



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

**ESTUDO COMPARATIVO DE PROCESSOS
CONTÍNUOS PARA ANÁLISE DE NÚCLEOS
ESTRUTURAIS SUBMETIDOS À TORÇÃO**

Eng. TALITA CLEMENTE MAGALHÃES GOMES

Orientador: Prof. Dr. JOSÉ LUIZ F. DE ARRUDA SERRA

Dissertação de mestrado apresentada à
Comissão de pós-graduação da Faculdade
de Engenharia Civil da Universidade
Estadual de Campinas, como parte dos
requisitos para obtenção do título de Mestre
em Engenharia Civil, na área de
concentração de Estruturas.

Campinas, SP
1999



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

**ESTUDO COMPARATIVO DE PROCESSOS
CONTÍNUOS PARA ANÁLISE DE NÚCLEOS
ESTRUTURAIS SUBMETIDOS À TORÇÃO**

Eng. TALITA CLEMENTE MAGALHÃES GOMES

Orientador: Prof. Dr. JOSÉ LUIZ F. DE ARRUDA SERRA

Dissertação de mestrado apresentada à
Comissão de pós-graduação da Faculdade
de Engenharia Civil da Universidade
Estadual de Campinas, como parte dos
requisitos para obtenção do título de Mestre
em Engenharia Civil, na área de
concentração de Estruturas.

Campinas, SP
1999

Atesto que esta é a versão definitiva
da dissertação.

28/11/2000

Prof. Dr.

Matrícula: 04155

0010685

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	T/ UNICAMP
	G585e
V. Ex.	
TOMBO BC	44188
PROC.	16-892107
C ☐	D ☒
PREC. R\$	11,00
DATA	26/04/01
N.º CPD	

CM-00155013-4

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

G585e Gomes, Talita Clemente Magalhães
Estudo comparativo de processos contínuos para
análise de núcleos estruturais submetidos à torção /
Talita Clemente Magalhães Gomes.--Campinas, SP:
[s.n.], 2000.

Orientador: José Luiz F. de Arruda Serra
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Civil.

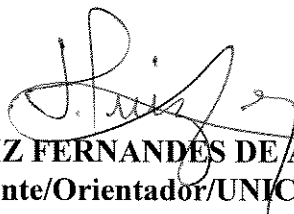
1. Torção. 2. Edifícios altos. 3. Teoria das
estruturas. I. Serra, José Luiz F. De Arruda. II.
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Civil. III. Título.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL**

**ESTUDO COMPARATIVO DE PROCESSOS
CONTÍNUOS PARA ANÁLISE DE NÚCLEOS
ESTRUTURAIS SUBMETIDOS À TORÇÃO**

TALITA CLEMENTE MAGALHÃES GOMES

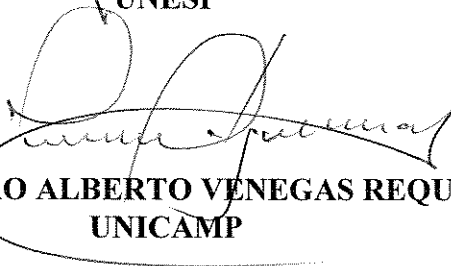
Tese de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:



Prof. Dr. JOSÉ LUIZ FERNANDES DE ARRUDA SERRA
Presidente/Orientador/UNICAMP



Prof. Dr. RENATO BERTOLINO JUNIOR
UNESP



Prof. Dr. JOÃO ALBERTO VENEGAS REQUENA
UNICAMP

Campinas, 21 de outubro de 1999

SUMÁRIO

Lista de figuras	xi
Lista de quadros	xiii
Lista de tabelas	xv
Notação	xvii
Resumo	xix
Abstract	xix
 CAPÍTULO 1 – Introdução	 1
1.1 – Análise de núcleos estruturais	2
 CAPÍTULO 2 – Objetivos	 5
2.1 – Considerações e hipóteses básicas	6
 CAPÍTULO 3 – Formulação do tratamento contínuo	 9
3.1 – Introdução	9
3.2 – A influência dos lintéis	11
3.3 – Espessura da parede equivalente aos lintéis	15
3.4 – Processo 1	16
3.5 – Processo 2	22
3.6 – Processo 3	25
3.7 - Processo 4	27
3.8 – Comparação entre os processos	34

CAPÍTULO 4 – Determinação dos esforços atuantes no núcleo	37
4.1 - Formulação inicial	37
4.2 – Força normal	38
4.3 – Momento fletor	40
4.4 – Forças distribuídas nas interseções de paredes	41
4.5 – Força cortante	43
CAPÍTULO 5 – Exemplos	45
5.1 – Exemplo 1	47
5.2 – Exemplo 2	54
5.3 – Exemplo 3	61
CAPÍTULO 6 – CONCLUSÕES	75
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	77
APÊNDICE I – Torção não uniforme: Resumo sobre barras de seção aberta e paredes delgadas	81
I.1 – Introdução	81
I.2 – Hipóteses básicas	82
I.3 – Centro de torção	83
I.4 – Torção uniforme ou torção de Saint-Venant	88
I.5 – Torção não uniforme ou Flexo-torção	91
APÊNDICE II – Modelo discreto sugerido por Guillardí	99
II.1 – Introdução	99

II.2 – Matriz de rigidez do modelo com diagonais e do lintel	104
II.3 – Cálculos finais para o processo discreto	106

LISTA DE FIGURAS

1.1 – Núcleo estrutural - empenamento.....	2
2.1 – Tipos de núcleos analisados	6
3.1 – Sistema de eixos e dimensões características.....	10
3.2 – Tensões q_S de cisalhamento oriundas dos lintéis.....	11
3.3 – Coeficientes de rigidez do lintel e parede equivalente	15
3.4 – Diagramas de área setorial.....	17
3.5 – Diagrama de S_ω	19
4.1 – Esforços num elemento longitudinal de parede.....	37
4.2 – Coordenada local do esqueleto de parede.....	38
5.1 – Tipos de núcleo analisados e sistema de eixos de referência	45
5.2 – Seção transversal do núcleo do exemplo 1.....	47
5.3 – Seção transversal do núcleo do exemplo 2.....	54
5.4 – Seção transversal do núcleo do exemplo 3.....	61
I.1 – Barra de seção delgada aberta	81
I.2 – Centro de torção e área setorial	85
I.3 – Interpretação geométrica da área setorial	86
I.4 – Interpretação geométrica da área setorial utilizando um polo provisório	87
I.5 – Deslocamento de um ponto devido à rotação	89
I.6 – Distorção do elemento $dzds$	89
I.7 – Distribuição de τ	90
I.8 – Tensões normais no elemento $dzds$	92
I.9 – Tensões tangenciais e equilíbrio longitudinal	93
II.1 – Momento parasita no elemento de parede	100
II.2 – Correção do giro da ligação parede-lintel.....	100
II.3 – Núcleo estrutural e sua discretização	101
II.4 – Estados de deslocamento	102

LISTA DE QUADROS

3.1 – Definições dos deslocamentos em cada processo.....	35
3.2 – Equação diferencial do momento torçor em cada processo	35
3.3 – Rotação ao longo da altura em cada processo	36
5.1 - Rotações dos diafragmas em radianos x 10^{-6} (lintel pouco rígido).....	49
5.2 - Deslocamentos longitudinais da aresta A em metros x 10^{-6} (lintel pouco rígido).....	49
5.3 - Deslocamentos longitudinais da aresta E em metros x 10^{-6} (lintel pouco rígido).....	50
5.4 - Rotações dos diafragmas em radianos x 10^{-6} (lintel muito rígido)	50
5.5 - Deslocamentos longitudinais da aresta A em metros x 10^{-7} (lintel muito rígido)	51
5.6 - Deslocamentos longitudinais da aresta E em metros x 10^{-7} (lintel muito rígido)	51
5.7 - Rotações dos diafragmas em radianos x 10^{-4}	56
5.8 - Forças normais nas seções a meia altura da parede AE em kN x 10	57
5.9 - Forças cortantes nas seções a meia altura da parede AE em kN x 10.....	58
5.10 – Momentos fletores nas seções a meia altura da parede AE em kN x 10	59
5.11 - Forças cortantes propriamente ditas nos lintéis em kN x 10.....	60
5.12 - Rotações dos diafragmas em radianos x 10^{-3}	63
5.13 – Deslocamentos longitudinais da aresta A em polegadas x 10^{-3}	64
5.14 - Deslocamentos longitudinais da aresta E em polegadas x 10^{-3}	65
5.15 - Tensões longitudinais a meia altura da aresta A em lb/pol ² x 10^{-1}	66
5.16 - Tensões longitudinais a meia altura da aresta E em lb/pol ² x 10^{-1}	67
5.17 - Forças normais nas seções a meia altura da parede AE em libras x 10^{-1}	68
5.18 - Forças cortantes nas seções a meia altura da parede AE em libras x 10^{-1}	69
5.19 - Forças cortantes nas seções a meia altura da parede EF em libras x 10^{-1}	70

5.20 - Momentos fletores nas seções a meia altura da parede AE em lb x pol.....	71
5.21 - Momentos fletores nas seções a meia altura da parede EF em lb x pol.....	72
5.22 - Momentos fletores nos lintéis em lb x pol	73
5.23 – Forças cortantes nos lintéis em libras	74
II.1 –Matriz de rigidez do lintel.....	104
II.2 –Matriz de rigidez do modelo	105

LISTA DE TABELAS

5.1 – Dados da estrutura do exemplo 1	48
5.2 – Dados da estrutura do exemplo 2	55
5.3 – Dados da estrutura do exemplo 3	62

NOTAÇÃO

γ	deformação transversal;
Γ_i	constante de empenamento para o processo i .
ν	coeficiente do Poisson;
σ	tensão axial;
τ	tensão tangencial;
χ	função do empenamento;
χ'	primeira derivada da função χ em relação a z ;
χ''	segunda derivada da função χ em relação a z ;
ϕ	ângulo de rotação do núcleo em torno do eixo longitudinal z ;
ϕ'	primeira derivada da rotação em relação a z ;
ϕ''	segunda derivada da rotação em relação a z ;
ϕ'''	terceira derivada da rotação em relação a z ;
ω	área setorial;
$\bar{\omega}$	área setorial de uma seção parcialmente fechada;
Ω	dobro da área determinada pela linha do esqueleto;
a	comprimento da parede do núcleo na direção que contém o lintel;
b	comprimento da parede do núcleo na direção que não contém o lintel;
C_t	centro de torção;
E	módulo de elasticidade longitudinal;
E^*	módulo de elasticidade longitudinal reduzido;
G	módulo de elasticidade transversal;
h	altura do andar;
h_ℓ	altura do lintel;
H	altura da estrutura;
I	momento de inércia;

I_p	momento polar de inércia;
J_ω	momento de inércia setorial;
J_Ω	constante de torção de Bredt;
J_{Ω_ℓ}	constante de torção representando o efeito dos lintéis;
J_i	constante de torção para o método i ;
J_t	momento de inércia à torção;
ℓ	comprimento do lintel;
m	momento torçor distribuído;
M_c	momento torçor causado pelos lintéis;
M_{ft}	momento de flexo-torção;
M_l	momento de torção livre;
M_t	momento torçor externo;
M_s	momento estático;
n	distância do centro de torção até a tangente ao ponto;
O	origem do sistema de eixos da estrutura;
O_s	origem da coordenada da linha do esqueleto;
q	força cortante distribuída;
q_ω	componente variável da força cortante distribuída;
q_s	componente constante da força cortante distribuída;
s	coordenada da linha do esqueleto;
S_ω	momento estático setorial;
$S_{\overline{\omega}}$	momento estático setorial para uma seção parcialmente fechada;
t	espessura das paredes do núcleo;
t_{eq}	espessura do meio contínuo equivalente ao lintel;
t_ℓ	base do lintel;
T	momento torçor concentrado;
u	deslocamento longitudinal ou empenamento;
v	deslocamento tangencial.

RESUMO

Neste trabalho são desenvolvidos quatro processos contínuos para análise de núcleos estruturais formados por uma ou duas seções canal, fechados por lintéis e submetidos à torção.

Inicia-se com um processo baseado na teoria da flexo-torção de Vlasov. Em seguida introduz-se as deformações devidas ao cisalhamento. No terceiro processo considera-se uma seção fechada. O último, mais sofisticado, é uma adaptação da teoria para seções fechadas desenvolvida inicialmente por Umansky e posteriormente por Bencoter.

Os resultados obtidos pelos processos contínuos são analisados e comparados com os valores obtidos utilizando processo dos deslocamentos, e também com resultados experimentais.

ABSTRACT

Four continuum methods for torsional analysis of structural cores that consist of one or two channel sections, connected by lintel beams, are described.

First, Vlasov's theory for thin walled beams of open sections is used. In the second method, the shear deformation is included. The third method uses a closed box torsion-bending theory, and the last one adapts Umansky-Bencoter theory to a perforated core.

The results obtained with these methods are analyzed and compared with a frame analogy model and also with experimental data.

CAPÍTULO 1

Introdução

Em edifícios elevados, o efeito das forças horizontais, causadas pela ação dos ventos ou por esforços sísmicos, é de grande importância. Em muitos projetos utiliza-se paredes de cisalhamento para resistirem à estes esforços. Elas constituem elementos verticais contínuos, muito rígidos em seu plano. Quando estas paredes estão associadas, formam um núcleo estrutural. Geralmente nestes núcleos localizam-se os vãos de escadas e elevadores, e os dutos de serviço. Para permitir o acesso à estes compartimentos, os núcleos devem ser formados por uma seção aberta. Com o objetivo de aumentar a rigidez de um núcleo, este pode ser fechado ao nível dos andares por uma viga transversal, denominada lintel.

Portanto, o núcleo estrutural de um edifício pode ser definido como uma combinação de paredes planas, interligadas, formando uma seção aberta que pode estar fechada por lintéis ao nível de cada andar.

Devido à relação entre as dimensões características de um núcleo: altura, espessura e comprimento das paredes, o núcleo pode ser considerado como uma viga de paredes delgadas.

Como o núcleo estrutural garante a resistência aos carregamentos laterais, ele será solicitado por esforços de torção, causados pela excentricidade da linha de ação destes carregamentos em relação ao centro de torção. Portanto, pode se observar na *figura 1.1*, que uma viga de seção transversal aberta e paredes delgadas quando sujeita à torção, sofre empenamento na seção transversal. A restrição à este deslocamento provocada pela base rígida da estrutura, faz com que apareçam tensões axiais ao longo da altura do núcleo.

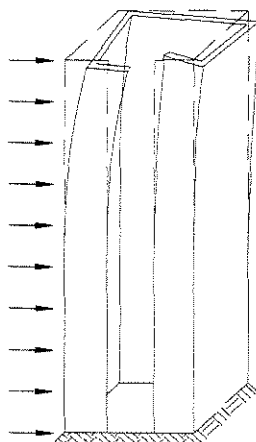


Figura 1.1 – Núcleo estrutural: empennamento.

1.1 Análise de núcleos estruturais:

A análise de núcleos estruturais pode ser realizada por diversos modos, como processos contínuos ou discretos.

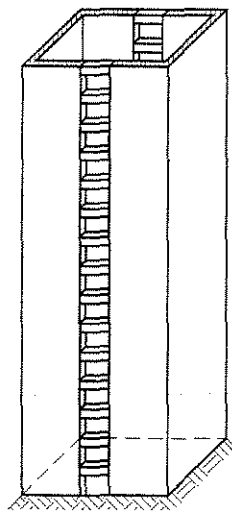
A análise por processos discretos pode utilizar a análise matricial da estrutura pelo processo dos deslocamentos, ou o método dos elementos finitos. Na discretização feita por elementos finitos, a estrutura é modelada por um grande número de pequenos elementos. Em geral, utiliza-se elementos plano de tensões nas paredes, elementos de barra nos lintéis e nos pórticos, e elementos de placa nas lajes. Os estudos concentram-se em propor um elemento apropriado para modelar os pilares-parede. Dentre alguns autores que desenvolveram trabalhos neste sentido, estão: Mac LEOD¹², HO e LIU⁹ e CHEUG e SWADDIWUDHIPONG⁴. No caso da análise matricial utilizando o processo dos deslocamentos, as colunas e vigas são consideradas como elementos de barra, e os pilares-parede são substituídos por um elemento formado por uma barra vertical com braços rígidos nas suas extremidades. Entre vários autores que têm analisado núcleos por processos discretos, pode-se citar: Mac LEOD^{13,14,15}, Mac LEOD e HOSNY¹⁶, STAFFORD SMITH e ABATE²⁴, STAFFORD SMITH e GIRGIS²⁵, HEIDEBRECHT e SWIFT⁸, TARANATH²⁶, KWAN¹¹, YAGUI³¹, SERRA²³ e GUILLARDI⁰⁷.

No tratamento contínuo, o núcleo é analisado pela teoria da flexo-torção, como uma viga engastada-livre. Os lintéis são substituídos por um meio contínuo, com uma rigidez equivalente, uniformemente distribuída ao longo da altura. Este tratamento é mais apropriado para um núcleo de seção transversal uniforme, se revelando uma forma complicada de analisar uma estrutura não uniforme. Vários pesquisadores têm analisado núcleos pelo tratamento contínuo, desde a década de 60. Entre outros pode-se destacar: BECK², MICHAEL¹⁸, ROSMAN²⁰, TSO e BISWAS²⁸, RUTENBERG e TSO²², KHAN e STAFFORD SMITH¹⁰, RUTENBERG, SHTARKMAN e EISENBERG²¹, MANCINI¹⁷, COSTA⁵ e BARBOSA¹.

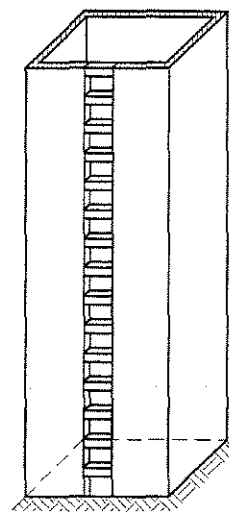
CAPÍTULO 2

Objetivos

Neste trabalho são analisados núcleos estruturais que sofrem a ação de um momento torçor, e são compostos por uma seção transversal aberta, fechada por lintéis ao nível dos andares. O comportamento destes núcleos sob torção está entre o de uma barra de seção transversal aberta, e uma barra de seção transversal fechada, conforme a rigidez dos lintéis que fecham a seção. Cada uma destas hipóteses leva a procedimentos que resultam em bons resultados apenas para os casos extremos onde os lintéis são muito flexíveis ou muito rígidos. Vários procedimentos foram desenvolvidos para o caso de núcleos com lintéis de rigidez moderada, onde tanto a flexão quanto o cisalhamento são importantes. O objetivo deste estudo é descrever e comparar alguns processos que utilizam o tratamento contínuo para analisar um núcleo, procurando como melhor representar a influência dos lintéis no comportamento do núcleo sob torção. Enquanto isso, procura-se definir os limites de aplicação de cada processo conforme as características geométricas e estruturais de um núcleo. São analisados dois tipos de núcleos que têm seção transversal retangular. A *figura 2.1 a* ilustra uma seção duplo C, enrijecida por dois lintéis ao nível das lajes, enquanto que a *figura 2.1 b* ilustra uma seção C, enrijecida por um lintel ao nível de cada laje.



a) Seção duplo C.



b) Seção C.

Figura 2.1 – Tipos de núcleos analisados.

2.1 Considerações e hipóteses básicas:

O núcleo estrutural é considerado como uma barra de seção aberta e paredes delgadas, engastada em uma extremidade e livre na outra, que está sendo submetida a um momento torçor, devido a cargas laterais excêntricas aplicadas na estrutura. Neste caso, a teoria de torção uniforme de Saint Venant não é satisfatória, já que surgem tensões axiais com a torção. Portanto, aplica-se a teoria de torção não uniforme introduzida por VLASOV³⁰, e os deslocamentos e esforços podem ser obtidos através das equações diferenciais que descrevem o problema. Uma breve revisão sobre torção não uniforme em barras de seção aberta e delgada é apresentada no apêndice I. Ao apresentar a teoria básica, admite-se que não há restrição ao empenamento causada pelos lintéis. A equação diferencial da flexo-torção é deduzida, e sua solução proposta.

Quando existem lintéis enrijecendo o núcleo ao nível de cada andar, estas vigas têm seu efeito representado por um meio contínuo. A rigidez deste meio é equivalente à rigidez

dos lintéis, sendo distribuída uniformemente ao longo da altura do núcleo. A presença de lintéis fechando as seções transversais, produz um fluxo de tensões de cisalhamento ao redor do núcleo.

As lajes serão consideradas como diafragmas horizontais, de rigidez infinita em seu plano, mas sem rigidez transversal. Assim será garantida a hipótese básica da teoria de torção não uniforme, de que as seções transversais são indeformáveis em seus planos, sem que as lajes influenciem os deslocamentos verticais.

Os lintéis serão admitidos como engastados nas extremidades, reduzindo assim os deslocamentos verticais relativos entre paredes. Não haverá esforços normais nos lintéis, devido à rigidez infinita das lajes.

CAPÍTULO 3

Formulação do tratamento contínuo

3.1 Introdução:

Os esforços e os deslocamentos ao longo do núcleo serão determinados por quatro processos diferentes, todos baseados no método contínuo de análise do núcleo. Os processos estão ordenados conforme aumenta sua complexidade. O primeiro processo descrito é o mais simples, onde a deformação tangencial da seção transversal do núcleo é desprezada. Já no segundo processo a consideração da deformação tangencial é introduzida. O terceiro processo procura representar melhor o efeito de lintéis rígidos, e por isto o empenamento ao longo do núcleo é considerado como função da área setorial correspondente à uma seção transversal fechada. No quarto processo, a teoria desenvolvida por UMANSKY²⁹ e por BENSCOTER³ para seções fechadas é utilizada, o que implica numa nova definição para o empenamento do núcleo.

A seção transversal do núcleo é retangular, e pode ser composta por duas seções C ligadas por dois lintéis ao nível dos andares, ou por uma seção C fechada por um lintel ao nível dos andares. Estas seções transversais e suas dimensões características estão ilustradas nas *figuras 3.1 a e b*.

O sistema de eixos adotado é ilustrado nas *figuras 3.1 a, b e c*. A origem C_t está na base do edifício e coincide com o centro de torção da seção transversal. Os eixos x e y estão no plano da seção transversal, enquanto que o eixo longitudinal z é orientado da base do edifício para o topo. A coordenada s será medida ao longo da “linha do esqueleto”, linha que divide a espessura da parede ao meio, e terá origem no ponto O_s , determinado pela teoria de torção não uniforme.

A altura da estrutura, representada por H , está ilustrada através de uma parede na *figura 3.1 c*. As seções transversais têm dimensões $a \times b$, e as paredes dos núcleos têm espessuras t_1 , t_2 e t_3 , como pode ser observado nas *figuras 3.1 a e b*. As faces que contêm o lintel têm comprimento a , enquanto que as faces na outra direção têm comprimento b . A seção transversal C tem um eixo de simetria, que foi adotado como o eixo y . Neste caso, a parede que contém o lintel tem espessura t_2 , a parede oposta tem espessura t_3 , e as paredes na outra direção têm espessura t_1 . A seção transversal composta por duas seções C tem dupla simetria. Nesta seção, as paredes que não contêm os lintéis têm espessura t_1 , e as paredes que contêm os lintéis têm espessura t_2 . O lintel está apresentado na *figura 3.1 d*. Seu comprimento é representado por ℓ , sua espessura por t_ℓ e sua altura por h_ℓ .

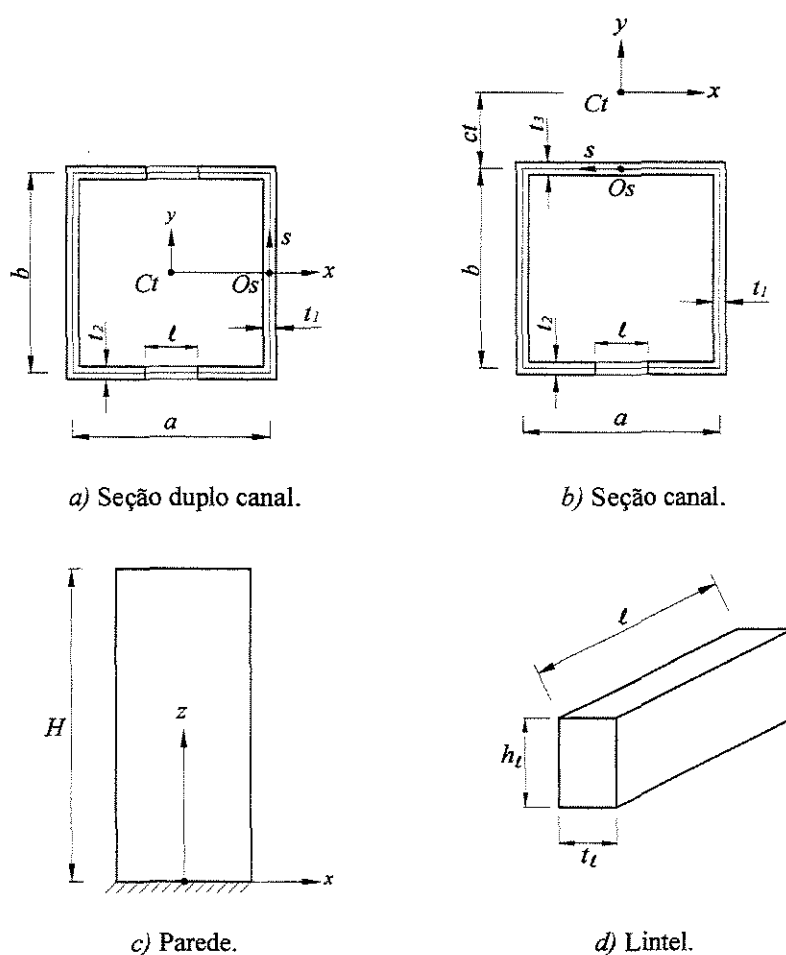
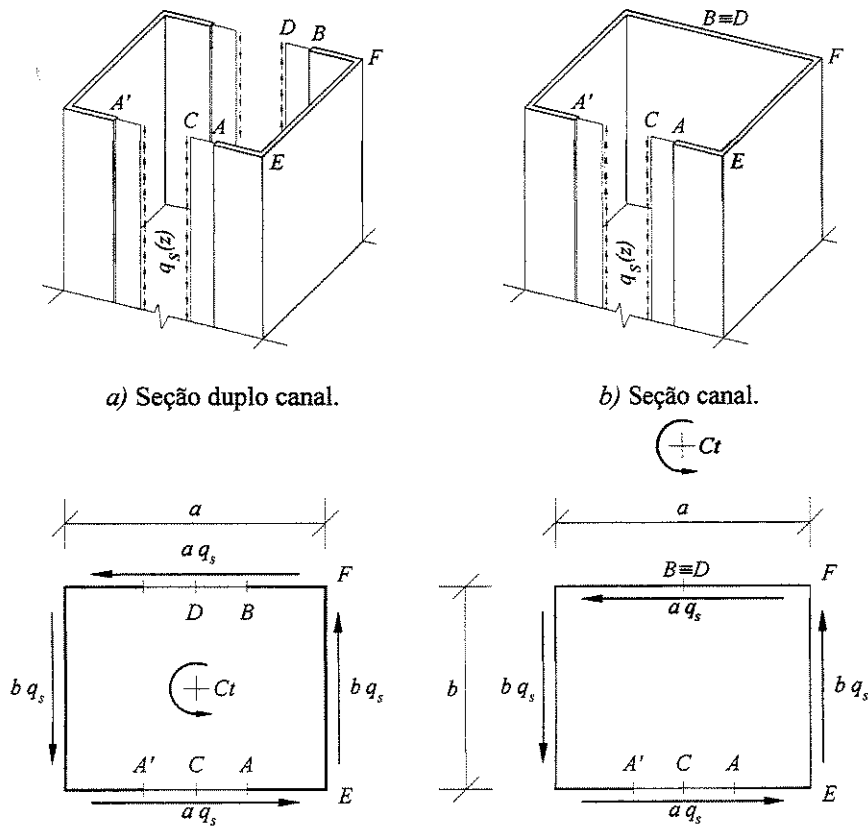


Figura 3.1 – Sistema de eixos e dimensões características.

3.2 A influência dos lintéis:

O apêndice I resume a teoria da flexo-torção desenvolvida por VLASOV³⁰ para barras de seção aberta e paredes delgadas. No caso de núcleos estruturais fechados por lintéis, a rigidez à torção será alterada pois os lintéis reduzem o empenamento. Os lintéis são substituídos por um meio contínuo uniformemente distribuído ao longo da altura do edifício e a espessura equivalente, t_{eq} , deste meio contínuo será oportunamente determinada.

A contribuição para a rigidez do núcleo desta parede equivalente é dada pela força cortante distribuída q_s que corresponde ao vínculo retirado quando se secciona o lintel no seu ponto médio (C), gerando também, em virtude do Teorema Cauchy, um fluxo de cisalhamento que percorre a seção. A *figura 3.2* ilustra este fato.



c) Fluxo de q_s (constante) na linha do esqueleto – resultantes.

Figura 3.2 – Tensões q_s de cisalhamento oriundas dos lintéis.

Deve-se notar que, como os pontos médios dos lintéis estão situados em um eixo de simetria, o momento fletor nestes pontos será nulo quando a seção for solicitada por um momento torçor, pois este produz deslocamentos antimétricos, ou seja, os pontos médios dos lintéis são pontos de inflexão das respectivas elásticas.

Assim, a resistência à torção de uma seção genérica do núcleo com lintéis é dada pela soma de três parcelas: a primeira correspondente à tensão oriunda da torção livre de St. Venant, a segunda devida à tensão variável q_{ω} oriunda da torção não uniforme e a terceira devida as tensões constantes q_s causadas pela incorporação da parede equivalente aos lintéis.

Para o equilíbrio de uma seção é necessário que o momento torçor externo M_t , seja igual a soma das três contribuições assinaladas no parágrafo anterior, ou seja:

$$\begin{aligned} M_t &= M_l + M_{ft} + M_c \\ M_t &= M_l + \oint (q_s + q_{\omega}) n ds \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde n é a distância perpendicular do centro de torção (Ct) até a tangente ao ponto, s , é a coordenada da linha do esqueleto e $q_s + q_{\omega} = q_{total} = q$. Convém notar também que q_s ocorre em toda a seção e q_{ω} não existe na parede equivalente aos lintéis.

Como q_s é constante, o momento por ele provocado vale (*figura 3.2 c*):

$$\oint q_s n ds = q_s \times 2 a b = q_s \times \Omega \quad (3.2)$$

onde Ω é o dobro da área determinada pela linha do esqueleto.

Conforme está apresentado no apêndice I, a equação (I.25), ou seja, $M_l = G J_t \phi'$ representa a parcela do momento torçor correspondente à torção livre, e a equação (I.51), onde $\oint q_{\omega} n ds = M_{ft} = -E^* J_{\omega} \phi'''$ representa a parcela correspondente à torção não uniforme.

Utilizando as expressões (3.1) e (3.2), a equação da flexo-torção vale:

$$M_t = G J_t \phi' + q_s \Omega - E^* J_\omega \phi'' \quad (3.3)$$

A compatibilidade dos deslocamentos longitudinais $u(z,s)$ (empenamento) conduz a:

$$\oint \frac{\partial u}{\partial s} ds = 0 \quad (3.4)$$

Como já foi mencionado, existe um eixo de simetria para os dois tipos de seção transversal analisados. Portanto, pode se afirmar que:

$$\int_C^D \frac{\partial u}{\partial s} ds = 0 \quad (3.5)$$

onde os pontos C e D são os pontos indicados na *figura 3.2*. Observa-se que os pontos D e B coincidem na seção C .

A deformação transversal γ , será:

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\tau}{G} \quad (3.6)$$

onde τ é a tensão de cisalhamento e $v(z,s)$ é o deslocamento na direção da ordenada s , e conforme deduzido no apêndice I (equação I.28), vale:

$$v = n \phi \quad (3.7)$$

Derivando o deslocamento tangencial, obtém-se:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = n \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (3.8)$$

A tensão tangencial vale:

$$\tau = \frac{q_s + q_\omega}{t} \quad (3.9)$$

onde t é a espessura da parede.

Substituindo estas últimas expressões na equação (3.6), define-se que:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{q_s + q_w}{G t} - n \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (3.10)$$

Substituindo esta expressão na equação (3.5), obtém-se:

$$\int_C^D \frac{q_s + q_w}{G t} ds - \phi' \int_C^D n ds = 0 \quad (3.11)$$

Os termos da equação anterior podem ser analisados separadamente. Para o segundo termo determina-se:

$$\phi' \int_C^D n ds = \phi' \frac{\Omega}{2} \quad (3.12)$$

No meio contínuo equivalente ao lintel, $q_w = 0$. Para a seção duplo C, o primeiro termo da equação (3.11) pode ser expresso da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int_C^D \frac{q_s + q_w}{G t} ds &= \int_C^A \frac{q_s}{G t_{eq}} ds + \int_A^B \frac{q_s + q_w}{G t} ds + \int_B^D \frac{q_s}{G t_{eq}} ds \\ \int_C^D \frac{q_s + q_w}{G t} ds &= \int_A^B \frac{q}{G t} ds + \frac{q_s}{G t_{eq}} \times \frac{2\ell}{2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

com $q = q_s + q_w$

Para a seção C, o primeiro termo da equação (3.11) pode ser expresso como:

$$\begin{aligned} \int_C^D \frac{q}{G t} ds &= \int_C^A \frac{q_s}{G t_{eq}} ds + \int_A^{B=D} \frac{q}{G t} ds \\ \int_C^D \frac{q}{G t} ds &= \int_A^B \frac{q}{G t} ds + \frac{q_s}{G t_{eq}} \times \frac{\ell}{2} \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde ℓ é o comprimento do lintel, e t_{eq} é a espessura do contínuo equivalente ao lintel.

Considerando que a soma do comprimento dos lintéis seja representada por ℓ_{tot} , para a seção duplo C: $\ell_{tot} = 2\ell$, enquanto que no caso da seção C: $\ell_{tot} = \ell$.

Portanto, a equação (3.11) pode ser expressa como:

$$\int_A^B \frac{q}{Gt} ds + \frac{q_s \ell_{tot}}{2 G t_{eq}} = \phi' \frac{\Omega}{2} \quad (3.15)$$

A equação (3.3) representa o equilíbrio, e esta última equação representa a compatibilidade de deslocamentos longitudinais u .

3.3 Espessura da parede equivalente aos lintéis:

Para determinar a espessura do meio contínuo equivalente ao lintel (t_{eq}), iguala-se a rigidez do lintel à rigidez da parede equivalente, conforme ilustra a *figura 3.3*. A rigidez do lintel, k_ℓ deve levar em consideração as deformações por flexão e cisalhamento.

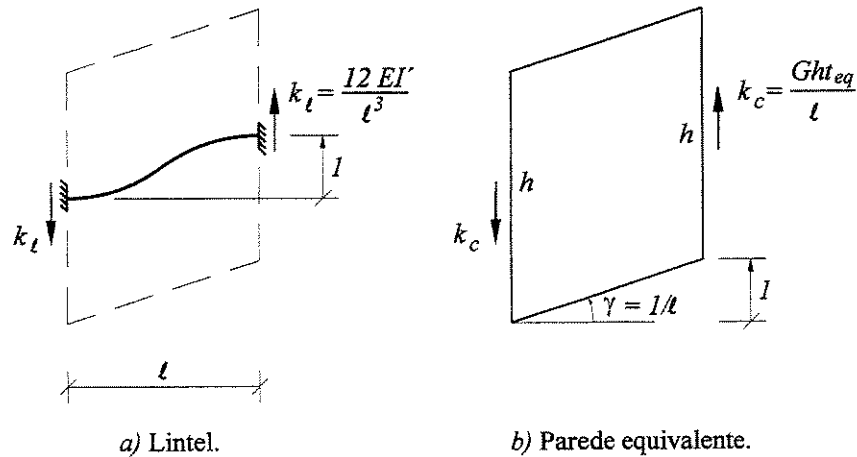


Figura 3.3 – Coeficientes de rigidez do lintel e parede equivalente.

O coeficiente de rigidez k_ℓ do lintel, vale:

$$k_\ell = \frac{12 EI'}{\ell^3} \quad (3.16)$$

onde: $I' = \frac{I}{1+k}$, $k = \frac{12 c EI}{GA \ell^2}$ e $c = \frac{1,2 + 1,1\nu}{1+\nu}$.

Nestas expressões comuns nos textos de análise matricial – com pequenas variações na notação – ν é o coeficiente de Poisson, e c é o fator de forma, para o qual adotaremos o valor fornecido por COWPER⁶ para seções retangulares, ao invés do valor tradicional 1,2.

O coeficiente de rigidez k_c da parede equivalente vale, sendo h a altura do andar:

$$k_c = \frac{G h t_{eq}}{\ell} \quad (3.17)$$

Igualando a rigidez do lintel à rigidez da parede equivalente, obtém-se:

$$t_{eq} = \frac{12 E I'}{G h \ell^2} \quad (3.18)$$

O valor de I' está definido nas expressões (3.16).

3.4 Processo 1:

Proposto inicialmente por VLASOV³⁰, neste processo a seção transversal do núcleo será considerada como aberta, a parede equivalente aos lintéis é tratada como elemento isolado que não altera as características geométricas da seção, e o efeito da deformação por força cortante será desprezado. Vários conceitos e expressões usadas durante as deduções apresentadas a seguir estão detalhados no apêndice I.

O empenamento é dado por:

$$u(z, s) = -\omega(s) \phi'(z) \quad (3.19)$$

onde $\omega(s)$ é a área setorial da seção transversal. A figura 3.4 mostra os diagramas das áreas setoriais dos núcleos.

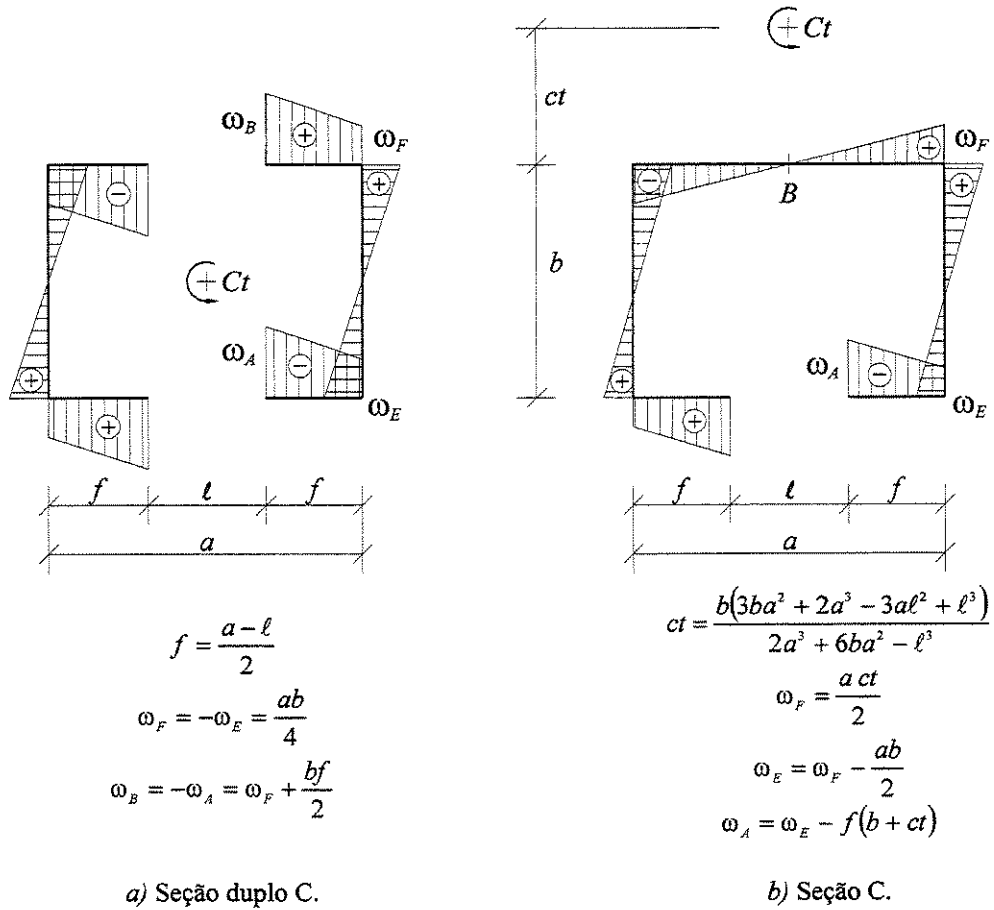


Figura 3.4 – Diagramas de área setorial.

A tensão axial é definida como:

$$\sigma(z, s) = E^* \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.20)$$

onde E^* significa o módulo de elasticidade longitudinal reduzido, definido como:

$$E^* = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (3.21)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson.

A expressão da tensão axial também pode ser escrita como:

$$\sigma = -E^* \omega \phi'' \quad (3.22)$$

Com (3.22) e (3.20) determina-se:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\omega \phi'' \quad (3.23)$$

O equilíbrio de um elemento de parede fornece:

$$\frac{\partial q}{\partial s} + t \frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0 \quad (3.24)$$

Derivando a equação (3.22), determina-se:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = -E^* \omega \phi''' \quad (3.25)$$

Substituindo este resultado na expressão (3.24):

$$\frac{\partial q}{\partial s} = t E^* \omega \phi''' \quad (3.26)$$

Para obter q , basta integrar a equação anterior:

$$q = E^* \phi''' \int_A t ds + C \quad (3.27)$$

Lembrando a expressão do momento estático setorial, equação (I-46) do apêndice I:

$$S_{\omega}(s) = \int_{s_1}^s \omega t \, ds \quad (3.28)$$

Podemos redefinir q em função de S_{ω} :

$$q = E^* \phi''' S_{\omega} + C \quad (3.29)$$

Para determinar a constante de integração, utiliza-se o valor de q no ponto A da seção (figura 3.4):

$$\begin{aligned} q(A) &= q_s ; S_{\omega}(A) = 0 \\ q(A) &= E^* \phi''' S_{\omega}(A) + C \\ C &= q_s \end{aligned} \quad (3.30)$$

Assim a expressão de q será:

$$q = q_s + E^* \phi''' S_{\omega} \quad (3.31)$$

A figura 3.5 ilustra os diagramas de S_{ω} para as duas seções.

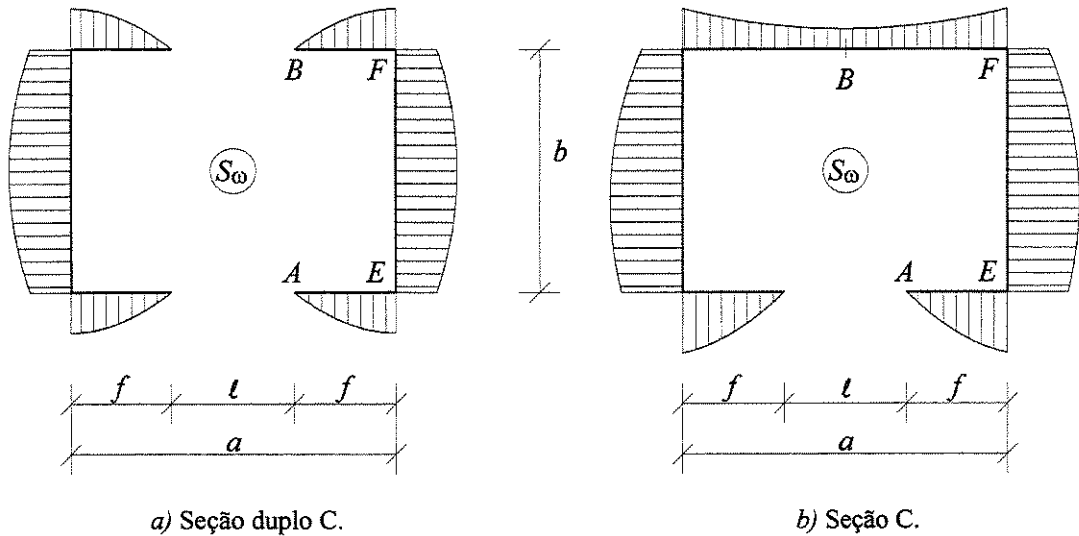


Figura 3.5 – Diagrama de S_{ω} .

Como neste processo despreza-se as deformações devidas à força cortante:

$$\int_A^B \gamma ds = \int_A^B \frac{q}{G t} ds = 0 \quad (3.32)$$

Introduzindo esta hipótese na equação (3.15), que foi obtida da compatibilidade, determina-se q_s :

$$\begin{aligned} \int_A^B \frac{q}{G t} ds + \frac{q_s \ell_{tot}}{2 G t_{eq}} &= \phi' \frac{\Omega}{2} \\ q_s &= \frac{\phi' \Omega G t_{eq}}{\ell_{tot}} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Substituindo q_s na equação (3.3) que foi obtida do equilíbrio, chega-se a:

$$M_t = G J_t \phi' + \frac{G \Omega^2 t_{eq}}{\ell_{tot}} \phi' - E J_{\omega} \phi''' \quad (3.34)$$

Conforme definido no apêndice I, J_{ω} é o momento de inércia setorial. Para simplificar a correspondência com a notação que será estabelecida nos outros processos, J_{ω} será denominado de Γ_1 :

$$\Gamma_1 = J_{\omega} = 2 \int_A^B \omega^2 t ds \quad (3.35)$$

Definindo:

$$J_{\Omega \ell} = \frac{\Omega^2 t_{eq}}{\ell_{tot}} \quad (3.36)$$

$$J_1 = J_t + J_{\Omega \ell} \quad (3.37)$$

Com isto, a equação diferencial da torção resulta:

$$M_t = G J_1 \phi' - E^* \Gamma_1 \phi''' \quad (3.38)$$

Observa-se que o efeito enrijecedor do lintel se manifesta através da constante de torção ($J_{\Omega \ell}$).

As condições de contorno necessárias para a solução desta equação são obtidas do fato do núcleo ser engastado na base e livre no topo:

$$\text{na base: } z = 0 \Rightarrow \begin{cases} \phi(0) = 0 \\ u(0) = 0 \end{cases} \therefore \phi'(0) = 0$$

$$\text{no topo: } z = H \Rightarrow \sigma(H) = 0 \therefore \phi''(H) = 0$$

Como a equação (3.38) é formalmente igual a equação (I.54) do apêndice I, apenas trocando J_t por J_1 , sua solução geral segue conforme foi deduzida no apêndice I. Assim, para o caso em que o carregamento é um momento torçor uniformemente distribuído (m) e um momento torçor concentrado no topo (T), tem-se:

$$\phi(z) = c_1 + c_2 e^{cz} + c_3 e^{-cz} - \frac{m}{2GJ_1} z^2 + \frac{T + mH}{GJ_1} z \quad (3.39)$$

$$\text{onde: } c^2 = \frac{GJ_1}{E^* \Gamma_1} \quad (3.40)$$

Com as condições de contorno, as constantes c_1 , c_2 e c_3 podem ser definidas:

$$\begin{aligned} c_1 &= -(c_2 + c_3) \\ c_2 &= c_3 - \frac{T + mH}{cGJ_1} \\ c_3 &= \frac{m(1 + cHe^{cH}) + cTe^{cH}}{c^2 GJ_1 (e^{cH} + e^{-cH})} \end{aligned} \quad (3.41)$$

3.5 Processo 2:

Para facilitar o acompanhamento das deduções envolvidas neste processo, serão inicialmente repetidas as expressões (3.31) e (3.15).

$$q = q_s + E^* \phi''' S_\omega \quad (3.42)$$

$$\int_A^B \frac{q}{G t} ds + \frac{q_s \ell_{tot}}{2 G t_{eq}} = \phi' \frac{\Omega}{2} \quad (3.43)$$

A equação (3.43) retrata a compatibilidade de deslocamentos longitudinais. No processo anterior foram desprezados os efeitos das tensões de cisalhamento nas deformações, ou seja,

$$\int_A^B \frac{q}{G t} ds = 0, \text{ que aplicada em (3.15) ou (3.43), forneceu a expressão de } q_s \text{ para aquele processo.}$$

Neste segundo processo, as deformações devidas ao cisalhamento não serão negligenciadas. Assim, aplicando-se (3.42) em (3.43) obtém-se:

$$\int_A^B \frac{q_s + E^* S_\omega \phi'''}{G t} ds + \frac{q_s \ell_{tot}}{2 G t_{eq}} = \phi' \frac{\Omega}{2} \quad (3.44)$$

Isolando q_s :

$$q_s = \frac{G \Omega \phi'}{2 \left(\frac{\ell_{tot}}{2 t_{eq}} + \int_A^B \frac{ds}{t} \right)} - E^* \phi''' \frac{\int_A^B S_\omega \frac{ds}{t}}{\frac{\ell_{tot}}{2 t_{eq}} + \int_A^B \frac{ds}{t}} \quad (3.45)$$

Definindo-se a constante de torção de Bredt como:

$$J_\Omega = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{ds}{t}} \quad (3.46)$$

Observa-se que, para as duas seções analisadas:

$$\oint \frac{ds}{t} = 2 \left(\frac{\ell_{tot}}{2t_{eq}} + \int_A^B \frac{ds}{t} \right) \quad (3.47)$$

Utilizando a definição de J_Ω , é possível expressar q_s da seguinte forma:

$$q_s = \frac{G J_\Omega}{\Omega} \phi' - E^* \phi''' \frac{2 J_\Omega}{\Omega^2} \int_A^B S_\omega \frac{ds}{t} \quad (3.48)$$

Com esta expressão para q_s , determina-se a expressão de q :

$$\begin{aligned} q &= q_s + E^* S_\omega \phi''' \\ q &= \frac{G J_\Omega}{\Omega} \phi' + E^* \phi''' \left(S_\omega - \frac{2 J_\Omega}{\Omega^2} \int_A^B S_\omega \frac{ds}{t} \right) \end{aligned} \quad (3.49)$$

Conforme (3.3), a equação diferencial do momento torçor é dada por:

$$M_t = G J_t \phi' + q_s \Omega - E^* \Gamma_1 \phi''' \quad (3.50)$$

Substituindo q_s (3.49) obtém-se:

$$M_t = G (J_t + J_\Omega) \phi' - E^* \left(\Gamma_1 + 2 \frac{J_\Omega}{\Omega} \int_A^B \frac{S_\omega}{t} ds \right) \phi''' \quad (3.51)$$

Definindo a constante de torção J_2 , e a constante de empenamento Γ_2 :

$$J_2 = J_t + J_\Omega \quad (3.52)$$

$$\Gamma_2 = \Gamma_1 + 2 \frac{J_\Omega}{\Omega} \int_A^B S_\omega \frac{ds}{t} \quad (3.53)$$

Substituindo em (3.51):

$$M_t = G J_2 \phi' - E^* \Gamma_2 \phi''' \quad (3.54)$$

Nota-se a semelhança entre as expressões de M_t nos dois processos.

Definindo $\bar{\omega}$ como a área setorial de uma seção fechada:

$$\bar{\omega} = \omega - \frac{J_{\Omega}}{\Omega} \int \frac{ds}{t} \quad (3.55)$$

chega-se a uma expressão para Γ_2 similar à expressão de Γ_1 :

$$\Gamma_2 = 2 \int_A^B \omega \bar{\omega} t ds \quad (3.56)$$

Para se verificar a validade desta última expressão, basta substituir o valor de $\bar{\omega}$ e efetuar a integração por partes que chega-se a expressão (3.53).

As condições de contorno necessárias para a solução dessa equação são idênticas às condições utilizadas na solução da equação do processo 1, já que ambas são obtidas a partir da mesma hipótese de que o núcleo é engastado na base e livre no topo.

A solução geral da equação diferencial será equivalente à solução da equação do processo 1, apenas substituindo J_1 por J_2 , e Γ_1 por Γ_2 . Para o caso em que o carregamento é um momento torçor uniformemente distribuído (m) e um momento torçor concentrado no topo (T):

$$\phi(z) = c_1 + c_2 e^{cz} + c_3 e^{-cz} - \frac{m}{G J_2} z^2 + \frac{T + m H}{G J_2} z \quad (3.57)$$

onde:

$$c^2 = \frac{G J_2}{E^* \Gamma_2} \quad (3.58)$$

Com as condições de contorno, as constantes c_1 , c_2 e c_3 podem ser definidas:

$$\begin{aligned} c_1 &= -(c_2 + c_3) \\ c_2 &= c_3 - \frac{T + mH}{c G J_2} \\ c_3 &= \frac{m(1 + c H e^{cH}) + c T e^{cH}}{c^2 G J_2 (e^{cH} + e^{-cH})} \end{aligned} \quad (3.59)$$

3.6 Processo 3:

Neste caso o empenamento é adotado como sendo:

$$u(z, s) = -\bar{\omega}(s)\phi'(z) \quad (3.60)$$

onde $\bar{\omega}$ é a área setorial de uma seção fechada equivalente ao núcleo, conforme foi definido no processo 2, equação (3.55).

A partir desta expressão para o empenamento, a tensão axial pode ser escrita como:

$$\sigma = -E^* \bar{\omega} \phi'' \quad (3.61)$$

O equilíbrio de um elemento de parede fornece:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial s} + t \frac{\partial \sigma}{\partial z} &= 0 \\ q &= q_s + E^* \phi''' S_{\bar{\omega}} \\ q_{\omega} &= E^* \phi''' S_{\bar{\omega}} \end{aligned} \quad (3.62)$$

Seguindo o mesmo procedimento do processo 2, porém utilizando a expressão anterior na equação (3.43) que retrata a compatibilidade de deslocamentos longitudinais, determina-se:

$$q_s = \frac{G J_{\Omega}}{\Omega} \phi' - E^* \phi''' \frac{2 J_{\Omega}}{\Omega^2} \int_A^B S_{\bar{\omega}} \frac{ds}{t} \quad (3.63)$$

Substituindo na equação (3.1) do momento torçor:

$$M_t = G(J_t + J_{\Omega})\phi' - E^* \left(\Gamma_2 + 2 \frac{J_{\Omega}}{\Omega} \int_A^B \frac{S_{\bar{\omega}}}{t} ds \right) \phi''' \quad (3.64)$$

Definindo a constante de empenamento para este processo Γ_3 :

$$\Gamma_3 = \Gamma_2 + 2 \frac{J_\Omega}{\Omega} \int_A^B S_{\bar{\omega}} \frac{ds}{t} \quad (3.65)$$

$$\text{Ou seja,} \quad M_t = G J_2 \phi' - E^* \Gamma_3 \phi''' \quad (3.66)$$

A constante de torção J_2 é a mesma do processo 2, e com $\bar{\omega}$ conforme (3.55), Γ_3 pode ser calculado através de:

$$\Gamma_3 = 2 \int_A^B \bar{\omega}^2 t ds \quad (3.67)$$

As condições de contorno utilizadas na solução desta equação também são idênticas às condições utilizadas na solução das equações do processo 1 e 2 e a solução geral será equivalente às outras soluções. Baseando-se na solução do processo 2, basta substituir Γ_2 por Γ_3 .

$$\phi(z) = c_1 + c_2 e^{cz} + c_3 e^{-cz} - \frac{m}{G J_2} z^2 + \frac{T + m H}{G J_2} z \quad (3.68)$$

$$\text{onde:} \quad c^2 = \frac{G J_2}{E^* \Gamma_3} \quad (3.69)$$

Com as condições de contorno, as constantes c_1 , c_2 e c_3 são definidas:

$$\begin{aligned} c_1 &= -(c_2 + c_3) \\ c_2 &= c_3 - \frac{T + mH}{c G J_2} \\ c_3 &= \frac{m(1 + c H e^{cH}) + c T e^{cH}}{c^2 G J_2 (e^{cH} + e^{-cH})} \end{aligned} \quad (3.70)$$

3.7 Processo 4:

Neste processo é aplicada a teoria de Umansky-Benscoter. Ele difere dos processos descritos anteriormente pela definição do deslocamento axial ou empenamento, que será considerado como função de χ e não mais de ϕ' .

$$u(z, s) = -\bar{\omega}(s)\chi(z) \quad (3.71)$$

De tal forma que a tensão axial será:

$$\sigma(z, s) = -E^* \bar{\omega}(s)\chi'(z) \quad (3.72)$$

A relação entre a função $\chi(z)$ e a função $\phi'(z)$ usada nos três processos anteriores será determinada mais adiante.

Derivando a equação anterior, determina-se:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = -E^* \bar{\omega} \chi'' \quad (3.73)$$

Partindo do equilíbrio de um elemento de parede:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial s} + t \frac{\partial \sigma}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial q}{\partial s} &= t E^* \bar{\omega} \chi'' \end{aligned} \quad (3.74)$$

Para obter q , basta integrar a equação anterior:

$$q = E^* \chi'' \int_1^s \bar{\omega} t ds + C \quad (3.75)$$

Considerando que $S_{\bar{\omega}}$ representa o momento estático setorial da seção fechada:

$$S_{\bar{\omega}}(s) = \int_0^s \bar{\omega} t \, ds \quad (3.76)$$

Podemos redefinir q em função de $S_{\bar{\omega}}$:

$$q = E^* \chi'' S_{\bar{\omega}} + C \quad (3.77)$$

Para determinar a constante de integração, utiliza-se o valor de q no ponto A da seção.

Como $q(A) = q_s$ e $S_{\bar{\omega}}(A) = 0$, obtém-se $C = q_s$:

$$q = q_s + E^* \chi'' S_{\bar{\omega}} \quad (3.78)$$

Substituindo a expressão de q na equação obtida pela compatibilidade dos deslocamentos, equação (3.15), determina-se:

$$\begin{aligned} \int_A^B \frac{q}{G t} \, ds + \frac{q_s \ell_{tot}}{2 G t_{eq}} &= \phi' \frac{\Omega}{2} \\ \int_A^B \frac{q_s + E^* S_{\bar{\omega}} \chi''}{G t} \, ds + \frac{q_s \ell_{tot}}{2 G t_{eq}} &= \phi' \frac{\Omega}{2} \end{aligned} \quad (3.79)$$

Obtém-se para q_s a expressão:

$$q_s = \frac{G \Omega \phi'}{\oint \frac{ds}{t}} - 2 E^* \chi'' \frac{\int_A^B S_{\bar{\omega}} \frac{ds}{t}}{\oint \frac{ds}{t}} \quad (3.80)$$

onde:

$$\oint \frac{ds}{t} = 2 \left(\int_0^{\frac{\ell_{tot}}{2}} \frac{ds}{t} + \int_A^B \frac{ds}{t} \right) = 2 \left(\int_A^B \frac{ds}{t} + \frac{\ell_{tot}}{2 t_{eq}} \right) \quad (3.81)$$

Relembrando a definição da constante de torção de Bredt:

$$J_{\Omega} = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{ds}{t}} \quad (3.82)$$

Define-se q_s como:

$$q_s = \frac{G J_{\Omega} \phi'}{\Omega} - \frac{2 J_{\Omega} E^*}{\Omega^2} \chi'' \int_A^B S_{\bar{\omega}} \frac{ds}{t} \quad (3.83)$$

A partir da equação (3.78) e lembrando que $q = q_s + q_{\omega}$:

$$q_{\omega} = E^* S_{\bar{\omega}} \chi'' \quad (3.84)$$

Substituindo estes resultados de q_s e q_{ω} na equação diferencial do momento torçor:

$$\begin{aligned} M_t &= G J_t \phi' + \oint (q_s + q_{\omega}) n ds \\ M_t &= G J_t \phi' + G J_{\Omega} \phi' - 2 \frac{J_{\Omega}}{\Omega} E^* \chi'' \int_A^B \frac{S_{\bar{\omega}}}{t} ds + 2 \int_A^B E^* \chi'' S_{\bar{\omega}} d\omega \\ M_t &= G J_t \phi' + G J_{\Omega} \phi' + 2 E^* \chi'' \int_A^B S_{\bar{\omega}} \left(d\omega - \frac{J_{\Omega} ds}{\Omega t} \right) \end{aligned} \quad (3.85)$$

Utilizando algumas definições feitas nos processos 2 e 3:

$$\begin{aligned} J_2 &= J_t + J_{\Omega} \\ \Gamma_3 &= -2 \int_A^B S_{\bar{\omega}} \left(d\omega - \frac{J_{\Omega} ds}{\Omega t} \right) \end{aligned} \quad (3.86)$$

A equação diferencial será:

$$M_t = G J_2 \phi' - E^* \Gamma_3 \chi'' \quad (3.87)$$

que envolve χ'' e ϕ' .

Para obter outra relação entre as funções χ e ϕ' , utiliza-se a definição da deformação por

cisalhamento:

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{q}{G t} \quad (3.88)$$

Como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z} &= n \frac{\partial \phi}{\partial z} = n \phi' \\ \frac{\partial u}{\partial s} &= -\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial s} \chi \end{aligned} \quad (3.89)$$

Lembrando que:

$$\bar{\omega} = \omega - \frac{J_{\Omega}}{\Omega} \int \frac{ds}{t} = \int n ds - \frac{J_{\Omega}}{\Omega} \int \frac{ds}{t} \quad (3.90)$$

Determina-se:

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial s} = n - \frac{J_{\Omega}}{\Omega t} \quad (3.91)$$

Utilizando estas definições na expressão da deformação por cisalhamento, a força cortante distribuída será:

$$\begin{aligned} \frac{q}{G t} &= n \phi' - \chi \left(n - \frac{J_{\Omega}}{\Omega t} \right) \\ q &= G t \left[n \phi' - \chi \left(n - \frac{J_{\Omega}}{\Omega t} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.92)$$

Voltando à equação diferencial do momento torçor:

$$M_t = G J_t \phi'(z) + \int q n ds \quad (3.93)$$

Como $q_{\omega} = q - q_s$:

$$M_t = G J_t \phi' + 2 \int_A^B (q - q_s) n ds + \oint q_s n ds \quad (3.94)$$

Substituindo q na equação diferencial:

$$M_t = G J_t \phi' + 2 \int_A^B \left\{ G t \left[n \phi' - \chi \left(n - \frac{J_\Omega}{\Omega t} \right) \right] - q_s \right\} n ds + \oint q_s n ds \quad (3.95)$$

$$M_t = G J_t \phi' + G \left(2 \phi' \int_A^B n^2 t ds - 2 \chi \int_A^B n^2 t ds + 2 \chi \frac{J_\Omega}{\Omega} \int_A^B n ds \right) - 2 q_s \int_A^B n ds + q_s \Omega$$

Definindo o momento polar de inércia:

$$I_p = 2 \int_A^B n^2 dS = 2 \int_A^B n^2 t ds \quad (3.96)$$

A equação diferencial será:

$$\begin{aligned} M_t &= G \phi' (J_t + I_p) - G \chi \left(I_p - 2 \frac{J_\Omega}{\Omega} \int_A^B n ds \right) + q_s \left(-2 \int_A^B n ds + \Omega \right) \\ M_t &= G \phi' (J_t + I_p) - G \chi I_p \left(1 - \frac{J_\Omega}{I_p} \frac{2}{\Omega} \int_A^B n ds \right) + q_s \Omega \left(1 - \frac{2}{\Omega} \int_A^B n ds \right) \end{aligned} \quad (3.97)$$

Definindo Ω_A :

$$\Omega_A = 2 \int_A^B n ds \quad (3.98)$$

Definindo μ :

$$\mu = 1 - \frac{J_\Omega}{I_p} \frac{\Omega_A}{\Omega} \quad (3.99)$$

A equação diferencial do momento torçor será:

$$M_t = G (J_t + I_p) \phi' - G I_p \mu \chi + q_s \Omega \left(1 - \frac{\Omega_A}{\Omega} \right) \quad (3.100)$$

A partir das duas equações diferenciais: a equação (3.87) em função de χ'' e ϕ' , e a equação (3.100) em função de χ e ϕ' , é possível determinar uma equação diferencial que seja função de χ e suas derivadas.

Isolando ϕ' na equação (3.87):

$$\phi' = \frac{M_t}{G J_2} + \frac{E^* \Gamma_3}{G J_2} \chi'' \quad (3.101)$$

Eliminando ϕ' na equação (3.100):

$$\begin{aligned} M_t = G (J_t + I_p) & \left(\frac{M_t}{G J_2} + \frac{E^* \Gamma_3}{G J_2} \chi'' \right) - G I_p \mu \chi + \\ & \left(1 - \frac{\Omega_A}{\Omega} \right) \left[G J_\Omega \left(\frac{M_t}{G J_2} + \frac{E^* \Gamma_3}{G J_2} \chi'' \right) - E^* \frac{J_\Omega}{\Omega} \chi'' 2 \int_A^B \frac{S_{\bar{\omega}}}{t} ds \right] \end{aligned} \quad (3.102)$$

Isolando M_t :

$$\begin{aligned} M_t \left(1 - \frac{J_t + I_p + J_\Omega}{J_2} + \frac{J_\Omega \Omega_A}{J_2 \Omega} \right) = \\ \chi'' E^* \left\{ \Gamma_3 \left[\frac{J_t + I_p}{J_2} + \frac{J_\Omega}{J_2} \left(1 - \frac{\Omega_A}{\Omega} \right) \right] - \frac{J_\Omega}{\Omega} \left(1 - \frac{\Omega_A}{\Omega} \right) 2 \int_A^B \frac{S_{\bar{\omega}}}{t} ds \right\} - \chi G I_p \mu \end{aligned} \quad (3.103)$$

Definindo:

$$\eta = \left(\frac{\mu I_p}{J_2} + 1 \right)^{-1} = \frac{J_2}{J_2 + \mu I_p} \quad (3.104)$$

$$\Gamma_4 = \Gamma_3 - \frac{2 \eta J_\Omega}{\Omega} \left(1 - \frac{\Omega_A}{\Omega} \right) \int_A^B \frac{S_{\bar{\omega}}}{t} ds \quad (3.105)$$

$$J_4 = \mu \eta I_p \quad (3.106)$$

Substituindo as definições anteriores, a equação diferencial do momento torçor será:

$$(\eta - 1)M_t = E^* \Gamma_4 \chi'' - G J_4 \chi \quad (3.107)$$

As condições de contorno necessárias para a solução desta equação são obtidas da hipótese de que o núcleo é engastado na base e livre no topo:

$$\text{na base: } z = 0 \Rightarrow u(0) = 0 \therefore \chi(0) = 0$$

$$\text{no topo: } z = H \Rightarrow \sigma(H) = 0 \therefore \chi'(H) = 0$$

A solução geral da equação diferencial - linear não homogênea de segunda ordem - para o caso em que o carregamento é um momento torçor uniformemente distribuído (m) e um momento torçor concentrado no topo (T):

$$\chi(z) = c_1 e^{cz} + c_2 e^{-cz} + \alpha (mz - mH - T) \quad (3.108)$$

$$\text{onde: } c^2 = \frac{G J_4}{E^* \Gamma_4} \quad (3.109)$$

$$\alpha = \frac{\eta - 1}{G J_4} \quad (3.110)$$

Com as condições de contorno, as constantes c_1 e c_2 podem ser definidas:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\alpha [ce^{-cH}(T + mH) - m]}{c(e^{cH} + e^{-cH})} \\ c_2 &= \alpha(T + mH) - c_1 \end{aligned} \quad (3.111)$$

O último passo será determinar a rotação $\phi(z)$. Para obter a relação entre ϕ e as funções χ e suas derivadas, serão utilizadas as equações diferenciais que envolvem estas funções.

$$\begin{aligned}
\chi'(z) &= c_1 c e^{cz} - c_2 c e^{-cz} + \alpha m \\
\chi''(z) &= c_1 c^2 e^{cz} + c_2 c^2 e^{-cz} \\
\chi'''(z) &= c_1 c^3 e^{cz} - c_2 c^3 e^{-cz}
\end{aligned}
\tag{3.112}$$

A partir da equação (3.101) que relaciona ϕ' com χ'' , obtém-se:

$$\begin{aligned}
\phi' &= \frac{M_t}{G J_2} + \frac{E^* \Gamma_3}{G J_2} \chi'' \\
\phi' &= \frac{(T + mH - mz)}{G J_2} + \frac{E^* \Gamma_3}{G J_2} \chi'' \\
\phi &= \frac{\left[(T + mH)z - \frac{m}{2} z^2 \right]}{G J_2} + \frac{E^* \Gamma_3}{G J_2} \chi' + C
\end{aligned}
\tag{3.113}$$

A constante de integração C é determinada a partir da condição $\phi(0) = 0$:

$$\begin{aligned}
C &= -\frac{E^* \Gamma_3}{G J_2} \chi'(0) \\
\chi'(0) &= c_1 c - c_2 c + \alpha m
\end{aligned}
\tag{3.114}$$

3.8 Comparação entre os processos:

Nas seções anteriores, várias considerações foram feitas sobre o empenamento e os efeitos das deformações por cisalhamento. Apesar disto, em todos os processos, as equações diferenciais resultantes são semelhantes e suas diferenças estão basicamente nas definições para a constante de torção J , e para a constante de empenamento Γ . Os quadros a seguir apresentam um resumo das principais diferenças entre os quatro processos.

Processo	Deslocamento Tangencial $v(s, z)$	Deslocamento Longitudinal $u(s, z)$
1	$n(s)\phi(z)$	$-\omega(s)\phi'(z)$
2	$n(s)\phi(z)$	$-\omega(s)\phi'(z)$
3	$n(s)\phi(z)$	$-\bar{\omega}(s)\phi'(z)$
4	$n(s)\phi(z)$	$-\bar{\omega}(s)\chi(z)$

Quadro 3.1 – Definições dos deslocamentos em cada processo.

Processo	Eq. Diferencial	J	Γ
Sem Lintéis	$M_t = G J \phi' - E^* \Gamma \phi'''$	J_t	$\Gamma_1 = 2 \int_A^B \omega^2 t ds$
1		$J_1 = J_t + J_{\Omega t}$	$\Gamma_1 = 2 \int_A^B \omega^2 t ds$
2		$J_2 = J_t + J_{\Omega}$	$\Gamma_2 = 2 \int_A^B \omega \bar{\omega} t ds$
3		$J_2 = J_t + J_{\Omega}$	$\Gamma_3 = 2 \int_A^B \bar{\omega}^2 t ds$
4	$(\eta - 1)M_t = E^* \Gamma \chi'' - G J \chi$	$J_4 = \mu \eta I_p$	$\Gamma_4 = \Gamma_3 - \frac{2 \eta J_{\Omega}}{\Omega} \left(1 - \frac{\Omega_A}{\Omega} \right) \int_A^B \frac{S_{\bar{\omega}}}{t} ds$

Quadro 3.2 – Equação diferencial do momento torçor em cada processo.

Processo	Rotação ϕ	Constantes
1	$\phi(z) = c_1 + c_2 e^{cz} + c_3 e^{-cz} - \frac{m}{2GJ_1} z^2 + \frac{T+mH}{GJ_1} z$	$c^2 = \frac{GJ_1}{E^* \Gamma_1}$ $c_1 = -(c_2 + c_3)$ $c_2 = c_3 - \frac{T+mH}{cGJ_1}$ $c_3 = \frac{m(1+cHe^{cH}) + cTe^{cH}}{c^2 GJ_1 (e^{cH} + e^{-cH})}$
2	$\phi(z) = c_1 + c_2 e^{cz} + c_3 e^{-cz} - \frac{m}{GJ_2} z^2 + \frac{T+mH}{GJ_2} z$	$c^2 = \frac{GJ_2}{E^* \Gamma_2}$ $c_1 = -(c_2 + c_3)$ $c_2 = c_3 - \frac{T+mH}{cGJ_2}$ $c_3 = \frac{m(1+cHe^{cH}) + cTe^{cH}}{c^2 GJ_2 (e^{cH} + e^{-cH})}$
3	$\phi(z) = c_1 + c_2 e^{cz} + c_3 e^{-cz} - \frac{m}{GJ_2} z^2 + \frac{T+mH}{GJ_2} z$	$c^2 = \frac{GJ_2}{E^* \Gamma_3}$ $c_1 = -(c_2 + c_3)$ $c_2 = c_3 - \frac{T+mH}{cGJ_2}$ $c_3 = \frac{m(1+cHe^{cH}) + cTe^{cH}}{c^2 GJ_2 (e^{cH} + e^{-cH})}$
4	$\phi(z) = \frac{\left[(T+mH)z - \frac{m}{2} z^2 \right]}{GJ_2} + \frac{E^* \Gamma_3}{GJ_2}$ $(c_1 c e^{cz} - c_2 c e^{-cz} + \alpha m) - \frac{E^* \Gamma_3}{GJ_2} (c_1 c - c_2 c + \alpha m)$	$c^2 = \frac{GJ_4}{E^* \Gamma_4}$ $c_1 = \frac{\alpha [ce^{-cH} (T+mH) - m]}{c(e^{cH} + e^{-cH})}$ $c_2 = \alpha (T+mH) - c_1$ $\alpha = \frac{\eta - 1}{GJ_4}$

Quadro 3.3 – Rotação ao longo da altura em cada processo.

CAPÍTULO 4

Determinação dos esforços atuantes no núcleo:

4.1 Formulação inicial:

Os núcleos estruturais são compostos por paredes interligadas e geralmente são parcialmente fechados por lintéis. Portanto as paredes de um núcleo podem estar ligadas à duas outras, ou então conter uma extremidade na abertura do núcleo. Assim sendo, a *figura 4.1* ilustra os esforços que surgem em cada tipo de parede do núcleo.

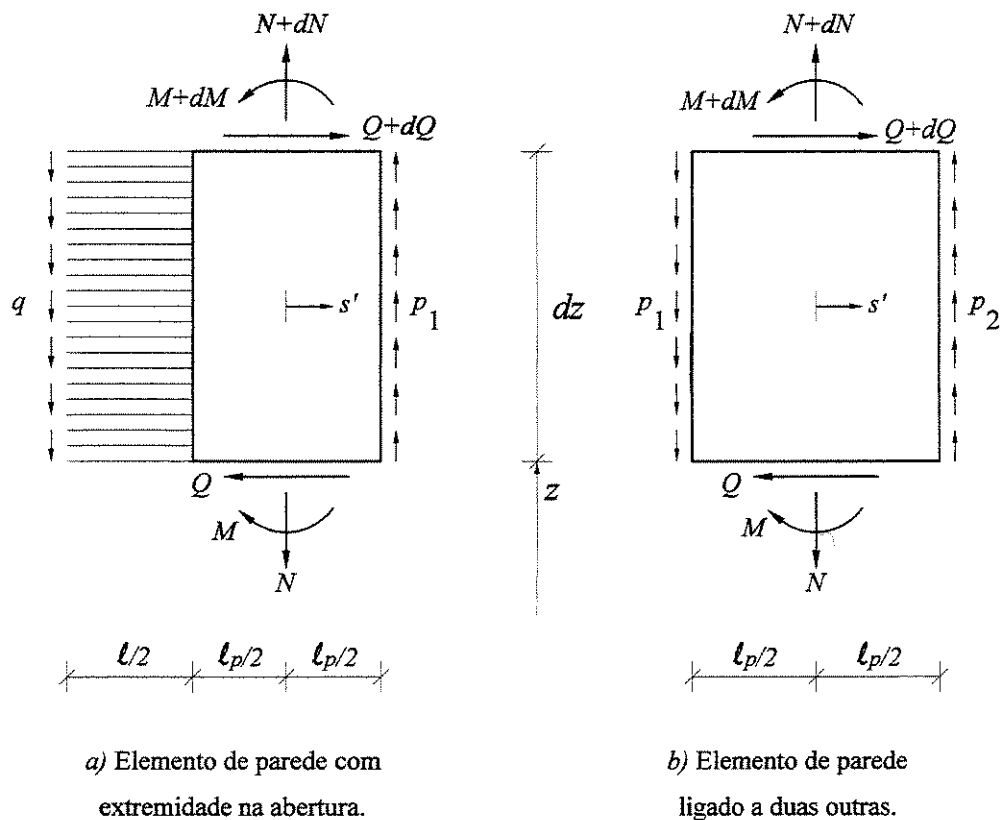


Figura 4.1 – Esforços em um elemento longitudinal de parede.

Para o cálculo dos esforços utiliza-se a área setorial no ponto onde se encontra o centro de gravidade da parede. A área setorial em qualquer ponto da parede pode ser definida a partir do valor da área setorial no centro de gravidade, ω_{cg} . Observando a *figura 4.2*, pode-se afirmar que:

$$\omega(s) = \omega_{cg} + n s' \quad (4.1)$$

onde n é a distância da parede ao centro de torção da seção transversal do núcleo e s' é a coordenada local do esqueleto, com origem no centro de gravidade da parede.

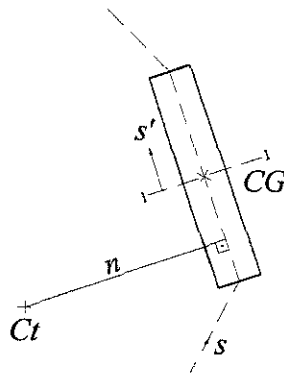


Figura 4.2 – Coordenada local do esqueleto de parede.

Convenção: Conforme a *figura 4.1*, notando que a parede deve ser vista de frente, com a coordenada local s' orientada para a direita.

- Tensões normais positivas de tração;
- Momento fletor positivo quando traciona as fibras s' positivo;
- Forças distribuídas nas arestas positivas no sentido anti-horário;
- Forças cortantes positivas no sentido horário.

4.2 Força normal:

A força normal atuante numa parede vale:

$$N = \int_A \sigma dS \quad (4.2)$$

onde dS é o elemento de área da seção transversal da parede, e A é toda a área da seção transversal da parede.

Para os processos 1 e 2, a tensão axial é definida como:

$$\sigma = -E^* \omega \phi'' \quad (4.3)$$

Neste caso, a força normal é determinada por:

$$\begin{aligned} N &= - \int_A E^* \omega \phi'' dS \\ N &= -E^* \phi'' \int_A \omega dS \end{aligned} \quad (4.4)$$

Utilizando ω_{cg} como definido na equação (4.1) e como s' tem origem no CG da seção e n tem valor constante para cada parede, é possível definir a normal como:

$$\begin{aligned} N &= -E^* \phi'' \int_A (\omega_{cg} + n s') dS \\ N &= -E^* \phi'' \omega_{cg} A \end{aligned} \quad (4.5)$$

Seguindo um procedimento análogo para os processos 3 e 4, e utilizando as equações (3.61) e (3.72) que definem a tensão axial em cada processo, é possível determinar a força normal nas paredes.

Para a processo 3, a força normal é determinada por:

$$N = -E^* \phi'' \overline{\omega}_{cg} A \quad (4.6)$$

Para a processo 4, a força normal é determinada por:

$$N = -E^* \chi' \overline{\omega}_{cg} A \quad (4.7)$$

4.3 Momento fletor:

O momento fletor numa parede do núcleo vale:

$$M = \int_A \sigma s' dS \quad (4.8)$$

Substituindo a definição de tensão axial para os processos 1 e 2, determina-se:

$$\begin{aligned} M &= - \int_A E^* \omega \phi'' s' dS \\ M &= - E^* \phi'' \int_A \omega s' dS \end{aligned} \quad (4.9)$$

Utilizando para a área setorial a equação (4.1) é possível se definir o momento como sendo:

$$M = - E^* \phi'' \int_A (\omega_{cg} + n s') s' dS \quad (4.10)$$

Observa-se que o momento de inércia I , de uma parede em relação ao eixo 1-1 (*figura 4.2*), é dado por:

$$I = \int_A s'^2 dS \quad (4.11)$$

Assim sendo, o momento fletor pode ser definido como:

$$M = - E^* \phi'' n I \quad (4.12)$$

Para os processos 3 e 4, a tensão axial é definida pelas equações (3.61) e (3.72), respectivamente. Lembrando que:

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \omega - \frac{J_{\Omega}}{\Omega} \int \frac{ds}{t} \\ \bar{\omega} &= \int n ds - \frac{J_{\Omega}}{\Omega} \int \frac{ds}{t} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Definindo:

$$c = n - \frac{J_{\Omega}}{\Omega t}$$

$$\overline{\omega} = \int c \, ds$$
(4.14)

Determina-se que:

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_{cg} + c \, s'$$
(4.15)

Para a processo 3, o momento fletor é determinado por:

$$M = -E^* \phi'' c \, I$$
(4.16)

Para a processo 4, o momento fletor é determinado por:

$$M = -E^* \chi' c \, I$$
(4.17)

4.4 Forças distribuídas nas interseções de paredes:

Para determinar as forças distribuídas nas interseções de paredes, é analisado o equilíbrio longitudinal de um elemento dz da parede. Deve-se iniciar pela parede ligada ao lintel.

Observando a *figura 4.1 a*, pode-se afirmar por equilíbrio que:

$$\frac{dN}{dz} = q_s - p_1$$
(4.18)

A força cortante nos lintéis é determinada pelas equações (3.33), (3.48), (3.63), (3.83), conforme o processo analisado. Portanto, pode-se definir a força distribuída na extremidade da parede que esta ligada à outra parede.

Para o processo 1, determina-se que:

$$p_1 = E^* \omega_{cg} \phi''' A + q_s \quad (4.19)$$

onde:

$$q_s = \frac{\phi' \Omega G t_{eq}}{l_{tot}} \quad (4.20)$$

Para o processo 2, determina-se que:

$$p_1 = E^* \omega_{cg} \phi''' A + q_s \quad (4.21)$$

onde:

$$q_s = \frac{G J_{\Omega}}{\Omega} \phi' - E^* \phi''', \frac{2 J_{\Omega}}{\Omega^2} \int_A^B S_{\omega} \frac{ds}{t} \quad (4.22)$$

Para o processo 3, determina-se que:

$$p_1 = E^* \overline{\omega}_{cg} \phi''' A + q_s \quad (4.23)$$

onde:

$$q_s = \frac{G J_{\Omega}}{\Omega} \phi' - E^* \phi''', \frac{2 J_{\Omega}}{\Omega^2} \int_A^B S_{\omega} \frac{ds}{t} \quad (4.24)$$

Para o processo 4, determina-se que:

$$p_1 = E^* \overline{\omega}_{cg} \chi'' A + q_s \quad (4.25)$$

onde:

$$q_s = \frac{G J_{\Omega}}{\Omega} \phi' - E^* \chi'' \frac{2 J_{\Omega}}{\Omega^2} \int_A^B S_{\omega} \frac{ds}{t} \quad (4.26)$$

Voltando à *figura 4.1 b*, determina-se a equação de equilíbrio para uma parede ligada à duas outras:

$$\frac{dN}{dz} = p_1 - p_2 \quad (4.27)$$

Lembrando que p_1 já foi calculada para a parede ligada à esta, p_2 pode ser facilmente determinada.

Para os processos 1 e 2, determina-se que:

$$p_2 = E^* \omega_{cg} \phi''' A + p_1 \quad (4.28)$$

Para o processo 3, determina-se que:

$$p_2 = E^* \overline{\omega}_{cg} \phi''' A + p_1 \quad (4.29)$$

Para o processo 4, determina-se que:

$$p_2 = E^* \overline{\omega}_{cg} \chi'' A + p_1 \quad (4.30)$$

4.5 Força cortante:

Calcula-se a força cortante na parede através do equilíbrio à rotação de um elemento longitudinal de parede. Observando a *figura 4.1 a*, e desprezando-se os diferenciais de segunda ordem, determina-se Q para uma parede ligada ao lintel:

$$Q = \frac{dM}{dz} + q_s \frac{l_p + l}{2} + p_1 \frac{l_p}{2} \quad (4.31)$$

Da equação (4.12), determina-se para os processos 1 e 2:

$$Q = -E^* \phi''' n I + q_s \frac{l_p + l}{2} + p_1 \frac{l_p}{2} \quad (4.32)$$

Das equações (4.16) e (4.17), determina-se para os processos 3 e 4, respectivamente:

$$Q = -E^* \phi''' c I + q_s \frac{l_p + l}{2} + p_1 \frac{l_p}{2} \quad (4.33)$$

$$Q = -E^* \chi'' c I + q_s \frac{l_p + l}{2} + p_1 \frac{l_p}{2} \quad (4.34)$$

Voltando à *figura 4.1 b*, determina-se Q para uma parede ligada à duas outras:

$$Q = \frac{dM}{dz} + (p_1 + p_2) \frac{l_p}{2} \quad (4.35)$$

Da equação (4.12), determina-se para os processos 1 e 2:

$$Q = -E^* \phi''' n I + (p_1 + p_2) \frac{l_p}{2} \quad (4.36)$$

Das equações (4.16) e (4.17), determina-se para os processos 3 e 4, respectivamente:

$$Q = -E^* \phi''' c I + (p_1 + p_2) \frac{l_p}{2} \quad (4.37)$$

$$Q = -E^* \chi'' c I + (p_1 + p_2) \frac{l_p}{2} \quad (4.38)$$

CAPÍTULO 5

Exemplos

Neste capítulo serão analisados alguns exemplos de núcleos estruturais submetidos a esforços de torção. Os núcleos têm seção transversal retangular e estão fechados por lintéis ao nível das lajes. A seção transversal pode estar fechada por dois lintéis, formando uma seção duplo C (*figura 5.1.a*), ou por um lintel, formando uma seção C (*figura 5.1.b*).

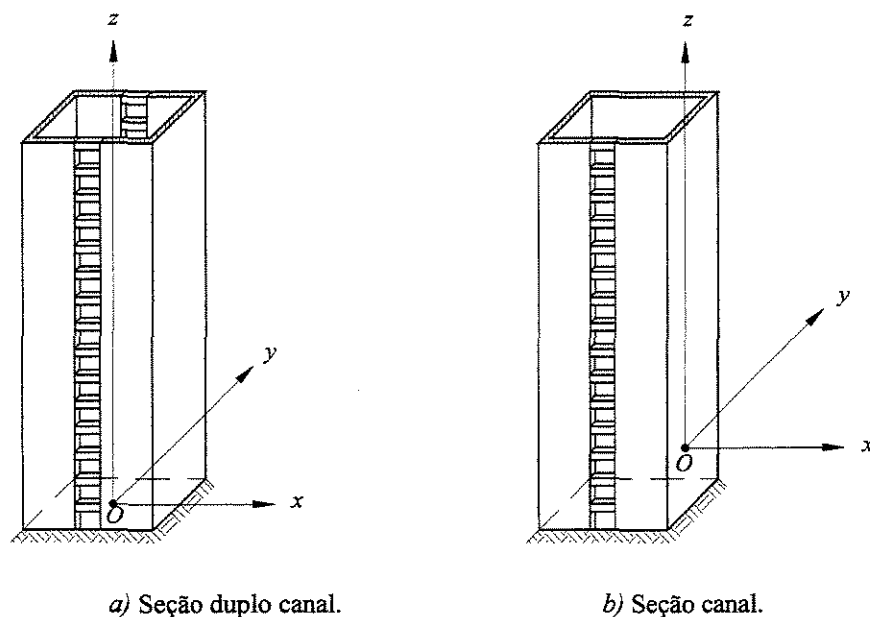


Figura 5.1 – Tipos de núcleo analisados e sistema de eixos de referência.

Foi desenvolvido um programa computacional que calcula deslocamentos, tensões, e esforços ao longo da altura do núcleo, em diversos pontos da seção transversal, por cada um dos processos descritos neste trabalho. São comparados os resultados obtidos com a aplicação dos quatro processos contínuos, e também com os resultados oriundos da aplicação de um processo

discreto segundo o modelo sugerido por GUILARDI⁰⁷.

Uma breve apresentação ao modelo discreto desenvolvido por GUILARDI⁰⁷ é apresentada no apêndice II.

Com a finalidade de melhor representar os núcleos calculados através do modelo discreto no momento da comparação com os processos contínuos, foi suposto que os lintéis no topo têm meia rigidez à flexão e cisalhamento. Isto é obtido adotando-se metade da dimensão corrente para a base da seção transversal do lintel localizado no topo.

5.1 Exemplo 1:

O núcleo analisado neste exemplo tem a finalidade de mostrar a influência da rigidez dos lintéis nos resultados obtidos segundo os vários processos de análise. A *figura 5.2* mostra a planta do núcleo formado por uma seção transversal duplo C e suas dimensões características.

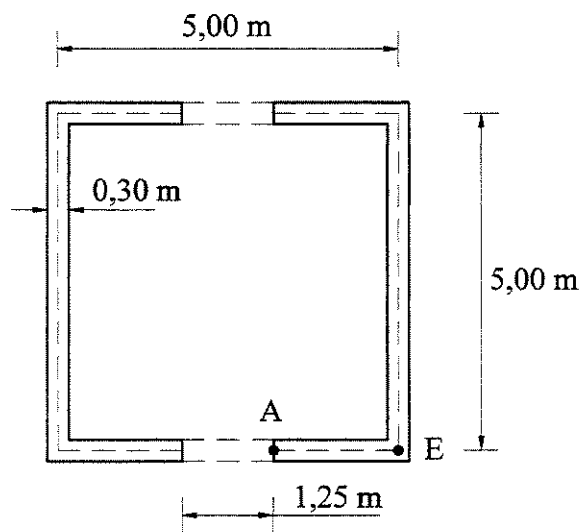


Figura 5.2 – Seção transversal do núcleo do exemplo 1.

Neste exemplo serão considerados dois tipos de lintéis:

caso a) lintéis pouco rígidos, com seção transversal de 0,30 m x 0,25 m;

caso b) lintéis muito rígidos, com seção transversal de 0,30 m x 0,625 m.

A *tabela 5.1* resume os dados do núcleo e o carregamento considerado.

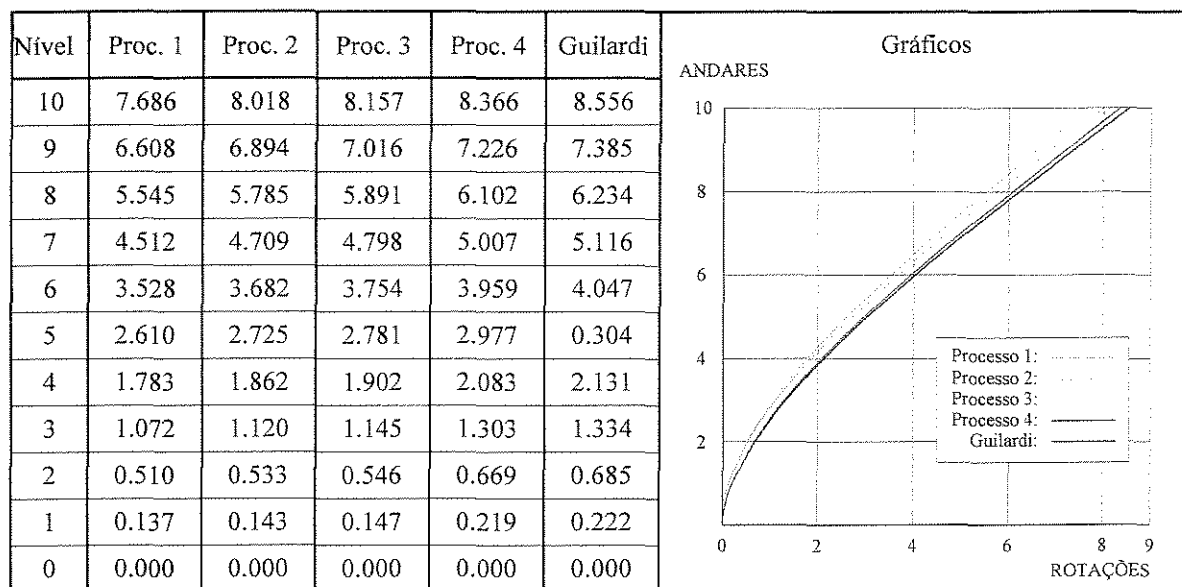
Características da estrutura:	
<i>Número de andares</i>	10
<i>Altura do andar</i>	3.5 m
Carregamento externo:	
<i>Momento torçor concentrado no topo</i>	1.0 kN × m
<i>Momento torçor distribuído</i>	Nulo
Características do material:	
<i>Módulo de elasticidade</i>	30 GPa
<i>Coefficiente de Poisson</i>	0.2
Geometria da seção transversal do lintel:	
<i>Base</i>	0.30 m
<i>Caso a) lintéis pouco rígidos: altura</i>	0.250 m
<i>Caso b) lintéis muito rígidos: altura</i>	0.625 m

Tabela 5.1 – Dados da estrutura do exemplo 1.

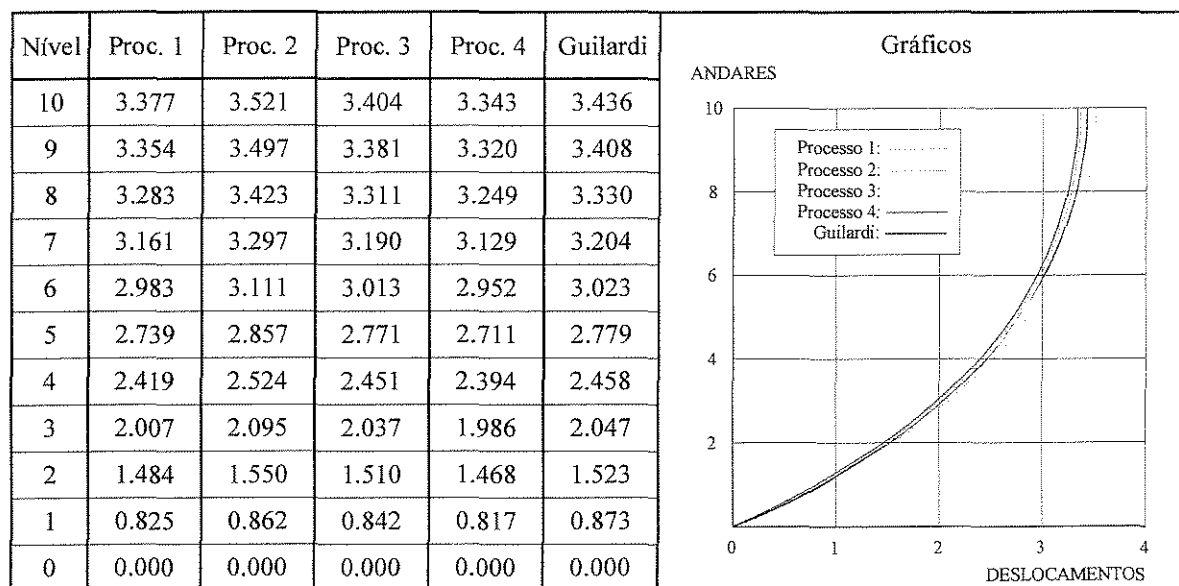
Os valores obtidos nos programas serão sempre apresentados através de um quadro, com os valores numéricos acompanhados dos respectivos gráficos para facilitar a visualização dos resultados.

Os quadros 5.1, 5.2 e 5.3 apresentam os resultados obtidos para as rotações dos diafragmas e os deslocamentos longitudinais das arestas (empenamento) do núcleo fechado por lintéis pouco rígidos, enquanto que os quadros 5.4, 5.5 e 5.6, mostram os mesmos resultados para o núcleo fechado por lintéis muito rígidos.

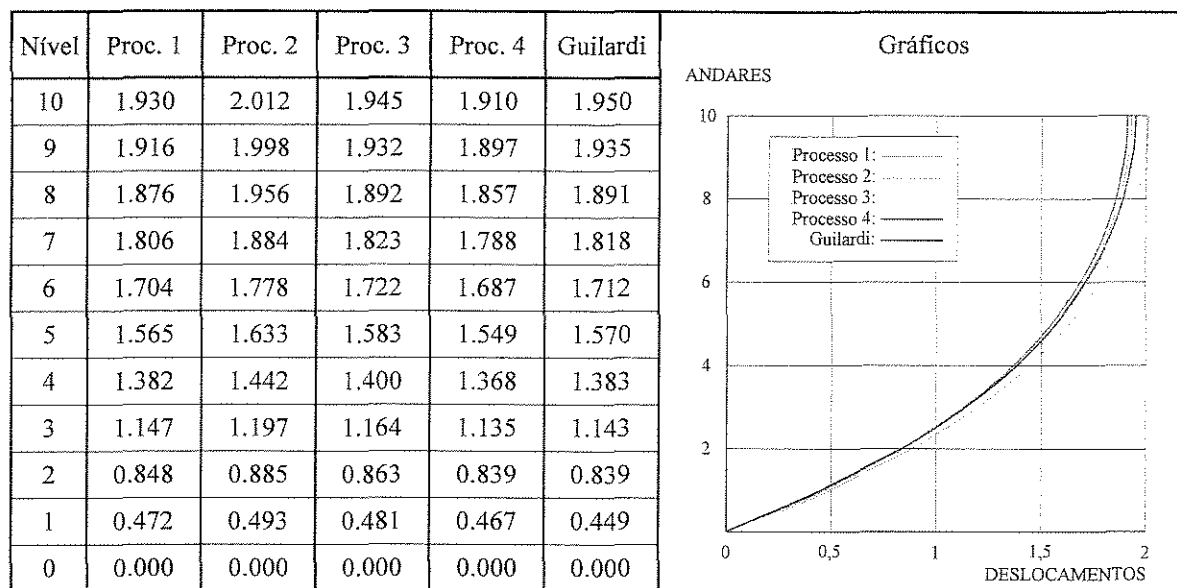
Devido à dupla simetria da seção, foram calculados os deslocamentos ao longo da altura apenas nos pontos A e E da seção transversal (veja figura 5.2).



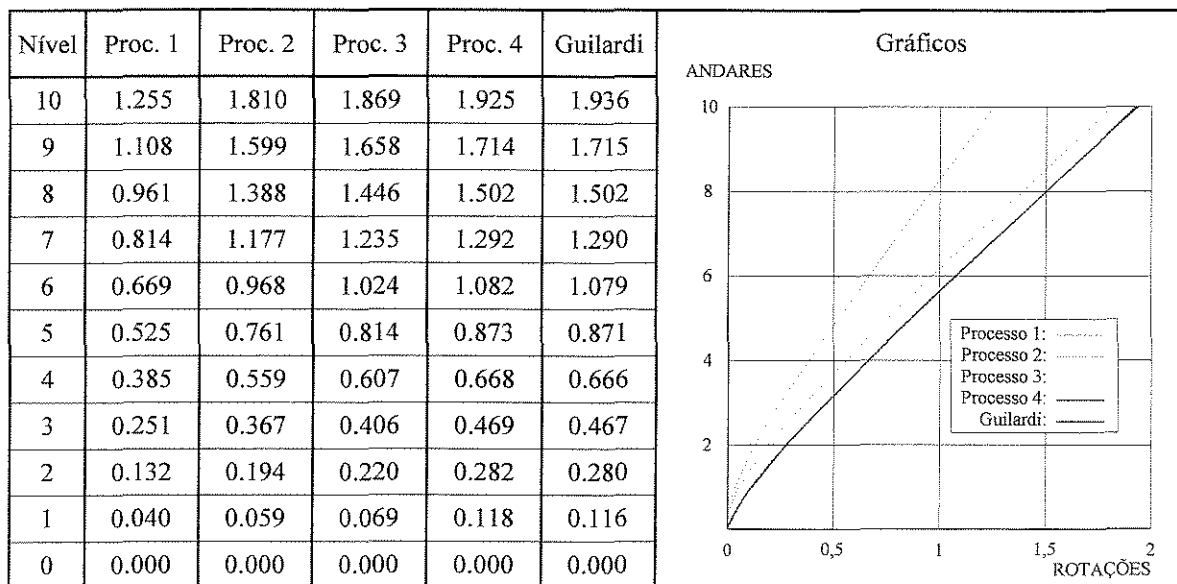
Quadro 5.1 - Rotações dos diafragmas em radianos x 10^{-6} (intel pouco rígido).



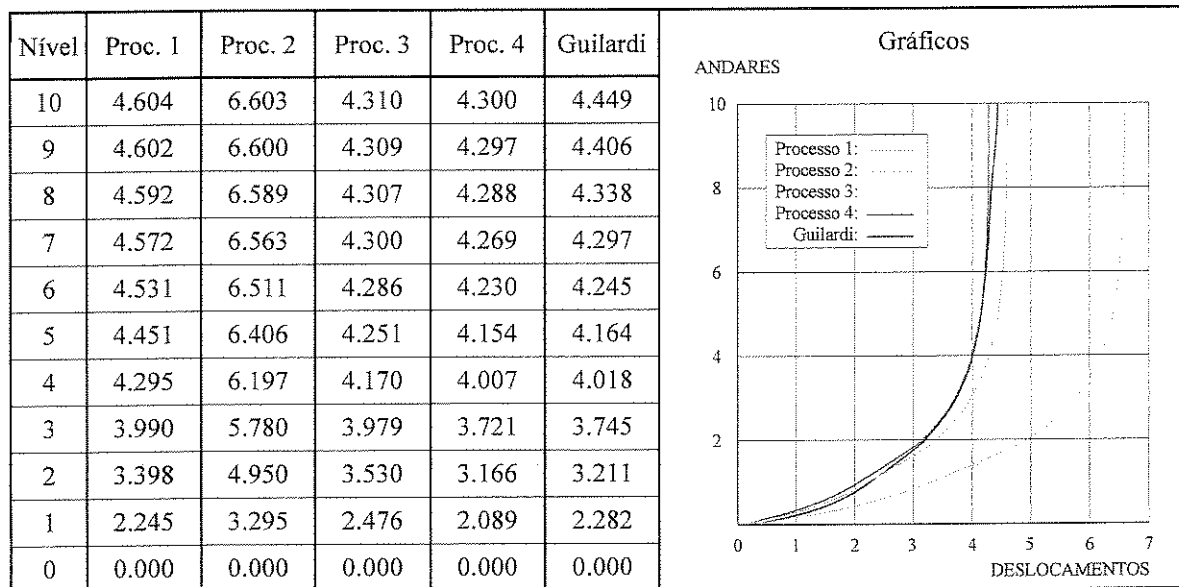
Quadro 5.2 - Deslocamentos longitudinais da aresta A em metros x 10^{-6} (intel pouco rígido).



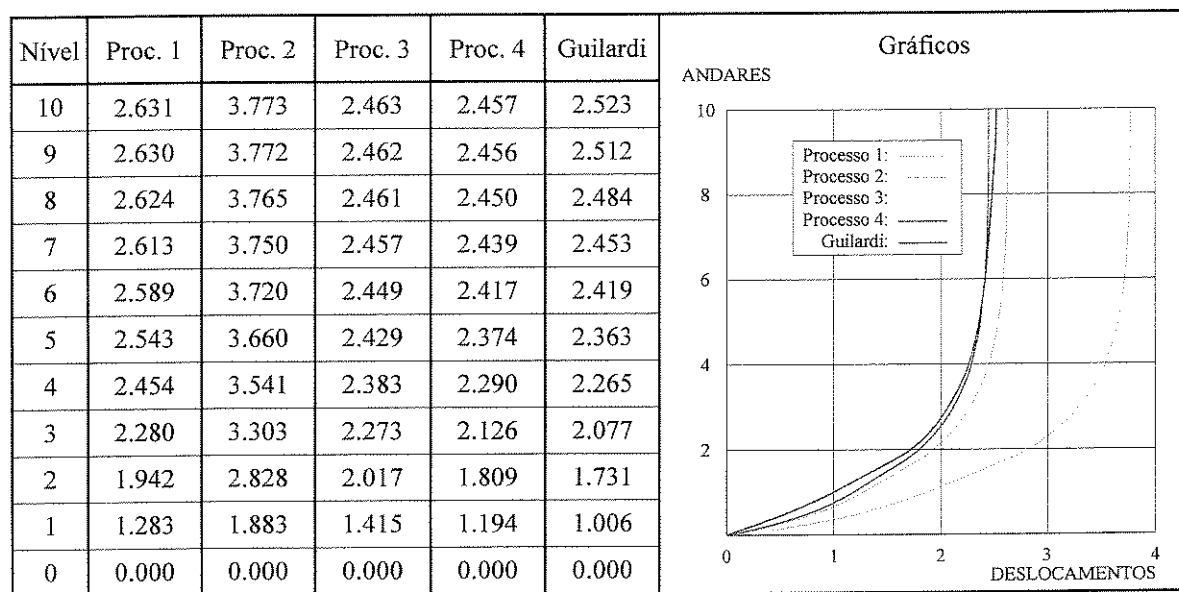
Quadro 5.3 - Deslocamentos longitudinais da aresta E em metros $\times 10^{-6}$ (lintel pouco rígido).



Quadro 5.4 - Rotações dos diafragmas em radianos $\times 10^{-6}$ (lintel muito rígido).



Quadro 5.5 - Deslocamentos longitudinais da aresta A em metros x 10^{-7} (lintel muito rígido).



Quadro 5.6 - Deslocamentos longitudinais da aresta E em metros x 10^{-7} (lintel muito rígido).

Analisando o gráfico do quadro 5.1 (lintéis pouco rígidos), observa-se que as rotações ϕ dos diafragmas pouco diferem nos vários processos, e o processo 1 é o que apresenta menores deslocamentos, seguido na ordem crescente pelos processos 2, 3, 4 e finalmente o processo discreto, que se mostrou o mais flexível. Este resultado era esperado, pois o processo 1, não considerando a rigidez ao cisalhamento, superestima a rigidez do núcleo. Os processos 2 e 3

levam em consideração a rigidez ao cisalhamento, sendo que o processo 3 de forma mais objetiva, pois é baseado em teoria formulada para seções fechadas. O processo 4, mais sofisticado, também adaptado da teoria desenvolvida para seções fechadas pode ser considerado, entre os processos contínuos, o que apresenta os resultados mais realistas.

À vista deste fato, serão utilizados os resultados do processo 4 como base para comparações. Assim, para os valores das rotações no topo, tem-se em percentagem no caso de lintéis pouco rígidos: 91,9%, 95,8%, 97,5%, 100% e 102,3%, respectivamente para os processos 1, 2, 3, 4 e o processo discreto.

As rotações dos diafragmas obtidos pelo processo discreto, por serem as maiores, podem sugerir que este processo subestima a rigidez do núcleo. Realmente isto ocorre na maioria dos modelos sugeridos para os processos discretos, mas o modelo que está sendo aqui usado para comparações, baseado no trabalho de GUILARDI⁰⁷, procurou eliminar os fatores que flexibilizam o núcleo.

Convém também notar que o procedimento dos métodos contínuos de substituir os lintéis, elementos discretos, por um meio contínuo, é um fator que torna o núcleo um pouco mais rígido. MICHAEL¹⁸ trata deste assunto, sugerindo comprimentos efetivos um pouco maiores para os lintéis para compensar este aumento de rigidez. As conclusões obtidas em seu trabalho levam a supor que os núcleos, quando analisados por processos contínuos, são entre 3 e 5% mais rígidos, devido à substituição dos lintéis por um meio contínuo.

Observa-se que considerando a correção de MICHAEL¹⁸, isto é, aumentando entre 3% e 5% os deslocamentos obtidos segundo o processo contínuo, os resultados do processo 4 e do processo discreto apresentam-se muito próximos.

Para o caso de lintéis muito rígidos, conforme pode ser visto no *quadro 5.4*, a mesma comparação usada no caso anterior conduz aos valores: 65,2%, 94,0%, 97,1%, 100% e 100,6%, respectivamente para os processos 1, 2, 3, 4 e o processo discreto. É evidente que os resultados divergem mais conforme a rigidez dos lintéis aumenta, aproximando o núcleo de uma seção fechada. Neste caso o fluxo de cisalhamento ao longo da seção atinge valores elevados ao ser

submetida à torção. Como já foi citado, o processo 1, por negligenciar a deformação por cortante, superestima a rigidez do núcleo, apresentando diferença em torno de 10% no caso de lintéis pouco rígidos (seção próxima à seção aberta), e em torno de 35% no caso de lintéis muito rígidos (seção mais próxima de uma seção fechada). No caso de seções abertas, isto é, núcleos sem lintéis, o processo 1 é perfeitamente recomendado, apresentando resultados muito próximos dos processos discretos.

Os deslocamentos longitudinais u das arestas A e E , podem ser observados nos respectivos quadros. Os resultados se apresentam próximos no caso de lintéis pouco rígidos, e para os lintéis muito rígidos o processo 2 apresenta uma diferença substancial, com valores em torno de 50% maiores. Esta diferença deve-se ao fato de que neste processo é considerada a deformação por cortante na determinação da rotação do núcleo, mas os empenamentos são calculados como se a seção fosse aberta, ou seja, através do produto $\phi' \omega$, onde ω é a área setorial da seção aberta. Portanto, a influência dos lintéis restringindo o deslocamento longitudinal não é considerada, levando a valores para o empenamento bem maiores do que nos demais processos. No primeiro processo, a existência de lintéis também não é considerada para o cálculo dos deslocamentos longitudinais. Além disto, a deformação por cortante é desprezada, o que leva a rotações menores. Assim sendo, as rotações e suas primeiras derivadas divergem bastante nestes dois processos, e o empenamento acompanha esta divergência. Nos processos 3 e 4, apesar das rotações e suas primeiras derivadas também divergirem do processo 1, os deslocamentos longitudinais são definidos como $\phi' \bar{\omega}$ e $\chi \bar{\omega}$, respectivamente, onde a influência dos lintéis está representada por $\bar{\omega}$ (área setorial de uma seção fechada).

5.2 Exemplo 2:

Neste exemplo será analisado um núcleo formado por uma seção canal, cuja planta com suas dimensões características está mostrada na *figura 5.3*, enquanto a *tabela 5.2* resume os demais dados da estrutura.

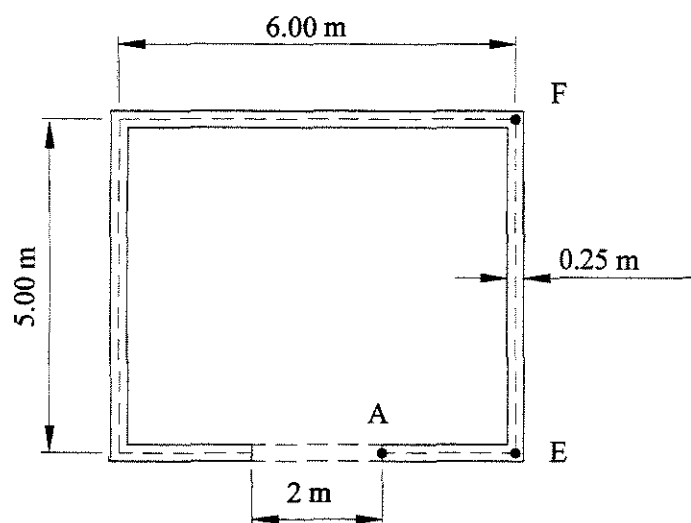


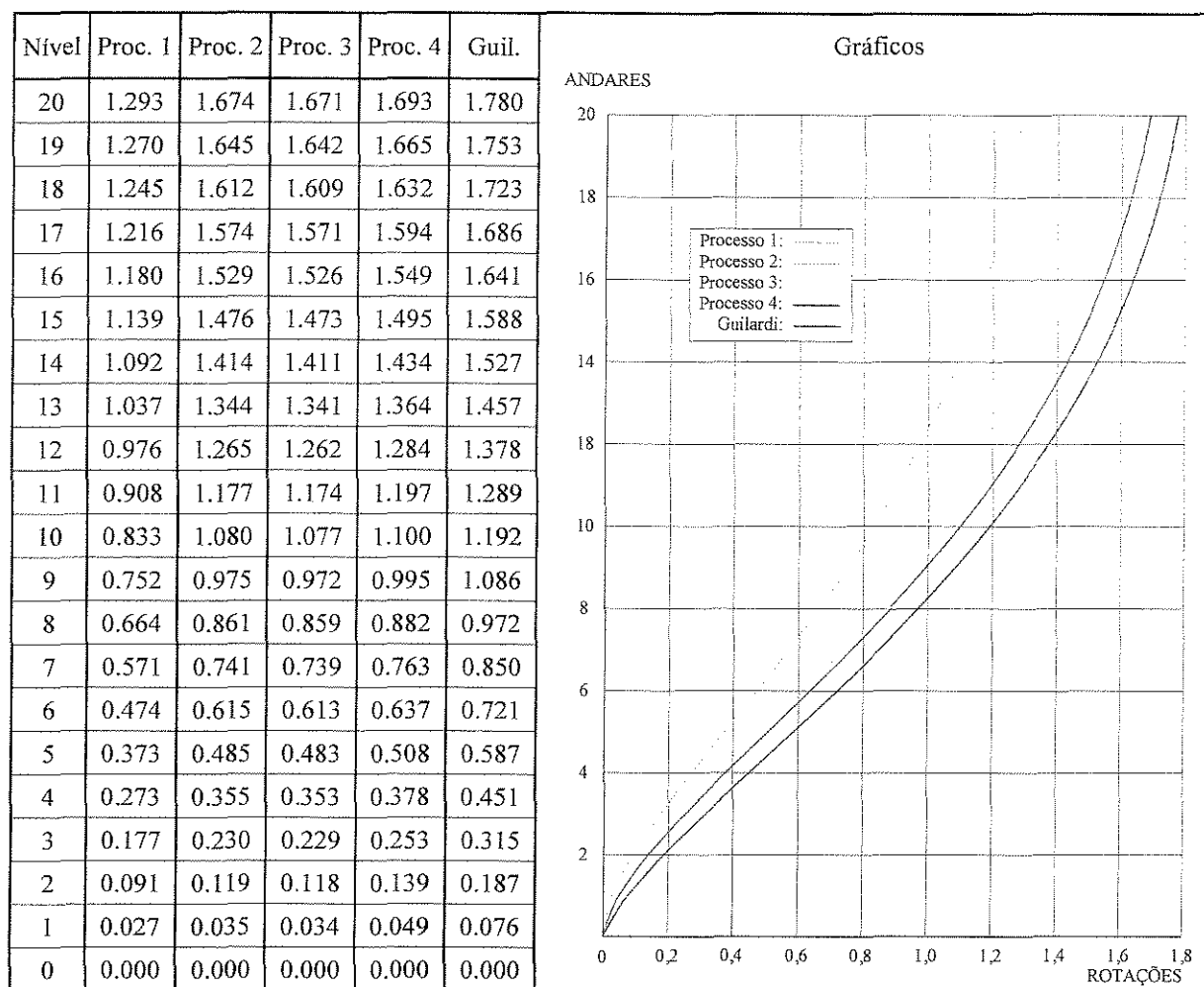
Figura 5.3 – Seção transversal do núcleo do exemplo 2.

Características da estrutura:	
<i>Número de andares</i>	20
<i>Altura do andar</i>	3.5 m
Carregamento externo:	
<i>Momento torçor concentrado no topo</i>	30 kN × m
<i>Momento torçor distribuído</i>	10 kN × m / m
Características do material:	
<i>Módulo de elasticidade</i>	30 GPa
<i>Coefficiente de Poisson</i>	0.2
Geometria da seção transversal do lintel:	
<i>Base</i>	0.25 m
<i>Altura</i>	0.60 m

Tabela 5.2 – Dados da estrutura do exemplo 2.

Alguns resultados obtidos através do programa são apresentados nos quadros a seguir. Os valores numéricos estão acompanhados dos respectivos gráficos para facilitar a visualização dos resultados.

O quadro 5.7 mostra as rotações dos diafragmas obtidas pelos quatro processos desenvolvidos neste trabalho e também os mesmos resultados obtidos por GUILARDI⁰⁷ usando um processo discreto.

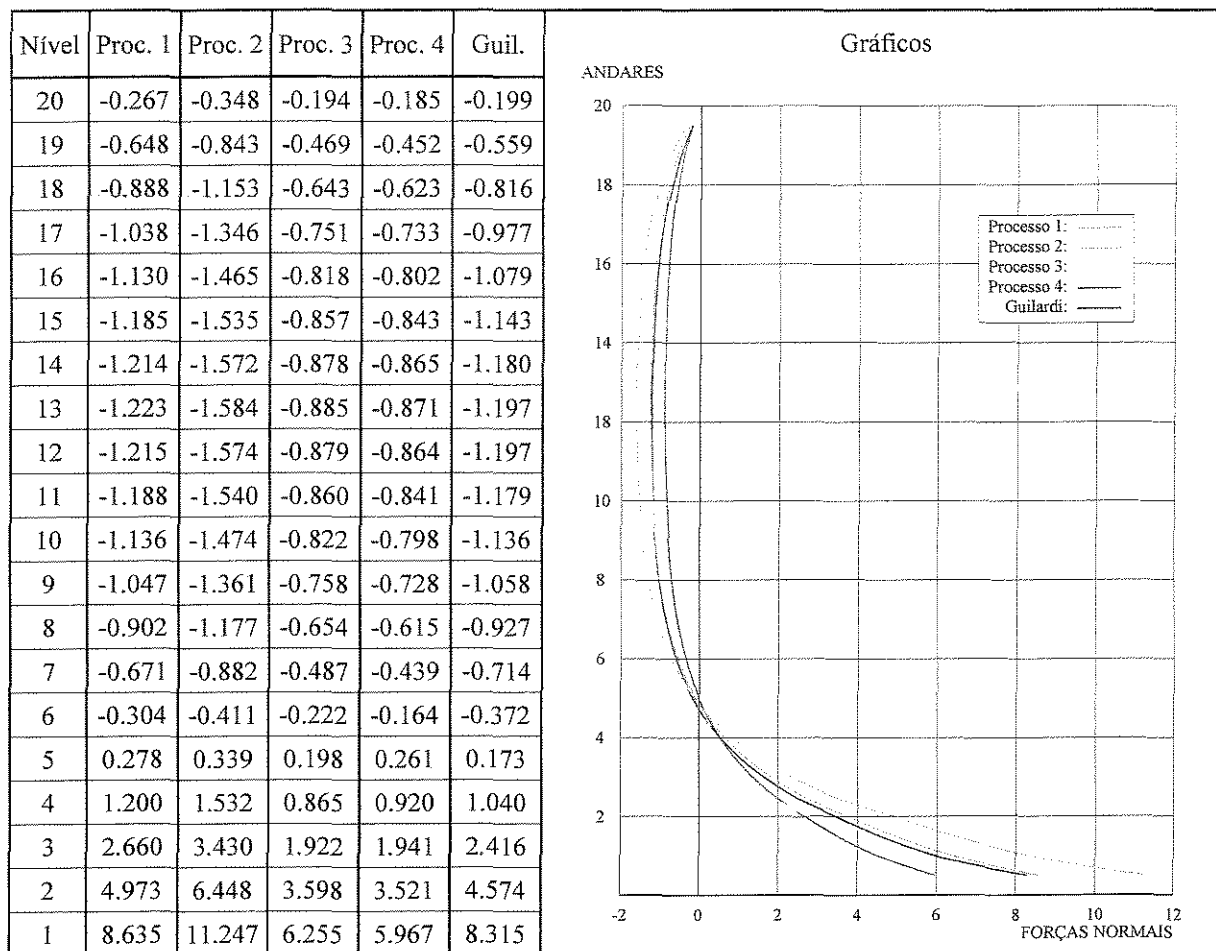


Quadro 5.7 - Rotações dos diafragmas em radianos $\times 10^{-4}$.

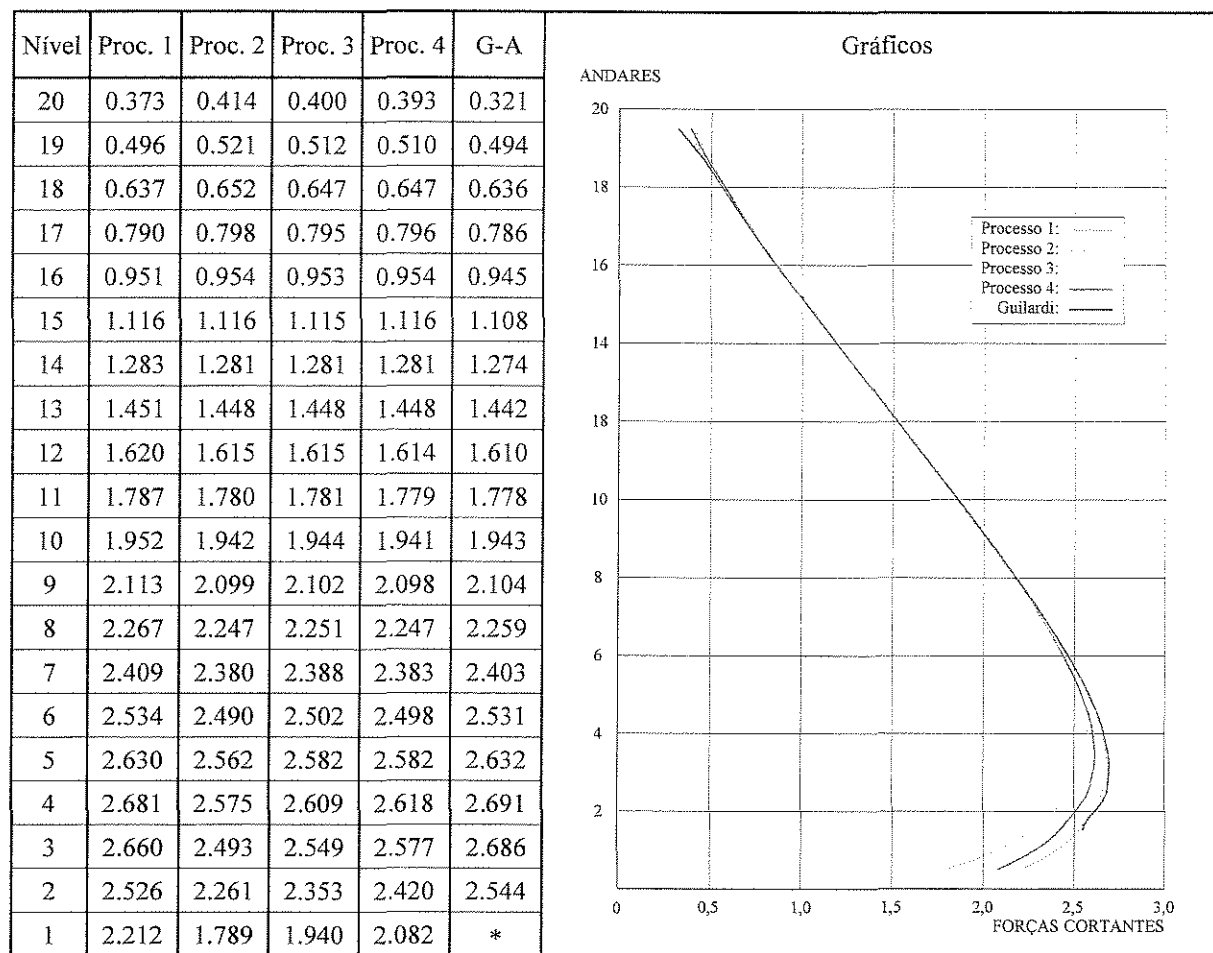
Como no exemplo anterior, o processo 1, baseado na teoria usual de VLASOV³⁰ para seções abertas que não considera as deformações por cisalhamento, superestima a rigidez do núcleo, conduzindo a deslocamentos menores. Analisando o *quadro 5.7* observa-se que neste exemplo, as rotações segundo os processos 2 e 3 praticamente coincidem. Adotando-se o processo 4 como base para comparação, as rotações no topo valem respectivamente para os processos 1, 2, 3, 4 e Guilardi: 76,4%, 98,9%, 98,7%, 100% e 105,1%. Caso se considere a correção de MICHAEL¹⁸ abordada no exemplo anterior, deve-se considerar os resultados entre 3% e 5% maiores para processos contínuos, o que resultaria em valores praticamente iguais para o processo contínuo 4 e o discreto de GUILARDI⁰⁷.

Os quadros 5.8 a 5.10 apresentam os esforços solicitantes a meia altura dos andares da

parede AE. Estes resultados foram calculados a meia altura dos andares para compatibilizar com os resultados do processo discreto, pois devido às características de discretização dos núcleos utilizada nos processos discretos, os esforços e tensões que melhor representam o caso real são os calculados a meia altura dos andares.

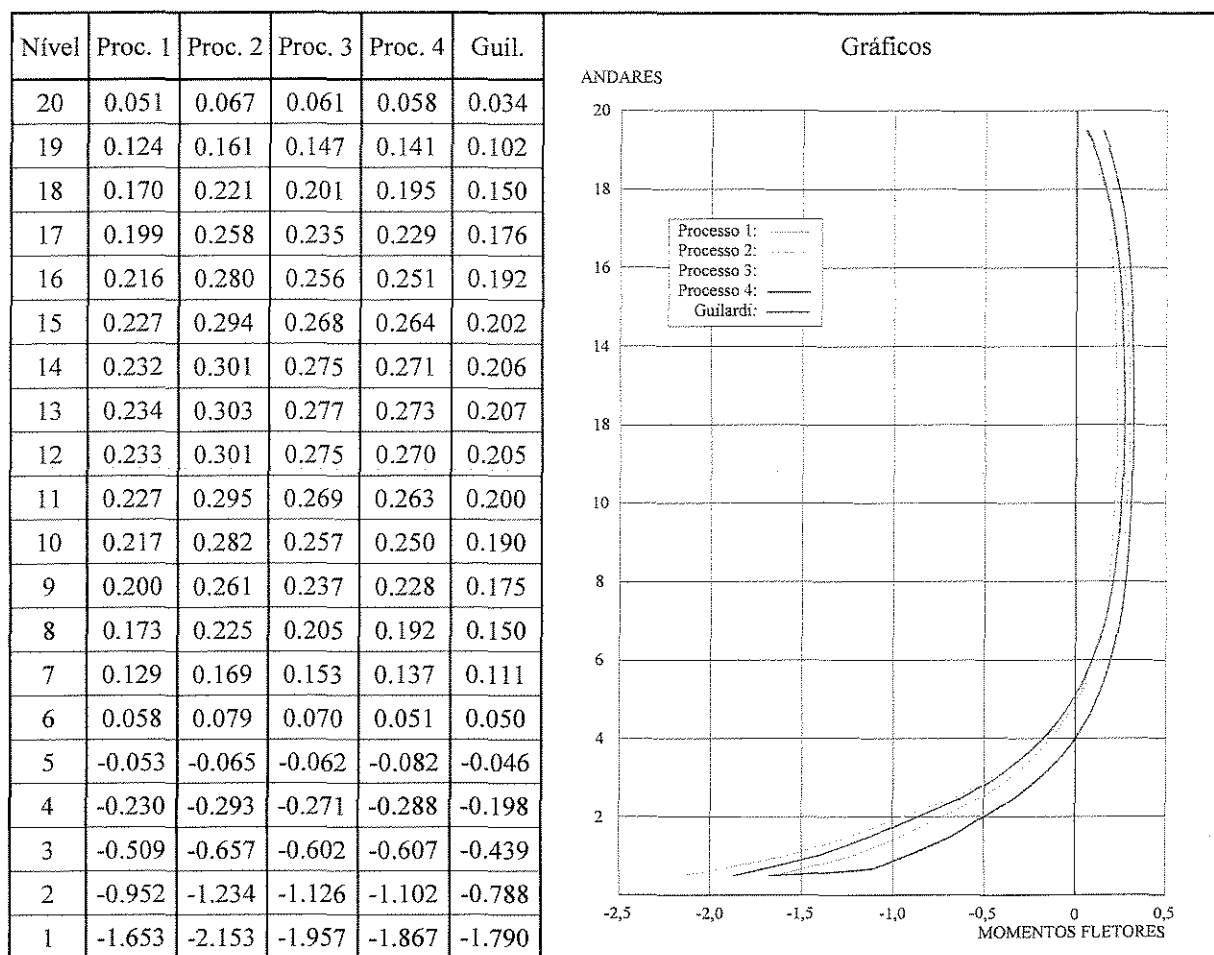


Quadro 5.8 - Forças normais nas seções a meia altura da parede AE em kN x 10.



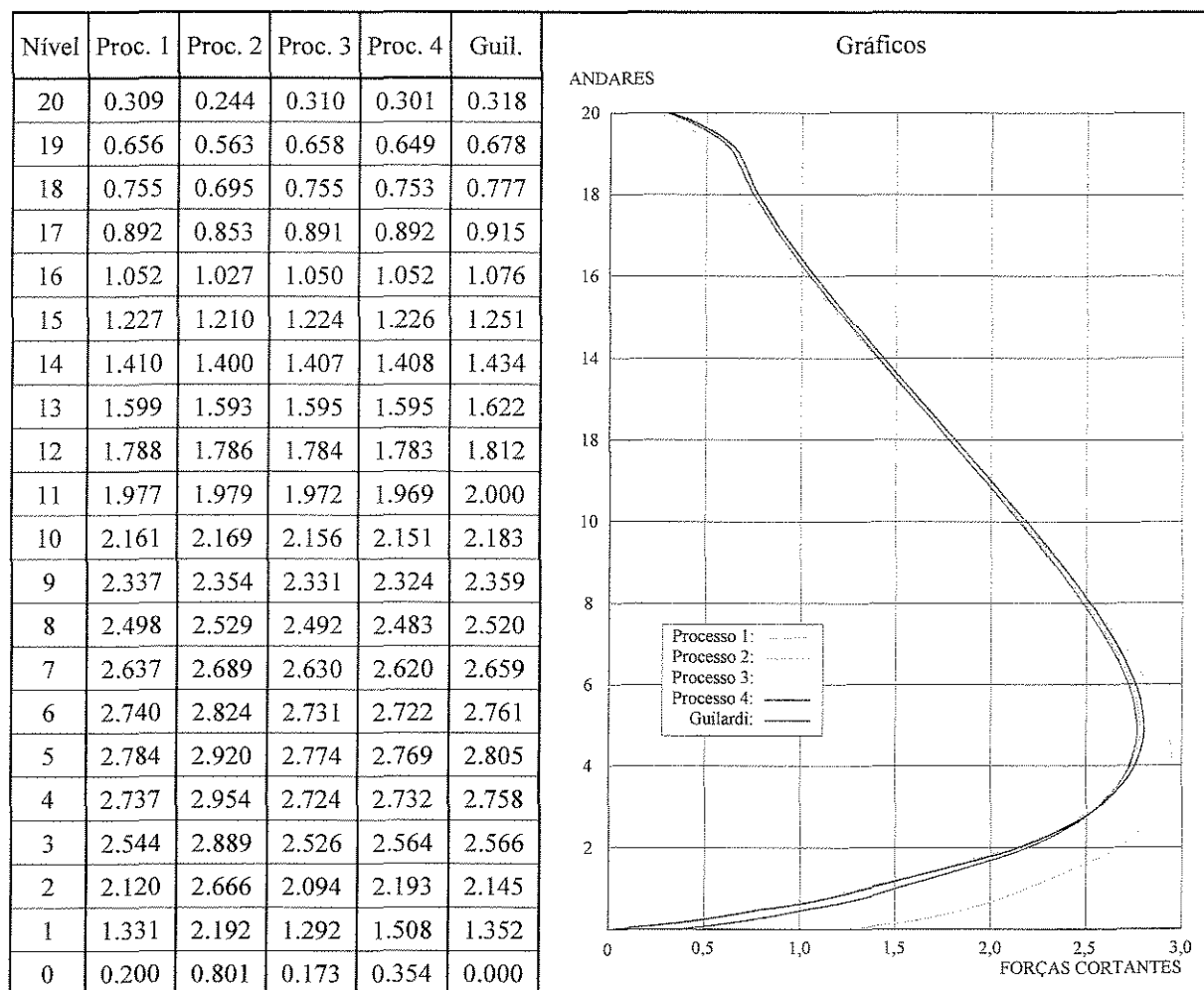
Quadro 5.9 - Forças cortantes nas seções a meia altura da parede AE em kN x 10.

*Os valores obtidos por este método, nos níveis próximos à base, não são representativos.



Quadro 5.10 – Momentos fletores nas seções a meia altura da parede AE em kN x 10.

O quadro 5.11 mostra as forças cortantes nos lintéis. No processo discreto ela é determinada normalmente através da análise matricial. Nos processos contínuos aqui apresentados, as forças cortantes foram determinadas integrando-se as tensões longitudinais de cisalhamento no intervalo de influência para cada lintel, ou seja, entre a meia altura dos andares adjacentes, exceto para o primeiro e o último lintel, cujas áreas de influência compreendem apenas a metade inferior do primeiro andar ou metade superior do último, respectivamente.



Quadro 5.11 - Forças cortantes propriamente ditas nos lintéis em kN x 10.

Pela observação dos gráficos nota-se que não há uma discrepância substancial entre os valores obtidos.

Neste exemplo, observa-se novamente que os resultados do processo 2 distanciam-se dos demais. Isto ocorre porque neste processo a deformação por cortante devido à existência de lintéis, é considerada na determinação das rotações, e conseqüentemente no cálculo de suas derivadas. Porém, a área setorial utilizada para se determinar os esforços é correspondente à uma seção aberta. Portanto, a influência dos lintéis não está bem representada no cálculo dos esforços pelo processo 2. Este fato pode ser observado em todos os gráficos, no entanto é mais evidente no gráfico do *quadro 5.11* que representa a força cortante nos lintéis, concluindo-se que o processo 2 superestima o valor deste esforço.

5.3 Exemplo 3:

Dentre os resultados experimentais para a torção de núcleos, este modelo ensaiado por TSO e BISWAS²⁸ tem boa aceitação entre os pesquisadores, e já foi analisado em diversos trabalhos. Por este motivo foi escolhido para comparação de resultados.

Para este exemplo foram incluídas uma ampla variedade de resultados. Procurou-se preservar as unidades originais usadas para as dimensões e o carregamento do modelo ensaiado, mas também apresenta-se os valores correspondentes no S.I. de unidades. A *figura 5.4* ilustra a seção transversal do núcleo, com suas dimensões características, enquanto que a *tabela 5.3* resume os demais dados da estrutura.

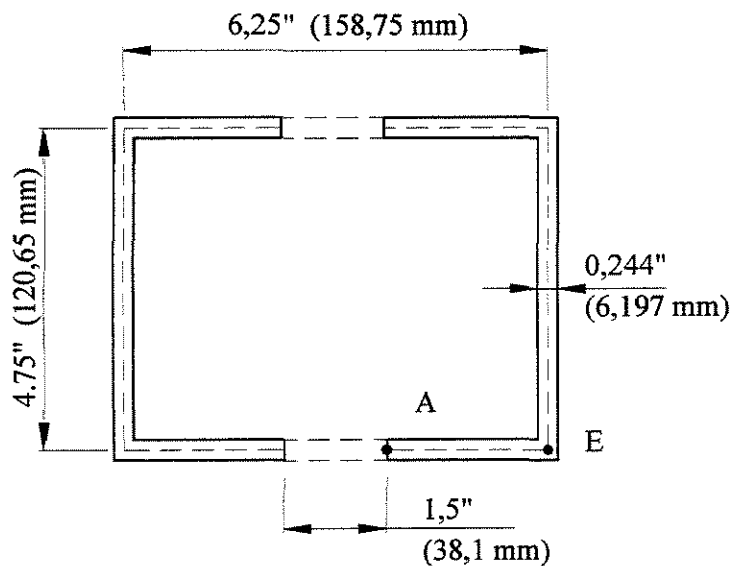
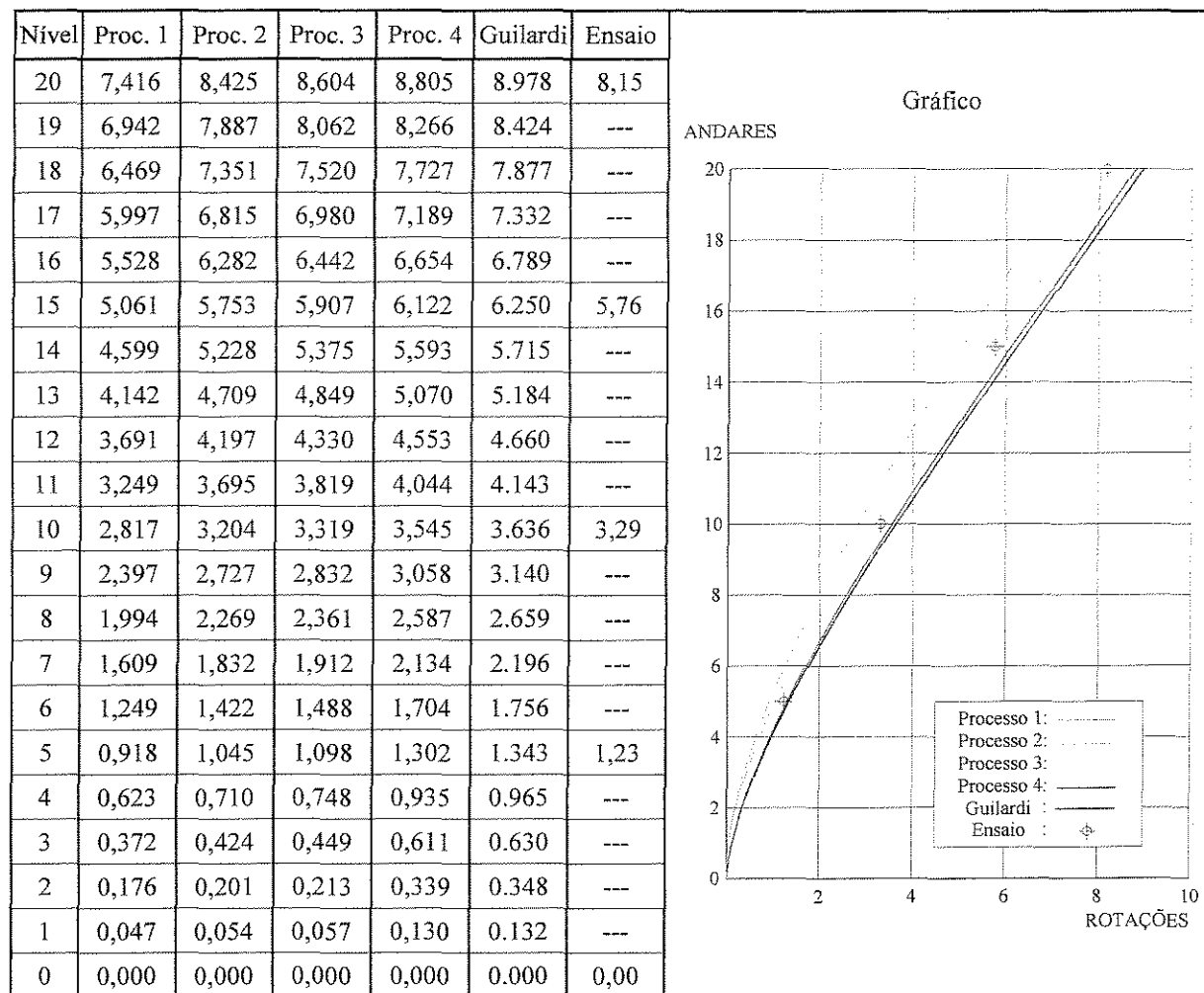


Figura 5.4 – Seção transversal do núcleo do exemplo 3.

Características da estrutura:	
<i>Número de andares</i>	20
<i>Altura do andar</i>	2,45 polegadas (62,26 mm)
Carregamento externo:	
<i>Momento torção concentrado no topo</i>	200 libras/polegada (22,56 N/m)
<i>Momento torção distribuído</i>	Nulo
Características do material:	
<i>Módulo de elasticidade</i>	430000 libras/pol ² (2,96475*10 ⁹ N/m ²)
<i>Coefficiente de Poisson</i>	0.34375
Geometria da seção transversal do lintel:	
<i>Base</i>	0,244 polegadas (6,197 mm)
<i>Altura</i>	0,375 polegadas (9,525 mm)

Tabela 5.3 - Dados da estrutura do exemplo 3.

Apresenta-se nos quadros a seguir todos os resultados obtidos através do programa e ainda os resultados obtidos com o processo discreto desenvolvido por GUILARDI⁰⁷.



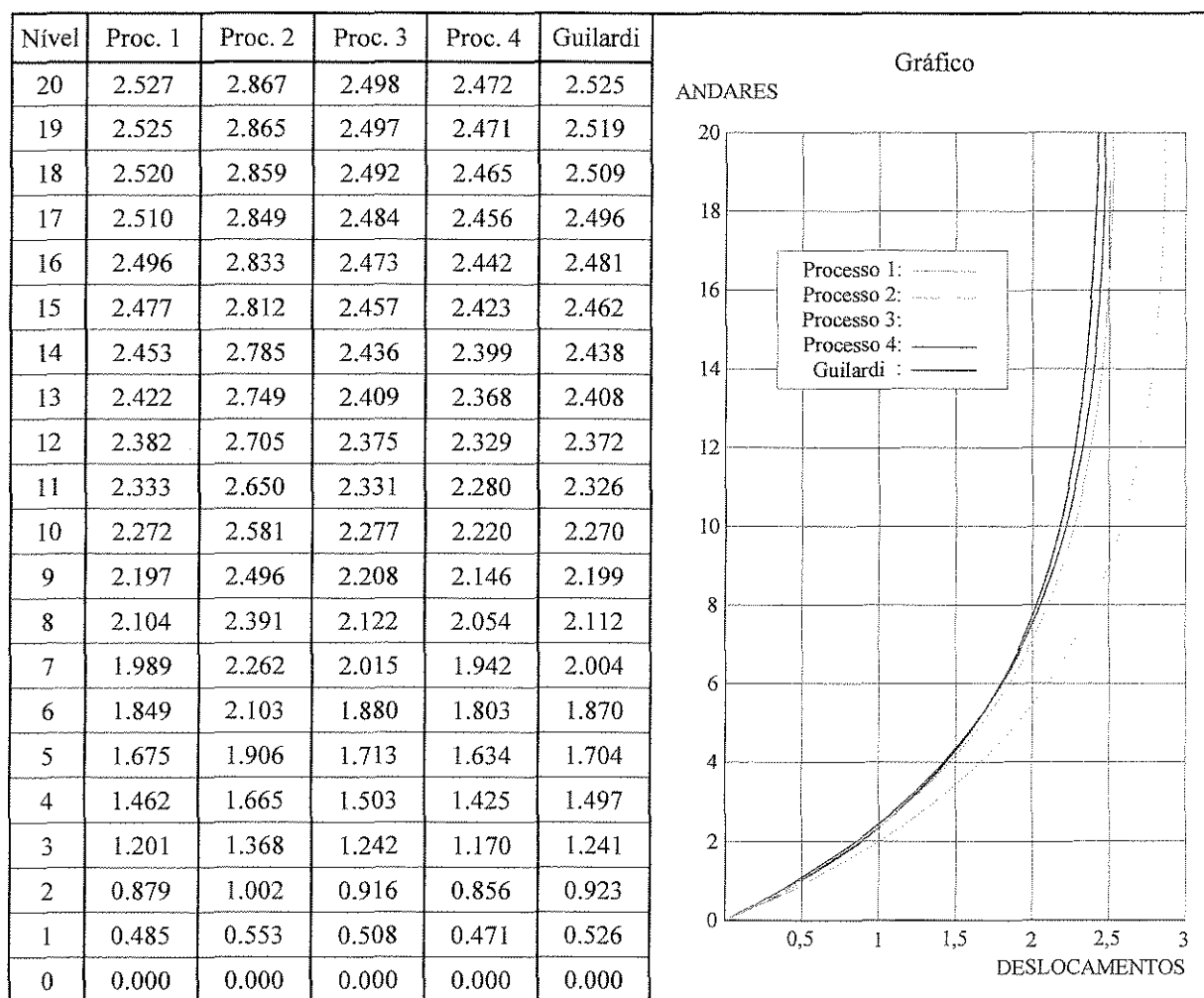
Quadro 5.12 - Rotações dos diafragmas em radianos $\times 10^{-3}$.

Em todos os exemplos analisados, assim como nos exemplos estudados por GUILARDI⁰⁷ em seu trabalho, as rotações dos diafragmas obtidas utilizando o processo discreto com o modelo por ele sugerido e os resultados utilizando o processo 4 aqui descrito, sempre se apresentaram muito próximos, caso se considere a correção de MICHAEL¹⁸, isto é, aumentando entre 3 e 5% os deslocamentos obtidos segundo o processo contínuo.

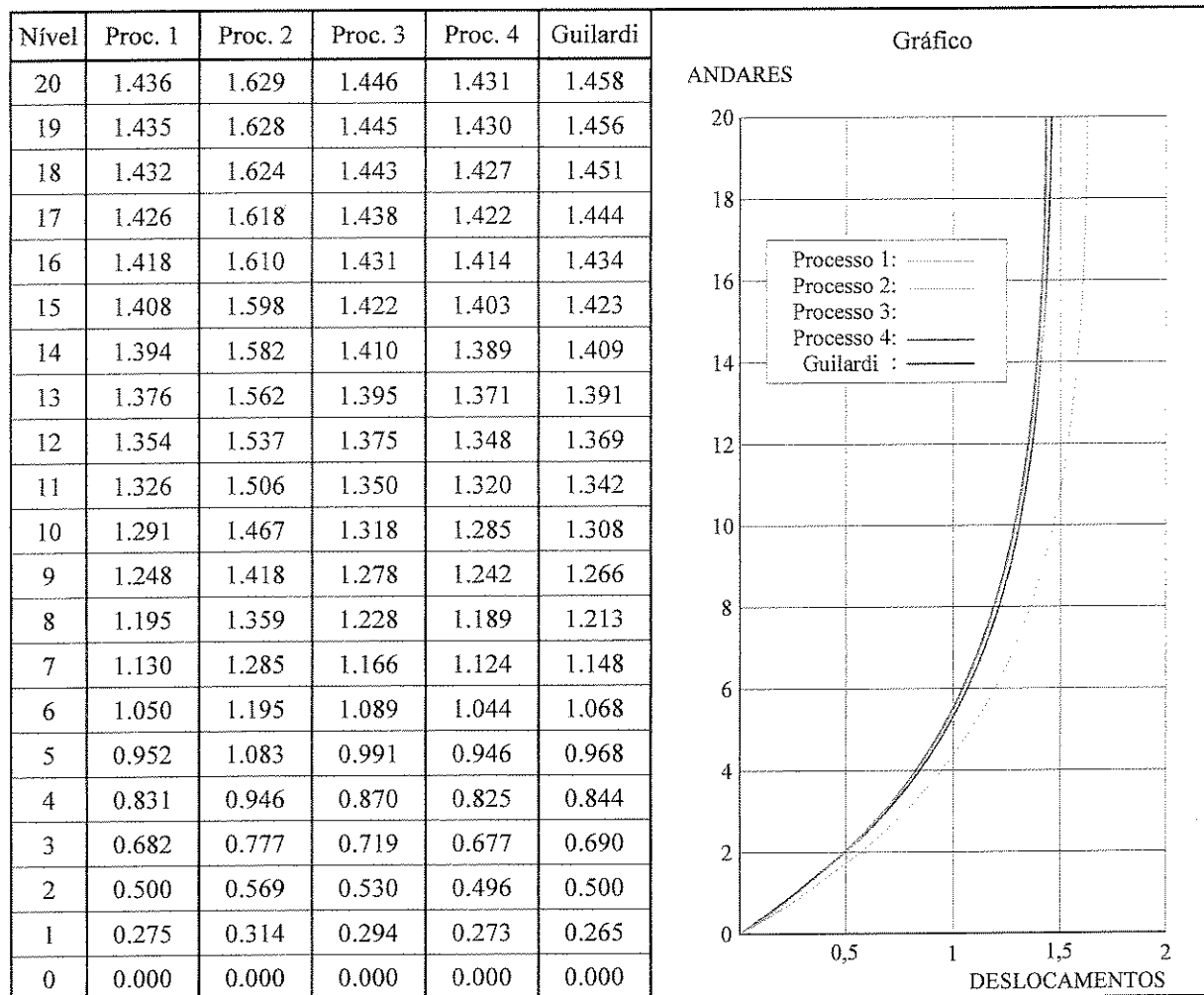
Os resultados experimentais das rotações dos diafragmas (quadro 5.12) são menores do que os valores obtidos pelos processos contínuos e discreto, com exceção do processo 1, que superestima a rigidez do núcleo. Isto ocorre porque no modelo foram acrescentadas mísulas duplas nos lintéis, de forma circular, com raio de 0,125". Este aumento da seção transversal dos lintéis nas vizinhanças dos nós, naturalmente enrijece os lintéis e consequentemente o núcleo.

Como nenhum dos processos utilizados na análise leva isto em conta, a aparente maior flexibilidade apurada nos resultados teóricos é de certa forma justificada. Este fato é lembrado por outros autores e particularmente citado no artigo de RUTENBERG et al ²¹.

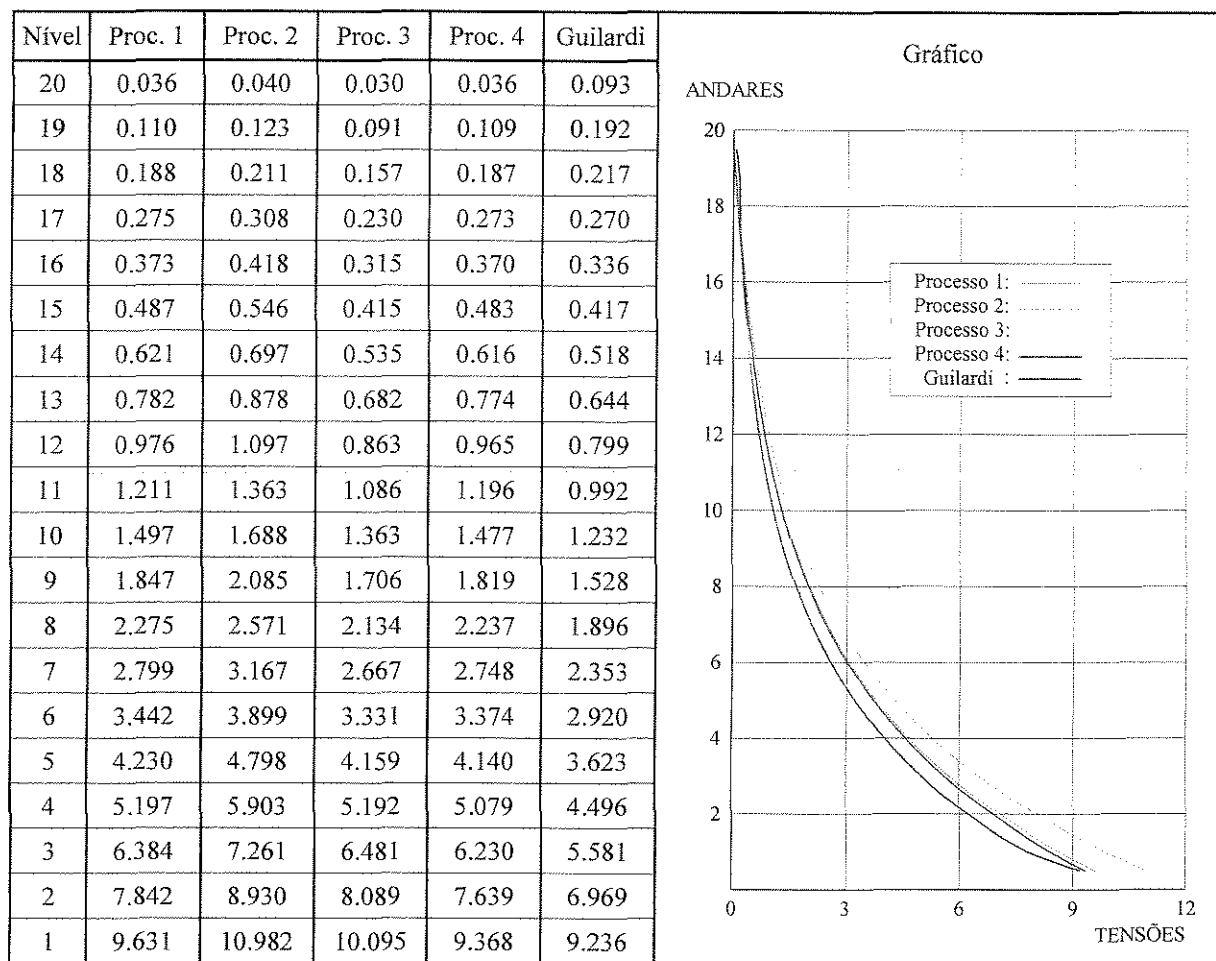
A vantagem do processo 4 em relação aos demais processos contínuos se torna mais evidente neste exemplo, onde pode-se observar que apenas este processo representa bem o efeito das deformações por cortante nos níveis mais baixos. Os outros processos superestimam a rigidez, e determinam para a rotação valores menores do que os resultados experimentais na região inferior do núcleo. Pode-se dizer que o processo 1 é o que pior modela o comportamento do núcleo, chegando a valores para a rotação menores do que os resultados experimentais ao longo de toda a altura do núcleo.



Quadro 5.13 – Deslocamentos longitudinais da aresta A em polegadas x 10⁻³.

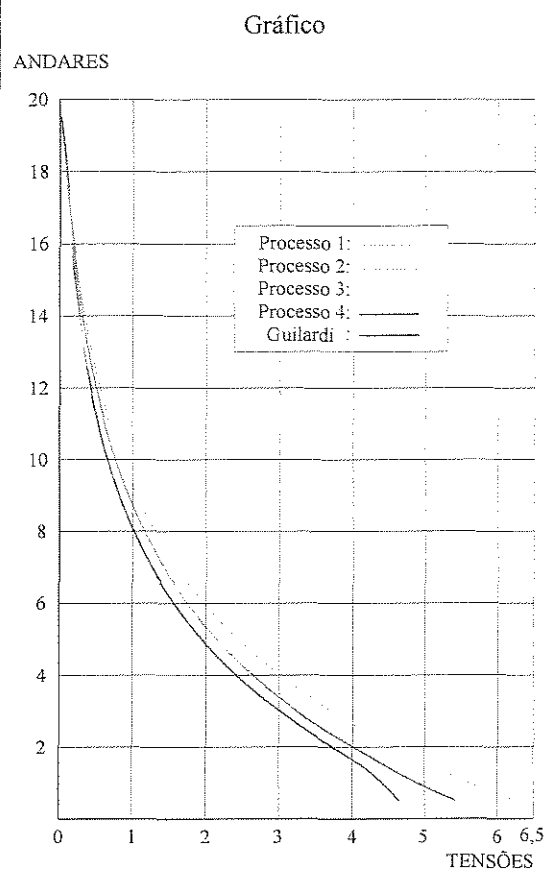


Quadro 5.14 - Deslocamentos longitudinais da aresta E em polegadas $\times 10^{-3}$.

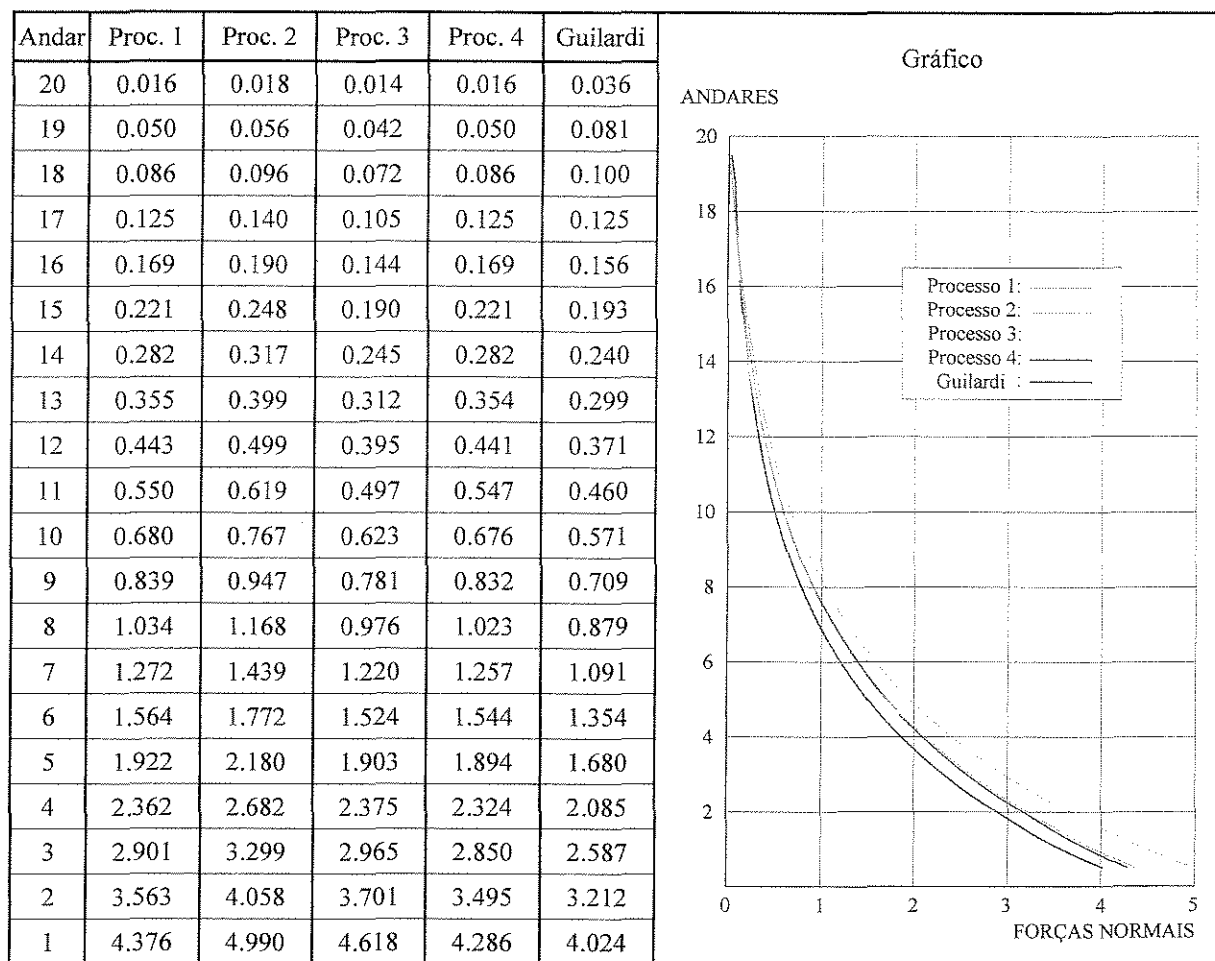


Quadro 5.15 - Tensões longitudinais a meia altura da aresta A em $\text{lb/pol}^2 \times 10^{-1}$.

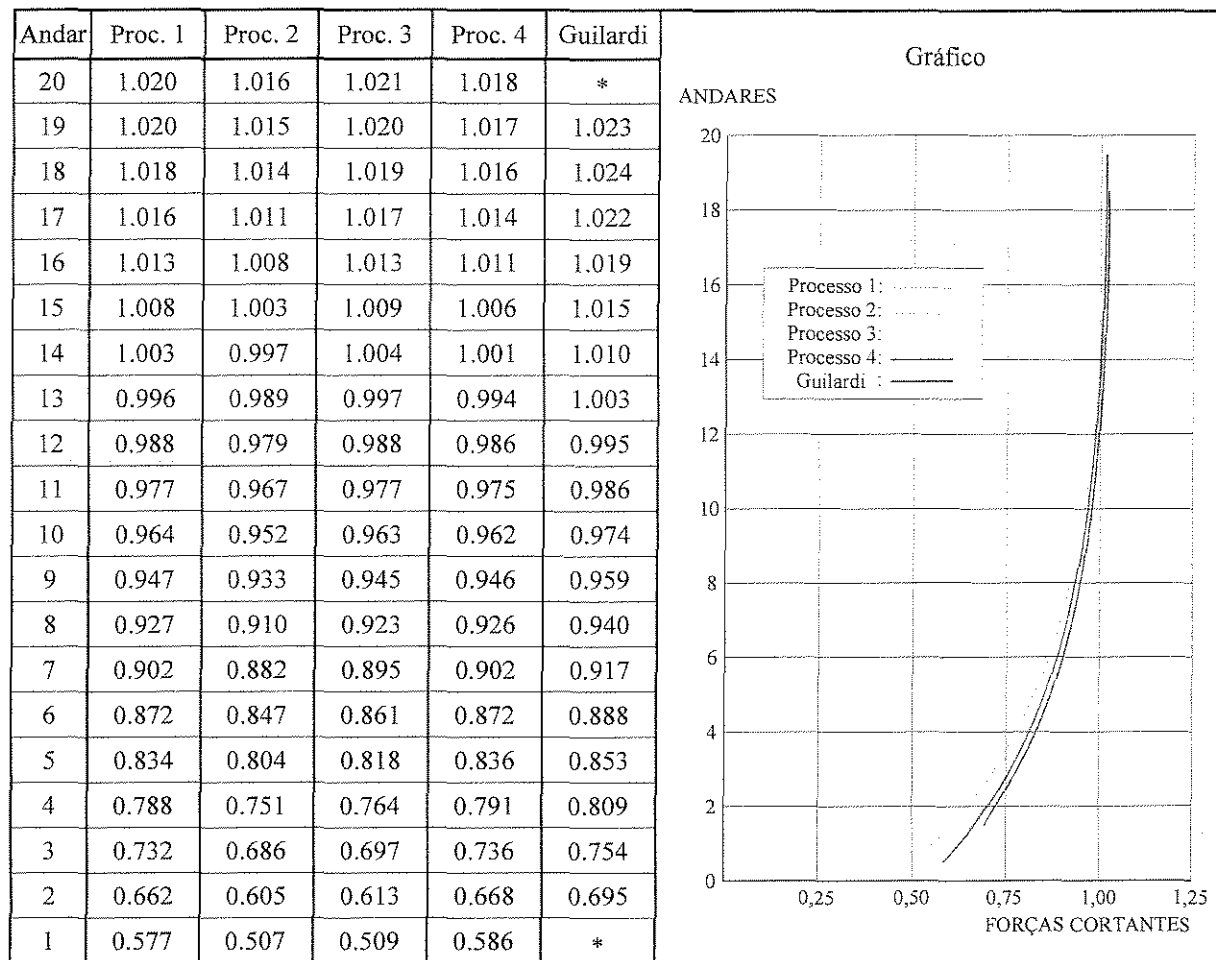
Nível	Proc. 1	Proc. 2	Proc. 3	Proc. 4	Guilardi
20	0.021	0.023	0.017	0.021	0.033
19	0.062	0.070	0.053	0.063	0.089
18	0.107	0.120	0.091	0.109	0.129
17	0.156	0.175	0.133	0.158	0.162
16	0.212	0.237	0.182	0.214	0.201
15	0.277	0.310	0.240	0.280	0.251
14	0.353	0.396	0.310	0.357	0.311
13	0.444	0.499	0.395	0.448	0.387
12	0.554	0.624	0.500	0.559	0.480
11	0.688	0.775	0.629	0.692	0.596
10	0.851	0.959	0.789	0.855	0.739
9	1.049	1.184	0.988	1.053	0.918
8	1.293	1.461	1.235	1.295	1.139
7	1.590	1.799	1.544	1.591	1.413
6	1.956	2.215	1.928	1.953	1.753
5	2.403	2.726	2.408	2.397	2.175
4	2.953	3.354	3.006	2.940	2.699
3	3.628	4.126	3.752	3.606	3.346
2	4.456	5.074	4.683	4.423	4.118
1	5.472	6.240	5.844	5.423	4.651



Quadro 5.16 - Tensões longitudinais a meia altura da aresta E em $\text{lb/pol}^2 \times 10^{-1}$.

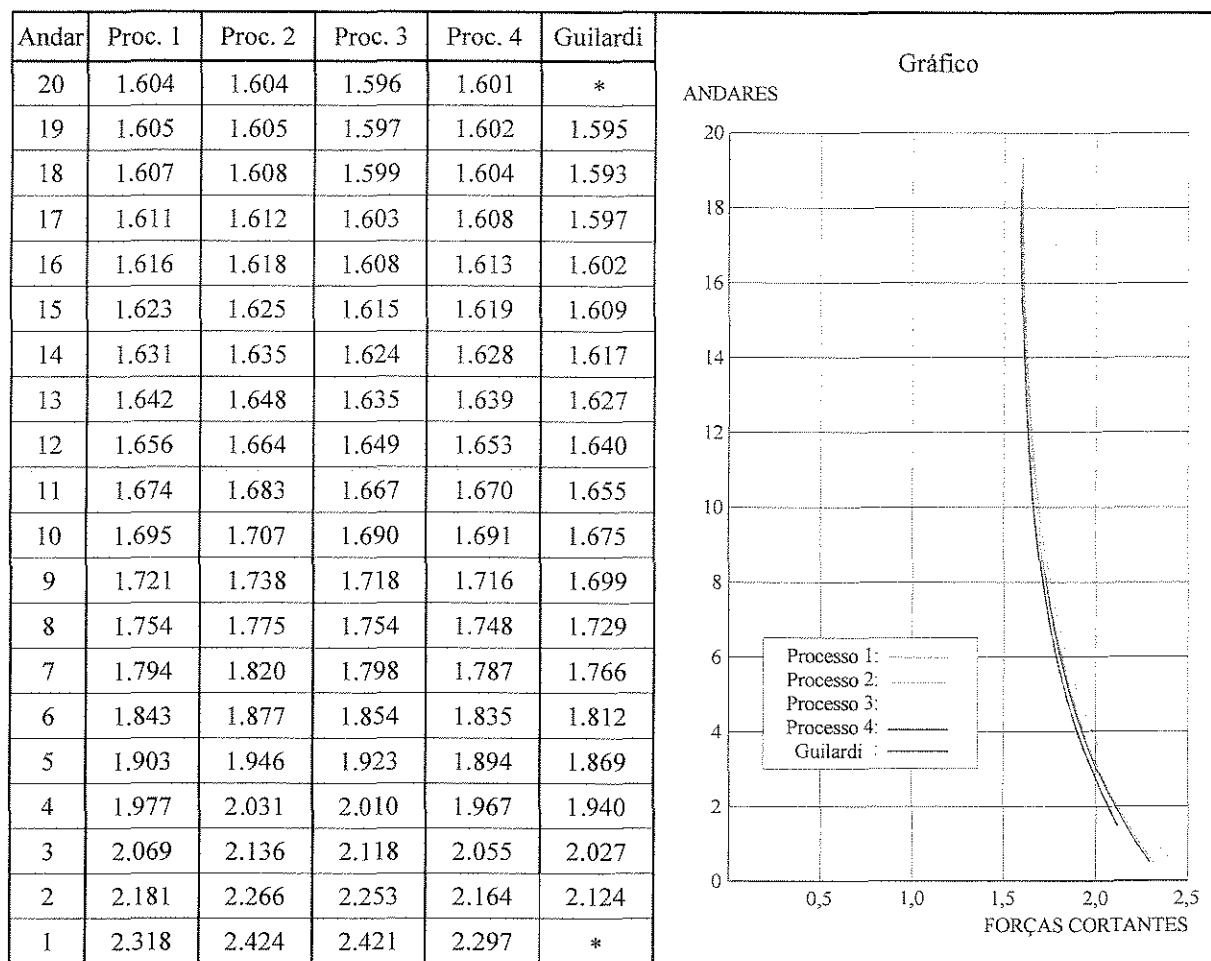


Quadro 5.17 - Forças normais nas seções a meia altura da parede AE em libras x 10⁻¹.



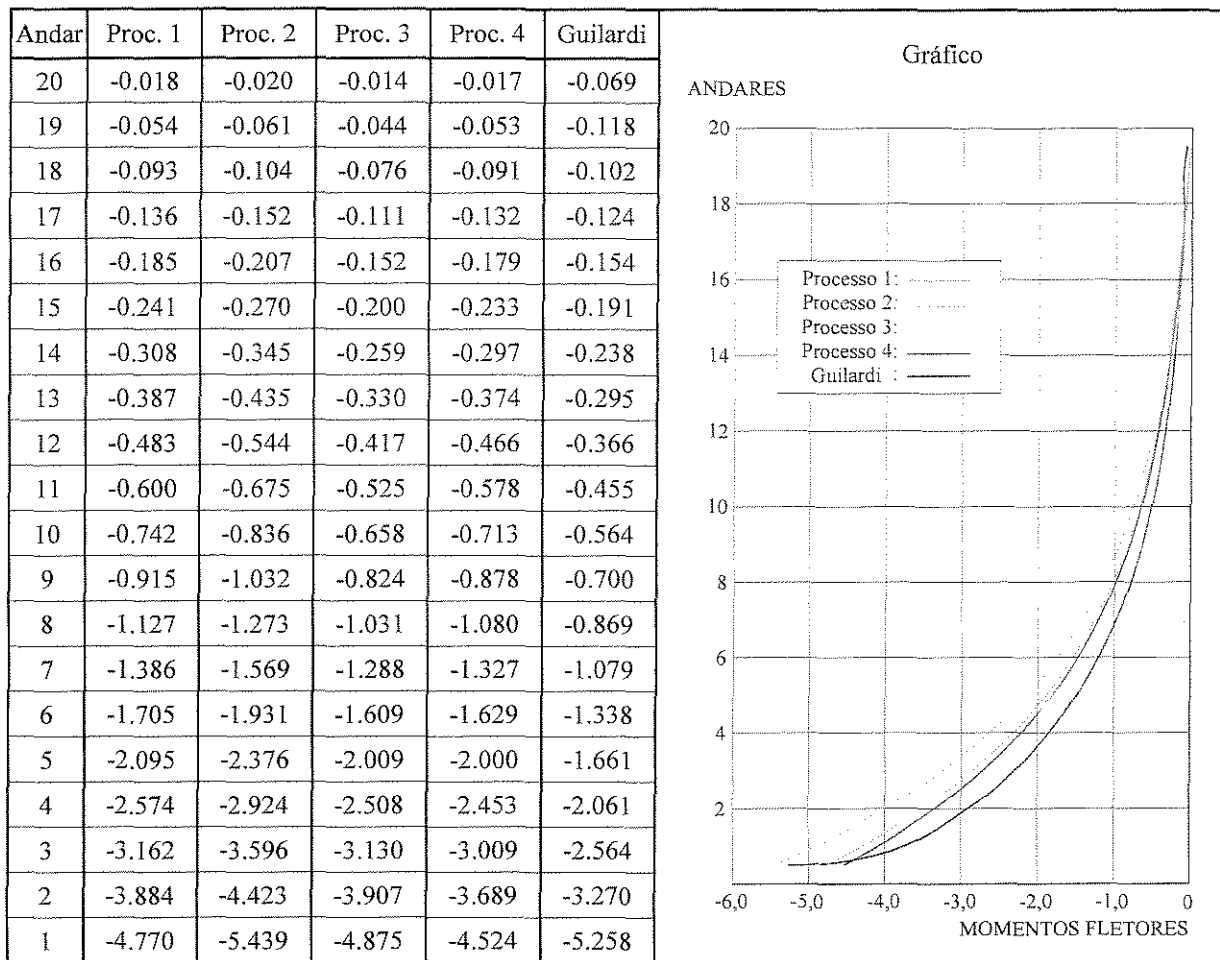
Quadro 5.18 - Forças cortantes nas seções a meia altura da parede AE em libras x 10^{-1} .

*Os valores obtidos por este método, nos níveis próximos ao topo e à base, não são representativos.

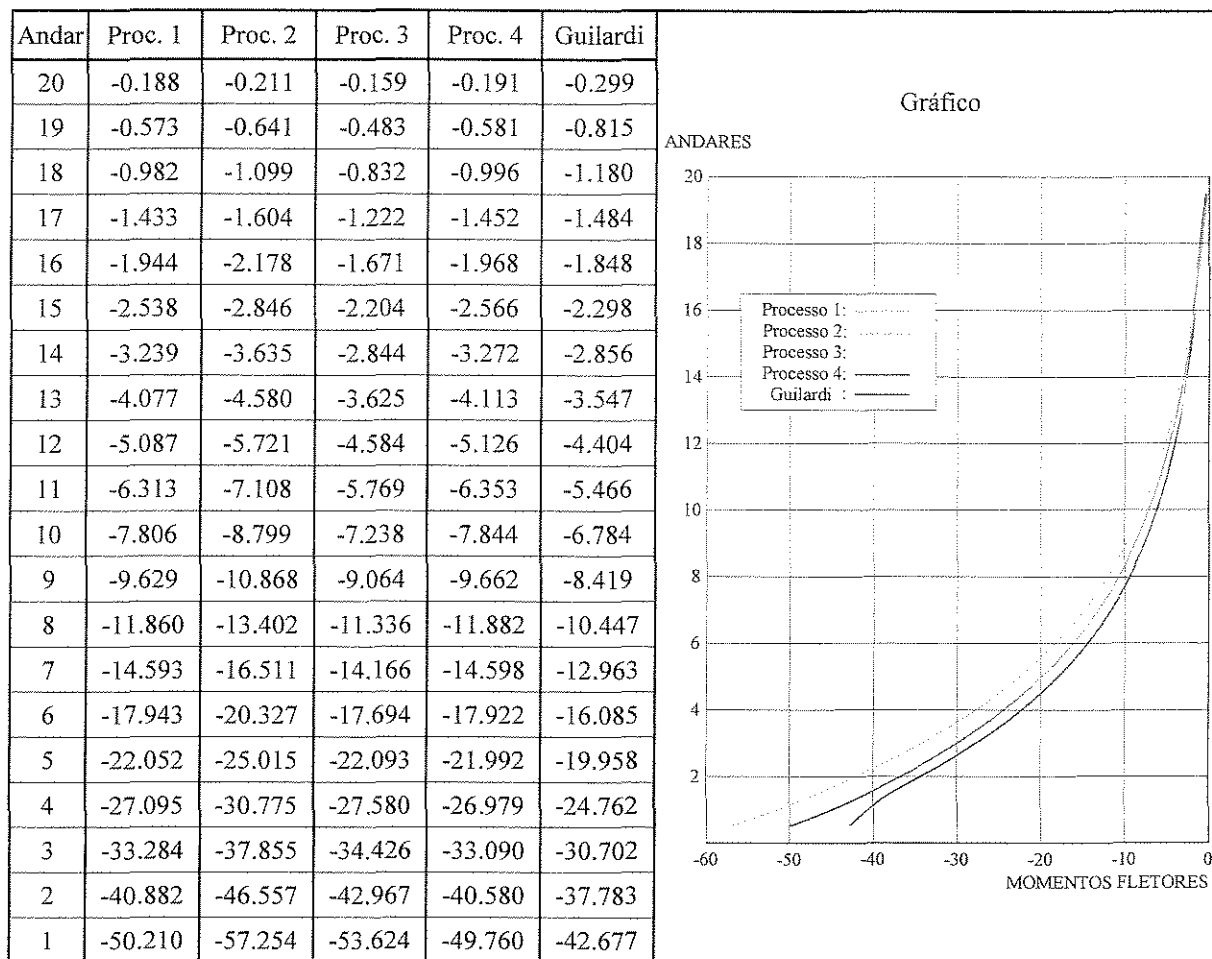


Quadro 5.19 - Forças cortantes nas seções a meia altura da parede EF em libras x 10⁻¹.

*Os valores obtidos por este método, nos níveis próximos ao topo e à base, não são representativos.

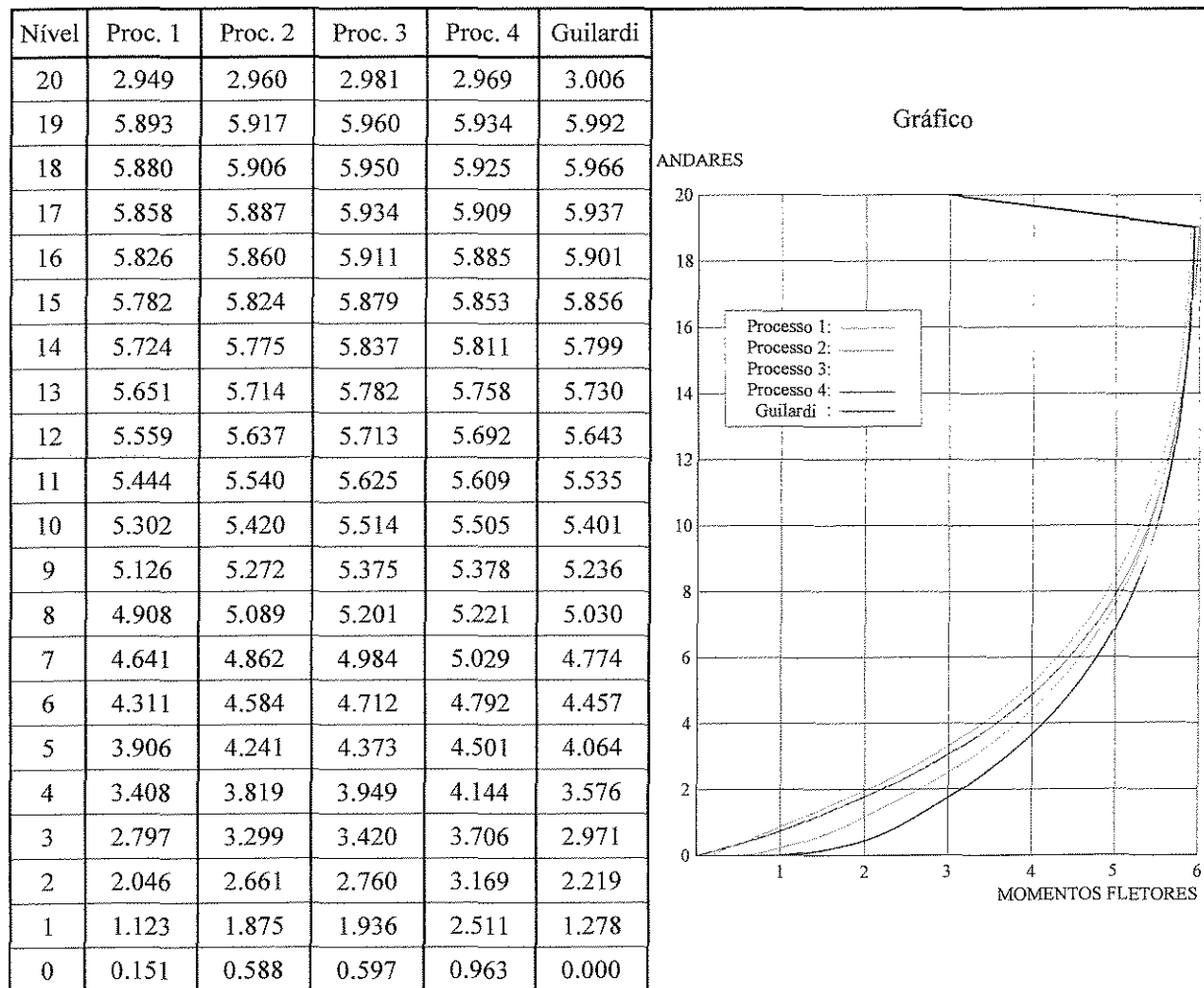


Quadro 5.20 - Momentos fletores nas seções a meia altura da parede AE em lb x pol.

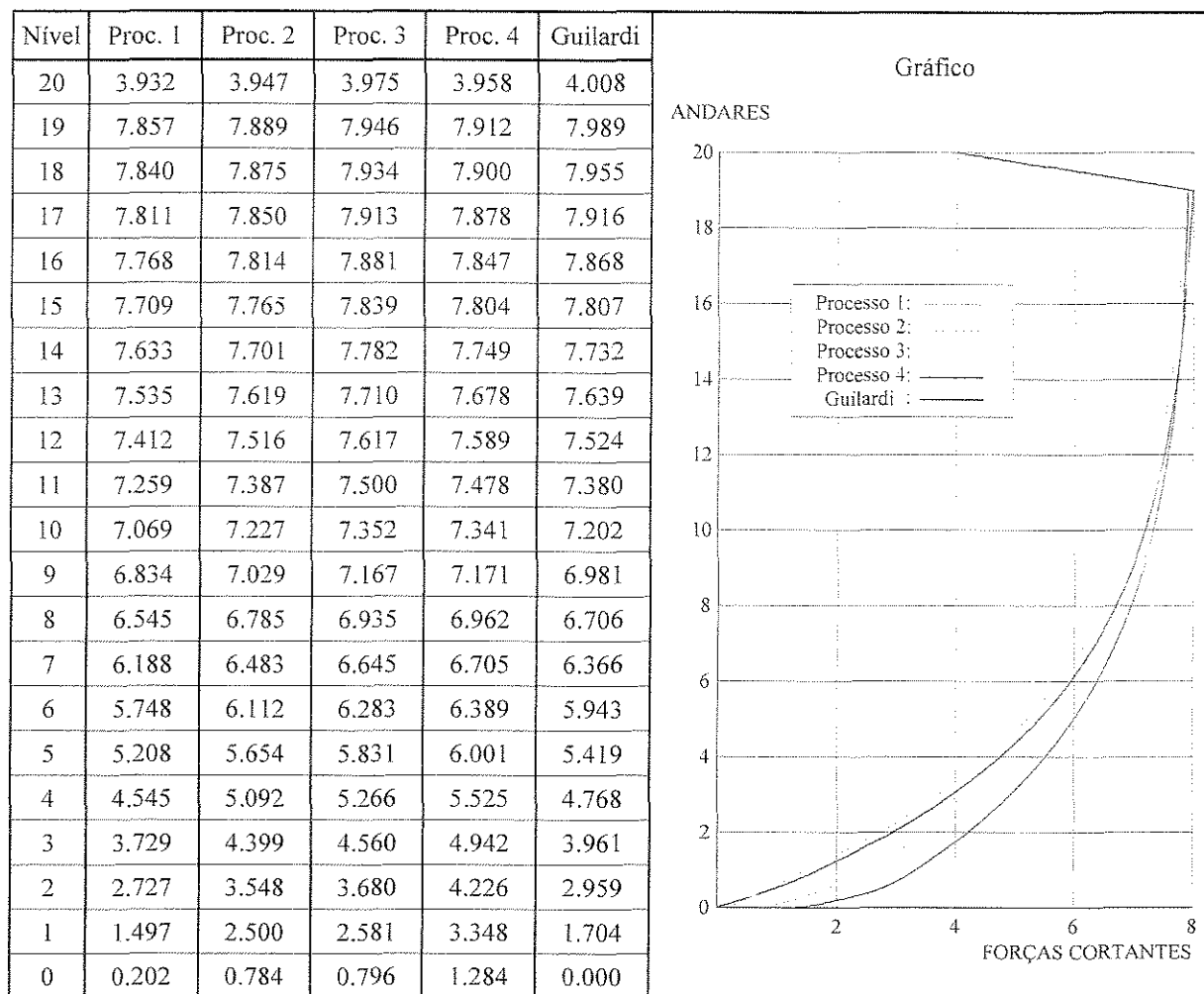


Quadro 5.21 - Momentos fletores nas seções a meia altura da parede EF em lb x pol.

Os comentários feitos nos exemplos anteriores valem também para este exemplo, no que diz respeito ao processo 2, que não representa a influência dos lintéis de forma adequada.



Quadro 5.22 - Momentos fletores nos lintéis em lb x pol.



Quadro 5.23 – Forças cortantes nos lintéis em libras.

CAPÍTULO 6

Conclusões:

Quatro processos contínuos para análise de núcleos fechados por lintéis foram desenvolvidos neste trabalho.

O processo 1, baseado na teoria usual da flexo-torção desenvolvida por VLASOV³⁰, negligencia a deformação por cisalhamento. O processo 2 considera de uma maneira simples a deformação por força cortante. Os processos 3 e 4 são adaptações de análise de seções fechadas, sendo o processo 4 baseado na teoria iniciada por UMANSKY²⁹ e posteriormente por BENSCOTER³.

O processo 1, por superestimar a rigidez do núcleo, não é apropriado para análise de seções fechadas submetidas a esforços de torção, pois neste caso o fluxo de cisalhamento ao redor da seção é um efeito importante.

O processo 2, por introduzir a deformação por cortante a partir do processo 1, calcula os deslocamentos longitudinais de uma maneira simples, desprezando a influência dos lintéis. Como no processo 1, o empenamento é definido como o produto da derivada primeira da rotação pela área setorial da seção suposta aberta, conduzindo a resultados em geral superiores aos esperados.

Os resultados obtidos com os processos 3 e 4 praticamente coincidiram com os obtidos por processos discretos consagrados, inclusive usando a técnica dos elementos finitos.

Ao comparar os resultados dos quatro processos com resultados experimentais, observa-se que apenas o processo 4 não superestima a rigidez do núcleo na região inferior deste.

Quando o núcleo está fechado por lintéis pouco rígidos, os resultados obtidos pelos

quatro processos pouco divergem. As diferenças nos resultados vão se acentuando conforme a rigidez dos lintéis vai aumentando. Na prática deve-se usar lintéis rígidos para melhor aproveitar o núcleo como elemento de contraventamento do edifício.

Como de maneira geral o processo 4 mostrou-se superior ao processo 3, dentre os processos contínuos de análise ele é o recomendado, uma vez que o esforço adicional por ele requerido na programação é recompensado pela confiabilidade dos resultados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BARBOSA, J. A. – Edifícios com paredes de seção aberta contraventados por lintéis, sob carga lateral – Tese de mestrado – EESC – USP, 1978.
2. BECK, H. – Contribution to the analysis of coupled shear walls – Journal of American Concrete Institute, Vol. 59, No. 8, 1962, pp 1055-1069.
3. BENSCOTER, S. V. – A theory of torsion bending of multicell beams – Journal of Applied Mechanics, mar, 1954, pp 25-34
4. CHEUNG, Y. K. and SWADDIWUPONG, S. – Analysis of frame shear wall structures using finite strip elements – Proc. Inst. Civ. Engrs., part 2, 1978, sept., pp 517-535.
5. COSTA, J. L. – Núcleos estruturais sobre fundações flexíveis – Tese de mestrado – EESC – USP, 1984.
6. COWPER, G. R. – The shear coefficient in Timoshenko's beam theory – Journal of Applied Mechanics, june, 1966, pp 335-339.
7. GUILLARDI, S. L. M. – Sobre os problemas inerentes aos processos discretos na análise de núcleos estruturais – Dissertação de Mestrado em Engenharia – Departamento de Estruturas, Faculdade de Engenharia Civil, UNICAMP - 1999.
8. HEIDEBRECHT, A. C. and SWIFT, R. D. – Analysis of asymmetrical coupled shear walls – Journal of the Structural Division, ASCE, 1971, may, pp 1407-1422.
9. HO, D. and LIU, C. H. – Analysis of shear wall and shear-core assembly subjected to lateral and torsional loading – Proc. Inst. Civ. Engrs., part 2, 1985, mar., pp 119-133.

10. KHAN, M. A. H. and STAFFORD SMITH, B. – Restraining action of bracing in thin-walled open section beams – Proc. Inst. Civ. Engrs., part 2, 1975, mar., pp 67-78.

11. KWAN, A. K. H. – Analysis of coupled wall / frame structures by frame method with shear deformation allowed – Proc. Inst. Civ. Engrs., part 2, 1991, june, pp 273-297.

12. MacLEOD, I. A. – New rectangular finite element for shear wall analysis – Journal of the Structural Division, ASCE, 1969, march, pp 399-409.

13. MacLEOD, I. A. – Analysis of shear wall buildings by the frame method – Proc. Inst. Civ. Engrs., part 2, 1973, sept., Vol. 55, pp 593-603.

14. MacLEOD, I. A. – General frame element for shear wall analysis – Proc. Inst. Civ. Engrs., part 2, 1976, dec., Vol. 61, pp 785-790.

15. MacLEOD, I. A. – Structural analysis of wall systems – Structural Engineer, 1977, nov., Vol. 55, No. 11, pp 487-495.

16. MacLEOD, I. A. and HOSNY, H. M. – Frame analysis of shear wall cores – Journal of the Structural Division, ASCE, 1977, oct., Vol. 103, No. ST10, pp 2037-2047.

17. MANCINI, E. – Análise contínua de estruturas de edifícios elevados sujeitos à ação do vento – Tese de doutoramento – Publicação nº. 166, EESC – USP, 1973.

18. MICHAEL, D. – Torsional coupling of core walls in tall buildings – Structural Engineer, 1969, Vol. 47, pp 67-71.

19. MORI, D. D. – Flexo-torção: barras com seção transversal aberta e paredes delgadas – Publicação nº. 024/93, EESC – USP, 1998.

20. ROSMAN, R. – Torsion of perforated concrete shafts cores – Journal of the Structural Division, ASCE, 1969, may, Vol. 95, No. ST5, pp 991-1010.

21. RUTENBERG, A. V., SHTARKMAN, M. and EISENBERGER, M. – Torsional analysis methods for perforated cores – Journal of the Structural Division, ASCE, 1986, june, Vol. 112, No. 6, pp 1207-1227.
22. RUTENBERG, A. V., TSO, W. K. – Torsional analysis of perforated core structures – Journal of the Structural Division, ASCE, 1975, mar., Vol. 101, No. ST3, pp 539-550.
23. SERRA, J. L. F. A. – Contribuição ao estudo de núcleos resistentes de concreto armado – Tese de doutoramento – EESC – USP, 1994.
24. STAFFORD SMITH, B. and ABATE, A. – Analysis of non-planar shear wall assemblies by analogous frame – Proc. Inst. Civ. Engrs., part 2, 1981, june, Vol. 71, pp 395-406.
25. STAFFORD SMITH, B. and GIRGIS, A. – Simple analogous frames for shear wall analysis – Journal of the Structural Division, ASCE, 1984, nov., Vol. 110, No. 11, pp 2655-2666.
26. TARANATH, B. S. – Analysis of interconnected open section shear wall structures – Journal of the Structural Division, ASCE, 1975, nov., Vol. 101, No. ST11, pp 2367-2384.
27. TIMOSHENKO, S. P. and GOODIER, J. N. – Theory of elasticity – McGraw-Hill – 3rd ed.
28. TSO, W. K. and BISWAS, J. K. – General analysis of non-planar coupled shear walls – Journal of the Structural Division, ASCE, 1973, mar., Vol. 99, No. ST3, pp 365-380.
29. UMANSKY, A. A. Torsion and bending in thin-walled flight structures – Oborongiz, 1931 – Moscow.
30. VLASOV, V. Z. – Thin-walled elastic beams – Jerusalem, 1961 – Israel Program for Scientific Translations.

31. YAGUI, T. – Critical loading of tall core-supported structures – Computers and Structures, 1990, Vol. 36, No. 2, pp 223-235.

APÊNDICE I

Torção não uniforme: Resumo sobre barras de seção aberta e paredes delgadas

I.1 Introdução:

O estudo da torção não uniforme em barras de seção transversal aberta e delgada realizado por VLASOV³⁰, é utilizado no cálculo de núcleos de edifícios elevados. Neste apêndice é apresentado um breve resumo deste estudo, com o objetivo de rever alguns conceitos utilizados ao longo deste trabalho.

Na *figura 1.1* pode ser observada uma barra de seção aberta com paredes delgadas, suas dimensões características e o sistema de eixos adotado como referência.

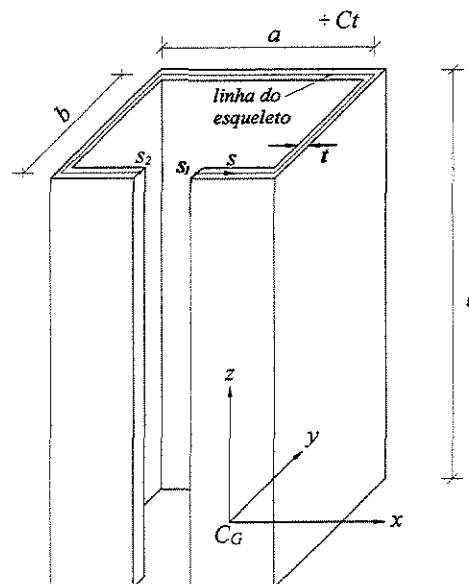


Figura 1.1 - Barra de seção delgada aberta.

A barra tem comprimento ℓ , e espessura t . A seção transversal, constituída por uma composição de paredes, é definida pela “linha do esqueleto”, que divide a espessura das paredes ao meio. Em geral, uma barra é considerada de seção delgada quando suas dimensões satisfazem a seguinte ordem de grandeza:

$$\frac{t}{d} \leq 0.1 \quad \text{e} \quad \frac{d}{\ell} \leq 0.1 \quad (\text{I.1})$$

onde d é a dimensão característica da seção transversal.

O sistema de eixos tem origem no centro de gravidade da seção. Os eixos x e y são os eixos principais de inércia, e z é o eixo longitudinal. A ordenada s corre ao longo da linha do esqueleto, no sentido anti-horário para um observador olhando z negativo, a partir de uma origem O_s a ser convenientemente escolhida. Os pontos s_1 e s_2 são respectivamente o início e o fim da seção aberta.

I.2 Hipóteses básicas:

- Considera-se a seção transversal constante ao longo de z , e rígida no plano xy .
- A superfície média da barra, definida pela linha do esqueleto, não sofre distorções, isto é, a seção é indeformável em seu plano.
- São admitidas translações e rotações da seção no próprio plano e deslocamentos relativos apenas na direção longitudinal, que caracterizam o empenamento.

I.3 Centro de torção:

- **Definição:**

Quando uma barra está sob a ação de um carregamento transversal numa posição arbitrária, esta será submetida à flexão e à torção.

Define-se como centro de torção o ponto do plano da seção transversal pelo qual deve passar a linha de ação da resultante das cargas transversais, de tal forma que não ocorra torção, mas apenas flexão da barra.

- **Condições para determinação:**

Para uma seção delgada será válida a suposição de que as tensões de cisalhamento (τ) provocadas por uma força cortante (Q) estão uniformemente distribuídas sobre a espessura, e têm a direção tangente ao esqueleto.

Assim sendo:

$$\tau = \frac{Q M_s}{t I} \quad (\text{I.2})$$

onde M_s é o momento estático e I é o momento de inércia relativo ao eixo apropriado.

Para um carregamento cortante no plano yz :

$$Q = Q_y \quad (\text{I.3})$$

$$I = I_x \quad (\text{I.4})$$

$$M_s = \int_S y dS \quad (\text{I.5})$$

A força de cisalhamento em um elemento de comprimento ds é:

$$\tau dS = \tau t ds \quad (I.6)$$

Pela definição, a posição do centro de torção é tal que a resultante dos momentos causados pela força de cisalhamento (τdS) em relação ao centro de torção deve ser nula. Esta condição pode ser expressa da seguinte forma:

$$\int_S \tau dS n = 0 \quad (I.7)$$

onde n é a distância do centro de torção à tangente ao esqueleto, conforme *figura I.2*.

Substituindo τ como função de Q_y :

$$\int_S \frac{Q_y M_s}{t I_x} dS n = 0 \quad (I.8)$$

$$\frac{Q_y}{I_x} \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{t} \left[\int_{s_1}^s y t ds \right] n t ds = 0 \quad (I.9)$$

onde s_1 é a ordenada s na extremidade inicial da seção e s_2 corresponde a extremidade final.

Como $\frac{Q_y}{I_x} \neq 0$, é possível afirmar:

$$\int_{s_1}^{s_2} \left[\int_{s_1}^s y t ds \right] n ds = 0 \quad (I.10)$$

Integrando por partes, e lembrando que o momento estático é nulo nos pontos extremos da seção, obtém-se:

$$\int_{s_1}^{s_2} \left[\int_{s_1}^s n ds \right] y t ds = 0 \quad (I.11)$$

VLASOV³⁰ define uma nova variável, denominada área setorial (ω):

$$\omega = \int_{s_1}^s n \, ds \quad (\text{I.12})$$

Assim a condição para se determinar o centro de torção será:

$$\int_S \omega \, y \, dS = 0 \quad (\text{I.13})$$

Analogamente, para cargas no plano xz :

$$\int_S \omega \, x \, dS = 0 \quad (\text{I.14})$$

Observa-se na *figura I.2* que a área setorial representa o dobro da área do setor determinado pelo elemento ds e o polo (centro de torção).

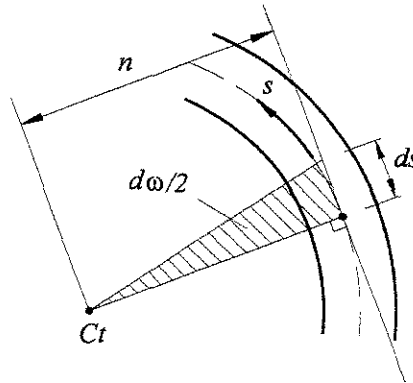


Figura I.2 – Centro de torção e área setorial.

Como a posição da origem da ordenada s não influi no cálculo do centro de torção, ela será determinada a partir da condição de que o momento estático setorial seja nulo:

$$\int_S \omega \, dS = 0 \quad (\text{I.15})$$

A área setorial com polo no centro de torção, equivalente a um momento estático setorial nulo é denominada **área setorial principal**.

- **Determinação das coordenadas do centro de torção:**

As condições para determinação do centro de torção conforme equações (I.13) e (I.14) não permitem a determinação das coordenadas do centro de torção. Portanto, será apresentada em seguida uma interpretação geométrica da área setorial, visando obter expressões para as coordenadas deste ponto.

A *figura I.3* mostra um trecho do esqueleto com origem $O_s (x_0, y_0)$ e um ponto genérico $Q (x, y)$. Pelos pontos $Ct (x_t, y_t)$ – centro de cisalhamento – O_s e Q , são traçadas retas paralelas aos eixos principais de inércia ox e oy . Sendo Δ a área do triângulo $CtMO_s$, e também do triângulo $CtNO_s$, tem-se:

$$A + B + 2\Delta = 2\left(\frac{\omega}{2} + B + \Delta\right) \quad (I.16)$$

A e B são as áreas hachuradas e ω é a área setorial com polo em Ct .

$$\text{Ou, } \omega = A - B \quad (I.17)$$

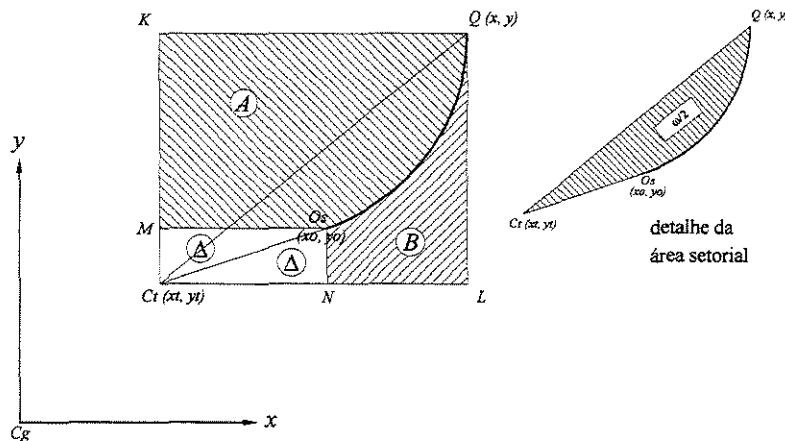


Figura I.3 – Interpretação geométrica da área setorial.

O sinal da função ω é positivo quando o raio vetor traçado do polo Ct , partindo da origem O_s em direção ao ponto genérico, girar no sentido anti-horário.

Adotando um ponto $P (x_p, y_p)$, arbitrariamente escolhido como polo provisório para a área setorial ω_p conforme *figura I.4*, e considerando a equação (I.17), pode-se escrever:

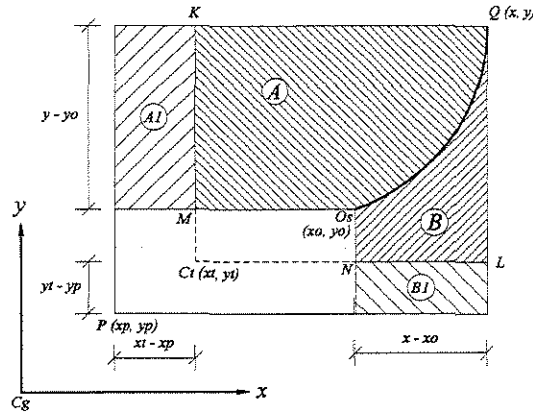


Figura I.4 – Interpretação geométrica da área setorial utilizando um polo provisório.

$$\omega_p = A + A_1 - (B + B_1) \quad (I.18)$$

ou,

$$\omega_p = A + (y - y_0) (x_t - x_p) - B - (x - x_0) (y_t - y_p) \quad (I.19)$$

Aplicando (I.17), chega-se a:

$$\omega = \omega_p + (x - x_0) (y_t - y_p) - (y - y_0) (x_t - x_p) \quad (I.20)$$

Os eixos x e y são eixos principais de inércia, portanto estão válidas as seguintes expressões:

$$\int_S x^2 dS = I_y \quad \int_S y^2 dS = I_x \quad (I.21)$$

$$\int_S x dS = \int_S y dS = 0 \quad (I.22)$$

$$\int_S x y dS = 0 \quad (I.23)$$

Aplicando as condições (I.13) e (I.14) na equação (I.20) e usando as expressões acima,

obtem-se as fórmulas para cálculo das coordenadas do centro de torção:

$$\begin{aligned} y_t &= y_p - \frac{1}{I_y} \int_S \omega_p x dS \\ x_t &= x_p + \frac{1}{I_x} \int_S \omega_p y dS \end{aligned} \quad (I.24)$$

I.4 Torção uniforme ou Torção de Saint-Venant:

- **Introdução:**

A torção uniforme ocorre quando uma barra tem a sua seção transversal e o momento torçor solicitante, constantes ao longo do eixo longitudinal. Além disto, os deslocamentos longitudinais não podem estar impedidos. A seguir serão apresentados alguns conceitos utilizados no estudo de barras de seção aberta e parede delgada.

A rotação elementar $d\phi$ é definida como:

$$d\phi = \frac{M_t}{G J_t} dz \quad \text{ou,} \quad \phi' = \frac{M_t}{G J_t} \quad (I.25)$$

onde M_t é o momento torçor solicitante, G é o módulo de elasticidade transversal, J_t é o momento de inércia à torção, sendo que para seções delgadas:

$$J_t = \frac{I}{3} \int_S t^3 ds \quad (I.26)$$

onde t é a espessura da parede da barra.

- **Deslocamentos:**

$u(z,s)$ é o deslocamento na direção do eixo longitudinal, ou seja, o empenamento.

$v(z,s)$ é o deslocamento na direção da ordenada s , ou seja, o deslocamento tangencial.

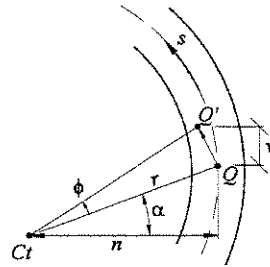


Figura I.5 – Deslocamento de um ponto devido à rotação.

Como pode ser observado na *figura I.5*, devido à rotação ϕ , o ponto Q na linha do esqueleto se deslocou para a posição Q' . Considerando a hipótese de pequenos deslocamentos:

$$\overline{QQ'} = r \phi \quad (I.27)$$

e,
$$v = n \phi \quad (I.28)$$

Pela teoria da elasticidade é possível determinar a relação entre os deslocamentos u e v , e a distorção γ que sofre um elemento $dzds$ do esqueleto.

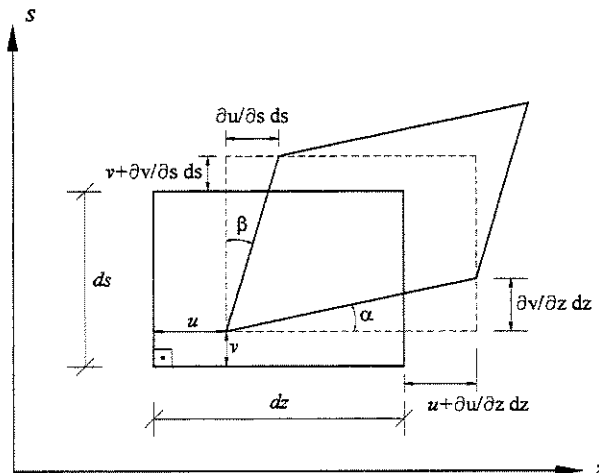


Figura I.6 – Distorção do elemento $dzds$.

Com a *figura I.6* observa-se que a deformação transversal γ é a variação do ângulo reto do elemento $dzds$. Portanto determina-se:

$$\gamma = \alpha + \beta = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial s} \quad (\text{I.29})$$

As tensões tangenciais τ são linearmente distribuídas ao longo da espessura da parede: atingem seu valor máximo na borda, e são nulas na linha do esqueleto. Isto pode ser observado na *figura I.7*.

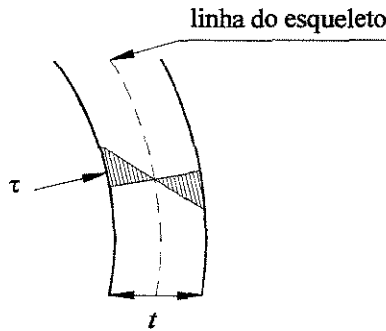


Figura I.7 – Distribuição de τ .

Como:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad (\text{I.30})$$

Conclui-se que os pontos da linha do esqueleto não sofrem deformação tangencial.

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial s} = 0 \quad (\text{I.31})$$

Sabendo que:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = n \phi' \quad (\text{I.32})$$

Determina-se:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -n \phi' \quad (\text{I.33})$$

Lembrando que a torção uniforme se caracteriza pelo fato de que todas as seções transversais têm o mesmo comportamento, pode-se afirmar que o deslocamento longitudinal não depende da coordenada z . Portanto:

$$\frac{du}{ds} = -n \phi' \therefore u = -\phi' \int_0^s n ds \quad (\text{I.34})$$

Usando a definição de área setorial, determina-se:

$$u(z, s) = -\omega(s) \phi'(z) \quad (\text{I.35})$$

I.5 Torção não uniforme ou Flexo-torção:

- **Introdução:**

Ocorre torção não uniforme quando há variação da seção transversal ou do momento torçor solicitante, ou quando os deslocamentos longitudinais estão parcial ou totalmente impedidos.

Neste estudo são consideradas apenas as barras com seção transversal constante.

- **Tensão Normal:**

Na torção não uniforme, o empenamento varia ao longo do eixo z . Como consequência, surgem as tensões normais de flexo-torção.

A deformação axial (ε_z) pode ser definida como:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z} = -\omega \phi'' \quad (I.36)$$

Pela Lei de Hooke, determina-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_s) \\ \varepsilon_s &= \frac{1}{E}(\sigma_s - \nu\sigma_z) \end{aligned} \quad (I.37)$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal e ν é o coeficiente de Poisson.

A figura I.8 apresenta as tensões normais atuantes no elemento $dzds$.

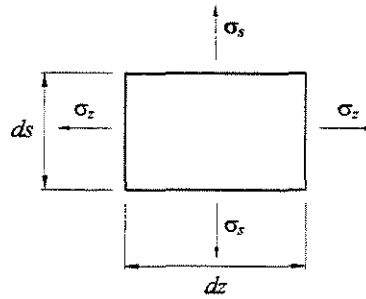


Figura I.8 – Tensões normais no elemento $dzds$.

Como a seção transversal é indeformável em seu plano (xy):

$$\varepsilon_s = 0 \therefore \sigma_s = \nu\sigma_z \quad (I.38)$$

Portanto:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu^2\sigma_z) = \frac{1-\nu^2}{E}\sigma_z \quad (I.39)$$

Assim define-se o módulo de elasticidade longitudinal reduzido, E^* :

$$\sigma_z = E^* \varepsilon_z$$

$$E^* = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (I.40)$$

A tensão axial é definida como:

$$\sigma_z = E^* \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\sigma_z = -E^* \omega \phi'' \quad (I.41)$$

- **Tensão tangencial de flexo-torção:**

Quando as tensões normais σ_z variam ao longo da barra, surgem tensões de cisalhamento τ_{ft} garantindo o equilíbrio na direção longitudinal.

Pode-se determinar a seguinte equação de equilíbrio para um elemento $dzds$ na direção longitudinal, conforme *figura I.9*:

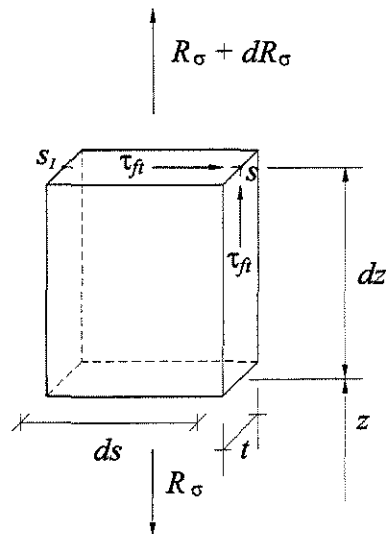


Figura I.9 – Tensões tangenciais e equilíbrio longitudinal.

$$\begin{aligned}
-\tau_{ft} t dz + R_{\sigma} &= R_{\sigma} + dR_{\sigma} \\
\tau_{ft} t dz &= -dR_{\sigma} \\
\tau_{ft} &= -\frac{1}{t} \frac{dR_{\sigma}}{dz}
\end{aligned} \tag{I.42}$$

onde R_{σ} é a força resultante das tensões normais (σ_z), atuantes na área $ds \times t$.

Assim sendo, pode-se definir R_{σ} como:

$$R_{\sigma} = \int_{\omega_1}^{\omega} \sigma_z t ds = -E^* \phi'' \int_{\omega_1}^{\omega} \omega t ds \tag{I.43}$$

E ainda:

$$\frac{dR_{\sigma}}{dz} = -E^* \phi''' \int_{\omega_1}^{\omega} \omega t ds \tag{I.44}$$

Substituindo este resultado na equação (I.42), τ_{ft} pode ser expresso como:

$$\tau_{ft} = \frac{E^* \phi'''}{t} \int_{\omega_1}^{\omega} \omega t ds \tag{I.45}$$

Define-se como momento estático setorial, S_{ω} :

$$S_{\omega} = \int_{\omega_1}^{\omega} \omega t ds \tag{I.46}$$

Portanto, pode-se expressar τ_{ft} em função de S_{ω} :

$$\tau_{ft} = \frac{E^* \phi'''}{t} S_{\omega} \tag{I.47}$$

- **Momento torçor de flexo-torção:**

É definido como o momento causado pelas forças resultantes da tensão tangencial de flexo-torção:

$$M_{ft} = \int_S \tau_{ft} dS n \quad (I.48)$$

Substituindo a equação (I.45) e resolvendo a integral por partes, determina-se:

$$M_{ft} = -E * \phi''' \int_S \omega^2 dS \quad (I.49)$$

Define-se como momento de inércia setorial, J_ω :

$$J_\omega = \int_S \omega^2 dS \quad (I.50)$$

Portanto:

$$M_{ft} = -E * \phi''' J_\omega \quad (I.51)$$

- **Equação diferencial da flexo-torção:**

Uma barra de seção aberta e paredes delgadas quando solicitada à torção, será equilibrada por um momento torçor resistente M_t , composto por duas parcelas: uma proveniente das tensões de cisalhamento da torção uniforme, denominada momento livre M_l , e a outra proveniente das tensões tangenciais de flexo-torção M_{ft} , denominada momento de flexo-torção.

Portanto:

$$M_t = M_l + M_{ft} \quad (I.52)$$

Lembrando que na torção uniforme, o momento torçor resistente é composto apenas por M_l , pode-se obter da equação (I.25):

$$M_l = G J_t \phi' \quad (I.53)$$

Com a equação (I.51) que define M_{ft} , determina-se o momento torçor como:

$$M_t = G J_t \phi' - E^* J_{\omega} \phi''' \quad (I.54)$$

O problema de flexo-torção está solucionado com a determinação da rotação ϕ através da equação anterior.

• **Solução da equação diferencial da flexo-torção:**

Nos problemas analisados neste trabalho, são admitidos os seguintes esforços solicitantes:

- Momento torçor concentrado na extremidade final da barra, T .
- Momento torçor distribuído ao longo do comprimento da barra, m .

Por este motivo, a equação diferencial da flexo-torção será resolvida para o caso:

$$M_t = T + m(H - z) \quad (I.55)$$

onde H é o comprimento total da barra.

Portanto:

$$\begin{aligned} G J_t \phi' - E^* J_{\omega} \phi''' &= T + m(H - z) \\ \phi''' - \frac{G J_t}{E^* J_{\omega}} \phi' &= \frac{-T - m(H - z)}{E^* J_{\omega}} \end{aligned} \quad (I.56)$$

Adota-se:

$$c^2 = \frac{G J_t}{E^* J_{\omega}} \quad (I.57)$$

Resultando em:

$$\phi''' - c^2 \phi' = \frac{m}{E^* J_\omega} z - \frac{T + m H}{E^* J_\omega} \quad (\text{I.58})$$

- Determinando a solução da equação homogênea associada, ϕ_c :

$$\phi''' - c^2 \phi' = 0 \quad (\text{I.59})$$

A equação característica é:

$$r^3 - c^2 r = 0 \quad (\text{I.60})$$

Suas raízes são: 0, c , $-c$.

Portanto:

$$\phi_c(z) = c_1 + c_2 e^{cz} + c_3 e^{-cz} \quad (\text{I.61})$$

- Determinando a solução particular, ϕ_p :

$$\begin{aligned} \phi''' - c^2 \phi' &= \frac{m}{E^* J_\omega} z - \frac{T + m H}{E^* J_\omega} \\ \frac{\phi'''}{c^2} - \phi' &= \frac{m}{G J_t} z - \frac{T + m H}{G J_t} \end{aligned} \quad (\text{I.62})$$

$$\phi_p(z) = \frac{-m}{2 G J_t} z^2 + \frac{T + m H}{G J_t} z \quad (\text{I.63})$$

- Determinando a solução geral, ϕ :

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \phi_c(z) + \phi_p(z) \\ \phi(z) &= c_1 + c_2 e^{cz} + c_3 e^{-cz} - \frac{m}{2 G J_t} z^2 + \frac{T + m H}{G J_t} z \end{aligned} \quad (\text{I.64})$$

A partir da equação anterior, determina-se:

$$\phi'(z) = c c_2 e^{cz} - c c_3 e^{-cz} - \frac{m}{G J_t} z + \frac{T + m H}{G J_t} \quad (1.65)$$

$$\phi''(z) = c^2 c_2 e^{cz} + c^2 c_3 e^{-cz} - \frac{m}{G J_t} \quad (1.66)$$

- Determinando as constantes de integração:

Considera-se uma barra engastada numa extremidade ($z=0$) e livre na outra ($z=H$). Portanto, serão impostas as seguintes condições de contorno à equação diferencial:

Extremidade engastada ($z=0$):

$$\text{Rotação nula: } \phi(0) = 0$$

$$\text{Empenamento nulo: } u(0) = 0 \quad \therefore \quad \phi'(0) = 0$$

Extremidade livre ($z=H$):

$$\text{Tensão normal nula: } \sigma_z(H) = 0 \quad \therefore \quad \phi''(H) = 0$$

Com estas condições de contorno, determina-se:

$$\begin{aligned} c_1 &= -(c_2 + c_3) \\ c_2 &= c_3 - \frac{T + mH}{c G J_t} \\ c_3 &= \frac{m(1 + c H e^{cH}) + c T e^{cH}}{c^2 G J_t (e^{cH} + e^{-cH})} \end{aligned} \quad (1.67)$$

APÊNDICE II

Modelo discreto sugerido por GUILARDI⁰⁷

II.1 Introdução:

Os modelos discretos tradicionais, MacLEOD¹⁶, YAGUI³¹, SERRA²³ são afetados por um momento inexistente fisicamente na parede real quando estas estão sujeitas a tensões de cisalhamento puro. Este momento recebe o nome de momento parasita.

Para compreensão deste fato, suponha um segmento de parede submetida a um estado de cisalhamento puro que produzirá tensões de cisalhamento distribuídas uniformemente ao longo de suas faces. Na discretização deste elemento de parede, a face contínua que o une a outro elemento será representada por dois nós, e as tensões de cisalhamento por duas forças verticais concentradas nestes nós, as quais produzirão um momento na coluna central, que não deveria existir, pois a peça está sujeita apenas ao estado de cisalhamento puro, conforme ilustra a *figura II.1*. Este momento provocará uma deformação de flexão adicional na coluna, diminuindo a rigidez ao cisalhamento do modelo, que não mais corresponderá à rigidez real da parede.

Deve ficar claro que, embora o exemplo citado esteja sujeito ao cisalhamento puro, o problema aparecerá sempre que houver tensões de cisalhamento, sendo consequência única e exclusivamente da discretização da interface das paredes, cujos infinitos pontos são substituídos por dois nós. O problema será sentido principalmente em paredes e núcleos nos quais os efeitos das forças cortantes sejam substanciais, como é o caso de núcleos parcialmente fechados sujeitos a esforços de torção.

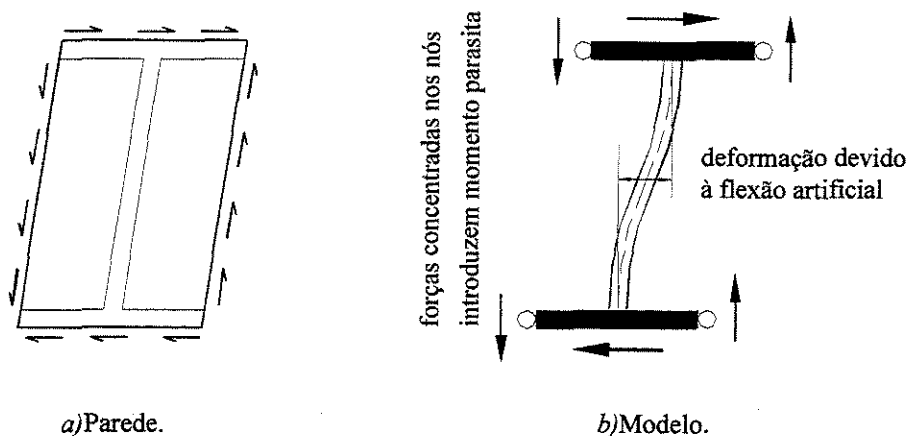


Figura II.1 - Momento parasita no elemento de parede.

Outro problema que afeta a maior parte dos modelos de discretização de paredes é que a rotação adotada para o nó de união entre parede e lintel é igual a rotação da viga rígida do modelo, que é paralela às fibras horizontais da parede. Entretanto na verdade o lintel se une à face vertical da parede que não terá, necessariamente, o mesmo giro da face horizontal uma vez que a parede sofre distorção devido ao efeito do cisalhamento.

A figura II.2 a mostra um lintel conectado ao elemento de parede, e a figura II.2 b ilustra o modelo correspondente, quando sujeitos a um estado de cisalhamento. Uma alternativa para minorar este problema é acrescentar uma barra vertical rígida unindo as vigas rígidas horizontais, forçando a compatibilização da rotação da face vertical do lintel com a rotação das fibras verticais da parede, conforme ilustra a figura II.2 c.

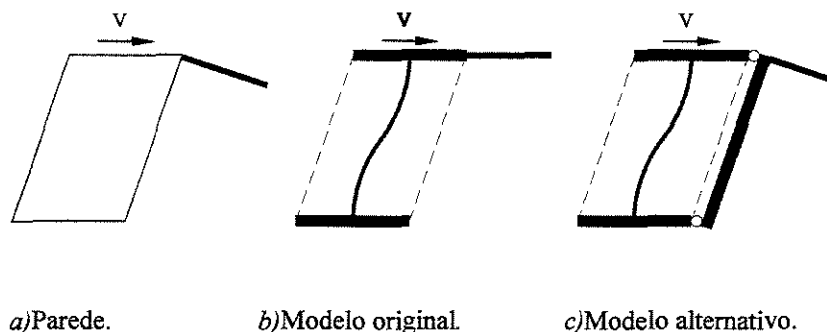


Figura II.2 – Correção do giro da ligação parede-lintel.

Procurando minimizar estes dois problemas, adotou-se para discretização do elemento de parede e lintel os modelos mostrados na *figura II.3 c* e *figura II.3 d*. A adição de duas barras diagonais no modelo tradicional, permite combater o momento parasita através do binário que elas aplicam nas extremidades das vigas rígidas, quando o modelo está submetido a um estado puro de cisalhamento. A adição da barra rígida vertical nos lintéis melhora a compatibilidade de giro na sua ligação com a viga de rigidez infinita, usada em todos os modelos para levar em consideração a largura da parede.

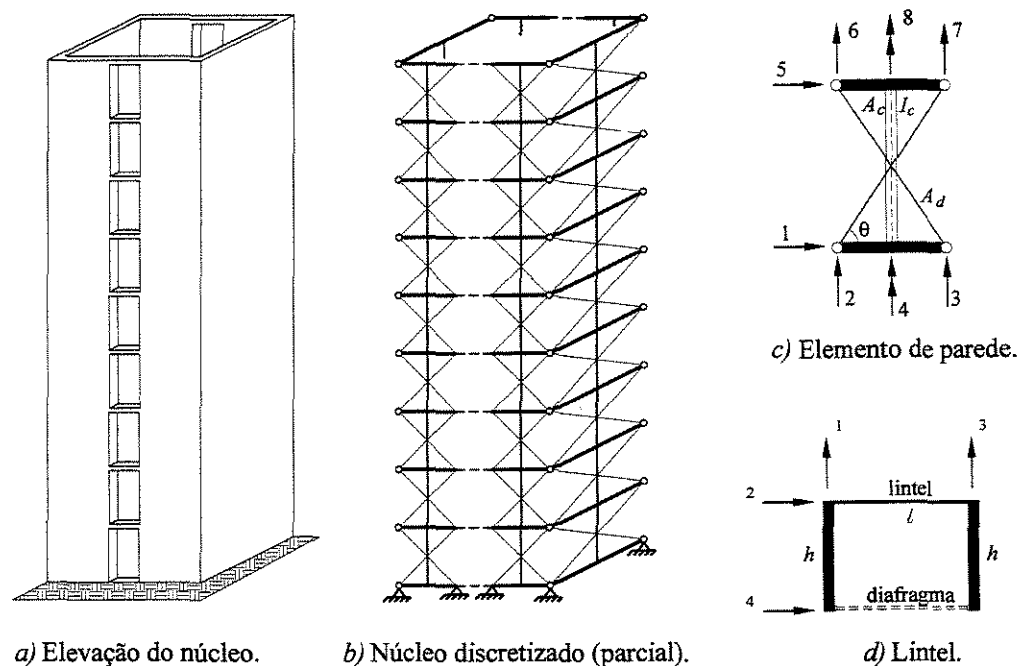


Figura II.3 – Núcleo estrutural e sua discretização.

Com a adição destas barras faz-se necessário determinar as novas características geométricas da coluna central e das barras diagonais. Para isso igualam-se os coeficientes de rigidez à flexão, ao cisalhamento e axial do modelo com os respectivos coeficientes de rigidez da parede que ele representa, submetendo ambos (modelo e parede) a um estado de flexão uniforme, estado puro de cisalhamento e esforços normais, conforme ilustra a *figura II.4*.

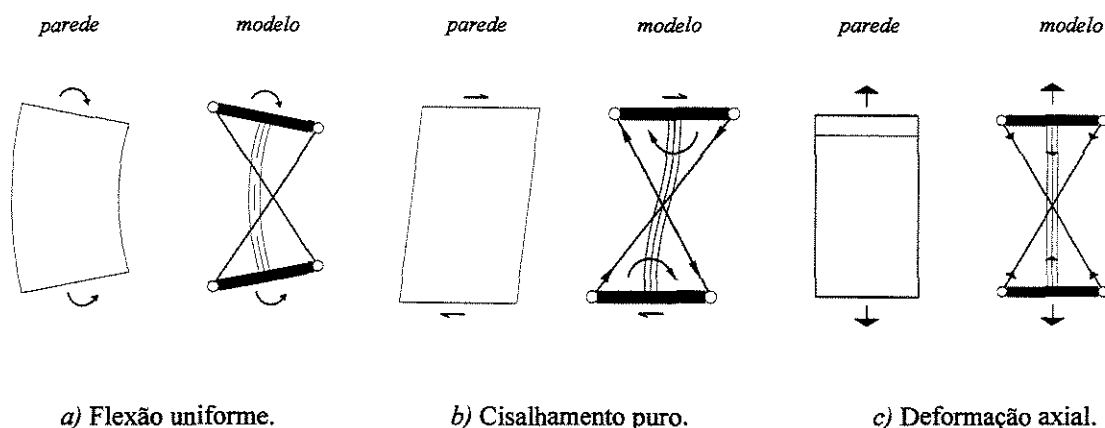


Figura II.4 – Estados de deslocamento.

Os materiais das barras do modelo têm propriedades elásticas idênticas ao material do pilar parede correspondente, ou seja, E e G é o mesmo para todos os elementos envolvidos.

A resistência à flexão é dada apenas pela coluna central pois as barras diagonais não sofrem variação do comprimento. Assim, a coluna central deve ter inércia I_c idêntica a da parede, como ocorre em todos os modelos de discretização tradicionais.

$$I_c = I_p = \frac{tb^3}{12} \quad (\text{II.1})$$

A rigidez ao cisalhamento do modelo é fornecida pelas cortantes produzidas pelos momentos fletores da coluna central somadas com as componentes horizontais das forças normais que aparecem nas diagonais. Igualando-se a resistência ao cisalhamento do modelo a do segmento de parede, temos:

$$\frac{12EI_c}{h^3} + \frac{2EA_d \cos^2 \theta}{\ell} = \frac{btG}{h} \quad (\text{II.2})$$

na qual,
$$I_c = \frac{tb^3}{12}, \quad E = 2(1+\nu)G, \quad \tan \theta = \frac{h}{b} \quad \text{e} \quad \ell = \frac{h}{\sin \theta} \quad (\text{II.3})$$

Calcula-se a área das diagonais:

$$A_d = \frac{bt}{\sin^3 \theta} (B - 0,5) \quad (\text{II.4})$$

onde,

$$B = \frac{h^2}{4b^2(1+\mu)} \quad (\text{II.5})$$

Comparando-se a rigidez axial da parede e do modelo obtém-se a área da coluna:

$$\frac{EA_c}{h} + \frac{2EA_d \sin^2 \theta}{\ell} = \frac{Ebt}{h} \quad (\text{II.6})$$

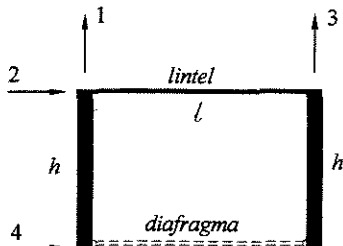
ou seja,

$$A_c = 2bt(1 - B) \quad (\text{II.7})$$

II.2 Matriz de rigidez do modelo com diagonais e do lintel:

Nos quadros a seguir estão resumidas as matrizes de rigidez utilizadas na solução do problema.

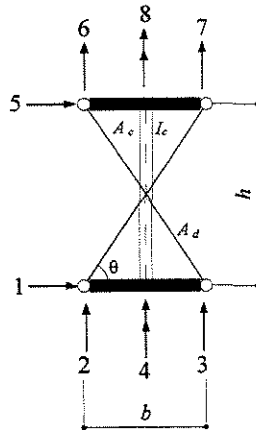
O quadro II.1 apresenta a matriz de rigidez do lintel.

Coordenadas do lintel	Matriz de rigidez
	$[SL] = \begin{bmatrix} S2 & -\frac{2S3}{h} & -S2 & \frac{2S3}{h} \\ \frac{2(S4+S5)}{h^2} & \frac{2S3}{h} & -\frac{2(S4+S5)}{h^2} & -\frac{2S3}{h} \\ S2 & -\frac{2S3}{h} & S2 & \frac{2S3}{h} \\ \frac{2(S4+S5)}{h^2} & -\frac{2S3}{h} & -\frac{2(S4+S5)}{h^2} & \frac{2S3}{h} \end{bmatrix}$
Coeficientes de rigidez	
$S2 = \frac{12 EI'}{\ell^3}$	$S3 = \frac{6 EI'}{\ell^2}$
$S4 = \frac{4 EI'}{\ell}$	$S5 = \frac{2 EI'}{\ell}$
$I' = \frac{I}{1+k}$	$k = \frac{12 c EI}{GA \ell^2}$
	$c = \frac{1,2 + 1,1\mu}{1+\mu}$ (fator de forma)

Quadro II.1 – Matriz de rigidez do lintel.

Os valores dos coeficientes de rigidez do modelo completo podem ser obtidos a partir dos coeficientes do modelo sem as diagonais, desprezando a deformação por cortante da coluna, e somando as contribuições das diagonais adicionadas. Observando-se que a adição das diagonais não afetam os coeficientes das coordenadas 4 e 8 e, em virtude da dupla simetria, a análise dos estados de deslocamentos unitário dados pelas coordenadas 1 e 2 ilustrados na figura do quadro II.2 são suficientes para o cálculo da matriz de rigidez, cujos coeficientes calculados estão indicados no mesmo quadro.

Elemento de parede



Matriz de rigidez simétrica

$$[SE] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & 0 & k_{15} & k_{16} & k_{17} & 0 \\ & k_{22} & k_{23} & 0 & k_{25} & k_{26} & k_{27} & 0 \\ & & k_{33} & 0 & k_{35} & k_{36} & k_{37} & 0 \\ & & & k_{44} & 0 & 0 & 0 & k_{48} \\ & & & & k_{55} & k_{56} & k_{57} & 0 \\ & & & & & k_{66} & k_{67} & 0 \\ & & & & & & k_{77} & 0 \\ & & & & & & & k_{88} \end{bmatrix}$$

Coefficientes de rigidez

$$k_{11} = -k_{15} = k_{55} = + \frac{12 EI_c}{h^3} + \frac{2 EA_d \cos^3 \theta}{b}$$

$$k_{12} = -k_{13} = k_{16} = -k_{17} = -k_{25} = k_{35} = -k_{56} = k_{57} = + \frac{6 EI_c}{h^2 b} + \frac{EA_d \cos^2 \theta \sin \theta}{b}$$

$$k_{22} = k_{33} = k_{66} = k_{77} = + \frac{4 EI_c}{hb^2} + \frac{EA_c}{4h} + \frac{EA_d \cos \theta \sin^2 \theta}{b}$$

$$k_{23} = k_{67} = - \frac{4 EI_c}{hb^2} + \frac{EA_c}{4h}$$

$$k_{26} = k_{37} = + \frac{2 EI_c}{hb^2} - \frac{EA_c}{4h}$$

$$k_{27} = k_{36} = - \frac{2 EI_c}{hb^2} - \frac{EA_c}{4h} - \frac{EA_d \cos \theta \sin^2 \theta}{b}$$

$$k_{44} = -k_{48} = k_{88} = + \frac{GJt}{h}$$

t = espessura da parede

μ = coeficiente de Poisson

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

$$A_d = \frac{bt}{\sin^3 \theta} (B - 0.5)$$

$$B = \frac{h^2}{(4b^2(1 + \mu))}$$

$$I_c = \frac{tb^3}{12}$$

$$A_c = 2bt(1 - B)$$

Quadro II.2 – Matriz de rigidez do modelo.

II.3 Cálculos finais para o processo discreto:

A matriz de rigidez da estrutura é montada somando-se a contribuição dos elementos de parede e dos lintéis, conforme técnica usual da análise matricial. O número de coordenadas globais em cada diafragma é $(np + 3)$, onde np é o número de pontos nodais que definem as extremidades dos painéis e correspondem a deslocamentos verticais. As outras três definem a translação (duas componentes) e a rotação do diafragma, que por ser considerado rígido em seu plano, faz com que os deslocamentos horizontais correspondentes às coordenadas locais 1 e 5 do modelo, assim como as coordenadas 2 e 4 dos lintéis sejam, no nível considerado, dependentes do deslocamento de corpo rígido do diafragma que define este nível.

A solução da equação $[S] \{V\} = \{A\}$, onde $[S]$ é a matriz de rigidez da estrutura e $\{A\}$ o vetor das ações aplicadas, fornece os deslocamentos $\{V\}$ correspondentes às coordenadas globais.

Os esforços e tensões em um elemento de parede serão determinados na seção transversal equidistante de dois diafragmas consecutivos (seção média de um andar), pois dependem também dos esforços nas coordenadas verticais situadas nas extremidades das vigas. Cada esforço vertical é resultante das tensões elementares de cisalhamento que atuam ao longo do seu comprimento de influência, que se estende entre as seções médias dos andares adjacentes.

O momento resultante na seção a meia altura de um segmento de parede é a média dos momentos fletores nas extremidades do elemento. É interessante notar que no cálculo desta média as contribuições das barras diagonais desaparecem. A resultante da força axial é a soma das forças nas coordenadas verticais com as componentes nesta direção das forças normais nas barras diagonais. Como a rigidez axial da parede real é idêntica a do modelo, o esforço normal também pode ser determinado através do produto da rigidez axial da parede pela variação da sua altura. A resultante da força cortante, igual nas duas extremidades é, em cada extremidade a soma da força na coordenada horizontal respectiva com as componentes horizontais das forças nas barras diagonais. No caso de haver lintéis conectados à parede, deve ser considerada também a contribuição da força horizontal correspondente a coordenada 2 do lintel.