

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL**



**ANÁLISE EM REGIME PLÁSTICO DE PLACAS DE
CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO
SOBRE BASE ELÁSTICA**

Marco Antonio Carnio

Campinas, SP
1998



515

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL

**ANÁLISE EM REGIME PLÁSTICO DE PLACAS DE
CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO
SOBRE BASE ELÁSTICA**

Marco Antonio Carnio

Orientador: Prof. Dr. Newton de Oliveira Pinto Júnior

Dissertação de Mestrado apresentada à da
Faculdade de Engenharia Civil da
UNICAMP, para obtenção do título de
Mestre em Engenharia, Área de
Concentração: Estruturas.

Campinas, SP
1998

Atesto que esta é a versão definitiva
da dissertação/tese. 21/01/99

Prof. Dr. 
Matrícula: 049232

7912300

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	
V.	
T.	37919
PROG.	229/99
	5 X1
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	12/06/99
N.º CPO	

CM-00123992-7

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

C217a Carnio, Marco Antonio
Análise em regime plástico de placas de concreto reforçado com fibras de aço sobre base elástica. / Marco Antonio Carnio.--Campinas, SP: [s.n.], 1998.

Orientador: Newton de Oliveira Pinto Júnior
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil.

1. Plasticidade. 2. Fibra de concreto armado. 3. Placas (Engenharia). 4. Pisos de concreto. I. Pinto Júnior, Newton de Oliveira. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil. III. Título.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL**

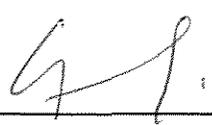
**ANÁLISE EM REGIME PLÁSTICO DE PLACAS DE
CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO
SOBRE BASE ELÁSTICA**

Marco Antonio Carnio

Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:



Prof. Dr. Newton de Oliveira Pinto Júnior
Presidente e Orientador / UNICAMP



Prof. Dr. Gilson Batiston Fernandes
UNICAMP



Prof. Dr. Libânio Miranda Pinheiro
EESC/USP

Campinas, 21 de Dezembro de 1998

À Daisy, André e Marina.

“A luta contra o erro tipográfico tem algo de homérico. Durante a revisão os erros se escondem, fazem-se positivamente invisíveis. Mas assim que o livro sai, tornam-se visibilíssimos, verdadeiro sacis a nos botar a língua em todas as páginas. Trata-se de um mistério que a ciência ainda não conseguiu decifrar...”

(Monteiro Lobato).

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Newton de Oliveira Pinto Jr., pela orientação, dedicação e envolvimento com este trabalho.

À Pontifícia Universidade Católica de Campinas, através do incentivo à capacitação docente, em seu programa de carreira docente, pelo suporte financeiro.

À Belgo Mineira Bekaert Arames S.A., na pessoa do Eng. Antonio Alexandre de Moraes, pelo permanente estímulo e apoio na busca de esclarecimentos sobre este assunto.

Ao Prof. Marcello Flávio Moacyr Collares, pela contribuição no esclarecimento de alguns conceitos.

Ao Eng. Augusto Carlos de Vasconcelos que, pela oportunidade do contato mais estreito propiciado por este assunto, contribuiu bastante para o seu desenvolvimento.

Ao Eng. Marcos Sartori e ao Técnico Marcelo da Silva Zambon, da GEPEC Engenharia, pelo apoio nos desenhos e na digitação, bem como por me liberarem do trabalho do escritório em prol deste.

Aos meus pais Orlando e Esther, por tudo que já fizeram por mim.

À minha família pela convivência, apesar da nossa disponibilidade, vivendo intensamente em busca de paz e procurando sempre ser "peliz", como diz a Marina.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
2. OBJETIVOS	5
3. TEORIA DAS PLACAS	6
3.1. FLEXÃO PURA EM PLACAS	7
3.1.1. CURVATURAS DAS PLACAS COM PEQUENAS FLECHAS	7
3.1.2. RELAÇÕES ENTRE MOMENTOS FLETORES E CURVATURAS	8
3.1.3. ESTUDO EM COORDENADAS POLARES	11
3.2. PLACAS APOIADAS SOBRE BASE ELÁSTICA	16
3.2.1. CARGA NO CANTO DA PLACA - CASO I	19
3.2.2. CARGA NO INTERIOR DA PLACA - CASO II	19
3.2.3. CARGA NA BORDA DA PLACA - CASO III	19
3.2.4. CARGA NO CANTO DA PLACA	19
3.2.5. CARGA NO INTERIOR DA PLACA	19
3.2.6. CARGA NA BORDA DA PLACA	20
4. PLACAS APOIADAS ELASTICAMENTE - TEORIA ELÁSTICA	21
4.1. TENSÕES EM PAVIMENTOS DE CONCRETO SEGUNDO WESTERGAARD	23
4.1.1. TENSÕES NA PLACA	24
4.1.2. COEFICIENTE " k "	25
4.1.3. RAIOS DE RIGIDEZ RELATIVO " ℓ "	26
4.1.4. RAIOS DE CONTATO " a "	27
4.1.5. RAIOS EQUIVALENTE " b "	27

4.2. VERIFICAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO ATRAVÉS DE MODELOS EXPERIMENTAIS	27
4.3. RESUMO DAS EXPRESSÕES	31
5. PLACAS SOBRE BASE ELÁSTICA EM REGIME PLÁSTICO	32
5.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE A TEORIA DA PLASTICIDADE	32
5.2. PLASTICIDADE PERFEITA	33
5.3. CONDIÇÕES DE PLASTICIDADE	33
5.4. CRITÉRIOS DE PLASTIFICAÇÃO	35
5.4.1. CRITÉRIOS DE PLASTIFICAÇÃO PARA MATERIAIS METÁLICOS	36
5.4.2. CRITÉRIOS DE PLASTIFICAÇÃO PARA MATERIAIS NÃO METÁLICOS	36
5.4.3. RUPTURA DO CONCRETO SOB TENSÕES BIAXIAIS	36
5.5. MÉTODO DE CÁLCULO PLÁSTICO SEGUNDO LOSBERG	37
5.5.1. CARGA NO CENTRO DA PLACA	38
5.5.2. CARGA NA BORDA DA PLACA	46
5.5.3. CARGA NO CANTO DA PLACA	47
5.6. MÉTODO DE CÁLCULO PLÁSTICO SEGUNDO MEYERHOF	49
5.6.1. CARGA NO CENTRO DA PLACA	50
5.6.2. CARGA NA BORDA DA PLACA	59
5.6.3. CARGA NO CANTO DA PLACA	61
6. ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE OS MÉTODOS	63
6.1. RESUMO DAS EXPRESSÕES	64
6.1.1. CARGA NO CANTO DA PLACA	64
6.1.2. CARGA NO INTERIOR DA PLACA	65
6.1.3. CARGA NA BORDA DA PLACA	66
6.2. ATRIBUIÇÃO DE VALORES PARA AS EXPRESSÕES	68
6.2.1. CARGA NO CANTO DA PLACA	68
6.2.2. CARGA NO INTERIOR DA PLACA	68

6.2.3. CARGA NA BORDA DA PLACA	69
6.3. ANÁLISE COMPARATIVA	70
7. APLICAÇÃO DA TEORIA DAS LINHAS DE RUPTURA ÀS PLACAS DE CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO	74
7.1. DEFINIÇÃO E MATERIAIS CONSTITUINTES	74
7.2. FUNÇÃO DAS FIBRAS DE AÇO COMO REFORÇO	76
7.3. TENACIDADE E RESISTÊNCIA EQUIVALENTE À TRAÇÃO NA FLEXÃO	77
7.4. COEFICIENTE DE DUCTILIDADE	78
7.5. CONSIDERAÇÕES SOBRE O MODELO DE CÁLCULO ELÁSTICO APLICADO AO CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO	80
7.5.1. TRABALHO EXPERIMENTAL REALIZADO NO THAMES POLYTECHNIC	82
7.5.2. TRABALHO TEÓRICO-EXPERIMENTAL DESENVOLVIDO EM BRUNSWICK	84
7.6. DIMENSIONAMENTO SEGUNDO A TEORIA DAS LINHAS DE RUPTURA	92
7.6.1. CASO I - CARGA NO CANTO DA PLACA	92
7.6.2. CASO II - CARGA NO INTERIOR DA PLACA	93
7.6.3. CASO III - CARGA NA BORDA DA PLACA	94
7.7. EXEMPLO DE APLICAÇÃO	94
7.7.1. RAIOS DE ÁREA DE CONTATO E RAIOS DE RIGIDEZ RELATIVA	95
7.7.2. CARGA NO CANTO DA PLACA	95
7.7.3. CARGA NO INTERIOR DA PLACA	96
7.7.4. CARGA NA BORDA DA PLACA	96
8. CONSIDERAÇÕES FINAIS	97
9. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	99

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

100

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

102

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1: Curvaturas no plano xy	7
Figura 3.2: Flexão pura de placa retangular devida a momentos uniformemente distribuídos nas bordas.	8
Figura 3.3: Elemento de placa formado por planos paralelos a xz e xy.	9
Figura 3.4: Elemento de laje	11
Figura 3.5: Elemento de placa em equilíbrio	13
Figura 3.6: Posicionamento das cargas nas placas	18
Figura 4.1: Situação de carga no canto da placa	22
Figura 4.2: Casos de posicionamento de cargas	24
Figura 4.3: Módulo de reação do sub-leito	25
Figura 4.4: Representação de " ℓ "	26
Figura 5.1: Distribuição de momentos em placa sobre base elástica devida a carga concentrada, antes (A e B) e após a plastificação (C).	38
Figura 5.2: Linha de ruptura para placa apoiada em solo e consideração da distribuição de pressão sob a placa	39
Figura 5.3: Elemento de placa	40
Figura 5.4: Equilíbrio de forças e momentos	40
Figura 5.5: Força cortante q na linha de ruptura circular	41
Figura 5.6: Distribuição de pressão adotada para carga aplicada na borda livre de placa apoiada sobre o solo	46
Figura 5.7: Linha de ruptura adotada para uma carga distribuída em um círculo tangente à borda de uma placa apoiada sobre o solo	46
Figura 5.8: Carga no canto da placa	48
Figura 5.9: Seção da placa	49
Figura 5.10: Planta da placa	49
Figura 5.11: Critério de plastificação de Rankine	51
Figura 5.12: Distribuição de deslocamentos verticais	52
Figura 5.13: Ponto de $r = c$ ($M_r = 0$)	53

Figura 5.14: Parcela referente à carga distribuída na área de raio a	55
Figura 5.15: Deslocamentos verticais produzidos por uma carga atuando em um ponto no interior da placa a uma considerável distância da borda	58
Figura 5.16: Carga na borda de placa semi-infinita	59
Figura 5.17: Carga no canto de placa semi-infinita	61
Figura 6.1: Comparativo entre modelos - carga no canto da placa	71
Figura 6.2: Comparativo entre modelos - carga no interior da placa	72
Figura 6.3: Comparativo entre modelos - carga na borda da placa	73
Figura 7.1: Mecanismo de reforço das fibras de aço	76
Figura 7.2: Tenacidade segundo a norma JSCE	77
Figura 7.3: Modelo experimental	82
Figura 7.4: Diagrama carga x deslocamentos verticais, mostrando as diferentes regiões	87
Figura 7.5: Distribuição de momentos em placa de concreto simples com carga no centro	90
Figura 7.6: Distribuição de momentos em placa de CRFA com carga no centro	91

LISTA DE TABELAS

Tabela 6.1: Comparativo entre modelos - carga no canto da placa	68
Tabela 6.2: Comparativo entre modelos - carga no interior da placa	68
Tabela 6.3: Comparativo entre modelos - carga na borda da placa	69
Tabela 7.1: Propriedades dos CRFA - Cimento CP II E 32	79
Tabela 7.2: Propriedades dos CRFA - Cimento CP V RS/MS	80
Tabela 7.3: Comparativo entre tensões admissíveis	81
Tabela 7.4: Resultados experimentais - Thames Polytechnic	83
Tabela 7.5: Resultados experimentais - Falkner	85

NOTAÇÃO

LETRAS ROMANAS MAIÚSCULAS

A	=	área de contato de carga.
D	=	rigidez da placa à flexão.
E	=	módulo de deformação do concreto.
F, P	=	carga concentrada.
F_r	=	limite entre regiões I e II.
F'_r	=	limite entre região II e III.
F_u, P_0	=	carga última.
L, ℓ	=	raio de rigidez relativo da placa.
L	=	máxima distância radial tomada a partir do ponto de aplicação da carga da área de reações do sub-leito.
M_0	=	momento de plastificação.
M_e	=	momento fletor aplicado à placa na fase elástica.
M_f	=	momento fletor a plastificar, função do teor de fibras incorporadas.
M_n	=	momento fletor negativo
M_p	=	momento fletor positivo
M_r	=	momento fletor radial.
M_t	=	momento fletor tangencial.
M_x, M_y	=	momentos fletores perpendiculares aos eixos x e y respectivamente.
Q	=	força cortante por unidade de comprimento.
R_{e3}	=	coeficiente de ductilidade.
S	=	tensão de tração assumida como o módulo de ruptura do concreto.
T_f	=	tenacidade.
W	=	carga concentrada.

Z = relação de redução do deslocamento vertical máximo.

LETRAS ROMANAS MINÚSCULAS

a, c	=	raio da área de contato da carga.
b	=	raio equivalente da área de distribuição de pressão.
b	=	largura da seção transversal.
f_{ck}	=	resistência característica do concreto à compressão.
$f_{cm,28}$	=	resistência média do concreto à compressão aos 28 dias.
$f_{ct,eq}$	=	resistência equivalente à tração na flexão dos concretos reforçados com fibras.
$f_{ct,fl}$	=	resistência a tração na flexão da matriz de concreto.
$f_{ctm,eq}$	=	resistência média equivalente à tração na flexão.
$f_{ctm,fl}$	=	resistência média do concreto à tração na flexão dos concretos.
f_{cu}	=	resistência do concreto à compressão medida em cubos.
$f_{res,fl}$	=	tensão residual na fase plástica.
f_{ym}	=	resistência à tração da fibra.
h	=	altura da seção transversal.
h, d	=	espessura da placa.
k	=	módulo de reação do sub-leito.
ℓ	=	raio de rigidez relativo da placa.
ℓ	=	vão.
ℓ	=	comprimento da fibra.
m	=	momento último positivo p/ largura unitária.
m'	=	momento último negativo p/ largura unitária.
p	=	pressão de enchimento do pneu.
p_0	=	valor pico de pressão no cone de pressões.
p_s	=	pressão no sub-leito.
q	=	intensidade de uma carga distribuída.
q	=	força cortante ao longo da seção circular p/ largura unitária.
r, φ	=	coordenadas polares.
r_0	=	raio da charneira circular.

r_x, r_y	=	raios de curvatura.
t, t_k	=	constantes estimadas pela curva teórica de pressão.
w	=	componente de deslocamento vertical.
w_0	=	deslocamento vertical sob a carga.
x, y, z	=	coordenadas cartesianas retangulares.

LETRAS GREGAS MAIÚSCULAS

Δ	=	nabla.
∇	=	gradiente.

LETRAS GREGAS MINÚSCULAS

γ	=	constantes estimadas pela curva teórica de pressão.
δ	=	componente de deslocamento vertical.
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	=	deformações unitárias nas direções x,y e z.
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	=	tensões normais paralelas aos eixos x,y e z.
σ_r	=	tensão normal no sentido do raio.
σ_φ	=	tensão normal na direção da tangente.
σ_c	=	tensão máxima de tração na face superior da placa, na direção paralela à bissetriz do ângulo do canto da placa, devida à aplicação da carga no canto da placa.
σ_i	=	tensão máxima de tração na face inferior da placa, sob o ponto de aplicação da carga P, devida à aplicação da carga em um ponto no interior da placa, a uma distância considerável das bordas.
σ_e	=	tensão máxima de tração na face inferior da placa, sob o ponto de aplicação da carga P, na direção paralela à borda, devida à aplicação da carga na borda da placa.
ν	=	coeficiente de Poisson.

RESUMO

Carnio, Marco Antonio. Análise em regime plástico de placas de concreto reforçado com fibras de aço sobre base elástica.

Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, 1998. p. 103. Dissertação.

Neste trabalho é apresentada uma análise em regime plástico, através da teoria das linhas de ruptura, de placas de concreto reforçado com fibras de aço sobre base elástica.

Foram analisadas as teorias elástica e plástica, sendo a análise plástica realizada segundo modelos propostos por dois autores. Com base neste estudo foi possível comparar as teorias, mostrando, desta forma, suas diferenças.

Para aplicação da teoria plástica no dimensionamento das placas de concreto reforçado com fibras de aço, foram introduzidas adaptações no modelo escolhido, uma vez que este foi desenvolvido para aplicações com uso somente de armadura convencional.

Tais adaptações tiveram por finalidade facilitar o emprego do modelo por projetistas da área. Assim sendo, procurou-se, também, mostrar um exemplo de aplicação, com dados reais de projeto.

Os resultados encontrados demonstram que é possível obter grandes avanços nos projetos dos pisos e dos pavimentos de concreto reforçado com fibras de aço sobre base elástica, sendo possível substituir totalmente, com segurança, as armaduras convencionais pelas fibras de aço.

ABSTRACT

The main objective of this work is to analyse steel fiber concrete slabs on elastic sub-grade, according to yield line theory.

The target is to evaluate which are the right procedures among the calculation in practice, showing that even the elastic theory is conservative.

We hope this work will give information and provide some know how to the experts in this area.

Due to the lack of divulgations of this methodology, these professionals have many difficulties in design of steel fiber concrete slabs on elastic sub-grade.

Finally, our expectation is that this work will bring some lights on the possibility of the substitution of the conventional reinforcement by steel fibers.

This is possible because the steel fiber concrete is a ductile material, which provides load capacity absorption to the slabs and it is absolutely reasonable to take this characteristic in consideration, and then replace all the commonly conventional reinforcement used in this kind of structures.

1. INTRODUÇÃO

O dimensionamento dos pisos e dos pavimentos de concreto é realizado a partir de procedimentos de cálculo que consideram as ações atuantes em placas apoiadas sobre base elástica, levando em conta as vinculações existentes com placas adjacentes.

Tais procedimentos são largamente empregados pela sua facilidade de aplicação, dispensando modelos de cálculo mais sofisticados que utilizam, por exemplo, o método dos elementos finitos.

Este tipo de estrutura é solicitado, predominantemente, por cargas acidentais (rodas de veículos automotores, empilhadeiras, pés de montantes de prateleiras) e por cargas permanentes, devendo também ser levados em consideração efeitos produzidos por variação de temperatura e retração. Para análise dos efeitos destes carregamentos nas placas é possível tomar dois caminhos.

O primeiro, há muito tempo seguido pelos projetistas deste tipo de estrutura, é o da teoria elástica, existindo diversas publicações da ABCP (Associação Brasileira de Cimento Portland) sobre o assunto.

Para as placas de concreto simples, o dimensionamento tem por base a determinação das tensões de tração causadas pela flexão das placas, no qual são empregados ábacos que representam as expressões deduzidas por **Westergaard**¹. Esta metodologia é preconizada pela **PCA**².

No início da década de sessenta foi desenvolvido pelo United States Corps of Engineers uma metodologia alternativa para o dimensionamento de pisos e pavimentos de concreto armado, tendo por base estudos experimentais. Cabe ressaltar que tal metodologia não é aplicável aos casos de cargas provenientes de pés de montantes de prateleiras, uma vez que o estudo experimental desenvolvido não contemplou tal situação de carregamento.

Para o dimensionamento de placas de concreto com armaduras, com ou sem função estrutural, podem também ser empregados os critérios existentes em publicação do **IBTS**³.

Nas placas com armaduras sem função estrutural, a finalidade destas é impedir as fissuras de retração. Tais armaduras são normalmente posicionadas junto à face superior da placa, não devendo distar desta mais que 5 cm.

Nos casos de armaduras com função estrutural, elas são posicionadas junto à face tracionada da placa. Nestas situações a determinação dos esforços solicitantes segue o mesmo modelo empregado para as placas de concreto simples, procedendo-se, a partir da determinação destes, o dimensionamento usual de concreto armado.

Cabe salientar que para este dimensionamento é apenas considerado o caso de carregamento no interior da placa, sendo obrigatória a utilização de barras de transferência para a ligação entre placas adjacentes, cuja finalidade é transferir as cargas de uma placa à outra. Estas barras são empregadas independentemente do tipo de junta existente entre as placas (juntas serradas ou de construção) e da intensidade do carregamento atuante.

O segundo caminho a ser percorrido para a análise de placas sobre base elástica é o da teoria das charneiras plásticas. Essa teoria foi desenvolvida por **Johansen**⁴ e publicada na Dinamarca em 1943, durante a 2ª Guerra Mundial. O trabalho de Johansen foi posteriormente traduzido por **Mason**⁵ e publicado no Brasil em 1962. Destacam-se, também, os trabalhos de **Chamecki**⁶, de 1948, e de **Langendonck**⁷, de 1970, que muito contribuíram para a difusão da teoria das charneiras plásticas.

A aplicação desta teoria para as placas de concreto armado apoiadas sobre base elástica foi desenvolvida por **Losberg**⁸, e publicada em meados de 1961,

Em outro trabalho publicado em 1962, **Meyerhof**⁹ analisa a capacidade portante dos pavimentos de concreto, fornecendo expressões que permitem determinar a carga última nas placas de concreto simples e armado, tendo por base um modelo de placa rígido-plástica sobre base elástica, para várias situações de carregamento e condições de contorno, desprezando efeitos de empenamento.

Os trabalhos de Losberg e Meyerhof são os precursores do modelo desenvolvido, à luz da teoria das charneiras plásticas, para o dimensionamento de placas de concreto reforçado com fibras de aço sobre base elástica, objetivo principal desta dissertação.

Esta dissertação tem também por finalidade demonstrar que o emprego da teoria elástica para a análise das placas de concreto reforçado com fibras de aço (CRFA), sobre base elástica, conduz a soluções conservadoras, uma vez que o material apresenta características de plastificação com ductilidade, adequando-se perfeitamente ao modelo das charneiras plásticas.

A **NBR 6118**¹⁰ em seu item 3.3.2 – Estruturas laminares planas solicitadas predominantemente por cargas normais ao seu plano (lajes), permite que nestes casos de carga esses elementos sejam calculados como placas em regime elástico ou em regime rígido-plástico. Estabelece, também, em seu item 3.3.2.2, hipóteses a serem adotadas para o cálculo no regime rígido-plástico pela teoria das charneiras plásticas. Tais procedimentos, no entanto, não são muito explorados pelos calculistas de estruturas que atuam no segmento de pisos e pavimentos.

Em virtude da possibilidade de aplicação da teoria das charneiras plásticas quando se utiliza o CRFA em placas sobre base elástica, e ainda, face à retomada dessa metodologia como base de dimensionamento em muitas normas e procedimentos em países europeus, este trabalho apresenta seus fundamentos, para que possam servir como base para a elaboração de normas e/ou procedimentos de dimensionamento dos pisos e dos pavimentos em CRFA.

Os objetivos deste trabalho são apresentados no capítulo 2.

O capítulo 3 apresenta uma síntese da teoria das placas, que serve de fundamento para o desenvolvimento da teoria de placa sobre base elástica.

No capítulo 4 é mostrado todo o desenvolvimento dos trabalhos de vários autores, em especial Westergaard, com base na teoria elástica.

O capítulo 5 apresenta os trabalhos de Losberg e Meyerhof, que levam em conta os fundamentos da teoria da plasticidade aplicada às placas sobre base elástica.

Como a aplicação do CRFA nos pisos segue o dimensionamento com base na teoria das charneiras plásticas, o capítulo 6 apresenta uma análise comparativa entre as expressões de Westergaard, Losberg e Meyerhof, mostrando ainda um caminho para aplicação em projeto.

Uma vez que, em seus trabalhos, Losberg e Meyerhof apresentam resultados experimentais, bem como aplicação prática somente com o uso de armaduras,

faz-se necessária uma adaptação para aplicação quando se utiliza o CRFA, o que é feito no capítulo 7, inclusive apresentando um exemplo de aplicação com dados reais de projeto.

Os capítulos 8 e 9 apresentam, respectivamente, os comentários finais e algumas sugestões para pesquisas futuras.

2. OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo a análise em regime plástico, através da teoria das charneiras plásticas linhas de ruptura, de placas de concreto reforçado com fibras de aço sobre base elástica.

Pretende-se avaliar, entre os procedimentos de cálculo, qual deve ser o mais adequado para aplicação prática, mostrando-se inclusive que a teoria elástica conduz a soluções conservadoras.

Espera-se com este trabalho fornecer informações e subsídios aos projetistas desta área que, em virtude da pouca divulgação desta metodologia, têm dificuldades de efetuar o dimensionamento de placas em concreto reforçado com fibras de aço sobre base elástica.

Finalmente, espera-se que este trabalho esclareça sobre a possibilidade de substituição das armaduras convencionais pela utilização das fibras de aço como reforço do concreto, uma vez que o incremento de ductilidade conferido ao material pelas fibras de aço garante a ele adequada capacidade de carga. Desta forma, no dimensionamento através da teoria das charneiras plásticas linhas de ruptura é perfeitamente possível levar essa característica em consideração e, portanto, substituir toda armadura convencional comumente utilizada neste tipo de estrutura.

3. TEORIA DAS PLACAS

As propriedades de flexão de uma placa dependem fundamentalmente de sua espessura, em comparação com as outras dimensões. As placas podem ser divididas em 3 casos:

- a) placas finas com pequenas flechas;
- b) placas finas com grandes flechas;
- c) placas grossas.

Para o caso de placas apoiadas sobre base elástica, interessa analisar mais especificamente o caso de placas finas, ortótropas e com pequenas flechas (valores pequenos comparados à espessura da placa). Segundo **Timoshenko**¹¹, a teoria é desenvolvida com base nas seguintes hipóteses:

- a) não há deformação no plano médio da placa. Esse plano permanece neutro durante a flexão;
- b) os pontos situados inicialmente normais ao plano médio da placa permanecem depois da flexão na normal à superfície média da placa;
- c) as tensões normais na direção transversal da placa são desprezadas ($\sigma_z = 0$).

Tomando como base estas hipóteses, todas as tensões podem ser expressas em função da flecha w da placa, que por sua vez é função das coordenadas no plano da placa. No entanto, w tem que satisfazer uma equação diferencial linear em derivadas parciais que, junto com as condições de contorno, define w . Assim sendo, a solução da equação fornece informações necessárias para o cálculo das tensões em qualquer ponto da placa.

3.1. FLEXÃO PURA EM PLACAS

3.1.1. Curvaturas das placas com pequenas flechas

Ao se estudar as pequenas flechas de uma placa, deve-se tomar como plano xy o plano médio da placa antes da flexão.

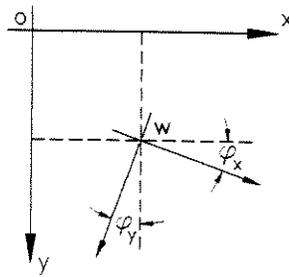


Figura 3.1: Curvaturas no plano xy

Como φ_x e φ_y são muito pequenos, pode-se escrever:

$$\operatorname{tg} \varphi_x \sim \varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_y \sim \varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y}$$

Para se determinarem as curvaturas da placa, deve-se levar em conta que as flechas são muito pequenas. Neste caso, as curvaturas das superfícies nos planos paralelos aos planos xz e yz são respectivamente:

$$\frac{1}{r_x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{r_y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.2)$$

3.1.2. Relações entre momentos fletores e curvaturas

Na flexão pura de uma placa retangular submetida a momentos uniformemente distribuídos nas bordas, como indica a Figura 3.2, toma-se como plano xy o plano médio da placa antes da flexão, sendo os eixos x e y orientados segundo as bordas da placa. O eixo z é perpendicular ao plano médio e positivo para baixo.

Seja M_x o momento fletor por unidade de comprimento que atua sobre uma borda paralela ao eixo y , e M_y o momento fletor por unidade de comprimento que atua sobre a borda paralela ao eixo x . Esses momentos são considerados positivos quando estão orientados conforme a Figura 3.2, ou seja, quando produzem compressão na face superior da placa e tração na face inferior.

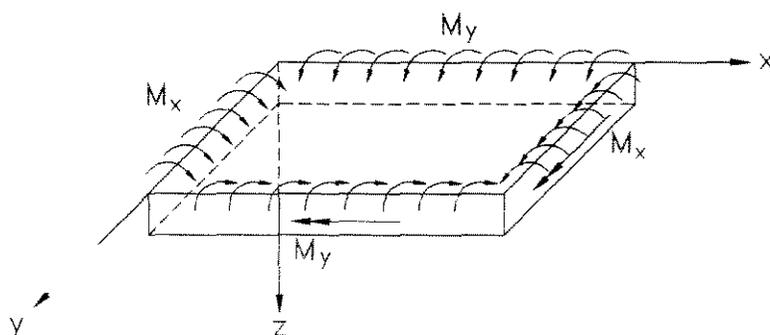


Figura 3.2: Flexão pura de placa retangular devida a momentos uniformemente distribuídos nas bordas

Considerando um elemento de placa formado por planos paralelos a xz e yz como indica a Figura 3.3 e sendo a combinação das flexões uniformes, de acordo com a Figura 3.2, as tensões são iguais em todos os elementos, conforme indica a Figura 3.3. Desta forma a flexão será uniforme na placa.

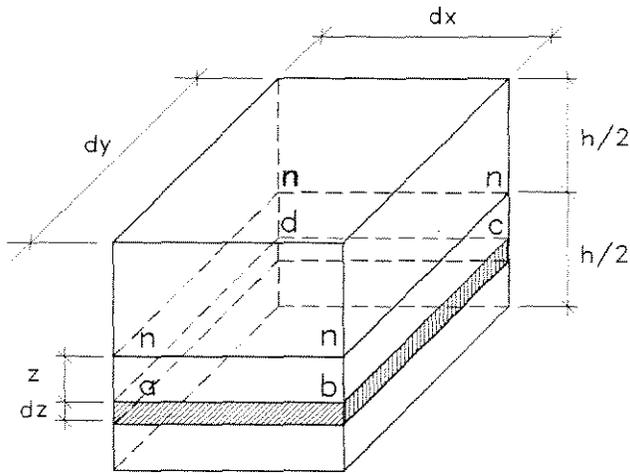


Figura 3.3: Elemento de placa formado por planos paralelos a xz e xy

As deformações longitudinais nas direções x e y da lâmina elementar $abcd$, conforme Figura 3.3, a uma distância z da superfície neutra, são dadas por, como no caso das vigas:

$$\varepsilon_x = \frac{z}{r_x} \quad \varepsilon_y = \frac{z}{r_y} \quad (3.3)$$

$$\varepsilon_x = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \varepsilon_y = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.4)$$

Utilizando a lei de Hooke, as tensões correspondentes na lâmina $abcd$ são expressas por:

$$\sigma_x = \frac{E \cdot z}{1 - \nu^2} \left(\frac{1}{r_x} + \nu \frac{1}{r_y} \right) \quad (3.5)$$

$$\sigma_y = \frac{E \cdot z}{1 - \nu^2} \left(\frac{1}{r_y} + \nu \frac{1}{r_x} \right) \quad (3.6)$$

Estas tensões são proporcionais à distância z da lâmina **abcd** até a superfície neutra e dependem dos valores de curvatura da placa fletida.

As tensões normais distribuídas sobre as laterais do elemento da Figura 3.3 podem ser reduzidas a pares de forças, cujo valor total por unidade de comprimento é igual aos momentos externos M_x e M_y . Deste modo obtém-se as equações:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot z \cdot dz = M_x \cdot d_y$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \cdot z \cdot dz = M_y \cdot d_x$$
(3.7)

Substituindo σ_x e σ_y , tem-se:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E \cdot z^2}{1 - \nu^2} \cdot dz \cdot \left(\frac{1}{r_x} + \nu \frac{1}{r_y} \right)$$

$$= \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \frac{z^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} \cdot \left(\frac{1}{r_x} + \nu \frac{1}{r_y} \right) = \frac{E \cdot h^3}{12(1 - \nu^2)} \cdot \left(\frac{1}{r_x} + \nu \frac{1}{r_y} \right)$$

Como $D = \frac{E \cdot h^3}{12(1 - \nu^2)}$ (rigidez à flexão da placa) (3.8)

$$\Rightarrow M_x = D \cdot \left(\frac{1}{r_x} + \nu \frac{1}{r_y} \right)$$
(3.9)

e $\frac{1}{r_x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ e $\frac{1}{r_y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

tem-se:

$$M_x = -D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$
(3.10)

Analogamente:

$$M_y = D \cdot \left(\frac{1}{r_y} + \nu \frac{1}{r_x} \right) \quad \text{e} \quad M_y = -D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.11)$$

3.1.3. Estudo em coordenadas polares

As placas apoiadas sobre base elástica, utilizadas como elementos de pavimentação, evidentemente jamais são circulares. No entanto devem ser dimensionadas para uma carga concentrada, recaindo-se no caso da placa circular carregada simetricamente. Este estudo é bastante simplificado tomando-se como sistema de referência um sistema em coordenadas polares

Assim sendo, é conveniente desenvolver o estudo dos elementos anteriores mediante uma transformação de coordenadas, passando de cartesianas a polares.

Desta forma, considera-se um elemento laje como indicado na Figura 3.4.

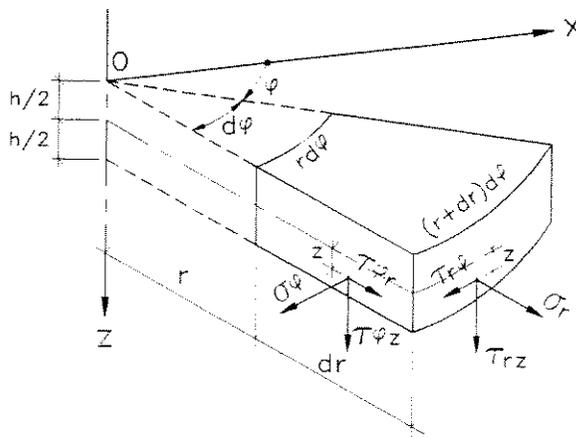


Figura 3.4: Elemento de laje

Tomando-se as tensões correspondentes em coordenadas polares:

$$\sigma_r = \sigma_x \cdot \cos^2 \varphi + \sigma_y \cdot \sen^2 \varphi + 2\tau_{xy} \cdot \sen \varphi \cdot \cos \varphi \quad (\text{na direção } \vec{or}) \quad (3.12)$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_x \cdot \sen^2 \varphi + \sigma_y \cdot \cos^2 \varphi + 2\tau_{xy} \cdot \sen \varphi \cdot \cos \varphi \quad (\text{na direção tang. ao arco})$$

Pode-se também escrever:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r \cdot z \cdot dz = M_r \quad (3.13)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\varphi \cdot z \cdot dz = M_t$$

Os valores de M_r e M_t são, desta forma, expressos em função dos deslocamentos w , considerando as direções ortogonais r e t no lugar de x e y , chegando-se a:

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{d^2w}{dr^2} \quad (3.14)$$

$$\frac{\varphi}{r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \quad (3.15)$$

Utilizando-se estas relações, obtém-se:

$$M_r = -D \left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) = D \left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\nu}{r} \varphi \right) \quad (3.16)$$

$$M_t = -D \cdot \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2w}{dr^2} \right) = D \cdot \left(\frac{\varphi}{r} + \nu \frac{d\varphi}{dr} \right)$$

onde M_r e M_t representam os momentos fletores por unidade de comprimento, atuando ao longo das seções circulares e da seção diametral rz da placa respectivamente.

As equações anteriores são determinadas considerando um elemento de placa em equilíbrio conforme a Figura 3.5, separando esta por seções cilíndricas ab e cd e por duas seções diametraes ad e bc .

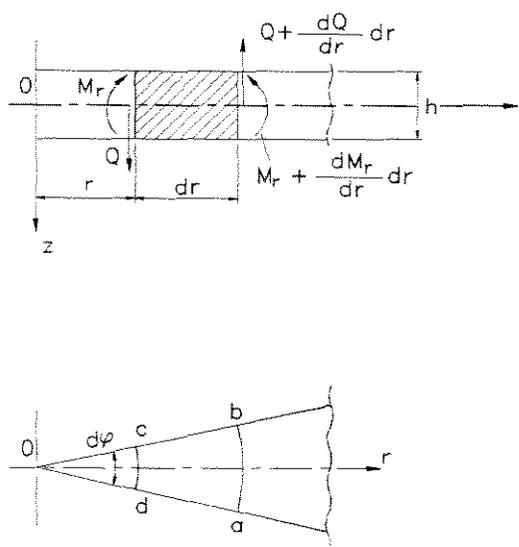


Figura 3.5: Elemento de placa em equilíbrio

O momento que atua em **cd** é:

$$\mathbf{M}_r \cdot r \cdot d\varphi \quad (3.17)$$

O momento correspondente em **ab** é:

$$\left(\mathbf{M}_r + \frac{d\mathbf{M}_r}{dr} dr \right) \cdot (r + dr) \cdot d\varphi \quad (3.18)$$

Os momentos dos lados **ad** e **bc** são iguais a $\mathbf{M}_t \cdot dr$ e na placa r $\mathbf{O} z$ é igual a:

$$\mathbf{M}_t \cdot dr \cdot d\varphi \quad (3.19)$$

Os esforços cortantes que atuam sobre o elemento, em razão da simetria, anulam-se nas seções diametrais da placa, no entanto persistem nas seções cilíndricas **cd** e **ab**.

Sendo **Q** a força cortante por unidade de comprimento da seção cilíndrica de

raio r , a força total devida ao esforço cortante sobre o lado cd do elemento é:

$$Q \cdot r \cdot d\varphi \quad (3.20)$$

e a correspondente força cortante em ab é:

$$\left(Q + \frac{dQ}{dr} dr \right) \cdot (r + dr) \cdot d\varphi \quad (3.21)$$

Desprezando-se as parcelas infinitesimais, pode-se afirmar que estas forças dão um momento no plano rz igual a:

$$- Q \cdot r \cdot d\varphi \cdot dr \quad (3.22)$$

Fazendo-se o equilíbrio de forças, no elemento $abcd$, tem-se:

$$Q \cdot r \cdot d\varphi = \left[Q + \left(\frac{dQ}{dr} \right) dr \right] \cdot (r + dr) d\varphi + p \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi$$

Desprezando-se as parcelas infinitesimais de ordem superior, e fazendo-a na forma de derivada indicada, tem-se:

$$Q + \frac{dQ}{dr} \cdot r + p \cdot r = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}(Q \cdot r) = -p \cdot r \quad (3.23)$$

Fazendo-se o equilíbrio de momentos no elemento $abcd$, tem-se:

$$\left(M_r + \frac{dM_r}{dr} dr \right) \cdot (r + dr) \cdot d\varphi - M_r \cdot r \cdot d\varphi - M_t \cdot dr \cdot d\varphi - Q \cdot r \cdot d\varphi \cdot dr = 0$$

Desprezando-se as parcelas infinitesimais de ordem superior e fazendo-a na forma de derivada indicada, tem-se:

$$M_r + \frac{dM_r}{dr} \cdot r - M_t - Q \cdot r = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}(M_r \cdot r) = M_t + Q \cdot r \quad (3.24)$$

Substituindo M_r e M_t , conforme as expressões 3.16, tem-se:

$$\frac{d^2\varphi}{d \cdot r^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r^2} = -\frac{Q}{D} \quad (3.25)$$

e também:

$$\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{Q}{D} \quad (3.26)$$

A integração destas equações pode ser simplificada, escrevendo-as na forma de derivada indicada. Assim sendo:

$$\frac{d}{dr} \cdot \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \cdot (r \cdot \varphi) \right] = -\frac{Q}{D} \quad (3.27)$$

com $\varphi = -\frac{dw}{dr}$

$$\frac{d}{dr} \cdot \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \cdot \left(r \cdot \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{Q}{D} \quad (3.28)$$

O termo Q da expressão 3.28 é melhor expresso fazendo-o em função da carga distribuída q sobre a placa.

Assim sendo, multiplicando-se ambos os membros da equação por $2\pi r$, tem-se:

$$Q \cdot 2\pi r = \int_0^r q \cdot 2\pi r \cdot dr$$

Na forma de derivada indicada tem-se:

$$r \cdot \frac{d}{dr} \cdot \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{1}{D} \int_0^r q \cdot r \cdot dr$$

Derivando os membros da equação com relação a r e dividindo por r , tem-se:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \cdot \left\{ r \cdot \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{q}{D} \quad (3.29)$$

3.2. PLACAS APOIADAS SOBRE BASE ELÁSTICA

Nas placas apoiadas sobre base elástica, a intensidade da reação de apoio do solo é proporcional aos deslocamentos verticais w da placa. A expressão $k \cdot w$ representa esta intensidade. A constante k é designada módulo de reação da fundação e seu valor depende das propriedades do terreno.

Utilizando-se a equação 3.29, e fazendo:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \cdot \left(r \cdot \frac{d}{dr} \right) \equiv \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \right)$$

pode-se então escrever a equação diferencial, somando-se ainda a parcela $-kw$, referente à reação do terreno, à carga q .

Assim sendo, a equação diferencial da placa será:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \right) \cdot \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right) = \frac{q - kw}{D} \quad (3.30)$$

Para o caso particular em que a placa suporta uma carga P no interior, q é nulo em toda superfície da placa, exceto no interior. Introduzindo-se a notação:

$$\frac{k}{D} = \frac{1}{\ell^4}$$

onde ℓ é o raio de rigidez relativo da placa, a equação (3.30) resultará:

$$\ell^4 \cdot \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \right) \cdot \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right) + w = 0 \quad (3.31)$$

Introduzindo as variáveis adimensionais

$$\frac{w}{\ell} = z \quad \text{e} \quad \frac{r}{\ell} = x \quad (3.32)$$

tem-se:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} \right) \cdot \left(\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{dz}{dx} \right) + z = 0 \quad (3.33)$$

Utilizando o operador Δ :

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx}$$

tem-se:

$$\Delta \cdot \Delta z + z = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla^4 z + z = 0 \quad (3.34)$$

Esta é uma equação diferencial de 4ª ordem, conhecida como equação de Lagrange, cuja solução geral se obtém da seguinte forma:

$$z = A_1 X_1(x) + A_2 X_2(x) + A_3 X_3(x) + A_4 X_4(x)$$

Os valores de A_1 , A_2 , A_3 e A_4 dependem das condições de contorno estabelecidas de acordo com os vínculos nos bordos da placa.

A solução dos problemas de contorno relativos às placas sobre base elástica é tratada por **Westergaard**¹. Utilizando o método de Ritz, com aproximações sucessivas, baseado no princípio de mínima energia, e levando em consideração resultados experimentais, as seguintes expressões são apresentadas, e dizem respeito aos deslocamentos verticais, para os 3 casos clássicos de cargas, indicados na Figura 3.6.

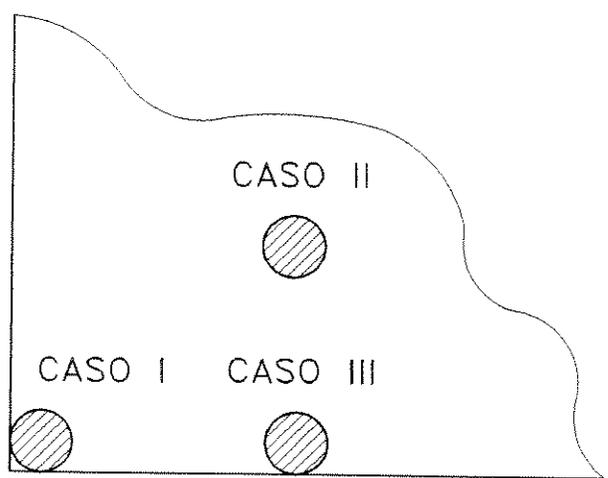


Figura 3.6: Posicionamento das cargas nas placas

3.2.1. Carga no canto da placa - Caso I

$$z_c = \left(1,1 - 0,88 \cdot \frac{a \cdot \sqrt{2}}{\ell} \right) \cdot \frac{P}{k \cdot \ell^2} \quad (3.35)$$

3.2.2. Carga no interior da placa - Caso II

$$z_i = \frac{P}{8 \cdot k \cdot \ell^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{a}{\ell} \right)^2 \cdot \left(0,217 - 0,367 \cdot \log \frac{a}{\ell} \right) \right] \quad (3.36)$$

3.2.3. Carga na borda da placa - Caso III

$$z_e = \frac{1}{\sqrt{6}} (1 + 0,4 \cdot \nu) \cdot \frac{P}{k \cdot \ell^2} \cdot \left[1 - 0,760 \cdot (1 + 0,5 \cdot \nu) \cdot \frac{a}{\ell} \right] \quad (3.37)$$

Assim sendo, as reações do solo na placa podem ser expressas em função de $k \cdot z$, e, através destas expressões de deslocamentos verticais, substituindo-as nas expressões de M_r e M_t , (expressões 3.16), obtém-se as expressões indicadas nos itens a seguir:

3.2.4. Carga no canto da placa

$$M_{\max} = -\frac{P}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{a \cdot \sqrt{2}}{\ell} \right)^{0,6} \right] \quad (3.38)$$

3.2.5. Carga no interior da placa

$$M_{\max} = -P \cdot (1 + \nu) \cdot \left[0,1833 \cdot \log \frac{a}{\ell} - 0,0490 - 0,0078 \cdot \frac{a}{\ell} \right] \quad (3.39)$$

3.2.6. Carga na borda da placa

$$M_{\text{máx}} = -P \cdot (1 + 0,5 \cdot \nu) \cdot \left(0,489 \cdot \log \frac{a}{\ell} - 0,012 - 0,063 \cdot \frac{a}{\ell} \right) \quad (3.40)$$

Para placas de concreto simples, os procedimentos para dimensionamento utilizam as máximas tensões de tração que ocorrem na placa. **Westergaard**¹ apresenta também as expressões de tensões máximas para os 3 casos de carregamento expostos anteriormente. Essas expressões estão descritas no Capítulo 4 a seguir.

4. PLACAS APOIADAS ELASTICAMENTE – TEORIA ELÁSTICA

Atribui-se a **Westergaard**¹ o estudo das cargas pontuais em artigo publicado em abril de 1926, intitulado: “Stresses in Concrete Pavements Computed by Theoretical Analysis”. Este foi o grande marco para a determinação das tensões que se verificam em placas de concreto, sobre base elástica, sob ação das cargas transmitidas pelas rodas dos veículos.

Antes disto, vários artigos sobre o assunto foram feitos, abordando: pesquisas sobre o sub-leito, cargas nos pavimentos, tensões nos pavimentos de concreto, efeitos de repetição de cargas, efeitos de temperatura, posicionamento de cargas de rodas nas placas, impacto e efeitos de fadiga.

Algumas destas investigações são datadas de 1920, como o programa desenvolvido pela Division of Highways, Department of Public Works and Buildings of Illinois.

Deve-se a **Older**¹², em artigo de 1924, a apresentação de alguns resultados das investigações citadas anteriormente, apresentando, então, uma primeira indicação para dimensionamento de placas de concreto utilizadas como revestimento, através da expressão:

$$d = \sqrt{\frac{3 \cdot W}{S}} \quad \text{ou} \quad W = \frac{1}{3} \cdot S \cdot d^2 \quad (4.1)$$

onde:

W – carga aplicada no canto da placa;

S – tensão de tração assumida como o módulo de ruptura do concreto;

d – espessura da placa.

Esta expressão resulta da consideração de uma carga concentrada no vértice do ângulo formado pelas bordas livres do pavimento. Somente esta situação era considerada por Older a mais desfavorável.

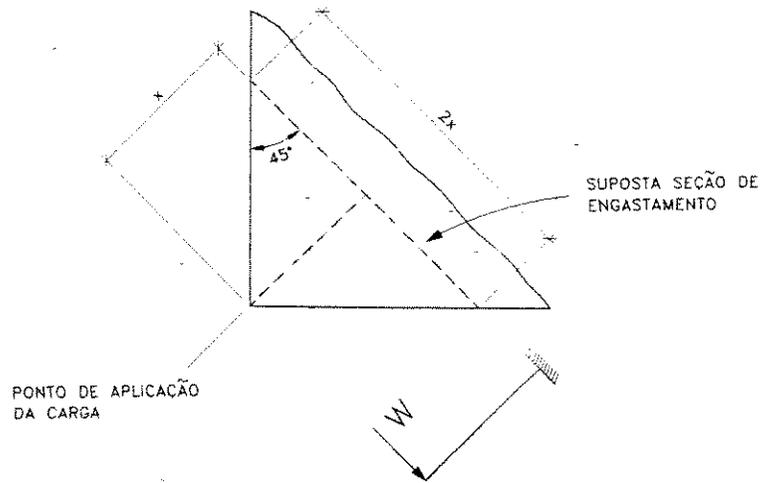


Figura 4.1: Situação de Carga no Canto da Placa

$$M = -W \cdot x$$

Na faixa de comprimento $2x$ tem-se:

$$m = M / 2x = -W \cdot x / 2x = -W / 2$$

Obs: O sinal (-) indica que o momento traciona a face superior na seção considerada.

A tensão na borda superior de seção de engastamento é:

$$S = \frac{m \cdot c}{I} = \frac{W \cdot 3}{d^2} \quad (4.2)$$

onde $c = \frac{h}{2}$

Daí tem-se :

$$d^2 = \frac{3 \cdot W}{S} \quad \therefore d = \sqrt{\frac{3 \cdot W}{S}} \quad (4.3)$$

A expressão apresentada por Older conduzia a valores de tensões muito altos, acarretando grandes espessuras. Isto se deve ao fato da não consideração da contribuição do sub-leito como reação, o que alivia o nível de tensões.

Também se deve a **A.T. Goldbeck**¹³, em artigo de 1925, onde são mostrados resultados obtidos no programa desenvolvido pelo United States Bureau of Public Roads, junto com o Federal Aid Roads, no campo experimental de Arlington, Virginia. Há grandes contribuições referentes a: sub-leitos, cargas nos pavimentos e tensões em pavimentos de concreto.

A partir de então, **Westergaard**¹ publica o artigo “Stresses in Concrete Pavements Computed by Theoretical Analysis”, dando um tratado matemático à luz da Teoria da Elasticidade.

4.1. TENSÕES EM PAVIMENTOS DE CONCRETO SEGUNDO WESTERGAARD

Para se obterem as tensões em placas de concreto sobre base elástica, algumas hipóteses devem ser consideradas:

- a placa de concreto comporta-se como um material homogêneo, isotrópico e elástico;
- as reações do sub-leito são assumidas como verticais, e são proporcionais aos deslocamentos verticais da placa;
- a reação do sub-leito (p), por unidade de área, é proporcional ao deslocamento vertical (z) no ponto. A constante de proporcionalidade k é denominada “módulo de reação do sub-leito” ou “módulo do sub-leito”, assumida constante e igual em todos os pontos da área de aplicação da carga;
- a espessura da placa é uniforme;
- a carga no interior e no canto da placa é uniformemente distribuída sobre área circular de contato;
- a carga na borda da placa é distribuída uniformemente na área semicircular de contato, sendo o centro da circunferência coincidente com a borda da placa.

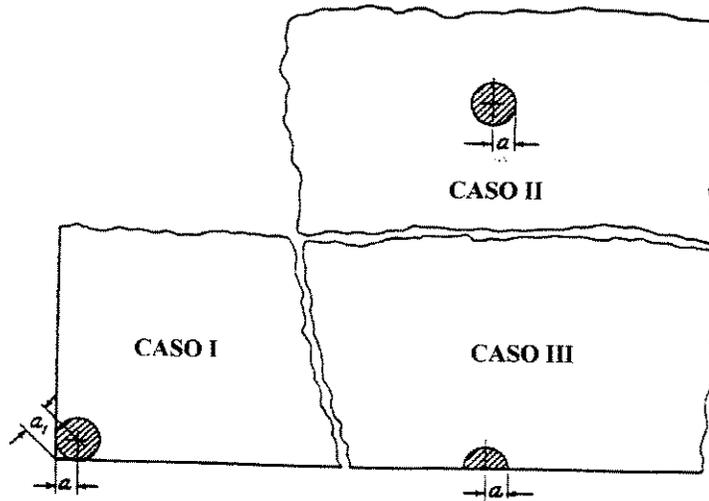


Figura 4.2: Casos de posicionamento de cargas

4.1.1. Tensões na placa

As expressões propostas por **Westergaard**¹ são a seguir apresentadas:

Caso I - Carga no canto da placa:

$$\sigma_c = \frac{3 \cdot P}{h^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{a_1}{\ell} \right)^{0,6} \right] \quad a_1 = a \cdot \sqrt{2} \quad (4.3)$$

Caso II - Carga no interior da placa:

$$\sigma_i = 0,275 \cdot (1 + \nu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left[\log \cdot \left(\frac{E \cdot h^3}{k \cdot b^4} \right) \right] \quad (4.4)$$

Caso III - Carga na borda da placa:

$$\sigma_e = 0,529 \cdot (1 + 0,54 \cdot \nu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left[\log \cdot \left(\frac{E \cdot h^3}{k \cdot b^4} \right) - 0,71 \right] \quad (4.5)$$

onde:

- P** - carga.
- σ_c - tensão máxima de tração na face superior da placa, na direção paralela à bissetriz do ângulo do canto da placa, devida à aplicação da carga no canto da placa.
- σ_i - tensão máxima de tração na face inferior da placa, sob o ponto de aplicação da carga **P**, devida à aplicação da carga em um ponto no interior da placa, a uma distância considerável das bordas.
- σ_e - tensão máxima de tração na face inferior da placa, sob o ponto de aplicação da carga **P**, na direção paralela à borda, devida à aplicação da carga na borda da placa.
- h** - espessura da placa.
- v** - coeficiente de Poisson.
- k** - módulo de reação do sub-leito.
- ℓ - raio de rigidez relativo da placa.
- a** - raio da área de contato da carga.
- b** - raio equivalente da área de distribuição de pressão.

A seguir são detalhados alguns destes conceitos.

4.1.2. Coeficiente “k”

A reação do sub-leito é dada por $k.z$, onde o coeficiente “k” é obtido através do ensaio de placa circular, onde é avaliada a carga necessária para provocar um deslocamento vertical (y) unitário no sub-leito, ou seja:

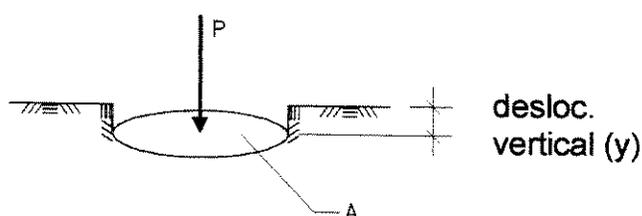


Figura 4.3: Módulo de Reação do Sub-leito

$$k = \frac{P}{A} \cdot \left(\frac{N}{\frac{\text{mm}^2}{\text{mm}}} \right) \text{ ou } \frac{N}{\text{mm}^3} \quad (4.6)$$

O coeficiente “k” é chamado de “módulo de reação do sub-leito” e seu valor é considerado uniforme em toda a área da placa.

4.1.3. Raio de rigidez relativo “ ℓ ”

A medida da rigidez do conjunto placa/sub-leito é dada pelo raio de rigidez relativo “ ℓ ”, expresso da seguinte forma:

$$\ell^4 = D / k \quad \text{com: } D = (E \cdot h^3) / 12 (1 - \nu^2) \quad (4.7)$$

onde:

D - rigidez da placa à flexão

E - módulo de deformação do concreto

$$\ell = \sqrt[4]{\frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2) \cdot k}} \quad (4.8)$$

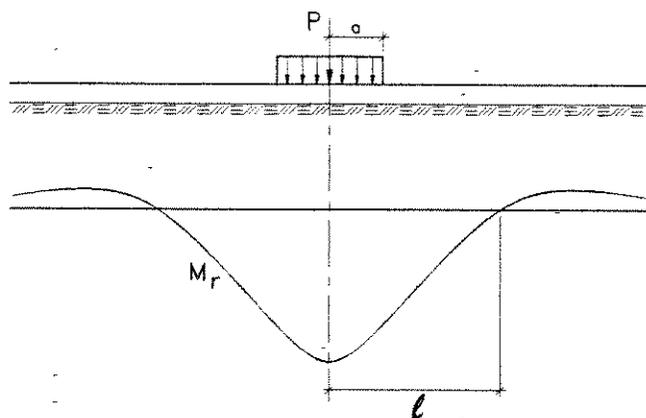


Figura 4.4: Representação de “ ℓ ”

onde “ ℓ ” é a distância entre o ponto de aplicação da carga e o ponto onde o momento é nulo.

4.1.4. Raio de contato “ a ”

É o raio da área de contato da carga **P**. Para os caso de carga no canto da placa (**caso I**) e de carga no interior da placa (**caso II**), o raio da área de contato é dado por um círculo, e no caso de carga na borda da placa (**caso III**), o raio da área de contato é dado por um semi-círculo (Figura 4.2).

4.1.5. Raio equivalente “ b ”

Como visto anteriormente **a**, significa o raio da área de contato de carga. No entanto deve-se considerar um espreadimento da carga até a face inferior da placa. A área terá então um raio equivalente **b** que é encontrado levando-se em consideração a espessura da placa (**h**) e o raio real da área de contato da carga (**a**). Segundo **Nadai**¹⁴, é dado por:

$$b = \sqrt{1,6 \cdot a^2 + h^2} - 0,675 \cdot h \quad \text{para } a < 1,724 \cdot h \quad (4.9)$$

$$b = a \quad \text{para } a \geq 1,724 \cdot h \quad (4.10)$$

4.2. VERIFICAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO ATRAVÉS DE MODELOS EXPERIMENTAIS

Após a introdução por Westergaard do modelo matemático apresentado anteriormente, foram realizadas pelo Bureau of Public Roads a partir de 1930 em Arlington, Virginia, uma série de pesquisas sobre o assunto, visando comparar os resultados experimentais com o modelo matemático desenvolvido por Westergaard.

No transcorrer de tais investigações, **Westergaard**¹⁵ apresenta o artigo de 1933, onde desenvolve teoria suplementar baseada na redistribuição de reações do sub-leito, válida somente para o caso de cargas aplicadas no interior da placa.

Na teoria original, a reação do sub-leito é assumida como proporcional ao deslocamento vertical da placa no ponto de aplicação da carga. Como a ação no

sub-leito é feita por um corpo contínuo, a reação do sub-leito se dá numa área ao redor da carga, e não somente no seu ponto de aplicação. Em função disso, Westergaard leva conta, nesse trabalho, uma redistribuição das reações, ou seja, um acréscimo da reação na região próxima à carga.

Portanto, o deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga será menor, levando, portanto, a menores valores de tensões do que apresentado na teoria original.

Assim sendo, é proposta uma nova equação para o caso de carga no interior da placa, ou seja:

$$\sigma_i = 0,275 \cdot (1 + \nu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left[\log \cdot \left(\frac{E \cdot h^3}{k \cdot b^4} \right) - 54,54 \cdot \left(\frac{\ell}{L} \right)^2 \cdot Z \right] \quad (4.11)$$

onde são introduzidos 2 novos parâmetros:

L - máxima distância radial tomada a partir do ponto de aplicação da carga, da área de reações do sub-leito.

Z - relação de redução do deslocamento vertical máximo.

Segundo Westergaard, os valores de **Z** variam entre 0 e 0,39. Com **Z = 0**, a expressão se reduz à apresentada na teoria original. Ele sugere que é razoável assumir: **L = 5.ℓ**

Em publicação do Wire Reinforced Institute, de autoria de **Bradbury**¹⁶, o autor sugere a utilização de um valor médio para **Z**, igual a 0,20, e **L = 5.ℓ**.

Assim sendo, a expressão anterior assume a seguinte forma:

$$\sigma_i = 0,275 \cdot (1 + \nu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left[\log \cdot \left(\frac{E \cdot h^3}{k \cdot b^4} \right) - 0,436 \right] \quad (4.12)$$

Nos anos de 1935 e 1936, **Teller e Sutherland**¹⁷, através da Divisão de Testes do Bureau of Public Roads, apresentam uma série de publicações sobre os resultados das investigações feitas em Arlington.

Posteriormente, em 1943, **Teller e Sutherland**¹⁸ apresentam ainda mais informações sobre investigações feitas em Arlington, onde tratam da determinação do módulo de reação do sub-leito e as relações carga-deslocamento vertical e carga-tensão para placas de espessura uniforme em pavimentos.

Após esse vasto trabalho, são sugeridas algumas adaptações nas equações originais, sendo então propostas algumas alterações para aplicação. São elas:

Caso I - Carga no canto da placa

Equação Teórica:

$$\sigma_c = \frac{3 \cdot P}{h^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{a_1}{\ell} \right)^{0,6} \right] \quad a_1 = a \cdot \sqrt{2}$$

Equação Experimental:

$$\sigma_c = \frac{3 \cdot P}{h^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{a_1}{l} \right)^{1,2} \right] \quad a_1 = a \cdot \sqrt{2} \quad (4.13)$$

Caso II – Carga no interior da placa

Equação Teórica (com teoria suplementar):

$$\sigma_i = 0,275 \cdot (1 + \nu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left[\log \cdot \left(\frac{E \cdot h^3}{k \cdot b^4} \right) - 54,54 \cdot \left(\frac{\ell}{L} \right)^2 \cdot Z \right]$$

As investigações em Arlington foram feitas nas condições em que a sub-base apresentava $Z = 0,05$ e $L = 1,75 \cdot \ell$. Tais valores apresentam reduções significativas nas tensões. A sugestão proposta por **Bradbury**¹⁶ ($Z = 0,20$ e $L = 5 \cdot \ell$) conduz a valores mais conservadores do que os obtidos experimentalmente, e que, mesmo sem ter sido levado a ensaio em Arlington, serve de boa referência para aplicação.

Em artigo de 1939, **E.F. Kelley**¹⁹ apresenta comparações entre os resultados das várias expressões estudadas.

Caso III – Carga na borda da placa

Equação Teórica:

$$\sigma_e = 0,529 \cdot (1 + 0,54 \cdot \nu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left[\log \left(\frac{E \cdot h^3}{k \cdot b^4} \right) - 0,71 \right]$$

Equação Experimental:

$$\sigma_e = 0,529 \cdot (1 + 0,54 \cdot \nu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left[\log \left(\frac{E \cdot h^3}{k \cdot b^4} \right) + \log \left(\frac{0,1 \cdot b}{1 - \nu^2} \right) - 1,08 \right] \quad (4.14)$$

As três equações experimentais dos três casos citados anteriormente, levando em consideração a contribuição de Bradbury para o caso de carga no interior da placa, são apresentadas na publicação de **Eisenmann**²⁰, que trata de dimensionamento de pisos e de pavimentos de concreto.

Ainda em 1939, **Westergaard**²¹ apresenta o cálculo das tensões nos pavimentos de concreto para utilização em aeroportos. Isso ocorreu em virtude do aumento da utilização dos aeroportos e pelo fato das expressões originalmente definidas para cargas rodoviárias não representarem a realidade dessas situações. Este período se dá concomitante à 2ª. Guerra Mundial.

Desta forma as expressões são reavaliadas para esse caso, uma vez que, nos pisos dos aeroportos as áreas de contato das rodas das aeronaves são maiores do que as consideradas para cargas rodoviárias.

Em 1947, **Westergaard**²² apresenta reformulações nas expressões das tensões, levando em consideração nova forma da área de contato da roda com a placa, para pavimentos de concreto de aeroportos.

Em 1951, **Pickett e Ray**²³ propõem um método gráfico para encontrar os valores dos momentos e deslocamentos verticais, simplificando a aplicação das expressões de Westergaard.

4.3. RESUMO DAS EXPRESSÕES

As expressões de Westergaard utilizadas atualmente são:

Caso I - Carga no canto da placa

$$\sigma_c = \frac{3 \cdot P}{h^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{a_1}{l} \right)^{1,2} \right] \quad a_1 = a \cdot \sqrt{2} \quad (4.13)$$

Caso II – Carga no interior da placa

$$\sigma_i = 0,275 \cdot (1 + \nu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left[\log \left(\frac{E \cdot h^3}{k \cdot b^4} \right) - 0,436 \right] \quad (4.12)$$

Caso III – Carga na borda da placa

$$\sigma_e = 0,529 \cdot (1 + 0,54 \cdot \nu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left[\log \left(\frac{E \cdot h^3}{k \cdot b^4} \right) + \log \left(\frac{0,1 \cdot b}{1 - \nu^2} \right) - 1,08 \right] \quad (4.14)$$

5. PLACAS SOBRE BASE ELÁSTICA EM REGIME PLÁSTICO

5.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE A TEORIA DA PLASTICIDADE

Mason⁵, na tradução do trabalho original de **Johansen**⁴, apresenta, nas considerações gerais, os seguintes conceitos que elucidam o comportamento dos materiais em regime plástico:

“Admitindo-se que a ruptura em um sólido tensionado ocorra quando uma certa função das tensões aproximar-se de um valor limite, deduz-se que a ruptura deverá iniciar-se em pontos isolados do sólido.

Em regime de ruptura os materiais frágeis carecem totalmente de capacidade de absorver tensões, de modo que, após iniciado o colapso, em um ponto, propaga-se ele muito rapidamente aos demais e a capacidade resistente do sólido é imediatamente esgotada.

Por outro lado, os materiais plásticos carecem de capacidade de absorver tensões acima de um certo limite. A plastificação propaga-se às regiões vizinhas tão logo a carga externa seja aumentada.

Quando o material possuir limites superior e inferior de escoamento, significa que o material, após iniciada a plastificação em um setor, não possui capacidade, de absorver as tensões naquele setor devido ao decréscimo da tensão de escoamento para o limite inferior.

Desta maneira as regiões vizinhas deverão absorver a diferença e o domínio plástico se expande. Se o material permitir deformações consideráveis sem perda da capacidade de absorver tensões, a carga poderá ser aumentada além do valor que provocou o início da plastificação. As zonas plásticas crescerão assim até um ponto em que seu aumento que chega depois é impossível ou que as deformações sejam excessivas.”

5.2. PLASTICIDADE PERFEITA

Esquemáticamente, o processo de deformação de alguns dos materiais mais frequentes utilizados nas construções podem ser divididos em três fases características:

- a) fase elástica, na qual as deformações são muito pequenas, reversíveis e proporcionais aos esforços;
- b) fase de cedência plástica, na qual as deformações, também pequenas, são essencialmente irreversíveis e crescem sem variação sensível dos esforços;
- c) fase de ruptura plástica ou de grandes deformações, na qual estas aumentam muito mais rapidamente do que os esforços, até atingir o limite de resistência do material.

Deste processo ficam expressamente excluídas as grandes deformações de escoamento plástico que acompanham certas operações mecânicas (trefilagem, puncionamento, dobragem, etc.), produzidas por solicitações que nada tem em comum com as solicitações exteriores das estruturas resistentes das construções, e se situam fora do campo da engenharia civil. Igualmente nele não se enquadram as alterações dos estados de deformação e de tensão no decorrer do tempo (fluência, relaxação e de envelhecimento). Também não compreendem os efeitos de temperatura muito elevadas, que alteram a estrutura dos materiais.

Com estas restrições, o conceito enunciado é perfeitamente claro e traduz o comportamento dos materiais mais usados nas construções (aços, concretos, pedra, madeira, etc.).

5.3. CONDIÇÕES DE PLASTICIDADE

Quando um corpo, submetido à ação de forças exteriores de solicitação gradualmente crescentes, se deforma em regime de elasticidade perfeita, existe correspondência biunívoca entre seus estados de tensão e de deformação, regulada pela lei de Hooke generalizada. E daí resulta que, em regime elástico, o estado de

deformação do corpo pode ser considerado completo e exclusivamente definido pelo seu estado de tensão.

Na fase plástica a lei de Hooke generalizada deixa de prevalecer, mas ela tem ainda validade no instante em que se iniciam as deformações plásticas (instante que coincide com aquele em que cessam as deformações meramente elásticas). A condição de plasticidade, que exprime os requisitos a serem satisfeitos quando são produzidas deformações plásticas, pode ser expressa através de uma relação funcional entre as tensões.

Se o corpo é isótropo, a condição de plasticidade não deve ser influenciada pela orientação dos eixos coordenados, podendo ser expressa só em termos das tensões principais por uma equação do tipo:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$$

Sejam quais forem as variáveis escolhidas, o regime elástico é caracterizado por:

$$f < 0$$

e o regime plástico por:

$$f = 0$$

não podendo ser nunca:

$$f > 0$$

uma vez que o estado de tensão não varia em regime de plasticidade perfeita.

Portanto a condição de plasticidade deverá ser expressa por:

$$f \leq 0$$

A condição de plasticidade é susceptível de várias interpretações geométricas extremamente elucidativas.

Se, por exemplo, se adotam as coordenadas de Haigh e Westergaard, isto é, se se considera o espaço tridimensional em que as tensões principais são tomadas como coordenadas ortogonais, o estado de tensão em um corpo poderá ser representado por um ponto deste espaço.

O lugar geométrico dos pontos que representam estados de tensão correspondentes ao início de deformações plásticas será uma superfície cuja equação é precisamente a condição de plasticidade:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$$

Esta superfície é a fronteira do domínio limitado, do espaço das tensões principais, cujos pontos representam estados de tensão correspondentes a deformações elásticas e é chamado de superfície das deformações plásticas ou superfície de cedência.

5.4. CRITÉRIOS DE PLASTIFICAÇÃO

Os critérios de plastificação são divididos em dois grupos: um para materiais que independem da pressão hidrostática (materiais metálicos) e outro que dela dependem (materiais não metálicos: solos, rochas e concreto).

Para os materiais metálicos, a plastificação é definida em função dos limites elásticos do material sob estados de tensão. Para os não metálicos, a característica da superfície de ruptura é a de um material isotrópico e a ruptura do material é usualmente definida em termos de sua capacidade de distribuição de carga.

5.4.1. Critérios de plastificação para materiais metálicos

- a) Tresca (1864): Historicamente o primeiro critério de plastificação para um estado de tensões combinadas para metais, que sugere que o escoamento pode ocorrer com base na máxima tensão de cisalhamento;
- b) von Mises (1913): Também adequado para metais, sugere que o escoamento pode ocorrer com base na máxima tensão octaédrica de cisalhamento.

5.4.2. Critérios de plastificação para materiais não metálicos

- a) Rankine (1876): é geralmente adotado para materiais frágeis. A ruptura ocorre quando a máxima tensão de tração é atingida;
- b) Mohr-Coulomb (1900): Este critério pode ser considerado como uma generalização do critério de Tresca, ou seja, ambos os critérios consideram a máxima tensão de cisalhamento como decisiva para o impedimento da ruptura. No entanto, Mohr admite que a tensão de cisalhamento é função da tensão normal no plano do ponto considerado;
- c) Drucker-Prager (1952): Este critério pode ser considerado como uma modificação do critério de von Mises, introduzindo-se a influência da componente da tensão hidrostática na ruptura.

5.4.3 Ruptura do concreto sob tensões biaxiais

Antes da teoria da plasticidade poder ser aplicada para pavimentos de concreto, a resistência do material sob tensões combinadas nas duas direções deve ser conhecidas. Uma vez que a resistência à tração do concreto é bem menor do que sua resistência à compressão, a condição de ruptura do concreto sob estado biaxial de tensões pode ser aproximada por um quadrado (máxima tensão de tração, ou critério de ruptura de Rankine). Desta forma o critério de Rankine é uma boa aproximação da condição real de ruptura das placas de concreto sob tensões combinadas.

5.5. MÉTODO DE CÁLCULO PLÁSTICO SEGUNDO LOSBERG

A utilização dos princípios da plasticidade para aplicação no dimensionamento de placas sobre apoio elástico foi desenvolvida por **Losberg**⁸, em sua publicação de 1961.

Nesse trabalho, após extensivas investigações entre 1945 e 1960, foi desenvolvida uma teoria para aplicação em projeto de placas sobre base elástica. O trabalho foi motivado pela observação das solicitações ocorridas nas pistas de aeroportos, uma vez que na época iniciava-se a utilização de grandes aeronaves, aumentando desta forma as cargas nos pisos.

Com os procedimentos de cálculo ainda fundamentados na teoria da elasticidade, e com o aumento do nível de cargas, podendo estas atingir até 150 tf, as espessuras dos pisos seriam da ordem de 80 cm, para o caso de concreto simples.

Assim sendo, **Losberg**⁸ desenvolve estudos sobre capacidade de carga das placas de concreto com armadura convencional distribuída em malha, sendo então possível caracterizar a carga última dessas placas em função dos momentos elásticos.

A Figura 5.1. mostra a distribuição de momentos em uma placa de concreto sobre base elástica, devida a uma carga concentrada em seu interior. As curvas A e B mostram a distribuição de momentos de acordo com a teoria elástica, para uma carga pequena (B) e uma carga maior (A). A curva C mostra a distribuição do momento após a placa ter atingido o estágio plástico, quando a carga aplicada leva à plastificação da face inferior da placa.

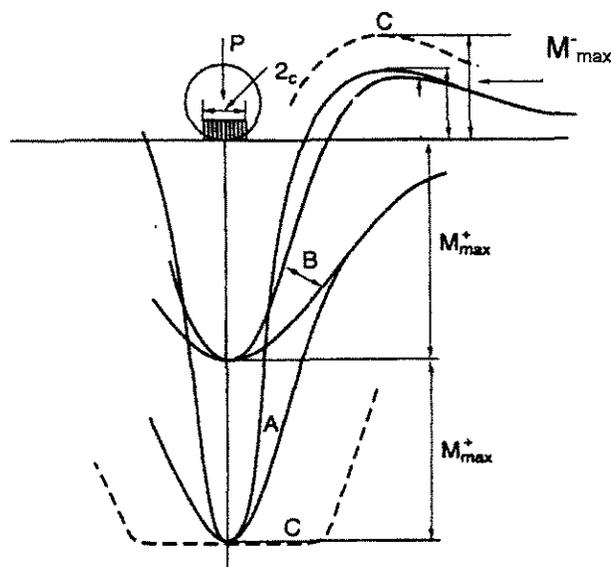


Figura 5.1: Distribuição de momentos em placa sobre base elástica devida a carga concentrada antes (A e B) e após a plastificação (C)

No que segue serão analisadas as situações clássicas de cargas concentradas em placas de concreto sobre base elástica, segundo Losberg⁸.

5.5.1. Carga no centro da placa

a) Equações de equilíbrio

Serão consideradas aqui somente carregamento com distribuição circular e para carga simples.

A placa de concreto é apoiada sobre o solo e solicitada por uma carga concentrada distribuída sobre uma área circular de raio c . Admite-se que esta carga esteja aplicada a uma distância considerável das bordas livres da placa. Considera-se ainda a formação de uma charneira circular na face superior da placa.

O momento fletor atuante na charneira circular, cuja posição é dada por r_0 , é assumido como constante e igual ao momento último negativo m' .

São admitidas ainda as seguintes hipóteses:

Dentro da zona circular da linha de ruptura, a plastificação está ocorrendo na face inferior da placa, fissurando-a radialmente, até o limite da linha de ruptura circular. O momento atuante ao longo de todo o comprimento da fissura radial é admitido constante e igual ao momento último positivo (momento plástico) m (Figura 5.2).

A pressão no sub-leito p_s , que depende das propriedades do solo e da placa, tem uma distribuição que, dentro da zona delimitada pela linha de ruptura, pode ser aproximada por um cone com valor de pico igual a p_0 e raio da base igual a t (Figura 5.2).

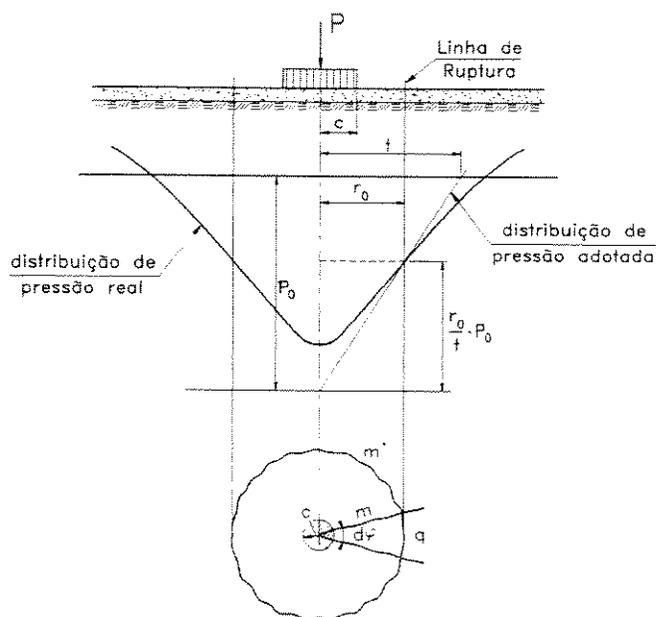


Figura 5.2: Linha de ruptura para placa apoiada em solo e consideração da distribuição de pressão sob a placa.

As equações de equilíbrio são estabelecidas para um elemento de placa, que é limitado por duas linhas de ruptura radiais e parte de uma linha de ruptura circular na face superior (Figura 5.3).

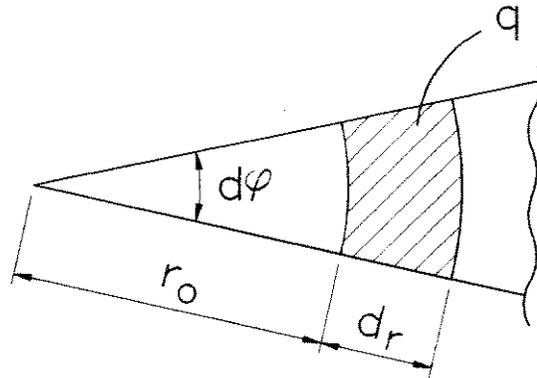


Figura 5.3: Elemento de placa

A equação de equilíbrio de forças é dada por:

$$\frac{P}{2\pi} \cdot d\varphi = \frac{1}{2} \cdot r_0^2 \cdot d\varphi \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{r_0}{t} \cdot p_0 + \frac{1}{2} \cdot r_0^2 \cdot d\varphi \cdot p_0 \cdot \left(1 - \frac{r_0}{t}\right) + q \cdot r_0 \cdot d\varphi \quad (5.1.)$$

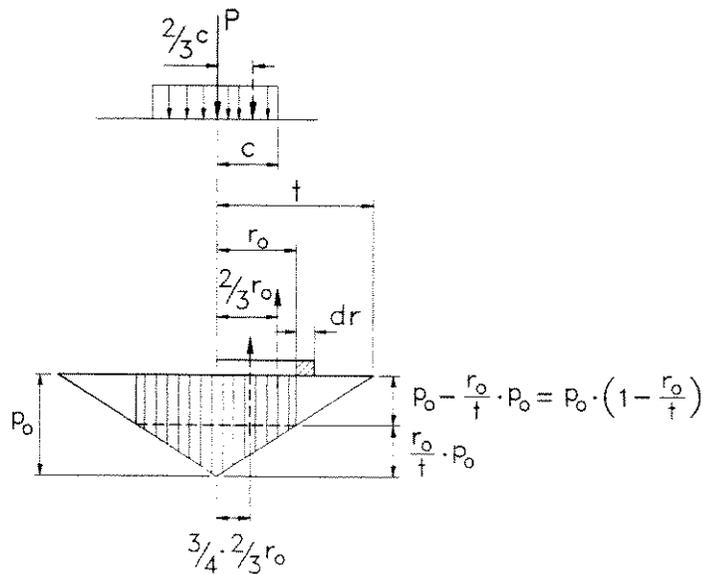


Figura 5.4: Equilíbrio de forças e momentos

A equação de equilíbrio de momentos é dada por:

$$\frac{P}{2\pi} \cdot d\varphi \cdot \frac{2}{3} \cdot c = \frac{1}{2} \cdot r_0^2 \cdot d\varphi \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{r_0}{t} \cdot p_0 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot r_0 + \frac{1}{2} \cdot r_0 \cdot d\varphi \cdot p_0 \cdot \left(1 - \frac{r_0}{t}\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot r_0 - \quad (5.2)$$

$$-m \cdot r_0 \cdot d\varphi - m' \cdot r_0 \cdot d\varphi + q \cdot r_0 \cdot d\varphi \cdot r_0$$

Seja q a força cortante ao longo da seção circular. Isto pode ser calculado pelo equilíbrio das equações para o pequeno elemento em forma de anel, de acordo com a Figura 5.6. O momento na seção circular $a - a$ é igual ao momento último negativo m' , como visto anteriormente. Portanto, a equação do momento atuante em $a - a$ é dada por:

$$m' \cdot r_0 \cdot d\varphi - m' \cdot (r_0 + dr) d\varphi - m \cdot dr d\varphi + q \cdot r_0 \cdot dr d\varphi = 0$$

$$m' \cdot dr d\varphi + m \cdot dr d\varphi = q \cdot r_0 \cdot dr d\varphi$$

$$q = \frac{m + m'}{r_0} \quad (5.3)$$

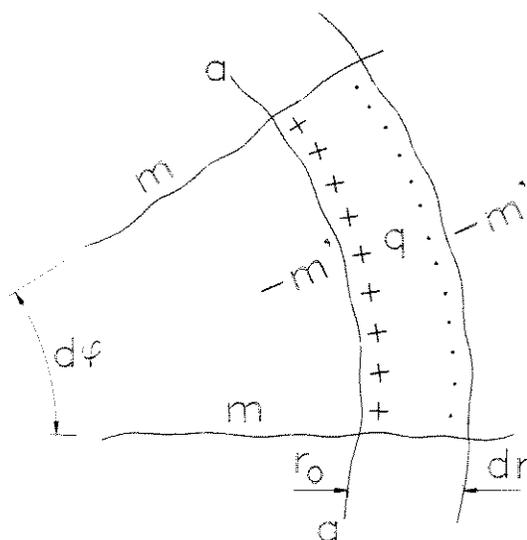


Figura 5.5: Força cortante q na linha de ruptura circular

Se a expressão 5.3 for colocada nas expressões originais de equilíbrio 5.1 e 5.2, obtém-se, após simplificações:

$$\frac{P}{2\pi} \cdot d\varphi = \frac{1}{2} \cdot r_0^2 \cdot d\varphi \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{r_0}{t} \cdot p_0 + \frac{1}{2} \cdot r_0^2 \cdot d\varphi \cdot p_0 - \frac{1}{2} \cdot r_0^2 \cdot d\varphi \cdot p_0 \cdot \frac{r_0}{t} + \frac{m+m'}{r_0} \cdot r_0 \cdot d\varphi$$

$$\frac{P}{2\pi} = \frac{1}{2} \cdot p_0 \cdot r_0^2 - \frac{1}{3} \cdot p_0 \cdot r_0^2 \cdot \frac{r_0}{t} + m + m' \quad (5.4)$$

$$\frac{P}{2\pi} \cdot d\varphi \cdot \frac{2}{3} \cdot c = \frac{1}{2} \cdot r_0^2 \cdot d\varphi \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{r_0}{t} \cdot p_0 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot r_0 + \frac{1}{2} \cdot r_0^2 \cdot d\varphi \cdot p_0 \cdot \left(1 - \frac{r_0}{t}\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot r_0 - m \cdot r_0 \cdot d\varphi - m' \cdot r_0 \cdot d\varphi + q \cdot r_0 \cdot d\varphi \cdot r_0$$

$$\frac{P}{\pi} \cdot \frac{c}{3} = \frac{1}{3} \cdot p_0 \cdot r_0^3 - \frac{1}{4} \cdot p_0 \cdot r_0^3 \cdot \frac{r_0}{t} \quad (5.5)$$

A partir destas expressões, o momento último é obtido por:

$$m + m' = \frac{P}{2\pi} - \frac{1}{2} \cdot p_0 \cdot r_0^2 - \frac{1}{3} \cdot p_0 \cdot r_0^2 \cdot \frac{r_0}{t} = \frac{P}{2\pi} - \frac{1}{2} \cdot p_0 \cdot r_0^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{r_0}{t}\right) \quad (5.6)$$

ou ainda, se $\frac{r_0}{t}$ for eliminado da expressão anterior, fazendo-se:

$$\frac{P}{\pi} \cdot \frac{c}{3} = \frac{1}{3} \cdot p_0 \cdot r_0^3 - \frac{1}{4} \cdot p_0 \cdot r_0^3 \cdot \frac{r_0}{t}$$

$$-\frac{1}{4} \cdot p_0 \cdot r_0^3 \cdot \frac{r_0}{t} = \frac{P}{\pi} \cdot \frac{c}{3} - \frac{1}{3} \cdot p_0 \cdot r_0^3$$

$$\frac{r_0}{t} = \frac{P}{\pi} \cdot \frac{c}{3} \cdot \frac{4}{p_0 \cdot r_0^3} - \frac{4}{3} \quad (5.7)$$

obtém-se:

$$\begin{aligned}
 m + m' &= \frac{P}{2\pi} - \frac{1}{2} \cdot p_0 \cdot r_0^2 \cdot \left[1 - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{P}{\pi} \cdot \frac{c}{3} \cdot \frac{4}{p_0 \cdot r_0^3} + \frac{4}{3} \right) \right] \\
 m + m' &= \frac{P}{2\pi} - \frac{1}{2} \cdot p_0 \cdot r_0^2 \cdot \left[1 + \frac{P}{\pi} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{c}{p_0 \cdot r_0^3} + \frac{8}{9} \right] \\
 m + m' &= \frac{P}{2\pi} \cdot \left(1 - \frac{8}{9} \cdot \frac{c}{r_0} \right) - \frac{1}{18} \cdot p_0 \cdot r_0^2 \quad (5.8)
 \end{aligned}$$

Esta equação pode ser mais conveniente para uso em certos casos. O raio da charneira r_0 pode ser determinado para a equação, fazendo-se:

$$\begin{aligned}
 \frac{P}{\pi} \cdot \frac{c}{3} &= \frac{1}{3} \cdot p_0 \cdot r_0^3 - \frac{1}{4} \cdot p_0 \cdot r_0^3 \cdot \frac{r_0}{t} \quad (\div r_0) \\
 \frac{P}{\pi} \cdot \frac{c}{r_0} &= 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot p_0 \cdot r_0^2 - \frac{1}{4} \cdot p_0 \cdot r_0^2 \cdot \frac{r_0}{t} \right) = p_0 \cdot r_0^2 - \frac{3}{4} \cdot p_0 \cdot r_0^2 \cdot \frac{r_0}{t} = \\
 \Rightarrow \frac{P}{\pi} \cdot \frac{c}{r_0} &= p_0 \cdot r_0^2 \cdot \left(1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{r_0}{t} \right) \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

Se a carga última ou o momento último forem calculados por estas equações, é essencial conhecer p_0 e t , isto é, a intensidade e o raio da área de distribuição da pressão.

b) Estimativa da pressão do sub-leito

O equilíbrio das equações derivadas acima deve ser obtido assumindo-se que a zona central da placa está em estado plástico. A pressão do sub-leito é função da deformação da placa e das propriedades elásticas do solo.

Uma simplificação pode ser feita, ou seja, a forma do volume de distribuição de pressões pode ser aproximada por um cone. De acordo com esta consideração é

possível estimar a posição da geratriz do cone com a ajuda das curvas de distribuição de pressões no solo baseada na teoria elástica. A pressão no solo é proporcional à carga P atuante na placa, e a altura do cone de pressão pode ser determinada pela seguinte expressão:

$$p_0 = \gamma \cdot \frac{P}{\ell^2} \quad (5.10)$$

onde:

- γ - constante estimada pela curva teórica de pressão.
- ℓ - raio de rigidez relativo da placa.

Se esta expressão for colocada nas expressões 5.7, 5.8 e 5.9, obtém-se a expressão geral para a carga última:

$$m + m' = \frac{P}{2\pi} - \frac{1}{2} \cdot p_0 \cdot r_0^2 \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{r_0}{t}\right)$$

$$m + m' = \frac{P}{2\pi} - \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot \frac{P}{\ell^2} \cdot r_0^2 \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{r_0}{t}\right)$$

$$m + m' = \frac{P}{2\pi} \cdot \left[1 - \pi \cdot \gamma \cdot \left(\frac{r_0}{\ell}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{r_0}{t}\right)\right] \quad (5.11)$$

ou

$$m + m' = \frac{P}{2\pi} \cdot \left(1 - \frac{8}{9} \cdot \frac{c}{r_0}\right) - \frac{1}{18} \cdot \gamma \cdot \frac{P}{\ell^2} \cdot r_0^2$$

$$m + m' = \frac{P}{2\pi} \cdot \left[1 - \frac{8}{9} \cdot \frac{c}{r_0} - \gamma \cdot \frac{\pi}{9} \cdot \left(\frac{r_0}{\ell} \right)^2 \right] \quad (5.12)$$

onde o raio que define a posição da linha de ruptura circunferencial é dado por:

$$\frac{r_0}{t} = \frac{P}{\pi} \cdot \frac{c}{3} \cdot \frac{4}{\rho_0 \cdot r_0^3} - \frac{4}{3} = \frac{P}{\pi} \cdot \frac{c}{3} \cdot \frac{4 \cdot \ell^2}{\gamma \cdot P \cdot r_0^3} - \frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{r_0}{t} = \frac{4 \cdot c \cdot \ell^2}{\gamma \cdot \pi \cdot 3 \cdot r_0^3} \Rightarrow r_0^3 = \frac{4 \cdot c \cdot \ell^2}{\gamma \cdot \pi \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{r_0}{t} \right)} \Rightarrow r_0^3 = \frac{c \cdot \ell^2}{\gamma \cdot \pi \cdot \left(1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{r_0}{t} \right)}$$

$$\frac{r_0^3}{\ell^2} = \frac{c}{\gamma \cdot \pi \cdot \left(1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{r_0}{t} \right)} \Rightarrow \frac{r_0^3}{\ell^3} = \frac{c \cdot \ell^2}{\gamma \cdot \pi \cdot \left(1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{r_0}{t} \right)} \Rightarrow \frac{r_0}{\ell} = \sqrt[3]{\frac{\frac{c}{\ell}}{\gamma \cdot \pi \cdot \left(1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{r_0}{t} \right)}} \quad (5.13)$$

Quando calculado de acordo com as expressões 5.11, 5.12, os valores de t e γ são primeiramente estimados de acordo com a curva teórica de pressão. Então $\frac{r_0}{t}$ é calculado por aproximações sucessivas através da expressão 5.13, após o que $m + m'$ (ou P) é obtido pelas expressões 5.11 ou 5.12.

5.5.2. Carga na borda da placa

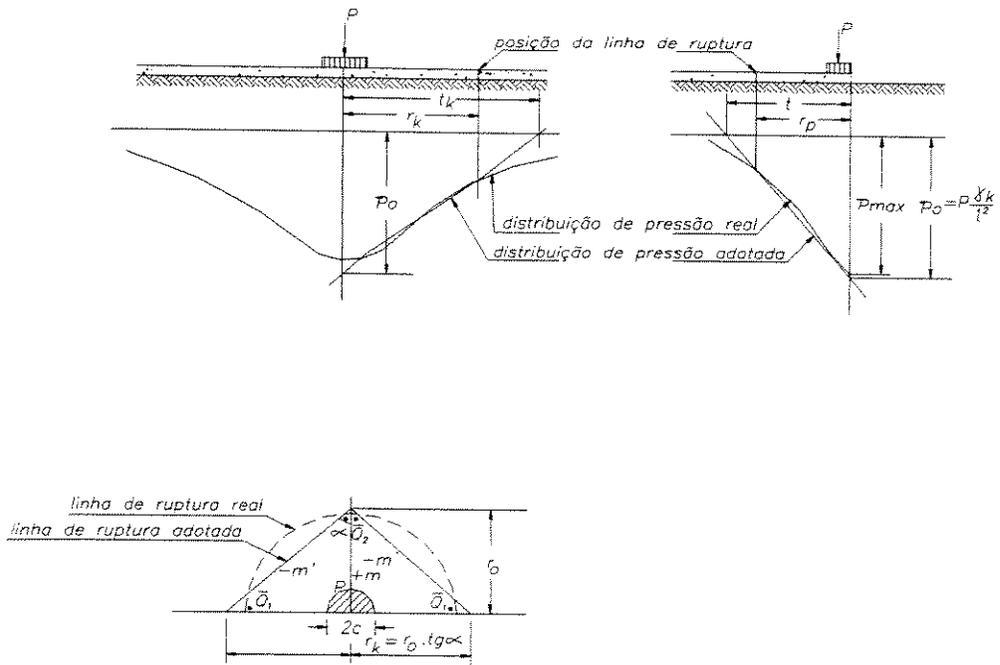


Figura 5.6: Distribuição de pressão adotada para carga aplicada na borda de placa apoiada sobre o solo

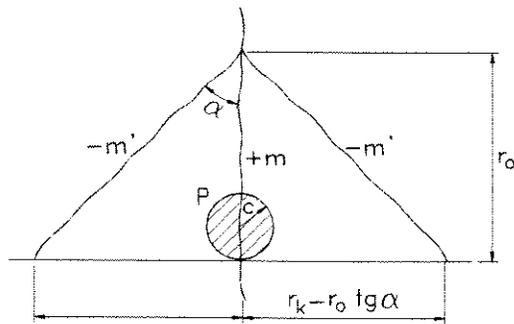


Figura 5.7.: Linha de ruptura adotada para uma carga distribuída em um círculo tangente à borda de uma placa apoiada sobre o solo

A análise deste caso é similar à anterior. A Figura 5.7 mostra as linhas de ruptura assumidas. Assim sendo, as expressões utilizadas para este caso são:

$$\frac{r_0}{\ell} = \sqrt[3]{\frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{c}{\ell} \cdot \cot \alpha \left(1 + \frac{4}{3 \cdot \tau} \cdot \cot \alpha\right)}{\gamma \cdot \left[1 - \frac{3}{8} \cdot \frac{r_0}{t} \cdot \left(1 + \frac{t}{t_k} \cdot \operatorname{tg} \alpha\right)\right]}} \quad (5.15)$$

$$m + m' = \frac{P}{4} \cdot \left[\left(1 + \frac{c}{r_0}\right) \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{4}{3} \cdot \gamma \cdot \left(\frac{r_0}{\ell}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{3}{8} \cdot \frac{r_0}{t} - \frac{5}{16} \cdot \frac{r_0}{t_k} \cdot \operatorname{tg} \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha \right] \quad (5.16)$$

$$m' = \frac{P}{4} \cdot \left[\left(1 + \frac{c}{r_0}\right) \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{2}{3} \cdot \gamma \cdot \left(\frac{r_0}{\ell}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{r_0}{t} - \frac{3}{8} \cdot \frac{r_0}{t_k} \cdot \operatorname{tg} \alpha\right) \right] \quad (5.17)$$

Estimando-se os valores de γ , t_k e t , o procedimento é semelhante ao caso de carga tratado anteriormente. Os valores de t e t_k podem ser estimados de acordo com:

$$t = 1,5 \cdot \ell + 3 \cdot c$$

$$t_k = 3,0 \cdot \ell + c$$

O valor de γ é estimado de acordo com a curva teórica da distribuição de pressões.

5.5.3. Carga no canto da placa

Para os casos de cargas no canto, Losberg⁸ considera que, do ponto de vista da carga última, a Teoria da Elasticidade pode ser aplicada. A seção crítica que

ocorre à distância x_1 da borda também corresponde à linha de ruptura da carga última.

$$x_1 = 2 \cdot \sqrt{c_1 \cdot \ell}$$

Portanto pode-se tomar, para efeito de encontrar a carga última, a mesma expressão dada pela Teoria da Elasticidade, ou seja:

$$m^- = -\frac{P}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{c_1}{\ell} \right)^{0,6} \right] \quad (5.18)$$

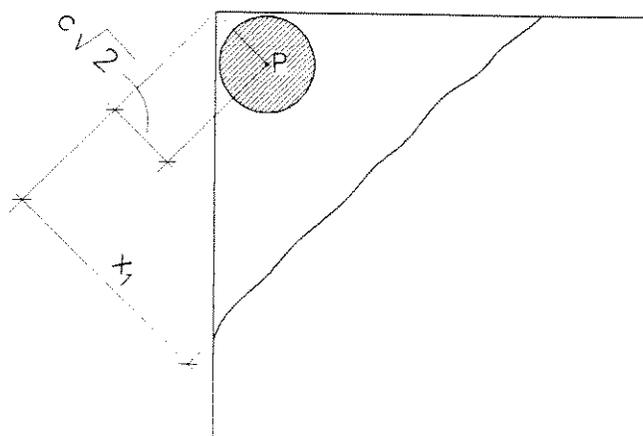


Figura 5.8: Carga no canto da placa

5.6. MÉTODO DE CÁLCULO PLÁSTICO SEGUNDO MEYERHOF

Quando uma carga concentrada, muito menor que a carga última, é aplicada sobre uma pequena área circular em uma placa infinita de concreto em contato com a base, as tensões e deslocamentos verticais da placa podem ser considerados como uma elástica e infinita placa apoiada sobre o solo (Figura 5.9).

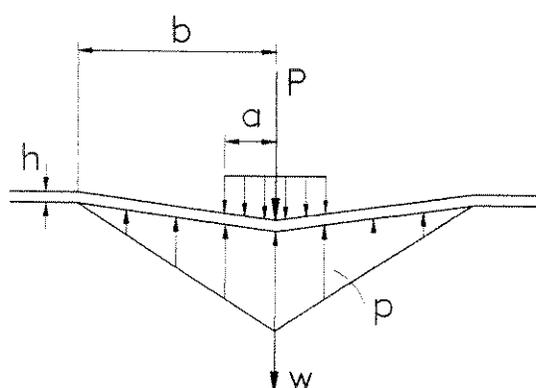


Figura 5.9: Seção da placa

Com o crescimento de carga, as tensões de flexão que atuam sob esta tornam-se equivalentes à resistência do concreto à flexão, a placa entra em escoamento, fissurando radialmente na face inferior (Figura 5.10).

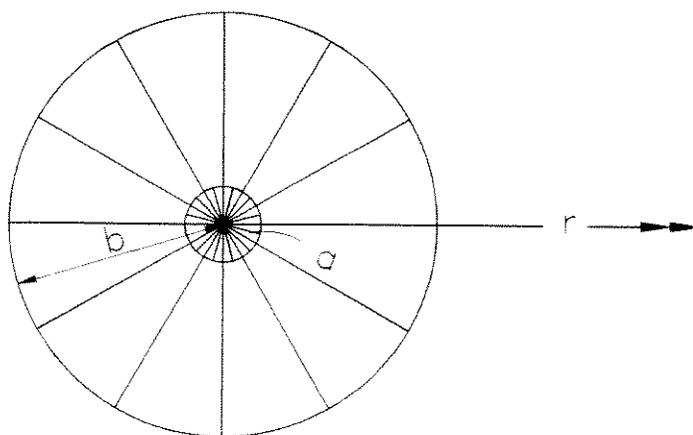


Figura 5.10: Planta da placa

A carga de escoamento P_y pode ser estimada pela teoria elástica e expressa em termos do momento elástico de resistência da placa por unidade de comprimento:

$$M_y = \frac{f_{ct,fl} \cdot h^2}{6} \quad (5.19)$$

onde $f_{ct,fl}$ é a resistência do concreto à tração na flexão e h é a espessura da placa.

Com o incremento de carga, as fissuras radiais aumentam até surgirem tensões ao longo de seção circunferencial da placa. Quando estas tensões atingem a resistência do concreto à tração, forma-se uma fissura de tração na face superior da placa (Figura 5.10). A capacidade de carga última ou carga de colapso da placa é então atingida.

A determinação da carga teórica de colapso de uma placa apoiada elasticamente é função dos tipos de carregamentos, bem como das condições de contorno. No que segue, são discutidas as hipóteses e procedimentos para a determinação de tais cargas.

5.6.1. Carga no centro da placa

A carga P é distribuída uniformemente sobre uma pequena área circular de raio a sobre uma placa fina, rígida, perfeitamente plástica, de comprimento infinito e com espessura h constante. A placa deve ter capacidade de atingir a plastificação total, ou seja, suportar o momento M_0 por unidade de comprimento, em todas as direções, e estar totalmente apoiada em um solo elástico (Figuras 5.9 e 5.10).

Sendo M_r e M_t os momentos fletores radiais e tangenciais (circunferenciais) respectivamente, por unidade de comprimento, Q a correspondente força cortante vertical, por unidade de comprimento, as equações de equilíbrio são expressas, como já visto na teoria geral de placas:

$$\frac{d(rQ)}{dr} = -r \cdot p \quad (5.20)$$

$$\frac{d(rM_r)}{dr} = M_t + r \cdot Q \quad (5.21)$$

onde p é a pressão no elemento de placa, tomando-se como positivo forças e momentos que produzem tensões de tração na face inferior da placa.

Usando o critério de plastificação de Rankine para o concreto (Figura 5.11), e desprezando efeitos de membrana na placa, o momento fletor tangencial (circunferencial) M_t é igual a M_0 e o momento fletor radial M_r varia de M_0 , no centro de aplicação da carga P ($r = 0$), para $-M_0$, na charneira plástica circunferencial ($r = b$), enquanto $M_r = 0$ no raio intermediário de $r = c$.

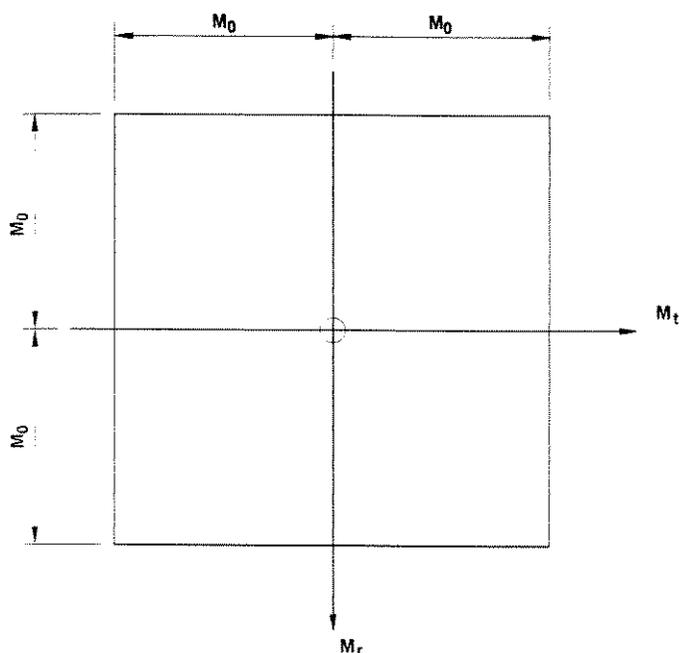


Figura 5.11: Critério de plastificação de Rankine

Além disso, o deslocamento vertical da placa w deve satisfazer a seguinte regra associada com a condição de plasticidade, e, no presente caso, a relação de curvatura é expressa por:

$$\frac{d^2 w}{dr^2} = 0 \quad (\text{para } 0 < r < b) \quad (5.22)$$

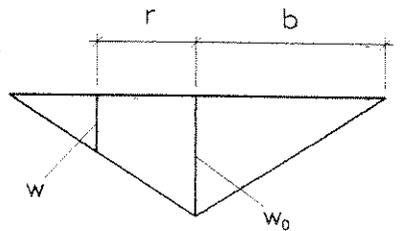


Figura 5.12: Distribuição de deslocamentos verticais

Integrando, tem-se:

$$w = w_0 - \frac{r}{b} \cdot w_0 \quad (5.23)$$

$$w = \left(1 - \frac{r}{b}\right) \cdot w_0$$

onde w_0 é o deslocamento vertical sob a carga ($r=0$)

A relação de deslocamento vertical é então dada na forma de um cone invertido que tem o ápice sob a carga.

A condição de equilíbrio requer que a carga P seja balanceada pela resultante da pressão de reação do solo na placa, que é tomado pelo volume do disco de deslocamento vertical de raio b proporcional a k , onde k é o módulo de reação do solo. Desta forma, a pressão de reação é:

$$p = -k \cdot w \quad (5.24)$$

A pressão total de reação do disco de deslocamentos verticais será:

$$P_{\text{total}} = P = \pi \cdot b^2 \cdot \frac{w_0}{3} \cdot k \quad (5.25)$$

$$\therefore P = \frac{\pi \cdot b^2 \cdot w_0 \cdot k}{3}$$

Substituindo 5.23 e 5.25 em 5.24, tem-se:

$$p = -k \cdot \left(1 - \frac{r}{b}\right) \cdot w_0 \Rightarrow w_0 = \frac{p}{-k \cdot \left(1 - \frac{r}{b}\right)}$$

$$P = \frac{\pi \cdot k \cdot \frac{p}{-k \cdot \left(1 - \frac{r}{b}\right)} \cdot b^2}{3} = -\frac{\pi \cdot p \cdot b^2}{3 \cdot \left(1 - \frac{r}{b}\right)}$$

$$p = -3 \cdot P \cdot \frac{\left(1 - \frac{r}{b}\right)}{\pi \cdot b^2} \quad (5.26)$$

Substituindo a equação 5.25 em 5.20, integrando e respeitando as condições de contorno $r \cdot Q = 0$ quando $r = 0$ e $r = b$, bem como respeitando a condição de $r \cdot Q$ em $r = c$ (Figura 5.13), obtém-se:

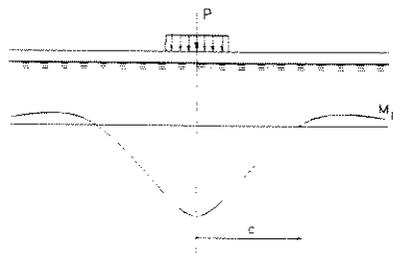


Figura 5.13: Ponto de $r = c$ ($M_r = 0$)

$$\frac{d(r \cdot Q)}{dr} = -r \cdot \left[-3 \cdot P \cdot \frac{\left(1 - \frac{r}{b}\right)}{\pi \cdot b^2} \right] = 3 \cdot P \cdot r \cdot \frac{\left(1 - \frac{r}{b}\right)}{\pi \cdot b^2}$$

$$d(r \cdot Q) = \left[\frac{3 \cdot P}{\pi \cdot b^2} \cdot \left(r - \frac{r^2}{b} \right) \right] dr$$

$$r \cdot Q = \frac{3 \cdot P}{\pi \cdot b^2} \int \left(r - \frac{r^2}{b} \right) \cdot dr + C_1 = \frac{3 \cdot P}{\pi \cdot b^2} \left[\int r \cdot dr - \frac{1}{b} \int r^2 dr \right] + C_1$$

$$r \cdot Q = \frac{3 \cdot P}{\pi \cdot b^2} \cdot \left[\frac{r^2}{2} - \frac{1}{b} \cdot \frac{r^3}{3} \right] + C_1 = \frac{3 \cdot P \cdot r^2}{2 \cdot \pi \cdot b^2} \cdot \left[1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{r}{b} \right] + C_1$$

No intervalo $0 < r < a$, tem-se:

$$r \cdot Q = \frac{3 \cdot P \cdot r^2}{2 \cdot \pi \cdot b^2} \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{r}{b} \right) - \frac{P}{\pi \cdot a^2} \cdot \frac{r^2}{2} \quad (5.27)$$

No intervalo $a < r < b$, tem-se:

$$r \cdot Q = \frac{3 \cdot P \cdot r^2}{2 \cdot \pi \cdot b^2} \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{r}{b} \right) - \frac{P}{\pi \cdot 2} \quad (5.28)$$

sendo a parcela $\frac{P}{\pi \cdot a^2} \cdot \frac{r^2}{2}$ (Figura 5.14) a subtração referente à carga distribuída na

área de raio a no intervalo $0 < r < a$ e a parcela $\frac{P}{\pi \cdot 2}$ aquela relativa ao intervalo

$a < r < b$ fazendo-se $r = a$.

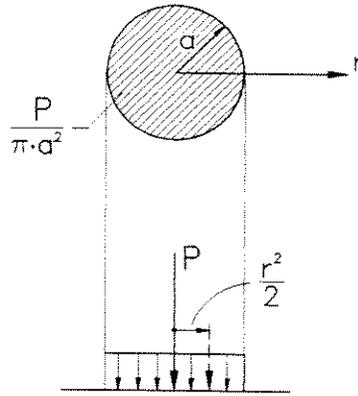


Figura 5.14: Parcela referente à carga distribuída na área de raio a

Substituindo as equações 5.27 e 5.28 na equação 5.21 e integrando com as condições de contorno anteriormente descritas para M_r e M_t e a exigência de continuidade de M_r em $r = a$, no intervalo $0 < r < a$, tem-se:

$$\frac{d(r \cdot M_r)}{dr} = M_t + \frac{3 \cdot P \cdot r^2}{2\pi \cdot b^2} \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{r}{b}\right) - \frac{P \cdot r^2}{2\pi \cdot a^2}$$

$$r \cdot M_r = \left[M_t + \frac{3 \cdot P \cdot r^2}{2\pi \cdot b^2} \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{r}{b}\right) - \frac{P \cdot r^2}{2\pi \cdot a^2} \right] dr$$

$$r \cdot M_r = \left[M_t \cdot \int dr + \frac{3 \cdot P}{2\pi \cdot b^2} \cdot \int r^2 \cdot dr - \frac{P}{2\pi \cdot b^2} \cdot \int \frac{r}{b} \cdot dr - \frac{P}{2\pi \cdot a^2} \cdot \int r^2 \cdot dr \right]$$

$$r \cdot M_r = \left[M_t \cdot r + \frac{3 \cdot P}{2\pi \cdot b^2} \cdot \frac{r^3}{3} - \frac{P}{2\pi \cdot b^2} \cdot \frac{r^2}{2 \cdot b} - \frac{P}{2\pi \cdot a^2} \cdot \frac{r^2}{3} \right]$$

$$M_r = M_t + \frac{3 \cdot P \cdot r^2}{2\pi \cdot b^2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{r}{2 \cdot b} \right) - \frac{P \cdot r^2}{6\pi \cdot a^2}$$

$$M_r = M_t + \frac{P \cdot r^2}{2\pi \cdot b^2} \cdot \left(1 - \frac{r}{2 \cdot b}\right) - \frac{P \cdot r^2}{6\pi \cdot a^2} \quad (5.29)$$

Como, usando o critério de plastificação de Rankine visto anteriormente, o momento fletor tangencial (circunferencial) M_t é igual a M_0 , pode-se escrever a equação anterior como:

$$M_r = M_0 + \frac{P \cdot r^2}{2\pi \cdot b^2} \cdot \left(1 - \frac{r}{2 \cdot b}\right) - \frac{P \cdot r^2}{6\pi \cdot a^2} \quad (5.30)$$

e no intervalo $a < r < b$, tem-se:

$$\frac{d(r \cdot M_r)}{dr} = M_t + \frac{3 \cdot P \cdot r^2}{2\pi \cdot b^2} \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{r}{b}\right) - \frac{P}{2\pi}$$

Integrando, tem-se:

$$M_r = M_t + \frac{P \cdot r^2}{2\pi \cdot b^2} \cdot \left(1 - \frac{r}{2 \cdot b}\right) - \frac{P}{2\pi} \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{r}\right)$$

Da mesma forma como exposto anteriormente M_t é igual a M_0 . Portanto:

$$M_r = M_0 + \frac{P \cdot r^2}{2\pi \cdot b^2} \cdot \left(1 - \frac{r}{2 \cdot b}\right) - \frac{P}{2\pi} \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{r}\right) \quad (5.31)$$

Quando $r = b$, o valor de M_r será igual a $-M_0$, portanto:

$$-M_0 = M_0 + \frac{P \cdot b^2}{2\pi \cdot b^2} \cdot \left(1 - \frac{b}{2 \cdot b}\right) - \frac{P}{2\pi} \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{b}\right)$$

$$-M_0 = M_0 + \frac{P}{2\pi} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{P}{2\pi} \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{b}\right)$$

$$-M_0 = M_0 + \frac{P}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{b}\right)$$

$$-2 \cdot M_0 = \frac{P}{2\pi} \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{b} \right) \Rightarrow M_0 = \frac{P}{4\pi} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{b} \right)$$

$$\therefore P_0 = \frac{8\pi \cdot M_0}{\left(1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{a}{b} \right)} \quad (5.32)$$

onde P_0 é a carga de colapso para $(0,05 < a/b < 0,75)$

Para uma pequena área de contato de carga (aproximadamente $a/b < 0,05$), a equação 5.32 satisfaz, mas não para o caso da fixação do valor de colapso quando se tem a carga concentrada. Para esse caso, em outro trabalho, **Meyerhof**⁹ aponta que seu limite é dado por.

$$P_0 = 4\pi \cdot M_0 \quad (5.33)$$

Quando o tamanho da placa é menor do que o necessário para o desenvolvimento do momento radial limite $M_r = -M_0$ em $r = b$, a carga de colapso é inferior à obtida para as placas grandes.

A análise apresentada anteriormente pode ser estendida para obter uma solução no caso de uma carga central concentrada sobre uma placa circular de pequena dimensão. Caso particular acontece quando o raio total é igual a b ; então o momento fletor radial $M_r = 0$ e as equações 5.32 e 5.33 podem ser expressas, respectivamente, por:

$$P_0 = \frac{4\pi \cdot M_0}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{a}{b}} \quad (\text{para } 0,05 < a/b < 0,75) \quad (5.34)$$

$$P_0 = 2\pi \cdot M_0 \quad (\text{para } a = 0) \quad (5.35)$$

Isto é interessante para se notar que a carga de colapso teórica para placas pequenas é metade da relativa à placa infinita, e para uma carga pontual (equação 5.35) é idêntica a de outros métodos de análises, **Meyerhof**²⁴ e **Johanson**²⁵.

As equações 5.34 e 5.35 podem ser utilizadas para estimar a carga de colapso de placas de concreto simples, onde $M_0 = M_y$ (momento elástico).

Em trabalho de Meyerhof²⁴, é mostrado que um raio efetivo de $b = 3,9.L$ pode ser sugerido como uma aproximação segura para a estimativa da carga de colapso nos casos de carga no centro da placa. Esta sugestão é baseada no estudo de Westergaard¹, sendo este valor o “raio da calota de deslocamentos verticais”, conforme Figura 5.15. Assim sendo as expressões 5.34 e 5.35 em função de L , que é o raio de rigidez da placa, resultam:

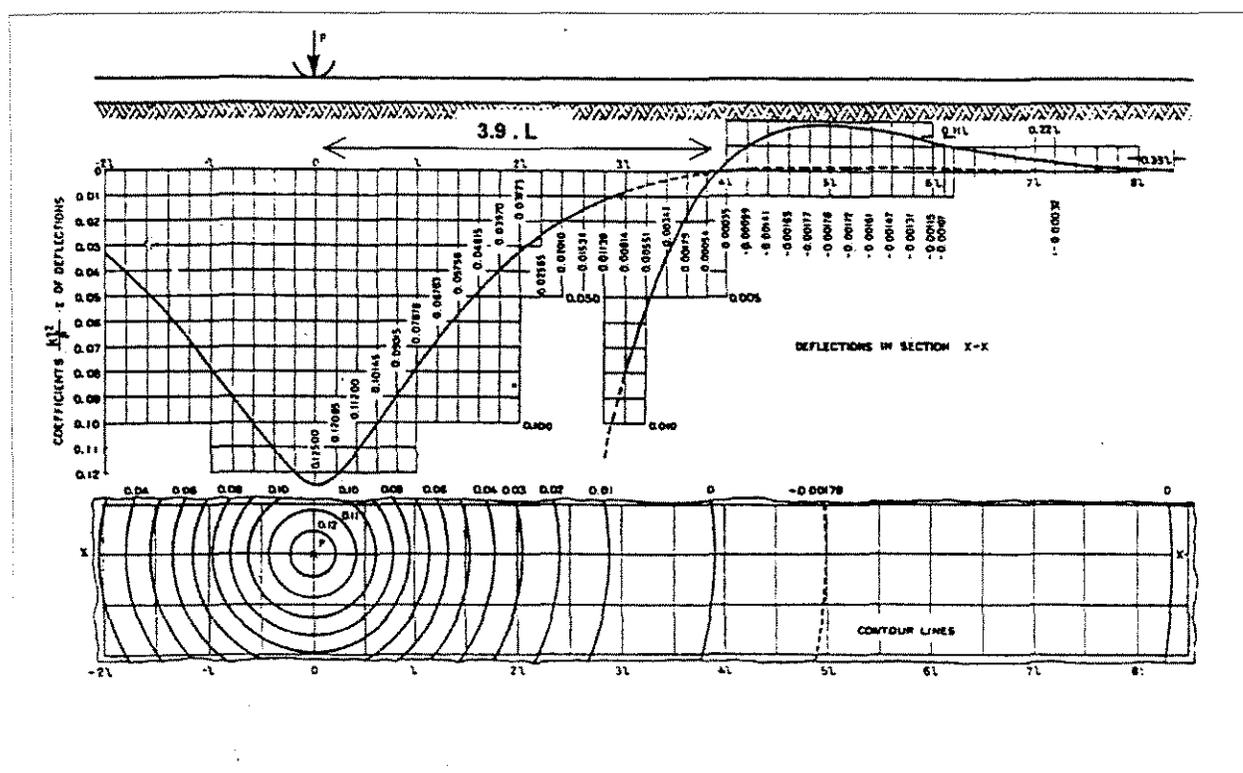


Figura 5.15: Deslocamentos verticais produzidos por uma carga atuando em um ponto no interior da placa a uma considerável distância da borda

$$P_0 = \frac{4 \cdot \pi \cdot M_0}{1 - \frac{a}{3 \cdot L}} \quad (p/a/L > 0,2) \quad (5.36)$$

$$P_0 = 2 \cdot \pi \cdot M_0 \quad (p/a = 0) \quad (5.37)$$

5.6.2. Carga na borda da placa

Uma carga concentrada P é distribuída uniformemente sobre uma área circular de raio a , tangente à borda de uma placa como a anterior. Seu correspondente mecanismo de colapso é mostrado na Figura 5.16.

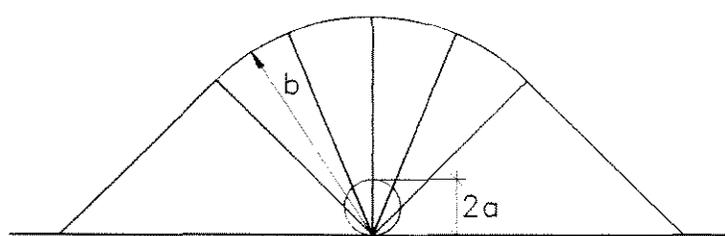


Figura 5.16.: Carga na borda de placa semi-infinita

Assumindo que as condições de tensões e deformações no setor central (ângulo central de 90°) é o mesmo que o da placa infinita, enquanto que na outra zona triangular (ângulo com a borda de 45°), as condições são similares para as placas em forma de cunha, então combinando a carga de colapso para cargas centradas (equações 5.32 e 5.33) com a carga de colapso obtida previamente para placas em forma de cunha, conforme trabalho de **Meyerhof**²⁴, a carga de colapso é:

$$P_0 = \frac{2 \cdot (\pi + 2) \cdot M_0}{1 - 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{a}{3 \cdot b}} \quad (\text{para } 0,05 < a/b < 0,75) \quad (5.38)$$

$$P_0 = (\pi + 2) \cdot M_0 \quad (\text{para } a = 0) \quad (5.39)$$

No entanto, para uma placa sem redistribuição de momentos no setor central, conforme equações 5.36 e 5.37, obtém-se:

$$P_0 = \frac{(\pi+4) \cdot M_0}{1 - 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{a}{3 \cdot b}} \quad (\text{para } 0,05 < a/b < 0,75) \quad (5.40)$$

$$P_0 = \left(\frac{\pi}{2} + 2 \right) \cdot M_0 \quad (\text{para } a = 0) \quad (5.41)$$

Com a aplicação para placas de concreto simples, onde $M_0 = M_y$, conforme visto anteriormente, de maneira similara tem-se:

$$P_0 = \frac{\pi \cdot M_0 + 4 \cdot M_n}{1 - 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{a}{3 \cdot b}} \quad (\text{para } 0,05 < a/b < 0,75) \quad (5.42)$$

$$P_0 = \frac{\pi \cdot M_0}{2} + 2 \cdot M_0 \quad (\text{para } a = 0) \quad (5.43)$$

Como indicado anteriormente, com base no estudo de **Westergaard**¹, pode-se fazer $b = 2,9 \cdot L$ para a carga de borda, e a correspondente carga de colapso é dada pelas equações:

$$P_0 = \frac{(\pi+4) \cdot M_0}{1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{L}} \quad (\text{para } a/L > 0,2) \quad (5.44)$$

$$P_0 = \left(\frac{\pi}{2} + 2 \right) \cdot M_0 \quad (\text{para } a = 0) \quad (5.45)$$

5.6.3. Carga no canto da placa

Para uma carga concentrada aplicada sobre uma área circular, no canto de uma placa, o correspondente mecanismo de colapso é mostrado na Figura 5.17.

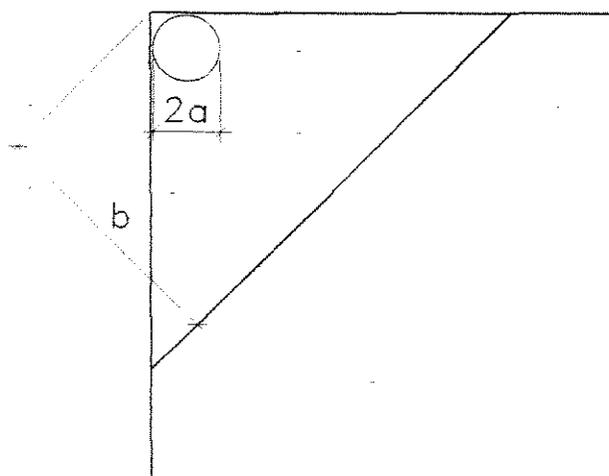


Figura 5.17: Carga no canto de placa semi-infinita

O problema é idêntico ao de uma carga aplicada numa placa em forma de cunha conforme trabalho de Meyerhof²⁴ citado anteriormente. A carga de colapso é dada por:

$$P_0 = \frac{4 \cdot M_0}{1 - \frac{8}{3} \cdot \frac{a}{b}} \quad (\text{para } 0,05 < a/b < 0,375) \quad (5.46)$$

$$P_0 = 2 \cdot M_0 \quad (\text{para } a = 0) \quad (5.47)$$

Como indicado anteriormente, com base no estudo de **Westergaard**¹, pode-se fazer $b = 2,7.L$ para a carga de canto, e a correspondente carga de colapso é dada pelas equações:

$$P_0 = \frac{4 \cdot M_0}{1 - \frac{a}{L}} \quad (\text{para } a/L > 0,2) \quad (5.48)$$

$$P_0 = 2 \cdot M_0 \quad (\text{para } a = 0) \quad (5.49)$$

6. ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE OS MÉTODOS

Conhecidos os procedimentos teóricos para a formulação das equações dos três casos clássicos de posicionamento de cargas, faz-se necessária uma análise comparativa entre essas expressões, visando estabelecer um procedimento de cálculo para as placas de concreto reforçado com fibras de aço sobre base elástica.

Em seu trabalho, **Meyerhof**⁹ apresenta uma comparação entre as teorias de cálculo de carga última, onde é citado o trabalho desenvolvido por **Losberg**⁸, o qual se baseia na teoria das linhas de ruptura de **Johansen**⁴.

Losberg considera somente as equações de equilíbrio, ignorando a regra de deslocamento vertical da placa associada com a condição de plasticidade. A carga de colapso é então estimada em termos de momento resistente da placa, do raio da charneira circunferencial e da pressão de reação distribuída no solo, que é assumida como sendo igual à teoria elástica. Tais considerações são aplicadas aos casos de cargas no interior e na borda das placas.

A carga de colapso para o caso de carga aplicada no canto é tomada como idêntica à da teoria elástica.

Com base nessas teorias e nos resultados de ensaios realizados, Meyerhof faz simplificações, propondo expressões bastante conservadoras para uso em projeto, nas situações onde $a \geq h$. Tais expressões, denominadas **Meyerhof – projeto**, são apresentadas a seguir junto com o resumo das demais expressões.

6.1. RESUMO DAS EXPRESSÕES

6.1.3. Carga no canto da placa

a) Westergaard

Pela expressão 3.38, tem-se:

$$\frac{P}{M} = \frac{2}{\left[1 - \left(\frac{a \cdot \sqrt{2}}{\ell} \right)^{0,6} \right]}$$

onde: $M = M_{\text{máx}}$ (momento negativo)

ℓ : raio de rigidez relativo da placa

a : raio da área de contato de carga

b) Losberg Idem Westergaard

c) Meyerhof

Pelas expressões 5.48 e 5.49, tem-se:

$$\frac{P}{M} = \frac{4}{1 - \frac{a}{L}} \quad ; \quad (a/L > 0,2)$$

$$\frac{P}{M} = 2 \quad ; \quad (a = 0)$$

onde: $M = M_0 = m + m'$

$L = \ell$: raio de rigidez relativo da placa

a : raio da área de contato de carga

d) Meyerhof – projeto

$$\frac{P}{M} = 2 \cdot \left(1 + 4 \cdot \frac{a}{L} \right) \quad (6.1)$$

onde: $M = M_0 = m + m'$

$L = \ell$: raio de rigidez relativo da placa

a : raio da área de contato de carga

6.1.2. Carga no interior da placa

a) Westergaard

Pela expressão 3.39, tem-se:

$$\frac{P}{M} = \frac{(1+\nu)}{\left[0,1833 \cdot \log \frac{a}{\ell} - 0,0490 - 0,0078 \cdot \left(\frac{a}{\ell} \right) \right]}$$

onde: $M = M_{\text{máx}}$

ℓ : raio de rigidez relativo da placa

a : raio da área de contato de carga

$\nu = 0,15$: coeficiente de Poisson

b) Losberg

Pelas expressões 5.12 e 5.13, tem-se:

$$\frac{r_0}{\ell} = \sqrt[3]{\frac{\frac{c}{\ell}}{\gamma \cdot \pi \cdot \left(1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{r_0}{t} \right)}}$$

$$\frac{P}{M} = \frac{2\pi}{\left(1 - \frac{8}{9} \cdot \frac{c}{r_0} - \gamma \cdot \frac{\pi}{9} \cdot \left(\frac{r_0}{\ell} \right)^2 \right)}$$

onde: $M = m + m'$

$c = a$: raio da área de contato de carga

γ e t : estimados de acordo com a curva teórica de pressão

c) Meyerhof

Pelas expressões 5.36 e 5.37, tem-se:

$$\frac{P}{M} = \frac{4\pi}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{L}} ; \quad (a/L > 0,2)$$

$$\frac{P}{M} = 2\pi ; \quad (a = 0)$$

onde: $M = M_0 = m + m'$

$L = \ell$: raio de rigidez relativo da placa

a : raio da área de contato de carga

d) Meyerhof – projeto

$$\frac{P}{M} = 6 \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{a}{L} \right) \quad (6.2)$$

onde: $M = M_0 = m + m'$

$L = \ell$: raio de rigidez relativo da placa

a : raio da área de contato de carga

6.1.3. Carga na borda da placa

a) Westergaard

Pela expressão 3.40, tem-se:

$$\frac{P}{M} = \frac{1}{\left[(1 + 0,5 \cdot \nu) \cdot \left(0,489 \cdot \log \frac{a}{\ell} - 0,012 - 0,063 \cdot \frac{a}{\ell} \right) \right]}$$

onde: $M = M_{\text{máx}}$

ℓ : raio de rigidez relativo da placa

a : raio da área de contato de carga

$\nu = 0,15$: coeficiente de Poisson

b) Losberg

Pelas expressões 5.15 e 5.16, tem-se:

$$\frac{r_0}{\ell} = \sqrt[3]{\frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{c}{\ell} \cdot \cot \alpha \cdot \left(1 + \frac{4}{3\pi} \cdot \cot \alpha\right)}{\gamma_k \cdot \left[1 - \frac{3}{8} \cdot \frac{r_0}{t} \cdot \left(1 + \frac{t}{t_k} \cdot \operatorname{tg} \alpha\right)\right]}}$$

$$\frac{P}{M} = \frac{4}{\left[\left(1 + \frac{c}{r_0}\right) \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{4}{3} \cdot \gamma_k \cdot \left(\frac{r_0}{\ell}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{3}{8} \cdot \frac{r_0}{t} \cdot \frac{5}{16} \cdot \frac{r_0}{t_k} \cdot \operatorname{tg} \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha\right]}$$

onde: $M = m + m'$

$c = a$: raio da área de contato de carga

γ , t e t_k : estimados de acordo com a curva teórica de pressão

c) Meyerhof

Pelas expressões 5.44 e 5.45, tem-se:

$$\frac{P}{M} = \frac{(\pi + 4)}{1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{L}} ; \left(\frac{a}{L} > 0,2\right)$$

$$\frac{P}{M} = \frac{\pi}{2} + 2 ; (a = 0)$$

onde: $M = M_0 = m + m'$

$L = \ell$: raio de rigidez relativo da placa

a : raio da área de contato de carga

d) Meyerhof – projeto

$$\frac{P}{M} = 3,5 \cdot \left(1 + 3 \cdot \frac{a}{L}\right) \quad (6.3)$$

onde: $M = M_0 = m + m'$

$L = \ell$: raio de rigidez relativo da placa

a : raio da área de contato de carga

6.2. ATRIBUIÇÃO DE VALORES PARA AS EXPRESSÕES

Atribuindo-se valores aos diversos parâmetros constantes das expressões anteriores, chega-se aos resultados contidos nas Tabelas 6.1, 6.2 e 6.3.

6.2.1. Carga no canto da placa

Tabela 6.1: Comparativo entre modelos – carga no canto da placa

<i>a/l</i>	Westergaard P/M	Meyerhof P/M	Meyerhof – projeto P/M	Losberg P/M
0,00	2,00	2,00	2,00	2,00
0,20	3,76	5,00	3,60	3,76
0,40	6,89	6,70	5,20	6,89
0,60	21,21	10,00	6,80	21,21
0,80	-	20,00	8,40	-
1,00	-	-	10,00	-

6.2.2. Carga no interior da placa

Tabela 6.2: Comparativo entre modelos – carga no interior da placa

<i>a/l</i>	Westergaard P/M	Meyerhof P/M	Meyerhof – projeto P/M	Losberg P/M
0,00	0,00	6,28	6,28	6,28
0,20	4,90	13,46	8,40	8,11
0,40	7,05	14,50	10,80	9,79
0,60	9,40	15,71	13,20	11,84
0,80	12,12	17,14	15,60	14,57
1,00	15,31	18,85	18,00	18,48

6.2.3. Carga na borda da placa

Tabela 6.3: Comparativo entre modelos – carga na borda da placa

<i>a/l</i>	Westergaard P/M	Meyerhof P/M	Meyerhof – projeto P/M	Losberg P/M
0,00	0,00	3,57	3,50	4,00
0,20	2,54	8,24	5,60	5,81
0,40	4,01	9,74	7,70	7,63
0,60	5,88	11,90	9,80	9,55
0,80	8,47	15,30	11,90	11,43
1,00	12,40	21,42	14,00	-

6.3. ANÁLISE COMPARATIVA

As Figuras 6.1, 6.2 e 6.3 mostram em forma de gráficos os resultados obtidos anteriormente.

No caso de carga no centro da placa, os resultados obtidos por **Meyerhof**⁹ são maiores do que os encontrados por **Losberg**⁸, adequando-se, no entanto, com os resultados experimentais encontrados em seu trabalho.

A diferença entre as duas teorias é pequena para os casos de cargas no canto e borda da placa, sendo os valores das cargas de colapso pelo método de Losberg um pouco menores do que pelo método de Meyerhof. Essa diferença se deve à aproximação feita por Losberg, de um mecanismo triangular de colapso em substituição ao mecanismo proposto por Meyerhof.

As equações propostas por Meyerhof para projeto correspondem a linearizações das equações originais, sendo conservadoras e apresentando boa concordância com as de Losberg. Tais equações têm ainda a grande vantagem de serem facilmente aplicáveis, em função dos poucos parâmetros envolvidos.

Desta forma, tomar-se-á como base para a aplicação da teoria das linhas de ruptura às placas de concreto reforçado com fibras de aço sobre base elástica, tomar-se-ão as expressões (6.1, 6.2 e 6.3), que correspondem às linearizações anteriormente citadas. São elas:

$$\frac{P}{M} = 2 \cdot \left(1 + 4 \cdot \frac{a}{L} \right) \quad (6.1)$$

$$\frac{P}{M} = 6 \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{a}{L} \right) \quad (6.2)$$

$$\frac{P}{M} = 3,5 \cdot \left(1 + 3 \cdot \frac{a}{L} \right) \quad (6.3)$$

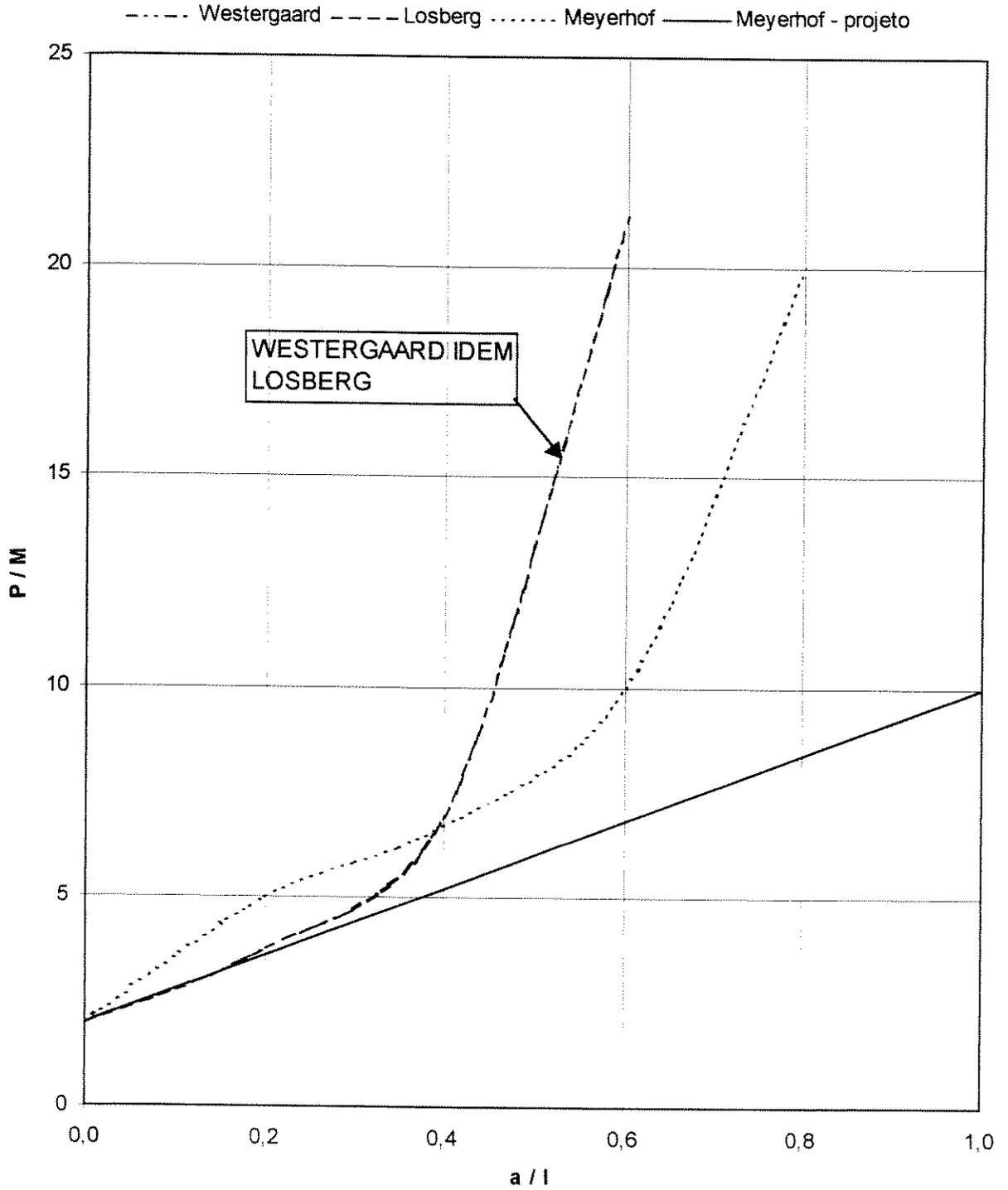


Figura 6.1: Comparativo entre modelos - carga no canto da placa

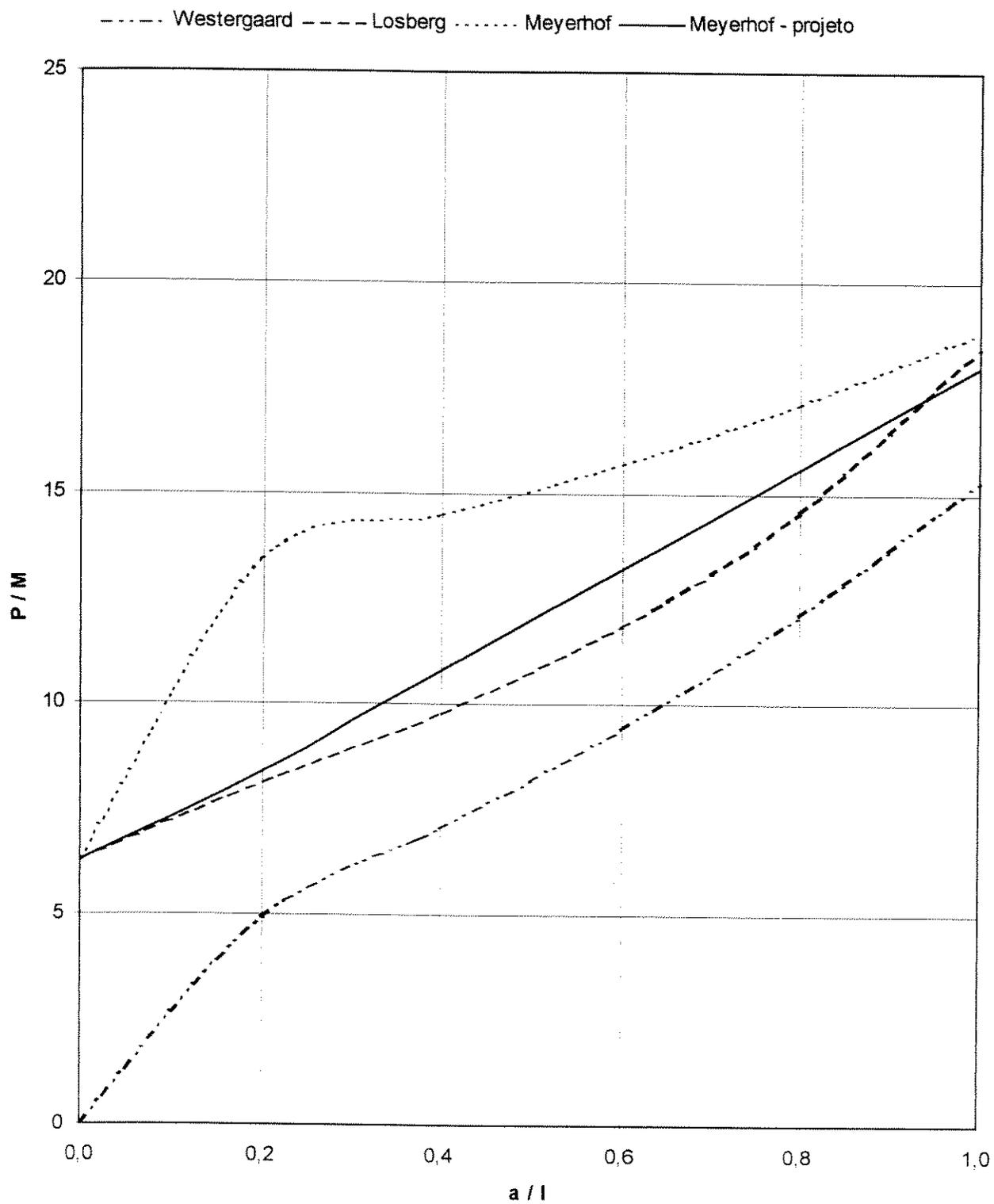


Figura 6.2: Comparativo entre modelos - carga no interior da placa

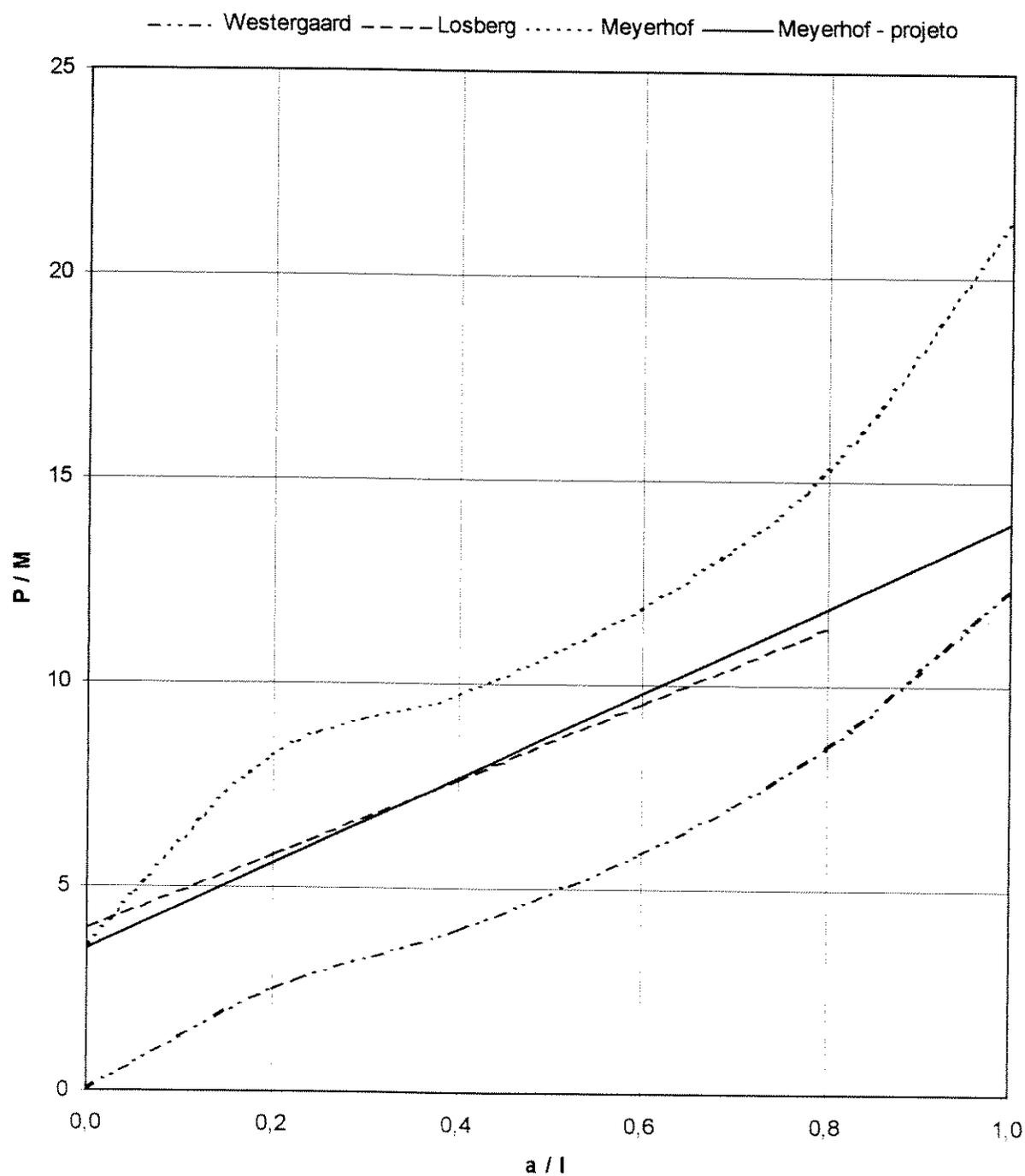


Figura 6.3: Comparativo entre modelos - carga na borda da placa

7. APLICAÇÃO DA TEORIA DAS LINHAS DE RUPTURA ÀS PLACAS DE CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO

O concreto reforçado com fibras de aço tem sido empregado há muitos anos no exterior, tendo seu maior campo de aplicação em pisos e pavimentos apoiados diretamente sobre o solo, podendo substituir totalmente as armaduras contínuas, garantindo da mesma forma a segurança e a integridade da estrutura.

A melhoria da capacidade de carga que se tem com o uso das fibras de aço leva a reduções de espessura das seções e melhor desempenho.

A utilização do concreto reforçado com fibras de aço, como material suplementar em elementos estruturais (vigas, pilares e lajes), tem por finalidade inibir a fissuração, melhorar a resistência ao impacto ou ao carregamento dinâmico e resistir a desintegração do material.

O uso deste material no Brasil é recente, tendo como principais aplicações os pisos industriais e algumas obras de revestimentos em concreto projetado, não existindo até o momento nenhum critério para dimensionamento.

7.1. DEFINIÇÃO E MATERIAIS CONSTITUINTES

O concreto reforçado com fibras de aço é um compósito onde a matriz é o concreto de cimento Portland e o reforço constituído por fibras de aço aleatoriamente distribuídas na matriz. As fibras são elementos descontínuos onde o comprimento predomina sobre a seção transversal.

As fibras de aço para uso em concreto têm comprimentos que variam entre 30 e 60 mm e diferentes formas de seção transversal, dependendo do processo de fabricação. Fibras de seção transversal circular são produzidas a partir do corte de fios trefilados, enquanto que as de seção retangular a partir do corte de chapas de aço.

As fibras de aço são mais eficientes do que outros tipos de fibras, como de asbesto, sintéticas (nylon ou polipropileno) e de vidro, graças a sua alta resistência à tração e grande capacidade de aderência à matriz que a envolve.

Geralmente, estas fibras possuem deformações ao longo de todo o seu comprimento (fibras onduladas) ou somente nas extremidades, formando ganchos. Tais deformações têm a finalidade de melhorar o comportamento da fibra com relação à aderência, através de ancoragem mecânica.

A eficiência de um compósito está intimamente relacionada com duas propriedades fundamentais da fibra de aço, sua resistência à tração e seu fator de forma, que é a relação entre o comprimento da fibra e seu diâmetro (diâmetro equivalente no caso de seção transversal não circular). Quanto maior o fator de forma maior será a quantidade de fibras incorporadas, aumentando, portanto, a eficiência do compósito.

A matriz do compósito pode ser constituída de concreto convencional ou de alto desempenho. Na dosagem de uma matriz de concreto para confecção de um compósito com fibras, deve-se ter atenção com a trabalhabilidade da mistura, uma vez que a introdução das fibras causa uma considerável perda de trabalhabilidade. Isto ocorre porque as fibras possuem grande área superficial, têm maior contato entre si e com os outros elementos constituintes do concreto, aumentando muito o atrito entre os materiais, diminuindo a fluidez da mistura.

Misturas com maior porcentagem de argamassa e o uso de aditivos superplastificantes auxiliam neste aspecto.

Outro fator importante a considerar no estudo da dosagem da matriz diz respeito ao diâmetro máximo do agregado graúdo, que não deve ser maior do que 2 vezes o comprimento da fibra, pois o efeito de ponte de transferência de tensões da fibra de aço no compósito pode ser reduzido.

Tal fato ocorre quando o agregado, por ser maior que a fibra, e iniciando-se normalmente a fissuração na região de ligação pasta-agregado graúdo (zona de transição), é necessário que as fibras respeitem tal dimensão para poder interceptar as fissuras quando do seu surgimento. Por esse motivo, recomenda-se o emprego de agregados com diâmetro máximo não superior a 19 mm.

7.2. FUNÇÃO DAS FIBRAS DE AÇO COMO REFORÇO

As matrizes de concreto sem o reforço das fibras apresentam comportamento frágil, com baixa capacidade portante e baixas deformações quando submetidas a esforços de tração, praticamente não apresentando deformações plásticas.

A maioria dos concretos empregados correntemente, que incorporam fibras de aço, utilizam baixos consumos de fibra, o que resulta num aumento muito pouco significativo de suas resistências à compressão e à tração. Desta forma, a matriz fissa com o mesmo nível de tensão e de deformação do que quando não armada.

O reforço com fibras descontínuas e aleatoriamente distribuídas na matriz tem como papel principal controlar a propagação de fissuras no concreto, alterando o seu comportamento mecânico após a ruptura da matriz, melhorando consideravelmente a capacidade de absorção de energia do concreto, ou seja, a sua tenacidade, transformando um material de característica frágil em dúctil. Isto ocorre porque as fibras criam pontes de transferência de tensões através das fissuras, preservando uma certa capacidade portante das seções.

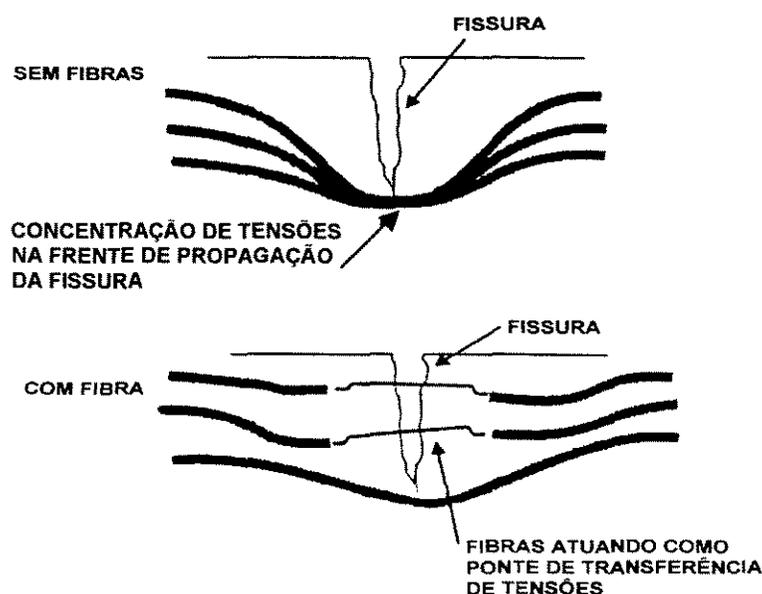


Figura 7.1: Mecanismo de reforço das fibras de aço

7.3. TENACIDADE E RESISTÊNCIA EQUIVALENTE À TRAÇÃO NA FLEXÃO

A avaliação do material e o controle de qualidade dos concretos reforçados com fibras de aço deve ser feita através da medida de sua tenacidade, principal propriedade incrementada pela adição das fibras ao concreto.

O papel principal das fibras se desenvolve após a fissuração da matriz, pois elas geram mecanismos de absorção de energia, relacionados com o alongamento das fibras presentes na zona fissurada e com a ruptura da aderência fibra-matriz, aumentando a tenacidade do compósito

A tenacidade à flexão dos concretos reforçados com fibras é, de acordo com a JSCE²⁶, numericamente igual à área contida sob a curva carga-deslocamento vertical, para um deslocamento máximo de $l / 150$.

A Fig. 7.2. mostra, esquematicamente, a curva carga-deslocamento vertical e as dimensões e os esquemas de carregamento de corpos-de-prova empregados nos ensaios.

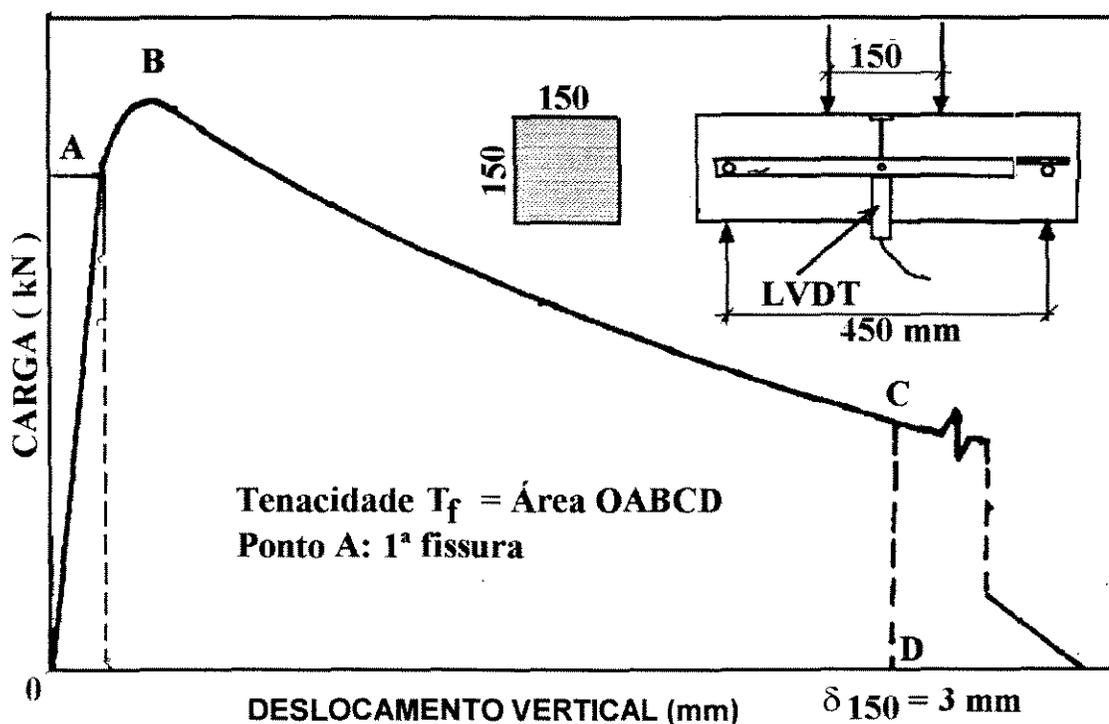


Figura 7.2: Tenacidade segundo a norma JSCE

A resistência equivalente à tração na flexão dos concretos reforçados com fibras é determinada a partir do conhecimento da tenacidade T_f :

$$f_{ct,eq} = \frac{T_f \cdot \ell}{\delta \cdot b \cdot h^2} = \frac{450}{3 \cdot 150 \cdot 150^2} \cdot T_f = \frac{1}{150^2} \cdot T_f \quad (7.1)$$

7.4. COEFICIENTE DE DUCTILIDADE

Este parâmetro pode ser utilizado no dimensionamento, permitindo quantificar a contribuição das fibras de aço no comportamento pós fissuração dos concretos.

É expresso pela relação entre a resistência equivalente ($f_{ct,eq}$), e a resistência a tração na flexão da matriz de concreto ($f_{ct,fl}$).

$$R_{e3} = \frac{f_{ct,eq}}{f_{ct,fl}} \quad (7.2)$$

Nas tabelas 7.1 e 7.2 são mostrados resultados obtidos por Pinto Jr.²⁷, para diferentes concretos incorporando fibras de aço.

As principais características das fibras utilizadas neste estudo são a seguir apresentados.

composição do aço: baixo teor de carbono

processo de fabricação: trefilação de fios

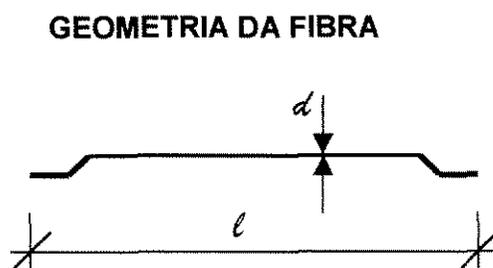
seção transversal: circular

comprimento: $\ell = 50$ mm

diâmetro: $d = 1,05$ mm

fator de forma: $\ell / d = 48$

resistência à tração: $f_{ym} = 1100$ MPa



Observando os resultados contidos nas tabelas 7.1 e 7.2, nota-se que a incorporação de baixos teores de fibras não causa aumento das resistências à compressão ($f_{cm,28}$) e à tração na flexão ($f_{ctm,fl}$) dos concretos, uma vez que estas dependem apenas das características da matriz.

O efeito das fibras fica evidenciado após a fissuração da matriz, retratado nas tabelas pelas resistências equivalentes médias à tração na flexão ($f_{ctm,eq}$) e pelos coeficientes de ductilidade (R_{e3}). Observando estes valores nota-se o incremento de ductilidade à medida que aumenta o teor de fibras incorporadas.

Tabela 7.1: Propriedades dos CRFA - Cimento CP II E 32

f_{ck} (MPa)	CF (kg/m ³)	$f_{cm,28}$ (MPa)	$f_{ctm,fl}$ (MPa)	$f_{ctm,eq}$ (MPa)	R_{e3} (%)
20	0	30,3	3,55	-	0
	20	25,3	3,79	1,56	51,5
	25	26,0	3,76	1,83	54,5
	30	28,2	4,01	2,07	66,1
	35	26,8	3,77	2,61	62,6
25	0	33,5	3,60	-	0
	20	33,5	3,98	1,91	55,9
	25	32,3	4,45	1,99	64,3
	30	32,0	4,71	2,16	74,8
	35	34,2	4,44	2,48	74,6
30	0	36,3	3,96	-	0
	20	37,5	4,60	1,76	58,7
	25	37,5	4,55	1,92	60,9
	30	38,2	4,57	2,57	68,2
	35	35,5	4,46	2,63	72,5

CF : consumo de fibras

Tabela 7.2: Propriedades dos CRFA - Cimento CP V RS/MS

f_{ck} (MPa)	CF (kg/m ³)	$f_{cm,28}$ (MPa)	$f_{ctm,fl}$ (MPa)	$f_{ctm,eq}$ (MPa)	R_{es} (%)
30	0	39,7	5,01	-	0
	20	38,5	5,05	1,67	43,9
	25	40,8	5,48	1,82	45,9
	30	39,3	5,22	2,20	47,3
	35	33,7	4,62	2,56	56,4
40	0	54,9	6,50	-	0
	20	58,5	6,45	1,64	41,6
	25	53,7	6,31	1,76	46,8
	30	55,0	7,46	1,77	48,1
	35	51,0	5,89	1,77	56,4
50	0	62,9	7,05	-	0
	20	66,8	7,54	1,51	45,2
	25	65,3	7,45	2,09	46,7
	30	57,5	7,36	1,66	49,3
	35	68,8	7,78	2,26	55,7

CF : consumo de fibras

7.5. CONSIDERAÇÕES SOBRE O MODELO DE CÁLCULO ELÁSTICO APLICADO AO CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO

A aplicação do modelo de cálculo elástico ao dimensionamento dos pisos e pavimentos em CRFA conduz a resultados conservadores, uma vez que deixa de levar em consideração o comportamento pós fissuração do material, fato bastante significativo no resultado final.

Neste procedimento toma-se como base a verificação da máxima tensão de tração na placa, limitando-a à resistência equivalente ($f_{ct,eq}$) do CRFA. Tal consideração não gera grandes ganhos do ponto de vista quantitativo, uma vez que as resistências equivalentes dos CRFA não são muito maiores do que as tensões admissíveis empregadas nos procedimentos de cálculo elástico.

As tensões admissíveis utilizadas no dimensionamento das placas de concreto simples dependem do tipo de carga atuante, como por exemplo:

- cargas de roda: $0,5 f_{ct,fl}$
- cargas uniformemente distribuídas: $0,7 f_{ct,fl}$
- cargas de pés de prateleiras: $0,33 f_{ct,fl}$.

Na Tabela 7.3 são apresentados valores de tensões admissíveis e de resistências equivalentes, ficando demonstrado que a utilização de fibras de aço com a finalidade de elevar a tensão admissível de projeto não é significativa. A elevação destas tensões admissíveis só é conseguida com altas dosagens de fibra, da ordem de 1% ($\cong 80 \text{ kg / m}^3$) a 2% ($\cong 160 \text{ kg / m}^3$) em volume, acarretando imensas dificuldades na mistura bem como elevação do custo.

Tabela 7.3: Comparativo entre tensões admissíveis

CONCRETO (MPa)	$f_{ct,fl}$ (MPa)	$0,5 f_{ct,fl}$ (MPa)	$0,33 f_{ct,fl}$ (MPa)	FIBRA RC 80/60 – BN (20 kg/m ³) $f_{ctn,eq}$ (MPa)
20	3,79	1,90	1,25	1,56
25	3,98	1,99	1,31	1,91
30	4,60	2,30	1,52	1,76

Assim sendo, para dosagens usuais, de 20 a 30 kg/m³, o incremento de resistência não é significativo, o que, do ponto de vista do dimensionamento através do modelo elástico, não apresenta grandes vantagens.

7.5.1. Trabalho experimental realizado no Thames Polytechnic

O trabalho experimental desenvolvido no **Thames Polytechnic**²⁸ mostra comparações entre placas em concreto simples, com armaduras convencionais simples e nas duas faces e em CRFA com diferentes tipos de fibras, apoiadas sobre base elástica, com carga no centro, comparando-as do ponto de vista das cargas de primeira fissura e de ruptura.

A Figura 7.3 mostra o modelo experimental e na Tabela 7.4 são apresentados os resultados obtidos no referido trabalho.

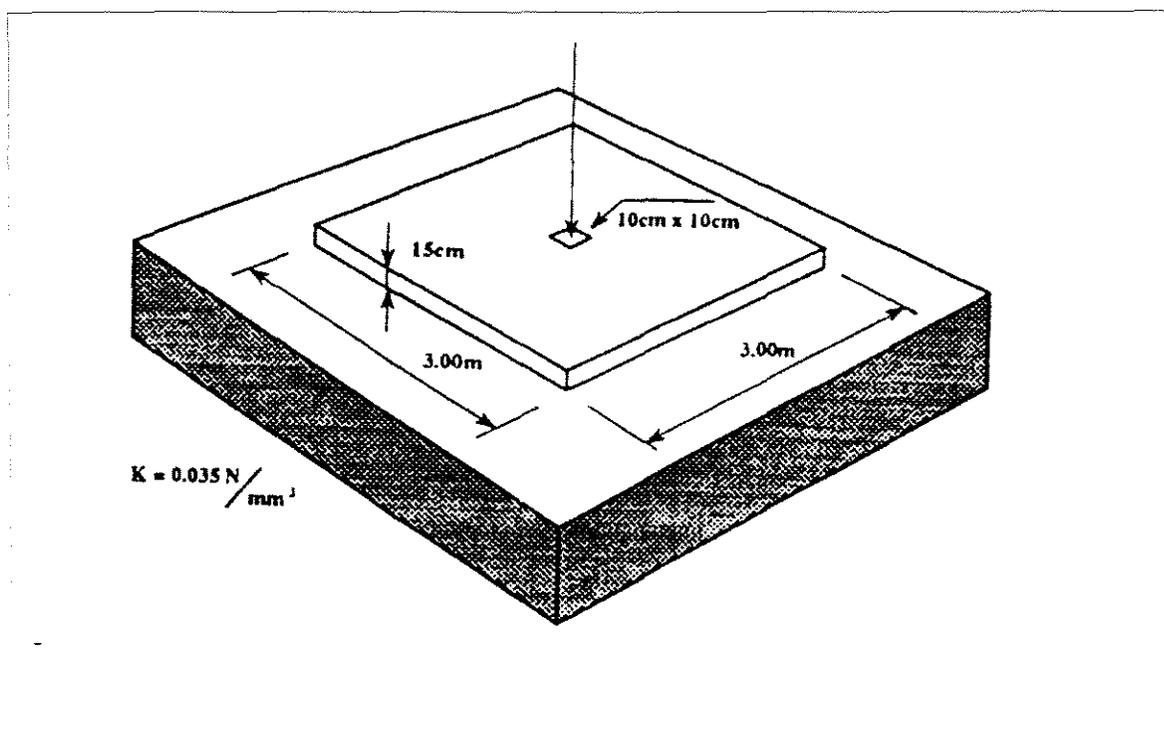


Figura 7.3: Modelo experimental

Tabela 7.4: Resultados Experimentais – Thames Polytechnic

PLACAS	REFORÇO DA PLACA	CARGA DE 1ª FISSURA kN	CARGA DE RUPTURA kN
P1	Sem armadura	180	200
F1	Armadura simples A142 malha (200 x 200 x 6) cobrimento superior 25 mm	200	> 320 +
F2	Armadura dupla A193 malha (200 x 200 x 7) cobrimento superior e inferior 25 mm	280	380
D2	Fibra de aço (60/1,00) dosagem 20 kg/m ³	220	350
D3	Fibra de aço (60/1,00) dosagem 20 kg/m ³	200	300
D4	Fibra de aço (60/0,80) dosagem 20 kg/m ³	260	390
D5	Fibra de aço (60/1,00) dosagem 30 kg/m ³	240	340
D1	Fibra de aço (60/0,80) ++ dosagem 30 kg/m ³	290	> 345 +
M1	Fibras de aço irregulares dosagem 30 kg/m ³	180	200

+ excedida a capacidade do equipamento

++ 60: comprimento da fibra em mm; 0,80: diâmetro da fibra em mm

Observando os resultados contidos na Tabela 7.4, pode-se extrair as seguintes principais conclusões:

1ª) É possível a substituição total das armaduras em malha por baixos teores de fibras de aço, mantendo a mesma capacidade portante das placas;

2ª) Esta substituição só é possível quando se empregam fibras de boa qualidade, como fica evidenciado comparando-se os resultados obtidos para a placa M1 com as demais placas de concreto reforçado com fibras de aço;

3ª) Fica evidenciado o ganho de tenacidade nas placas em concreto reforçados com fibras de aço, o que sugere que tal característica deve ser levada em consideração no dimensionamento.

7.5.2. Trabalho teórico-experimental desenvolvido em BRUNSWICK

O trabalho de **Falkner e Teutsch**²⁹, sequencial ao desenvolvido no Thames Polytechnic, teve por finalidade realizar uma análise comparativa teórico-experimental somente entre placas de concreto simples e de CRFA, apoiadas sobre base elástica. Nesse trabalho procurou-se incluir na análise dados sobre a tenacidade do material como elemento de projeto, justificando desta forma um modelo plástico de dimensionamento. Também foram ampliados os casos de carregamento, ou seja, cargas no canto e borda das placas, combinação de múltiplas cargas, efeitos de espaçamentos de juntas, influência de temperatura e retração, efetuando-se, também simulações numéricas por elementos finitos (programa ANSYS).

Os resultados dos ensaios realizados para placas de 3m x 3 m, com carga aplicada no centro e distintos módulos de reação do sub-leito, são sumarizados na Tabela 7.5.

Tabela 7.5: Resultados experimentais - Falkner

PLACAS	TIPO DE FIBRA	F _R kN	F _U kN	K (N/mm ²)
P1	sem fibras	165	180	0,025
P2	fibras irregulares 30 kg/m ³	165	210	0,025
P3	Dramix 60/0,8 20 kg/m ³	165	240	0,025
P4	Dramix 60/0,8 20 kg/m ³	215	380	0,05
P5	fibras irregulares 30 kg/m ³	215	235	0,05
P6	sem fibras	215	220	0,05

Observando os resultados contidos na Tabela 7.5, fica evidente que a carga F_R, que corresponde à formação da charneira positiva nas placas, é função do módulo de reação do sub-leito, aumentando à medida que este aumenta, elevando desta forma a capacidade de carga última das placas (F_U).

As principais conclusões obtidas são a seguir apresentadas:

1^a) o uso de fibras de aço para reforço do concreto não incrementa nas placas capacidade de absorver tensões, colaborando, no entanto, no controle de fissuração;

2^a) a introdução de fibras de aço incrementa a capacidade de carga das placas, chegando a relação carga/deslocamento vertical a patamares superiores ao

das placas em concreto simples, mostrando um desempenho bastante significativo pós-fissuração (tenacidade);

3ª) o desempenho das placas de concreto simples e reforçadas com fibras de aço sobre base elástica, com relação à capacidade de carga e a deslocamentos verticais, pode ser caracterizado segundo 3 distintas regiões de comportamento:

REGIÃO I : $F < F_R$

Placa não fissurada. A capacidade de carga e os deslocamentos verticais podem ser avaliados com base na teoria da elasticidade.

REGIÃO II : $F_R \leq F \leq F'_R$

Após ter sido ultrapassada a resistência à tração na flexão, correspondente à carga de primeira fissura F_R , formam-se pequenas fissuras radiais junto à zona de introdução de carga. Essas fissuras se propagam até as bordas da placa com o aumento do carregamento. Com as dosagens de fibras de aço normalmente utilizadas nos pisos e pavimentos, o valor da carga F'_R é função, exclusivamente, da capacidade de suporte do solo (módulo de reação do sub-leito).

REGIÃO III : $F > F'_R$

Após ter sido atingida a carga F'_R a placa ainda apresenta capacidade de carga, graças ao efeito de engrenamento proporcionado pelas fibras de aço. Tal capacidade de carga é influenciada pelo tipo e pelo teor de fibras adicionadas ao concreto, determinando assim a magnitude da carga de ruína, que ocorre por efeito de punção.

A Figura 7.4 ilustra as regiões acima descritas.

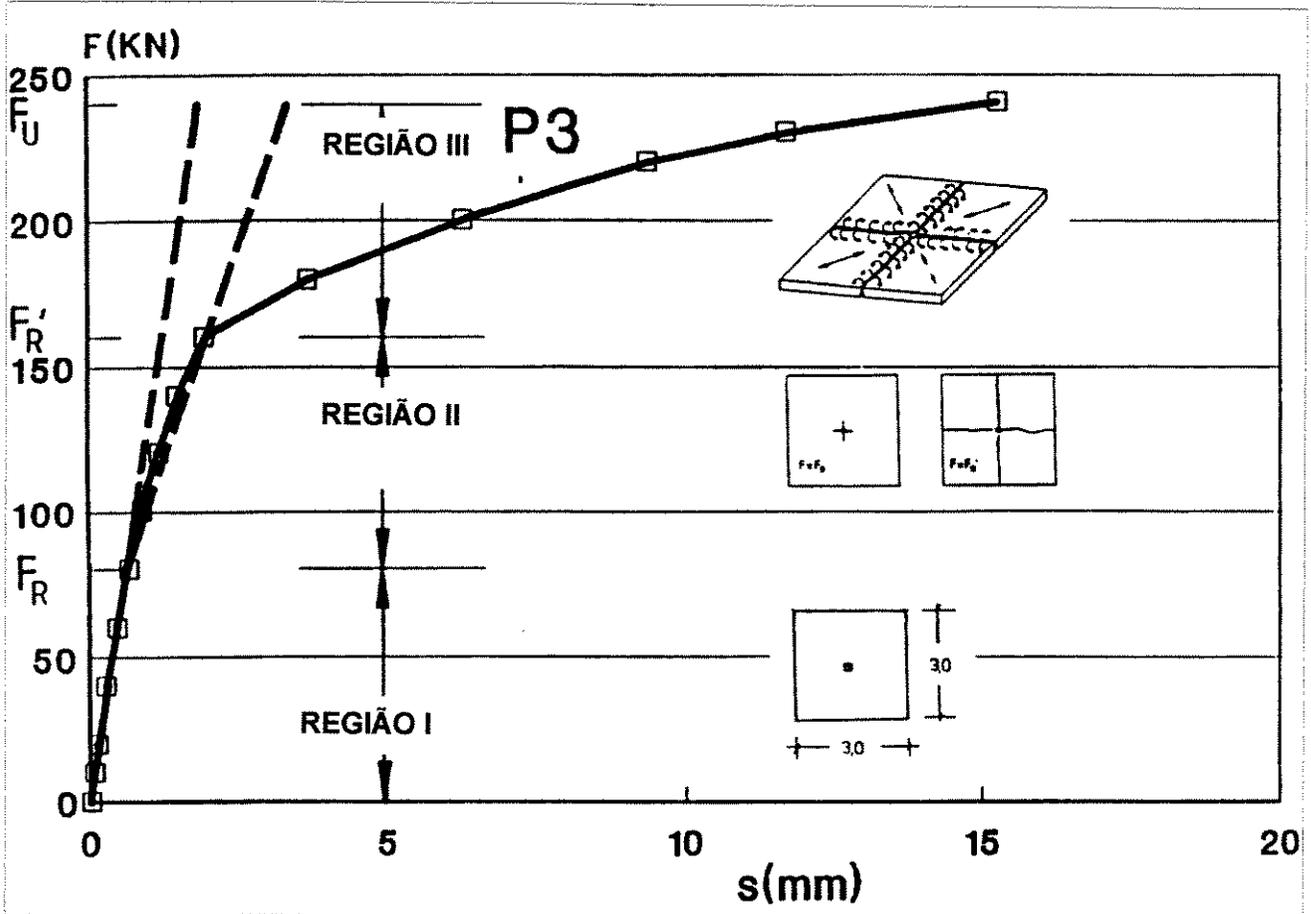


Figura 7.4: Diagrama carga x deslocamentos verticais, mostrando as diferentes regiões

O comportamento até a ruína, em termos dos momentos radiais e transversais atuantes, em placas de concreto simples e de CRFA, é mostrado esquematicamente nas figuras 7.5 e 7.6, respectivamente.

Observando estas figuras, nota-se que até ser atingida a carga de primeira fissura F_R , o comportamento de ambas é idêntico.

A partir do aparecimento das fissuras é que o comportamento dos dois tipos de placas torna-se diferente. A placa de concreto simples não tem capacidade para suportar os momentos tangenciais. A fissura formada sob a carga rapidamente se propaga em direção às bordas. Quando essa fissura atingir a face superior da placa, esta entra em colapso.

No caso das placas em CRFA, após o aparecimento das fissuras (fase plástica), inicia-se a formação de charneiras plásticas sob a carga. Devido ao

comportamento pós fissuração do CRFA, a placa ainda é capaz de suportar os momentos atuantes, sendo esta função da tenacidade do material.

Quanto maior o coeficiente de tenacidade (R_{e3}), maior será a tensão residual na fase plástica, que nada mais é do que a própria resistência equivalente à tração na flexão ($f_{ct,eq}$) definida anteriormente, ou seja:

$$f_{ct,eq} = f_{res,fl} = f_{ct,fl} \cdot \frac{R_{e3}}{100} \quad (7.3)$$

A finalidade da teoria das charneiras plásticas é a determinação dos momentos de plastificação que se devem atribuir à placa em estudo para que sua ruína não se dê sob a ação de cargas de cálculo inferiores às impostas pelo projetista.

Assim sendo, a carga de colapso é função da soma de dois momentos máximos, quais sejam:

M_n : Momento fletor negativo dado pelo momento radial (M_r), devendo ser tomado como limite o valor do momento fletor elástico (M_e);

M_p : Momento fletor positivo dado pelo momento tangencial (M_t), devendo ser levado à plastificação em função do teor de fibras incorporadas (M_f).

Quando o valor da soma ($M_p + M_n$) for inferior ao valor de M_e , teoricamente não há necessidade de utilização das fibras de aço e a placa trabalha, dentro da teoria das linhas de ruptura, como concreto simples. No entanto, para esta situação a forma de ruptura é frágil, o que não é seguro. Assim sendo é necessário utilizar as fibras de aço com a finalidade de transformar o material concreto de frágil em dúctil, e satisfazer desta forma a segurança. As dosagens incorporadas deverão ser feitas de acordo com as dosagens mínimas específicas para cada tipo de fibra.

Quando o valor da soma $M_p + M_n$ for superior ao valor de M_e , o momento fletor M_p será levado a plastificação. Assim sendo, pode-se escrever a seguinte expressão:

$$M_p + M_n = M_e + \frac{R_{e3}}{100} \cdot M_e \quad (7.4)$$

onde a parcela $\frac{R_{e3}}{100} \cdot M_e$ é o acréscimo dado ao momento elástico (M_e), proporcionado pela parcela da tensão residual na fase plástica ($f_{res,fl}$) definido na expressão 7.3.

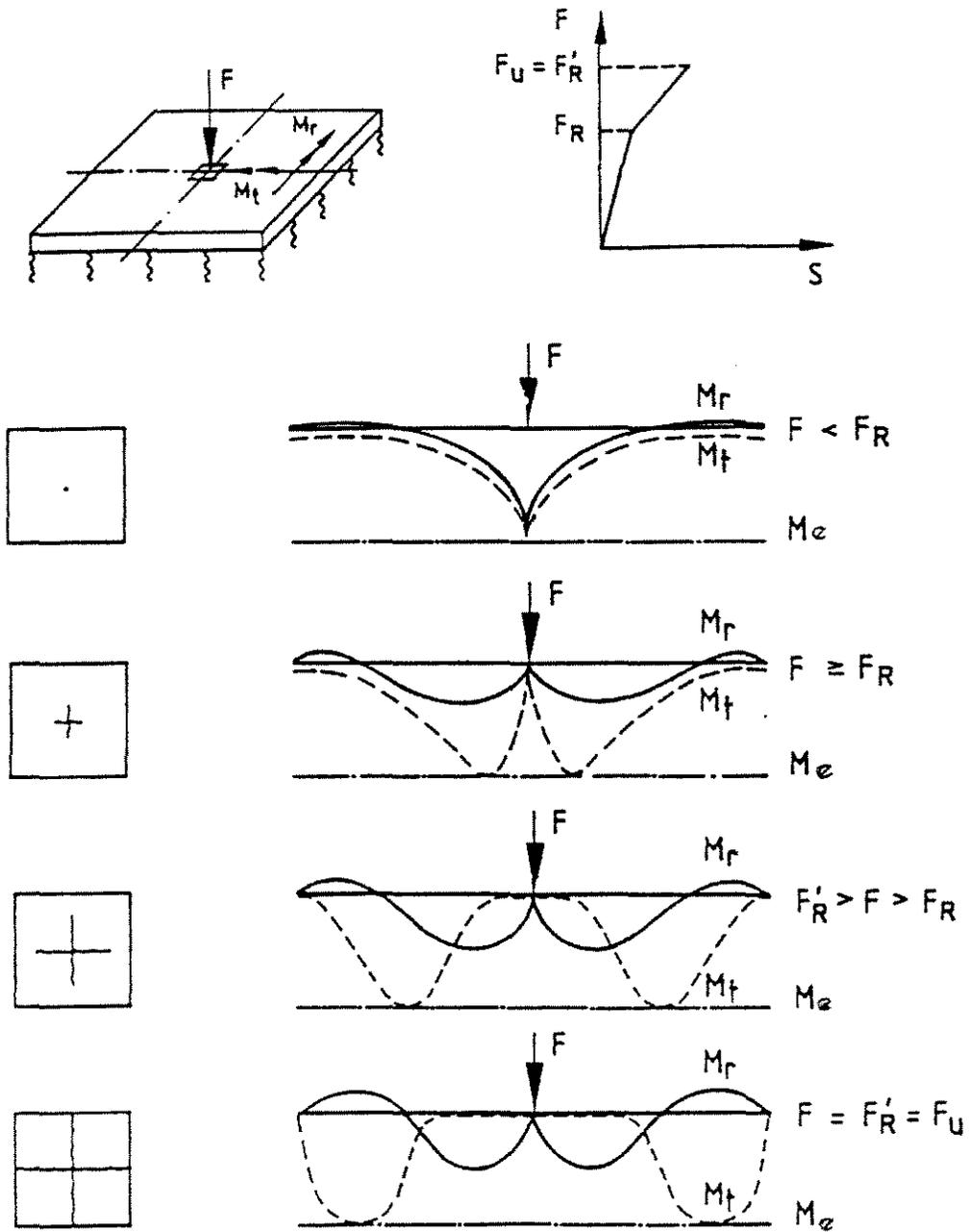


Figura 7.5: Distribuição de momentos em placa de concreto simples com carga no centro

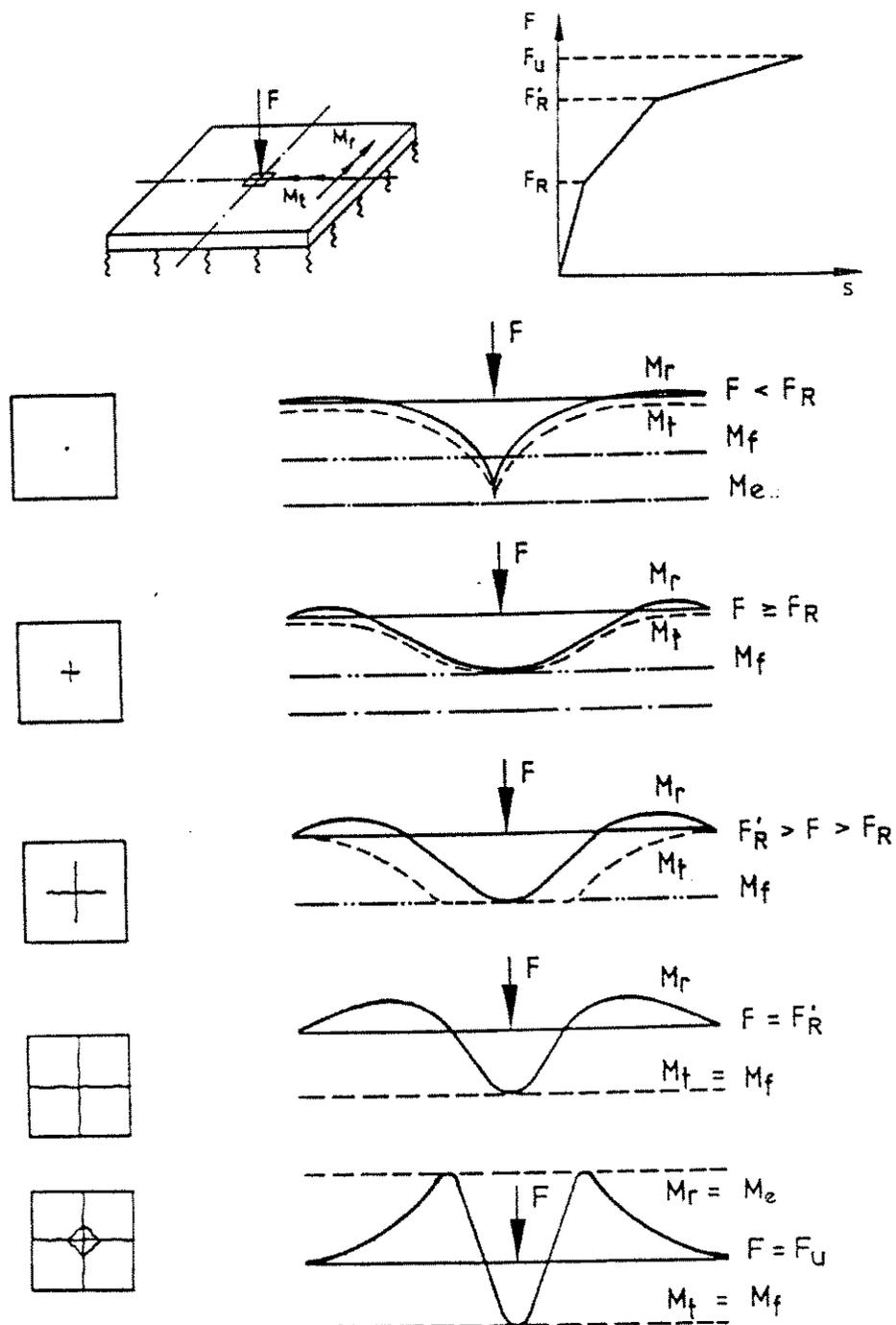


Figura 7.6: Distribuição de momentos em placa de CRFA com carga no centro

7.6. DIMENSIONAMENTO SEGUNDO A TEORIA DAS LINHAS DE RUPTURA

Tendo por base os trabalhos de **Losberg**⁸ e **Meyerhof**⁹, que levam em conta a capacidade de distribuição de cargas nos pisos e pavimentos de concreto, apresentam-se, a seguir, as expressões que permitem a determinação das cargas últimas nas placas de CRFA, sobre base elástica, para os 3 casos clássicos de posicionamento das cargas.

7.6.1. Caso I - Carga no canto da placa

Conforme expressão 6.3:

$$P_0 = 2 \cdot \left[1 + \left(\frac{4 \cdot a}{L} \right) \right] \cdot M_0 \quad (7.5)$$

onde:

P_0 : carga última

L : raio de rigidez relativo $\rightarrow L = \sqrt[4]{\frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2) \cdot k}}$

p : pressão de enchimento do pneu

$$M_0 = M_p + M_n$$

M_p : momento fletor positivo a ser levado à plastificação

M_n : momento fletor negativo, devendo ser tomado como limite o valor do momento fletor elástico

a : raio da área de contato da carga $\rightarrow a = \sqrt{\frac{P}{\pi \cdot p}}$ (P = carga de roda)

No caso da área de contato de carga ser retangular (**A**), esta deve ser transformada numa área circular equivalente, resultando:

$$a = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

Assim sendo, a expressão 7.5 assume a seguinte forma:

$$(M_p + M_n) = \frac{P_0}{2 \cdot \left[1 + \left(\frac{4 \cdot a}{L} \right) \right]} \quad (7.6)$$

onde: $M_n = \frac{f_{ct,fl} \cdot b \cdot h^2}{6}$

7.6.2. Caso II - Carga no interior da placa

Conforme expressão 6.1:

$$P_0 = 6 \cdot \left[1 + \left(\frac{2 \cdot a}{L} \right) \right] \cdot M_0 \quad (7.7)$$

Como $M_0 = M_p + M_n$, analogamente tem-se:

$$(M_p + M_n) = \frac{P_0}{6 \cdot \left[1 + \left(\frac{2 \cdot a}{L} \right) \right]} \quad (7.8)$$

onde: $M_n = \frac{f_{ct,fl} \cdot b \cdot h^2}{6}$

7.6.3. Caso III - Carga na borda da placa

Conforme expressão 6.2:

$$P_0 = 3,5 \cdot \left[1 + \left(\frac{3 \cdot a}{L} \right) \right] \cdot M_0 \quad (7.9)$$

Como $M_0 = M_n + M_p$, analogamente tem-se:

$$(M_p + M_n) = \frac{P_0}{3,5 \cdot \left[1 + \left(\frac{3 \cdot a}{L} \right) \right]} \quad (7.10)$$

onde: $M_n = \frac{f_{ct,fl} \cdot b \cdot h^2}{6}$

7.7. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

No exemplo que se segue é apresentado uma aplicação com dados reais de projeto, pretendendo-se mostrar a aplicação das expressões.

$f_{ck} = 30 \text{ MPa}$

$E = 31000 \text{ MPa}$

carga de roda = 6 tf = 37500 N

$k = 0,06 \text{ N/mm}^3$ $h = 120 \text{ mm}$

$p = 0,7 \text{ N/mm}^2$

coeficiente de impacto: 1,4

coeficiente de segurança: 1,2 (este valor é utilizado para os casos de pisos onde são levados em consideração os efeitos de temperatura e de retração)

Obs.: será levado em consideração coeficiente de segurança = 1,2

7.7.1. Raio da área de contato e raio de rigidez relativa

$$a = \sqrt{\frac{P}{\pi \cdot p}} = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 37500}{\pi \cdot 0,7}} = 155 \text{ mm}$$

$$L = \sqrt[4]{\frac{E \cdot I}{(1 - \nu^2) \cdot k}} = \sqrt[4]{\frac{31000 \cdot 120^3 / 12}{(1 - 0,15) \cdot 0,06}} = 441 \text{ mm}$$

7.7.2. Carga no canto da placa

$$M_0 = \frac{1,2 \cdot 1,4 \cdot 37500}{2 \cdot \left[1 + \left(\frac{2 \cdot 155}{441} \right) \right]} = 18497 \text{ Nmm/mm}$$

A resistência do concreto à tração na flexão pode ser dada por:

$$f_{ct,fl} = 0,393 \cdot \sqrt[3]{f_{cu}^2} = 0,393 \cdot \sqrt[3]{37,5^2} = 4,40 \text{ N/mm}^2$$

onde f_{cu} é a resistência do concreto à compressão medida em cubos, sendo obtido

pela relação $f_{cu} \cong \frac{f_{ck}}{0,8}$.

$$M_0 = \left[1 + \left(\frac{R_{e3}}{100} \right) \right] \cdot \left[\frac{f_{ct,fl} \cdot b \cdot h^2}{6} \right]$$

$$18497 = \left[1 + \left(\frac{R_{e3}}{100} \right) \right] \cdot \left[\frac{4,40 \cdot 1 \cdot 120^2}{6} \right]$$

$$\frac{18497}{10560} = 1 + \left(\frac{R_{e3}}{100} \right) \Rightarrow R_{e3} = 75\%$$

7.7.3. Carga no interior da placa

$$M_o = \frac{1,2 \cdot 1,4 \cdot 37500}{6 \cdot \left[1 + \left(\frac{2 \cdot 155}{441} \right) \right]} = 6166 \text{ Nmm/mm}$$

$$M_n = \frac{4,40 \cdot 120^2}{6} = 10560 \text{ Nmm/mm}$$

$$M_o = 6166 < M_n = 10560$$

$$M_o = M_n + M_p \quad \therefore \quad \text{n\~{o} existe } M_p$$

7.7.4. Carga na borda da placa

$$M_o = \frac{1,2 \cdot 1,4 \cdot 37500}{3,5 \cdot \left[1 + \left(\frac{3 \cdot 155}{441} \right) \right]} = 8762 \text{ Nmm/mm}$$

$$M_o = 8762 < M_n = 10560$$

$$M_o = M_n + M_p \quad \therefore \quad \text{n\~{o} existe } M_p$$

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O dimensionamento das placas de concreto reforçado com fibras de aço sobre base elástica tem sido motivo de discussão e controvérsia no meio técnico entre alguns projetistas. Isto se deve ao fato de se levar em conta que o fator mais importante nesse tipo de estrutura é a resistência do material, ou seja, em placas de concreto simples, sua resistência à tração na flexão, e em placas estruturalmente armadas, as resistências de seus materiais constituintes, aço e concreto, bem como a solidariedade entre ambos.

Assim sendo, é fácil conceber o dimensionamento estrutural com base na teoria elástica, para o caso do concreto simples, e aplicar os conceitos do concreto armado quando se tem as placas estruturalmente armadas.

A adição das fibras de aço ao concreto tem por finalidade inibir a abertura das fissuras bem como a sua propagação. Este fato pode, em princípio, levar à conclusão de que sua finalidade seria simplesmente de combate à fissuração do material concreto, o que não deixa de ser uma verdade. No entanto, face a esse controle de fissuração, o material apresenta capacidade de se deformar absorvendo carga, característica esta de material com ductilidade.

Desta forma, é possível sua aplicação em alguns elementos estruturais que apresentem possibilidade de redistribuição de esforços, sem que isso comprometa seu estado de serviço. Essa possibilidade aparece, em geral, quando os elementos estruturais têm interface com um meio elástico, ou seja: pisos, pavimentos, revestimento de túneis, revestimento de taludes, etc. Portanto, está totalmente descartada a possibilidade de uso das fibras de aço em substituição às armaduras de flexão das estruturas de concreto armado que não apresentem tal possibilidade.

Estudos têm sido realizados sobre as contribuições das fibras de aço no combate ao cisalhamento, fadiga e resistência ao impacto.

Assim sendo, pelo fato de ser a ductilidade a grande contribuição das fibras de aço ao concreto, deve-se tirar proveito, estruturalmente, dessa característica. O presente trabalho mostra que o dimensionamento elástico conduz a ganhos somente

do ponto de vista qualitativo, ou seja, dimensionando-se elasticamente tira-se proveito da adição das fibras somente no controle de fissuração.

Já por sua vez o cálculo plástico possibilita levar em consideração a plastificação do material, característica essa do concreto reforçado com fibras de aço. Com essa consideração pode-se não só se ter ganhos do ponto de vista qualitativo, com o controle de fissuração, mas também quantitativo, reduzindo espessuras.

É importante destacar que, para cargas de serviço, a placa trabalha numa região caracterizada por pequenas deformações (REGIÃO II). Assim sendo, é possível o emprego da teoria das linhas de ruptura, sem desta forma comprometer a situação em serviço das placas de concreto reforçado com fibras de aço sobre base elástica.

9. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

O presente trabalho aborda somente os 3 casos clássicos de carga numa placa isolada. Os pisos e pavimentos apresentam interfaces com as placas vizinhas, através das juntas, que podem ser de vários tipos.

As cargas aplicadas no canto e na borda da placa transferem-se para as placas vizinhas, sendo a intensidade desta transferência função do tipo de junta. Sugere-se que esse problema seja aprofundado, uma vez que, em função da transferência de carga, casos que apresentem na placa isolada situações mais desfavoráveis podem conduzir a situações menos desfavoráveis quando comparadas com a carga no centro da placa.

A variação de temperatura entre as faces superior e inferior da placa e o efeito da retração são fatores que influenciam o comportamento das placas. Assim sendo, estes fatores também podem ser explorados.

Também não se tem muita informação a respeito da aplicação da teoria das linhas de ruptura às placas apoiadas elasticamente submetidas a cargas uniformemente ou parcialmente distribuídas, fato que merece uma análise mais cuidadosa.

Finalmente, sugere-se o estudo de múltiplas cargas nas placas. Isto ocorre quando se tem eixos de veículos com duas ou quatro rodas e prateleiras com vários pontos de apoio. Como estas cargas podem estar próximas entre si, existe influência de uma carga sobre a outra, sendo esta função do raio de rigidez relativo da placa, estudo este de grande interesse para aplicação prática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ¹ WESTERGAARD, H.M. Stresses in concrete pavements computed by theoretical analysis, **Public Roads**. v.7, p.25-35, April, 1926.
- ² PCA. Portland Cement Association, **Concrete floors on ground**. Skokie, 1983.
- ³ IBTS. Instituto Brasileiro de Telas Soldadas, **Pisos industriais de concreto armado**. São Paulo, 1998
- ⁴ JOHANSEN, K. **Brudlinieteorier**. Khvn, 1943.
- ⁵ MASON, J. **Linhas de ruptura - teoria e prática**. Rio de Janeiro, 1962.
- ⁶ CHAMECKI, S. **Cálculo, no regime de ruptura, das lajes de concreto armadas em cruz**. Curitiba, 1948.
- ⁷ LANGENDONCK, T. van. **Teoria elementar das charneiras plásticas**. São Paulo, 1970.
- ⁸ LOSBERG, A. **Design methods for structurally reinforced concrete pavements**. Gothenburg, 1961.
- ⁹ MEYERHOF, G.G. Load carrying of concrete pavements, **Journal of the soil mechanics and foundations division, ASCE, Proceedings**. p.89-116, June, 1962.
- ¹⁰ ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, **NBR 6118: projeto e execução de obras de concreto armado - procedimento**. ABNT: Rio de Janeiro. 76p.
- ¹¹ TIMOSHENKO, S., WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Teoria de placas y laminas**. Bilbao, 1970.
- ¹² OLDER, C. Highway Research in Illinois, **ASCE, Transactions**. v.87, p.1180-1224, 1924.
- ¹³ GOLDBECK, A.T. Researches on the structural design of righways by the United States Bureau of Public Roads, **ASCE, Transactions**. v.88, p.264-305, 1925.
- ¹⁴ NADAI, A. Die Biegungsbeanspruchung von Platten durch Einzelkräfte, **Schweizerische Bauzeitung**. v.76, p.257, 1920.

- ¹⁵ WESTERGAARD, H.M. Analytical tools for judging results of structural tests of concrete pavements, **Public Roads**. v.14, p.185-188, Dec 1933.
- ¹⁶ BRADBURY, R.D. **Reinforced concrete pavements**. Washington D.C, 1938.
- ¹⁷ TELLER, W., SUTHERLAND, E.C. The structural design of concrete pavements, **Public Roads**. v.16, p.145-165, Oct, 1935; v.16, p.169-197, Nov, 1935; v.16, p.201-221, Dec, 1935; v.17, p.143-171, Sep, 1936; v.17, p.175-192, Oct, 1936.
- ¹⁸ TELLER, W., SUTHERLAND, E.C. The structural design of concrete pavements, **Public Roads**. v.23, p.167-212, April, May, June, 1943.
- ¹⁹ KELLEY, E.F. Application of the results of research to the structural design of concrete pavements, **Public Roads**. v.20, p.83-104, Jul, 1939.
- ²⁰ EISENMANN, J. **Betonfahrbahnen**. Berlin, 1979.
- ²¹ WESTERGAARD, H.M. Stresses in concrete runways of airports, **Highway Research Board, Proceedings of the nineteenth annual meeting**. p.197-205, Dec, 1939.
- ²² WESTERGAARD, H.M. New formulas for stresses in concrete pavements of airfields, **ASCE, Proceedings**. p.687-701, May, 1947.
- ²³ PICKETT, G., RAY, G.K. Influence charts for concrete pavements, **ASCE, Transactions**. p.49-73, 1951.
- ²⁴ MEYERHOF, G.G. Bearing capacity of floating ice sheets, **ASCE, Proceedings**.v.86, p.113-145, Oct, 1960.
- ²⁵ JOHANSON, A. Tests of reinforced concrete slabs on elastic foundation, **Betong**. v.32, p.187, Stockholm, 1947.
- ²⁶ THE JAPAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS. **Recomendation for design and construction of steel fiber reinforced concrete**. JSCE
- ²⁷ PINTO JR. Tenacidade e resistência equivalente à tração na flexão dos concretos reforçados com fibras de aço. **XXVIII Jornadas Sul Americanas de Engenharia Estrutural**, São Carlos, 1997.
- ²⁸ THAMES POLYTECHNIC. **Comparative tests on plain, fabric reinforced & steel fibre reinforced concrete ground slabs**, Dartford, 1989.
- ²⁹ FALKNER, H., TEUTSCH, M.. **Comparative investigations of plain and steel fibre reinforced industrial ground slabs**. Brunswick, 1993.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

1. HANNANT, D. Fibres in industrial ground-floor slabs. **CONCRETE**. v.28, p.16-19, . January/February 1994.
2. DEACON, R.C. Fibres for floors. **CONCRETE**. v.24, April 1990.
3. AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. Do steel fibers mix with wire guides? **ACI Journal**. December 1991.
4. CHANDLER, J.W.E., NEAL, F.R. The design of ground-supported concrete industrial floor slabs. **British Cement Association**, 1988.
5. AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. Guide for Concrete Floor and Slab Construction. **ACI 302. IR-89**.
6. AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. State-of-the-Art Report on Fiber Reinforced Concrete **ACI 544.1R-73** (Reaffirmed 1981)
7. AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. Design of Slabs on Grade. **ACI 360R-92**
8. AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **Design of Industrial Floors**. Detroit, 1983.
9. AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. Measurement of Properties of Fiber Reinforced Concrete. **ACI Materials Journal, Committee Report, ACI 544.2R**, p.583-593, Nov-Dec 1988.
10. SOLS INDUSTRIELS EN BÉTON À FIBRES D'ACIER DRAMIX - (Industrial Floors in Dramix Steel Fibre Concrete) - **Specification TCI 7 91 142**, November 1991.
11. CHANDLER, J.W.E., Design of Floors on Ground. **Technical report 550**, Cement and Concrete Association, June 1982.
12. MANUAL DE INSTRUCCIÓN PARA EL PROYECTO Y LA REALIZACIÓN DE SOLERAS INDUSTRIALES A BASE DE DRAMIX. HORMIGÓN CON FIBRAS DE ACERO, Oficina de Ingeniería, Ing. J.G. Hageman c.i. B.V. Rijswijk (Países Bajos).
13. PRESCRIPCIONES TÉCNICAS Nº 22 DEL CENTRO CIENTÍFICO Y TÉCNICO PARA LA CONSTRUCCIÓN SOLERAS INDUSTRIALES DE CEMENTO. CONSEJOS PARA UNA BUENA EJECUCIÓN. **CSTC**, Bélgica.

14. AKE SKARENDAHL & BO WESTERBERG.. Guide for designing fibre concrete floors. **CBI REPORT 1:89.**
15. STALFIBERBETONG NR4: **Rekommendationer för konstruktion, utförande och provning.** Swedish Concrete Association, 1995.
16. TECHNICAL REPORT N^o 34. **Concrete Industrial Ground Floors – A guide to their Design and Construction,** Febr. 1995.
17. JONES, L.L., WOOD, R.H.. **Yield Line Analysis of Slabs,** 1967.
18. DRAMIX GUIDELINE: **Design of concrete structures, steel wire fibre reinforced concrete structures with or without ordinary reinforcement.**
19. BEKAERT: **The Properties of Dramix steel fibre concrete.**
20. BEKAERT: **Design guidelines for Dramix steel wire fibre reinforced concrete**
21. BEKAERT: **Durability of steel fibre concrete.**
22. BEKAERT: **Steel fibre concrete under flexural load.**
23. BEKAERT: **Soleras industriales en hormigón con fibras de acero Dramix.**
24. BEKAERT: **Practical guide to the installation of Dramix steel fibre concrete floors.**
25. BEKAERT: **Steel fibre reinforced industrial floor Design in accordance with the Concrete Society TR34.**
26. Westergard, H.M. **Mechanics of Progressive Cracking in Concrete Pavements”, Public Roads,** v.10, p.65-71, 1929.
27. Westergard, H.M. **Analytical Tools for Judging Results of Structural Tests of Concrete Pavements, Public Roads,** v.14, n^o 10, p.185-188, 1933.
28. Hetényi, M. **Beams on Elastic Foundation,** University of Michigan, 1946.
29. LOPES, M. L., **Pavimentação Rodoviária,** Livros Técnicos e Científicos: DNER-Instituto de Pesquisas Rodoviárias, 1980.
30. ABPv: **Análise de placas sobre base elástica com referência especial à questão das tensões em estradas de concreto, Boletim Técnico,** n. 15, 1995.
31. ABPv: **“Estudos das propriedades elásticas do solos e do dimensionamento de pavimentos, de acordo com a Teoria da Elasticidade”, Boletim Técnico** n.14, 1995.