E VETOR DE CARGAS DO ELEMENTO

Na formulação da montagem da matriz de rigidez e vetor de cargas do elemento será utilizado o Método de Rayleigh-Ritz adotando funções aproximadoras de 1° e 3° grau. Iniciaremos mostrando o sistema de referência do nó do elemento. Em cada nó existem 6 graus de liberdade, sendo eles: as componentes dos deslocamentos nos eixos (x, y, z) e as rotações em torno dos eixos (x, y, z), isto é : u, v, w,  $\phi_x$ ,  $\phi_y$ ,  $\phi_z$ .

Admitimos que a deformação longitudinal  $\epsilon$  seja constante ao longo do elemento finito, portanto os deslocamentos podem ser representados por uma reta do tipo  $u = a + bx$ . Os deslocamentos transversais são representados por uma função do 3° grau,  $v = a + bx + cx^2 + dx^3$ .

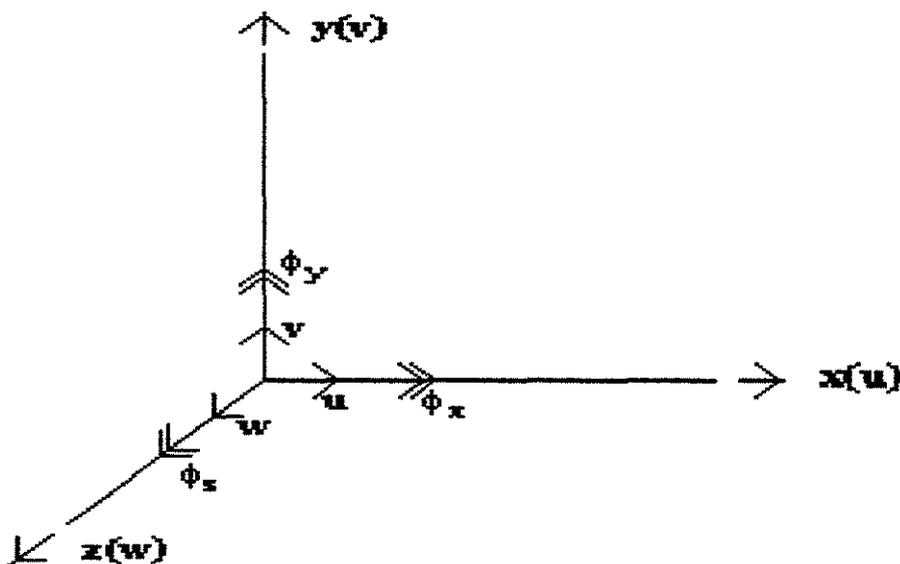


FIGURA 4.3 - Sistema de coordenadas global do elemento finito.

#### 4.4.1 DEFORMAÇÕES

As deformações são as seguintes:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}; \quad \chi_x = \frac{d\phi_x}{dx} \quad ; \quad \chi_y = -\frac{d^2w}{dx^2} \quad ; \quad \chi_z = -\frac{d^2v}{dx^2} \quad (4.28)$$

#### 4.4.2 DESLOCAMENTOS INDEPENDENTES

Como já observamos no item anterior, é considerado para a componente horizontal  $u$ , dos deslocamentos uma função polinomial de 1<sup>o</sup> grau, e para as demais componentes  $v$  e  $w$ , funções polinomiais de 3<sup>o</sup> grau. Para o giro de torção consideramos uma função de 1<sup>o</sup> grau, já que sobram apenas dois parâmetros para completar as doze correspondentes aos doze graus de liberdade totais do elemento.

$$u = a_1 + a_2x \quad (4.29)$$

$$v = a_3 + a_4x + a_5x^2 + a_6x^3 \quad (4.30)$$

$$w = a_7 + a_8x + a_9x^2 + a_{10}x^3 \quad (4.31)$$

$$\phi_x = a_{11} + a_{12}x \quad (4.32)$$

#### 4.4.3 DESLOCAMENTOS DEPENDENTES

Estes deslocamentos (rotações) dependem de outros deslocamentos, ou seja, dos deslocamentos independentes, obtidos derivando as componentes  $v$  e  $w$  em relação a  $x$ :

$$\theta_y = \frac{dw}{dx} \quad (4.33)$$

$$\theta_z = \frac{dv}{dx} \quad (4.34)$$

Resultando:

$$\theta_y = a_8 + 2a_9x + 3a_{10}x^2 \quad (4.35)$$

$$\theta_z = a_4 + 2a_5x + 3a_6x^2 \quad (4.36)$$

#### 4.4.4 MATRIZ CONSIDERANDO APENAS OS DESLOCAMENTOS INDEPENDENTES - MATRIZ C

Transformando as equações dos deslocamentos independentes em forma matricial obtém-se:

$$[u] = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a1 \\ a2 \\ . \\ . \\ . \\ a12 \end{Bmatrix}$$

$$\{u\} = [C] \{a\} \quad (4.37)$$

onde:

$u$  → vetor das componentes dos deslocamentos e rotações independentes;

$C$  → Matriz de funções de forma referentes;

$a$  → parâmetros generalizados.

#### 4.4.5 MATRIZ CONSIDERANDO APENAS AS DEFORMAÇÕES DOS DESLOCAMENTOS INDEPENDENTES MATRIZ J

Transformando as equações dos deslocamentos dependentes em forma matricial temos

$$[\varepsilon] = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -6x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -6x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a1 \\ a2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ a12 \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\} = [J] \{a\} \quad (4.38)$$

onde:

$\varepsilon \rightarrow$  vetor das componentes das deformações ;

$J \rightarrow$  Matriz de funções de forma ;

$a \rightarrow$  parâmetros generalizados.

#### 4.4.6 GRAUS DE LIBERDADE

Considerando um elemento com dois nós e de comprimento  $l$ , em que cada nó possui 6 graus de liberdade, podemos montar matricialmente as expressões que correspondem aos 3 deslocamentos e as 3 rotações para o nó inicial ( $x=0$ ) e final do elemento( $x=l$ ).

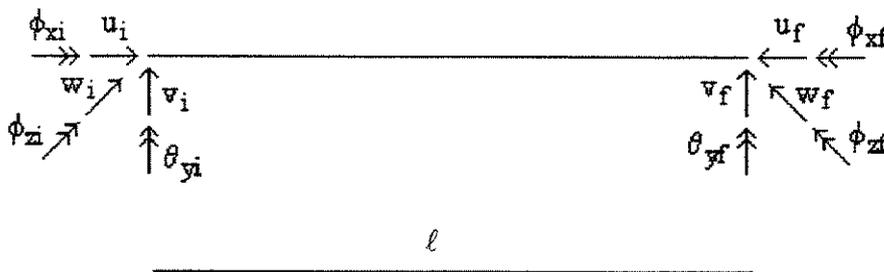


FIGURA 4.4 - Graus de liberdade do elemento finito

$$[v] = \left\{ \begin{array}{c} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \phi_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \phi_{zi} \end{array} \right\}_{i=1,2} = [A]\{a\} \quad (4.39)$$

sendo:

$$\left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_{x_1} \\ \phi_{y_1} \\ \phi_{z_1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \theta_{x_2} \\ \theta_{y_2} \\ \theta_{z_2} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cccccccccccc} \ell & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ell & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ell & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ell & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ell & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ell & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ell & \ell & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ell & \ell & \ell^2 & \ell^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ell & \ell & \ell^2 & 0 & \ell^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ell & \ell \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ell & 2\ell & 3\ell^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ell & 2\ell & 3\ell^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{array} \right\}$$

$v = \qquad \qquad \qquad A \qquad \qquad \qquad a$

A matriz A é gerada na Subrotina MATBV.

$$v = A a \quad (4.40)$$

onde :

- v → vetor das componentes de deslocamentos e rotações para o nó inicial e final do elemento;
- A → funções de forma referente as equações polinômios;
- a → incógnitas nodais.

Do Princípio dos Trabalhos Virtuais tem-se a igualdade de trabalho internos com trabalho externo, expressa pela conhecida expressão:

$$\int_0^{\ell} \delta[\varepsilon'] [D] [\varepsilon] dx = \int_0^{\ell} \delta[u'] [q] dx \quad (4.41)$$

Da ( 4.39 ) :

$$\{a\} = [A^{-1}] \{v\} \quad (4.42)$$

Dando uma variação virtual nos deslocamentos tem-se:

$$\delta\{a\} = [A^{-1}] \delta\{v\} \quad (4.43)$$

Substituindo em (4.42):

$$\{\varepsilon\} = [J] \{A^{-1}\} \{v\} = [B] \{v\} \quad (4.44)$$

$$\delta\{\varepsilon\} = [B] \delta\{v\} \quad (4.45)$$

#### 4.4.7 ESFORÇOS

Da resistência dos materiais sabemos que os esforços podem ser escritos em função das deformações e curvaturas como:

$$N_x = \sigma_x A = EA\varepsilon_x$$

$$M_x = GI_t \chi_x$$

$$M_y = -EI_y \chi_y$$

$$M_z = -EI_z \chi_z$$

em forma matricial esses esforços podem ser organizados da seguinte maneira:

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} N_x \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GI_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EI_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_z \end{Bmatrix}$$

ou seja :

$$[\sigma] = [D][\varepsilon] \quad (4.46)$$

Substituindo (4.45) e (4.46) em (4.41) resulta que.

$$\delta[v]^t \int_0^\ell [B]^t [D] [B] dx [v] = \int_0^\ell \delta[u]^t [q] dx \quad (4.47)$$

Levando [a] de (4.42) em (4.37) e considerando a variação de [u] temos:

$$\delta[u] = \{C\} \{A^{-1}\} \delta[v] = \{F\} \delta[v] \quad (4.48)$$

Assim a equação (4.47) passa a ser escrita como:

$$\delta[v]^t \int_0^\ell [\beta]^t [D] [\beta] dv [v] = \delta[v]^t \int_0^\ell [F] [q] dx \quad (4.49)$$

Como  $\delta[v]$  é arbitrário, resulta a expressão final

$$\int_0^\ell [\beta]^t [D] [\beta] dx [v] = \int_0^\ell [F] [q] dx \quad (4.50)$$

Que pode ser escrita de forma compacta como:

$$Kv = r \quad (4.51)$$

Sendo:

$$K = \int_0^{\ell} [\beta]^T [D] [\beta] dx = \text{matriz de rigidez}$$

$v = [v]$  = vetor das incógnitas nodais

$$r = \int_0^{\ell} [F][C] dx = [A^{-1}] \int_0^{\ell} cq dx = \text{vetor das cargas nodais equivalentes.}$$

A matriz  $A$  é invertida na subrotina GJRIV.

A solução desse sistema de equações fornece os valores das incógnitas nodais: deslocamentos e rotações.

O resultado dos produtos indicados acima é a seguinte matriz de dimensão ( 12x12 ) :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4EI_z & 12EI_zx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12EI_zx & 4EI_zx^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4EI_y & 12EI_yx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12EI_yx & 36EI_yx^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & GI_t \end{bmatrix}$$

Como a matriz  $[\beta]$  não é explicitamente conhecida, ela é substituída pela igualdade  $[\beta] = [J][A]^{-1}$ . Deste modo a matriz de rigidez passa a ser:

$$[A^{-1}]^t \int_0^l [J]^t [D] [J] dx [A]^{-1} \quad (4.52)$$

Deste modo:

$$\begin{aligned} VJ(2,2) &= EA \\ VJ(5,5) &= 4EI_z \\ VJ(5,6) &= 12EI_z x \\ VJ(6,5) &= VJ(5,6) \\ VJ(6,6) &= 36EI_y x^2 \\ VJ(9,9) &= 4EI_y \\ VJ(9,10) &= 12EI_y x \\ VJ(10,9) &= VJ(9,10) \\ VJ(10,10) &= 36EI_y x^2 \\ VJ(12,12) &= GI_T \end{aligned}$$

Integrando cada um desses termos no domínio  $0 \leq x \leq l$  tem-se:

$$\begin{aligned} VJ(2,2) &= EAl \\ VJ(5,5) &= 4EI_z l \\ VJ(5,6) &= 6EI_z l^2 \\ VJ(6,5) &= VJ(5,6) \\ VJ(6,6) &= 12EI_y l^3 \\ VJ(9,9) &= 4EI_y l \\ VJ(9,10) &= 6EI_y l^2 \\ VJ(10,9) &= VJ(9,10) \\ VJ(10,10) &= 12EI_y l^3 \\ VJ(12,12) &= GI_T l \end{aligned}$$

Finalmente, multiplicando as matrizes como indica a equação (4.52) é formada a matriz de rigidez do elemento.

$$(A^{-1})^t \cdot VJ \cdot (A^{-1}) \quad (4.53)$$

## 4.5 FORMAÇÃO DO VETOR DE CARGAS DO ELEMENTO

Mostraremos agora como é montado o vetor de cargas do elemento finito para posteriormente formar com a matriz de rigidez do elemento o sistema completo de equações.

Partimos do lado direito da igualdade(4.51).

$$(A^{-1})^t \int_0^{\ell} c' q dx \quad (4.54)$$

A matriz  $A^{-1}$ , é a mesma matriz já conhecida na formação da matriz de rigidez do elemento. Observe que devido trabalharmos com a laje simulada como grelha, o carregamento dar-se-á na ordenada Y, sendo o plano das vigas X e Z.

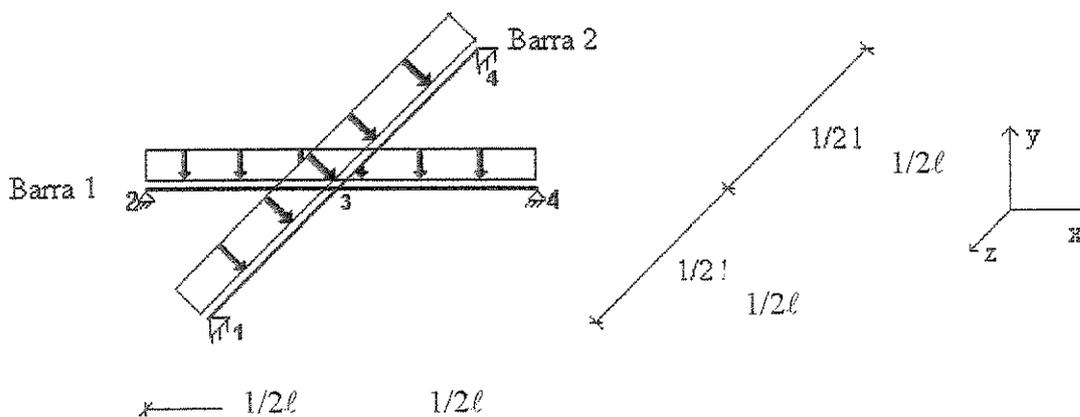


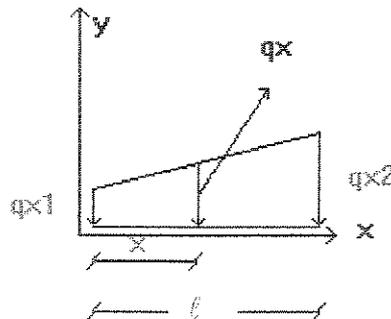
FIGURA 4.5 - Carregamento na grelha

Para obtenção do vetor de cargas em termos computacionais retornamos as expressões dos deslocamentos independentes, em que usamos polinômios de 1º e 3º grau. Devido ao carregamento estar na ordenada  $Y$ , somente a expressão relativa ao deslocamento em  $Y$  será utilizada.

$$v = a_3 + a_4 x + a_5 x^2 + a_6 x^3 \quad (4.55)$$

O termo  $q$  dentro da integral representa a carga do elemento por unidade de comprimento. Considerando um carregamento distribuído retangular, a carga será  $q \cdot x$ . Como trabalharemos com um carregamento distribuído genérico montaremos uma nova expressão para representar a carga distribuída.

Seja a carga trapezoidal mostrada na figura 4.6.



**FIGURA 4.6- Carregamento distribuído trapezoidal**

Da semelhança de triângulos da figura 4.6 temos:

$$qx = qx_1 \left( l - \frac{x}{l} \right) + \frac{x}{l} qx_2 \quad (4.56)$$

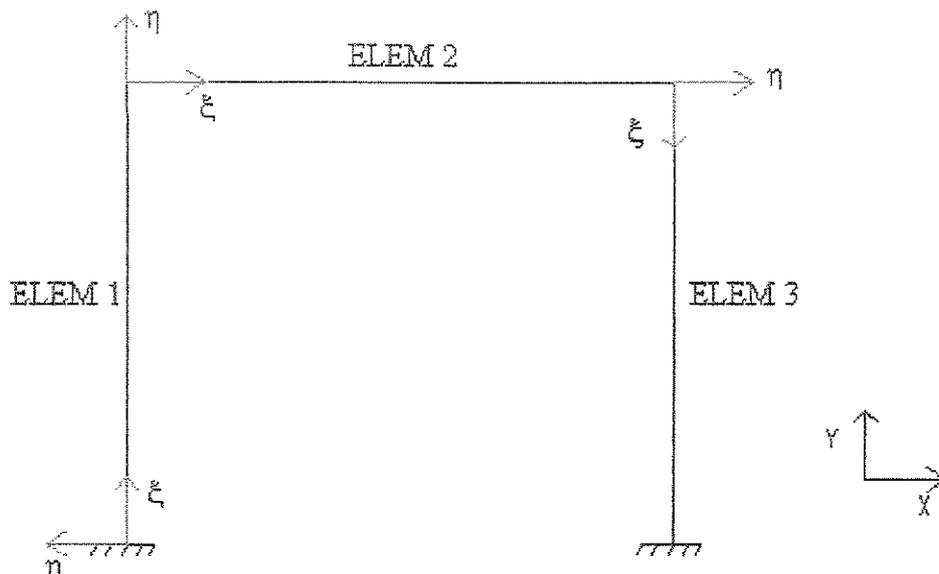
Montando a expressão do integrando de  $\int_0^l c^t q dx$  temos:

$$\int_0^l \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \left[ qx_1 \left( l - \frac{x}{l} \right) + \frac{x}{l} qx_2 \right] dx = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ (qx_1 + qx_2) * \frac{l}{2} \\ \left( \frac{1}{2} qx_1 + qx_2 \right) * \frac{l^2}{3} \\ \left( \frac{1}{3} qx_1 + qx_2 \right) * \frac{l^3}{4} \\ \left( \frac{1}{4} qx_1 + qx_2 \right) * \frac{l^4}{5} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

Portanto, multiplicando o vetor obtido dessa operação pela matriz  $(A^{-1})^t$ , resulta o vetor de carga. A formação do vetor de cargas é dada na subrotina CARGA, sendo montada identicamente como mostrada aqui.

Após a formação da matriz de rigidez do elemento e do vetor de cargas, temos que proceder à rotação dos eixos, uma vez que o elemento foi calculado no sistema local de referência, é necessário passá-lo para o sistema global de referência, para assim podemos agrupar elemento a elemento e montarmos definitivamente o sistema de equações para a estrutura completa.

Seja dado por exemplo um pórtico com 3 elementos como mostrado abaixo.



**FIGURA 4.7 - Exemplo de pórtico plano**

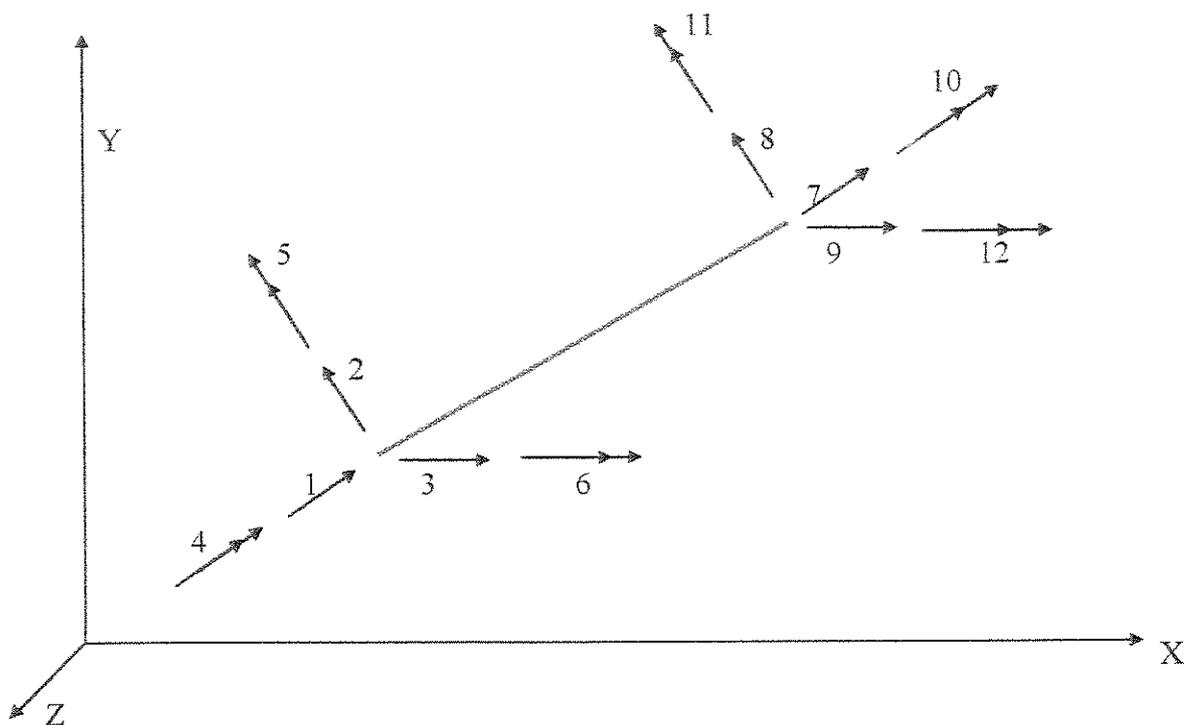
O sistema de referência local  $(\xi, \eta)$  é posicionado na barra, tendo a orientação mostrada na figura 4.7.

O sistema de referência global  $(x, y)$  está fixado em um ponto do plano que contém a estrutura, como mostrado na figura 4.7.

## 4.6 FORMAÇÃO DA MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO DO ELEMENTO

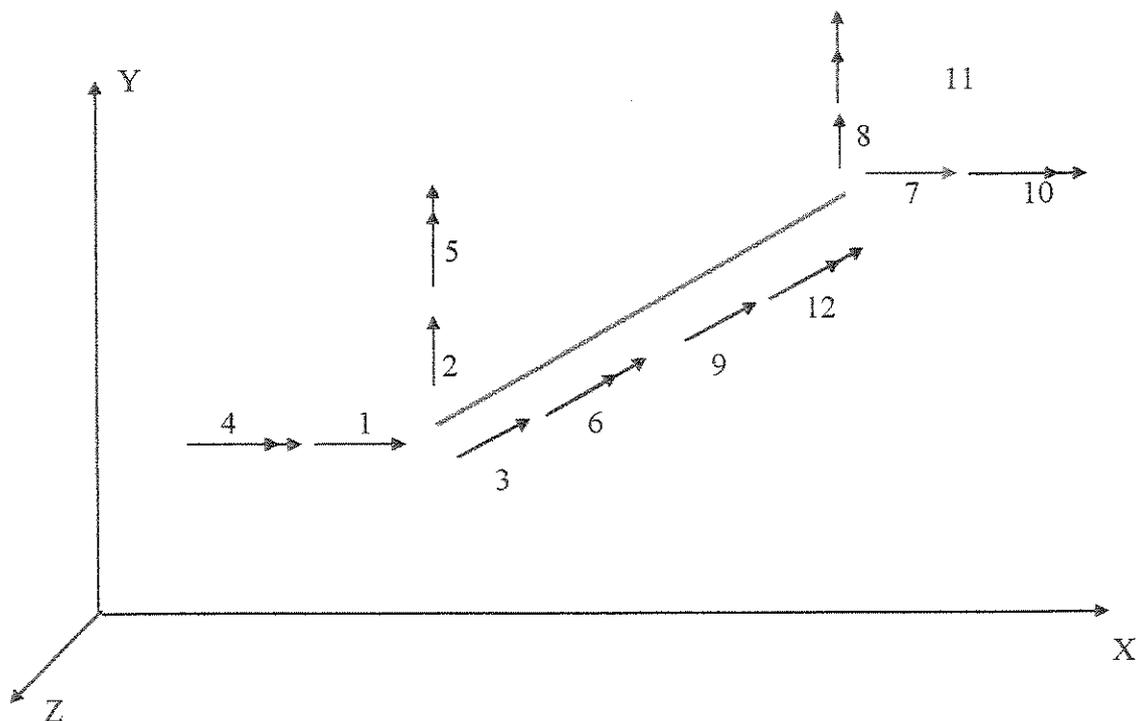
Como mencionado anteriormente trataremos agora da matriz de transformação do elemento. Esta matriz é necessária para fazer a mudança do sistema de coordenadas locais para o sistema de coordenadas globais.

A figura 4.10 mostra uma barra genérica com os graus de liberdade representados em cada um dos seus dois nós.



**FIGURA 4.8 - Sistema local e numeração de coordenadas para grelha**

Na figura. 4.9 estão indicados os graus de liberdade nodais referidos ao sistema de coordenadas globais.



**FIGURA 4.9 - Sistema global e numeração de coordenadas para grelha**

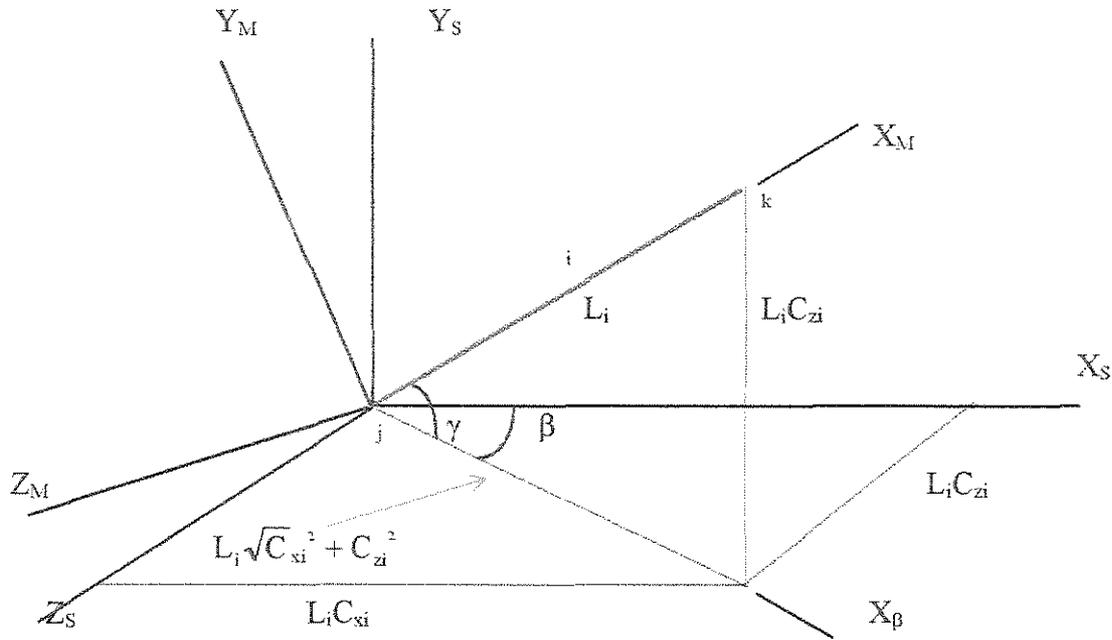


FIGURA 4.10 - Rotação de eixos para um elemento de pórtico espacial no plano XZ

Montaremos agora a matriz de rotação do elemento. Segundo GERE E WEAVER [ 15 ] a matriz de rotação  $R$  dos eixos locais para os eixos da estrutura é dado por:

$$R = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z \\ \frac{-C_x C_y}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & \sqrt{C_x^2 + C_z^2} & \frac{-C_y C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \\ \frac{-C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & 0 & \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \end{bmatrix}$$

A matriz  $R$  obtida relaciona apenas as translações referidas aos eixos locais com as translações em relação aos eixos globais.

A mesma operação deve ser feita com as rotações, resultando então uma matriz de rotação de ordem ( 6x 6 ).

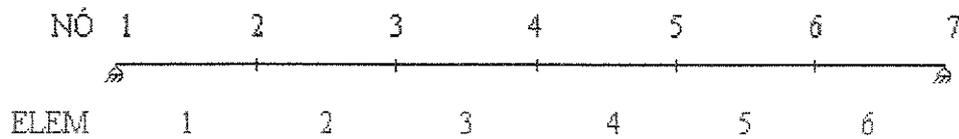
Note que a matriz de rotação dada acima tem ordem (3x3). Como a matriz de rigidez do elemento é de ordem (12x12)R tem que ser expandida; para isso é só repeti-la mais três vezes na matriz final

$$\text{ROTAÇÃO} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} R \\ 3*3 \end{matrix}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} R \\ 3*3 \end{matrix}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} R \\ 3*3 \end{matrix}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} R \\ 3*3 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

Encontrada a matriz orientada segundo o sistema de coordenadas globais, o passo seguinte é agrupar elemento a elemento formando assim a matriz de rigidez global da estrutura, que apresenta uma distribuição em banda se seus coeficientes.

#### 4.7 FORMAÇÃO DA MATRIZ GLOBAL EM BANDA

O agrupamento dos coeficientes da matriz de rigidez em banda resulta da numeração seqüencial dos nós da viga, sendo possível reduzir uma matriz quadrada em uma matriz retangular, propiciando economia considerável. Para melhor entendimento daremos um exemplo para percebermos as dimensões das matrizes. Seja dada uma viga com 10 elementos.



**FIGURA 4.11** Viga dividida em 10 elementos

Se considerarmos uma matriz retangular é só multiplicarmos o número de nós pelos graus de liberdade do nó, isto é 7 nós por 2 graus de liberdade = 14, este número é a ordem da matriz de rigidez, ou seja, a matriz retangular é da ordem de (14x14) posições resultando em 196 posições ocupadas na memória do computador.

Como a numeração é sequencial o armazenamento é feito resultando uma matriz de rigidez em banda.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	\	X	X	X										
2	X	\	X	X										
3	X	X	\	X	X	X								
4	X	X	X	\	X	X								
5			X	X	\	X	X	X	X					
6			X	X	X	\	X	X						
7					X	X	\	X	X	X	X			
8					X	X	X	\	X	X				
9							X	X	\	X	X	X	X	
10							X	X	X	\	X	X		
11									X	X	\	X	X	X
12									X	X	X	\	X	X
13											X	X	\	X
14											X	X	X	\

**FIGURA 4.12** Matriz quadrada de 6 elementos considerando 2 coordenadas por nó

A matriz de rigidez final, eliminando os zeros e agrupando os demais coeficientes em colunas, tem o aspecto abaixo.

	1	2	3	4
1	X	X	X	X
2	X	X	X	X
3	X	X	X	X
4	X	X	X	X
5	X	X	X	X
6	X	X	X	X
7	X	X	X	X
8	X	X	X	X
9	X	X	X	X
10	X	X	X	X
11	X	X	X	X
12	X	X	X	
13	X	X		
14	X			

**FIGURA 4.13- Matriz retangular decomposta em banda**

Segundo WEAVER [ 22 ] o método de decomposição em banda é particularmente eficiente quando aplicado em matrizes simétricas, onde os elementos fora da banda são todos nulos.

Assim é montada a matriz de rigidez global da estrutura, possibilitando assim calcularmos estruturas mais complexas, podendo refinar melhor a malha de elementos finitos, já que a memória do microcomputador ainda é uma restrição para o cálculo de grandes estruturas, onde temos que utilizar muitos elementos formando matrizes gigantescas exigindo o máximo de memória do microcomputador.

## 4.8 FORMAÇÃO DO VETOR DE CARGA GLOBAL DA ESTRUTURA

O vetor de cargas global é montado seguindo o mesmo esquema utilizada para a obtenção da matriz de rigidez global.

Com a matriz de rigidez global da estrutura e o vetor de cargas global da estrutura é montado o sistema de equações  $\mathbf{K} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{r}$ . O cálculo dos deslocamentos está dividido em três subrotinas, sendo elas TAMBANDA, onde é calculado o tamanho da banda da matriz de rigidez, DECOMPOSEBANDA, onde é feita a decomposição da matriz em banda e finalmente a subrotina SOLVEBANDA que é responsável pelo cálculo dos deslocamentos. Todas estas Subrotinas foram retiradas da referência WEAVER [ 22 ], sendo nela fornecido fluxograma e explicação mais detalhada das subrotinas aqui mencionadas.

Com os deslocamentos encontrados são calculados os esforços e as reações de apoio. Estes cálculos estão fornecidos na subrotina ACAOFINAL.

## **5. CÁLCULO DA FORÇA DE PROTENSÃO**

### **5.1 INTRODUÇÃO**

Para calcular a força de protensão inicial em uma peça de concreto protendido, devemos realizar algumas análises, uma vez que, devido às perdas imediatas ( perdas por atrito e acomodação das ancoragens), e às perdas progressivas ( retração e deformação lenta ), reduz-se consideravelmente a força de protensão inicialmente aplicada na peça. Neste cálculo devemos analisar as combinações mais desfavoráveis dos esforços solicitantes e as diferentes fases de carregamento que ocorrerão desde a aplicação inicial da força de protensão até o tempo em que a peça entre em equilíbrio definitivo, segundo PFEIL[ 18 ], cerca de 20 a 30 anos.

No cálculo da força de protensão utilizaremos três tipos de protensão definidos na Norma Brasileira: completa, limitada e parcial, em que a escolha será dada no arquivo de entrada.

Primeiramente é calculada a força de protensão para um tempo infinito  $P_{\infty}$  , pelos estados limites de utilização satisfazendo as condições previstas pela norma de concreto protendido NBR 7197, respeitando o limite de descompressão e o estado limite de formação de fissuras.

Em seguida é calculado o  $P_{\infty}$  pelo Estado Limite Último em que a escolha da força de protensão dar-se-á no estado limite que satisfizer as condições impostas pela Norma.

### **5.2 ESTADOS LIMITES DE UTILIZAÇÃO**

A verificação das estruturas de concreto protendido em relação aos estados limites de utilização deve considerar os estados correspondentes aos riscos de fissuração e de deformações excessivas , respeitando os tipos de protensão impostos pela Norma Brasileira.

## 5.3 TIPOS DE PROTENSÃO

Segundo o item 5.1 da NBR 7197 os tipos de protensão relacionam-se com os estados limites de utilização referentes à fissuração: a protensão pode ser completa, limitada ou parcial, de acordo com as definições dadas a seguir.

### 5.3.1 PROTENSÃO COMPLETA

Existe protensão completa quando se verificam as duas condições:

a) Para as combinações freqüentes de ações, previstas no projeto, é respeitado o estado limite de descompressão, estado no qual em um ou mais pontos da seção transversal a tensão normal é nula não havendo tração no restante da seção, ressalvada a exceção em que, na existência de tração em parte da seção transversal, não caracteriza o tipo de protensão; os esforços de tração podem ser resistidos apenas por armadura passiva respeitadas as exigências referentes à fissuração expressas pela NBR 6118 para as peças de concreto armado.

Combinações Freqüentes de Ações → Estado Limite de Descompressão.

$$F_{d,util} = F_g + F_{p\infty} + \psi_1 F_q \quad (5.1)$$

Expressando em termos de tensões e respeitando o estado limite de descompressão:

Ações:  $P_\infty$ ,  $M_{g1}$ ,  $M_q$

$$\sigma_c' = \sigma_g' + \sigma_{p\infty}' + \psi_1 \sigma_q' \leq 0 \quad (5.2)$$

$$\sigma_c'' = \sigma_g'' + \sigma_{p\infty}'' + \psi_1 \sigma_q'' \geq -0,7 f_{ck} \quad (5.3)$$

Obs: ' borda inferior;  
" borda superior

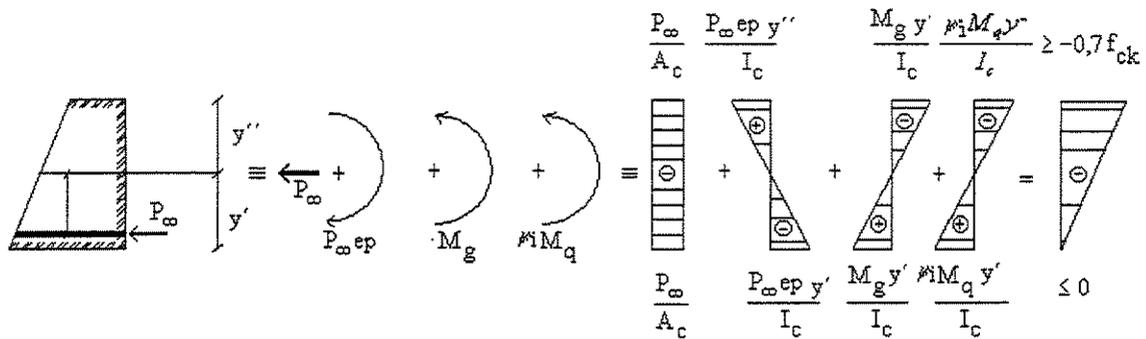


FIGURA 5.1- Diagrama de tensões respeitando o estado limite de descompressão

**Cálculo para obtenção do  $P_{\infty}$  na borda inferior**

$$\sigma'_c = -\frac{P_{\infty}}{A_c} - \frac{P_{\infty} e_p y'}{I_c} + \frac{M_g y'}{I_c} + \frac{\psi_1 M_q y'}{I_c} \leq 0 \quad (5.5)$$

**Verificação do nível de tensões na borda superior:**

$$\sigma''_c = -\frac{P_{\infty}}{A_c} + \frac{P_{\infty} e_p y''}{I_c} - \frac{M_g y''}{I_c} - \frac{\psi_1 M_q y''}{I_c} \geq -0,7 f_{ck} \quad (5.6)$$

b) Para as combinações raras de ações, quando previstas no projeto, é respeitado o estado limite de formação de fissuras (estado em que se inicia a formação de fissuras).

Combinações raras de ações → Estado Limite de Formação de Fissuras

$$F_{d,útil} = F_g + F_{P_{\infty}} + F_q \quad (5.7)$$

Expressando em termos de tensões e respeitando o estado limite de formação de fissuras:

$$\sigma'_c = \sigma'_g + \sigma'_{P_{\infty}} + \sigma'_q \leq 1,2 f_{ctk} \quad (5.8)$$

$$\sigma''_c = \sigma''_g + \sigma''_{P_{\infty}} + \sigma''_q \geq -0,7 f_{ck} \quad (5.9)$$

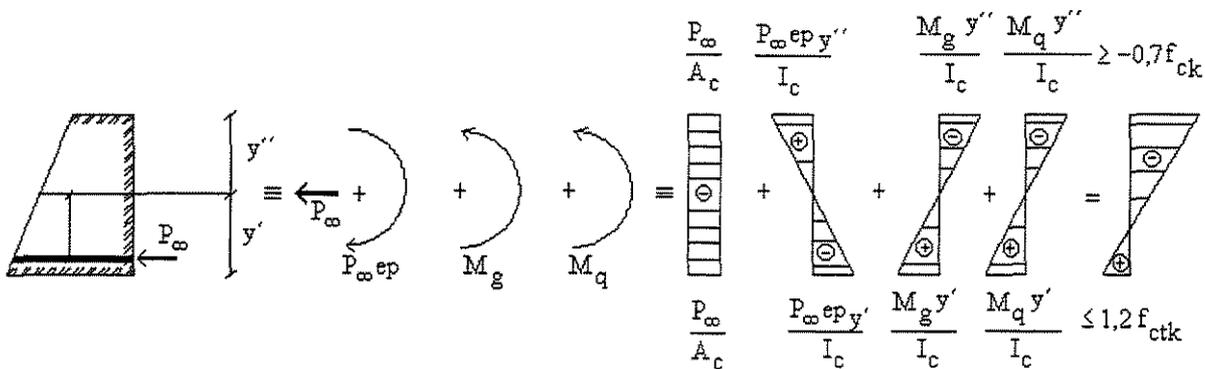


FIGURA 5.2- Diagrama de tensões respeitando e estado limite de formação de fissuras.

### Cálculo para obtenção do $P_\infty$ na borda inferior

$$\sigma_c'' = -\frac{P_\infty}{A_c} - \frac{P_\infty e_p y'}{I_c} + \frac{M_g y'}{I_c} + \frac{M_q y'}{I_c} \leq 1,2 f_{ctk} \quad (5.10)$$

### Verificação do nível de tensões na borda superior.

$$\sigma_c'' = -\frac{P_\infty}{A_c} + \frac{P_\infty e_p y''}{I_c} - \frac{M_g y''}{I_c} - \frac{M_q y''}{I_c} \geq -0,7 f_{ck} \quad (5.11)$$

onde:

$P_\infty$  = Força de protensão para um tempo infinito;

$M_g$  = Momento devido ao carregamento permanente;

$M_q$  = Momento devido ao carregamento acidental;

$A_c$  = Área de concreto da seção analisada;

$I_c$  = Momento de Inércia da seção analisada;

$y'$  = Distância do centro de gravidade da peça até a borda + tracionada;

$y''$  = Distância do centro de gravidade da peça até a borda + comprimida;

$e_p$  = Distância do centro de gravidade da peça até o centro de gravidade da armadura;

$f_{ck}$  = Resistência à compressão do concreto;

$f_{ctk} = 0,06 * f_{ck}(\text{kgf/cm}^2) + 7$  para  $f_{ck} > 180 \text{ kgf/cm}^2$ .

Estes procedimentos de cálculo encontram-se na subrotina PROTENSÃO\_COMPLETA.

### 5.3.2 PROTENSÃO LIMITADA

Existe protensão limitada quando se verificam as duas condições seguintes:

a) Para as combinações quase permanentes de ações previstas no projeto, é respeitado o estado limite de descompressão ( estado no qual em um ou mais pontos da seção transversal a tensão normal é nula não havendo tração no restante da seção).

Combinação quase permanente de ações → Estado Limite de Descompressão:

$$F_{d,util} = F_g + F_{P\infty} + \psi_2 F_q \quad (5.13)$$

Expressando em termos de tensões e respeitando o Estado Limite de Descompressão:

$$\sigma_c' = \sigma_g' + \sigma_{P\infty}' + \psi_2 \sigma_q' \leq 0 \quad (5.14)$$

$$\sigma_c'' = \sigma_g'' + \sigma_{P\infty}'' + \psi_2 \sigma_q'' \geq -0,7 f_{ck} \quad (5.15)$$

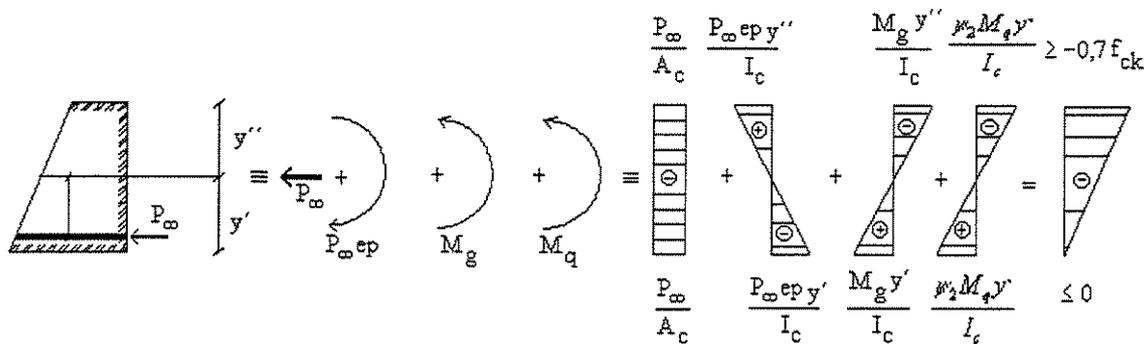


FIGURA 5.3 - Diagrama de tensões respeitando o Estado Limite de Descompressão

Cálculo para obtenção do  $P_{\infty}$  na borda inferior

$$\sigma_c' = -\frac{P_{\infty}}{A_c} - \frac{P_{\infty} e_p y'}{I_c} + \frac{M_g y'}{I_c} + \frac{\psi_2 M_q y'}{I_c} \leq 0 \quad (5.16)$$

**Verificação do nível de tensões na borda superior:**

$$\sigma_c'' = -\frac{P_\infty}{A_c} + \frac{P_\infty e_p y''}{I_c} - \frac{M_g y''}{I_c} - \frac{\psi_2 M_q y''}{I_c} \leq -0,7 f_{ck} \quad (5.17)$$

b) Para as combinações freqüentes de ações, previstas no projeto, é respeitado o Estado Limite de Formação de Fissuras, estado em que se inicia a formação de fissuras.

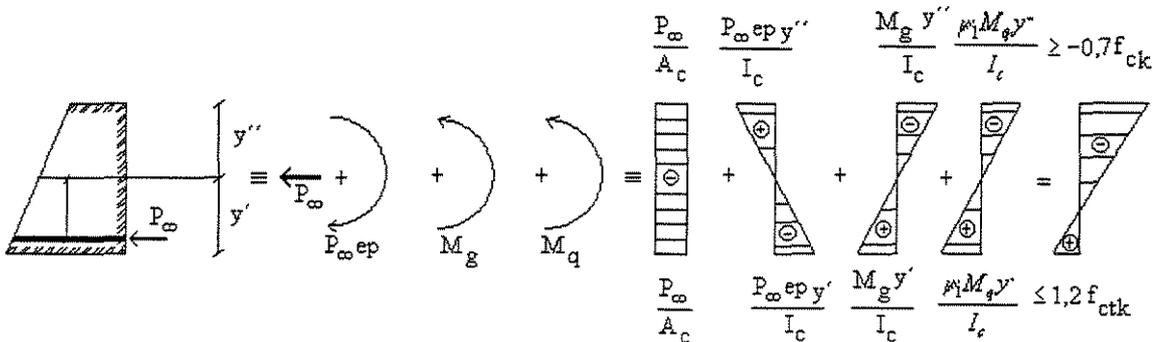
Combinações freqüentes de ações → Estado Limite de Formação de Fissuras

$$F_{d,util} = F_g + F_{P_\infty} + \psi_1 F_q \quad (5.18)$$

Expressando em termos de tensões e respeitando o Estado Limite de Formação de Fissuras:

$$\sigma_c' = \sigma_g' + \sigma_{P_\infty}' + \psi_1 \sigma_q' \leq 1,2 f_{ctk} \quad (5.19)$$

$$\sigma_c'' = \sigma_g'' + \sigma_{P_\infty}'' + \psi_1 \sigma_q'' \geq -0,7 f_{ck} \quad (5.20)$$



**FIGURA 5.4 - Diagrama de tensões respeitando o Estado Limite de Formação de Fissuras.**

**Cálculo para obtenção do  $P_\infty$  na borda inferior**

$$\sigma_c' = -\frac{P_\infty}{A_c} - \frac{P_\infty e_p y'}{I_c} + \frac{M_g y'}{I_c} + \frac{\psi_1 M_q y'}{I_c} \leq 1,2 f_{ctk} \quad (5.21)$$

Verificação do nível de tensões na borda superior:

$$\sigma_c'' = -\frac{P_\infty}{A_c} + \frac{P_\infty e_p y''}{I_c} - \frac{M_g y''}{I_c} - \frac{\psi_1 M_q y''}{I_c} \geq -0,7 f_{ck} \quad (5.22)$$

Estes procedimentos de cálculo encontram-se na subrotina **PROTENSÃO\_**  
**LIMITADA.**

### 5.3.3 PROTENSÃO PARCIAL

Existe protensão parcial quando se verificam as duas condições seguintes:

a) Para as combinações quase permanentes de ações, previstas no projeto, é respeitado o Estado Limite de Descompressão (6.2.1).

Combinações quase permanentes de ações → Estado Limite de Descompressão.

$$F_{d,util} = F_g + F_{P\infty} + \psi_2 F_q \quad (5.23)$$

Expressando em termos de tensões e respeitando o Estado Limite de Descompressão.

$$\sigma_c' = \sigma_g' + \sigma_{P\infty}' + \psi_2 \sigma_q' \leq 0 \quad (5.24)$$

$$\sigma_c'' = \sigma_g'' + \sigma_{P\infty}'' + \psi_2 \sigma_q'' \geq -0,7 f_{ck} \quad (5.25)$$

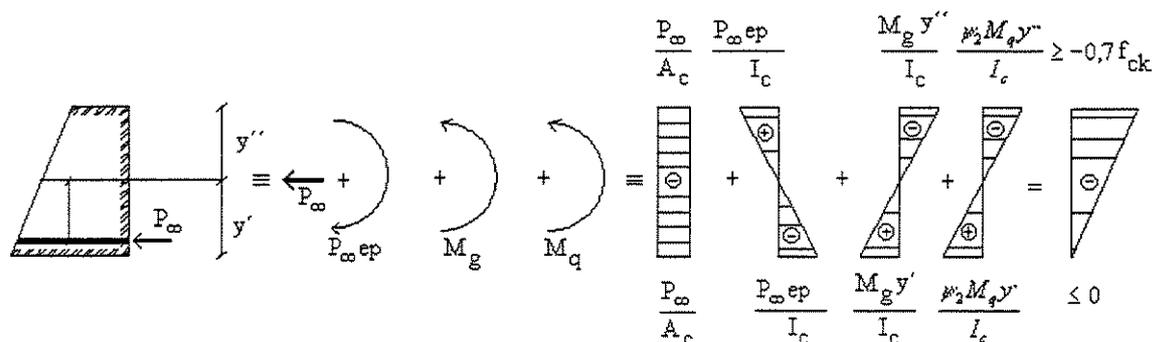


FIGURA 5.5 - Diagrama de tensões respeitando o Estado Limite de Descompressão

**Cálculo para obtenção do  $P_\infty$  na borda inferior**

$$\sigma_c' = -\frac{P_\infty}{A_c} - \frac{P_\infty e_p y'}{I_c} + \frac{M_g y'}{I_c} + \frac{\psi_2 M_q y'}{I_c} \leq 0 \quad (5.26)$$

**Verificação da intensidade de tensões na borda superior:**

$$\sigma_c'' = -\frac{P_\infty}{A_c} + \frac{P_\infty e_p y''}{I_c} - \frac{M_g y''}{I_c} - \frac{\psi_2 M_q y''}{I_c} \geq -0,7 f_{ck} \quad (5.27)$$

b) Para as combinações freqüentes de ações previstas no projeto é respeitado o estado limite de aberturas de fissuras, estado em que as fissuras se apresentam com aberturas características de valores específicos, com  $w_k \leq 0,2\text{mm}$ .

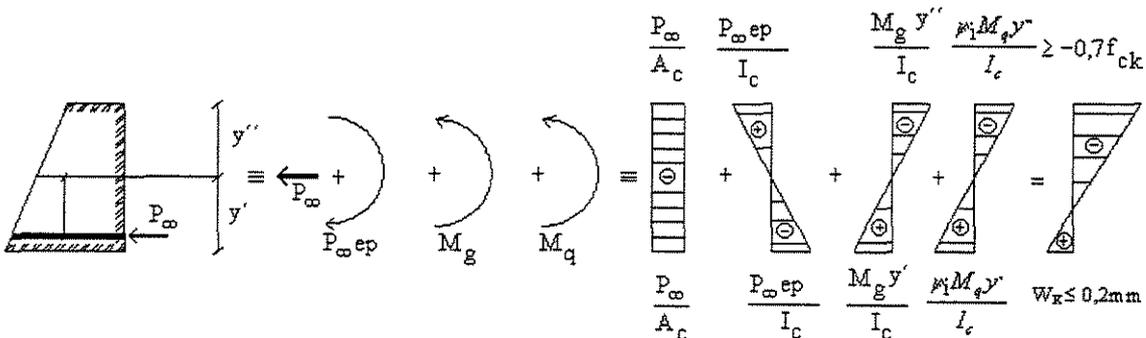
Combinação freqüentes de ações  $\rightarrow$  Estado Limite de Formação de Fissuras.

$$F_{d,util} = F_g + F_{P_\infty} + \psi_1 F_q \quad (5.28)$$

expressando em termos de tensões e respeitando o Estado Limite de Formação de Fissuras.

$$\sigma_c' = \sigma_g' + \sigma_{P_\infty}' + \psi_1 \sigma_q' \leq (w_k = 0,2\text{mm}) \quad (5.29)$$

$$\sigma_c'' = \sigma_g'' + \sigma_{P_\infty}'' + \psi_1 \sigma_q'' \geq -0,7 f_{ck} \quad (5.30)$$

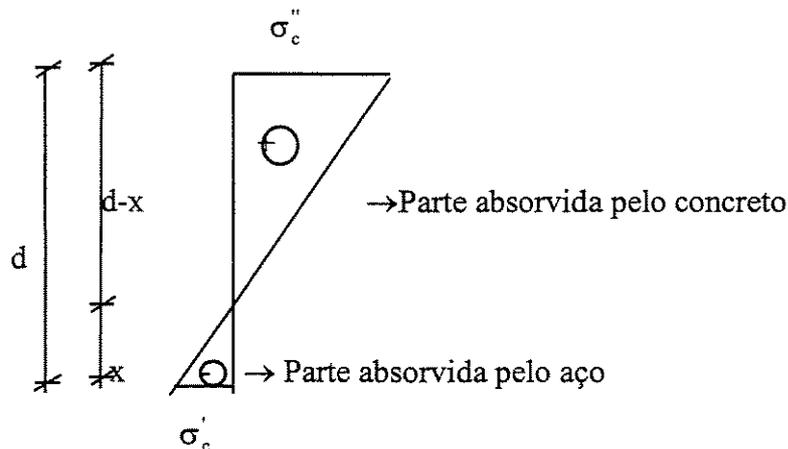


**FIGURA 5.6 - Diagrama de tensões respeitando e Estado Limite de Formação de Fissuras.**

Cálculo das tensões no concreto para as condições de ações raras.

$$\sigma_c' = -\frac{P_\infty}{A_c} - \frac{P_\infty e_p y'}{I_c} + \frac{M_g y'}{I_c} + \frac{\psi_1 M_q y'}{I_c} \quad (5.31)$$

$$\sigma_c'' = -\frac{P_\infty}{A_c} + \frac{P_\infty e_p y''}{I_c} - \frac{M_g y''}{I_c} - \frac{\psi_1 M_q y''}{I_c} \quad (5.32)$$



**FIGURA 5.7 - Tensões na peça de concreto considerando protensão parcial**

Permitindo assim encontrarmos o valor do c.g. da seção analisada.

$$x = \frac{\sigma_{cd}'}{(\sigma_c' + \sigma_c'')} \quad (5.33)$$

$$R_s = A_s \cdot \sigma_s' \quad (5.34)$$

$R_s$  = Resultante das tensões de tração;

$A_s$  = Área de aço;

$\sigma_s'$  = Tensão na borda inferior.

Estes procedimentos de cálculo encontram-se na rotina protensão parcial.

## 5.4 ESCOLHA DO TIPO DE PROTENSÃO

Conforme o item 5.2 da NBR 7197 a escolha do tipo de protensão deve ser feita em função do tipo de construção e da agressividade do meio ambiente. Na falta de conhecimento mais preciso das condições reais de cada caso, pode-se adotar a seguinte classificação do nível de agressividade do meio ambiente:

- não agressivo, como no interior dos edifícios em que uma alta umidade relativa somente pode ocorrer durante poucos dias por ano, e em estruturas devidamente protegidas;
- pouco agressivo, como no interior de edifícios em que uma alta umidade relativa pode ocorrer durante longos períodos, e nos casos de contato da face do concreto próxima a armadura protendida com líquidos, exposição prolongada a intempéries ou a alto teor de umidade;
- muito agressivo, como nos casos de contato com gases ou líquidos agressivos ou com solo e em ambiente marinho.

Na ausência de exigências mais rigorosas feitas por normas peculiares à construção considerada, a escolha do tipo de protensão deve obedecer às exigências mínimas da tabela 5.1.

**TABELA 5.1 ESCOLHA DO TIPO DE PROTENSÃO**

Nível de Agressividade ao ambiente	Exigência mínimas quanto ao tipo protensão
muito agressivo	protensão completa
pouco agressivo	protensão limitada
não agressivo	protensão parcial

## 5.5 RESTRIÇÃO DE USO ( ITEM 4.3 NBR 7197 )

Para pontes ferroviárias e vigas de pontes rolante só é admitida protensão com aderência.

Concreto protendido sem aderência só pode ser empregado em casos especiais e sempre com protensão completa . Outras restrições devem ser observadas quando prescritas em normas peculiares a determinadas espécies de estrutura.

## 5.6 FATORES DE COMBINAÇÃO E FATORES DE UTILIZAÇÃO (ITEM 5.1.4.4 - NBR-7197)

Valores dos fatores de combinação - Os fatores de combinação  $\psi_0$ , salvo indicação em contrário, expressos em norma relativa ao tipo de construção e de material considerados estão indicados na tabela x, juntamente com os fatores de redução  $\psi_1$  e  $\psi_2$  referentes às combinações de utilização

**TABELA 5.2 - Valores dos fatores de combinação e dos fatores de utilização**

Ações em geral	$\psi_0$	$\psi_1$	$\psi_2$
- Variação uniformes de temperatura em relação á média anual local	0,6	0,5	0,3
- Pressão dinâmica do vento nas estruturas em geral	0,4	0,2	0,0
- Pressão dinâmica do vento nas estruturas em que a ação variável principal tem pequena variabilidade durante grandes intervalos de tempo ( exemplo: edifícios de habitação	0,6	0,2	0,0
Cargas acidentais dos edifícios	$\psi_0$	$\psi_1$	$\psi_2$
- Locais em que não há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, nem elevadas concentrações de pessoas	0,4	0,3	0,2
- Locais em que há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempos, ou de elevadas concentrações de pessoas	0,7	0,6	0,4
- Bibliotecas, arquivos, oficinas e garagens	0,8	0,7	0,6
Cargas móveis e seus efeitos dinâmicos	$\psi_0$	$\psi_1$	$\psi_2$
- Pontes de pedestres	0,4	0,3	0,2(*)
- Pontes rodoviárias	0,6	0,4	0,2(*)
- Pontes ferroviárias ( ferrovias não especializadas )	0,8	0,6	0,4(*)

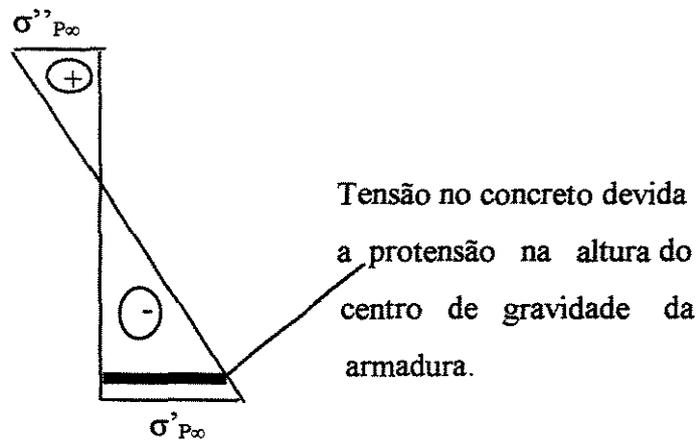
(\*) Admite-se  $\psi_2=0$  quando a ação variável principal correspondente a um efeito sísmico.

## 5.7 ESTADOS LIMITES ( ITEM 6 NBR 7197 )

Segundo AGOSTINI [ 2 ] podemos dividir o estudo de uma peça protendida na ruína em duas fases:

Fase I : Compreende desde a execução da protensão até a condição em que a fibra de concreto ao nível do centro de gravidade da armadura fica com tensão nula.

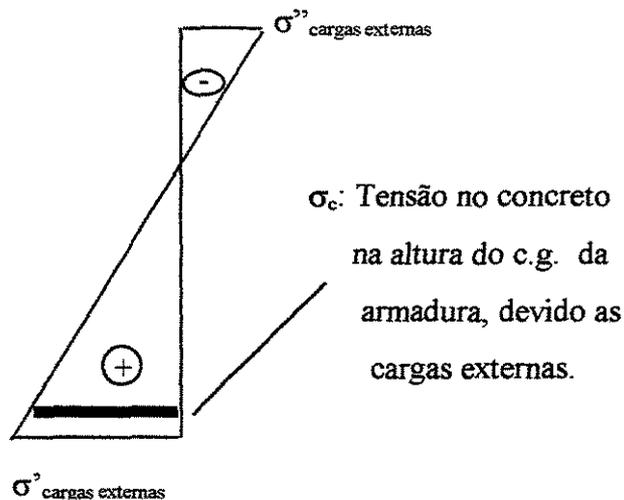
Devido à força de protensão o diagrama de tensões no concreto deve ter a seguinte configuração:



**FIGURA 5.8 – Estado de tensões no concreto considerando somente a força de protensão**

Portanto, devido à protensão na armadura tem-se um alongamento.

Devido as cargas externas na peça, inclusive seu peso próprio, o diagrama de tensões devido à flexão deve ter a seguinte forma.



**FIGURA 5.9 - Tensão no concreto considerando cargas externas**

Superpondo os efeitos da protensão e das cargas externas, existirá um instante no qual a altura do c.g. da armadura ter-se-á:

$$|\sigma_{P_\infty}| = |\sigma_c| \quad (5.35)$$

Segundo AGOSTINI [ 2 ], ou seja, ocorrem a descompressão do concreto na altura do c.g. da armadura, portanto no concreto ocorreu um alongamento:

$$\varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_c} = \left| \frac{\sigma_{P_\infty}}{E_c} \right| \quad (5.36)$$

Devido à aderência por compatibilidade de deformações, ocorrem alongamento na armadura de protensão igual a  $\varepsilon_c$ , ou seja:

$$\varepsilon_c^{(2)} = \varepsilon_c = \left| \frac{\sigma_{P_\infty}}{E_c} \right| \quad (5.37)$$

Portanto, no instante em que na altura do c.g. da armadura a tensão no concreto for nula a deformação total na armadura será:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^{(1)} + \varepsilon_i^{(2)} = \frac{\sigma_{sp_\infty}}{E_p} + \left| \frac{\sigma_{P_\infty}}{E_c} \right| \leftrightarrow \varepsilon_i^{(1)} = \frac{\sigma_{sp_\infty}}{E_p} = \frac{P_\infty A_p}{E_p} \leftrightarrow P_\infty = \frac{E_p \varepsilon_i^{(1)}}{A_p} \quad (5.38)$$

$$\varepsilon_i = \frac{P_\infty}{A_p E_p} + \left( \left| \frac{\sigma_{P_\infty}}{E_c} \right| \right) * \frac{A_p E_p}{A_p E_p} \quad (5.39)$$

$$\boxed{\varepsilon_i = \frac{P_\infty + \alpha E_c |\sigma_{P_\infty}| A_p}{A_p E_p} = \varepsilon'_p} \quad (5.40)$$

essa é a deformação de pré-alongamento do cabo.

AGOSTINI[ 2 ] diz que o pré-alongamento ( $\epsilon'_i$ ) é a deformação que sofre a armadura de protensão, devida à força de protensão final e à descompressão do concreto causada pela flexão produzida pelas cargas externas.

A partir do instante que é nula a tensão no concreto na altura do C.G. da armadura, se continuarmos acrescentando cargas externas, supondo nula a resistência do concreto à tração, surgirão as primeiras fissuras e a peça protendida passa a ter um comportamento equivalente a uma peça de concreto armado comum.

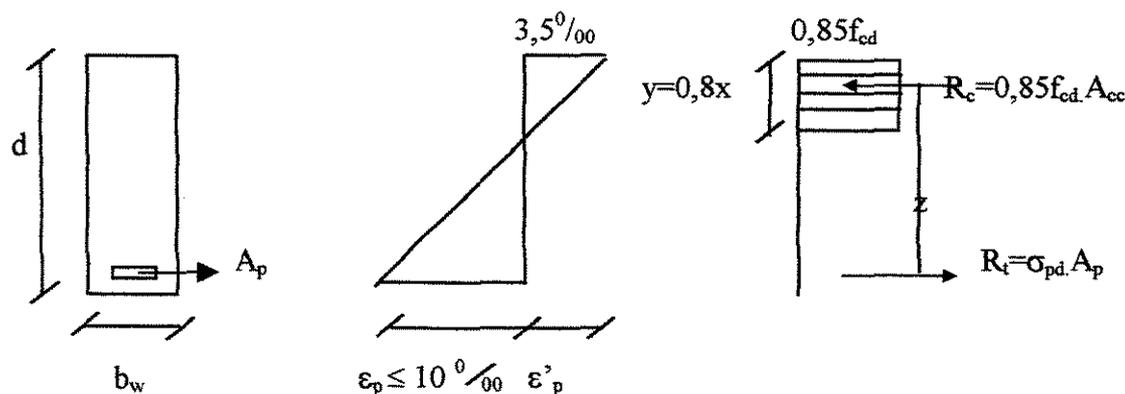
Nesta fase, as deformações no concreto e na armadura obedecerão às prescrições da NBR 6118, para o estado limite último devido às solicitações normais.

Fase II : Vai da condição em que a fibra de concreto, ao nível do C.G. da armadura, está sem solicitação até a condição de ruína.

A partir do instante em que a fibra de concreto ao nível do C.G. da armadura fica com tensão nula, a peça começa a comportar-se como uma peça de concreto armado, sendo assim, se continuarmos a aplicar mais carga à peça, começa a fissurar até chegar a ruína.

### 5.7.1 DIMENSIONAMENTO PARA O ESTADO LIMITE ÚLTIMO DEVIDO ÀS SOLICITAÇÕES NORMAIS

Para o dimensionamento da peça pelo Estado Limite Último será adotado apenas o roteiro de cálculo para seção T falsa em que a linha neutra corta a mesa, visto que trabalharemos com lajes e que cujas seções serão retangulares.



**FIGURA 5.10 - Diagramas de tensões para o Estado Limite Último devido às solicitações normais**

$$M_d = 1,40 \cdot (M_g + M_q) \rightarrow \text{edifícios} \quad (5.41)$$

$$M_d = 1,35 \cdot M_g + 1,5 \cdot M_q \rightarrow \text{pontes} \quad (5.42)$$

Condição de peça sub-armada :  $f_{pyd} \leq \sigma_{pd} \leq f_{ptd}$

Para o aço de protensão escolhido as resistências de cálculo são:

$$f_{pyd} = \frac{f_{pyd}}{\gamma_s} ; f_{ptk} = \frac{f_{ptk}}{\gamma_s} \quad (5.43)$$

A tensão  $\gamma_{spd}$  atuante será determinada por um processo de aproximações sucessivas.

1º Tentativa: adotamos uma tensão  $\gamma_{spd}^{(1)}$  calculada como a média aritmética entre  $f_{pyd}$  e  $f_{ptk}$ :

$$\gamma_{spd}^{(1)} = \frac{f_{pyd} + f_{ptk}}{2} \quad (5.44)$$

As forças resultantes das tensões de compressão e tração no concreto são obtidas por:

$$R_c = A_{cc} \cdot 0,85 f_{cd} \quad (5.45)$$

$$R_t = A_p^{(1)} \cdot \sigma_{spd}^{(1)} = A_p \cdot \gamma_{spd}^{(1)} \quad (5.46)$$

E o binário dessas duas forças é determinado como:

$$M_d = A_p^{(1)} \cdot \sigma_{spd}^{(1)} \cdot \left( d - \frac{0,8 \cdot x^{(1)}}{2} \right) \quad (5.47)$$

Da expressão nº (5.47) encontra-se a área de aço necessária para a tensão adotada:

Com a área de aço e a tensão encontra-se o valor da linha neutra da peça.

$$x^{(1)} = \frac{A_p^{(1)} \sigma_{spd}^{(1)}}{0,85 F_{cd} b_w 0,8} \quad \text{LINHA NEUTRA} \quad (5.48)$$

Com o valor da linha neutra nesta posição resulta para a deformação da armadura:

$$\varepsilon_p^{(1)} = 3,5 \left( \frac{\%}{100} \right) \cdot \frac{d-x}{x} \geq 10 \frac{\%}{100} \quad \text{DEFORMAÇÃO DA ARMADURA} \quad (5.49)$$

O valor da deformação  $\varepsilon_p^{(1)}$  terá o valor máximo de  $10 \frac{\%}{100}$ , este valor é a máxima deformação do aço. Caso na expressão (5.49) dê um valor acima de  $10 \frac{\%}{100}$  adotaremos o valor de  $10 \frac{\%}{100}$ . Isto significa que para a peça romper por esmagamento a deformação terá que ter o valor calculado. Como o aço só pode possuir a deformação de  $10 \frac{\%}{100}$ , tomamos o valor indicado, estando assim a favor da segurança.

Para conhecermos a deformação total na armadura de protensão é necessário determinar a deformação de pré-alongamento ( $\varepsilon_i$ )

$$\varepsilon_i = \frac{P_\infty}{A_p E_p} \Leftrightarrow \frac{P_\infty}{A_p E_p} = \varepsilon_i - \frac{\alpha |\sigma_{pe}|}{E_p} \quad \alpha = \frac{E_p}{E_c} \quad (5.50)$$

$$\frac{P_\infty}{A_p E_p} = \varepsilon_i - \frac{1}{E_c} \left( \frac{P_\infty}{A_c} + \frac{P_\infty e p^2}{I_c} \right) \quad (5.51)$$

$$\frac{P_\infty}{A_p E_p} + \frac{P_\infty}{E_c} \left( \frac{1}{A_c} + \frac{e p^2}{I_c} \right) = \varepsilon_i \quad \text{PRE - ALONGAMENTO} \quad (5.52)$$

$$\sigma_{spoc} = \bar{\sigma}_{spi} - \text{Perdas} \cdot \bar{\sigma}_{spi} \quad (5.53)$$

$$\bar{\sigma}_{spi} \leq \begin{cases} 0,77 \cdot f_{ptk} \\ 0,90 \cdot f_{pyk} \end{cases} \quad (\text{Item 8.2.1.2 da NBR 7197})$$

Deformação causada pela força de protensão:

$$\varepsilon_i^{(1)} = \frac{A_p^{(1)} \cdot \sigma_{sp_\infty} + \frac{E_p}{E_c} |\sigma_{p_\infty}| \cdot A_p^{(1)}}{A_p^{(1)} \cdot E_p} \quad (5.54)$$

Onde:

$$\sigma_{p_\infty} = -\frac{P_\infty}{A_c} - \frac{P_\infty \cdot ep \cdot ep}{I_c} \quad (5.55)$$

Multiplicando e dividindo por  $A_p$  obtemos:

$$|\sigma_{p_\infty}| = P_\infty \left( \frac{1}{A_c} + \frac{ep^2}{I_c} \right) \cdot \frac{A_p}{A_p} \quad (5.56)$$

Deste modo encontramos a deformação causada pela força de protensão final:

$$\varepsilon_i^{(1)} = \frac{\sigma_{sp_\infty} + \frac{E_p}{E_c} \sigma_{sp_\infty} A_p^{(1)} \left( \frac{1}{A_c} + \frac{ep^2}{I_c} \right)}{E_p} \quad (5.57)$$

$$E_p = 2.000.000 \text{ Kg}f / \text{cm}^2$$

$$E_c = 0,9 \cdot 6.600 \cdot \sqrt{f_{cj}}$$

$$f_{cj} = f_{ck} + 3,5 \text{ kg}f / \text{cm}^2$$

Desta forma, a deformação última da armadura vale:

$$\varepsilon_u = \varepsilon_p + \varepsilon_i \quad (5.58)$$

Para este valor de deformação encontramos no diagrama tensão-deformação da armadura para aços CP 175 RN a expressão para o cálculo da tensão. Caso a tensão calculada dê valor diferente ao valor da 1ª tentativa terá que ser adotado outro valor até que ele convirja ao valor da tensão da expressão (5.44).

## 5.7.2 CÁLCULO DO VALOR DA FORÇA DE PROTENSÃO

Primeiramente é calculada a tensão no concreto devido a força de protensão para um tempo infinito. Em que multiplicamos a deformação de pré-alongamento pelo módulo de elasticidade do concreto.

$$\sigma_{sp_\infty} = \frac{P_\infty}{A_p} \cdot \varepsilon_i \quad (5.59)$$

Com o resultado de  $\sigma_{sp_\infty}$  calcula-se a força de protensão para um tempo infinito ( $P_\infty$ ) e admitindo um valor pré-determinado para a perda é calculada a força de protensão inicial a ser aplicada na peça de concreto, onde.

$$P_\infty = \sigma_{sp_\infty} \cdot A_p \quad \rightarrow \quad \sigma_{sp_\infty} = (\sigma_{spi} - \text{perdas}) \quad (5.60)$$

$$P_i = \frac{P_\infty}{(1 - \text{perdas})} \quad (5.61)$$

Obtido  $P_i$  é calculada a tensão inicial no concreto.

$$\sigma_{spi} = \frac{P_i}{A_p} \quad (5.62)$$

Se a tensão calculada possuir um valor maior que  $\bar{\sigma}_{spi}$ , necessitaremos calcular uma nova área de aço, onde.

$$A_p = \frac{P_i}{\bar{\sigma}_{spi}} \quad (5.63)$$

Com o valor de  $P_\infty$  calculado pelo estado limite último, este é comparado com o valor de  $P_\infty$  calculado pelo estado limite de utilização e escolhido o que satisfizer as duas condições, ou seja, o maior valor.

## 6. TRAÇADO DO CABO DE PROTENSÃO

### 6.1 INTRODUÇÃO

Usualmente o traçado do cabo é definido pelo máximo momento e pelo final da seção (ponto de ancoragem). Porém, em vigas contínuas, ou faixas contínuas de lajes, as seções intermediárias podem ter tensões críticas, em que novos parâmetros alterarão o traçado do cabo. Para determinarmos o traçado possível do cabo, um fuso limite para a localização do eixo definido pelos centros de gravidade das seções dos cabos (c.g.s.) é obtido. Determinado o limite superior e inferior do fuso, podemos traçar a região em que estão contidas as tensões admissíveis do concreto, uma vez utilizadas a força de protensão final e a força de protensão infinita.

Na região das tensões admissíveis pode-se traçar o perfil do cabo de protensão, e verificar se o mesmo respeita as tensões admissíveis; caso em algum ponto da excentricidade o cabo esteja fora do fuso limite, ou não respeitar o recobrimento mínimo da peça, o traçado do cabo pode ser mudado para adequar-se ao fuso limite através de uma operação denominada transformação linear. Esta operação consiste na mudança da posição do cabo sobre os apoios internos da viga sem mudar a forma da curva definida pelo traçado do cabo.

Neste trabalho o cabo é considerado com perfil parabólico definido por três pontos, usualmente um no início do cabo, um no ponto de inflexão da curva e outro entre estes dois. Com estes três pontos o programa calcula as excentricidades dos demais pontos automaticamente, fornecendo o traçado para que posteriormente sejam calculadas as perdas imediatas e progressivas.

## 6.2 CÁLCULO DO FUSO LIMITE

Fuso limite é um intervalo(uma região) na qual deve estar situada a linha que define os centros de gravidade da armadura ao longo da peça, de modo que as tensões no concreto sejam as admissíveis por norma.

O cálculo do fuso limite será dividido em duas partes, uma referente ao momento máximo positivo, onde o momento devido à curvatura do cabo traciona a borda superior do concreto e outro referente ao momento máximo negativo, onde o momento devido à curvatura do cabo traciona a borda inferior do concreto.

### 6.2.1 FUSO LIMITE REFERENTE AO MOMENTO MÁXIMO POSITIVO

#### 6.2.1.1FASE DE UTILIZAÇÃO

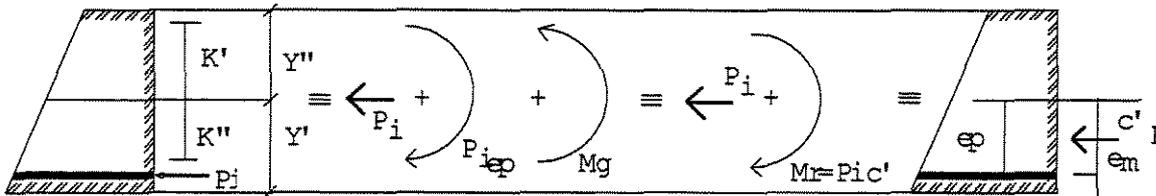


FIGURA 6.1 - Esquema de Solicitação

**Borda Inferior: (  $P_i + M_g$  ) - Máxima Compressão**

$$K' = \frac{I_c}{A_c \cdot y'} ; \quad K'' = \frac{I_c}{A_c \cdot y''} \quad (6.1)$$

onde:

$k'$  = Distância do antípodo da borda inferior ao C.G. da seção;

$k''$  = Distância do antípodo da borda superior ao C.G. da seção;

$I_c$  = Momento de inércia da seção;

$A_c$  = Área de concreto da seção;

$y'$  = Distância do C.G. à borda inferior da seção;

$y''$  = Distância do C.G. à borda superior da seção;

$$C'_1 = \left\{ \left[ -\frac{0,7f_{ctk}}{\left( \frac{-P_i}{A_c} \right)} - 1 \right] \cdot \left[ \frac{I_c}{A_c y'} \right] \right\} \quad (6.2)$$

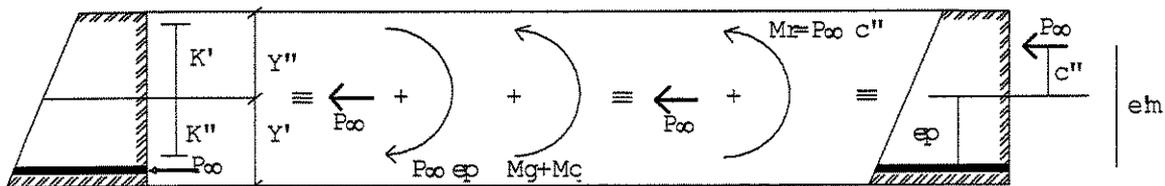
$$C'_2 = \left\{ 1 - \left[ \frac{1,2f_{ctk}}{\left( \frac{-P_i}{A_c} \right)} \right] \cdot \left[ \frac{I_c}{A_c \cdot y''} \right] \right\} \quad (6.3)$$

$$f_{ctk} = 0,06 * f_{ck} + 7 \quad \text{para } f_{ck} \geq 180 \text{ kgf/cm}^2 \quad (6.4)$$

O cálculo de  $C'_1$  e  $C'_2$  corresponde a encontrar o valor do limitante das tensões da borda inferior.

Conforme AGOSTINI [ 3 ] o valor da excentricidade  $C'$  será o menor valor entre 1 e 2 para que sejam satisfeitas ao mesmo tempo as condições limites de tensões de compressão e tração.

### 6.2.1.2 PEÇA EM SERVIÇO



**FIGURA 6.2 - Esquema de Solicitação**

**Borda Superior:  $( P_{\infty} + M_g + M_q )$  - Máxima Tração**

Mínima Compressão:  $\sigma_c'' = 0 \quad \therefore C''_1 = K'$

Máxima Compressão:

$$C''_2 = \left( -\frac{0,7f_{ck} - 1}{P_i/A_c} \right) \cdot K'' \quad (6.5)$$

adota-se o menor valor de C''

O cálculo de C'\_1 e C'\_2 corresponde a encontrar o valor do limitante das tensões da borda inferior.

## 6.2.2 FUSO LIMITE REFERENTE AO MOMENTO MÁXIMO NEGATIVO

### 6.2.2.1 FASE DE UTILIZAÇÃO

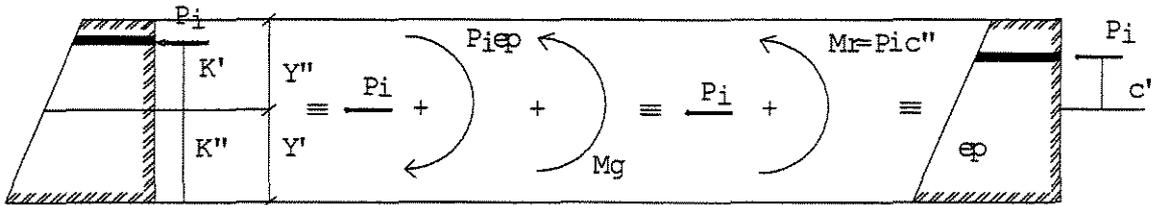


FIGURA 6.3- Esquema de Solicitação

**Borda Superior: ( P<sub>i</sub> + M<sub>g</sub> ) - Máxima Compressão**

$$C'_1 = \left( -\frac{0,7f_{ck}}{-P_i/A_c} - 1 \right) \cdot K' \quad (6.6)$$

**Borda Inferior : ( P<sub>i</sub> + M<sub>g</sub> ) - Máxima Tração**

$$C'_2 = \left( 1 - \frac{1,2f_{ctk}}{-P_i/A_c} \right) \cdot K'' \quad (6.7)$$

Adota-se o menor valor de C'

### 6.2.2.2 FASE EM SERVIÇO

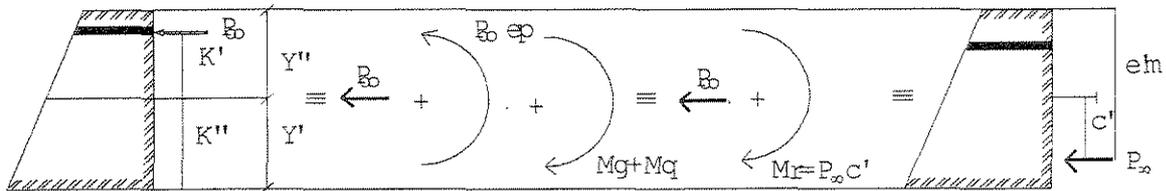


FIGURA 6.4-Esquema de Solicitação

**Borda Superior (  $P_{\infty} + M_g + M_q$  ) Mínima Compressão**

Mínima Compressão:  $\sigma_c'' = 0 \quad \therefore C''_1 = K'$

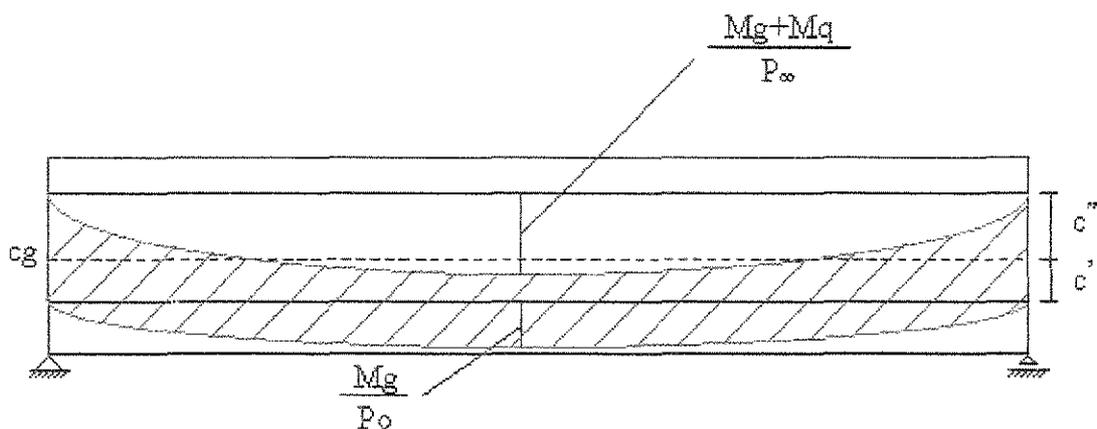
**Borda Inferior(  $P_{\infty} + M_g + M_q$  ) Máxima Compressão**

$$C''_2 = \left( -\frac{0,7f_{ck}}{\left( \frac{-P_{\infty}}{A_c} \right)} + 1 \right) \cdot K'' \quad (6.9)$$

Estes procedimentos de cálculo encontram-se na rotina fuso limite, sendo que a própria rotina se encarrega de escolher o maior momento e enviá-lo para o cálculo dos delimitantes do fuso limite  $C'$  e  $C''$ , não sendo necessário informar qual a viga onde está o maior momento.

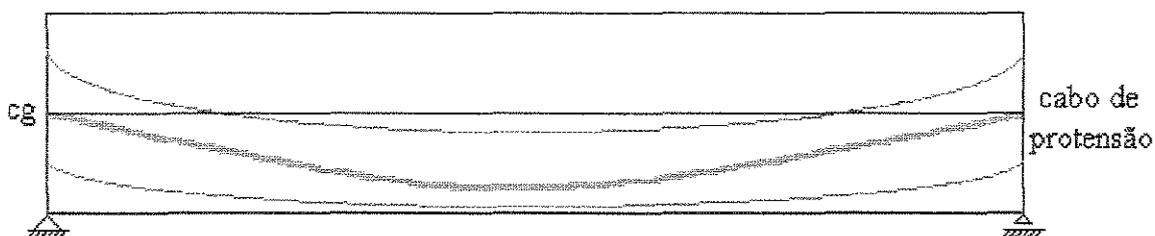
### 6.3 TRAÇADO DO FUSO LIMITE

Determinadas as excentricidades  $C'$  e  $C''$ , desenham-se as retas distantes  $C'$  e  $C''$  da linha dos centros de gravidade da viga, marcando a partir dessas retas respectivamente as ordenadas  $Mg/P_0$  e  $(Mg+Mq)/P_{\infty}$ , determinando o fuso limite, conforme a figura 6.5.



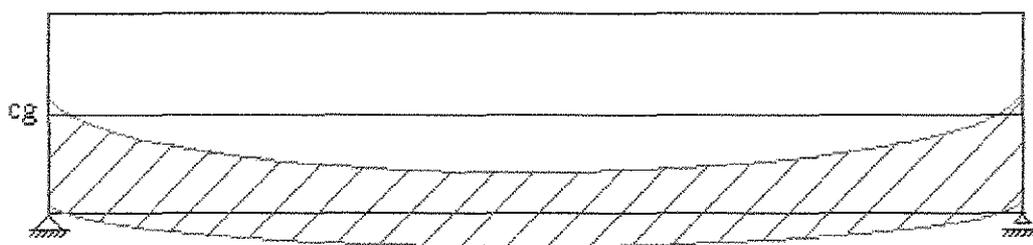
**FIGURA 6.5 - Fuso limite para os estados limites (utilização e último)**

As tensões limites são respeitadas quando em qualquer seção da viga a linha que define os centros de gravidade da armadura esteja situada no fuso limite, como indicado na figura 6.6.



**FIGURA 6.6 Cabo de protensão respeitando as tensões admissíveis do fuso limite**

Muitas vezes pode acontecer do traçado do fuso limite ser definido fora da viga. Neste caso o traçado do cabo de protensão é delimitado pelo cobrimento mínimo do concreto



**FIGURA 6.7 Fuso limite delimitado pelo cobrimento mínimo**

No caso de se ter em uma certa seção tensões admissíveis tanto no estado limite de utilização, quanto no estado limite último, isto significa que nesta seção as curvas que limitam o fuso limite coincidem.

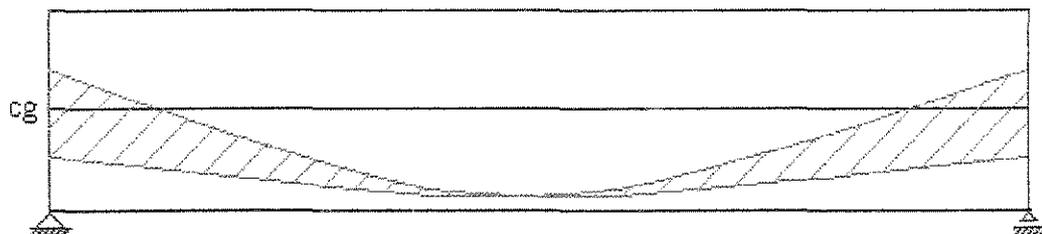


FIGURA 6.8 Fuso limite com limites coincidentes

## 6.4 CABO CONCORDANTE

Fixado a região que respeita as tensões admissíveis ( fuso limite), podemos definir como primeira estimativa o traçado do cabo concordante, tendo como objetivo posicionar o traçado dentro do fuso limite. Pela definição, cabo concordante numa viga contínua protendida (é um cabo que coincide com a linha de pressão no concreto, linha esta que define os pontos de aplicação da linha do c.g. da compressão no concreto ao longo da viga )

Traçado do cabo concordante pode ser definido através do diagrama de momentos da viga contínua, segundo o teorema do cabo concordante, cada diagrama de momento para uma viga contínua, produzido por qualquer combinação de cargas externas desenhado em qualquer escala é uma posição para um cabo concordante nessa viga.

Para o traçado do cabo concordante utilizaremos a expressão que define seu traçado.

$$k = \frac{M_{gmax}}{ep} \quad (6.10)$$

$$\text{Tracado} = \frac{M}{k} \quad (6.11)$$

$M_{gmax}$  : Maior momento da viga contínua ou maior momento da faixa da laje;

$e_p$ : Distância do centro de gravidade da peça até o c.g. da armadura;

M: Momento em cada nó da viga.

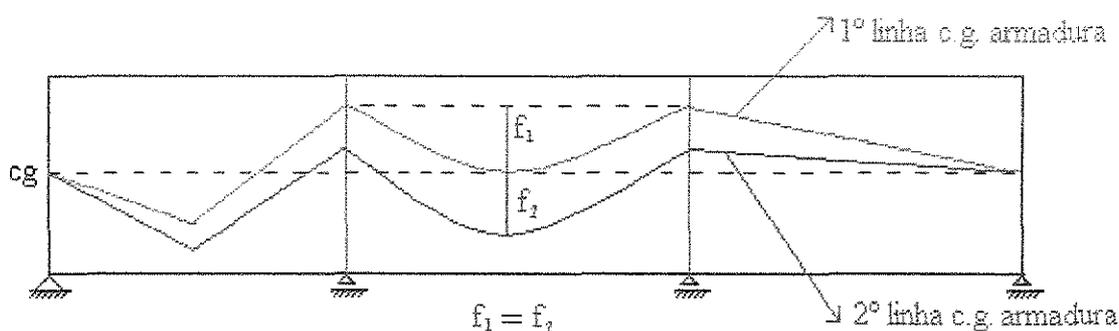
Calculada a expressão que define o traçado do cabo concordante é analisado se o mesmo respeita o traçado do fuso limite. Caso aconteça deste traçado respeitar o traçado do fuso limite e não respeitar o recobrimento mínimo da peça deve-se aplicar a transformação linear para assim obter o traçado definitivo do cabo de protensão.

## 6.5 TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Quando se muda a posição da linha do centro de gravidade da armadura sobre os apoios internos de uma viga contínua, sem mudar a forma intrínseca da linha, diz-se que a nova linha é uma transformação linear da anterior.

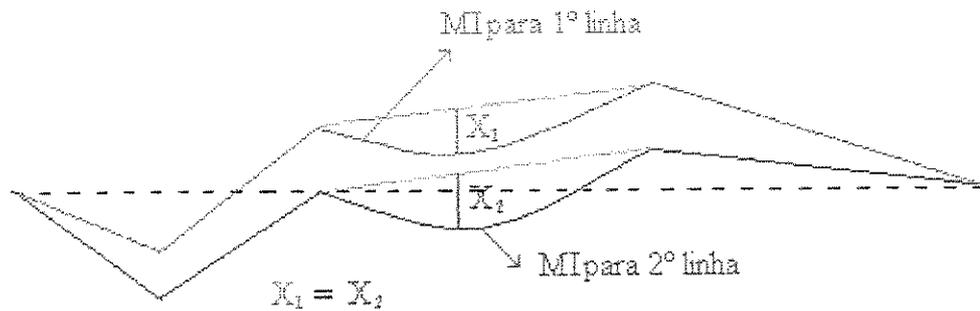
Segundo AGOSTINI [ 3 ], isto significa que a transformação linear da linha dos centros de gravidade da armadura não afeta os esforços no concreto, uma vez que a linha de pressão no concreto permanece invariável.

Deste modo podemos comprovar na esquematização o teorema anterior.



**FIGURA 6.9** Transformação linear da linha do centro de gravidade da armadura

Em uma viga contínua a linha do centro de gravidade da armadura, pode ser transformada linearmente sem mudar a posição da linha de pressão no concreto.



**FIGURA 6.10 Momentos isostáticos de protensão**

Supondo que a força de protensão seja a mesma em ambos os traçados.

$$M_i = 1^{\text{a}} \text{ linha} \quad y = y(x) \quad (6.13)$$

$$M_i = 2^{\text{a}} \text{ linha} \quad y = y(x) + k(x) + C \quad (6.14)$$

Momento isostático =  $P e_p$

A derivada segunda dos momentos isostáticos são os carregamentos equivalentes à protensão, mas  $y'' = \bar{y}''$ , portanto os carregamentos são iguais, logo os momentos resultantes devidos a protensão são iguais.

$$M_{1^{\text{a}} \text{ linha}} = M_{2^{\text{a}} \text{ linha}} \quad (6.15)$$

Portanto a linha de pressão no concreto é a mesma.

## 6.6 TRAÇADO PARABÓLICO AUTOMÁTICO DO CABO DE PROTENSÃO

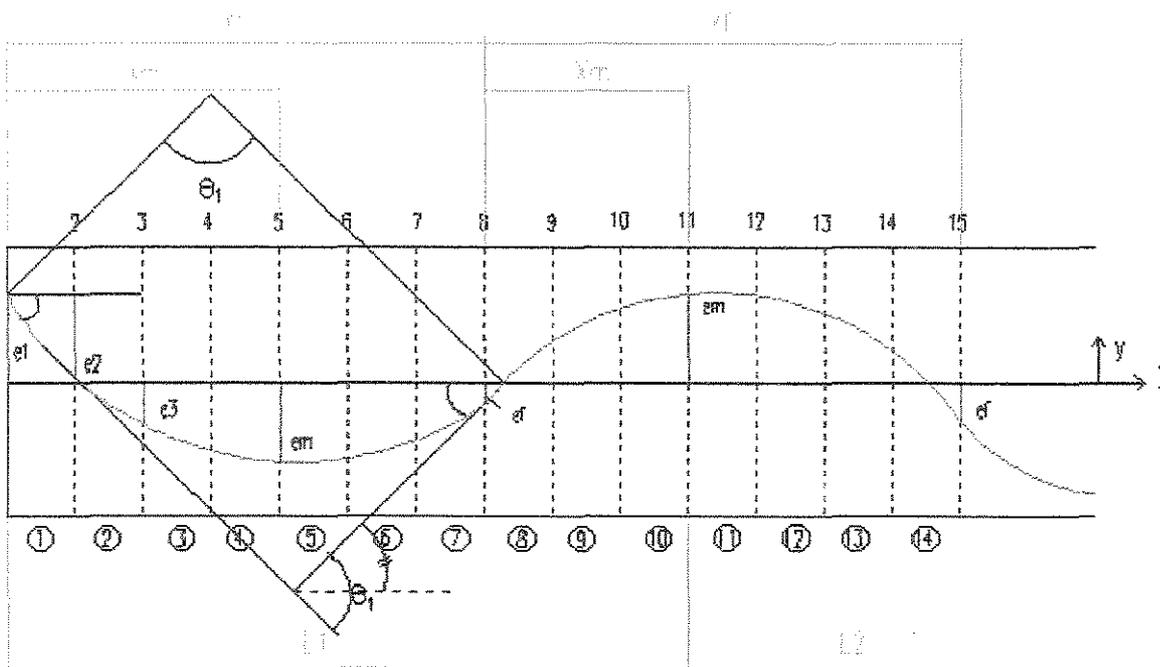


FIGURA 6.11 Traçado do cabo para uma viga contínua

Para a construção do traçado parabólico necessita-se de três pontos, sendo eles: o ponto inicial, onde começa o cabo, ou seja, no início da peça cuja extremidade é  $e_i$ , o ponto intermediário  $e_m$ , e o ponto de inflexão da curva  $e_f$ . Com estes três pontos é possível calcular automaticamente os demais pontos da curva.

Iniciando-se a formulação do traçado, adota-se uma equação do 2º grau, denominando o traçado como  $Y$ , deste modo:

$$Y = ax^2 + bx + c \quad (6.16)$$

Impondo as condições de contorno para o nó inicial e nó final da curva tem-se:

$$p/ x = 0 \rightarrow Y = e_i \rightarrow e_i = c \quad (6.17)$$

$$p/ x = x_f \rightarrow Y = e_f \rightarrow e_f = ax_f^2 + bx_f + e_i \quad (6.18)$$

Montando a expressão em função das excentricidades obtém-se:

$$e_f - e_i = ax_f^2 + bx_f \quad (6.19)$$

Impondo as condições de contorno para o nó intermediário tem-se

$$p/x = x_m \rightarrow Y = e_m = ax_m^2 + bx_m + e_i \quad (6.20)$$

Expressando-se em função das excentricidades obtém-se

$$e_m - e_i = ax_m^2 + bx_m \quad (6.21)$$

Deixando as expressões ( 6.19 ) e ( 6.21 ) em função da variável b, tem-se

$$\frac{e_f - e_i}{x_f} - ax_f = b \quad (6.22)$$

e

$$\frac{e_m - e_i}{x_m} - ax_m = b \quad (6.23)$$

Da igualdade das equações temos:

$$\frac{e_f - e_i}{x_f} - ax_f = \frac{e_m - e_i}{x_m} - ax_m \quad (6.24)$$

Ou de forma mais simplificada:

$$\frac{e_f - e_i}{x_f} - \frac{e_m - e_i}{x_m} = (x_f - x_m)a \quad (6.25)$$

Com a expressão anterior obtemos a expressão da variável a :

$$\boxed{\frac{(e_f - e_i)x_m - (e_m - e_i)x_f}{(x_f - x_m)x_f x_m} = a} \quad (6.26)$$

Como  $x_f \neq x_m$  e  $(x_f - x_m) \neq 0$ , mais a expressão (6.26) pode-se utilizar da equação (6.21) e encontrar a expressão da variável **b**, desta forma:

$$b = \frac{e_f - e_i}{x_f} - \frac{(e_f - e_i)x_m - (e_m - e_i)x_f}{(x_f - x_m)x_m} = \frac{(e_f - e_i)[(x_f - x_m)x_m - x_f x_m] - (e_m - e_i)x_f^2}{(x_f - x_m)x_f x_m} \quad (6.27)$$

Resultando em:

$$b = \frac{-(e_f - e_i)x_m^2 - (e_m - e_i)x_f^2}{(x_f - x_m)x_f x_m} \quad (6.28)$$

Encontradas as variáveis a, b e c podemos montar definitivamente a expressão parabólica, obtendo-se assim:

$$Y = \frac{(e_f - e_i)x_m - (e_m - e_i)x_f}{(x_f - x_m)x_f x_m} x^2 - \frac{(e_f - e_i)x_m^2 + (e_m - e_i)x_f^2}{(x_f - x_m)x_f x_m} + e_i \quad (6.29)$$

Ou de forma mais resumida:

$$Y = \frac{1}{(x_f - x_m)x_f x_m} \left\{ \begin{aligned} & [(e_f - e_i)x_m - (e_m - e_i)x_f] x^2 - \\ & [(e_f - e_i)x_m^2 + (e_m - e_i)x_f^2] x + (x_f - x_m)x_f x_m \end{aligned} \right\} \quad (6.30)$$

Para termos certeza que a expressão está correta segue o exemplo:

Supondo :

$$x_m = \frac{l_1}{2} \text{ e } x_f = l_1 \quad (6.31)$$

e

$$e_i = e_m = e_f = e \quad (6.32)$$

temos:

$$Y = \frac{1}{\frac{l_1}{2} \frac{l_1}{2}} \left\{ [0 - 0]x^2 - [0 + 0]x + \frac{l_1}{2} \frac{l_1}{2} e \right\} = e \quad (6.33)$$

Resultando em  $Y = e$

Desta forma, como esperado, a expressão esta correta.

Cada excentricidade corresponde a um nó da rede de elementos finitos.

$$Y = \frac{1}{(x_f - x_m)x_f x_m} \left[ (e_f - e_i)(x - x_m)xx_m - (e_m - e_i)(x - x_f)xx_f \right] + e_i \quad (6.34)$$

Derivando a expressão 2 vezes temos

$$\frac{dY^2}{dx^2} = \frac{2}{(x_f - x_m)x_f x_m} \left\{ [(e_f - e_i)x_m - (e_m - e_i)x_f] \right\} \quad (6.35)$$

Na qual resulta para o valor positivo a parábola com concavidade para cima.

$$\text{Se } \frac{dy^2}{dx^2} > 0 \Rightarrow \quad \text{[Diagrama de uma parábola com concavidade para cima.]}$$

Caso o valor da expressão resulte negativo obtém-se a parábola com concavidade para baixo.

Se $\frac{dY^2}{dx^2} < 0 \Rightarrow$	
--	---

O sinal negativo da derivada segunda indica que a carga equivalente à protensão é dirigida para baixo e, portanto, na convenção de sinais aqui adotada é negativa.

Dê acordo com LIN [ 17 ] a carga equivalente à protensão dada por :

$$q = \frac{8Fh}{l^2} \text{ onde:}$$

q = Carga equivalente;

F = Força de protensão aplicada no cabo;

h = distância da parte côncava ou convexa da parábola até o centro de gravidade da viga.

l = Projeção horizontal do comprimento do segmento de cabo.

A equação do cabo permitirá também, o cálculo do ângulo de curvatura do cabo necessário para avaliar as perdas por atrito.

## **7. PERDAS DE PROTENSÃO**

### **7.1 INTRODUÇÃO**

Definido o traçado do cabo de protensão, o próximo passo é calcular as perdas de protensão. Para isso devemos considerar as perdas imediatas (acomodação das ancoragens e perdas por atrito) e as perdas progressivas ( retração e deformação lenta ).

As perdas de protensão desempenham papel importantíssimo nas peças de concreto protendido, uma vez que o seu valor pode atingir valores altos. Segundo PFEIL [ 18 ] Dependendo da peça a ser protendida, este valor pode atingir valores acima de 30 % da força de protensão inicialmente aplicada na peça, sendo que na maioria dos casos estes valores ficam na ordem de 20% a 30% .

Por estes motivos inseriu-se este assunto e implementou-se tal rotina no programa GRPROT.

### **7.2 PERDAS IMEDIATAS**

São perdas que ocorrem logo após o estiramento dos cabos. Esta perdas são divididas em perdas por atrito e perdas por acomodação das ancoragens.

#### **7.2.1 PERDAS POR ATRITO**

Nas peças de concreto protendido utilizando aderência posterior a bainha apresenta quase sempre desenvolvimento curvo e sinuosidade involuntárias, devido a isso surge o inevitável atrito entre o aço de protensão e a bainha.

Esta perda pode ser considerada como a soma de duas parcelas: uma devida à curvatura do cabo e a outra devida ao comprimento do cabo. Mesmo em cabos retos, este atrito deve ser considerado, pois não se consegue eliminar as pequenas ondulações que o conjunto bainha-cabo sofre.

Em função das forças de inflexão e do coeficiente de atrito “ $\mu$ ”, a perda da força de protensão devida ao atrito pode ser quantificada ao longo do cabo através da equação indicada na NBR 7197, item 8.5.1.2, denominada fórmula de Euler Coulomb.

$$P_0(x) = P_0 e^{-(\mu\alpha + kx)} \quad (7.1)$$

onde

$P_0$  = força de protensão na seção da abcissa  $x=0$ ; no tempo  $t=0$ ;

$P_0(x)$  = força de protensão na seção da abcissa  $x$ , no tempo  $t=0$ ;

$\mu$  = coeficiente de atrito entre o aço e a bainha;

$\alpha$  = somatório dos ângulos de inflexão do cabo, não considerando a inclinação  $\alpha_0$ ;

$k = \mu\gamma$ , sendo  $\gamma$  = coef. de perdas por metro, provocadas por curvaturas não intencionais. Varia com o diâmetro da bainha.

Na falta de dados experimentais  $\mu$  pode ser estimado como segue:

$\mu = 0,50$  entre cabo e concreto sem bainha;

$\mu = 0,30$  entre barras ou fios com mossas ou saliências e bainha metálica;

$\mu = 0,20$  entre fios lisos paralelos ou traçados e bainha metálica;

$\mu = 0,10$  entre fios lisos paralelos ou trançados e bainha metálica lubrificada.

Quando elementos dentro da mesma bainha são protendidos individualmente, os valores de  $\mu$  acima especificados devem ser aumentados de 0,10.

O coeficiente de atrito  $\mu$  aumenta com a presença de óxido de ferro, seja nas cordoalhas, seja nas paredes da bainha.

**TABELA 7.1 Valores do coeficiente de perdas por metro, provocadas por curvaturas não intencionais.**

$\phi$ bainha(mm)	30	40	50	$\geq 60$
$\gamma$ (rad / m)	0,015	0,010	0,008	0,006
$k = \mu\gamma$	0,0015 $\mu$	0,010 $\mu$	0,008 $\mu$	0,006 $\mu$

Segundo RUDLOFF [ 20 ], embora pela equação de Euler-Coulomb o resultado teórico seja o mesmo, a força de atrito varia com a pressão unitária de contato, isto é, com raio de curvatura do cabo. Para que esta pressão radial não se torne excessiva, ocasionando a destruição da bainha e o esmagamento do concreto, é necessário que os raios de curvatura do cabo não sejam inferiores aos valores mínimos abaixo indicados. Para que os componentes do feixe entrem na ancoragem da forma mais regular possível, é necessário existir o comprimento reto “L” mínimo anterior á ancoragem também abaixo indicado.

cabo	4 $\phi$ 12,7	6 – 7 $\phi$ 12,7	12 $\phi$ 12,7	19 – 22 $\phi$ 12,7	27 – 31 $\phi$ 12,7
raio “R”	5,0m	6,0m	8,0m	11,0m	14,0m
“L”	60cm	70cm	90cm	130cm	160cm

**TABELA 7.2 Cordoalha de 7 fios =  $\phi$  1/2” (RB)**

cabo	4 $\phi$ 15,2	6 – 7 $\phi$ 15,2	12 $\phi$ 15,2	19 – 22 $\phi$ 15,2	27 – 31 $\phi$ 15,2
raio “R”	8,0m	9,0m	12,0m	16,0m	21,0m
“L”	80cm	100cm	135cm	190cm	235cm

**TABELA 7.3 Cordoalha de 7 fios  $\phi = 5/8$ ” (RB)**

RUDLOFF[ 20 ] afirma que os alongamentos medidos em obra são quase sempre menores que os teóricos porque subestimamos o coeficiente  $\mu$ , e principalmente  $k=\mu\alpha$  das curvaturas não intencionais. O fato merece atenção a fim de que a estrutura não fique com falta de protensão.

### 7.2.1.1 CÁLCULO DO ÂNGULO $\alpha$

O ângulo é calculado conhecendo a função que descreve a equação do cabo nº (6.30).

derivando essa função em relação a  $x$  obtém-se a inclinação da curva em cada ponto. Por exemplo na figura 7.1 as retas tangentes à curva que representa o cabo nas seções  $j$  e  $j-1$  formam o ângulo  $\alpha$  que mede a curvatura do cabo entre essas duas seções.

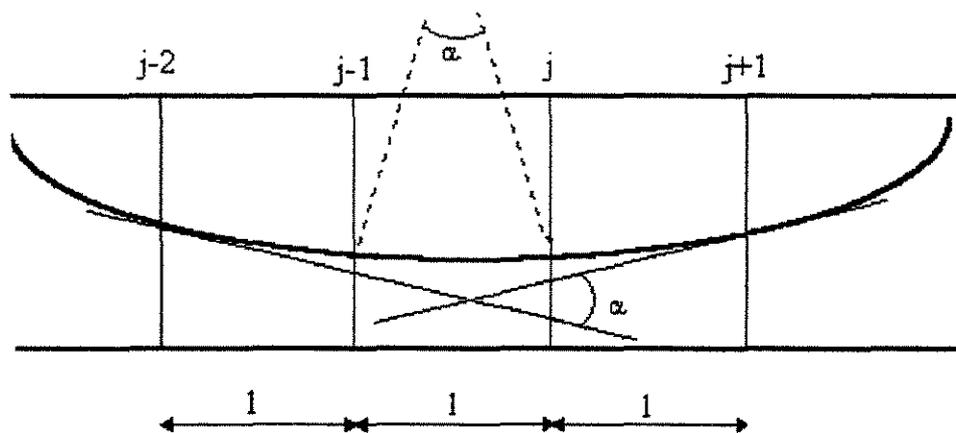


FIGURA 7.1 Ângulo de curvatura do cabo de protensão

### 7.2.2 PERDAS POR ACOMODAÇÃO DAS ANCORAGENS

Definidos os valores da força de protensão levando em conta as perdas por atrito, podemos calcular as perdas por acomodação das ancoragens. Segundo RUDLOFF[ 20 ], a acomodação das cunhas nas ancoragem (cravação) provoca, dependendo do sistema uma perda de 4 a 5mm no alongamento inicial ao qual se chegou antes da cravação.

Como a força gerada pelo atrito tem sempre sentido oposto ao do movimento do cabo, por ocasião do recuo acima, ela irá se opor ao mesmo, dando origem a um atrito negativo.

Para a força de protensão atribuída a um segmento se considera a média das forças de protensão que o cabo tem nos extremos dos segmentos correspondentes.

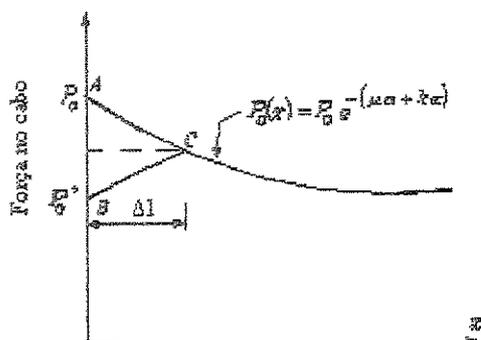


FIGURA 7.2 - Perdas devido a acomodação das ancoragens

Quando se produz o deslizamento da cunha na ancoragem de valor  $\Delta l$ , há uma perda da força de protensão de valor decrescente devido a ação do atrito no sentido inverso, como indica a figura 7.2. Para obtenção da curva CB que proporciona a força da protensão considerando o efeito do deslizamento temos as duas hipóteses:

1. As curvas AC e BC são simétricas respeitando o eixo x (isto significa que o atrito atua com igual intensidade frente ao alongamento e encurtamento).
2. O valor do deslizamento  $\Delta l$  é proporcional a área ABC da figura 7.2

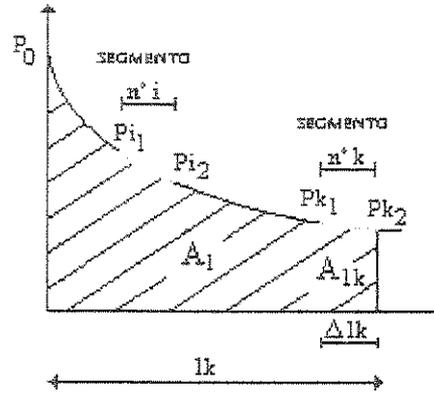
$$\Delta l = \frac{\text{Area}(ABC)}{E_p A_p} \quad (7.2)$$

$E_p$  = Módulo de elasticidade do aço de protensão;

$A_p$  = Área do cabo de protensão.

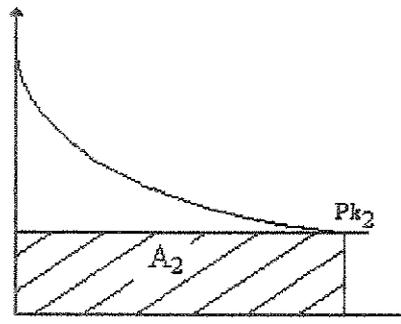
Utilizando tais hipóteses pode-se obter o ponto B, a partir do qual a penetração da cunha deixa de influir na força de protensão. Para isso se comparam numericamente ambos os membros da expressão (7.2), avançando segmento por segmento, partindo do alongamento extremo.

a)



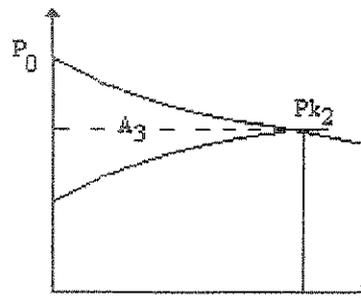
$$A_1 = \sum_{i=1}^{i=k} A_{1i} = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{P_{i1} + P_{i2}}{2} \Delta l_i \quad (7.3)$$

b)



$$A_2 = P_{k2} \sum_{i=1}^{i=k} \Delta l_i = P_{k2} l_k \quad (7.4)$$

c)



$$A_3 = 2(A_1 - A_2) \quad (7.5)$$

FIGURA 7.3 Calculo da área  $A_3$  proporcional ao valor da penetração da cunha.

Para um determinado ponto, correspondente ao extremo final do segmento, ter-se-á:

- a) Se  $\Delta l > A_3/E_p A_p$  ainda não foi alcançado o ponto B;
- b) Se  $\Delta l = A_3/E_p A_p$  foi alcançado exatamente o ponto B;
- c) Se  $\Delta l < A_3/E_p A_p$  foi superado o ponto B.

- O valor da área  $A_3$  se obtém como indica a figura (7.3)
- O ponto C se obtém por interpolação quando se passa consecutivamente do item a ao item c .
- uma vez obtido o ponto C, pode-se calcular a força de protensão:

$$P_c = P_0^* = P(l_a) = P_0 e^{-(\mu\alpha + k l_a)} \quad (7.6)$$

As forças nos pontos da curva CB calcula se desta forma:

$$P_i^1 = P_i - 2\Delta P_i = P_i - 2(P_i - P_0^*) = 2P_0^* - P_i \quad (7.7)$$

Este procedimento pode ser extrapolado no caso extremo em que o deslizamento da cunha afete inclusive a ancoragem oposta.

### 7.3 PERDAS PROGRESSIVAS

As perdas progressiva são perdas que se processam ao longo de vários anos, praticamente se estabilizam num período de 20 a 30 anos PFEIL[18]. Estas perdas estão divididas em perdas por fluência do concreto, e perdas por retração do concreto.

### 7.3.1 PERDAS POR FLUÊNCIA DO CONCRETO

A fluência ou deformação lenta do concreto é o encurtamento do mesmo devido à ação de forças permanentemente aplicadas. Segundo a teoria de Freyssinet, “os esforços de compressão aos quais o concreto está submetido, acarretam uma diminuição dos seus poros, indo a água que neles se encontrava encher os poros de maior dimensão que se achavam vazios, ocasionando um aumento da umidade relativa do concreto, e uma conseqüente diminuição das tensões capilares. Com o tempo, a água em excesso irá evaporar, criando um novo aumento nas tensões capilares originando esforços de compressão sobre o esqueleto sólido do concreto, dando lugar à deformação lenta”.

Conforme a NBR 7197 [ 8 ], a deformação por fluência do concreto ( $\epsilon_{cc}$ ) compõe-se de duas partes, uma rápida e outra lenta. A fluência rápida ( $\epsilon_{cca}$ ) é irreversível e ocorre durante as primeiras 24 horas após a aplicação da carga que a originou. A fluência lenta é por sua vez composta por duas outras parcelas: a deformação lenta irreversível ( $\epsilon_{cef}$ ) e a deformação lenta reversível ( $\epsilon_{ccd}$ ).

$$\epsilon_{cc} = \epsilon_{cca} + \epsilon_{cef} + \epsilon_{ccd} \quad (7.8)$$

$$\epsilon_{c, total} = \epsilon_c + \epsilon_{cc} = \epsilon_c (1 + \phi) \quad (7.9)$$

$$\phi = \phi_a + \phi_f + \phi_d \quad (7.10)$$

onde:

$\phi_a$  = coeficiente de fluência rápida

$\phi_f$  = coeficiente de deformação lenta irreversível

$\phi_d$  = coeficiente de deformação lenta reversível

### 7.3.2 PERDAS POR RETRAÇÃO DO CONCRETO

Retração é o encurtamento do concreto devido à evaporação da água à hidratação do cimento. A retração depende da umidade relativa do ambiente, da consistência do concreto no lançamento e da espessura fictícia da peça.

Segundo Freyssinet ( teoria termodinâmica do concreto ), esta propriedade deve-se às tensões capilares da água no interior dos poros do concreto que, perdendo parte desta água, dá lugar a fenômenos de capilaridade, originando esforços que equivalem a uma pressão aplicada sobre o esqueleto sólido do concreto, do exterior para o interior, ocasionando, em consequência, a diminuição do volume. Esse processo só termina quando for alcançado um estado de equilíbrio na água interporos do concreto, dependendo do grau de umidade do ar e do concreto.

Segundo a NBR 7197 [ 8 ], o valor da retração do concreto depende de:

- a) umidade relativa do ambiente;
- b) consistência do concreto no lançamento;
- c) espessura fictícia da peça.

O valor da retração entre os instantes  $t_0$  e  $t$  é dado pela expressão:

$$\varepsilon_{cs}(t, t_0) = \varepsilon_{cs\infty} [\beta_s(t) - \beta(t_0)] \quad (7.11)$$

Onde:

$\varepsilon_{cs\infty} = \varepsilon_{1s} \varepsilon_{2s}$  = valor final da retração, podendo ser obtido diretamente pela Tabela (7.4);

$\varepsilon_{1s}$  = coeficiente dependente da umidade relativa do ambiente e da consistência do concreto, podendo ser obtido pela expressão:

$$10^4 \cdot \varepsilon_{1s} = -6,16 - \frac{U}{484} + \frac{U^2}{1590} \text{ para abatimento de } 5-9 \text{ e } U \leq 90 \quad (7.12)$$

Os valores para  $U \leq 90$  e abatimento 0-4 são 25% menores e para abatimento 10-15 são 25% maiores.

$\varepsilon_{2s}$  = coeficiente dependente da espessura fictícia da peça;

$\beta_s(t)$  ou  $\beta_s(t_0)$  = coeficiente relativo á retração, no instante  $t$  ou  $t_0$  ( Figura 4) NBR 7197 [ 8 ];

$t$  = idade fictícia do concreto no instante considerado, em dias

$t_0$  = idade fictícia do concreto no instante em que o efeito da retração na peça começa a ser considerado, em dias.

**TABELA 7.4-Valores particulares para estimativas preliminares ou para obras correntes realizadas com concreto plástico (NBR 7197)**

UMIDADE		U=40%		U=55%		U=75%		U=90%	
RELAÇÃO GEOMÉTRICA									
$\frac{2A_c \text{ cm}}{U}$		20	60	20	60	20	60	20	60
FLUÊNCIA $\phi_\infty$	$t_0 = 5$	4,4	3,9	3,8	3,3	3,0	2,6	2,3	2,1
	$t_0 = 30$	3,0	2,9	2,6	2,5	2,0	2,0	1,6	1,6
	$t_0 = 60$	3,0	2,6	2,2	2,2	1,7	1,8	1,4	1,4
RETRAÇÃO $\varepsilon_{CS\infty}$	$t_0 = 5$	-0,44	-0,39	-0,37	-0,33	-0,23	-0,21	-0,10	-0,09
	$t_0 = 30$	-0,37	-0,38	-0,31	-0,31	-0,20	-0,20	-0,09	-0,09
	$t_0 = 60$	-0,32	-0,36	-0,27	-0,30	-0,17	-0,19	-0,08	-0,09

Nota:  $t_0$ , em dias

### 7.3.3 CÁLCULO PRÁTICO DA FLUÊNCIA E RETRAÇÃO DO CONCRETO

Para o cálculo da fluência e da retração, pode-se utilizar a expressão do item 8.5.2 da NBR 7197 [ 8 ], ou segundo RUDLOFF [ 22 ] a seguinte expressão :

$$\Delta\sigma_p^{cs} = \frac{\left( \frac{N_p}{A_c} + \frac{M_{pg}}{W_{cp}} \right) \frac{\varphi_{\infty}}{E_c} + \varepsilon_{c\infty}}{1 + k(1 + 0,5\varphi_{\infty})} E_p \quad (6.13)$$

Nesta expressão:

$N_p$  = componente normal de P na seção;

$E_c = E_{c28sec}$  = módulo de deformação do concreto;

$\frac{M_{pg}}{W_{cp}}$  = tensão normal, sendo  $M_{pg}$  momento da protensão  $P_{\infty}$  e da carga permanente g, na

seção considerada;

$\varphi_{\infty}$  = coeficiente final de fluência;

$\varepsilon_{c\infty}$  = retração final;

$E_p$  = módulo de deformação do aço de protensão;

k = coeficiente de rigidez da seção considerada

$$k = \alpha A_p \left( \frac{1}{A_c} + \frac{e}{W_{cp}} \right) \quad (7.14)$$

sendo:

$$\alpha = \frac{E_p}{E_c};$$

$A_c$  = seção transversal da armadura de protensão;

$A_p$  = seção transversal da armadura de protensão;

$e$  = excentricidade do cabo na seção considerada;

$W_{cp}$  = módulo de resistência da seção, na altura do cabo.

### 7.3.3.1 OBSERVAÇÕES SEGUNDO RUDLOFF [22]

1. A expressão de  $\Delta\sigma_p^{cs}$  (7.14) foi obtida a partir da deformação elástica e da deformação plástica, bem como da coerência de deformações entre o aço e o concreto.

2.  $N_p / A_c$  e  $M_{pg} / W_{cp}$  são perdas de tensão normal de compressão, portanto equivalem a tensões de tração e tem por isso sinal positivo.

3. Para estimativas preliminares de obras correntes realizadas com concreto plástico, os valores de  $\phi_\infty$  e  $\varepsilon_{cs}$  podem ser tirados da tabela 6.1.

4. Sendo necessário conhecer  $\phi$  ou  $\varepsilon_{cs}$  entre os tempos 0 e t, basta seguir os itens 7.1.3 e 7.2.2 da NBR 7197.

## 8. EXEMPLOS DE LAJES E VIGA CONTÍNUA PROTENDIDA

### 8.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo forneceremos exemplos de lajes protendidas biapoiada e contínua e exemplo de uma viga contínua, tendo como arquivo de saída: a força de protensão no estado limite de utilização, a força de protensão para o estado limite último, a força adotada, o traçado do fuso limite, traçado do cabo de protensão, perdas imediatas (por atrito e acomodação das ancoragens) , as perdas progressivas (retração e deformação lenta), e finalmente a carga equivalente da protensão.

Como o programa calcula a laje como uma grelha equivalente, simulando-a como várias vigas em seu plano horizontal adotam-se faixas de trabalho de um metro, visto que para dimensionamento de faixas de um metro obtêm-se valores muito próximos dos valores reais de cálculo.

### 8.2 EXEMPLO 1 - LAJE APOIADA NAS QUATRO BORDAS

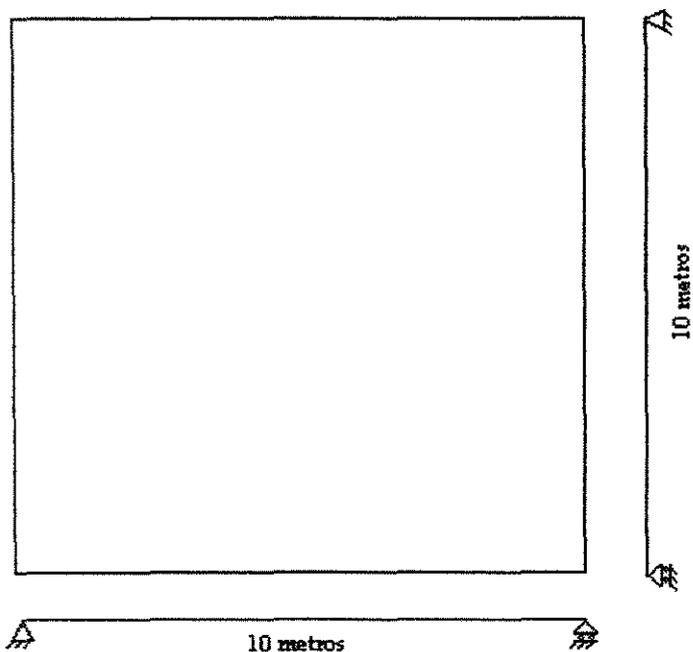
Neste exemplo dimensiona-se uma laje isostática apoiada nas quatro bordas. A laje é maciça com dimensões de ( 10m x 10m x 0,27m ). Como carregamento adota-se seu peso próprio e uma sobrecarga de 250 kgf / m<sup>2</sup>, deste modo:

$$\text{Peso Próprio} = 0,27\text{m} \times 2,5 \text{ tf} / \text{m}^3 = 0,675 \text{ tf} / \text{m}^2$$

$$\text{Sobrecarga} = \dots\dots\dots = 0,250 \text{ tf} / \text{m}^2$$

---

$$\text{Peso total} = \dots\dots\dots = 0,925 \text{ tf} / \text{m}^2$$



**FIGURA 8.1 Laje apoiada nas quatro bordas**

Aa laje apresentada acima está dividida em 22 vigas, tendo 121 nós e 220 elementos. Neste exemplo utilizaremos protensão limitada e a armadura será pós-tensionada. O aço adotado será o CP 175 RN, área de 1 cabo =  $3,86\text{cm}^2$  -  $4\phi 12,7\text{mm}$ - sistema Freyssinet .

Para não listarmos todas as faixas de laje no arquivo de saída, pois deste modo o arquivo ficará muito grande, listaremos somente a faixa em que se encontra o momento máximo da laje, deste modo:

**CALCULO DE GRELHA COM ELEMENTOS FINITOS**  
 \*\*\*\*\*

NUMERO DE BARRAS= 22  
 NUMERO TOTAL DE NOS=121  
 NUMERO DE ELEMENTOS=220  
 NUMERO DE NOS COM RESTRICAO= 40

DESCRICAO DAS BARRAS NA ESTRUTURA

\*\*\*\*\*

DADOS REFERENTE A BARRA NUMERO 6

NUM ELEM	NO INI	NO FIN	X INI	Y INI	Z INI	X FIN	Y FIN	Z FIN	TAM1	SENX	SENY	SENZ
51	56	57	.00	.00	5.00	1.00	.00	5.00	1.00	1.00	.00	.00
52	57	58	1.00	.00	5.00	2.00	.00	5.00	1.00	1.00	.00	.00
53	58	59	2.00	.00	5.00	3.00	.00	5.00	1.00	1.00	.00	.00
54	59	60	3.00	.00	5.00	4.00	.00	5.00	1.00	1.00	.00	.00
55	60	61	4.00	.00	5.00	5.00	.00	5.00	1.00	1.00	.00	.00
56	61	62	5.00	.00	5.00	6.00	.00	5.00	1.00	1.00	.00	.00
57	62	64	7.00	.00	5.00	8.00	.00	5.00	1.00	1.00	.00	.00
59	64	65	8.00	.00	5.00	9.00	.00	5.00	1.00	1.00	.00	.00
60	65	66	9.00	.00	5.00	10.00	.00	5.00	1.00	1.00	.00	.00

PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

\*\*\*\*\*

MATERIAL	POISSON	ELASTICIDADE	PESO ESPECIFICO	AREA	INERCIA
1	.1800	20000000.000	.000	.270	.001640

DESCRICAO DOS CARREGAMENTOS NA ESTRUTURA

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\* CARREGAMENTO REFERENTE A BARRA NUMERO 6

NUM ELEM	NO INI ELEM	NO FIN ELEM	CARGAY NI	CARGAY NF	CARGAZ NI	CARGAZ NF
51	56	57	-.46	-.46	.00	.00
52	57	58	-.46	-.46	.00	.00
53	58	59	-.46	-.46	.00	.00
54	59	60	-.46	-.46	.00	.00
55	60	61	-.46	-.46	.00	.00
56	61	62	-.46	-.46	.00	.00
57	62	63	-.46	-.46	.00	.00
58	63	64	-.46	-.46	.00	.00
59	64	65	-.46	-.46	.00	.00
60	65	66	-.46	-.46	.00	.00

RESULTADOS DOS DESLOCAMENTOS NODAIS

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\* DESLOCAMENTOS NODAIS NA BARRA 6 \*\*\*\*\*

NO	U	V	W	DX	DY	DZ
56	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	-.000027
57	.000000	-.000027	.000000	.000000	.000000	-.000025
58	.000000	-.000050	.000000	.000000	.000000	-.000021
59	.000000	-.000068	.000000	.000000	.000000	-.000015
60	.000000	-.000080	.000000	.000000	.000000	-.000008
61	.000000	-.000083	.000000	.000000	.000000	.000000
62	.000000	-.000080	.000000	.000000	.000000	.000008
63	.000000	-.000068	.000000	.000000	.000000	.000015
64	.000000	-.000050	.000000	.000000	.000000	.000021
65	.000000	-.000026	.000000	.000000	.000000	.000025
66	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000027

ESFORCOS NODAIS NAS BARRAS

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\* ESFORCOS NODAIS NA BARRA 6 \*\*\*\*\*

NO	NX	NY	NZ	MX	MY	MZ
56	.000	-1.523	.000	.000	.000	.000
57	.000	-1.292	.000	.000	.000	1.408
58	.000	-.886	.000	.000	.000	2.410
59	.000	-.539	.000	.000	.000	3.065
60	.000	-.248	.000	.000	.000	3.428
61	.000	.000	.000	.000	.000	3.544
62	.000	.231	.000	.000	.000	3.428
63	.000	.479	.000	.000	.000	3.064
64	.000	.770	.000	.000	.000	2.410
65	.000	1.118	.000	.000	.000	1.408
66	.000	1.523	.000	.000	.000	.000

##### MOMENTOS REFERENTE A VIGA NUMERO 6 #####

MOMENTO PERMANENTE = 2.5868 TF\*M  
MOMENTO ACIDENTAL 1 = .9568 TF\*M  
MOMENTO ACIDENTAL 2 = .0000 TF\*M

\*\* COMBINACAO QUASE PERMANENTE-ESTADO LIMITE DE DESCOMPRESSAO \*\*

FORCA DE PROTENSAO = 17.25 TF  
TENSAO NA BORDA SUPERIOR = -127.74 TF/M2  
LIMITANTE DA BORDA SUPERIOR = -2450.00 TF/M2

\*\* COMBINACAO FREQUENTE DE ACO-ESTADO LIMITE DE FORMACAO DE FISSURAS \*\*

FORCA DE PROTENSAO FINAL = 2.24 TF  
TENSAO NA BORDA SUPERIOR = -280.59 TF/M2  
LIMITANTE DA BORDA SUPERIOR = -2450.00 TF/M2

\*\*\*\*\* VALORES PARA ESTADO LIMITE ULTIMO \*\*\*\*\*

\*\*\* VALORES PARA A INTERACAO NUMERO =3

AREA DE ACO1	AREA DE ACO2	AREA ESCOLHIDA
102.3335	2.1624	2.1624

LINHA NEUTRA	EP CALCULADO	EP ESCOLHIDO
1.2416	.0642	.0642

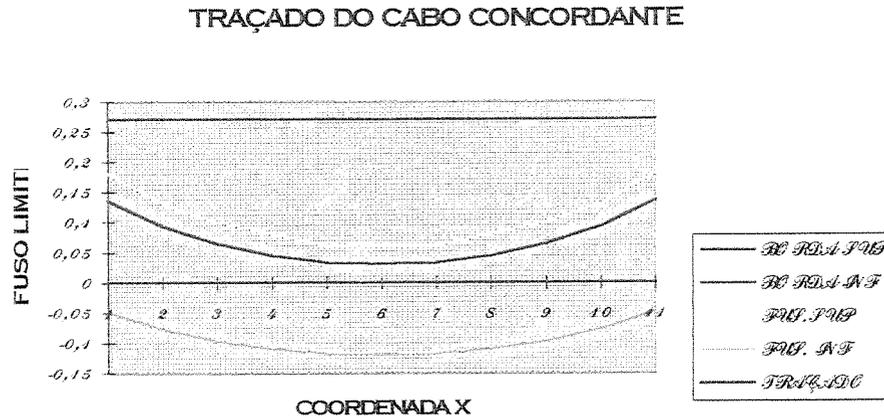
DEFORMACAO PRE-ALONGAMENTO (P/1000)	DEFORMACAO COMO CONCRETO ARMADO (P/1000)
5.4134	4.9362

TENSAO ADOTADA(KGF/CM2 )	TENSAO REAL(KGF/C M2)
9761.1510	9761.4040

PROTENSAO INICIAL( TF )	PROTENSAO INFINITA ( TF )
29.2654	23.4123



Deste modo podemos representar o traçado do cabo de protensão, respeitando as tensões impostas por Norma, bem como o recobrimento da peça.



**FIGURA 8.2 - Traçado do Cabo Concordante respeitando o Fuso Limite**

CABO	PROT. INICIAL	CFAT1	CFAT2
6	29.265	.300	.003

EXCENTRICIDADES DO CABO 6			FORÇAS DE PROTENSAO
NOS	EXC CABO	FORÇA DE PROTENSAO	
56	-.135	29.265	
57	-.097	29.104	
58	-.067	28.943	
59	-.046	28.783	
60	-.033	28.624	
61	-.029	28.466	
62	-.033	28.309	
63	-.046	28.152	
64	-.067	27.997	
65	-.097	27.842	
66	-.135	27.688	

PERDAS DE PROTENSAO DEVIDO ACOMODACAO DA ANCORAGEM

NO	FORCA FINAL
56	28.94
57	29.10
58	28.94
59	28.78
60	28.62
61	28.47
62	28.31
63	28.15
64	28.00
65	27.84
66	27.69

PERDAS DEVIDO A FLUENCIA E RETRACAO DO CONCRETO

NO	FORCA FINAL
56	26.59
57	27.05
58	27.12
59	26.87
60	26.63
61	26.44
62	26.31
63	26.24
64	26.19
65	25.82
66	25.36

ESFORCOS NA EXTREMIDADE DA BARRA DEVIDOS  
AO CABO NUMERO= 6

NO INICIAL	NO FINAL
56	66

NORMAL	CORTANTE	MOMENTO	NORMAL	CORTANTE	MOMENTO
28.92	1.22	-.13	-27.69	.00	-.14

### CARGA DA PROTENSAO NO ELEMENTO

ELEMENTO	NO1	NO2	PY1	PY2
51	56	57	-.248	-.248
52	57	58	-.248	-.248
53	58	59	-.248	-.248
54	59	60	-.248	-.248
55	60	61	-.248	-.248
56	61	62	-.248	-.248
57	62	63	-.248	-.248
58	63	64	-.248	-.248
59	64	65	-.248	-.248
60	65	66	-.248	-.248

De forma resumida considerando todas as barras temos:

**Tabela 8.1 Forças de Protensão e Perdas de Protensão na Viga**

VIGA	FORÇA DE PROTENSÃO (tf)			PERDAS DE PROTENSÃO (tf)			TOTAL
	$P_{\infty \text{utilização}}$	$P_{\infty \text{último}}$	$1,2 P_{\infty}$ (assumido)	atrito	ancora gem	retração e fluência	
1=11=12=22	0,44	0,47	0,59	0,02	0,53	0,00	0,04
2=10=13=21	5,25	6,93	8,67	0,47	0,10	1,94	6,15
3 = 9=14=20	10,07	13,42	16,77	0,90	0,18	2,04	13,65
4 = 8=15=19	13,92	18,75	23,44	1,26	0,26	2,21	19,71
5 = 7=16=18	16,39	22,21	27,77	1,50	0,31	2,32	23,64
6=17	17,25	23,41	29,26	1,59	0,33	2,35	24,99
MEDIA	10,55	14,20	17,75	0,96	0,29	1,81	14,70

Deste modo tendo como base a média das forças podemos concluir que a perda total em todas as vigas da grelha equivale a 17,18 % e não a 20% como inicialmente foi adotado.

### 8.3 - EXEMPLO 2 - LAJE CONTÍNUA SEM VIGAS DE BORDA (LAJE COGUMELO)

Neste exemplo dimensiona-se uma laje contínua sem vigas de borda, ou seja ( laje cogumelo ) laje apoiada somente em pilares . A laje é maciça com dimensões de ( 24m x 24m x 0,22m ). Como carregamento adota-se seu peso próprio e uma sobrecarga de 300 kgf / m<sup>2</sup>, deste modo:

$$\text{Peso Próprio} = 0,22\text{m} \times 2,5 \text{ tf} / \text{m}^3 = 0,550 \text{ tf} / \text{m}^2$$

$$\text{Sobrecarga} = \dots\dots\dots = 0,300 \text{ tf} / \text{m}^2$$

$$\text{Peso total} = \dots\dots\dots = 0,850 \text{ tf} / \text{m}^2$$

Exemplo analisado e proposto por Brandão, Miotto e Pinheiro<sup>10</sup>.

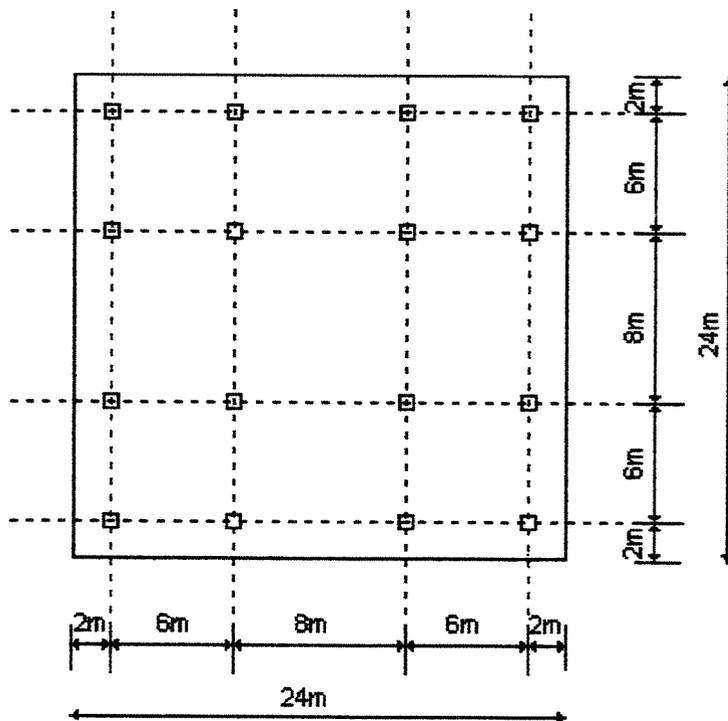
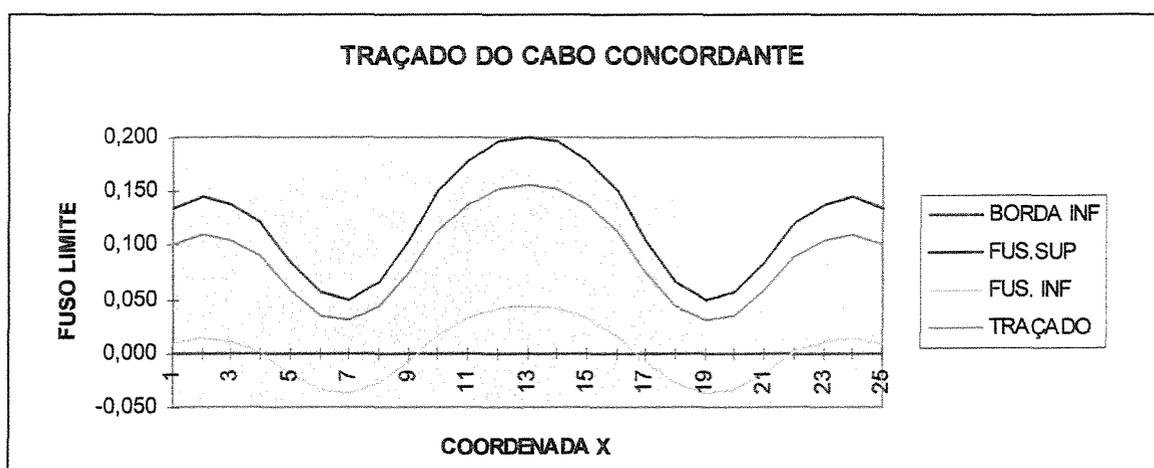


FIGURA 8.3 - Laje de Piso de um Edifício de Estacionamento

A laje apresentada acima está dividida em 26 vigas, com 169 nós e 312 elementos. Neste exemplo utilizaremos protensão limitada e a armadura será pós-tensionada. Como a laje é simétrica calculamos somente um quarto da estrutura considerando como faixa de trabalho a largura de um metro. O aço adotado será o CP 175 RN, área de 1 cabo =  $3,86\text{cm}^2 - 4\phi 12,7\text{mm}$ - sistema Freyssinet .



**FIGURA 8.4 - Traçado do Cabo Concordante respeitando o Fuso Limite**

Acima está identificado o traçado do cabo de protensão para a viga N° 9.

Neste exemplo forneceremos somente a tabela de resumo das forças de protensão bem como as perdas provenientes do traçado do cabo.

**Tabela 8.2 Forças de Protensão e Perdas de Protensão na Viga**

VIGA	FORÇA DE PROTENSÃO (tf)			PERDAS DE PROTENSÃO (tf)			TOTAL
	$P_{\infty_{utilização}}$	$P_{\infty_{último}}$	$1,2 P_{\infty}$ (assumido)	atrito	ancora gem	retração e fluência	
1	21,27	20,66	26,59	1,30	0,29	0,80	24,20
2	23,85	32,53	41,06	4,47	1,35	1,80	33,44
3	61,54	63,69	79,62	10,03	2,48	2,54	64,57
4	32,16	31,81	40,21	5,34	1,27	1,32	32,28
5	23,94	23,36	29,20	3,15	0,84	0,98	24,23
6	28,80	28,33	36,00	3,64	0,86	1,19	30,31
7	23,81	23,23	29,76	2,56	0,39	0,92	25,89
8	35,26	35,04	44,07	3,79	0,33	1,23	38,72
9	68,29	71,44	89,30	9,49	2,89	2,90	74,02
10	33,18	32,86	41,47	5,75	1,50	1,48	32,74
11	12,45	11,86	15,56	1,36	0,26	0,52	13,42
12	18,97	18,35	23,71	0,92	0,15	0,63	22,01
13	40,90	41,00	51,25	1,84	0,31	1,10	48,00
MEDIA	33,34	14,20	42,13	4,12	1,00	1,34	35,67

Deste modo tendo como base a médias das forças podemos concluir que as perda total em todas as vigas da grelha equivale a 15,53 % e não a 20% como inicialmente foi adotado.

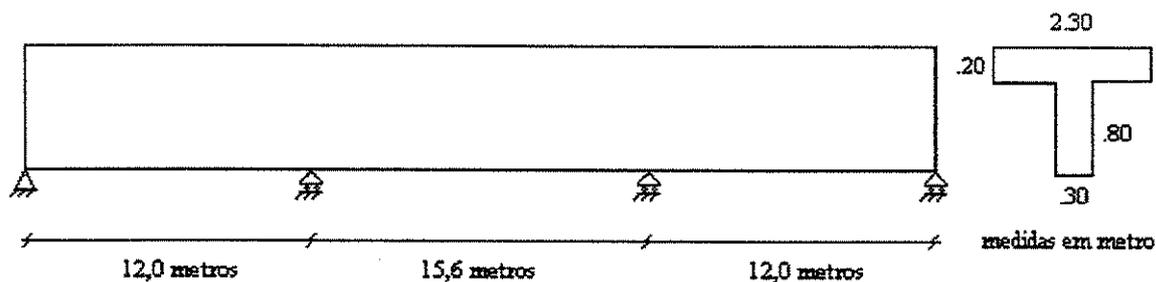
### 8.4 - EXEMPLO 3 - VIGA CONTÍNUA 4 APOIOS

Neste exemplo dimensiona-se uma viga contínua seção T com dimensões de (.30m x .80m, 2.60 x .20) . Como carregamento adota-se seu peso próprio e uma sobrecarga de 1640 kgf / m, deste modo:

$$\text{Peso Próprio} = 1,9\text{m}^2 \times 2,5 \text{ tf} / \text{m}^3 = 1,90 \text{ tf} / \text{m}$$

$$\text{Sobrecarga} = \dots\dots\dots = 1,64 \text{ tf} / \text{m}$$

$$\text{Peso total} = \dots\dots\dots = 3.54 \text{ tf} / \text{m}$$



**FIGURA 8.5 - Viga Contínua com três tramos**

A viga apresentada acima está dividida em 37 nós e 36 elementos, neste exemplo utilizaremos protensão completa considerando a peça pós-tensionada. O aço adotado será o CP 175 RN, área de 1 cabo =  $3,86\text{cm}^2$  -  $4\phi 12,7\text{mm}$ - sistema Freyssinet .

Como a viga é simétrica consideramos somente metade da viga, deste modo a saída de fica:

### CALCULO DA FORCA DE PROTENSAO PARA VIGAS

#### SECAO T

\*\*\*\*\* CALCULO UTILIZANDO PROTENSAO COMPLETA \*\*\*\*\*

#### DADOS REFERENTE A CARACTERISTICAS GEOMETRICAS DA PECA

AREA DE CONCRETO = .7400 M2  
 MOMENTO DE INERCIA = .0550 M4  
 BORDA INFERIOR = .7378 M  
 BORDA SUPERIOR = .2622 M  
 FCK = 250.0000 KGF/CM2  
 RECOBRIM DA PECA = .1000 M  
 EXCENTRICIDA PECA = .6378 M

#### ##### MOMENTOS REFERENTE A VIGA NUMERO 1 #####

MOMENTO PERMANENTE = 38.5607 TF\*M  
 MOMENTO ACIDENTAL 1 = 31.5497 TF\*M  
 MOMENTO ACIDENTAL 2 = .0000 TF\*M

**\*\* COMBINACAO QUASE PERMANENTE ESTADO LIMITE DE  
DESCOMPRESSAO \*\***

FORCA DE PROTENSAO FINAL = 65.02 TF  
TENSAO NA BORDA SUPERIOR = -119.09 TF/M2  
LIMITANTE DA BORDA SUPERIOR = -1750.00 TF/M2

**\*\* COMBINACAO FREQUENTE DE ACO ESTADO LIMITE DE FORMACAO DE  
FISSURAS \*\***

FORCA DE PROTENSAO FINAL = 68.28 TF  
TENSAO NA BORDA SUPERIOR = -218.85 TF/M2  
LIMITANTE DA BORDA SUPERIOR = -1750.00 TF/M2

**\*\*\*\*\* VALORES PARA ESTADO LIMITE ULTIMO \*\*\*\*\***

**\*\*\* VALORES PARA A INTERACAO NUMERO =4**

AREA DE ACO1	AREA DE ACO2	AREA ESCOLHIDA
682.2042	11.4007	11.4007

LINHA NEUTRA	EP CALCULADO	EP ESCOLHIDO
3.6983	.0817	.0817

DEFORMACAO PRE-ALONGAMENTO (P/1000)	DEFORMACAO COMO CONCRETO ARMADO (P/1000)
5.4424	4.9798

TENSAO ADOTADA( KGF/CM2 )    TENSAO REAL(KGF/C M2)

9847.6200

9847.5740

PROTENSAO INICIAL( TF )    PROTENSAO INFINITA ( TF )

155.1165

124.0932

\*\*\*\*\* MAIOR FORCA DE PROTENSAO ESTADO LIMITE ULTIMO \*\*\*\*\*

PROTENSAO INICIAL( TF )    PROTENSAO INFINITA ( TF )

155.1165

124.0932

##### DADOS REFERENTE AO FUSO LIMITE #####

## MEDIDAS A PARTIR DA COTA ZERO DA BORDA INFERIOR ##

\*\*\*\*\* LIMITE DA LINHA INFERIOR= .51021

\*\*\*\*\* LIMITE DA LINHA SUPERIOR= 1.02138

POSICAO	MG(TF*M)	MQ(TF*M)	FUSO SUPER(M)	FUSO INFER(M)
1	.00	.00	1.02	.510
2	8.61	7.04	.92	.466
3	14.79	12.10	.85	.434
4	18.55	15.18	.80	.415
5	19.89	16.28	.79	.408
6	18.81	15.39	.80	.413
7	15.30	12.52	.84	.431
8	9.38	7.67	.91	.462
9	1.02	.84	1.01	.505
10	-9.75	-7.98	1.14	.560
11	-22.94	-18.77	1.29	.629
12	-38.56	-31.55	1.47	.709

13	-22.81	-18.67	1.29	.628
14	-9.49	-7.77	1.13	.559
15	1.41	1.15	1.00	.503
16	9.89	8.09	.91	.459
17	15.94	13.05	.83	.428
18	19.58	16.02	.79	.409
19	20.79	17.01	.78	.403

# DADOS REFERENTE AO TRACADO DO CABO CONCORDANTE #

NO	F.SUP(M)	F.INF(M)	TRACADO(M)
1	1.021	.510	.738
2	.920	.466	.702
3	.848	.434	.676
4	.804	.415	.660
5	.788	.408	.654
6	.801	.413	.659
7	.842	.431	.673
8	.911	.462	.698
9	1.009	.505	.734
10	1.136	.560	.779
11	1.290	.629	.834
12	1.473	.709	.900
13	1.289	.628	.834
14	1.133	.559	.778
15	1.005	.503	.732
16	.905	.459	.696
17	.834	.428	.671
18	.792	.409	.656
19	.778	.403	.650

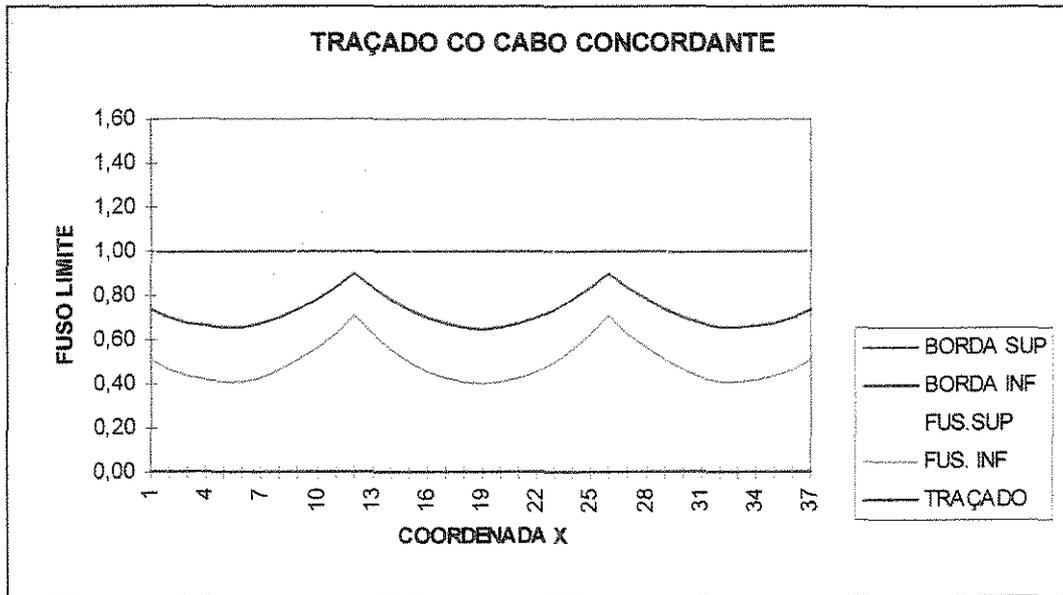


FIGURA 8.6 - Traçado do Cabo Concordante respeitando o Fuso Limite

O desenho mostra o traçado do cabo concordante que define a linha de pressão do concreto.

#### PERDAS DE PROTENSÃO

CABO	PROT. INICIAL	CFAT1	CFAT2
1	155.117	.300	.003

#### EXCENTRICIDADES DO CABO 1 FORÇAS DE PROTENSÃO

NOS	EXC CABO	FORÇA DE PROTENSÃO
1	.000	155.117
2	-.036	154.177
3	-.062	153.242
4	-.078	152.314
5	-.084	151.391
6	-.079	150.473
7	-.064	149.561
8	-.039	148.655

9	-0.004	147.754
10	.041	146.859
11	.132	143.966
12	.162	141.130
13	.131	138.349
14	.040	135.624
15	-0.006	134.802
16	-0.042	133.985
17	-0.067	133.173
18	-0.082	132.366
19	-0.087	131.564

PERDAS DE PROTENSAO DEVIDO ACOMODACAO DA ANCORAGEM

NO	FORCA FINAL
1	153.24
2	154.18
3	153.24
4	152.31
5	151.39
6	150.47
7	149.56
8	148.65
9	147.75
10	146.86
11	143.97
12	141.13
13	138.35
14	135.62

15	134.80
16	133.99
17	133.17
18	132.37
19	131.56

PERDAS DEVIDO A FLUENCIA E RETRACAO DO CONCRETO

NO	FORCA FINAL
1	150.67
2	151.51
3	150.51
4	149.54
5	148.60
6	147.69
7	146.82
8	145.99
9	145.20
10	144.20
11	141.32
12	138.12
13	135.70
14	132.99
15	132.28
16	131.34
17	130.45
18	129.59
19	128.77

ESFORÇOS NA EXTREMIDADE DA BARRA DEVIDOS AO CABO NUMERO= 1

NO INICIAL			NO FINAL		
1			37		
NORMAL	CORTANTE	MOMENTO	NORMAL	CORTANTE	MOMENTO
153.13	-5.75	112.25	-111.59	.00	-83.07

CARGA DA PROTENSAO NO ELEMENTO

---



---

ELEMENTO	NO1	NO2	PY1	PY2
1	1	2	1.306	1.306
2	2	3	1.306	1.306
3	3	4	1.306	1.306
4	4	5	1.306	1.306
5	5	6	1.306	1.306
6	6	7	1.306	1.306
7	7	8	1.306	1.306
8	8	9	1.306	1.306
9	9	10	1.306	1.306
10	10	11	-7.801	-7.801
11	11	12	-7.801	-7.801
12	12	13	-7.801	-7.801
13	13	14	-7.801	-7.801
14	14	15	1.306	1.306
15	15	16	1.306	1.306
16	16	17	1.306	1.306
17	17	18	1.306	1.306
18	18	19	1.306	1.306
19	19	20	1.306	1.306

Deste modo podemos concluir que a perda total de protensão equivale a 18,20 % e não a 20% como inicialmente foi adotado.

## 9. CONCLUSÕES

O bom desempenho da simulação da laje maciça como grelha já é bem conhecido, sendo confirmado, mais uma vez, neste trabalho.

Para lajes com formatos quaisquer podemos utilizar como faixa de trabalho larguras de 1 metro; caso se utilize largura com cerca de 0,50 metro, a diferença fica em torno de 4%.

Podem-se seguir as mesmas considerações de lajes armadas em uma e duas direções. Caso a laje seja armada em uma direção podemos calculá-la como uma viga, discretizando a mesma com apenas uma faixa de laje; caso seja armada em duas direções temos que discretizá-la nas duas direções.

No cálculo das lajes maciças apoiadas, contínuas e lajes cogumelos, notou-se que o traçado do cabo se assemelha ao traçado do gráfico de momento da peça, ou seja, o traçado do cabo concordante se posiciona dentro do fuso limite, não sendo necessário aplicar a transformação linear para encontrar o traçado do cabo concordante.

Percebeu-se que trabalhando com valores de momentos diferentes para cada faixa de laje temos seções diferentes de aço, possibilitando uma economia considerável que ultrapassa 20% dependendo da laje analisada.

Calculando a mesma laje que Brandão, Miotto e Pinheiro<sup>10</sup> analisaram, para a qual consideraram um único valor de momento para seu dimensionamento, obtido tomando a faixa mais desfavorável, notou-se, na análise aqui apresentada, que esse valor único é menor que o valor do momento máximo na laje.

A proposta deste trabalho permite que, ao analisar as diversas faixas em que se divide a laje, obtenha-se economia principalmente em armadura de protensão.

O programa desenvolvido permite a análise de estruturas protendidas como: lajes contínuas e isoladas, lajes alveolares, lajes nervuradas e com pequenas alterações pórticos tridimensionais protendidos, já que trabalhamos com 6 graus de liberdade por nó.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [ 1 ] **ABPT** - Informações Simplificadas Sobre Aplicação em Concreto Protendido  
Associação Brasileira de Pós Tensão.
  
- [ 2 ] **AGOSTINI, L. R. S.** - Concreto Protendido - Estudo de Vigas Isostáticas - Livraria  
Ciência e Tecnologia.
  
- [ 3 ] **AGOSTINI, L. R. S.** - Contribuição à Otimização do Traçado de Cabos de Vigas  
Contínuas Protendidas. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos,  
1976.
  
- [ 4 ] **ASSAN, A. E.** - Contribuição ao Cálculo Automático de Vigas Contínuas  
Protendidas. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, 1974.
  
- [ 5 ] **ASSAN, A. E.** - Método dos Elementos Finitos Primeiros passos ( Publicação  
Interna) - Faculdade de Engenharia Unicamp.
  
- [ 6 ] **ASSAN, A. E.** - Métodos Energéticos e Análise Estrutural - Editora Unicamp, 1996.

- [ 7 ] **ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS** (1978). NBR 6118  
Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado.
- [ 8 ] **ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS** (1989). NBR 7197  
Nov / 1989 - Projeto de Estrutura de Concreto Protendido.
- [ 9 ] **BECKER CAREY ODEN, E. B. and G. F. and J. T.** Finite Elements An  
Introduction. Texas Institute for Computational Mechanics the University of  
Texas at Austin 1981.
- [10] **BRANDÃO, A. M. S. e MIOTTO, A. M. e PINHEIRO, L. M.** - Lajes  
Lisas Protendidas - Método das Cargas Balanceadas - XXVIII Jornada Sul  
Americanas de Engenharia Estrutural, Setembro de 1997, São Carlos, SP, Brasil
- [ 11 ] **CEREDA, R. L. D. e MALDONADO, J. C.** - Introdução ao Fortran 77  
para Computadores. São Paulo: McGraw - Hill, 1987.
- [ 12 ] **DUARTE, E. P.** Projeto e Cálculo de lajes Planas Protendidas - Publicação da Mac  
e Belgo Mineira - Nov / 1995
- [13] **DUARTE, H. e GIONGO, J. S.** - Lajes Esconsas de Pavimentos de Edifícios:  
Análise Comparativa entre a Técnica da Analogia de Grelha e o Método dos  
Elementos Finitos - XXVIII Jornada Sul-Americanas de Engenharia Estrutural,  
Setembro de 1997, São Carlos, SP, Brasil.
- [ 14 ] **FREYSSINET.** Lajes em Concreto Protendido - Publicação Stup Freyssinet Ltda  
Jan / 1996

- [ 15 ] **GERE E WEAVER.** Análise de Estruturas Reticuladas. New York, N. Y. 10001, 1965
- [ 16 ] **LEONHARD, F.** - Construções de Concreto - Concreto Protendido Vol. 5 Editora Interciência 1983.
- [ 17 ] **LIN, T. Y.** - Design of Prestressed Concrete Structures. New York. London 1955.
- [ 18 ] **PFEIL, W.** - Concreto protendido: Introdução. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos.
- [ 19 ] **PTI** - Design of Post - Tensioned slabs - PTI - Post-Tensioning Intitute, Phoenix, Arizona 1977
- [ 20 ] **RUDLOFF, J. E. M** - 30 Anos Dedicados à Protensão
- [ 21 ] **TÉCHNE** - Protensão - A Simples Evolução do Concreto Armado - Revista de Tecnologia da Construção, Nov / Dez 93 Ano 2 - Editora Pini.
- [ 22 ] **VSL RUDLOFF** - Perdas da Força de Protensão - Publicado por Rudloff - VSL Industrial Ltda. São Paulo Brasil - 1994.
- [ 23 ] **WEAVER, W. JR.** Computer Programs for Structural Analysis. D. Van Nostrand Company, Inc Princeton, New Jersey, Toronto London, 1967.

## ABSTRACT

The purpose of this paper is to automatize the design of prestressed slabs, using with simulation the grid of the method. The slab is substituted by an equivalent grid in the plane horizontal. The analytic design of the slabs is complex, in the usual table is forced only expression that abided to designer the flexor moment, considering some freedom of condition, limiting the use of these tables.

The program developed in this paper are evaluated: stress, tension and displacement any section of the slab with freedom condition variable. The results are forced for each beam of the grid.

The prestress force is evaluated utilizing the types of the prestress defined of the Brazilian standard Code: full, limited and partial, chosen in input of the program. The final prestress force adopted is the highest of both, since it respects the restrictions imposed by the Brazilian standard Code.

With the prestress force defined is determined the region where it has to be placed the concrete pressure of line ( limiting zone ), respecting this, is plotted the line that within the c.g.s. of the cable in beam respecting the concept of concordant cable which the equation is proposed in program. If the cable doesn't respect the zone limiting, with the idea of linear transformation is calculated a discordant cable that respects the restrictions imposed by zone limiting.

With a layout of cable defined will be calculated the losses of prestress and the prestress of force in cable, using the concept of load-balancing of prestress force. All the section will be analyzed inside of limits imposed by Brazilian Standard Code.

The program was proposed considering that the steel is post-prestress having bonded between the concrete and steel. Guaranteed the compatibility of deformation between the two materials.

With the program developed want to obtain result competitive with others models considered more elaborated.

The program developed permit also the analysis of continuous prestressed beam isolated.