UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

Um Estudo de Placas sob Cargas Dinâmicas Estacionárias e com o Efeito da Não Linearidade Geométrica sob Cargas Estáticas Usando o Método dos Elementos de Contorno

Engº. ROGÉRIO SIMÕES
ORIENTADOR : PROF. DR. LEANDRO PALERMO JÚNIOR

Campinas, Maio de 2001

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

Um Estudo de Placas sob Cargas Dinâmicas Estacionárias e com o Efeito da Não Linearidade Geométrica sob Cargas Estáticas Usando o Método dos Elementos de Contorno

Engº. ROGÉRIO SIMÕES

Exemplar de defesa apresentado à faculdade de Engenharia Civil para o exame de defesa, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, na área de Engenharia de Estruturas.

Campinas, Maio de 2001

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

	Simões, Rogério.
Si51e	Um estudo de placas sob cargas dinâmicas estacionárias e com o efeito da não linearidade geométrica sob cargas estáticas usando o método dos elementos de contorno / Rogério Simões. --Campinas, SP: [s.n.], 2001.
	Orientador: Leandro Palermo Júnior. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil.
	1. Métodos de elementos de contorno. 2. Placas (Engenharia). 3. Flambagem (Mecânica). 4. Dinâmica estrutural. I. Palermo Júnior, Leandro. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL

Um Estudo de Placas sob Cargas Dinâmicas Estacionárias e com o Efeito da Não Linearidade Geométrica sob Cargas Estáticas Usando o Método dos Elementos de Contorno

Rogério Simões

Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:

Prof. Dr. Leandro Palermo Junior
Presidente e Orientador/ FEC – UNICAMP

Prof. Dr. Carlos Eduardo Nigro Mazzilli
EP - USP

Prof. Dr. Renato Soliani
FEC - UNICAMP

Campinas, 29 de Maio de 2001.

Aos meus pais

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Dr. Leandro Palermo Júnior, agradeço pelo incentivo e apoio dado durante toda a elaboração deste trabalho.

Aos meus pais, Armando e Vilma, por toda a dedicação durante o período de estudo.

Aos colegas de trabalho e amigos, Rebecca Cardelli de Andrade e Carlos Eduardo Foltran, pelo compartilhamento de conhecimentos e por todo o apoio prestado no decorrer da pesquisa.

Aos meus grandes amigos, Paulo Henrique Espanholi, Paola Simoni de Zappa Lopes e Sérgio Akira Kavamoto, que sempre me incentivaram durante todo o trabalho.

A toda a minha família e amigos, pois sem o apoio deles não conseguiria ter realizado este trabalho.

À Faculdade de Engenharia Civil da Unicamp pela oportunidade que me foi oferecida.

À FAPESP – Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, pelo auxílio oferecido na realização deste trabalho.

.Sumário

	Lista de Figuras	**i**
	Lista de Tabelas	**v**
	Lista de Símbolos	**ix**
	Resumo	**xvii**
	Abstract	**xix**
1.	**Introdução**	**1**
1.1.	Generalidades	1
1.2.	Considerações Sobre o Estudo da Flexão de Placas	2
1.3.	Método dos Elementos de Contorno Aplicado à Análise de Placas	3
1.4.	Efeito da Não Linearidade Geométrica Associada às Placas	8
1.5.	Efeito das Vibrações Harmônicas Livres e Forçadas Associadas às Placas	9
1.6.	Conteúdo do Trabalho	11
2.	**Elasticidade Linear**	**13**
2.1.	Introdução	13
2.2.	Relação Deformação-Deslocamento	13
2.3.	Equações Constitutivas	16
2.4.	Forças de Superfície e Volume	17
2.5.	Relações Tensão-Deformação em Coordenadas Cilíndricas	19
2.6.	Equações de Equilíbrio	22
3.	**Flexão de Placas**	**25**
3.1.	Introdução	25
3.2.	Hipóteses Básicas	26
3.3.	Equações Constitutivas	27
3.4.	Condições de Contorno	36
3.5.	Equações Constitutivas em Coordenadas Cilíndricas	39
3.6.	Solução Fundamental	45
4.	**Equações Integrais para Placas**	**51**
4.1.	Introdução	51
4.2.	Equação Integral em Coordenadas Normais e Tangenciais para Deslocamentos em Pontos do Domínio	51
4.3.	Equação Integral em Coordenadas Normais e Tangenciais para Deslocamentos em Pontos do Contorno	59
4.4.	Equação Integral em Coordenadas Normais e Tangenciais para Pontos Internos	65
4.5.	Tratamento para as Integrais de Domínio do Carregamento Distribuído	67
5.	**Método dos Elementos de Contorno**	**71**
5.1.	Introdução	71
5.2.	Discretização do Contorno	72

5.3.	Elementos de Contorno	73
5.4.	Transformação das Equações Integrais de Placas	80
5.5.	Montagem do Sistema de Equações	83
5.6.	Montagem das Matrizes H e G	85
5.7.	Integrais Analíticas	85
5.8.	Integrais Numéricas	90
6.	**Instabilidade de Placas**	**91**
6.1.	Introdução	91
6.2.	Equação Integral para a Instabilidade de Placas	91
6.3.	Tratamento para as Integrais de Domínio das Cargas Normais	97
6.4.	Problema de Autovalor	98
7.	**Cargas Dinâmicas em Estruturas**	**101**
7.1.	Introdução	101
7.2.	Conceitos Básicos de Dinâmica	101
7.2.1.	Vibrações Livres Não Amortecidas	101
7.2.2.	Vibrações Livres Amortecidas	103
7.2.3.	Vibrações Forçadas	106
7.2.4.	Carregamentos Impulsivos	108
7.3.	Vibração Livre Aplicada às Placas	109
7.3.1.	Equação Integral para a Vibração Livre em Placas	109
7.3.2.	Problema de Autovalor Aplicado à Vibração Livre em Placas	112
7.4.	Introdução de Vibrações Harmônicas Forçadas em Placas sem o Efeito do Amortecimento	113
8.	**Exemplos**	**115**
8.1.	Exemplos de Placas Quadradas com Variação do Multiplicador do Argumento da Função Logaritmo Neperiano	115
8.1.1.	Placa Quadrada ELLL (ν=0)	118
8.1.2.	Placa Quadrada ELLL (ν=0,3)	120
8.2.	Exemplos de Placas Quadradas com Carregamento Uniforme	122
8.2.1.	Placa Simplesmente Apoiada nos Quatro Lados (AAAA)	124
8.2.2.	Placa Engastada em Um Lado e Apoiada nos Outros Lados (AAAE)	125
8.2.3.	Placa Engastada em Dois Lados Paralelos e Apoiada nos Outros Lados (AEAE)	126
8.2.4.	Placa Apoiada em Dois lados Consecutivos e Engastada nos Outros Lados (AAEE)	127
8.2.5.	Placa Engastada nos Quatro Lados (EEEE)	128
8.2.6.	Placa com Um Lado Livre e com os Outros lados Apoiados (AAAL)	129
8.2.7.	Placa com um Lado Livre, seu Lado paralelo Engastado e os Outros Lados Apoiados (ALAE)	130
8.2.8.	Placa com Um Lado Livre, seu Lado Paralelo Apoiado e os Outros Lados Engastados (ELEA)	131
8.2.9.	Placa com Um Lado Livre e os Outros Lados Engastados (EEEL)	132
8.2.10.	Placa com Dois lados Paralelos Livres e os Outros Lados Engastados (ELEL)	133
8.2.11.	Placa com Um Lado Apoiado e os Outros Lados Engastados (EEEA)	134

8.2.12. Placa Retangular com Um dos Lados Maiores Livre, seu Lado Paralelo Apoiado e os Outros Lados Engastados (ELEA) 135
8.3. Exemplos de Placas com a Utilização de Células 137
8.3.1. Placa Quadrada AAAA com Carregamento Hidrostático 137
8.3.2. Placa Quadrada EEEE com Carregamento Hidrostático 139
8.3.3. Placa Quadrada EAEA com Carregamento Hidrostático Paralelo aos Lados Engastados 140
8.3.4. Placa Quadrada AEAA com Carregamento Hidrostático Perpendicular ao Lado Engastado 142
8.3.5. Placa Quadrada AAEA com Carregamento Hidrostático Paralelo ao Lado Engastado 143
8.3.6. Placa Quadrada AAAA Parcialmente Carregada Hidrostaticamente 144
8.3.7. Placa Triangular Equilátera AAA com Carregamento Uniforme 145
8.3.8. Placa Triangular Equilátera EEE com Carregamento Uniforme e Carregamento Hidrostático 147
8.4. Exemplos de Obtenção de Cargas Críticas de Placas 149
8.4.1. Placa Quadrada AAAA com Forças de Compressão 151
8.4.2. Placa Quadrada EEEE com Forças de Compressão 152
8.4.3. Placa Quadrada LAEA com Forças de Compressão na Direção Perpendicular aos Lados Apoiados 153
8.4.4. Placa Quadrada LAAA com Forças de Compressão Perpendiculares ao Lado Livre 154
8.4.5. Placa Quadrada EEEA com Forças de Compressão Perpendiculares ao Lado Apoiado 155
8.4.6. Placa Quadrada EEEA com Forças de Compressão Paralelas ao Lado Apoiado 156
8.4.7. Placa Quadrada AAAE com Forças de Compressão Perpendiculares ao Lado Engastado 157
8.4.8. Placa Quadrada AAAE com Forças de Compressão Paralelas ao Lado Engastado 158
8.4.9. Obtenção das Cargas Críticas Posteriores para Uma Placa Simplesmente Apoiada 159
8.5. Exemplos de Vibração Livre em Placas 160
8.5.1. Placa Quadrada AAAA 161
8.5.2. Placa Quadrada AAAE 162
8.5.3. Placa Quadrada AEAE 163
8.5.4. Placa Quadrada AAEE 164
8.5.5. Placa Quadrada EEEA 165
8.5.6. Placa Quadrada EEEE 166
8.5.7. Placa Quadrada AAAL 167
8.5.8. Placa Quadrada EEEL 168
8.5.9. Placa Quadrada ELEL 169
8.5.10. Placa Quadrada ELLL 170
8.5.11. Placa Retangular AAAA 171
8.5.12. Placa Retangular Engastada em um dos Lados Maiores e Apoiada nos Outros Lados 172

8.5.13. Placa Retangular Engastada em um dos Lados Menores e Apoiada nos Outros Lados 173
8.5.14. Placa Retangular Engastada nos Dois lados Maiores e Apoiada nos Outros Lados 174
8.5.15. Placa Retangular Engastada nos Dois lados Menores e Apoiada nos Outros Lados 175
8.5.16. Placa Retangular EEAA 176
8.5.17. Placa Retangular Apoiada em Um dos Lados Maiores e Engastada nos Outros Lados 177
8.5.18. Placa Retangular Apoiada em Um dos Lados Menores e Engastada nos Outros Lados 178
8.5.19. Placa Retangular EEEE 179
8.5.20. Placa Retangular Engastada em Um dos Lados Maiores e Livre nos Outros Lados 180
8.5.21. Placa Retangular Engastada em Um dos Lados Menores e Livre nos Outros Lados 181
8.6. Exemplos de Vibração Harmônicas em Placas 182
8.6.1. Placa Quadrada AAAA Submetida a um Carregamento Harmônico 183
8.6.2. Placa Quadrada AEEE Submetida a um Carregamento Harmônico 185

9. Programas Utilizados Para o Desenvolvimento do Trabalho 187

9.1. Introdução 187
9.2. Programa de Flexão de Placas 187
9.2.1. Sub-rotina ENTRADA 189
9.2.2. Sub-rotina MATRIZ GH 190
9.2.3. Sub-rotina CONDIÇÕES DE CONTORNO 191
9.2.4. Sub-rotina DECOMPOSIÇÃO e RESOLUÇÃO 192
9.2.5. Sub-rotina INTERNOS 192
9.2.6. Sub-rotina CONTORNO 192
9.2.7. Sub-rotina SAÍDA 192
9.3. Programa de Análise do Efeito da Não Linearidade Geométrica 193
9.3.1. Sub-rotina CURVATURAS INICIAIS 194
9.3.2. Sub-rotina EFEITO NORMAL 194
9.3.3. Sub-rotina INTERNOS 195
9.3.4. Sub-rotina CARGA CRÍTICA 195
9.4. Programa de Análise de Vibrações Livres em Placas 195

10. Conclusões 197

11. Bibliografia 201

Apêndice A 209

Lista de Figuras

Figura 2.1 -	Estado de deformação de um sólido	14
Figura 2.2 -	Forças de superfície e de volume	17
Figura 2.3 -	Forças de superfície em um tetraedro infinitesimal	18
Figura 2.4 -	Sistema de coordenadas	19
Figura 2.5 -	Elemento infinitesimal	23
Figura 3.1 -	Elemento de placa com a definição do sistema de coordenadas	26
Figura 3.2 -	Componentes de tensão em um elemento de placa sujeita a flexão	30
Figura 3.3 -	Esforços em um elemento infinitesimal de placa em flexão	31
Figura 3.4 -	Sistema de coordenadas $\mathbf{x_1x_2}$ e **ns**	34
Figura 3.5 -	Momentos volventes no contorno	37
Figura 3.6 -	Sistema de coordenadas cartesianas e cilíndricas	39
Figura 3.7 -	Relação das coordenadas **ns** de um ponto P do contorno da placa com as coordenadas cartesianas e cilíndricas	43
Figura 3.8 -	Função delta de *Dirac*	46
Figura 3.9 -	Forças verticais atuantes no círculo de raio r e com carga unitária aplicada no centro deste círculo	48
Figura 4.1 -	Placa finita contida em uma placa infinita	52
Figura 4.2 -	Canto **i** do contorno da placa	57
Figura 4.3 -	Contorno circular acrescentado a um ponto ξ	59
Figura 4.4 -	Carregamento distribuído $\mathbf{g(x_1,x_2)}$ em domínio Ω_g	67
Figura 5.1 -	Discretização do contorno	72
Figura 5.2 -	Elemento linear	74
Figura 5.3 -	Elemento linear contínuo	77
Figura 5.4 -	Definição de nó duplo	78
Figura 5.5 -	Elemento linear descontínuo	78
Figura 5.6 -	Elementos lineares mistos	79
Figura 5.7 -	Posição do ponto de colocação externo ao elemento	82
Figura 5.8 -	Deslocamento dos pontos de colocação para nós duplos	83
Figura 5.9 -	Funções aproximadoras	86

Figura 6.1 -	Elementos de contorno consecutivos com seus respectivos valores nodais	94
Figura 7.1 -	Resposta oscilatória da vibração livre não amortecida	103
Figura 7.2 -	Resposta oscilatória da vibração livre amortecida para o caso sub-crítico	105
Figura 7.3 -	Resposta oscilatória da vibração livre amortecida para o caso crítico	105
Figura 7.4 -	Carregamento impulsivo	108
Figura 8.1 -	Gráfico da cortante no engaste da placa ELLL com coeficiente de Poisson igual a zero	118
Figura 8.2 -	Gráfico do momento fletor normal ao engaste da placa ELLL com coeficiente de Poisson igual a zero	119
Figura 8.3 -	Gráfico do deslocamento na borda livre da placa ELLL com coeficiente de Poisson igual a zero	119
Figura 8.4 -	Gráfico da cortante no engaste da placa ELLL com coeficiente de Poisson igual a 0,3	120
Figura 8.5 -	Gráfico do momento fletor normal ao engaste da placa ELLL com coeficiente de Poisson igual a 0,3	120
Figura 8.6 -	Gráfico do deslocamento na borda livre da placa ELLL com coeficiente de Poisson igual a 0,3	121
Figura 8.7 -	Simbologia adotada para as bordas da placa	123
Figura 8.8 -	Placa quadrada AAAA com carregamento uniforme	124
Figura 8.9 -	Placa quadrada AAAE com carregamento uniforme	125
Figura 8.10 -	Placa quadrada AEAE com carregamento uniforme	126
Figura 8.11 -	Placa quadrada AAEE com carregamento uniforme	127
Figura 8.12 -	Placa quadrada EEEE com carregamento uniforme	128
Figura 8.13 -	Placa quadrada AAAL com carregamento uniforme	129
Figura 8.14 -	Placa quadrada ALAE com carregamento uniforme	130
Figura 8.15 -	Placa quadrada ELEA com carregamento uniforme	131
Figura 8.16 -	Placa quadrada EEEL com carregamento uniforme	132
Figura 8.17 -	Placa quadrada ELEL com carregamento uniforme	133
Figura 8.18 -	Placa quadrada EEEA com carregamento uniforme	134
Figura 8.19 -	Placa retangular ELEA com carregamento uniforme	135
Figura 8.20 -	Placa quadrada AAAA com carregamento hidrostático	137
Figura 8.21	Gráfico do deslocamento transversal $\mathbf{u}_3$ ao longo do eixo $\mathbf{x}_1$ para a placa da **Figura 8.20**	137

Figura 8.22	Gráfico do momento fletor M_{11} ao longo do eixo x_1 para a placa da **Figura 8.20**	138
Figura 8.23	Gráfico do momento fletor M_{22} ao longo do eixo x_1 para a placa da **Figura 8.20**	138
Figura 8.24 -	Placa quadrada EEEE com carregamento hidrostático	139
Figura 8.25 -	Placa quadrada EAEA com carregamento hidrostático paralelo aos lados engastados	140
Figura 8.26 -	Placa quadrada AEAA carregamento hidrostático perpendicular ao lado engastado	142
Figura 8.27 -	Placa quadrada AAEA com carregamento hidrostático paralelo ao lado engastado	143
Figura 8.28 -	Placa quadrada AAAA parcialmente carregada hidrostaticamente	144
Figura 8.29 -	Placa triangular equilátera AAA com carregamento uniforme	145
Figura 8.30 -	Gráfico do deslocamento transversal u_3 ao longo do eixo x_2 para a placa da **Figura 8.29**	145
Figura 8.31 -	Gráfico do momento fletor M_{11} ao longo do eixo x_2 para a placa da **Figura 8.29**	146
Figura 8.32 -	Gráfico do momento fletor M_{22} ao longo do eixo x_2 para a placa da **Figura 8.29**	146
Figura 8.33 -	Placa triangular equilátera EEE com carregamento uniforme e carregamento hidrostático	147
Figura 8.34 -	Geometria das discretizações adotadas	149
Figura 8.35 -	Tipos de discretização adotadas para as placas	150
Figura 8.36 -	Placa quadrada AAAA com forças de compressão	151
Figura 8.37 -	Placa quadrada EEEE com forças de compressão	152
Figura 8.38 -	Placa quadrada LAEA com forças de compressão na direção perpendicular aos lados apoiados	153
Figura 8.39 -	Placa quadrada LAAA com forças de compressão perpendicular ao lado livre	154
Figura 8.40 -	Placa quadrada EEEA com forças de compressão perpendicular ao lado apoiado	155
Figura 8.41 -	Placa quadrada EEEA com forças de compressão paralela ao lado apoiado	156
Figura 8.42 -	Placa quadrada AAAE com forças de compressão perpendicular ao lado engastado	157
Figura 8.43 -	Placa quadrada AAAE com forças de compressão paralela ao lado engastado	158

Figura 8.44 -	Placa quadrada AAAA submetida à vibração livre	161
Figura 8.45 -	Placa quadrada AAAE submetida à vibração livre	162
Figura 8.46 -	Placa quadrada AEAE submetida à vibração livre	163
Figura 8.47 -	Placa quadrada AAEE submetida à vibração livre	164
Figura 8.48 -	Placa quadrada EEEA submetida à vibração livre	165
Figura 8.49 -	Placa quadrada EEEE submetida à vibração livre	166
Figura 8.50 -	Placa quadrada AAAL submetida à vibração livre	167
Figura 8.51 -	Placa quadrada EEEL submetida à vibração livre	168
Figura 8.52 -	Placa quadrada ELEL submetida à vibração livre	169
Figura 8.53 -	Placa quadrada ELLL submetida à vibração livre	170
Figura 8.54 -	Placa retangular AAAA submetida à vibração livre	171
Figura 8.55 -	Placa retangular engastada em um dos lados maiores e apoiada nos outros lados submetida à vibração livre	172
Figura 8.56 -	Placa retangular engastada em um dos lados menores e apoiada nos outros lados submetida à vibração livre	173
Figura 8.57 -	Placa retangular engastada nos dois lados maiores e apoiada nos outros lados submetida à vibração livre	174
Figura 8.58 -	Placa retangular engastada nos dois lados menores e apoiada nos outros lados submetida à vibração livre	175
Figura 8.59 -	Placa retangular EEAA submetida à vibração livre	176
Figura 8.60 -	Placa retangular apoiada em um dos lados maiores e engastada nos outros lados submetida à vibração livre	177
Figura 8.61 -	Placa retangular apoiada em um dos lados menores e engastada nos outros lados submetida à vibração livre	178
Figura 8.62 -	Placa retangular EEEE submetida à vibração livre	179
Figura 8.63 -	Placa retangular engastada em um dos lados maiores e livre nos outros lados submetida à vibração livre	180
Figura 8.64 -	Placa retangular engastada em um dos lados menores e livre nos outros lados submetida à vibração livre	181
Figura 8.65 -	Placa quadrada AAAA com carregamento harmônico	183
Figura 8.66 -	Placa quadrada EEEE com carregamento harmônico	185
Figura 9.1 -	Fluxograma do programa de flexão de placas	188
Figura 9.2 -	Fluxograma do programa de análise do efeito da não-linearidade geométrica	193

Lista de Tabelas

Tabela 8.1	Deslocamentos e esforços de uma placa quadrada AAAA com carregamento uniforme	124
Tabela 8.2	Deslocamentos e esforços de uma placa quadrada AAAE com carregamento uniforme	125
Tabela 8.3	Deslocamentos e esforços de uma placa quadrada AEAE com carregamento uniforme	126
Tabela 8.4	Deslocamentos e esforços de uma placa quadrada AAEE com carregamento uniforme	127
Tabela 8.5	Deslocamentos e esforços de uma placa quadrada EEEE com carregamento uniforme	128
Tabela 8.6	Deslocamentos e esforços de uma placa quadrada AAAL com carregamento uniforme	129
Tabela 8.7	Deslocamentos e esforços de uma placa quadrada ALAE com carregamento uniforme	130
Tabela 8.8	Deslocamentos e esforços de uma placa quadrada ELEA com carregamento uniforme	131
Tabela 8.9	Deslocamentos e esforços de uma placa quadrada EEEL com carregamento uniforme	132
Tabela 8.10	Deslocamentos e esforços de uma placa quadrada ELEL com carregamento uniforme	133
Tabela 8.11	Deslocamentos e esforços de uma placa quadrada EEEA com carregamento uniforme	134
Tabela 8.12	Deslocamentos e esforços de uma placa retangular ELEA com carregamento uniforme	136
Tabela 8.13	Deslocamentos e esforços de uma placa quadrada EEEE com carregamento hidrostático	139
Tabela 8.14	Esforços de uma placa quadrada EAEA com carregamento hidrostático	141
Tabela 8.15	Deslocamentos e esforços de uma placa quadrada AEAA com carregamento hidrostático perpendicular ao lado engastado	142
Tabela 8.16	Deslocamentos e esforços de uma placa quadrada AAEA com carregamento hidrostático paralelo ao lado engastado	143
Tabela 8.17	Esforços de uma placa quadrada AAAA parcialmente carregada hidrostaticamente	144

Tabela 8.18	Deslocamentos e esforços de uma placa triangular equilátera EEE com carregamento uniforme e carregamento hidrostático	148
Tabela 8.19	Valores da primeira carga crítica para uma placa quadrada AAAA	151
Tabela 8.20	Valores da primeira carga crítica para uma placa quadrada EEEE	152
Tabela 8.21	Valores da primeira carga crítica para uma placa quadrada LAEA com relação à direção perpendicular aos lados apoiados	153
Tabela 8.22	Valores da primeira carga crítica para uma placa quadrada LAAA com relação à direção paralela ao lado livre	154
Tabela 8.23	Valores da primeira carga crítica para uma placa quadrada EEEA com relação à direção perpendicular ao lado apoiado	155
Tabela 8.24	Valores da primeira carga crítica para uma placa quadrada EEEA com relação à direção paralela ao lado apoiado	156
Tabela 8.25	Valores da primeira carga crítica para uma placa quadrada AAAE com relação à direção perpendicular ao lado engastado	157
Tabela 8.26	Valores da primeira carga crítica para uma placa quadrada AAAE com relação à direção paralela ao lado engastado	158
Tabela 8.27	Valores das três menores cargas críticas para uma placa AAAA	159
Tabela 8.28	Ordem de obtenção das três menores cargas críticas para uma placa quadrada AAAA	159
Tabela 8.29	Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa quadrada AAAA submetida à vibração livre	161
Tabela 8.30	Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa quadrada AAAE submetida à vibração livre	162
Tabela 8.31	Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa quadrada AEAE submetida à vibração livre	163
Tabela 8.32	Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa quadrada AAEE submetida à vibração livre	164
Tabela 8.33	Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa quadrada EEEA submetida à vibração livre	165
Tabela 8.34	Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa quadrada EEEE submetida à vibração livre	166
Tabela 8.35	Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa quadrada AAAL submetida à vibração livre	167
Tabela 8.36	Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa quadrada EEEL submetida à vibração livre	168
Tabela 8.37	Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa quadrada ELEL submetida à vibração livre	169

Tabela 8.38	Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa quadrada ELLL submetida à vibração livre	170
Tabela 8.39	Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa retangular AAAA submetida à vibração livre	171
Tabela 8.40	Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa retangular engastada em um dos lados maiores e apoiada nos outros lados submetida à vibração livre	172
Tabela 8.41	Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa retangular engastada em um dos lados menores e apoiada nos outros lados submetida à vibração livre	173
Tabela 8.42	Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa retangular engastada nos dois lados maiores e apoiada nos outros lados submetida à vibração livre	174
Tabela 8.43	Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa retangular engastada nos dois lados menores e apoiada nos outros lados submetida à vibração livre	175
Tabela 8.44	Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa retangular EEAA submetida à vibração livre	176
Tabela 8.45	Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa retangular apoiada em um dos lados maiores e engastada nos outros lados submetida à vibração livre	177
Tabela 8.46	Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa retangular apoiada em um dos lados menores e engastada nos outros lados submetida à vibração livre	178
Tabela 8.47	Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa retangular EEEE submetida à vibração livre	179
Tabela 8.48	Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa retangular engastada em um dos lados maiores e livre nos outros lados submetida à vibração livre	180
Tabela 8.49	Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa retangular engastada em um dos lados menores e livre nos outros lados submetida à vibração livre	181
Tabela 8.50	Valores dos deslocamentos e esforços de uma placa quadrada AAAA submetida a um carregamento harmônico	184
Tabela 8.51	Valores dos deslocamentos e esforços de uma placa quadrada EEEE submetida a um carregamento harmônico	186

Lista de Símbolos

∇^2	: operador Laplaciano
$\dfrac{\partial u_3}{\partial n}$	: rotação normal ao contorno
$\dfrac{\partial u_3^*}{\partial n}$	: solução fundamental da rotação normal ao contorno
$\dfrac{\partial^2 u_3^*}{\partial n^2}, \dfrac{\partial^2 u_3^*}{\partial s^2}, \dfrac{\partial^2 u_3^*}{\partial n \partial s}$	: curvaturas nos pontos do contorno
$\dfrac{\partial u_3}{\partial s}$	: rotação contida na direção tangente ao contorno
$\dfrac{\partial u_3}{\partial x_i}$	: rotação contida na direção x_i
$\dfrac{\partial u_3^*}{\partial x_i}$	: solução fundamental da rotação contida na direção x_i
α	: ângulo entre o vetor **n** normal ao contorno e os eixos coordenados
β	: ângulo entre o raio vetor **r** e o vetor **n**
β_c	: ângulo do canto da placa
β_d	: relação entre ϖ e ω
δ_{ij}	: delta de Kronecher
$\Delta\,(\xi,x)$	: função delta de Dirac no argumento (ξ,x)
ε	: raio de acréscimo dado ao contorno
ε_{ii}	: deformações normais
ε_{ij}	: tensor de deformações
ϕ_i	: função aproximadora
$\phi_i\,(\xi)$	: matriz contendo as funções de aproximação do elemento
$\overline{\phi}$	: ângulo de fase do deslocamento **u**
γ	: densidade do material
γ_{ij}	: deformações cisalhantes

Γ	: coordenada que percorre o contorno da placa
Γ_∞	: contorno infinito
Γ_ε, Γ^*	: regiões do contorno
Γ_p	: contorno de uma região carregada
Γ_i	: coordenadas do limite do contorno na qual se realiza a integração
η	: variável que percorre o contorno
η_c	: valor da variável η nos cantos
η_d	: variável do domínio
λ_B	: fator de carga
λ_j, λ_k	: cantos do contorno gerados a partir do acréscimo circular de raio ε
$\lambda_v{}^4$	: modo de vibração
ν	: coeficiente de Poisson
θ	: ângulo que o raio vetor $\mathbf{r}$ faz com o eixo $\mathbf{x_1}$
ρ, $\overline{\rho}$	: amplitude do deslocamento $\mathbf{u}$
ρ_o	: amplitude do carregamento dinâmico aplicado
σ_{ii}	: tensões normais
σ_{ij}	: tensor de tensões
σ_n, σ_s, σ_{ns}	: tensões normais e tangenciais
τ_{ij}	: tensões cisalhantes
ω	: freqüência natural do sistema
ω_D	: freqüência amortecida
ϖ	: freqüência do carregamento
$\hat{\omega}$	: freqüência que depende do amortecimento
Ω	: domínio
Ω_∞	: domínio infinito
Ω_g, Ω_p	: domínio com carregamento distribuído
ξ	: ponto onde se aplica a equação integral
$\overline{\xi}$	: taxa de amortecimento do sistema
a, b	: distância do ponto de aplicação aos nós do elemento

$A_{\Gamma\Gamma}, A_{\Gamma\Omega}$	: matrizes com a integração proveniente do contorno
A_g, B_g, C_g	: constantes para descrever um carregamento linear em uma célula
$\underset{\sim}{A}$	: matriz dos coeficientes das variáveis incógnitas
$\overline{A}$	: amplitude do carregamento harmônico
$\underset{\sim}{B}$	: vetor dos deslocamentos e esforços prescritos no contorno mais os carregamentos de domínio
$\underset{\sim}{B'}$	: matriz dos coeficientes da integração do domínio para não-linearidade geométrica
$B_{\Omega\Gamma}$, $B_{\Omega\Omega}$	: matriz com os elementos dependentes de $\mathbf{N}_{ij}$
c	: amortecimento do sistema
c_i	: constantes da integração da solução fundamental $\mathbf{u_3}^*$
$C_{\alpha i}$	: constantes da condição de Hölder
C_i, D_i	: constantes utilizadas na aproximação por diferenças finitas
C_{ijkl}	: tensor das componentes elásticas do material
$C(\xi)$	: função que fornece o deslocamento do ponto onde se aplica a equação integral
d	: distância do ponto de aplicação para a segunda equação integral
$d\Gamma$	: diferencial de contorno
$d\Omega$	: diferencial de domínio
ds, ds^*	: comprimento de um elemento infinitesimal
du_i	: acréscimo infinitesimal de deslocamento de um ponto
dV	: diferencial de volume
dx_i	: dimensões de um elemento infinitesimal
$\underset{\sim}{d}$	: vetor contendo os deslocamentos transversais do domínio da placa

$\underset{\sim}{d}^{k}$	: vetor contendo os deslocamentos transversais do domínio da placa da k-ésima iteração
D	: módulo de rigidez à flexão da placa
$\underset{\sim}{D}$	: matriz dos coeficientes da integração de domínio para o problema de dinâmica
$D_{\Omega\Gamma}$, $D_{\Omega\Omega}$	: matriz cujos elementos dependem dos deslocamentos do domínio da placa
$\overline{D}$	: coeficiente de amplificação dinâmica
E	: módulo de elasticidade transversal
$\underset{\sim}{f}_{i}$	: matriz dos auto vetores já calculados
FA	: multiplicador do argumento da função logaritmo neperiano
F_i	: forças volumétricas
$\underset{\sim}{F}$	: vetor das forças distribuídas no domínio
g	: carregamento uniformemente distribuído
g^*	: carregamento fictício uniformemente distribuído
G	: módulo de elasticidade longitudinal
$\underset{\sim}{G}$	: matriz dos coeficientes dos deslocamentos
h	: espessura da placa
$\underset{\sim}{H}$	: matriz dos coeficientes dos esforços
k	: rigidez do sistema
K	: constante da solução fundamental de $\mathbf{u_3}^*$
l_i	: dimensões da placa
L	: tamanho do elemento
m	: massa do sistema

M_{ij}	: momentos internos por unidade de comprimento
M_n	: momento por unidade de comprimento para a flexão na direção normal ao contorno
M_n^*	: solução fundamental do momento fletor normal ao contorno
M_{ns}	: momento volvente por unidade de comprimento no contorno
M_{ns}^*	: solução fundamental do momento volvente no contorno
M_s	: momento por unidade de comprimento para a flexão na direção tangente ao contorno
n	: vetor unitário normal ao contorno da placa
n_i	: cossenos diretores da normal em relação aos eixos x_i
N	: número de nós do contorno
N_c	: número total de cantos do contorno da placa
N_{cr}	: carga crítica
N_e	: número de elementos de contorno
N_{ij}	: tensor do carregamento do plano da placa
N_{xi}	: força normal aplicada na direção $\mathbf{x_i}$
q	: carregamento distribuído
Q_{ij}	: cortantes internas por unidade de comprimento
Q_n	: cortante por unidade de comprimento na direção normal ao contorno
Q_n^*	: solução fundamental da cortante
Q_s	: cortante por unidade de comprimento na direção tangencial ao contorno
r	: distância de onde se aplicou o carregamento unitário ao ponto onde se deseja obter a força ou deslocamento na solução fundamental
r, θ, x_3	: sistema de coordenadas cilíndricas
$r_{,i}$	: projeção do raio vetor na direção $\mathbf{x_i}$

Rc_i : reação de canto do nó **i**

Rc_i^* : solução fundamental da reação de canto do nó **i**

s : vetor unitário tangente ao contorno da placa

s_p : eixo com coordenada linear de origem no nó **i**

t : instante do tempo

t_I : período do carregamento impulsivo

$\underset{\sim}{t}$: vetor dos deslocamentos do elemento

T : matriz de transformação de coordenadas

T_D : período do carregamento dinâmico

T_i : forças de superfície

T_j^i : esforço **j** do nó **i**

$\underset{\sim}{T}$: vetor dos esforços em todos os nós do contorno

$\underset{\sim}{T_k^j}$: vetor dos esforços **k** do nó **j**

u : deslocamento do sistema

$u(t)$: resposta do deslocamento em função do tempo

u_0 : deslocamento inicial do sistema

u_3 : deslocamento transversal da placa

u_3^* : solução fundamental do deslocamento transversal

u_{3ci} : deslocamento transversal do canto **i** da placa

u_{3ci}^* : solução fundamental do deslocamento transversal do canto **i** da placa

$u_{3,ij}$: curvaturas nos pontos internos

u_e : deslocamento estático do carregamento dinâmico

u_i : deslocamento de um ponto na direção $\mathbf{x_i}$

$\dot{u}$: velocidade do sistema

$\dot{u}_0$	: velocidade inicial do sistema
$\ddot{u}$	: aceleração do sistema
$\underset{\sim}{u}$	: vetor dos deslocamentos do elemento
U_j^i	: deslocamento **j** do nó **i**
$\underset{\sim}{U}$	: vetor dos deslocamentos em todos os nós do contorno
$\underset{\sim}{U_k^j}$	: vetor do deslocamento **k** do nó **j**
V_n	: força cortante equivalente
V_n^*	: solução fundamental da cortante equivalente
x_i	: sistema de coordenadas cartesiano
$\underset{\sim}{x}^k$	: vetor das incógnitas no contorno da k-ésima iteração
$\underset{\sim}{X}$	: vetor das variáveis incógnitas
$\underset{\sim}{X_k^j}$	: vetor de coordenadas $\mathbf{x}_j$ do elemento **k**
$\underset{\sim}{X_s}$	: vetor de qualquer uma das variáveis do elemento
$\underset{\sim}{y}$	: vetor das curvaturas
$\underset{\sim}{y}^k, \underset{\sim}{z}^k$	: vetor das curvaturas na k-ésima iteração

Resumo

SIMÕES, R. **Um Estudo de Placas sob Cargas Dinâmicas Estacionárias e com o Efeito da Não Linearidade Geométrica sob Cargas Estáticas Usando o Método dos Elementos de Contorno**. Campinas: UNICAMP, FEC, 2001. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, 2001. 222 p.

O Método dos Elementos de Contorno foi utilizado para estudar placas com a hipótese de pequenos deslocamentos segundo a teoria clássica. O efeito da não linearidade geométrica foi considerado para se obter as cargas críticas para placas homogênias e isotrópicas. Também foram obtidas as freqüências naturais das placas usando a teoria das vibrações livres. Ambas as análises foram feitas para várias condições de contorno. A iteração inversa do coeficiente de Rayleigh foi utilizada para se obter os menores autovalores, assim como seus correspondentes autovetores. Foram utilizados elementos isoparamétricos lineares para a discretização do contorno e do domínio da placa. A discretização do domínio da placa foi necessária para a inclusão do efeito da não linearidade geométrica nos problemas estáticos e do efeito de inércia nos problemas dinâmicos. A integral de domínio, em cada célula, foi transformada em uma integral de contorno equivalente, acelerando desta forma o processo de integração.

Palavras Chaves: Elementos de Contorno, Placas, Não Linearidade Geométrica, Dinâmica Estacionária.

Abstract

SIMÕES, R. **Um Estudo de Placas sob Cargas Dinâmicas Estacionárias e com o Efeito da Não Linearidade Geométrica sob Cargas Estáticas Usando o Método dos Elementos de Contorno**. Campinas, Brasil: UNICAMP, FEC, 2001. Dissertation (Master) – Universidade Estadual de Campinas, 2001. 222 p.

The Boundary Element Method was used to study plates with small strain hypotheses under classical theory. The geometrical non-linearity effect was considered to obtain in plane critical loads for homogeneous and isotropic plates. On the other hand, the natural frequencies of the plates were computed using the free vibration theory. Several plates were analyzed with different boundary conditions. The inverse iteration with the Rayleigh quotient was employed to obtain the smaller eigenvalues with their corresponding eigenvectors. Isoparametric linear elements were used on the boundary and in the domain. The domain discretization was required to include the geometrical non-linear effect in static problems or the inertia effect in dynamic problems. The domain integral was converted to an equivalent boundary integral at each cell to accelerate the integration process.

Key Words: Boundary Element, Plates, Buckling, Stationary Dynamics

1. INTRODUÇÃO

1.1. Generalidades

Elementos estruturais de superfícies planas paralelas são extremamente utilizados nos mais variados ramos da engenharia, tais como civil, mecânica, aeronáutica, naval, entre outros. A placa e a chapa são exemplos destes elementos onde àquele que tem os carregamentos perpendiculares ao plano médio entre as superfícies é denominado de placa e o que tem os carregamentos paralelos ao plano médio é chamado de chapa. A necessidade de construção e concepção de grandes obras de arte (pontes, edifícios, barragens, silos, reservatórios, etc.) que utilizam diretamente estes elementos, despertou em engenheiros e pesquisadores um grande interesse de verificar e estudar o comportamento destes elementos estruturais.

O estudo de placas e de chapas (estado plano de tensões e/ou deformações) teve suas origens há quase dois séculos, porém a maioria dos problemas relacionados aos casos reais foi resolvida durante os últimos 70 anos. Os nomes de *Neuber*, *Navier*, *Poisson*, *Kirchhoff*, *Timoshenko*, *Galerkin*, *Vlassov*, *Kalmanok*, *Girkmann*, *Saint-Germain*, dentre outros grandes pesquisadores de todo o mundo estão intimamente relacionados com os fundamentos da teoria clássica de placas, contribuindo significativamente para a sua ampliação.

Apesar das hipóteses simplificadoras adotadas, as soluções analíticas das equações diferenciais que governam o problema de flexão de placas são conhecidas apenas em alguns casos particulares. O mesmo pode-se afirmar para o caso das chapas.

Nas últimas décadas o efeito dos carregamentos dinâmicos nas estruturas tem sido alvo de muitos estudos, principalmente após a ocorrência de problemas estruturais devido a estes efeitos.

Dada a dificuldade de determinação de soluções analíticas para casos mais gerais, como o do efeito da não linearidade geométrica ou o efeito de carregamentos dinâmicos associados às placas, surgiram técnicas numéricas para esta análise que envolve equações diferenciais de difícil resolução. Dentre as técnicas, destacam-se: o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Na utilização de qualquer um desses métodos, deve-se tomar o devido cuidado com as limitações inerentes a eles, de tal forma que estas não causem imprecisões no tratamento do problema a ser analisado.

1.2. Considerações Sobre o Estudo da Flexão de Placas

Decorrente da adoção de várias hipóteses simplificadoras, visando analisar a placa como um elemento bidimensional, surgiram várias teorias para verificar o comportamento geral desta superfície estrutural. A primeira equação descrevendo a flexão de placas acredita-se que foi proposta por *Navier* **[1]** em 1823, onde a rigidez à flexão é definida em termos de uma constante elástica e são necessárias três condições de contorno naturais. Na descrição da vibração de uma membrana perfeitamente flexível, *Euler* **[1]** realiza a primeira crítica a esta teoria. Na análise de placas, *Bernoulli* **[1]** obtém uma equação diferencial para placas que consiste em uma aproximação através de dois sistemas de vigas. Uma nova tentativa de melhorar a teoria de placas foi realizada em 1829 por **POISSON [2]** que levou a um problema com três condições de contorno naturais. Em 1850, **KIRCHHOFF [3]** estabeleceu as hipóteses fundamentais da teoria de placas, derivando a expressão da energia potencial para uma placa inclinada e aplicando o princípio dos trabalhos virtuais para obter uma equação diferencial, onde a rigidez a flexão é definida em termos do módulo de *Young* e do coeficiente de *Poisson*. Adicionalmente, ele percebeu que as condições de contorno propostas por *Poisson* não são compatíveis com a natureza de quarta ordem da equação diferencial por ele obtida, mostrando que estas condições de contorno podem ser reduzidas a duas condições naturais. O efeito da deformação por cortante não é levado em conta nesta teoria, logo as retas normais ao plano médio da placa permanecem normais após a deformação. Todos os deslocamentos da placa são dados em função de duas coordenadas no plano médio da placa, ou seja, o problema é reduzido a um caso bidimensional. Esta teoria apresenta bons resultados para o comportamento de placas com pequenos deslocamentos para uma grande variedade de carregamentos e geometrias.

1.3. Método dos Elementos de Contorno Aplicado à Análise de Placas

Pode-se afirmar que em 1872, **BETTI [4]** foi o primeiro a estudar a teoria da elasticidade com equações integrais. Em 1886, *Somigliana* apresentou a equação integral que estabelece a relação entre as forças, os deslocamentos no contorno de um corpo e seus deslocamentos internos, que ficou conhecida como identidade de *Somigliana*.

A formulação de *Somigliana*, bem como outras de mesma natureza, é chamada de formulação direta, pois os deslocamentos e forças do contorno (função de densidade da equação integral) são tomados com seus valores reais, sem aproximações. Em muitos casos particulares de carregamentos e vinculações, não é simples escrever tais funções, o que dificulta a aplicação da formulação direta.

Em 1903, **FREDHOLM [5]** publicou um trabalho sobre a aplicação das equações integrais dos problemas potenciais em um contorno dividido em partes, sendo as funções de densidade aproximadas por funções fictícias. A estas aproximações para as funções de densidade de uma equação integral, dá-se o nome de formulação indireta.

Os trabalhos de *Somigliana* e *Fredholm* formam a base para o atual Método dos Elementos de Contorno. Uma série de trabalhos, principalmente de autores russos, deram uma maior compreensão às equações integrais. Dentre eles destacam-se: em 1929 **KELLOG [6]**, em 1953 **MUSKHELISHVILI [7]**, em 1957 **MIKHLIN [8]** e em 1964 **SMIRNOV [9]**. Estes autores utilizaram formulações indiretas. As bases das formulações indiretas foram estabelecidas em 1965 por **KUPRADZE [10]**, considerando a solução fundamental de *Kelvin* para resolver o problema de elasticidade.

Em 1963, **JASWON [11]** e **SYMM [12]** publicaram trabalhos sobre a solução numérica de problemas regidos pela equação de *Laplace*. Suas aproximações consistem em elementos lineares onde as funções de potencial são assumidas constantes no contorno. As integrais de contorno são avaliadas usando-se a regra de *Simpson*, exceto pelas integrais singulares que têm tratamento analítico. Adicionalmente, propõem uma formulação mais geral através da aplicação da Segunda Identidade de Green com potenciais e suas derivadas desconhecidas no contorno **[11, 13]**.

Em 1967, **RIZZO [14]** apresentou, para a elasticidade bidimensional, a formulação na sua forma direta. Neste mesmo ano, **JASWON et al. [15]** deram início à análise de placas utilizando o Método dos Elementos de Contorno na sua forma indireta. Sua proposta é a decomposição da equação bi-harmônica em duas equações harmônicas que, resolvidas por equações integrais e devidamente combinadas, permite a resolução do problema.

O trabalho de **RIZZO [14]** foi expandido para problemas tridimensionais a partir de 1969 por **WATSON [16, 17]**, **CRUSE [18, 19]** e **CRUSE et al. [20]**. Mais tarde **LACHAT [21]** propôs a utilização de polinômios de grau mais alto com funções de densidade que poderiam trazer melhores resultados. Tal proposta foi implementada em 1975 por **LACHAT & WATSON [22, 23]**. Mais tarde outros autores passaram a usar elementos isoparamétricos quadráticos, onde tanto a geometria do contorno como as funções densidade são aproximadas por funções quadráticas.

Em 1976, **HANSEN [24]** apresentou a análise de placas infinitas com furos e contorno não carregado através do método direto. Ele utiliza duas equações integrais, uma correspondente à expressão do deslocamento e outra correspondente a sua derivada em relação a uma direção qualquer.

Em 1978, **BREBBIA [25]** fez uma generalização do Método dos Elementos de Contorno, apresentando uma formulação partindo da técnica dos resíduos ponderados. Destacam-se as formulações no campo da elasticidade linear utilizando soluções fundamentais próprias para a consideração de superfícies livres, muito versáteis na solução de problemas que envolvem a análise de tensões próximas a uma borda livre, analisados posteriormente por **NAKAGUMA [26]** e **TELLES & BREBBIA [27]**.

Ainda em 1978, **BÉZINE & GAMBY [28]** propuseram uma formulação direta para o tratamento de placas. As equações integrais são encontradas a partir da Segunda Identidade de *Green* e considera-se como variáveis os deslocamentos transversais e suas derivadas na direção normal ao contorno ou a força cortante equivalente e o momento fletor normal ao contorno. Devido ao tipo de problema são encontradas duas equações integrais relativas ao deslocamento transversal e à derivada na direção normal, respectivamente. Com esta formulação eles analisam várias placas quadradas com diversas combinações de condições de contorno. Outros trabalhos são desenvolvidos utilizando a formulação direta, dentre eles **BÉZINE [29]**, **STERN [30]** e **DANSON [31]**. Na mesma época, alguns pesquisadores tratam o problema de uma placa quadrada engastada em todo o seu contorno utilizando a formulação indireta. Dentre os trabalhos, citam-se **ALTIERO & SIKARSKIE [32]** e **WU & ALTIERO [33]**.

Em 1979, **TOTTENHAN [34]** apresentou uma discussão sobre as formulações direta e indireta aplicadas às placas delgadas, placas apoiadas sobre base elástica e cascas abatidas.

Em 1983, **VENTURINI & BREBBIA [35]** expuseram uma vantagem do Método dos Elementos de Contorno, apresentando uma formulação para materiais não resistentes a tração e descontinuidade.

Em 1984, **COSTA JR. & BREBBIA [36,37]** empregaram o método direto na formulação desenvolvida para resolver problemas de placas tais como: flexão, flexão em base elástica, vibração e flambagem.

Em 1986, **GUO-SHU & MUKERJEE [38]** e **HARTMANN & ZOTEMANTEL [39]** adotaram um esquema de interpolação hermetiana para a flecha. Eles discutem o tratamento das integrais de domínio, vínculos no domínio e singularidades decorrentes da formulação direta. Neste mesmo ano **MOSHAIOV & VORUS [40]** estudam o comportamento elastoplástico usando um esquema de carregamento incremental e calculando os momentos fletores plásticos iniciais por um processo iterativo. A placa é dividida em células, sendo o momento plástico sobre cada célula é admitido constante, para avaliação do efeito das integrais de domínio.

Em 1987, **PAIVA [41]** estudou soluções numéricas para diversos casos de carregamentos, condições de contorno e posicionamento do nó singular, adotando duas formas para equacionar o problema. Também apresenta a análise de estruturas formadas por placas, vigas e pilares através do Método dos Elementos de Contorno.

Entre 1988 e 1989, **HARTLEY & ABDELL-AKHER [42, 43]** e **HARTLEY & AHMED [44]** sugeriram um esquema de integração analítica para evitar os problemas de instabilidade numérica que podem surgir devido às singularidades que aparecem nos integrandos. Também discutem a determinação de valores nos pontos internos.

Em 1989, **PALERMO JR. [45]** utilizou a formulação direta pela técnica dos resíduos ponderados para análise de peças de seção delgada. Também é verificado o comportamento destas peças com a adição de diafragmas.

Em 1989, **BREBBIA & DOMINGUES [46]** advertiram sobre a obtenção de erros pelo método devido à utilização de uma técnica numérica inadequada. Neste mesmo ano, **KATSIKADELIS & ARMENAKAS [47]** combinaram o Método dos Elementos de Contorno com o Método das Diferenças Finitas para a solução simultânea de duas equações integrais e duas equações diferenciais das placas de Reissner.

Em 1990, **CAMP & GIPSON [48]** utilizaram vários tipos de elementos de contorno isoparamétricos. Suas integrais são calculadas analiticamente.

Em 1991, **ELZEIN [49]** resolveu alguns problemas de placas com a introdução das forças de cantos ou forças de *Kirchhoff*, forças estas que atuam em cantos do contorno. Neste mesmo ano, **HARTMANN [50]** desenvolveu uma formulação direta aplicada à análise estática de placas isotrópicas linearmente elásticas com a teoria clássica. Na implementação numérica do método são usados polinômios de *Hermite* para deslocamento transversal e uma interpolação linear para as outras funções do contorno.

Em 1992, **KARAMI et al. [51]**, desenvolveram uma formulação utilizando um sistema onde são acopladas uma equação bi-harmônica e uma equação harmônica, resolvidas simultaneamente. As integrais de contorno ainda são calculadas analiticamente. Neste mesmo ano, **VABLE & ZHANG [52]** adotaram a formulação indireta para a análise de placas, fazendo uso de um esquema de integração analítica e de funções fictícias, aproximadas por polinômios de *Lagrange* e *Hermite*.

Em 1994, **CHUEIRI [53]** abordou a análise elastoplástica de placas usando o método incremental-iterativo, baseando-se na técnica dos momentos iniciais. As integrais de domínio que resultam destes momentos são discretizadas através da divisão do domínio em células triangulares, com função aproximadora linear. São propostos neste trabalho, modelos para a análise elastoplástica de lajes de concreto armado.

Em 1998, **OLIVEIRA NETO [54]** apresentou uma nova formulação admitindo três parâmetros nodais de deslocamento para sua representação integral: deslocamento transversal e suas derivadas nas direções normal e tangencial ao contorno. São usados dois valores nodais para os esforços: momento fletor normal e força cortante equivalente. Obteve-se desta forma, três equações integrais de contorno por nó, a partir da discretização do contorno da placa.

1.4. Efeito da Não Linearidade Geométrica Associada às Placas

No início do século passado, *Foppl* [59] usando o conceito das funções de tensões em ordem superior, simplifica a complicada equação de instabilidade para placas, procedimento este tentado antes por *Kirchhoff* e *Clebsh* [59].

Em 1910, *von Karman* [59] remove a condição de esbeltez de placa e na derivação antes determinada, propõe uma função aproximadora para o comprimento efetivo de flambagem da placa. Neste trabalho, tem-se como característica a utilização da solução fundamental do problema de flexão em placas clássicas com o efeito de não-linearidade geométrica. Conseqüentemente, as integrais de domínio contendo termos de curvaturas resultantes das integrações por partes são utilizadas.

Em 1974, **NIWA et al. [60]** descreveram a primeira solução integral do contorno para problemas de não-linearidade geométrica associado às placas. Esta solução foi obtida usando aproximações indiretas em placas uniformemente carregadas em seu plano médio.

Em 1981, **BÉZINE [61]** obteve uma formulação geral do problema. Utilizam-se células internas para o cálculo das integrais de domínio. Em 1984, **COSTA & BREBBIA [36]** se aprofundaram no trabalho anterior.

SYNGELLAKIS & KANG [62], eliminaram as curvaturas do domínio e apresentaram uma solução que requer apenas o deslocamento transversal do domínio. Eles consideram o problema de placa usando elementos de domínio de ordem superior para obter aproximações das curvaturas.

Em 1983, **TANAKA [63]** apresentou uma formulação integral na forma incremental usando como base as equações de *von Karman* e propôs uma técnica de transformação das trações e tensões nas condições de contorno.

Em 1999, **DUARTE [64]** tratou da análise de não-linearidade geométrica de placas isotrópicas submetidas à compressão. Os resultados das cargas críticas foram obtidos utilizando-se a iteração inversa e o coeficiente de Rayleigh. São apresentados alguns exemplos com algumas condições de contorno.

1.5. Efeito das Vibrações Harmônicas Livres e Forçadas Associadas às Placas

Em 1972, **VIVOLI [67]** e **VIVOLI & FILIPPI [68]** foram os primeiros a considerar a vibração livre de placas através do método indireto relacionado ao MEC, utilizando para isto elementos de contorno constantes.

Em 1979, **HUTCHINSON & WONG [69]** apresentaram o método direto do MEC envolvendo o deslocamento transversal, rotação normal, o Laplaciano do deslocamento e a derivada normal do Laplaciano do deslocamento seguindo o trabalho de 1976 de **HANSEN [24]** que analisava o comportamento estático de placas. Eles obtiveram resultados numéricos para placas envolvendo lados simplesmente apoiados e engastados empregando somente a parte real da solução fundamental levando isso a ganhos computacionais.

Em 1980, **BÉZINE [70]** utilizou uma discretização de domínio para a consideração das forças de inércia decorrentes das vibrações livres. Para isto, utilizou elementos de contorno e células internas constantes.

Em 1981, **WONG & HUTCHINSON [71]** apresentaram a formulação completa para o problema de vibração livre de placas com a formulação direta do MEC, incluindo o efeito das angulosidades e envolvendo o deslocamento transversal, a rotação normal, o momento fletor e a força cortante equivalente como mostrado por **STERN [30]** em 1979 na análise estática de placas.

Entre 1981 e 1982, **NIWA et al [72, 73]** apresentaram um trabalho amplo para análise de vibração livre de placas através do método indireto incluindo detalhes de resultados numéricos.

Em 1982, **BÉZINE & GAMBY [74]** trataram o problema de vibração forçada em placas através do método direto do MEC em conjunto com a integração no domínio do tempo. Eles utilizaram elementos de contorno constantes e esquema de passos de carga para obter respostas transitórias.

Em 1985, **KITAHARA [75]** apresentou a formulação integral para o método direto associado ao problema de vibrações livres de placas. Esta formulação foi associada a placas submetidas a forças no plano médio destas. Foram analisados os efeitos das angulosidades no contorno com a utilização de elementos retos e curvos, com funções de aproximação constantes.

Em 1985, **COSTA JR. [66]** utilizou a formulação direta para o MEC na resolução de alguns exemplos de vibrações livres de placas.

Entre 1986 e 1989, **PROVIDAKIS & BESKOS [76, 77, 78]** complementaram **[71]** utilizando elementos de contorno isoparamétricos quadráticos para aumentar a precisão. Apresentaram uma formulação completa e geral para o método direto do MEC no domínio da freqüência para obter a resposta transitória de placas fletidas como extensão do trabalho **[30]** para o caso dinâmico.

Entre 1986 e 1990, **O'DONOGHUE & ATLURI [79, 80]**, **PROVIDAKIS et al [76, 81, 82]**, **BESKOS et al [83]** e **BESKOS [84]** estenderam o método do MEC para vibrações forçadas em placas com a ajuda de uma transformada de tempo e de Laplace para a formulação de domínio.

Em 1987, **HEUER & IRSCHIK [85]** e **IRSCHIK et al [86]** utilizaram o método indireto do MEC para analisar vibrações livres em placas. Utilizaram funções de Green em um domínio finito, resultando em uma reduzida discretização de domínio.

Entre 1987 e 1988, **TANAKA et al [87, 88]** estudaram vibrações livres em placas associadas em estruturas utilizando elementos de contorno e células internas constantes.

Entre 1987 e 1989, **KATSIKADELIS & SAPOUNTZAKIS [89, 90]** e **KATSIKADELIS et al [91]** estudaram vibrações livres e forçadas em placas com variação de espessura utilizando discretização de domínio, envolvendo o deslocamento transversal, o Laplaciano do deslocamento transversal e várias derivadas destes deslocamentos na formulação.

Em 1988, **COSTA JR.[92]** continuou o trabalho de **BÉZINE [70]**, fazendo novas análises de vibrações livres de placas, utilizando ainda elementos de contorno e células internas constantes.

1.6. Conteúdo do Trabalho

No **Capítulo 2** são apresentadas de forma resumida, as relações básicas da teoria tridimensional da elasticidade em termos de coordenadas cartesianas e cilíndricas.

No **Capítulo 3** é apresentado um resumo da teoria de **KIRCHHOFF [3]** para placas, onde são obtidas as expressões de esforços em função do deslocamento em coordenadas cartesianas e cilíndricas. Neste capítulo também é obtida a solução fundamental de placas, ou seja, a função deslocamento para uma placa infinita submetida a um carregamento transversal definido pela função delta de *Dirac*.

No **Capítulo 4** são apresentadas as equações integrais de contorno para a flexão de placas para pontos no domínio e no contorno, que são posteriormente utilizadas na aplicação do Método dos Elementos de Contorno. Estas equações são obtidas a partir das soluções fundamentais, utilizando-se o teorema de *Betti*. Neste capítulo também são apresentadas as transformações das integrais de domínio em integrais de contorno para dois tipos de carregamentos, uniformemente distribuído e hidrostático.

No **Capítulo 5** é descrito o Método dos Elementos de Contorno, em que as equações integrais são discretizadas com auxílio de funções aproximadoras lineares para as funções incógnitas, obtendo-se desta forma um sistema de equações lineares.

No **Capítulo 6** é apresentada uma introdução da não-linearidade geométrica associando esta às equações integrais de placas.

No **Capítulo 7** é apresentada uma introdução de vibrações e cargas dinâmicas em estruturas e a sua inclusão nas equações integrais de placas.

No **Capítulo 8** são apresentados alguns exemplos de flexão de placas com diferentes geometrias de contorno, condições de contorno e carregamentos de domínio, alguns exemplos de obtenção de cargas críticas para algumas placas quadradas, exemplos de placas variando-se a constante de integração da solução fundamental, alguns exemplos de placas submetidas à vibração livre e a carregamentos harmônicos.

No **Capítulo 9** são apresentados os esquemas dos programas desenvolvidos para a obtenção dos resultados do **Capítulo 8**.

No **Capítulo 10** são apresentadas as conclusões do trabalho.

No **Apêndice A** é apresentado o teorema da energia aplicado à flexão de placas, ao efeito da não linearidade geométrica em placas e ao efeito de vibrações livres em placas.

2. ELASTICIDADE LINEAR

2.1. Introdução

Neste capítulo são apresentadas as formulações básicas da teoria da elasticidade linear utilizando as relações deformação-deslocamento, as equações constitutivas e as equações de equilíbrio. É apresentada a formulação para o caso tridimensional, na qual seis componentes de tensão são escritas em função de seis componentes de deformação utilizando a Lei de *Hooke*. As formulações são escritas em termos de coordenadas cartesianas e cilíndricas, visando à posterior obtenção das equações diferenciais que governam o problema de flexão de placas.

2.2. Relações Deformação-Deslocamento

Seja um sólido contínuo e homogêneo **B**, posicionado genericamente no espaço. Este sólido sofre deformação quando a posição relativa entre dois pontos do mesmo é alterada. Se a distância entre qualquer par de pontos deste sólido permanecer a mesma, ele é considerado rígido. Logo, o movimento de corpo rígido é caracterizado por uma translação e/ou uma rotação do sólido. Dado um sólido nas posições indeformada e deformada (**Figura 2.1**), tomando-se dois pontos do mesmo infinitamente próximos:

$M\ (x_1, x_2, x_3)$ e $N\ (x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3)$

obtêm-se, após a deformação do sólido, as seguintes coordenadas para estes pontos:

$M^*\ (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ e $N^*\ (\xi_1+d\xi_1, \xi_2+d\xi_2, \xi_3+d\xi_3)$

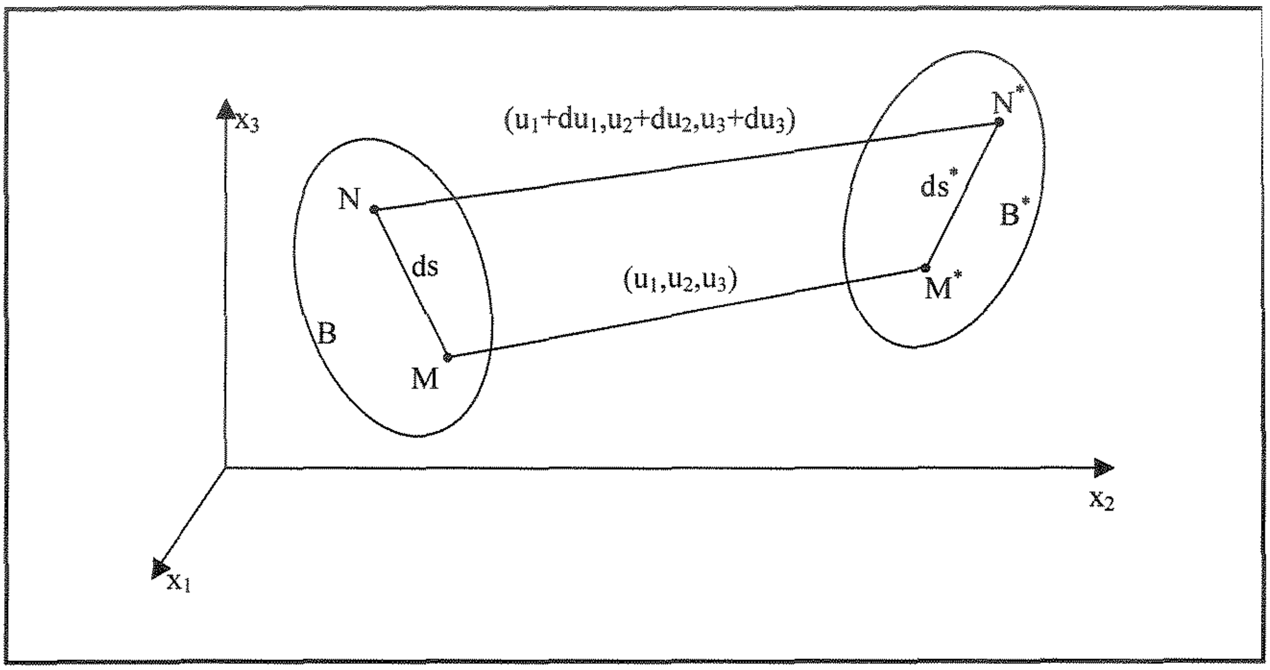


Figura 2.1 – Estado de deformação de um sólido

As relações entre as coordenadas de **M** e **M*** e de **N** e **N*** são dadas por:

$$\xi_i = x_i + u_i \tag{2.1}$$

$$\xi_i + d\xi_i = x_i + dx_i + u_i + du_i \tag{2.2}$$

Escrevendo-se os deslocamentos do ponto **N** na forma de série de *Taylor* na vizinhança do ponto **M** e negligenciando os termos de ordem superior a **1**, obtêm-se:

$$u_i + du_i = (u_i)_M + \left(u_{i,j}\right)_M \cdot dx_j \tag{2.3}$$

Substituindo-se as equações (2.1) e (2.3) em (2.2), obtêm-se:

$$d\xi_i = dx_i + u_{i,j} \cdot dx_j \tag{2.4}$$

sendo o índice **M** omitido.

A mudança do comprimento do elemento **ds** após a deformação é dada por:

$$\left(ds^*\right)^2 - \left(ds\right)^2 = \left(d\xi_i \cdot d\xi_i\right) - \left(dx_i \cdot dx_i\right) \tag{2.5}$$

Introduzindo-se a definição de $\mathbf{d\xi_i}$ dada pela equação (2.4) em (2.5), obtêm-se:

$$\left(ds^*\right)^2 - \left(ds\right)^2 = 2 \cdot \varepsilon_{ij} \cdot dx_i \cdot dx_j \tag{2.6}$$

sendo ε_{ij} as componentes do tensor *Lagrangeano* de deformações dado por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} \cdot u_{k,j}\right) \tag{2.7}$$

No caso da adoção da hipótese de pequenos deslocamentos, os termos quadráticos da equação (2.7) são infinitesimais e podem ser considerados desprezíveis frente aos termos lineares. Logo, a equação (2.7) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{2.8}$$

2.3. Equações Constitutivas

Considerando-se que o sólido analisado seja contínuo, homogêneo e composto por um material elástico linear, sabe-se que a equação constitutiva relaciona o tensor de tensões (σ_{ij}) com o tensor de deformações (ε_{ij}) através da Lei de *Hooke*. Logo, em qualquer ponto do sólido, as componentes de tensão são relacionadas com as componentes de deformação segundo a expressão:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \tag{2.9}$$

sendo **C** o tensor de quarta ordem que contém as constantes elásticas do material.

Este tensor é composto por **81** constantes elásticas. Pode-se simplificar a expressão (2.9) considerando-se que os tensores de segunda ordem envolvidos são simétricos. Com isso passa-se a ter **36** constantes independentes. Se for considerada a existência de uma função de densidade de energia, pode-se mostrar que o tensor $\mathbf{C}_{ijkl}$ é simétrico em relação a cada par de índices, restando **21** constantes independentes. Como o material é suposto isotrópico, ou seja, suas propriedades independem da direção em que são medidas, estas constantes podem ser resumidas a apenas duas (**E**, ν). A equação (2.9) pode ser escrita como:

$$\sigma_{ij} = \frac{E \cdot \nu}{(1+\nu)\cdot(1-2\cdot\nu)} \cdot \delta_{ij} \cdot \varepsilon_{kk} + \frac{E}{(1+\nu)} \cdot \varepsilon_{ij} \tag{2.10}$$

sendo:

δ_{ij} o delta de *Kronecker*;

E o módulo de elasticidade longitudinal;

ν o coeficiente de *Poisson*.

A relação constitutiva (2.10) pode ser escrita em termos das tensões, ou seja:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \cdot \delta_{ij} \cdot \sigma_{kk} \tag{2.11}$$

2.4. Forças de Superfície e Volume

Seja um sólido contínuo e homogêneo de volume **V** e superfície de área **A**, onde atuam forças volumétricas $\mathbf{F_i}$ e forças de superfície $\mathbf{T_i}$ (**Figura 2.2**).

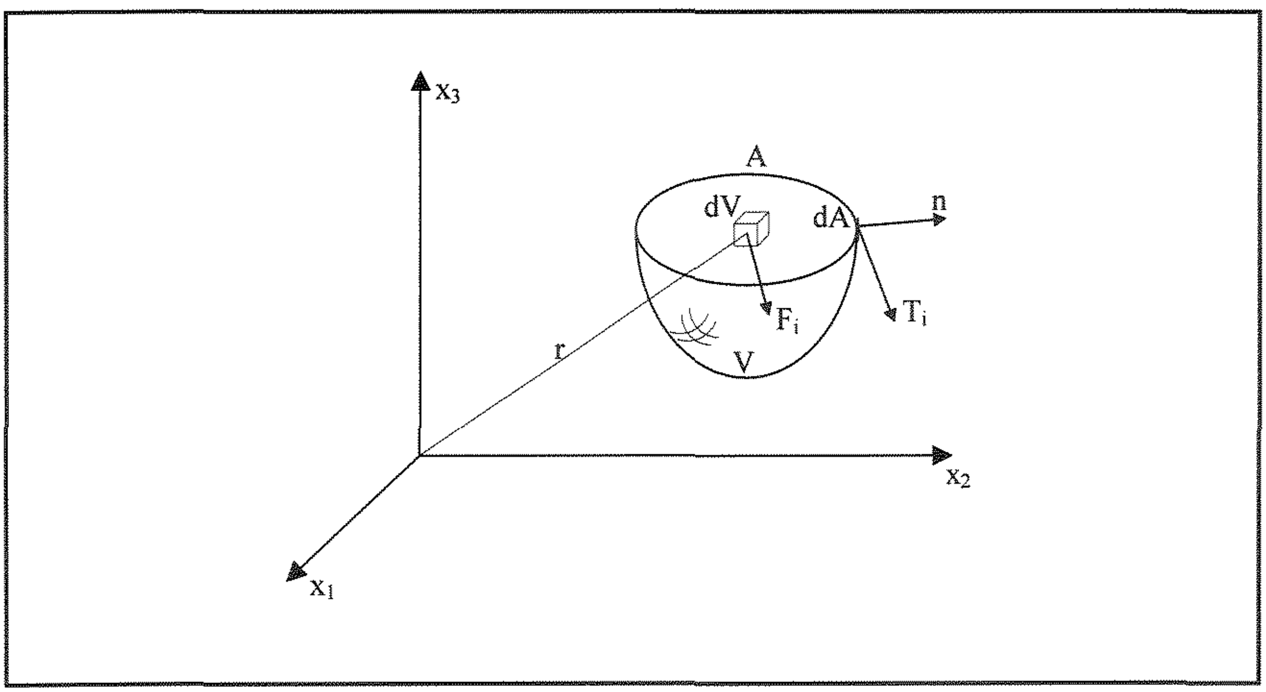


Figura 2.2 – Forças de superfície e de volume

Tomando-se um elemento infinitesimal de volume (**dV**) no interior deste corpo, o equilíbrio estático das forças que atuam neste elemento é:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \tag{2.12}$$

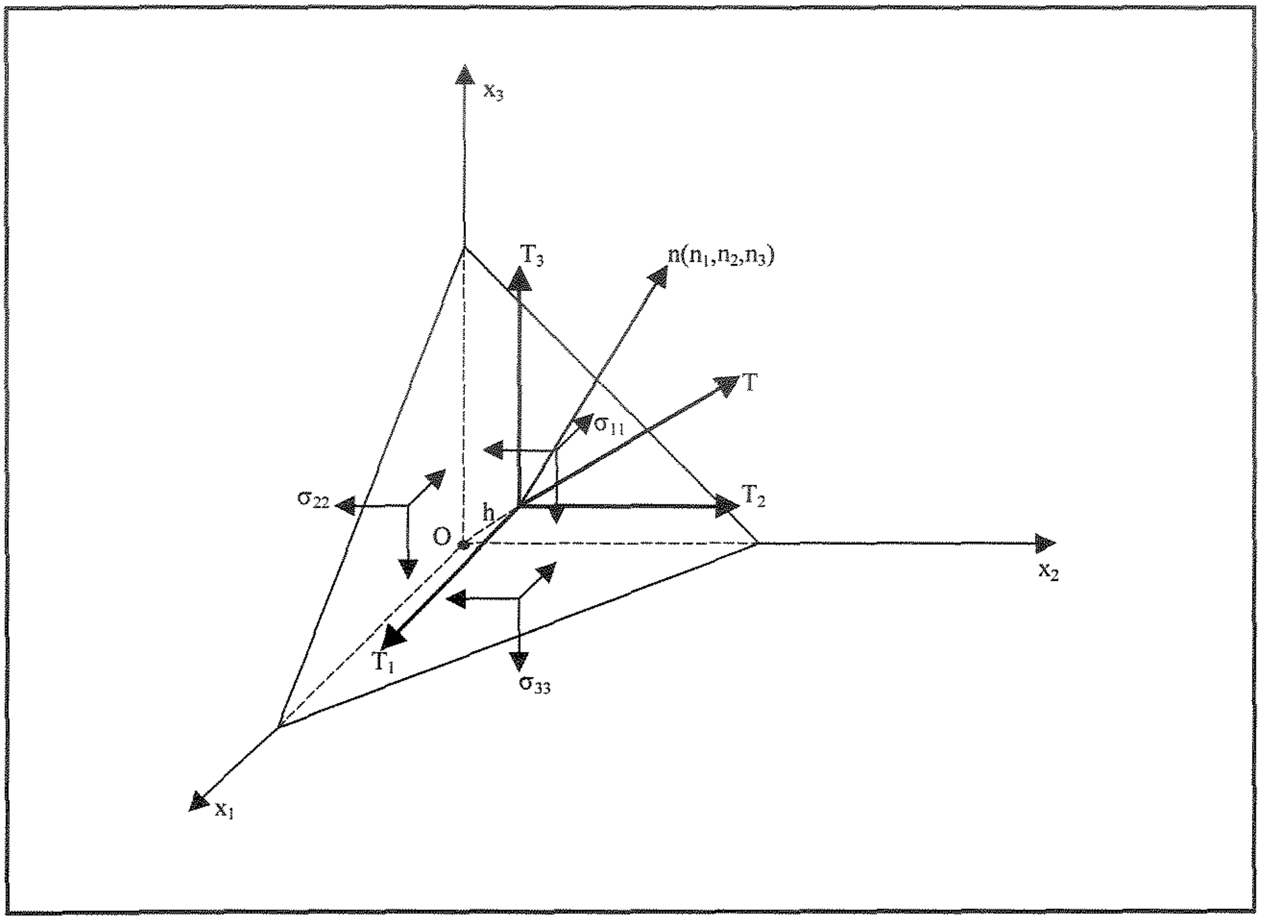


Figura 2.3 – Forças de superfície em um tetraedro infinitesimal

Dadas as componentes de tensão em um ponto **O**, as forças de superfície de um plano oblíquo aos três eixos de coordenadas são obtidas através do equilíbrio estático de um tetraedro infinitesimal, formado por este plano e por planos que contêm os eixos coordenados dois a dois (**Figura 2.3**). Considerando-se que a distância do plano oblíquo em relação a origem do sistema de coordenadas é inicialmente **h**, e fazendo **h** tender a zero, obtêm-se as forças de superfície, ou seja:

$$T_i = \sigma_{ij} \cdot n_j \tag{2.13}$$

sendo $\mathbf{n}_j$ os cossenos diretores dos ângulos formados pelo vetor normal em relação aos eixos coordenados $\mathbf{x}_j$.

2.5. Relações Tensão-Deformação em Coordenadas Cilíndricas

Na **Figura 2.4** é apresentado um sistema de coordenadas cartesianas ($\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$) relacionado com um sistema de coordenadas cilíndricas ($\mathbf{r}$, θ, $\mathbf{x}_3$) de forma que as relações básicas da teoria de flexão de placas possam ser escritas em coordenadas cartesianas ou cilíndricas.

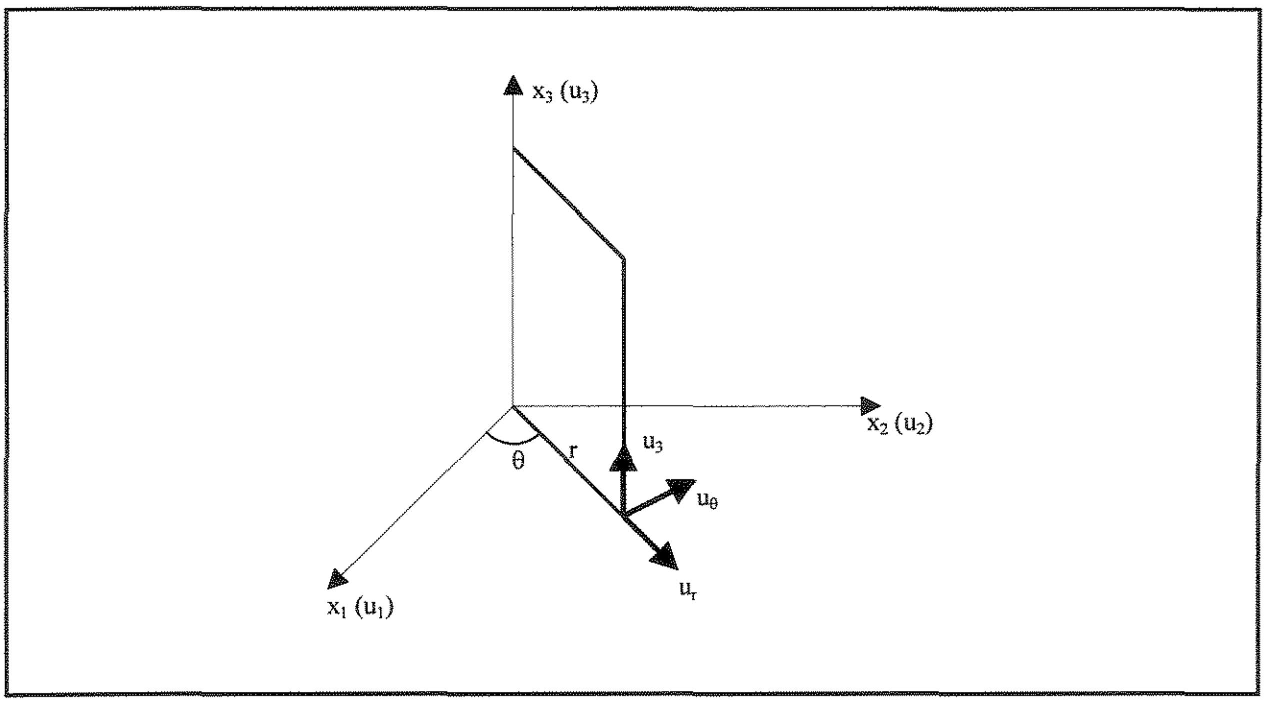


Figura 2.4 – Sistemas de coordenadas

De acordo com a equação (2.8), para uma placa sujeita a carregamentos normais a seu plano, os deslocamentos resultantes em sua superfície média são dados por $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$. Assim, através de um sistema de coordenadas cartesianas, as componentes de deformação em função dos deslocamentos podem ser escritas como:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \tag{2.14a}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} \end{pmatrix} \tag{2.14b}$$

Com relação a um sistema de coordenadas cilíndricas, a partir de um carregamento aplicado, os deslocamentos resultantes na superfície média da placa são dados por $\mathbf{u_r}$, $\mathbf{u_\theta}$ e $\mathbf{u_3}$. As componentes de deformação em função dos deslocamentos são escritas como:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{u_r}{r} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \tag{2.15a}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{r3} \\ \gamma_{\theta 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} - \dfrac{u_\theta}{r} \\ \dfrac{\partial u_r}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial r} \\ \dfrac{\partial u_\theta}{\partial x_3} + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial u_3}{\partial \theta} \end{pmatrix} \tag{2.15b}$$

Através da Lei de *Hooke*, equação (2.9), as componentes de deformação, em função das tensões em coordenadas cartesianas, são expressas como:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{2.16a}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} = \frac{1}{G} \cdot \begin{pmatrix} \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{pmatrix} \tag{2.16b}$$

sendo **G** o módulo de elasticidade longitudinal dado por:

$$G = \frac{E}{(1+\nu)} \tag{2.17}$$

Da mesma forma, as componentes de deformação, em função das tensões em coordenadas cilíndricas, podem ser expressas por:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{2.18a}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{r3} \\ \gamma_{\theta 3} \end{pmatrix} = \frac{1}{G} \cdot \begin{pmatrix} \tau_{r\theta} \\ \tau_{r3} \\ \tau_{\theta 3} \end{pmatrix} \tag{2.18b}$$

As equações (2.16), inicialmente expressas em função das componentes de tensão, podem ser invertidas para expressar as tensões em função das componentes de deformações em coordenadas cartesianas; desta forma obtêm-se:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1-2\cdot\nu)\cdot(1+\nu)} \cdot \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \tag{2.19a}$$

$$\begin{pmatrix} \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{pmatrix} = G \cdot \begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} \tag{2.19b}$$

De acordo com as equações (2.18), as componentes de tensão, em termos das componentes de deformação em coordenadas cilíndricas, podem ser expressas por:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1-2\cdot\nu)\cdot(1+\nu)} \cdot \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \tag{2.20a}$$

$$\begin{pmatrix} \tau_{r\theta} \\ \tau_{r3} \\ \tau_{\theta 3} \end{pmatrix} = G \cdot \begin{pmatrix} \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{r3} \\ \gamma_{\theta 3} \end{pmatrix} \tag{2.20b}$$

2.6. Equações de Equilíbrio

Considerando-se um elemento infinitesimal de dimensões $\mathbf{dx_i}$, onde atuam em cada ponto um conjunto de tensões internas, o equilíbrio estático deste corpo pode ser observado na **Figura 2.5**.

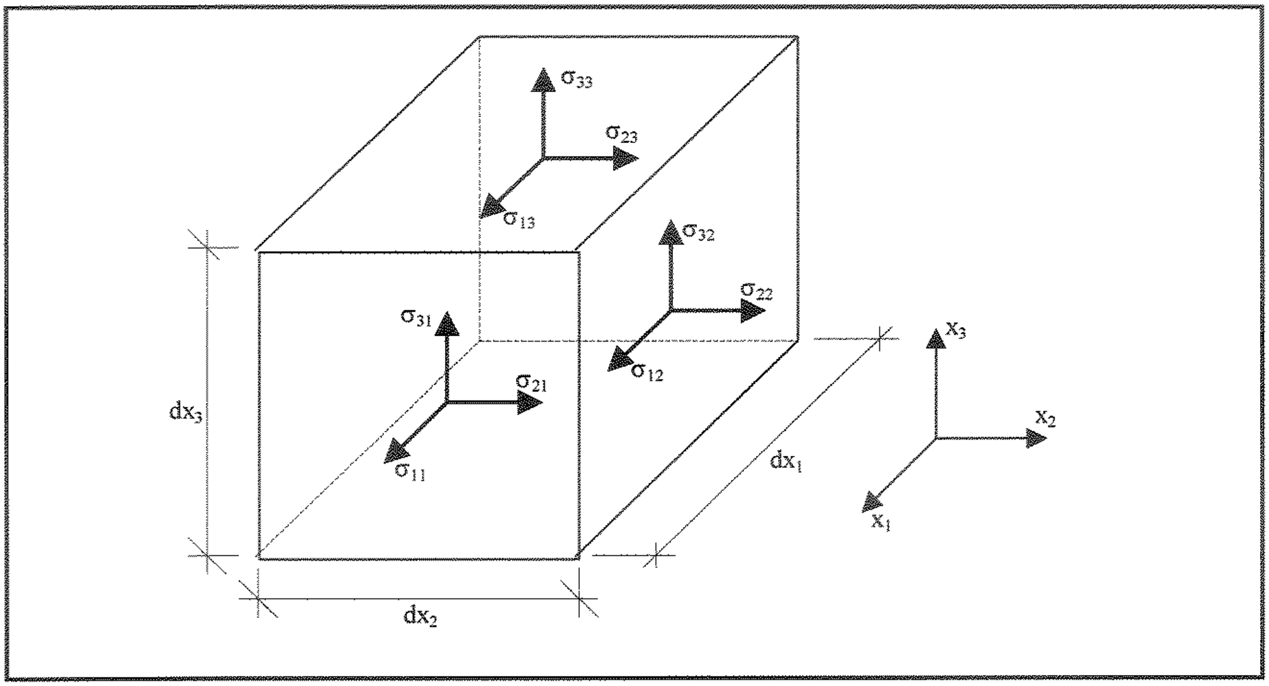


Figura 2.5 – Elemento infinitesimal

Levando-se em consideração as definições básicas do item 2.4, este equilíbrio está sujeito a um sistema de forças volumétricas $\mathbf{F}_i$ e também a um sistema de forças de superfície $\mathbf{T}_i$. Desta forma, a partir de um sistema de coordenadas cartesianas, pode-se escrever explicitamente as equações de equilíbrio deste elemento infinitesimal da seguinte forma:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} + F_1 = 0 \tag{2.21a}$$

$$\frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3} + F_2 = 0 \tag{2.21b}$$

$$\frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + F_3 = 0 \tag{2.21c}$$

As equações (2.21) podem ser escritas em notação indicial, ou seja:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \tag{2.22}$$

De maneira análoga, para um sistema de coordenadas cilíndricas, o equilíbrio estático é dado pelas seguintes equações:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{3r}}{\partial x_3} + \frac{1}{r} \cdot \left(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}\right) + F_r = 0 \tag{2.23a}$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{3\theta}}{\partial x_3} + \frac{2}{r} \cdot \tau_{r\theta} + F_\theta = 0 \tag{2.23b}$$

$$\frac{\partial \tau_{r3}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{\theta 3}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \frac{1}{r} \cdot \tau_{r3} + F_3 = 0 \tag{2.23c}$$

As componentes das forças de superfície $\mathbf{T}_i$, expressas em função das componentes de tensão em um ponto da superfície do elemento, são dadas por:

$$T_1 = \sigma_{11} \cdot n_1 + \tau_{12} \cdot n_2 + \tau_{13} \cdot n_3 \tag{2.24a}$$

$$T_2 = \tau_{21} \cdot n_1 + \sigma_{22} \cdot n_2 + \tau_{23} \cdot n_3 \tag{2.24b}$$

$$T_3 = \tau_{31} \cdot n_1 + \tau_{32} \cdot n_2 + \sigma_{33} \cdot n_3 \tag{2.24c}$$

sendo $\mathbf{n}_j$ o vetor normal à superfície do elemento.

Escrevendo-se as equações (2.24) em notação indicial, obtêm-se:

$$T_i = \sigma_{ij} \cdot n_j \tag{2.25}$$

3. FLEXÃO DE PLACAS

3.1. Introdução

Segundo **SAADA [55]**, uma placa é definida como um corpo limitado por duas superfícies planas paralelas, cuja distância entre elas é muito pequena se comparada com as dimensões dessas superfícies. É chamado de plano médio da placa, o plano que bissecciona a espessura **(h),** paralelo aos planos superior e inferior da placa.

Adota-se, para o elemento de placa mostrado na **Figura 3.1**, um sistema de coordenadas cartesianas de referência ($\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$), onde os eixos $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ estão contidos no plano médio da placa e o eixo $\mathbf{x_3}$ é normal a este com sua origem neste mesmo plano.

O carregamento em uma placa sempre é aplicado normal ao plano médio, podendo estar combinado ou não com um carregamento paralelo a este plano. Se o carregamento existente for só paralelo ao plano médio, seu efeito pode ser analisado pela teoria dos estados planos de tensão.

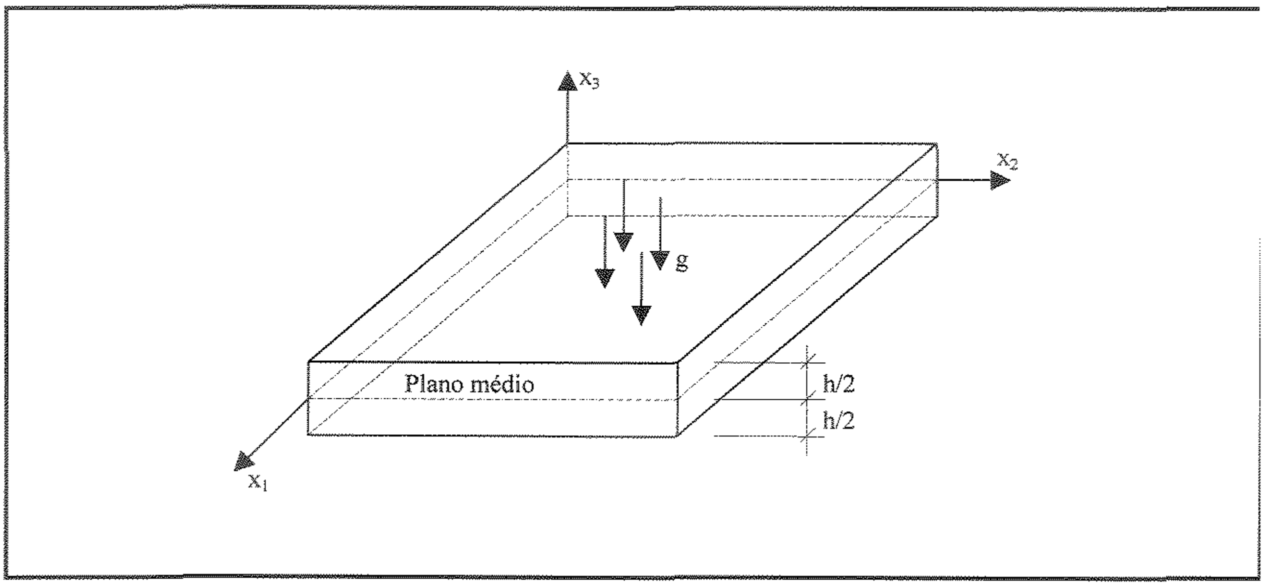


Figura 3.1 – Elemento de placa com a definição do sistema de coordenadas

3.2. Hipóteses Básicas

Na teoria clássica de placas, a análise do seu comportamento é feita em regime elástico linear, adotando um material homogêneo e isotrópico. O seu equilíbrio é realizado na posição indeslocada, utilizando-se a hipótese de pequenos deslocamentos. Logo, se a deformação da placa é pequena com relação a sua espessura, quando a mesma está sujeita a um carregamento $\mathbf{g(x_1, x_2)}$, as seguintes hipóteses podem ser adotadas:

i) Os deslocamentos normais ao plano da placa e as deformações na direção da espessura são pequenos o suficiente para poderem ser desprezados, isto é, adota-se a hipótese de pequenas deformações e pequenos deslocamentos;

ii) As tensões normais que atuam nos planos paralelos ao plano médio são pequenas, quando comparadas às outras componentes de tensão, podendo desta forma ser desprezadas;

iii) As componentes de deslocamento, contidas no plano da placa, variam linearmente ao longo da espessura;

iv) Retas normais ao plano médio na posição indeformada permanecem normais após a deformação. Logo, as deformações por cortante são desprezadas, pois estas causariam distorção;

v) As tensões de cisalhamento nas faces externas, paralelas ao plano médio da placa, são nulas.

Definidas estas hipóteses, a partir das equações (2.14a) e (2.15a) da elasticidade, as condições de deformação são:

$$\gamma_{13} = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \tag{3.1a}$$

$$\gamma_{23} = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \tag{3.1b}$$

$$\varepsilon_{33} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \tag{3.1c}$$

3.3. Equações Constitutivas

Como pode ser observado no item anterior, o estudo da flexão de placas tem como aspecto principal à não consideração do efeito das cortantes nas deformações por flexão, devido à hipótese de que as seções planas permanecem planas após a deformação. Entende-se esta afirmação como sendo uma generalização das hipóteses de flexão de vigas longas.

Através das equações (3.1) e em função das hipóteses apresentadas nesta teoria, o deslocamento $\mathbf{u_3}$ depende somente de $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ e os deslocamentos $\mathbf{u_1}$ e $\mathbf{u_2}$ são lineares em $\mathbf{x_3}$. Desta forma, considerando-se as condições de simetria sobre o eixo $\mathbf{x_3}$, faz-se a integração das equações (3.1) em função dos deslocamentos $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ e $\mathbf{u_3}$, obtendo-se:

$$u_1 = -x_3 \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \tag{3.2a}$$

$$u_2 = -x_3 \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \tag{3.2b}$$

$$u_3 = u_3(x_1, x_2) \tag{3.2c}$$

A partir das relações de deformação-deslocamento (2.14a) e (2.15a), e utilizando as derivadas das equações (3.2), encontram-se as seguintes expressões:

$$\varepsilon_{11} = -x_3 \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1{}^2} \tag{3.3a}$$

$$\varepsilon_{22} = -x_3 \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2{}^2} \tag{3.3b}$$

$$\gamma_{12} = -2 \cdot x_3 \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{3.3c}$$

Utilizando-se as equações (3.1), as tensões σ_{31} e σ_{32} são assumidas iguais a zero. Logo, conhecidas as deformações em um ponto da placa, as relações de tensões para um corpo elástico isotrópico são dadas pelas equações (2.18a) e (2.19a), da seguinte forma:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\varepsilon_{11} + \nu \cdot \varepsilon_{22}) \tag{3.4a}$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\varepsilon_{22} + \nu \cdot \varepsilon_{11}) \tag{3.4b}$$

$$\tau_{12} = G \cdot \gamma_{12} \tag{3.4c}$$

Substituindo-se as equações (3.3) nas equações (3.4), obtêm-se as componentes de tensão em função das curvaturas, como mostrado nas equações abaixo:

$$\sigma_{11} = -\frac{E \cdot x_3}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1{}^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2{}^2} \right) \tag{3.5a}$$

$$\sigma_{22} = -\frac{E \cdot x_3}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2{}^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1{}^2} \right) \tag{3.5b}$$

$$\tau_{12} = -2 \cdot G \cdot x_3 \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{3.5c}$$

Para a determinação das equações que governam a flexão de placas, deve-se considerar o elemento de placa mostrado na **Figura 3.2**, onde estão indicadas as tensões atuantes em uma porção paralela ao plano médio.

Utilizando-se a regra da mão direita, os esforços correspondentes ao momento fletor e a força cortante, por unidade de comprimento, são obtidos a partir das resultantes das componentes de tensão (**Figura 3.2**), como mostrado pelas seguintes equações:

$$M_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} \cdot x_3 \cdot dx_3 \tag{3.6a}$$

$$M_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} \cdot x_3 \cdot dx_3 \tag{3.6b}$$

$$M_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12} \cdot x_3 \cdot dx_3 \tag{3.6c}$$

$$M_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{21} \cdot x_3 \cdot dx_3 \tag{3.6d}$$

$$Q_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{13} \cdot dx_3 \tag{3.7a}$$

$$Q_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{23} \cdot dx_3 \tag{3.7b}$$

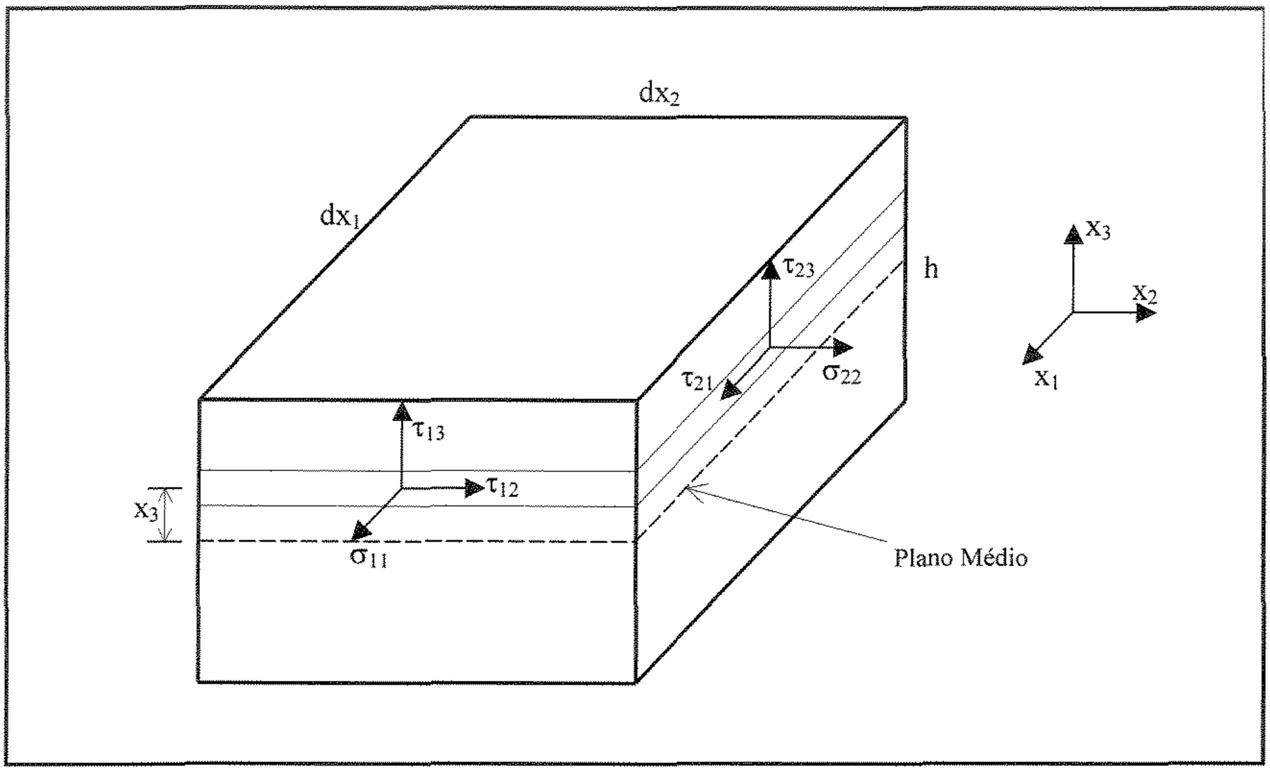


Figura 3.2 – Componentes de tensão em um elemento de placa sujeita a flexão

Com estes esforços, faz-se o equilíbrio estático das forças cortantes e momentos fletores que agem sobre o elemento de placa (**Figura 3.3**).

Fazendo-se o equilíbrio estático dos esforços atuantes no elemento infinitesimal de placa da **Figura 3.3**, as equações de equilíbrio, escritas em função dos momentos fletores e das forças cortantes, são dadas por:

$$\frac{\partial Q_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{22}}{\partial x_2} + g = 0 \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} - Q_{11} = 0 \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} - Q_{22} = 0 \tag{3.10}$$

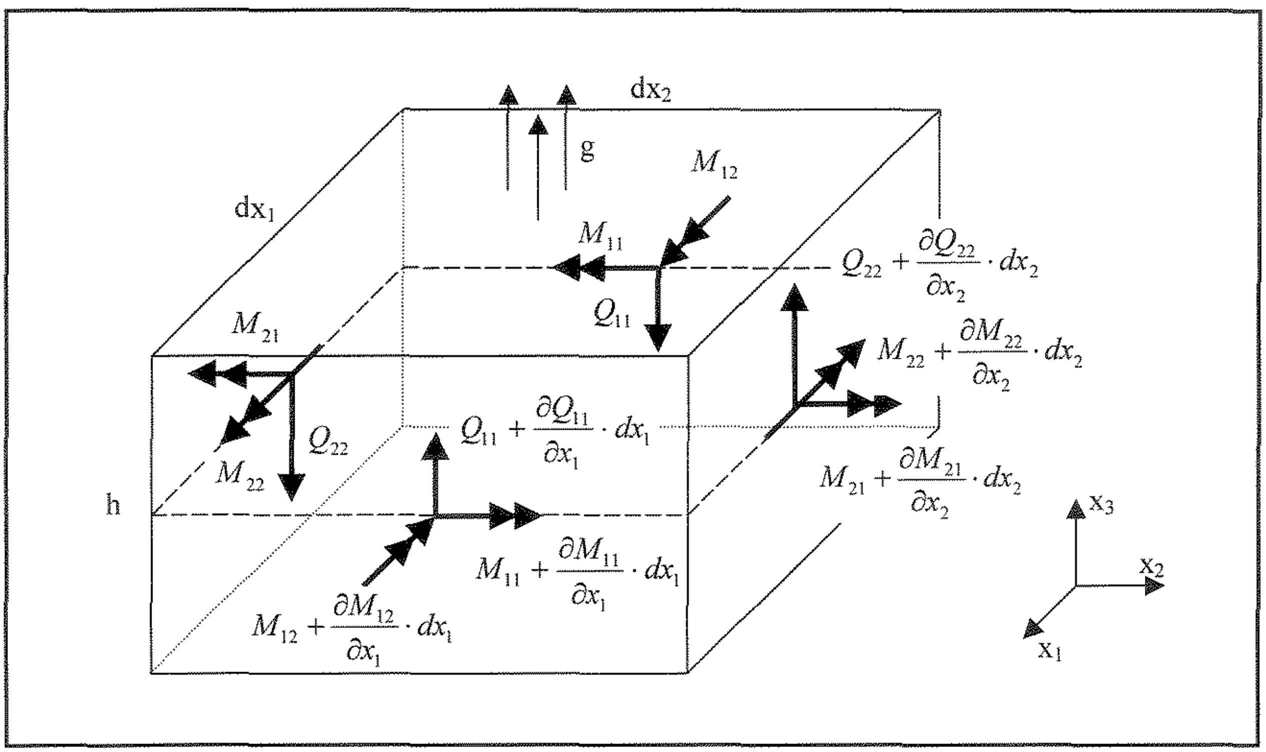


Figura 3.3 – Esforços em um elemento infinitesimal de placa em flexão

Levando-se em conta a simetria do tensor dos momentos (**M_{12}** igual a **M_{21}**), isolando-se as forças cortantes nas equações (3.9) e (3.10), derivando-se estas forças e substituindo-se o valor destas derivadas na equação (3.8), obtêm-se:

$$\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_1^{\ 2}} + 2 \cdot \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial x_2^{\ 2}} = -g \tag{3.11}$$

Substituindo-se nas equações (3.6) os valores das componentes de tensão apresentadas pelas equações (3.5), consegue-se encontrar os momentos fletores em função das curvaturas. Logo, os momentos fletores, por unidade de largura, são apresentados nas equações abaixo:

$$M_{11} = -D \cdot \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^{\ 2}} + \nu \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^{\ 2}} \right) \tag{3.12a}$$

$$M_{22} = -D \cdot \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^{\ 2}} + \nu \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^{\ 2}} \right) \tag{3.12b}$$

$$M_{12} = -D \cdot (1 - \nu) \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{3.12c}$$

sendo **D** a rigidez à flexão da placa, dada por:

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \tag{3.13}$$

Reescrevendo-se a equação (3.11) com os valores dos momentos fletores em função das curvaturas, apresentados pelas equações (3.12), obtêm-se:

$$\frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^{\ 4}} + 2 \cdot \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^{\ 2} \partial x_2^{\ 2}} + \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_2^{\ 4}} = \frac{g}{D} \tag{3.14}$$

A equação (3.14) é a equação diferencial de equilíbrio da placa, sujeita a uma carga distribuída **g**, em função dos deslocamentos $\mathbf{u_3}$. Esta equação pode ser escrita como sendo:

$$D \cdot \nabla^2\left(\nabla^2 u_3\right) = g \tag{3.15}$$

sendo ∇^2 o operador *Laplaciano*, definido por:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2} \tag{3.16}$$

Substituindo-se nas equações de equilíbrio (3.9) e (3.10), as derivadas das equações (3.12), obtêm-se as expressões das forças cortantes em função das curvaturas, como mostrado nas equações abaixo:

$$Q_{11} = -D \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2{}^2}\right) \tag{3.17a}$$

$$Q_{22} = -D \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2{}^2}\right) \tag{3.17b}$$

As componentes dos momentos fletores e das forças cortantes podem ser escritas em relação a um sistema de coordenadas normais e tangenciais (**ns**). A definição destes esforços em coordenadas normais e tangenciais, no contorno da placa, facilita a imposição das condições de vinculação e carregamento da mesma.

Segundo a **Figura 3.4**, o sistema de coordenadas $\mathbf{x_1x_2}$ pode ser relacionado com o sistema de coordenadas **ns** através de uma matriz de transformação de coordenadas, da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} n \\ s \end{pmatrix} \tag{3.18a}$$

$$\begin{pmatrix} n \\ s \end{pmatrix} = T^T \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{3.18b}$$

sendo **T** a matriz de transformação de coordenadas e $\mathbf{T}^T$ sua transposta, ou seja:

$$T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{3.19a}$$

$$T^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{3.19b}$$

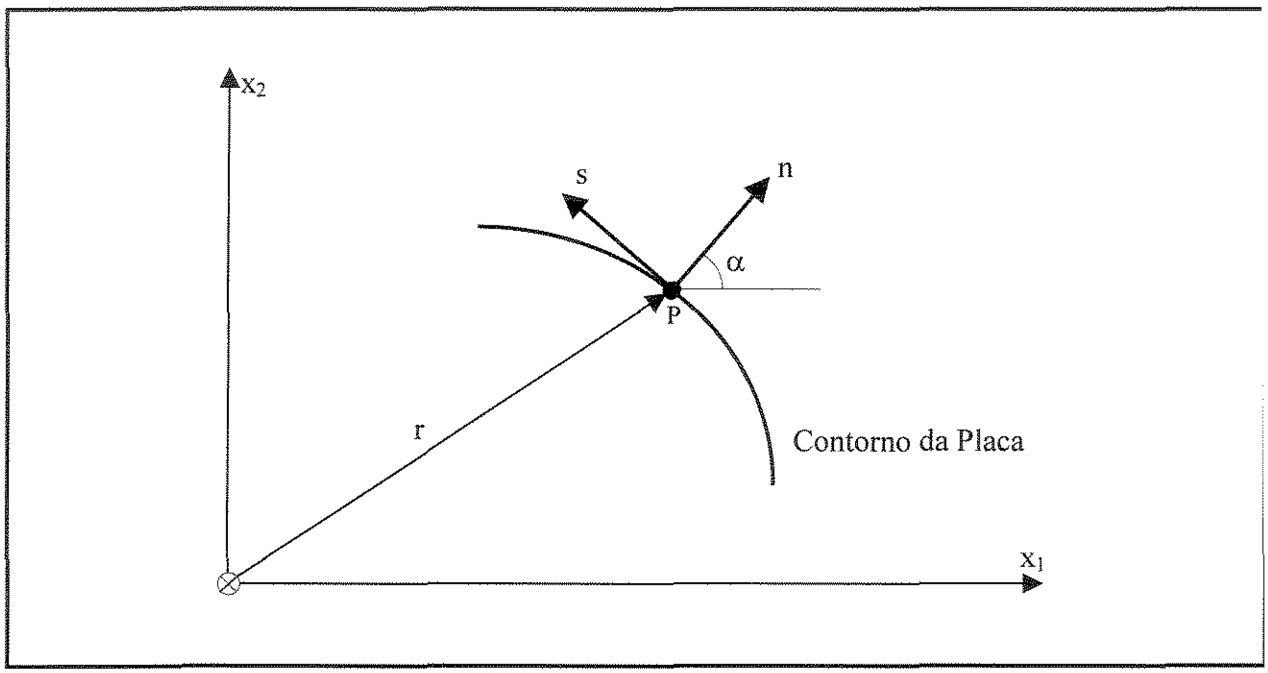


Figura 3.4 – Sistema de coordenadas $\mathbf{x_1x_2}$ e **ns**

As componentes do momento fletor e da força cortante, nas novas coordenadas **ns**, podem ser obtidas através de transformações tensoriais das componentes dos momentos e das cortantes nas coordenadas $\mathbf{x_1x_2}$, da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} M_n & M_{ns} \\ M_{ns} & M_s \end{pmatrix} = T^T \cdot \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \cdot T \tag{3.20a}$$

$$\begin{pmatrix} Q_n \\ Q_s \end{pmatrix} = T^T \cdot \begin{pmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \end{pmatrix} \tag{3.20b}$$

Lembrando-se que $\mathbf{M_{12}}$ é igual a $\mathbf{M_{21}}$, estas componentes podem ser escritas explicitamente da seguinte forma:

$$M_n = M_{11} \cdot \cos^2 \alpha + M_{22} \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha + 2 \cdot M_{12} \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \tag{3.21a}$$

$$M_s = M_{11} \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha + M_{22} \cdot \cos^2 \alpha - 2 \cdot M_{12} \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \tag{3.21b}$$

$$M_{ns} = (M_{22} - M_{11}) \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha + M_{12} \cdot (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) \tag{3.21c}$$

$$Q_n = Q_{11} \cdot \cos \alpha + Q_{22} \cdot \operatorname{sen} \alpha \tag{3.22a}$$

$$Q_s = Q_{22} \cdot \cos \alpha - Q_{11} \cdot \operatorname{sen} \alpha \tag{3.22b}$$

Analogamente, podem-se obter as tensões normais e tangenciais no sistema **ns** a partir das equações de tensões conhecidas no sistema $\mathbf{x_1 x_2}$:

$$\begin{pmatrix} \sigma_n & \sigma_{ns} \\ \sigma_{ns} & \sigma_s \end{pmatrix} = T^T \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \cdot T \tag{3.23}$$

Se as componentes das tensões normais e tangenciais são escritas na forma explícita, lembrando-se que $\boldsymbol{\tau_{12}}$ é igual a $\boldsymbol{\tau_{21}}$, obtêm-se:

$$\sigma_n = \sigma_{11} \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha + 2 \cdot \tau_{12} \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \tag{3.24a}$$

$$\sigma_s = \sigma_{11} \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha + \sigma_{22} \cdot \cos^2 \alpha - 2 \cdot \tau_{12} \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \tag{3.24b}$$

$$\sigma_{ns} = (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha + \tau_{12} \cdot (\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) \tag{3.24c}$$

3.4. Condições de Contorno

Para solucionar o problema de placas é necessária a prescrição das condições de contorno do problema em questão. Considerando-se o sistema de coordenadas genérico **ns** da **Figura 3.4**, as condições de contorno podem ser dadas por:

a) Engaste

$$u_3 = 0 \tag{3.25a}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial n} = 0 \tag{3.25b}$$

b) Apoio Simples

$$u_3 = 0 \tag{3.26a}$$

$$M_n = 0 \tag{3.26b}$$

c) Borda Livre

$$M_n = 0 \tag{3.27a}$$

$$M_{ns} = 0 \tag{3.27b}$$

$$Q_n = 0 \tag{3.27c}$$

Com relação às condições de contorno, **KIRCHHOFF [3]** observa que apenas duas condições são suficientes para a completa determinação de $\mathbf{u_3}$, satisfazendo a equação (3.14).

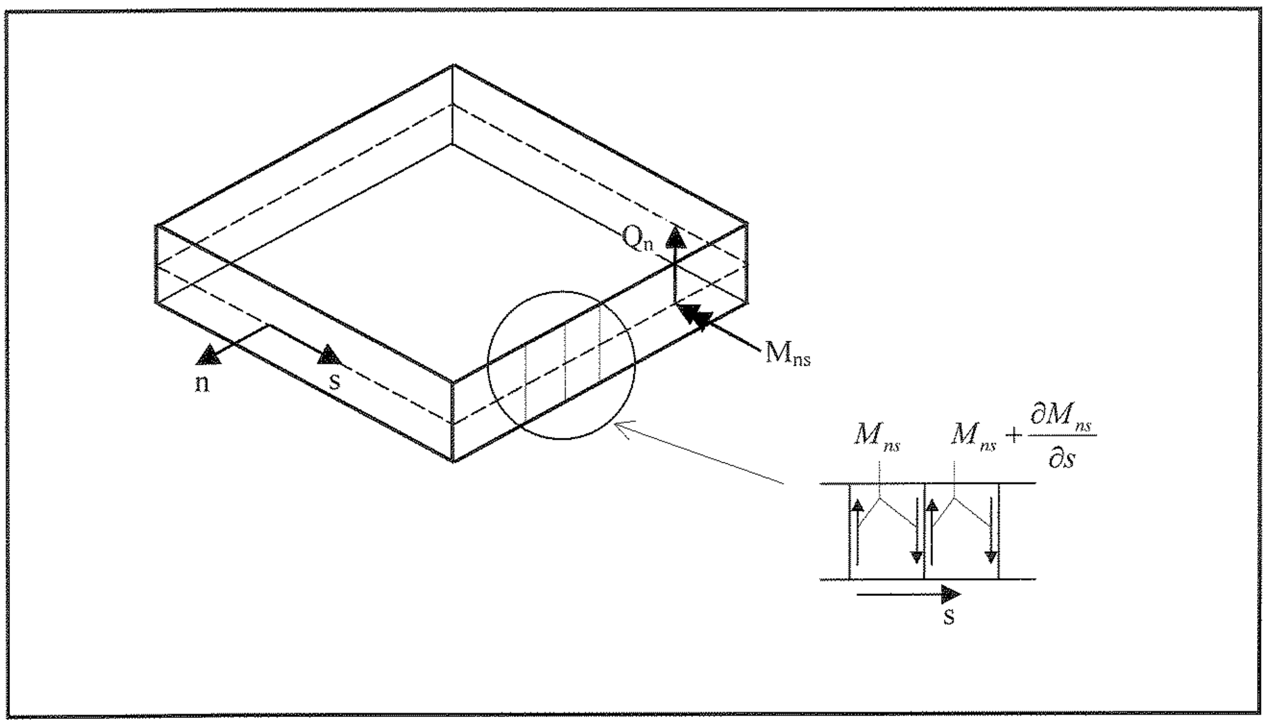


Figura 3.5 – Momentos volventes no contorno

As condições de contorno relativas à força cortante ($\mathbf{Q_n}$) e ao momento volvente ($\mathbf{M_{ns}}$), segundo **KIRCHHOFF [3]**, podem ser agrupadas em uma única. Esta suposição dá origem a um esforço denominado de força cortante equivalente, cuja intensidade por unidade de comprimento é dada por:

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \tag{3.28}$$

A **Figura 3.5** mostra a borda de uma placa com os momentos volventes (**M_{ns}**) colocados em forma de binários num elemento infinitesimal. Nota-se que a equação (3.28) é o resultado do equilíbrio da interface entre dois elementos infinitesimais consecutivos.

Assim, através do método variacional, **KIRCHHOFF [3]** mostra que as condições de contorno para a borda livre são:

$$M_n = 0 \tag{3.29a}$$

$$Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = 0 \tag{3.29b}$$

Nas vigas, que são estruturas unidimensionais, os deslocamentos são regidos por uma equação diferencial de segunda ordem, sendo necessária apenas uma condição de contorno em cada extremo da viga para a determinação de seus deslocamentos e esforços. De forma análoga, para as placas, que são consideradas estruturas bidimensionais, os deslocamentos são regidos por uma equação de quarta ordem, sendo necessárias duas condições de contorno em cada borda da placa, para a determinação dos seus deslocamentos e esforços. Desta forma, as equações (3.29) fornecem as condições de contorno para placas, no caso da existência de bordas livres.

3.5. Equações Constitutivas em Coordenadas Cilíndricas

Para facilitar o estudo de placas torna-se necessário escrever sua equação diferencial em função de coordenadas cilíndricas. Desta forma, considere a **Figura 3.6**, onde são mostrados os sistemas de coordenadas cartesianas e cilíndricas:

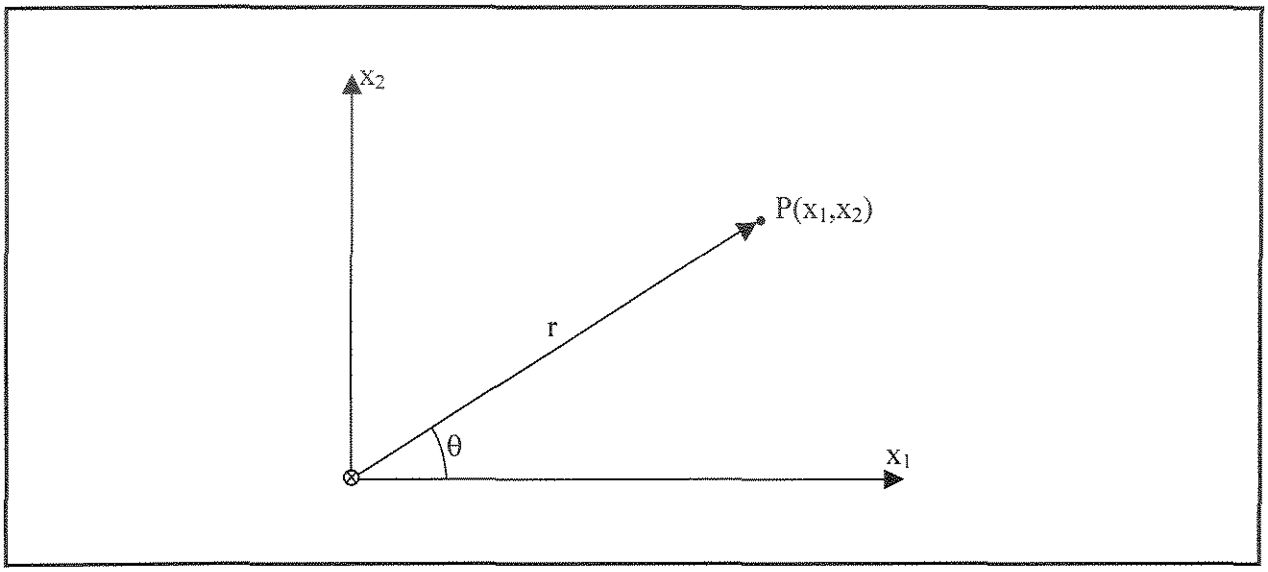


Figura 3.6 – Sistema de coordenadas cartesianas e cilíndricas

Com relação ao ponto **P**, podem-se escrever as seguintes relações entre as coordenadas cartesianas e cilíndricas:

$$x_1 = r \cdot \cos\theta \tag{3.30}$$

$$x_2 = r \cdot \operatorname{sen}\theta \tag{3.31}$$

$$r^2 = x_1^{\;2} + x_2^{\;2} \tag{3.32}$$

$$\theta = arctg\,\frac{x_2}{x_1} \tag{3.33}$$

A partir das equações (3.30) a (3.33) pode-se obter as derivadas parciais de **r** e θ em relação aos eixos de coordenadas x_1x_2:

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{x_1}{r} \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x_1} = \cos\theta \tag{3.34a}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_2} = \frac{x_2}{r} \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x_2} = \operatorname{sen}\theta \tag{3.34b}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = -\frac{x_2}{r^2} \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \tag{3.35a}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \frac{x_1}{r^2} \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \frac{\cos\theta}{r} \tag{3.35b}$$

Como os deslocamentos transversais da placa (u_3) são dados em função de x_1 e x_2, as derivadas de u_3 em relação a x_1 e x_2 podem ser escritas da seguinte forma:

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \frac{\partial u_3}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \tag{3.36a}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \tag{3.36b}$$

Substituindo-se as equações (3.34) e (3.35) nas equações (3.36), obtêm-se:

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \cos\theta \cdot \frac{\partial u_3}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \tag{3.37a}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \operatorname{sen}\theta \cdot \frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \tag{3.37b}$$

De acordo com as equações (3.37), pode-se definir os operadores diferenciais $\frac{\partial}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial}{\partial x_2}$ da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \cos\theta \cdot \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \tag{3.38a}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \operatorname{sen}\theta \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \tag{3.38b}$$

Aplicando-se estes operadores nas equações (3.37), obtêm-se:

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial {x_1}^2} = \cos^2\theta \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} + \operatorname{sen}^2\theta \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial \theta^2} \right) - 2 \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \right) \tag{3.39a}$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial {x_2}^2} = \operatorname{sen}^2\theta \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} + \cos^2\theta \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial \theta^2} \right) + 2 \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \right) \tag{3.39b}$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} = \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta \cdot \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial \theta^2} \right) + \left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta \right) \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \right) \tag{3.39c}$$

Somando-se as equações (3.39a) e (3.39b), obtêm-se o operador diferencial de *Laplace* em coordenadas cilíndricas, como mostrado na equação abaixo:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} \right) u_3 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u_3 \tag{3.40}$$

Portanto, a equação diferencial de placas (3.14), em coordenadas cilíndricas, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u_3}{\partial\theta^2}\right)=\frac{g}{D} \tag{3.41}$$

Os momentos fletores, definidos nas equações (3.12), podem ser escritos em coordenadas cilíndricas utilizando-se as relações encontradas nas equações (3.39), obtendo-se:

$$\begin{aligned} M_{11}=-D\cdot\Bigg[&\frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2}\cdot\left(\cos^2\theta+\nu\cdot\operatorname{sen}^2\theta\right)-2\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta\cdot(1-\nu)\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial\theta}\right)+\\ &+\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial {u_3}^2}{\partial\theta^2}\right)\cdot\left(\operatorname{sen}^2\theta+\nu\cdot\cos^2\theta\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{3.42a}$$

$$\begin{aligned} M_{22}=-D\cdot\Bigg[&\frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2}\cdot\left(\cos^2\theta+\nu\cdot\operatorname{sen}^2\theta\right)+2\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta\cdot(1-\nu)\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial\theta}\right)+\\ &+\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial {u_3}^2}{\partial\theta^2}\right)\cdot\left(\operatorname{sen}^2\theta+\nu\cdot\cos^2\theta\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{3.42b}$$

$$\begin{aligned} M_{12}=-D\cdot(1-\nu)\cdot\Bigg[&\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta\cdot\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u_3}{\partial\theta^2}\right)+\\ &+\left(\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta\right)\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial\theta}\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{3.42c}$$

De forma análoga, as equações (3.17), que representam as forças cortantes, também podem ser escritas em coordenadas cilíndricas, obtendo-se:

$$Q_{11}=-D\cdot\left(\cos\theta\cdot\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2 u_3-\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\nabla^2 u_3\right) \tag{3.43a}$$

$$Q_{22}=-D\cdot\left(\operatorname{sen}\theta\cdot\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2 u_3-\frac{\cos\theta}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\nabla^2 u_3\right) \tag{3.43b}$$

sendo $\nabla^2 u_3 = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2} \cdot \dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}$.

Conhecidas as expressões em coordenadas cilíndricas dos momentos fletores e das forças cortantes, pode-se deduzir, neste sistema de coordenadas, as expressões dos esforços nas coordenadas normais e tangenciais em relação a um ponto genérico **P**, como mostrado na **Figura 3.7**, onde β é o ângulo formado pelos versores $\vec{r}$ e $\vec{n}$, que somado a θ, forma o ângulo α.

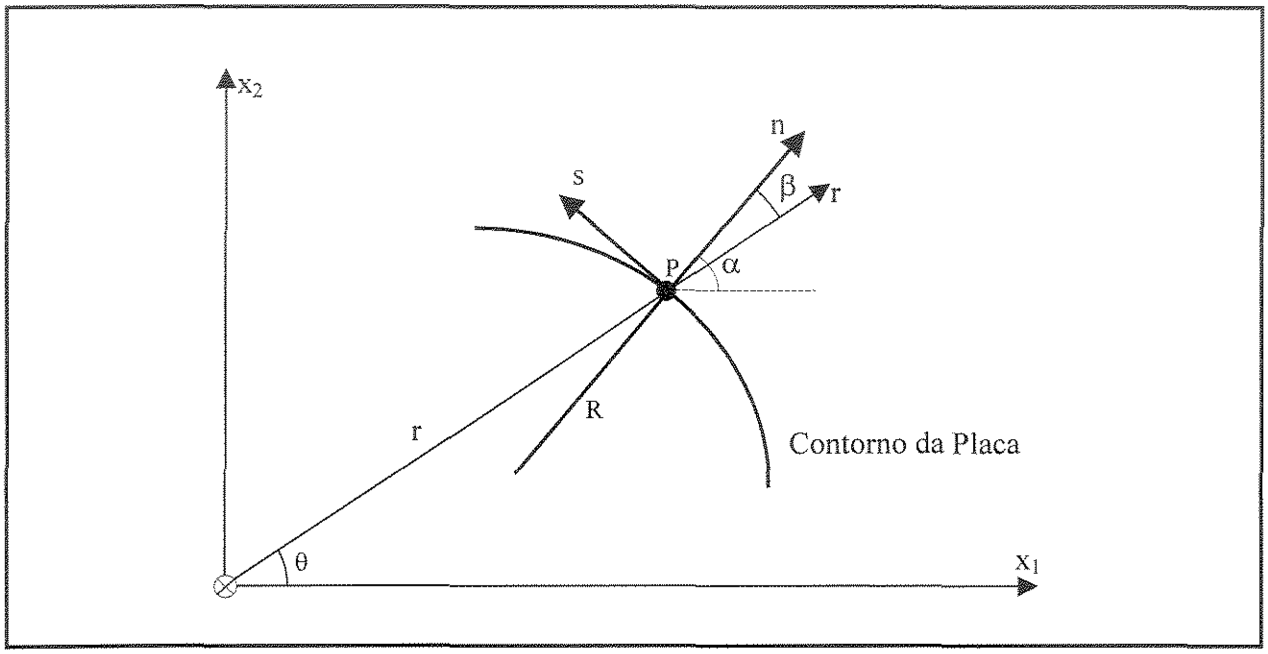


Figura 3.7 – Relação das coordenadas **ns** de um ponto **P** do contorno da placa com as coordenadas cartesianas e cilíndricas

Substituindo-se nas equações (3.21) o valor de $\alpha=\theta+\beta$ e os valores das equações (3.42), obtêm-se os momentos fletores normais e tangenciais em função das coordenadas cilíndricas:

$$M_n = -D \cdot \left[\left(\cos^2 \beta + \nu \cdot \text{sen}^2 \beta\right) \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} + 2 \cdot (1-\nu) \cdot \text{sen}\,\beta \cdot \cos\beta \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial r}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\text{sen}^2 \beta + \nu \cdot \cos^2 \beta\right) \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2}\right) \right] \tag{3.44a}$$

$$M_s = -D \cdot \left[\left(\operatorname{sen}^2 \beta + \nu \cdot \cos^2 \beta\right) \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} - 2 \cdot (1-\nu) \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\beta \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial r}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\cos^2 \beta + \nu \cdot \operatorname{sen}^2 \beta\right) \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2}\right) \right] \tag{3.44b}$$

$$M_{ns} = -D \cdot (1-\nu) \cdot \left[\operatorname{sen}\beta \cdot \cos\beta \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\cos^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \beta\right) \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial \theta}\right) \right] \tag{3.44c}$$

A força cortante normal no contorno em coordenadas cilíndricas é obtida substituindo-se as equações (3.43) e o valor de α na equação (3.22a), ou seja:

$$Q_n = -D \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 u_3 \cdot \cos\beta + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 u_3 \cdot \operatorname{sen}\beta \right) \tag{3.45}$$

Derivando-se a equação (3.44c), que é função de **r**, θ e β, em relação à coordenada **s**, obtêm-se:

$$\frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = \frac{\partial M_{ns}}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial M_{ns}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{\partial M_{ns}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial s} \tag{3.46}$$

As derivadas de **r**, θ e β, em relação à coordenada **s**, são dadas por:

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{\partial r}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial s} = -\operatorname{sen}\beta \tag{3.47a}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial s} = \frac{\cos\beta}{r} \tag{3.47b}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}(\alpha - \theta) = \frac{\partial \alpha}{\partial s} - \frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{1}{R} - \frac{\cos\beta}{r} \tag{3.47c}$$

sendo **R** o raio de curvatura do contorno no ponto **P** (**Figura 3.7**).

Substituindo-se na equação (3.46) os resultados encontrados nas equações (3.47), obtêm-se:

$$\frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = -\frac{\partial M_{ns}}{\partial r} \cdot \operatorname{sen}\beta + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial M_{ns}}{\partial \theta} \cdot \cos\beta + \left(\frac{1}{R} - \frac{\cos\beta}{r}\right) \cdot \frac{\partial M_{ns}}{\partial \beta} \tag{3.48}$$

Somando-se as expressões de $\mathbf{Q_n}$ e $\frac{\partial \mathbf{M_{ns}}}{\partial \mathrm{s}}$, representadas pelas equações (3.45) e (3.48) respectivamente, pode-se escrever a expressão para a força cortante equivalente em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} V_n = &\left(-D \cdot \frac{\partial}{\partial r}\nabla^2 u_3 + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial M_{ns}}{\partial \theta}\right) \cdot \cos\beta - \\ &-\left(D \cdot \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\nabla^2 u_3 + \frac{\partial M_{ns}}{\partial r}\right) \cdot \operatorname{sen}\beta + \left(\frac{1}{\mathrm{R}} - \frac{\cos\beta}{r}\right) \cdot \frac{\partial M_{ns}}{\partial \beta} \end{aligned} \tag{3.49}$$

3.6. Solução Fundamental

Solução fundamental de uma equação diferencial é a resposta em um ponto genérico de um domínio (geralmente infinito), denominado domínio fundamental, devido à aplicação de uma carga unitária em outro ponto deste domínio. Para o caso específico de placas, o deslocamento $\mathbf{u_3}$ em um ponto qualquer ξ, denominado ponto de deslocamento, é devido a uma carga unitária aplicada em um ponto **x**, denominado ponto de carregamento.

A solução fundamental é definida em **BREBBIA & DOMINGUES [46]** como uma solução singular da equação de *Laplace* com não homogeneidade discreta, dada pela função delta de *Dirac*, $\Delta(\xi,\mathbf{x})$.

A função delta de *Dirac* é definida da seguinte forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(\xi, x) \cdot dx = 1 \tag{3.50a}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \Delta(\xi, x) \cdot dx = f(\xi) \tag{3.50b}$$

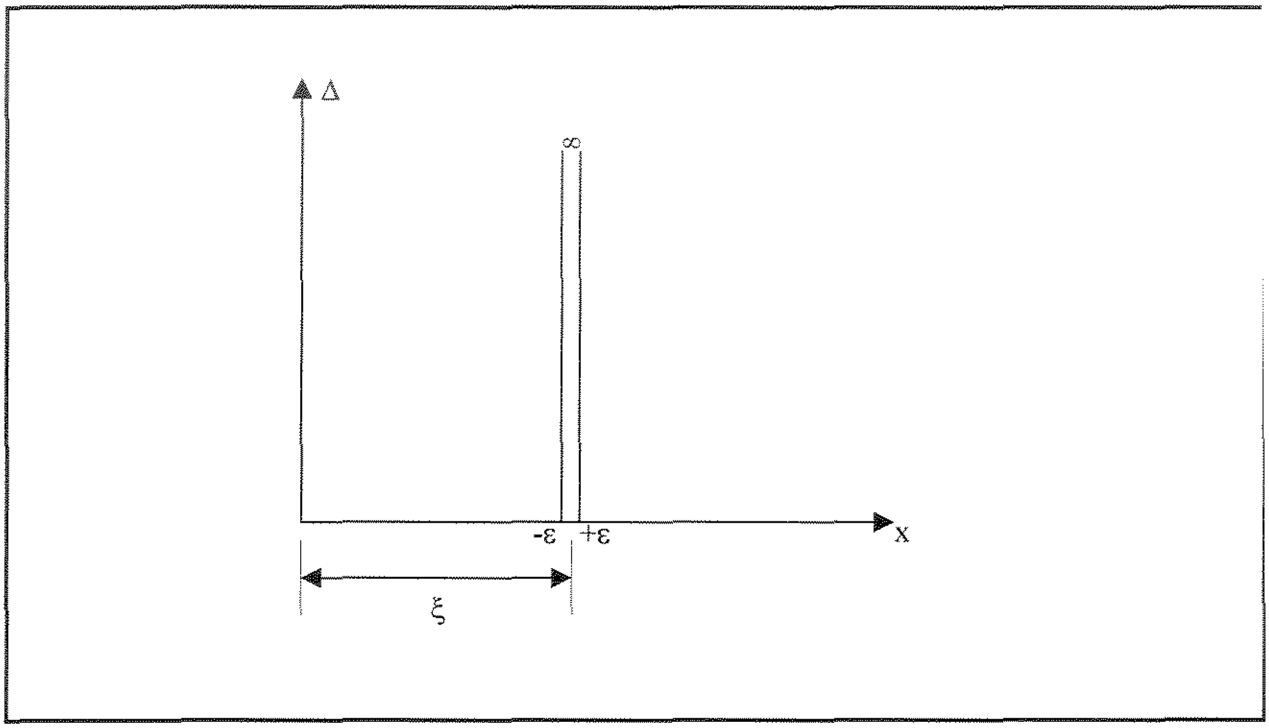


Figura 3.8 – Função delta de *Dirac*

A **Figura 3.8** mostra a função delta de *Dirac*, **Δ(ξ,x)**, que é uma função generalizada, e pode ser definida como o limite da função normal, **BREBBIA et al. [56]**. No limite, a função delta de *Dirac* é nula em todos os pontos do domínio, exceto em um ponto onde ela vale infinito, ou seja:

$$\Delta(\xi, x) = \infty \qquad \text{se} \qquad x = \xi \tag{3.51}$$

Seja a seguinte equação (comparar com a equação 3.15):

$$D \cdot \nabla^2 \left(\nabla^2 u_3^* \right) = \Delta(\xi, x) \tag{3.52}$$

Considerando-se um sistema de coordenadas cilíndricas e a simetria existente, a equação (3.52) pode ser escrita da seguinte forma (ver a equação 3.41):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 u_3^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_3^*}{\partial r} \right) = \frac{\Delta(\xi, x)}{D} \tag{3.53}$$

Reescrevendo-se a equação (3.53) de uma forma mais conveniente, obtêm-se:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial u_3^*}{\partial r} \right) \right] \right\} = \frac{\Delta(\xi, x)}{D} \tag{3.54}$$

A solução fundamental $\mathbf{u_3^*}$, é obtida através da resolução da equação diferencial (3.54) para todos os pontos do domínio fundamental, exceto no ponto de carregamento ξ.

Utilizando-se as hipóteses apresentadas em **DANSON [31]** e integrando-se sucessivamente a equação (3.54) em relação a **r**, chega-se a:

$$u_3^* = \frac{c_1}{4} \cdot r^2 \cdot \ln r + (c_2 - c_1) \cdot \frac{r^2}{4} + c_3 \cdot \ln r + c_4 \tag{3.55}$$

Considerando-se a condição de simetria em relação ao ponto ξ, pode-se escrever:

$$\frac{\partial u_3^*}{\partial r} = 0 \quad \text{para} \quad \mathrm{r} = 0 \tag{3.56}$$

o que leva a:

$$c_3 = 0 \tag{3.57}$$

A constante de integração $\mathbf{c_1}$ é obtida a partir da condição de equilíbrio das forças verticais atuantes em um círculo de raio **r**, cujo centro é o ponto de aplicação da carga unitária (**Figura 3.9a**).

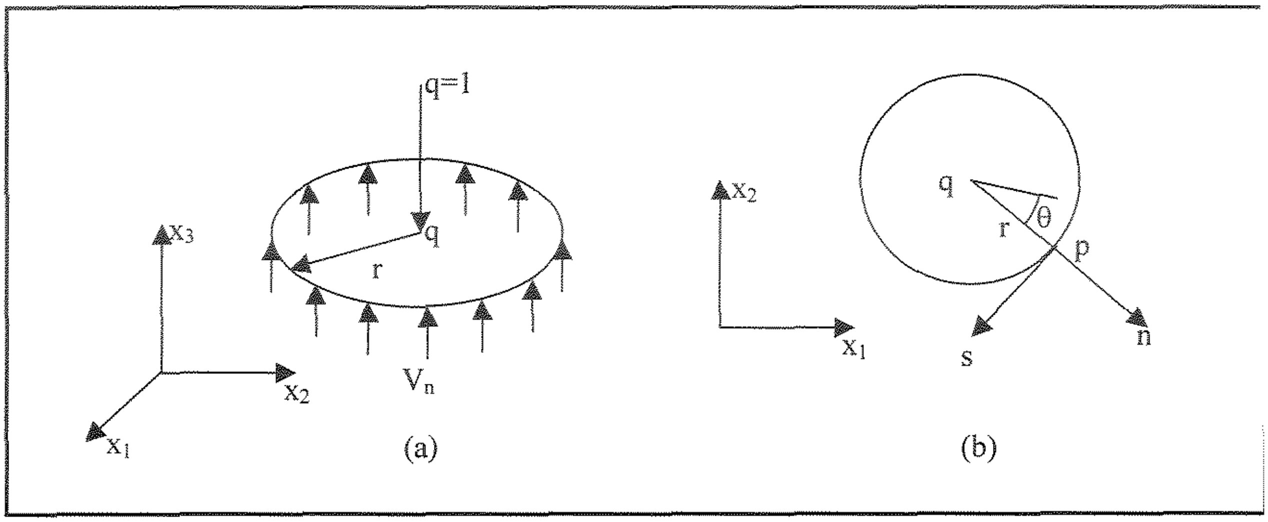


Figura 3.9 – Forças verticais atuantes no círculo de raio **r** e com carga unitária aplicada no centro deste círculo

A cortante equivalente ($\mathbf{V_n^*}$), em um ponto **p** qualquer da circunferência (**Figura 3.9b**), necessária para equilibrar a carga unitária, é:

$$V_n^* = -\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot r} \tag{3.58}$$

A expressão de $\mathbf{V_n^*}$ é obtida a partir de (3.49), impondo a condição de simetria do problema, ou seja, com $\mathbf{u_3^*}$ sendo apenas função de **r** e **β=0** para todos os pontos da circunferência, o que resulta em:

$$V_n^* = -D \cdot \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 u_3^* \tag{3.59}$$

Das equações (3.58) e (3.59), obtêm-se:

$$-D \cdot \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 u_3^* = -\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot r} \tag{3.60}$$

Expressando-se o *Laplaceano*, ∇^2, em coordenadas cilíndricas, obtêm-se:

$$-D \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 u_3^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_3^*}{\partial r} \right) = -\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot r} \tag{3.61}$$

Substituindo-se em (3.61) o valor de $\mathbf{u_3}^*$ dado pela equação (3.55), obtêm-se:

$$c_1 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot D} \tag{3.62}$$

Para a solução de uma placa qualquer, as constantes $\mathbf{c_2}$ e $\mathbf{c_4}$ são definidas a partir de condições sobre seu contorno. No caso aqui analisado, de raio infinito, estes valores podem ser quaisquer. Neste trabalho, são testados alguns valores para a constante $\mathbf{c_2}$ e a constante $\mathbf{c_4}$ é adotada como zero. Desta forma, a equação para $\mathbf{u_3}^*$ pode ser escrita na forma:

$$u_3^* = \frac{1}{8 \cdot \pi \cdot D} \cdot r^2 \cdot (\ln r - K) \tag{3.63}$$

sendo **K** uma constante que surgiu a partir de $\mathbf{c_2}$.

A equação (3.63) é a solução fundamental de placas, ou seja, o valor do deslocamento $\mathbf{u_3}^*$ numa placa infinita, devido a uma carga concentrada unitária, aplicada num ponto distante r deste deslocamento.

A partir da equação (3.63) são obtidos os deslocamentos e esforços em um ponto genérico do domínio fundamental. Logo, o momento fletor, a derivada do deslocamento transversal, o momento volvente e a força cortante equivalente, são encontrados através da equação (3.63), ou seja:

$$\frac{\partial u_3^*}{\partial n} = \frac{r}{4 \cdot \pi \cdot D} \cdot \left(\ln r - K + \frac{1}{2} \right) \cdot \cos \beta \tag{3.64}$$

$$M_n^* = -\frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \left[(1+\nu) \cdot \ln r + (1-\nu) \cdot \cos^2 \beta - (1+\nu) \cdot K + (1+3 \cdot \nu) \cdot \frac{1}{2} \right] \tag{3.65}$$

$$M_{ns}^* = \frac{(1-\nu)}{8 \cdot \pi} \cdot \operatorname{sen} 2\beta \tag{3.66}$$

$$V_n^* = \frac{\cos \beta}{4 \cdot \pi \cdot r} \cdot \left[2 \cdot (1-\nu) \cdot \operatorname{sen}^2 \beta - 3 + \nu \right] + \frac{(1-\nu)}{4 \cdot \pi \cdot R} \cdot \cos 2\beta \tag{3.67}$$

Uma dedução mais detalhada das equações (3.63) a (3.67) pode ser encontrada em **PAIVA [41]**.

4. EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA PLACAS

4.1. Introdução

Este capítulo trata das equações integrais de contorno para a flexão de placas que são necessárias para a aplicação do *Método dos Elementos de Contorno* (MEC). As equações diferenciais de placas, escritas em função dos deslocamentos, foram utilizadas no capítulo anterior para a obtenção das soluções fundamentais destas. A partir destas soluções fundamentais e utilizando-se o teorema de *Betti*, serão encontradas as equações integrais de placas aplicadas em pontos do contorno e do domínio da placa, como é visto a seguir.

4.2. Equação Integral em Coordenadas Normais e Tangenciais para Deslocamentos em Pontos do Domínio

Seja uma placa isotrópica de domínio finito Ω e contorno Γ, contida em outra de domínio infinito Ω_∞ e contorno Γ_∞, conforme **Figura 4.1**, onde a placa finita está submetida a um carregamento **g** distribuído em uma área Ω_g.

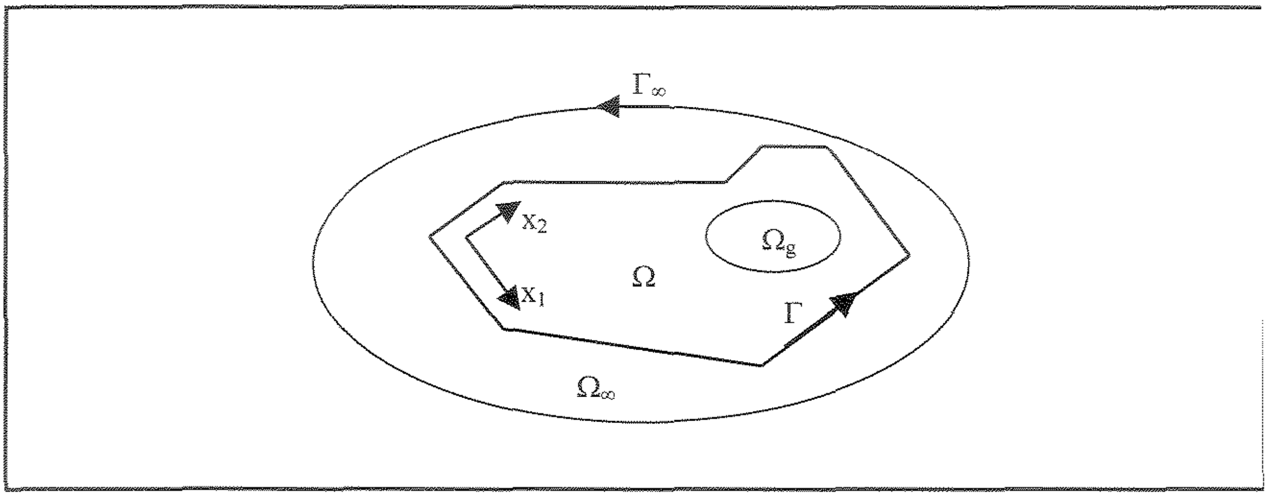


Figura 4.1 – Placa finita contida em uma placa infinita

Aplica-se o teorema de *Betti* para a placa de domínio finito submetida a dois carregamentos não simultâneos, **g** e $\mathbf{g}^*$, associados às superfícies elásticas, $\mathbf{u_3}$ e $\mathbf{u_3}^*$, respectivamente. Desta forma, identificam-se dois estados de tensão, σ e σ^*, com seus respectivos estados de deformação, ε e ε^*, que podem relacionar-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned}&\int_V \left(\sigma_{11}^* \cdot \varepsilon_{11} + \sigma_{22}^* \cdot \varepsilon_{22} + \sigma_{33}^* \cdot \varepsilon_{33} + \tau_{12}^* \cdot \gamma_{12} + \tau_{13}^* \cdot \gamma_{13} + \tau_{23}^* \cdot \gamma_{23}\right) \cdot dV = \\ &\int_V \left(\sigma_{11} \cdot \varepsilon_{11}^* + \sigma_{22} \cdot \varepsilon_{22}^* + \sigma_{33} \cdot \varepsilon_{33}^* + \tau_{12} \cdot \gamma_{12}^* + \tau_{13} \cdot \gamma_{13}^* + \tau_{23} \cdot \gamma_{23}^*\right) \cdot dV\end{aligned} \tag{4.1}$$

Chamando-se de $\mathbf{I_1}$ o segundo membro da equação (4.1) e desprezando-se as tensões relativas à direção normal ao plano da placa, obtêm-se:

$$I_1 = \int_V \left(\sigma_{11} \cdot \varepsilon_{11}^* + \sigma_{22} \cdot \varepsilon_{22}^* + \tau_{12} \cdot \gamma_{12}^*\right) \cdot dV \tag{4.2}$$

A diferencial de volume é dada por:

$$dV = dx_3 \cdot d\Omega \tag{4.3}$$

Substituindo-se na equação (4.2) as relações de deformação-deslocamento (3.3), as relações constitutivas (3.5) e a definição dada em (3.13) e integrando-se ao longo da espessura da placa (4.3), obtêm-se:

$$I_1 = \int_\Omega \left[D \cdot \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1{}^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2{}^2} \right) \cdot \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial x_1{}^2} + D \cdot \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2{}^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1{}^2} \right) \cdot \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial x_2{}^2} + \right. \\ \left. + 2 \cdot \mathrm{D} \cdot (1 - \nu) \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \cdot d\Omega \tag{4.4}$$

A partir das relações dos momentos fletores (3.12), pode-se escrever a equação (4.4) da seguinte forma:

$$I_1 = \int_\Omega \left[- M_{11} \cdot \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial x_1{}^2} - M_{22} \cdot \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial x_2{}^2} - 2 \cdot M_{12} \cdot \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \cdot d\Omega \tag{4.5}$$

Em seguida, é necessária a transformação da integral sobre o domínio (Ω), equação (4.5), em uma integral no contorno (Γ). Para isto, deve-se integrar por partes cada um dos termos da equação (4.5). Para o primeiro termo, obtêm-se:

$$- \int_\Omega M_{11} \cdot \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial x_1{}^2} \cdot d\Omega = - \int_\Gamma M_{11} \cdot \frac{\partial u_3^*}{\partial x_1} \cdot n_1 \cdot d\Gamma + \int_\Omega \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_3^*}{\partial x_1} \cdot d\Omega \tag{4.6}$$

sendo, $\mathbf{n_1}$ o cosseno diretor do vetor normal ao contorno na direção $\mathbf{x_1}$.

De acordo com a **Figura 3.4**, os cossenos diretores de um ponto **P** do contorno são dados por:

$$n_1 = \cos\alpha \tag{4.7a}$$

$$n_2 = \mathrm{sen}\,\alpha \tag{4.7b}$$

Integrando-se por partes a segunda parcela da equação (4.6) e considerando-se as definições apresentadas nas equações (4.7), pode-se escrever:

$$-\int_\Omega M_{11}\cdot\frac{\partial^2 u_3^*}{\partial x_1^{\,2}}\cdot d\Omega=\int_\Gamma\left(-M_{11}\cdot\frac{\partial u_3^*}{\partial x_1}+\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1}\cdot u_3^*\right)\cdot\cos\alpha\cdot d\Gamma-\int_\Omega\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_1^{\,2}}\cdot u_3^*\cdot d\Omega \quad (4.8)$$

De forma análoga, integrando-se o segundo termo da equação (4.5), obtêm-se:

$$-\int_\Omega M_{22}\cdot\frac{\partial^2 u_3^*}{\partial x_2^{\,2}}\cdot d\Omega=\int_\Gamma\left(-M_{22}\cdot\frac{\partial u_3^*}{\partial x_2}+\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2}\cdot u_3^*\right)\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot d\Gamma-\int_\Omega\frac{\partial^2 M_{22}}{\partial x_2^{\,2}}\cdot u_3^*\cdot d\Omega \quad (4.9)$$

Pode-se escrever o terceiro termo da equação (4.5) da seguinte forma:

$$-\int_\Omega 2\cdot M_{12}\cdot\frac{\partial^2 u_3^*}{\partial x_1\partial x_2}\cdot d\Omega=-\int_\Omega M_{12}\cdot\frac{\partial^2 u_3^*}{\partial x_1\partial x_2}\cdot d\Omega-\int_\Omega M_{12}\cdot\frac{\partial^2 u_3^*}{\partial x_1\partial x_2}\cdot d\Omega \quad (4.10)$$

Integrando-se por partes cada um dos termos do membro direito da equação (4.10), um deles primeiramente em relação a $\mathbf{x_1}$ e depois em relação a $\mathbf{x_2}$ e o outro primeiramente em relação a $\mathbf{x_2}$ e depois em relação a $\mathbf{x_1}$, obtêm-se:

$$\begin{aligned}-\int_\Omega 2\cdot M_{12}\cdot\frac{\partial^2 u_3^*}{\partial x_1\partial x_2}\cdot d\Omega=&\int_\Gamma\left[\left(-M_{12}\cdot\frac{\partial u_3^*}{\partial x_1}+\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1}\cdot u_3^*\right)\cdot\operatorname{sen}\alpha+\right.\\&\left.+\left(-M_{12}\cdot\frac{\partial u_3^*}{\partial x_2}+\frac{\partial M_{12}}{\partial x_2}\cdot u_3^*\right)\cdot\cos\alpha\right]\cdot d\Gamma-\int_\Omega 2\cdot\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1\partial x_2}\cdot u_3^*\cdot d\Omega\end{aligned} \quad (4.11)$$

Substituindo-se na equação (4.5), as equações (4.8), (4.9) e (4.11), obtêm-se:

$$
\begin{aligned}
I_1 = &+ \int_\Gamma \left[\left(\frac{\partial \mathrm{M}_{11}}{\partial \mathrm{x}_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} \right) \cdot \cos\alpha + \left(\frac{\partial \mathrm{M}_{22}}{\partial \mathrm{x}_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} \right) \cdot \operatorname{sen}\alpha \right] \cdot u_3^* \cdot d\Gamma + \\
&- \int_\Gamma \left(\mathrm{M}_{11} \cdot \frac{\partial u_3^*}{\partial x_1} \cdot \cos\alpha + \mathrm{M}_{22} \cdot \frac{\partial u_3^*}{\partial x_2} \cdot \operatorname{sen}\alpha + \right. \\
&\left. + \mathrm{M}_{12} \cdot \frac{\partial u_3^*}{\partial x_2} \cdot \cos\alpha + \mathrm{M}_{12} \cdot \frac{\partial u_3^*}{\partial x_1} \cdot \operatorname{sen}\alpha \right) \cdot d\Gamma + \\
&- \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_1{}^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial x_2{}^2} \right) \cdot u_3^* \cdot d\Omega
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Utilizando-se as equações de equilíbrio de momentos fletores (3.9) e (3.10), a equação diferencial de placas (3.11) e a equação de cortantes normais ao contorno (3.22a), a equação (4.12) torna-se:

$$
\begin{aligned}
I_1 = &- \int_\Gamma \left(\mathrm{M}_{11} \cdot \frac{\partial u_3^*}{\partial x_1} \cdot \cos\alpha + \mathrm{M}_{22} \cdot \frac{\partial u_3^*}{\partial x_2} \cdot \operatorname{sen}\alpha + \right. \\
&\left. + \mathrm{M}_{12} \cdot \frac{\partial u_3^*}{\partial x_2} \cdot \cos\alpha + \mathrm{M}_{12} \cdot \frac{\partial u_3^*}{\partial x_1} \cdot \operatorname{sen}\alpha \right) \cdot d\Gamma + \\
&+ \int_\Gamma Q_n \cdot u_3^* \cdot d\Gamma - \int_\Omega g \cdot u_3^* \cdot d\Omega
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

De acordo com as relações entre os sistemas de coordenadas, equação (3.18a), pode-se escrever:

$$
\frac{\partial u_3^*}{\partial x_1} = \frac{\partial u_3^*}{\partial n} \cdot \cos\alpha - \frac{\partial u_3^*}{\partial s} \cdot \operatorname{sen}\alpha \tag{4.14a}
$$

$$
\frac{\partial u_3^*}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3^*}{\partial n} \cdot \operatorname{sen}\alpha + \frac{\partial u_3^*}{\partial s} \cdot \cos\alpha \tag{4.14b}
$$

Substituindo-se as equações (4.14) na equação (4.13), obtêm-se:

$$I_1 = -\int_\Gamma \left\{ \frac{\partial u_3^*}{\partial n} \cdot \left(M_{11} \cdot \cos^2 \alpha + 2 \cdot M_{12} \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha + M_{22} \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial u_3^*}{\partial s} \cdot \left[\left(M_{22} - M_{11} \right) \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha + M_{12} \cdot \left(\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \right) \right] \right\} \cdot d\Gamma + \tag{4.15}$$
$$+ \int_\Gamma Q_n \cdot u_3^* \cdot d\Gamma - \int_\Omega g \cdot u_3^* \cdot d\Omega$$

Utilizando-se as equações (3.21) na equação (4.15), pode-se escrever:

$$I_1 = -\int_\Gamma \left(M_n \cdot \frac{\partial u_3^*}{\partial n} + M_{ns} \cdot \frac{\partial u_3^*}{\partial s} - Q_n \cdot u_3^* \right) \cdot d\Gamma - \int_\Omega g \cdot u_3^* \cdot d\Omega \tag{4.16}$$

Integrando-se, por partes, o segundo termo da integral de contorno da equação (4.16), obtêm-se:

$$\int_\Gamma \left(M_{ns} \cdot \frac{\partial u_3^*}{\partial s} \right) \cdot d\Gamma = M_{ns} \cdot u_3^* \Big|_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} - \int_\Gamma \left(\frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \cdot u_3^* \right) \cdot d\Gamma \tag{4.17}$$

sendo Γ_1 e Γ_2 as coordenadas dos limites do contorno no qual se realiza a integração.

No caso de um contorno fechado, cuja representação paramétrica e a respectiva derivada sejam contínuas, a primeira parcela do segundo membro da equação (4.17) se anula. Caso contrário, ela dá origem às reações nas angulosidades (cantos) da placa. Desta forma, pode-se reescrever a equação (4.17) da seguinte forma:

$$\int_\Gamma \left(M_{ns} \cdot \frac{\partial u_3^*}{\partial s} \right) \cdot d\Gamma = -\sum_{i=1}^{N_c} R_{c\,i} \cdot u_{3\,c\,i}^* - \int_\Gamma \left(\frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \cdot u_3^* \right) \cdot d\Gamma \tag{4.18}$$

sendo, $\mathbf{N_c}$ o número total de cantos do contorno da placa e $\mathbf{u_{3\,ci}^*}$ o deslocamento fundamental do canto **i** da placa (**Figura 4.2**).

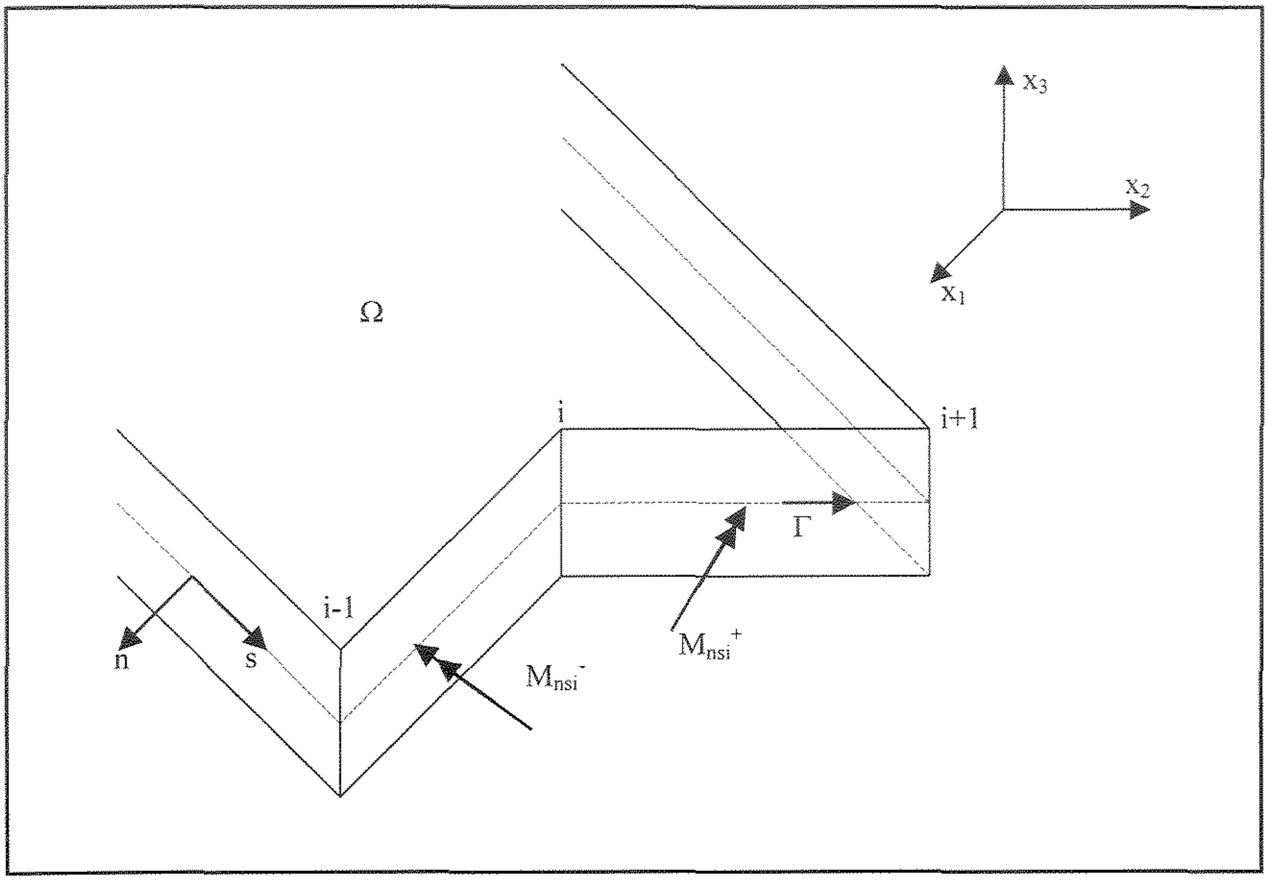


Figura 4.2 – Canto **i** do contorno da placa

As reações de canto da placa (**R**), são definidas a partir dos momentos volventes anterior e posterior ao canto da placa, ou seja:

$$R_{ci} = M_{nsi}^{+} - M_{nsi}^{-} \tag{4.19}$$

sendo, $\mathbf{M_{nsi}^{+}}$ e $\mathbf{M_{nsi}^{-}}$ os momentos volventes posterior e anterior ao canto **i** da placa, respectivamente.

Substituindo-se na equação (4.16) o valor encontrado na equação (4.18), obtêm-se:

$$I_1 = \int_{\Gamma}\left(\frac{\partial M_{ns}}{\partial s}\cdot u_3^* + Q_n \cdot u_3^* - M_n \cdot \frac{\partial u_3^*}{\partial n}\right)\cdot d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c\,i}\cdot u_{3c\,i}^* - \int_{\Omega} g \cdot u_3^* \cdot d\Omega \tag{4.20}$$

Considerando-se que o carregamento **g** está distribuído em $\mathbf{\Omega_g}$ e utilizando-se a equação (3.28), que relaciona a força cortante equivalente ($\mathbf{V_n}$) com a força cortante ($\mathbf{Q_n}$) e o momento volvente ($\mathbf{M_{ns}}$), na equação (4.20), obtêm-se:

$$I_1 = \int_\Gamma \left(V_n \cdot u_3^* - M_n \cdot \frac{\partial u_3^*}{\partial n} \right) \cdot d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c\,i} \cdot u_{3\,c\,i}^* - \int_{\Omega_g} g \cdot u_3^* \cdot d\Omega_g \tag{4.21}$$

O termo do primeiro membro da equação (4.1) pode ser desenvolvido de forma análoga, obtendo-se:

$$\begin{aligned} \int_V \left(\sigma_{11}^* \cdot \varepsilon_{11} + \sigma_{22}^* \cdot \varepsilon_{22} + \tau_{12}^* \cdot \gamma_{12} \right) \cdot dV = \int_\Gamma \left(V_n^* \cdot u_3 - M_n^* \cdot \frac{\partial u_3}{\partial n} \right) \cdot d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^* \cdot u_{3\,c\,i} \\ - \int_\Omega g^* \cdot u_3 \cdot d\Omega \end{aligned} \tag{4.22}$$

Portanto, a partir das equações (4.21) e (4.22), a equação final do teorema de *Betti*, aplicado ao estudo de placas, é dada por:

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \left(V_n^* \cdot u_3 - M_n^* \cdot \frac{\partial u_3}{\partial n} \right) \cdot d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^* \cdot u_{3\,c\,i} - \int_\Omega g^* \cdot u_3 \cdot d\Omega = \\ = \int_\Gamma \left(V_n \cdot u_3^* - M_n \cdot \frac{\partial u_3^*}{\partial n} \right) \cdot d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c\,i} \cdot u_{3\,c\,i}^* - \int_{\Omega_g} g \cdot u_3^* \cdot d\Omega_g \end{aligned} \tag{4.23}$$

Supondo-se que o carregamento $\mathbf{g}^*$ em (4.23) seja uma carga concentrada unitária aplicada em um ponto ξ do domínio da placa, tomando-se como função ponderadora a solução fundamental e aplicando-se as propriedades da função delta de *Dirac*, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} u_3(\xi) + \int_\Gamma \left[V_n^*(\xi,x) \cdot u_3(x) - M_n^*(\xi,x) \cdot \frac{\partial u_3}{\partial n}(x) \right] \cdot d\Gamma(x) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(\xi,x_c) \cdot u_{3\,c\,i}(x_c) = \\ = \int_\Gamma \left[V_n(x) \cdot u_3^*(\xi,x) - M_n(x) \cdot \frac{\partial u_3^*}{\partial n}(\xi,x) \right] \cdot d\Gamma(x) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c\,i}(x_c) \cdot u_{3\,c\,i}^*(\xi,x_c) + \\ - \int_{\Omega_g} g(x) \cdot u_3^*(\xi,x) \cdot d\Omega_g(x) \end{aligned} \tag{4.24}$$

sendo $\mathbf{x}_c$ a coordenada dos cantos da placa.

A equação (4.24) é a equação integral de placas para deslocamentos de pontos no domínio da placa. Esta equação fornece deslocamentos em todos os pontos do domínio da placa a partir das cortantes equivalentes ($\mathbf{V}_n$), momentos de flexão na direção normal ($\mathbf{M}_n$), reações de canto ($\mathbf{R}_c$), deslocamentos transversais ($\mathbf{u}_3$), e rotações em relação à normal ($\frac{\partial \mathbf{u}_3}{\partial \mathbf{n}}$), conhecidos no contorno.

4.3. Equação Integral em Coordenadas Normais e Tangenciais para Deslocamentos em Pontos do Contorno

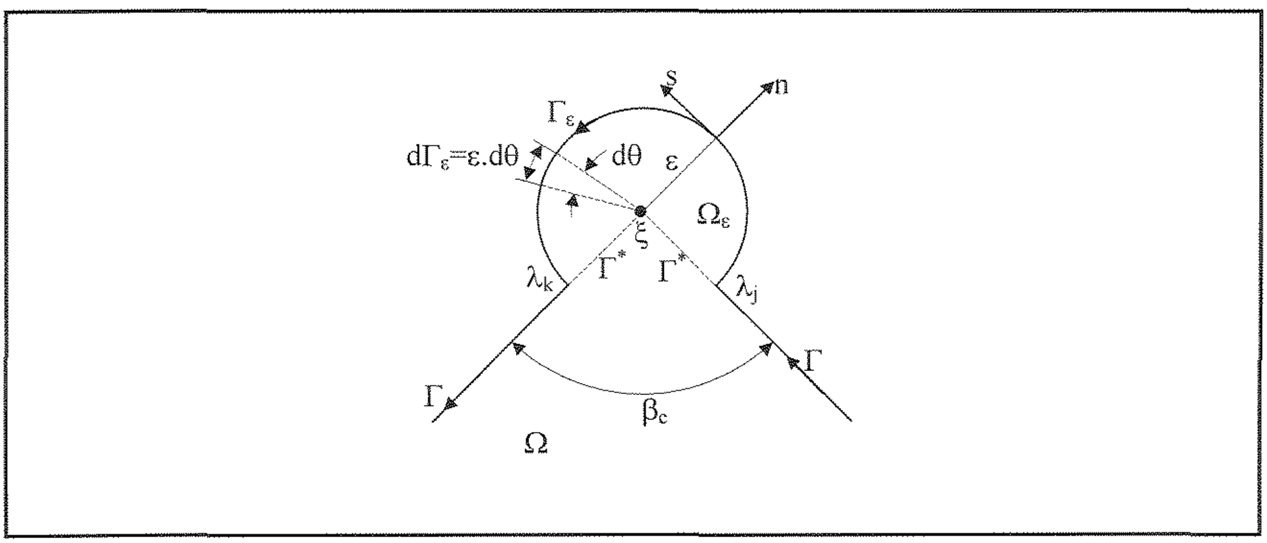


Figura 4.3 – Contorno circular acrescentado a um ponto ξ

Anteriormente, para o desenvolvimento da equação integral de placas (4.24), levaram-se em consideração pontos no domínio da placa. Para a utilização do MEC, necessita-se desenvolver a equação (4.24) para o caso de um ponto ξ pertencer ao contorno Γ da placa.

PAIVA [41] considera para um canto genérico **i** um acréscimo no domínio de contorno circular de raio ε, cujo centro coincide com o vértice deste canto, como está indicado na **Figura 4.3**.

Fazendo-se com que o ponto de aplicação da carga ξ coincida com o vértice do canto **i**, a equação (4.23) é satisfeita, já que ξ pertence ao novo domínio. O domínio modificado gera os cantos λ_j e λ_k e sua integral para o ponto ξ, a partir de (4.24), torna-se:

$$\begin{aligned}
&u_3(\xi)+\int_{\Gamma-\Gamma^*}\left[V_n^*(\xi,x)\cdot u_3(x)-M_n^*(\xi,x)\cdot\frac{\partial u_3}{\partial n}(x)\right]\cdot d\left(\Gamma-\Gamma^*\right)(x)+\\
&+\int_{\Gamma_\varepsilon}\left[V_n^*(\xi,x)\cdot u_3(x)-M_n^*(\xi,x)\cdot\frac{\partial u_3}{\partial n}(x)\right]\cdot d\Gamma_\varepsilon(x)+\sum_{i=1}^{N_c-1}R_{ci}^*(\xi,x_c)\cdot u_{3ci}(x_c)+\\
&+R_{c_{\lambda j}}^*(\xi,x_c)\cdot u_{3c_{\lambda j}}(x_c)+R_{c_{\lambda k}}^*(\xi,x_c)\cdot u_{3c_{\lambda k}}(x_c)=\\
&=\int_{\Gamma-\Gamma^*}\left[V_n(x)\cdot u_3^*(\xi,x)-M_n(x)\cdot\frac{\partial u_3^*}{\partial n}(\xi,x)\right]\cdot d\left(\Gamma-\Gamma^*\right)(x)+\\
&+\int_{\Gamma_\varepsilon}\left[V_n(x)\cdot u_3^*(\xi,x)-M_n(x)\cdot\frac{\partial u_3^*}{\partial n}(\xi,x)\right]\cdot d\Gamma_\varepsilon(x)+\sum_{i=1}^{N_c-1}R_{ci}(x_c)\cdot u_{3ci}^*(\xi,x_c)+\\
&+R_{c_{\lambda j}}(\xi,x_c)\cdot u_{3c_{\lambda j}}^*(x_c)+R_{c_{\lambda k}}(\xi,x_c)\cdot u_{3c_{\lambda k}}^*(x_c)-\int_{\Omega_g}g(x)\cdot u_3^*(\xi,x)\cdot d\Omega_g(x)
\end{aligned}\tag{4.25}$$

sendo:

Γ^* a representação da porção retirada do contorno;

Γ_ε a representação da porção adicionada ao contorno.

Para que a integral em um ponto de domínio represente uma integral em um ponto de contorno, faz-se com que ε tenda a zero. Com isso o ponto ξ deixa de estar no interior do domínio para pertencer ao contorno e a equação (4.25) torna-se:

$$
\begin{aligned}
& u_3(\xi)+\lim_{\Gamma^*\to 0}\int_{\Gamma-\Gamma^*}\left[V_n^*(\xi,x)\cdot u_3(x)-M_n^*(\xi,x)\cdot\frac{\partial u_3}{\partial n}(x)\right]\cdot d\left(\Gamma-\Gamma^*\right)(x)+\\
& +\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\left[V_n^*(\xi,x)\cdot u_3(x)-M_n^*(\xi,x)\cdot\frac{\partial u_3}{\partial n}(x)\right]\cdot d\Gamma_\varepsilon(x)+\sum_{i=1}^{N_c-1}R_{ci}^*(\xi,x_c)\cdot u_{3ci}(x_c)+\\
& +\lim_{\varepsilon\to 0}\left[R_{c_{\lambda j}}^*(\xi,x_c)\cdot u_{3c_{\lambda j}}(x_c)+R_{c_{\lambda k}}^*(\xi,x_c)\cdot u_{3c_{\lambda k}}(x_c)\right]=\\
& =\lim_{\Gamma^*\to 0}\int_{\Gamma-\Gamma^*}\left[V_n(x)\cdot u_3^*(\xi,x)-M_n(x)\cdot\frac{\partial u_3^*}{\partial n}(\xi,x)\right]\cdot d\left(\Gamma-\Gamma^*\right)(x)+\\
& +\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\left[V_n(x)\cdot u_3^*(\xi,x)-M_n(x)\cdot\frac{\partial u_3^*}{\partial n}(\xi,x)\right]\cdot d\Gamma_\varepsilon(x)+\sum_{i=1}^{N_c-1}R_{ci}(x_c)\cdot u_{3ci}^*(\xi,x_c)+\\
& +\lim_{\varepsilon\to 0}\left[R_{c_{\lambda j}}(\xi,x_c)\cdot u_{3c_{\lambda j}}^*(x_c)+R_{c_{\lambda k}}(\xi,x_c)\cdot u_{3c_{\lambda k}}^*(x_c)\right]-\int_{\Omega_g}g(x)\cdot u_3^*(\xi,x)\cdot d\Omega_g(x)
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

Os limites das integrais sobre (Γ-Γ^*) indicados em (4.26) representam o valor anteriormente obtido, sem o acréscimo do domínio Ω_ε, ou seja:

$$
\begin{aligned}
& \lim_{\Gamma^*\to 0}\int_{\Gamma-\Gamma^*}\left[V_n^*(\xi,x)\cdot u_3(x)-M_n^*(\xi,x)\cdot\frac{\partial u_3}{\partial n}(x)\right]\cdot d\left(\Gamma-\Gamma^*\right)(x)=\\
& \qquad =\int_{\Gamma}\left[V_n^*(\xi,x)\cdot u_3(x)-M_n^*(\xi,x)\cdot\frac{\partial u_3}{\partial n}(x)\right]\cdot d\Gamma(x)
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

$$
\begin{aligned}
& \lim_{\Gamma^*\to 0}\int_{\Gamma-\Gamma^*}\left[V_n(x)\cdot u_3^*(\xi,x)-M_n(x)\cdot\frac{\partial u_3^*}{\partial n}(\xi,x)\right]\cdot d\left(\Gamma-\Gamma^*\right)(x)=\\
& \qquad =\int_{\Gamma}\left[V_n(x)\cdot u_3^*(\xi,x)-M_n(x)\cdot\frac{\partial u_3^*}{\partial n}(\xi,x)\right]\cdot d\Gamma(x)
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

As parcelas de (4.26) referentes às reações de canto, resultam:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{N_c-1}R_{ci}^*(\xi,x_c)\cdot u_{3ci}(x_c)+\lim_{\varepsilon\to 0}\left[R_{c_{\lambda j}}^*(\xi,x_c)\cdot u_{3c_{\lambda j}}(x_c)+R_{c_{\lambda k}}^*(\xi,x_c)\cdot u_{3c_{\lambda k}}(x_c)\right]=\\
& \quad =\sum_{i=1}^{N_c}R_{ci}^*(\xi,x_c)\cdot u_{3ci}(x_c)
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N_c-1} R_{c\,i}(x_c)\cdot u^*_{3c\,i}(\xi,x_c)+\lim_{\varepsilon\to 0}\left[R_{c_{\varepsilon j}}(\xi,x_c)\cdot u^*_{3c_{\varepsilon j}}(x_c)+R_{c_{\varepsilon k}}(\xi,x_c)\cdot u^*_{3c_{\varepsilon k}}(x_c)\right]=\\&=\sum_{i=1}^{N_c} R_{c\,i}(x_c)\cdot u^*_{3c\,i}(\xi,x_c)\end{aligned} \tag{4.30}$$

A parcela de (4.26) referente à integral sobre o trecho Γ_ε, envolvendo $\mathbf{u_3(x)}$ e $\frac{\partial \mathbf{u}_3}{\partial \mathbf{n}}\mathbf{(x)}$, pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\left[V_n^*(\xi,x)\cdot u_3(x)-M_n^*(\xi,x)\cdot\frac{\partial u_3}{\partial n}(x)\right]\cdot d\Gamma_\varepsilon(x)=\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\left\{V_n^*(\xi,x)\cdot\left[u_3(x)-u_3(\xi)\right]-M_n^*(\xi,x)\cdot\left[\frac{\partial u_3}{\partial n}(x)-\frac{\partial u_3}{\partial n}(\xi)\right]\right\}\cdot d\Gamma_\varepsilon(x)+\\&+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}V_n^*(\xi,x)\cdot u_3(x)\cdot d\Gamma_\varepsilon(x)-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}M_n^*(\xi,x)\cdot\frac{\partial u_3}{\partial n}(x)\cdot d\Gamma_\varepsilon(x)\end{aligned} \tag{4.31}$$

Considerando-se válida a continuidade e utilizando-se a condição de *Hölder* **[15]**, dada por:

$$\left|\, u_3(x)-u_3(\xi)\,\right|\le C_{\alpha 1}\cdot r^{\alpha_1(\xi,x)} \tag{4.32}$$

$$\left|\frac{\partial u_3}{\partial n}(x)-\frac{\partial u_3}{\partial n}(\xi)\right|\le C_{\alpha 2}\cdot r^{\alpha_2(\xi,x)} \tag{4.33}$$

sendo $\mathbf{C_{\alpha 1}}$ e $\mathbf{C_{\alpha 2}}$ constantes e $0<\alpha_i\le 1$, com (i=1,2), a primeira integral do segundo membro de (4.31) se anula.

Como $\mathbf{u_3(x)}$ e $\frac{\partial \mathbf{u}_3}{\partial \mathbf{n}}\mathbf{(x)}$ são valores do domínio e não variam ao longo de Γ_ε, a equação (4.31) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left[V_n^*(\xi, x) \cdot u_3(x) - M_n^*(\xi, x) \cdot \frac{\partial u_3}{\partial n}(x) \right] \cdot d\Gamma_\varepsilon(x) = \\
&= u_3(\xi) \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} V_n^*(\xi, x) \cdot d\Gamma_\varepsilon(x) - \frac{\partial u_3}{\partial n}(\xi) \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} M_n^*(\xi, x) \cdot d\Gamma_\varepsilon(x)
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Substituindo em (4.34) os valores de $\mathbf{V_n^*(\xi,x)}$ e $\mathbf{M_n^*(\xi,x)}$, dados em (3.68) e (3.66), respectivamente, e considerando-se ainda que neste caso, $\mathbf{r_{,i}.n_{,i}}$ igual a **1**, $\mathbf{r_{,i}.s_{,i}}$ igual a **0** e **r** igual a ε, **Figura 4.3**, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left[V_n^*(\xi, x) \cdot u_3(x) - M_n^*(\xi, x) \cdot \frac{\partial u_3}{\partial n}(x) \right] \cdot d\Gamma_\varepsilon(x) = \\
&= u_3(\xi) \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{-1}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot d\Gamma_\varepsilon(x) - \frac{\partial u_3}{\partial n}(\xi) \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot [(1+\nu) \cdot \ln \varepsilon + 1] \cdot d\Gamma_\varepsilon(x)
\end{aligned} \tag{4.35}$$

A integral em $\mathbf{d\Gamma_\varepsilon(x)}$ pode ser dada por:

$$d\Gamma_\varepsilon(x) = \varepsilon \cdot d\theta \tag{4.36}$$

Substituindo-se (4.36) em (4.35), obtêm-se:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left[V_n^*(\xi, x) \cdot u_3(x) - M_n^*(\xi, x) \cdot \frac{\partial u_3}{\partial n}(x) \right] \cdot d\Gamma_\varepsilon(x) = \\
&\qquad = u_3(\xi) \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2\pi - \beta_c} \frac{-1}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \varepsilon \cdot d\phi + \\
&\qquad - \frac{\partial u_3}{\partial n}(\xi) \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2\pi - \beta_c} \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot [(1+\nu) \cdot \ln \varepsilon + 1] \cdot \varepsilon \cdot d\theta
\end{aligned} \tag{4.37}$$

sendo β_c o ângulo interno do canto da placa, indicado na **Figura 4.3**.

Desenvolvendo-se as integrais de (4.37), obtêm-se:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left[V_n^*(\xi, x) \cdot u_3(x) - M_n^*(\xi, x) \cdot \frac{\partial u_3}{\partial n}(x) \right] \cdot d\Gamma_\varepsilon(x) = -\frac{2 \cdot \pi - \beta_c}{2 \cdot \pi} \cdot u_3(\xi) \tag{4.38}$$

A parcela de (4.26) referente à integral sobre o trecho Γ_ε, envolvendo $\mathbf{V_n}^*(\mathbf{x})$ e $\mathbf{M_n}^*(\mathbf{x})$, pode ter o mesmo tratamento dado à integral anterior, conduzindo a valores nulos. Assim, a equação (4.26) pode ser escrita como:

$$C(\xi)\cdot u_3(\xi)+\int_\Gamma\left[V_n^*(\xi,x)\cdot u_3(x)-M_n^*(\xi,x)\cdot\frac{\partial u_3}{\partial n}(x)\right]\cdot d\Gamma(x)+$$
$$+\sum_{i=1}^{N_c}R_{ci}^*(\xi,x_c)\cdot u_{3ci}(x_c)=\int_\Gamma\left[V_n(x)\cdot u_3^*(\xi,x)-M_n(x)\cdot\frac{\partial u_3^*}{\partial n}(\xi,x)\right]\cdot d\Gamma(x)+ \tag{4.39}$$
$$+\sum_{i=1}^{N_c}R_{c\,i}(x_c)\cdot u_{3ci}^*(\xi,x_c)-\int_{\Omega_g}g(x)\cdot u_3^*(\xi,x)\cdot d\Omega_g(x)$$

sendo $\mathbf{C}(\xi)$ definido por:

$$C(\xi)=\frac{\beta_c}{2\cdot\pi} \tag{4.40}$$

Quando o ponto ξ estiver fora do domínio, a integral da equação (4.23) que contém a carga $\mathbf{g}^*$ é igual à:

$$\int_\Omega g^*(\xi,x)\cdot u_3(\xi)\cdot d\Omega(x)=u_3(\xi) \tag{4.41}$$

Como ξ não pertence ao domínio nem ao contorno, obtêm-se:

$$\int_\Omega g^*(\xi,x)\cdot u_3(\xi)\cdot d\Omega(x)=0 \tag{4.42}$$

Com isso pode-se concluir que:

$$C(\xi)=\begin{cases}1, & \xi\in\Omega\\ \dfrac{\beta_c}{2\cdot\pi}, & \xi\in\Gamma\\ 0, & \xi\notin(\Omega\cap\Gamma)\end{cases} \tag{4.43}$$

Para um ponto no contorno onde os elementos são lineares e possuem tangente contínua, formado um ângulo β_c, entre eles, igual à π, obtêm-se:

$$C(\xi) = 0,5 \tag{4.44}$$

4.4. Equação Integral em Coordenadas Normais e Tangenciais para Pontos Internos

Os deslocamentos transversais ($\mathbf{u_3}$) para os pontos internos ao domínio são conhecidos a partir da cortante equivalente ($\mathbf{V_n}$), dos momentos fletores ($\mathbf{M_n}$), reações de canto ($\mathbf{R_c}$), deslocamentos ($\mathbf{u_3}$) e rotações normais ($\frac{\partial \mathbf{u_3}}{\partial \mathbf{n}}$), determinados no contorno. Seus valores são determinados pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} u_3(\xi) = & -\int_\Gamma \left[V_n^*(\xi,x)\cdot u_3(x) - M_n^*(\xi,x)\cdot \frac{\partial u_3}{\partial n}(x) \right]\cdot d\Gamma(x) - \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(\xi,x_c)\cdot u_{3ci}(x_c) + \\ & + \int_\Gamma \left[V_n(x)\cdot u_3^*(\xi,x) - M_n(x)\cdot \frac{\partial u_3^*}{\partial n}(\xi,x) \right]\cdot d\Gamma(x) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(x_c)\cdot u_{3ci}^*(\xi,x_c) + \\ & - \int_{\Omega_g} g(x)\cdot u_3^*(\xi,x)\cdot d\Omega_g(x) \end{aligned} \tag{4.45}$$

Admitindo-se que (4.45) é contínua, pode-se através de sua segunda derivada, determinar os valores das curvaturas nos pontos internos. A expressão da curvatura nos pontos internos torna-se:

$$
\begin{aligned}
u_{3,ij}(\xi) = & -\int_\Gamma \left[V^*_{n,ij}(\xi,x)\cdot u_3(x) - M^*_{n,ij}(\xi,x)\cdot \frac{\partial u_3}{\partial n}(x) \right]\cdot d\Gamma(x) + \\
& -\sum_{k=1}^{N_c} R^*_{ck,ij}(\xi,x_c)\cdot u_{3ck}(x_c) + \int_\Gamma \left[V_n(x)\cdot u^*_{3,ij}(\xi,x) - M_n(x)\cdot \frac{\partial u^*_3}{\partial n},_{ij}(\xi,x) \right]\cdot d\Gamma(x) + \\
& + \sum_{k=1}^{N_c} R_{c\,k}(x_c)\cdot u^*_{3c\,k,ij}(\xi,x_c) - \int_{\Omega_g} g(x)\cdot u^*_{3,ij}(\xi,x)\cdot d\Omega_g(x)
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

Determinando-se as expressões para $\mathbf{u_3}^*{}_{,\mathbf{ij}}$, $\dfrac{\partial \mathbf{u_3}^*}{\partial \mathbf{n}}{}_{,\mathbf{ij}}$, $\mathbf{V_n}^*{}_{,\mathbf{ij}}$, $\mathbf{M_n}^*{}_{,\mathbf{ij}}$ e $\mathbf{R_{ci}}^*{}_{,\mathbf{ij}}$, obtêm-se:

$$
u_3^*{}_{,ij}(\xi,x) = \left(\delta_{ij}\cdot \ln r + r_{,i}\cdot r_{,j}\right)\cdot \frac{1}{4\cdot\pi\cdot D}
\tag{4.47}
$$

$$
\frac{\partial u_3^*}{\partial n},_{ij}(\xi,x) = -\left[\left(\delta_{ij} - 2\cdot r_{,i}\cdot r_{,j}\right)\cdot \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,i}\cdot n_{,j} + r_{,j}\cdot n_{,i} \right]\cdot \frac{1}{4\cdot\pi\cdot D\cdot r}
\tag{4.48}
$$

$$
\begin{aligned}
V^*_{n,ij}(\xi,x) = \Bigg\{ \Bigg[& 8\cdot\frac{\partial r}{\partial n}\cdot\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\cdot\left(6\cdot r_{,i}\cdot r_{,j} - \delta_{ij}\right) - 8\cdot\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\cdot\left(r_{,i}\cdot n_j + r_{,j}\cdot n_i\right) + \\
& + 4\cdot\frac{\partial r}{\partial s}\cdot\left(s_j\cdot n_i + s_i\cdot n_j\right) + 2\cdot\frac{\partial r}{\partial n}\cdot\left(2\cdot s_i\cdot s_j - 4\cdot r_{,i}\cdot r_{,j} + \delta_{ij}\right) + \\
& - 16\cdot\frac{\partial r}{\partial n}\cdot\frac{\partial r}{\partial s}\cdot\left(r_{,i}\cdot s_j + r_{,j}\cdot s_i\right) + 2\cdot\left(r_{,i}\cdot n_j + r_{,j}\cdot n_i\right) \Bigg]\cdot(1-\nu) + \\
& + 4\cdot\frac{\partial r}{\partial n}\cdot\left(\delta_{ij} - 4\cdot r_{,i}\cdot r_{,j}\right) + 4\cdot\left(r_{,i}\cdot n_j + r_{,j}\cdot n_i\right) \Bigg\}\cdot\frac{1}{4\cdot\pi\cdot r^3}
\end{aligned}
\tag{4.49}
$$

$$
\begin{aligned}
M^*_{n,ij}(\xi,x) = \Bigg\{ \Bigg[& (1+\nu) - 2\cdot\left(\left(\frac{\partial r}{\partial n}\right)^2 + \nu\cdot\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\right) \Bigg]\cdot\left(\delta_{ij} - 2\cdot r_{,i}\cdot r_{,j}\right) + \\
& - 4\cdot\frac{\partial r}{\partial n}\cdot\left(r_{,i}\cdot n_j + r_{,j}\cdot n_i\right) - 4\cdot\nu\cdot\frac{\partial r}{\partial s}\cdot\left(r_{,i}\cdot s_j + r_{,j}\cdot s_i\right) + \\
& + 4\cdot r_{,i}\cdot r_{,j}\cdot\left[\left(\frac{\partial r}{\partial n}\right)^2 + \nu\cdot\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\right] + 2\cdot n_i\cdot n_j + 2\cdot\nu\cdot s_i\cdot s_j \Bigg\}\cdot\frac{1}{4\cdot\pi\cdot r^2}
\end{aligned}
\tag{4.50}
$$

$$
R^*_{ck,ij}(\xi,x) = M_{ns,ij}(\xi,x_f) - M_{ns,ij}(\xi,x_i)
\tag{4.51}
$$

$$M_{ns,ij}(\xi,x)=\left\{2\cdot\left[\frac{\partial r}{\partial n}\cdot\left(r_{,i}\cdot s_j+r_{,j}\cdot s_i\right)+\frac{\partial r}{\partial s}\cdot\left(r_{,i}\cdot n_j+r_{,j}\cdot n_i\right)\right]+\right.$$
$$\left.+2\cdot\frac{\partial r}{\partial n}\cdot\frac{\partial r}{\partial s}\cdot\left(\delta_{ij}-4\cdot r_{,i}\cdot r_{,j}\right)-n_i\cdot s_j-n_j\cdot s_i\right\}\cdot\frac{(1-\nu)}{4\cdot\pi\cdot r^2} \tag{4.52}$$

Com as curvaturas dos pontos internos e com uma transformação de coordenadas (de **ns** para $\mathbf{x_1x_2}$) consegue-se determinar os momentos nos pontos internos da placa ($\mathbf{M_{11}}$, $\mathbf{M_{22}}$ e $\mathbf{M_{12}}$) através das equações (3.12).

4.5. Tratamento para as Integrais de Domínio do Carregamento Distribuído

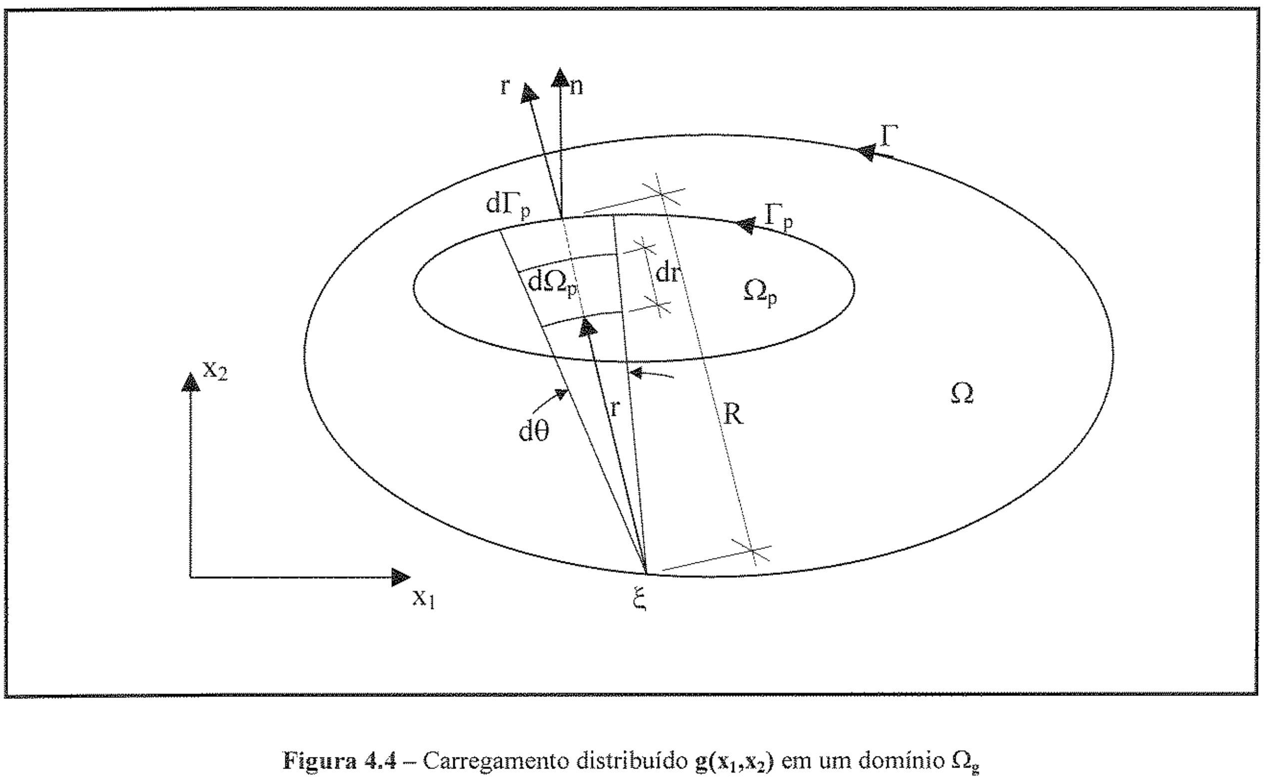


Figura 4.4 – Carregamento distribuído $\mathbf{g(x_1,x_2)}$ em um domínio Ω_g

Os termos das integrais (4.24), (4.39) e (4.46) que representam uma integral de domínio são determinados considerando-se um carregamento distribuído $\mathbf{g(x_1, x_2)}$ em um determinado domínio (Ω_p), como indicado na **Figura 4.4**.

Desta forma a integral de domínio torna-se:

$$\int_{\Omega_g} g(x) \cdot u_3^*(\xi, x) \cdot d\Omega_g(x) = \int_{\Omega_p} g(x_1, x_2) \cdot u_3^*(\xi, x) \cdot d\Omega_p(x) \tag{4.53}$$

Considerando-se que o plano de carregamento tem forma linear sobre o subdomínio Ω_p, obtêm-se:

$$g(x_1, x_2) = A_g \cdot x_1 + B_g \cdot x_2 + C_g \tag{4.54}$$

sendo $\mathbf{A_g}$, $\mathbf{B_g}$ e $\mathbf{C_g}$ constantes.

Reescrevendo-se a expressão (4.53), obtêm-se:

$$\int_{\Omega_g} g(x) \cdot u_3^*(\xi, x) \cdot d\Omega_g(x) = \int_{\Omega_p} \left(A_g \cdot x_1 + B_g \cdot x_2 + C_g\right) \cdot u_3^*(\xi, x) \cdot d\Omega_p(x) \tag{4.55}$$

De acordo com a **Figura 4.4**, o elemento infinitesimal ($\mathbf{d\Omega_p}$) pode ser escrito como:

$$d\Omega_p = r \cdot dr \cdot d\theta \tag{4.56}$$

Desta forma, substituindo-se o valor da solução fundamental do deslocamento ($\mathbf{u_3^*}$) e a expressão (4.56) em (4.55), obtêm-se:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_g} g(x) \cdot u_3^*(\xi, x) \cdot d\Omega_g(x) = \\ &= \frac{1}{8 \cdot \pi \cdot D} \int_\theta \int_0^R \left[\left(A_g \cdot x_1 + B_g \cdot x_2 + C_g\right) \cdot r^2 \cdot (\ln r - K) \cdot r \cdot dr\right] \cdot d\theta \end{aligned} \tag{4.57}$$

sendo $\mathbf{R}$ o valor de $\mathbf{r}$ em um ponto qualquer do subdomínio Ω_p.

Transformando-se em coordenadas cilíndricas os valores de $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$, obtêm-se:

$$\int_{\Omega_g} g(x) \cdot u_3^*(\xi, x) \cdot d\Omega_g(x) = \\ = \frac{1}{8 \cdot \pi \cdot D} \int_\theta \int_0^R \left[\left(A_g \cdot r \cdot r_{,1} + B_g \cdot r \cdot r_{,2} + C_g \right) \cdot r^2 \cdot (\ln r - K) \cdot r \cdot dr \right] \cdot d\theta \tag{4.58}$$

Resolvendo-se a integral interna do segundo membro de (4.58), obtêm-se:

$$\int_{\Omega_g} g(x) \cdot u_3^*(\xi, x) \cdot d\Omega_g(x) = \int_\theta \left\{ \frac{A_g \cdot r_{,1} + B_g \cdot r_{,2}}{40 \cdot \pi \cdot D} \cdot \left[R^5 \cdot \left(\ln r - K - \frac{1}{5} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{C_g}{32 \cdot \pi \cdot D} \cdot \left[R^4 \cdot \left(\ln r - K - \frac{1}{4} \right) \right] \right\} \cdot d\theta \tag{4.59}$$

De acordo com a **Figura 4.4**, obtêm-se a relação:

$$d\theta = \frac{n_i \cdot r_i}{R} \cdot d\Gamma_p \tag{4.60}$$

Desta forma os termos que constituem uma integral de domínio são transformados em integrais de contorno, como apresentado na equação a seguir:

$$\int_{\Omega_g} g(x) \cdot u_3^*(\xi, x) \cdot d\Omega_g(x) = \\ = \frac{1}{40 \cdot \pi \cdot D} \int_{\Gamma_p} \left(A_g \cdot r_{,1} + B_g \cdot r_{,2} \right) \cdot \left[R^4 \cdot \left(\ln r - K - \frac{1}{5} \right) \right] \cdot n_i \cdot r_i \cdot d\Gamma_p + \\ + \frac{C_g}{32 \cdot \pi \cdot D} \int_{\Gamma_p} \left[R^3 \cdot \left(\ln r - K - \frac{1}{4} \right) \right] \cdot n_i \cdot r_i \cdot d\Gamma_p \tag{4.61}$$

A integral de domínio da equação (4.46), utilizada na determinação das curvaturas dos pontos internos, é calculada substituindo-se a segunda derivada da solução fundamental do deslocamento ($\mathbf{u_3}^*_{,ij}$), equação (4.47), na equação do carregamento linear distribuído no domínio, equação (4.54) e resolvendo-se de forma análoga à integral anterior. Desta forma, obtêm-se:

$$\int_{\Omega_g} g(x)\cdot u^*_{3,ij}(\xi,x)\cdot d\Omega_g(x) =$$
$$= \frac{1}{12\cdot\pi\cdot D}\int_{\Gamma_p}\left(A_g\cdot r_{,1}+B_g\cdot r_{,2}\right)\cdot R^2\cdot\left[\left(\ln r-\frac{1}{3}\right)\cdot\delta_{ij}+r_{,i}\cdot r_{,j}\right]\cdot n_i\cdot r_i\cdot d\Gamma_p + \tag{4.62}$$
$$+\frac{C_g}{8\cdot\pi\cdot D}\int_{\Gamma_p} R\cdot\left[\left(\ln r-\frac{1}{2}\right)\cdot\delta_{ij}+r_{,i}\cdot r_{,j}\right]\cdot n_i\cdot r_i\cdot d\Gamma_p$$

5. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

5.1. Introdução

As soluções analíticas de um problema genérico plano são, normalmente, muito difíceis de serem encontradas. Assim, faz-se o uso de métodos numéricos.

É apresentada, no decorrer deste capítulo, a formulação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para solução de placas. Esta formulação pode ser deduzida de algumas formas, como a partir da técnica dos resíduos ponderados, a partir do teorema de *Betti*, ou aplicando a segunda identidade de *Green*. Usando-se a primeira técnica, tem-se uma formulação que pode ser facilmente relacionada a outros métodos numéricos, permitindo o acoplamento do MEC ao MEF, por exemplo.

A partir das equações integrais (**Capítulo 4**), é feita a discretização do contorno da placa em elementos. Como é mostrado, seguindo-se a teoria clássica, para cada ponto de colocação, ou seja, para cada nó onde se posiciona a fonte para se escrever a equação integral, são necessárias duas equações relacionando os deslocamentos e os esforços no contorno, por causa da ordem da equação diferencial da teoria clássica. Estas equações integrais são transformadas, após as integrações necessárias, em um sistema de equações lineares onde as variáveis são os deslocamentos e os esforços em nós definidos no contorno. O sistema de equações lineares é obtido escrevendo-se as equações integrais para todos os nós associados aos elementos de contorno. Com a imposição das condições de contorno do problema e a resolução final do sistema de equações resultante, os valores do contorno e do domínio da placa podem ser obtidos.

5.2. Discretização do Contorno

Para aplicar as equações integrais de placas a problemas físicos, é preciso que estas possam ser facilmente explicitadas para um contorno em particular. Na **Figura 5.1a** é mostrado um domínio Ω, com um contorno Γ, de formato arbitrário.

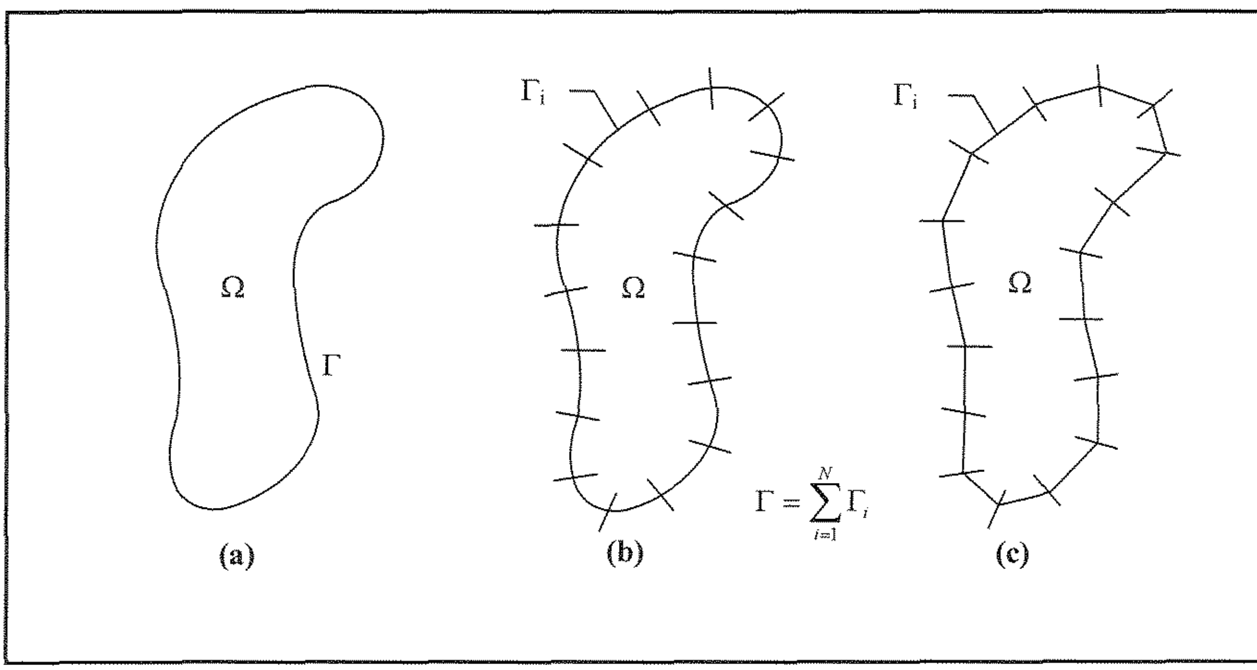


Figura 5.1 - Discretização do contorno

Este contorno Γ é dividido em **N** trechos menores Γ_i, tal que a soma destes recompõem o contorno original, conforme está ilustrado na **Figura 5.1b**. Aos pontos extremos de cada um dos trechos dá-se o nome de *nós*. Quando os trechos são lineares ou são aproximados por trechos lineares, eles podem ter sua geometria descrita por uma função de interpolação das coordenadas dos nós, como no exemplo da **Figura 5.1c.** Os trechos do contorno, aproximados por funções de interpolação, são aqui chamados de *elementos de contorno*.

Neste estudo, para a aproximação da geometria do contorno da placa, o elemento utilizado é linear, ficando o mesmo definido pelas coordenadas cartesianas dos pontos nodais.

5.3. Elementos de Contorno

O conceito utilizado no MEC de aproximar forças e/ou deslocamentos ao longo do elemento com funções de forma conhecidas, ponderadas pelos valores nodais, é análogo ao MEF. É por esta razão que as equações integrais aplicadas no contorno discretizado podem ser obtidas levando estas a serem transformadas em uma relação linear entre os pontos nodais.

Quando, tanto a geometria do elemento quanto suas variáveis de deslocamento e força são descritas pela mesma função de interpolação, o elemento é chamado *isoparamétrico*. Assim pode-se escrever:

$$\underset{\sim}{X}_s = \underset{\sim}{\phi}_i(\xi) \cdot \underset{\sim}{X}_k^{\,j} \tag{5.1}$$

Na equação (5.1), o índice **i** varia de **1** até **2** para elementos isoparamétricos lineares. O valor $\mathbf{X_S}$ representa qualquer uma das variáveis do elemento, sejam as coordenadas de um ponto interno ou o valor do deslocamento ou força neste mesmo ponto.

Explicitamente, a equação (5.1) é dada por:

$$\begin{pmatrix} x_{s1} \\ x_{s2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}\cdot(1+\xi) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\cdot(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}\cdot(1+\xi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1^{\,1} \\ X_1^{\,2} \\ X_2^{\,1} \\ X_2^{\,2} \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

A variável homogênea ξ é um parâmetro independente e assume, ao longo dos elementos, os valores ilustrados na **Figura 5.2**.

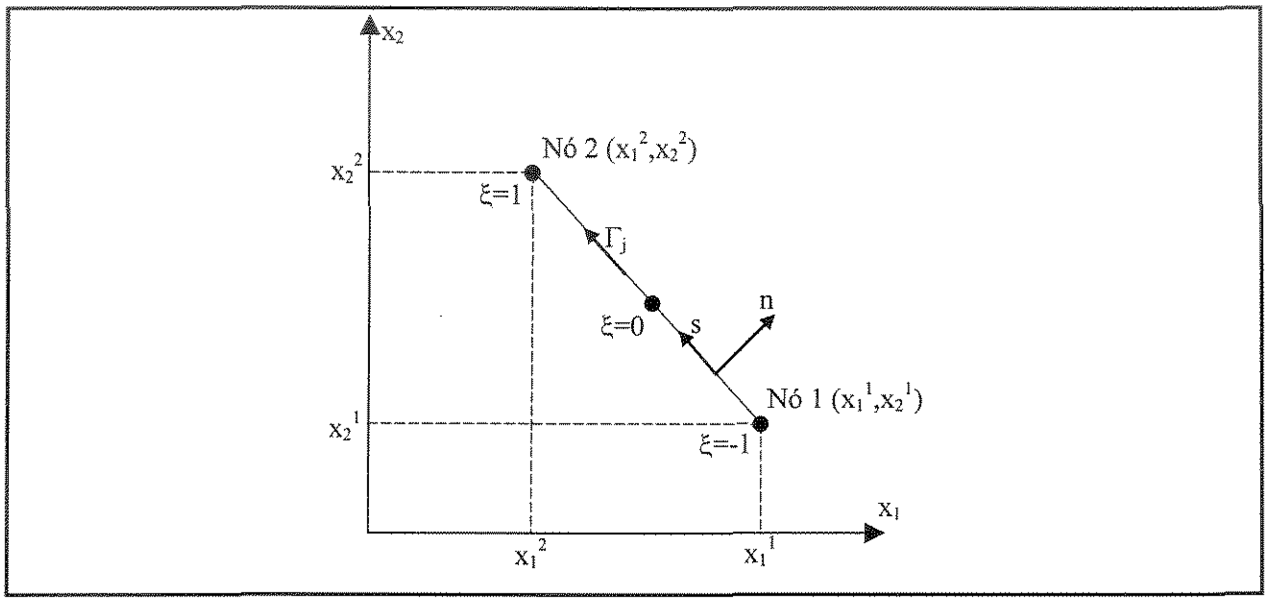


Figura 5.2 – Elemento linear

Usando-se a equação (5.1) para descrever os deslocamentos e as forças de pontos internos aos elementos de contorno chega-se a:

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{\phi}^{t} \cdot \underset{\sim}{U}_{k}^{j} \tag{5.3}$$

$$\underset{\sim}{t} = \underset{\sim}{\phi}^{t} \cdot \underset{\sim}{T}_{k}^{j} \tag{5.4}$$

sendo:

j o índice do nó no elemento de contorno;

k o índice relacionado com a coordenada.

De acordo com a teoria clássica de placas, os deslocamentos e esforços escritos explicitamente são dados a partir das equações (5.3) e (5.4), ou seja:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}\cdot(1+\xi) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\cdot(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}\cdot(1+\xi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1^{\ 1} \\ U_1^{\ 2} \\ U_2^{\ 1} \\ U_2^{\ 2} \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}\cdot(1+\xi) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\cdot(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}\cdot(1+\xi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_1^{\ 1} \\ T_1^{\ 2} \\ T_2^{\ 1} \\ T_2^{\ 2} \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

sendo:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_3 \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial n} \end{pmatrix} \tag{5.7a}$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_n \\ M_n \end{pmatrix} \tag{5.7b}$$

$$\begin{pmatrix} U_1^{\ 1} \\ U_1^{\ 2} \\ U_2^{\ 1} \\ U_2^{\ 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_3^{\ 1} \\ \dfrac{\partial u_3^{\ 1}}{\partial n} \\ u_3^{\ 2} \\ \dfrac{\partial u_3^{\ 2}}{\partial n} \end{pmatrix} \tag{5.7c}$$

$$\begin{pmatrix} T_1^1 \\ T_1^2 \\ T_2^1 \\ T_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_n^{\ 1} \\ M_n^{\ 1} \\ V_n^{\ 2} \\ M_n^{\ 2} \end{pmatrix} \tag{5.7d}$$

Como se utilizou uma função linear para aproximar a geometria e as variáveis dos nós, o elemento adotado pode ser chamado de isoparamétrico linear. As funções aproximadoras estão diretamente relacionadas com a posição dos pontos nodais do elemento. Este posicionamento determina que os elementos sejam contínuos, descontínuos ou mistos.

a) Elemento Linear Contínuo

Quando os pontos nodais de um elemento são comuns aos elementos adjacentes, assumindo, nos mesmos, valores únicos, este elemento é chamado de contínuo. A função aproximadora utilizada, como visto anteriormente, é a função linear. Este elemento é geralmente utilizado em contornos sem angulosidade e sem variação de vinculação.

A **Figura 5.3** mostra um elemento linear contínuo, onde as funções aproximadoras são dadas por:

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \cdot (1 - \xi) \tag{5.8a}$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2} \cdot (1 + \xi) \tag{5.8b}$$

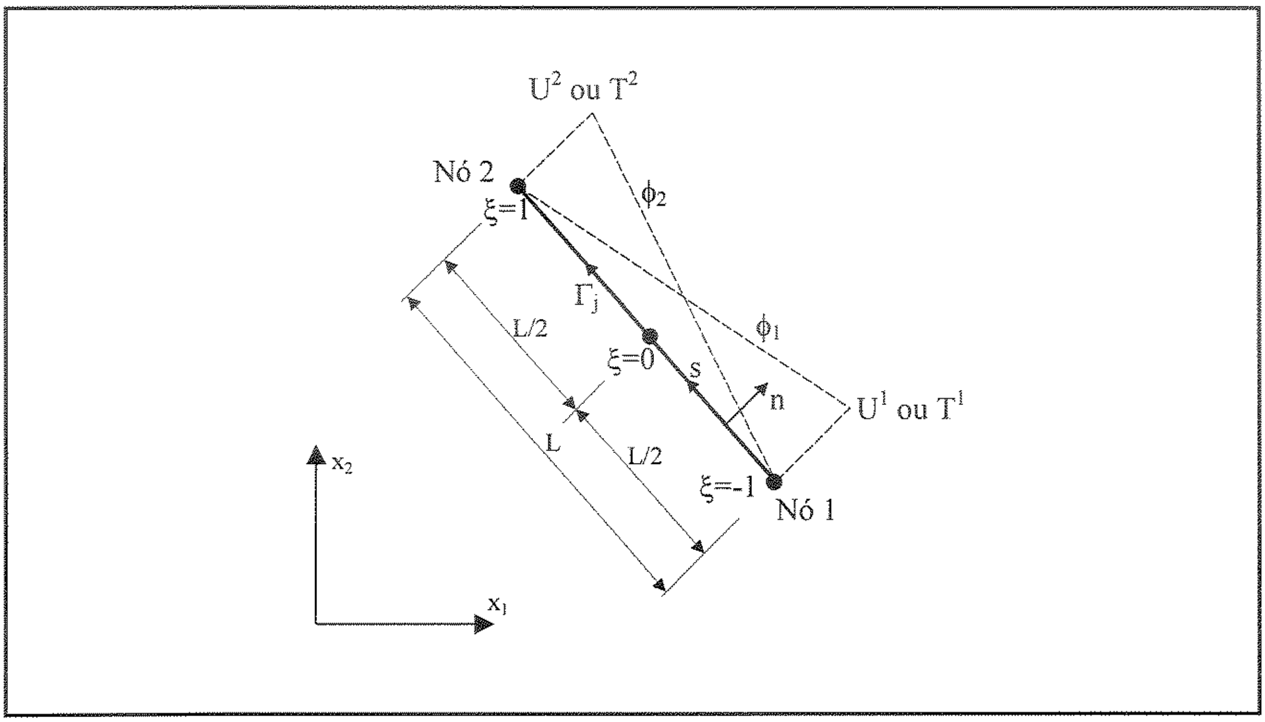


Figura 5.3 – Elemento linear contínuo

No entanto, a presença de angulosidades ou a mudança de vinculações no contorno são comuns, tornando-se necessário a definição de outros tipos de elementos que permitam a representação dessas descontinuidades. Para estes casos podem ser utilizados os elementos descontínuos e/ou mistos.

Quando é necessária a utilização de elementos descontínuos ou mistos, adotam-se dois nós com a mesma coordenada geométrica. A **Figura 5.4** mostra uma angulosidade de uma placa com a adoção de dois nós com coordenadas idênticas, que são denominados nós duplos.

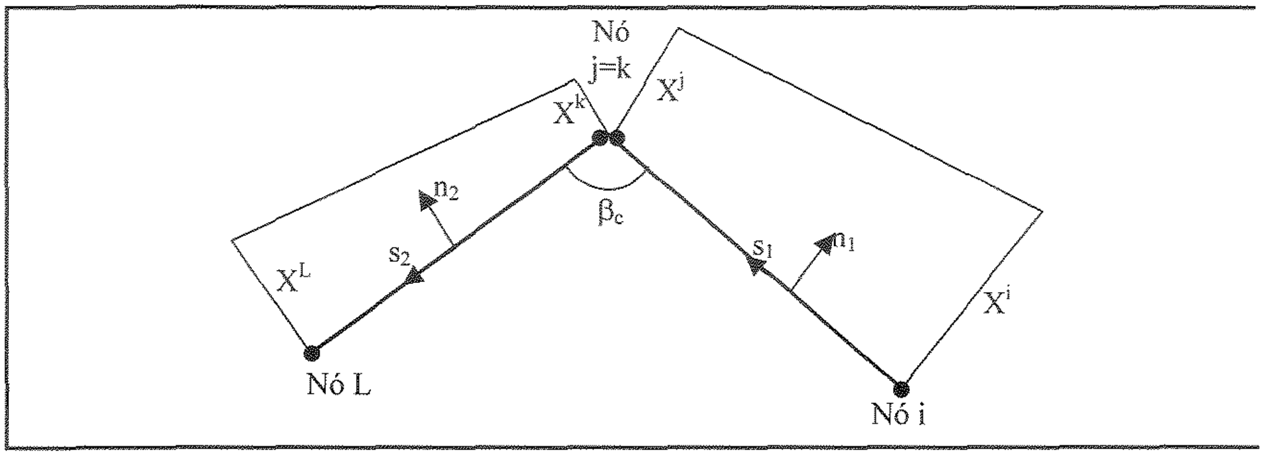


Figura 5.4 – Definição de nó duplo

b) Elemento Linear Descontínuo

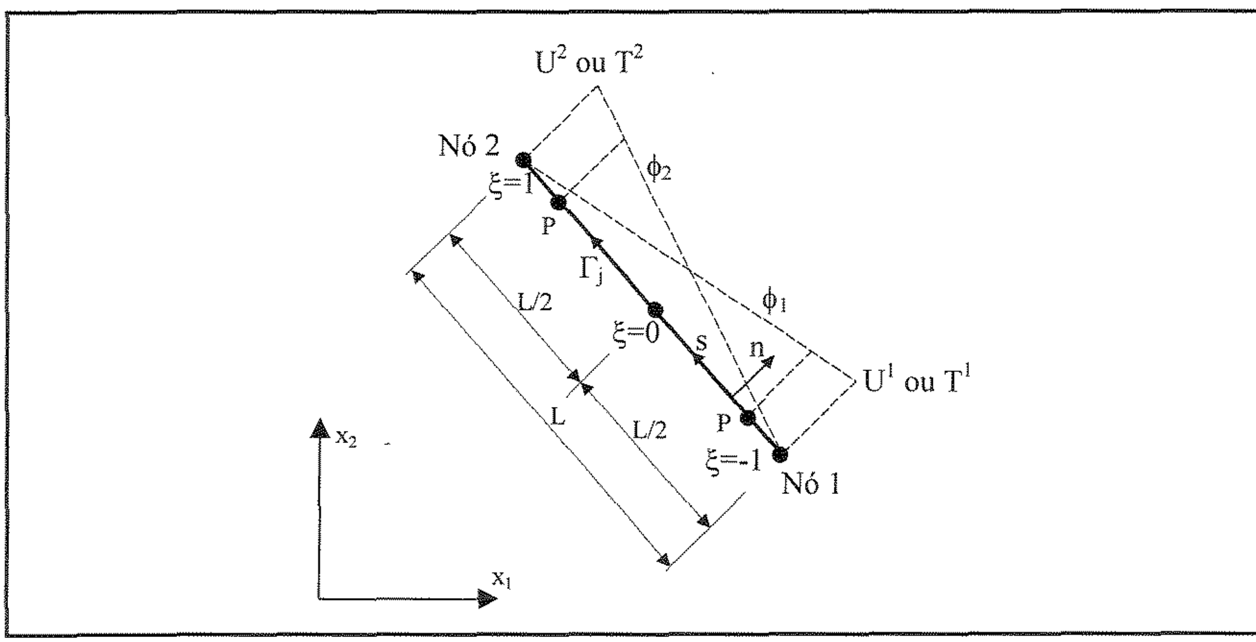


Figura 5.5 – Elemento linear descontínuo

Para este tipo de elemento (**Figura 5.5**), os pontos nodais são definidos nos extremos do elemento, coincidindo com os nós geométricos do elemento. A introdução dos nós duplos permite a descontinuidade do valor de uma das variáveis entre elementos adjacentes. Como os nós duplos possuem a mesma coordenada geométrica levando a uma mesma equação integral, podem-se deslocar os pontos de colocação para dentro dos elementos concorrentes ao nó duplo para a obtenção de duas equações integrais diferentes. Neste trabalho, as funções aproximadoras são dadas pelas equações (5.8), porém, assume-se que as variáveis associadas sempre pertencem ao extremo do elemento.

c) Elemento Linear Misto

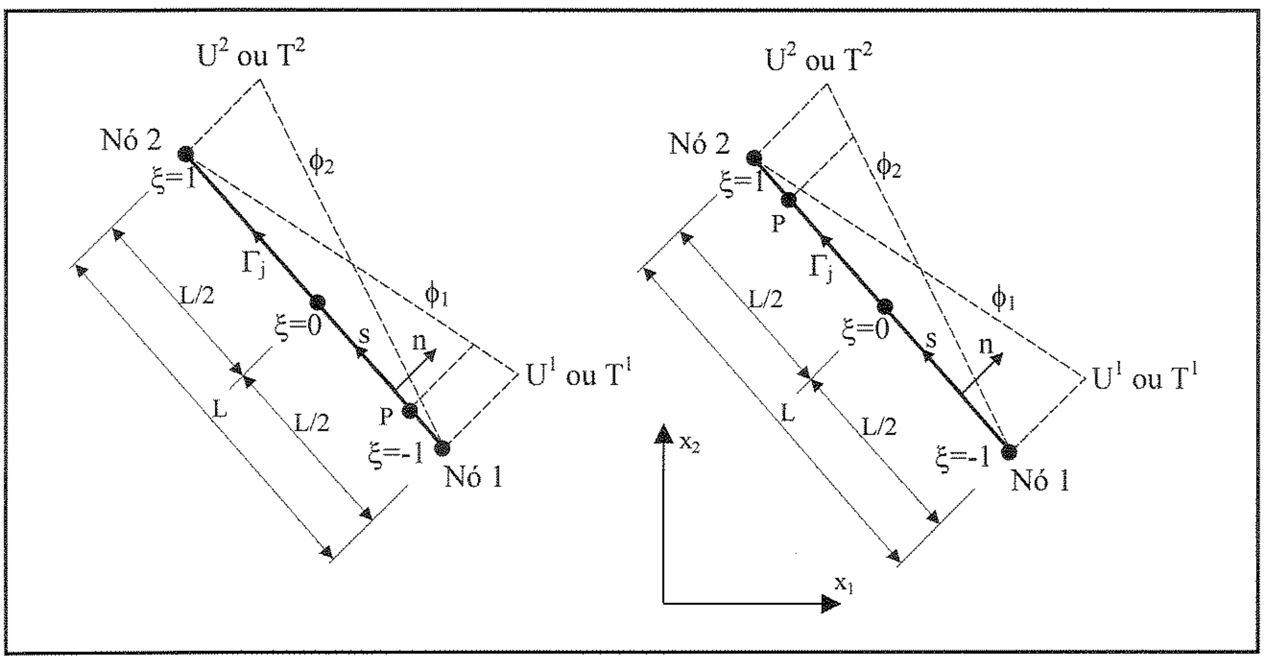


Figura 5.6 – Elementos lineares mistos

Este elemento é utilizado quando existe a necessidade de se introduzir uma descontinuidade em apenas um dos extremos do elemento; sendo assim, somente um dos pontos de colocação do elemento é deslocado para o seu interior, podendo-se desta forma existir uma conexão entre elementos contínuos e descontínuos. Na **Figura 5.6** é apresentado este tipo de elemento.

5.4. Transformação das Equações Integrais das Placas

Seja a equação integral de placas para pontos do contorno (4.39):

$$
\begin{aligned}
&C(\xi)\cdot u_3(\xi)+\int_\Gamma\left[V_n^*(\xi,\eta)\cdot u_3(x)-M_n^*(\xi,x)\cdot\frac{\partial u_3}{\partial n}(x)\right]\cdot d\Gamma(x)+\sum_{i=1}^{N_c}R_{ci}^*(\xi,x_c)\cdot u_{3\,c\,i}(x_c)=\\
&=\int_\Gamma\left[V_n(x)\cdot u_3^*(\xi,x)-M_n(x)\cdot\frac{\partial u_3^*}{\partial n}(\xi,x)\right]\cdot d\Gamma(x)+\sum_{i=1}^{N_c}R_{c\,i}(x_c)\cdot u_{3\,c\,i}^*(\xi,x_c)+\\
&-\int_{\Omega_g}g(x)\cdot u_3^*(\xi,x)\cdot d\Omega_g(x)
\end{aligned}
$$

De acordo com a equação de placas (4.39), as variáveis relacionadas com este problema são $\mathbf{u_3}$, $\frac{\partial \mathbf{u_3}}{\partial \mathbf{n}}$, $\mathbf{V_n}$ e $\mathbf{M_n}$ e, quando existem cantos, $\mathbf{R_c}$ em cada um dos cantos da placa. Sabe-se que sempre são conhecidas duas das quatro variáveis mencionadas (sem levar em conta a reação de canto) a partir das condições fixadas de cada problema. No item 3.4 deste trabalho, pode-se perceber este fato nas condições de contorno de placas. Sendo assim, resultam duas incógnitas, portanto são necessárias duas equações integrais. Como já se tem a equação (4.39), fica faltando uma equação integral. Esta equação integral pode ser a derivada da equação (4.39) em relação à normal **n**. Uma alternativa é aplicar a equação integral (4.39) em pontos distintos, obtendo-se equações diferentes relacionando as incógnitas.

Discretizando-se o contorno da placa em $\mathbf{N_e}$ elementos de contorno e substituindo-se as variáveis por suas aproximações (5.3 e 5.4), a equação integral de placas para pontos no contorno pode ser escrita por:

$$
\begin{aligned}
&C(\xi)\cdot u_3(\xi)+\sum_{i=1}^{N}\int_{\Gamma}\left[V_n^*(\xi,\eta)\cdot\phi_l(\eta)\cdot d\Gamma(\eta)\cdot w_i^j\right]+\\
&-\sum_{i=1}^{N}\int_{\Gamma}\left[M_n^*(\xi,\eta)\cdot\phi_l(\eta)\cdot d\Gamma(\eta)\cdot\frac{\partial u_3{}^j}{\partial n_i}\right]+\\
&\sum_{i=1}^{N_c}R_{ci}^*(\eta_c)\cdot u_{3\,i}(\eta_c)=\sum_{i=1}^{N}\int_{\Gamma}\left[u_3^*(\xi,\eta)\cdot\phi_l(\eta)\cdot d\Gamma(\eta)\cdot V_n^j\right]+\\
&-\sum_{i=1}^{N}\int_{\Gamma}\left[\frac{\partial u_3{}^*}{\partial n}(\xi,\eta)\cdot\phi_l(\eta)\cdot d\Gamma(\eta)\cdot M_n^j\right]+\\
&\sum_{i=1}^{N_c}R_{c\,i}(\eta_c)\cdot u_{3\,i}^*(\eta_c)-\int_{\Omega_g}g(\eta_d)\cdot u_3^*(\xi,\eta_d)\cdot d\Omega_g(\eta_d)
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

sendo:

η uma variável que percorre o contorno;

η_d uma variável do domínio;

η_c o valor da variável η nos cantos;

ξ o nó onde está sendo aplicada a equação integral.

De um modo geral, as integrais da equação (5.9) são feitas por tratamento numérico ao longo do contorno, exceto na região que contém o ponto de colocação, onde as integrais são feitas no sentido do valor principal de *Cauchy*.

Após a realização da integração, tem-se uma relação linear entre valores nodais das variáveis incógnitas e conhecidas $\mathbf{u_3}$, $\dfrac{\partial \mathbf{u_3}}{\partial \mathbf{n}}$, $\mathbf{V_n}$, $\mathbf{M_n}$ e com as reações de canto $\mathbf{R_c}$. Portanto, tratando-se de uma placa com **N** nós de contorno, resultam **2N** incógnitas, além de uma reação de canto $\mathbf{R_c}$ para cada canto. Através da formulação alternativa, **PAIVA [41]**, as reações de canto incógnitas não são consideradas. Assim, são necessárias somente **2N** equações onde metades das equações são obtidas com o ponto no contorno e a outra metade com o ponto externo na direção normal ao contorno, como é explicado a seguir. A **Figura 5.7** mostra o posicionamento do nó externo **j'** associado ao nó **j**, a uma distância **d** deste último, que é a média dos comprimentos (**L_1, L_2**) dos elementos associados a este nó. A distância usada neste trabalho para o posicionamento destes pontos externos é igual à média dos comprimentos dos elementos de contorno relacionados ao nó considerado.

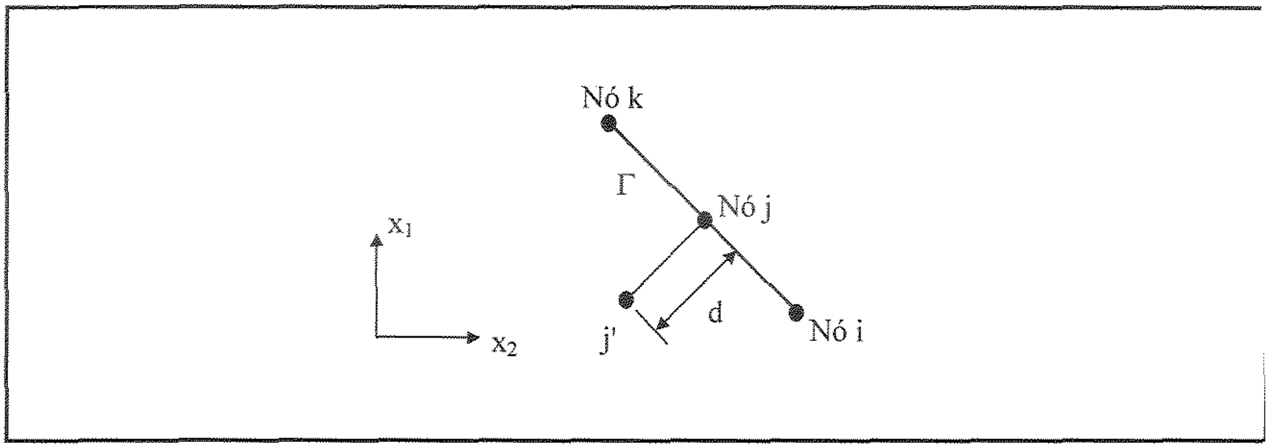


Figura 5.7 – Posição do ponto de colocação externo ao elemento

Neste trabalho, adotou-se ¼ do elemento como a distância a ser deslocada quando existirem nós duplos. Na **Figura 5.8** encontra-se uma ilustração disto e, analogamente, o ponto externo a ser considerado deve ser na direção normal a esse novo ponto de colocação agora deslocado.

Neste trabalho também se implementou a derivada da solução fundamental para se obter a segunda equação do sistema. Foram realizados alguns testes com esta formulação, sendo esta aplicada em pontos externos ao contorno. Os resultados obtidos, para os exemplos testados, não mostraram melhoras com relação à utilização somente da solução fundamental. Desta forma optou-se pela continuidade do trabalho utilizando-se somente a solução fundamental aplicada em um ponto no contorno e em outro fora dele.

Uma alternativa ao uso de integrações no sentido do valor principal de *Cauchy* é usar considerações de deslocamento de corpo rígido para a obtenção dos ponderadores dos deslocamentos associados ao ponto de colocação, **BREBBIA et al. [56]**.

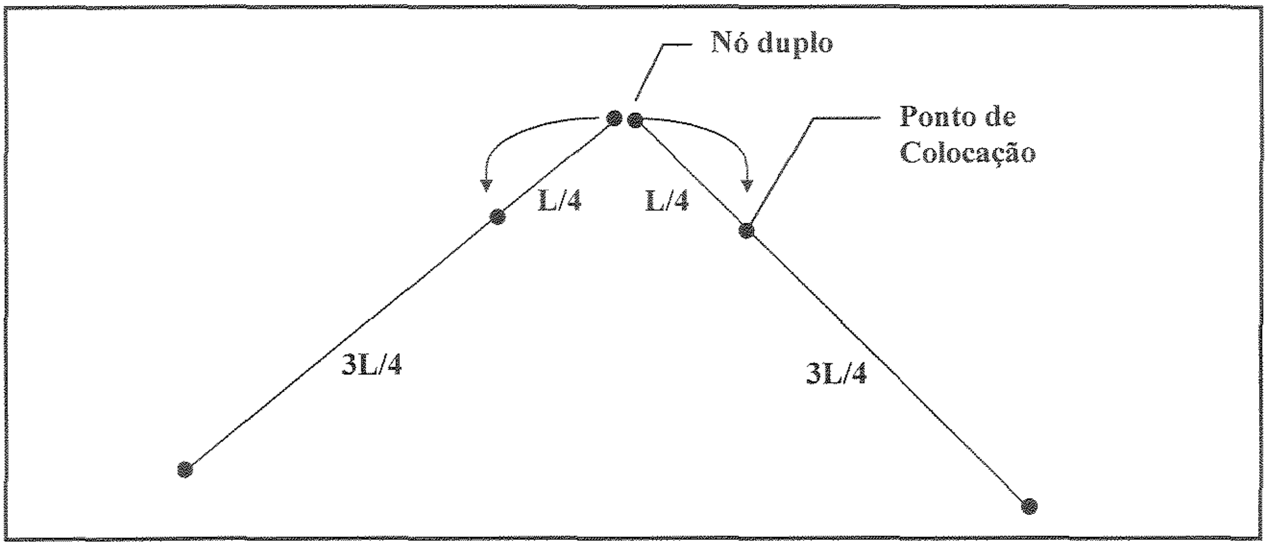


Figura 5.8 - Deslocamento dos pontos de colocação para nós duplos

5.5. Montagem do Sistema de Equações

Realizadas as operações de integração das equações de contorno (5.9) sobre cada elemento genérico Γ_j, somam-se estas influências para todos os $\mathbf{N_e}$ elementos nos $\mathbf{N}$ nós do contorno. Reescrevendo-se a equação (5.9) tem-se:

$$\underset{\sim}{H}\cdot\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{G}\cdot\underset{\sim}{T} + \underset{\sim}{F} \tag{5.10}$$

sendo:

$\underset{\sim}{\mathbf{U}}^{N} = \left\{ \mathbf{u}_3{}^1, \frac{\partial \mathbf{u}_3{}^1}{\partial \mathbf{n}}, \ldots\ldots, \mathbf{u}_3{}^N, \frac{\partial \mathbf{u}_3{}^N}{\partial \mathbf{n}} \right\}, \mathbf{u}_{3c1}, \ldots\ldots, \mathbf{u}_{3cN}$, os deslocamentos e rotações normais ao contorno, onde se incluem os deslocamentos de canto;

$\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{N} = \left\{ \mathbf{V}_n^1, \mathbf{M}_n^1, \ldots\ldots, \mathbf{V}_n^N, \mathbf{M}_n^N \right\}$, os esforços normais ao contorno;

$\underset{\sim}{\mathbf{H}}$ e $\underset{\sim}{\mathbf{G}}$, as matrizes globais de influência, que dependem apenas da geometria do problema;

$\underset{\sim}{\mathbf{F}}$ o valor resultante da integração da região Ω_g.

Considerando-se a equação (4.53) o valor de **F** é dado por:

$$F(\xi) = \int_{\Omega_g} g(\eta_d) \cdot u_3^*(\xi, \eta_d) \cdot d\Omega_g(\eta_d) \tag{5.11}$$

Impondo-se as **2N** variáveis conhecidas em (5.10) e após a troca de membros das colunas das matrizes $\underset{\sim}{\mathbf{H}}$ e $\underset{\sim}{\mathbf{G}}$, para que os valores conhecidos fiquem posicionados do lado direito da equação e as incógnitas do lado esquerdo, obtem-se o seguinte sistema de **2N** equações:

$$\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{B} \tag{5.12}$$

sendo:

$\underset{\sim}{\mathbf{X}}$ o vetor com as **2N** variáveis incógnitas;

$\underset{\sim}{\mathbf{B}}$ o vetor que contém os efeitos dos deslocamentos e esforços prescritos no contorno, incluindo também o carregamento de domínio;

$\underset{\sim}{\mathbf{A}}$ a matriz dos coeficientes das variáveis incógnitas, obtida da troca de colunas das matrizes $\underset{\sim}{\mathbf{H}}$ e $\underset{\sim}{\mathbf{G}}$, de dimensão **2N x 2N.**

5.6. Montagem das Matrizes $\underset{\sim}{\mathbf{H}}$ e $\underset{\sim}{\mathbf{G}}$

Para se determinar os elementos das matrizes $\underset{\sim}{\mathbf{H}}$ e $\underset{\sim}{\mathbf{G}}$ é necessário o cálculo das integrais em cada elemento do contorno em relação ao ponto de colocação. No caso deste trabalho o ponto de colocação pode ser coincidente com um dos nós pertencentes ao elemento ou está fora deste, a uma distância igual a média entre os comprimentos dos elementos associados, como é mostrado na **Figura 5.7**.

No caso em que o ponto de colocação pertence ao elemento de integração, o integrando apresenta uma singularidade decorrente da solução fundamental. Uma forma de se eliminar esta singularidade, é a resolução analítica desta integral. Quando o ponto de colocação não pertencer ao elemento que está sendo integrado, a integração será realizada numericamente.

5.7. Integrais Analíticas

Quando o elemento a ser integrado possui o ponto de colocação (fonte), as integrais de contorno devem ser calculadas analiticamente para solucionar a singularidade que aparece nesse ponto. Segundo a equação (4.39) as integrais determinadas analiticamente são do tipo:

$$I = \int_{\Gamma} f^{*}(\xi,x)\cdot\phi(\xi)\cdot d\Gamma \tag{5.13}$$

sendo $\mathbf{f}^{*}(\xi,\mathbf{x})$ os valores das funções $\mathbf{u_3}^{*}$, $\dfrac{\partial \mathbf{u_3}^{*}}{\partial \mathbf{n}}$, $\mathbf{V_n}^{*}$, $\mathbf{M_n}^{*}$ e $\mathbf{Rc}^{*}$ e $\phi_i(\xi)$ as funções apresentadas nas **Figura 5.9**.

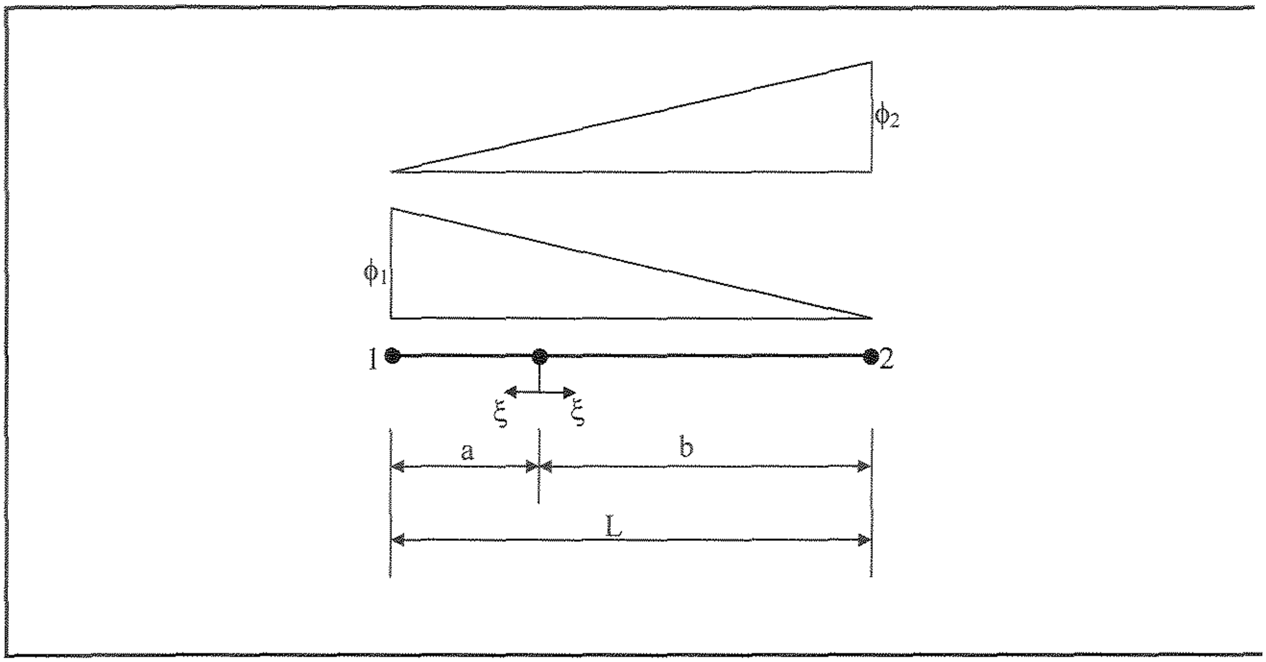


Figura 5.9 – Funções aproximadoras

Logo, as integrais analíticas calculadas são:

a) Deslocamento:

$$\int_1^2 u_3^* \cdot \phi_i \cdot d\Gamma = \frac{1}{8\cdot\pi\cdot D}\cdot\int_0^a \mathrm{r}^2\cdot(\ln r - K)\cdot\phi_i\cdot d\Gamma + \frac{1}{8\cdot\pi\cdot D}\cdot\int_a^L \mathrm{r}^2\cdot(\ln r - K)\cdot\phi_i\cdot d\Gamma \quad (5.14)$$

b) Rotação normal:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\partial u_3^*}{\partial n}\cdot\phi_i\cdot d\Gamma = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot D}\cdot\int_0^a \mathrm{r}\cdot\left(\ln r - K + \frac{1}{2}\right)\cdot\cos\beta\cdot\phi_i\cdot d\Gamma + \\ + \frac{1}{4\cdot\pi\cdot D}\cdot\int_a^L \mathrm{r}\cdot\left(\ln r - K + \frac{1}{2}\right)\cdot\cos\beta\cdot\phi_i\cdot d\Gamma\end{aligned} \quad (5.15)$$

As integrais dadas pelas equações (5.15) são nulas, já que o ângulo β, que representa o ângulo formado entre o vetor **r** e o vetor **n,** vale **90°** e seu co-seno vale zero, obtendo-se:

$$\int_1^2 \frac{\partial u_3^*}{\partial n} \cdot \phi_i \cdot d\Gamma = 0 \tag{5.16}$$

c) Momento fletor normal:

$$\begin{aligned}
&\int_1^2 M_n^* \cdot \phi_i \cdot d\Gamma = \\
&= \frac{1}{4\cdot\pi} \cdot \int_0^a \left[(1+\nu)\cdot \ln r + (1-\nu)\cdot \cos^2\beta - (1+\nu)\cdot K + (1+3\cdot\nu)\cdot \frac{1}{2}\right] \cdot \phi_i \cdot d\Gamma + \\
&+ \frac{1}{4\cdot\pi} \cdot \int_a^L \left[(1+\nu)\cdot \ln r + (1-\nu)\cdot \cos^2\beta - (1+\nu)\cdot K + (1+3\cdot\nu)\cdot \frac{1}{2}\right] \cdot \phi_i \cdot d\Gamma
\end{aligned} \tag{5.17}$$

d) Cortante equivalente:

$$\begin{aligned}
&\int_1^2 V_n^* \cdot \phi_i \cdot d\Gamma = \\
&= \frac{1}{4\cdot\pi} \cdot \int_0^a \left\{ \frac{\cos\beta}{r} \cdot \left[2\cdot(1-\nu)\cdot \text{sen}^2\beta - 3 + \nu\right] + \frac{(1-\nu)}{R} \cdot \cos 2\beta \right\} \cdot \phi_i \cdot d\Gamma + \\
&+ \frac{1}{4\cdot\pi} \cdot \int_a^L \left\{ \frac{\cos\beta}{r} \cdot \left[2\cdot(1-\nu)\cdot \text{sen}^2\beta - 3 + \nu\right] + \frac{(1-\nu)}{R} \cdot \cos 2\beta \right\} \cdot \phi_i \cdot d\Gamma
\end{aligned} \tag{5.18}$$

As integrais dadas pelas equações (5.18) são nulas, já que o ângulo β, que representa o ângulo formado entre o vetor **r** e o vetor **n**, vale **90°** e seu co-seno vale zero e o raio **R** tende a infinito, obtendo-se:

$$\int_1^2 V_n^* \cdot \phi_i \cdot d\Gamma = 0 \tag{5.19}$$

e) Reação de Canto:

Como as reações de canto são a diferença entre os momentos volventes do elemento posterior e anterior ao ponto de colocação (4.19), é necessário resolver as seguintes integrais:

$$\int_1^2 M_{ns}^* \cdot \phi_i \cdot d\Gamma = \frac{(1-\nu)}{8\cdot\pi} \cdot \int_0^a \text{sen}\, 2\beta \cdot \phi_i \cdot d\Gamma + \frac{(1-\nu)}{8\cdot\pi} \cdot \int_a^L \text{sen}\, 2\beta \cdot \phi_i \cdot d\Gamma \tag{5.20}$$

Como o ângulo β vale 90°, o seno de duas vezes esse ângulo vale zero, zerando o valor dessas integrais, obtendo-se:

$$\int_1^2 M_{ns}^* \cdot \phi_i \cdot d\Gamma = 0 \tag{5.21}$$

O valor das integrais de $\mathbf{u_3}^*$ e de $\mathbf{M_n}^*$, particularizando a localização do ponto de colocação no elemento de contorno, são dados a seguir:

a) Ponto de colocação no início do elemento (**a** igual a zero, **Figura 5.9**):

$$\int_1^2 u_3^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = \frac{L^3}{96 \cdot \pi \cdot D} \cdot \left(\ln L - \frac{7}{12} - K \right) \tag{5.22a}$$

$$\int_1^2 u_3^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = \frac{L^3}{32 \cdot \pi \cdot D} \cdot \left(\ln L - \frac{1}{4} - K \right) \tag{5.22b}$$

$$\int_1^2 M_n^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = \frac{L}{8 \cdot \pi} \cdot \left[\frac{(1+\nu)}{2} \cdot (3 - 2 \cdot \ln L) + (1+\nu) \cdot K - \frac{(1+3\cdot\nu)}{2} \right] \tag{5.23a}$$

$$\int_1^2 M_n^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = \frac{L}{8 \cdot \pi} \cdot \left[\frac{(1+\nu)}{2} \cdot (1 - 2 \cdot \ln L) + (1+\nu) \cdot K - \frac{(1+3\cdot\nu)}{2} \right] \tag{5.23b}$$

b) Ponto de colocação no final do elemento (**b** igual a zero, **Figura 5.9**):

$$\int_1^2 u_3^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = \frac{L^3}{32 \cdot \pi \cdot D} \cdot \left(\ln L - \frac{1}{4} - K \right) \tag{5.24a}$$

$$\int_1^2 u_3^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = \frac{L^3}{96 \cdot \pi \cdot D} \cdot \left(\ln L - \frac{7}{12} - K \right) \tag{5.24b}$$

$$\int_1^2 M_n^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = \frac{L}{8 \cdot \pi} \cdot \left[\frac{(1+\nu)}{2} \cdot (1 - 2 \cdot \ln L) + (1+\nu) \cdot K - \frac{(1+3\cdot\nu)}{2} \right] \tag{5.25a}$$

$$\int_1^2 M_n^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = \frac{L}{8\cdot\pi}\cdot\left[\frac{(1+\nu)}{2}\cdot(3-2\cdot\ln L)+(1+\nu)\cdot K-\frac{(1+3\cdot\nu)}{2}\right] \tag{5.25b}$$

c) Ponto de colocação no interior do elemento:

$$\begin{aligned}
&\int_1^2 u_3^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = \\
&=\frac{1}{8\cdot\pi\cdot D}\cdot\left(\frac{a^3\cdot\ln a}{3}-\frac{a^3}{9}-\frac{K\cdot a^3}{3}-\frac{a^4\cdot\ln a}{12\cdot L}+\frac{7\cdot a^4}{144\cdot L}+\frac{K\cdot a^4}{12\cdot L}+\frac{b^3\cdot\ln b}{3}+\right.\\
&\left.-\frac{b^3}{9}-\frac{K\cdot b^3}{3}-\frac{a\cdot b^3\cdot\ln b}{3\cdot L}+\frac{a\cdot b^3}{9\cdot L}+\frac{K\cdot a\cdot b^3}{3\cdot L}-\frac{b^4\cdot\ln b}{4\cdot L}+\frac{b^4}{16\cdot L}+\frac{K\cdot b^4}{4\cdot L}\right)
\end{aligned} \tag{5.26a}$$

$$\begin{aligned}
&\int_1^2 u_3^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = \\
&=\frac{1}{8\cdot\pi\cdot D}\cdot\left(\frac{a^4\cdot\ln a}{12\cdot L}-\frac{7\cdot a^4}{144\cdot L}-\frac{K\cdot a^4}{12\cdot L}+\frac{a\cdot b^3\cdot\ln b}{3\cdot L}-\frac{a\cdot b^3}{9\cdot L}-\frac{K\cdot a\cdot b^3}{3\cdot L}+\right.\\
&\left.+\frac{b^4\cdot\ln b}{4\cdot L}-\frac{b^4}{16\cdot L}-\frac{K\cdot b^4}{4\cdot L}\right)
\end{aligned} \tag{5.26b}$$

$$\begin{aligned}
&\int_1^2 M_n^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = \\
&=\frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\left[(1+\nu)\cdot\left(a-a\cdot\ln a+K\cdot a+\frac{a^2\cdot\ln a}{2\cdot L}-\frac{3\cdot a^2}{4\cdot L}-\frac{K\cdot a^2}{2\cdot L}+b-b\cdot\ln b+\right.\right.\\
&\left.+K\cdot b+\frac{a\cdot b\cdot\ln b}{L}-\frac{a\cdot b}{L}-\frac{K\cdot a\cdot b}{L}+\frac{b^2\cdot\ln b}{2\cdot L}-\frac{b^2}{4\cdot L}-\frac{K\cdot b^2}{2\cdot L}\right)+\\
&\left.-\frac{(1+3\cdot\nu)}{2}\cdot\left(a-\frac{a^2}{2\cdot L}+b-\frac{a\cdot b}{L}+\frac{b^2}{2\cdot L}\right)\right]
\end{aligned} \tag{5.27a}$$

$$\begin{aligned}
&\int_1^2 M_n^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = \\
&=\frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\left[\frac{(1+\nu)}{L}\cdot\left(\frac{3\cdot a^2}{4}-\frac{a^2\cdot\ln a}{2}+\frac{K\cdot a^2}{2}+a\cdot b-a\cdot b\cdot\ln b+K\cdot a\cdot b+\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{b^2}{4}-\frac{b^2\cdot\ln b}{2}+\frac{K\cdot b^2}{2}\right)-\frac{(1+3\cdot\nu)}{2\cdot L}\cdot\left(\frac{a^2}{2}+a\cdot b+\frac{b^2}{2}\right)\right]
\end{aligned} \tag{5.27b}$$

5.8. Integrais Numéricas

No caso do ponto de colocação não pertencer ao elemento que está sendo integrado, utiliza-se a integração numérica. O método numérico utilizado é a Quadratura de *Gauss* com um número de pontos de *Gauss* a ser escolhido posteriormente. Este método numérico para integração é descrito com maiores detalhes em **BREBBIA & DOMINGUEZ [46]**.

6. INFLUÊNCIA DA NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA

6.1. Introdução

Neste capítulo o efeito da não linearidade geométrica é introduzido. O equilíbrio na posição deformada, acoplando os efeitos do estado plano de tensão com o de flexão de placas, resulta no desenvolvimento da equação integral para o problema de não linearidade geométrica de uma placa.

6.2. Equação Integral para Não Linearidade Geométrica de Placas

Segundo **COSTA & BREBBIA [37]**, a equação diferencial para o estudo da não linearidade geométrica em placas é dada pela seguinte equação, sem as forças de volume no plano:

$$D \cdot \nabla^4 u_3 + N_{ij} \cdot u_{3,ij} = 0 \tag{6.1}$$

sendo $\mathbf{N}_{ij}$ o tensor do carregamento no plano da placa.

A dedução desta equação através do método da energia pode ser observada no **Apêndice A**.

Para a análise da não linearidade geométrica, o termo que contém o efeito da força de compressão pode ser apresentado na forma de uma integral de domínio que, escrita de uma forma mais conveniente, é mostrada a seguir:

$$\int_{\Omega} u_{3,iijj} \cdot u_3^* \cdot d\Omega + \int_{\Omega} N_{ij} \cdot u_{3,ij} \cdot u_3^* \cdot d\Omega = 0 \tag{6.2}$$

O tensor de carregamento no plano médio da placa é definido por seu valor relativo e não por seu valor absoluto, logo, a equação (6.2) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} u_{3,iijj} \cdot u_3^* \cdot d\Omega + \lambda_b \int_{\Omega} N_{ij} \cdot u_{3,ij} \cdot u_3^* \cdot d\Omega = 0 \tag{6.3}$$

sendo λ_b o fator de carga.

Utilizando a definição obtida no **Capítulo 4** para a primeira integral da equação (6.3), esta equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} C(\xi)\cdot u_3(\xi) + \int_{\Gamma}\left[V_n^*(\xi,x)\cdot u_3(x) - M_n^*(\xi,x)\cdot\frac{\partial u_3}{\partial n}(x)\right]\cdot d\Gamma(x) + \\ + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(\xi,x_c)\cdot u_{3ci}(x_c) = \int_{\Gamma}\left[V_n(x)\cdot u_3^*(\xi,x) - M_n(x)\cdot\frac{\partial u_3^*}{\partial n}(\xi,x)\right]\cdot d\Gamma(x) + \\ + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c\,i}(x_c)\cdot u_{3ci}^*(\xi,x_c) + \lambda_b \int_{\Omega} N_{ij}\cdot u_{3,ij}\cdot u_3^*(\xi,x)\cdot d\Omega\ (x) \end{aligned} \tag{6.4}$$

Escrevendo a equação (6.4) na forma matricial obtêm-se:

$$\underset{\sim}{H}\cdot\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{G}\cdot\underset{\sim}{T} + \lambda_b\cdot\underset{\sim}{B}\cdot\underset{\sim}{y} \tag{6.5}$$

sendo:

$\underset{\sim}{\mathbf{H}}$ a matriz obtida através das soluções fundamentais $\mathbf{V_n}^*$ e $\mathbf{M_n}^*$;

$\underset{\sim}{\mathbf{G}}$ a matriz obtida através das soluções fundamentais $\mathbf{u_3}^*$ e $\dfrac{\partial \mathbf{u_3}^*}{\partial \mathbf{n}}$;

$\underset{\sim}{\mathbf{B}}$ a matriz dos coeficientes da integração de domínio;

$\underset{\sim}{\mathbf{U}}$ o vetor contendo os deslocamentos transversais ($\mathbf{u_3}$) e rotações normais ($\dfrac{\partial \mathbf{u_3}}{\partial \mathbf{n}}$) no contorno;

$\underset{\sim}{\mathbf{T}}$ o vetor contendo a cortante equivalente ($\mathbf{V_n}$) e o momento fletor normal ($\mathbf{M_n}$) no contorno;

$\underset{\sim}{\mathbf{y}}$ o vetor das curvaturas.

Reagrupando-se as matrizes $\underset{\sim}{\mathbf{H}}$ e $\underset{\sim}{\mathbf{G}}$ de forma que se tenha apenas valores relativos às incógnitas no contorno, a equação (6.5) torna-se:

$$\underset{\sim}{A_{\Gamma\Gamma}} \cdot \underset{\sim}{x} - \lambda_b \cdot \underset{\sim}{B_{\Omega\Gamma}} \cdot \underset{\sim}{y} = 0 \tag{6.6}$$

sendo:

$\underset{\sim}{\mathbf{A}_{\Gamma\Gamma}}$ a matriz que representa a integração proveniente do contorno, e com seus elementos invariáveis em relação à carga crítica;

$\underset{\sim}{\mathbf{B}_{\Omega\Gamma}}$ a matriz cujos elementos são dependentes de $\mathbf{N_{ij}}$.

Para os nós internos ao domínio, a equação integral é definida como sendo igual a:

$$
\begin{aligned}
& u_{3,ij}(\xi)+\int_{\Gamma}\left[V^{*}_{n,ij}(\xi,x)\cdot u_{3}(x)-M^{*}_{n,ij}(\xi,x)\cdot\frac{\partial u_{3}}{\partial n}(x)\right]\cdot d\Gamma(x)+ \\
& +\sum_{k=1}^{N_c}R^{*}_{ck,ij}(\xi,x_c)\cdot u_{3ck}(x_c)=\int_{\Gamma}\left[V_n(x)\cdot u^{*}_{3,ij}(\xi,x)-M_n(x)\cdot\frac{\partial u^{*}_{3}}{\partial n}{}_{,ij}(\xi,x)\right]\cdot d\Gamma(x) \\
& +\sum_{k=1}^{N_c}R_{ck}(x_c)\cdot u^{*}_{3ck,ij}(\xi,x_c)+\lambda_b\int_{\Omega}N_{ij}\cdot u_{3,ij}\cdot u^{*}_{3,ij}(\xi,x)\cdot d\Omega\ (x)
\end{aligned}
\qquad (6.7)
$$

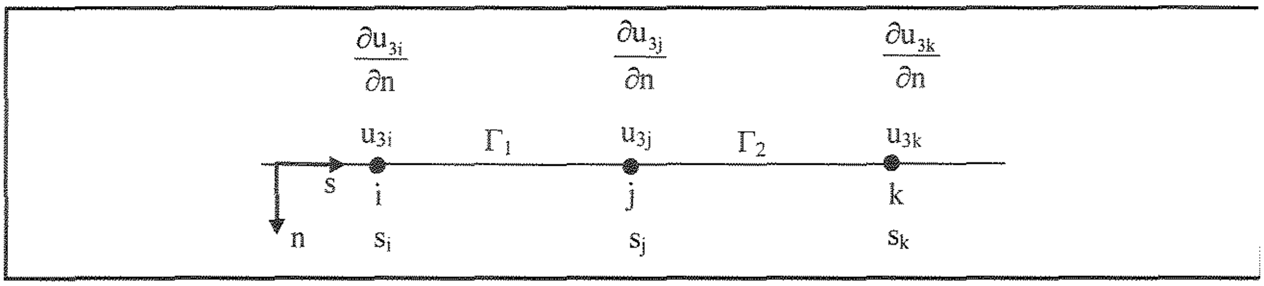


Figura 6.1 – Elementos de contorno consecutivos com seus respectivos valores nodais

O termo da expressão (6.7) que representa uma integral de domínio, requer em sua resolução a manipulação de termos $\mathbf{u}_{3,\,ij}$ que não são determinados no contorno. Para este fim, recorre-se a uma aproximação por diferenças finitas destes termos. De acordo com a **Figura 6.1** onde são mostrados dois elementos de contorno consecutivos Γ_1 e Γ_2, com os seus respectivos valores de deslocamentos transversais ($\mathbf{u}_3$) e rotação na direção normal $\left(\frac{\partial \mathbf{u}_3}{\partial \mathbf{n}}\right)$, definindo-se como $\mathbf{s}_p$ a coordenada relativa do nó analisado, pode-se escrever as seguintes relações:

Para $\mathbf{s}_p=\mathbf{0}$, tem-se $\mathbf{u}_{3s}=\mathbf{u}_{3i}$ e $\left(\frac{\partial \mathbf{u}_3}{\partial \mathbf{n}}\right)_s=\left(\frac{\partial \mathbf{u}_3}{\partial \mathbf{n}}\right)_i$;

Para $\mathbf{s}_p=\mathbf{s}_j$, tem-se $\mathbf{u}_{3s}=\mathbf{u}_{3j}$ e $\left(\frac{\partial \mathbf{u}_3}{\partial \mathbf{n}}\right)_s=\left(\frac{\partial \mathbf{u}_3}{\partial \mathbf{n}}\right)_j$;

Para $\mathbf{s}_p=\mathbf{s}_k$, tem-se $\mathbf{u}_{3s}=\mathbf{u}_{3k}$ e $\left(\frac{\partial \mathbf{u}_3}{\partial \mathbf{n}}\right)_s=\left(\frac{\partial \mathbf{u}_3}{\partial \mathbf{n}}\right)_k$.

O deslocamento $\mathbf{u_3}$ é aproximado da seguinte forma:

$$u_3 = C_1 \cdot {s_p}^2 + C_2 \cdot s_p + C_3 \tag{6.8}$$

sendo:

$\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$ e $\mathbf{C_3}$ constantes;

$\mathbf{s_p}$ o eixo de coordenadas lineares cuja origem está no nó **i**.

Com isso pode-se determinar:

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2} = 2 \cdot C_1 \tag{6.9}$$

sendo o valor da constante $\mathbf{C_1}$ determinado como:

$$C_1 = \frac{(u_{3k} - u_{3i}) \cdot s_j - (u_{3j} - u_{3i}) \cdot s_k}{{s_k}^2 \cdot s_j - {s_j}^2 \cdot s_k} \tag{6.10}$$

Como o momento fletor normal ($\mathbf{M_n}$) é dado por:

$$M_n = \frac{(1-\nu) \cdot D}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial n^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2} \right) \tag{6.11}$$

Como o seu valor é conhecido no contorno, pode-se determinar $\dfrac{\partial^2 \mathbf{u_3}}{\partial \mathbf{n}^2}$ pela expressão:

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial n^2} = \frac{2 \cdot M_n}{(1-\nu) \cdot D} - \nu \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2} \tag{6.12}$$

Aproximando o valor da rotação na direção normal $\dfrac{\partial \mathbf{u_3}}{\partial \mathbf{n}}$ na forma:

$$\frac{\partial u_3}{\partial n} = D_1 \cdot s_p^{\,2} + D_2 \cdot s_p + D_3 \tag{6.13}$$

sendo $\mathbf{D_1}$, $\mathbf{D_2}$ e $\mathbf{D_3}$ constantes.

Dessa forma obtêm-se:

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial n \partial s} = 2 \cdot D_1 \cdot s_p + D_2 \tag{6.14}$$

sendo os valores das constantes $\mathbf{D_1}$ e $\mathbf{D_2}$ determinados como:

$$D_1 = \frac{\left(\frac{\partial u_3}{\partial n_k} - \frac{\partial u_3}{\partial n_i}\right) \cdot s_j - \left(\frac{\partial u_3}{\partial n_j} - \frac{\partial u_3}{\partial n_i}\right) \cdot s_k}{s_k^{\,2} \cdot s_j - s_j^{\,2} \cdot s_k} \tag{6.15}$$

$$D_2 = \frac{\left(\frac{\partial u_3}{\partial n_i} - \frac{\partial u_3}{\partial n_j}\right) \cdot s_k^{\,2} - \left(\frac{\partial u_3}{\partial n_k} - \frac{\partial u_3}{\partial n_i}\right) \cdot s_j^{\,2}}{s_k \cdot s_j^{\,2} - s_j \cdot s_k^{\,2}} \tag{6.16}$$

Com os valores de $\frac{\partial^2 \mathbf{u}_3}{\partial \mathbf{n}^2}$, $\frac{\partial^2 \mathbf{u}_3}{\partial \mathbf{s}^2}$ e $\frac{\partial^2 \mathbf{u}_3}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}}$ determinados em relação ao elemento de contorno, por rotação destes, obtêm-se as curvaturas $\frac{\partial^2 \mathbf{u}_3}{\partial \mathbf{x}_1^{\,2}}$, $\frac{\partial^2 \mathbf{u}_3}{\partial \mathbf{x}_2^{\,2}}$ e $\frac{\partial^2 \mathbf{u}_3}{\partial \mathbf{x}_1 \partial \mathbf{x}_2}$ em coordenadas cartesianas no contorno, conforme as seguintes equações:

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^{\,2}} = \cos^2 \alpha \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial n^2} + \operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2} - 2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial n \partial s} \tag{6.17}$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^{\,2}} = \operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial n^2} + \cos^2 \alpha \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2} + 2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial n \partial s} \tag{6.18}$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} = \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2}\right) \cdot \operatorname{sen}\alpha + \left(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\right) \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial n \partial s} \tag{6.19}$$

Na forma de matriz, a expressão (6.7) é reescrita como:

$$\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{A}_{\Gamma\Omega} \cdot \underset{\sim}{x} - \lambda_b \cdot \underset{\sim}{B}_{\Omega\Omega} \cdot \underset{\sim}{y} \tag{6.20}$$

Desta forma, determina-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \underset{\sim}{A}_{\Gamma\Gamma} \cdot \underset{\sim}{x} - \lambda_b \cdot \underset{\sim}{B}_{\Omega\Gamma} \cdot \underset{\sim}{y} = 0 & \text{(a)} \\ \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{A}_{\Gamma\Omega} \cdot \underset{\sim}{x} - \lambda_b \cdot \underset{\sim}{B}_{\Omega\Omega} \cdot \underset{\sim}{y} & \text{(b)} \end{cases} \tag{6.21}$$

6.3. Tratamento para as Integrais de Domínio das Cargas Normais

Os termos das integrais (6.4) e (6.7) que representam uma integral de domínio são determinados da mesma forma que as integrais de domínio que continham um carregamento distribuído (**Capítulo 4**).

Considerando-se que o plano de carregamento da força normal, multiplicado pelas curvaturas tem forma linear sobre o subdomínio Ω_p, obtém-se:

$$\mathrm{N} \cdot \mathrm{u}_{3,ij} = \mathrm{A}_\mathrm{N} \cdot \mathrm{x}_1 + \mathrm{B}_\mathrm{N} \cdot \mathrm{x}_2 + \mathrm{C}_\mathrm{N} \tag{6.22}$$

sendo $\mathbf{A_N}$, $\mathbf{B_N}$ e $\mathbf{C_N}$ constantes.

Reescrevendo-se a expressão (6.21), obtêm-se:

$$\int_{\Omega_g} N_{ij} \cdot u_{3,ij} \cdot u^*_{3,ij}(\xi, x) \cdot d\Omega_g(x) = \int_{\Omega_p} (A_N \cdot x_1 + B_N \cdot x_2 + C_N) \cdot u^*_3(\xi, x) \cdot d\Omega_p(x) \qquad (6.23)$$

Procedendo da mesma forma que para o carregamento de domínio, obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_g} N_{ij} \cdot u_{3,ij} \cdot u^*_{3,ij}(\xi, x) \cdot d\Omega_g(x) = \\ &= \frac{1}{12 \cdot \pi \cdot D} \int_{\Gamma_p} (A_N \cdot r_{,1} + B_N \cdot r_{,2}) \cdot \left[r^2 \cdot \left(\delta_{ij} \cdot \ln r - \frac{\delta_{ij}}{3} + r_{,i} \cdot r_{,j} \right) \right] \cdot n_k \cdot r_{,k} \cdot d\Gamma_p + \\ &+ \frac{C_N}{8 \cdot \pi \cdot D} \int_{\Gamma_p} \left[r \cdot \left(\delta_{ij} \cdot \ln r - \frac{\delta_{ij}}{2} + r_{,i} \cdot r_{,j} \right) \right] \cdot n_k \cdot r_{,k} \cdot d\Gamma_p \end{aligned} \qquad (6.24)$$

6.4. Problema de Autovalor

O sistema de equações dado em (6.21) representa uma forma clássica de um problema de autovalor. Para o seu cálculo, têm-se vários métodos numéricos com vantagens e desvantagens próprias. O método utilizado neste trabalho, para determinação dos autovalores, é iterativo. Neste método, o vetor das curvaturas $\underset{\sim}{y}$ assume um valor inicial $\underset{\sim}{y}^0$ e determina-se o vetor $\underset{\sim}{x}^1$ dos deslocamentos e esforços na equação (6.21a). Com o vetor $\underset{\sim}{x}^1$ e $\underset{\sim}{y}^0$ determina-se um novo vetor $\underset{\sim}{y}^1$ na equação (6.21b). Assim, o processo iterativo é:

$$\begin{cases} \underset{\sim}{A}_{\Gamma\Gamma} \cdot \underset{\sim}{x}^k - \lambda_b \cdot \underset{\sim}{B}_{\Omega\Gamma} \cdot \underset{\sim}{y}^{k-1} = 0 \\ \underset{\sim}{y}^k = -\underset{\sim}{A}_{\Gamma\Omega} \cdot \underset{\sim}{x}^k + \lambda_b \cdot \underset{\sim}{B}_{\Omega\Omega} \cdot \underset{\sim}{y}^{k-1} \end{cases} \qquad (6.25)$$

ou

$$\begin{cases} \underset{\sim}{A}_{\Gamma\Gamma} \cdot \underset{\sim}{x}^{k} = \lambda_b \cdot \underset{\sim}{B}_{\Omega\Gamma} \cdot \underset{\sim}{y}^{k-1} \\ \underset{\sim}{y}^{k} = -\underset{\sim}{A}_{\Gamma\Omega} \cdot \underset{\sim}{x}^{k} + \lambda_b \cdot \underset{\sim}{B}_{\Omega\Omega} \cdot \underset{\sim}{y}^{k-1} \end{cases} \tag{6.26}$$

Na k-ésima iteração o valor da carga crítica dada pelo fator de carga λ_b e o modo da flambagem dado pelo vetor $\underset{\sim}{\mathbf{y}}^{k}$ são determinados. O processo iterativo é concluído quando a diferença relativa entre duas aproximações sucessivas do autovalor for menor que a precisão desejada. Para o cálculo do autovalor ou carga crítica $\mathbf{N_{cr}}$ é utilizado o quociente Rayleigh, ou seja:

$$N_{cr} = \lambda_b = \frac{\underset{\sim}{y}^{k,t} \cdot \underset{\sim}{y}^{k-1}}{\underset{\sim}{y}^{k,t} \cdot \underset{\sim}{y}^{k}} \tag{6.27}$$

No cálculo dos autovalores seguintes, as componentes dos autovetores calculados são retiradas a cada iteração, ou seja:

$$\begin{cases} \underset{\sim}{A}_{\Gamma\Gamma} \cdot \underset{\sim}{x}^{k} = \lambda_b \cdot \underset{\sim}{B}_{\Omega\Gamma} \cdot \underset{\sim}{y}^{k-1} \\ \underset{\sim}{z}^{k} = -\underset{\sim}{A}_{\Gamma\Omega} \cdot \underset{\sim}{x}^{k} + \lambda_b \cdot \underset{\sim}{B}_{\Omega\Omega} \cdot \underset{\sim}{y}^{k-1} \\ \underset{\sim}{y}^{k} = \underset{\sim}{z}^{k} - \dfrac{\underset{\sim}{f}_i \cdot \underset{\sim}{z}^{k}}{\underset{\sim}{f}_i \cdot \underset{\sim}{f}_i} \cdot \underset{\sim}{f}_i \end{cases} \tag{6.28}$$

sendo:

$\underset{\sim}{\mathbf{f}}_i$ os autovetores já calculados;

$\underset{\sim}{\mathbf{z}}^{k}$ o autovetor calculado na resolução do sistema de equações;

$\underset{\sim}{\mathbf{y}}^{k}$ um vetor ortogonal aos autovetores já calculados.

7. CARGAS DINÂMICAS EM ESTRUTURAS

7.1. Introdução

Neste capítulo o Método dos Elementos de Contorno é aplicado para resolver problemas de vibrações naturais de placas clássicas quando submetidas a carregamentos dinâmicos estacionários. As freqüências naturais das placas são obtidas através do cálculo dos autovalores por um processo iterativo. São também apresentados alguns conceitos básicos de dinâmica para o entendimento do desenvolvimento da formulação.

7.2. Conceitos Básicos de Dinâmica

7.2.1. Vibrações Livres Não Amortecidas

Considerando-se, inicialmente, um sistema sem amortecimento e com um grau de liberdade, obtém-se a seguinte equação de movimento para este sistema:

$$m \cdot \ddot{u} + k \cdot u = 0 \tag{7.1}$$

sendo:

m a massa do sistema;

k a rigidez do sistema;

ü a aceleração do sistema relacionado ao grau de liberdade;

u o deslocamento do sistema relacionado ao grau de liberdade.

A equação (7.1) possui condições iniciais não simultaneamente triviais $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ e $\dot{\mathbf{u}}(0) = \dot{\mathbf{u}}_0$ podendo ser reescrita como sendo:

$$\ddot{u} + \omega^2 \cdot u = 0 \tag{7.2}$$

sendo ω definido por:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{7.3}$$

A solução geral da equação (7.2) é harmônica e pode ser escrita na seguinte forma:

$$u(t) = \rho \cdot \cos(\omega \cdot t - \phi) \tag{7.4}$$

sendo:

ρ a amplitude do deslocamento definida por:

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{\dot{u}_0}{\omega}\right)^2 + (u_0)^2} \tag{7.5}$$

ϕ o ângulo de fase, definido por:

$$\phi = arctg\left(\frac{\dot{u}_0}{\omega \cdot u_0}\right), \qquad 0 \leq \phi \leq \pi \tag{7.6}$$

A resposta **u(t)** pode ser representada graficamente, como mostrado na **Figura 7.1**.

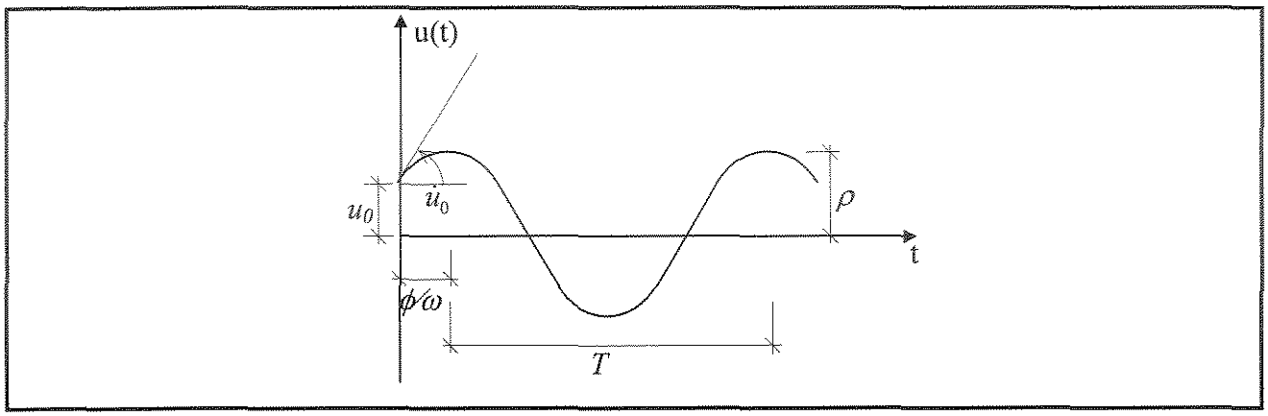


Figura 7.1 – Resposta oscilatória da vibração livre não amortecida

7.2.2. Vibrações Livres Amortecidas

No caso de vibrações livres amortecidas, com um grau de liberdade, a equação de movimento pode ser dada por:

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = 0 \tag{7.7}$$

ou dividindo a equação inteira por **m**, obtêm-se:

$$\ddot{u} + 2 \cdot \bar{\xi} \cdot \omega \cdot \dot{u} + \omega^2 \cdot u = 0 \tag{7.8}$$

sendo $\bar{\xi}$ a taxa de amortecimento definida por:

$$\bar{\xi} = \frac{c}{2 \cdot m \cdot \omega} \tag{7.9}$$

Dependendo do valor da taxa de amortecimento, pode-se ter três tipos de casos para a resposta **u(t)**:

a) Caso sub-crítico (**0** < $\bar{\xi}$ < **1**): Para este caso, o valor de **u(t)** é expresso da seguinte forma:

$$u(t) = e^{-\bar{\xi} \cdot \omega \cdot t} \cdot \rho \cdot \cos(\omega_D \cdot t - \phi) \tag{7.10}$$

sendo:

ρ definido por:

$$\rho = \sqrt{(u_0)^2 + \left(\frac{\dot{u}_0 + \bar{\xi} \cdot \omega \cdot u_0}{\omega_D} \right)^2} \tag{7.11}$$

ϕ o ângulo de fase definido por:

$$\phi = arctg\left(\frac{\dot{u}_0 + \bar{\xi} \cdot \omega \cdot u_0}{\omega_D \cdot u_0} \right),\ 0 \leq \phi \leq \pi \tag{7.12}$$

ω_D a freqüência amortecida definida por:

$$\omega_D = \omega \cdot \sqrt{1 - \bar{\xi}^2} \tag{7.13}$$

Quando a taxa de amortecimento é muito menor do que um, a freqüência amortecida, ω_D, é adotada igual à própria freqüência natural não amortecida, ω.

A resposta **u(t)** pode ser representada graficamente, para o caso de amortecimento sub-crítico, como mostrado na **Figura 7.2**.

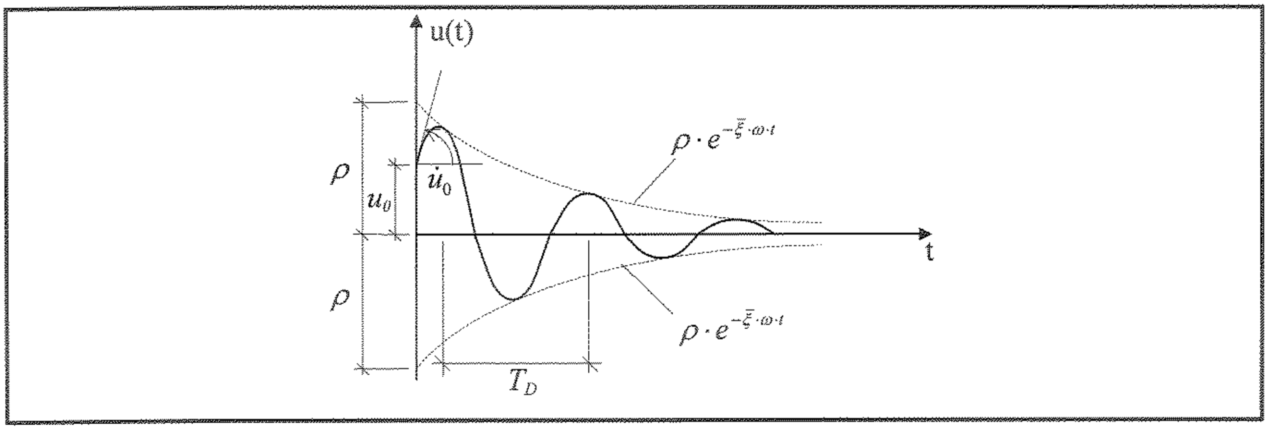


Figura 7.2 – Resposta oscilatória da vibração livre amortecida para o caso sub-crítico

b) Caso crítico ($\bar{\xi} = 1$): Para este caso, o valor de **u(t)** é expresso da seguinte forma:

$$u(t) = e^{-\bar{\xi}\cdot\omega\cdot t} \cdot \left[u_0 + \left(\dot{u}_0 + \omega \cdot u_0\right) \cdot t\right] \tag{7.14}$$

Na **Figura 7.3** é apresentada esta resposta que decai sem oscilações.

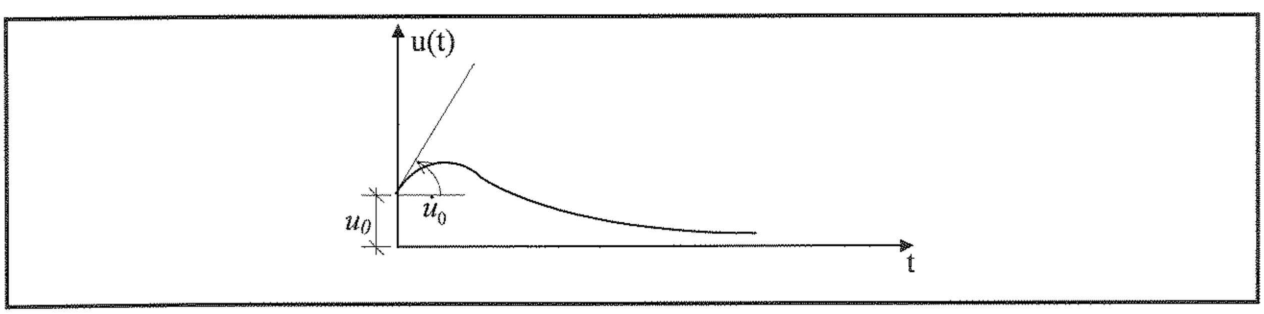


Figura 7.3 – Resposta oscilatória da vibração livre amortecida para o caso crítico

c) Caso super-crítico ($\bar{\xi} > 1$): Para este caso, o valor de **u(t)** é expresso da seguinte forma:

$$u(t) = e^{-\bar{\xi}\cdot\omega\cdot t} \cdot \left[u_0 \cdot \cosh(\hat{\omega}\cdot t) + \left(\frac{\dot{u}_0 + \bar{\xi}\cdot\omega\cdot u_0}{\hat{\omega}} \right) \cdot \mathrm{senh}(\hat{\omega}\cdot t) \right] \tag{7.15}$$

sendo a freqüência $\hat{\omega}$ definida por:

$$\hat{\omega} = \omega \cdot \sqrt{\bar{\xi}^2 - 1} \tag{7.16}$$

Esta resposta decai sem oscilação de forma similar ao caso crítico apresentado na **Figura 7.3**.

7.2.3. Vibrações Forçadas Harmônicas

No caso de um carregamento dinâmico harmônico (**p(t)=p₀sen$\bar{\omega}$t**), obtém-se a seguinte equação para o caso de movimento amortecido:

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = p_0 \cdot \mathrm{sen}(\bar{\omega}\cdot t) \tag{7.17}$$

A solução geral da equação (7.17) pode ser obtida a partir da soma da solução homogênea (problema de vibrações livres amortecidas), com uma solução particular, ou seja:

$$u(t) = e^{-\bar{\xi}\cdot\omega\cdot t} \cdot \rho \cdot \cos(\omega_D \cdot t - \phi) + \bar{\rho} \cdot \mathrm{sen}(\bar{\omega}\cdot t - \bar{\phi}) \tag{7.18}$$

sendo

ρ e ϕ obtidos a partir das condições iniciais $\mathbf{u}_0$ e $\dot{\mathbf{u}}_0$;

$\overline{\rho}$ e $\overline{\phi}$ dados pelas seguintes equações:

$$\overline{\rho} = \overline{D} \cdot u_e \tag{7.19}$$

$$\overline{\phi} = arctg\left(\frac{2 \cdot \overline{\xi} \cdot \overline{\beta}}{1 - \overline{\beta}^2}\right), 0 \leq \overline{\phi} \leq \pi \tag{7.20}$$

$\overline{D}$ o coeficiente de amplificação dinâmica, dado por:

$$\overline{D} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \overline{\beta}^2\right)^2 + \left(2 \cdot \overline{\xi} \cdot \overline{\beta}\right)^2}} \tag{7.21}$$

$\mathbf{u_e}$ o deslocamento que ocorreria se o carregamento de intensidade $\mathbf{p_0}$ fosse aplicado estaticamente, ou seja:

$$u_e = \frac{p_0}{k} \tag{7.22}$$

$\overline{\beta}$ a relação entre a freqüência do carregamento e a freqüência natural do sistema não-amortecido, isto é:

$$\overline{\beta} = \frac{\overline{\omega}}{\omega} \tag{7.23}$$

A solução da equação homogênea decai rapidamente nos primeiros ciclos, para o caso dos sistemas amortecidos, restando apenas a solução particular, quando o sistema entra em regime. Logo, a resposta dinâmica permanente caracteriza-se por uma vibração harmônica de freqüência igual à do carregamento, porém defasada de um ângulo $\overline{\phi}$.

7.2.4. Carregamentos Impulsivos

Quando se têm carregamentos em que a duração de sua aplicação é curta com relação ao período de vibração, estes são denominados impulsivos. Este tipo de carregamento pode ser observado na **Figura 7.4**.

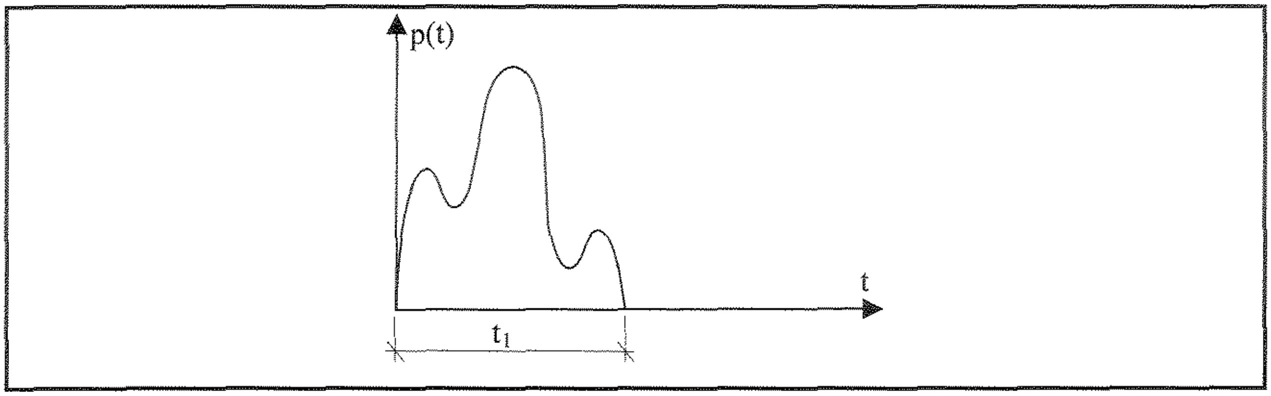


Figura 7.4 – Carregamento Impulsivo

Para a análise deste tipo de carregamento, faz-se a sua divisão em duas fases diferentes:

a) Fase 1 ($\mathbf{0 \leq t \leq t_1}$): Nesta fase, trata-se o problema como se fosse uma vibração forçada;

b) Fase 2 ($\mathbf{t \geq t_1}$): Nesta fase, trata-se o problema como se fosse o problema de vibração livre, sendo as condições iniciais o deslocamento e a velocidade atingida em t_1, quando cessa o carregamento.

7.3. Vibração Livre Aplicada às Placas

7.3.1. Equação Integral para a Vibração Livre em Placas

A equação diferencial que governa o problema de vibrações livres de uma placa elástica, homogênea e isotrópica é mostrada a seguir:

$$D \cdot \nabla^4 U_3 + \rho_e \cdot h \cdot \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} = 0 \tag{7.24}$$

sendo:

ρ_e a densidade do material.

A dedução da equação (7.24) através do método da energia pode ser observada no **Apêndice A**.

A equação de movimento apresentada admite uma solução que é harmônica no tempo, igual a:

$$U_3(x_1, x_2, t) = u_3(x_1, x_2) \cdot \cos(\omega \cdot t) \tag{7.25}$$

Substituindo a equação (7.25) em (7.24) e realizando as derivadas, obtém-se:

$$\nabla^4 u_3 - \lambda_v^4 \cdot u_3 = 0 \tag{7.26}$$

sendo $\lambda_v{}^4$ o modo de vibração definido por:

$$\lambda_v^4 = \frac{\omega^2 \cdot \rho_e \cdot h}{D} \tag{7.27}$$

Para a análise da equação (7.26), o termo que contém a freqüência natural, ω, pode ser apresentado na forma de uma integral de domínio, que escrita de uma forma mais conveniente, é mostrada a seguir:

$$\int_{\Omega} u_{3,iijj} \cdot u_3^* \cdot d\Omega + \lambda_v^4 \cdot \int_{\Omega} u_3 \cdot u_3^* \cdot d\Omega = 0 \tag{7.28}$$

Utilizando a definição obtida no **Capítulo 4** para a primeira integral da equação (7.28), pode-se escrevê-la da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & C(\xi)\cdot u_3(\xi) + \int_{\Gamma}\left[V_n^*(\xi,x)\cdot u_3(x) - M_n^*(\xi,x)\cdot\frac{\partial u_3}{\partial n}(x)\right]\cdot d\Gamma(x) + \\ & + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(\xi,x_c)\cdot u_{3ci}(x_c) = \int_{\Gamma}\left[V_n(x)\cdot u_3^*(\xi,x) - M_n(x)\cdot\frac{\partial u_3^*}{\partial n}(\xi,x)\right]\cdot d\Gamma(x) + \\ & + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(x_c)\cdot u_{3ci}^*(\xi,x_c) + \lambda_v^4\cdot\int_{\Omega} u_3(x)\cdot u_3^*(\xi,x)\cdot d\Omega(x) \end{aligned} \tag{7.29}$$

Escrevendo na forma matricial, obtêm-se:

$$\underset{\sim}{H}\cdot\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{G}\cdot\underset{\sim}{T} + \lambda_v^4\cdot\underset{\sim}{D}\cdot\underset{\sim}{u_3} \tag{7.30}$$

sendo:

$\underset{\sim}{\mathbf{H}}$ a matriz obtida através das soluções fundamentais $\mathbf{V_n}^*$ e $\mathbf{M_n}^*$;

$\underset{\sim}{\mathbf{G}}$ a matriz obtida através das soluções fundamentais $\mathbf{u_3}^*$ e $\dfrac{\partial \mathbf{u_3}^*}{\partial \mathbf{n}}$;

$\underset{\sim}{\mathbf{D}}$ a matriz dos coeficientes da integração de domínio;

$\underset{\sim}{\mathbf{U}}$ o vetor contendo os deslocamentos transversais ($\mathbf{u_3}$) e rotações normais ($\dfrac{\partial \mathbf{u_3}}{\partial \mathbf{n}}$) no contorno;

$\underset{\sim}{\mathbf{T}}$ o vetor contendo a cortante equivalente ($\mathbf{V_n}$) e o momento fletor normal ($\mathbf{M_n}$) no contorno;

$\underset{\sim}{\mathbf{u}_3}$ o vetor contendo os deslocamentos $\mathbf{u_3}$.

Reagrupando-se as matrizes $\underset{\sim}{\mathbf{H}}$ e $\underset{\sim}{\mathbf{G}}$ de forma que se tenha apenas valores relativos às incógnitas no contorno, a equação (7.30) torna-se:

$$\underset{\sim}{A_{\Gamma\Gamma}} \cdot \underset{\sim}{x} - \lambda_v^4 \cdot \underset{\sim}{D_{\Omega\Gamma}} \cdot \underset{\sim}{d} = 0 \qquad (7.31)$$

sendo:

$\underset{\sim}{\mathbf{A}_{\Gamma\Gamma}}$ a matriz que representa a integração proveniente do contorno, e com seus elementos invariáveis em relação à carga crítica;

$\underset{\sim}{\mathbf{D}_{\Omega\Gamma}}$ a matriz cujos elementos são dependentes dos deslocamentos no domínio da placa;

$\underset{\sim}{\mathbf{x}}$ o vetor contendo os deslocamentos e esforços no contorno;

$\underset{\sim}{\mathbf{d}}$ o vetor contendo os deslocamentos transversais no domínio da placa.

Para os nós internos ao domínio, a equação integral é definida como sendo igual a:

$$\begin{aligned} & u_3(\xi) + \int_\Gamma \left[V_n^*(\xi,x) \cdot u_3(x) - M_n^*(\xi,x) \cdot \frac{\partial u_3}{\partial n}(x) \right] \cdot d\Gamma(x) + \\ & + \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck}^*(\xi,x_c) \cdot u_{3ck}(x_c) = \int_\Gamma \left[V_n(x) \cdot u_3^*(\xi,x) - M_n(x) \cdot \frac{\partial u_3^*}{\partial n}(\xi,x) \right] \cdot d\Gamma(x) \\ & + \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck}(x_c) \cdot u_{3ck}^*(\xi,x_c) + \lambda_v^4 \cdot \int_\Omega u_3(x) \cdot u_3^*(\xi,x) \cdot d\Omega(x) \end{aligned} \qquad (7.32)$$

Na forma de matriz, a expressão (7.32) é reescrita como:

$$\underset{\sim}{d} = -\underset{\sim}{A}_{\Gamma\Omega} \cdot \underset{\sim}{x} + \lambda_v^4 \cdot \underset{\sim}{D}_{\Omega\Omega} \cdot \underset{\sim}{d} \tag{7.33}$$

Desta forma, determina-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \underset{\sim}{A}_{\Gamma\Gamma} \cdot \underset{\sim}{x} - \lambda_v^4 \cdot \underset{\sim}{D}_{\Omega\Gamma} \cdot \underset{\sim}{d} = 0 & \text{(a)} \\ \underset{\sim}{d} = -\underset{\sim}{A}_{\Gamma\Omega} \cdot \underset{\sim}{x} + \lambda_v^4 \cdot \underset{\sim}{D}_{\Omega\Omega} \cdot \underset{\sim}{d} & \text{(b)} \end{cases} \tag{7.34}$$

7.3.2. Problema de Autovalor Aplicado à Vibração Livre em Placas

O sistema de equações dado em (7.34) representa, da mesma forma que para o problema de não linearidade geométrica, um problema clássico de autovalores. Para o seu cálculo é utilizado neste trabalho um processo iterativo. Para isto, o vetor das translações no domínio ($\underset{\sim}{\mathbf{d}}$) assume um valor inicial $\underset{\sim}{\mathbf{d}}^0$ e determina-se o $\underset{\sim}{\mathbf{x}}^1$ dos deslocamentos e esforços no contorno (7.34a). Com o vetor $\underset{\sim}{\mathbf{x}}^1$ e $\underset{\sim}{\mathbf{d}}^0$ determina-se um novo vetor $\underset{\sim}{\mathbf{d}}^1$ na equação (7.34b). Assim, o processo iterativo é:

$$\begin{cases} \underset{\sim}{A}_{\Gamma\Gamma} \cdot \underset{\sim}{x}^k = \lambda_v{}^4 \cdot \underset{\sim}{D}_{\Omega\Gamma} \cdot \underset{\sim}{d}^{k-1} \\ \underset{\sim}{d}^k = -\underset{\sim}{A}_{\Gamma\Omega} \cdot \underset{\sim}{x}^k + \lambda_v{}^4 \cdot \underset{\sim}{D}_{\Omega\Omega} \cdot \underset{\sim}{d}^{k-1} \end{cases} \tag{7.35}$$

Na k-ésima iteração o valor da carga crítica dada pelo fator de ampliação $\lambda_v{}^4$ e o modo de vibração dado pelo vetor $\underset{\sim}{\mathbf{d}}^k$ são determinados. O processo iterativo é concluído quando a diferença relativa entre duas aproximações sucessivas do autovalor for menor que a precisão desejada. Para o cálculo do autovalor é utilizado o quociente de Rayleigh, ou seja:

$$\lambda_v^4 = \frac{\underset{\sim}{d}^{k,t} \cdot \underset{\sim}{d}^{k-1}}{\underset{\sim}{d}^{k,t} \cdot \underset{\sim}{d}^{k}} \tag{7.36}$$

A freqüência natural é calculada extraindo-se a raiz quadrada do valor obtido na expressão (7.36), ou seja:

$$\omega = \sqrt{\frac{\lambda_v{}^4 \cdot D}{\rho_e \cdot h}} \tag{7.37}$$

7.4. Introdução de Vibrações Harmônicas Forçadas em Placas sem o Efeito do Amortecimento

Aqui, serão estudadas placas submetidas a um carregamento harmônico sem a consideração do efeito do amortecimento. Pretende-se determinar os deslocamentos e esforços máximos de placas submetidas a estes carregamentos, sem a preocupação de fazer uma análise no domínio do tempo ou da freqüência. Como estas estruturas são bidimensionais, torna-se trabalhoso escrever suas equações mesmo para casos particulares e obter relações semelhantes àquelas apresentadas para a situação com um grau de liberdade apresentadas no **item 7.1**.

Quando se tem um carregamento harmônico aplicado em uma placa, a sua equação diferencial torna-se:

$$D \cdot \nabla^4 U_3 + \rho_e \cdot h \cdot \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} = \overline{A} \cdot \mathrm{sen}(\overline{\omega} \cdot t) \tag{7.38}$$

A equação de movimento apresentada admite uma solução que é harmônica no tempo, igual a:

$$U_3(x_1,x_2,t)=u_3(x_1,x_2)\cdot \mathrm{sen}(\overline{\omega}\cdot t) \tag{7.39}$$

Substituindo a equação (7.39) em (7.38) e realizando as derivadas, obtêm-se:

$$\nabla^4 u_3 - \frac{\overline{\omega}^2 \cdot \rho_e \cdot h}{D}\cdot u_3 = \overline{A}\cdot \mathrm{sen}(\overline{\omega}\cdot t) \tag{7.40}$$

Como se pretende analisar os deslocamentos máximos obtidos devido ao carregamento harmônico, a parcela $\overline{A}\cdot \mathrm{sen}(\overline{\omega}\cdot t)$ será máxima quando o seno for igual a um, logo, adotando-se o seno igual a um e realizando-se os mesmos processos matemáticos do item 7.3, obtêm-se a seguinte equação matricial para o problema:

$$\underset{\sim}{A}_{\Gamma\Gamma}\cdot \underset{\sim}{x} - \frac{\overline{\omega}^2 \cdot \rho_e \cdot h}{D}\cdot \underset{\sim}{D}_{\Omega\Gamma}\cdot \underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{\overline{A}} \tag{7.41}$$

Para os pontos internos, da mesma forma que obtido anteriormente, têm-se:

$$\underset{\sim}{d} = -\underset{\sim}{A}_{\Gamma\Omega}\cdot \underset{\sim}{x} + \frac{\overline{\omega}^2 \cdot \rho_e \cdot h}{D}\cdot \underset{\sim}{D}_{\Omega\Omega}\cdot \underset{\sim}{d} + \underset{\sim}{\overline{A}} \tag{7.42}$$

Desta forma, pode-se escrever o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \underset{\sim}{A}_{\Gamma\Gamma}\cdot \underset{\sim}{x} - \dfrac{\overline{\omega}^2 \cdot \rho_e \cdot h}{D}\cdot \underset{\sim}{D}_{\Omega\Gamma}\cdot \underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{\overline{A}} & \text{(a)} \\ \underset{\sim}{d} = -\underset{\sim}{A}_{\Gamma\Omega}\cdot \underset{\sim}{x} + \dfrac{\overline{\omega}^2 \cdot \rho_e \cdot h}{D}\cdot \underset{\sim}{D}_{\Omega\Omega}\cdot \underset{\sim}{d} + \underset{\sim}{\overline{A}} & \text{(b)} \end{cases} \tag{7.43}$$

Através de um processo iterativo, como o utilizado para a obtenção das vibrações livres, obtêm-se os deslocamentos e esforços no contorno da placa bem como os deslocamentos nos pontos internos da mesma.

8. EXEMPLOS

8.1. Exemplos de placas Quadradas com Variação do Multiplicador do Argumento da Função Logaritmo Neperiano

Como foi visto no **Capítulo 3**, na solução fundamental de placa existe uma constante livre **K** originada das integrações sucessivas da equação de equilíbrio da placa. Muitos autores sugerem valores diferentes para o valor desta constante, dentre eles *Danson*, *Bezine* e *Weeën*. O objetivo deste estudo é observar a variação dos resultados dos esforços e deslocamentos das placas para os vários valores desta constante.

Para a realização destes exemplos, a constante **K** é trabalhada de forma que passe a multiplicar o argumento da função *logaritmo neperiano*, obtendo desta forma as seguintes equações para as soluções fundamentais:

$$u_3^* = \frac{1}{8 \cdot \pi \cdot D} \cdot r^2 \cdot \ln(FA \cdot r) \tag{8.1}$$

$$\frac{\partial u_3^*}{\partial n} = \frac{r}{4 \cdot \pi \cdot D} \cdot \left[\ln(FA \cdot r) + \frac{1}{2} \right] \cdot \cos \beta \tag{8.2}$$

$$M_n^* = -\frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\left[(1+\nu)\cdot\ln(FA\cdot r)+(1-\nu)\cdot\cos^2\beta+(1+3\cdot\nu)\cdot\frac{1}{2}\right] \tag{8.3}$$

$$M_{ns}^* = \frac{(1-\nu)}{8\cdot\pi}\cdot \operatorname{sen} 2\beta \tag{8.4}$$

$$V_n^* = \frac{\cos\beta}{4\cdot\pi\cdot r}\cdot\left[2\cdot(1-\nu)\cdot \operatorname{sen}^2\beta - 3 + \nu\right] + \frac{(1-\nu)}{4\cdot\pi\cdot R}\cdot\cos 2\beta \tag{8.5}$$

Para os exemplos a seguir são utilizadas placas quadradas com as seguintes características geométricas e físicas:

$\mathbf{L_1} = \mathbf{L_2} = 2$ m

$\mathbf{E} = 2{,}05 \times 10^{11}$ N/m^2

$\mathbf{h} = 6 \times 10^{-2}$ m

$\mathbf{q} = -4\times10^{2}$ N/m^2

16 pontos de Gauss

40 elementos no contorno

São testados quatro valores para a constante **FA**: $\mathbf{e^{1/2}}$, **e**, **π/h**, e **1**. Estes valores correspondem aos valores sugeridos por *Danson*, *Bezine*, *Weeën* e a consideração do fator multiplicador igual a um. Deve-se lembrar que o valor de *Weeën* é usado na solução fundamental para placas de *Reissner*. Sabe-se que a solução para placas de *Reissner* contém a solução clássica de placas, chamada de porção irrotacional do campo e a correção da cortante chamada de porção solenoidal do campo.

Para cada uma destas constantes são calculadas as seguintes placas:

a) Placa apoiada nos quatro lados (ν=0);

b) Placa com um lado engastado e os outros lados apoiados (ν=0);

c) Placa com dois lados opostos engastados e os outros lados apoiados (ν=0);

d) Placa com dois lados consecutivos engastados e os outros lados apoiados (ν=0);

e) Placa engastada nos quatro lados (ν=0);

f) Placa com um lado livre e os outros lados apoiados (ν=0,15);

g) Placa com um lado livre, seu lado oposto engastado e os outros lados apoiados (ν=0,15);

h) Placa com um lado livre, seu lado oposto apoiado e os outros lados engastados (ν=0,15);

i) Placa com um lado livre e os outros lados engastados (ν=0,15);

j) Placa com dois lados opostos livres e os outros lados engastados (ν=0,3);

k) Placa com um lado apoiado e os outros lados engastados (ν=0,3);

l) Placa com um lado engastado e os outros lados livres (ν=0);

m) Placa com um lado engastado e os outros lados livres (ν=0,3);

n) Placa com dois lados consecutivos engastados e os outros lados livres (ν=0).

Para todos os exemplos que não possuem lados livres, as diferenças obtidas são inferiores a 1% para qualquer ponto no contorno. Quando existem lados livres, estas diferenças são inferiores a 10% para os nós próximos a extremidade da placa, decrescendo este valor para diferenças inferiores a 1% para pontos próximos ao centro dos lados da placa. A seguir, é apresentado o exemplo da placa com um lado engastado e os demais lados livres para os dois casos de coeficientes de *Poisson*. É apresentada a distribuição da força cortante e do momento fletor no engaste bem como as deflexões no lado livre paralelo a borda engastada.

8.1.1. Placa Quadrada ELLL (ν=0)

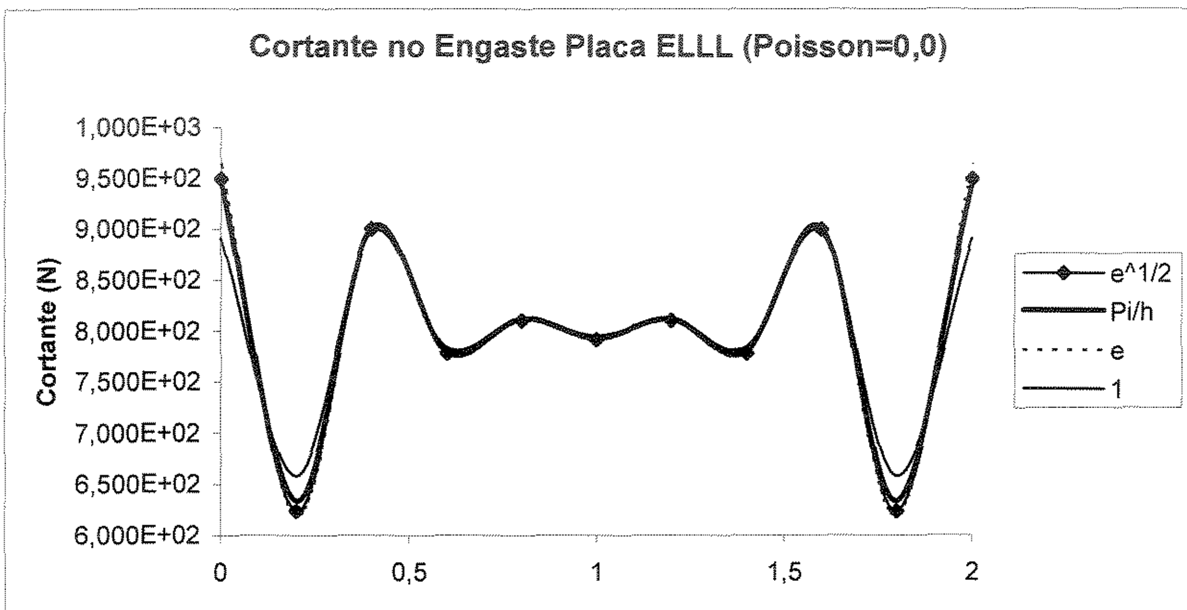


Figura 8.1 – Gráfico da cortante no engaste da placa ELLL com coeficiente de Poisson igual a zero

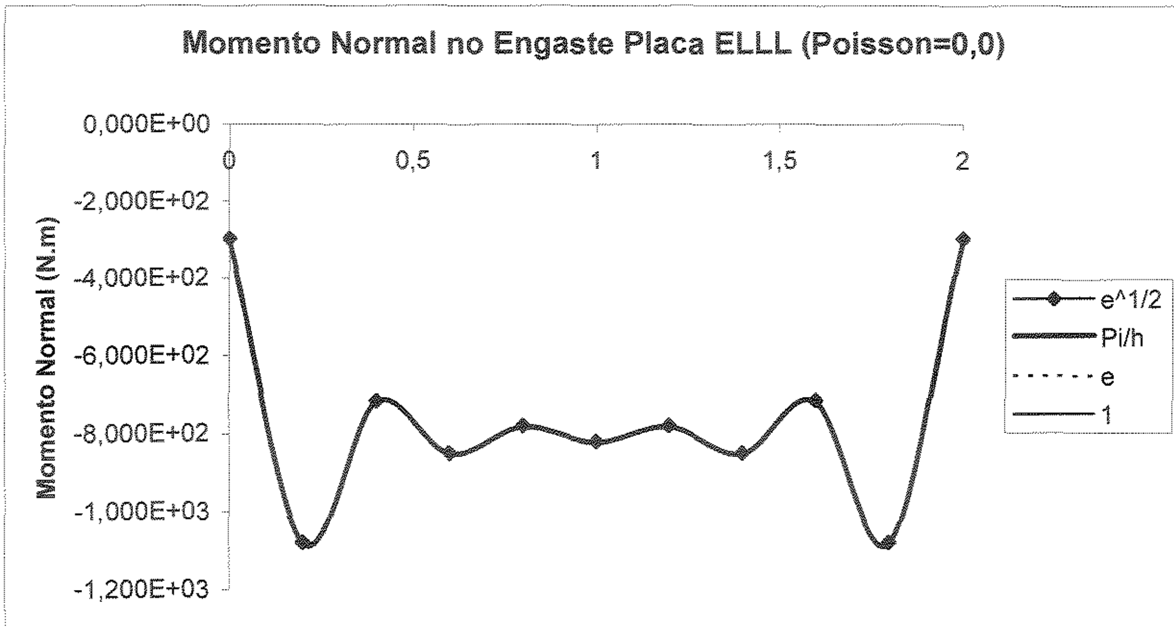


Figura 8.2 – Gráfico do momento fletor normal ao engaste da placa ELLL com coeficiente de Poisson igual a zero

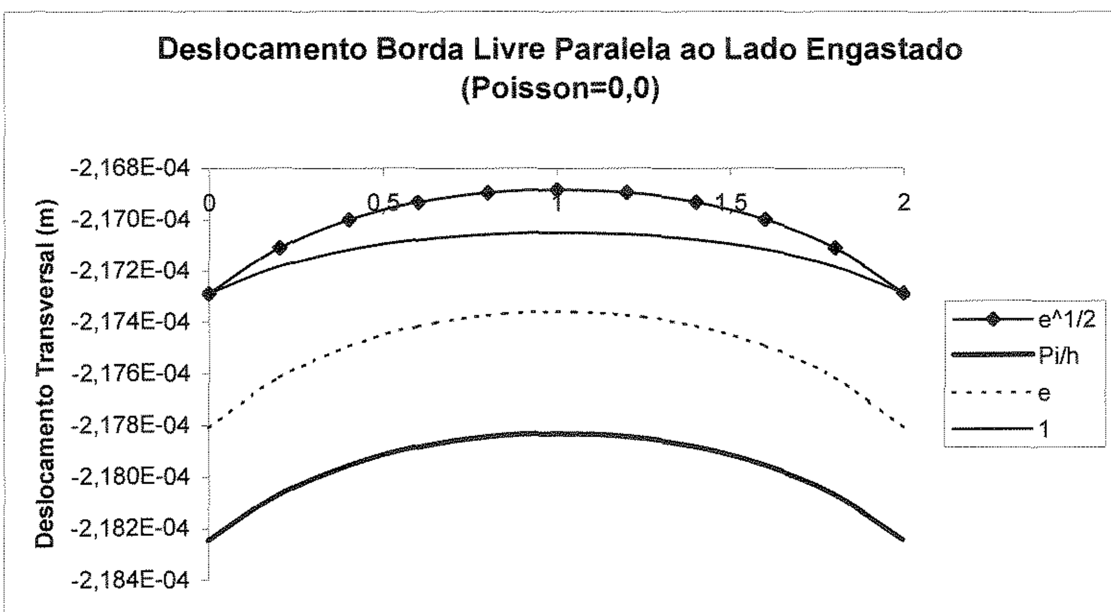


Figura 8.3 – Gráfico do deslocamento na borda livre da placa ELLL com coeficiente de Poisson igual a zero

8.1.2. Placa Quadrada ELLL (ν=0,3)

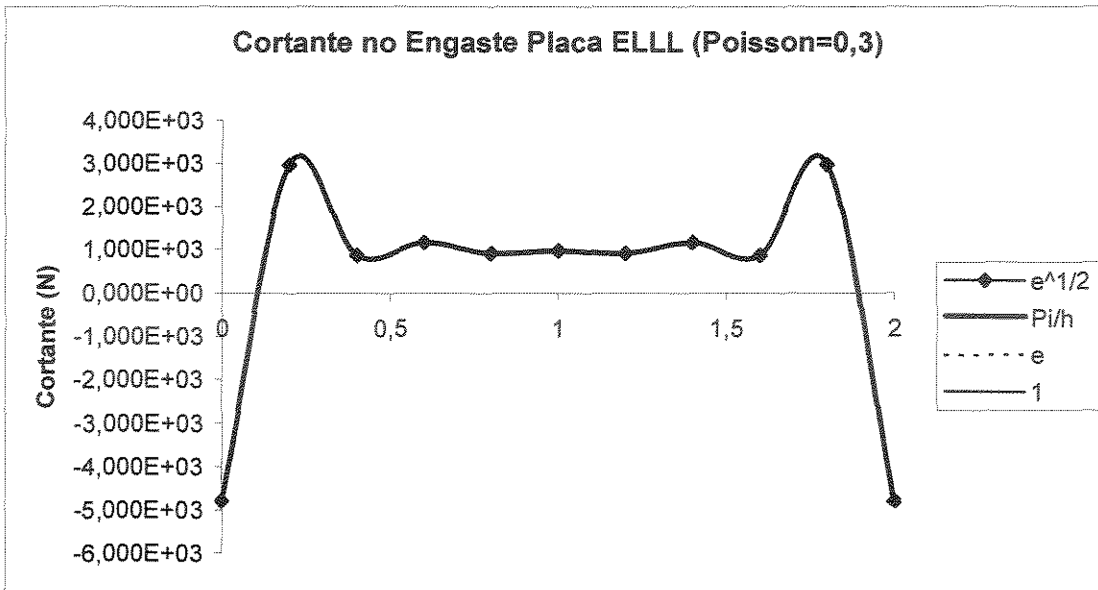


Figura 8.4 – Gráfico da cortante no engaste da placa ELLL com coeficiente de Poisson igual a 0,3.

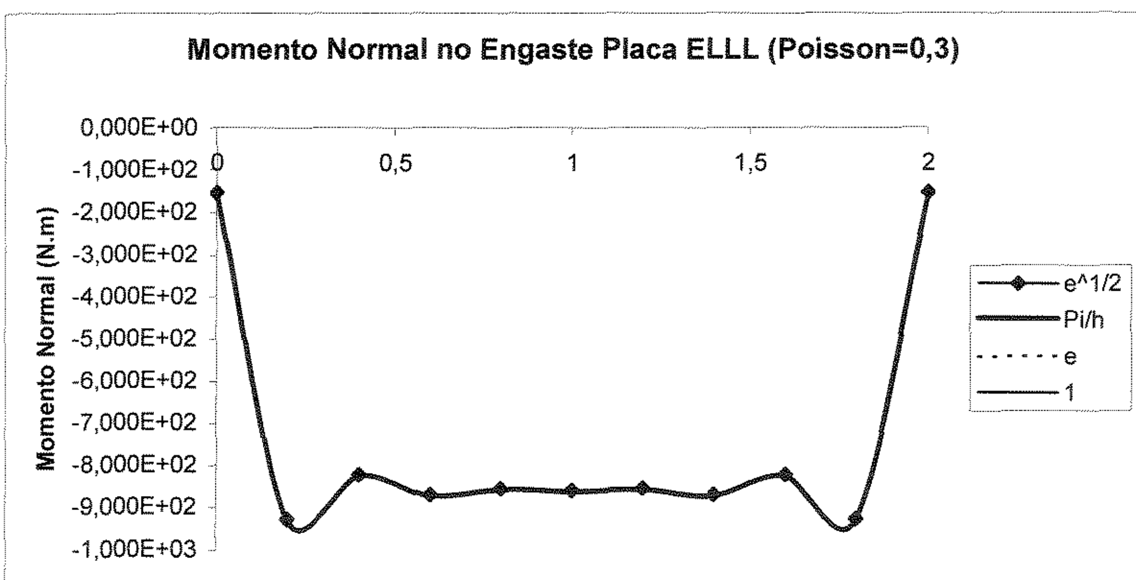


Figura 8.5 – Gráfico do momento fletor normal ao engaste da placa ELLL com coeficiente de Poisson igual a 0,3

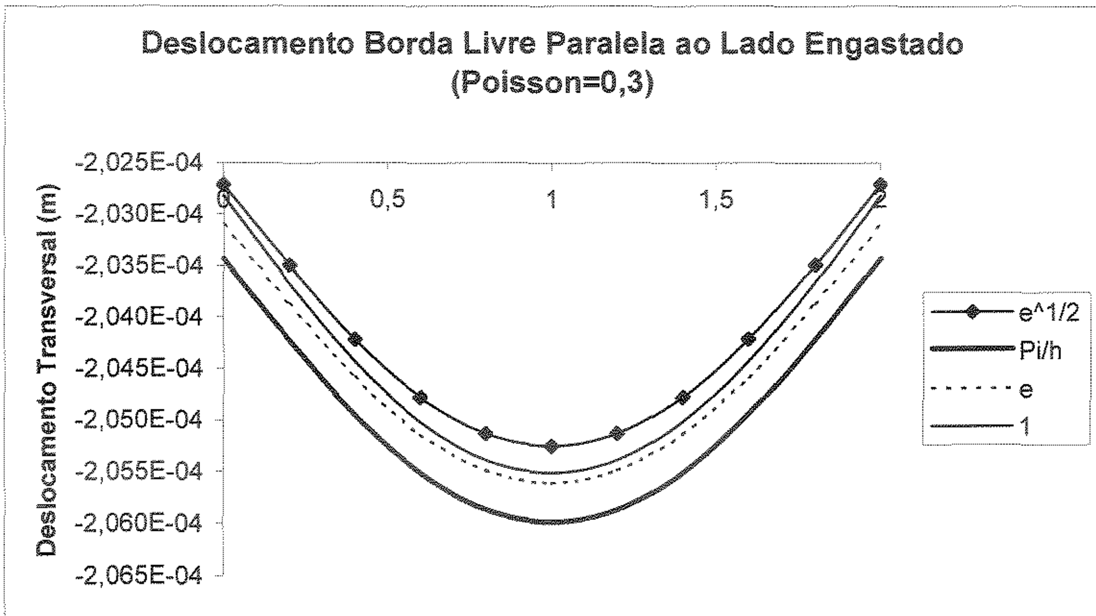


Figura 8.6 – Gráfico do deslocamento na borda livre da placa ELLL com coeficiente de Poisson igual a 0,3

8.2. Exemplos de Placas Quadradas com Carregamento Uniforme

Para os exemplos a seguir são utilizadas as simbologias apresentadas na Figura **8.1** e os seguintes dados:

$E = 2{,}05 \times 10^{11}\ N/m^2$

$h = 6 \times 10^{-2}\ m$

$q = -\ 4x10^{2}\ N/m^2$

$K=0{,}5$

16 pontos de Gauss

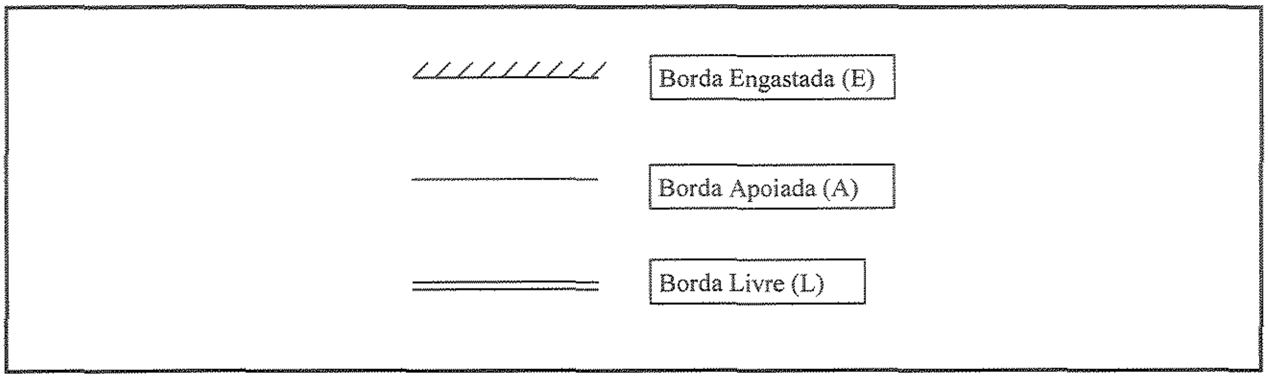


Figura 8.7 – Simbologia adotada para as bordas da placa

Neste item, todos os resultados obtidos são comparados com as tabelas organizadas por **BARES [57]**, cujos resultados, em sua grande maioria, são obtidos pelo método das diferenças finitas. Para todos os exemplos deste item são analisados quatro tipos de discretização do contorno:

- Placas quadradas: estas placas são discretizadas com **16**, **32**, **40** e **64** elementos no contorno de mesmo comprimento;

- Placas retangulares: estas placas são discretizadas com **24**, **48**, **60** e **96** elementos no contorno de mesmo comprimento.

8.2.1. Placa Simplesmente Apoiada nos Quatro Lados (AAAA)

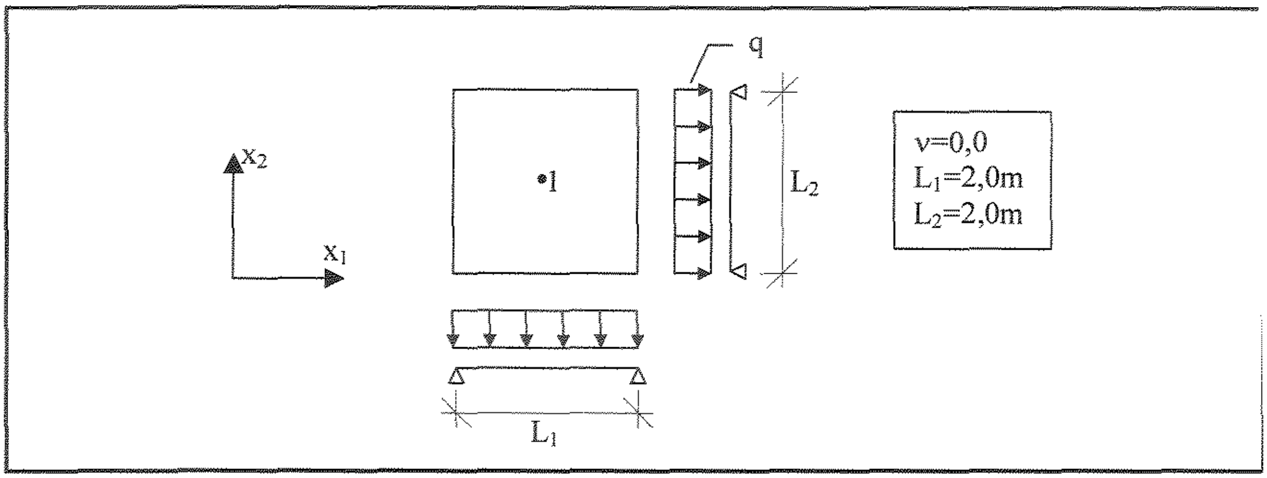


Figura 8.8 – Placa quadrada AAAA com carregamento uniforme

Elementos	$u_{3(1)}$ (x10^{-6}m)	$M_{11(1)}$ (x10 N.m/m)	$M_{22(1)}$ (x10 N.m/m)
16	-7,093	+5,916	+5,916
32	-7,056	+5,899	+5,899
40	-7,053	+5,897	+5,897
64	-7,048	+5,895	+5,895
BARES [57]	-7,039	+5,888	+5,888

Tabela 8.1 – Deslocamentos e esforços de uma placa quadrada AAAA com carregamento uniforme

Neste exemplo, é analisada uma placa quadrada simplesmente apoiada no contorno com carregamento uniforme (**Figura 8.8**). Na **Tabela 8.1** são apresentados o deslocamento transversal ($\mathbf{u}_{3(1)}$) e os momentos fletores ($\mathbf{M}_{11(1)}$ e $\mathbf{M}_{22(1)}$) para o **ponto 1**. Os valores obtidos com o MEC, quando comparados com **BARES [57]** apresentam diferença inferior a 0,8% para o deslocamento transversal ($\mathbf{u}_{3(1)}$) e inferior a 0,5% para os momentos fletores ($\mathbf{M}_{11(1)}$ e $\mathbf{M}_{22(1)}$), para a menor discretização adotada (**16** elementos no contorno). Para uma malha com **32** elementos no contorno, estas diferenças são iguais a 0,2% para $\mathbf{u}_{3(1)}$, $\mathbf{M}_{11(1)}$ e $\mathbf{M}_{22(2)}$. Tais resultados não se modificam consideravelmente para malhas mais refinadas.

8.2.2. Placa Engastada em Um Lado e Apoiada nos Outros Lados (AAAE)

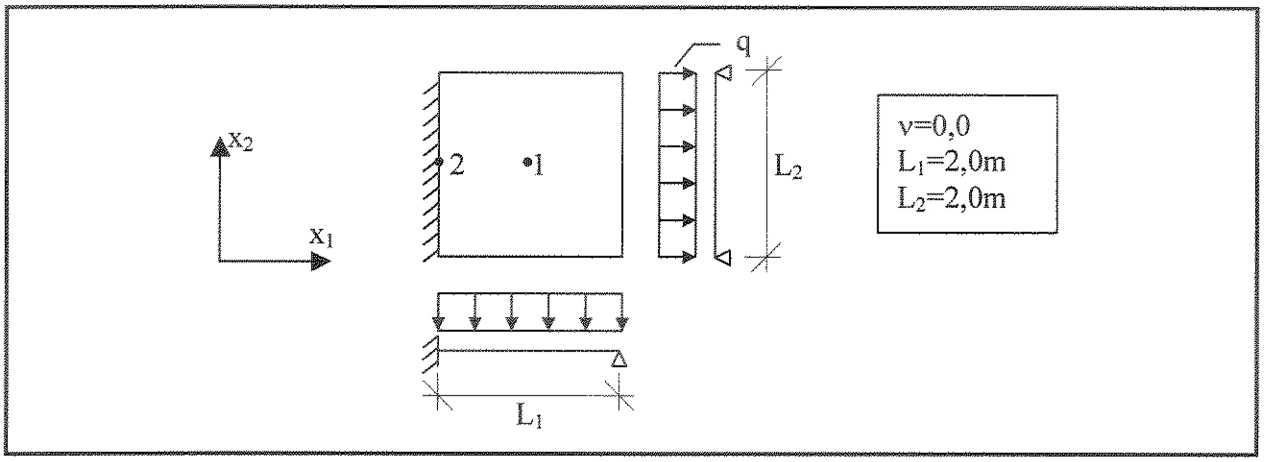


Figura 8.9 – Placa quadrada AAAE com carregamento uniforme

Neste exemplo (**Figura 8.9**), obtiveram-se resultados para o deslocamento transversal ($\mathbf{u_{3(1)}}$) e para os momentos fletores ($\mathbf{M_{11(1)}}$, $\mathbf{M_{22(1)}}$ e $\mathbf{M_{n(2)}}$), como mostrado na **Tabela 8.2**.

Elementos	$u_{3(1)}$ ($x10^{-6}$m)	$M_{11(1)}$(x10 N.m/m)	$M_{22(1)}$(x10 N.m/m)	$M_{n(2)}$ ($x10^2$N.m/m)
16	-4,847	+5,109	+3,896	-1,397
32	-4,834	+5,103	+3,893	-1,354
40	-4,833	+5,102	+3,892	-1,351
64	-4,832	+5,101	+3,892	-1,345
BARES [57]	-4,827	+5,088	+3,888	-1,344

Tabela 8.2 – Deslocamentos e esforços de uma placa quadrada AAAE com carregamento uniforme

As diferenças obtidas para os resultados do **ponto 1** são similares às do exemplo anterior, apresentando valores pequenos tanto para $\mathbf{u_{3(1)}}$ como para $\mathbf{M_{11(1)}}$ e $\mathbf{M_{22(1)}}$. Analisando o momento fletor normal no **ponto 2**, a diferença obtida, quando comparada com **BARES [57]** com o MEC é de 3,9% para **16** elementos, 0,8% para **32** elementos e não se modificando para malhas mais refinadas.

8.2.3. Placa Engastada em Dois Lados Paralelos e Apoiada nos Outros Lados (AEAE)

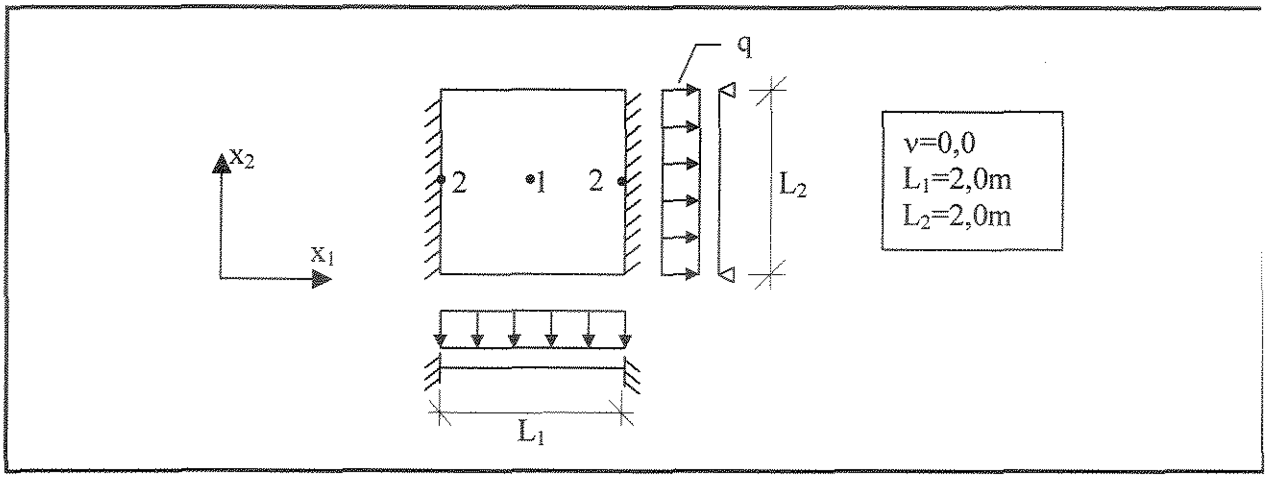


Figura 8.10 – Placa quadrada AEAE com carregamento uniforme

Neste exemplo (**Figura 8.10**), obtiveram-se resultados para o deslocamento transversal ($\mathbf{u}_{3(1)}$) e para os momentos fletores ($\mathbf{M}_{11(1)}$, $\mathbf{M}_{22(1)}$ e $\mathbf{M}_{n(2)}$), para uma placa quadrada, como mostrado na **Tabela 8.3**. As diferenças obtidas para este exemplo são similares às do exemplo **8.1.2**.

Elementos	$u_{3(1)}$ ($x10^{-6}$m)	$M_{11(1)}$(x10 N.m/m)	$M_{22(1)}$(x10 N.m/m)	$M_{n(2)}$ ($x10^2$N.m/m)
16	-3,324	+4,557	+2,531	-1,164
32	-3,325	+4,558	+2,534	-1,127
40	-3,325	+4,559	+2,534	-1,124
64	-3,325	+4,559	+2,534	-1,120
BARES [57]	-3,324	+4,560	+2,528	-1,118

Tabela 8.3 – Deslocamentos e esforços de uma placa quadrada AEAE com carregamento uniforme

8.2.4. Placa Apoiada em Dois Lados Consecutivos e Engastada nos Outros Lados (AAEE)

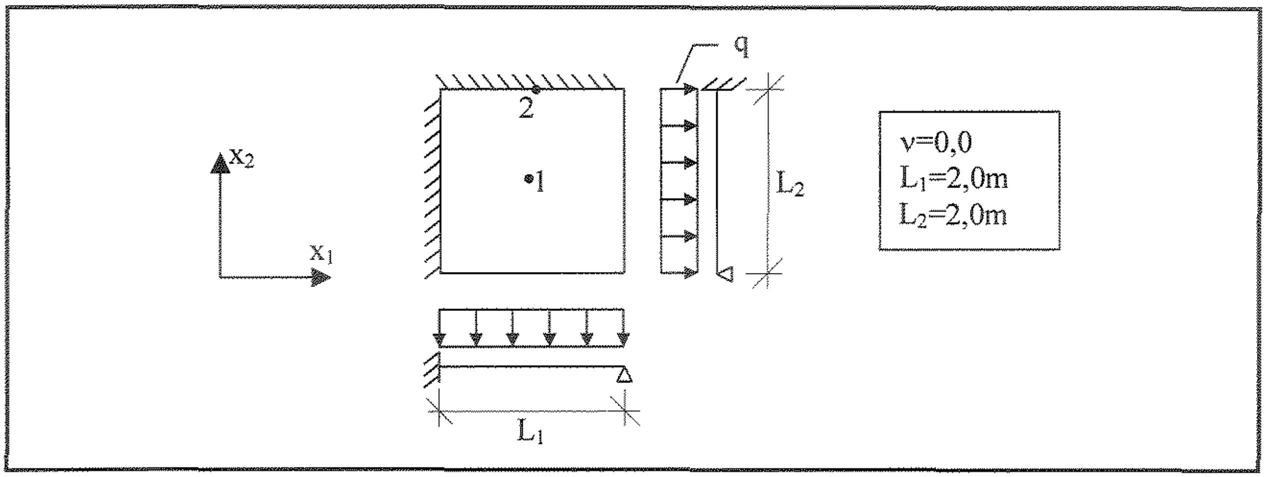


Figura 8.11 – Placa quadrada AAEE com carregamento uniforme

Elementos	$u_{3(1)}$ ($x10^{-6}$m)	$M_{11(1)}$(x10 N.m/m)	$M_{22(1)}$(x10 N.m/m)	$M_{n(2)}$ ($x10^2$N.m/m)
16	-3,655	+3,748	+3,748	-1,149
32	-3,650	+3,746	+3,746	-1,097
40	-3,649	+3,746	+3,746	-1,093
64	-3,649	+3,746	+3,746	-1,087
BARES [57]	-3,642	+3,744	+3,744	-1,083

Tabela 8.4 – Deslocamentos e esforços de uma placa quadrada AAEE com carregamento uniforme

Neste exemplo (**Figura 8.11**), obtiveram-se resultados para o deslocamento transversal (**$u_{3(1)}$**) e para os momentos fletores (**$M_{11(1)}$**, **$M_{22(1)}$** e **$M_{n(2)}$**), como mostrado na **Tabela 8.4**. As diferenças obtidas para este exemplo são similares às do exemplo **8.1.2**.

8.2.5. Placa Engastada nos Quatro Lados (EEEE)

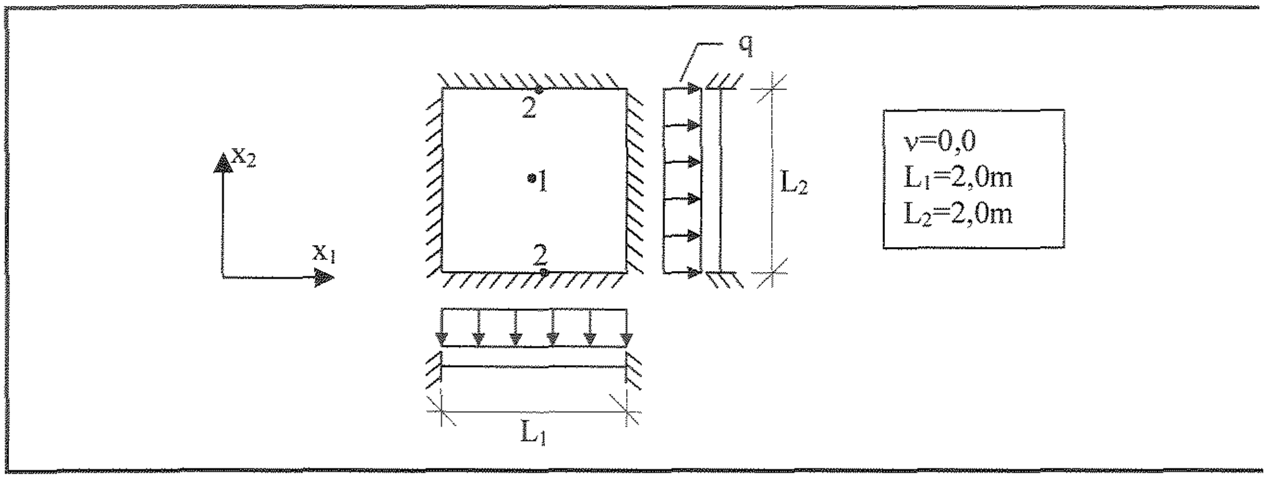


Figura 8.12 – Placa quadrada EEEE com carregamento uniforme

Elementos	$u_{3(1)}$ ($x10^{-6}$m)	$M_{11(1)}$(x10 N.m/m)	$M_{22(1)}$(x10 N.m/m)	$M_{n(2)}$ (x10 N.m/m)
16	-2,196	+2,820	+2,820	-8,891
32	-2,195	+2,819	+2,819	-8,341
40	-2,195	+2,819	+2,819	-8,299
64	-2,195	+2,819	+2,819	-8,246
BARES [57]	-2,211	+2,816	+2,816	-8,240

Tabela 8.5 – Deslocamentos e esforços de uma placa quadrada EEEE com carregamento uniforme

Neste exemplo (**Figura 8.12**), obtiveram-se resultados para o deslocamento transversal (**$u_{3(1)}$**) e para os momentos fletores (**$M_{11(1)}$**, **$M_{22(1)}$** e **$M_{n(2)}$**), como mostrado na **Tabela 8.5**. As diferenças obtidas para este exemplo são similares às do exemplo **8.1.2**.

8.2.6. Placa com Um Lado Livre e com os Outros Lados Apoiados (AAAL)

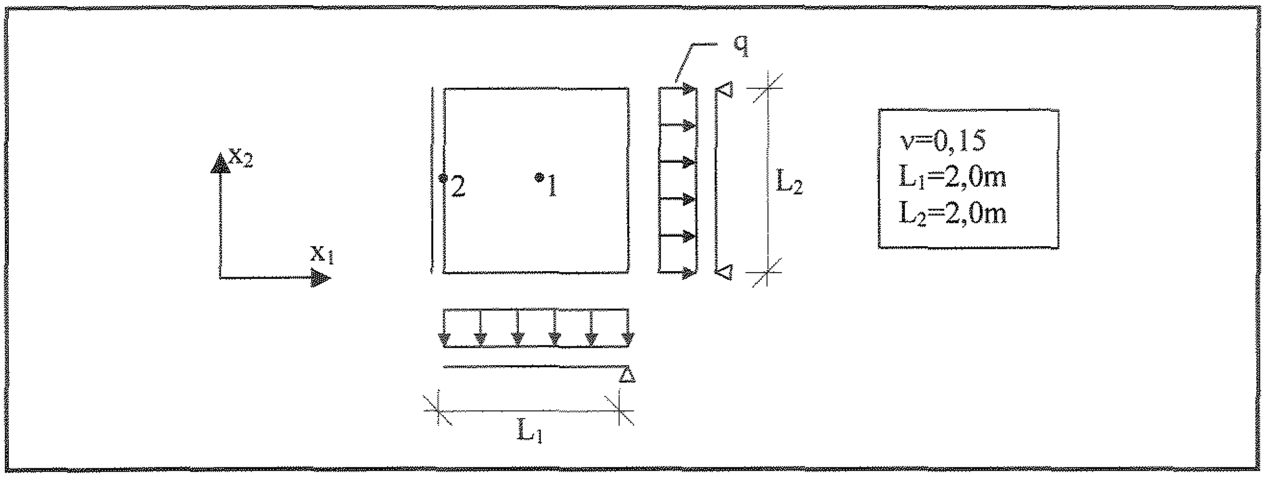


Figura 8.13 – Placa quadrada AAAL com carregamento uniforme

Elementos	$u_{3(1)}$ ($x10^{-5}$m)	$u_{3(2)}$ ($x10^{-5}$m)	$M_{11(1)}$($x10$ N.m/m)	$M_{22(1)}$($x10^{2}$N.m/m)
16	-1,332	-1,963	+4,599	+1,227
32	-1,331	-2,144	+4,776	+1,230
40	-1,329	-2,033	+4,804	+1,229
64	-1,326	-2,015	+4,840	+1,227
BARES [57]	-1,320	-1,991	+4,880	+1,222

Tabela 8.6 – Deslocamentos e esforços de uma placa quadrada AAAL com carregamento uniforme

Neste exemplo (**Figura 8.13**), obtiveram-se resultados para os deslocamentos transversais ($\mathbf{u}_{3(1)}$ e $\mathbf{u}_{3(2)}$) e para os momentos fletores ($\mathbf{M}_{11(1)}$ e $\mathbf{M}_{22(1)}$), como mostrado na **Tabela 8.6.**

A introdução de uma borda livre na placa e do coeficiente de Poisson (ν) diferente de zero não altera a ordem das diferenças em relação a **BARES [57]**, obtidas nos exemplos anteriores. A seguir são apresentados mais alguns exemplos de placas com condições de contorno diferentes, nos quais mantém-se a ordem das diferenças obtidas para os momentos fletores e deslocamentos transversais analisados.

8.2.7. Placa com Um Lado Livre, seu Lado Paralelo Engastado e os Outros Lados Apoiados (ALAE)

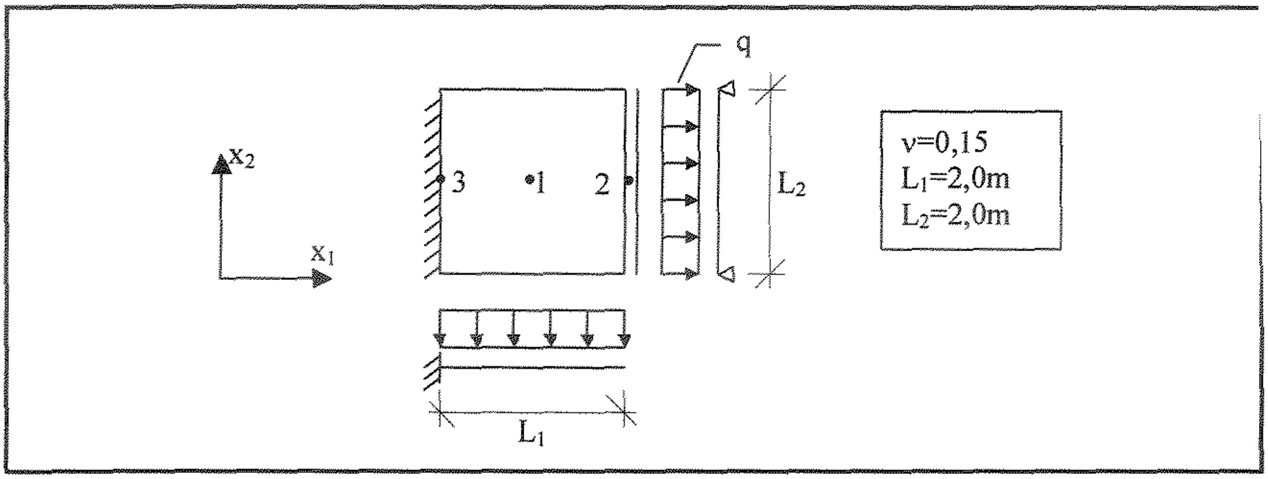


Figura 8.14 – Placa quadrada ALAE com carregamento uniforme

Neste exemplo (**Figura 8.14**), obtiveram-se resultados para os deslocamentos transversais ($\mathbf{u}_{3(1)}$ e $\mathbf{u}_{3(2)}$) e para os momentos fletores ($\mathbf{M}_{11(1)}$, $\mathbf{M}_{22(1)}$ e $\mathbf{M}_{n(3)}$), como mostrado na **Tabela 8.7**.

Elementos	$u_{3(1)}$ ($x10^{-6}$m)	$u_{3(2)}$ ($x10^{-5}$m)	$M_{11(1)}$ (x10 N.m/m)	$M_{22(1)}$ (x10 N.m/m)	$M_{n(3)}$ ($x10^2$N.m/m)
16	-9,470	-1,867	+3,357	+8,611	-1,966
32	-9,462	-1,767	+3,522	+8,611	-1,904
40	-9,450	-1,751	+3,548	+8,622	-1,898
64	-9,429	-1,730	+3,582	+8,607	-1,889
BARES [57]	-9,395	-1,700	+3,536	+8,576	-1,891

Tabela 8.7 – Deslocamentos e esforços de uma placa quadrada ALAE com carregamento uniforme

8.2.8. Placa com Um Lado Livre, seu Lado Paralelo Apoiado e os Outros Lados Engastados (ELEA)

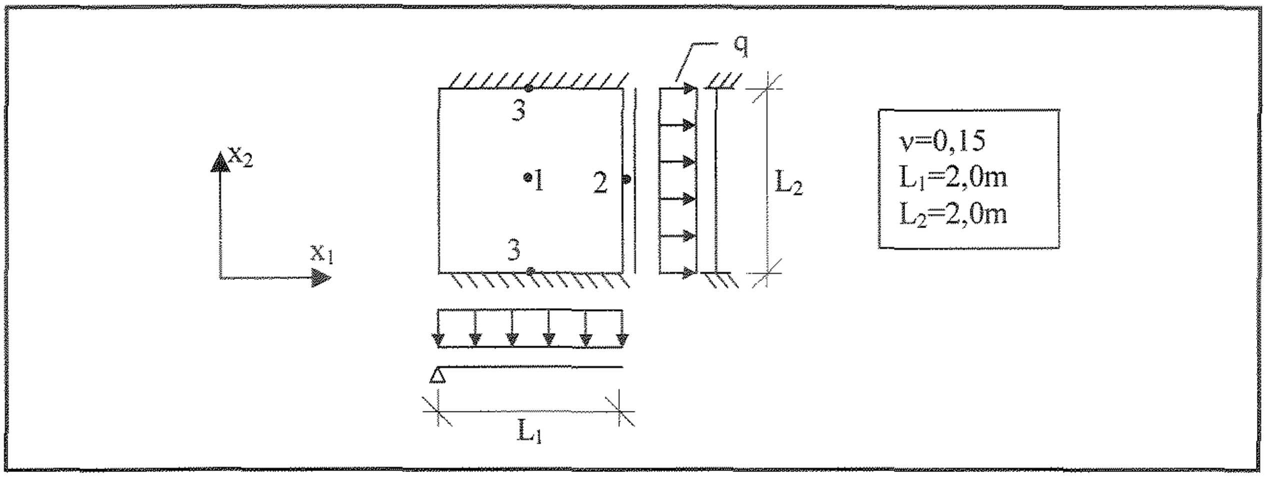


Figura 8.15 – Placa quadrada ELEA com carregamento uniforme

Neste exemplo (**Figura 8.15**), obtiveram-se resultados para os deslocamentos transversais ($\mathbf{u}_{3(1)}$ e $\mathbf{u}_{3(2)}$) e para os momentos fletores ($\mathbf{M}_{11(1)}$, $\mathbf{M}_{22(1)}$ e $\mathbf{M}_{n(3)}$), como mostrado na **Tabela 8.8**.

Elementos	$u_{3(1)}$ ($x10^{-6}$m)	$u_{3(2)}$ ($x10^{-6}$m)	$M_{11(1)}$ (x10 N.m/m)	$M_{22(1)}$ (x10 N.m/m)	$M_{n(3)}$ ($x10^2$N.m/m)
16	-3,820	-5,078	+2,005	+5,770	-1,197
32	-3,823	-4,863	+2,018	+5,777	-1,212
40	-3,822	-4,832	+2,020	+5,778	-1,229
64	-3,822	-4,789	+2,024	+5,779	-1,220
BARES [57]	-3,845	-4,697	+2,016	+5,792	-1,239

Tabela 8.8 – Deslocamentos e esforços de uma placa quadrada ELEA com carregamento uniforme

8.2.9. Placa com Um Lado Livre e os Outros Lados Engastados (EEEL)

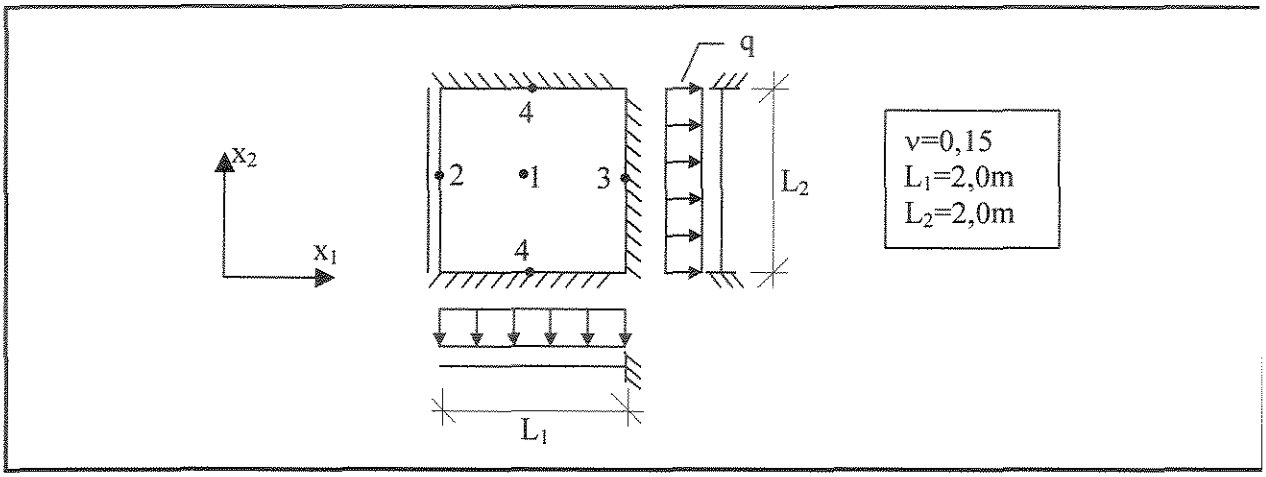


Figura 8.16 – Placa quadrada EEEL com carregamento uniforme

Neste exemplo (**Figura 8.16**), obtiveram-se resultados para os deslocamentos transversais ($\mathbf{u}_{3(1)}$ e $\mathbf{u}_{3(2)}$) e para os momentos fletores ($\mathbf{M}_{11(1)}$, $\mathbf{M}_{22(1)}$, $\mathbf{M}_{n(3)}$ e $\mathbf{M}_{n(4)}$), como mostrado na **Tabela 8.9**.

Elementos	$u_{3(1)}$ ($x10^{-6}$m)	$u_{3(2)}$ ($x10^{-6}$m)	$M_{11(1)}$ (x10N.m/m)	$M_{22(1)}$ (x10N.m/m)	$M_{n(3)}$ (x10N.m/m)	$M_{n(4)}$ ($x10^2$N.m/m)
16	-3,217	-5,026	+2,031	+4,843	-9,868	-1,047
32	-3,217	-4,810	+2,043	+4,846	-9,194	-1,052
40	-3,217	-4,780	+2,045	+4,846	-9,140	-1,068
64	-3,216	-4,738	+2,049	+4,847	-9,081	-1,059
BARES [57]	-3,266	-4,683	+2,000	+4,608	-8,944	-1,062

Tabela 8.9 – Deslocamentos e esforços de uma placa quadrada EEEL com carregamento uniforme

8.2.10. Placa com Dois Lados Paralelos Livres e os Outros Lados Engastados (ELEL)

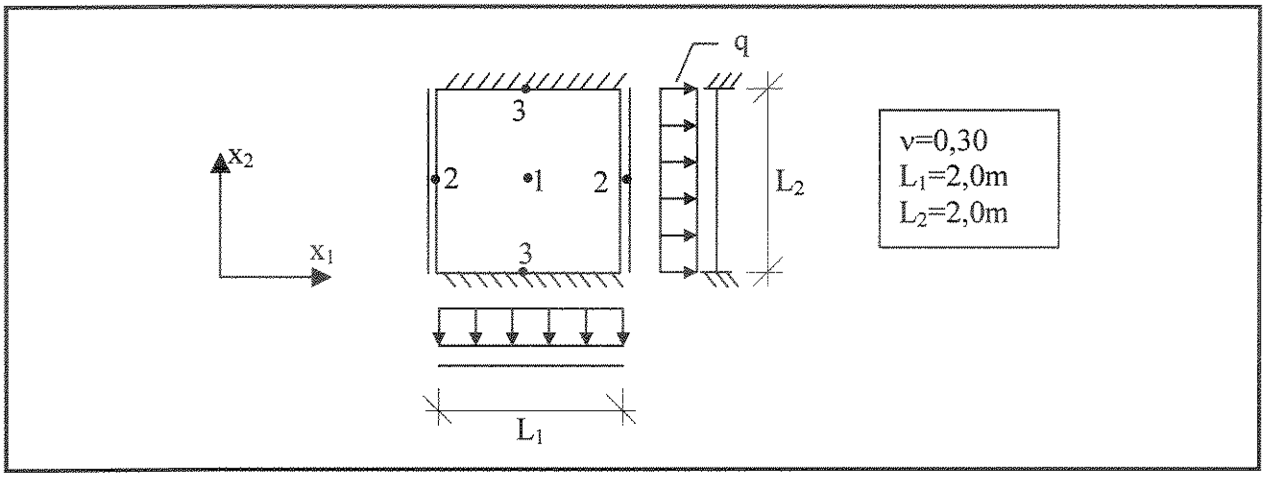


Figura 8.17 – Placa quadrada ELEL com carregamento uniforme

Neste exemplo (**Figura 8.17**), obtiveram-se resultados para os deslocamentos transversais ($\mathbf{u}_{3(1)}$ e $\mathbf{u}_{3(2)}$) e para os momentos fletores ($\mathbf{M}_{11(1)}$, $\mathbf{M}_{22(1)}$ e $\mathbf{M}_{n(3)}$), como mostrado na **Tabela 8.10**.

Elementos	$u_{3(1)}$ ($x10^{-6}$m)	$u_{3(2)}$ ($x10^{-6}$m)	$M_{11(1)}$ (x10 N.m/m)	$M_{22(1)}$ (x10 N.m/m)	$M_{n(3)}$ ($x10^2$N.m/m)
16	-4,069	-5,021	+6,515	+1,677	-1,251
32	-4,058	-4,783	+6,508	+1,698	-1,299
40	-4,055	-4,749	+6,506	+1,701	-1,311
64	-4,050	-4,697	+6,502	+1,710	-1,306
BARES [57]	-4,090	-----	+6,560	+1,760	-1,344

Tabela 8.10 – Deslocamentos e esforços de uma placa quadrada ELEL com carregamento uniforme

8.2.11. Placa com Um Lado Apoiado e os Outros Lados Engastados (EEEA)

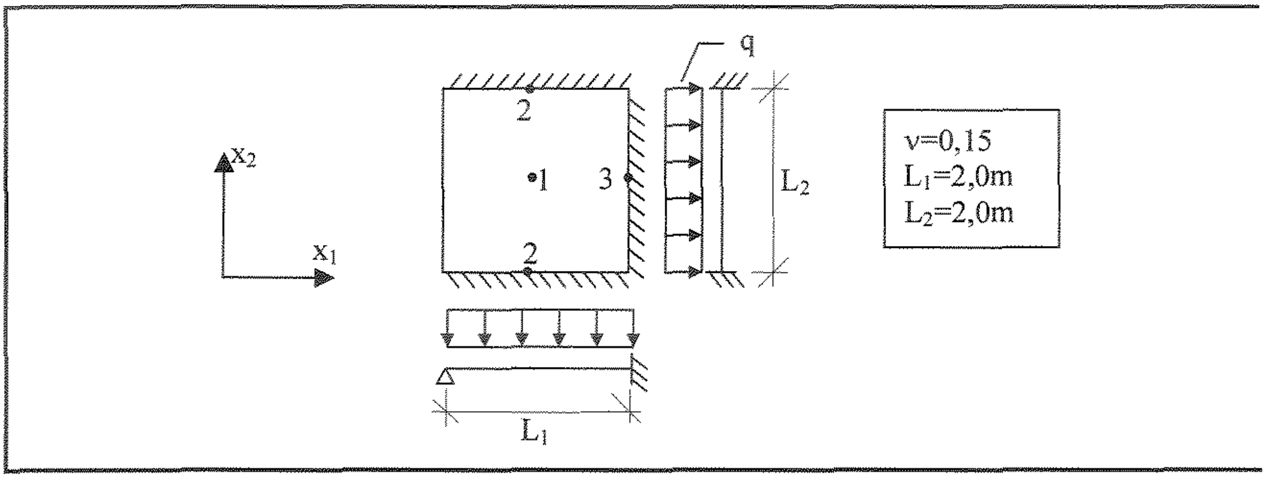


Figura 8.18 – Placa quadrada EEEA com carregamento uniforme

Neste exemplo (**Figura 8.18**), obtiveram-se resultados para o deslocamento transversal ($\mathbf{u}_{3(1)}$) e para os momentos fletores ($\mathbf{M}_{11(1)}$, $\mathbf{M}_{22(1)}$, $\mathbf{M}_{n(2)}$ e $\mathbf{M}_{n(3)}$), como mostrado na **Tabela 8.11**.

Elementos	$u_{3(1)}$ (x10^{-6}m)	$M_{11(1)}$ (x10 N.m/m)	$M_{22(1)}$ (x10 N.m/m)	$M_{n(2)}$ (x10 N.m/m)	$M_{n(3)}$ (x10 N.m/m)
16	-2,663	+3,230	+4,035	-10,174	-9,549
32	-2,662	+3,231	+4,036	-9,710	-8,949
40	-2,662	+3,231	+4,036	-9,675	-8,901
64	-2,663	+3,231	+4,036	-9,628	-8,801
BARES [57]	-2,659	+3,232	+4,032	-9,872	-8,736

Tabela 8.11 – Deslocamentos e esforços de uma placa quadrada EEEA com carregamento uniforme

8.2.12. Placa Retangular com Um dos Lados Maiores Livre, seu Lado Paralelo Apoiado e os Outros Lados Engastados (ELEA)

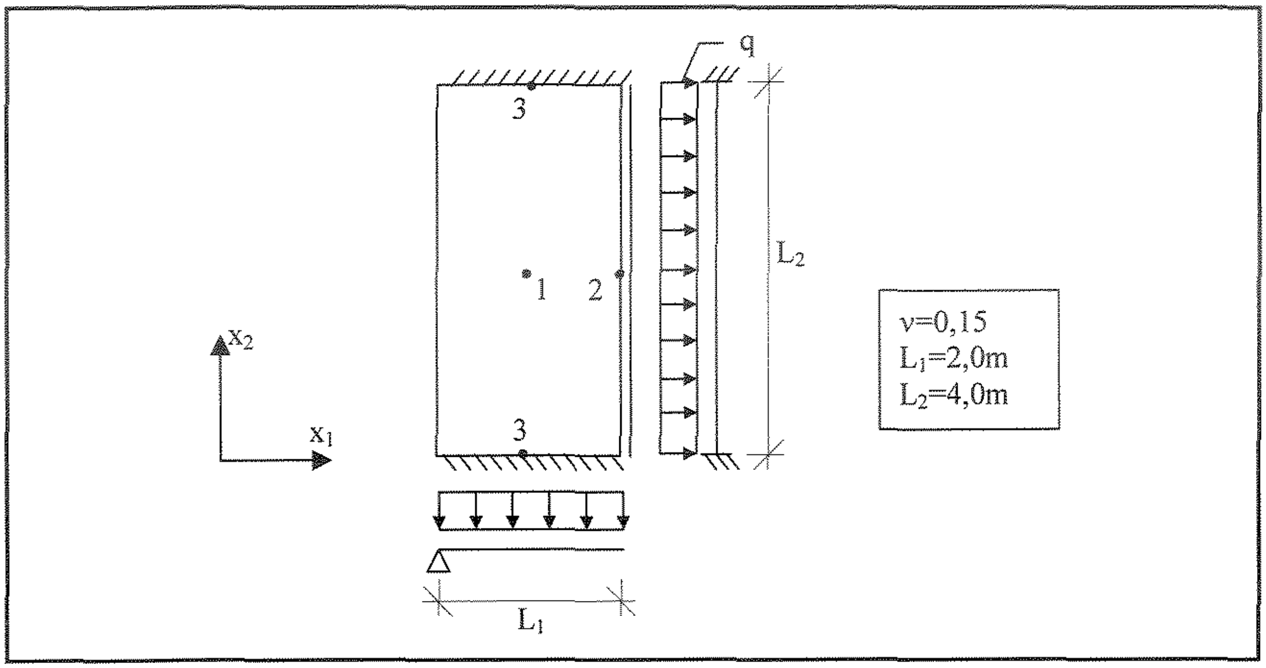


Figura 8.19 – Placa retangular ELEA com carregamento uniforme

Neste exemplo (**Figura 8.19**), obtiveram-se resultados para os deslocamentos transversais ($\mathbf{u}_{3(1)}$ e $\mathbf{u}_{3(2)}$) e para os momentos fletores ($\mathbf{M}_{11(1)}$, $\mathbf{M}_{22(1)}$ e $\mathbf{M}_{n(3)}$), como mostrado na **Tabela 8.12**. As diferenças obtidas para este exemplo são similares às obtidas para os exemplos de placas quadradas.

Elementos	$u_{3(1)}$ (x10^{-5}m)	$u_{3(2)}$ (x10^{-5}m)	$M_{11(1)}$ (x10 N.m/m)	$M_{22(1)}$ (x10^{2}N.m/m)	$M_{n(3)}$ (x10^{2}N.m/m)
24	-3,996	-6,782	+8,171	+1,477	-3,229
48	-3,988	-6,683	+8,251	+1,479	-3,437
60	-3,985	-6,664	+8,272	+1,478	-3,533
96	-3,980	-6,664	+8,308	+1,477	-3,489
BARES [57]	-3,986	-6,589	+8,320	+1,483	-3,565

Tabela 8.12 – Deslocamentos e esforços de uma placa retangular ELEA com carregamento uniforme

8.3. Exemplos de Placas com a Utilização de Células

8.3.1. Placa Quadrada AAAA com Carregamento Hidrostático

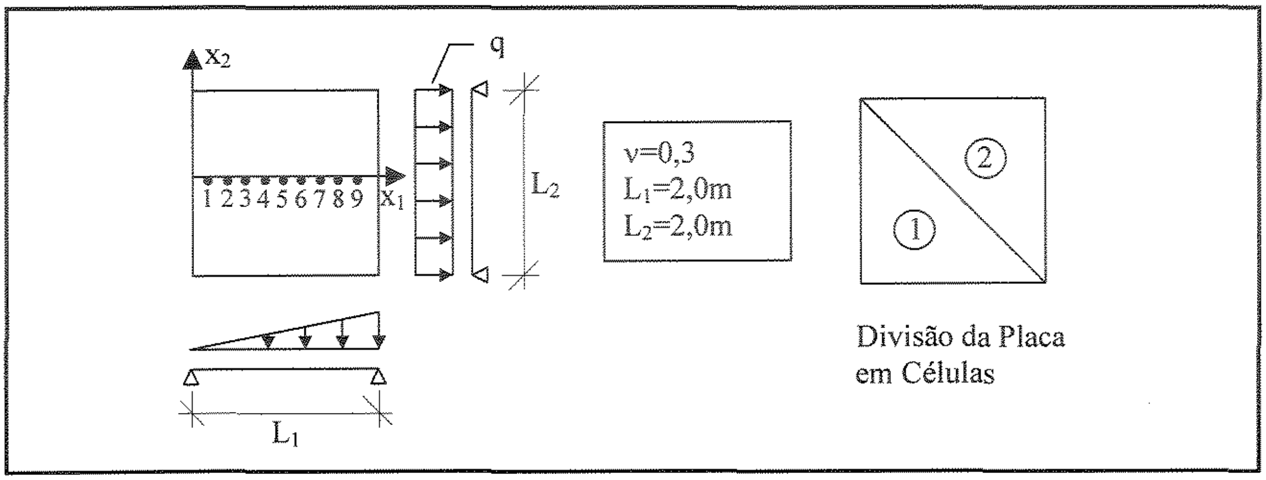


Figura 8.20 – Placa quadrada AAAA com carregamento hidrostático

Para este exemplo, utilizam-se **40** elementos de contorno e a placa é dividida em duas células triangulares como apresentado na **Figura 8.20**. Nas **Figuras 8.21** a **8.23**, são apresentados os gráficos, respectivamente, das variações do deslocamento transversal ($\mathbf{u_3}$) e dos momentos fletores ($\mathbf{M_{11}}$ e $\mathbf{M_{22}}$) ao longo do eixo de simetria $\mathbf{x_1}$.

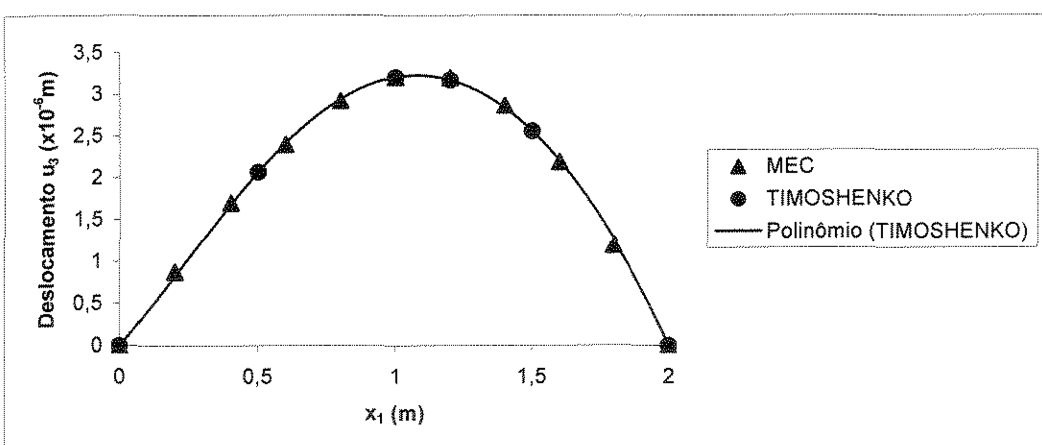


Figura 8.21 – Gráfico do deslocamento transversal $\mathbf{u_3}$ ao longo do eixo $\mathbf{x_1}$ para a placa da **Figura 8.20**

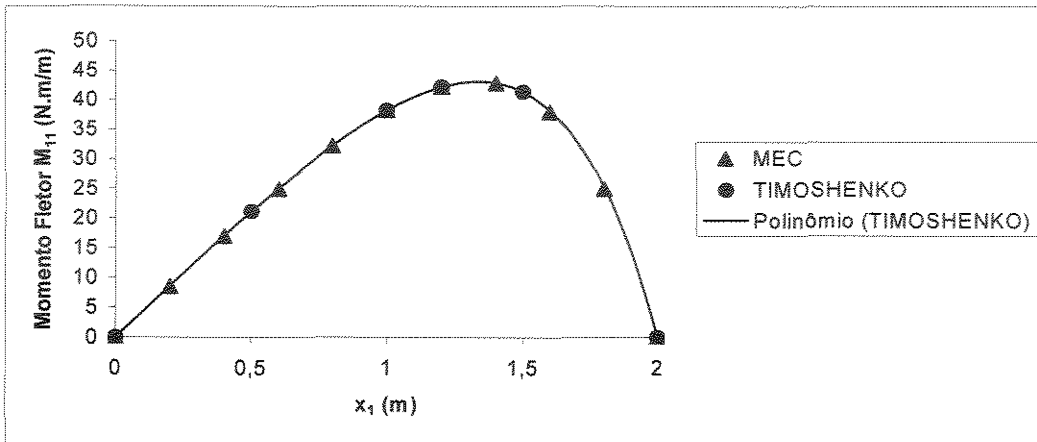


Figura 8.22 – Gráfico do momento fletor M_{11} ao longo do eixo x_1 para a placa da **Figura 8.20**

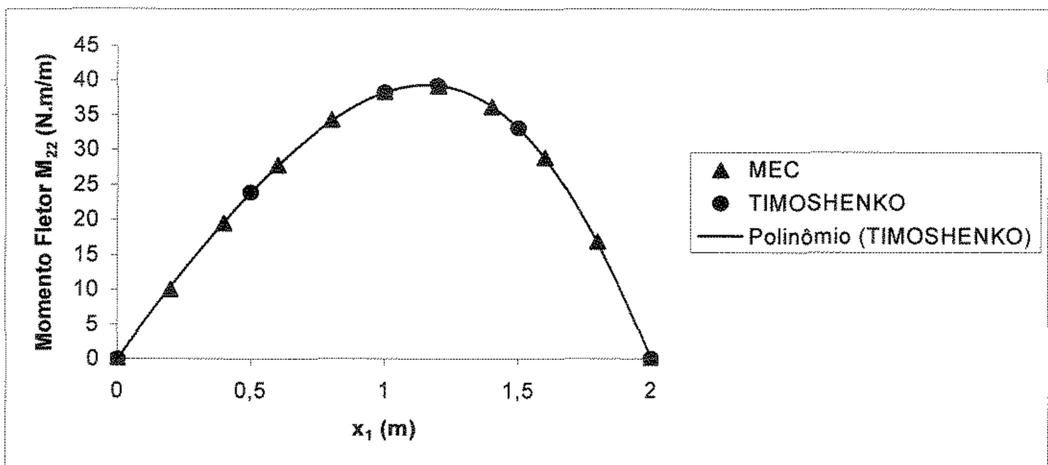


Figura 8.23 – Gráfico do momento fletor M_{22} ao longo do eixo x_1 para a placa da **Figura 8.20**

Nestes gráficos estão comparados os valores obtidos pelo MEC e a solução de **TIMOSHENKO [58]**. Estes resultados não se modificam para malhas mais refinadas no contorno. Através dos pontos obtidos pela solução de **TIMOSHENKO [58]**, traçou-se uma curva polinomial. Deve-se observar que a discretização do domínio adotada é bem simples (somente duas células), mas mesmo assim os resultados obtidos são bons quando comparados com as curvas traçadas. É utilizado um programa que através de um polinômio de quinto grau e dos valores fornecidos pela solução de **TIMOSHENKO [58]**, traçaram-se as curvas apresentadas nos gráficos.

8.3.2. Placa Quadrada EEEE com Carregamento Hidrostático

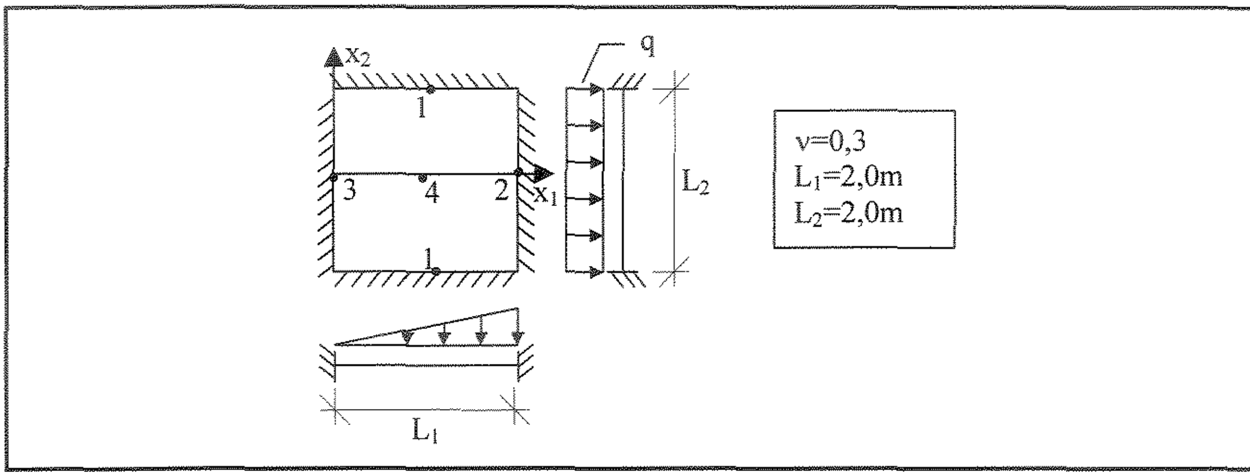


Figura 8.24 – Placa quadrada EEEE com carregamento hidrostático

	MEC	TIMOSHENKO [58]	Diferença (%)
$M_{n(1)}$ (x10 N.m/m)	-4,150	-4,112	+0,92
$M_{n(2)}$ (x10 N.m/m)	-5,399	-5,344	+1,03
$M_{n(3)}$ (x10 N.m/m)	-2,900	-2,864	+1,26
$M_{11(4)}$ (x10 N.m/m)	+1,832	+1,840	-0,43
$M_{22(4)}$ (x10 N.m/m)	+1,832	+1,840	-0,43
$u_{3(4)}$ (x10^{-7}m)	-9,985	-9,943	+0,42

Tabela 8.13 – Deslocamentos e esforços de uma placa quadrada EEEE com carregamento hidrostático

Neste exemplo, utiliza-se a mesma discretização de domínio apresentada na **Figura 8.20**. Na **Tabela 8.13** são apresentados alguns valores de momentos fletores e deslocamentos transversais da placa da **Figura 8.24**. Apesar da discretização de domínio ser pobre, só com duas células, os resultados obtidos, quando comparados com os valores da solução de **TIMOSHENKO [58]**, são bons.

8.3.3. Placa Quadrada EAEA com Carregamento Hidrostático Paralelo aos Lados Engastados

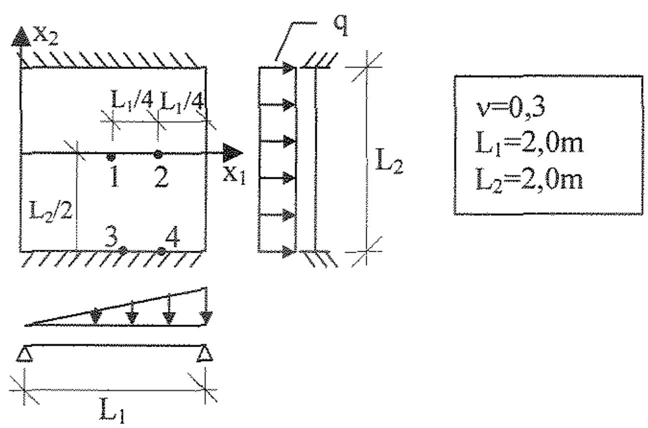


Figura 8.25 – Placa quadrada EAEA com carregamento hidrostático paralelo aos lados engastados

Novamente, utiliza-se a divisão de células apresentada na **Figura 8.20**. Na **Tabela 8.14** são apresentados valores de momentos fletores e deslocamentos transversais da placa da **Figura 8.25**.

Para este exemplo, observa-se que os valores dos momentos fletores dos pontos internos da placa (**pontos 1** e **2**), quando comparados com os valores da solução de **TIMOSHENKO [58]**, resultam em diferenças um pouco mais altas. Com uma discretização de domínio maior, estes resultados se aproximaram dos valores da solução de **TIMOSHENKO [58]**.

	MEC	**TIMOSHENKO [58]**	Diferença (%)
$M_{11(1)}$ (x10 N.m/m)	+1,951	+2,080	-6,20
$M_{22(1)}$ (x10 N.m/m)	+2,660	+2,720	-2,21
$M_{11(2)}$ (x10 N.m/m)	+2,633	+2,720	-3,20
$M_{22(2)}$ (x10 N.m/m)	+2,502	+2,400	+4,25
$M_{11(3)}$ (x10 N.m/m)	-1,678	-1,680	-0,12
$M_{22(3)}$ (x10 N.m/m)	-5,592	-5,600	-0,14
$M_{11(4)}$ (x10 N.m/m)	-1,679	-1,680	-0,12
$M_{22(4)}$ (x10 N.m/m)	-5,598	-5,600	-0,14

Tabela 8.14 – Esforços de uma placa quadrada EAEA com carregamento hidrostático paralelo aos lados engastados

8.3.4. Placa Quadrada AEAA com Carregamento Hidrostático Perpendicular ao Lado Engastado

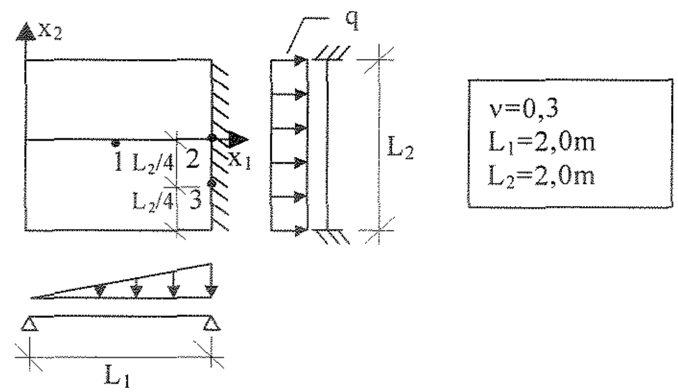


Figura 8.26 – Placa quadrada AEAA com carregamento hidrostático perpendicular ao lado engastado

	MEC	**TIMOSHENKO [58]**	Diferença (%)
$u_{3(1)}$ ($x10^{-6}$m)	-2,027	-2,052	-1,21
$M_{11(1)}$ (x10 N.m/m)	+3,015	+3,040	-0,82
$M_{22(1)}$ (x10 N.m/m)	+2,523	+2,560	-1,45
$M_{n(2)}$ (x10 N.m/m)	-7,733	-7,680	+0,65

Tabela 8.15 - Deslocamentos e esforços de uma placa quadrada AEAA com carregamento hidrostático perpendicular ao lado engastado

Utiliza-se a mesma divisão de células apresentada na **Figura 8.20**. Na **Tabela 8.15** são apresentados alguns valores de momentos fletores e deslocamentos transversais da placa da **Figura 8.26.** Os valores dos momentos fletores e deslocamentos transversais, quando comparados com a solução de **TIMOSHENKO [58]**, mostram-se bons, apresentando uma diferença inferior a 1,5% como mostrado na **Tabela 8.15**.

8.3.5. Placa Quadrada AAEA com Carregamento Hidrostático Paralelo ao Lado Engastado

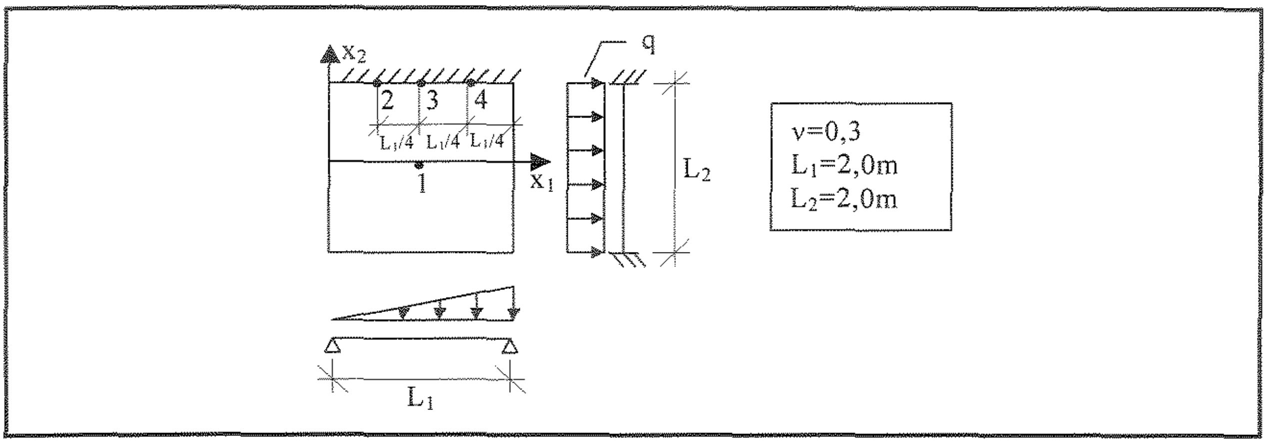


Figura 8.27 – Placa quadrada AAEA com carregamento hidrostático paralelo ao lado engastado

Utiliza-se a mesma divisão de células apresentada na **Figura 8.20**. Na **Tabela 8.16** são apresentados alguns valores de momentos fletores e deslocamentos transversais da placa da **Figura 8.27**. As diferenças obtidas para este exemplo são similares aos do exemplo **8.3.4**.

	MEC	**PAIVA [41]**	Diferença (%)
$u_{3(1)}$ ($x10^{-6}$m)	-2,198	-2,210	-0,51
$M_{11(1)}$ (x10 N.m/m)	+3,134	+3,152	-0,57
$M_{22(1)}$ (x10 N.m/m)	+2,711	+2,672	+1,42
$M_{22(2)}$ (x10 N.m/m)	-3,963	-4,000	-0,93
$M_{22(3)}$ (x10 N.m/m)	-6,719	-6,720	-0,01
$M_{22(4)}$ (x10 N.m/m)	-6,420	-6,400	+0,31

Tabela 8.16 – Deslocamentos e esforços de uma placa quadrada AAEA com carregamento hidrostático paralelo ao lado engastado

8.3.6. Placa Quadrada AAAA Parcialmente Carregada Hidrostaticamente.

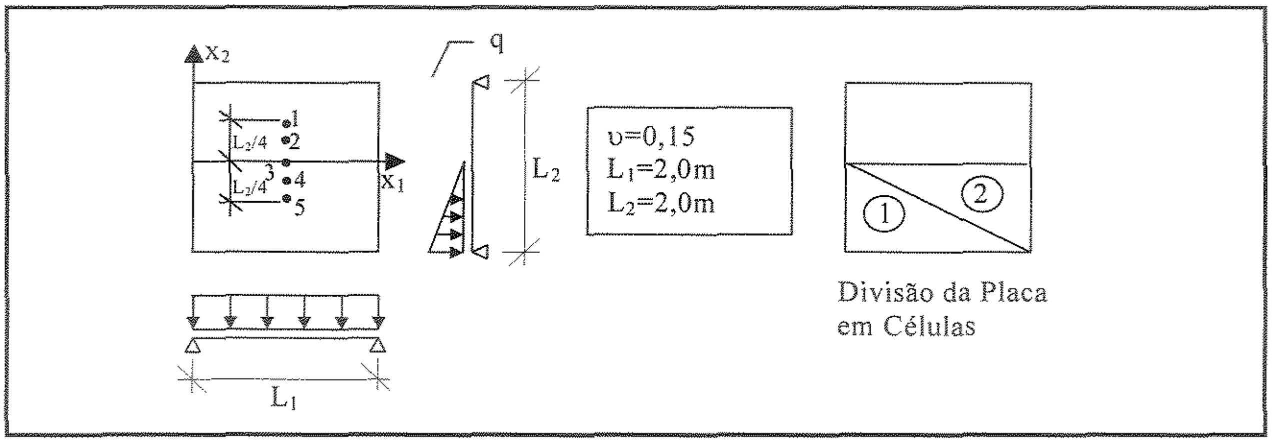


Figura 8.28 – Placa quadrada AAAA parcialmente carregada hidrostaticamente

	MEC	**BARES [57]**	Diferença (%)
$M_{11(1)}$ (N.m/m)	+6,24	+6,24	0,00
$M_{22(1)}$ (N.m/m)	+1,35	+1,76	-23,30
$M_{11(2)}$ (N.m/m)	+9,33	----	----
$M_{22(2)}$ (N.m/m)	+5,08	----	----
$M_{11(3)}$ (x10 N.m/m)	+1,215	+1,168	+4,02
$M_{22(3)}$ (N.m/m)	+10,01	+9,44	+6,04
$M_{11(4)}$ (x10 N.m/m)	+1,408	+1,344	+4,76
$M_{22(4)}$ (x10 N.m/m)	+1,720	+1,648	+4,37
$M_{11(5)}$ (x10 N.m/m)	+1,358	+1,280	+6,09
$M_{11(5)}$ (x10 N.m/m)	+2,234	+2,160	+3,43

Tabela 8.17 – Esforços de uma placa quadrada AAAA parcialmente carregada hidrostaticamente

Para este exemplo, são utilizados **40** elementos de contorno e a placa é dividida em duas células como apresentada na **Figura 8.28**. Os resultados são mostrados na **Tabela 8.17**.

8.3.7. Placa Triangular Equilátera AAA com Carregamento Uniformemente

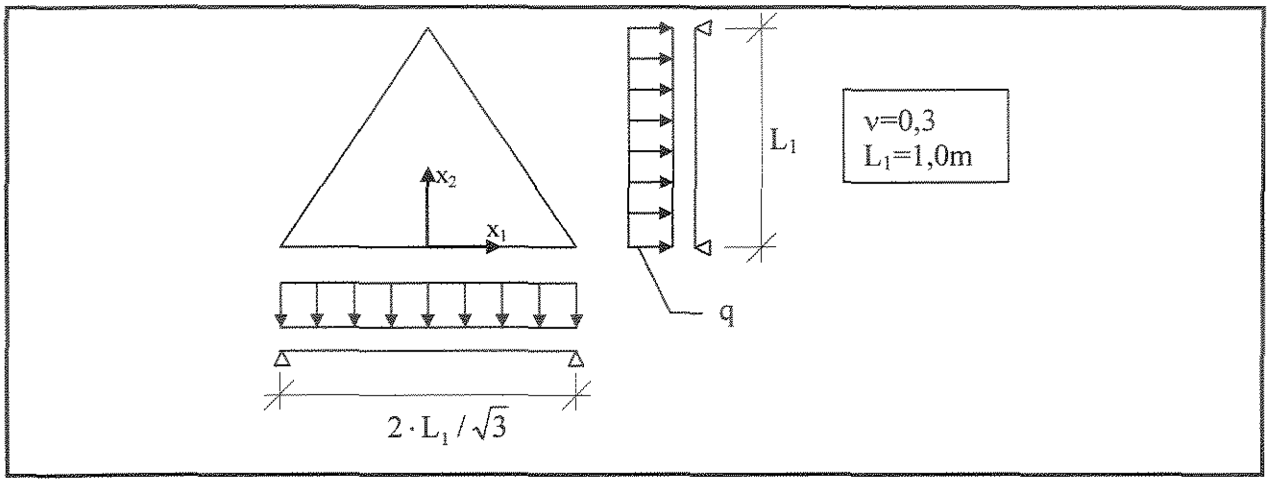


Figura 8.29 - Placa triangular equilátera AAA com carregamento uniforme

Para este exemplo utilizam-se **40** elementos no contorno. Nas **Figuras 8.30** a **8.32**, estão apresentados os gráficos, respectivamente, das variações do deslocamento transversal ($\mathbf{u_3}$) e dos momentos fletores ($\mathbf{M_{11}}$ e $\mathbf{M_{22}}$) ao longo do eixo de simetria $\mathbf{x_2}$. Estão representados nestes gráficos os valores obtidos pelo MEC e os valores obtidos com a solução de **TIMOSHENKO [58]**. Através dos pontos obtidos pela solução de **TIMOSHENKO [58]**, traça-se uma curva polinomial.

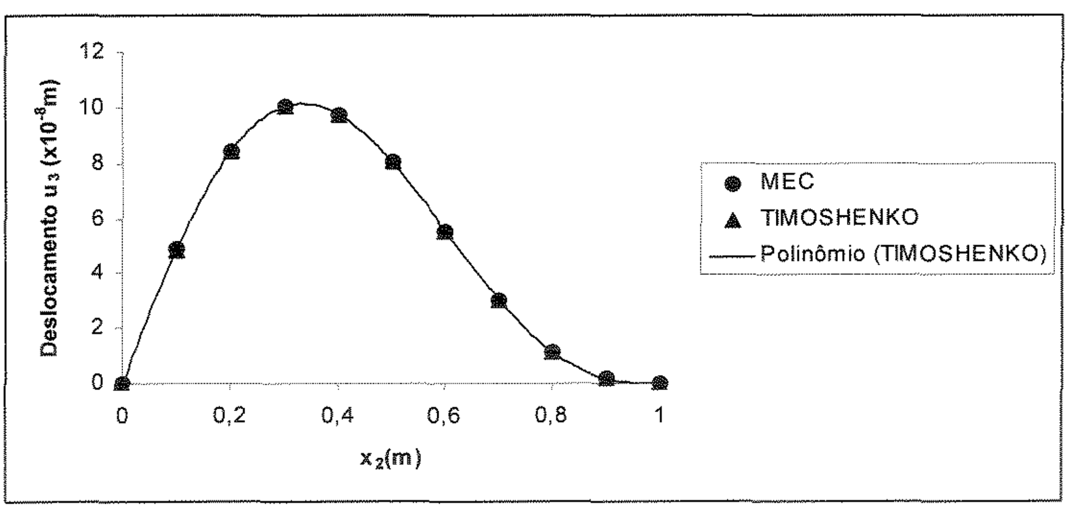


Figura 8.30 – Gráfico do deslocamento transversal $\mathbf{u_3}$ ao longo do eixo $\mathbf{x_2}$ para a placa da **Figura 8.29**

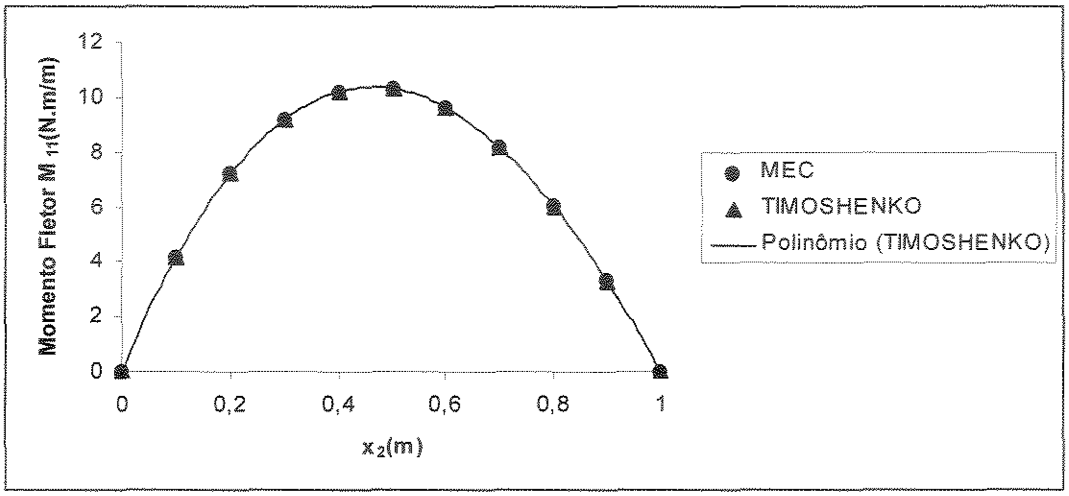


Figura 8.31 – Gráfico do momento fletor M_{11} ao longo do eixo x_2 para a placa da **Figura 8.29**

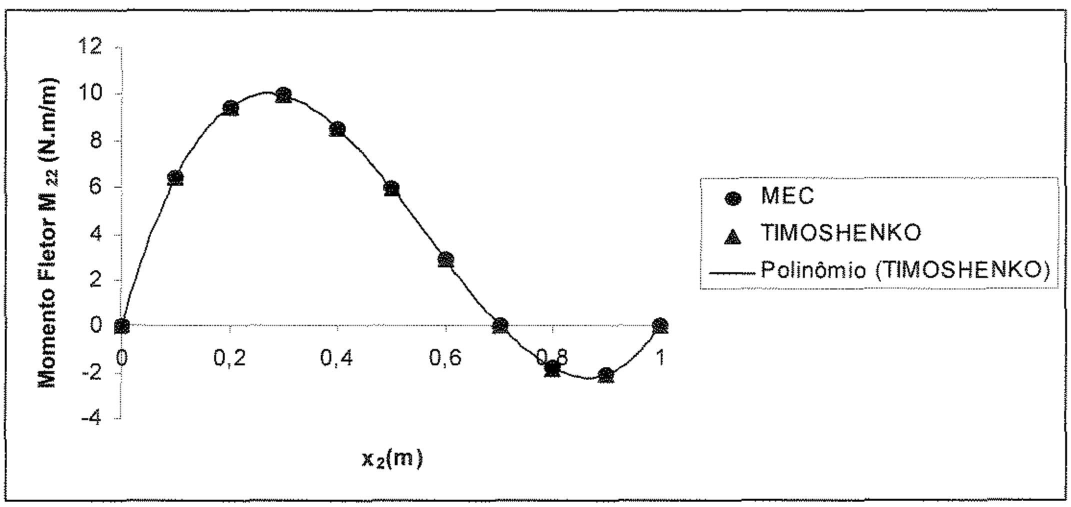


Figura 8.32 – Gráfico do momento fletor M_{22} ao longo do eixo x_2 para a placa da **Figura 8.29**

8.3.8. Placa Triangular Equilátera EEE com Carregamento Uniforme e Hidrostático

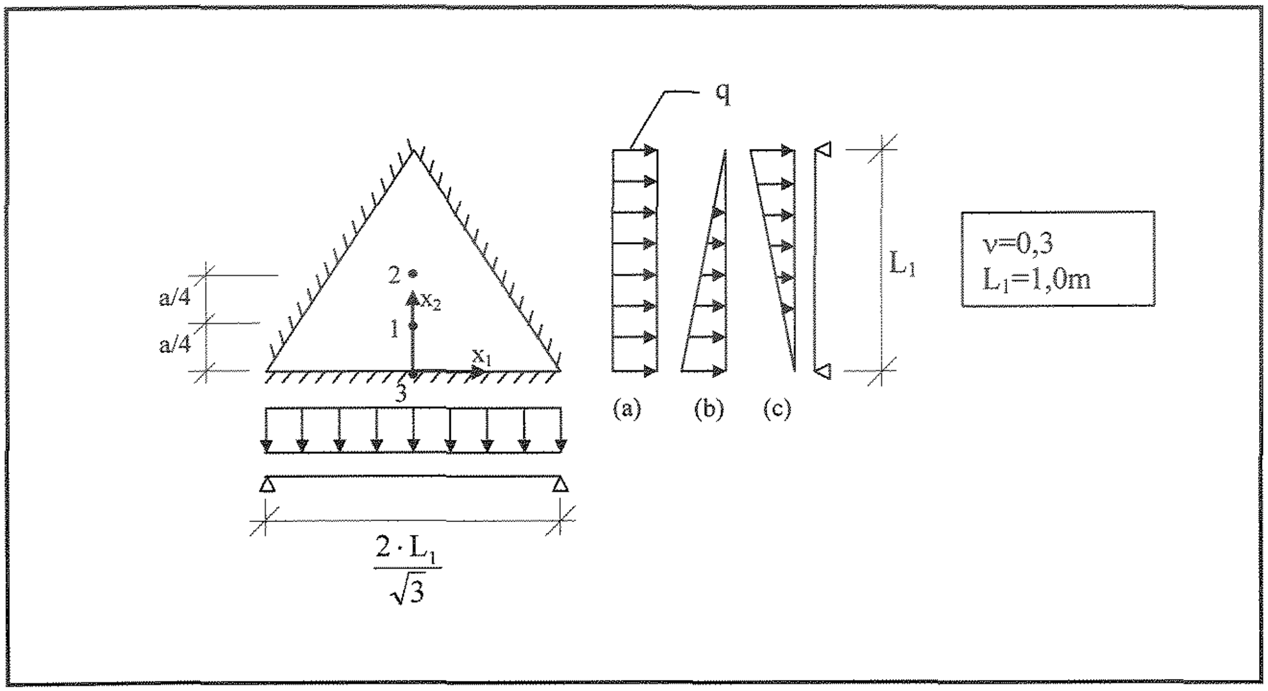


Figura 8.33 - Placa triangular equilátera EEE com carregamento uniforme e hidrostático

Na **Tabela 8.16** são apresentados alguns valores de momentos fletores e deslocamentos transversais da placa da **Figura 8.33** para cada um dos carregamentos. A análise desta placa pelo MEC fornece resultados próximos dos disponíveis na bibliografia, sendo que a diferença entre estes resultados e os fornecidos por diferenças finitas pode ser conseqüência da malha adotada para cada uma das análises.

	Carregamento (a)		Carregamento (b)		Carregamento (c)	
	MEC	**BARES [57]**	MEC	**BARES [57]**	MEC	**BARES [57]**
$u_{3(1)}$ ($x10^{-8}$m)	-2,6406	-3,9118	-0,8037	-0,8829	-1,8368	-2,7413
$u_{3(2)}$ ($x10^{-8}$m)	-2,0482	-3,0770	-0,8339	-0,9816	-1,2142	-1,8404
$M_{11(1)}$ (N.m/m)	3,50	3,43	1,07	1,08	2,43	2,36
$M_{22(1)}$ (N.m/m)	4,20	4,28	1,05	1,03	3,14	3,26
$M_{11(2)}$ (N.m/m)	4,20	4,50	1,84	1,96	2,35	2,54
$M_{22(2)}$ (N.m/m)	1,88	1,73	1,05	1,04	0,83	0,68
$M_{n(3)}$ (N.m/m)	-10,73	-9,53	-2,58	-2,41	-8,15	-7,12

Tabela 8.18 – Deslocamentos e esforços de uma placa triangular equilátera EEE com carregamento uniforme e hidrostático

8.4. Exemplos de Obtenção de Cargas Críticas de Placas Quadradas

Segundo **TIMOSHENKO [58]**, a carga crítica na direção x_1, para uma placa simplesmente apoiada, é dada pela seguinte equação:

$$(N_x)_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot L_1^2 \cdot D}{m^2} \cdot \left(\frac{m^2}{L_1^2} + \frac{n^2}{L_2^2} \right)^2 \tag{8.6}$$

sendo:

$\mathbf{L_1}$ e $\mathbf{L_2}$ as dimensões da placa nas direções $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ respectivamente;

m e **n** os indicadores do modo de flambagem nas direções $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ respectivamente.

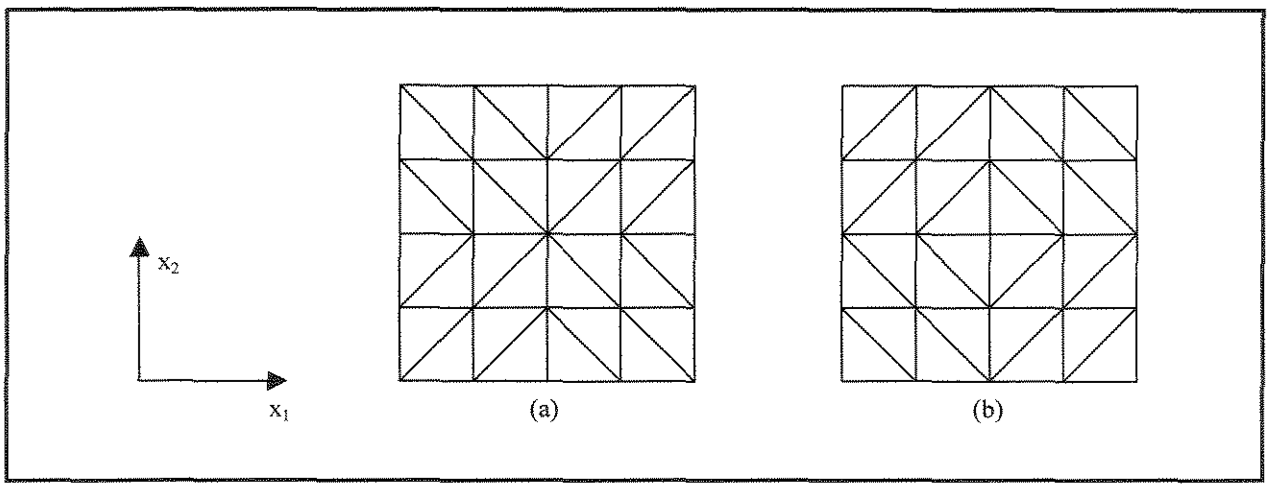
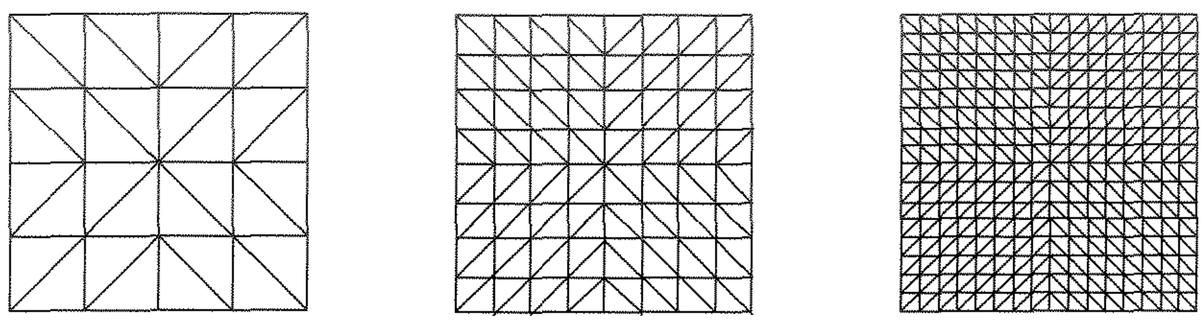


Figura 8.34 – Geometria das discretizações adotadas

Primeiramente, são testados dois tipos de discretização para uma placa quadrada de **2** metros de lado, com todos os lados apoiados e com o domínio da placa dividido em **32** células, como mostrado na **Figura 8.34**. Para os exemplos calculados a seguir são adotados $E=2,05\text{x}10^{11}$ N/m^2, $\nu=0,3$ e $h=6\text{x}10^{-2}$m, $L_1=L_2=2$m.

São calculadas, para as placas da **Figura 8.34**, a menor carga crítica utilizando a força de compressão na direção do eixo $\mathbf{x}_1$. Os valores obtidos de carga crítica, para a **Figura 8.34a,** são mais próximos dos valores obtidos pela equação (8.6) do que os valores obtidos de carga crítica para a **Figura 8.34b**. Desta forma adota-se o esquema de discretização da **Figura 8.34a** para os exemplos com o domínio da placa mais discretizado. Na **Figura 8.35** são apresentadas três discretizações adotadas para as placas que são submetidas a uma força de compressão na direção do eixo $\mathbf{x}_1$ e na direção do eixo $\mathbf{x}_2$.



32 células | 128 células | 512 células

Figura 8.35 – Tipos de discretização adotadas para as placas

8.4.1. Placa AAAA com Forças de Compressão

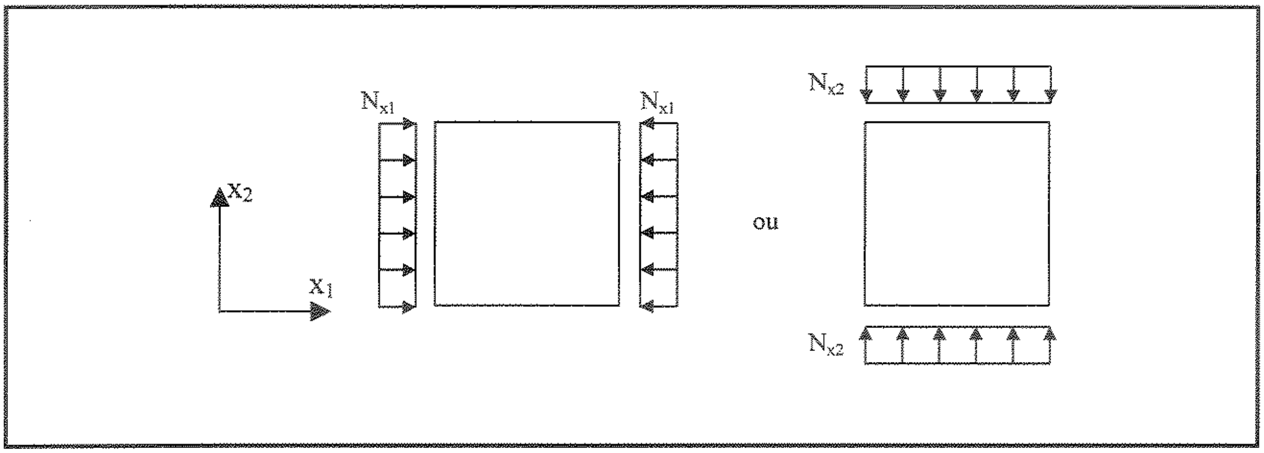


Figura 8.36 - Placa quadrada AAAA com forças de compressão

Devido a dupla simetria da placa, as cargas críticas obtidas para as duas direções são iguais e na **Tabela 8.19** são apresentados os valores obtidos para essas cargas, a diferença com relação a **BARES [57]** e número de iterações do programa necessários para obtê-las. O valor obtido por **BARES [57]** é de $-4{,}002\text{x}10^7$ N.

Discretização	$(N_{x1})_{cr} = (N_{x2})_{cr}$ (x10^7 N)	Diferença em relação a **BARES [57]** (%)	**Número de Iterações**
32 células	-4,315	+7,25	6
128 células	-4,081	+1,94	4
512 células	-4,022	+0,50	4

Tabela 8.19 – Valores da primeira carga crítica de uma placa quadrada AAAA

8.4.2. Placa EEEE com Forças de Compressão

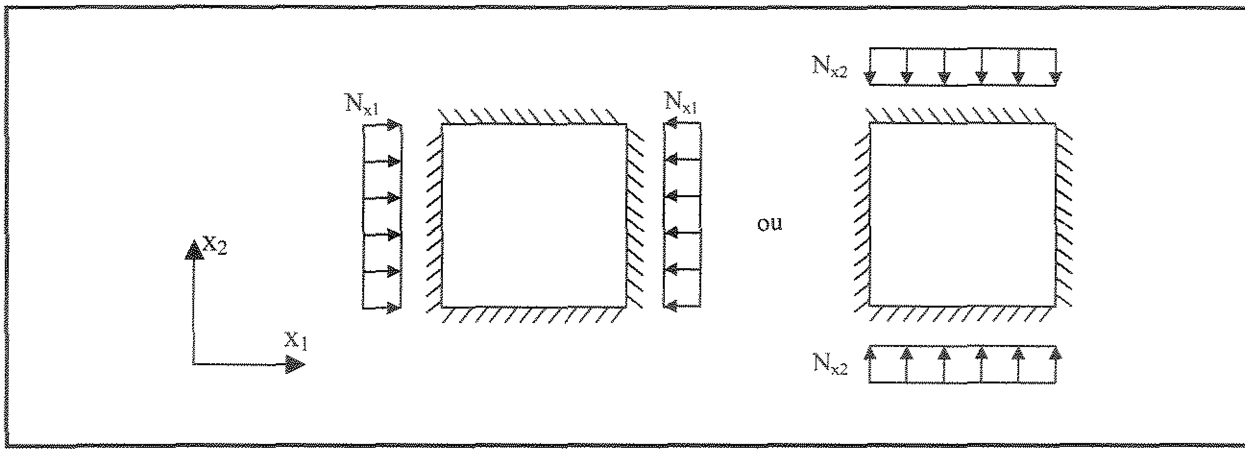


Figura 8.37 - Placa quadrada EEEE com forças de compressão

Devido a dupla simetria da placa, as cargas críticas obtidas para as duas direções são iguais e na **Tabela 8.20** são apresentados os valores obtidos para essas cargas, a diferença com relação a **BARES [57]** e número de iterações do programa necessários para obtê-las. O valor obtido por **BARES** [57] é de $-10{,}345 \times 10^7$ N.

Discretização	$(N_{x1})_{cr} = (N_{x2})_{cr}$ $(x10^8$ N$)$	Diferença em relação a **BARES [57]** (%)	**Número de Iterações**
32 células	-1,086	-+4,75	12
128 células	-1,045	+1,00	10
512 células	-1,018	-1,61	10

Tabela 8.20 – Valores da primeira carga crítica de uma placa quadrada EEEE

8.4.3. Placa LAEA com Forças de Compressão na Direção Perpendicular aos Lados Apoiados

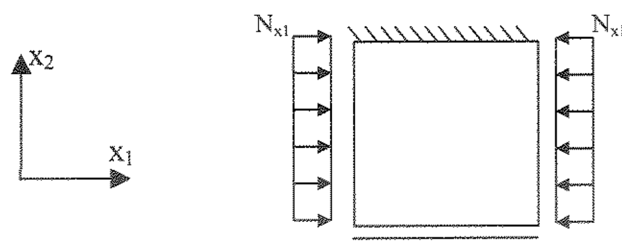


Figura 8.38 – Placa quadrada LAEA com forças de compressão na direção perpendicular aos lados apoiados

Para este exemplo são calculadas as cargas críticas na direção perpendicular aos lados apoiados (como mostrado na **Figura 8.38**). Na **Tabela 8.21** são apresentados os valores obtidos para essas cargas, a diferença com relação a **BARES [57]** e número de iterações do programa necessários para obtê-las. O valor obtido por **BARES [57]** é de $-1{,}701 \times 10^7$ N.

Discretização	$(N_{x1})_{cr}(x10^7\ N)$	Diferença em relação a **BARES [57]** (%)	**Número de Iterações**
32 células	-2,567	+33,74	4
128 células	+2,017	+15,67	5
512 células	+1,822	+6,64	5

Tabela 8.21 – Valores da primeira carga crítica de uma placa quadrada LAEA com relação a direção perpendicular aos lados apoiados

8.4.4. Placa LAAA com Forças de Compressão Paralelas ao Lado Livre

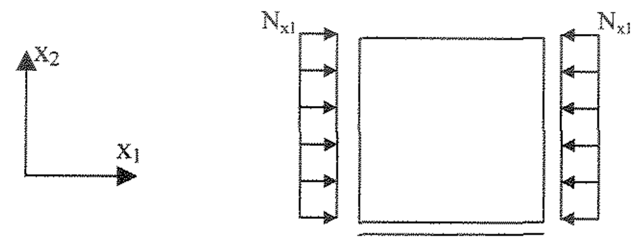


Figura 8.39 – Placa quadrada LAAA com forças de compressão perpendiculares ao lado livre

Para este exemplo e são calculadas as cargas críticas na direção perpendicular aos lados apoiados paralelos (como mostrado na **Figura 8.39**). Na **Tabela 8.22** são apresentados os valores obtidos para essas cargas, a diferença com relação a **BARES [57]** e número de iterações do programa necessários para obtê-las. O valor obtido por **BARES [57]** é de $-1{,}441\text{x}10^7$ N.

Discretização	$(N_{x1})_{cr}$ (x10^7 N)	Diferença em relação a **BARES [57]** (%)	**Número de Iterações**
32 células	-2,008	+28,24	5
128 células	-1,649	+12,61	4
512 células	-1,518	+5,07	5

Tabela 8.22 – Valores da primeira carga crítica de uma placa quadrada LAAA com relação a direção paralela ao lado livre

8.4.5. Placa EEEA com Forças de Compressão Perpendiculares ao Lado Apoiado

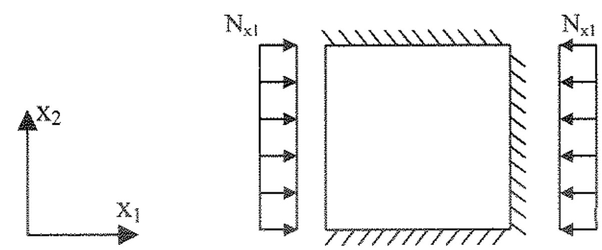


Figura 8.40 – Placa quadrada EEEA com forças de compressão perpendiculares ao lado apoiado

Para este exemplo são calculadas as cargas críticas na direção perpendicular ao lado apoiado (como mostrado na **Figura 8.40**). Na **Tabela 8.23** são apresentados os valores obtidos para essas cargas, a diferença com relação a **BARES [57]** e número de iterações do programa necessários para obtê-las. O valor obtido por **BARES [57]** é de $-7{,}904 \times 10^7$ N.

Discretização	$(N_{x1})_{cr}(x10^7$ N)	Diferença em relação a **BARES [57]** (%)	**Número de Iterações**
32 células	-9,455	+16,40	24
128 células	-8,488	+6,88	11
512 células	-8,195	+3,55	14

Tabela 8.23 – Valores da primeira carga crítica de uma placa quadrada EEEA com relação a direção perpendicular ao lado apoiado

8.4.6. Placa EEEA com Forças de Compressão Paralelas ao Lado Apoiado

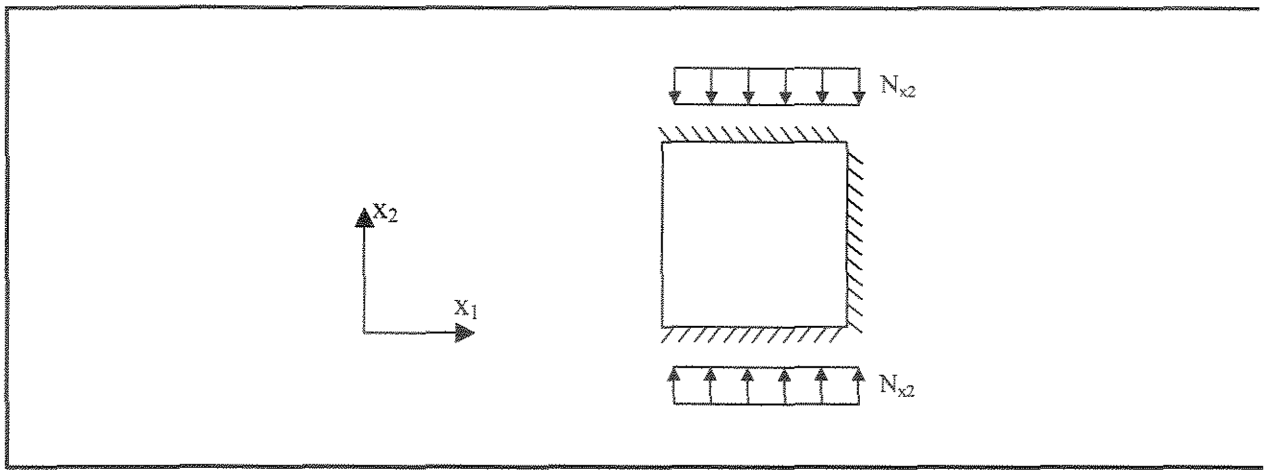


Figura 8.41 – Placa quadrada EEEA com forças de compressão paralelas ao lado apoiado

Para este exemplo são calculadas as cargas críticas na direção perpendicular aos lados engastados paralelos (como mostrado na **Figura 8.41**). Na **Tabela 8.24** são apresentados os valores obtidos para essas cargas, a diferença com relação a **BARES [57]** e número de iterações do programa necessários para obtê-las. O valor obtido por **BARES [57]** é de $-8{,}104 \times 10^7$ N.

Discretização	$(N_{x2})_{cr}$ ($\times 10^7$ N)	Diferença em relação a **BARES [57]** (%)	**Número de Iterações**
32 células	-8,584	+5,59	10
128 células	-8,341	+2,84	9
512 células	-8,150	+0,56	9

Tabela 8.24 – Valores da primeira carga crítica de uma placa quadrada EEEA com relação a direção paralela ao lado apoiado

8.4.7. Placa AAAE com Forças de Compressão Perpendiculares ao Lado Engastado

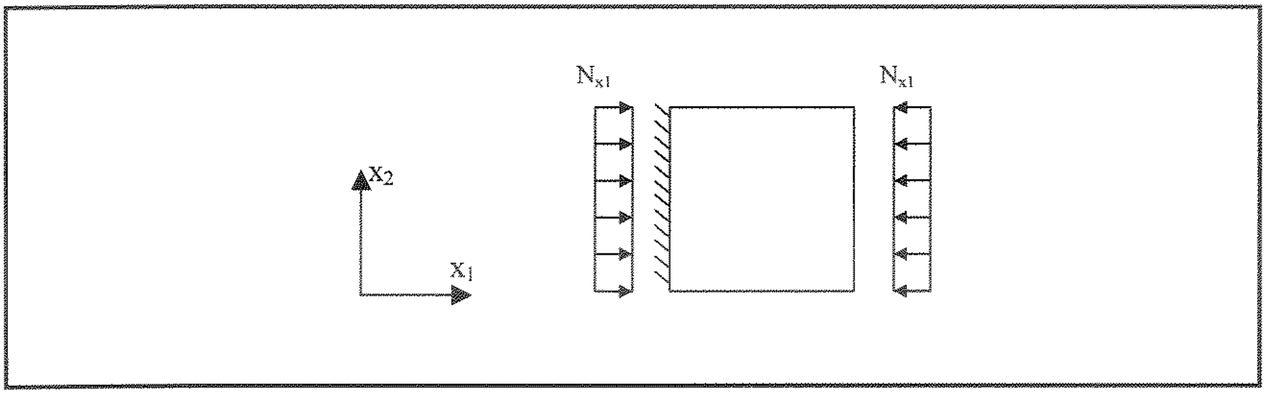


Figura 8.42 – Placa quadrada AAAE com forças de compressão perpendicular ao lado engastado

Para este exemplo são calculadas as cargas críticas na direção perpendicular ao lado engastado (como mostrado na **Figura 8.42**). Na **Tabela 8.25** são apresentados os valores obtidos para essas cargas, a diferença com relação a **BARES** [57] e número de iterações do programa necessários para obtê-las. O valor obtido por **BARES [57]** é de $-4{,}853 \times 10^7$ N.

Discretização	$(N_{x2})_{cr}(x10^7\ N)$	Diferença em relação a **BARES [57]** (%)	**Número de Iterações**
32 células	-5,327	+8,92	11
128 células	-4,992	+2,80	10
512 células	-4,886	+0,71	6

Tabela 8.25 – Valores da primeira carga crítica de uma placa quadrada AAAE com relação a direção perpendicular ao lado engastado

8.4.8. Placa AAAE com Forças de Compressão Paralelas ao Lado Engastado

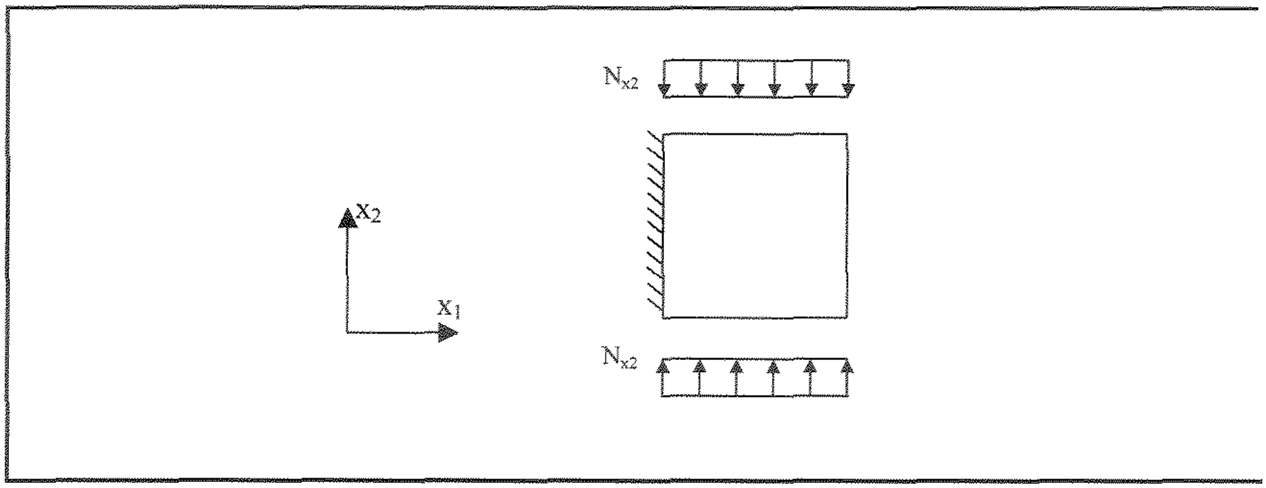


Figura 8.43 – Placa quadrada simplesmente apoiada em três lados e engastada no outro lado com forças de compressão paralelas ao lado engastado

Para este exemplo são calculadas as cargas críticas na direção perpendicular aos lados apoiados paralelos (como mostrado na **Figura 8.43**). Na **Tabela 8.26** são apresentados os valores obtidos para essas cargas, a diferença com relação a **BARES [57]** e número de iterações do programa necessários para obtê-las. O valor obtido por **BARES [57]** é de $-5{,}833\text{x}10^7$ N.

Discretização	$(N_{x1})_{cr}(\text{x}10^7\ \text{N})$	Diferença em relação a **BARES [57]** (%)	**Número de Iterações**
32 células	-6,220	+6,22	7
128 células	-5,868	+0,60	5
512 células	-5,775	-1,01	5

Tabela 8.26 – Valores da primeira carga crítica de uma placa quadrada AAAE com relação a direção paralela ao lado engastado

8.4.9. Obtenção das Cargas Críticas Posteriores para uma Placa Simplesmente Apoiada

Na **Tabela 8.27** são apresentados os valores das três menores cargas críticas obtidas com os respectivos valores de **m** e **n** para as três discretizações apresentadas na **Figura 8.29** bem como os valores obtidos através da equação (8.1).

Carga Crítica	m	n	$(N_{x1})_{cr} = (N_{x2})_{cr}$ (N)			
			32 células	128 células	512 células	Equação (8.1)
1ª	1	1	$-4{,}315 \times 10^7$	$-4{,}0816 \times 10^7$	$-4{,}022 \times 10^7$	$-4{,}002 \times 10^7$
2ª	2	1	$-7{,}922 \times 10^7$	$-6{,}661 \times 10^7$	$-6{,}354 \times 10^7$	$-6{,}253 \times 10^7$
3ª	3	1	$-1{,}410 \times 10^8$	$-1{,}251 \times 10^8$	$-1{,}146 \times 10^8$	$-1{,}112 \times 10^8$

Tabela 8.27 – Valores das três menores cargas críticas de uma placa quadrada AAAA

Na **Tabela 8.28** é mostrada a ordem com que estas cargas críticas aparecem no problema:

Carga Crítica	Ordem das Cargas Críticas no Programa		
	32 células	128 células	512 células
1ª	1ª	1ª	1ª
2ª	8ª	7ª	8ª
3ª	3ª	2ª	2ª

Tabela 8.28 – Ordem de obtenção das três menores cargas críticas de uma placa quadrada AAAA

8.5. Exemplos de Vibração Livre em Placas

Para os exemplos de vibração livre, são utilizadas as seguintes características físicas e geométricas:

$\mathbf{E} = 2{,}05 \times 10^{11}$ N/m^2

$\mathbf{h} = 6 \times 10^{-2}$ m

$\mathbf{q} = -4\mathrm{x}10^2$ N/m^2

$\mathbf{K} = 0{,}5$

$\rho = 4{,}71\mathrm{x}10^2$ kg/m^2

$\nu = 0{,}3$

Placa Quadrada: $\mathbf{L_1} = \mathbf{L_2} = 2$ m

Placa Retangular: $\mathbf{L_1} = 1$ m, $\mathbf{L_2} = 2$ m

16 pontos de Gauss

Para as placas quadradas, são testados três tipos de discretização de domínio. Para as placas retangulares são testados dois tipos de discretização de domínio.

8.5.1. Placa Quadrada AAAA

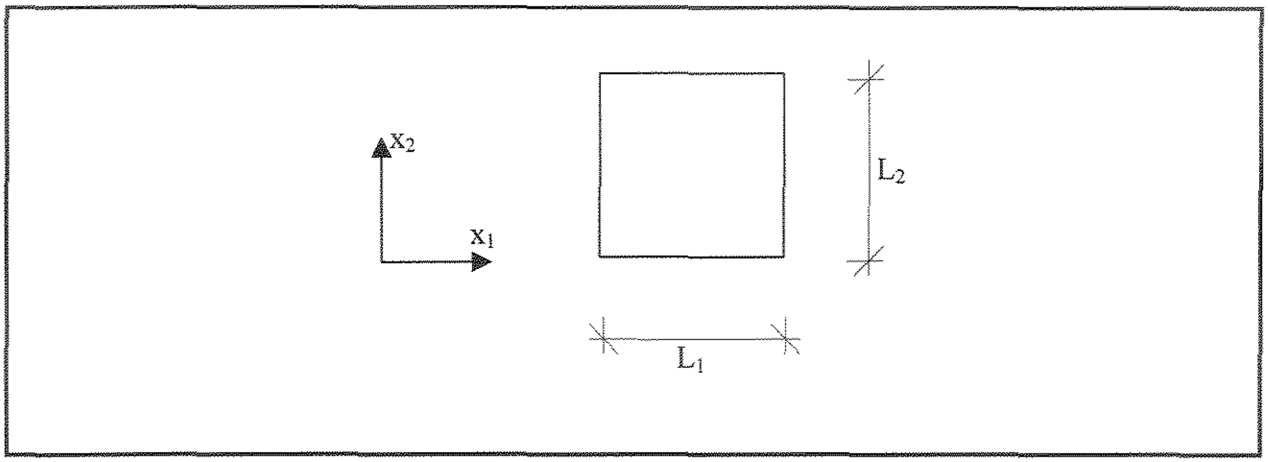


Figura 8.44 – Placa quadrada AAAA submetida a vibração livre

Na **Tabela 8.29** são apresentados os resultados da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa quadrada apoiada nos três lados, submetida à vibração livre. O valor obtido através das formulações fornecidas por **BARES [57]** é igual a 4,577x10^2 rad/s.

Discretização	ω_{11} (x10^2 rad/s)	Diferença em relação a **BARES [57]** (%)	**Número de Iterações**
32 células	4,757	+3,94	4
128 células	4,624	+1,03	4
512 células	4,590	+0,30	4

Tabela 8.29 – Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa quadrada AAAA submetida à vibração livre

8.5.2. Placa Quadrada AAAE

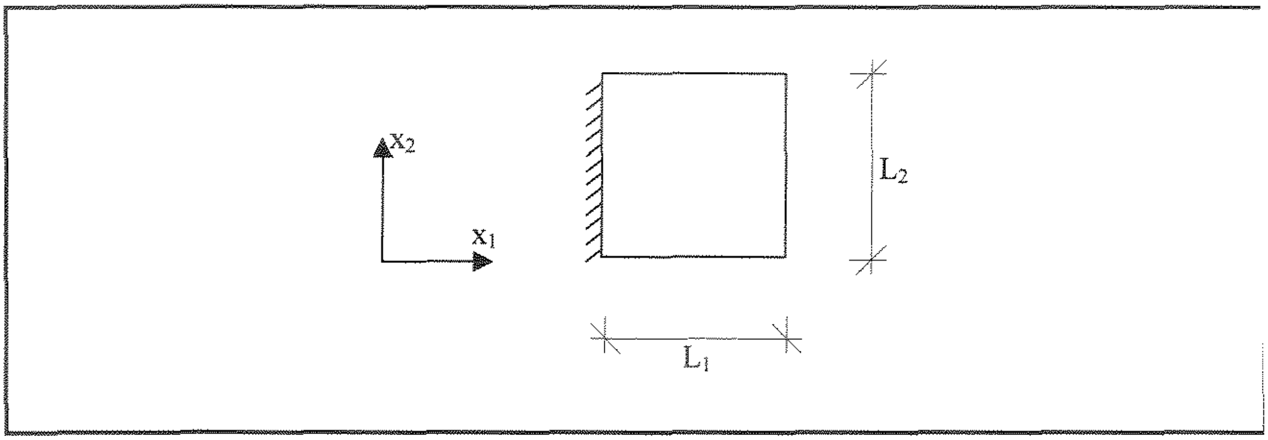


Figura 8.45 – Placa quadrada AAAE submetida à vibração livre

Na **Tabela 8.30** são apresentados os resultados da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa quadrada apoiada em três lados e engastada no outro lado, submetida à vibração livre. O valor obtido através das formulações fornecidas por **BARES [57]** é igual a 5,497x10^2 rad/s.

Discretização	ω_{11} (x10^2 rad/s)	Diferença em relação a **BARES [57]** (%)	**Número de Iterações**
32 células	5,712	+3,92	4
128 células	5,544	+0,86	4
512 células	5,500	+0,06	4

Tabela 8.30 – Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa quadrada AAAE submetida à vibração livre

8.5.3. Placa Quadrada AEAE

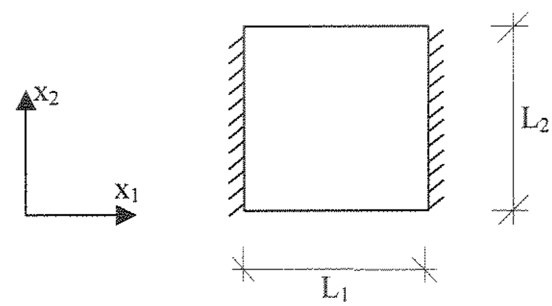


Figura 8.46 – Placa quadrada AEAE submetida à vibração livre

Na **Tabela 8.31** são apresentados os resultados da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa quadrada apoiada em dois lados paralelos e engastada nos outros lados, submetida à vibração livre, com três tipos diferentes de discretização do domínio. O valor obtido através das formulações fornecidas por **BARES [57]** é igual a $6{,}726 \times 10^2$ rad/s.

Discretização	ω_{11} ($\times 10^2$ rad/s)	Diferença em relação a **BARES [57]** (%)	**Número de Iterações**
32 células	6,986	+3,86	4
128 células	6,789	+0,93	4
512 células	6,734	+0,12	4

Tabela 8.31 – Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa quadrada AAAE submetida à vibração livre

8.5.4. Placa Quadrada AAEE

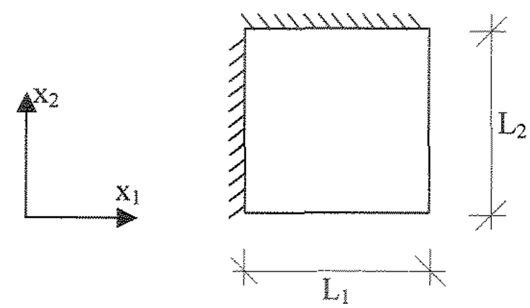


Figura 8.47 – Placa quadrada AAEE submetida à vibração livre

Na **Tabela 8.32** são apresentados os resultados da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa quadrada apoiada em dois lados consecutivos e engastada nos outros lados, submetida à vibração livre. O valor obtido através das formulações fornecidas por **BARES [57]** é igual a $6{,}308 \times 10^2$ rad/s.

Discretização	ω_{11} ($\times 10^2$ rad/s)	Diferença em relação a **BARES [57]** (%)	**Número de Iterações**
32 células	6,548	+3,80	5
128 células	6,347	+0,62	4
512 células	6,294	-0,23	4

Tabela 8.32 – Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa quadrada AAEE submetida à vibração livre

8.5.5. Placa Quadrada EEEA

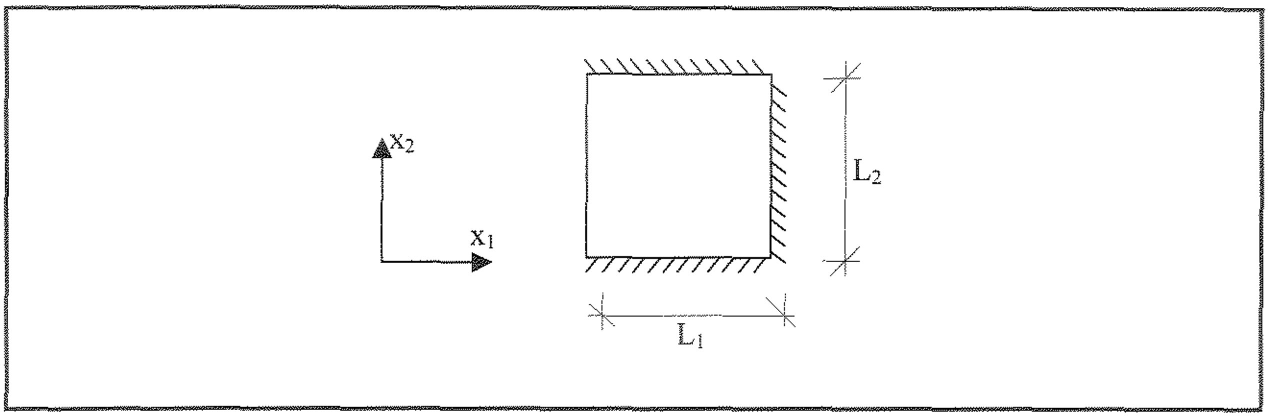


Figura 8.48– Placa quadrada EEEA submetida à vibração livre

Na **Tabela 8.33** são apresentados os resultados da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa quadrada apoiada em um lado e engastada nos outros lados, submetida à vibração livre. O valor obtido através das formulações fornecidas por **BARES [57]** é igual a $7{,}415 x 10^2$ rad/s.

Discretização	ω_{11} ($x10^2$ rad/s)	Diferença em relação a **BARES [57]** (%)	**Número de Iterações**
32 células	7,694	+3,77	4
128 células	7,468	+0,71	4
512 células	7,404	-0,14	4

Tabela 8.33 – Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa quadrada EEEA submetida à vibração livre

8.5.6. Placa Quadrada EEEE

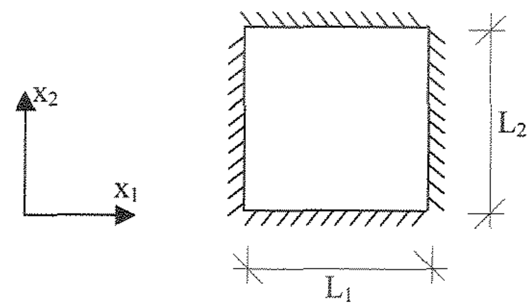


Figura 8.49 – Placa quadrada EEEE submetida à vibração livre

Na **Tabela 8.34** são apresentados os resultados da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa quadrada engastada nos quatro lados, submetida à vibração livre. O valor obtido através das formulações fornecidas por **BARES [57]** é igual a $8{,}380 \times 10^2$ rad/s.

Discretização	ω_{11} ($\times 10^2$ rad/s)	Diferença em relação a **BARES [57]** (%)	**Número de Iterações**
32 células	8,689	+3,69	4
128 células	8,443	+0,76	4
512 células	8,372	-0,09	4

Tabela 8.34 – Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa quadrada EEEE submetida à vibração livre

8.5.7. Placa Quadrada AAAL

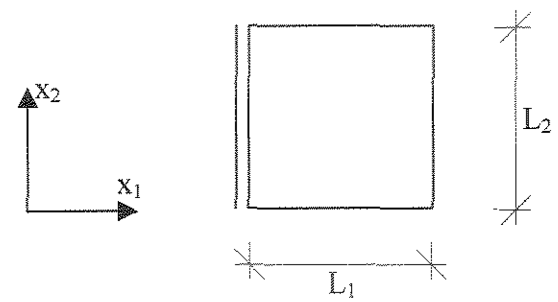


Figura 8.50 – Placa quadrada AAAL submetida à vibração livre

Na **Tabela 8.35** são apresentados os resultados da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa quadrada apoiada em três lados e livre no outro lado, submetida à vibração livre. Para este exemplo não foram encontrados valores de outras publicações para serem comparados.

Discretização	ω_{11} (x10^2 rad/s)	**Número de Iterações**
32 células	2,749	7
128 células	2,694	6
512 células	2,699	6

Tabela 8.35 – Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa quadrada AAAL submetida à vibração livre

8.5.8. Placa Quadrada EEEL

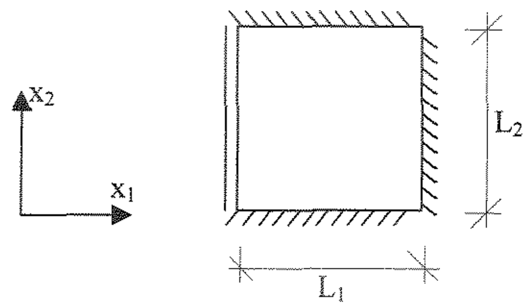


Figura 8.51 – Placa quadrada EEEL submetida à vibração livre

Na **Tabela 8.36** são apresentados os resultados da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa quadrada engastada em três lados e livre no outro lado, submetida à vibração livre. Para este exemplo não foram encontrados valores de outras publicações para serem comparados.

Discretização	ω_{11} ($x10^2$ rad/s)	**Número de Iterações**
32 células	5,703	9
128 células	5,557	8
512 células	5,533	8

Tabela 8.36 – Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa quadrada EEEL submetida à vibração livre

8.5.9. Placa Quadrada ELEL

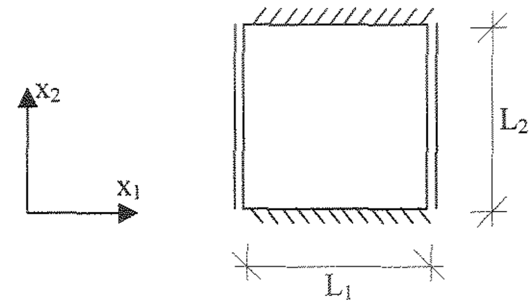


Figura 8.52 – Placa quadrada ELEL submetida à vibração livre

Na **Tabela 8.37** são apresentados os resultados da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa quadrada engastada em dois lados paralelos e livre nos outros lados, submetida à vibração livre. Para este exemplo não foram encontrados valores de outras publicações para serem comparados.

Discretização	ω_{11} ($\times 10^2$ rad/s)	**Número de Iterações**
32 células	5,255	6
128 células	5,146	6
512 células	5,130	5

Tabela 8.37 – Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa quadrada ELEL, submetida à vibração livre

8.5.10. Placa Quadrada ELLL

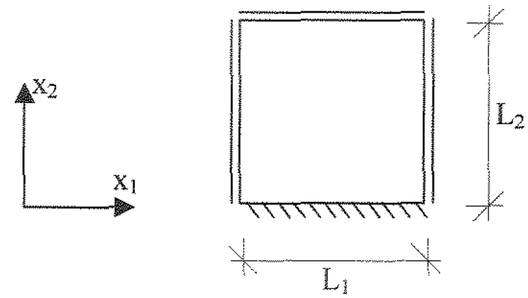


Figura 8.53 – Placa quadrada ELLL submetida à vibração livre

Na **Tabela 8.38** são apresentados os resultados da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa quadrada engastada em um lado e livre nos outros lados, submetida à vibração livre. Para este exemplo não foram encontrados valores de outras publicações para serem comparados.

Discretização	ω_{11} (x10^1 rad/s)	**Número de Iterações**
32 células	7,999	5
128 células	8,010	4
512 células	8,034	4

Tabela 8.38 – Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa quadrada ELLL submetida à vibração livre

8.5.11. Placa Retangular AAAA

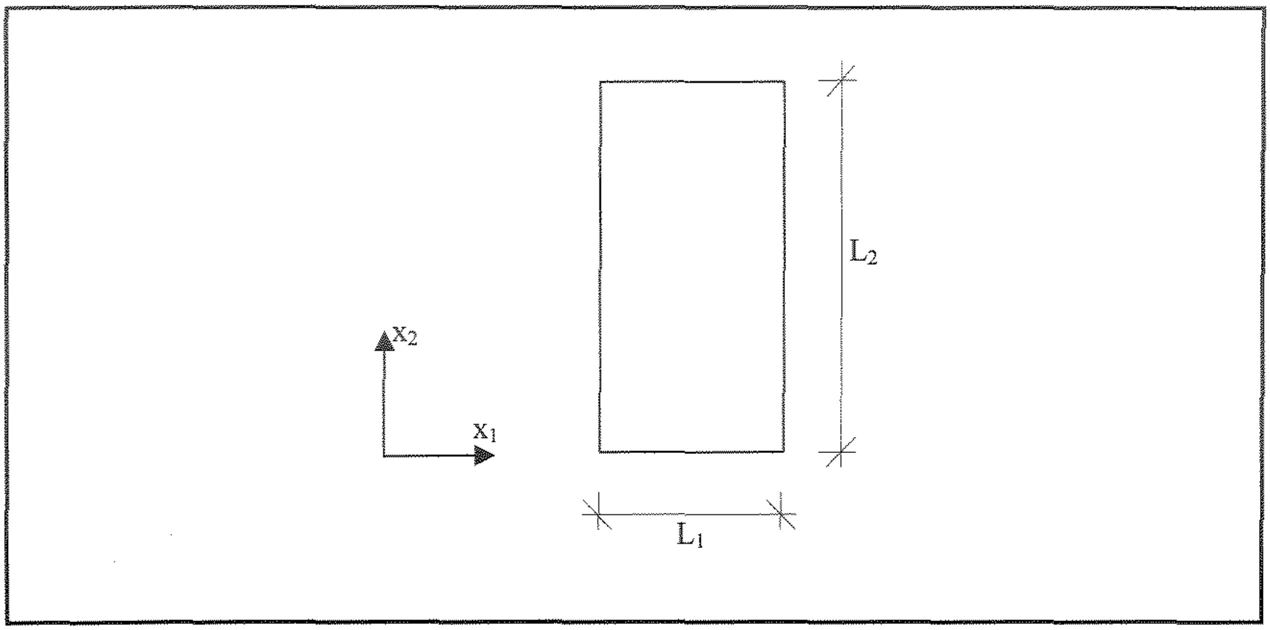


Figura 8.54 – Placa retangular AAAA submetida a vibração livre

Na **Tabela 8.39** são apresentados os resultados da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa retangular apoiada nos quatro lados, submetida à vibração livre. O valor obtido através das formulações fornecidas por **BARES [57]** é igual a $1{,}144 \times 10^3$ rad/s.

Discretização	ω_{11} ($\times 10^3$ rad/s)	Diferença em relação a **BARES [57]** (%)	**Número de Iterações**
16 células	1,256	+9,75	5
64 células	1,175	+2,66	5

Tabela 8.39 – Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa retangular AAAA submetida à vibração livre

8.5.12. Placa Retangular Engastada em Um dos Lados Maiores e Apoiada nos Outros Lados

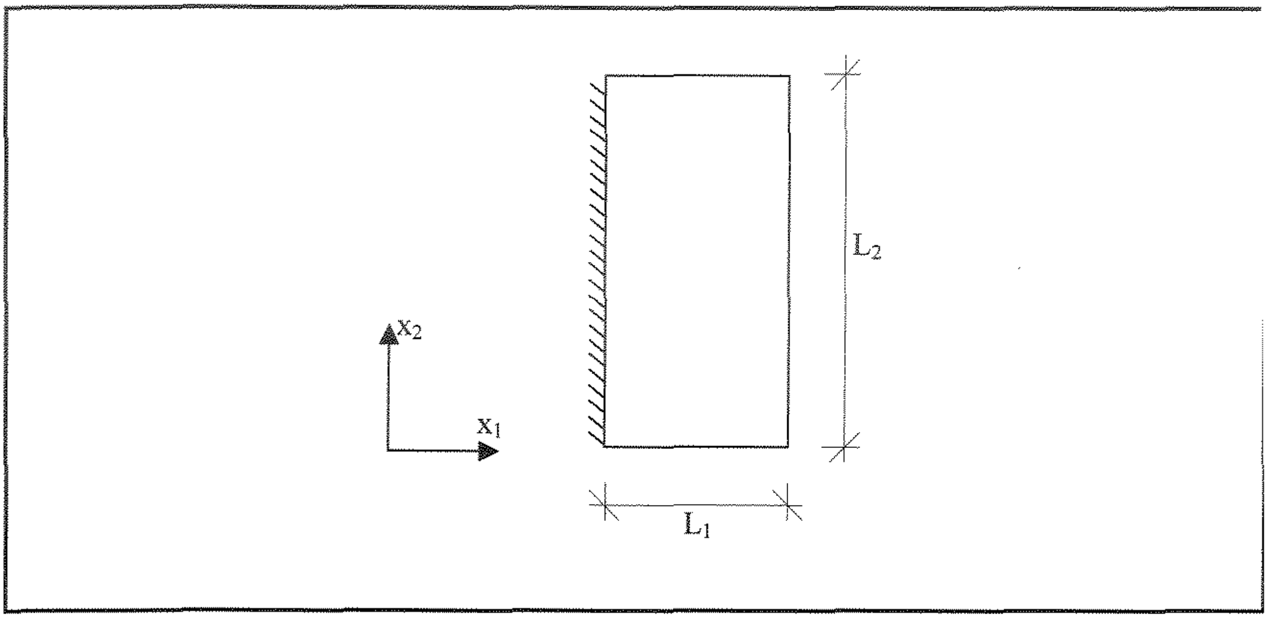


Figura 8.55 – Placa retangular engastada em um dos lados maiores e apoiada nos outros lados submetida à vibração livre

Na **Tabela 8.40** são apresentados os resultados da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa retangular engastada em um dos lados maiores e apoiada nos outros lados, submetida à vibração livre. O valor obtido através das formulações fornecidas por **BARES [57]** é igual a $1,608x10^3$ rad/s.

Discretização	ω_{11} ($x10^3$ rad/s)	Diferença em relação a **BARES [57]** (%)	**Número de Iterações**
16 células	1,755	+9,19	6
64 células	1,656	+3,00	5

Tabela 8.40 – Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa retangular engastada em um dos lados maiores e apoiada nos outros lados, submetida à vibração livre

8.5.13. Placa Retangular Engastada em Um dos Lados Menores e Apoiada nos Outros Lados

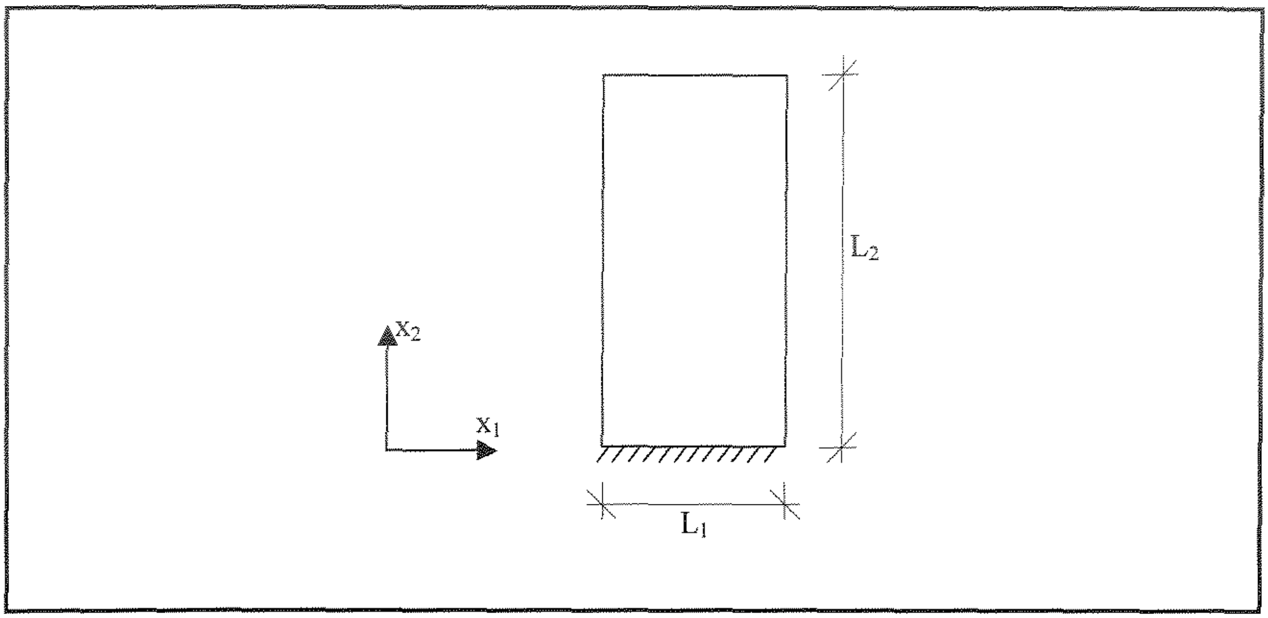


Figura 8.56 – Placa retangular engastada em um dos lados menores e apoiada nos outros lados submetida à vibração livre

Na **Tabela 8.41** são apresentados os resultados da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa retangular engastada em um dos lados menores e apoiada nos outros lados, submetida à vibração livre. O valor obtido através das formulações fornecidas por **BARES [57]** é igual a $1{,}206 \times 10^3$ rad/s.

Discretização	ω_{11} ($\times 10^3$ rad/s)	Diferença em relação a **BARES [57]** (%)	**Número de Iterações**
16 células	1,315	+9,07	5
64 células	1,230	+2,06	5

Tabela 8.41 – Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa retangular engastada em um dos lados menores e apoiada nos outros lados, submetida à vibração livre

8.5.14. Placa Retangular Engastada nos Dois Lados Maiores e Apoiada nos Outros Lados

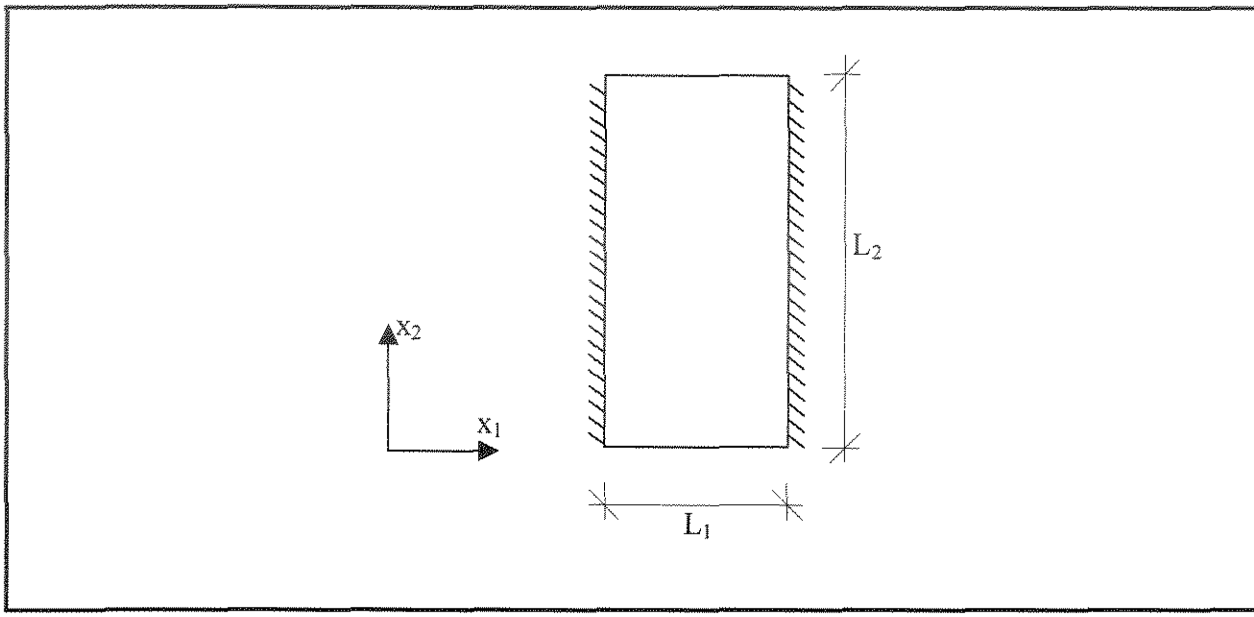


Figura 8.57 – Placa retangular engastada nos dois lados maiores e apoiada nos outros lados submetida à vibração livre

Na **Tabela 8.42** são apresentados os resultados da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa retangular engastada nos dois lados maiores e apoiada nos outros lados, submetida à vibração livre. O valor obtido através das formulações fornecidas por **BARES [57]** é igual a $2{,}210 \times 10^3$ rad/s.

Discretização	ω_{11} ($\times 10^3$ rad/s)	Diferença em relação a **BARES [57]** (%)	**Número de Iterações**
16 células	2,301	+4,16	7
64 células	2,275	+2,95	7

Tabela 8.42 – Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa retangular engastada nos dois lados maiores e apoiada nos outros lados, submetida à vibração livre

8.5.15. Placa Retangular Engastada nos Dois Lados Menores e Apoiada nos Outros Lados

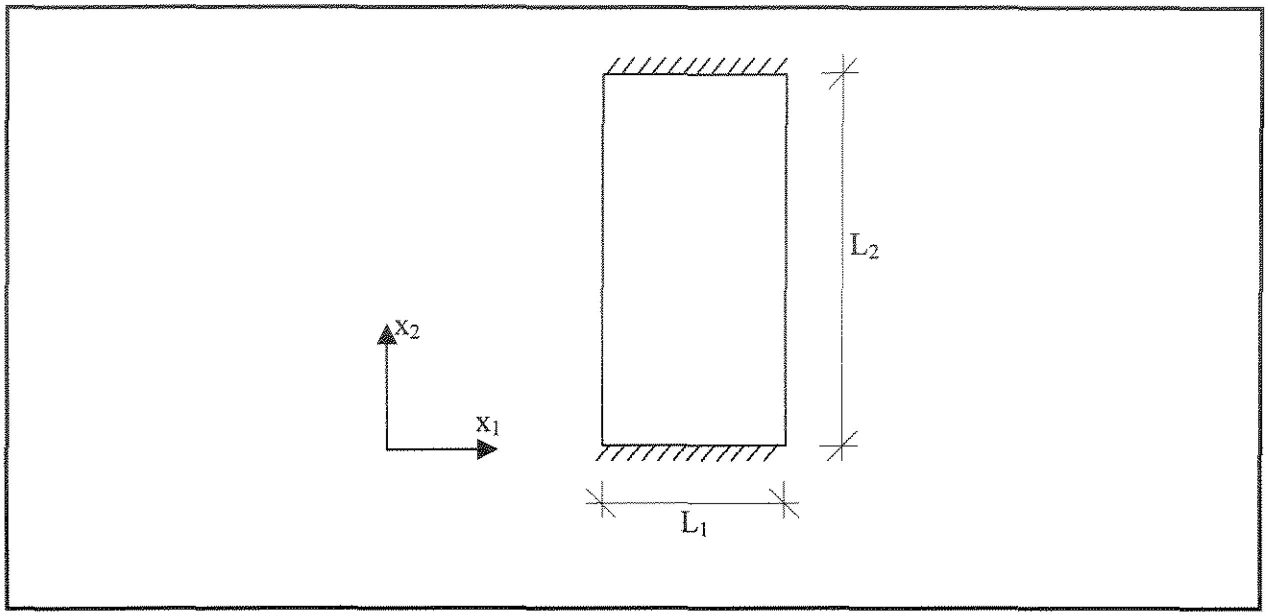


Figura 8.58 – Placa retangular engastada nos dois lados menores e apoiada nos outros lados submetida à vibração livre

Na **Tabela 8.43** são apresentados os resultados da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa retangular engastada nos dois lados menores e apoiada nos outros lados, submetida à vibração livre. O valor obtido através das formulações fornecidas por **BARES [57]** é igual a $1{,}277\text{x}10^3$ rad/s.

Discretização	ω_{11} (x10^3 rad/s)	Diferença em relação a **BARES [57]** (%)	**Número de Iterações**
16 células	1,390	+8,83	5
64 células	1,304	+2,09	5

Tabela 8.43 – Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa retangular engastada nos dois lados menores e apoiada nos outros lados, submetida à vibração livre

8.5.16. Placa Retangular EEAA

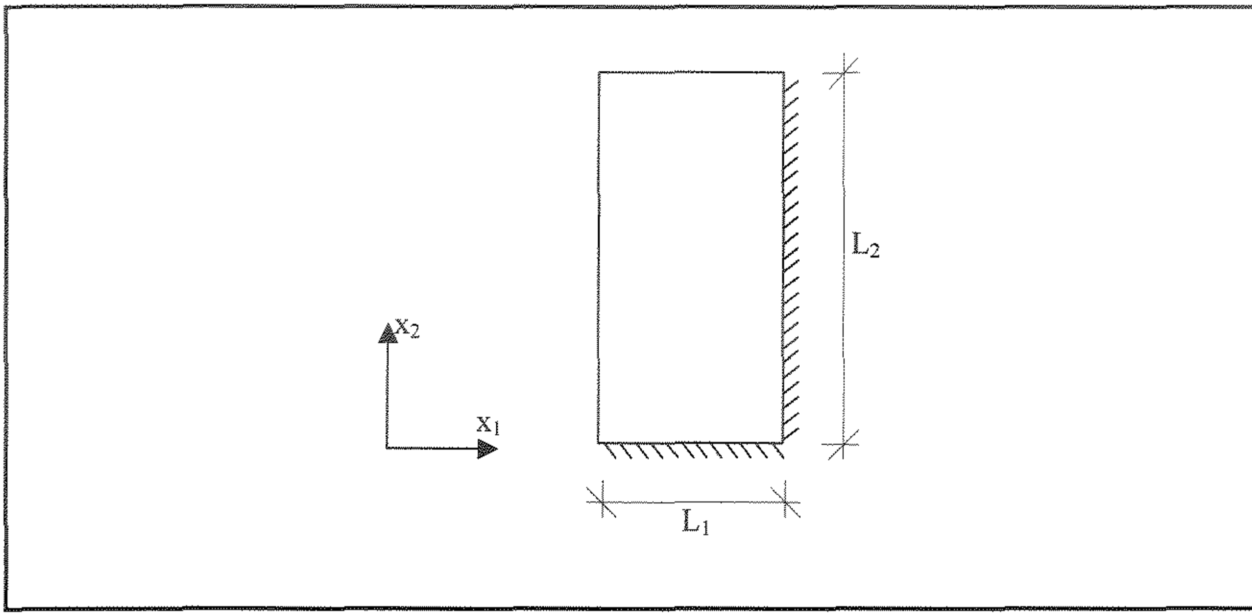


Figura 8.59 – Placa retangular EEAA submetida à vibração livre

Na **Tabela 8.44** são apresentados os resultados da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa retangular engastada em dois lados consecutivos e apoiada nos outros lados, submetida à vibração livre. O valor obtido através das formulações fornecidas por **BARES [57]** é igual a 1,656x10³ rad/s.

Discretização	ω_{11} ($x10^3$ rad/s)	Diferença em relação a **BARES [57]** (%)	**Número de Iterações**
16 células	1,799	+8,63	6
64 células	1,698	+2,54	5

Tabela 8.44 – Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa retangular EEAA, submetida à vibração livre

8.5.17. Placa Retangular Apoiada em Um dos Lados Maiores e Engastada nos Outros Lados

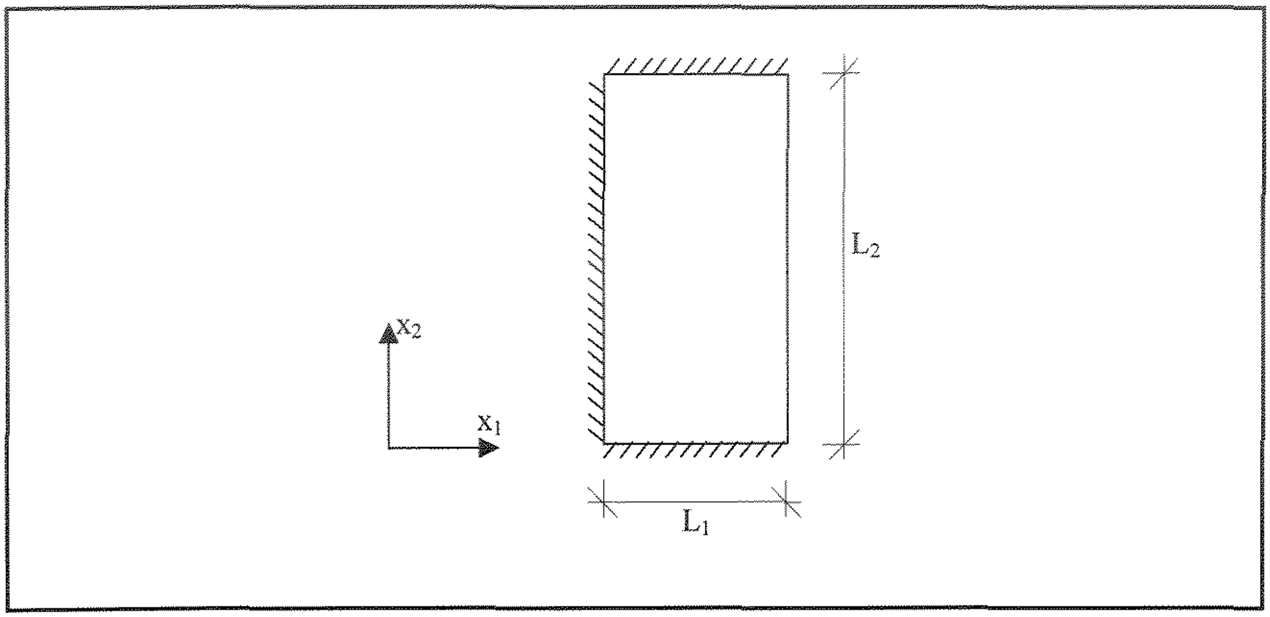


Figura 8.60 – Placa retangular apoiada em um dos lados maiores e engastada nos outros lados submetida à vibração livre

Na **Tabela 8.45** são apresentados os resultados da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa retangular apoiada em um dos lados maiores e engastada nos outros lados, submetida à vibração livre. O valor obtido através das formulações fornecidas por **BARES [57]** é igual a $1{,}710 \times 10^3$ rad/s.

Discretização	ω_{11} ($\times 10^3$ rad/s)	Diferença em relação a **BARES [57]** (%)	**Número de Iterações**
16 células	1,853	+8,33	6
64 células	1,753	+2,50	5

Tabela 8.45 – Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa retangular apoiada em um dos lados maiores e engastada nos outros lados, submetida à vibração livre

8.5.18. Placa Retangular Apoiada em Um dos Lados Menores e Engastada nos Outros Lados

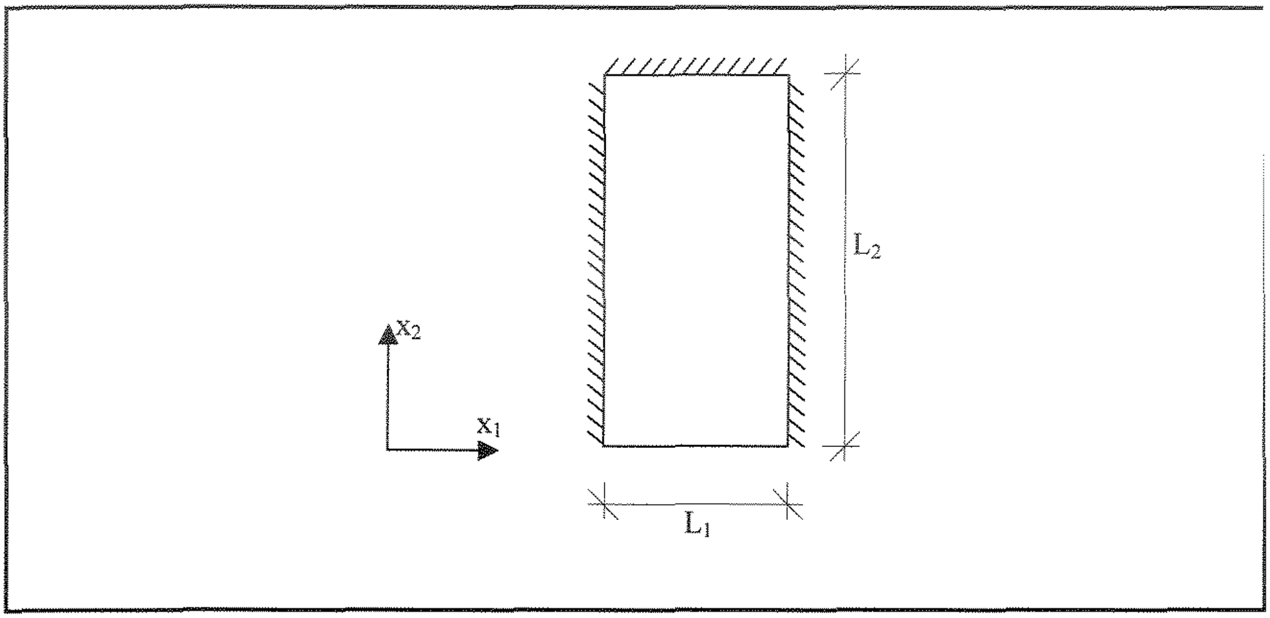


Figura 8.61 – Placa retangular apoiada em um dos lados menores e engastada nos outros lados submetida à vibração livre

Na **Tabela 8.46** são apresentados os resultados da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa retangular apoiada em um dos lados menores e engastada nos outros lados, submetida à vibração livre. O valor obtido através das formulações fornecidas por **BARES [57]** é igual a $2{,}246 \times 10^3$ rad/s.

Discretização	ω_{11} ($\times 10^3$ rad/s)	Diferença em relação a **BARES [57]** (%)	**Número de Iterações**
16 células	2,332	+3,82	6
64 células	2,306	+2,66	6

Tabela 8.46 – Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa retangular apoiada em um dos lados menores e engastada nos outros lados, submetida à vibração livre

8.5.19. Placa Retangular EEEE

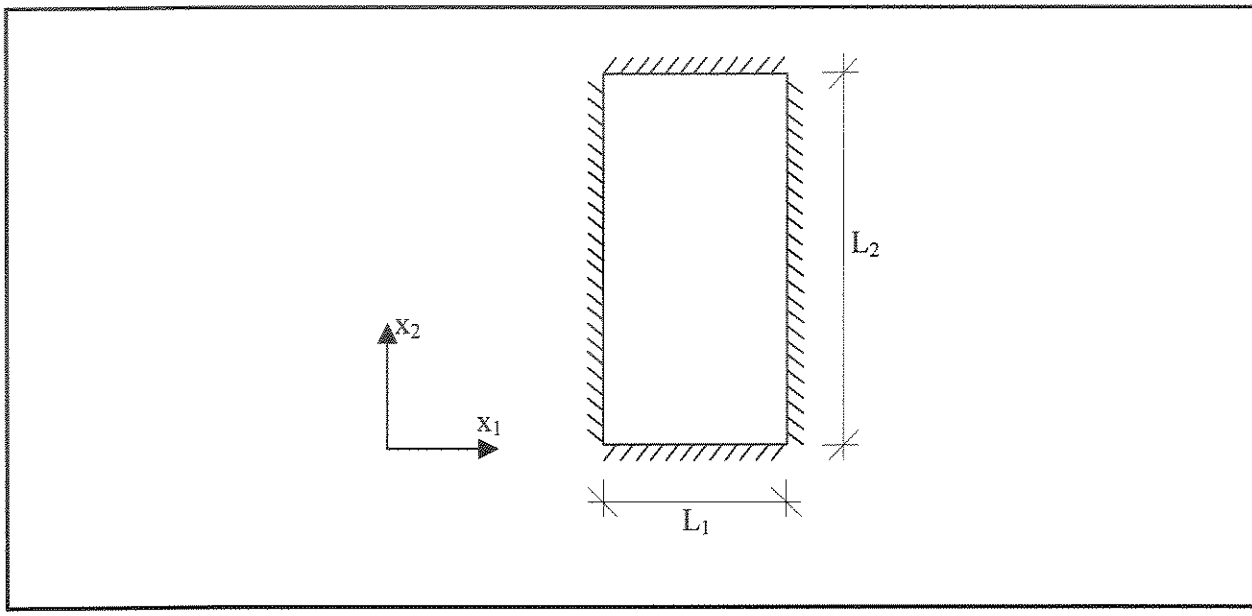


Figura 8.62 – Placa retangular EEEE submetida à vibração livre

Na **Tabela 8.47** são apresentados os resultados da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa retangular engastada nos quatro lados, submetida à vibração livre. O valor obtido através das formulações fornecidas por **BARES [57]** é igual a 2,287x10^3 rad/s.

Discretização	ω_{11} (x10^3 rad/s)	Diferença em relação a **BARES [57]** (%)	**Número de Iterações**
16 células	2,369	+3,59	7
64 células	2,347	+2,61	6

Tabela 8.47 – Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa retangular EEEE submetida à vibração livre

8.5.20. Placa Retangular Engastada em Um dos Lados Maiores e Livre nos Outros Lados

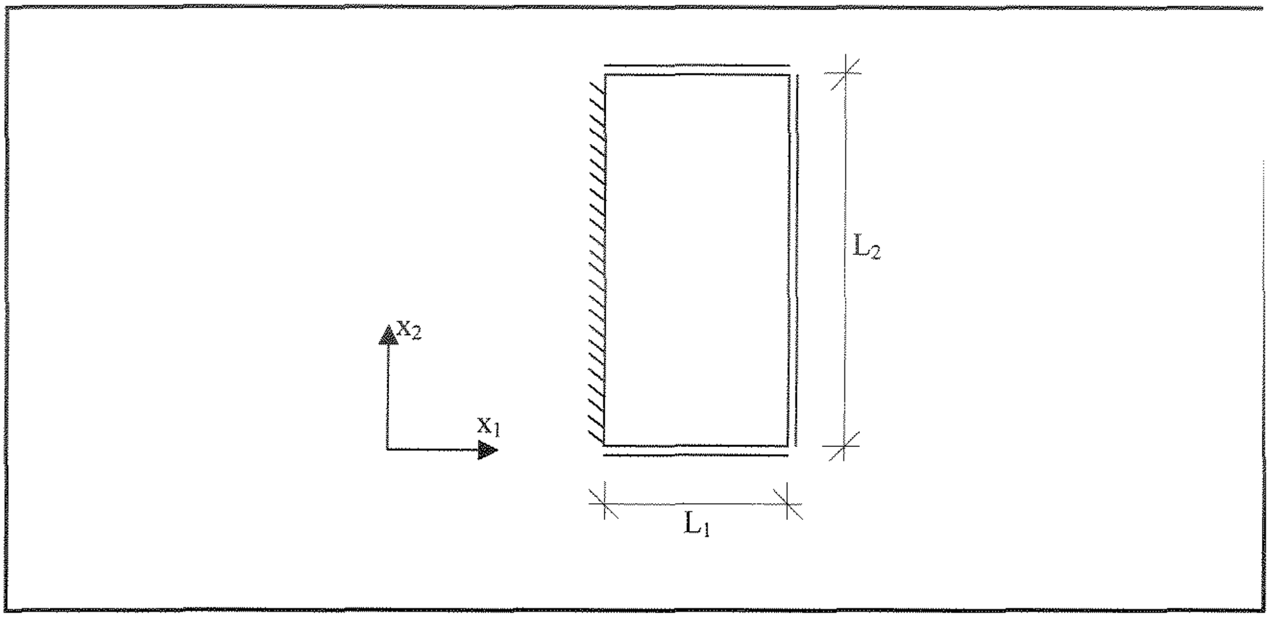


Figura 8.63 – Placa retangular engastada em um dos lados maiores e livre nos outros lados submetida à vibração livre

Na **Tabela 8.48** são apresentados os resultados da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa retangular engastada em um dos lados maiores e livre nos outros lados, submetida à vibração livre. Para este exemplo não foram encontrados valores de outras publicações para serem comparados.

Discretização	ω_{11} ($x10^2$ rad/s)	**Número de Iterações**
16 células	3,199	5
64 células	3,221	4

Tabela 8.48 – Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa retangular engastada em um dos lados maiores e livre nos outros lados, submetida à vibração livre

8.5.21. Placa Retangular Engastada em Um dos Lados Menores e Livre nos Outros Lados

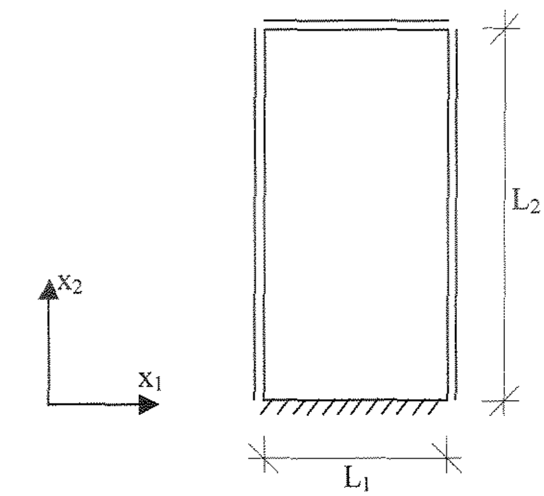


Figura 8.64 – Placa retangular engastada em um dos lados menores e livre nos outros lados submetida à vibração livre

Na **Tabela 8.49** são apresentados os resultados da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa retangular engastada em um dos lados menores e livre nos outros lados, submetida à vibração livre. Para este exemplo não foram encontrados valores de outras publicações para serem comparados.

Discretização	ω_{11} (x10^1 rad/s)	**Número de Iterações**
16 células	7,860	5
64 células	7,871	5

Tabela 8.49 – Valores da freqüência do primeiro modo de vibração de uma placa retangular engastada em um dos lados menores e livre nos outros lados, submetida à vibração livre

8.6. Exemplos de Vibrações Harmônicas em Placas

Para estes exemplos foram utilizados os seguintes dados geométricos e físicos:

$E = 2,05 \times 10^{11}$ N/m^2

$\nu = 0.0$

$h = 6 \times 10^{-2}$ m

K=0,5

16 pontos de Gauss

$q = -400 \cdot \text{sen}(\overline{\omega} \cdot t)$ N/m^2

8.6.1. Placa Quadrada AAAA Submetida a um Carregamento Harmônico

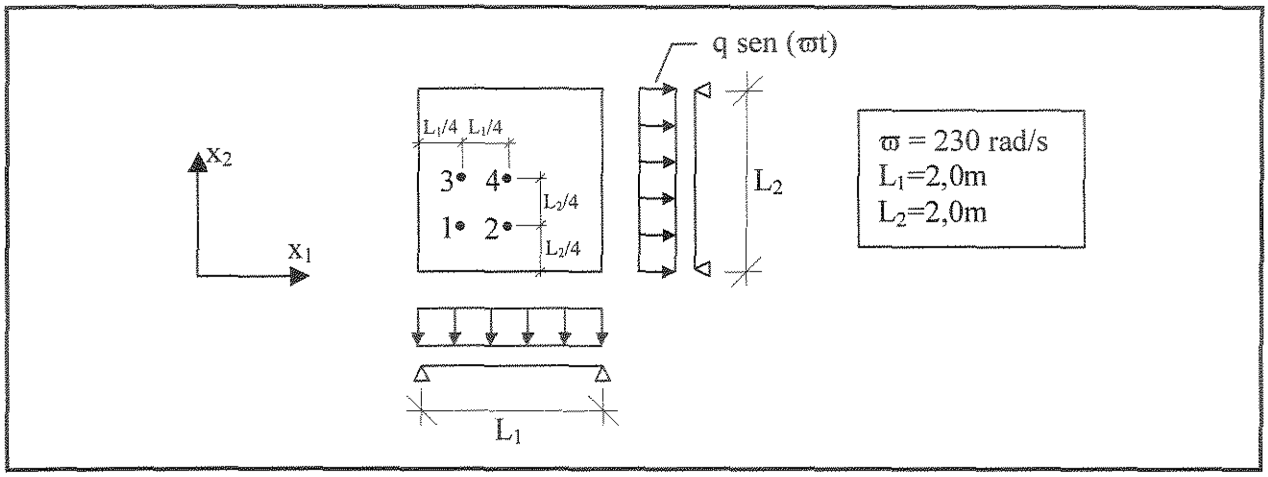


Figura 8.65 – Placa quadrada AAAA com carregamento harmônico

Neste exemplo é analisada uma placa simplesmente apoiada submetida a um carregamento harmônico uniformemente distribuído sobre toda a placa (**Figura 8.65**). Na **Tabela 8.50** são apresentados os valores dos deslocamentos e esforços para quatro pontos no interior da placa e seus valores no caso de um carregamento estático de mesmo valor do carregamento dinâmico. Nesta tabela também são apresentados os números de iterações necessários para a convergência dos resultados no programa utilizado.

Número de Células	32	128	512	Estático
$u_{3\,(1)}$ (x 10^{-5} m)	-1,725	-1,912	-1,981	-0,374
$u_{3\,(2)}$ (x 10^{-5} m)	-2,116	-2,342	-2,428	-0,514
$u_{3\,(3)}$ (x 10^{-5} m)	-2,116	-2,342	-2,428	-0,514
$u_{3\,(4)}$ (x 10^{-5} m)	-2,568	-2,839	-2,944	-0,709
$M_{xx\,(1)}$ (x 10 N.m/m)	+9,221	+10,587	+11,144	+3,667
$M_{xx\,(2)}$ (x 10 N.m/m)	+8,698	+9,810	+10,284	+4,243
$M_{xx\,(3)}$ (x 10^2 N.m/m)	+1,128	+1,280	+1,342	+0,499
$M_{xx\,(4)}$ (x 10^2 N.m/m)	+1,134	+1,266	+1,321	+0,592
Número de Passos	25	29	31	----

Tabela 8.50 – Valores dos deslocamentos e esforços para uma placa quadrada AAAA submetida a um carregamento harmônico

8.6.2. Placa Quadrada EEEE Submetida a um Carregamento Harmônico

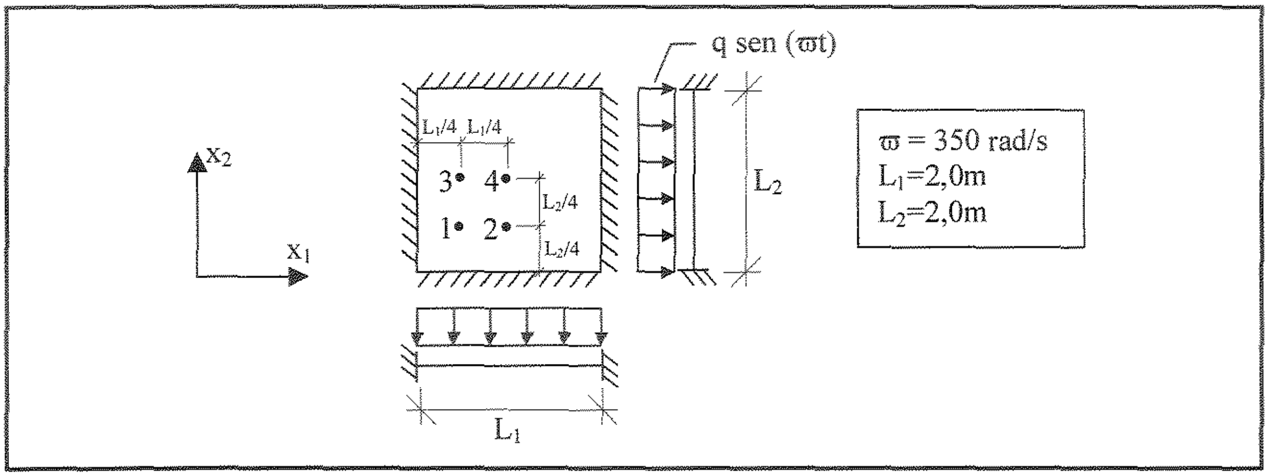


Figura 8.66 – Placa quadrada EEEE com carregamento harmônico

Neste exemplo é analisada uma placa engastada submetida a um carregamento harmônico uniformemente distribuído sobre toda a placa (**Figura 8.66**). Na **Tabela 8.51** são apresentados os valores dos deslocamentos e esforços para quatro pontos no interior da placa e seus valores no caso de um carregamento estático de mesmo valor do carregamento dinâmico. Nesta tabela também são apresentados os números de passos necessários para a convergência dos resultados no programa utilizado.

Número de Células	32	128	512	Estático
$u_{3\,(1)}$ (x 10^{-5} m)	-1,924	-2,786	-3,393	-0,080
$u_{3\,(2)}$ (x 10^{-5} m)	-2,237	-3,239	-3,955	-0,132
$u_{3\,(3)}$ (x 10^{-5} m)	-2,237	-3,239	-3,955	-0,132
$u_{3\,(4)}$ (x 10^{-5} m)	-2,592	-3,752	-4,592	-0,220
$M_{xx\,(1)}$ (x 10 N.m/m)	+7,628	+12,883	+16,930	+0,802
$M_{xx\,(2)}$ (x 10 N.m/m)	+6,189	+10,011	+13,032	+1,638
$M_{xx\,(3)}$ (x 10 N.m/m)	+7,606	+12,565	+16,419	+1,257
$M_{xx\,(4)}$ (x 10 N.m/m)	+8,545	+13,110	+16,669	+2,819
Número de Passos	45	68	84	----

Tabela 8.51 – Valores dos deslocamentos e esforços para uma placa quadrada EEEE submetida a um carregamento harmônico

9. PROGRAMAS UTILIZADOS PARA O DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO

9.1. Introdução

Neste capítulo são apresentados os programas desenvolvidos para a elaboração deste trabalho. Foram desenvolvidos três programas, um para a análise da flexão de placas, outro para a análise do efeito da não linearidade geométrica associada às placas e por fim um programa para a análise de vibrações livres em placas.

9.2. Programa de Flexão de Placas

Este programa, a partir de um arquivo de dados montado previamente, fornece os valores dos deslocamentos e esforços para os pontos internos e do contorno de uma placa. As placas podem possuir carregamentos lineares, distribuídos em toda a região da placa ou só em uma parte dela. Na **Figura 9.1** é apresentado o fluxograma do programa e na seqüência é explicada cada uma das sub-rotinas utilizadas neste programa.

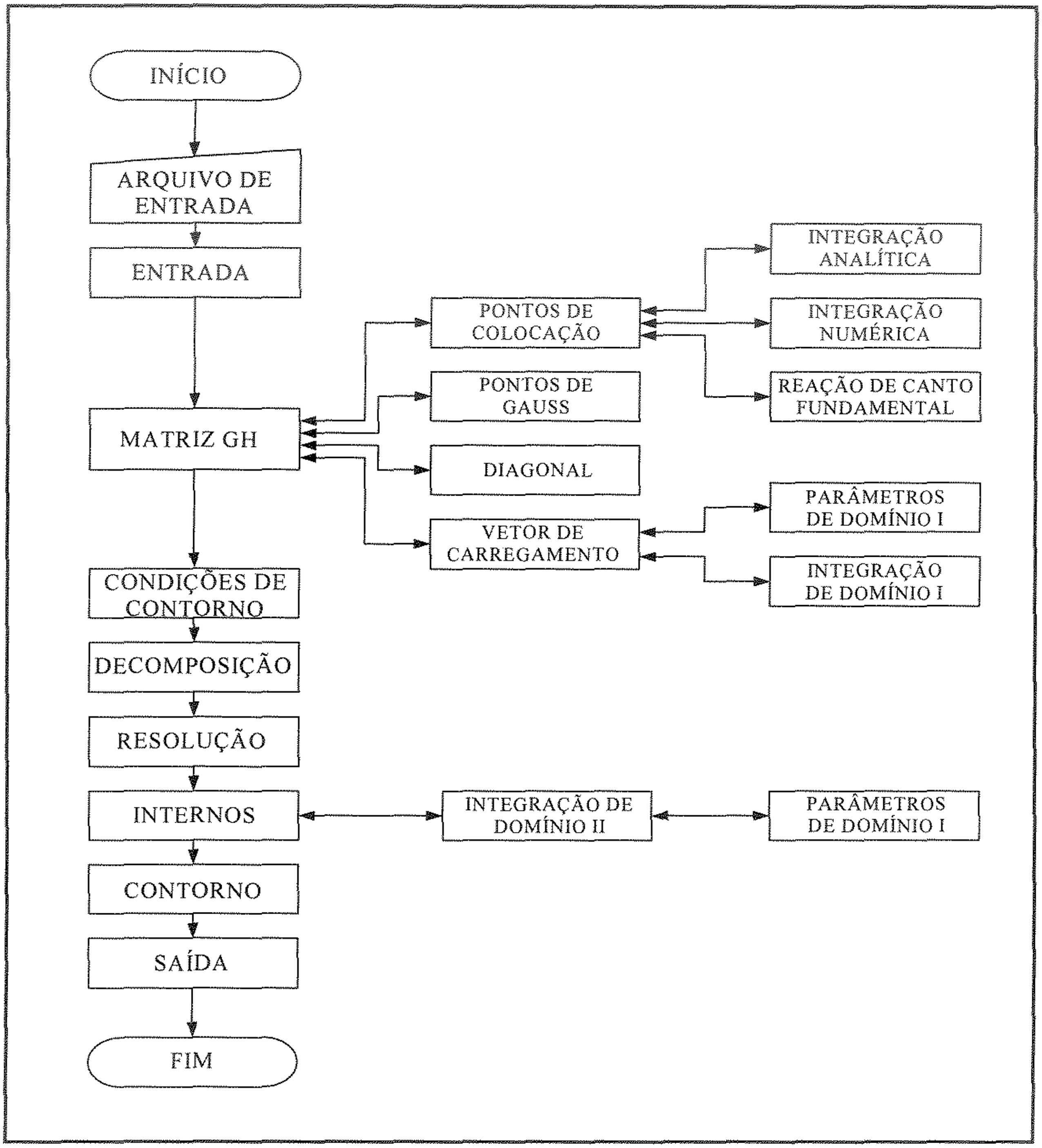


Figura 9.1 – Fluxograma do programa de flexão de placas

9.2.1. Sub-rotina ENTRADA

A sub-rotina ENTRADA faz a leitura dos parâmetros necessários para a execução do programa. Esta leitura é feita por um arquivo, montado a partir de um editor de texto. A seguir são detalhadas as informações fornecidas por este arquivo de entrada:

a) Número de nós do contorno, número de nós internos, número de nós duplos, número de elementos de contorno, número de nós com vinculações, número de células, número de valores conhecidos no contorno, número de pontos de Gauss, módulo de elasticidade transversal, coeficiente de Poisson, espessura da placa, constante da solução fundamental;

b) Número de cada um dos nós do contorno, com suas coordenadas $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$;

c) Número de cada um dos nós no interior da placa, com suas coordenadas $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$;

d) Número de cada um dos elementos, seu nó inicial e seu nó final;

e) Nós que são duplos;

f) Número dos nós do contorno que possuem vinculações sua vinculação em relação ao deslocamento transversal e em relação à rotação normal ao contorno;

g) Leitura dos valores conhecidos no contorno (número do nó, força cortante ou deslocamento transversal, momento fletor normal ao contorno ou rotação normal ao contorno);

h) Leitura das células e dos carregamentos aplicados nestas.

Nesta sub-rotina são calculados os comprimentos e os cossenos diretores dos elementos que compõe o contorno da placa.

9.2.2. Sub-rotina MATRIZ GH

A sub-rotina **MATRIZ GH** faz a montagem das matrizes globais **H** e **G** da estrutura. Esta sub-rotina fica diretamente conectada ao programa principal e utiliza algumas sub-rotinas para auxiliar na montagem destas matrizes:

a) Sub-rotina **PONTOS DE GAUSS**: a partir do número de pontos de Gauss que será utilizado para a integração, esta sub-rotina lê em um arquivo texto os pontos de Gauss e os pesos de Gauss para este número de pontos especificado no arquivo de entrada e guarda estas informações em dois vetores para serem utilizadas nas sub-rotinas de integração;

b) Sub-rotina **PONTOS DE COLOCAÇÃO**: esta sub-rotina determina a posição dos pontos de colocação para a realização da integração dos elementos. Para cada ponto do contorno, são necessários dois pontos de colocação, normalmente um coincidindo com o nó do contorno e outro deslocado a uma certa distância pré-determinada para fora da placa. Caso o nó do contorno seja duplo, o primeiro ponto de colocação não coincidirá com o nó, sendo tomado sobre o elemento a que ele pertence, com uma distância igual a ¼ do comprimento deste elemento. O segundo ponto será obtido da mesma forma que anteriormente;

c) Sub-rotina **INTEGRAÇÃO ANALÍTICA**: quando o ponto de colocação pertencer ao elemento que está sendo integrado, devido à singularidade da solução fundamental, se faz necessário à realização da integração do elemento analiticamente, o que é feito por esta sub-rotina. Esta sub-rotina fornece duas matrizes que irão contribuir para a montagem das matrizes globais **H** e **G**;

d) Sub-rotina **INTEGRAÇÃO NUMÉRICA**: para todos os elementos onde o ponto de colocação não pertencer a ele, é realizada a integração numérica utilizando a quadratura de Gauss. Nesta sub-rotina serão utilizados os valores obtidos anteriormente dos pontos de Gauss e seus respectivos pesos. Da mesma forma que na sub-rotina anterior, esta sub-rotina fornece duas matrizes que contribuem para a montagem das matrizes globais **H** e **G**. Além disso, essa sub-rotina calcula a contribuição do carregamento distribuído uniformemente na placa, para a posterior montagem do vetor de carregamentos;

e) Sub-rotina **REAÇÃO DE CANTO FUNDAMENTAL**: esta sub-rotina, como o próprio nome diz, fornece a contribuição das reações de cantos fundamentais na matriz **H**;

f) Sub-rotina **VETOR DE CARREGAMENTOS**: esta sub-rotina fornece um vetor que será somado ao vetor de global de carregamentos, com a contribuição dos carregamentos fornecidos através de células. Para isto ela utiliza duas sub-rotinas, uma para a determinação dos parâmetros da célula (**PARÂMETROS DE DOMÍNIO I**), e outra para integração da célula (**INTEGRAÇÃO DE DOMÍNIO I**);

g) Sub-rotina **DIAGONAL**: esta sub-rotina faz a contribuição do valor principal de Cochy (4.43) na matriz **H**;

9.2.3. Sub-rotina CONDIÇÕES DE CONTORNO

Esta sub-rotina impõe as condições de contorno da placa, organizando o sistema de equações para o seu cálculo posterior.

9.2.4. Sub-rotinas DECOMPOSIÇÃO e RESOLUÇÃO

Estas sub-rotinas fazem, respectivamente, a decomposição e a solução do sistema de equações montado anteriormente.

9.2.5. Sub-rotina INTERNOS

Esta sub-rotina calcula os valores dos deslocamentos e esforços internos da placa. Para o cálculo dos esforços da porção interna da placa se faz necessário o cálculo das curvaturas dos pontos internos. Para o cálculo das curvaturas, são necessários a consideração da contribuição dos carregamentos nas células que é obtida através das sub-rotinas **INTEGRAÇÃO DE DOMÍNIO II** e **PARÂMETROS DE DOMÍNIO I**.

9.2.6. Sub-rotina CONTORNO

Esta sub-rotina organiza os valores já obtidos no contorno para os deslocamentos e esforços e faz o cálculo dos esforços ainda não obtidos ($\mathbf{M_n}$ e $\mathbf{M_{ns}}$)

9.2.7. Sub-rotina SAÍDA

Esta sub-rotina faz a montagem do arquivo de saída que contém os dados de entrada e os resultados obtidos no programa.

9.3. Programa de Análise do Efeito da Não Linearidade Geométrica

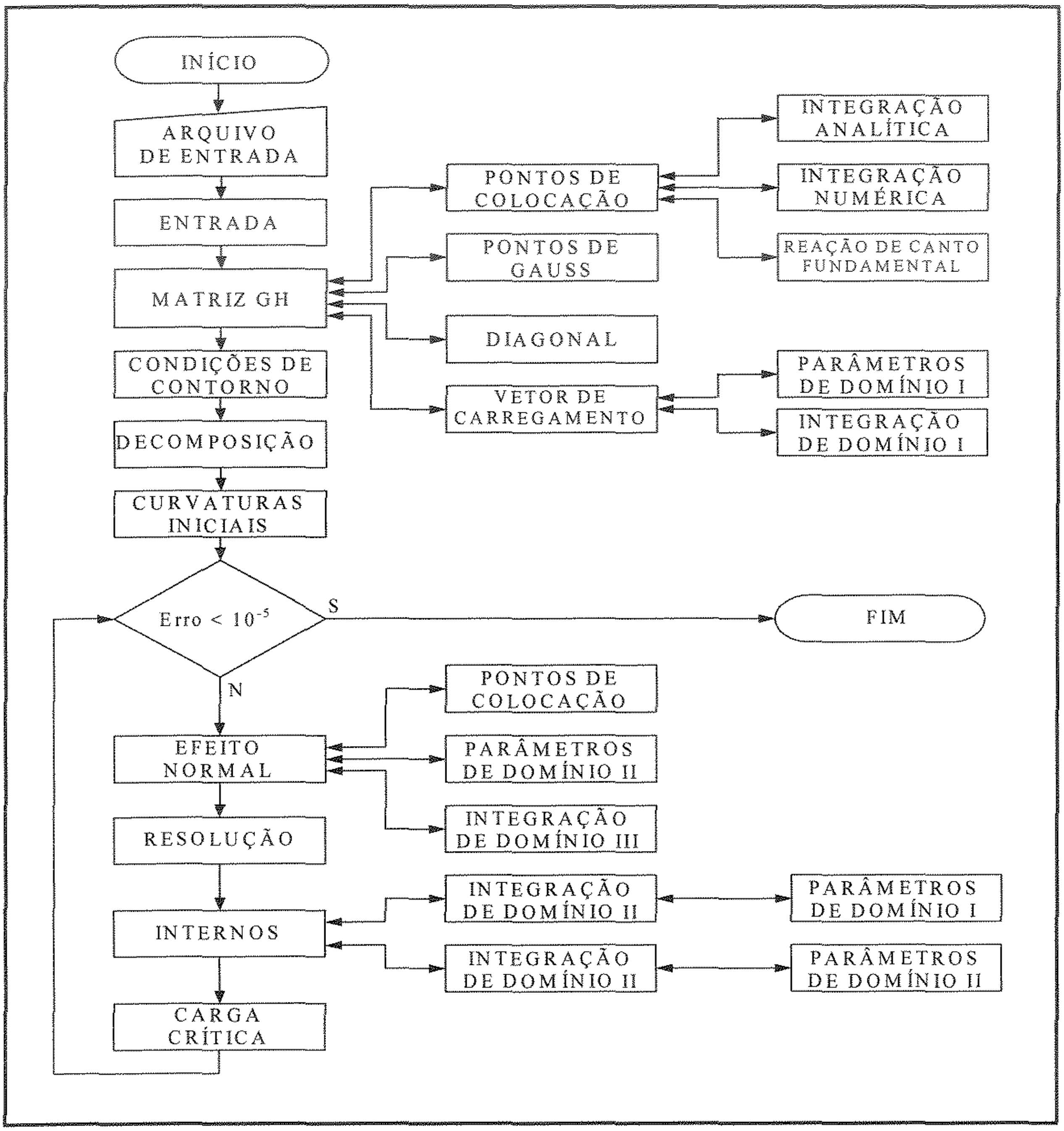


Figura 9.2 – Fluxograma do programa de análise do efeito da não linearidade geométrica

Este programa, a partir de um arquivo de dados montado previamente, calcula o autovalor e o autovetor para uma placa submetida a forças normais. O autovalor representa a carga crítica da placa e o autovetor, as curvaturas para esta carga crítica. Na **Figura 9.2** é apresentado o fluxograma deste programa e na seqüência são explicadas as sub-rotinas que foram acrescentadas ao programa de flexão de placas para a elaboração deste programa.

9.3.1. Sub-rotina CURVATURAS INICIAIS

Esta sub-rotina assume valores iniciais para as curvaturas, de modo que se tenham valores para iniciar o processo iterativo do programa.

9.3.2. Sub-rotina EFEITO NORMAL

Esta sub-rotina calcula um vetor contendo a contribuição das forças normais ao longo do domínio da placa. Para isso, ela utiliza a sub-rotina **PONTOS DE COLOCAÇÃO** para determinar o ponto com relação ao qual será feita a integral de cada uma das células, a sub-rotina **PARÂMETROS DE DOMÍNIO II** que calcula os parâmetros de cada uma das células com relação à força normal aplicada na placa e a sub-rotina **INTEGRAÇÃO DE DOMÍNIO III** que faz a integração de cada uma das células utilizando a quadratura de Gauss. O vetor obtido nesta sub-rotina é somado ao vetor livre do sistema de equações para posterior resolução do sistema.

9.3.3. Sub-rotina INTERNOS

Esta sub-rotina tem função idêntica à apresentada para o outro programa, acrescentando duas sub-rotinas internas para levar em conta o efeito da força normal no cálculo das curvaturas. Estas sub-rotinas são **INTEGRAÇÃO DE DOMÍNIO II** e **PARÂMETROS DE DOMÍNIO II**. Nesta sub-rotina imprime o valor do autovetor calculado em um arquivo de saída, que corresponde ao valor das curvaturas da placa.

9.3.4. Sub-rotina CARGA CRÍTICA

Esta sub-rotina calcula o autovalor da placa que corresponde à primeira carga crítica dela. Este valor é comparado com o valor obtido na iteração anterior e se o erro for menor do que 10^{-5}, o programa principal é encerrado. Este valor é impresso no arquivo de saída.

9.4. Programa de Análise de Vibrações Livres em Placas

Este programa calcula a primeira freqüência de ressonância para uma placa dada ou então calcula os deslocamentos e esforços para uma placa submetida a um carregamento harmônico. A estrutura deste programa é similar àquela apresentada para o programa de análise do efeito de não linearidade geométrica, mudando somente as sub-rotinas de integração das células. Ao invés da carga crítica, será apresentada a freqüência de ressonância da placa, e no lugar das curvaturas, o modo de vibração representada pelos deslocamentos transversais da placa.

10. CONCLUSÕES

O Método dos Elementos de Contorno mostrou-se eficiente para a análise de flexão de placas, na determinação das cargas críticas de placas submetidas a um carregamento contido no seu plano médio e no cálculo das freqüências naturais das placas.

Foi elaborado um programa para o cálculo de placas fletidas submetidas a carregamentos distribuídos no domínio da placa, podendo estes ser constantes ou lineares e estarem distribuídos em parte da placa. Nos exemplos realizados, variou-se o valor da constante livre de integração e observou-se que a utilização deste valor igual à $e^{1/2}$, e, π e 1, que correspondem as constantes de Danson, Bezine, Weeën e a consideração do fator multiplicador igual a um, não influenciaram de maneira significativa os valores dos esforços e deslocamentos tanto no contorno da placa como no seu interior o que confirma **PALERMO JR. [93]**. Nas placas onde existiam condições de borda livre no contorno, observou-se uma pequena influência desta constante para os exemplos analisados, mas com diferenças inferiores a 10% para os nós próximos à extremidade e inferiores a 1% para pontos próximos ao centro da borda da placa. Para as demais situações, onde a placa não possuía bordas livres, estas diferenças foram inferiores a 1%.

No estudo de placas com o efeito não linearidade geométrica, ao contrário do que acontece nas vigas, existem cargas críticas muito próximas devido a influência das duas direções. Este aspecto diminuiu a convergência para se achar os autovalores seguintes ao menor autovalor bem como a precisão dos autovetores associados. Mesmo com a dificuldade de convergência, o método demonstrou-se confiável devido à comparação entre os valores obtidos e teóricos. Como aconteceu com as vigas, **PALERMO JR. [65]**, as cargas críticas seguintes não foram encontradas na seqüência de seus módulos e foram identificadas através dos seus autovetores.

Devido à utilização de elementos lineares no domínio, necessitou-se de uma discretização muito grande para se obter valores com diferenças inferiores a 1% do resultado teórico, embora resultados bons tenham sido obtidos com uma discretização menor e com poucos passos de iteração (em média necessitou-se de sete passos para a obtenção da menor carga crítica com seus respectivos modos de flambagem). A implementação numérica teve por base **DUARTE [64]**, mas este aspecto complementar, referente à discretização do domínio, não foi mencionado tanto em **DUARTE [64]** como em **COSTA JR. [66]** ou na literatura consultada.

Apesar de terem-se encontrado cargas críticas com uma boa precisão, observou-se que esta precisão está intimamente ligada à discretização do domínio, independente da discretização do contorno, fato este que será de extrema utilidade para o estudo do efeito de não linearidade geométrica através do método da reciprocidade dual.

Nos exemplos de placas submetidas à vibração livre, para as mesmas condições de contorno adotadas nos exemplos de determinação da carga crítica, observou-se uma melhor precisão dos resultados, isto é, para uma menor discretização do domínio, obtiveram-se resultados com diferenças inferiores a 1% do resultado teórico.

No caso de placas submetidas a vibrações forçadas harmônicas observou-se uma boa convergência do método para freqüências longe da freqüência de ressonância. Conforme o valor da freqüência do carregamento se aproximou da freqüência de ressonância, não se conseguiu obter convergência. Não foi encontrado na literatura nada sobre este tipo de problema, o que leva a um interesse de estudo mais profundo para se avaliar o comportamento de placas sob vibrações harmônicas. Acredita-se, que a forma de discretização do domínio deva influenciar na determinação dos deslocamentos e esforços das placas submetidas aos carregamentos harmônicos, influência esta observada na determinação das cargas críticas quando foi introduzido o efeito não linear, fato este que deverá ser estudado em trabalhos futuros.

Futuramente, existem alguns aspectos que poderão ser abordados para a continuidade deste projeto:

- Estudo e implementação no programa de células quadráticas de domínio para o estudo da não linearidade geométrica e do problema de vibrações livres;

- Utilização do método da reciprocidade dual para tratamento das integrais de domínio;

- Estudo do comportamento de placas no domínio da freqüência.

11. BIBLIOGRAFIA

[1] LOVE, A. E. H. **A treatise on the mathematical theory of elasticity.** New York: Dover, 1944.

[2] POISSON, S. D. Memoire sur l'equilibre et le mouvement des corps solids. **J. Math. Physics, v.12** (8), 1829.

[3] KIRCHHOFF, G. R. Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe. **J. Math., Crelle, v.40**, p.51-58, 1850.

[4] BETTI, E. Teoria dell'elasticità. **Il Nuovo Ciemento**, p.7-10, 1872.

[5] FREDHOLM, I. Sur une classe d'equations fonctionelles. **Acta Math.**, **v.27**, p.365-390, 1903.

[6] KELLOG, O. D. **Foundations of potential theory.** Springer, Berlin, 1929.

[7] MUSKHELISHVILI, N. I. **Some basic problems of the mathematical theory of elasticity.** Noordhoff, Holland, 1953.

[8] MIKHLIN, S. G. **Integral equations.** Pergamon Press, Oxford, 1957.

[9] SMIRNOV, V. J. **Integral equations and partial differential equations.** In: Course in Higher Mathematics. London: Addison-Wesley, **v.4**, 1964.

[10] KUPRADZE, O. D. **Potential methods in theory of elasticity.** Daniel Davy, New York, 1965.

[11] JASWON, M. A. Integral equation methods in potential theory – I. **Proc. Roy. Soc. Lond., v.A275**, p.23-32, 1963.

[12] SYMM, G. T. Integral equation methods in potential theory – I. **Proc. Roy. Soc. Lond., v.A275**, p.33-46, 1963.

[13] JASWON, M. A., PONTER, A. R. An integral equation solution of the torsion problem. **Proc. Roy. Soc. Ser. A, v.273**, p.237-246, 1968.

[14] RIZZO, F. J. An integral approach to bondary value problems of classical elastostatics. **Quat. Appl. Math., v.25**(1), p.83-92, 1967.

[15] JASWON, M. A., MAITI, M., SYMM, G. J. Numerical biharmonic analysis and some apllications. **Int. J. Solids Struct., v.3**, p.309-332, 1967.

[16] WATSON, J. O. **The analysis of thick shells with holes, by integral representation of displacement.** PhD Thesis, Southampton, University of Southampton, US, 1972.

[17] WATSON, J. O. **The analysis of three-dimensional problems of elasticity by integral representation of displacement.** In: Int. Conf. On Variational Methods in Engineering, University of Southampton, US, 1972 – Proceedings.

[18] CRUSE, T. A. Numerical solution in three dimensional elastostatics. **Int. J. Solids Struct., v.5**, p.1259-1274, 1969.

[19] CRUSE, T. A. **Mathematical foundations of the boundary integral equation method in solid mechanics.** Pratt and Whitney Aircraft Group, 1977. (Report AFOSR-IR-1002)

[20] CRUSE, T. A., SNOW, D. W., WILSON, R. B. Numerical solutions in axisymmetric elasticity. **Comp. and Struct., v.7**, p.445-451, 1977.

[21] LACHAT, J. C. **A further development of the boundary integral technique for elastostatics.** PhD Thesis, Southampton, University of Southampton, US, 1975.

[22] LACHAT, J. C., WATSON, J. O. **A second generation boundary Integral equation program for three-dimensional elastic analysis.** ASME Applied Mechanics National Conference, New York, 1975.

[23] LACHAT, J. C., WATSON, J. O. Effective numerical treatament of boundary integral equations: a formulation for three-dimensional elastostatics. **Int. J. Numer. Meth. In Engng, v.10**, p.991-1005, 1976.

[24] HANSEN, E. B. Numerical solution of integro-differential and singular integral equations for plate bending problems. **J. of Elasticity**, **v.6**(1), p.39-56, 1976.

[25] BREBBIA, C. A. **The boundary element method for engineers.** London: Pentech Press, 1978.

[26] NAKAGUMA, R. K. **Three dimensional elastostatics using the boundary element method.** PhD Thesis, Southampton, University of Southampton, US, 1979.

[27] TELLES, J. C. F., BREBBIA, C. A. Boundary element solution of half-plane problems. **Int. J. Solids Struct.**, **v.17**, p.1149-1158, 1981.

[28] BÉZINE, G. P., GAMBY, D. A. **A new integral equation formulation for plate bending problems.** In: Brebbia, C. A. ed. Recent advances in BEM, London: Pentech Press, p.327-342, 1978.

[29] BÉZINE, G. P. Boundary integral formulations for plate flexure with arbitrary boundary conditions. **Mech. Res. Comm.**, **v.5**(4), p.197-206, 1978.

[30] STERN, M. A., A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems. **Int. J. Solids Struct.**, **v.15**, p.769-782, 1979.

[31] DANSON, D. J. **Analysis of plate bending problems by direct boundary element method.** MSc. Thesis, Southampton, University of Southampton, US, 1979.

[32] ALTIERO, N. J., SIKARSKIE, D. L. A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form. **Computers & Structures**, **v.9**, p.163-168, 1978.

[33] WU, B. C., ALTIERO, N. J. A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form and arbitrary boundary conditions. **Computers & Structures**, **v.10**, p.703-707, 1979.

[34] TOTTENHAN, H. **The boundary element method for plates and shells.**, In: Banerjee, P. K., Butterfield, R. eds: Developments in Boundary Element Methods – 1, Applied Science Publ. London, p.173-205, 1979.

[35] VENTURINI, W. S., BREBBIA, C. A. **Formulação do método dos elementos de contorno para domínios descontínuos.** In: Congresso Latino-Americano sobre Método Computacionais para Engenharia, Santiago, Chile, Anais p.7-11, Nov, 1983.

[36] COSTA JR., J. A., BREBBIA, C. A. **Plate bending problems using boundary elements method.** In: Brebbia, C. A., Boundary elements method., Berlin: Springer-Verlag, p.3.43-3.63, 1984.

[37] COSTA JR., J. A., BREBBIA, C. A. **Elastic buckling of plates using boundary elements method.** In: Brebbia, C. A., Maier, G., Boundary elements VII, Berlin: Springer-Verlag, p4.29-4.42, 1984.

[38] GUO-SHU, S. MUKERJEE, S. Boundary element method analysis of bending plates of arbitrary chape with general boundary conditions. **Engng Analysis, v.3**(1), p.36-44, 1986.

[39] HARTMANN, F., ZOTEMANTEL, R. The direct boundary element method in plate bending. **Int. J. Num. Meth. Engng, v.23**(11), p.2049-2069, 1986.

[40] MOSHAIOV, A., VORUS, W. S. Elasto-plastic bending analysis by a boundary element method with initial plastic moments. **Int. J. Solids Struct., v.22**(11), p.1213-1229, 1986.

[41] PAIVA, J. B. **Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estruturas.** Tese Doutorado, São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1987, 195p.

[42] HARTLEY, G. A., ABDEL-AKHER, A. **Analytic integration procedures for plate bending analysis.** In: Brebbia, C. A., ed. Boundary elements X. C. M. Publ., **v.3**, p.391-405, 1988.

[43] HARTLEY, G. A., ABDEL-AKHER, A. Boundary integration and interpolation procedures for plate bending. **Int. Num. Meth. Engng, v.28**(6), p.1389-1408, 1989.

[44] HARTLEY, G. A., AHMED, A. A. Evaluation of boundary integrals for plate bending. **Int. Num. Meth. Engng, v.28**(2), p.75-93, 1989.

[45] PALERMO JR., L. **Análise de peças de seção delgada com associação de placas pelo método dos elementos de contorno.** Tese Doutorado, São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, p.7-97, 1989.

[46] BREBBIA, C. A., DOMINGUEZ, J. **Boundary elements: An introdutory course.** Southampton, McGraw-Hill Book company, 1989, 292p.

[47] KATSIKADELIS, J. T., ARMENAKAS, A. E. A new boundary equation solution to the plate problem. **J. Appl. Mech., v.56**(2), p.364-374, 1989.

[48] CAMP, C. V., GIPSON, G. S. Biharmonic analysis of rectilinear plates by boundary element method. **Int. J. Num. Meth. Engng, n.30**, p.517-539, 1990.

[49] ELZEIN, A. **Plate stability by boundary elements method.** In: Brebbia, C. A., Orszag, S. A. Lecture notes in engineering. New York, Spring Verlag, 1991.

[50] HARTMANN, F. **Static analysis of plates.** In: Beskos, D. E. Boundary elements analysis of plates and shell. Berlin, Springer-Verlag, 1991.

[51] KARAMI, G., ZARRINCHANG, J., FOROUGHI, B. et al. **An efficient analytical treatment of boundary integrals in direct boundary element analysis of plate bending problems.** In: Brebbia, C. A., Domingues, J., Paris, F. eds. Boundary Elements XIV, **v.2**, 1992.

[52] VABLE, M., ZHANG, Y. A boundary element method fpr plate bending problems. **Int. J. Solids Struct.**, **v.29**(3), p.345-361, 1992.

[53] CHUEIRI, L. H. M. **Formulação do método dos elementos de contorno para análise elastoplástica de placas.** Tese Doutorado, São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1994.

[54] OLIVEIRA NETO, L. **Uma formulação do método dos elementos de contorno com três parâmetros nodais para placas delgadas e suas aplicações a problemas de engenharia estrutural.** Tese Doutorado, São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1998.

[55] SAADA, A. S. **Elasticity: theory and applications.** New York: Pergamon Press Inc., 1974.

[56] BREBBIA, C. A., TELLES, J. C. F., WROBEL, L. C. **Boundary element techniques.** Berlin: Springer Verlag, Germany, 1984.

[57] BARES, R. **Tables pour le calcul des dalles et des parois.** Paris, Dunod, 1969, 535p.

[58] TIMOSHENKO, S. P. **Theory of elastic stability.** Southampton, McGraw-Hill, Book Company, 1961, 541p.

[59] TIMOSHENKO, S. P. **History of strength of materials.** New York, Dover Publications, 1983, 452p.

[60] NIWA, Y., KOBAYACHI, S., FUKUI, T. An application of the integral equation method of plate bending. **Faculty of Engineering**, Tokio, **v.36**, p.140-158, 1974.

[61] BEZINE, G. Application of similarity to research of new boundary integral equation for plates flexural problems. **Appl. Math. Modelling, v.5**(2), p.66-70, 1981.

[62] SYGELLAKIS, S., KANG, M. A boundary element solution of the plate buckling problem. **Engineering Analysis**, **v.4**(2), p.75-81.

[63] TANAKA, M. Integral equation approach to small and large displacement of thin elastic plates. **Boundary elements method in engineering**. In: Brebbia, C. A., Springer-Verlag, Berlin, p.526-539, 1983.

[64] DUARTE, J. B. P., Análise de Instabilidade em Placas Finas pelo Método dos Elementos de Contorno, Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, UNICAMP, 1998, (Dissertação de Mestrado, Orientador: Leandro Palermo Júnior, apoio CAPES/PICD).

[65] PALERMO JR., L., Análise de Peças de Seção Delgada como Associação de Placas pelo Método dos Elementos de Contorno, Universidade de São Paulo, São Carlos, 151p, 1989.

[66] COSTA JR., J. A., The Boundary Element Method Applied to Plate Problems, Southampton, Department of Civil Engineering, The University of Southampton, (PhD Thesis, supervisor C. A. Brebbia), 1985.

[67] VIVOLI, J. Vibrations de plaqueset potentials de couches. **Acustica, v.26**, p.305-314, 1972.

[68] VIVOLI, J., FILIPPI, P. Eigenfrequencies of thin plates and layer potentials. **J. Acoust. Soc. Am., v.55**, p.562-567, 1974.

[69] HUTCHINSON, J. R., WONG, G. K. K. The boundary element method for plate vibrations. **Proceedings of the ASCE 7th conference on electronic computation in St. Louis**, Missouri, New York, ASCE, p.297-311, 1979.

[70] BÉZINE, G. A mixed boundary integral-finite element approach to plate vibration problems. **Mech. Res. Comm., v.7**, p.141-150, 1980.

[71] WONG, G. K. K., HUTCHINSON, J. R. An improved boundary element method for plate vibration. **Boundary element methods**. In: Brebbia, C. A., Berlin: Springer-Verlag, p.272-289, 1981.

[72] NIWA, Y., KOBAYASHI, S., KITAHARA, M. Eigenfrequency análisis of a plate by the integral equation meted. **Theor. Appl. Mech., v.29**, p.287-307, 1981.

[73] NIWA, Y., KOBAYASHI, S., KITAHARA, M. Determination of eigenvalues by boundary element methods. **Developments in boundary element methods, v.2** In: Banerjee, P. K., Shaw, R. P., London: Applied Science, p.143-176, 1982.

[74] BÉZINE, G., GAMBY, D. Étude des mouvements transitoires de flexion d'une plaque par la méthode des equations integrals de frontiére. **J. Méc. Theor. Appl., v.1**, p.451-466, 1982.

[75] KITAHARA, M. Boundary integral equation methods in eigenvalue problems of elastodynamics and thin plates. Amsterdam, Elsevier, 1985.

[76] PROVIDAKIS, C. P., BESKOS, D. E. Two BEM approaches for plate dynamic analysis. **Computational mechanics '88**. In: Atluri, S. N., YAGAWA, G., Berlin: Springer-Verlag, p. 3.vi.1-3.vi.5, 1986.

[77] PROVIDAKIS, C. P., BESKOS, D. E. Dynamic analysis of elastic plates. **Boundary elements X**, In: Brebbia, C. A., Berli: Springer-Verlag, **v.4**, p.403-413, 1988.

[78] PROVIDAKIS, C. P., BESKOS, D. E. Free and forced vibrations of plates by boundary elements. **Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.**, **v.74**, p.231-250, 1989.

[79] O'DONOGHUE, P. E., ATLURI, S. N. Control of dynamic response of a continuum model of a large space structure. **Comput. Struct.**, **v.23**, p.199-209, 1986.

[80] O'DONOGHUE, P. E., ATLURI, S. N. Field/boundary element approach to the large deflection of thin flat plates. **Comput. Struct.**, **v.27**, p.427-435, 1987.

[81] PROVIDAKIS, C. P., BESKOS, D. E. Forced vibrations of plates and shells by boundary-interior elements. **Boundary Elements IX**. In: Brebbia, C. A., Wendland, W. L., Kuhn, G., Berlin: Springer-Verlag, **v.2**, p. 97-109, 1987.

[82] PROVIDAKIS, C. P., BESKOS, D. E. Free and forced vibrations of plates by boundary and interior elements. **Int. J. Num. Meth. Engng.**, **v.28**, p. 1977-1994, 1989.

[83] BESKOS, D. E., PROVIDAKIS, C. P., STAMOS, C. A. Dynamic response of plates by the domain/boundary element method. **Proceedings of 2nd national congress of mechanics**, Athens, June 29-July 1, 1989.

[84] BESKOS, D. E. Dynamic analysis of plates and shallow shells by the D/BEM. **Advances in the theory of plates and shells**. In: Voyiadjis, G. Z., Karamanlidis, D., Amsterdam: Elsevier, p. 177-196, 1990.

[85] HEUER, R., IRSCHIK, H. A boundary element method for eigenvalue problems of polygonal membranes and plates. **Acta Mech.**, **v.66**, p. 9-20, 1987.

[86] IRSCHIK, H., HEUER, R., ZIEGLER, F. BEM using Green's functions of retangular domains: static and dynamic problems of bending of plates. **Boundary Elements IX**, In: Brebbia, C. A., Wendland, W. L., Kuhn, G., Berlin: Springer-Verlag, **v.2**, p.35-45, 1987.

[87] TANAKA, M., YAMAGIWA, K., MIYAZAKI, K., UEDA, T. Integral equation approach to free vibration problems of assembled plate structures. Theory and applications of boundary element methods, In: Tanaka, M., Du, Q., Oxford: Pergamon Press, p.375-384, 1987.

[88] TANAKA, M., YAMAGIWA, K., MIYAZAKI, K., UEDA, T. Free vibration analysis of elastic plate structures by boundary element method. **Engng Anal.**, **v.5**, p.182-188, 1988.

[89] KATSIKADELIS, J. T., SAPOUNTZAKIS, E. J. Numerical evaluation of the Green function for the biharmonic equation using BEM with application to static and dynamic analysis of plates. **Boundary elements IX**, In: Brebbia, C. A., Wendland, W. L., Kuhn, G., Berlin: Springer-Verlag, **v.2**, p.51-67, 1987.

[90] KATSIKADELIS, J. T., SAPOUNTZAKIS, E. J. A BEM solution to dynamic analysis of plates with variable thickness. **Advances in boundary elements**, In: Brebbia, C. A., Connor, J. J., Southampton: Comput. Mech Publ., **v.3**, p.285-302, 1989.

[91] KATSIKADELIS, J. T., SAPOUNTZAKIS, E. J., ZORBA, E. G. A BEM approach to static and dynamic analysis of plates with internal supports. **Boundary Elements X**, In: Brebbia, C. A., Berlin: Springer-Verlag, **v.4**, p. 431-444, 1988.

[92] COSTA JR., J. A. Plate vibrations using BEM. **Appl. Math. Modelling**, **v.12**, p. 78-85, 1988.

[93] PALERMO JR., L. Análise Elástica de Placas e o Método dos Elementos de Contorno, Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, UNICAMP, 2000, p. 155 (Tese de Livre-Docência).

APÊNDICE A

A. APLICAÇÃO DO CÁLCULO VARIACIONAL PARA OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE EQUILÍBRIO

A.1. Introdução

Neste capítulo apresenta-se o método da energia aplicado ao problema de flexão de placas e ao problema do efeito da não linearidade geométrica de placas. São utilizados os conceitos do cálculo variacional para a obtenção das equações de equilíbrio das placas quando submetidas ao efeito de carregamentos paralelos e perpendiculares ao seu plano médio.

O intuito de aplicar o método da energia aos problemas de placas é de determinar as condições naturais dos problemas analisados. Também se consegue, através deste método, determinar as equações de equilíbrio que regem os problemas, como por exemplo a equação de equilíbrio do contorno anteriormente obtida.

A.2. Cálculo Variacional Aplicado à Flexão de Placas

A energia potencial total de uma placa submetida a um carregamento perpendicular ao seu plano médio, é dada por:

$$\pi = \frac{1}{2} \cdot \int_V \left(\sigma_{11} \cdot \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \cdot \varepsilon_{22} + \tau_{12} \cdot \gamma_{12}\right) \cdot dV - \int_\Omega g \cdot u_3 \cdot d\Omega \qquad \text{(A.1)}$$

A diferencial de volume é dada por:

$$dV = dx_3 \cdot d\Omega \qquad \text{(A.2)}$$

Substituindo-se na equação (A.1) as relações de deformação-deslocamento, equação (3.3), as relações constitutivas, equação (3.5), a definição da constante **D**, equação (3.13), e integrando-se ao longo da espessura da placa (A.2), obtêm-se:

$$\begin{aligned}\pi = \int_\Omega \Bigg\{ \frac{1}{2} \cdot D \cdot \Bigg[& \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^{\,2}} + \nu \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^{\,2}} \right) \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^{\,2}} + \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^{\,2}} + \nu \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^{\,2}} \right) \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^{\,2}} + \\ & + 2 \cdot (1-\nu) \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \Bigg] + g \cdot u_3 \Bigg\} \cdot d\Omega \end{aligned} \qquad \text{(A.3)}$$

Colocando a expressão da energia potencial total na forma de um funcional, obtêm-se:

$$\pi = \int_\Omega \mathrm{F}\left(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{u}_3, \mathrm{u}_{3_1}, \mathrm{u}_{3_2}, \mathrm{u}_{3_{11}}, \mathrm{u}_{3_{22}}, \mathrm{u}_{3_{12}}\right) \cdot \mathrm{d}\Omega \qquad \text{(A.4)}$$

sendo **F** dado por:

$$\begin{aligned} F = \frac{1}{2} \cdot D \cdot \Bigg[& \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^{\,2}} + \nu \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^{\,2}} \right) \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^{\,2}} + \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^{\,2}} + \nu \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^{\,2}} \right) \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^{\,2}} + \\ & + 2 \cdot (1-\nu) \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \Bigg] + g \cdot u_3 \end{aligned} \qquad \text{(A.5)}$$

Aplicando-se o cálculo variacional, obtêm-se:

$$\delta\pi = \int_\Omega \left(\frac{\partial F}{\partial u_3} \cdot \delta u_3 + \frac{\partial F}{\partial u_{3_{11}}} \cdot \delta u_{3_{11}} + \frac{\partial F}{\partial u_{3_{22}}} \cdot \delta u_{3_{22}} + \frac{\partial F}{\partial u_{3_{12}}} \cdot \delta u_{3_{12}} \right) \cdot d\Omega \qquad \text{(A.6)}$$

Os diferenciais da equação (A.6) podem ser escritos da seguinte forma:

$$\frac{\partial F}{\partial u_{3_{ij}}} \cdot \delta u_{3_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial u_{3_{ij}}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\delta u_3) \tag{A.7}$$

Aplicando-se a definição de derivada do produto de duas funções na equação (A.7), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u_{3_{ij}}} \cdot \delta u_{3_{ij}} = \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial F}{\partial u_{3_{ij}}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}(\delta u_3)\right] - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{3_{ij}}}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}(\delta u_3) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial F}{\partial u_{3_{ij}}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(\delta u_3)\right] - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{3_{ij}}}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(\delta u_3) \right\} \end{aligned} \tag{A.8}$$

Substituindo-se a equação (A.8) na equação (A.6), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \delta\pi = \int_\Omega \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial u_{3_{11}}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}(\delta u_3)\right] - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{3_{11}}}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}(\delta u_3) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial u_{3_{22}}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}(\delta u_3)\right] - \right. \\ - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{3_{22}}}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}(\delta u_3) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial u_{3_{12}}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}(\delta u_3)\right] - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{3_{12}}}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}(\delta u_3) + \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial u_{3_{12}}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}(\delta u_3)\right] - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{3_{12}}}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}(\delta u_3) + \frac{\partial F}{\partial u_3} \cdot \delta u_3 \right\} \cdot d\Omega \end{aligned} \tag{A.9}$$

Transformando-se parte da integral de domínio da equação (A.9) em uma integral de contorno, obtêm-se:

$$\delta\pi = \int_\Omega \left\{ -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{3_{11}}}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}(\delta u_3) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{3_{22}}}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}(\delta u_3) - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{3_{12}}}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}(\delta u_3) - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{3_{12}}}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}(\delta u_3) + \frac{\partial F}{\partial u_3}\cdot\delta u_3 \right\}\cdot d\Omega + \int_\Gamma \left\{ \frac{\partial F}{\partial u_{3_{11}}}\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}(\delta u_3)\cdot\cos\alpha + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial F}{\partial u_{3_{22}}}\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}(\delta u_3)\cdot\operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial F}{\partial u_{3_{12}}}\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}(\delta u_3)\cdot\operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial F}{\partial u_{3_{12}}}\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}(\delta u_3)\cdot\cos\alpha \right\}\cdot d\Gamma \tag{A.10}$$

sendo $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$ os cossenos diretores do vetor normal ao contorno.

Realizando-se as derivadas do funcional **F** da equação (A.10), obtêm-se:

$$\delta\pi = \int_\Omega \left\{ -\frac{\partial}{\partial x_1}\left[D\cdot\left(u_{3_{11}} + \nu\cdot u_{3_{22}}\right)\right]\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}(\delta u_3) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left[D\cdot\left(u_{3_{22}} + \nu\cdot u_{3_{11}}\right)\right]\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}(\delta u_3) - \right.$$
$$\left. -\frac{\partial}{\partial x_2}\left[D\cdot(1-\nu)\cdot u_{3_{12}}\right]\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}(\delta u_3) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left[D\cdot(1-\nu)\cdot u_{3_{12}}\right]\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}(\delta u_3) + g\cdot\delta u_3 \right\}\cdot d\Omega +$$
$$+ \int_\Gamma \left\{ D\cdot\left(u_{3_{11}} + \nu\cdot u_{3_{22}}\right)\cdot\cos\alpha\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}(\delta u_3) + D\cdot\left(u_{3_{22}} + \nu\cdot u_{3_{11}}\right)\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}(\delta u_3) + \right.$$
$$\left. + D\cdot(1-\nu)\cdot u_{3_{12}}\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}(\delta u_3) + D\cdot(1-\nu)\cdot u_{3_{12}}\cdot\cos\alpha\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}(\delta u_3) \right\}\cdot d\Gamma \tag{A.11}$$

Substituindo-se na equação (A.11) as equações (3.12), obtêm-se:

$$\delta\pi = \int_\Omega \left\{ \left(\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}(\delta u_3) + \left(\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}(\delta u_3) + g\cdot\delta u_3 \right\}\cdot d\Omega +$$
$$- \int_\Gamma \left\{ \left(M_{11}\cdot\cos\alpha + M_{12}\cdot\operatorname{sen}\alpha\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}(\delta u_3) + \left(M_{22}\cdot\operatorname{sen}\alpha + M_{12}\cdot\cos\alpha\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}(\delta u_3) \right\}\cdot d\Gamma \tag{A.12}$$

Utilizando-se as equações (3.9) e (3.10) na integral de domínio da equação (A.12), obtêm-se:

$$\delta\pi = \int_\Omega \left\{ Q_{11} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}(\delta u_3) + Q_{22} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}(\delta u_3) + g \cdot \delta u_3 \right\} \cdot d\Omega -$$
$$- \int_\Gamma \left\{ (M_{11} \cdot \cos\alpha + M_{12} \cdot \operatorname{sen}\alpha) \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}(\delta u_3) + (M_{22} \cdot \operatorname{sen}\alpha + M_{12} \cdot \cos\alpha) \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}(\delta u_3) \right\} \cdot d\Gamma \quad \text{(A.13)}$$

Sabe-se que:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\delta u_3) = \frac{\partial}{\partial n}(\delta u_3) \cdot \cos\alpha - \frac{\partial}{\partial s}(\delta u_3) \cdot \operatorname{sen}\alpha \quad \text{(A.14a)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(\delta u_3) = \frac{\partial}{\partial n}(\delta u_3) \cdot \operatorname{sen}\alpha + \frac{\partial}{\partial s}(\delta u_3) \cdot \cos\alpha \quad \text{(A.14b)}$$

Substituindo-se as equações (A.14) na integral de contorno da equação (A.13) e aplicando-se a regra do produto das derivadas na integral de domínio desta mesma equação, obtêm-se:

$$\delta\pi = \int_\Omega \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(Q_{11} \cdot \delta u_3) - \frac{\partial Q_{11}}{\partial x_1} \cdot \delta u_3 + \frac{\partial}{\partial x_2}(Q_{22} \cdot \delta u_3) - \frac{\partial Q_{22}}{\partial x_2} \cdot \delta u_3 + g \cdot \delta u_3 \right\} \cdot d\Omega +$$
$$+ \int_\Gamma \left\{ \left(- M_{11} \cdot \cos^2\alpha - 2 \cdot M_{12} \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha - M_{22} \cdot \operatorname{sen}^2\alpha\right) \cdot \frac{\partial}{\partial n}(\delta u_3) + \right. \quad \text{(A.15)}$$
$$\left. + \left[(-M_{11} - M_{22}) \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha + M_{12} \cdot \left(\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha\right)\right] \cdot \frac{\partial}{\partial s}(\delta u_3) \right\} \cdot d\Gamma$$

Utilizando-se as equações (3.21) na equação (A.15) e transformando-se parte da integral de domínio em integral de contorno, obtêm-se:

$$\delta\pi = \int_\Omega \left\{ - \frac{\partial Q_{11}}{\partial x_1} \cdot \delta u_3 - \frac{\partial Q_{22}}{\partial x_2} \cdot \delta u_3 + g \cdot \delta u_3 \right\} \cdot d\Omega +$$
$$+ \int_\Gamma \left\{ - M_n \cdot \frac{\partial}{\partial n}(\delta u_3) - M_{ns} \cdot \frac{\partial}{\partial s}(\delta u_3) + (Q_{11} \cdot \cos\alpha + Q_{22} \cdot \operatorname{sen}\alpha) \cdot \delta u_3 \right\} \cdot d\Gamma \quad \text{(A.16)}$$

Substituindo-se a equação (3.22a) na equação (A.16), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \delta\pi = & \int_\Omega \left\{ -\frac{\partial Q_{11}}{\partial x_1}\cdot \delta u_3 - \frac{\partial Q_{22}}{\partial x_2}\cdot \delta u_3 + g\cdot \delta u_3 \right\}\cdot d\Omega + \\ & + \int_\Gamma \left\{ -M_n \cdot \frac{\partial}{\partial n}(\delta u_3) - M_{ns}\cdot \frac{\partial}{\partial s}(\delta u_3) + Q_n \cdot \delta u_3 \right\}\cdot d\Gamma \end{aligned} \tag{A.17}$$

Como a variação da energia potencial total tem que ser igual a zero, obtêm-se:

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \left\{ -\frac{\partial Q_{11}}{\partial x_1}\cdot \delta u_3 - \frac{\partial Q_{22}}{\partial x_2}\cdot \delta u_3 + g\cdot \delta u_3 \right\}\cdot d\Omega + \\ & + \int_\Gamma \left\{ -M_n \cdot \frac{\partial}{\partial n}(\delta u_3) - M_{ns}\cdot \frac{\partial}{\partial s}(\delta u_3) + Q_n \cdot \delta u_3 \right\}\cdot d\Gamma = 0 \end{aligned} \tag{A.18}$$

A integral de domínio da equação (A.18) representa a equação de equilíbrio de uma placa submetida à flexão e a integral de contorno representa o equilíbrio que deve ser satisfeito no contorno da placa de onde pode-se obter a cortante equivalente.

A.3. Cálculo Variacional Aplicado à Não-Linearidade Geométrica Associada às Placas

A energia potencial total de uma placa submetida a um carregamento paralelo ao seu plano médio, é dada por:

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2}\cdot \int_V (\sigma_{11}\cdot \varepsilon_{11} + \sigma_{22}\cdot \varepsilon_{22} + \tau_{12}\cdot \gamma_{12})\cdot dV - \\ & - \frac{1}{2}\cdot \int_\Omega \left(N_{11}\cdot {u_{3_1}}^2 + N_{22}\cdot {u_{3_2}}^2 + 2\cdot N_{12}\cdot u_{3_1}\cdot u_{3_2} \right)\cdot d\Omega \end{aligned} \tag{A.19}$$

Chamando-se a segunda integral da equação (A.19) como sendo π^*, têm-se:

$$\pi^* = -\frac{1}{2} \cdot \int_\Omega \left(N_{11} \cdot u_{3_1}{}^2 + N_{22} \cdot u_{3_2}{}^2 + 2 \cdot N_{12} \cdot u_{3_1} \cdot u_{3_2} \right) \cdot d\Omega \tag{A.20}$$

Colocando-se a expressão de π^* na forma de um funcional, obtêm-se:

$$\pi^* = \int_\Omega \mathrm{F}\left(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{u}_3, \mathrm{u}_{3_1}, \mathrm{u}_{3_2}, \mathrm{u}_{3_{11}}, \mathrm{u}_{3_{22}}, \mathrm{u}_{3_{12}} \right) \cdot \mathrm{d}\Omega \tag{A.21}$$

sendo $\mathbf{F}^*$ dado por:

$$F^* = -\frac{1}{2} \cdot \left(N_{11} \cdot u_{3_1}{}^2 + N_{22} \cdot u_{3_2}{}^2 + 2 \cdot N_{12} \cdot u_{3_1} \cdot u_{3_2} \right) \tag{A.22}$$

Aplicando-se o cálculo variacional em (A.22), obtêm-se:

$$\delta\pi^* = \int_\Omega \left(\frac{\partial F^*}{\partial u_{3_1}} \cdot \delta u_{3_1} + \frac{\partial F^*}{\partial u_{3_2}} \cdot \delta u_{3_2} \right) \cdot d\Omega \tag{A.23}$$

Realizando-se as derivadas do funcional $\mathbf{F}^*$, obtêm-se:

$$\delta\pi^* = -\int_\Omega \left(N_{11} \cdot u_{3_1} \cdot \frac{\partial \delta u_3}{\partial x_1} + N_{12} \cdot u_{3_2} \cdot \frac{\partial \delta u_3}{\partial x_1} + N_{22} \cdot u_{3_2} \cdot \frac{\partial \delta u_3}{\partial x_2} + N_{12} \cdot u_{3_1} \cdot \frac{\partial \delta u_3}{\partial x_2} \right) \cdot d\Omega \tag{A.24}$$

Aplicando-se a definição da derivada do produto na equação (A.24), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \delta\pi^* = -\int_\Omega \Bigg[& \frac{\partial}{\partial x_1}\left(N_{11} \cdot u_{3_1} \cdot \delta u_3 \right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(N_{11} \cdot u_{3_1} \right) \cdot \delta u_3 + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(N_{12} \cdot u_{3_2} \cdot \delta u_3 \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(N_{12} \cdot u_{3_2} \right) \cdot \delta u_3 + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(N_{22} \cdot u_{3_2} \cdot \delta u_3 \right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(N_{22} \cdot u_{3_2} \right) \cdot \delta u_3 + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(N_{12} \cdot u_{3_1} \cdot \delta u_3 \right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(N_{12} \cdot u_{3_1} \right) \cdot \delta u_3 \Bigg] \cdot d\Omega \end{aligned} \tag{A.25}$$

Transformando-se parte da integral da equação (A.25) em uma integral de contorno, obtêm-se:

$$\delta\pi^* = -\int_\Gamma \left[\left(N_{11}\cdot u_{3_1} + N_{12}\cdot u_{3_2}\right)\cdot\cos\alpha + \left(N_{22}\cdot u_{3_2} + N_{12}\cdot u_{3_1}\right)\cdot \text{sen}\,\alpha\right]\cdot\delta u_3\cdot d\Gamma$$
$$+\int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(N_{11}\cdot u_{3_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(N_{12}\cdot u_{3_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(N_{22}\cdot u_{3_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(N_{12}\cdot u_{3_1}\right)\right]\cdot\delta u_3\cdot d\Omega \tag{A.26}$$

Se $\mathbf{N}_{ij}$ for considerado constante em relação às direções $\mathbf{x}_i$ e $\mathbf{x}_j$, obtêm-se:

$$\delta\pi^* = -\int_\Gamma \left[\left(N_{11}\cdot u_{3_1} + N_{12}\cdot u_{3_2}\right)\cdot\cos\alpha + \left(N_{22}\cdot u_{3_2} + N_{12}\cdot u_{3_1}\right)\cdot \text{sen}\,\alpha\right]\cdot\delta u_3\cdot d\Gamma + \int_\Omega N_{ij}\cdot u_{3_{ij}}\cdot\delta u_3\cdot d\Omega \tag{A.27}$$

Desta forma, a variação da energia potencial total para o caso de placas com o efeito da não linearidade geométrica é a soma da equação (A.27) com o desenvolvimento da integral de volume da equação (A.19), ou seja:

$$\delta\pi = \int_\Omega \left\{\left[-\frac{\partial Q_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial Q_{22}}{\partial x_2} + N_{ij}\cdot u_{3_{ij}}\right]\cdot\delta u_3\right\}\cdot d\Omega +$$
$$+\int_\Gamma \left\{-M_n\cdot\frac{\partial}{\partial n}(\delta u_3) - M_{ns}\cdot\frac{\partial}{\partial s}(\delta u_3) + Q_n\cdot\delta u_3 - \right.$$
$$\left. -\left[\left(N_{11}\cdot u_{3_1} + N_{12}\cdot u_{3_2}\right)\cdot\cos\alpha + \left(N_{22}\cdot u_{3_2} + N_{12}\cdot u_{3_1}\right)\cdot \text{sen}\,\alpha\right]\cdot\delta u_3\right\}\cdot d\Gamma \tag{A.28}$$

Como o diferencial da energia potencial total tem que ser igual a zero, obtêm-se:

$$\int_\Omega \left\{\left[-\frac{\partial Q_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial Q_{22}}{\partial x_2} + N_{ij}\cdot u_{3_{ij}}\right]\cdot\delta u_3\right\}\cdot d\Omega +$$
$$+\int_\Gamma \left\{-M_n\cdot\frac{\partial}{\partial n}(\delta u_3) - M_{ns}\cdot\frac{\partial}{\partial s}(\delta u_3) + Q_n\cdot\delta u_3 - \right.$$
$$\left. -\left[\left(N_{11}\cdot u_{3_1} + N_{12}\cdot u_{3_2}\right)\cdot\cos\alpha + \left(N_{22}\cdot u_{3_2} + N_{12}\cdot u_{3_1}\right)\cdot \text{sen}\,\alpha\right]\cdot\delta u_3\right\}\cdot d\Gamma = 0 \tag{A.28}$$

A integral de domínio da equação (A.28) representa a equação de equilíbrio de uma placa submetida ao efeito da não linearidade geométrica e a integral de contorno representa o equilíbrio que deve ser satisfeito no contorno da placa.

Utilizando-se as equações (3.17), a equação de equilíbrio da placa submetida à não linearidade geométrica é dada por:

$$D \cdot u_{3,iijj} + N_{ij} \cdot u_{3,ij} = 0 \tag{A.29}$$

A.4. Cálculo Variacional Aplicado à Dinâmica Associada às Placas

No caso da adição do efeito dinâmico na análise de estruturas, recorre-se ao princípio de Hamilton. Este princípio rege que a variação da diferença da energia potencial e cinética somadas a variação do trabalho das forças não conservativas tem que ser igual a zero, ou seja:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - \pi) \cdot dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} \cdot dt = 0 \tag{A.30}$$

sendo:

T: a energia cinética total do sistema;

π: a energia potencial total do sistema, incluindo a energia de deformação e a energia potencial de forças externas conservativas;

W_{nc}: trabalho das forças não conservativas que atuam no sistema;

δ: variação das energias no intervalo de tempo indicado.

A energia cinética total do sistema, no caso de placas submetidas à vibração livre, pode ser dada por:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \int_{\Omega} \rho_e \cdot \dot{u}_3^{\,2} \cdot d\Omega \tag{A.31}$$

A energia potencial pode ser expressa por:

$$\begin{aligned}\pi = \frac{1}{2} \cdot D \cdot \int_{\Omega} \Bigg[& \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^{\,2}} + \nu \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^{\,2}} \right) \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^{\,2}} + \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^{\,2}} + \nu \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^{\,2}} \right) \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^{\,2}} + \\ & + 2 \cdot (1 - \nu) \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \Bigg] \cdot d\Omega\end{aligned} \tag{A.32}$$

Colocando a expressão da diferença da energia potencial total e da energia cinética total na forma de um funcional, obtêm-se:

$$H = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(\dot{u}_3, u_{3_{11}}, u_{3_{22}}, u_{3_{12}}\right) \cdot dt \tag{A.33}$$

sendo:

$$\mathcal{L} = T - \pi \tag{A.34}$$

Segundo o princípio de Hamilton, obtêm-se:

$$\delta H = 0 \tag{A.35}$$

ou ainda:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{3_{11}}} \cdot \delta u_{3_{11}} \cdot dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{3_{22}}} \cdot \delta u_{3_{22}} \cdot dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{3_{12}}} \cdot \delta u_{3_{12}} \cdot dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_3} \cdot \delta \dot{u}_3 \cdot dt = 0 \tag{A.36}$$

Realizando uma integração por partes na parcela que contém a velocidade na direção de u_3, obtém-se:

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{3_{11}}}\cdot\delta u_{3_{11}}\cdot dt+\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{3_{22}}}\cdot\delta u_{3_{22}}\cdot dt+\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{3_{12}}}\cdot\delta u_{3_{12}}\cdot dt+$$
$$+\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_3}\cdot\delta u_3\right]_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_3}\right)\cdot\delta u_3\cdot dt=0 \qquad \text{(A.37)}$$

mas:

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_3}\cdot\delta u_3\right]_{t_1}^{t_2}=0 \qquad \text{(A.38)}$$

obtendo-se desta forma:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{3_{11}}}\cdot\delta u_{3_{11}}+\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{3_{22}}}\cdot\delta u_{3_{22}}+\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{3_{12}}}\cdot\delta u_{3_{12}}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_3}\right)\cdot\delta u_3\right]\cdot dt=0 \qquad \text{(A.39)}$$

Anteriormente, no item A.2, demonstrou-se que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{3_{11}}}\cdot\delta u_{3_{11}}+\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{3_{22}}}\cdot\delta u_{3_{22}}+\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{3_{12}}}\cdot\delta u_{3_{12}}=$$
$$=\int_\Omega\left\{-\frac{\partial Q_{11}}{\partial x_1}\cdot\delta u_3-\frac{\partial Q_{22}}{\partial x_2}\cdot\delta u_3\right\}\cdot d\Omega+ \qquad \text{(A.40)}$$
$$+\int_\Gamma\left\{-M_n\cdot\frac{\partial}{\partial n}(\delta u_3)-M_{ns}\cdot\frac{\partial}{\partial s}(\delta u_3)+Q_n\cdot\delta u_3\right\}\cdot d\Gamma$$

Também se sabe que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_3}\right)\cdot\delta u_3=\int_\Omega\rho_e\cdot\ddot{u}_3\cdot\delta u_3\cdot d\Omega \qquad \text{(A.41)}$$

Substituindo as equações A.40 e A.41 em A.39, obtém-se:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_{\Omega}\left[-\frac{\partial Q_{11}}{\partial x_1}\cdot\delta u_3-\frac{\partial Q_{22}}{\partial x_2}\cdot\delta u_3-\rho_e\cdot\ddot{u}_3\cdot\delta u_3\right]\cdot d\Omega+\right.$$
$$\left.+\int_{\Gamma}\left[-M_n\cdot\frac{\partial}{\partial n}(\delta u_3)-M_{ns}\cdot\frac{\partial}{\partial s}(\delta u_3)+Q_n\cdot\delta u_3\right]\cdot d\Gamma\right\}\cdot dt=0 \tag{A.42}$$

A integral de domínio da equação (A.42) representa a equação de equilíbrio de uma placa submetida ao efeito de vibração livre e a integral de contorno representa o equilíbrio que deve ser satisfeito no contorno da placa.

Utilizando-se as equações (3.17), a equação de equilíbrio da placa submetida à vibração livre é dada por:

$$D\cdot\nabla^4 U_3+\rho_e\cdot h\cdot\frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2}=0 \tag{A.43}$$

sendo:

$$U_3(x_1,x_2,t)=u_3(x_1,x_2)\cdot\cos(\omega\cdot t-\phi) \tag{A.44}$$