

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Civil

Análise de Problemas Planos em Regime Elasto-
plástico pelo Método dos Elementos de Contorno

Eng. Carlos Eduardo Foltran

FEC / UNICAMP

Agosto - 1999

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Civil

Análise de Problemas Planos em Regime Elasto-
plástico pelo Método dos Elementos de Contorno

Eng. Carlos Eduardo Foltran
Orientador: Prof. Dr. Leandro Palermo Jr.

Dissertação apresentada à Faculdade de
Engenharia Civil como parte dos requisitos para
obtenção do título de Mestre em Engenharia de
Estruturas.

FEC / UNICAMP
Agosto – 1999

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

F731a Foltran, Carlos Eduardo
Análise de problemas planos em regime elasto-plástico pelo método dos elementos de contorno. / Carlos Eduardo Foltran.-- Campinas, SP: [s.n.], 1999.

Orientador: Leandro Palermo Jr.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil.

1. Plasticidade. 2. Integração numérica. 3. Análise numérica. 4. Métodos de elementos de contorno. 5. Deformações e tensões. I. Palermo Jr., Leandro. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL

Análise de Problemas Planos em Regime Elasto-plástico pelo Método dos Elementos de Contorno

Eng. Carlos Eduardo Foltran

**Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora,
constituída por:**

**Prof. Dr. Leandro Palermo Junior
Presidente e Orientador (FEC/UNICAMP)**

**Prof. Dr. José Claudio de Faria Telles
(COPPE/UFRJ)**

**Prof. Dr. Mário Conrado Cavichia
(FEC/UNICAMP)**

Campinas, 19 de Agosto de 1999.

Agradecimentos

À FAPESP, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, que concedeu a bolsa de estudos para este trabalho.

Ao Prof. Dr. Wilson Sérgio Venturini, pela colaboração em diversas partes deste trabalho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Leandro Palermo Jr.

Aos meus pais e
à memória dos meus avós

Sumário: .

Lista de Figuras.....	xv
Lista de Tabelas.....	xviii
Lista de Símbolos.....	xix
Resumo.....	xxiii
Abstract.....	xxiv
1-Introdução	1
2-Revisão Bibliográfica	3
3-Estados Planos de Tensão e deformação	8
3.1-Introdução:.....	8
3.2-Hipóteses Básicas:.....	8
3.3-Equação de Equilíbrio:.....	8
3.4-Relação Deformação - Deslocamento:.....	10
3.5-Relações Constitutivas:.....	12
3.5.1-Equações de Navier:	14
3.6-Estados Planos de Tensão e Deformação:.....	15
3.7-Estado Plano de Tensão Generalizado:.....	17
3.8-Solução Fundamental de Chapas:.....	18
4-Noções Básicas de Plasticidade	23
4.1-Introdução:.....	23
4.2-Comportamento Plástico dos Materiais:.....	23
4.3-Tipos de Encruamento:.....	24
4.4-Critérios de Escoamentos:.....	25
4.4.1-Critério de Tresca:	26
4.4.2-Critério de Von Mises:	27
4.4.3-Critério de Drucker-Prager	28
4.5-Formulação Elasto-plástica para Materiais com Encruamento Isotrópico:.....	28
4.6-Materiais com Encruamento Misto:.....	34
4.7-Equações de Navier para o Caso Elasto-plástico:.....	44
4.8-Acréscimo de Deformação Plástica:.....	46
5-Método dos Elementos de Contorno	53
5.1-Introdução:.....	53

5.2-Equação Integral de Chapas:.....	53
5.3-Discretização do Contorno:.....	58
5.4-Elementos de Contorno:.....	60
5.5-Discretização do Domínio:.....	63
5.6-Equações Algébricas:.....	64
5.6.1-Propriedades da Matriz H:	67
5.7-Pontos de Colocação:.....	68
5.8-Determinação das Matrizes h^1_{ik} e g^1_{ik} :	70
5.8.1-Formulação Analítica do Elemento Linear	71
5.8.1.1-Ponto de Colocação Fora da Linha do Elemento:...	71
5.8.1.2-Ponto Alinhado com o Elemento mas não Pertencente a Este:.....	79
5.8.1.3-Ponto de Colocação Interno:.....	82
5.9-Determinação do Vetor B_k :	84
5.10-Determinação das Tensões em Pontos Internos:.....	87
5.10.1-Determinação das Tensões nos Pontos do Contorno: ..	89
5.11-Determinação da Deformação em Pontos Internos.....	92
5.11.1-Determinação das Deformações no Contorno:	93
6-Formulação do MEC para Meios Elasto-plásticos.	94
6.1-Introdução:.....	94
6.2-Formulação para Meios Elasto-plásticos:.....	94
6.3-Redução do Carregamento:.....	98
6.4-Determinação do Vetor $\{\dot{\Sigma}\}$:	100
6.5-Determinação dos Incrementos de Deformações em Pontos Internos:.....	101
6.6-Determinação dos Incrementos de Tensões em Pontos Internos:	104
6.7-Determinação dos Incrementos de Tensões e Deformações em Pontos do Contorno:.....	105
7-Técnicas de Integração Numérica	108
7.1-Introdução:.....	108
7.2-Quadratura Gaussiana Ordinária:.....	108
7.3-Quadratura Gaussiana Logarítmica:.....	110

7.4-Sub-elementos:.....	111
7.4.1-Divisão de um Elemento:	111
7.4.2-Fluxograma do Tratamento por Sub-elementos:	115
7.4.3-Aplicação da Técnica dos Sub-elementos a Funções Interpoladoras Diferentes:	116
7.5-Integração Numérica sobre uma Área:.....	118
7.5.1-Celulas Quadrangulares:	118
7.5.2-Células Triangulares:	121
7.6-Tratamento de Singularidades no Domínio:.....	124
7.7-Técnica das Sub-celulas:.....	126
8-Exemplos Numéricos	129
8.1-Introdução:.....	129
8.2-Exemplo de um Corpo em Estado Plano de Deformação:....	129
8.3-Tubo de Parede Espessa:.....	133
8.4-Cavidade Circular em Meio Elástico Infinito:.....	138
8.5-Disco em Rotação:.....	141
8.6-Viga em Balanço:.....	143
9-Exemplos em Regime Elasto-plástico	151
9.1-Introdução:.....	151
9.2-Corpo em Regime Elasto-plástico:.....	151
9.3-Tubo de Parede Espessa em Regime Elasto-plástico:.....	153
9.3-Trecho de Viga Sujeito a Plastificação:.....	164
9.4-Chapa Fina Perfurada:.....	166
9.5-Estudo da Influência do Erro Relativo nos Resultados:..	170
10-Integrais Particulares.....	173
10.1-Introdução:.....	173
10.2-Teoria Geral:.....	173
10.3-Integrais Particulares Aplicadas ao MEC:.....	175
10.3.1-Integrais Particulares para Carregamento Gravitacional:	177
10.3.2- Integrais Particulares para Força Centrífuga: ...	178
10.4-Integrais Particulares no Tratamento de Problemas Termo- elásticos:.....	178

10.5- Integrais Particulares Aplicadas a Problemas Elasto-plásticos:.....	183
10.5.1-Formulação:	183
10.5.2-Implementação:	188
11-Conclusões	192
11.1-Conclusões Gerais:.....	192
11.2-Sobre o Trabalho de Lee e Fenner:.....	193
11.3-Sobre as Integrais Particulares de Henry e Banerjee:..	193
11.4-Sobre a Integração Analítica:.....	195
11.5-Proximos Passos:.....	196
Bibliografia	197
Apêndice A - Soluções Analíticas dos Exemplos do Capítulo 8.	202
1-Introdução:.....	202
2-Tubo de Parede Espessa:.....	202
3-Cavidade Circular em Meio Elástico Infinito:.....	212
4-Disco de Espessura Constante:.....	214
Apêndice B - Tabela de Integração	224
1-Introdução:.....	224
2-Tabela de Integrais:.....	225

Lista de Figuras

Figura 3.1 - Elemento infinitesimal.	9
Figura 3.2 - Forças de superfície.	10
Figura 3.3 - Transformação do corpo.	11
Figura 3.4 - Corpo com pequena espessura.	18
Figura 4.1 - Modelos elasto-plásticos.	23
Figura 4.2 - Tipos de encruamento.	25
Figura 4.3a - Critérios de Tresca e de Von Mises em um estado plano de tensão.	27
Figura 4.3 - Componentes elástica e plástica da deformação. .	30
Figura 5.1 - Acréscimo de um domínio infinitesimal	56
Figura 5.2 - Ponto externo ao domínio	58
Figura 5.3 - Discretização do Contorno.	59
Figura 5.4 - Tipos básicos de elementos.	61
Figura 5.5 - Representação gráfica das funções de interpolação	61
Figura 5.6 - Elementos Descontínuos Lineares.	62
Figura 5.7 - Discretização do domínio.	64
Figura 5.8 - Deslocamento dos pontos de colocação.	69
Figura 5.9 - Posicionamento do ponto de colocação fora do domínio.	70
Figura 5.10 - Ponto de colocação fora da linha do elemento. .	72
Figura 5.11 - Ponto de colocação alinhado com o elemento. ...	79
Figura 5.12 - Ponto de colocação alinhado com o elemento. ...	80
Figura 5.13 - Ponto de colocação pertencente ao elemento. ...	82
Figura 5.14 - Ponto de colocação e célula de domínio.	84
Figura 5.15 - Coordenadas normais e tangenciais ao contorno. .	90
Figura 7.1 - Elemento de contorno	112
Figura 7.2 - Sub-elementos	113
Figura 7.3 - Fluxograma da rotina recursiva de sub-elementos	116
Figura 7.4 - Aproximação linear para o elemento quadrático. .	117
Figura 7.5 - Células quadrangulares.	119

Figura 7.6 - Sistema de coordenadas intrínsecas.	121
Figura 7.7 - Definição das coordenadas intrínsecas.	122
Figura 7.8 - Nós da célula triangular quadrática.	123
Figura 7.9 - Divisão da célula triangular em células quadrangulares.	124
Figura 7.10 - Células quadrangulares degeneradas.	125
Figura 7.11 - Nós das células quadrangulares que compõem a célula triangular.	127
Figura 7.12 - Divisão da célula triangular para tratamento da singularidade no nó 1.	128
Figura 8.1 - Corpo paralelepipedico sujeito a carregamento distribuído.	130
Figura 8.2 - Tubo de parede espessa.	134
Figura 8.3 - Discretização do contorno.	135
Figura 8.3b - Discretização do contorno.	137
Figura 8.4 - Quatro Primeiros Pontos onde se Determinará a Tensão.	139
Figura 8.5 - Discretização do Domínio.	142
Figura 8.5c - Chapa longa simulando viga em balanço.	144
Figura 8.6 - Elementos lineares com $\ell_e=.5$	148
Figura 8.7 - Elementos quadráticos com $\ell_e=.5$	148
Figura 8.8 - Elementos lineares com $\ell_e=.25$	148
Figura 8.9 - Elementos quadráticos com $\ell_e=.25$	149
Figura 8.10 - Elementos lineares com $\ell_e=.125$	149
Figura 8.11 - Elementos quadráticos com $\ell_e=.125$	149
Figura 9.1 - Corpo em regime elasto-plástico.	152
Figura 9.2 - Discretização do tubo de parede espessa.	154
Figura 9.3 - Deslocamentos dos pontos do tubo.	156
Figura 9.4 - Tensão na direção radial.	158
Figura 9.5 - Tensão na direção tangencial.	158
Figura 9.6 - Malha de $7,5^\circ$	159

Figura 9.7 - Deslocamentos dos pontos internos na direção radial (cm)	160
Figura 9.8 - Tensão na direção radial.	161
Figura 9.9 - Tensão na direção tangencial.	162
Figura 9.10 Deslocamento de um ponto na superfície externa (cm)	163
Figura 9.11 - Discretização do trecho de viga.	164
Figura 9.12 - Momentos fletores em regime elasto-plástico (kNm)	166
Figura 9.13 - Chapa com perfuração e malha utilizada.	167
Figura 9.14 - Evolução da plastificação.	168
Figura 9.15 - Distribuição da tensão σ_y	169
Figura 9.16 - Deformação do ponto onde começa a plastificação.	170
Figura 9.17 - Tempo de processamento normalizado.	172
Figura 1 - Tubo de Parede Espessa.	203
Figura 1b - Critérios de escoamento traçados no plano deviatório.	211
Figura 2 - Disco com núcleo plastificado.	219
Figura 1 - Geometria do Elemento Reto.	224

Lista de Tabelas

Tabela 3.1 - Relações entre as constantes elásticas.	14
Tabela 8.1 - Deslocamentos adimensionais do ponto A	131
Tabela 8.2 - Tensões adimensionais na direção do carregamento no ponto A	132
Tabela 8.3 - Deformações na direção do carregamento no ponto A	132
Tabela 8.4 - Deslocamentos dos pontos A, B e C em 10^{-3} mm. ...	135
Tabela 8.5 - Módulo das tensões radiais dos pontos A, B e C em N/mm^2	136
Tabela 8.6 - Deformações radiais dos pontos A, B e C.	136
Tabela 8.7 - Deslocamentos dos pontos A, B e C em 10^{-3} mm. ...	137
Tabela 8.8 - Módulo das tensões radiais dos pontos A, B e C em N/mm^2	138
Tabela 8.9 - Deformações radiais dos pontos A, B e C.	138
Tabela 8.10 - Deslocamentos nos pontos internos em mm.	139
Tabela 8.11 - Módulo tensões radiais nos pontos internos em Pa.	140
Tabela 8.12 - Deformações nos pontos internos.	140
Tabela 8.13 - Valores obtidos com 32 elementos lineares. ...	141
Tabela 8.14 - Tensões radiais nos pontos internos em Pa. ...	143
Tabela 8.15 - Tensões tangenciais nos pontos internos em Pa.	143
Tabela 9.1 - Valore obtidos no ponto interno.	153
Tabela 9.2 - Deslocamentos dos pontos do tubo (cm).	155
Tabela 9.3 - Tensão na direção radial (kgf/cm^2).....	157
Tabela 9.4 - Tensão na direção tangencial (kgf/cm^2).....	157
Tabela 9.5 - Momentos elasto-plásticos (kNm)	165
Tabela 9.6 - Comparação dos resultados.	171
Tabela 9.7 - Número de iterações por passo de carga.	172
Tabela 9.8 - Tempo de processamento de cada exemplo	172

Lista de Símbolos

A seguir são listados os principais símbolos utilizados neste trabalho:

α_{ij}	Tensor de deslocamento do centro da superfície de escoamento.
α	Inclinação do elemento em relação a horizontal na integração analítica.
β	Ângulo entre o raio e o contorno de uma célula
β_{ij}	Integral de célula.
δ_{ij}	Delta de Kronecker.
ε_{ij}	Tensor das deformações totais.
ε_{ij}^p	Tensor das deformações plásticas.
ε_{ij}^e	Tensor das deformações elásticas.
ε_e	Deformação efetiva.
ε_p	Deformação plástica efetiva.
ε	Raio infinitesimal.
ϕ_i	Função de forma.
φ_i	Função de forma auxiliar.
γ	Ângulo externo do contorno.
η_i	Versor normal ao contorno.
$\bar{\kappa}$	Fator de redução do carregamento.
λ	Constante de Lamè.
λ	Constante de distância na integração analítica.
$d\lambda$	Escalar que depende do histórico do carregamento.
μ	Módulo de elasticidade transversal.

ν	Coeficiente de Poisson.
π	3.14159265358979
θ_i	Inclinação do elemento de contorno segundo a horizontal.
θ	Variável angular.
ρ	Densidade em massa.
σ_{ij}	Tensor das tensões.
σ_e	Tensão efetiva.
σ_0	Tensão de escoamento do material.
ω	Angulo de varredura da integração analítica.
ξ	Variável homogênea.
ξ_i	Abscissa de Gauss.
ζ	Variável homogênea auxiliar.
$\Delta(X,P)$	Delta de Dirac.
Γ	Variável de contorno.
Γ_i	Versor tangente ao contorno.
Γ_ε	Contorno infinitesimal.
Λ_k	Núcleo para integral de contorno de célula.
Σ_k	Integral de célula.
Ω	Variável de domínio.
Ω_ε	Domínio infinitesimal.
Ψ_{ij}	Núcleo para integração em contorno de célula.
∇^2	Operador de Laplace.
l	Comprimento de um elemento.
b	Dobro da projeção de \sqrt{c} na direção do elemento na integração analítica.
b_i	Carregamento de massa.
c	Parâmetro de encruamento.
c	Raio da região plastificada no problema do tubo de parede espessa e do disco em rotação.

c	Quadrado da distância entre o ponto de colocação e o ponto médio do elemento na integração analítica.
c_{ij}	Tensor de correção para deslocamentos no contorno ou fora deste.
d	Distância do ponto de colocação ao elemento na integração analítica.
g_{ij}^k	Integral analítica.
h_{ij}^k	Integral analítica.
p_i	Força aplicada ao contorno.
p_{ij}^*	Solução fundamental de força.
r	Raio.
s_{ij}	Tensor das tensões deviatórias.
u_i	Deslocamento de um ponto.
u_{ij}^*	Solução fundamental para deslocamentos.
w_i	Peso de Gauss.
A_{ij}	Constantes de célula.
B_i	Integral de célula.
C_{ijkl}	Tensor elástico.
E	Módulo de elasticidade longitudinal.
$[G]$	Matriz do método dos elementos de contorno que multiplica o vetor de forças.
\bar{H}	Módulo de encruamento.
$[H]$	Matriz do método dos elementos de contorno que multiplica o vetor de deslocamentos.
I_1	Primeiro invariante do tensor das tensões.
J_2	Segundo invariante do tensor das tensões deviatórias.
M	Grau de mistura para encruamento misto.
P	Ponto de colocação.

R	Raio.
\dot{x}	Incremento da variável x .
\bar{x}	Valor reduzido da variável x .
\tilde{x}	Integral particular da variável x .

Resumo

Neste trabalho é feita a análise de problemas planos em regime elástico e elasto-plástico pelo método dos elementos de contorno. A formulação do método é desenvolvida para ambos os casos. Apresentam-se técnicas de integração de contorno e domínio, assim como uma discussão sobre a eficiência de cada uma. Propõem-se o uso de expressões analíticas para as integrais sobre o contorno quando são usados elementos isoparamétricos lineares. Adicionalmente, incluem-se expressões analíticas para o tratamento de carregamentos de domínio com células lineares. É dada atenção especial ao ganho de velocidade proporcionado pela formulação analítica proposta. Duas técnicas são apresentadas para o tratamento do problema elasto-plástico, uma com integração de domínio, totalmente implementada, e outra com uso de integrais particulares que dispensam tanto a integração do domínio quanto sua discretização. Vários exemplos são resolvidos e seus resultados comparados àqueles conhecidos, ou confrontados com resultados disponíveis na literatura.

Abstract

This study presents an elastoplastic analysis applied to plane problems using the boundary element method. A formulation is presented to take into account a homogeneous and isotropic material loaded in both conditions or in the elastic range and in the elastoplastic range. Some integration schemes are presented and discussed with reference their performance. Analytical expressions are proposed to perform boundary integrals when isoparametric linear elements are used. Further, analytical expressions are included to perform the domain integrals related to a linear distributed loading on the domain surface. Two approaches are considered to solve the elastoplastic problem. The main analysis computed the elastoplastic response considering the domain integrals related to elastoplastic effect performed over the domain. On the other hand, the use of particular integrals to compute the elastoplastic effect is presented and its efficiency is discussed. Some examples are solved to show the behavior of the presented formulation and their response compared with the results available from the literature. Further, a special attention is paid to the computation time when analytical expressions are used.

Capítulo 1

Introdução

O tratamento de problemas planos em regime elasto-plástico é um assunto que desperta grande interesse na engenharia. Para tal, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) vem sendo empregado com sucesso desde a década de 1970. O presente trabalho aborda este tópico.

Dentre as formas existentes para tratamento de problemas elasto-plásticos pelo MEC, será dada uma atenção maior às técnicas apresentadas por **Henry e Banerjee** [28] e **Lee e Fenner** [27], procurando-se fazer uma comparação entre elas.

A evolução da técnica de tratamento de problemas plásticos pelo MEC é tratada em maiores detalhes no capítulo 2, onde procura-se apresentar uma revisão bibliográfica sobre o tema. No Capítulo 3 abordam-se alguns aspectos básicos da teoria da elasticidade, necessários para a compreensão adequada dos capítulos seguintes.

A solução dos problemas elasto-plásticos depende do histórico do carregamento e das deformações ou seja, de que forma o carregamento foi aplicado ao corpo em análise e como as deformações plásticas evoluíram em seu interior. Este aspecto é abordado em detalhes no Capítulo 4, onde se apresentam noções básicas da teoria envolvida, abrangendo critérios de resistência e relações incrementais.

No Capítulo 5 apresenta-se um resumo da teoria e da formulação do MEC para o tratamento de problemas. Também neste mesmo capítulo são abordados alguns detalhes para a implementação do método como formulações analíticas para elementos lineares, posicionamento dos pontos de colocação, integrais em contorno de células e técnicas para a determinação de tensões e deformações

no contorno. Apresenta-se a formulação do MEC aplicada a problemas elasto-plásticos no Capítulo 6

Para dar um suporte mais adequado ao MEC, discutem-se no Capítulo 7 algumas técnicas de integração numérica. São apresentadas as formas de tratamento de singularidades e quase singularidades que foram usadas neste trabalho, assim como uma alternativa da técnica de sub-elementos.

Exemplos que atestam a versatilidade e acuidade das técnicas apresentadas neste trabalho são mostrados no Capítulo 8 para o regime elástico. Foram selecionados exemplos que dispusessem de solução analítica, para garantir uma base de comparação confiável para os resultados obtidos. As soluções analíticas dos exemplos são apresentadas no Apêndice A.

Apresentam-se exemplos em regime elasto-plástico no Capítulo 9. Para obtenção destes resultados optou-se por uma simplificação da técnica proposta em [27].

O processo das integrais particulares é apresentado, sucintamente, no Capítulo 10. No Capítulo 11 discutem-se as conclusões do presente trabalho, com base nos resultados obtidos e nas afirmações feitas em [27] e [28].

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Equações integrais têm sido usadas com sucesso, desde o século XIX, no tratamento de problemas de mecânica dos fluidos, como alternativa à resolução de equações diferenciais [5]. Em 1886, Somigliana apresentou a equação integral que estabelece a relação entre as forças e deslocamentos no contorno de um corpo e seus deslocamentos internos. Esta relação é conhecida como identidade de Somigliana.

A formulação de Somigliana, assim como outras de mesma natureza, é chamada **formulação direta**, pois os deslocamentos e forças do contorno (funções de densidade da equação integral) são tomados com seus valores reais, sem aproximações. Entretanto, isto dificulta o tratamento de problemas práticos, já que não é tão simples escrever tais funções para casos particulares de carregamento e vinculações.

Se forem usadas aproximações para as funções de densidade de uma equação integral, ter-se-á a chamada **formulação indireta**. Isto foi proposto pela primeira vez por Fredholm que, em 1903, publicou um trabalho sobre a aplicação das equações integrais dos problemas potenciais em um contorno dividido em partes, onde as funções de densidade eram aproximadas por funções fictícias [3].

Os trabalhos de Somigliana e Fredholm formam a base para o atual **método dos elementos de contorno**. Dentre os trabalhos que foram publicados sobre as equações integrais, aplicadas em problemas potenciais e de elasticidade, destacam-se os de **Kellog** [6], **Muskhelishvili** [7], **Mikhlin** [8] e **Kupradze** [9]. No entanto, a formulação era sempre tratada nestes trabalhos de forma analítica, limitando sua aplicação a problemas simples [3].

Na década de sessenta, com o advento de computadores eletrônicos, os processos numéricos ganharam força. **Jaswon** [10] e **Symm** [11] publicaram em 1963 trabalhos sobre a solução numérica de problemas regidos pela equação de Laplace. Suas aproximações consistiam em elementos lineares onde as funções de potencial eram assumidas constantes no contorno. As integrais de contorno eram avaliadas usando-se a regra de Simpson, exceto pelas integrais singulares que tinham tratamento analítico [3].

Esta abordagem foi rapidamente seguida em outros trabalhos sobre fluxos potenciais e problemas de engenharia elétrica. Em 1967, **Rizzo** [12] publicou um trabalho explorando a semelhança entre os problemas potenciais e a teoria clássica da elasticidade. Neste trabalho, vários problemas de elasticidade são resolvidos por uma aproximação numérica idêntica a usada por **Jaswon** [10].

O trabalho [12] foi expandido para problemas tridimensionais por **Cruse** [13]. Mais tarde **Lachat** [14] propôs que resultados melhores poderiam ser obtidos com o uso de polinômios de grau mais alto como funções de densidade. Esta modificação foi inspirada no processo usado no método dos elementos finitos, onde elementos de grau mais alto são empregados para melhor representar o problema em estudo. Tal proposta foi **implementada por Lachat** e Watson [15] [16]. Mais tarde outros autores passaram a usar elementos isoparamétricos quadráticos, onde tanto a geometria do contorno quanto as funções de densidade eram aproximadas por funções quadráticas.

O problema elasto-plástico foi analisado pela primeira vez por **Swedlow e Cruse** [17], que apresentaram a formulação direta para a integral de contorno. **Riccardella** [18] ampliou este trabalho usando o critério de resistência de Von Mises e assumiu que as tensões eram constantes nas células de domínio, em um processo de solução não iterativo. A solução por ele apresentada

requeria que o número de nós no contorno fosse igual ao número de nós no domínio [27], o que dificultou a extensão da técnica para uso de polinômios de grau mais alto nas células de domínio [3] [27].

Mendelson e Albers [19] apresentaram uma formulação para materiais perfeitamente plásticos e com enrijecimento, com base num trabalho publicado por **Mendelson** [20]. Estes trabalhos mostraram a acuidade e o potencial dos elementos de contorno no tratamento deste tipo de problema [3].

Algumas correções às formulações para o estado plano de deformação foram publicadas por **Mukherjee** [21], que introduziu modificações nos núcleos das integrais de deformação plástica. **Bui** [22] publicou mais algumas correções para o caso tridimensional, considerando que as derivadas das funções núcleo só poderiam ser feitas diretamente se fosse obedecida uma relação entre o número de dimensões do problema e o grau da singularidade. Caso contrario, haveria termos extras a serem considerados.

A maior dificuldade encontrada na formulação elasto-plástica é a determinação do valor das integrais hipersingulares de tensões e deformações. **Telles e Brebbia** [23] [24] apresentaram a formulação correta para tensões em pontos internos, incluindo as derivadas das integrais singulares de domínio, com base no trabalho de **Bui** [22], adaptando a formulação para o problema bidimensional. Eles apresentaram uma formulação direta para o método dos elementos de contorno, utilizando elementos lineares tanto no contorno quanto no domínio. Um esquema de integração semi-analítico foi proposto para as integrais singulares.

Melhorias nos resultados foram conseguidas usando-se aproximações quadráticas, tanto no contorno quanto no domínio, o que demandou melhores processos de integração numérica. **Lee** [25] apresentou um estudo sobre elementos de contorno, tendo por base

o trabalho de **Alexelsson e Samuelsson** [31], utilizando elementos quadráticos. No trabalho de Alexelsson e Samuelsson [31] foi apresentado um **estudo de problemas** elasto-plásticos com encruamento misto, usando o critério de escoamento de Von Mises, para aplicação no método dos elementos finitos

Vários métodos de integração numérica foram propostos por **Lee** [25], incluindo um tratamento para as integrais singulares de domínio e um algoritmo de aceleração de convergência para as iterações [25]. A seguir, o trabalho [25] foi implementado para aplicações práticas na análise **de chapas de** ligação por Lee e Fenner [27] e **em mecânica da** fratura por Tan e Lee [26], analisando um tubo de parede espessa com uma trinca.

Em [27] o problema plástico é tratado efetuando-se **integrações** sobre o domínio. Através de um processo incremental e iterativo, determina-se a contribuição das deformações plásticas nos deslocamentos e forças no contorno do corpo em estudo. Há a necessidade de **uma discretização do** interior do corpo em estudo para a **avaliação das integrais** de domínio. Este procedimento não aumenta o número de incógnitas do problema, como ocorreria na técnica dos elementos finitos, mas é uma atividade que aumenta a quantidade de operações necessárias ao processamento.

Ainda utilizando a mesma abordagem feita em [27], **Lou e Zhang** [34] trataram o problema elasto-plástico em um meio composto por dois materiais. Seguindo uma linha mostrada em [35] para o tratamento da plasticidade como força de domínio, **Chen e Nisitani** [33] estudaram o efeito do coeficiente de Poisson neste tipo de análise.

Uma abordagem totalmente diferente das anteriores foi proposta por Henry e Banerjee [28]. Nesta abordagem foi proposta uma função particular que satisfaz a equação diferencial dos problemas elasto-plásticos. Neste artigo foi usado o conceito de funções complementares e integrais particulares, transformando-se

as integrais de domínio em integrais de contorno, simplificando-se o tratamento destes problemas, uma vez que assim se dispensa a integração de domínio e, por conseguinte, sua discretização.

O presente trabalho tem por objetivo estudar os processos **propostos em [23], [27] e [28]**, discutindo as duas técnicas.

Capítulo 3

Estados Planos de Tensão e deformação

3.1-Introdução:

Para melhor compreensão do que será exposto mais adiante, apresenta-se um resumo das expressões utilizadas na teoria da elasticidade.

3.2-Hipóteses Básicas:

No decorrer deste texto supõem-se que as seguintes hipóteses sejam respeitadas:

- 1.É válida a geometria de pequenos deslocamentos;
- 2.O estado deformado do corpo pode ser escrito em função do estado indeformado, ou seja, aproximação Lagrangiana; e,
- 3.O material que constitui o corpo é elástico linear, homogêneo e isotrópico.

3.3-Equação de Equilíbrio:

Seja um corpo, finito, em equilíbrio estático, sujeito a um sistema de forças aplicadas em sua superfície e em sua massa. Cada ponto deste corpo estará, também, em equilíbrio, sujeito a um conjunto de tensões internas e forças de massa, conforme mostrado na Figura 3.1.

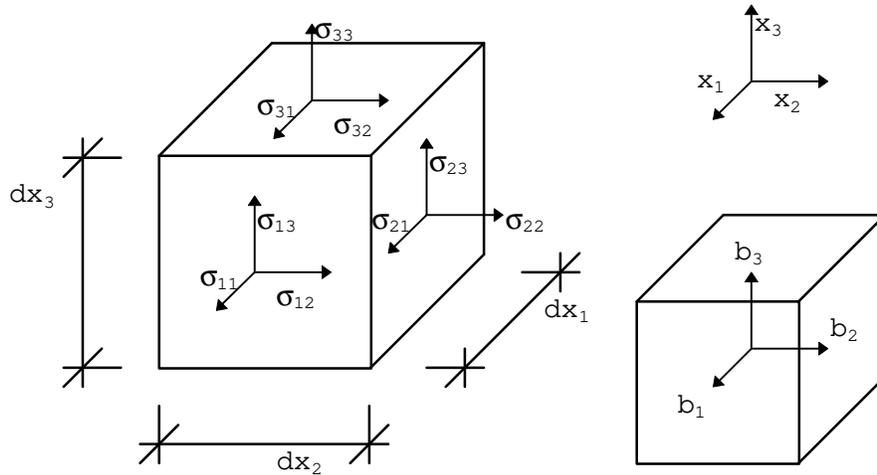


Figura 3.1 - Elemento infinitesimal.

As equações que regem o equilíbrio entre as tensões σ_{ij} e as forças de massa b_i , podem ser escritas em notação indicial como [1]:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (3.1)$$

Em um ponto na superfície do corpo, sujeito a um estado de tensões dado pelo tensor σ_{ij} , as forças de superfície aplicadas neste ponto relacionam-se com as tensões segundo a expressão:

$$p_i = \sigma_{ij} \eta_j \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (3.2)$$

O vetor η é normal à superfície, conforme ilustrado na Figura 3.2.

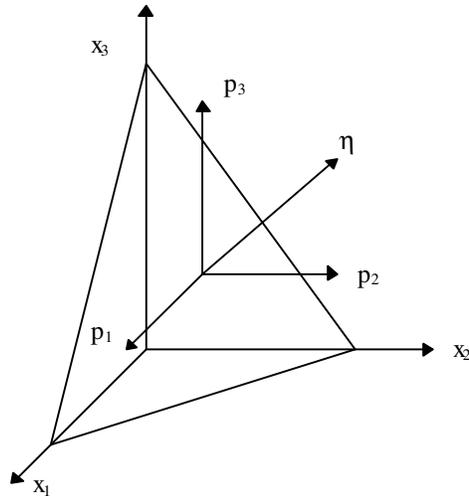


Figura 3.2 - Forças de superfície.

3.4-Relação Deformação - Deslocamento:

Um corpo, submetido a um sistema de forças, terá sua conformação inicial alterada. Cada ponto deste corpo irá se deslocar, caracterizando uma transformação de um estado inicial, dito indeformado, para um estado final, ou deformado.

Se para qualquer par de pontos, pertencentes ao corpo, a posição relativa entre eles não se altera após a transformação, diz-se que o corpo sofreu um movimento de corpo rígido. Esta transformação produz apenas translações e rotações no corpo, sem alterar sua forma.

Caso haja alteração da posição relativa entre os pontos após a transformação, diz-se que o corpo sofreu deformação, tendo sua forma original modificada.

Sejam dois pontos **M** e **N**, de coordenadas x_i e x_i+dx_i , respectivamente, infinitamente próximos, conforme ilustrado na Figura 3.3.

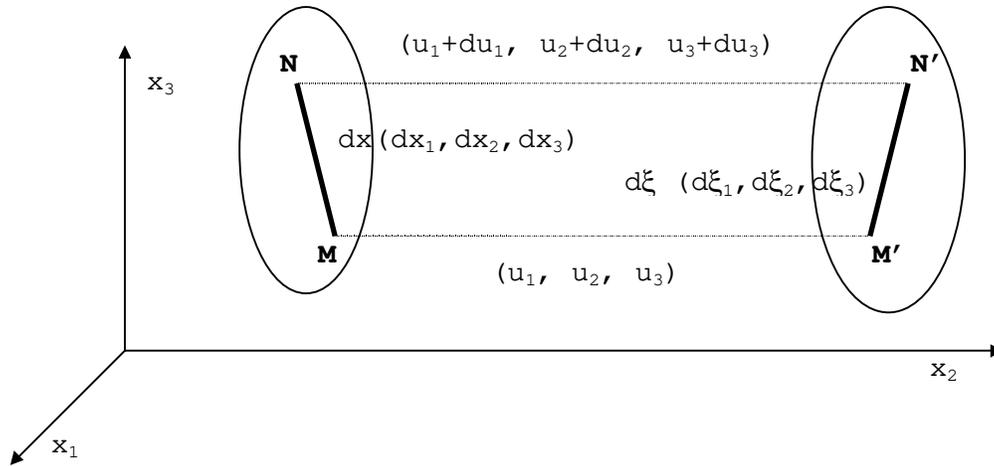


Figura 3.3 - Transformação do corpo.

Os pontos **M** e **N** são levados aos pontos **M'** e **N'**, de coordenadas ξ_i e $\xi_i+d\xi_i$, respectivamente. Então as coordenadas de **N'** podem ser escritas como [1]:

$$N' \equiv \xi_i + d\xi_i \quad \text{ou} \quad N' \equiv x_i + dx_i + u_i + du_i \quad (i=1, 2, 3) \quad (3.3)$$

Igualando-se as duas formas de se escrever as coordenadas de **N'** tem-se:

$$\xi_i + d\xi_i = x_i + dx_i + u_i + du_i \quad (i=1, 2, 3) \quad (3.4)$$

Expandindo-se os deslocamentos u_i em série de Taylor, pode-se proceder a diferença dos quadrados entre os comprimentos final e inicial e, depois, relacionar o comprimento final com o inicial por um acréscimo linear. Este acréscimo linear é chamado de deformação que, por ser pequeno, pode ser definido como sendo um tensor de segunda ordem, dado pela expressão [1]:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} \cdot u_{k,j})$$

(i, j, k=1, 2, 3) (3.5)

Pode-se assumir ainda que a rotação para todos elementos que estão em torno do ponto **M** será a mesma. Além disso, se este ângulo de rotação for suficientemente pequeno, pode-se desprezar a dilatação cilíndrica. Isso implica que o vetor de deformação para um elemento em **M** será perpendicular a este, tanto no estado deformado quanto no indeformado. Se também for assumido que os quadrados das derivadas $u_{i,j}$ possam ser desprezados, se comparados ao valor destas, então a relação (3.5) pode ser linearizada resumindo-se a:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

(i, j=1, 2, 3) (3.6)

3.5-Relações Constitutivas:

As relações constitutivas expressam a interdependência entre tensões e deformações, necessárias aos estudos dos problemas ligados a deformação de corpos.

Uma hipótese bastante usada para os problemas de engenharia, na dedução das relações constitutivas, é que as deformações sejam proporcionais ao carregamento aplicado. Isso significa que um aumento ou diminuição de carregamento acarretará em um aumento ou diminuição, respectivamente, da deformação [1]. Cabe lembrar que esta hipótese, adotada neste trabalho, só é válida caso se possa garantir que as propriedades do material que constitui o corpo em estudo não se alterem quando houver variação das tensões que agem neste. O caso em que há alteração das propriedades do material, ou seja, em que ocorre o fenômeno da

plastificação, será tratado no Capítulo 4. Aquela hipótese pode ser expressa matematicamente como:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{ij} \quad (i, j, k, l=1, 2, 3) \quad (3.7)$$

O tensor de quarta ordem, C_{ijkl} , é composto por 81 constantes elásticas. Pode-se simplificar a expressão (3.7) considerando-se que os tensores de segunda ordem envolvidos são simétricos. Com isso passa-se a ter 36 constantes independentes. Se for considerada a existência de uma função de densidade de energia, pode-se mostrar que o tensor C_{ijkl} é simétrico em relação a cada par de índices, restando 21 constantes independentes. Como o material é suposto isotrópico, ou seja, suas propriedades independem da direção em que são medidas, estas constantes podem ser resumidas a apenas duas. A equação (3.7) pode agora ser escrita como:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} \quad (i, j, k=1, 2, 3) \quad (3.8)$$

com:

$$\epsilon_{kk} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$$

As constantes de Lamé, μ e λ , podem ser escritas em função do coeficiente de Poisson ν e do módulo de Young E segundo as fórmulas apresentadas na Tabela 3.1. Na mesma Tabela são apresentadas várias relações entre as constantes elásticas nas suas combinações mais comuns.

Tabela 3.1 - Relações entre as constantes elásticas.

Constante	Em Função de			
	λ e μ	E e ν	E e μ	μ e ν
λ	λ	$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{\mu(E-2\mu)}{3\mu-E}$	$\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$
μ	μ	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	μ	μ
E	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	E	E	$2\mu(1+\nu)$
ν	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	ν	$\frac{E-2\mu}{2\mu}$	ν

A constante μ é chamada de módulo de elasticidade transversal e também notada como \mathbf{G} [1]. No decorrer deste trabalho manter-se-á a notação μ .

No tratamento de alguns problemas, é conveniente expressar as deformações de um ponto a partir das tensões que atuam neste. Para este fim, arranja-se adequadamente a expressão (3.8) para isolar os termos de deformação, obtendo-se:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda \delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{nn} \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (3.9)$$

3.5.1-Equações de Navier:

Uma forma prática de se escrever o equilíbrio de um corpo é fazê-lo em termos de seus deslocamentos. As equações que expressam este equilíbrio, deduzidas a seguir, são conhecidas como equações de Navier. Derivando-se as relações (3.6) e (3.8) obtém-se as expressões:

$$\sigma_{ik,k} = \lambda \varepsilon_{ll,i} + 2\mu \varepsilon_{ik,k} \quad (i, j, k, l=1, 2, 3) \quad (3.10)$$

$$\varepsilon_{ik,l} = \frac{1}{2} (u_{i,kl} + u_{k,il}) \quad (i, j, k, l=1, 2, 3) \quad (3.11)$$

Substituindo-se o valor da derivada das deformações (3.11) na expressão da derivada das tensões (3.10), chega-se a:

$$\sigma_{ik,k} = \lambda u_{l,li} + \mu (u_{i,kk} + u_{k,ik}) \quad (i, j, k, l=1, 2, 3) \quad (3.12)$$

Substituindo-se o valor da derivada das tensões, dadas por (3.12), nas equações de equilíbrio (3.1), chega-se a:

$$(\lambda + \mu) u_{k,ki} + \mu u_{i,kk} + b_i = 0 \quad (i, k=1, 2, 3) \quad (3.13)$$

Arranjando-se os índices e usando-se as relações da Tabela 3.1, chega-se as equações de Navier:

$$u_{i,jj} + \frac{u_{j,ji}}{1-2\nu} + \frac{b_i}{\mu} = 0 \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (3.14)$$

3.6-Estados Planos de Tensão e Deformação:

Se um corpo é sujeito a um dado estado de deformação elástico, tal que uma das componentes de deslocamento seja dependente apenas da coordenada na sua direção, por exemplo a coordenada x_3 , e as outras componentes sejam independentes desta

direção, tem-se um problema de elasticidade plana. Matematicamente isso pode ser exemplificado por [1]:

$$u_1 = u_1(x_1, x_2) \quad u_2 = u_2(x_1, x_2) \quad u_3 = u_3(x_3)$$

No exemplo citado é fácil notar que ϵ_{i3} e σ_{i3} serão funções apenas de \mathbf{x}_3 .

Se a função deslocamento $\mathbf{u}_3(\mathbf{x}_3)$ assume um valor constante, tem-se um **estado plano de deformação**. O estado plano de deformação é caracterizado por ter ϵ_{i3} nulo, ou seja, não há deformação na direção \mathbf{x}_3 .

As relações constitutivas para este caso têm a mesma expressão de (3.8), no entanto os índices variam apenas até 2. As tensões tangenciais referentes à direção de \mathbf{x}_3 serão nulas e a tensão normal σ_{33} tem seu valor expresso a seguir:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} \quad (i, j=1, 2)$$

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (3.15a)$$

$$\sigma_{33} = \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) \quad (3.15a)$$

Por outro lado, se ocorrer das tensões tangenciais σ_{13} e σ_{23} , e da tensão normal σ_{33} serem nulas, ter-se-á um **estado plano de tensões**. As relações constitutivas apresentadas até agora não servirão para este caso, devendo-se tomar a seguinte expressão:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \delta_{ij} \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda} \varepsilon_{kk} \quad (i, j, k=1, 2) \quad (3.16)$$

Analogamente ao estado plano de deformação, tem-se que ε_{13} se anula, exceto por ε_{33} que tem seu valor calculado a seguir:

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu + \lambda} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (3.17)$$

Note-se que as relações para o estado plano de tensão podem ser obtidas do estado plano de deformação fazendo-se:

$$\lambda' = \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda} \quad (3.18)$$

ou

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \nu} \quad (3.19)$$

3.7-Estado Plano de Tensão Generalizado:

Seja um corpo com a dimensão na direção \mathbf{x}_3 muito menor que aquelas nas outras direções, como ilustrado na Figura 3.4. Se a tensão σ_{33} for desprezível ao longo da espessura desta chapa e as tensões tangenciais também puderem ser desprezadas nas faces perpendiculares a \mathbf{x}_3 , então os valores das deformações, deslocamentos e tensões ao longo da espessura podem ser tomadas como iguais aos seus valores médios. Ou seja, a seguinte relação será válida [1]:

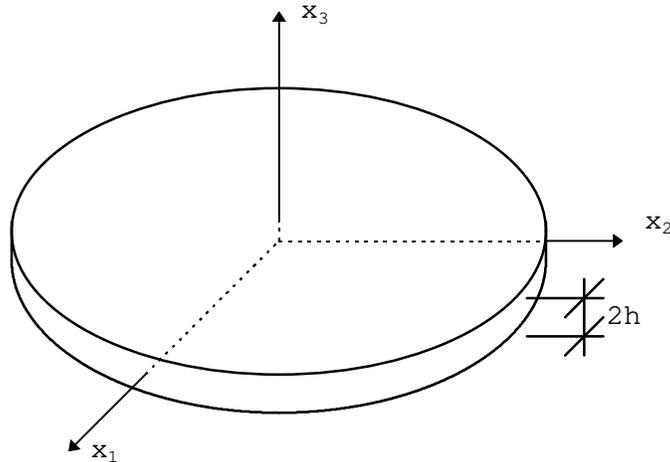


Figura 3.4 - Corpo com pequena espessura.

$$u_i(x_1, x_2) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u_i(x_1, x_2, x_3) dx_3 \quad (3.20)$$

A aproximação será tanto melhor quanto mais fina for a chapa. Este estado é chamado estado plano de tensões generalizado. Todas as equações vistas para o estado plano de tensão são validas. As soluções das equações de equilíbrio têm forma análoga às do estado plano de deformação, com a alteração de λ ou ν mostrada em (3.18) e (3.19). Os deslocamentos, neste caso, devem ser entendidos como sendo valores médios destes ao longo da espessura.

3.8-Solução Fundamental de Chapas:

A solução fundamental de chapas consiste na expressão da solução bidimensional do problema de Kelvin [1] [2]. Esta expressão fornece o valor dos deslocamentos de um corpo bidimensional infinito, sujeito a uma força unitária aplicada na origem do sistema de coordenadas.

Esta expressão é definida como a solução singular das equações de Navier, com uma não-homogeneidade dada pela função delta de Dirac [2]. A função delta de Dirac é definida como [2]:

$$\Delta(X, P) = \begin{cases} 0 & \text{Se } X \neq P \\ \infty & \text{Se } X = P \end{cases} \quad (3.21)$$

Definida desta forma, a função delta de Dirac apresenta as seguintes propriedades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta(X, P) dx = 1 \quad (3.22)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(X) \cdot \Delta(X, P) dx = f(P) \quad (3.23)$$

A solução do problema de Kelvin é obtida das equações de Navier, repetidas a seguir, com os índices limitados até 2, quando um carregamento unitário, representado pelo vetor unitário \bar{e} , é aplicado na origem [2], assim:

$$u_{i,jj} + \frac{u_{j,ji}}{1-2\nu} + \frac{b_i}{\mu} = 0$$

$$b_i = \Delta(X, O) \bar{e}_i \quad (i=1, 2) \quad (3.24)$$

Uma maneira de se determinar a solução fundamental é representar os deslocamentos a partir do vetor de Galerkin [2].

$$u_j = G_{j,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{m,jm} \quad (j, m=1, 2) \quad (3.25)$$

Substituindo-se (3.24) e (3.25) em (3.14) obtém-se:

$$G_{i,mmij} + \frac{\Delta(X, P)\bar{e}_i}{\mu} = 0 \quad (i, j, m=1, 2) \quad (3.26)$$

ou

$$\nabla^2(\nabla^2 G_i) + \frac{\Delta(X, P)\bar{e}_i}{\mu} = 0 \quad (i=1, 2) \quad (3.27)$$

Sendo ∇^2 o operador de Laplace. A equação (3.27) pode ser escrita para um problema de estado plano de deformação como [2]:

$$\nabla^2(F_i) + \frac{\Delta(X, P)\bar{e}_i}{\mu} = 0 \quad (i=1, 2) \quad (3.28)$$

sendo:

$$F_i = \nabla^2 G_i \quad (i=1, 2) \quad (3.29)$$

A equação (3.28) tem por solução:

$$F_i = -\frac{1}{2\pi\mu} \ln(r)\bar{e}_i \quad (i=1, 2) \quad (3.30)$$

sendo \mathbf{r} a distância entre o ponto \mathbf{P} e o ponto \mathbf{X} . Logo:

$$G = -\frac{1}{8\pi\mu} r^2 \ln(r) \quad (3.31)$$

Tomando o carregamento em cada direção de forma independente, pode-se escrever a componente do vetor de Galerkin em uma direção \mathbf{k} , devido a uma carga na direção \mathbf{i} como sendo [2]:

$$G_{ik} = G\delta_{ik} \quad (i, k=1, 2) \quad (3.32)$$

Por conseguinte, os deslocamentos dos pontos do domínio serão escritos como:

$$u_k^* = u_{ik}^* \bar{e}_i \quad (i, k=1, 2) \quad (3.33)$$

De acordo com (3.25), os deslocamentos serão escritos como:

$$u_{ik}^* = G_{ik,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{im,km} \quad (i, k=1, 2) \quad (3.34)$$

Substituindo (3.32) e (3.31) em (3.34) chega-se a:

$$u_{ik}^* = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[-(3-4\nu) \ln(r) \delta_{ik} + r_i r_{,k} \right] \quad (i, k=1, 2) \quad (3.35)$$

Note-se que quando o operador de Laplace é aplicado à equação (3.31) o resultado difere da equação (3.30) por um valor constante. Qualquer valor de \mathbf{G} em termos de \mathbf{r}^2 poderia ser usado, produzindo um deslocamento \mathbf{u}^* idêntico ao apresentado em (3.35), exceto por uma constante. Isso apenas gera um movimento de corpo

rígido que pode ser negligenciado, pois não altera a solução do problema [2].

A solução representada em (3.35) pode ser usada em problemas de estado plano de tensão modificando-se apenas o coeficiente de Poisson, segundo (3.19). Há uma dedução semelhante, apresentada em [1], para o caso tridimensional, fazendo uso da Função de Deformação de Love em lugar do delta de Dirac. Outra forma de se obter as mesmas expressões, mostrada em [37], é através do método de Somigliana, também para o estado tridimensional, usando-se funções de Green.

Usando-se a expressão (3.2), a deformação linearizada (3.6) e a relação constitutiva (3.8), pode-se obter as forças de contato em uma superfície interna deste corpo infinito, a partir de (3.35) como sendo:

$$p_{ik}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \eta} \left[(1-2\nu)\delta_{ik} + 2r_{,i}r_{,k} \right] + (1-2\nu)(\eta_i r_{,k} - \eta_k r_{,i}) \right\}$$

(i, j=1, 2) (3.36)

sendo:

$$p_k^* = p_{ik}^* \bar{e}_i$$

(i, j=1, 2) (3.37)

Capítulo 4

Noções Básicas de Plasticidade

4.1-Introdução:

Neste capítulo é apresentada a formulação básica para o tratamento do problema elasto-plástico. A dedução é feita para o caso genérico de um material com encruamento e depois simplificada para o caso de um material elasto-plástico perfeito.

4.2-Comportamento Plástico dos Materiais:

O comportamento plástico da maioria dos materiais, usualmente empregados em estruturas, pode ser analisado seguindo-se um dos modelos apresentados na Figura 4.1, obtidos de ensaios de tração uniaxial.

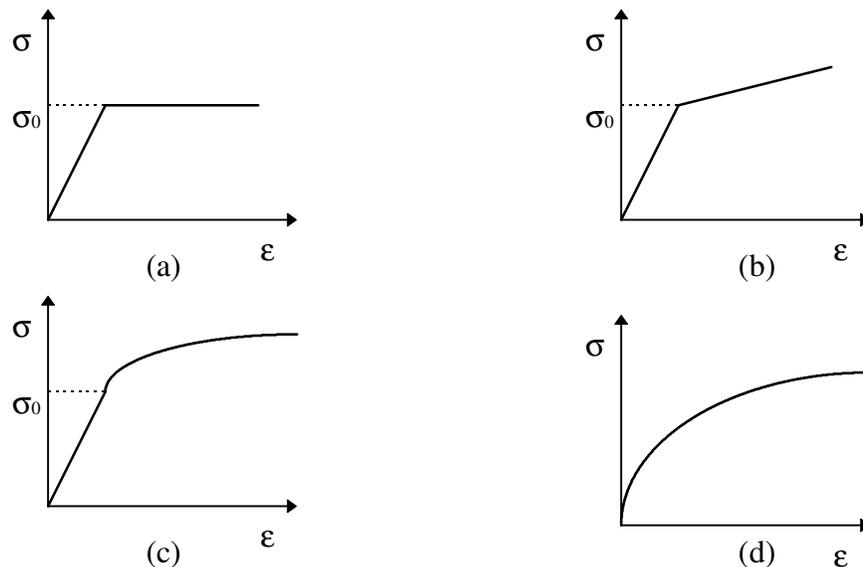


Figura 4.1 - Modelos elasto-plásticos.

Na Figura 4.1a vê-se o modelo elasto-plástico perfeito, segundo o qual o material deforma-se elasticamente até que se atinja uma tensão σ_0 , conhecida como tensão de escoamento. Deste ponto em diante, o material deforma-se indefinidamente sem que haja um acréscimo nas tensões. Este modelo é normalmente empregado para aço.

Já na Figura 4.1b apresenta-se o modelo de plastificação com enrijecimento linear, ou encruamento linear, tendo o material uma reserva de resistência após a tensão σ_0 ter sido alcançada. Neste caso há um acréscimo de tensões acompanhando o acréscimo da deformação. O comportamento de vários metais pode ser representado por este modelo, dentre eles o alumínio.

Nas Figuras 4.1c e 4.1d trata-se de materiais com comportamento não-linear. Para 4.1c a não-linearidade ocorre apenas depois de atingida a tensão de escoamento σ_0 . Em 4.1d o comportamento é não-linear desde o início do carregamento, não sendo clara a separação das fases elástica e plástica. A tensão de escoamento para este caso é obtida por convenção. Estes modelos podem ser empregados para estudo de materiais como o concreto.

4.3-Tipos de Encruamento:

Como foi descrito na seção anterior, alguns materiais apresentam uma reserva de resistência após terem atingido a tensão de escoamento. Na Figura 4.2, ilustra-se o comportamento de um material que, após sofrer escoamento, é solicitado de maneira reversa. Este pode comportar-se de uma forma diferente da inicial.

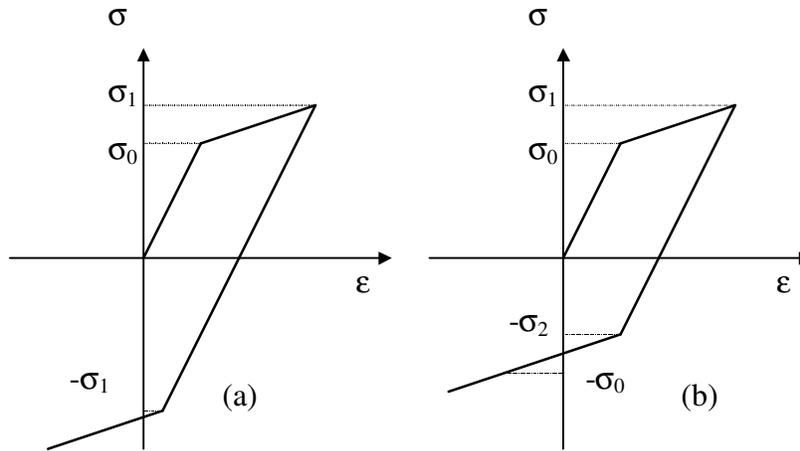


Figura 4.2 - Tipos de encruamento.

Admitindo-se um material com encruamento, na Figura 4.2a este é solicitado até uma tensão σ_1 , após o escoamento ter ocorrido em σ_0 . Em seguida, o carregamento é invertido e o material escoava novamente, sob a ação de uma tensão de módulo σ_1 . Neste caso o encruamento representa um ganho de resistência para o material. Isso caracteriza o **encruamento isotrópico**.

Já na situação ilustrada em 4.2b, a tensão de escoamento no carregamento reverso é $-\sigma_2$, que tem módulo inferior a σ_0 . Assim, tem-se que a existência do encruamento representa uma diminuição de resistência para cargas no sentido reverso, caracterizando o encruamento cinemático. Este fenômeno é conhecido como efeito Bauschinger.

Qualquer outra possibilidade de encruamento pode ser escrita como uma combinação dessas anteriores, sendo chamado de encruamento misto.

4.4-Critérios de Escoamentos:

Em um ensaio de carregamento uniaxial, a tensão de escoamento pode ser facilmente encontrada a partir do gráfico de tensão-deformação. Um meio de se determinar se um material entra

em escoamento, quando sujeito a um estado multiaxial de tensões, a partir de resultados de ensaios uniaxiais, é adotar-se um critério de escoamento.

4.4.1-Critério de Tresca:

O escoamento dos metais, em geral, não é influenciado pela alteração da pressão hidrostática. Assim, um critério que leve em conta apenas as tensões deviatórias é adequado para seu estudo. Historicamente, um critério de escoamento para metais foi proposto pela primeira vez por Tresca em 1864 [32]. Segundo este critério, o escoamento do material ocorre em um ponto quando a tensão de cisalhamento neste, atinge um valor crítico **k**. Se o comportamento mecânico do material for expresso pelas tensões principais, as tensões de cisalhamento serão a metade do módulo de cada uma das diferenças entre as tensões principais. Portanto, o critério de Tresca pode ser expresso matematicamente como:

$$\text{Max}\left(\frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2|, \frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3|, \frac{1}{2}|\sigma_3 - \sigma_1|\right) \leq k \quad (4.0a)$$

Em um ensaio uniaxial, as tensões σ_2 e σ_3 são nulas. Assim pode-se determinar a tensão de cisalhamento crítica **k** como sendo:

$$k = \frac{\sigma_0}{2} \quad (4.0b)$$

sendo σ_0 a tensão de escoamento do material.

Se a tensão σ_3 é nula, o critério de Tresca pode ser representado graficamente pelo hexágono mostrado na Figura 4.3a. A região interna representa estados de tensão onde não há escoamento.

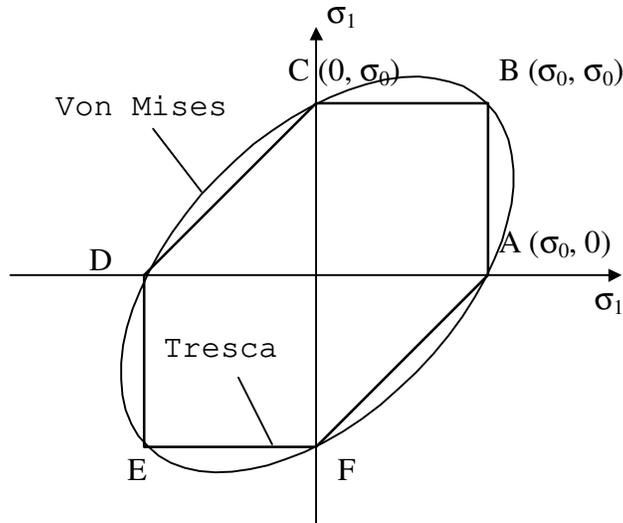


Figura 4.3a - Critérios de Tresca e de Von Mises em um estado plano de tensão.

4.4.2-Critério de Von Mises:

O critério de Tresca apresenta uma formulação bastante simples, o que facilita seu emprego em soluções analíticas de problemas elasto-plásticos. No entanto, este critério leva em conta apenas duas das tensões principais, ignorando a influência da terceira no escoamento. Além disso, para um tratamento mais adequado do problema elasto-plástico, é conveniente que a expressão do critério de escoamento usado tenha derivadas contínuas em todos os pontos. Neste sentido, foi proposto por Von Mises em 1913, um critério que levasse em conta os aspectos mencionados. Este critério é representado pela expressão:

$$f(J_2) = J_2 - k^2 = 0 \quad (4.1)$$

sendo k um **parâmetro de escoamento** e J_2 o segundo invariante do tensor das tensões deviatórias, dado por:

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}$$

$$(i, j=1, 2, 3) \quad (4.2)$$

Este critério é representado graficamente pela elipse, para o estado plano de tensão, que passa pelos pontos **A** a **F** da Figura 3a.

Para materiais elasto-plásticos perfeitos, **k** assume um valor constante. Havendo encruamento, **k** será uma função que depende do histórico de carregamento.

4.4.3-Critério de Drucker-Prager

No estudo de materiais cujo escoamento pode ser influenciado pela pressão hidrostática, o critério de Von Mises não conduzirá a resultados satisfatórios. O critério de Drucker-Prager, uma generalização do critério de Von Mises, considera a contribuição da pressão hidrostática com uma modificação da expressão (4.1) [32].

$$f(I_1, J_2) = aI_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \quad (4.3)$$

O parâmetro **a** dá o grau de influência da pressão no escoamento do material e **I₁** é o primeiro invariante do tensor das tensões. Materiais como solos e concretos têm seu comportamento melhor representado por este critério.

4.5-Formulação Elasto-plástica para Materiais com Encruamento Isotrópico:

Seja uma função **f**, que define um critério de escoamento, dependente do estado de tensões σ_{ij} , do estado de deformação plástico ϵ_{ij}^p , e do parâmetro de escoamento **k**:

$$f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p, k) = 0$$

$$(i, j=1, 2, 3) \quad (4.4)$$

A função f define uma superfície no espaço em que todos os pontos estão no limiar do escoamento, conhecida como **superfície de escoamento**. Os pontos internos à superfície representam estados de tensão e deformação em regime elástico. Pontos externos representam estados que só podem ser atingidos se houver encruamento do material. O processo de encruamento isotrópico pede que o parâmetro k seja uma função dependente do acúmulo de deformação plástica. No caso de encruamento cinemático, o parâmetro k será uma constante.

A matriz de rigidez tangente será tal que:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^{ep} \dot{\epsilon}_{ij}$$

$$(i, j, k, l=1, 2, 3) \quad (4.5)$$

O ponto sobre os tensores significa que se trata de um incremento de tensão ou deformação. O incremento de deformação total, $\dot{\epsilon}_{ij}$, pode ser dividido em uma porção elástica e outra plástica:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p$$

$$(i, j=1, 2, 3) \quad (4.6)$$

Nas relações incrementais, assume-se que o acréscimo de tensão pode ser escrito a partir do acréscimo de deformações elástico usando-se a lei de Hooke generalizada, ou seja:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{ij}^e$$

$$(i, j, k, l=1, 2, 3) \quad (4.7)$$

Na Figura 4.3 ilustra-se a separação das deformações plástica e elástica. Se o material for elástico perfeitamente plástico, ele atingirá a deformação total final seguindo o caminho OABC. Após o descarregamento, apenas as deformações plásticas permanecem, tornando-se clara a relação da deformação elástica com o tensor das tensões.

Submetendo-se um material que apresenta encruamento ao mesmo estado de deformação alcançado pelo material elasto-plástico perfeito, o caminho seguido na carga será OAC. No entanto, o caminho para a descarga não se altera. Assim, a relação entre a deformação elástica e o tensor das tensões permanece a mesma. Por isso, as deformações plásticas não devem produzir acréscimo de tensões durante o encruamento.

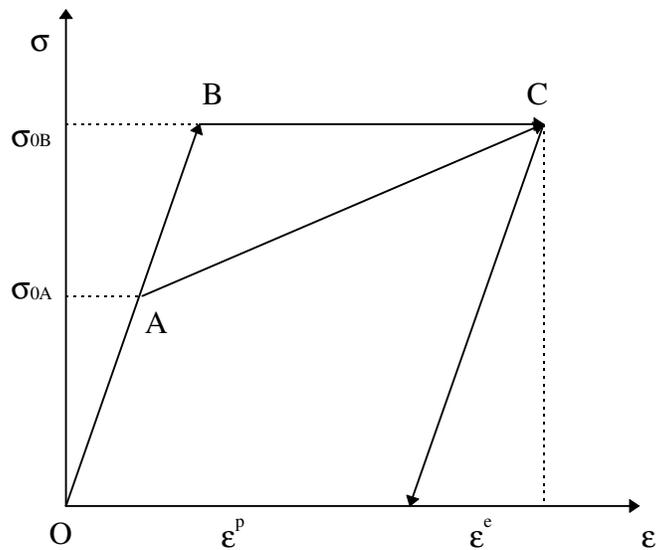


Figura 4.3 - Componentes elástica e plástica da deformação.

O incremento de deformação plástica, $\dot{\epsilon}_{ij}^p$, pode ser definido como:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (4.8)$$

sendo $d\lambda$ um escalar não negativo que depende do histórico do carregamento, e $g(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, k)$ é a **função de potencial plástico**, que define a direção da deformação plástica. Quando a função de potencial plástico assume o mesmo valor da função de escoamento, tem-se uma **regra de escoamento associada**. Isso é expresso matematicamente como:

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, k) = g(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, k) \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (4.9)$$

Substituindo-se o valor do acréscimo de deformação elástica, obtido de (4.6), e o valor do acréscimo de deformação plástica (4.8) em (4.7), obtém-se:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \left(\dot{\varepsilon}_{kl} - d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \right) \quad (i, j, k, l=1, 2, 3) \quad (4.10)$$

Na equação (4.10), se $d\lambda$ for conhecido, a relação constitutiva fica determinada. Para este fim, utiliza-se a condição de consistência definida a seguir.

Toma-se um estado de tensão e deformação que satisfaça (4.4). A este estado, dá-se um acréscimo de deformação $\dot{\varepsilon}_{ij}$. O novo estado de tensão e deformação deve continuar a satisfazer (4.4), ou seja:

$$f(\sigma_{ij} + \dot{\sigma}_{ij}, \varepsilon_{ij}^p + \dot{\varepsilon}_{ij}^p, k + dk) = f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, k) + df = 0 \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (4.11)$$

Para que (4.11) possa ser satisfeita, tem-se a seguinte relação, conhecida como condição de consistência:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}^p} \dot{\epsilon}_{ij}^p + \frac{\partial f}{\partial k} dk = 0$$

(i, j=1, 2, 3) (4.12)

Considerando que o parâmetro de escoamento k é função da deformação plástica acumulada, define-se incremento de deformação plástica efetiva como sendo:

$$\dot{\epsilon}_p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p}$$

(i, j=1, 2, 3) (4.13)

A deformação plástica efetiva será:

$$\epsilon_p = \int \dot{\epsilon}_p$$

(4.14)

Pode-se, agora, definir o parâmetro de escoamento como função da deformação plástica efetiva, ou seja:

$$k = k(\epsilon_p)$$

(4.15)

pode-se escrever que:

$$dk = \frac{dk}{d\epsilon_p} \dot{\epsilon}_p$$

(4.16)

Substituindo-se o valor do acréscimo de deformação plástica, dado por (4.8), na expressão mostrada em (4.13) chega-se a:

$$\dot{\epsilon}_p = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}} d\lambda$$

(i, j=1, 2, 3) (4.17)

Substituindo-se, agora, o valor do acréscimo de deformação plástica efetiva de (4.17) na expressão da diferencial do parâmetro de escoamento dado por (4.16) tem-se:

$$dk = \frac{dk}{d\epsilon_p} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}} d\lambda$$

(i, j=1, 2, 3) (4.18)

Substituindo-se o valor do acréscimo de deformação plástica (4.8), o acréscimo de tensão dado por (4.10) e a diferencial do parâmetro de escoamento (4.18) na condição de consistência (4.12) obtém-se:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - h \cdot d\lambda$$

(i, j, k, l=1, 2, 3) (4.19)

sendo:

$$h = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} - \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}^p} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{\partial f}{\partial k} \frac{dk}{d\epsilon_p} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}}$$

(i, j, k, l=1, 2, 3) (4.20)

Logo:

$$d\lambda = \frac{1}{h} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}$$

(i, j, k, l=1, 2, 3) (4.21)

4.6-Materiais com Encruamento Misto:

Para materiais que sofrem encruamento misto, a superfície de escoamento é dada por uma função do tipo:

$$f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}, k) = 0$$

(i, j=1, 2, 3) (4.22)

sendo α_{ij} o deslocamento do centro da superfície de escoamento no espaço considerado. É comum escrever-se as coordenadas de tensão em relação ao centro deslocado da superfície de escoamento segundo:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \alpha_{ij}$$

(i, j=1, 2, 3) (4.23)

O encruamento misto é aquele no qual ocorrem, simultaneamente, um encruamento isotrópico e um cinemático. Assim, o acréscimo da deformação plástica pode ser escrito como:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\epsilon}_{ij}^{pi} + \dot{\epsilon}_{ij}^{pk}$$

(i, j=1, 2, 3) (4.24)

sendo que $\dot{\epsilon}_{ij}^{pi}$ representa a fase isotrópica, e $\dot{\epsilon}_{ij}^{pk}$, a fase cinemática do acréscimo de deformação plástica.

A expressão (4.24) pode ser usada para os casos em que o material pode ter acréscimo de tensões após o escoamento (enrijecimento) ou decréscimo (amolecimento), desde que o material continue estável [32]. Neste trabalho o amolecimento não

é estudado e os tensores $\dot{\epsilon}_{ij}^{pi}$ e $\dot{\epsilon}_{ij}^{pk}$ tem a mesma direção e sentido do acréscimo de deformação plástica total, podendo-se escrever que [31]:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{pi} = M \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad \text{e} \quad \dot{\epsilon}_{ij}^{pk} = (1 - M) \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (4.25)$$

O **parâmetro de encruamento misto** M varia entre 0 e 1, dando o grau de "mistura" dos encruamentos.

Segundo a regra de encruamento de Prager [32], o deslocamento do centro da superfície de escoamento pode ser definido como:

$$\dot{\alpha}_{ij} = c \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^{pk} = c(1 - M) \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (4.26)$$

sendo c um parâmetro de encruamento do material. Se for considerada a regra de encruamento de Ziegler [32], sabe-se que:

$$\dot{\alpha}_{ij} = a(1 - M) \dot{\epsilon}_p (\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (4.27)$$

Deve-se salientar que a regra de Prager depende unicamente do incremento de deformação plástica $\dot{\epsilon}_{ij}$, sendo a direção da translação do centro da superfície de escoamento dada por este. Já a regra de Ziegler depende do incremento efetivo $\dot{\epsilon}_p$, definido em (4.13), e a direção da translação do centro da superfície de escoamento será dada pela direção do estado de tensões do ponto em estudo.

Substituindo-se o valor do acréscimo de deformação plástica, dado por (4.8), na expressão da regra de Prager (4.26) tem-se:

$$\dot{\alpha}_{ij} = c(1-M) \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda$$

(i, j=1, 2, 3) (4.28)

Substituindo-se o valor do acréscimo de deformação (4.8) e a definição de acréscimo de deformação plástica efetiva, mostrada em (4.13), na expressão da regra de Ziegler (4.27) tem-se:

$$\dot{\alpha}_{ij} = a(1-M) (\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}} d\lambda$$

(i, j=1, 2, 3) (4.29)

Por simplicidade, pode-se escrever:

$$\dot{\alpha}_{ij} = A_{ij} d\lambda$$

(i, j=1, 2, 3) (4.30)

Define-se A_{ij} conforme a regra de encruamento adotada. Então, para as regras de Prager e Ziegler, respectivamente, tem-se:

$$A_{ij} = c(1-M) \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$$

(i, j=1, 2, 3) (4.31)

$$A_{ij} = a(1-M) (\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}}}$$

(i, j, k, l=1, 2, 3) (4.32)

Para escrever-se uma relação incremental entre as tensões e as deformação para um material com encruamento misto, analogamente ao que foi feito para materiais com encruamento

isotrópico, retoma-se a condição de consistência. Neste caso esta condição depende de $\dot{\alpha}_{ij}$, ou seja:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_{ij}} \dot{\alpha}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial k} dk = 0$$

(i, j=1, 2, 3) (4.33)

Deve-se notar que:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{kl}} \frac{\partial \bar{\sigma}_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{kl}} \delta_{ik} \delta_{jl} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{ij}}$$

(i, j, k, l=1, 2, 3) (4.34)

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{kl}} \frac{\partial \bar{\sigma}_{kl}}{\partial \alpha_{ij}} = -\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{kl}} \delta_{ik} \delta_{jl} = -\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} = -\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

(i, j, k, l=1, 2, 3) (4.35)

Logo:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_{ij}} = -\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

(i, j=1, 2, 3) (4.36)

Portanto:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} (\dot{\sigma}_{ij} - \dot{\alpha}_{ij}) + \frac{\partial f}{\partial k} dk = 0$$

(i, j=1, 2, 3) (4.37)

Deve-se notar que $\dot{\alpha}_{ij}$ é função apenas da fase cinemática da deformação e \mathbf{k} é função apenas da fase isotrópica da deformação efetiva. Define-se o incremento de deformação plástica efetiva reduzida, $\dot{\epsilon}_p$, como:

$$\dot{\bar{\epsilon}}_p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^{pi} \dot{\epsilon}_{ij}^{pi}} \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (4.38)$$

Lembrando-se de (4.25), tem-se:

$$\dot{\bar{\epsilon}}_p = M \dot{\epsilon}_p \quad (4.39)$$

Pode-se escrever:

$$dk = \frac{dk}{d\bar{\epsilon}_p} \dot{\bar{\epsilon}}_p = \frac{dk}{d\bar{\epsilon}_p} M \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}} d\lambda \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (4.40)$$

Substituindo-se na condição de consistência (4.37) o acréscimo de tensão dado por (4.10), o diferencial de translação da superfície de escoamento (4.30) e o incremento do parâmetro de escoamento (4.40), chega-se a:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \left[C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - d\lambda \left(A_{kl} + C_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \right) \right] + \frac{\partial f}{\partial k} \frac{dk}{d\bar{\epsilon}_p} M \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}}} d\lambda = 0 \quad (i, j, k, l=1, 2, 3) \quad (4.41)$$

ou:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - \bar{h} \cdot d\lambda = 0 \quad (i, j, k, l=1, 2, 3) \quad (4.42)$$

sendo:

$$\bar{h} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} + A_{kl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} - \frac{\partial f}{\partial k} \frac{dk}{d\bar{\epsilon}_p} M \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}}} \quad (i, j, k, l=1, 2, 3) \quad (4.43)$$

Resolvendo-se (4.42) para $d\lambda$ chega-se a:

$$d\lambda = \frac{1}{h} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (i, j, k, l=1, 2, 3) \quad (4.44)$$

Definindo-se:

$$H_{kl} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \quad \text{e} \quad H_{kl}^* = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \quad (i, j, k, l=1, 2, 3) \quad (4.45)$$

Pode-se escrever (4.44) como:

$$d\lambda = \frac{1}{h} H_{kl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (k, l=1, 2, 3) \quad (4.46)$$

Substituindo-se (4.46) na relação constitutiva (4.10) tem-se:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \left(\dot{\epsilon}_{kl} - \frac{1}{h} H_{st} \dot{\epsilon}_{st} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \right) = \left(C_{ijst} - \frac{1}{h} H_{st} H_{ij}^* \right) \dot{\epsilon}_{st} \quad (i, j, k, l, s, t=1, 2, 3) \quad (4.47)$$

Pode-se escrever (4.47) na mesma forma de (4.5) fazendo-se:

$$C_{ijkl}^{ep} = C_{ijkl}^e + C_{ijkl}^p \quad (i, j, k, l=1, 2, 3) \quad (4.48)$$

Sendo:

$$C_{ijkl}^p = -\frac{1}{h} H_{ij}^* H_{kl} \quad (i, j, k, l=1, 2, 3) \quad (4.49)$$

Um outro parâmetro importante nesta análise é o da tensão efetiva. Se a função (4.22) for tomada segundo o critério de Von Mises, tem-se:

$$f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}, k) = \bar{J}_2 - k^2(\epsilon_p) = 0 \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (4.50)$$

sendo \bar{J}_2 o segundo invariante do tensor reduzido \bar{s}_{ij} . Pode-se escrever a função de escoamento (4.22) na forma:

$$f(\bar{\sigma}_{ij}, k) = F(\bar{\sigma}_{ij}) - k(\epsilon_p) \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (4.51)$$

Define-se **tensão efetiva**, σ_e , como

$$F(\bar{\sigma}_{ij}) = C\sigma_e^n \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (4.52)$$

Sendo **C** e **n** constantes a serem determinadas segundo o critério de escoamento escolhido. Para o caso particular do critério de Von Mises tem-se:

$$F(\bar{\sigma}_{ij}) = J_2 \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (4.53)$$

Logo:

$$C = \frac{1}{3} \quad n=2 \quad \sigma_e = \sqrt{3J_2} \quad (4.54)$$

A expressão (4.50) pode ser escrita, com (4.2), (4.52) e (4.54), como:

$$f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}, k) = \frac{2}{3} \bar{s}_{ij} \bar{s}_{ij} - \bar{\sigma}_e^2 (\bar{\epsilon}_p) = 0 \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (4.55)$$

Assumindo-se uma regra de escoamento associada, segundo (4.9), tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = 3\bar{s}_{ij} \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (4.56)$$

O tensor elástico C_{ijkl} pode ser escrito na forma:

$$C_{ijkl} = 2\mu \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \quad (i, j, k, l=1, 2, 3) \quad (4.57)$$

Os tensores definidos em (4.45) assumem a forma:

$$H_{kl} = H_{kl}^* = C_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} = 6\mu \bar{s}_{kl} \quad (i, j, k, l=1, 2, 3) \quad (4.58)$$

Logo, o tensor plástico, definido por (4.49), terá a forma:

$$C_{ijkl}^p = -\frac{36\mu^2}{\bar{h}} \bar{s}_{ij} \bar{s}_{kl} \quad (i, j, k, l=1, 2, 3) \quad (4.59)$$

Resta apenas estabelecer a função \bar{h} , que assume a forma:

$$\bar{h} = 18\mu \bar{s}_{kl} \bar{s}_{kl} + 3A_{kl} \bar{s}_{kl} - 2\bar{\sigma}_e \frac{d\bar{\sigma}_e}{d\bar{\epsilon}_p} M \sqrt{6\bar{s}_{kl} \bar{s}_{kl}} \quad (k, l=1, 2, 3) \quad (4.60)$$

O tensor A_{kl} é o mesmo definido em (4.31) e (4.32), sendo tomado segundo a regra de encruamento estabelecida. Cabe notar que a derivada $\frac{d\bar{\sigma}_e}{d\bar{\epsilon}_p}$ também depende da regra de encruamento adotada, devendo ser avaliada para cada caso. Se for assumido o material elasto-plástico perfeito, não há qualquer encruamento. Logo:

$$M = 1 \quad \text{e} \quad \frac{dk}{d\bar{\epsilon}_p} = 0 \quad (4.61)$$

Portanto, (4.43) fica resumida a:

$$\bar{h} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \quad (i, j, k, l=1, 2, 3) \quad (4.62)$$

Para o caso da regra de encruamento associada ao critério de Von Mises, substitui-se (4.56) em (4.62):

$$\bar{h} = 9C_{ijkl} s_{ij} s_{kl} \quad (i, j, k, l=1, 2, 3) \quad (4.63)$$

Ou, com uso da expressão (4.57):

$$\bar{h} = 36\mu J_2 \quad (4.64)$$

Chega-se que o tensor plástico para a regra de escoamento associada ao critério de Von Mises assume a forma:

$$C_{ijkl}^p = -\frac{\mu}{J_2} s_{ij} s_{kl} \quad (i, j, k, l=1, 2, 3) \quad (4.65)$$

Para o caso de estado plano de deformação, o tensor elasto-plástico assume seguinte a forma:

$$[C^{ep}] = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda - \frac{\mu}{J_2} s_{11}^2 & \lambda - \frac{\mu}{J_2} s_{11} s_{22} & -\frac{\mu}{J_2} s_{11} s_{12} \\ \lambda - \frac{\mu}{J_2} s_{11} s_{22} & 2\mu + \lambda - \frac{\mu}{J_2} s_{22}^2 & -\frac{\mu}{J_2} s_{22} s_{12} \\ -\frac{\mu}{J_2} s_{11} s_{12} & -\frac{\mu}{J_2} s_{22} s_{12} & 2\mu - \frac{\mu}{J_2} s_{12}^2 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

com:

$$\dot{\sigma}_{33} = \lambda(\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22}) - \frac{\mu}{J_2} s_{33} s_{kl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (k, l=1, 2, 3) \quad (4.67)$$

No estado plano de tensões tem-se:

$$s_{13} = s_{23} = s_{32} = s_{12} = 0$$

Como $s_{33} \neq 0$, deve-se considerar uma linha a mais do tensor C^{ep} para se levar em conta a influência desta tensão. O tensor assume a seguinte forma:

$$[C^{ep}] = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda - \frac{\mu}{J_2} s_{11}^2 & \lambda - \frac{\mu}{J_2} s_{11}s_{22} & \lambda - \frac{\mu}{J_2} s_{11}s_{33} & -\frac{\mu}{J_2} s_{11}s_{12} \\ \lambda - \frac{\mu}{J_2} s_{11}s_{22} & 2\mu + \lambda - \frac{\mu}{J_2} s_{22}^2 & \lambda - \frac{\mu}{J_2} s_{22}s_{33} & -\frac{\mu}{J_2} s_{22}s_{12} \\ \lambda - \frac{\mu}{J_2} s_{11}s_{33} & \lambda - \frac{\mu}{J_2} s_{22}s_{33} & 2\mu + \lambda - \frac{\mu}{J_2} s_{33}^2 & -\frac{\mu}{J_2} s_{33}s_{12} \\ -\frac{\mu}{J_2} s_{11}s_{12} & -\frac{\mu}{J_2} s_{22}s_{12} & -\frac{\mu}{J_2} s_{33}s_{12} & -\frac{\mu}{J_2} s_{12}^2 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

4.7-Equações de Navier para o Caso Elasto-plástico:

A equação de equilíbrio (3.1) pode ser escrita de modo incremental como:

$$\dot{\sigma}_{ij,j} + \dot{b}_i = 0 \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (4.69)$$

As relações constitutivas (3.8), escritas de forma incremental ficam:

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2\mu \dot{\epsilon}_{ij}^e + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \dot{\epsilon}_{kk}^e \delta_{ij} \quad (i, j, k=1, 2, 3) \quad (4.70)$$

Usando-se (4.6), escreve-se a parte elástica do incremento de deformação como sendo

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = \dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (i, j, k=1, 2, 3) \quad (4.71)$$

Substituindo-se o valor do incremento de deformação elástica (4.71) na relação constitutiva (4.70) chega-se a:

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2\mu\dot{\epsilon}_{ij} - 2\mu\dot{\epsilon}_{ij}^p + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}(\dot{\epsilon}_{kk} - \dot{\epsilon}_{kk}^p)\delta_{ij}$$

(i, j, k=1, 2, 3) (4.72)

Escrevendo-se a expressão das deformações linearizadas (3.6) de modo incremental, tem-se:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})$$

(i, j=1, 2, 3) (4.73)

Diferenciando-se (4.73) tem-se

$$\dot{\epsilon}_{ij,k} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,jk} + \dot{u}_{j,ik})$$

(i, j, k=1, 2, 3) (4.74)

Tomando-se a derivada de (4.70) na direção j tem-se:

$$\dot{\sigma}_{ij,j} = 2\mu\dot{\epsilon}_{ij,j} - 2\mu\dot{\epsilon}_{ij,j}^p + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}(\dot{\epsilon}_{kk,j} - \dot{\epsilon}_{kk,j}^p)\delta_{ij}$$

(i, j, k=1, 2, 3) (4.75)

Substituindo-se o valor de (4.74) na expressão (4.75) e (4.75) na equação de equilíbrio (4.69) chega-se a:

$$\dot{u}_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu}\dot{u}_{j,ji} + \frac{\dot{b}_i}{\mu} = 2\dot{\epsilon}_{ij,j}^p + \frac{2\nu}{1-2\nu}\dot{\epsilon}_{jj,i}^p$$

(i, j=1, 2, 3) (4.76)

Se for adotado o critério de Von Mises, é possível mostrar que:

$$\epsilon_{kk}^p = 0$$

(k=1, 2, 3) (4.77)

Logo, a expressão (4.76) resume-se a:

$$\dot{u}_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu} \dot{u}_{j,ji} + \frac{\dot{b}_i}{\mu} = 2\dot{\epsilon}_{ij,j}^p \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (4.78)$$

A expressão (4.78) é válida tanto para o caso tridimensional quanto para o estado plano de deformação, sendo que para isto deve-se limitar os índices a 2.

Para o estado plano de tensão, retoma-se a expressão (4.76), limitando-se os índices a 2 e empregando-se o valor efetivo do coeficiente de Poisson, dado pela expressão (3.19).

4.8—Acréscimo de Deformação Plástica:

Na equação (4.6) o acréscimo de deformação total foi definido como a soma de uma parcela elástica a uma parcela plástica. Por isso torna-se necessário definir uma destas fases para que a outra possa ser determinada inequivocamente a partir da deformação total. Assumindo-se o critério de escoamento de Von Mises, definida em (4.55), e a regra de encruamento de Prager, definida em (4.31), a condição de consistência (4.33) pode ser escrita como:

$$df = 3\bar{s}_{ij}\dot{\sigma}_{ij} - 9\bar{s}_{ij}\bar{s}_{ij}c(1-M)d\lambda - 4\bar{\sigma}_e^{-2}\bar{H}M d\lambda \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (4.79)$$

sendo:

$$\bar{H} = \frac{d\bar{\sigma}_e}{d\bar{\epsilon}_p} \quad (4.80)$$

Para determinar-se o valor da constante c supõem-se um ensaio uniaxial, sendo satisfeitas as seguintes condições [32]:

$$\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0 \quad (4.81)$$

$$\bar{\sigma}_{11} = \sigma_{11} - \alpha_{11} \quad \bar{\sigma}_{22} = -\alpha_{22} \quad \bar{\sigma}_{33} = -\alpha_{33} \quad (4.82)$$

A partir de (4.30) e (4.31), lembrando-se que a deformação plástica volumétrica, para o critério de Von Mises, é nula, (4.77), chega-se a:

$$\dot{\alpha}_{kk} = 0 \quad (k=1, 2, 3) \quad (4.83)$$

Por se tratar de um ensaio uniaxial, com (4.83), tem-se:

$$\alpha_{22} = \alpha_{33} = -\frac{1}{2}\alpha_{11} \quad (4.84)$$

Substituindo-se os valores obtidos das expressões (4.82) e (4.84) na expressão da tensão efetiva (4.54), obtém-se o valor da tensão efetiva reduzida:

$$\bar{\sigma}_e = \sigma_{11} - \frac{3}{2}\alpha_{11} \quad (4.85)$$

Escrevendo-se (4.85) para os incrementos de tensões tem-se:

$$d\bar{\sigma}_e = \dot{\sigma}_{11} - \frac{3}{2}\dot{\alpha}_{11} \quad (4.86)$$

Substituindo-se o valor de $\dot{\alpha}_{11}$ da expressão (4.31) e lembrando-se que, para um ensaio uniaxial, a tensão aplicada é igual a tensão efetiva e a deformação plástica obtida, igual a deformação efetiva, chega-se a:

$$d\bar{\sigma}_e = d\sigma_e - \frac{3}{2}c(1-M)\dot{\epsilon}_p \quad (4.87)$$

Isolando-se o acréscimo de tensão efetiva reduzida de (4.80), substituindo-se em (4.87) e arranjando-se os termos de maneira adequada, chega-se a:

$$\frac{d\sigma_e}{d\epsilon_p} = M\left(\bar{H} - \frac{3}{2}c\right) + \frac{3}{2}c \quad (4.88)$$

Como (4.88) deve valer para qualquer valor de M dentro dos limites já comentados, os valores de c e \bar{H} devem ser:

$$c = \frac{2}{3}H \quad \text{e} \quad \bar{H} = \frac{d\sigma_e}{d\epsilon_p} = H \quad (4.89)$$

Substituindo-se os valores das expressões (4.89) em (4.79) e lembrando-se que a condição de consistência deve ser nula, chega-se a:

$$3\bar{s}_{ij}\dot{\sigma}_{ij} - 6\bar{s}_{ij}\bar{s}_{ij}\bar{H}(1-M)d\lambda - 4\bar{\sigma}_e^2\bar{H}Md\lambda = 0 \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (4.90)$$

Substituindo-se em (4.90) o valor de $\bar{s}_{ij}\dot{\bar{s}}_{ij}$ em termos de $\bar{\sigma}_e^2$, isolado de (4.55), obtém-se:

$$3\bar{s}_{ij}\dot{\bar{\sigma}}_{ij} - 4\bar{\sigma}_e^2\bar{H}(1-M)d\lambda - 4\bar{\sigma}_e^2\bar{H}Md\lambda = 0 \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (4.91)$$

Com isso chega-se a:

$$3\bar{s}_{ij}\dot{\bar{\sigma}}_{ij} = 4\bar{\sigma}_e^2 d\lambda\bar{H} \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (4.92)$$

Logo:

$$d\lambda = \frac{3\bar{s}_{ij}\dot{\bar{\sigma}}_{ij}}{4\bar{\sigma}_e^2\bar{H}} \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (4.93)$$

Substituindo-se o valor de $d\lambda$ (4.93) e o valor da derivada do potencial plástico, dado por (4.56), na expressão (4.8) tem-se:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{9}{4} \frac{\bar{s}_{kl}\dot{\bar{\sigma}}_{kl}}{\bar{\sigma}_e^2\bar{H}} \bar{s}_{ij} \quad (i, j, k, l=1, 2, 3) \quad (4.94a)$$

Pode-se relacionar o tensor das deformações plásticas com o tensor das deformações totais, substituindo-se em (4.94a) a relação constitutiva (3.9). Assim chega-se a:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{\bar{s}_{kl}\dot{\epsilon}_{kl}}{\left(1 + \frac{\bar{H}}{3\mu}\right)\bar{\sigma}_e^2} \bar{s}_{ij} \quad (i, j, k, l=1, 2, 3) \quad (4.94b)$$

Para o estado plano de deformação, a expressão (4.94a) pode ser escrita como:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{9}{4} \frac{\bar{s}_{kl} \dot{\sigma}_{kl} + \bar{s}_{33} \dot{\sigma}_{33}}{\bar{\sigma}_e^2 \bar{H}} \bar{s}_{ij} \quad (i, j=1, 2, 3 \quad k, l=1, 2) \quad (4.95)$$

Cabe notar que as componentes das deformações plásticas na direção 3 são compensadas por deformações elásticas contrárias, mantendo-se nula a deformação total, que é a condição para que se tenha o estado plano de deformação. Este fato gera tensões residuais naquela direção.

Tomando-se a expressão (4.10), substituindo-se C_{ijkl} , dado por (4.57), e o valor de $\dot{\epsilon}_{ij}^p$, dado por (4.8), chega-se a:

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2\mu \left(\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^p + \frac{\nu}{1-2\nu} (\dot{\epsilon}_{kk} - \dot{\epsilon}_{kk}^p) \delta_{ij} \right) \quad (i, j, k=1, 2, 3) \quad (4.96)$$

Multiplicando-se ambos os membros por \bar{s}_{ij} , e lembrando-se de (4.77), a expressão (4.96) fica:

$$\bar{s}_{ij} \dot{\sigma}_{ij} = 2\mu \left(\dot{\epsilon}_{ij} \bar{s}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^p \bar{s}_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \dot{\epsilon}_{kk} \bar{s}_{ij} \delta_{ij} \right) \quad (i, j, k=1, 2, 3) \quad (4.97)$$

Limitando-se os índices i e j de (4.97) a 2 tem-se:

$$\bar{s}_{ij} \dot{\sigma}_{ij} = 2\mu \left(\dot{\epsilon}_{ij} \bar{s}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^p \bar{s}_{ij} - \frac{\nu}{1-2\nu} \dot{\epsilon}_{kk} \bar{s}_{33} \right) \quad (i, j=1, 2 \quad k=1, 2, 3) \quad (4.98)$$

Se for considerado o estado plano de tensões tem-se:

$$\dot{\sigma}_{33} = 0 = \dot{\epsilon}_{33} - \dot{\epsilon}_{33}^p + \frac{\nu}{1-2\nu} \dot{\epsilon}_{kk} \quad (k=1, 2, 3) \quad (4.99)$$

Logo:

$$\frac{\nu}{1-2\nu} \dot{\epsilon}_{kk} = \dot{\epsilon}_{33}^p - \dot{\epsilon}_{33} \quad (k=1, 2, 3) \quad (4.100)$$

Substituindo-se o valor de $\dot{\epsilon}_{kk}$, dado por (4.100), em (4.98) chega-se a:

$$\bar{s}_{kl} \dot{\sigma}_{kl} = 2\mu (\bar{s}_{kl} \dot{\epsilon}_{kl} + \bar{s}_{33} \dot{\epsilon}_{33} - \bar{s}_{kl} \dot{\epsilon}_{kl}^p - \bar{s}_{33} \dot{\epsilon}_{33}^p) \quad (k, l=1, 2) \quad (4.101)$$

Ou, escrevendo-se os termos negativos de (4.101) com índices variando até 3, obtém-se:

$$\bar{s}_{kl} \dot{\sigma}_{kl} = 2\mu (\bar{s}_{kl} \dot{\epsilon}_{kl} + \bar{s}_{33} \dot{\epsilon}_{33} - \bar{s}_{mn} \dot{\epsilon}_{mn}^p) \quad (k, l=1, 2 \quad m, n=1, 2, 3) \quad (4.102)$$

Substituindo-se o valor obtido de (4.102) em (4.94a) chega-se a:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{18\mu}{4} \frac{\bar{s}_{kl} \dot{\epsilon}_{kl} + \bar{s}_{33} \dot{\epsilon}_{33}}{\bar{H} \bar{\sigma}_e^2} \bar{s}_{ij} - \frac{18\mu}{4} \frac{\bar{s}_{mn} \dot{\epsilon}_{mn}^p}{\bar{H} \bar{\sigma}_e^2} \bar{s}_{ij} \quad (k, l=1, 2 \quad i, j, m, n=1, 2, 3) \quad (4.103)$$

A expressão (4.103) pode ser escrita como:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{18\mu}{4} \frac{\bar{s}_{kl} \dot{\epsilon}_{kl} + \bar{s}_{33} \dot{\epsilon}_{33}}{\bar{H} \bar{\sigma}_e^2} \bar{s}_{ij} - \frac{18\mu}{4} \frac{\bar{s}_{mn} \bar{s}_{mn} \dot{\epsilon}_{ij}^p}{\bar{H} \bar{\sigma}_e^2} \quad (k, l=1, 2 \quad i, j, m, n=1, 2, 3) \quad (4.104)$$

Substituindo-se o valor de $\bar{s}_{mn}\bar{s}_{mn}$ pelo obtido de (4.55) e agrupando-se os termos em função de $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ chega-se facilmente a:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{3\bar{s}_{kl}\dot{\epsilon}_{kl} + \bar{s}_{33}\dot{\epsilon}_{33}}{2\left(1 + \frac{H}{3\mu}\right)\bar{\sigma}_e^2}\bar{s}_{ij}$$

(i, j=1, 2, 3 k, l=1, 2) (4.105)

Capítulo 5

Método dos Elementos de Contorno

5.1-Introdução:

Soluções analíticas para as equações de Navier de um problema genérico são, normalmente, muito difíceis de serem encontradas, quando não impossíveis. Assim, para superar este problema, faz-se uso de métodos numéricos.

Será apresentada, no decorrer deste capítulo, a formulação do método dos elementos de contorno (MEC) para solução de problemas elastostáticos. Esta formulação pode ser deduzida a partir de técnicas, como a dos resíduos ponderados [4], ou a partir do teorema de Betti [3].

Usando-se a primeira técnica, tem-se uma formulação que pode ser facilmente relacionada a outros métodos numéricos, permitindo o acoplamento do MEC a estes outros métodos [4]. No entanto, acredita-se que a formulação obtida do teorema de Betti é mais facilmente compreendida, por envolver conceitos mais comuns em problemas de engenharia. Por isso, a dedução da formulação elástica será feita segundo o teorema de Betti, sendo apenas a formulação elasto-plástica deduzida pela a técnica dos resíduos ponderados.

Todos os índices neste capítulo variam de 1 até 2, a menos que se informe o contrário.

5.2-Equação Integral de Chapas:

Considere-se um corpo em equilíbrio sujeito a dois estados diferentes de tensão e deformação:

- a) Um estado **a** de tensões σ_{ij}^* e deformações ε_{ij}^* .
- b) Um estado **b** de tensões σ_{ij} e deformações ε_{ij} .

O teorema de Betti estabelece que o trabalho realizado pelas tensões do estado **a** nos deslocamentos do estado **b** é igual ao trabalho realizado pelas tensões do estado **b** nos deslocamentos do estado **a** [3], ou matematicamente:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega \quad (5.1)$$

Substituindo-se a expressão (3.6) em 5.1 tem-se uma expressão equivalente, mas em termos dos deslocamentos[3]:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} d\Omega \quad (5.2)$$

O segundo membro da equação (5.2) pode ser expandido em:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} u_i^*) - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} u_i^* d\Omega \quad (5.3)$$

A equação de equilíbrio (3.1) pode ser usada para introduzir as forças de domínio no último termo do segundo membro da equação (5.3):

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} u_i^*) d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega \quad (5.4)$$

Aplicando-se o teorema da divergência plano no primeiro termo do segundo membro de (5.4) chega-se a:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Gamma} (\sigma_{ij} u_i^*) n_j d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega \quad (5.5)$$

Lembrando-se da relação (3.2), a equação (5.5) pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Gamma} p_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega \quad (5.6)$$

Retornando-se a (5.2) e adotando-se um procedimento semelhante para o primeiro membro da equação, chega-se a:

$$\int_{\Gamma} p_i^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega = \int_{\Gamma} p_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega \quad (5.7)$$

Pode-se impor quaisquer dois estados, compatíveis, de tensão e deformação à equação (5.7). Se for adotado que o estado **a**, de σ_{ij}^* e ε_{ij}^* , seja a analogia do problema de Kelvin em um domínio bidimensional, tem-se:

$$u_i^* = u_{ik}^*(X, P) \quad p_i^* = p_{ik}^*(X, P) \quad b_i^* = \Delta(X, P) \delta_{ik} \quad (5.8)$$

Substituindo-se as expressões (5.8) em (5.7) e fazendo uso das propriedades do delta de Dirac, chega-se a:

$$u_i(P) = - \int_{\Gamma} p_{ik}^*(X, P) u_k(X) d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ik}^*(X, P) p_k(X) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ik}^*(X, P) b_k(X) d\Omega \quad (5.9)$$

A equação (5.9) é conhecida como identidade Somigliana para os deslocamentos. Com esta relação torna-se possível

escrever os deslocamentos de qualquer ponto interno ao contorno Γ em função dos deslocamentos e forças do contorno e das forças do domínio. O ponto \mathbf{P} , onde se está calculando o deslocamento, recebe o nome de **ponto de colocação**.

Para se determinar os deslocamentos dos pontos do contorno, é necessário um artifício. Acrescenta-se ao domínio uma pequena região, de raio ε , com seu centro sobre o ponto \mathbf{P} , cujos deslocamentos se deseja conhecer, e faz-se o limite de $\varepsilon \rightarrow 0$. Ver Figura (5.1).

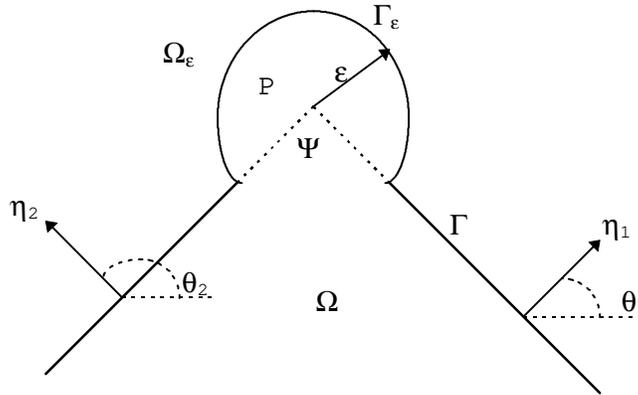


Figura 5.1 - Acréscimo de um domínio infinitesimal

Para isso, subtrai-se do contorno original uma pequena porção Ψ e adiciona-se, em seu lugar, um contorno Γ_ε . A equação (5.9) passa a ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 u_i(P) = & - \int_{\Gamma-\Psi} p_{ik}^*(X, P) u_k(X) d\Gamma - \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ik}^*(X, P) u_k(X) d\Gamma + \int_{\Gamma-\Psi} u_{ik}^*(X, P) p_k(X) d\Gamma + \\
 & + \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{ik}^*(X, P) p_k(X) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ik}^*(X, P) b_k(X) d\Omega + \int_{\Omega_\varepsilon} u_{ik}^*(X, P) b_k(X) d\Omega
 \end{aligned}
 \tag{5.10}$$

Fazendo-se $\varepsilon \rightarrow 0$, as integrais sobre $\Gamma-\Psi$ devem ser entendidas como um valor principal de Cauchy [2]. As integrais sobre Γ_ε e Ω_ε são nulas, com exceção de:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ik}^*(X, P) u_k(X) d\Gamma = \bar{c}_{ik} u_k(P) \quad (5.11)$$

com \bar{c}_{ik} dependente da geometria do contorno.

Substituindo-se (5.11) em (5.9) chega-se a:

$$c_{ik} u_k(P) = - \int_{\Gamma} p_{ik}^*(X, P) u_k(X) d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ik}^*(X, P) p_k(X) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ik}^*(X, P) b_k(X) d\Omega \quad (5.12)$$

A matriz \mathbf{c}_{ik} tem seus valores tomados da expressão a seguir [2]:

$$[c] = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} \begin{bmatrix} 4(1-\nu)\gamma + \sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2 - 1 & \cos 2\theta_2 - \cos 2\theta_1 \\ \cos 2\theta_2 - \cos 2\theta_1 & 4(1-\nu)\gamma - \sin 2\theta_1 + \sin 2\theta_2 - 1 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Os arcos θ_1 e θ_2 são os mesmos da Figura 5.1. O valor γ corresponde ao comprimento em radianos do arco descrito por Γ_ε . Note que $0 \leq \gamma \leq 2\pi$.

Imaginando-se uma situação limite, onde o arco γ tende a 2π , o contorno irá se degenerar em uma linha, conforme a Figura 5.2. Nesta situação não há nenhuma região de domínio unindo o ponto de colocação \mathbf{P} ao restante do contorno. Por conseguinte o ponto \mathbf{P} é externo ao domínio e a matriz \mathbf{c} torna-se uma matriz nula.

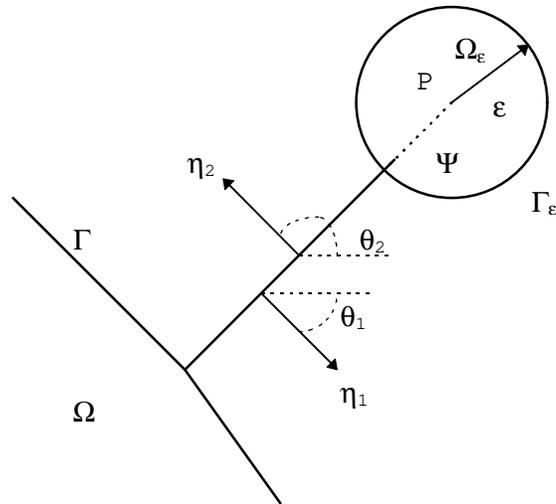


Figura 5.2 - Ponto externo ao domínio

Tomando-se uma situação contrária, ou seja, de um ponto interno, a matriz \mathbf{c} torna-se uma matriz identidade, confirmando (5.9). Logo a equação (5.12) pode ser usada para pontos em qualquer posição do espaço bidimensional.

5.3-Discretização do Contorno:

Para aplicar as equações integrais (5.9) ou (5.12) a problemas físicos, é preciso que estas possam ser facilmente explicitadas para um contorno em particular. Na Figura 5.3a é mostrado um domínio Ω , com um contorno Γ , de formato arbitrário.

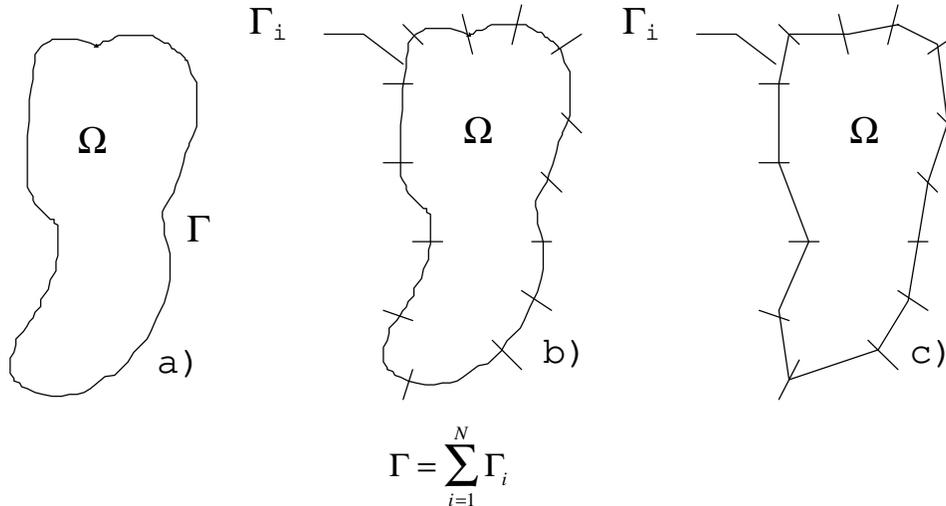


Figura 5.3 - Discretização do Contorno.

Este contorno Γ é dividido em N trechos menores Γ_i , tal que a soma destes recompõem o contorno original, conforme está ilustrado na Figura 5.3b. Aos pontos extremos de cada um dos trechos dá-se o nome de **nós**. Quando os trechos são lineares, ou possam ser aproximados por trechos lineares, cada um destes pode ter sua geometria descrita por uma função de interpolação das coordenadas dos nós, como no exemplo da Figura 5.3c.

Caso os trechos do contorno não possam ser aproximados adequadamente por funções lineares, torna-se necessário o uso de funções de grau mais alto. Para este fim, neste trabalho foram usadas funções quadráticas. Estas funções demandam um ponto interno, além daqueles pontos extremos, para a descrição da geometria do contorno. A este ponto interno é estendido o conceito de nó,

Estes trechos do contorno, aproximados por funções de interpolação, são aqui chamados de **elementos de contorno**. A equação (5.12) pode agora ser escrita como:

$$c_{ik}u_k(P) = -\sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} p_{ik}^*(X, P)u_k(X)d\Gamma_j + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma} u_{ik}^*(X, P)p_k(X)d\Gamma_j + \int_{\Omega} u_{ik}^*(X, P)b_k(X)d\Omega$$

(5.14)

A integral de domínio será discutida mais adiante, quando for tratada a discretização do domínio.

5.4-Elementos de Contorno:

No item anterior, procurou-se apresentar os elementos de contorno buscando-se uma justificativa na geometria do corpo em estudo. No entanto, os elementos de contorno derivam de trabalhos feitos sobre o método dos elementos finitos [2]. Assim, forças e deslocamentos no contorno são aproximados a partir dos valores nodais da mesma forma que a geometria, analogamente ao que se faz no método dos elementos finitos.

Quando, tanto a geometria do elemento quanto suas variáveis de deslocamento e força são descritas pela mesma função de interpolação, o elemento é chamado **isoparamétrico**. Assim pode-se escrever:

$$X_s = \phi_i(\xi)X_i$$

(5.15)

Na equação (5.15), o índice **i** varia de 1 até 2 para elementos isoparamétricos lineares, e de 1 até 3 para elementos isoparamétricos quadráticos. O valor X_s representa qualquer uma das variáveis do elemento, sejam as coordenadas de um ponto interno ou o valor do deslocamento ou força neste mesmo ponto.

A variável homogênea ξ é um parâmetro independente e assume, ao longo dos elementos, os valores ilustrados na Figura 5.4.

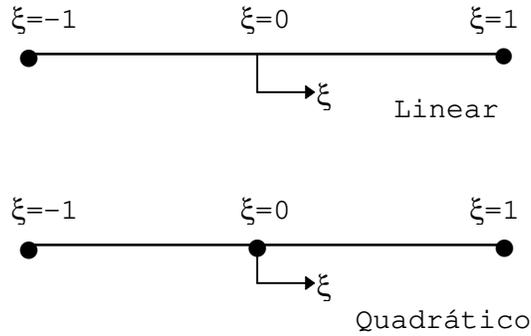


Figura 5.4 - Tipos básicos de elementos.

As funções de interpolação usadas são polinômios de Lagrange que, para o caso linear têm a forma:

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1-\xi) \quad \phi_2 = \frac{1}{2}(1+\xi) \tag{5.16}$$

e para o caso quadrático:

$$\phi_1 = \frac{1}{2}\xi(\xi-1) \quad \phi_2 = (1-\xi)(1+\xi) \quad \phi_3 = \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \tag{5.17}$$

Estas funções de interpolação podem ser representadas graficamente como ilustrado na Figura 5.5.

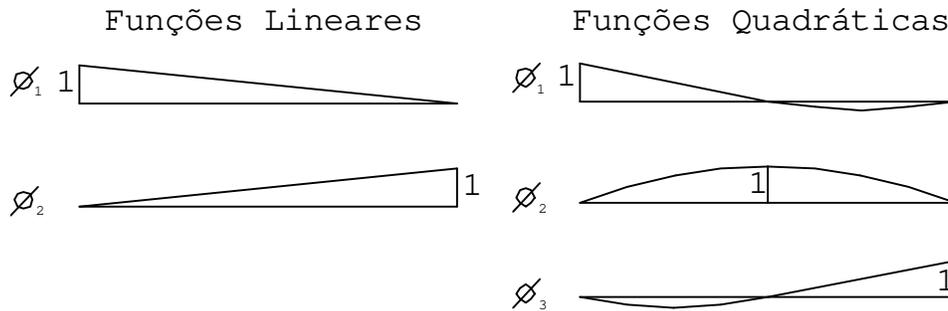


Figura 5.5 - Representação gráfica das funções de interpolação

Até aqui foram tratados apenas os elementos ditos contínuos. Existe ainda uma categoria de elementos de contorno chamados descontínuos. Estes elementos têm a finalidade de permitir que em um mesmo lugar geométrico existam dois valores de forças e deslocamentos associados, ou seja, permitir um salto nas variáveis de contorno. Uma maneira de se fazer isso é alterar as funções de interpolação de modo a descrever as variáveis de contorno em termos de pontos internos ao elemento, conforme a ilustração na Figura 5.6.

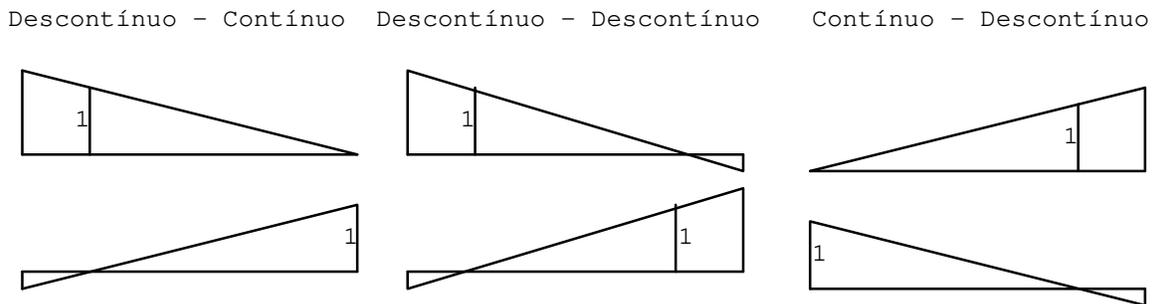


Figura 5.6 - Elementos Descontínuos Lineares.

Neste trabalho, as funções de interpolação não são alteradas para descrever as discontinuidades. Em lugar disso, associaram-se dois conjuntos de variáveis a um mesmo lugar geométrico, criando-se dois nós em um mesmo ponto do espaço, cada qual relacionado a um dos elementos adjacentes. Este ponto particular com duas variáveis é chamado **nó duplo** e será tratado em detalhes mais adiante.

Usando-se a equação (5.15) para descrever as forças e deslocamentos de pontos internos aos elementos de contorno chega-se a:

$$u_k = \phi_l u_k^l \quad p_k = \phi_l p_k^l \quad (5.18)$$

sendo **k** o índice do nó no elemento de contorno.

Substituindo-se as relações (5.18) na equação (5.14) e lembrando-se que os valores nodais são constantes, chega-se a:

$$c_{ik}u_k(P) = -\sum_{j=1}^N u_k^l \int_{\Gamma_j} p_{ik}^*(X, P) \phi_l d\Gamma_j + \sum_{j=1}^N p_k^l \int_{\Gamma} u_{ik}^*(X, P) \phi_l d\Gamma_j + \int_{\Omega} u_{ik}^*(X, P) b_k(X) d\Omega \quad (5.19)$$

Pode-se simplificar a forma de se escrever a equação (5.19) introduzindo-se os seguintes termos:

$$h_{ik}^l = \int_{\Gamma} p_{ik}^*(X, P) \phi_l d\Gamma \quad g_{ik}^l = \int_{\Gamma} u_{ik}^*(X, P) \phi_l d\Gamma \quad (5.20)$$

Logo (5.19) passa a ser escrita como:

$$c_{ik}u_k(P) = -\sum_1^N u_k^l h_{ik}^l + \sum_1^N p_k^l g_{ik}^l + \int_{\Omega} u_{ik}^*(X, P) b_k(X) d\Omega \quad (5.21)$$

5.5-Discretização do Domínio:

Se não houver carregamentos aplicados no domínio, a última integral da expressão (5.21) se anula, simplificando o cálculo dos deslocamentos dos pontos de colocação. Mas caso haja, por exemplo, forças de massa agindo, será necessário o cálculo desta última integral. Em alguns casos, quando a expressão das forças de massa é conhecida, pode-se transformar esta integral de domínio em integral de contorno. Quando isso não é possível, recorre-se à discretização do contorno.

Analogamente ao que se fez no contorno, o domínio será dividido em pequenas regiões, onde a variação do carregamento é aproximada por funções de interpolação. Usualmente o domínio é dividido em células triangulares e as funções de interpolação são

lineares ou quadráticas. Na Figura 5.7 é mostrado um domínio dividido em M células.

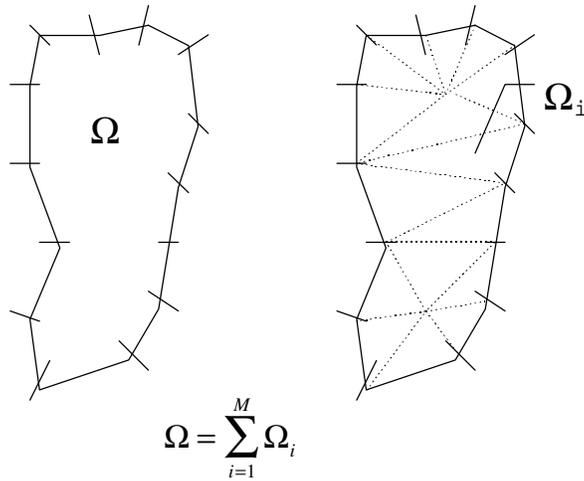


Figura 5.7 - Discretização do domínio.

Para descrever as células, muitas vezes é necessário lançar mão de **pontos internos**. Estes pontos não são nós, uma vez que não há variáveis associadas a eles.

A equação (5.21) pode ser escrita como:

$$c_{ik} u_k(P) = - \sum_1^N u_k^l h_{ik}^l + \sum_1^N p_k^l g_{ik}^l + \sum_1^M B_i \quad (5.22)$$

sendo:

$$B_i = \int_{\Omega} u_{ik}^*(X, P) b_k(X) d\Omega \quad (5.23)$$

5.6-Equações Algébricas:

Conforme mostrou-se, a equação (5.22) relaciona os deslocamentos de qualquer ponto, no espaço bidimensional, com os

valores de força e deslocamento dos pontos nodais. No entanto, nos problemas de valor de contorno da teoria da elasticidade, para cada valor de deslocamento \mathbf{u} conhecido, corresponde um valor de força \mathbf{p} incógnita, e vice-versa. Assim, deve-se antes proceder a determinação destas incógnitas.

Quando é tomado um ponto de colocação externo ao domínio, a equação (5.22) retorna um valor nulo. Assim, tomando-se o ponto de colocação \mathbf{P} , externo ao domínio, pode-se escrever que:

$$\sum_1^N u_k^l h_{ik}^l = \sum_1^N p_k^l g_{ik}^l + \sum_1^M B_i \quad (5.24)$$

Expandindo-se a equação (5.24) e arranjando-se os termos semelhantes tem-se:

$$H_{i1}u_1 + H_{i2}u_2 + \dots + H_{iN}u_N = G_{i1}p_1 + G_{i2}p_2 + \dots + G_{iN}p_N + \sum B_i \quad (5.25)$$

A equação (5.25) representa as duas equações que podem ser obtidas, uma para cada direção \mathbf{i} . Portanto com \mathbf{N} pontos de colocação gera-se $2\mathbf{N}$ equações.

Tomando-se um número de pontos \mathbf{P} conforme o número de incógnitas do contorno, pode-se escrever um sistema de equações relacionando os efeitos de domínio, as forças e os deslocamentos no contorno. Este sistema tem a forma:

$$[H]\{U\} = [G]\{P\} + \{B\} \quad (5.26)$$

Mas uma parte dos deslocamentos \mathbf{u} são conhecidos, assim, como parte das forças \mathbf{p} . Passando-se todas as incógnitas para o primeiro membro da equação (5.25) chega-se a:

$$H_{i1}u_1 + \dots - G_{ik}p_k - G_{ik+1}p_{k+1} + \dots + H_{iN}u_N = G_{i1}p_1 + \dots - H_{ik}u_k - H_{ik}u_{k+1} + \dots + G_{iN}p_N + \sum B_i \quad (5.27)$$

Durante o cálculo automático, esta mudança é feita trocando-se as colunas correspondentes das matrizes [H] e [G] e as linhas dos vetores {U} e {P}. Efetuando-se as operações indicadas no segundo membro de (5.26), tem-se um sistema de **N** equações a **N** incógnitas da forma:

$$[A]\{X\} = \{F\} \quad (5.28)$$

O sistema (5.28) pode ser resolvido por qualquer processo de resolução de sistemas genéricos, tais como eliminação de Gauss ou decomposição LU, encontrando-se, assim, os valores incógnitos no contorno.

Pode-se, também, posicionar os pontos de colocação sobre o contorno. Neste caso a equação (5.22) não se anulará e a montagem da matriz **H** será um pouco diferente. A equação (5.25) assumirá a forma:

$$H_{i1}u_1 + \dots + \{H_{ik} + c_{i1}\}u_k + \{H_{ik+1} + c_{i2}\}u_{k+1} + \dots + H_{iN}u_N = G_{i1}p_1 + G_{i2}p_2 + \dots + G_{iN}p_N + \sum B_i \quad (5.29)$$

Mediante arranjos convenientes na equação (5.29), semelhantes aos feitos em (5.25) chega-se novamente à expressão (5.26).

Para o caso de haver nós duplos, não se recomenda posicionar dois pontos de colocação no mesmo lugar do espaço. Caso isso seja feito, a única diferença entre as equações obtidas será dada matriz [c] (5.13). Montado desta forma, o sistema de equações torna-se singular caso se imponha deslocamentos conhecidos em ambos os nós. Para evitar esta pequena complicação,

desloca-se o ponto de colocação para o interior do elemento, conforme será visto mais adiante.

Lembrando-se que os deslocamentos de um ponto interno ao elemento podem ser escritos em termos dos deslocamentos nodais com o auxílio das funções de interpolação, (5.29) torna-se:

$$\begin{aligned}
 & H_{i1}u_1 + \dots + \{H_{ik} + \phi_1(P)c_{i1}\}u_k + \{H_{ik+1} + \phi_1(P)c_{i2}\}u_{k+1} + \dots + \\
 & + \{H_{iv} + \phi_2(P)c_{i1}\}u_v + \{H_{iv+1} + \phi_2(P)c_{i2}\}u_{v+1} + \dots + H_{iN}u_N = G_{i1}p_1 + \dots + G_{iN}p_N + \sum B_i
 \end{aligned}
 \tag{5.30}$$

5.6.1-Propriedades da Matriz H:

A matriz [H] possui uma propriedade bastante útil decorrente do movimento de corpo rígido. Caso um corpo finito se desloque no espaço, sem se deformar, as forças resultantes deverão ser nulas. Logo:

$$[H]\{I\} = \{0\}
 \tag{5.31}$$

sendo {I} um vetor com deslocamentos de corpo rígido para todos os nós.

Decorre de (5.31) que, dada uma linha **l** da matriz [H], a soma das constantes pertencentes a colunas pares será nula. O mesmo acontece com a soma das colunas ímpares. Matematicamente tem-se:

$$\sum_{k=1}^N H_{l,2k+1} = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^N H_{l,2k} = 0
 \tag{5.32}$$

Caso se trate de um corpo infinito, a integral do núcleo p^* , sobre um contorno localizado no infinito, produzirá como

resultado as forças do problema de Kelvin, ou seja, uma carga unitária na direção considerada. Logo os somatórios torna-se iguais a:

$$\sum_{k=1}^N H_{l\ 2k+1} = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^N H_{l\ 2k} = 0 \quad (5.33)$$

para linhas ímpares, e:

$$\sum_{k=1}^N H_{l\ 2k+1} = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^N H_{l\ 2k} = 1 \quad (5.34)$$

para linhas pares.

5.7-Pontos de Colocação:

Para montagem do sistema (5.26), teoricamente, quaisquer conjuntos de pontos de colocação serviriam. Neste trabalho observou-se que quando os pontos de colocação são posicionados sobre os nós de contorno, ou muito próximos destes, os resultados obtidos são melhores, se comparados àqueles obtidos com pontos de colocação longe do contorno. Assim pode-se tomar as coordenadas dos nós como sendo a dos pontos de colocação e a montagem das equações do sistema seguirá a formulação de (5.29).

No caso de haver nós duplos, como já foi dito, esta estratégia pode trazer algumas complicações quanto ao tipo de condição de contorno aplicada. Portanto, estes pontos devem ser posicionados em algum outro lugar do contorno. Uma forma bastante usual de se fazer isso é desloca-los para o interior do elemento adjacente de uma certa fração do comprimento deste, neste trabalho adotou-se $\frac{1}{4}$. Na Figura 5.8 encontra-se uma ilustração disto.

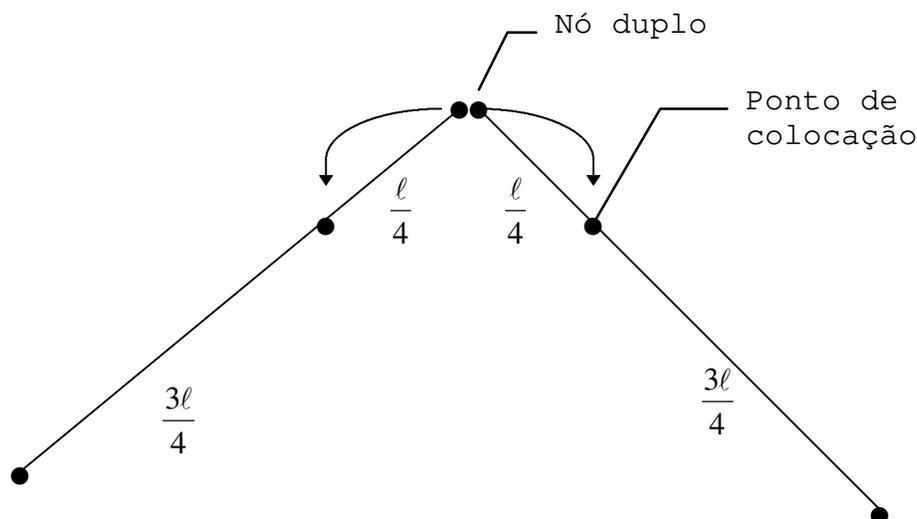


Figura 5.8 - Deslocamento dos pontos de colocação.

Já foi dito que esta estratégia dificulta a obtenção das matrizes [H] e [G]. Isso ocorre porque as integrais de contorno devem, neste caso, ser entendidas como um valor principal de Cauchy. Para elementos isoparamétricos lineares, a determinação destes valores principais é um pouco trabalhosa, já para os elementos isoparamétricos quadráticos é extremamente complicada [2]. Pode-se evitar esta dificuldade usando-se as propriedades da matriz [H] para determinação das integrais singulares ((5.32), (5.33) e (5.34)) e para a matriz [G] existem algoritmos de integração numérica que vislumbram a singularidade [2].

Com estes arranjos consegue-se resultados aceitáveis, mas se houver nós duplos as propriedades da matriz [H] de nada servirão, uma vez que existem mais de dois termos desconhecidos por equação e apenas um par de relações. Resta apenas a opção de se posicionar os pontos de colocação fora do domínio.

Um critério para isso é deslocar o ponto de colocação em relação ao nó na direção da bissetriz do ângulo externo γ , conforme a Figura 5.9

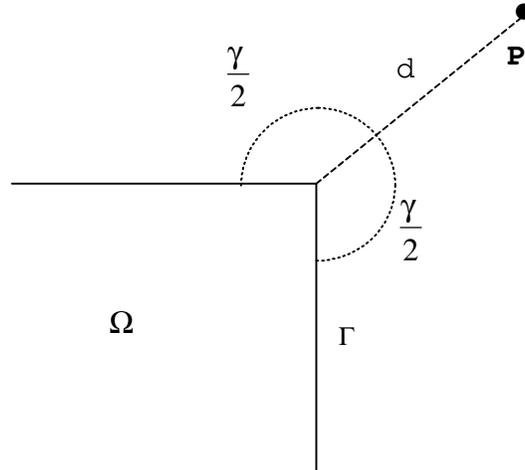


Figura 5.9 - Posicionamento do ponto de colocação fora do domínio.

A distância d deve ser a menor possível, desde que não comprometa a acuidade dos processos numéricos usados na avaliação das integrais de contorno. Pode-se adotar d como uma vez e meia o comprimento do maior elemento adjacente [4]. Existem técnicas para se aproximar mais o ponto de colocação, como a técnica dos **sub-elementos**. Esta técnica será apresentada mais adiante.

No caso dos nós duplos, primeiramente é feito o deslocamento destes para o interior do elemento, como feito na Figura 5.8, e depois um segundo deslocamento perpendicular ao mesmo.

5.8-Determinação das Matrizes h^1_{ik} e g^1_{ik} :

Estas matrizes podem ser avaliadas por processos de integração numérica, normalmente quadratura gaussiana, ou por meio de fórmulas analíticas. Para a quadratura gaussiana é preciso fazer-se uma mudança de variáveis. A avaliação das integrais que definem as matrizes é feita sobre a variável Γ , sendo mais conveniente escrevê-las sobre uma variável homogênea ξ . As equações (5.20) passam a:

$$h_{ik}^l = \int_{-1}^1 p_{ik}^*(X, P) \phi_l J(\xi) d\xi \quad g_{ik}^l = \int_{-1}^1 u_{ik}^*(X, P) \phi_l J(\xi) d\xi \quad (5.35)$$

O termo $\mathbf{J}(\xi)$ é o jacobiano da transformação que, para o elemento linear, vale metade do comprimento deste.

Para o elemento quadrático tem-se [3]:

$$J(\xi) = \frac{d\Gamma}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{dx(\xi)}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy(\xi)}{d\xi}\right)^2} \quad (5.36)$$

sendo:

$$\frac{dx(\xi)}{d\xi} = \frac{d\phi_i(\xi)}{d\xi} x_i \quad \frac{dy(\xi)}{d\xi} = \frac{d\phi_i(\xi)}{d\xi} y_i \quad (5.37)$$

com \mathbf{i} variando de 1 até 3.

No caso de elementos lineares, sugere-se o uso de expressões analíticas na determinação das matrizes \mathbf{h}_{ik}^1 e \mathbf{g}_{ik}^1 . Estas expressões são mostradas a seguir.

5.8.1-Formulação Analítica do Elemento Linear

5.8.1.1-Ponto de Colocação Fora da Linha do Elemento:

Esta situação é ilustrada na Figura 5.10 e os termos geométricos mostrados são definidos como:

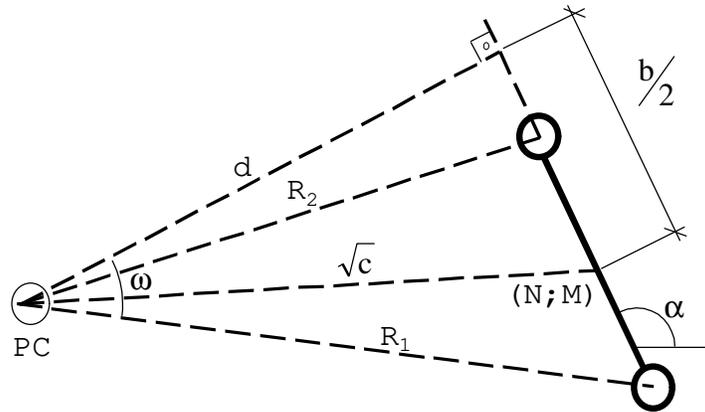


Figura 5.10 - Ponto de colocação fora da linha do elemento.

- $(x_p; y_p)$ - Coordenadas do ponto de colocação.
- $(N; M)$ - Coordenadas do ponto médio do elemento.
- ℓ - Comprimento do elemento.
- α - Ângulo entre o elemento e o eixo das abcissas.

$$b = 2 \left[\text{sen} \alpha (M - y_p) + \text{cos} \alpha (N - x_p) \right] \quad (5.38)$$

$$c = (N - x_p)^2 + (M - y_p)^2 \quad (5.39)$$

$$d = \text{sen} \alpha (N - x_p) - \text{cos} \alpha (M - y_p) \quad (5.40)$$

$$R_1^2 = \frac{\ell^2}{4} - \frac{b\ell}{2} + c \quad R_2^2 = \frac{\ell^2}{4} + \frac{b\ell}{2} + c \quad (5.41)$$

$$\omega = \arctan\left(\frac{b+\ell}{2|d|}\right) - \arctan\left(\frac{b-\ell}{2|d|}\right) \quad (5.42)$$

$$\lambda = \text{sen}\alpha(N - x_p) + \text{cos}\alpha(M - y_p) \quad (5.43)$$

e as expressões:

$$\begin{aligned} h_{11}^1 = & \frac{-d}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{(1-2\nu)\omega}{2|d|} - \frac{1-2\nu+2\cos^2\alpha}{2\ell} \left(\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} - \frac{b\omega}{|d|} \right) + \frac{(N-x_p)^2}{4d^2} \left(\frac{b+\ell}{R_2^2} - \frac{b-\ell}{R_1^2} + \frac{2\omega}{|d|} \right) + \right. \\ & + \frac{2}{4d^2} \left((N-x_p)\cos\alpha + \frac{c \cdot \cos^2\alpha - (N-x_p)^2}{\ell} \right) \left(-\frac{4c+b\ell}{2R_2^2} + \frac{4c-b\ell}{2R_1^2} - \frac{b\omega}{|d|} \right) + \\ & \left. + \frac{1}{4d^2} \left(\cos^2\alpha + \frac{2b \cdot \cos^2\alpha - 4(N-x_p)\cos\alpha}{\ell} \right) \left(\frac{c(b+\ell) - 2d^2\ell}{R_2^2} - \frac{c(b-\ell) + 2d^2\ell}{R_1^2} + \frac{2c\omega}{|d|} \right) \right] \quad (5.44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{11}^2 = & \frac{-d}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{(1-2\nu)\omega}{2|d|} + \frac{1-2\nu+2\cos^2\alpha}{2\ell} \left(\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} - \frac{b\omega}{|d|} \right) + \frac{(N-x_p)^2}{4d^2} \left(\frac{b+\ell}{R_2^2} - \frac{b-\ell}{R_1^2} + \frac{2\omega}{|d|} \right) + \right. \\ & + \frac{2}{4d^2} \left((N-x_p)\cos\alpha - \frac{c \cdot \cos^2\alpha - (N-x_p)^2}{\ell} \right) \left(-\frac{4c+b\ell}{2R_2^2} + \frac{4c-b\ell}{2R_1^2} - \frac{b\omega}{|d|} \right) + \\ & \left. + \frac{1}{4d^2} \left(\cos^2\alpha - \frac{2b \cdot \cos^2\alpha - 4(N-x_p)\cos\alpha}{\ell} \right) \left(\frac{c(b+\ell) - 2d^2\ell}{R_2^2} - \frac{c(b-\ell) + 2d^2\ell}{R_1^2} + \frac{2c\omega}{|d|} \right) \right] \quad (5.45) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{22}^1 = & \frac{-d}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{(1-2\nu)\omega}{2|d|} - \frac{1-2\nu+2\text{sen}^2\alpha}{2\ell} \left(\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} - \frac{b\omega}{|d|} \right) + \frac{(M-y_p)^2}{4d^2} \left(\frac{b+\ell}{R_2^2} - \frac{b-\ell}{R_1^2} + \frac{2\omega}{|d|} \right) \right] + \\
& + \frac{2}{4d^2} \left((M-y_p)\text{sen}\alpha + \frac{c \cdot \text{sen}^2\alpha - (M-y_p)^2}{\ell} \right) \left(-\frac{4c+b\ell}{2R_2^2} + \frac{4c-b\ell}{2R_1^2} - \frac{b\omega}{|d|} \right) + \\
& + \frac{1}{4d^2} \left(\text{sen}^2\alpha + \frac{2b \cdot \text{sen}^2\alpha - 4(M-y_p)\text{sen}\alpha}{\ell} \right) \left(\frac{c(b+\ell) - 2d^2\ell}{R_2^2} - \frac{c(b-\ell) + 2d^2\ell}{R_1^2} + \frac{2c\omega}{|d|} \right) \Bigg]
\end{aligned} \tag{5.46}$$

$$\begin{aligned}
h_{22}^2 = & \frac{-d}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{(1-2\nu)\omega}{2|d|} + \frac{1-2\nu+2\text{sen}^2\alpha}{2\ell} \left(\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} - \frac{b\omega}{|d|} \right) + \frac{(M-y_p)^2}{4d^2} \left(\frac{b+\ell}{R_2^2} - \frac{b-\ell}{R_1^2} + \frac{2\omega}{|d|} \right) \right] + \\
& + \frac{2}{4d^2} \left((M-y_p)\text{sen}\alpha - \frac{c \cdot \text{sen}^2\alpha - (M-y_p)^2}{\ell} \right) \left(-\frac{4c+b\ell}{2R_2^2} + \frac{4c-b\ell}{2R_1^2} - \frac{b\omega}{|d|} \right) + \\
& + \frac{1}{4d^2} \left(\text{sen}^2\alpha - \frac{2b \cdot \text{sen}^2\alpha - 4(M-y_p)\text{sen}\alpha}{\ell} \right) \left(\frac{c(b+\ell) - 2d^2\ell}{R_2^2} - \frac{c(b-\ell) + 2d^2\ell}{R_1^2} + \frac{2c\omega}{|d|} \right) \Bigg]
\end{aligned} \tag{5.47}$$

$$\begin{aligned}
h_{21}^1 = & \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[-\frac{(1-2\nu)b\omega}{4|d|} + \frac{1}{2} \left(\frac{(1-2\nu)b - 4d \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2\ell} - \frac{1-2\nu}{2} \right) \left(\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} - \frac{b\omega}{|d|} \right) \right] + \\
& + \frac{1-2\nu}{\ell} \left(\ell - \frac{b}{2} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \frac{(b^2 - 2c)\omega}{2|d|} \right) + \frac{d(M-y_p)(N-x_p)}{4d^2} \left(\frac{b+\ell}{R_2^2} - \frac{b-\ell}{R_1^2} + \frac{2\omega}{|d|} \right) + \\
& + \frac{d}{4d^2} \left(\lambda + \frac{2c \cdot \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - 2(M-y_p)(N-x_p)}{\ell} \right) \left(-\frac{4c+b\ell}{2R_2^2} + \frac{4c-b\ell}{2R_1^2} - \frac{b\omega}{|d|} \right) + \\
& + \frac{d}{4d^2} \left(\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \frac{2b \cdot \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - 2\lambda}{\ell} \right) \left(\frac{c(b+\ell) - 2d^2\ell}{R_2^2} - \frac{c(b-\ell) + 2d^2\ell}{R_1^2} + \frac{2c\omega}{|d|} \right) \Bigg]
\end{aligned} \tag{5.48}$$

$$\begin{aligned}
h_{21}^2 = & \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[-\frac{(1-2\nu)b\omega}{4|d|} - \frac{1}{2} \left(\frac{(1-2\nu)b - 4d \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2\ell} + \frac{1-2\nu}{2} \right) \left(\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} - \frac{b\omega}{|d|} \right) \right] - \\
& - \frac{1-2\nu}{\ell} \left(\ell - \frac{b}{2} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \frac{(b^2 - 2c)\omega}{2|d|} \right) + \frac{d(M-y_p)(N-x_p)}{4d^2} \left(\frac{b+\ell}{R_2^2} - \frac{b-\ell}{R_1^2} + \frac{2\omega}{|d|} \right) + \\
& + \frac{d}{4d^2} \left(\lambda - \frac{2c \cdot \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - 2(M-y_p)(N-x_p)}{\ell} \right) \left(-\frac{4c+b\ell}{2R_2^2} + \frac{4c-b\ell}{2R_1^2} - \frac{b\omega}{|d|} \right) + \\
& + \frac{d}{4d^2} \left(\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \frac{2b \cdot \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - 2\lambda}{\ell} \right) \left(\frac{c(b+\ell) - 2d^2\ell}{R_2^2} - \frac{c(b-\ell) + 2d^2\ell}{R_1^2} + \frac{2c\omega}{|d|} \right) \Bigg]
\end{aligned} \tag{5.49}$$

$$\begin{aligned}
h_{12}^1 = & \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{(1-2\nu)b\omega}{4|d|} + \frac{1}{2} \left(\frac{-(1-2\nu)b - 4d \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2\ell} + \frac{1-2\nu}{2} \right) \left(\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} - \frac{b\omega}{|d|} \right) - \right. \\
& - \frac{1-2\nu}{\ell} \left(\ell - \frac{b}{2} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \frac{(b^2 - 2c)\omega}{2|d|} \right) + \frac{d(M-y_p)(N-x_p)}{4d^2} \left(\frac{b+\ell}{R_2^2} - \frac{b-\ell}{R_1^2} + \frac{2\omega}{|d|} \right) + \\
& + \frac{d}{4d^2} \left(\lambda + \frac{2c \cdot \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - 2(M-y_p)(N-x_p)}{\ell} \right) \left(-\frac{4c+b\ell}{2R_2^2} + \frac{4c-b\ell}{2R_1^2} - \frac{b\omega}{|d|} \right) + \\
& \left. + \frac{d}{4d^2} \left(\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \frac{2b \cdot \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - 2\lambda}{\ell} \right) \left(\frac{c(b+\ell) - 2d^2\ell}{R_2^2} - \frac{c(b-\ell) + 2d^2\ell}{R_1^2} + \frac{2c\omega}{|d|} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.50}$$

$$\begin{aligned}
h_{12}^2 = & \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{(1-2\nu)b\omega}{4|d|} - \frac{1}{2} \left(\frac{-(1-2\nu)b - 4d \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2\ell} - \frac{1-2\nu}{2} \right) \left(\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} - \frac{b\omega}{|d|} \right) + \right. \\
& + \frac{1-2\nu}{\ell} \left(\ell - \frac{b}{2} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \frac{(b^2 - 2c)\omega}{2|d|} \right) + \frac{d(M-y_p)(N-x_p)}{4d^2} \left(\frac{b+\ell}{R_2^2} - \frac{b-\ell}{R_1^2} + \frac{2\omega}{|d|} \right) + \\
& + \frac{d}{4d^2} \left(\lambda - \frac{2c \cdot \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - 2(M-y_p)(N-x_p)}{\ell} \right) \left(-\frac{4c+b\ell}{2R_2^2} + \frac{4c-b\ell}{2R_1^2} - \frac{b\omega}{|d|} \right) + \\
& \left. + \frac{d}{4d^2} \left(\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \frac{2b \cdot \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - 2\lambda}{\ell} \right) \left(\frac{c(b+\ell) - 2d^2\ell}{R_2^2} - \frac{c(b-\ell) + 2d^2\ell}{R_1^2} + \frac{2c\omega}{|d|} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.51}$$

$$\begin{aligned}
g_{11}^1 = & \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[-\frac{(3-4\nu)}{2} \left(|d|\omega + \frac{b}{4} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \frac{\ell}{4} \ln(R_2^2 R_1^2) - \ell \right) + \frac{(N-x_p)^2 \omega}{2|d|} + \right. \\
& + \frac{3-4\nu}{\ell} \left(\frac{b\ell}{4} - \frac{b|d|\omega}{2} + \frac{1}{8} \left(2c - b^2 + \frac{\ell^2}{2} \right) \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \right) + \frac{1}{2} \left((N-x_p) \cos\alpha + \frac{c \cdot \cos^2 \alpha - (N-x_p)^2}{\ell} \right) \\
& \left. \left(\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} - \frac{b\omega}{|d|} \right) + \left(\frac{\cos^2 \alpha}{2} + \frac{b \cdot \cos^2 \alpha - 2(N-x_p) \cos\alpha}{\ell} \right) \left(\ell - \frac{b}{2} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \frac{(b^2 - 2c)\omega}{2|d|} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.52}$$

$$\begin{aligned}
g_{11}^2 = & \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[-\frac{(3-4\nu)}{2} \left(|d|\omega + \frac{b}{4} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \frac{\ell}{4} \ln(R_2^2 R_1^2) - \ell \right) + \frac{(N-x_p)^2 \omega}{2|d|} - \right. \\
& - \frac{3-4\nu}{\ell} \left(\frac{b\ell}{4} - \frac{b|d|\omega}{2} + \frac{1}{8} \left(2c - b^2 + \frac{\ell^2}{2} \right) \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \right) + \frac{1}{2} \left((N-x_p) \cos\alpha - \frac{c \cdot \cos^2 \alpha - (N-x_p)^2}{\ell} \right) \\
& \left. \left(\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} - \frac{b\omega}{|d|} \right) + \left(\frac{\cos^2 \alpha}{2} - \frac{b \cdot \cos^2 \alpha - 2(N-x_p) \cos\alpha}{\ell} \right) \left(\ell - \frac{b}{2} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \frac{(b^2 - 2c)\omega}{2|d|} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.53}$$

$$\begin{aligned}
g_{22}^1 = & \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[-\frac{(3-4\nu)}{2} \left(|d|\omega + \frac{b}{4} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \frac{\ell}{4} \ln(R_2^2 R_1^2) - \ell \right) + \frac{(M-y_p)^2 \omega}{2|d|} + \right. \\
& + \frac{3-4\nu}{\ell} \left(\frac{b\ell}{4} - \frac{b|d|\omega}{2} + \frac{1}{8} \left(2c - b^2 + \frac{\ell^2}{2} \right) \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \right) + \frac{1}{2} \left((M-y_p) \operatorname{sen} \alpha + \frac{c \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha - (M-y_p)^2}{\ell} \right) \\
& \cdot \left. \left(\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} - \frac{b\omega}{|d|} \right) + \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{2} + \frac{b \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha - 2(M-y_p) \operatorname{sen} \alpha}{\ell} \right) \left(\ell - \frac{b}{2} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \frac{(b^2 - 2c)\omega}{2|d|} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.54}$$

$$\begin{aligned}
g_{22}^2 = & \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[-\frac{(3-4\nu)}{2} \left(|d|\omega + \frac{b}{4} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \frac{\ell}{4} \ln(R_2^2 R_1^2) - \ell \right) + \frac{(M-y_p)^2 \omega}{2|d|} - \right. \\
& - \frac{3-4\nu}{\ell} \left(\frac{b\ell}{4} - \frac{b|d|\omega}{2} + \frac{1}{8} \left(2c - b^2 + \frac{\ell^2}{2} \right) \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \right) + \frac{1}{2} \left((M-y_p) \operatorname{sen} \alpha - \frac{c \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha - (M-y_p)^2}{\ell} \right) \\
& \cdot \left. \left(\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} - \frac{b\omega}{|d|} \right) + \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{2} - \frac{b \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha - 2(M-y_p) \operatorname{sen} \alpha}{\ell} \right) \left(\ell - \frac{b}{2} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \frac{(b^2 - 2c)\omega}{2|d|} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.55}$$

$$\begin{aligned}
g_{21}^1 = g_{12}^1 = & \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[\frac{(M-y_p)(N-x_p)\omega}{2|d|} + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{c \cdot \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - (M-y_p)(N-x_p)}{\ell} \right) \right. \\
& \cdot \left. \left(\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} - \frac{b\omega}{|d|} \right) + \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2} + \frac{b \cdot \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \lambda}{\ell} \right) \left(\ell - \frac{b}{2} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \frac{(b^2 - 2c)\omega}{2|d|} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.56}$$

$$g_{21}^2 = g_{12}^2 = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[\frac{\left((M-y_p)(N-x_p) \right) \omega}{2|d|} + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{c \cdot \sin\alpha \cos\alpha - \left((M-y_p)(N-x_p) \right)}{\ell} \right) \right. \\ \left. \left(\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} - \frac{b\omega}{|d|} \right) + \left(\frac{\sin\alpha \cos\alpha}{2} - \frac{b \cdot \sin\alpha \cos\alpha - \lambda}{\ell} \right) \left(\ell - \frac{b}{2} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \frac{(b^2 - 2c)\omega}{2|d|} \right) \right] \quad (5.57)$$

5.8.1.2-Ponto Alinhado com o Elemento mas não Pertencente a Este:

A formulação apresentada anteriormente, quando o termo d tende a zero, conduz a uma indeterminação. Esta situação é ilustrada na Figura 5.11, onde o ponto de colocação se alinha com o elemento sem pertencer a este.

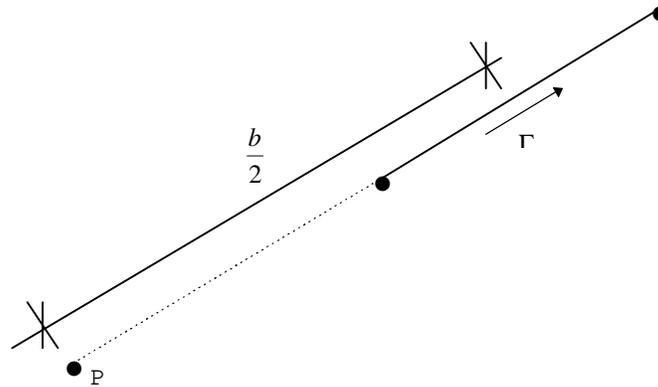


Figura 5.11 - Ponto de colocação alinhado com o elemento.

Sempre que ocorre tal alinhamento, os termos da matriz \mathbf{h}_{ik}^1 se anulam se $\mathbf{i}=\mathbf{k}$, ou seja:

$$h_{11}^1 = h_{11}^2 = h_{22}^1 = h_{22}^2 = 0 \quad (5.58)$$

Para o ponto de colocação \mathbf{P} posicionado segundo a Figura 5.11, os demais termos tem seus valores dados pela seguinte formulação:

$$h_{21}^1 = \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)\ell} \left[\frac{\ell + R_1 + R_2}{2} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) - \ell \right] \quad (5.59)$$

$$h_{21}^2 = \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)\ell} \left[\frac{\ell - R_1 - R_2}{2} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \ell \right] \quad (5.60)$$

$$h_{12}^1 = -h_{21}^1 \quad h_{12}^2 = -h_{21}^2 \quad (5.61)$$

As relações (5.58) e (5.61) são válidas sempre que o ponto estiver sobre a linha do elemento. Se o posicionamento do ponto de colocação for como ilustrado na Figura 5.12, as fórmulas passam a:

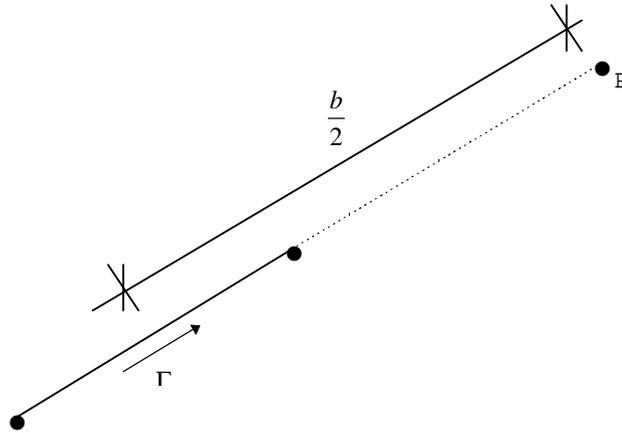


Figura 5.12 - Ponto de colocação alinhado com o elemento.

$$h_{21}^1 = \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)\ell} \left[\frac{\ell - R_1 - R_2}{2} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) - \ell \right] \quad (5.62)$$

$$h_{21}^2 = \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)\ell} \left[\frac{\ell + R_1 + R_2}{2} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \ell \right] \quad (5.63)$$

$$h_{12}^1 = -h_{21}^1 \quad h_{12}^2 = -h_{21}^2 \quad (5.64)$$

As fórmulas podem ser escritas de modo geral como:

$$h_{21}^1 = \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)\ell} \left[\frac{\ell + \text{sgn}(b)(R_1 + R_2)}{2} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) - \ell \right] = -h_{12}^1 \quad (5.65)$$

$$h_{21}^2 = \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)\ell} \left[\frac{\ell + \text{sgn}(b)(R_1 + R_2)}{2} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \ell \right] = -h_{12}^2 \quad (5.66)$$

As expressões para a matriz \mathbf{g}_{ik}^1 , já escritas para o caso geral, são:

$$\begin{aligned} g_{ik}^1 = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)\ell} \left\{ -\frac{\text{sgn}(b)(3-4\nu)\delta_{ik}}{2} \left[(\ell + \text{sgn}(b)(R_1 + R_2)) (R_2 \ln(R_2) - R_1 \ln(R_2) - \text{sgn}(b)\ell) + \right. \right. \\ \left. \left. + \text{sgn}(b) \left(R_1^2 \left(\ln(R_1) - \frac{1}{2} \right) - R_2^2 \left(\ln(R_2) - \frac{1}{2} \right) \right) \right] + \frac{r_i r_k}{2} \left[\ell(\ell + \text{sgn}(b)(R_1 + R_2)) - R_2^2 + R_1^2 \right] \right\} \quad (5.67) \end{aligned}$$

$$g_{ik}^2 = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)\ell} \left\{ -\frac{\text{sgn}(b)(3-4\nu)\delta_{ik}}{2} \left[(\ell - \text{sgn}(b)(R_1 + R_2)) (R_2 \ln(R_2) - R_1 \ln(R_2)) - \text{sgn}(b)\ell \right] - \right. \\ \left. + \text{sgn}(b) \left(R_1^2 \left(\ln(R_1) - \frac{1}{2} \right) - R_2^2 \left(\ln(R_2) - \frac{1}{2} \right) \right) \right] + \frac{r_i r_k}{2} \left[\ell (\ell - \text{sgn}(b)(R_1 + R_2)) + R_2^2 - R_1^2 \right] \right\} \quad (5.68)$$

5.8.1.3-Ponto de Colocação Interno:

Quando o ponto de colocação pertence ao elemento, as integrais de contorno devem ser avaliadas em termos do valor principal de Cauchy. A situação do ponto é ilustrada na Figura 5.13:

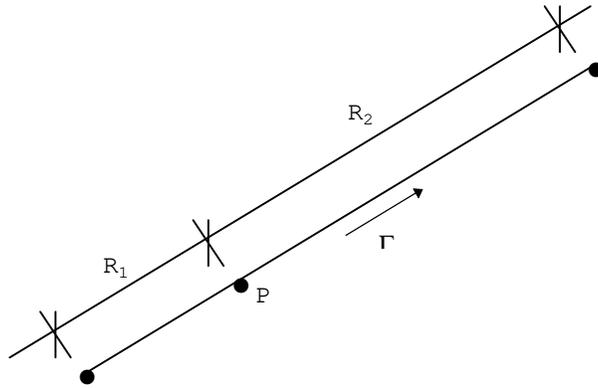


Figura 5.13 - Ponto de colocação pertencente ao elemento.

A formulação para este caso torna-se:

$$h_{12}^1 = -\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)\ell} \left[R_2 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) - \ell \right] \quad (5.69)$$

$$h_{12}^2 = -\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)\ell} \left[R_1 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \ell \right] \quad (5.70)$$

Se $R_1=0$, então:

$$h_{12}^1 = -\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)\ell} [R_2 \ln(R_2) - \ell] \quad (5.71)$$

$$h_{12}^2 = -\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \quad (5.72)$$

Se $R_2=0$, então:

$$h_{12}^1 = \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \quad (5.73)$$

$$h_{12}^2 = \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)\ell} [R_1 \ln(R_1) - \ell] \quad (5.74)$$

E o caso geral para a matriz \mathbf{g}^1_{ik} é:

$$g_{ik}^1 = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)\ell} \left\{ r_i r_k \ell^2 - \delta_{ik} (3-4\nu) \left[\ln(R_1^{R_2^2+2R_1R_2} \cdot R_2^{R_2}) - \ell \left(\frac{\ell}{2} + R_2 \right) \right] \right\} \quad (5.75)$$

$$g_{ik}^2 = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)\ell} \left\{ r_i r_k \ell^2 - \delta_{ik} (3-4\nu) \left[\ln(R_2^{R_2^2+2R_1R_2} \cdot R_1^{R_1}) - \ell \left(\frac{\ell}{2} + R_1 \right) \right] \right\} \quad (5.76)$$

A implementação das expressões analíticas, embora seja trabalhosa, produz resultados excelentes com um tempo de processamento bastante reduzido.

5.9-Determinação do Vetor B_k :

A determinação do vetor $\{B\}$ consiste na avaliação das integrais de domínio (5.23). Seria conveniente que estas integrais pudessem ser escritas sobre o contorno, mas isso não é possível para um carregamento genérico, embora para alguns casos particulares existam tais soluções [2].

Como já foi exposto, este problema é tratado dividindo-se o domínio em células onde o carregamento pode ser aproximado por uma função de interpolação. A integral (5.23) pode ser levada ao contorno das células, o que já diminui bastante o esforço computacional.

Assume-se, primeiramente, que o carregamento b_i varia na célula segundo uma função linear, ou seja, um plano:

$$b_i(X) = A_i x + B_i y + C_i \quad (5.77)$$

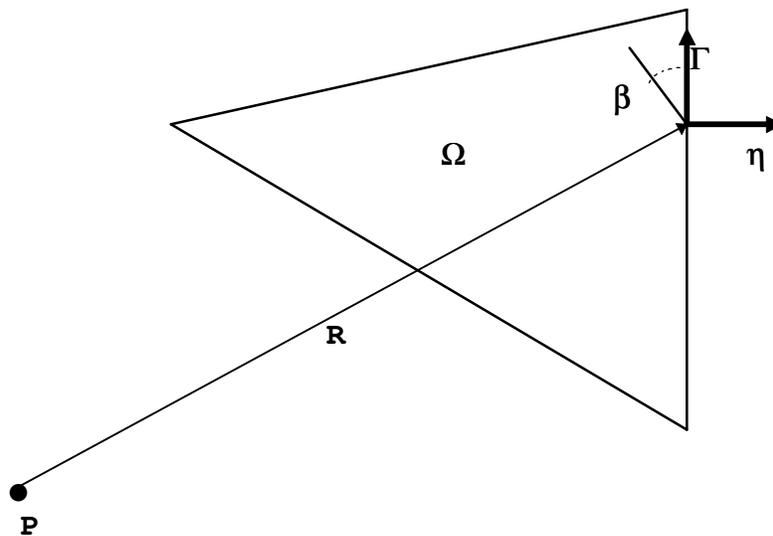


Figura 5.14 - Ponto de colocação e célula de domínio.

Mudando-se a origem do sistema de coordenadas para o ponto de colocação P , ilustrado na Figura 5.14, e transformando-

se a equação (5.77) para um sistema de coordenadas cilíndricas chega-se a:

$$b_i(X) = A_{iv} r r_{,v} + b_i^0 \quad (5.78)$$

sendo \mathbf{b}_i^0 o valor do carregamento na direção \mathbf{i} no ponto de colocação, \mathbf{r} o raio vetor do ponto \mathbf{X} , $\mathbf{r}_{,v}$ sua derivada na direção \mathbf{v} e \mathbf{A}_{iv} são os demais coeficientes necessários para definir o plano.

A integral (5.23) pode agora ser escrita como:

$$B_k = \int_{\Omega} u_{ik}^*(X, P) (A_{iv} r r_{,v} + b_i^0) d\Omega \quad (5.79)$$

Escrevendo-se a diferencial de área, $d\Omega$, em coordenadas cilíndricas tem-se:

$$d\Omega = r \cdot dr \cdot d\theta \quad (5.80)$$

Observando-se a Figura 5.14 é fácil notar que:

$$\left. \begin{aligned} d\theta &= \frac{d\Gamma \cos\beta}{R} \\ \cos\beta &= R_{,t} \eta_t \end{aligned} \right\} d\theta = \frac{d\Gamma R_{,t} \eta_t}{R} \quad (5.81)$$

Substituindo-se (5.81) e (5.80) em (5.79) e efetuando-se a integração em \mathbf{r} chega-se a:

$$B_k = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \int_{\Gamma} R_{,t} \eta_t \Lambda_k d\Gamma \quad (5.82)$$

sendo:

$$\begin{aligned}\Lambda_k = & -\frac{R^2}{3}\left(\ln(R) - \frac{1}{3}\right)A_{kv}R_{,v}(3-4\nu) + \\ & + \frac{R^2}{3}A_{iv}R_{,v}R_{,i}R_{,k} - \frac{R}{2}\left(\ln(R) - \frac{1}{2}\right)b_k^0(3-4\nu) + \frac{R}{2}b_i^0R_{,i}R_{,k}\end{aligned}\quad (5.83)$$

A expressão (5.83) pode ser integrada analiticamente obtendo-se:

$$\begin{aligned}B_k = & \frac{d}{8\pi\mu(1-\nu)}\left\{- (3-4\nu)\left[|d|\omega + \frac{b}{4}\ln\frac{R_2^2}{R_1^2} + \frac{\ell}{4}\ln(R_2^2 \cdot R_1^2) - \ell\right]\left(\frac{A_{kv}}{3}c_v + \frac{b_k^0}{2}\right) + \right. \\ & + \ell(3-4\nu)\left(\frac{A_{kv}}{3}c_v + \frac{b_k^0}{2}\right) - \frac{A_{kv}}{3}(3-4\nu)\Gamma_{,v}\left[\frac{b\ell}{4} - \frac{b|d|\omega}{2} + \frac{1}{8}\left(2c - b^2 + \frac{\ell^2}{2}\right)\ln\frac{R_2^2}{R_1^2}\right] + \frac{A_{iv}c_i c_v c_k \omega}{3|d|} + \\ & + \frac{b_i^0 c_i c_k \omega}{2|d|} + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{R_2^2}{R_1^2} - \frac{b\omega}{|d|}\right) \cdot \left[\frac{b_i^0}{2}(c_i \Gamma_{,k} + c_k \Gamma_{,i}) + \frac{A_{iv}}{3}(c_i c_v \Gamma_{,k} + c_i c_k \Gamma_{,v} + c_k c_v \Gamma_{,i} - c \Gamma_{,i} \Gamma_{,v} \Gamma_{,k})\right] + \\ & \left. + \left[\ell - \frac{b}{2}\ln\frac{R_2^2}{R_1^2} + \frac{(b^2 - 2c)\omega}{2|d|}\right]\left[\frac{b_i^0}{2}\Gamma_{,i} \Gamma_{,k} + \frac{A_{iv}}{3}(c_i \Gamma_{,v} \Gamma_{,k} + c_v \Gamma_{,k} \Gamma_{,v} + c_k \Gamma_{,v} \Gamma_{,i} - b \Gamma_{,i} \Gamma_{,v} \Gamma_{,k})\right]\right\}\end{aligned}\quad (5.83b)$$

Assim como (5.82), a expressão (5.83b) deve ser calculada sobre cada um dos lados da célula triangular.

Caso se queira aproximar \mathbf{b}_i por uma função do segundo grau, ou seja, um parabolóide, então tem-se que:

$$b_i(X) = A_{iv} r r_{,v} + \alpha_{ivl} r^2 r_{,v} r_{,l} + b_i^0 \quad (5.84)$$

Seguindo-se o mesmo raciocínio chega-se a:

$$\begin{aligned}
\Lambda_k = & -\frac{R^3}{4} \left(\ln(R) - \frac{1}{4} \right) \alpha_{kvl} R_{,v} R_{,l} (3-4\nu) + \\
& + \frac{R^3}{4} \alpha_{ivl} R_{,v} R_{,l} R_{,i} R_{,k} - \frac{R^2}{3} \left(\ln(R) - \frac{1}{3} \right) A_{kv} R_{,v} (3-4\nu) + \\
& + \frac{R^2}{3} A_{iv} R_{,v} R_{,i} R_{,k} - \frac{R}{2} \left(\ln(R) - \frac{1}{2} \right) b_k^0 (3-4\nu) + \frac{R}{2} b_i^0 R_{,i} R_{,k}
\end{aligned}
\tag{5.85}$$

A equação (5.82) pode ser avaliada numericamente usando-se quadratura gaussiana, como já foi descrito para as integrais de contorno. Neste caso a equação 5.82 é escrita como:

$$B_k = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \int_{-1}^1 R_{,i} \eta_i \Lambda_k J(\xi) d\xi
\tag{5.86}$$

Os jacobianos para os casos linear e quadráticos são os mesmos já descritos anteriormente.

5.10-Determinação das Tensões em Pontos Internos:

Substituindo-se a deformação de um ponto material, dada por (3.6), na relação constitutiva (3.8) obtém-se a equação (5.87) que relaciona as tensões e deslocamentos de um ponto.

$$\sigma_{ij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} u_{l,l} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})
\tag{5.87}$$

Substituindo-se a equação integral de chapas (5.9) em (5.87) chega-se a:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & - \int_{\Gamma} \left[\frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} p_{lk,l}^* + \mu(p_{ik,j}^* + p_{jk,i}^*) \right] u_k d\Gamma + \int_{\Gamma} \left[\frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} u_{lk,l}^* + \mu(u_{ik,j}^* + u_{jk,i}^*) \right] p_k d\Gamma + \\ & + \int_{\Omega} \left[\frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} u_{lk,l}^* + \mu(u_{ik,j}^* + u_{jk,i}^*) \right] b_k d\Omega \end{aligned} \quad (5.88)$$

Definindo-se os tensores de terceira ordem \mathbf{D}_{kij} e \mathbf{S}_{kij} como sendo:

$$D_{kij} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[(1-2\nu)(\delta_{ki}r_{,j} + \delta_{kj}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] \quad (5.89)$$

$$\begin{aligned} S_{kij} = & \frac{\mu}{2\mu(1-\nu)r^2} \left\{ 2r_{,i} \left[(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] + 2\nu(\eta_{i,j}r_{,k} + \eta_{j,i}r_{,k}) + \right. \\ & \left. + (1-2\nu)(2\eta_{k,i}r_{,j} + \eta_{j,i}\delta_{ik} + \eta_{i,j}\delta_{jk}) - (1-4\nu)\eta_{k,i}\delta_{ij} \right\} \end{aligned} \quad (5.90)$$

A equação (5.88) pode ser escrita como:

$$\sigma_{ij}(P) = - \int_{\Gamma} S_{kij}(X,P) u_k(X) d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{kij}(X,P) p_k(X) d\Gamma + \int_{\Omega} D_{kij}(X,P) b_k(X) d\Omega \quad (5.91)$$

Considerando-se as discretizações do contorno e do domínio, a equação (5.91) pode ser escrita em termos dos valores nodais de contorno como:

$$\sigma_{ij}(P) = - \sum_1^N u_k^l S_{kij}^l + \sum_1^N p_k^l D_{kij}^l + \sum_1^M \beta_{ij} \quad (5.92)$$

sendo:

$$D_{kij}^l = \int_{\Gamma} D_{kij}(X, P) \phi_l d\Gamma \quad S_{kij}^l = \int_{\Gamma} S_{kij}(X, P) \phi_l d\Gamma \quad (5.93)$$

$$\beta_{ji} = \int_{\Omega} D_{kij}(X, P) b_k(X) d\Omega \quad (5.94)$$

A integral (5.94) pode ser transformada em uma integral de contorno de célula, analogamente ao que foi feito com a integral (5.23), resultando em:

$$\beta_{ij} = \int_{\Gamma} R_{,t} \eta_t \Psi_{ij} d\Gamma \quad (5.95)$$

sendo que Ψ_{ij} tem, para os casos linear e quadrático, respectivamente, as seguintes expressões:

$$\Psi_{kt} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu)(\delta_{it} R_{,k} + \delta_{ik} R_{,t} - \delta_{kt} R_{,i}) + 2R_{,i} R_{,k} R_{,t} \right] \left(A_{iv} \frac{R}{2} R_{,v} + b_i^0 \right) \quad (5.96)$$

$$\Psi_{kt} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu)(\delta_{it} R_{,k} + \delta_{ik} R_{,t} - \delta_{kt} R_{,i}) + 2R_{,i} R_{,k} R_{,t} \right] \left(\alpha_{ivl} \frac{R^2}{3} R_{,v} R_{,l} + A_{iv} \frac{R}{2} R_{,v} + b_i^0 \right) \quad (5.97)$$

A determinação destas integrais pode ser feita com o uso de quadratura gaussiana, de forma análoga ao que já foi descrito.

5.10.1-Determinação das Tensões nos Pontos do Contorno:

Uma forma de se determinar as tensões nos pontos do contorno é posicionar-se o ponto de colocação suficientemente

próximo daqueles, de forma que se possa assumir a tensão neste como igual a do contorno. Esta estratégia não conduziu a bons resultados em pontos onde haja descontinuidades de forças, deslocamentos ou existam angulosidades no contorno, além de requerer um grande esforço computacional na terminação de integrais hipersingulares. Neste trabalho as tensões foram calculadas em relação a um sistema de coordenadas com eixos normais e tangentes ao contorno, conforme ilustrado na Figura 5.15. Três das componentes do tensor são obtidas diretamente do equilíbrio do ponto do contorno, segundo:

$$\sigma_{\eta\eta} = p_i \eta_i \quad (5.98)$$

$$\sigma_{\Gamma\eta} = \sigma_{\eta\Gamma} = p_i \Gamma_i \quad (5.99)$$

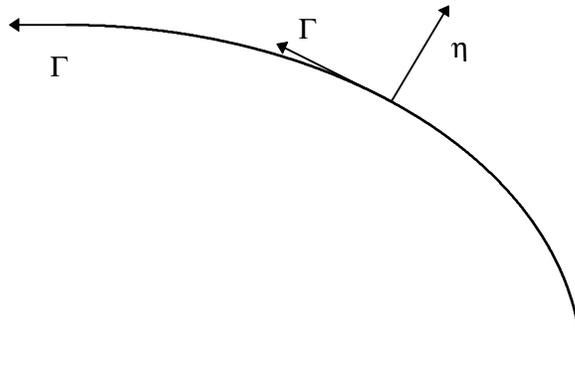


Figura 5.15 - Coordenadas normais e tangenciais ao contorno.

A tensão na direção tangencial deve ser determinada a partir das relações constitutivas, ou seja:

$$\sigma_{\Gamma\Gamma} = \frac{1}{1-\nu} (\nu \sigma_{\eta\eta} + 2\mu e_{\Gamma\Gamma}) \quad (5.100)$$

sendo:

$$e_{\Gamma} = \frac{\partial u_{\Gamma}}{\partial \Gamma} \quad (5.101)$$

Se o contorno for curvo no ponto em que se deseja calcular e_{Γ} , é mais simples escrever-se (5.101) em função da variável homogênea ξ , utilizando-se as expressões (5.17) ou semelhantes. Neste caso tem-se que:

$$e_{\Gamma} = \frac{\partial \phi_j(\xi)}{\partial \xi} u_i^j \Gamma_{,i} \frac{d\xi}{d\Gamma} \quad (B102)$$

Em (5.102), o índice j varia segundo o número de funções ϕ usadas para descrever as variáveis de contorno. Para o caso de elementos quadráticos, j varia de 1 até 3. A derivada da variável ξ em relação ao contorno Γ é tomada como inverso do jacobiano, definido em (5.36).

Caso haja angulosidade no ponto em que se queira a tensão, não é possível determinar-se inequivocamente uma tangente ao contorno. Haverá um valor desta à direita e outro à esquerda do ponto, não sendo possível definir o sistema de coordenadas normal/tangencial. Neste caso o valor da tangente no ponto pode ser arbitrado em um valor intermediário àqueles assumidos à direita e à esquerda.

Isso pode ser feito adotando-se uma curva de concordância para o contorno e tomando-se o valor de sua tangente no ponto em questão.

5.11-Determinação da Deformação em Pontos Internos

Caso já se tenham calculadas as tensões nos pontos internos, pode-se determinar as deformações nestes fazendo-se uso das relações constitutivas. No entanto, as deformações também podem ser determinadas diretamente, a partir dos deslocamentos e forças no contorno.

Analogamente ao que foi mostrado no item 5.10, pode-se escrever equações integrais de contorno para as deformações. Para tal substitui-se o valor dos deslocamentos, dadas pela equação integral de chapas (5.9) na expressão da deformação de um ponto (3.6). A equação assim obtida tem uma expressão idêntica àquela obtida para as tensões, no entanto os núcleos são diferentes. Os novos núcleos são apresentados a seguir.

$$\varepsilon_{ij}(P) = -\int_{\Gamma} S_{kij}(X, P) u_k(X) d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{kij}(X, P) p_k(X) d\Gamma + \int_{\Omega} D_{kij}(X, P) b_k(X) d\Omega \quad (5.103)$$

$$D_{kij} = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)r} \left[(1-2\nu)(\delta_{ki}r_{,j} + \delta_{kj}r_{,i}) - \delta_{ij}r_{,k} + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] \quad (5.104)$$

$$S_{kij} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial \eta} \left[\nu(\delta_{jk}r_{,i} + \delta_{ik}r_{,j}) + \delta_{ij}r_{,k} - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] + [(1-2\nu)\delta_{jk} + 2\nu r_{,j}r_{,k}] \eta_i + \right. \\ \left. + [(1-2\nu)\delta_{ik} + 2\nu r_{,i}r_{,k}] \eta_j - (1-2\nu)(\delta_{ij} - 2r_{,i}r_{,j}) \eta_k \right\} \quad (5.105)$$

A integral de domínio presente em 5.103 pode ser transformada em uma integral de contorno de célula, utilizando-se, para tal, o mesmo processo usado em 5.10. Para isso,

emprega-se a expressão (5.95) com os seguintes núcleos, para os casos de células lineares e quadráticas, respectivamente:

$$\Psi_{kt} = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(1-2\nu)(\delta_{it} R_{,k} + \delta_{ik} R_{,t}) - \delta_{kt} R_{,i} + 2R_{,i} R_{,k} R_{,t} \right] \left(A_{iv} \frac{R}{2} R_{,v} + b_i^0 \right) \quad (5.106)$$

$$\Psi_{kt} = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(1-2\nu)(\delta_{it} R_{,k} + \delta_{ik} R_{,t}) - \delta_{kt} R_{,i} + 2R_{,i} R_{,k} R_{,t} \right] \left(\alpha_{ivl} \frac{R^2}{3} R_{,v} R_{,l} + A_{iv} \frac{R}{2} R_{,v} + b_i^0 \right) \quad (5.107)$$

5.11.1-Determinação das Deformações no Contorno:

As deformações no contorno podem ser facilmente determinadas a partir das tensões no contorno usando-se as relações constitutivas. Assim deve-se calcular as tensões, conforme descrito no item 5.10.1, depois empregar-se a relação (3.9) para determinar as deformações.

Capítulo 6

Formulação do MEC para Meios Elasto-plásticos.

6.1-Introdução:

No Capítulo 5 apresentou-se um resumo da formulação do método dos elementos de contorno aplicado a problemas elásticos. Naquele capítulo a formulação foi deduzida a partir do teorema de Betti. Neste, a técnica dos resíduos ponderados é empregada.

Nas expressões deste capítulo os índices variam até dois, a menos que se informe o contrário.

6.2-Formulação para Meios Elasto-plásticos:

Como foi visto no Capítulo 4, a formulação plástica deve ser tratada em termos de incrementos de tensão e deformação, uma vez que os problemas elasto-plásticos são dependentes do histórico do carregamento. Assim, a equação de equilíbrio das tensões deve ser escrita na forma:

$$\dot{\sigma}_{ij,j} + \dot{b}_i = 0 \quad (6.1)$$

O ponto significa que se trata de uma variação das grandezas envolvidas. Adotando-se a solução do problema de Kelvin, expressão (A.35), como função ponderadora, pode-se escrever que:

$$\int_{\Omega} (\dot{\sigma}_{ij,j} + \dot{b}_i) u_{ki}^* d\Omega = 0 \quad (6.2)$$

A expressão (6.2) pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\dot{\sigma}_{ij} u_{kj}^*) - \dot{\sigma}_{ij} u_{ki,j}^* \right] d\Omega + \int_{\Omega} \dot{b}_i u_{ki}^* d\Omega = 0 \quad (6.3)$$

Aplicando-se o teorema da divergência ao primeiro termo da primeira integral, tem-se:

$$\int_{\Gamma} \dot{\sigma}_{ij} u_{ki}^* \eta_j d\Gamma - \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij} u_{ki,j}^* d\Omega + \int_{\Omega} \dot{b}_i u_{ki}^* d\Omega = 0 \quad (6.4)$$

Arranjando-se adequadamente os índices de (6.4), e usando-se a relação (A.2), chega-se a:

$$\int_{\Gamma} \dot{p}_i u_{ki}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \dot{b}_i u_{ki}^* d\Omega = \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij} \epsilon_{kij}^* d\Omega \quad (6.5)$$

A integral do segundo membro de (6.5) pode ser desenvolvida substituindo-se o valor de $\dot{\sigma}_{ij}$ dado pela expressão (4.83), chegando-se a:

$$\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij} \epsilon_{kij}^* d\Omega = \int_{\Omega} 2\mu \left(\dot{\epsilon}_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \dot{\epsilon}_{mm} \right) \epsilon_{kij}^* d\Omega - \int_{\Omega} 2\mu \left(\dot{\epsilon}_{ij}^p + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \dot{\epsilon}_{mm}^p \right) \epsilon_{kij}^* d\Omega \quad (6.6)$$

Arranjando-se os índices de (6.6) de maneira adequada, pode-se escrever que:

$$\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij} \varepsilon_{kij}^* d\Omega = \int_{\Omega} 2\mu \left(\varepsilon_{kij}^* + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kmm}^* \right) \dot{\varepsilon}_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} 2\mu \left(\varepsilon_{kij}^* + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kmm}^* \right) \dot{\varepsilon}_{ij}^p d\Omega \quad (6.7)$$

logo:

$$\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij} \varepsilon_{kij}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \dot{\varepsilon}_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^p d\Omega \quad (6.8)$$

$$\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij} \varepsilon_{kij}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^p d\Omega \quad (6.9)$$

$$\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij} \varepsilon_{kij}^* d\Omega = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{kij}^* \dot{u}_i) - \sigma_{kij,j}^* \dot{u}_i \right] d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^p d\Omega \quad (6.10)$$

Aplicando-se novamente o teorema da divergência e lembrando que a solução fundamental do problema corresponde a um delta de Dirac, chega-se a:

$$\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij} \varepsilon_{kij}^* d\Omega = \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + \dot{u}_k - \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^p d\Omega \quad (6.11)$$

Portanto, a equação integral terá a forma:

$$\dot{u}_k = \int_{\Gamma} \dot{p}_i u_{ki}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* \dot{b}_i d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^p d\Omega \quad (6.12)$$

Utilizando-se o mesmo artifício aplicado em (5.10), chega-se a [27]:

$$c_{ki}\dot{u}_i = \int_{\Gamma} \dot{p}_i u_{ki}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* \dot{b}_i d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^p d\Omega \quad (6.13)$$

sendo o tensor c_{ik} o mesmo definido em (5.13). A última integral, que considera o efeito da plastificação do meio, possui um núcleo singular. Este núcleo é semelhante ao apresentado em (5.89), apresentando algumas correções para o estado plano de deformação, dado por:

$$\sigma_{kij}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[(1-2\nu) (\delta_{ki} r_{,j} + \delta_{kj} r_{,i} - K \delta_{ij} r_{,k}) + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] \quad (6.14)$$

sendo \mathbf{K} , respectivamente, para os estados planos de tensão e deformação:

$$K=1 \quad \text{e} \quad K = \frac{1}{1-2\nu} \quad (6.15)$$

O cálculo da última integral de (6.13) pode ser feito com uso de células de domínio. Devido ao fato do núcleo, definido em (6.14), apresentar uma singularidade forte, as integrais destas células deverão receber um tratamento especial, que será apresentado mais adiante.

Aplicando-se à expressão (6.13) o mesmo processo de discretização aplicado a (5.12), pode-se montar um sistema de equações do tipo:

$$[H]\{\dot{U}\} = [G]\{\dot{P}\} + \{\dot{B}\} + \{\dot{\Sigma}\} \quad (6.16)$$

Todos os termos de (6.16) têm seus análogos em (5.26), exceto pelo vetor $\{\dot{\Sigma}\}$, que dá a influência das deformações

plásticas nos deslocamentos e forças de contorno. Caso não haja plastificação do meio, $\{\dot{\Sigma}\}$ será identicamente nulo. Neste caso, (6.16) se resume aos termos de (5.26).

Após a imposição das condições de contorno, o sistema de equações assume a forma:

$$[A]\{\dot{X}\} = \{\dot{F}\} + \{\dot{\Sigma}\} \quad (6.17)$$

As deformações plásticas envolvidas na formulação são, a princípio, desconhecias. Assim assume-se, para estas, um valor arbitrário, que é corrigido com base nos novos deslocamentos e forças calculados. Este processo é repetido até se atingir uma estabilização dos valores obtidos.

A matriz $[A]$ do sistema de equações (6.17) é a mesma usada na solução do problema em regime elástico (5.28) e não sofre alteração durante o processo de cálculo. O vetor $\{\dot{F}\}$, que define o **passo de carga**, é proporcional ao vetor $\{F\}$ do sistema (5.28), sendo esta proporcionalidade discutida mais adiante. Assim, devem-se fazer atualizações apenas no vetor $\{\dot{\Sigma}\}$, para cada iteração do processo.

6.3-Redução do Carregamento:

Os problemas elasto-plásticos podem ou não apresentar plastificação desde o início do carregamento [32]. Nos problemas estudados neste trabalho, admite-se que uma parte do carregamento é resistido em regime elástico e outra em regime elasto-plástico. Assim sendo, deve-se determinar o ponto em que passam a existir deformações plásticas no corpo em estudo. Isso é feito resolvendo-se o problema em regime elástico e verificando se, em

algum ponto, o critério de escoamento adotado é atingido ou ultrapassado.

Adotando-se o critério de escoamento de Von Mises, o corpo estará se deformando em regime elasto-plástico quando em algum de seus pontos for respeitada a expressão (4.1), repetida a seguir:

$$J_2 - k^2 = 0$$

Resolvendo-se o problema em regime elástico, a expressão anterior pode produzir um valor maior que zero. Neste caso, pode-se definir um fator de redução do carregamento, $\bar{\kappa}$. Este fator corresponde a fração do carregamento suportado em regime elástico, tendo seu valor dado por:

$$\bar{\kappa} = \frac{k}{\sqrt{J_2}} \tag{6.18}$$

Deve-se notar que na expressão (6.18), toma-se o valor máximo de J_2 no corpo, e que $\bar{\kappa}$ terá sempre um valor entre zero e um. Quando $\bar{\kappa}$ assume um valor unitário, significa que todo o carregamento foi suportado em regime elástico. Um valor nulo corresponde à inexistência de uma fase elástica, sendo todo carregamento suportado em fase plástica. Com isso tem-se que a fração elástica do vetor resposta é dada por:

$$\{X\}_e = \bar{\kappa}\{X\} \tag{6.19}$$

O restante do carregamento, correspondente à fração complementar de $\bar{\kappa}$, deve ser aplicado em pequenas parcelas chamadas **passos de carga**. Assumindo-se que os passos de carga são

todos de mesmo tamanho, e em um número total de \mathbf{N} , é fácil notar que:

$$\{\dot{F}\} = \{F\} \left(\frac{1 - \bar{K}}{N} \right) \quad (6.20)$$

O vetor resposta do problema elasto-plástico será definido como:

$$\{X\} = \{X\}_e + \sum_{i=1}^N \{\dot{X}\}_i \quad (6.21)$$

6.4-Determinação do Vetor $\{\dot{\Sigma}\}$:

Para determinar o valor do vetor $\{\dot{\Sigma}\}$, a seguinte integral deve ser avaliada sobre as células do domínio:

$$\dot{\Sigma}_k = \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^p d\Omega \quad (6.22)$$

Esta avaliação pode ser feita por quadratura numérica, sobre o domínio das células ou sobre seu contorno. A avaliação sobre o domínio demanda um maior tempo computacional, além de necessitar de um tratamento especial para a singularidade do núcleo σ^* . Este procedimento é descrito com detalhes no Capítulo 7.

A integração sobre o contorno das células traz um ganho considerável de tempo computacional, no entanto deve-se efetuar algumas alterações no núcleo da integral. Estas alterações são análogas às aquelas feitas nos Itens 5.9, 5.10 e 5.11. Neste caso

particular tem-se a seguinte aproximação para as deformações plásticas no interior das células:

$$\varepsilon_{ij}^p = A_{ij\nu} r r_{,\nu} + b_{ij}^0 \quad (6.23)$$

Na expressão (6.23), os tensores $A_{ij\nu}$ e b_{ij}^0 são formados pelas constantes que definem os planos usados para aproximar cada componente do tensor ε_{ij}^p nos pontos internos da célula. Seguindo o mesmo procedimento, já descrito nos itens supra citados, chega-se a:

$$\dot{\Sigma}_k = \int_{\Gamma_c} R_{,i} \eta_i \Psi_k d\Gamma \quad (6.24)$$

$$\Psi_k = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu) (\delta_{jk} R_{,i} + \delta_{ik} R_{,j} - K \delta_{ij} R_{,k}) + 2R_{,i} R_{,j} R_{,k} \left(A_{ij\nu} \frac{R}{2} R_{,\nu} + b_{ij}^0 \right) \right] \quad (6.25)$$

A integral (6.24) não apresenta problemas com singularidades, pois quando o ponto de colocação está sobre um dos lados da célula o produto $R_{,i} \eta_i$ é nulo, dispensando qualquer tipo de tratamento especial. No entanto deve-se mencionar que, nos exemplos testados, notou-se uma instabilidade nos resultados quando o ponto de colocação está próximo de um lado da célula, semelhante àquela originada de uma quase singularidade.

6.5-Determinação dos Incrementos de Deformações em Pontos Internos:

A equação integral para incrementos de deformações em pontos internos pode ser obtida efetuando-se a derivada da expressão

(6.12) e substituindo seu valor na relação entre a deformação e o deslocamento (3.6) [25]. A derivada das integrais sobre o contorno pode ser efetuada sob o sinal de integração, pois o ponto de colocação é interno, logo estas integrais não produzirão singularidades [25] [27]. A integral referente a força de massa apresenta uma singularidade fraca, por ser efetuada sobre o domínio, mas a diferenciação ainda pode ser feita sob o sinal da integral [25].

Já a integral (6.22) apresenta uma singularidade forte e seu valor deve ser tomado no sentido do valor principal de Cauchy [25]. Por este motivo a derivada não pode ser feita diretamente sob o sinal da integral [25] [22].

Para resolver este problema, subtrai-se do domínio total uma porção infinitesimal ω em torno do ponto de colocação, logo:

$$\dot{\Sigma}_k = \int_{\Omega-\omega} \sigma_{kij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^p d\Omega + \int_{\omega} \sigma_{kij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^p d\Omega \quad (6.26)$$

A primeira integral pode agora ser diferenciada sob o sinal de integração e a segunda deve receber um tratamento especial. Ter-se-á que:

$$\dot{\Sigma}_{k,h}(P) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \int_{\Omega-\omega} \frac{\partial}{\partial P_h} \sigma_{kij}^*(X,P) \dot{\epsilon}_{ij}^p(X) d\Omega(X) + \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial P_h} \int_{\omega} \sigma_{kij}^*(X,P) \dot{\epsilon}_{ij}^p(X) d\Omega(X) \quad (6.27)$$

A expressão final para os incrementos de deformações em pontos internos será:

$$\begin{aligned}
\dot{\epsilon}_{ij}(P) = & -\int_{\Gamma} S_{kij}(X, P) \dot{u}_k(X) d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{kij}(X, P) \dot{p}_k(X) d\Gamma + \int_{\Omega} D_{kij}(X, P) \dot{b}_k(X) d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} \sigma_{khij}^*(X, P) \epsilon_{kh}^p(X) d\Omega + k_1 \epsilon_{ij}^p(P) + k_2 \delta_{ij} \epsilon_{mm}^p(P)
\end{aligned}
\tag{6.28}$$

Na equação (6.28) os núcleos das integrais elásticas são os mesmos já apresentados. Os demais termos são:

$$\begin{aligned}
\sigma_{khij}^* = & \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left[2(1-2\nu)K\delta_{hk}r_{,i}r_{,j} + 2\delta_{ij}r_{,k}r_{,h} - 8r_{,i}r_{,j}r_{,k}r_{,h} + \right. \\
& \left. + 2\nu(\delta_{jh}r_{,i}r_{,k} + \delta_{jk}r_{,i}r_{,h} + \delta_{ijh}r_{,j}r_{,k} + \delta_{ijk}r_{,j}r_{,h}) + (1-2\nu)(\delta_{jk}\delta_{ih} + \delta_{ik}\delta_{jh} - K\delta_{ij}\delta_{hk}) \right]
\end{aligned}
\tag{6.29}$$

$$k_1 = \frac{3-4\nu}{4(1+\nu)}
\tag{6.30}$$

$$k_2 = \begin{cases} -\frac{1}{8(1-\nu)} & \text{EPD} \\ -\frac{1-4\nu}{8(1-\nu)} & \text{EPT} \end{cases}
\tag{6.31}$$

A integral envolvendo o núcleo (6.29) apresenta singularidade forte, devendo receber tratamento adequado, conforme já foi mencionado no Item 6.4. Também é possível avaliar-se esta integral no contorno das células, assim tem-se:

$$\dot{\Sigma}_{kh} = \int_{\Gamma_c} R_{,i} \eta_i \Psi_{kh} d\Gamma
\tag{6.32}$$

$$\Psi_{ij} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[2(1-2\nu)K\delta_{hk}R_iR_j + 2\delta_{ij}R_kR_h - 8R_iR_jR_kR_h + \right. \\ \left. + 2\nu(\delta_{jh}R_iR_k + \delta_{jk}R_iR_h + \delta_{ih}R_jR_k + \delta_{ik}R_jR_h) + (1-2\nu)(\delta_{jk}\delta_{ih} + \delta_{ik}\delta_{jh} - K\delta_{ij}\delta_{hk}) \right] \cdot \\ \cdot \left(A_{kh\nu}R_{,v} + b_{kh}^0 \frac{\ln R}{R} \right) \quad (6.33)$$

O núcleo (6.33) da integral de contorno de célula(6.32) apresenta singularidade forte, no entanto o produto $R_i\eta_i$ se anula quando o ponto de colocação está sobre o contorno da célula. Isso dispensa algum tratamento da singularidade, mas problemas de quase singularidade podem ocorrer. Um desenho adequado da malha de células faz-se necessário para evitar este tipo de problema. Se o ponto de colocação estiver no interior da célula, a formulação torna-se inválida, pois neste caso a integral deve ser tomada no sentido do valor principal de Cauchy.

6.6-Determinação dos Incrementos de Tensões em Pontos

Internos:

Pode-se, a exemplo do que foi mostrado no item anterior, deduzir-se equações integrais para a determinação dos incrementos de tensões nos pontos internos do corpo. No entanto, uma forma alternativa de se obter estas tensões é utilizar a seguinte expressão:

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2\mu(\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^p) + \lambda\delta_{ij}(\dot{\epsilon}_{kk} - \dot{\epsilon}_{kk}^p) \quad (6.34)$$

As deformações plásticas podem ser obtidas a partir das deformações totais utilizando-se a expressão (4.94b), repetida a seguir:

$$\epsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{\bar{s}_{kl} \dot{\epsilon}_{kl}}{\left(1 + \frac{H}{3\mu}\right) \bar{\sigma}_e^2} \bar{s}_{ij}$$

(i, j, k, l = 1, 2, 3)

Deve-se salientar que para a relação constitutiva (6.34), λ deve ser tomado segundo (3.18).

6.7-Determinação dos Incrementos de Tensões e Deformações em Pontos do Contorno:

A determinação dos incrementos de tensões e deformações no contorno pode ser feita mais facilmente em um sistema de coordenadas normal e tangencial ao contorno. Assim tem-se que:

$$\dot{\sigma}_{\eta\eta} = \dot{p}_i \eta_i$$

(6.35)

$$\dot{\sigma}_{\Gamma\eta} = \dot{\sigma}_{\eta\Gamma} = \dot{p}_i \Gamma_{,i}$$

(6.36)

Nas expressões (6.35) e (6.36), η_i e $\Gamma_{,i}$ são versores normal e tangente ao contorno respectivamente.

É também possível determinar o incremento de deformação total na direção tangente ao contorno, derivando-se as funções de deslocamento, ou seja:

$$\dot{\epsilon}_{\Gamma\Gamma} = \frac{\partial \dot{u}_\Gamma}{\partial \Gamma}$$

(6.37)

Para se determinar as demais componentes dos tensores, é preciso que o tensor do incremento de deformações plásticas seja

conhecido. Seu valor foi arbitrado no processo de cálculo dos deslocamentos e forças de contorno, descrito no Item 6.3, e este valor deve ser usado aqui. O incremento de tensão na direção tangente pode agora se determinado por:

$$\dot{\sigma}_{\Gamma\Gamma} = \frac{1}{1-\nu} \left[\nu \dot{\sigma}_{\eta\eta} + 2\mu (\dot{\epsilon}_{\Gamma\Gamma} - \dot{\epsilon}_{\Gamma\Gamma}^p) - \frac{2\mu\nu}{1-\nu} \dot{\epsilon}_{zz}^p \right] \quad (6.38a)$$

$$\dot{\sigma}_{\Gamma\Gamma} = 2\mu(1+\nu) (\dot{\epsilon}_{\Gamma\Gamma} - \dot{\epsilon}_{\Gamma\Gamma}^p) + \nu \dot{\sigma}_{\eta\eta} \quad (6.38b)$$

Deve-se usar a expressão (6.38a) para o estado plano de deformação e (6.38b) para o estado plano de tensão.

Os incrementos de deformações nas demais direções são dados por:

$$\dot{\epsilon}_{\eta\Gamma} = \dot{\epsilon}_{\Gamma\eta} = \frac{\dot{\sigma}_{\Gamma\eta}}{2\mu} + \dot{\epsilon}_{\Gamma\eta}^p \quad (6.39)$$

$$\dot{\epsilon}_{\eta\eta} = \frac{1}{2\mu} \left[\dot{\sigma}_{\eta\eta} - \frac{\nu}{1+\nu} (\dot{\sigma}_{\eta\eta} + \dot{\sigma}_{\Gamma\Gamma} + \dot{\sigma}_z) \right] + \dot{\epsilon}_{\eta\eta}^p \quad (6.40)$$

Em se tratando de um problema de estado plano de deformação, tem-se:

$$\dot{\epsilon}_{zz} = 0 \quad (6.41a)$$

$$\dot{\sigma}_{zz} = \nu(\dot{\sigma}_{\Gamma\Gamma} + \dot{\sigma}_{\eta\eta}) + 2\mu(1+\nu)\dot{\epsilon}_{kk}^p \quad (6.41b)$$

Para o estado plano de tensão valem as seguintes relações:

$$\dot{\epsilon}_{zz} = \frac{-\nu}{2\mu(1+\nu)}(\dot{\sigma}_{\Gamma\Gamma} + \dot{\sigma}_{\eta\eta}) + \dot{\epsilon}_{zz}^p \quad (6.42a)$$

$$\dot{\sigma}_{zz} = 0 \quad (6.42b)$$

O tensor do incremento de deformações plásticas, inicialmente arbitrado, pode agora ser determinado pela expressão (4.94b). Com o novo valor de $\dot{\epsilon}_{ij}^p$, recalculam-se os valores dos deslocamentos e forças de contorno, até obter-se uma convergência.

Capítulo 7

Técnicas de Integração Numérica

7.1-Introdução:

Nos capítulos precedentes foi apresentada a formulação do método dos elementos de contorno. Uma das etapas da implementação do método consiste na avaliação das integrais de contorno e domínio, seja de forma analítica, como discutido no Capítulo 5, ou numericamente. Neste sentido, algumas alternativas são apresentadas, tendo por base o uso da quadratura gaussiana.

7.2-Quadratura Gaussiana Ordinária:

A quadratura gaussiana consiste em se aproximar o valor de uma dada integral, em um intervalo normalizado de -1 a 1, pela integral de um polinômio interpolador da função neste trecho. A integral deste polinômio é calculada fazendo-se o somatório do valor da função polinomial em determinadas **abscissas**, multiplicadas por fatores de ponderação, conhecidos como **pesos**, como mostrado a seguir:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{i=1}^N f(\xi_i) * w_i \quad (7.1)$$

Cada abscissa com seu respectivo peso formam o que é chamado **ponto de Gauss**.

Avaliando-se a integral desta maneira, tendo-se uma função integrando polinomial de grau inferior a $2N+1$, sendo N o número de pontos de Gauss utilizados, o erro na integração

depende apenas da acuidade com que as abscissas ξ_i e os pesos w_i foram calculados [30]. Se a função integrando não for um polinômio, haverá um erro que deverá diminuir a medida que a quantidade de pontos de Gauss aumentar.

Esta técnica pode ser empregada diretamente na avaliação das integrais de contorno (5.35), repetidas a seguir:

$$h_{ik}^l = \int_{-1}^1 p_{ik}^*(X, P) \phi_l J(\xi) d\xi \quad g_{ik}^l = \int_{-1}^1 u_{ik}^*(X, P) \phi_l J(\xi) d\xi$$

Para o elemento isoparamétrico linear, o jacobiano assume um valor constante igual a metade do comprimento do elemento. Para elementos de grau mais elevado, este deve ser calculado ponto a ponto segundo (5.36).

As integrais de contorno de uma célula também podem ser avaliadas por este processo. Neste caso, cada lado da célula é integrado separadamente, e a integral total será o somatório das integrais sobre os lados.

Esta forma de se integrar as funções conduz a resultados bons quando o ponto de colocação se encontra a uma distância do elemento de contorno superior ao seu comprimento [29]. Caso isso não ocorra, haverá um problema de **quase singularidade** [2] [3], ou seja, os núcleos das integrais passam a ter gradientes muito elevados e fazem a integral numérica divergir. O tratamento deste tipo de problema será apresentado mais adiante. Tabelas contendo o valor das abscissa e pesos para a quadratura gaussiana podem ser encontradas em [30].

As integrais de contorno de células, tratadas neste trabalho, não apresentaram singularidades, por isso sua avaliação com quadratura gaussiana ordinária conduziu a bons resultados.

7.3-Quadratura Gaussiana Logarítmica:

Quando o ponto de colocação encontra-se sobre o elemento tem-se o problema da singularidade dos núcleos das integrais. A singularidade logarítmica do núcleo U^* pode ser tratada numericamente com uso de uma quadratura gaussiana ligeiramente modificada.

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) f(\eta) d\eta = \sum_{i=1}^N f(\eta_i) w_i \quad (7.2)$$

Novamente o erro na integração numérica de uma função polinomial depende apenas da acuidade com que os pesos e as abscissas foram calculados [2] [3] [30]. No caso do núcleo U^* , apenas uma parte deste é multiplicada pelo logaritmo, logo, apenas parte deste deverá ser integrada como (7.2), sendo o restante tratado com quadratura ordinária [2] [3].

Deve-se notar também que o tratamento da singularidade logarítmica só é necessário se a função ponderadora não se anular no ponto de colocação [2] [3]. Caso esta se anule, a quadratura ordinária poderá ser usada.

Neste trabalho observou-se que quando o ponto de colocação não está nos extremos do elemento, é adequado que este seja dividido em partes menores, tendo, cada parte, o ponto de colocação em um extremo. Esta técnica foi testada neste trabalho, mas não foi definitivamente implementada. Nos exemplos testados os resultados foram bons, mas optou-se por utilizar o ponto de colocação fora do contorno, para o caso do elemento quadrático, e soluções analíticas, para o elemento linear, dispensando este tipo de tratamento.

7.4-Sub-elementos:

Conforme o que foi exposto em [29], e ratificado nos itens anteriores, quando o ponto de colocação aproxima-se do contorno a ser tratado, o erro na integração numérica dos elementos adjacentes a este ponto tende a aumentar significativamente devido a presença da quase singularidade

Para melhorar a acuidade da integração numérica, possibilitando uma maior proximidade entre os pontos de colocação e o contorno, é introduzida a técnica de sub-elementos. Tal técnica consiste em se determinar a contribuição de um elemento como a soma das contribuições de elementos menores, de forma que a distância entre estes e o ponto de colocação seja sempre maior que o comprimento dos mesmos.

A técnica será ilustrada para o tratamento de elementos quadráticos, mas pode ser facilmente aplicada a elementos lineares e acredita-se ser possível estendê-la para elementos de qualquer grau.

7.4.1-Divisão de um Elemento:

A Figura 7.1 mostra um elemento de contorno, caracterizado pelos pontos nodais $(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$, e o ponto de colocação \mathbf{P} . Sua geometria e as variáveis nodais são aproximadas por polinômios de Lagrange, ϕ_i , de segundo grau, de forma que qualquer ponto \mathbf{X}_s do contorno, assim como suas variáveis, podem ser escritas em função dos pontos nodais conforme a relação a seguir:

$$X_s = \phi_i(\Gamma) \cdot X_i \quad (7.3)$$

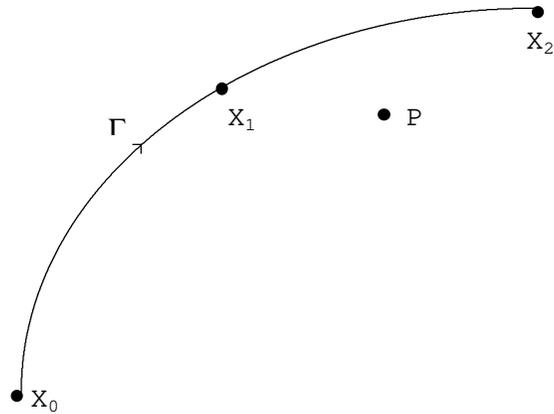


Figura 7.1 - Elemento de contorno

As contribuições do elemento da Figura 7.3 às matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} são dadas pelas sub-matrizes \mathbf{h}_{ik}^j e \mathbf{g}_{ik}^j segundo as integrais:

$$h_{ik}^j = \int_{\Gamma} \phi_j p_{ik}^* d\Gamma \quad (7.4)$$

$$g_{ik}^j = \int_{\Gamma} \phi_j u_{ik}^* d\Gamma \quad (7.5)$$

Mas ocorrem situações em que o ponto de colocação \mathbf{P} está muito próximo do elemento para que as integrais (7.4) e (7.5) possam ser avaliadas com a acuidade necessária. Para corrigir este problema, divide-se o elemento em dois novos sub-elementos $(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0, \mathbf{X}_1)$ e $(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1, \mathbf{X}_2)$, conforme a Figura 7.2.

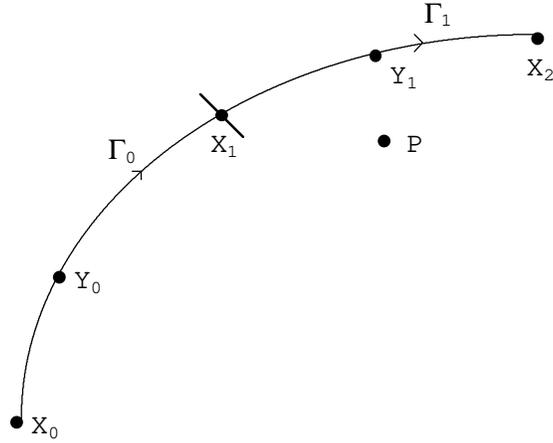


Figura 7.2 - Sub-elementos

Para descrever a geometria e as variáveis nodais dos novos elementos, são criados os pontos auxiliares Y_0 e Y_1 , e novas funções de Lagrange φ_i , quadráticas, tal que, para Γ_0 e Γ_1 tem-se, respectivamente, as seguintes relações:

$$X_s = \varphi_0(\Gamma_0) \cdot X_0 + \varphi_1(\Gamma_0) \cdot Y_0 + \varphi_2(\Gamma_0) \cdot X_1 \quad (7.6)$$

$$X_s = \varphi_0(\Gamma_1) \cdot X_1 + \varphi_1(\Gamma_1) \cdot Y_1 + \varphi_2(\Gamma_1) \cdot X_2 \quad (7.7)$$

E cada sub-elemento w , sendo $w=0,1$, contribuirá para as matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} segundo as integrais:

$$m_{ik}^{jw} = \int_{\Gamma_w} \varphi_j p_{ik}^* d\Gamma_w \quad (7.8)$$

$$n_{ik}^{jw} = \int_{\Gamma_w} \phi_j u_{ik}^* d\Gamma_w \quad (7.9)$$

Como as funções ϕ_i e φ_i são ambas quadráticas, pode-se escrever ϕ_i em função de φ_i , sem qualquer imprecisão. As relações a seguir são escritas respectivamente para os trechos Γ_0 e Γ_1 .

$$\phi_i(\Gamma_0) = \phi_i(\Gamma_{X_0}) \cdot \varphi_0(\Gamma_0) + \phi_i(\Gamma_{Y_0}) \cdot \varphi_1(\Gamma_0) + \phi_i(\Gamma_{X_1}) \cdot \varphi_2(\Gamma_0) \quad (7.10)$$

$$\phi_i(\Gamma_1) = \phi_i(\Gamma_{X_1}) \cdot \varphi_0(\Gamma_1) + \phi_i(\Gamma_{Y_1}) \cdot \varphi_1(\Gamma_1) + \phi_i(\Gamma_{X_2}) \cdot \varphi_2(\Gamma_1) \quad (7.11)$$

Nas expressões (7.10) e (7.11), $\phi_n(\Gamma_{X_i})$ representa o valor da função ϕ_n calculado no ponto \mathbf{x}_i do elemento.

Pode-se escrever a integral (7.4) como sendo:

$$\int_{\Gamma} \phi_j p_{ik}^* d\Gamma = \int_{\Gamma_0} \phi_j p_{ik}^* d\Gamma_0 + \int_{\Gamma_1} \phi_j p_{ik}^* d\Gamma_1 \quad (7.12)$$

mas:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_0} \phi_j p_{ik}^* d\Gamma_0 + \int_{\Gamma_1} \phi_j p_{ik}^* d\Gamma_1 &= \phi_j(\Gamma_{X_0}) \cdot \int_{\Gamma_0} \varphi_0 p_{ik}^* d\Gamma_0 + \phi_j(\Gamma_{Y_0}) \cdot \int_{\Gamma_0} \varphi_1 p_{ik}^* d\Gamma_0 + \phi_j(\Gamma_{X_1}) \cdot \int_{\Gamma_0} \varphi_2 p_{ik}^* d\Gamma_0 + \\ &+ \phi_j(\Gamma_{X_1}) \cdot \int_{\Gamma_1} \varphi_0 p_{ik}^* d\Gamma_1 + \phi_j(\Gamma_{Y_1}) \cdot \int_{\Gamma_1} \varphi_1 p_{ik}^* d\Gamma_1 + \phi_j(\Gamma_{X_2}) \cdot \int_{\Gamma_1} \varphi_2 p_{ik}^* d\Gamma_1 \end{aligned} \quad (7.13)$$

logo:

$$\int_{\Gamma} \phi_j p_{ik}^* d\Gamma = \phi_j(\Gamma_{X_0}) \cdot m_{ik}^{00} + \phi_j(\Gamma_{Y_0}) \cdot m_{ik}^{10} + \phi_j(\Gamma_{X_1}) \cdot m_{ik}^{20} + \phi_j(\Gamma_{X_1}) \cdot m_{ik}^{01} + \phi_j(\Gamma_{Y_1}) \cdot m_{ik}^{11} + \phi_j(\Gamma_{X_2}) \cdot m_{ik}^{21} \quad (7.14)$$

Uma dedução semelhante pode ser feita para a integral (7.5) e assim obtém-se as contribuições do elemento, em função das contribuições dos sub-elementos, como sendo:

$$h_{ik}^j = \phi_j(\Gamma_{X_0}) \cdot m_{ik}^{00} + \phi_j(\Gamma_{Y_0}) \cdot m_{ik}^{10} + \phi_j(\Gamma_{X_1}) \cdot m_{ik}^{20} + \phi_j(\Gamma_{X_1}) \cdot m_{ik}^{01} + \phi_j(\Gamma_{Y_1}) \cdot m_{ik}^{11} + \phi_j(\Gamma_{X_2}) \cdot m_{ik}^{21} \quad (7.15)$$

$$g_{ik}^j = \phi_j(\Gamma_{X_0}) \cdot n_{ik}^{00} + \phi_j(\Gamma_{Y_0}) \cdot n_{ik}^{10} + \phi_j(\Gamma_{X_1}) \cdot n_{ik}^{20} + \phi_j(\Gamma_{X_1}) \cdot n_{ik}^{01} + \phi_j(\Gamma_{Y_1}) \cdot n_{ik}^{11} + \phi_j(\Gamma_{X_2}) \cdot n_{ik}^{21} \quad (7.16)$$

A formulação, como foi apresentada, facilita a montagem de rotinas recursivas, em que cada sub-elemento é dividido novamente, até que a distância entre o ponto de colocação e o mesmo, seja, no mínimo, superior ao comprimento deste.

7.4.2-Fluxograma do Tratamento por Sub-elementos:

É apresentado na Figura 7.3 um fluxograma simplificado de uma rotina recursiva para o cálculo das matrizes \mathbf{h}_{ik}^j e \mathbf{g}_{ik}^j , para o caso de elementos quadráticos. A implementação deste algoritmo para o uso de elementos de ordem diferente é feita com o aumento ou diminuição, conforme o caso, dos índices das coordenadas dos nós.

No fluxograma, \mathbf{X}_n , \mathbf{Y}_n e \mathbf{P} representam as coordenadas dos pontos nodais, auxiliares e de colocação, respectivamente. Na composição das matrizes \mathbf{h}_{ik}^j e \mathbf{g}_{ik}^j , a partir de $\mathbf{M1}_{ik}^j$, $\mathbf{M2}_{ik}^j$, $\mathbf{N1}_{ik}^j$ e $\mathbf{N2}_{ik}^j$, os laços dos índices \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} foram deixados implícitos para maior simplicidade do diagrama.

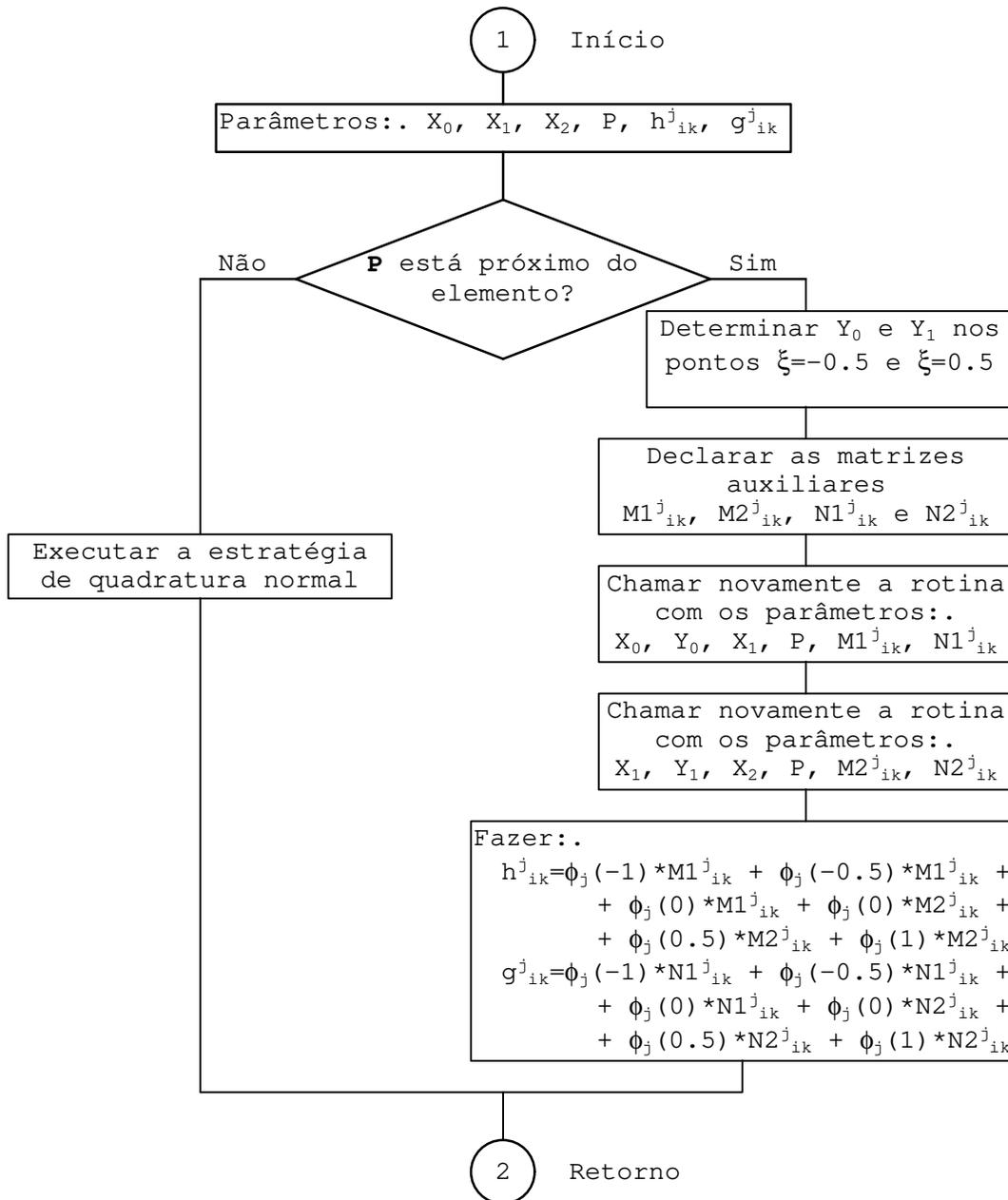


Figura 7.3 - Fluxograma da rotina recursiva de sub-elementos

7.4.3-Aplicação da Técnica dos Sub-elementos a Funções Interpoladoras Diferentes:

No item 7.3 foi descrita a técnica dos sub-elementos, onde um elemento de contorno era sucessivamente dividido em elementos menores. Porém, nesta técnica era mantida a mesma ordem

nos sub-elementos, ou seja, elementos quadráticos foram divididos em sub-elementos quadráticos e elementos lineares, em sub-elementos lineares.

Se, nas expressões (7.6) e (7.7), forem usadas funções interpoladoras lineares em lugar das quadráticas, ter-se-á uma aproximação, tanto da geometria quanto das variáveis de contorno, do elemento quadrático por meio de funções lineares. Na Figura 7.4 são apresentadas as formas das funções interpoladoras do elemento quadrático, descritas por meio de trechos retos.

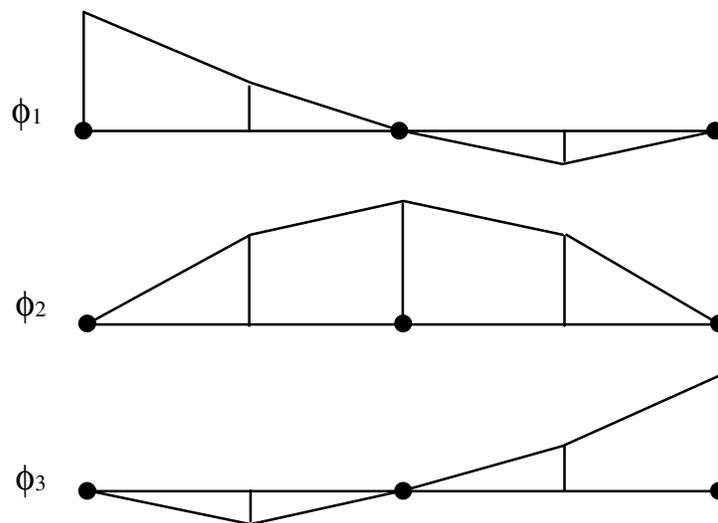


Figura 7.4 - Aproximação linear para o elemento quadrático.

Pode-se obter bons resultados dividindo-se o elemento em quatro partes, conforme ilustrado, se o contorno for linear e as variáveis forem de transição suave. Para contornos curvos, ou variáveis de contorno com grandes oscilações, recomenda-se dividir o elemento em oito ou mais partes.

A grande vantagem desta técnica é possibilitar o uso da formulação analítica do elemento linear, apresentada no item 5.8.1, para simular um elemento de grau mais alto, trazendo também um ganho de velocidade no processamento.

7.5-Integração Numérica sobre uma Área:

As técnicas descritas até agora tratam de integrações unidimensionais. Quando é necessário avaliar uma integral dupla, integral de área, ou tripla, integral de volume, normalmente é preciso dividir o domínio em partes menores onde se realizará a integração. A integral total será o somatório das integrais sobre as partes, ou células.

É conveniente que estas células sejam triangulares ou quadrangulares, por facilidade na divisão do domínio nestes tipos de geometria. A integração sobre células quadrangulares é bastante simples, porém nem todo domínio pode ser facilmente discretizado com este tipo de célula. Já as células triangulares apresentam uma grande flexibilidade na discretização de domínios complexos, mas sua integração requer um esforço computacional maior.

Neste trabalho adotou-se a célula triangular por comodidade da discretização, mas o tratamento de ambas será descrito.

7.5.1-Celulas Quadrangulares:

A integração sobre a célula quadrangular consiste em se realizar duas integrações ordinárias simultâneas, ou seja:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N f(\xi_i, \xi_k) w_i w_k \quad (7.17)$$

Todas as observações feitas para a integral ordinária continuam validas. Na Figura 7.5 são mostrados dois tipos de células quadrangulares.

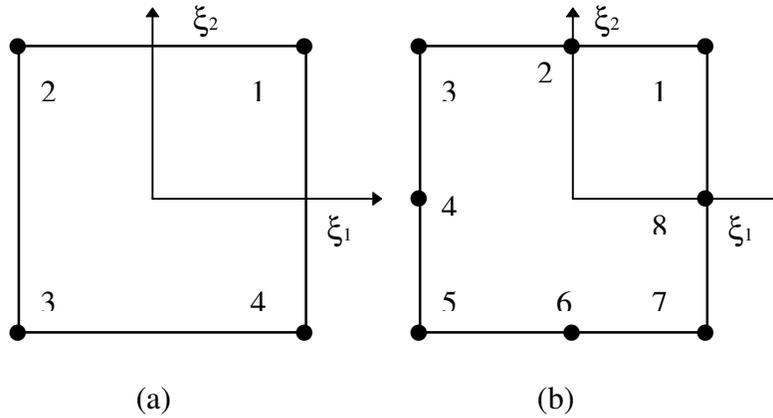


Figura 7.5 - Células quadrangulares.

A célula mostrada em 7.5a é chamada bilinear e suas funções interpoladoras são:

$$\phi_1 = \frac{1}{4}(1+\xi_1)(1+\xi_2) \quad (7.18a)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{4}(1-\xi_1)(1+\xi_2) \quad (7.18b)$$

$$\phi_3 = \frac{1}{4}(1-\xi_1)(1-\xi_2) \quad (7.18c)$$

$$\phi_4 = \frac{1}{4}(1+\xi_1)(1-\xi_2) \quad (7.18d)$$

A célula biquadrática, ilustrada em 7.5b, tem as seguintes funções de interpolação:

$$\phi_1 = -\frac{1}{4}(1+\xi_1)(1+\xi_2)(1-\xi_1-\xi_2)$$

(7.19a)

$$\phi_2 = \frac{1}{2}(1-\xi_1^2)(1+\xi_2)$$

(7.19b)

$$\phi_3 = -\frac{1}{4}(1-\xi_1)(1+\xi_2)(1+\xi_1-\xi_2)$$

(7.19c)

$$\phi_4 = \frac{1}{2}(1-\xi_1)(1-\xi_2^2)$$

(7.19d)

$$\phi_5 = -\frac{1}{4}(1-\xi_1)(1-\xi_2)(1+\xi_1+\xi_2)$$

(7.19e)

$$\phi_6 = \frac{1}{2}(1-\xi_1^2)(1-\xi_2)$$

(7.19f)

$$\phi_7 = -\frac{1}{4}(1+\xi_1)(1-\xi_2)(1-\xi_1+\xi_2)$$

(7.19g)

$$\phi_8 = \frac{1}{2}(1+\xi_1)(1-\xi_2^2)$$

(7.19h)

O jacobiano da transformação do sistema de coordenadas do problema para o sistema homogêneo $\xi_1 \xi_2$ é dado por:

$$J(\xi_1, \xi_2) = \left| \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \right| \quad (7.20)$$

sendo:

$$x_i(\xi_1, \xi_2) = \phi_k x_i^k \quad (7.21)$$

7.5.2-Células Triangulares:

A forma mais simples de se referir a um ponto interno de uma célula triangular é a partir do sistema de coordenadas intrínsecas ilustrado na Figura 7.6.

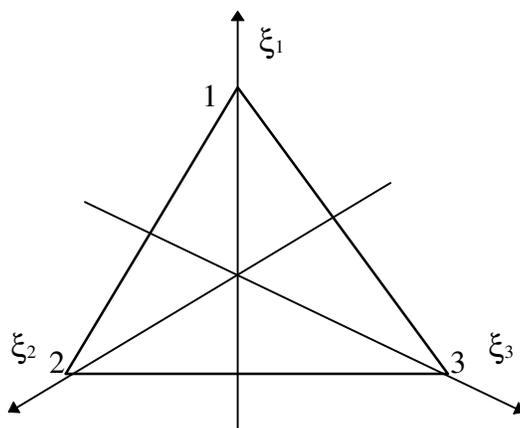


Figura 7.6 - Sistema de coordenadas intrínsecas.

Estas coordenadas são definidas como a relação entre a área total da célula e a área de cada um dos triângulos formados pelo ponto a ser referido e os demais vértices, conforme mostrado na Figura 7.8.

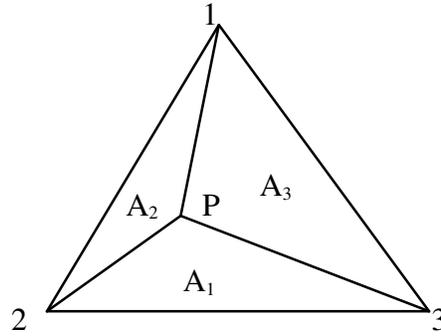


Figura 7.7 - Definição das coordenadas intrínsecas.

Assim, sendo A_T a área total da célula, as coordenadas intrínsecas do ponto P serão:

$$\xi_1 = \frac{A_1}{A_T} \quad \xi_2 = \frac{A_2}{A_T} \quad \xi_3 = \frac{A_3}{A_T} \quad (7.22)$$

É fácil ver que o sistema é linearmente dependente, valendo a seguinte relação:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1 \quad (7.23)$$

As funções interpoladoras para este tipo de célula são as próprias coordenadas intrínsecas, se a célula for linear. Para a célula triangular quadrática, ilustrada na Figura 7.7, as funções de interpolação são:

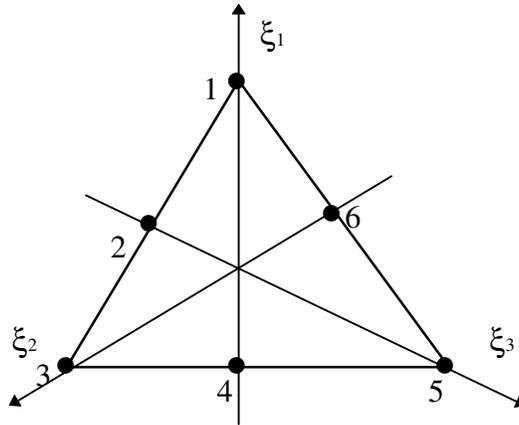


Figura 7.8 - Nós da célula triangular quadrática.

$$\phi_1 = \xi_1(2\xi_1 - 1) \tag{7.24a}$$

$$\phi_2 = 4\xi_1\xi_2 \tag{7.24b}$$

$$\phi_3 = \xi_2(2\xi_2 - 1) \tag{7.24c}$$

$$\phi_4 = 4\xi_2\xi_3 \tag{7.24d}$$

$$\phi_5 = \xi_3(2\xi_3 - 1) \tag{7.24e}$$

$$\phi_6 = 4\xi_3\xi_1 \tag{7.24f}$$

Existem tabelas de pesos e abscissas próprias para integração neste tipo de célula, como mostrado em [2] e [3], mas estas tabelas têm quantidades limitadas de pontos, não permitindo um cálculo com acuidade necessária. Para se utilizar os mesmos pesos e abscissas da quadratura gaussiana, a integração sobre este tipo de célula pode ser feita dividindo-a em três outras células quadrangulares, conforme ilustrado na Figura 7.9, e executando-se a integral sobre cada uma destas.

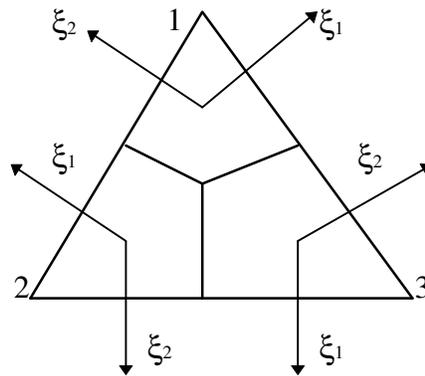


Figura 7.9 - Divisão da célula triangular em células quadrangulares.

Desta forma podem ser geradas tabelas para integração de células triangulares, a partir das tabelas de pontos de Gauss, calculando-se a coordenada intrínseca da célula triangular a partir das coordenadas das abscissas das células quadrangulares.

Uma forma mais prática de se fazer esta integração será descrita mais adiante, quando será discutida a técnica das sub-células.

7.6-Tratamento de Singularidades no Domínio:

Quando o ponto de colocação se encontrar no interior de uma célula, ou sobre seu contorno, haverá um problema de singularidade na determinação da integral por processos numéricos. Para as singularidades do tipo logaritmo e inverso do raio, estas integrais podem ser avaliadas introduzindo-se no

integrando uma função que, multiplicada pela função singular, elimine a singularidade quando o raio tender a zero. Isso pode ser feito mapeando-se os pontos de Gauss para um sistema de coordenadas degenerado.

Na Figura 7.10a mostra-se uma célula quadrangular com o ponto de colocação sobre um de seus nós. Esta célula é então substituída por duas células degeneradas, conforme ilustrado na Figura 10c, e a integração efetuada sobre estas células.

A degeneração consiste em se forçar a coincidência, em uma célula bilinear ou biquadrática, dos nós de um dos lados, como é mostrado na Figura 10b. Esta coincidência dos nós torna o sistema $\xi_1 \xi_2$ singular, ou seja, o determinante jacobiano se anula no ponto em que se forçou a coincidência. Desta forma, o produto do integrando singular com jacobiano do sistema degenerado converge para um valor finito [3], podendo-se avaliar a integral por quadratura numérica.

Caso o ponto se encontre no interior da célula, a separação pode ser feita como ilustrado na Figura 7.10d

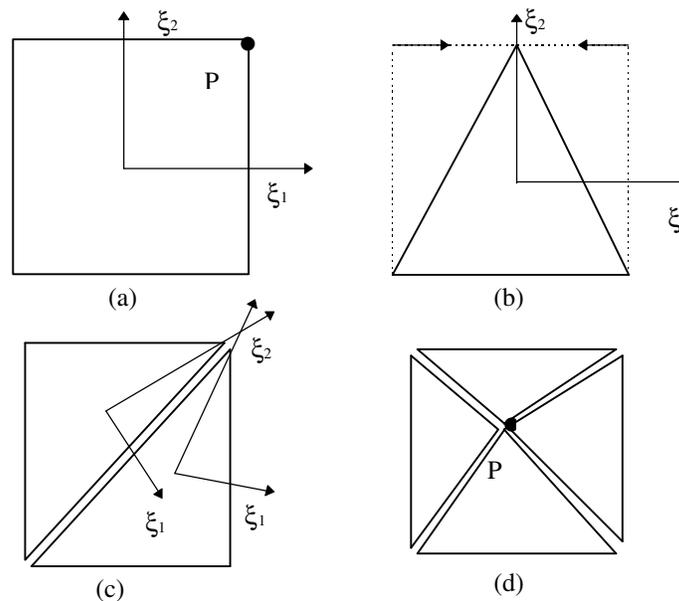


Figura 7.10 - Células quadrangulares degeneradas.

7.7-Técnica das Sub-células:

Foi mostrado no item 7.5.2 uma forma de se integrar a célula triangular usando-se uma divisão em células quadrangulares. Para tal foi feito um mapeamento das abscissas das células quadrangulares para as coordenadas intrínsecas das células triangulares. O valor final da integral sobre a célula seria simplesmente a soma das integrais sobre cada uma das partes em que se dividiu a célula original.

Esta técnica demanda um esforço computacional e de programação um pouco elevado, já que se deve determinar o valor da coordenada intrínseca da célula triangular a partir das abscissas das células quadrangulares para se poder calcular os valores das funções ponderadoras em cada um dos pontos de Gauss.

Além disso, se houver uma singularidade a ser tratada em uma das células quadrangulares, uma outra rotina será necessária apenas para prever este caso.

Pode-se, analogamente ao que foi feito no item 7.4, escrever as funções ponderadoras da célula triangular a partir das funções das células quadrangulares. Desta forma tem-se a expressão:

$$\phi_i^{TN}(P) = \phi_i^T(1_N) \cdot \phi_1^{QN}(P) + \phi_i^T(2_N) \cdot \phi_2^{QN}(P) + \phi_i^T(3_N) \cdot \phi_3^{QN}(P) + \phi_i^T(4_N) \cdot \phi_4^{QN}(P) \quad (7.25)$$

Sendo que ϕ_i^{TN} representa o valor da função interpoladora \mathbf{i} da célula triangular calculada sobre a célula quadrangular \mathbf{N} , ϕ_i^{QN} representam as funções interpoladoras da célula quadrangular \mathbf{N} e $\phi_i^T(X_N)$ é o valor da função interpoladora da célula triangular, calculada sobre o nó \mathbf{X} da célula quadrangular \mathbf{N} . Os nós das células quadrangulares estão ilustrados na Figura 7.11.

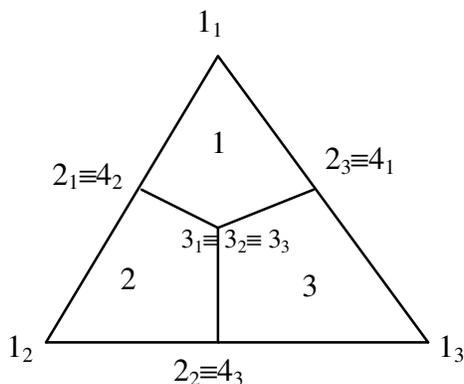


Figura 7.11 - Nós das células quadrangulares que compõem a célula triangular.

Assim, sendo $F(P)$ a função núcleo da integral a ser avaliada sobre a célula triangular, tem-se:

$$\int_T F(P) \phi_i^T(P) d\Omega = \sum_{N=1}^3 \int_Q F(P) \phi_i^{TN}(P) d\Omega \quad (7.26)$$

Substituindo-se a expressão (7.25) na integral do segundo membro de (7.26), chega-se a:

$$\int_T F(P) \phi_i^T(P) d\Omega = \sum_{N=1}^3 \sum_{X=1}^4 \phi_i^T(X_N) \int_Q F(P) \phi_X^{QN}(P) d\Omega \quad (7.27)$$

Desta forma a integral sobre a célula triangular é obtida a partir da soma ponderada de integrais sobre células quadrangulares. Caso haja uma singularidade sobre um dos nós da célula triangular, por exemplo o nó 1 da Figura 7.9, a divisão pode ser feita conforme ilustrado na Figura 7.12.

Assim, para avaliar a integral singular em um programa, basta passar o valor de \mathbf{N} para quatro e chamar a rotina que calcula a integral sobre a célula quadrangular, repetindo da maneira adequada o parâmetro referente às coordenadas dos nós.

O mesmo tratamento pode ser feito para células quadráticas, bastando apenas ajustar-se os limites das somatórias para os valores adequados.

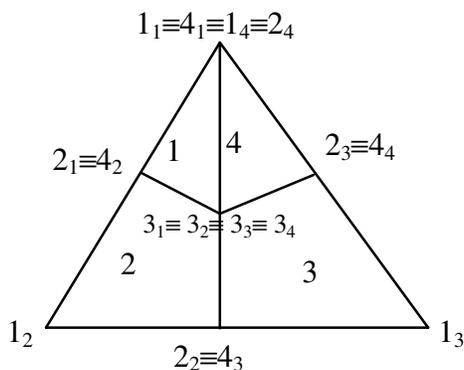


Figura 7.12 - Divisão da célula triangular para tratamento da singularidade no nó 1.

Capítulo 8

Exemplos Numéricos

8.1-Introdução:.

Apresentam-se neste capítulo alguns exemplos de problemas de estados planos de tensão e deformação para ilustrar a aplicação do método dos elementos de contorno.

Para os exemplos em regime elástico, processados com os elementos lineares, os pontos de colocação foram posicionados sobre o contorno e as singularidades das integrais foram tratadas analiticamente. Já no caso dos elementos quadráticos optou-se por posicionar-se os pontos de colocação fora do domínio. Estes localizam-se sobre uma linha, perpendicular ao contorno e que passa pelo nó referente ao ponto de colocação, a uma distância de $1/128$ vezes o comprimento do maior dos elementos adjacentes.

No caso de exemplos processados em regime elasto-plástico, apenas os elementos lineares foram empregados. O posicionamento dos pontos de colocação foi alterado em cada exemplo, visando a melhor avaliação das integrais de domínio.

Cada um dos exemplos escolhidos tem sua solução analítica conhecida. Com isso tem-se um termo de comparação confiável para os resultados obtidos.

8.2-Exemplo de um Corpo em Estado Plano de Deformação:.

Neste primeiro exemplo trata-se de um problema extremamente simples. Um corpo paralelepípedo de seção quadrada de dimensão unitária. As seções transversais do corpo estão simplesmente apoiadas no substrato e livres para se deformarem transversalmente. Com esta vinculação o corpo está sujeito a um

estado plano de deformação em uma seção genérica, provocado por um carregamento distribuído, conforme a ilustração da Figura 8.1.

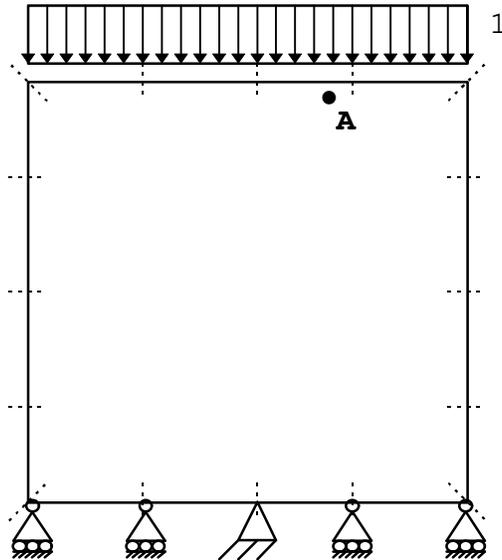


Figura 8.1 - Corpo paralelepípedo sujeito a carregamento distribuído.

O apoio fixo mostrado, na Figura 8.1, é um artifício usado para fornecer ao programa um deslocamento conhecido na direção horizontal. São usados dezesseis nós, sendo quatro duplos, localizados nos vértices, tanto para elementos lineares quanto para os quadráticos. Foi adotado um módulo de elasticidade **E** unitário e o coeficiente de Poisson ν igual a 0,3. São calculadas as tensões e deformações no ponto **A**, que tende ao contorno.

Na Tabela 8.1 são mostrados os deslocamentos no ponto **A**, localizado a uma distância do contorno de 10^{-x} unidades de comprimento. Os resultados previstos pela teoria da elasticidade são comparados àqueles obtidos através dos elementos lineares integrados analiticamente e elementos quadráticos integrados numericamente pela técnica dos sub-elementos com 16 e 48 pontos de Gauss.

Tabela 8.1 - Deslocamentos adimensionais do ponto **A**.

Dist. cont.	Solução analítica	Linear analítico	Quadrático 16 pontos	Quadrático 48 pontos
10^{-2}	-.9009	-.9009	-.9008999999999993	-.9009
10^{-3}	-.90909	-.90909	-.9090900000000004	-.9090899999999994
10^{-4}	-.909909	-.909909	-.90990900000000055	-.9099089999999995
10^{-5}	-.9099909	-.9099909	-.9099908999999577	-.9099908999999437
10^{-6}	-.90999909	-.90999909	-.9099990900000959	-.909999090001803
10^{-7}	-.909999909	-.909999909	-.909999909036763	-.909999909020138
10^{-8}	-.9099999909	-.9099999909	-.909999990490745	-.909999990427139

Na Tabela 8.2 são apresentados os resultados de tensões internas na direção do carregamento seguindo a mesma seqüência da Tabela 8.1. A única diferença entre as Tabelas consiste na quadratura usada no elemento linear, que neste caso é numérica utilizando a técnica dos sub-elementos e 48 pontos de Gauss. As tensões obtidas através dos elementos lineares foram calculadas com base nos deslocamentos obtidos dos elementos analíticos.

Tabela 8.2 - Tensões adimensionais na direção do carregamento no ponto **A**.

Dist. cont.	Solução analítica	Linear Analítico e 48 pontos	Quadrático 16 pontos	Quadrático 48 pontos
10^{-2}	-1	-1.000000000000001	-.9999999999999843	-.999999999999969
10^{-3}	-1	-1.000000000000173	-1.00000000014312	-.999999999995981
10^{-4}	-1	-.99999999998645	-.999999999411369	-.999999999618226
10^{-5}	-1	-1.00000000537603	-1.00000001704631	-.999999950941957
10^{-6}	-1	-.999999060997365	-.9999791949514	-.999999549633088
10^{-7}	-1	-1.00000058598195	-.999074240222844	-.999745051091431
10^{-8}	-1	-1.00355640005295	-.908143317372037	-.927832878045574

Os valores das deformações na direção do carregamento são apresentados na Tabela 8.3. Estas foram obtidas, a partir das integrais de contorno, com a mesma metodologia usada no cálculo dos valores apresentados na Tabela 8.2.

Tabela 8.3 - Deformações na direção do carregamento no ponto **A**.

Dist. cont.	Solução analítica	Linear Analítico e 48 pontos	Quadrático 16 pontos	Quadrático 48 pontos
10^{-2}	-.91	-.910000000000013	-.909999999999865	-.909999999999965
10^{-3}	-.91	-.910000000002091	-.910000000179119	-.909999999995274
10^{-4}	-.91	-.909999999975966	-.909999999274164	-.90999999955561
10^{-5}	-.91	-.910000006435687	-.910000006725566	-.909999942343564
10^{-6}	-.91	-.90999888377867	-.909976718779916	-.909999368738218
10^{-7}	-.91	-.910009633022499	-.908984071369119	-.909695833765883
10^{-8}	-.91	-.914173799909063	-.812538008400722	-.830532875014481

Cabe observar que, quando é usada a técnica dos sub-elementos, os resultados obtidos com os elementos quadráticos convergem para um valor próximo ao obtido com os elementos lineares analíticos, à medida em que os pontos de colocação são trazidos para perto do contorno. Caso não seja usado a técnica dos sub-elementos o resultado tende a piorar.

Nota-se que os valores obtidos com os elementos quadráticos, mostrados nas Tabelas 8.2 e 8.3, começam a degenerar antes daqueles obtidos com os elementos lineares. Pode-se dizer que isso se deve ao melhor campo de deslocamentos obtidos com a formulação analítica, empregada nos elementos lineares.

Estes resultados atestam a acuidade dos elementos analíticos e da técnica dos sub-elementos.

8.3-Tubo de Parede Espessa: .

A Figura 8.2 mostra um exemplo, extraído de [2] pág. 266. Consiste em um tubo de paredes espessas sujeito a uma pressão interna de 100N/mm^2 , raio interno de 10mm e externo de 25mm , módulo de elasticidade $E=200\text{kN/mm}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu=0.25$.

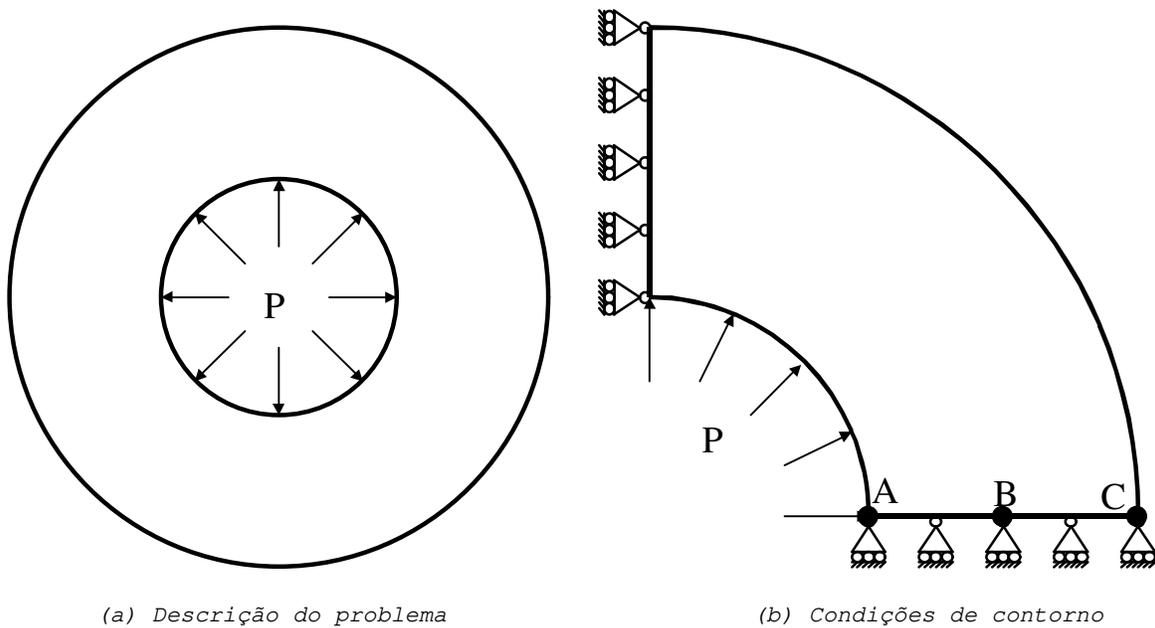


Figura 8.2 - Tubo de parede espessa.

A discretização utilizada, como mostrado na Figura 8.3, consiste em 34 nós, sendo 4 duplos, 30 elementos isoparamétricos lineares para o primeiro exemplo e 15 elementos isoparamétricos quadráticos para os dois seguintes.

Os resultados dos deslocamentos dos pontos **A**, **B** e **C**, mostrados na Figura 8.2 (b), são apresentados na Tabela 8.4. Nesta Tabela os resultados previstos pela formulação analítica do problema foram comparados aos obtidos pelo tratamento numérico, analogamente ao Item 8.2. Adicionalmente mostra-se o tempo de processamento necessário para cada exemplo.

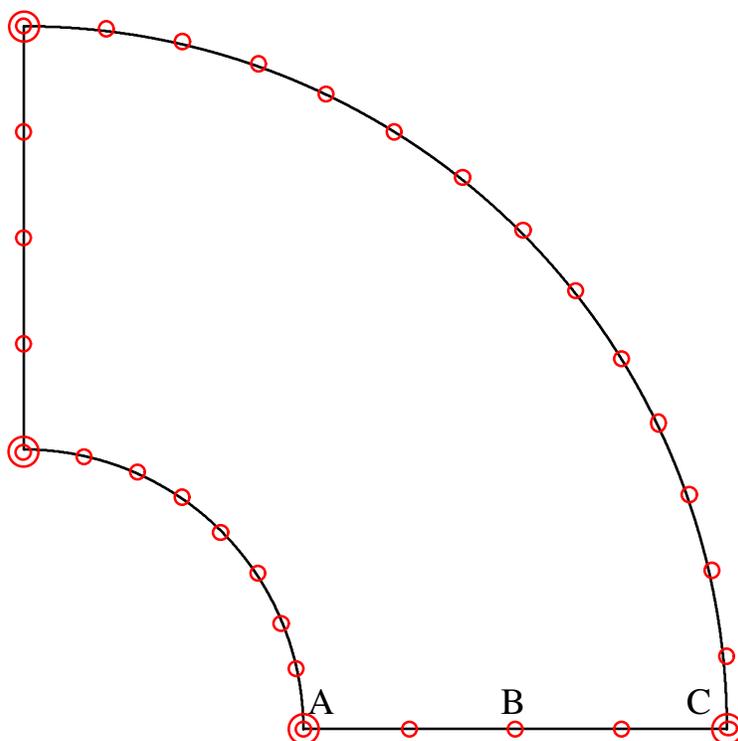


Figura 8.3 - Discretização do contorno.

Tabela 8.4 - Deslocamentos dos pontos A, B e C em 10^{-3} mm.

Pt	Solução analítica (10^{-3} mm)	Linear analítico (10^{-3} mm)	Quadrático 16 pontos (10^{-3} mm)	Quadrático 48 pontos (10^{-3} mm)
A	8.03571428571428	7.89606559023049	7.95054315360737	7.950543153608
B	5.29336734693878	5.24682496343935	5.30131308566282	5.301313085663
C	4.46428571428571	4.42053061617185	4.48487787491613	4.484877874916
Tp	-	5 segundos	22 segundos	48 segundos

As tensões e deformações, mostradas nas Tabelas 8.5 e 8.6 respectivamente, foram calculadas a partir dos valores dos deslocamentos e forças no contorno, sem o uso de equações integrais, como foi descrito nos itens 5.10.1 e 5.11.1.

Tabela 8.5 - Módulo das tensões radiais dos pontos A, B e C em N/mm^2 .

Pt	Solução analítica (N/mm^2)	Linear analítico (N/mm^2)	Quadrático 16 pontos (N/mm^2)	Quadrático 48 pontos (N/mm^2)
A	100	83.692824452834	85.416762379954	85.416762379957
B	19.825072886297	22.192112727959	22.257112607542	22.257112607542
C	0	.044018621128641	1.8682435266246	1.8682435266169

Tabela 8.6 - Deformações radiais dos pontos A, B e C.

Pt	Solução analítica (10^{-4})	Linear analítico (10^{-4})	Quadrático 16 pontos (10^{-4})	Quadrático 48 pontos (10^{-4})
A	-6.84523809523810	-5.9340790827668	-6.079443544922	-6.0794435449214
B	-1.83430515063168	-1.9296546262760	-1.944600058868	-1.9446000588679
C	-.595238095238095	-.59913893314894	-.5068689262907	-.50686892629104

É interessante notar que o aumento do número de pontos de Gauss não alterou significativamente o resultado dos elementos quadráticos. Isso atesta, neste exemplo, a boa convergência da quadratura numérica das integrais de contorno.

Com o objetivo de se obter resultados melhores, testou-se também a discretização mostrada na Figura 8.3b.

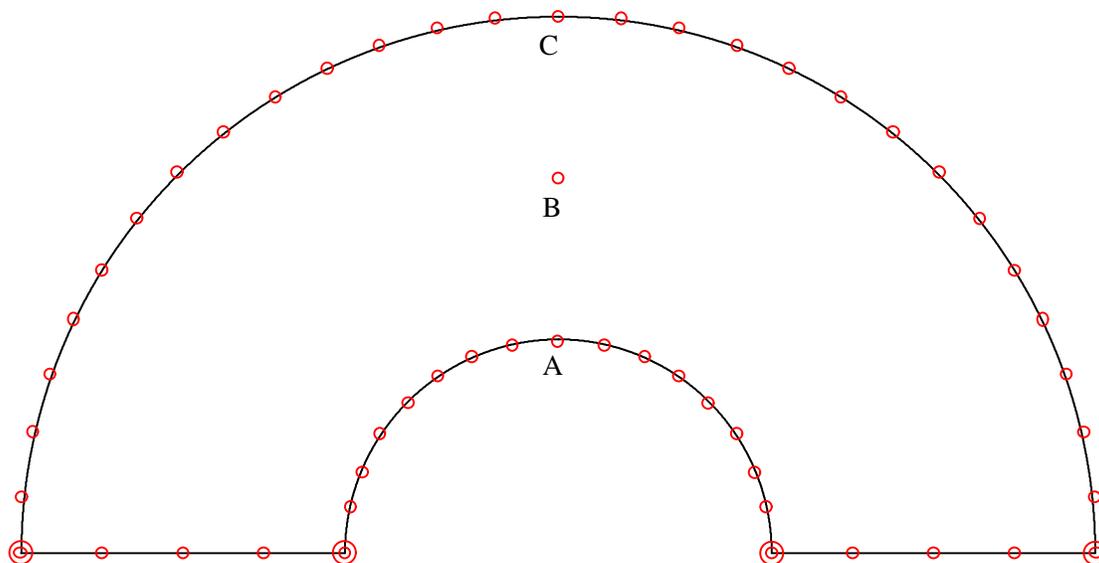


Figura 8.3b - Discretização do contorno.

A obtenção dos novos valores segue a mesma metodologia utilizada anteriormente, exceto para as tensões e deformações do ponto **B**. Como se trata de um ponto interno, os valores foram calculados utilizando-se as equações integrais descritas nos itens 5.10 e 5.11.

Tabela 8.7 - Deslocamentos dos pontos A, B e C em 10^{-3} mm.

Pt	Solução analítica (10^{-3} mm)	Linear analítico (10^{-3} mm)	Quadrático 16 pontos (10^{-3} mm)	Quadrático 48 pontos (10^{-3} mm)
A	8.03571428571428	7.9821948678393	8.06320382894351	8.06320382894326
B	5.29336734693878	5.24772107095621	5.31984671369953	5.31984671369934
C	4.46428571428571	4.43128104670961	4.48920142859104	4.48920142859078
Tp	-	21 segundos	60 segundos	154 segundos

Tabela 8.8 - Módulo das tensões radiais dos pontos A, B e C em N/mm^2 .

Pt	Solução Analítica (N/mm^2)	Linear Analítico (N/mm^2)	Quadrático 16 Pontos (N/mm^2)	Quadrático 48 Pontos (N/mm^2)
A	100	100	100	100
B	19.825072886297	19.5999131109299	19.8674028258395	19.867402825839
C	0	0	0	0

Tabela 8.9 - Deformações radiais dos pontos A, B e C.

Pt	Solução Analítica (10^{-4})	Linear Analítico (10^{-4})	Quadrático 16 Pontos (10^{-4})	Quadrático 48 Pontos (10^{-4})
A	-6.84523809523810	-6.8063311048776	-6.8408855463392	-6.8408855463393
B	-1.83430515063168	-1.8138462932316	-1.8364897985680	-1.8364897985680
C	-.595238095238095	-.58914426354634	-.59735930668163	-.59735930668155

Com a nova discretização foi possível tomar-se os valores em um eixo de simetria do problema, o que melhorou os resultados.

Deve-se notar também que a demanda de tempo de processamento para o elemento analítico é bastante inferior àquela exigida pelo elemento quadrático.

8.4-Cavidade Circular em Meio Elástico Infinito:.

A cavidade em meio elástico infinito constitui um problema bastante comum em perfurações de túneis e poços profundos. Na Figura 8.4 mostra-se o contorno do problema, assim como os quatro primeiros pontos internos nos quais se quer determinar os deslocamentos, as tensões e as deformações.

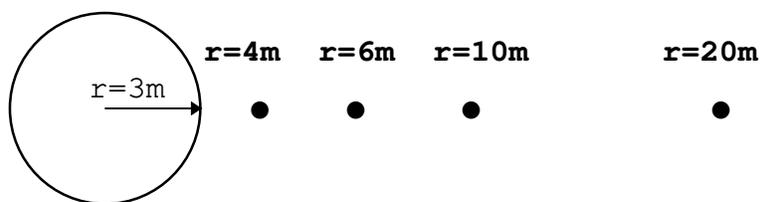


Figura 8.4 - Quatro Primeiros Pontos onde se Determinará a Tensão.

Este problema constitui um caso de estado plano de deformação em que as tensões na direção do eixo do orifício são nulas. Foi adotado um material com $E=207900\text{Pa}$ e $\nu=0.1$. O orifício tem um raio de três metros com uma pressão interna aplicada de 100Pa . As distâncias dos pontos ao centro do orifício, expressas em metros, são mostradas na Tabela 8.10, assim como os deslocamentos na direção radial.

Na discretização do problema foram usados vinte e quatro nós no contorno, com vinte e quatro elementos lineares ou doze quadráticos.

Tabela 8.10 - Deslocamentos nos pontos internos em mm.

Dist. Cent.	Solução Analít.	Linear Analítico	Quadrático 16 Pontos	Quadrático 48 Pontos
4m	1.1904761904762	1.1653203913509	1.190107398827	1.1901073988274
6m	.79365079365079	.77686981665147	.79340132302020	.79340132302021
10m	.47619047619048	.46612188216230	.47604073150489	.47604073150490
20m	.23809523809524	.23306094124963	.23802036357555	.23802036357555
50m	.09523809523810	.09322437654836	.09520814523058	.09520814523058
200m	.02380952380952	.02330609413930	.02380203629870	.02380203629869
1Km	.00476190476190	.00466121882515	.00476040725962	.00476040725962

Tabela 8.11 - Módulo tensões radiais nos pontos internos em Pa.

Dist. Cent.	Solução Analít.	Linear Analítico e 48 Pontos	Quadrático 16 Pontos	Quadrático 48 Pontos
4m	56.25	55.077020882147	56.235160514403	56.235160515846
6m	25	24.471402926580	24.992169639462	24.992169639462
10m	9	8.8097035859948	8.9971701490654	8.9971701490655
20m	2.25	2.2024258919776	2.2492924483212	2.2492924483213
50m	0.36	.35238814327127	.35988678929074	.35988678929074
200m	0.0225	.02202425896139	.02249292430352	.02249292430352
1km	0.0009	.00088097035847	.00089971697207	.00089971697207

Tabela 8.12 - Deformações nos pontos internos.

Dist. Cent.	Solução Analít. (-10^{-4})	Linear Analítico e 48 Pontos (-10^{-4})	Quadrático 16 Pontos (-10^{-4})	Quadrático 48 Pontos (-10^{-4})
4m	2.9761904761905	2.9141043279456	2.9753989797068	2.9753989797824
6m	1.3227513227513	1.2947832152660	1.3223369513806	1.3223369513806
10m	.47619047619048	.46612188296876	.47604074724735	.47604074724735
20m	.11904761904762	.11653047049087	.11901018238571	.11901018238571
50m	.01904761904762	.01864487530578	.01904162906136	.01904162906136
200m	.00119047619048	.00116530470695	.00119010181499	.00119010181500
1km	.00004761904762	.00004661218828	.00004760407260	.00004760407260

Neste exemplo, os elementos quadráticos produzem um resultado mais próximo do analítico. Mesmo assim o erro nos elementos lineares é da ordem de apenas dois por cento e o tempo

de processamento necessário é bastante inferior àquele gasto pelos elementos quadráticos.

Nota-se que, também neste exemplo, o aumento do número de pontos de Gauss não trouxe uma melhora no resultado, ao contrário do que se viu no Item 8.2. Novamente isso atesta a boa convergência da quadratura numérica das integrais de contorno.

Na Tabela 8.13 são apresentados resultados obtidos com elementos lineares, porém com uma discretização de trinta e dois elementos. As quadraturas numéricas foram efetuadas com dezesseis pontos de Gauss.

Tabela 8.13 - Valores obtidos com 32 elementos lineares.

Dist. Cent.	Elemento Analítico Deslocamentos (mm)	Tensões 16 Pontos (-1Pa)	Deformações 16 Pontos (-10⁻⁴)
4m	1.17623747569485	55.578704803229	2.94067042699135
6m	.784157595045522	24.7009638595961	1.30692930923916
10m	.470494560467164	8.89234707490078	.470494554940398
20m	.235247281373944	2.22308680035101	.117623640275928
50m	.0940989126901004	.355693889740764	.0188197825271387
200m	.0235247281787993	.0222308681281811	.00117623640890303
1km	.00470494563933932	.0008892347251770	.0000470494563585

Aumentando-se o número de nós em um terço, o erro em relação à solução analítica cai para menos de 0.3%, sem um aumento considerável no tempo de processamento.

8.5-Disco em Rotação: .

A análise das tensões, em um disco chato em rotação, é um problema no qual há forças de massa envolvidas. Se a espessura deste disco for pequena, comparada ao raio, esta análise pode ser feita considerando-se um estado plano de tensões. Neste exemplo adotou-se um disco com um raio de dez metros, sujeito a uma

velocidade angular de 1 rad/s, módulo de elasticidade E unitário, coeficiente de Poisson ν igual a 0.25 e massa específica unitária.

O contorno foi discretizado com vinte e quatro nós, um mesmo número de elementos lineares e doze elementos quadráticos. Para o domínio foram usadas células triangulares, com um vértice no centro do disco e os outros no contorno, sendo vinte e quatro para o caso linear, conforme a ilustração da Figura 8.5b, e doze para o quadrático, como visto na Figura 8.5a.

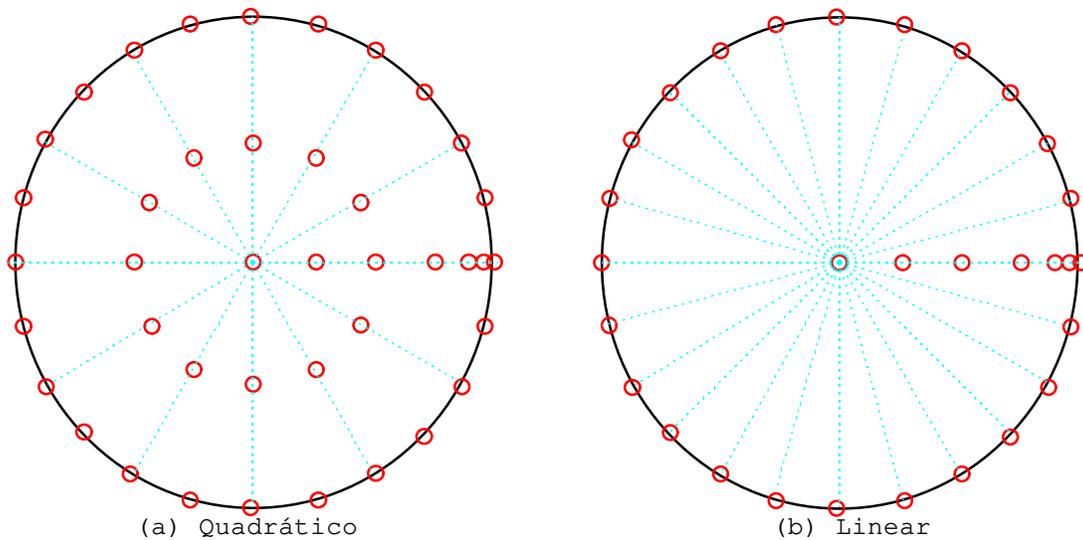


Figura 8.5 - Discretização do Domínio.

Nas Tabelas 8.14 e 8.15 são apresentadas as tensões nos pontos internos nas direções radiais e tangenciais respectivamente. Neste tratamento, as integrais de domínio foram determinadas nos contornos das células conforme descrito no Item 5.10. Adicionalmente apresenta-se na Tabela 8.14 os tempos necessários para processar os exemplos. Os elementos lineares, mesmo tendo uma discretização com maior número de elementos e células, foram processados em um tempo menor.

Tabela 8.14 - Tensões radiais nos pontos internos em Pa.

Dist. Cent.	Solução Analít.	Linear Analítico e 48 Pontos	Quadrático 16 Pontos	Quadrático 48 Pontos
0	40.625	40.1257193707972	40.6187141706719	40.6183714157389
2.5	38.0859375	37.5866568707974	38.0796515067974	38.0793087590455
5	30.46875	29.9694698515045	30.4624386083566	30.4621020406897
7.5	17.7734375	17.2770059772297	17.7660772307147	17.7659858685204
9	7.71875	7.34863803809472	7.70863875320834	7.70954285494006
9.5	3.9609375	3.88957642394147	3.95239235801989	3.95428623293816
Tempo	-	20s	24s	67s

Tabela 8.15 - Tensões tangenciais nos pontos internos em Pa.

Dist. Cent.	Solução Analít.	Linear Analítico e 48 Pontos	Quadrático 16 Pontos	Quadrático 48 Pontos
0	40.625	40.1257193707973	40.6187141706719	40.6183714157389
2.5	39.2578125	38.7585318707971	39.251526831772	39.2511840698102
5	35.15625	34.6569689046467	35.1499877331142	35.1496394163909
7.5	28.3203125	27.8184278734685	28.3148466568029	28.3143350491306
9	22.90625	22.2976584199637	22.9015115786523	22.9007807934441
9.5	20.8828125	20.0325391161584	20.8742998149494	20.8737622669105
Tempo	-	20s	24s	67s

Todas as observações feitas nos itens anteriores podem ser aplicadas neste exemplo. Isso atesta a confiabilidade do método dos elementos de contorno e a vantagem da integração analítica sobre a quadratura numérica.

8.6-Viga em Balanço:

Os resultados apresentados a seguir referem-se a exemplos de chapas longas, simulando vigas em balanço, sujeitas a um

esforço unitário aplicado na extremidade livre, na forma de um cisalhamento constante, conforme ilustrado na Figura 8.5c.

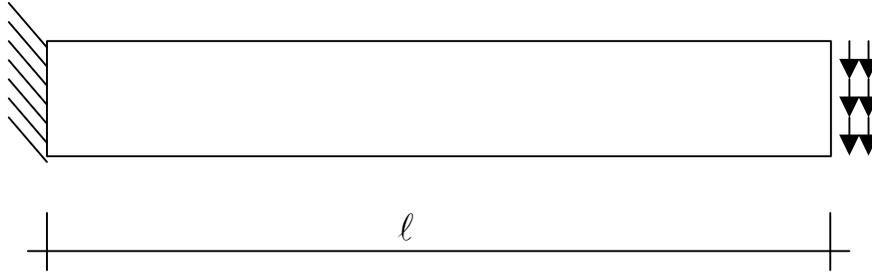


Figura 8.5c - Chapa longa simulando viga em balanço.

Foram investigadas as influências da relação vão por altura, do posicionamento dos pontos de colocação e do tamanho do elemento, ℓ_e , utilizado na discretização.

Foram assumidas unitárias as alturas h e larguras b das vigas. O módulo de elasticidade longitudinal foi tomado como unitário e o coeficiente de Poisson levado a zero. Cabe lembrar que, para os exemplos estudados, a flecha teórica é dada pela expressão a seguir.

$$f_t = \frac{P\ell^3}{3EI}$$

Na Tabela 8.16 apresentam-se os valores da reação vertical no apoio (P_r) e da relação entre a flecha obtida e a prevista pela teoria de vigas (\bar{f}/f_t) para o elemento isoparamétrico linear. Os pontos de colocação foram posicionados sobre o contorno e perpendicularmente a este, a distâncias de um comprimento de elemento (ℓ_e) e meio comprimento de elemento ($\ell_e/2$).

Tabela 8.16 - Resultados Obtidos para as Vigas com Elementos Lineares.

ℓ	ℓ_e	P. C. no Contorno		P. C. externo ℓ_e		P. C. externo $\ell_e/2$	
		P_r	\bar{f}/f_t	P_r	\bar{f}/f_t	P_r	\bar{f}/f_t
1	1	-.9360	1.3442	-1.1703	2.1129	-.7067	1.3523
1	.5	-1.0199	1.4567	6.8802	-4.1011	-1.0167	1.4264
1	.25	-1.0256	1.5286	-.9907	1.5276	-.9998	1.5682
1	.125	-1.0108	1.5522	-.9986	1.5547	-.9998	1.5586
2	1	-1.7054	1.1188	-1.0307	1.0650	-1.2091	1.3546
2	.5	-1.5906	1.2583	-1.1225	1.2657	-2.2252	1.7686
2	.25	-1.2283	1.2049	-1.2903	1.2919	-1.0133	1.1521
2	.125	-1.0705	1.1663	-.9981	1.1476	-1.0031	1.1460
3	1	+.9160	.0866	-1.0146	1.1068	-1.1015	1.1520
3	.5	+.7438	.2021	-1.0100	1.0762	-.9463	1.0318
3	.25	+.1679	.4903	-1.0058	1.0674	-.9704	1.0489
3	.125	-.4722	.8061	-1.0022	1.0652	-.9858	1.0576
4	1	.2503	.2646	-1.0405	1.0833	-.9998	1.0575
4	.5	-.1022	.5041	-1.0231	1.0523	-.9497	1.0053
4	.25	-.5755	.7891	-.9697	1.0290	-.9796	1.0244
4	.125	-.8565	.9542	-1.0003	1.0369	-.9930	1.0327
6	1	+.0929	.2559	-.9994	1.0278	-.9366	.9766
6	.5	-.2648	.5160	-1.0489	1.0200	-.9419	.9767
6	.25	-.6746	.7968	-1.0018	1.0166	-.9798	1.0026
6	.125	-.8951	.9464	-1.0008	1.0167	-.9938	1.0123
12	1	+.0624	.1759	-1.0570	1.0439	-.8201	.8488
12	.5	-.2588	.4188	-.9990	.9994	-.9134	.9336
12	.25	-.6543	.7270	-.9984	1.0030	-.9729	.9822
12	.125	-.8864	.9127	-.9994	1.0038	-.9923	.9980
24	1	+.0650	.1070	-.9996	.9544	-.6864	.6942
24	.5	-.2015	.2970	-1.0286	.9608	-.8658	.8738
24	.25	-.5774	.6112	-.9978	.9980	-.9590	.9622
24	.125	-.8482	.8585	-.9992	1.0002	-.9887	.9904

Os mesmos exemplos, processados com uso de elementos quadráticos e integração com 96 pontos de Gauss, são apresentados na Tabela 8.17. Devido ao maior número de nós, necessários para caracterizar o elemento quadrático, foram processados apenas os exemplos com discretização mais densa. Como um elemento quadrático equivale, em comprimento, a dois elementos lineares, a Tabela 8.17 traz o comprimento destes dividido por dois ($l_e/2$).

Todos os casos foram processados com pontos de colocação externos ao domínio. Para representar o resultado obtido com o ponto sobre o contorno, estes foram trazidos a uma distância de 1/128 vezes o comprimento do elemento utilizado.

Tabela 8.17 - Resultados Obtidos para as Vigas com Elementos Quadráticos.

		P. C. externo $l_e/128$		P. C. externo l_e		P. C. externo $l_e/2$	
l	$l_e/2$	P_r	\bar{f}/f_t	P_r	\bar{f}/f_t	P_r	\bar{f}/f_t
1	.5	-.9827	1.5261	-1.0864	1.6986	-1.0134	1.4406
1	.25	-.9912	1.5300	-.9792	1.5077	-.9897	1.5725
1	.125	-.9954	1.5470	-.9974	1.5794	-.9952	1.5572
2	.5	-.9517	1.0982	-.6424	.9196	-.7671	1.0200
2	.25	-.9821	1.1220	-1.8775	1.6021	-.9536	1.1180
2	.125	-0.9903	1.1351	-.9890	1.1383	-.9877	1.1367
3	.5	-1.2381	1.1536	-1.0390	1.0941	-1.0465	1.0864
3	.25	-1.0900	1.0963	-1.0174	1.0736	-1.0442	1.0823
3	.125	-1.0491	1.0843	-.94027	1.0400	-1.0223	1.0740
4	.5	-1.0340	1.0327	-.9885	1.0378	-1.0233	1.0487
4	.25	-1.0126	1.0338	-1.0104	1.0416	-1.0152	1.0401
4	.125	-1.0069	1.0369	-1.0032	1.0389	-1.0058	1.0380
6	.5	-1.0127	1.0060	-1.0062	1.0236	-1.0117	1.0234
6	.25	-1.0046	1.0118	-1.0041	1.0187	-1.0066	1.0164
6	.125	-1.0025	1.0152	-1.0009	1.0170	-1.0024	1.0163
12	.5	-1.0046	0.9947	-0.9966	1.0086	-1.0048	1.0081
12	.25	-1.0017	1.0004	-1.0026	1.0033	-1.0026	1.0033
12	.125	-1.0009	1.0030	-0.9990	1.0109	-1.0009	1.0037
24	.5	-1.0022	0.9936	-1.0023	1.0036	-1.0082	0.9980
24	.25	-1.0008	0.9983	-1.0014	1.0010	-1.0012	1.0003
24	.125	-1.0004	1.0002	-1.0002	1.0012	-1.0004	1.0007

Nas Figuras 8.6 a 8.11 apresentam-se, em gráficos, os valores das relações entre as flechas obtidas e as teóricas.

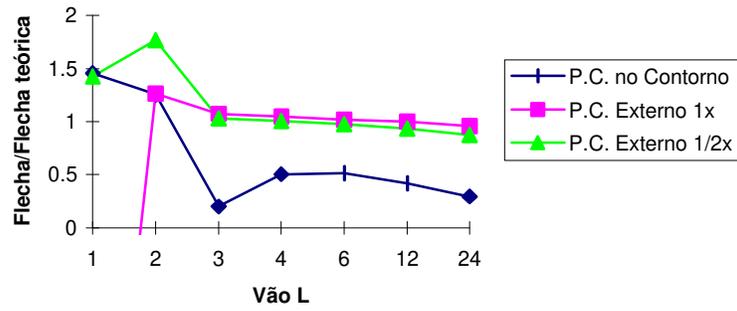


Figura 8.6 - Elementos lineares com $\ell_e = 0.5$

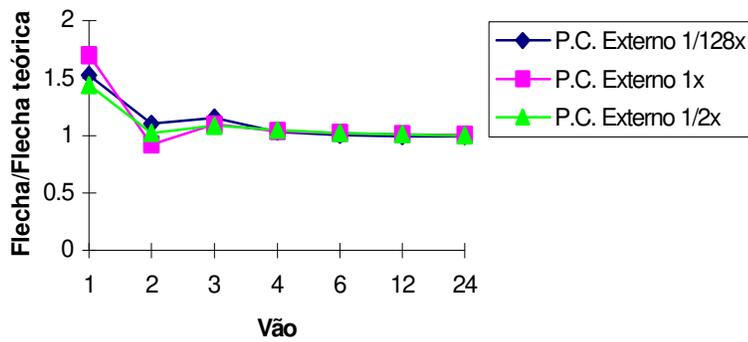


Figura 8.7 - Elementos quadráticos com $\ell_e = 0.5$

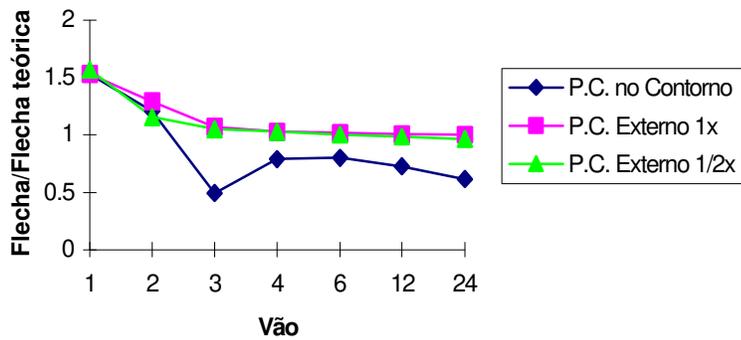


Figura 8.8 - Elementos lineares com $\ell_e = 0.25$

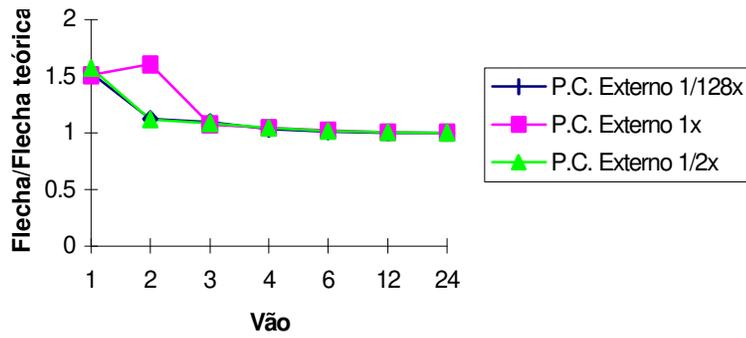


Figura 8.9 - Elementos quadráticos com $l_e = .25$

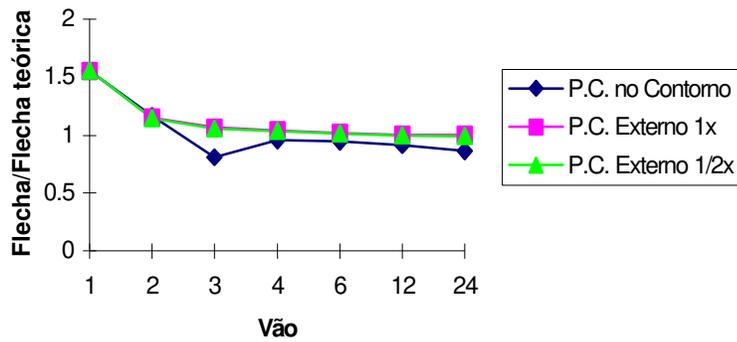


Figura 8.10 - Elementos lineares com $l_e = .125$

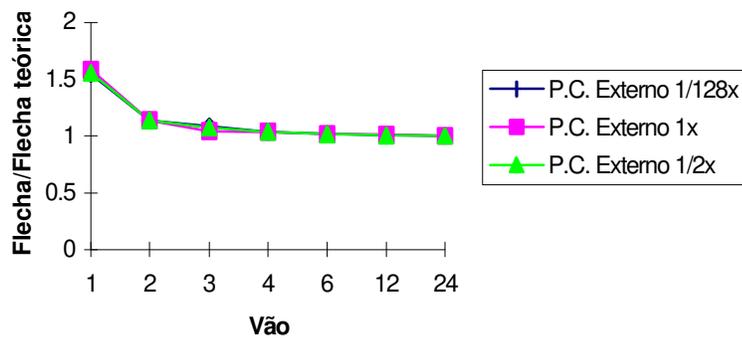


Figura 8.11 - Elementos quadráticos com $l_e = .125$

Pela análise dos gráficos pode-se notar que os elementos lineares, com os pontos de colocação posicionados sobre o contorno, nem sempre produzem resultados concordantes com a teoria de vigas. Para a discretização mais pobre, Figura 8.6, a discrepância entre os valores obtidos é bastante grande, havendo total degeneração dos resultados para alguns vãos. Esta discrepância também está presente nos elementos quadráticos, porém em um grau menor.

Capítulo 9

Exemplos em Regime Elasto-plástico

9.1-Introdução:

Neste capítulo são apresentados exemplos resolvidos em regime elasto-plástico. Todos foram processados em um micro computador Hewlett Packard modelo Vectra VE5 com processador Pentium MMX de 233 Mhz, com 96MB de memória volátil. Os tempos apresentados referem-se a este equipamento.

Todos os exemplos foram processados tendo como critério de convergência a norma do vetor $\{\dot{X}\}$ do sistema (6.17). O processo iterativo é interrompido quando a diferença relativa entre duas normas sucessivas (erro relativo) alcança a precisão de $5 \cdot 10^{-9}$.

No final deste capítulo apresenta-se um estudo da influência do erro relativo adotado no resultado final dos exemplos.

9.2-Corpo em Regime Elasto-plástico:

O mesmo exemplo do Item 8.2 é processado em estado plano de tensão com encruamento. As condições de contorno são apresentadas na Figura 9.1.

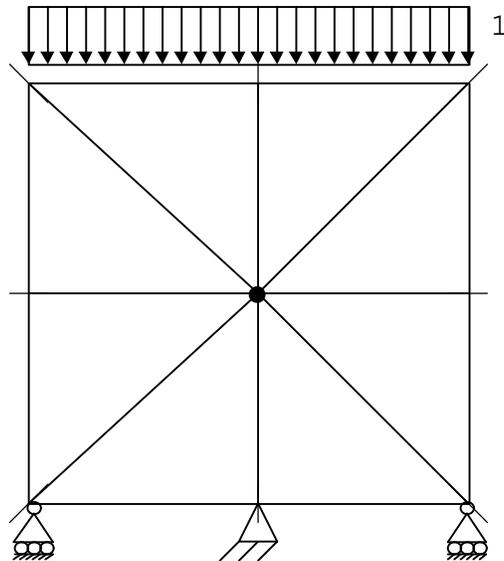


Figura 9.1 - Corpo em regime elasto-plástico.

A discretização consiste em oito elementos de contorno lineares, oito células de domínio lineares, oito nós, sendo quatro duplos, e um ponto interno. Processou-se o mesmo exemplo utilizando-se integração de domínio e de contorno de célula, comparando-se os tempos despendidos, assim como os resultados obtidos pelas duas técnicas, na Tabela 9.1.

Para este exemplo foi usado um módulo de elasticidade **E** igual a dez, coeficiente de Poisson ν igual a 0.25 e módulo de encruamento **H** igual a dez. O exemplo foi processado com os pontos de colocação sobre o contorno e as grandezas apresentadas na tabela referem-se ao ponto interno. Os pontos de colocação dos nós duplos foram deslocados para o ponto médio do elemento adjacente.

Tabela 9.1 - Valores obtidos no ponto interno.

Grandeza	Solução analítica	Integrais em contorno de célula		Integrais em domínio de célula	
		8 Pontos de Gauss	16 Pontos de Gauss	8 Pontos de Gauss	16 Pontos de Gauss
U_y (E-2)	5.5	5.50000000819	5.49999999981	5.50000025163	5.49999999998
σ_{yy}	1	0.99999999769	0.99999999999	1.00000005736	0.99999999999
ϵ_{yy}	0.11	0.10999999947	0.10999999999	0.11000001339	0.10999999999
ϵ_{yy}^p (E-3)	10	9.99999972952	9.9999999853	1.00000070199	9.999999985
Tempo	-	5s	6s	10s	26s

Fica clara a grande eficiência das integrais em contorno de células, não só pela maior velocidade de avaliação, mas também pela qualidade dos resultados fornecidos.

9.3-Tubo de Parede Espessa em Regime Elasto-plástico:

O mesmo problema apresentado no Item 8.3 foi também processado em regime elasto-plástico. Adotou-se para este problema um material elasto-plástico perfeito com tensão de escoamento de 2000kgf/cm^2 , módulo de elasticidade de 1200000kgf/cm^2 e coeficiente de Poisson igual a 0.3, submetido a uma pressão interna de 1200kgf/cm^2 . O raio interno do tubo foi tomado como 10cm e o raio externo, 20cm.

A malha usada é mostrada na Figura 9.2, composta por vinte e seis nós, sendo quatro nós duplos, cinquenta e seis células, vinte e seis elementos de contorno e vinte e quatro pontos internos. Os pontos de colocação foram posicionados perpendicularmente ao contorno, a uma distância de um quarto do comprimento do maior dos elementos adjacentes. O critério de escoamento usado foi o de Von Mises.

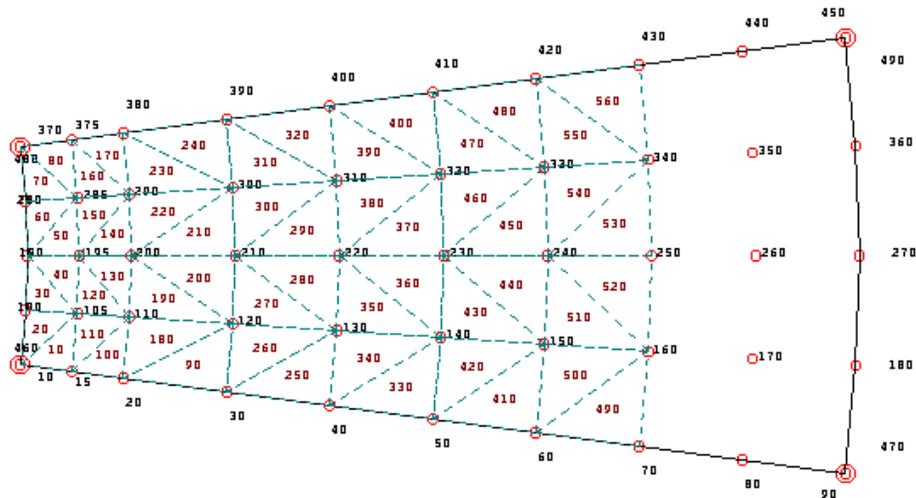


Figura 9.2 - Discretização do tubo de parede espessa.

A análise da distribuição das tensões e dos deslocamentos no interior do tubo é discutida a seguir. Na Tabela 9.2 apresentam-se os resultados obtidos pelo programa e aqueles previstos pela teoria. Na segunda coluna tem-se os valores previstos pela solução analítica considerando o critério de Tresca. Apresenta-se também os valores obtidos pela solução modificada, onde a tensão de escoamento é alterada para que a solução dada pelo critério de Tresca aproxime-se daquela que seria obtida caso fosse usado o critério de Von Mises. As expressões analíticas, deduzidas para o critério de Tresca, são apresentadas em detalhes no Apêndice A, e são repetidas a seguir.

$$u_e = \frac{(1+\nu)\sigma_0 c^2}{2Eb^2} \left[(1-2\nu)r + \frac{b^2}{r} \right]$$

$$\sigma_r = \sigma_0 \left[\ln \frac{r}{c} + \frac{(c^2 - b^2)}{2b^2} \right]$$

$$\sigma_{\theta} = \sigma_0 \left[\ln \frac{r}{c} + \frac{(c^2 + b^2)}{2b^2} \right]$$

Com as expressões anteriores, alterando-se o valor da tensão de escoamento σ_0 para o valor σ'_0 , dado a seguir, obtém-se uma solução aproximada para o critério de Von Mises. Esta alteração no valor da tensão de escoamento, é referida como solução modificada.

$$\sigma'_0 = \sigma_0 \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

A solução analítica para os deslocamentos dos pontos internos é válida apenas na região não plastificada do tubo. Por esta razão as duas primeiras colunas da Tabela 9.2 estão incompletas.

Tabela 9.2 - Deslocamentos dos pontos do tubo (cm).

Raio (cm)	Tresca	Tresca Modificado	10 Passos de carga	20 Passos de carga	40 Passos de carga	80 Passos de carga
10.00	-	-	0.021063	0.021209	0.021250	0.021265
10.63	-	-	0.019814	0.019951	0.019990	0.020006
11.25	-	-	0.018862	0.018987	0.019028	0.019041
12.50	-	0.017603	0.017360	0.017460	0.017498	0.017506
13.75	-	0.016457	0.016225	0.016319	0.016352	0.016360
15.00	0.017940	0.015541	0.015320	0.015409	0.015439	0.015448
16.25	0.017088	0.014803	0.014592	0.014677	0.014706	0.014714
17.5	0.016397	0.014205	0.014003	0.014084	0.014111	0.014119
18.75	0.015835	0.013717	0.013522	0.013601	0.013628	0.013635
20	0.015377	0.013321	0.013137	0.013213	0.013239	0.013246

Na Figura 9.3 mostra-se um gráfico dos valores apresentados na Tabela 9.2. As curvas referentes às soluções analíticas são truncadas no ponto em que há o início da plastificação. O processamento com 80 passos demorou 3377 segundos.

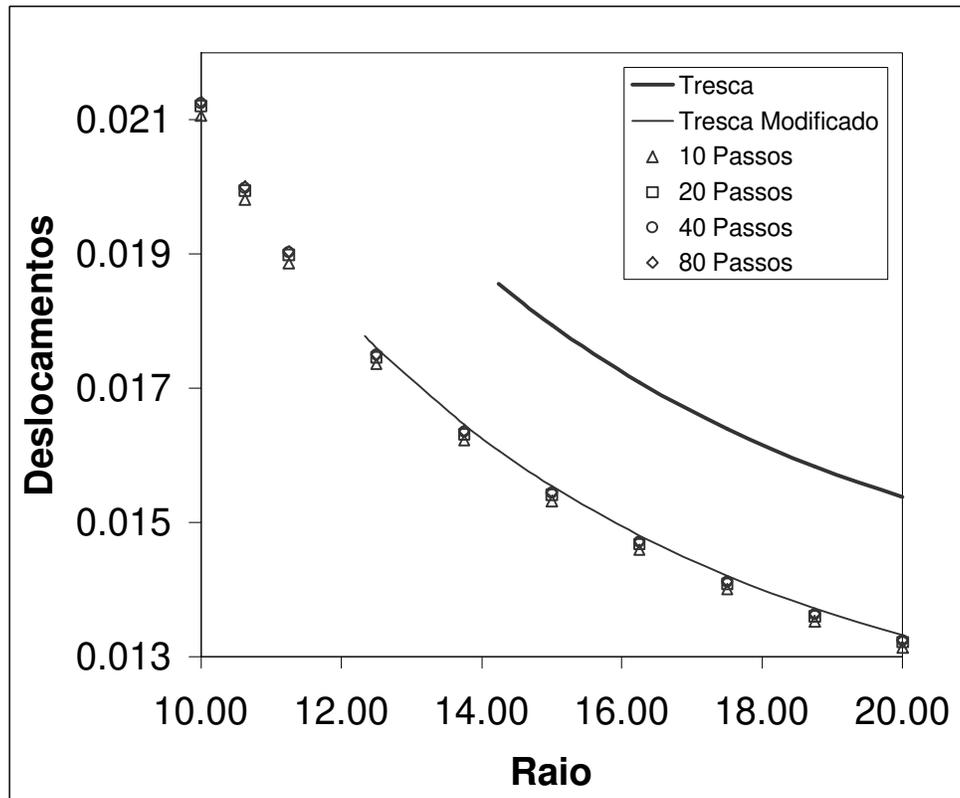


Figura 9.3 - Deslocamentos dos pontos do tubo.

Na Tabela 9.3 e 9.4 mostram-se os valores das tensões radial e tangencial ao longo do raio do tubo.

Tabela 9.3 - Tensão na direção radial (kgf/cm²).

Raio	Tresca	Tresca Modificado	10 Passos de carga	20 Passos de carga	40 Passos de carga	80Passos de carga
10.00	-1200.00	-1200.00	-1200.00	-1200.00	-1200.00	-1200.00
10.63	-1078.75	-1059.99	-1040.65	-1035.47	-1040.29	-1036.17
11.25	-964.43	-927.99	-894.08	-879.57	-889.31	-884.02
12.50	-753.71	-684.67	-672.78	-669.53	-674.61	-672.56
13.75	-563.09	-489.97	-499.80	-502.60	-504.96	-504.73
15.00	-394.29	-341.56	-351.38	-354.24	-355.59	-355.74
16.25	-260.97	-226.07	-233.61	-235.68	-236.58	-236.72
17.50	-155.19	-134.44	-140.38	-141.74	-142.33	-142.42
18.75	-69.85	-60.51	-65.96	-66.77	-67.14	-67.19
20.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Tabela 9.4 - Tensão na direção tangencial (kgf/cm²).

Raio	Tresca	Tresca Modif.	10 Passos de carga	20 Passos de carga	40 Passos de carga	80Passos de carga
10.00	800.00	1109.40	1111.87	1111.37	1111.13	1111.00
10.63	921.25	1249.41	1312.16	1276.43	1275.60	1274.41
11.25	1035.57	1381.41	1471.32	1449.54	1435.25	1431.48
12.50	1246.29	1563.39	1517.49	1526.08	1526.70	1528.58
13.75	1436.91	1368.27	1335.37	1341.31	1343.65	1344.13
15.00	1408.19	1219.87	1197.77	1204.18	1206.33	1206.94
16.25	1274.87	1104.38	1086.91	1093.01	1095.04	1095.63
17.50	1169.09	1012.74	997.66	1003.36	1005.25	1005.80
18.75	1083.74	938.81	925.43	930.76	932.53	933.04
20.00	1013.90	878.31	862.51	867.53	869.21	869.69

Os valores das Tabelas 9.3 e 9.4 são apresentados graficamente nas Figuras 9.4 e 9.5. Pode-se notar que o aumento do número de passos de carga não alterou significativamente o

valor da tensão radial. No entanto, para pontos da região plastificada, a tensão tangencial atingiu valores mais próximos da solução analítica com o aumento do número de passos, como se nota na Figura 9.5.

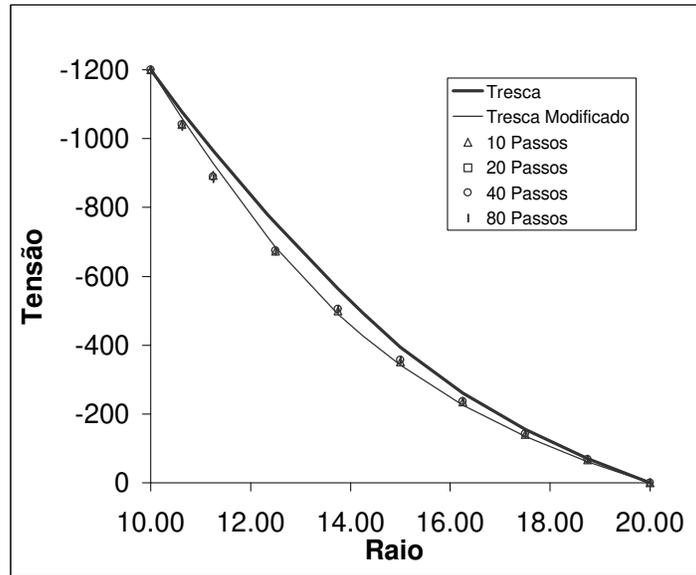


Figura 9.4 - Tensão na direção radial.

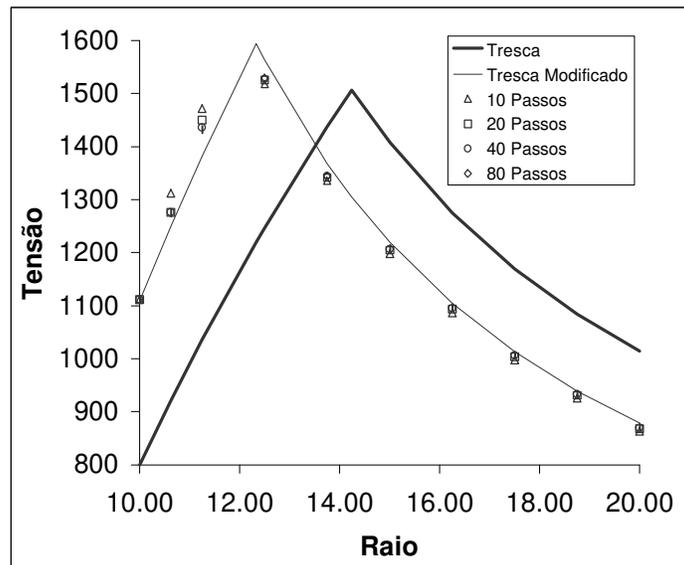


Figura 9.5 - Tensão na direção tangencial.

No trabalho apresentado em [27], o mesmo problema é estudado, havendo comparação entre os resultados obtidos com duas malhas diferentes. As malhas empregadas em [27] correspondem setores de 15° e 10° .

Tentou-se reproduzir os resultados apresentados em [27] utilizando-se a malha de 15° , mostrada na Figura 9.2, e uma outra malha de $7,5^\circ$, mostrada na Figura 9.6.

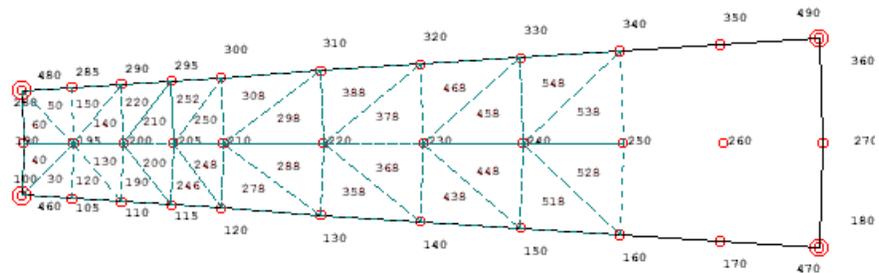


Figura 9.6 - Malha de $7,5^\circ$.

Neste novo estudo do mesmo problema, empregou-se um módulo de elasticidade $E=1519000 \text{ kgf/cm}^2$, uma tensão de escoamento de 1519 kgf/cm^2 , coeficiente de Poisson 0.33 e a mesma pressão interna de 1200 kgf/cm^2 .

Nas figuras 9.7 a 9.10 são mostrados os resultados obtidos com as duas malhas testadas. Para esta nova malha, o tempo de processamento com 80 passos foi de 1120 segundos.

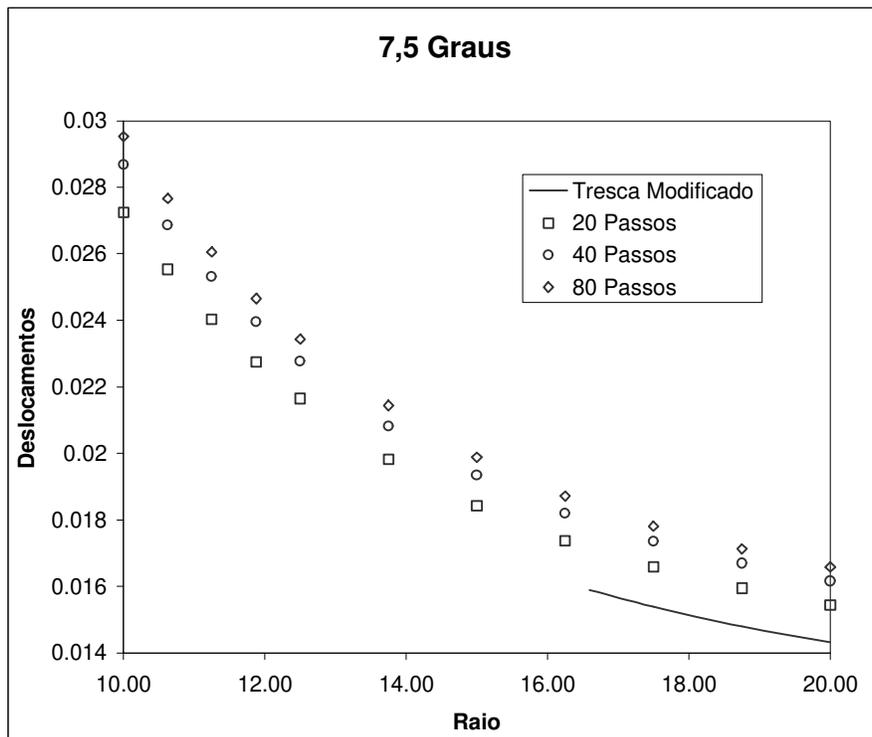
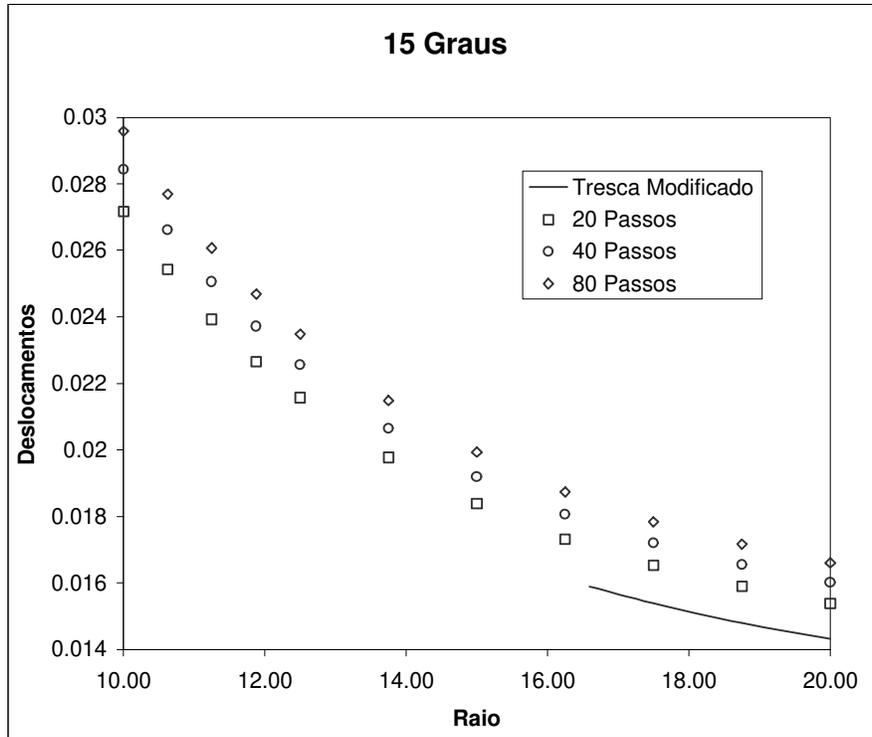


Figura 9.7 - Deslocamentos dos pontos internos na direção radial (cm).

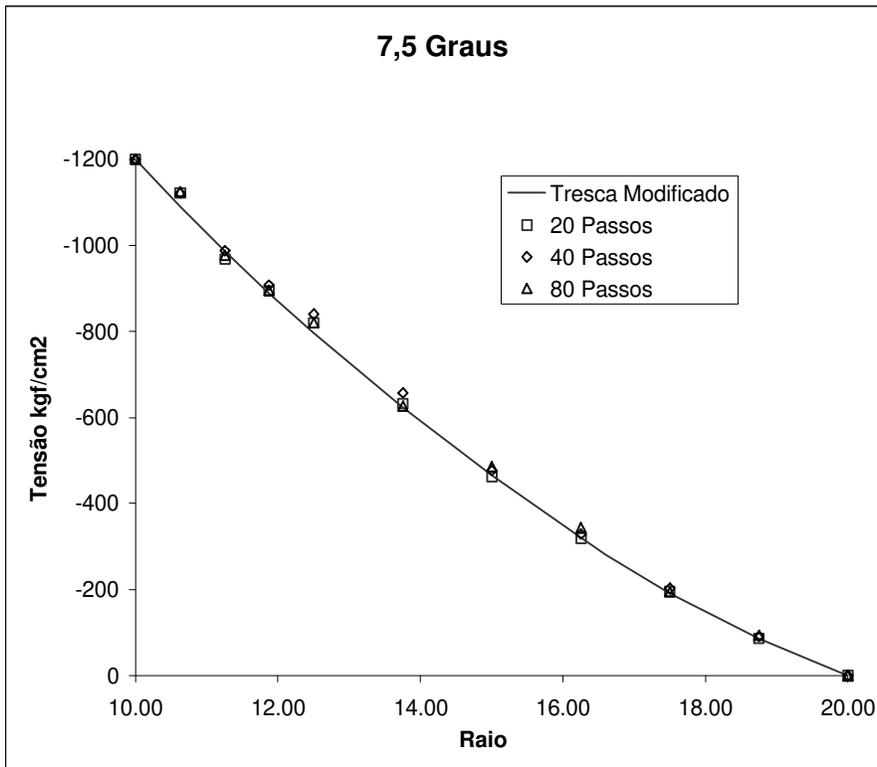
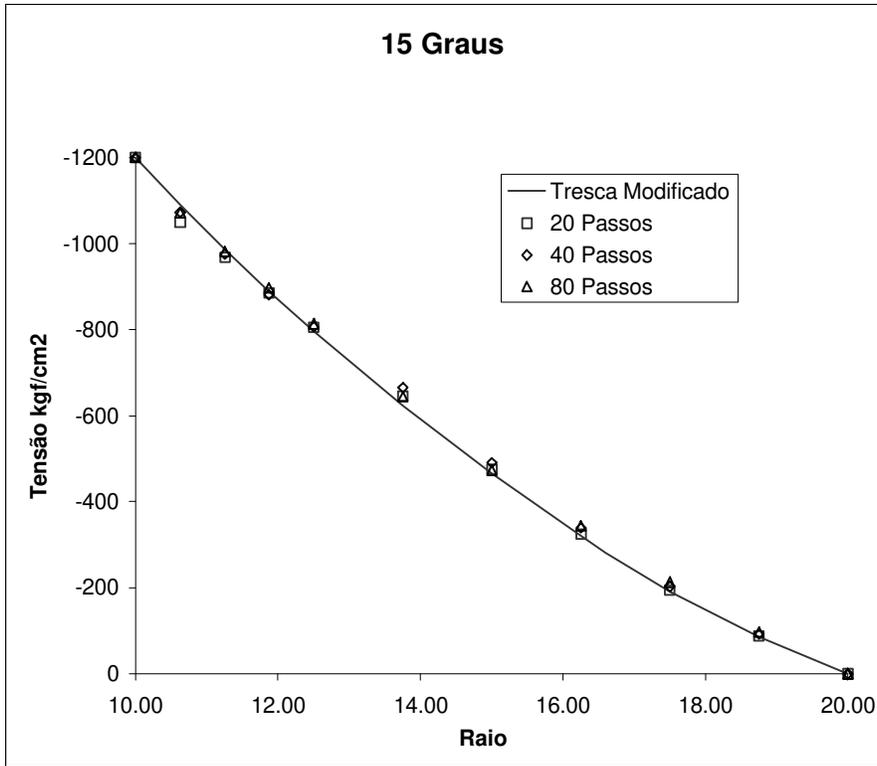


Figura 9.8 - Tensão na direção radial.

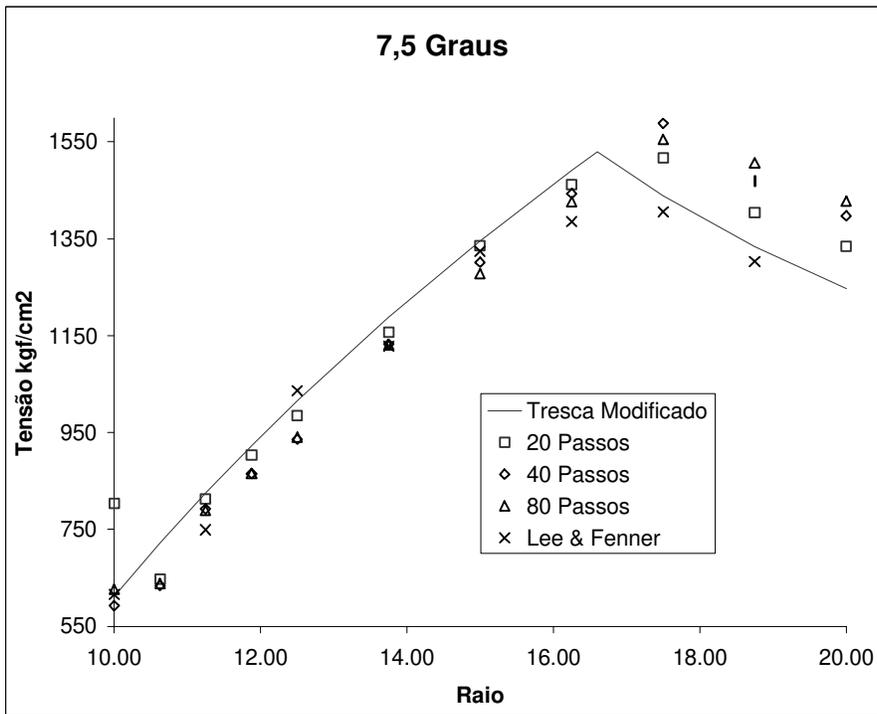
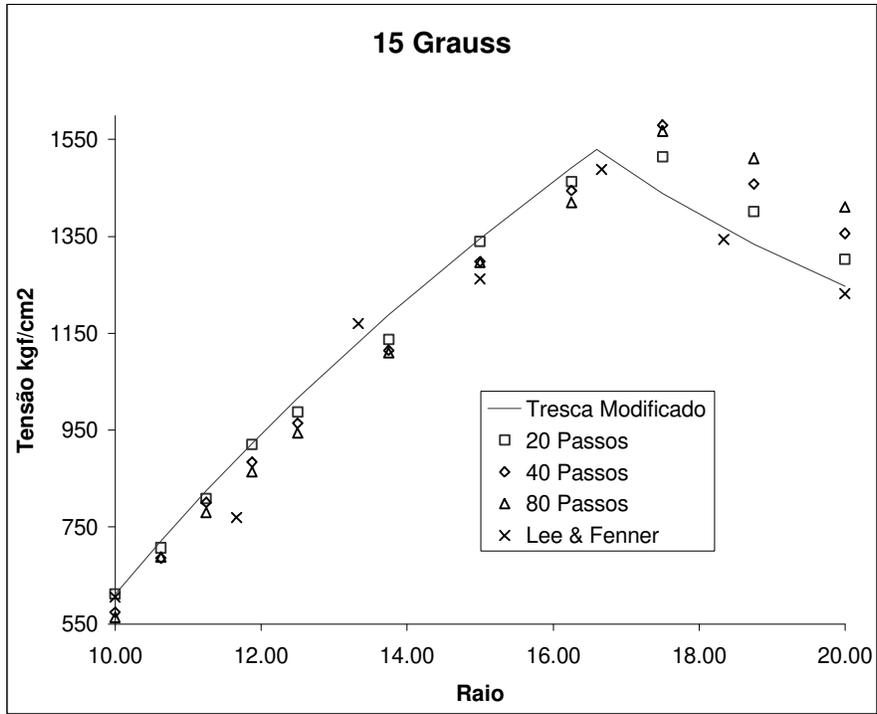


Figura 9.9 - Tensão na direção tangencial.

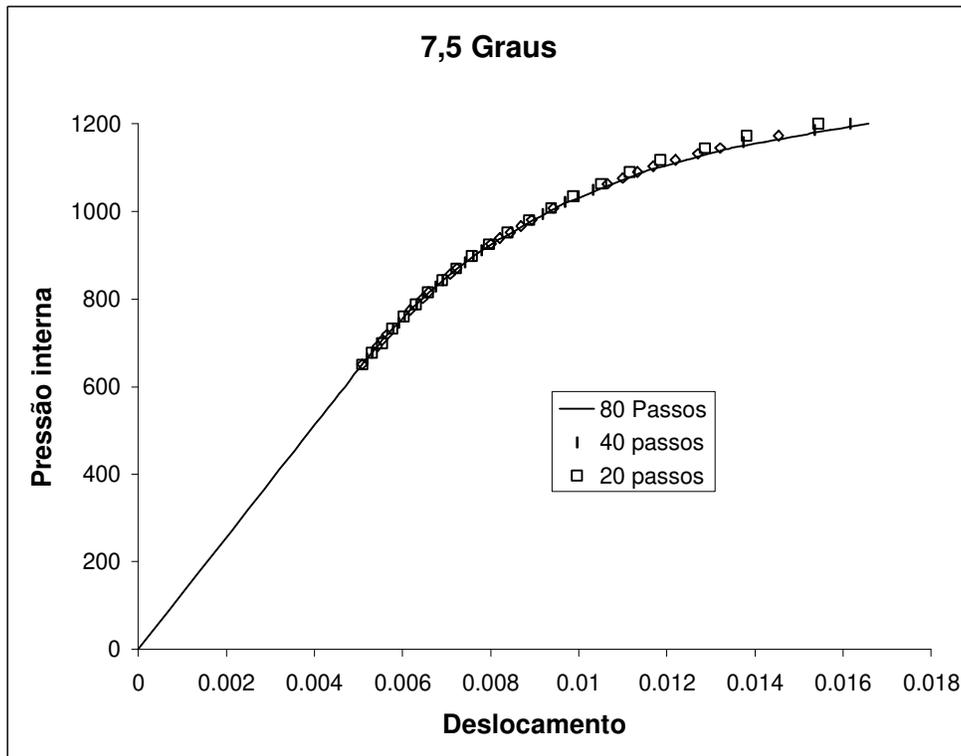
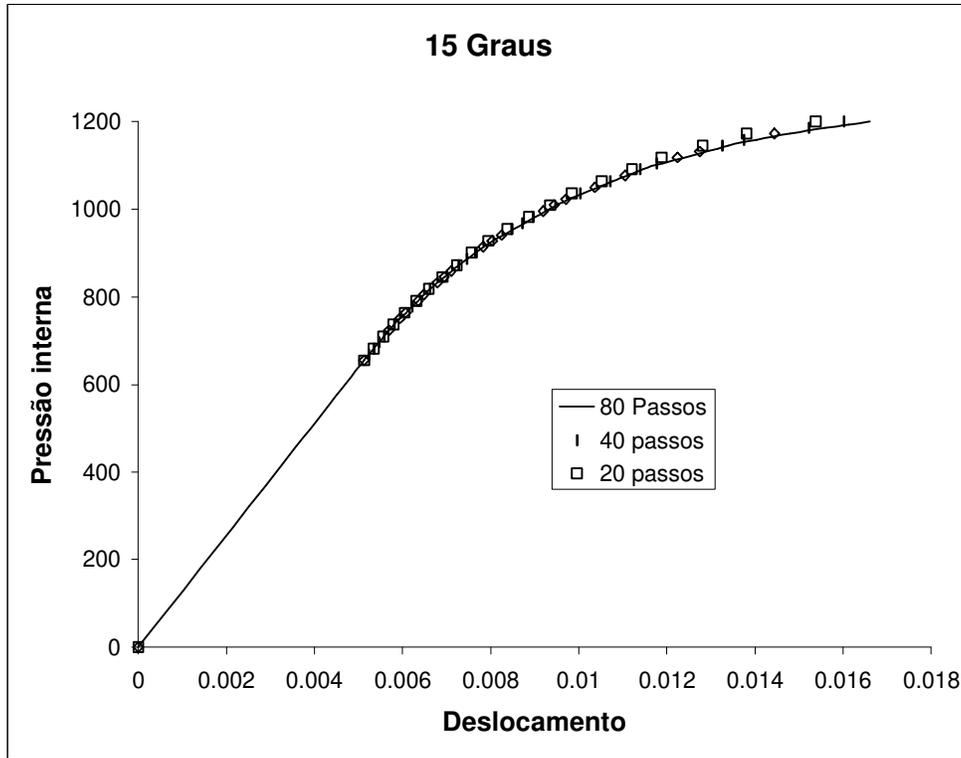


Figura 9.10 Deslocamento de um ponto na superfície externa (cm).

9.3-Trecho de Viga Sujeito a Plastificação:

Neste exemplo analisa-se um trecho de viga sujeito a plastificação por flexão. Na Figura 9.11 apresenta-se a discretização usada. Tomou-se um trecho de 2.5cm de uma viga de seção quadrada de lado 10cm. Admite-se que o trecho esteja sujeito a um estado plano de deformação [27]. Foi usado um módulo de elasticidade $E=207000\text{MPa}$, tensão de escoamento de 483MPa e coeficiente de Poisson 0.3. Assumiu-se que o corpo seja constituído por um material elasto-plástico perfeito.

Foi aplicado ao contorno um deslocamento que produzisse, nas fibras extremas, uma deformação total de 4%. Este deslocamento foi distribuído linearmente ao longo da seção transversal da viga, conforme ilustrado na Figura 9.12. Os pontos de colocação foram posicionados sobre os nós do contorno e, para os nós duplos, foram deslocados para primeiro terço do elemento correspondente.

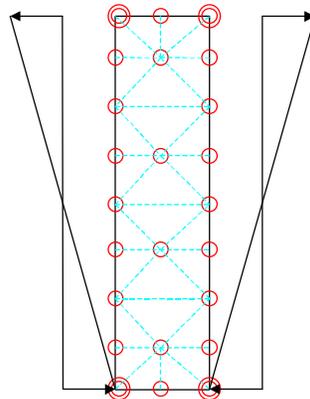


Figura 9.11 - Discretização do trecho de viga.

Com a Tabela 9.5, pode-se comparar os valores obtidos para os momentos fletores em função da deformação imposta, para diversas quantidades de incrementos de carga. Para a deformação de 0.242%, tem-se o limite do regime elástico.

Tabela 9.5 - Momentos elasto-plásticos (kNm)

Def. (%)	20 Passos	40 Passos	80 Passos	160 Passos	320 Passos
0.242	91.85718	91.85718	91.85718	91.85718	91.85718
0.430	146.5197	128.3558	127.0231	126.3787	125.5655
0.618	164.4794	139.8994	135.8871	135.2094	133.7111
0.806	170.4939	145.4086	141.3723	140.6975	139.1861
0.994	175.9281	149.6502	145.6021	144.6758	143.3859
1.182	179.1405	152.7825	148.7254	147.8016	146.5083
1.370	180.6523	154.2268	150.5707	149.6448	148.3473
1.557	182.063	155.5989	151.9409	151.0125	149.7117
1.745	183.414	156.9272	153.2696	152.3396	151.0875
1.933	184.7289	158.2286	154.5724	153.6412	152.3876
2.121	186.0218	159.5135	155.8588	154.9269	153.6723
2.309	187.3013	160.7881	157.1348	156.7588	154.9473
2.497	188.5726	162.0565	158.4042	158.0307	156.2161
2.685	189.8388	163.3209	159.6695	159.297	157.4811
2.873	191.1019	164.583	160.9322	160.5602	158.7435
3.061	192.3632	165.8436	162.1933	161.8214	160.0044
3.248	193.6232	167.1033	163.4533	163.0815	161.2643
3.436	194.8826	168.3624	164.7126	164.3409	162.5236
3.624	196.1415	169.6212	165.9715	165.5999	163.7825
3.812	197.4001	170.8797	167.2302	166.8585	165.0412
4.000	198.6586	172.1382	168.4887	168.117	166.2997

Na Figura 9.12 mostra-se a evolução do momento elasto-plástico em função da deformação das fibras extremas do trecho analisado. Pode-se notar que no início da plastificação, trecho correspondente às deformações entre 0.242% e 1%, o número de passos de carga tem grande influência no resultado final. A partir da deformação de 1%, as linhas se tornam praticamente paralelas, não havendo mais diferenciação no comportamento do

problema em função dos passos de carga. Neste exemplo o processamento demorou 890 segundos para 80 passos.

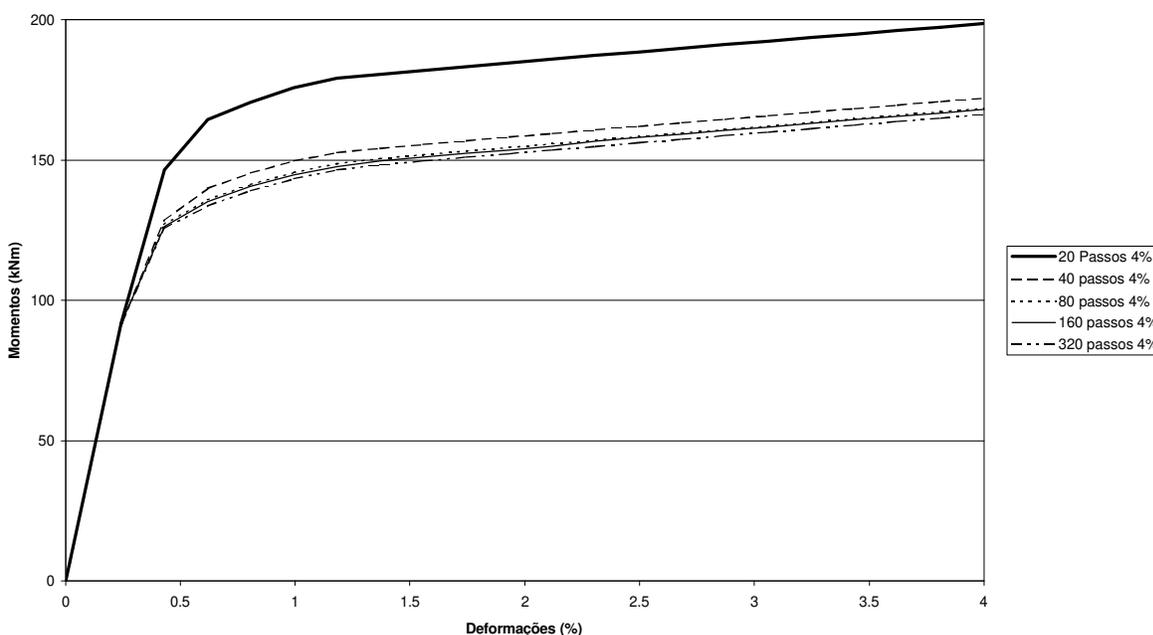


Figura 9.12 - Momentos fletores em regime elasto-plástico (kNm).

9.4-Chapa Fina Perfurada:

Elementos estruturais planos dotados de perfurações, como chapas de ligação por exemplo, despertam grande interesse na engenharia. O efeito de concentração de tensões na borda da perfuração, e conseqüente plastificação, tem sido analisado de forma experimental [39] e numérica [27] [40].

A geometria do problema estudado é mostrada na Figura 9.13a. Para analisar este problema, fez-se uso da dupla simetria da peça. O problema foi inicialmente analisado com a malha apresentada em [40]. Os resultados obtidos com aquela malha indicaram a necessidade de uma discretização maior à volta do orifício. Foram então testadas as malhas vistas nas Figuras 9.13b e 9.13c, que são uma adaptação da presente em [40]. Os resultados

obtidos com as malhas modificadas, figuras 9.13b e 9.13c, foram muito próximos. Apresentam-se os resultados obtidos com a malha mostrada na Figura 9.13c.

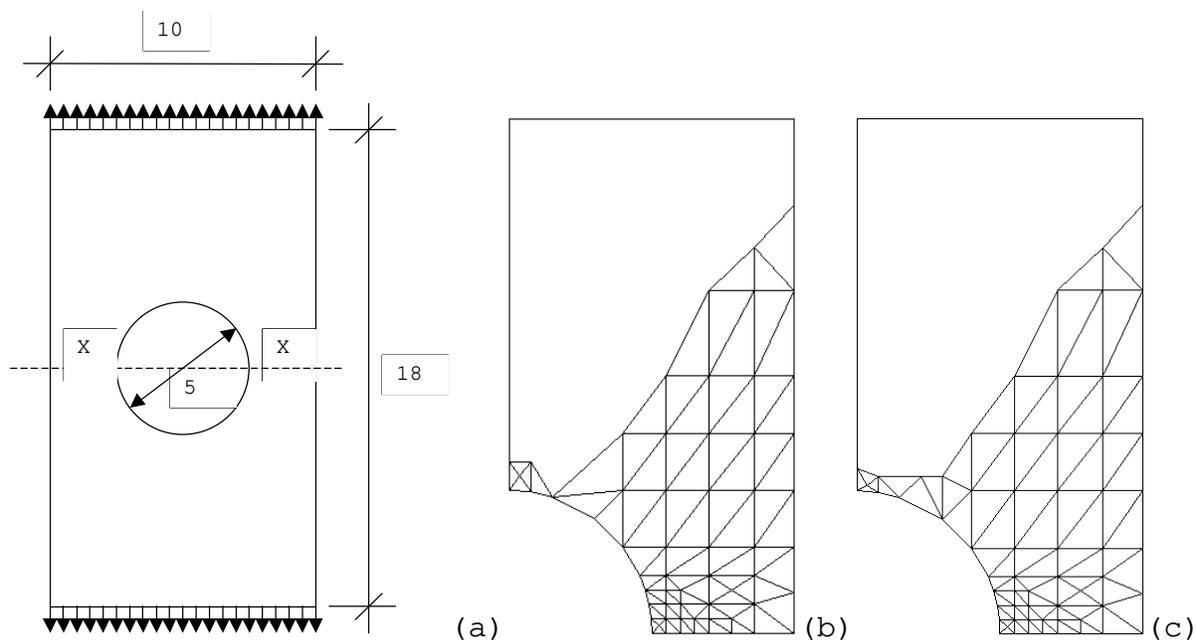


Figura 9.13 - Chapa com perfuração e malha utilizada.

O material possui um módulo de elasticidade $E=7000\text{MPa}$, tensão de escoamento de 24.3MPa , coeficiente de Poisson 0.2 e módulo de encruamento $H=225\text{MPa}$. Processou-se o exemplo de duas formas: primeiramente impondo-se incrementos uniformes de deslocamentos na borda livre e, depois, impondo-se incrementos uniformes de tensões.

Na Figura 9.14 a evolução da plastificação pode ser comparada com a obtida experimentalmente em [39]. Na Figura 9.14a mostra-se o resultado experimental obtido em [39], em 9.14b tem-se a evolução da plastificação impondo-se incrementos uniformes de deslocamento na borda livre e, na Figura 9.14c, tem-se a evolução para uma tensão uniforme incremental aplicada à borda livre.

É fácil notar a melhor concordância entre o modelo experimental e o exemplo processado com incrementos uniformes de

tensões. Os limites dos passos de carga foram tomados de forma aproximada a partir de um dos gráficos de [39]. Naquele trabalho, os passos de carga não foram todos do mesmo tamanho, e nos exemplos processados, os vinte passos empregados foram iguais. O tempo total de processamento foi 2396 segundos.

A carga final aplicada ao modelo computacional, 13,4MPa, foi maior que a usada em [39], 13,0MPa. Por esta razão nota-se um passo a mais nos exemplos computacionais.

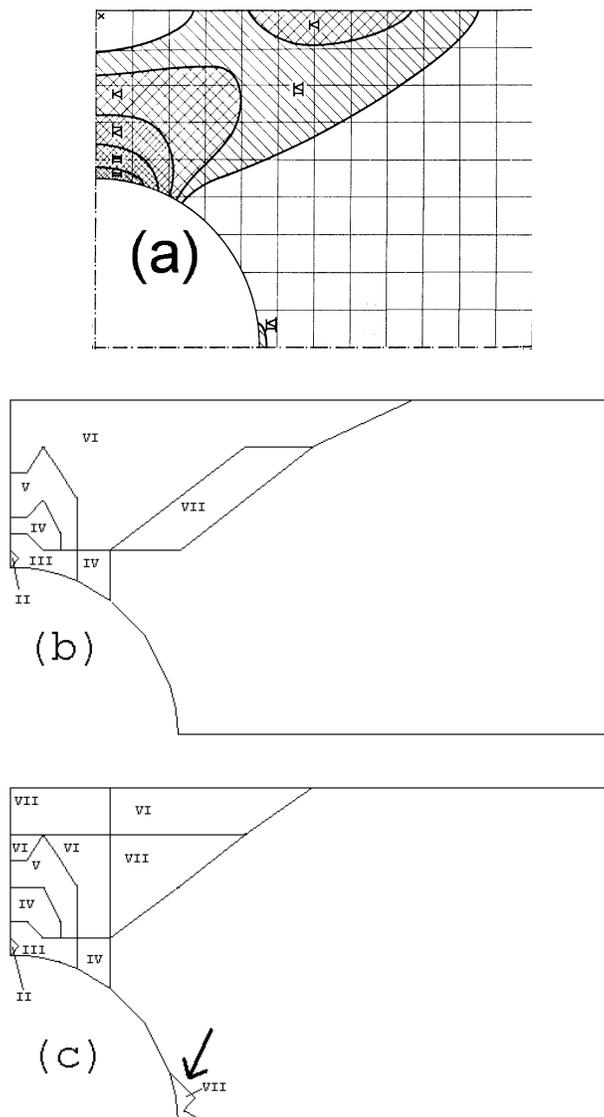


Figura 9.14 - Evolução da plastificação.

Com a malha mostrada na Figura 9.13c, obteve-se uma aproximação melhor para a área plastificada assinalada na Figura 9.14c. A plastificação desta região foi observada no ensaio experimental [39], como pode ser visto na Figura 9.14a. Não se encontrou menção à plastificação desta região nos trabalhos onde se utilizou métodos numéricos [27] [39].

A distribuição das tensões ao longo do eixo X-X é mostrada na Figura 9.15. Na mesma figura também são visualizados os resultados experimentais de [39] e aqueles obtidos com elementos constantes em [40].

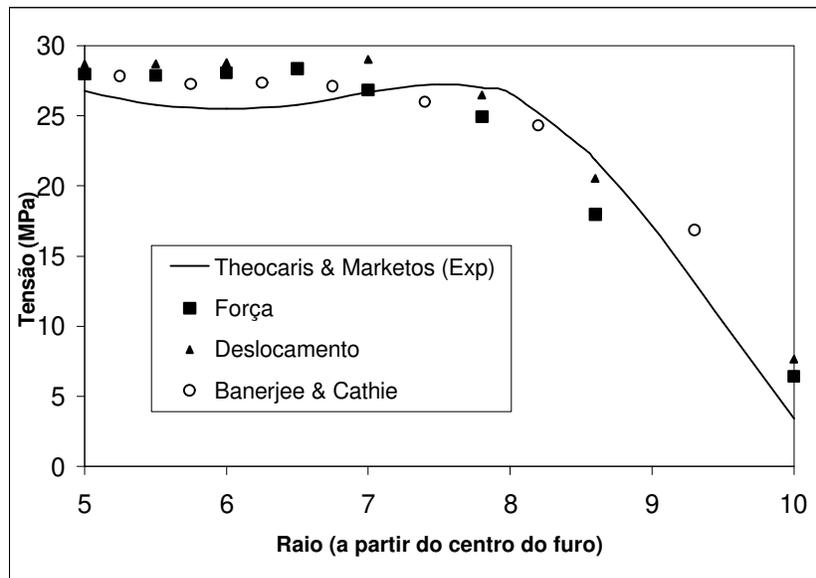


Figura 9.15 - Distribuição da tensão σ_y .

Na Figura 9.16 mostra-se a relação entre a tensão média aplicada à borda livre da peça e a deformação do ponto onde ocorre o primeiro escoamento.

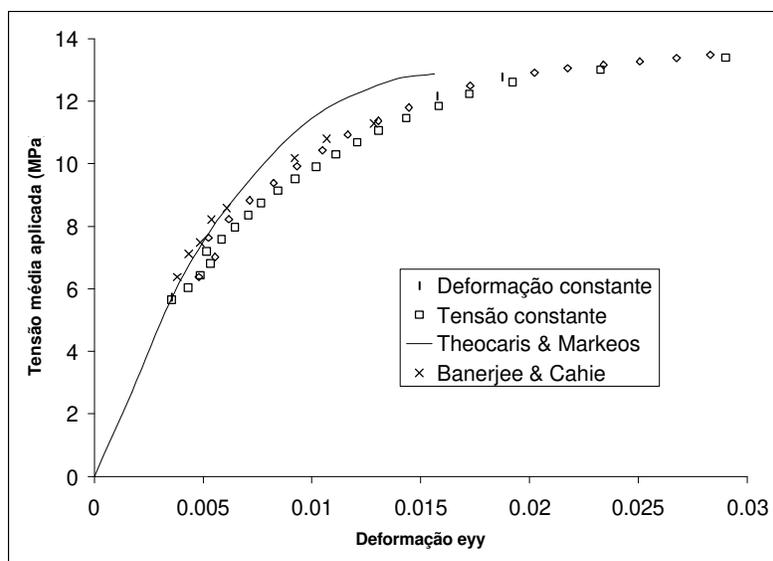


Figura 9.16 - Deformação do ponto onde começa a plastificação.

9.5-Estudo da Influência do Erro Relativo nos Resultados:

A adoção de um valor para o erro relativo entre duas iterações sucessivas consiste em um ponto de grande importância em qualquer processo numérico. Para obter-se uma estimativa da influência deste valor nos resultados apresentados neste trabalho, foram selecionados, arbitrariamente, três exemplos para um estudo mais detalhado:

- Exemplo 1 - O tubo de parede espessa, processado com a malha da Figura 9.2 e 80 passos de carga. Analisa-se o deslocamento radial de um ponto na superfície interna deste, mostrados na Tabela 9.6 em mm.
- Exemplo 2 - Consiste no mesmo problema analisado no Item 9.3, processado com 80 passos de carga e com os pontos de colocação fora do contorno a uma distância de $\frac{1}{4}$ do comprimento do maior dos elementos adjacentes.

Faz-se uma comparação entre os momentos plásticos finais, mostrados na Tabela 9.6 em kNm.

- Exemplo 3 - Chapa perfurada com imposição de forças constantes na borda livre. É analisada a deformação, do ponto onde a plastificação tem início, na direção da força aplicada, mostradas na Tabela 9.6 em porcentagem.

Os exemplos foram processado com erros relativos de $5 \cdot 10^{-3}$, $5 \cdot 10^{-6}$, $5 \cdot 10^{-9}$ e $5 \cdot 10^{-12}$. Os resultados dos três primeiros processamentos são comparados aos obtidos com erro relativo de $5 \cdot 10^{-12}$. Os resultados, assim como o desvio em relação ao resultado obtido com erro de $5 \cdot 10^{-12}$, podem ser vistos na Tabela 9.6.

Tabela 9.6 - Comparação dos resultados.

Exemplo	$5 \cdot 10^{-3}$		$5 \cdot 10^{-6}$		$5 \cdot 10^{-9}$		$5 \cdot 10^{-12}$
	Result.	Desvio	Result.	Desvio	Result.	Desvio	Result.
1	0.28746	2.83%	0.29582	0.00%	0.29582	0.00%	0.29582
2	145.5464	0.61%	144.4840	0.12%	144.6545	0.00%	144.6545
3	2.086672	20%	2.627280	0.08%	2.629530	0.00%	2.629533

Percebe-se que o erro relativo de $5 \cdot 10^{-3}$ pode conduzir a desvios no resultado final de até 20%. Já com erros inferiores a $5 \cdot 10^{-6}$ não há mudança significativa nos resultados.

Na Tabela 9.7 mostra-se o número médio de iterações realizadas para se atingir cada precisão. Na mesma tabela também se encontra o número máximo de iterações executadas em um único passo.

Tabela 9.7 - Número de iterações por passo de carga.

Exp.	$5 \cdot 10^{-3}$		$5 \cdot 10^{-6}$		$5 \cdot 10^{-9}$		$5 \cdot 10^{-12}$	
	Média	Máx.	Média	Máx.	Média	Máx.	Média	Máx.
1	3.7	21	27.1	112	65.8	203	110.5	294
2	5.8	31	31.1	71	74.5	113	116.8	157
3	5.3	24	57.5	140	123.5	279	195.0	417

Na Tabela 9.8 são apresentados os tempos de processamento de cada exemplo para cada erro adotado. Estes mesmos valores são apresentados no gráfico da Figura 9.17.

Tabela 9.8 - Tempo de processamento de cada exemplo

Erro	Exemplo 1	Exemplo 2	Exemplo 3
5E-03	416 s	105 s	323 s
5E-06	1441 s	431 s	1384 s
5E-09	3061 s	946 s	2708 s
5E-12	4924 s	1405 s	4195 s

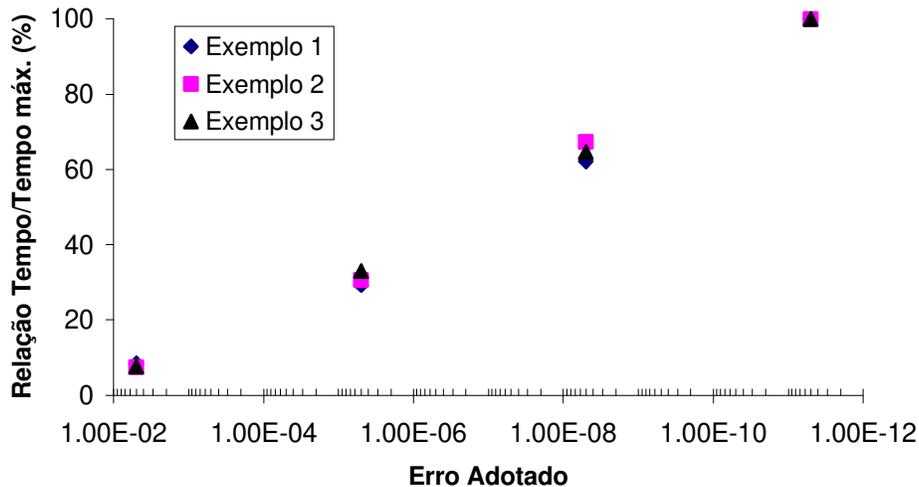


Figura 9.17 - Tempo de processamento normalizado.

Capítulo 10

Integrais Particulares

10.1-Introdução:

Neste capítulo descreve-se, de forma sucinta, a aplicação das integrais particulares no tratamento de problemas elasto-plásticos. O processo foi originalmente apresentado em [41], e este capítulo teve por base principal aquele trabalho.

Os índices das expressões apresentadas neste capítulo variam de 1 até 2, a menos que se informe o contrário.

10.2-Teoria Geral:

Considere-se a equação diferencial linear não homogênea do vetor u_i dada por:

$$L(u_i) + f_i = 0 \tag{10.1}$$

Na equação (10.1), $L(u_i)$ é um operador diferencial linear, homogêneo e arbitrário, e f_i é uma função que representa a não homogeneidade da equação. A solução geral da equação (10.1) pode ser representada pela soma de duas outras funções [41].

A primeira função consiste na solução da equação homogênea do operador $L(u_i)$, chamada de **função complementar** em [41], representada como u_i^c [41], ou seja:

$$L(u_i^c) = 0 \tag{10.2}$$

A segunda parcela da solução de (10.1), chamada de **integral particular** em [41] e representada por \tilde{u}_i , é tal que satisfaça a seguinte equação não homogênea [41]:

$$L(\tilde{u}_i) = -f_i \tag{10.3}$$

Assim, a solução geral de (10.1) é dada pela soma das soluções individuais das equações (10.2) e (10.3), ou seja:

$$u_i = u_i^c + \tilde{u}_i \tag{10.4}$$

A integral particular pode não ser única, e qualquer função que satisfaça (10.3) pode ser considerada como integral particular, independentemente das condições de contorno ou da forma como esta foi obtida [41].

Classicamente, integrais particulares são encontradas para equações não homogêneas por processos como o método da variação dos parâmetros, o método dos coeficientes indeterminados ou por simples inspeção da expressão. Quando estas técnicas não conduzem satisfatoriamente a uma integral particular, um processo mais geral pode ser empregado. Adicionalmente, a integral particular pode ser obtida integrando-se, em um domínio infinito, o produto da função não homogênea pela solução singular da equação diferencial homogênea, $g_{ij}^*(P, X)$, ou seja [41]:

$$\tilde{u}_i(P) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{ij}^*(P, X) \cdot f_j(X) \cdot d\Omega(X) \tag{10.5}$$

10.3-Integrais Particulares Aplicadas ao MEC:

Tomando-se a equação de Navier (3.14), repetida a seguir, pode-se ver que:

$$\mu u_{i,jj} + \mu \frac{u_{j,ji}}{1-2\nu} + b_i = 0$$

$$L(u_i) = \mu u_{i,jj} + \mu \frac{u_{j,ji}}{1-2\nu} \quad (10.6)$$

e

$$f_i = b_i \quad (10.7)$$

A função complementar do problema será a solução do problema de valor de contorno na ausência de forças de massa. Esta solução pode ser obtida a partir da equação integral:

$$c_{ik} u_k^c(P) = - \int_{\Gamma} p_{ik}^*(X,P) u_k^c(X) d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ik}^*(X,P) p_k^c(X) d\Gamma \quad (10.8)$$

O termo p_k^c representa a solução complementar das forças de contorno do problema que, analogamente a (10.4), obedece a seguinte relação:

$$p_i = p_i^c + \tilde{p}_i \quad (10.9)$$

A integral particular para os deslocamentos é dada por:

$$\tilde{u}_i(P) = \int_{\Omega} u_{ik}^*(X, P) b_k(X) d\Omega \quad (10.10)$$

A integral em (10.10) não precisa ser efetuada num domínio infinito, pois a função de força de massa, b_k , não é definida fora do corpo em estudo.

Pode-se notar que, substituindo-se os valores da integral particular (10.10) e da função complementar (10.8) na expressão (10.4), obtém-se uma equação integral da mesma natureza daquelas discutidas nos Capítulos 5 e 6.

Pelo mesmo processo descrito no Capítulo 5, pode-se obter um sistema de equações a partir da equação (10.8) da forma:

$$[G]\{P^c\} - [H]\{U^c\} = 0 \quad (10.11)$$

Utilizando-se as relações (10.4) e (10.9) pode-se eliminar o valor da função complementar em (10.11), chegando-se a:

$$[G]\{P\} - [H]\{U\} = [G]\{\tilde{P}\} - [H]\{\tilde{U}\} \quad (10.12)$$

Agora tem-se um sistema de equações em que os termos referentes às integrais particulares estão no segundo membro. Estes termos são conhecidos e dependem apenas da função de carregamento. Aplicando-se as condições de contorno, que vão alterar apenas as equações do primeiro membro de (10.12), chega-se ao sistema de equações:

$$[A]\{X\} = \{F^b\} + \{\tilde{F}\} \quad (10.13)$$

Em (10.13), $\{F^b\}$ é o vetor originado pelas condições de contorno de forças e deslocamentos, e $\{\tilde{F}\}$ é o vetor resultante do produto das matrizes do segundo membro de (10.12).

Integrais particulares podem ser encontradas para certos tipos de carregamento resolvendo-se a integral (10.10). Esta tarefa pode se tornar bastante trabalhosa se o carregamento de domínio for muito complexo. Para carregamentos simples, são conhecidas algumas integrais particulares.

10.3.1-Integrais Particulares para Carregamento Gravitacional:

Para um corpo sujeito ao próprio peso, a não homogeneidade da equação (3.14) é dada por:

$$b_i = -\delta_{i2}\rho g \quad (10.14)$$

Na expressão (10.14), g é a aceleração gravitacional considerada e ρ é a massa específica do corpo. Neste caso, integral particular para deslocamentos é dada por [41]:

$$\tilde{u}_1 = \frac{\rho g}{4\mu(\lambda + \mu)} \lambda x_1 x_2 \quad (10.15a)$$

$$\tilde{u}_2 = \frac{-\rho g}{8\mu(\lambda + \mu)} [(\lambda + 2\mu)x_2^2 + \lambda x_1^2] \quad (10.15b)$$

Pelo mesmo processo descrito no final do Capítulo 3, pode-se obter, a partir das expressões (10.15), as integrais particulares para as forças de contorno. Estas são dadas por:

$$\tilde{p}_1 = 0 \quad (10.16a)$$

$$\tilde{p}_2 = -\rho g x_2 \eta_2 \quad (10.16b)$$

10.3.2- Integrais Particulares para Força Centrífuga:

Se um corpo estiver girando com velocidade angular ω , constante, em torno de um ponto C, a força de massa em um ponto X do corpo será dada por:

$$b_i = \rho \omega^2 r r_i \quad (10.17)$$

sendo r a distancia entre os pontos X e C.

As integrais particulares são dadas pelas expressões a seguir [41]:

$$\tilde{u}_i = \frac{-\rho \omega^2 r^2}{8(\lambda + 2\mu)} r_{,k} r_{,k} x_i \quad (10.18)$$

$$\tilde{p}_i = \frac{-\rho \omega^2 r^2}{4(\lambda + 2\mu)} [(2\lambda + \mu) r_{,k} r_{,k} \eta_i + 2\mu r_{,i} r_{,k} \eta_k] \quad (10.19)$$

10.4-Integrais Particulares no Tratamento de Problemas Termo-elásticos:

As integrais particulares para as forças gravitacional e centrífuga, apresentadas na seção anterior, têm formas fechadas.

Isso se deve a estas forças terem uma distribuição conhecida sobre o corpo e serem representadas por funções simples, facilitando a tarefa de se efetuar a integração de (10.5).

No caso do problema termo-elástico, a obtenção de uma integral particular fechada não é tão imediata nem simples. O problema termo-elástico está, na maioria dos casos, vinculado ao problema potencial de valor de contorno, que trata a distribuição de temperatura no corpo. A não homogeneidade do problema termo-elástico é dada por:

$$f_i = -2\alpha T_{,i} \tag{10.20}$$

Em (10.20), α representa o coeficiente de dilatação linear do material e T , a função de distribuição de temperatura. Assim, antes de se proceder a determinação da integral particular, é preciso encontrar-se uma função que represente a distribuição de temperatura no corpo.

Com este propósito, admite-se que a integral particular para deslocamentos possa ser representada como um gradiente de uma função potencial $h(X)$. Assume-se que:

$$\tilde{u}_i(X) = \frac{\alpha(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} h_{,i}(X) \tag{10.21}$$

Substituindo-se os valores de (10.21), (10.20) e (10.6) na equação diferencial (10.1), tem-se que:

$$T(X) = h_{,ij}(X) \tag{10.22}$$

Assim, a função potencial $h(X)$ leva a um a relação implícita entre a distribuição de temperatura e a integral particular para deslocamentos.

Assume-se que a função 0 pode ser representada por uma série infinita, via uma **função de forma global**, $C(X, P_n)$, multiplicada por uma **função de densidades fictícias** $\phi(P_n)$, ou seja:

$$h(X) = \sum_{n=1}^{\infty} C(X, P_n) \cdot \phi(P_n) \quad (10.23)$$

Várias funções podem ser usadas como função de forma global, no entanto é interessante que a função escolhida faça a série (10.23) convergir com poucos termos. Uma função sugerida em [41] é:

$$C(X, P_n) = A_0^2 [r^2(X, P_n) - b_n r^3(X, P_n)] \quad (10.24)$$

Na expressão (10.24), A_0 é uma constante usada para adimensionalizar os comprimentos, e b_n é uma constante de ajuste que será discutida mais adiante. Utilizando-se as relações (10.21) e (10.23), a integral particular para os deslocamentos pode ser escrita como:

$$\tilde{u}_i(X) = \sum_{n=1}^{\infty} D_i(X, P_n) \cdot \phi(P_n) \quad (10.25)$$

sendo que

$$D_i(X, P_n) = \frac{\alpha(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} A_0 [2r - 3b_n r^2] r_i \quad (10.26)$$

Aplicando-se o operador de Laplace à expressão (10.23), de acordo com a expressão (10.22), obtém-se a distribuição de temperatura no corpo como sendo [41]:

$$T(X) = \sum_{n=1}^{\infty} K(X, P_n) \cdot \phi(P_n) \quad (10.27)$$

sendo que:

$$K(X, P_n) = 4 - 9b_n r \quad (10.28)$$

Pode-se notar que, tanto em (10.26) quanto em (10.28), foi feito um ajuste na constante A_0 em [41], mantendo adimensionais as funções. Desta forma, a obtenção das expressões mostradas não é imediata.

A integral particular para as forças de contorno é obtida de (10.25) pelo mesmo processo já descrito no Capítulo 3, ou seja, substitui-se o valor dos deslocamentos particulares na expressão (3.6) e o valor desta na relação constitutiva (3.8). Calculando-se o produto escalar entre o tensor de tensões obtido e o vetor normal ao contorno, chega-se a:

$$\tilde{p}_i(X) = \sum_{n=1}^{\infty} H_i(X, P_n) \cdot \phi(P_n) \quad (10.29)$$

sendo que:

$$H_i(X, P_n) = \alpha(3\lambda + 2\mu) \left\{ \frac{(\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu \delta_{ik} \delta_{jl})}{\lambda + 2\mu} [2\delta_{kl} - 3b_n r(\delta_{kl} + r_{,k} r_{,l})] - \delta_{ij} \alpha K(X, P_n) \right\} \eta_j \quad (10.30)$$

Com isso tem-se as integrais particulares necessárias para o tratamento do problema termo-elástico, restando apenas determinar o valor da função de densidade fictícia nos pontos P_n .

Uma vez conhecida a temperatura em \mathbf{n} pontos do corpo, pode-se utilizar a expressão (10.27) para montar um sistema de equações, sendo os valores de $\phi(P_n)$ as incógnitas, da forma:

$$[K]\{\phi\} = \{T\} \quad (10.31)$$

Deve-se notar que o número de pontos \mathbf{n} usados para determinar os valores da função $\phi(P_n)$ vai depender da convergência da série usada para expressar a temperatura e da complexidade da distribuição desta. Pode ser necessário uma quantidade de pontos maior que o número de nós de contorno, assim pontos internos passam a ser necessários para a resolução do problema. No caso de haver nós duplos, um deles deverá ser ignorado, pois a consideração de ambos tornaria o sistema (10.31) indeterminado. Neste caso a temperatura média dos nós descontínuos pode ser uma escolha válida para a montagem de (10.31).

É fácil notar, observando-se a expressão (10.28), que o maior valor de cada coluna da matriz $[K]$ está na diagonal principal [41]. No entanto, em termos absolutos, pode ocorrer o contrário. Para corrigir este problema, tornando o sistema (10.31) melhor condicionado, as constantes b_n são ajustadas de modo a anular o menor valor de cada coluna [41]. Com isso a matriz $[K]$ terá apenas números positivos.

Além deste artifício, recomenda-se que o sistema seja resolvido com uma estratégia de pivotamento total, garantindo uma melhor acuidade nos resultados, de acordo com [41]. Mesmo assim, erros podem aparecer quando um excessivo número de pontos é usado para determinar os valores de $\phi(P_n)$.

10.5- Integrais Particulares Aplicadas a Problemas

Elasto-plásticos:

10.5.1-Formulação:

Para o problema elasto-plástico associado ao critério de Von Mises, a não homogeneidade da equação diferencial é dada por:

$$f_i = 2\mu\dot{\epsilon}_{ij,j}^p \quad (10.32)$$

para o estado plano de deformação, ou, para o estado plano de tensão:

$$f_i = 2\mu\dot{\epsilon}_{ij,j}^p + \lambda\dot{\epsilon}_{jj,i}^p \quad (10.33)$$

Adotando-se o modelo da tensões iniciais para tratar o problema elasto-plástico, pode-se simplesmente escrever que:

$$f_i = \dot{\sigma}_{ij,j}^0 \quad (10.34)$$

O incremento das tensões iniciais $\dot{\sigma}_{ij}^0$ pode ser obtido diretamente do incremento das deformações plásticas, utilizando-se as expressões (10.32) ou (10.33), conforme o estado plano considerado. Com isso os modelos se tornam equivalentes. Uma

demonstração mais formal da equivalência dos modelos pode ser vista em [35].

Pode-se relacionar a integral particular para os incrementos de deslocamento com o vetor de Galerkin:

$$\dot{\tilde{u}}_i = \frac{1-\nu}{\mu} F_{i,kk} - \frac{1}{2\mu} F_{k,ki} \quad (10.35)$$

Substituindo-se o valor da integral particular para os deslocamentos, dada por (10.35), na equação diferencial (10.3), com o operador dado por (10.6) e a não homogeneidade dada por (10.34), obtém-se a seguinte relação:

$$F_{i,kkj} = \frac{1}{1-\nu} \dot{\sigma}_{ij,j}^0 \quad (10.36)$$

Com o objetivo de simplificar as passagens subsequentes, admite-se que o tensor das tensões iniciais $\dot{\sigma}_{ij}^0$ possa ser relacionado com uma função tensorial h_{ij} tal que:

$$h_{ij,mmnn} = \dot{\sigma}_{ij}^0 \quad (10.37)$$

Substituindo-se o valor de $\dot{\sigma}_{ij}^0$ em (10.36) por aquele dado pela relação (10.37), chega-se a:

$$F_i = \frac{1}{1-\nu} h_{ij,j} \quad (10.38)$$

Substituindo-se o valor do vetor F_i na expressão da integral particular para os deslocamentos, dada por (10.35), pelo vetor $h_{ij,j}$ dado por (10.38), chega-se a:

$$\dot{\tilde{u}}_i = \frac{1}{\mu} h_{il,kk} - \frac{1}{2\mu(1-\nu)} h_{lm,ilm} \quad (10.39)$$

As integrais particulares para as deformações, tensões e forças de contorno podem ser obtidas das seguintes expressões:

$$\dot{\tilde{\epsilon}}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{\tilde{u}}_{i,j} + \dot{\tilde{u}}_{j,i}) \quad (10.40)$$

$$\dot{\tilde{\sigma}}_{ij} = 2\mu \dot{\tilde{\epsilon}}_{ij} + \lambda \delta_{ij} \dot{\tilde{\epsilon}}_{kk} - \dot{\sigma}_{ij}^0 \quad (10.41)$$

$$\dot{\tilde{p}}_i = \dot{\tilde{\sigma}}_{ij} \eta_j \quad (10.42)$$

As parcelas complementares dos incrementos das deformações e tensões podem ser calculados utilizando-se as expressões (5.103) e (5.91), respectivamente. Deve-se lembrar que, neste caso, os valores dos incrementos de forças e deslocamentos do contorno usados no cálculo devem ser os complementares. Assim tem-se que:

$$\dot{\epsilon}_{ij}(P) = - \int_{\Gamma} S_{kij}(X,P) \dot{u}_k^c(X) d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{kij}(X,P) p_k^c(X) d\Gamma + \dot{\tilde{\epsilon}}_{ij} \quad (10.43)$$

$$\dot{\sigma}_{ij}(P) = - \int_{\Gamma} S_{kij}(X, P) \dot{u}_k^c(X) d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{kij}(X, P) \dot{p}_k^c(X) d\Gamma + \dot{\sigma}_{ij}^c \quad (10.44)$$

No caso de haver forças de massa envolvidas, estas podem ser tratadas também por integrais particulares. Para isso basta somar as integrais particulares referentes à contribuição das forças de massa às expressões (10.43) e (10.44).

Analogamente ao que foi feito no tratamento do problema termo-elástico, admite-se que a função tensorial h_{ij} possa ser escrita como uma série infinita, formada pelo produto entre uma função de forma global e uma função de densidades fictícias, da forma:

$$h_{ij}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} C(X, P_n) \phi_{ij}(P_n) \quad (10.45)$$

Várias funções podem ser usadas como função de forma global, no entanto é sugerido em [41] que a função escolhida faça a série (10.45) convergir com poucos termos. Uma função adotada em [41] foi:

$$C(X, P_n) = A_0 [r^4(X, P_n) - b_n r^5(X, P_n)] \quad (10.46)$$

Os termos A_0 e b_n seguem a mesma discussão feita no Item 10.4. Pode-se, agora, escrever o incremento das tensões iniciais substituindo-se (10.45) em (10.37), ou seja:

$$\dot{\sigma}_{ij}^0(X) = \sum_{n=1}^{\infty} K(X, P_n) \phi_{ij}(P_n) \quad (10.47)$$

sendo:

$$K(X, P_n) = 64 - 225b_n r(X, P_n) \quad (10.48)$$

As demais integrais particulares para os incrementos de deslocamento e tensões podem ser escritas como:

$$\tilde{u}_i(X) = \sum_{n=0}^{\infty} D_{iml}(X, P_n) \cdot \phi_{ml}(P_n) \quad (10.49)$$

sendo

$$D_{iml} = A_0 r \left[\frac{-8 + 15b_n r}{2\mu(1-\nu)} (r_{,i} \delta_{lm} + r_{,m} \delta_{il}) + \left(\frac{-8 + 15b_n r}{2\mu(1-\nu)} + \frac{32 - 75b_n r}{\mu} \right) r_{,l} \delta_{im} + \frac{15b_n}{2\mu(1-\nu)} r r_{,i} r_{,m} r_{,l} \right] \quad (10.50)$$

$$\tilde{\sigma}_{ij}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} S_{ijlm}(X, P_n) \cdot \phi_{lm}(P_n) \quad (10.51)$$

$$S_{ijkl} = (e_2 + f_2 r) \delta_{jm} \delta_{il} + (e_3 + f_3 r) \delta_{ij} \delta_{lm} + (e_4 + f_4 r) \delta_{im} \delta_{jl} + f_1 r (r_{,j} r_{,m} \delta_{il} + r_{,i} r_{,j} \delta_{lm} + r_{,i} r_{,m} \delta_{jl}) + f_2 r (r_{,i} r_{,l} \delta_{jm} + r_{,j} r_{,l} \delta_{im}) + f_3 r r_{,l} r_{,m} \delta_{ij} - f_1 r r_{,i} r_{,j} r_{,l} r_{,m} \quad (10.52)$$

$$e_1 = \frac{-8}{1-\nu};$$

$$f_1 = \frac{15b_n}{1-\nu}$$

$$e_2 = \frac{8(3-4\nu)}{1-\nu};$$

$$f_2 = \frac{15b_n(6-5\nu)}{1-\nu}$$

$$e_3 = \frac{-8}{1-\nu} + \frac{8\nu}{1-2\nu} \left[\frac{-1}{1-\nu} \left(\frac{15b_n}{2\mu(1-\nu)} + 2 \right) + 8 \right];$$

$$f_3 = 15b_n \left(\frac{1}{1-\nu} + 2 \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{5\nu-1}{1-\nu} \right)$$

$$e_4 = e_2 - 64;$$

$$f_4 = f_2 + 225b_n$$

A integral particular para o incremento das forças de contorno pode ser calculada com a expressão (10.42) a partir do valor da integral particular para incremento da tensão, dada por (10.51).

10.5.2-Implementação:

Em [41] afirma-se que a implementação da formulação apresentada no Item 10.5.1 não diferiu muito do que foi mostrado no tratamento do problema termo-elástico. O procedimento geral do cálculo em regime elasto-plástico é o mesmo apresentado no Capítulo 6, com alterações principalmente na forma como se monta o vetor $\{\dot{\Sigma}\}$ (ver Item 6.4).

Neste trabalho, adotou-se uma abordagem do problema elasto-plástico pelo modelo das deformações iniciais. O processo das integrais particulares foi implementado originalmente para o modelo das tensões iniciais em [41], processo este resumido no Item 10.5.1.

Passa-se agora a descrever o processo de resolução do problema elasto-plástico com o uso das integrais particulares. Após o cálculo do problema elástico, constatação da plastificação e redução do carregamento (ver Item 6.3), tem início o processo

incremental elasto-plástico. Um incremento de carregamento $\{\dot{F}\}$ é aplicado ao corpo (ver Item 6.2) e determinam-se os incrementos de forças e deslocamentos no contorno.

Conhecidos os valores das forças e deslocamentos incrementais no contorno, procede-se o cálculo dos incrementos de tensões e deformações. Para tal utilizam-se as expressões (10.43) e (10.44), para pontos internos, e o processo descrito no Item 6.7 para pontos no contorno. Deve-se salientar que os valores dos incrementos de forças e deslocamentos utilizados nas expressões (10.43) e (10.44) são os complementares. Os incrementos de tensões não precisam necessariamente ser calculados com (10.44), podendo ser obtidos com as relações constitutivas adequadas a partir dos incrementos de deformação (ver Item 6.6).

De posse dos valores dos incrementos de deformações totais, e adotando-se uma regra de escoamento associada ao critério de Von Mises, calcula-se o valor da parcela plástica destes, utilizando-se a expressão (4.94b), repetida a seguir:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{\bar{s}_{kl} \dot{\epsilon}_{kl}}{\left(1 + \frac{\bar{H}}{3\mu}\right) \bar{\sigma}_e^2} \bar{s}_{ij} \quad (i, j, k, l=1, 2, 3)$$

Com os valores dos incrementos de deformação plástica, dados por (4.94b), pode-se determinar o valor dos incrementos das tensões iniciais. Isto pode ser feito com o uso das expressões (10.32), (10.33) e (10.34), ou usando-se a relação constitutiva em três dimensões, lembrando que, para o critério de Von Mises, a deformação volumétrica do corpo é nula:

$$\sigma_{ij}^0 = 2\mu \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (10.53)$$

Resta agora determinar o valor da função densidade fictícia $\phi_{ij}(P_n)$. Observando-se a expressão (10.47) pode-se concluir que cada tensor $\phi_{ij}(P_n)$ deve ser simétrico. Com a mesma expressão (10.47), pode-se montar três sistemas lineares para determinar as componentes de $\phi_{ij}(P_n)$. Assim tem-se:

$$[K]\{\phi_{11}\} = \{\dot{\sigma}_{11}^0\} \quad (10.54a)$$

$$[K]\{\phi_{22}\} = \{\dot{\sigma}_{22}^0\} \quad (10.54b)$$

$$[K]\{\phi_{12}\} = \{\dot{\sigma}_{12}^0\} \quad (10.54c)$$

Os detalhes para a montagem de cada sistema são os mesmos descritos no Item 10.4. A matriz $[K]$ é a mesma para os três sistemas e não se altera durante o processo incremental. Com isso pode-se decompô-la uma única vez e resolver-se os três sistemas de equações.

Tendo-se os valores de $\phi_{ij}(P_n)$, calculam-se as integrais particulares para os incrementos de forças e deslocamentos no contorno. Com isso pode-se montar o sistema:

$$[G]\{\dot{P}\} - [H]\{\dot{U}\} = [G]\{\dot{\bar{P}}\} - [H]\{\dot{\bar{U}}\} \quad (10.55)$$

As matrizes $[H]$ e $[G]$ são as mesmas usadas na resolução do problema elástico, sendo montadas uma única vez no início do

processo. O sistema linear com a imposição das condições de contorno, mostrado a seguir, também não se altera.

$$[A]\{\dot{X}\} = \{\dot{F}^b\} + \{\dot{\tilde{F}}\} \quad (10.56)$$

Na expressão (10.56) o vetor $\{\dot{F}^b\}$ representa as condições de contorno do problema e o vetor $\{\dot{\tilde{F}}\}$ é gerado pelos produtos matriciais do segundo membro de (10.55).

De posse dos novos valores dos incrementos de forças e deslocamentos no contorno, recalculam-se os valores dos incrementos de deformações e tensões, conforme já foi descrito de modo a atualizar o vetor $\{\dot{\tilde{F}}\}$. Repete-se o processo até atingir uma convergência nos incrementos de deslocamentos e forças no contorno. Uma vez atingida a convergência, um novo passo de carga pode ser aplicado, reiniciando o processo.

Capítulo 11

Conclusões

11.1-Conclusões Gerais:

O método dos elementos de contorno foi implementado com sucesso para o tratamento de problemas elasto-plásticos. Os exemplos mostrados no Capítulo 9 atestam a eficácia do uso de elementos isoparamétricos lineares na análise destes problemas.

O uso de expressões analíticas, na determinação de deslocamentos do contorno e em pontos internos, e forças no contorno, dispensou estratégias numéricas especiais para o tratamento de singularidades e quase singularidades.

Para determinação do efeito das forças de massa, as integrais de domínio foram convertidas em integrais de contorno de células. Estas foram tratadas analiticamente, para a determinação dos deslocamentos e forças, e numericamente, para a determinação das deformações e tensões. O tratamento analítico das integrais de domínio dispensou o uso de estratégias numéricas especiais, no caso de haver singularidades ou quase singularidades de domínio.

O processo de integração em contorno de célula mostrou-se mais eficiente que a integração de domínio utilizada. A formulação aqui apresentada para estas integrais dispensa o tratamento de singularidades de domínio, embora possam ocorrer problemas de instabilidade na integração, semelhante ao de uma quase singularidade, se forem usadas células muito obtusas.

Existe uma grande influência do posicionamento dos pontos de colocação no resultado final do problema. Em alguns casos o

resultado final pode ser totalmente degenerado por uma escolha inadequada do posicionamento destes.

11.2-Sobre o Trabalho de Lee e Fenner:

Lee e Fenner utilizaram elementos isoparamétricos quadráticos em sua implementação, tanto para os elementos de contorno quanto para as células de domínio. Também utilizaram quatro estratégias diferentes para a resolução do problema elasto-plástico, combinando os processos de tensão inicial e deformação inicial com o uso das expressões (4.94a) e (4.94b). Além disso, a convergência do processo iterativo foi auxiliado por um acelerador de convergência.

No presente trabalho, o problema elasto-plástico foi analisado apenas com elementos isoparamétricos lineares, tanto para os elementos de contorno quanto para as células de domínio. Apenas o modelo de deformação inicial, combinado com a expressão (4.94b) foi implementado e nenhum acelerador de convergência foi usado.

Apesar de todas as simplificações feitas sobre o trabalho original, obtiveram-se resultados compatíveis com aqueles apresentados por Lee e Fenner, utilizando-se o mesmo número de nós de contorno ou, em alguns exemplos, com um aumento menor que 20%.

11.3-Sobre as Integrais Particulares de Henry e Banerjee:

O processo das integrais particulares, como proposto por Henry e Banerjee, dispensa qualquer integração de domínio, levando para o contorno todo o efeito produzido por carregamentos de massa, variação de temperatura e deformação plástica.

Para carregamentos de massa, tais como peso próprio, força centrífuga ou qualquer outro que possa ser expresso por uma função conhecida, o processo é plenamente válido e traz vantagens em relação a integração de domínio. Um certo trabalho algébrico é necessário para obtenção da integral particular para um carregamento específico.

Na resolução do problema termo-elástico, a obtenção de uma função que descreva o gradiente de temperaturas no corpo só é possível para alguns casos particulares. Por esta razão é proposta uma função aproximada para descrever este gradiente. Desta forma, substitui-se a integração de domínio pela resolução de um sistema linear.

O sistema linear gerado pelo processo das integrais particulares pode ser maior que aquele gerado pelo método dos elementos de contorno para a resolução do problema original.

Se for usada integração em domínio de célula, a integral particular pode ser uma boa opção, uma vez que a solução do sistema tem grande chance de ser mais rápida que a integração do domínio. Já no caso das integrais de domínio serem convertidas em integrais equivalentes calculadas no contorno das células, esta vantagem torna-se duvidosa. O sistema gerado pelas integrais particulares não é bem condicionado, necessitando de estratégias especiais para sua resolução. Neste caso a integração do domínio pode até se tornar mais adequada.

No problema elasto-plástico, o tempo de processamento para resolução pelo processo das integrais particulares é maior que aquele gasto no processo de integração do domínio. Para cada iteração, o sistema de equações que define a função de densidades fictícias deve ser resolvido três vezes.

A função de forma global adotada pode descrever um gradiente térmico com boa aproximação. No entanto, acredita-se que possa haver uma maior dificuldade em se adequar esta função às tensões ou deformações plásticas. Estas ultimas podem ter

valores altos em um ponto e serem nulas no ponto vizinho, situação bastante comum nos modelos elasto-plásticos da literatura.

Outro problema é o tratamento de descontinuidades no contorno, tanto de forças e deslocamentos quanto de gradientes térmicos. No caso de haver um nó duplo, se o problema for tratado com células, basta vincular células vizinhas a cada um dos nós duplos. No processo das integrais particulares, isso não é possível, sendo necessário desprezar um dos valores ou tomar-se a média destes.

Apesar destas críticas, acredita-se que o processo das integrais particulares seja uma opção interessante no tratamento de alguns problemas específicos pelo método dos elementos de contorno.

11.4-Sobre a Integração Analítica:

A integração analítica dos elementos de contorno isoparamétricos lineares foi implementada com sucesso. Células de domínio para a consideração de carregamentos de massa lineares também foram tratadas analiticamente.

Esta formulação mostrou-se bastante estável e conferiu ao programa uma grande velocidade no tratamento de problemas elásticos. A formulação vislumbra as singularidades de contorno e não é sensível ao problema das quase singularidades. Com isso, pode-se usar elementos vizinhos com grande diferença de tamanho, sem aumento no tempo de processamento ou diminuição na precisão dos resultados. Isso é relevante na confecção de malhas onde haja zonas de transição, uma vez que a formulação permite que estas sejam abruptas.

Pode-se aplicar os elementos lineares integrados analiticamente a uma grande gama de problemas, e não a um tipo específico, pois a formulação é genérica.

A combinação das integrais analíticas com a formulação de deformações iniciais do problema elasto-plástico conduziu a resultados com boa precisão e concordantes com aqueles obtidos por técnicas numéricas.

11.5-Proximos Passos:

Acredita-se que haja vantagens em se estender o tratamento analítico às integrais de contorno para a determinação de tensões e deformações. Isso aceleraria o processamento de problemas elasto-plásticos e pode permitir uma extensão a outros problemas de mecânica.

Bibliografia

- [1] SAADA, A. S., *Elasticity: Theory and Applications*, Krieger Publishing Company, 2^a ed, Malabar, Florida, USA, 1993
- [2] BREBBIA, C. A. and DOMINGUES, J., *Boundary Elements: an Introductory Course*, McGraw-Hill, 2^a ed, New York, USA, 1992
- [3] BECKER, A. A., *The Boundary Element Method in Engineering: a Complete Course*, McGraw-Hill, London, UK, 1992
- [4] PALERMO Jr., L., *Análise de Peças de Seção Delgada como Associação de Placas pelo Método dos Elementos de Contorno*, São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1989, 148 p. (Tese de Doutorado, parcialmente financiada pela FAPESP), (Orientador Munir Rachid)
- [5] CHAVES, E. W. V., *Análise de Placas com Variação de Espessura Através do Método dos Elementos de Contorno*, São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1997, 171 p. (Tese de Mestrado), (Orientador Wilson Sergio Venturini)
- [6] KELLOG, O. D., *Foundations of Potential Theory*, Springer, Berlin, 1929
- [7] MUSKHELISHVILI, N. I., *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff, Holland, 1953
- [8] MIKHLIN, S. G., *Integral Equations*, Pergamon Press, Oxford, 1957
- [9] KUPRADZE, O. D., *Potential Methods in Theory of Elasticity*, Daniel Davy, New York, 1965
- [10] JASWON, M. A., *Integral Equation Methods in Potential Theory - I*, Proc. Roy Soc. Lond., vol. A275, pp. 23-32, 1963
- [11] SYMM, G. T., *Integral Equation Methods in Potential Theory - I*, Proc. Roy Soc. Lond., vol. A275, pp. 33-46, 1963

- [12] RIZZO, F. J., *An Integral Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics*, Q. Appl. Math., vol. 25, pp. 83-95, 1967
- [13] CRUSE, T. A., *Numerical Solution in Three Dimensional Elastostatics*, Int. J. Solids and Structures, vol. 5, pp. 1259-1274, 1969
- [14] LACHAT, J. C., *A Further Development of the Boundary Integral Technique for Elastostatics*, PhD Thesis, University of Southampton, UK, 1975
- [15] LACHAT, J. C. and WATSON, J. O., *A Second Generation Boundary Integral Equation Program for Three-Dimensional Elastic Analysis*, ASME Applied Mechanics National Conference, New York, 1975
- [16] LACHAT, J. C. and WATSON, J. O., *Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations: a Formulation for Three-Dimensional Elastostatics*, Int. J. Numer. Meth. in Engng, vol. 10, pp.991-1005, 1976
- [17] SWEDLOW, J. L. and CRUSE, T. A., *Formulation of Boundary Integral Equation for Three-Dimensional Elasto-Plastic Flow*, Int. J. Solids and Structures, vol. 7, pp. 1673-1683, 1971
- [18] RICARDELLA, P., *An Implementation of the Boundary Integral Technic for Plane Problems in Elasticity and Elastoplasticity*, PhD Thesis, Carnegie-Mellon University, 1973
- [19] MENDELSON, A. and ALBERS L. U., *Applications of Boundary Integral Equations to Elastoplastic Problems*, Proc. ASME Conference on Boundary Integrtal Equation Methods: Computational Applications in Applied Mechanics, New York, 1975
- [20] MENDELSON, A., *Boundary Integral Methods in Elasticity and Palsticity*, Report NASA TN D-7418, 1973

- [21] MUKHERJEE, S., *Correct Boundary Integral Equations in Planar Thermoelastopalticity*, Int. J. Solids and Structures, vol. 13, pp. 331-335, 1977
- [22] BUI, H. D., *Some Remarks About the Formulation of Three-Dimensional Thermoelastic Problems by Integral Equations*, Int. J. Solids and Structures, vol. 14, pp. 935-939, 1978
- [23] TELLES, and BREBBIA, C. A., *On the Application of Boundary Element Method to Plasticity*, Appl. Math. Modelling, vol. 3, pp. 466-470, 1979
- [24] TELLES, and BREBBIA, C. A., *The Boundary Element Method to Plasticity*, Proc. Second Int. Conf. on Recent Advances in Boundary Element Methods, Southampton, pp 295-317, 1980
- [25] LEE, K. H., *A Boundary Integral Equation Method for two Dimensional Elastoplastic Analysis*, PhD Thesis, Imperial College, University of London, 1983
- [26] TAN, C.L. and LEE K. H., *Elastic-plastic Stress Analysis of a Cracked Thick-walled Cilinder*, J. Strain Analysis, vol. 18, pp 253-260, 1983
- [27] LEE K. H. and FENNER R. T., *A Quadratic Formulation For Two Dimensional Elastoplasnic Analysis Using the Boundary Integral Equation Method*, J. Strain Analysis, vol. 21, pp. 159-175, 1986
- [28] HENRY, D. P. and BANERJEE, P. K., *A new BEM Formulation for Two and Three Dimensional Elastoplasticity Using Particular Integrals*, Int. j. Numer. Meth. in Engng, vol. 26, pp. 2079-2096, 1988
- [29] FOLTRAN, C. E. e PALERMO Jr., L., *Um Tratamento Analítico para Obtenção das Matrizes H e G do Método dos Elementos de Contorno para Aplicação em problemas da Elastostática Bidimensional*, Anais XVIII CILAMCE, vol. 1, pp. 389-396, Brasilia, 1997

- [30] ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, I. A., editors, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York, 1972
- [31] AXELSSON, K. and SAMUELSSON, A., *Finite Element Analysis of Elastic-Plastic Materials Displaying Mixed Hardening*, Int. j. Numer. Meth. in Engng, vol. 14, pp. 211-225, 1979
- [32] CHEN, W. F. and HAN, D. J., *Plasticity for Structural Engineers*, Springer-Verlag, New York, 1988
- [33] CHEN, D. H. and NISITANI, H., *Effect of Poisson's Ratio on Elastic-Plastic Stress under Plane Deformation*, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 20, pp 17-24, 1997
- [34] LOU, Z. W. and ZHANG, M., *Elastoplastic Boundary Element Analysis with Hetenyi's Fundamental Solution*, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 10, pp 231-239, 1992
- [35] TELLES, J. C. F., *The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems*, Springer-Verlag, Berlin, 1983
- [36] VLASSOV, B. Z., *Pieces Longues en Voiles Minces*, Editions Eyrolles, Paris, France, 1962
- [37] LOVE, A.E.H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover Publications, Fourth Edition, 1994
- [38] FOSSA, G. and NAPPI, A., *A Critical Discussion on Possible Variable Changes Related to Elasto-plastic Collocation BEM Analysis*, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 8, n 1, pp. 24-34, 1991
- [39] THEOCARIS, P. S. and MARKETOS, E., *Elastic-plastic Analysis of Perforated Thin Strips of a Strain-hardening Material*, J. Mech. Phys. Solids, vol 12, pp 377-390, 1964
- [40] BANERJEE, P. K. and CATHIE, D. N., *A Direct Formulation and Numerical Implementation of the Boundary Element Method for Two-dimensional Problems of Elasto-plasticity*, Int. J. Mech. Sci., vol 22, pp 233-245, 1980

- [41] HENRY, D. P, *Advanced Development of the Boundary Element Method for Elastic and Inelastic Thermal Stress Analysis*, PhD dissertation, State University of New York at Buffalo, Buffalo, New York, 1987

Apêndice A - Soluções Analíticas dos Exemplos do Capítulo 8.

1-Introdução:

As soluções analíticas dos exemplos apresentados no capítulo 8 foram estudadas com o objetivo de se ter um parâmetro confiável para aferição dos programas. Para as soluções em regime elasto-plástico, optou-se pelo uso do critério de escoamento de Tresca, devido a facilidade no tratamento das expressões envolvidas e da proximidade deste critério ao proposto por von Mises.

2-Tubo de Parede Espessa:

O problema do tubo de parede espessa, de raio interno **a** e externo **b**, como ilustrado na figura 1, sujeito a uma pressão interna **p**, pode ser resolvido supondo-se que a deformação axial do tubo é impedida por algum agente externo. Assim ter-se-á um estado plano de deformação nas seções transversais do tubo. A equação diferencial do problema, obtida a partir das equações de equilíbrio escritas para um sistema de coordenadas cilíndricas é:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r} = 0$$

(1)

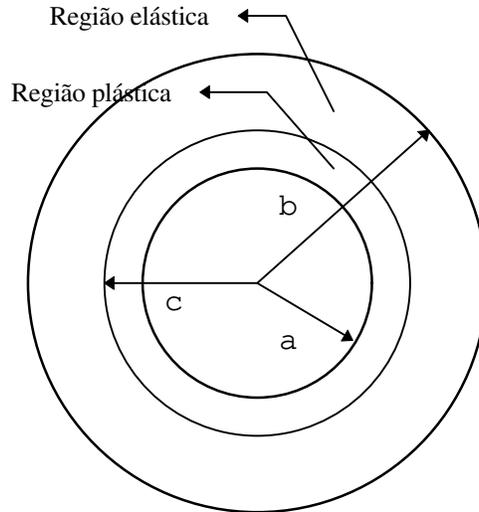


Figura 1 - Tubo de Parede Espessa.

Devido à simetria do problema, pode-se supor que há deslocamentos apenas na direção radial, u_r , sendo nulos os deslocamentos na direção tangencial, u_θ . As deformações nas direções radial, ϵ_r , e tangencial, ϵ_θ , são dadas por:

$$\epsilon_r = \frac{du_r}{dr} \quad (2)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \quad (3)$$

As deformações relacionam-se com as tensões segundo as seguintes relações constitutivas:

$$E\varepsilon_r = \sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z) \quad (4a)$$

$$E\varepsilon_\theta = \sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z) \quad (4b)$$

Devido a hipótese de estado plano de deformação, a terceira relação constitutiva pode ser usada para relacionar as tensões nas direções radial, σ_r , e tangencial, σ_θ , com a tensão na direção axial, σ_z , ou seja:

$$0 = \sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) \quad (5)$$

Isolando-se o valor de σ_z na relação (5) e substituindo-se nas relações constitutivas (4) tem-se:

$$E\varepsilon_r = \sigma_r(1 - \nu^2) - \nu\sigma_\theta(1 + \nu) \quad (6a)$$

$$E\varepsilon_\theta = \sigma_\theta(1 - \nu^2) - \nu\sigma_r(1 + \nu) \quad (6b)$$

Substituindo-se na expressão da deformação radial (2), o valor do deslocamento radial obtido de (3), chega-se a seguinte relação de compatibilidade:

$$\varepsilon_r = \frac{d}{dr}(r\varepsilon_\theta) \quad (7)$$

Substituindo os valores das deformações obtidas de (6) na expressão (7) e arranjando-se os termos semelhantes de forma adequada, chega-se a:

$$(1-\nu^2)\left(\sigma_\theta + r \frac{d\sigma_\theta}{dr} - \sigma_r\right) - \nu(1+\nu)\left(\sigma_r + r \frac{d\sigma_r}{dr} - \sigma_\theta\right) = 0 \quad (8)$$

Da equação diferencial do problema (1) pode-se obter a expressão:

$$\sigma_\theta = r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r \quad (9)$$

Derivando-se a expressão (9) em relação à variável r obtém-se:

$$\frac{d\sigma_\theta}{dr} = r \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + 2 \frac{d\sigma_r}{dr} \quad (10)$$

Substituindo os valores da tensão tangencial e de sua derivada em relação à variável radial, dados (9) e (10) na expressão (8) e lembrando da nulidade da equação (1), chega-se à seguinte equação diferencial ordinária:

$$3r \frac{d\sigma_r}{dr} + r^2 \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} = 0 \quad (11)$$

A equação (11) tem por solução geral a expressão a seguir:

$$\sigma_r = \frac{C_1}{r^2} + C_2 \quad (12)$$

As constantes C_1 e C_2 podem ser determinadas com as seguintes condições de contorno:

$$r=b \Rightarrow \sigma_r=0$$

$$r=a \Rightarrow \sigma_r=-p$$

(13)

Substituindo-se em (12) o valor das constantes C_1 e C_2 calculadas com as condições de contorno (13) chega-se à seguinte expressão:

$$\sigma_r = \frac{pa^2(r^2 - b^2)}{r^2(b^2 - a^2)} \quad (14)$$

O valor da tensão tangencial, mostrado a seguir, é obtido substituindo-se o valor da tensão radial (14) expressão (9).

$$\sigma_\theta = \frac{pa^2(r^2 + b^2)}{r^2(b^2 - a^2)} \quad (15)$$

Substituindo-se os valores das tensões radial e tangencial, dadas por (14) e (15), na equação (5), e isolando-se o valor da tensão axial, tem-se:

$$\sigma_z = \frac{2\nu pa^2}{b^2 - a^2} \quad (16)$$

Substituindo-se os valores das tensões, dadas pelas expressões (14), (15) e (16), nas relações constitutivas (4), obtém-se as deformações como sendo:

$$\varepsilon_r = \frac{(1+\nu)pa^2}{E(b^2 - a^2)} \left[(1-2\nu) - \frac{b^2}{r^2} \right] \quad (17)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{(1+\nu)pa^2}{E(b^2 - a^2)} \left[(1-2\nu) + \frac{b^2}{r^2} \right] \quad (18)$$

Substituindo-se o valor da deformação na direção tangencial (18) na relação deformação - deslocamento (3) e isolando-se o valor do deslocamento radial chega-se a:

$$u_r = \frac{(1+\nu)pa^2}{E(b^2 - a^2)} \left[(1-2\nu)r + \frac{b^2}{r} \right] \quad (19)$$

A tensão radial, σ_r , será sempre maior que a tensão tangencial, σ_θ , e a tensão na direção axial, σ_z , terá um valor intermediário. Pode-se, portanto, usar o critério de escoamento de Tresca levando-se em conta apenas as tensões σ_r e σ_θ .

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_0 \quad (20)$$

sendo σ_0 a tensão de escoamento em um ensaio de tração uniaxial.

Substituindo-se os valores das tensões radial e tangencial, dadas por (14) e (15), no critério de escoamento (20), chega-se a:

$$\frac{2a^2b^2p}{(b^2 - a^2)r^2} = \sigma_0 \quad (21)$$

Pode-se determinar o valor máximo da pressão interna, \mathbf{p}_e , para que não haja plastificação do tubo fazendo-se, na expressão (21), a variável \mathbf{r} igual ao raio interno \mathbf{a} e isolando-se o valor de \mathbf{p} . Tem-se então que:

$$p_e = \frac{\sigma_0(b^2 - a^2)}{2b^2} \quad (22)$$

Fazendo-se a pressão interna \mathbf{p} assumir um valor superior a \mathbf{p}_e , haverá escoamento do material em uma região de raio menor ou igual a \mathbf{c} , como ilustrado na figura 1. Esta região plastificada exerce uma "pressão" \mathbf{q} na zona ainda elástica, que deve ser igual à pressão máxima elástica \mathbf{p}_e para um tubo de raio interno \mathbf{c} e externo \mathbf{b} . Logo o valor de \mathbf{q} será:

$$q = \frac{\sigma_0(b^2 - c^2)}{2b^2} \quad (23)$$

Substituindo-se o critério de escoamento (20) na equação diferencial (1), integrando-se em relação à variável \mathbf{r} e impondo-se que no raio \mathbf{c} a tensão radial vale $-\mathbf{q}$, tem-se que:

$$\sigma_r = -q + \sigma_0 \ln \frac{r}{c} \quad (24)$$

Substituindo-se o valor de \mathbf{q} dado por (23) na expressão (24) chega-se ao valor da tensão radial na região plastificada dado por:

$$\sigma_r = \sigma_0 \left[\ln \frac{r}{c} + \frac{(c^2 - b^2)}{2b^2} \right] \quad (25)$$

Para obter-se a tensão tangencial na região plastificada, substituindo-se o valor da tensão radial nesta região, dada por (25), no critério de escoamento (20). A expressão obtida será:

$$\sigma_\theta = \sigma_0 \left[\ln \frac{r}{c} + \frac{(c^2 + b^2)}{2b^2} \right] \quad (26)$$

O valor da pressão interna \mathbf{p} , necessária para produzir uma região plastificada de raio \mathbf{c} , pode ser determinada calculando-se a tensão radial, pela expressão (25), num ponto de raio \mathbf{a} . Neste ponto σ_r assume o valor $-\mathbf{p}$, logo expressão final será:

$$p = \sigma_0 \left[\ln \frac{c}{a} + \frac{(b^2 - c^2)}{2b^2} \right] \quad (27)$$

Para uma pressão interna dada, o valor do raio da região plastificada \mathbf{c} pode ser determinado a partir da expressão (27).

Quando todo o tubo estiver plastificado, o raio da região plástica \mathbf{c} assume o mesmo valor do raio externo do tubo \mathbf{b} . Assim, fazendo-se na expressão (27) o valor de \mathbf{c} igual a \mathbf{b} , obtém-se a pressão máxima que o tubo pode suportar como:

$$p_{max} = \sigma_0 \ln \frac{b}{a} \quad (28)$$

Se a pressão aplicada for superior a p_{max} , o tubo irá expandir indefinidamente.

O deslocamento da região elástica, que ainda existe na periferia do tubo, é obtido substituindo-se na equação (19) o valor do raio interno a pelo raio da região plástica c e assumindo a pressão p como igual ao valor de q dado pela expressão (23). Assim:

$$u_e = \frac{(1+\nu)\sigma_0 c^2}{2Eb^2} \left[(1-2\nu)r + \frac{b^2}{r} \right] \quad (29)$$

Pode-se aplicar ao problema o critério de Von Mises, em lugar do critério de Tresca. Neste caso a expressão do critério de escoamento será dada por:

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 = 2\sigma_0^2 \quad (29a)$$

Substituindo-se os valores de σ_r , σ_θ e σ_z , dados pelas expressões (14), (15) e (16), na relação (29a) chega-se a:

$$\left(\frac{pa^2}{r^2(b^2 - a^2)} \right)^2 [6b^4 + 2r^4(1-2\nu)] = 2\sigma_0^2 \quad (29b)$$

Para se determinar o valor máximo da pressão interna aplicável ao tubo, faz-se em (29b) a variável r igual ao raio interno a e isola-se o valor de p . Tem-se então que:

$$p_e = \frac{\sigma_0(b^2 - a^2)}{\sqrt{3b^4 + a^4(1 - 2\nu)^2}} \quad (29c)$$

A obtenção das expressões das tensões, deformações e deslocamentos, para o presente problema, usando-se o critério de Von Mises, constitui uma tarefa muito trabalhosa. Para solucionar este problema, corrige-se o valor de σ_0 nas expressões anteriores segundo:

$$\sigma_0' = \sigma_0 \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (29d)$$

Utilizando-se o valor σ_0' nas expressões obtidas pelo critério de Tresca, tem-se uma aproximação para os valores das tensões, deformações e deslocamentos que seriam obtidas caso o problema fosse solucionado pelo critério de Von Mises.

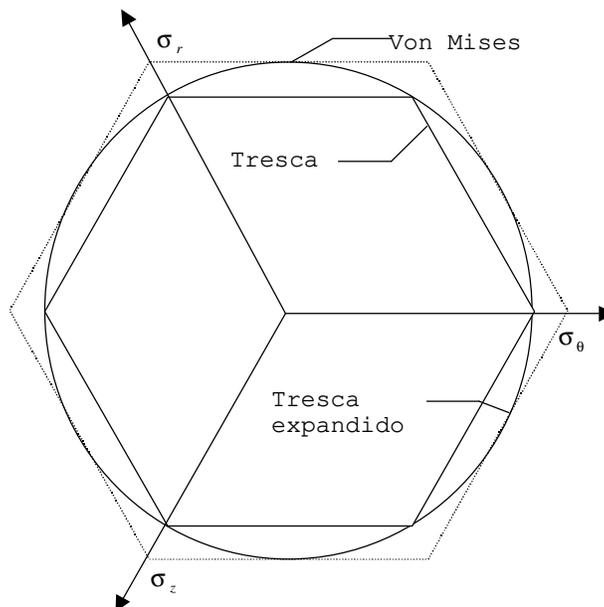


Figura 1b - Critérios de escoamento traçados no plano deviatório.

Esta correção pode ser entendida como uma expansão da superfície de escoamento. Na Figura 1b vê-se as superfícies de escoamento de Tresca e Von Mises desenhadas no espaço de Haigh-Westergaard. O hexágono desenhado em linha cheia representa a superfície de escoamento de Tresca e o círculo, Von Mises. Quando a tensão de escoamento é tomada segundo a expressão (29d), a superfície de escoamento passa a ser o hexágono desenhado com linhas pontilhadas, que é uma aproximação melhor para o critério de Von Mises.

3-Cavidade Circular em Meio Elástico Infinito:

O problema da cavidade circular, de raio a , em meio elástico infinito é regido pela equação diferencial (1), modificando-se apenas as condições de contorno, que passam a ser:

$$r=\infty \Rightarrow \sigma_r=0$$

$$r=a \Rightarrow \sigma_r=-p$$

(30)

Pode-se assumir, também neste caso, que o meio estará sujeito a um estado plano de deformação. Logo, as relações constitutivas (4) continuam válidas.

Calculando-se as constantes C_1 e C_2 da solução geral (12) da equação diferencial obtém-se:

$$\sigma_r = -\frac{pa^2}{r^2}$$

(31)

Substituindo-se o valor da tensão radial dada por (31) na expressão (9) tem-se que:

$$\sigma_{\theta} = \frac{pa^2}{r^2} \quad (32)$$

Substituindo-se os valores das tensões radial e tangencial (31) e (32) na expressão (5), e isolando-se o valor da tensão na direção axial, tem-se que:

$$\sigma_z = 0 \quad (33)$$

Note-se que, neste problema, ocorrem um estado plano de tensão e um estado plano de deformação simultaneamente.

Substituindo-se os valores das tensões radial, tangencial e axial, respectivamente (31), (32) e (33), nas relações constitutivas (4), obtém-se as seguintes expressões para as deformações:

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{pa^2(1+\nu)}{Er^2} \quad (34)$$

$$\varepsilon_r = -\frac{pa^2(1+\nu)}{Er^2} \quad (35)$$

Substituindo-se o valor da deformação radial (34) na relação deformação - deslocamento (3) e isolando-se o deslocamento radial obtém-se:

$$u_r = \frac{pa^2(1+\nu)}{Er} \quad (36)$$

Substituindo-se os valores das tensões radial e tangencial (31) e (32) no critério de escoamento (20) chega-se a:

$$\sigma_0 = \frac{2pa^2}{r^2} \quad (37)$$

O valor máximo da pressão no interior da cavidade, para que não haja plastificação, obtido fazendo-se em (37) r igual ao valor do raio a da cavidade, será:

$$p_e = \frac{\sigma_0}{2} \quad (38)$$

Conclui-se, com a expressão (38), que a "pressão" q , exercida pela região plastificada no restante do meio elástico, será:

$$q = \frac{\sigma_0}{2} \quad (39)$$

Como o valor da pressão da zona plastificada sobre a região elástica não depende do raio desta. Portanto, para um meio elasto-plástico perfeito, todo o meio infinito se plastifica. Para uma solução melhor deste problema, faz-se necessário considerar o encruamento do material.

4-Disco de Espessura Constante:

O estudo das tensões e deformações em um disco de espessura constante, girando a uma velocidade angular ω , é de grande importância no projeto de várias máquinas.

As forças de volume que agem num disco, de específica ρ , são centrífugas e seguem a expressão:

$$F_r = \rho\omega^2 r \quad (40)$$

A equação diferencial do problema, obtida das equações de equilíbrio de um ponto material, tem por expressão:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r} = -\rho\omega^2 r \quad (41)$$

Supondo que a espessura do disco seja muito menor que seu raio b , pode-se assumir que este está sujeito a um estado plano de tensões. As relações constitutivas para este caso serão:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) \quad (42a)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) \quad (42b)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_r + \sigma_\theta) \quad (42c)$$

Substituindo-se as deformações (42) na relação de compatibilidade (7) e arranjando-se os termos semelhantes, chega-se a:

$$\sigma_{\theta} - \sigma_r + r \frac{d\sigma_{\theta}}{dr} - \nu r \left(\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{\sigma_{\theta} - \sigma_r}{r} \right) = 0 \quad (43)$$

Isolando-se o valor da tensão tangencial na equação diferencial (41) obtém-se:

$$\sigma_{\theta} = r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r + \rho \omega^2 r^2 \quad (44)$$

Derivando-se a expressão (44) em relação à variável r obtém-se:

$$\frac{d\sigma_{\theta}}{dr} = r \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + 2 \frac{d\sigma_r}{dr} + 2\rho\omega^2 r \quad (45)$$

Substituindo-se o valor da tensão tangencial (44) e de sua derivada em relação à variável r , dada por (45), na equação (43) chega-se à seguinte equação diferencial não homogênea:

$$3r \frac{d\sigma_r}{dr} + r^2 \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} = -(3+\nu)\rho\omega^2 r^2 \quad (46)$$

A equação (46) tem por solução geral a expressão a seguir:

$$\sigma_r = \frac{C_1}{r^2} + C_2 - \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 r^2 \quad (47)$$

Se o disco for sólido, a tensão em seu centro deve ter um valor finito, portanto a constante C_1 deve ser nula. A constante C_2 é determinada com a condição de contorno dada por:

$$r=b \Rightarrow \sigma_r=0 \quad (48)$$

Assim tem-se:

$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 b^2 \left(1 - \frac{r^2}{b^2} \right) \quad (49)$$

Substituindo-se o valor da tensão radial (49) na expressão da tensão tangencial (44) obtém-se:

$$\sigma_\theta = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 b^2 \left(1 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} \cdot \frac{r^2}{b^2} \right) \quad (50)$$

Substituindo-se o valor das tensões radial e tangencial (49) e (50) nas relações constitutivas (42), obtém-se as seguintes expressões para as deformações:.

$$\epsilon_r = \frac{\rho \omega^2 (\nu - 1)}{8E} [3r^2(1+\nu) - b^2(3+\nu)] \quad (51)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{\rho \omega^2 (\nu - 1)}{8E} [r^2(1+\nu) - b^2(3+\nu)] \quad (52)$$

$$\varepsilon_z = 4 \frac{\rho \omega^2}{8E} [2r^2(1+\nu) - b^2(3+\nu)] \quad (53)$$

Substituindo-se o valor da deformação tangencial (52) na relação deformação deslocamento (3) e isolando-se o valor do deslocamento radial chega-se a:

$$u_r = \frac{\rho \omega^2 r(\nu - 1)}{8E} [r^2(1+\nu) - b^2(3+\nu)] \quad (54)$$

Aplicando-se o critério de Tresca ao problema do disco, observa-se que a plastificação irá ocorrer quando a tensão tangencial igualar a tensão de escoamento do material, ou seja:

$$\sigma_\theta = \sigma_0 \quad (55)$$

Como a tensão tangencial assume seu valor máximo no centro do disco, a plastificação terá início neste ponto. (ver expressão (50)). Tomando-se a expressão (50) com $r=0$ obtém-se o valor da velocidade angular máxima aplicável ao disco em regime elástico, dado por:

$$\omega_e = \frac{2}{b} \sqrt{\frac{2\sigma_0}{\rho(3+\nu)}} \quad (56)$$

Para velocidades maiores que ω_e , haverá um núcleo plastificado de raio c . A região elástica que envolve o núcleo plastificado comporta-se como uma coroa circular em rotação, sujeita a uma tração q aplicada na borda interna, conforme

ilustrado na Figura 2. O carregamento q representa a ação da região plastificada sobre a coroa elástica externa.

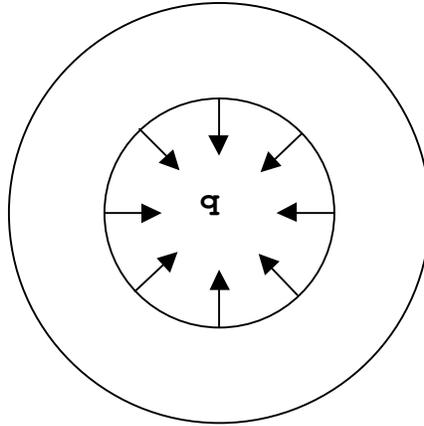


Figura 2 - Disco com núcleo plastificado.

A solução para o problema da coroa circular em rotação é obtida impondo-se à expressão (47) as seguintes condições de contorno:

$$r = c \Rightarrow \sigma_r = q \tag{57a}$$

$$r = b \Rightarrow \sigma_r = 0 \tag{57b}$$

Obtém-se então:

$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \left(b^2 + c^2 - \frac{b^2 c^2}{r^2} - r^2 \right) - q \frac{c^2 (r^2 - b^2)}{r^2 (b^2 - c^2)} \tag{58a}$$

Substituindo-se o valor de σ_r , dado por (58a), na relação diferencial (44), obtém-se:

$$\sigma_{\theta} = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \left(b^2 + c^2 + \frac{b^2 c^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2 \right) - q \frac{c^2 (r^2 + b^2)}{r^2 (b^2 - c^2)} \quad (58b)$$

Na borda interna da coroa elástica o critério de Tresca é obedecido. Assim tem-se que:

$$r = c \Rightarrow \sigma_r \leq \sigma_0 \quad (59a)$$

$$r = c \Rightarrow \sigma_{\theta} \leq \sigma_0 \quad (59b)$$

$$r = c \Rightarrow \sigma_{\theta} - \sigma_r \leq \sigma_0 \quad (59c)$$

Com estas condições de contorno obtém-se:

$$q \leq \sigma_0 \quad (60a)$$

$$q \geq \left[\frac{3+\nu}{4} \rho \omega^2 \left(b^2 + c^2 \frac{1-\nu}{3+\nu} \right) - \sigma_0 \right] \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} \quad (60b)$$

$$q \geq \left[\frac{3+\nu}{4} \rho \omega^2 \left(b^2 + c^2 \frac{1-\nu}{3+\nu} \right) - \sigma_0 \right] \frac{b^2 - c^2}{2b^2} \quad (60c)$$

Para que exista plastificação, a rotação aplicada deve ser superior ao valor dado por (56). Assim, tomando-se q como o

valor dado por (60b), as expressões (60a) e (60c) ficam satisfeitas. Assim tem-se que:

$$q = \left[\frac{3+\nu}{4} \rho \omega^2 \left(b^2 + c^2 \frac{1-\nu}{3+\nu} \right) - \sigma_0 \right] \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} \quad (60d)$$

Em todos os pontos da região plastificada, o critério de escoamento é obedecido. Logo:

$$r \leq c \Rightarrow \sigma_\theta = \sigma_0 \quad (61)$$

Substituindo-se o valor da tensão tangencial (61) na equação diferencial (41) obtém-se:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r}{r} = -\frac{\rho \omega^2 r^2}{3} + \frac{\sigma_0}{r} \quad (62)$$

A solução da equação diferencial (62) é do tipo:

$$\sigma_r = \frac{K_1}{r} - \frac{\rho \omega^2 r^2}{3} + \sigma_0 \quad (63)$$

A tensão radial deve assumir um valor finito no centro do disco, portanto a constante K_1 deve ser nula. Substituindo-se os valores da carga q e da tensão radial, dados pelas expressões (60d) e (63), na condição de contorno (57a) obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{\rho\omega^2c^4(1+3\nu)}{12} - \frac{\rho\omega^2b^2c^2(1+3\nu)}{6} + \frac{\rho\omega^2b^4(3+\nu)}{4} - 2b^2\sigma_0 = 0 \quad (64)$$

Resolvendo-se a equação biquadrada (64) para a variável c , obtém-se a seguinte expressão para o raio da região plastificada:

$$c = b\sqrt{1 - \sqrt{\bar{\Delta}}} \quad (65)$$

O valor de $\bar{\Delta}$ é dado por:

$$\bar{\Delta} = \left(\frac{3\sigma_0}{b^2\rho\omega^2} - 1 \right) \frac{8}{1+3\nu} \quad (66)$$

Quando a velocidade angular assume o valor ω_e , dado por (56), $\bar{\Delta}$ assume um valor unitário, o que implica em um valor nulo para o raio da região plastificada. Com o aumento da rotação, $\bar{\Delta}$ decresce. Quando $\bar{\Delta}$ se anula tem-se que todo o disco estará plastificado. Igualando-se a zero a expressão (66) e isolando-se o valor da velocidade angular, obtém-se a seguinte expressão:

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{3\sigma_0}{b^2\rho}} \quad (67)$$

Utilizando-se as relações constitutivas (42), tem-se que as deformações na coroa elástica são dadas por:

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{\rho\omega^2(3+\nu)(1-\nu)}{8E} \left(b^2 + c^2 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{b^2c^2}{r^2} - r^2 \frac{1+\nu}{3+\nu} \right) - \frac{qc^2}{E(b^2-c^2)} [r^2(1-\nu) + b^2(1+\nu)] \quad (69)$$

$$\varepsilon_r = \frac{\rho\omega^2(3+\nu)(1-\nu)}{8E} \left(b^2 + c^2 - \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{b^2c^2}{r^2} - \frac{2r^2}{3+\nu} \right) - \frac{qc^2}{E(b^2-c^2)} [r^2(1-\nu) - b^2(1+\nu)] \quad (70)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\rho\omega^2\nu(3+\nu)}{4E} \left(b^2 + c^2 - 2r^2 \frac{1+\nu}{3+\nu} \right) - \frac{2\nu qc^2}{E(b^2-c^2)} \quad (71)$$

Com a relação a deformação e o deslocamento (3), tem-se:

$$u_r = \frac{\rho\omega^2r(3+\nu)(1-\nu)}{8E} \left(b^2 + c^2 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{b^2c^2}{r^2} - r^2 \frac{1+\nu}{3+\nu} \right) - \frac{qc^2r}{E(b^2-c^2)} [r^2(1-\nu) + b^2(1+\nu)] \quad (72)$$

Pode-se aplicar o critério de Von Mises ao problema, analogamente ao que se fez no Item 2. Para o estado plano de tensão, o critério de Von Mises pode ser escrito como:

$$\sigma_r^2 - \sigma_r\sigma_{\theta} + \sigma_{\theta}^2 = \sigma_0^2 \quad (73)$$

Substituindo-se os valores das tensões radial e tangencial para um raio nulo, dadas por (49) e (50), na expressão (73) e isolando-se o valor da velocidade angular, chega-se a expressão (56). Logo a velocidade limite para o regime elástico é a mesma tanto para o critério de Tresca quanto para Von Mises.

Apêndice B - Tabela de Integração

1-Introdução:

Neste apêndice apresentam-se as fórmulas usadas na dedução das integrais analíticas apresentadas no capítulo 5. Na Figura 1 vêem-se os termos geométricos definidos como:

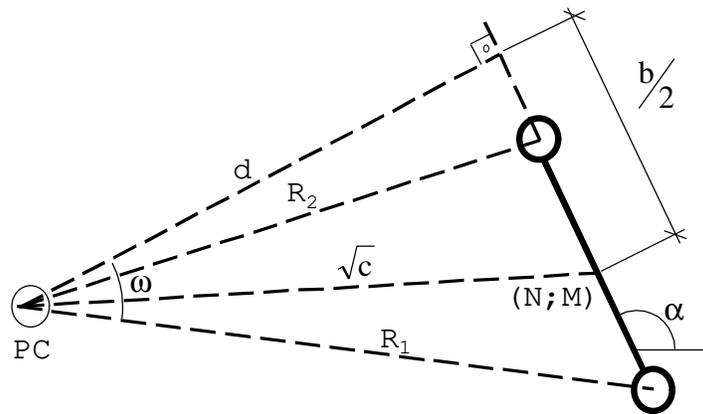


Figura 1 - Geometria do Elemento Reto.

- x_i^p - Coordenadas do ponto de colocação.
- x_i^m - Coordenadas do ponto médio do elemento.
- ℓ - Comprimento do elemento.
- α - Ângulo entre o elemento e o eixo das abcissas.
- Γ_i - Derivada de Γ na direção do eixo x_i .
- η_i - Coseno diretor da normal ao elemento.

$$b = 2\Gamma_i c_i$$

(1)

$$c_i = x_i^m - x_i^p \quad (2)$$

$$c = c_i \cdot c_i = (x_1^m - x_1^p)^2 + (x_2^m - x_2^p)^2 \quad (3)$$

$$d = c_i \cdot \eta_i \quad (4)$$

$$R_1^2 = \frac{\ell^2}{4} - \frac{b\ell}{2} + c \quad R_2^2 = \frac{\ell^2}{4} + \frac{b\ell}{2} + c \quad (5)$$

$$\omega = \arctan\left(\frac{b+\ell}{2|d|}\right) - \arctan\left(\frac{b-\ell}{2|d|}\right) \quad (6)$$

2-Tabela de Integrais:

$$\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \ln(r) d\Gamma = |d|\omega + \frac{b}{4} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \frac{\ell}{4} \ln(R_2^2 \cdot R_1^2) - \ell \quad (7)$$

$$\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \Gamma \ln(r) d\Gamma = \frac{b\ell}{4} - \frac{b|d|\omega}{2} + \frac{1}{8} \left(2c - b^2 + \frac{\ell^2}{2} \right) \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \quad (8)$$

$$\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{1}{r^2} d\Gamma = \frac{\omega}{|d|}$$

(9)

$$\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{\Gamma}{r^2} d\Gamma = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} - \frac{b\omega}{|d|} \right)$$

(10)

$$\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{\Gamma^2}{r^2} d\Gamma = \ell - \frac{1}{2} \left[b \cdot \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} - \frac{(b^2 - 2c)\omega}{|d|} \right]$$

(11)

$$\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{\Gamma^3}{r^2} d\Gamma = -c \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{\Gamma}{r^2} d\Gamma - b \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{\Gamma^2}{r^2} d\Gamma$$

(12)

$$\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{1}{r^4} d\Gamma = \frac{1}{4d^2} \left(\frac{b+\ell}{R_2^2} - \frac{b-\ell}{R_1^2} + \frac{2\omega}{|d|} \right)$$

(13)

$$\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{\Gamma}{r^4} d\Gamma = \frac{1}{4d^2} \left(-\frac{4c+b\ell}{2R_2^2} + \frac{4c-b\ell}{2R_1^2} - \frac{b\omega}{|d|} \right)$$

(14)

$$\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{\Gamma^2}{r^4} d\Gamma = \frac{1}{4d^2} \left[\frac{c(b+\ell) - 2d^2\ell}{R_2^2} - \frac{c(b-\ell) + 2d^2\ell}{R_1^2} + \frac{2c\omega}{|d|} \right] \quad (15)$$

$$\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{\Gamma^3}{r^4} d\Gamma = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{\Gamma}{r^2} d\Gamma - c \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{\Gamma}{r^4} d\Gamma - b \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{\Gamma^2}{r^4} d\Gamma \quad (16)$$