

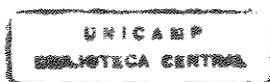
**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL**

**Estudo Comparativo de Formulações para
a Análise Não-Linear Geométrica
de Treliças**

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Eng^a. Sandra Cristina de Agostini Segnini
Orientador: Prof. Dr. Francisco Antonio Menezes

**Campinas
2000**



395610002

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL**

**Estudo Comparativo de Formulações para
a Análise Não-Linear Geométrica
de Treliças**

Eng^a. Sandra Cristina de Agostini Segnini

Orientador: Prof. Dr. Francisco Antonio Menezes

Dissertação de mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, na área de concentração em Estruturas

**Campinas
2000**

Atesto que esta é a versão definitiva da dissertação/tese. 9, 10, 00
Francisco Antonio Menezes
Prof. Dr. FRANCISCO ANTONIO MENEZES
Matrícula: 039420



UNIDADE BC
N.º CHAMADA: T/UNICAMP
Se37e
V. Ex.
TOMBO BC/ 43303
PROC. 278/2000
C D
PREC. R\$ 11,00
DATA 29/12/2000
N.º CPD

✓

CM-00153321-3

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Se37e Segnini, Sandra Cristina de Agostini
Estudo comparativo de formulações para a análise não-linear geométrica de treliças / Sandra Cristina de Agostini Segnini.--Campinas, SP: [s.n.], 2000.

Orientador: Francisco Antonio Menezes.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil.

1. Teoria das estruturas. 2. Análise não-linear. I. Menezes, Francisco Antonio. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil. III. Título.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL**

**Estudo Comparativo de Formulações para
a Análise Não-Linear Geométrica
de Treliças**

Eng^a. Sandra Cristina de Agostini Segnini

Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:

Prof. Dr. Francisco Antonio Menezes
Presidente e Orientador / Universidade Estadual de Campinas

Prof. Dr. Vinícius Fernando Arcaro
Universidade Estadual de Campinas

Prof. Dr. Athail Rangel Pulino Filho
Universidade de Brasília

**Campinas
2000**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL**

**Estudo Comparativo de Formulações para
a Análise Não-Linear Geométrica
de Treliças**

Eng^a Sandra Cristina de Agostini Segnini

Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:



Prof. Dr. Francisco Antonio Menezes
Presidente e Orientador/ Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. Vinícius Fernando Arcaro
Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. Athail Rangel Pulino Filho
Universidade de Brasília

**Campinas
2000**

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SECÃO CIRCULANTE

Dedico aos meus pais Helio e Regina.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Francisco pela atenção e orientação no desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores doutores João Alberto Venegas Requena e Vinícius Arcaro pela atenção e pela valorosa contribuição no desenvolvimento deste trabalho.

Sumário

Lista de Símbolos.....	i
Lista de Figuras.....	iii
Lista de Tabelas.....	v
Resumo.....	vi
1.Introdução.....	1
1.1 Revisão Bibliográfica.....	2
2. Considerações Iniciais.....	8
2.1 Teoria Linear da Elasticidade.....	8
2.2 Não-Linearidade Geométrica.....	10

3. Aplicação do Método dos Elementos Finitos.....	21
3.1 Princípio da Mínima Energia Potencial.....	21
3.2 Método dos Elementos Finitos.....	28
3.2.1 Formulação Genérica.....	28
3.2.2 Formulação do Método para Elemento de Treliça.....	36
4. Formulações Geométricamente Exatas do Elemento de Treliça.....	47
4.1 Primeira Formulação.....	47
4.2 Segunda Formulação.....	55
5. Formulações de Segunda Ordem.....	63
5.1 Primeira Formulação de Segunda Ordem.....	63
5.2 Segunda Formulação de Segunda Ordem.....	71
6. Técnicas para Resolução de Equações Não –Lineares.....	80
6.1 Processo Incremental.....	80
6.2 Método de Newton-Raphson.....	83
6.3 Processos Incremental-Iterativos.....	85
6.4 Critério de Convergência.....	87
7. Análise Não Linear Geométrica de Treliças utilizando Programas.....	90

7.1 Programa TNLG.....	90
7.1.1 Formulação de Elemento de Treliça.....	91
7.2 A Utilização do Programa Ansys.....	97
8. Exemplos de Aplicação.....	100
8.1 Treliça de duas Barras.....	100
8.2 Treliça de uma Barra.....	103
8.3 Treliça Plana de cinco Barras.....	106
8.4 Treliça Plana Tipo Grua.....	108
8.5 Treliça Espacial.....	111
9. Conclusão.....	120
10. Bibliografia.....	122
11. Abstract.....	128

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Lista de Símbolos

r	Vetor Posição de um ponto
A	Área da seção transversal
E	Módulo de elasticidade
\overline{A}	Matriz de incidência
$[K_T]$	Matriz de rigidez tangente no sistema global de coordenadas
$[k_T]$	Matriz de rigidez tangente no sistema local de coordenadas
$[K_g]$	Matriz de rigidez geométrica no sistema global de coordenadas
$[k_g]$	Matriz de rigidez geométrica no sistema local de coordenadas
$[K_e]$	Matriz de rigidez elástica no sistema global de coordenadas
$[k_e]$	Matriz de rigidez elástica no sistema local de coordenadas
l_c	Comprimento da barra na configuração deformada
l_r	Comprimento da barra na configuração indeformada
N	Força normal
$\{P\}$	Vetor de forças aplicadas
$\{F\}$	Vetor de esforços internos
$[T]$	Matriz de rotação
u, v	Componentes dos deslocamentos das extremidades do eixo da barra
$\{p\}$	Vetor dos deslocamentos nodais local

$\{\bar{p}\}$	Vetor dos deslocamentos nodais global
$\{r\}$	Vetor de resíduos
ε_o	Deformação Longitudinal da teoria de primeira ordem
ε_{ii}	Deformação Longitudinal
σ	Tensão
θ	Deslocamento angular
α	Ângulo formado entre a barra na posição indeformada e o sistema de referência
m, n	Vetores auxiliares
c, s	Vetores auxiliares
γ_{ij}	Deformações Transversais
X, Y, Z	Eixo de Coordenadas
x, y, z	Coordenadas de um Ponto na Posição Indeformada
ξ, η, ζ	Coordenadas de um Ponto na Posição Deformada
Q	Calor
Ω	Energia Potencial
U	Energia Interna
T	Energia Cinética
V	Energia Potencial Total
W	Trabalho Total
w_i	Trabalho das Forças Externas
w_e	Trabalho das Forças Internas

Lista de Figuras

2.1 - Coordenadas dos pontos M e N antes e após a deformação.....	12
2.2 - Variação dos ângulos formados entre os elementos dx , dy e dz após o deslocamento.....	16
3.1 - Vetor posição de um ponto de um sistema.....	22
3.2 - Alongamento de um elemento.....	37
4.1 - Deslocamento de uma barra.....	48
4.2 - Graus de liberdade e deslocamentos de uma barra de treliça.....	56
4.3 - Ângulo formado entre a barra e o sistema global de referência.....	61
5.1 - Alongamento linear da teoria de primeira ordem.....	72
8.1.1 - Treliça Plana de Duas Barras.....	101

8.1.2 - Curva Força x Deslocamento Vertical do nó 2 da treliça plana de duas barras.....	102
8.2.1 - Treliça Plana de Uma Barra.....	103
8.2.2 - Curva Força x Deslocamento do nó 2 da treliça plana de uma barra.....	105
8.3.1 - Treliça Plana de Cinco Barras.....	106
8.3.2 - Curva Força x Deslocamento do nó 1 da treliça plana de cinco barras.....	107
8.4.1 - Treliça Plana Tipo Grua.....	109
8.4.2 - Curva Força x Deslocamento do nó 11 da treliça tipo grua.....	109
8.4.3 - Curva Força x Deslocamento do nó 11 da treliça tipo grua extraído de Lima.....	110
8.5.1 - Treliça Espacial.....	112
8.5.2 - Curva Força x Deslocamento do nó 4 da treliça espacial.....	113

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Lista de Tabelas

Tabela 8.1.1 – Comparação de resultados da treliça plana de duas barras.....	102
Tabela 8.2.1 – Comparação de resultados da treliça plana de uma barra.....	104
Tabela 8.2.2 – Tensão na barra da treliça.....	105
Tabela 8.3.1 – Comparação de resultados da treliça plana de cinco bar.....	107
Tabela 8.3.2 – Tensão nas barras da treliça.....	108
Tabela 8.4.1 – Comparação de resultados da treliça plana tipo grua.....	110
Tabela 8.4.2 – Tensão nas barras da treliça.....	111
Tabela 8.5.1 – Comparação de resultados da treliça espacial.....	112
Tabela 8.5.2 – Tensão nas barras da treliça.....	113

Resumo

Este trabalho tem como objetivo fazer um estudo de formulações exatas e aproximadas para o problema da não-linearidade geométrica em treliças. As formulações estudadas são desenvolvidas para treliças planas, podendo ser também estendidas para treliças espaciais mediante pequenos ajustes.

As várias formulações estudadas e apresentadas no trabalho estão divididas em duas categorias: formulações geometricamente exatas, considerando grandes rotações, e formulações denominadas aproximadas ou de segunda ordem, que admitem hipóteses e simplificações geométricas para pequenas rotações. Nas formulações estudadas assume-se a validade da Lei de Hooke.

Inicialmente são apresentadas as formulações estudadas, chegando-se em cada uma delas à obtenção da matriz de rigidez elástica linear e matriz de rigidez tangente para uma barra de treliça plana. A seguir apresenta-se um capítulo que aborda os métodos de resolução e outro que descreve os “elementos finitos” da biblioteca de elementos do programa Ansys que podem ser usados para a análise não linear geométrica de treliças.

Tomando por base as formulações estudadas foi escrito um programa de computador, em linguagem Pascal, para a análise não linear geométrica de treliças planas ou espaciais,

levando em consideração a possibilidade de grandes rotações. A solução numérica implementada no programa computacional é baseada no Método de Newton-Raphson.

Apresenta-se um capítulo de resultados no qual são expostos alguns exemplos de treliças planas e um exemplo de treliça espacial cujos deslocamentos e tensões foram obtidos com o programa de computador acima mencionado. Para efeito de validação, os resultados são comparados com valores obtidos pela análise das estruturas com o programa Ansys e com resultados divulgados na literatura.

Apresenta-se finalmente um breve capítulo com comentários e conclusões, incluindo algumas sugestões para futuros trabalhos.

1.Introdução

Na prática da engenharia é comum utilizar-se a teoria da elasticidade linear para o cálculo das estruturas correntes. Existem situações em que há a necessidade de utilização de teorias não-lineares que levam em consideração os efeitos das não-linearidades físicas ou geométricas no cálculo das estruturas. Em casos como os de estruturas compostas por elementos esbeltos, ou quando se deseja analisar a estabilidade da estrutura e a sua curva carga-deslocamento, para traçar seu comportamento até o ponto crítico, e mesmo o seu comportamento pós-crítico, é desejável levar em conta a não linearidade da relação tensão-deformação do material, e estabelecer o equilíbrio na posição deformada, levando em conta os efeitos geométricos de deslocamentos e rotações.

O objetivo deste trabalho é tratar da análise não-linear geométrica de treliças. Na realidade a intenção é fazer um estudo comparativo de soluções entre várias possibilidades de análise não-linear geométrica de treliças utilizando-se para tanto um programa desenvolvido em linguagem Pascal a partir da formulação apresentada e o programa comercial ANSYS.

Inicialmente foi feito extenso levantamento bibliográfico procurando dar o embasamento teórico para o tratamento da análise não linear geométrica de treliças. São apresentadas as formulações ditas exatas e de segunda ordem e são formuladas as matrizes de rigidez da barra de treliça em cada caso. Apresentam-se os elementos da biblioteca de

elementos finitos do programa ANSYS para o tratamento não-linear geométrico da treliça. Apresenta-se também uma breve explicação do programa em Pascal, especialmente elaborado para esta dissertação.

São, então, abordados os métodos de resolução. Finalmente apresenta-se um capítulo de exemplos comparando-se os resultados obtidos com os de outros autores.

O trabalho termina com a apresentação de uma breve conclusão e sugestões.

1.1 Revisão Bibliográfica

Os estudos levando em conta a influência das não-linearidades no cálculo de estruturas são relativamente recentes. Até o advento dos computadores era quase inviável a consideração de tais influências devido a grande dificuldade e trabalho em lidar com as matrizes e com a solução do problema. Por essa razão a teoria da elasticidade linear era considerada suficiente para o cálculo das estruturas, o que não deixa de ser razoável visto que muitas das estruturas correntes da engenharia tenham um comportamento muito próximo do linear. Com o surgimento dos computadores, contudo, tornou-se possível manipular as matrizes que acompanham as hipóteses de não-linearidade e obter soluções numéricas para tais problemas. A partir de então cada vez mais estudiosos dedicaram-se ao estudo das não-linearidades e suas implicações. O método dos elementos finitos tem-se mostrado uma ótima ferramenta para auxiliar na análise das não-linearidades, não sendo de admirar que a maioria dos estudos nesta área se utilizem desse método.

Em 1956 Turner (33) apresentou um artigo pioneiro no qual faz um resumo dos principais métodos utilizados até então na análise estrutural, desde teorias simplificadas de flexão e torção até a obtenção direta da matriz de rigidez. Turner parte da divisão da estrutura em partes menores ou membros utilizando o método de obtenção direta da matriz de rigidez

com desenvolvimento matricial baseado no processo dos deslocamentos, introduzindo, desta forma, o conceito de elementos finitos. Mostrou como obter a matriz de rigidez da estrutura e demonstrou a aplicação do método em estruturas compostas por barras e em estruturas de placa. No caso das placas Turner primeiro deduziu a matriz de rigidez de uma placa triangular e depois usou o resultado obtido para o cálculo de placas com diferentes formatos dividindo-as em elementos triangulares e superpondo os resultados.

A maior parte dos componentes das aeronaves eram calculados sob as hipóteses de estabilidade no regime elástico. Devido a esse fato, tornou-se conveniente a consideração das não-linearidades geométricas no cálculo destes componentes. Vários estudos e pesquisas foram realizados com esse objetivo. O próprio Turner (34) publicou em 1960 o primeiro artigo no qual trata a não-linearidade geométrica pelo método dos elementos finitos. Motivado pelo estudo de estruturas submetidas a variação não uniforme de temperatura Turner desenvolveu seu modelo de obtenção direta da matriz de rigidez para que ele abrangesse mudanças na geometria da estrutura. Os exemplos de aplicação do modelo desenvolvido foram os mesmos usados por ele em seu artigo de 1956. A partir de então, o Método dos Elementos Finitos passou a ser amplamente utilizado para o cálculo de diversos tipos de estruturas, em diferentes áreas de aplicação e não tardou para que se utilizasse esta nova ferramenta para o estudo das não-linearidades e uma extensa gama de trabalhos estudando a aplicação do Método dos Elementos Finitos às não-linearidades passasse a ser publicada.

Na década de sessenta procurava-se ainda formular teorias que tratassem as não-linearidades de maneira consistente, definindo os conceitos básicos dessas teorias e das formulações utilizadas. A maioria dos trabalhos baseados no Método dos Elementos Finitos, apresentados com o intuito de estudar as não-linearidades discutiam, principalmente, as etapas importantes de análise que se subdividiam em três: a definição da relação deformação-deslocamento e das funções de interpolação dos deslocamentos; a definição de um sistema de coordenadas para o elemento e o processo de resolução das equações não-lineares de equilíbrio. Várias formulações foram apresentadas a partir do trabalho de Turner, sendo a diferença básica entre elas o grau dos termos não lineares. No ano de 1968 Mallet e Marçal (17) publicaram um artigo no qual apresentavam uma recapitulação das várias formulações para a matriz de rigidez de estruturas compostas por barras desenvolvidas a partir do método

dos elementos finitos. Três tipos básicos de formulação para a matriz de rigidez foram apresentados: a formulação pela minimização da energia potencial, a formulação direta através do Princípio dos Trabalhos Virtuais e a formulação incremental. A matriz de rigidez foi deduzida analiticamente e suas componentes foram discriminadas em cada caso. Neste mesmo artigo Mallet e Marçal esclareceram ainda a maneira como as não-linearidades podem afetar a estabilidade das estruturas e os níveis em que isso ocorre, ressaltando a importância dos termos quadráticos dos deslocamentos na matriz de rigidez na análise do comportamento pós-flambagem das estruturas. Eles abordam ainda as vantagens e desvantagens dos métodos de resolução dos sistemas de equações não-lineares.

A maior parte das formulações para análise de estruturas com a consideração de não-linearidades é baseada no sistema de coordenadas lagrangeana total ou atualizada, que diferem entre si apenas em relação à configuração indeformada. Alguns pesquisadores, contudo, elaboraram formulações baseadas em outros sistemas de coordenadas, como Jennings (14) no ano de 1968 quando publica um artigo no qual emprega coordenadas eulerianas para elementos de barra e aborda a questão da convergência da solução frisando a necessidade de dividir a estrutura em muitos elementos a fim de obter soluções mais próximas da exata e, em alguns casos, como quando há variação de seção ou da natureza do carregamento aplicado, deve-se subdividir a estrutura em um número ainda maior de elementos para que, desta forma, a influência destes efeitos seja levada em conta com menos erros. Ele apresenta vários exemplos numéricos com estruturas divididas em diferentes quantidades de elementos para demonstrar os erros cometidos em cada caso. Jennings busca também separar deformações de movimentos de corpo rígido.

Powell (28) também adota em 1969 uma formulação visando separar movimentos de corpo rígido de deformações. Ele busca desenvolver tal formulação de forma mais geral a fim de utilizá-la para o caso de grandes rotações. Um de seus objetivos é o de separar os tipos de não-linearidade associadas a grandes deslocamentos e apresentar uma formulação teórica na qual os tipos de não-linearidade sejam facilmente reconhecidos.

Na década de 70 já haviam sido desenvolvidos muitos modelos para análise das não-linearidades e os estudos passaram a se concentrar mais no aperfeiçoamento desses modelos.

Deu-se mais atenção à procura de soluções para os sistemas de equações não-lineares, como os artigos escritos por Haisler (11) e Stricklin (31) conjuntamente, e para a questão do sistema de coordenadas mais adequado a ser utilizado na formulação de problemas de não-linearidade geométrica. Passou-se a comparar os modelos existentes na tentativa de definir um que sistematizasse o tratamento das não-linearidades, como ocorria com a análise linear. No ano de 1972 Ebner e Uccifero (7) publicaram artigo no qual mostravam resumidamente as principais formulações já definidas até então para o cálculo de não-linearidades. Eles apresentaram as expressões obtidas através dessas formulações para as matrizes de rigidez e chamaram atenção para a utilização adequada das matrizes de transformação. Apresentaram, também, alguns resultados numéricos obtidos através das formulações apresentadas, comparando-os e avaliando a conveniência e adequação de cada formulação.

Em 1973 Gallagher (10) publicou um artigo no qual revisou o desenvolvimento da análise não-linear via elementos finitos. Ele também chamou atenção para a importância do estudo da estabilidade elástica das estruturas, apresentando, de maneira resumida, o cálculo de pontos limite, assim como a análise de bifurcação do equilíbrio e do comportamento pós-flambagem.

Zienkiewicz e Wood (36) apresentaram um método para análise não-linear de estruturas planas cuja formulação podia ser aplicada tanto a estruturas formadas por elementos retos como a estruturas formadas por elementos curvos. Não foram impostas restrições às rotações e deslocamentos e o sistema de coordenadas adotado foi o lagrangeano.

Cichón (4) apresentou um método para análise de estruturas planas compostas por barras em regime elasto-plástico considerando a não-linearidade geométrica em coordenadas lagrangeanas. Para tanto, combinou o método incremental ao método do módulo tangente e provou a eficiência satisfatória de seu método através de exemplos numéricos.

Buscando um método eficiente para análise não-linear geométrica de estruturas compostas por barras esbeltas Wen e Rahimzadeh (35) publicaram um artigo em 1983 que apresentava a análise de estruturas planas e espaciais utilizando a formulação da mínima energia potencial e assumindo a hipótese de serem pequenas as rotações relativas às cordas

dos membros deformados. Eles mostraram que a substituição da parcela usual da deformação axial devida aos deslocamentos transversais por uma média ao longo do comprimento do elemento provocaria a redução do valor da energia de deformação e, conseqüentemente, da matriz de rigidez do elemento que, calculada através da parcela usual com o método dos elementos finitos fornecia um valor muito alto e não realista da rigidez do elemento. Wen e Rahimzadeh apresentaram também a formulação da mínima energia em coordenadas eulerianas, comparando esta formulação com a lagrangeana. E, por fim, abordaram o problema das rotações em pórticos espaciais, observando que no caso de rotações finitas em torno de diferentes eixos não são comutativas e os momentos não são conservativos.

Reconhecendo a necessidade do conhecimento da curva força-deformação para uma melhor análise da estabilidade das estruturas Chajes e Churchill (3) publicaram um artigo no qual enfocavam os métodos de obtenção das curvas força-deformação de estruturas geometricamente não-lineares. Eles revisaram os métodos existentes e apresentaram a formulação para o método puramente incremental, o iterativo-incremental e o método direto.

Considerando que as rotações finitas são responsáveis pelos mais importantes efeitos de não-linearidade geométrica e considerando a necessidade de separar os efeitos devidos aos movimentos de corpo rígido dos efeitos devidos à deformação sobre os deslocamentos obtidos, Hsiao e Hou (12) descrevem uma formulação prática para análise não-linear geométrica de estruturas planas, na qual a matriz de rigidez é obtida através da superposição da matriz de rigidez geométrica, a matriz de rigidez devida a flexão e a matriz do elemento linear da barra de uma dada estrutura. A formulação foi baseada em um método corrotacional que utiliza um sistema de coordenadas local que acompanha o elemento separando os efeitos dos movimentos de corpo rígido dos efeitos das deformações. Desta forma pode ser eliminada a restrição de pequenas rotações entre incrementos sucessivos. Com os exemplos apresentados no mesmo artigo mostra-se que o método fornece resultados satisfatórios. Hsiao e Horng (13) apresentaram outro trabalho que estendia esse método à formulação de vigas-coluna espaciais.

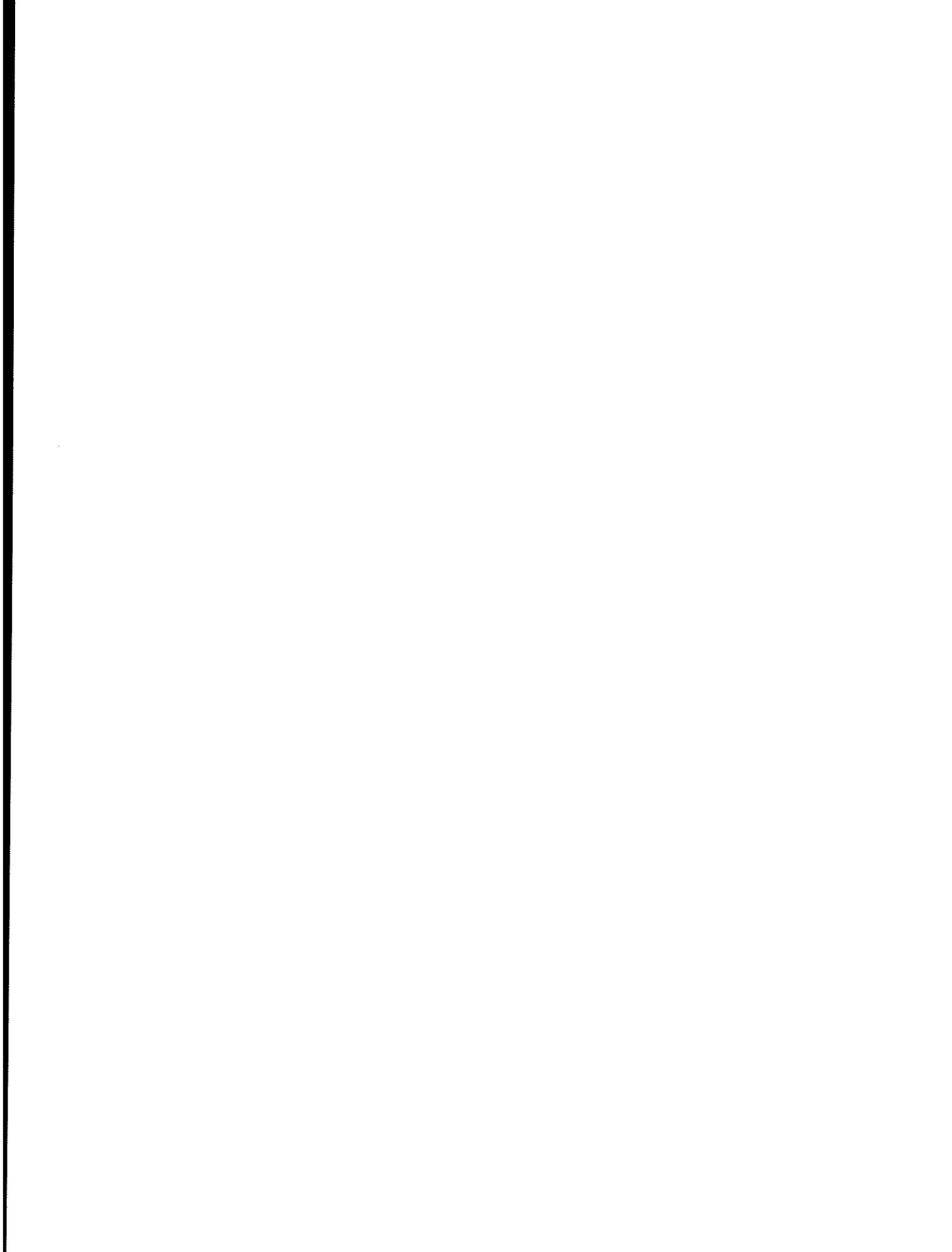
Trabalhos muito importantes foram também desenvolvidos por autores brasileiros que se dedicam ao estudo dos efeitos das não-linearidades no comportamento das estruturas. Alguns destes trabalhos foram desenvolvidos na Escola Politécnica da Universidade de São

Paulo como os trabalhos de Pimenta (23,24,25,26) apresentados em forma de boletins técnicos, entre eles o que trata da dedução da matriz de rigidez tangente para um elemento de barra através do método dos elementos finitos com a utilização de coordenadas eulerianas. Juntamente com Mazilli (27) apresentou um trabalho que corrigia a expressão da elástica considerando a deformação quadrática, além de um boletim técnico (25) no qual discorria sobre a teoria das rotações finitas.

Mazzilli (19) também publicou um boletim técnico tratando da consideração da não-linearidade geométrica em estruturas compostas por barras, além de trabalhos (20) que levam em conta aspectos da estabilidade de treliças. Diogo (6) apresenta um trabalho no qual mostra a importância da consideração da expressão completa da deformação na análise de treliças sujeitas a grandes rotações.

Não se pode deixar de mencionar os trabalhos desenvolvidos na Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo como o trabalho de Corrêa (5), que apresenta um processo incremental para obtenção das matrizes de rigidez de treliças e pórticos planos e espaciais, de Paula (22) que aborda o tema dos sistemas e coordenadas e também da estabilidade das estruturas. Também na Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, Paixão (21) aplicou a análise não-linear geométrica ao lançamento de oleodutos submarinos. Também Taguti (32) da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo desenvolveu um trabalho com o objetivo de estudar a não-linearidade geométrica em treliças, pórticos e placas.

Quanto ao estudo de resolução dos sistemas de equações pode-se mencionar o trabalho de Rubert (30) da Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo e o trabalho de Arcaro (1) da Universidade Estadual de Campinas.



2 Considerações Iniciais

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

2.1 Teoria da Elasticidade Linear

A teoria da elasticidade linear é, atualmente, a teoria mais usada pelos engenheiros para análise e dimensionamento de estruturas. Essa teoria é válida, e tem seu uso justificado já que muitas estruturas correntes da engenharia civil apresentam, em serviço, comportamentos muito próximos do comportamento linear, sendo, portanto, razoável tratá-las por essa teoria. Existem algumas razões por que se prefira utilizar essa teoria no cálculo de estruturas, relacionadas a seguir:

- A maior simplicidade para a análise numérica de estruturas submetidas a sistemas de carregamento quaisquer no regime elástico linear, vantagem essa que, até o advento de computadores, era muito importante.
- A utilização da teoria da elasticidade linear permite a aplicação da superposição de efeitos, que tem se mostrado muito útil para resolução de estruturas submetidas a sistemas mais complexos de carregamento. A superposição de efeitos consiste em se obter as tensões e

deformações geradas por um sistema de carregamentos aplicado a estrutura através da soma das tensões e deformações geradas por cada uma das ações se aplicadas isoladamente.

- Mesmo em situações que requerem a consideração de não-linearidades é ainda possível aplicação do método linear como uma primeira aproximação do comportamento da estrutura.
- A análise não-linear pode ser desenvolvida através de sucessivas etapas lineares.

Com o aparecimento de microcomputadores mais potentes veio também a possibilidade de se desenvolver a utilização de teorias levando em consideração as formas de não-linearidade apresentadas pelas estruturas. Muitos têm sido os estudos voltados para essa questão, desde então. Tais estudos pretendem tornar a utilização de processos de análise não-linear tão acessíveis quanto os processos usados para a teoria linear, já que a consideração de não-linearidades em muitas situações é mesmo indispensável. Uma das situações em que a necessidade da utilização de modelos não-lineares é bem pronunciada é a da análise e estudo de estruturas esbeltas para as quais os efeitos de segunda ordem são importantes. Também para estudo da instabilidade elástica mostrou-se conveniente o uso de teorias não-lineares.

A teoria da elasticidade linear admite as hipóteses de linearidade física e geométrica e, é claro, no gráfico tensão-deformação a estrutura apresenta comportamento localizado abaixo do limite de proporcionalidade do material, na zona elástica.

Como linearidade geométrica entende-se um comportamento estrutural que segue as hipóteses de pequenos deslocamentos, pequenas rotações e pequenas deformações.

Como linearidade física entende-se um comportamento estrutural que segue a hipótese de uma relação tensão-deformação linear e, na teoria clássica, o comportamento do material segue a lei de Hooke.

Com a consideração de pequenos deslocamentos assume-se que a posição de um elemento após sofrer deslocamento é muito próxima da posição inicial, indeslocada, confundindo-se com ela. Também com a hipótese de pequenas deformações, entenda-se pequenas em relação à unidade, assume-se que a geometria não sofreu mudanças significativas de forma e, portanto, que a configuração deformada ainda pode ser confundida com a indeformada. Nestes casos utiliza-se para a análise do equilíbrio da estrutura uma teoria de primeira ordem, que consiste em escrever as equações de equilíbrio da estrutura na posição indeformada, tornando dessa maneira mais simples a análise estrutural.

Não se deve deixar de lembrar que a hipótese de pequenas rotações, diz-se pequenas em comparação com a unidade, é também muito importante, já que, se as rotações não forem pequenas, irão influir no comportamento da estrutura causando o aparecimento de momentos de segunda ordem que, em várias situações, não podem ser desprezados.

Nem sempre é possível analisar uma estrutura pela teoria linear. Em muitos casos a estrutura após sofrer deformação tem a sua geometria modificada a tal ponto que a sua configuração deformada em nada lembra a configuração inicial. Nestes casos como em vários outros é necessário levar em conta no cálculo da estrutura as não-linearidades. Para considerar as não-linearidades deve-se assumir novas hipóteses que representem mais adequadamente a realidade da estrutura.

2.2 Não-Linearidade Geométrica

Entende-se como não-linearidade geométrica todo efeito causado em uma estrutura devido a mudanças na geometria da mesma. As mudanças na geometria de uma estrutura podem ocorrer de diversas formas, abaixo discriminadas:

- Grandes deformações - ou deformações finitas. Neste caso a mudança na geometria é causada pelas deformações que não podem mais ser consideradas pequenas.
- Grandes rotações - Neste caso as rotações são grandes e afetam a geometria original, podendo ser pequenas as deformações.
- Grandes deslocamentos - Os deslocamentos de corpo rígido são grandes. As rotações e as deformações podem ser pequenas.

Na classificação acima considera-se somente a não-linearidade geométrica sem levar-se em conta a não-linearidade física .

No caso das rotações e considerando pequenas deformações pode-se ter (7,8):

- Rotações muito pequenas - São consideradas muito pequenas as rotações cujos valores são da ordem da deformação ε . Quando as rotações são pequenas pode-se fazer $\cos\theta = 1$ e $\text{sen}\theta = \text{tg}\theta = \theta$.
- Rotações pequenas - São consideradas pequenas as rotações que tem valores da ordem da raiz quadrada da deformação ε . Ainda pode ser feita a aproximação de $\text{sen}\theta = \text{tg}\theta = \theta$. A aproximação $\cos\theta$ poderá ser substituída por $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$.
- Rotações grandes - Neste caso não há restrições às rotações e as deformações podem ser muito pequenas ou não.

Quando se tem o efeito da não-linearidade geométrica a relação força-deslocamento passa a ser não linear e, neste caso aparecerão momentos de segunda ordem que não poderão ser desprezados. A matriz de rigidez passa a conter parcelas que dependem dos deslocamentos e, portanto, se modifica com eles. A não-linearidade geométrica é expressa também na relação deformação-deslocamento.

Considere-se um corpo em sua configuração indeformada. Os pontos desse corpo nessa configuração podem ser descritos em função de suas projeções nas direções x , y e z do eixo de coordenadas X , Y e Z , utilizado como referencial. Após sofrer deslocamentos os pontos desse corpo poderão também ser escritos em função desses deslocamentos u , v e w nas direções x , y e z respectivamente.

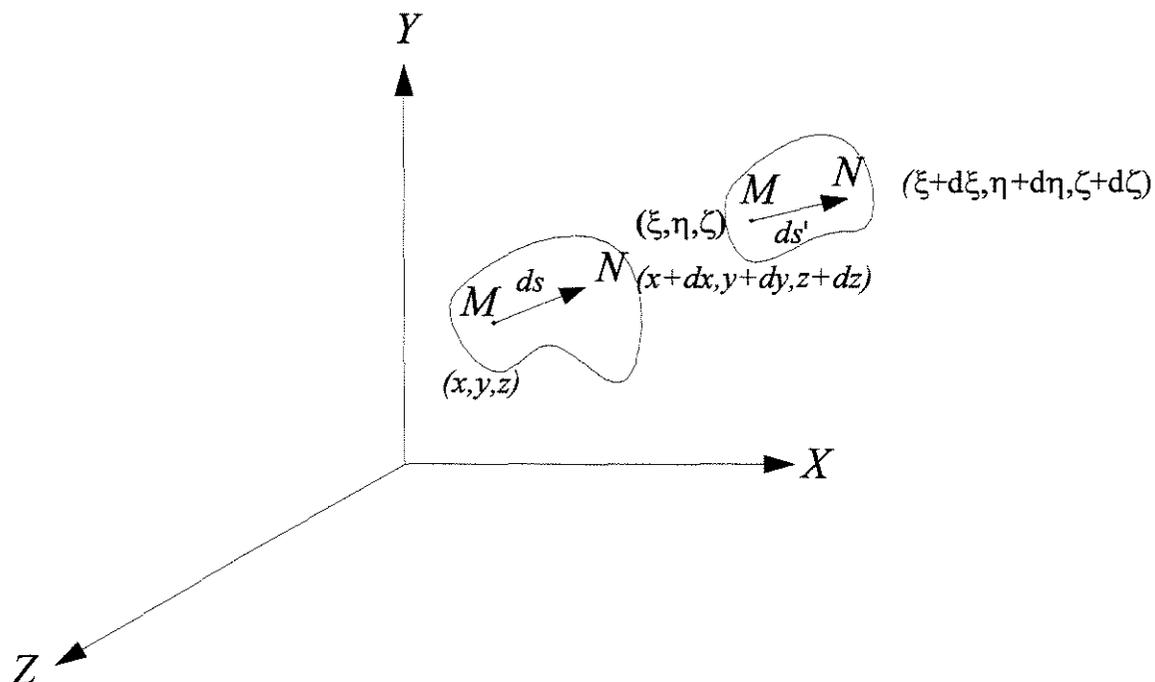


Figura 2.1 – Coordenadas dos pontos M e N antes e após a deformação

A posição final do corpo é dada por:

$$\begin{aligned}\xi &= x + u(x, y, z) \\ \eta &= y + v(x, y, z) \\ \zeta &= z + w(x, y, z)\end{aligned}\tag{2.1}$$

com u , v e w e suas respectivas derivadas em função de x , y e z contínuas.

Considere-se os pontos $M(x,y,z)$ e $N(x+dx, y+dy, z+dz)$ na posição deslocada. Esses pontos tem coordenadas ξ , η , ζ e $(\xi+d\xi, \eta+d\eta, \zeta+d\zeta)$ respectivamente.

Aplicando a fórmula (2.1) ao ponto $(x+dx, y+dy, z+dz)$ e expandindo em série, tem-se:

$$\begin{aligned}d\xi &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \\d\eta &= \frac{\partial v}{\partial x}dx + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz \\d\zeta &= \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)dz\end{aligned}\tag{2.2}$$

O quadrado da distância entre os pontos M e N antes do deslocamento é dado por:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2\tag{2.3}$$

Depois do deslocamento:

$$(ds')^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2\tag{2.4}$$

A diferença entre esses quadrados com a substituição da expressão (2.2) para $d\xi$, $d\eta$ e $d\zeta$ é dada por:

$$(ds')^2 - ds^2 = 2(\varepsilon_{xx}dx^2 + \varepsilon_{yy}dy^2 + \varepsilon_{zz}dz^2 + \varepsilon_{xy}dxdy + \varepsilon_{xz}dxdz + \varepsilon_{yz}dydz) \quad (2.5)$$

Fazendo-se :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde ε_{ii} expressam as deformações longitudinais dos elementos do elemento de volume do corpo que, antes da deformação eram paralelos aos eixos coordenados, e ε_{ij} são as componentes transversais da deformação. Pode-se também definir:

$$E_{MN} = \frac{ds' - ds}{ds} \quad (2.7)$$

onde E_{MN} é a mudança ocorrida na distância entre os pontos M e N, chamada alongamento relativo.

Substituindo (2.7) em (2.5) tem-se:

$$\begin{aligned} E_{MN} \left(1 + \frac{1}{2} E_{MN}\right) ds^2 = & \varepsilon_{xx} dx^2 + \varepsilon_{yy} dy^2 + \varepsilon_{zz} dz^2 + \varepsilon_{xy} dx dy + \\ & + \varepsilon_{xz} dx dz + \varepsilon_{yz} dy dz \end{aligned} \quad (2.8)$$

Dividindo (2.8) por ds , tem-se:

$$E_{MN} \left(1 + \frac{1}{2} E_{MN}\right) = \varepsilon_{xx} \lambda^2 + \varepsilon_{yy} \mu^2 + \varepsilon_{zz} \nu^2 + \varepsilon_{xy} \lambda \mu + \varepsilon_{xz} \lambda \nu + \varepsilon_{yz} \mu \nu \quad (2.9)$$

com $\lambda = \frac{dx}{ds}$, $\mu = \frac{dy}{ds}$, $\nu = \frac{dz}{ds}$.

Pode-se concluir através de (2.9) que se não houver alteração na distância entre os pontos M e N após a passagem do corpo para a configuração deslocada, então não haverá deformação e $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$.

Se forem conhecidas as quantidades expressas nas equações (2.6) para todos os pontos do corpo considerado, então a deformação desse corpo é conhecida.

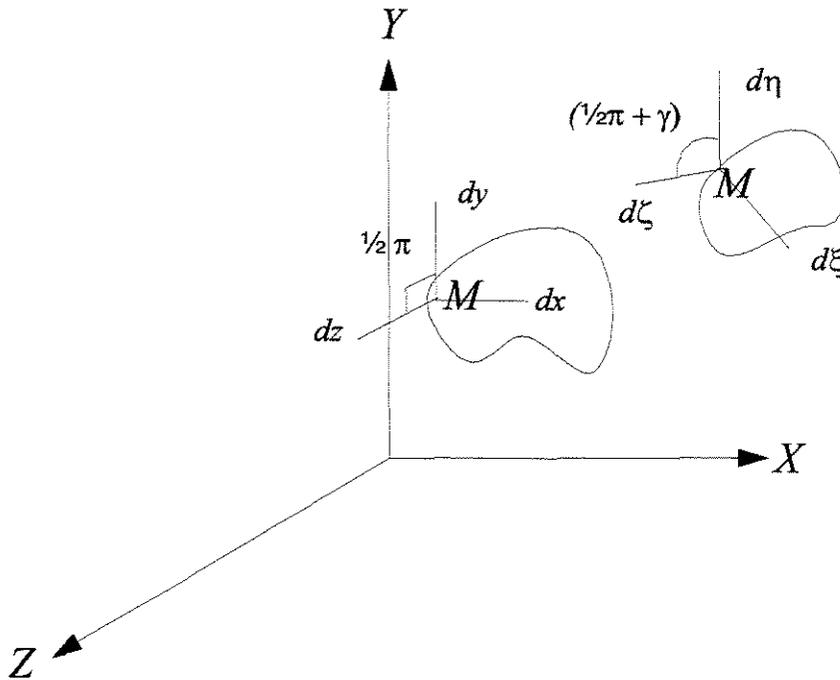


Figura 2.2 – Variação dos ângulos formados entre os elementos dx , dy e dz após o deslocamento

Seja γ_{ij} o incremento dos ângulos que formam entre si os elementos dx , dy e dz do elemento de volume de um corpo na configuração deslocada. Pode-se escrever:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{ij}\right) = \sin \gamma_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{(1 + E_i)(1 + E_j)} \quad (2.10)$$

Os ângulos γ_{ij} são chamados de deformações transversais. É possível notar-se pela expressão (2.10) que se as componentes de deformação ε_{ij} forem nulas, os ângulos entre os elementos dx , dy e dz do elemento de volume do corpo considerado permanecerão retos após a deformação.

Na hipótese de pequenas deformações, que é a hipótese aqui adotada, assume-se que as deformações são pequenas em face da unidade e pode-se simplificar as expressões anteriormente obtidas da seguinte maneira:

$$E_x = \varepsilon_{xx}, E_y = \varepsilon_{yy}, E_z = \varepsilon_{zz} \quad (2.11)$$

e também,

$$\gamma_{xy} \approx \varepsilon_{xy}, \gamma_{xz} \approx \varepsilon_{xz}, \gamma_{yz} \approx \varepsilon_{yz} \quad (2.12)$$

ou seja, para hipótese de pequenas deformações as componentes ε_{xx} , ε_{yy} e ε_{zz} podem ser identificadas com seus respectivos alongamentos e as componentes ε_{xy} , ε_{xz} e ε_{yz} com as respectivas deformações transversais.

Na teoria clássica considera-se que as rotações sejam muito pequenas em comparação à unidade. Esta hipótese exerce influência sobre as equações que definem as deformações, simplificando-as. Para demonstrar com clareza o tipo de simplificação sofrida por estas expressões, deve-se escrever as expressões (2.6) da maneira que se segue:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= e_{xx} + \frac{1}{2}[e_{xx}^2 + (\frac{1}{2}e_{xy} + \omega_z)^2 + (\frac{1}{2}e_{xz} - \omega_y)^2] \\
\varepsilon_{yy} &= e_{yy} + \frac{1}{2}[e_{yy}^2 + (\frac{1}{2}e_{xy} - \omega_z)^2 + (\frac{1}{2}e_{yz} + \omega_x)^2] \\
\varepsilon_{zz} &= e_{zz} + \frac{1}{2}[e_{zz}^2 + (\frac{1}{2}e_{xz} + \omega_y)^2 + (\frac{1}{2}e_{yz} - \omega_x)^2]
\end{aligned} \tag{2.13a}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xy} &= e_{xy} + e_{xx}(\frac{1}{2}e_{xy} - \omega_z) + e_{yy}(\frac{1}{2}e_{xy} + \omega_z) + (\frac{1}{2}e_{xz} - \omega_y)(\frac{1}{2}e_{yz} + \omega_x) \\
\varepsilon_{xz} &= e_{xz} + e_{xx}(\frac{1}{2}e_{xz} + \omega_y) + e_{zz}(\frac{1}{2}e_{xz} - \omega_y) + (\frac{1}{2}e_{xy} + \omega_z)(\frac{1}{2}e_{yz} - \omega_x) \\
\varepsilon_{yz} &= e_{yz} + e_{yy}(\frac{1}{2}e_{yz} - \omega_x) + e_{zz}(\frac{1}{2}e_{yz} + \omega_x) + (\frac{1}{2}e_{xy} - \omega_z)(\frac{1}{2}e_{xz} + \omega_y)
\end{aligned} \tag{2.13b}$$

com:

$$\begin{aligned}
e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\
e_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & e_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & e_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\
e_x & & & & & \\
2\omega_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} & 2\omega_y &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} & 2\omega_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Desprezando-se os quadrados dos parâmetros ε_{xx} ε_{xy} ε_{xz} na primeira equação da expressão (2.13a) em face de seu pequeno valor ante a unidade, pode-se escrever:

$$\varepsilon_{xx} = e_{xx} + \frac{1}{2}[e_{xy}\omega_z - e_{xz}\omega_y + \omega_y^2 + \omega_z^2] \tag{2.15}$$

Se forem desprezados os dois primeiros termos entre colchetes em face dos dois últimos tem-se:

$$\varepsilon_{xx} \approx e_{xx} + \frac{1}{2}(\omega_y^2 + \omega_z^2) \quad (2.16)$$

Fazendo-se o mesmo com as demais expressões de (2.6), tem-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{yy} &\approx e_{yy} + \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_z^2) \\ \varepsilon_{zz} &\approx e_{zz} + \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2) \\ \varepsilon_{xy} &\approx e_{xy} - \omega_x \omega_y \\ \varepsilon_{xz} &\approx e_{xz} - \omega_x \omega_z \\ \varepsilon_{yz} &\approx e_{yz} - \omega_y \omega_z \end{aligned} \quad (2.17)$$

Se os termos em segundo grau das expressões (2.17) forem considerados pequenos em relação as componentes de deformação, pode-se, ainda, proceder a mais uma simplificação desprezando-os. Neste caso tem-se:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} \approx e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_{xy} \approx e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
\varepsilon_{yy} \approx e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_{xz} \approx e_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\
\varepsilon_{zz} \approx e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \quad \varepsilon_{yz} \approx e_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

As expressões (2.18) são utilizadas na teoria clássica como sendo aquelas que dão os valores das pequenas deformações.

Como é possível notar-se pelas expressões obtidas, a teoria não-linear considera o efeito das rotações sobre as deformações, enquanto a teoria linear despreza esse efeito. Em muitos casos não é possível desprezar essa influência e deve-se, então utilizar a teoria não-linear.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

3. Aplicação do Método dos Elementos Finitos

3.1 Princípio da Mínima Energia Potencial

O princípio da mínima energia é muito utilizado na análise de estruturas e é uma ótima ferramenta quando se pretende estudar sua estabilidade, pois fornece uma boa aproximação para a carga crítica, diminuindo o trabalho numérico que acompanha esse estudo através das equações diferenciais. Devido a sua larga utilização o método da mínima energia potencial total é considerado como clássico e é utilizado no desenvolvimento do presente trabalho.

Para apresentar o método da energia potencial considere-se um sistema qualquer no espaço conforme a figura 3.1. Para que se tenha informações sobre esse sistema deve-se primeiro estabelecer um sistema fixo de coordenadas de referencia e em relação a ele pode-se, então, medir os deslocamentos, velocidades e acelerações do sistema considerado.

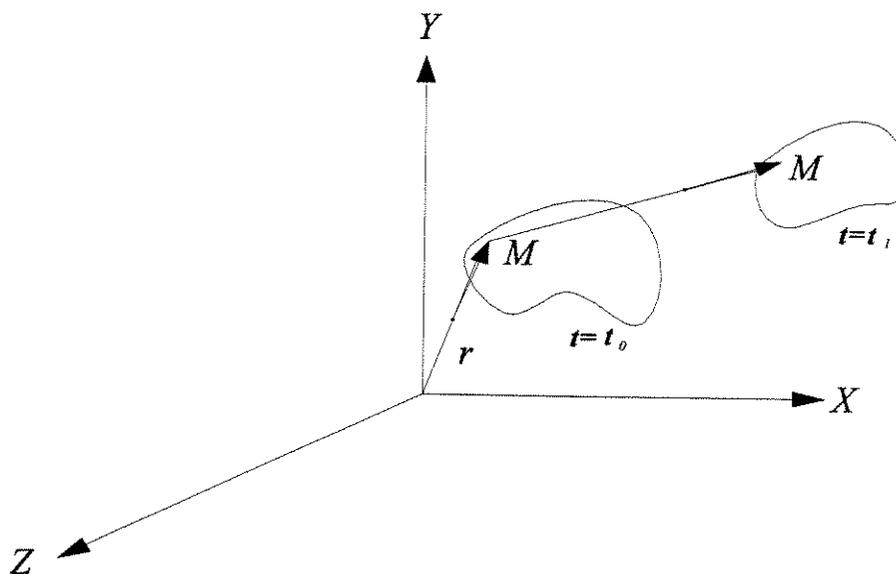


Figura 3.1 – Vetor posição de um ponto de um sistema

Se r é o vetor posição de um ponto do sistema com relação ao sistema de referencia, então a velocidade desse ponto é:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (3.1)$$

O trabalho executado por uma força F sobre esse ponto é:

$$dw = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt \quad (3.2)$$

Se F é função do tempo t , então:

$$W = \int_0^{t_1} F \cdot v dt \quad (3.3)$$

onde W é o trabalho executado pela força F sobre um ponto do sistema no intervalo de tempo $(t_0 - t_1)$.

Segundo a terceira lei de Newton, se um corpo A exerce sobre um corpo B uma força F , há uma reação $-F$ do corpo B sobre o corpo A. Se a força F age sobre um sistema a reação $-F$ do sistema pode agir sobre outra parte do sistema ou sobre um corpo fora do sistema. No primeiro caso a reação do sistema é chamada de força interna e no segundo caso de força externa. Logo, o trabalho de todas as forças, externas e internas atuantes no sistema é :

$$W = W_e + W_i \quad (3.4)$$

onde W_e é o trabalho das forças externas e W_i o trabalho das forças internas.

Da equação de Newton para uma partícula:

$$F = m \frac{dv}{dt} \quad (3.5)$$

Tem-se:

$$F \cdot dr = m \left(\frac{dv}{dt} \right) dr \quad (3.6)$$

onde m é a massa da partícula. De (3.2) tem-se que:

$$F \cdot dr = dw \quad (3.7)$$

onde dw é o trabalho infinitesimal da força F sobre a partícula. Então:

$$dw = mv \cdot dv = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \mathcal{G}^2 \right) dt \quad (3.8)$$

onde \mathcal{G} é a magnitude de v e, por definição, $\frac{1}{2} m \mathcal{G}^2 = T$ é a energia cinética da partícula, logo:

$$dw = dT \quad (3.9)$$

Por integração:

$$W = \Delta T \quad (3.10)$$

A relação (3.10) estabelece que o trabalho executado pela força F sobre uma partícula qualquer de um sistema é igual a variação da energia cinética dessa partícula. Essa conclusão é válida para qualquer sistema mecânico. Em um sistema submetido a mais de uma força externa o trabalho das forças aplicadas sobre todo o sistema será dado pela soma dos trabalhos executados por cada uma das forças sobre seus pontos de aplicação. Também a energia cinética do sistema será igual a soma das energias cinéticas de todas as partículas do sistema.

A primeira lei da termodinâmica diz que “ o trabalho executado sobre um sistema mecânico por forças externas mais o calor que entra no sistema é igual ao aumento de energia cinética mais o aumento da energia interna do sistema”. Ou seja:

$$W_e + Q = \Delta T + \Delta U \quad (3.11)$$

onde W_e é o trabalho executado pelas forças externas

Q é o calor que entra no sistema

ΔT é a energia cinética do sistema

ΔU é a energia interna do sistema

De (3.4) e (3.10) tem-se:

$$W_e + W_i = \Delta T \quad (3.12)$$

Com (3.11) e (3.12) tem-se:

$$W_i = Q - \Delta U \quad (3.13)$$

Quando Q é igual a zero, ou seja, não há entrada de calor no sistema o processo é dito adiabático. Neste caso:

$$W_i = -\Delta U \quad (3.14)$$

Um sistema é dito conservativo quando o trabalho virtual W' é nulo para um deslocamento virtual que leva o sistema por uma trajetória fechada. Quando as forças externas e internas são conservativas os trabalhos executados por elas são independentes da trajetória. Se as forças externas são conservativas, então:

$$W'_e = -\Omega(x) \quad (3.15)$$

onde W'_e é o trabalho virtual das forças externas e $\Omega(x)$ é chamada energia potencial das forças externas.

Se as forças internas são conservativas, então:

$$W'_i = -U(x) \quad (3.16)$$

onde W'_i é o trabalho virtual das forças internas e $U(x)$ é chamada energia potencial das forças internas, ou, para sistemas elásticos, é chamada energia de deformação. Se as forças externas e internas são conservativas, então

$$V = \Omega + U \quad (3.17)$$

onde V é a energia potencial total do sistema. Para sistemas conservativos o trabalho W é igual a perda de energia potencial $-\Delta V$, então de (3.10) tem-se:

$$\Delta T + \Delta V = 0 \quad (3.18)$$

integrando (3.18):

$$V + T = C \quad (3.19)$$

onde C é um valor constante. A constante C é chamada energia potencial total do sistema. A expressão (3.18) representa a lei da conservação da energia mecânica, para a qual um incremento infinitesimal de T é acompanhado por um incremento infinitesimal de V .

Para um sistema em equilíbrio a variação da energia potencial deve ser mínima, logo $dV = 0$, conseqüentemente tem-se que:

$$d\Omega + dU = 0 \quad (3.20)$$

3.2 Método dos Elementos Finitos

3.2.1 Formulação Genérica

Para a aplicação do método dos elementos finitos considere-se as funções aproximadoras dadas por \mathbf{u} :

$$\mathbf{u} = [u \ v]^T \quad (3.21)$$

onde u_i e v_i são os deslocamentos longitudinal e transversal.

A teoria dos elementos finitos pode ser desenvolvida escrevendo-se \mathbf{u} em função dos parâmetros generalizados :

$$\mathbf{u} = \varphi \mathbf{a} \quad (3.22)$$

onde \mathbf{a} são os parâmetros generalizados e φ a matriz das funções de forma.

Porém, se forem utilizados parâmetros nodais o resultado é válido para trechos ou elementos finitos da estrutura considerada. No caso de estruturas reticuladas o elemento finito tem dois nós. Para um elemento de treliça os parâmetros nodais são quatro, u_1, v_1 para o nó inicial e u_2 e v_2 para o nó final, sendo u_i os deslocamentos longitudinais e v_i os deslocamentos transversais.

Desta forma o vetor dos parâmetros nodais é :

$$\mathbf{p} = \mathbf{L}\mathbf{a} \quad (3.23)$$

Fazendo-se :

$$a = L^{-1} p \quad (3.24)$$

de forma que L relaciona os parâmetros generalizados aos nodais.

Substituindo-se (3.24) em (3.22) tem-se :

$$u = \varphi L^{-1} p \quad (3.25)$$

Com :

$$\eta = \varphi L^{-1} \quad (3.26)$$

tem-se :

$$u = \eta p \quad (3.27)$$

A relação deformação-deslocamento é escrita como :

$$\varepsilon = f \mathbf{u} \quad (3.28)$$

onde f é o gradiente de deslocamentos.

Substituindo-se (3.27) em (3.28) :

$$\varepsilon = f \eta p \quad (3.29)$$

Fazendo-se :

$$B = f \eta \quad (3.30)$$

a equação (3.29) fica :

$$\varepsilon = B p \quad (3.31)$$

Desta forma tem-se ε escrita em função dos parâmetros nodais de deslocamento.

Admitindo-se que o material obedeça a lei de Hooke a relação tensão-deformação é:

$$\sigma = D\varepsilon \quad (3.32)$$

A energia de deformação do elemento, que é igual ao trabalho interno, é dada por :

$$W_i = U_i = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T \sigma \, dv \quad (3.33)$$

O trabalho realizado por uma ação externa P , que é igual a energia potencial, é :

$$\Omega = W_e = - \int_S u^T P \, ds \quad (3.34)$$

A energia potencial total do elemento é dada pela soma da energia de deformação e do trabalho das ações externas :

$$V_i = U_i + \Omega_i \quad (3.35)$$

Aplicando-se o princípio da mínima energia potencial no equilíbrio :

$$\delta V = \int_V \delta \varepsilon^T \sigma dv - \int_S \delta \mathbf{u}^T P ds = 0 \quad (3.36)$$

a partir da relação (3.36) chega-se a expressão que representa igualdade entre os trabalhos executados pelas forças externas sobre os deslocamentos e pelas solicitações sobre as deformações, da qual se obtém as equações de equilíbrio do elemento.

$$\int_V \delta \varepsilon^T \sigma dv = \int_S \delta \mathbf{u}^T P ds \quad (3.37)$$

Aplicando-se em u uma variação :

$$\delta \mathbf{u} = \varphi \delta a \quad (3.38)$$

Utilizando-se (3.24) :

$$\delta a = L^{-1} \delta p \quad (3.39)$$

e substituindo-se em (3.38) :

$$\delta u = \varphi L^{-1} \delta p \quad (3.40)$$

Aplicando-se uma variação também na deformação :

$$\delta \varepsilon = f \varphi L^{-1} \delta p \quad (3.41)$$

Substituindo-se (3.40) e (3.41) na (3.37) tem-se :

$$\delta p^T \int_v f^T \varphi^T (L^{-1})^T \sigma \, dv = \delta p^T \int_s \varphi^T (L^{-1})^T P \, ds \quad (3.42)$$

Como a expressão (3.42) é válida para qualquer deslocamento $\delta \beta$ e como :

$$B = f\eta = f\varphi L^{-1} \quad (3.43)$$

e,

$$\sigma = D\varepsilon = Df\varphi L^{-1}p = DBp \quad (3.44)$$

então:

$$\left[\int_v B^T DB dv \right] p = (L^{-1})^T \int_s \varphi^T P ds \quad (3.45)$$

O termo entre colchetes do lado esquerdo da equação é a matriz de rigidez do elemento.

$$k = \int_v B^T DB dv \quad (3.46)$$

lembrando de (3.24) fica:

$$k p = \int_s \eta^T P ds = r \quad (3.47)$$

Esta expressão fornece o sistema de equações para o método dos elementos finitos, para cada elemento. Para obter-se a solução para todo o sistema, ou seja para toda a estrutura basta aplicar uma transformação à matriz de rigidez do elemento:

$$[K] = [T]^T [k] [T] \quad (3.48)$$

e então:

$$K\Gamma = R \quad (3.49)$$

onde K é a matriz de rigidez para todo o sistema, Γ é o vetor dos deslocamentos nodais de todo o sistema e R é o vetor das ações nodais do sistema.

3.2.2 Formulação do método para elemento de treliça

Para a aplicação do método dos elementos finitos deve-se primeiro definir a relação deformação-deslocamento a ser utilizada na formulação da energia, ou seja, definir a relação (3.31). Assumindo a hipótese de que as seções transversais permanecem planas, considere uma barra com comprimento dx na posição indeformada

e comprimento $dx(1+E_x)$ na posição deformada. Tem-se as seguintes relações entre os deslocamentos u , v , a rotação θ e o alongamento longitudinal E_x :

$$dx(1+E_x) \cos \theta = dx \left(1 + \frac{du}{dx}\right)$$

$$\frac{du}{dx} = (1+E_x) \cos \theta - 1 \quad (3.50)$$

e

$$dv = dx(1+E_x) \operatorname{sen} \theta$$

$$\frac{dv}{dx} = (1+E_x) \operatorname{sen} \theta \quad (3.51)$$

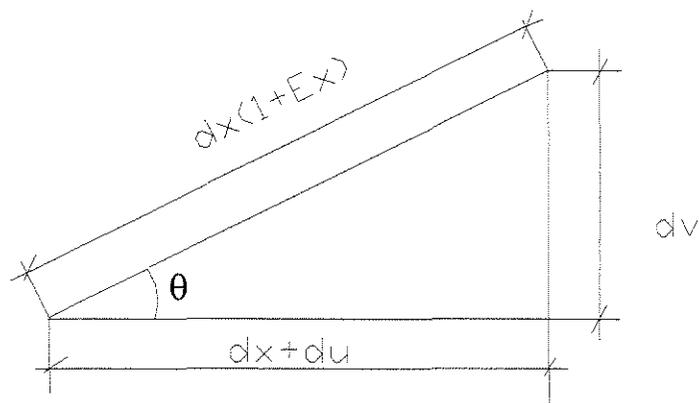


Figura 3.2 – Alongamento de um elemento

Para triângulos retângulos tem-se:

$$\begin{aligned}
 dx^2(1 + E_x)^2 &= \left[\frac{du}{dx} + 1\right]^2 dx^2 + dv^2 \Rightarrow \\
 dx^2(1 + E_x)^2 &= dx^2 \left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + 2\frac{du}{dx} + 1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \right] \Rightarrow \\
 (1 + E_x)^2 - 1 &= \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + 2\frac{du}{dx} + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

Fazendo-se:

$$\varepsilon'_x = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \tag{3.53}$$

tem-se:

$$(1 + E_x)^2 = 1 + 2\varepsilon'_x \Rightarrow E_x = \sqrt{1 + \varepsilon'_x} - 1 \tag{3.54}$$

onde E_x é o alongamento da barra ao longo do eixo e ε é a deformação da barra.

A expressão (3.53) fornece a relação deformação-deslocamento que é utilizada na formulação da energia. Logo:

$$\varepsilon = u_x + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \quad (3.55)$$

Levando-se a expressão (3.55) e a (3.32) na expressão da energia de deformação :

$$U_i = \frac{1}{2} D \int \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right]^2 dv \quad (3.56)$$

A parcela $\frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2$ é pequena em comparação à unidade e pode ser desprezada.

Desenvolvendo-se :

$$U_i = \frac{1}{2} D \int \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{dv}{dx} \right)^4 + \frac{du}{dx} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] dv \quad (3.57)$$

Desprezando-se os termos de quarta ordem e dividindo-se a expressão da energia em duas parcelas tem-se :

$$U_1 = \frac{1}{2} D \int \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dv \quad (3.58)$$

$$U_2 = \frac{1}{2} D \int \frac{du}{dx} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx \quad (3.59)$$

sendo U_1 a parcela quadrática da função e U_2 a parcela cúbica.

Por se tratar da estrutura treliça a função aproximadora utilizada tanto para u como para v será :

$$u(x) = \beta_1 + \beta_2 x \quad (3.60)$$

$$v(x) = \beta_3 + \beta_4 x \quad (3.61)$$

Impondo-se as condições de contorno :

$$u(x)|_{x=0} = u_1 \Rightarrow \beta_1 = u_1$$

$$u(x)|_{x=l} = u_2 \Rightarrow \beta_2 = \frac{(u_2 - u_1)}{l} \quad (3.62)$$

$$v(x)|_{x=0} = v_1 \Rightarrow \beta_3 = v_1$$

$$v(x)|_{x=l} = v_2 \Rightarrow \beta_4 = \frac{(v_2 - v_1)}{l}$$

Logo de (3.62) tem-se:

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

$$u(x) = u_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right) + u_2 \left(\frac{x}{l}\right) \quad (3.63)$$

e

$$v(x) = v_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right) + v_2 \left(\frac{x}{l}\right) \quad (3.64)$$

Por conveniência, são utilizadas coordenadas adimensionais $\xi = x/l$. Tem-se, então :

$$u(\xi) = u_1 (1 - \xi) + u_2 \xi \quad (3.65)$$

e

$$v(\xi) = v_1 (1 - \xi) + v_2 \xi \quad (3.66)$$

Aplicando-se a variação :

$$u_\xi = \frac{u(\xi)}{d\xi} = \frac{du(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{(u_2 - u_1)}{l} \quad (3.67)$$

$$v_\xi = \frac{v(\xi)}{d\xi} = \frac{dv(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{(v_2 - v_1)}{l} \quad (3.68)$$

A primeira parcela (3.58) da energia de deformação é :

$$U_1 = \frac{1}{2l} D \int \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx \quad (3.69)$$

substituindo-se (3.67) na primeira parcela da energia :

$$U_1 = \frac{1}{2l} D \int (u_\xi)^2 d\xi \quad (3.70)$$

Com $\frac{du(\xi)}{d\xi} = \bar{T}\eta(\xi)p$ tem-se em (3.70):

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2l} \int D(\bar{T}\eta(\xi)p)^2 d\xi = \\ &= \frac{1}{2l} \int p^T \eta^T(\xi) \bar{T}^T D \bar{T} \eta(\xi) p d\xi \end{aligned} \quad (3.71)$$

Com uma variação:

$$\delta U_1 = \delta p^T \left(\frac{1}{l} \int \eta^T(\xi) \bar{T}^T D \bar{T} \eta(\xi) d\xi \right) p \quad (3.72)$$

e com:

$$B = \bar{T} \eta(\xi) \quad (3.73)$$

substituindo-se (3.73) em (3.67):

$$\delta U_1 = \delta p^T \left(\frac{1}{l} \int B^T D B d\xi \right) p \quad (3.74)$$

Observando (3.74) nota-se que:

$$k_e = \frac{1}{l} \int B^T D B d\xi \quad (3.75)$$

com $D=[EA]$ a matriz de rigidez elástica k_e fica:

$$[k_e] = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A segunda parcela da energia de deformação (3.59) é :

$$U_2 = \frac{1}{2l} D \int \frac{du}{dx} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx \quad (3.76)$$

substituindo-se (3.68) na segunda parcela da energia :

$$U_2 = \frac{1}{2l} D \int u_\xi (v_\xi)^2 d\xi \quad (3.77)$$

Com $\frac{du(\xi)}{d\xi} = \frac{dv(\xi)}{d\xi} = \bar{T}\eta(\xi)p$ tem-se em (3.77):

$$U_2 = \frac{1}{2l} D \int [(\bar{T}\eta(\xi)p)(\bar{T}\eta(\xi)p)^2] d\xi \quad (3.78)$$

Com $P = D\bar{T}\eta(\xi)p$:

$$U_2 = \frac{1}{2l} \int [P(\bar{T}\eta(\xi)p)^2] d\xi$$

$$U_2 = \frac{1}{2l} P \int (\bar{T}\eta(\xi)p)^2 d\xi$$

$$U_2 = \frac{1}{2l} P \int (p^T \eta^T(\xi) \bar{T}^T \bar{T} \eta(\xi) p) d\xi \quad (3.79)$$

Com uma variação e com $B = \bar{T}\eta(\xi)$ em (3.79) fica:

$$\begin{aligned} \delta U_2 &= \delta p^T \left[\frac{1}{2l} P \int B^T B p d\xi \right] \\ &= \delta p^T \left[\frac{1}{l} P \int B^T B d\xi \right] p \end{aligned} \quad (3.80)$$

Logo:

$$k_g = \frac{1}{l} P \int B^T B d\xi \quad (3.81)$$

É a parcela não-linear da matriz de rigidez que fica:

$$[k_g] = \frac{P}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz de rigidez do elemento é dada por:

$$[k] = [k_e] + [k_g] \quad (3.82)$$

4. Formulações Geometricamente Exatas do Elemento de treliça Plana

O objetivo deste capítulo é o de apresentar formulações geometricamente exatas para análise não-linear de treliças planas. São apresentadas duas formulações sendo a primeira delas baseada no trabalho de Pimenta (23,24) e a segunda no trabalho de Lima e Brasil (15). Ambas utilizam o conceito da matriz de rigidez tangente. No capítulo 7 é apresentada a formulação para treliças espaciais.

4.1 Primeira Formulação

Seja um sistema de coordenadas global indicado na figura 4.1, e seja \mathbf{r} o vetor posição de um ponto no espaço em relação à origem e $\bar{\mathbf{p}}$ o vetor deslocamento desse ponto. O comprimento de uma barra na configuração de referência ou indeformada é dado por l , e o seu comprimento na configuração deformada é dado por l_c .

O alongamento linear dessa barra é dado por:

$$\varepsilon = \frac{l_c - l_r}{l_r} \quad (4.1)$$

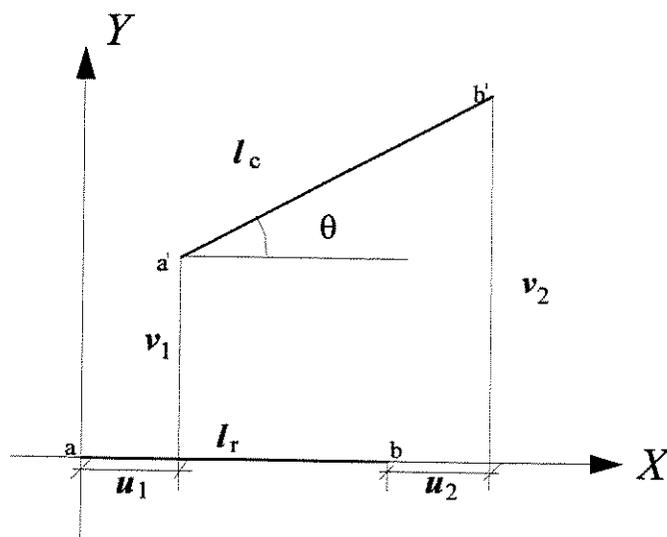


Figura 4.1 – Deslocamento de uma barra

A tensão nominal na barra na configuração deformada é:

$$\sigma = \frac{N}{A_r} \quad (4.2)$$

onde A_r é a área da seção transversal na configuração indeformada e N é a força normal atuante na barra, dada pela lei de Hooke:

$$N = EA\varepsilon \quad (4.3)$$

Sejam \mathbf{a} e \mathbf{b} as extremidades da barra. Com o vetor das coordenadas \mathbf{r} e o vetor dos deslocamentos $\bar{\mathbf{p}}$ de \mathbf{a} e \mathbf{b} , pode-se obter os vetores das coordenadas e deslocamentos nodais da barra.

$$\bar{\boldsymbol{\xi}}^T = [x_a \ x_b] \text{ e } \bar{\mathbf{p}}^T = [uv] \quad (4.4)$$

onde u_i são os deslocamentos longitudinais e v_i os deslocamentos transversais que para um elemento de treliça são u_1, v_1, u_2 e v_2 para os nós inicial e final da barra respectivamente.

Ainda, tem-se que os comprimentos da barra nas configurações indeformada e deformada são dados por:

$$l_r = dx \quad (4.5)$$

$$l_c = [(l_r + u)^2 + (v)^2]^{1/2} \quad (4.6)$$

Com isso pode-se obter o alongamento linear em função dos deslocamentos nodais.

$$\varepsilon = \frac{l_e - l_r}{l_r} = \left[\left(1 + \frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} - 1 \quad (4.7)$$

Sabendo-se que:

$$\delta\varepsilon = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\bar{p}} \delta\bar{p} \quad (4.8)$$

onde δ denota uma grandeza virtual. Fazendo-se:

$$b = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\bar{p}} \quad (4.9)$$

tem-se:

$$\delta\varepsilon = b \delta\bar{p} \quad (4.10)$$

Pelo Teorema dos Trabalhos Virtuais o trabalho dos esforços internos da barra é dado por:

$$P \delta \bar{p} = A l_r \sigma \delta \varepsilon \quad (4.11)$$

onde P é o vetor dos esforços nodais internos. Com (4.10):

$$P = A l_r \sigma b \quad (4.12)$$

ou:

$$P = N l_r b \quad (4.13)$$

A matriz de rigidez tangente da barra é definida por:

$$K_T = \frac{\partial P}{\partial \bar{p}} \quad (4.14)$$

Diferenciando a expressão (4.12) obtém-se:

$$[K_T] = A_{,l,b} \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{p}} + A_{,l,\sigma} \frac{\partial b}{\partial \bar{p}} \quad (4.15)$$

Pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \bar{p}} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{p}} \quad (4.16)$$

Lembrando que $D=[E]$, e:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = D \quad e \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{p}} = b$$

tem-se em (4.16):

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \bar{p}} = Db \quad (4.17)$$

Introduzindo-se (4.17) em (4.15), tem-se:

$$[K_T] = A_r l_r (D b^T b + \sigma \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \bar{p}^2}) \quad (4.18)$$

A expressão (4.18) fornece a matriz de rigidez tangente $[K_T]$, constituindo o primeiro membro desta expressão a matriz de rigidez elástica $[K_e]$ e o segundo a matriz geométrica de rigidez tangente, $[K_g]$ da barra. Pode-se escrever, então:

$$[K_T] = [K_e] + [K_g] \quad (4.19)$$

com :

$$[K_e] = D A_r l_r b^T b = E A_r l_r \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{p}} \right)^T \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{p}} \right) \quad (4.20)$$

e

$$[K_g] = N l_r \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \bar{p}^2} \quad (4.21)$$

Utilizando-se as mesmas funções do capítulo anterior:

$$u(x) = \beta_1 + \beta_2 x \quad (4.22)$$

$$v(x) = \beta_3 + \beta_4 x \quad (4.23)$$

Impondo-se as condições de contorno :

$$u(x)|_{x=0} = u_1 \Rightarrow \beta_1 = u_1$$

$$u(x)|_{x=l} = u_2 \Rightarrow \beta_2 = \frac{(u_2 - u_1)}{l} \quad (4.24)$$

$$v(x)|_{x=0} = v_1 \Rightarrow \beta_3 = v_1$$

$$v(x)|_{x=l} = v_2 \Rightarrow \beta_4 = \frac{(v_2 - v_1)}{l}$$

Logo de (4.24) tem-se:

$$u(x) = u_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right) + u_2 \left(\frac{x}{l}\right) \quad (4.25)$$

e

$$v(x) = v_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right) + v_2 \left(\frac{x}{l}\right) \quad (4.26)$$

Com essas funções de interpolação nas expressões (4.20) e (4.21), tem-se:

$$[K_e] = \frac{EA}{l_r} \begin{bmatrix} 1+2\mathcal{G} & \theta & -(1+2\mathcal{G}) & -\theta \\ \theta & \theta^2 & -\theta & -\theta^2 \\ -(1+2\mathcal{G}) & -\theta & 1+2\mathcal{G} & \theta \\ -\theta & -\theta^2 & \theta & \theta^2 \end{bmatrix}$$

e

$$[K_g] = \frac{N}{l_c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde $\theta = \frac{v_2 - v_1}{l_r}$ e $\mathcal{G} = \frac{u_2 - u_1}{l_r}$.

4.2 Segunda Formulação

Considere-se uma barra no sistema local de referência. O comprimento da barra na configuração indeformada é l_r e na configuração deformada é l_c . O vetor dos deslocamentos nodais, dado por \mathbf{p} , se relaciona com o ângulo θ entre a posição deformada e a indeformada e l_c da seguinte forma:

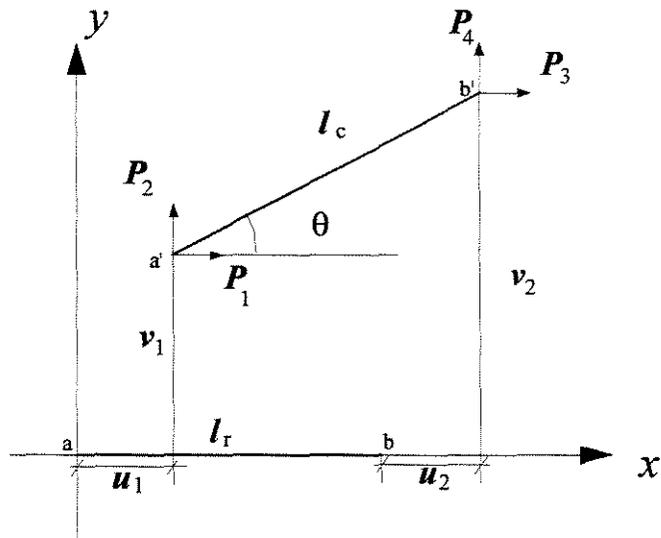


Figura 4.2 – Graus de liberdade e deslocamentos de uma barra de treliça

$$l_r + u_2 - u_1 = l_c \cos \theta \quad (4.27)$$

$$v_2 - v_1 = l_c \sin \theta \quad (4.28)$$

O alongamento linear da barra é dado por:

$$\varepsilon = \frac{l_c - l_r}{l_r} \quad (4.29)$$

As componentes do vetor das forças nodais são obtidas pelo equilíbrio das forças na barra:

$$P_3 = -P_1 = N \cos \theta \quad (4.30)$$

e

$$P_2 = -P_4 = N \sin \theta \quad (4.31)$$

onde P_i são as componentes do vetor das forças externas.

Sendo N a força normal atuante na barra dada pela lei de Hooke:

$$N = EA\varepsilon \quad (4.32)$$

ou,

$$N = EA \frac{l_c - l_r}{l_c} \quad (4.33)$$

onde EA expressa o produto da rigidez axial da barra.

Diferenciando-se (4.30) e (4.31) e escrevendo em notação matricial tem-se:

$$dP = c dN + N s d\theta \quad (4.34)$$

com $c = [-\cos\theta \ -\sin\theta \ \cos\theta \ \sin\theta]$ e $s = [\sin\theta \ -\cos\theta \ -\sin\theta \ \cos\theta]$.

A matriz de rigidez tangente da barra é dada por:

$$k_T = \frac{dP}{dp} \quad (4.35)$$

Logo, para obter-se k_T é preciso escrever $d\theta$ e dN em função de p . Com as equações (4.27), (4.28) e (4.33) chega-se à:

$$d\theta = \frac{1}{l_c} s dp \quad \text{e} \quad dN = \frac{EA}{l_r} c dp \quad (4.36)$$

Substituindo-se as expressões de (4.36) em (4.34), tem-se:

$$dP = \left(\frac{EA}{l_r} c^T c + \frac{N}{l_c} s^T s \right) dp \quad (4.37)$$

Comparando a expressão (4.37) com:

$$dP = [k_T] dp \quad (4.38)$$

nota-se que na expressão (4.37) o termo entre parêntesis fornece a matriz de rigidez do elemento para a teoria exata:

$$[k_T] = \frac{EA}{l_r} c^T c + \frac{N}{l_c} s^T s \quad (4.39)$$

O primeiro termo da expressão (4.39) constitui a matriz constitutiva de rigidez tangente, $[k_e]$ e o segundo termo de (4.39) é a matriz geométrica de rigidez tangente, $[k_g]$ da barra. Desta forma, tem-se

$$[k_T] = [k_e] + [k_g] \quad (4.40)$$

onde,

$$[k_e] = \frac{EA}{l_r} c^T c \quad (4.41)$$

tem a seguinte forma:

$$[k_e] = \frac{EA}{l_r} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \operatorname{sen} \theta & -\cos^2 \theta & -\cos \theta \operatorname{sen} \theta \\ \cos \theta \operatorname{sen} \theta & \operatorname{sen}^2 \theta & -\cos \theta \operatorname{sen} \theta & -\operatorname{sen}^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & -\cos \theta \operatorname{sen} \theta & \cos^2 \theta & \cos \theta \operatorname{sen} \theta \\ -\cos \theta \operatorname{sen} \theta & -\operatorname{sen}^2 \theta & \cos \theta \operatorname{sen} \theta & \operatorname{sen}^2 \theta \end{bmatrix}$$

e

$$[k_g] = \frac{N}{l_c} s^T s \quad (4.42)$$

tem a seguinte forma:

$$[k_g] = \frac{N}{l_c} \begin{bmatrix} \operatorname{sen}^2 \theta & -\operatorname{sen} \theta \cos \theta & -\operatorname{sen}^2 \theta & \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ -\operatorname{sen} \theta \cos \theta & \cos^2 \theta & \operatorname{sen} \theta \cos \theta & -\cos^2 \theta \\ -\operatorname{sen}^2 \theta & \operatorname{sen} \theta \cos \theta & \operatorname{sen}^2 \theta & -\operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ \operatorname{sen} \theta \cos \theta & -\cos^2 \theta & -\operatorname{sen} \theta \cos \theta & \cos^2 \theta \end{bmatrix}$$

Para obter-se a matriz de rigidez tangente no sistema global de referência basta aplicar-se uma rotação, da seguinte forma:

$$[K] = [T]^T [k_T] [T] \quad (4.43)$$

onde $T = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}$ e $t = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. Se α é o ângulo formado entre o sistema global de referência e a direção original da barra, tem-se:

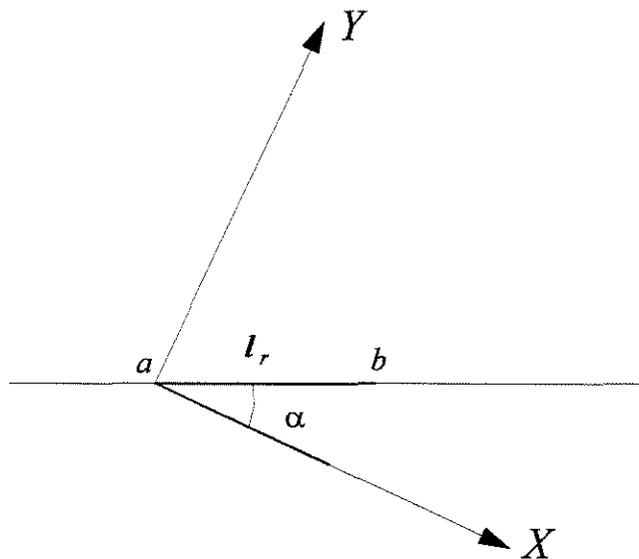


Figura 4.3 – Ângulo formado entre a barra e o sistema global de referência

$$\bar{c} = [-\cos\phi \quad -\text{sen}\phi \quad \cos\phi \quad \text{sen}\phi] \quad (4.44)$$

$$\bar{s} = [\text{sen}\phi \quad -\cos\phi \quad -\text{sen}\phi \quad \cos\phi] \quad (4.45)$$

onde $\phi = \theta + \alpha$ e $\bar{c} = cT$ e $\bar{s} = sT$.

A matriz de rigidez do elemento no sistema global é:

$$[K] = \frac{EA}{l_r} \bar{c}^T \bar{c} + \frac{N}{l_c} \bar{s}^T \bar{s} \quad (4.46)$$

Para obter-se a matriz de rigidez da estrutura faz-se a somatória de todos os elementos:

$$[\bar{K}] = \sum [\bar{A}]^T [K] [\bar{A}] \quad (4.47)$$

onde $[\bar{A}]$ é a matriz de incidência de cada barra.

5. Formulações de Segunda Ordem

Este capítulo visa apresentar formulações de segunda ordem que correspondem às formulações exatas apresentadas no capítulo anterior. A primeira formulação de segunda ordem é derivada da primeira formulação exata (23) do capítulo anterior de maneira consistente e a aproximação consiste no desenvolvimento em série com termos até segunda ordem das deformações generalizadas.

5.1 Primeira Formulação de Segunda Ordem

Seja um sistema de coordenadas global conforme a figura 4.1, e seja \mathbf{r} o vetor posição de um ponto no espaço em relação à origem e $\bar{\mathbf{p}}$ o vetor deslocamento desse ponto. O comprimento de uma barra na configuração de referência ou indeformada é dado por l , e o seu comprimento na configuração deformada é dado por l_c .

O alongamento linear dessa barra é dado por:

$$\varepsilon = \frac{l_c - l_r}{l_r} \quad (5.1)$$

A tensão nominal na barra na configuração deformada é:

$$\sigma = \frac{N}{A_r} \quad (5.2)$$

onde A_r é a área da seção transversal na configuração indeformada e N é a força normal atuante na barra, dada pela lei de Hooke:

$$N = EA_r \varepsilon \quad (5.3)$$

Com \mathbf{a} e \mathbf{b} sendo as extremidades da barra. Com o vetor das coordenadas \mathbf{r} e o vetor dos deslocamentos $\bar{\mathbf{p}}$ de \mathbf{a} e \mathbf{b} , pode-se obter os vetores das coordenadas e deslocamentos da nodais da barra da mesma forma que foi feito para a teoria exata.

$$\xi^T = [x_a \ x_b] \text{ e } \bar{\mathbf{p}}^T = [uv] \quad (5.4)$$

onde u_i são os deslocamentos longitudinais e v_i são os deslocamentos transversais que em um elemento de treliça plana são u_1, v_1, u_2 e v_2 para os nós inicial e final da barra respectivamente.

Ainda, os comprimentos da barra nas configurações indeformada e deformada são dados, respectivamente, por:

$$l_r = dx \quad (5.5)$$

$$l_c = [(l_r + u)^2 + (v)^2]^{1/2} \quad (5.6)$$

Com isso pode-se obter o alongamento linear em função dos deslocamentos nodais.

$$\varepsilon = \frac{l_c - l_r}{l_r} = \left[\left(1 + \frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} - 1 \quad (5.7)$$

A aproximação que caracteriza a teoria de segunda ordem aparecerá como uma expansão em série na expressão da deformação. A utilização de séries trigonométricas para aproximação da deformação é uma prática comum na engenharia que visa facilitar o estudo das estruturas. Ao se adotar uma determinada série para representar a deformação a expressão obtida será válida para todo o comprimento da barra sem que

seja necessário dividi-la em partes menores para sua resolução quando há ações aplicadas fora dos nós. Desde que se escolha a série adequada de forma que seus termos respeitem as condições de contorno os resultados obtidos estarão suficientemente próximos da solução exata, dependendo do número de termos utilizados na série. Para a aproximação da formulação de segunda ordem tem-se uma expansão em série com termos até a segunda ordem na expressão (5.7):

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \quad (5.8)$$

Lembrando que:

$$\delta\varepsilon = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\bar{p}} \delta\bar{p} \quad (5.9)$$

onde δ denota uma grandeza virtual. Fazendo-se:

$$b = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\bar{p}} \quad (5.10)$$

tem-se:

$$\delta\varepsilon = b \delta\bar{p} \quad (5.11)$$

Pelo Teorema dos Trabalhos Virtuais o trabalho dos esforços internos da barra é dado por:

$$P^T \delta\bar{p} = A_l \sigma \delta\varepsilon \quad (5.12)$$

onde P é o vetor dos esforços nodais internos. Com (5.11):

$$P = A_l \sigma b \quad (5.13)$$

ou,

$$P = N_l b \quad (5.14)$$

A matriz de rigidez tangente da barra é definida por:

$$K_T = \frac{\partial P}{\partial \bar{p}} \quad (5.15)$$

Diferenciando a expressão (5.14), obtém-se:

$$[K_T] = A_{l,b} \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{p}} + A_{l,\sigma} \frac{\partial b}{\partial \bar{p}} \quad (5.16)$$

Pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \bar{p}} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{p}} \quad (5.17)$$

Lembrando que:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = D \text{ e } \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{p}} = b$$

tem-se em (5.16):

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \bar{p}} = Db \quad (5.18)$$

Introduzindo (5.18) em (5.16), tem-se:

$$[K_T] = A_r l_r \left(D \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{p}} \right)^T \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{p}} \right) + \sigma \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \bar{p}^2} \right) \quad (5.19)$$

O primeiro termo da expressão (5.19) constitui a matriz constitutiva de rigidez tangente, $[K_e]$ e o segundo constitui a matriz geométrica de rigidez tangente, $[K_g]$ da barra. Pode-se escrever, então:

$$[K_T] = [K_e] + [K_g] \quad (5.20)$$

$$[K_e] = EA_r l_r \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{p}} \right)^T \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{p}} \right) \quad (5.21)$$

$$[K_g] = N_r \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \bar{p}^2} \quad (5.22)$$

com as funções de interpolação:

$$u(x) = \beta_1 + \beta_2 x \quad (5.23)$$

$$v(x) = \beta_3 + \beta_4 x \quad (5.24)$$

Impondo-se as condições de contorno :

$$u(x)|_{x=0} = u_1 \Rightarrow \beta_1 = u_1$$

$$u(x)|_{x=l} = u_2 \Rightarrow \beta_2 = \frac{(u_2 - u_1)}{l} \quad (5.25)$$

$$v(x)|_{x=0} = v_1 \Rightarrow \beta_3 = v_1$$

$$v(x)|_{x=l} = v_2 \Rightarrow \beta_4 = \frac{(v_2 - v_1)}{l}$$

Logo de (5.23) tem-se:

$$u(x) = u_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right) + u_2 \left(\frac{x}{l}\right) \quad (5.26)$$

e

$$v(x) = v_1\left(1 - \frac{x}{l}\right) + v_2\left(\frac{x}{l}\right) \quad (5.27)$$

Com essas funções de interpolação nas expressões (5.21) e (5.22), tem-se:

$$[K_e] = \frac{EA_r}{l_r} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [K_g] = \frac{N}{l_r} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde $[K_e]$ é a matriz de rigidez elástica e $[K_g]$ é a matriz de rigidez geométrica.

5.2 Segunda Formulação de Segunda Ordem

A formulação de segunda ordem apresentada a seguir é derivada da segunda formulação exata apresentada no capítulo anterior e tem como aproximação aquela sugerida por Venâncio (8,9).

O alongamento linear ε_0 segundo a teoria de primeira ordem é dado por:

$$\varepsilon_o = \frac{1}{l_r}(u_2 - u_1) = \frac{1}{l_r} m p \quad (5.28)$$

onde $\{p\}$ é a matriz dos componentes dos deslocamentos dos pontos **a** e **b**, lembrando que l_r é o comprimento da barra indeformada e $\{m\} = [-1 \ 0 \ 1 \ 0]$.

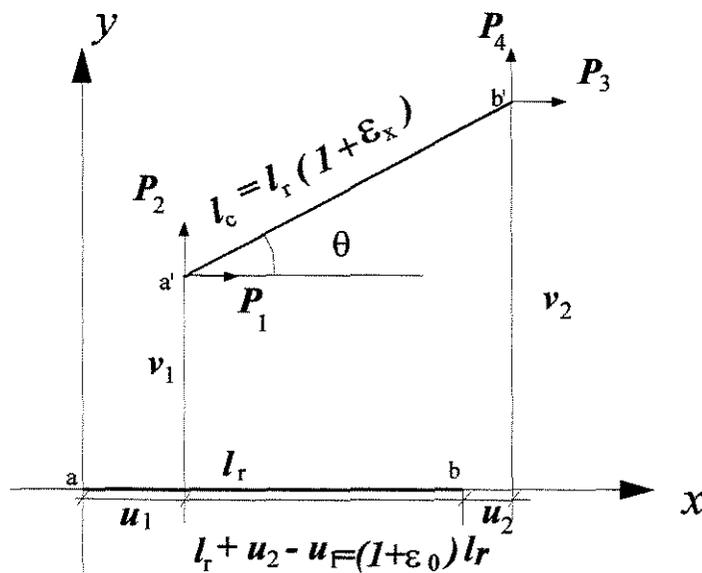


Figura 5.1 – Alongamento linear da teoria de primeira ordem

A rotação θ do eixo da barra é dada por:

$$\theta = \frac{1}{l_r}(v_2 - v_1) = \frac{1}{l_r} n p \quad (5.29)$$

onde $\{n\} = [0 \ -1 \ 0 \ 1]$. A equação (5.29) é válida para os casos em que se assume pequenas rotações, ou seja para uma teoria de segunda ordem.

Através da figura (5.1) pode-se verificar a seguinte relação entre ε , que é o alongamento real e ε_0 anteriormente definido :

$$l_r(1 + \varepsilon_0) = l_r(1 + \varepsilon) \cos \theta \quad (5.30)$$

Trabalhando a equação (5.30) :

$$1 + \varepsilon_0 = \cos \theta + \varepsilon \cos \theta$$

$$\varepsilon_0 = \cos \theta - 1 + \varepsilon \cos \theta$$

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = 1 - \cos \theta + \varepsilon - \varepsilon \cos \theta$$

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = (1 + \varepsilon)(1 - \cos \theta) \quad (5.31)$$

Para pequenos valores de deformação pode-se fazer $(1 + \varepsilon) \cong 1$ e tem-se, então :

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = 1 - \cos \theta \quad (5.32)$$

UNICAMP

BIBLIOTECA CENTRAL

SEÇÃO CIRCULANTE



Fazendo-se a aproximação para a teoria de segunda ordem:

$$\cos\theta \cong 1 - \frac{\theta^2}{2} \quad (5.33)$$

tem-se para o alongamento da teoria de segunda ordem :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{\theta^2}{2} \quad (5.34)$$

Note-se que na teoria de primeira ordem tem-se que $P_3 = -P_1 = N$ e $P_4 = -P_2 = 0$. Na teoria de segunda ordem as componentes da força normal serão :

$$P_3 = -P_1 = N \cos\theta \quad (5.35)$$

$$P_4 = -P_2 = N \sin\theta \quad (5.36)$$

onde N é a força normal aplicada e os P_i são as componentes da força externa. Por aproximação pode-se fazer $\cos\theta \cong 1$ e $\sin\theta \cong \theta$ e, escrevendo-se em notação matricial, tem-se :

$$P = Nm + Nn\theta \quad (5.37)$$

onde $\{P\}$ é o vetor das componentes da força normal N e $\{m\}$ e $\{n\}$ são as mesmas matrizes já definidas anteriormente.

Pela lei de Hooke tem-se:

$$N = EA\varepsilon \quad (5.38)$$

onde EA expressa o produto da rigidez axial da barra. Substituindo-se a equação (5.34) na (5.38) tem-se:

$$N = EA\left(\varepsilon_o + \frac{\theta^2}{2}\right) \quad (5.39)$$

Substituindo-se (5.39) em (5.37) e considerando-se (5.28) e (5.29) tem-se:

$$P = \frac{EA}{l_r} m^T m p + \frac{EA}{2} \theta^2 m^T + \frac{N}{l_r} n^T n p \quad (5.40)$$

Fazendo-se:

$$\begin{aligned} [k_e] &= \frac{EA}{l_r} m^T m \\ [k_g] &= \frac{N}{l_r} n^T n \end{aligned} \quad (5.41)$$

tem-se, em notação matricial:

$$\{P\} = [k_e]\{p\} + \frac{EA}{2} \theta^2 \{m\}^T + [k_g]\{p\} \quad (5.42)$$

onde $[k_e]$ é a matriz de rigidez elástica linear e $[k_g]$ a matriz de rigidez geométrica que leva em conta o efeito da força aplicada e são escritas da seguinte forma:

$$[k_e] = \frac{EA}{l_r} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [k_g] = \frac{N}{l_c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diferenciando-se a equação (5.42) em relação aos deslocamentos $\{p\}$ obtém-se:

$$\begin{aligned} \{dP\} = & \left([k_e] + \frac{EA}{l_r} \theta (\{n\}^T \{m\} + \{m\}^T \{n\} + \theta \{n\}^T \{n\}) + \right. \\ & \left. + [k_g] \right) \{dp\} \end{aligned} \quad (5.43)$$

Comparando a expressão (5.43) com a seguinte expressão :

$$\{dP\} = [k_T] \{dp\} \quad (5.44)$$

tem-se:

$$[k_T] = [k_e] + [\Delta k_e] + [k_g] \quad (5.45)$$

onde $[k_T]$ é a matriz de rigidez tangente do elemento e $[\Delta k_e]$ é a matriz de correção de $[k_e]$ devido as mudanças de coordenadas dada por:

$$[\Delta k_e] = \frac{EA}{l_r} \theta (\{n\}^T \{m\} + \{m\}^T \{n\} + \theta \{n\}^T \{n\}) \quad (5.46)$$

$$[\Delta k_e] = \frac{EA}{l_r} \begin{bmatrix} 0 & \theta & 0 & -\theta \\ \theta & \theta^2 & -\theta & -\theta^2 \\ 0 & -\theta & 0 & \theta \\ -\theta & -\theta^2 & \theta & \theta^2 \end{bmatrix}$$

onde $\theta = \frac{v_2 - v_1}{l_r}$

A matriz $[k_T]$ obtida se refere ao sistema local de coordenadas. Para obter-se a matriz de rigidez tangente da estrutura, que é dada no sistema de coordenadas globais, deve-se primeiramente, aplicar à $[k_T]$ uma rotação, que será dada por:

$$[K] = [T]^T [k_T] [T] \quad (5.47)$$

onde $[T] = \begin{bmatrix} [t] & [0] \\ [0] & [t] \end{bmatrix}$ e $[t] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen} \alpha \\ -\text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ e α é o ângulo entre o sistema global e o sistema local de referência.

Para se obter a matriz de rigidez de toda a estrutura basta fazer:

$$[\bar{K}] = \Sigma [\bar{A}]^T [K] [\bar{A}] \quad (5.48)$$

onde $[\bar{A}]$ é a matriz de incidência.

6. Técnicas para Resolução de Equações Não-lineares

6.1 Processo Incremental

O Processo Incremental consiste na divisão do carregamento em incrementos de carga, que podem ter a mesma magnitude, que é a forma mais utilizada, ou magnitudes diferentes. Desta forma assume-se que a solução é obtida para uma intensidade de carregamento $\lambda \{P\}$, onde $\{P\}$ expressa a magnitude das ações nodais e λ faz variar sua intensidade. Assim, tem-se:

$$r(p, \lambda) = 0 \tag{6.1}$$

onde $r(p, \lambda)$ é um sistema de equações, p é a solução do sistema de equações e λ é o parâmetro que define a intensidade da carga.

Supondo que para $\lambda = \lambda_0$ a solução do sistema $r(p, \lambda_0) = 0$ é conhecida, então partindo-se de $\lambda = \lambda_0$ admite-se a existência de uma seqüência $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de forma que a solução de $r(p, \lambda_{k-1}) = 0$ seja um ponto de partida para a resolução de $r(p, \lambda_k) = 0$. O procedimento é repetido até que se atinja o valor total do carregamento aplicado.

Considerando-se a análise não-linear de estruturas, as equações de equilíbrio são dadas da seguinte forma:

$$r(p) = F(p) - P \quad (6.2)$$

onde $F(p)$ expressa os esforços internos e P expressa as ações externas.

Tem-se:

$$r(p, \lambda) = F(p) - \lambda P \quad (6.3)$$

Para $\lambda = \lambda_0 = 0$ tem-se uma solução conhecida para (6.3) que é a posição da estrutura onde $p=0$ e todos os deslocamentos impostos são nulos e que coincide com a posição indeformada da estrutura. Por esta razão tem-se:

$$r(p, \lambda_0) = 0 \quad (6.4)$$

Aplicando-se o processo incremental ao problema tem-se que esta solução servirá de base para obtenção da solução para $\lambda = \lambda_l$. É necessário então conhecer λ_l que pode ser definida como uma seqüência de n valores de λ da seguinte forma:

$$\lambda_k = \frac{k}{n} \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (6.5)$$

Se $\lambda_n = 1$, tem-se:

$$r(p, \lambda_n) = r(p) \quad (6.6)$$

Nos casos em que são utilizadas magnitudes diferentes é necessário que se conheça com antecedência o comportamento da estrutura a fim de que se possa utilizar incrementos menores de carga nas faixas mais críticas para que se obtenha resultados mais precisos. Com a divisão de carregamento em incrementos suficientemente pequenos de carga obtém-se para a estrutura, a cada incremento, um comportamento próximo do comportamento linear, sendo esta a principal vantagem do processo, já que o cálculo passa a corresponder a uma sucessão de problemas lineares de simples solução.

Para estruturas sujeitas a grandes deslocamentos, porém, o equilíbrio entre os esforços internos e o carregamento aplicado não é garantido pelo processo puramente incremental. Nesse processo admite-se que os deslocamentos obtidos com a análise linear a cada incremento sejam a solução para esse incremento não havendo verificação do equilíbrio. Dessa forma não se leva em conta os resíduos de cada incremento e os

resultados obtidos quando ocorrem grandes deslocamentos tendem a se afastar da solução exata. Em seu artigo de 1972 Haisler e Strickling (11) já separavam os procedimentos existentes em procedimentos Classe I, da qual faziam parte os procedimentos que não garantiam o equilíbrio e da qual o método puramente incremental fazia parte, e procedimentos Classe II, da qual faziam parte aqueles procedimentos que buscavam garantir o equilíbrio em qualquer ponto da curva carga - deslocamento. O método de Newton-Raphson pertencia a esta classe de procedimentos.

6.2 Método de Newton-Raphson

O Método de Newton-Raphson é o método iterativo mais utilizado para abordagem de problemas de não-linearidade sendo, por esta razão, aqui apresentado. O método consiste em se determinar o desequilíbrio, ou resíduo, entre os esforços internos e as forças aplicadas existente nos nós da estrutura ao final de cada iteração. Com o resíduo são corrigidos, então, os incrementos de deslocamento anteriormente obtidos. A formulação para um sistema de equações não-lineares é dada por:

$$r(p) = 0 \tag{6.7}$$

A solução para esse sistema será dada por p^* . O algoritmo do método Newton-Raphson é obtido expandindo-se cada uma das funções $r_i(p)$ em série de Taylor em torno de um ponto p^0 qualquer e mantendo-se os dois primeiros termos. Tem-se, então:

$$r_i(p) \approx r_i(p^0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial p_j} (p_j - p_j^0) \quad (6.8)$$

Fazendo-se:

$$S = \frac{\partial r_i}{\partial p_j} \quad (6.9)$$

tem-se:

$$r(p) = r(p^0) + S(p^0)(p - p^0) \quad (6.10)$$

A matriz S é a matriz Jacobiana de $r(p)$ que na análise de estruturas é a Matriz de Rigidez e $r(p)$ é o vetor resíduo. Desta forma, tem-se como solução aproximada para $r(p) = 0$:

$$r(p^0) + S(p^0)(p - p^0) = 0 \Rightarrow p = p^0 - S(p^0)^{-1}r(p^0) \quad (6.11)$$

A expressão dada em (6.11) para p como solução do sistema de equações é uma nova aproximação para p^* e será o novo ponto de partida para uma nova iteração e assim sucessivamente, até que se obtenha uma aproximação melhor para p^* , o que ocorrerá caso a aproximação tomada como ponto de partida seja suficientemente próxima da solução.

6.3 Processos Incremental-Iterativos

Os métodos incremental-iterativos ou incrementais não-lineares diferem dos puramente incrementais por fazer a cada incremento de carga a verificação do equilíbrio entre o carregamento e os esforços internos procurando dessa forma minimizar os erros resultantes do processo puramente incremental. Para tanto utiliza-se um esquema iterativo dentro de cada incremento de carga. O método iterativo mais utilizado é o de Newton-Raphson. Assim, a partir de $\lambda = \lambda_0$ pode-se obter através do método de Newton-Raphson a solução para $\lambda = \lambda_k$ sucessivamente até obter-se a solução para $\lambda = \lambda_n$. As equações, escritas em notação matricial, utilizadas no método incremental-iterativo de Newton-Raphson são:

$$[S_j]_i [\Delta p]_i = [\Delta F]_i - [\Delta P]_i \quad (6.12)$$

onde a expressão do lado direito representa a força desbalanceada ou o resíduo.

Os deslocamentos incrementais utilizados para montar a Matriz de Rigidez $[S]_i$ são dados por:

$$[\Delta p] = [\Delta p]_1 + [\Delta p]_2 + \dots + [\Delta p]_n \quad (6.13)$$

O primeiro passo deste método é a utilização dos esforços internos e dos deslocamentos relativos ao incremento anterior para obter-se a Matriz de Rigidez atualizada do elemento. A partir de então inicia-se o esquema iterativo através do qual a Matriz de Rigidez é continuamente atualizada com os incrementos de deslocamento da iteração anterior, o que ocorrerá da seguinte forma: com a Matriz de Rigidez $[S_1]_0$ obtida então e com o novo incremento de carga $[\Delta P]$ obtém-se os deslocamentos incrementais relativos a iteração atual $[\Delta p]_1$. Em seguida, com os deslocamentos $[\Delta p]_1$ e com a expressão (6.13), obtém-se $[\Delta p]$ com o qual atualiza-se a Matriz de Rigidez e através da expressão (6.12) obtém-se a força desbalanceada. Com a força desbalanceada e a Matriz de Rigidez atualizada $[S_1]_1$ procede-se a obtenção do novo incremento de deslocamento $[\Delta p]_2$ e repete-se o procedimento até que a força desbalanceada apresente um valor suficientemente pequeno que será estabelecido por um critério de convergência.

Uma das grandes desvantagens do método de Newton-Raphson é o grande trabalho computacional necessário para atualização da Matriz de Rigidez à cada iteração. Visando diminuir esse trabalho pode-se utilizar o método de Newton-Raphson modificado no qual procede-se a atualização da Matriz de Rigidez somente na primeira iteração de cada incremento, ou, em alguns casos na primeira e na segunda iteração de cada incremento. Pode-se ainda atualizar a Matriz de Rigidez na primeira iteração e mantê-la constante durante várias iterações ou incrementos atualizando-a novamente quando a convergência começar a ficar comprometida. A principal desvantagem nesse caso é que para realizar este tipo de análise é necessário um bom conhecimento da estrutura, de seu

comportamento e também da análise não-linear, já que deve-se decidir quando atualizar a Matriz de Rigidez e mesmo se é necessário modificar o tamanho do incremento, pois o processo pode divergir caso a Matriz de Rigidez não seja atualizada com a frequência necessária. Matthies (18) comenta as desvantagens do método de Newton-Raphson em seu artigo e apresenta a formulação dos métodos chamados Quasi-Newton, que consistem na utilização da inversa da Matriz de Rigidez Tangente do sistema, de forma que não é necessária a obtenção da Matriz de Rigidez. Estes métodos não serão aqui apresentados, mas podem ser encontrados em Matthies (18).

6.4 Critério de Convergência

Nota-se que para qualquer processo iterativo existe a necessidade de um critério de convergência, ou seja, um valor com o qual sejam comparados os resultados obtidos a cada iteração a fim de se determinar a parada e o início de um novo incremento. Em análise estrutural esse critério pode ser dado de três formas: através do critério de forças residuais, do critério dos deslocamentos e do critério de tensões.

O critério de forças residuais é dado por:

$$\|r(x)\| \leq \beta \|r(x^0)\| \quad (6.14)$$

onde $r(x)$ é o vetor resíduo e $\| \cdot \|$ é a norma do vetor resíduo.

Desta forma se está comparando o desequilíbrio entre as forças externas aplicadas e os esforços internos da configuração atual no ponto x àquela da configuração anterior no ponto x_0 . Outra alternativa para o critério de convergência de forças residuais pode ser também:

$$\|r(x)\| \leq \beta \quad (6.15)$$

onde o critério de parada é dado somente pela comparação do valor do desequilíbrio com o valor de β . O valor de β depende das unidades utilizadas na análise, mas um valor normalmente utilizado é $\beta = 10^{-3}$, podendo variar entre 10^{-2} e 10^{-6} .

O critério dos deslocamentos é dado por:

$$\|\Delta p(x)\| \leq \beta \|p_{ref}\| \quad (6.16)$$

onde β é a tolerância e tem o mesmo valor utilizado para o critério de força, p_{ref} é um valor de referencia dado por $p_{ref} = \{p\}$ e $\|\Delta p(x)\|$ é a variação de deslocamento numa determinada iteração.

No critério das tensões, da mesma forma que nos critérios anteriores, faz-se a comparação entre a variação de tensão durante cada iteração com um nível de tensão previamente estabelecido. Este critério é mais usado quando se tem grandes deformações.

Quanto ao cálculo das normas tem-se três opções:

$$\begin{aligned}\|\{r\}\|_1 &= \sum |r_i| \\ \|\{r\}\|_2 &= (\sum r_i^2)^{1/2} \\ \|\{r\}\|_\infty &= \max \|r_i\|\end{aligned}\tag{6.17}$$

onde a segunda fórmula da expressão (6.17) é a norma euclidiana e a terceira é a norma máxima. Bergan e Clough em seu artigo (2) sugerem para o critério dos deslocamentos uma modificação nas normas 1 e 2 que consiste na sua divisão pelo número de componentes incógnitas, ou seja, uma média. Segundos eles, porém, não há diferença significativa na utilização de uma ou outra norma, podendo-se levar em consideração o tipo de norma no valor escolhido para β . Eles, contudo, destacam a utilização da norma do máximo.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

7. Análise Não Linear Geométrica de Treliças utilizando Programas

Apresenta-se uma breve descrição do programa implementado em Pascal para o cálculo de esforços em treliças espaciais utilizando uma formulação não linear geométrica e complementando os capítulos 4 e 5. Para efeito de apresentação este programa é denominado TNLG. Apresenta-se também uma descrição dos principais comandos necessários na utilização do programa Ansys para a análise não linear de treliças.

7.1 Programa TNLG

O programa TNLG, implementado em linguagem Pascal, utilizado no presente trabalho, foi desenvolvido com a colaboração do professor Vinícius Arcaro, da Faculdade de Engenharia Civil da UNICAMP. O programa trata do cálculo de treliças espaciais de comportamento não-linear geométrico sujeitas a carregamentos concentrados nos nós e fornece como resultados os deslocamentos nodais e esforços axiais nas barras. O processo de resolução do sistema de equações não-lineares utilizado foi o incremental-iterativo, com a utilização do método de Newton-Raphson.

O programa se inicia com um procedimento para leitura de dados do arquivo de entrada, tais como coordenadas nodais, graus de liberdade e propriedades dos elementos,

carregamento e número de incrementos de carga e parâmetros de convergência. Nesta fase também é gerado o vetor que contém os nós com graus de liberdade e os nós fixos ordenadamente para a posterior montagem do sistema de equações.

Após a leitura de dados e determinação das propriedades dos elementos calcula-se a matriz de rigidez do elemento, monta-se o vetor resíduo e matriz de rigidez da estrutura, monta-se o vetor de ações aplicada para cada nó e resolve-se o sistema de equações. Segue-se, então, com a atualização do vetor resíduo e da matriz de rigidez da estrutura em quantas iterações forem necessárias até haja convergência. Para evitar que o programa caia em loop caso a solução não convirja limitou-se o número de iterações a 25 por incremento.

Após ser atingida a convergência no último incremento de carga o programa gera um arquivo de saída que contém os deslocamentos nodais obtidos para cada nó no último incremento, assim como as deformações axiais e tensões das barras da treliça.

Um outro arquivo de saída é ainda gerado pelo programa, arquivo esse que contém os dados de entrada para o programa comercial Ansys, utilizado neste trabalho com o objetivo de comparar resultados, já no formato correspondente.

A seguir apresenta-se a formulação utilizada no programa para obtenção da matriz de rigidez da barra de treliça.

7.1.1 Formulação de Elemento de Treliça

Nesta seção é apresentada a formulação utilizada no programa TNLG para um elemento de treliça. Para tanto considere-se uma barra de treliça cujo comprimento l_r na posição indeformada é dado por:

$$l_r = \lambda q \tag{7.1}$$

onde q é um vetor unitário. O comprimento da barra na posição deformada é dado pelo vetor l_c . Sendo pi e pf os deslocamentos nodais da barra nos nó inicial e no nó final respectivamente, tem-se que:

$$l_c = \lambda q - pi + pf \quad (7.2)$$

A equação (7.2) fornece a expressão para o vetor l_c do comprimento da barra na configuração deformada. Fazendo-se:

$$z = \frac{pf - pi}{\lambda} \quad (7.3)$$

e substituindo na (7.1), tem-se:

$$l_c = \lambda(q + z) \quad (7.4)$$

Com (7.4) pode-se obter o comprimento da barra de treliça na configuração deformada:

$$\|l_c\| = \lambda (1 + 2q^T z + z^T z)^{1/2} \quad (7.5)$$

Fazendo-se:

$$\delta = 2q^T z + z^T z \quad (7.6)$$

com (7.6) em (7.5):

$$\|l_c\| = \lambda (1 + \delta)^{1/2} \quad (7.7)$$

A deformação longitudinal da barra é dada por:

$$\varepsilon = \frac{\|l_c\| - \lambda}{\lambda} \quad (7.8)$$

levando em conta a expressão (7.7), tem-se:

$$\varepsilon = (1 + \delta)^{1/2} - 1 \quad (7.9)$$

A fim de evitar problemas caso a parcela δ seja muito pequena, escreve-se a expressão do alongamento longitudinal da seguinte forma:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{(1 + \delta)^{1/2} + 1} \quad (7.10)$$

Para obter-se a expressão da matriz de rigidez utiliza-se o Método da Mínima Energia Potencial. Para este fim deve-se escrever a expressão da energia potencial de deformação:

$$U = A l_r \int_0^\varepsilon \sigma(\vartheta) d\vartheta \quad (7.11)$$

A variação ou gradiente da energia de deformação em relação aos deslocamentos nodais pi e pf é:

$$\nabla U = A l_r \sigma(\varepsilon) \nabla \varepsilon \quad (7.12)$$

Aplicando em (7.9) uma variação em relação aos deslocamentos nodais pi e pf :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial pi_j} = \frac{(1+\delta)^{-1/2}(q_j + z_j)}{\lambda} = -\frac{\phi}{\lambda} \quad (7.13)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial pf_j} = \frac{(1+\delta)^{-1/2}(q_j + z_j)}{\lambda} = \frac{\phi}{\lambda}$$

Escrevendo em notação matricial (7.13) fica:

$$\nabla_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon}{\partial pi} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial pf} \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} -\phi \\ \phi \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

e a energia potencial de deformação é dada por:

$$\nabla U = Al, \sigma(\varepsilon) \begin{bmatrix} -\phi \\ \phi \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

A matriz de rigidez da barra de treliça é a hessiana de U em relação aos deslocamentos nodais pi e pf , logo:

$$\nabla^2 U = Al_r \left[\frac{d\sigma}{d\varepsilon} (\nabla \varepsilon)(\nabla \varepsilon)^T + \sigma(\varepsilon) \nabla^2 \varepsilon \right] \quad (7.16)$$

Para obter-se a hessiana de U deve-se derivar (7.13) uma segunda vez em relação aos deslocamentos nodais pi e pf . Tem-se, então, já em notação matricial:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial pi \partial pi} = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial pf \partial pf} = \frac{(1+\delta)^{-1/2}}{\lambda^2} (I - \phi \phi^T) \quad (7.17)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial pi \partial pf} = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial pf \partial pi} = \frac{(1+\delta)^{-1/2}}{\lambda^2} (I - \phi \phi^T)$$

Com as componentes de (7.17) tem-se a seguinte matriz para U :

$$\nabla^2 \varepsilon = \frac{(1+\delta)^{-1/2}}{\lambda^2} \begin{bmatrix} (I - \phi \phi^T) & -(I - \phi \phi^T) \\ -(I - \phi \phi^T) & (I - \phi \phi^T) \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

Com a expressão (7.18) a matriz de rigidez da barra de treliça fica:

$$\nabla^2 U = A \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} \phi\phi^T & -\phi\phi^T \\ -\phi\phi^T & \phi\phi^T \end{bmatrix} + A\sigma(\varepsilon) \frac{(1+\delta)^{-1/2}}{\lambda} \begin{bmatrix} (I-\phi\phi^T) & -(I-\phi\phi^T) \\ -(I-\phi\phi^T) & (I-\phi\phi^T) \end{bmatrix}$$

(7.19)

7.2 A Utilização do Programa Ansys

O programa comercial Ansys apresenta vasta biblioteca de elementos que se adaptam a todo tipo de estrutura com diversos comportamentos diferentes. No presente trabalho o elemento utilizado para representar as barras de treliça foi o elemento LINK8 da biblioteca do Ansys, que possui as seguintes características: o elemento é um elemento de barra com 2 nós, I e J e três graus de liberdade por nó, UX, UY e UZ, ou seja, translação nas direções X,Y e Z, assume-se que a barra seja reta, carregada axialmente nas extremidades com propriedades uniformes ao longo de seu comprimento.

No caso específico de estruturas sujeitas a grandes deslocamentos, rotações e deformações o programa Ansys apresenta as seguintes opções a serem utilizadas dependendo do problema:

1. Large Strain – que considera deformações finitas e grandes rotações com mudanças na geometria da estrutura.
2. Large Deflection – que considera grandes rotações e deslocamentos com a hipótese de pequenas deformações. Neste caso, não há mudança na geometria da estrutura havendo somente movimentos de corpo rígido.
3. Stress Stiffening – que considera pequenas deformações e rotações constituindo-se numa aproximação para estas grandezas.

4. Spin softening – considera a hipótese de pequenas rotações e deformações levando em conta movimentos radiais do elemento.

No presente trabalho não foi utilizada a última opção, Spin Softening, pois não foram tratadas estruturas cujos elementos estivessem submetidos a movimentos radiais. As outras três opções foram utilizadas quando da análise de estruturas com comportamento não-linear pelo programa Ansys.

Para ativar as opções Large Strain e Large Deflection basta utilizar o comando **NLG,ON**, e o programa escolherá a opção mais apropriada para a estrutura em questão levando em conta o elemento da biblioteca do programa escolhido para representá-la. Para o caso de treliças que tem o elemento LINK8 para representá-las a opção Large Strain não esta disponível, sendo ativada, então, a opção 2, Large Deflection. A opção Stress Stiffening também foi utilizada no presente trabalho. Para ativa-la basta dar o comando **SSTIF,ON**. Essa opção foi necessária, pois através dela o programa acrescenta à Matriz de Rigidez da estrutura a Matriz de Rigidez chamada Geométrica que leva em consideração o efeito do estado de tensões no cálculo da Matriz de Rigidez.

O programa Ansys apresenta como opções para o cálculo de sistemas não-lineares de equação o método clássico de Newton-Raphson assim como o modificado, sendo possível ao usuário escolher aquele que seja mais adequado ao caso em estudo. Além dessas opções o Ansys ainda oferece a utilização da busca unidimensional juntamente com o método Newton-Raphson para acelerar a convergência. A busca unidimensional consiste em encontrar um valor para um parâmetro Λ que minimize a força desbalanceada ou resíduo de modo a que o processo venha a convergir mais rapidamente, tendo-se assim:

$$\{P\}_{i+1}^j = \{P\}_i^j - \Lambda_i \{r\}_i^j \quad (7.20)$$

O Ansys ainda oferece o Método da Rigidez Inicial no qual a Matriz de Rigidez é calculada no início do primeiro incremento de carga e permanece constante até o final do processo.

Quanto aos critérios de convergência o programa Ansys oferece como opções os critérios dos deslocamentos e das forças residuais, sendo o critério de forças residuais o padrão. Esses critérios são dados pelas expressões (6.14) e (6.16), do capítulo 6, sendo o valor padrão para ambos os critérios de 10^{-3} .

As três opções de norma apresentadas pela expressão (6.17), do capítulo anterior, são fornecidas pelo programa, sendo a norma Euclidiana adotada como padrão.

8.Exemplos de Aplicação

Neste capítulo são apresentados alguns exemplos de estruturas calculadas levando-se em conta a não-linearidade geométrica. Estes exemplos foram encontrados na literatura referente ao assunto e serão usados para uma comparação com os resultados obtidos no presente trabalho através do programa computacional, desenvolvido em linguagem Pascal, baseado na formulação estudada. Alguns resultados foram comparados com valores calculados através do programa comercial Ansys. Os exemplos são puramente acadêmicos para validação da formulação.

8.1 Treliça de duas Barras

Esta estrutura foi analisada por Rubert (30) e Reis (29) e consiste em uma treliça plana com apenas duas barras iguais, que fazem um ângulo de 30° com a horizontal, têm um módulo de elasticidade de 30000 ksi e área de 1in^2 . A estrutura está sujeita a um carregamento de 1800 kips. As unidades de medidas, apesar de não estarem de acordo com o Sistema Internacional, foram mantidas, a fim de facilitar-se a comparação de resultados. Em sua análise Reis ainda inclui resultados de análise não-linear Geométrica com e sem estiramento, designadas por ele respectivamente como (NLG 1) (NLG 0).

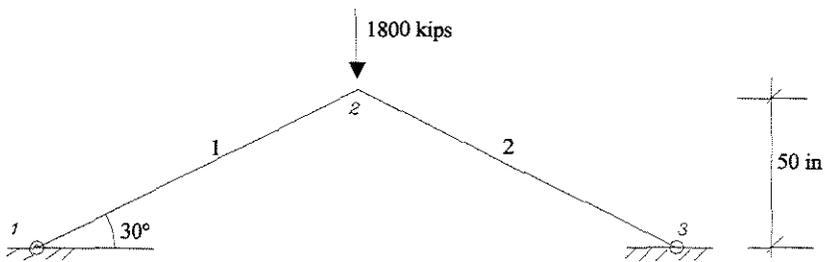


Figura 8.1.1 – Treliça de Duas Barras

A tabela (8.1.1) apresenta os resultados obtidos para a estrutura deste primeiro exemplo. Como pode ser observado os resultados para cada incremento de carga estão bem próximos, só havendo diferenças significativas a partir do oitavo incremento, no qual as barras da estrutura deixam de trabalhar a compressão e passam a trabalhar tracionadas. Note-se que no oitavo incremento os valores encontrados variam. Reis obtém para sua análise NLG0 (sem estiramento) um valor já alto no oitavo incremento, valor que se mostra bem menor na sua análise com estiramento. Também menores são os valores obtidos por Rubert que se aproximam dos valores obtidos no presente trabalho, através do programa da dissertação. Já no nono incremento os valores de Reis para análise sem estiramento se aproximam mais dos obtidos nesta dissertação e diferem em muito do valor obtido por Rubert. Isso se deve a inversão de esforços ocorrida devido ao efeito “snap-through” sofrido pelas barras da estrutura, o que resulta em um salto da estrutura de uma posição de equilíbrio para outra. A figura (8.1.2) demonstra esse efeito.

Tabela 8.1.1 – Comparação de resultados da treliça plana de duas barras

Incremento de Carga	Força no nó 2 (Kips)	Deslocamentos Vertical do nó 2 (in)			
		Reis NLG 0	Reis NLG 1	Rubert	Segnini
1	200	-1,391	-1,376	-1,380	-1,376
2	400	-2,917	-2,850	-2,850	-2,850
3	600	-4,621	-4,448	-4,450	-4,448
4	800	-6,572	-6,207	-6,210	-6,207
5	1000	-8,904	-8,191	-8,190	-8,190
6	1200	-11,930	-10,520	-10,520	-10,514
7	1400	-17,140	-13,450	-13,450	-13,450
8	1600	-108,400	-14,860	-18,140	-18,141
9	1800	-109,300	*	-22,280	-109,858

* as barras passaram de comprimidas a tracionadas

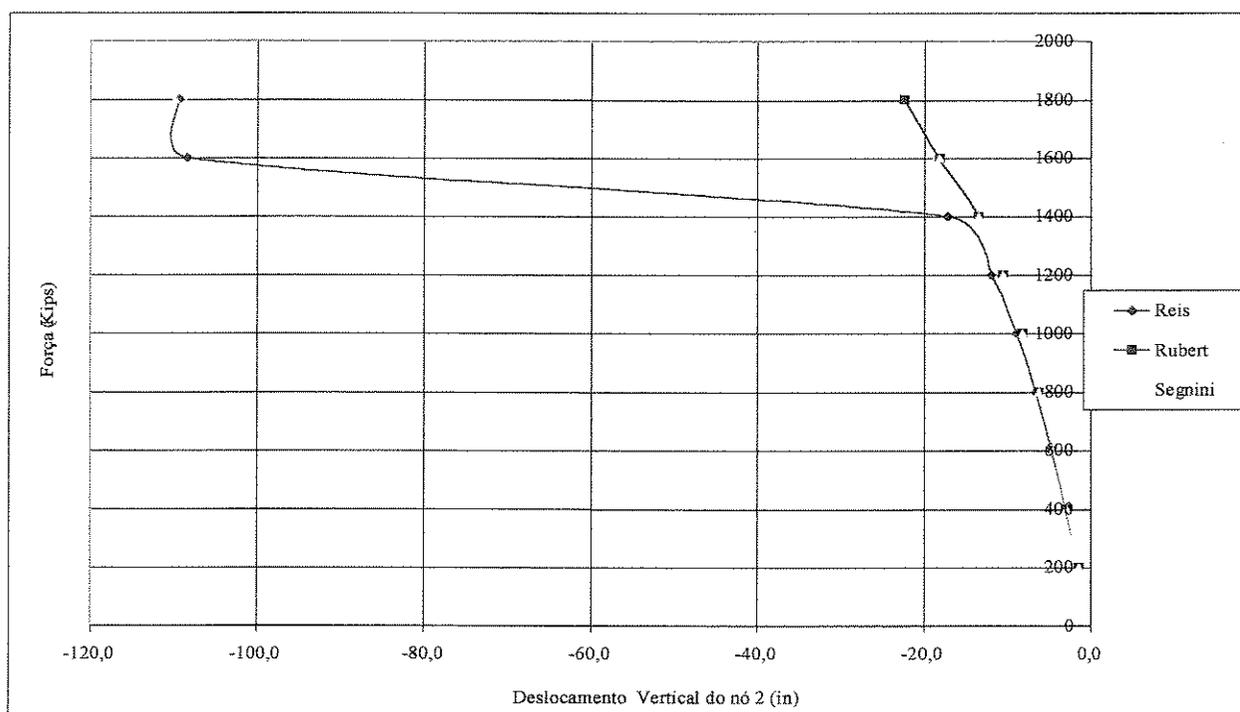


Figura 8.1.2 – Curva Força x Deslocamento Vertical do nó 2 da treliça plana de duas barras

8.2 Treliça de uma Barra

A figura (8.2.1) mostra a treliça formada por uma única barra inclinada com um módulo de elasticidade $E=20500 \text{ kN/cm}^2$ e área $A=6,526 \text{ cm}^2$, submetida a uma carga vertical $P= 10\text{kN}$. Este exemplo também foi analisado por Reis (29) considerando NLG com e sem estiramento. O exemplo também foi analisado utilizando-se o programa Ansys. Na tabela (8.2.1). estão apresentados os resultados obtidos com o programa escrito a partir da formulação da dissertação, os resultados de Reis e os resultados com o programa Ansys.

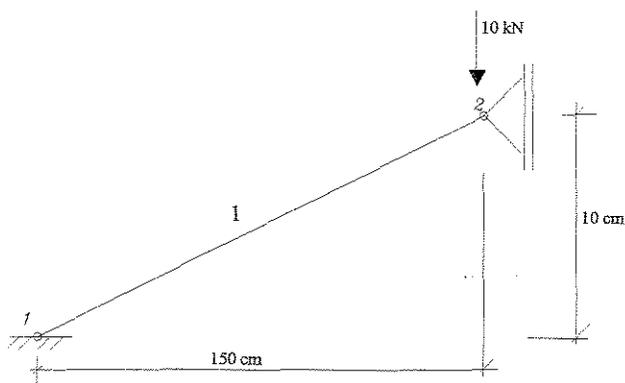


Figura 8.2.1 - Treliça de 1 Barra

Tabela 8.2.1 – Comparação de resultados da treliça plana de uma barra

Incremento de Carga	Força no nó 2 (kN)	Deslocamentos Vertical do nó 2 (cm)			
		Reis NLG 1	Reis NLG 0	Ansys	Segnini
1	1	-0,264	-0,264	-0,264	-0,264
2	2	-0,553	-0,553	-0,553	-0,553
3	3	-0,872	-0,873	-0,872	-0,872
4	4	-1,234	-1,235	-1,234	-1,234
5	5	-1,658	-1,660	-1,658	-1,658
6	6	-2,187	-2,192	-2,185	-2,187
7	7	-2,957	-2,969	-2,945	-2,957
8	8	-21,620	-21,620	-21,611	-2,902
9	9	*	-21,780	-21,778	-21,783
10	10	*	21,940	-21,939	-21,941

Como pode ser observado os resultados são bastantes próximos em todas as análises. Na análise com estiramento Reis obteve resultados apenas até o oitavo incremento, a partir do qual houve divergência, visto que as iterações ultrapassaram o limite estabelecido pelo programa. Já a análise sem estiramento apresenta resultados bastante próximos dos resultados apresentados pelo programa Ansys e dos resultados obtidos no presente trabalho, no qual se verifica diferença somente no oitavo incremento de carga onde o programa encontrou um valor muito abaixo dos obtidos pelos demais programas. Também no programa Ansys o oitavo incremento de carga foi o mais “crítico”, pois utilizou mais iterações para o cálculo dos deslocamentos, havendo convergência somente na 24 iteração, sendo o limite estabelecido, tanto no programa Ansys como no programa em Pascal, de 25 iterações a cada incremento. Essa diferença se deve ao chamado Ponto Crítico, no qual a estrutura atinge sua carga crítica, a partir da qual a atual posição de equilíbrio da estrutura passa a ser instável e a estrutura, então procura nova posição de equilíbrio.

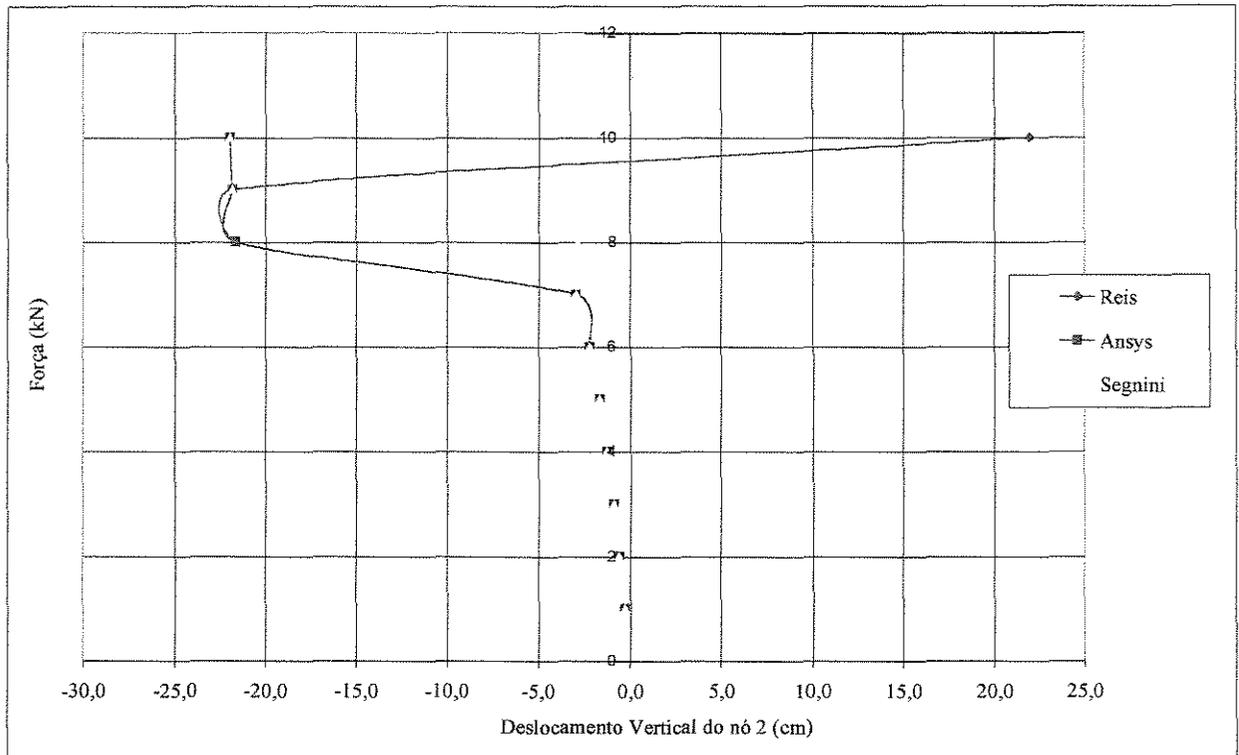


Figura 8.2.2 – Curva Força x Deslocamento do nó 2 da treliça plana de uma barra

Na tabela (8.2.2) Abaixo estão os valores da força axial na barra obtidos através do programa Ansys e do programa TNLG, desenvolvido em Pascal.

Tabela 8.2.2 – Força Axial na barra da treliça

Elemento	Força Axial (kN)	
	Segnini	Ansys
1	1,2601E+02	1,2601E+02

8.3 Treliça Plana de Cinco Barras

Esta estrutura foi analisada por Reis (29) novamente com a consideração da não-linearidade geométrica com e sem estiramento. Os resultados obtidos pelo programa da dissertação são comparados aos obtidos com o programa Ansys e com os apresentados por Reis. A treliça ilustrada na figura (8.3.1) tem módulo de elasticidade $E=20 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, área da seção transversal das barras é $A=0,001 \text{ m}^2$ e o carregamento é dado por $P=180 \text{ kN}$.

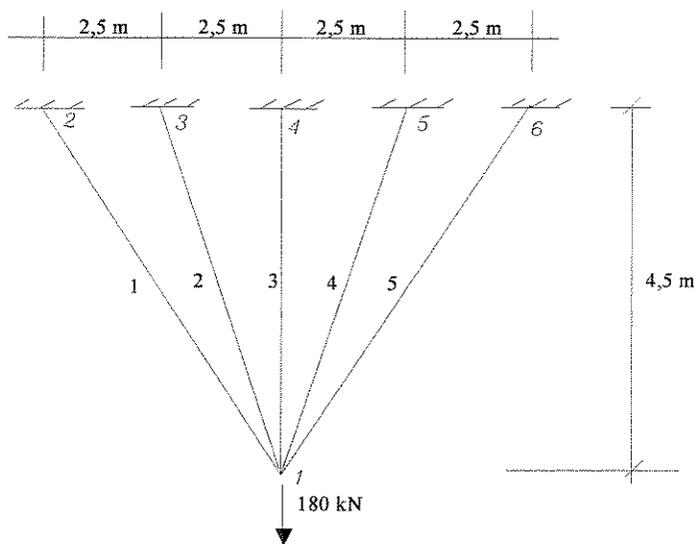


Figura 8.3.1 – Treliça de 5 Barras

Tabela 8.3.1 – Comparação de resultados da treliça plana de cinco barras

Incremento de Carga	Força no nó 1 (kN)	Deslocamentos Vertical do nó 1 (m)			
		Reis NLG 1	Reis NLG 0	Ansys	Segnini
1	18	*	*	0,001352	0,001380
2	36	*	*	0,002732	0,002760
3	54	*	*	0,004111	0,004139
4	72	*	*	0,005490	0,005518
5	90	0,006897	0,006880	0,006869	0,006897
6	108	0,008275	0,008260	0,008248	0,008275
7	126	0,009653	0,009630	0,009626	0,009653
8	144	0,011030	0,011000	0,011004	0,011031
9	162	0,012410	0,012370	0,012382	0,012409
10	180	0,013790	0,013740	0,013760	0,013786

* Dados não fornecidos em tabela para os 4 primeiros incrementos de carga

Conforme mostrado na tabela (8.3.1) os valores dos deslocamentos do nó 1 obtidos por Segnini, por Reis e pelo programa Ansys, são praticamente idênticos. Esta estrutura apresenta-se submetida à forças de tração somente, por esta razão não ocorre nenhuma mudança brusca em sua posição de equilíbrio. Os resultados estão melhor ilustrados na figura (8.3.2).

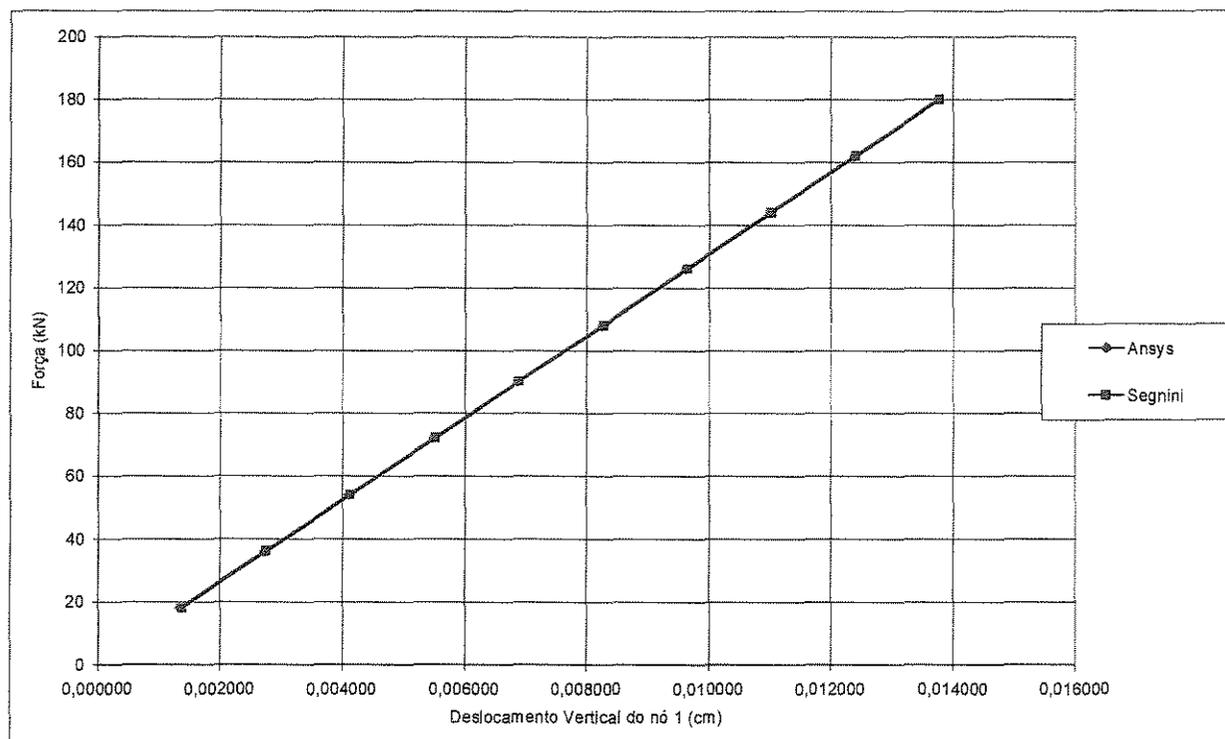


Figura 8.3.2 - Curva Força x Deslocamento do nó 1 da treliça plana de cinco barras

A tabela (8.3.2) apresenta os resultados obtidos para a força axial nas barras da treliça.

Tabela 8.3.2 – Força Axial nas barras da treliça

Elemento	Força Axial (kN)	
	Ansys	Segnini
1	27,4780	27,4436
2	46,8330	46,8386
3	61,2380	61,2728
4	46,8330	46,8386
5	27,4770	27,4436

8.4 Treliça Plana Tipo Grua

Esta treliça foi analisada por Lima (16) em trabalho acadêmico apresentado em disciplina do Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo. Trata-se de uma treliça tipo grua, com barras de mesmo material e mesma área. O módulo de elasticidade das barras vale $E=21000\text{kN/cm}^2$ e área da seção transversal das barras vale $A=20\text{ cm}^2$. A estrutura está submetida a carregamento conforme mostrado na figura (8.4.1).

Para comparação será mostrada na figura (8.4.2) a curva "força x deslocamento vertical do nó 11" com resultados obtidos através do programa Ansys, e por Segnini, com o programa da dissertação, e na figura (8.4.3) os resultados obtidos por Lima. Verifica-se que os valores estão bastante próximos, praticamente iguais.

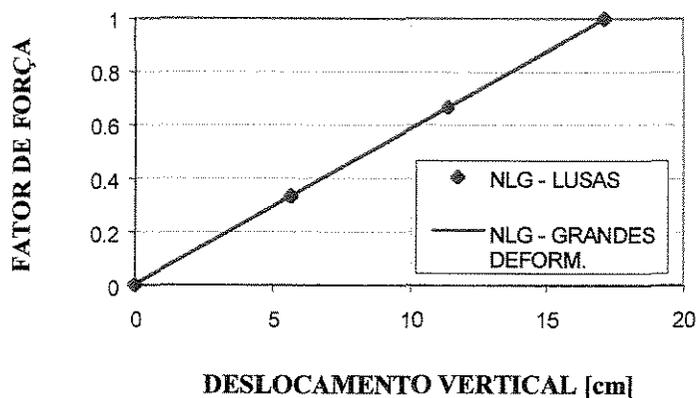


Figura 8.4.3 - Curva Força x Deslocamento do nó 11 da treliça tipo grua obtido por Lima. Vide referência (16)

Com o mesmo intuito mostra-se na tabela (8.4.1) os mesmos resultados obtidos através do programa Ansys e com o programa TNLG desta dissertação.

Tabela 8.4.1 – Comparação de resultados da treliça plana tipo grua

Incremento de Carga	Força no nó 11 (kN)	Deslocamento do nó 11 (cm)	
		Ansys	Segnini
1	10	-1,6990	-1,6990
2	20	-3,4030	-3,4025
3	30	-5,1120	-5,1103
4	40	-6,8260	-6,8224
5	50	-8,5350	-8,5388
6	60	-10,2690	-10,2596
7	70	-11,9980	-11,9846
8	80	-13,7300	-13,7139
9	90	-15,4500	-15,4474
10	100	-17,1800	-17,1852

Na tabela (8.4.2) pode-se ver os resultados obtidos para a força axial nas barras da treliça através do programa Ansys e do programa desenvolvido em Pascal.

Tabela 8.4.2 – Força Axial nas barras da treliça

Elemento	Força Axial kN	
	Ansys	Segnini
1	0,000	0,000
2	1065,138	1065,100
3	-214,137	-214,140
4	-1213,263	-1213,300
5	146,540	146,540
6	914,085	914,090
7	-215,585	-215,580
8	-1060,417	-1060,400
9	99,605	99,605
10	761,447	761,450
11	-146,624	-146,620
12	-956,517	-956,520
13	48,862	48,862
14	-600,511	-600,510
15	-300,165	-300,170
16	-111,768	-111,770
17	657,269	657,270
18	-926,983	-926,980
19	-305,556	-305,560
20	424,873	424,870
21	-300,133	-300,130
22	283,190	283,190
23	-149,873	-149,870
24	111,846	111,850
25	-99,968	-99,968
26	607,004	607,000
27	307,304	307,300
28	104,957	104,960
29	2,460	2,460

8.5 Treliça Espacial

Como último exemplo são apresentados os resultados obtidos para uma treliça espacial. As barras da treliça espacial têm módulo de elasticidade $E= 2 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$, área da seção transversal $A= 0,004\text{m}^2$, estando sujeita ao carregamento conforme ilustrado na

figura (8.5.1). Os resultados obtidos utilizando-se o programa Ansys e o programa desta dissertação, assim como os resultados obtidos por Reis (29) estão apresentados na tabela (8.5.1).

Neste exemplo foram utilizados apenas seis incrementos de carga com o intuito de comparação de resultados, já que Reis analisou a estrutura desta forma em seu trabalho.

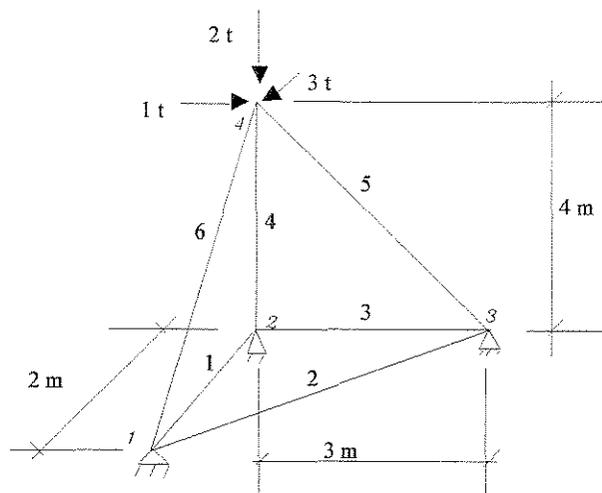


Figura 8.5.1 – Treliça Espacial

Tabela 8.5.1 – Comparação de resultados da treliça espacial

Incremento de Carga	Força no nó 4 (t)	Deslocamento Vertical do nó 4 (m)		
		Reis	Ansys	Segnini
1	0,5	0,000218	0,000288	0,000288
2	1,0	0,000436	0,000575	0,000575
3	1,5	0,000653	0,000863	0,000863
4	2,0	0,000871	0,001150	0,001150
5	2,5	0,001089	0,001438	0,001438
6	3,0	0,001307	0,001725	0,001725

Os resultados obtidos através do programa Ansys são idênticos aos resultados obtidos pelo programa em Pascal e diferem um pouco dos valores obtidos por Reis. A

diferença, no entanto é pequena se se levar em conta que os próprios deslocamentos são muito pequenos. A dispersão de resultados esta melhor visível no figura (8.5.2).

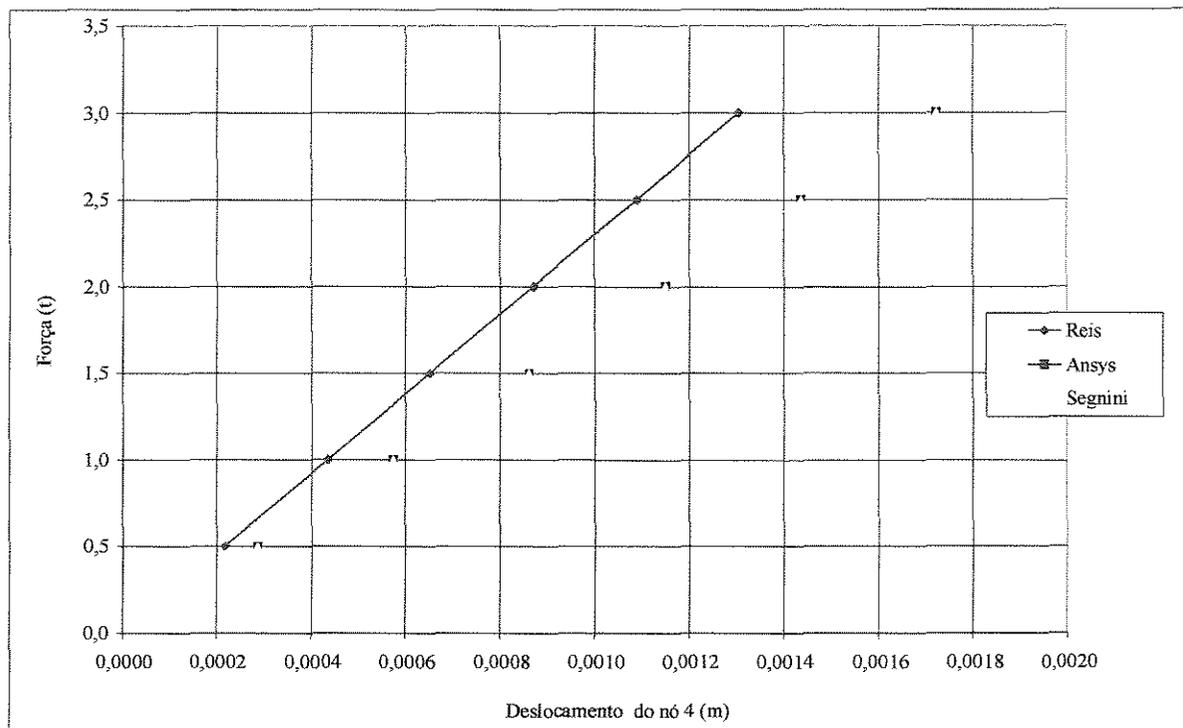


Figura 8.5.2 – Curva Força x Deslocamento do nó 4 da treliça espacial

A Tabela (8.5.2) apresenta os valores obtidos para a força axial nas barras da treliça.

Tabela 8.5.2 – Força Axial nas barras da treliça

Elemento	Força Axial t	
	Ansys	Segnini
1	-1,74E-03	-1,74E-03
2	5,4086	5,40858
3	8,17E-04	8,17E-04
4	5,3357	5,335721
5	-1,6671	-1,667054
6	-6,7094	-6,709441

Neste último exemplo são apresentados os arquivos de entrada do programa TNLG e do programa comercial Ansys. Abaixo segue o arquivo de entrada gerado pelo programa TNLG para o programa Ansys.

/title, Truss-3d	(título do arquivo)
! Enter model creation preprocessor /prep7	(Este é o módulo do pré-processador no qual gera-se o modelo da estrutura)
! Define element type et, 1, link8	(Define-se um elemento da biblioteca do Ansys cujas propriedades representem a estrutura desejada adequadamente, no caso o elemento LINK8 tem 3 graus de liberdade em cada nó e não suporta momento)
! Define element real constants	(São definidas as propriedades dos elementos utilizados na composição da estrutura, como a área)
r, 1, 4.000000E-0003	
r, 2, 4.000000E-0003	
r, 3, 4.000000E-0003	
r, 4, 4.000000E-0003	
r, 5, 4.000000E-0003	
r, 6, 4.000000E-0003	
! Define material property mp, ex, 1, 2.100000E+0007	(São definidas as dos materiais que compõem os elementos da estrutura)

! Define nodes

(Dá as coordenadas dos nós)

```
n, 1, 0.000000E+0000, 0.000000E+0000, 2.000000E+0000
n, 2, 0.000000E+0000, 0.000000E+0000, 0.000000E+0000
n, 3, 3.000000E+0000, 0.000000E+0000, 0.000000E+0000
n, 4, 0.000000E+0000, 4.000000E+0000, 0.000000E+0000
```

! Define elements

(São definidos os elementos da estrutura com seus nós inicial e final e a respectiva numeração)

```
real, 1
en, 1, 1, 2
real, 2
en, 2, 1, 3
real, 3
en, 3, 2, 3
real, 4
en, 4, 2, 4
real, 5
en, 5, 3, 4
real, 6
en, 6, 1, 4
```

! Define constraints

(São definidas as restrições dos nós e suas direções)

```
d, 1, ux, 0.0
d, 1, uy, 0.0
d, 2, ux, 0.0
d, 2, uy, 0.0
d, 3, ux, 0.0
d, 3, uy, 0.0
d, 3, uz, 0.0
```

! Static analysis
antype, static, new

(É definido o tipo de análise a ser feita, no caso uma análise estática)

! Include large deformation effects
nlgeom, on

(É dado o comando para acionar a análise não linear geométrica, levando em conta grandes deslocamentos e deformações)

! Activate stress stiffness effects
sstif, on

(É acionado o comando que ativa a opção **Stress Stiffning**, que leva em conta o efeito da força normal no elemento adicionando a parcela de rigidez geométrica à matriz de rigidez da estrutura)

! Specify number of substeps
nsubst, 6

(Define o número de incrementos de carga)

! Specify maximum number of equilibrium iterations
neqit, 25

(Define o número máximo de iterações por incremento)

! Set convergence values
cnvtol, f, 1.0, 1.000000E-0009, 0

(Define o valor para a convergência)

! Specify Newton-Raphson options
nropt, full, , off

(Aciona a opção do método para a resolução de equações de segundo grau)

! Specify type of equation solver
 eqslv, front

(Define o tipo de **solver**)

finish

! Enter solution processor
 /solu

(Entra no processador **Solution** no qual são definidas as cargas nos nós)

! Delete force loads on nodes
 fdelete, all, all

! Specify forces

(Define as forças no nós)

f, 4, fx, 1.000000E+0000

f, 4, fy, -2.000000E+0000

f, 4, fz, 3.000000E+0000

! Start a solution

solve

finish

O arquivo apresentado a seguir é o arquivo de entrada do programa **TNLG** do exemplo **8.5**.

maxnorm maxminor maxmajor
 :
 1.0E-09 25 6

(São definidos o valor para convergência, o número máximo de iterações por incremento e o número de incrementos de carga respectivamente)

young's module

(É dado o valor do Módulo de Elasticidade)

:

2.1000E+07

coordinates

(São definidos o número de nós e as coordenadas dos nós)

:

4

	X	Y	Z
1	0.000000E+00	0.000000E+00	2.000000E+00
2	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
3	3.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
4	0.000000E+00	4.000000E+00	0.000000E+00

elements

(São definidos o número de elementos, os nós inicial e final de cada elemento e a sua área)

:

6

1	1	2	0.004
2	1	3	0.004
3	2	3	0.004
4	2	4	0.004
5	3	4	0.004
6	1	4	0.004

displacements

(São definidos os nós restritos)

:

7

1 1

1 2
2 1
2 2
3 1
3 2
3 3

forces

(São definidas as cargas nodais)

:

3

4 1 1.0
4 2 -2.0
4 3 3.0

9. Conclusão

No presente trabalho foram apresentadas algumas formulações para a análise de treliças com comportamento não-linear geométrico com o intuito de comparação. Inicialmente apresentou-se um capítulo com a teoria que dá embasamento às formulações, em seguida foram apresentadas formulações exatas, assim chamadas por levarem em conta as grandes rotações sem efetuar nenhuma aproximação na sua obtenção, e formulações aproximadas ou de Segunda ordem, nas quais efetua-se algum tipo de aproximação na obtenção das rotações, assim como a formulação para o Método dos Elementos Finitos. Para cada formulação obteve-se a Matriz de Rigidez da estrutura, considerando-se grandes deslocamentos e rotações e pequenas deformações, ou seja, assumindo-se válida a Lei de Hooke. Foi, também, apresentado um capítulo sobre os métodos de resolução das equações de segundo grau às quais se chega através das formulações estudadas. Este capítulo ainda trata resumidamente do programa comercial Ansys, apresentando as ferramentas disponíveis no programa para a análise de estruturas, no caso específico de treliças, com comportamento não-linear geométrico.

Este trabalho apresenta, ainda, um capítulo descrevendo o programa em linguagem Pascal desenvolvido para analisar treliças com não-linearidade geométrica, utilizado para obtenção dos resultados das estruturas analisadas no capítulo final, de resultados, que

mostra também os resultados obtidos, para as mesmas estruturas, através do programa Ansys, comparando-os com resultados encontrados na literatura disponível. Pode-se observar, através destas comparações, que os resultados comparados estão bastante próximos, havendo pouca diferença.

Todas as matrizes de Rigidez obtidas, tanto por formulações aproximadas quanto por formulações exatas são iguais, sendo a única diferença encontrada na Matriz de Rigidez obtida por Pimenta com sua formulação exata. Esta Matriz de Rigidez possui alguns termos a mais em sua componente geométrica devido ao fato de Pimenta ter mantido o termo $\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2$ na expressão que relaciona os deslocamentos a deformação, da qual se obtém a Matriz de Rigidez, expressão esta desprezada nas outras formulações.

10.Referências Bibliográficas

1. Arcaro, V. F. **“Conceitos Fundamentais e Métodos Computacionais Básicos para Análise Não Linear de Estruturas”**, Campinas: Faculdade de Engenharia Civil – Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, 1996. 50p.
2. Bergan, P.G.; Clough, R.W. **“Convergence Criteria for Iterative Processes”**, **AIAA Journal**, vol. 10, nº 8, p 1107 – 1108, 1972.
3. Chajes, Alexander; Churchill, James E. **“Nonlinear Frame Analysis by Finite Element Methods”**, **Journal of Structural Engineering**, vol.113, n.6, p 1221 - 1235, 1987.
4. Chichón, Czeskaw **“Large Displacement In-Plane Analysis of Elastic-Plastic Frames”**, **Computer and Structures**, vol. 19, n. 5/6, p 737-745, 1984.
5. Corrêa, Márcio R.S. **“Aperfeiçoamento de Modelos Usualmente Empregados no Projeto de Sistemas Estruturais de Edifícios”**. São Carlos: SP, 1991. Tese (doutorado) - Faculdade de Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos – EESC, Universidade de São Paulo - USP.

6. Diogo, L.C. “**Sobre a Matriz de Rigidez Tangente das Barras de Treliças Planas Sujeitas a Rotações Grandes**”, São Paulo: Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações - Escola Politécnica - Universidade de São Paulo, 1987. 8p. (Boletim Técnico PEF-872).
7. Ebner, A.M. , Ucciferro, J.J. “A Theoretical and Numerical Comparison of Elastic Nonlinear Finite Element Methods”, **Computer and Structures**, vol. 2, p. 1043 - 1061, 1972.
8. Filho, F.V.; Lima e Souza, V.M. “A Noção de Rigidez Tangente no Estudo da Não-Linearidade Geométrica de Estruturas reticuladas”, In: Congresso Latino - Americano de Métodos Computacionais em Engenharia, 5, 1984, Salvador. ANAIS. Salvador: Universidade Federal da Bahia - Escola Politécnica da Universidade Federal da Bahia , Fundação de Apoio à Pesquisa e Extensão, Associação de Métodos Computacionais para Engenharia, 1984, p381 - 409.
9. Filho, F.V.; Lima, SouzaV.M. e Debs, A L. H. C. “Sobre a Matriz de Rigidez Tangente de Barras de Treliça com Grandes Rotações”, In: Congresso Latino - Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, 7, 1986, São Carlos. ANAIS. São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, Associação Latino-Americana para Métodos Computacionais, 1986, p 415 - 435.
10. Gallagher, R.H. “Finite Element Analysis of Geometrically Nonlinear Problems”. In: Yamada, Y. e Gallagher, R.H. **Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis**. Tokyo: University of Tokio Press, 1973. p109 - 123.
11. Haisler, W.E. e Strickling, J.A. “Developmente and Evaluation of Solution Procedures for Geometrically Nonlinear Structural Analysis”, **AIAA Journal**, vol. 10, nº 3, p 264-272, 1972.
12. Hsiao, K.; Hou, F. “Nonlinear Finite Element Analysis of Elastic Frames”, **Computers & Structures**, vol. 26, nº 4, p 693-701, 1987.

- 13.Hsiao, K.; Horng, H.J. e Chen, Y. “A Corotational Procedure that Handles Large Rotations of Spatial Beam Structures”, **Computers & Structures**, vol. 27, nº 6, p 769-781, 1987.
- 14.Jennings, A. “Frame Analysis Including Change of Geometry”, **Journal of Structural Division; ASCE**, vol. 94, p 627 - 643, 1968.
- 15.Lima, V.M.S.; e Brasil, R.M.L.R.F. “On the Tangent Stiffness Matrix of Plane and Space Trusses”. In: Jornada Sul-Americana de Engenharia Estrutural, 28, 1997, São Carlos. **ANAIS**. São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, 1997, v.4, p 1417 - 1426.
- 16.Lima, M. C. V. ; “**Programa Treliças – Simulação da Não-Linearidade Física e Geométrica**”, São Carlos: SP,1998. Trabalho para a Disciplina Análise Não-Linear de Estruturas – Departamento de Estruturas, Faculdade de Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos - EESC, Universidade de São Paulo – USP.
- 17.Mallett, R.H.; Marçal, P.V. “Finite Element Analysis of Nonlinear Structures”, **Journal of Structural Division; ASCE**, vol. 94, p2081 - 2105, 1968.
- 18.Matthies, H. e Strang, G. “The Solution of Nonlinear Finite Element Equations”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**; vol. 14, p 1613-1626, 1979.
- 19.Mazzilli, C. E. N. “**Considerações sobre Não-Linearidade Geométrica em Estruturas Reticuladas Planas**”, São Paulo: Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações - Escola Politécnica - Universidade de São Paulo, 1987. (Boletim Técnico PEF - 8701).
- 20.Mazzilli, C.E.N. “Some Interesting Aspects on the Elastic Instability of Simple Trusses”. In: **Symposium Dedicated to the 70th Birthday of Wolf Altman: Recent Developments in Solid Mechanics: Proceedings**, 1996, Rio de Janeiro. p 93 – 97.

21. Paixão, C.L. **“Análise Não Linear Geométrica de Estruturas Reticuladas com Aplicação ao Lançamento de Oleodutos Submarinos”**, Campinas: SP, 1990. 152 p. Dissertação de Mestrado - Faculdade de Engenharia Mecânica - FEM, Departamento de Engenharia de Petróleo, Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP.
22. Paula, C.F. **“Estudo das Descrições Lagrangeana e Euleriana na Análise Não-Linear Geométrica com o Emprego do Método dos Elementos Finitos”**, São Carlos: SP, 1997. 116 p. Dissertação de Mestrado - Faculdade de Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos - EESC, Universidade de São Paulo - USP.
23. Pimenta, P.M. **“Análise Não-linear de Treliças Espaciais : Teoria Exata vs. Teoria de Segunda Ordem”**, São Paulo: Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações - Escola Politécnica - Universidade de São Paulo, 1996. 10p. (Boletim Técnico PEF - 9613).
24. Pimenta, P.M. **“Análise Não-linear de Treliças Espaciais”**, São Paulo: Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações - Escola Politécnica - Universidade de São Paulo, 1986. 24p. (Boletim Técnico PEF - 8604).
25. Pimenta, P.M. **“Rotações Finitas”**, São Paulo: Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações - Escola Politécnica - Universidade de São Paulo, 1987. 17p. (Boletim Técnico PEF - 8714).
26. Pimenta, P.M. **“Um Método Geral para a Dedução da Matriz de Rigidez Tangente de Elementos Finitos”**, São Paulo: Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações - Escola Politécnica - Universidade de São Paulo, 1987. 19p. (Boletim Técnico PEF - 8721).
27. Pimenta, P.M.; Mazzilli, C. E.N. **“Minima Correctio Methodi Inveniendi Lineas Curvas Elasticii”**, São Paulo: Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações - Escola Politécnica - Universidade de São Paulo, 1986. 14p (Boletim Técnico PEF - 8613).

- 28.Powell, G.H. “Theory of Nonlinear Elastic Structures”, **Journal of Structural Division; ASCE**, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, vol. 95, p 6943 - 2701, 1969.
- 29.Reis, A.P.A.; “**Programa Treliças2 – Simulação da Não-Linearidade Física e Geométrica**”, São Carlos: SP,1998. Trabalho para a Disciplina Análise Não-Linear de Estruturas – Departamento de Estruturas, Faculdade de Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos - EESC, Universidade de São Paulo – USP.
- 30.Rubert, J.B. “**Estudo do Desempenho de Algoritmos Numéricos na Solução de Sistemas Não-Lineares de Estruturas Formadas por Barras de Treliça**”, São Carlos: SP, 1993. 97 p. Dissertação de Mestrado – Faculdade de Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos - EESC, Universidade de São Paulo - USP.
- 31.Strickling, J.A. e Haisler, W.E. “Evaluation of Solution Procedures for Material and/or Geometrically Nonlinear structural Analysis”, **AIAA Journal**, vol. 11, nº 3, p292-299, 1973.
- 32.Taguti,Y. “**Sobre a Não-Linearidade Geométrica em Treliças, Pórticos e Placas**”, São Paulo: SP, 1987. 158 p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações - EPUSP, Escola Politécnica ,Universidade de São Paulo - USP.
- 33.Turner, M.J.; et al. “Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures”, **Journal of Aero Science**, vol.23, n. 9, p 805 - 825, 1956.
- 34.Turner, M.J.; Dill, E.H.; Martin, H.C. et al. “Large Deflections of Structures Subjected to Heating and External Loads”, **Journal of Aero-space Science**, vol.27, p 97 - 106, 1960.
- 35.Wen, Robert K.; Rahimzadeh, Jalil. “Nonlinear Elastic Frame Analysis by Finite Element”, **Journal of Structural Engineering**, vol.109, n.8, p 1952 - 1971, 1983.

36. Wood, R.D. e Zienkiewicz, O.C. "Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis of Beams, Frames, Arches and Axisymmetric Shells" , **Computers & Structures**, vol. 7, p 725-735,1977.

11. Abstract

The present work's aim is to study exact and approximated formulations for trusses with nonlinear geometric behavior. The formulations are here developed for plane trusses but they can be applied to space trusses as well by means of some little adjustments.

The formulations studied and presented here are separated in two categories: geometrically exact formulations, which take into account large rotations, and the so-called approximated or second order formulations, in which some geometric simplifications for small rotations are made. Both formulations assume the validity of Hooke's Law.

First, the formulations are presented and for each formulation the linear elastic and tangent Stiffness Matrices for a plane truss bar are obtained. Then a chapter is presented in which the methods for solving the second order equations system are viewed and the "finite elements" of the Ansys program element library, which can be used in the nonlinear analysis of trusses, are described.

A Pascal program for the geometric nonlinear analysis of plane and space trusses with large rotations based on the studied formulations was developed. The implemented numerical solution was based on Newton-Raphson Method.

A chapter is presented, which contains some examples of plane trusses and an example of space truss. The displacements and stresses were obtained through the program previously mentioned. These results are compared with results obtained through the Ansys program and to other results found in literature.

A brief chapter with conclusions and remarks is then presented.