

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E
URBANISMO

ANÁLISE NUMÉRICA DE VIGAS
MISTAS EM CONCRETO E MADEIRA

ENG.^a CIVIL NÁDIA CAZARIM DA SILVA FORTI
ORIENTADOR: PROF.DR. NILSON TADEU MASCIA

CAMPINAS
2004

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL ARQUITETURA E
URBANISMO

ANÁLISE NUMÉRICA DE VIGAS
MISTAS EM CONCRETO E MADEIRA

ENG.ª CIVIL NÁDIA CAZARIM DA SILVA FORTI

Texto apresentado à Comissão de pós-graduação da Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, na área de concentração de Estruturas.

CAMPINAS
2004

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

F776a Forti, Nádia Cazarim da Silva
Análise numérica de vigas mistas em concreto e
madeira / Nádia Cazarim da Silva Forti.--Campinas, SP:
[s.n.], 2004.

Orientador: Nilson Tadeu Mascia.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e
Urbanismo.

1. Construção mista. 2. Análise numérica. 3. Método
dos elementos finitos. 4. Vigas. I. Mascia, Nilson
Tadeu. II. Universidade Estadual de Campinas.
Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e
Urbanismo. III. Título.

Titulo em Inglês: Numerical analysis of beams composed of concrete and wood.

Palavras-chave em Inglês: Composite structures, Virtual work principle,
Concrete and wood

Área de concentração: Estruturas.

Titulação: Mestrado

Banca examinadora: Armando Lopes Moreno Júnior, Cláudia Lúcia de Oliveira
Santana

Data da defesa: 22/12/2004

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E
URBANISMO

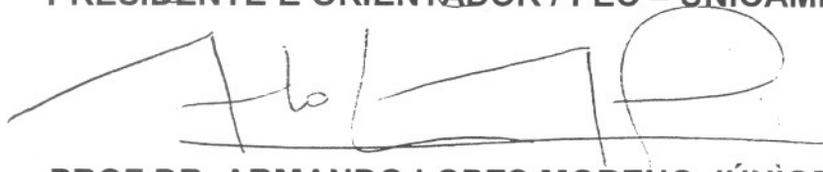
ANÁLISE NUMÉRICA DE VIGAS
MISTAS EM CONCRETO E MADEIRA

ENG. º CIVIL NÁDIA CAZARIM DA SILVA FORTI

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO APROVADA PELA BANCA EXAMINADORA,
CONSTITUÍDA POR:



PROF.DR. NILSON TADEU MASCIA
PRESIDENTE E ORIENTADOR / FEC – UNICAMP



PROF.DR. ARMANDO LOPES MORENO JÚNIOR
FEC – UNICAMP



PROF.ª.DR.ª. CLÁUDIA LÚCIA DE OLIVEIRA SANTANA
IPT

Campinas, 22 de Dezembro de 2004

Aos meus queridos pais Jair e Elza a quem amo e
devo muito.

AGRADECIMENTOS

Ao meu marido Tiago, fiel companheiro, a quem agradeço, sobretudo, pelo seu carinho, compreensão, grande apoio e estímulo.

Ao Prof. Nilson Tadeu Mascia pela atenção, dedicação e orientação no desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Philippe Bernard Remy Devloo pela colaboração e incentivo no transcorrer do trabalho.

A todos os professores e funcionários da UNICAMP que contribuíram, de forma direta e indireta, no desenvolvimento deste trabalho.

A CAPES pela bolsa de estudo concedida por intermédio da UNICAMP

RESUMO

FORTI, Nadia Cazarim da Silva. **Análise Numérica de Vigas Mistas em concreto e madeira.** Campinas: Faculdade de Engenharia Civil – UNICAMP, 2004. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Civil, UNICAMP, 2004.

O desenvolvimento tecnológico do projeto em estruturas de madeira permitiu melhorar o conhecimento de suas propriedades mecânicas e dos sistemas de conexões em estruturas. Estruturas mistas de madeira com concreto ou aço e os reforços do material com fibras de polímeros estruturais passaram a ser realidade. As estruturas mistas, constituídas por materiais de diferentes propriedades mecânicas associados, são uma solução alternativa às estruturas de uso corrente na construção civil. Essa medida busca obter redução de custos de construção, mantendo também a segurança estrutural, com um desempenho arquitetônico e ambiental vantajoso. A integração de uma estrutura mista deve-se, em geral, à eficiência do sistema de ligação, podendo ser do tipo rígido ou flexível. Esse sistema é responsável por transmitir a força de cisalhamento longitudinal na interface dos dois materiais combinados ao longo do comprimento da viga e também, impedir o desprendimento vertical dos mesmos. Esta pesquisa contribui para a análise do comportamento mecânico de vigas mistas de três maneiras: via programa de elementos finitos bidimensionais, via resolução analítica das equações de equilíbrio e via a equação do princípio dos trabalhos virtuais. A última abordagem foi concebida a partir de pesquisas de teoria das estruturas, expandindo seus conceitos para vigas mistas. A formulação proposta satisfaz as equações de equilíbrio mostrando-se consistente e seus resultados são condizentes com dados experimentais. Essa formulação pode ser facilmente integrada a códigos de elementos finitos requerendo apenas elementos unidimensionais.

Palavra chave: estruturas mistas, princípio dos trabalhos virtuais, concreto e madeira.

ABSTRACT

FORTI, Nadia Cazarim da Silva. **Análise Numérica de Vigas Mistas em concreto e madeira.** Campinas: Faculdade de Engenharia Civil – UNICAMP, 2004. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Civil, UNICAMP, 2004.

The technological development of the design in wood structures has improved the knowledge of the material mechanical properties and the connection systems applied to structures. Composite structures of wood with concrete or steel and structural reinforcement using polymer fibers have become a reality. These structures, constituted by associating materials with different mechanical properties are an alternative solution for current using structures in civil construction. This arrangement aims at obtaining a reduction of construction costs also maintaining the structural safety with advantageous environmental and architectural performance. The integration of a composite structure is, in general, due to the efficiency of the connection system that can be rigid or flexible type. This system is responsible to transfer the longitudinal shear force on the interface of the associated materials along the beam length and to avoid the vertical detachment of them as well. This research contributes to the analysis of the mechanical performance of the composite beams in three ways: bidimensional finite element program, analytical solution of the equilibrium equations and virtual work principle equation via. The last approach was conceived from structural theory researches, expanding their concepts for composite beams. The proposal formulation fulfils the equilibrium equation showing to be consistent and the results fit with the experimental data. This formulation can be easily integrated to a finite element procedure requiring unidimensional elements only.

Key words: composite structures, virtual work principle, concrete and wood.

LISTA DE FIGURAS

1.1: Pontes e passarelas danificadas em Campinas.....	4
1.2: Ponte do Jardim Capivari destruída pelas chuvas.....	4
1.3: Seção de um tabuleiro de concreto-madeira.....	10
2.1: Seção de um tabuleiro de concreto-madeira.....	10
2.2: Ponte na Floresta da Tasmânia – Austrália.....	9
2.3: Ponte na Floresta da Tasmânia – Austrália.....	9
2.4: Peso próprio x vão para pisos sob ação de serviço de $2,5 \text{ kN/m}^2$	13
2.5: Deslocamentos verticais de uma viga mista.....	15
2.6: Sistemas de conectores.....	16
2.7: Parte do corpo de prova tipo "push out" com pinos de 12,5mm.....	18
2.8: Parte do corpo de prova tipo "push out" com pinos de 12,5mm, e em X em relação às fibras da madeira.....	19
2.9: Curvas exp. carga x deslizamento para ligações solicitadas à tração paralela.....	20
2.10: Carga x deslocamento vertical de viga mista com interação parcial.....	21
2.11: Representação do módulo de deslizamento por conector.....	22
2.12: Um possível arranjo para determinar o comportamento carga x deslizamento de um sistema de conexão.....	24
2.13: Disposição dos parafusos em corpos de prova.....	24
2.14: Dimensões dos corpos de prova.....	25
2.15: Corpo de prova.....	25
2.16: Ações e reações em viga mista de concreto - madeira.....	27
2.17: Vistas laterais de um elemento infinitesimal.....	28
2.18: Detalhe da representação dos conectores metálicos.....	36

2.19: Representação de uma viga em concreto - madeira.....	37
2.20: Representação de um painel em concreto - madeira.....	38
2.21: Tensões ao longo da viga mista de concreto - madeira.....	38
2.22: Tensões no painel misto de concreto - madeira.....	38
3.1: Comparação de deslocamentos verticais.....	41
3.2: Detalhe da viga mista (VP).....	43
3.3: Esquema estático da viga mista (VP).....	44
3.4: Conectores equivalentes da viga mista.....	45
3.5: Seção utilizada para confecção da malha (cm).....	45
3.6: Malha utilizada para caracterizar a viga mista no SAP.....	45
3.7: Tensões ao longo da viga mista de concreto-madeira (VP 1/2).....	46
3.8: Detalhe das tensões ao longo da viga mista de concreto-madeira (VP 1/2).....	46
3.9: Tensões ao longo da viga mista de concreto-madeira (VP 3/8).....	46
3.10: Detalhe das tensões ao longo da viga mista de concreto-madeira (VP 3/8).....	46
3.11: Viga convencional de Euler-Bernoulli.....	48
3.12: Cinemática de uma viga mista.....	53
3.13: Funções aproximadas para o calculo do deslizamento em vigas mistas.....	63
3.14: Funções aproximadas para o calculo do deslizamento em vigas mistas.....	64
4.1: Resultados dos deslocamentos verticais a $L / 2$ da viga (VP3/8).....	66
4.2: Resultados dos deslocamentos verticais a $L / 2$ da viga (VP1/2).....	67
4.3: Deslocamento vertical para carga distribuída (a) via PTV e Stevanovic e (b) Diferença entre as soluções.....	69
4.4: (a) Primeira derivada da solução via PTV, (b) Stevanovic para carga distribuída e (c) Diferença entre os gráficos.....	70
4.5: (a) Segunda derivada da solução via PTV e Stevanovic para carga distribuída e (b) Diferença entre os gráficos.....	70
4.6: (a) Terceira derivada da solução via PTV e Stevanovic para carga distribuída e (b) Diferença entre os gráficos.....	71
4.7: Deslocamento vertical para carga concentrada (a) via PTV, (b) Stevanovic e (c) Diferença entre as soluções.....	71

4.8: (a) Primeira derivada da solução via PTV e Stevanovic para carga concentrada e (b) Diferença entre os gráficos.....	72
4.9: (a) Segunda derivada da solução via PTV e Stevanovic para carga concentrada e (b) Diferença entre os gráficos.....	72
4.10: (a) Terceira derivada da solução via PTV e Stevanovic para carga concentrada e (b) Diferença entre os gráficos.....	72
4.11: Resultados dos deslocamentos verticais a $L / 2$ da viga (VP 3/8).....	74
4.12: Resultados dos deslocamentos verticais a $L / 2$ da viga (VP 1/2).....	74
4.13: Resultados dos deslocamentos verticais a $L / 2$ da viga (VP 1/2).....	75

LISTA DE TABELAS

3.1: Propriedades dos componentes da viga mista (VP 3/8).....	42
4.1: Resultados dos deslocamentos verticais a $L/2$ da viga (VP 3/8).....	66
4.2: Resultados dos deslocamentos verticais a $L/2$ da viga (VP 1/2).....	67

NOMENCLATURA

Letras romanas

h_c = altura da mesa de concreto;

h_w = altura da alma de madeira;

q = carregamento linearmente distribuído;

r = distancia entre os centros de gravidade da mesa de concreto e alma de madeira;

u = vetor deslocamento;

w, v = deslocamento vertical;

A = área;

E_b = módulo de deformação longitudinal da mesa;

E_d = módulo de deformação longitudinal da alma;

F = forças de corpo, vetor de carga;

H = carga axial aplicada à mesa;

I_b = momento de inércia na mesa;

I_d = momento de inércia na alma;

K = módulo de deslizamento da ligação;

K_{1c} = módulo de deslizamento de um conector;

$[K]$ = matriz de rigidez;

K_{serv} = módulo de deslizamento para o estado limite de utilização;

M_b = momento fletor interno na mesa;

M_d = momento fletor interno na alma;

N_b = força horizontal interna na mesa;

N_d = força horizontal interna na alma;

P_i = carga concentrada
 R_i = reação de apoio;
 T = forças de superfície;
 T_b = força cortante na mesa;
 T_d = força cortante na alma;
 T_s = fluxo de cisalhamento nos conectores;
 V = força cortante;

Letras gregas

α, β, γ = coeficientes de equações;
 δ = deslizamento relativo;
 $\delta u, \delta v, \delta \varepsilon$ = deslocamentos/ deformações virtuais;
 ε = deformação.
 σ = tensão;
 θ = giro da seção transversal;
 ∇ = gradiente;
 τ = tensão de cisalhamento;
 φ = funções aproximadas;
 α = coeficientes multiplicadores das funções φ .

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	1
1.1	<i>Considerações Gerais.....</i>	1
1.1.1	Madeira.....	1
1.1.2	Panorama das pontes vicinais de madeira no Estado de São Paulo.....	3
1.1.3	Pontes e placas mistas de madeira e concreto.....	5
1.2	<i>Objetivos do Trabalho.....</i>	7
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	9
2.1	<i>Considerações Gerais.....</i>	9
2.2	<i>Abordagem dos materiais.....</i>	11
2.2.1	Madeira.....	11
2.2.2	Concreto.....	11
2.3	<i>Vantagem das estruturas mistas sobre as convencionais.....</i>	12
2.4	<i>Sistemas de conexão em estruturas mistas de madeira e concreto.....</i>	14
2.5	<i>Módulo de deslizamento da ligação.....</i>	19
2.6	<i>Modelos de corpo de prova para determinação do módulo de deslizamento.....</i>	22
2.7	<i>Modelo para análise de vigas compostas.....</i>	25
2.7.1	Método de Cálculo para Estruturas Mistas em Concreto-Madeira com Base no Princípio de Equações de Equilíbrio.....	26
2.7.2	Modelo numérico de vigas compostas.....	34
a)	Método de elemento finito.....	34
b)	Modelo via programa SAP2000.....	34

3	METODOLOGIA.....	39
3.1	<i>Estudo Teórico.....</i>	39
3.2	<i>Modelo implementado no programa SAP 2000.....</i>	42
3.3	<i>Modelo de funcionamento de viga composta.....</i>	47
3.3.1	Princípio dos trabalhos virtuais (PTV).....	47
3.3.2	Introdução à Teoria de Vigas.....	48
	a) Hipótese cinemática.....	48
	b) Esforços solicitantes.....	50
	c) Aplicação do princípio dos trabalhos virtuais.....	50
3.4	<i>Formulação de viga mista.....</i>	51
3.4.1	Trabalho virtual das forças internas dos conectores.....	52
	a) Hipótese cinemática.....	53
	b) Trabalho virtual das forças internas.....	54
3.4.2	Formulação de viga mista.....	55
3.5	<i>Aproximação de Rayleigh Ritz.....</i>	56
3.6	<i>Escolha das funções aproximantes $\varphi(x)$.....</i>	62
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	65
5	CONCLUSÕES.....	77
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	79
7	APÊNDICE.....	83

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações Gerais

1.1.1 Madeira

A madeira, apesar de ser um material com inúmeras vantagens para aplicação em construção, ainda é pouco e mal utilizada na prática da engenharia no Brasil. Esta constatação é mais evidente quando se comparada a países como EUA, Austrália, Canadá e países europeus, onde a aplicação da madeira é significativa, especialmente em estruturas de residências, ginásios esportivos e pontes, segundo afirmações do arquiteto argentino CARUANA (1997).

É de se notar que se de um lado existe um déficit habitacional crescente no Brasil e potencial para o uso de espécies de reflorestamento, existe por outro a não consolidação de um parque industrial no setor madeireiro que poderia contribuir para soluções inteligentes e econômicas nesta questão nacional.

Na verdade a indústria é formada por empresas de pequeno e médio porte que não possuem um acompanhamento técnico mais apurado, capaz de garantir a qualidade do material fornecido. Agrava-se a situação com a ausência de um corpo normativo completo em muitas de

suas aplicações e pelo não cumprimento das normas quando elas existem. A madeira de reflorestamento, por seu caráter de matéria prima renovável, passível de manejo econômico, se eucalipto e pinus com amplas possibilidades de aplicações em madeira laminada colada, forma ideal de uso da madeira estrutural.

Caso o Brasil consiga desencadear um processo de aproveitamento de madeira de reflorestamento, ou nativa, criar-se-á suporte técnico e industrial capaz de disseminar seu uso em vários segmentos da construção. Isso propiciará um enorme potencial de aplicação e exploração, visto que só no Estado de São Paulo existe cerca de 200.000 ha de pinus e 460.000 ha de eucaliptos em condições de utilização.

A versatilidade do material, aliada, sobretudo à questão econômica, tem sido responsável pela verdadeira explosão do uso da madeira na Europa e América do Norte após a crise energética dos anos 70.

Ao traçar um paralelo entre a realidade brasileira e do exterior, onde é tradicional o uso da madeira, observa-se que no exterior existe um processo industrial consolidado que garante desde a qualidade da matéria prima até o produto final. Este processo de aprimoramento permanente consagrou práticas de melhoria das espécies, manejo florestal e outros procedimentos que possibilitam a homogeneidade e qualidade da matéria-prima, técnicas que só há pouco tempo começaram ganhar espaço no Brasil.

A madeira, além de suas inúmeras possibilidades estéticas, é ainda acrescentadas qualidades como leveza, resistência mecânica e maleabilidade, embora estas características variem segundo a espécie. Por outro lado, tem como desvantagem ser vulnerável ao intemperismo, umidade, fogo e ataques biológicos. Para estes casos há soluções de projetos e tratamentos químicos capazes de otimizar seu desempenho e durabilidade.

A idéia equivocada de que a madeira possui pequena vida útil tem negligenciado o uso deste material para construção. Utilizada com tecnologia e tratamento químico pode ser efetivamente protegida contra deterioração por um período de 50 anos ou mais.

1.1.2 Panorama das pontes vicinais de madeira no Estado de São Paulo

As pontes são de grande importância e necessidade para o desenvolvimento e progresso dos municípios do Estado de São Paulo

Incorretos processos de construção e de manutenção foram empregados nestas vias ao longo dos anos, principalmente pela carência de informações técnicas por parte das administrações estaduais e municipais.

O estado precário das estradas e pontes vicinais tem sido um grave obstáculo para o desenvolvimento e melhoria da qualidade de vida de sua população que delas necessitam para o escoamento dos seus produtos e para o atendimento às suas demandas básicas.

É urgente a necessidade de se implantar nas estradas municipais e estaduais os avanços tecnológicos atuais para a construção e recuperação das pontes de madeira. Uma pesquisa realizada junto à Prefeitura Municipal de Campinas, mostra que 53% das pontes vicinais da região necessitam de manutenções.

Outro exemplo é a cidade de Piracicaba, “sua área rural é uma das mais extensas do Estado de São Paulo, com 100.000 ha. Nos últimos 10 anos foram construídas 200 pontes na área rural, exigindo trabalho intenso no que diz respeito à manutenção” afirma o Secretário Municipal de Agricultura e Abastecimento Mário Tomazello Filho.

No mês de fevereiro de 2003 após um período longo de chuvas intensas na cidade de Campinas, 34 pontes vicinais desabaram ou foram interditadas por risco de acidentes, Fig.1.1.

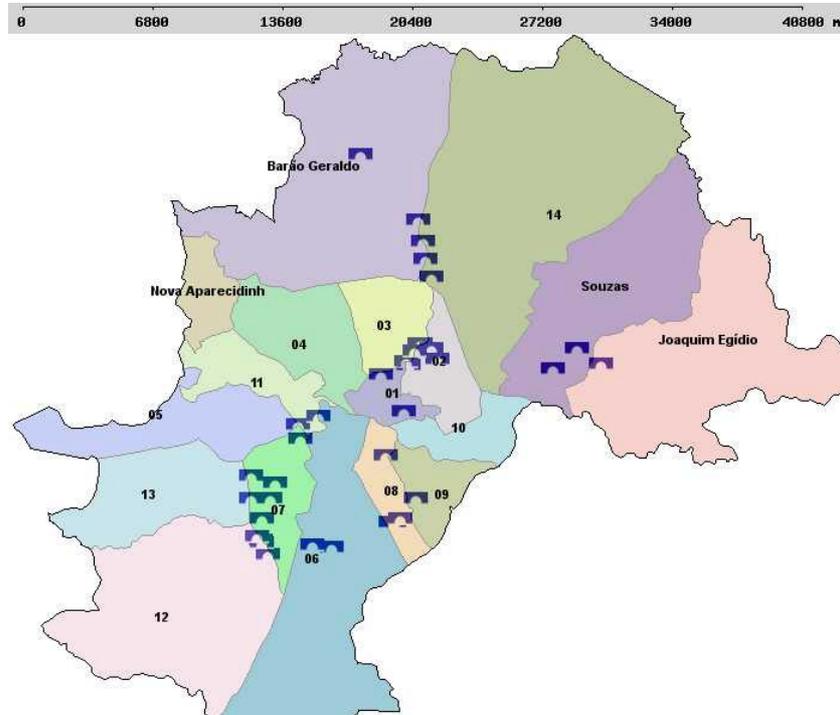


FIGURA 1.1: Pontes e passarelas danificadas em Campinas
FONTE: Prefeitura Municipal de Campinas



FIGURA 1. 2: Ponte do Jardim Capivari destruída pelas chuvas

1.1.3 Pontes e placas mistas de madeira e de concreto

A evolução da engenharia da madeira permitiu melhorar o conhecimento de suas propriedades mecânicas, dos sistemas de conexões entre peças e de protensão. Estruturas mistas de madeira com concreto ou aço e os reforços com fibras de polímeros estruturais passaram a ser realidade.

As estruturas mistas constituídas por materiais de diferentes propriedades de elasticidade e de resistência podem ser associadas, como uma solução alternativa às estruturas de uso corrente na construção civil. Essa medida busca obter redução de custos de construção mantendo a segurança estrutural com um desempenho arquitetônico e ambiental vantajoso.

Em obras de grande porte é comum a associação do aço e do concreto, com aplicações em construções industriais, esportivas e pontes, possibilitando, entre outras vantagens, a redução de fôrmas e cimbramentos temporários para o lançamento do concreto.

As estruturas com seções mistas em concreto e madeira surgem como uma opção bastante competitiva para construções de porte menor, tais como painéis de paredes, piso e coberturas, e também, como estruturas de pequenas pontes como se pode observar aplicações com sucesso em diversos países, como EUA, Canadá, Itália, Noruega e Suíça.

A aplicação da madeira como elemento estrutural pode ser notada num grande número de construções situadas tanto na área urbana quanto rural. A madeira é apreciada para a execução de diversos elementos construtivos com performance arquitetônica, conforto térmico e acústico privilegiados.

Nas estruturas mistas, especificamente aquelas compostas por concreto e madeira, para se obter basicamente uma estrutura mecanicamente eficiente, o concreto deve atuar às solicitações de compressão e a madeira aos esforços de tração, comportamento este assegurado por meio de um sistema de ligação convenientemente locado na estrutura.

A utilização de seções compostas terá grande importância nas execuções de pontes de estradas vicinais e vias de acesso às propriedades agrícolas, de forma a proporcionar uma solução mais econômica que as obras em concreto armado, considerando o menor peso próprio e maior durabilidade e maior capacidade de carregamento que as pontes em madeira.

O sistema de tabuleiros mistos tem sido utilizado com sucesso nas construções e é constituído de uma placa de concreto conectada a elementos estruturais de madeira de tal modo que as partes funcionem em conjunto. O nível de transferência de esforços entre a placa de concreto e os elementos de madeira, pode definir um comportamento monolítico, quando não há deslocamentos relativos entre esses materiais, ou comportamento “não monolítico” quando as transferências de tensões ocorrem com pequenos deslocamentos relativos.

Nos tabuleiros mistos, a placa de concreto protege a madeira contra intempéries, o desgaste superficial por abrasão, diminui as vibrações provocadas pelas cargas dinâmicas com aumento do peso próprio, aumenta o isolamento acústico, a proteção contra fogo e proporciona maior rigidez e resistência se comparado ao tabuleiro de madeira. A resistência ao carregamento aumenta na ordem de duas vezes e a rigidez de três a quatro vezes segundo CECCOTTI, (1995).

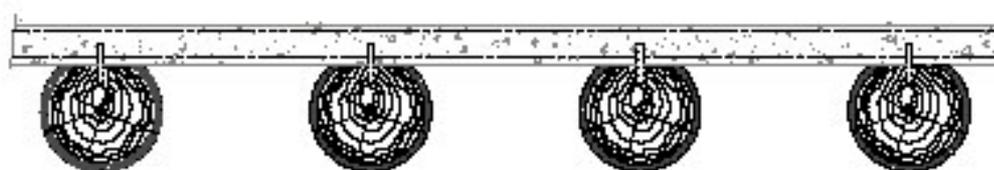


FIGURA 1.3: Seção de um tabuleiro de concreto-madeira
FONTE: YTTRUP (1996)

1.2 Objetivos do Trabalho

Os objetivos do presente trabalho são:

- Revisão bibliográfica em meios técnico–científicos, para auxiliar na interpretação dos resultados encontrados e que demonstrem a necessidade do estudo desse trabalho.
- Análise do comportamento estrutural da viga mista, através de código comercial de elementos finitos (SAP 2000).
- Proposta de uma formulação variacional de viga mista utilizando as equações do princípio dos trabalhos virtuais.
- Validação dos resultados computacionais obtidos utilizando os resultados experimentais apresentados na tese de doutorado de SORIANO (2001).

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Considerações Gerais

A utilização de concreto moldado in-loco em pontes de madeira é uma alternativa viável, principalmente quando as fôrmas de madeira ficam incorporadas ao tabuleiro ou quando o concreto se apóia em outro tabuleiro contínuo de madeira. Para esta finalidade, existem conectores capazes de ligar o concreto a madeira, permitindo um comportamento conjunto na flexão e dando origem às estruturas mistas de concreto e madeira.

Existem relatos de estruturas mistas na Inglaterra que antecedem a Primeira Guerra Mundial. Em 1914 a empresa Brow and Company iniciou uma série de ensaios de estruturas compostas para piso. Em 1922, no Canadá, foram realizados ensaios pela empresa Dominion Bridge Company também relacionados a estruturas compostas. No ano de 1930, o sistema já estava desenvolvido e alguns métodos de dimensionamento estabelecidos. Entre 1922 e 1939 foram construídos muitos edifícios e pontes e em 1944 as estruturas mistas foram introduzidas nos documentos normativos da American Association of State Highway Officials (AASHO), posteriormente denominada AASHTO, segundo MALITE (1990). Desde então os sistemas de conexões, modelos de cálculo e recomendações de projetos foram continuamente evoluindo.

Mais recentemente, na Austrália, pontes em madeira vem sendo transformadas em estruturas mistas de concreto-madeira, segundo YTTRUP & NOLAN (1999).

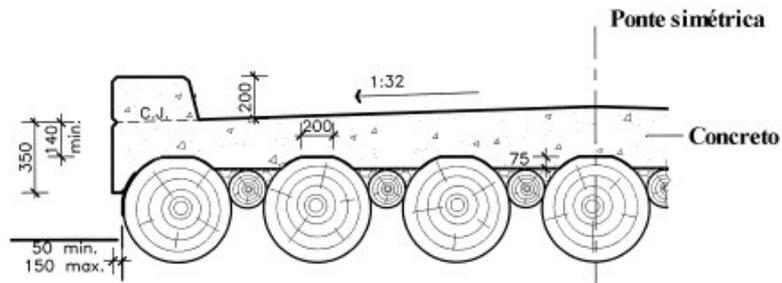


FIGURA 2.1: Seção de um tabuleiro de concreto-madeira
FONTE: YTTRUP & NOLAN (1999), pg. 72



FIGURA 2.2: Ponte na Floresta da Tasmânia - Austrália
FONTE: YTTRUP & NOLAN (1999), pg. 74



FIGURA 2.3: Ponte na Floresta da Tasmânia - Austrália
FONTE: FONTE: YTTRUP & NOLAN (1999), pg. 71

2.2 Abordagem dos materiais

2.2.1 Madeira

Como material de construção, a madeira oferece muitas peculiaridades. Entre as vantagens, destaca-se como um dos poucos materiais renováveis, com baixa energia de processamento (muito menor que o aço, alumínio ou concreto), fornece um isolamento térmico, por polegada de espessura, muito maior do que os metais ou o concreto, maior relação resistência e rigidez para peso do que outros materiais, relativamente fácil para trabalho, exigindo ferramentas simples e, em algumas circunstâncias, apresenta alta durabilidade natural..

Entre as desvantagens, destaca-se o fato de a madeira ser combustível, apresentar baixa durabilidade natural, quanto ao ataque de organismos xilófagos (principalmente as espécies provenientes de reflorestamento e de rápido crescimento), apresentar defeitos decorrentes das tensões de crescimento e de uma secagem mal conduzida. Por essas razões é tão importante o uso decorrente do tratamento da madeira, que é regulamentado pela Federação, conforme publicação do IBDF et al (1973).

2.2.2 Concreto

O concreto ao ser comparado com a madeira, possui uma massa específica muito elevada, da ordem de 2,5 a 3,5 vezes a da maioria das espécies de madeira. É um material que oferece facilidade em moldar as diversas formas do projeto arquitetônico. Também se deve mencionar os avanços obtidos com pesquisas que permitiram superar algumas limitações desse material, como por exemplo, o concreto protendido e peças pré-moldadas. A utilização dessas peças, principalmente em construções de grande porte, tem contribuído para reduzir o consumo de materiais para fôrmas e cimbramentos, bem como reduzir o tempo de execução de obras civis.

2.3 Vantagem das estruturas mistas sobre as convencionais

NATTERER et al. (1996) compara as estruturas mistas com as construções de madeira e relata que as mistas apresentam comportamento mais adequado de resistência à propagação de fogo, melhores propriedades acústicas e de vibrações, destacando-se também os efeitos favoráveis às propriedades de curvatura e estabilidade global da estrutura.

Comparando-se estruturas mistas com lajes de piso ou cobertura em concreto armado, além da redução do custo direto por metro quadrado, CECCOTTI (1995) também aponta a maior rapidez de execução da estrutura, emprego de menor número de escoras e fôrmas como elementos favoráveis às suas aplicações. A execução de uma estrutura mais leve, graças à redução do peso próprio, possibilita o emprego de sistema de fundação mais simples. Do ponto de vista arquitetônico, as vigas de madeira que podem ficar aparentes internamente, propiciam um aspecto melhorado.

As estruturas com seções mistas em madeira-concreto apresentam capacidade de carga, aproximadamente, duas vezes maior que em estrutura exclusivamente em madeira e rigidez ampliada de três a quatro vezes, descreve CECCOTTI (1995). Numa comparação com estruturas que contenham materiais que trabalhem independentes (sem conectores), as estruturas mistas podem promover aumento em torno de duas vezes para a resistência última, conforme PINCUS (1969), AHMADI e SAKA (1993) e McCULLOUGH (1943). Tratando-se do deslocamento vertical no meio do vão ocorre uma drástica redução para aproximadamente 1/5.

MAGALHÃES e CHAHUD (1998) mediante ensaios de duas vigas “T” em concreto-madeira com conectores metálicos (pregos), verificaram um aumento da rigidez de 40% em relação a uma viga em madeira.

Numa análise comparativa entre três tipos de seções para piso sob carregamento de serviço $q = 2,5 \text{ kN/m}^2$, CECCOTTI (1995) apresenta na Fig.2.4, o peso próprio da estrutura em função do vão livre. Verifica-se, que uma seção em concreto-madeira tem peso próprio reduzido, significativamente, em relação à seção de concreto armado e um pequeno aumento em relação à seção de madeira.

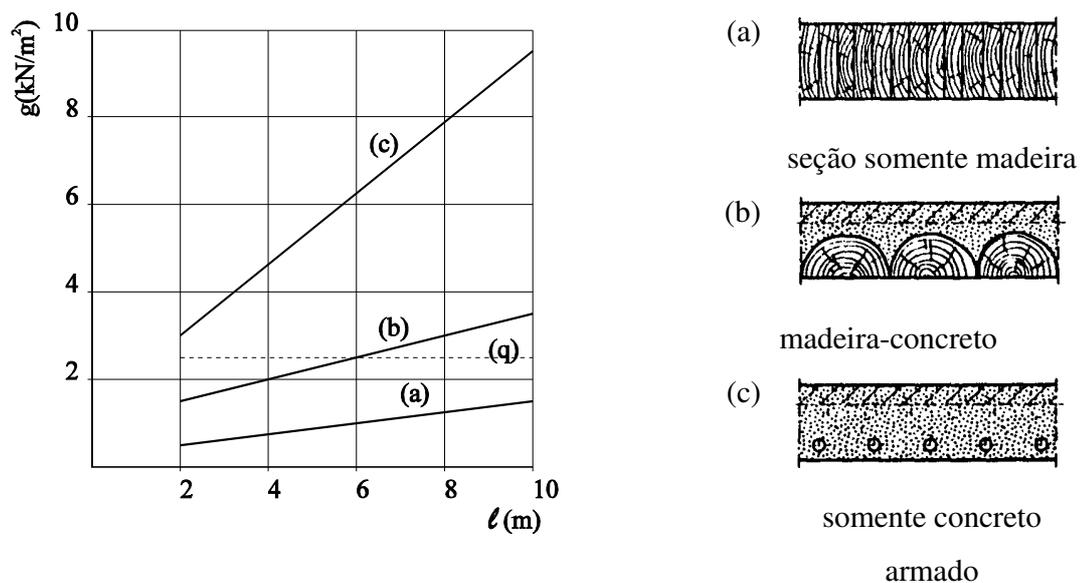


FIGURA 2.4 - Peso próprio \times vão para pisos sob ação de serviço de $2,5 \text{ kN/m}^2$
 FONTE: CECCOTTI (1995), p. 1.

NATTERER et al. (1996) indicam o emprego de seções mistas para constituir estruturas de piso. Um por exemplo é a ponte do rio Orbe na Suíça, com vão de 13 e 4 metros de largura. As vigas circulares de madeira são dispostas verticalmente, sobre as quais se aplica a placa de concreto. Para que ocorra a interação entre os dois materiais, fendas são abertas na madeira e pinos metálicos são empregados. Esses pinos foram elaborados para que depois de presos a madeira, e através de uma rosca na extremidade superior, pode-se aplicar uma força normal à superfície da laje de concreto, como uma força de protensão, comprimindo-a contra madeira.

Com o intuito de melhorar a eficiência do sistema de piso comumente empregado na região do Golfo Pérsico, alguns testes foram produzidos por AHMADI e SAKA (1993). Devido à

grande variação de temperatura, umidade e presença de sais agressivos, são contra-indicadas estruturas em concreto armado. Neste sentido, grande parte das residências e comércios possuem sistemas de pisos constituídos por vigas de madeira e laje de concreto que é lançado sobre placas de compensado. Observa-se que esses materiais trabalham independentes por não disporem de um sistema de conexão.

Com o estudo da conexão entre dois materiais, os autores buscam vantagens proporcionadas pela seção mista, como, por exemplo, distanciar as vigas de madeira, reduzindo o volume desse material e aumentar a capacidade de carga e reduzir o deslocamento vertical.

McCULLOUGH (1943) descreve estudos no sentido de desenvolver estrutura em concreto-madeira para aplicações em pontes, localizadas em Oregon (EUA). O sistema busca, basicamente, atender vãos pequenos, de forma a estabelecer um custo de execução intermediário entre pontes em concreto armado e cavaletes em madeira não tratada. Para prover a interação entre o concreto-madeira, foram testados os seguintes sistemas para a transferência das forças tangenciais: pinos, entalhes, tubos metálicos, chapa de aço e combinação de entalhes e pinos.

A leveza das estruturas mistas em concreto-madeira, e o possível emprego de elementos de madeira laminada colada, são fatores que contribuem para a sua produção pré-fabricada. A produção industrial de elementos pré-moldados em concreto-madeira iniciou-se na Suécia na década de 70. Atualmente, outros países como Noruega e Finlândia também processam de forma racional esse tipo de estrutura.

2.4 Sistemas de conexão em estruturas mistas de madeira e concreto

TARANTINO e DEZI (1992) retratam em seus trabalhos a necessidade do estudo do sistema de ligação, responsável por transmitir a força de cisalhamento longitudinal na interface dos dois materiais combinados ao longo do comprimento da viga.

Na análise de ligações de peças de madeira, RACHER (1995) ressalta a importância do sistema de ligação, visto que o seu comportamento afeta diretamente a distribuição de forças na peça e conseqüentemente deformações da estrutura.

Conforme SORIANO (2001) o sistema de ligação, que caracteriza o comportamento de toda estrutura, pode ser denominado como rígido e semi-rígido (flexível).

Um exemplo de conexão rígida é a utilização do adesivo estrutural rígido, epóxi, ao longo de toda superfície de contato entre o material misto, GIRHAMMAR e GOPU (1993). A ligação rígida consiste na integração total da seção, ou seja, a seção trabalha monoliticamente. Estudos desenvolvidos no Brasil, colando diretamente vigas de madeira com peças estruturais de concreto armado foram apresentados por NICOLAS (2001). Também SORIANO (2001) ensaiou vigas mistas de madeira e concreto com seção T, onde a alma de madeira foi colada à laje de concreto.

No sistema de conexão semi-rígida, a ligação entre os materiais é feita através de pinos de aço, pregos, parafusos, cavilhas e perfis metálicos. A ligação semi-rígida apresenta uma integração parcial da seção, havendo deslizamento relativo entre os dois materiais.

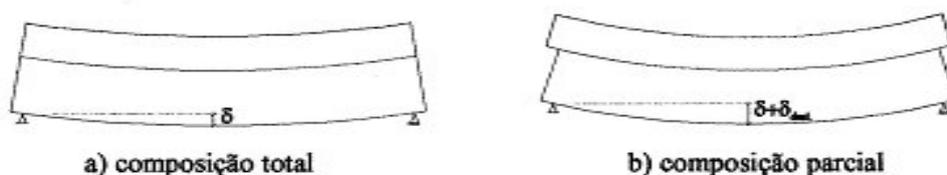
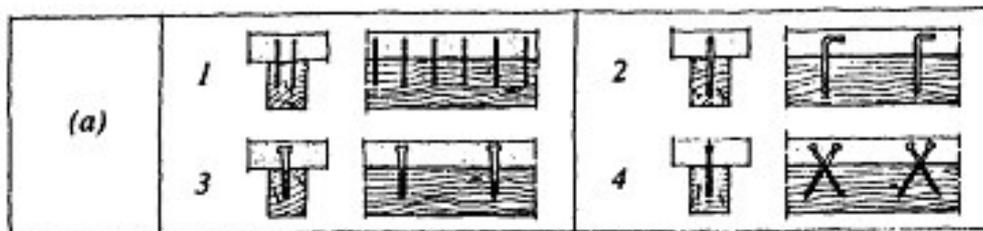
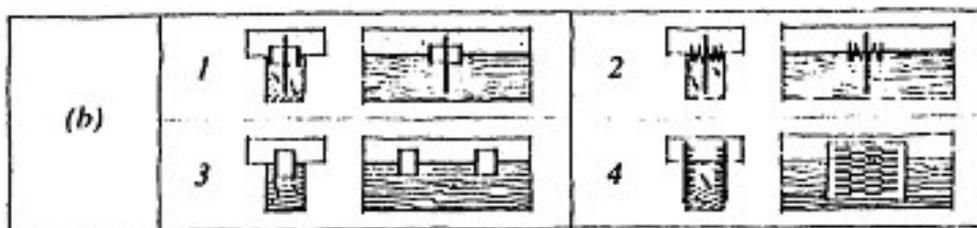


FIGURA 2.5: Deslocamentos verticais de uma viga mista
FONTE: WRIGHT (1990), pg. 51

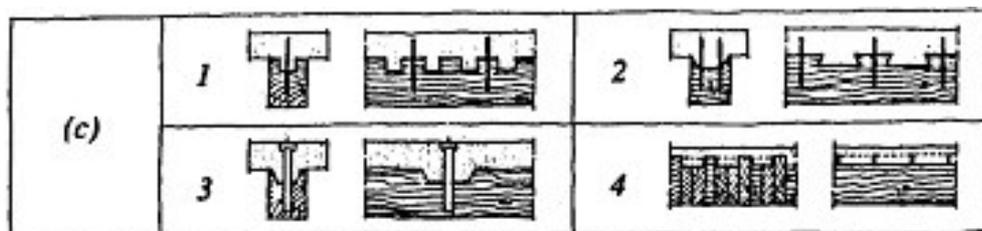
CECCOTTI (1995) estudou a variação de inércia efetiva comparando os deslocamentos verticais de estruturas mistas fletidas com diversos conectores e apresentou a classificação dos conectores mais utilizados, Fig. 2.6:



Grupo (a) → Pinos metálicos ou de madeira: 1- pregos ou cavilhas; 2- barras de aço coladas; 3- parafuso auto-atarrachante e barras de aço; 4- parafuso em X.



Grupo (b) → 1- anéis inteiros ou bipartidos; 2- anéis dentados; 3- tarugos de aço ou madeira; 4- chapas estampadas.



Grupo (c) → Entalhes com pinos de aço: 1- entalhes redondos; 2- entalhes prismáticos; 3- entalhes cônicos com pinos protendidos; 4- pranchas com alturas alternadas e conectores metálicos.



Grupo (d) → 1- treliças de aço contínuas; 2- placas de aço contínuas.

FIGURA 2.6: Sistemas de conectores
 FONTE: CECCOTTI (1995), pg. 3

Os conectores dos grupos (a), (b), e (c) são considerados semi-rígidos, ou seja, permitem pequenos deslocamentos relativos entre a madeira e o concreto na flexão.

Os grupos apresentam aproximadamente uma seqüência crescente de rigidez. Para o grupo (a), que representa a forma mais flexível das ligações estudadas, obteve-se uma redução de 50% do produto de inércia teórico. Já no grupo (d), o produto de inércia efetivo resultou próximo ao teórico. Entretanto essa comparação deve ser analisada com cuidado, afirma PIGOZZO (2002), uma vez que no grupo (a) os pinos de aço ou parafusos posicionados em “X” apresentam menores embutimentos na madeira, menores esmagamentos do concreto e, portanto, menores esmagamentos relativos, podendo superar a rigidez dos conectores dos grupos (b) e (c) que estão relacionados com o ajuste do conector ao respectivo entalhe, da resistência e dimensão do material utilizado para a execução e da resistência ao cisalhamento do concreto que preenche o entalhe.

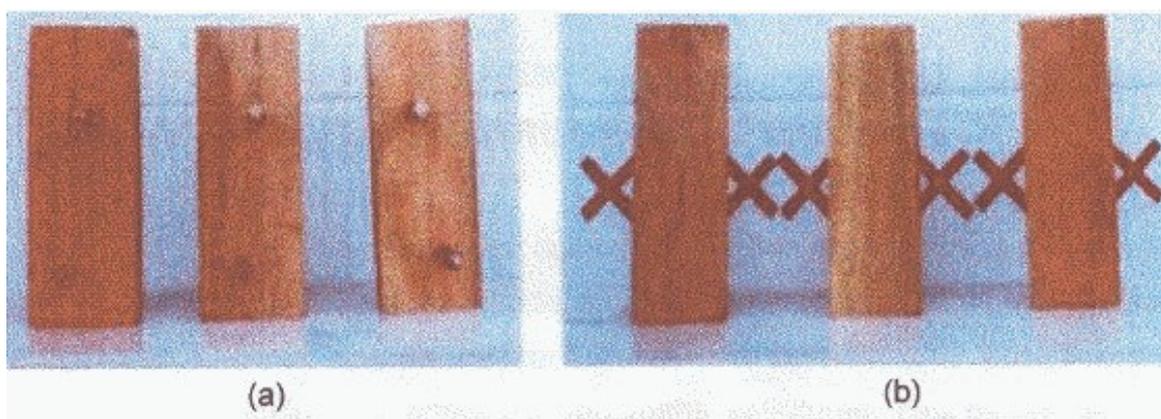
Vigas em concreto e madeira com entalhes efetivando a ligação, descritas e ensaiadas por WILLIAMS (1943), apresentaram falhas por cisalhamento longitudinal do concreto ou da madeira. Dentre outros sistemas de ligações testados, tais como parafusos, pregos de dormentes de ferrovias, as vigas com entalhes foram as que apresentaram os resultados mais insatisfatórios.

As conexões com pregos e parafusos são as mais estudadas. Por outro lado, a disponibilidade de resinas estruturais de alta resistência viabiliza a utilização de conectores, como pinos, chapas e anéis, se colados nos furos ou respectivos entalhes, transformando-os em conectores de alta resistência e rigidez.

São descritas por CRISINEL (1990) as conexões semi-rígidas, onde o intuito da composição da estrutura mista é a redução dos deslocamentos e não o aumento da resistência.

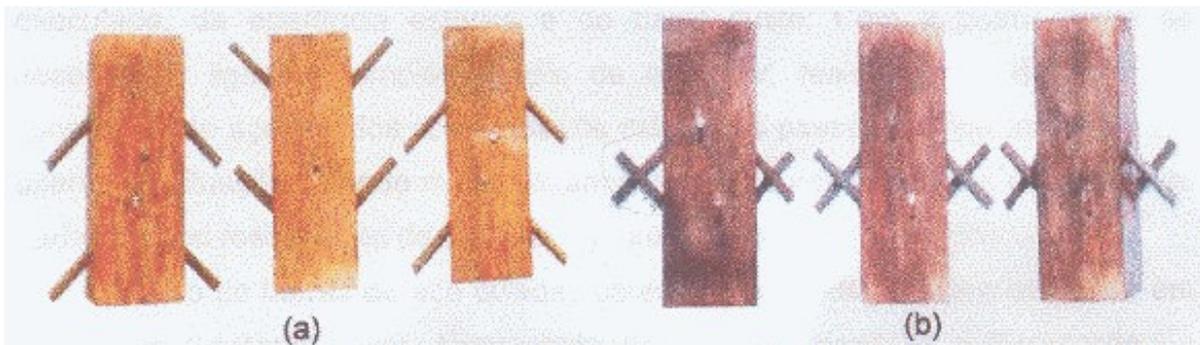
MATTHIESEN (2001), apresentou ensaios de conectores de barra de aço estriado, introduzidos em furos inclinados de 50° em relação às fibras de madeira, para ligações mistas de madeira e concreto. Em seu trabalho MATTHIESEN (2001) concluiu que:

- Pinos “X” aumentaram a rigidez em 61% em relação aos pinos posições 90° ;
- Pinos “X” aumentaram a rigidez em 59% em relação aos pinos somente comprimidos, inclinados nas posições 50° às fibras da madeira;
- O pino comprimido contribuiu com 63% da rigidez da conexão “X”.



(a) Pinos em 90° que trabalham a flexão; (b) Pinos em “X”, com inclinação de 50° que trabalham com esforços axiais.

FIGURA 2.7: Parte do corpo de prova tipo “push out” com pinos de 12,5mm
FONTE: MATTHIESEN (2001)



(a) Pinos comprimidos, com inclinação de 50°, que trabalham com esforços axiais; (b) Pinos em “X” com inclinação de 50°.

FIGURA 2.8: Parte do corpo de prova tipo “push out” com pinos de 12,5mm, e em X em relação às fibras da madeira
FONTE: MATTHIESEN (2001)

2.5 Módulo de deslizamento da ligação

O módulo de deslizamento (K_{1c}) define a rigidez do conector e é determinado experimentalmente por meio de ensaios em corpos de prova. Corresponde ao coeficiente angular da curva carga - deslocamento, considerando as dimensões, as características físicas dos componentes e propriedades dos materiais envolvidos na estrutura mista.

A eficiência dos conectores é representada pelo módulo de deslizamento K_{1c} . Este parâmetro está definido em GUTKOWSKI e CHEN (1996) como sendo função da diferença entre o deslizamento total de duas camadas, ou seja, concreto e madeira.

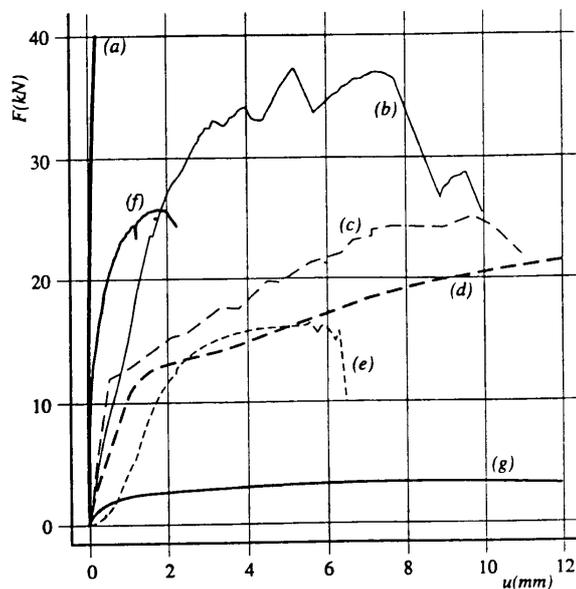


FIGURA 2.9: Curvas experimentais carga x deslizamento para ligações solicitadas à tração paralela: (a) ligação colada, (b) anel partido, (c) conector de anel de macho e fêmea, com pega dentada, (d) cavilha, (e) parafuso de porca, (f) chapa estampada, (g) pregos.

FONTE: RACHER (1995), p. 5.

O deslizamento entre os dois materiais está relacionado com a rigidez da conexão, que por sua vez depende do espaçamento e rigidez individual dos conectores, descreve NEWMARK (1951).

Uma viga mista com conexão parcial apresenta curva carga x deslocamento vertical como ilustrada na FIG 2.9. De acordo com WRIGHT (1990), essa curva é caracterizada por três segmentos: a) um estágio inicial de carregamento, com pequenos deslocamentos os conectores apresentam comportamento elástico; b) elevando-se o carregamento na viga, cada conector receberá grande carga e, portanto, trabalhará em regime plástico, e por consequência ocasionará aumento significativo do deslocamento vertical da viga; c) com o aumento do carregamento, quando todos os conectores alcançarem o limite de plasticidade ocorrerá ruptura da viga.

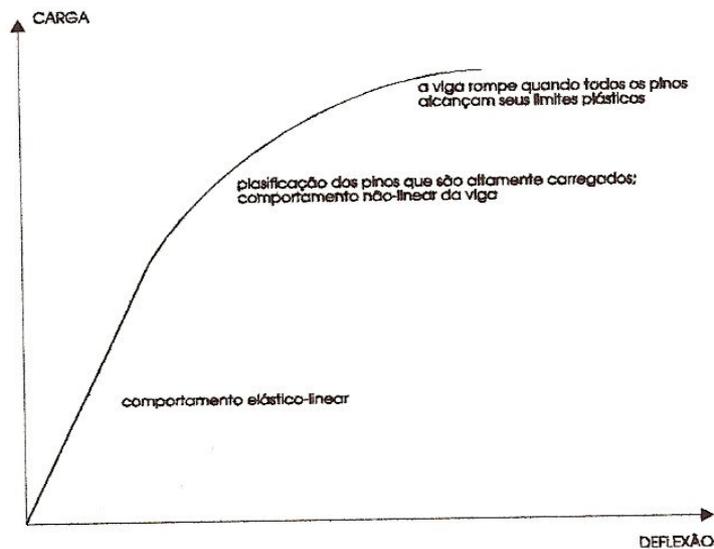


FIGURA 2.10: Carga x deslocamento vertical de viga mista com interação parcial
 FONTE: WRIGHT (1990), p. 52.

A norma ISO 6891/83 prescreve princípios gerais para a determinação do deslizamento e da resistência da conexão. Entre eles a determinação do módulo de resistência $K_{(1c)}$. A norma é bastante clara quanto ao comportamento de carregamento e medida dos deslizamentos, mas as dimensões dos corpos de prova não são explicitamente apresentadas, apenas recomendando-se que as dimensões e forma do corpo de prova sejam as mais realistas possíveis. Essa norma é destinada a estruturas exclusivamente de madeira e não madeira e concreto, mas foi utilizada por CECCOTTI (1995) no desenvolvimento do seu trabalho.

As indicações do EUROCODE 4 são também seguidas por CECCOTTI (1995) dentre outros pesquisadores, cujo procedimento para a determinação do módulo de deslizamento consiste em estabelecer o módulo de deslizamento de serviço $K_{1c}(ser)$ e o módulo de deslizamento último $K_{1c}(u)$. O primeiro, que corresponde aos níveis iniciais de carregamento, é obtido pela inclinação da reta secante no início da curva carga x deslocamento e no ponto correspondente a 40% da força de ruptura, com seu respectivo deslocamento. Já, o módulo de deslizamento último é representado pela inclinação de uma reta com valor de $2/3 K_{1c}(ser)$, conforme apresentado na Fig. 2.11.

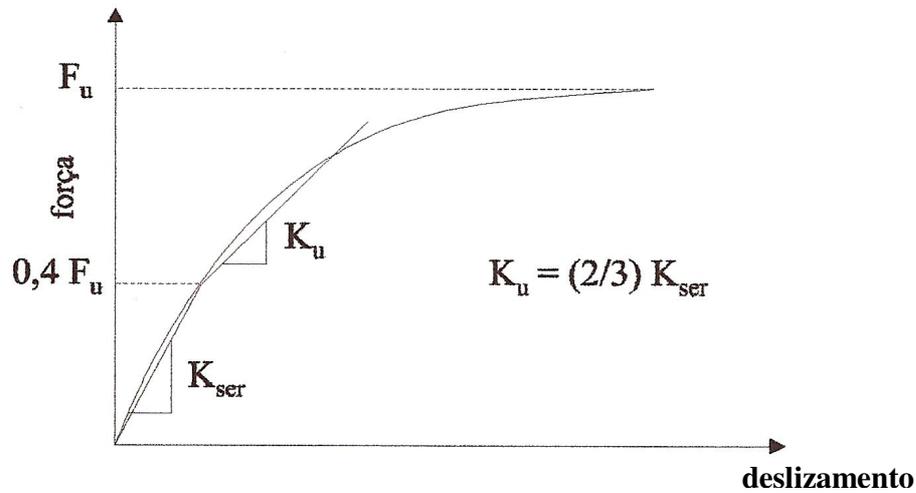


FIGURA 2.11: Representação do módulo de deslizamento por conector
 FONTE: SORIANO (2001), p. 37.

Nos procedimentos de cálculo com ligações por pinos, assume-se um sistema de ligação uniformemente distribuído ao longo da superfície de contato entre os dois materiais. Ou seja, a resistência ao deslocamento proporcionada pelos pinos que são discretos, é considerada constante e expressa por unidade de espaçamento dos conectores.

Essa simplificação adotada para os sistemas de conectores discretos busca aproximar o comportamento dos sistemas por cola. Porém, em razão da flexibilidade, nos pinos metálicos os valores do módulo de deslizamento resultam menores que os apresentados nas ligações por adesivo. Dessa maneira, uma comparação entre a eficiência dos sistemas de ligações por pinos e por adesivos é possível através do módulo de deslizamento por unidade de comprimento, por exemplo, nas unidades $K(N/mm/m)$

2.6 Modelos de corpo de prova para determinação do módulo de deslizamento

O coeficiente de deslizamento K de uma ligação de estruturas é um parâmetro de grande importância para elaboração de projetos, e sua determinação pode ser através de corpos de prova que representem a ligação em estudo. Esses modelos de avaliação da capacidade de carga para o sistema de conexão implicam num baixo custo de confecção quando comparados com o custo de uma viga, por exemplo.

Quando os elementos a serem conectados forem constituídos de madeira, a ABNT/ NBR 7190 (1997) - *Projeto de estruturas de madeira*, em seu anexo C, descreve o processo para caracterizar os diversos tipos de ligações com pinos metálicos, cavilhas, anéis metálicos e chapas com dentes estampados. São indicados para a caracterização mínima da resistência de uma ligação pelo menos seis corpos de prova; ou um número mínimo de 2 exemplares quando na caracterização simplificada. A NBR 7190 (1997) além de indicar todo um processo de extração do corpo de prova descreve que o exemplar representativo da ligação em análise deve apresentar simetria, contendo quatro pinos metálicos, tanto em carregamentos paralelos quanto normais às fibras da madeira.

Na determinação das propriedades de resistência e rigidez, CECCOTTI (1995) indica testes conforme EN 26891 “Estruturas de madeiras - testes de ligações feitas com conectores mecânicos - Princípios gerais para determinação de características de resistência e deformabilidade”, e que os exemplares reproduzam os arranjos reais nos elementos estruturais. O dispositivo de ensaio ilustrado na Fig. 2.12 deverá conter no máximo dois elementos de conexão em linha, de forma a evitar a influência do número de conectores nos resultados do ensaio.

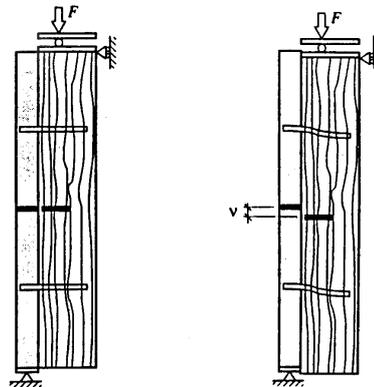
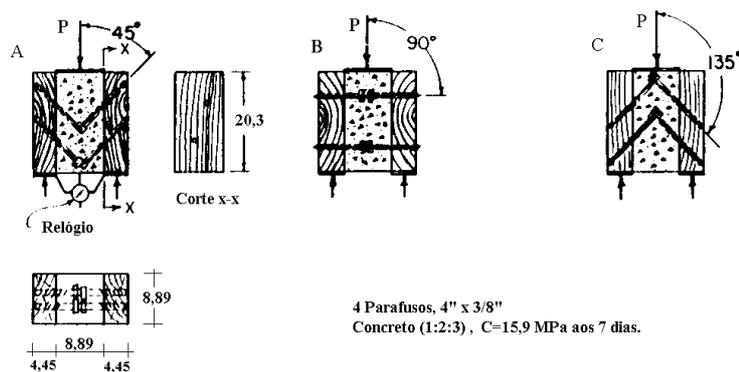


FIGURA 2.12 - Um possível arranjo para determinar o comportamento carga x deslizamento de um sistema de conexão.
 FONTE: CECCOTTI (1995), p. 5.

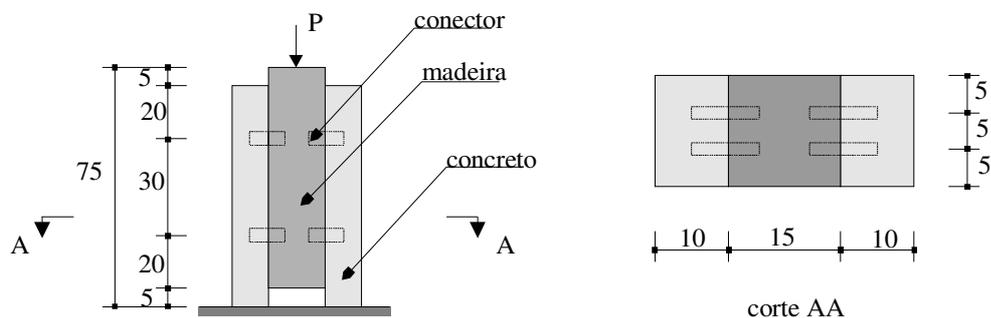
Em RICHART e WILLIAMS (1943), são apresentados resultados de ensaios de corpos de prova constituídos de um elemento de concreto envolvido por dois outros em madeira. Conforme Fig. 2.13, tem-se 4 conectores metálicos (parafusos) por corpo de prova, os quais estão dispostos em três direções diferentes. Para o tipo A, o autor descreve maior capacidade portante, e justifica que os parafusos ao serem tracionados tendem a atrair, em suas direções, os elementos laterais de madeira, mobilizando dessa maneira, forças de atrito entre o concreto e a madeira. A disposição dos parafusos formando ângulo de 45° faz com que o parafuso atue na tração, cisalhamento e flexão, concomitantemente.



(medidas em cm)

FIGURA 2.13 - Disposição dos parafusos em corpos de prova
 FONTE: Adaptado de RICHART e WILLIAMS (1943), p. 260.

No estudo comparativo de resultados experimentais e computacionais, apresentado por SOUZA e CHAHUD (1998), encontra-se relatado o comportamento de corpos de prova em concreto e madeira, em que a ligação entre esses dois materiais é obtida por cavilhas e cantoneiras metálicas. Para a obtenção das curvas carga x deslizamento foram moldados três corpos de prova para cada tipo de conector considerado. As dimensões para cada corpo de prova foram adotadas com base nos estudos de OLLGAARD et al. (1971), conforme Fig. 2.14.



(medidas em cm)

FIGURA 2.14 – Dimensões dos corpos de prova

FONTE: SOUZA e CHAHUD. (1998), p. 375.

NEWMARK (1951) apresenta um estudo de ligações em estruturas mistas em aço-concreto, confrontando resultados obtidos de ensaios com corpos de prova e, também, em vigas, retratando a situação real das ligações. Os corpos de prova para obtenção do módulo de deslizamento entre as duas mesas em concreto e o elemento central em aço, foram moldados com apenas um conector (cantoneira metálica) para cada laje de concreto, conforme ilustra a Fig. 2.15.

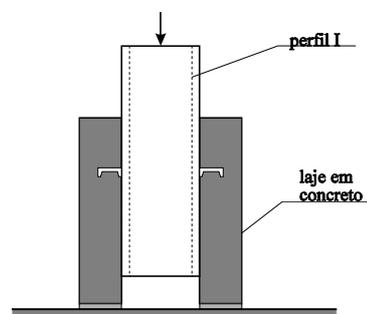


FIGURA 2.15 – Corpo de prova

FONTE: NEWMARK (1953), p. 77.

2.7 Modelo para análise de vigas compostas

Os modelos matemáticos para a representação do comportamento de estruturas mistas em geral propostos na literatura, são abordados com base no princípio de equações de equilíbrio e no princípio da energia. Diferente das estruturas mistas em concreto-madeira existem diversas publicações para as estruturas em aço-concreto, incluindo normas internacionais, como, por exemplo, a BS 5400 (1979), bem como a nacional NBR 8800/86 (Projeto e execução de estruturas de aço de edifício). Tendo em vista a complexidade que envolve o comportamento das estruturas com seções mistas, algumas simplificações são assumidas para uma abordagem aproximada do problema.

2.7.1 Método de Cálculo para Estruturas Mistas em Concreto-Madeira com Base no Princípio de Equações de Equilíbrio

A formulação apresentada nesta seção está descrita em STEVANOVIC (1996), em que são utilizadas as teorias de elasticidade linear e de vigas de Euler-Bernoulli:

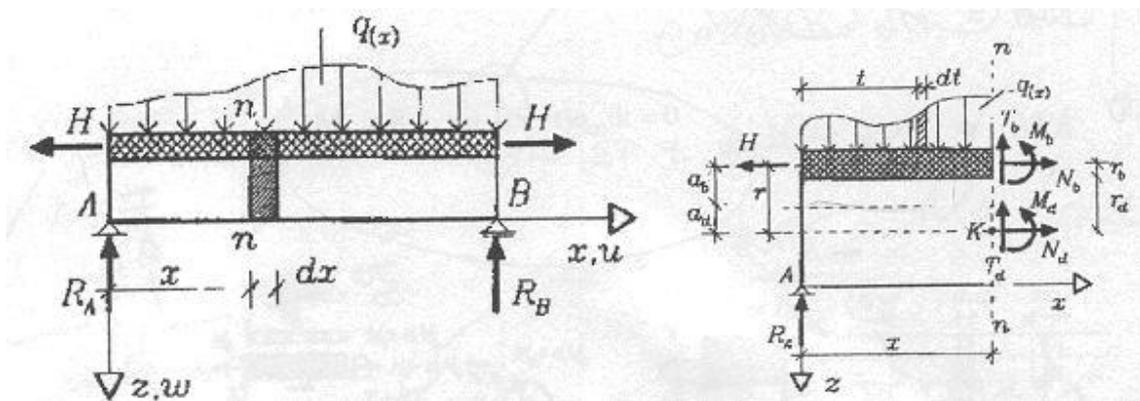
- a madeira e concreto são considerados materiais elásticos isotrópicos, sendo válida a lei de Hooke;
- seções planas permanecem planas e perpendiculares ao eixo da seção após deformação;
- a madeira e concreto apresentam deslocamentos verticais iguais em todos os pontos de conexões;

São assumidas mais duas hipóteses para formulação de STEVANOVIC (1996):

- os conectores são discretos, porém considerados como conexões equivalentes contínuas com constante elástica;
- caso haja carga axial, a carga será aplicada no centro de gravidade da mesa de concreto.

O deslizamento entre ambos os materiais é representado pela razão entre a fluxo de cisalhamento na superfície da ligação T_s (N/m) e o módulo de deslizamento K (N/m²):

$$\delta(x) = \frac{T_s(x)}{K} \quad (2.01)$$



a) ações

b) forças numa seção

FIGURA 2.16 - Ações e reações em viga mista concreto-madeira

FONTE: STEVANOVIC (1996), p. 426.

Das condições de equilíbrio da seção à esquerda $n-n$ da Fig. 2.16, têm-se as expressões de equilíbrio de forças:

- somatória das forças na direção x :

$$N_b + N_d - H = 0 \quad (2.02)$$

- somatória das forças na direção z:

$$T_b + T_d + R_A - \int_0^x q(t)dt = 0 \quad (2.03)$$

sendo:

$$T_b + T_d = T_x \quad (2.04)$$

Da somatória do momento em torno do ponto k, tem-se:

$$M_b + M_d - N_b \cdot r + H \cdot r - R_A \cdot x + \int_0^x (x - t)q(t)dt = 0 \quad (2.05)$$

sendo:

$$M_b + M_d - N_b \cdot r = M_x - H \cdot r \quad (2.06)$$

onde:

$$T_x = R_A - \int_0^x q(t)dt \quad (2.07)$$

$$M_x = R_A \cdot x + \int_0^x (x - t)q(t)dt = 0 \quad (2.08)$$

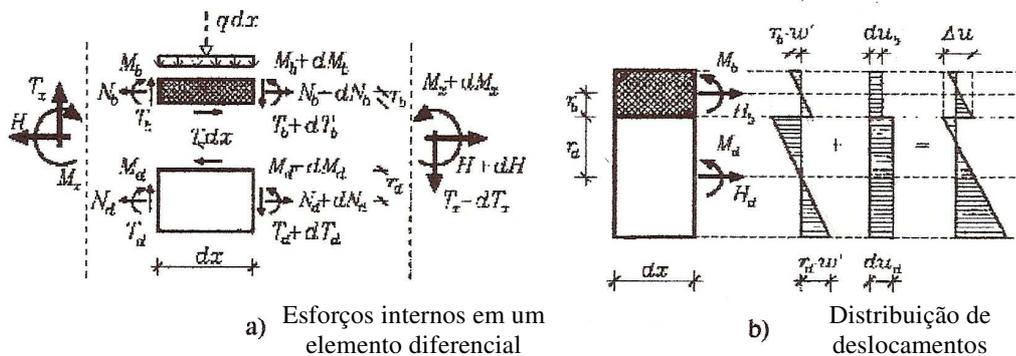


FIGURA 2.17 – Vistas laterais de um elemento infinitesimal
 FONTE: STEVANOVIC (1996), p. 427.

Das condições de equilíbrio de um elemento de concreto dx , a distancia x da origem da ordenada, tem-se:

$$T_s = -\frac{dN_b}{dx} \quad (2.09)$$

Assumindo que a força H é constante ao longo do comprimento, então:

$$\frac{dH}{dx} = 0 \quad (2.10)$$

Das considerações de equilíbrio, pode-se escrever:

$$T_x = \frac{dM_x}{dx} \quad (2.11)$$

Do equilíbrio de forças no elemento de concreto, obtém-se:

$$T_b = T_s \cdot r_b + \frac{dM_b}{dx} \quad (2.12)$$

Do equilíbrio de forças no elemento de madeira, obtém-se:

$$T_d = T_s \cdot r_d + \frac{dM_d}{dx} \quad (2.13)$$

Considerando que as curvaturas são iguais para o concreto e madeira, e negligenciando as deformações de cisalhamento e o encurtamento do eixo, a curvatura é aproximada por:

$$w'' = -\frac{M_b}{E_b I_b} = -\frac{M_d}{E_d I_d} \quad (2.14)$$

onde: $E_b I_b$ e $E_d I_d$ são as rigidez de flexão das seções de concreto e de madeira, respectivamente.

Combinando as eqs. (2.02), (2.06) e (2.14), obtém-se:

$$M_b = \frac{E_b I_b}{EI_0} [M_x - (H - N_b) \cdot r] \quad (2.15)$$

$$M_d = \frac{E_d I_d}{EI_0} [M_x - (H - N_d) \cdot r] \quad (2.16)$$

com:

$$EI_0 = E_b I_b + E_d I_d \quad (2.17)$$

A eq. (2.17) representa a rigidez à flexão de uma seção não-composta.

Das condições de compatibilidade na interface de ligação entre a madeira e o concreto, o deslocamento total na conexão será:

$$\Delta u = du_d - du_b + w' \cdot r \quad (2.18)$$

onde:

$$du_b = \frac{N_b dx}{A_b E_b} \quad (2.19)$$

$$du_d = \frac{N_d dx}{A_d E_d} \quad (2.20)$$

$$\Delta u = \frac{T_s}{K} = -\frac{dN_b}{dx} \cdot \frac{1}{K} \quad (2.21)$$

Diferenciando-se a eq. (2.18), e levando-a em (2.19), (2.20) e (2.21), obtém-se:

$$\Delta \varepsilon = \varepsilon_d - \varepsilon_b + w'' \cdot r \quad (2.22)$$

$$\Delta \varepsilon = -\frac{d^2 N_b}{dx^2} \cdot \frac{1}{K} \quad (2.23)$$

$$\varepsilon_b = \frac{N_b}{A_b E_b} \quad (2.24)$$

$$\varepsilon_d = \frac{N_d}{A_d E_d} \quad (2.25)$$

$$w'' = -\left[\frac{M_x - (H - N_b) \cdot r}{EI_0} \right] \quad (2.26)$$

Pela combinação das eq. (2.22) a (2.25), tem-se a equação diferencial básica do problema em função da força normal no concreto:

$$\frac{d^2 N_b}{dx^2} - \alpha^2 N_b = \beta \cdot M_x - \gamma \cdot H \quad (2.27)$$

onde:

$$\alpha^2 = K \left(\frac{1}{A_b E_b} + \frac{1}{A_d E_d} + \frac{r^2}{EI_0} \right) \quad (2.28)$$

$$\beta = \frac{K \cdot r}{EI_0} \quad (2.29)$$

$$\gamma = K \left(\frac{1}{A_d E_d} + \frac{r^2}{EI_0} \right) \quad (2.30)$$

A combinação das eq. (2.26) e (2.27) resulta numa equação diferencial de quarta ordem, considerando o deslocamento w para a viga composta de concreto-madeira, simplesmente apoiada, sujeita ao carregamento conforme Figura 18:

$$w^{IV} - \alpha^2 w^{II} = \frac{\alpha^2 M_x}{EI_\infty} - \frac{M_x^{II}}{EI_0} - \frac{\alpha^2 H \cdot a_{b\infty}}{EI_\infty} \quad (2.31)$$

onde:

$$EI_\infty = \frac{EI_0}{\alpha^2 - \beta \cdot r} = E_d I_d + E_b I_b + \frac{r^2 E_d A_d E_b A_b}{E_d A_d + E_b A_b} \quad (2.32)$$

A eq. (2.32) representa a rigidez de flexão para ação composta total. O termo $a_{b\infty}$, que representa a distância entre o centro de gravidade da seção rigidamente composta ao c.g. da seção de concreto, é obtido por:

$$\frac{r(\alpha^2 - \gamma)}{(\alpha^2 - \beta \cdot r)} = \frac{r \cdot E_b A_b}{E_d A_d + E_b A_b} = a_{b\infty} \quad (2.33)$$

A solução geral da equação diferencial (2.31) é dada por:

$$w = a_1 \sinh(\alpha x) + a_2 \cosh(\alpha x) + a_3 + a_4 + w_p \quad (2.34)$$

onde: a_1 até a_4 são constantes que dependem das condições de contorno (condições de apoio), e w_p é solução particular que depende do carregamento externo.

Quando a solução para w é conhecida, para uma dada condição de contorno, as forças internas podem ser facilmente calculadas.

$$M_b = -w'' \cdot E_b I_b \quad (2.35)$$

$$M_d = -w'' \cdot E_d I_d \quad (2.36)$$

Pela substituição da eq. (2.35) em (2.15) obtém-se N_b , que é a força resultante da tensão normal na seção transversal de concreto, e da eq. (2.37) em (2.02), a resultante da tensão normal na madeira, respectivamente:

$$N_b = \frac{H \cdot r - M_x - w'' \cdot EI_0}{r} \quad (2.37)$$

$$N_d = \frac{M_x + w'' \cdot EI_0}{r} \quad (2.38)$$

A tensão de cisalhamento entre o concreto e a madeira é obtida combinando-se as eq. (2.37) e (2.09):

$$T_s = \frac{M_x' + w''' \cdot EI_0}{r} \quad (2.39)$$

2.7.2 Modelo numérico de vigas compostas

a) Método de elementos finitos

O método de elementos finitos é uma técnica de resolução aproximada de problemas de valor de contorno ODEN, GRAHAN e BECKER (1981). O método envolve o particionamento do domínio em um número finito de elementos (os elementos finitos) e, usando conceitos variacionais, envolve a construção de uma aproximação da solução sobre esses elementos. Uma análise de elementos finitos é, em geral, constituída dos seguintes passos:

- construção de uma formulação variacional para o problema. Em elasticidade, a minimização do funcional de energia de deformação conduz à formulação variacional – o que equivale à formulação do princípio dos trabalhos virtuais;
- definição da geometria do problema, seu domínio e condições de contorno;
- escolha do espaço de aproximação: definição das funções, se polinomiais ou trigonométricas, e sua ordem de interpolação;
- aplicação do método de Galerkin para o espaço de funções adotado;
- resolução do sistema algébrico $[K] \{u\} = \{F\}$, em que $[K]$ é a matriz de rigidez da estrutura, F é o vetor de carga e u é o vetor multiplicador das funções adotadas;
- análise dos resultados.

b) Modelagem via programa SAP2000

SORIANO (2001) apresenta em sua tese de doutoramento uma simulação computacional de uma viga mista através de um programa de elementos finitos. Foi utilizado o programa SAP2000® disponível e licenciado pela Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo.

Em razão das características e dimensões das vigas e painéis ensaiados, optou-se por utilizar elementos de cascas para representar as peças de concreto e de madeira. As malhas de elementos para as mesas em concreto foram definidas nos planos horizontais contidos a meia espessura da mesa, e a espessura atribuída a cada elemento é a espessura real da peça.

As peças em madeira foram modeladas por uma malha no plano vertical da viga, cuja espessura corresponde a da peça de madeira. Baseado na área do elemento finito e da sua espessura, o programa considera automaticamente o peso próprio da estrutura.

Os conectores metálicos foram representados por elementos lineares com as respectivas características geométricas dos pregos e parafusos utilizados nas estruturas, bem como suas características mecânicas. Desse modo, o sistema de conexão mantém-se discreto e os espaçamentos são as distâncias reais utilizadas. Os nós do elemento linear unem a face superior da viga de madeira à mesa de concreto.

Para assegurar uma das hipóteses básicas assumidas para a estrutura mista, os dois nós de uma única barra são restringidos de maneira a apresentarem o mesmo deslocamento na direção vertical.

Para validação dos resultados dessa modelagem foram realizadas diversas simulações como, por exemplo, supor que os conectores representassem um sistema de ligação perfeita com

rigidez infinita. Outra simulação foi a da inexistência do sistema de conexão, ou seja, a mesa de concreto estaria sobreposta na madeira e livre para deslizar sobre a peça de madeira.

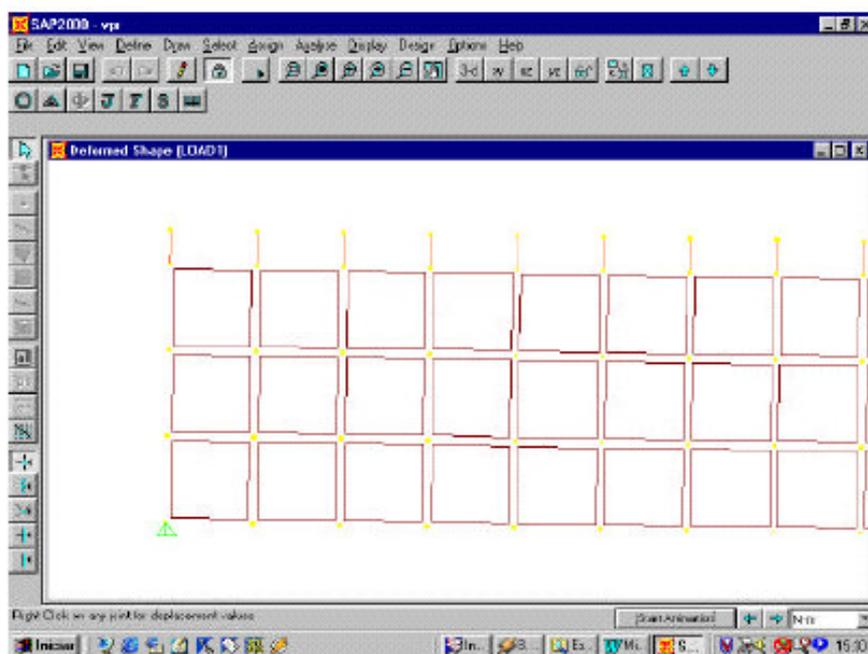


FIGURA 2.18 – Detalhe da representação dos conectores metálicos
FONTE: SORIANO (2001), p. 138.

As seções de instrumentação para a análise dos estados de tensão e deformação em cada estrutura foram localizadas nas seções posicionadas a um terço dos apoios, de forma a evitar a região central das estruturas, onde certamente existem os efeitos da carga concentrada. A carga concentrada foi considerada como carga distribuída equivalente nos elementos da laje próximos a região central da viga. Dessa maneira, foi possível simular a real aplicação da carga em laboratório através de uma chapa de aço.

O efeito de não-linearidade do material não é considerado no programa utilizado para a modelagem. Dessa simplificação são esperadas diferenças entre os resultados de ensaios e os obtidos da modelagem como ocorre, por exemplo, com o concreto que para um determinado nível de tensão passa a comportar-se em regime plástico.

A seguir são apresentadas as Fig. 2.19, 2.20, 2.21 e 2.22 que ilustram os resultados obtidos por SORIANO (2001).

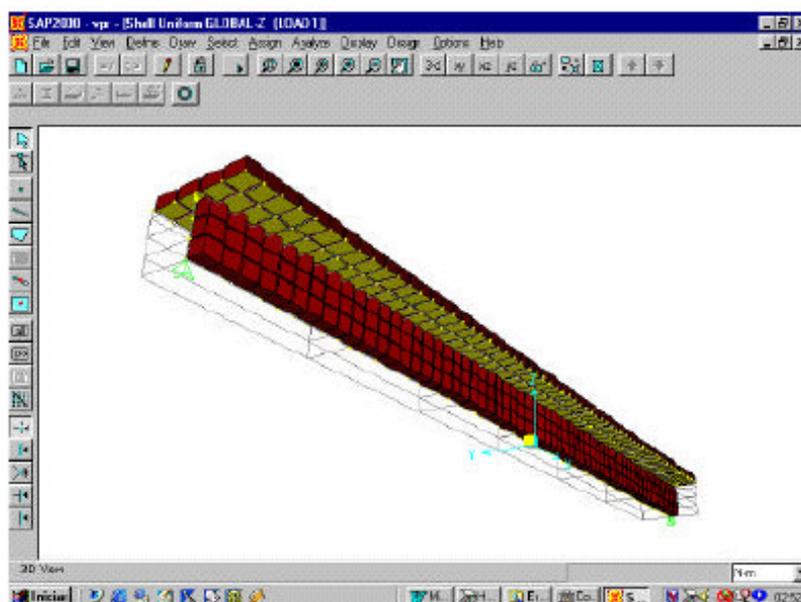


FIGURA 2.19 – Representação de uma viga em concreto-madeira
FONTE: SORIANO (2001), p. 139.

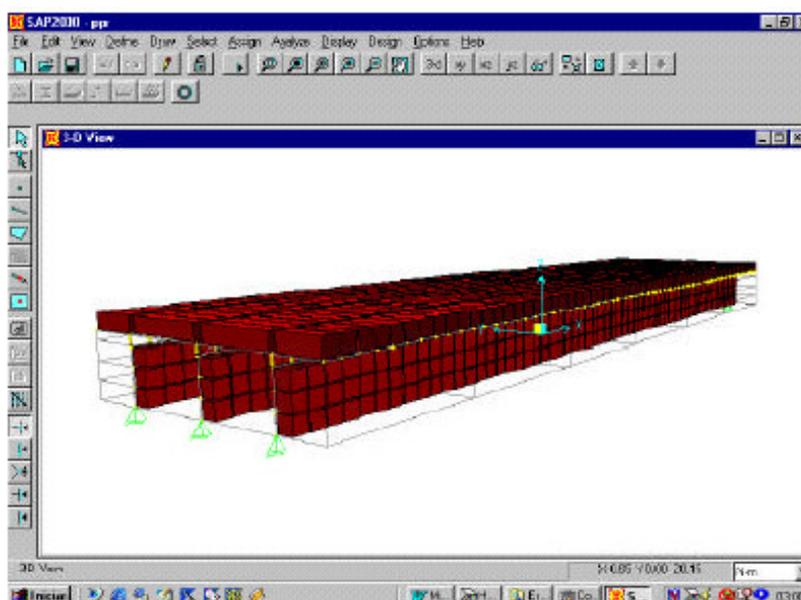


FIGURA 2.20 – Representação de um painel em concreto-madeira
FONTE: SORIANO (2001), p. 139.

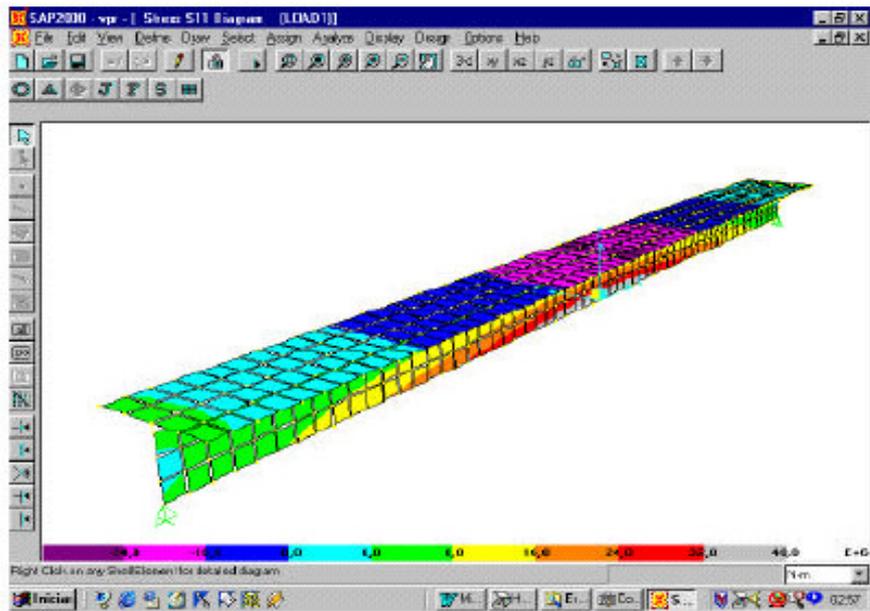


FIGURA 2.21 - Tensões ao longo da viga mista de concreto-madeira
 FONTE: SORIANO (2001), p. 142.

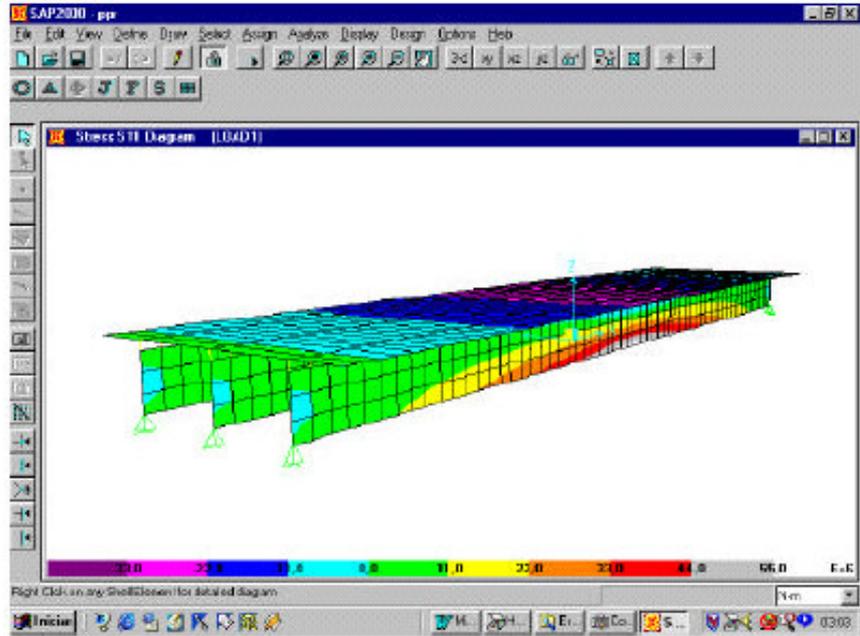


FIGURA 2.22 - Tensões no painel misto de concreto-madeira
 FONTE: SORIANO (2001), p. 142.

3 METODOLOGIA

3.1 Estudo teórico.

O arranjo estático de uma estrutura mista pode ser apresentado como o de duas peças, uma em concreto e outra em madeira, solidarizadas por meio de dispositivos como conectores.

Os conectores são responsáveis pela transmissão de esforços entre as duas peças da estrutura mista, de modo que elas trabalhem mecanicamente em conjunto.

Na hipótese de as duas peças serem conectadas rigidamente, trabalhariam monoliticamente, de maneira simples e convencional. Nesse caso, são válidas as hipóteses de Bernoulli-Navier para qualquer seção, havendo apenas uma linha neutra.

Na hipótese de não haver conectores, as duas peças trabalhariam independentes, podendo deslizar uma sobre a outra livremente.

O arranjo ideal é o da primeira hipótese, em que as peças trabalham monoliticamente. Nessa situação o concreto trabalharia simplesmente à compressão, obtendo-se o aproveitamento máximo desse material. Entretanto, alguns tipos de conectores fornecem apenas uma interação parcial entre os dois materiais. Assim, a hipótese de cálculo a ser adotada é a de conexão semi-rígida, em que o deslizamento de interface entre os dois materiais deve ser considerado. Esse caso é o de mais difícil modelagem e será o tipo tratado neste trabalho.

Adesivos estruturais rígidos, como o epóxi, garantem a rigidez da conexão entre os materiais. Ligações com pinos de aço, pregos, parafusos, cavilhas e perfis metálicos conferem uma conexão semi-rígida à estrutura. Pode-se, também, dividir os conectores pela maneira com a qual a interação entre elementos é dada, em discreta ou continuamente. Pinos, pregos e parafusos, por exemplo, transmitem esforços entre os elementos pontualmente onde estão localizados. Por isso são considerados de interação discreta. Adesivos rígidos transferem os esforços de maneira contínua ao longo das peças e por isso são considerados de interação contínua.

Essa classificação dos conectores em discretos e contínuos é importante para a modelagem numérica de uma viga mista. SORIANO (2001) trata o problema das duas formas apresentadas. Em uma análise, via programa de computador de elementos finitos SAP2000, os conectores são tratados como elementos discretos entre os materiais. Em outra análise, via resolução analítica de equação diferencial e utilizando-se o programa Mathematica, os conectores são tratados como elementos contínuos ao longo da viga. Para os dois casos, foram consideradas ligações semi-rígidas.

A análise desenvolvida via resolução analítica da equação diferencial, conduziu a valores muito próximos dos observados experimentalmente. Já na análise via programa de elementos finitos, a estrutura simulada apresentou-se mais rígida que a estrutura ensaiada em laboratório (ver Fig. 3.1). SORIANO aponta algumas justificativas:

“Essa divergência de resultados certamente, deve ser atribuída ao fato que o modelo utilizado no SAP não esteja representando coerentemente o comportamento de conectores com maiores diâmetros, como no caso dos parafusos utilizados. Admitindo-se para esses conectores mais rígidos, a hipótese de haver um pequeno esmagamento das paredes dos furos da madeira, que ocasionará um deslizamento horizontal entre as peças e conseqüentemente, implicando num acréscimo da flecha. Por outro lado, na ligação por pregos, os comportamentos representados pela modelagem sugerida tiveram bons resultados o que se deve, provavelmente, ao fato do deslizamento ocorrer com predominância do efeito de flexão do pino” (SORIANO, 2001, P.154).

SORIANO (2001) também argumenta que a consideração de conectores de interação contínua, tal como utilizada na sua modelagem via resolução analítica da equação diferencial, traz vantagens, uma vez que independe do modo de ruptura da ligação, sendo o comportamento dos conectores caracterizado diretamente pelo módulo de deslizamento, obtido através de ensaios de corpos de prova.

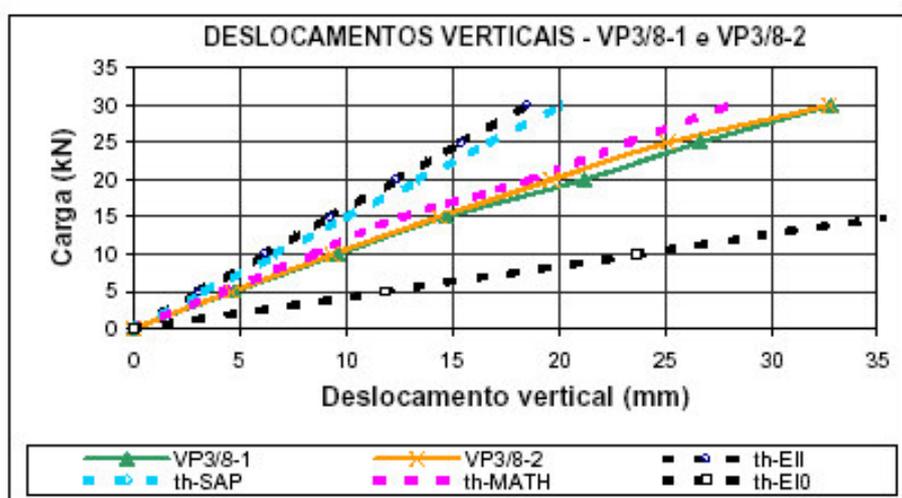


FIGURA 3.1: Comparação de deslocamentos verticais.

FONTE: SORIANO (2001), p. 152.

Com base nos resultados apresentados, propõe-se uma modelagem numérica via SAP2000, buscando-se suprir as deficiências encontradas por SORIANO (2001), associando-se o conceito de interação contínua ao modelo discreto utilizado no SAP.

Propõe-se ainda, a resolução das equações diferenciais de estruturas mistas pelo método dos elementos finitos ou pelo método de análise matricial das estruturas (método dos deslocamentos associado à interação de conectores). A escolha deve ser tomada com o estudo aprofundado das equações diferenciais e dos métodos de resolução dessas equações.

3.2 Modelo implementado no programa SAP 2000.

Os dados utilizados para a elaboração do modelo de viga mista concreto-madeira implementados no programa SAP são os descritos na TAB.3.1 e TAB.3.2 SORIANO (2001) experimentou dois protótipos por grupo de conectores, ou seja, VP 1/2 – 1, VP 1/2 – 2, VP 3/8 – 1 e VP 3/8 - 2 e seus resultados serão comparados com o resultado do programa SAP.

TABELA 3.1 – Propriedades dos componentes das vigas mistas (VP 3/8) e (VP 1/2)
 FONTE: SORIANO (2001).

	Concreto	Madeira
Seção (mm ²)	12000	7500
Inércia (mm ⁴)	1,6*10 ⁶	14,063*10 ⁶
E (N/mm ²)	19300	14700

Viga Mista (VP 3/8):

- Estado Limite de Utilização K_{Ic} (ser) = 11471 N/mm;
- Estado Limite de Utilização K (ser) = 2885,4 N/mm/cm;
- Estado Limite de Utilização K_{Ic} (u) = 7647 N/mm;
- Estado Limite de Utilização K (u) = 1019,6 N/mm/cm;

Viga Mista (VP 1/2):

- Estado Limite de Utilização K_{Ic} (ser) = 15464 N/mm;
- Estado Limite de Utilização K (ser) = 2061,9 N/mm/cm;
- Estado Limite de Utilização K_{Ic} (u) = 10309 N/mm;
- Estado Limite de Utilização K (u) = 1374,6 N/mm/cm;

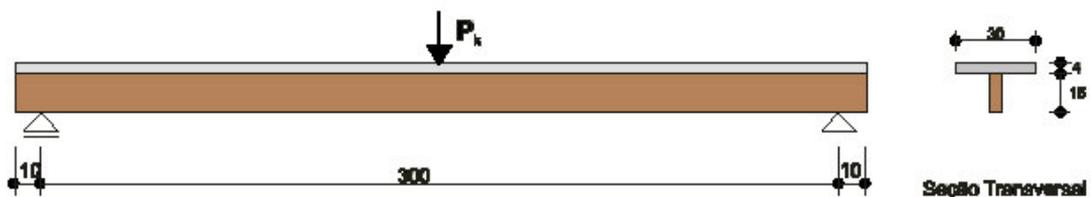


FIGURA 3.2 – Detalhe da viga mista (VP)
FONTE: SORIANO (2001), p. 186.

Para efeito de cálculo, serão consideradas uma carga uniformemente distribuída que corresponde ao peso próprio da viga $q = 0,36 \text{ N/mm}$, e uma carga concentrada P_k , aplicada no meio do vão.

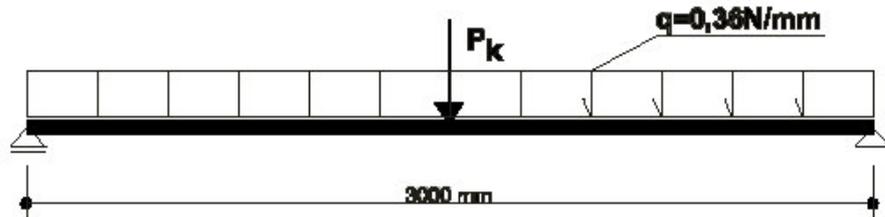


FIGURA 3.3– Esquema estático da viga mista (VP)
 FONTE: SORIANO (2001), p. 188.

Os conectores foram simulados através de elementos de viga, unindo a seção de concreto à de madeira em alguns pontos. Entretanto, buscou-se um comportamento contínuo da conexão. Para isso a rigidez dos elementos de viga foi escolhida de modo a simular a mesma rigidez do módulo de deslizamento obtido em laboratório.

Na Fig.3.4 é apresentado o processo de cálculo da rigidez equivalente ao módulo de deslizamento:

$$K \text{ (N/mm}^2\text{)} * L \text{ (mm)} = K \text{ equiv (N/mm)}$$

aplicando-se uma força horizontal de:

$$K \text{ equiv (N)}$$

deve-se obter um deslocamento horizontal unitário (mm), onde $K \text{ (N/mm}^2\text{)}$ é o módulo de deslizamento da ligação obtida em laboratório e $L \text{ (mm)}$ é o comprimento total da viga.

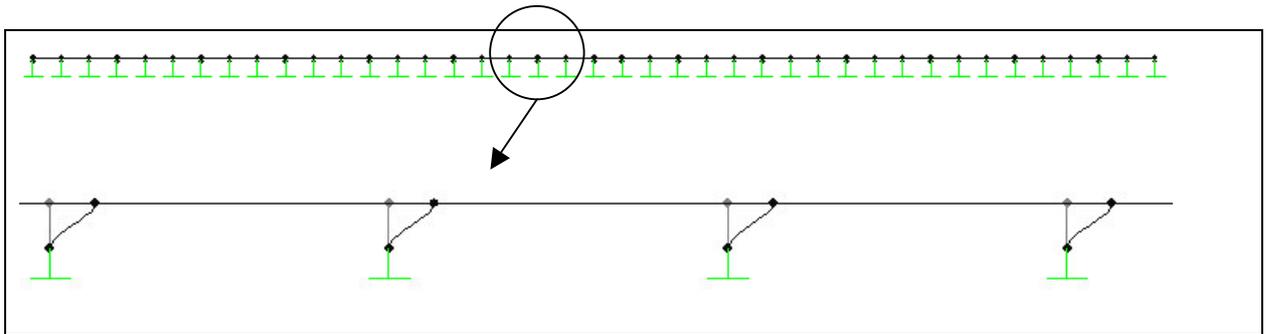


FIGURA 3.4 – Conectores equivalentes da viga mista

A Fig.3.6 apresenta a malha utilizada para o cálculo dos deslocamentos da viga mista. Os elementos finitos adotados para a confecção da malha foram às projeções da viga no plano vertical, para que os esforços T_s (deslizamento) fossem excêntricos a peça, ou seja, simulando a real condição. A força excêntrica gera momento negativo aliviando a flecha.

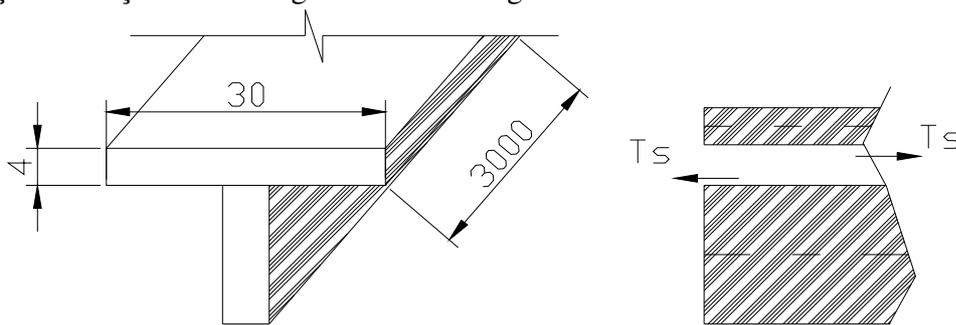


FIGURA 3.5 – Seção utilizada para confecção da malha (cm)

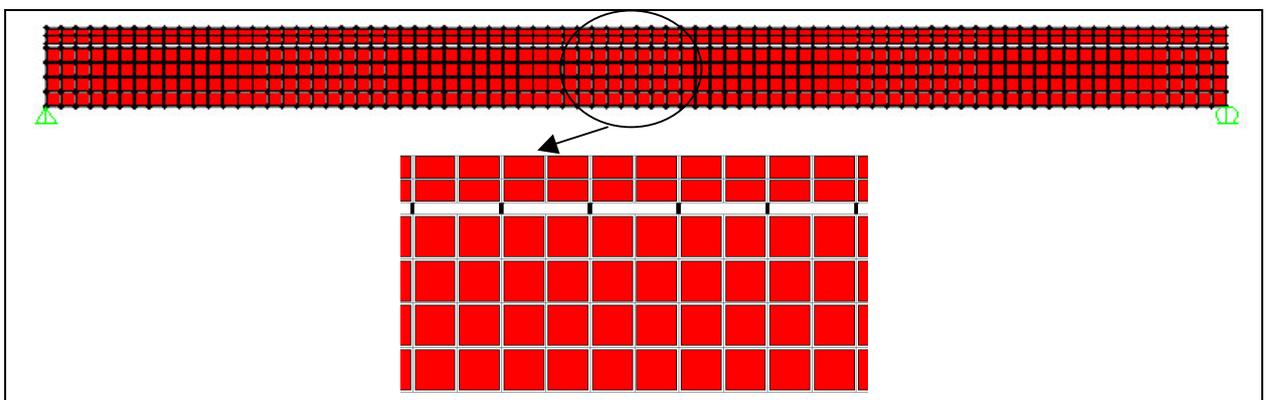


FIGURA 3.6 – Malha utilizada para caracterizar a viga mista no SAP.

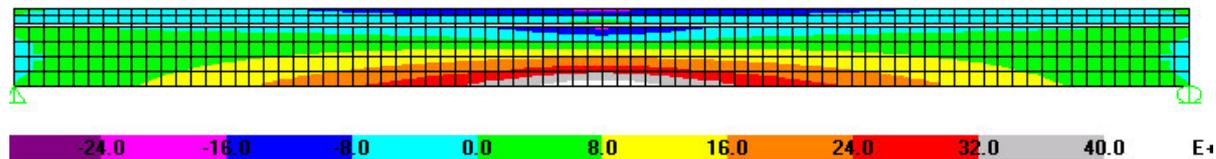


FIGURA 3.7 - Tensões ao longo da viga mista de concreto-madeira (VP 1/2)

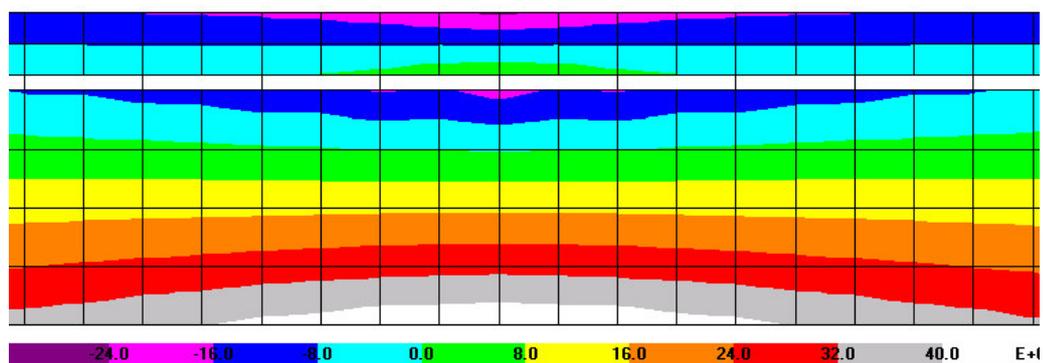


FIGURA 3.8 – Detalhe das tensões ao longo da viga mista de concreto-madeira (VP 1/2)

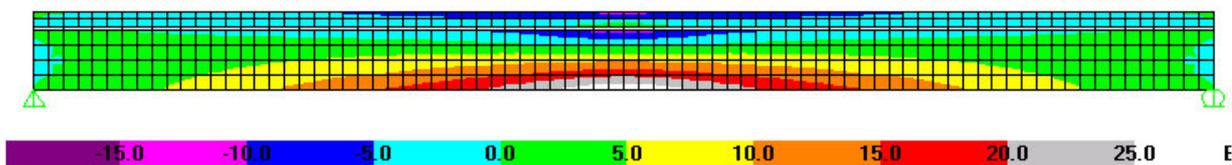


FIGURA 3.9 - Tensões ao longo da viga mista de concreto-madeira (VP 3/8)

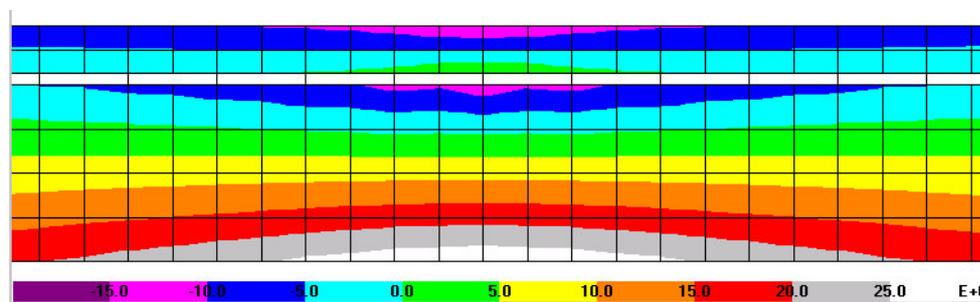


FIGURA 3.10 – Detalhe das tensões ao longo da viga mista de concreto-madeira (VP 3/8)

3.3 Modelo de funcionamento de viga composta.

3.3.1 Princípio dos trabalhos virtuais (PTV)

O princípio dos trabalhos virtuais é uma poderosa técnica para resolução de diversos problemas na engenharia, principalmente na mecânica dos sólidos.

O termo virtual é usado para designar o trabalho realizado por forças externas (verdadeira) com uma variação de deslocamentos (deslocamentos imaginários, virtuais). O princípio dos trabalhos virtuais é enunciado como: *o trabalho virtual das forças internas é igual ao trabalho virtual das forças externas para qualquer deslocamento virtual que respeite as vinculações da estrutura.*

A equação do princípio dos trabalhos virtuais para um estado de forças em equilíbrio e um estado independente de deslocamentos compatíveis com as vinculações da estrutura é dada por:

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_A T_i \delta u_i dA + \int_V F_i \delta u_i dV \quad (3.01)$$

em que: σ_{ij} são as tensões da estrutura; $\delta \varepsilon_{ij}$ são deformações compatíveis com os deslocamentos virtuais δu_i ; T_i são forças de superfície; A são superfícies de aplicação da carga T_i ; V é o volume do corpo; F_i forças de corpo.

O lado esquerdo da eq (3.01) representa o trabalho virtual das forças internas (TV_{int}) e o lado direito o trabalho virtual das forças externas (TV_{ext}).

3.3.2 Introdução à Teoria de Vigas.

Duas teorias para análise de vigas muito conhecidas são a teoria de viga de Euler-Bernoulli e a teoria de viga de Timoshenko, FILHO (1997). A diferença entre as duas reside no fato de a teoria de Euler-Bernoulli não considerar a energia de deformação da força cortante, enquanto a teoria de Timoshenko faz uso da deformação da força cortante para o cálculo dos deslocamentos. Neste trabalho serão tratadas vigas segundo a teoria de Euler-Bernoulli em duas dimensões.

Teoria de Euler-Bernoulli

Considere a viga ilustrada na Fig. 3.11 de comprimento L , seção transversal de área A e momento de inércia I . A viga é definida no plano XY .

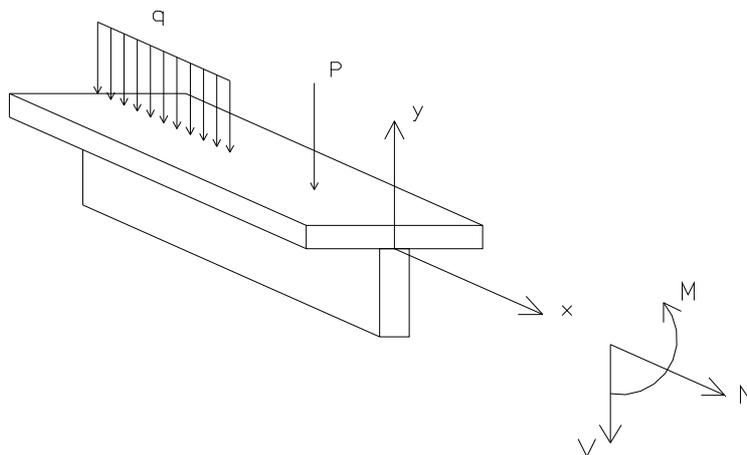


FIGURA 3.11 – Viga convencional de Euler-Bernoulli

a) Hipótese cinemática

Na teoria de Euler-Bernoulli admite-se que as seções transversais normais ao eixo da viga antes da deformação permanecem planas e ortogonais a esta após deformações.

O vetor deslocamento pode ser expresso por:

$$\vec{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \quad (3.02)$$

$$u_x = u - \theta y \quad (3.03)$$

$$u_y = v \quad (3.04)$$

$$\theta = \frac{dv}{dx} \quad (3.05)$$

onde: θ = o giro da seção transversal; u = vetor deslocamento horizontal; v = vetor deslocamento vertical.

O tensor de deformações infinitesimais é definido como:

$$\nabla \vec{u} = \begin{bmatrix} u' - yu'' & -v' \\ v' & 0 \end{bmatrix} \quad (3.06)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T \right) = \begin{bmatrix} u' - yu'' & -v' \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.07)$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_x] = [u' - yv'] \quad (3.08)$$

E o tensor de tensões se resume a:

$$\sigma = [\sigma_x] = [E \varepsilon_x] \quad (3.09)$$

b) Esforços solicitantes

Os esforços solicitantes em um elemento de barra são forças normais, cortantes e momento fletor.

$$N = \int_A \sigma_x dA = \int_A E \varepsilon_x dA = \int_A E(u' - yv') dA = E A u' \quad (3.10)$$

$$V = \int_A \tau dA = 0 \quad (3.11)$$

$$M = \int_A y \sigma_x dA = \int_A y E \varepsilon_x dA = \int_A y E(u' - yv') dA = E I v'' \quad (3.12)$$

c) Aplicação do princípio dos trabalhos virtuais

O trabalho virtual dos esforços internos de uma barra é igual ao trabalho virtual das ações:

$$TV_{\text{int}} = TV_{\text{ext}} \quad (3.13)$$

$$\int_V \sigma_x \delta \varepsilon_x dV = \int_0^L q_i \delta u_i ds + P_i \delta u_i \quad (3.14)$$

$$TV_{\text{int}} = \int_V \sigma_x \delta \varepsilon_x dV = \int_V \sigma_x (\delta u' - y \delta v') dV \quad (3.15)$$

$$TV_{\text{int}} = \int_0^L \left(\delta u' \int_A \sigma_x dA - \delta v' \int_A y \sigma_x \right) ds \quad (3.16)$$

$$TV_{\text{int}} = \int_0^L (\delta u' N - \delta v' M) ds \quad (3.17)$$

$$TV_{\text{int}} = \int_0^L (\delta u' E A u' - \delta v' (-E I v'')) ds \quad (3.18)$$

$$TV_{\text{int}} = \int_0^L (EA \delta u' u' + EI \delta v'' v'') ds \quad (3.19)$$

Substituindo-se eq. (3.19) em (3.14), tem-se:

$$\int_0^L (EA \delta u' u' + EI \delta v'' v'') ds = \int_0^L q_i \delta u_i ds + P_i \delta u_i \quad (3.20)$$

A eq. (3.01) considera ações de carga vertical concentrada e distribuída sobre a viga. A generalização para momentos e forças horizontais pode ser encontrada em FILHO (1997).

3.4 Formulação de viga mista.

A abordagem escolhida para a formulação de uma estrutura mista é a do princípio dos trabalhos virtuais. A viga mista será considerada como duas vigas independentes (uma de concreto e outra em madeira) conectadas. A energia de deformação da estrutura será dada como a soma das energias de deformação das duas vigas com a energia de deformação dos conectores e por isso, o trabalho virtual das forças internas do conjunto será a soma dos três trabalhos virtuais internos individuais.

$$TV_{\text{int}}^C + TV_{\text{int}}^W + TV_{\text{int}}^S = TV_{\text{ext}} \quad (3.21)$$

onde: S = conector; W = madeira e C = concreto;

O trabalho virtual de uma viga foi apresentado na seção 3.3.2 Nesta seção serão apresentados o trabalho virtual interno dos conectores e a formulação final de viga mista.

3.4.1 Trabalho virtual das forças internas dos conectores

A conexão entre as duas vigas (concreto e madeira) será tratada como contínua e sua relação tensão x deslizamento como sendo linear.

a) *Hipótese cinemática*

Como hipóteses, assume-se que o deslocamento vertical das duas vigas é o mesmo, e por consequência suas derivadas também o são. Como a abordagem é a de vigas de Euler-Bernoulli, a derivada do deslocamento vertical é igual ao giro da seção transversal, e as duas vigas têm o mesmo giro.

$$\theta^C = v' \quad (3.22)$$

$$\theta^W = v' \quad (3.23)$$

A tensão de cisalhamento dos conectores é dada por:

$$T_s = K \Delta u \quad (3.24)$$

onde: K é o módulo de deslizamento Δu é o deslocamento relativo entre a fibra inferior da viga de concreto e a fibra superior da viga de madeira

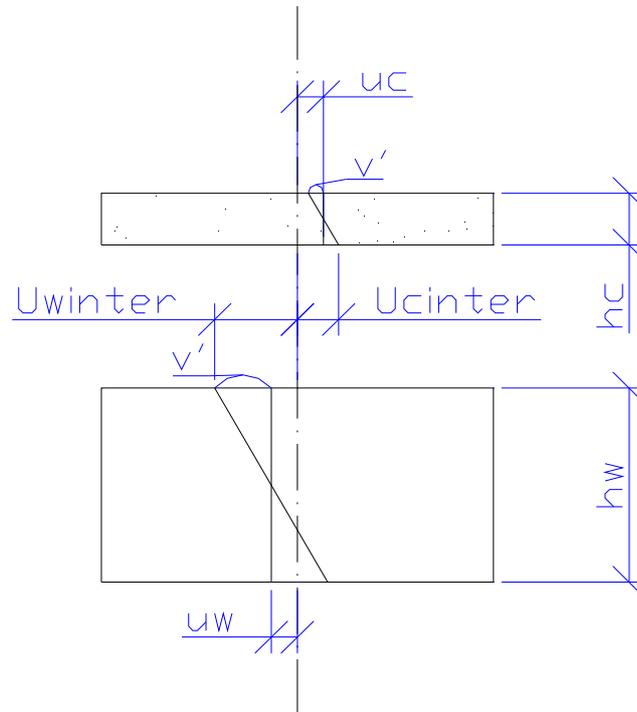


FIGURA 3.12 – Cinemática de uma viga mista

$$\Delta u = u_c^{interface} - u_w^{interface} \quad (3.25)$$

$$u_c^{interface} = u_c + \theta_c \frac{h_c}{2} \quad (3.26)$$

$$u_w^{interface} = u_w - \theta_w \frac{h_w}{2} \quad (3.27)$$

Visto que os giros das duas vigas são iguais, então

$$\Delta u = u_c + v' \frac{h_c}{2} - \left(u_w - v' \frac{h_w}{2} \right) \quad (3.28)$$

$$\Delta u = u_c + v' \frac{h_c}{2} - u_w + v' \frac{h_w}{2} \quad (3.29)$$

$$\Delta u = u_c - u_w + v' \left(\frac{h_c + h_w}{2} \right) \quad (3.30)$$

Denominando a distância entre os centros de gravidade das peças de r , tem-se

$$r = \left(\frac{h_c + h_w}{2} \right) \quad (3.31)$$

$$\Delta u = u_c - u_w + v' r \quad (3.32)$$

e finalmente:

$$Ts = K (u_c - u_w + v' r) \quad (3.33)$$

b) Trabalho virtual das forças internas

O trabalho virtual das forças internas é dado por:

$$TV_{\text{int}}^S = \int_0^L Ts \delta \Delta u \, ds \quad (3.34)$$

$$TV_{\text{int}}^S = \int_0^L K \Delta u \delta \Delta u \, ds \quad (3.35)$$

Substituindo a eq. (3.32) na eq. (3.35), tem-se

$$TV_{\text{int}}^S = \int_0^L K (u_c - u_w + v' r) (\delta u_c - \delta u_w + \delta v' r) \, ds \quad (3.36)$$

3.4.2 Formulação de viga mista

A formulação de viga mista proposta é aquela que satisfaz a equação do princípio dos trabalhos virtuais, eq (3.21):

$$TV_{\text{int}}^C + TV_{\text{int}}^W + TV_{\text{int}}^S = TV_{\text{ext}}$$

Considerando que existirão apenas forças externas verticais na viga mista, o trabalho virtual das forças externas é o mesmo da eq (3.14). Finalmente, os termos da eq (3.21) são:

$$TV_{\text{int}}^C = \int_0^L (E_c A_c \delta u'_c u'_c + E_c I_c \delta v' v') ds \quad (3.37)$$

$$TV_{\text{int}}^W = \int_0^L (E_w A_w \delta u'_w u'_w + E_w I_w \delta v' v') ds \quad (3.38)$$

A eq. (3.36) a qual expandindo os termos em parênteses temos:

$$TV_{\text{int}}^S = \int_0^L K \left(u_c \delta u_c - u_c \delta u_w + u_c \delta v' r - u_w \delta u_c + u_w \delta u_w - u_w \delta v' r \right. \\ \left. + v' \delta u_c r - v' \delta u_w r + v' \delta v' r^2 \right) ds \quad (3.39)$$

E finalmente:

$$TV_{\text{ext}} = \int_0^L q_i \delta v_i ds + P_i \delta v_i \quad (3.40)$$

O problema consiste em encontrar u_c , u_w e v que satisfaçam a eq. (3.21) para quaisquer deslocamentos virtuais δu_c , δu_w e δv que respeitem os vínculos da estrutura.

3.5 Método de Rayleigh - Ritz.

O método de Rayleigh - Ritz é uma técnica de resolução aproximada de formulações variacionais, como a do PTV. A solução aproximada é dada por:

$$sol(x) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N \alpha_i^v \varphi 1_i(x) \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i^{u^C} \varphi 2_i(x) \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i^{u^W} \varphi 3_i(x) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \longrightarrow v \\ \longrightarrow u_c \\ \longrightarrow u_w \end{array} \quad (3.41)$$

Os índices v , u^C e u^W representam as variáveis da eq (3.41):

v = deslocamento vertical; u^C = deslocamento horizontal da fibra média da viga de concreto; u^W = deslocamento horizontal da fibra média da viga de madeira

$\varphi 1(x)$, $\varphi 2(x)$ e $\varphi 3(x)$ são as funções aproximantes, podendo ser iguais ou não.

As funções $\varphi(x)$ devem possuir algumas propriedades, de modo a garantir a boa qualidade da aproximação.

A primeira propriedade diz respeito à regularidade das funções $\varphi(x)$. Para a aproximação dos deslocamentos horizontais, as funções $\varphi(x)$ devem ser contínuas em todo o domínio. Já para a aproximação dos deslocamentos verticais, é necessário que as funções sejam contínuas e que suas

primeiras derivadas também o sejam. A restrição da derivada é necessária para garantir que o giro (derivada do deslocamento vertical) seja contínuo em todo o domínio.

Além da restrição de regularidade, é necessário que as funções $\varphi(x)$ satisfaçam as condições de contorno da estrutura, respeitando seus vínculos. As condições de contorno impostas nas simulações feitas foram:

- deslocamentos verticais nulos nos apoios;
- deslocamento horizontal nulo no meio da estrutura. Devido à simetria da estrutura simulada e da simetria de carregamento, optou-se por impor o deslocamento horizontal nulo no meio do vão das vigas.

Com a imposição dessas condições de contorno, evita-se qualquer tipo de movimento de corpo rígido, o que tornaria a matriz de rigidez singular e dificultaria a resolução do sistema algébrico.

Uma vez escolhida as funções $\varphi(x)$, substituem-se as funções u_c , u_w e v por:

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i(x) \quad (3.42)$$

e as funções δu_c , δu_w e δv por $\sum_{i=1}^N \varphi_i(x)$.

Como a eq. (3.21) é válida para quaisquer deslocamentos virtuais δu_c , δu_w e δv que respeitem os vínculos da estrutura, pode-se escolher, por exemplo:

$$1) \quad \delta v = \delta u_w = 0; \delta u_c = \sum_{i=1}^N \varphi 2_i(x).$$

substituindo a eq.(3.21) pelos valores do exemplo 1 temos:

$$\int_0^L (E_c A_c \delta u'_c u'_c) ds + \int_0^L K (u_c \delta u_c - u_w \delta u_c + v' \delta u_c r) ds = 0 \quad (3.43)$$

$$2) \quad \delta v = \delta u_c = 0; \delta u_w = \sum_{i=1}^N \varphi 3_i(x).$$

substituindo a eq.(3.21) pelos valores do exemplo 2 temos:

$$\int_0^L (E_c A_c \delta u'_c u'_c) ds + \int_0^L K (u_c \delta u_c - u_w \delta u_c + v' \delta u_c r) ds = 0 \quad (3.44)$$

$$3) \quad \delta u_w = \delta u_c = 0; \delta v = \sum_{i=1}^N \varphi 1_i(x).$$

substituindo a eq.(3.21) pelos valores do exemplo 3 temos:

$$\begin{aligned} & \int_0^L (E_c I_c \delta v' v') ds + \int_0^L (E_w I_w \delta v' v') ds \\ & + \int_0^L K (u_c \delta v' r - u_w \delta v' r + v' \delta v' r^2) ds = \int_0^L q_i \delta v_i ds + P_i \delta v_i \end{aligned} \quad (3.45)$$

As eq.(3.43), (3.44) e (3.45)constituem as equações do problema, que possui três equações e três incógnitas.

Fazendo-se a substituição das variáveis do problema pelas funções aproximantes $\varphi(x)$, o sistema de equações 3.43 a 3.45 pode ser escrito em formato matricial como:

$$[K]\{\alpha\} = \{F\} \quad (3.46)$$

em que [K] é chamada matriz de rigidez, α a solução do sistema linear e F o vetor de carga.

A construção do problema algébrico, com a construção da matriz de rigidez e do vetor de carga, para o problema da viga mista é dada pela eq (3.41).

A matriz de rigidez pode ser dividida em três termos: da viga de concreto, da viga de madeira e a matriz de rigidez da conexão.

$$[K_{ij}] = [K_{ij}^C] + [K_{ij}^W] + [K_{ij}^S] \quad (3.47)$$

Os elementos da matriz de rigidez da viga de concreto são dados por:

$$K_{ij}^C = \int_0^L \left(E_c A_c \varphi 2'_i(x) \varphi 2'_j(x) + E_c I_c \varphi 1''_i(x) \varphi 1''_j(x) \right) ds \quad (3.48)$$

e em formato matricial:

$$K_{ij}^C = \begin{bmatrix} \int_0^L (E_c I_c \varphi 1_i''(x) \varphi 1_j''(x)) ds & 0 & 0 \\ 0 & \int_0^L (E_c I_c \varphi 2_i'(x) \varphi 2_j'(x)) ds & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

O elemento (3,3) da matriz tem valor zero porque diz respeito ao deslocamento horizontal da viga de madeira, e não há interação horizontal entre as vigas exceto pela conexão, cuja matriz de rigidez será definida logo mais.

Os elementos da matriz de rigidez da viga de madeira são dados por:

$$K_{ij}^W = \int_0^L (E_w A_w \varphi 3_i'(x) \varphi 3_j'(x) + E_w I_w \varphi 1_i''(x) \varphi 1_j''(x)) ds \quad (3.50)$$

que em formato matricial:

$$K_{ij}^W = \begin{bmatrix} \int_0^L (E_w I_w \varphi 1_i''(x) \varphi 1_j''(x)) ds & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \int_0^L (E_w I_w \varphi 3_i'(x) \varphi 3_j'(x)) ds \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Pode-se notar que até agora não há interação entre a viga de madeira e o deslocamento horizontal do concreto (variável número 2), ilustrado pelo termo (2,2) com valor igual a zero.

Finalmente, a matriz de rigidez da conexão é oriunda do trabalho virtual dos conectores, eq. (3.39) e substituindo as variáveis pelas funções $\varphi(x)$, tem-se:

$$K_{ij}^S = \int_0^L K \begin{pmatrix} \varphi_{2_i}(x)\varphi_{2_j}(x) - \varphi_{2_j}(x)\varphi_{3_i}(x) + \varphi_{2_j}(x)\varphi_{1_i}'(x)r - \varphi_{3_j}(x)\varphi_{2_i}(x) \\ + \varphi_{3_i}(x)\varphi_{3_j}(x) - \varphi_{3_j}(x)\varphi_{1_i}'(x) + \varphi_{1_j}'(x)\varphi_{2_i}(x)r - \varphi_{1_j}'(x)\varphi_{3_i}(x)r \\ + \varphi_{1_i}'(x)\varphi_{1_j}'(x)r^2 \end{pmatrix} ds \quad (3.52)$$

ou, em formato matricial:

$$K_{ij}^W = \begin{bmatrix} \int_0^L K \varphi_{1_i}'(x)\varphi_{1_j}'(x)r^2 ds & \int_0^L K \varphi_{2_j}(x)\varphi_{1_i}'(x)r ds & - \int_0^L K \varphi_{3_j}(x)\varphi_{1_i}'(x)r ds \\ \int_0^L K \varphi_{1_i}'(x)\varphi_{2_j}(x)r ds & \int_0^L K \varphi_{2_i}(x)\varphi_{2_j}(x) ds & - \int_0^L K \varphi_{2_j}(x)\varphi_{3_i}(x) ds \\ - \int_0^L K \varphi_{1_i}'(x)\varphi_{3_j}(x)r ds & - \int_0^L K \varphi_{2_j}(x)\varphi_{3_i}(x) ds & \int_0^L K \varphi_{3_i}(x)\varphi_{3_j}(x) ds \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

O trabalho virtual das forças externas produz o vetor de carga F_i . O TV externo, neste caso, é dado por:

$$TV_{ext} = \int_0^L q_i \delta v_i ds + P_i \delta v_i \quad (3.40)$$

trocando δv_i por $\varphi(x)$ e em formato matricial é

$$F_i = \begin{Bmatrix} \int_0^L q_i \varphi_{1_i}'(x) ds + P_i \varphi_{1_i}'(x_{P_i}) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.52)$$

em que x_{P_i} é o ponto de aplicação da força P_i . Se fosse desejado aplicar forças horizontais na estrutura, seja na viga de concreto ou madeira, dever-se-ia acrescentar os termos adequados no vetor F_i acima. O mesmo para aplicação de momentos distribuídos ou concentrados.

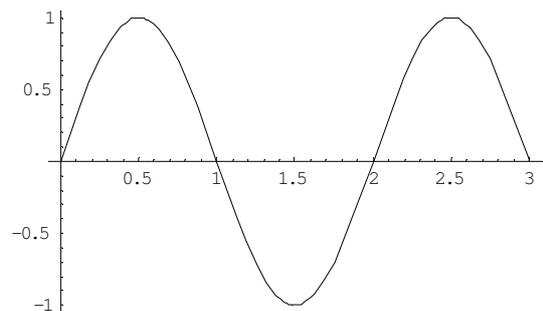
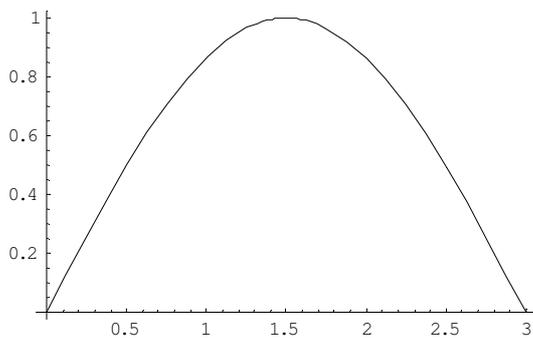
3.6 Escolha das funções aproximantes $\varphi(x)$

Para as simulações deste trabalho foram utilizadas funções senoidais como aproximação da solução. As funções senoidais são contínuas, bem como suas derivadas. Além disso, foram impostas as condições de contorno de deslocamentos verticais nulos nos apoios e deslocamentos horizontais nulos no meio da estrutura.

As funções abaixo são definidas como:

a) $\text{ShapeV } [i_] = \text{Sen}(\text{Pi} \times (2i - 1) / L)$

Foram utilizadas para aproximar o deslocamento vertical. São contínuas em todo o domínio, bem como suas derivadas. Além disso, satisfazem as condições de contorno de serem nulas em $x = 0$ e $x = L$.



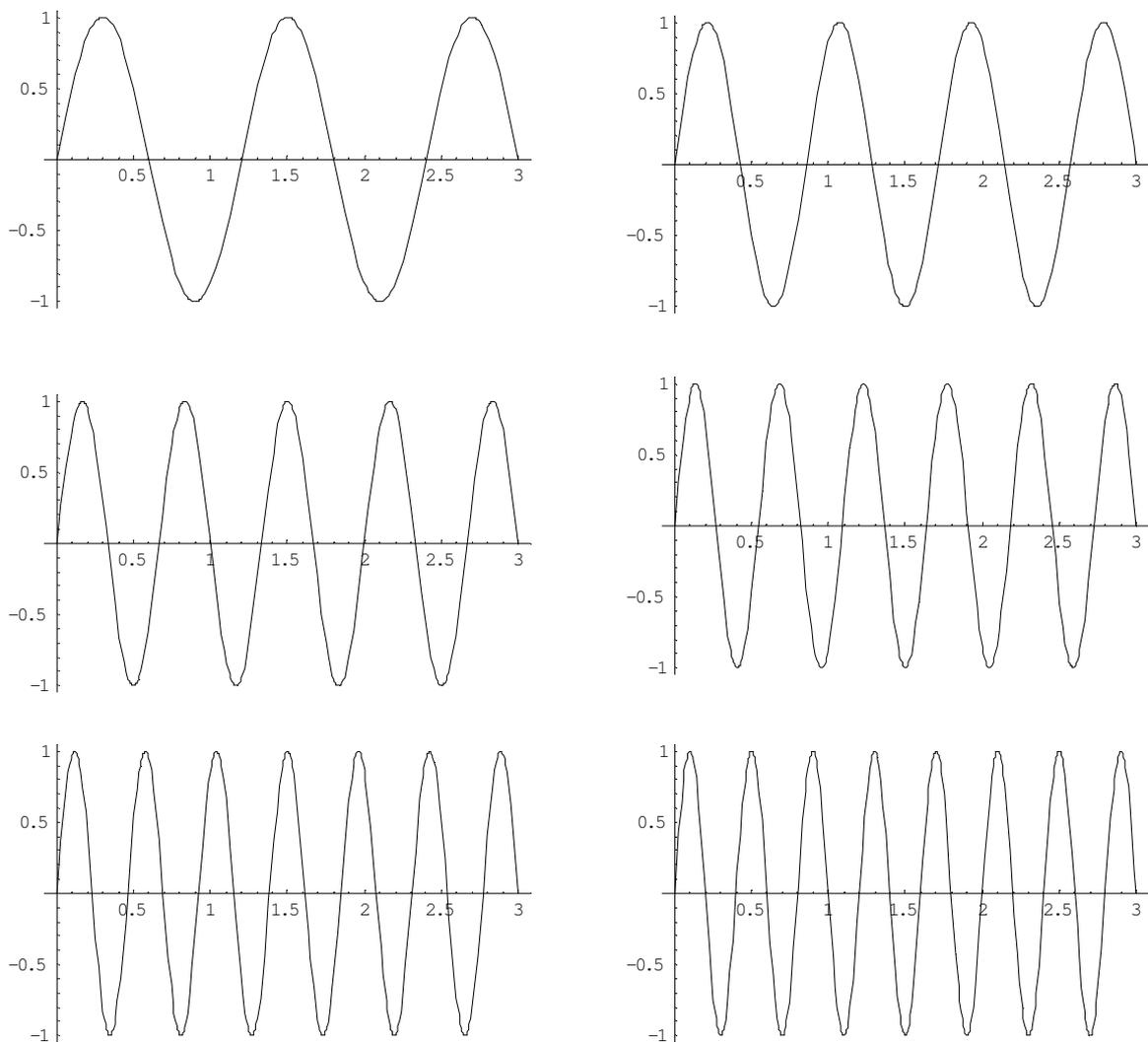


FIGURA 3.13 – Funções aproximantes para o cálculo do deslocamento vertical.

b) $ShapeU [i_] = \text{Sen}[Pi (x-L/2) (2 i-1) / L]$

Foram utilizadas para aproximar o deslocamento horizontais. São contínuas em todo o domínio, bem como suas derivadas. Além disso, satisfazem as condições de contorno de serem nulas em $x = L / 2$.

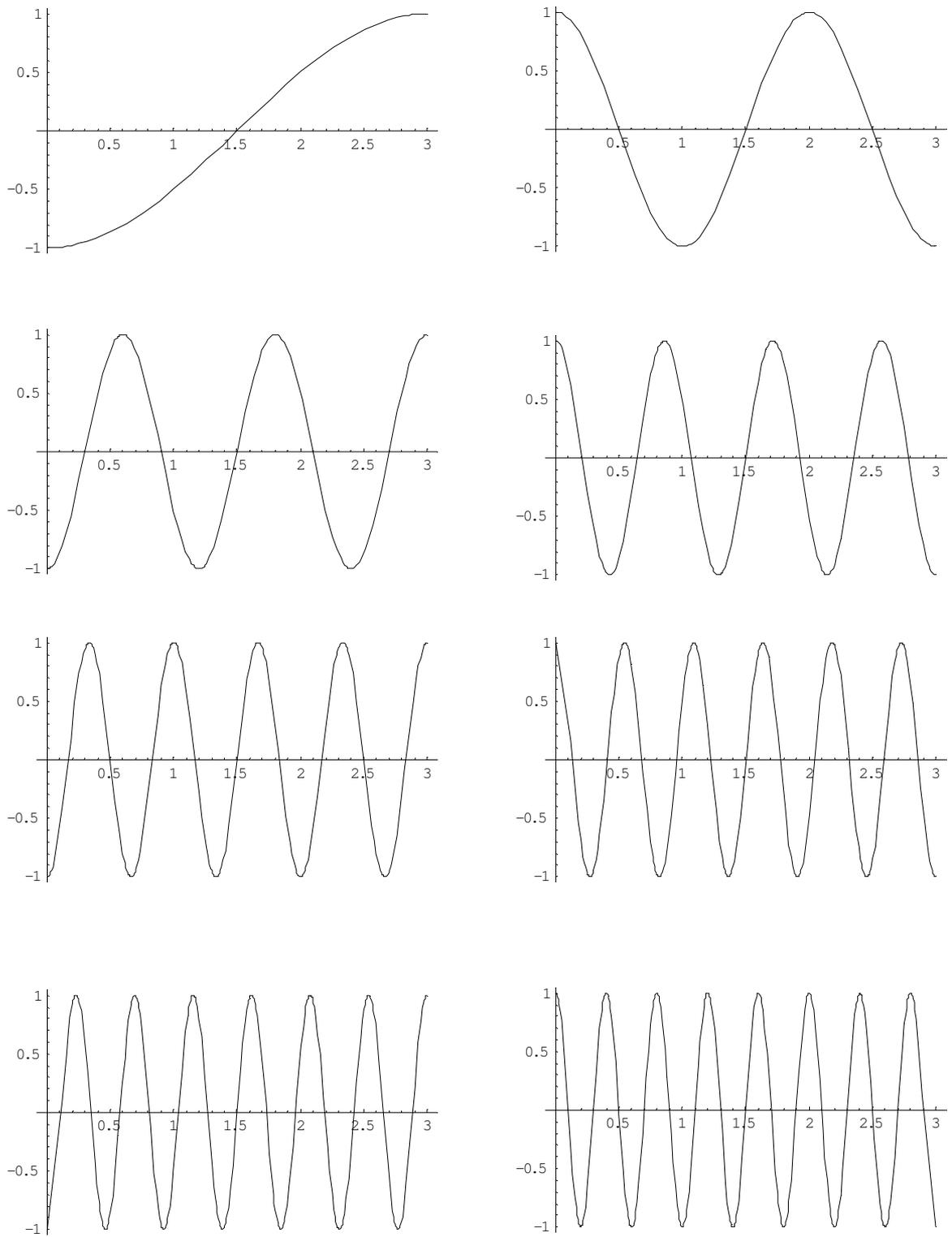


FIGURA 3.14 – Funções aproximantes para o cálculo dos deslocamentos horizontais.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Uma das análises realizadas neste trabalho, e definida na metodologia, utiliza o programa SAP2000 para comparação de exemplos que sugerem que a hipótese de conexão contínua é superior à discreta. Os resultados dessa análise são apresentados nas TAB.4.1 e 4.2 e nas correspondentes Fig.4.1 e 4.2.

Nas tabelas 3 e 4 são comparados os resultados de SORIANO (2001):

1. dos valores experimentais de deslocamentos da viga mista (Exp.1 e Exp.2);
2. resultados numéricos utilizando o programa SAP2000 (SAP);
3. resultados analíticos via STEVANOVIC (MATH).

com as análises realizadas neste trabalho:

1. resultados numéricos utilizando o programa SAP2000 (SAP2);

resultados da formulação do princípio dos trabalhos virtuais (PTV) via método de Rayleigh-Ritz.

Também para comparação, são apresentados os resultados de duas configurações limites para a estrutura: com conexão perfeitamente rígida (EI1) e sem nenhuma conexão (EI0), em que as peças de concreto e madeira podem deslizar-se livremente. Os resultados de viga mista (conexão semi - rígida) devem necessariamente estar contidos entre os gráficos de EI1 e EI0. As FIG 40 e 41 representam os valores das tabelas.

TABELA 4.1 – Resultados dos deslocamentos verticais a $L / 2$ da viga (VP3/8).

Carga	Experimental		Numérico						Analítico
	Exp.1	Exp.2	EI0	EI1	SAP2000		K ser	K u	MATH
					SAP	SAP2	PTV	PTV	
0	0	0	0	0	0	0	0.00	0.00	0.00
5	4.74	4.63	11.84	3.09	3.36	4.37	4.22	4.66	4.22
10	9.64	9.37	23.67	6.17	6.72	8.74	8.43	9.33	8.43
15	14.71	14.38	35.51	9.25	10.07	13.12	12.65	13.99	12.65
20	21.20	19.68	47.34	12.34	13.43	17.48	16.87	18.66	18.66
25	26.68	25.17	59.18	15.42	16.8	21.86	21.08	23.32	23.32
30	32.81	32.74	71.01	18.51	20.14	26.22	25.30	27.99	27.99

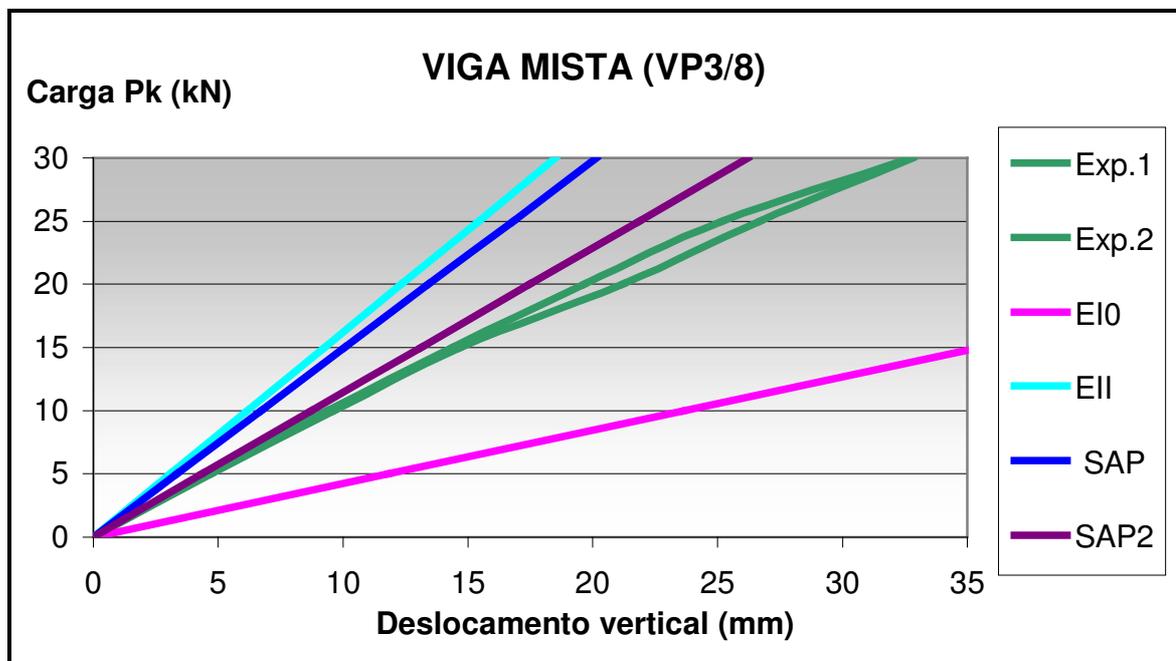


FIGURA 4.1 – Resultados dos deslocamentos verticais a $L / 2$ da viga (VP3/8).

TABELA 4.2 – Resultados dos deslocamentos verticais a $L / 2$ da viga (VP 1/2).

Carga	Experimental		Numérico						Analítico
	Exp.1	Exp.2	EI0	EII	SAP2000		K ser	K u	MATH
Pk	Exp.1	Exp.2	EI0	EII	SAP	SAP2	PTV	PTV	MATH
0	0	0.000	0.00	0	0	0	0.00	0.00	0.00
5	4.13	4.430	11.84	3.085	3.25	4.00	3.96	4.32	3.92
10	8.34	8.720	23.67	6.169	6.49	7.99	7.92	8.65	7.92
15	12.26	13.010	35.51	9.254	9.74	11.98	11.88	12.97	11.88
20	16.76	17.860	47.34	12.34	12.99	15.98	15.84	17.29	17.29
25	22.94	23.680	59.18	15.42	16.22	19.97	19.80	21.61	21.61
30	30.61	29.080	71.01	18.51	19.5	23.97	23.76	25.94	25.94

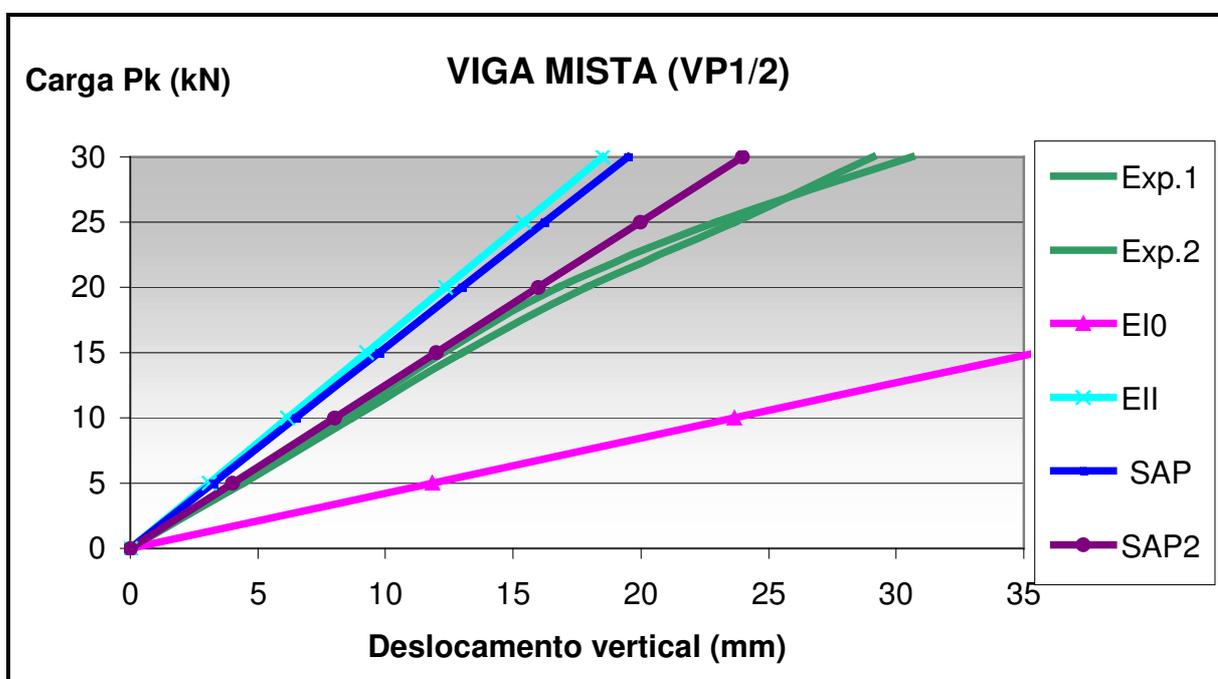


FIGURA 4.2 – Resultados dos deslocamentos verticais a $L / 2$ da viga (VP 1/2).

• **Legenda dos gráficos:**

Pk = carga concentrada no meio do vão da viga mista;

Exp.1 e Exp.2 = vigas de concreto e madeira conectados com parafusos de diâmetro de $\frac{3}{8}$ ” (viga VP3/8) e $\frac{1}{2}$ ” (viga VP1/2) ensaiadas em laboratório, SORIANO (2001);

EIO = rigidez equivalente de uma viga mista sem conexão entre a mesa de concreto e a alma de madeira;

EII = rigidez equivalente de uma viga mista com conexão total (sem deslizamento) entre a mesa de concreto e a alma de madeira;

SAP = os conectores metálicos foram representados por elementos lineares com os respectivos diâmetros dos pregos e parafusos utilizados nas estruturas. Desse modo, o sistema de conexão mantém-se discreto e os espaçamentos são as distâncias reais utilizadas. Os nós do elemento linear unem a face superior da viga de madeira à mesa de concreto, SORIANO (2001).

SAP2 = Os conectores foram simulados através de elementos de viga, unindo a seção de concreto à de madeira em alguns pontos. Entretanto, buscou-se um comportamento contínuo da conexão. Para isso a rigidez dos elementos de viga foi escolhida de modo a simular a mesma rigidez do módulo de deslizamento obtido em laboratório.

Os resultados obtidos foram plenamente satisfatórios e, em comparação com SAP, sugerem que a hipótese de conexão contínua é superior à discreta. Entretanto, essa análise apresentou uma deficiência: foi observado que os resultados variam com o tamanho das barras utilizadas para simular a conexão da viga mista. Isso porque as barras transmitem, além dos esforços horizontais esperados, esforços de momento às peças de madeira e concreto. Como o valor do momento é proporcional ao comprimento da barra, quanto maior for a barra, maior será o erro. Na análise apresentada buscou-se utilizar um comprimento muito pequeno dos elementos de barra que simularam a conexão (1mm) visando-se a minimizar os efeitos de momento que possam ser transmitidos pelos elementos de barra.

Outra análise realizada neste trabalho foi à comparação entre os resultados da formulação proposta do PTV com os resultados de laboratório de SORIANO (2001).

Os resultados obtidos da formulação proposta (PTV) foram verificados e validados com as equações de equilíbrio enunciadas por STEVANOVIC (1996). As verificações são apresentadas no apêndice deste trabalho.

Os resultados obtidos através da resolução analítica da formulação de STEVANOVIC (1996) foram comparados diretamente com os resultados do PTV. A comparação foi feita via gráficos das duas soluções. Foram comparadas para os casos de carregamento uniformemente distribuído e carregamento de carga concentrada no meio do vão.

A Fig.4.3 mostra o deslocamento vertical para o método do PTV, de Stevanovic e a diferença entre os gráficos para o caso de uma carga distribuída.

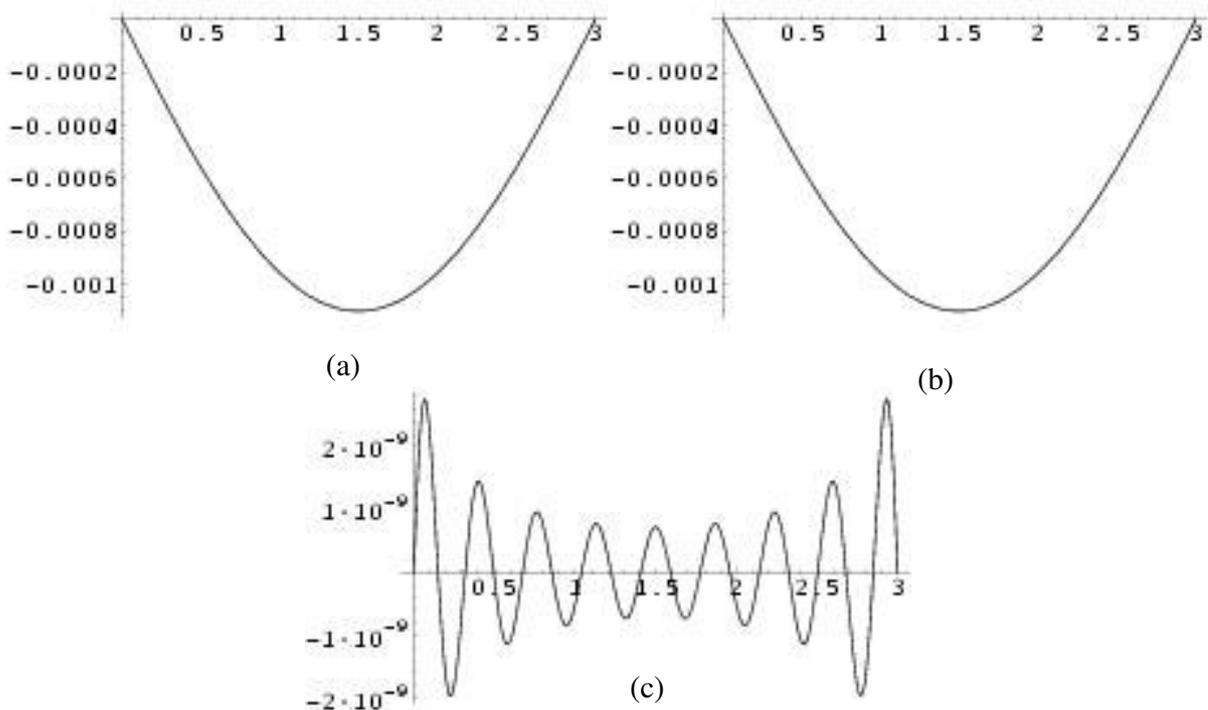


FIGURA 4.3 – Deslocamento vertical para carga distribuída (a) via PTV, (b) Stevanovic e (c) Diferença entre as soluções.

Uma vez verificada a qualidade da solução, compararam-se também as derivadas das soluções. São particularmente importantes a 2ª e a 3ª derivadas por estarem intimamente ligadas ao momento e ao esforço cortante. A Fig.4.4 mostra a 1ª derivada da solução pelos dois métodos e a diferença entre elas. A Fig.4.5 apresenta os resultados para a 2ª derivada e a Fig.4.6 para a 3ª derivada.

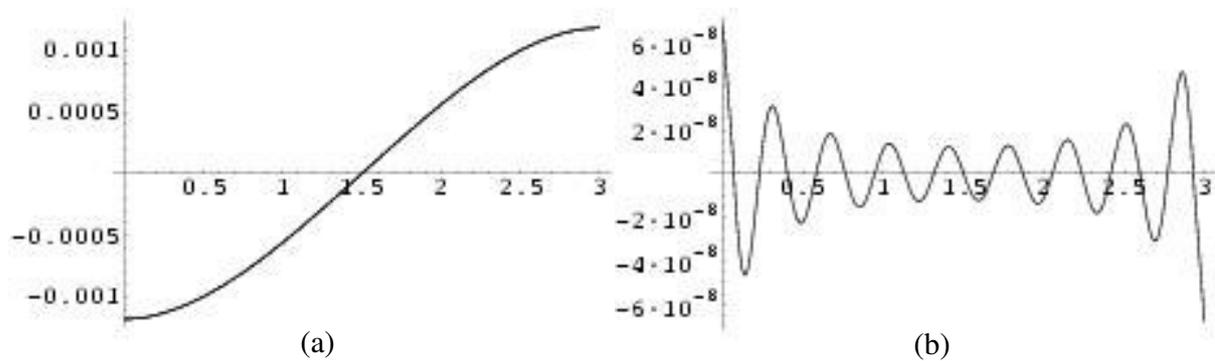


FIGURA 4.4 – (a) Primeira derivada da solução via PTV e Stevanovic para carga distribuída
(b) Diferença entre os gráficos

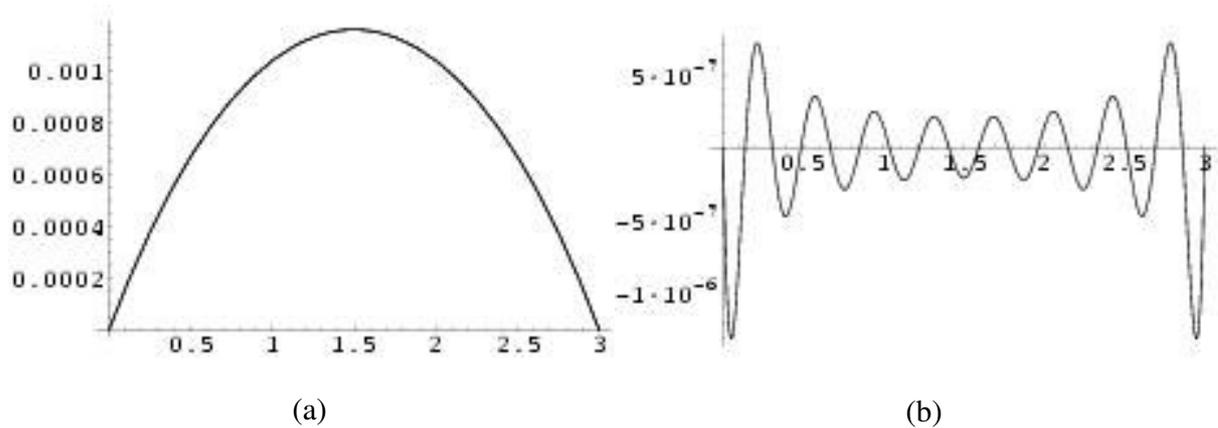


FIGURA 4.5 – (a) Segunda derivada da solução via PTV e Stevanovic para carga distribuída
(b) Diferença entre os gráficos

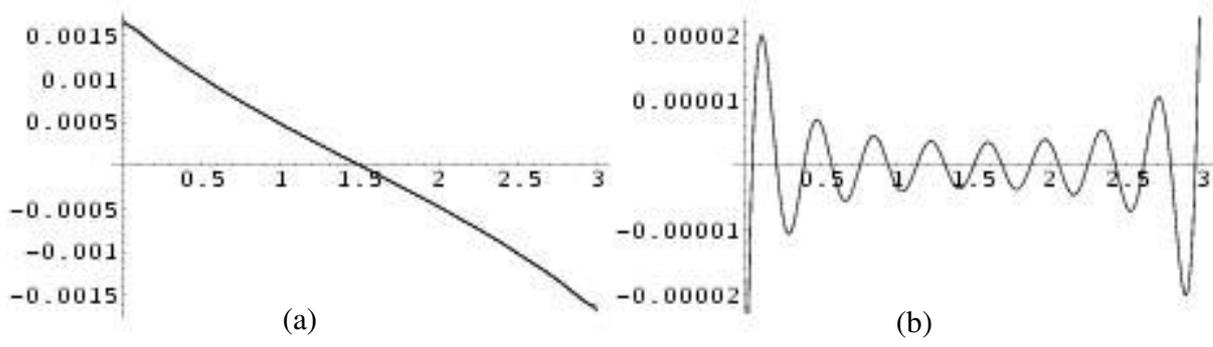


FIGURA 4.6 – (a) Terceira derivada da solução via PTV e Stevanovic para carga distribuída
 (b) Diferença entre os gráficos

O mesmo procedimento foi realizado para o caso de carga concentrada no meio do vão da viga mista. A Fig.4.7 compara as soluções encontradas.

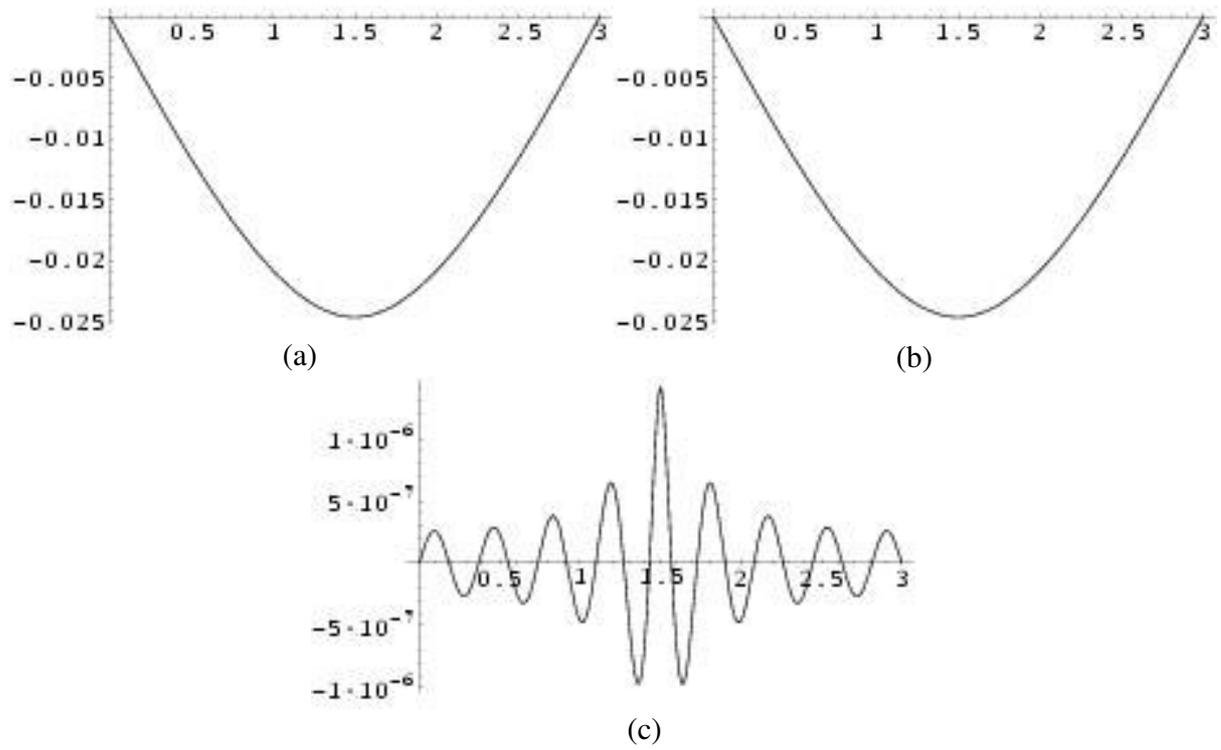


FIGURA 4.7 – Deslocamento vertical para carga concentrada (a) via PTV, (b) Stevanovic e
 (c) Diferença entre as soluções

Foram comparadas, do mesmo modo, as derivadas da solução. A Fig.4.8 mostra os resultados para a 1ª derivada. A Fig.4.9 da 2ª derivada e a Fig.4.10 da 3ª derivada.

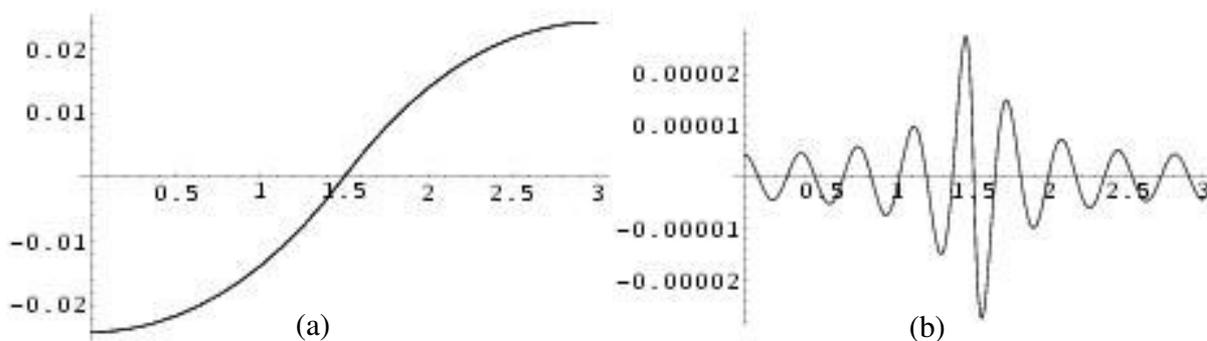


FIGURA 4.8 – (a) Primeira derivada da solução via PTV e Stevanovic para carga concentrada
(b) Diferença entre os gráficos

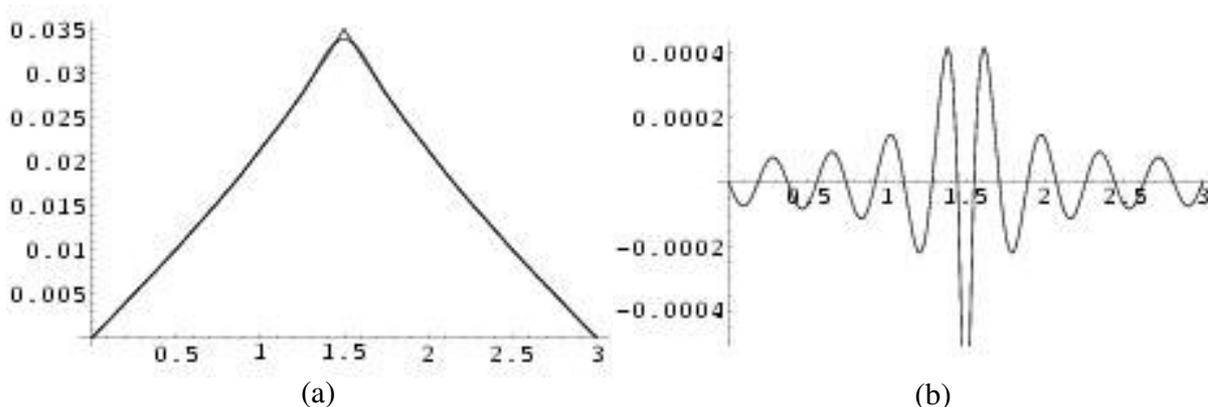


FIGURA 4.9 – (a) Segunda derivada da solução via PTV e Stevanovic para carga concentrada
(b) Diferença entre os gráficos

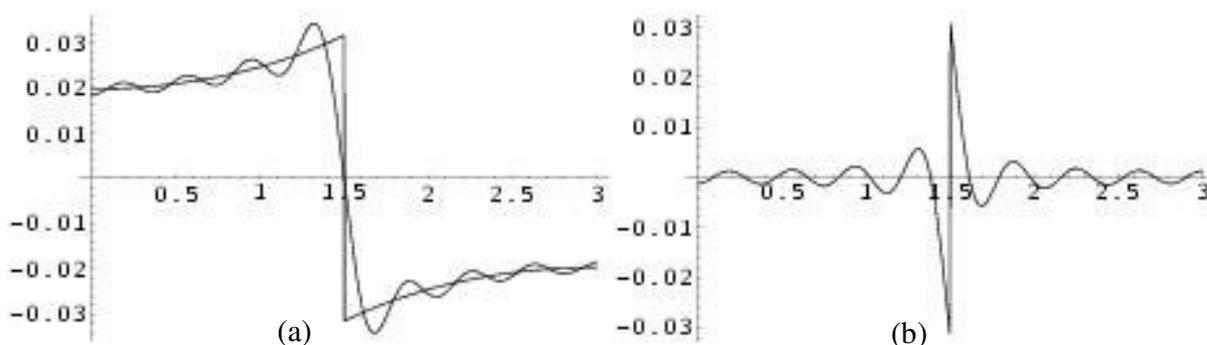


FIGURA 4.10 – (a) Terceira derivada da solução via PTV e Stevanovic para carga concentrada
(b) Diferença entre os gráficos

As oscilações da 3ª derivada no método do PTV estão relacionadas com a descontinuidade da função exata. A oscilação em torno da descontinuidade é característica do método de Rayleigh-Ritz. Para suprir essa deficiência seria necessário a divisão do domínio em elementos e aplicar a força concentrada em um nó. Essa técnica é chamada de método dos elementos finitos e para sua utilização é necessária a teoria de vigas de Timoshenko, ou funções de base de elementos finitos do tipo C1 (contínua na derivada) entre elementos.

A terceira derivada da solução é associada à força cortante de uma viga e, apesar das oscilações, a simulação conduziu a bons resultados.

A formulação de STEVANOVIC (1996) baseia-se nas equações de equilíbrio. Entretanto, seu desenvolvimento e resolução são complexos. A formulação proposta neste trabalho, baseada no PTV, é mais genérica e pode ser facilmente integrada a códigos de elementos finitos. A integração dessa formulação em códigos de elementos finitos permitiria uma maior divulgação dos procedimentos de cálculo e do comportamento de vigas mistas, o que seria um catalisador do emprego desse tipo de estrutura.

A observação dos gráficos das Fig.4.11 e 4.12 mostra que os resultados da formulação proposta do PTV conduz a resultados próximos aos experimentais. A Fig.4.13 mostra que os resultados da análise SAP2 são próximos aos resultados do PTV e dos experimentais.

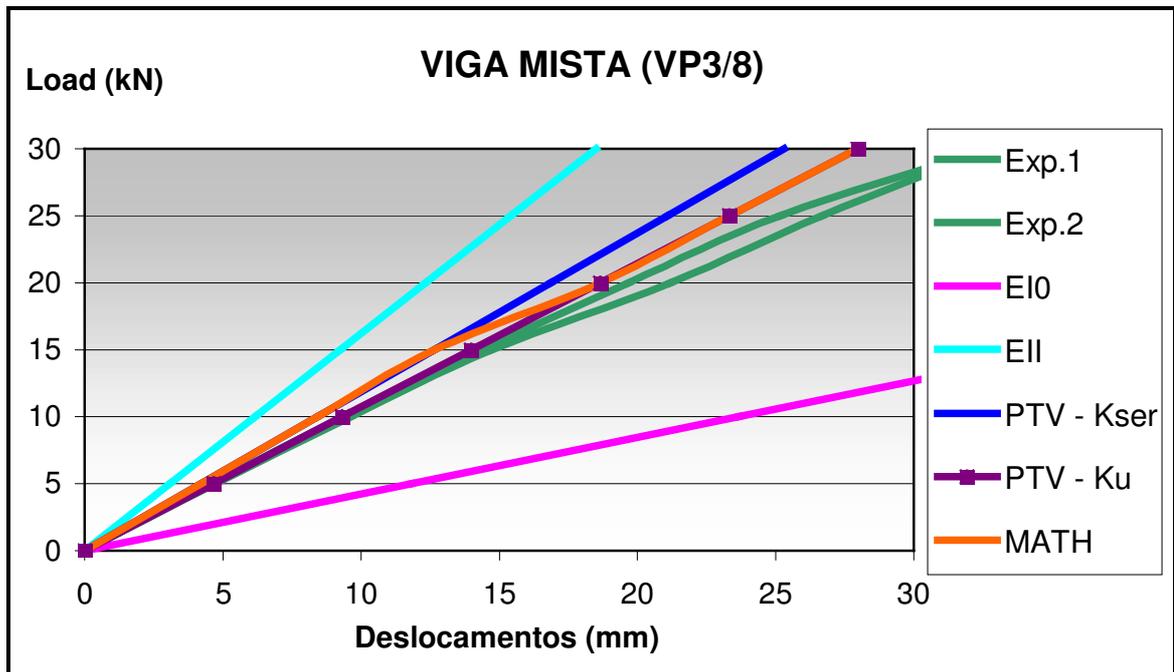


FIGURA 4.11 – Resultados dos deslocamentos verticais a $L / 2$ da viga (VP 3/8)

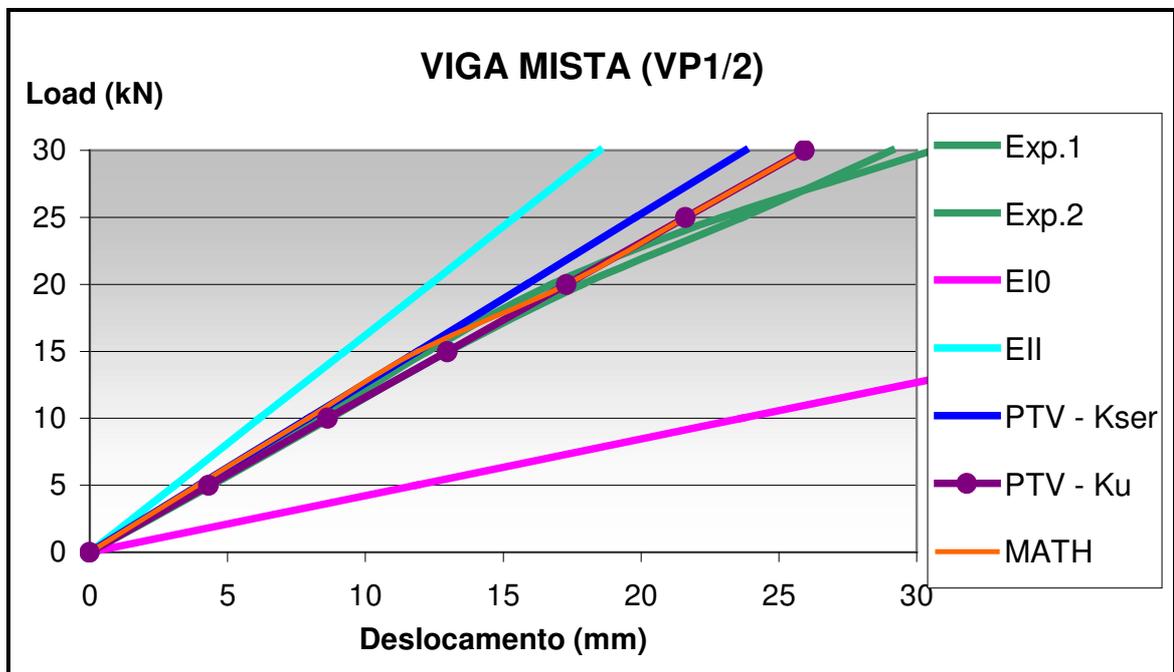


FIGURA 4.12 – Resultados dos deslocamentos verticais a $L / 2$ da viga (VP 1/2)

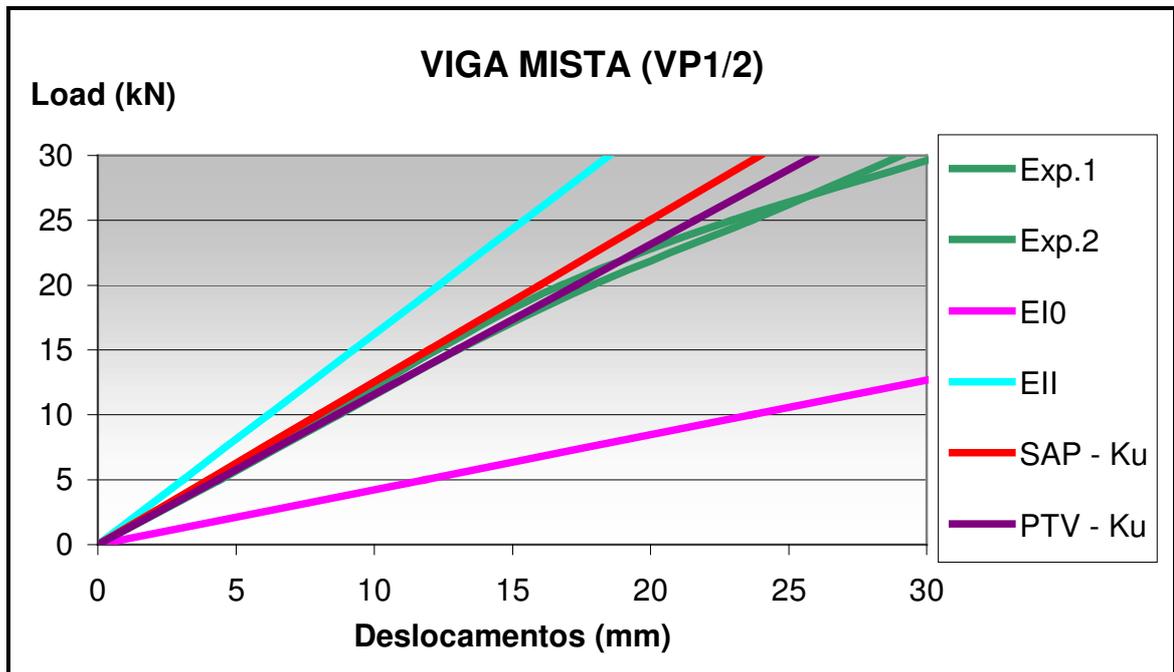


FIGURA 4.13 – Resultados dos deslocamentos verticais a $L / 2$ da viga (VP 1/2)

• **Legenda dos gráficos:**

PTV = formulação variacional proposta neste trabalho a partir do princípio dos trabalhos virtuais. Essa curva não pode ser observada no gráfico porque seus valores coincidem com Stevanovic (MATH).

K_{ser} = módulo de deslizamento (N/mm^2) para o estado limite de utilização.

K_u = módulo de deslizamento (N/mm^2) para o estado limite de último.

MATH = resolução analítica das equações de equilíbrio da viga mista - conforme formulação proposta em STEVANOVIC (1996) – apresentada por SORIANO (2001). Os valores do gráfico foram obtidos por meio de duas simulações: para cargas até 15 kN foi utilizado o módulo de deslizamento de serviço (K_{ser}) e a partir de 15 kN foi utilizado o valor último (K_u).

5 CONCLUSÕES

O desenvolvimento tecnológico do processo de concepção e construção de estruturas em madeira permitiu melhorar o conhecimento do comportamento desse material e seu conseqüente emprego em estruturas mistas. A aplicação de estruturas em concreto e madeira permite valorizar as melhores características de cada material. Entretanto, o comportamento mecânico de estruturas mistas, em particular o comportamento de suas conexões, ainda é um desafio.

Este trabalho contribui com a análise de estruturas mistas e propõe uma formulação variacional baseada no princípio dos trabalhos virtuais. Esse princípio tem sido utilizado em quase todos os campos da engenharia estrutural.

A formulação proposta satisfaz as equações de equilíbrio mostrando-se consistente e seus resultados são condizentes com dados de laboratório. Essa formulação pode ser facilmente integrada a códigos de elementos finitos.

A integração dessa formulação em códigos de elementos finitos permitirá uma maior divulgação dos procedimentos de cálculo e do comportamento de vigas mistas, o que será um catalisador do emprego desse tipo de estrutura.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AHMADI, B. H., SAKA, M. P. Behavior of composite timber-concrete floors. *Journal of Structural Engineering*- ASCE, New York, n. 10, v.119, p.3111-3130. Nov. 1993.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, Rio de Janeiro. *NBR7190*: Projeto de estruturas de madeira. Rio de Janeiro, 1997. 107 p.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, Rio de Janeiro. *NBR8800*: Projeto e execução de estruturas de aço de edifício. Rio de Janeiro, 1986. 200p.
- BJORKMAN, H., Behaviour of timber and concrete composite load-bearing structures. *Rilem TC 111 CST*, chapter 2, p.21.
- BRITISH STANDARDS INSTITUTION, BS 5400. Steel, concrete and composite bridges-part 5- Code of practice for design of composite bridges. 1979. 34p.
- CARUANA, R. Vigas de seção mista: chapa de aço dobrada. *Arquitetura e Urbanismo*,n.16, p.96-97, (1997).
- CECCOTTI, A. Timber-concrete composite structures. In: *Timber Engineering - STEP1*. BLASS, H. J., AUNE, P., CHOO, B.S. et al., Almere: Centrum Hout, 1995, E13, p.1-12.
- CRISINEL, M. Partial-interaction analysis of composite beams with profiled sheeting and non-welded shear connectors. *Journal of constructional steel research*, Great Britain, n.1 e 2, v.15, p. 65-98.1990.

GIRHAMMAR, U. A., GOPU, V. K. A. Composite beam-columns with interlayer slip-exact analysis. *Journal of Structural Engineering- ASCE*, New York, n. 4, v.119, p.1265-1282. Apr. 1993.

GUTKOWSKI, R. M., CHEN, T. M. Tests and analysis of mixed concrete-wood beams. In INTERNACIONAL WOOD ENGINEERING CONFERENCE, 1996, New Orleans. *Proceedings...* New Orleans, Oct. 1996. v.3, p.436-442

IBDF, IPT, ABPM. (1973). Preservação de madeiras. São Paulo, n.1, v.1, 123p. (Boletim Técnico)

INTERNATIONAL STANDARD, Switzerland, *ISO 6891*: Timber structures - joints made with mechanical fasteners - general principles for the determination of strength and deformation characteristics, Switzerland, 1983. 4p.

FILHO, L.S. Análise tridimensional de edifícios por elementos finitos utilizando programação orientada a objeto. In *Tese (Mestrado em Engenharia Civil)* – Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, 1997.

MAGALHÃES, L. N., CHAHUD, E. Análise experimental de vigas “T” compostas por madeira/concreto. In ENCONTRO BRASILEIRO EM MADEIRAS E EM ESTRUTURAS DE MADEIRA, 6, 1998, Florianópolis. *Anais...* Florianópolis, Jul. 1998. v.2, p. 265-276.

MALITE, M. Vigas mistas aço-concreto: ênfase em edifícios. São Carlos, EESC – USP, apostila, 1993, p 118.

MATHEMATICA Ver. 3.0, Champaign, Il: Wolfram Research, Inc.

MATTHIESEN, J. A. Estudos experimentais de estruturas mistas de madeira e concreto interligados por parafusos, *Tese de livre docente* - UNESP / FEIS / DEC, dez 2001, p 84.

McCULLOUGH, C. B. Oregon tests on composite (timber-concrete) beams. *Journal of the American Concrete Institute- ACI*, Michigan, n.5, v.14, p. 429-440. Apr.1943.

NATTERER, J., HAMM, J., FAVRE, P.A. Composite wood-concrete floors for multi-story buildings. In INTERNACIONAL WOOD ENGINEERING CONFERENCE, 1996, New Orleans. *Proceedings...* New Orleans, Oct. 1996. v.3, p. 431-435.

- NEWMARK, N. M., SIESS, C. P., VIEST, I. M. Tests and analysis of composite beams with incomplete interaction. *Proceedings of Society for Experimental Stress Analysis*, v.9, n.1, p. 75-92, 1951.
- NICOLAS, E. A. Estudo de ligações em estruturas mistas de concreto-madeira. Universidade Estadual de Campinas – Faculdade de Engenharia Civil, *Dissertação*, 2001, p 103.
- OLLGAARD, J. G., SLUTTER, R. G., FISHER, J. W. Shear strength of stud connectors in lightweight and normal-weight concrete. *Engineering Journal (American Institute of Steel Construction Engineering*, Michigan, n. 2, v.8, p.55-64. Apr. 1971.
- ODEN, J. T., CAREY, F., GRAHAM, BECKER, E. B. Finite Elements. *An Introduction*, New Jersey - USA, v.1, Prentice Hall Inc. 1981.
- PIGOZZO, J. C. Utilização de barras de aço coladas, como conectores, em tabuleiros mistos de madeira e concreto para pontes In *Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo*, 2002.
- PINCUS, G. Bonded wood-concret T-beams. *Journal of Structural Engineering- ASCE*, Michigan, n. ST10, v.95, p.2265-2279. Oct. 1969.
- RACHER, P. Mechanical timber jointes - general. In: *Timber Engineering - STEP lecture C1*. BLASS, H. J., AUNE, P., CHOO, B.S. et al., Almere: Centrum Hout, 1995, C1, p.1-10.
- RICHART, F. E., WILLIAMS Jr, C. B. Tests of composite timber-concrete beams. *Journal of the American Concrete Institute*, Michigan, n. 14, v.4, p. 253-276. 1943.
- SAP2000 Ver. 7.0, Berkeley, California: Computers and Structures, Inc.
- SORIANO, J. Estruturas mistas de concreto e madeira: Análise de vigas e painéis e aplicações na construção civil. In *Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas*, 2001.
- SOUZA, A. J., CHAHUD, E., MAGALHÃES, L. N. Estudo da correlação entre o comportamento de corpos de prova de cisalhamento e vigas compostas madeira/concreto. In *ENCONTRO BRASILEIRO EM MADEIRAS E EM ESTRUTURAS DE MADEIRA*, 6, 1998, Florianópolis. *Anais...* Florianópolis, Jul. 1998. v.2, p. 277-285.

SOUZA, A. J., CHAHUD, E. Análise elasto-plástica de conectores em corpos de prova de cisalhamento via método dos elementos finitos. In ENCONTRO BRASILEIRO EM MADEIRAS E EM ESTRUTURAS DE MADEIRA, 6, 1998, Florianópolis. *Anais...* Florianópolis, Jul. 1998. v.2, p. 371-381.

STEVANOVIC, B. Elastically coupled timber-concrete beams. In INTERNACIONAL WOOD ENGINEERING CONFERENCE, 1996, New Orleans. *Proceedings...* New Orleans, Oct. 1996. v.3. p.425-430.

TARANTINO, A. M., DEZI, L. Creep effects in composite beams with flexible shear connectors. *Journal of Structural Engineering- ASCE*, New York, n. 8, v.118, p.2063-2081. Aug. 1992.

WRIGHT, H. D. The deformation of composite beams with discrete flexible connection. *Journal of constructional steel research*, Great Britain, n.1 e 2, v.15, p. 49-64.1990.

YTTRUP, P.J. AND NOLAN, G. “*Performance of Timber Beam Bridges in Tasmania, Australia*”, IWEC, 1999, USA

APÊNDICE

APÊNDICE A: UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE MATHEMATICA® NA RESOLUÇÃO DAS FORMULAÇÕES DO PTV E STEVANOVIC.

• Definição das funções aproximantes senoidais ímpares.

```
NumVal={};
ShapeV[i_]=Sin[Pi x (2 i-1)/Len];
ShapeU[i_] = Sin[Pi (x-Len/2) (2 i-1)/Len];
```

• Definição das propriedades da seção: 1 é concreto e 2 é madeira.

```
I1=(b1 h1^3)/12;
I2=(b2 h2^3)/12;
A1=b1 h1;
A2=b2 h2;
```

• Matriz de rigidez da viga de concreto e madeira.

```
KIJFlex[i_, j_]={
Simplify[(E1 I1+E2 I2)D[ShapeV[i], {x, 2}]D[ShapeV[j], {x, 2}]],
0, 0},
{0, E1 A1 D[ShapeU[i], x]D[ShapeU[j], x], 0},
{0, 0, E2 A2 D[ShapeU[i], x]D[ShapeU[j], x]}};
```

• Matriz de rigidez da conexão.

```
KIJGlue[i_, j_]={
{Konst ((h1+h2)/2)^2 D[ShapeV[i], x]D[ShapeV[j], x],
Konst (h1+h2)/2 D[ShapeV[i], x] ShapeU[j],
-Konst (h1+h2)/2 D[ShapeV[i], x] ShapeU[j]},
{Konst (h1+h2)/2 ShapeU[i]D[ShapeV[j], x],
Konst ShapeU[i]ShapeU[j],
-Konst ShapeU[i]ShapeU[j]},
{-Konst ShapeU[i]D[ShapeV[j], x] (h1+h2)/2,
-Konst ShapeU[i]ShapeU[j],
Konst ShapeU[i]ShapeU[j]}};
```

• **Matriz de rigidez completa.**

```

KIJ[i_, j_] = KIJFlex[i, j] + KIJGlue[i, j];

Stiff[i_, j_] := Table[
Integrate[N[KIJ[i, j][[idf, jdf]]/.NumVal], {x, 0, Len/.NumVal}] +
KIJBC[i, j][[idf, jdf]], {idf, 1, 3}, {jdf, 1, 3}];

StiffMatrixBlock[n_] := Table[
Stiff[i, j] /. NumVal, {i, 1, n}, {j, 1, n}]

LoadVecBlock[n_] :=
Table[{(P/1000)*ShapeV[i]/.x→Len/2/.NumVal, 0, 0}, {i, 1, n}] +
Table[{Integrate[(Q/1000)ShapeV[i], {x, 0, Len}]/.NumVal, 0, 0}, {i, 1, n}
]];

StiffMatrix[n_] := Block[{i, j, idf, jdf, LocalStiffBlock, LocalStiff},
LocalStiffBlock = StiffMatrixBlock[n];
LocalStiff = Table[0, {3 n}, {3 n}];
For[i = 1, i ≤ n, i++,
For[idf = 1, idf ≤ 3, idf++,
For[j = 1, j ≤ n, j++,
For[jdf = 1, jdf ≤ 3, jdf++,
LocalStiff[[ (i-1)*3+idf, (j-
1)*3+jdf]] = LocalStiffBlock[[i, j, idf, jdf]];
]
]
]
];
LocalStiff
]

LoadVec[n_] := Block[{i, idf, RhsBlock, Rhs},
RhsBlock = LoadVecBlock[n];
Rhs = Table[0, {3 n}];
For[i = 1, i ≤ n, i++,
For[idf = 1, idf ≤ 3, idf++,
Rhs[[3(i-1)+idf]] = RhsBlock[[i, idf]];
]
];
Rhs
]

```

• **Método de resolução do problema: chama a construção da matriz de rigidez e vetor de carga, resolve o sistema algébrico e constrói a solução aproximada.**

```
BeamAppr[n_] :=
Block[{i, j, idf, jdf, LocalStiffBlock, RhsBlock, LocalStiff, Rhs},
  LocalStiff=StiffMatrix[n];
  Rhs = LoadVec[n];
  Sol = LinearSolve[LocalStiff, Rhs];
  SolFunction = Sum[{Sol[[3(i-1)+1]]ShapeV[i], Sol[[3(i-
1)+2]]ShapeU[i], Sol[[3(i-1)+3]]ShapeU[i]}/.NumVal, {i, 1, n}];
  SolFunction
]
```

• **Definição dos valores do projeto: valor de P e q.**

```
(*VALOR DA FORÇA CONCENTRADA NO MEIO DA VIGA E DISTRIBUÍDA EM kN
e kN/m*)
P=-15;
Q=-0.36;
```

• **Valores de K: 0, infinito, K de serviço e último de VP1/2 e K de serviço e último de VP3/8:**

```
(* Espacamento entre conectores *)
sconnect=0.075;

(*SEM RIGIDEZ*)
(*SubKonst={KonstVal→0};*)

(*RIGIDEZ INFINITA*)
(*SubKonst={KonstVal→9999/ sconnect};*)

(*VIGA VP 1/2*)
(* Servico *)
SubKonst={KonstVal→15.464/ sconnect};
(* Ultimo *)
(*SubKonst={KonstVal→(2/3) 15.464/sconnect};*)

(*VIGA VP 3/8*)
(* Servico *)
(*SubKonst={KonstVal→11.471/sconnect};*)
(* Ultimo *)
(*SubKonst={KonstVal→(2/3) 11.471/sconnect};*)
```

• **Definição das propriedades da viga: h, b, E L etc.**

```
(*PROPRIEDADES DA VIGA*)

NumValFirst={h1→4/100, h2→15/100, b1→3/10, b2→5/100, Konst→KonstVa
l, Len→3, E1→19297, E2→14700};
NumVal=NumValFirst/.(SubKonst/.NumValFirst);
ValLen=Len/.NumVal;
```

- **Chama método de resolução BeamAppr.**

```
(*RESOLVE O PROBLEMA*)
Displacement=BeamAppr[8];
Print["FEITO!"];
FEITO!
```

- **Pós-processamento dos resultados.**

```
(* POS PROCESSAMENTO *)
```

- **Função deslizamento: $u_c - u_w + r v'$**

```
(* DESLIZAMENTO *)
DeltaU=Displacement[[2]]-Displacement[[3]]+(h1+h2)/2
D[Displacement[[1]],x]/.NumVal;
```

- **Desenha função deslocamento horizontal da fibra inferior da viga de concreto.**

```
Print["Horiz Sup na borda"]
HorizNaBorda=Displacement[[2]]+D[Displacement[[1]],x]
h1/2/.NumVal;
Plot[HorizNaBorda,{x,0,ValLen}]
```

- **Desenha função deslocamento horizontal da fibra inferior da viga de madeira.**

```
Print["Horiz Inf na borda"]
HorizNaBorda=Displacement[[3]]-D[Displacement[[1]],x]
h2/2/.NumVal;
Plot[HorizNaBorda,{x,0,ValLen}]
```

- **Desenha deslizamento.**

```
Print["DeltaU"]
Plot[DeltaU,{x,0,ValLen}]
```

- **Calcula e desenha funções: Normal do concreto e da madeira, momento do concreto e da madeira.**

```
(* TENSOES *)
NormalValSup = Simplify[(D[Displacement[[2]],x]) E1 A1 /.
NumVal];
NormalValInf=Simplify[(D[Displacement[[3]],x]) E2 A2/.NumVal];
MomentoValSup=Simplify[1.0*D[Displacement[[1]],{x,2}] E1
I1/.NumVal];
MomentoValInf=Simplify[1.0*D[Displacement[[1]],{x,2}] E2
I2/.NumVal];
Print["Normal Sup Inf"]
Plot[NormalValSup,{x,0,ValLen}]/.NumVal
Plot[NormalValInf,{x,0,ValLen}]/.NumVal
Print["Flecha"]
Plot[Displacement[[1]],{x,0,ValLen}]/.NumVal
Print["Momento Sup Inf"]
Plot[MomentoValSup,{x,0,ValLen}]/.NumVal
Plot[MomentoValInf,{x,0,ValLen}] /.NumVal
```

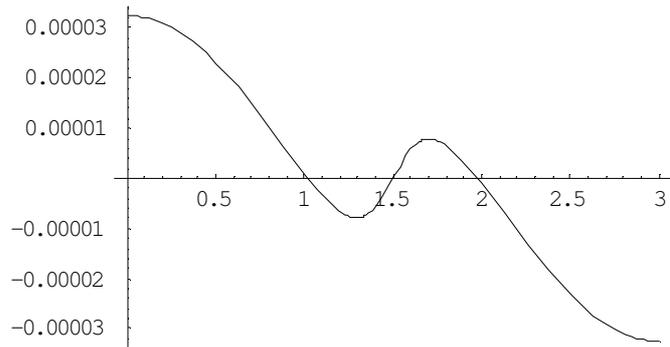
- **Retorna valor do deslocamento vertical a L/3 e L/2 da viga.**

```
Displacement[[1]]/.{x→ValLen/3}
Displacement[[1]]/.{x→ValLen/2}
```

• Respostas:

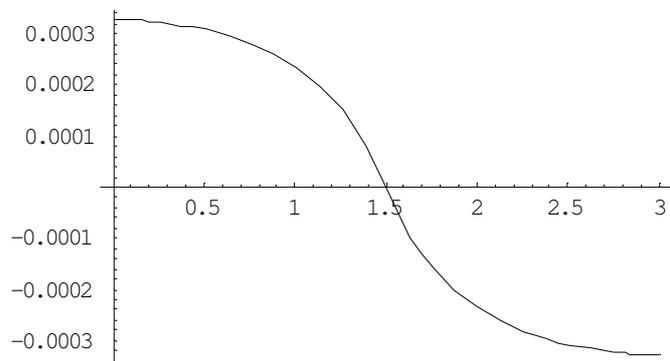
• Deslocamento horizontal da fibra inferior da viga de concreto.

Horiz Sup na borda

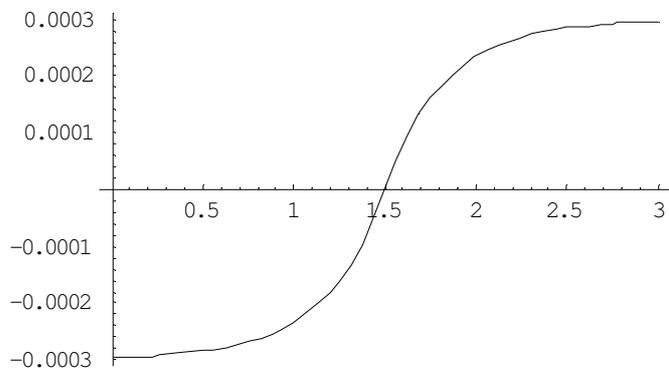


• Deslocamento horizontal da fibra superior da viga de madeira.

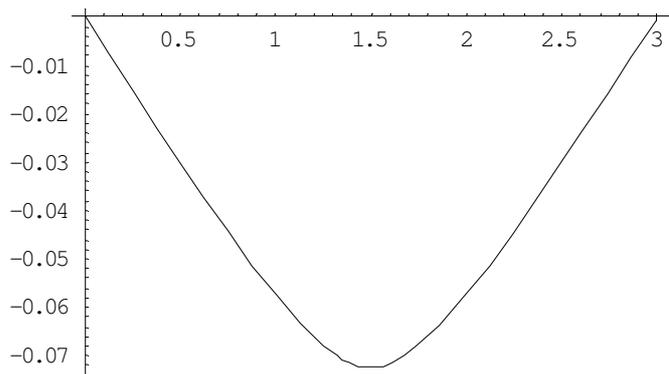
Horiz Inf na borda



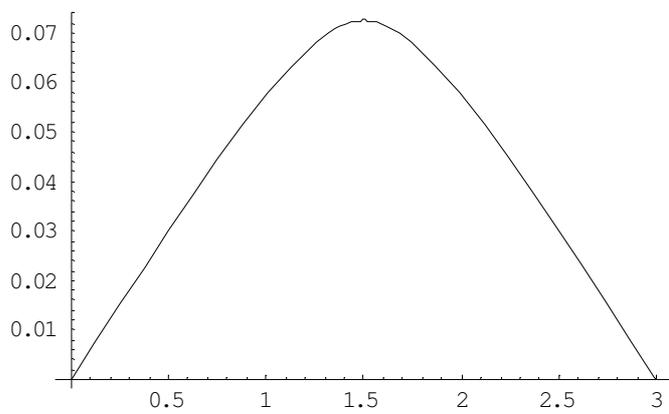
• **Deslizamento relativo entre as vigas.**



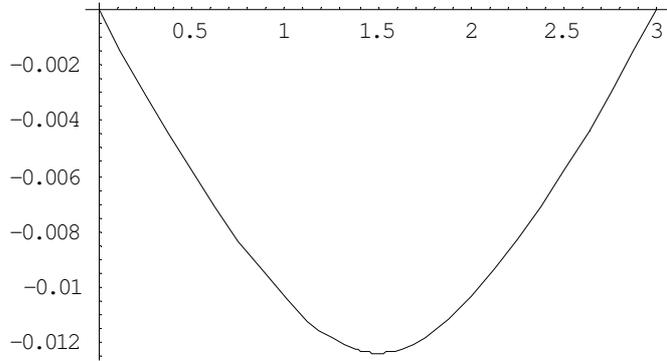
• **Esforço normal na viga de concreto.**



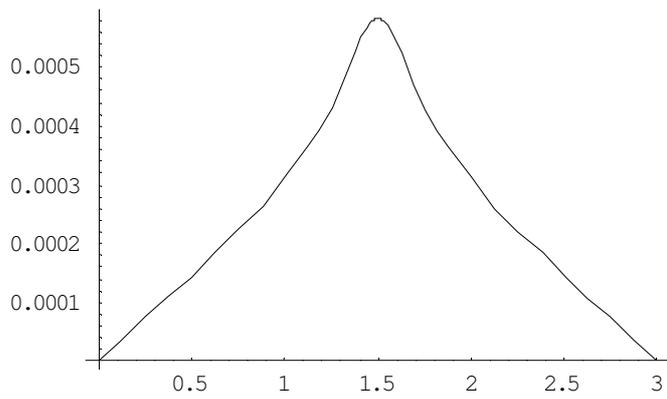
• **Esforço normal na viga de madeira.**



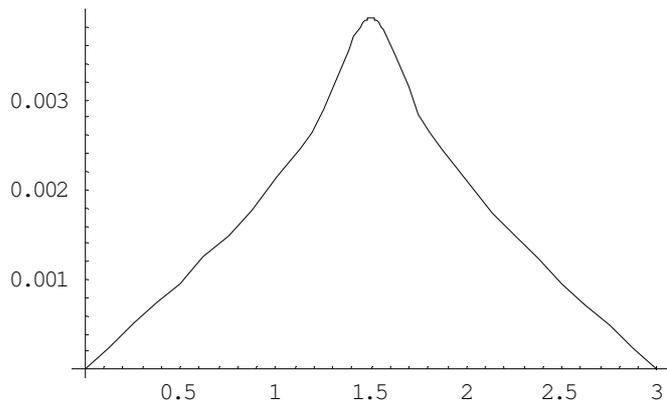
• **Flecha**



• **Momento fletor na viga de concreto.**



• **Momento fletor na viga de madeira.**



• **Deslocamento vertical a L/3.**

-0.0104131

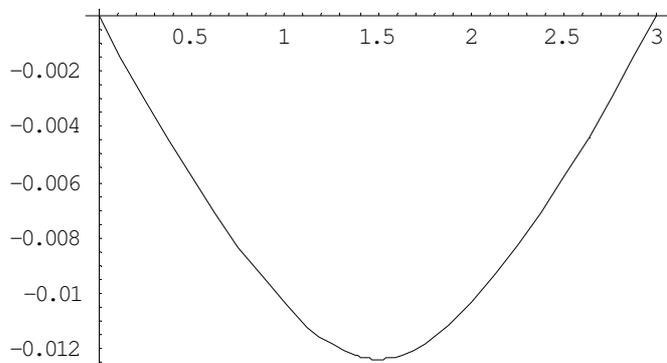
• **Deslocamento vertical a L/2.**

-0.0124074

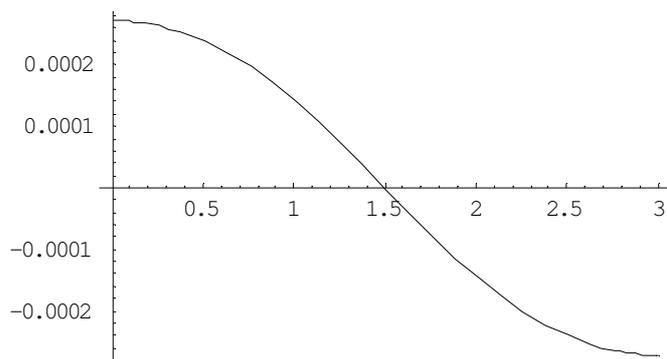
• **Desenha deslocamentos: vertical e horizontais no centro de gravidade das peças.**

```
(* PLOT TODOS DESLOCAMENTOS *)  
Plot[Displacement[[1]], {x, 0, ValLen}]  
Plot[Displacement[[2]], {x, 0, ValLen}]  
Plot[Displacement[[3]], {x, 0, ValLen}]
```

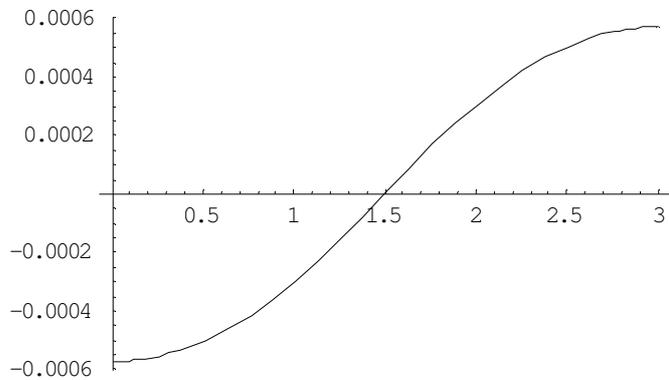
• **Deslocamento vertical**



• **Deslocamento horizontal da viga de concreto.**



• **Deslocamento horizontal da viga de madeira.**



• **Verificação de consistência: a força de cisalhamento (Ts) longitudinal deve ser igual a derivada da força normal em qualquer uma das vigas (Ts2).**

(* VERIFICANDO CONSISTENCIA TS = D[NORMAL,X] *)

```
Ts=DeltaU Konst/.NumVal;
```

```
Ts2=D[NormalValSup,x]/.NumVal;
```

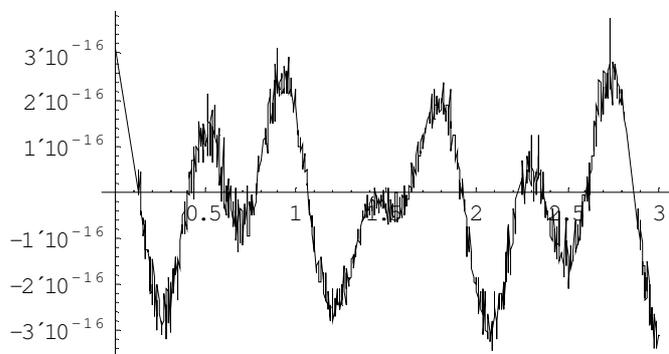
```
Diff=Ts-Ts2;
```

```
Plot[Diff,{x,0,3}]
```

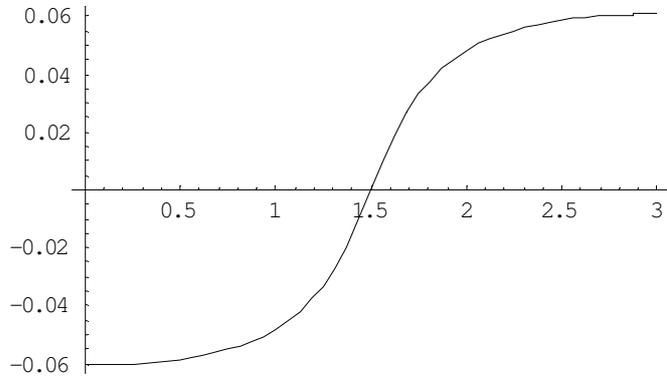
```
Plot[Ts,{x,0,3}]
```

```
Plot[Ts2,{x,0,3}]
```

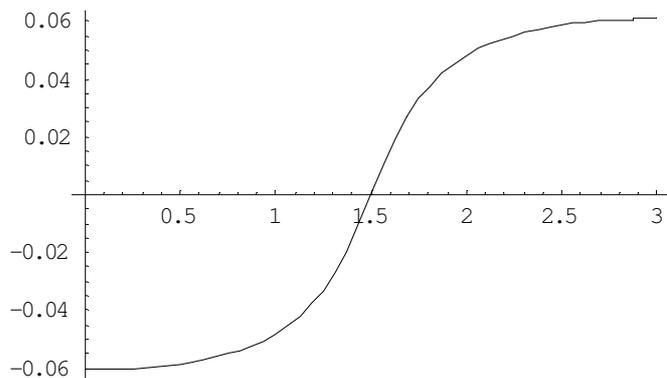
• **Diferença entre Ts e Ts2.**



• $T_s = k \Delta U$



• $T_s = N'$



• **Verificando equações de equilíbrio.** As equações de equilíbrio foram obtidas em **SORIANO (2001)** e representam o método proposto por **STEVANOVIC (1996)** para o cálculo de vigas mistas.

(* VERIFICANDO EQUILIBRIO $M_c + M_w - N_c r = M_x$ (eq B.03 - SORIANO (2001), pp 229). ISOLANDO $M_w = \text{MomentoValInf}$, PODE-SE COMPARAR OS VALORES *)

• **Cálculo de M_x para meia viga.** A segunda metade da viga tem outra equação por causa da força concentrada **P**.

(* **CARGA CONCENTRADA E DISTRIBUIDA** *)

$M_x[x_] = (-P/1000)/2 \ x + (-Q/1000) \ \text{ValLen}/2 \ x - (-Q/1000) \ x^2/2;$

(* **PLOT M_x** *)

Print[" M_x "];

Plot[Mx[x], {x, 0, ValLen/2}]

```

(* MOMENTO Mw VIA EQ B.03 *)
MomentoInfCompare=Mx[x]-MomentoValSup+NormalValSup
(h1+h2)/2/.NumVal;

(* PLOT MOMENTO Mw CALCULADO PELO PTV *)
Print["Mw via PTV"];
Plot[MomentoValInf,{x,0,ValLen/2}]

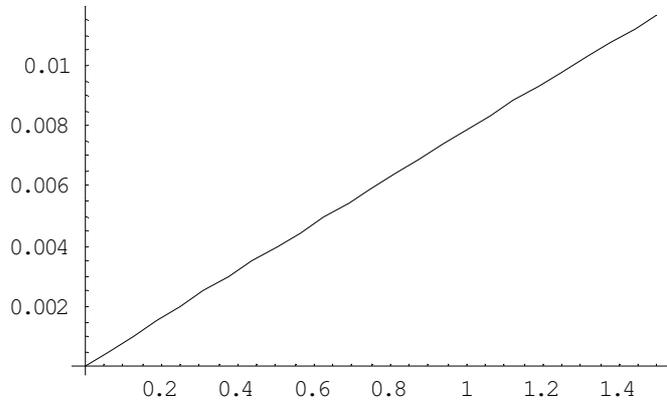
(* PLOT MOMENTO Mw CALCULADO VIA B.03 *)
Print["Mw via eq B.03"];
Plot[MomentoInfCompare,{x,0,ValLen/2}]

(* PLOT DIFERENCA ENTRE Mw PTV E VIA B.03 *)
Print["Diferenca entre Mw PTV e via B.03"];
Plot[MomentoValInf-MomentoInfCompare,{x,0,ValLen/2}]

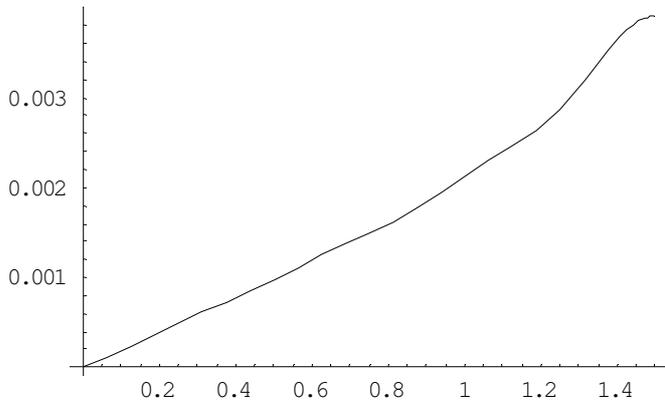
(* COMPARANDO VALORES DE Mw EM ALGUNS PONTOS DA VIGA *)
Print["Mw em alguns pontos: nosso e via B.03"];
Table[Chop[MomentoValInf]/.{x→i*0.3},{i,0,5}]
Table[Chop[MomentoInfCompare]/.{x→i*0.3},{i,0,5}]

```

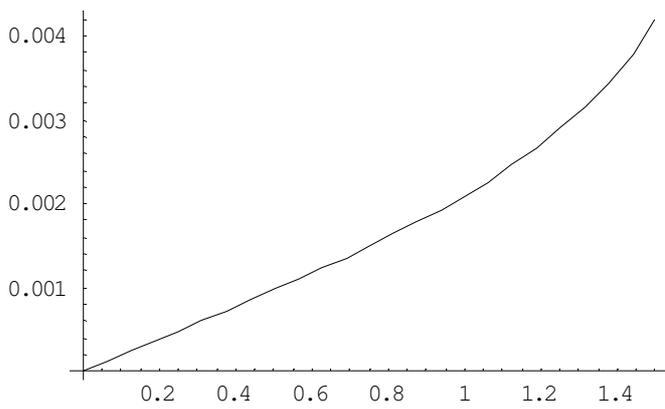
• **Mx.**



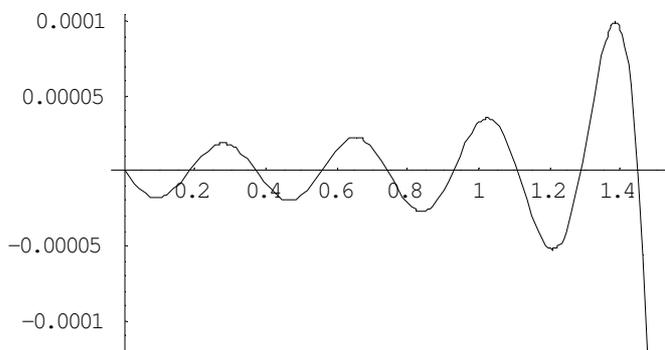
• **Mw via PTV.**



• **Mw via eq B.03.**



• **Diferença entre Mw via PTV e via B.03.**



• **Mw em alguns pontos: via PTV e via eq B.03.**

```
{0,0.000597189,0.00118757,0.00182686,0.00266439,0.00390113}
{0,0.000579828,0.00117332,0.00183999,0.00271611,0.00418577}
```

• **Verificando outras equações de equilíbrio.**

```
(* VERIFICANDO EQUILIBRIO
Tw = Ts rw + Mw' (eq B.07-Soriano,pp 230)
Tc = Ts rc + Mc' (eq B.06-Soriano,pp 230)
Tx = Tc + Tw (eq B.02-Soriano,pp 228) *)
```

(* CALCULO DE Tc *)

```
CortanteSup = -Ts h1/2+D[MomentoValSup, x]/.NumVal;
```

(* CALCULO DE Tw *)

```
CortanteInf = -Ts h2 / 2 + D[MomentoValInf, x]/.NumVal;
```

(* CALCULO DE Tx - via PTV *)

```
CortanteTotal=CortanteInf+CortanteSup;
Print["Tx - nosso metodo - viga toda"];
Plot[CortanteTotal, {x,0,ValLen}];
```

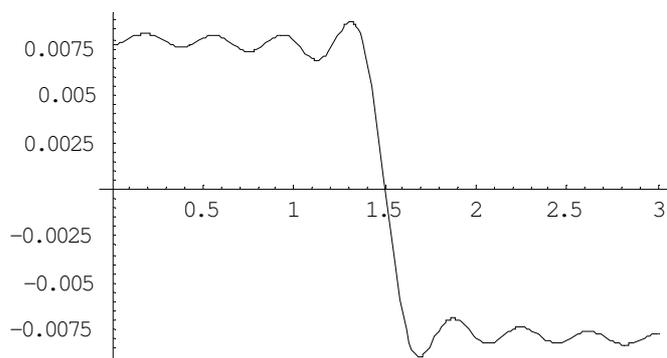
(* CALCULO DE Tx *)

```
Tx = D[Mx[x], x];
Print["Tx - via equilibrio - meia viga"];
Plot[Tx, {x,0,ValLen/2}];
```

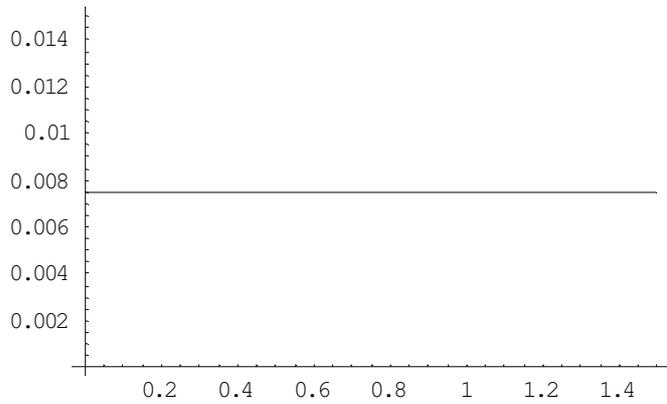
(* ERRO = Tx - CortanteTotal - meia viga*)

```
Plot[Tx-CortanteTotal, {x,0,ValLen/2}]
```

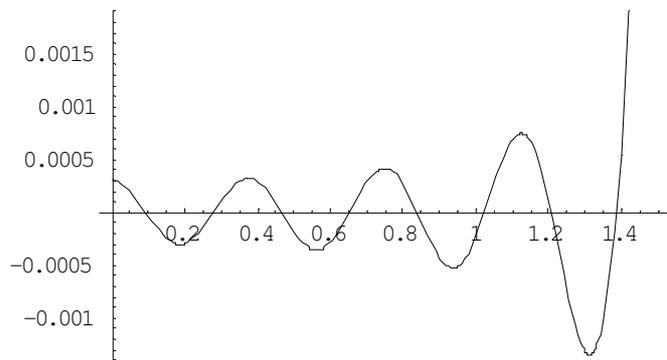
• **Tx - via PTV - viga toda**



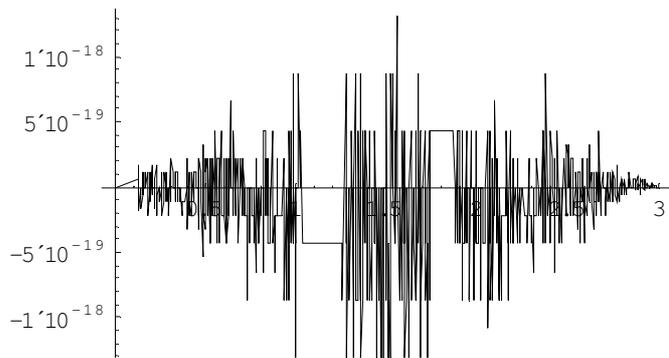
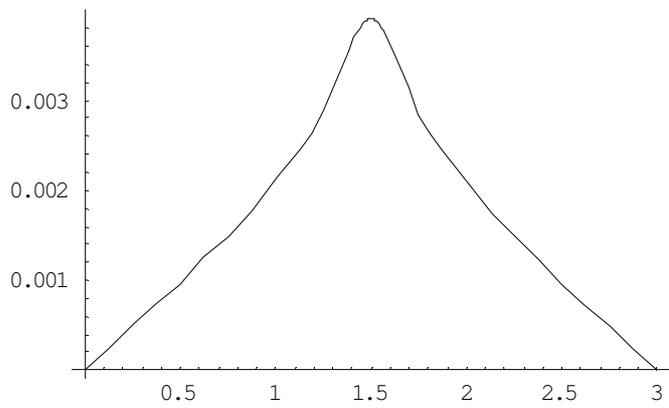
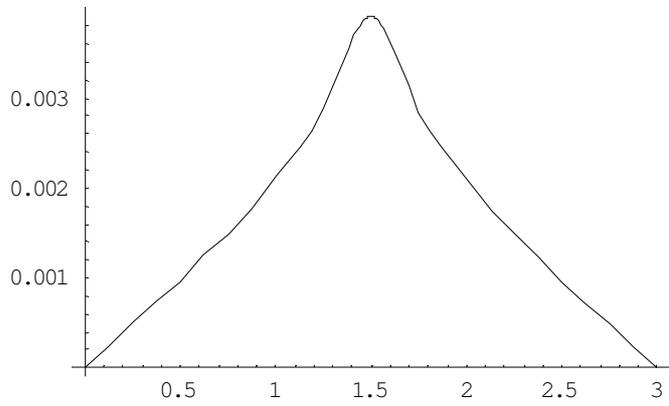
• Tx - via equilíbrio - meia viga



• Diferença entre gráficos de Tx.



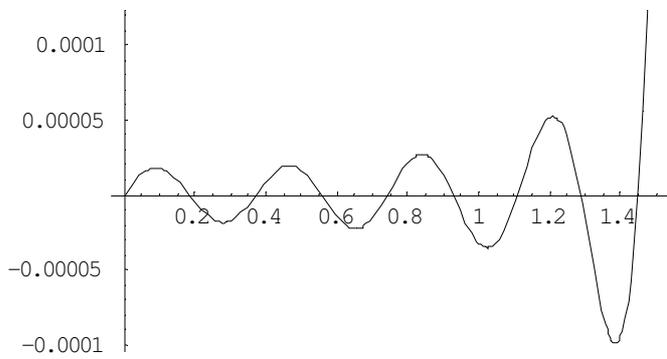
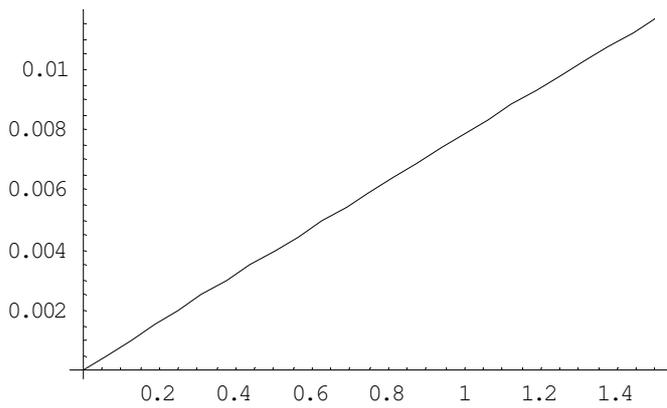
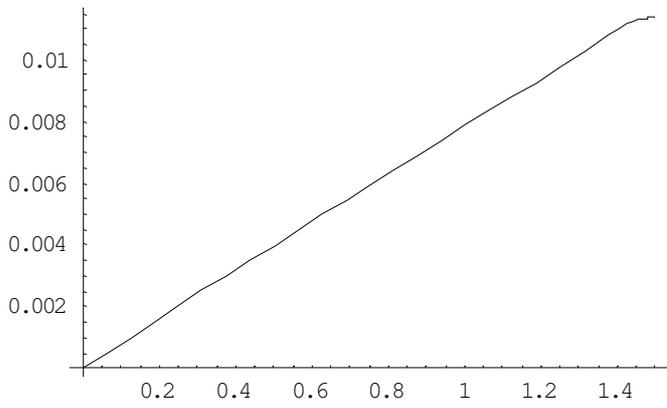
(* VERIFICANDO $M_w = M_c E_w I_w / E_c I_c$ (eq B.11-SORIANO, pp 231) *)
MomentoInfCompare=MomentoValSup E2 I2 / (E1 I1) /.NumVal;
Plot[MomentoValInf, {x, 0, ValLen}]
Plot[MomentoInfCompare, {x, 0, ValLen}]
Plot[MomentoValInf-MomentoInfCompare, {x, 0, ValLen}]



(* VERIFICANDO $M_w = E_w I_w / E I_0 (M_x + N_c r)$ (eq B.14-SORIANO, pp 231) $M_x = M_w E I_0 / E_w I_w - N_c r$ *)

$M_x \text{Compare} = \text{MomentoValInf} (E_1 I_1 + E_2 I_2) / (E_2 I_2) - \text{NormalValSup} (h_1 + h_2) / 2 / .\text{NumVal};$

```
Plot [MxCompare, {x, 0, ValLen/2}];  
Plot [Mx[x], {x, 0, ValLen/2}];  
Plot [Mx[x]-MxCompare, {x, 0, ValLen/2}];
```



- **Comparação dos resultados com resultados via método de STEVANOVIC (1996).**

- **Resolução via Stevanovic.**

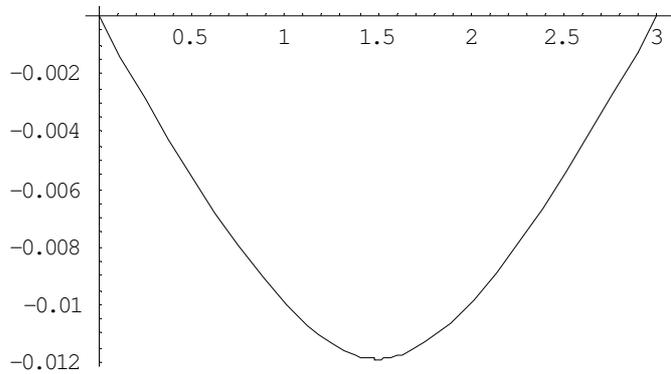
```
(* STEVANOVIC - SOLUCAO *)
r=(h1+h2)/2;
EI0=E1 I1 + E2 I2/.NumVal;
alpha=Sqrt[Konst (1/(E1 A1) + 1/(E2 A2)+r^2/EI0)]/.NumVal;
alpha2=alpha^2;
beta=Konst r/ EI0;
EI8=EI0 alpha^2/(alpha^2-beta r)/.NumVal;

(* CARGA PONTUAL *)
Solucao=DSolve[{
  D[w1[x],{x,4}]-alpha2 D[w1[x],{x,2}]==(alpha2/EI8) (-
(P/1000)x/2),
  D[w2[x],{x,4}]-alpha2 D[w2[x],{x,2}]==(alpha2/EI8) (-
P/1000(ValLen-x)/2),
  w1[0]==0,
  D[w1[x],{x,2}]==0/.{x->0},
  w2[ValLen]==0,
  D[w2[x],{x,2}]==0/.{x->ValLen},
  w1[ValLen/2]==w2[ValLen/2],
  D[w1[x],{x,1}]==D[w2[x],{x,1}]/.{x->ValLen/2},
  D[w1[x],{x,2}]==D[w2[x],{x,2}]/.{x->ValLen/2},
  D[w1[x],{x,3}]==D[w2[x],{x,3}]+(P/1000)/EI0/.{x->ValLen/2}},
  {w1[x],w2[x]},x];
Part1[x_]=Solucao[[1,1,2]];
Part2[x_]=Solucao[[1,2,2]];
wStevanovic=If[x<ValLen/2,Part1[x],Part2[x]];

(* CARGA DISTRIBUIDA *)
(*Solucao=DSolve[{
  D[w1[x],{x,4}]-alpha2 D[w1[x],{x,2}]==(alpha2/EI8)
(Mx[x])-D[Mx[x],{x,2}]/EI0,
  w1[0]==0,
  D[w1[x],{x,2}]==0/.{x->0},
  w1[ValLen]==0,
  D[w1[x],{x,2}]==0/.{x->ValLen}},
  {w1[x]},x];
wStevanovic=Solucao[[1,1,2]];*)
```

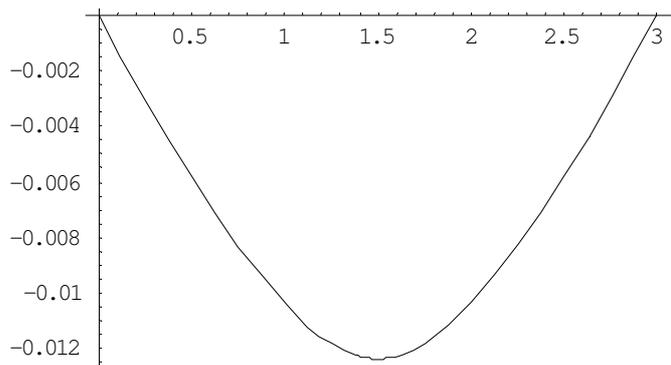
- **Desenha solução de Stevanovic – neste caso para carga pontual. O sinal de – é para compensar o eixo vertical de Stevanovic que é para baixo enquanto o do PTV é para cima.**

```
Plot[-wStevanovic,{x,0,ValLen}]
```



• **Desenha solução do PTV.**

Plot [Displacement [[1]], {x, 0, ValLen}]



• **Desenha diferença entre soluções.**

Plot [Displacement [[1]]+wStevanovic, {x, 0, ValLen}]

