



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL

**VIGAS DE MADEIRA LAMINADA COLADA
REFORÇADAS COM FIBRAS DE SISAL: ANÁLISE
TRIDIMENSIONAL DO MÓDULO DE ELASTICIDADE**

REINALDO WASHINGTON MORAES

CAMPINAS - SP

2011

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS FACULDADE DE
ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO

REINALDO WASHINGTON MORAES

**VIGAS DE MADEIRA LAMINADA COLADA
REFORÇADAS COM FIBRAS DE SISAL: ANÁLISE
TRIDIMENSIONAL DO MÓDULO DE ELASTICIDADE**

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão de pós-graduação da Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, na área de concentração de Estruturas.

ORIENTADOR: PROF. DR. NILSON TADEU MASCIA

CAMPINAS - SP

2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

Moraes, Reinaldo Washington

M791v Vigas de madeira laminada colada reforçadas com fibras de sisal: análise tridimensional do módulo de elasticidade / Reinaldo Washington Moraes. --Campinas, SP: [s.n.], 2011.

Orientador: Nilson Tadeu Mascia.

Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo.

1. Anisotropia. 2. Reflorestamento. 3. Madeira. 4. Transformação de coordenadas. I. Mascia, Nilson Tadeu. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. III. Título.

Título em Inglês: Beams glued laminated wood reinforced with sisal fibers: three-dimensional analysis of the elastic modulus

Palavras-chave em Inglês: Anisotropy, Reforestation, Wood, Coordinate transformations

Área de concentração: Estruturas

Titulação: Mestre em Engenharia Civil

Banca examinadora: Juliano Fiorelli, Julio Soriano

Data da defesa: 18/10/2011

Programa de Pós Graduação: Engenharia Civil

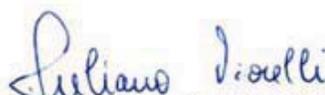
**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E
URBANISMO**

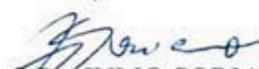
**VIGAS DE MADEIRA LAMINADA COLADA REFORÇADAS
COM FIBRAS DE SISAL: ANÁLISE TRIDIMENSIONAL DO
MÓDULO DE ELASTICIDADE**

REINALDO WASHINGTON MORAES

Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:


Prof. Dr. NILSON TADEU MASCIA
Presidente e Orientador / UNICAMP


Prof. Dr. JULIANO FIORELLI
FZEA / USP


Prof. Dr. JULIO SORIANO
FEAGRI / UNICAMP

Campinas, 18 de outubro de 2011

AGRADECIMENTOS

A Deus pela oportunidade de evolução intelectual.

Ao professor Dr. Nilson Tadeu Mascia, pela excelência em sua orientação, pela amizade desenvolvida e principalmente pela paciência e incentivo constantes.

A minha esposa Michelle, pelo companheirismo e grande auxílio nos momentos de dificuldade. Sua presença e incentivo me fortaleceram, trazendo a força e a confiança necessária para realizar esse trabalho.

A meus pais, minha irmã, sobrinha e filha pelo apoio e pela compreensão.

Aos meus amigos, Débora, Jean, Joacyr e Viridiano pela luta contínua e estudo compartilhado, tornando minha caminhada mais animada e satisfatória.

RESUMO

Devido à crescente utilização da madeira no Brasil, estudos tecnológicos são aprimorados nos últimos anos sendo verificada a necessidade de pesquisas direcionadas a madeiras de reflorestamento e das técnicas construtivas por meio de diversas composições com outros materiais de construção. As pesquisas nessa linha contribuem para a diminuição da pressão de exploração de novas áreas proporcionando novos usos para a madeira de reflorestamento como material estrutural pela indústria da construção civil. Estudos a respeito das propriedades mecânicas e físicas de madeiras e suas composições importantes para o aprimoramento e desenvolvimento dessas novas tecnologias. No presente trabalho, o estudo de vigas de madeira laminada colada reforçadas com fibras de sisal, confeccionadas de madeiras de reflorestamento, é realizado com ênfase no contexto do módulo de elasticidade. São apresentados compostos laminados e alguns tipos de reforços utilizados comumente na engenharia de estruturas, voltando à pesquisa, principalmente para as fibras naturais. Além disso, são descritos alguns conceitos de elasticidade, leis constitutivas e as transformações de coordenadas sob a ótica de importantes autores. É desenvolvida uma formulação cuja análise é feita utilizando-se um modelo de transformação tridimensional, não convencional na literatura pesquisada, sendo possível então a aplicação da teoria desenvolvida no modelo de vigas laminada colada proposto no trabalho. Os resultados obtidos mostram que as transformações tridimensionais são de grande valia ao estudo da anisotropia dos materiais e, em particular, para o material madeira e suas composições estruturais.

Palavras-chave: anisotropia, madeira de reflorestamento, fibra de sisal, módulo de elasticidade, transformações de coordenadas.

ABSTRACT

Due to the increasing use of wood in Brazil, technological studies are being improved in recent years seen the need for research aimed at reforestation and timber construction techniques through a variety of compositions with other building materials. Research in this line helps reduce the pressure to exploit new areas providing new uses for wood as a structural material for reforestation by the construction industry. Studies of mechanical and physical properties of wood composites and their importance to the improvement and development of these new technologies. In this study, the study of glued laminated wood beams reinforced with sisal fibers, made of wood from reforestation is carried out with emphasis in the context of the modulus of elasticity. Composite laminates are presented and some types of reinforcements commonly used in structural engineering, returning to research, especially for natural fibers. In addition, we describe some concepts of elasticity, constitutive laws and the coordinate transformations from the perspective of important authors. It developed a formulation whose analysis is done using a transformation model three-dimensional, non-conventional literature, it is possible then the application of the theory developed in the model proposed in glued laminated beams work. The results show that the three-dimensional transformations are of great value to study the anisotropy of materials and, in particular, for the wood material and its structural composition.

Keywords: anisotropy, glued laminated beams, wood reforestation, sisal fibers, elastic modulus, coordinate transformations

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Classificação de Compósitos – Fonte: Callister (1985).....	6
Figura 2 – Laminados de madeira e compósitos de madeira: (a) três camadas de aglomerado, (b) laminado com camadas na horizontal, (c) laminado com camadas na vertical, (d) compensado em camadas, (e) corrugado, (f) painel sanduíche tipo colméia. - Fonte: Bodig (1982).....	8
Figura 3 – Tipos de lâminas: (a) lâmina com fibras unidirecionais; (b) lâminas com fibras tecidas; (c) laminado composto por várias lâminas orientadas em diferentes direções. – Fonte: Mendonça (2005).....	10
Figura 4 – Esquema de montagem de uma viga de madeira laminada colada (ZANGIÁCOMO, 2003).	13
Figura 5 – Tipos de emenda - Macedo (2000)	14
Figura 6 - Constituição estrutural de uma fibra vegetal (Rong et al., 2001).	16
Figura 7 – Foto de uma plantação de sisal (EMBRAPA – CNPA, 2005).....	19
Figura 8 – Malhas de sisal – Fonte: Tecelagem de Sisal da Bahia (2011).....	19
Figura 9 – (a) Fibra de sisal estrutural, e (b) Fibra do arco (Fonte: Silva, F.A. 2009).	20
Figura 10 – Gráficos de Tensão/Deformação – Elasticidade – fonte: Desai (1984) ..	25
Figura 11 – Inter-relações entre Forças, Tensões, Deformações e Deslocamentos Chen e Salieb (1982)	26
Figura 12 – Representação de planos de rotação em torno dos eixos x,y,z	30
Figura 13 – Representação das deformações nos materiais ortotrópicos, sem distorções.....	32

Figura 14 – Rotações de 180° em 1, 2 e 3.....	33
Figura 15 – Representação de deformações e distorções no material	35
Figura 16 – Transformação de Coordenadas – Miklestad (1967)	40
Figura 17 – Representação de rotação em torno do eixo 1 – Miklestad (1967)	41
Figura 18– Representação de rotação em torno do eixo 3' – Miklestad (1967)	42
Figura 19– Representação de rotação em torno do eixo 1'' – Miklestad (1967)	43
Figura 20- Transformação de coordenadas de Goodman e Bodig (1970).	44
Figura 21– Transformação de Coordenadas – Chen e Salleb (1982).....	46
Figura 22- Transformação de coordenadas de Bindzi e Samson.....	48
Figura 23– Transformação de Coordenadas – Hearmonson e Cramer (1997)	49
Figura 24- Ângulos de Euler.....	50
Figura 25- Representação de sistema de referência girado em torno de x_3	58
Figura 26 – Representação geral das rotações tridimensionais.....	59
Figura 27– Rotação de $X'1$	60
Figura 28– Rotação de $X'2$	62
Figura 29– Representação de X_1 em relação aos eixos rotacionados X'_1, X'_2 e X'_3 ...	63
Figura 30– Modelo Analisado.....	71
Figura 31 – Direção das fibras transversais coincidem com a direção principal no eixo X_2	71
Figura 32 – Direção das fibras não coincidem com os eixos principais da viga.....	72

Figura 33 – Seção Transversal Ampliada – unidade: centímetros (cm).....	75
Figura 34 – Representação das variações de α de 0 a 90°	82
Figura 35 – Representação da lâmina em relação ao eixo tridimensional	83
Figura 36– Representação da lâmina para o eixo T alinhado com X_2	86

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Características dos tecidos fibras sintéticas mais utilizadas analisadas a 20° (Fonte: Barracuda, 2000).....	15
Tabela 2 - Propriedades mecânicas e características de fibras vegetais de (Bledzki; Gassan, 1999).....	17
Tabela 3 – Comparativo entre as características do sisal encontradas na literatura.	22
Tabela 4 – Cossenos Diretores ($l_i j$) – Fonte Chen e Salleb (1982)	45
Tabela 5 – Cossenos Diretores - Fonte: LEKHNITSKII (1981).....	52
Tabela 6 – Rotação em torno do eixo y – Fonte: LEKHNITSKII (1981).	52
Tabela 7– Coeficientes q_{ij} - Fonte: LEKHNITSKII (1981).....	56
Tabela 8 – Cossenos diretores para decomposição em três eixos de coordenadas.	60
Tabela 9 – Primeira simplificação de cossenos diretores para decomposição em três eixos de coordenadas	63
Tabela 10 – Segunda simplificação de cossenos diretores para decomposição em três eixos de coordenadas	65
Tabela 11 – Terceira simplificação de cossenos diretores para decomposição em três eixos de coordenadas	68
Tabela 12 – Quarta simplificação de cossenos diretores para decomposição em três eixos de coordenadas	70
Tabela 13 – Constantes de Elasticidade da Madeira Pinus Caribaea var. Bahamensis (E, G em MPa) - Fonte: MASCIA (1991)	72

Tabela 14 – Características do sisal adotadas para o modelo.	73
Tabela 15 – Momentos de Inércia Transferidos I_i	76
Tabela 16 – Dados para cálculo dos módulos de elasticidade efetivos.	76
Tabela 17 – Constantes de Elasticidade do Composto proposto (E, G em MPa)	77
Tabela 18 – Variação do Ângulo α de 0 a 90° para a obtenção de $E_1(E_L')$, $E_2(E_T')$, $E_3(E_R')$	81
Tabela 19 – Quarta simplificação de cossenos diretores para decomposição em três eixos de coordenadas	84

LISTA DE SÍMBOLOS

σ_i	Tensão normal
τ_{ij}	Tensão tangencial ou de cisalhamento
ε_i	Deformações normais
γ_{ij}	Deformações tangenciais ou de cisalhamento
E_i	Módulo de Young ou de elasticidade longitudinal
G_i	Módulo de elasticidade cisalhante
ν_{ij}	Coefficiente de Poisson
$[F_{ij}]$	Função resposta do material
$[U, U_0]$	Energia de deformação
$[C_{ij}]$	Tensor, matriz de coeficientes de elasticidade do material
$[S_{ij}]$	Tensor, matriz de compliância do material
$[l, q, l_{ij}, q_{ij}, q_{ijk}]$	Tensor, matriz de transformação
L	direção longitudinal das fibras
R	direção radial das fibras
T	direção tangencial das fibras
X_1, X_2, X_3	Eixos de coordenadas cartesianos
X_1', X_2', X_3'	Eixos de coordenadas cartesianos transformados

$[\mu_{ij,kl}]$	Coeficiente de Chentsov
$[\eta_{ij,k}]$	Coeficiente de influência mútua de 1ª espécie
$[\eta_{i,jk}]$	Coeficiente de influência mútua de 2ª espécie
$\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \vartheta, \gamma, \eta, \omega, \psi, \rho$	Ângulos
δ_{ij}	Delta de Kronecker
I	Momento de inércia
A	Área de Seção transversal

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
1.1. Conteúdo do Trabalho:	2
2. OBJETIVOS:	3
3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	5
3.1. Materiais Compostos (Compósitos).....	5
3.2. O Material Madeira	11
3.3. Madeira Laminada Colada (MLC).....	12
3.4. Fibras	15
3.5. As Fibras Naturais	16
3.6. Fibras de Sisal.....	18
3.7. Adesivos	22
4. CONSIDERAÇÕES SOBRE AS PROPRIEDADES ELÁSTICAS DOS MATERIAIS	25
4.1. Generalidades:	25
4.2. As Leis Constitutivas	27
4.3. As Transformações de Coordenadas.....	39
4.3.1. Transformações de Coordenadas por Myklestad:.....	39
4.3.2. Transformações de Coordenadas por Goodman e Bodig.....	43
4.3.3. Transformações de Coordenadas por Chen e Salleb:	45
4.3.4. Transformações de Coordenadas por Bindzi e Samson:.....	47
4.3.5. Transformações de Coordenadas por Hearmonson e Cramer:.....	49
4.3.6. Transformações de Coordenadas por Lekhnistskii	51
4.3.7. Transformação tensores de segunda ordem (tensões e deformações):	52
4.3.8. Transformação de Tensores de Quarta Ordem (Constitutivo e Compliância).....	54
5. APLICAÇÃO TEÓRICA E METODOLOGIA	59
5.1. Transformações Tridimensionais	59
5.1.1. Introdução	59
5.1.2. Transformação de X'_1	60
5.1.3. Transformação de X'_2	62
5.1.4. Transformação de X'_3	65
5.1.5. Simplificações dos termos da matriz	68

5.2. Modelo Analisado	70
5.2.1. Módulo de elasticidade para vigas laminadas coladas	73
5.2.2. Aplicação das transformações no plano	78
5.2.3. Aplicação das Transformações Tridimensionais	83
5.2.4. Comparação dos modelos plano e tridimensional.....	86
5.3. Análise dos resultados Obtidos	88
6. CONCLUSÃO	91
7. CONTINUAÇÃO DOS ESTUDOS / SUGESTÕES	93
8. BIBLIOGRAFIA	95

1. INTRODUÇÃO

Com o passar dos anos constata-se que os materiais de engenharia, bem como as tecnologias associadas aos mesmos estão em contínuo desenvolvimento tecnológico, e, isso impõe ao engenheiro a necessidade de se atualizar e buscar um aprimoramento técnico contínuo e consoante com esse desenvolvimento e evolução.

Na engenharia de estruturas, os materiais são analisados de maneira macroscópica e com coeficientes de segurança em geral elevados, devido ao incompleto conhecimento sobre seu comportamento físico e mecânico.

A aplicação de cargas e outros fatores externos, provocam deslocamentos e deformações, que podem ser imperceptíveis de visualização.

Cientificamente a análise de uma estrutura sobre a óptica da mecânica dos sólidos envolve equilíbrio de forças e compatibilidade de deslocamentos, e conseqüentemente tensões e deformações. O inter-relacionamento desses parâmetros da mecânica dos sólidos é denominado de leis constitutivas.

O conhecimento dessas informações auxilia o engenheiro a interpretar a estrutura como um todo. Algumas dessas estruturas são compostas de materiais elásticos, que podem possuir características de homogeneidade e características isotrópicas. Outras estruturas podem ser constituídas de materiais heterogêneos e anisotrópicos.

Há tempos já se verifica diversas composições ou combinações de materiais (materiais compósitos), buscando-se melhorar a eficiência estrutural, seja em termos de resistência/rigidez e/ou em termos de redução de peso.

Atualmente, acrescenta-se a busca por sustentabilidade ambiental, com o uso de materiais recicláveis, renováveis.

Nesse contexto, a pesquisa proposta nesse mestrado visou o estudo de desenvolvimento teórico tridimensional de viga de madeira laminada colada (MLC) reforçada com fibras naturais de sisal. Foram analisadas as propriedades elásticas dos materiais envolvidos buscando novos usos para madeiras de reflorestamento e fibras naturais, unindo-se essa necessidade com a atual utilização de madeiras de

reflorestamento e a pesquisa de materiais alternativos que visem tanto à questão econômica quanto ambiental.

1.1. Conteúdo do Trabalho:

Os objetivos do trabalho são descritos no Capítulo 2.

O capítulo 3 trata a fundamentação teórica, ou seja, conceitos sobre materiais compostos, madeira, madeira laminada colada, fibras sintéticas e naturais, em particular, as fibras de sisal e adesivos.

No capítulo 4 são descritos os conceitos sobre elasticidade, leis constitutivas e as transformações de coordenadas apresentadas por diversos autores, estes, extremamente necessários ao desenvolvimento do trabalho.

No Capítulo 5 são apresentadas a aplicação teórica e a metodologia utilizada. São desenvolvidas nesse capítulo, as transformações de coordenadas tridimensionais, o modelo proposto no trabalho e ainda, uma breve análise dos resultados obtidos.

O Capítulo 6 descreve as conclusões do trabalho e o Capítulo 7, sugestões para o prosseguimento dos estudos.

2. OBJETIVOS:

Este trabalho teve como objetivo:

1. Desenvolver uma metodologia de transformação em três eixos simultâneos para verificação do módulo elástico de vigas de madeira laminada colada reforçadas com fibras de sisal;
2. Analisar o comportamento da viga de madeira colada reforçada com fibras de sisal, tratando especificamente o módulo de elasticidade, quando na aplicação das transformações tridimensionais desenvolvidas;
3. Comparar os resultados obtidos para a transformação no plano, com os resultados das transformações tridimensionais.

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1. Materiais Compostos (Compósitos)

Um material composto consiste na combinação de dois ou mais materiais que normalmente unidos por um adesivo formam um novo material com propriedades que seriam difíceis de obter com apenas um desses (MENDONÇA, 2005).

Para que essa definição seja válida, restringe-se esse estudo às características macroscópicas, excluindo-se as misturas microscópicas, normalmente estudadas pela engenharia de materiais, pois, sabe-se que muitas dessas “misturas” independem da escala da combinação do material.

Os compósitos podem surgir de combinações entre metais, cerâmicas e polímeros. As possíveis combinações são limitadas às condições de processamento e às prováveis incompatibilidades entre os componentes. Nos compósitos estruturais, geralmente, utilizam-se fibras sejam elas sintéticas ou naturais como reforços. Essas fibras podem ser contínuas, descontínuas, alinhadas ou com distribuição aleatória (Callister, 2002).

Ao se combinar materiais, tornando-os compostos, é possível melhorar uma ou mais, dentre os quais se destacam:

- Resistência mecânica;
- Rigidez;
- Resistência à corrosão;
- Resistência ao desgaste;
- Resistência à fadiga;
- Comportamento em diversas temperaturas;
- Condutividade térmica;

- Isolamento acústico;
- Estética.

No entanto, observa-se que nem todas as propriedades são melhoradas simultaneamente, ou seja, a grande vantagem do material composto é melhorar a característica que é necessária em um determinado projeto.

Hull (1995) destaca que a escolha de fibras e matrizes deve considerar as condições de uso, as ações mecânicas atuantes, o ambiente e os agentes potencialmente degradadores, além dos custos e os benefícios durante a vida útil do material.

A pesquisa científica sobre materiais compostos segundo Flamínio (2006) dividem-se em diferentes tópicos, tais como: análise de processos de fabricação, estudo das equações da elasticidade anisotrópica, teorias de falha para materiais anisotrópicos, teorias estruturais e modelos analíticos e numéricos para a solução dessas equações.

Diversas são as maneiras de se classificar os materiais compostos. Callister (2002), por exemplo, apresenta uma classificação de compósitos de acordo com o esquema apresentado Figura 1:

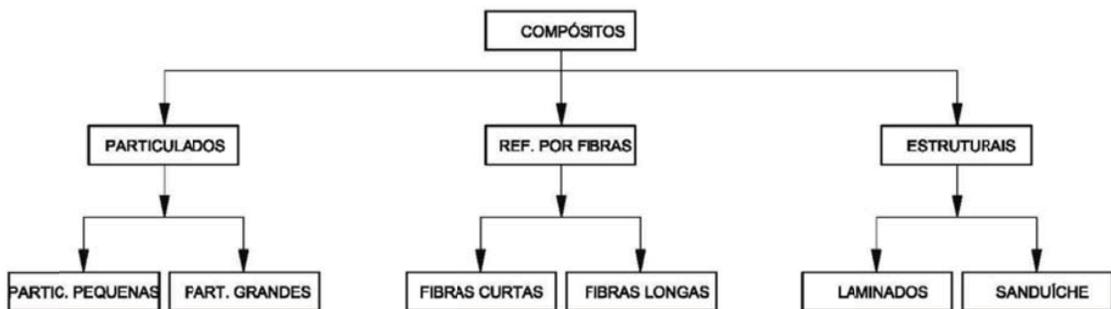


Figura 1 – Classificação de Compósitos – Fonte: Callister (2002)

Já Jones (1998) apresenta a classificação A.G.H. Dietz conforme a geometria da mistura dividindo em grandes grupos de materiais compostos, tais como:

- Materiais fibrosos, que consistem em fibras dentro de uma matriz;
- Materiais laminados, que consistem em camadas de diferentes materiais;
- Materiais particulados, que consistem em partículas em suspensão em uma matriz;
- Combinação de quaisquer dos três tipos citados.

Os materiais fibrosos são beneficiados da excelência das propriedades mecânicas das fibras longas e das fibras curtas. As fibras, normalmente fabricadas com diâmetros próximos do tamanho do grão cristalino, apresentam-se resistentes, ainda com o alinhamento da estrutura cristalina com a direção da fibra, e principalmente da redução das discordâncias do retículo cristalino. Além disso, as fibras curtas conseguem resistir muito mais que as fibras longas, devido à concentração de defeitos cristalinos ser menor.

Um elemento estrutural reforçado com fibras tem como característica principal seu baixo peso e alta resistência. Um exemplo típico dessas resinas são as epóxi, cuja densidade é cerca de 1.100kg/m^3 , a resistência a tração de cerca de 29 MPa e o módulo de elasticidade de 3.9 GPa (Flamínio, 2006).

Segundo Mendonça (2005), os materiais particulados que são utilizados amplamente na indústria em geral. Como exemplo, o aglomerado que é uma mistura de resíduos de madeira (pó e serragem), cola e resina. Os materiais particulados possuem uma classe especial de reforço por flocos ou plaquetas. Os flocos são componentes bidimensionais com a espessura na ordem de grandeza do grão cristalino, e tem propriedades melhores que os materiais sólidos, embora piores que as fibras.

Jones (1998) apresenta os materiais compostos laminados. Estes consistem de camadas de diferentes materiais, combinadas para se obter as melhores propriedades possíveis. Os tipos comuns de compostos laminados são os bimetálicos (lâminas bi-metálicas), os metais plaqueados (reveste-se um material com outro, para combinar as melhores características de ambos), os vidros laminados, os materiais saturados com

plásticos e dentre outros o do objetivo desse estudo, os polímeros reforçados com fibras (PRP). Os compósitos laminados de madeira são normalmente desenvolvidos utilizando madeiras de mesma espécie, e podem ter seu arranjo espacial conforme a Figura 2.

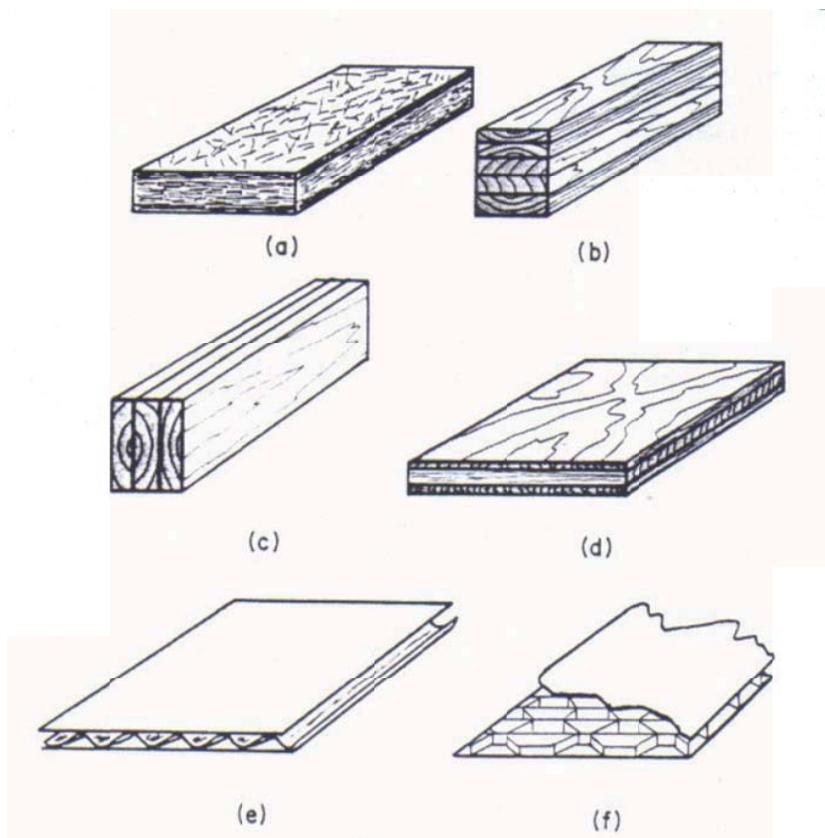


Figura 2 – Laminados de madeira e compósitos de madeira: (a) três camadas de aglomerado, (b) laminado com camadas na horizontal, (c) laminado com camadas na vertical, (d) compensado em camadas, (e) corrugado, (f) painel sanduíche tipo colméia.
- Fonte: Bodig (1982)

Com base nessas informações os materiais compostos podem ser elaborados com ênfase nas características desejáveis e minimização das indesejáveis, por meio das três classes apresentadas ou ainda, combinando-as entre si, considerando sempre nas combinações as relações de elasticidade entre as deformações independentes e os

esforços independentes, exprimindo os deslocamentos correspondentes às forças do carregamento considerado.

Algumas abordagens micro-mecânicas permite estimar a variação das propriedades do meio composto pelas propriedades e proporções do que o constitui, permitindo através das equações da elasticidade obter soluções exatas (porém complexas), aproximadas e valores limites. Conhecendo as propriedades elásticas de um material composto, tais como: módulos de elasticidade transversal e longitudinal e coeficientes de Poisson, é possível determinar os valores em cada uma das posições do tensor constitutivo.

Nesse contexto, é possível modelar estruturas de madeira transformando-as em compósitos estruturais laminados unidirecionais, orientando o reforço nas direções as quais ocorrem à necessidade.

Carvalho (2005) apresenta que um composto formado por madeira com fibra de sisal, por exemplo, trata-se de um compósito polimérico reforçado por fibras contínuas ou descontínuas, a fim de se melhorar o desempenho mecânico. Numa escala macroscópica as fibras descontínuas apresentam um comportamento isotrópico, enquanto que o compósito com fibras contínuas apresenta propriedades mecânicas ortotrópicas que conduzem a mecanismos específicos de falha, além de alta resistência e rigidez na direção das fibras. Por outro lado, na direção transversal às mesmas há um baixo desempenho mecânico, levando-se a um controle das propriedades da matriz do composto.

Hyer (1998) apresenta nos fundamentos da teoria dos laminados que o desempenho do tipo de composto depende do tipo de fibra e matriz, volume de fibra e características construtivas das lâminas. Mendonça (2005) destaca alguns tipos de lâminas, conforme apresentado na Figura 3.

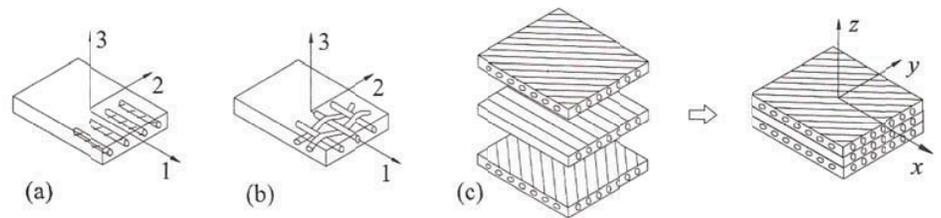


Figura 3 – Tipos de lâminas: (a) lâmina com fibras unidirecionais; (b) lâminas com fibras tecidas; (c) laminado composto por várias lâminas orientadas em diferentes direções. – Fonte: Mendonça (2005).

Cabe-se ressaltar que a interface fibra/matriz é a principal responsável pela transferência da solicitação mecânica da matriz para o reforço e suas propriedades são específicas para cada sistema fibra/matriz, levando inclusive ao estudo do agente de união, ou seja, o adesivo de ligação. Desse modo, combinando as propriedades da matriz do material composto, é possível avaliar o desempenho dos compósitos com fibras, e observar alguns parâmetros, tais como:

- Características dos materiais componentes, fibra e matriz;
- Geometria das fibras, seção transversal e comprimento;
- Arranjo das fibras;
- Proporção entre os materiais.

Dentro desse contexto, a seguir, são apresentados os materiais utilizados na formação do compósito proposto para esse trabalho.

3.2. O Material Madeira

Para estudar o comportamento mecânico e estrutural da madeira, e sua aplicação é necessário apresentar uma breve descrição sobre suas características.

Quanto às características estruturais, a madeira pode ser analisada como um modelo ortotrópico. Mascia (1991) apresenta que:

["a teoria da elasticidade aplicada à madeira baliza-se na hipótese de simetria elástica em três planos mutuamente perpendiculares, vinculados a sua estrutura interna, e na homogeneidade macroscópica do material. A superfície longitudinal-tangencial (superfície gerada por uma linha paralela ao eixo da árvore, movendo-se ao longo dos anéis de crescimento) não é plana, mas grosseiramente cilíndrica. As outras duas superfícies, a longitudinal radial (definida pelo eixo da árvore e pelos raios medulares) e a tangencial radial, são, mais verdadeiramente, planas, com eventuais irregularidades locais, devido ao crescimento da árvore."]

Como o objetivo do presente trabalho está baseado no uso de madeiras de reflorestamento, é necessário levar em consideração que os fatores ambientais têm uma influência considerável sobre a estrutura de madeira e qualquer influência do ambiente, incluindo o manejo florestal, que altere a taxa de crescimento da árvore, afetará as características técnicas da madeira.

Nas coníferas a relação é complexa, pois, aumentando-se a taxa de crescimento geralmente resulta em um aumento na largura de lenho inicial, com conseqüente diminuição na densidade e propriedades mecânicas.

Com base no apresentado, verifica-se que a variabilidade no desempenho da madeira é uma das suas deficiências inerentes como material. É possível se discutir como as diferenças nas propriedades mecânicas ocorrem entre madeiras de diferentes espécies e como essas são manifestações de diferenças na espessura da parede e distribuição dos tipos de célula, entre outros (Miller, FPL, 1999).

Segundo Miller (FPL, 1999) madeira é um substrato que oferece boas condições de adesividade, compatibilidade físico-química com diversos adesivos, presença de

extrativos na superfície, além da rugosidade e porosidade, ou seja, a madeira é um bom material para a execução de compósitos.

A aplicação de reforços em madeiras de reflorestamento é recomendada devido ao fato de suas baixas características mecânicas. Aliando o reforço com fibras naturais (sisal) relaciona a questão de sustentabilidade ambiental com a necessidade de um material resistente. Desse modo, pode-se trabalhar a madeira de reflorestamento como parte de um composto laminado colado (MLC).

3.3. Madeira Laminada Colada (MLC)

No final do século XIX, na Alemanha, teve origem a técnica de laminar peças de madeira de pequenas dimensões para se obter grandes peças estruturais. Porém esse processo, patenteado por Hetzer, segundo Teles (2009), somente teve grande utilização a partir de 1913, quando se iniciou a utilização desse tipo de material em estruturas de ponte, cobertura de escolas e fabricas.

A madeira laminada colada (MLC) é um excelente composto estrutural e comumente utilizado devido as suas características de abrangência de dimensões e grande variedade na formação de peças estruturais. As madeiras laminadas coladas (MLC) são elementos estruturais formados por lâminas de madeira com uma determinada espessura, unidas entre si por um determinado adesivo e por compressão das lâminas.

Para Zangiácomo (2003), a indicação de uma determinada espécie para a produção de elementos estruturais de madeira laminada colada com base apenas na sua densidade poderá levar a resultados indesejados. É também importante o conhecimento da permeabilidade da espécie em relação aos adesivos disponíveis comercialmente. A Figura 4 representa o esquema de montagem de uma viga laminada colada.

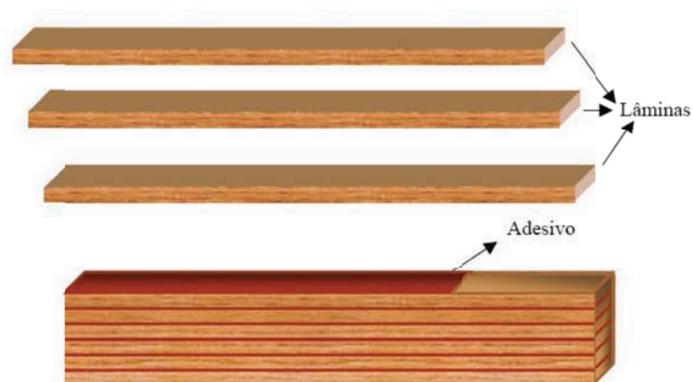


Figura 4 – Esquema de montagem de uma viga de madeira laminada colada (ZANGIÁCOMO, 2003).

As madeiras laminadas coladas, em função do seu processo de fabricação, têm sua homogeneidade maior que a da madeira serrada, pois os defeitos, como nós e outras imperfeições, são distribuídos de maneira aleatória na peça. De acordo com Pfeil e Pfeil (2003) os produtos laminados são fabricados mediante alto padrão de qualidade, garantindo ao produto alta resistência e durabilidade.

Macedo (2000) apresenta que a união longitudinal das lâminas pode ser realizada de três formas: de topo, biselada e dentada (Figura 5). As emendas são realizadas quando se deseja construir vigas de MLC com vãos superiores aos da madeiras serrada, sendo necessária à junção de várias peças. Cabe-se ressaltar, que apesar das emendas de topo serem de fácil execução, estas apresentam deficiência quanto à colagem em termos de resistência, por isso não são admitidas conforme a norma brasileira NBR 7190/97 – Projeto de estruturas de Madeira, da ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS.

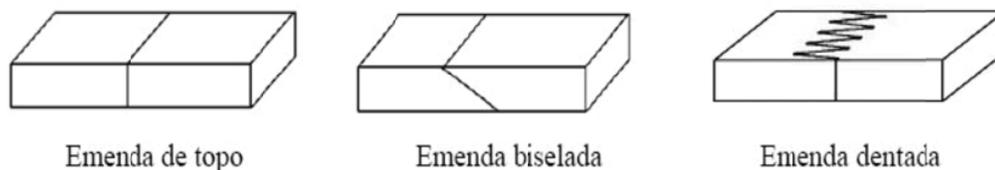


Figura 5 – Tipos de emenda - Macedo (2000)

De acordo com Macedo (2000) as características vantajosas das madeiras laminadas coladas sobre as peças convencionais serradas são:

- Dimensões: podem ser compostas por várias lâminas de madeiras com dimensões variadas, possibilitando a confecção de grandes estruturas;
- Arquitetura: possibilidade de se criar diversos tipos de peças estruturais, sejam elas curvas, arcos e outras ainda mais complexas.
- Qualidade das peças: além da diminuição considerável de defeitos, pode-se combinar madeiras menos resistentes e homogeneizar a montagem das peças.
- Preservação ambiental: podem-se utilizar madeiras de menor qualidade, além de se utilizar madeiras de reflorestamento para a confecção das de peças.

Quanto às desvantagens da utilização, um dos grandes fatores é o processo de fabricação oneroso e lento o qual necessita de equipamentos especiais para a fabricação. Além disso, outro fator muito complexo é a mão de obra especializada para o processo de fabricação.

No caso de vigas laminadas coladas, as fibras devem se situar nos pontos onde há grande solicitação à tração, podendo envolver toda a peça ou parte dela, ou seja, aplicando-a nos pontos mais solicitados da viga.

3.4. Fibras

As fibras são elementos que podem ser utilizado como reforço em uma determinada peça, possibilitando a melhoria nas características mecânicas, tais como, rigidez, resistência à ruptura, dentre outras (Fiorelli, 2002).

Os tipos de fibras mais comuns utilizadas segundo, Fiorelli (2002), são as sintéticas (poliméricas) das quais se podem destacar as fibras de vidro, aramida (kevlar), carbono, boro etc. Podem ser classificadas como unidirecionais (malha / tecido unidirecional), bidimensionais (tecidos orientados em direções ortogonais) ou tridimensionais (tecidos multidimensionais).

Dentre as empresas comerciais, observam-se os dados apresentados pela empresa Barracuda (2000) para algumas fibras sintéticas as cujas propriedades são apresentadas na Tabela 1 a seguir.

Tabela 1 – Características dos tecidos fibras sintéticas mais utilizadas analisadas a 20° (Fonte: Barracuda, 2000) apud Fiorelli (2002)

FIBRAS	RESISTÊNCIA À TRAÇÃO (MPa)	MÓDULO DE ELASTICIDADE (GPa)	DENSIDADE (g/cm ³)
Vidro	900	76	2,55
Aramida (Kevlar)	1500	125	1,44
Carbono	2200	160 a 300	1,75

A utilização de reforços com fibras sintéticas ou naturais vem sendo muito estudada, em especial as fibras naturais, pois além de apresentarem bom desempenho mecânico, tem ainda efeitos positivos no campo econômico e ecológico (Lima, 2004).

3.5. As Fibras Naturais

Toledo (1999) apresenta que as fibras naturais podem ser consideradas como polímeros naturais compostos principalmente por celulose hemicelulose e lignina, além de quantidades menores de açúcares livres, proteínas, extrativos, e produtos inorgânicos.

A lignina atua como material de ligação, unindo as microfibrilas e a hemicelulose. A fibra possui uma parede espessa formada por várias microfibrilas que formam espirais ao longo do eixo da fibra, tendo um lúmen no centro. Além disso, a fibra possui uma parede primária e uma secundária, composta de duas camadas: a camada S1 (primeira da parede secundaria) responsável pela resistência a compressão e a camada S2 (segunda da parede secundaria) responsável pela resistência á tração (RONG et al., 2001). A constituição estrutural de uma fibra elementar é mostrada na Figura 6.

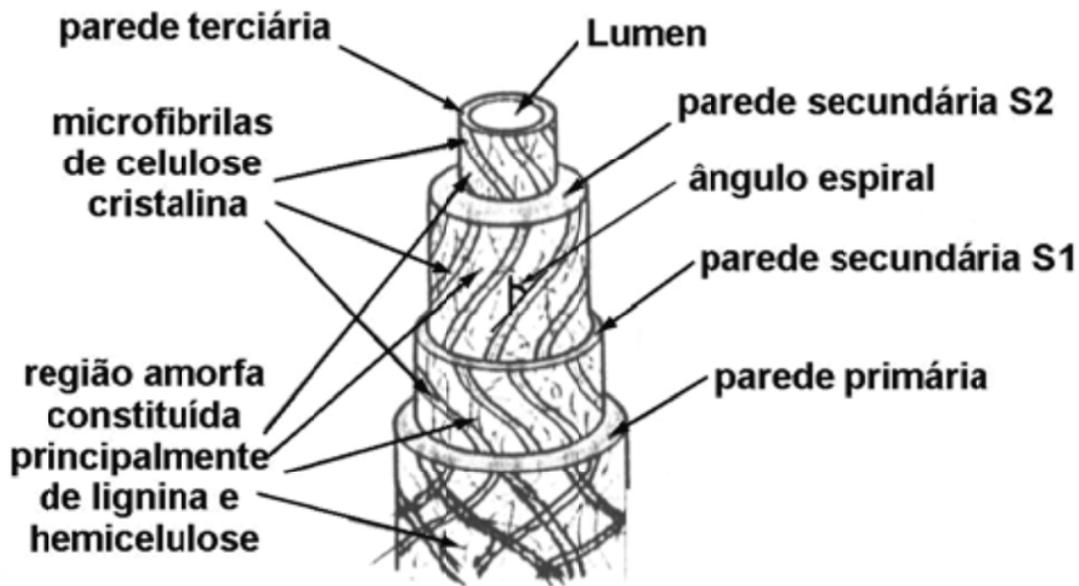


Figura 6 - Constituição estrutural de uma fibra vegetal (Rong et al., 2001).

Morassi (1994) relata que as fibras vegetais são classificadas de acordo com a sua origem e podem ser agrupadas em fibras de semente (algodão), fibras de caule

(juta, linho, cânhamo), fibras de folhas (bananeira, sisal, piaçava, curauá, abacá, henequém), fibras de fruto (coco) e fibras de raiz (zacatão). As fibras oriundas do caule ou das folhas são as chamadas fibras duras e são as mais utilizadas como reforço em compósitos poliméricos. De acordo com Bledzki e Gassan (1999), a interface entre fibra e matriz de um composto é influenciada pelas propriedades de reforço dos compósitos. Na Tabela 2 são apresentadas as características de fibras naturais mais comuns utilizadas comercialmente.

Tabela 2 - Propriedades mecânicas e características de fibras vegetais de (Bledzki; Gassan, 1999).

Fibra	Diâmetro (µm)	Densidade (g/cm ³)	Resistência à tração (MPa)	Módulo de elasticidade (GPa)	Alongamento (%)
Algodão	16 – 21	1,5 – 1,6	287 – 597	5,5 – 12,6	7 – 8
Juta	200	1,3	393 – 773	26,5	1,5 – 1,8
Sisal	50 - 300	1,45	511 – 635	9,4 – 22	3 - 7
Coco	100 - 450	1,15 – 1,45	131 - 175	4 – 13	15 - 40

A composição química das fibras vegetais varia de espécie para espécie e nas diferentes partes da mesma folha. Além disso, fatores como localização geográfica, idade, clima e condições do solo também alteram a composição química das fibras.

De acordo com Bledzki e Gassan (1999) as fibras vegetais possuem diversas vantagens em relação aos demais tipos de fibras, como por exemplo: fonte abundante e de rápida renovação, baixo custo, baixa densidade, altas propriedades específicas, menos abrasivas se comparadas às fibras de vidro, não-tóxicas e biodegradáveis.

Cruz e Ramos (1986) apresentam as fibras vegetais como sendo tradicionalmente utilizadas para a produção de fios, cordas, sacarias, mantas, tapetes, artefatos de decoração. Já Young (1997) apresenta as fibras naturais como uma nova aplicação de grande interesse em materiais compósitos estruturais, sendo de grande importância como reforço em matrizes poliméricas termorrígidas ou termoplásticas, em substituição às fibras sintéticas.

3.6. Fibras de Sisal

As fibras de sisal têm alto desempenho mecânico devido ao elevado teor de celulose. Quimicamente as fibras de sisal possuem 70% de celulose, 12% de hemicelulose, 10% de lignina e uma quantidade mínima de gorduras e outros compostos (Toledo, 2009).

Sua utilização é importante para o desenvolvimento nacional, pois, o Brasil é um dos maiores produtores de sisal chegando a representar receitas superiores aos 100 milhões de dólares (Silva e Beltrão, 1999). Como a cultura do sisal exige um grande volume de mão-de-obra, a importância desta na economia do Brasil é a sua capacidade de tornar produtivas regiões semi-áridas, sem alternativas econômicas, fazendo com que haja diminuição do êxodo rural e a desertificação das regiões semi-áridas e sub-úmida seca, localizadas em sua grande maioria na região nordeste e no norte do estado de Minas Gerais.

Devido à baixa densidade e altas propriedades específicas, as fibras de sisal possuem um ótimo desempenho mecânico quando utilizadas como reforços em polímeros (Toledo, 1999).

De acordo com Gassan (1999), o sisal é uma monocotiledônea originária do México, com folhas estreitas e compridas, medindo de 10 cm a 15 cm de largura e 120 cm a 160 cm de comprimento, de cor verde e terminando por um espinho escuro, conforme a Figura 7.



Figura 7 – Foto de uma plantação de sisal (EMBRAPA – CNPA, 2005).

O processamento de sisal consiste no corte, no desfibramento, na lavagem/secagem e no batimento, dentre outros. A Figura 8 apresenta alguns tipos de malha de sisal após o tratamento e processamento.

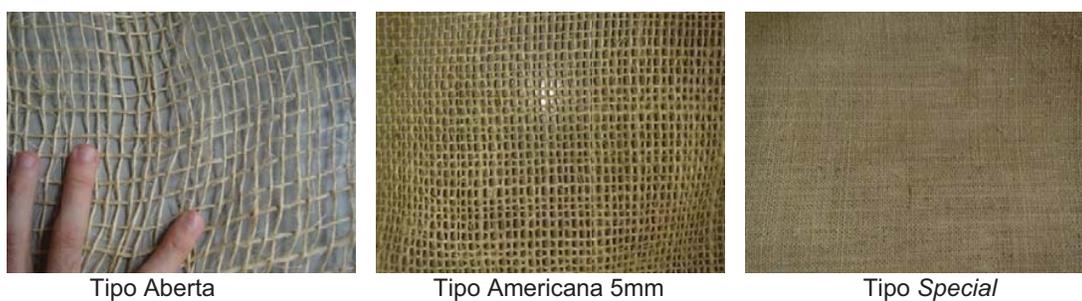


Figura 8 – Malhas de sisal (Tecelagem de Sisal da Bahia, 2011).

Dentro da folha do sisal, há três tipos básicos de fibras: as fibras em arco que crescem em associação com os tecidos de condução da planta e são normalmente encontrados no meio da folha e têm boa resistência mecânica.

As fibras do xilema crescem próximas às fibras de arco e estão conectadas a elas através dos tecidos condutores (Silva, 2009). As fibras estruturais são de grande importância comercial, pois quase não há perdas durante a extração. Essas fibras se encontram nas bordas da folha e que possuem diâmetro equivalente de cerca de 200 μm . A Figura 9 representa tipos de fibra de sisal em uma visão microscópica.

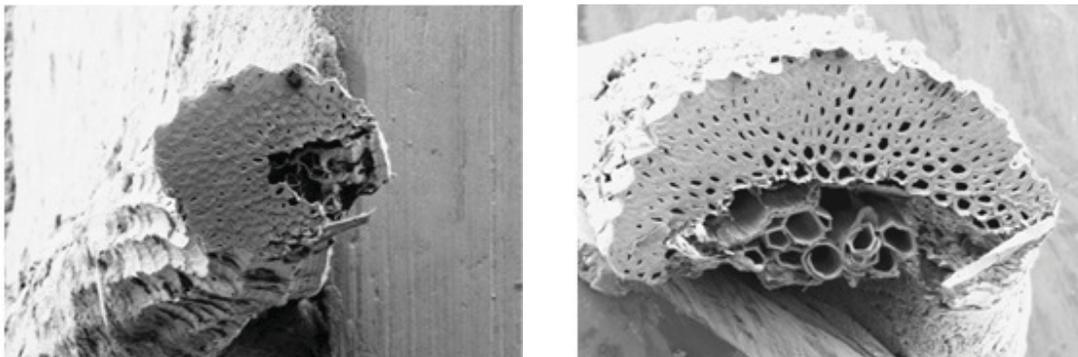


Figura 9 – (a) Fibra de sisal estrutural, e (b) Fibra do arco (Silva, 2009).

Toledo (1999) descreve que seção transversal do sisal não é circular e uniforme. Fisicamente a fibra é composta por quatro partes principais, a parede primária, a parede secundária, a parede terciária e o lúmen. O lúmen varia de tamanho, mas em geral é bem definido.

Silva (2003) apresenta as fibras têxteis de sisal como sendo conhecidas pelas seguintes utilizações: cordas, tapetes e produtos artesanais. Os fios de sisal são também conhecidos comercialmente como barbantes ou cordões.

As fibras têxteis alinhadas podem ser mantidas unidas por torção resultando num material mais compacto conhecido como fio. O tratamento das fibras é conduzido para melhorar as condições de adesão entre as fibras e a matriz ou ainda para alterar as características das fibras. Para serem utilizadas como reforços mecânicos em elementos estruturais de madeira necessitam de uma matriz polimérica que as possa unir e também que permita a sua fixação ao elemento estrutural.

Segundo Silva (2003) as fibras têxteis de sisal são longas, tendo diâmetro equivalente como fração do milímetro e o comprimento entre 90 e 120 centímetros. Por serem longas, seu uso para a fabricação de cordas facilita arranjos orientados. Já o uso de fibras curtas de sisal exige o fracionamento sendo classificadas as fibras têxteis, como fibras técnicas.

Para fins estruturais, a distribuição das fibras na matriz exerce grande influência nas propriedades mecânicas dos compósitos, portanto é conveniente alinhar as fibras com os esforços principais atuantes nas estruturas.

Os arranjos das fibras podem ser classificados conforme as dimensões (curtas ou longas), a orientação (orientada ou aleatória) e a maneira pela qual as fibras estão unidas (isoladas, tecidas ou coladas). Algumas solicitações mecânicas não possuem um sentido preferencial, como as contrações volumétricas por variações térmicas, químicas ou higroscópicas, e nessas situações a distribuição aleatória é mais adequada do que reforçar uma direção específica. A distribuição aleatória das fibras curtas em compósitos resulta num material com propriedades macroscópicas isotrópicas. A distribuição aleatória também é utilizada para reduzir os efeitos e riscos dos materiais com acentuado grau de anisotropia.

De acordo com Silva (2009) as fibras de sisal possuem seção transversal irregular e por isso deve ser considerada a contribuição da flexibilidade ao se realizar um ensaio. Cabe ainda a importante observação de que testes de tração em fibras naturais de pequeno diâmetro não é tarefa fácil. Para que se possam obter valores precisos de módulo de elasticidade, de resistência à tração e de deformação são necessárias elevada precisão na medida da carga e no deslocamento da fibra ensaiada.

Silva (2009) cita que *“o uso de fibras de sisal em compósitos de alto desempenho requer uma compreensão do comportamento mecânico das fibras de si. Há grande discrepância no relato de resistência à tração e módulo de elasticidade das fibras naturais. Isto pode ser devido em parte às incertezas na medição da área transversal da fibra (devido a não-seção circular), bem como a não utilização de alta carga de resolução e técnicas de medição de deslocamento”* daí, conclui-se que por se tratar de um material com seção transversal cujo cálculo da área é impreciso, torna-se difícil adotar coeficientes elásticos com precisão sendo necessário o ensaio com alta precisão.

Toledo (1999) apresenta que o diâmetro da fibra, o comprimento e a velocidade do ensaio influenciam diretamente nas propriedades de tração das fibras. Isto se dá,

devido às falhas distribuídas de forma irregular na fibra, fazendo com que a força aplicada varie dependendo do comprimento da fibra utilizada no ensaio de tração.

Nesse contexto, após pesquisa bibliográfica foram encontradas as seguintes características mecânicas para o sisal, conforme apresentado na Tabela 3.

Tabela 3 – Comparativo entre as características do sisal encontradas na literatura.

Fonte	Densidade (g/cm ³)	Resistência à tração (MPa)	Módulo de Elast. (GPa)	Along. (%)
(Mohanty et al., 2000), (Bledzki; Gassan, 1999), (Baley et al., 1997)	1,45	511 – 635	9,4 – 22	3 – 7
Freire, 2003	1,37	347 - 378	15,2	4,9 - 5,4
Silva, 2009	---	320	18,0	2,6 – 5,2

Com base nos dados da Tabela 3, nota-se que as características das fibras de sisal apresentam valores bem variados.

3.7. Adesivos

O termo adesivo é definido de um modo genérico, como “substância capaz de unir materiais por meio do contato entre suas superfícies”.

Teles (2009) apresenta que um adesivo estrutural deve permitir que a peça após colada, trabalhe monoliticamente durante todo o seu tempo de serviço, sob condições de exposições mais rigorosas, não sendo poluente e ao mesmo tempo possuir características de resistência a água, calor e outros agentes externos.

De acordo com norma brasileira NBR 7190/97 – Projeto de estruturas de Madeira, da ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, é altamente recomendado o uso de adesivo à prova d’água, e, além disso, a mesma indica que devem ser realizados testes de cisalhamento na lâmina de cola e de tração na lâmina de cola para que se verifique a eficiência do adesivo. Com isso, uma resistência mínima de 90% do valor da resistência da madeira utilizada deverá ser encontrada para que o mesmo seja utilizado no processo de fabricação da MLC.

A escolha do adesivo deve ser feita considerando principalmente as características do ambiente onde serão aplicadas as peças, ou seja, o teor de umidade e a variação de temperatura.

Os adesivos são classificados em vários tipos. De acordo com sua composição química podem ser inorgânicos e orgânicos. Dentre os adesivos mais conhecidos para o reforço de peças de MLC com fibras em geral, estão as resinas poliéster, as vinílicas e as epoxídicas.

De acordo com Teles (et al. 2009), os adesivos inorgânicos são geralmente á base de silicatos e agem pela alta temperatura ou através de catalizadores proporcionando uma ligação entre materiais com elevada resistência mecânica.

Os adesivos orgânicos, mais recomendados para a utilização em madeiras, podem ser de origem natural ou sintético. Estes adesivos podem ser termofixos ou termoplásticos.

Os adesivos orgânicos termofixos são aqueles que reagem através de reações químicas ativados por temperatura ou por catalizadores. Dentre estes, podem-se destacar Resinol-Formaldeído, Fenol-Folmaldeído, Uréia-Formaldeído, Poliuretanos, Epóxi.

Os adesivos orgânicos termoplásticos têm por característica a sua cura reversível, ou seja, podem ser amolecidos sob alta temperatura e quando resfriados retornam a condição original e possui vida longa devido à sua estabilidade química. Alguns exemplos de adesivos orgânicos termoplásticos são: adesivos animais, soja, caseína, adesivo poliuretano a base de mamona, dentre outros.

Houwink; Solomon (1965) apud Fiorelli (2002) definem adesão como sendo a atração entre uma superfície sólida e uma segunda fase que pode consistir de partículas individuais, como pequenas gotas, pó ou de uma película líquida ou sólida.

Teles (2009) mostra que os três tipos de adesão mais utilizados são: a adesão mecânica, que é entre superfícies porosas baseadas na união da cola endurecida após

a colagem com os nos poros do aderente, ou seja, depende basicamente da viscosidade, porosidade da superfície ou ainda pela pressão aplicada na união.

A adesão específica ocorre entre superfícies lisas, onde a adesão se dá através das macromoléculas secundárias que provocam forças básicas de adesão, e a adesão química, que se dá através de natureza essencialmente eletrônica (ligações entre átomos ou íons, eletrovalentes e covalentes, etc.).

Cabe-se ressaltar que nesse trabalho não serão analisadas as características de adesivos e serão desconsiderados os seus efeitos na peça. Portanto, será admitido que o adesivo gere uma perfeita união entre as camadas do composto madeira / fibras de sisal, e através desse, estudado o comportamento da peça como um composto. Para que isso seja possível, devem-se apontar as deficiências da matriz do compósito, e seu comportamento quando na aplicação dos reforços com fibras.

Nesse sentido, torna-se necessário o estudo das propriedades elásticas dos materiais para que se identifiquem as deficiências da matriz do composto e o comportamento do composto após a aplicação do reforço com sisal.

4. CONSIDERAÇÕES SOBRE AS PROPRIEDADES ELÁSTICAS DOS MATERIAIS

4.1. Generalidades:

Baseando-se na terceira lei de Newton (Timoshenko, 1985) de que “toda ação gera uma reação”, pode-se compreender que quando um determinado material é solicitado por ações externas, esse, reage de alguma forma. Para os sólidos em geral, essa reação pode ser expressa em tensões e deformações.

Desai (1984) apresenta que um determinado material é considerado elástico, se após ser submetido a ações retorna a sua forma original, sem que haja deformações residuais.

Os materiais em geral, podem ter um comportamento elástico-linear ou elástico não-linear, conforme apresentado na Figura 10.

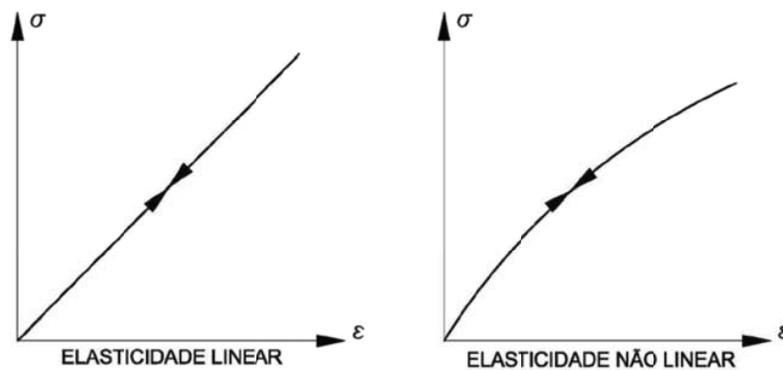


Figura 10 – Gráficos de Tensão/Deformação – Elasticidade – fonte: Desai (1984)

Em materiais elásticos, o estado de tensões depende, unicamente do estado de deformações. A Equação 1, a qual relaciona tensões com deformações, parte da premissa que não são consideradas variações de tempo, e que são consideradas as condições adiabáticas e isotérmicas (Chen e Salieb, 1982).

$$\sigma_{ij} = F_{ij}(\epsilon_{kl}) \dots (1)$$

Sendo F_{ij} uma função-resposta do material, σ_{ij} são tensões e ε_{kl} são deformações.

Chen e Salieb (1982) apresentam que independente das características do material que constitui um sólido, as condições estáticas (forças e tensões) e as geométricas (deslocamentos e deformações) podem ser relacionadas por meio de leis constitutivas, e, uma vez que essas leis são estabelecidas, a formulação para a solução de um problema de mecânica dos sólidos poderá ser resolvida.

A inter-relação das condições estáticas e geométricas é apresentada por Chen e Salieb (1982), conforme a Figura 11.

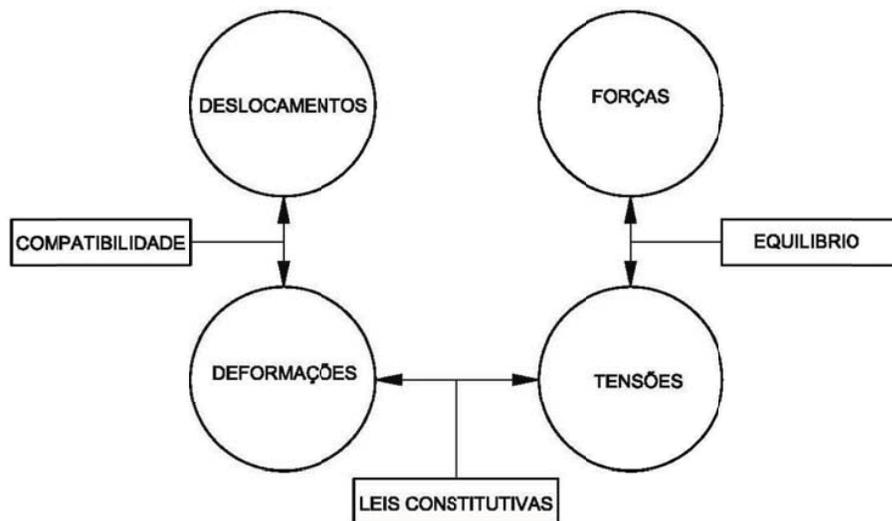


Figura 11 – Inter-relações entre Forças, Tensões, Deformações e Deslocamentos Chen e Salieb (1982)

De uma forma geral, as leis constitutivas tentam modelar matematicamente o comportamento real dos materiais e fornecem as relações tensão e deformação em qualquer ponto do sólido. Essas leis são obtidas por meio de modelos matemáticos que podem ser simples ou complexos, de acordo com o material analisado e as condições a qual o mesmo é submetido.

4.2. As Leis Constitutivas

As leis constitutivas, conforme Figura 10, são apresentadas por Chen e Salieb (1984), como a relação entre as tensões e as deformações de um determinado sólido.

Através do critério da energia de deformação, Chen e Salieb (1984) afirmam que podem ser formuladas equações, ou seja, as equações constitutivas. Seja então uma função polinomial de energia de deformação, no qual C_0 , χ_{ij} , Γ_{ijkl} são constantes, dada por:

$$U_0 = C_0 \delta_{ij} + \chi_{ij} \varepsilon_{ij} + \Gamma_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \dots \quad (2)$$

Conceitualmente a energia de deformação tem valor estacionário em relação ao tensor das deformações, é possível arbitrar que $C_0 = 0$.

Seja a Equação 3, a seguir,

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \dots \quad (3)$$

Aplicando-se a Equação 2 com U_0 de acordo a Equação 3, tem-se:

$$\sigma_{ij} = \chi_{ij} + (\Gamma_{ijkl} + \Gamma_{klij}) \varepsilon_{kl} \dots \quad (4)$$

Reissman e Pawlik (1980) afirmam que para o caso relativo ao "estado natural" no qual as tensões e deformações estão vinculadas a todo o sólido e, também, estão atuando simultaneamente no sólido, podendo-se escrever que:

$$(\sigma_{ij})_0 = \left(\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_0 = 0 \dots \quad (5)$$

Portanto, partindo-se dessa premissa, $\chi_{ij} = 0$. A partir daí, denomina-se que:

$$(\Gamma_{ijkl} + \Gamma_{klij}) = C_{ijkl} \dots \quad (6)$$

Ao aplicar-se a Equação 6 na Equação 4, tem-se:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \dots (7)$$

O tensor C_{ijkl} é chamado de tensor de constantes de elasticidade. Como é possível admitir-se que o determinante $|C_{ijkl}| \neq 0$, pode-se exprimir a lei constitutiva apresentada na Equação 7, pelo tensor de compliância (S_{ijkl}).

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \dots (8)$$

Em forma matricial C_{ijkl} e S_{ijkl} são escritos por $[C]$ e $[S]$ e são determinados respectivamente de matriz de rigidez e de flexibilidade.

Considerando-se que i, j, k e l variam de 1 a 3, os tensores C_{ijkl} e S_{ijkl} , possuiriam 81 (oitenta e um) coeficientes elásticos, que relacionam as 09 (nove) componentes de deformação, com as (09) nove componentes de tensão e vice-versa.

Associando-se então as seguintes derivações:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 U_0}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl} \dots (9)$$

e ainda:

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial^2 U_0}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \dots (10)$$

pode-se afirmar que $C_{(ij)(kl)} = C_{(kl)(ij)}$. Além disso, ainda pode-se relacionar a simetria dos tensores de deformação e tensão.

A simetria do tensor das tensões leva o tensor de 81 (oitenta e um) elementos para 54 (cinquenta e quatro) que, relacionados com a simetria do tensor de deformações leva o tensor a 36 elementos. Entretanto, os tensores C_{ijkl} e S_{ijkl} são simétricos em relação aos pares (i,j) e (k,l) , levando-os a 21 elementos.

É conhecido que tanto as tensões quanto as deformações, tem seus tensores simétricos (Lekhnistskii, 1980), sendo:

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= \sigma_{21} & \epsilon_{12} &= \epsilon_{21} \\ \sigma_{13} &= \sigma_{31} & \epsilon_{13} &= \epsilon_{31} \\ \sigma_{23} &= \sigma_{32} & \epsilon_{23} &= \epsilon_{32}\end{aligned}$$

Dessa maneira, o que seriam nove (09) equações constitutivas, passa a ser seis, com seis termos em cada uma. Nesse sentido, pode-se escrever a lei constitutiva C_{ijkl} :

Na forma matricial: $[\sigma] = [C] [\epsilon]$ ou

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1131} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2231} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3331} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1223} & C_{1231} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & C_{2323} & C_{2331} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3112} & C_{3123} & C_{3131} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \end{Bmatrix} \quad \dots (11)$$

Do mesmo modo, pode-se escrever o tensor S_{ijkl} :

Na forma matricial: $[\epsilon] = [S] [\sigma]$ ou

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & S_{1112} & S_{1123} & S_{1131} \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & S_{2212} & S_{2223} & S_{2231} \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & S_{3312} & S_{3323} & S_{3331} \\ S_{1211} & S_{1222} & S_{1233} & S_{1212} & S_{1223} & S_{1231} \\ S_{2311} & S_{2322} & S_{2333} & S_{2312} & S_{2323} & S_{2331} \\ S_{3111} & S_{3122} & S_{3133} & S_{3112} & S_{3123} & S_{3131} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} \quad \dots (12)$$

Além dessas relações apresentadas, os materiais ainda são caracterizados de acordo com a sua simetria elástica. Conforme Lekhnitskii (1980) os materiais podem ser classificados em homogêneos e não homogêneos, isotrópicos e anisotrópicos em relação a suas propriedades físicas e elásticas, respectivamente.

A respeito dos materiais homogêneos e isotrópicos, esses são os quais suas propriedades elásticas não variam em quaisquer de seus pontos. Quanto aos não homogêneos e anisotrópicos, pode-se considerar que seria o oposto.

Analisando-se de um modo mais amplo dentro da teoria da elasticidade, pode-se afirmar que:

Materiais isotrópicos (Figura 12) são aqueles que têm o mesmo comportamento em quaisquer direções, seja qualquer o eixo de referencia adotado, ou seja, possuem um módulo de elasticidade transversal (G), um módulo de elasticidade longitudinal (E) e o coeficiente de Poisson (ν), inter-relacionados. É o modelo elástico mais usado na engenharia.

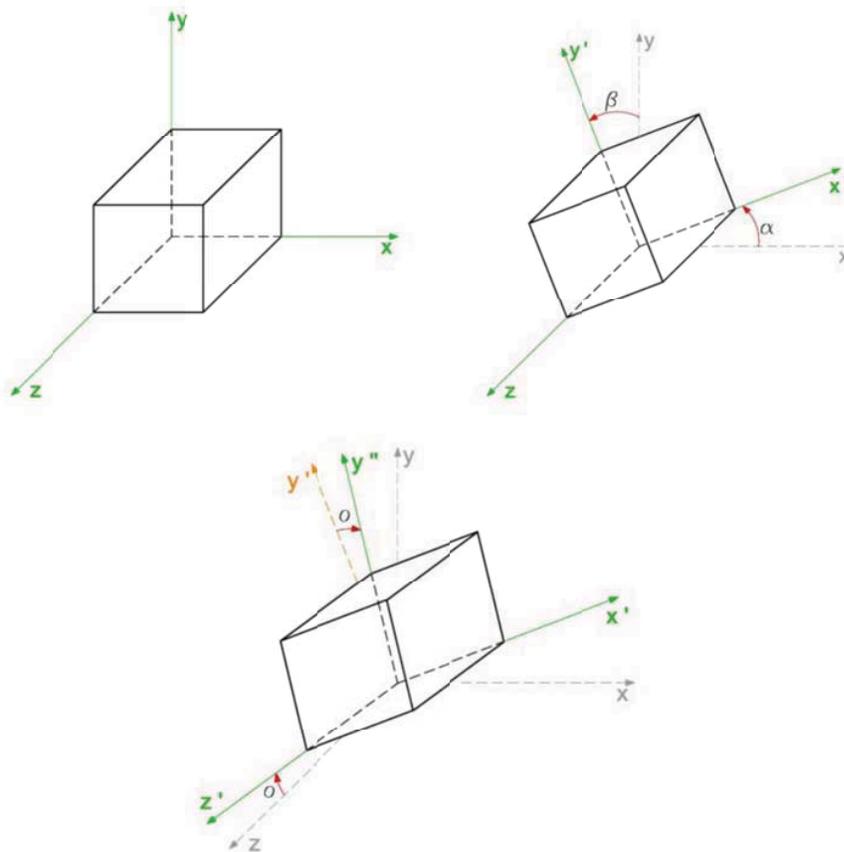


Figura 12 – Representação de planos de rotação em torno dos eixos x, y, z

Nos materiais isotrópicos, as relações são somente entre tensões normais e deformações normais ou tensões tangenciais (cisalhamento) e deformações tangenciais. Não há interação entre elas.

Para um material isotrópico o número de coeficientes elásticos é dois, pois todas as direções são elasticamente equivalentes, portanto, $E=E'$, $\nu=\nu'$, $G=G'$.

Nesse contexto, a matriz de flexibilidade do material isotrópico é apresentada a seguir na Equação 13:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \dots (13)$$

e, são somente duas constantes independentes, pois:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \dots (14)$$

Materiais ortotrópicos são aqueles que possuem eixos ortogonais de simetria elástica, por isso, possuem três módulos de elasticidade longitudinal (E_1 , E_2 , E_3), três módulos de elasticidade transversal (G_{12} , G_{13} , G_{23}) e três coeficientes de Poisson. Utiliza-se essa classificação no estudo de compósitos e materiais fibrosos, como

madeira, por exemplo, quando se deseja um modelo de comportamento elástico mais avançado na engenharia de estruturas.

Nos sólidos ortotrópicos ocorrem deformações normais e tangenciais porem não ocorrem distorções nos ângulos internos do material (Figura 13).

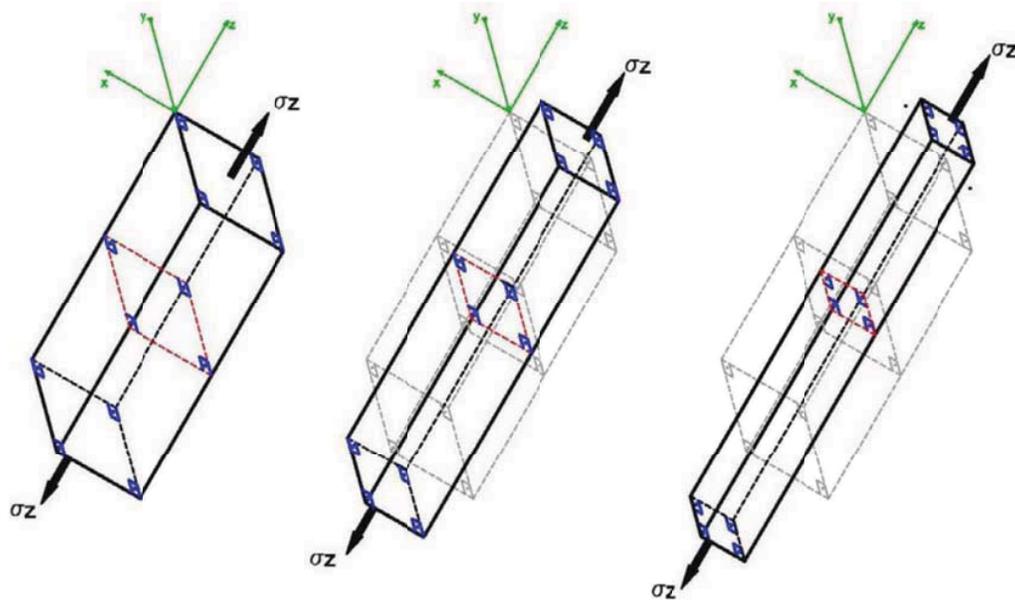


Figura 13 – Representação das deformações nos materiais ortotrópicos, sem distorções.

Para um material ortotrópico, o número de constantes elásticas é nove. Para que isso seja estabelecido, aplica-se uma rotação de 180° em torno dos três eixos cartesianos como mostrado na Figura 14.

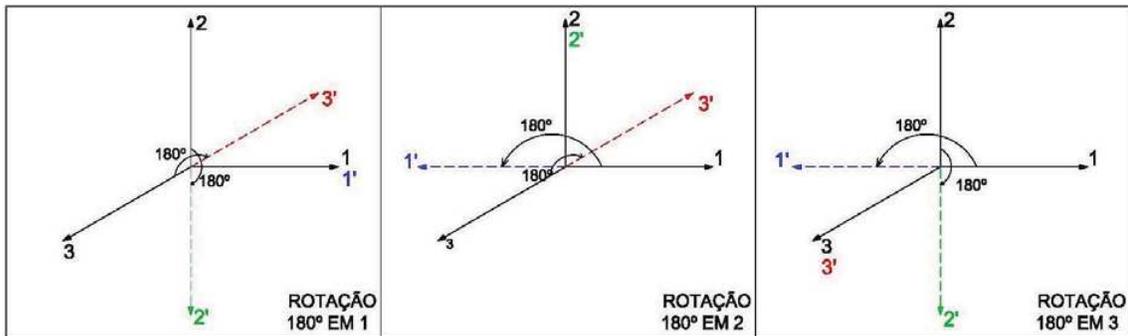


Figura 14 – Rotações de 180° em 1, 2 e 3.

Assim, pode-se escrever as seguintes relações de rotação entre os eixos iniciais e finais.

$$a'_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots (15)$$

$$a'_{22} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \dots (16)$$

$$a'_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \dots (17)$$

com essas relações, observam-se as simetrias de σ , de acordo com Vanalli (2001):

$$\sigma'_{12} = \sigma_{12} \dots \dots \sigma'_{31} = \sigma_{31}$$

$$\sigma'_{12} = \sigma_{12} \dots \dots \sigma'_{23} = \sigma_{23}$$

$$\sigma'_{23} = \sigma_{23} \dots \dots \sigma'_{31} = \sigma_{31}$$

analisando-se essas simetrias, chega-se a conclusão de que a matriz [S] do material será:

$$S = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ S_{1122} & S_{2222} & S_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ S_{1133} & S_{2233} & S_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{2323} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{3131} \end{bmatrix} \dots (18)$$

Pode-se então escrever, em função das constantes de elasticidade [S] por:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{-\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \dots (19)$$

Pode-se, ainda, verificar essa dependência considerando a simetria da matriz S'_{ij} através de:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \dots (20)$$

Observa-se também que ao estudar um material considerado ortotrópico, é necessário compatibilizar os eixos de simetria do material existente com os eixos de transformados, pois caso não sejam coincidentes, isso resultará em uma situação a qual o tensor S_{ij} não será somente de nove constantes, resultando em outro tipo de estudo bem mais complexo que será apresentado a seguir.

Materiais anisotrópicos são aqueles que o comportamento físico-mecânico do material varia em quaisquer direções em que se arbitre um eixo de referencia. Nos sólidos anisotrópicos, além dos coeficientes de elasticidade (longitudinal, transversal e coeficiente de Poisson), ainda existem outros coeficientes associados às interações de tensões e deformações normais e tangenciais. Isso acarreta no aparecimento de

ângulos diferentes de 90° situados como indicados na Figura 15. Esses coeficientes são definidos como coeficientes de influência mútua.

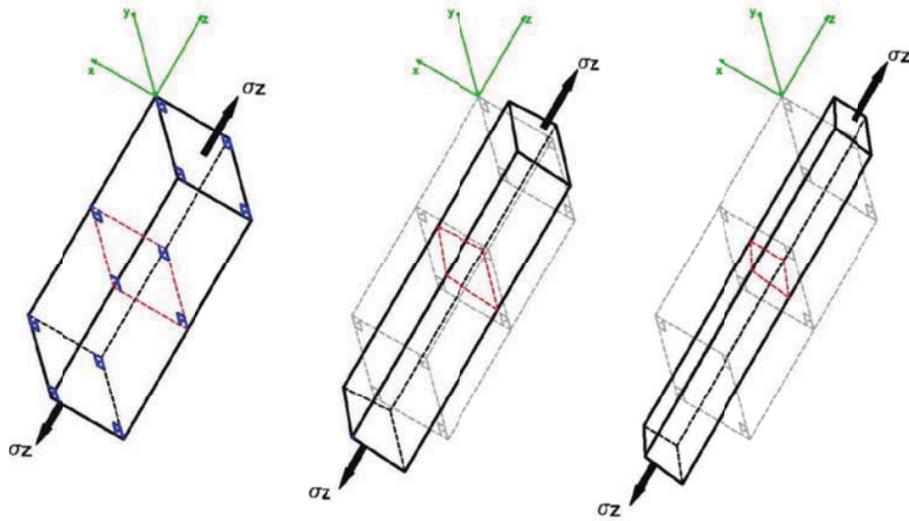


Figura 15 – Representação de deformações e distorções no material

Rabinovich apud Lekhnitskii (1968), apresenta para esses coeficientes elásticos especificamente no caso de anisotropia homogênea as seguintes relações entre tensões e deformações:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E_{11}} (\sigma_1 - \nu_{21}\sigma_2 - \nu_{31}\sigma_3 + \eta_{23,1}\tau_{23} + \eta_{12,1}\tau_{12}) \dots \quad (21)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E_{22}} (-\nu_{12}\sigma_1 + \sigma_2 - \nu_{32}\sigma_3 + \eta_{23,2}\tau_{23} + \eta_{31,2}\tau_{13} + \eta_{12,2}\tau_{12}) \dots \quad (22)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E_{33}} (-\nu_{13}\sigma_1 - \nu_{23}\sigma_2 + \sigma_3 + \eta_{23,3}\tau_{23} + \eta_{31,3}\tau_{13} + \eta_{12,3}\tau_{12}) \dots \quad (23)$$

$$\gamma_{23} = \frac{1}{G_{23}} (\eta_{1,23}\sigma_1 + \eta_{2,23}\sigma_2 + \eta_{3,23}\sigma_3 + \tau_{23} + \mu_{31,23}\tau_{13} + \mu_{12,23}\tau_{12}) \dots \quad (24)$$

$$\gamma_{13} = \frac{1}{G_{13}} (\eta_{1,31}\sigma_1 + \eta_{2,31}\sigma_2 + \eta_{3,31}\sigma_3 + \mu_{23,31}\tau_{23} + \tau_{13} + \mu_{12,31}\tau_{12}) \dots \quad (25)$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{G_{12}} (\eta_{1,12}\sigma_1 + \eta_{2,12}\sigma_2 + \eta_{3,12}\sigma_3 + \mu_{23,12}\tau_{23} + \mu_{31,12}\tau_{13} + \tau_{12}) \dots \quad (26)$$

Nessas equações, E_{11} , E_{22} e E_{33} , são os módulos de Young (tração ou compressão) nas direções dos eixos 1, 2, 3, respectivamente. G_{23} , G_{13} e G_{12} , são os módulos de rigidez dos planos paralelos aos planos dos eixos de coordenadas adotados. ν_{21} , ν_{31} , ..., ν_{23} são os coeficientes de Poisson que se caracterizam por contração na direção de um eixo quando há tensão de tração na direção do outro eixo 1 quando existe (por exemplo, ν_{21} é o resultado da contração na direção do eixo 1 quando existe tensão de tração na direção 2), isto é, o primeiro índice representa a causa e o segundo se restringe ao efeito (MASCIA, 1991). As constantes, $\mu_{31,23}$, ..., $\mu_{31,12}$ são chamadas de coeficientes de Chentsov, as quais caracterizam as distorções em planos paralelos aos planos de coordenadas produzidas por tensões tangenciais, que agem em outros planos paralelos aos planos coordenados. As constantes $\eta_{23,1}$ e $\eta_{12,1}$ são denominadas, conforme Rabinovich, de coeficientes de influência mútua de 1ª espécie. Eles caracterizam extensões nas direções dos eixos principais produzidas por tensões tangenciais agindo nos planos principais. Rabinovich, também denomina que $\eta_{2,13}$, $\eta_{2,31}$, ..., $\eta_{3,12}$ são os coeficientes de influência mútua de 2ª espécie, que expressam, deformações tangenciais nos planos principais, devidas às tensões normais instaladas nos planos principais.

Com isso, transformando-se as equações numa relação matricial, conforme:

$$[\varepsilon]=[S]x[\sigma] \dots(27)$$

Obtém-se a seguinte matriz para um material anisotrópico:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_2} & \frac{-\nu_{13}}{E_3} & \frac{\eta_{1,23}}{G_{23}} & \frac{\eta_{1,31}}{G_{13}} & \frac{\eta_{1,12}}{G_{12}} \\ \frac{-\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{23}}{E_3} & \frac{\eta_{2,23}}{G_{23}} & \frac{\eta_{2,31}}{G_{13}} & \frac{\eta_{2,12}}{G_{12}} \\ \frac{-\nu_{31}}{E_1} & \frac{-\nu_{32}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & \frac{\eta_{3,23}}{G_{23}} & \frac{\eta_{3,31}}{G_{13}} & \frac{\eta_{3,12}}{G_{12}} \\ \eta_{23,1} \frac{E_1}{E_2} & \eta_{23,2} \frac{E_2}{E_3} & \eta_{23,3} \frac{E_3}{G_{23}} & 1 & \mu_{23,31} \frac{G_{13}}{G_{23}} & \mu_{23,12} \frac{G_{12}}{G_{23}} \\ \eta_{31,1} \frac{E_1}{E_2} & \eta_{31,2} \frac{E_2}{E_3} & \eta_{31,3} \frac{E_3}{G_{23}} & \mu_{31,23} \frac{G_{23}}{G_{13}} & 1 & \mu_{31,12} \frac{G_{12}}{G_{13}} \\ \eta_{12,1} \frac{E_1}{E_2} & \eta_{12,2} \frac{E_2}{E_3} & \eta_{12,3} \frac{E_3}{G_{23}} & \mu_{12,23} \frac{G_{23}}{G_{13}} & \mu_{12,31} \frac{G_{13}}{G_{12}} & 1 \end{bmatrix} \dots (28)$$

Os materiais anisotrópicos não são, normalmente, simulados ou estudados profundamente. Até o presente momento constata-se a dificuldade efetuar ensaios em todas as direções necessárias para que se definam todos os coeficientes dos materiais anisotrópicos.

Conforme já apresentado, os materiais anisotrópicos possuem 21 (vinte e um) elementos independentes, porém segundo autores como Lekhnitskii (1981), apud MASCIA (1991) os materiais anisotrópicos não possuem 21 (vinte e um) elementos e sim 18 (dezoito).

Isso ocorre ao se diagonalizar o tensor das tensões, por meio de uma mudança de base e referindo-se a novas direções principais, três elementos desse tensor seriam nulos:

$$\sigma_{12}=\sigma_{23}=\sigma_{31}=0 \dots (29)$$

Portanto, pode-se escrever que:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1131} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2231} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3331} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1223} & C_{1231} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & C_{2323} & C_{2331} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3112} & C_{3123} & C_{3131} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{Bmatrix} \dots (30)$$

Apesar do tensor das tensões ter sido diagonalizado, o tensor das deformações poderia não ser. Assim com as tensões principais aplicadas poderiam ocorrer deformações normais e tangenciais.

Analisando-se o apresentado em (30) e discretizando somente os elementos onde o tensor σ é igual a 0, tem-se:

$$0 = C_{1211} \varepsilon_{11} + C_{1222} \varepsilon_{22} + C_{1233} \varepsilon_{33} + C_{1212} 2\varepsilon_{12} + C_{1223} 2\varepsilon_{23} + C_{1231} 2\varepsilon_{31} \dots \quad (31)$$

$$0 = C_{2311} \varepsilon_{11} + C_{2322} \varepsilon_{22} + C_{2333} \varepsilon_{33} + C_{2312} 2\varepsilon_{12} + C_{2323} 2\varepsilon_{23} + C_{2331} 2\varepsilon_{31} \dots \quad (32)$$

$$0 = C_{3111} \varepsilon_{11} + C_{3122} \varepsilon_{22} + C_{3133} \varepsilon_{33} + C_{3112} 2\varepsilon_{12} + C_{3123} 2\varepsilon_{23} + C_{3131} 2\varepsilon_{31} \dots \quad (33)$$

Com base nisso, MASCIA (1991), apresenta o fato de não haver independência linear das deformações, ou dos termos C_{ijkl} não serem todos simultaneamente nulos, pois essa independência acarretaria para quaisquer estado de deformação sempre estado principal de tensão. Perante a presente abordagem, constata-se que os termos independentes em C_{ijkl} ou S_{ijkl} são formados pelos 06 (seis) termos da diagonal principal, mais quinze termos, entre os quais apenas doze são independentes, perfazendo-se, dessa forma, 18 (dezoito) termos independentes.

Com efeito, para um estado de tensões principais suas respectivas direções principais não coincidem, via de regra, com suas direções principais de deformações num material anisotrópico.

Nesse contexto, serão apresentados conceitos sobre transformações de coordenadas e suas implicações sobre tensões e deformações, bem como sobre as constantes de elasticidade dos tensores de quarta ordem S_{ij} e C_{ij} , esses necessários para a obtenção dos resultados desse trabalho.

4.3. As Transformações de Coordenadas

As transformações de coordenadas são uma ferramenta importante para a análise estrutural de determinadas peças, pois, nos casos dos materiais compósitos, aqui discutidos, em geral ortotrópicos e fibrosos, as direções cartesianas das peças nem sempre são as mesmas direções das fibras dos materiais.

Na literatura, diversos autores apresentam as transformações de coordenadas e suas aplicações, cada qual dentro de uma linha distinta de análise.

Nesse trabalho são analisados os conceitos e estudos, apresentados pelos seguintes autores: Myklestad (1967); Goodman e Bodig (1970); Chen e Saleeb (1982); Bindzi e Samson (1995); Hearmonson e Cramer (1997); Lekhnistskii (1968), os quais são baseadas as transformações.

4.3.1. Transformações de Coordenadas por Myklestad:

Myklestad (1967) apresenta na Figura 16 dois sistemas cartesianos de coordenadas com uma origem comum Q. A distância \overline{AQ} ao longo do eixo $1'$ é uma unidade de comprimento. O ponto B é a projeção do ponto A no plano (1,2) e o ponto E é a posição do ponto A no plano 2,3. O ponto C é a projeção de ambos os pontos A e B no eixo 1, e a distância \overline{QC} é definida por $a_{1'1}$. a distância $a_{1'1}$ é igual à $\cos(1',1)$, quando os ângulos estão em $1'$ e 1.

Quando o ponto A é projetado sobre dois eixos até o ponto D é determinado que $\overline{QD} = a_{1'2} = \cos(1',2)$ e quando esse é projetado sobre o eixo 3 até o ponto F é determinando que $\overline{QF} = a_{1'3} = \cos(1',3)$.

Essa transformação define os coeficientes entre o eixo $1'$ e os eixos 1,2,3.

Ao se estabelecer um único comprimento ao longo do eixo $2'$ e projetá-lo sobre os eixos 1, 2 e 3 são encontrados os coeficientes de transformação $a_{2'1}=\cos(2',1)$, $a_{2'2}=\cos(2',2)$ e $a_{2'3}=\cos(2',3)$.

Do mesmo modo, ao se estabelecer um único comprimento ao longo do eixo 3' são encontrados $a_{3'1}=\cos(3',1)$, $a_{3'2}=\cos(3',2)$ e $a_{3'3}=\cos(3',3)$.

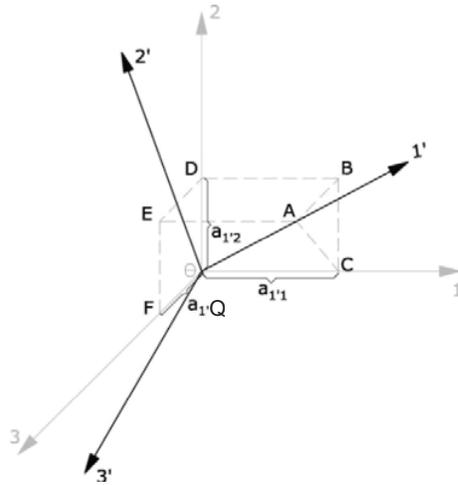


Figura 16 – Transformação de Coordenadas – Miklestad (1967)

Ou seja, Miklestad (1967) estabelece que um único vetor ao longo do eixo 1, projetado sobre os eixos 1', 2' e 3', resultam em:

$$a_{11'}=\cos(1,1')=\cos(1',1)$$

$$a_{12'}=\cos(1,2')=\cos(2',1)$$

$$a_{13'}=\cos(1,3')=\cos(3',1)$$

Pode-se efetuar as transformações para os eixos 2 e 3, seguindo o mesmo processo, obtendo-se com isso:

$$a_{i'j'}=a_{ji'}=\cos(i',j) \dots (34)$$

Convertendo-se a Equação 34 na forma matricial, essa seria escrita por:

$$a_{i'j'} = \begin{bmatrix} a_{11'} & a_{12'} & a_{13'} \\ a_{21'} & a_{22'} & a_{23'} \\ a_{31'} & a_{32'} & a_{33'} \end{bmatrix} \dots (35)$$

e:

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} a_{1'1} & a_{1'2} & a_{1'3} \\ a_{2'1} & a_{2'2} & a_{2'3} \\ a_{3'1} & a_{3'2} & a_{3'3} \end{bmatrix} \dots (36)$$

Miklestad (1967) apresenta as transformações, utilizando o conceito de projeção de eixos original e transformado, trabalhando critérios de trigonometria, conseguindo relacionar todos os eixos 1, 2 e 3 originais com os eixos 1' 2' e 3' transformados.

Desse modo, Miklestad (1967) apresenta a transformação de coordenadas, baseando-se nos ângulos de Euler (φ, η, ω), e efetuando três etapas de transformação considerando-se quatro eixos de coordenadas cartesianas, sendo um fixo e três que podem girar de qualquer forma, todos a partir de uma origem Q.

Efetuando-se uma rotação em torno de 1, com um ângulo φ , obtêm-se a rotação em torno do eixo 1, apresentada na Figura 17:

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\text{sen } \varphi \\ 0 & \text{sen } \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \dots (37)$$

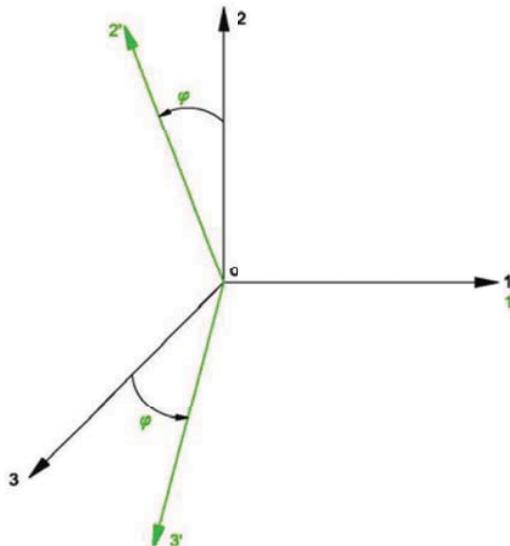


Figura 17 – Representação de rotação em torno do eixo 1 – Miklestad (1967)

Partindo-se então da rotação apresentada na Equação 37, mantém-se os eixos na posição final de rotação e em seguida efetua-se a segunda rotação em torno de 3', apresentada na Figura 18:

$$a_{i' i''} = \begin{bmatrix} \cos \eta & -\text{sen } \eta & 0 \\ \text{sen } \eta & \cos \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots (38)$$

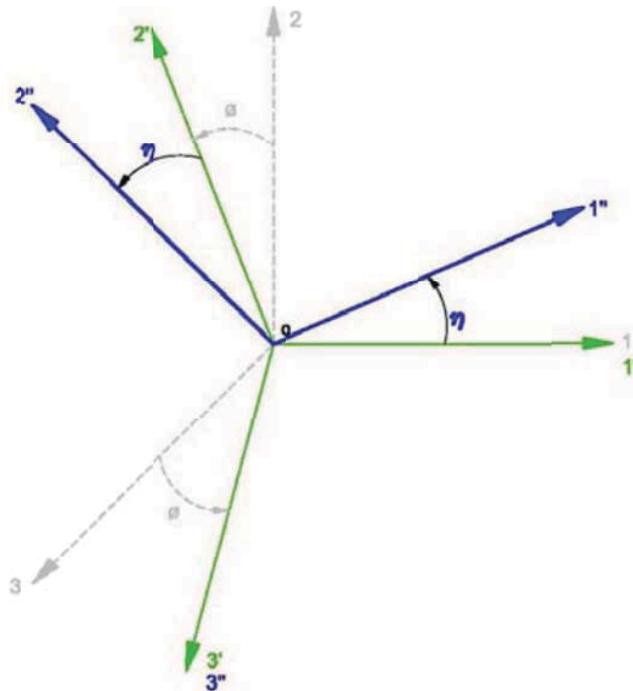


Figura 18– Representação de rotação em torno do eixo 3' – Miklestad (1967)

Finalmente, efetua-se a terceira transformação em torno do eixo 1'' conforme apresentado na Figura 19:

$$a_{i'' i'''} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\text{sen } \omega \\ 0 & \text{sen } \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \dots (39)$$

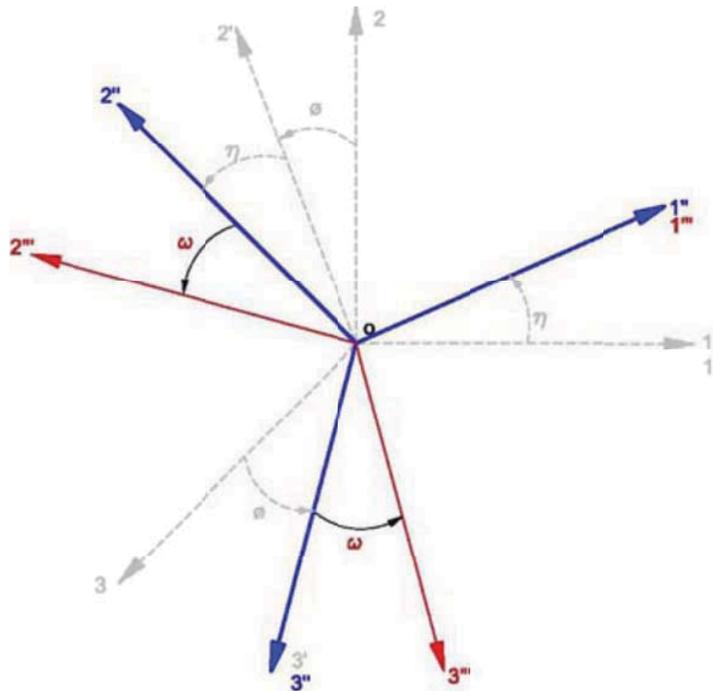


Figura 19– Representação de rotação em torno do eixo 1'' – Micklestad (1967)

A matriz final de transformação é escrita por:

$$a_{i''j''} = \begin{bmatrix} \cos \eta & -\text{sen } \eta \cos \omega & \text{sen } \eta \text{ sen } \omega \\ \cos \varphi \text{ sen } \eta & \cos \varphi \cos \eta \cos \omega - \text{sen } \varphi \text{ sen } \omega & \cos \varphi \cos \eta \text{ sen } \omega - \text{sen } \varphi \cos \omega \\ \text{sen } \varphi \text{ sen } \eta & \text{sen } \varphi \cos \eta \cos \omega + \cos \varphi \text{ sen } \omega & -\text{sen } \varphi \cos \eta \text{ sen } \omega + \cos \varphi \cos \omega \end{bmatrix} \dots(40)$$

ou ainda, $a_{i''j''} = a_{i'j'} a_{i'j'}$.

4.3.2. Transformações de Coordenadas por Goodman e Bodig

Goodman e Bodig (1970) apresentam uma relação de transformação de coordenadas para um bloco de madeira entre os eixos principais da peça e os eixos anatômicos da madeira, conforme a Figura 20:

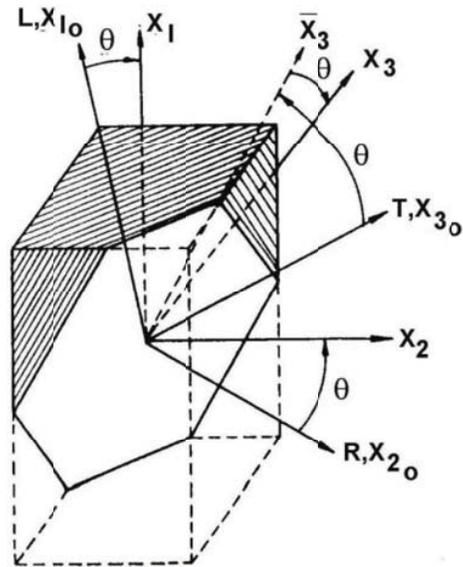


Figura 20- Transformação de coordenadas de Goodman e Bodig (1970).

Inicialmente, Goodman e Bodig (1970) efetuam uma rotação em torno de L (longitudinal):

$$M_{ij}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ 0 & \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \dots (41)$$

Em seguida, uma rotação em torno de R (radial):

$$M_{ij}^2 = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \text{sen } \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \dots (42)$$

Essa transformação resulta na apresentada na Equação 43 na forma matricial por $M_{ij}^2 = M_{ij}^1$, ou:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\text{sen } \phi \cos \theta & \text{sen } \phi \cos \theta \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \phi & -\cos \phi \text{sen } \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L \\ R \\ T \end{Bmatrix} \dots (43)$$

Cabe ressaltar que essa transformação é limitada não se despreendendo do plano formado pelos eixos X_1 e X_3 .

4.3.3. Transformações de Coordenadas por Chen e Salleb:

Chen e Salleb (1982) apresentam conceitos gerais de cálculo vetorial em notação indicial. Assim um vetor V , com coordenadas v_i associados a um eixo de coordenadas, pode ser rotacionado, e essas coordenadas estão relacionadas com um novo sistema. Portanto, num eixo cartesiano de coordenadas x_i e x_i' , e o vetor V tem v_i e v_i' nos dois sistemas. Essas componentes são relacionadas por cossenos dos ângulos positivos de x_i' e x_i .

Seja então l_{ij} , a representação de $\cos(x_i', x_j)$, que são os cossenos entre os eixos x_i' e x_j para i e j variando de 1 a 3, pode-se escrever que:

$$v'_i = l_{ij}v_j \dots (44)$$

Esses cossenos são exibidos na forma matricial da Tabela 4. Cabe ressaltar que a matriz associada não é simétrica ($l_{ij} \neq l_{ji}$), pois, como se pode observar, l_{12} é o cosseno do ângulo entre x_1' e x_2 , ao passo que l_{21} é o cosseno do ângulo x_2' e x_1 .

Tabela 4 – Cossenos Diretores (l_{ij}) – Fonte Chen e Salleb (1982)

Eixos	x_1	x_2	x_3
x_1'	l_{11}	l_{12}	l_{13}
x_2'	l_{21}	l_{22}	l_{23}
x_3'	l_{31}	l_{32}	l_{33}

Com base na Figura 21 o vetor base e'_i pode ser expresso no eixo x_i como:

$$e'_i = (e'_i \cdot e_1)e_1 + (e'_i \cdot e_2)e_2 + (e'_i \cdot e_3)e_3 = l_{i1}e_1 + l_{i2}e_2 + l_{i3}e_3 \dots (45)$$

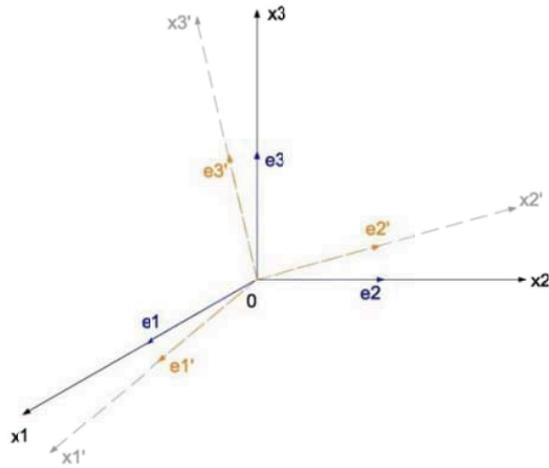


Figura 21– Transformação de Coordenadas – Chen e Salleb (1982)

Com isso conclui-se que:

$$e_i = l_{ji} e'_j \dots (46)$$

Como:

$$e'_i \cdot e'_j = \delta_{ij} \dots (47)$$

Sendo δ_{ij} o chamado “delta de Kronecker”, no qual para $i \neq j$ $\delta_{ij}=0$ e para $i=j$ $\delta_{ij}=1$:

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots (48)$$

Então:

$$l_{ri} e'_i \cdot l_{kj} e_j = l_{ri} l_{kj} \delta_{ij} = l_{ri} l_{kj} \dots (49)$$

Ao se aplicar similarmente para $e'_i \cdot e_j$ e refazendo-se os passos das Equações 45 a 49, no vetor arbitrário V , pode-se expressar na forma de $v_i e_i$ ou $v'_i e'_i$:

$$v'_i = V \cdot e'_i = v_j e_j \cdot e'_i = v_j e_j \cdot l_{ik} e_k = l_{ik} v_j \delta_{jk} = l_{ij} v_j \dots (50)$$

Portanto:

$$v'_i = l_{ij} v_j \dots (51)$$

Aplicando-se a Equação de 49, para v_i , obtêm-se:

$$v_i = l_{ji} v'_j \dots (52)$$

De maneira similar, se no ponto O da Figura 21 houverem coordenadas x no sistema anterior e x' no sistema rotacionado, então:

$$x'_i = l_{ij} x_j \dots (53)$$

$$x_i = l_{ji} x'_j \dots (54)$$

Com isso, conclui-se que:

$$l_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} \dots (55)$$

Portanto, Chen e Salleb (1982) mostram como deve ser feita uma única rotação de um determinado eixo, para um tensor de segunda ordem, que poderia ser utilizado no caso de tensores de tensão ou deformação.

Chen e Salleb (1982) colocam que o mesmo método pode ser utilizado para qualquer outro tipo de rotação.

4.3.4. Transformações de Coordenadas por Bindzi e Samson:

Bindzi e Samson (1995) apresentam a seguinte transformação de coordenadas:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\text{sen } \phi \cos \theta & \text{sen } \phi \text{ sen } \psi \\ \text{sen } \phi & \cos \phi \cos \psi & \cos \phi \text{ sen } \psi \\ 0 & \text{sen } \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L \\ R \\ T \end{Bmatrix} \dots (56)$$

Onde "L" é a direção longitudinal, "R" a direção radial e "T" a direção tangencial das fibras.

Ao se discretizar tal transformação obtém-se:

a. Rotação de um ângulo qualquer ϕ em torno de L:

$$M_{ij}^1 = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \text{sen } \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \dots (57)$$

b. Rotação de um ângulo qualquer ψ em torno de R:

$$M_{ij}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ 0 & \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \dots (58)$$

Ou seja, Bindzi e Samson (1995) aplicam rotação em a um eixo fixo, e com essa discretização, observa-se que:

$$M_{i_m} = M_{i_k}^2 M_{k_m}^1 \dots (59)$$

A Figura 22 representa a transformação de Bindzi e Samson para um bloco de madeira:

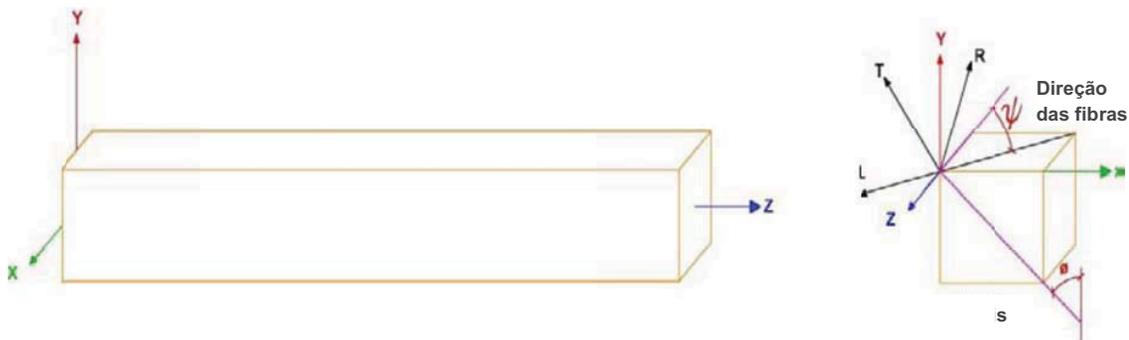


Figura 22- Transformação de coordenadas de Bindzi e Samson.

Com isso, ao se considerar rotações negativas em torno de L (longitudinal) e R (radial), obtém-se então a matriz dada na Equação 56.

4.3.5. Transformações de Coordenadas por Hearmonson e Cramer:

Seja a Figura 23 apresentada por Hearmonson e Cramer (1997), representando um bloco de madeira, no qual se destaca um cilindro associado com as direções longitudinal (L), radial (R), e transversal (T), relacionadas com o crescimento da árvore:

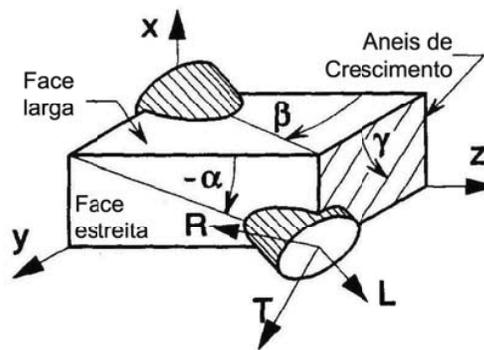


Figura 23– Transformação de Coordenadas – Hearmonson e Cramer (1997)

Hearmonson e Cramer (1997) adotam um eixo cartesiano x, y, z, cuja origem é o ponto de intersecção das arestas $-\alpha$, β e γ , e, ao aplicar-se uma rotação em relação a essas arestas relaciona-se as propriedades de elasticidade nas direções principais do material, ou seja, longitudinal (L), radial (R) e transversal (T) com as propriedades de elasticidade dessas direções atribuídas em função dessas arestas.

Com isso, Hearmonson e Cramer apresentam a seguinte transformação de coordenadas:

$$A = \begin{bmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda & 0 \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \rho & \sin \rho \\ 0 & -\sin \rho & \cos \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots (60)$$

Então da Equação 60, obtêm-se:

$$A = \begin{bmatrix} \cos \lambda \cos \phi - \text{sen } \lambda \cos \rho \text{ sen } \phi & \cos \lambda \text{ sen } \phi + \text{sen } \lambda \cos \rho \cos \phi & \text{sen } \lambda \text{ sen } \rho \\ -\text{sen } \phi \cos \lambda - \cos \lambda \cos \rho \text{ sen } \phi & -\text{sen } \lambda \text{ sen } \phi + \cos \lambda \cos \rho \cos \phi & \cos \lambda \text{ sen } \rho \\ \text{sen } \rho \text{ sen } \phi & -\text{sen } \rho \cos \phi & \cos \rho \end{bmatrix} \dots(61)$$

Ao se relacionar a Equação 60, com os ângulos de Euler (Figura 24), se obtêm os sinais:

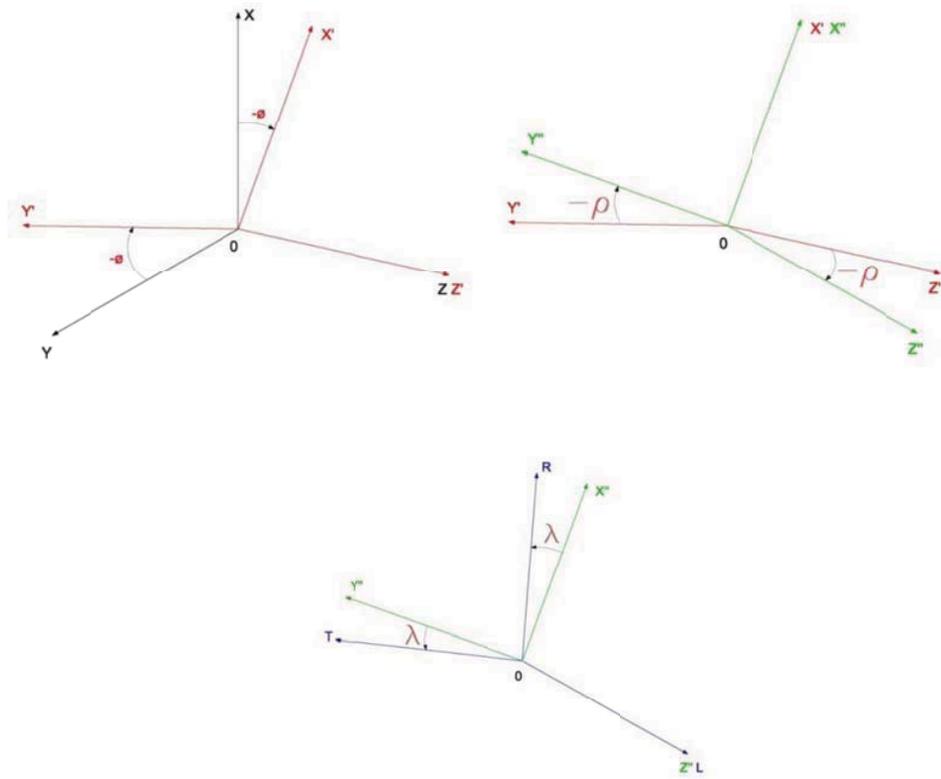


Figura 24- Ângulos de Euler.

Hearmonson e Cramer (1997) relacionam os dados da Figura 23, com os da Equação 60 e Figura 24, obtendo então:

$$\begin{Bmatrix} R \\ T \\ L \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix};$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} R \\ T \\ L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{Rx} & a_{Ry} & a_{Rz} \\ a_{Tx} & a_{Ty} & a_{Tz} \\ a_{Lx} & a_{Ly} & a_{Lz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \dots(62)$$

E as componentes do eixo L no plano x-z resultam em:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_{Lx}}{a_{Lz}} \dots (63)$$

No plano y-z:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a_{Ly}}{a_{Lz}} \dots (64)$$

e o ângulo γ vale:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{a_{Ry}}{a_{Rx}} \dots (65)$$

Então, determinam-se os elementos da matriz de transformação em função dos ângulos das arestas. Os ângulos de Euler ficam, então, sendo:

$$\phi = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \operatorname{sen} \beta} \right);$$

$$\rho = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{sen} \rho}{\cos \alpha \operatorname{sen} \phi} \right);$$

$$\lambda = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{sen} \gamma \cos \phi - \cos \gamma \operatorname{sen} \phi}{\cos \rho (\cos \gamma \cos \phi + \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \phi)} \right) \dots (66)$$

4.3.6. Transformações de Coordenadas por Lekhnistskii

Segundo Lekhnistskii (1968) é possível transformar, quando necessário, um sistema de coordenadas existente em outro, através de sistemas de coordenadas ortogonais, mas que não sejam necessariamente cartesianos.

Tendo em vista tal definição, Lekhnitskii (1968), apresenta a seguinte matriz de transformação, ou os cossenos diretores conforme a Tabela 5.

Tabela 5 – Cossenos Diretores - Fonte: LEKHNITSKII (1981).

	x	y	z
x'	l_{11}	l_{12}	l_{13}
y'	l_{21}	l_{22}	l_{23}
z'	l_{31}	l_{32}	l_{33}

Fixando-se um eixo de coordenadas e rotacionando-se os dois restantes, obtêm-se uma nova matriz, transformada. Por exemplo, fixa-se o eixo y e rotaciona-se o plano x, z, por um ângulo φ , obtendo-se o apresentado na Tabela 6.

Tabela 6 – Rotação em torno do eixo y – Fonte: LEKHNITSKII (1981).

	x	y	z
x'	$\text{Cos}(\varphi)$	0	$-\text{Sen}(\varphi)$
y'	0	1	0
z'	$\text{Sen}(\varphi)$	0	$\text{Cos}(\varphi)$

Lekhnitskii (1968) efetuou essas transformações de coordenadas para as componentes de tensão e deformação, para que num segundo momento apresentar uma matriz de transformação para as componentes dos coeficientes de elasticidade.

4.3.7. Transformação tensores de segunda ordem (tensões e deformações):

Um tensor de segunda ordem pode ser representado indicialmente através de $A_{i,j}$, com i e j variando de 1 a 3, e ser representado matricialmente por:

$$A_{i,j} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \dots (67)$$

São apresentados na Tabela 4, cossenos diretores para a exemplificação e uma rotação de eixos, ou seja, ao se rotacionar o tensor $A_{i,j}$ em torno de um eixo qualquer, obtém-se uma matriz $A'_{i,j}$. Esse tensor $A_{i,j}$, pode ser um tensor de tensões ou um tensor de deformações.

Lekhnistskii (1968) aplica uma rotação em um tensor de tensões original, obtendo a seguinte notação:

$$\sigma'_{ij} = l_{ik} l_{jl} \sigma_{kl} \dots (68)$$

A qual também pode ser representada de maneira inversa:

$$\sigma_{ij} = l_{ik} l_{jl} \sigma'_{kl} \dots (69)$$

Portanto, partindo-se da Equação 68 apresentada por Lekhnistskii, obtém-se a seguinte representação:

$$A'_{i,j} = l_{ik} l_{jl} A_{kl} \dots (70)$$

Agora, aplicando-se a transformação apresentada em (70) com base na formulação dos cossenos de Lekhnistskii, tem-se que:

$$\begin{aligned} A'_{11} &= A_{11}l_{11}^2 + A_{22}l_{12}^2 + A_{33}l_{13}^2 + A_{12}l_{11}l_{12} + A_{13}l_{11}l_{13} + A_{21}l_{11}l_{12} + A_{23}l_{12}l_{13} + A_{31}l_{11}l_{13} + A_{32}l_{12}l_{13} \\ A'_{12} &= A_{11}l_{11}l_{21} + A_{12}l_{11}l_{22} + A_{21}l_{12}l_{21} + A_{13}l_{11}l_{23} + A_{22}l_{12}l_{22} + A_{31}l_{21}l_{13} + A_{23}l_{12}l_{23} + A_{32}l_{13}l_{22} + A_{33}l_{13}l_{23} \\ A'_{13} &= A_{11}l_{11}l_{31} + A_{12}l_{11}l_{32} + A_{21}l_{12}l_{31} + A_{13}l_{11}l_{33} + A_{22}l_{12}l_{32} + A_{31}l_{13}l_{31} + A_{23}l_{12}l_{33} + A_{32}l_{13}l_{32} + A_{33}l_{13}l_{33} \\ A'_{21} &= A_{11}l_{11}l_{21} + A_{12}l_{12}l_{21} + A_{21}l_{11}l_{22} + A_{13}l_{21}l_{23} + A_{22}l_{12}l_{22} + A_{31}l_{11}l_{23} + A_{23}l_{13}l_{22} + A_{32}l_{12}l_{23} + A_{33}l_{13}l_{23} \\ A'_{22} &= A_{11}l_{21}^2 + A_{22}l_{22}^2 + A_{33}l_{23}^2 + A_{12}l_{21}l_{22} + A_{21}l_{21}l_{22} + A_{13}l_{21}l_{23} + A_{31}l_{21}l_{23} + A_{23}l_{22}l_{23} + A_{32}l_{22}l_{23} \\ A'_{23} &= A_{11}l_{21}l_{31} + A_{12}l_{21}l_{32} + A_{21}l_{22}l_{31} + A_{13}l_{21}l_{33} + A_{22}l_{22}l_{32} + A_{31}l_{31}l_{23} + A_{23}l_{22}l_{33} + A_{32}l_{23}l_{32} + A_{33}l_{23}l_{33} \\ A'_{31} &= A_{11}l_{11}l_{31} + A_{12}l_{12}l_{31} + A_{21}l_{11}l_{32} + A_{13}l_{13}l_{31} + A_{22}l_{12}l_{32} + A_{31}l_{11}l_{33} + A_{23}l_{13}l_{32} + A_{32}l_{12}l_{33} + A_{33}l_{13}l_{33} \\ A'_{32} &= A_{11}l_{21}l_{31} + A_{12}l_{22}l_{31} + A_{21}l_{21}l_{32} + A_{13}l_{31}l_{23} + A_{22}l_{22}l_{32} + A_{31}l_{21}l_{33} + A_{23}l_{23}l_{32} + A_{32}l_{22}l_{33} + A_{33}l_{23}l_{33} \\ A'_{33} &= A_{11}l_{31}^2 + A_{22}l_{32}^2 + A_{33}l_{33}^2 + A_{12}l_{31}l_{32} + A_{21}l_{31}l_{32} + A_{13}l_{31}l_{33} + A_{31}l_{31}l_{33} + A_{23}l_{32}l_{33} + A_{32}l_{32}l_{33} \end{aligned}$$

Nesse contexto, quando se aplica uma determinada rotação em torno de um eixo qualquer, obtém-se para cada σ_{ij} , um σ'_{ij} subsequente. Essa transformação pode ser também adotada para o tensor das deformações. Cabe ressaltar, que quando se compara o tensor das deformações com o tensor das tensões, observa-se que as componentes de tensão normal (σ_{ii}), equivalem às componentes de deformação longitudinal (ε_{ii}), e que as componentes de tensões de cisalhamento (σ_{ij} ou τ_{ij}), equivalem às componentes de deformação tangencial, ou distorção (ε_{ij}), porém, em certos casos é conveniente utilizar as deformações tangenciais de engenharia denotadas por γ_{ij} , e, através de desenvolvimento de cálculo tensorial usa-se o valor de $\frac{\gamma_{ij}}{2} = \varepsilon_{ij}$ (para $i \neq j$) e não o valor de γ_{ij} .

Por exemplo, ao se aplicar a rotação em torno do eixo y, mostrada anteriormente na Tabela 4, se obtêm a seguinte transformação (representada apenas para σ_{11}):

$$\sigma'_{11} = l_{11}l_{11}\sigma_{11} + l_{11}l_{12}\sigma_{12} + l_{11}l_{13}\sigma_{13} + l_{12}l_{11}\sigma_{21} + l_{12}l_{12}\sigma_{22} + l_{12}l_{13}\sigma_{23} + l_{13}l_{11}\sigma_{31} + l_{13}l_{12}\sigma_{32} + l_{13}l_{13}\sigma_{33} \dots (71)$$

E ao se substituir pelos ângulos de rotação, obtém-se:

$$\sigma'_{11} = \sigma_{11} \cos^2 \varphi + \sigma_{13} \cos \varphi \sin \varphi + \sigma_{31} \sin \varphi \cos \varphi + \sigma_{33} \sin^2 \varphi \dots (72)$$

Efetuada-se então essas transformações para todas as componentes, encontra-se o tensor das tensões (ou deformações) transformado em relação a um determinado eixo.

4.3.8. Transformação de Tensores de Quarta Ordem (Constitutivo e Compliância)

Lekhnistskii (1968) apresenta em seu estudo sobre relações constitutivas de materiais anisotrópicos a seguinte equação:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \dots (73)$$

No qual, σ_{ij} é o tensor das tensões, ε_{ij} é o tensor das deformações e C_{ijkl} é o tensor das constantes de flexibilidade.

Ao efetuar-se uma transformação de tensões e deformações, o tensor das constantes de elasticidade se transforma por:

$$\sigma'_{st} = C'_{stqr} \varepsilon'_{qr} \dots (74)$$

Ao se desenvolver passo a passo, tem-se:

$$\sigma'_{st} = l_{si} l_{tj} \sigma_{ij} \dots (75)$$

$$\varepsilon_{kl} = l_{qk} l_{rl} \varepsilon'_{qr} \dots (76)$$

Substituindo-se a Equação 75 na Equação 74, tem-se:

$$l_{si} l_{tj} \sigma_{ij} = C'_{stqr} \varepsilon'_{qr} \dots (77)$$

Substituindo-se σ_{ij} da Equação 73, na Equação 77:

$$l_{si} l_{tj} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = C'_{stqr} \varepsilon'_{qr} \dots (78)$$

Mas, conforme apresentado na Equação 76, tem-se:

$$l_{si} l_{tj} C_{ijkl} l_{qk} l_{rl} \varepsilon'_{qr} = C'_{stqr} \varepsilon'_{qr} \dots (79)$$

Resultando finalmente em:

$$C'_{stqr} = l_{si} l_{tj} l_{qk} l_{rl} C_{ijkl} \dots (80)$$

Analogamente, para a relação inversa, na qual S_{ijkl} é o tensor de rigidez (ou de compliância):

$$S'_{stqr} = l_{si} l_{tj} l_{qk} l_{rl} S_{ijkl} \dots (81)$$

Lekhnitskii (1981) apresenta então, as seguintes representações tensoriais reduzidas:

$$C'_{ij} = q_{im} q_{jn} C_{mn} \dots (82)$$

$$S'_{ij} = q_{im} q_{jn} S_{mn} \dots (83)$$

A partir do apresentado, tem-se a Tabela 7, na qual o primeiro subscrito indica a linha e o segundo a coluna.

Tabela 7– Coeficientes q_{ij} - Fonte: LEKHNITSKII (1981).

	1	2	3	4	5	6
1	l_{11}^2	l_{12}^2	l_{13}^2	$l_{12}l_{13}$	$l_{13}l_{11}$	$l_{12}l_{11}$
2	l_{21}^2	l_{22}^2	l_{23}^2	$l_{23}l_{22}$	$l_{23}l_{21}$	$l_{22}l_{21}$
3	l_{31}^2	l_{32}^2	l_{33}^2	$l_{33}l_{32}$	$l_{33}l_{31}$	$l_{32}l_{31}$
4	$2l_{31}l_{21}$	$2l_{32}l_{22}$	$2l_{33}l_{23}$	$l_{33}l_{22}+l_{32}l_{23}$	$l_{33}l_{21}+l_{31}l_{23}$	$l_{31}l_{22}+l_{32}l_{21}$
5	$2l_{31}l_{11}$	$2l_{32}l_{12}$	$2l_{33}l_{13}$	$l_{33}l_{12}+l_{32}l_{13}$	$l_{33}l_{11}+l_{31}l_{13}$	$l_{31}l_{12}+l_{32}l_{11}$
6	$2l_{21}l_{11}$	$2l_{12}l_{22}$	$2l_{13}l_{23}$	$l_{13}l_{22}+l_{12}l_{23}$	$l_{13}l_{21}+l_{11}l_{23}$	$l_{11}l_{22}+l_{12}l_{21}$

Com base na Tabela 7 é possível obter os termos dos tensores constitutivo (C_{ij}) e compliância (S_{ij}), na sua forma transformada (C'_{ij} e S'_{ij}).

Portanto, com base na transformação de segunda ordem apresentada anteriormente, pode-se obter as transformações de coordenadas encontradas e aplicá-las em tensores de quarta ordem, ou seja, o tensor constitutivo.

Isso será desenvolvido analiticamente para a posição S'_{11} do tensor de Compilância S'_{ij} , transformado pela Equação 84:

$$S'_{ij} = S_{kl} Q_{ik} Q_{jl} \dots (84)$$

E, em especial escreve-se o termo S'_{11} por:

$$\begin{aligned} S'_{11} = & l_{11}^2 [S_{11} l_{11}^2 + S_{12} l_{12}^2 + S_{13} l_{13}^2 + S_{14} l_{12} l_{13} + S_{15} l_{11} l_{13} + S_{16} l_{11} l_{12}] + \\ & + l_{12}^2 [S_{12} l_{11}^2 + S_{22} l_{12}^2 + S_{23} l_{13}^2 + S_{24} l_{12} l_{13} + S_{25} l_{11} l_{13} + S_{26} l_{11} l_{12}] + \\ & + l_{13}^2 [S_{13} l_{11}^2 + S_{23} l_{12}^2 + S_{33} l_{13}^2 + S_{34} l_{12} l_{13} + S_{35} l_{11} l_{13} + S_{36} l_{11} l_{12}] + \\ & + l_{12} l_{13} [S_{14} l_{11}^2 + S_{24} l_{12}^2 + S_{34} l_{13}^2 + S_{44} l_{12} l_{13} + S_{45} l_{11} l_{13} + S_{46} l_{11} l_{12}] + \\ & + l_{11} l_{13} [S_{15} l_{11}^2 + S_{25} l_{12}^2 + S_{35} l_{13}^2 + S_{45} l_{12} l_{13} + S_{55} l_{11} l_{13} + S_{56} l_{11} l_{12}] + \\ & + l_{11} l_{12} [S_{16} l_{11}^2 + S_{26} l_{12}^2 + S_{36} l_{13}^2 + S_{46} l_{12} l_{13} + S_{56} l_{11} l_{13} + S_{66} l_{11} l_{12}] \end{aligned}$$

Nesse contexto, observa-se que podem ser realizadas quantas transformações forem necessárias, porem uma de cada vez, projetando-se os ângulos nos eixos principais.

A Figura 25, apresenta as rotações usuais, baseando-se um plano x_1, x_2 , em torno do eixo x_3 :

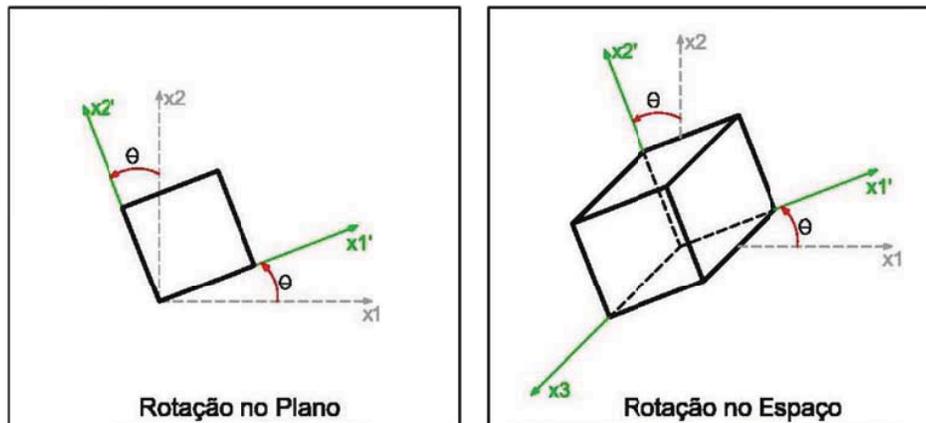


Figura 25 - Representação de sistema de referência girado em torno de x_3

Com isso, conclui-se que maioria dos autores pesquisados utiliza a fixação de um determinado eixo, efetuando a rotação em planos, que sempre mantêm 90° entre si.

5. APLICAÇÃO TEÓRICA E METODOLOGIA

5.1. Transformações Tridimensionais

5.1.1. Introdução

Com base na fundamentação teórica apresentada observa-se que os autores citados apresentam transformações de coordenadas rotacionando um plano em torno de um eixo fixo mantendo os eixos rotacionados perpendiculares entre si.

Nesse contexto, a partir desse ponto, será desenvolvida a transformação de coordenadas tridimensional. Para isso, será estabelecido um sistema cartesiano X_1 , X_2 e X_3 original, e a partir deste será aplicada uma rotação simultânea em torno dos três eixos resultando em um sistema de coordenadas transformado X'_1 , X'_2 e X'_3 .

O desenvolvimento do estudo dessa rotação é necessário para que se auxilie o estudo de anisotropia, não sendo necessários alinhar-se um dos eixos do sistema transformado, com um dos eixos do sistema original. A Figura 26 representa como serão apresentadas as transformações tridimensionais.

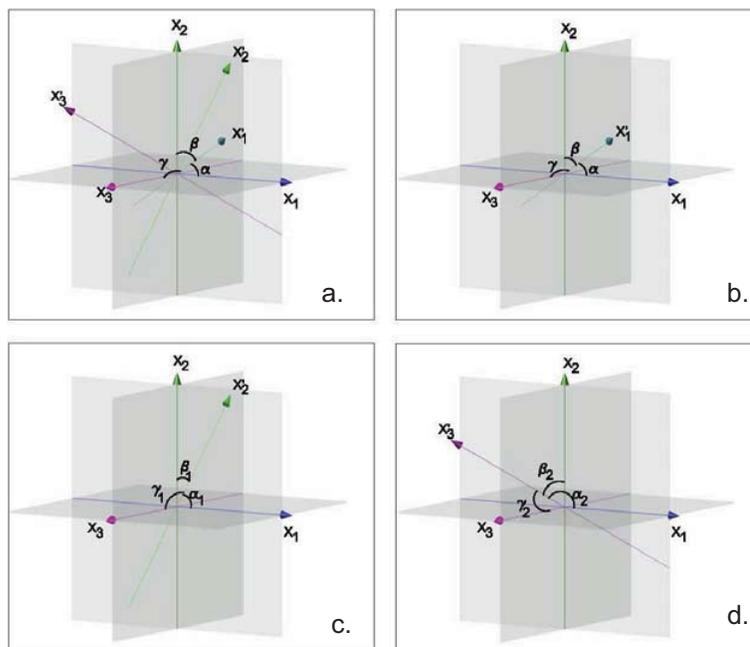


Figura 26 – Representação geral das rotações tridimensionais.

A Figura 26 representa os ângulos entre os eixos X_1 , X_2 e X_3 original e os eixos X'_1 , X'_2 e X'_3 transformados. Nesse contexto é apresentado na Tabela 8 os nove cossenos diretores de transformação.

Tabela 8 – Cossenos diretores para decomposição em três eixos de coordenadas.

	X_1	X_2	X_3
X'_1	$\text{Cos}(\alpha)$	$\text{Cos}(\beta)$	$\text{Cos}(\gamma)$
X'_2	$\text{Cos}(\alpha_1)$	$\text{Cos}(\beta_1)$	$\text{Cos}(\gamma_1)$
X'_3	$\text{Cos}(\alpha_2)$	$\text{Cos}(\beta_2)$	$\text{Cos}(\gamma_2)$

É importante ressaltar que encontrar nove ângulos em um determinado material é um trabalho árduo e quase inviável. Por isso torna-se necessário desenvolver-se ferramentas de simplificação para facilitar a aplicação tridimensional.

5.1.2. Transformação de X'_1

Será tratado a princípio a transformação X'_1 em relação a X_1 , X_2 e X_3 , conforme apresentado na Figura 27 a seguir.

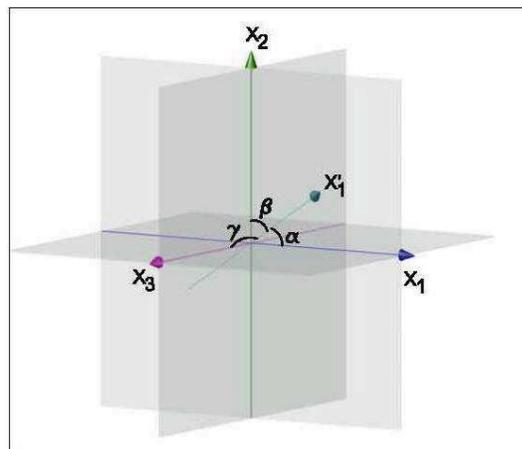


Figura 27– Rotação de X'_1

Tratando-se o sistema de coordenadas como um espaço vetorial onde X'_1 é um vetor resultante que pode ser decomposto nos eixos X_1 , X_2 e X_3 , torna-se possível a utilização da Equação 85 (Callioli, 1983). Callioli apresenta que a norma de um vetor no espaço é a raiz quadrada da soma dos quadrados dos vetores, conforme apresentado na Equação 85.

$$X'_1 = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2} \dots \quad (85)$$

Através da representação da Figura 23 é possível escrever que:

$$X_1 = X'_1 \cdot \cos(\alpha) \dots \quad (86)$$

$$X_2 = X'_1 \cdot \cos(\beta) \dots \quad (87)$$

$$X_3 = X'_1 \cdot \cos(\gamma) \dots \quad (88)$$

A Equação 86 representa a decomposição do vetor X'_1 no eixo X_1 , a Equação 87 representa a decomposição de X'_1 no eixo X_2 e a Equação 88 representa a decomposição de X'_1 no eixo X_3 .

Nesse contexto, substituindo-se as Equações 86, 87 e 88 na Equação 85, obtém-se a Equação 89:

$$X'_1 = \sqrt{[X'_1 \cdot \cos(\alpha)]^2 + [X'_1 \cdot \cos(\beta)]^2 + [X'_1 \cdot \cos(\gamma)]^2}$$

$$X'_1 = \sqrt{X_1'^2 \cdot \cos^2(\alpha) + X_1'^2 \cdot \cos^2(\beta) + X_1'^2 \cdot \cos^2(\gamma)}$$

$$X_1'^2 = X_1'^2 \cdot \cos^2(\alpha) + X_1'^2 \cdot \cos^2(\beta) + X_1'^2 \cdot \cos^2(\gamma)$$

$$1 = \cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma)$$

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) = 1 - \cos^2(\gamma)$$

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) = \text{sen}^2(\gamma)$$

$$\sqrt{\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta)} = \sqrt{\text{sen}^2(\gamma)}$$

$$\sqrt{\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta)} = \text{sen}(\gamma)$$

$$\text{asen}(\sqrt{\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta)}) = \gamma \quad \dots \quad (89)$$

A partir da Equação 89 é possível verificar que a transformação realizada dois ângulos são independentes e um dependente, ou seja, neste caso o ângulo γ .

5.1.3. Transformação de X'_2

Ao se observar a Figura 28 a seguir nota-se que o mesmo procedimento pode ser adotado para X'_2 , ou seja, o ângulo γ_1 é dependente dos ângulos α_1 e β_1 .

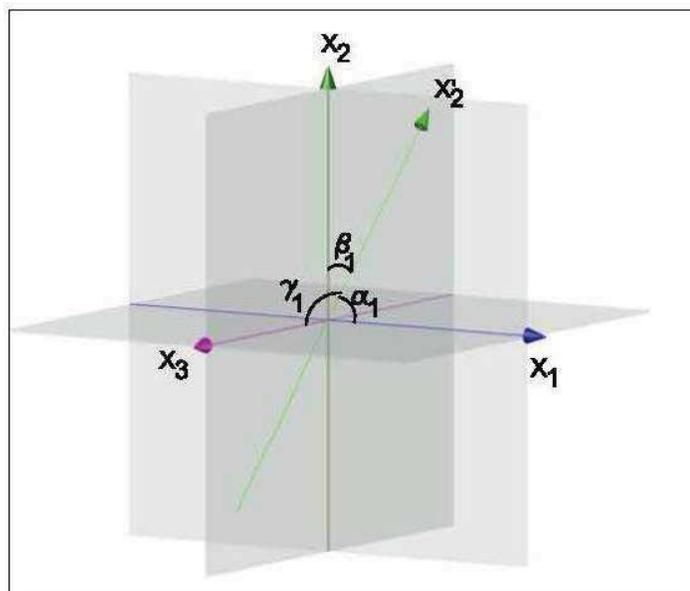


Figura 28– Rotação de X'_2

A Equação 90 apresenta o ângulo γ_1 .

$$\text{asen}(\sqrt{\cos^2(\alpha_1) + \cos^2(\beta_1)}) = \gamma_1 \quad \dots \quad (90)$$

Portanto, ao se aplicarem os ângulos encontrados na Equação 89 e na Equação 90 na matriz apresentada na Tabela 8, obtêm-se a matriz apresentada na Tabela 9, a qual passa a ter sete ângulos independentes e dois dependentes, sendo eles γ e γ_1 .

Tabela 9 – Primeira simplificação de cossenos diretores para decomposição em três eixos de coordenadas

	X_1	X_2	X_3
X'_1	$\text{Cos}(\alpha)$	$\text{Cos}(\beta)$	$\text{Cos}\{\text{asen}[\sqrt{\text{cos}^2(\alpha)+\text{cos}^2(\beta)}]\}$
X'_2	$\text{Cos}(\alpha_1)$	$\text{Cos}(\beta_1)$	$\text{Cos}\{\text{asen}[\sqrt{\text{cos}^2(\alpha_1)+\text{cos}^2(\beta_1)}]\}$
X'_3	$\text{Cos}(\alpha_2)$	$\text{Cos}(\beta_2)$	$\text{Cos}(\gamma_2)$

Para que o modelo seja válido é necessário que X_1 e X_2 também sejam tratados como vetores os quais serão decompostos nos eixos X'_1 , X'_2 e X'_3 . A Figura 29 apresenta o caso para o vetor X_1 em relação ao sistema transformado X'_1 , X'_2 e X'_3 .

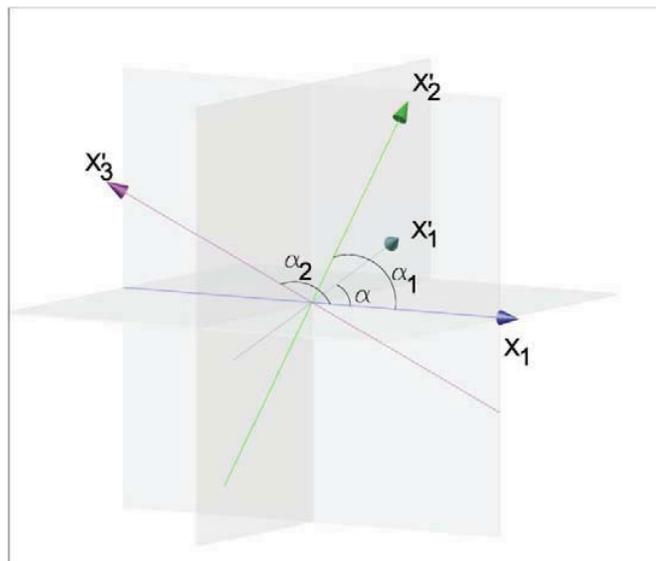


Figura 29– Representação de X_1 em relação aos eixos rotacionados X'_1 , X'_2 e X'_3

Tratando-se do mesmo modo apresentado anteriormente, X_1 é um vetor resultante que pode ser decomposto nos eixos X'_1 , X'_2 e X'_3

$$X_1 = \sqrt{X_1'^2 + X_2'^2 + X_3'^2} \dots (91)$$

Então, através da representação da Figura 29 é possível escrever que:

$$X_1' = X_1 * \cos(\alpha) \dots (92)$$

$$X_2' = X_1 * \cos(\alpha_1) \dots (93)$$

$$X_3' = X_1 * \cos(\alpha_2) \dots (94)$$

A Equação 92 representa a decomposição do vetor X_1 no eixo X'_1 , a Equação 93 representa a decomposição de X_1 no eixo X'_2 e a Equação 94 representa a decomposição de X_1 no eixo X'_3 .

Nesse contexto, substituindo-se as Equações 92, 93 e 94 na Equação 91, obtém-se a Equação 95 a seguir:

$$X_1 = \sqrt{[X_1 * \cos(\alpha)]^2 + [X_1 * \cos(\alpha_1)]^2 + [X_1 * \cos(\alpha_2)]^2}$$

$$X_1 = \sqrt{X_1^2 * \cos^2(\alpha) + X_1^2 * \cos^2(\alpha_1) + X_1^2 * \cos^2(\alpha_2)}$$

$$X_1^2 = X_1^2 * \cos^2(\alpha) + X_1^2 * \cos^2(\alpha_1) + X_1^2 * \cos^2(\alpha_2)$$

$$1 = \cos^2(\alpha) + \cos^2(\alpha_1) + \cos^2(\alpha_2)$$

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\alpha_1) = 1 - \cos^2(\alpha_2)$$

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\alpha_1) = \sin^2(\alpha_2)$$

$$\sqrt{\cos^2(\alpha) + \cos^2(\alpha_1)} = \sqrt{\sin^2(\alpha_2)}$$

$$\sqrt{\cos^2(\alpha) + \cos^2(\alpha_1)} = \sin(\alpha_2)$$

$$\text{asen}(\sqrt{\cos^2(\alpha)+\cos^2(\alpha_1)}) = \alpha_2 \dots (95)$$

A partir da Equação 95 é possível observar que para cada transformação em relação aos eixos original e transformados dois ângulos são independentes e um dependente. Nota-se, portanto, que o mesmo procedimento pode ser adotado para X_2 , ou seja, o ângulo β_2 é dependente dos ângulos β e β_1 .

Com isso, a matriz de transformação tridimensional apresentada na Tabela 9 passa a ser escrita conforme a Tabela 10.

Tabela 10 – Segunda simplificação de cossenos diretores para decomposição em três eixos de coordenadas

	X_1	X_2	X_3
X'_1	$\text{Cos}(\alpha)$	$\text{Cos}(\beta)$	$\text{Cos}\{\text{asen}[\sqrt{\cos^2(\alpha)+\cos^2(\beta)}]\}$
X'_2	$\text{Cos}(\alpha_1)$	$\text{Cos}(\beta_1)$	$\text{Cos}\{\text{asen}[\sqrt{\cos^2(\alpha_1)+\cos^2(\beta_1)}]\}$
X'_3	$\text{Cos}\{\text{asen}[\sqrt{\cos^2(\alpha)+\cos^2(\alpha_1)}]\}$	$\text{Cos}\{\text{asen}[\sqrt{\cos^2(\beta)+\cos^2(\beta_1)}]\}$	$\text{Cos}(\gamma_2)$

A partir da Tabela 10 serão efetuados a seguir as transformações em relação a X'_3 e X_3 .

5.1.4. Transformação de X'_3

Com base no apresentado anteriormente, será adotado o mesmo critério para o cálculo de X'_3 .

$$X'_3 = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2} \dots (96)$$

Com base na decomposição vetorial:

$$X_1 = X'_3 * \text{Cos}\{\text{asen}[\sqrt{\cos^2(\alpha) + \cos^2(\alpha_1)}]\} \dots (97)$$

$$X_2 = X'_3 * \text{Cos}\{\text{asen}[\sqrt{\cos^2(\beta) + \cos^2(\beta_1)}]\} \dots (98)$$

$$X_3 = X'_3 * \cos(\gamma_2) \dots (99)$$

E, substituindo-se 97, 98 e 99 na Equação 96, obtém-se:

$$X'_3 = \sqrt{[X'_3 * \text{Cos}\{\text{asen}[\sqrt{\cos^2(\alpha) + \cos^2(\alpha_1)}]\}]^2 + [X'_3 * \text{Cos}\{\text{asen}[\sqrt{\cos^2(\beta) + \cos^2(\beta_1)}]\}]^2 + [X'_3 * \cos(\gamma_2)]^2} \dots (100)$$

Como simplificação dos cálculos e para facilitar a visualização será adotado que:

$$a = \sqrt{\cos^2(\alpha) + \cos^2(\alpha_1)} \dots (101)$$

$$b = \sqrt{\cos^2(\beta) + \cos^2(\beta_1)} \dots (102)$$

Portanto a Equação 100 torna-se:

$$X'_3 = \sqrt{\{X'_3 * \text{Cos}[\text{asen}(a)]\}^2 + \{X'_3 * \text{Cos}[\text{asen}(b)]\}^2 + [X'_3 * \cos(\gamma_2)]^2} \dots (103)$$

Adotando-se a seguinte propriedade trigonométrica:

$$\text{Cos}[\text{asen}(a)] = \sqrt{1-a^2}$$

$$\text{Cos}[\text{asen}(b)] = \sqrt{1-b^2}$$

Obtém-se como simplificação da Equação 103:

$$X'_3 = \sqrt{(-X'_3 * \sqrt{1-a^2})^2 + (-X'_3 * \sqrt{1-b^2})^2 + [X'_3 * \cos(\gamma_2)]^2}$$

$$X'_3 = \sqrt{-X'_3{}^2(a^2-1) - X'_3{}^2(b^2-1) + X'_3{}^2 \cos^2(\gamma_2)} \dots (104)$$

Elevando-se os dois termos ao quadrado e simplificando:

$$1 = -(a^2-1) - (b^2-1) + \cos^2(\gamma_2)$$

$$1 - \cos^2(\gamma_2) = -(a^2-1) - (b^2-1)$$

$$\text{sen}^2(\gamma_2) = -(a^2-1) - (b^2-1)$$

Simplificando-se novamente:

$$\text{sen}^2(\gamma_2) = -a^2 - b^2 + 2$$

Efetuando-se a raiz quadrada nos dois termos:

$$\text{sen}(\gamma_2) = \sqrt{-a^2 - b^2 + 2}$$

$$\gamma_2 = \text{asen}(\sqrt{-a^2 - b^2 + 2})$$

Retomando a substituição apresentada na Equação 101 e Equação 102, tem-se a Equação 105.

$$\gamma_2 = \text{asen}\left(\sqrt{-[\sqrt{\cos^2(\alpha) + \cos^2(\alpha_1)}]^2 - [\sqrt{\cos^2(\beta) + \cos^2(\beta_1)}]^2 + 2}\right)$$

$$\gamma_2 = \text{asen}\left(\sqrt{-\cos^2(\alpha) - \cos^2(\alpha_1) - \cos^2(\beta) - \cos^2(\beta_1) + 2}\right) \dots (105)$$

Portanto, a partir da equação 105, a matriz de transformação tridimensional passa a ser o apresentado na Tabela 11.

Tabela 11 – Terceira simplificação de cossenos diretores para decomposição em três eixos de coordenadas

	X_1	X_2	X_3
X'_1	$\text{Cos}(\alpha)$	$\text{Cos}(\beta)$	$\text{Cos}\{\text{asen}[\sqrt{\cos^2(\alpha)+\cos^2(\beta)}]\}$
X'_2	$\text{Cos}(\alpha_1)$	$\text{Cos}(\beta_1)$	$\text{Cos}\{\text{asen}[\sqrt{\cos^2(\alpha_1)+\cos^2(\beta_1)}]\}$
X'_3	$\text{Cos}\{\text{asen}[\sqrt{\cos^2(\alpha)+\cos^2(\alpha_1)}]\}$	$\text{Cos}\{\text{asen}[\sqrt{\cos^2(\beta)+\cos^2(\beta_1)}]\}$	$\text{Cos}(\text{asen}(\sqrt{-\cos^2(\alpha)-\cos^2(\alpha_1)-\cos^2(\beta)-\cos^2(\beta_1)+2}))$

De maneira análoga, pode-se efetuar a transformação em relação a X_3 original, através de $X_3 = \sqrt{X'_1{}^2 + X'_2{}^2 + X'_3{}^2}$, obtendo-se como resultado a mesma Equação 105 apresentada anteriormente.

5.1.5. Simplificações dos termos da matriz

Ao observar a Tabela 11 nota-se que é possível simplificar os termos da tabela utilizando a relação trigonométrica apresentada anteriormente. Portanto adotando-se a relação trigonométrica da Equação 106 serão desenvolvidas as simplificações dos termos da Tabela 11.

$$\text{Cos}[\text{asen}(x)] = \sqrt{1-x^2} \dots (106)$$

Nesse contexto, considerando-se a matriz de rotação como:

$$\begin{bmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & X_{1,3} \\ X_{2,1} & X_{2,2} & X_{2,3} \\ X_{3,1} & X_{3,2} & X_{3,3} \end{bmatrix} \dots (107)$$

Será aplicada a relação trigonométrica da Equação 106 no termo $X_{3,3}$ apresentado na Equação 108.

$$\text{Cos}(\text{asen}(\sqrt{-\cos^2(\alpha)-\cos^2(\alpha_1)-\cos^2(\beta)-\cos^2(\beta_1)+2})) \dots (108)$$

Daí, após simplificação o termo $X_{3,3}$ da Tabela 11 passa a ser o apresentado na Equação 109.

$$\sqrt{\cos^2(\alpha)+\cos^2(\alpha_1)+\cos^2(\beta)+\cos^2(\beta_1)-1} \dots (109)$$

De maneira análoga é possível efetuar as simplificações nos termos $X_{1,3}$, $X_{2,3}$, $X_{3,1}$, $X_{3,2}$ apresentados a seguir nas Equações 110, 111, 112 e 113.

$$\cos\{\text{asen}[\sqrt{\cos^2(\alpha)+\cos^2(\beta)}]\} \dots (110)$$

$$\cos\{\text{asen}[\sqrt{\cos^2(\alpha_1)+\cos^2(\beta_1)}]\} \dots (111)$$

$$\cos\{\text{asen}[\sqrt{\cos^2(\alpha)+\cos^2(\alpha_1)}]\} \dots (112)$$

$$\cos\{\text{asen}[\sqrt{\cos^2(\beta)+\cos^2(\beta_1)}]\} \dots (113)$$

Aplicando-se a relação trigonométrica apresentada na Equação 106, os termos passam a ser os apresentados a seguir nas Equações 114, 115, 116 e 117.

$$\sqrt{-\cos^2(\alpha)-\cos^2(\beta)+1} \dots (114)$$

$$\sqrt{-\cos^2(\alpha_1)-\cos^2(\beta_1)+1} \dots (115)$$

$$\sqrt{-\cos^2(\alpha)-\cos^2(\alpha_1)+1} \dots (116)$$

$$\sqrt{-\cos^2(\beta)-\cos^2(\beta_1)+1} \dots (117)$$

Nesse contexto depois de realizadas as transformações e simplificações apresentadas, a matriz para rotação tridimensional passa a ser a apresentada na Tabela 12.

Tabela 12 – Quarta simplificação de cossenos diretores para decomposição em três eixos de coordenadas

	X_1	X_2	X_3
X'_1	$\text{Cos}(\alpha)$	$\text{Cos}(\beta)$	$\sqrt{-\text{cos}^2(\alpha)-\text{cos}^2(\beta)+1}$
X'_2	$\text{Cos}(\alpha_1)$	$\text{Cos}(\beta_1)$	$\sqrt{-\text{cos}^2(\alpha_1)-\text{cos}^2(\beta_1)+1}$
X'_3	$\sqrt{-\text{cos}^2(\alpha)-\text{cos}^2(\alpha_1)+1}$	$\sqrt{-\text{cos}^2(\beta)-\text{cos}^2(\beta_1)+1}$	$\sqrt{\text{cos}^2(\alpha)+\text{cos}^2(\alpha_1)+\text{cos}^2(\beta)+\text{cos}^2(\beta_1)-1}$

Com base na matriz de rotação apresentada na Tabela 12 é possível observar que quatro ângulos da matriz são independentes e cinco são dependentes. Cabe ressaltar que pode ser efetuada a aplicação direta no modelo sem a necessidade de direcionamento de um eixo original com um transformado, aprimorando assim a verificação da anisotropia no material.

A seguir será demonstrada a aplicação da transformação no modelo teórico proposto.

5.2. Modelo Analisado

O desenvolvimento de novos modelos para o caso de vigas reforçadas com fibras naturais é importante para a correta utilização do material em reforços ou peças estruturais.

O modelo teórico apresentado tem por objetivo estimar as propriedades elásticas de uma viga laminada colada (MLC), bi- apoiada, reforçada com fibras de sisal e com uma carga aplicada no centro da peça, conforme Figura 30.

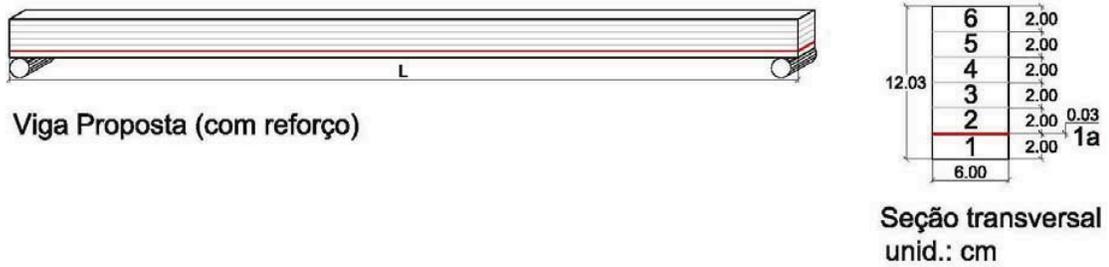


Figura 30 – Modelo Analisado

Para a análise serão comparados os módulos de elasticidade E_1 , E_2 e E_3 em duas situações:

- A direção das fibras da madeira e do sisal em relação ao eixo " X_2 " (na mesma direção em relação ao eixo transversal (T)) (Figura 31);

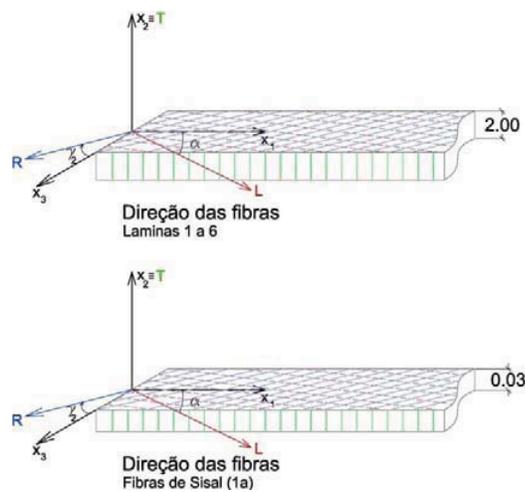


Figura 31 – Direção das fibras transversais coincidem com a direção principal no eixo X_2 .

- A direção das fibras não coincidentes com a direção de nenhum dos eixos principais da viga (Figura 32);

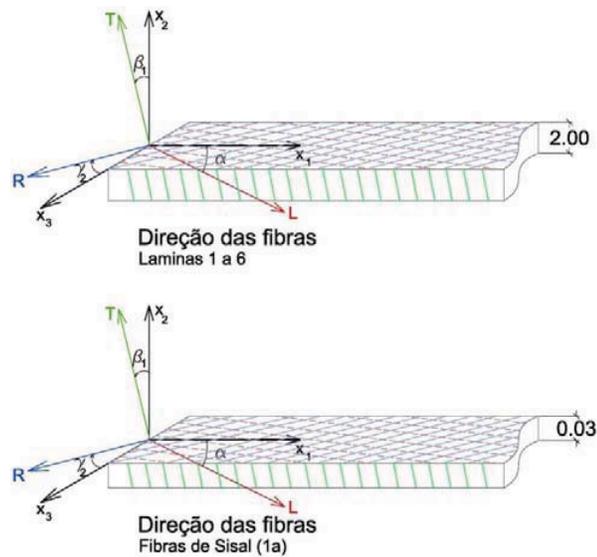


Figura 32 – Direção das fibras não coincidem com os eixos principais da viga

Nessa simulação serão adotadas para as dimensões da peça, 6 cm de base, 12 cm de altura e 300 cm de comprimento. A seção transversal de 6 cm x 12 cm será composta por 6 (seis) lâminas de 2 cm de espessura cada sendo de madeira de reflorestamento com as características conforme a TABELA 13.

Tabela 13 – Constantes de Elasticidade da Madeira Pinus Caribaea var. Bahamensis (E, G em MPa) - Fonte: MASCIA (1991)

Espécie	$E_L (E_1)$	$E_R (E_2)$	$E_T (E_3)$	$G_{LT} (G_{13})$	$G_{LR} (G_{12})$	$G_{TR} (G_{32})$
Pinus	5.471	1.049,4	737,6	307	542,6	116,3
	$\nu_{RT} (\nu_{23})$	$\nu_{RL} (\nu_{21})$	$\nu_{TR} (\nu_{32})$	$\nu_{TL} (\nu_{31})$	$\nu_{LR} (\nu_{12})$	$\nu_{LT} (\nu_{13})$
	0,6393	0,0858	0,4509	0,0477	0,3701	0,3346

De acordo com Fiorelli (2002) a porcentagem máxima de reforço com fibras a ser aplicada em um peça é de 3,3% em relação à altura da peça. Afirma ainda, que porcentagens acima desse valor o ganho de resistência e rigidez não é significativo.

Portanto, para a aplicação do reforço será considerada uma camada de fibras de sisal na espessura de 3,0mm (0,3cm) com características baseadas nos dados apresentados por Freire (2003) conforme a Tabela 14.

Tabela 14 – Características do sisal adotadas para o modelo.

Diâmetro (mm)	Densidade (g/cm ³)	Resistência à tração (MPa)	Módulo de Elast. (MPa)	Along. (%)
3,0	1,37	347 - 378	15.200	4,9 - 5,4

O reforço foi colado na linha de cola inferior, devido a questões de esforços de tração, facilidade nas emendas do reforço e também levando em consideração questões de proteção do reforço contra agentes externos .

Para o modelo proposto os efeitos causados pelo tipo de adesivo não serão considerados, ou seja, a conexão adesivo/peça será considerada como homogênea e rígida. Também não serão levadas em consideração as possíveis emendas da madeira laminada colada.

5.2.1. Módulo de elasticidade para vigas laminadas coladas

BODIG (1982) apresenta que as equações gerais para vigas de madeiras laminadas têm sido utilizadas para descrever as propriedades elásticas da parede celular da fibra da madeira.

Vários são os pressupostos utilizados na previsão das propriedades mecânicas de madeira laminada colada. A hipótese de uma junta estrutural rígida com uma espessura infinitesimal é comumente utilizada e, além disso, parte-se do princípio que

as lâminas individuais são homogêneas e ortotrópicas e que os eixos ortotrópicos e geométricos coincidem.

A madeira utilizada para a fabricação de peças laminadas freqüentemente exibe uma ampla gama de características de rigidez. Apesar dessa pesquisa não se tratar de características de rigidez, é interessante salientar que colocar peças de madeira de rigidez elevada perto da superfície superior e inferior da peça e materiais de menor rigidez na parte central, fazem com que a viga se torne mais rígida (BODIG, 1982).

BODIG (1982) apresenta ainda que a maioria das madeiras laminadas são simétricas e que a seção transversal pode ser considerada homogênea. Devido a isso um módulo de elasticidade efetivo, E_{Leff} , pode ser calculado através da formulação apresentada na Equação 118.

$$E_{Leff} = \frac{2}{I} \sum_{i=1}^n E_L^i I^i \quad \dots \quad (118)$$

Com:

E_L^i - módulo de elasticidade da lâmina "i" na direção longitudinal;

I^i - momento de inércia da lâmina "i" em relação ao plano neutro da viga;

I - momento de Inércia de toda a seção da Viga;

n - numero de lâminas da viga.

O momento de inércia transferido I^i é dado por:

$$I^i = I_o^i + A^i (d^i)^2 \quad \dots \quad (119)$$

No qual,

I_o^i - momento de inércia da lâmina analisada;

A^i - área da seção transversal da lâmina analisada;

d^i - distancia entre o centro de gravidade da lâmina analisada e o centro de gravidade da viga.

Nesse contexto, a partir do apresentado é possível realizar-se a simulação do modelo proposto.

Partindo-se dos ajustes dos módulos de elasticidade, será apresentada novamente a seção transversal da viga analisada (Figura 33), que representa os módulos:

E^a = módulo de elasticidade para a lâmina de madeira;

E^b = módulo de elasticidade para a lâmina de sisal;

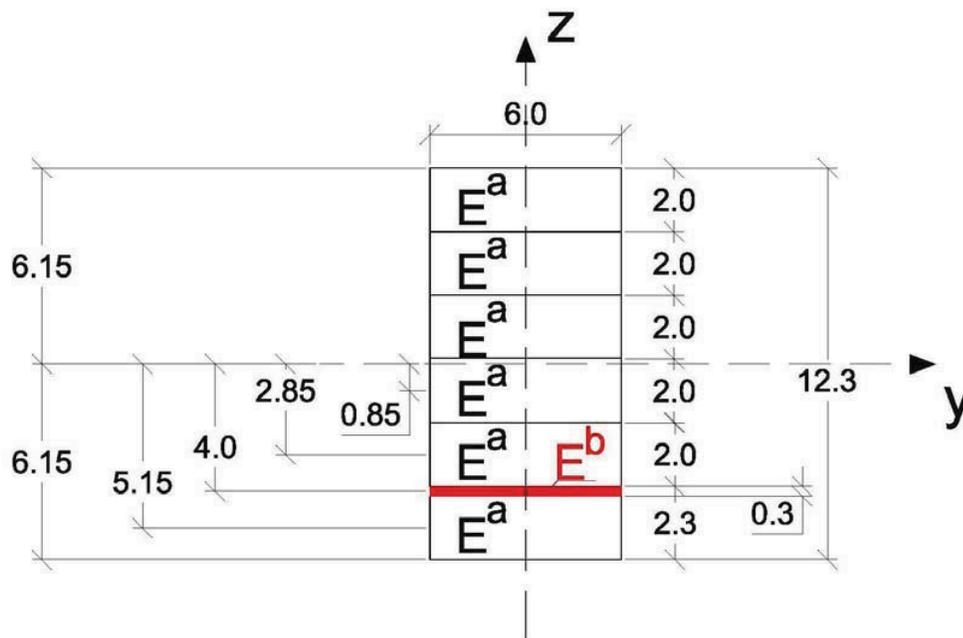


Figura 33 – Seção Transversal Ampliada – unidade: centímetros (cm)

Partindo-se da Figura 33 e Equações 118 e 119, serão apresentadas as homogeneizações dos módulos de Elasticidade.

A Tabela 15 apresenta os resultados obtidos para o cálculo dos momentos de Inércia transferidos I^i , calculados pela Equação 119.

Tabela 15 – Momentos de Inércia Transferidos I^i .

Posição	Base (cm)	Altura (cm)	Área Seç. (cm ²)	Mom. I_0 (cm ⁴)	d (cm)	Mom. I^i (cm ⁴)
Lâmina 06	6,0	2,0	12,0	4,0	5,15	322,27
Lâmina 05	6,0	2,0	12,0	4,0	3,15	123,07
Lâmina 04	6,0	2,0	12,0	4,0	1,15	19,87
Lâmina 03	6,0	2,0	12,0	4,0	0,85	12,67
Lâmina 02	6,0	2,0	12,0	4,0	2,85	101,47
Malha de Sisal	6,0	0,3	1,8	0,0135	4,00	28,8135
Lâmina 01	6,0	2,0	12,0	4,0	5,15	322,27

A partir do obtido é possível o cálculo do módulo de Elasticidade efetivo, conforme a Equação 118, com base nos dados apresentados na Tabela 16.

Tabela 16 – Dados para cálculo dos módulos de elasticidade efetivos.

Posição	Mom. Inércia da Peça	Mom. I_i (cm ⁴)	Módulo E_L (MPa)	Módulo E_R (MPa)	Módulo E_T (MPa)
Lâmina 03	930,43	12,67	5.471,00	1.049,40	737,60
Lâmina 02	930,43	101,47	5.471,00	1.049,40	737,60
Malha Sisal	930,43	28,81	15.200	15.200,00	15.200,00
Lâmina 01	930,43	322,27	5.471,00	1.049,40	737,60

Nota-se que os dados dos módulos de elasticidade da malha de sisal apresentados na Tabela 16, tem o mesmo valor em todas as direções. Isso foi adotado por se tratar de uma malha o comportamento mecânico em todas as direções deveria ser aproximadamente o mesmo.

É necessário ressaltar que para o cálculo dos módulos de elasticidade é utilizado apenas a área inferior ou superior da seção transversal em relação ao centro de gravidade. BODIG (1982) recomenda utilizar-se a face inferior quando se tratar de vigas.

Nesse contexto, aplicando-se a formulação apresentada na Equação 118 e com base nos dados apresentados na Tabela 16, têm-se que:

$$E_{L\text{ eff}} = 6.073,65 \text{ (MPa)}$$

$$E_{R\text{ eff}} = 1.925,84 \text{ (MPa)}$$

$$E_{T\text{ eff}} = 1.633,35 \text{ (MPa)}$$

Portanto, observa-se que há um acréscimo nas propriedades elásticas do material devido à aplicação da malha de sisal na peça.

Como se trata de modelo teórico a ser comprovado em trabalho futuro, partir-se-á da premissa de que os coeficientes de Poisson e os módulos de elasticidade transversal não sofrerão interferências, ou seja, os valores originais serão mantidos, conforme Tabela 17 a seguir.

Tabela 17 – Constantes de Elasticidade do Composto proposto (E, G em MPa)

$E_L (E_1)$	$E_R (E_2)$	$E_T (E_3)$	$G_{LT} (G_{13})$	$G_{LR} (G_{12})$	$G_{TR} (G_{32})$
6.073,65	1925,84	1.633,35	307,0 0	542,60	116,30
$\nu_{RT} (\nu_{23})$	$\nu_{RL} (\nu_{21})$	$\nu_{TR} (\nu_{32})$	$\nu_{TL} (\nu_{31})$	$\nu_{LR} (\nu_{12})$	$\nu_{LT} (\nu_{13})$
0,6393	0,0858	0,4509	0,0477	0,3701	0,3346

Conhecidas então as propriedades elásticas do modelo, com base na Figura 31, foi desenvolvido o modelo teórico, onde a direção das fibras transversais coincide com a direção principal no eixo X_2 .

5.2.2. Aplicação das transformações no plano

Aplicando a transformação apresentada por Lekhnistskii (1981), fixa-se o eixo T (transversal) e rotacionam-se os eixos L (longitudinal) e R (radial) obtendo:

$$I_{ij}^1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \dots (120)$$

Quanto ao ângulo γ_2 , o mesmo é igual à $\sin(\alpha)$, pois os eixos L (longitudinal) e R (radial) são perpendiculares entre si.

A partir do apresentado, com a transformação encontrada na Equação 120, é possível calcular os valores de $E_1 (E_L')$, $E_2 (E_T')$ e $E_3 (E_R')$.

Para isso, é necessário primeiramente aplicar as constantes da Tabela 17 na matriz de flexibilidade S_{ij} , obtendo:

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6073,65} & \frac{-0,0858}{1925,84} & \frac{-0,0477}{1633,35} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-0,3701}{6073,65} & \frac{1}{1925,84} & \frac{-0,4509}{1633,35} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-0,3346}{6073,65} & \frac{-0,6393}{1925,84} & \frac{1}{1.633,35} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{116,30} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{307,00} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{542,60} \end{pmatrix}$$

Porém, como o tensor S_{ij} é um tensor de quarta ordem, foi utilizada a Tabela 7 apresentada por Lekhnistskii (1981), em sua forma matricial conforme apresentado a seguir, na Equação 121.

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} I_{11}^2 & I_{12}^2 & I_{13}^2 & I_{12}I_{13} & I_{13}I_{11} & I_{12}I_{11} \\ I_{21}^2 & I_{22}^2 & I_{23}^2 & I_{23}I_{22} & I_{23}I_{21} & I_{22}I_{21} \\ I_{31}^2 & I_{32}^2 & I_{33}^2 & I_{33}I_{32} & I_{33}I_{31} & I_{32}I_{31} \\ 2I_{31}I_{21} & 2I_{32}I_{22} & 2I_{33}I_{23} & I_{33}I_{22}+I_{32}I_{23} & I_{33}I_{21}+I_{31}I_{23} & I_{31}I_{22}+I_{32}I_{21} \\ 2I_{31}I_{11} & 2I_{32}I_{12} & 2I_{33}I_{13} & I_{33}I_{12}+I_{32}I_{13} & I_{33}I_{11}+I_{31}I_{13} & I_{31}I_{12}+I_{32}I_{11} \\ 2I_{21}I_{11} & 2I_{12}I_{22} & 2I_{13}I_{23} & I_{13}I_{22}+I_{12}I_{23} & I_{13}I_{21}+I_{11}I_{23} & I_{11}I_{22}+I_{12}I_{21} \end{pmatrix} \dots(121)$$

Com isso é possível atribuir-se variações no ângulo α de maneira aleatória, obtendo-se os valores de E_1 (E_L'), E_2 (E_T') e E_3 (E_R') para cada caso.

Aplicando como exemplo, a rotação baseada na matriz da Equação 120, com $\alpha = 6^\circ$, tem-se:

$$I'_{ij} = \begin{bmatrix} \cos(6^\circ) & 0 & \sin(6^\circ) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(6^\circ) & 0 & \cos(6^\circ) \end{bmatrix} \dots (122)$$

Simplificando a equação 122, tem-se:

$$I'_{ij} = \begin{bmatrix} 0,995 & 0 & 0,105 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0,105 & 0 & 0,995 \end{bmatrix} \dots (123)$$

Portanto, com base na Equação 123, é possível substituir-se na matriz apresentada na Equação 121, obtendo-se a Equação 124 a seguir.

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} 0,989 & 0 & 0,011 & 0 & 0,104 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,011 & 0 & 0,989 & 0 & -0,104 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,995 & 0 & -0,105 \\ -0,208 & 0 & 0,208 & 0 & 0,978 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,105 & 0 & 0,995 \end{pmatrix} \quad \dots(124)$$

A partir deste ponto, aplica-se a Equação 124 apresentada por Lekhnistskii (1981), tem-se o seguinte tensor de flexibilidade transformado:

$$S'_{ij} = \begin{pmatrix} 1,94 \times 10^{-4} & -1,926 \times 10^{-4} & -2,272 \times 10^{-4} & 0 & 2,556 \times 10^{-4} & 0 \\ -1,825 \times 10^{-5} & 5,193 \times 10^{-4} & -3,873 \times 10^{-4} & 0 & -7,844 \times 10^{-5} & 0 \\ -3,451 \times 10^{-5} & -2,337 \times 10^{-4} & 6,319 \times 10^{-4} & 0 & -2,045 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8,525 \times 10^{-3} & 0 & 7,023 \times 10^{-4} \\ 2,976 \times 10^{-4} & -8,723 \times 10^{-6} & -1,636 \times 10^{-4} & 0 & 3,159 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7,023 \times 10^{-4} & 0 & 1,917 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad \dots(125)$$

Com isso, é possível obter os módulos de elasticidade (Mpa) transformados ($L'=X_1$, $R'=X_2$, $T'=X_3$) por meio de:

$$E_1 = \frac{1}{S_{11}} = 5.153,00 \quad E_2 = \frac{1}{S_{22}} = 1.926,00 \quad E_3 = \frac{1}{S_{33}} = 1.583,00$$

A Tabela 18, mostra variações de α entre 0° e 90° simultaneamente, obtendo-se valores para $E_1(E_L')$, $E_2(E_T')$, $E_3(E_R')$.

Tabela 18 – Variação do Ângulo α de 0 a 90° para a obtenção de $E_1(E_L')$, $E_2(E_T')$, $E_3(E_R')$.

α	0°	5°	6°	9°	12°	15°	24°	30°
$E_1 (E_L')$	6074	5401	5153	4353	3600	2973	1812	1425
$E_2 (E_T')$	1926	1926	1926	1926	1926	1926	1926	1926
$E_3 (E_R')$	1633	1598	1583	1526	1456	1381	1175	1080
α	35°	40°	45°	55°	60°	70°	80°	90°
$E_1 (E_L')$	1231	1112	1047	1036	1080	1259	1504	1633
$E_2 (E_T')$	1926	1926	1926	1926	1926	1926	1926	1926
$E_3 (E_R')$	1036	1023	1047	1231	1425	2216	4091	6074

Observando a Tabela 18 e a Figura 34, nota-se que o módulo E_2 não varia, pois não houve aplicação de ângulos no sentido transversal da peça.

Além disso, é possível observar que de acordo com as variações do ângulo α os módulos de Elasticidade E_1 e E_3 , sofrem grandes variações de tal maneira a E_3 com aplicação do ângulo de 90° passar a ser o valor de E_1 .

É possível notar ainda, que para o ângulo de 45° , os módulos E_1 e E_3 passam a ter o mesmo valor.

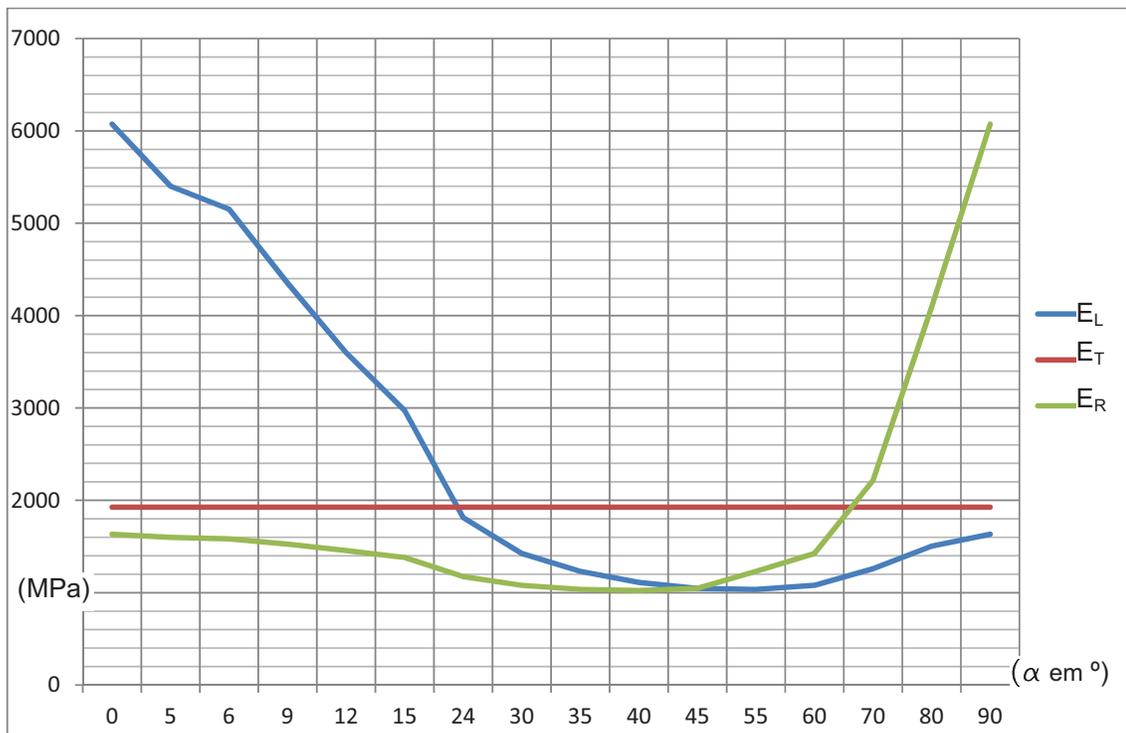


Figura 34 – Representação das variações de α de 0 a 90°

Lekhnistskii (1981) descreve que ao se rotacionar uma matriz ortotrópica em um plano, ou seja, aplicando-se uma rotação em torno de um eixo, o material ortotrópico se transforma, surgindo os índices S'_{16} , S'_{26} , S'_{36} e S'_{45} da matriz S'_{ij} .

Assim, um dos objetivos desse trabalho foi apresentar a possibilidade de rotação espacial de eixos de coordenadas aplicando-os as matrizes do material para a obtenção de módulos de elasticidade.

A formulação para o cálculo dos módulos de elasticidade em relação a dois ângulos, conforme apresentado, torna-se necessária para efeito comparativo dos resultados a serem obtidos na transformação tridimensional.

5.2.3. Aplicação das Transformações Tridimensionais

Para o caso tridimensional, conforme apresentado, são necessários quatro ângulos independentes para que possa fazer a rotação em relação aos eixos originais.

Portanto, as medidas de ângulos a serem consideradas são espaciais e não no plano. A Figura 35 apresenta uma camada laminada com a representação dos eixos tridimensionais. A partir deste ponto, é possível medir os ângulos em relação as lâminas da peça.

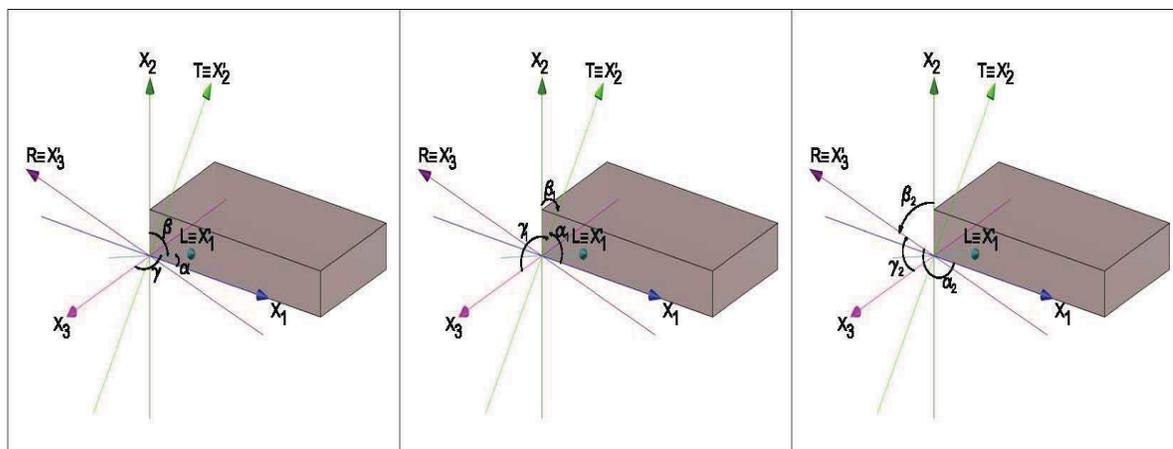


Figura 35 – Representação da lâmina em relação ao eixo tridimensional

A Tabela 12, representada, mostra a matriz de transformação tridimensional. Com base nessa matriz e nos dados da peça, serão considerados as variações dos ângulos tridimensionais.

Tabela 19 – Quarta simplificação de cossenos diretores para decomposição em três eixos de coordenadas

	X_1	X_2	X_3
X'_1	$\text{Cos}(\alpha)$	$\text{Cos}(\beta)$	$\sqrt{-\text{cos}^2(\alpha)-\text{cos}^2(\beta)+1}$
X'_2	$\text{Cos}(\alpha_1)$	$\text{Cos}(\beta_1)$	$\sqrt{-\text{cos}^2(\alpha_1)-\text{cos}^2(\beta_1)+1}$
X'_3	$\sqrt{-\text{cos}^2(\alpha)-\text{cos}^2(\alpha_1)+1}$	$\sqrt{-\text{cos}^2(\beta)-\text{cos}^2(\beta_1)+1}$	$\sqrt{\text{cos}^2(\alpha)+\text{cos}^2(\alpha_1)+\text{cos}^2(\beta)+\text{cos}^2(\beta_1)-1}$

Com o tensor S_{ij} do material proposto, tem-se:

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6073,65} & \frac{-0,0858}{1925,84} & \frac{-0,0477}{1633,35} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-0,3701}{6073,65} & \frac{1}{1925,84} & \frac{-0,4509}{1633,35} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-0,3346}{6073,65} & \frac{-0,6393}{1925,84} & \frac{1}{1.633,35} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{116,30} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{307,00} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{542,60} \end{pmatrix} \dots(126)$$

Do mesmo modo ao apresentado na transformação no plano, como o tensor da Equação 126 é de quarta ordem, foi necessária a utilização da matriz de transformação apresentada por Lekhnistskii (1981), representadas na Tabela 7 e Equação 121.

Aplicando-se como exemplo a rotação baseada na matriz da Equação 126, com $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\alpha_1 = 30^\circ$ e $\beta_1 = 45^\circ$ estes escolhidos aleatoriamente, tem-se a Equação 127.

$$l_{ij} = \begin{bmatrix} \cos 7^\circ & \cos 5^\circ & \sqrt{-\cos^2(7^\circ) - \cos^2(5^\circ) + 1} \\ \cos 15^\circ & \cos 30^\circ & -\sqrt{-\cos^2(15^\circ) - \cos^2(30^\circ) + 1} \\ \sqrt{-\cos^2(7^\circ) - \cos^2(15^\circ) + 1} & \sqrt{-\cos^2(5^\circ) - \cos^2(30^\circ) + 1} & \sqrt{\cos^2(7^\circ) + \cos^2(15^\circ) + \cos^2(5^\circ) + \cos^2(30^\circ) - 1} \end{bmatrix} \dots(127)$$

A qual simplificada e após substituída na Equação 121, passa a ser a Equação 128.

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} 0,933 & 0,25 & -0,183 & 0,214 & 0,413 & 0,483 \\ 0,75 & 0,50 & -0,25 & 0,354 & 0,433 & 0,612 \\ -0,683 & 0,25 & 1,433 & 0,599 & 0,989 & 0,413 \\ 1,431 & 0,707 & 1,197 & 0,846 & 0,623 & 0,433 \\ 1,597 & 0,50 & 1,024 & 0,599 & 0,803 & 0,483 \\ 1,673 & 0,707 & -0,428 & 0,553 & 0,853 & 1,116 \end{pmatrix} \dots(128)$$

Aplicando-se então na matriz S_{ij} do material, apresentada na Equação 128, é possível se obter os módulos de elasticidade (Mpa) transformados ($L' = X_1$, $R' = X_2$, $T' = X_3$) através de:

$$E_1 = \frac{1}{S_{11}} = 3.261,00 \quad E_2 = \frac{1}{S_{22}} = 1.443,00 \quad E_3 = \frac{1}{S_{33}} = 1.038,00$$

5.2.4. Comparação dos modelos plano e tridimensional

Com o objetivo de verificar-se a matriz de rotação, bem como os resultados do modelo, pode-se efetuar um comparativo do resultado do modelo apresentado na Figura 31, com o apresentado na Figura 36 a seguir.

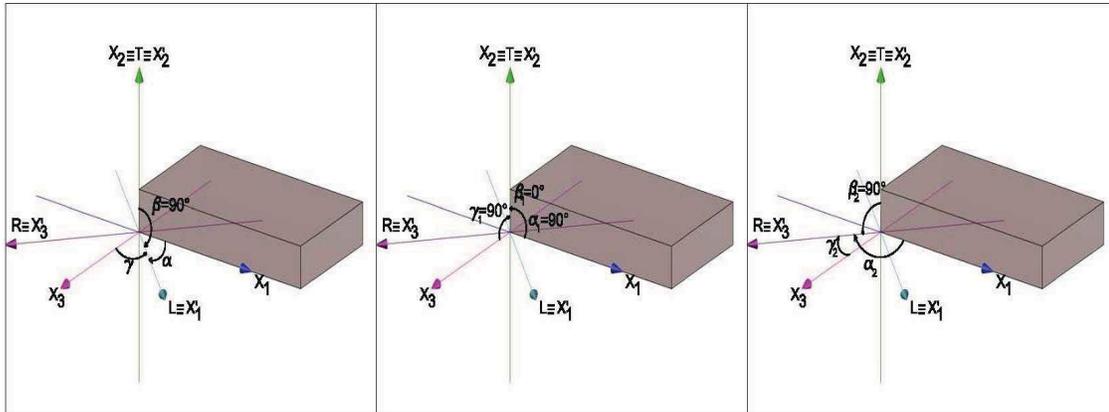


Figura 36– Representação da lâmina para o eixo T alinhado com X_2

Na Figura 36, observa-se que ao projetar o eixo T sobre o eixo X_2 , ocorre que os eixos L e R alinham-se com o plano X_1 e X_3 .

Com isso, os ângulos relacionados ao eixo L, são $\alpha=6^\circ$ (conforme o modelo da Figura 31) e $\beta=90^\circ$. Os ângulos relacionados ao eixo T, são $\alpha_1=90^\circ$, $\beta_1=0^\circ$.

Já os ângulos relacionados ao eixo R, γ_2 , α_2 , e β_2 , bem como os ângulos γ , γ_1 , são ângulos dependentes conforme a matriz de rotação apresentada.

Portanto, aplicando-se os ângulos na matriz de transformação da matriz da Tabela 12, a transformação será:

$$i_{ij} = \begin{bmatrix} \cos 6^\circ & \cos 90^\circ & \sqrt{-\cos^2(6^\circ) - \cos^2(90^\circ) + 1} \\ \cos 90^\circ & \cos 0^\circ & -\sqrt{-\cos^2(90^\circ) - \cos^2(0^\circ) + 1} \\ \sqrt{-\cos^2(6^\circ) - \cos^2(90^\circ) + 1} & \sqrt{-\cos^2(90^\circ) - \cos^2(0^\circ) + 1} & \sqrt{\cos^2(6^\circ) + \cos^2(90^\circ) + \cos^2(90^\circ) + \cos^2(0^\circ) - 1} \end{bmatrix} \dots (129)$$

Que após substituída na Equação 121, resulta na Equação 130.

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} 0,989 & 0 & 0,011 & 0 & 0,104 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,011 & 0 & 0,989 & 0 & 0,104 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,995 & 0 & 0,105 \\ 0,208 & 0 & 0,208 & 0 & 0,978 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,105 & 0 & 0,995 \end{pmatrix} \quad \dots(130)$$

Aplicando-se então na matriz S_{ij} do material, apresentada na Equação 126, serão obtidos os módulos de elasticidade em Mpa:

$$E_1 = \frac{1}{S_{11}} = 5.153,00 \quad E_2 = \frac{1}{S_{22}} = 1.926,00 \quad E_3 = \frac{1}{S_{33}} = 1.583,00$$

Estes, idênticos ao calculado para o modelo da Figura 31, o que comprova a metodologia aplicada.

Além disso, um outro fator comprovante, é que o módulo E_2 , o qual é obtido devido ao alinhamento de dos eixos T e X_2 , é o valor máximo apontado no material original conforme a Tabela 17.

Nesse contexto, ao alinhar-se os eixos L com X_1 , obtém-se o módulo de elasticidade E_1 máximo idêntico ao apresentado na Tabela 17. O mesmo acontece para o caso do alinhamento de R com X_3 .

5.3. Análise dos resultados Obtidos

Quanto ao reforço do composto com a malha em fibra de sisal, nota-se que o ganho nas propriedades elásticas é significativo onde há o acréscimo de aproximadamente 11% (onze por cento) do valor original.

De acordo com Fiorelli (2002) para as vigas de madeira de baixa densidade (madeiras de reflorestamento, por exemplo) o ganho no módulo de elasticidade é considerável, quando na aplicação de alguns tipos de reforço.

Baseando-se no resultado obtido após a aplicação do reforço, é possível observar que o módulo de elasticidade teve um acréscimo significativo, validando o modelo se comparado com Fiorelli (2002)

A ABNT (NBR 7190/97), indica que para ângulos até 6° a influência da inclinação das fibras não precisam ser consideradas para o cálculo das pelas estruturais.

Comparando-se os valores dos módulos de elasticidade transformados a 6° , com os módulos originais do modelo, verifica-se que existem alterações consideráveis no modelo proposto.

Quanto a esses módulos, observando-se que para o caso de compostos laminados reforçados com fibras de sisal, os ângulos de direção das fibras tem grande influência nas constantes de elasticidade.

Comparando o módulo de elasticidade longitudinal original apresentado na Tabela 13, com o módulo de elasticidade longitudinal para o ângulo de 6° , nota-se que o ganho obtido por meio do reforço é nulo, pois seu valor torna-se menor que o original, validando então a grande influência do ângulo das fibras nas constantes de elasticidade.

Quanto ao modelo de transformação de coordenadas tridimensional desenvolvido, observa-se que é de grande valia quanto ao estudo de variações dos ângulos internos dos materiais, pois, agiliza-se consideravelmente a obtenção dos resultados.

É importante ressaltar que o modelo tridimensional apresentado, utiliza-se de ângulos no espaço, e não com ângulos projetados. Por isso, para o modelo adotado, fica comprovado que ao alinhar-se um dos eixos transformados a um dos eixos originais, os demais eixos transformados ficam no plano dos eixos originais.

Portanto, o reforço com fibras de sisal em peças laminadas coladas torna-se viável, se um estudo das propriedades elásticas for efetuado levando-se em consideração o direcionamento das fibras de ambos os materiais utilizados.

6. CONCLUSÃO

Através da bibliografia apresentada e analisada foi mostrado que para o cálculo de tensões e deformações de materiais ortotrópicos sem variação de ângulos entre as fibras, basta que se trabalhe com as transformações de coordenadas rotacionando um plano perpendicular em torno de um eixo arbitrário e fixo.

Porém, para casos mais complexos os quais o estudo da anisotropia de um determinado material é necessário, pretendeu-se com esse trabalho aprofundar o estudo da anisotropia, podendo a partir das equações encontradas, transformar quaisquer sistemas de coordenadas arbitrário, independente de quais sejam os ângulos entre eles.

Apesar da metodologia ser apresentada para a espécie de madeira *Pinus Caribaea var. Bahamensis* e para fibras de sisal, o processo de transformação, os procedimentos de cálculo para os tensores e para a aplicação de reforços, pode ser utilizado para qualquer material que seja requerida uma transformação de coordenadas.

No que se refere aos compósitos em camadas, é importante salientar que não se fez uma investigação completa sobre o assunto, ou seja, são necessários novos estudos para que as demais constantes do material, bem como, as tensões e deformações da peça sejam então analisadas.

Com isso, de acordo com os resultados obtidos nesse trabalho, pode-se concluir que a metodologia empregada permitiu atender aos objetivos preestabelecidos, que foram os seguintes:

Foi desenvolvida uma formulação para transformações de coordenadas tridimensionais, que facilita o estudo da anisotropia de materiais;

Foi analisado o módulo de elasticidade de uma viga de madeira laminada colada reforçada com fibras de sisal, aplicando-se variação angular das fibras tanto para o caso plano quanto para o caso tridimensional;

Foi realizado o comparativo do caso de transformação plana com o caso tridimensional.

Além disso, fica comprovado que ao se aplicar as transformações no modelo proposto, agiliza-se consideravelmente o processo de cálculo.

7. CONTINUAÇÃO DOS ESTUDOS / SUGESTÕES

O presente trabalho mostrou estudos teóricos desenvolvidos através de metodologias encontradas na literatura.

Portanto, face às conclusões atingidas, é importante que outros estudos sejam realizados para o aprofundamento do tema, e a comprovação dos modelos aqui propostos.

Nesse contexto, as sugestões para continuação dos estudos são:

- Produção do compósito do modelo para ensaio em laboratório para comparação com o modelo sugerido;
- Análise dos módulos de elasticidade transversal (G) e coeficientes de Poisson (ν);
- Análise de tensões e deformações da viga proposta;
- Estudo dos critérios de resistência do modelo proposto;
- Utilização de outros tipos de materiais como estudo comparativo;
- Aplicação modelo de laminado com outras espécies de madeira.

8. BIBLIOGRAFIA

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Cálculo e execução de estruturas de madeira (NBR 7190/97)*. Rio de Janeiro, 22 p., 1997.

BARRACUDA Advanced Composites (2011) – site acessado em Janeiro/2011 - <http://barracudatec.com.br>

BINDZI, I. SAMSON. M. **New Formula for Influence of Spiral Grain on Bending Stiffness of Wooden Beams**. Journal of Structural Engineering.P.1541-46. V121.N.ST11.Nov. 1995.

BLEDZKI, A.K.; GASSAN, J. (1999). **Composites reinforced with cellulose based fibers**. Progress in Polymer Science, Oxford, v.24, n. 2.

BODIG, J. ; JAYNE, B. A. *Mechanics of wood and wood composites*, New York, Van Nostrand Reinhold, 712p, 1982.

CALLISTER JR. W. D. **Ciência e engenharia de materiais: uma introdução**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

CARVALHO, R. F. **Compósitos de fibras de sisal para uso em reforço de estruturas de madeira**. São Carlos, 2005. 119f. Tese (Doutorado em Engenharia de Materiais) – Universidade de São Paulo.

CHEN, W. F.; SALEEB, A. **Constitutive equations for engineering materials**. New York: John Wiley and sons, 1982. Volume 1: Elasticity and Modeling.

EMBRAPA Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária – site acessado em Janeiro/2010 – <http://embrapa.gov.br>

FIGLIOLI, J. **Utilização de fibras de carbono e de fibras de vidro para reforço de vigas de madeira**. São Carlos, *Dissertação de Mestrado* - Escola de Engenharia de São Carlos/USP, 2002.

FIGLIOLI, J. **Estudo teórico e experimental de vigas de madeira laminada colada reforçadas com fibra de vidro**. São Carlos, *Tese de doutorado* - Escola de Engenharia de São Carlos/USP, 2005.

FLAMINIO, L.N. **Compósitos Estruturais: ciência e tecnologia**. São Paulo: Edgard Blusher, 2006.

FREIRE, J. W.; BERARDO, A. L. **Técnicas e materiais alternativos de construção**. Editora da Unicamp, Campinas – SP, 2003.

GOODMAN, J. R.; BODIG, J. R. BODIG, J. **Orthotropic elastic proprierts of wood**. Journal of the Structural Division, v. 96, n.ST11, p. 2301-2319, Nov. 1970.

JONES, R. M. **Mechanics of composite materials**. Philadelphia: Taylor & Francis Inc., 1998. 519p.

HEARMONSON, J.C., STAHL, D.C., CRAMER, S.M., SHALER, S.M. **Transformation of Elastic Properties for Lumber with Cross Grain**. Journal of Structural Engineering. P.?. V123.N.ST1.Oct.1997.

HYER, M.W. (1998). **Stress analysis of fiber-reinforced composite materials**. Boston: WCB McGraw Hill.

HULL, D. **An Introduction to Composite Materials**. Cambridge University (1995).246p.

LIMA, P. R. L. **Análise teórica e experimental de compósitos reforçados com fibras de sisal**. Rio de Janeiro: PEC/COPPEDEC/UFRJ, 2004. 263p. Tese Doutorado.

LEKHNITSKII, S. G.; TSAI, S. W.; CHERONT, T. **Anisotropic Plates**. New York: Gordon and Breach Science Puclischers, 1968. 534p.

LEKHNITSKII, S.G. **Theory of Elasticity of an Anisotropic Body**. Moscou: Mir, 430 p. 1981.

MACEDO, A. N. **Fadiga em emendas dentadas em madeira laminada colada**. São Carlos, 2000. Tese (Doutorado) . Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

MASCIA, N.T. **Considerações a respeito da Anisotropia na Madeira**. São Carlos, 1991. 293p. Tese- EESC-USP.

MENDONÇA, P. T. R. **Materiais compostos & Estruturas-sanduiche: projeto e análise**. Barueri-SP: Manole, 2005.

MILLER, R.B. **Characteristics and Availability of Commercially Important Woods**. Forest Products Laboratory. 1999. Wood handbook—Wood as an engineering material. Gen. Tech. Rep. FPL–GTR–113. Madison, WI: U.S. Department of Agriculture, Forest Service, Forest Products Laboratory. 463 p.

MYKLESTAD, N.O. **Cartesian Tensors**. D.Van Nostrand Company, Inc. Canada. 1967. 141p.

PFEIL, W.; PFEIL, M. **Estruturas de madeira**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora – LTC, 2003.

Silva, O.; BELTRÃO, N. **O agronegócio do sisal no Brasil**. Brasília: Embrapa-SPI; Campina Grande: Embrapa-CNPA, 1999.

SILVA, F. A. **Durabilidade e Propriedades Mecânicas de Compósitos Cimentícios Reforçados por Fibras de Sisal**. Rio de Janeiro, 2009. 243f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro.

SILVA, R. V. **Compósito de resina de poliuretano derivada de óleo de mamona e fibras vegetais**. São Carlos, 2003. 139f. Tese (Doutorado em Engenharia de Materiais) – Universidade de São Paulo.

TECSAL Tecelagem de Sisal da Bahia – site acessado em Junho/2011 – <http://www.tecsalbr.com.br/telasdesisal.htm> .

TELES, R. F. **Propriedades tecnológicas de vigas de madeira laminada colada produzidas com louro vermelho (*Sextonia rubra*)**. Brasília, 2009. 118f. Dissertação de Mestrado em Ciências Florestais – Departamento de Engenharia Florestal. Universidade de Brasília .

TIMOSHENKO, S. **Resistência dos materiais**. Rio de Janeiro: LTC, 1985.

TING, T.C. T. **Invariants of anisotropic Elastic Constants**. The quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. P.431-48. V.40... 1987.

TOLEDO FILHO, R. D.; KURUVILLA, J.; GHAVAMI, K.; ENGLAND, G. L. **The use of sisal fibre as reinforcement in cement based composites**. Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental, v.3, n.2, p.245-256, 1999.

TOLEDO FILHO, R. D.; SILVA, F. A.; FAIRBAIRN, E. M. R.; MELO FILHO, J. A. **Durability of compression molded sisal fiber reinforced mortar laminates**. Construction and Building Materials, v.23, n.6, p. 2409-2420, 2009.

VANALLI, L. **Análise das distribuições de tensões e de deformações em vigas anisotrópicas**. Campinas, 2001. 211f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de

Estruturas) – Faculdade de Engenharia Civil e Arquitetura, Universidade Estadual .de Campinas.

ZANGIÁCOMO A. L. **Emprego de espécies tropicais alternativas na produção de elementos estruturais de Madeira Laminada Colada.** São Carlos, 2003. Dissertação de Mestrado . Escola de Engenharia de São Carlos . Universidade de São Paulo.