

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL

**Uma Análise das Soluções Fundamentais Aplicáveis às
Placas Espessas pelas Teorias de Reissner e Mindlin e suas
Relações com a Teoria Clássica para o Uso no Método dos
Elementos de Contorno**

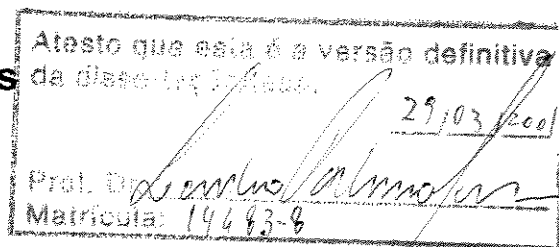
Rebecca Cardelli de Andrade

Orientador: Prof. Dr. Leandro Palermo Junior

Dissertação de Mestrado apresentada à
Comissão de pós-graduação da Faculdade de
Engenharia Civil da Universidade Estadual de
Campinas, como parte dos requisitos para a
obtenção do título de Mestre em Engenharia
Civil, na área de Estruturas.

Campinas

2001



200112305

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

An24a	Andrade, Rebecca Cardelli Uma análise das soluções fundamentais aplicáveis às placas espessas pelas teorias de Reissner e Mindlin e suas relações com a teoria clássica para o uso no método dos elementos de contorno / Rebecca Cardelli de Andrade. --Campinas, SP: [s.n.], 2001. Orientador: Leandro Palermo Junior. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil. 1. Métodos de elementos de contorno. 2. Placas (Engenharia). I. Palermo Junior, Leandro. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil. III. Título.
-------	--

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

**Uma Análise das Soluções Fundamentais Aplicáveis às
Placas Espessas pelas Teorias de Reissner e Mindlin e suas
Relações com a Teoria Clássica para o Uso no Método dos
Elementos de Contorno**

Rebecca Cardelli de Andrade

**Campinas
2001**

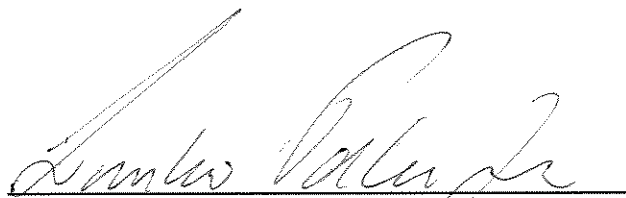


UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL

**Uma Análise das Soluções Fundamentais Aplicáveis às
Placas Espessas pelas Teorias de Reissner e Mindlin e suas
Relações com a Teoria Clássica para o Uso no Método dos
Elementos de Contorno**

Rebecca Cardelli de Andrade

Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:



Prof. Dr. Leandro Palermo Junior
Presidente e Orientador/ FEC – UNICAMP



Prof. Dr. João Mansur
COPPE – UFRJ



Prof. Dr. Aloísio Ernesto Assan
FEC - UNICAMP

Campinas, 21 de Fevereiro de 2001.



A meus pais e ao André, de coração...

Agradecimentos

Ao meu marido *André*, pelo amor e incentivo que me foi dado para realização do Mestrado.

Aos meus pais, *Paulo e Sônia*, pela dedicação e apoio durante todos esses anos de estudo.

A minha irmã *Paola*, pela paciência durante as horas de intenso estudo.

A toda a minha família e amigos, que souberam reconhecer todo meu esforço para a concretização deste trabalho.

Ao colega *Rogério Simões*, pelo auxílio prestado no decorrer desta pesquisa.

Ao meu orientador *Prof. Leandro Palermo Junior*, pelo apoio dado durante a realização deste trabalho.

Aos professores *Aloísio Ernesto Assan e Nilson Tadeu Mascia*, pela colaboração dada a esta pesquisa.

À Faculdade de Engenharia Civil da UNICAMP, pela oportunidade que me foi oferecida.

À FAPESP – Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, pelo auxílio oferecido e pela confiança no meu trabalho.

Sumário

LISTA DE FIGURAS	i
LISTA DE TABELAS	iv
LISTA DE GRÁFICOS	viii
LISTA DE SÍMBOLOS	ix
RESUMO	xvi
ABSTRACT	xvii
CAPÍTULO 1 <i>Introdução</i>	1
1.1 Introdução	1
1.2 Revisão Bibliográfica	4
1.2.1 O Estudo de Placas	4
1.2.2 A Análise de Placas Através do Método dos Elementos de Contorno	7
CAPÍTULO 2 <i>Teoria da Elasticidade Linear</i>	13
2.1 Introdução	13
2.2 Relação Deformação-Deslocamento	13
2.3 Lei Constitutiva	15
2.4 Equações de Equilíbrio	16
2.5 Coordenadas Curvilíneas	17

CAPÍTULO 3	<i>Teoria Clássica de Placas de Espessura Constante</i>	22
3.1	Introdução e Hipóteses Básicas	22
3.2	Equações Constitutivas	24
3.3	Condições de Contorno	31
3.4	Equações Constitutivas em um Sistema de Coordenadas Cilíndricas	33
3.5	A Solução Fundamental	39
CAPÍTULO 4	<i>Flexão de Placas Utilizando a Formulação de Reissner/Mindlin</i>	42
4.1	Introdução	42
4.2	Hipóteses Básicas	43
4.3	Equações Constitutivas	44
4.4	Equações Constitutivas em Coordenadas Cilíndricas	49
4.5	A Solução Fundamental pela Teoria de Mindlin	52
4.6	Deslocamentos e Esforços Fundamentais Generalizados	58
4.7	A Solução Fundamental da Teoria de Reissner	61
4.8	Condições de Contorno	68
CAPÍTULO 5	<i>Equações Integrais para Placas</i>	70
5.1	Introdução	70
5.2	Equações Integrais para a Teoria Clássica	71
5.2.1	Equação Integral em Coordenadas Normais e Tangenciais para o Deslocamento em Pontos do Domínio	71
5.2.2	Equação Integral em Coordenadas Normais e Tangenciais para o Deslocamento em Pontos do Contorno	78
5.2.3	Equação Integral em Coordenadas Normais e Tangenciais para Pontos Internos	84
5.2.4	Equações Integrais para Carregamento de Domínio	87
5.3	Equações Integrais para Placas Através da Teoria de Mindlin	90
5.3.1	Equação Integral em Coordenadas Cartesianas para Deslocamentos em Pontos do Domínio	90
5.3.2	Equação Integral em Coordenadas Normais e Tangenciais para Deslocamentos em Pontos do Domínio	94

5.3.3 Equação Integral em Coordenadas Normais e Tangenciais para Esforços em Pontos do Domínio	97
5.3.4 Equações Integrais para Carregamento de Domínio	100
5.4 Equações Integrais para a Teoria de Reissner	103
5.4.1 Equação Integral em Coordenadas Cartesianas para Deslocamentos em Pontos do Domínio	103
5.4.2 Equação Integral em Coordenadas Normais e Tangenciais para Deslocamentos em Pontos do Domínio	104
5.4.3 Equação Integral em Coordenadas Normais e Tangenciais para Esforços em Pontos do Domínio	105
5.4.4 Equações Integrais para Carregamentos Distribuídos	110
 CAPÍTULO 6 <i>Método dos Elementos de Contorno</i>	 114
6.1 Introdução	114
6.2 Discretização no Contorno	115
6.3 Elementos de Contorno	116
6.4 Transformação das Equações Integrais de Placas de Kirchhoff	118
6.4.1 Montagem do Sistema de Equações	122
6.5 Transformação das Equações Integrais de Placas pelas Teorias de Reissner/Mindlin	124
6.5.1 Montagem do Sistema de Equações	126
6.5.2 Deslocamentos em Pontos Internos	128
6.5.3 Esforços em Pontos Internos	130
 CAPÍTULO 7 <i>Exemplos</i>	 132
7.1 Introdução	132
7.2 Características dos programas Computacionais	132
7.3 Exemplos	136
7.3.1 Placas Quadradas	136
7.3.1.1 Placas Finas	136
7.3.1.2 Placas Moderadamente Espessas	148
7.3.2 Placas Circulares	159
7.3.3 Placas Esconsas	165
7.3.4 Cubo	170

CAPÍTULO 8 <i>Uma Formulação Alternativa para a Solução Fundamental de Placas</i>	173
8.1 Introdução	173
8.2 A Equação de Placas	174
8.3 A Solução Fundamental Alternativa para as Placas de Reissner e Mindlin	177
8.3.1 Solução Devido à Carga Unitária	183
8.3.2 Solução Devido Binário Unitário	184
8.4 Programas Usados para Análise Elástica de Placas	188
8.5 Exemplos de Placas com Variação da Constante λ	194
8.5.1 Exemplo de Placas Quadradas	195
8.5.2 Exemplo de Placas Retangulares	227
 CAPÍTULO 9 <i>Conclusões</i>	 235
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	 238

Lista de Figuras

FIGURA 2.1 <i>Deformação de um Sólido</i>	14
FIGURA 2.2 <i>Forças de Volume e Superfície</i>	16
FIGURA 2.3 <i>Sistema de Coordenadas Cilíndricas</i>	18
FIGURA 2.4 <i>Tensões Internas em um Elemento Infinitesimal</i>	20
FIGURA 3.1 <i>Definição do Sistema de Coordenadas</i>	23
FIGURA 3.2 <i>Esforços Atuantes em um Elemento de Placa Sujeito à Flexão</i>	27
FIGURA 3.3 <i>Sistema de Coordenadas NS</i>	29
FIGURA 3.4 <i>Momentos Volventes no Contorno</i>	32
FIGURA 3.5 <i>Sistema de Coordenadas Cilíndricas</i> <i>em Relação ao Sistema Cartesiano</i>	33
FIGURA 3.6 <i>Relação das Coordenadas NS</i> <i>com o Sistema Cartesiano e Cilíndrico</i>	37
FIGURA 3.7 <i>Representação Gráfica do Delta de Dirac</i>	40
FIGURA 4.1 <i>Esboço Gráfico das Funções de Bessel K_0, K_1, I_0 e I_1</i>	57
FIGURA 5.1 <i>Placa Finita Contida em uma Placa Infinita</i>	71
FIGURA 5.2 <i>Canto i do Contorno da Placa</i>	76

FIGURA 5.3 <i>Contorno Circular Acrescentado a um Ponto ξ</i>	79
FIGURA 5.4 <i>Carregamento Distribuído $g(x_1, x_2)$ em um Domínio Ω_g</i>	87
FIGURA 6.1 <i>Discretização do Contorno</i>	115
FIGURA 6.2 <i>Elemento Linear</i>	117
FIGURA 6.3 <i>Representação Gráfica das Funções de Interpolação Linear</i>	117
FIGURA 6.4 <i>Elementos Descontínuos Lineares</i>	118
FIGURA 6.5 <i>Posição do Nó Externo</i>	121
FIGURA 6.6 <i>Deslocamento dos Pontos de Colocação para Nós Duplos</i>	122
FIGURA 7.1 <i>Placa do Exemplo 1</i>	138
FIGURA 7.2 <i>Placa do Exemplo 2</i>	139
FIGURA 7.3 <i>Placa do Exemplo 3</i>	140
FIGURA 7.4 <i>Placa do Exemplo 4</i>	141
FIGURA 7.5 <i>Placa do Exemplo 5</i>	142
FIGURA 7.6 <i>Placa do Exemplo 6</i>	143
FIGURA 7.7 <i>Placa do Exemplo 7</i>	144
FIGURA 7.8 <i>Placa do Exemplo 8</i>	145
FIGURA 7.9 <i>Placa do Exemplo 9</i>	146
FIGURA 7.10 <i>Placa do Exemplo 10</i>	147
FIGURA 7.11 <i>Placa do Exemplo 11</i>	149
FIGURA 7.12 <i>Placa do Exemplo 12</i>	150
FIGURA 7.13 <i>Placa do Exemplo 13</i>	151
FIGURA 7.14 <i>Placa do Exemplo 14</i>	152
FIGURA 7.15 <i>Placa do Exemplo 15</i>	153
FIGURA 7.16 <i>Placa do Exemplo 16</i>	154
FIGURA 7.17 <i>Placa do Exemplo 17</i>	155
FIGURA 7.18 <i>Placa do Exemplo 18</i>	156
FIGURA 7.19 <i>Placa do Exemplo 19</i>	157
FIGURA 7.20 <i>Placa do Exemplo 20</i>	158

FIGURA 7.21 <i>Placa do Exemplo 21</i>	159
FIGURA 7.22 <i>Placa do Exemplo 22</i>	163
FIGURA 7.23 <i>Placa do Exemplo 23</i>	165
FIGURA 7.24 <i>Placa do Exemplo 24</i>	168
FIGURA 7.25 <i>Placa do Exemplo 25</i>	170
FIGURA 8.1 <i>Discretização da Placa Quadrada</i>	195
FIGURA 8.2 <i>Figura do Exemplo 1</i>	197
FIGURA 8.3 <i>Figura do Exemplo 2</i>	210
FIGURA 8.4 <i>Figura do Exemplo 3</i>	214
FIGURA 8.5 <i>Figura do Exemplo 4</i>	217
FIGURA 8.6 <i>Figura do Exemplo 5</i>	220
FIGURA 8.7 <i>Figura do Exemplo 6</i>	224
FIGURA 8.8 <i>Discretização da Placa Retangular</i>	227
FIGURA 8.9 <i>Figura do Exemplo 7</i>	228
FIGURA 8.10 <i>Figura do Exemplo 8</i>	232

Lista de Tabelas

TABELA 7.1 Resultados Obtidos no Ponto P do Exemplo 1 (N, m)	138
TABELA 7.2 Resultados Obtidos nos Pontos P_1 e P_2 do Exemplo 2 (N, m)	139
TABELA 7.3 Resultados Obtidos nos Pontos P_1 e P_2 do Exemplo 3 (N, m)	140
TABELA 7.4 Resultados Obtidos nos Pontos P_1 e P_2 Exemplo 4 (N, m)	141
TABELA 7.5 Resultados Obtidos nos Pontos P_1 e P_2 do Exemplo 5 (N, m)	142
TABELA 7.6 Resultados Obtidos nos Pontos P_1 , P_2 e P_3 do Exemplo 6 (N, m)	143
TABELA 7.7 Resultados Obtidos nos Pontos P_1 , P_2 e P_3 do Exemplo 7 (N, m)	144
TABELA 7.8 Resultados Obtidos no Ponto P do Exemplo 8 (N, m)	145
TABELA 7.9 Resultados Obtidos nos Pontos P_1 , P_2 e P_3 do Exemplo 9 (N, m)	146
TABELA 7.10 Resultados Obtidos nos Pontos P_1 e P_2 do Exemplo 10 (N, m)	147
TABELA 7.11 Resultados Obtidos para o Exemplo 11 (N, m)	149
TABELA 7.12 Resultados Obtidos nos Pontos P_1 e P_2 para o Exemplo 12 (N, m)	150
TABELA 7.13 Resultados Obtidos nos Pontos P_1 e P_2 para o Exemplo 13 (N, m)	151
TABELA 7.14 Resultados Obtidos nos Pontos P_1 e P_2 para o Exemplo 14 (N, m)	152
TABELA 7.15 Resultados Obtidos nos Pontos P_1 e P_2 para o Exemplo 15 (N, m)	153
TABELA 7.16 Resultados Obtidos nos Pontos P_1, P_2 e P_3 para o Exemplo 16 (N, m)	154
TABELA 7.17 Resultados Obtidos nos Pontos P_1, P_2 e P_3 para o Exemplo 17 (N, m)	155
TABELA 7.18 Resultados Obtidos no Pontos P para o Exemplo 18 (N, m)	156
TABELA 7.19 Resultados Obtidos nos Pontos P_1, P_2 e P_3 para o Exemplo 19 (N, m)	157

TABELA 7.20 Resultados Obtidos nos Pontos P_1 e P_2 para o Exemplo 20 (N, m)	158
TABELA 7.21 Comparação do Resultado Obtido no Programa de Elementos de Contorno com o Valor Teórico e com os Resultados Obtidos pela Referência A	160
TABELA 7.22 Comparação do Resultado Obtido no Programa de Elementos de Contorno (MEC) para Três Discretizações: 64 Nós e 64 Elementos (64/64), 32 Nós e 32 Elementos (32/32) e 64 Nós e 32 Elementos (64/32)	161
TABELA 7.23 Comparação dos Resultados Obtidos para um Cubo Engastado	171
TABELA 7.24 Resultados Obtidos para Diferentes Discretizações de um Cubo Engastado	172
TABELA 8.1 Resultados Obtidos nos 11 Pontos do Lado 4 e no Ponto Central da Placa (N, m) – Condição HARD ($h_1=0,2$ m)	197
TABELA 8.2 Resultados Obtidos nos 11 Pontos do Lado 4 e no Ponto Central da Placa (N, m) – Condição HARD ($h_2=0,34$ m)	198
TABELA 8.3 Resultados Obtidos nos 11 Pontos do Lado 4 e no Ponto Central da Placa (N, m) – Condição HARD ($h_3=0,06$ m)	199
TABELA 8.4 Resultados Obtidos nos 11 Pontos do Lado 4 e no Ponto Central da Placa (N, m) – Condição SOFT ($h_1=0,2$ m)	200
TABELA 8.5 Resultados Obtidos nos 11 Pontos do Lado 4 e no Ponto Central da Placa (N, m) – Condição SOFT ($h_2=0,34$ m)	201
TABELA 8.6 Resultados Obtidos nos 11 Pontos do Lado 4 e no Ponto Central da Placa (N, m) – Condição SOFT ($h_3=0,06$ m)	202
TABELA 8.7 Resultados Obtidos nos Pontos do Engaste, na Borda Livre e no Ponto Central da Placa (N, m) – Condição HARD ($h_1=0,2$ m)	210
TABELA 8.8 Resultados Obtidos nos Pontos do Engaste, na Borda Livre e no Ponto Central da Placa (N, m) – Condição HARD ($h_2=0,34$ m)	211
TABELA 8.9 Resultados Obtidos nos Pontos do Engaste, na Borda Livre e no Ponto Central da Placa (N, m) – Condição HARD ($h_3=0,06$ m)	212

TABELA 8.10 Resultados Obtidos nos Pontos do Lado 4, no Lado 1 e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição SOFT ($h_1=0,2$ m)	214
TABELA 8.11 Resultados Obtidos nos Pontos do Lado 4, no Lado 1 e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição SOFT ($h_2=0,34$ m)	215
TABELA 8.12 Resultados Obtidos nos Pontos do Lado 4, no Lado 1 e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição SOFT ($h_3=0,06$ m)	216
TABELA 8.13 Resultados Obtidos nos Pontos do Apoio, na Borda Livre e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição HARD ($h_1=0,2$ m)	217
TABELA 8.14 Resultados Obtidos nos Pontos do Apoio, na Borda Livre e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição HARD ($h_2=0,34$ m)	218
TABELA 8.15 Resultados Obtidos nos Pontos do Apoio, na Borda Livre e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição HARD ($h_3=0,06$ m)	218
TABELA 8.16 Resultados Obtidos nos Pontos do Lado 4, na Borda Livre e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição HARD ($h_1=0,2$ m)	220
TABELA 8.17 Resultados Obtidos nos Pontos do Lado 4, na Borda Livre e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição HARD ($h_2=0,34$ m)	221
TABELA 8.18 Resultados Obtidos nos Pontos do Lado 4, na Borda Livre e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição HARD ($h_3=0,06$ m)	222
TABELA 8.19 Resultados Obtidos nos Pontos do Engaste, na Borda Livre e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição HARD ($h_1=0,2$ m)	224
TABELA 8.20 Resultados Obtidos nos Pontos do Engaste, na Borda Livre e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição HARD ($h_2=0,34$ m)	225
TABELA 8.21 Resultados Obtidos nos Pontos do Engaste, na Borda Livre e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição HARD ($h_3=0,06$ m)	226
TABELA 8.22 Resultados Obtidos nos Pontos do Engaste, na Borda Livre e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição HARD ($h_1=0,2$ m)	228
TABELA 8.23 Resultados Obtidos nos Pontos do Engaste, na Borda Livre e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição HARD ($h_2=0,34$ m)	229

TABELA 8.24 <i>Resultados Obtidos nos Pontos do Engaste, na Borda Livre e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição HARD ($h_3=0,06$ m)</i>	230
TABELA 8.25 <i>Resultados Obtidos nos Pontos do Engaste, na Borda Livre e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição HARD ($h_1=0,2$ m)</i>	232
TABELA 8.26 <i>Resultados Obtidos nos Pontos do Engaste, na Borda Livre e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição HARD ($h_2=0,34$ m)</i>	233
TABELA 8.27 <i>Resultados Obtidos nos Pontos do Engaste, na Borda Livre e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição HARD ($h_3=0,06$ m)</i>	233

Lista de Gráficos

GRÁFICO 7.1 <i>Comparação do Momento M_{rr}</i>	163
GRÁFICO 7.2 <i>Comparação do Momento $M_{\theta\theta}$</i>	164
GRÁFICO 7.3 <i>Comparação do Cortante Q_r</i>	164
GRÁFICO 7.4 <i>Comparação do Momento M_{11}</i>	166
GRÁFICO 7.5 <i>Comparação do Momento M_{12}</i>	166
GRÁFICO 7.6 <i>Comparação do Momento M_{22}</i>	167
GRÁFICO 8.1 <i>Cortante no Lado 4 da Placa de Espessa 10%</i>	203
GRÁFICO 8.2 <i>Momento no Lado 4 da Placa de Espessa 10%</i>	203
GRÁFICO 8.3 <i>Cortante no Lado 4 da Placa de Espessa 3%</i>	204
GRÁFICO 8.4 <i>Momento no Lado 4 da Placa de Espessa 3%</i>	204
GRÁFICO 8.5 <i>Cortante no Lado 4 da Placa para a Constante de Danson</i>	205
GRÁFICO 8.6 <i>Momento no Lado 4 da Placa para a Constante de Danson</i>	205
GRÁFICO 8.7 <i>Cortante no Lado 4 da Placa para a Constante de Weeën</i>	206
GRÁFICO 8.8 <i>Momento no Lado 4 da Placa para a Constante de Weeën</i>	206
GRÁFICO 8.9 <i>Cortante no Lado 4 da Placa para a Constante de Benzine</i>	207
GRÁFICO 8.10 <i>Momento no Lado 4 da Placa para a Constante de Benzine</i>	207
GRÁFICO 8.11 <i>Cortante no Lado 4 da Placa para a Constante Igual a 1</i>	208
GRÁFICO 8.12 <i>Momento no Lado 4 da Placa para a Constante Igual a 1</i>	208

Lista de Símbolos

A seguir são listados os principais símbolos utilizados no desenvolvimento deste trabalho:

∇^2	: operador <i>Laplaciano</i> , $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$
α	: ângulo entre vetor n normal ao contorno e os eixos coordenados
β	: ângulo entre o raio vetor r e o vetor n normal ao contorno da placa
β_c	: angulosidade do canto da placa
Γ	: coordenada que percorre o contorno da placa
Γ_1, Γ_2	: coordenadas dos limites do contorno no qual se realiza a integração
Γ_∞	: contorno infinito
$\Gamma_\varepsilon, \Gamma^*$	: regiões do contorno
Γ_j	: elemento de contorno
Ω	: coordenada de domínio
Ω_g	: área do carregamento distribuído
Ω_ε	: região do domínio
Ω_∞	: domínio infinito

Δ	: divergente de $\underline{\psi}$
$\underline{\Delta}$	: dilatação
$\Delta(x - \xi)$	: função delta de <i>Dirac</i> no argumento $(\mathbf{x} - \xi)$
Δ^*_{ij}	: componentes do operador de <i>Navier</i>
Φ	: função potencial
ε	: raio do acréscimo dado ao contorno
$\varepsilon_{ij}, \gamma_{ij}$	: deformações normais e cisalhantes
η	: variável que percorre o contorno da placa
η_d	: variável de domínio
η_c	: valor da variável η nos cantos
ρ	: parâmetro constante na teoria de <i>Mindlin</i>
κ	: parâmetro constante na teoria de <i>Mindlin</i>
ν	: coeficiente de <i>Poisson</i>
λ	: parâmetro constante na teoria de <i>Reissner/Mindlin</i>
ξ	: ponto onde se aplica a equação integral
δ_{ij}	: delta de <i>Kronecher</i>
σ_{ij}, τ_{ij}	: tensões internas normais e cisalhantes
$\underline{\varpi}$	: rotação
ω	: rotacional de $\underline{\psi}$
Ψ_i	: funções Ψ para a teoria de <i>Mindlin</i>
ψ_r	: função ψ em relação à r
ψ_θ	: função ψ em relação à θ
Ψ_n	: função Ψ normal ao contorno

Ψ_s	: função Ψ tangencial ao contorno
Ψ_n^*	: valor da solução fundamental de Ψ_n
Ψ_s^*	: valor da solução fundamental de Ψ_s
ψ_-	: vetor da solução singular
A_i	: constantes de integração
$\tilde{A}$	: matriz das variáveis incógnitas
$A(z)$	: função dependente das funções modificadas de <i>Bessel</i>
$B(z)$	: função dependente das funções modificadas de <i>Bessel</i>
B_i	: constante de integração
$\tilde{B}$	: matriz das variáveis conhecidas
C_i	: constantes de integração
C_{ijkl}	: tensor das componentes elásticas do material
$C(\xi)$	: função que fornece o deslocamento do ponto onde se aplica a equação integral
D	: módulo de rigidez à flexão da placa
E	: módulo de elasticidade transversal
F_i	: componente da força de volume
$\tilde{F}$	: vetor dos coeficientes das forças distribuídas no domínio
F_α^0	: resultado da integral de domínio em uma circunferência contendo o Delta de <i>Dirac</i> na direção α (igual a 1)
g	: carregamento uniformemente distribuído
G	: módulo de elasticidade longitudinal
G'	: módulo de elasticidade longitudinal na formulação de <i>Mindlin</i>
$\tilde{G}$	: matriz dos coeficientes dos deslocamentos
h	: espessura da placa

$\tilde{H}$	: matriz dos coeficientes dos esforços
I_0, I_1	: funções de <i>Bessel</i> modificadas
K_0, K_1	: funções de <i>Bessel</i> modificadas
$\bar{\phi}$	: ângulo entre os vetores de transformação
ϕ_i	: função de interpolação
ϕ_n	: rotação normal ao contorno
ϕ_s	: rotação tangente ao contorno
M_{ij}	: momento interno por unidade de comprimento
M_n	: momento externo por unidade de comprimento para a flexão na direção normal ao contorno
M_s	: momento externo por unidade de comprimento para a flexão na direção tangencial ao contorno
M_{ns}	: momento volvente externo por unidade de comprimento
M_n^*	: valor da solução fundamental de M_n
M_{ns}^*	: valor da solução fundamental de M_{ns}
$\tilde{M}$	: vetor dos momentos nos pontos internos
n	: vetor unitário normal ao contorno da placa
n_i	: cosseno diretor da normal em relação ao eixo x_i
N	: função potencial
N_c	: número total de cantos no contorno da placa
N_e	: número de elementos de contorno
N_n	: número total de nós de contorno
Q_{ij}	: cortantes internas por unidade de comprimento
Q_n	: cortante externa por unidade de comprimento na direção normal ao contorno
Q_s	: cortante externa por unidade de comprimento na direção tangencial ao contorno

Q_n^*	: valor da solução fundamental de Q_n
$\tilde{Q}$	: vetor das cortantes nos pontos internos
r	: distância de onde se aplicou o carregamento unitário ao ponto onde se deseja obter a força ou deslocamento na solução fundamental
$r \ \theta \ x_3$	: sistema de coordenadas cilíndricas
$\bar{r}$	: variável obtida da transformação de r e ρ
R	: raio de curvatura do contorno da placa no ponto P
R_c	: reação de canto
R_c^*	: valor da solução fundamental de R_c
s	: vetor unitário tangente ao contorno da placa
t_i	: componentes das forças de superfície
$\tilde{t}$	: vetor dos esforços internos ao elemento
$\tilde{T}_k^j$	: vetor dos esforços no nó do elemento
$\tilde{T}$	: vetor das forças em todos os nós
T_{ij}^*	: valor da solução fundamental dos esforços generalizados no contorno
T_{ipk}^*	: valor da solução fundamental dos esforços generalizados no domínio
T	: matriz de transformação de coordenadas
u_i	: deslocamento generalizado na direção do eixo i
u_r	: deslocamento na direção de r
u_θ	: deslocamento na direção de θ
$\tilde{u}$	: vetor dos deslocamentos internos ao elemento
$\tilde{U}_k^j$	: vetor de deslocamentos no nó do elemento

$\tilde{U}$	: vetor dos deslocamentos em todos os nós
U_{ij}^*	: valor da solução fundamental dos deslocamentos generalizados no contorno
$U_{i\beta k}^*$	: valor da solução fundamental dos deslocamentos generalizados no domínio
v	: deslocamento na direção do eixo x_2
v_θ	: deslocamento na direção do ângulo θ
V_n	: cortante equivalente por unidade de comprimento
V_n^*	: valor da solução fundamental de V_n
V_i^*	: valor de uma solução fundamental no domínio do carregamento
w, u_3	: deslocamento na direção do eixo x_3
w_c	: deslocamento do canto da placa
w^*	: valor da solução fundamental de w
w_c^*	: deslocamento fundamental do canto i da placa
W^*	: valor de uma solução fundamental no domínio do carregamento
$\partial w / \partial n$	: rotação normal ao contorno
$\partial w / \partial s$	: rotação tangencial ao contorno
$\partial w / \partial x_1$	: rotação contida na direção do eixo x_1
$\partial w / \partial x_2$	: rotação contida na direção do eixo x_2
$\partial w^* / \partial n$	: valor de $\partial w / \partial n$ na solução fundamental
x_1, x_2, x_3	: sistema de coordenadas cartesianas
$\tilde{x}$	: vetor das coordenadas internas ao elemento
$\tilde{x}_k^j$	: vetor de coordenadas do nó do elemento
$\tilde{X}$	: vetor das variáveis incógnitas
X_s	: variável do elemento de contorno

z : parâmetro característico da teoria de *Reissner*

Z_{ij}^* : valor de uma solução fundamental no domínio do carregamento

Resumo

ANDRADE, R.C. **Uma Análise das Soluções Fundamentais Aplicáveis às Placas Espessas pelas Teorias de Reissner e Mindlin e suas Relações com a Teoria Clássica para o Uso no Método dos Elementos de Contorno.** Campinas: UNICAMP, FEC, 2001. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, 2001. 248 p.

O presente trabalho trata de soluções fundamentais de placas segundo as teorias de Reissner e Mindlin, necessárias para a aplicação do Método dos Elementos de Contorno na solução do problema. O problema estudado é de flexão de placas homogêneas e isotrópicas, em regime elástico linear, mediante a hipótese de pequenas deformações e com equilíbrio na posição indeslocada. Para o Método dos Elementos de Contorno, são utilizados elementos isoparamétricos lineares e é aplicada a formulação direta. Apresenta-se o desenvolvimento da teoria de Reissner/Mindlin através da formulação de Weeën, e um estudo com a formulação alternativa de Palermo Jr. para a teoria de Mindlin. Essa formulação alternativa trata da conexão da teoria de Mindlin com a teoria clássica, sendo uma somatória da teoria clássica com o efeito da deformação devido à força cortante. Foram incluídas as expressões das soluções fundamentais em coordenadas normal e tangencial ao contorno da placa. São resolvidos problemas envolvendo placas finas e espessas para analisar o efeito da variação de parâmetros livres da solução fundamental. Adicionalmente, é mostrada a importância da consideração do efeito da deformação por cortante no cálculo de placas.

Palavras Chaves: Elementos de Contorno, Placas, Reissner, Mindlin, Soluções Fundamentais.

Abstract

ANDRADE, R.C. **An Analysis of the Fundamental Solutions Employed in the Boundary Element Formulation for Reissner and Mindlin's Theories and Their Relations with the Classical Theory Solution.** Campinas, Brazil: UNICAMP, FEC, 2001. Dissertation (Master) – Universidade Estadual de Campinas, 2001. 248 p.

The present report describes the fundamental solutions for plates in Reissner and Mindlin's theories, used in the application of the Boundary Element Method. The problem consists in the bending of a homogeneous and isotropic plate, in the linear elastic range and with the small strain hypothesis. The Boundary Element Method is based on the direct formulation and it was used isoparametric linear element. The development of Reissner/Mindlin's theory according to Weeën's formulation is shown and the alternative formulation for Mindlin's theory presented by Palermo Jr. is studied and tested. This alternative formulation establishes the connection between Mindlin's theory and the classical theory, and Mindlin's theory is obtained as a sum of the expressions of the classical theory plus a correction due to the shear deformation effect. The alternative formulation also permits the analysis in boundary coordinates. Problems involving thin and thick plates are studied and the effect of the free parameter of the fundamental solution is tested. Finally, the importance of considering the shear deformation effect in the analysis of plate is shown.

Key Words: Boundary Elements, Plates, Reissner, Mindlin, Fundamental Solutions.

Capítulo 1

Introdução

1.1 INTRODUÇÃO

As placas são elementos estruturais de superfícies planas utilizados nos mais variados tipos de estruturas, nos mais variados ramos da engenharia, seja ela mecânica, civil, naval, aeronáutica, entre outras. Na engenharia civil, o desenvolvimento de novas tecnologias e o aprimoramento dos aspectos construtivos está intimamente ligado com a concepção e construção de grandes obras como pontes, edifícios altos, barragens, silos, e outras inúmeras aplicações que utilizam os elementos de placas.

A análise de placas, de acordo com estudos feitos com base na teoria da elasticidade, tem suas origens há quase dois séculos, porém foi durante os últimos 70 anos que foram resolvidos a maioria dos problemas relacionados a casos reais. Dentre os grandes pesquisadores da teoria de placas estão: *Navier, Levy, Timoshenko, Kirchhoff, Vlassov, Kalmanok, Saint-Germain*, entre outros.

Sobre o ponto de vista das aplicações de engenharia, a teoria de placas pode ser considerada como um dos mais importantes tópicos da teoria da elasticidade. Apesar das hipóteses simplificadoras adotadas, as soluções analíticas das equações diferenciais que governam o problema de flexão de placas são conhecidas apenas em alguns casos particulares clássicos.

A necessidade de analisar casos mais gerais fez com que surgissem algumas técnicas numéricas para analisar, de forma aproximada, equações diferenciais de difícil solução. Destacaram-se durante as últimas décadas, o Método dos Elementos Finitos, Método das Diferenças Finitas e mais recentemente o Método dos Elementos de Contorno.

No presente trabalho, é aplicado o Método dos Elementos de Contorno como ferramenta de resolução numérica para analisar esforços e deslocamentos em placas homogêneas e isotrópicas, com ênfase na teoria de *Reissner/Mindlin* por ser mais consistente que a teoria clássica de *Kirchhoff*, permitindo a análise de placas tanto finas quanto espessas. As formulações de *Reissner/Mindlin* geram um sistema de equações de sexta ordem, possibilitando o atendimento das três condições de contorno existentes no problema de placas, ao invés das duas da teoria clássica.

O estudo se inicia com a revisão bibliográfica sobre a teoria de placas e sobre o Método dos Elementos de Contorno aplicado às placas.

Em seguida, no capítulo 2, é apresentado um resumo da teoria da elasticidade, em termos de coordenadas cartesianas e cilíndricas, com o objetivo de ilustrar a teoria bidimensional de placas de uma forma mais generalizada.

No capítulo 3, são apresentadas as hipóteses da teoria clássica de placas, e a obtenção das expressões de esforços em função do deslocamento de maneira resumida. Neste capítulo, é obtida a solução fundamental de placas segundo a teoria clássica.

A formulação com base na teoria de *Mindlin* é analisada no capítulo 4. São obtidos os esforços em função dos deslocamentos generalizados para o desenvolvimento de *Reissner* e de *Mindlin*. Obtêm-se as soluções fundamentais para as placas segundo a formulação de *Weeën*, a partir da solução das equações diferenciais em termos dos deslocamentos generalizados.

No capítulo 5 são desenvolvidas as equações integrais de placas, primeiramente para a teoria clássica e em seguida, para a teoria de *Reissner/Mindlin*.

O Método dos Elementos de Contorno é aplicado de maneira direta às placas no capítulo 6. As equações integrais são transformadas em equações algébricas lineares mediante a escolha de funções aproximadoras para os deslocamentos e esforços nos

elementos do contorno. Escrevendo-se as equações integrais para todos os nós associados aos elementos de contorno, obtém-se um sistema de equações lineares onde as incógnitas são deslocamentos e esforços em pontos definidos no contorno. Aplicadas as condições de contorno e resolvido o sistema de equações, obtém-se os deslocamentos e esforços no contorno. A partir destes valores, são determinados os deslocamentos e esforços em qualquer ponto do domínio da placa.

No capítulo 7, são apresentados os exemplos de placas estudados através de programas desenvolvidos nesta pesquisa. Neste capítulo, alguns exemplos são analisados no programa de placas segundo a teoria clássica, de acordo com *Danson*, e outros para a formulação de *Weeën* com base nas teorias de *Reissner* e de *Mindlin*. Procurou-se comparar os resultados obtidos nestes programas com outros da literatura.

O capítulo 8 apresenta de maneira resumida a formulação alternativa de *Palermo Jr.* para teoria de *Reissner/Mindlin*. Através desta formulação, foi possível a obtenção das expressões de esforços e deslocamentos em coordenadas **ns**, e ainda a teoria de *Mindlin* como uma somatória da teoria clássica mais uma correção devido ao efeito da cortante sobre a placa. Neste capítulo, é apresentado de maneira geral o programa de placas desenvolvido para a formulação alternativa e os exemplos estudados através deste programa. Faz-se um estudo sobre a influência do parâmetro livre na parcela relacionada com a teoria clássica dentro da solução fundamental para a teoria de *Mindlin*.

Finalmente, no capítulo 9, são apresentadas as conclusões sobre o estudo realizado neste trabalho, citando algumas complementações que podem ser feitas em trabalhos posteriores.

1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

1.2.1 O ESTUDO DAS PLACAS

A primeira equação descrevendo a flexão de placas que se tem conhecimento foi proposta por **Navier [20]** em 1823. Nesta equação, a rigidez à flexão é definida por uma constante elástica.

Admitindo algumas hipóteses simplificadoras visando analisar a placa como uma estrutura bidimensional, começaram a surgir diferentes teorias. Em 1850, **Kirchhoff [21]** estabeleceu as hipóteses fundamentais da teoria de placas, a partir da expressão da energia potencial em termos de extensão, componentes de curvatura e torção. Derivando esta expressão e aplicando o princípio dos trabalhos virtuais, **Kirchhoff** obteve uma equação diferencial de quarta ordem, onde a rigidez à flexão foi definida em termos do módulo de *Young* e coeficiente de *Poisson*. Percebendo que as três condições de contorno naturais propostas por **Poisson [22]** não eram compatíveis com a natureza de quarta ordem da equação diferencial obtida para as placas, **Kirchhoff** mostrou que essas condições poderiam ser reduzidas de três para duas. Com isso, esta teoria não considera o efeito da deformação por cortante, assumindo que retas normais ao plano médio da placa permanecem normais após a deformação. A teoria clássica de **Kirchhoff** é uma eficiente representação do comportamento de placas para pequenos deslocamentos, sob a ação de carregamento transversal, apresentando boa precisão para placas de várias geometrias.

Em 1899, **Levy [66]** discutiu os problemas de flexão de placas retangulares com duas bordas opostas simplesmente apoiadas, e sugeriu a solução da equação diferencial em forma de séries.

Como a teoria clássica de **Kirchhoff** obtinha bons resultados para valores no centro de uma placa, ou no meio do lado de uma placa, porém a distribuição das tensões ao longo de um lado ou ao longo de uma placa não atingia a precisão desejada, a necessidade de se determinar a distribuição destes esforços ao longo de

um furo ou de uma borda levou **Reissner [23]** a desenvolver uma teoria, aproximando o problema da flexão de placas da teoria tridimensional da elasticidade. Em 1944, **Reissner [23]** formulou sua teoria assumindo uma distribuição de tensões internas e considerando o efeito da deformação por cortante. Assim, obteve um sistema de equações diferenciais que pode ser condensado a uma equação diferencial de sexta ordem, que satisfaz as três condições de contorno ao longo das bordas, ao invés de apenas duas, como estabeleceu a teoria clássica de **Kirchhoff**. Segundo **Reissner [10]**, a base física dos resultados obtidos é o reconhecimento do fato de que a omissão da deformação por cortante foi responsável pela redução das três condições de contorno a duas condições.

Em 1951, **Mindlin [11]** também formulou um modelo muito próximo daquele de **Reissner** para a análise de placas. Sua dedução teve como base as equações de equilíbrio da teoria da elasticidade tridimensional para um corpo em movimento, considerando-se o efeito da inércia rotatória e da vibração devido ao cisalhamento. Assumindo constante as distorções que ocorrem na espessura, as tensões foram obtidas. O sistema de equações diferenciais também é condensado a uma equação diferencial de sexta ordem e satisfaz as três condições de contorno requeridas.

Tanto a teoria de **Reissner** como a de **Mindlin** contribuíram expressivamente ao aprimoramento da teoria bidimensional de placas.

Salerno & Goldberg [24] apresentaram em 1960 uma solução do problema de placas, reduzindo o sistema de três equações diferenciais de **Reissner** a uma equação diferencial de quarta ordem semelhante a da teoria clássica e uma equação diferencial de segunda ordem para determinar uma função de tensão. Os resultados obtidos foram próximos à teoria clássica.

Em 1969, **Panc [25]** apresentou um tratado onde discutiu as diversas formulações disponíveis para a análise estática de placas. Mais tarde, **Cheng [26]** deduziu a teoria estática de placas diretamente da teoria da elasticidade tridimensional. Um dos destaques do trabalho de **Cheng** é que este abre um caminho sistemático de desenvolvimento de teorias bidimensionais aproximadas a partir da teoria fundamental tridimensional para vários problemas físicos.

Barrett & Ellis [14], em 1988, mostraram que o problema de placa submetida a um carregamento transversal relaciona-se com o problema tridimensional da elasticidade. No mesmo trabalho, mostraram como sua teoria se relaciona com as teorias de **Kirchhoff**, **Mindlin** e **Reissner**. Ainda, há neste trabalho uma discussão detalhada nas especificações das condições de contorno com base no trabalho de **Gregory & Wan [30]**.

Reissner [68], em 1986, apresentou uma “generalização” das equações para a análise de placas com grandes deformações incluindo a deformabilidade da placa por cisalhamento transversal. O sistema de equações diferenciais obtido é de décima ordem, na forma de duas equações simultâneas de quarta ordem, suplementadas por uma equação de segunda ordem. No ano seguinte, **Reissner [27]** demonstrou uma teoria abordando placas moderadamente espessas, cujo sistema de equações diferenciais aparece na décima segunda ordem, mostrando consistência de resultados com a teoria clássica.

Foi proposta, em 1988, uma versão da teoria de **Reissner** para o caso de placas homogêneas, isotrópicas, com quaisquer condições de contorno. Os autores deste trabalho são **Ladevèze & Pécastaings [28]**. A diferença deste trabalho em relação à teoria de Reissner está no valor considerado para o fator de deformabilidade por cisalhamento transversal e pelas condições de contorno.

Em 1991, **Reissner [29]** publicou seu trabalho onde apresenta o conceito de apoio “soft” como uma condição para a transição suave da teoria de sexta ordem para a teoria clássica de quarta ordem.

Foi publicada em 1997, a teoria de placas espessas com base nas soluções genéricas da elasticidade de Papkovitch-Neuber. Este trabalho foi realizado por **Wang & Shi [69]**. **Wang** teve grande contribuição na publicação de trabalhos com ênfase nas placas transversalmente isotrópicas (1985) e problemas de dinâmica de placas isotrópicas e micropolares (1988).

Nos estudos de **Cheng [70]**, **Gregory & Wan [30]** e **Wang [71]**, pode-se notar a grande influência da espessura da placa nos deslocamentos através da teoria elástica dos corpos tridimensionais. Demonstra-se nestes trabalhos a boa estabilidade da conexão entre as teorias de flexão de placas finas (**Kirchhoff**) com a de flexão de

placas moderadamente espessas por deslocamentos impostos (**Mindlin**) ou por tensões impostas (**Reissner**). Assim, pode-se comprovar a precisão dos resultados para placas finas quando analisadas pelas teorias de **Mindlin** ou **Reissner**.

1.2.2 A ANÁLISE DE PLACAS ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

A eficiência e a versatilidade do Método dos Elementos de Contorno tem permitido que pesquisadores realizem diversos trabalhos relacionados à flexão de placas, implementando às várias formulações integrais aos casos de carregamento estático, dinâmico, com espessuras constante ou variável. O MEC reduz o número das equações utilizadas para discretizar um problema, enquanto que o Método dos Elementos Finitos ou o Método das Diferenças Finitas (conhecidos como técnicas de domínio) exigem uma discretização de todo o domínio, obtendo um número grande de equações. Um número grande de equações algébricas exige um número grande de memória computacional para armazenamento dos dados. No MEC, a transformação das equações é feita para valores do contorno somente, portanto na maioria dos casos, reduz bastante a dimensão das matrizes.

O desenvolvimento de formulações para a análise de placas através do Método dos Elementos de Contorno (MEC), e sua utilização prática na engenharia estrutural, se deu após a introdução do método com vistas à análise de tensões em problemas bi e tridimensionais de elasticidade. Porém, no final do século XIX, o desenvolvimento de equações integrais para o problema de elasticidade estática e dinâmica, foi um dos passos mais importantes para o posterior desenvolvimento das técnicas de contorno.

Quem apresentou a primeira teoria das equações integrais com núcleos definidos e integráveis para um problema linear elástico foi **Fredholm [31]** em 1903. Nas décadas de 1950 e 1960, os trabalhos de **Mikhlin [32]**, **Muskhelishvili [33]**, **Kupradze [34]** e **Smirnov [35]**, ofereceram um estudo mais aprofundado do uso das equações integrais em problemas físicos. Eles apresentaram solução de equações integrais singulares e

descontínuas para problemas de elasticidade plana utilizando o método indireto. As bases das formulações indiretas foram estabelecidas por **Kupradze [34]**, considerando a solução fundamental de *Kelvin* para resolver o problema de elasticidade.

Identifica-se na literatura como a referência inicial do estudo de placas através do MEC o trabalho de **Jaswon et alii [45]**, publicado em 1967, propondo a decomposição da equação bi-harmônica em duas equações harmônicas que resolvidas por equações integrais e devidamente combinadas, permitem a obtenção da solução final. Anteriormente, em 1963, **Jaswon [38]** e **Symm [37]** apresentaram uma técnica numérica para solucionar a equação integral de contorno de **Fredholm**, que consistiu em discretizar o contorno em uma série de pequenos elementos e assumir uma fonte constante de densidade dentro de cada elemento. Eles empregaram a técnica de colocação para obter o sistema de equações e computar os coeficientes de influência usando a regra de *Simpson* como técnica numérica, com exceção dos coeficientes singulares que foram computados analiticamente ou por soma dos termos das diagonais. Adicionalmente, propuseram uma formulação mais geral através da aplicação da *Terceira Identidade de Green* com potenciais e suas derivadas desconhecidas no contorno.

As primeiras formulações diretas do MEC para problemas elásticos bidimensionais foram apresentadas por **Rizzo [39]**, em 1967. O problema tridimensional foi estudado pioneiramente por **Cruse [40]**. Ele discretizou o contorno através de elementos constantes para escrever a identidade *Somigliana* [20].

Em 1975, **Lachat [41]** fez uma grande contribuição às técnicas de contorno, tratando de problemas bi e tridimensionais da elasticidade.

Posteriormente, em 1976, **Hansen [72]** apresentou uma formulação direta para a análise de placas infinitas com furos, utilizando-se duas equações integrais, referentes à expressão do deslocamento vertical e à de sua derivada em relação a uma direção qualquer.

No ano de 1978, **Brebbia [42]** faz uma generalização do MEC, apresentando uma formulação partindo da *técnica dos resíduos ponderados*, que provocou um grande aumento do número de pesquisas utilizando o método. Destacaram-se as formulações no campo da elasticidade linear utilizando soluções fundamentais próprias para a

consideração de superfície livre, muito versáteis na solução de problemas que envolvem a análise de tensões próximas a uma borda livre [43,44].

Nesta mesma época, **Benzine & Gamby [17]** propuseram uma formulação direta partindo da identidade de Green. Considerando como variáveis do contorno as variáveis do problema real, isto é, o deslocamento transversal e sua derivada na direção da normal ao contorno, a força cortante equivalente e o momento fletor na direção da normal, deduziram duas equações integrais relativas ao deslocamento transversal e sua derivada na direção normal. Eles analisaram várias placas quadradas com diversas combinações de apoio.

Outros trabalhos foram publicados tratando da flexão de placas através do MEC com formulação direta e utilizando a teoria de **Kirchhoff**, como os de **Benzine [46]**, **Stern [47]** e **Danson [16]**.

Tratando do mesmo problema só que utilizando a formulação indireta tem-se os trabalhos de **Altiero & Sikarskie [73]** e **Wu & Altiero [74]**, que resolveram exemplos práticos apenas para placas engastadas.

Aparecem os trabalhos de **Tottenham [75]** e **Guo-Shu & Mukerjee [76]** discutindo as formulações diretas e indiretas para placas delgadas bem como apoiadas em base elástica. Adotou-se a interpolação hermitiana e efetuou-se o cálculo das integrais singulares por meio de soluções particulares.

Considerando as hipóteses de **Kirchhoff**, **Paiva [48]** apresentou diversas alternativas para equacionar o problema de placas, adotando equações integrais para flecha e sua primeira derivada na direção normal ao contorno, ou duas equações integrais para flecha em dois pontos singulares, sendo um destes pontos situados sobre o contorno e o outro fora dele. Além da aplicação do método às placas, **Paiva** estendeu análise para estruturas compostas de placas, vigas e pilares.

Várias outras pesquisas tratando de placas finas foram publicadas na seqüência. **Katsikadelis & Armenakas [77]** sugeriram em 1989, um novo equacionamento para o MEC em termos de duas equações diferenciais e duas equações integrais de contorno acopladas, sendo as equações diferenciais resolvidas pelo Método das Diferenças finitas e as equações integrais pelo MEC.

Placas finas apoiadas sobre fundação elástica foram estudadas por **Tottenham** em 1979, mas houve continuação deste estudo através do MEC por **Katsikadelis & Armenakas [88]**, **Costa & Brebbia [78]** e **Benzine [79]**. **Silva [80]**, em 1988, abordou este problema considerando uma formulação onde o domínio foi discretizado por células e outra formulação onde as integrais de domínio foram transformadas em integrais sobre o contorno, através do teorema da reciprocidade. Em 1991, **Katsikadelis [81]** apresentou uma formulação para o problema admitindo a hipótese de grandes deslocamentos, partindo da equação de *Von Kármán* e permitindo comportamento não-linear entre o deslocamento e a reação do solo.

O problema de placas espessas foi considerado inicialmente por **Weeën [12]** em 1982. Ele aplicou a teoria de **Reissner** e estabeleceu para cada ponto do contorno um sistema de três equações integrais em termos de um deslocamento e duas rotações, e correspondendo ao esforço cortante e dois binários, respectivamente, obtendo a solução numericamente. **Weeën** aproximou o contorno por elementos isoparamétricos quadráticos. Também, trataram do problema de placas moderadamente espessas através do MEC utilizando a teoria de **Reissner**: **Long [49]**, **Karam [50]** e **Ribeiro [51]**. **Ribeiro** faz uma análise elastoplástica das placas de **Reissner** através do MEC. Ele resolve problemas com várias condições de contorno e vários tipos de forças aplicadas sobre a placa. O tipo de elemento utilizado pela implementação computacional é de geometria linear com aproximação parabólica para as variáveis do contorno, e as equações são geradas para pontos de colocação fora do domínio.

Ribeiro & Venturini [52], para resolver o problema das singularidades que podem ocorrer na integração, escreveram o sistema linear de equações tomando os pontos de colocação fora do domínio da placa. Em paralelo, tratando das teorias de **Reissner** e **Mindlin**, tem-se os trabalhos de **Westphal & De Barcellos [53]** e **De Barcellos & Silva [54]**.

Em 1992, utilizando a teoria de **Mindlin**, **Vilman & Dasgupta [15]** desenvolveram uma solução fundamental para a flexão de placas de espessura variável. Este trabalho foi realizado com base na tese de doutorado de **Vilman [55]**, onde ele estudou as técnicas de elementos de contorno aplicadas às placas de **Mindlin**. Nesta tese ele

apresenta exemplos de placas com carregamento de tração e compressão aplicado na direção do plano médio da placa.

Em 1993, **Katsikadelis & Yotis [82]** modelaram uma nova solução do MEC para placas espessas de **Reissner**. A solução é expressa em termos de dois potenciais, um bi-harmônico e um de *Bessel*. Os potenciais são estabelecidos a partir de suas representações integrais após a solução de seis equações de contorno, três integrais e três diferenciais.

El-Zafrany et alii [56], em 1994, consideraram placas finas e moderadamente espessas com formas arbitrárias e desenvolveram as soluções fundamentais. Eles separaram o efeito da deformação por cortante da integral de contorno, no sentido de aplicar a formulação às placas finas. Eles generalizaram as derivações para obter melhores resultados para placas finas e espessas.

Em 1998, **Rashed et alii [83]** estenderam o trabalho de **Jianguo et alii [84]** em placas espessas sobre fundações elásticas de *Winkler*, e obtiveram três casos diferentes de solução fundamental, dependendo das constantes do problema (parâmetros da placa e da fundação). Este estudo é uma continuação do trabalho de **Wang et alii [85]**, que só resolve um destes três casos. No trabalho de **Rashed et alii**, os outros dois casos foram apresentados, com base nas mesmas equações aproximadas utilizadas por **Jianguo et alii**, nas quais o efeito da tensão normal resultante da reação da fundação na superfície da placa foi desprezado.

Foi publicado, em 1999, um artigo de **Al-Hosani et alii [86]** onde é introduzida uma nova e consistente solução fundamental em termos de funções de *Bessel* com argumentos reais ou complexos, para análise de elementos de contorno das placas de **Reissner** de geometrias arbitrárias sobre fundação elástica de *Winkler*.

O presente trabalho retoma a proposta iniciada por **Sanches [4]** pois, a solução fundamental alternativa apresentada por ele, trouxe alguns elementos interessantes à análise de placas espessas e que não foram tratados na literatura. É estudado o efeito da variação dos parâmetros livres da solução fundamental devido ao momento fletor unitário, e que não foi tratado em **[4]**. A solução fundamental de placas de **Reissner/Mindlin** teve formulação alternativa em **Palermo Jr. [96]** e este trabalho faz um estudo complementar. São reestudados os casos apresentados em **[4]** e novos

casos vistos neste trabalho. Adicionalmente, é tratado o problema da conexão das teorias de placas clássicas e **Reissner/Mindlin**, incluindo os limites de aplicação das teorias.

Capítulo 2

Teoria da Elasticidade Linear

2.1 INTRODUÇÃO

O intuito deste capítulo é apresentar os conceitos básicos da teoria da elasticidade necessários para o desenvolvimento das equações de placas no Método dos Elementos de Contorno (MEC). Neste capítulo são revistas a lei constitutiva do material, as relações deformações-deslocamentos e as equações de equilíbrio.

2.2 RELAÇÃO DEFORMAÇÃO-DESLOCAMENTO

Um corpo contínuo sofre deformação quando a posição relativa entre dois pontos pertencentes ao mesmo é alterada devido a qualquer movimento. Se a posição relativa entre todos os pontos deste corpo permanecer constante durante um deslocamento, o corpo é dito rígido. Portanto, o movimento de um corpo rígido é descrito apenas pela rotação e translação.

Adota-se um sistema de coordenadas cartesianas, como na figura 2.1. Existe um ponto P, de coordenadas (x_1, x_2, x_3) na posição indeformada. Aplicando um movimento a este ponto P, sua nova posição terá as coordenadas $(x_1+u_1, x_2+u_2, x_3+u_3)$, sendo u_1 ,

u_2 e u_3 as componentes do vetor deslocamento u , responsável pela mudança de posição do ponto P .

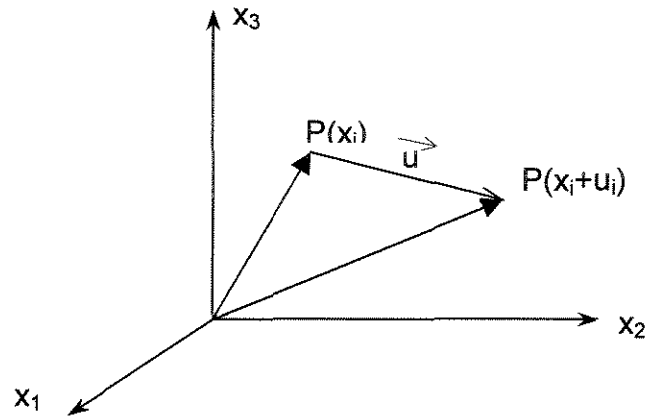


FIGURA 2.1 Deformação de um Sólido

Usando o tensor Lagrangeano de deformação pode-se definir as deformações em função dos deslocamentos da seguinte forma:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} (u_{i,k} + u_{k,i} + u_{l,i} u_{l,k}) \quad (2.1)$$

com i, k e l variando de 1 a 2.

Considerando que, neste estudo, o termo quadrático da equação (2.1) é muito pequeno em relação as derivadas tratadas, pode-se negligenciá-lo, e o tensor de deformações passa a ser expresso por:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} (u_{i,k} + u_{k,i}) \quad (2.2)$$

2.3 LEI CONSTITUTIVA

Admitindo um sólido contínuo e homogêneo, a Lei de *Hooke* é a equação constitutiva em uma região elástica deste sólido, pois é uma relação entre o tensor de tensões (σ_{ik}) e o tensor de deformações (ε_{ik}).

No espaço tridimensional, as seis componentes de tensão, em qualquer ponto de um sólido elástico são relacionadas com as seis componentes de deformação através de um tensor de quarta ordem C_{iklm} , formado por coeficientes que contém as constantes elásticas do material:

$$\sigma_{lm} = C_{iklm} \varepsilon_{ik} \quad (2.3)$$

C_{iklm} é composto por 81 elementos. Porém, considerando a simetria dos tensores de segunda ordem envolvidos, as propriedades de simetria elástica e a existência de uma função de densidade de energia de deformação, esses elementos podem ser reduzidos a duas constantes, E e ν , conhecidos como módulo de elasticidade e coeficiente de *Poisson* do material, respectivamente. Tendo em conta este fator, a equação (2.3) pode ser escrita:

$$\sigma_{ik} = \frac{E\nu}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \delta_{ik} \varepsilon_{ll} + \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{ik} \quad (2.4)$$

sendo δ_{ik} um tensor simétrico de segunda ordem, conhecido como delta de *Kronecker*, definido por:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 \longrightarrow \text{Se } i = k \\ 0 \longrightarrow \text{Se } i \neq k \end{cases}$$

Ainda, chama-se de módulo de elasticidade transversal a relação:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.5)$$

A forma inversa da equação (2.4), onde as deformações são obtidas a partir das tensões é:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{ik} - \frac{\nu}{E} \delta_{ik} \sigma_{ll} \quad (2.6)$$

2.4 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Equilíbrio em qualquer ponto de um corpo é caracterizado por equações diferenciais envolvendo tensões e forças volumétricas. Considerando a figura 2.2, um sólido de volume V e área de superfície A é apresentado. Neste sólido, atuam forças volumétricas F_i e forças de superfície t_i .

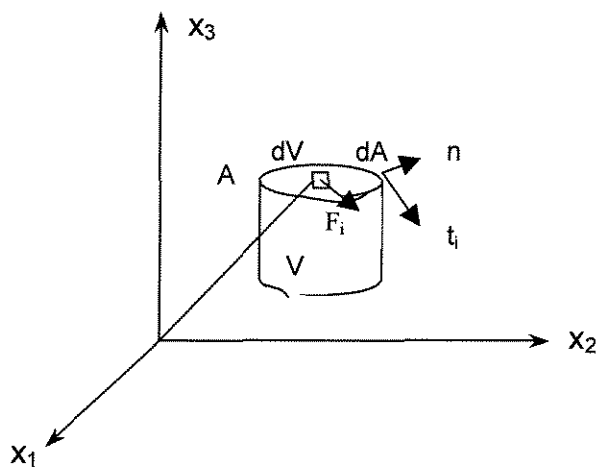


FIGURA 2.2 Forças de Volume e Superfície

O corpo está em equilíbrio estático admitindo que as tensões em todos os elementos dV no interior do mesmo respeitem a relação:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (2.7)$$

As forças de superfície t_i agindo sobre um elemento dA e em uma direção n_j , normal à superfície, guardam a seguinte relação com as tensões internas σ_{ij} :

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2.8)$$

sendo a direção n_j os cossenos diretores dos ângulos formados pelo vetor normal e os eixos x_1, x_2, x_3 .

As forças de superfície foram obtidas através do equilíbrio estático de um tetraedro infinitesimal formado por planos passando por um ponto. O tetraedro é constituído por três planos perpendiculares ao sistema de referência x_1, x_2, x_3 e um quarto plano tangente à superfície no ponto considerado cuja normal tem cossenos diretores n_i .

2.5 COORDENADAS CURVILÍNEAS

Um sistema de coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) pode ser transformado em um sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, x_3) para facilitar as equações de algumas estruturas. A figura 2.3 mostra a transformação do sistema cartesiano no sistema cilíndrico.

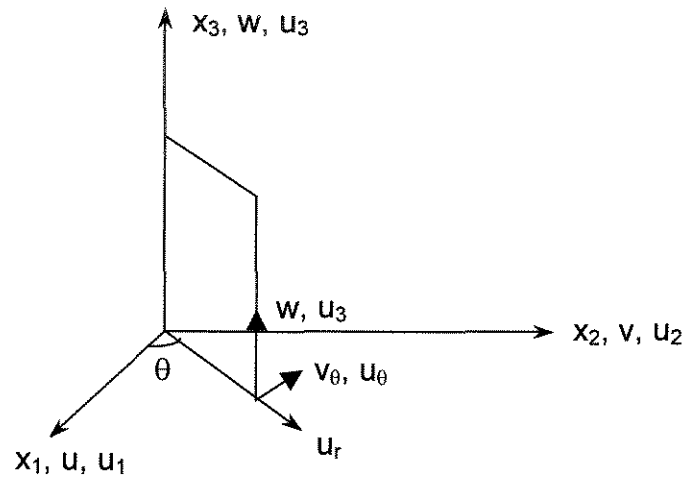


FIGURA 2.3 Sistema de Coordenadas Cilíndricas

Para as placas, utilizam-se ou as coordenadas cartesianas ou as cilíndricas para se escrever as relações básicas da teoria de flexão. Os deslocamentos resultantes em sua superfície são u , v e w . Sejam as componentes de deformação em função dos deslocamentos, em coordenadas cartesianas de acordo com (2.2) escritas de modo explícito:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v}{\partial x_2} \\ \frac{\partial w}{\partial x_3} \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_3} \\ \frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_3} \end{Bmatrix}$$

No sistema de coordenadas cilíndricas, as componentes de deformação em função dos deslocamentos são escritas por:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \\ \frac{\partial w}{\partial x_3} \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{r3} \\ \gamma_{\theta 3} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \\ \frac{\partial u_r}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial x_3} \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Utilizando as relações constitutivas (2.6), deformações cartesianas ou cilíndricas relacionam-se com tensões em coordenadas cartesianas ou cilíndricas, respectivamente, de forma análoga ou seja:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{G} \begin{Bmatrix} \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{r3} \\ \gamma_{\theta 3} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{G} \begin{Bmatrix} \tau_{r\theta} \\ \tau_{r3} \\ \tau_{\theta 3} \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Invertendo-se as expressões (2.11) e (2.12) para se obter as tensões em função das deformações tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} = G \begin{Bmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

e

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{r\theta} \\ \tau_{r3} \\ \tau_{\theta3} \end{Bmatrix} = G \begin{Bmatrix} \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{r3} \\ \gamma_{\theta3} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

Considera-se um elemento infinitesimal em que estejam atuando tensões internas σ_{ij} (figura 2.4). O equilíbrio estático, de acordo com o item 2.4 deste trabalho, está sujeito a um sistema de forças de volume F_i e de superfície t_i . Assim, a partir de um sistema de coordenadas cartesianas, as equações de equilíbrio deste elemento dV vistas em (2.7) foram:

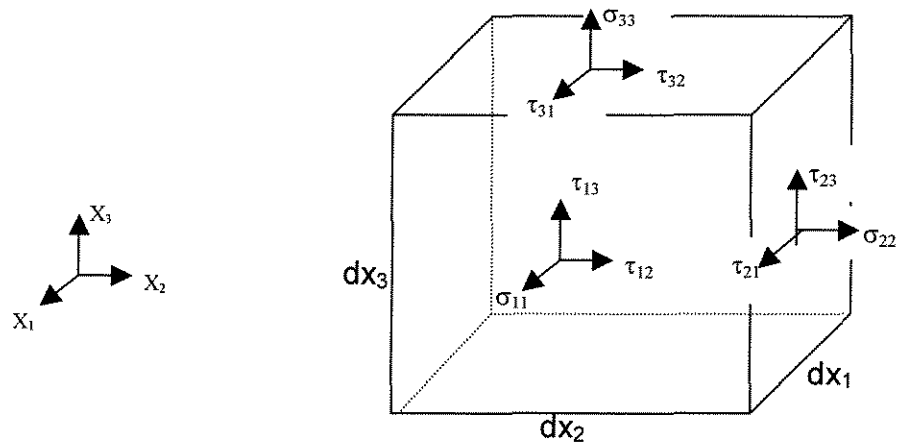


FIGURA 2.4 Tensões Internas em um Elemento Infinitesimal

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} + F_1 &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3} + F_2 &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + F_3 &= 0
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Para o sistema de coordenadas cilíndricas, o equilíbrio é dado por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{3r}}{\partial x_3} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + F_r &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{3\theta}}{\partial x_3} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} + F_\theta &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{r3}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta 3}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \frac{1}{r} \tau_{r3} + F_3 &= 0
\end{aligned} \tag{2.16}$$

As componentes das forças de superfície t_i , expressas em função das tensões em um ponto qualquer da superfície do elemento dV são:

$$\begin{aligned}
t_1 &= \sigma_{11}n_1 + \tau_{12}n_2 + \tau_{13}n_3 \\
t_2 &= \tau_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \tau_{23}n_3 \\
t_3 &= \tau_{31}n_1 + \tau_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3
\end{aligned} \tag{2.17}$$

onde n_k é o cosseno diretor dos ângulos entre o vetor normal e as coordenadas x_1 , x_2 , x_3 .

Capítulo 3

Teoria Clássica de Placas de Espessura Constante

3.1 INTRODUÇÃO E HIPÓTESES BÁSICAS

Uma placa é um corpo envolvido por duas faces paralelas, onde a distância entre estas duas faces, ou seja a espessura da placa, é de dimensão muito pequena em relação as demais dimensões da mesma. O plano paralelo às faces da placa, bisseccionando a espessura h , é chamado de plano médio.

É adotado um sistema de coordenadas x_1, x_2, x_3 no plano médio da placa como mostra a figura 3.1. Neste capítulo serão apresentadas as hipóteses de KIRCHHOFF [21] com ênfase na geometria da deformação e assumindo-se deformações e deslocamentos muito pequenos.

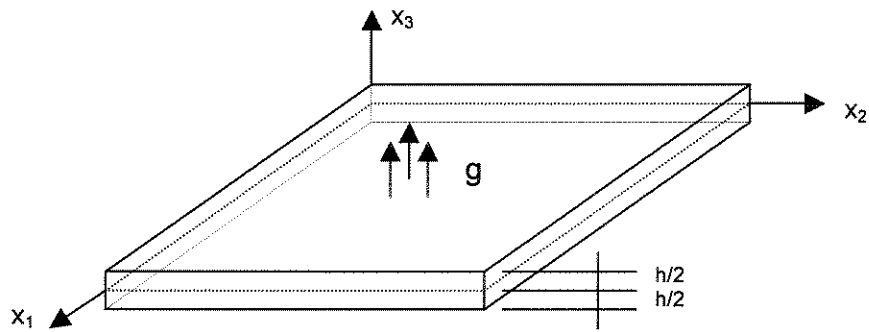


FIGURA 3.1 Definição do Sistema de Coordenadas

O carregamento g na superfície da figura 3.1 é uma função de $g(x_1, x_2)$ e é considerado normal ao plano médio, podendo ou não estar combinado com outro carregamento paralelo a este plano.

A flecha de uma placa carregada é pequena se comparada a sua espessura. Por isso, KIRCHHOFF atribuiu as seguintes hipóteses:

a-) Os deslocamentos normais ao plano da placa são pequenos e as deformações na direção da espessura são pequenas o suficiente para serem desprezadas;

b-) As tensões normais atuando nos planos paralelos ao plano médio da placa são pequenas quando comparadas às demais componentes de tensão. Por isso, podem ser desprezadas;

c-) As componentes de deslocamento contidas no plano da placa variam linearmente com a espessura;

d-) Retas normais ao plano médio da placa na posição indeformada permanecem normais após a deformação. Portanto, despreza-se as deformações por cortante, que causam distorções;

e-) Não existem tensões de cisalhamento nas faces externas paralelas ao plano médio da placa.

Através destas hipóteses, pode-se concluir para algumas deformações apresentadas na equação (2.9):

$$\begin{aligned}
\gamma_{13} &= \frac{\partial u}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0 \\
\gamma_{23} &= \frac{\partial v}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0 \\
\varepsilon_{33} &= \frac{\partial w}{\partial x_3} = 0
\end{aligned} \tag{3.1}$$

3.2 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

Em função das hipóteses de KIRCHHOFF e das equações de (3.1), sabe-se que não existe estado plano de tensão na placa. Por este motivo, o deslocamento contido no plano médio da placa é nulo. O deslocamento w depende somente de x_1 e x_2 e os deslocamentos u e v são lineares em x_3 . Assim, integrando-se as equações de (3.1) em função de u , v e w obtém-se:

$$\begin{aligned}
u &= -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1} \\
v &= -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2} \\
w &= w(x_1, x_2)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Deve-se notar que as equações (3.2) foram encontradas considerando os deslocamentos (u,v) nulo no plano médio da placa conforme as hipóteses apresentadas.

Derivando os valores de u , v e w das equações de (3.2) em relação à x_1 , x_2 , x_3 de acordo com as relações (2.9) chega-se em:

$$\begin{aligned}
\gamma_{12} &= \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial x_2} = -2x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \\
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \\
\varepsilon_{22} &= \frac{\partial v}{\partial x_2} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

A partir das hipóteses de KIRCHHOFF, e utilizando as expressões de (2.13) para as tensões obtém-se as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}) \\
\sigma_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}) \\
\tau_{12} &= G \gamma_{12}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Quando se substitui as componentes de deformação (3.3) nas componentes de tensão (3.4) obtém-se as componentes de tensão em função das derivadas de segunda ordem do deslocamento w:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= -\frac{E x_3}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \\
\sigma_{22} &= -\frac{E x_3}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) \\
\tau_{12} &= -2 G x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

A carga g distribuída sobre a placa fina, gera uma equação escrita em sua forma implícita:

$$g = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \nabla^2 (\nabla^2 w) \tag{3.6}$$

sendo ∇^2 um operador diferencial definido por:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \quad (3.7)$$

A equação (3.6) é obtida do equilíbrio da placa sob carga distribuída escrita em termos dos deslocamentos. A expressão seguinte define a rigidez à flexão da placa:

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = D \quad (3.8)$$

A equação (3.6) é conhecida como *Equação de Lagrange*, e relaciona o deslocamento na direção z, ou a deflexão, com o carregamento g. Na sua forma expandida é escrita como:

$$g = D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} \right) \quad (3.9)$$

A equação (3.9) também pode ser obtida a partir de considerações de equilíbrio de momentos fletores da placa. Para este fim, considera-se um elemento de placa sob a ação de uma carga distribuída $g=g(x_1, x_2)$, como se pode observar na figura 3.2.

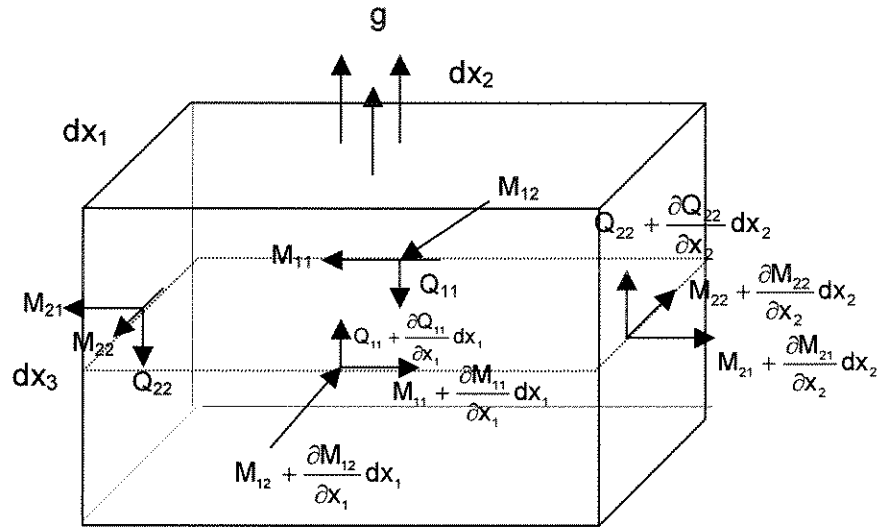


FIGURA 3.2 Esforços Atuantes em um Elemento de Placa Sujeito à Flexão

Além dos momentos fletores e torção atuando nos lados do elemento, há ainda forças cortantes devidas às tensões τ_{13} e τ_{23} . Tanto os binários como as forças cortantes são grandezas por unidade de comprimento de placa, em um sistema a partir da regra da mão direita e suas relações com as tensões são dadas por:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{11} x_3 dx_3 \\ M_{22} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{22} x_3 dx_3 \\ M_{12} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{12} x_3 dx_3 \\ M_{21} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{21} x_3 dx_3 \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{13} dx_3 \\ Q_{22} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{23} dx_3 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Considera-se agora o equilíbrio estático de todas as forças cortantes e momentos fletores agindo sobre o elemento de placa.

Para se estudar este equilíbrio, considera-se as variações dos momentos e cortantes ao longo das direções x_1 e x_2 . Somando as ações verticais tem-se:

$$\frac{\partial Q_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{22}}{\partial x_2} + g = 0 \quad (3.12)$$

Fazendo-se os equilíbrios de momentos fletores e torçor em relação ao eixo x_2 e desprezando as diferenciais de ordem superiores tem-se:

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} - Q_{11} = 0 \quad (3.13)$$

Fazendo-se os equilíbrios de momentos fletores e torçor em relação ao eixo x_1 e também desprezando os diferenciais de ordem superior, tem-se:

$$\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} - Q_{22} = 0 \quad (3.14)$$

Substituindo as derivadas dos valores de Q_{11} e Q_{22} das equações (3.13), (3.14) em relação a x_1 e x_2 e na equação (3.12) obtém-se:

$$\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{21}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial x_2^2} = -g \quad (3.15)$$

Para relacionar estes momentos com as derivadas de segunda ordem do deslocamento w , os valores das componentes de tensão, apresentadas pelas equações de (3.5), são substituídos nas equações (3.10). Lembrando ainda da simetria do tensor dos momentos M_{12} , tem-se:

$$\begin{aligned}
M_{11} &= -D \cdot \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right] \\
M_{22} &= -D \cdot \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right] \\
M_{12} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

As expressões das forças cortantes Q_{11} e Q_{22} em função das derivadas de segunda ordem do deslocamento w são obtidas substituindo-se as derivadas das equações de (3.16) nas equações de equilíbrio (3.13) e (3.14), ou seja:

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= -D \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right] \\
Q_{22} &= -D \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right]
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Tomando-se como referência um novo sistema de coordenadas onde ao invés de se utilizar coordenadas cartesianas como x_1 e x_2 , trabalha-se com um sistema de coordenadas normal e tangencial **ns**. O sistema de coordenadas **ns** possibilita a definição dos momentos fletores e forças cortantes em coordenadas normais e tangenciais ao contorno da placa.

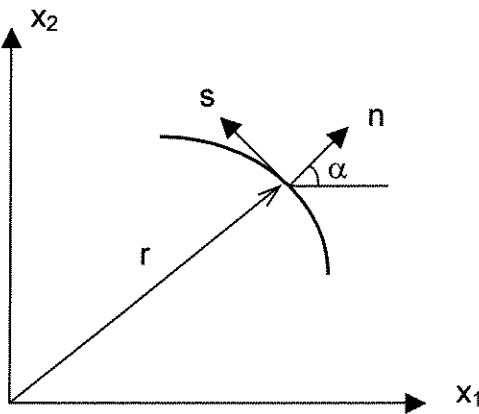


FIGURA 3.3 Sistema de Coordenadas NS

A equação de transformação das coordenadas x_1 x_2 para o sistema **ns** é da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} &= [T] \begin{Bmatrix} n \\ s \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} n \\ s \end{Bmatrix} &= [T]^T \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.18)$$

em que $[T]$ é a matriz de transformação das coordenadas e $[T]^T$ a sua transposta definidas por:

$$\begin{aligned} [T] &= \begin{Bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_1 & s_1 \\ n_2 & s_2 \end{Bmatrix} \\ [T]^T &= \begin{Bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_1 & n_2 \\ s_1 & s_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.19)$$

As transformações matriciais seguintes que darão as componentes de momento fletor e força cortante nas coordenadas **ns** são:

$$[M_{ns}] = [T]^T [M_{x1x2}] [T] \quad (3.20)$$

$$[Q_{ns}] = [T]^T [Q_{x1x2}]$$

As componentes do momento fletor e da força cortante podem ser escritas explicitamente por:

$$\begin{aligned} M_n &= M_{11} \cos^2 \alpha + M_{22} \sin^2 \alpha + 2M_{12} \sin \alpha \cos \alpha \\ M_s &= M_{11} \sin^2 \alpha + M_{22} \cos^2 \alpha - 2M_{12} \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$M_{ns} = (M_{22} - M_{11}) \sin \alpha \cos \alpha + M_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

$$Q_n = Q_{11} \cos \alpha + Q_{22} \sin \alpha \quad (3.22)$$

$$Q_s = Q_{22} \cos \alpha - Q_{11} \sin \alpha$$

3.3 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Para solucionar um problema de placas finas, deve-se ter conhecimento de suas condições de contorno.

Para um sistema genérico de coordenadas como o da figura 3.3, as condições de contorno podem ser:

a-) Engaste:

$$w=0$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = 0$$

b-) Apoio Simples:

$$w=0$$

$$M_n=0$$

c-) Borda Livre:

$$M_n=0$$

$$M_{ns}=0$$

$$Q_n=0$$

KIRCHHOFF mostrou que duas condições são suficientes para a determinação completa de w satisfazendo a equação (3.9). Esta inconsistência se deve a hipótese de que ε_{13} e ε_{23} são nulos, que resulta na desconsideração dos efeitos de τ_{13} e τ_{23} sobre o

deslocamento w , e assim todas as tensões e deformações dependem somente da variável w . Utilizando o método variacional, KIRCHHOFF mostrou que as condições de contorno para a borda livre são:

$$M_n = 0$$

$$Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = 0$$

As condições de contorno relativas à força cortante Q_n e ao momento volvente M_{ns} podem ser agrupadas em uma única condição. Esta suposição originou um esforço definido como força cortante equivalente dada por:

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \quad (3.25)$$

A figura 3.4 mostra a borda de um elemento infinitesimal de placa com os momentos volventes em forma de binários. A equação (3.25) pode ser verificada no equilíbrio da interface entre dois elementos infinitesimais de placa.

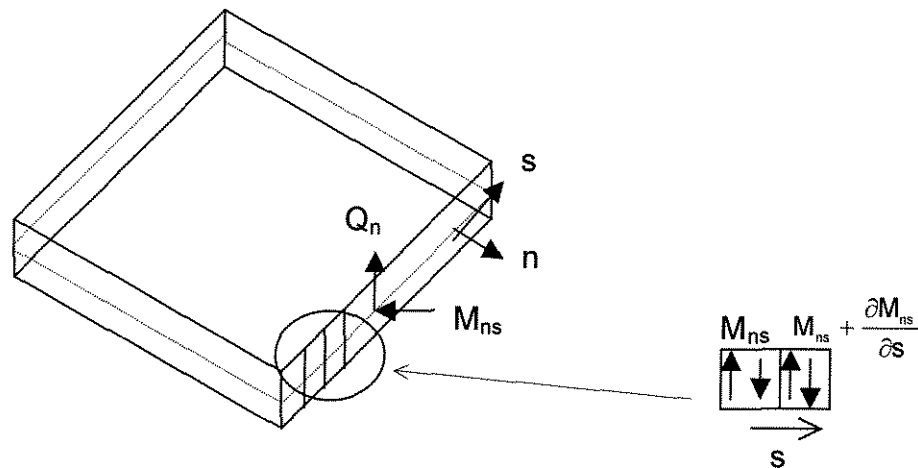


FIGURA 3.4 Momentos Volventes no Contorno

3.4 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS EM UM SISTEMA DE COORDENADAS CILÍNDRICAS

Para a obtenção da solução fundamental necessária para aplicação do Método dos Elementos de Contorno, utiliza-se um terceiro sistema de coordenadas. Este sistema é o sistema de coordenadas cilíndricas.

Na figura 3.5 pode-se observar o sistema de coordenadas cilíndricas em relação ao sistema cartesiano.

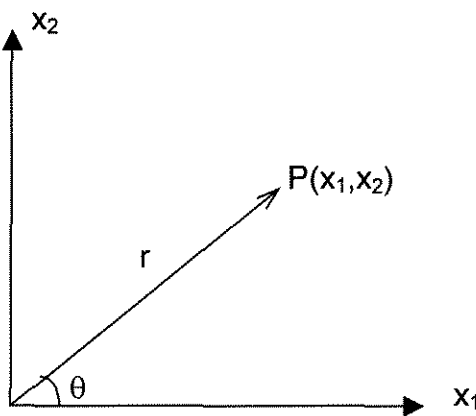


FIGURA 3.5 Sistema de Coordenadas Cilíndricas em Relação ao Sistema Cartesiano

Utilizando o ponto P, pode-se fazer as seguintes analogias dos dois sistemas de coordenadas:

$$x_1 = r \cos \theta \quad (3.26)$$

$$x_2 = r \sin \theta \quad (3.27)$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (3.28)$$

$$\theta = \arctan \frac{x_2}{x_1} \quad (3.29)$$

A partir das equações (3.26) a (3.29) obtém-se as derivadas parciais em relação aos eixos x_1 e x_2 escritos no sistema r, θ, z :

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{x_1}{r} = \cos \theta \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_2} = \frac{x_2}{r} = \sin \theta \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \frac{x_2}{r^2} = \frac{-\sin \theta}{r} \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \frac{x_1}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r} \quad (3.33)$$

Pode-se escrever as derivadas de w no novo sistema do seguinte modo:

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \quad (3.34)$$

Substituindo os valores definidos nas equações (3.30) e (3.32) em (3.34) tem-se:

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = \cos \theta \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (3.35)$$

Pode-se observar, a partir de (3.35), que existe um operador diferencial $\partial/\partial x_1$ para este caso, tal que:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (3.36)$$

Para se obter a derivada de segunda ordem do deslocamento w , aplica-se o operador diferencial dado por (3.36) em (3.35) e obtém-se:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = \cos^2 \theta \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \sin^2 \theta \cdot \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (3.37)$$

Analogamente, pode-se obter todas as equações que se obteve em relação a x_1 para as derivadas em relação a x_2 :

$$\frac{\partial w}{\partial x_2} = \sin \theta \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = \sin^2 \theta \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \cos^2 \theta \cdot \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (3.40)$$

Aplicando-se o diferencial (3.39) na equação (3.35) obtém-se:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \sin \theta \cos \theta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \quad (3.41)$$

Para se obter o operador diferencial de *Laplace* em coordenadas cilíndricas, somam-se as equações (3.37) e (3.40) e tem-se:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) w = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) w \quad (3.42)$$

Assim, tem-se a equação diferencial para placas finas (3.9) em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{g}{D} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \quad (3.43)$$

Com as definições das derivadas dos deslocamentos w em coordenadas cilíndricas, pode-se obter os momentos fletores das equações (3.16) e as forças cortantes da equação (3.17) neste sistema:

$$M_{11} = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} (\cos^2 \theta + \nu \sin^2 \theta) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) (\sin^2 \theta + \nu \cos^2 \theta) + \right. \\ \left. - 2 \sin \theta \cos \theta (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (3.44)$$

$$M_{22} = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} (\sin^2 \theta + \nu \cos^2 \theta) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) (\cos^2 \theta + \nu \sin^2 \theta) + \right. \\ \left. + 2 \sin \theta \cos \theta (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (3.45)$$

$$M_{12} = -D(1 - \nu) \left[(\sin \theta \cos \theta) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (3.46)$$

$$Q_{11} = -D \left[\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \nabla w - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla w \right] \\ Q_{22} = -D \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \nabla w + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla w \right] \quad (3.47)$$

Da mesma maneira que foi feito para o sistema de coordenadas cartesianas, pode-se obter as expressões dos momentos fletores normal e tangencial em relação às

obtidas nas coordenadas cilíndricas. Considera-se a figura 3.6, onde β é o ângulo formado pelos versores r e n , α é o ângulo que a normal ao contorno faz com o eixo x_1 , e pela geometria $\theta = \alpha - \beta$:

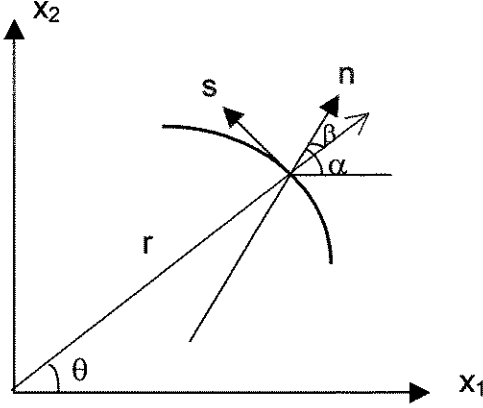


FIGURA 3.6 Relação das Coordenadas NS com o Sistema Cartesiano e Cilíndrico

Substituindo nas equações (3.21) e (3.22) o valor de α pela soma de θ e β e utilizando as definições de M_{11} , M_{22} , M_{12} , Q_{11} e Q_{22} dadas pelas equações de (3.44) a (3.47), obtém-se:

$$M_n = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} (\cos^2 \beta + \nu \sin^2 \beta) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) (\sin^2 \beta + \nu \cos^2 \beta) + \right. \\ \left. - 2 \sin \beta \cos \beta (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (3.48)$$

$$M_s = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} (\sin^2 \beta + \nu \cos^2 \beta) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) (\cos^2 \beta + \nu \sin^2 \beta) + \right. \\ \left. + 2 \sin \beta \cos \beta (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (3.49)$$

$$M_{ns} = -D(1 - \nu) \left[(\sin \beta \cos \beta) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (3.50)$$

$$Q_n = - D \left[\cos \beta \frac{\partial}{\partial r} \nabla w - \frac{\sin \beta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla w \right] \quad (3.51)$$

Derivando-se (3.50) em relação a coordenada s , obtém-se:

$$\frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = \frac{\partial M_{ns}}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial M_{ns}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{\partial M_{ns}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial s} \quad (3.52)$$

As derivadas de r , θ e β em relação à s são:

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{\partial r}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial s} = -\sin \beta \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial s} = \frac{\cos \beta}{r} \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} (\alpha - \theta) = \frac{\partial \alpha}{\partial s} - \frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{1}{R} - \frac{\cos \beta}{r} \quad (3.55)$$

R é o raio de curvatura do contorno no ponto P .

Substituindo os resultados encontrados nas equações (3.53) a (3.55) em (3.52) tem-se:

$$\frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = -\frac{\partial M_{ns}}{\partial r} \cdot \sin \beta + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{ns}}{\partial \theta} \cdot \cos \beta + \left(\frac{1}{R} - \frac{\cos \beta}{r} \right) \frac{\partial M_{ns}}{\partial \beta} \quad (3.56)$$

A força cortante equivalente V_n é dada pela somatória de Q_n e $\frac{\partial M_{ns}}{\partial s}$, e pode ser escrita em coordenadas cilíndricas por:

$$V_n = \left(-D \frac{\partial}{\partial r} \nabla w + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{ns}}{\partial \theta} \right) \cos \beta + \left(-D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla w - \frac{\partial M_{ns}}{\partial r} \right) \sin \beta + \left(\frac{1}{R} - \frac{\cos \beta}{r} \right) \frac{\partial M_{ns}}{\partial \beta} \quad (3.57)$$

3.5 A SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

A solução fundamental é a resposta de um ponto genérico de um domínio (conhecido como domínio fundamental infinito), devido à aplicação de uma carga unitária em outro ponto deste domínio.

Em placas finas, tem-se w como sendo o deslocamento em um ponto qualquer x , devido a uma carga unitária aplicada em outro ponto ξ , denominado ponto de carregamento.

Na obra de BREBBIA & DOMINGUES [45] encontra-se definida solução fundamental como sendo uma solução singular da equação de *Laplace* com não homogeneidade discreta dada pela função delta de *Dirac*, $\Delta(\xi, x)$.

A função delta de *Dirac* tem as seguintes propriedades:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(\xi, x) dx = 1 \quad (3.58)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Delta(\xi, x) dx = f(\xi) \quad (3.59)$$

A figura 3.7 mostra a função delta de *Dirac*. Nota-se que ela é uma função descontínua e pode ser definida como o limite da função “normal” (BREBBIA, TELLES, WROBEL [47]).

Para obter a solução fundamental, considera-se a equação (3.9) da seguinte forma:

$$D. \nabla^2 (\nabla^2 w^*) = \Delta(\xi, x) \quad (3.60)$$

A equação (3.60) pode ser escrita, considerando-se um sistema de coordenadas cilíndricas e considerando a simetria radial do problema:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw^*}{dr} \right) = \frac{\Delta(\xi, x)}{D} \quad (3.61)$$

ou

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw^*}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{\Delta(\xi, x)}{D} \quad (3.62)$$

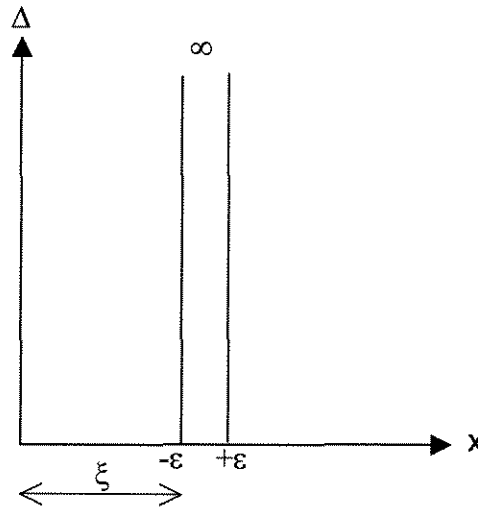


FIGURA 3.7 Representação Gráfica do Delta de *Dirac*

Resolvendo a equação diferencial (3.62), obtém-se a solução fundamental de placas finas, w^* , para todos os pontos do domínio fundamental, exceto no ponto de carregamento.

As condições essenciais em relação à r estão apresentadas a seguir:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \text{para } r=0 \quad (3.63)$$

$$Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi r}$$

Com as condições essenciais (3.63), as hipóteses do trabalho de Danson [30] e integrando a equação (3.62) em relação à r , chega-se na **solução fundamental** procurada:

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \quad (3.64)$$

A partir da solução fundamental (3.64), pode-se obter os deslocamentos e esforços em um ponto genérico do domínio fundamental. Foram deduzidas as seguintes soluções, através das equações obtidas anteriormente neste capítulo para a rotação, os momentos M_n^* e M_{ns}^* , e a força cortante equivalente respectivamente:

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = \frac{r}{4\pi D} \ln r \cdot \cos \beta \quad (3.65)$$

$$M_n^* = -\frac{1}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln r + (1-\nu) \cos^2 \beta + \nu \right] \quad (3.66)$$

$$M_{ns}^* = \frac{(1-\nu)}{8\pi} \sin 2\beta \quad (3.67)$$

$$V_n^* = \frac{\cos \beta}{4\pi r} \left[2(1-\nu) \sin^2 \beta - 3 + \nu \right] + \frac{(1-\nu)}{4\pi R} \cos^2 \beta \quad (3.68)$$

Capítulo 4

Flexão de Placas Utilizando a Formulação de Reissner/Mindlin

4.1 INTRODUÇÃO

Com o objetivo de apresentar uma solução ao problema de placas moderadamente espessas, REISSNER [10] e MINDLIN [11] desenvolveram suas teorias deduzidas das equações tridimensionais da elasticidade, considerando as três condições de contorno necessárias devido a natureza de sexta ordem da equação diferencial e do efeito da deformação por cortante na formulação do problema.

De acordo com MINDLIN, sua teoria foi desenvolvida levando em conta as mesmas considerações da teoria de REISSNER. Uma das principais diferenças entre as duas teorias é que a de MINDLIN é assumida como teoria de deformações impostas enquanto que a de REISSNER é assumida como teoria de tensões impostas.

Neste capítulo, será apresentada uma formulação para pequenos deslocamentos de placas moderadamente espessas e as soluções fundamentais para o mesmo problema, com base na teoria de MINDLIN. Posteriormente, ainda neste capítulo, será feita uma comparação das análises segundo as teorias de REISSNER e MINDLIN. Finalmente, as soluções fundamentais propostas por WEEËN [12] também são apresentadas.

4.2 HIPÓTESES BÁSICAS DA TEORIA DE MINDLIN

As hipóteses desta formulação são semelhantes às aquelas apresentadas no capítulo 3. A diferença é que as retas normais ao plano médio da placa na posição indeformada não mais permanecem normais após a deformação. Isto ocorre pois se considera agora as deformações por cortante que causam a distorção da peça. Assim:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_3} &= 0\end{aligned}\tag{4.1}$$

$$\varepsilon_{33} = 0\tag{4.2}$$

A partir das equações (4.1), as deformações cisalhantes na direção x_3 são assumidas constantes, ou seja:

$$\begin{aligned}\gamma_{13} &= \frac{1}{G'} \tau_{13} = \kappa_1 \\ \gamma_{23} &= \frac{1}{G'} \tau_{23} = \kappa_2\end{aligned}\tag{4.3}$$

$$\text{sendo } G' = \kappa^2 G, \text{ com } \kappa = \frac{\pi}{\sqrt{12}}.\tag{4.4}$$

O módulo de elasticidade transversal G necessitou de uma correção para considerar apropriadamente o efeito das tensões cisalhantes já que se assumiu a deformação cisalhante constante ao longo da espessura da placa. Por este motivo, MINDLIN adotou um parâmetro κ , obtido através de considerações de propagação de ondas. Para um material com coeficiente de *Poisson* igual a 0.176, este parâmetro

apresenta resultados iguais para as teorias de REISSNER e MINDLIN. Para materiais com coeficiente de *Poisson* variando de zero até 0.5, κ varia linearmente entre 0.76 e 0.91, respectivamente. Por isso, a correção do módulo de elasticidade transversal apresentada em (4.4) pode assumir tal valor.

4.3 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

Como apresentado na teoria de placas clássicas, w também depende somente de x_1 e x_2 e u e v são lineares em x_3 . Entretanto, as funções desconhecidas dependentes das forças de compressão ou tração contidas no plano da placa, vão aparecer nas expressões dos deslocamentos u e v .

Assume-se que não há estado plano de tensão na placa estudada, portanto u e v assumem valor nulo na superfície média. A partir das equações (4.2), (4.3) e (2.9) da elasticidade, as deformações na direção x_3 são dadas por:

$$\begin{aligned}\gamma_{13} &= \frac{\partial u}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_1} = \kappa_1 \\ \gamma_{23} &= \frac{\partial v}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_2} = \kappa_2\end{aligned}\tag{4.5}$$

Pode-se escrever então:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_3} &= \kappa_1 - \frac{\partial w}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v}{\partial x_3} &= \kappa_2 - \frac{\partial w}{\partial x_2} \\ \frac{\partial w}{\partial x_3} &= 0 \quad (\text{Pois só depende de } x_1 \text{ e } x_2).\end{aligned}\tag{4.6}$$

Integrando as equações de (4.6), chega-se em:

$$\begin{aligned} u &= x_3 \left(\kappa_1 - \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) \\ v &= x_3 \left(\kappa_2 - \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) \\ w &= w(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Para simplificar as equações considera-se que:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \kappa_1 - \frac{\partial w}{\partial x_1} \\ \Psi_2 &= \kappa_2 - \frac{\partial w}{\partial x_2} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Em seu trabalho, MINDLIN justificou o uso das funções Ψ_i como análogas às apresentadas por TIMOSHENKO [61] em sua teoria de vigas. As funções Ψ_i serão utilizadas nas expressões dos momentos fletores, torçores e esforços cortantes, incluindo o efeito da deformação por cortante.

A idéia das equações de (4.8) é mostrar a relação entre as funções Ψ_i utilizadas por MINDLIN e as derivadas da função w da teoria de placas clássicas.

Utilizando as equações da elasticidade (2.9) e as equações (4.7) e (4.8) tem-se:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= x_3 \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} \\
\varepsilon_{22} &= x_3 \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} \\
\gamma_{12} &= x_3 \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} \right) \\
\gamma_{13} &= \frac{\partial w}{\partial x_1} + \Psi_1 \\
\gamma_{23} &= \frac{\partial w}{\partial x_2} + \Psi_2
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Através das relações tensão x deformação apresentadas no capítulo 2 e das equações (4.9) escreve-se:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{Ex_3}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} \right) \\
\sigma_{22} &= \frac{Ex_3}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} \right) \\
\tau_{12} &= \frac{Ex_3}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} \right) \\
\tau_{13} &= G' \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \Psi_1 \right) \\
\tau_{23} &= G' \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} + \Psi_2 \right)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Como feito para as placas clássicas, substituindo as relações (4.10) nas expressões que definem o momento fletor a partir das tensões (3.10), chega-se em:

$$\begin{aligned}
M_{11} &= D \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} \right) \\
M_{22} &= D \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} \right) \\
M_{12} &= \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} \right)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Derivando as equações de (4.11) e substituindo-as nas equações de equilíbrio (3.13) e (3.14), obtém-se as cortantes Q_{11} e Q_{22} definidas por:

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= D \left[\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x_2^2} \right) \right] \\
Q_{22} &= D \left[\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x_1^2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Para se obter a equação diferencial das placas de Mindlin, deriva-se as equações (4.12) e, utilizando a equação de equilíbrio de cortantes (3.12) chega-se em:

$$\frac{\partial^3 \Psi_1}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 \Psi_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 \Psi_2}{\partial x_2 \partial x_1^2} + \frac{\partial^3 \Psi_2}{\partial x_2^3} = -\frac{g}{D} \tag{4.13}$$

Escrevendo a equação (4.13) na sua forma implícita:

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} \right) = -\frac{g}{D} \tag{4.14}$$

A partir das equações (3.11) e (4.10), das equações (4.3) e (2.9), pode-se escrever as cortantes em função dos deslocamentos:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= G' h \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \Psi_1 \right) \\ Q_{22} &= G' h \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} + \Psi_2 \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Introduzindo as derivadas de (4.15) na equação de equilíbrio (3.12), a equação diferencial das placas se torna:

$$\left(\nabla^2 w + \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} \right) = -\frac{g}{G' h} \quad (4.16)$$

Considerando a teoria de Mindlin, é mais usual escrever as equações de equilíbrio (3.12), (3.13) e (3.14), ou equações governantes, como três expressões em termos dos deslocamentos e das funções Ψ_i .

Portanto, substituindo a derivada das equações (4.15) em relação a x_1 e x_2 respectivamente, em (3.12) obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial w}{\partial x_1} + \Psi_1 \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial w}{\partial x_2} + \Psi_2 \right] + \frac{24(1+\nu)}{\pi^2 E h} g = 0 \quad (4.17)$$

Derivando as equações de (4.11) para substituir em (4.15), e substituindo as equações (4.15) em (3.13) e (3.14), obtém-se:

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} + \Psi_1 - \frac{2h^2}{\pi^2(1-\nu)} \left[\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x_2^2} \right) \right] = 0 \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_2} + \Psi_2 - \frac{2h^2}{\pi^2(1-\nu)} \left[\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x_1^2} \right) \right] = 0 \quad (4.19)$$

4.4 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS EM COORDENADAS CILÍNDRICAS

Para se obter as equações para as placas de Mindlin em termos de coordenadas cilíndricas, assume-se que w dependa unicamente de r e θ e que u_r e v_θ são funções lineares em x_3 .

Conforme o desenvolvimento apresentado por SANCHES [4], utilizando as equações da elasticidade e fazendo uma analogia às equações apresentadas no item (4.3), tem-se:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= x_3 \frac{\partial \psi_r}{\partial r} \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{x_3}{r} \left(\psi_r + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} \right) \\ \gamma_{r\theta} &= x_3 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} - \frac{\psi_\theta}{r} \right) \\ \gamma_{r3} &= \frac{\partial w}{\partial r} + \psi_r \\ \gamma_{\theta 3} &= \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \psi_\theta\end{aligned}\tag{4.20}$$

Através das relações tensão-deformação, obtém-se as tensões em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \frac{Ex_3}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \nu \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \psi_r \right) \right) \\
\sigma_{\theta\theta} &= \frac{Ex_3}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \psi_r \right) \right) \\
\sigma_{r\theta} &= \frac{Ex_3}{1-\nu^2} \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} - \psi_\theta \right) \right) \\
\tau_{r3} &= G' \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \psi_r \right) \\
\tau_{\theta 3} &= G' \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \psi_\theta \right)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Ao se substituir as equações (4.21) nas equações de momento fletor e volvente definidas por (3.10), e fazendo-se a integração, obtém-se as equações dos momentos em função das coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned}
M_{rr} &= D \left[\frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \nu \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \psi_r \right) \right] \\
M_{\theta\theta} &= D \left[\nu \frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \psi_r \right) \right] \\
M_{r\theta} &= \frac{D(1-\nu)}{2} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} - \psi_\theta \right) + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} \right]
\end{aligned} \tag{4.22}$$

As equações da cortante em coordenadas cilíndricas podem ser obtidas através da equação (3.11) considerando a equação da elasticidade (2.10) e a equação (4.3) em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned}
Q_r &= G'h \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \psi_r \right) \\
Q_\theta &= G'h \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \psi_\theta \right)
\end{aligned} \tag{4.23}$$

SANCHES [4] apresenta a obtenção das equações de equilíbrio das placas em coordenadas cilíndricas, considerando um elemento de placa equilibrado pelos esforços: momentos M_{rr} , $M_{\theta\theta}$ e $M_{r\theta}$ e forças cortante Q_r e Q_θ .

Chega-se às seguintes equações de equilíbrio em relação a r e θ em função das transformações de coordenadas:

$$\frac{\partial M_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (M_{rr} - M_{\theta\theta}) - Q_r = 0 \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} (M_{r\theta}) - Q_\theta = 0 \quad (4.25)$$

Com o equilíbrio das forças cortantes no elemento de placa, tem-se:

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{Q_r}{r} + g = 0 \quad (4.26)$$

Derivando as equações (4.22) em relação a r e θ e substituindo estas derivadas nas equações de equilíbrio (4.24) e (4.25) obtém-se:

$$\begin{aligned} Q_r &= D \left\{ \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \psi_r \right) - \frac{\nu}{2r} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial r \partial \theta} + \frac{(1-\nu)}{2r^2} \left(\frac{\partial^2 \psi_r}{\partial \theta^2} - \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} \right) \right\} \\ Q_\theta &= D \left\{ \frac{(1-\nu)}{2} \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} - \psi_\theta \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial r^2} \right] + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} \right) + \frac{\nu}{r} \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial r \partial \theta} \right\} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Assim, obtém-se a equação diferencial em termos de deslocamento a partir de (4.26) com o uso de (4.27). De acordo com a formulação de Mindlin, as equações governantes podem ser escritas através de três expressões em termos do deslocamento w e das funções ψ_r e ψ_θ . Portanto, levando em conta a simetria radial do

problema, consegue-se obter uma equação diferencial mais conveniente, ou seja, somente em relação a r :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{d\psi_r}{dr} + \frac{\psi_r}{r} \right) \right] = -\frac{g}{D} \quad (4.28)$$

pois ψ_r depende apenas de r .

Considerando ainda a simetria radial do problema, igualando-se as equações (4.23) e (4.27), pode-se obter as outras duas equações diferenciais em termos de deslocamento e rotações:

$$\frac{dw}{dr} + \psi_r - \frac{D}{G'h} \left(\frac{d^2\psi_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_r}{dr} - \frac{\psi_r}{r^2} \right) = 0 \quad (4.29)$$

$$\frac{d^2\psi_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_\theta}{dr} - \frac{\psi_\theta}{r^2} - \frac{2G'h}{D(1-\nu)} \psi_\theta = 0 \quad (4.30)$$

Lembrando que o deslocamento w e as funções ψ_i dependem apenas de r .

4.5 A SOLUÇÃO FUNDAMENTAL PELA TEORIA DE MINDLIN:

A partir da formulação apresentada neste capítulo, pode-se obter a solução fundamental para ψ_r , ou seja, ψ_r^* , considerando as propriedades da função delta de Dirac. Portanto, pode-se escrever:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{d\psi_r^*}{dr} + \frac{\psi_r^*}{r} \right) \right] = -\frac{\Delta(\xi, x)}{D} \quad (4.31)$$

sendo r a distância entre o ponto singular ξ e o ponto fonte x , e $\Delta(\xi, x)$ a função delta de *Dirac*, encontrada no trabalho de CRUSE [59].

Integrando duas vezes a equação (4.31) chega-se em:

$$\frac{d\psi_r^*}{dr} + \frac{\psi_r^*}{r} = A_1 \ln r + A_2 \quad (4.32)$$

A equação (4.32) tem como solução a equação:

$$\psi_r^* = A_1 \left(\frac{r}{2} \ln r - \frac{r}{4} \right) + A_2 \frac{r}{2} + A_3 \frac{1}{r} \quad (4.33)$$

sendo A_1 , A_2 , e A_3 as constantes obtidas através das integrações.

Sabendo-se que o limite da função ψ_r^* vale zero quando a distância r tende a zero devido a simetria radial do carregamento, obtém-se a constante A_3 , que também vale zero, e a equação (4.33) pode ser novamente escrita por:

$$\psi_r^* = A_1 \left(\frac{r}{2} \ln r - \frac{r}{4} \right) + A_2 \frac{r}{2} \quad (4.34)$$

Fazendo-se o equilíbrio das forças verticais em uma circunferência de raio r , com uma carga unitária aplicada em seu centro, a cortante necessária para equilibrar a carga unitária, em um ponto qualquer da circunferência, é dada por:

$$Q_r = -\frac{1}{2\pi r} \quad (4.35)$$

Igualando-se a expressão (4.35) com a equação (4.27), e considerando-se a simetria radial do problema, chega-se no valor da constante A_1 :

$$A_1 = -\frac{1}{2\pi D} \quad (4.36)$$

Substituindo o valor da constante (4.36) na equação (4.34), e reorganizando-a, tem-se:

$$\psi_r^* = -\frac{1}{4\pi D} r \left(\ln r - \frac{(A_2 + 1)}{2} \right) \quad (4.37)$$

Para se obter o deslocamento fundamental, SANCHES [4] igualou as equações (4.35) e a primeira equação de (4.23), substituindo o valor da solução fundamental ψ_r^* e integrando w^* em relação a r . A solução generalizada obtida foi:

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \left(\ln r - \frac{(A_2 + 2)}{2} \right) - \frac{1}{2\pi G' h} \ln r + B_1 \quad (4.38)$$

A constante B_1 proveniente desta última integração pode ser entendida como um deslocamento de corpo rígido, já que a placa analisada é considerada infinita. Por esse motivo, esta constante pode ser desprezada.

A constante A_2 pode ser definida de acordo com as condições de contorno da placa. Como não se impôs nenhuma condição adicional à placa em estudo em relação a esta constante no sentido de considerar apropriadamente seu efeito, pode-se considerar A_2 igual a -2, obtendo-se para o deslocamento w^* e para a rotação ψ_r^* :

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r - \frac{1}{2\pi G' h} \ln r \quad (4.39)$$

$$\psi_r^* = -\frac{1}{4\pi D} r \left(\ln r + \frac{1}{2} \right) \quad (4.40)$$

De acordo com o trabalho de BENZINE [46] e STERN [47], o primeiro termo do lado direito da equação (4.39) corresponde ao deslocamento fundamental obtido para a teoria clássica. O segundo termo corresponde a influência da deformação por cortante na teoria de Mindlin. A equação (4.40) corresponde à derivada do deslocamento fundamental da teoria clássica apresentada pelos mesmos autores.

Se agora for considerado A_2 igual a -1 na equação (4.38) e (4.37), respectivamente, pode-se escrever:

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2\pi G' h} \ln r \quad (4.41)$$

$$\psi_r^* = -\frac{1}{4\pi D} r \ln r \quad (4.42)$$

Observa-se que o primeiro termo do lado direito da equação (4.41) corresponde ao deslocamento fundamental da teoria clássica obtido no trabalho de DANSON [16]. Neste caso, o segundo termo corresponde à influência da deformação por cortante. A equação (4.42) corresponde à derivada do deslocamento fundamental da teoria clássica apresentadas pelo mesmo.

Finalmente, para a função ψ_θ , a solução fundamental ψ_θ^* , é obtida a partir da equação (4.30) reescrita da seguinte maneira:

$$\frac{d^2 \psi_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_\theta}{dr} - \frac{\psi_\theta}{r^2} - \rho^2 \psi_\theta = 0 \quad (4.43)$$

$$\text{onde: } \rho^2 = \frac{2G'h}{D(1-\nu)} \quad (4.44)$$

Para se resolver a equação (4.43) é necessário transformá-la em uma equação diferencial que se conheça a solução. Para este fim, considera-se a transformação:

$$\bar{r} = r \cdot \rho \quad (4.45)$$

Derivando ψ_r^* em relação a r tem-se a primeira e segunda derivadas:

$$\frac{\partial \psi_\theta^*}{\partial r} = \frac{\partial \psi_\theta^*}{\partial \bar{r}} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial r} = \rho \frac{\partial \psi_\theta^*}{\partial \bar{r}} \quad (4.46)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_\theta^*}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\rho \frac{\partial \psi_\theta^*}{\partial \bar{r}} \right) \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial r} = \rho^2 \frac{\partial^2 \psi_\theta^*}{\partial \bar{r}^2} \quad (4.47)$$

Ao se substituir (4.45), (4.46) e (4.47) na equação (4.43) obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \psi_\theta^*}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \psi_\theta^*}{\partial \bar{r}} - \left(\frac{1}{\bar{r}^2} + 1 \right) \psi_\theta^* = 0 \quad (4.48)$$

A equação (4.48) tem como solução geral as funções de *Bessel*. Conforme apresenta ABRAMOWITZ & STEGUN [62], a solução para essa equação seria:

$$\psi_\theta^* = C_1 I_1(\rho r) + C_2 K_1(\rho r) \quad (4.49)$$

C_1 e C_2 são constantes a serem determinadas e I_1 e K_1 são as funções de Bessel conhecidas.

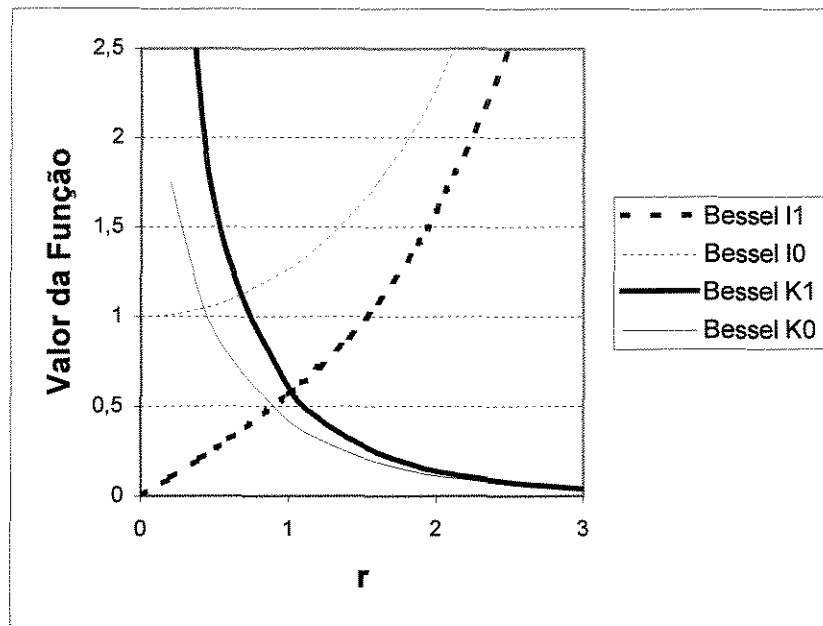


FIGURA 4.1 Esboço Gráfico das Funções de Bessel K_0, K_1, I_0 e I_1 .

Considerando a hipótese de que no infinito a placa é plana, o limite da função ψ_θ^* vale zero quando r tender ao infinito. Considerando ainda a convergência das funções de Bessel, apresentadas na figura 4.1, nota-se que a função I_1 vai para o infinito quando r tende ao infinito. Por este motivo, a solução de (4.49) é independente de I_1 , logo C_1 vale zero. Na figura 4.1, nota-se também que a função de Bessel K_1 tende a zero quando r tende ao infinito. Este fato está de acordo com o comportamento esperado da solução fundamental. No entanto, a existência de rotações ψ_θ^* está em desacordo com a simetria de deslocamento na placa devido a carga unitária na origem. Assim, conclui-se que:

$$\psi_\theta^* = 0 \quad (4.50)$$

Encontradas as soluções fundamentais de deslocamento w^* , ψ_r^* e ψ_θ^* , basta substituí-las nas equações (4.22) e (4.23) para se obter os esforços fundamentais:

$$\begin{aligned}
M_{rr}^* &= -\frac{1}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln r - \frac{(A_2-1)}{2} - \nu \frac{(A_2+1)}{2} \right] \\
M_{\theta\theta}^* &= -\frac{1}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln r - \frac{(A_2+1)}{2} - \nu \frac{(A_2-1)}{2} \right] \\
M_{r\theta}^* &= 0
\end{aligned} \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned}
Q_{rr}^* &= -\frac{1}{2\pi r} \\
Q_{\theta\theta}^* &= 0
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Como as expressões (4.51) são expressas em função da constante A_2 , pode-se assumir valores arbitrários para a mesma, a fim de aproximar as expressões das condições de contorno do problema a ser analisado.

4.6 DESLOCAMENTOS E ESFORÇOS FUNDAMENTAIS GENERALIZADOS

Para escrever as componentes fundamentais de momentos fletores e esforços cortantes, equações (4.51) e (4.52), relacionando as coordenadas cartesianas x_1 e x_2 com as coordenadas cilíndricas r e θ , considera-se as equações (3.20), e escreve-se da seguinte forma:

$$M_{11}^* = M_{rr}^* \cos^2 \alpha + M_{\theta\theta}^* \sin^2 \alpha + 2 M_{r\theta}^* \sin \alpha \cos \alpha \tag{4.53a}$$

$$M_{22}^* = M_{rr}^* \sin^2 \alpha + M_{\theta\theta}^* \cos^2 \alpha - 2 M_{r\theta}^* \sin \alpha \cos \alpha \tag{4.53b}$$

$$M_{12}^* = (M_{\theta\theta}^* - M_{rr}^*) \sin \alpha \cos \alpha + M_{r\theta}^* (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \tag{4.53c}$$

$$Q_{11}^* = Q_{rr}^* \cos \alpha - Q_{\theta\theta}^* \sin \alpha \tag{4.54a}$$

$$Q_{22}^* = Q_{rr}^* \sin \alpha + Q_{\theta\theta}^* \cos \alpha \tag{4.54b}$$

Observando a figura 3.6, tem-se que:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{\partial r}{\partial x_1} \\ \sin \alpha &= \frac{\partial r}{\partial x_2}\end{aligned}\tag{4.55}$$

Substituindo-se os valores dos momentos fletores fundamentais dados pela equação (4.51) e das forças cortantes dadas por (4.52), usando as relações (4.55) e considerando-se a simetria radial do problema, as equações (4.53) e (4.54) tornam-se:

$$\begin{aligned}M_{11}^* &= -\frac{1}{4\pi} \left\{ \left[(1+\nu) \ln r - \frac{(A_2-1)}{2} - \frac{\nu(A_2+1)}{2} \right] \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[(1+\nu) \ln r - \frac{(A_2+1)}{2} - \frac{\nu(A_2-1)}{2} \right] \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \right)^2 \right\}\end{aligned}\tag{4.56a}$$

$$\begin{aligned}M_{22}^* &= -\frac{1}{4\pi} \left\{ \left[(1+\nu) \ln r - \frac{(A_2-1)}{2} - \frac{\nu(A_2+1)}{2} \right] \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[(1+\nu) \ln r - \frac{(A_2+1)}{2} - \frac{\nu(A_2-1)}{2} \right] \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)^2 \right\}\end{aligned}\tag{4.56b}$$

$$M_{12}^* = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_2}\tag{4.56c}$$

$$Q_{11}^* = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial x_1}\tag{4.57a}$$

$$Q_{22}^* = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial x_2}\tag{4.57b}$$

As equações (4.40) e (4.50), componentes em relação a r e θ do deslocamento, também podem se relacionar com as coordenadas cartesianas a partir da equação (3.19), obtendo-se:

$$\Psi_1^* = \Psi_r^* \cos \alpha - \Psi_\theta^* \sin \alpha\tag{4.58a}$$

$$\Psi_2^* = \Psi_r^* \sin \alpha + \Psi_\theta^* \cos \alpha\tag{4.58b}$$

Substituindo-se os valores das soluções fundamentais (4.40) e (4.50), as equações (4.55) e considerando-se a simetria radial do problema, as equações de (4.58) tornam-se:

$$\Psi_1^* = -\frac{1}{4\pi D} r \left(\ln r - \frac{(A_2 + 1)}{2} \right) \frac{\partial r}{\partial x_1} \quad (4.59a)$$

$$\Psi_2^* = -\frac{1}{4\pi D} r \left(\ln r - \frac{(A_2 + 1)}{2} \right) \frac{\partial r}{\partial x_2} \quad (4.59b)$$

Encontradas as soluções fundamentais dos deslocamentos e esforços no sistema de coordenadas cartesianas, pode-se defini-las agora através de deslocamentos fundamentais generalizados U_{ij}^* e esforços fundamentais generalizados T_{ij}^* , procurando chegar nas formulações de WEEËN [12,13].

De acordo com Weeën, os esforços fundamentais generalizados para o problema de flexão de placas em função dos vetores n normais ao contorno, são escritos da seguinte maneira:

$$T_{31}^* = M_{11}^* n_1 + M_{12}^* n_2 \quad (4.60a)$$

$$T_{32}^* = M_{12}^* n_1 + M_{22}^* n_2 \quad (4.60b)$$

$$T_{33}^* = Q_{11}^* n_1 + Q_{22}^* n_2 \quad (4.60c)$$

sendo T_{ij}^* , os esforços fundamentais na direção j devido a um carregamento aplicado na direção i .

Substituindo-se as equações (4.56) e (4.57) nas equações (4.60), chega-se a:

$$\begin{aligned} T_{31}^* = & -\frac{1}{4\pi} \left\{ \left[(1+\nu) \ln r - \frac{(A_2 - 1)}{2} - \frac{\nu(A_2 + 1)}{2} \right] \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left[(1+\nu) \ln r - \frac{(A_2 + 1)}{2} - \frac{\nu(A_2 - 1)}{2} \right] \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \right)^2 \right\} n_1 + \left[\frac{(1+\nu)}{4\pi} \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_2} \right] n_2 \end{aligned} \quad (4.61a)$$

$$T_{32}^* = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \left[(1+\nu) \ln r - \frac{(A_2-1)}{2} - \frac{\nu(A_2+1)}{2} \right] \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left[(1+\nu) \ln r - \frac{(A_2+1)}{2} - \frac{\nu(A_2-1)}{2} \right] \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)^2 \right\} n_2 + \left[\frac{(1+\nu)}{4\pi} \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_2} \right] n_1 \quad (4.61b)$$

$$T_{33}^* = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (4.61c)$$

As soluções fundamentais Ψ^*_{11} e Ψ^*_{22} , e o deslocamento fundamental w^* são apresentados na formulação de Weeën através das notações U^*_{31} , U^*_{32} e U^*_{33} respectivamente. A partir destas considerações, escreve-se:

$$U^*_{31} = -\frac{1}{4\pi D} r \left(\ln r - \frac{(A_2+1)}{2} \right) \frac{\partial r}{\partial x_1} \quad (4.62a)$$

$$U^*_{32} = -\frac{1}{4\pi D} r \left(\ln r - \frac{(A_2+1)}{2} \right) \frac{\partial r}{\partial x_2} \quad (4.62b)$$

$$U^*_{33} = \frac{1}{8\pi D} r^2 \left(\ln r - \frac{(A_2+2)}{2} \right) - \frac{1}{2\pi G' h} \ln r \quad (4.62c)$$

sendo U^*_{ij} , os deslocamentos fundamentais generalizados na direção j devido a um carregamento aplicado na direção i .

As equações (4.61) e (4.62) representam uma solução fundamental generalizada para a teoria de Mindlin, em termos de esforços e deslocamentos, devido a uma força unitária aplicada na direção do eixo x_3 de uma placa infinita.

4.7 A SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DA TEORIA DE REISSNER

A teoria de MINDLIN foi deduzida assumindo-se uma distribuição conhecida de deslocamentos ao longo da espessura da placa. A teoria de REISSNER foi deduzida

assumindo-se a distribuição de tensões conhecida ao longo da espessura da placa. Neste caso, a tensão σ_{33} é obtida através das equações de equilíbrio na direção x_3 . Esta teoria revela a carga transversal g nas expressões dos momentos fletores. A componente de deformação normal na espessura é assumida nula.

As condições de carregamento da placa de REISSNER são:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha 3} &= 0 \\ \sigma_{33} &= \pm \frac{g}{2} \quad \text{Para } x_3 = \pm \frac{h}{2}\end{aligned}\tag{4.63}$$

sendo α um índice variando de 1 a 2.

Na análise de REISSNER, o fator κ^2 é calculado implicitamente deduzindo as equações de equilíbrio da placa. Estas equações são calculadas por aproximações de energia ou por cálculo variacional devido às simplificações feitas na distribuição de tensões ao longo da espessura da placa [23].

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{12x_3}{h^3} M_{\alpha\beta}\tag{4.64}$$

$$\sigma_{\alpha 3} = \frac{3}{2h} \left[1 - \left(\frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] Q_{\alpha}\tag{4.65}$$

$$\sigma_{33} = \frac{1}{4} \left(\frac{2x_3}{h} \right) \left[3 - \left(\frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] g\tag{4.66}$$

Nas formulações apresentadas por WEEËN [12,13], são usadas as equações de equilíbrio para um elemento infinitesimal de placa, sob um carregamento g distribuído na direção de x_3 . Estas equações equivalem às equações (3.12) a (3.14) e escritas em notação indicial são:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_\alpha} + g &= 0 \\ \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - Q_\alpha &= 0\end{aligned}\tag{4.67}$$

Nesta formulação, as relações esforços-deslocamentos são:

$$\begin{aligned}M_{\alpha\beta} &= D \frac{(1-\nu)}{2} \left[\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{2\nu}{(1-\nu)} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] + \frac{\nu}{(1-\nu)} \frac{g}{\lambda^2} \delta_{\alpha\beta} \\ Q_\alpha &= D \frac{(1-\nu)}{2} \lambda^2 \left[u_\alpha + \frac{\partial u_3}{\partial x_\alpha} \right]\end{aligned}\tag{4.68}$$

sendo D a rigidez à flexão da placa e λ um valor característico do modelo de REISSNER, assumido igual a $\frac{\sqrt{10}}{h}$, u_α são as rotações nos eixos x_α e u_3 é a deflexão no eixo x_3 .

Substituindo as equações de (4.68) nas equações de equilíbrio de (4.67), pode-se escrever a equação de equilíbrio genérica da placa, em função dos deslocamentos:

$$\Delta_{ij}^* \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u_j(x) = -F_i(x) + \text{termos em } g\tag{4.69}$$

sendo Δ_{ij}^* as componentes do operador de *Navier*, definidas por:

$$\begin{aligned}\Delta_{\alpha\beta}^* &= D \frac{(1-\nu)}{2} \left[(\nabla - \lambda^2) \delta_{\alpha\beta} \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right] \\ \Delta_{\alpha 3}^* &= -\Delta_{3\alpha}^* = -D \frac{(1-\nu)}{2} \lambda^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \\ \Delta_{33}^* &= D \frac{(1-\nu)}{2} \lambda^2 \nabla\end{aligned}\tag{4.70}$$

com ∇ representando o operador *Laplaceano* igual a: $\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha}$. As funções F_i são utilizadas para encontrar as soluções fundamentais.

Utilizando a função delta de *Dirac*, $\Delta(\xi, x)$, representando um carregamento unitário para a equação (4.69), tem-se:

$$\Delta_{ij}^* \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right) U_{kj}^*(\xi, x) = -\Delta(\xi, x) \delta_{ik} \quad (4.71)$$

sendo U_{kj}^* a solução fundamental em função dos deslocamentos para a teoria de REISSNER, δ_{ik} o delta de *Kronecker*, ξ é o ponto singular e x o ponto fonte. Portanto, a equação (4.71) é utilizada para representar uma placa infinita sob a ação de um carregamento unitário ξ na direção k .

De acordo com o trabalho de HÖRMANDER [63], a solução fundamental do deslocamento U_{kj}^* , equação (4.71), pode ser representada da seguinte maneira:

$$U_{kj}^*(\xi, x) = {}^\infty \Delta_{jk}^* \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right) e(\xi, x) \quad (4.72)$$

sendo, ${}^\infty \Delta^*$ a matriz dos cofatores e $e(\xi, x)$ uma função escalar.

Substituindo-se a equação (4.72) na expressão (4.71), tem-se:

$$\det \left[\Delta_{jk}^* \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right) e(\xi, x) \right] = -\Delta(\xi, x) \quad (4.73)$$

Levando-se em conta a simetria radial do problema e substituindo as soluções já conhecidas na equação (4.73), chega-se em:

$$D^3 \left(\frac{(1-\nu)}{2} \right)^2 \lambda^2 \nabla^2 (\nabla - \lambda^2) e(\xi, x) = -\frac{\Delta(r)}{2\pi r} \quad (4.74)$$

sendo, r a distância entre o ponto singular ξ e o ponto fonte x , e $\nabla = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right)$ o operador de *Laplace* em coordenadas cilíndricas.

Uma solução particular da equação (4.74) é:

$$e(r) = \frac{1}{2\pi D^3 \lambda^6} \left(\frac{2}{(1-\nu)} \right)^2 \left[K_0(z) + \ln z + \frac{1}{4} z^2 (\ln z - 1) \right] \quad (4.75)$$

Para se obter as soluções fundamentais em deslocamentos U_{kj}^* ($k, j=1,2,3$), substitui-se a expressão da função escalar e da equação (4.75) na equação (4.72), e calculando-se a mesma, WEEËN chega nas seguintes expressões:

$$U_{11}^* = \frac{1}{2\pi D} \left\{ \left[B(z) - A(z) \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \left[\ln z - \frac{1}{2} + \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)^2 \right] \right\} \quad (4.76a)$$

$$U_{12}^* = -U_{21}^* = -\frac{1}{2\pi D} \left[\frac{2}{(1-\nu)} A(z) \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_2} \right] \quad (4.76b)$$

$$U_{22}^* = \frac{1}{2\pi D} \left\{ \left[B(z) - A(z) \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \left[\ln z - \frac{1}{2} + \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \right)^2 \right] \right\} \quad (4.76c)$$

$$U_{13}^* = -U_{31}^* = \frac{1}{4\pi D} r \left[\ln r - \frac{1}{2} \right] \frac{\partial r}{\partial x_1} \quad (4.76d)$$

$$U_{23}^* = -U_{32}^* = \frac{1}{4\pi D} r \left[\ln r - \frac{1}{2} \right] \frac{\partial r}{\partial x_2} \quad (4.76e)$$

$$U_{33}^* = -\frac{1}{2\pi D \lambda^2} \left[\frac{2}{(1-\nu)} \ln z - \frac{1}{4} z^2 (\ln z - 1) \right] \quad (4.76f)$$

Os esforços fundamentais de superfície correspondentes são escritos da seguinte maneira:

$$T_{11}^* = -\frac{1}{4\pi r} \left\{ [4A(z) + 2zK_1(z) + 1 - \nu] \left(\frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial x_1} n_1 \right) + [4A(z) + 1 + \nu] \frac{\partial r}{\partial x_1} n_1 + \right. \\ \left. - [16A(z) + 4zK_1(z) + 2 + 2\nu] \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)^2 \frac{\partial r}{\partial n} \right\} \quad (4.77a)$$

$$T_{12}^* = -\frac{1}{4\pi r} \left\{ [4A(z) + 2zK_1(z) + 1 - \nu] \frac{\partial r}{\partial x_2} n_1 + [4A(z) + 1 + \nu] \frac{\partial r}{\partial x_1} n_2 + \right. \\ \left. - [16A(z) + 4zK_1(z) + 2 + 2\nu] \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{\partial r}{\partial n} \right\} \quad (4.77b)$$

$$T_{21}^* = -\frac{1}{4\pi r} \left\{ [4A(z) + 2zK_1(z) + 1 - \nu] \frac{\partial r}{\partial x_1} n_2 + [4A(z) + 1 + \nu] \frac{\partial r}{\partial x_2} n_1 + \right. \\ \left. - [16A(z) + 4zK_1(z) + 2 + 2\nu] \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{\partial r}{\partial n} \right\} \quad (4.77c)$$

$$T_{22}^* = -\frac{1}{4\pi r} \left\{ [4A(z) + 2zK_1(z) + 1 - \nu] \left(\frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial x_2} n_2 \right) + [4A(z) + 1 + \nu] \frac{\partial r}{\partial x_2} n_2 + \right. \\ \left. - [16A(z) + 4zK_1(z) + 2 + 2\nu] \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \right)^2 \frac{\partial r}{\partial n} \right\} \quad (4.77d)$$

$$T_{13}^* = \frac{\lambda^2}{2\pi} \left[B(z)n_1 - A(z) \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial n} \right] \quad (4.77e)$$

$$T_{23}^* = \frac{\lambda^2}{2\pi} \left[B(z)n_2 - A(z) \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{\partial r}{\partial n} \right] \quad (4.77f)$$

$$T_{31}^* = -\frac{(1-\nu)}{8\pi} \left\{ \left[2 \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \ln z - 1 \right] n_1 + 2 \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial n} \right\} \quad (4.77g)$$

$$T_{32}^* = -\frac{(1-\nu)}{8\pi} \left\{ \left[2 \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \ln z - 1 \right] n_2 + 2 \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{\partial r}{\partial n} \right\} \quad (4.77h)$$

$$T_{33}^* = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (4.77i)$$

sendo:

$$\lambda = \frac{\sqrt{10}}{h} \quad (4.78)$$

$$z = \lambda r \quad (4.79)$$

$$r = \left\{ [x_1(x) - x_1(\xi)]^2 + [x_2(x) - x_2(\xi)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.80)$$

$$A(z) = K_0(z) + \frac{2}{z} \left[K_1(z) - \frac{1}{z} \right] \quad (4.81)$$

$$B(z) = K_0(z) + \frac{1}{z} \left[K_1(z) - \frac{1}{z} \right] \quad (4.82)$$

onde K_0 e K_1 são funções de *Bessel* modificadas, apresentadas por ABRAMOWITZ & STEGUN [62].

Sabendo-se que o efeito do carregamento distribuído g é o aspecto que leva as equações diferenciais de equilíbrio das teorias de REISSNER e MINDLIN serem diferentes, as soluções fundamentais encontradas não consideraram o carregamento distribuído. Por este motivo, conforme SANCHES [4], acreditou-se que as soluções fundamentais desenvolvidas para a teoria de REISSNER, apresentada por WEEËN [12,13], pudessem ser utilizadas nas formulações de MINDLIN, desenvolvidas neste trabalho. Portanto, as soluções fundamentais generalizadas em função de deslocamentos e esforços, equações (4.61) e (4.62), desenvolvidas para a teoria de MINDLIN e referentes a uma força unitária aplicada em um ponto de uma placa infinita, podem ser utilizadas junto com as soluções fundamentais apresentadas por WEEËN referentes ao binário unitário para a resolução dos problemas de placas.

4.8 CONDIÇÕES DE CONTORNO

A condição de contorno da placa deve ser conhecida para poder se solucionar a equação diferencial. Para isto, é necessária uma prescrição adequada de suas vinculações. A seguir, é apresentado o conjunto de restrições de cada tipo de apoio clássico:

- Engaste

$$w = 0 \quad (u_3 = 0)$$

$$\Psi_n = 0 \quad (u_n = 0)$$

$$\Psi_s = 0 \quad (u_s = 0)$$

- Apoio Simples

$$M_n = 0$$

$$w = 0 \quad (u_3 = 0)$$

$$\Psi_s = 0 \quad (u_s = 0)$$

Condição *HARD*

$$w = 0 \quad (u_3 = 0)$$

$$M_{ns} = 0$$

Condição *SOFT*

- Borda Livre

$$M_n = 0$$

$$M_{ns} = 0$$

$$Q_n = 0$$

A condição *HARD* é devida a consideração da rotação de torção nula no plano vertical tangente ao contorno. A condição *SOFT* é devida a consideração de momento torçor nulo no plano vertical tangente ao contorno.

Capítulo 5

Equações Integrais para Placas

5.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo trata da obtenção das equações integrais de contorno para o estudo de placas de acordo com as teorias clássica e de REISSNER/MINDLIN para a aplicação do *Método dos Elementos de Contorno*. As equações diferenciais de placas para a teoria clássica, escritas em função dos deslocamentos, foram utilizadas no capítulo 3 para a obtenção das soluções fundamentais. A partir destas soluções fundamentais e utilizando o teorema de *Betti* serão encontradas neste capítulo, as equações integrais de placas aplicadas em pontos do contorno e do domínio.

Da mesma maneira, as equações das placas de REISSNER/MINDLIN são necessárias para a obtenção das soluções fundamentais indispensáveis para a formulação. Na sequência, seguindo as mesmas definições, serão apresentadas as equações integrais generalizadas, considerando-se a formulação de REISSNER/MINDLIN.

Os passos para a utilização do MEC em flexão de placas através da formulação direta são: Primeiramente deve-se resolver as equações diferenciais da flexão de placas, obtendo as soluções fundamentais. Essas soluções são as funções ponderadoras na resolução das equações integrais de contorno. A superfície que envolve o domínio é discretizada em elementos e são necessárias funções polinomiais

para interpolar os pontos nodais às variáveis associadas aos nós. Após o cálculo das integrais no contorno por processos numéricos e/ou analíticos, são obtidos os sistemas de equações com matrizes não simétricas, mas de ordem bem menor que as obtidas com as técnicas de domínio. Após a resolução do sistema de equações, obtém-se os resultados no contorno como também em pontos internos prescritos do domínio.

5.2 EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA A TEORIA CLÁSSICA

5.2.1 EQUAÇÃO INTEGRAL EM COORDENADAS NORMAIS E TANGENCIAIS PARA DESLOCAMENTOS EM PONTOS DO DOMÍNIO

Seja uma placa isotrópica de domínio finito Ω e contorno Γ , contida em outra de domínio infinito Ω_∞ e contorno Γ_∞ , conforme é mostrado na figura 5.1, onde a placa finita está submetida a um carregamento g distribuído em uma área Ω_g .

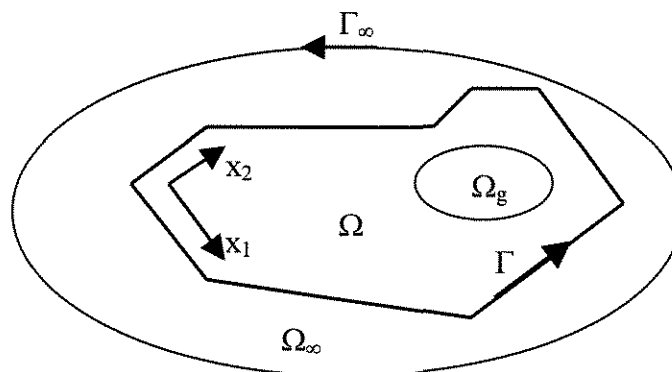


FIGURA 5.1 Placa finita contida em uma placa infinita.

Aplica-se o teorema de *Betti* para a placa de domínio finito submetida a dois carregamentos não simultâneos, $\mathbf{g}$ e $\mathbf{g}^*$, associados às superfícies elásticas, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{w}^*$, respectivamente. Desta forma, identificam-se dois estados de tensão, σ e σ^* , com seus respectivos estados de deformação, ε e ε^* , que podem relacionar-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int_V (\sigma_{11}^* \cdot \varepsilon_{11} + \sigma_{22}^* \cdot \varepsilon_{22} + \sigma_{33}^* \cdot \varepsilon_{33} + \tau_{12}^* \cdot \gamma_{12} + \\ + \tau_{13}^* \cdot \gamma_{13} + \tau_{23}^* \cdot \gamma_{23}) \cdot dV = \\ \int_V (\sigma_{11} \cdot \varepsilon_{11}^* + \sigma_{22} \cdot \varepsilon_{22}^* + \sigma_{33} \cdot \varepsilon_{33}^* + \tau_{12} \cdot \gamma_{12}^* + \\ + \tau_{13} \cdot \gamma_{13}^* + \tau_{23} \cdot \gamma_{23}^*) \cdot dV \end{aligned} \quad (5.1)$$

Chamando-se de I_1 o segundo membro da equação (5.1) e desprezando-se as tensões relativas as deformações normais na direção da espessura e àquelas devido à cortante, obtém-se:

$$I_1 = \int_V (\sigma_{11} \cdot \varepsilon_{11}^* + \sigma_{22} \cdot \varepsilon_{22}^* + \tau_{12} \cdot \gamma_{12}^*) \cdot dV \quad (5.2)$$

A integral ao longo da espessura é dada por:

$$dV = x_3 \cdot d\Omega \quad (5.3)$$

Substituindo-se na equação (5.2) as relações de deformação-deslocamento (3.3), as relações constitutivas (3.5) e integrando-se ao longo da espessura da placa (5.3), obtém-se:

$$\begin{aligned} I_1 = \int_{\Omega} \left[D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \cdot \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1^2} + D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) \cdot \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_2^2} + \right. \\ \left. + 2 \cdot D \cdot (1 - \nu) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \cdot d\Omega \end{aligned} \quad (5.4)$$

A partir das relações dos momentos fletores (3.16), pode-se escrever a equação (5.4) da seguinte forma:

$$I_1 = \int_{\Omega} \left[-M_{11} \cdot \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1^2} - M_{22} \cdot \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_2^2} - 2 \cdot M_{12} \cdot \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \cdot d\Omega \quad (5.5)$$

Para se obter as equações necessárias à formulação do método, é necessária a transformação da integral sobre o domínio (Ω), equação (5.5), em uma integral no contorno (Γ). Para isto, deve-se integrar por partes cada um dos termos da equação (5.5). Para o primeiro termo, obtém-se:

$$\int_{\Omega} M_{11} \cdot \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1^2} \cdot d\Omega = - \int_{\Gamma} M_{11} \cdot \frac{\partial w^*}{\partial x_1} \cdot n_1 \cdot d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial w^*}{\partial x_1} \cdot d\Omega \quad (5.6)$$

sendo, n_1 o cosseno diretor do vetor normal ao contorno na direção x_1 .

De acordo com a figura 3.3, os cossenos diretores de um ponto do contorno são dados por:

$$n_1 = \cos \alpha \quad (5.7a)$$

$$n_2 = \sin \alpha \quad (5.7b)$$

Integrando-se por partes a segunda parcela da equação (5.6) e considerando-se as definições apresentadas nas equações (5.7), pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} M_{11} \cdot \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1^2} \cdot d\Omega = \int_{\Gamma} \left(-M_{11} \cdot \frac{\partial w^*}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} \cdot w^* \right) \cdot \cos \alpha \cdot d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_1^2} \cdot w^* \cdot d\Omega \quad (5.8)$$

Integrando-se agora o segundo termo da equação (5.5), obtém-se:

$$\int_{\Omega} M_{22} \cdot \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_2^2} \cdot d\Omega = \int_{\Gamma} \left(-M_{22} \cdot \frac{\partial w^*}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} \cdot w^* \right) \cdot \text{sen } \alpha \cdot d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial x_2^2} \cdot w^* \cdot d\Omega \quad (5.9)$$

Pode-se escrever o terceiro termo da equação (5.5) da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} 2 \cdot M_{12} \cdot \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot d\Omega = - \int_{\Omega} M_{12} \cdot \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot d\Omega - \int_{\Omega} M_{12} \cdot \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot d\Omega \quad (5.10)$$

Integrando-se por partes cada um dos termos do membro direito da equação (5.10), um deles primeiramente em relação a x_1 e depois em relação a x_2 e o outro primeiramente em relação a x_2 e depois em relação a x_1 , obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 2 \cdot M_{12} \cdot \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot d\Omega = & \int_{\Gamma} \left[\left(-M_{12} \cdot \frac{\partial w^*}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} \cdot w^* \right) \cdot \text{sen } \alpha + \right. \\ & \left. + \left(-M_{12} \cdot \frac{\partial w^*}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} \cdot w^* \right) \cdot \cos \alpha \right] \cdot d\Gamma - \int_{\Omega} 2 \cdot \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot w^* \cdot d\Omega \end{aligned} \quad (5.11)$$

Substituindo-se na equação (5.5), as equações (5.8), (5.9) e (5.11), obtém-se:

$$\begin{aligned} I_1 = & - \int_{\Gamma} \left(M_{11} \cdot \frac{\partial w^*}{\partial x_1} \cdot \cos \alpha + M_{22} \cdot \frac{\partial w^*}{\partial x_2} \cdot \text{sen } \alpha + M_{12} \cdot \frac{\partial w^*}{\partial x_2} \cdot \cos \alpha + \right. \\ & \left. + M_{12} \cdot \frac{\partial w^*}{\partial x_1} \cdot \text{sen } \alpha \right) \cdot d\Gamma + \int_{\Gamma} \left[\left(\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} \right) \cdot \cos \alpha + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} \right) \cdot \text{sen } \alpha \right] \cdot w^* \cdot d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_1^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial x_2^2} \right) \cdot w^* \cdot d\Omega \end{aligned} \quad (5.12)$$

Utilizando-se as equações de equilíbrio de momentos fletores (3.13) e (3.14), a equação diferencial de placas (3.9) e a equação de cortantes normais ao contorno (3.22), pode-se escrever a equação (5.12) da seguinte forma:

$$I_1 = - \int_{\Gamma} \left(M_{11} \cdot \frac{\partial w^*}{\partial x_1} \cdot \cos \alpha + M_{22} \cdot \frac{\partial w^*}{\partial x_2} \cdot \sin \alpha + M_{12} \cdot \frac{\partial w^*}{\partial x_2} \cdot \cos \alpha + M_{12} \cdot \frac{\partial w^*}{\partial x_1} \cdot \sin \alpha \right) \cdot d\Gamma + \int_{\Gamma} Q_n \cdot w^* \cdot d\Gamma - \int_{\Omega} g \cdot w^* \cdot d\Omega \quad (5.13)$$

De acordo com as relações entre os sistemas de coordenadas, equação (3.19), pode-se escrever:

$$\frac{\partial w^*}{\partial x_1} = \frac{\partial w^*}{\partial n} \cdot \cos \alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s} \cdot \sin \alpha \quad (5.14a)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial x_2} = \frac{\partial w^*}{\partial n} \cdot \sin \alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s} \cdot \cos \alpha \quad (5.14b)$$

Substituindo-se as equações (5.14) na equação (5.13), obtém-se:

$$I_1 = - \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial w^*}{\partial n} \cdot (M_{11} \cdot \cos^2 \alpha + 2 \cdot M_{12} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + M_{22} \cdot \sin^2 \alpha) + \frac{\partial w^*}{\partial s} \cdot [(M_{22} - M_{11}) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + M_{12} \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)] \right\} \cdot d\Gamma + \int_{\Gamma} Q_n \cdot w^* \cdot d\Gamma - \int_{\Omega} g \cdot w^* \cdot d\Omega \quad (5.15)$$

Utilizando-se as equações (3.21) na equação (5.15), pode-se escrever:

$$I_1 = - \int_{\Gamma} \left(M_n \cdot \frac{\partial w^*}{\partial n} + M_{ns} \cdot \frac{\partial w^*}{\partial s} - Q_n \cdot w^* \right) \cdot d\Gamma - \int_{\Omega} g \cdot w^* \cdot d\Omega \quad (5.16)$$

Integrando-se, por partes, o segundo termo da integral de contorno da equação (5.16), obtém-se:

$$\int_{\Gamma} \left(\mathbf{M}_{ns} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}^*}{\partial \mathbf{s}} \right) \cdot d\Gamma = \mathbf{M}_{ns} \cdot \mathbf{w}^* \Big|_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \mathbf{M}_{ns}}{\partial \mathbf{s}} \cdot \mathbf{w}^* \right) \cdot d\Gamma \quad (5.17)$$

sendo Γ_1 e Γ_2 as coordenadas dos limites do contorno de integração.

A primeira parcela da equação (5.17) se anula quando se trata de um contorno fechado, cuja representação paramétrica e a respectiva derivada sejam contínuas. Caso contrário, ela dará origem às reações nos cantos da placa. Desta forma, pode-se reescrever a equação (5.17) da seguinte forma:

$$\int_{\Gamma} \left(\mathbf{M}_{ns} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}^*}{\partial \mathbf{s}} \right) \cdot d\Gamma = - \sum_{i=1}^{N_c} \mathbf{R}_{ci} \cdot \mathbf{w}_{ci}^* - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \mathbf{M}_{ns}}{\partial \mathbf{s}} \cdot \mathbf{w}^* \right) \cdot d\Gamma \quad (5.18)$$

sendo, N_c o número total de cantos do contorno da placa e $\mathbf{w}_{ci}^*$ o deslocamento fundamental do canto i da placa (Figura 5.2).

As reações de canto da placa, $\mathbf{R}_{ci}$, podem ser escritas a partir dos momentos volventes anterior e posterior ao canto da placa, ou seja:

$$\mathbf{R}_{ci} = \mathbf{M}_{nsi}^+ - \mathbf{M}_{nsi}^- \quad (5.19)$$

sendo, $\mathbf{M}_{nsi}^+$ e $\mathbf{M}_{nsi}^-$ os momentos volventes posterior e anterior ao canto i da placa, respectivamente.

Substituindo-se na equação (5.16) o resultado de (5.18), tem-se:

$$I_1 = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \mathbf{M}_{ns}}{\partial \mathbf{s}} \cdot \mathbf{w}^* + \mathbf{Q}_n \cdot \mathbf{w}^* - \mathbf{M}_n \cdot \frac{\partial \mathbf{w}^*}{\partial \mathbf{n}} \right) \cdot d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} \mathbf{R}_{ci} \cdot \mathbf{w}_{ci}^* - \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{w}^* \cdot d\Omega \quad (5.20)$$

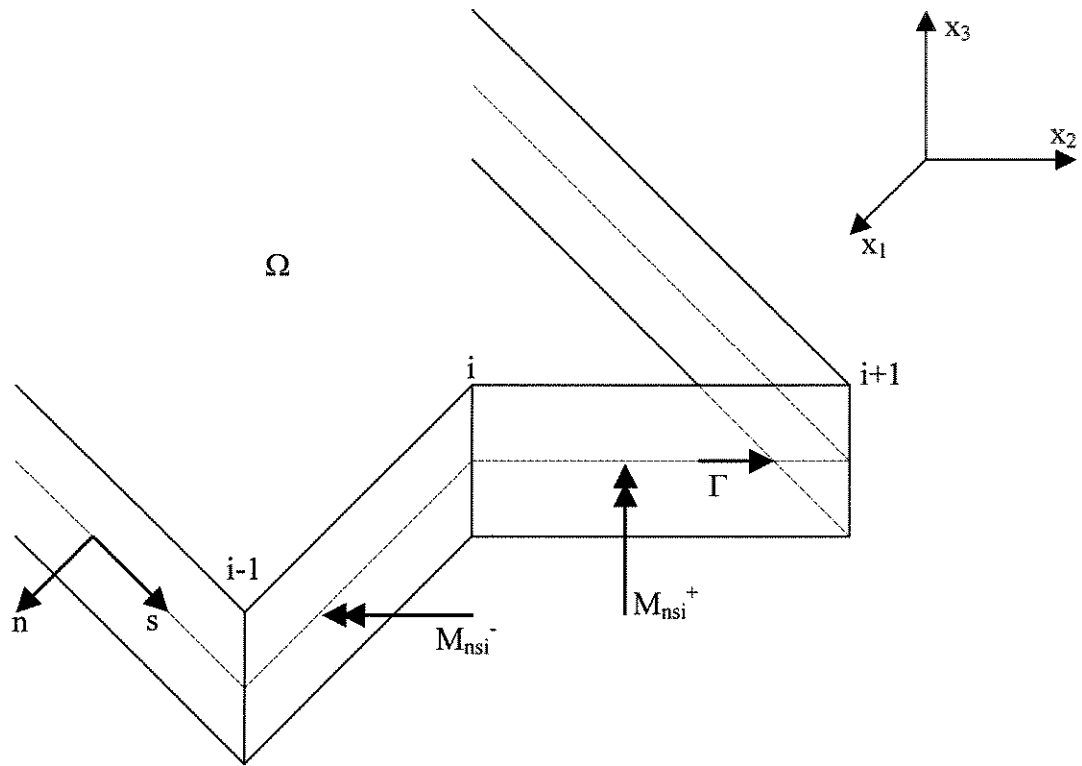


FIGURA 5.2 Canto i do contorno da placa.

Considerando-se que o carregamento $\mathbf{g}$ está distribuído em Ω_g e utilizando-se a equação (3.25) na equação (5.20), obtém-se:

$$I_1 = \int_{\Gamma} \left(V_n \cdot \mathbf{w}^* - M_n \cdot \frac{\partial \mathbf{w}^*}{\partial n} \right) \cdot d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci} \cdot \mathbf{w}_{ci}^* - \int_{\Omega_g} \mathbf{g} \cdot \mathbf{w}^* \cdot d\Omega_g \quad (5.21)$$

O termo do primeiro membro da equação (5.1) pode ser desenvolvido de forma análoga:

$$\begin{aligned} & \int_V \left(\sigma_{11}^* \cdot \varepsilon_{11} + \sigma_{22}^* \cdot \varepsilon_{22} + \tau_{12}^* \cdot \gamma_{12} \right) \cdot dV = \\ & = \int_{\Gamma} \left(V_n^* \cdot \mathbf{w} - M_n^* \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial n} \right) \cdot d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^* \cdot \mathbf{w}_{ci} - \int_{\Omega} \mathbf{g}^* \cdot \mathbf{w} \cdot d\Omega \end{aligned} \quad (5.22)$$

A equação final do teorema de *Betti*, aplicado ao estudo de placas finas, a partir das equações (5.21) e (5.22), é dada por:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \left(\mathbf{V}_n^* \cdot \mathbf{w} - \mathbf{M}_n^* \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \right) \cdot d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} \mathbf{R}_{ci}^* \cdot \mathbf{w}_{ci} - \int_{\Omega} \mathbf{g}^* \cdot \mathbf{w} \cdot d\Omega = \\ & = \int_{\Gamma} \left(\mathbf{V}_n \cdot \mathbf{w}^* - \mathbf{M}_n \cdot \frac{\partial \mathbf{w}^*}{\partial \mathbf{n}} \right) \cdot d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} \mathbf{R}_{ci} \cdot \mathbf{w}_{ci}^* - \int_{\Omega_g} \mathbf{g} \cdot \mathbf{w}^* \cdot d\Omega_g \end{aligned} \quad (5.23)$$

Supondo-se que o carregamento $\mathbf{g}^*$ em (5.23) seja uma carga concentrada unitária aplicada em um ponto ξ do domínio da placa, tomando-se como função ponderadora a solução fundamental e aplicando-se as propriedades da função delta de *Dirac*, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} & \mathbf{w}(\xi) + \int_{\Gamma} \left[\mathbf{V}_n^*(\xi, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) - \mathbf{M}_n^*(\xi, \mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) \right] \cdot d\Gamma(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N_c} \mathbf{R}_{ci}^*(\xi, \mathbf{x}_c) \cdot \mathbf{w}_{ci}(\mathbf{x}_c) = \\ & = \int_{\Gamma} \left[\mathbf{V}_n(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}^*(\xi, \mathbf{x}) - \mathbf{M}_n(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \mathbf{w}^*}{\partial \mathbf{n}}(\xi, \mathbf{x}) \right] \cdot d\Gamma(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N_c} \mathbf{R}_{ci}(\mathbf{x}_c) \cdot \mathbf{w}_{ci}^*(\xi, \mathbf{x}_c) + \\ & - \int_{\Omega_g} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}^*(\xi, \mathbf{x}) \cdot d\Omega_g(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5.24)$$

sendo $\mathbf{x}_c$ a coordenada dos cantos da placa.

A equação (5.24) é a equação integral de placas finas para deslocamentos de pontos no domínio da placa. Esta equação fornece deslocamentos em todos os pontos do domínio da placa a partir das cortantes equivalentes, $(\mathbf{V}_n)$, momentos de flexão na direção normal, $(\mathbf{M}_n)$, reações de canto, $(\mathbf{R}_c)$, deslocamentos transversais, $(\mathbf{w})$, e rotações em relação à normal, $(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}})$, conhecidos no contorno.

5.2.2 EQUAÇÃO INTEGRAL EM COORDENADAS NORMAIS E TANGENCIAIS PARA DESLOCAMENTOS EM PONTOS DO CONTORNO

Anteriormente, para o desenvolvimento da equação integral de placas finas (5.23), levou-se em consideração pontos no domínio da placa. Para a utilização do MEC, necessita-se desenvolver a equação (5.23) para o caso de um ponto ξ pertencer ao contorno Γ da placa.

PAIVA [48], considerou para um canto genérico i um acréscimo no domínio de contorno circular de raio ε , cujo centro coincide com o vértice deste canto, como está indicado na figura 5.3.

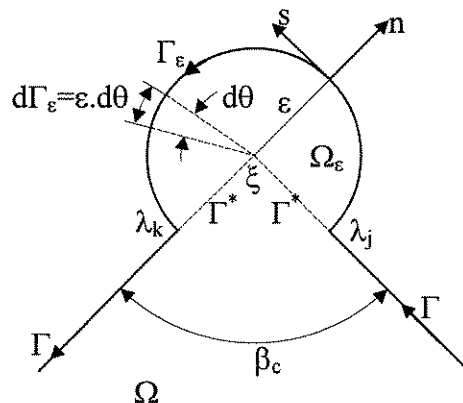


FIGURA 5.3 Contorno circular acrescentado a um ponto ξ .

Fazendo com que o ponto de aplicação da carga ξ coincida com o vértice do canto i , a equação (5.23) é satisfeita, já que ξ pertence ao novo domínio. O domínio modificado gera os cantos λ_j e λ_k e sua integral para o ponto ξ , a partir de (5.24), torna-se:

$$\begin{aligned}
& w(\xi) + \int_{\Gamma-\Gamma^*} \left[V_n^*(\xi, x) \cdot w(x) - M_n^*(\xi, x) \cdot \frac{\partial w}{\partial n}(x) \right] \cdot d(\Gamma - \Gamma^*)(x) + \\
& + \int_{\Gamma_\varepsilon} \left[V_n^*(\xi, x) \cdot w(x) - M_n^*(\xi, x) \cdot \frac{\partial w}{\partial n}(x) \right] \cdot d\Gamma_\varepsilon(x) + \sum_{i=1}^{N_\varepsilon-1} R_{ci}^*(\xi, x_c) \cdot w_{ci}(x_c) + \\
& + R_{c_{\lambda j}}^*(\xi, x_c) \cdot w_{c_{\lambda j}}(x_c) + R_{c_{\lambda k}}^*(\xi, x_c) \cdot w_{c_{\lambda k}}(x_c) = \\
& = \int_{\Gamma-\Gamma^*} \left[V_n(x) \cdot w^*(\xi, x) - M_n(x) \cdot \frac{\partial w^*}{\partial n}(\xi, x) \right] \cdot d(\Gamma - \Gamma^*)(x) + \\
& + \int_{\Gamma_\varepsilon} \left[V_n(x) \cdot w^*(\xi, x) - M_n(x) \cdot \frac{\partial w^*}{\partial n}(\xi, x) \right] \cdot d\Gamma_\varepsilon(x) + \sum_{i=1}^{N_\varepsilon-1} R_{ci}(x_c) \cdot w_{ci}^*(\xi, x_c) + \\
& + R_{c_{\lambda j}}(\xi, x_c) \cdot w_{c_{\lambda j}}^*(x_c) + R_{c_{\lambda k}}(\xi, x_c) \cdot w_{c_{\lambda k}}^*(x_c) - \int_{\Omega_g} g(x) \cdot w^*(\xi, x) \cdot d\Omega_g(x)
\end{aligned} \tag{5.25}$$

em que Γ^* representa a porção retirada do contorno e Γ_ε a porção adicionada ao contorno (figura 5.3).

Para que a integral em um ponto de domínio represente uma integral em um ponto de contorno, faz-se com que ε tenda a zero. Com isso, o ponto ξ deixa de estar no interior do domínio para pertencer ao contorno e a equação (5.25) torna-se:

$$\begin{aligned}
& w(\xi) + \lim_{\Gamma^* \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\Gamma^*} \left[V_n^*(\xi, x) \cdot w(x) - M_n^*(\xi, x) \cdot \frac{\partial w}{\partial n}(x) \right] \cdot d(\Gamma - \Gamma^*)(x) + \\
& + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left[V_n^*(\xi, x) \cdot w(x) - M_n^*(\xi, x) \cdot \frac{\partial w}{\partial n}(x) \right] \cdot d\Gamma_\varepsilon(x) + \sum_{i=1}^{N_\varepsilon-1} R_{ci}^*(\xi, x_c) \cdot w_{ci}(x_c) + \\
& + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[R_{c_{\lambda j}}^*(\xi, x_c) \cdot w_{c_{\lambda j}}(x_c) + R_{c_{\lambda k}}^*(\xi, x_c) \cdot w_{c_{\lambda k}}(x_c) \right] = \\
& = \lim_{\Gamma^* \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\Gamma^*} \left[V_n(x) \cdot w^*(\xi, x) - M_n(x) \cdot \frac{\partial w^*}{\partial n}(\xi, x) \right] \cdot d(\Gamma - \Gamma^*)(x) + \\
& + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left[V_n(x) \cdot w^*(\xi, x) - M_n(x) \cdot \frac{\partial w^*}{\partial n}(\xi, x) \right] \cdot d\Gamma_\varepsilon(x) + \sum_{i=1}^{N_\varepsilon-1} R_{ci}(x_c) \cdot w_{ci}^*(\xi, x_c) + \\
& + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[R_{c_{\lambda j}}(\xi, x_c) \cdot w_{c_{\lambda j}}^*(x_c) + R_{c_{\lambda k}}(\xi, x_c) \cdot w_{c_{\lambda k}}^*(x_c) \right] - \int_{\Omega_g} g(x) \cdot w^*(\xi, x) \cdot d\Omega_g(x)
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Os limites das integrais sobre $(\Gamma - \Gamma^*)$ indicados em (5.26) representam o valor anteriormente obtido, sem o acréscimo do domínio Ω_ε , ou seja:

$$\begin{aligned} \lim_{\Gamma^* \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma^*} \left[V_n^*(\xi, x) \cdot w(x) - M_n^*(\xi, x) \cdot \frac{\partial w}{\partial n}(x) \right] \cdot d(\Gamma - \Gamma^*)(x) = \\ = \int_{\Gamma} \left[V_n^*(\xi, x) \cdot w(x) - M_n^*(\xi, x) \cdot \frac{\partial w}{\partial n}(x) \right] \cdot d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Gamma^* \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma^*} \left[V_n(x) \cdot w^*(\xi, x) - M_n(x) \cdot \frac{\partial w^*}{\partial n}(\xi, x) \right] \cdot d(\Gamma - \Gamma^*)(x) = \\ = \int_{\Gamma} \left[V_n(x) \cdot w^*(\xi, x) - M_n(x) \cdot \frac{\partial w^*}{\partial n}(\xi, x) \right] \cdot d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (5.28)$$

As parcelas de (5.26) referentes às reações de canto, resultam:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_c-1} R_{ci}^*(\xi, x_c) \cdot w_{ci}(x_c) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[R_{c_{ij}}^*(\xi, x_c) \cdot w_{c_{ij}}(x_c) + R_{c_{jk}}^*(\xi, x_c) \cdot w_{c_{jk}}(x_c) \right] = \\ = \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(\xi, x_c) \cdot w_{ci}(x_c) \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_c-1} R_{ci}(x_c) \cdot w_{ci}^*(\xi, x_c) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[R_{c_{ij}}(\xi, x_c) \cdot w_{c_{ij}}^*(x_c) + R_{c_{jk}}(\xi, x_c) \cdot w_{c_{jk}}^*(x_c) \right] = \\ = \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(x_c) \cdot w_{ci}^*(\xi, x_c) \end{aligned} \quad (5.30)$$

A parcela de (5.26) referente à integral sobre o trecho Γ_ε , envolvendo $w(x)$ e $\frac{\partial w}{\partial n}(x)$, pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left[V_n^*(\xi, x) \cdot w(x) - M_n^*(\xi, x) \cdot \frac{\partial w}{\partial n}(x) \right] \cdot d\Gamma_\varepsilon(x) = \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left\{ V_n^*(\xi, x) \cdot [w(x) - w(\xi)] - M_n^*(\xi, x) \cdot \left[\frac{\partial w}{\partial n}(x) - \frac{\partial w}{\partial n}(\xi) \right] \right\} \cdot d\Gamma_\varepsilon(x) + \\ + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} V_n^*(\xi, x) \cdot w(x) \cdot d\Gamma_\varepsilon(x) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} M_n^*(\xi, x) \cdot \frac{\partial w}{\partial n}(x) \cdot d\Gamma_\varepsilon(x) \end{aligned} \quad (5.31)$$

Utilizando-se a condição de *Hölder*, dada por:

$$|w(\mathbf{x}) - w(\xi)| \leq C_1 \cdot r^{\alpha_1(\xi, \mathbf{x})} \quad (5.32)$$

$$\left| \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) - \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}(\xi) \right| \leq C_2 \cdot r^{\alpha_2(\xi, \mathbf{x})} \quad (5.33)$$

onde C_1 e C_2 são constantes e $0 < \alpha_i \leq 1$, com ($i=1,2$), a primeira integral de (5.31) se anula. Como $w(\xi)$ e $\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}(\xi)$ são valores do domínio e não variam ao longo de Γ_ε , a equação (5.31) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left[V_n^*(\xi, \mathbf{x}) \cdot w(\mathbf{x}) - M_n^*(\xi, \mathbf{x}) \cdot \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) \right] \cdot d\Gamma_\varepsilon(\mathbf{x}) = \\ = w(\xi) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} V_n^*(\xi, \mathbf{x}) \cdot d\Gamma_\varepsilon(\mathbf{x}) - \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}(\xi) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} M_n^*(\xi, \mathbf{x}) \cdot d\Gamma_\varepsilon(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5.34)$$

Substituindo em (5.34) os valores de $V_n^*(\xi, \mathbf{x})$ e $M_n^*(\xi, \mathbf{x})$, dados em (3.68) e (3.66), respectivamente, e considerando-se ainda que neste caso, $\mathbf{r}_{ji} \cdot \mathbf{n}_{ji} = \mathbf{1}$, $\mathbf{r}_{ji} \cdot \mathbf{s}_{ji} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{r} = \mathbf{R} = \varepsilon$, conforme a figura 5.3, obtém-se:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left[V_n^*(\xi, \mathbf{x}) \cdot w(\mathbf{x}) - M_n^*(\xi, \mathbf{x}) \cdot \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) \right] \cdot d\Gamma_\varepsilon(\mathbf{x}) = \\ = w(\xi) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{-1}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot d\Gamma_\varepsilon(\mathbf{x}) - \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}(\xi) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot [(1 + \nu) \cdot \ln \varepsilon + 1] \cdot d\Gamma_\varepsilon(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5.35)$$

A integral em $d\Gamma_\varepsilon(\mathbf{x})$ pode ser dada por:

$$d\Gamma_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon \cdot d\phi \quad (5.36)$$

Substituindo-se (5.36) em (5.35), obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left[V_n^*(\xi, x) \cdot w(x) - M_n^*(\xi, x) \cdot \frac{\partial w}{\partial n}(x) \right] \cdot d\Gamma_\varepsilon(x) = \\
& = w(\xi) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi-\beta_c} \frac{-1}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \varepsilon \cdot d\phi - \frac{\partial w}{\partial n}(\xi) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi-\beta_c} \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot [(1+\nu) \cdot \ln \varepsilon + 1] \cdot \varepsilon \cdot d\phi
\end{aligned} \tag{5.37}$$

sendo β_c o ângulo interno do canto da placa, indicado na figura 5.3. Desenvolvendo-se as integrais de (5.37), obtém-se:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left[V_n^*(\xi, x) \cdot w(x) - M_n^*(\xi, x) \cdot \frac{\partial w}{\partial n}(x) \right] \cdot d\Gamma_\varepsilon(x) = -\frac{2 \cdot \pi - \beta_c}{2 \cdot \pi} \cdot w(\xi) \tag{5.38}$$

A parcela de (5.26) referente à integral sobre o trecho Γ_ε , envolvendo $V_n(x)$ e $M_n(x)$, pode ter o mesmo tratamento dado à integral anterior, conduzindo a valores nulos. Assim, a equação (5.26) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
& C(\xi) \cdot w(\xi) + \int_{\Gamma} \left[V_n^*(\xi, x) \cdot w(x) - M_n^*(\xi, x) \cdot \frac{\partial w}{\partial n}(x) \right] \cdot d\Gamma(x) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(\xi, x_c) \cdot w_{ci}(x_c) = \\
& = \int_{\Gamma} \left[V_n(x) \cdot w^*(\xi, x) - M_n(x) \cdot \frac{\partial w^*}{\partial n}(\xi, x) \right] \cdot d\Gamma(x) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(x_c) \cdot w_{ci}^*(\xi, x_c) + \\
& - \int_{\Omega_g} g(x) \cdot w^*(\xi, x) \cdot d\Omega_g(x)
\end{aligned} \tag{5.39}$$

sendo:

$$C(\xi) = \frac{\beta_c}{2 \cdot \pi} \tag{5.40}$$

Quando o ponto ξ estiver fora do domínio, a integral da equação (5.23) que contém a carga g^* será igual à:

$$\int_{\Omega} g^*(\xi, x) \cdot w(\xi) \cdot d\Omega(x) = w(\xi) \quad (5.41)$$

mas como $\xi \notin \Omega \cap \xi \notin \Gamma$ obtém-se:

$$\int_{\Omega} g^*(\xi, x) \cdot w(\xi) \cdot d\Omega(x) = 0 \quad (5.42)$$

Com isso pode-se concluir que:

$$C(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in \Omega \\ \frac{\beta_c}{2 \cdot \pi}, & \xi \in \Gamma \\ 0, & \xi \notin \Omega \cap \xi \notin \Gamma \end{cases} \quad (5.43)$$

lembrando que β_c é o ângulo que fazem as tangentes anterior e posterior ao ponto de colocação.

Quando o contorno tem tangente contínua, β_c é igual π e portanto:

$$C(\xi) = 0,5 \quad (5.44)$$

5.2.3 EQUAÇÃO INTEGRAL EM COORDENADAS NORMAIS E TANGENCIAIS PARA PONTOS INTERNOS

Os deslocamentos transversais ($\mathbf{w}$) para os pontos internos ao domínio são conhecidos a partir da cortante equivalente ($\mathbf{V}_n$), dos momentos fletores ($\mathbf{M}_n$), reações de canto ($\mathbf{R}_c$), deslocamentos ($\mathbf{w}$) e rotações normais ($\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}}$), determinados no contorno.

Seus valores são determinados pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
w(\xi) = & - \int_{\Gamma} \left[V_n^*(\xi, x) \cdot w(x) - M_n^*(\xi, x) \cdot \frac{\partial w}{\partial n}(x) \right] \cdot d\Gamma(x) - \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(\xi, x_c) \cdot w_{ci}(x_c) + \\
& + \int_{\Gamma} \left[V_n(x) \cdot w^*(\xi, x) - M_n(x) \cdot \frac{\partial w^*}{\partial n}(\xi, x) \right] \cdot d\Gamma(x) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(x_c) \cdot w_{ci}^*(\xi, x_c) + \quad (5.45) \\
& - \int_{\Omega_g} g(x) \cdot w^*(\xi, x) \cdot d\Omega_g(x)
\end{aligned}$$

Admitindo-se que (5.45) seja contínua, pode-se através de sua segunda derivada, determinar os valores das curvaturas nos pontos internos. A expressão da curvatura nos pontos internos torna-se:

$$\begin{aligned}
w_{,ij}(\xi) = & - \int_{\Gamma} \left[V_{n,ij}^*(\xi, x) \cdot w(x) - M_{n,ij}^*(\xi, x) \cdot \frac{\partial w}{\partial n}(x) \right] \cdot d\Gamma(x) - \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck,ij}^*(\xi, x_c) \cdot w_{ck}(x_c) + \\
& + \int_{\Gamma} \left[V_n(x) \cdot w_{,ij}^*(\xi, x) - M_n(x) \cdot \frac{\partial w^*}{\partial n},_{ij}(\xi, x) \right] \cdot d\Gamma(x) + \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck}(x_c) \cdot w_{ck,ij}^*(\xi, x_c) + \\
& - \int_{\Omega_g} g(x) \cdot w_{,ij}^*(\xi, x) \cdot d\Omega_g(x) \quad (5.46)
\end{aligned}$$

As segundas derivadas dos valores fundamentais do deslocamento w^* , da rotação normal $\frac{\partial w^*}{\partial n}$, do esforço cortante V_n^* , do momento fletor M_n^* e da reação de canto R_c^* são calculados usando-se as relações:

$$r_{,ij} = \frac{\delta_{ij} - r_i \cdot r_j}{r} \quad (5.47)$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial n} \right)_{,i} = r_{,ij} \cdot n_j \Rightarrow \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right)_{,i} = \frac{\delta_{ij} - r_i \cdot r_j}{r} \cdot n_j \quad (5.48)$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial n} \right)_{,j} = r_{,ij} \cdot s_j \Rightarrow \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right)_{,i} = \frac{\delta_{ij} - r_i \cdot r_j}{r} \cdot s_j \quad (5.49)$$

sendo δ_{ij} o delta de *Dirac* definido em (3.50,3.59).

Determinando-se as expressões para $w^*_{,ij}$, $\frac{\partial w^*}{\partial n},_{ij}$, $V_{n,ij}^*$, $M_{n,ij}^*$ e $R_{ci,ij}^*$, obtém-se:

$$w_{,ij}^*(\xi, \mathbf{x}) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot D} \cdot (\delta_{ij} \cdot \ln r + r_i \cdot r_j) \quad (5.50)$$

$$\frac{\partial w_{,ij}^*}{\partial \mathbf{n}}(\xi, \mathbf{x}) = -\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot D \cdot r} \cdot \left[(\delta_{ij} - 2 \cdot r_i \cdot r_j) \cdot \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} + r_i \cdot n_j + r_j \cdot n_i \right] \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned} V_{n,ij}^*(\xi, \mathbf{x}) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot r^3} \cdot \left\{ \left[8 \cdot \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial \mathbf{s}} \right)^2 \cdot (6 \cdot r_i \cdot r_j - \delta_{ij}) - 8 \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial \mathbf{s}} \right)^2 \cdot (r_i \cdot n_j + r_j \cdot n_i) + \right. \right. \\ \left. + 4 \cdot \frac{\partial r}{\partial \mathbf{s}} \cdot (s_j \cdot n_i + s_i \cdot n_j) + 2 \cdot \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \cdot (2 \cdot s_i \cdot s_j - 4 \cdot r_i \cdot r_j + \delta_{ij}) + \right. \\ \left. - 16 \cdot \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \cdot \frac{\partial r}{\partial \mathbf{s}} \cdot (r_i \cdot s_j + r_j \cdot s_i) + 2 \cdot (r_i \cdot n_j + r_j \cdot n_i) \right] \cdot (1 - \nu) + \\ \left. + 4 \cdot \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \cdot (\delta_{ij} - 4 \cdot r_i \cdot r_j) + 4 \cdot (r_i \cdot n_j + r_j \cdot n_i) \right\} \quad (5.52) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{n,ij}^*(\xi, \mathbf{x}) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \left\{ \left[(1 + \nu) - 2 \cdot \left(\left(\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 + \nu \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial \mathbf{s}} \right)^2 \right) \right] \cdot (\delta_{ij} - 2 \cdot r_i \cdot r_j) + \right. \\ \left. - 4 \cdot \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \cdot (r_i \cdot n_j + r_j \cdot n_i) - 4 \cdot \nu \cdot \frac{\partial r}{\partial \mathbf{s}} \cdot (r_i \cdot s_j + r_j \cdot s_i) + \right. \\ \left. + 4 \cdot r_i \cdot r_j \cdot \left(\left(\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 + \nu \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial \mathbf{s}} \right)^2 \right) + 2 \cdot n_i \cdot n_j + 2 \cdot \nu \cdot s_i \cdot s_j \right\} \quad (5.53) \end{aligned}$$

$$R_{ck,ij}^*(\xi, \mathbf{x}) = M_{ns,ij}(\xi, \mathbf{x}_f) - M_{ns,ij}(\xi, \mathbf{x}_i) \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned} M_{ns,ij}(\xi, \mathbf{x}) = \frac{(1 - \nu)}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \left\{ 2 \cdot \left[\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \cdot (r_i \cdot s_j + r_j \cdot s_i) + \frac{\partial r}{\partial \mathbf{s}} \cdot (r_i \cdot n_j + r_j \cdot n_i) \right] + \right. \\ \left. + 2 \cdot \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \cdot \frac{\partial r}{\partial \mathbf{s}} \cdot (\delta_{ij} - 4 \cdot r_i \cdot r_j) - n_i \cdot s_j - n_j \cdot s_i \right\} \quad (5.55) \end{aligned}$$

5.2.4 EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA CARREGAMENTO DE DOMÍNIO

The diagram illustrates the geometry of the problem. It shows a domain Ω with a boundary Γ . A point ξ is on the boundary. A line segment R connects ξ to a point in Ω . A small region Ω_p is shown, with a boundary Γ_p . A point r is on the boundary Γ_p . A normal vector n is shown at r . A vector r is shown from ξ to r . A small angle $d\Omega_p$ is shown at ξ . A small angle $d\theta$ is shown at ξ . A small distance dr is shown. A coordinate system (x_1, x_2) is shown at the bottom left.

$$\int_{\Omega_g} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}^*(\xi, \mathbf{x}) \cdot d\Omega_g(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_p} \mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{w}^*(\xi, \mathbf{x}) \cdot d\Omega_p(\mathbf{x}) \quad (5.56)$$

Considerando-se o plano de carregamento de forma linear sobre o sub-domínio Ω_p , tem-se:

$$g(x_1, x_2) = A_g \cdot x_1 + B_g \cdot x_2 + C_g \quad (5.57)$$

sendo A_g , B_g e C_g constantes. Reescrevendo-se a expressão (5.56), obtém-se:

$$\int_{\Omega_g} g(x) \cdot w^*(\xi, x) \cdot d\Omega_g(x) = \int_{\Omega_p} (A_g \cdot x_1 + B_g \cdot x_2 + C_g) \cdot w^*(\xi, x) \cdot d\Omega_p(x) \quad (5.58)$$

De acordo com a figura 5.4, o elemento infinitesimal $d\Omega_p$ pode ser escrito como:

$$d\Omega_p = r \cdot dr \cdot d\theta \quad (5.59)$$

Desta forma, substituindo-se o valor da solução fundamental do deslocamento w^* e a expressão (5.59) em (5.58), obtém-se:

$$\int_{\Omega_g} g(x) \cdot w^*(\xi, x) \cdot d\Omega_g(x) = \frac{1}{8 \cdot \pi \cdot D} \int_{\theta} \int_0^R \left[(A_g \cdot x_1 + B_g \cdot x_2 + C_g) \cdot r^2 \cdot \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \cdot r \cdot dr \right] \cdot d\theta \quad (5.60)$$

sendo R o valor de r em um ponto qualquer do sub-domínio Ω_p .

Transformando-se em coordenadas cilíndricas os valores de x_1 e x_2 , obtém-se:

$$\int_{\Omega_g} g(x) \cdot w^*(\xi, x) \cdot d\Omega_g(x) = \frac{1}{8 \cdot \pi \cdot D} \int_{\theta} \int_0^R \left[(A_g \cdot r \cdot r_{1,1} + B_g \cdot r \cdot r_{1,2} + C_g) \cdot r^2 \cdot \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \cdot r \cdot dr \right] \cdot d\theta \quad (5.61)$$

Resolvendo-se a integral interna, obtém-se:

$$\int_{\Omega_g} g(x) \cdot w^*(\xi, x) \cdot d\Omega_g(x) = \int_0 \left\{ \frac{A_g \cdot r_{,1} + B_g \cdot r_{,2}}{40 \cdot \pi \cdot D} \cdot \left[r^5 \cdot \left(\ln r - \frac{7}{10} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{C_g}{32 \cdot \pi \cdot D} \cdot \left[r^4 \cdot \left(\ln r - \frac{3}{4} \right) \right] \right\} \cdot d\theta \quad (5.62)$$

De acordo com a figura 5.4, obtém-se a relação:

$$d\theta = \frac{n_i \cdot r_i}{r} \cdot d\Gamma_p \quad (5.63)$$

Desta forma os termos que constituíam uma integral de domínio são transformados em integrais de contorno, como apresentado na equação a seguir:

$$\int_{\Omega_g} g(x) \cdot w^*(\xi, x) \cdot d\Omega_g(x) = \frac{A_g \cdot r_{,1} + B_g \cdot r_{,2}}{40 \cdot \pi \cdot D} \int_{\Gamma_p} \left[r^4 \cdot \left(\ln r - \frac{7}{10} \right) \right] \cdot n_i \cdot r_i \cdot d\Gamma_p + \\ + \frac{C_g}{32 \cdot \pi \cdot D} \int_{\Gamma_p} \left[r^3 \cdot \left(\ln r - \frac{3}{4} \right) \right] \cdot n_i \cdot r_i \cdot d\Gamma_p \quad (5.64)$$

A integral de domínio da equação (5.46), utilizada na determinação das curvaturas dos pontos internos, é calculada substituindo-se a segunda derivada da solução fundamental do deslocamento ($w^*_{,ij}$), equação (5.50), a equação do carregamento linear distribuído no domínio, equação (5.57) e resolvendo-se de forma análoga à integral anterior. Desta forma, obtém-se:

$$\int_{\Omega_g} g(x) \cdot w^*_{,ij}(\xi, x) \cdot d\Omega_g(x) = \frac{A_g \cdot r_{,1} + B_g \cdot r_{,2}}{12 \cdot \pi \cdot D} \int_{\Gamma_p} r^2 \cdot \left[\left(\ln r - \frac{1}{3} \right) \cdot \delta_{ij} + r_{,i} \cdot r_{,j} \right] \cdot n_i \cdot r_i \cdot d\Gamma_p + \\ + \frac{C_g}{8 \cdot \pi \cdot D} \int_{\Gamma_p} r \cdot \left[\left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \cdot \delta_{ij} + r_{,i} \cdot r_{,j} \right] \cdot n_i \cdot r_i \cdot d\Gamma_p \quad (5.65)$$

5.3 EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA PLACAS ATRAVÉS DA TEORIA DE MINDLIN

5.3.1 EQUAÇÃO INTEGRAL EM COORDENADAS CARTESIANAS PARA DESLOCAMENTOS EM PONTOS DO DOMÍNIO

Pode-se escrever o teorema de *Betti* para a formulação de placas de MINDLIN, conforme a equação (5.1). Em função das hipóteses desta formulação, inclui-se as tensões relativas à cortante e despreza-se àquela referente a deformação na direção da espessura, obtendo-se:

$$\int_V \left(\sigma_{11}^* \varepsilon_{11} + \sigma_{22}^* \varepsilon_{22} + \tau_{12}^* \gamma_{12} + \tau_{13}^* \gamma_{13} + \tau_{23}^* \gamma_{23} \right) dV = \int_V \left(\sigma_{11} \varepsilon_{11}^* + \sigma_{22} \varepsilon_{22}^* + \tau_{12} \gamma_{12}^* + \tau_{13} \gamma_{13}^* + \tau_{23} \gamma_{23}^* \right) dV \quad (5.66)$$

Chamando-se de I_1 a integral do segundo membro da equação (5.66) e substituindo-se as relações de deformações x deslocamentos (4.9) e as equações constitutivas (4.10), tem-se:

$$\begin{aligned} I_1 = \int_V \left\{ \frac{x_3^2 E}{(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} \right) \frac{\partial \Psi_1^*}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial x_2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial \Psi_1^*}{\partial x_2} + \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial x_1} \right) \right] + G' \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \Psi_1 \right) \left(\frac{\partial w^*}{\partial x_1} + \Psi_1^* \right) + \right. \\ \left. + G' \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} + \Psi_2 \right) \left(\frac{\partial w^*}{\partial x_2} + \Psi_2^* \right) \right\} dV \end{aligned} \quad (5.67)$$

Integrando (5.67) ao longo da espessura h , chega-se em:

$$\begin{aligned}
I_1 = \int_{\Omega} \left\{ D \left[\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} \right) \frac{\partial \Psi_1^*}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial x_2} + \right. \right. \\
+ \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial \Psi_1^*}{\partial x_2} + \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial x_1} \right) \left. \right] + G'h \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \Psi_1 \right) \left(\frac{\partial w^*}{\partial x_1} + \Psi_1^* \right) + \\
+ G'h \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} + \Psi_2 \right) \left(\frac{\partial w^*}{\partial x_2} + \Psi_2^* \right) \left. \right\} d\Omega
\end{aligned}
\tag{5.68}$$

A partir das equações de momentos (4.11) e cortantes (4.12), reescreve-se a equação (5.68):

$$\begin{aligned}
I_1 = \int_{\Omega} \left[M_{11} \frac{\partial \Psi_1^*}{\partial x_1} + M_{22} \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial x_2} + M_{12} \left(\frac{\partial \Psi_1^*}{\partial x_2} + \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial x_1} \right) + \right. \\
+ Q_{11} \left(\frac{\partial w^*}{\partial x_1} + \Psi_1^* \right) + Q_{22} \left(\frac{\partial w^*}{\partial x_2} + \Psi_2^* \right) \left. \right] d\Omega
\end{aligned}
\tag{5.69}$$

Aplicando-se a regra da cadeia nos termos da equação (5.69), obtém-se:

$$\begin{aligned}
I_1 = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (M_{11} \Psi_1^*) - \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} \Psi_1^* + \frac{\partial}{\partial x_2} (M_{22} \Psi_2^*) - \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} \Psi_2^* + \frac{\partial}{\partial x_1} (M_{12} \Psi_2^*) - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} \Psi_2^* + \right. \\
+ \frac{\partial}{\partial x_2} (M_{12} \Psi_1^*) - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} \Psi_1^* + \frac{\partial}{\partial x_1} (Q_{11} w^*) - \frac{\partial Q_{11}}{\partial x_1} w^* + Q_{11} \Psi_1^* + \\
+ \frac{\partial}{\partial x_2} (Q_{22} w^*) - \frac{\partial Q_{22}}{\partial x_2} w^* + Q_{22} \Psi_2^* \left. \right] d\Omega
\end{aligned}
\tag{5.70}$$

Agrupando-se os termos da equação (5.70) em relação às derivadas parciais e às funções ψ_i , chega-se na seguinte equação:

$$I_1 = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (M_{11} \Psi_1^* + M_{12} \Psi_2^* + Q_{11} w^*) + \frac{\partial}{\partial x_2} (M_{22} \Psi_2^* + M_{12} \Psi_1^* + Q_{22} w^*) + \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} - Q_{11} \right) \Psi_1^* - \left(\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} - Q_{22} \right) \Psi_2^* - \left(\frac{\partial Q_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{22}}{\partial x_2} \right) w^* \right] d\Omega \quad (5.71)$$

Considerando-se as equações de equilíbrio (3.12), (3.13) e (3.14), e transformando-se os dois primeiros termos da integral de domínio Ω da equação (5.71) em integrais de contorno Γ através do teorema da divergência, obtém-se:

$$I_1 = \int_{\Gamma} \left[(M_{11} \Psi_1^* + M_{12} \Psi_2^* + Q_{11} w^*) n_1 + (M_{22} \Psi_2^* + M_{12} \Psi_1^* + Q_{22} w^*) n_2 \right] d\Gamma + \\ + \int_{\Omega} g w^* d\Omega \quad (5.72)$$

Rearranjando os termos da equação (5.72) de forma a representar convenientemente a teoria de Mindlin, considerando-se as três condições físicas necessárias para a resolução do problema de placas, e para encontrar as equações apresentadas no trabalho de WEEËN [12,13], tem-se:

$$I_1 = \int_{\Gamma} \left[(M_{11} n_1 + M_{12} n_2) \Psi_1^* + (M_{22} n_2 + M_{12} n_1) \Psi_2^* + (Q_{11} n_1 + Q_{22} n_2) w^* \right] d\Gamma + \\ + \int_{\Omega} g w^* d\Omega \quad (5.73)$$

Analogamente, o primeiro termo da equação (5.66) pode ser escrito de forma semelhante:

$$I_1 = \int_{\Gamma} \left[(M_{11}^* n_1 + M_{12}^* n_2) \Psi_1 + (M_{22}^* n_2 + M_{12}^* n_1) \Psi_2 + (Q_{11}^* n_1 + Q_{22}^* n_2) w \right] d\Gamma + \\ + \int_{\Omega} g^* w d\Omega \quad (5.74)$$

Reescrevendo o teorema de Betti às placas de MINDLIN, conforme o desenvolvimento anterior, tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \left[(M_{11}^* n_1 + M_{12}^* n_2) \Psi_1 + (M_{22}^* n_2 + M_{12}^* n_1) \Psi_2 + (Q_{11}^* n_1 + Q_{22}^* n_2) w \right] d\Gamma + \int_{\Omega} g^* w d\Omega = \\ & = \int_{\Gamma} \left[(M_{11} n_1 + M_{12} n_2) \Psi_1^* + (M_{22} n_2 + M_{12} n_1) \Psi_2^* + (Q_{11} n_1 + Q_{22} n_2) w^* \right] d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega \end{aligned} \quad (5.75)$$

Para se obter os esforços de superfície na placa, faz-se as integrações necessárias nas tensões não nulas e substitui as mesmas nas equações (2.17), e chega-se em:

$$\begin{aligned} t_1 &= M_{11} n_1 + M_{12} n_2 \\ t_2 &= M_{12} n_1 + M_{22} n_2 \\ t_3 &= Q_{11} n_1 + Q_{22} n_2 \end{aligned} \quad (5.76)$$

De acordo com as definições apresentadas no item 4.5 deste trabalho, as notações u_1 , u_2 , e u_3 são usadas para definir a função ψ_1 , a função ψ_2 e o deslocamento w , respectivamente. Desta forma, considerando as equações (5.76), a equação (5.75) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} (T_{31}^* u_1 + T_{32}^* u_2 + T_{33}^* u_3) d\Gamma + \int_{\Omega} g^* u_3 d\Omega = \\ & \int_{\Gamma} (U_{31}^* t_1 + U_{32}^* t_2 + U_{33}^* t_3) d\Gamma + \int_{\Omega} g U_{33}^* d\Omega \end{aligned} \quad (5.77)$$

Supondo que o carregamento g^* em (5.77) seja uma carga concentrada unitária aplicada em um ponto ξ do domínio da placa, tomando-se como função ponderadora as soluções fundamentais e aplicando as propriedades da função delta de Dirac nesta equação, escreve-se:

$$u_3(\xi) + \int_{\Gamma} (T_{31}^*(\xi, x)u_1(x) + T_{32}^*(\xi, x)u_2(x) + T_{33}^*(\xi, x)u_3(x)) d\Gamma(x) =$$

$$\int_{\Gamma} (U_{31}^*(\xi, x)t_1(x) + U_{32}^*(\xi, x)t_2(x) + U_{33}^*(\xi, x)t_3(x)) d\Gamma(x) + \int_{\Omega_g} g(x)U_{33}^*(\xi, x)d\Omega_g(x)$$

(5.78)

A equação (5.78) representa uma equação integral de contorno para pontos no domínio da placa. Esta equação considera o caso em que a solução fundamental é encontrada a partir da consideração de uma força unitária aplicada na direção do eixo x_3 . Pode-se escrever uma equação integral generalizada para a teoria de MINDLIN, levando-se em conta os casos em que as soluções fundamentais são encontradas a partir da consideração de uma força unitária aplicada na direção x_3 e dois binários unitários aplicados nas direções x_i :

$$u_j(\xi) + \int_{\Gamma} (T_{ij}^*(\xi, x)u_j(x)) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} (U_{ij}^*(\xi, x)t_j(x)) d\Gamma(x) + \int_{\Omega_g} g(x)U_{i3}^*(\xi, x)d\Omega_g(x) \quad (5.79)$$

sendo $U_{ij}^*(\xi, x)$ a rotação fundamental ($j=1,2$) ou o deslocamento fundamental ($j=3$) e $T_{ij}^*(\xi, x)$ os correspondentes esforços de superfície no ponto singular ξ de uma placa infinita quando um momento unitário ($i=1,2$) ou força unitária ($i=3$) é aplicada no ponto fonte x .

5.3.2 EQUAÇÃO INTEGRAL EM COORDENADAS NORMAIS E TANGENCIAIS PARA DESLOCAMENTOS EM PONTOS DO DOMÍNIO

Para se escrever a equação (5.77) em um sistema genérico de coordenadas ns , é necessário aplicar a transformação de coordenadas (3.19) sabendo-se os deslocamentos do problema real e os associados à solução fundamental. Lembrando que n_1 é igual a $\cos \alpha$ e n_2 é igual a $\sin \alpha$, tem-se:

$$u_1 = u_n n_1 - u_s n_2 \quad (5.80a)$$

$$u_2 = u_n n_2 + u_s n_1 \quad (5.80b)$$

$$U^*_{31} = U^*_{3n} n_1 - U^*_{3s} n_2 \quad (5.80c)$$

$$U^*_{32} = U^*_{3n} n_2 + U^*_{3s} n_1 \quad (5.80d)$$

Substituindo-se as equações (5.80) em (5.77), tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \left[(T^*_{31} n_1 + T^*_{32} n_2) \mu_n + (T^*_{32} n_1 - T^*_{31} n_2) \mu_s + T^*_{33} u_3 \right] d\Gamma + \int_{\Omega} g^* u_3 d\Omega = \\ \int_{\Gamma} \left[(t_1 n_1 + t_2 n_2) U^*_{3n} + (t_2 n_1 - t_1 n_2) U^*_{3s} + t_3 U^*_{33} \right] d\Gamma + \int_{\Omega} g U^*_{33} d\Omega \end{aligned} \quad (5.81)$$

De acordo com a figura 3.3, tem-se:

$$n_1 = s_2 \quad (5.82a)$$

$$n_2 = -s_1 \quad (5.82b)$$

Substituindo (5.82) em (5.81), obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \left[(T^*_{31} n_1 + T^*_{32} n_2) \mu_n + (T^*_{32} s_1 + T^*_{31} s_2) \mu_s + T^*_{33} u_3 \right] d\Gamma + \int_{\Omega} g^* u_3 d\Omega = \\ \int_{\Gamma} \left[(t_1 n_1 + t_2 n_2) U^*_{3n} + (t_2 s_1 + t_1 s_2) U^*_{3s} + t_3 U^*_{33} \right] d\Gamma + \int_{\Omega} g U^*_{33} d\Omega \end{aligned} \quad (5.83)$$

Para determinar os esforços do problema real e os associados à solução fundamental, em coordenadas n_s , escritos em função de t_i e T^*_{ij} , aplica-se a relação (2.8) analogamente e obtém-se:

$$M_n = t_{\alpha} n_{\alpha} \quad (5.84a)$$

$$M_{ns} = t_{\alpha} s_{\alpha} \quad (5.84b)$$

$$Q_n = t_3 \quad (5.84c)$$

$$M^*_{in} = T^*_{i\alpha} n_{\alpha} \quad (5.84d)$$

$$M^*_{ins} = T^*_{i\alpha} s_{\alpha} \quad (5.84e)$$

$$Q_n^* = T_{33}^* \quad (5.84f)$$

Considerando-se que g está distribuída em Ω_g e substituindo-se (5.84) na equação (5.83), obtém-se o teorema de Betti aplicado às placas espessas em coordenadas normais e tangenciais ao contorno da placa:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} [M_{3n}^* u_n + M_{3ns}^* u_s + Q_n^* u_3] d\Gamma + \int_{\Omega} g^* u_3 d\Omega = \\ \int_{\Gamma} [M_n^* U_{3n}^* + M_{ns}^* U_{3s}^* + Q_n^* U_{33}^*] d\Gamma + \int_{\Omega_g} g U_{33}^* d\Omega_g \end{aligned} \quad (5.85)$$

Supondo-se novamente que o carregamento g^* na equação (5.85) seja uma carga concentrada unitária em um ponto ξ do domínio da placa, tomando-se como função ponderadora as soluções fundamentais e aplicando as propriedades do delta de Dirac nesta equação, escreve-se:

$$\begin{aligned} u_3(\xi) + \int_{\Gamma} (M_{3n}^*(\xi, x) u_n(x) + M_{3ns}^*(\xi, x) u_s(x) + Q_n^*(\xi, x) u_3(x)) d\Gamma(x) = \\ \int_{\Gamma} (U_{3n}^*(\xi, x) M_n(x) + U_{3s}^*(\xi, x) M_{ns}(x) + U_{33}^*(\xi, x) Q_n(x)) d\Gamma(x) + \int_{\Omega_g} g(x) U_{33}^*(\xi, x) d\Omega_g(x) \end{aligned} \quad (5.86)$$

A equação anterior representa uma equação integral de contorno para pontos do domínio da placa. Esta equação, em coordenadas ns, considera o caso em que a solução fundamental é encontrada a partir da consideração de uma força unitária aplicada na direção do eixo x_3 .

Escrevendo também para este caso, uma equação integral generalizada para a teoria de MINDLIN, lembrando que as soluções fundamentais são encontradas a partir da consideração de uma força unitária aplicada na direção x_3 e dois binários unitários aplicados nas direções x_i :

$$\begin{aligned}
u_i(\xi) + \int_{\Gamma} \left(M_{in}^*(\xi, x) u_n(x) + M_{ins}^*(\xi, x) u_s(x) + Q_n^*(\xi, x) u_3(x) \right) d\Gamma(x) = \\
\int_{\Gamma} \left(U_{in}^*(\xi, x) M_n(x) + U_{is}^*(\xi, x) M_{ns}(x) + U_{33}^*(\xi, x) Q_n(x) \right) d\Gamma(x) + \int_{\Omega_g} g(x) U_{i3}^*(\xi, x) d\Omega_g(x)
\end{aligned}
\tag{5.87}$$

A equação (5.87) descreve uma equação integral para deslocamentos em pontos do domínio da placa em coordenadas normais e tangenciais, através da teoria de MINDLIN.

5.3.3 EQUAÇÕES INTEGRAIS EM COORDENADAS CARTESIANAS PARA ESFORÇOS EM PONTOS DO DOMÍNIO

Para chegar nas equações integrais de momento fletor, momento torçor e força cortante em pontos do domínio de uma placa de Mindlin, deve-se considerar a equação integral do deslocamento (5.79) e as relações dos esforços em função dos deslocamentos, equações (4.11) e (4.15). Como os esforços se relacionam com as derivadas dos deslocamentos w (u_3) e das funções ψ_1 e ψ_2 (u_1 e u_2 , respectivamente), há a necessidade de derivar a equação (5.79). Deve-se notar que todas as derivadas obtidas em relação às coordenadas do ponto de deslocamento devem ser multiplicadas por (-1) para que sejam válidas em relação às coordenadas do ponto fonte. Assim, as equações integrais para os momentos fletores, momentos torsores e forças cortantes são dadas por:

$$M_{\alpha\beta}(\xi) = - \int_{\Gamma} T_{\alpha\beta k}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} U_{\alpha\beta k}^*(\xi, x) t_k(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega_g} Z_{\alpha\beta}^*(\xi, x) g(x) d\Omega_g(x)
\tag{5.88}$$

$$Q_{3\beta}(\xi) = - \int_{\Gamma} T_{3\beta k}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} U_{3\beta k}^*(\xi, x) t_k(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega_g} Z_{3\beta}^*(\xi, x) g(x) d\Omega_g(x)
\tag{5.89}$$

As soluções fundamentais em termos de esforços e deslocamentos apresentadas pelas equações integrais (5.88) e (5.89) são definidas da seguinte maneira:

$$U_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[U_{\alpha\gamma,\beta}^* + U_{\beta\gamma,\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} U_{\phi\gamma,\phi}^* \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (5.90a)$$

$$U_{\alpha\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[U_{\alpha 3,\beta}^* + U_{\beta 3,\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} U_{\phi 3,\phi}^* \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (5.90b)$$

$$U_{3\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} [U_{\beta\gamma}^* + U_{3\gamma,\beta}^*] \quad (5.90c)$$

$$U_{3\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} [U_{\beta 3}^* + U_{33,\beta}^*] \quad (5.90d)$$

$$T_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[T_{\alpha\gamma,\beta}^* + T_{\beta\gamma,\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} T_{\phi\gamma,\phi}^* \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (5.90e)$$

$$T_{\alpha\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[T_{\alpha 3,\beta}^* + T_{\beta 3,\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} T_{\phi 3,\phi}^* \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (5.90f)$$

$$T_{3\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} [T_{\beta\gamma}^* + T_{3\gamma,\beta}^*] \quad (5.90g)$$

$$T_{3\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} [T_{\beta 3}^* + T_{33,\beta}^*] \quad (5.90h)$$

$$Z_{\alpha\beta}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[U_{\alpha 3,\beta}^* + U_{\beta 3,\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} U_{\gamma 3,\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (5.90i)$$

$$Z_{3\alpha}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} [U_{\alpha 3}^* + U_{33,\alpha}^*] \quad (5.90j)$$

As equações (5.90) descrevem as soluções fundamentais generalizadas das equações (5.88) e (5.89), considerando-se os casos em que estas soluções são encontradas a partir da consideração de uma força e dois binários unitários aplicados. Para a teoria de MINDLIN, as expressões foram adaptadas tendo em conta o parâmetro κ e lembrando que o efeito da carga distribuída não foi considerado.

As soluções fundamentais para o caso em que as mesmas são obtidas com a consideração de uma força unitária aplicada na direção do eixo x_3 , considerando-se as derivadas dos deslocamentos fundamentais U^* e as derivadas dos esforços fundamentais T^* , são:

$$U_{311}^* = \frac{\lambda^2}{16\pi} \left[8B + 2(1-\nu)(\ln r - \ln z) - (1-\nu)A_2 - 8A \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)^2 \right] \quad (5.91a)$$

$$U_{312}^* = U_{321}^* = -\frac{\lambda^2}{16\pi} \left[8A \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_2} \right] \quad (5.91b)$$

$$U_{322}^* = \frac{\lambda^2}{16\pi} \left[8B + 2(1-\nu)(\ln r - \ln z) - (1-\nu)A_2 - 8A \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \right)^2 \right] \quad (5.91c)$$

$$U_{313}^* = \frac{(1-\nu)\lambda^2}{16\pi} \left[(2\ln z - 2\ln r + A_2)r \frac{\partial r}{\partial x_1} \right] + \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial x_1} \quad (5.91d)$$

$$U_{323}^* = \frac{(1-\nu)\lambda^2}{16\pi} \left[(2\ln z - 2\ln r + A_2)r \frac{\partial r}{\partial x_2} \right] + \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial x_2} \quad (5.91e)$$

$$T_{311}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r} \left[(2A + zK_1) \left(\frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial x_1} n_1 \right) - (8A + 2zK_1) \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{\partial r}{\partial n} \right] \quad (5.92a)$$

$$T_{312}^* = -\frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r} \left[(2A + zK_1) \frac{\partial r}{\partial x_2} n_1 - (8A + 2zK_1) \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{\partial r}{\partial n} + 2A \frac{\partial r}{\partial x_1} n_2 \right] \quad (5.92b)$$

$$T_{321}^* = -\frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r} \left[(2A + zK_1) \frac{\partial r}{\partial x_1} n_2 - (8A + 2zK_1) \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{\partial r}{\partial n} + 2A \frac{\partial r}{\partial x_2} n_1 \right] \quad (5.92c)$$

$$T_{322}^* = -\frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r} \left[(2A + zK_1) \left(\frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial x_2} n_2 \right) - (8A + 2zK_1) \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \right)^2 \frac{\partial r}{\partial n} + 2A \frac{\partial r}{\partial x_2} n_2 \right] \quad (5.92d)$$

$$T_{313}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r^2} \left[(z^2B + 1)n_1 - (z^2A + 2) \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial n} \right] \quad (5.92e)$$

$$T_{323}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r^2} \left[(z^2B + 1)n_2 - (z^2A + 2) \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{\partial r}{\partial n} \right] \quad (5.92f)$$

Como a aplicação da solução fundamental devido aos momentos unitários para a teoria de Mindlin é a mesma que será apresentada para a teoria de Reissner no item 5.4 deste trabalho, ela não foi apresentada neste item. Já as soluções fundamentais que consideram a influência das cargas distribuídas no domínio da placa, equações (5.90i) e (5.90j), serão desenvolvidas no item 5.3.4.

5.3.4 EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA CARREGAMENTOS DE DOMÍNIO

Quando as forças distribuídas $\mathbf{g}$ têm expressões integráveis no domínio, as integrais de domínio das equações de placas podem ser transformadas em integrais sobre o contorno Ω_g .

Considerando-se as integrais de domínio apresentadas pela equação (5.79), para a transformação da parcela da carga distribuída constante, utiliza-se novamente o esquema de integração da figura 5.4. A partir deste esquema, a expressão pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\int_{\Omega_g} g(x) U_{i3}^*(\xi, x) d\Omega_g(x) = \int_0^R \left[\int_{\Gamma_g} g(x) U_{i3}^*(\xi, x) r(\xi, x) dr(x) \right] d\theta \quad (5.93)$$

Aplicando-se na equação (5.93) a mudança de variável apresentada pela equação (5.63), as integrais de domínio são transformadas em integrais de contorno Γ_g , ou seja:

$$\int_{\Omega_g} g(x) U_{i3}^*(\xi, x) d\Omega_g(x) = \int_{\Gamma_g} \left[\int_0^{R(\xi, x)} g(x) U_{i3}^*(\xi, x) r(\xi, x) dr(x) \right] \frac{r_{,\gamma} n_{\gamma}}{R(\xi, t)} d\Gamma_g(t) \quad (5.94)$$

Considerando-se mais uma vez que a força distribuída g é constante e, utilizando a solução fundamental referente a uma força unitária aplicada na direção do eixo x_3 , obtida através da teoria de Mindlin, obtém-se para a equação (5.94) o seguinte resultado:

$$\int_{\Omega_g} g(x) U_{33}^*(\xi, x) d\Omega_g(x) = \int_{\Gamma_g} \left[\frac{gR^3}{32\pi D} \left(\ln r - \frac{(2A_2 + 5)}{4} \right) - \frac{gR}{2\pi G'h} \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \right] R_{,\gamma} n_{\gamma} d\Gamma_g \quad (5.95)$$

Analogamente, utilizando as soluções fundamentais da teoria de Reissner referentes a uma força unitária na direção x_3 e momentos unitários na direção x_1 e x_2 , obtém-se para a equação (5.94), respectivamente os seguintes resultados:

$$\int_{\Omega_g} g(x) U_{33}^*(\xi, x) d\Omega_g(x) = \int_{\Gamma_g} \left[\frac{gR^3}{32\pi D} \left(\ln z - \frac{5}{4} \right) - \frac{gR}{2\pi D\lambda^2(1-\nu)} \left(\ln z - \frac{1}{2} \right) \right] R_{,\gamma} n_{\gamma} d\Gamma_g \quad (5.96)$$

$$\int_{\Omega_g} g(x) U_{\alpha 3}^*(\xi, x) d\Omega_g(x) = \int_{\Gamma_g} \left[\frac{gR^3}{12\pi D} \left(\ln z - \frac{5}{6} \right) \right] R_{,\alpha} R_{,\gamma} n_{\gamma} d\Gamma_g \quad (5.97)$$

A integral de domínio relacionada com a solução fundamental devido a um momento unitário aplicado nas direções x_1 e x_2 (WEEËN [12,13]), conforme a equação (5.97), pode ser novamente transformada em uma integral de contorno, de acordo com:

$$\int_{\Omega_g} g(x) U_{\alpha 3}^*(\xi, x) d\Omega_g(x) = \int_{\Gamma_g} g(x) W^*(\xi, x) n_\alpha d\Gamma_g(x) \quad (5.98)$$

sendo:

$$\frac{\partial W^*}{\partial x_\alpha} = U_{\alpha 3}^* \quad (5.99)$$

$$W^* = \frac{r^2}{8\pi D} (\ln z - 1) \quad (5.100)$$

Deve-se notar que este procedimento difere da formulação de WEEËN, embora a solução fundamental utilizada seja a mesma.

Para a obtenção dos esforços internos, a influência das cargas distribuídas no domínio da placa, equações (5.90i) e (5.90j), também pode ser transformada a partir do procedimento anterior, redefinindo as mesmas equações da seguinte maneira:

$$Z_{\alpha\beta}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[U_{\alpha 3}^* n_\beta + U_{\beta 3}^* n_\alpha + \frac{2\nu}{(1-\nu)} U_{\gamma 3}^* n_\gamma \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (5.101)$$

$$Z_{3\alpha}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} [U_{\alpha 3}^* + U_{33}^* n_\alpha] \quad (5.102)$$

Com a substituição dos deslocamentos fundamentais U^* , nas equações (5.101) e (5.102), pode-se definir as influências das cargas distribuídas no domínio, ou seja:

$$Z_{11}^* = -\frac{(1-\nu)}{8\pi} \left[(2 \ln z - 1) r \frac{\partial r}{\partial x_1} n_1 + \frac{\nu}{(1-\nu)} (2 \ln z - 1) r \frac{\partial r}{\partial n} \right] \quad (5.103a)$$

$$Z_{12}^* = Z_{21}^* = -\frac{(1-\nu)}{16\pi} \left[(2 \ln z - 1) r \frac{\partial r}{\partial x_1} n_2 + (2 \ln z - 1) r \frac{\partial r}{\partial x_2} n_1 \right] \quad (5.103b)$$

$$Z_{22}^* = -\frac{(1-\nu)}{8\pi} \left[(2 \ln z - 1) r \frac{\partial r}{\partial x_2} n_2 + \frac{\nu}{(1-\nu)} (2 \ln z - 1) r \frac{\partial r}{\partial n} \right] \quad (5.103c)$$

$$Z_{31}^* = -\frac{(1-\nu)\lambda^2}{16\pi} \left\{ r^2 \left[\ln z + \ln r - \frac{A_2}{2} - 2 \right] - \frac{4D}{G'h} \ln r \right\} n_1 \quad (5.103d)$$

$$Z_{32}^* = -\frac{(1-\nu)\lambda^2}{16\pi} \left\{ r^2 \left[\ln z + \ln r - \frac{A_2}{2} - 2 \right] - \frac{4D}{G'h} \ln r \right\} n_2 \quad (5.103e)$$

5.4 EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA A TEORIA DE REISSNER

5.4.1 EQUAÇÃO INTEGRAL EM COORDENADAS CARTESIANAS PARA DESLOCAMENTOS EM PONTOS DO DOMÍNIO

Através da técnica dos resíduos ponderados ou utilizando-se o teorema de *Betti*, é possível encontrar uma equação integral para as formulações de placas, segundo a formulação de REISSNER. Considerando as equações apresentadas no trabalho de WEEËN [12], pode-se escrever:

$$\begin{aligned} u_j(\xi) + \int_{\Gamma} T_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) &= \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\xi, x) t_j(x) d\Gamma(x) + \\ &+ \int_{\Omega_g} \left[U_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} U_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, x) \right] g(x) d\Omega_g(x) \end{aligned} \quad (5.104)$$

Neste caso, também se utiliza $\mathbf{U}^*_{ij}(\xi, \mathbf{x})$ como sendo a rotação fundamental ou o deslocamento fundamental e $\mathbf{T}^*_{ij}(\xi, \mathbf{x})$ os correspondentes esforços fundamentais de

superfície no ponto singular ξ de uma placa infinita quando um momento ou uma força unitária é aplicada no ponto fonte x .

A equação integral (5.104) representa uma equação integral generalizada para deslocamentos em pontos do domínio da placa em coordenadas cartesianas, segundo a teoria de REISSNER.

5.4.2 EQUAÇÃO INTEGRAL EM COORDENADAS NORMAIS E TANGENCIAIS AO CONTORNO PARA DESLOCAMENTOS EM PONTOS DO DOMÍNIO

Para se escrever a equação (5.104) em um sistema genérico de coordenadas ns , é necessário aplicar a transformação de coordenadas (3.19) sabendo-se os deslocamentos do problema real e os associados à solução fundamental também podem ser referenciados a um sistema de coordenadas ns :

$$\begin{aligned} u_i(\xi) + \int_{\Gamma} \left(M_{in}^*(\xi, x) u_n(x) + M_{ins}^*(\xi, x) u_s(x) + Q_n^*(\xi, x) u_3(x) \right) d\Gamma(x) = \\ = \int_{\Gamma} \left(M_n(\xi, x) U_{in}^*(x) + M_{ns}(\xi, x) U_{is}^*(x) + Q_n^*(\xi, x) U_{33}^*(x) \right) d\Gamma(x) + \\ + \int_{\Omega_g} \left[U_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} U_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, x) \right] g(x) d\Omega_g(x) \end{aligned} \quad (5.105)$$

A equação integral (5.105) representa uma equação integral generalizada para deslocamentos em pontos do domínio da placa em coordenadas normais e tangenciais ao contorno da placa, segundo a teoria de REISSNER.

5.4.3 EQUAÇÕES INTEGRAIS EM COORDENADAS CARTESIANAS PARA ESFORÇOS EM PONTOS DO DOMÍNIO

Para chegar nas equações integrais de momento fletor, momento torçor e força cortante em pontos do domínio da placa de Reissner, deve-se considerar a equação integral do deslocamento (5.104) e as relações dos esforços em função dos deslocamentos, segundo o item 4.5 deste trabalho. Como os esforços se relacionam com as derivadas dos deslocamentos, há a necessidade de derivar a equação (5.104). As equações integrais para os momentos fletores, momentos torçores e forças cortantes são dadas por:

$$M_{\alpha\beta}(\xi) = -\int_{\Gamma} T_{\alpha\beta k}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} U_{\alpha\beta k}^*(\xi, x) t_k(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega_g} Z_{\alpha\beta}^*(\xi, x) g(x) d\Omega_g(x) + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} g \delta_{\alpha\beta} \quad (5.106)$$

$$Q_{3\beta}(\xi) = -\int_{\Gamma} T_{3\beta k}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} U_{3\beta k}^*(\xi, x) t_k(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega_g} Z_{3\beta}^*(\xi, x) g(x) d\Omega_g(x) \quad (5.107)$$

Como se pode observar, as equações integrais (5.106) e (5.107) são bastante semelhantes às definidas no item 5.3. Agora, seguindo a formulação de REISSNER, as soluções fundamentais mencionadas são apresentadas em sua totalidade, incluindo os casos em que além de uma força, dois momentos unitários são aplicados. Assim:

$$U_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[U_{\alpha\gamma,\beta}^* + U_{\beta\gamma,\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} U_{\phi\gamma,\phi}^* \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (5.108a)$$

$$U_{\alpha\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[U_{\alpha 3,\beta}^* + U_{\beta 3,\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} U_{\phi 3,\phi}^* \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (5.108b)$$

$$U_{3\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} [U_{\beta\gamma}^* + U_{3\gamma,\beta}^*] \quad (5.108c)$$

$$U_{3\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} [U_{\beta 3}^* + U_{33,\beta}^*] \quad (5.108d)$$

$$T_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[T_{\alpha\gamma,\beta}^* + T_{\beta\gamma,\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} T_{\phi\gamma,\phi}^* \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (5.108e)$$

$$T_{\alpha\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[T_{\alpha 3,\beta}^* + T_{\beta 3,\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} T_{\phi 3,\phi}^* \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (5.108f)$$

$$T_{3\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} [T_{\beta\gamma}^* + T_{3\gamma,\beta}^*] \quad (5.108g)$$

$$T_{3\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} [T_{\beta 3}^* + T_{33,\beta}^*] \quad (5.108h)$$

$$\begin{aligned} Z_{\alpha\beta}^* = & \frac{D(1-\nu)}{2} \left[U_{\alpha 3,\beta}^* + U_{\beta 3,\alpha}^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} (U_{\alpha\gamma,\gamma\beta}^* + U_{\beta\gamma,\gamma\alpha}^*) + \right. \\ & \left. + \frac{2\nu}{(1-\nu)} \delta_{\alpha\beta} \left(U_{\gamma 3,\gamma}^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} U_{\gamma\phi,\phi\gamma}^* \right) \right] \end{aligned} \quad (5.108i)$$

$$Z_{3\beta}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[U_{\alpha 3}^* + U_{33,\alpha}^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} (U_{\alpha\gamma,\gamma}^* + U_{3\gamma,\gamma\alpha}^*) \right] \quad (5.108j)$$

Nota-se que a principal diferença entre as equações apresentadas no item 5.3 e as equações anteriores ocorre na adoção de soluções fundamentais e também nos termos envolvendo as influências dos carregamentos distribuídos na placa.

Portanto, a partir das derivadas dos deslocamentos fundamentais U^* , as soluções fundamentais em termos dos deslocamentos das equações (5.108) são definidas da seguinte forma:

$$U_{111}^* = \frac{1}{4\pi r} \left[2(4A + 2zK_1 + 1 - \nu) \frac{\partial r}{\partial x_1} - (16A + 4zK_1 + 2 - 2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)^3 + (4A + 1 - \nu) \frac{\partial r}{\partial x_1} \right] \quad (5.109a)$$

$$U_{112}^* = -\frac{1}{4\pi r} \left[(16A + 4zK_1 + 2 - 2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)^2 \frac{\partial r}{\partial x_2} - (4A + 1 - \nu) \frac{\partial r}{\partial x_2} \right] \quad (5.109b)$$

$$U_{113}^* = -\frac{(1-\nu)}{8\pi} \left\{ \left[2 \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \ln z - 1 \right] + 2 \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)^2 \right\} \quad (5.109c)$$

$$U_{121}^* = U_{211}^* = \frac{1}{4\pi r} \left[(4A + 2zK_1 + 1 - \nu) \frac{\partial r}{\partial x_2} - (16A + 4zK_1 + 2 - 2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)^2 \frac{\partial r}{\partial x_2} \right] \quad (5.109d)$$

$$U_{122}^* = U_{212}^* = \frac{1}{4\pi r} \left[(4A + 2zK_1 + 1 - \nu) \frac{\partial r}{\partial x_1} - (16A + 4zK_1 + 2 - 2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \right)^2 \frac{\partial r}{\partial x_1} \right] \quad (5.109e)$$

$$U_{123}^* = U_{213}^* = -\frac{(1-\nu)}{8\pi} \left[2 \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_2} \right] \quad (5.109f)$$

$$U_{221}^* = -\frac{1}{4\pi r} \left[(16A + 4zK_1 + 2 - 2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \right)^2 \frac{\partial r}{\partial x_1} - (4A + 1 + \nu) \frac{\partial r}{\partial x_1} \right] \quad (5.109g)$$

$$U_{222}^* = \frac{1}{4\pi r} \left[2(4A + 2zK_1 + 1 - \nu) \frac{\partial r}{\partial x_2} - (16A + 4zK_1 + 2 - 2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \right)^3 + (4A + 1 - \nu) \frac{\partial r}{\partial x_2} \right] \quad (5.109h)$$

$$U_{223}^* = -\frac{(1-\nu)}{8\pi} \left\{ \left[2 \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \ln z - 1 \right] + 2 \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \right)^2 \right\} \quad (5.109i)$$

$$U_{311}^* = \frac{\lambda^2}{2\pi} \left[B - A \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)^2 \right] \quad (5.109j)$$

$$U_{312}^* = U_{321}^* = -\frac{\lambda^2}{2\pi} \left[A \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_2} \right] \quad (5.109k)$$

$$U_{322}^* = \frac{\lambda^2}{2\pi} \left[B - A \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \right)^2 \right] \quad (5.109l)$$

$$U_{313}^* = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial x_1} \quad (5.109m)$$

$$U_{323}^* = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial x_2} \quad (5.109n)$$

A partir das derivadas dos esforços fundamentais T^* , as soluções fundamentais em termos dos esforços das equações (5.108) são definidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T_{111}^* = & \frac{D(1-\nu)}{4\pi r^2} \left[2(4A + 2zK_1 + 1 - \nu)n_1 - (16A + 4zK_1 + 2 + 2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial n} + \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)^2 n_1 \right) + \right. \\ & + (4A + 1 + 3\nu)n_1 - (16A + 6zK_1 + z^2K_0 + 2 - 2\nu) 2 \left(\left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)^2 n_1 + \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial n} \right) + \\ & \left. + (96A + 32zK_1 + 4z^2K_0 + 8 - 8\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)^3 \frac{\partial r}{\partial n} \right] \end{aligned} \quad (5.110a)$$

$$\begin{aligned} T_{112}^* = & \frac{D(1-\nu)}{4\pi r^2} \left[- (16A + 6zK_1 + z^2K_0 + 2 - 2\nu) 2 \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_2} n_1 + (4A + 1 + 3\nu)n_2 \right. \\ & - (16A + 4zK_1 + 2 + 2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{\partial r}{\partial n} + \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)^2 n_2 \right) + \\ & \left. + (96A + 32zK_1 + 4z^2K_0 + 8 - 8\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)^2 \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{\partial r}{\partial n} \right] \end{aligned} \quad (5.110b)$$

$$T_{113}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r} \left[(2A + zK_1) 2 \frac{\partial r}{\partial x_1} n_1 - (8A + 2zK_1) \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)^2 \frac{\partial r}{\partial n} + 2A \frac{\partial r}{\partial n} \right] \quad (5.110c)$$

$$\begin{aligned}
T_{121}^* = T_{211}^* &= \frac{D(1-\nu)}{4\pi r^2} \left[(4A + 2zK_1 + 1 - \nu)n_2 - (16A + 4zK_1 + 2 + 2\nu) \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_2} n_1 + \right. \\
&- (16A + 6zK_1 + z^2K_0 + 2 - 2\nu) \left(\left(\frac{\partial r}{\partial x_2} n_1 + \frac{\partial r}{\partial x_1} n_2 \right) \frac{\partial r}{\partial x_1} + \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{\partial r}{\partial n} \right) + \\
&+ (96A + 32zK_1 + 4z^2K_0 + 8 - 8\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)^2 \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{\partial r}{\partial n} \left. \right]
\end{aligned} \tag{5.110d}$$

$$\begin{aligned}
T_{122}^* = T_{212}^* &= \frac{D(1-\nu)}{4\pi r^2} \left[(4A + 2zK_1 + 1 - \nu)n_1 - (16A + 4zK_1 + 2 + 2\nu) \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_2} n_2 + \right. \\
&- (16A + 6zK_1 + z^2K_0 + 2 - 2\nu) \left(\left(\frac{\partial r}{\partial x_2} n_1 + \frac{\partial r}{\partial x_1} n_2 \right) \frac{\partial r}{\partial x_2} + \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial n} \right) + \\
&+ (96A + 32zK_1 + 4z^2K_0 + 8 - 8\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \right)^2 \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial n} \left. \right]
\end{aligned} \tag{5.110e}$$

$$T_{123}^* = T_{213}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r} \left[(2A + zK_1) \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} n_1 + \frac{\partial r}{\partial x_1} n_2 \right) - (8A + 2zK_1) \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{\partial r}{\partial n} \right] \tag{5.110f}$$

$$\begin{aligned}
T_{221}^* &= \frac{D(1-\nu)}{4\pi r^2} \left[-(16A + 4zK_1 + 2 + 2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial n} + \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \right)^2 n_1 \right) + \right. \\
&+ (4A + 1 + 3\nu)n_1 - (16A + 6zK_1 + z^2K_0 + 2 - 2\nu) 2 \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_2} n_2 + \\
&+ (96A + 32zK_1 + 4z^2K_0 + 8 - 8\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \right)^2 \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial n} \left. \right]
\end{aligned} \tag{5.110g}$$

$$\begin{aligned}
T_{222}^* &= \frac{D(1-\nu)}{4\pi r^2} \left[2(4A + 2zK_1 + 1 - \nu)n_2 - (16A + 4zK_1 + 2 + 2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{\partial r}{\partial n} + \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \right)^2 n_2 \right) + \right. \\
&+ (4A + 1 + 3\nu)n_2 - (16A + 6zK_1 + z^2K_0 + 2 - 2\nu) 2 \left(\left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \right)^2 n_2 + \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{\partial r}{\partial n} \right) + \\
&+ (96A + 32zK_1 + 4z^2K_0 + 8 - 8\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \right)^3 \frac{\partial r}{\partial n} \left. \right]
\end{aligned}$$

(5.110h)

$$T_{223}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r} \left[(2A + zK_1) 2 \frac{\partial r}{\partial x_2} n_2 - (8A + 2zK_1) \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \right)^2 \frac{\partial r}{\partial n} + 2A \frac{\partial r}{\partial n} \right] \quad (5.110i)$$

$$T_{311}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r} \left[(2A + zK_1) \left(\frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial x_1} n_1 \right) - (8A + 2zK_1) \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{\partial r}{\partial n} \right] \quad (5.110j)$$

$$T_{312}^* = -\frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r} \left[(2A + zK_1) \frac{\partial r}{\partial x_2} n_1 - (8A + 2zK_1) \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{\partial r}{\partial n} + 2A \frac{\partial r}{\partial x_1} n_2 \right] \quad (5.110k)$$

$$T_{321}^* = -\frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r} \left[(2A + zK_1) \frac{\partial r}{\partial x_1} n_2 - (8A + 2zK_1) \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{\partial r}{\partial n} + 2A \frac{\partial r}{\partial x_2} n_1 \right] \quad (5.110l)$$

$$T_{322}^* = -\frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r} \left[(2A + zK_1) \left(\frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial x_2} n_2 \right) - (8A + 2zK_1) \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \right)^2 \frac{\partial r}{\partial n} + 2A \frac{\partial r}{\partial x_2} n_2 \right] \quad (5.110m)$$

$$T_{313}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r^2} \left[(z^2 B + 1) n_1 - (z^2 A + 2) \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial n} \right] \quad (5.110n)$$

$$T_{323}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r^2} \left[(z^2 B + 1) n_2 - (z^2 A + 2) \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{\partial r}{\partial n} \right] \quad (5.110o)$$

5.4.4 EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA CARREGAMENTOS DISTRIBUÍDOS

Considerando a formulação do trabalho de WEEËN [12], a integral de domínio da expressão (5.105) também pode ser transformada em uma integral sobre o contorno de Ω_g . Utilizando-se o teorema da divergência, escreve-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_g} \left[U_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} U_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, x) \right] g(x) d\Omega_g(x) = \\ g \int_{\Gamma_g} \left[V_{i\alpha}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} U_{i\alpha}^*(\xi, x) \right] n_\alpha d\Gamma_g(x) \end{aligned} \quad (5.111)$$

sendo:

$$V_{\alpha,\beta}^* = \frac{r^2}{128\pi D} \left[\delta_{\alpha\beta} (4 \ln z - 5) + (4 \ln z - 3) r_{,\alpha} r_{,\beta} \right] \quad (5.112a)$$

$$V_{3,\beta}^* = - \frac{r r_{,\beta}}{128\pi D (1-\nu) \lambda^2} \left[32(2 \ln z - 1) - z^2 (1-\nu) (4 \ln z - 5) \right] \quad (5.112b)$$

Aplicando-se as soluções fundamentais das equações (5.112), obtém-se o resultado da integral de domínio da equação (5.111).

Finalmente, as influências das cargas distribuídas no domínio da placa, apresentadas pelas equações (5.108i) e (5.108j), podem ser substituídas por uma formulação alternativa a partir das equações integrais sobre o contorno da região carregada, equações (5.111) e (5.112), definidas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} Z_{\alpha\beta}^* = & \frac{D(1-\nu)}{2} \left[V_{\alpha,\gamma\beta}^* + V_{\beta,\gamma\alpha}^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} (U_{\alpha\gamma,\beta}^* + U_{\beta\gamma,\alpha}^*) + \right. \\ & \left. + \frac{2\nu}{(1-\nu)} \delta_{\alpha\beta} \left(V_{\phi,\gamma\phi}^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} U_{\phi\gamma,\phi}^* \right) \right] n_\gamma \end{aligned} \quad (5.113a)$$

$$Z_{3\beta}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[V_{\alpha,\gamma}^* + U_{3,\gamma\alpha}^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} (U_{\alpha\gamma}^* + U_{3\gamma,\gamma}^*) \right] n_\gamma \quad (5.113b)$$

Após a substituição das derivadas dos deslocamentos fundamentais U^* da formulação de REISSNER, e das derivadas das equações (5.112) nas influências das integrais de domínio (5.113), escreve-se:

$$\begin{aligned}
Z_{11}^* = & -\frac{r}{64\pi} \left[(4 \ln z - 3) \left[2(1-\nu) \frac{\partial r}{\partial x_1} n_1 + (1+3\nu) \frac{\partial r}{\partial n} \right] + \right. \\
& + 4 \left[(1-\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)^2 + \nu \frac{\partial r}{\partial n} \right] - \frac{\nu}{(1-\nu)4\pi\lambda^2 r} \left\{ [2(4A + 2zK_1 + 1 - \nu) \frac{\partial r}{\partial x_1} + \right. \\
& \left. - (16A + 4zK_1 + 2 - 2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)^2 + (4A + 1 + \nu) \frac{\partial r}{\partial x_1} \right] n_1 + \\
& \left. \left[(4A + 1 + \nu) \frac{\partial r}{\partial x_2} - (16A + 4zK_1 + 2 - 2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)^2 \frac{\partial r}{\partial x_2} \right] n_2 \right\} \Bigg]
\end{aligned} \tag{5.114a}$$

$$\begin{aligned}
Z_{12}^* = Z_{21}^* = & -\frac{r}{64\pi} \left[(4 \ln z - 3) \left[(1-\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} n_1 + \frac{\partial r}{\partial x_1} n_2 \right) + 4(1-\nu) \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{\partial r}{\partial n} \right] + \right. \\
& - \frac{\nu}{(1-\nu)4\pi\lambda^2 r} \left\{ \left[(4A + 2zK_1 + 1 - \nu) \frac{\partial r}{\partial x_2} - (16A + 4zK_1 + 2 - 2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)^2 \frac{\partial r}{\partial x_2} \right] n_1 + \right. \\
& \left. \left. + \left[(4A + 2zK_1 + 1 + \nu) \frac{\partial r}{\partial x_1} - (16A + 4zK_1 + 2 - 2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \right)^2 \frac{\partial r}{\partial x_1} \right] n_2 \right\} \right]
\end{aligned} \tag{5.114b}$$

$$\begin{aligned}
Z_{22}^* = & -\frac{r}{64\pi} \left[(4 \ln z - 3) \left[2(1-\nu) \frac{\partial r}{\partial x_2} n_2 + (1+3\nu) \frac{\partial r}{\partial n} \right] + \right. \\
& + 4 \left[(1-\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \right)^2 + \nu \frac{\partial r}{\partial n} \right] - \frac{\nu}{(1-\nu)4\pi\lambda^2 r} \left\{ [2(4A + 2zK_1 + 1 - \nu) \frac{\partial r}{\partial x_2} + \right. \\
& \left. - (16A + 4zK_1 + 2 - 2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \right)^2 + (4A + 1 + \nu) \frac{\partial r}{\partial x_2} \right] n_2 + \\
& \left. \left[(4A + 1 + \nu) \frac{\partial r}{\partial x_1} - (16A + 4zK_1 + 2 - 2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \right)^2 \frac{\partial r}{\partial x_1} \right] n_1 \right\} \Bigg]
\end{aligned} \tag{5.114c}$$

$$\begin{aligned}
Z_{31}^* = & \frac{1}{8\pi} \left[(2 \ln z - 1) n_1 + 2 \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial n} \right] - \frac{\nu}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \left[B - A \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)^2 \right] n_1 + \left[A \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_2} \right] n_2 \right\}
\end{aligned} \tag{5.114d}$$

$$Z_{32}^* = \frac{1}{8\pi} \left[(2 \ln z - 1) n_2 + 2 \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{\partial r}{\partial n} \right] - \frac{\nu}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \left[B - A \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \right)^2 \right] n_2 + \left[A \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_2} \right] n_1 \right\}$$

(5.114e)

Capítulo 6

Método dos Elementos de Contorno

6.1 INTRODUÇÃO

Soluções analíticas de um problema genérico plano são, normalmente, muito difíceis de serem encontradas. Assim, considerando este problema, faz-se o uso de métodos numéricos.

Será apresentada, no decorrer deste capítulo, a formulação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para solução de placas. Esta formulação pode ser deduzida a partir de técnicas, como a dos resíduos ponderados, a partir do teorema de *Betti*, ou aplicando a terceira identidade de *Green*. Usando-se a primeira técnica, tem-se uma formulação que pode ser facilmente relacionada a outros métodos numéricos, permitindo o acoplamento do MEC a estes outros métodos [19].

Obtidas as equações integrais (capítulo 5), é feita a discretização do contorno da placa em elementos. Estas equações integrais são transformadas através de equações algébricas em um sistema de equações lineares onde as incógnitas são deslocamentos e esforços em nós definidos no contorno. O sistema de equações lineares é obtido escrevendo-se as equações integrais para todos os nós associados aos elementos de contorno. Com a imposição das condições de contorno do problema e a resolução final do sistema de equações resultante, valores do contorno e domínio da placa podem ser obtidos.

Como será mostrado neste capítulo, seguindo-se a teoria clássica, para cada ponto de colocação, ou seja, para cada nó onde se posiciona a fonte para se escrever a equação integral, são necessárias duas equações relacionando deslocamentos e

esforços no contorno. Para o problema de placas seguindo as teorias de REISSNER/MINDLIN, para cada ponto de colocação são necessárias três equações relacionando deslocamentos e esforços generalizados no contorno.

Todos os índices neste capítulo variam de 1 até 2, a menos que se informe o contrário.

6.2 DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO

Para aplicar as equações integrais de placas a problemas físicos, é preciso que estas possam ser facilmente explicitadas para um contorno em particular. Na figura 6.1a é mostrado um domínio Ω , com um contorno Γ , de formato arbitrário.

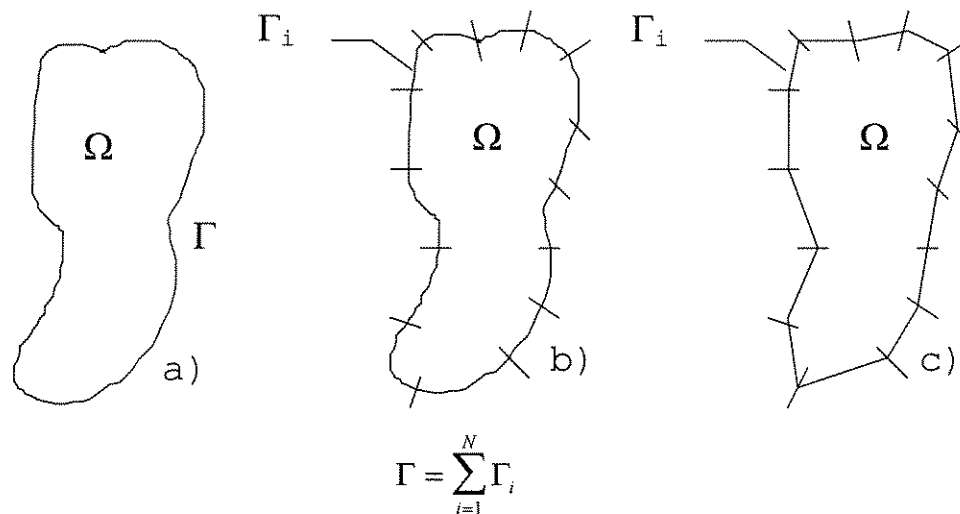


FIGURA 6.1 Discretização do Contorno.

Este contorno Γ é dividido em N trechos menores Γ_i , tal que a soma destes recompõem o contorno original, conforme está ilustrado na figura 6.1b. Aos pontos extremos de cada um dos trechos dá-se o nome de **nós**. Quando os trechos são lineares, ou possam ser aproximados por trechos lineares, cada um destes pode ter sua geometria descrita por uma função de interpolação das coordenadas dos nós, como no exemplo da figura 6.1c.

Neste estudo, para a aproximação da geometria do contorno da placa, o elemento utilizado é linear, ficando o mesmo definido pelas coordenadas cartesianas dos pontos nodais.

Estes trechos do contorno, aproximados por funções de interpolação, são aqui chamados de **elementos de contorno**.

6.3 ELEMENTOS DE CONTORNO

No item anterior, procurou-se apresentar os elementos de contorno buscando-se uma justificativa na geometria do corpo em estudo. No entanto, os elementos de contorno derivam de trabalhos feitos sobre o Método dos Elementos Finitos. Assim, forças e deslocamentos no contorno são aproximados a partir dos valores nodais da mesma forma que a geometria, analogamente ao que se faz no Método dos Elementos Finitos.

Quando, tanto a geometria do elemento quanto suas variáveis de deslocamentos e esforços são descritas pela mesma função de interpolação, o elemento é chamado **isoparamétrico**. Assim pode-se escrever:

$$X_s = \phi_i(\xi)X_i \quad (6.1)$$

Na equação (6.1), o índice i varia de 1 até 2 para elementos isoparamétricos lineares. O valor X_s representa qualquer uma das variáveis do elemento, sejam as coordenadas de um ponto no interior ou o valor do deslocamento ou esforço neste mesmo ponto.

A variável homogênea ξ é um parâmetro independente e assume, ao longo dos elementos, os valores ilustrados na Figura 6.2.

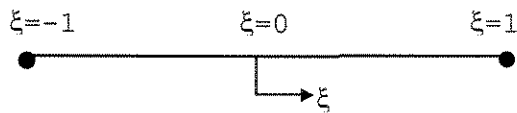


FIGURA 6.2 Elemento Linear.

As funções de interpolação usadas são polinômios de *Lagrange* que, para o caso linear têm a forma:

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1-\xi) \quad \phi_2 = \frac{1}{2}(1+\xi) \quad (6.2)$$

Estas funções de interpolação podem ser representadas graficamente como ilustrado na figura 6.3.

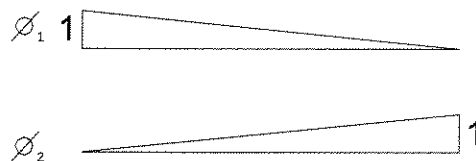


FIGURA 6.3 Representação Gráfica das Funções de Interpolação Linear

Até aqui foram tratados apenas os elementos ditos contínuos. Existe ainda uma categoria de elementos de contorno chamados descontínuos. Estes elementos têm a finalidade de permitir que em um mesmo lugar geométrico existam dois valores de forças e deslocamentos associados, ou seja, permitir um salto nas variáveis de contorno. Uma maneira de se fazer isso é alterar as funções de interpolação de modo a descrever as variáveis de contorno em termos de pontos internos ao elemento, conforme a ilustração na figura 6.4.

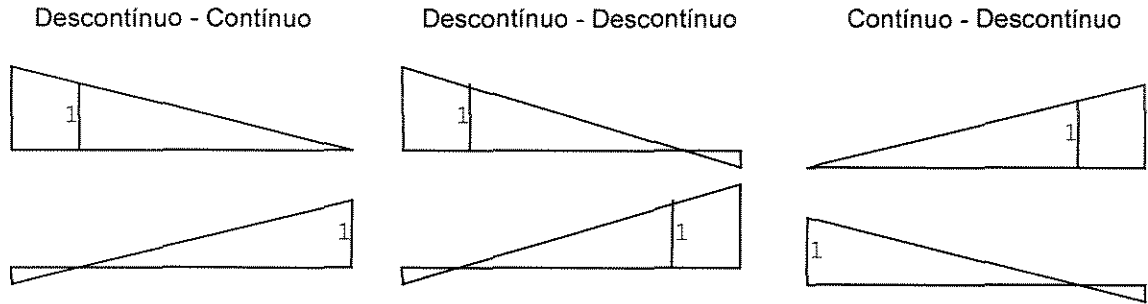


FIGURA 6.4 Elementos Descontínuos Lineares.

Neste trabalho, as funções de interpolação não são alteradas para descrever as descontinuidades. Em lugar disso, associaram-se dois conjuntos de variáveis a um mesmo lugar geométrico, criando-se dois nós em um mesmo ponto do espaço, cada qual relacionado a um dos elementos adjacentes. Este ponto particular com duas variáveis é chamado **nó duplo** e será tratado em detalhes mais adiante.

Usando-se a equação (6.1) para descrever os esforços e deslocamentos de pontos internos aos elementos de contorno chega-se a:

$$u_k = \phi_i U_k^i \quad t_k = \phi_i T_k^i \quad (6.3)$$

sendo **k** o índice do nó no elemento de contorno.

6.4 TRANSFORMAÇÃO DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS DAS PLACAS DE KIRCHHOFF

Seja a equação integral de placas para pontos do contorno (5.39):

$$\begin{aligned}
& C(\xi) \cdot w(\xi) + \int_{\Gamma} \left[V_n^*(\xi, \eta) \cdot w(\eta) - M_n^*(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial w}{\partial n}(\eta) \right] \cdot d\Gamma(\eta) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(\xi, x_c) \cdot w_{ci}(x_c) = \\
& = \int_{\Gamma} \left[V_n(x) \cdot w^*(\xi, x) - M_n(x) \cdot \frac{\partial w^*}{\partial n}(\xi, x) \right] \cdot d\Gamma(x) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(x_c) \cdot w_{ci}^*(\xi, x_c) + \\
& - \int_{\Omega_g} g(x) \cdot w^*(\xi, x) \cdot d\Omega_g(x)
\end{aligned}$$

De acordo com a equação (5.39), as variáveis relacionadas com este problema são w , $\frac{\partial w}{\partial n}$, V_n e M_n e, quando existem cantos, R_c em cada um dos cantos da placa.

Sabe-se que sempre são conhecidas duas das quatro variáveis mencionadas (sem levar em conta a reação de canto) a partir das condições naturais de cada problema. No item 3.3 deste trabalho, pode-se perceber este fato nas condições de contorno das placas clássicas. Sendo assim, resultam duas incógnitas, portanto são necessárias duas equações integrais. Como se tem a equação (5.39), necessita-se de mais uma equação integral. Esta equação integral pode ser a derivada da equação (5.39) em relação à normal n [19]. Outra alternativa é aplicar a equação integral (5.39) em pontos com soluções fundamentais distintas, obtendo-se equações diferentes relacionando as incógnitas [48].

Discretizando-se o contorno da placa em N elementos de contorno e substituindo-se as variáveis por suas aproximações (6.3), a equação integral das placas clássicas para pontos no contorno pode ser escrita por:

$$\begin{aligned}
& C(\xi) \cdot w(\xi) + \sum_{i=1}^{N_e} \int_{\Gamma} \left[V_n^*(\xi, \eta) \cdot \phi_i(\eta) \cdot d\Gamma(\eta) \cdot w_i^j \right] - \sum_{i=1}^{N_e} \int_{\Gamma} \left[M_n^*(\xi, \eta) \cdot \phi_i(\eta) \cdot d\Gamma(\eta) \cdot \frac{\partial w^j}{\partial n_i} \right] + \\
& \sum_{i=1}^N R_{ci}^*(\eta_c) \cdot w_i(\eta_c) = \sum_{i=1}^{N_e} \int_{\Gamma} \left[w^*(\xi, \eta) \phi_i(\eta) \cdot d\Gamma(\eta) \cdot V_n^j \right] - \sum_{i=1}^{N_e} \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(\xi, \eta) \cdot \phi_i(\eta) \cdot d\Gamma(\eta) \cdot M_n^j \right] + \\
& \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(\eta_c) \cdot w_i^*(\eta_c) - \int_{\Omega_g} g(\eta_d) \cdot w^*(\xi, \eta_d) \cdot d\Omega_g(\eta_d)
\end{aligned} \tag{6.4}$$

sendo:

- η : Uma variável que percorre o contorno,
- η_d : Uma variável do domínio,
- η_c : O valor da variável η nos cantos,
- ξ : Nó onde está sendo aplicada a equação integral.

De um modo geral, as integrais da equação (6.4) são feitas por tratamento numérico ao longo do contorno, exceto na região que contém o ponto de colocação, onde as integrais são feitas no sentido do valor principal de *Cauchy*.

Após a realização da integração, tem-se uma relação linear entre valores nodais das variáveis incógnitas e conhecidas w , $\frac{\partial w}{\partial n}$, V_n , M_n e com as reações de canto R_c . Portanto, tratando-se de uma placa com N_c nós de contorno, resultam $2 N_c$ incógnitas, além de uma reação de canto R_c para cada canto. Através da formulação apresentada por PAIVA [48], as reações de canto incógnitas não são consideradas. Assim, são necessárias somente $2N_c$ equações onde metade delas são obtidas com o ponto no contorno e a outra metade com o ponto externo na direção normal ao contorno, como será explicado a seguir. A figura 6.5 mostra o posicionamento do nó externo j' associado ao nó j , a uma distância d deste último, que é a média dos comprimentos (l_1 , l_2) dos elementos associados a este nó. A distância mais comumente usada para o posicionamento destes pontos externos é a média dos comprimentos dos elementos de contorno relacionados ao nó considerado [65].

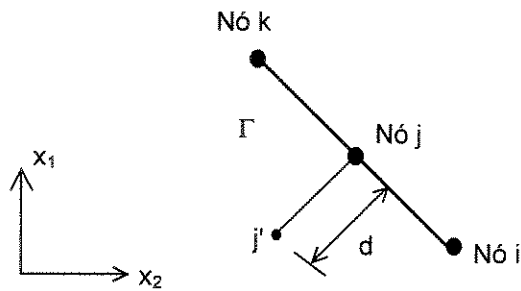


FIGURA 6.5 Posição do Nó Externo.

No caso de haver nós duplos, em que as incógnitas são as mesmas no local, pode-se deslocar os pontos de colocação para dentro dos elementos concorrentes ao nó duplo para a obtenção de duas equações integrais diferentes. Neste trabalho, adotou-se $\frac{1}{4}$ do elemento como a distância a ser deslocada. Na figura 6.6 encontra-se uma ilustração disto e, analogamente, o ponto externo a ser considerado deve ser na direção normal a esse novo ponto de colocação agora deslocado.

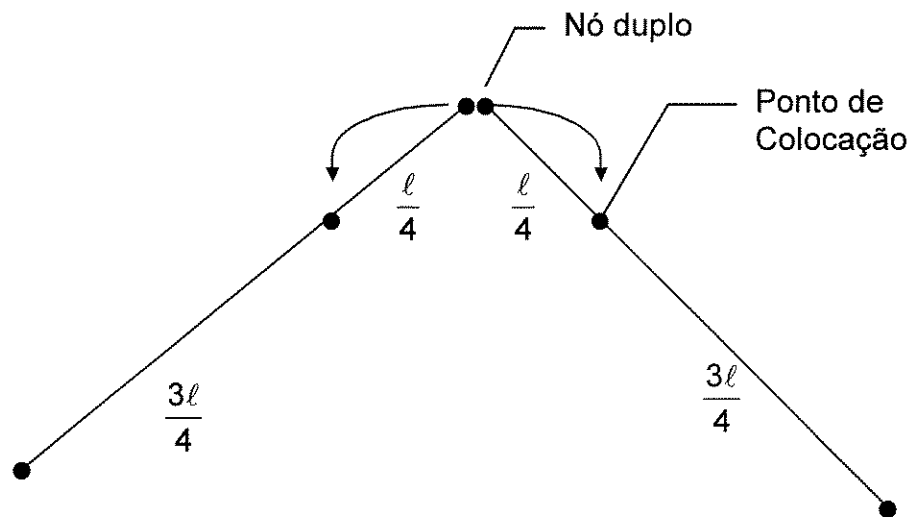


FIGURA 6.6 Deslocamento dos Pontos de Colocação para Nós Duplos.

Uma alternativa ao uso de integrações no sentido do valor principal de *Cauchy* é usar considerações de deslocamento de corpo rígido para a obtenção dos ponderadores dos deslocamentos associados ao ponto de colocação [19].

6.4.1 MONTAGEM DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Realizadas as operações de integração das equações de contorno (6.4) sobre cada elemento genérico Γ_j , somam-se estas influências para todos os **N** elementos nos **N_c** nós do contorno. Reescrevendo-se a equação (6.4) tem-se:

$$\tilde{C}w + \tilde{H}\tilde{U} = \tilde{G}\tilde{T} + \tilde{F} \quad (6.5)$$

Para as placas clássicas, sabe-se que:

$$\tilde{U}^N = \left\{ w^1, \frac{\partial w^1}{\partial n}, \dots, w^{N_c}, \frac{\partial w^{N_c}}{\partial n} \right\}, w_{c1}, \dots, w_{cN_c}$$

(São os deslocamentos e rotações normais ao contorno, onde se incluem os deslocamentos de canto),

$$\tilde{T}^N = \{V_n^1, M_n^1, \dots, V_n^{N_c}, M_n^{N_c}\}, R_{c1}, \dots, R_{cN_c}$$

(São os esforços normais ao contorno, onde se incluem as reações de canto),

$\tilde{H}$ e $\tilde{G}$: São as matrizes globais de influência, que dependem apenas da geometria do problema,

$\tilde{C}w$: É o deslocamento correspondente ao ponto do contorno no qual se aplicou a equação integral,

$\underline{F}$: É o valor resultante da integração da região Ω_g .

Considerando-se a equação (5.56) o valor de F é dado por:

$$F(\xi) = \int_{\Omega_g} g(\eta_d) w^*(\xi, \eta_d) d\Omega_g(\eta_d) \quad (6.6)$$

Após operações necessárias na expressão (6.5), chega-se a seguinte equação matricial:

$$\underline{H} \underline{U} = \underline{G} \underline{T} + \underline{F} \quad (6.7)$$

Impondo-se as $2N_c$ variáveis conhecidas em (6.7) e após a troca de membros das colunas das matrizes H e G , para que os valores conhecidos fiquem posicionados do lado direito da equação e as incógnitas do lado esquerdo, obtém-se o seguinte sistema de $2N_c$ equações:

$$\underline{A} \underline{X} = \underline{B} \quad (6.8)$$

sendo:

$\underline{X}$: O vetor com as $2N_c$ variáveis incógnitas,

$\underline{B}$: O vetor que contém os efeitos dos deslocamentos e esforços prescritos no contorno, incluindo também o carregamento de domínio,

$\underline{A}$: A matriz dos coeficientes das variáveis incógnitas, obtida da troca de colunas das matrizes H e G , de dimensão $2N_c \times 2N_c$.

6.5 TRANSFORMAÇÃO DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS DE PLACAS PELAS TEORIAS DE REISSNER/MINDLIN

Para o uso direto do MEC para as placas de REISSNER/MINDLIN, é necessário transformar as equações integrais (5.79), referente à teoria de MINDLIN, ou (5.104), referente à teoria de REISSNER, em equações algébricas. Sejam elas, respectivamente:

$$u_j(\xi) + \int_{\Gamma} (T_{ij}^*(\xi, x) u_j(x)) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} (U_{ij}^*(\xi, x) t_j(x)) d\Gamma(x) + \int_{\Omega_g} g(x) U_{i3}^*(\xi, x) d\Omega_g(x)$$

$$u_j(\xi) + \int_{\Gamma} T_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\xi, x) t_j(x) d\Gamma(x) + \\ + \int_{\Omega_g} \left[U_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} U_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, x) \right] g(x) d\Omega_g(x)$$

Analogamente ao que foi feito para a teoria clássica, as equações anteriores podem ser transformadas em integrais que relacionam deslocamentos e esforços no contorno. Assim, obtém-se equações integrais análogas às encontradas por WEEËN [12,13], escritas da seguinte maneira:

Para a formulação de MINDLIN:

$$C_{ij}(\xi) u_j(\xi) + \int_{\Gamma} (T_{ij}^*(\xi, x) u_j(x)) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} (U_{ij}^*(\xi, x) t_j(x)) d\Gamma(x) + \int_{\Omega_g} g(x) U_{i3}^*(\xi, x) d\Omega_g(x) \quad (6.9)$$

Para a formulação de REISSNER:

$$\begin{aligned}
C_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\Gamma} T_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) &= \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\xi, x) t_j(x) d\Gamma(x) + \\
+ \int_{\Omega_g} \left[U_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} U_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, x) \right] g(x) d\Omega_g(x) & \quad (6.10)
\end{aligned}$$

sendo que a matriz C_{ij} depende apenas da geometria do problema. Porém, como o posicionamento do ponto de colocação onde é aplicada a equação integral é externo ao contorno, esta matriz torna-se nula.

Devido a este fato, as variáveis relacionadas a este problema em um sistema de coordenadas cartesianas são (u_1, u_2, u_3) e (t_1, t_2, t_3) . Conforme o item 4.8, sabe-se que a partir das condições de contorno de cada problema, são conhecidas três das seis variáveis mencionadas. Como resultam três incógnitas, são necessárias três equações integrais com diferentes soluções fundamentais de forma a compatibilizar incógnitas e variáveis conhecidas. Com isso, utilizou-se a mesma formulação apresentada por WEEËN [12], aplicando-se para a obtenção das soluções fundamentais necessárias, três condições de carregamentos unitários referentes a uma força na direção do eixo x_3 e dois momentos unitários nas direções x_1 e x_2 . Na resolução das equações, aplicou-se as três equações integrais em pontos fora do domínio da placa, mesmo procedimento adotado por PAIVA [48].

Conforme a discretização da placa em N elementos e substituindo as variáveis (u_1, u_2, u_3) e (t_1, t_2, t_3) por suas aproximações, equações (6.3), as equações (6.9) e (6.10) podem ser escritas por:

$$\begin{aligned}
u_i(\xi) + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma} T_{ij}^*(\xi, \eta) \phi^j(\eta) d\Gamma(\eta) U_i^j &= \\
= \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\xi, \eta) \phi^j(\eta) d\Gamma(\eta) T_i^j + \int_{\Omega_g} g(\eta_d) U_{i3}^*(\xi, \eta_d) d\Omega_g(\eta_d) & \quad (6.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_j(\xi) + \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma} T_{ij}^*(\xi, \eta) \phi^i(\eta) d\Gamma(\eta) U_i^j = \\
= \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\xi, \eta) \phi^i(\eta) d\Gamma(\eta) T_i^j + \int_{\Omega_g} \left[U_{i3}^*(\xi, \eta_d) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} U_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, \eta_d) \right] g(\eta_d) d\Omega_g(\eta_d)
\end{aligned}
\tag{6.12}$$

Lembrando que:

η : Uma variável que percorre o contorno,

η_d : Uma variável do domínio,

ξ : Nó onde está sendo aplicada a equação integral.

As integrais de contorno (6.11) e (6.12) são calculadas numericamente para qualquer elemento do contorno, através da *Quadratura de Gauss*. Seguindo a formulação apresentada em PAIVA [48], aplica-se as equações integrais mencionadas para pontos externos ao domínio, obtendo-se $3N_c$ equações. A distância padrão utilizada para o posicionamento do ponto externo ao contorno, apresentada por PAIVA & VENTURINI [65], é a média dos comprimentos dos elementos de contorno que antecedem ou procedem o nó do contorno considerado. Porém, neste estudo, foi utilizada a distância de 25% da média dos comprimentos dos elementos adjacentes ao nó, devido a melhores resultados obtidos adotando esta distância ao invés de outros valores.

6.5.1 MONTAGEM DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Realizadas as operações de integração das equações de contorno (6.11) ou (6.12) sobre cada elemento genérico Γ_j , somam-se estas influências para todos os N

elementos nos N_c nós do contorno. Reescrevendo-se as equações (6.11) ou (6.12) tem-se:

$$\underline{H}\underline{U} = \underline{G}\underline{T} + \underline{F} \quad (6.13)$$

Para placas de REISSNER/MINDLIN, sabe-se que:

$$\underline{U}^j = \{u_1^1, u_2^1, u_3^1, \dots, u_1^{N_c}, u_2^{N_c}, u_3^{N_c}\}$$

(São os deslocamentos generalizados em coordenadas cartesianas),

$$\underline{T}^j = \{t_1^1, t_2^1, t_3^1, \dots, t_1^{N_c}, t_2^{N_c}, t_3^{N_c}\}$$

(São os esforços normais ao contorno em coordenadas cartesianas),

$\underline{H}$ e $\underline{G}$: São as matrizes globais de influência, que dependem apenas da geometria do problema,

$\underline{F}$: É o valor resultante da integração da região Ω_g .

Impondo-se as $3N_c$ variáveis conhecidas em (6.13) e após a troca de membros das colunas das matrizes $\underline{H}$ e $\underline{G}$, para que os valores conhecidos fiquem posicionados do lado direito da equação e as incógnitas do lado esquerdo, obtém-se o seguinte sistema de $3N_c$ equações:

$$\underline{A}\underline{X} = \underline{B} \quad (6.14)$$

sendo:

$\tilde{X}$: O vetor com as $3N_c$ variáveis incógnitas,

$\tilde{B}$: O vetor que contém os efeitos dos deslocamentos e esforços prescritos no contorno, incluindo também o carregamento de domínio,

$\tilde{A}$: A matriz dos coeficientes das variáveis incógnitas, obtida da troca de colunas das matrizes H e G , de dimensão $3N_c \times 3N_c$.

6.5.2 DESLOCAMENTOS EM PONTOS INTERNOS

O cálculo dos deslocamentos em pontos internos é feito a partir da determinação dos valores incógnitas no contorno. Pode-se reorganizar as equações (5.79) e (5.104) para obter estes deslocamentos da seguinte maneira:

$$u_j(\xi) = - \int_{\Gamma} (T_{ij}^*(\xi, x) u_j(x)) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} (U_{ij}^*(\xi, x) t_j(x)) d\Gamma(x) + \int_{\Omega_g} g(x) U_{i3}^*(\xi, x) d\Omega_g(x) \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} u_j(\xi) = & - \int_{\Gamma} T_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\xi, x) t_j(x) d\Gamma(x) + \\ & + \int_{\Omega_g} \left[U_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} U_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, x) \right] g(x) d\Omega_g(x) \end{aligned} \quad (6.16)$$

Discretizando-se as equações (6.15) e (6.16) de maneira semelhante àquela utilizada nas equações (6.9) e (6.10), e substituindo-se as variáveis do problema por suas aproximações, chega-se em:

$$\begin{aligned}
u_j(\xi) = & -\sum_{j=1}^N \int_{\Gamma} T_{ij}^*(\xi, \eta) \phi^j(\eta) d\Gamma(\eta) U_i^j + \\
& + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\xi, \eta) \phi^j(\eta) d\Gamma(\eta) T_i^j + \int_{\Omega_g} g(\eta_d) U_{i3}^*(\xi, \eta_d) d\Omega_g(\eta_d)
\end{aligned}
\tag{6.17}$$

$$\begin{aligned}
u_j(\xi) = & -\sum_{j=1}^N \int_{\Gamma} T_{ij}^*(\xi, \eta) \phi^j(\eta) d\Gamma(\eta) U_i^j + \\
& + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\xi, \eta) \phi^j(\eta) d\Gamma(\eta) T_i^j + \int_{\Omega_g} \left[U_{i3}^*(\xi, \eta_d) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} U_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, \eta_d) \right] g(\eta_d) d\Omega_g(\eta_d)
\end{aligned}
\tag{6.18}$$

Escrevem-se as equações (6.17) ou (6.18) para todos os pontos internos de interesse, obtendo-se:

$$\tilde{U}' = \tilde{G}' \tilde{T} - \tilde{H}' \tilde{U} + \tilde{F}'
\tag{6.19}$$

em que:

$\tilde{U}'$: É o vetor dos deslocamentos nos pontos internos,

$\tilde{H}'$ e $\tilde{G}'$: São as matrizes globais de influência, que dependem apenas da geometria do problema, obtidas de maneira semelhante àquelas obtidas para os pontos no contorno,

$\tilde{F}'$: Vetor que contém as influências dos carregamentos de domínio.

6.5.3 ESFORÇOS EM PONTOS INTERNOS

A determinação dos esforços em pontos do domínio da placa é feita com base nas equações (5.88) e (5.89) ou (5.106) e (5.107), discretizadas de acordo com as aproximações adotadas nos itens anteriores, conforme:

$$M_{\alpha\beta}(\xi) = -\sum_{k=1}^N \int_{\Gamma} T_{\alpha\beta k}^*(\xi, \eta) \phi^k(\eta) d\Gamma(\eta) U^k + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma} U_{\alpha\beta k}^*(\xi, \eta) \phi^k(\eta) d\Gamma(\eta) T^k \quad (6.20)$$

$$Q_{3\beta}(\xi) = -\sum_{k=1}^N \int_{\Gamma} T_{3\beta k}^*(\xi, \eta) \phi^k(\eta) d\Gamma(\eta) U^k + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma} U_{3\beta k}^*(\xi, \eta) \phi^k(\eta) d\Gamma(\eta) T^k \quad (6.21)$$

Após a discretização, as equações (6.20) e (6.21) podem ser escritas da seguinte forma matricial:

$$\underline{M} = \underline{G}^* \underline{T} - \underline{H}^* \underline{U} + \underline{F}^* \quad (6.22)$$

$$\underline{Q} = \underline{G}^{**} \underline{T} - \underline{H}^{**} \underline{U} + \underline{F}^{**} \quad (6.23)$$

em que:

$\underline{M}$: É o vetor dos momentos fletores nos pontos internos,

$\underline{Q}$: É o vetor dos esforços cortantes nos pontos internos,

$\underline{H}^*, \underline{H}^{**}$ e $\underline{G}^*, \underline{G}^{**}$: Os coeficientes globais destas matrizes são obtidos com os pontos de colocação localizados no nó onde se deseja obter os valores dos esforços,

$\underline{F}^*, \underline{F}^{**}$: Vetores que contêm as influências das cargas distribuídas.

Para se determinar as influências das cargas distribuídas, devem ser consideradas as integrais de domínio apresentadas através das equações (6.11) e (6.12), modificadas de acordo com a formulação adotada.

Capítulo 7

Exemplos

7.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, são apresentados exemplos numéricos para análise de problemas de placas de acordo com a formulação de WEEËN para as teorias de REISSNER e MINDLIN. A resolução dos exemplos foi realizada através de programas desenvolvidos nesta pesquisa, onde a “ferramenta” é o Método dos Elementos de Contorno. Estes programas serão diferenciados no próximo item, e os resultados obtidos são comparados com valores da literatura identificados em cada caso. As condições de contorno de cada exemplo estão identificadas individualmente para cada exemplo. Foram estudadas várias combinações de apoios e geometrias diferentes.

Conforme explicado no capítulo 6, as variáveis são aproximadas por elementos lineares contínuos ou descontínuos, lembrando que o segundo caso é utilizado quando os vetores tangenciais ao contorno sofrem variação brusca de direção. O posicionamento utilizado para o ponto de colocação para os programas de Reissner e Mindlin foi de **25%** da média do comprimento dos elementos adjacentes ao nó considerado, deixando-o na vizinhança do contorno da placa. Este valor foi escolhido por oferecer melhores resultados.

7.2 CARACTERÍSTICAS DOS PROGRAMAS COMPUTACIONAIS

O primeiro programa desenvolvido nesta pesquisa foi o programa de placas de *Kirchhoff*. Este, juntamente com o livro de BARES [67], foi utilizado para comparar resultados com os programas de placas desenvolvidos para as teorias de *Reissner* e *Mindlin*. Os primeiros exemplos de placas foram analisados pelo programa de *Reissner Linear Segundo a Formulação de Weeën*, e pelo programa de *Mindlin Segundo a Formulação de Weeën*, sendo que este segundo programa considera uma pequena alteração em relação ao trabalho original de *Mindlin*, onde se incluiu uma constante multiplicando a função de *Bessel*, conforme será visto mais adiante neste item. Já nos exemplos seguintes, foi utilizada a formulação original de *Mindlin*, pois através dos estudos de PALERMO JR. [96] e dos resultados obtidos nos exemplos, pôde-se observar que a constante que multiplica a função de *Bessel*, não implica em solucionar alguns dos problemas de oscilação dos esforços, obtidos pelas teorias de REISSNER e MINDLIN. A seguir, são apresentados os programas utilizados neste trabalho:

a-) *Reissner Linear Segundo a Formulação de Weeën*

Neste programa, as soluções fundamentais (4.76) e (4.77), referentes a força unitária e aos binários unitários aplicados, são utilizadas para a resolução da equação integral discretizada (6.12), dadas resumidamente por:

$$U_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{2\pi D} \left\{ \frac{2}{1-\nu} [B(z) - A(z) r_{,\alpha} r_{,\beta}] - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \left[\ln z - \frac{1}{2} \right] - \frac{1}{2} r_{,\alpha} r_{,\beta} \right\}$$

$$U_{\alpha 3}^* = -U_{3\alpha}^* = \frac{1}{4\pi D} \left[\ln z - \frac{1}{2} \right] r_{,\alpha}$$

$$U_{33}^* = -\frac{1}{2\pi D \lambda^2} \left[\frac{2}{1-\nu} \ln z - \frac{1}{4} z^2 (\ln z - 1) \right]$$

$$T_{i\alpha}^* = D \frac{1-\nu}{2} \left[U_{i\alpha,\beta}^* + U_{i\beta,\alpha}^* + \frac{2\nu}{1-\nu} U_{i\gamma,\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} \right] n_\beta$$

$$T_{i3}^* = D \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 [U_{i\alpha}^* + U_{i3,\beta}^*] h_\alpha$$

sendo que para a teoria de *Reissner* $z = \lambda r$, e $\lambda = \frac{\sqrt{10}}{h}$.

Na resolução da integral de domínio da equação (6.12), utiliza-se a transformação apresentada pela equação integral de contorno (5.111), juntamente com as soluções fundamentais de (4.76) e (5.112). Com isso, tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_g} \left[U_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} U_{i\alpha,\alpha}^*(\xi, x) \right] g(x) d\Omega_g(x) = \\ & = g \int_{\Gamma_g} \left[V_{i,\alpha}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} U_{i\alpha}^*(\xi, x) \right] n_\alpha d\Gamma_g(x) \end{aligned}$$

onde

$$V_{\alpha,\beta}^* = \frac{r^2}{128\pi D} \left[\delta_{\alpha\beta} (4 \ln z - 5) + (4 \ln z + 3) r_{,\alpha} r_{,\beta} \right]$$

$$V_{3,\beta}^* = -\frac{r r_{,\beta}}{128\pi D (1-\nu) \lambda^2} \left[32(2 \ln z - 1) - z^2 (1-\nu) (4 \ln z - 5) \right]$$

Para encontrar os esforços e deslocamentos no domínio da placa, são utilizadas as soluções fundamentais (5.109) e (5.110) nas equações (5.106) e (5.107). Para encontrar os esforços e deslocamentos internos, utiliza-se o procedimento apresentado em (5.113) para a resolução da integral de domínio, aplicando as soluções fundamentais (5.114).

b-) *Mindlin Alterado Segundo a Formulação de Weeën*

Neste programa, as soluções fundamentais (4.76) e (4.77), referentes a força unitária e aos binários unitários aplicados utilizadas para a resolução da equação integral discretizada (6.11), são as mesmas apresentadas para o item a, porém para a teoria de *Mindlin*, $z = \lambda r$, e $\lambda = \frac{\pi}{h}$. Ainda, ao valor encontrado para as funções de *Bessel*, K_0 e K_1 , multiplicou-se uma constante igual a 2π .

Para a resolução da integral de domínio da equação (6.11), utilizam-se os resultados da transformação apresentada pelas equações integrais de contorno (5.96) e (5.97). Com isso, têm-se as seguintes equações integrais:

$$\int_{\Omega_g} g(x) U_{\alpha 3}^*(\xi, x) d\Omega_g(x) = \int_{\Gamma_g} \left[\frac{gR^2}{12\pi D} \left(\ln z - \frac{5}{6} \right) \right] R_{,\alpha} R_{,\gamma} n_{\gamma} d\Gamma_g$$

$$\int_{\Omega_g} g(x) U_{33}^*(\xi, x) d\Omega_g(x) = \int_{\Gamma_g} \left[\frac{gR^2}{32\pi D} \left(\ln z - \frac{5}{4} \right) - \frac{gR}{2\pi D \lambda^2 (1-\nu)} \left(\ln z - \frac{1}{2} \right) \right] R_{,\gamma} n_{\gamma} d\Gamma_g$$

Para encontrar os esforços e deslocamentos no domínio da placa, são utilizadas as soluções fundamentais (5.109) e (5.110) nas equações (5.88) e (5.89). Para encontrar os esforços e deslocamentos internos, utiliza-se o procedimento apresentado em (5.101) e (5.102) para a resolução da integral de domínio, aplicando as soluções fundamentais (5.103).

c-) *Mindlin Original Segundo a Formulação de Weeën*

Neste programa, as soluções fundamentais (4.76) e (4.77), referentes a força unitária e aos binários unitários aplicados utilizadas para a resolução da equação integral discretizada (6.11), são as mesmas apresentadas para o item a, porém para a

teoria de *Mindlin*, $z = \lambda r$, e $\lambda = \frac{\pi}{h}$. Neste caso, as funções de *Bessel*, K_0 e K_1 não apresentam nenhum fator de alteração.

Para a resolução da integral de domínio da equação (6.11), utilizam-se os resultados da transformação apresentada pelas equações integrais de contorno (5.96) e (5.97) e portanto as equações integrais são as mesmas do item **b**.

Para encontrar os esforços e deslocamentos no domínio da placa e os esforços e deslocamentos internos, são utilizadas as mesmas soluções fundamentais do item **b**.

7.3 EXEMPLOS

Considerando-se que este trabalho é uma continuação dos estudos derivados a partir do trabalho de SANCHES [4], e contando com experiências anteriores de outros trabalhos do orientador, evitou-se apresentar resultados obtidos com outras discretizações para demonstrar a convergência do MEC às respostas.

7.3.1 PLACAS QUADRADAS

7.3.1.1 PLACAS FINAS

Os exemplos a seguir foram utilizados para comparar os resultados do programa de *Reissner Linear Segundo a Formulação de Weeën* e o programa de *Mindlin Alterado Segundo a Formulação de Weeën*, com o objetivo de avaliar a precisão dos mesmos em relação à Literatura, ou seja, com o livro do BARES [67]. Ainda, são apresentados os resultados obtidos para os mesmos exemplos no programa desenvolvido para a teoria de KIRCHHOFF.

As condições de contorno apresentadas nos exemplos são representadas por:

————— Engaste
——— Apoio
===== Balanço

Dados Gerais:

$$E = 2,05 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$h = 6 \times 10^{-2} \text{ m (3\% lado)}$$

$$q = - 400 \text{ N/m}^2$$

$$\text{Lados da Placa: } a = 2 \text{ m}$$

$$b = 2 \text{ m}$$

$$\text{Relação entre os Lados: } a/b = 1$$

$$\text{Número de Pontos de Gauss} = 24$$

M_{xx} = Momento Fletor na direção **xx** atuando no Ponto em estudo;

M_{yy} = Momento Fletor na direção **yy** atuando no Ponto em estudo;

M_n = Momento Fletor na direção normal ao contorno atuando no Ponto em Estudo.

Exemplo 1: Placa Simplesmente Apoiada nos Quatro Lados

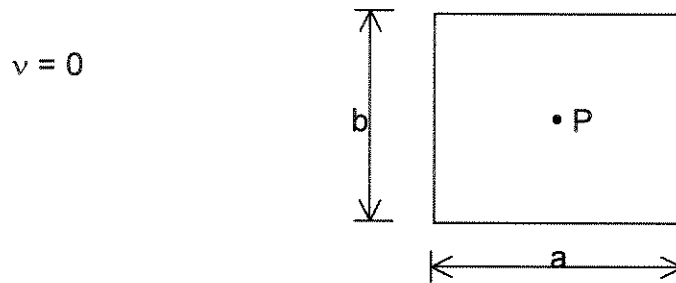


Figura 7.1: Placa do Exemplo 1.

Tabela 7.1: Resultados Obtidos no Ponto P do Exemplo 1 (N,m)

Discretização		flecha ($\times 10^{-6}$)	M_{xx}	M_{yy}
BARES		7,04	58,88	58,88
Kirchhoff	4 elem. / lado	7,09	59,16	59,16
	8 elem. / lado	7,06	58,99	58,99
	16 elem. / lado	7,05	58,95	58,95
Reissner 10 elem. / lado	SOFT	7,32	60,53	60,53
	HARD	7,06	58,91	58,91
Mindlin 10 elem. / lado	SOFT	7,35	60,70	60,70
	HARD	7,07	58,94	58,94

Exemplo 2: Placa Simplesmente Apoiada em Três Lados e Engastada em Um Lado

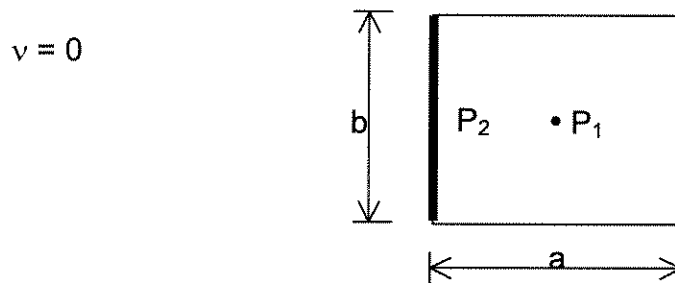


Figura 7.2: Placa do Exemplo 2.

Tabela 7.2: Resultados Obtidos nos Pontos P_1 e P_2 do Exemplo 2 (N,m)

Discretização		flecha $P_1 (x 10^{-6})$	$M_{xx} P_1$	$M_{yy} P_1$	$M_n P_2$
BARES		4,827	50,88	38,88	-134,40
Kirchhoff	4 elem. / lado	4,847	51,09	38,96	-139,67
	8 elem. / lado	4,835	51,03	38,93	-135,42
	16 elem. / lado	4,832	51,01	38,92	-134,52
Reissner 10 elem. / lado	SOFT	4,971	51,91	39,50	-136,8
	HARD	4,861	50,98	39,02	-134,63
Mindlin 10 elem. / lado	SOFT	4,980	51,96	39,54	-136,92
	HARD	4,863	51,00	39,03	-134,65

Exemplo 3: Placa Simplesmente Apoiada em Dois Lados Opostos e Engastada nos Outros Dois

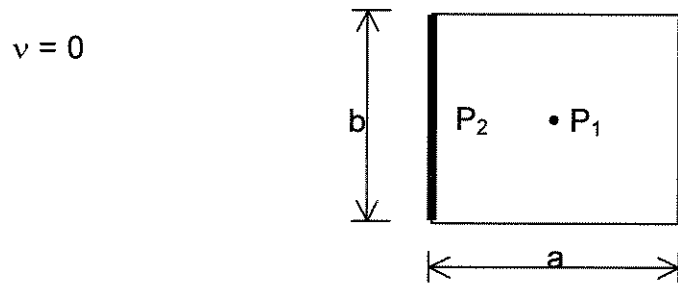


Figura 7.3: Placa do Exemplo 3.

Tabela 7.3: Resultados Obtidos nos Pontos P_1 e P_2 do Exemplo 3 (N,m)

Discretização		flecha $P_1 (x 10^{-6})$	$M_{xx} P_1$	$M_{yy} P_1$	$M_n P_2$
BARES		3,324	45,60	25,28	-134,40
Kirchhoff	4 elem. / lado	3,324	45,57	25,31	-139,67
	8 elem. / lado	3,325	45,58	25,34	-135,42
	16 elem. / lado	3,325	45,59	25,34	-134,52
Reissner 10 elem. / lado	SOFT	3,392	46,08	25,42	-113,16
	HARD	3,358	45,55	25,51	-112,18
Mindlin 10 elem. / lado	SOFT	3,392	46,07	25,42	-113,14
	HARD	3,359	45,56	25,51	-112,19

Exemplo 4: Placa Simplesmente Apoiada em Dois Lados Ortogonais e Engastada nos Outros Dois

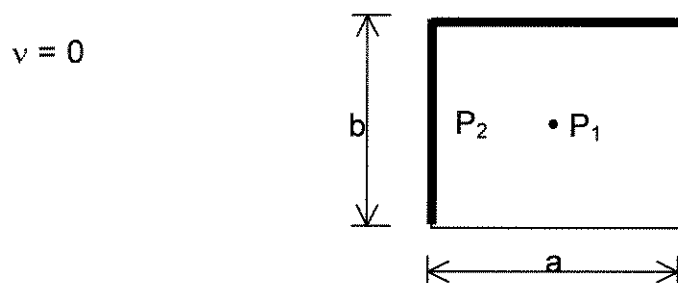


Figura 7.4: Placa do Exemplo 4.

Tabela 7.4: Resultados Obtidos nos Pontos P_1 e P_2 do Exemplo 4 (N,m)

Discretização		flecha $P_1 (x 10^{-6})$	$M_{xx} P_1$	$M_{yy} P_1$	$M_n P_2$
BARES		3,642	37,44	37,44	-108,32
Kirchhoff	4 elem. / lado	3,655	37,48	37,48	-114,92
	8 elem. / lado	3,650	37,46	37,46	-109,71
	16 elem. / lado	3,649	37,46	37,46	-108,72
Reissner 10 elem. / lado	SOFT	3,732	37,84	37,84	-110,01
	HARD	3,679	37,51	37,51	-108,96
Mindlin 10 elem. / lado	SOFT	3,735	37,86	37,86	-110,06
	HARD	3,680	37,51	37,51	-108,97

Exemplo 5: Placa Engastada nos Quatro Lados

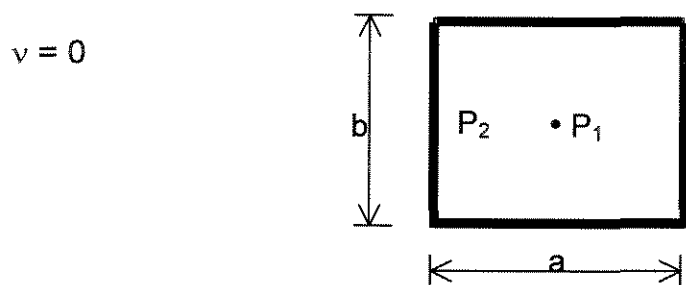


Figura 7.5: Placa do Exemplo 5.

Tabela 7.5: Resultados Obtidos nos Pontos P_1 e P_2 do Exemplo 5 (N,m)

Discretização		flecha $P_1 (x 10^{-6})$	$M_{xx} P_1$	$M_{yy} P_1$	$M_n P_2$
BARES		2,211	28,16	28,16	-82,40
Kirchhoff	4 elem. / lado	2,196	28,20	28,20	-88,91
	8 elem. / lado	2,195	28,19	28,19	-83,41
	16 elem. / lado	2,195	28,19	28,19	-82,46
Reissner 10 elem. / lado	SOFT	2,222	28,23	28,23	-82,90
	HARD	2,222	28,22	28,22	-82,74
Mindlin 10 elem. / lado	SOFT	2,223	28,23	28,23	-82,91
	HARD	2,222	28,22	28,22	-82,74

Exemplo 6: Placa Engastada em Dois Lados Ortogonais e em Balanço nos Outros Dois

$$\nu = 0,2$$

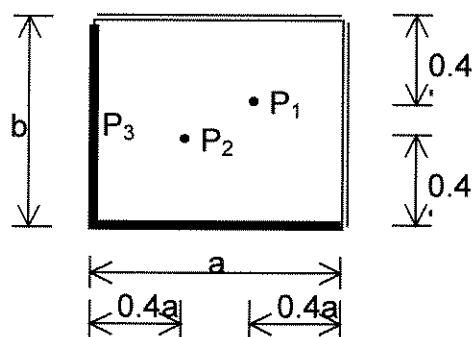


Figura 7.6: Placa do Exemplo 6.

Tabela 7.6: Resultados Obtidos nos Pontos P_1 , P_2 e P_3 do Exemplo 6 (N,m)

Discretização		$M_{xx} P_1$	$M_{yy} P_1$	$M_{xx} P_2$	$M_{yy} P_2$	$M_n P_3$
BARES		21,12	21,12	-11,04	-11,04	-220,56
Kirchhoff	4 elem. / lado	21,31	21,31	-11,39	-11,39	-182,92
	8 elem. / lado	20,66	20,66	-11,87	-11,87	-199,90
	16 elem. / lado	20,50	20,50	-11,97	-11,97	-204,00
Reissner 10 elem. / lado	SOFT	21,54	21,54	-11,54	-11,54	-204,86
	HARD	21,27	21,27	-11,77	-11,77	-204,17
Mindlin 10 elem. / lado	SOFT	19,64	19,64	-12,42	-12,42	-203,85
	HARD	19,58	19,58	-12,44	-12,44	-203,69

Exemplo 7: Placa Simplesmente Apoiada em Dois Lados Opostos, Engastada e em Balanço nos Outros Dois

$$\nu = 0,2$$

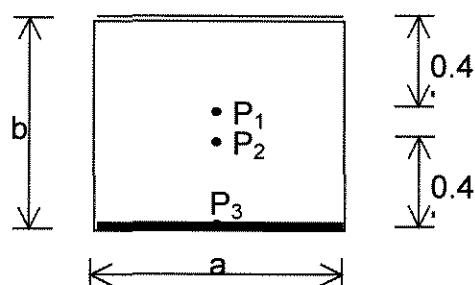


Figura 7.7: Placa do Exemplo 7.

Tabela 7.7: Resultados Obtidos nos Pontos P_1 , P_2 e P_3 do Exemplo 7 (N,m)

Discretização		$M_{xx} P_1$	$M_{yy} P_1$	$M_{xx} P_2$	$M_{yy} P_2$	$M_n P_3$
BARES		67,84	28,64	106,08	41,92	-177,28
Kirchhoff	4 elem. / lado	66,09	25,90	106,06	38,48	-197,28
	8 elem. / lado	66,26	27,04	105,98	41,24	-190,76
	16 elem. / lado	66,13	27,50	105,56	42,16	-189,19
Reissner 10 elem. / lado	SOFT	66,86	27,53	106,59	42,57	-190,79
	HARD	66,49	27,77	105,84	42,77	-189,56
Mindlin 10 elem. / lado	SOFT	66,61	27,38	106,13	41,99	-190,18
	HARD	66,22	27,67	105,35	42,22	-189,00

Exemplo 8: Placa Simplesmente Apoiada em Três Lados e em Balanço no Outro

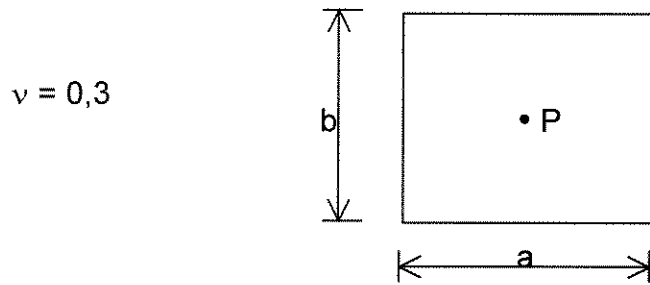


Figura 7.8: Placa do Exemplo 8.

Tabela 7.8: Resultados Obtidos no Ponto P do Exemplo 8 (N,m)

Discretização		flecha P ($\times 10^{-5}$)	M_{xx} P	M_{yy} P
BARES		1,251	62,40	127,84
Kirchhoff	4 elem. / lado	1,274	58,82	128,70
	8 elem. / lado	1,266	61,03	128,61
	16 elem. / lado	1,259	61,81	128,27
Reissner 10 elem. / lado	SOFT	1,281	62,76	130,01
	HARD	1,262	62,29	128,41
Mindlin 10 elem. / lado	SOFT	1,277	62,41	129,49
	HARD	1,257	61,96	127,85

Exemplo 9: Placa Engastada em Três Lados e em Balanço no Outro

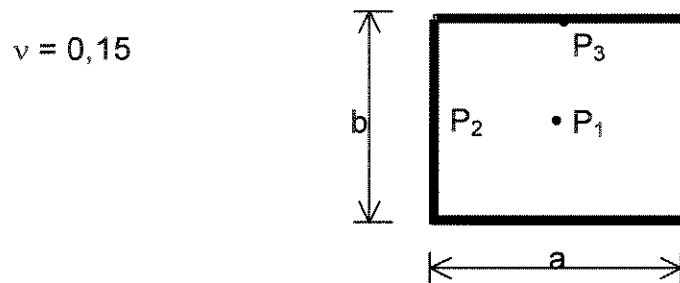


Figura 7.9: Placa do Exemplo 9.

Tabela 7.9: Resultados Obtidos nos Pontos P_1 , P_2 e P_3 do Exemplo 9 (N,m)

Discretização		flecha $P_1 (x 10^{-6})$	$M_{xx} P_1$	$M_{yy} P_1$	$M_n P_2$	$M_n P_3$
BARES		3,266	20,00	46,08	-89,44	-106,24
Kirchhoff	4 elem. / lado	3,217	20,31	48,43	-98,68	-104,73
	8 elem. / lado	3,217	20,43	48,46	-91,94	-105,18
	16 elem. / lado	3,216	20,49	48,47	-90,81	-105,88
Reissner 10 elem. / lado	SOFT	3,262	20,86	48,72	-91,50	-106,68
	HARD	3,260	20,75	48,71	-91,27	-106,44
Mindlin 10 elem. / lado	SOFT	3,249	20,52	48,45	-91,25	-105,99
	HARD	3,248	20,51	48,44	-91,05	-105,88

Exemplo 10: Placa Engastada em Dois Lados Opostos e em Balanço nos Outros Dois

$$\nu = 0,30$$

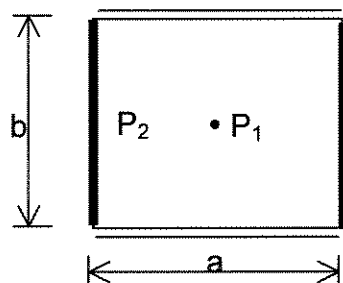


Figura 7.10: Placa do Exemplo 10.

Tabela 7.10: Resultados Obtidos nos Pontos P_1 e P_2 do Exemplo 10 (N,m)

Discretização		flecha $P_1 (x 10^{-6})$	$M_{xx} P_1$	$M_{yy} P_1$	$M_n P_2$
BARES		4,09	65,60	17,60	-134,40
Kirchhoff	4 elem. / lado	4,07	65,15	16,77	-125,05
	8 elem. / lado	4,06	65,08	16,98	-129,92
	16 elem. / lado	4,05	65,02	17,10	-130,63
Reissner 10 elem. / lado	SOFT	4,11	65,56	18,10	-131,74
	HARD	4,10	65,42	17,87	-131,21
Mindlin 10 elem. / lado	SOFT	4,09	64,93	17,18	-130,28
	HARD	4,09	64,87	17,17	-130,18

7.3.1.2 PLACAS ESPESSAS

Os exemplos a seguir foram utilizados para comparar os resultados do programa de *Mindlin Alterado Segundo a Formulação de Weeën* com o programa de *Reissner Segundo a Formulação de Weeën* para **placas espessas**, com o objetivo de avaliar a influência da constante que multiplica a função de *Bessel* nos resultados.

Dados Gerais:

$$E = 2,05 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$h = 2 \times 10^{-1} \text{ m (10\% lado)}$$

$$q = -400 \text{ N/m}^2$$

$$\text{Lados da Placa: } a = 2 \text{ m}$$

$$b = 2 \text{ m}$$

$$\text{Relação entre os Lados: } a/b = 1$$

$$\text{Número de Pontos de Gauss} = 24$$

M_{xx} = Momento Fletor na direção **xx** atuando no Ponto em estudo;

M_{yy} = Momento Fletor na direção **yy** atuando no Ponto em estudo;

M_n = Momento Fletor na direção normal ao contorno atuando no Ponto em Estudo;

$$V_m = \frac{\sum_{n_i \text{ lado } j}^{n_f \text{ lado } j} V}{n_{\text{elem lado } j}} \cdot \text{Comprimento lado } j = \text{Cortante Resultante no Lado } j;$$

$$M_{m_n} = \frac{\sum_{n_i \text{ lado } j}^{n_f \text{ lado } j} M_n}{n_{\text{elem lado } j}} \cdot \text{Comprimento lado } j = \text{Momento Fletor Resultante}$$

no Lado j.

Exemplo 11: Placa Simplesmente Apoiada nos Quatro Lados

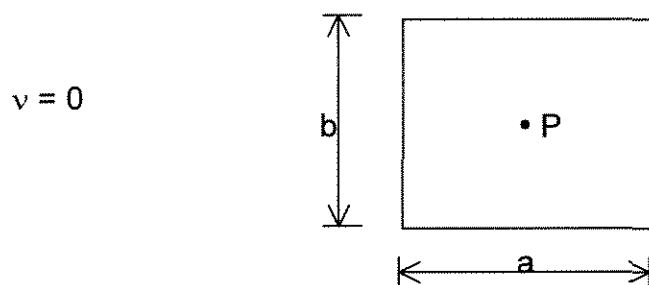


Figura 7.11: Placa do Exemplo 11.

Tabela 7.11: Resultados Obtidos para o Exemplo 11 (N,m)

Discretização		flecha ($\times 10^{-6}$) P	M_{xx} P	M_{yy} P	$V_{m_{apoio}}$
Reissner 10 elem./ lado	SOFT	2,220	64,75	64,75	400,10
	HARD	1,970	58,89	58,89	400,00
Mindlin 10 elem./ lado	SOFT	2,314	67,28	67,28	400,00
	HARD	2,000	59,62	59,62	399,50

Exemplo 12: Placa Simplesmente Apoiada em Três Lados e Engastada em Um Lado

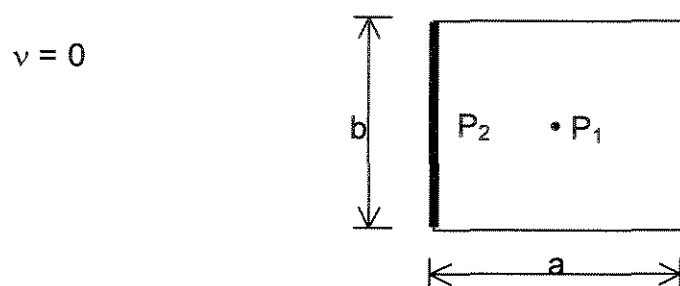


Figura 7.12: Placa do Exemplo 12.

Tabela 7.12: Resultados Obtidos nos Pontos P_1 e P_2 para o Exemplo 12 (N,m)

Discretização		flecha P_1 ($\times 10^{-6}$)	$M_{xx} P_1$	$M_{yy} P_1$	$M_n P_2$	$V_m P_2$
Reissner 10 elem./ lado	SOFT	1,501	53,96	41,95	139,56	653,70
	HARD	1,394	50,76	40,10	131,15	658,30
Mindlin 10 elem./ lado	SOFT	1,559	55,68	43,33	139,34	664,00
	HARD	1,411	51,30	40,50	130,31	667,55

Exemplo 13: Placa Simplesmente Apoiada em Dois Lados Opostos e Engastada nos Outros Dois

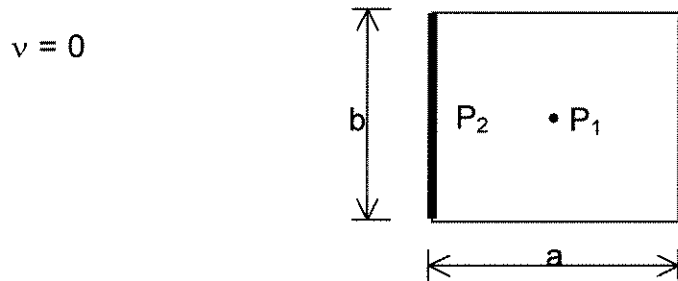


Figura 7.13: Placa do Exemplo 13.

Tabela 7.13: Resultados Obtidos nos Pontos P_1 e P_2 para o Exemplo 13 (N,m)

Discretização		flecha $P_1 (x 10^{-7})$	$M_{xx} P_1$	$M_{yy} P_1$	$M_n P_2$	$V_m P_2$
Reissner 10 elem./ lado	SOFT	1,027	46,82	27,00	114,47	593,28
	HARD	0,994	45,08	27,08	110,31	600,65
Mindlin 10 elem./ lado	SOFT	1,047	47,92	26,97	72,22	549,27
	HARD	1,004	45,61	27,08	90,82	612,97

Exemplo 14: Placa Simplesmente Apoiada em Dois Lados Ortogonais e Engastada nos Outros Dois

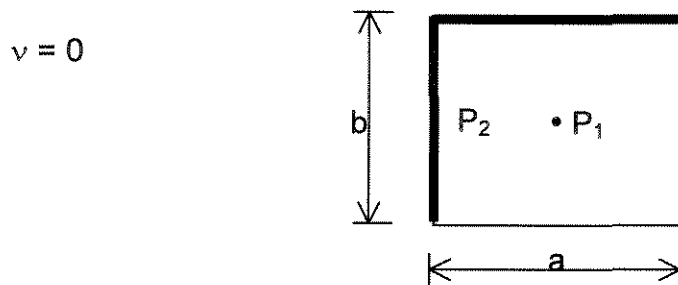


Figura 7.14: Placa do Exemplo 14.

Tabela 7.14: Resultados Obtidos nos Pontos P_1 e P_2 para o Exemplo 14 (N,m)

Discretização		flecha $P_1 (\times 10^{-7})$	$M_{xx} P_1$	$M_{yy} P_1$	$M_{mn} P_2$	$V_m P_2$
Reissner 10 elem./ lado	SOFT	1,127	39,16	39,16	137,64	516,70
	HARD	1,074	37,93	37,93	133,98	519,70
Mindlin 10 elem./ lado	SOFT	0,845	32,01	32,01	113,42	-27,06*
	HARD	1,085	38,21	38,21	134,28	542,55

*Cortante Média para uma espessura de 0,22 m = 381,107;

Cortante Média para uma espessura de 0,18 m = 530,72.

Nota-se a ocorrência de certa singularidade na utilização da espessura de 0,2 m (utilizada na tabela 7.14), somente na condição *soft* de contorno quando se modifica o multiplicador da função de *Bessel* para o programa de Mindlin.

Exemplo 15: Placa Engastada nos Quatro Lados

$$\nu = 0$$

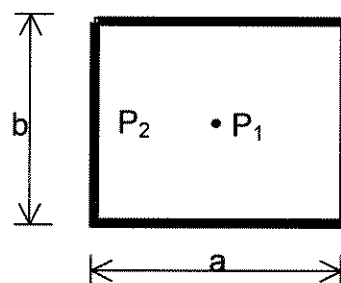


Figura 7.15: Placa do Exemplo 15.

Tabela 7.15: Resultados Obtidos nos Pontos P_1 e P_2 para o Exemplo 15 (N,m)

Discretização		flecha $P_1 (x 10^{-8})$	$M_{xx} P_1$	$M_{yy} P_1$	$M_n P_2$	$V_m P_2$
Reissner 10 elem./ lado	SOFT	6,744	28,53	28,53	82,25	403,99
	HARD	6,715	28,46	28,46	80,66	401,28
Mindlin 10 elem./ lado	SOFT	6,724	28,47	28,47	77,31	405,89
	HARD	6,701	28,41	28,41	80,52	401,22

Exemplo 16: Placa Engastada em Dois Lados Ortogonais e em Balanço nos Outros Dois

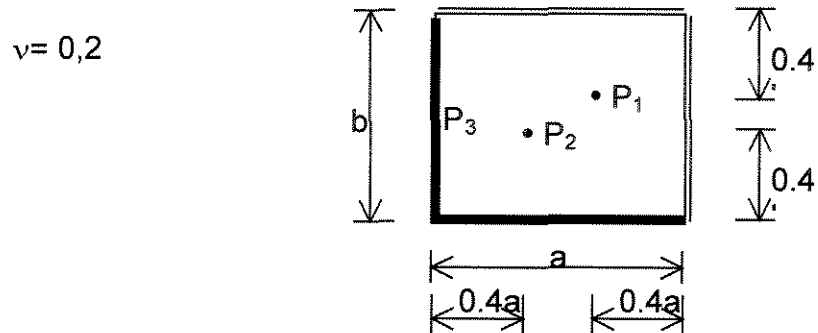


Figura 7.16: Placa do Exemplo 16.

Tabela 7.16: Resultados Obtidos nos Pontos P_1 , P_2 e P_3 para o Exemplo 16 (N,m)

Discretização		$M_{xx} P_1$	$M_{yy} P_1$	$M_{xx} P_2$	$M_{yy} P_2$	$M_n P_3$	$V_m P_3$
Reissner 10 elem./ lado	SOFT	17,56	17,56	-14,41	-14,41	206,91	800,05
	HARD	17,37	17,37	-14,47	-14,47	206,70	800,05
Mindlin 10 elem./ lado	SOFT	22,42	22,42	-10,64	-10,64	198,40	802,45
	HARD	28,08	28,08	6,80	6,08	226,98	800,69

Exemplo 17: Placa Simplesmente Apoiada em Dois Lados Opostos, Engastada e em Balanço nos Outros Dois

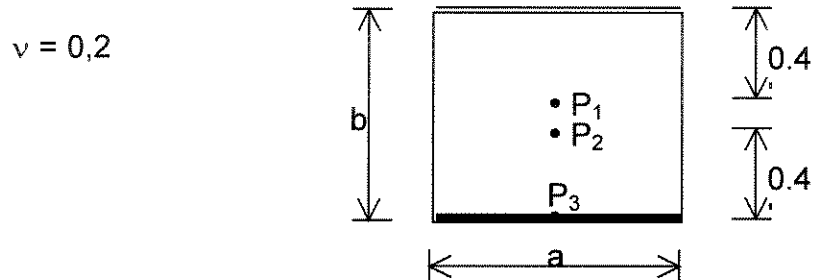


Figura 7.17: Placa do Exemplo 17.

Tabela 7.17: Resultados Obtidos nos Pontos P_1 , P_2 e P_3 para o Exemplo 17 (N,m)

Discretização		$M_{xx} P_1$	$M_{yy} P_1$	$M_{xx} P_2$	$M_{yy} P_2$	$M_{m_n} P_3$	$V_m P_3$
Reissner 10 elem./ lado	SOFT	110,27	40,22	70,47	26,52	246,08	749,72
	HARD	107,56	40,82	68,97	27,44	239,37	770,53
Mindlin 10 elem./ lado	SOFT	109,77	42,46	70,57	28,01	235,08	567,74
	HARD	106,70	44,08	68,85	28,80	232,35	780,85

Exemplo 18: Placa Simplesmente Apoiada em Três Lados e em Balanço no Outro

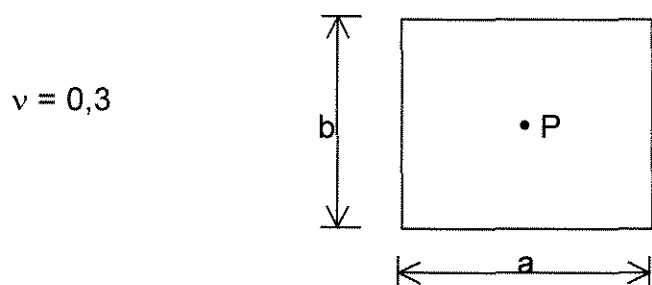


Figura 7.18: Placa do Exemplo 18.

Tabela 7.18: Resultados Obtidos no Ponto P para o Exemplo 18 (N,m)

Discretização		flecha P ($\times 10^{-7}$)	M_{xx} P	M_{yy} P	$V_{m_{apoio}}$ *	$V_{m_{apoio}}$ **
Reissner 10 elem./ lado	SOFT	3,664	62,49	133,62	407,20	547,60
	HARD	3,492	61,02	128,05	423,68	588,22
Mindlin 10 elem./ lado	SOFT	3,680	66,09	135,52	315,09	641,67
	HARD	3,433	63,61	127,74	527,57	534,86

*Apoio Paralelo ao Balanço

**Apoios Perpendiculares ao Balanço

Exemplo 19: Placa Engastada em Três Lados e em Balanço no Outro

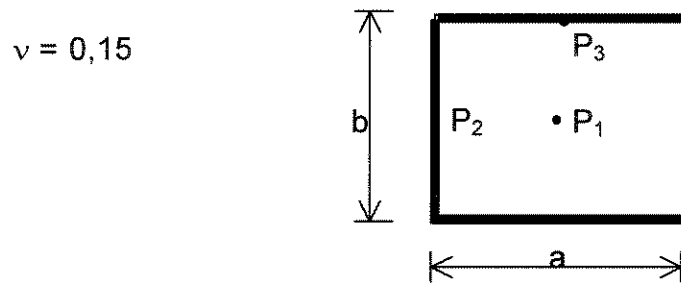


Figura 7.19: Placa do Exemplo 19.

Tabela 7.19: Resultados Obtidos nos Pontos P_1 , P_2 e P_3 para o Exemplo 19 (N,m)

Discretização		flecha $P_1 (x 10^{-7})$	$M_{xx} P_1$	$M_{yy} P_1$	M_n P_2	M_n P_3	$V_m P_2$	$V_m P_3$
Reissner 10 elem./ lado	SOFT	0,980	20,74	49,00	89,70	105,33	398,68	600,70
	HARD	0,978	20,65	48,91	88,05	104,51	399,09	600,50
Mindlin 10 elem./ lado	SOFT	0,975	22,99	49,14	43,61	158,90	297,28	651,76
	HARD	0,975	22,69	49,01	74,80	124,74	365,85	617,59

Exemplo 20: Placa Engastada em Dois Lados Opostos e em Balanço nos Outros Dois

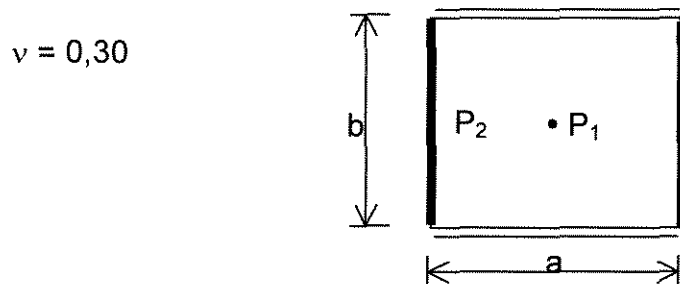


Figura 7.20: Placa do Exemplo 20.

Tabela 7.20: Resultados Obtidos nos Pontos P_1 e P_2 para o Exemplo 20 (N,m)

Discretização		flecha $P_1 (x 10^{-7})$	$M_{xx} P_1$	$M_{yy} P_1$	$M_n P_2$	$V_m P_2$
Reissner 10 elem./ lado	SOFT	1,243	65,61	17,40	130,33	800,07
	HARD	1,240	65,47	17,18	130,05	800,06
Mindlin 10 elem./ lado	SOFT	1,171	65,59	30,43	685,47	795,90
	HARD	1,216	65,80	23,61	233,10	800,18

7.3.2 PLACAS CIRCULARES

Exemplo 21: Placa Circular Engastada com Carga Distribuída Unitária

Este exemplo foi analisado por RASHED *et alli* [95] utilizando elementos finitos. Na tabela 7.21 é apresentada a comparação dos resultados obtidos para esta placa pelo programa de *Mindlin Original Segundo a Formulação de Weeën* desenvolvido neste trabalho com os resultados de [95], incluindo a referência exata considerada pelos autores de [95].

Dados do Problema:

$$E = 207.000 \text{ t/m}^2$$

$$\nu = 0.3$$

$$q = 1 \text{ t}$$

$$h = 2 \times 10^{-1} \text{ m (10\% diâmetro)}$$

$$\text{Raio} = 1 \text{ m}$$

$$\text{Número de Pontos de Gauss} = 24$$

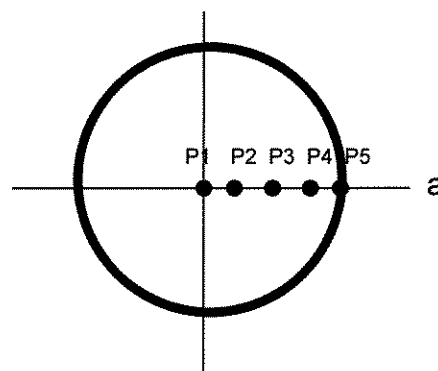


Figura 7.21: Placa do Exemplo 21.

$$P1 = \frac{a}{R} = 0.00$$

$$P2 = \frac{a}{R} = 0.25$$

$$P3 = \frac{a}{R} = 0.50$$

$$P4 = \frac{a}{R} = 0.75$$

$$P5 = \frac{a}{R} = 1.00$$

Tabela 7.21: Comparação do resultado obtido no programa de Elementos de Contorno (MEC) com o valor teórico e com os resultados obtidos pela referência A.

$\frac{a}{R}$	$\frac{64D}{qR^4} w$			$\frac{16D}{qR^3} \phi_r$			$\frac{16}{qR^2} M_{\theta\theta}$		
	Exata	A	MEC	Exata	A	MEC	Exata	A	MEC
0.00	1.1829	1.1839	1.1823	0.0000	0.0000	0.0000	1.3274	1.3329	1.3260
0.25	1.0503	1.0501	1.0500	0.2344	0.2342	0.2340	1.2087	1.2085	1.2073
0.50	0.6996	0.6995	0.6992	0.3750	0.3750	0.3743	0.8524	0.8523	0.8511
0.75	0.2714	0.2714	0.2710	0.3281	0.3281	0.3271	0.2587	0.2586	0.2573
1.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.5726	-0.5629	-0.5800

$\frac{a}{R}$	$\frac{16}{qR^2} M_{rr}$			$\frac{2}{qR} Q_r$		
	Exata	A	MEC	Exata	A	MEC
0.00	1.3274	1.3329	1.3260	0.00	0.00	0.00
0.25	1.1212	1.1210	1.1198	-0.25	-0.25	-0.25
0.50	0.5024	0.5023	0.5011	-0.50	-0.50	-0.50
0.75	-0.5288	-0.5289	-0.5302	-0.75	-0.75	-0.75
1.00	-1.9726	-1.9694	-1.9978	-1.00	-1.00	-1.00

A: Y.F. Rashed, M.H. Aliabadi, C.A. Brebbia (1998) [95].

MEC: 64 Nós no Contorno e 64 Elementos Lineares.

Pode-se observar que a utilização de elementos lineares para simular uma placa de geometria circular resulta em bons resultados, dando erros na ordem de 0,1%.

Tabela 7.22: Comparação do resultado obtido no programa de Elementos de Contorno para três discretizações 64 nós e 64 elementos (64/64), 32 nós e 32 elementos (32/32) e 64 nós e 32 elementos (64/32).

$\frac{a}{R}$	$\frac{64D}{qR^4}w$			$\frac{16D}{qR^3}\phi_r$			$\frac{16}{qR^2}M_{\theta\theta}$		
	32/32	64/32	64/64	32/32	64/32	64/64	32/32	64/32	64/64
0.00	1.1734	1.1707	1.1823	0.0000	0.0000	0.0000	1.3207	1.3191	1.3260
0.25	1.0414	1.0389	1.0500	0.2330	0.2327	0.2340	1.2019	1.2004	1.2073
0.50	0.6923	0.6903	0.6992	0.3723	0.3717	0.3743	0.8457	0.8441	0.8511
0.75	0.2668	0.2654	0.2710	0.3241	0.3231	0.3271	0.2519	0.2503	0.2573
1.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.4912	-0.3675	-0.5800

$\frac{a}{R}$	$\frac{16}{qR^2}M_{rr}$			$\frac{2}{qR}Q_r$		
	32/32	64/32	64/64	32/32	64/32	64/64
0.00	1.3207	1.3191	1.3260	0.00	0.00	0.00
0.25	1.1144	1.1129	1.1198	-0.25	-0.25	-0.25
0.50	0.4957	0.4941	0.5011	-0.50	-0.50	-0.50
0.75	-0.5356	-0.5371	-0.5302	-0.75	-0.75	-0.75
1.00	-1.9532	-2.0051	-1.9978	-1.00	-1.00	-1.00

Como se pode ver na Tabela 7.22, os resultados com nós duplos (64/32) contendo o dobro de nós que a análise 32/32, porém o mesmo número de elementos, não chega em resultados tão eficientes como a análise 32/32. Quando se duplica os nós e também os elementos, ou seja a situação 64/64, obtém-se resultados bem precisos, conforme se mostra na Tabela 7.21.

Exemplo 22: Placa Circular Engastada com Furo no Meio, com Carga Distribuída

Na tese de doutorado de VILMANN [55], é apresentado este exemplo de uma placa circular engastada em condição *hard*, com furo. Ele a analisou através do Método dos Elementos de Contorno com elementos isoparamétricos quadráticos, utilizando a formulação de *Mindlin*. O resultado apresentado nos gráficos a seguir é uma comparação das respostas obtidas por [55], com as respostas obtidas pelo programa de *Reissner Segundo a Formulação de Weeën* com elementos isoparamétricos lineares desenvolvidos neste trabalho de pesquisa, e inclui a resposta exata, apresentada em [55].

Dados do Problema:

$$E = 100.000.000 \text{ N/m}^2$$

$$\nu = 0,3$$

$$q = -2 \text{ N}$$

$$h = 2 \text{ m (20\% diâmetro)}$$

$$\text{Raio} = 5 \text{ m}$$

$$\text{Raio do Furo} = 1 \text{ m}$$

$$\text{Número de Pontos de Gauss} = 24$$

Utilizou-se o Programa de *Reissner Linear Segundo a Formulação de Weeën* [MEC (Andrade)]

Discretização utilizada: 64 nós de contorno para a borda engastada e 32 nós de contorno para o furo. Não foram utilizados nós duplo.

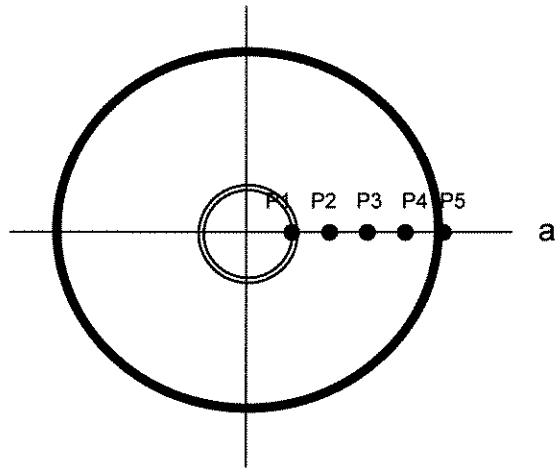


Figura 7.22: Placa do Exemplo 22.

Resultados Obtidos:

Gráfico 7.1: Comparação do Momento M_{rr}

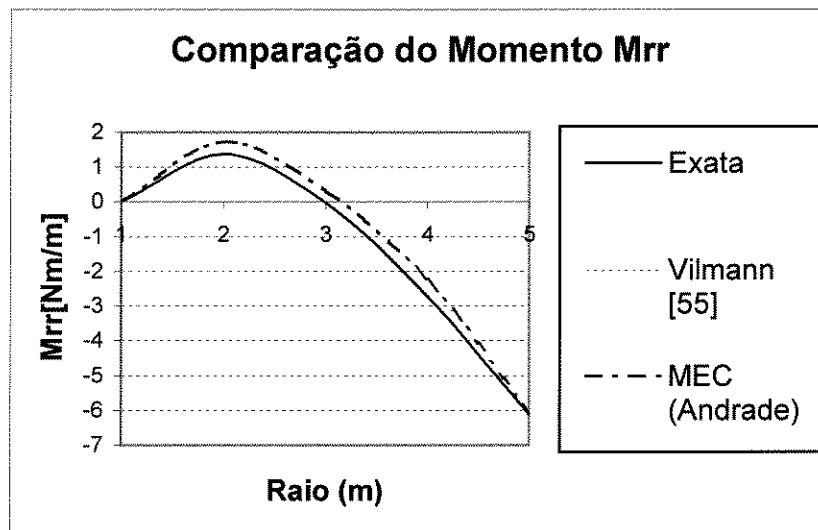


Gráfico 7.2: Comparação do Momento $M_{\theta\theta}$

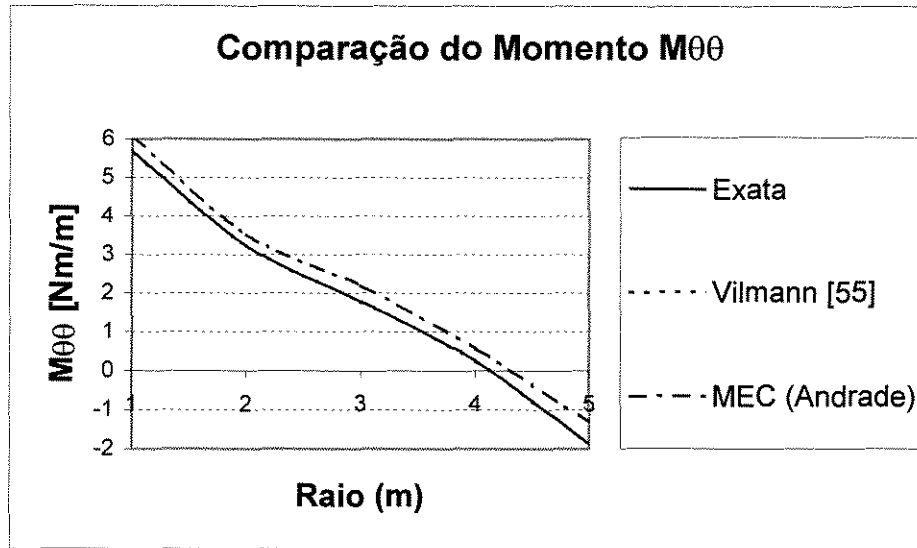
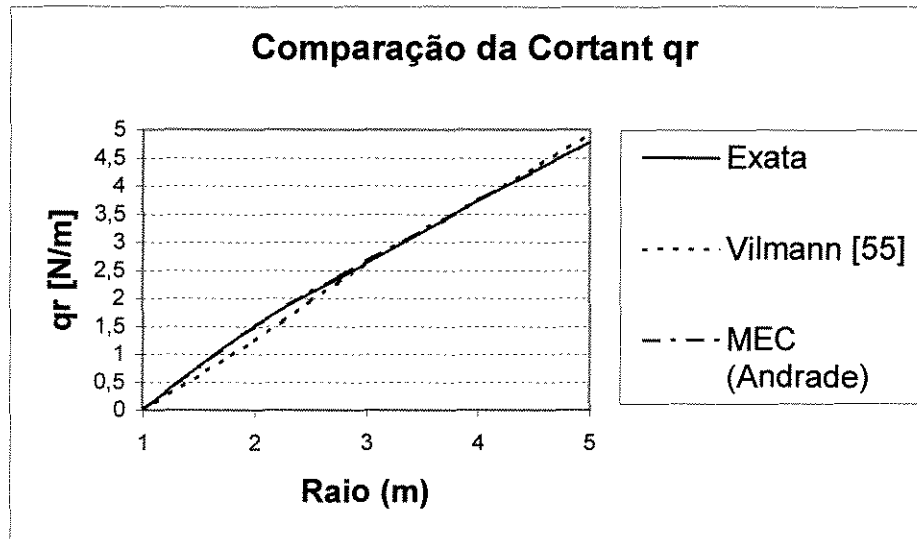


Gráfico 7.3: Comparação da Cortante Q_r



Quando este exemplo foi analisado com o programa de *Mindlin*, ou seja, a parcela da ponderação linear da carga distribuída foi eliminada e a constante λ passou de $\frac{\sqrt{10}}{h}$ para $\frac{\pi}{h}$, os resultados obtidos para os momentos foram muito mais próximos dos resultados de VILMANN e daquilo que ele chama de resultado exato, do que os obtidos através da teoria de *Reissner* apresentados nos gráficos.

7.3.3 PLACAS ESCONSAS

Exemplo 23: *Placa Esconsa Simplesmente Apoiada em Duas Bordas Opostas e em Balanço nas Outras Duas com Carga Uniformemente Distribuída*

Na tese de doutorado de RIBEIRO [51], é apresentado este exemplo de uma placa esconsa apoiada em duas bordas opostas e livres nas outras duas. Os resultados obtidos para aproximações lineares nesta pesquisa são muito próximos dos obtidos por [51] onde ele utiliza aproximações quadráticas e a teoria de *Reissner*.

Dados do Problema:

$$E = 3,4 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$$

$$\nu = 0,2$$

$$h = 0,60 \text{ m}$$

$$q = -17,9 \text{ kN/m}^2$$

Condição HARD de Apoio

Utilizou-se o Programa de *Mindlin Original Segundo a Formulação de Weeën* [MEC (Andrade)].

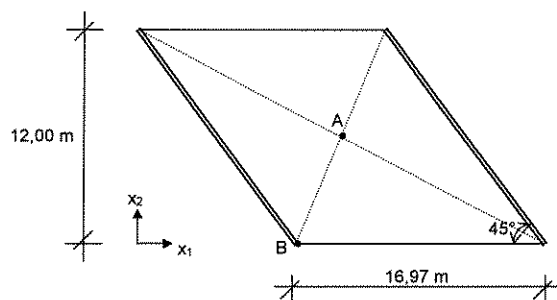


Figura 7.23: Placa do Exemplo 23.

Resultados Obtidos:

Gráfico 7.4: Comparação do Momento M_{11}

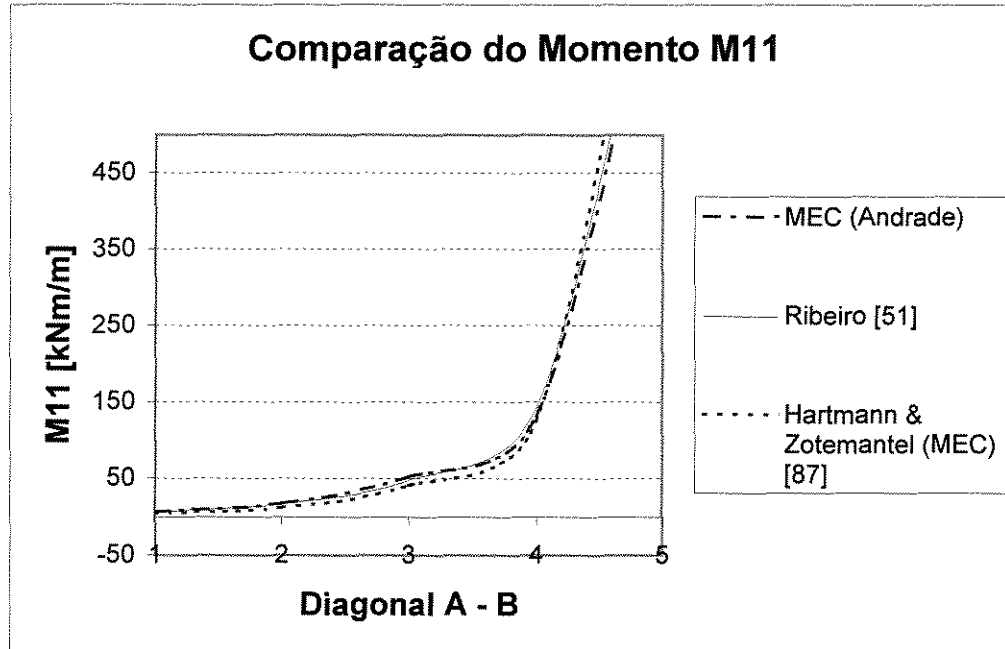


Gráfico 7.5: Comparação do Momento M_{12}

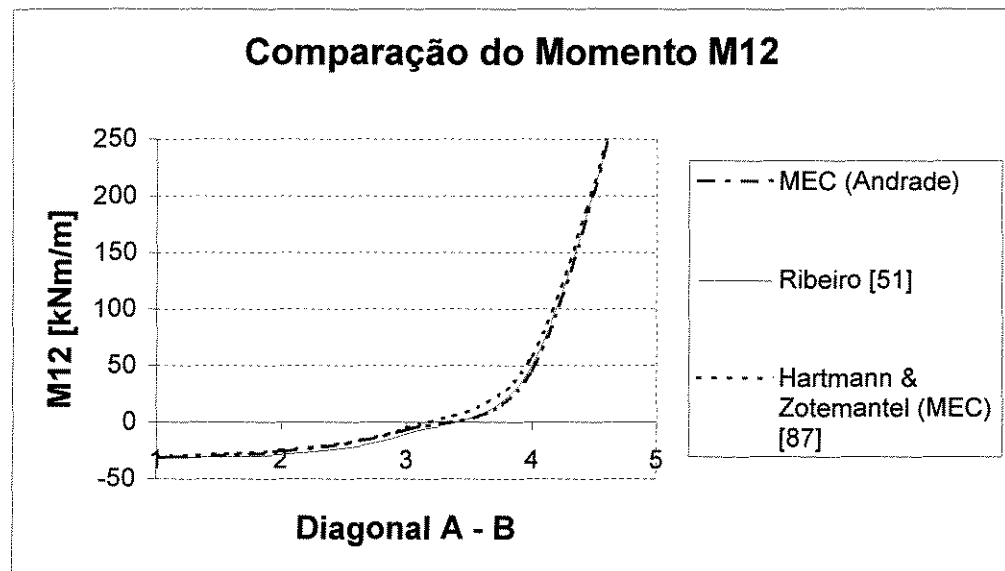
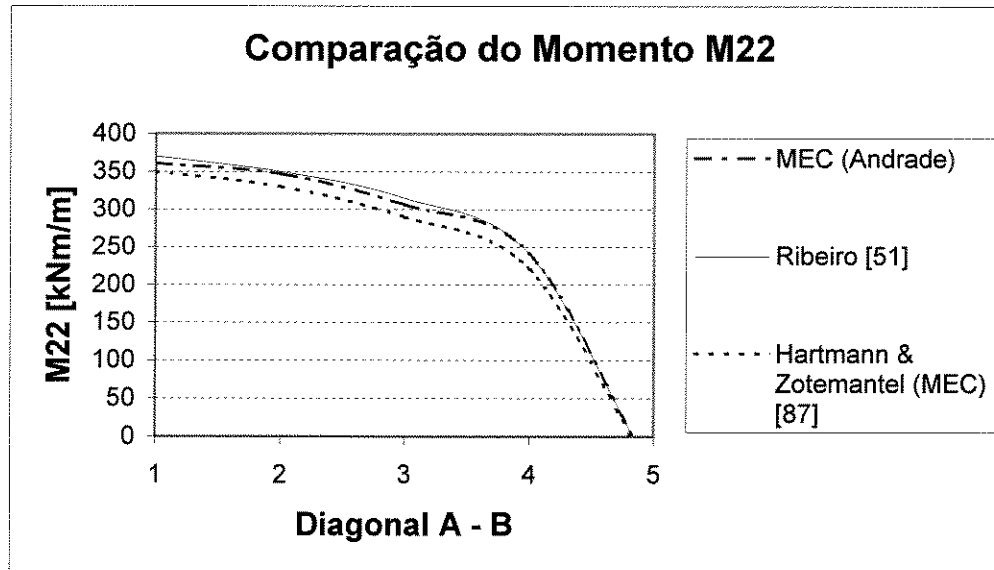


Gráfico 7.6: Comparação do Momento M_{22}



Nota-se que em MEC (Andrade), a placa foi analisada no programa de *Mindlin Original*, enquanto que em RIBEIRO [51] e em HARTMANN & ZOTEMANTEL [87], a teoria utilizada foi a teoria de *Reissner*. Quando este exemplo foi analisado pelo programa de *Reissner Linear Segundo a Formulação de Weeën* desenvolvido neste trabalho, os resultados obtidos para os esforços coincidiram com os resultados de RIBEIRO.

Exemplo 24: *Placa Esconsa Simplesmente Apoiada em Todas as Bordas com Carga Uniformemente Distribuída em Condição SOFT*

Este problema foi primeiramente analisado por **Morley [93]** e é considerado um teste severo para elementos de placa sujeitos à flexão devido a singularidade dos cantos da mesma. A mesma placa foi analisada por **Petrolito [89]** utilizando elementos finitos (tridimensionais) de placa com base na aproximação de *Hybrid-Trefftz*. O valor tridimensional de comparação do deslocamento vertical no centro da placa utilizado é **4.28**, com um fator de multiplicação igual a: $10^{-4} q l^4/D$, obtido em **Babuska & Scapolla [94]**.

Dados do Problema:

$$E = 3,4 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$$

$$\nu = 0,3$$

$$h = 0,1697 \text{ m}$$

$$q = -10 \text{ kN/m}^2$$

Utilizou-se o Programa de *Mindlin Original Segundo a Formulação de Weeën* [MEC (Andrade)]

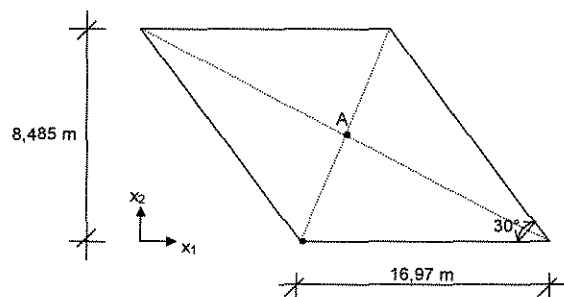


Figura 7.24: Placa do Exemplo 24.

Os resultados obtidos para o centro da placa, ou seja, no ponto A, através do MEC com discretização de 10 elementos por lado da placa, e utilizando nós duplos, foram comparados com as referências bibliográficas:

	w no Ponto A ($\times 10^{-2}m$)
Babuska & Scapolla [94]	2.333
Petrolito [89]	2.328*
MEC (Andrade)	2.376

*Na sua melhor discretização, Petrolito [89] obteve este resultado, com uma malha de 128 elementos triangulares.

7.3.4 CUBO

Exemplo 25: *Cubo Engastado em uma das Faces e Livre em Todas as Outras Submetido a Torção Unitária na Face Oposta ao Engaste*

Este exemplo é estudado por *Reissner* [12] onde ele considera uma estrutura tridimensional modelada como uma placa quadrada de espessura igual ao tamanho dos lados da mesma, conforme a figura 7.25. Este cubo encontra-se engastado em uma de suas faces e livre em todas as outras cinco faces. Na face oposta ao engaste, este cubo sofre a ação de uma torção unitária distribuída. A solução de *Reissner* para este problema é:

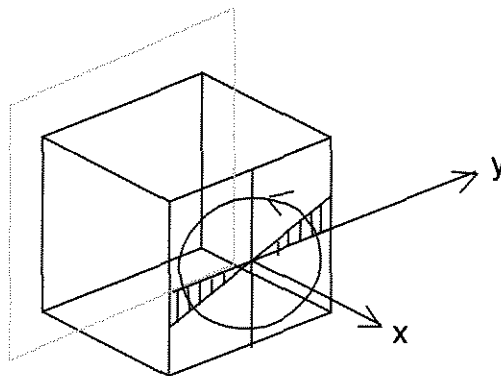


Figura 7.25: Placa do Exemplo 25.

Largura, altura e espessura = 2 metros.

Obs. A origem dos eixos está localizada no centro do cubo.

$$\phi_x = \frac{\theta}{\lambda} \left(2 \frac{\text{sh}\lambda y}{\text{ch}\lambda a} - \lambda y \right)$$

$$\phi_y = -\theta x$$

$$w = \theta xy$$

$$M_{xy} = D(1-\nu)\theta \left(\frac{\text{ch}\lambda y}{\text{ch}\lambda a} - 1 \right)$$

$$Q_x = D(1-\nu)\theta \lambda \frac{\text{sh}\lambda y}{\text{ch}\lambda a}$$

$$M_{xx} = M_{yy} = Q_y = 0$$

θx é o ângulo de rotação aplicado na seção x e $\lambda = \frac{\sqrt{10}}{h}$, θ é o giro prescrito aplicado.

As condições de contorno para este problema são:

$$\text{Em } x=0 : M_{xx} = \phi_x = w = 0$$

$$\text{Em } y=0 : \phi_x = M_{yy} = Q_y = 0$$

$$\text{Em } x=a : M_{xx}=0 \quad \phi_y = -\theta a \quad w = \theta ay$$

$$\text{Em } y=a : M_{xy} = M_{yy} = Q_y = 0$$

RACHED *et alli* [95] apresentam este mesmo exemplo, onde são tabelados os resultados obtidos em seu programa, os resultados obtidos por WEEËN, e àqueles considerados como referência exata. Este exemplo também foi analisado neste trabalho e a tabela 7.23 apresenta os resultados obtidos, comparados com as referências.

Tabela 7.23: Comparação dos Resultados Obtidos para um Cubo Engastado:

$\frac{y}{a}$	$\frac{\phi_x(y)}{\phi_x(a)}$				$\frac{M_{xy}(y)}{M_{xy}(a)}$				$\frac{Q_x(y)}{Q_x(a)}$			
	Exata	A	B	MEC	Exata	A	B	MEC	Exata	A	B	MEC
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	1.018	1.000	1.000	0.000	0.001	0.000	0.000
0.25	-0.292	-0.291	-0.290	-0.293	0.948	0.938	0.948	0.948	0.174	0.174	0.174	0.174
0.50	-0.387	-0.386	-0.382	-0.387	0.785	0.809	0.785	0.785	0.376	0.377	0.376	0.376
0.75	-0.055	-0.053	-0.051	-0.056	0.485	0.469	0.485	0.485	0.638	0.638	0.638	0.638
1.00	1.000	1.001	1.000	1.000	0.000	0.035	0.000	0.000	1.000	0.999	1.000	1.000

A: Vander Weeën (1982a) [12].

B: Y.F. Rashed, M.H. Aliabadi, C.A. Brebbia (1998) [95].

O problema foi analisado pelo Método dos Elementos de Contorno (MEC) no programa de *Mindlin Original Segundo a Formulação de Weeën* com número de pontos de Gauss na integração igual a 16, e número de elementos no contorno igual a 40, considerando somente uma parcela de um oitavo do cubo.

Foi utilizada a discretização de 40 elementos no contorno para a comparação feita na tabela anterior pois os resultados obtidos para discretizações mais simples não foram tão precisos.

A tabela a seguir mostra os valores obtidos para o mesmo exemplo com discretização de 16 elementos no contorno.

Tabela 7.24 Resultados Obtidos para Diferentes Discretizações de um Cubo

Engastado:

$\frac{y}{a}$	$\frac{\phi_x(y)}{\phi_x(a)}$		$\frac{M_{xy}(y)}{M_{xy}(a)}$		$\frac{Q_x(y)}{Q_x(a)}$	
	16 elem.	40 elem.	16 elem.	40 elem.	16 elem.	40 elem.
0.00	0.000	0.000	1.000	1.000	0.000	0.000
0.25	-0.302	-0.293	0.949	0.948	0.166	0.174
0.50	-0.406	-0.387	0.789	0.785	0.358	0.376
0.75	-0.076	-0.056	0.489	0.485	0.607	0.638
1.00	1.000	1.000	0.000	0.000	1.000	1.000

Capítulo 8

Uma Formulação Alternativa para a Solução Fundamental de Placas

8.1 INTRODUÇÃO

No trabalho de PALERMO JR. [96], foi desenvolvida uma formulação alternativa para a solução fundamental das placas de Reissner/Mindlin. Como resultado, conseguiu-se uma estratégia de obtenção de soluções fundamentais que podem ser aplicadas às equações de *Navier* e mostra-se que a solução das placas de Reissner/Mindlin é uma “evolução” daquela obtida da teoria clássica, ou seja, a conexão das duas teorias é viável. Este estudo foi originado a partir dos resultados obtidos em SANCHES [4] onde se procurou aplicar a solução de WEEËN à teoria de Mindlin. Porém, neste trabalho, SANCHES identificou que em problemas sem carregamento distribuído, obtinha-se soluções nas duas teorias com grande grau de proximidade. No entanto, em problemas com carregamento distribuído, a aplicação da teoria de Mindlin, ou em termos práticos, a retirada do “efeito linearmente ponderado” (o termo adicional na integral de domínio das equações integrais de WEEËN) levava a resultados muito ruins. Em [4], foi proposta uma solução alternativa para a carga concentrada em que as respostas melhoraram, mas não do modo desejado. Por outro lado, a aplicação das equações de WEEËN/REISSNER às placas finas levava a divergência de respostas nos diagramas de esforços obtidos, para alguns casos.

Com isso, PALERMO JR. procurou analisar os passos da solução de WEEËN e após o estudo das equações diferenciais, acreditou na similaridade das mesmas com as equações de Navier dos estados planos de tensão.

8.2 A EQUAÇÃO DE PLACAS

As faces de uma placa são supostamente livres de tensões tangenciais, sob carregamento distribuído, $\sigma_{\alpha 3}$ é zero e σ_{33} é igual a $0,5g$ em ambas as faces (lembrando que g é a carga distribuída sobre a placa). Retomando as equações de equilíbrio para uma placa infinitesimal sob carregamento distribuído tem-se a equação (4.67):

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} + g &= 0 \\ \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} - Q_{\alpha} &= 0\end{aligned}$$

As equações de equilíbrio são válidas em ambas as teorias (clássica e Reissner/Mindlin). Tanto a cortante (Q_{α}) quanto os momentos ($M_{\alpha\beta}$), por unidade de comprimento, têm solução similar em relação à tensão em ambas as teorias. Na teoria clássica, as relações constitutivas escritas em termos das deflexões são:

$$M_{\alpha\beta} = -D((1-\nu)w_{,\alpha\beta} + \nu w_{,\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}) \quad (8.1)$$

$$Q_{\alpha} = -D w_{,\gamma\gamma\alpha} \quad (8.2)$$

lembrando que D é a rigidez à flexão e ν o coeficiente de *Poisson*.

A teoria de Reissner assume uma distribuição de tensão conhecida ao longo da espessura. Na primeira versão de [10], nota-se que σ_{33} era igual a $-g$ quando x_3 valia $-h/2$ e zero quando x_3 valia $+h/2$. Porém, em 1947 REISSNER introduziu expressões generalizadas para o deslocamento com um ponderador ao longo da espessura, o que levou a valores aproximados para a deflexão w no plano médio da placa e grandezas (β_{α}) representando componentes equivalentes, porém não idênticos às componentes de rotação. As expressões de Reissner para os deslocamentos escritas em termos de v_i são:

$$\beta_{\alpha} = \int_h \left[\frac{12x_3}{h^3} v_{\alpha}^0 \right] dx_3 \quad (8.3)$$

$$w = \int_h \frac{3}{2h} \left[1 - \left(\frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] w^0 dx_3 \quad (8.4)$$

com v_{α}^0 e w^0 representando as funções ao longo da espessura, relacionadas ao deslocamento no plano (v_{α}) e a deflexão (w).

As expressões (8.3) e (8.4) são consideradas para obter as equações constitutivas para a teoria de Reissner desde quando foram publicadas em [10]. Estas expressões permitem que a distribuição de tensões σ_{33} possa ser assumida com $\pm 0,5g$ em x_3 valendo $\pm h/2$, respectivamente. As expressões (4.64), (4.65) e (4.66) representam as tensões apresentadas por Reissner:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= \frac{12x_3}{h^3} M_{\alpha\beta} \\ \sigma_{\alpha 3} &= \frac{3}{2h} \left[1 - \left(\frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] Q_{\alpha} \\ \sigma_{33} &= \frac{1}{4} \left(\frac{2x_3}{h} \right) \left[3 - \left(\frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] g \end{aligned}$$

As equações constitutivas escritas em termos dos deslocamentos (β_{α} e w) são:

$$M_{\alpha\beta} = D \frac{(1-\nu)}{2} \left(\beta_{\alpha,\beta} + \beta_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{(1-\nu)} \beta_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{g}{\lambda^2} \delta_{\alpha\beta} \quad (8.5)$$

$$Q_{\alpha} = D \frac{(1-\nu)}{2} \lambda^2 (\beta_{\alpha} + w_{,\alpha}) \quad (8.6)$$

sendo λ a constante relacionada ao efeito da cortante.

Mindlin publicou a sua teoria considerando grande semelhança com a teoria de Reissner, conforme dito no capítulo 4 deste trabalho. Deve-se notar que o procedimento inverso adotado por Mindlin levou a deslocamentos e rotações adotados por *Timoshenko* em sua teoria de barras [61]. As integrais que continham $\gamma_{\alpha 3}$ foram substituídas por constantes cujas magnitudes foram obtidas da análise de propagação de onda. As equações constitutivas para a teoria de Mindlin, equações (4.11) e (4.12), são:

$$M_{\alpha\beta} = D \frac{(1-\nu)}{2} \left(\Psi_{\alpha,\beta} + \Psi_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{(1-\nu)} \Psi_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right)$$

$$Q_{\alpha} = D \frac{(1-\nu)}{2} \lambda^2 (\Psi_{\alpha} + w_{,\alpha})$$

e $\lambda = \frac{\pi}{h}$ proveniente da propagação de ondas, conforme afirmado no item 4.2.

Comparando-se a equação (4.11) com (8.5) nota-se que o efeito da carga distribuída não foi incluído. Isso se deve ao fato de na teoria de Reissner os estudos terem sido realizados com base nas tensões distribuídas ao longo da espessura como uma das hipóteses mais importantes. Mindlin demonstra em sua teoria que somente o efeito ponderador de σ_{33} foi desprezado e não a própria tensão σ_{33} , como faz a teoria de Reissner [96].

Nas placas, uma equação diferencial muito conhecida pode ser obtida do equilíbrio das equações de (4.67):

$$M_{\alpha\beta,\alpha\beta} - g = 0 \quad (8.7)$$

Reescrevendo as equações de equilíbrio (4.18) e (4.17) em termos de deslocamentos para ambas as teorias (Reissner e Mindlin), respectivamente, tem-se:

$$D \frac{(1-\nu)}{2} \left(\Psi_{\alpha,\beta\beta} + \Psi_{\beta,\alpha\beta} + \frac{2\nu}{(1-\nu)} \Psi_{\gamma,\gamma\alpha} \right) - D \frac{(1-\nu)}{2} \lambda^2 (\Psi_{\alpha} + w_{,\alpha}) + P_{,\alpha} = 0$$

$$D \frac{(1-\nu)}{2} \lambda^2 (\Psi_{\alpha,\alpha} - w_{\alpha,\alpha}) + g = 0$$

Onde:

$$P = \frac{6 \nu h (1+\nu)}{25 E (1-\nu)} g \quad (\text{Reissner})$$

$$P=0 \quad (\text{Mindlin})$$

No capítulo 5, foram apresentadas todas as equações integrais desenvolvidas para a teoria clássica e de Reissner/Mindlin com base nas soluções apresentadas por WEEËN.

8.3 A SOLUÇÃO FUNDAMENTAL ALTERNATIVA PARA AS PLACAS DE REISSNER E MINDLIN

As soluções fundamentais do MEC usadas na teoria clássica e as soluções para as placas de Reissner/Mindlin são bem conhecidas na literatura. Uma maneira alternativa para a obtenção das soluções fundamentais para a teoria de Reissner/Mindlin [96] será brevemente apresentada a seguir.

Para iniciar, três forças de volume F_i devem ser introduzidas nas equações de equilíbrio (4.18) e (4.17) para obtenção das soluções fundamentais. A carga distribuída g se torna nula, F_α é relacionada aos binários unitários e F_3 é relacionada ao carregamento pontual unitário. Portanto, (4.18) e (4.17) escritas em termos de deslocamentos sem o carregamento g (portanto P vale zero para a teoria de Reissner) e incluindo F_i são:

$$D \frac{(1-\nu)}{2} \left(\Psi_{\alpha,\beta\beta} + \Psi_{\beta,\alpha\beta} + \frac{2\nu}{(1-\nu)} \Psi_{\gamma,\gamma\alpha} \right) - D \frac{(1-\nu)}{2} \lambda^2 (\Psi_\alpha + w_{,\alpha}) + F_\alpha = 0 \quad (8.8)$$

$$D \frac{(1-\nu)}{2} \lambda^2 (\Psi_{\alpha,\alpha} - w_{\alpha,\alpha}) + F_3 = 0 \quad (8.9)$$

Considerando os procedimentos apresentados por LOVE [20] para a obtenção da solução singular, um vetor $(\psi_1, \psi_2, 0)$ representado por $\underline{\psi}$ pode ser introduzido e suas componentes são independentes de x_3 ($\psi_\alpha = \psi_\alpha(x_\alpha)$). Duas grandezas, Δ e ω , são definidas, respectivamente, por divergente de $\underline{\psi}$ e rotacional de $\underline{\psi}$. Quando Δ e ω são introduzidas nas equações de equilíbrio (8.8) e (8.9), obtém-se as seguintes equações:

$$D \cdot \Delta_{,1} - D \frac{1-\nu}{2} \omega_{,2} - D \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 (\Psi_1 + w_{,1}) + F_1 = 0 \quad (8.10a)$$

$$D \cdot \Delta_{,2} + D \frac{1-\nu}{2} \omega_{,1} - D \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 (\Psi_2 + w_{,2}) + F_2 = 0 \quad (8.10b)$$

$$D \frac{(1-\nu)}{2} \lambda^2 (\Delta + \nabla^2 w) + F_3 = 0 \quad (8.11)$$

com: $\Delta = \psi_{1,1} + \psi_{2,2}$

$\omega = \psi_{2,1} - \psi_{1,2}$

Uma semelhança interessante pode ser identificada nestas equações de placas quando as equações clássicas da elastostática bidimensional são escritas em termos de dilatação ($\underline{\Delta}$) e rotação ($\underline{\omega}$). As equações do problema bidimensional serão apresentadas a seguir usando os deslocamentos no plano v_α para facilitar a comparação, lembrando que os deslocamentos v_α são uniformes na espessura:

$$(\lambda + 2\mu) \underline{\Delta}_{,1} - 2\mu \underline{\omega}_{,2} + F_1 = 0 \quad (8.12)$$

$$(\lambda + 2\mu) \underline{\Delta}_{,2} + 2\mu \underline{\omega}_{,1} + F_2 = 0$$

com: $\Delta = v_{1,1} + v_{2,2}$

$2\underline{\omega} = v_{2,1} - v_{1,2}$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

As equações (8.12) satisfazem as condições de *Euler-D'Alembert* (*Cauchy-Riemann*) e v_α pode ser escrito como uma função conjugada de x_α [20].

Para se obter a solução fundamental das placas de Reissner/Mindlin, o vetor campo $\underline{\psi}$ pode ser escrito em termos de seu escalar $\phi(x_\alpha)$ e vetor potencial $(0,0,H(x_\alpha))$:

$$\underline{\psi} = \text{grad } (\phi) + \text{rot } (0,0,H) \quad (8.13)$$

Quando a solução fundamental devido ao binário F_α é encontrada, a equação (8.11) se torna homogênea, ou seja:

$$D \frac{(1-\nu)}{2} \lambda^2 (\nabla^2 \phi + \nabla^2 w) = 0 \quad (8.14)$$

A integração da equação (8.14) leva à seguinte relação:

$$\phi(x_1, x_2) = -w(x_1, x_2) + E(x_1, x_2) \quad (8.15)$$

A função $E(x_\alpha)$ é uma função não singular cujo Laplaciano é zero, e, portanto pode ser assumida nula neste estudo. Substituindo-se as equações (8.14) e (8.15) em (8.10), obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$D (\nabla^2 \phi)_{,1} + D \frac{1-\nu}{2} (\nabla^2 H - \lambda^2 H)_{,2} + F_1 = 0 \quad (8.16)$$

$$D (\nabla^2 \phi)_{,2} - D \frac{1-\nu}{2} (\nabla^2 H - \lambda^2 H)_{,1} + F_2 = 0 \quad (8.17)$$

As forças de volume podem ser escritas em termos de seu escalar ($\Phi(x_\alpha)$) e vetor potencial ($(0,0,N(x_\alpha))$) da mesma maneira que foi feito para os deslocamentos [96]:

$$(F_1, F_2, 0) = \text{grad } (\Phi) + \text{rot } (0, 0, N) \quad (8.18)$$

Deve-se notar que a força F_3 não foi incluída por se tratar de uma força de natureza diferente dos binários.

Utilizando o teorema de *Green* em um domínio infinito para se obter um campo relacionado a forças de volume, com decaimento mais rápido que r^{-1} em distâncias infinitas, a analogia plana feita às funções potenciais apresentadas por PALERMO JR. [96] devem ser escritas por:

$$\Phi = -\frac{1}{2\pi} F_1^0 \frac{\partial \left(\ln \left(\frac{1}{r} \right) \right)}{\partial x_1} - \frac{1}{2\pi} F_2^0 \frac{\partial \left(\ln \left(\frac{1}{r} \right) \right)}{\partial x_2} \quad (8.19)$$

$$N = \frac{1}{2\pi} F_2^0 \frac{\partial \left(\ln \left(\frac{1}{r} \right) \right)}{\partial x_1} - \frac{1}{2\pi} F_1^0 \frac{\partial \left(\ln \left(\frac{1}{r} \right) \right)}{\partial x_2} \quad (8.20)$$

F_α^0 pode ser entendido como o resultado da integral de domínio em uma circunferência contendo o *Delta de Dirac* na direção α (igual a 1) e foi introduzida para distinguir o efeito de cada binário.

As relações (8.18) a (8.20) podem ser aplicadas às equações da elastostática plana (8.12) escritas em termos dos potenciais ϕ e H . Assim, a solução conhecida devido ao carregamento unitário é:

$$v_{\alpha\beta} = \frac{1}{8\pi\mu (1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln \left(\frac{1}{r} \right) \delta_{\alpha\beta} + r_{,\alpha} r_{,\beta} \right] \quad (8.21)$$

Quando as relações (8.18) a (8.20) são aplicadas às teorias de Reissner e Mindlin (equações (8.16) e (8.17)) e F_α^0 são conhecidos como binários unitários, a solução para os binários pode ser obtida. Esta solução é semelhante àquela obtida por WEENE. Deve-se lembrar que a solução tende a zero em distâncias infinitas em relação ao ponto fonte, conforme as hipóteses fundamentais deste desenvolvimento. Foi utilizada a seguinte relação:

$$\frac{\partial(\ln(r))}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial(\ln(\lambda r))}{\partial x_\alpha} \quad (8.22)$$

A função ϕ , obtida para o binário F_α , é dada por:

$$\phi = -\frac{1}{8\pi D} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (r^2 (\ln(\lambda r) - 1)) \quad (8.23)$$

A função H obtida é dada por:

$$H = F_1^0 \frac{1}{\pi D(1-\nu)\lambda^2} \frac{\partial}{\partial x_2} (\ln(\lambda r) + K_0(\lambda r)) - F_2^0 \frac{1}{\pi D(1-\nu)\lambda^2} \frac{\partial}{\partial x_1} (\ln(\lambda r) + K_0(\lambda r)) \quad (8.24)$$

K_0 é uma função de *Bessel* modificada. A expressão (8.24) é uma solução generalizada contendo os efeitos de ambos os binários e pode ser simplificada para se obter a expressão fundamental para cada um dos binários.

Para se obter a solução devido à carga unitária (F_3), F_α é nulo e as equações (8.10) tornam-se homogêneas. Então, as equações (8.9) e (8.11) são reescritas para demonstrar o sistema de equações:

$$D \cdot \nabla^2 \Delta + F_3 = 0 \quad (8.25)$$

$$D \frac{(1-\nu)}{2} \lambda^2 (\Delta + \nabla^2 w) + F_3 = 0 \quad (8.26)$$

A função Δ está relacionada com o potencial escalar ϕ , ou seja, com o campo irrotacional. Pode ser demonstrado que a solução H é nula devido à simetria radial do problema da carga pontual unitária sobre uma placa infinita. Desta forma, as coordenadas cilíndricas devem ser consideradas devido à simetria e a função H deve ser relacionada ao efeito do momento torçor. A solução para a carga pontual unitária é:

$$w^* = \frac{1}{\pi D} \left[\frac{1}{8} r^2 (\ln(\lambda r) - 1) - \frac{\ln(\lambda r)}{(1-\nu)\lambda^2} \right] \quad (8.27)$$

$$\phi^* = -\frac{1}{8\pi D} r^2 (\ln(\lambda r) - 1) \quad (8.28)$$

Segundo [96], é necessário perceber que as soluções (8.27) e (8.28) utilizaram a relação (8.22) no seu desenvolvimento para obter uma solução que pode ser comparada àquela obtida por WEEËN. A solução (8.27) pode se tornar igual à solução de WEEËN se for introduzido um movimento de corpo rígido nesta mesma solução.

O primeiro termo da expressão (8.27) é semelhante a solução da placa clássica para um carregamento pontual unitário e o segundo termo é a correção devido à cortante, introduzida pela equação (8.12). Deve-se lembrar que λ está diretamente relacionada com a espessura. A deflexão da equação (8.27) torna-se próxima àquela obtida com a teoria clássica quando a espessura tende a zero (λ tende ao infinito).

Por outro lado, λ pode assumir valor igual a e (base do logaritmo neperiano) ou $e^{0.5}$, e o campo irrotacional, ou seja, o primeiro termo da expressão (8.27) pode ser relacionado com a solução fundamental devido a *Benzine-Stern* ou *Danson* respectivamente, utilizados na teoria clássica.

Finalmente, o procedimento para a obtenção da solução fundamental apresentado é um caminho de fácil entendimento para chegar na solução devido aos binários unitários em coordenadas de contorno ns. A seguir, será apresentado de modo um pouco mais detalhado o relacionamento da solução fundamental das placas de Reissner/Mindlin com a da teoria clássica através do uso adequado dos campos encontrados.

8.3.1 SOLUÇÃO DEVIDO À CARGA UNITÁRIA

As rotações ψ_α são o gradiente de ϕ pelo fato do campo senoidal (H) ser nulo nesta solução. As rotações obtidas do gradiente de ϕ são expressões semelhantes àquelas obtidas a partir das hipóteses da teoria clássica para a carga pontual unitária. Assim, os momentos fletores e torçores têm expressões semelhantes àquelas utilizadas na teoria clássica e apresentam as seguintes expressões escritas em termos de coordenadas **ns**:

$$M_n^* = -\frac{1}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln(\lambda r) - \frac{(1-\nu)}{2} + (1-\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right)^2 \right] \quad (8.29)$$

$$M_{ns}^* = -\frac{(1-\nu)}{4\pi} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial s} \quad (8.30)$$

A cortante, definida pelas expressões (8.6) ou (4.12), pode ser escrita em coordenadas **ns** da seguinte maneira:

$$Q_n^* = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (8.31)$$

As rotações ψ_n e ψ_s são dadas por:

$$\Psi_n^* = -\frac{1}{4\pi D} r \left(\ln(\lambda r) - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial r}{\partial n} \quad (8.32)$$

$$\Psi_s^* = -\frac{1}{4\pi D} r \left(\ln(\lambda r) - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial r}{\partial s} \quad (8.33)$$

Pode-se notar nas expressões (8.29) a (8.33) que os esforços e as rotações têm as mesmas expressões daquelas utilizadas na teoria clássica. A principal

diferença aparece na translação, onde as hipóteses de Reissner/Mindlin geram um termo de correção:

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 (\ln(\lambda r) - 1) - \frac{1}{\pi D(1-\nu)\lambda^2} \ln(\lambda r) \quad (8.34)$$

Portanto, a equação integral de contorno (5.87) escrita para a teoria de Mindlin utilizando a solução fundamental para a carga unitária, é semelhante a escrita com a solução da teoria clássica, exceto na expressão da translação, onde o segundo termo da equação (8.34) contém a correção do efeito da cortante.

8.3.2 SOLUÇÃO DEVIDO AO BINÁRIO UNITÁRIO

De acordo com a solução estudada, as rotações são obtidas a partir da soma dos campos irrotacional e solenoidal que correspondem às soluções da teoria clássica e a correção devido ao esforço cortante introduzido por Reissner/Mindlin, respectivamente [96].

O binário será expresso, primeiramente, em termos de coordenadas cartesianas para simplificar as expressões dos deslocamentos. As equações finais serão escritas em termos de coordenadas de contorno no ponto fonte. Os operadores gradiente e rotacional podem ser facilmente escritos em termos de coordenadas de contorno no ponto campo.

A translação devido ao binário unitário na direção α é semelhante àquela obtido através da teoria clássica. Ela é expressa da seguinte forma:

$$w = \frac{1}{4\pi D} r \left(\ln(\lambda r) - \frac{1}{2} \right) r_\alpha \quad (8.35)$$

O vetor $\underline{\psi}$ ($\psi_n, \psi_s, 0$) pode ser escrito em coordenadas $\mathbf{n}$ s no ponto campo e utilizando a equação (8.15), é representado por:

$$(\psi_n, \psi_s, 0) = (-w_{,n}, -w_{,s}, 0) + (H_{,s}, -H_{,n}, 0) \quad (8.36)$$

A expressão (8.36) mostra o efeito da teoria clássica nas rotações de Reissner/Mindlin, devido ao binário. Nota-se que a expressão apropriada para $\underline{\psi}$ é (8.13) e que a deflexão foi introduzida em (8.36) devido às condições utilizadas para esta solução no problema de valor de contorno.

As relações constitutivas para a cortante são (8.6) ou (4.12), mas podem ser novamente escritas como uma simples expressão para esta solução fundamental:

$$Q_1 = D \frac{(1-\nu)}{2} \lambda^2 \frac{\partial H}{\partial x_2} = D \frac{(1-\nu)}{2} \lambda^2 \left(\frac{\partial H}{\partial n} n_2 + \frac{\partial H}{\partial s} s_2 \right) \quad (8.37)$$

$$Q_2 = -D \frac{(1-\nu)}{2} \lambda^2 \frac{\partial H}{\partial x_1} = -D \frac{(1-\nu)}{2} \lambda^2 \left(\frac{\partial H}{\partial n} n_1 + \frac{\partial H}{\partial s} s_1 \right) \quad (8.38)$$

Se as relações referentes às coordenadas ns (n_1 é igual a s_2 e n_2 é igual a $-s_1$) forem introduzidas nas expressões anteriores, tem-se:

$$Q_n = D \frac{(1-\nu)}{2} \lambda^2 \frac{\partial H}{\partial s} \quad (8.39)$$

$$Q_s = -D \frac{(1-\nu)}{2} \lambda^2 \frac{\partial H}{\partial n} \quad (8.40)$$

Introduzindo (8.39) e (8.40) na expressão (8.36), tem-se a relação mostrada por Mindlin:

$$(\psi_n, \psi_s, 0) = (-w_{,n}, -w_{,s}, 0) + \frac{2}{\lambda^2 D (1-\nu)} (Q_{,n}, Q_{,s}, 0) \quad (8.41)$$

Por outro lado, reescrevendo as expressões (8.37) e (8.38) para um binário atuando na direção 1, tem-se:

$$Q_1 = \frac{1}{2\pi} [A(z) - B(z) r_{,1}^2] \lambda^2 \quad (8.42)$$

$$Q_2 = -\frac{1}{2\pi} B(z) r_{,1} r_{,2} \lambda^2 \quad (8.43)$$

lembrando que as funções $A(z)$ e $B(z)$ são definidas por (4.81) e (4.82):

$$A(z) = K_0(z) + \frac{2}{z} \left[K_1(z) - \frac{1}{z} \right]$$

$$B(z) = K_0(z) + \frac{1}{z} \left[K_1(z) - \frac{1}{z} \right]$$

A cortante Q_n pode ser dividida nas componentes devido à teoria clássica e à correção de Reissner/Mindlin:

$$Q_n = \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[\left(-\frac{1}{r^2} \right) n_\alpha + \left(\frac{2}{r^2} \right) r_{,\alpha} \frac{\partial r}{\partial n} \right] + \left[\left(K_0 + \frac{K_1}{z} \right) n_\alpha - \left(K_0 + \frac{2K_1}{z} \right) r_{,\alpha} \frac{\partial r}{\partial n} \right] \lambda^2 \right\} \quad (8.44)$$

Após algumas operações algébricas sobre a função H , obteve-se a expressão (8.44).

Os momentos fletor e torção utilizados na equação integral (5.87) podem ser obtidos a partir da relação (4.11) escrita em coordenadas ns e da expressão (8.41) para as rotações:

$$M_{nn} = D((1-\nu)w_{,ss} - \nabla^2 w) + \frac{2}{\lambda^2} Q_{n,n} \quad (8.45)$$

$$M_{ns} = -D(1-\nu)w_{,ns} + \frac{1}{\lambda^2} (Q_{n,s} + Q_{s,n}) \quad (8.46)$$

As equações (8.45) e (8.46) apresentam os momentos como a soma da solução obtida pela teoria clássica com a correção introduzida por Reissner/Mindlin,

em coordenadas ns . É necessário perceber que a introdução da correção nas expressões de momento através da derivada da cortante foi primeiramente mostrada por REISSNER [96]. Quando a solução para o binário é considerada, o divergente do vetor $\underline{Q}$ (Q_n , Q_s) é nulo e portanto uma expressão alternativa pode ser escrita para o momento M_{nn} [96]:

$$M_{nn} = D((1-\nu)w_{,ss} - \nabla^2 w) - \frac{2}{\lambda^2} Q_{s,s} \quad (8.47)$$

A expressão (8.47) pode ser utilizada quando se necessita de uma expressão analítica, ou seja, quando a integral de contorno está sendo calculada sobre o elemento contendo o ponto fonte. As expressões (8.45) e (8.46) serão apresentadas a seguir, para um binário aplicado na direção α :

A parcela clássica da expressão (8.45) é:

$$D((1-\nu)w_{,ss} - \nabla^2 w) = -\frac{1}{2\pi r} r_{,\alpha} + \frac{(1-\nu)}{4\pi r} \left[r_{,\alpha} + 2s_{\alpha} \frac{\partial r}{\partial s} - 2r_{,\alpha} \left(\frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 \right] \quad (8.48)$$

O termo correspondente à correção de Reissner/Mindlin na expressão (8.45) é dado por:

$$\frac{2}{\lambda^2} \frac{\partial Q_n}{\partial n} = \frac{\lambda}{\pi} \left\{ K_1 \left[r_{,\alpha} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right)^2 - n_{\alpha} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right) \right] + \frac{B}{z} \left[4r_{,\alpha} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right)^2 - 2n_{\alpha} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right) - r_{,\alpha} \right] \right\} \quad (8.49)$$

A parcela clássica da expressão (8.46) é:

$$D(1-\nu)w_{,ns} = -\frac{(1-\nu)}{4\pi r} \left[s_{\alpha} \frac{\partial r}{\partial n} + n_{\alpha} \frac{\partial r}{\partial s} - 2r_{,\alpha} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial s} \right] \quad (8.50)$$

Os termos correspondentes à correção de Reissner/Mindlin na expressão (8.46) são dados por:

$$\frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial Q_n}{\partial s} = \frac{\lambda}{2\pi} \left\{ K_1 \left[r_\alpha \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial s} - n_\alpha \left(\frac{\partial r}{\partial s} \right) \right] + \frac{B}{z} \left[4r_\alpha \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial s} - n_\alpha \left(\frac{\partial r}{\partial s} \right) - s_\alpha \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right) \right] \right\} \quad (8.51)$$

$$\frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial Q_s}{\partial n} = \frac{\lambda}{2\pi} \left\{ K_1 \left[r_\alpha \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial s} - s_\alpha \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right) \right] + \frac{B}{z} \left[4r_\alpha \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial s} - n_\alpha \left(\frac{\partial r}{\partial s} \right) - s_\alpha \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right) \right] \right\} \quad (8.52)$$

Foram apresentadas as soluções devido ao binário unitário para todos os parâmetros de contorno, contendo a parcela clássica mais o termo da correção.

Nota-se que quando se estuda o binário unitário, as diferenças nas respostas para o modelo de placa na teoria clássica e na teoria de Reissner/Mindlin tornam-se mais evidentes do que para a carga unitária, ou seja, a influência do efeito da cortante é muito maior na solução devido ao binário do que na solução devido à carga unitária.

8.4 PROGRAMAS USADOS PARA ANÁLISE ELÁSTICA DE PLACAS

Visando a obtenção de resultados para as placas segundo as formulações apresentadas neste trabalho, foram desenvolvidos quatro programas computacionais, utilizando o *Software* da COMPAQ *Visual Fortran 6.1*, a fim de resolver problemas de placas tanto finas quanto espessas, em regime elástico, através do Método dos Elementos de Contorno (MEC). Os quatro programas desenvolvidos foram:

- I-) Programa de Placas Segundo a Teoria de *Kirchhoff*;
- II-) Programa de Placas Segundo a Teoria de *Reissner* Utilizando a *Formulação de Weeën*;
- III-) Programa de Placas Segundo a Teoria de *Mindlin* Utilizando a *Formulação de Weeën*;

IV-) Programa de Placas Segundo a Teoria de *Mindlin* Utilizando a *Formulação Alternativa*.

A estrutura geral destes programas se compõe de várias subrotinas que interagem com o programa principal. Os arquivos de entrada de dados utilizados para a leitura em cada programa são muito semelhantes entre si, para poderem ser facilmente manipulados em todos os programas. Considerando o programa IV como sendo o mais complexo dos programas desenvolvidos, será apresentada a seguir a estrutura deste programa, lembrando que ela é muito semelhante aos outros três. Essa estrutura é composta basicamente por:

a-) Programa Principal

É onde são conectadas todas as subrotinas necessárias no programa e as variáveis que entram e saem das mesmas são declaradas.

b-) Entrada de Dados (INPUT)

Nesta subrotina é realizada a leitura dos dados de entrada necessários para a execução do programa. Esta leitura é feita através de um arquivo de entrada, montado em um editor de texto. Conforme o programa lê os dados de entrada, ele os escreve no arquivo de saída para posterior conferência. As informações que devem ser lidas no arquivo de entrada são:

- Nome do Exemplo;
- Incluir o efeito da deformação por cortante (1=não, 2=sim);
- Número de Pontos do Contorno;
- Número de Pontos Internos;
- Número de Pares de Nós Duplos;
- Número de Nós com Restrições;
- Número de Nós com Recalques ou Carregamentos não Nulos;
- Número de Elementos de Contorno;
- Valor da Carga Uniformemente Distribuída;
- Número de Pontos de *Gauss* que deseja utilizar nas Integrações;

- Valor da constante de multiplicação do ponto de colocação;
- Módulo de Elasticidade;
- Espessura da Placa;
- Coeficiente de *Poisson*;
- Valor da constante λ da parcela do logaritmo.

Para todos os nós:

- Número do Nó, Coordenada x do Nó, Coordenada y do Nó.

Para todos os elementos:

- Número do Elemento, Nó Inicial, Nó Final.

Para todos os pares de nós duplos:

- Nó duplo 1, Nó duplo 2.

Para todos os nós com restrições:

- Número do Nó, Restrição da Cortante, Restrição do Momento M_n , Restrição do Momento M_{ns} (1=restrito, 0=livre).

Para todos os nós com recalques ou carregamentos não nulos:

- Número do Nó, Força Cortante ou Deslocamento Transversal, Momento M_n ou Rotação θ_n , Momento M_{ns} ou Rotação θ_s .

Quando se lê os elementos, são calculados seus cossenos diretores e seus comprimentos, e são montados vetores com estes dados.

c-) Montagem das Matrizes H e G (MATRIXGH)

Esta subrotina faz a montagem das matrizes globais **H** e **G** da placa. Ela fica conectada diretamente ao programa principal e utiliza algumas outras subrotinas para fazer a montagem das submatrizes parciais de cada elemento de contorno, que são as subrotinas de integração.

Nas operações numéricas das equações integrais, são utilizados os valores dos pontos de *Gauss* obtidos de uma subrotina existente dentro desta que lê um arquivo onde se tem para um número de pontos de *Gauss* variando de 3 a 96 todos os pesos e coordenadas de *Gauss*. Monta-se um vetor para os pesos e um vetor para as coordenadas.

Para os pontos do contorno da placa, a integração é realizada com o ponto de colocação a uma distância **d** do contorno, assim as integrais são feitas sempre

numericamente, para os três parâmetros necessários por nó. Cabe observar que para o programa I (Programa de Placas Segundo a Teoria de *Kirchhoff*) como se necessita de somente duas equações pois nesta teoria trabalha-se com dois parâmetros por nó, uma das equações é realizada à uma distância d do contorno, feita numericamente, e a outra é realizada analiticamente sobre o contorno, no sentido do valor principal de *Cauchy* quando necessário. Para calcular os deslocamentos dos pontos do domínio, a integração é realizada com o ponto de colocação sobre o próprio contorno.

Para obter o sistema de equações necessário, após a montagem das matrizes globais **H** e **G**, é realizada a troca das colunas de forma a colocar de um lado apenas valores conhecidos de deslocamentos e esforços e, do outro lado os valores incógnitos procurados.

d-) Subrotinas de Integração (INTEGRATE, INTEGRAESP)

As subrotinas de integração obtêm as submatrizes de contribuição do elemento que está sendo integrado e as inclui na matriz global. São feitas duas subrotinas de integração, onde a primeira só tem a parcela da teoria clássica (**INTEGRATE**) e a outra somente a contribuição da cortante (**INTEGRAESP**). Portanto, se o usuário optou por não incluir a contribuição da cortante, a segunda subrotina de integração não é chamada. Quando a segunda subrotina de integração é chamada, dentro dela necessita-se das funções de *Bessel*. Para calculá-las, o próprio *Visual Fortran 6.1* apresenta uma função pronta. Dentro do pacote **IMSL Fortran 90** (*Fortran Subroutines for Mathematical Applications*), desenvolvido pela *Visual Numerics*, existem as funções de *Bessel Modificadas* necessárias para realização das integrações. Para chamá-las, basta seguir a nomenclatura da função dada pelo pacote com os parâmetros desejados.

Nestas subrotinas estão alocadas as soluções fundamentais em termos de esforços e deslocamentos.

e-) Subrotina de Resolução do Sistema de Equações (DLSARG)

Montado o sistema de equações, basta chamar a subrotina de resolução de sistemas também existente dentro do pacote **IMSL Fortran 90** do *Visual Fortran 6.1*, com as variáveis e parâmetros de entrada e saída corretamente posicionados de acordo com as especificações do pacote. Esta subrotina resolve o sistema linear de equações algébricas contendo uma matriz genérica e real dos coeficientes. Primeiramente, ela efetua a fatorização LU desta matriz de coeficientes e verifica se ela está bem ou mal condicionada. O sistema linear é obtido quando ela chama outra subrotina do pacote de refinamento iterativo (**DFIRG**). Esta subrotina falha se houver um elemento da diagonal igual a zero ou se o refinamento iterativo não convergir. Esses erros só ocorrem se a matriz dos coeficientes for singular [97].

f-) Pontos Internos, Deslocamentos e Esforços (MATRIXIN, INTEGRAIN1, INTEGRAIN2, INTEGRAIN3, INTEGRAESPINT1, INTEGRAESPINT2, INTEGRAESPINT3)

Para se realizar a integração numérica para encontrar os esforços nos pontos do domínio, tem-se uma subrotina de pós-processamento conectada ao programa principal (**MATRIXIN**), semelhante a subrotina de montagem de matrizes definida anteriormente. Dentro desta subrotina, são chamadas outras subrotinas de integração onde foram alocadas as derivadas das soluções fundamentais do problema. Para cada parcela de solução fundamental (clássica e efeito da cortante) foram montadas três subrotinas de contribuição diferentes para facilitar a montagem dos esforços finais. Uma para a solução devido à carga concentrada unitária (**INTEGRAIN1, INTEGRAESPINT1**), e as outras duas para as soluções devido aos binários unitários nas direções x e y , respectivamente (**INTEGRAIN2, INTEGRAESPINT2** e **INTEGRAIN3, INTEGRAESPINT3**). Assim, para se calcular os esforços finais no domínio $Q_x, Q_y, M_x, M_{xy}, M_y$, utiliza-se as definições (4.11) e (4.15).

g-) Saída de Dados (OUTPUT)

O programa monta um arquivo de saída com os esforços e deslocamentos para todos os pontos do contorno da placa em coordenadas normais e tangenciais e para os pontos do domínio, são apresentados os esforços e deslocamentos em coordenadas x e y .

Sabe-se da literatura que a teoria clássica é normalmente utilizada quando se deseja resolver problemas de placas finas. Porém, com a formulação alternativa, onde se conseguiu obter para a teoria de *Mindlin* as soluções fundamentais divididas em duas partes, este programa permite ao usuário duas opções na hora de realizar os seus cálculos. Em termos práticos, se o usuário deseja calcular uma placa fina, por exemplo, ele pode optar por incluir ou não o efeito da cortante em seus resultados. E se ele escolher de não incluir este efeito, ele estará obtendo como resultado não a resposta de *Mindlin*, mas sim a resposta da teoria clássica. Desta forma, avalia-se a eficiência do cálculo utilizando a teoria clássica. Ainda, deve-se lembrar que a cortante na teoria clássica é definida como cortante equivalente por ter uma parcela referente ao momento volvente, que não é acrescentada quando se faz esta análise com a formulação alternativa.

8.5 EXEMPLOS DE PLACAS COM VARIAÇÃO DA CONSTANTE λ

Os exemplos de placas estudados no capítulo 7 deste trabalho foram analisados nos programas de *Reissner Linear* e de *Mindlin*, segundo a formulação apresentada por WEEËN [12,13]. Nestes programas, a constante de multiplicação do raio para o logaritmo das expressões dos esforços e deslocamentos, valem $\frac{\sqrt{10}}{h}$ e $\frac{\pi}{h}$ respectivamente. Já, para a análise dos exemplos a seguir, foi utilizado o programa feito para a formulação alternativa de PALERMO JR. [96] para a teoria de Mindlin (*Programa de Placas Segundo a Teoria de Mindlin Utilizando a Formulação Alternativa*), onde os esforços e deslocamentos são obtidos para o contorno da placa em coordenadas **ns**. Neste programa, a constante de multiplicação do raio no argumento do logaritmo assumiu quatro valores, para se estudar a influência da mesma nos resultados das placas.

Nota-se que a seleção dos quatro valores desta constante teve por base a formulação alternativa e os campos de deslocamento devido à força unitária que são usados na teoria clássica e na teoria de *Reissner/Mindlin*.

Os quatro valores escolhidos para a constante λ têm como base os estudos de outros autores. Estes valores são:

- $\lambda = e^{0,5}$ (Semelhante ao trabalho de DANSON);
- $\lambda = \frac{\pi}{h}$ (Semelhante ao trabalho de WEEËN);
- $\lambda = e$ (Semelhante ao trabalho de BENZINE);
- $\lambda = 1$ (Quando não se quer influência da constante).

8.5.1 EXEMPLOS DE PLACAS QUADRADAS

Após a análise de diversas placas com diversas condições de contorno, concluiu-se que com pequenas espessuras, a placa apresentava valores muito diferentes para os mesmos pontos no contorno quando se variava o λ , principalmente nas proximidades do canto. Conforme se aumentava a espessura da placa, a influência desta constante já não afetava de forma tão significativa os resultados do contorno.

Os dados utilizados para estes exemplos foram:

$$E = 205.000.000.000 \text{ N/m}^2$$

$$q = -400 \text{ N/m}^2 \text{ (uniformemente distribuída sobre a placa)}$$

Número de Pontos de Gauss para a Integração = 16

Número de Pontos no Contorno = 44 (11 Pontos de Cada Lado da Placa)

Número de Elementos = 40

A figura 8.1 apresenta a numeração dos nós de canto e dos lados da placa para indicar o sentido do contorno como anti-horário.

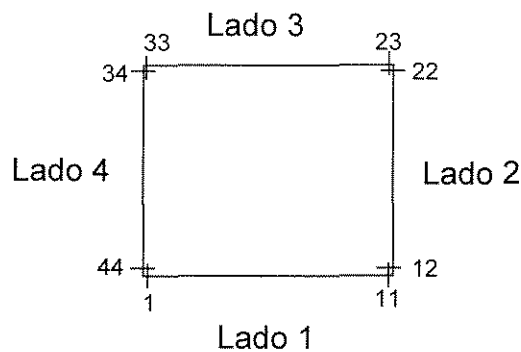


FIGURA 8.1 Discretização da Placa Quadrada.

Lados da Placa: $a = b = 2 \text{ m}$

Espessuras utilizadas: $h_1 = 0,2 \text{ m}$ (10% do lado)

$h_2 = 0,34 \text{ m}$ (17% do lado)

$$h_3 = 0,06 \text{ m (3\% do lado)}$$

Notações utilizadas nas tabelas dos exemplos:

Q_k = Cortante no Nó k

M_k = Momento Fletor no Nó k

w_k = Translação no Nó k

w (centro) = Translação no Ponto Central da Placa

M_{xx} = Momento na Direção **xx** no Ponto Central da Placa

M_{yy} = Momento na Direção **yy** no Ponto Central da Placa

$$Q_m = \frac{\sum_{k=1}^{n_{\text{f. lado j}}} Q_k}{n_{\text{elem lado j}}} \cdot \text{Comprimento lado j} = \text{Cortante Resultante no Lado j}$$

$$M_m = \frac{\sum_{k=1}^{n_{\text{f. lado j}}} M_k}{n_{\text{elem lado j}}} \cdot \text{Comprimento lado j} = \text{Momento Fletor Resultante no Lado j}$$

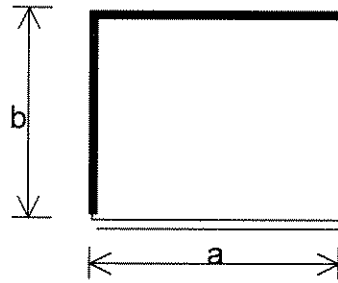
As condições de contorno apresentadas nos exemplos são representadas por:

————— Engaste

————— Apoio

===== Balanço

Exemplo 1: Placa Engastada em Dois Lados Ortogonais e em Balanço nos Outros Dois



$\nu=0,0$

FIGURA 8.2 Figura do Exemplo1.

Tabela 8.1: Resultados Obtidos nos 11 Pontos do Lado 4 e no Ponto Central da Placa
(N,m) - Condição HARD ($h_1= 0,2$ m)

Esforços	Danson	Weeën	Benzine	$\lambda=1$
w (centro)	-0,39094604E-06	-0,39083574E-06	-0,39088876E-06	-0,39077955E-06
$M_{xx}=M_{yy}$ (centro)	-4,5363035	-4,5384552	-4,5420895	-4,5613990
Q_{34} (canto)	-12,462003	-12,691596	-12,603538	-12,242891
Q_{35}	-14,264350	-14,303268	-14,302949	-14,059814
Q_{36}	74,321486	74,245386	74,295230	74,312872
Q_{37}	185,17171	185,09015	185,14839	185,15878
Q_{38}	289,18437	289,07621	289,15671	289,11853
Q_{39} (centro)	377,00660	376,87119	376,96951	376,91549
Q_{40}	452,49562	452,32232	452,44513	452,35773
Q_{41}	515,53209	515,31510	515,46437	515,33539
Q_{42}	615,02993	614,71592	614,92056	614,69721
Q_{43}	802,94881	802,42631	802,75971	802,18186
Q_{44} (canto)	1422,1135	1421,9114	1421,5692	1422,4073
M_{34} (canto)	-0,30393288	-0,35039385	-0,26139368	-0,88533456
M_{35}	16,062144	16,059501	16,081354	15,889312
M_{36}	49,766914	49,773754	49,781785	49,681435
M_{37}	96,088475	96,089257	96,099166	96,012588
M_{38}	146,71438	146,70326	146,71911	146,62871
M_{39} (centro)	197,60152	197,57431	197,59856	197,49302
M_{40}	247,06745	247,02062	247,05487	246,92624
M_{41}	296,53733	296,46510	296,51239	296,34873
M_{42}	347,47128	347,36434	347,42991	347,21186
M_{43}	416,93756	416,77153	416,86840	416,55593
M_{44} (canto)	457,54332	457,22517	457,43948	456,81618
Q_m lado 4	800,45	800,07	800,27	800,22
M_m lado 4	408,57	408,45	408,55	408,14

Lembrar que M_{xx} e M_{yy} são os momentos fletores no centro da placa. w é a translação no centro da placa. Q_{34} e Q_{44} representam as cortantes nos nós 34 e 44, respectivamente, que são os nós dos cantos do lado 4 da placa. Q_{39} é a cortante no nó

39, que é o nó posicionado no centro da borda 4 da placa. Q_m lado 4 é a resultante da cortante no lado 4. Para os momentos fletores do contorno, a mesma notação é utilizada.

Tabela 8.2: Resultados Obtidos nos 11 Pontos do Lado 4 e no Ponto Central da Placa
(N,m) - Condição HARD ($h_2 = 0,34$ m)

Esforços	Danson	Weeën	Benzine	$\lambda=1$
w centro	-0,87189225E-07	-0,87194406E-07	-0,87191305E-07	-0,87171154E-07
$M_{xx}=M_{yy}$ centro	-1,8626880	-1,8484860	-1,8548733	-1,9004049
Q_{34} (canto)	-3,1061664	-3,1821635	-3,1532560	-2,7425607
Q_{35}	18,613834	18,591236	18,599391	18,684256
Q_{36}	95,475062	95,443035	95,454565	95,552036
Q_{37}	192,56548	192,52641	192,54084	192,65395
Q_{38}	287,82619	287,78157	287,79757	287,91811
Q_{39} (centro)	373,80613	373,75775	373,77444	373,89975
Q_{40}	452,70720	452,65836	452,67394	452,79183
Q_{41}	531,52140	531,47699	531,48878	531,57874
Q_{42}	637,46640	637,44204	637,44239	637,46195
Q_{43}	826,59674	826,62588	826,59799	826,41373
Q_{44} (canto)	1170,0736	1170,4628	1170,2847	1169,4028
M_{34} (canto)	3,1174135	3,1450440	3,1305480	2,9173301
M_{35}	26,035869	26,047421	26,041464	25,949227
M_{36}	59,212804	59,219287	59,216030	59,160344
M_{37}	103,08400	103,08865	103,08612	103,04257
M_{38}	151,77327	151,77822	151,77522	151,73221
M_{39} (centro)	201,86236	201,86978	201,86516	201,81232
M_{40}	251,70865	251,72070	251,71333	251,64174
M_{41}	302,16291	302,18215	302,17071	302,07019
M_{42}	353,66129	353,69029	353,67329	353,53172
M_{43}	411,81044	411,85515	411,82978	411,63086
M_{44} (canto)	424,20080	424,22097	424,20128	423,99684
Q_m lado 4	800,01	799,99	799,99	800,06
M_m lado 4	414,99	415,03	415,01	414,81

Tabela 8.3: Resultados Obtidos nos 11 Pontos do Lado 4 e no Ponto Central da Placa
(N,m) - Condição HARD ($h_3 = 0,06$ m)

Esforços	Danson	Weeën	Benzine	$\lambda=1$
w (centro)	-0,13844045E-04	-0,13779167E-04	-0,13813967E-04	-0,13804481E-04
$M_{xx}=M_{yy}$ (centro)	-6,9655489	-7,1305218	-7,1087393	-6,8670105
Q_{34} (canto)	37,993644	17,550115	37,433746	-6,7151807
Q_{35}	-82,104303	-74,777043	-82,830835	-62,447060
Q_{36}	50,454716	51,758088	50,402410	53,780068
Q_{37}	187,63124	187,00799	187,67387	186,23326
Q_{38}	299,31184	298,33748	299,31530	297,29601
Q_{39} (centro)	388,37140	387,23049	388,28404	386,34280
Q_{40}	469,70479	467,94375	469,47305	466,83749
Q_{41}	553,09777	550,50613	552,69599	549,03152
Q_{42}	427,62141	427,03890	427,61975	426,61223
Q_{43}	-188,57623	-178,25844	-187,76907	-168,68360
Q_{44} (canto)	3805,2773	3755,3868	3786,9742	3758,0864
M_{34} (canto)	3,7676604	1,5295916	4,0568007	-2,4858809
M_{35}	8,6101001	8,7394079	8,7380780	8,4175227
M_{36}	45,102630	45,085985	45,251864	44,503584
M_{37}	93,889257	93,851945	93,999092	93,397898
M_{38}	146,24301	146,01122	146,28313	145,56775
M_{39} (centro)	197,68061	197,20715	197,61738	196,83224
M_{40}	246,08627	245,30578	245,88968	245,01975
M_{41}	291,63350	290,49244	291,26580	290,35561
M_{42}	333,95295	332,27324	333,36422	332,23973
M_{43}	403,03461	400,59100	402,03457	401,02853
M_{44} (canto)	522,03949	515,48847	520,20145	513,85819
Q_m lado 4	805,43	800,65	803,41	802,14
M_m lado 4	405,83	403,61	405,31	402,61

Tabela 8.4: Resultados Obtidos nos 11 Pontos do Lado 4 e no Ponto Central da Placa
(N,m) - Condição SOFT ($h_1 = 0,2$ m)

Esforços	Danson	Weeën	Benzine	$\lambda=1$
w (centro)	-0,39123248E-06	-0,39114478E-06	-0,39118583E-06	-0,39108600E-06
$M_{xx}=M_{yy}$ (centro)	-4,4356417	-4,4348953	-4,4394364	-4,4595550
Q_{34} (canto)	-39,130408	-39,185345	-39,272883	-38,035497
Q_{35}	-49,830546	-49,896453	-49,853351	-49,896767
Q_{36}	53,371645	53,295644	53,348899	53,326885
Q_{37}	176,08372	175,99918	176,06438	176,01442
Q_{38}	286,84209	286,73852	286,81593	286,77787
Q_{39} (centro)	377,37663	377,24717	377,34168	377,29321
Q_{40}	449,85659	449,69224	449,80970	449,73844
Q_{41}	511,54568	511,31373	511,48101	511,32914
Q_{42}	590,25178	589,93062	590,15352	589,91184
Q_{43}	827,86672	827,07941	827,65745	826,65953
Q_{44} (canto)	1596,1703	1596,9836	1595,8417	1597,6552
M_{34} (canto)	-0,30815681	-0,36574207	-0,26687852	-0,97931514
M_{35}	13,265417	13,264118	13,282096	13,108432
M_{36}	47,692599	47,696621	47,705637	47,603106
M_{37}	95,073907	95,073860	95,083145	95,001722
M_{38}	146,35801	146,34812	146,36209	146,27947
M_{39} (centro)	197,59262	197,56946	197,59026	197,49503
M_{40}	246,93211	246,89365	246,92193	246,80719
M_{41}	296,39901	296,33771	296,37855	296,22808
M_{42}	346,23272	346,14843	346,19964	346,00666
M_{43}	419,86074	419,70964	419,80205	419,49312
M_{44} (canto)	475,01073	474,79144	474,92580	474,43862
Q_m lado 4	800,38	800,06	800,22	800,19
M_m lado 4	409,35	409,25	409,33	408,95

Tabela 8.5: Resultados Obtidos nos 11 Pontos do Lado 4 e no Ponto Central da Placa
(N,m) - Condição SOFT ($h_2 = 0,34$ m)

Esforços	Danson	Weeën	Benzine	$\lambda=1$
w (centro)	-0,87511294E-07	-0,87519390E-07	-0,87514744E-07	-0,87501777E-07
$M_{xx}=M_{yy}$ (centro)	-1,4007022	-1,3860242	-1,3919189	-1,4303108
Q_{34} (canto)	-34,320974	-34,365633	-34,330748	-33,997797
Q_{35}	-32,093328	-32,104986	-32,102817	-32,044441
Q_{36}	60,133186	60,109407	60,114227	60,208939
Q_{37}	171,10639	171,07482	171,08072	171,19265
Q_{38}	276,27976	276,24187	276,24860	276,38570
Q_{39} (centro)	367,49482	367,45339	367,45916	367,61579
Q_{40}	447,11195	447,06965	447,07247	447,24546
Q_{41}	527,17370	527,13366	527,12987	527,31606
Q_{42}	637,72008	637,70586	637,68552	637,83704
Q_{43}	858,62509	858,66724	858,60863	858,66503
Q_{44} (canto)	1406,6395	1407,3714	1407,1491	1405,4711
M_{34} (canto)	7,4498706	7,4761302	7,4481815	7,3060787
M_{35}	21,430800	21,437212	21,429717	21,384415
M_{36}	54,478142	54,480663	54,476395	54,448918
M_{37}	100,07167	100,07311	100,06973	100,05136
M_{38}	150,24884	150,25199	150,24750	150,23049
M_{39} (centro)	201,41374	201,42098	201,41394	201,39229
M_{40}	251,95618	251,97029	251,95924	251,92622
M_{41}	303,08336	303,10672	303,09006	303,04098
M_{42}	356,37456	356,41304	356,38814	356,30846
M_{43}	419,37118	419,42605	419,39036	419,28470
M_{44} (canto)	457,46046	457,53755	457,48721	457,32924
Q_m lado 4	799,94	799,97	799,94	800,03
M_m lado 4	418,18	418,22	418,19	418,08

Tabela 8.6: Resultados Obtidos nos 11 Pontos do Lado 4 e no Ponto Central da Placa
(N,m) – Condição SOFT ($h_3 = 0,06$ m)

Esforços	Danson	Weeën	Benzine	$\lambda=1$
w (centro)	-0,13814727E-04	-0,13760155E-04	-0,13789166E-04	-0,13779897E-04
$M_{xx}=M_{yy}$ (centro)	-7,1925591	-7,3196916	-7,3113824	-7,1145188
Q_{34} (canto)	-35,927850	-35,139918	-36,737413	-30,604175
Q_{35}	-71,997443	-72,199373	-72,437362	-70,576002
Q_{36}	55,819186	54,551429	55,811524	53,005482
Q_{37}	186,25966	185,55438	186,24276	184,93322
Q_{38}	300,51650	299,54438	300,48521	298,65413
Q_{39} (centro)	395,66616	394,36995	395,56667	393,38437
Q_{40}	457,71439	456,30408	457,48819	455,61155
Q_{41}	533,57825	530,80089	533,33961	528,62999
Q_{42}	478,44062	477,18503	477,81378	477,98529
Q_{43}	718,00644	704,47276	718,55034	687,75214
Q_{44} (canto)	1974,8634	1979,6227	1960,5042	2030,5866
M_{34} (canto)	2,6159495	0,49043241	2,9264167	-3,8142877
M_{35}	8,7602167	8,6867777	8,8848750	8,0689653
M_{36}	45,094895	45,061547	45,228844	44,477103
M_{37}	93,770178	93,736886	93,866741	93,313529
M_{38}	146,08455	145,88648	146,12256	145,46378
M_{39} (centro)	197,78918	197,38056	197,73972	197,00551
M_{40}	245,29591	244,66360	245,12757	244,41161
M_{41}	293,45801	292,38977	293,16315	292,04133
M_{42}	322,05856	320,97262	321,53657	321,31186
M_{43}	439,50210	436,53800	438,65280	435,75033
M_{44} (canto)	469,05754	464,81384	467,56900	464,41663
Q_m lado 4	804,69	800,56	802,95	801,87
M_m lado 4	405,53	403,59	405,11	402,43

Tendo em conta que nas tabelas apresentadas houve pequena variação dos valores obtidos em cada nó para cortante e momento fletor, são apresentados gráficos para verificar se estas variações são significativas do ponto de vista de engenharia para a situação *hard*, já que os valores tabelados para esta condição de contorno foram mais significativos.

Os gráficos foram feitos de duas formas:

- a-) Manteve-se a espessura constante e procedeu-se a variação do parâmetro λ ;
- b-) Para cada valor de λ , procedeu-se a variação as espessura.

Gráfico 8.1: Cortante no Lado 4 da Placa de Espessura 10%.

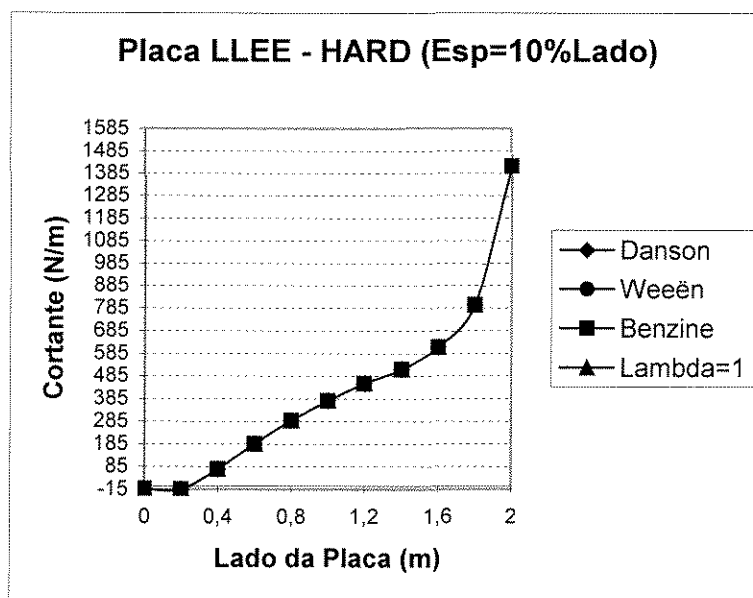


Gráfico 8.2: Momento no Lado 4 da Placa de Espessura 10%.

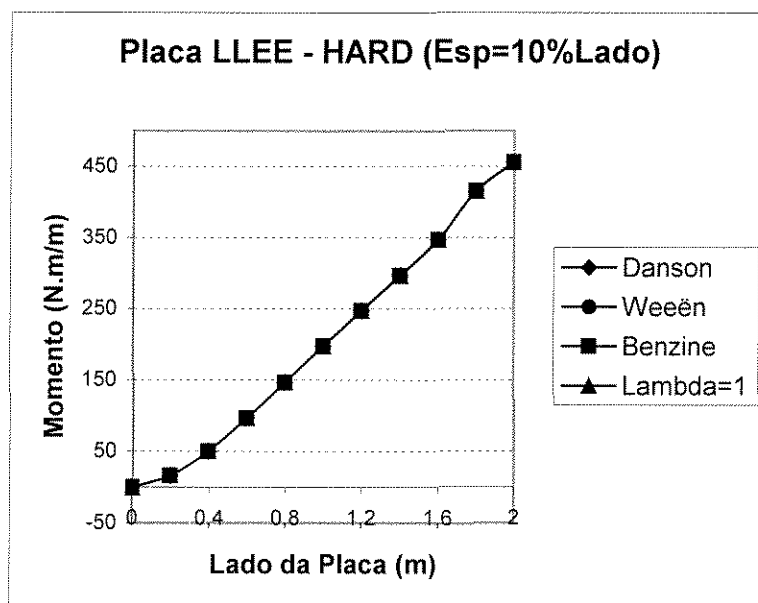


Gráfico 8.3: Cortante no Lado 4 da Placa de Espessura 3%.

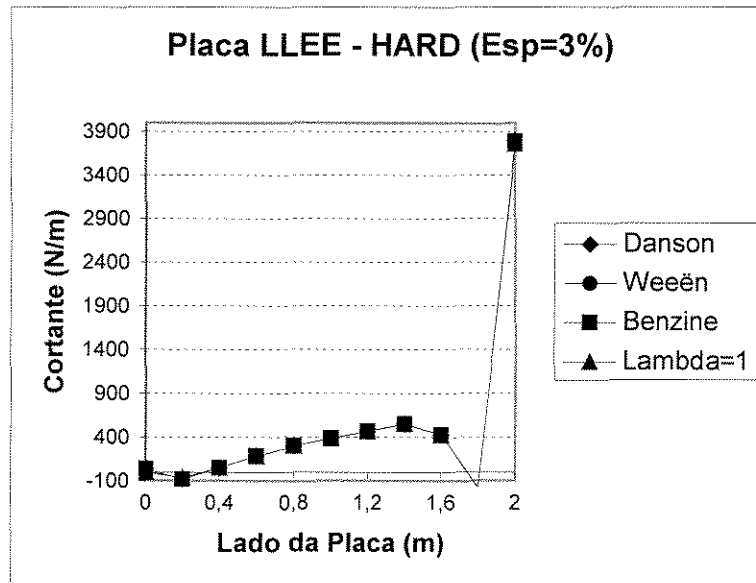


Gráfico 8.4: Momento no Lado 4 da Placa de Espessura 3%.

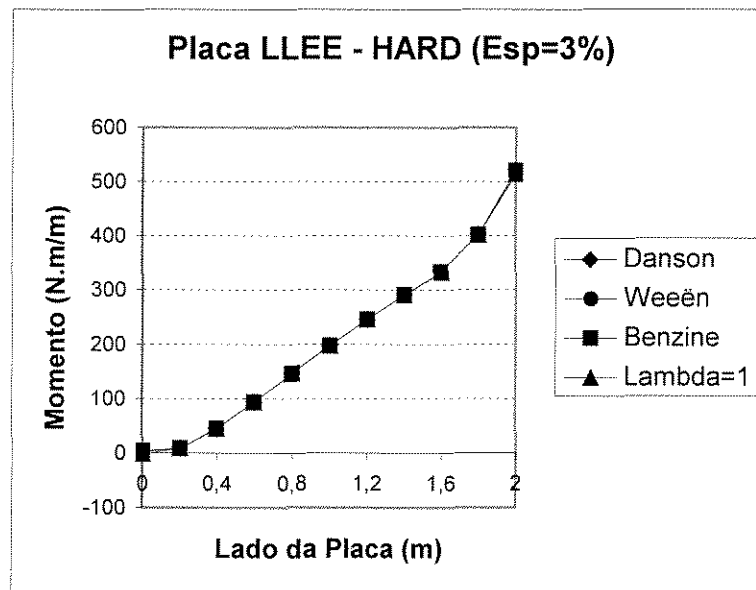


Gráfico 8.5: Cortante no Lado 4 da Placa para a Constante de DANSON.

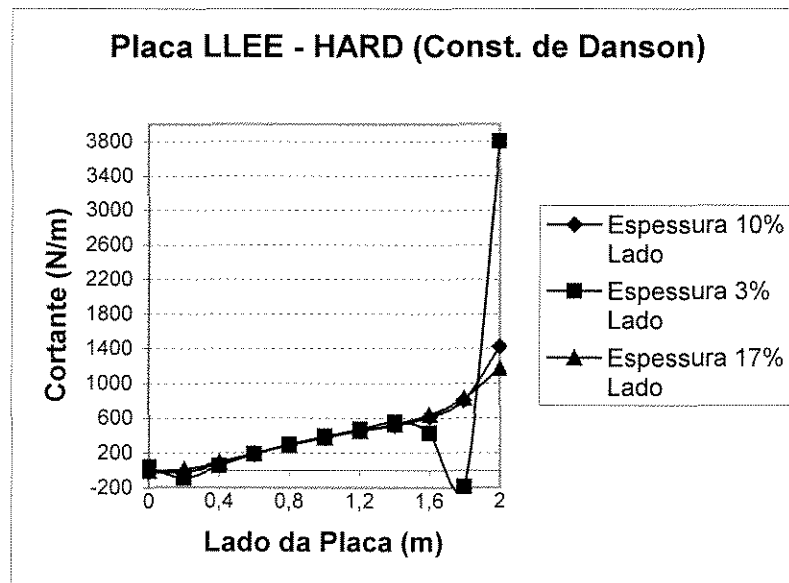


Gráfico 8.6: Momento no Lado 4 da Placa para a Constante de DANSON.

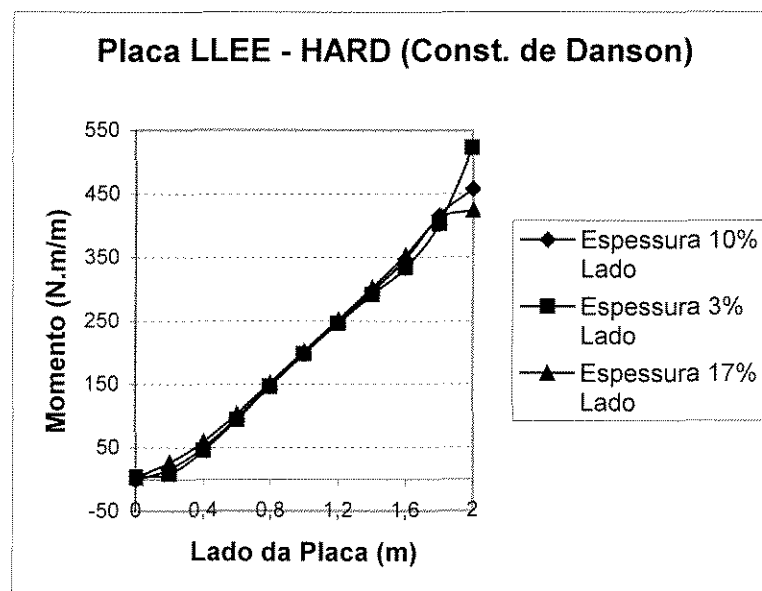


Gráfico 8.7: Cortante no Lado 4 da Placa para a Constante de WEEËN.

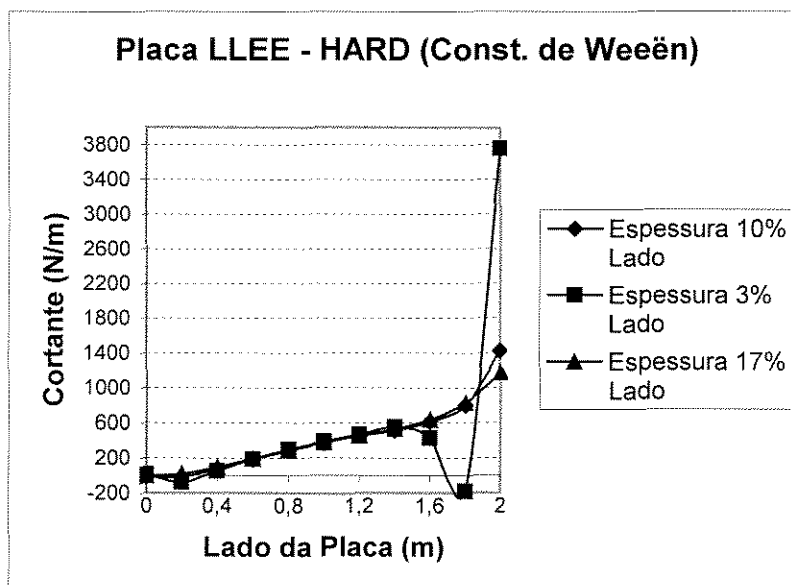


Gráfico 8.8: Momento no Lado 4 da Placa para a Constante de WEEËN.

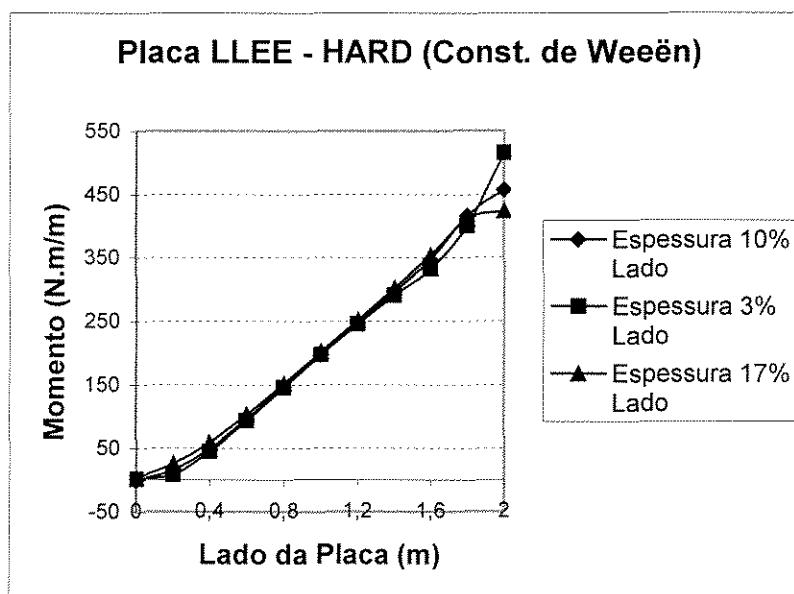


Gráfico 8.9: Cortante no Lado 4 da Placa para a Constante de BENZINE.

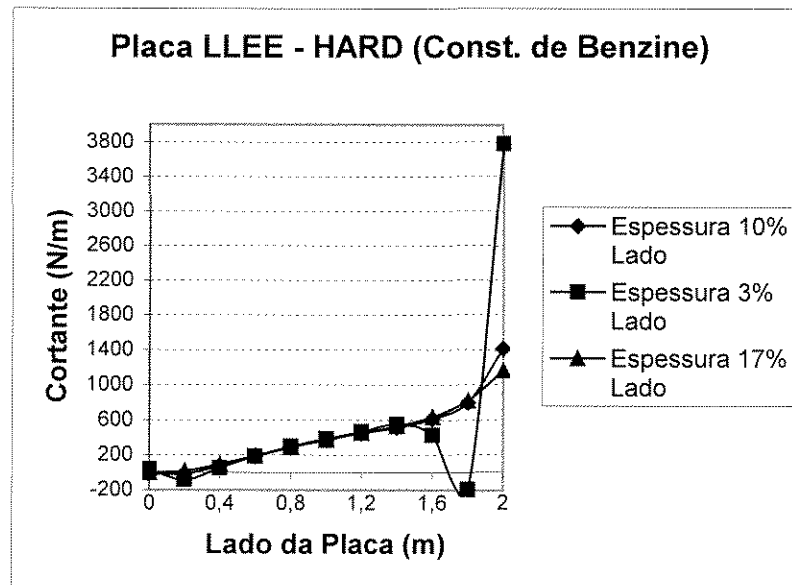


Gráfico 8.10: Momento no Lado 4 da Placa para a Constante de BENZINE.

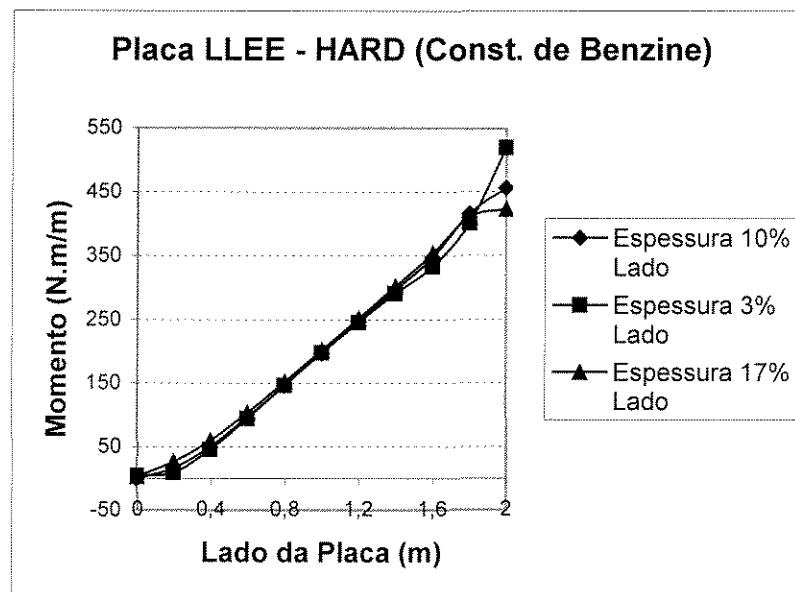


Gráfico 8.11: Cortante no Lado 4 da Placa para a Constante Igual a 1.

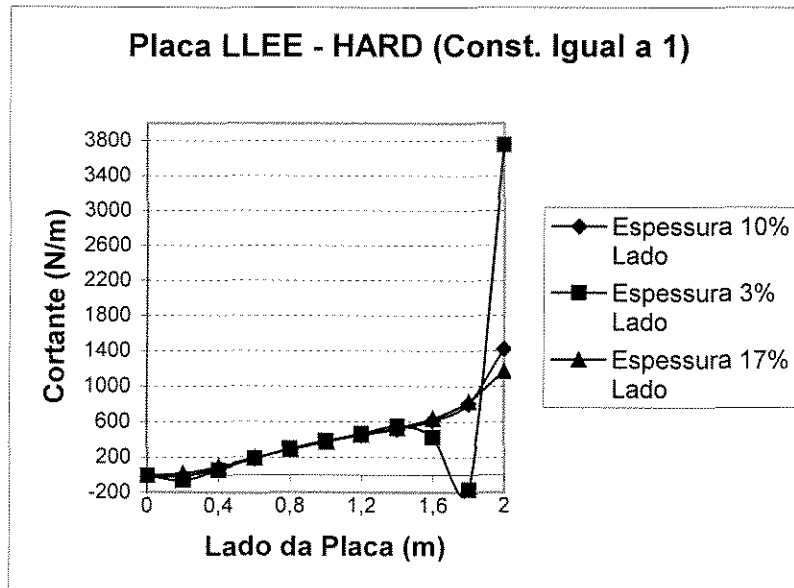
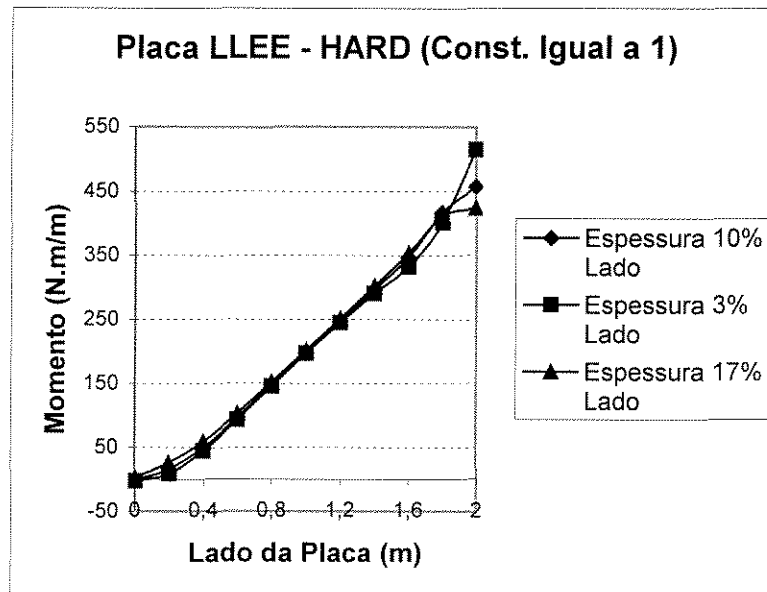


Gráfico 8.12: Momento Efetivo no Lado 4 da Placa para a Constante Igual a 1.

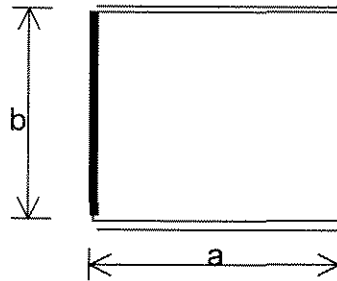


Para este exemplo notou-se:

a-) Embora tenha ocorrido variação dos valores dos esforços de acordo com a variação de λ na tabela, os gráficos mostraram que esta variação pode ser desprezada do ponto de vista de engenharia.

b-) Para a menor espessura percebeu-se oscilação dos valores dos esforços nos cantos mais próximos da borda livre, independente do valor de λ .

Exemplo 2: Placa Engastada em Um dos Lados e em Balanço nos Outros Três



$\nu=0,0$

FIGURA 8.3 Figura do Exemplo 2.

Tabela 8.7: Resultados Obtidos nos Pontos do Engaste, na Borda Livre Oposta e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição HARD ($h_1= 0,2$ m)

Esforços	Danson	Weeën	Benzine	$\lambda=1$
w (centro)	-0,21101514E-05	-0,21103435E-05	-0,21101415E-05	-0,21113759E-05
M_{xx} (centro)	200,16746	200,20259	200,18070	200,34845
M_{yy} (centro)	0,30264400	0,31638609	0,31108450	0,32503838
w_{12} (canto)	-0,59067848E-05	-0,59075317E-05	-0,59069674E-05	-0,59106796E-05
w_{13}	-0,59063306E-05	-0,59070364E-05	-0,59064642E-05	-0,59102098E-05
w_{14}	-0,59059786E-05	-0,59066525E-05	-0,59060756E-05	-0,59098397E-05
w_{15}	-0,59057351E-05	-0,59063868E-05	-0,59058077E-05	-0,59095795E-05
w_{16}	-0,59055894E-05	-0,59062279E-05	-0,59056478E-05	-0,59094224E-05
w_{17} (centro)	-0,59055408E-05	-0,59061749E-05	-0,59055946E-05	-0,59093697E-05
Q_{34} (canto)	796,02042	797,30900	796,90620	794,85675
Q_{35}	811,80143	811,73879	811,63735	812,53722
Q_{36}	802,31312	802,29163	802,21408	802,74286
Q_{37}	789,34985	789,32939	789,26620	789,68781
Q_{38}	799,27012	799,25324	799,19259	799,58231
Q_{39} (centro)	796,77234	796,75866	796,69921	797,06772
M_{34} (canto)	780,18606	780,12525	780,04367	781,06286
M_{35}	809,77805	809,80340	809,72720	810,36589
M_{36}	798,99773	799,02105	798,95538	799,50999
M_{37}	800,61977	800,64342	800,58197	801,09640
M_{38}	800,09321	800,11656	800,05736	800,55176
M_{39} (centro)	800,25704	800,28009	800,22155	800,71079
Q_m lado 4	1599,65	1599,86	1599,65	1600,20
M_m lado 4	1599,88	1599,91	1599,78	1600,96

Tabela 8.8: Resultados Obtidos nos Pontos do Engaste, na Borda Livre Oposta e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição HARD ($h_2 = 0,34$ m)

Esforços	Danson	Weeën	Benzine	$\lambda=1$
w (centro)	-0,44261036E-06	-0,44289162E-06	-0,44275777E-06	-0,44254969E-06
M_{xx} (centro)	199,78092	199,99165	199,91016	199,59273
M_{yy} (centro)	0,34245516	0,38286575	0,37198551	0,29589524
w_{12} (canto)	-0,12186681E-05	-0,12196002E-05	-0,12192085E-05	-0,12181026E-05
w_{13}	-0,12186038E-05	-0,12195193E-05	-0,12191246E-05	-0,12181123E-05
w_{14}	-0,12185554E-05	-0,12194573E-05	-0,12190611E-05	-0,12181189E-05
w_{15}	-0,12185208E-05	-0,12194125E-05	-0,12190158E-05	-0,12181217E-05
w_{16}	-0,12184998E-05	-0,12193851E-05	-0,12189882E-05	-0,12181225E-05
w_{17} (centro)	-0,12184927E-05	-0,12193759E-05	-0,12189790E-05	-0,12181226E-05
Q_{34} (canto)	746,96920	747,53361	747,59558	747,03533
Q_{35}	830,14964	830,68947	830,35294	830,58686
Q_{36}	799,72810	800,10040	799,84609	800,17096
Q_{37}	797,41299	797,71628	797,49229	797,83390
Q_{38}	797,91468	798,18408	797,98104	798,32364
Q_{39} (centro)	797,33740	797,59697	797,39950	797,74202
M_{34} (canto)	790,12273	790,78930	790,38289	790,21160
M_{35}	803,84157	804,38918	804,10453	803,79397
M_{36}	799,36250	799,86316	799,60042	799,31127
M_{37}	799,53768	800,00663	799,76188	799,48236
M_{38}	799,09126	799,54338	799,30754	799,03559
M_{39} (centro)	799,15454	799,60136	799,36837	799,09886
Q_m lado 4	1598,94	1599,70	1599,27	1599,72
M_m lado 4	1598,59	1599,60	1599,06	1598,51

Tabela 8.9: Resultados Obtidos nos Pontos do Engaste, na Borda Livre Oposta e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição HARD ($h_3 = 0,06$ m)

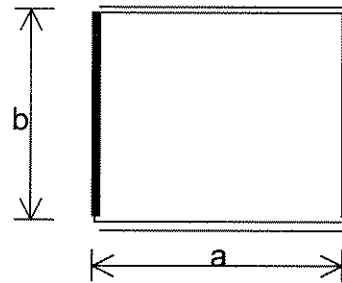
Esforços	Danson	Weeën	Benzine	$\lambda=1$
w (centro)	-0,78347427E-04	-0,77365966E-04	-0,77840461E-04	-0,78948602E-04
M _{xx} (centro)	205,31983	201,43399	203,02646	210,34716
M _{yy} (centro)	0,27500443	-0,28276319	-0,12553000	1,2493017
w ₁₂ (canto)	-0,22110570E-03	-0,21814492E-03	-0,21935869E-03	-0,22419181E-03
w ₁₃	-0,22124870E-03	-0,21825887E-03	-0,21953555E-03	-0,22411332E-03
w ₁₄	-0,22134829E-03	-0,21833217E-03	-0,21966401E-03	-0,22403741E-03
w ₁₅	-0,22140817E-03	-0,21837190E-03	-0,21974554E-03	-0,22397474E-03
w ₁₆	-0,22143858E-03	-0,21838444E-03	-0,21978925E-03	-0,22393354E-03
w ₁₇ (centro)	-0,22144780E-03	-0,21837190E-03	-0,21980296E-03	-0,22391918E-03
Q ₃₄ (canto)	4714,5051	4594,1079	4662,3632	4737,7514
Q ₃₅	-922,78540	-882,03649	-908,14694	-936,09246
Q ₃₆	527,68724	527,56528	528,17833	520,57322
Q ₃₇	870,11947	862,03187	867,44663	865,11844
Q ₃₈	812,32487	806,00209	810,26696	807,23912
Q ₃₉ (centro)	793,05496	787,61939	791,29448	787,93513
M ₃₄ (canto)	837,80930	817,29702	829,39404	844,32690
M ₃₅	822,44733	811,32762	817,07560	828,06377
M ₃₆	794,21568	784,17108	789,44978	799,19218
M ₃₇	808,68074	799,16371	804,12715	813,51404
M ₃₈	812,10503	802,77924	807,65478	816,81272
M ₃₉ (centro)	813,46044	804,21379	809,04636	818,13079
Q _m lado 4	1616,45	1601,77	1609,83	1607,87
M _m lado 4	1625,23	1603,28	1615,01	1635,52

Apresentaram-se os seguintes resultados:

- a-) No engaste, são apresentados o momento e a cortante para cada nó até o nó de simetria (nó 39) e os valores resultantes de cortante e momento para este lado;
- b-) Na borda livre, são apresentadas as translações para cada nó até o nó de simetria (nó 17);
- c-) No centro da placa, são apresentados os momentos M_{xx} e M_{yy} e a translação w.

Para este exemplo, foram apresentadas as tabelas para a condição *hard* pois os resultados para esta condição de contorno foram mais sensíveis à variação do parâmetro do que a condição *soft*. Pode-se notar que para a constante de WEEËN os valores das resultantes de cortante e momento obtidos para a borda 4 se aproximam mais do valor esperado, ou seja, 1600 N e 1600 N.m.

Exemplo 3: Placa Engastada em Dois Lados Opostos e em Balanço nos Outros Dois



$\nu=0,30$

FIGURA 8.4 Figura do Exemplo 3.

Tabela 8.10: Resultados Obtidos nos Pontos do Lado 4, no Lado 1 e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição SOFT ($h_1=0,2$ m)

Esforços	Danson	Weeën	Benzine	$\lambda=1$
w (centro)	-0,12471422E-06	-0,12470161E-06	-0,12471422E-06	-0,12468897E-06
M _{xx} (centro)	-65,068709	-65,063247	-65,068709	-65,055413
M _{yy} (centro)	-16,896948	-16,903438	-16,896948	-16,897891
w ₁ (canto)	0,65832759E-08	0,65737747E-08	0,65832759E-08	0,65586288E-08
w ₂	-0,18538467E-07	-0,18538247E-07	-0,18538467E-07	-0,18557686E-07
w ₃	-0,59491959E-07	-0,59476427E-07	-0,59491959E-07	-0,59494816E-07
w ₄	-0,10207860E-06	-0,10204889E-06	-0,10207860E-06	-0,10206519E-06
w ₅	-0,13276592E-06	-0,13272672E-06	-0,13276592E-06	-0,13274146E-06
w ₆ (centro)	-0,14384903E-06	-0,14380652E-06	-0,14384903E-06	-0,14382070E-06
Q ₃₄ (canto)	152,58951	153,46525	152,58951	155,96606
Q ₃₅	522,18159	521,73302	522,18159	521,20080
Q ₃₆	419,83656	419,65972	419,83656	419,44942
Q ₃₇	398,95293	398,83647	398,95293	398,67968
Q ₃₈	389,48899	389,41288	389,48899	389,31552
Q ₃₉ (centro)	387,65602	387,58902	387,65602	387,50432
M ₃₄ (canto)	119,50569	119,40599	119,50569	119,34323
M ₃₅	144,04435	143,97040	144,04435	143,89851
M ₃₆	136,11374	136,07456	136,11374	136,01935
M ₃₇	134,11282	134,08623	134,11282	134,03253
M ₃₈	131,59825	131,58154	131,59825	131,53492
M ₃₉ (centro)	131,31901	131,30417	131,31901	131,25793
Q _{m lado 4}	800,23	800,07	800,23	800,15
M _{m lado 4}	268,51	268,43	268,51	268,31

Tabela 8.11: Resultados Obtidos nos Pontos do Lado 4, no Lado 1 e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição SOFT ($h_2 = 0,34$ m)

Esforços	Danson	Weeën	Benzine	$\lambda=1$
w (centro)	-0,31353693E-07	-0,31353312E-07	-0,31353693E-07	-0,31354200E-07
M_{xx} (centro)	-65,256629	-65,255798	-65,256629	-65,257409
M_{yy} (centro)	-16,477559	-16,477284	-16,477559	-16,475387
w_1 (canto)	0,14710249E-08	0,14706892E-08	0,14710249E-08	0,14712164E-08
w_2	-0,57332311E-08	-0,57335534E-08	-0,57332311E-08	-0,57336802E-08
w_3	-0,15953947E-07	-0,15954071E-07	-0,15953947E-07	-0,15955216E-07
w_4	-0,25982249E-07	-0,25982164E-07	-0,25982249E-07	-0,25984237E-07
w_5	-0,33046481E-07	-0,33046251E-07	-0,33046481E-07	-0,33048946E-07
w_6 (centro)	-0,35576526E-07	-0,35576243E-07	-0,35576526E-07	-0,35579157E-07
Q_{34} (canto)	246,33247	246,43627	246,33247	246,35762
Q_{35}	460,08640	460,06543	460,08640	460,13039
Q_{36}	420,27187	420,25539	420,27187	420,29890
Q_{37}	404,82212	404,80735	404,82212	404,84028
Q_{38}	395,21917	395,20741	395,21917	395,23263
Q_{39} (centro)	392,88546	392,87451	392,88546	392,89755
M_{34} (canto)	120,26329	120,25558	120,26329	120,27940
M_{35}	139,79418	139,78799	139,79418	139,80509
M_{36}	136,39323	136,38826	136,39323	136,39919
M_{37}	134,72882	134,72435	134,72882	134,73200
M_{38}	132,83504	132,83116	132,83504	132,83651
M_{39} (centro)	132,49415	132,49038	132,49415	132,49514
Q_m lado 4	800,003	799,996	800,003	800,052
M_m lado 4	268,052	268,042	268,052	268,064

Tabela 8.12: Resultados Obtidos nos Pontos do Lado 4, no Lado 1 e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição SOFT ($h_3 = 0,06$ m)

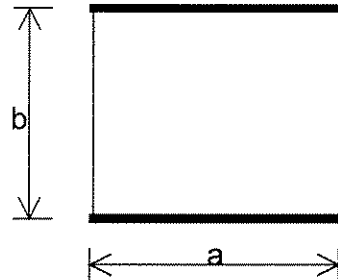
Esforços	Danson	Weeën	Benzine	$\lambda=1$
w (centro)	-0,41170628E-05	-0,41128620E-05	-0,41163332E-05	-0,41105300E-05
M _{xx} (centro)	-65,542412	-65,497178	-65,540738	-65,450360
M _{yy} (centro)	-17,948519	-18,039623	-17,984816	-18,018307
w ₁ (canto)	0,25284118E-06	0,25025678E-06	0,25276900E-06	0,24749948E-06
w ₂	-0,55578084E-06	-0,55355801E-06	-0,55415058E-06	-0,55669274E-06
w ₃	-0,18260268E-05	-0,18177615E-05	-0,18223456E-05	-0,18210581E-05
w ₄	-0,32102769E-05	-0,31961184E-05	-0,32046978E-05	-0,31992139E-05
w ₅	-0,42433271E-05	-0,42251518E-05	-0,42364573E-05	-0,42281000E-05
w ₆ (centro)	-0,46201602E-05	-0,46005697E-05	-0,46128380E-05	-0,46034572E-05
Q ₃₄ (canto)	35,928178	43,197594	30,062717	72,261198
Q ₃₅	648,20394	640,84656	648,96890	629,58953
Q ₃₆	349,08181	348,69095	348,89967	348,87515
Q ₃₇	406,76681	405,69676	406,76492	404,45683
Q ₃₈	387,56698	387,04448	387,49054	386,70421
Q ₃₉ (centro)	394,59892	393,98827	394,54338	393,47191
M ₃₄ (canto)	115,90053	114,52798	115,62380	113,90067
M ₃₅	161,37514	160,43497	161,34103	159,45947
M ₃₆	123,41794	123,34363	123,41457	123,26889
M ₃₇	135,47126	135,30731	135,53815	134,88145
M ₃₈	130,82007	130,80255	130,89033	130,53544
M ₃₉ (centro)	131,83095	131,81058	131,91079	131,50653
Q _m lado 4	802,753	800,349	801,771	800,997
M _m lado 4	269,980	269,223	269,980	268,339

Apresentaram-se os seguintes resultados:

- a-) Para o lado 4, são apresentados o momento e a cortante para cada nó até o nó de simetria (nó 39) e os valores resultantes de momento e cortante para este lado;
- b-) Para o lado 1, são apresentadas as translações para cada nó até o nó de simetria (nó 17);
- c-) No centro da placa, são apresentados os momentos M_{xx} e M_{yy} e a translação w.

Para este exemplo, foram tabelados os esforços e deslocamentos para a condição *soft* por ter apresentado maior sensibilidade com a variação do parâmetro do que em condição *hard*. Pôde-se notar que para a constante de WEEËN o valor resultante da cortante obtida para a borda 4 se aproxima mais do valor esperado, ou seja, 800 N. Ainda, as resultantes tornaram-se mais uniformes com o aumento da espessura da placa.

Exemplo 4: Placa Engastada em Dois Lados Opostos, Balanço em Um dos Lados e Apoio no Outro Lado.



$\nu=0,15$

FIGURA 8.5 Figura do Exemplo 4.

Tabela 8.13: Resultados Obtidos nos Pontos do Apoio, na Borda Livre e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição HARD ($h_1=0,2$ m)

Esforços	Danson	Weeën	Benzine	$\lambda=1$
w (centro)	-0,11553233E-06	-0,11552887E-06	-0,11553284E-06	-0,11551920E-06
M_{xx} (centro)	-21,061367	-21,064923	-21,062696	-21,069017
M_{yy} (centro)	-57,650274	-57,648515	-57,650728	-57,642833
w_{12} (canto)	0,47853214E-08	0,47812269E-08	0,47845274E-08	0,47828482E-08
w_{13}	-0,20747156E-07	-0,20744055E-07	-0,20744654E-07	-0,20731518E-07
w_{14}	-0,61744368E-07	-0,61727873E-07	-0,61737107E-07	-0,61705711E-07
w_{15}	-0,10399166E-06	-0,10396276E-06	-0,10398009E-06	-0,10393289E-06
w_{16}	-0,13434381E-06	-0,13430653E-06	-0,13432936E-06	-0,13427175E-06
w_{17} (centro)	-0,14528664E-06	-0,14524644E-06	-0,14527119E-06	-0,13427175E-06
Q_{34} (canto)	-67,461304	-67,610355	-67,715465	-65,934882
Q_{35}	-10,996093	-11,068854	-11,099651	-10,414735
Q_{36}	91,616557	91,523251	91,572360	91,633712
Q_{37}	150,57760	150,49866	150,53902	150,59597
Q_{38}	183,84276	183,76650	183,81132	183,81198
Q_{39} (centro)	194,20416	194,12973	194,17300	194,17741
Q_m lado 4	191,36	191,19	191,22	191,90

Tabela 8.14: Resultados Obtidos nos Pontos do Apoio, na Borda Livre e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição HARD ($h_2 = 0,34$ m)

Esforços	Danson	Weeën	Benzine	$\lambda=1$
w (centro)	-0,28187184E-07	-0,28186889E-07	-0,28187070E-07	-0,28186859E-07
M _{xx} (centro)	-22,344383	-22,345136	-22,344873	-22,344153
M _{yy} (centro)	-57,397774	-57,397067	-57,397499	-57,396992
w ₁₂ (canto)	0,96226325E-09	0,96214219E-09	0,96222749E-09	0,96200373E-09
w ₁₃	-0,62261660E-08	-0,62259018E-08	-0,62259437E-08	-0,62266182E-08
w ₁₄	-0,16266600E-07	-0,16265753E-07	-0,16266042E-07	-0,16266953E-07
w ₁₅	-0,26081683E-07	-0,26080306E-07	-0,26080830E-07	-0,26081874E-07
w ₁₆	-0,32987009E-07	-0,32985275E-07	-0,32985959E-07	-0,32987073E-07
w ₁₇ (centro)	-0,35457836E-07	-0,35455978E-07	-0,35456718E-07	-0,35457855E-07
Q ₃₄ (canto)	-23,304860	-23,281174	-23,300031	-23,276586
Q ₃₅	19,891099	19,903348	19,894000	19,904567
Q ₃₆	98,477355	98,473384	98,473877	98,476834
Q ₃₇	154,05615	154,04946	154,05180	154,05315
Q ₃₈	185,98660	185,97746	185,98136	185,98140
Q ₃₉ (centro)	196,14157	196,13233	196,13631	196,13627
Q_m lado 4	217,93	217,93	217,93	217,94

Tabela 8.15: Resultados Obtidos nos Pontos do Apoio, na Borda Livre e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição HARD ($h_3 = 0,06$ m)

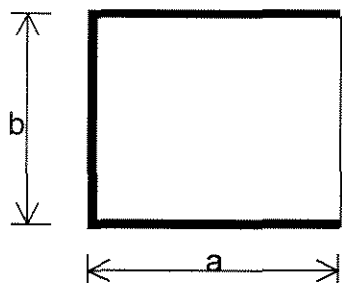
Esforços	Danson	Weeën	Benzine	$\lambda=1$
w (centro)	-0,38730329E-05	-0,38719949E-05	-0,38731375E-05	-0,38696954E-05
M _{xx} (centro)	-20,544039	-20,569463	-20,550976	-20,601347
M _{yy} (centro)	-58,007496	-57,993333	-58,011419	-57,952870
w ₁₃ (canto)	0,18608474E-06	0,18534562E-06	0,18590869E-06	0,18522048E-06
w ₁₄	-0,65169908E-06	-0,65063726E-06	-0,65116532E-06	-0,64770495E-06
w ₁₅	-0,19600619E-05	-0,19557385E-05	-0,19584907E-05	-0,19501609E-05
w ₁₆	-0,33511688E-05	-0,33435899E-05	-0,33486000E-05	-0,33358469E-05
w ₁₇	-0,43805662E-05	-0,43707279E-05	-0,43773125E-05	-0,43615812E-05
w ₁₈ (centro)	-0,47551710E-05	-0,47445361E-05	-0,47516767E-05	-0,47349043E-05
Q ₃₄ (canto)	-205,28340	-207,86631	-210,73593	-172,09070
Q ₃₅	-18,571709	-19,212457	-20,315764	-6,6404800
Q ₃₆	88,223063	87,577254	87,677337	90,541455
Q ₃₇	147,49559	146,80265	147,24485	147,22587
Q ₃₈	182,45643	181,81622	182,20299	182,36083
Q ₃₉ (centro)	193,39203	192,77570	193,13372	193,41242
Q_m lado 4	157,45	155,77	155,19	169,65

Apresentaram-se os seguintes resultados:

- a-) Para o lado 4, é apresentada a cortante para cada nó até o nó de simetria (nó 39) e o valor resultante de cortante para este lado;
- b-) Para o lado 2, são apresentadas as translações para cada nó até o nó de simetria (nó 17);
- c-) No centro da placa, são apresentados os momentos M_{xx} e M_{yy} e a translação w .

Para este exemplo, foram tabelados os esforços e deslocamentos para a condição *hard* por ter apresentado maior sensibilidade com a variação do parâmetro do que em condição *soft*. Neste exemplo, é interessante notar que o valor da cortante resultante no lado 4 da placa teve variação em seu módulo proporcional ao crescimento da espessura. Acredita-se que o aumento da rigidez proporcionado pela maior espessura reduziu a pressão (cortante) no lado engastado e sobrecarregou o lado apoiado. Esta redistribuição de esforços é consistente com o comportamento esperado.

Exemplo 5: Placa Engastada em Três Lados e em Balanço no Outro.



$\nu=0,15$

FIGURA 8.6 Figura do Exemplo 5.

Tabela 8.16: Resultados Obtidos nos Pontos do Lado 4, na Borda Livre e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição HARD ($h_1=0,2$ m)

Esforços	Danson	Weeën	Benzine	$\lambda=1$
w (centro)	-0,98035852E-07	-0,98028517E-07	-0,98032785E-07	-0,98039472E-07
M_{xx} (centro)	-20,397204	-20,400053	-20,398168	-20,405616
M_{yy} (centro)	-48,651207	-48,647493	-48,649873	-48,651886
w_{12} (canto)	0,47366836E-08	0,47325291E-08	0,47357046E-08	0,47354488E-08
w_{13}	-0,20979267E-07	-0,20977720E-07	-0,20977665E-07	-0,20961481E-07
w_{14}	-0,61746126E-07	-0,61732673E-07	-0,61740245E-07	-0,61706279E-07
w_{15}	-0,10346395E-06	-0,10343928E-06	-0,10345407E-06	-0,10340535E-06
w_{16}	-0,13331649E-06	-0,13328419E-06	-0,13330390E-06	-0,13324571E-06
w_{17} (centro)	-0,14405900E-06	-0,14402402E-06	-0,14404545E-06	-0,14398401E-06
Q_{34} (canto)	-13,156313	-13,283750	-13,236156	-12,996464
Q_{35}	61,268622	61,239043	61,247146	61,301152
Q_{36}	176,28360	176,23262	176,26360	176,24051
Q_{37}	269,00723	268,95962	268,98946	268,96521
Q_{38}	325,79658	325,74610	325,78023	325,73690
Q_{39} (centro)	344,59938	344,54895	344,58287	344,54284
M_{34} (canto)	1,1864094	1,1952649	1,2263916	0,85203954
M_{35}	18,652902	18,666711	18,672398	18,520966
M_{36}	43,154716	43,171640	43,169305	43,082464
M_{37}	66,753428	66,770121	66,766615	66,696521
M_{38}	82,713111	82,729533	82,725649	82,663125
M_{39} (centro)	88,307284	88,323549	88,319677	88,258740
Q_m lado 4	399,23	399,12	399,18	399,21
M_m lado 4	102,41	102,44	102,44	102,21

Tabela 8.17: Resultados Obtidos nos Pontos do Lado 4, na Borda Livre e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição HARD ($h_2 = 0,34$ m)

Esforços	Danson	Weeën	Benzine	$\lambda=1$
w (centro)	-0,24167291E-07	-0,24167117E-07	-0,24167181E-07	-0,24167379E-07
M_{xx} (centro)	-20,090696	-20,091078	-20,090997	-20,090820
M_{yy} (centro)	-48,838765	-48,838289	-48,838473	-48,838882
w_{12} (canto)	0,94064605E-09	0,94047287E-09	0,94055376E-09	0,94062845E-09
w_{13}	-0,62943474E-08	-0,62943927E-08	-0,62943164E-08	-0,62943519E-08
w_{14}	-0,16261873E-07	-0,16261564E-07	-0,16261590E-07	-0,16261853E-07
w_{15}	-0,25931399E-07	-0,25930742E-07	-0,25930877E-07	-0,25931361E-07
w_{16}	-0,32706138E-07	-0,32705239E-07	-0,32705451E-07	-0,32706089E-07
w_{17} (centro)	-0,35125538E-07	-0,35124554E-07	-0,35124794E-07	-0,35125486E-07
Q_{34} (canto)	0,68382973	0,68558101	0,68234466	0,70716046
Q_{35}	86,109330	86,104953	86,106191	86,111210
Q_{36}	181,16556	181,15869	181,16096	181,16671
Q_{37}	258,81407	258,80721	258,80958	258,81457
Q_{38}	307,49691	307,48930	307,49202	307,49698
Q_{39} (centro)	323,92654	323,91897	323,92168	323,92662
M_{34} (canto)	4,9686152	4,9576718	4,9629018	4,9557099
M_{35}	25,128558	25,123464	25,125962	25,121597
M_{36}	46,597236	46,594806	46,596128	46,592413
M_{37}	66,689427	66,687878	66,688814	66,685442
M_{38}	80,409236	80,408150	80,408885	80,405694
M_{39} (centro)	85,255299	85,254304	85,255000	85,251859
Q_m lado 4	398,356	398,345	398,348	398,362
M_m lado 4	105,575	105,568	105,571	105,563

Tabela 8.18: Resultados Obtidos nos Pontos do Lado 4, na Borda Livre e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição HARD ($h_3 = 0,06$ m)

Esforços	Danson	Weeën	Benzine	$\lambda=1$
w (centro)	-0,32630406E-05	-0,32607017E-05	-0,32621744E-05	-0,32636465E-05
M _{xx} (centro)	-20,698492	-20,723082	-20,705181	-20,755201
M _{yy} (centro)	-48,712013	-48,678621	-48,701623	-48,714807
w ₁₂ (canto)	0,18521086E-06	0,18448558E-06	0,18503678E-06	0,18437569E-06
w ₁₃	-0,65436400E-06	-0,65338518E-06	-0,65387295E-06	-0,65030471E-06
w ₁₄	-0,19536550E-05	-0,19495084E-05	-0,19521548E-05	-0,19437809E-05
w ₁₅	-0,33274678E-05	-0,33201326E-05	-0,33249803E-05	-0,33123295E-05
w ₁₆	-0,43403729E-05	-0,43308130E-05	-0,43371992E-05	-0,43217109E-05
w ₁₇ (centro)	-0,47083307E-05	-0,46979845E-05	-0,47049146E-05	-0,46884418E-05
Q ₃₄ (canto)	-36,094079	-34,429631	-31,955121	-72,114833
Q ₃₅	25,166036	25,399246	23,782621	36,517881
Q ₃₆	176,41727	176,09239	176,00920	178,67681
Q ₃₇	285,94340	285,51062	285,83931	285,33995
Q ₃₈	347,19779	346,76370	347,09464	346,58638
Q ₃₉ (centro)	367,00012	366,56937	366,87167	366,62012
M ₃₄ (canto)	-2,9724854	-2,7554603	-2,3869877	-7,3566847
M ₃₅	12,447237	12,636706	12,569926	11,922056
M ₃₆	41,253264	41,416886	41,381013	40,675751
M ₃₇	67,675899	67,832302	67,784507	67,264757
M ₃₈	85,103823	85,253684	85,211183	84,699722
M ₃₉ (centro)	91,138616	91,286536	91,244312	90,747414
Q _m lado 4	400,069	399,933	400,072	397,745
M _m lado 4	100,225	100,562	100,550	98,504

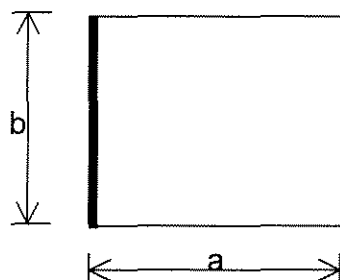
Apresentaram-se os seguintes resultados:

- a-) Para o lado 4, são apresentados o momento e a cortante para cada nó até o nó de simetria (nó 39) e os valores resultantes de momento e cortante para este lado;
- b-) Para o lado 2, são apresentadas as translações para cada nó até o nó de simetria (nó 17);
- c-) No centro da placa, são apresentados os momentos M_{xx} e M_{yy} e a translação w.

Para este exemplo, foram tabelados os esforços e deslocamentos para a condição *hard* por ter apresentado maior sensibilidade com a variação do parâmetro do que em condição *soft*. Ao contrário do exemplo anterior, com o aumento da espessura não houve alteração significativa nas resultantes dos esforços. A existência de engaste em três lados e uma borda livre inibiu o efeito da espessura pois, deslocamento e

rotação normal são nulos nos lados engastados. No exemplo anterior, a existência de borda apoiada permitiu que a rotação normal fosse dependente da espessura da placa.

Exemplo 6: Placa Apoiada em Dois Lados Opostos, em Balanço em um dos Lados e Engastada no Outro.



$\nu=0,15$

FIGURA 8.7 Figura do Exemplo 6.

Tabela 8.19: Resultados Obtidos nos Pontos do Engaste, na Borda Livre e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição HARD ($h_1=0,2$ m)

Esforços	Danson	Weeën	Benzine	$\lambda=1$
w (centro)	-0,26849531E-06	-0,26845008E-06	-0,26849180E-06	-0,26845228E-06
M_{xx} (centro)	-34,890892	-34,894968	-34,892542	-34,904198
M_{yy} (centro)	-88,129638	-88,115255	-88,127670	-88,119261
w_{12} (canto)	-0,10861875E-08	-0,10874183E-08	-0,10867468E-08	-0,10805903E-08
w_{13}	-0,15504932E-06	-0,15500653E-06	-0,15504561E-06	-0,15496130E-06
w_{14}	-0,29218017E-06	-0,29209977E-06	-0,29217205E-06	-0,29202599E-06
w_{15}	-0,39858449E-06	-0,39847710E-06	-0,39857287E-06	-0,39838269E-06
w_{16}	-0,46573836E-06	-0,46561464E-06	-0,46572450E-06	-0,46550784E-06
w_{17} (centro)	-0,48867171E-06	-0,48854254E-06	-0,48865707E-06	-0,48843158E-06
Q_{34} (canto)	41,518338	41,428323	41,571355	40,801623
Q_{35}	250,91775	250,90398	250,96306	250,56519
Q_{36}	391,46354	391,40907	391,48002	391,22602
Q_{37}	477,25155	477,18269	477,24761	477,13171
Q_{38}	524,42695	524,35189	524,42162	524,29589
Q_{39} (centro)	539,72484	539,64678	539,71636	539,60959
M_{34} (canto)	2,0753268	2,1353380	2,1426416	1,6598857
M_{35}	64,475827	64,511931	64,517358	64,240940
M_{36}	116,35132	116,37514	116,37909	116,21166
M_{37}	153,29287	153,30978	153,31635	153,17672
M_{38}	175,53672	175,54946	175,55767	175,43325
M_{39} (centro)	182,92915	182,94061	182,94951	182,82803
Q_m lado 4	773,873	773,754	773,903	773,370
M_m lado 4	240,864	240,914	240,927	240,523

Tabela 8.20: Resultados Obtidos nos Pontos do Engaste, na Borda Livre e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição HARD ($h_2=0,34$ m)

Esforços	Danson	Weeën	Benzine	$\lambda=1$
w (centro)	-0,59893981E-07	-0,59891396E-07	-0,59892547E-07	-0,59895949E-07
M _{xx} (centro)	-33,454338	-33,453590	-33,454014	-33,457750
M _{yy} (centro)	-91,788163	-91,784434	-91,786072	-91,791425
w ₁₂ (canto)	-0,28219665E-09	-0,28241145E-09	-0,28231329E-09	-0,28157897E-0
w ₁₃	-0,33877192E-07	-0,33875859E-07	-0,33876411E-07	-0,33875669E-07
w ₁₄	-0,63628572E-07	-0,63625856E-07	-0,63626987E-07	-0,63626547E-07
w ₁₅	-0,86606058E-07	-0,86602327E-07	-0,86603881E-07	-0,86603723E-07
w ₁₆	-0,10107982E-06	-0,10107548E-06	-0,10107729E-06	-0,10107732E-06
w ₁₇ (centro)	-0,10601712E-06	-0,10601257E-06	-0,10601446E-06	-0,10601455E-06
Q ₃₄ (canto)	31,612160	31,582154	31,593308	31,685436
Q ₃₅	229,96872	229,95906	229,96378	229,93749
Q ₃₆	363,21317	363,19829	363,20501	363,19984
Q ₃₇	447,50673	447,49085	447,49785	447,50443
Q ₃₈	495,03828	495,02117	495,02863	495,03974
Q ₃₉ (centro)	510,37778	510,36037	510,36792	510,38161
M ₃₄ (canto)	0,94024801	0,94855313	0,94576475	0,87715164
M ₃₅	59,466325	59,470740	59,469507	59,422175
M ₃₆	108,17762	108,18012	108,17963	108,14609
M ₃₇	143,65452	143,65553	143,65565	143,62904
M ₃₈	165,19334	165,19348	165,19395	165,17171
M ₃₉ (centro)	172,39300	172,39285	172,39344	172,37236
Q_m lado 4	722,689	722,656	722,670	722,686
M_m lado 4	225,263	225,268	225,267	225,198

Tabela 8.21: Resultados Obtidos nos Pontos do Engaste, na Borda Livre e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição HARD ($h_3=0,06$ m)

Esforços	Danson	Weeën	Benzine	$\lambda=1$
w (centro)	-0,94866484E-05	-0,94822075E-05	-0,94870623E-05	-0,94834573E-05
M_{xx} (centro)	-36,183224	-36,195449	-36,185448	-36,222437
M_{yy} (centro)	-86,409880	-86,370245	-86,410083	-86,390217
w_{12} (canto)	-0,52851232E-07	-0,52613552E-07	-0,52882004E-07	-0,52649946E-07
w_{13}	-0,54765820E-05	-0,54721368E-05	-0,54771142E-05	-0,54687614E-05
w_{14}	-0,10314324E-04	-0,10306396E-04	-0,10315204E-04	-0,10300183E-04
w_{15}	-0,14101887E-04	-0,14091478E-04	-0,14102986E-04	-0,14083057E-04
w_{16}	-0,16495909E-04	-0,16484027E-04	-0,16497125E-04	-0,16474223E-04
w_{17} (centro)	-0,17314326E-04	-0,17301955E-04	-0,17315579E-04	-0,17291681E-04
Q_{34} (canto)	64,159055	71,261755	71,785833	25,515737
Q_{35}	288,16741	287,07915	287,13667	293,67624
Q_{36}	418,52787	418,10436	418,26865	419,83753
Q_{37}	502,57307	502,41340	502,62170	502,17271
Q_{38}	549,65308	549,47211	549,68641	549,28335
Q_{39} (centro)	564,45919	564,24728	564,46324	564,22915
M_{34} (canto)	3,2154579	3,7917516	3,7297265	0,67502343
M_{35}	68,859220	68,996420	68,972846	68,406446
M_{36}	122,16660	122,27343	122,26481	121,78530
M_{37}	159,45768	159,53245	159,53685	159,16638
M_{38}	181,86313	181,92735	181,94005	181,57691
M_{39} (centro)	189,30097	189,36076	189,37628	189,02076
Q_m lado 4	829,307	829,944	830,350	823,945
M_m lado 4	251,441	251,722	251,707	250,312

Apresentaram-se os seguintes resultados:

- a-) Para o lado 4, são apresentados o momento e a cortante para cada nó até o nó de simetria (nó 39) e os valores resultantes de momento e cortante para este lado;
- b-) Para o lado 2, são apresentadas as translações para cada nó até o nó de simetria (nó 17);
- c-) No centro da placa, são apresentados os momentos M_{xx} e M_{yy} e a translação w.

Neste exemplo, foram tabelados os esforços e deslocamentos para a condição *hard* por ter apresentado maior sensibilidade com a variação do parâmetro do que em condição *soft*. Conforme se diminui a espessura, sobrecarregou-se o engaste a medida que aliviou-se o apoio, confirmando o que foi visto no exemplo 4.

8.5.2 EXEMPLOS DE PLACAS RETANGULARES

Para os mesmos dados das placas quadradas, porém um dos lados da placa de comprimento duas vezes maior do que o outro, ou seja, o lado **a** com 1 metro de comprimento e o lado **b** com 2 metros de comprimento, obteve-se os seguintes casos críticos. Vale notar que para esta placa, manteve-se os comprimentos dos elementos de 0,2 metro e, portanto, o número total de pontos de contorno utilizado para esta geometria foi 34. O número de elementos foi 30. A figura 8.8 apresenta os nós de cantos e os lados para a discretização deste exemplo.

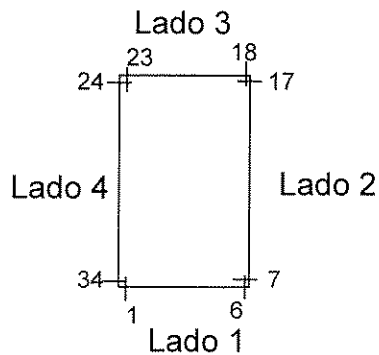
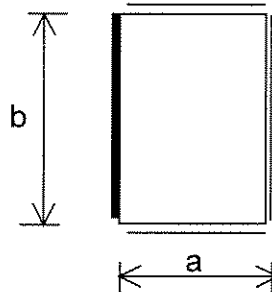


FIGURA 8.8 Discretização da Placa Retangular.

Os exemplos apresentados a seguir têm coeficiente de *Poisson* igual a zero. É interessante dizer que para estes mesmos exemplos, analisados com coeficiente de *Poisson* igual a 0,30, obteve-se melhores resultados quando se variou a constante para as placas mais finas.

Exemplo 7: Placa Engastada em Um dos Lados de Maior Comprimento e em Balanço nos Outros Três



$v=0,0$

FIGURA 8.9 Figura do Exemplo 7.

Tabela 8.22: Resultados Obtidos nos Pontos do Engaste, na Borda Livre Oposta e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição HARD ($h_1=0,2$ m)

Esforços	Danson	Weeën	Benzine	$\lambda=1$
w (centro)	-0,13862644E-06	-0,13849153E-06	-0,13855248E-06	-0,13837852E-06
M_{xx} (centro)	50,180905	50,066922	50,108683	49,961277
M_{yy} (centro)	0,77659379E-01	0,60529114E-01	0,62562625E-01	0,44152626E-01
w_7 (canto)	-0,37872557E-06	-0,37806956E-06	-0,37826511E-06	-0,37747028E-06
w_8	-0,37864813E-06	-0,37805793E-06	-0,37825839E-06	-0,37752494E-06
w_9	-0,37853247E-06	-0,37799390E-06	-0,37819571E-06	-0,37751307E-06
w_{10}	-0,37842952E-06	-0,37792734E-06	-0,37812832E-06	-0,37748354E-06
w_{11}	-0,37836312E-06	-0,37788266E-06	-0,37808249E-06	-0,37746111E-06
w_{12} (centro)	-0,37834070E-06	-0,37786745E-06	-0,37806680E-06	-0,37745333E-06
Q_{24} (canto)	400,83189	400,87716	400,57250	402,34854
Q_{25}	402,67917	402,32613	402,54492	401,94030
Q_{26}	400,49273	400,33335	400,48613	400,21024
Q_{27}	397,66926	397,57085	397,69410	397,50758
Q_{28}	399,92194	399,83885	399,95115	399,79350
Q_{29} (centro)	399,33524	399,26000	399,36632	399,22555
M_{24} (canto)	196,53838	196,13019	196,30284	195,57678
M_{25}	202,55742	202,28158	202,38721	201,96525
M_{26}	199,96383	199,74269	199,83425	199,48810
M_{27}	200,29795	200,10454	200,18888	199,88298
M_{28}	200,15447	199,97551	200,05586	199,77076
M_{29} (centro)	200,18532	200,01050	200,08973	199,81037
Q_m lado 4	800,339	800,055	800,258	800,095
M_m lado 4	400,534	400,070	400,265	399,520

Tabela 8.23: Resultados Obtidos nos Pontos do Engaste, na Borda Livre Oposta e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição HARD ($h_2=0,34$ m)

Esforços	Danson	Weeën	Benzine	$\lambda=1$
w (centro)	-0,31588787E-07	-0,31595185E-07	-0,31592240E-07	-0,31612929E-07
M _{xx} (centro)	49,963555	50,002152	49,987765	50,072950
M _{yy} (centro)	0,76028235E-01	0,88859872E-01	0,84816284E-01	0,99758701E-01
w ₇ (canto)	-0,81445002E-07	-0,81501867E-07	-0,81481737E-07	-0,81585468E-07
w ₈	-0,81432867E-07	-0,81478012E-07	-0,81461351E-07	-0,81553669E-07
w ₉	-0,81418475E-07	-0,81455068E-07	-0,81440958E-07	-0,81524587E-07
w ₁₀	-0,81406572E-07	-0,81437462E-07	-0,81425067E-07	-0,81502548E-07
w ₁₁	-0,81399240E-07	-0,81426843E-07	-0,81415443E-07	-0,81489235E-07
w ₁₂ (centro)	-0,81396817E-07	-0,81423347E-07	-0,81412273E-07	-0,81484835E-07
Q ₂₄ (canto)	388,36082	388,34332	388,29223	387,93261
Q ₂₅	407,18884	407,22672	407,20176	407,41245
Q ₂₆	399,81005	399,77368	399,77234	399,88038
Q ₂₇	399,55474	399,50240	399,50830	399,59004
Q ₂₈	399,58950	399,52981	399,53842	399,59891
Q ₂₉ (centro)	399,49187	399,43139	399,44053	399,49649
M ₂₄ (canto)	198,26321	198,38726	198,34842	198,68434
M ₂₅	200,83145	200,92688	200,89414	201,10704
M ₂₆	199,89718	199,97342	199,94715	200,13446
M ₂₇	199,91329	199,97562	199,95366	200,11805
M ₂₈	199,82132	199,87630	199,85668	200,00927
M ₂₉ (centro)	199,83272	199,88540	199,86650	200,01526
Q_m lado 4	800,028	799,968	799,955	800,079
M_m lado 4	399,804	399,955	399,904	400,287

Tabela 8.24: Resultados Obtidos nos Pontos do Engaste, na Borda Livre Oposta e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição HARD ($h_3=0,06$ m)

Esforços	Danson	Weeën	Benzine	$\lambda=1$
w (centro)	-0,49399132E-05	-0,48525316E-05	-0,48983709E-05	-0,47626845E-05
M_{xx} (centro)	52,836929	50,705071	51,616617	48,430046
M_{yy} (centro)	0,34716948E-01	-0,25218886	-0,19374969	-0,53006217
w_7 (canto)	-0,14019716E-04	-0,13577800E-04	-0,13737997E-04	-0,13130360E-04
w_8	-0,14033774E-04	-0,13636620E-04	-0,13796921E-04	-0,13228630E-04
w_9	-0,14025549E-04	-0,13665045E-04	-0,13823663E-04	-0,13290677E-04
w_{10}	-0,14010379E-04	-0,13676071E-04	-0,13832329E-04	-0,13326639E-04
w_{11}	-0,13998577E-04	-0,13679739E-04	-0,13834136E-04	-0,13345414E-04
w_{12} (centro)	-0,13994356E-04	-0,13680626E-04	-0,13834336E-04	-0,13351353E-04
Q_{24} (canto)	1337,9543	1283,0500	1308,9591	1211,6927
Q_{25}	-19,178576	-2,4412675	-11,520475	32,814987
Q_{26}	338,73872	340,59395	341,57358	343,64677
Q_{27}	419,30978	417,98120	420,55743	415,53220
Q_{28}	405,35900	404,60334	406,59416	403,41187
Q_{29} (centro)	399,94782	399,49837	401,21690	398,99464
M_{24} (canto)	214,42048	205,48955	209,79830	190,94869
M_{25}	204,61710	200,11787	202,10479	194,53414
M_{26}	200,81922	197,15818	198,96903	192,26806
M_{27}	203,63811	200,38925	202,05750	196,07549
M_{28}	204,26881	201,19744	202,81299	197,06762
M_{29} (centro)	204,45501	201,44484	203,03631	197,39540
Q_m lado 4	805,272	800,805	804,917	800,300
M_m lado 4	409,112	400,932	404,945	389,647

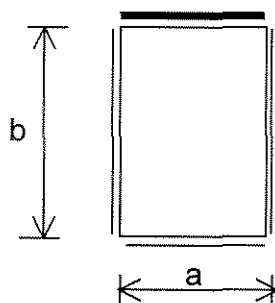
Apresentaram-se os seguintes resultados:

- a-) Para o lado 4, são apresentados o momento e a cortante para cada nó até o nó de simetria (nó 29) e os valores resultantes de momento e cortante para este lado;
- b-) Para o lado 2, são apresentadas as translações para cada nó até o nó de simetria (nó 12);
- c-) No centro da placa, são apresentados os momentos M_{xx} e M_{yy} e a translação w.

Neste exemplo, foram tabelados os esforços e deslocamentos para a condição *hard* por ter apresentado maior sensibilidade com a variação do parâmetro do que em condição *soft*. Percebe-se nas tabelas que para a placa espessa (espessuras de 10% ou 17% do lado), obtém-se uma distribuição regular de cortante nos pontos da borda engastada em torno de 400 N/m e para os momentos o comportamento é semelhante com valores situando em torno de 200 N.m/m. Já para a placa fina (espessura 3% do lado), essa distribuição da cortante é irregular, apresentado o valor de 400 N/m

somente nos pontos mais próximos do ponto médio da borda engastada. Para a distribuição dos momentos, essa irregularidade não acontece de forma tão acentuada como para a cortante.

Exemplo 8: Placa Engastada em Um dos Lados de Menor Comprimento e em Balanço nos Outros Três



$v=0,0$

FIGURA 8.10 Figura do Exemplo 8.

Tabela 8.25: Resultados Obtidos nos Pontos do Engaste, na Borda Livre Oposta e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição HARD ($h_1=0,2$ m)

Esforços	Danson	Weeën	Benzine	$\lambda=1$
w (centro)	-0,21164066E-05	-0,21125963E-05	-0,21135787E-05	-0,21255001E-05
M_{xx} (centro)	0,10382706	0,14203512E-01	0,34515819E-01	0,15870477
M_{yy} (centro)	200,71639	200,40089	200,39941	202,69177
w_1 (canto)	-0,59222516E-05	-0,59119705E-05	-0,59140260E-05	-0,59554127E-05
w_2	-0,59221166E-05	-0,59117849E-05	-0,59139108E-05	-0,59547362E-05
w_3 (centro)	-0,59220431E-05	-0,59116877E-05	-0,59138496E-05	-0,59543760E-05
Q_{18} (canto)	790,99592	790,37590	789,73313	785,54677
Q_{19}	814,01113	812,03255	812,95617	815,24449
Q_{20} (centro)	794,04102	792,63031	793,27351	794,68717
M_{18} (canto)	782,80459	780,54218	781,42980	786,63352
M_{19}	811,69138	809,95622	810,54201	814,93202
M_{20} (centro)	801,40106	799,80796	800,33351	804,52871
Q_m lado 3	801,420	799,940	800,439	801,082
M_m lado 3	801,798	800,014	800,636	805,111

Tabela 8.26: Resultados Obtidos nos Pontos do Engaste, na Borda Livre Oposta e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição HARD ($h_2=0,34$ m)

Esforços	Danson	Weeën	Benzine	$\lambda=1$
w (centro)	-0,44251059E-06	-0,44295954E-06	-0,44258941E-06	-0,43874350E-06
M_{xx} (centro)	0,21525367	0,25889038	0,21706646	0,17677851
M_{yy} (centro)	199,50158	199,99145	199,74800	195,66139
w_1 (canto)	-0,12177186E-05	-0,12193772E-05	-0,12182461E-05	-0,12042615E-05
w_2	-0,12177236E-05	-0,12193475E-05	-0,12182256E-05	-0,12044694E-05
w_3 (centro)	-0,12177282E-05	-0,12193343E-05	-0,12182171E-05	-0,12045780E-05
Q_{18} (canto)	742,02940	742,93838	742,19834	755,40275
Q_{19}	828,91803	828,93411	828,41680	826,45936
Q_{20} (centro)	798,59545	798,56580	798,15346	796,66074
M_{18} (canto)	789,69268	790,16161	789,43571	780,88367
M_{19}	803,14785	803,75461	803,09213	796,35727
M_{20} (centro)	799,22928	799,82464	799,18475	792,42549
Q_m lado 3	799,411	799,588	799,068	800,329
M_m lado 3	798,889	799,464	798,798	791,690

Tabela 8.27: Resultados Obtidos nos Pontos do Engaste, na Borda Livre Oposta e no Ponto Central da Placa (N,m) – Condição HARD ($h_3=0,06$ m)

Esforços	Danson	Weeën	Benzine	$\lambda=1$
w (centro)	-0,81271593E-04	-0,77882285E-04	-0,79838330E-04	-0,89642388E-04
M_{xx} (centro)	2,8579512	0,83456269	2,0267902	4,2623975
M_{yy} (centro)	213,28866	199,92136	205,14657	264,71013
w_1 (canto)	-0,23008556E-03	-0,21939499E-03	-0,22491767E-03	-0,26119130E-03
w_2	-0,23013409E-03	-0,21951309E-03	-0,22504542E-03	-0,26081693E-03
w_3 (centro)	-0,23015777E-03	-0,21957698E-03	-0,22511369E-03	-0,26060111E-03
Q_{18} (canto)	4911,2356	4646,0952	4854,8551	5403,9779
Q_{19}	-975,74909	-899,89065	-962,08008	-1254,7814
Q_{20} (centro)	586,36646	584,64778	589,30592	567,79781
M_{18} (canto)	875,01004	829,51729	865,06740	993,31142
M_{19}	847,66935	814,42659	836,14360	925,96042
M_{20} (centro)	814,12382	783,09280	803,40234	889,63963
Q_m lado 3	826,49	803,12	821,86	806,00
M_m lado 3	839,72	804,91	828,83	924,90

Apresentaram-se os seguintes resultados:

- a-) Para o lado 3, são apresentados o momento e a cortante para cada nó até o nó de simetria (nó 20) e os valores resultantes de momento e cortante para este lado;
- b-) Para o lado 1, são apresentadas as translações para cada nó até o nó de simetria (nó 3);
- c-) No centro da placa, são apresentados os momentos M_{xx} e M_{yy} e a translação w .

Pode-se perceber neste exemplo que para a placa de menor espessura, os valores resultantes de cortante e momento na borda 3 da placa tem um erro da ordem de 5% dos valores esperados, com exceção dos valores obtidos para a constante de WEEËN, que apresenta um erro na ordem de 0,6%. Por este motivo, considerando que os resultados obtidos para o parâmetro de WEEËN são mais confiáveis para este exemplo, nota-se que os valores obtidos para o momento M_{xx} no ponto médio desta mesma placa variam até 411% em relação ao valor de WEEËN. Também neste exemplo, quando se analisa a placa espessa, obtém-se uma distribuição regular de cortante em todos os pontos da borda engastada em torno de 800 N/m e para os momentos, em torno de 800 N.m/m. Já na placa fina, essa distribuição da cortante é totalmente irregular. Para a distribuição dos momentos, essa irregularidade não acontece de forma tão acentuada como para a cortante.

Capítulo 9

Conclusões

Os estudos realizados para o desenvolvimento deste trabalho podem ser divididos em três etapas: Primeiramente, a formulação da teoria clássica de placas de *Kirchhoff*. Em seguida, a teoria de *Reissner/Mindlin* aplicada ao *Método dos Elementos de Contorno*, através da formulação de *Weeën*. Finalmente, a teoria de *Reissner/Mindlin* através da formulação alternativa de *Palermo Jr.*

A teoria clássica de *Kirchhoff* pode ser considerada menos consistente e menos próxima do modelo real do que a teoria de *Reissner/Mindlin* por não considerar o efeito da deformação por cortante. Neste trabalho, procurou-se estudar com mais ênfase as teorias de *Reissner* e *Mindlin*, mostrando que elas são muito semelhantes, apesar dos caminhos de concepção terem sido diferentes.

Sabe-se que, no caso das placas de *Reissner*, seria necessário rever as hipóteses de linearidade da distribuição das tensões/deformações e considerar de maneira consistente o efeito das deformações ε_{33} , antes mesmo de se introduzir o efeito do valor médio das tensões σ_{33} linearmente ponderado ao longo da espessura da placa [96].

Para a aplicação do *Método dos Elementos de Contorno* nas resoluções das equações integrais de placas, foi necessária a obtenção das soluções fundamentais do problema. Neste sentido, utilizou-se a aplicação de uma carga pontual unitária e dois binários unitários em um domínio infinito como sendo os carregamentos necessários ao cálculo destas integrais. Cabe ressaltar que na formulação de *Weeën*, obtém-se as soluções fundamentais a partir do operador adjunto das equações diferenciais do

problema e torna-se mais difícil a identificação da conexão entre as teorias clássica e de *Reissner/Mindlin*. Com a formulação alternativa [96], o uso da decomposição em potenciais escalar e vetorial permitiu que fosse identificada a conexão entre as teorias clássica e de *Mindlin* de um modo mais direto. A utilização das coordenadas ns na resolução de problemas de placas facilita muito a imposição das condições de contorno, e ainda pode-se estudar placas em que as soluções em coordenadas 1,2 eram inviáveis, como por exemplo: placa circular totalmente apoiada em condição *hard* ou totalmente engastada em condição *soft*. Isso se deve ao fato de que nas placas circulares em coordenadas 1,2 quando se deseja restringir ou liberar somente o momento torçor, não se consegue esta condição para todos os nós do contorno, somente para aqueles quatro nós que “cortam” os eixos 1 e 2, imaginando que o centro da placa coincide com a origem dos eixos.

No uso direto do *Método dos Elementos de Contorno*, a técnica de colocação dos pontos singulares fora do domínio da placa, porém próximos à mesma, apresentaram resultados satisfatórios e facilitaram a programação. O mesmo pode ser dito a respeito dos elementos de contorno utilizados, que foram os elementos isoparamétricos lineares. Ainda a respeito dos parâmetros utilizados, o uso de um número de elementos de contorno em torno de 40 para as placas quadradas estudadas foi suficiente para obter a precisão desejada. Como os exemplos analisados não geraram a manipulação de matrizes grandes (ordem 130) para os recursos computacionais atuais, não foi feita uma investigação intensiva sobre o menor número de pontos de *Gauss* para as análises. Assim, foram utilizados 16 pontos.

No estudo da constante livre, ou melhor, na variação do parâmetro λ que pertence a parcela da teoria clássica nas equações da formulação alternativa, pôde-se observar que conforme aumentou-se a espessura de uma placa, a variação desta constante nos quatro valores estudados não interferiu de maneira tão significativa nos resultados. Lembrando que na placa de espessura fina, essa interferência ocorreu principalmente em nós próximos ao canto da placa. Comparando os resultados das resultantes de momento e cortante com aqueles esperados, é a constante de *Weeën* que, na maioria dos casos, gerou melhores respostas. Pelo fato da teoria de *Mindlin* ser obtida a partir de um campo de deformações impostas, semelhante à teoria de

Kirchhoff, pôde-se notar uma conexão entre elas. A teoria de *Mindlin* pode ser entendida como uma composição da teoria clássica mais uma correção devido ao efeito da força cortante.

O desenvolvimento de estudos complementares poderia seguir nesta linha de escolha de valores particulares, agora para a constante de multiplicação das funções de *Bessel* K_0 e K_1 . Neste trabalho, tentou-se utilizar a constante de multiplicação igual a 2π no lugar de 1, original da proposta de *Weeën* para a teoria de *Reissner/Mindlin*. No capítulo 7, foram analisados alguns exemplos, porém necessitam de um estudo mais aprofundado.

É interessante notar que o uso da teoria que considera o efeito da deformação por cortante (*Mindlin*) pode representar o comportamento das placas de um modo mais eficiente. Assim, pode-se lembrar a distribuição de esforços no engaste na placa em balanço, que foi dependente da espessura em exemplo do capítulo 8 desta dissertação. E ainda, o crescimento da pressão nos apoios com o aumento da espessura em uma placa biengastada e biapoiada também no capítulo 8. Estes aspectos que poderiam passar despercebidos através da análise com a teoria clássica, puderam ser adequadamente caracterizados com a teoria de *Mindlin*.

Referências Bibliográficas

- [1] VLASSOV, B. Z., *Pieces Longues en Voiles Minces*, Editions Eyrolles, Paris, France, 1962.
- [2] PALERMO JR., L., *Análise de Peças de Seção Delgada como Associação de Placas pelo Método dos Elementos de Contorno*, São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1989, 148 p. (Tese de Doutorado, parcialmente financiada pela FAPESP), (Orientador Munir Rachid).
- [3] PRIMO, M. T., *O Efeito dos Apoios Elásticos em Barras Longas de Seção Delgada Aberta (The Elastic Support Effects on Long Bars with Open Cross Sections)*, Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Unicamp, 1996, 139p (Dissertação de Mestrado - Master of Engineering Dissertation) (Orientador: Leandro Palermo Júnior).
- [4] SANCHES, L. C. F., *Uma Resolução de Placas com a Teoria de Mindlin através do Método dos Elementos de Contorno*, Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, UNICAMP, 1998, 187p., (Dissertação de Mestrado, Orientador: Leandro Palermo Júnior, Processo FAPESP: 96/07754-3).
- [5] FOLTRAN, C. E., *Análise de Problemas Planos em Regime Elastoplástico pelo Método dos Elementos de Contorno*, Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, UNICAMP, (Relatórios à FAPESP 96/12660-8, Orientador: Leandro Palermo Júnior).
- [6] FOLTRAN, C. E., PALERMO JR. , L., *Um Tratamento Analítico para Obtenção das Matrizes H e G do Método dos Elementos de Contorno para Aplicação em Problemas da Elastostática Bidimensional*, XVIII Congresso Íbero Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia, Brasília, Brasil, 1997.
- [7] DUARTE, J. B. P., *Análise de Instabilidade em Placas Finas pelo Método dos Elementos de Contorno*, Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, UNICAMP, 1998,

(Dissertação de Mestrado, Orientador: Leandro Palermo Júnior, apoio CAPES/PICD, em fase de conclusão da monografia).

[8] COSTA JR., J. A., The Boundary Element Method Applied to Plate Problems, Southampton, Department of Civil Engineering, The University of Southampton, 1985, (PhD Thesis, supervisor C. A. Brebbia).

[9] SANCHES, L. C. F., Análise Estática e Dinâmica de um Modelo de Folhas Poliédricas para o Estudo de Lajes com Forma de Aço Incorporada (Steel Deck) Utilizando o Método dos Elementos de Contorno, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP, 1998, (Projeto de doutoramento, Processo FAPESP 98/11027-5, Orientador: Euclides de Mesquita Neto, Co-orientador: Leandro Palermo Júnior).

[10] REISSNER, E., On Bending of Elastic Plates, Quartely of Applied Mathematics, p.55-68, 1947.

[.primeira versão...] REISSNER, E., The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates, Journal of Applied Mechanics, ASME, New York, 1945.

[11] MINDLIN, R. D., Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates, Journal of Applied Mechanics, ASME, New York, 1951.

[12] WEEËN, F. V., Application of the Boundary Integral Equation Method to Reissner's Plate Model, International Journal for Numerical Methods in Engineering, John Wiley & Sons Ltd, London, 1982.

[13] WEEËN, F. V., Application of the Direct Boundary Element Method to Reissner's Plate Model, Proc. 4th Int. Conference Boundary Element Methods in Engineering, Springer-Verlag, Southampton, 1982.

- [14] BARRETT, K. E., ELLIS, S., An Exact Theory of Elastic Plates, International Journal of Solids and Structures, Pergamon Press, London, 1988.
- [15] VILMANN, O., DASGUPTA, G., Fundamental Solutions of Mindlin Plates with Variable Thickness for Stochastic Boundary Elements, Engineering Analysis with Boundary Elements, Elsevier Science Publishers, 1992.
- [16] DANSON, D.J., Analysis of Plate Bending Problems by Direct Boundary Element Method, Southampton, UK, Dissertation (M. Sc.), University of Southampton, 1979.
- [17] BÉZINE, G., GAMBY, D.A., A New Integral Equation Formulation for Plate Bending Problems, Recent Advances in Boundary Element Method, Pentech Press, London, 1978
- [18] BECKER, A.A., The Boundary Element Method in Engineering, McGraw-Hill Book Company, London, England, 1992.
- [19] BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F., WROBEL, L.C., Boundary Element Techniques, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1984.
- [20] LOVE, A.E.H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. New York: Dover, 1944.
- [21] KIRCHHOFF, G.R. Über das Gleichgewicht und die Bewegung Einer Elastischen Scheibe. J. Math., Crelle, v.40, p.51-58, 1850.
- [22] POISSON, S.D. Memoire sur L'Equilibre et le Mouvement des Corps Solides. J. Math. Physics, v.12, n.8, 1829.
- [23] REISSNER, E. On the Theory of Bending of Elastic Plates. J. Math. Physics, v.23, p.184, 1944.

- [24] SALERNO, V.L., GOLDBERG, M.A. Effect of Shear Deformations on the Bending of Rectangular Plates. J. Appl. Mech., p.54-58, 1960.
- [25] PANC, V. Theories of Elastic Plates. International Publishing, Noordhoff, 1975.
- [26] CHENG, S. Elasticity Theory of Plates and a Refined Theory. Trans. J. Appl. Mech., v.46, p.644-650, 1979.
- [27] REISSNER, E. On a Generalization of Some Formulas of the Theory of Moderately Thick Elastic Plates. Int. J. Solids Struct., v.23, n.6, p.711-717, 1987.
- [28] LADAVÈZE, P., PECASTAINGS, F. The Optimal Version of Reissner's Theory. J. Appl. Mech., v.55, n.2, p.413-418, 1988.
- [29] REISSNER, E. On the Asymptotic Expansions for the Sixth-order Linear Theory Problem of Transverse Bending of Orthotropic Elastic Plates. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., v.85, n.1, p.75-88, 1991.
- [30] GREGORY, R.D., WAN F.Y.M. On Plate Theories and Saint-Venant's Principle. Int. J. Solids Struct., v.21, p.1005-1024, 1985.
- [31] FREDHOLM, I. Sur une Classe D'Equations Fonctionelles. Acta Math., v.27, p.365-390, 1903.
- [32] MIKHLIN, S.G. Integral Equations. NY: Pergamon Press, 1957.
- [33] MUSKHELISHVILI, N.I. Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Groningen: P. Noordhoff, 1953.
- [34] KUPRADZE, O.D. Potential Methods in the Theory of Elasticity. NY: Daniel Davey, 1965.

- [35] SMIRNOV, V.J. integral Equations and Partial Differential Equations. In. Course in Higher Mathematics. London: Addison-Wesley, v.4, 1964.
- [36] JASWON, M.A. Integral Equation Methods in Potential Theory. I.Proc. Roy. Soc. Ser. A., v.275, p.23-32, 1963.
- [37] SYMM, G.T. Integral Equation Methods in Potential Theory. II.Proc. Roy. Soc. Ser. A., v.275, p.33-46, 1963.
- [38] JASWON, M.A., PONTER, A.R. An Integral Equation Solution of the Tortion Problem. Proc. Roy. Soc. Ser. A., v.273, p.237-246, 1963.
- [39] RIZZO, F.J. An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems os Classical Elastostatics. Quart. Appl. Math., v.25, p.41-52, 1968.
- [40] CRUSE, T.A. Numerical Solutions in Three Dimensional Elastostatics. Int. J. of Solids Struct., v.5, p.1259-1274, 1969.
- [41] LACHAT, J.C. A Further Developement of the Boundary Integral Technique for Elastostatics. Southampton: US, 1975. Thesis (Ph.D.) University of Southampton, 1975.
- [42] BREBBIA, C.A. The Boundary Element Method for Engineers. London: Pentech Press, 1978.
- [43] NAKAGUMA, R.K. Three Dimensional Elastostatics Using the Boundary Element Method. Southampton: US, 1979. Thesis (Ph.D.) University of Southampton, 1979.
- [44] TELLES, J.C.F., BREBBIA, C.A. Boundary Element Solution of Half-Plane Problems. Int. J. Solids Struct., v.17, p.1149-1158, 1981.

- [45] JASWON, M.A., SYMM, G.T., MAITI, M. Numerical Biharmonic Analysis and Some Applications. *Int. J. Solids Struct.*, v.3, p.309-332, 1967.
- [46] BENZINE, G.P. Boundary Integral Formulations for Plate Flexure with Arbitrary Boundary Conditions. *Mech. Res. Comm.*, v.5, n.4, p.197-206, 1978.
- [47] STERN, M.A. A General Boundary Integral Formulation for the Numerical Solution of Plate Bending Problems. *Int. J. Solids Struct.*, v.15, p.769-782, 1979.
- [48] PAIVA, J.B. Formulação do Método dos Elementos de Contorno para Flexão de Placas e suas Aplicações em Engenharia de Estruturas. São Carlos: EESC, USP, 1987. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- [49] LONG, S.Y., BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F. Boundary Element Bending Analysis of Moderately Thick Plates. *Comp. Mech. Publications*, v.5, n.8, p.64-74, June, 1988.
- [50] KARAM, V.J., TELLES, J.C.F. On Boundary Elements for Reissner's Plate Theory. *Eng. Analysis*, v.5, n.1, p.21-27, 1988.
- [51] RIBEIRO, G.O. Sobre a Formulação do Método dos Elementos de Contorno para a Flexão de Placas Usando as Hipóteses de Reissner. São Carlos: EESC, USP, 1992. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- [52] RIBEIRO, G.O. , VENTURINI, W.S. Aplicação do Método dos Elementos de Contorno no Cálculo de Placas Através da Teoria de Reissner. In: Congresso Ibero-Latino-Americano Sobre Métodos Computacionais em Engenharia, 10, 1989, Porto. Anais... Porto: MECON-89, 1989.
- [53] WESTPHAL JR., T., DE BARCELLOS, C.S. Applications of the Boundary Element Method to Reissner's and Mindlin's Plate Models. In: Tanaka, M., Brebbia, C.A., Honma, T., eds., *Boundary Elements XII*, 1989.

- [54] DE BARCELLOS, C.S., SILVA, L.H.M. A Boundary Element Formulation for the Mindlin's Plate Model. In: Brebbia, C.A., Venturini, W.S., eds., Boundary Element Techniques: Applications in Stress Analysis and Heat Transfer, Southampton, 1987.
- [55] VILMANN, O., Boundary Element Techniques Applied to the Mindlin Plate Theory. Draft Ph. D Thesis, Dept. of Structural Engineering, Technical University of Denmark, 1985.
- [56] EL ZAFRANY, A., FADHIL, S., DEBBHI, M. An Efficient Approach for Boundary Element Bending Analysis of Thin and Thick Plates. Computers & Structures, v.565-576, 1995.
- [57] SAADA, A.S. Elasticity: Theory and Applications. New York: Pergamon Press Inc., 1974.
- [58] BREBBIA, C.A., DOMINGUES, J. Boundary Elements: An Introductory Course. Avon: McGraw-Hill Book Company, Great Britain, 1989.
- [59] CRUSE, T.A. Mathematical Foundations of the Boundary – Integral Equation Method in Solid Mechanics. United Technologies: Special Scientific Report, East Hartford, USA, 1977.
- [60] TIMOSHENKO, S. Vibration Problems in Engineering. D. Van Nostrand Company Inc., second edition, New York, p.337, 1937.
- [61] TIMOSHENKO, S. On the Correction for the Shear of the Differential Equation for Transverse Vibrations of Prismatic Bars. Philosophical Magazine. Series 6, v.41, pp. 744-746, 1921.

- [62] ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I.A. Handbook of Mathematical Functions. New York: Dover Publications, 1965.
- [63] HÖRMANDER, H. Linear Partial Differential Operators. Berlin: Springer Verlag, 1963.
- [64] BATHE, K.J., LEE, N.S., BUCALEM, M.L. On the Use of Hierarchical Models in Engineering. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., v.82, p.5-26, 1990.
- [65] PAIVA, J.B., VENTURINI, W.S. Escolha do Ponto Singular na Análise de Placas Pelo Método dos Elementos de Contorno. In: Congresso Latino Americano e Ibérico Sobre Métodos Computacionais, 9, 1988, Argentina. Anais... Argentina: MECON-88, 1988.
- [66] TIMOSHENKO, S. Theory of Plates and Shells. New York: McGraw-Hill, 1959.
- [67] BARES, R., Tables Pour le Calcul des Dalles et des Parois. Ed. Dunod, Paris, 538 p., 1969.
- [68] REISSNER, E. On Small Deflections of Shear Deformable Elastic Plates. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., v.59, p. 227-233, 1986.
- [69] WANG, W., SHI, M.X. Thick Plate Theory Based on General Solutions of Elasticity. Acta Mech., v. 123, i. 1-4, p. 27-36, 1997.
- [70] CHENG, S. A Method for Solving Boundary Value Problems and Two Dimensional Theories Without *ad hoc* Assumptions. J. Elasticity, v.7, i.3, p.329, 1977.
- [71] WANG, F.Y. Two Dimensional Theories Deduced from Three-Dimensional Theory for a Transversely Isotropic Body – I Plate Problems. Int. J. Solids Struct., v.26, n. 4, p. 455-470, 1990.

- [72] HANSEN, E. B. Numerical Solution of Integro-differential and Singular Integral Equations for Plate Bending Problems. *Journal of Elasticity*, v.6, i.1, p. 39-56, 1976.
- [73] ALTIERO, N.J., SIKARSKIE, D.L. A Boundary Integral Method Applied to Plates of Arbitrary Plan Form. *Comp. & Struct.*,v.9,p.163-168,1978.
- [74] WU, B.C., ALTIERO, N.J. A Boundary Integral Method Applied to Plates of Arbitrary Plan Form and Arbitrary Boundary Conditions. *Comp. & Struct.*,v.10,p.703-707,1979.
- [75] TOTTENHAN, H. The Boundary Element Method for Plates and Shells. In: Banerjee, P.K., Butterfield, R., eds.,*Developments in Boundary Element Methods-1*, Appl. Science Publ., London,p.173-205,1979.
- [76] GUO-SHU, S., MUKERJEE, S. Boundary Element Method Analysis of Bending Plates of Arbitrary Shape with General Boundary Conditions. *Engrg. Analysis*,v.3, i.1, p.36-44,1986.
- [77] KATSIKADELIS, J.T., ARMENAKAS, A.E. A New Boundary Equation Solution to the Plate Problem. *J. Appl. Mech.*,v.56,i.2,p. 364-374, 1989.
- [78] COSTA JR., J.A., BREBBIE, C.A. The Boundary Element Method Applied to Plates on Elastic Foundations. *Engrg. Analysis*,v.2,i.4,p. 174-183, 1985.
- [79] BENZINE, G.P. A New BEM for Bending of Plates on Elastic Foundations. *Int. J. Solids Struct.*,v.24,i.6,p. 557-565, 1988.
- [80] SILVA, N.A. Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Análise de Placas sobre Fundações Elásticas. *Dissertação de Mestrado*, EESC-USP, 1988.

- [81] KATSIKADELIS, J.T. Large Deflection Analysis of Plates on Elastic Foundation by the Boundary Element Method. *Int J. Solids Struct.*, v.27, i.15, p. 1867-1878, 1991.
- [82] KATSIKADELIS, J.T., YOTIS, A.J. New Boundary Element Solution of Thick Plates Modeled by Reissner's Theory. *Engrg. Analysis with B.E.*, v.12, i.1, p. 65-74, 1993.
- [83] RACHED, Y.F., ALIABADI, M.H., BREBBIA, C.A. Boundary Element Method for Thick Plates on Winkler Foundation. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, v.41,i.8, p. 1435-1462, 1998.
- [84] JIANGUO, W., XIUXI, W., MAOKUANG, H. A Boundary Integral Equation Formulation for Thick Plates on a Winkler Foundation. *Comput. Struct.*, v.49, p. 179-185, 1993.
- [85] WANG, J.G., WANG, X.X., HUANG, M.K. A Boundary Integral-Equation Formulation for Thick Plates on a Winkler Foundation. *Comput. & Struct.*, v. 49, i. 1, p. 179-185, 1993.
- [86] AL-HOSANI, K., FADHIL, S., EL-ZAFRANY, A. Fundamental Solution and Boundary Element Analysis of Thick Plates on Winkler Foundation. *Comput. & Struct.*, v.70, p. 325-336, 1999.
- [87] HARTMANN, F., ZOTEMANTEL, R. The Direct Boundary Element Method in Plate Bending. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, v.23, i.11, p. 2049-2069, 1986.
- [88] KATSIKADELIS, J.T., ARMENAKAS, A.E. Plates on Elastic Foundation by BIE Method. *J. Engrg. Mech.*, v.110,i.7,p. 1086-1104, 1984.
- [89] PETROLITO, J. Triangular Thick Plate Elements Based on a Hybrid-Trefftz Approach. *Comput. & Struct.*, v. 60, i. 6, p. 883-894, 1996.

- [90] REISSNER, E. A Note on the Shear Center Problem for Shear-Deformable Plates. *Int. J. Solids Struct.*, v.32, i. 5, p. 679-682, 1995.
- [91] RACHED, Y.F., ALIABADI, M.H., BREBBIA, C.A. Transformation of Domain Integrals in BEM for Thick Foundation Plates. *J. Engrg. Mech.*, v.125,i.9, p. 1062-1070, 1999.
- [92] FRANGI, A., GUIGGIANI, M. Boundary Element Analysis of Kirchhoff Plates with Direct Evaluation of Hypersingular Integrals. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, v.46, i. 11, p. 1845-1863, 1999.
- [93] MORLEY, L.S.D. *Skew Plates and Structures*. Pergamon Press, London (1963).
- [94] BABUSKA, I., SCAPOLLA T., Benchmark Computation and Performance Evaluation for a Rhombic Plate Bending Problem. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, v.28, p. 155-179, 1989.
- [95] RACHED, Y.F., ALIABADI, M.H., BREBBIA, C.A. Hypersingular Boundary Element Formulation for Reissner Plates. *Int. J. Solids Struct.*, v.35, i.18, p. 2229-2249, 1998.
- [96] PALERMO JR., L. *Análise Elástica de Placas e o Método dos Elementos de Contorno*, Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, UNICAMP, 2000, p. 155 (Tese de Livre-Docência).
- [97] DONGARRA, J.J., DUCROZ, J., HAMMARLING, S., RANSON, R.J. An Extended Set of Fortran Basic Linear Algebra Subprograms. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 14, 1-17, 1998.