Universidade Estadual de Campinas

Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo

Simulação Numérica de Processos de Fratura em Vigas de Concreto Armado e Reforçado com Fibras de Aço, Utilizando a Curva Tensão-Abertura de Fissura

Alaor Leandro Rosa

Campinas, S.P. – Brasil
Março/2005

Universidade Estadual de Campinas

Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo

Simulação Numérica de Processos de Fratura em Vigas de Concreto Armado e Reforçado com Fibras de Aço, Utilizando a Curva Tensão-Abertura de Fissura

Alaor Leandro Rosa

Orientador: Prof. Dr. José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Universidade Estadual de Campinas, para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, na área de concentração em Estruturas.

Campinas, S.P. – Brasil.
Março/2005

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

Rosa, Alaor Leandro
R71s Simulação numérica de processos de fratura em vigas de concreto armado e reforçado com fibras de aço, utilizando a curva tensão-abertura de fissura / Alaor Leandro Rosa.--Campinas, SP: [s.n.], 2005.

Orientador: José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo.

1. Simulação (Computadores digitais). 2. Mecânica da fratura. 3. Concreto armado. 4. Materiais compostos. 5. Fibras. 6. Método de elementos finitos. I. Sousa, José Luiz Antunes de Oliveira e. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. III. Título.

Titulo em Inglês:Numerical simulation of fracture processes in concrete beams with conventional and steel fiber reinforcements, using the stress-crack opening relationship.

Palavras-chave em Inglês: Numerical simulation, Nonlinear analysis, Fracture process, Steel fiber, Reinforced concrete (SFRC), Finite element methods.
Área de concentração: Estruturas.
Titulação: Mestre em Engenharia Civil.
Banca examinadora: Newton Oliveira Pinto Junior, Itamar Ferreira, Luísa Andréia Gachet Barbosa.
Data da defesa: 17/03/2005.
Programa de Pós-Graduação: Engenharia Civil.

Universidade Estadual de Campinas

Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo

Simulação Numérica de Processos de Fratura em Vigas de Concreto Armado e Reforçado com Fibras de Aço, Utilizando a Curva Tensão-Abertura de Fissura

Alaor Leandro Rosa

Dissertação de Mestrado aprovada pela banca examinadora constituída por:

Prof. Dr. José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa
Orientador/Presidente – FEC/UNICAMP

Prof. Dr. Newton Oliveira Pinto Jr.
FEC/UNICAMP

Prof. Dr. Itamar Ferreira
FEM/UNICAMP

Profa. Luísa Andréia Gachet Barbosa
USF

Campinas, 17 de Março de 2005.

À minha mãe, Rosa Aparecida Rosa,
Flor, Amor e Ternura.

Aos meus sobrinhos Gabriel,
Samuel, Daniel e Moroni,
por felicitarem-se com
a minha presença

O mistério é a coisa mais nobre de que podemos ter experiência. É a emoção que se encontra no cerne da verdadeira ciência. Aquele que não sente essa emoção e que não pode mais se maravilhar nem se espantar, é como se já estivesse morto. Saber que aquilo que é impenetrável para nós verdadeiramente existe e se manifesta como a mais alta sabedoria e a mais radiosa beleza, que nossas limitadas faculdades só podem apreender em suas formas mais primitivas, esse conhecimento, esse sentimento, está no centro de toda verdadeira devoção".

Albert Einstein

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa pela constante orientação, pela confiança e por proporcionar as condições adequadas para a realização do trabalho;

Ao Conselho Nacional de Pesquisa, Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq, pelo apoio financeiro através da concessão da bolsa de estudos;

À Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Universidade Estadual de Campinas, pela oportunidade de aprimoramento intelectual;

À secretária do Departamento de Estruturas (DES), Margaritta de Los A'ngeles Bello, sempre pronta a dispensar um minuto da sua atenção;

À Alexandre Garcia pela disposição incondicional em me acolher, nos meus primeiros dias, aqui na cidade de Campinas;

Ao grande amigo Rodrigo de Oliveira Santos, à Aline Sgreccias e à Sra. Sueli de Oliveira Santos, pelo constante incentivo e motivação;

Aos amigos (a) da Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da UNICAMP, em especial: Susana de Lima Pires, Adriana Ambrósio, Roberta Magalhães, Regina Mantovani Matsui, Luís Pedro C. P. F. e Almeida, Elias Nicolas, Estevão Xavier Volpini, Mariela Oliveira, Caio Rossatti, Arkana Kelly Silva Costa, Italo Guedes, Ulisses Ubadilla, Viviane Aguirre Amo e Rogério de Almeida.

Resumo

Rosa, A. L., **Simulação Numérica de Processos de Fratura em Vigas de Concreto Armado e Reforçado com Fibras de Aço, Utilizando a Curva Tensão-Abertura de Fissura.** Campinas, 2005. Dissertação de Mestrado, 187p. Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, S.P., Brasil.

Este trabalho enfoca o estudo de processos de fratura em vigas de concreto, concreto reforçado com fibras de aço, concreto armado e concreto armado reforçado com fibras de aço, através da simulação numérica com o código de elementos finitos DIANA. O estudo envolve a área de pesquisa em materiais compósitos à base de cimento, resultantes da adição de fibras de aço descontínuas orientadas aleatoriamente, e a análise numérica de sólidos contendo fissuras. Foram realizadas simulações numéricas de processos de fratura em vigas, sob carregamento monotônico, de acordo com os modelos de fissura discreta *("discrete crack model")* e de fissura distribuída *("smeread crack model")*. As curvas tensão-abertura de fissura ($\sigma - w$), que caracterizam o comportamento do concreto e do concreto reforçado com fibras de aço, após a tensão de tração ser atingida, foram obtidas por retroanálise de vigas entalhadas submetidas ao ensaio de flexão em três pontos. As simulações foram realizadas para comparar resultados numéricos e experimentais de vigas entalhadas carregadas em três pontos e vigas armadas projetadas para ruptura à flexão e ao esforço cortante. Em todos os casos, foram considerados espécimes sem e com adição de fibras de aço.

Palavras-Chave: simulação numérica, análise não-linear, processos de fratura, concreto armado reforçado com fibras de aço, método dos elementos finitos.

Abstract

Rosa, A. L., **Numerical Simulation of Fracture Processes in Concrete Beams with Conventional and Steel Fiber Reinforcements, Using the Stress-Crack Opening Relationship.** Campinas, 2005. Master Thesis, 187p.. School of Civil Engineering, Architecture and Urban Design. State University of Campinas, S.P., Brazil.

This work addresses the study of fracture processes in concrete beams with conventional and steel fiber reinforcements, through numerical simulation with DIANA Finite Element Analysis code. The study include the research area of cementitious material composites, obtained from the addition of discrete and randomly oriented steel fibers to the concrete, and the area of numerical analysis of solids containing cracks. Numerical simulations of fracture processes in beams, subject to flexure and shear under monotonic load, were performed according to the *smeared crack model* and to the *discrete crack model*. The stress-crack opening curves ($\sigma - w$), used to characterize the material constitutive behavior of the concrete after tensile stress is reached, were obtained by inverse analysis of notched prismatic specimens subject to three-point-bending tests. The simulations were performed to compare numerical and experimental results from notched three-point-bending specimens and from reinforced beams designed for diagonal shear or flexural failure. Specimens with and without steel fibers were analyzed in all the cases.

Keywords: numerical simulation, nonlinear analysis, fracture process, steel fiber reinforced concrete (SFRC), finite element method.

Sumário

Capítulo 1 ..... **1**
Introdução **1**
1.1 Considerações Gerais 1
1.2 Justificativa 3
1.3 Objetivo 4
1.4 Estrutura 5

Capítulo 2 ..... **7**
Tipos de Ruptura em Materiais Estruturais **7**

Capítulo 3 ..... **13**
Materiais Compósitos **13**
3.1 Os Compósitos de Cimento e Fibras 13
3.1.1 Tipos de Fibras 15
3.1.2 Interação Fibra-Matriz: Mecanismos de Transferência de Tensões 16
3.1.3 Mecanismos de Ruptura em Materiais Compósitos Reforçados com Fibras 19
3.2 O Concreto Reforçado com Fibras de Aço (CRFA) 21
3.2.1 Aplicação Estrutural do CRFA 27

Capítulo 4 ..... **33**
Métodos Numéricos em Mecânica Computacional **33**
4.1 O Método dos Elementos Finitos (MEF) 34
4.1.1 Notas Históricas 36
4.1.2 Condições de Contorno em Problemas de Elasticidade Linear 40
4.1.3 Condições de Contorno em Materiais com Não-Linearidade 47
4.1.4 Estratégias de Solução em Análise Não-Linear 51

Capítulo 5 71
Modelos Constitutivos para a Modelagem Numérica dos Materiais 71
5.1 Representação Numérica dos Materiais 72
5.1.1 Modelo Contínuo de Representação 73
5.1.2 Modelo Misto de Representação 74
5.1.3 Modelo Discreto de Representação 76
5.2 Critérios de Ruptura 77
5.2.1 Critério de Tresca 80
5.2.2 Critério de Von Mises 80
5.2.3 Critério de Drucker-Prager 81
5.2.4 Critério de Mhor-Coulomb 82
5.2.5 Critério de Rankine 84
5.2.6 Critérios de Ruptura no Programa Diana 84
5.3 Representação Numérica de Fissuras no Programa Diana 86
5.3.1 Modelo de Fissura Discreta 87
5.3.2 Modelo de Fissura Distribuída 89
5.4 Obtenção da Curva de Amolecimento dos Materiais Quase-frágeis 103
5.4.1 Análise Inversa de Dados Experimentais 104

Capítulo 6 111
Simulação Numérica de Vigas de CS, CA, CRFA e CARFA 111
6.1 Descrição do Ensaio Experimental 112
6.1.1 Arranjo Estrutural I (AEI) 112
6.1.2 Arranjo Estrutural II (AEII) 116
6.2 Estudo da Discretização das Vigas 118
6.2.1 Análise das Tensões em Regime Elástico 120
6.3 Simulação Numérica do Ensaio da Viga Ranhurada Carregada em Três Pontos (Three Point Bending Test - 3PBT) 141
6.3.1 Simulação Numérica do Ensaio 3PBT do Arranjo Estrutural I (AEI) 142
6.3.2 Simulação Numérica do Ensaio 3PBT do Arranjo Estrutural II (AEII) 145
6.4 Análise Não-Linear das Vigas de CA e CARFA 153
6.4.1 Análise Não-Linear das Vigas do Arranjo Estrutural I (AEI) 154
6.4.2 Análise Não-Linear das Vigas do Arranjo Estrutural II (AEII) 171

Capítulo 7 177
Considerações Finais 177

Referências Bibliográficas 181

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações Gerais

Simular computacionalmente elementos estruturais representa um elo de interação entre as análises experimentais, as deduções analíticas e a implementação de formulações numéricas no atual estágio de modernidade para o estudo comportamental das estruturas. A análise numérica permite avaliar a resposta estrutural, a fim de validar a objetividade da formulação implementada, a sua extensão para outros materiais e a sua aplicação as mais diversas condições de carregamento.

A composição de novos materiais, com vista a superar as limitações impostas pelos materiais de uso tradicional em engenharia (aço, madeira, cerâmica concreto e concreto armado), bem como a utilização de novos conceitos sobre o comportamento teórico das estruturas, significa um avanço nos métodos de análises, além dos já tradicionalmente aceitos, contribuindo para uma maior compreensão de sua resposta às solicitações mecânicas. Dois exemplos desses avanços são: os modelos teóricos que representam a não-linearidade no pós-pico, dos materiais quase-frágeis, tal qual o concreto e o concreto reforçado com fibras de aço (CRFA), conforme se enuncia em Mecânica da Fratura, e as análises das tensões e das deformações com base no Método dos Elementos Finitos

(MEF), permitindo assim a simulação numérica dos mais diversos arranjos e tipos estruturais.

Sob estes aspectos simula-se computacionalmente, tipos estruturais em concreto simples (CS), concreto armado (CA), concreto reforçado com fibras de aço (CRFA) e concreto armado reforçado com fibras de aço (CARFA), modelados com o código de elementos finitos **DIANA Finite Element Analisys**, a partir da caracterização da curva tensão-abertura de fissura ($\sigma - w$). A curva tensão-abertura de fissura ($\sigma - w$), obtida por retroanálise das curvas $P - \delta$ (carga-deslocamento do ponto de aplicação de carga) ou $P - CMOD$ (carga-abertura da boca da fissura) do ensaio experimental de vigas ranhuradas e carregadas em três pontos (3PBT - Three Point Bending Test), é tomada como padrão do comportamento do material no trecho de amolecimento, ou seja, após se atingir o valor máximo no gráfico tensão-deformação.

No presente trabalho é feito um estudo de processos de fratura em vigas armadas para ruptura à flexão e ao esforço cortante, de acordo com os modelos de fissura discreta *("discrete crack model"),* e de fissura distribuída *("smeread crack model").*

Para o estudo do comportamento à flexão é feita a simulação numérica de duas vigas geometricamente similares, com a mesma taxa de armadura longitudinal e transversal, confeccionadas em concreto (viga de comparação) e em CRFA, de um conjunto de vigas ensaiadas no Laboratório de Materiais e Estruturas da Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Universidade Estadual de Campinas (FEC/UNICAMP). As vigas são bi-apoiadas e carregadas com forças iguais e simétricas, situadas a um terço e a dois terços do vão.

Para o estudo do comportamento ao cisalhamento são feitas simulações de vigas em escala real, com armadura longitudinal, confeccionadas em concreto simples (viga de comparação) e em CRFA, com seção retangular e em T, bi-apoiadas e carregadas no vão de cisalhamento $a = 3{,}5d$, em relação a um dos apoios, de acordo com os resultados experimentais obtidos por Barragán (2002), na Universitat Politècnica de Catalunya

(UPC), realizado em grande parte, dentro do projeto europeu *Brite-Euram BRPR-CT98-0813*. A viabilidade da utilização destes resultados experimentais se deve à cooperação internacional entre a Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Universidade Estadual de Campinas (FEC/UNICAMP) a Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EPUSP) e a Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), em vigor para o biênio 2003-2004, como resultado de um convênio entre o Conselho de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES/Brasil) e o Ministerio de Educación y Ciencia (MEC/Espanha).

Um estudo das curvas carga-deslocamento $(P-\delta)$ e carga-abertura da boca da fissura $(P-CMOD)$, através de um modelo numérico do ensaio 3PBT também é discutido, com o fim de validar a confiabilidade do método de obtenção da curva $\sigma-w$, enquanto relação constitutiva do material para a representação dos processos de fratura no concreto e no concreto reforçado com fibras de aço.

1.2 Justificativa

A simulação numérica de estruturas é uma poderosa ferramenta para descrever com suficiente detalhe as observações experimentais relativas ao comportamento das estruturas. A grande vantagem da análise numérica (protótipo eletrônico) é que as condições de contorno e o efeito de escala no elemento estrutural podem ser levados em consideração de forma bastante realista, obtendo-se significativos ganhos. Em particular, para a análise de fraturas, a aproximação numérica é essencial devido a importante interação entre o crescimento da fissura e a resposta estrutural. Isso justifica o emprego de uma ferramenta computacional para a simulação numérica de processos de fratura, sendo também uma introdução à Mecânica Computacional Aplicada, uma vez que um conhecimento sistemático da forma como estão implementados os modelos constitutivos do comportamento mecânico dos materiais, as estratégias numéricas para a iteração dos sistemas de equações não-lineares que estabelecem o equilíbrio entre esforços externos e internos nos nós do elemento finito, o refinamento da malha e suas condições de contorno, devem ser bem compreendidas e dominadas para se obter respostas

satisfatórias e confiáveis no atual estágio de desenvolvimento dos métodos numéricos em Engenharia de Estruturas.

1.3 Objetivo

O objetivo deste trabalho é investigar a habilidade dos modelos numéricos baseados na curva $\sigma - w$ em representar a resposta ao fraturamento do CRFA, pela análise comparativa dos resultados numéricos com os resultados experimentais, dando uma contribuição aos estudos da aplicação estrutural deste tipo de material. Os resultados numéricos e os resultados experimentais são aqui confrontados e discutidos, através de uma análise criteriosa dos modelos de fissuras utilizados, pela comparação do panorama de fissuração obtido para os modelos de vigas analisados e pela comparação dos diagramas: carga-deslocamento do ponto de aplicação de carga. Uma síntese do método seguido para o cumprimento deste objetivo é:

- estudo da discretização da malha de elementos finitos a ser utilizada na análise não-linear de vigas de CS, CA, CRFA e CARFA, através de uma análise em regime elástico linear;
- obtenção das curvas $P - \delta$ e $P - CMOD$, a partir da simulação numérica do ensaio 3PBT, para a validação do método de obtenção da curva $\sigma - w$ enquanto modelo constitutivo;
- simulação numérica de vigas de CA e CARFA contemplando os efeitos de não-linearidade, em particular os processos de fratura;
- comparação dos diagramas: carga-deslocamento do ponto de aplicação de carga obtidos da análise numérica e da análise experimental;
- análise comparativa do panorama de fissuração;
- discussão dos resultados.

1.4 Estrutura

Este texto está dividido em 7 capítulos, inclusive este capítulo introdutório, onde são dadas as principais considerações sobre o trabalho de pesquisa realizado, com a apresentação do escopo, da justificativa, do objetivo e da presente estrutura. Os demais capítulos são os descritos a seguir:

Capítulo 2: Tipos de Ruptura em Materiais Estruturais – Este capítulo descreve a importância da caracterização do material estrutural, uma vez que o comportamento global da estrutura é grandemente influenciado pelos mesmos. A caracterização dos materiais permite definir os limites de aplicação de uma determinada teoria.

Capítulo 3: Materiais Compósitos – Expõe a idéia de materiais compósitos utilizados em Engenharia de Estruturas e as suas principais características mecânicas, tais como, mecanismos de ruptura e de transferência de tensões entre a fibra e a matriz de cimento. A performance do CRFA para alguns tipos de carregamentos e de acordo com dados experimentais tirados da literatura também é apresentada.

Capítulo 4: Métodos Numéricos em Mecânica Computacional – Neste capítulo se faz uma descrição do Método dos Elementos Finitos (MEF) e as idéias básicas utilizadas nas estratégias numéricas, que controlam o processo incremental de carga e a iteração dos sistemas de equações não-lineares, para o equilíbrio dos esforços externos e internos no elemento estrutural. A complexidade da análise não-linear demanda o domínio dessas técnicas para o efetivo manuseio de um código de cálculo baseado em elementos finitos. Esse capítulo indica qual processo incremental deve ser utilizado em função da resposta estrutural esperada.

Capítulo 5: Modelos Constitutivos para a Modelagem Numérica dos Materiais – Descreve os modelos constitutivos para a modelagem numérica dos

materiais estruturais. É uma descrição dos modelos de fissura distribuída ("*smeared crack model"),* de fissura discreta ("*discrete crack model")* e dos critérios de ruptura empregados neste estudo, uma vez que os processos de fratura têm inicio quando as tensões, nos nós do elemento finito, são superiores aos limites de resistência do meio material.

Capítulo 6: Simulação Numérica de Vigas de CS, CA, CRFA e CARFA – Apresenta os resultados das simulações realizadas nas vigas em 3PBT, nas vigas de concreto armado (CA) e concreto armado reforçado com fibras de aço (CARFA), relacionando e discutindo os resultados numericamente obtidos. Este capítulo descreve as estratégias seguidas na busca dos objetivos expostos no **Capítulo 1**.

As considerações finais sobre este trabalho de pesquisa, junto com uma proposta para futuras investigações, são feitas no **Capítulo 7**. Após, segue-se as **Referências Bibliográficas**.

Capítulo 2

Tipos de Ruptura em Materiais Estruturais

O comportamento mecânico das estruturas é grandemente influenciado pelos materiais utilizados. Com base na resposta tensão-deformação, oriunda de um ensaio de tração axial, muitos materiais de engenharia podem ser caracterizados em frágil, dúctil ou quase-frágil (Fig. 2.1).

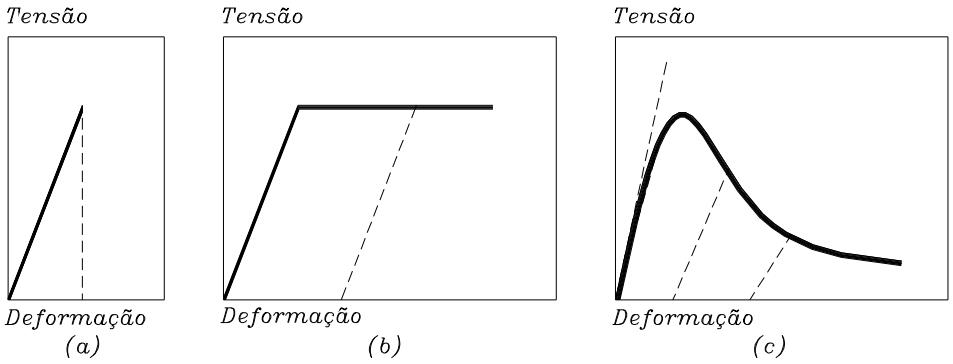


Figura 2.1 – Diferentes tipos de resposta de um material sob carregamento axial: (a) elástico-frágil; (b) elástico-plástico (dúctil); (c) quase-frágil (softening)

Utilizando a formulação de Inglis (1913), para o estado de tensão em uma placa com largura infinita e com um furo elíptico (Fig. 2.2), onde o defeito do material é

representado pelo furo, Shah, Swartz e Ouyang (1995), fazem a seguinte consideração sobre a ruptura de uma estrutura com base na performance do material: "O colapso de uma estrutura depende das propriedades do material usado na sua construção".

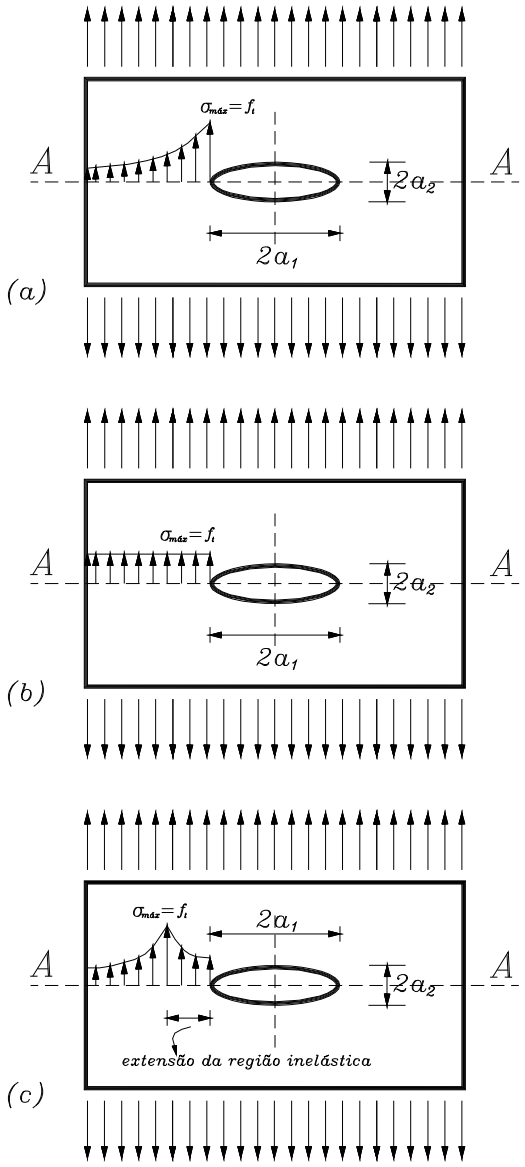


Figura 2.2 - Ruptura de um elemento estrutural considerando diferentes tipos de materiais: (a) ruptura frágil, (b) ruptura dúctil, (c) ruptura quase-frágil

A presença de um furo na placa altera a distribuição de tensão, tal que a tensão na vizinhança do furo, $\sigma_{máx}$, é maior que a tensão nominal, σ_N, para os pontos distantes (Fig. 2.2(a)). Para uma análise elástica do campo das tensões, a relação entre $\sigma_{máx}$ e σ_N, derivado por Inglis (1913) é:

$$\sigma_{máx} = \left(1 + \frac{2a_1}{a_2}\right)\sigma_N = K_t \sigma_N \qquad (2.1)$$

onde a_1 e a_2 são os eixos maior e menor da elipse, respectivamente, e K_t é o fator de concentração de tensão. Se a placa é feita de um material perfeitamente frágil, irá falhar de forma catastrófica quando o valor de $\sigma_{máx}$ for igual a sua resistência à tração f_t (Fig. 2.2a). Por outro lado, se a placa é constituída de um material dúctil, o carregamento aplicado pode continuamente aumentar para valores superiores de $\sigma_{máx} = f_t$ devido à redistribuição de tensões plásticas. A placa rompe quando a tensão normal em toda extensão da seção A-A alcança o valor f_t (Fig. 2.2(b)). Para a placa feita de material quase-frágil, uma região inelástica se desenvolve na frente do furo (Fig. 2.2(c)). Essa região inelástica é referida como zona de processos de fratura e/ou zona de plastificação no fronte da fissura (Gdoutos 1993, Broek 1987, Hellan 1984). A tensão normal de tração decresce em direção ao furo dentro da zona de processos. O desenvolvimento da zona de processos resulta no trecho de amolecimento, *"softening",* da resposta tensão-deformação.

A descrição acima indica que a caracterização da ruptura das estruturas se relaciona não só com a sua geometria, mas também com o tipo de material empregado. Quando um material dúctil é usado a estrutura rompe apenas quando a tensão nominal na seção crítica alcança, em seu todo, a tensão limite de escoamento. Entretanto um critério de resistência baseado na tensão nominal pode ser utilizado para descrever a ruptura da estrutura. Quando um material perfeitamente frágil é usado, a estrutura falha quando a máxima tensão é igual a sua resistência à tração. Uma vez que a máxima tensão não depende da propriedade do material, mas apenas da geometria estrutural e das suas condições de

contorno (valores de a_1 e a_2 no exemplo acima), um critério de resistência em termos da tensão nominal não é conveniente.

O processo de ruptura para um material frágil pode ser descrito através da energia elástica dissipada pela estrutura. Uma vez que apenas energia elástica está envolvida, um simples critério de energia é suficiente para descrever a ruptura de estruturas feitas de materiais frágeis. No caso de um material quase-frágil (ex: concreto, concreto com fibras de aço e rocha), a ruptura da estrutura é adicionalmente caracterizada pelo desenvolvimento de uma zona de processos inelásticos na seção crítica. Semelhante aos materiais frágeis, a ruptura da estrutura deve ser caracterizada em termos energéticos e não em critérios de resistência. Nesse caso, energia elástica e energia de "plastificação" (inelástica) devem ser utilizadas para uma completa descrição deste tipo de estrutura. Os critérios de energia para a ruptura das estruturas podem ser estabelecidos usando princípios de Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL) e Mecânica da Fratura Não-Linear (MFNL).

Uma das mais importantes questões em Mecânica da Fratura é que o comportamento do material e da estrutura não podem ser separados. Curiosamente, essa grande dependência entre a resposta do material e o comportamento estrutural tem sido brutalmente negligenciada (Van Mier, 1996).

A ocorrência de fissuras e/ou fraturas é um acontecimento físico intrínseco ao comportamento de um material sob uma dada solicitação mecânica. Como tal tem recebido um especial interesse, nos dias atuais, sobre a sua influência no comportamento estrutural. Esse interesse tem impulsionando o desenvolvimento da Mecânica da Fratura Aplicada ao Concreto e, por extensão, ao Concreto Reforçado com Fibras de Aço (CRFA).

O comportamento quase-frágil do concreto, erroneamente aceito como material frágil (ver: Silva Jr., 1982), devido às técnicas menos precisas de experimentação, onde a tensão cai a zero após o estabelecimento do carregamento máximo (Fig. 2.1(a)), é uma das questões defendidas para a utilização da Mecânica da Fratura no estudo do concreto e por

extensão do CRFA. Seu comportamento é distinto da realidade perpetuada pela resistência dos materiais, que assume a ruptura de um elemento estrutural quando um limite de resistência é excedido e, para a descrição do material, a simples determinação de sua resistência é suficiente (Van Mier, 1996). As análises limites no estado plástico (critérios de ruptura) não podem dar informações no regime pós-pico e a energia dissipada neste processo (Bazănt e Planas, 1998).

Um outro fato que tem motivado a defesa na utilização da Mecânica da Fratura para o estudo das estruturas constituídas de materiais quase-frágeis, bem como para o projeto de dimensionamento (Casanova e Rossi, 1997; Olesen, 2001; RILEM, 2002), é o chamado efeito de escala, *"size-effect law"*, (Bazănt, 1991; Bazănt e Planas, 1998). De acordo com Bazănt (1991), o efeito de escala é definido como a dependência da resistência nominal em estruturas geometricamente similares de diferentes tamanhos. É convenientemente caracterizado em termos da resistência nominal, σ_{Nu}, representando o valor da tensão nominal, σ_N, para um carregamento último, P_u. Desse modo o efeito de escala significa a perda da resistência do material com o aumento de algum parâmetro similar ao elemento estrutural ou a redução da ductilidade (Fig. 2.3).

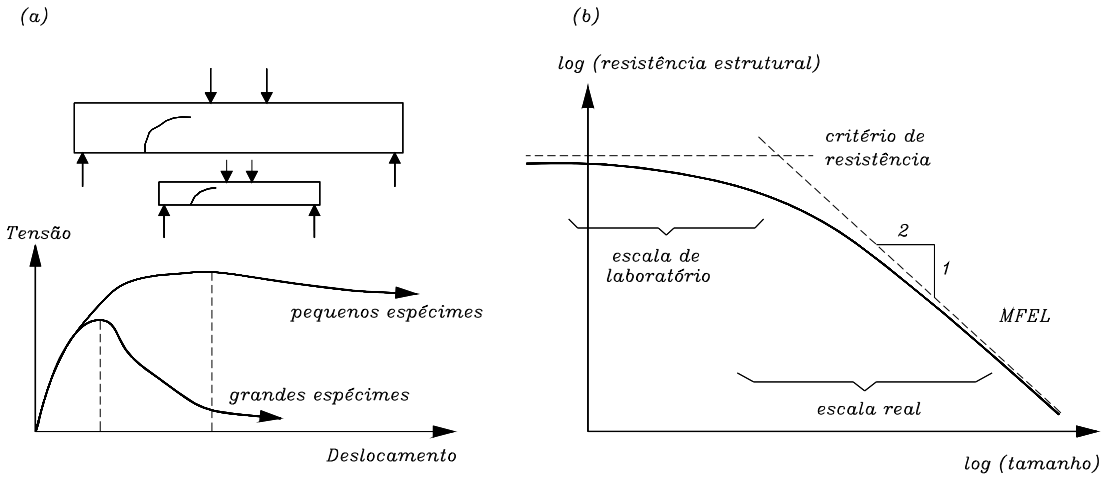


Figura 2.3 – Efeitos de escala: (a) nas curvas da tensão nominal versus deslocamento e, (b) em relação à resistência do material estrutural

De acordo com Bazănt e Planas (1998): "O estudo e o projeto de estruturas de concreto já experimentou duas revoluções. A primeira, que tornou a tecnologia do concreto possível para a aplicação estrutural, foi o desenvolvimento da análise elástica sem a contribuição da tração, durante os anos de 1900 a 1930. A segunda revolução, com base nos conhecimentos teóricos alcançados nos anos de 1930, foi à introdução dos limites de análises no regime plástico entre 1940 e 1970. Há agora boas razões para se acreditar que a introdução da Mecânica da Fratura no dimensionamento de estruturas de concreto deve ser a terceira revolução. As teorias, formuladas em sua maior parte após 1980, sinalizam nessa direção."

A Mecânica da Fratura é, sem dúvida, de grande importância para as estruturas de concreto de resistência normal e alta, estruturas de concreto reforçado com fibras, estruturas de concreto com grandes proporções, entre outras, ao traduzir o comportamento mais que real que é o estado fissurado de um elemento estrutural sob uma dada ação mecânica.

É mister, no atual estado de conhecimento, que a direção para a qual se tem que avançar, em termos de investigação científica em engenharia de estruturas, é na definição de leis constitutivas e comportamentais para os materiais, a fim de se efetivar uma análise mais realista e um cálculo mais rigoroso dos seus elementos. A simulação numérica e o estudo de modelos para a representação de processos de fratura e de dano nos materiais quase-frágeis é um pré-requisito para novos avanços tecnológicos.

Capítulo 3

Materiais Compósitos

3.1 Os Compósitos de Cimento e Fibras

Do progressivo desenvolvimento tecnológico que tem contribuído para o avanço da Engenharia de Estruturas desde a metade do século passado, pós *2º* grande guerra, até os dias atuais é de grande destaque sua correlação com os avanços na Ciência dos Materiais.

A Ciência dos Materiais, com suas interações físico-química e mecânica, têm contribuído com informações valiosas sobre a microestrutura dos materiais e sua relação com as propriedades de engenharia, bem como, selecionando e processando métodos para combiná-los, de formas distintas, a fim de se obter um material resultante com uma ou mais características desejáveis. Tais materiais, tecnologicamente mais avançados, quando comparados com os que lhe deram origem, são comumente denominados de materiais compostos.

Largamente utilizados em engenharia aeronáutica e aeroespacial para resistir a grandes variações de temperatura, radiação e pressão, os materiais compostos, para uso em engenharia de estruturas, resultam da combinação de materiais cimentícios (pasta de cimento, argamassa e concreto) com fibras discretas e/ou contínuas de origem e formas

diversas, bem como propriedades químicas e mecânicas, relacionadas com seu tipo e natureza. Estes compostos são denominados compósitos cimentícios reforçados com fibras (CCRF).

Segundo Li (2000), as fibras devem ter sido originalmente introduzidas numa tentativa de fortalecer a matriz de cimento, sem se fazer distinção da diferença entre a resistência à tração do material e a sua tenacidade. O estudo científico reconheceu que o efeito mais significativo da adição de fibras, em matrizes frágeis, é a redução dessa característica. Para certas classes de compósitos, com alto volume de fibras contínuas, a habilidade das fibras em substancialmente aumentar a resistência à tração e a ductilidade do compósito é reconhecida desde o trabalho de Aveston, Cooper e Kelly (1971). Entretanto, apenas muito recentemente, esse comportamento foi conseguido para baixos volumes de fibras descontínuas (menos que *2*%), através de um estudo cuidadoso da interface fibra-matriz e de um tratamento da superfície da fibra, com o auxílio dos estudos de micromecânica.

O aumento da tenacidade dos CCRF é acompanhado de uma melhora na sua resistência à fadiga e às cargas de impacto. Daí surge um grande interesse na sua utilização em componentes estruturais e não estruturais como em painéis para vedação, vigas de pontes, aduelas para galerias enterradas, lajes, pavimentos, grandes contêineres de concreto e estruturas hidráulicas, onde o controle das fissuras, devido às solicitações mecânicas ou devido à retração (térmica e/ou plástica), imprime uma maior durabilidade aos mesmos, o que significa uma grande vantagem econômica na amortização de custos.

A utilização de fibras para o reforço de componentes de pequena espessura, onde as barras de aço não podem ser utilizadas, tal qual em painéis é denominada de reforço primário. Para outras aplicações, que não são as de reforço, tal qual no controle da retração são denominadas de reforço secundário.

A natureza do reforço classifica a utilização das fibras entre as aplicações estruturais, semi-estruturais e não-estruturais. Uma classificação das fibras, segundo a sua aplicação é feita por Li (2000).

3.1.1 Tipos de Fibras

As fibras podem ser agrupadas em três grandes categorias: fibras naturais (ex: sisal, casca de coco e celulose), metálicas (fibras de aço) e sintéticas (fibras de carbono, vidro, polipropileno e nylon). Individualmente, podem ser constituídas de um único filamento (monofilamento), ou pela reunião de filamentos unitários (multifilamentos), flexíveis e de diâmetro diminuto (aproximadamente $10\mu m$ ou menos), dispostas na forma de um feixe. Podem, ainda, ser contínuas alcançando toda extensão do elemento estrutural, onde exerce sua função de reforço, ou discretas (não contínuas), usualmente menores que $50mm$ de comprimento (Bentur e Mindess, 1990). O arranjo das fibras no reforço da matriz de cimento pode se dar em uma, duas ou três direções (Fig. 3.1), conforme a fibra seja discreta ou contínua e de acordo com a geometria do espécime estrutural. Se a razão entre o comprimento da fibra e a espessura do espécime é suficientemente grande, as fibras assumem uma distribuição bidirecional (Fig. 3.1b).

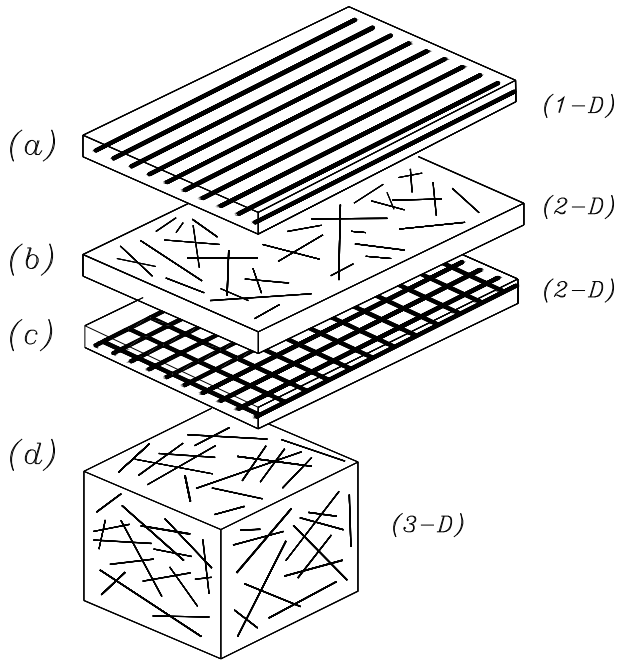


Figura 3.1 – Arranjos de fibras em uma (a), duas (b, c) e três direções (d), para fibras discretas (b, d) e para fibras contínuas (a, c)

3.1.2 Interação Fibra-Matriz: Mecanismos de Transferência de Tensões

O estudo dos mecanismos responsáveis pela transferência de tensões nos materiais compósitos permite um maior entendimento do seu modo de ruptura (dúctil, frágil ou quase-frágil) e serve como base para a melhora de sua performance através da modificação da interação fibra-matriz. Essa modificação pode ser alcançada, por exemplo, alterando a forma da fibra ou pelo tratamento da sua superfície.

A capacidade das fibras em mobilizar esforços é devido a tensões de aderência desenvolvidas entre a fibra e a matriz de cimento. Essas tensões de aderência são tensões de cisalhamento (elástica e de atrito) na interface entre a fibra e a matriz que a envolve e, sua natureza, resulta da adesão físico-química e do deslizamento relativo fibra-matriz, influenciado pelo estado confinado da fibra (Naaman e Namur, 1991).

Nos primeiros estágios de carregamento, de um espécime em material compósito, a transferência elástica de tensão de cisalhamento é requerida devido à diferença de módulo de elasticidade entre a fibra e a matriz. Essa transferência domina o mecanismo de mobilização de esforços se a aderência físico-química na interface é suficiente para conduzir um deslocamento compatível entre os elementos em contato (fibra e matriz). Em estágios mais avançados de carregamento ocorre uma perda da aderência (decoesão) através da interface, o que implica em um deslocamento relativo entre a fibra e a matriz, originando a tensão de cisalhamento de atrito.

A perda de aderência na interface pode ocorrer antes ou depois da fissuração da matriz. Se a resistência à tração da matriz é alta, espera-se que a decoesão ocorra antes que a fissuração da matriz, quando a tensão de cisalhamento elástica atingir a resistência de aderência. Nos compósitos com baixa resistência à tração da matriz, as fissuras devem preceder a decoesão. Nesse caso o avanço da fissura intercepta a fibra e o processo de decoesão assume uma natureza diferente, como resultado da interação entre a fissura e a fibra que a transpõe.

Uma componente mecânica de ancoragem, para fibras com geometria complexa, também se desenvolve na interface fibra-matriz não podendo, portanto, ser interpretada em termos de tensões de cisalhamento na interface (Bentur e Mindess, 1990). A ancoragem mecânica é uma solução prática para compensar a baixa capacidade de vinculação de forças na interface. Durante o carregamento do material compósito um grande volume da matriz é mobilizado para resistir à extração da fibra, como pode ser visto na Fig. 3.2, onde fissuras avançam dentro da matriz ao resistir o arrancamento de uma fibra com extremidade em gancho.

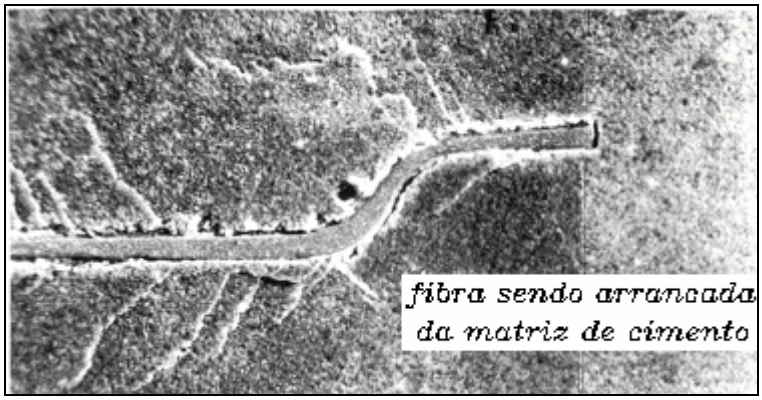


Figura 3.2 – Fibra com extremidade em gancho exibindo um perfil de dano além da interface ao ser arrancada da matriz de cimento

Mudanças de volume na matriz, a diferença entre o coeficiente de Poisson da fibra e da matriz, deformações plásticas da fibra, etc., induzem concentrações de tensões e de deformações, em diversos pontos do compósito. Por isso a mobilização de forças durante o arrancamento da fibra é um fenômeno bastante complexo. Esses efeitos causam o enfraquecimento e a decoesão prematura da interface, induzindo variações consideráveis na componente de atrito da aderência fibra-matriz, que é sensitiva às tensões normais.

Uma fissura originada por uma tensão, σ_y, perpendicular a sua direção de propagação, ao se aproximar da superfície da fibra, sofre um desvio de um ângulo aproximado de 90º (Fig. 3.3b). Esse desvio se deve ao campo de tensão de tração, σ_x, devido ao estado de

confinamento que se desenvolve na direção de propagação (Fig. 3.3a). A tensão, σ_x, causa uma decoesão da fibra, antes que a fissura atinja a sua superfície, uma vez que seu valor máximo ocorre à frente do fronte da fissura atingindo a região menos resistente da interface fibra-matriz que é a zona de transição. Assim, o caminho da fissura é desviado para o caminho de menor resistência, ao longo da interface decoesa, ao invés de seguir o caminho reto através da fibra. Esse mecanismo é denominado de mecanismo de Cook-Gordon (1964), segundo Bentur e Mindess (1990).

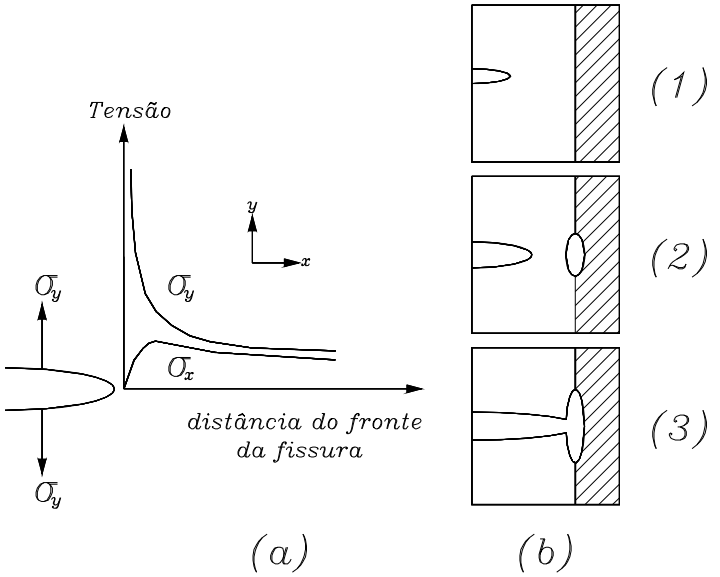


Figura 3.3 – Mecanismo de Cook-Gordon: (a) campo de tensões no fronte da fissura; (b) descrição esquemática do processo de arrancamento: (1) aproximação da fissura na interface, (2) ruptura da interface à frente da fissura, (3) mudança na direção de propagação da fissura.

A assimetria da fissura com relação à fibra, causada pela sua ramificação, induz uma flexão localizada podendo criar uma componente de ancoragem. Devido à flexão localizada, uma concentração de tensão pode ocasionar uma ruptura prematura da fibra, caso esta seja frágil, ou provocar um escoamento localizado, caso a fibra seja dúctil, fornecendo um mecanismo adicional de energia (Bentur e Mindess, 1990).

As características da matriz, tais como, constituintes, propriedades físicas e mecânicas, o fato da matriz estar ou não fissurada, bem como, a natureza da fibra, sua resistência, geometria, orientação e/ou distribuição, exercem influência direta na transmissão de esforços entre a matriz de cimento e a fibra.

3.1.3 Mecanismos de Ruptura em Materiais Compósitos Reforçados com Fibras

Similar ao comportamento do concreto simples a ruptura dos materiais compósitos, sob diversos tipos de carregamento, ocorre após a ruptura da matriz ao longo de planos onde a deformação por tração excede um valor admissível. A ruptura é seguida por uma fissuração múltipla da matriz, antes da ruptura do compósito, se as fibras são suficientemente longas (ou contínuas). Entretanto quando fibras curtas e resistentes (aço, polipropileno, vidro, etc.) são usadas para reforçar matrizes frágeis (concreto, argamassa e pasta de cimento), estando a matriz fissurada, um dos seguintes tipos de ruptura irá ocorrer (Gopalaratnam e Shah, 1987):

- O compósito rompe imediatamente após a fissuração da matriz. Isso se deve a uma quantidade inadequada de fibras na seção crítica ou a um comprimento de fibra insuficiente para transferir as tensões de tração através da matriz fissurada.

- Uma vez que o carregamento máximo no compósito não é significantemente diferente do carregamento da matriz, o compósito continua a carregar um esforço decrescente após se atingir um valor máximo. A resistência do compósito, após o estabelecimento do carregamento máximo, é fornecida pela tensão de cisalhamento devido ao atrito, desenvolvida na interface fibra-matiz, quando a fibra é arrancada da seção fissurada. Durante o arrancamento há um considerável aumento na resistência à fratura do compósito.

- Se após a fissuração da matriz, o compósito é capaz de suportar um carregamento crescente, a tensão máxima no compósito e a correspondente deformação são

maiores que a da matriz individualmente. No trecho inelástico, definido entre a tensão correspondente à formação da primeira fissura e a tensão máxima alcançada pelo compósito, ocorre uma decoesão progressiva e um deslizamento sob atrito, da interface fibra-matriz, com a formação de micro-fissuras. Esse tipo de ruptura resulta no uso eficiente dos constituintes: fibra e matriz.

A Fig. 3.4, obtida do ensaio de prismas de concreto com fibras e rompidos à flexão, nos ajuda a compreender os tipos de ruptura descritos acima. O primeiro caso é representado pelo trecho *OAB*, enquanto o segundo e o terceiro são representados pelos trechos *OAC* e *OAE*. O trecho intermediário *OAD* define o comportamento do compósito para um volume de fibras denominado crítico.

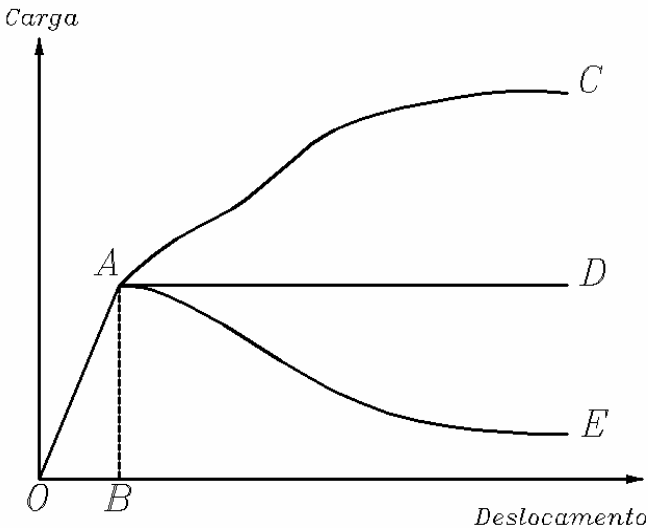


Figura 3.4 – Compósito reforçado com fibras em teores abaixo (OAE), acima (OAC) e igual ao volume crítico (OAD), durante o ensaio de tração na flexão.

O volume crítico (V_c) corresponde ao volume de fibra capaz de manter a mesma capacidade portante para o compósito após a ruptura da matriz, ou seja, abaixo do volume crítico ocorre uma queda no carregamento que o material tem capacidade de suportar. Acima do volume crítico o compósito continua aceitando níveis de carregamentos crescentes mesmo após a ruptura da matriz. Dessa forma tem se como premissa que

volumes de fibras inferiores ao volume crítico são responsáveis pela redução da propagação das fissuras e o conseqüente aumento da resistência ao fraturamento do CCRF em relação aos materiais cimentícios de uso comum (pasta de cimento, argamassa e concreto de cimento Portland). Um volume da ordem de *1*% do volume de concreto é definido como volume crítico (V_c), quando se utiliza fibras de aço como reforço, segundo Figueiredo (2000).

3.2 O Concreto Reforçado com Fibras de Aço (CRFA)

Para as aplicações estruturais um destaque deve ser dado as fibras de aço descontínuas adicionadas ao concreto e então denominado concreto reforçado com fibras de aço (CRFA). O concreto reforçado com fibras de aço (CRFA) constitui o material estrutural focalizado neste trabalho.

As fibras de aço são produzidas em vários formatos, dimensões e tipos de aço. Há três tipos mais comuns de fibras de aço, disponíveis no mercado brasileiro. O primeiro tipo produzido foi à fibra de aço corrugada (Fig. 3.5). É fabricada a partir do fio que sobra da produção de lã de aço. Trata-se, portanto, de uma sobra industrial. Esse fio é cortado com um comprimento que varia entre $25\,mm$ a $50\,mm$, conformado longitudinalmente, para se obter o formato corrugado. O formato corrugado tem por objetivo melhorar a aderência da fibra com a matriz de concreto. Tem como vantagens principais o baixo custo e a pouca ou nenhuma interferência na consistência do concreto (Figueiredo, 2000).

Figura 3.5 – Fibra de aço corrugada (desenho sem escala).

O segundo tipo de fibras de aço foi desenvolvido e posteriormente produzido com o objetivo específico de atuar como reforço do concreto. Trata-se de uma fibra com ancoragem em gancho em suas extremidades e seção retangular (Fig. 3.6). É produzida a partir de chapas de aço que são cortadas na largura da fibra e, concomitantemente, conformadas de modo a se obter o formato desejado da ancoragem em gancho.

Figura 3.6 – Fibra de aço em gancho e seção retangular (desenho sem escala).

O terceiro tipo de fibras de aço possui um formato similar ao anterior, com a diferença básica na forma circular característica da seção transversal (Fig. 3.7). Estas fibras são produzidas a partir de fios trefilados, progressivamente, até se chegar ao diâmetro desejado. Esse tipo de fibra acaba por apresentar uma maior resistência mecânica (dado o seu encruamento), que pode ser aumentada quando se utiliza aços com maior teor de carbono. Apresentam comprimentos variando de $25\,mm$ a $60\,mm$ e fator de forma entre 25 a 120, o qual é dado pela relação entre o comprimento da fibra *(l)* e o diâmetro *(d)* da circunferência com área equivalente á sua seção transversal.

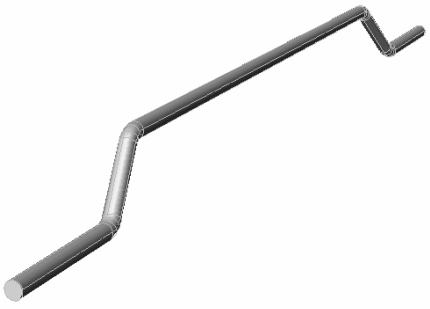


Figura 3.7 – Fibra de aço em gancho e seção circular (desenho sem escala).

A adição de fibras de aço na mistura água, cimento e agregado, com o objetivo de se obter um material mais resistente, homogêneo, isotrópico e moldável foi uma pergunta que se iniciou a mais de um século atrás e que nos dias atuais pode ser considerado uma realidade. O sucesso no emprego do concreto reforçado com fibras de aço teve início nos anos sessenta e, desde então, muitos pesquisadores estão tentando avaliar as propriedades potenciais desse material para as mais diversas aplicações (Barragán, 2002).

O advento do reforço do concreto com fibras aumentou a sua versatilidade, enquanto material, proporcionando um método efetivo para superar suas características de fragilidade (Meta e Monteiro, 1985). A baixa capacidade de deformação na matriz fissurada é contornada pela transposição das fissuras pelas fibras (Fig. 3.8), prevenindo uma ruptura catastrófica enquanto a fissura se propaga. O resultado da transposição da fissura pelas fibras é denominada efeito de ponte de transferência de tensão, "*briding effect*".

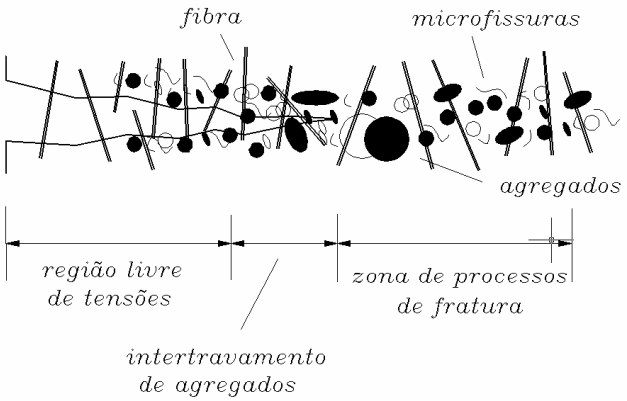


Figura 3.8 – Representação esquemática da ponte de trasnferência de tensão no concreto.

O sucesso na utilização das fibras de aço para o reforço da matriz de concreto se deve, em grande parte, ao seu elevado módulo de elasticidade (E), quando comparado com o módulo da matriz. A Tabela 3.1 mostra as propriedades físicas e mecânicas de alguns tipos de fibras para uma comparação com as propriedades da matriz.

Tabela 3.1 – Propriedades típicas de alguns tipos de fibras.

Material	Diâmetro (μm)	Densidade (g/cm³)	Módulo de elasticidade (GPa)	Resistência à Tração (GPa)	Deformação na ruptura (%)
Aço	5,0-500	7,84	190-210	0,5-2,0	0,5-3,5
Vidro	9,0-15	2,6	70-80	2,0-4,0	2,0-3,5
Amianto	0,02-0,4	2,6	160-200	3,0-3,5	2-3
Polipropileno	20-200	0,9	5-77	0,5-0,75	8
Kevklar	10	1,45	65-133	3,6	2,1-4
Carbono	9	1,9	230	2,6	1
Nylon	-	1,1	4,0	0,9	13-15
Celulose	-	1,2	10	0,3-0,5	-
Acrílico	18	1,18	14-19, 5	0,4-1,0	3
Polietileno	-	0,95	0,3	$0,7x10^{-3}$	10
Fibra de madeira	-	1,5	71	0,9	-
Sisal	10-50	1-50	-	0,8	3
Matriz de cimento (para comparação)	-	2,5	10-45	$3,7x10^{-3}$	0,02

Esse aspecto é mais bem compreendido ao se observar a Fig. 3.9, na qual se representa o trabalho de uma matriz hipotética reforçada com dois tipos de fibras, uma de módulo de elasticidade alto e outra de módulo baixo, sendo todas de comportamento elástico perfeito. A curva de tensão por deformação da matriz está representada pela linha OA, enquanto as linhas OB e OC representam o trabalho elástico das fibras de alto e baixo módulo de elasticidade, respectivamente. No momento em que a matriz se rompe (ponto *A*) e transfere a tensão para a fibra de baixo módulo (ponto *C*), esta apresenta uma tensão muito baixa neste nível de deformação (σ_{Eb}), devendo ser deformada intensamente, até o ponto *D*, para garantir o mesmo nível de tensão (tensão correspondente à ruptura da matriz de cimento, σ_{rm}). Logo, a fibra de baixo módulo não poderá oferecer uma capacidade de reforço após a fissuração da matriz, para um dado carregamento, ou permitirá uma grande deformação do compósito com o conseqüente aumento do nível de fissuração (ponto *D*). Isto ocorreria supondo-se que a fibra de baixo módulo tenha resistência mecânica suficiente para atingir o nível de tensão associado ao ponto *D* (σ_{rm}) O que normalmente acontece é que fibras de baixo módulo apresentam menor resistência mecânica (ver, Tab. 3.1). Por outro lado, a fibra de alto módulo de elasticidade já

apresentará um elevado nível de tensão (tensão na fibra de módulo de elasticidade alto, σ_{Ea}) no momento da ruptura da matriz, o que lhe permitirá atuar como um reforço já a partir do ponto *B*, caso sua resistência não seja superada (Figueiredo, 2000).

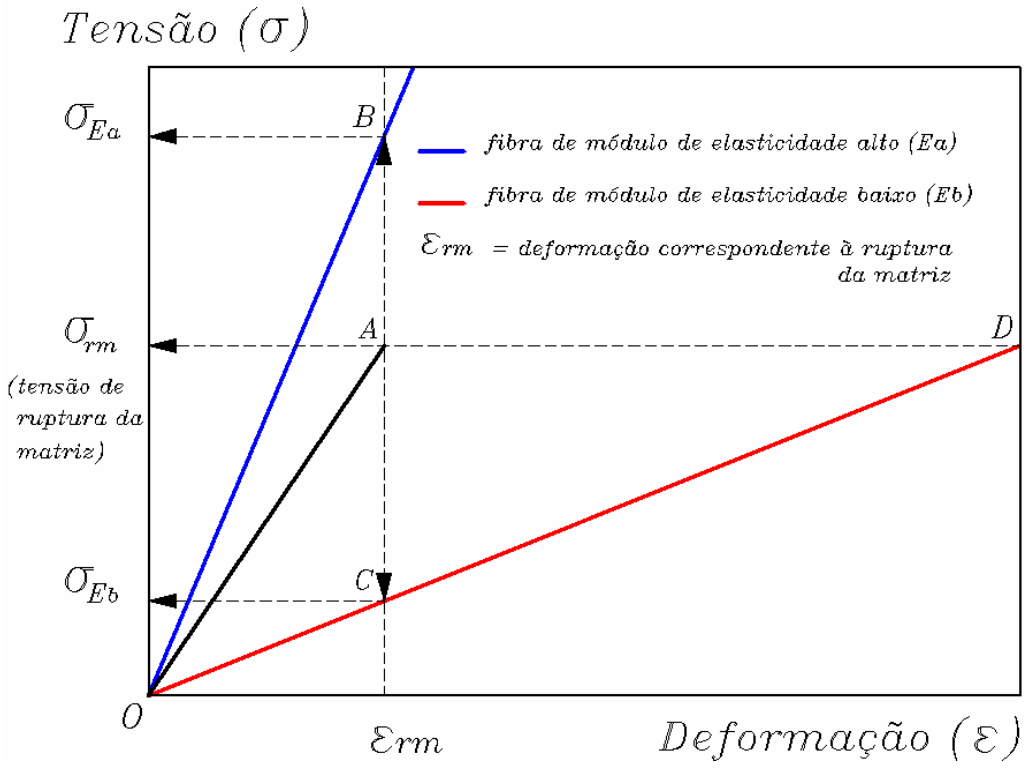


Figura 3.9 – Diagrama tensão-deformação para matriz e fibras trabalhando em conjunto

Segundo Vandewalle (RILEM, 2002), após a matriz atingir a tensão de fissura (resistência à tração), dá se início a um processo de competição, à mobilização dos esforços, entre a fibra e a matriz de cimento. Para pequenas aberturas de fissuras a ação da matriz é dominante, enquanto a resposta em fases posteriores, grandes aberturas de fissuras, a fibra é a principal contribuição (Fig. 3.10).

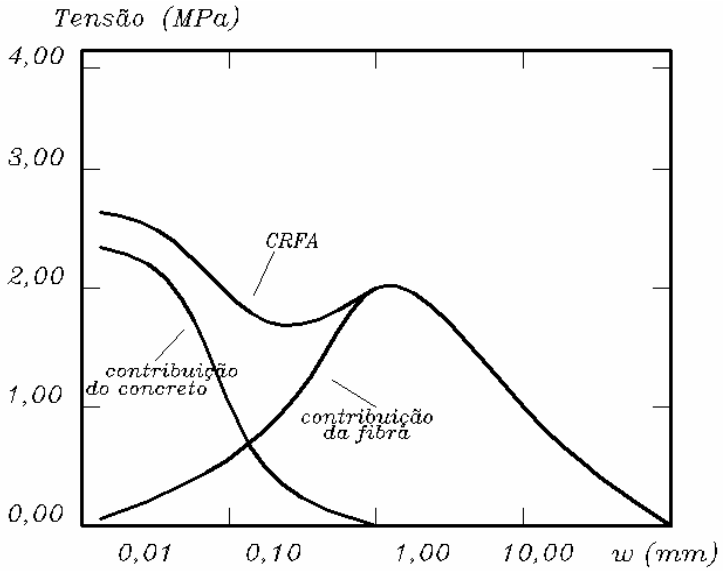


Figura 3.10 – Competição à mobilização de esforços entre a fibra e a matriz de cimento.

Na maioria das aplicações, as fibras são usadas em volumes inferiores a 1% do volume de concreto. O conteúdo de fibra é limitado pelo seu alto custo (Li, 2000), além do fato de que volumes crescentes de fibras implicam em uma redução da sua trabalhabilidade para os métodos tradicionais de mistura (Bentur e Mindess, 1990).

Concretos incorporados com altos volumes de fibras de aço têm sido continuamente processados tal qual, SIFCON - Slurry Infiltrated Fiber Concrete - (Balaguru e Kendzulak, 1987; Mondragon, 1987; Homrich e Naaman, 1987), com reforço entre 4% e 20%, ou mais. Esses concretos, com alto volume de fibras imersos na matriz de cimento, são chamados de concretos reforçados de alto desempenho. Li (2002), cita que apesar do alto desempenho destes tipos de concreto, sua utilização comercial é restrita a pequenos elementos estruturais, possivelmente devido às limitações impostas pelo seu peso elevado, pelo custo associado com o alto conteúdo de fibra utilizado, além das penalidades impostas pelos métodos de processamento destes tipos de compósitos.

3.2.1 Aplicação Estrutural do CRFA

Segundo Soroushian (1999), dependendo da característica da fibra e da fração de volume utilizada, a melhora de diferentes características do concreto endurecido pode ser obtida através da introdução de fibras de aço (Fig.3.11).

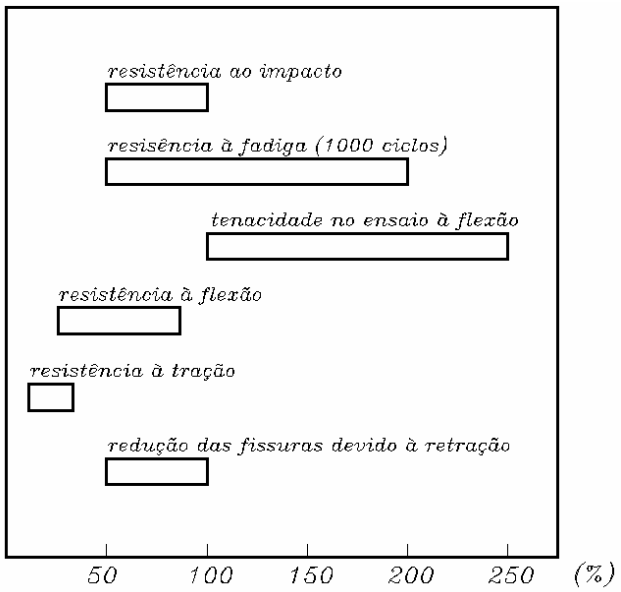


Figura 3.11 – Desempenho do CRFA para diferentes características do concreto endurecido (aumento percentual em relação ao concreto simples).

Vários estudos laboratoriais, ao redor do mundo, têm demonstrado que, sem sombra de dúvidas, a adição de fibras de aço ao concreto é efetiva no aumento da resistência e da ductilidade de elementos estruturais submetidos à flexão, ao esforço cortante, à torção e a uma combinação de carregamentos (Li, 2000). Uma descrição detalhada das propriedades e do comportamento mecânico do CRFA pode ser encontrada em Balaguru e Shah (1992).

Em elementos de concreto armado a adição de fibras aumenta considerálvemente a resistência à flexão da estrutura, com o conseqüente aumento da sua capacidade de rotação. Para as vigas de CRFA, com ou sem armadura principal, o ganho de resistência e

o ganho de ductilidade apresentado pela viga no pós-pico (após a resistência à tração do compósito ser atingida) está associado ao efeito de ponte de transferência de tensão quando a viga é fletida além do limite elástico. Para vigas com armadura dupla, o aumento da sua ductilidade, relativamente a uma viga confeccionada em concreto simples (CS), está também associado ao aumento da capacidade de deformação na região comprimida da viga. O aumento da capacidade de deformação na região comprimida exerce um efeito retardado no esmagamento do concreto. Resultados de parte de um estudo realizado por Craig (1987), em vigas com armadura dupla e simples, com e sem fibras de aço, é apresentado no gráfico da Fig. 3.12.

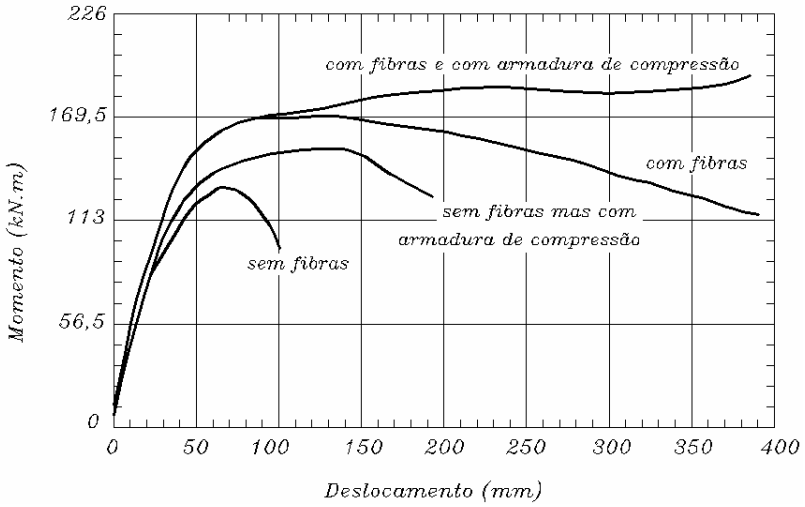


Figura 3.12 – Aumento da ductilidade em vigas de CA e CARFA

Uma aplicação potencial do CRFA é a substituição efetiva dos estribos, comumente utilizados em vigas de concreto armado, contra a ruptura diagonal devida ao esforço cortante. O uso de armadura para o reforço ao esforço cortante em vigas de concreto armado é bastante laborioso e a sua substituição por fibras de aço pode representar um ganho de tempo considerável no canteiro de obras.

Na ruptura ao cisalhamento, a adição de fibras ao concreto, tem a capacidade de combater a sua natureza frágil. Tão logo a fissura diagonal é formada, as fibras são ativadas pela

transposição das fissuras. Se a o efeito de ponte e a resistência ao cisalhamento na superfície da fibra são altos o suficiente a natureza frágil, deste tipo de ruptura, pode ser evitada (Li, 2000). O efeito da adição de fibras para resistir ao esforço cortante em vigas de CARFA depende da razão entre o vão de cisalhamento a e a sua altura-útil d (Fig. 3.13). Na Fig. 3.13, b representa a largura da viga.

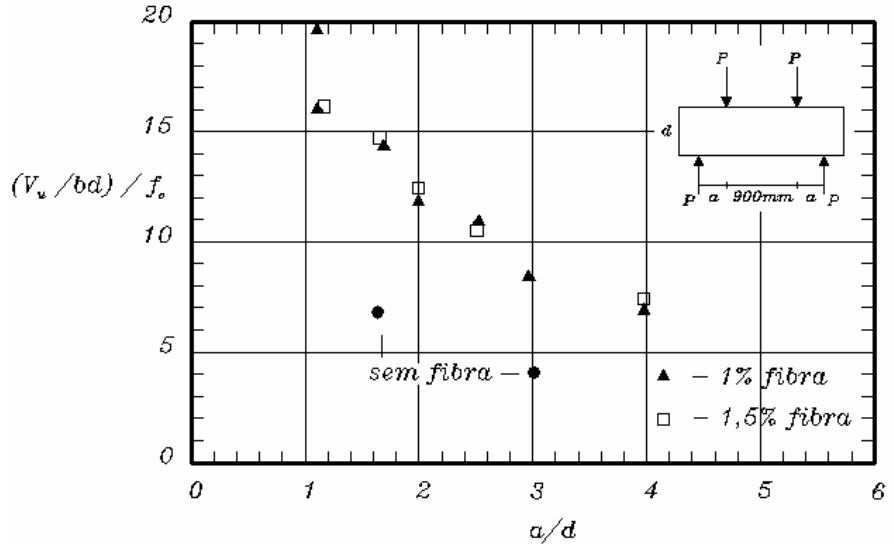


Figura 3.13 – Variação da capacidade resistente ao esforço cortante com a razão *a/d* em vigas de CRFA

O modo de vigas submetidas à torção é similar ao das vigas submetidas ao cisalhamento por cortante, no sentido de que fissuras diagonais se formam em resposta às tensões principais de tração. Novamente, as fibras são efetivas em transpor as fissuras diagonais e retardar a ruptura dos elementos estruturais, conforme demonstra a Fig. 3.14.

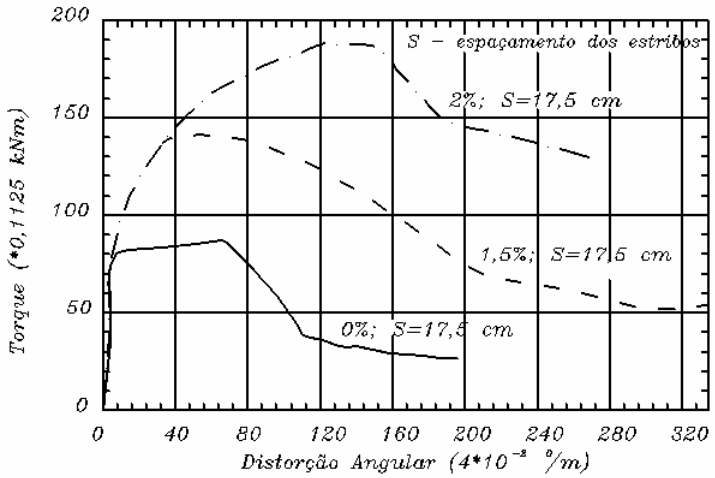


Figura 3.14 – Aumento da capacidade resistente à torção em elementos de CRFA

A Fig. 3.15 mostra o efeito da adição de fibras de aço no comportamento de um elemento estrutural submetido ao esforço combinado de torção, flexão e cisalhamento. Sob uma combinação de carregamentos, o exato local onde ocorrerá uma fissura é difícil de prever. As fibras, devido a sua distribuição randômica, conseguem transpor as fissuras em qualquer direção e no local em que estas se formam.

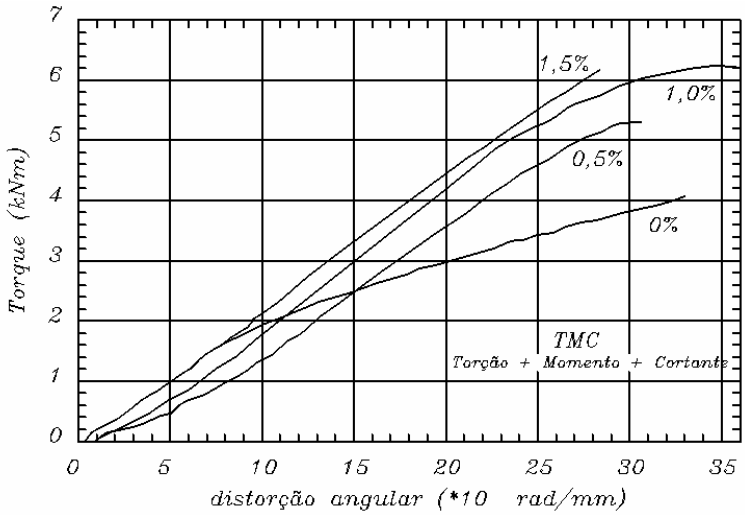


Figura 3.15 – Aumento da capacidade resistente em elementos estruturais de CRFA, sob a ação de esforços combinados

Um aumento da resistência ao arrancamento da armadura para o CRFA, também é observado em relação ao concreto de uso comum. As evidências experimentais mostram que o deslizamento relativo (*"bond-slip"*), entre a armadura e o CRFA é drasticamente alterado. É registrado um fator de 2 a 5 para o aumento da resistência de aderência, e um aumento de até 20 vezes no carregamento máximo, obtido para o ensaio de arrancamento (Li, 2000).

Capítulo 4

Métodos Numéricos em Mecânica Computacional

A complexidade do modelo matemático que representa o comportamento de muitos problemas de engenharia levou o desenvolvimento de métodos aproximados para a sua solução (Assan 2003).

Os métodos utilizados para aproximar o conjunto solução $y(x_i)$, de um dado problema, onde x_i são as condições de existência ou de domínio, são denominados *Métodos Numéricos*. Como exemplo de métodos numéricos para a aproximação do valor da *"função"* $y(x_i)$, pode se citar os métodos variacionais, com destaque para os métodos de Kantorovich, Trefftz, Rayleigh-Ritz e o método dos resíduos ponderados onde se tem, entre outros, os métodos dos quadrados mínimos, da colocação e de Galerkin.

Soluções fáceis e pouco trabalhosas somente existem para uma pequena classe de problemas, usualmente para aqueles com uma geometria regular e com condições simples de restrições e carregamento. Isso é verdade não apenas para a análise estrutural, mas também para modelos físicos em geral. A mais universal técnica numérica aplicável para

problemas com geometria e condições de contorno arbitrária, nos dias atuais, é o *Método dos Elementos Finitos (MEF)*.

Apesar de concorrer em certos campos com outras técnicas, tais quais, diferenças finitas, elementos de contorno, volumes finitos e o método espectral ou da malha ausente, o MEF ocupa uma posição dominante (Jirásek 2003).

4.1 O Método dos Elementos Finitos (MEF)

O método dos elementos finitos é visto com um procedimento numérico para aproximar a solução de problemas cujas condições de contorno são tratadas como condições de domínio. Esse domínio é substituído pela união de subdomínios disjuntos chamados *elementos finitos*, tornando o meio contínuo em discreto, como mostra a Fig. 4.1.

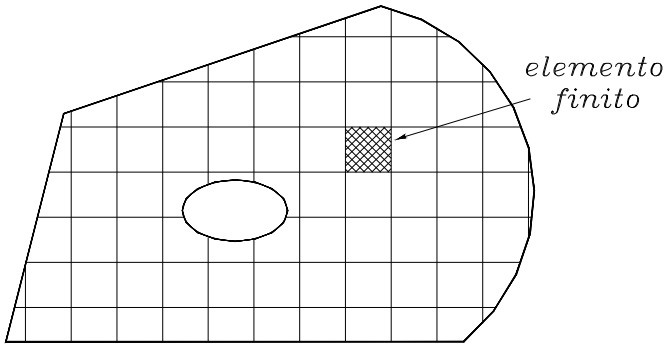


Figura 4.1 – Malha de elementos finitos

A divisão do domínio dá-se o nome de *reticulado*, *rede ou malha de elementos finitos*. A malha pode ser aumentada ou diminuída ao se variar o tamanho dos elementos finitos. Os pontos de intersecção dessa rede são chamados de nós.

Os elementos finitos podem ser unidimensionais, planos (bidimensionais) e volumétricos (tridimensionais), com lados retos (lineares) ou curvos (ex: elementos isoparamétricos), ver Fig. 4.2. Seu uso se deve a conveniência ao estudo que será realizado (estado plano de tensões, de deformações, assimetria, estado tri-axial de tensões, efeitos de segunda ordem, etc.), uma vez que dependem dos graus de liberdade nodais, conforme definição posterior.

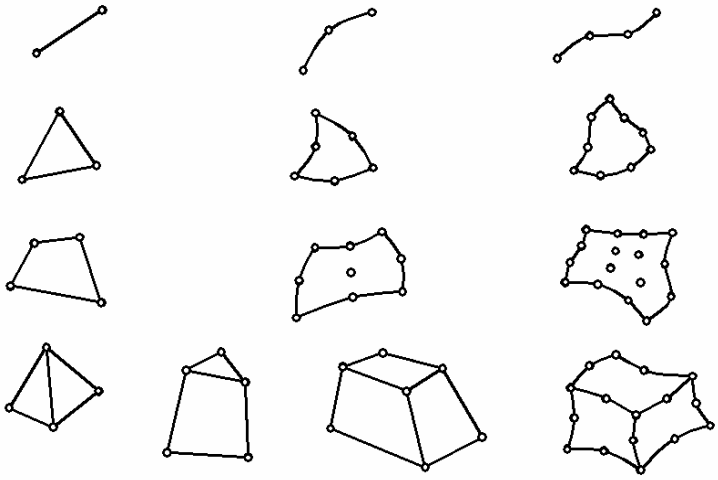


Figura 4.2 – Geometrias típicas de elementos finitos unidimensionais, planos e volumétricos

Elementos lineares unidimensionais podem ser empregados, por exemplo, no estudo de vigas de eixo reto, treliças e pórticos em geral; elementos curvos podem ser empregados para o estudo de cabos ou armaduras com disposição em curva (ex: na modelagem de vigas balcão e de reservatórios circulares). Os elementos bidimensionais podem ser empregados no estudo de chapas, placas e cascas. Para o estudo de membros estruturais no espaço, empregam-se os elementos volumétricos.

Nos nós do elemento finito são definidos os graus de liberdade e/ou incógnitas, que podem ser campos de tensões, de deslocamentos e outros, relativamente ao problema em estudo, o que permite a definição de uma função aproximadora para os valores dos graus de liberdade de cada nó I do elemento. A integração da função aproximadora dos

valores incógnitas, de todos os nós da malha de elementos finitos, origina a função aproximadora para o domínio do problema analisado.

Para um ponto qualquer dentro do elemento finito, uma vez que os valores das incógnitas não são conhecidos, seu valor pode ser aproximado por funções de interpolação polinomiais, que são definidas em termos dos valores das incógnitas nos nós do elemento.

Se o problema a resolver envolve campos de deslocamentos descritos pelas funções aproximadoras e o princípio da mínima energia potencial é empregado, de acordo com o critério de Rayleigh-Ritz, os graus de liberdade ou incógnitas são as componentes dos deslocamentos nodais e o método dos elementos finitos é denominado de *modelo da rigidez ("Direct Stiffness Method")* ou *modelo dos deslocamentos*.

Se o problema a resolver envolve campos de tensões ou esforços internos e o princípio da mínima energia complementar é utilizado, os graus de liberdade ou incógnitas são tensões ou esforços internos o método dos elementos finitos é denominado de *modelo das forças* ou *modelo da flexibilidade*.

Existem outros modelos, para o método dos elementos finitos, baseados em princípios variacionais generalizados tais quais, os modelos híbridos, mistos e os modelos de equilíbrio (Felippa, 2004).

4.1.1 Notas Históricas

4.1.1.1 Quem Inventou o Método dos Elementos Finitos (MEF)?

Embora a denominação *Método dos Elementos Finitos* seja bastante recente, a idéia do método já era conhecida pelos pensadores da Grécia Antiga. *Euxódio*, criador do método da exaustão, que consiste em inscrever e circunscrever figuras retilíneas em figuras

curvilíneas, já pensava, dessa forma, ao discretizar uma figura contínua para facilitar certos cálculos (Assan, 2003). Esse método permitiu que fossem calculadas áreas de figuras curvas e volumes de sólidos como esferas e cones.

Um exemplo desse antigo conceito é o calculo do comprimento C da circunferência, através da aproximação geométrica dada pela soma dos lados de um polígono inscrito (Fig. 4.3) ou pela solução analítica dada pela Eq. (4.1), onde: $L_{ij} = 2rSen(\pi/n)$ é o comprimento de um elemento genérico de extremidades ij (definidas como sendo os nós do elemento), $d = 2r$ é o diâmetro, r é o raio e n é o número de lados. Na Fig. 4.3b, tem-se $n = 8$.

$$C = \lim_{n\to\infty} nL_{ij} = \lim_{n\to\infty} 2nrSen(\pi/n) = 2\pi r \tag{4.1}$$

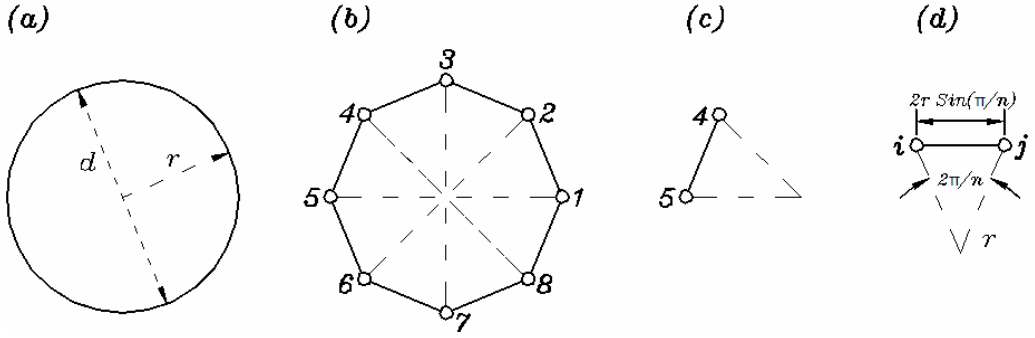


Figura 4.3 – Cálculo do comprimento da circunferência: (a) modelo contínuo, (b) aproximação discretizada pela inscrição de um polígono regular, (c) elemento desconectado, (d) elemento genérico ij

Para este simples problema podemos estimar o erro da aproximação como: $Erro = 2r[\pi - nSen(\pi/n)]$ e mostrar que o erro converge para a solução exata no limite quando $n \to \infty$ (Fig. 4.4). O exemplo acima descreve a idéia do método dos elementos finitos que é a discretização do contínuo e/ou sua divisão em subdomínios e, a partir daí, definida uma função para o comportamento do elemento discreto, neste caso o

comprimento L_{ij}, traduzir o comportamento do todo. Os passos descritos neste exemplo introduzem os conceitos presentes na análise de qualquer problema utiizando o método tais quais, a discretização do domínio, a equação do elemento, a associação (assemblagem) das equações do elemento e sua solução e a verificação da convergência através da estimativa do erro da aproximação.

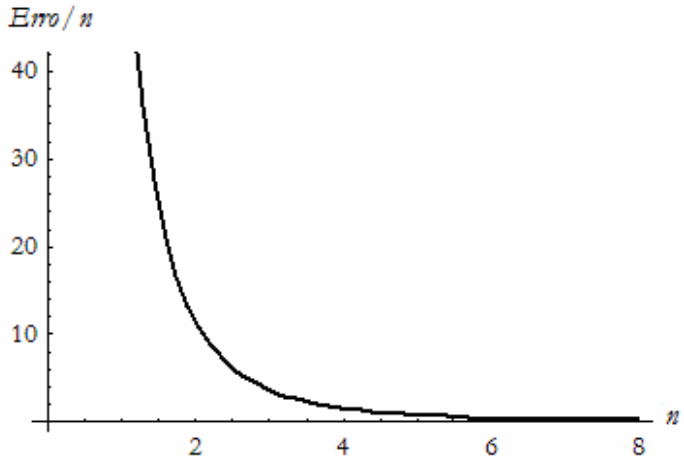


Figura 4.4 – Convergência da solução através do método dos elementos finitos.

Segundo Felippa (2004), o MEF tal como é usado nos dias de hoje foi introduzido por *M. J. Turner* da empresa de aeronáutica Boeing, durante os anos de 1950 a 1962. Ele formulou e aperfeiçoou o método dos elementos finitos *modelo da rigidez* ("*Direct Stiffness Method"*). Ao lado de *Turner*, os maiores colaboradores com a prática corrente do MEF, incluem: *B. M. Iron*s, inventor dos elementos isoparamétricos e das funções de forma; *R. J. Melosh*, que reconheceu a ligação do *modelo da rigidez* com o método de Rayleigh-Ritz, sistematizando a formulação variacional do método, e *E. L. Wilson*, que desenvolveu o primeiro programa usando o MEF. Todos esses pioneiros atuaram na área da indústria aeroespacial, pelo menos em uma parte de suas carreiras. Somente nessas grandes companhias, durante os anos de 1950, é que se tinha o principal ingrediente para o desenvolvimento do método que são os computadores digitais.

Capítulo 4 – Métodos Numéricos em Mecânica Computacional

Quatro acadêmicos: *J. H. Argyris*, *R. W. Clough*, *H. C. Martin*, e *O. C. Zienkiewicz* são os grandes popularizadores do método. São eles os responsáveis pela transferência de tecnologia da indústria aeroespacial para a maior parte das aplicações em engenharia, durante os anos de 1950 e 1960. O primeiro aprendeu o método, direta ou indiretamente, com *Turner*, enquanto consultor da Boeing. *Argyris* era um especialista no *método das forças* da hiperestática clássica no Imperial College de Londres e trocava correspondências com *Turner*. *Clough* e *Martin* eram professores juniores da Universidade da Califórnia em Berkeley e da Universidade de Washington, respectivamente. Esses entraram em contato com o grupo de *Turner*, através de um intercâmbio de verão, durante 1952 e 1953. Essa colaboração resultou num trabalho pioneiro publicado em 1956 por *Turner*, *Clough*, *Martin* e *Topp*, sob o título: "*Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures"* e popularmente conhecido por *TCMT*. O nome *Método dos Elementos Finitos* foi batizado por *Clough* em 1960, em contraposição ao nome *Elementos Infinitesimais do Cálculo Diferencial*. Esse pesquisador foi o primeiro a expandir a idéia do método para aplicação em Engenharia Civil. *Olek Zienkiewicz* era um experto no *método das diferenças finitas* e foi convencido por *Clough* em 1964 a usar o MEF. *Zienkiewicz* foi o primeiro a escrever um livro texto sobre o assunto em 1967.

O artigo de *Turner*, *Clough*, *Martin* e *Top* (1956), considerado um dos trabalhos mais relevantes para o desenvolvimento do *Método dos Elementos Finitos*, onde são apresentadas aplicações de elementos finitos simples, tais como elementos de barra e elementos triangulares, utilizados para a análise da estrutura de aviões, e o trabalho de Argyris e Kelsey (1955), é reconhecido como o ponto de partida do MEF, tal como hoje é usado em diversas áreas, além da Engenharia de Estruturas. O desenvolvimento do *Método dos Elementos Finitos* a outras áreas de estudo só foi possível devido ao desenvolvimento e a rápida evolução da capacidade de processamento dos computadores digitais capazes de resolver o grande número de operações envolvidas.

Como indicam as fontes históricas o método dos elementos finitos não pode ser atribuído a um único indivíduo. Fazendo uso das palavras de Assan (2003):

"Todavia não se pode esquecer que os fundamentos nos quais o método dos elementos finitos se sustenta têm de ser apreendidos, e nomes como Bernoulli, Navier, Lagrange, Cauchy, Mhor, Maxwell, Clapeyron, Castigliano, Betti e tantos outros não podem deixar de ser lembrados".

Os pioneiros do *Método dos Elementos Finitos*, tal como é utilizado nos dias atuais, eram engenheiros versados em mecânica clássica. Eles seguiram um século de tradição tratando os elementos estruturais contínuos, como dispositivos discretos de transmissão de forças, com propriedades de rigidez e elasticidade conhecidas, tal qual, os trabalhos pioneiros de McHenry (1943-1944) e de Hreinnikoff (1941), ao substituir um elemento estrutural contínuo, por exemplo, uma placa, por uma estrutura formada por barras, seguindo a geometria original e mantendo as mesmas condições de vinculações e cargas, o que originou a *Análise Matricial de Estruturas*.

Os métodos que originaram a análise matricial de estruturas, embora considerem o meio contínuo discretizado, não apresentam o rigor conceitual do método dos elementos finitos, ao admitir funções contínuas que representam, por exemplo, o campo de deslocamentos no domínio de um elemento para, a partir daí, se obter o estado de deformações correspondentes que, associado às relações constitutivas do material, permitem definir o estado de tensões em todo o elemento.

O modelo discreto para a aproximação do contínuo, de acordo com o MEF, nos dá uma melhor aproximação do comportamento real das estruturas do que qualquer outro método de análise disponível nos dias de hoje.

4.1.2 Condições de Contorno em Problemas de Elasticidade Linear

Considerando um espaço tridimensional de coordenadas $x = \{x_1, x_2, x_3\}^T$, um problema em elasticidade linear é descrito através de equações básicas, que traduzem o campo das deformações (4.2), das tensões em função das deformações (4.3) e das condições de

equilíbrio (4.4), válidas dentro de um domínio V, que representa o corpo ou o elemento estrutural em análise.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{4.2}$$

$$\sigma_{ij} = D^{e}_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \bar{b}_i = 0 \tag{4.4}$$

De forma equivalente, as Eqs. (4.2), (4.3) e (4.4) podem ser escritas na notação de engenharia, como:

$$\varepsilon = \partial u \tag{4.5}$$

$$\sigma = D_e\,\varepsilon \tag{4.6}$$

$$\partial^T \sigma + \bar{b} = 0 \tag{4.7}$$

Nas Eqs. (4.2) a (4.7), dadas acima, $u = \{u_1, u_2, u_3\}^T$ é o vetor dos deslocamentos; $\varepsilon = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}\}^T = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{12}\}^T$ é a matriz coluna das componentes das deformações; $\sigma = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}\}^T$ é a matriz coluna das componentes de tensão; $\bar{b} = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3\}^T$ são as forças de volume atuando em um ponto qualquer do corpo;

$$\partial = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

é a matriz do operador diferencial que representa na notação de engenharia a parte simétrica do operador gradiente, dado na Eq.(4.2); e D_e é a matriz de rigidez elástica do material, dada, para materiais isotrópicos, como:

$$D_e = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

onde, E é o módulo de elasticidade do material e ν é coeficiente de Poisson. As equações (4.2), (4.3) e (4.4) devem satisfazer condições de contorno apropriadas, ou seja, os deslocamentos prescritos (restrições de apoio) e o carregamento externo, que assim se escrevem, nas equações (4.10) e (4.11).

$$u_i = \overline{u_i} \tag{4.10}$$

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \tag{4.11}$$

De forma equivalente,

$$u = \bar{u} \tag{4.12}$$

$$n\sigma = \bar{t} \tag{4.13}$$

onde:

$$n = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 & 0 & n_3 & n_2 \\ 0 & n_2 & 0 & n_3 & 0 & n_1 \\ 0 & 0 & n_3 & n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

é a matriz que contém as componentes n_i dos versores normais à superfície externa, devido as forças de superfície $\bar{t} = \{\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3\}^T$, atuando em uma porção da superfície livre, S_t, no contorno de V; $\bar{u} = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}^T$ é o deslocamento prescrito, em uma região restringida, Su, na superfície do corpo.

Para problemas formulados, em estado plano de tensões, estado plano de deformações e em assimetria, todas as matrizes podem ser reduzidas em relação às respectivas formulações. Tomando um estado plano de tensões no plano (x, y), tem-se: $\varepsilon = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12}\}^T$; $\sigma = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}^T$. A matriz de rigidez elástica dada em (4.9) é substituída por:

$$D_e = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

e o operador diferencial dado em (4.8) é reduzido, conforme a equação matricial (4.16).

$$\partial = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

4.1.2.1 Discretização Através do Método dos Elementos Finitos

A versão padrão do MEF é o modelo dos deslocamentos. Esse modelo é uma generalização do método da rigidez da análise estrutural (hiperestática), sendo as componentes dos deslocamentos aproximadas através da combinação linear de funções de interpolação $N_I(x),\ I = 1, 2, ..., N_{nod}$, convenientemente escolhidas e denominadas de *funções de interpolação* e/ou *funções de forma*. A propriedade típica das funções de forma é que cada uma delas se associa com um dos enésimos nós (N_{nod}) do modelo, sendo o valor da $I-ésima$ função igual a um para o nó de número I e igual a zero para os demais nós do reticulado, rede ou malha de elementos finitos. Essa aproximação dos deslocamentos é lida, matematicamente, da seguinte forma:

$$u_i(x) \approx \sum_{I=1}^{N_{nod}} N_I(x) d_{Ii}, \quad i = 1,2,3 \tag{4.17}$$

onde, d_{Ii} são parâmetros dos deslocamentos nodais a descobrir. Introduzindo, por conveniência, a notação matricial e dispondo os parâmetros dos deslocamentos em um vetor (matriz coluna) d e as funções de forma em uma matriz N, a aproximação (4.17) é reescrita, como:

$$u(x) \approx N(x) d \tag{4.18}$$

A relação entre as deformações e os deslocamentos dado pela Eq.(4.2), fornece a aproximação para as deformações, Eq.(4.19).

$$\varepsilon_{ij}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \approx \frac{1}{2}\sum_{I=1}^{N_{nod}}\left(\frac{\partial N_I}{\partial x_j}(x)d_{Ii} + \frac{\partial N_I}{\partial x_i}(x)d_{Ij}\right), \quad i,j = 1,2,3 \tag{4.19}$$

Na notação matricial a Eq.(4.19), se escreve como:

$$\varepsilon(x) \approx B(x)d \tag{4.20}$$

onde B é a matriz de incidência cinemática (ou simplesmente matriz B), que armazena as derivadas parciais das funções de forma em relação ao sistema de coordenadas no espaço.

Substituindo a aproximação das deformações (4.20) na equação constitutiva (4.3), obtém-se a aproximação das tensões:

$$\sigma(x) \approx D_e(x)B(x)d \tag{4.21}$$

As aproximações para os deslocamentos, para as deformações e para as tensões satisfazem as condições cinemáticas (4.2) e as equações constitutivas (4.3) de forma plena. Entretanto, para as condições de estática, uma vez que as aproximações dependem apenas de certo número de parâmetros de deslocamentos desconhecidos, a equação diferencial de equilíbrio (4.4) em geral não pode ser satisfeita de forma exata em todos os pontos do corpo. Ao invés de se utilizar diretamente essas equações, essas devem ser substituídas pelo *Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV),* com a exigência que a igualdade:

$$\int_V \sigma^T \delta\varepsilon \, dV = \int_{S_t} \bar{t}^T \delta u dS + \int_V \bar{b}^T \delta u dV \tag{4.22}$$

deve conter um campo virtual de deslocamentos δu e um campo virtual de deformações $\delta\varepsilon$ que satisfaça a equação cinemática, $\delta\varepsilon = \partial\delta u$ em V, e a condição de contorno, $\delta u = 0$ na superfície restringida Su.

Considerando o deslocamento virtual como uma combinação linear das funções de forma,

$$\delta u(x) \approx N(x)\delta d \tag{4.23}$$

onde δd é uma matriz coluna dos parâmetros (arbitrários) dos deslocamentos virtuais. O correspondente campo de deslocamentos, derivado das equações cinemáticas, é dado por:

$$\delta\varepsilon(x) \approx B(x)\delta d \tag{4.24}$$

Substituindo (4.21), (4.23) e (4.24) na igualdade (4.22), denominada de *forma fraca de equilíbrio,* obtém-se a forma fraca discretizada (4.25).

$$\int_V d^T B^T(x) D_e^T(x) B(x)\delta d dV = \int_{S_t} \bar{t}^T N(x)\delta d dS + \int_V \bar{b}^T N(x)\delta d dV \tag{4.25}$$

Uma vez que d e δd não estão em função do sistema de coordenadas no espaço, podem ser retirados fora da integral e a Eq.(4.25) pode ser reescrita, como:

$$d^T K_e^T \delta d = f_{ext}^T \delta d \tag{4.26}$$

onde,

$$K_e = \int_V B^T(x) D_e(x) B(x) dV \tag{4.27}$$

é a matriz de rigidez elástica global e

$$f_{ext} = \int_{S_t} N^T(x)\bar{t}dS + \int_V N^T(x)\bar{b}dV \tag{4.28}$$

é o vetor das forças nodais (externas) equivalente. A equação (4.26) é satisfeita para uma matriz coluna arbitrária de parâmetro virtual de deslocamento δd apenas se,

$$K_e d = f_{ext} \tag{4.29}$$

que é a equação discretizada de equilíbrio que permite computar o valor do parâmetros desconhecidos, d , dos deslocamentos.

4.1.3 Condições de Contorno em Materiais com Não-Linearidade

As derivações feitas anteriormente podem ser estendidas para o caso de não-linearidade física do material. A principal diferença é que a relação constitutiva é agora não-linear. De maneira formal

$$\sigma = \tilde{\sigma}(\varepsilon) \tag{4.30}$$

onde $\tilde{\sigma}$ é o operador constitutivo da tensão, denotando o comportamento não linear do material. A aproximação (4.21), para o estado de tensão, é então substituída por:

$$\sigma(x) \approx \tilde{\sigma}(B(x)d) \tag{4.31}$$

e a forma fraca de equilíbrio discretizada passa a ser:

$$\int_V \tilde{\sigma}^T(B(x)d)B(x)\delta d dV = \int_{S_t} \bar{t}^T N(x)\delta d dS + \int_V \bar{b}^T N(x)\delta d dV \tag{4.32}$$

ou, de forma equivalente,

$$f_{\text{int}}^{T}(d)\delta d = f_{ext}^{T}\delta d \tag{4.33}$$

onde:

$$f_{\text{int}}(d) = \int_{V} B^{T}(x)\tilde{\sigma}(B(x)d)dV \tag{4.34}$$

é a matriz coluna das forças internas equivalentes que agora dependem, de forma não linear, dos parâmetros dos deslocamentos. A forma final da equação discretizada de equilíbrio é então:

$$f_{\text{int}}(d) = f_{ext} \tag{4.35}$$

que é um conjunto de equações algébricas não-lineares. A Eq. (4.29) obtida para a elasticidade linear pode ser interpretada como sendo um caso especial da Eq. (4.35), onde as forças internas são dadas pela função de 1º grau: $f_{\text{int}}(d) = K_e d$.

4.1.3.1 Linearização de Equações Não-Lineares

A solução numérica das equações não lineares freqüentemente explora o conceito de linearização. Supondo que $\bar{\varepsilon}$ é um estado de deformação e $\bar{\sigma} = \tilde{\sigma}(\bar{\varepsilon})$ é o correspondente estado de tensão de acordo com a equação constitutiva (4.30), a função $\tilde{\sigma}$ pode ser expandida através da série de Taylor na vizinhança de $\bar{\varepsilon}$, de acordo com a Eq. (4.36).

$$\tilde{\sigma}(\bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon) = \tilde{\sigma}(\bar{\varepsilon}) + \left.\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\bar{\varepsilon}} \Delta\varepsilon + \ldots \tag{4.36}$$

Na Eq. (4.36), uma deformação ε qualquer é expressa como sendo a soma de uma deformação conhecida $\bar{\varepsilon}$ e um incremento arbitrário $\Delta\varepsilon$. Para pequenos incrementos de $\Delta\varepsilon$, os termos quadráticos e de ordem superior da Eq. (4.36) podem ser negligenciados, o que conduz a lei constitutiva de linearização

$$\sigma \approx \tilde{\sigma}(\bar{\varepsilon}) + D(\bar{\varepsilon})\Delta\varepsilon \tag{4.37}$$

que aproxima a Eq. (4.30) para deformações na vizinhança de $\bar{\varepsilon}$. Na Eq. (4.37), $D \equiv \partial\tilde{\sigma}/\partial\varepsilon$, é a *matriz de rigidez tangente do material*, e a presença de $\bar{\varepsilon}$, enquanto argumento, indica que a matriz tangente depende, em geral, da forma como é avaliada. As propriedades dos materiais também podem variar no espaço, e assim o vetor de coordenadas espaciais x é também um argumento, o que resulta $D = D(x, \tilde{\varepsilon})$.

Com as equações constitutivas linearizadas, pode-se desenvolver as equações constitutivas para as forças internas. Supondo que $\bar{d}$ seja os deslocamentos nodais conhecidos, gerando um campo de deformações $\bar{\varepsilon}(x) = B(x)\bar{d}$ e um campo de tensões $\bar{\sigma}(x) = \tilde{\sigma}(\bar{\varepsilon}(x)) = \tilde{\sigma}(B(x)\bar{d})$, a expansão da série de Taylor para as forças internas nas proximidades de $\bar{d}$, implica na Eq. (4.38).

$$f_{\text{int}}(\bar{d} + \Delta d) = f_{\text{int}}(\bar{d}) + \left.\frac{\partial f_{\text{int}}}{\partial d}\right|_{d=\bar{d}} \Delta d + \ldots \tag{4.38}$$

Para pequenos valores do incremento, Δd, os termos não-lineares de segunda ordem e os termos de ordem superior podem ser ignorados. Assim a Eq. (4.39) é a aproximação linear da Eq. (4.38).

$$f_{\text{int}}(\bar{d} + \Delta d) \approx f_{\text{int}}(\bar{d}) + K(\bar{d})\Delta d \tag{4.39}$$

Na Eq. (4.39), $K \equiv \partial f_{\text{int}} / \partial d$ é a matriz de rigidez tangente do modelo estrutural ou *matriz de rigidez tangente global*. Diferenciando (4.34), obtém-se a matriz de rigidez global K dada pela Eq. (4.40).

$$K = \frac{\partial f_{\text{int}}}{\partial d} = \frac{\partial}{\partial d} \int_V B^T \tilde{\sigma} dV = \int_V B^T \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial d} dV = \int_V B^T \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial d} dV = \int_V B^T D B dV \quad (4.40)$$

Comparando a Eq. (4.40) com a Eq. (4.27) da análise linear, a única diferença é que a matriz de rigidez elástica do material, D_e, é substituída pela matriz de rigidez tangente, D. Usando uma notação mais rigorosa, a Eq.(4.40) pode ser reescrita, como:

$$K(\bar{d}) = \int_V B^T(x) D(x, B(x)\bar{d}) B(x) dV \quad (4.41)$$

onde fica explícito que para um ponto genérico do sistema de coordenas x a matriz D é avaliada pelo estado de deformação.

Nas implementações numéricas a contribuição de cada elemento finito, para o vetor das forças internas e para a matriz de rigidez, é avaliada separadamente. Assim, a matriz global é obtida pela associação dessas contribuições. A integração no volume de cada elemento, V_e, é feito numericamente de acordo com a Eqs. (4.42) e (4.43).

$$\int_{V_e} B^T(x) \tilde{\sigma}(B(x)d) dV \approx \sum_{k=1}^{N_{\text{int}}^e} \omega_k^e B^T(x_k^e) \tilde{\sigma}(B(x_k^e)d) \quad (4.42)$$

$$\int_{V_e} B^T(x) D(x, B(x)d) B(x) dV \approx \sum_{k=1}^{N_{\text{int}}^e} \omega_k^e B^T(x_k^e) D(x_k^e, B(x_k^e)d) B(x_k^e) \quad (4.43)$$

onde: $x_k^e, k = 1,2,...N_{\text{int}}^e$, são os pontos de integração do elemento de número e, e $\omega_k^e, k = 1,2,...N_{\text{int}}^e$, são os correspondentes pesos de integração.

4.1.4 Estratégias de Solução em Análise Não-Linear

O objetivo da análise não linear com o MEF é traçar a resposta de um modelo estrutural sujeito a um histórico de carregamento e que é feito através de um processo denominado incremental-iterativo (Jirásek, 2003). O carregamento é aplicado em diversos passos incrementais e a resposta estrutural, após cada passo, é computada pela equação de equilíbrio (4.35).

É importante distinguir entre o critério que fixa o tamanho de cada passo incremental e o critério que define o passo do processo iterativo que resolve a equação de equilíbrio. Exemplos de técnicas para o controle do tamanho do passo incremental incluem o controle de carregamento *("load control")*, o controle direto ou indireto do deslocamento *("direct or indirect displacement control")*, e o controle de comprimento de arco (*"arc-length control")*. Exemplos de métodos iterativos incluem os métodos de Newton-Raphson, Newton-Raphson modificado, o método secante e/ou método de quase-Newton, com destaque ao método BFGS, onde um relato detalhado pode ser encontrado em Dennis e Schnabel (1983).

De uma forma geral os métodos iterativos se distinguem pelo fato de manter a matriz de rigidez constante ou de atualizá-la a cada iteração. Conforme afirmam Kwak e Filippou (1990), Fairbairn e Menezes (1993), os métodos iterativos podem ser classificados em três grandes categorias: método da rigidez inicial, método da rigidez tangente e o método da rigidez secante, ilustrados na Fig. 4.5 (variações são admitidas nesses esquemas).

Dois componentes adicionais no processo incremental-iterativo são os critérios de convergência, ou seja, o erro admitido na solução, e que podem ser baseados em forças,

deslocamentos e em energia, e os aceleradores de convergência, tal qual a técnica conhecida como procura de linha (*"line-search"*), relatada em Crisfield (1983).

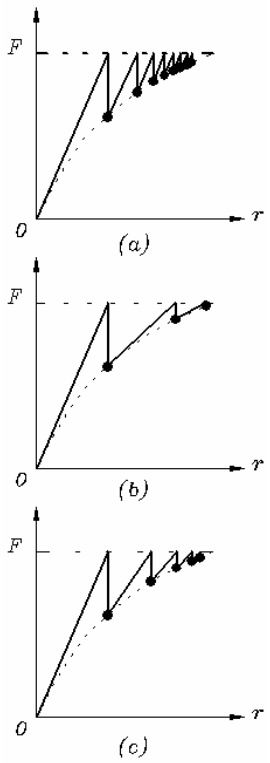


Figura 4.5 – Métodos iterativos: (a) método da rigidez inicial; (b) método da rigidez tangente; (c) método da rigidez secante

4.1.4.1 Métodos Incrementais-Iterativos

4.1.4.1.1 Método de Newton-Raphson com Controle de Carregamento

A maneira mais natural de representar um passo incremental consiste em expressar o carregamento externo ao final de cada passo. O carregamento é então expresso em termos do vetor das forças nodais (externas) equivalente, f_{ext}, ou convertido para esse formato através da integração da Eq. (4.28). A discretização do carregamento é então descrita pela

seqüência $f_{ext}^{(1)}, f_{ext}^{(2)}, f_{ext}^{(3)}$, etc.. O objetivo é determinar o correspondente vetor dos deslocamentos nodais, $d^{(1)}, d^{(2)}, d^{(3)}$, etc., tal que cada par ordenado $(d^{(n)}, f^{(n)})$ satisfaça a Eq. (4.35).

Considerando um passo incremental *n*, qualquer, o passo iterativo é iniciado com o deslocamento $d^{(n-1)}$, calculado no passo incremental anterior e satisfazendo a condição de equilíbrio entre as correspondentes forças interna $f_{\text{int}}(d^{(n-1)})$ e externa $f_{ext}(d^{(n-1)})$. Aumentando-se a força de $f_{ext}(d^{(n-1)})$ para $f_{ext}^{(n)}$ deve se encontrar o correspondente deslocamento $d_{ext}^{(n)}$ através da resolução da equação de equilíbrio (4.44).

$$f_{\text{int}}(d^{(n)}) = f_{ext}^{(n)} \tag{4.44}$$

Sendo $\Delta d^{(n)} = d^{(n)} - d^{(n-1)}$ o deslocamento incremental desconhecido, ao se aumentar a força externa de $f_{ext}(d^{(n-1)})$ para $f_{ext}^{(n)}$, o deslocamento inicial é dado por $d^{(n,0)} = d^{(n-1)}$. Após a linearização do lado esquerdo da equação não-linear (4.44) ao redor de $d^{(n,0)}$, obtém-se a equação linearizada,

$$f_{\text{int}}(d^{(n,0)}) + K(d^{(n,0)})\Delta d^{(n,1)} = f_{ext}^{(n)} \tag{4.45}$$

onde: $\Delta d^{(n,1)}$ é a primeira aproximação do deslocamento incremental desconhecido $\Delta d^{(n)}$. Introduzindo a simplificação $K^{(n,0)} \equiv K(d^{(n,0)})$ e $f_{\text{int}}^{(n,0)} = f_{\text{int}}(d^{(n,0)})$, a equação (4.45) pode ser reescrita na Eq.(4.46).

$$K^{(n,0)}\Delta d^{(n,1)} = f_{ext}^{(n)} - f_{\text{int}}^{(n,0)} \tag{4.46}$$

O deslocamento incremental $\Delta d^{(n,1)}$ dado em (4.46) satisfaz de forma exata a equação linearizada (4.45). Entretanto, a atualização do vetor dos deslocamentos $d^{(n,1)} = d^{(n,0)} + \Delta d^{(n,1)}$ satisfaz a equação não-linear (4.44) apenas de forma aproximada.

O próximo passo é a linearização da Eq. (4.44) ao redor de $d^{(n,1)}$ e determinar a correção do deslocamento incremental, o que é feito, naturalmente, com a atualização da Eq. (4.46) para a matriz de rigidez $K^{(n,1)}$ e para a força interna $f_{\text{int}}^{(n,1)}$, como mostra a Fig. (4.6). Tal atualização deve ser repetida, tantas vezes quanto necessária, até que as equações de equilíbrio sejam satisfeitas com suficiente precisão.

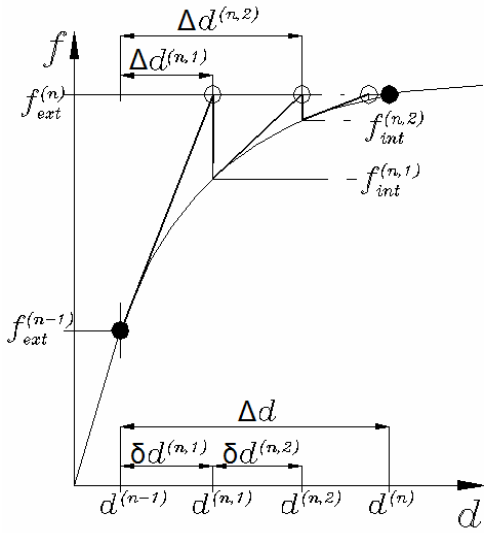


Figura 4.6 – Processo de iteração de Newton-Raphson

O processo iterativo é convenientemente escrito através das fórmulas recursivas

$$\left.\begin{aligned} K^{(n,i-1)}\delta d^{(n,i)} &= f_{ext}^{(n)} - f_{\text{int}}^{(n,i-1)} \\ d^{(n,i)} &= d^{(n,i-1)} + \delta d^{(n,i)} \end{aligned}\right\} i = 1,2,3\ldots \qquad (4.47)$$

onde: $d^{(n,i)}$ é aproximação do deslocamento após a *i-ésima* iteração, no passo incremental n, e $\delta d^{(n,i)}$ é a correção do deslocamento aplicado. O deslocamento incremental acumulado é dado pela Eq. (4.48).

$$\Delta d^{(n,i)} = \sum_{k=1}^{i} \delta d^{(n,k)} \tag{4.48}$$

Em condições normais a seqüência de aproximações $d^{(n,i)}$ converge para $d^{(n)}$ quando $n \to \infty$. Naturalmente, o processo de iteração pára, após um número finito de ciclos e a última aproximação é tomada como valor de convergência. O processo de iteração explicado acima é conhecido como o *método de Newton-Raphson*.

Cada iteração envolve três operações computacionais:

1. montagem da matriz de rigidez (global) da estrutura;
2. avaliação das forças internas;
3. solução do sistema de equações não-lineares e a verificação da respectiva convergência.

Em muitas situações os passos 1 e 3 consomem muito trabalho computacional. O custo computacional pode ser reduzido se a matriz de rigidez não for atualizada a cada iteração. O *método de Newton-Raphson modificado* avalia a matriz de rigidez apenas no começo do passo incremental, mantendo-a constante nas iterações subseqüentes, isto é, a matriz $K^{(n,i-1)}$ na Eq. (4.47) é substituída por $K^{(n,0)} \equiv K^{(n-1)}$. Isso significa que K só é exata para a primeira iteração. Nesse caso, como pode ser visto na (Fig. 4.7) a taxa de convergência é reduzida e o aumento no número de iterações necessárias para se conseguir a mesma exatidão é compensado, na maioria esmagadora das vezes, pelo número reduzido de operações realizadas.

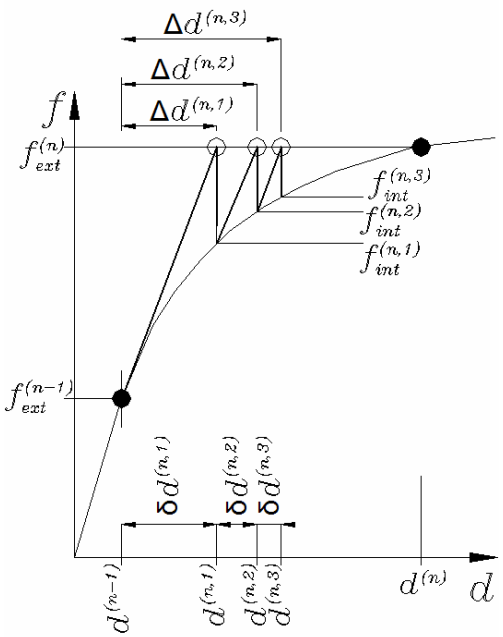


Figura 4.7 – Processo de iteração de Newton-Raphson modificado

4.1.4.1.2 Controle Direto de Deslocamentos

Independentemente da escolha do algoritmo iterativo, qualquer estratégia de solução usando o controle de carregamento falha se o carregamento predefinido não é capaz de mobilizar a resistência da estrutura. Isso tipicamente acontece se o carregamento é monotônicamente aumentado, além da capacidade de carga da estrutura. Essa situação é ilustrada na Fig. 4.8, onde o diagrama carga-deslocamento só pode ser traçado para valores abaixo de $f_{ext}^{(5)}$. Para o incremento $f_{ext}^{(6)}$, o carregamento aplicado excede o máximo carregamento que pode ser transmitido à estrutura, e a equação de equilíbrio não tem solução. O processo iterativo oscila ou diverge e o equilíbrio não pode ser restabelecido.

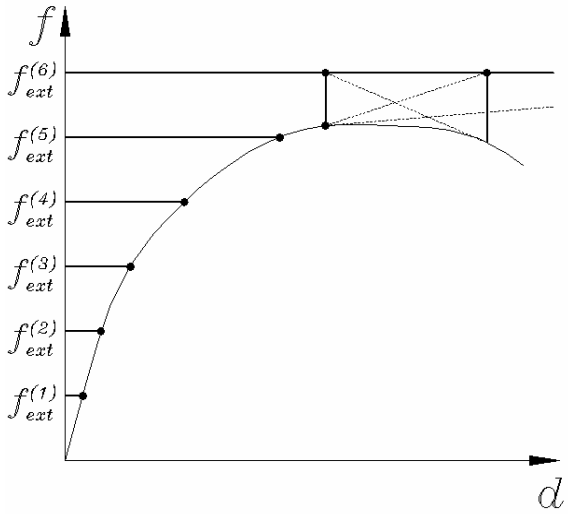


Figura 4.8 – Divergência no algoritmo para o controle do passo de carregamento

Em muitas análises em engenharia é necessário determinar a carga correspondente ao colapso da estrutura e o seu correspondente deslocamento. A divergência do processo iterativo é freqüentemente tomada como um indicador da ruptura estrutural, onde o último passo de convergência fornece informações sobre o comportamento anterior ao colapso. Apesar disso, simulações com o método dos elementos finitos, para problemas complexos de engenharia, podem divergir por diferentes razões muitas das quais são puramente numéricas e não guardam nenhuma relação com o colapso real da estrutura. Sendo assim, é prudente o uso de técnicas que seguem o diagrama carga-deslocamento, além do valor máximo alcançado, quando um valor limite é claramente demonstrado. Além disso, o comportamento no pós-pico do gráfico carga-deslocamento é, por si só, de grande interesse, conforme relatado no capítulo 2 e em alguns pontos do capítulo 3, uma vez que nos fornece informações sobre a ductilidade da estrutura.

As técnicas incrementais, mais simples, utilizadas para contornar os pontos limites são motivadas por considerações, puramente, físicas. Uma descrição completa dessas técnicas para os materiais quase-frágeis, tal qual o concreto e o CRFA, pode ser encontrada em Van Mier (1996).

A Fig. 4.9 mostra uma viga simplesmente apoiada carregada com uma força concentrada F**,** no ponto médio da distância entre os apoios. Suponha que a mesma é constituída de um material elásto-plástico perfeito ou apresenta amolecimento, ou seja, o diagrama carga-deslocamento apresenta um patamar para os valores finais de carregamento ou um valor máximo seguido de um trecho descendente. Em um experimento realizado sob controle de carregamento, fornecida a força F, o correspondente deslocamento é medido. Quando o carregamento aplicado excede a carga de colapso da estrutura, verifica-se a ocorrência de uma ruptura desavisada (brusca). Durante a ruptura, a estrutura não está em equilíbrio estático, e os deslocamentos e as deformações progridem de forma dinâmica. Como alternativa, o experimento pode ser controlado diretamente, através do deslocamento do ponto de aplicação de carga (Fig. 4.9b). Nesse caso, o ponto de carregamento pode ser considerado como um apoio adicional, onde a força atuante na estrutura é o valor da reação gerada no apoio. Nesse tipo de experimento, denominado de *controle direto de deslocamento,* o equilíbrio é mantido, mesmo após a reação atingir seu máximo valor, e o diagrama carga-deslocamento pode ser traçado no regime pós-pico.

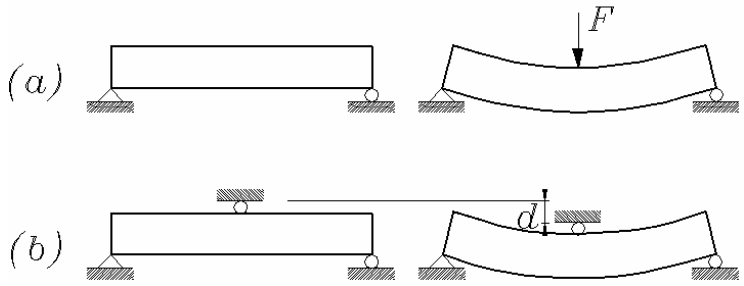


Figura 4.8 – Experimento realizado sob: a) controle de carregamento, b) controle de deformação

A mesma idéia utilizada no modelo físico para o controle direto do deslocamento, pode ser explorada nas simulações numéricas. Dividindo os deslocamentos nodais em dois grupos: o primeiro contendo os deslocamentos nodais que são deixados livres e o segundo contendo os deslocamentos predefinidos nos nós que serão controlados, o vetor dos deslocamentos é então particionado em $\{d_1, d_2\}^T$ e o vetor das forças internas e

externas será $\{f_{\text{int},1}, f_{\text{int},2}\}^T$ e $\{f_{ext,1}, f_{ext,2}\}^T$, respectivamente. As forças externas $f_{ext,1}$, correspondentes aos deslocamentos desconhecidos d_1, são predeterminadas e, por simplicidade, admitidas com valor igual a zero. Assim, todas as forças externas atuantes na estrutura são representadas pelas reações $f_{ext,2}$ nos suportes com deslocamentos predefinidos d_2. Impondo a condição de equilíbrio (4.44) para cada partição, o resultado são as equações (4.49) e (4.50).

$$f_{\text{int},1}(d_1, d_2) = 0 \tag{4.49}$$

$$f_{\text{int},2}(d_1, d_2) = f_{ext,2} \tag{4.50}$$

Para um dado valor d_2, os deslocamentos d_1 podem ser calculados resolvendo a Eq. (4.49). Após, as reações $f_{ext,2}$ são obtidas pela substituição dos deslocamentos d_1 no lado esquerdo da Eq. (4.50).

Em um passo incremental típico n, partindo-se do deslocamento convergido $d_1^{(n-1)}$ e $d_2^{(n-1)}$ do passo anterior, a Eq. (4.49) é substituída pela equação linerizada (4.51) ao redor dos deslocamentos convergidos.

$$f_{\text{int},1}^{(n-1)} + K_{11}^{(n-1)} \Delta d_1^{(n,1)} + K_{12}^{(n-1)} \Delta d_2^{(n,1)} = 0 \tag{4.51}$$

Na Eq. (4.51) $K_{11} \equiv \partial f_{\text{int},1} / \partial d_1$ e $K_{12} \equiv \partial f_{\text{int},1} / \partial d_2$ são elementos da matriz de rigidez global dada pela Eq. (4.52).

$$K \equiv \frac{\partial f_{\text{int}}}{\partial d} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_{\text{int},1}}{\partial d_1} & \dfrac{\partial f_{\text{int},1}}{\partial d_2} \\ \dfrac{\partial f_{\text{int},2}}{\partial d_1} & \dfrac{\partial f_{\text{int},2}}{\partial d_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \tag{4.52}$$

O incremento dos deslocamentos prescritos d_2 é conhecido por antecedência e igual a $\Delta d_2^{(n,1)} = \Delta d_2^{(n)} \equiv d_2^{(n)} - d_2^{(n-1)}$. Dessa forma a Eq. (4.51) pode ser reescrita na Eq. (4.53).

$$K_{11}^{(n-1)} \Delta d_1^{(n,1)} = - f_{\text{int},1}^{(n-1)} - K_{12}^{(n-1)} \Delta d_2^{(n)} \tag{4.53}$$

Resolvendo (4.53) para $\Delta d_1^{(n,1)}$, constrói-se a primeira aproximação $d_1^{(n,1)} = d_1^{(n-1)} + \Delta d_1^{(n,1)}$ e $d_2^{(n,1)} = d_2^{(n-1)} + \Delta d_2^{(n,1)} = d_2^{(n)}$. Repetindo a linearização da Eq. (4.49) ao redor de $(d_1^{(n,1)}, d_2^{(n,1)})$, a correção do deslocamento incremental é calculada. Esse procedimento é repetido até que o critério de convergência seja satisfeito.

O processo iterativo escrito na forma recursiva resulta na Eq. (4.54)

$$\left.\begin{aligned} K_{11}^{(n,i-1)} \delta d_1^{(n,i)} &= - f_{\text{int}}^{(n,i-1)} - K_{12}^{(n,i-1)} \delta d_2^{(n,i)} \\ d_1^{(n,i)} &= d_1^{(n,i-1)} + \delta d_1^{(n,i)} \end{aligned}\right\} \tag{4.54}$$

onde:

$$d_1^{(n,0)} = d_1^{(n-1)} \tag{4.55}$$

$$d_2^{(n,0)} = d_2^{(n-1)} \tag{4.56}$$

$$\delta d_2^{(n,1)} = d_2^{(n)} - d_2^{(n-1)} \tag{4.57}$$

$$\delta d_2^{(n,i)} = 0; \ (i = 2,3,...) \tag{4.58}$$

4.1.4.1.3 "Arc-Length" e Controle Indireto de Deslocamento

O controle direto de deslocamentos pode ser aplicado nas situações em que a estrutura é carregada em apenas um ponto ou quando o carregamento é transmitido através de uma

placa rígida, uma vez que todos os pontos da superfície carregada exibem o mesmo deslocamento. Entretanto, nem sempre esse é o caso a ser considerado na simulação numérica. Tomando como exemplo a Fig. (4.10), onde se tem uma barragem carregada devido à pressão hidrostática resultante do empuxo e da veia (fluxo) vertente, a forma do correspondente perfil de deslocamento não é conhecida previamente. Um outro caso, onde o controle direto do deslocamento é falho, consiste na ruptura frágil caracterizada pelo diagrama-carga deslocamento, onde o efeito de *"snap-back"* ou *"snap-through"* é característico, conforme mostra a Fig. 4.11a.

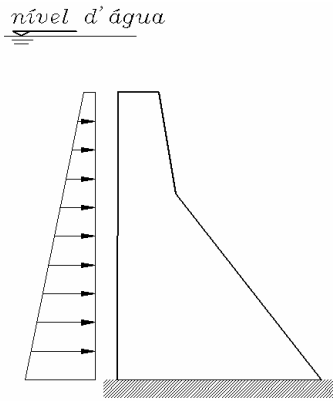


Figura 4.10 – Barragem de gravidade sob pressão hidrostática

Técnicas mais avançadas de controle incremental abandonam a idéia de considerar o carregamento externo ou o deslocamento do apoio conhecido por antecipação. Ao invés disso, o histórico do carregamento é parametrizado, através de um multiplicador, μ, e a força externa e/ou o vetor dos deslocamentos do apoio, passam a ficar em função desse multiplicador. Um exemplo é o carregamento proporcional, caracterizado por:

$$f_{ext}(\mu) = \mu \, \bar{f} \tag{4.59}$$

onde, $\bar{f}$ é o vetor de referência de carga. De acordo com a Eq. (4.59) todas as componentes do vetor das forças externas variam proporcionalmente, podendo ser

estritamente crescentes ou estritamente decrescentes. O caso mais geral é a função linear de carregamento:

$$f_{ext}(\mu) = \bar{f}_0 + \mu \bar{f} \tag{4.60}$$

com a constante $\bar{f}_0$ e a parcela proporcional $\mu \bar{f}$. Para a barragem da Fig. 4.10, $\bar{f}_0$ corresponde ao efeito do empuxo sobre a parede do reservatório, enquanto, $\mu \bar{f}$, corresponde a pressão hidrostática adicional, devido ao aumento unitário do sobrefluxo.

Um controle mais flexível do processo incremental consiste em especificar uma equação que restringe o tamanho do passo em função dos deslocamentos desconhecidos e do multiplicador de carga. Isso pode ser feito, por exemplo, estabelecendo a condição de que o tamanho do passo é constante e igual a distância geométrica, Δl, medida sobre o diagrama carga-deslocamento, entre um estado final e um estado inicial. Essa idéia é o método do controle do comprimento do arco *("arc-length control").*

A Fig. 4.11 mostra que a idéia do controle do comprimento do arco é uma combinação do controle de carregamento e do controle do deslocamento. É uma ótima idéia para contornar diagramas com um limite superior *("snap-trough")* e com um limite de retorno *("snap-back").* A Fig. 4.11(b) mostra, conforme visto anterirormente, que o controle de carregamento é falho ao redor do ponto limite onde o digrama tem um tangente horizontal. Na Fig. 4.11(c), o controle de deslocamento pode contornar esse ponto, porém, não é eficiente no ponto onde o diagrama possui uma tangente vertical. O critério do comprimento de arco automaticamente enfatiza sua robustez para contornar pontos limites, Fig. 4.11(d).

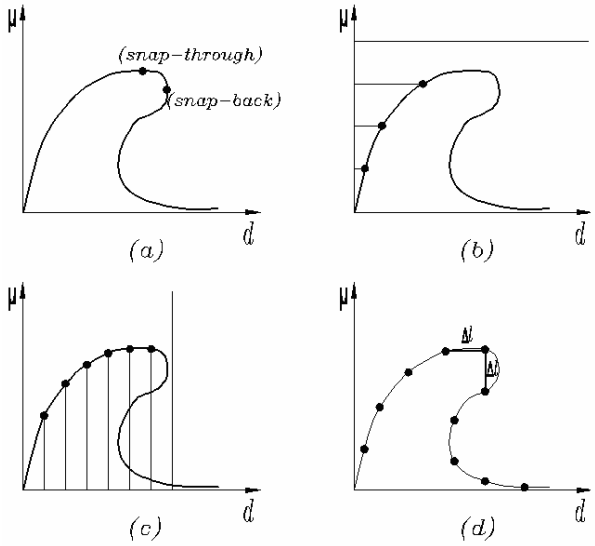


Figura 4.11 – (a) Diagrama carga-deslocamento com snap-back, (b) controle de carregamento, (c) controle direto de deslocamento, (d) controle através de arc-length

Apesar da simplicidade do método do controle do comprimento do arco é imperativo o fato de que forças e deslocamentos têm unidades completamente diferentes, e uma medida puramente geométrica é desprovida de sentido. Assim é necessário a introdução de um fator de escala, c, que multiplica o parâmetro de carga e o transforma em um dimensional de comprimento. O tamanho do passo para o qual o parâmetro de carga muda para $\Delta\mu$ e o deslocamento para Δd é definido como:

$$\Delta l = \sqrt{\Delta d^T \Delta d + (c\Delta\mu)^2} \,. \tag{4.61}$$

Através do ajuste do fator de carga a contribuição relativa entre o carregamento e deslocamento é ampliada ou reduzida. Uma boa escolha é derivar o fator de carga no trecho de resposta elástica e obtendo $c = \sqrt{d_e^T d_e}$, onde d_e é solução da equação $K_e d_e = \bar{f}$.

Em um processo incremental, através do método do comprimento do arco, um passo típico n é iniciado com o deslocamento $d^{(n-1)}$ e o parâmetro $\mu^{(n-1)}$ obtidos em um passo anterior. O passo seguinte é encontrar o deslocamento $d^{(n)}$ e do parâmetro $\mu^{(n)}$. Comparando com o controle de carregamento e com o controle de deslocamentos, o parâmetro $\mu^{(n)}$ é uma incógnita adicional. A equação adicional é fornecida por uma equação que fixa o tamanho do passo. Por exemplo, o tamanho do passo, dado na Eq. (4.61), pode ser fixado em $\overline{\Delta l}$. O problema é tratado como um sistema de $N_{dof}+1$ equações não-lineares, onde: N_{dof} é o número de componentes de deslocamentos desconhecidas (graus de liberdade), que serão resolvidas pelo processo iterativo. Computacionalmente é mais eficiente tratar as equações de equilíbrio e as equações que fornecem as restrições separadamente.

Tomando, por simplicidade, a Eq. (4.60), a linearização da condição de equilíbrio para a $i-$*ésima* iteração resulta em:

$$K^{(n,i-1)}\delta d^{(n,i)} = \bar{f}_0 + \mu^{(n,i-1)}\bar{f} - f_{\text{int}}^{(n,i-1)} + \delta\mu^{(n,i)}\bar{f} \tag{4.62}$$

onde, $\delta d^{(n,i)}$ e $\delta\mu^{(n,i)}$ são as incógnitas que corrigem o deslocamento e o parâmetro de carga, respectivamente. Recorrendo as equações:

$$K^{(n,i-1)}\delta d_0 = \bar{f}_0 + \mu^{(n,i-1)}\bar{f} - f_{\text{int}}^{(n,i-1)} \tag{4.63}$$

$$K^{(n,i-1)}\delta d_f = \bar{f} \tag{4.64}$$

a correção dos deslocamentos resulta em,

$$\delta d^{(n,i)} = \delta d_0 + \delta\mu^{(n,i)}\delta d_f\,. \tag{4.65}$$

Ao se substituir a equação (4.65) na condição de restrição dada em (4.61) e com o passo $\overline{\Delta l}$ fixado, obtém-se a equação quadrática de restrição (4.66) em função do parâmetro $\delta\mu^{(n,i)}$.

$$(\Delta d^{(n,i-1)} + \delta d^{(n,i)})^T (\Delta d^{(n,i-1)} + \delta d^{(n,i)}) + c^2 (\Delta\mu^{(n,i-1)} + \delta\mu^{(n,i)})^2 = (\overline{\Delta l})^2 \qquad (4.66)$$

A Eq. (4.66) normalmente tem duas raízes reais, correspondentes a dois pontos de equilíbrio com distância $\overline{\Delta l}$ dos pontos $(d^{(n-1)}, \mu^{(n-1)})$, conforme indica a Fig. (4.12). A raiz correta é selecionada de acordo com a marcha na direção do equilíbrio (Crisfield, 1981) e a correção do deslocamento é determinada em (4.65). Após a atualização do vetor dos deslocamentos e do parâmetro de carga, o ciclo de iteração é repetido até que o critério de convergência seja satisfeito.

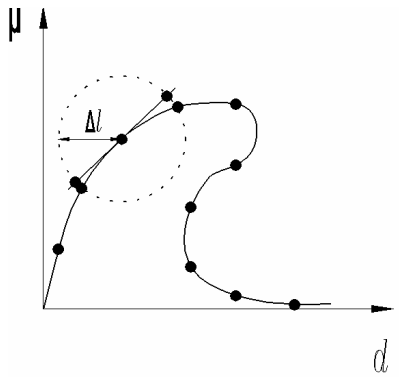


Figura 4.12 – Pontos que satisfazem a condição de restrição no método do controle do comprimento do arco

O método de controle incremental tipo *"arc lenght"* tem um bom desempenho, nas simulações numéricas, quando a estrutura toda, ou uma grande parte dela, participa do mecanismo de ruptura. Nos casos em que a ruptura é localizada a sua robustez é deteriorada. O problema é contornado, adaptando a equação de restrição para o problema

particular, através do controle do processo incremental, por meio do deslocamento de um ponto cuidadosamente selecionado. A motivação aqui é novamente física.

Se o diagrama carga-deslocamento de um material estrutural exibe *"snap-back"*, o controle direto do deslocamento, aplicado em um ensaio experimental, implica em uma ruptura catastrófica. Quando o deslocamento imposto pelo dispositivo de carregamento atinge um valor crítico, que guarda relação com a tenacidade à fratura, K_c, do material, a propagação da fratura e/ou condução do processo de separação entre as partes do corpo é espontânea, mesmo se o ponto de carregamento é mantido constante. Entretanto, a abertura e o crescimento instável da fratura podem ser usados como uma variável de controle do processo incremental.

Se o arranjo experimental é conduzido de forma que a força aplicada é continuamente ajustada em função do valor medido para a abertura da fratura, a resposta estrutural pode ser traçada de uma maneira estável após se atingir o ponto de retorno do gráfico carga-deslocamento. A mesma idéia pode ser explorada, nas simulações numéricas, através da seleção de uma combinação linear conveniente das componentes dos deslocamentos usadas como variável de controle e que são aumentandas, monotônicamente, durante o processo de fraturamento. Assim, a condição que fixa o tamanho do passo incremental é formulada como:

$$c^T \Delta d = \overline{\Delta} \bar{l} \tag{4.67}$$

onde, c é uma matriz coluna, contendo os coeficientes das componentes individuais dos deslocamentos na combinação linear selecionada. Matematicamente falando a Eq. (4.67) é a projeção do vetor dos deslocamentos em uma direção dada por c. A projeção do diagrama carga-deslocamento no eixo horizontal, demonstra que o processo incremental se assemelha com o controle direto de deslocamento. A diferença não está no fato de que o valor do deslocamento projetado não é imposto de forma direta (em contraste com o

deslocamento do suporte), mas no fato de que o parâmetro de carga é ajustado para se obter a projeção de deslocamento desejada.

Essa técnica é denominada de *"controle indireto dos deslocamentos"*. O algoritmo que trata o problema é muito similar com o método do controle do comprimento do arco com a restrição quadrática em (4.66) sendo substituída por uma restrição linear, conforme a Eq. (4.68).

$$c^T(\Delta d^{(n,i-1)} + \delta d^{(n,i)}) = \overline{\Delta l} \tag{4.68}$$

Substituindo a Eq. (4.68) na condição (4.65), a correção do valor do multiplicador de carga é encontrada (Eq. (4.69)).

$$\delta\mu^{(n,i)} = \frac{\overline{\Delta l} - c^T \Delta d^{(n,i-1)} - c^T \delta d_0}{c^T \delta d_f} \tag{4.69}$$

O controle indireto de deslocamento é mais simples que a técnica do controle do comprimento do arco, além de não requerer o uso de regras para a determinação da raiz e que muitas vezes pode cair no domínio dos números complexos. A questão chave é uma boa escolha do vetor de projeção c. Nas análises práticas, a escolha pode ser guiada pelo mecanismo de ruptura esperado. Freqüentemente é suficiente controlar o deslocamento através de um ponto específico na estrutura, por exemplo, o deslocamento horizontal na crista da barragem da Fig (4.13a). Em um experimento simulando o ensaio 3PBT, a variável de deslocamento pode ser a abertura da boca da fissura (CMOD), que é expressa como a diferença entre dois pontos localizados nos lados opostos do entalhe (Fig. 4.13b).

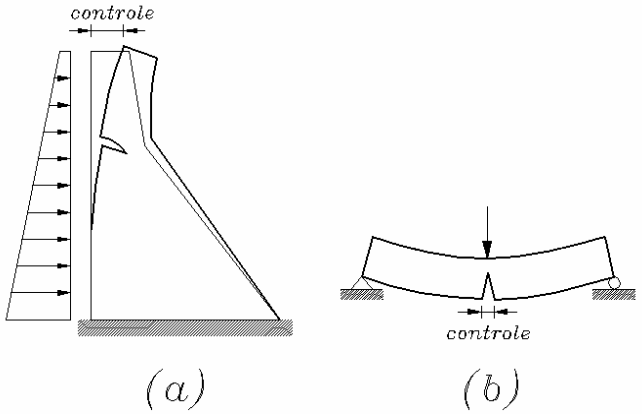


Figura 4.13 – Controle indireto de deslocamento: (a) barragem de gravidade, (b) viga ranhurada no ensaio de 3PBT

4.1.4.1.2 Métodos Incrementais Iterativos no Programa DIANA

Os métodos iterativos disponíveis no programa **DIANA Finite Element Analysis** são os métodos de Newton-Raphson, regular e modificado, o método da rigidez constante, o método da rigidez linear e o método secante e/ou de quase-Newton, de acordo com o algoritmo de *Broyden*, *Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno* (BFGS) e *Crisfield*, ver Diana User's Manual (2003).

Esses métodos podem ser combinados com o acelerador de convergência *"line search"* e o processo contínuo de iteração. O erro admitido no critério de convergência pode ser baseado em força, deslocamento e energia. A tolerância padrão é da ordem de 10^{-2}, para força e deslocamento, e de 10^{-4} para o critério de energia.

A maneira como a resolução do sistema de equações não-lineares é paralisada, deve ser analisada com suficiente rigor, no programa **DIANA Finite Element Analysis**, ou em qualquer outro programa baseado no MEF. O programa informa se a solução convergiu ou divergiu e o colapso numérico pode não ter nenhuma relação com o colapso real da estrutura. O resultado deve ser interpretado através da resposta do diagrama carga-

deslocamento, para algum ponto notável da estrutura, com a introdução de valores decrescentes de carregamento a partir do valor corresponde à resistência estrutural.

Para o controle do passo incremental o programa, **DIANA Finite Element Analysis**, dispõe do controle do carregamento, do controle direto do deslocamento, do controle do comprimento de arco *("arc length control")*, com restrição quadrática ou linear, do controle indireto de deslocamento e do controle indireto de deslocamento com a variante CMOD. O método de controle do comprimento do arco pode ser combinado com o método adaptativo de incremento de carga, *"adaptive load incrementation"* (Diana User's Manual, 2003).

Capítulo 5

Modelos Constitutivos para a Modelagem Numérica dos Materiais

O início da ruína ou do colapso de um material estrutural e/ou estrutura sob uma dada solicitação mecânica, exclusive os fenômenos da *flambagem* e de *deformação excessiva*, é estabelecido quando o estado de tensão-deformação atuante no espécime estrutural atinge determinados limites estabelecidos como critérios de ruptura. Esses critérios, baseados na Teoria da Plasticidade (ver: Chen e Han, 1988), nada dizem a respeito da condução do processo de ruptura, ou seja, da abertura e do crescimento da fratura. Entretanto, uma vez estabelecida a condição de ruína uma descontinuidade no meio é introduzida e o processo de ruptura é iniciado. Assim, para uma adequada representação do comportamento mecânico do material estrutural acopla-se, ao critério de ruptura, um modelo para a representação da descontinuidade introduzida no meio.

A observação física do processo de ruptura ou fratura é traduzida, nas formulações computacionais, através dos *modelos numéricos de fissuras*, de acordo com a representação dada para o meio material. O meio material pode ser representado como contínuo, discreto ou combinado (misto), segundo classificação feita por Jirásek (2003). Os modelos

numéricos de fissuras apóiam-se nos conceitos teóricos da *mecânica da fratura*, da *mecânica do dano* e da *física estatística.*

Os modelos numéricos mais proeminentes, para a análise de fraturas em materiais quase-frágeis, através do método dos elementos finitos, são os modelos de fissura distribuída, *"smeared crack model"*, e de fissura discreta, *"discrete crack model"*. Nesses modelos, a resistência à tração do material é quem define o início do fraturamento que é então governado por uma lei dada em função da abertura da fratura e obtida do ensaio de um espécime do material. Essa lei é a curva de amolecimento: tensão-abertura de fissura ($\sigma - w$).

5.1 Representação Numérica dos Materiais

A estrutura ou o espécime a ser analisado é usualmente considerado como uma associação de entidades elementares, cujo objetivo é descrever a ligação entre a deformação e as forças que estas transmitem (Jirásek, 2003). Na representação do meio material como contínuo (Fig. 5.1a), o elemento de construção é um volume infinitesimal, e o comportamento do material é descrito através da relação tensão-deformação. Por outro lado os modelos discretos (Fig. 5.1b) são tratados como entidades finitas, tais como: partículas ou elementos de barra que estabelecem a relação entre as forças internas atuantes e os deslocamentos relativos e/ou rotações de forma individual. Como alternativa ao modelo contínuo e ao modelo discreto, os modelos mistos combinam quantidades contínuas com quantidades descontínuas. Nos modelos mistos (Fig. 5.1c) uma relação tensão-deformação é atribuída a quantidade contínua, enquanto uma lei de separação é atribuída a parcela descontínua.

Capítulo 5 – Modelos Constitutivos para a Modelagem Numérica dos Materias

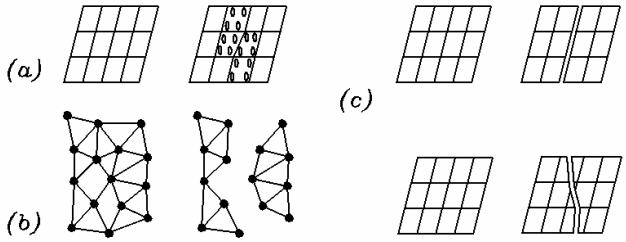


Figura 5.1 – Modelos para a representação do meio material: (a) modelo contínuo, (b) modelo discreto, (c) modelo misto

5.1.1 Modelo Contínuo de Representação

O exemplo mais simples de representação do meio material contínuo é a relação tensão-deformação, de acordo com a lei de Hooke, enunciada na Teoria da Elasticidade (ver: Timoshenko e Godier, 1980). Dada para os materiais isotrópicos com comportamento elástico-linear, utiliza apenas dois parâmetros para descrever o comportamento do material. Modelos elásticos mais gerais abandonam a consideração de isotropia e/ou de linearidade, para levar em conta efeitos de ortotropia e de anisotropia, ao se aumentar o número de constantes elásticas.

Os modelos elásticos que não apresentam linearidade são os modelos de hiper-elasticidade, que deriva a relação tensão-deformação através de um potencial elástico, ou de hipo-elasticidade, que postula as equações constitutivas diretamente de um processo incremental, ao variar a matriz de rigidez tangente ou o módulo de flexibilidade (Jirásek, 2000).

Outros exemplos, para a representação do meio contínuo, são os modelos de plasticidade que usualmente decompõe a deformação em uma parcela elástica e outra plástica, assumindo que a matriz de rigidez permanece constante; o modelo numérico de fissuração distribuída *"smeared crack model"*, onde a deformação total é decomposta em uma

deformação elástica e em uma "deformação de fissura"; o modelo da banda de fissura, *"crack band model"*, caracterizado através de uma deformação de amolecimento e do valor da largura da banda, h, no fronte da fissura (Bažant, 1976; Bažant e Cedolin, 1979, 1980, 1983; Cedolin e Bažant, 1980; Bažant e Oh, 1983); a teoria de *Cosserat* e do gradiente contínuo, onde, na descrição do contínuo é adicionado graus de liberdade para a rotação e gradientes de deformação, respectivamente (de Borst e Muhlhaus, 1991); e os modelos da mecânica do dano dos meios contínuos, que descreve o processo de plastificação como um fenômeno irreversível, que conduz a degradação progressiva da rigidez.

No modelo isotrópico de representação do dano, a degradação progressiva da rigidez é um tensor, obtido da multiplicação da rigidez inicial por um escalar, isto é, o dano é caracterizado por um simples parâmetro (Jirásek, 2000). Teorias mais refinadas levam em conta o caráter anisotrópico do dano. As formulações anisotrópicas de dano podem ser baseadas no princípio da equivalência de deformações ou no princípio da equivalência de energia.

Os modelos de materiais para a representação do contínuo têm um caráter tensorial, no sentido que estabelecem uma relação direta entre o tensor das tensões e o tensor das deformações.

5.1.2 Modelo Misto de Representação

O modelo misto de representação do meio material resulta de um acréscimo ao modelo contínuo pela introdução de uma elevada concentração de deformação devido ao esforço de tração ou a um intensivo deslizamento por cisalhamento. O valor elevado da concentração de deformação ou do intensivo deslizamento implica na descontinuidade interna do meio. Para descrever a descontinuidade interna é necessário um postulado que descreve como esta se inicia e como esta se propaga. Um exemplo é a generalização do

critério de *Griffith* (1920), da mecânica da fratura elástica linear, para um material com uma pré-fissura ou entalhe. A propagação da fissura é iniciada quando a tensão, que representa a singularidade, no fronte da fissura, atinge um valor crítico. A direção de propagação pode ser definida de vários modos: baseada na máxima tensão tangencial, no valor máximo da taxa de energia liberada ou na mínima densidade de energia de deformação.

O critério clássico de *Griffith* não se aplica aos materiais quase-frágeis. Para esses materiais deve-se fazer uso dos modelos coesivos da MFNL, a menos que a dimensão do espécime é bastante grande em relação ao tamanho da fissura (ex. estudo de barragens de concreto).

Para os materiais quase-frágeis existem os modelos constitutivos baseados nas curvas de resistência (curva-R), que considera a tenacidade à fratura como uma função da extensão da fissura, e o modelo da fissura fictícia, *"ficticious crack model"*, proposto por Hillerborg, Modéer e Petersson (1976) e Hillerborg (1980). O modelo da fissura fictícia abandona a hipótese de que as faces de separação da fissura são livres de tensões e introduz uma lei de separação que governa a perda progressiva da coesão no fronte da fissura. Essa lei de separação é formulada com uma explicita dependência da tensão de tração transmitida na separação (abertura) da fissura.

O modelo numérico de fissura discreta, *"discrete crack model"*, está de acordo com o modelo de representação misto, isto é, uma lei de separação representa a descontinuidade e uma lei com base no meio contínuo, representa a região fronteiriça à descontinuidade, ou seja, para os pontos que ainda não atingiram o critério de ruptura, que é definido pela máxima tensão de tração.

No modelo tipo *"discrete crack model"*, a fissura é moldada como uma descontinuidade entre os elementos finitos utilizados para discretizar a estrutura. A menos que a trajetória da fissura é conhecida por antecedência, o modelo de fissura discreta requer uma permanente atualização da malha de elementos finitos a cada passo de carregamento (Wawrzynek,

1981; Bittencourt, Wawrzynek, Ingraffea e Sousa, 1996). Entretanto, a descontinuidade pode ser introduzida no interior do elemento e esse inconveniente pode ser contornado, através dos modelos de fissura embebida, *"embedded crack approach"*, (Dvorkin, Cuitiño e Goia, 1990; Klisinski, Runesson e Sture, 1991).

Outros tipos de modelos que exploram a descontinuidade do meio, através do critério de ruptura dado pela máxima tensão de tração, são os modelos utilizados para simular a perda de coesão entre elementos de interface, por exemplo, a decoesão entre o concreto e a armadura ou entre a fibra e a matriz de cimento nos materiais compósitos (Aveston, Cooper e Kelly, 1971; Shah e Ouyang 1991). A diferença aqui é que a posição da descontinuidade é conhecida por antecipação.

5.1.3 Modelo Discreto de Representação

O modelo discreto abandona a idéia de representação do contínuo através de uma lei constitutiva. A simulação do comportamento do material é feita de forma direta, com base em um modelo simplificado da sua microestrutura, ou seja, das partículas constituintes, das fases existentes e das ligações entre si (Bazănt e Planas, 1998).

O termo discreto, aqui utilizado, refere-se aos modelos de representação que varrem a estrutura interna do material, porém, sem o rigor de abordar a sua estrutura atômico-molecular. A idéia é considerar a heterogeneidade do meio material para a partir daí traduzir o seu comportamento global.

Os modelos discretos são representados por uma associação de entidades elementares, tal como barras, molas, barras fletidas, esferas ou outra geometria para a descrição das partículas.

Um exemplo extremo, de modelo discreto de representação, é o concreto numérico de Roelfstra, Sadouki e Wittmann (1985), Wittmann, Roelfstra e Kamp (1988), Roelfstra (1988), em que a argamassa, os agregados e a interface (zona de transição), são modelados de forma independente através do método dos elementos finitos. O concreto numérico requer a geração da geometria do material (posicionamento da distribuição randômica dos agregados na argamassa de cimento) e uma discretização adequada dos elementos a fim de reproduzir a geometria da interface (Bazănt e Planas, 1998).

Dois outros exemplos são: os modelos de partícula, *"particle models"* (Cundall e Strack, 1979; Jirásek e Bazănt, 1995); e o modelo reticulado, *"lattice model"* (Hansen, Roux, e Herrmann, 1989; Herrmann, 1991; Schalangen, 1993; Bittencourt e Kang, 2004).

O modelo de partícula é bastante empregado para o estudo da microestrutura e da propagação de fissuras em geomateriais. Foi originalmente idealizado como partículas rígidas que se interagem por fricção para simular o comportamento de solos granulares (Jirásek, 2000).

No modelo reticulado o material é esquematizado como uma malha de elementos de barra que, em substituição ao meio contínuo, irá representar a heterogeneidade do material através da implementação direta do nível de desordem. Nesse modelo as barras do reticulado são arranjadas de forma que as suas extremidades vão coincidir com o centro das partículas constituintes do material, onde translações e rotações são definidas.

5.2 Critérios de Ruptura

A maioria dos critérios de ruptura, definidos em teoria da plasticidade, faz uso da divisão do estado de tensão e de deformação em uma parcela volumétrica e outra desviatória (estado distorcional), para a definição da lei sob a qual o material escoa e/ou plastifica,

entrando assim em colapso. O fenômeno do escoamento é um processo irreversível de deformação que ocorre no interior do material, tal como o deslizamento de cristais nos materiais metálicos, não estando, porém, restrito a esse grupo. A formulação matemática do fenômeno de ruptura pode ser estendida para outros tipos de materiais, como solo e concreto (Diana User's Manuals, 2003).

O tensor das tensões pode então ser decomposto em:

$$\sigma = \sigma_V \delta + s \tag{5.1}$$

Onde, $\sigma_V = \sigma : \delta / 3 = \sigma_{kk} / 3$ é a tenção volumétrica principal (estado hidrostático), δ é um tensor de primeira ordem (delta de Kronecker), e s são as tensões desviatórias e $k = 1, 2, 3$.

De forma similar, o tensor das deformações ε pode ser decomposto como,

$$\varepsilon = \varepsilon_V \delta + e \tag{5.2}$$

onde: $\varepsilon_V = \varepsilon : \delta / 3 = \varepsilon_{kk} / 3$ é a deformação volumétrica principal, e é a deformação no estado desviatório e $k = 1, 2, 3$. Para um material isotrópico σ_V e s podem ser escrito em termos do módulo volumétrico ou de compressão K e do módulo de elasticidade transversal G, conforme as equações (5.3) e (5.4).

$$\sigma_V = 3K\varepsilon_V \tag{5.3}$$

$$s = 2Ge \tag{5.4}$$

Capítulo 5 – Modelos Constitutivos para a Modelagem Numérica dos Materias

Uma vez que, para os materiais isotrópicos as tensões principais são suficientes para a representação do estado de tensão, o colapso de um material estrutural pode ser estabelecido em termos dos invariantes I_1, J_2 e J_3, onde: I_1 é o primeiro invariante do tensor das tensões; J_2 e J_3 são o segundo e o terceiro invariantes das tensões desviatórias (Eqs. (5.5), (5.6) e (5.7)), respectivamente.

$$I_1 = \sigma : \delta = \sigma_{kk} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma_{oct} = 3\sigma_V \tag{5.5}$$

$$J_2 = \frac{1}{2} s : s = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{1}{6}\left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2\right] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 =$$
$$= \frac{1}{6}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right] = \frac{3}{2}\tau_{oct}^2 \tag{5.6}$$

$$J_3 = \det|s| = \det|s_{ij}| = s_1 s_2 s_3 = (\sigma_1 - \sigma_V)(\sigma_2 - \sigma_V)(\sigma_3 - \sigma_V) \tag{5.7}$$

Nas equações acima, $\sigma_i, i = 1,2,3$ são as tensões principais; $s_i, i = 1,2,3$ são as tensões desviatórias principais; σ_{oct} e τ_{oct} são as tensões octaédricas normal e tangencial. Assim, o colapso em termos dos invariantes I_1, J_2, J_3 pode ser escrito conforme a Eq. (5.8), onde: κ é uma constante do material.

$$f(I_1, J_2, J_3, \kappa) = 0 \tag{5.8}$$

Os principais critérios de ruptura são os critérios de Tresca, Von Mises, Drucker-Prager, Mhor-Coulomb e o critério de Rankine. Esses critérios são comumente denominados como dependentes da pressão, *"presure-dependent"*, quando o material está em função do primeiro invariante, I_1, e independentes da pressão, *"presure-independent"*, em caso contrário.

5.2.1 Critério de Tresca

O critério de Tresca é historicamente o mais antigo dos critérios de ruptura. Ele estabelece que o colapso do material inicia quando a máxima tensão de cisalhamento atinge um valor limite $\kappa = \tau_0$. O critério de Tresca requer que uma das 6 igualdades (Eq. (5.9)), seja satisfeita.

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \pm\tau_0; \quad \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \pm\tau_0; \quad \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = \pm\tau_0 \tag{5.9}$$

Em termos dos invariantes o critério de Tresca é escrito na Eq. (5.10).

$$f(J_2, \theta) = 2\sqrt{J_2}\sin(\theta + \frac{\pi}{3}) - \sigma_0; \quad (0 \le \theta \le 60^0) \tag{5.10}$$

Na Eq. (5.9) τ_0 é obtido da igualdade (5.11) e θ da condição (5.12); σ_o é obtido de um ensaio de tração axial e corresponde ao valor de tensão para o qual o material entra em colapso.

$$\sigma_0 = 2\tau_0 \tag{5.11}$$

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3}{J_2^{3/2}} \tag{5.12}$$

5.2.2 Critério de Von Mises

O critério de Von Mises é estabelecido pela igualdade (5.13), com $\kappa = \tau_0$ expresso em termos σ_0, conforme a Eq. (5.14).

$$f(J_2) = \sqrt{J_2} - \tau_0 = 0 \tag{5.13}$$

$$\sigma_0 = \tau_0 \sqrt{3} \tag{5.14}$$

Na Fig. 5.2 tem-se a representação dos critérios de Tresca e de Von Mises no plano meridiano (Fig. 5.2a), no plano deviatório (Fig. 5.2b) e para o estado plano de tensão (Fig. 5.2c).

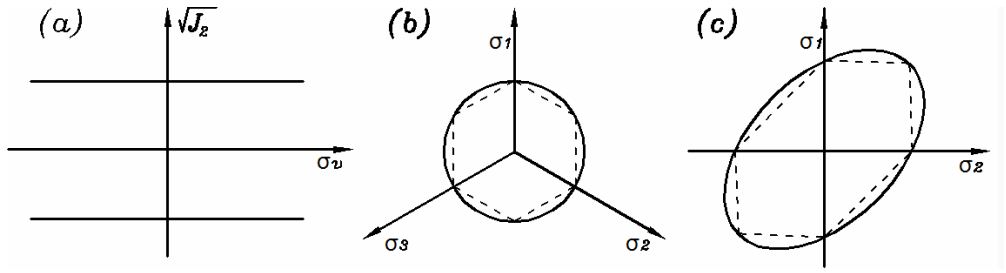


Figura 5.2 – Critérios de Von Mises (linha cheia) e de Tresca (linha pontilhada): (a) plano meridiano; (b) plano desviatório; (c) estado plano de tensão.

Vê-se que o critério de Von Mises, representado através de um círculo (Fig. 5.2b) e de uma elipse (Fig. 5.2c), envolve o critério de Tresca, representado por um hexágono.

5.2.3 Critério de Drucker-Prager

O critério de Drucker-Prager, formulado em 1952, é uma simples modificação do critério de Von Mises, onde a influência da pressão hidrostática no mecanismo de ruptura é introduzida pela inclusão do termo αI_1, na Eq. (5.15), resultando na condição (5.16).

$$f(J_2) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - \tau_0 = 0 \tag{5.16}$$

O parâmetro α (coeficiente de atrito) é uma constante do material. Quando seu valor é igual a zero a Eq. (5.16) se reduz ao critério de Von Mises.

A superfície de ruptura para o critério de Drucker-Prager é representada por um cone no espaço das tensões principais (espaço de Westergaard). Se α é constante a representação da superfície de ruptura no plano meridiano é uma linha reta (Fig. 5.3a). De uma forma geral α depende de σ_V e a linha representada no plano meridiano é curva. No plano $\sigma_1 - \sigma_2$ (estado plano de tensão), o critério de Drucker-Prager é representado por uma elipse assimétrica em relação a origem (Fig. 5.3c).

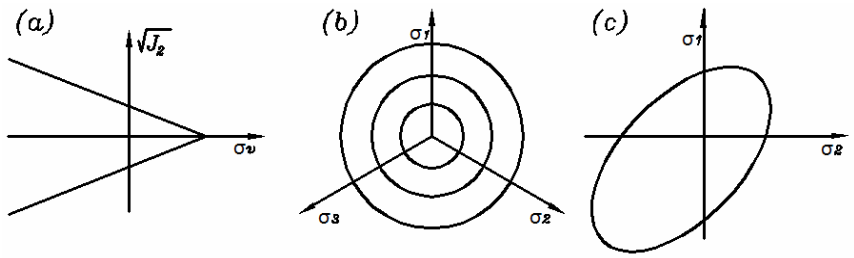


Figura 5.3 – Critério de Drucker Prager: (a) plano meridiano; (b) plano deviatório; (c) estado plano de tensão.

5.2.4 Critério de Mhor-Coulomb

O critério de Mhor-Coulomb é uma generalização do critério de Tresca. No caso mais simples, o valor crítico da tensão de cisalhamento é dado pela Eq. (5.17).

$$\tau = \pm c \mp \sigma \tan\phi \qquad (5.17)$$

Na Eq. (5.17) σ é a tensão normal e c e ϕ são constantes. O parâmetro c, denominado de coesão, representa a resistência ao cisalhamento entre as superfícies do material e o parâmetro ϕ é o ângulo de atrito interno.

O critério de Mohr-Coulomb é facilmente visualizado no plano $\sigma - \tau$ (Fig. 5.4). No caso mais geral a reta definida na Eq. (5.17) é definida por uma função não linear $\tau(\sigma)$. Na Fig. 5.5 é mostrada a superfície de ruptura no plano meridiano (Fig. 5.5a), no plano desviatório (Fig. 5.5b) e para o estado plano de tensão (Fig. 5.5c).

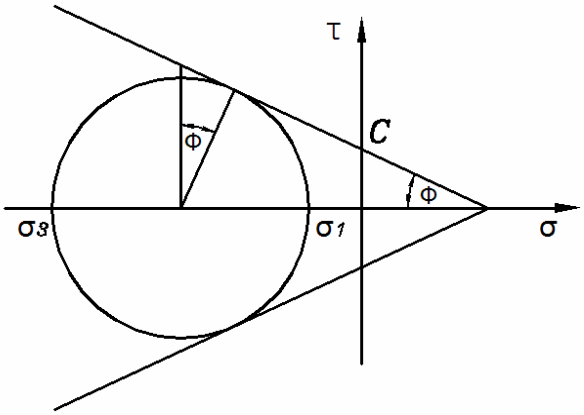


Figura 5.4 – Critério de Mhor-Coulomb.

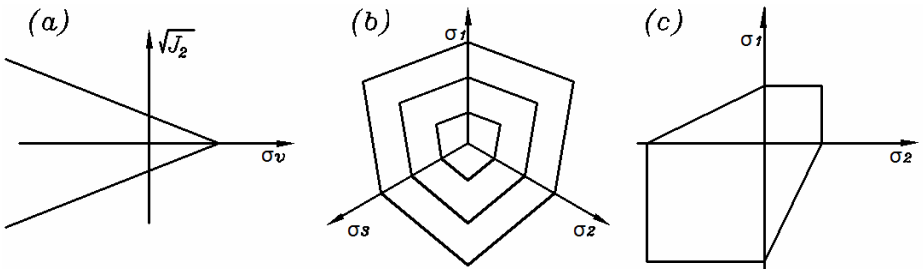


Figura 5.5 – Critério de Mhor-Coulomb: (a) plano meridiano; (b) plano deviatório; (c) estado plano de tensão.

Em função dos invariantes das tensões o critério de Mohr-Coulomb pode ser escrito na Eq. (5.18).

$$f(I_1, J_2, \theta) = \frac{1}{3} I_1 \sin\phi + \sqrt{J_2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{J_2}}{\sqrt{J_3}}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\sin\phi - c\cos\phi = 0 \quad (5.18)$$

5.2.5 Critério de Rankine

O critério de Rankine ou da máxima tensão normal é obtido fazendo $\phi = 90^0$ no critério de Mhor-Coulomb. De acordo com o critério de Rankine o estado colapso de um material estrutural é estabelecido quando a máxima tensão principal alcança volar σ_o e a pirâmide hexagonal de Mhor-Coulomb é transformada na pirâmide triangular de Rankine (Fig. 5.6).

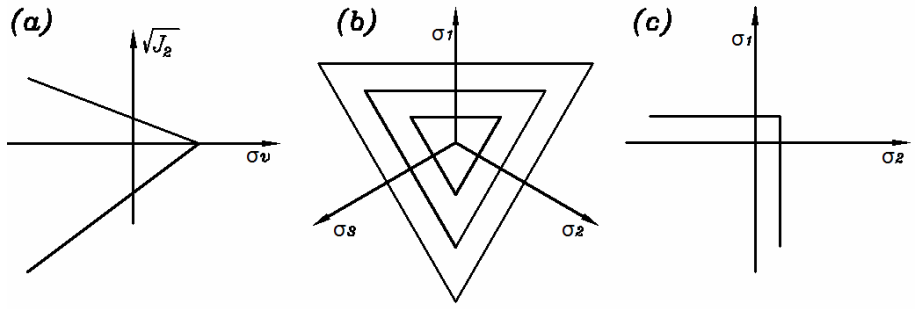


Figura 5.6 – Critério de Rankine: (a) plano meridiano; (b) plano desviatório; (c) estado plano de tensão.

5.2.6 Critérios de Ruptura no Programa Diana

Os critérios de ruptura disponíveis no programa **DIANA Finite Element Analysis** para os materiais quase-frágeis são os critérios de Tresca, Von Mises, Drucker-Prager, Mohr-Coulomb e Rankine. No programa DIANA o limite de ruptura à tração é dado para um valor constante da resistência à tração *("constant stress cut-off")*, ou seja, o critério de Rankine

(Fig. 5.7(a)) ou para os valores da tensão principal variando, segundo a Fig. 5.7(b), entre os valores f_t e $f_t(1+\sigma_2/f_c)$.

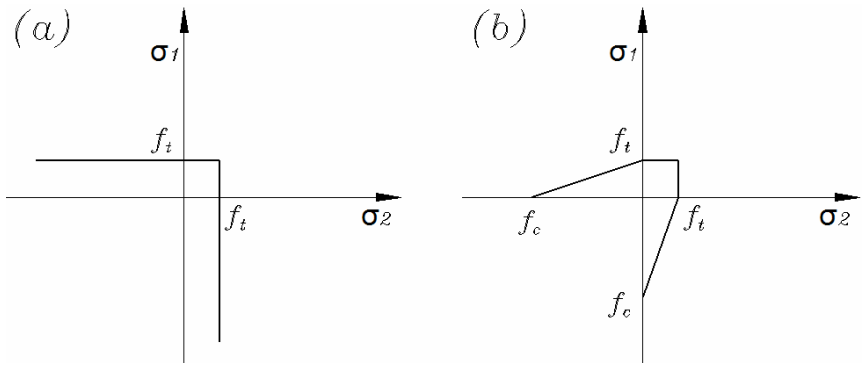


Figura 5.7 – Limite de ruptura à tração nos materiais quase-frágeis no programa DIANA: (a) "constant stress cut-off"; (b) "linear stress cut-off".

Para o comportamento à compressão os critérios de Tresca, Von-Mises, Mohr-Coulomb e Drucker-Prager podem ser empregados. Para o emprego dos critérios de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager é necessário informar o valor do ângulo de dilatância, que consiste em uma medida do aumento de volume que acompanha o comportamento do concreto comprimido. O programa DIANA também dispõe dos critérios de Egg Clam-clay, Mhor-Coulomb modificado e o modelo de Hoek-Brown, ver Diana User's Manual (2003). Os critérios de Egg Clam-clay e Mhor-Coulomb representam o comportamento do material tanto na tração quanto na compressão. O modelo de Hoek-Brown é indicado para o estudo do comportamento mecânico de rochas.

Os modelos de Tresca e Von Mises são também empregados para a modelagem dos materiais que independem da pressão hidrostática, tais quais as armaduras nas estruturas de CA e CARFA. No programa DIANA é mais conveniente o uso da opção *"reinforcement"* para a modelagem da armadura. Essa opção utiliza o critério de Von-Mises para representar o comportamento mecânico da armadura que pode ser modelada com os

modelos reológicos elasto-plástico perfeito (Fig. 5.8(a)), elasto-plástico com encruamento (Fig. 5.8(b)), ou fornecido pelo usuário.

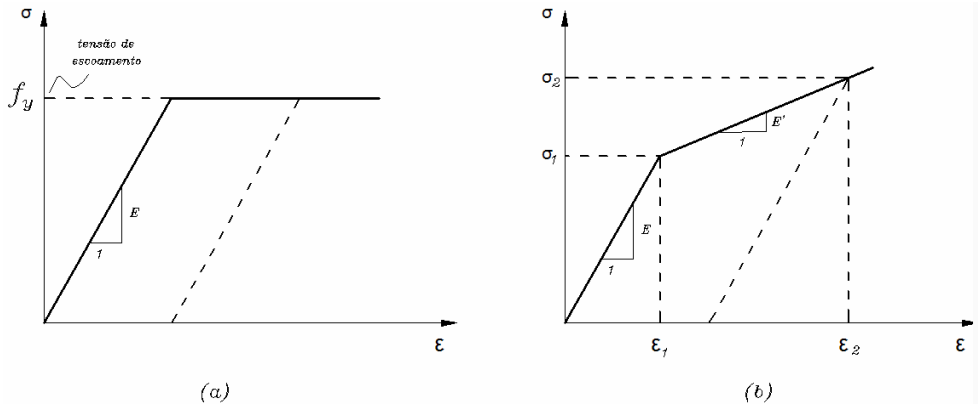


Figura 5.8 – Modelo elasto-plático perfeito (a) e elasto-plástico com encruamento (b)

5.3 Representação Numérica de Fissuras no Programa Diana

Para a simulação dos processos de fratura nos materiais quase-frágeis, tal qual o concreto e o CRFA, estão implementados no programa DIANA o modelo de fissura discreta, *"discrete crack model"*, o modelo de fissura distribuída, *"smeared crack model"*, e o modelo denominado *"total strain crack model"*, que se baseia em deformações. O modelo tipo *"total strain crack model"*, não faz uso dos critérios de ruptura para o estabelecimento do início do colapso do material e o seu comportamento mecânico é traduzido pelo histórico completo das deformações, tanto na tração quanto na compressão. Esse modelo não será utilizado neste trabalho, uma vez que, a maioria das variáveis requerida para o seu uso efetivo, relativamente ao comportamento do concreto e do CRFA à compressão, não foram determinadas nas investigações experimentais.

5.3.1 Modelo de Fissura Discreta

O modelo de fissura discreta, *"discrete crack model"*, implementado no programa DIANA é limitado à representação de fissuras entre elementos de interface. Esses elementos relacionam a força atuante na interface com os deslocamentos relativos das superfícies em contato. O modelo de fissura discreta é capaz de simular tanto o Modo-I quanto o Modo-II de fraturamento. Para uma combinação entre esses dois modos (modo misto de fraturamento), deve se usar o conceito de *"crack dilatancy"* (ver: Diana User's Manuals, 2003).

No modo I, que é de interesse para a simulação de espécimes em 3PBT, a lei constitutiva do material é expressa em termos da tensão de tração (t_n) em função (f_n) da abertura relativa da fratura (Δ_{u_n}), tal que:

$$t_n = f_n\left(\Delta_{u_n}\right) \tag{5.19}$$

A tensão normal $t_n = f_n\left(\Delta_{u_n}\right)$ é governada pelas curvas de amolecimento mostradas na Fig. 5.9, para uma resposta frágil, amolecimento linear, não-linear e múlti-linear, onde: G_f denota a energia de fratura (área sobre o gráfico $t_n = f_n(\Delta_{u_n})$) para o Modo-I.

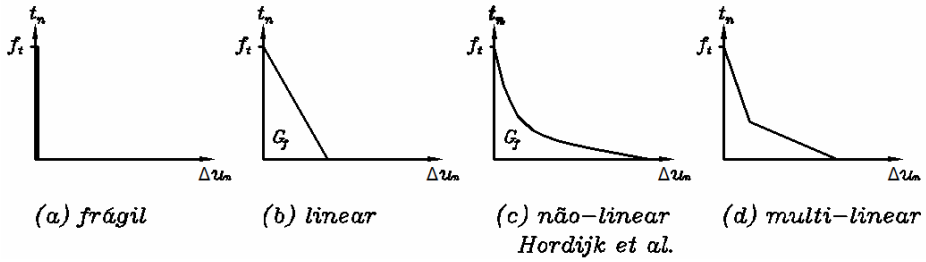


Figura 5.9 – Curvas de amolecimento para o Modo-I de fraturamento.

As equações de governo para a fratura discreta, de acordo com as suas respectivas curvas, são dadas por:

- **Fratura frágil**

$$\frac{f_n\left(\Delta_{u_n}\right)}{f_t} = \begin{cases} 1 & if\ \Delta_{u_n} \le 0 \\ 0 & if\ 0 \langle \Delta_{u_n} \langle \infty \end{cases} \tag{5.20}$$

- **Amolecimento linear**

$$\frac{f_n\left(\Delta_{u_n}\right)}{f_t} = \begin{cases} 1 - \dfrac{\Delta_{u_n}}{\Delta_{u_{n,ult}}} & if\ 0 \langle \Delta_{u_n} \langle \Delta_{u_{n,ult}} \\ 0 & if\ \Delta_{u_{n,ult}} \langle \Delta_{u_n} \langle \infty \end{cases} \tag{5.21}$$

onde: $\Delta_{u_{n,ult}} = 2G_f / f_t$ (abertura ultima da fratura) é o ponto de intersecção da curva com o eixo Δ_{u_n} (Fig. 5.7b).

- **Amolecimento não-linear (Hordijk et al.)**

$$\frac{f_n\left(\Delta_{u_n}\right)}{f_t} = \begin{cases} \left(1 + \left(c_1 \dfrac{\Delta_{u_n}}{\Delta_{u_{n,ult}}}\right)^3\right)\exp\left(-c_2 \dfrac{\Delta_{u_n}}{\Delta_{u_{n,ult}}}\right) \quad \cdots \\ \quad - \dfrac{\Delta_{u_n}}{\Delta_{u_{n,ult}}}\left(1 + c_1^3\right)\exp\left(-c_2\right) \quad if\ 0 \langle \Delta_{u_n} \langle \Delta_{u_{n,ult}} \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad if\ \Delta_{u_{n,ult}} \langle \Delta_{u_n} \langle \infty \end{cases} \tag{5.22}$$

Na equação acima $c_1 = 3$, $c_2 = 6.93$ e a abertura última da fratura é dada por: $\Delta_{u_{n,ult}} = 5.136\, G_f / f$.

- **Amolecimento Multi-linear**

O amolecimento multi-linear é completamente definido pelo usuário. Para uma representação bi-linear (representação de Hillerborg) o ponto de intersecção entre as duas retas (Fig. 5.7d) possui coordenada $(\frac{1}{3} f_t, \frac{2}{9} \Delta_{u_n,ult})$.

5.3.2 Modelo de Fissura Distribuída

O modelo de fissura distribuída, *"smeared crack model"*, consiste em um modelo particular desenvolvido especificamente para os materiais quase-frágeis. Existe uma certa confusão na literatura porquê a expressão *"smeared crack"* é freqüentemente interpretada como a contraparte da expressão *"discrete crack"* e, nesse sentido, qualquer modelo baseado no contínuo (independente de ser baseado em plasticidade ou dano (ex. o modelo *"total strain crack model"*) pode ser rotulado de *"smeared crack model"* (Jirásek, 2000). Entretanto, o termo *"smeared crack model"* é reservado para uma classe mais estreita de modelos que decompõe a deformação em uma parcela elástica e outra inelástica, relacionada com a abertura da fissura (w), devido à força de tração f_t, transmitida através da mesma, e que depende do comportamento da zona de processos de fratura (ZPF), na ponta da trinca (Fig. 5.10).

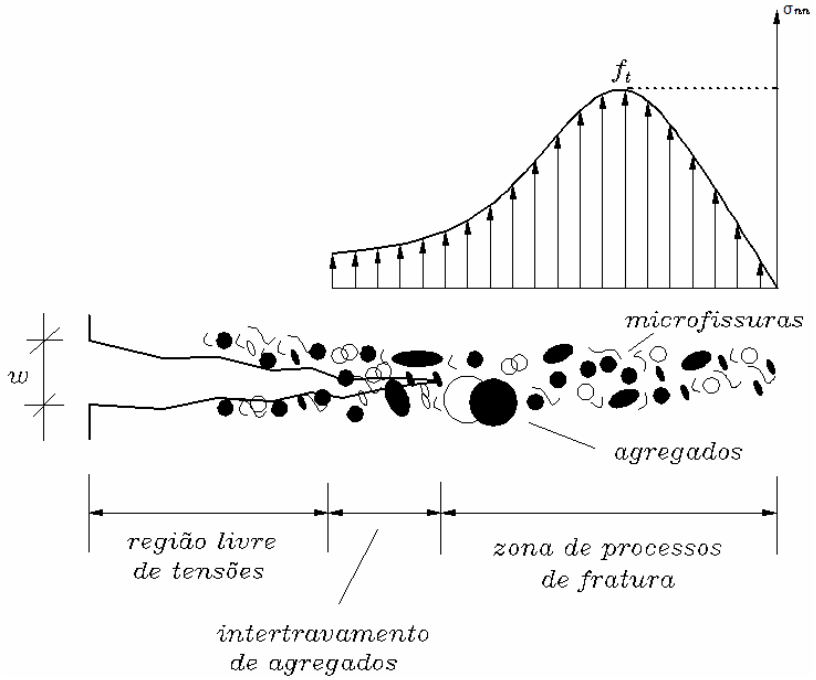


Figura 5.10 – Zona de processos de fratura no concreto.

O modelo de fissura distribuída foi originalmente introduzido por Rashid (1968). Com a introdução da fissura o material passou a ser representado como ortotrópico (Kwak e Fillipou, 1990). Inicialmente a direção da fissura foi assumida como fixa e o cisalhamento na superfície da fissura foi tratado com a introdução do fator de retenção ao cisalhamento (Suidan e Schnobrich, 1973). Mais tarde foram admitidas rotações nos eixos de ortotropia (Cope, Rao, Clark e Norris, 1980), o que implicou no desenvolvimento do modelo de fissura rotacional, *"rotating crack model"* (Gupta e Akbar, 1984). O modelo original de fissura fixa, *"fixed crack model"*, foi estendido para o modelo de múltiplas fissuras não-ortogonais (De Borst e Nauta, 1985; De Borst, 1986). O modelo de múltiplas fissuras não-ortogonais será o modelo utilizado nesta investigação. Esse o modelo está implementado, no código de cálculo **DIANA Finite Element Analysis**, com a denominação *"Multidirecional Fixed Crack"*.

5.3.2.1 Multidirecional Fixed Crack

No modelo *"multidirecional fixed crack"* a deformação total ε (Eq. 5.23), normal à fratura e na direção da força de tração f_t, é decomposta em uma parcela elástica ε^e, representando o material íntegro, e em uma deformação de fissura ε^{cr} (Fig. 5.11). Com a parcela decomposta da deformação ε^{cr} é possível modelar um grande número de fissuras que ocorrem simultaneamente.

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{cr} \tag{5.23}$$

A deformação de fissura ε^{cr} (Eq. 5.24) é o resultado da divisão da abertura da fratura (w) pela largura de banda de fissura (h) que é, por definição, a largura de uma zona de concetração de deformação e/ou microdefeitos (zona de danificação) que se desenvolve no material estrutural em estudo e nas áreas de máxima tensão de tração, preconizando o crescimento e a abertura da trinca.

$$\varepsilon^{cr} = w / h \tag{5.24}$$

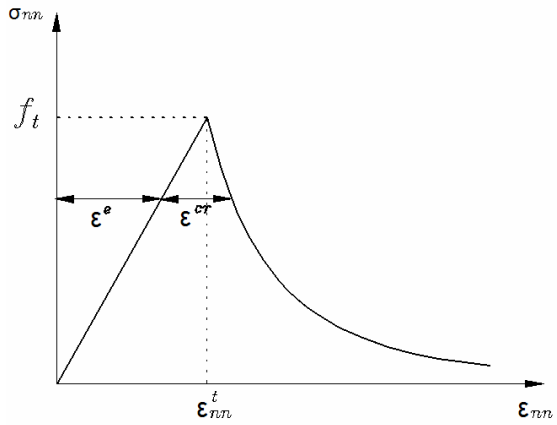


Figura 5.11 – Decomposição da deformação na direção normal à fratura.

O modelo *"Multidirecional Fixed Crack"*, admite uma tensão s_i^{cr} correspondente a uma deformação e_i^{cr} em um sistema de coordenadas $n_i t_i$ alinhado com cada fissura i que se desenvolve no interior do elemento (Fig. 5.12). O vetor que associa cada deformação de fissura é denotado por e^{cr} (Eq. 5.25). No modelo *"Multidirecional Fixed Crack"* a fissura é iniciada quando a tensão de tração do material é excedida e o ângulo entre uma fissura existente e a tensão principal de tração excede o ângulo limite (α_{TD}), entre duas fissuras consecutivas, denominado *"threshold angle"* (Fig. 5.12). O parâmetro α_{TD} é por padrão igual a 60°. Se este parâmetro for modificado para 90° têm-se o modelo de fissura fixa *("Fixed Crack Model")* e se for modificado para 0° têm-se o modelo rotacional de fissura *("Rotating Crack Model")*.

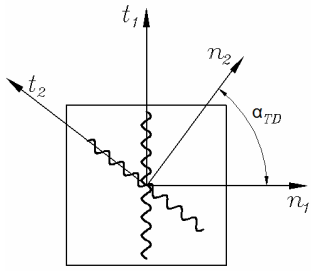


Figura 5.12 – Multidirecional Fixed Crack Model

$$e^{cr} = \left(e_1^{cr}, e_2^{cr}, ..., e_i^{cr}, ..., e_n^{cr}\right)^T \tag{5.25}$$

$$e_i^{cr} = \left\{\varepsilon_{nn,i}^{cr}, , \gamma_{mt,i}^{cr}\right\}^T \tag{5.26}$$

A relação entre a deformação global de fissura ε^{cr} e o vetor e^{cr} é dada pela equação (5.27).

$$\varepsilon^{cr} = N e^{cr} \tag{5.27}$$

Na equação acima N é a matriz que transforma o sistema de coordenadas local para o sistema de coordenadas global. A matriz N escrita em função do vetor $n^T = \{l_x, m_x, n_x\}$, normal ao plano da fissura, é dada pela Eq. (5.28).

$$N = \left[N_1, N_2, ...N_i, ..., N_n\right] \tag{5.28}$$

Onde, para o estado plano de deformação:

$$N_i = \begin{bmatrix} l_x^2 & l_x l_y \\ m_x^2 & m_x m_y \\ n_x^2 & n_x n_y \\ 2l_x m_x & l_x m_y + l_y m_y \end{bmatrix}. \tag{5.29}$$

De forma similar obtém-se vetor das tensões s^{cr},

$$s^{cr} = \left(s_1^{cr}, s_2^{cr}, ..., s_i^{cr}, ..., s_n^{cr}\right)^T \tag{5.30}$$

com a tensão na fissura i dada por $s_i^{cr} = \left\{\sigma_{nn,i}^{cr}, \tau_{nt,i}^{cr}\right\}^T$. A relação entre a tensão global σ e o vetor s^{cr} é escrita como:

$$s^{cr} = N^T \sigma \tag{5.31}$$

A Eq. (5.31) pode ser escrita em função da deformação de fissura e^{cr}, de acordo com a Eq. (5.32).

$$s^{cr} = f(e^{cr}) = D_{cr} e^{cr} \tag{5.32}$$

$$D_{cr} = \begin{bmatrix} D^{I}_{\sec ante} & 0 \\ 0 & D^{II}_{\sec ante} \end{bmatrix} \tag{5.33}$$

Na equação (5.32), D_{cr} é a matriz que relaciona as tensões com as deformaçãoes na fissura, incluindo as propriedades da fissura nos modos I e II de fraturamento. A condição $s^{cr} = f(e^{cr}) = D_{cr} e^{cr}$ pode ser escrita de forma simplificada a fim de contemplar a tensão normal à superfície da fissura ($\sigma^{cr}_{nn,i}$) e a tensão de cisalhamento ($\tau^{cr}_{nt,i}$) resultando na relação constitutiva (5.34). Nas Eq. (5.33) a (5.35), $D^{I}_{\sec ante}$ e $D^{II}_{\sec ante}$ são os módulos secantes obtidos em função das curvas de amolecimento à tração, $\sigma^{cr}_{nn} = f\left(\varepsilon^{cr}_{nn}\right)$, e ao cisalhamento, $\tau^{cr}_{nt} = f\left(\gamma^{cr}_{nn}\right)$, do material em estudo (Fig. 5.13); ε^{cr}_{nn} e γ^{cr}_{nt} são as deformações correspondentes a tensão normal e a tensão de cisalhamento; μ e β são fatores de redução do módulo de elasticidade longitudinal e transversal, respectivamente. O fator β, denominado fator de retenção ao cisalhamento, leva em conta a rugosidade nas faces da fissura, em modo II de fraturamento, devido ao intertravamento dos agregados.

$$\begin{Bmatrix} \sigma^{cr}_{nn} \\ \tau^{cr}_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{I}_{\sec ant} & 0 \\ 0 & D^{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^{cr}_{nn} \\ \gamma^{cr}_{nt} \end{Bmatrix} \tag{5.34}$$

$$D^{I}_{\sec ant} = \frac{\mu}{1-\mu} E \quad (0 < \mu < 1) \qquad D^{II}_{\sec ant} = \frac{\beta}{1-\beta} G \quad (0 < \beta < 1) \tag{5.35}$$

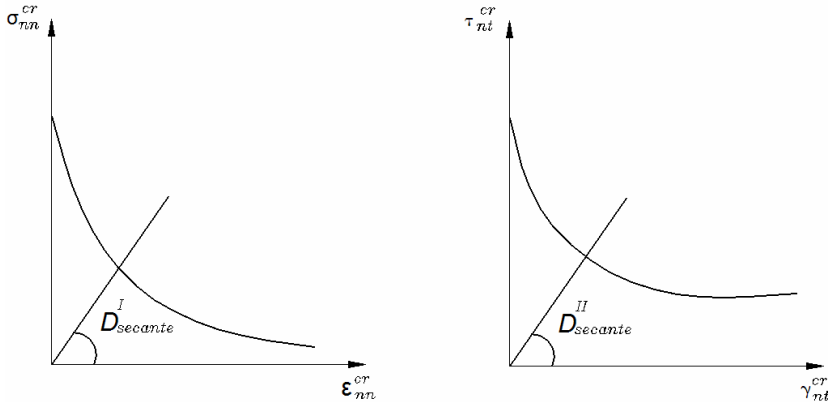


Figura 5.13 – Módulos secante em regime de fissuração

A partir da relação (5.23) a tensão golbal é calculada como:

$$\sigma = D\left(\varepsilon - \varepsilon^{cr}\right). \tag{5.36}$$

Substituindo (5.27) em (5.26), vem:

$$\sigma = D\left(\varepsilon + Ne^{cr}\right). \tag{5.37}$$

Com a notação $s^{cr} = N^T\sigma = D_{cr}e^{cr} = N^T e^{cr}$ (igualdade entre as equações (5.31) e (2.32)), resulta:

$$\sigma = D\left\{\varepsilon - N(D_{\sec ante}^{cr})^{-1}N^T\sigma\right\} \tag{5.38}$$

$$\sigma = \left\{D_e - D_eN(D_{\sec ante}^{cr} + N^TD_eN)^{-1}N^TD_e\right\}\varepsilon \tag{5.39}$$

Relação Tensão-Abertura de Fissura

A abertura da fratura está relacionada com uma propriedade intrínseca ao comportamento mecânico do material estrutural que é a taxa de energia consumida durante a propagação

da fratura. Essa taxa de energia é quantificada pela área sob o gráfico tensão-abertura de fissura e/ou diagrama de amolecimento (Fig. 5.14).

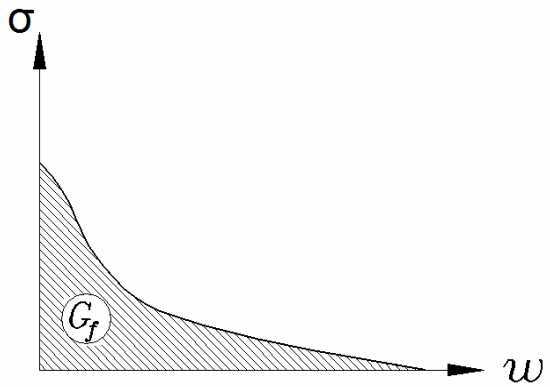


Figura 5.14 – Diagrama tensão-abertura de fissura.

Dessa forma a relação entre a tensão normal à fissura σ_{nn}^{cr} e a correspondente deformação ε_{nn}^{cr} é escrita através da relação multiplicativa (5.40), onde: f_t é a resistência à tração; $\varepsilon_{nn,ult}^{cr}$ é a deformação última e $y(...)$ representa o diagrama de amolecimento.

$$\sigma_{nn}^{cr}\left(\varepsilon_{nn}^{cr}\right) = f_t \cdot y\left(\frac{\varepsilon_{nn}^{cr}}{\varepsilon_{nn,ult}^{cr}}\right) \tag{5.40}$$

Se a curva de amolecimento do material é relacionada com a energia de fratura G_f^I, para o Modo-I de fraturamento, e para um comprimento de banda de fissura denotado por h, a relação (5.41), é então obtida.

$$G_f^I = h\int_{\varepsilon_{nn}^{cr}=0}^{\varepsilon_{nn}^{cr}=\infty} \sigma_{nn}^{cr}\left(\varepsilon_{nn}^{cr}\right) d\varepsilon_{nn}^{cr} \tag{5.41}$$

A substituição da Eq. (5.40) na Eq. (5.41), resulta em:

$$G_f^I = hf_t \int_{\varepsilon_{nn}^{cr}=0}^{\varepsilon_{nn}^{cr}=\infty} y\left(\frac{\varepsilon_{nn}^{cr}}{\varepsilon_{nn,ult}^{cr}}\right) d\varepsilon_{nn}^{cr} \tag{5.42}$$

Substituindo a variável ε_{nn}^{cr} por

$$x = \frac{\varepsilon_{nn}^{cr}}{\varepsilon_{nn,ult}^{cr}} \tag{5.43}$$

e conseqüentemente $d\varepsilon_{nn}^{cr} = \varepsilon_{nn,ult}^{cr} dx$, obtém-se a relação (5.44).

$$G_f^I = hf_t \left(\int_{x=0}^{x=\infty} y(x) dx \right) \varepsilon_{nn,ult}^{cr} \tag{5.44}$$

Assumindo que a deformação última de fissura $\varepsilon_{nn,ult}^{cr}$ é finita, a expressão final para a deformação última é dada por:

$$\varepsilon_{nn,ult}^{cr} = \frac{1}{\alpha} \times \frac{G_f^I}{hf_t} \tag{5.45}$$

com o fator α dado pela Eq. (5.46).

$$\alpha = \int_{x=0}^{x=\infty} y(x) dx \tag{5.46}$$

O valor $\varepsilon_{nn,ult}^{cr}$ é assumido como sendo uma constante relacionada com a propriedade do material, através da resistência à tração (f_t), da energia de fratura (G_f^I) e da área do elemento finito (A_{ef}), pela introdução da largura da banda da fissura ($h = \sqrt{A_{ef}}$).

Para a representação da fissuração distribuída, nos materiais coesivos, o program Diana admite o comportamento frágil *("Brittle Cracking")* e as opções de amolecimento linear *("Linear Tension Softening"),* amolecimento multi-linear, *("Multilinear Tension Softening")* e amolecimento não-linear *("Nonlinear Tension Softening").*

- **Fratura frágil**

No modelo para a fratura frágil (Fig. 5.15) o comportamento frágil é caracterizado pela perda total de resistência após se atingir o critério de ruptura.

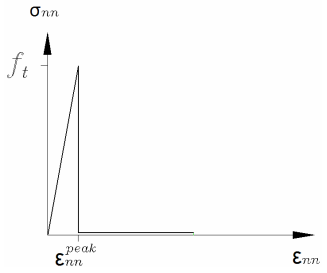


Figura 5.15 – Ruptura frágil (Diana User`s Manual, 2003).

A energia dissipada pela estrutura para que ocorra a ruptura é dada na Eq. (5.47), onde: $\varepsilon_{nn}^{peak} = f_t / E$.

$$G_f = \frac{1}{2} f_t \varepsilon_{nn}^{peak} h \tag{5.47}$$

- **Amolecimento linear**

No caso do amolecimento ser admitido como linear (Fig. 5.16) a relação entre a tensão e a deformação de fissura é dada pela Eq. (5.48).

$$\frac{\sigma_{nn}^{cr}\left(\varepsilon_{nn}^{cr}\right)}{f_t} = \begin{cases} 1 - \dfrac{\varepsilon_{nn}^{cr}}{\varepsilon_{nn,ult}^{cr}} & if \quad 0 < \varepsilon_{nn}^{cr} < \varepsilon_{nn,ult}^{cr} \\ 0 & if \quad \varepsilon_{nn,ult}^{cr} < \varepsilon_{nn}^{cr} < \infty \end{cases} \tag{5.48}$$

A estimativa da deformação última (Eq. 5.50) é obtida para α de acordo com a condição (5.49).

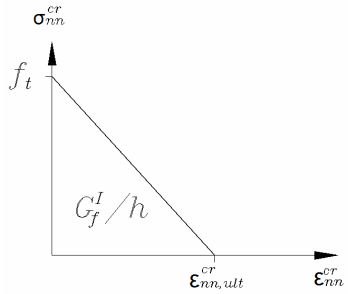


Figura 5.16 – Amolecimento linear (Diana User`s Manual, 2003).

$$\alpha = \int_0^\infty y(x)dx = \int_0 y(x)dx + \int_0^\infty 0dx = \int_0 (1-x)dx = \frac{1}{2} \tag{5.49}$$

$$\varepsilon_{nn,ult}^{cr} = 2\frac{G_f^I}{hf_t} \tag{5.50}$$

Sendo:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = -1 \tag{5.51}$$

O menor valor da deformação última de fissura é dada por:

$$\varepsilon_{nn,ult,\min}^{cr} = \frac{f_t}{E} \tag{5.52}$$

- **Amolecimento multilinear**

O modelo multilinear (Fig. 5.17) adota semi-retas para descrever a curva de amolecimento do material. Nesse modelo a inclinação da primeira semi-reta deve obedecer a condição (5.53), onde E é o módulo de elasticidade, a fim de se evitar o comportamento de *"snap-back"* no modelo constitutivo.

$$\frac{f_{t,1} - f_{t,0}}{\varepsilon_{nn,1}^{cr}} \geq -E \tag{5.53}$$

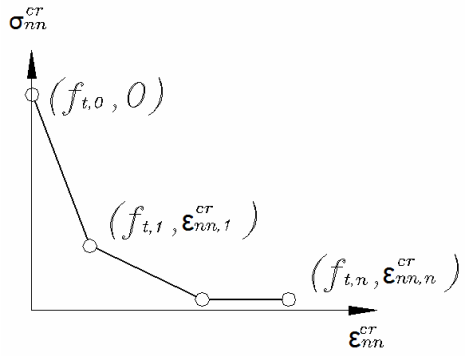


Figura 5.17 – Amolecimento Multilinear

A condição (5.53) pode ser escrita como:

$$\left.\frac{d\sigma_{nn}^{cr}}{d\varepsilon_{nn}^{cr}}\right|_{\varepsilon_{nn}^{cr}=0} \geq -E \tag{5.54}$$

e

$$\varepsilon_{nn,ult}^{cr} \geq -\frac{f_t}{E}\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} \tag{5.54}$$

- **Amolecimento não-linear**

Duas curvas de amolecimento não-linear (Fig.5.18) estão disponíveis, no programa DIANA**,** para a simulação da fissuração distribuída. Essas curvas são os modelos de Reinhardt (1984) e Hordijk (1991).

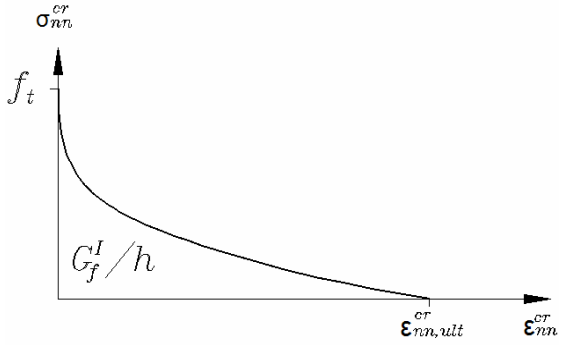


Figura 5.18 – Amolecimento Não-Linear

Modelo de Reinhardt: Esse modelo é uma modificação do modelo linear, através da equação:

$$\frac{\sigma_{nn}^{cr}\left(\varepsilon_{nn}^{cr}\right)}{f_t} = \begin{cases} 1-\left(\dfrac{\varepsilon_{nn}^{cr}}{\varepsilon_{nn,ult}^{cr}}\right)^{c_1} & if \quad 0 < \varepsilon_{nn}^{cr} < \varepsilon_{nn,ult}^{cr} \\ 0 & if \quad \varepsilon_{nn,ult}^{cr} < \varepsilon_{nn}^{cr} < \infty \end{cases} \tag{5.54}$$

Na equação acima $c_1 = 0{,}31$ e o valor de α é calculado pela Eq. (5.55).

$$\begin{aligned}\alpha = \int_0^\infty y(x)dx &= \int_0^1 y(x)dx + \int_0^\infty 0\,dx \\ &= \int_0^1 (1 - x^{c_1})dx = \frac{c_1}{1 + c_1}\end{aligned} \tag{5.55}$$

Assim, obtém-se a deformção última como:

$$\varepsilon_{nn,ult}^{cr} = 4.226\,\frac{G_f^I}{hf_t} \tag{5.56}$$

Modelo de Hordijk: No modelo de Hordijk a condição que relaciona a tensão com a deformação de fissura é a Eq. 5.57.

$$\frac{\sigma_{nn}^{cr}\left(\varepsilon_{nn}^{cr}\right)}{f_t} = \begin{cases} \left(1 + \left(c_1 \dfrac{\varepsilon_{nn}^{cr}}{\varepsilon_{nn,ult}^{cr}}\right)^3\right)\exp\left(-c_2 \dfrac{\varepsilon_{nn}^{cr}}{\varepsilon_{nn,ult}^{cr}}\right) & \cdots \\ -\dfrac{\varepsilon_{nn}^{cr}}{\varepsilon_{nn,ult}^{cr}}(1 + c_1^3)\exp(-c_2) & if \quad 0 < \varepsilon_{nn}^{cr} < \varepsilon_{nn,ult}^{cr} \\ 0 & if \quad \varepsilon_{nn,ult}^{cr} < \varepsilon_{nn}^{cr} < \infty \end{cases} \tag{5.57}$$

Os parâmetros c_1 e c_2 valem 3 e 6.93, respectivamente. Com o valor de α (Eq. 5.58), calcula-se $\varepsilon_{nn,ult}^{cr}$ (Eq. 5.59).

$$\begin{aligned}\alpha &= \int_0^{\infty} y(x)dx = \int_0^{l} y(x)dx + \int_l^{\infty} 0\,dx \\ &= \int_0^{l} \left(1 + (c_1 x)^3\right)\exp\left(-c_2 x\right) - x\left(1 + c_1^3\right)\exp\left(-c_2\right)dx \\ &= \frac{-12c_1^3 - 12c_1^3 c_2 - 6c_1^3 c_2^2 - 2c_2^3 - 2c_1^3 c_2^3}{\ldots} \ldots \\ &\ldots \frac{-c_2^4 - c_1^3 c_2^4 + 12c_1^3\exp(c_2) + 2c_2^3\exp(c_2)}{\ldots \quad 2c_2^4\exp(c_2)}\end{aligned} \tag{5.58}$$

$$\varepsilon_{nn,ult}^{cr} = 5.136\frac{G_f^I}{hf_t} \tag{5.59}$$

5.4 Obtenção da Curva de Amolecimento dos Materiais Quase-frágeis

A representação dos processos de fratura nos materiais quase-frágeis é feita com base nos modelos coesivos, tal qual modelo de Hillerborg, Moodér e Petersson (1976), Hillerborg (1980). Para esses modelos, uma lei constitutiva que relaciona a tensão com a abertura da fissura (curva $\sigma - w$) é requerida.

A curva $\sigma - w$ pode ser obtida a partir de vigas prismáticas ranhuradas e carregadas em três pontos (Three Point Bending Test – 3PBT), segundo recomendação dos Comitês Técnicos RILEM (2000a). Outros tipos de ensaio também podem ser realizados para a obtenção da curva de amolecimento, tais quais: o ensaio de compressão diametral (Barragán, 2002) e o ensaio de tração uniaxial (Kooiman, 2000; Barragán, 2002), que é de difícil execução.

A curva de amolecimento ($\sigma - w$) não é obtida de forma imediata (direta) para os ensaios de flexão e de compressão diametral. Dessa form é necessário o emprego de uma estratégia para a sua obtenção. Essa estratégia é feita analiticamente através da análise inversa e/ou retroanálise (Sousa, 2002; Sousa e Gettu, 2004; Sousa, Gettu e Barragán,

2002a, 2002b) a partir dos parâmetros fornecidos pelas curvas $P-\delta$ ou $P-CMOD$, obtidas do ensaio experimental. Na Fig. 5.19 é mostrado o arranjo estrutural para a execução do ensaio 3PBT segundo os Comitês Técnicos RILEM (2000a).

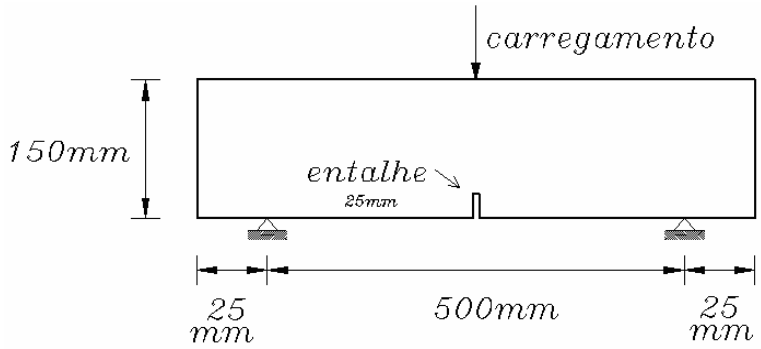


Figura 5.19 – Ensaio 3PBT segundo RILEM (2000a)

O ajuste para a obtenção da curva $\sigma - w$, através de análise inversa, foi feito com o programa FIT3PB, escrito através da técnica de Programação Orientada a Objetos (POO) em linguagem C++ (Sousa, 2002).

5.4.1 Análise Inversa de Dados Experimentais

Os fenômenos físicos são descritos por uma relação de causa (ações aplicadas pelo meio) e efeito (resposta que caracteriza o fenômeno e que depende das ações e das restrições do sistema). A determinação dos efeitos a partir das condições iniciais do sistema (ações e restrições) são os chamados problemas diretos, enquanto a determinação de alguma das condições iniciais, sendo conhecidos os efeitos, ou as restrições do sistema, sendo conhecidas as ações e os efeitos, caracterizam os problemas inversos. A Fig. 5.20 esboça, de maneira pictória, a relação entre problemas diretos (**D**) e problemas inversos ($\mathbf{D}^{-1}$).

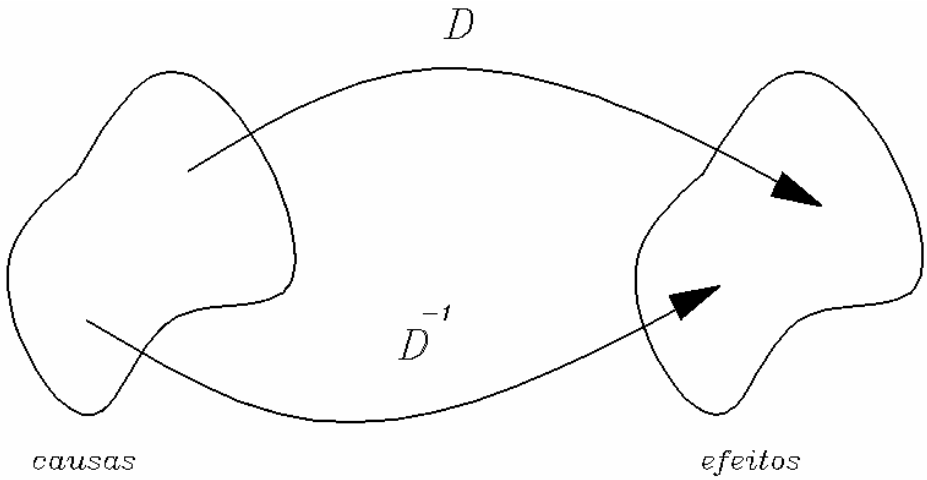


Figura 5.20 – Representação pictória de problemas diretos e problemas inversos

Em engenharia de estruturas os modelos são, normalmente, bem conhecidos e, portanto, o problema de análise inversa se reduz à identificação de seus parâmetros visando à melhor aderência entre os valores medidos e os calculados, sejam estes relacionados com a geometria da estrutura, com as propriedades dos materiais, ou com a caracterização das ações.

De acordo com Roelfstra e Wittman (1986) um procedimento de análise inversa, para o ajuste da curva $\sigma - w$, consiste em 4 passos (Fig. 5.21): 1) entrada de valores, processamento computacional da análise, ajuste de valores de acordo com um critério de convergência e a resposta final da análise (valores finais).

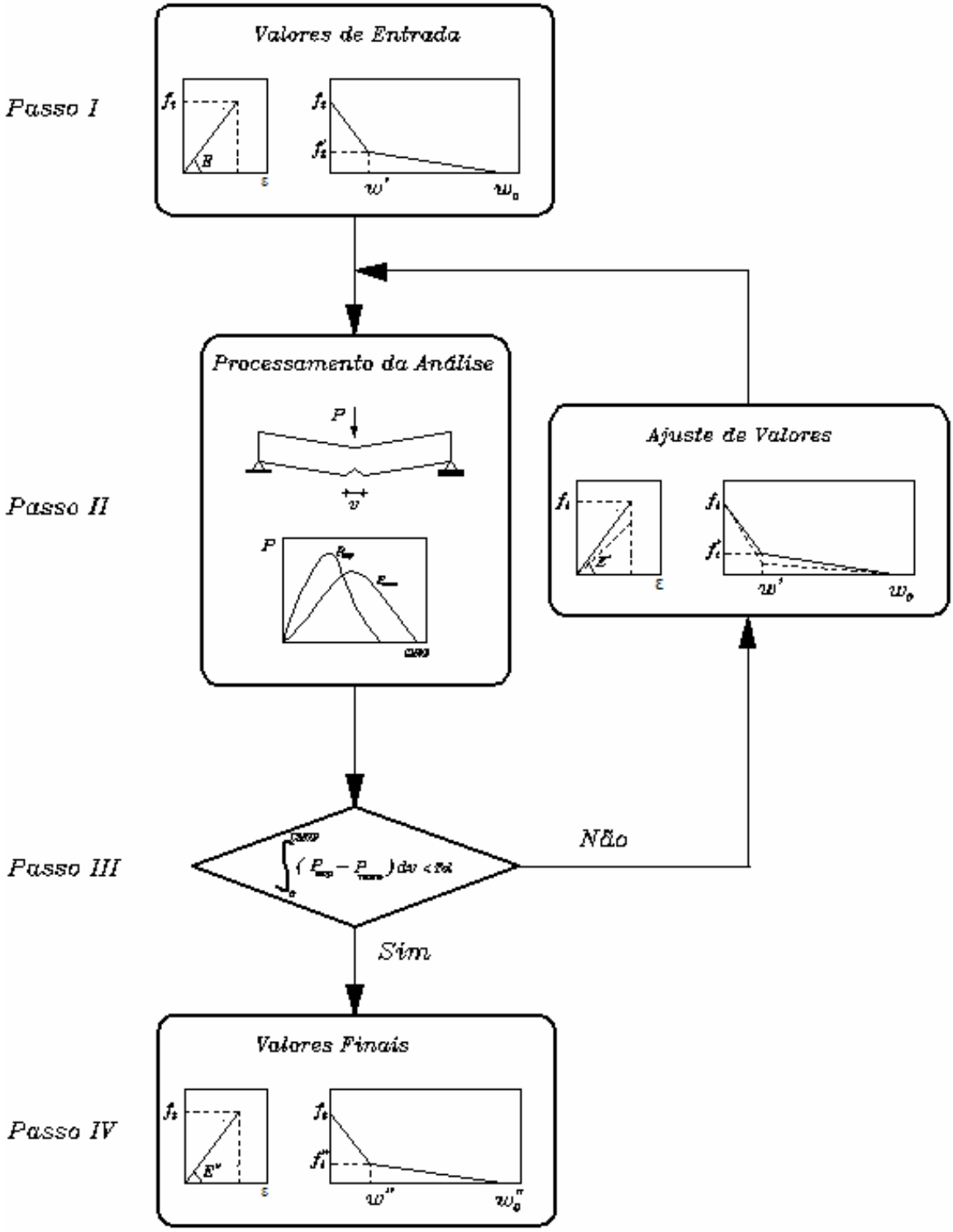


Figura 5.21 – Procedimento para análise inversa

Dado um conjunto de parâmetros (valores de entrada), representados por um vetor p, a resposta final da análise inversa ocorre quando o erro calculado na análise (*Passo III* - Fig. 5.21) é inferiror a uma dada tolerância (Tol) e/ou quando um certo número de passos é computado. Na Fig. 5.21 $P_{\exp}$ representa a curva obtida experimentalmente e P_{num} representa a curva obtida pela aproximação numérica a partir dos valores de entrada.

No programa FIT3PB o erro calculado em um ponto da curva $P-CMOD$, correspondente a uma dada abertura da fratura ($CMOD$), representada por um escalar v, é dado como:

$$\delta(p,v) = P_{\exp}(p,v) - P_{num}(p,v) \tag{5.60}$$

A curva $\sigma - w$ que representará a resposta final da análise inversa é obtida pela minimização do erro durante o ajuste de modo que o critério de convergência fica estabelecido com a minimização da função de erro, descrita por:

$$\zeta_{sqr}(p) = \int_0^{v_{máx}} [\delta(p,v)]^2 \psi(v) dv \tag{5.61}$$

Na Eq. (5.61), $\psi(v)$ é um peso de integração que prioriza certos pontos da curva $P-CMOD$ e $v_{máx}$ é a máxima abertura da fratura. Na implementação computacional a estratégia para determinar o mínimo da função de ζ_{sqr} baseia-se no que se segue:

1. Partindo do conjunto de parâmetros de entrada que representa a curva de amolecimento calcula-se a função de erro ζ_{sqr} ;

2. Se ζ_{sqr} está dentro da tolerância têm-se um ponto de mínimo e o ajuste da curva de amolecimento $\sigma - w$ é obtido. Caso contrário, novos passos devem ser realizados até o esbalecimento do ponto de mínimo;

3. A primeira e a segunda derivada da função de erro, ζ_{sqr}, são numericamente avaliadas, resultando em uma estimativa da função gradiente (Eq. 5.62) e da matriz Hessiana (Eq. 5.63). Essa estratégia visa determinar as derivadas parciais de acordo com o *Método das Diferenças Finitas* para um par de parâmetros (p_i, p_j) e suas varições Δp_i e Δp_j (Fig. 5.22), de modo a se obter uma forma polinomial quadrática, $\zeta(p_i, p_j)$, obtida por interpolação.

$$g_i = \frac{\partial \zeta(p_i, p_j)}{\partial p_i} \tag{5.62}$$

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 \zeta(p_i, p_j)}{\partial p_i \partial p_j} \tag{5.63}$$

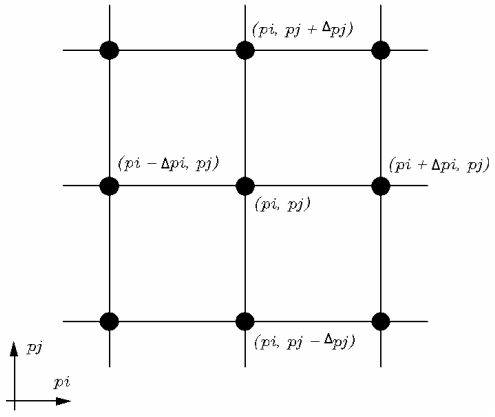


Figura 5.22 – Esquema para derivadas parciais

4. Se a matriz Hessiana resulta positiva definida, a direção de busca é indicada através do método de Newton-Raphson, de outro modo a direção de busca é contrária a direção indicada pela função gradiente (Eq. 5.62);

5. Uma vez que a direção de busca é determinada, um algoritmo de busca linear é empregado para se encontrar o valor de mínimo em tal direção.

Capítulo 5 – Modelos Constitutivos para a Modelagem Numérica dos Materias

Capítulo 6

Simulação Numérica de Vigas de CS, CA, CRFA e CARFA

Neste capítulo apresenta-se as simulações numéricas realizadas nas vigas em 3PBT, confeccionadas com CS e CRFA, nas vigas de CA e nas vigas de CARFA, objetos deste estudo. As estratégias seguidas, para a garantia da confiabilidade da análise numérica, também são discutidas, com base na discretização da malha de elementos finitos e na validação do modelo constitutivo empregado.

Inicialmente, faz-se uma descrição das análises experimentais realizadas. Essa descrição inclui o esquema estrutural (condições de carregamento e de vinculação), as características geométricas das seções e as propriedades dos materiais empregados. Após, faz-se um estudo da discretização da malha de elementos finitos, analisando o estado de tensões no regime elástico, através da comparação da resposta numérica com o resultado analítico. Definida a malha de elementos finitos é feito um estudo do ensaio à flexão 3PBT, utilizando o modelo de fissura discreta, para a validação do método de obtenção da curva $\sigma - w$ enquanto modelo constitutivo para a representação dos processos de fratura ao se comparar as curvas $P - \delta$ e $P - CMOD$ da simulação numérica com a curva experimental. Cumprida estas etapas, passa-se à análise não-linear dos modelos, com a

definição dos parâmetros mais adequados para a simulação do CRFA, ao se combinar os critérios de ruptura com os modelos numéricos representativos da fissuração distribuída.

6.1 Descrição do Ensaio Experimental

Os modelos estruturais utilizados nos ensaios experimentais constituem-se de vigas ensaiadas ao esforço cortante, caracterizando o tipo de ruptura cisalhamento-flexão, e a flexão, para o caso de ruptura em flexão pura, relativamente às cargas aplicadas. Esses modelos estruturais serão denominados de Arranjo Estrutural I (AEI) e Arranjo Estrutural II (AEII), respectivamente, para efeito de sua descrição.

6.1.1 Arranjo Estrutural I (AEI)

Para o Arranjo Estrutural I (Fig. 6.1), duas séries de viga foram testadas. Essas séries consistem de vigas com seção retangular e em T, superarmadas na direção longitudinal a fim se evitar a ruptura por flexão. A Fig. 6.2 e a Fig. 6.3, mostram as características da seção transversal de cada viga.

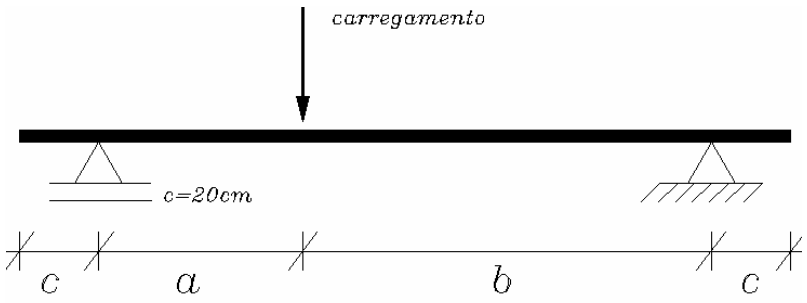


Figura 6.1 – Representação do Arranjo Estrutural I (AEI)

A análise experimental envolveu a identificação dos modos de ruptura, da resposta carga deslocamento e a influência da geometria da seção transversal, a fim de se identificar o efeito de escala. Nas vigas de seção retangular foi analisada a influência da variação da

altura e, nas vigas com seção em T, foi avaliado o efeito do aumento e/ou da diminuição da largura e da altura da mesa. Para todas as vigas foi mantida a taxa de armadura longitudinal, o volume de fibras, a resistência à compressão e a relação entre o vão de cisalhamento e a sua altura útil. Como pode ser identificado, nas figuras 6.2 e 6.3, algumas vigas foram ensaiadas duas vezes com o objetivo de verificar a repetibilidade dos resultados.

Vigas em concreto simples (CS) também foram moldadas, com as mesmas dimensões e taxa de armadura, para as vigas retangulares com 30 cm e 60 cm de altura e para a viga em T com largura de mesa igual a 100 cm. As vigas em concreto simples (CS) foram usadas como referência para que a influência da adição de fibras pudesse ser identificada.

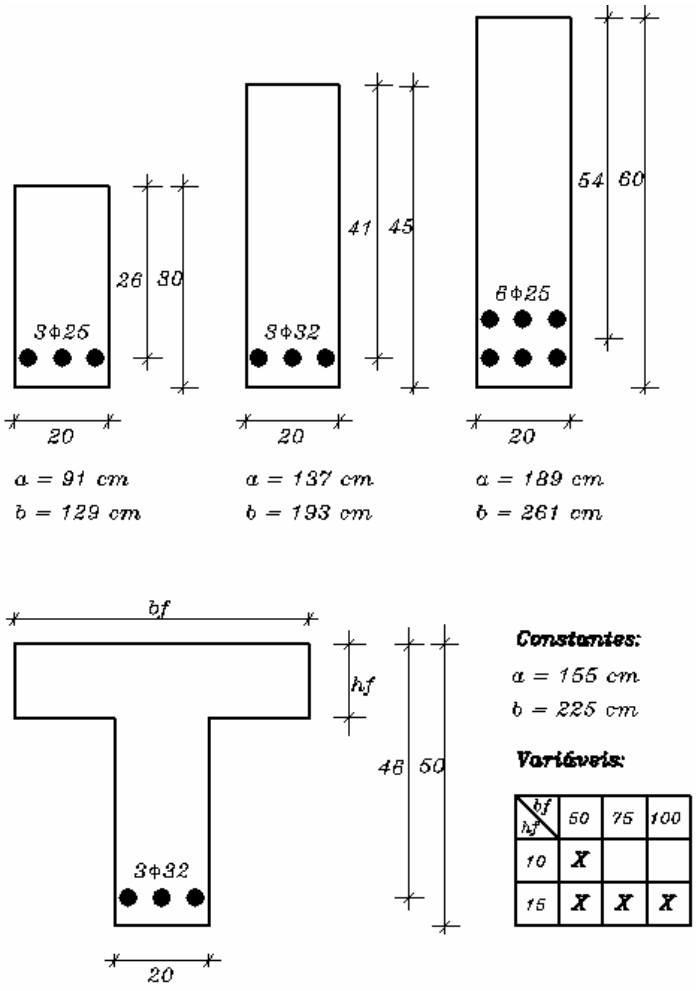


Figura 6.2 – Seção transversal da primeira série de vigas de CRFA.

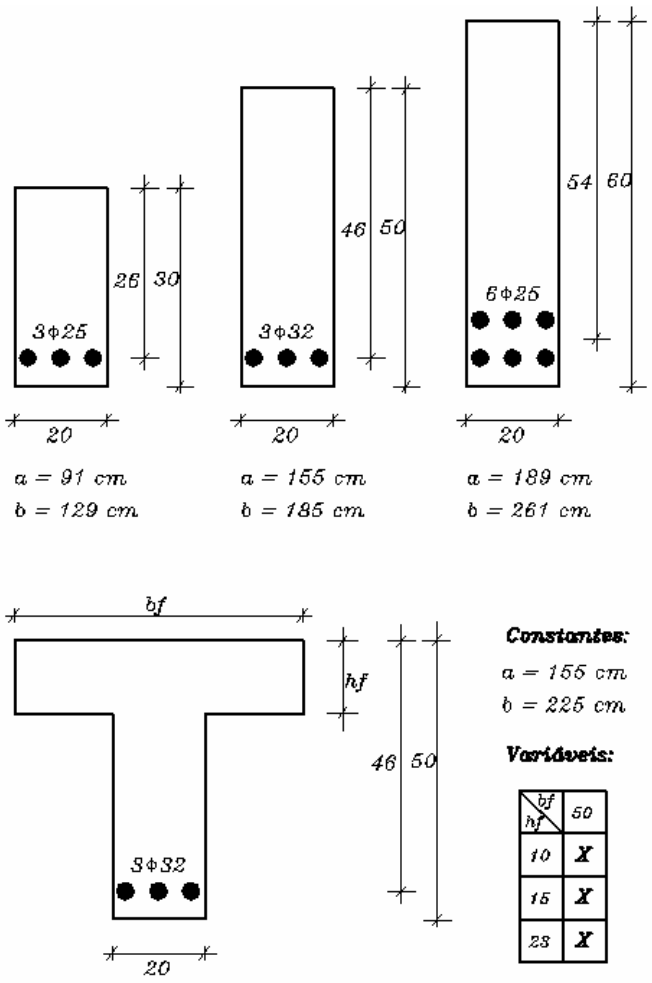


Figura 6.3 – Seção transversal da segunda série de vigas de CRFA.

A tensão de escoamento da armadura, para as séries de vigas analisadas, vale $f_y = 50kN/cm^2$, $\nu = 0{,}15$ e módulo de elaticidade $E_s = 210\,GPa$. A resitência característica do concreto utilizado na mistura foi de $f_{ck} = 30MPa$ e o teor de fibra incorporado foi de $40kg/m^3$, $\nu = 0{,}2$ e o módulo de elasticidade $34{,}3\,GPa$. A Tab. 6.1, mostra a proporção dos materiais utilizados na mistura do concreto. As características da fibra utilizada são dadas na Tab. 6.2. Os valores do abatimento do tronco de cone e da resistência média à compressão do concreto, utilizado para moldar as duas séries de vigas, encontram-se na Tab. 6.3. Na Fig. 6.4 estão esquematizados os pontos onde foram feitas medições.

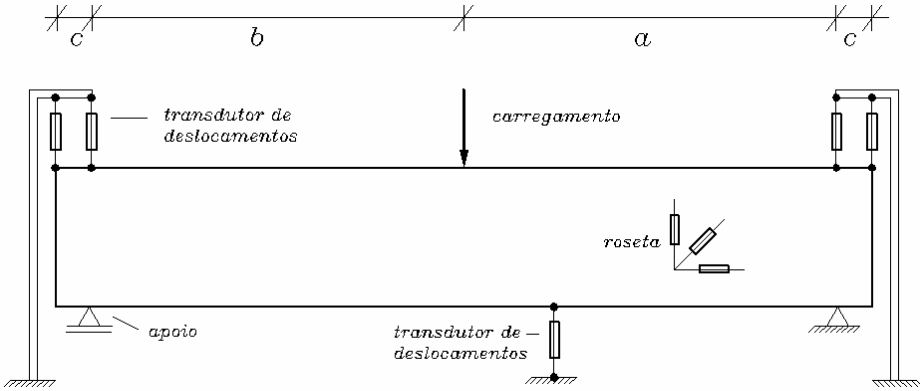


Figura 6.4 – Detalhe experimental

Tabela 6.1 – Composição da mistura (por m³)

Cimento (CEM I 42.5 R) - (kg)	385
Água (litros)	168
Brita (5 – 12 mm) (kg)	183
Brita (12 – 25 mm) (kg)	773
Areia (0 - 5 mm) (kg)	851
Plastificante (litros)	4,6

Tabela 6.2 – Propriedades da fibra

Dramix® RC 65/60 BN - fibra de aço de baixo carbono com extremidade em gancho	
Comprimento (mm)	60
Fator de forma (l/d)	65
Resistência à tração (MPa)	1000
Min. valor da máxima Deformação (%)	0,8

Tabela 6.3 – Características do concreto

Mistura	Slump (cm)	f_c (resistência média à compressão em MPa)
Concreto simples	23	32,1 (±2%)
CRFA-1	17	37,7 (±2%)
CRFA-2	20	38,8 (±1%)

6.1.2 Arranjo Estrutural II (AEII)

O Arranjo Estrutural II, conforme é mostrado na Fig. 6.5, consiste de uma viga bi-apoiada e com carregamentos simétricos, caracterizando o tipo de ruptura à flexão pura. Os carregamentos estão aplicados a um terço e a dois terços da distância entre os apoios. A viga possui seção retangular e é armada na direção longitudinal (armadura principal) e na direção transversal (estribos verticais), para se evitar a ruptura ao esforço cortante. Foram confeccionadas com concreto simples (CS) e com concreto reforçado com fibras de aço (CRFA). A proporção de fibras foi de $40kg/m^3$ e as propriedades dos materiais utilizados para a dosagem do concreto de confecção das vigas, se encontram nas Tabelas 6.4, 6.5 e 6.6.. O coeficiente de Poisson é igual a $0,2$ e o módulo de elasticidade vale $28,30\ GPa$.

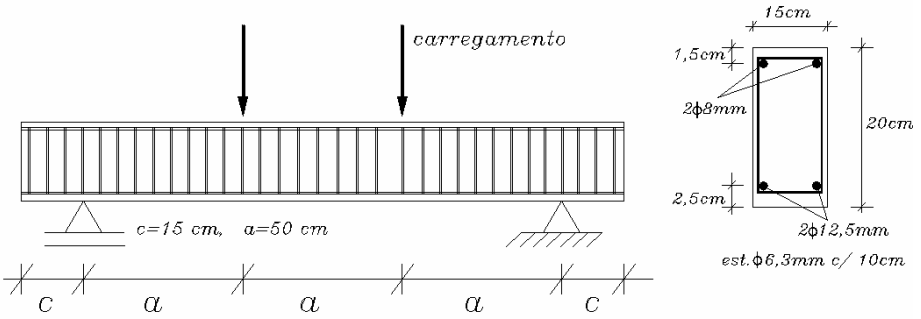


Figura 6.5 – Representação do Arranjo Estrutural II (AEII)

Tabela 6.4 – Composição da mistura (por m3)

Cimento (CP II – E32) - (kg)	50
Água (litros)	21
Brita (19 mm) (kg)	135
Areia (0 - 5 mm) (kg)	115
Plastificante (litros)	0,53

Tabela 6.5 – Propriedade da fibra

Dramix® RC 80/60 BN - fibra de aço de baixo carbono com extremidade em gancho	
Comprimento (mm)	60
Fator de forma (l/d)	80
Resistência à tração (MPa)	1200
Min. valor da máxima Deformação (%)	-

Tabela 6.6 – Características do concreto

Mistura	Slump (cm)	f_c (resistência média à compressão em MPa)
Concreto simples	-	43,7
CRFA	-	40,4

Foram utilizados aços do tipo A e do tipo B, com $\nu = 0{,}15$. As características das armaduras longitudinal e transversal para o arranjo AEII se encontram no gráfico da Fig. 6.6.

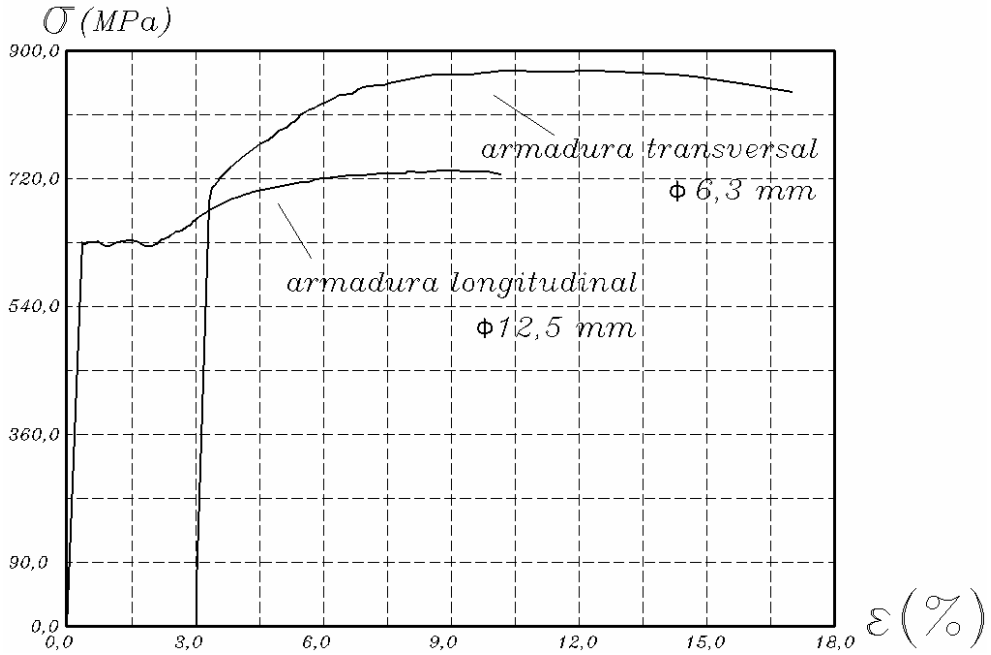


Figura 6.6 – Diagrama tensão-deformação da armadura

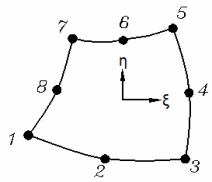
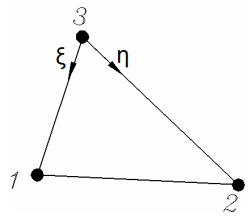
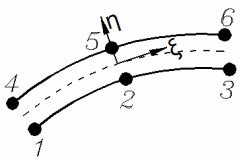
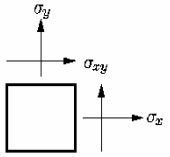
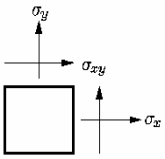
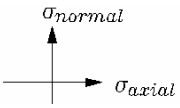
6.2 Estudo da Discretização das Vigas

O estudo da discretização das vigas, definidas segundo os arranjos estruturais acima descritos, foi feito com base no panorama das tensões, obtido para cada viga analisada, segundo três densidades de malhas.

Os elementos finitos empregados nas discretizações são os elementos isoparamétricos de alta ordem, em estado plano de tensão e com dois graus de liberdade por nó, CQ16M, T6MEM e CL12I, mostrados na Tab. (6.7), com seus respectivos polinômios para translações $u_i \quad i = 1, 2$ e o estado de tensão assumido. Esses elementos foram empregados

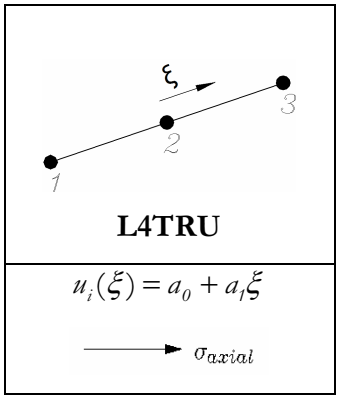
para a modelagem do concreto e do concreto com fibras. O elemento CQ16M é baseado em interpolação quadrática com pontos de integração de Gauss, ver Diana User's Manuals (2003).

Tabela 6.7 – Elementos CQ16M, T6MEM e CL12I no sistema de coordenadas adimensionais ξ e η .

		
CQ16M	**T6MEM**	**CL12I**
$u_i(\xi,\eta) = a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\xi\eta + a_4\xi^2 + a_5\eta^2 + a_6\xi^2\eta + a_7\xi\eta^2$	$u_i(\xi,\eta) = a_0 + a_1\xi + a_2\eta$	$u_i(\xi,\eta) = a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\xi\eta + a_4\xi^2 + a_5\eta^2$
		

Para a discretização da armadura foi utilizado o elemento finito de treliça L4TRU (Tab. 6.8). Esse tipo de elemento é automaticamente embebido no material estrutural eliminando a necessidade de se preocupar com a ligação entre os mesmos, a menos que se deseja alterar as propriedades da interface. Na maioria dos códigos de cálculo, que utilizam o método dos elementos finitos, o material estrutural e a armadura devem possuir nós comuns, ao longo da sua interface, a fim de garantir uma aderência perfeita e a compatibilidade entre os deslocamentos.

Tabela 6.8 – Elementos L4TRU no sistema de coordenadas ξ .



6.2.1 Análise das Tensões em Regime Elástico

6.2.1.1 Solução Analítica: Seções Constituídas de Materiais Heterogêneos

Para as seções de vigas dadas na Fig. 6.7, suposta constituída dos materiais com módulos de elasticidade $E_s^{'}$, E_s, E_c e suas respectivas áreas $A_s^{'}$, A_s e A_c (área líquida), submetida ao esforço cortante V e ao momento fletor M, os valores das tensões máximas de tração e de compressão podem ser obtidos a partir da equivalência ente as áreas dos materiais envolvidos (seção homogeneizada) e impondo a condição de momento estático nulo em relação a linha neutra. As tensões máximas de tração ($\sigma_t^{máx}$) e de compressão ($\sigma_c^{máx}$) são calculadas pelas equações (6.1) e (6.2) e a tensão de cisalhamento (τ), ao longo da altura da seção, é calculada pela Eq. (6.3), onde seu valor máximo corresponde ao valor da maior relação M_e / b. Nas equações (6.1) a (6.3) M é momento fletor atuante na seção; V é o valor do esforço cortante; M_e é o momento estático; b é a largura da seção na direção paralela à linha neutra e passando por um ponto qualquer da mesma; x é a posição da linha neutra; I_b é o momento de inércia da seção homogeneizada e h é a altura total da viga.

$$\sigma_c^{máx} = \frac{M}{I_h} x \tag{6.1}$$

$$\sigma_t^{máx} = \frac{M}{I_h}(h - x) \tag{6.2}$$

$$\tau = \frac{VM_e}{bI_h} \tag{6.3}$$

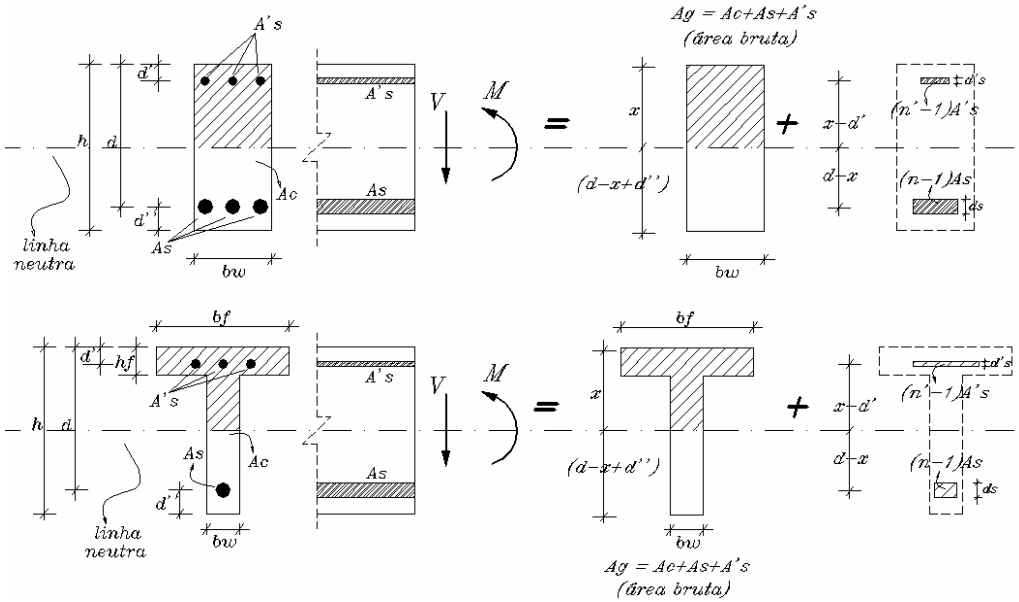


Figura 6.7 – Viga com seção retangular e em T, constituída de materiais heterogêneos, submetida ao esforço cortante V e ao momento fletor M .

Para as seções retangulares o valor da profundidade da linha neutra é dado pela Eq. (6.4).

$$x = \frac{b_w\left[d^2 + \left(d''\right)^2 + 2dd''\right] + 2dA_s\left(n-1\right) + 2d'A_s'\left(n-1\right)}{2\left[b_w\left(d + d''\right) + A_s'\left(n'-1\right) + A_s\left(n-1\right)\right]} \tag{6.4}$$

Para as seções em T a Eq. (6.4) deve ser substituída pela Eq. (6.5).

$$x = \frac{b_w\left[d^2 + \left(d''\right)^2 + 2dd''\right] + 2dA_s(n-1) + 2d'A_s'(n-1) - \left(b_f - b_w\right)\left(b_f\right)^2}{2\left[b_w\left(d + d''\right) + A_s'\left(n' - 1\right) + A_s(n-1) + h_f\left(b_f - b_w\right)\right]} \qquad (6.5)$$

Nas equações (6.4) e (6.5) que definem a posição da linha neutra $n' = E_s'/E_c$ e $n = E_s/E_c$. O significado de b_w, d, d', d'', h_f e b_f é mostrado na Fig. 6.8. O valor de E_s e o valor de E_c, para análise das tensões no regime elástico, foram adotados iguais a $210\ GPa$ e $30\ GPa$, respectivamente. Assim, $n = 7$.

6.2.1.2 Análise Numérica das Tensões e Comparação com a Solução Analítica

6.2.1.2.1 Discretização do Arranjo Estrutural I (AEI)

Para a discretização do Arranjo Estrutural I (AEI), caracterizado por vigas carregadas no vão de cisalhamento $a = 3.5d$, a discretização da malha de elementos finitos foi feita para a viga com seção retangular de dimensões $20 \times 30\ cm$ e para a seção em T com dimensões $10 \times 50\ cm$, relativamente a altura e a largura da mesa.

Uma vez que as vigas de seção retangular são geometricamente similares, uma mesma densidade de malha foi utilizada nas simulações numéricas, ou seja, a proporção de elementos, relativamente à geometria do modelo, foi mantida constante.

Para as seções em T, cujas variáveis são a altura e a largura da mesa, a densidade de malha utilizada na viga de dimensões $10 \times 50\ cm$ foi estendida às demais vigas. Sendo tais variáveis crescentes tem-se, como conseqüência, o aumento da rigidez estrutural. Assim, a malha ideal deve ser capaz de representar a concentração de tensão entre a alma e a mesa o que é possível somente com a simulação tridimensional. Como alternativa, a malha utilizada para a simulação numérica da viga foi a malha cuja densidade de elementos

representou um valor de tendência para a concentração de tensão nos apoios, bem como, a que melhor aproximou o valor das tensões devido ao cálculo analítico.

Vigas de Seção Retangular

Foram utilizadas as malhas **A**, **B**, e **C**, mostradas na Fig. 6.8, Fig. 6.9 e Fig. 6.10, para a discretização das vigas de seção retangular. O número de elementos e o número de nós são dados na Tab. 6.8. Nessas malhas pode se observar a maior densidade de elementos no trecho que caracteriza o vão de cisalhamento. Essa atitude objetiva capturar, com maior precisão, o comportamento dessa região, que é a região mais critica do modelo estrutural, devido a maior proximidade do carregamento aplicado e a reação de apoio.

Figura 6.8 – Malha de elementos finitos A, restrições de apoio e posicionamento do carregamento externo.

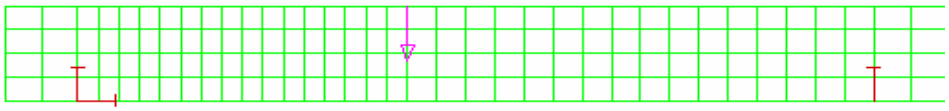


Figura 6.9 – Malha de elementos finitos B, restrições de apoio e posicionamento do carregamento externo.

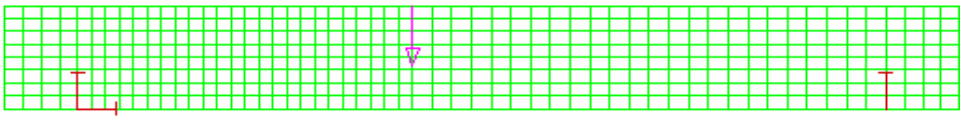


Figura 6.10 – Malha de elementos finitos C, restrições de apoio e posicionamento do carregamento externo.

Tabela 6.8 – Características da malha de elementos finitos (seção retangular).

Malha	Nº de elementos	Nº de nós
A	112	401
B	144	513
C	448	1473

Procedendo a simulação numérica da viga de seção retangular, para um carregamento igual a $5\ kN$ mais o peso próprio, o estado de tensão no regime elástico linear, para as três densidades de malhas dadas na Tab. 6.8, é mostrado nas figuras (6.11), (6.12) e (6.13), para as tensões normais, e nas figuras (6.14), (6.15) e (6.16), para as tensões de cisalhamento.

- **Tensão Normal na Flexão**

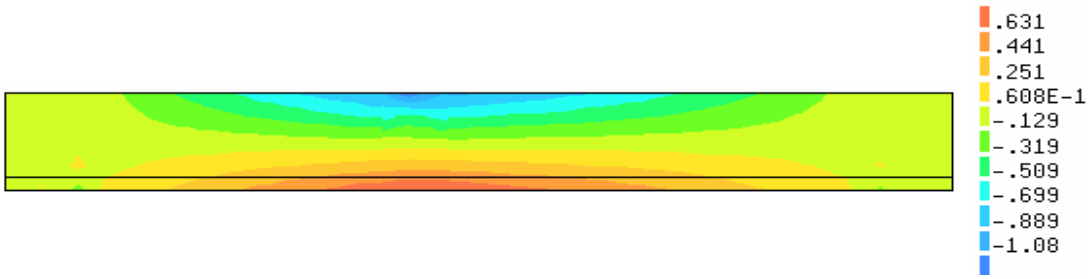


Figura 6.11 – Tensão normal no regime elástico - malha A (unidade: MPa)

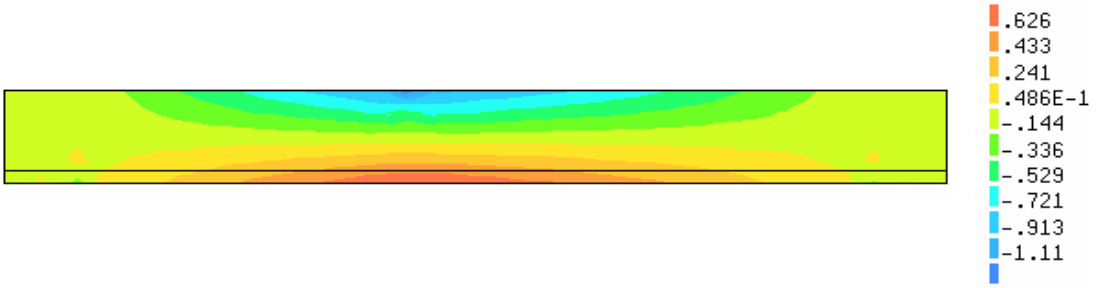


Figura 6.12 – Tensão normal no regime elástico - malha B (unidade: MPa)

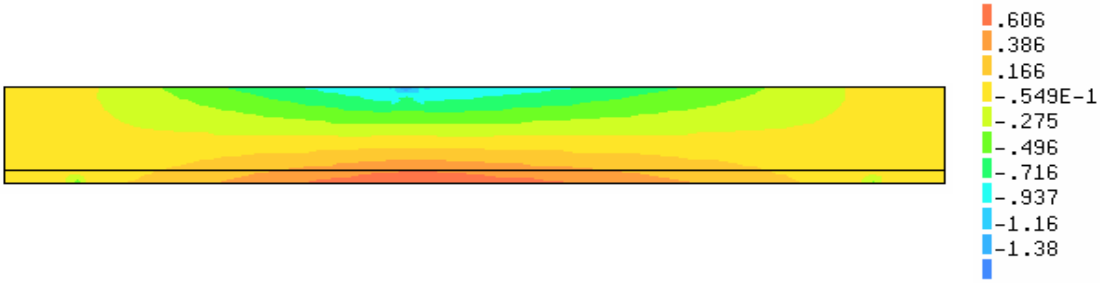


Figura 6.13 – Tensão normal no regime elástico - malha C (unidade: MPa)

- **Tensão de Cisalhamento na Flexão**

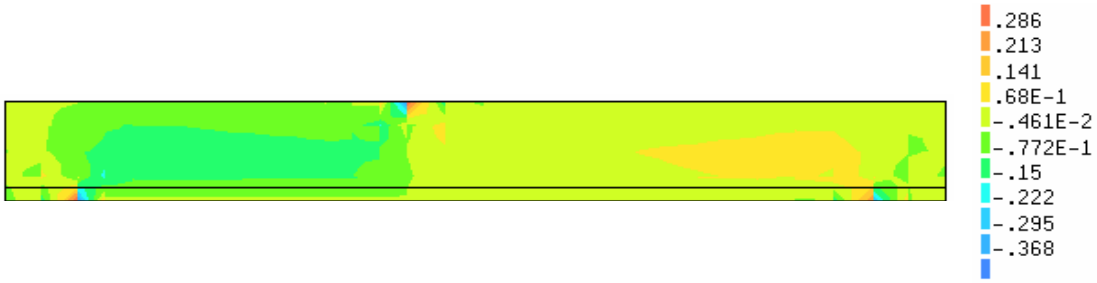


Figura 6.14 – Tensão de cisalhamento no regime elástico - malha A (unidade: MPa)

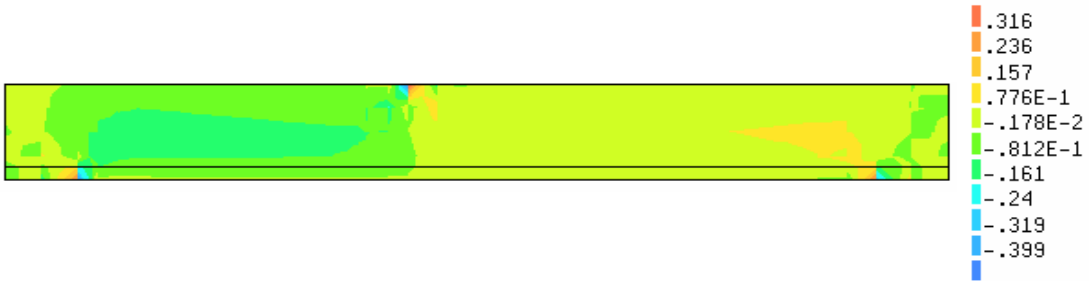


Figura 6.15 – Tensão de cisalhamento no regime elástico - malha B (unidade: MPa)

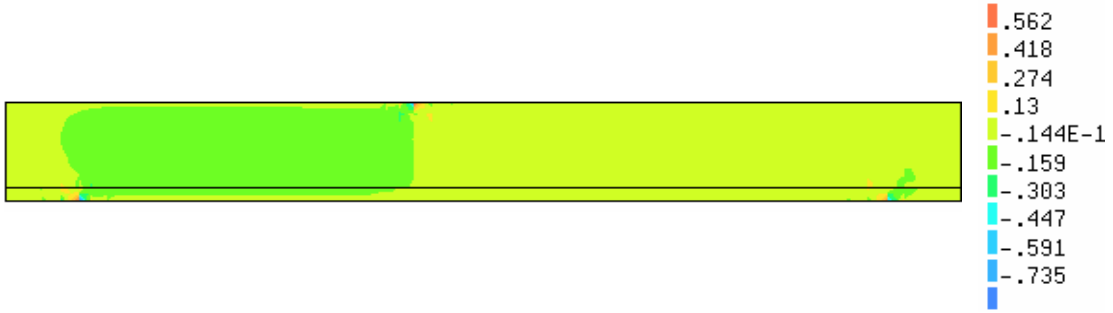


Figura 6.16 – Tensão de cisalhamento no regime elástico - malha C (unidade: MPa)

Observando os panoramas das tensões, dados nas figuras 6.11 a 6.16, vê-se que, para as três densidades de malhas analisadas, não há uma diferença significativa no valor das tensões. A Tab. 6.9 resume os valores máximos e mínimos obtidos para as tensões normais (atuantes na seção de momento máximo) e o valor da máxima tensão de cisalhamento (atuante na seção de máxima cortante) para as três densidades de malhas analisadas numéricamente.

Tabela 6.9 – Valores máximos de tensão (MPa)

Malha	$\sigma_c^{máx}$	$\sigma_t^{máx}$	$\tau_{máx}$
A	-1,23	0,821	0,11
B	-1,3	0,818	0,11
C	-1,3	0,821	0,11

A Tab. 6.10 mostra o valor das tensões máximas, calculadas analiticamente para a viga em estudo, segundo as equações (6.1), (6.2) e (6.3), dadas na seção 6.2.1.1, e com base no diagrama de esforços solicitantes, dado na Fig. 6.17. Nessas equações $x = 0{,}164\ m$, $M = M_2 = 402\ Nm$, $I_b = 5{,}4321 * 10^{-4}\ m^4$, $V = V_2 = 557\ N$ e a relação $M_e / b = 0{,}013448\ m^2$.

Tabela 6.10 – Cálculo analítico dos valores máximos de tensão (MPa) – seção retangular.

Seção	$\sigma_c^{máx}$	$\sigma_t^{máx}$	$\tau_{máx}$
retangular	-1,22	1,00	0,14

O valor das reações de apoio e dos pontos notáveis dos diagramas da Fig. 6.17 é dado nas equações 6.6 a 6.14.

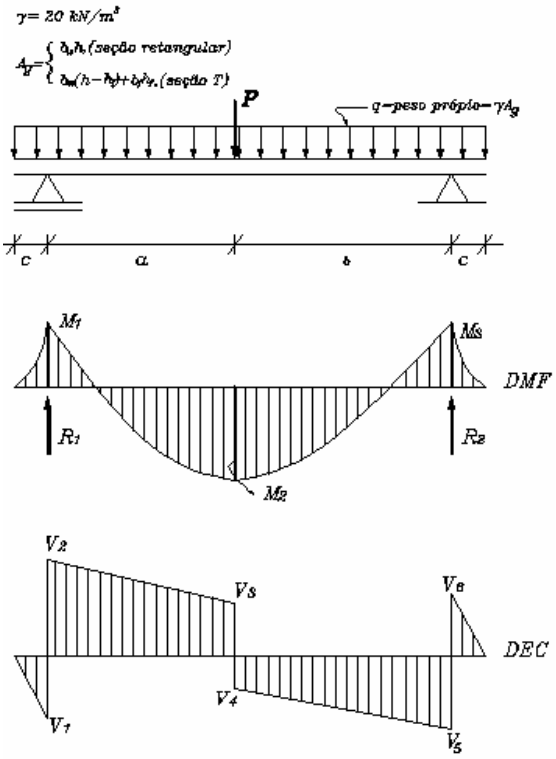


Figura 6.17 – Diagrama de esforços solicitantes para o arranjo estrutural AEI

$$R_1 = \left(\frac{b}{a+b}\right)P + \left[\left(\frac{a+b}{2}\right)+c\right]q \tag{6.6}$$

$$R_2 = \left(\frac{a}{a+b}\right)P + \left[\left(\frac{a+b}{2}\right)+c\right]q \tag{6.7}$$

$$M_1 = M_3 = -\frac{qc^2}{2} \tag{6.8}$$

$$M_2 = \left(\frac{ab}{a+b}\right)P + \left[\left(\frac{a+b}{2}\right)+c\right]qa - \frac{q(c+a)^2}{2} \tag{6.9}$$

$$V_1 = -V_6 = -qc \tag{6.10}$$

$$V_2 = \left(\frac{b}{a+b}\right)P + \left(\frac{a+b}{2}\right)q \tag{6.11}$$

$$V_3 = \left(\frac{b}{a+b}\right)P + \left(\frac{b-a}{2}\right)q \tag{6.12}$$

$$V_4 = \left(\frac{b-a}{2}\right)q - \left(\frac{a}{a+b}\right)P \tag{6.13}$$

$$V_5 = -\left(\frac{a+b}{2}\right)q - \left(\frac{a}{a+b}\right)P \tag{6.14}$$

Optou-se pela proporção de elementos dado pela malha **A** para a simulação subseqüente das demais vigas de seção retangular em regime não linear. Como pode ser visto na Fig. 6.18 e 6.19 as tensões ao longo das seções de momento máximo e de máxima cortante são as que mais se aproximam da resposta analítica do modelo. No gráfico da Fig. 6.18 a concentração de tensão devido ao carregamento aplicado é capturada pelo segmento de reta que atinge a borda mais comprimida na seção da viga.

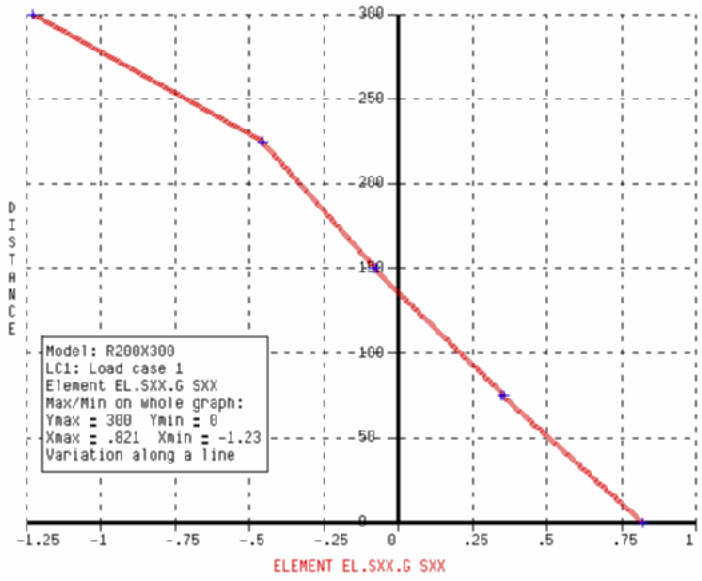


Figura 6.18 – Tensão Normal (ELEMENT EL. SXX. G SXX) ao longo da seção de momento máximo – (unidade: tensão em MPa e altura da seção em mm)

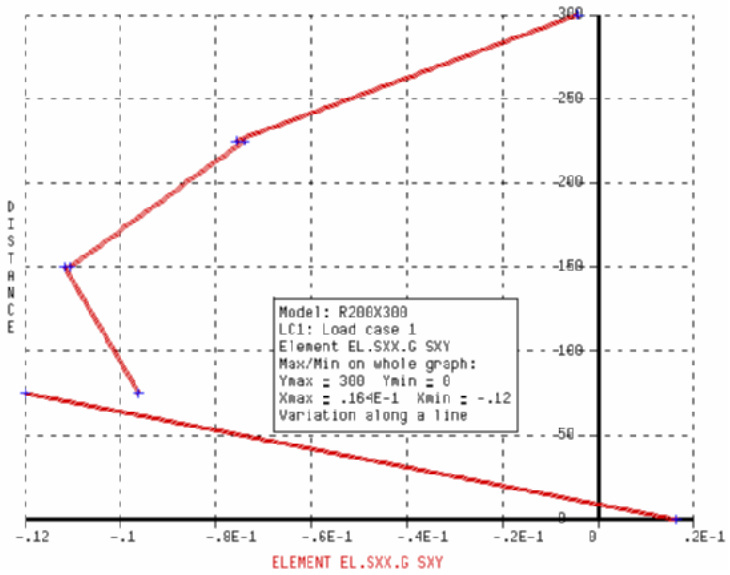


Figura 6.19 – Tensão de Cisalhamento (ELEMENT EL. SXX. G SXY) ao longo da seção de momento máximo – (unidade: tensão em MPa e altura da seção em mm)

É importante observar que, em termos de simulação numérica, a malha ideal não é a malha mais refinada e sim a malha que quando comparada com a solução analítica do modelo, na maioria das vezes impossível de ser formulada, ou com uma segunda malha de elementos, dá uma diferença de resultado considerada razoável, em termos de grandeza, para o problema analisado.

A malha ideal é aquela que produz uma solução com um erro tolerável com menor número de graus de liberdade. No caso do MEF tal malha pode ser obtida por meio da utilização de técnicas auto-adaptativas não disponíveis no código de cálculo DIANA. A implementação e a descrição de técnicas auto-adaptativas são encontradas em Rylo (2002).

Matematicamente a malha mais refinada é a ideal, uma vez que se tem um maior volume de elementos e, conseqüentemente, um maior número de pontos de integração, fazendo

convergir para um valor limite um determinado resultado. A maior precisão do modelo, porém, é corroborada pelo trabalho computacional excessivo que, além de consumir muito espaço de memória, o que requer o uso de máquinas mais robustas, sem a sua real necessidade, consome um tempo precioso para o processamento da análise.

Vigas de Seção em T

Para as vigas de seções em T formam utilizadas as malhas **D**, **E**, e **F**, no estudo da sua discretização, conforme mostrado na Fig. 6.20, Fig. 6.21 e Fig. 6.22. O número de elementos e o número de nós encontram-se na Tab. 6.10.

Tabela 6.10 – Características da malha de elementos finitos (seção em T)

Malha	Nº de elementos	Nº de Nós
D	205	708
E	246	833
F	820	2645

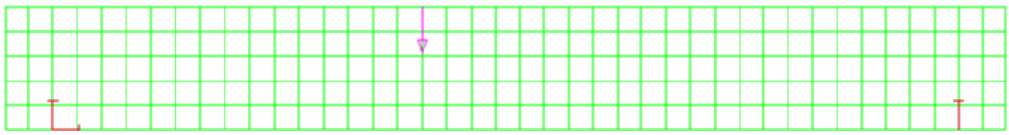


Figura 6.20 – Malha de elementos finitos D, restrições de apoio e posicionamento do carregamento externo

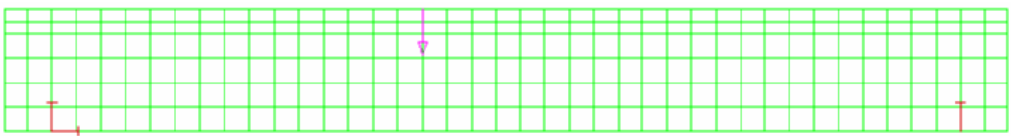


Figura 6.21 – Malha de elementos finitos E, restrições de apoio e posicionamento do carregamento externo

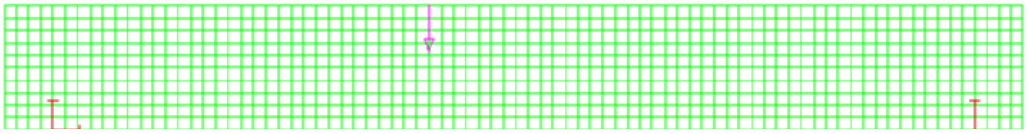


Figura 6.22 – Malha de elementos finitos F, restrições de apoio e posicionamento do carregamento externo

Para as malhas **D** e **F**, uma distribuição uniforme de elementos foi utilizada nas regiões da alma e da mesa da seção T. Para a malha **E,** o dobro de elementos foi introduzido no modelo, a fim de capturar a concentração de tensão na transição que caracteriza a descontinuidade geométrica entre a mesa e a alma da seção T.

Como pode ser observado pelas figuras 6.23 a 6.25, para as tensões normais, e nas figuras 6.26 a 6.28, para as tensões de cisalhamento, as densidades de malhas utilizadas não apresentaram diferenças significativas nos panoramas de tensão para a viga em estudo. Todas as malhas parecem fazer uma distinção clara entre o comportamento da mesa e o comportamento da alma, relativamente à tensão de cisalhamento.

- **Tensão Normal na Flexão**

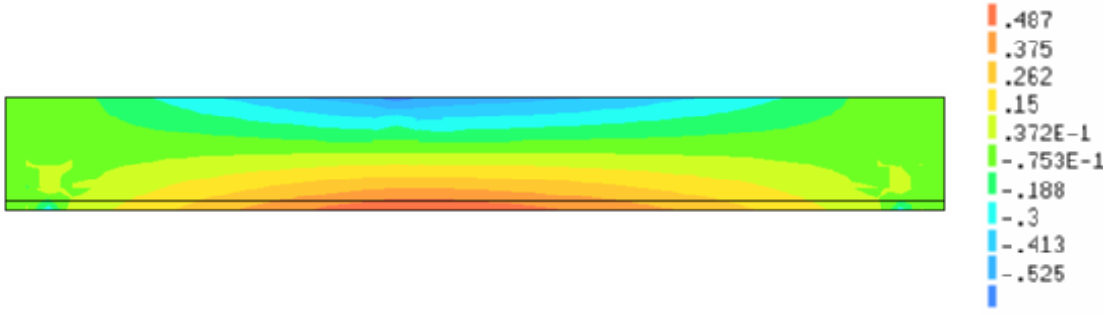


Figura 6.23 – Tensão normal no regime elástico - malha D (unidade: MPa)

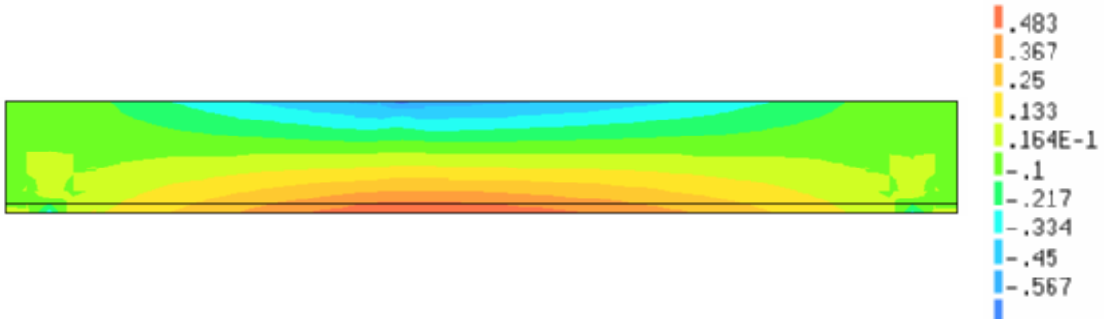


Figura 6.24 – Tensão normal no regime elástico - malha E (unidade: MPa)

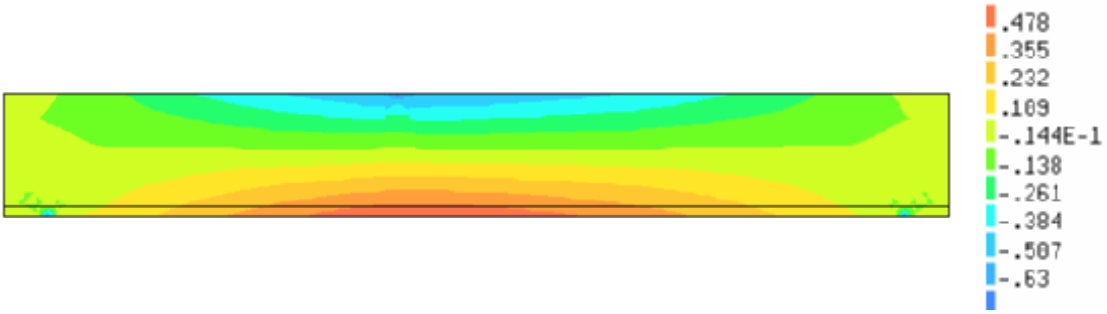


Figura 6.25 – Tensão normal no regime elástico - malha F (unidade: MPa)

- **Tensão de Cisalhamento na Flexão**

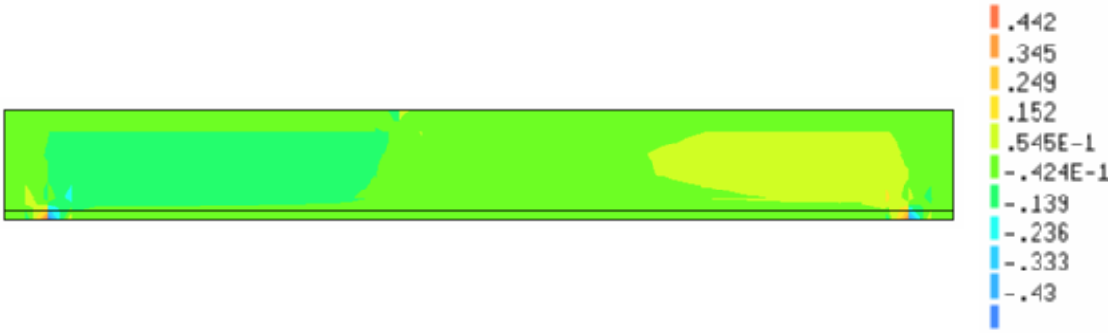


Figura 6.26 – Tensões de cisalhamento no regime elástico - malha D (unidade: MPa)

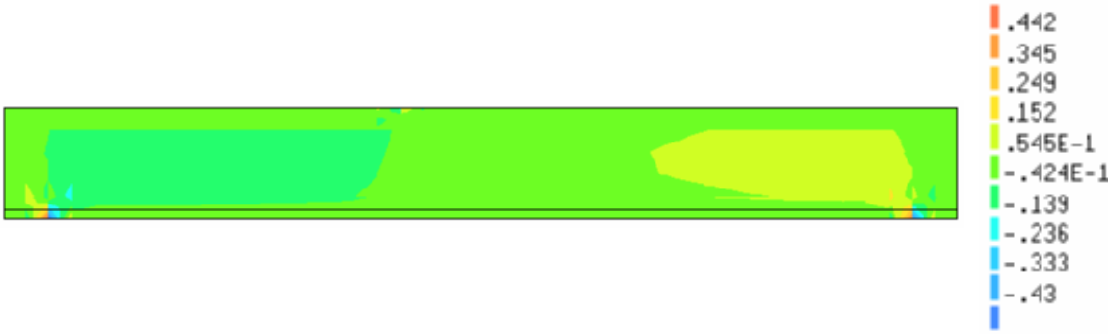


Figura 6.27 – Tensão de cisalhamento no regime elástico - malha E (unidade: MPa)

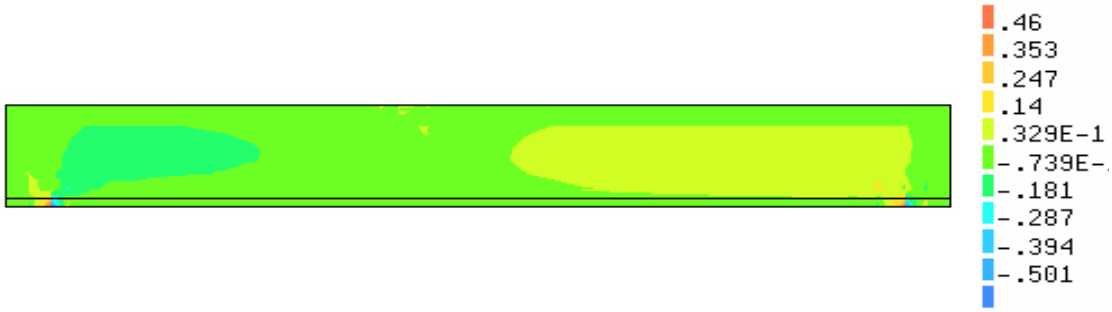


Figura 6.28 – Tensões de cisalhamento no regime elástico - malha F (unidade: MPa)

A Tab. 6.10 resume os valores máximos e mínimos obtidos para as tensões normais (atuantes na seção de momento máximo) e o valor da máxima tensão de cisalhamento (atuante na seção de máxima cortante) para as três densidades de malhas analisadas numéricamente.

Tabela 6.10 – Valores máximos de tensão (MPa)

Malha	$\sigma_c^{máx}$	$\sigma_t^{máx}$	$\tau_{máx}$
D	-0.637	0,597	0,10
E	-0,675	0,597	0.13
F	-0,691	0,599	0,11

Na Tab. 6.12 tem-se o valor das tensões máximas, calculadas analiticamente para a seção em T, segundo as equações (6.1), (6.2) e (6.3), dadas na seção 6.2.1.1, e com base no diagrama de esforços solicitantes, dado na Fig. 6.17. Nessas equações $x = 0,23\ m$, $M = M_2 = 8980,93\ Nm$, $I_b = 3,26 * 10^{-3}\ m^4$, $V = V_2 = 7801,73\ N$ e a relação $M_e / b = 0,0365\ m^2$. Pela observação da resposta analítica com a escala de cores obtidas para os estados de tensão vê-se uma boa convergência de valores.

Tabela 6.12 – Cálculo analítico dos valores máximos de tensão (MPa) – seção T

Seção	$\sigma_c^{máx}$	$\sigma_t^{máx}$	$\tau_{máx}$
retangular	-0,63	0,74	0,13

Optou-se pela proporção de elementos dado pela malha **D** para a discretização das vigas com seção em T. Essa malha representa com bastante regularidade o panorama das tensões normal e de cisalhamento, mostradas nas Fig. 6.23 e na Fig. 6.26, respectivamente. As figuras (6.29) e (6.30) mostram a tensão normal no ponto de momento máximo e de máxima cortante para a malha adotada.

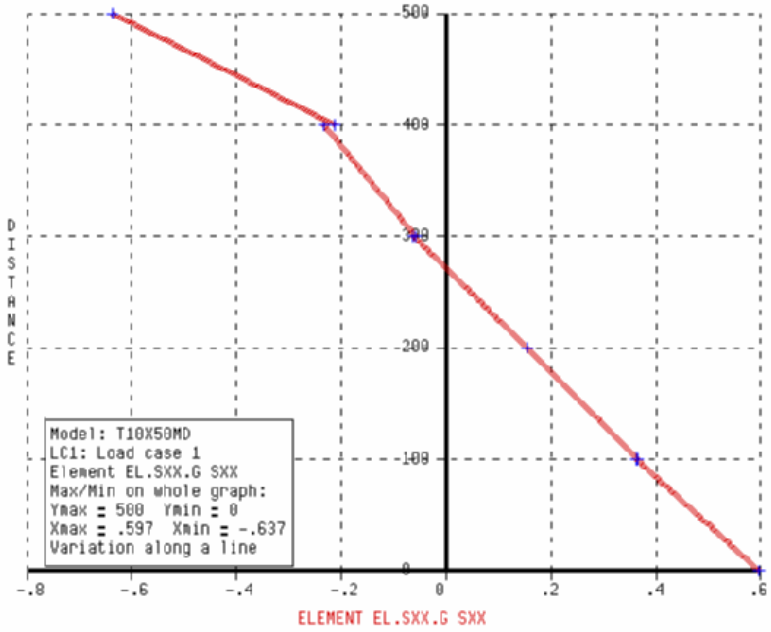


Figura 6.29 – Tensão Normal (ELEMENT EL. SXX. G SXX) ao longo da seção de momento máximo – (unidade: tensão em MPa e altura da seção em mm)

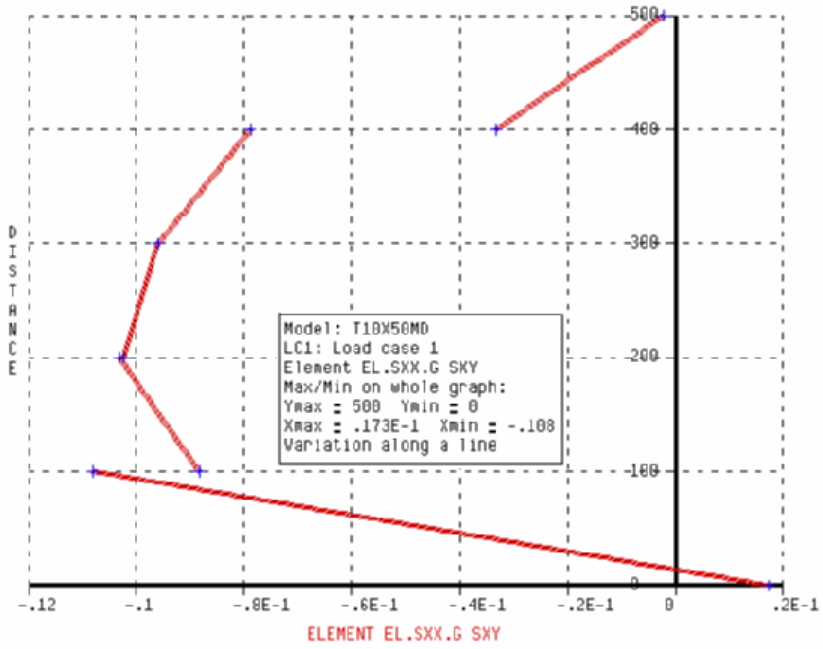


Figura 6.30 – Tensão de Cisalhamento (ELEMENT EL. SXX. G SXY) ao longo da seção de momento máximo – (unidade: tensão em MPa e altura da seção em mm)

6.2.1.2.2 Discretização do Arranjo Estrutural II (AEII)

Com base na experiência adquirida com a discretização das vigas anteriores e tendo em vista os bons resultados que o código de cálculo DIANA gera, ao representar o estado plano de tensão em vigas, uma única densidade de malha foi escolhida para a discretização do esquema estrutural II (AEII). A malha utilizada é mostrada na Fig. 6.31 e suas características são dadas na tabela 6.11. Os panoramas de tensão estão mostrados na Fig. 6.32, para a tensão normal, e na Fig. 6.33, para a tensão de cisalhamento.

Tabela 6.11 – Características da malha de elementos finitos do arranjo AEII

Malha	Nº de elementos	Nº de Nós
AEII	144	513

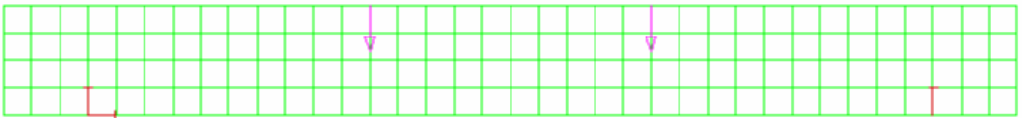


Figura 6.31 – Malha de elementos finitos AEII, restrições de apoio e posicionamento do carregamento

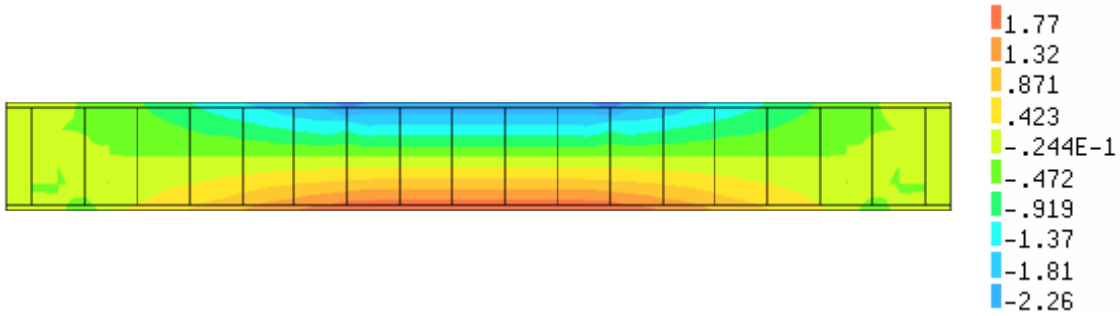


Figura 6.32 – Tensão normal no regime elástico - malha AEII (unidade: MPa)

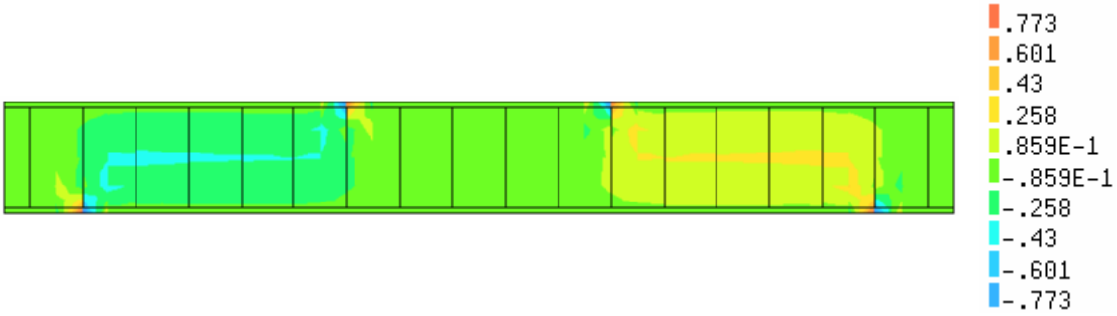


Figura 6.33 – Tensões de cisalhamento no regime elástico - malha G (unidade: MPa)

Na Fig. 6.34 tem-se o diagrama de esforços solicitantes para a viga em análise. A Tab. 6.12 mostra o valor das tensões máximas, calculadas analiticamente, segundo as equações (6.1), (6.2) e (6.3). Nessas equações $x = 0{,}103 m$, $M = M_3 = 2824\ Nm$, $I_b = 1{,}1284 * 10^{-4}\ m^4$, $V = V_2 = 5900\ N$ e a relação $M_e / b = 0{,}0054\ m^2$. O valor das reações de apoio e dos pontos notáveis dos diagramas da Fig. 6.34 é dado nas equações 6.15 a 6.22.

Tabela 6.12 – Cálculo analítico dos valores máximos de tensão (MPa) – arranjo AEII.

Seção	$\sigma_c^{máx}$	$\sigma_t^{máx}$	$\tau_{máx}$
retangular	-2,43	2,58	0,28

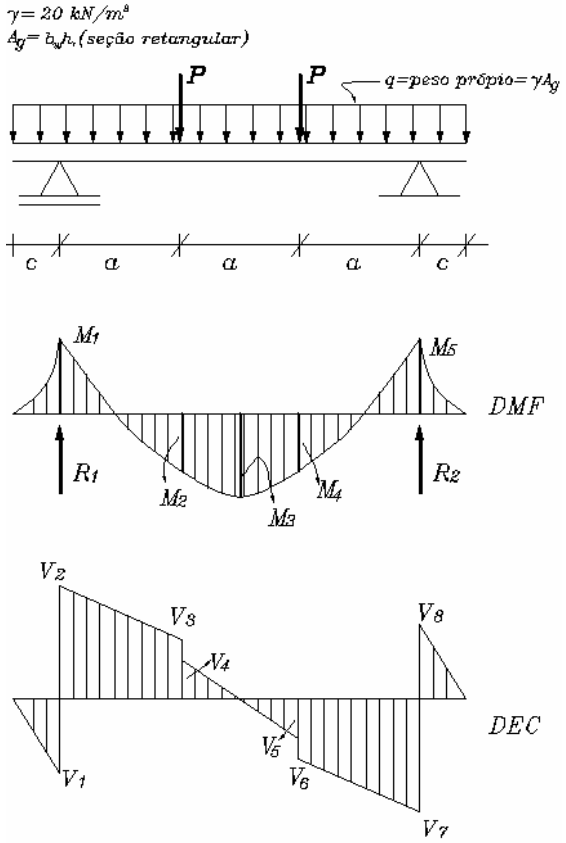


Figura 6.34 – Diagrama de esforços solicitantes para o arranjo estrutural AEII

$$R_1 = R_2 = P + \left(\frac{3a + 2c}{2}\right)q \tag{6.15}$$

$$M_1 = M_3 = -\frac{qc^2}{2} \tag{6.16}$$

$$M_2 = M_4 = Pa + \left(\frac{3a + 2c}{2}\right)qa - \frac{q(a + c)^2}{2} \tag{6.17}$$

$$M_3 = \left[P + \left(\frac{3a + 2c}{2}\right)q\right]\frac{3a}{2} - \frac{Pa}{2} - \left(\frac{3a + 2c}{2}\right)^2 \frac{q}{2} \tag{6.18}$$

$$V_1 = -V_8 = -qc \tag{6.19}$$

$$V_2 = -V_7 = P + \frac{3aq}{2} \tag{6.20}$$

$$V_3 = -V_6 = P + \frac{qa}{2} \tag{6.21}$$

$$V_4 = -V_5 = \frac{qa}{2} \tag{6.22}$$

Comparando os valores máximos de tensão calculados analiticamente (Tab. 6.12) e a resposta numérica, dada pelo panorama das tensões (Figs. 6.32 e 6.33) e pela variação da tensão ao longo das seções de momento máximo (Fig. 6.35) e de máxima cortante (Fig. 6.36), verifica-se uma boa convergência de valores, justificando a escolha da malha adotada.

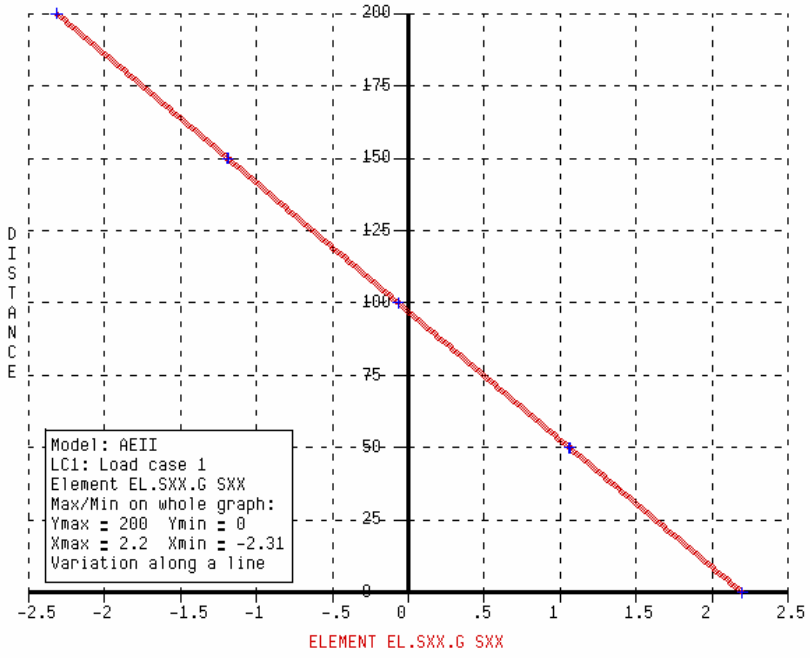


Figura 6.35 – Tensão Normal (ELEMENT EL. SXX. G SXX) ao longo da seção de momento máximo - (unidade: tensão em MPa e altura da seção em mm)

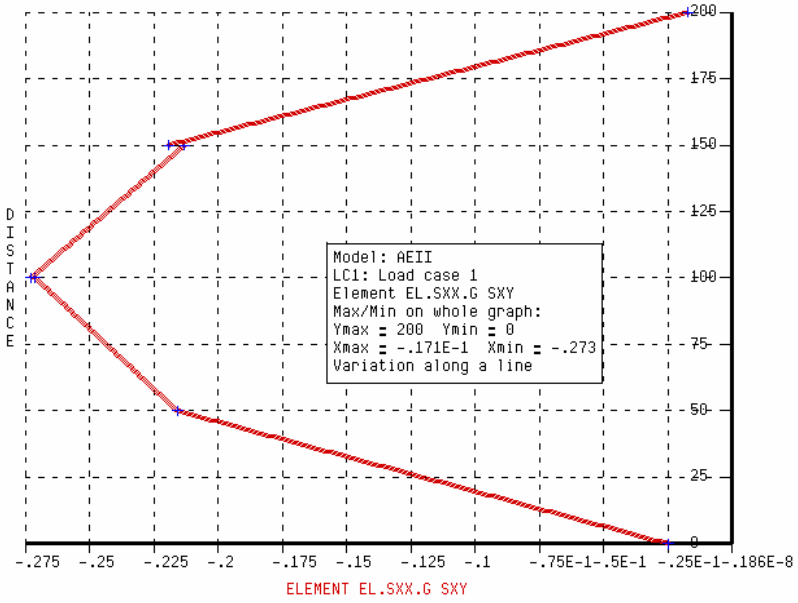


Figura 6.36 – Tensão de Cisalhamento (ELEMENT EL. SXX. G SXY) ao longo da seção de momento máximo – (unidade: tensão em MPa e altura da seção em mm)

6.3 Simulação Numérica do Ensaio da Viga Ranhurada Carregada em Três Pontos (Three Point Bending Test - 3PBT)

O ensaio 3PBT foi simulado com o modelo de fissura discreta, *"discrete crack model"*, implementado no código de cálculo DIANA. O arranjo da malha de elementos finitos utilizada na simulação numérica do ensaio 3PBT é mostrado na Fig. 6.37. Nessa malha, além do elemento quadrangular CQ16M, foram utilizados os elementos T6MEM (elemento triangular de três nós) e o elemento de interface CL12I (ver: Diana User's Manual, 2003). Nesse exemplo a interface representa a fissura discreta, localizada no ponto médio do vão. Na interface foi atribuída a propriedade constitutiva do material (curva $\sigma - w$) para a representação da resposta não-linear física no pós-pico. O elemento triangular foi utilizado com o fim de permitir uma maior concentração de elementos ao

redor da fissura discreta e também da ranhura, uma vez que a concentração de tensão, antes do início do crescimento da fissura, é dominante nesse ponto da estrutura, bem como, na ponta da trinca, a medida em que esta se propaga. Fora da região definida pela fissura discreta o material tem um comportamento elástico-linear.

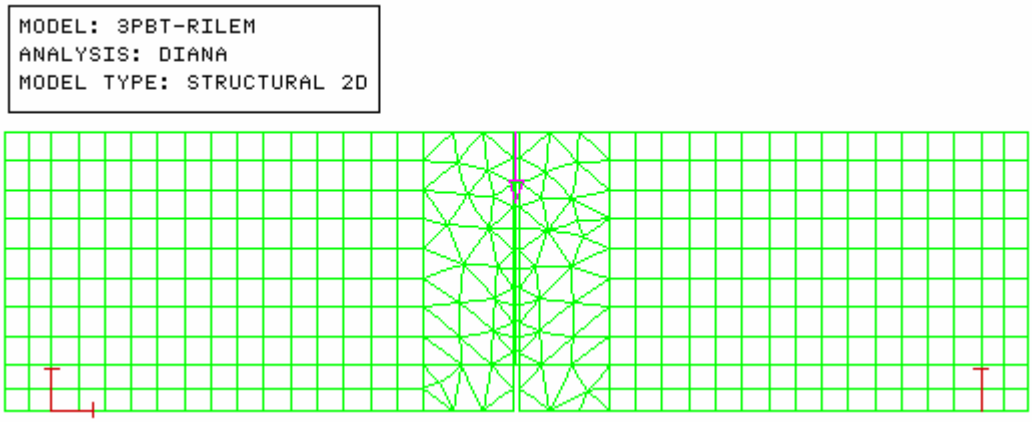


Figura 6.37 – Malha de elementos finitos utilizada no ensaio 3PBT, restrições de apoio e o posicionamento do carregamento

6.3.1 Simulação Numérica do Ensaio 3PBT do Arranjo Estrutural I (AEI)

A fissura discreta foi simulada com as curvas $\sigma - w$, mostradas nas figuras 6.38 e 6.39, obtidas através do ajuste de curva feito com o programa FIT3PB. Na Fig. 6.38 a curva de amolecimento do concreto (CS) é o modelo de Hordijk. Para o CRFA a curva de amolecimento é o modelo bi-linear, onde: a_1 é a inclinação do trecho descendente da curva e a_2 é a inclinação do trecho ascendente.

Nas figuras 6.40 e 6.41 estão mostradas as curvas $\mathrm{P-CMOD}$ para o concreto simples (CS) e para o CRFA utilizados na confecção das vigas do arranjo estrutural AEI. Na Fig. 6.42, mostra-se a curva carga-deslocamento para o CRFA. Nessas figuras esta

representado, para comparação, a curva obtida do ensaio experimental e a curva proveniente da simulação numérica do ensaio 3PBT.

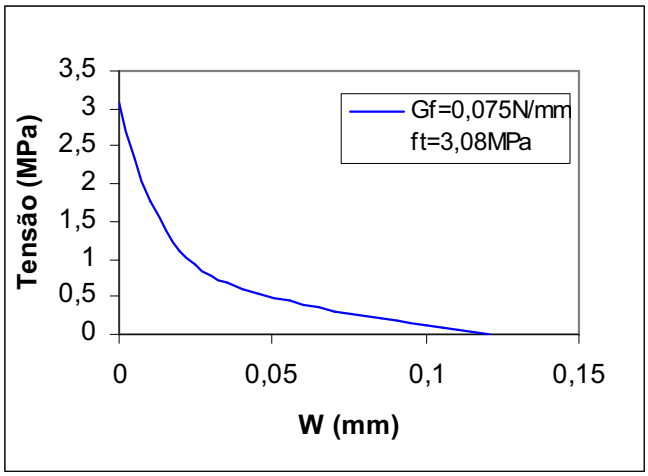


Figura 6.38 – Curva $\sigma - w$ para o CS - AEI

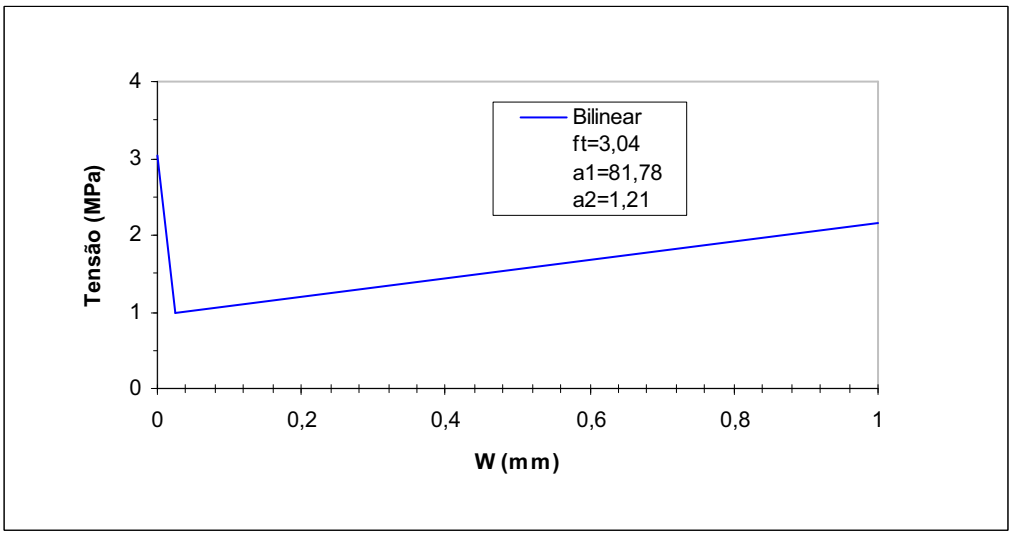


Figura 6.39 – Curva $\sigma - w$ para o CRFA - AEI

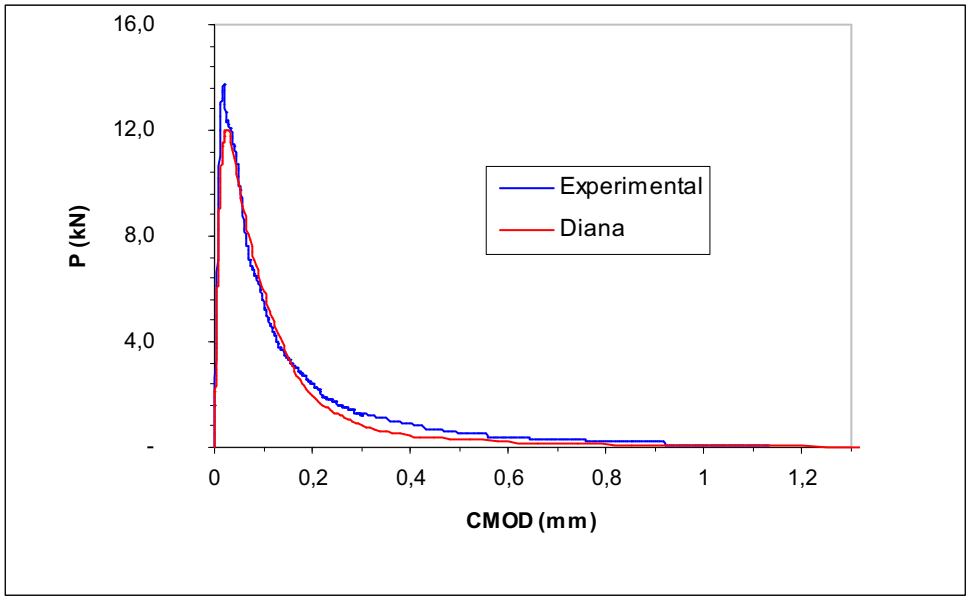


Figura 6.40 – Curva carga-abertura da boca da fissura (CMOD) para o CS - AEI

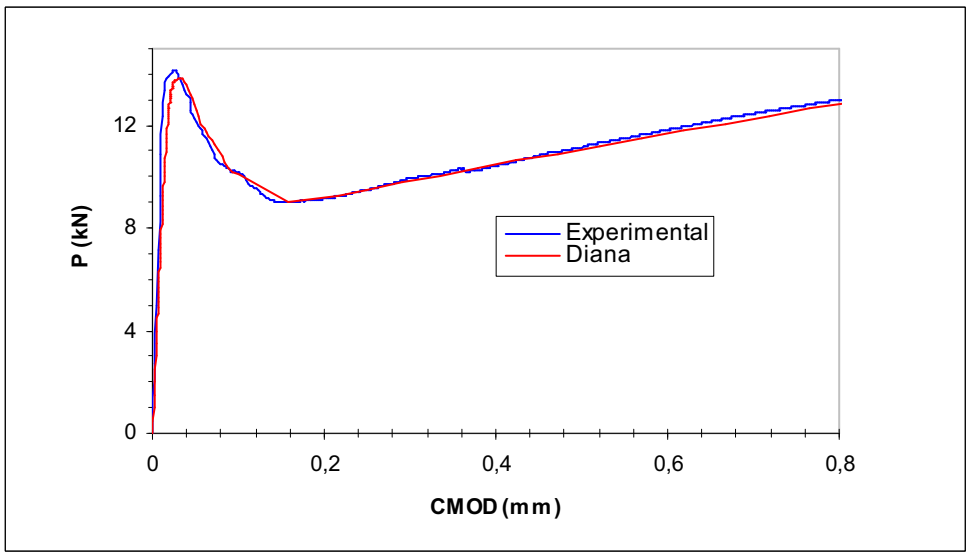


Figura 6.41 – Curva carga-abertura da boca da fissura (CMOD) para o CRFA - AEI

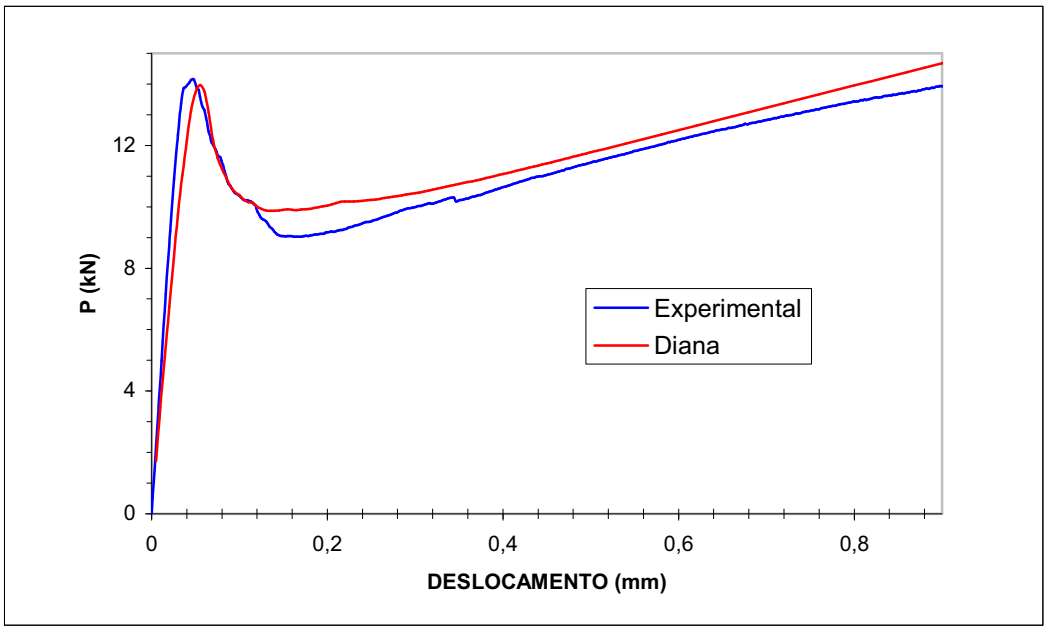


Figura 6.42 – Curva carga-deslocamento para o CRFA - AEI

6.3.2 Simulação Numérica do Ensaio 3PBT do Arranjo Estrutural II (AEII)

Na Fig. 6.43 é mostrada a configuração das curvas $P - CMOD$, obtidas da simulação numérica e do ensaio experimental da viga ranhurada em 3PBT, para o CRFA utilizado na confecção da viga do arranjo estrutural AEII.

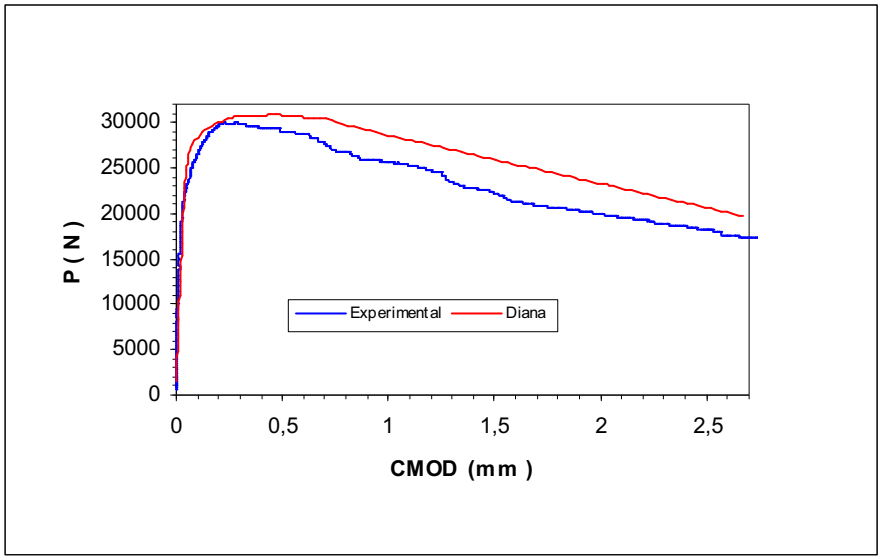


Figura 6.43 – Curva carga-abertura da boca da fissura (CMOD) para o CRFA – AEII

A curva $\sigma - w$, obtida com o ajuste de curvas com o program FIT3PB, utilizada para a simulação numérica da fissura discreta é o modelo bi-linear (Fig. 6.44). O ensaio 3PBT para a caracterização da curva $\sigma - w$ nesse arranjo estrutural, foi realizado com um pequena modificação em relação a recomendação do RILEM (2000a). A diferença é a distância entre os apoios que foi de *450 mm* ao invés de *500 mm* .

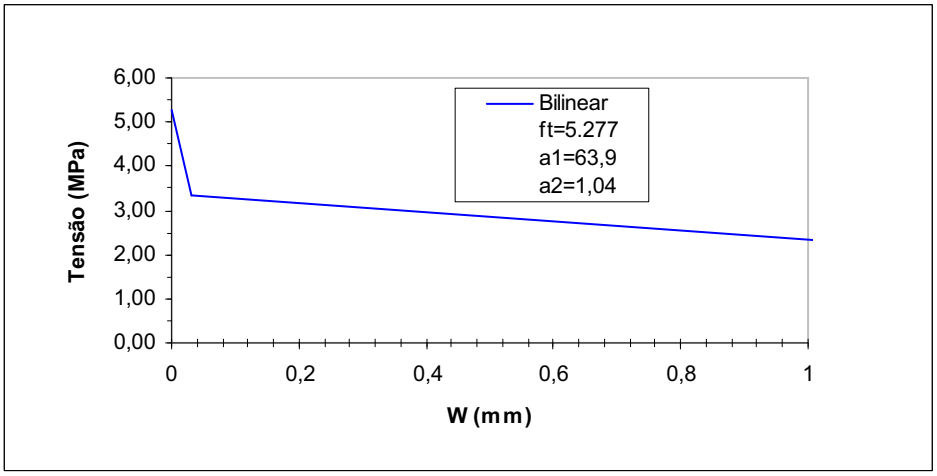


Figura 6.44 – Curva $\sigma - w$ para o CRFA - AEII

A comparação dos gráficos, resultantes da simulação numérica e do resultado experimental, demonstra que o método de obtenção da curva $\sigma - w$, enquanto relação constitutiva, para a representação dos processos de fratura no CS e no CRFA, é bastante objetivo. Onde a coincidência entre os mesmos não ocorre, tem-se uma suficiente proximidade de resultados com as inclinações sendo mantidas entre os diversos trechos. A evidência experimental da diferença de inclinação entre as curvas $P-\delta$ e $P-CMOD$ (Fig. 6.45), no trecho relativo ao estabelecimento do carregamento último, também foi verificada com a simulação numérica (Fig. 6.46). Tal constatação sustenta a hipótese inicial e dá confiabilidade ao método de obtenção da curva $\sigma - w$. Porém, a diferença de inclinação entre as curvas $P-\delta$ e $P-CMOD$ levanta a hipótese da possibilidade de alguma imcopatibilidade com o protótipo e/ou o método de ensaio admitido para a obtenção do modelo constitutivo para o material fraturado. Um estudo nessa direção é bastante pertinente a fim de se aprimorar o método de ensaio.

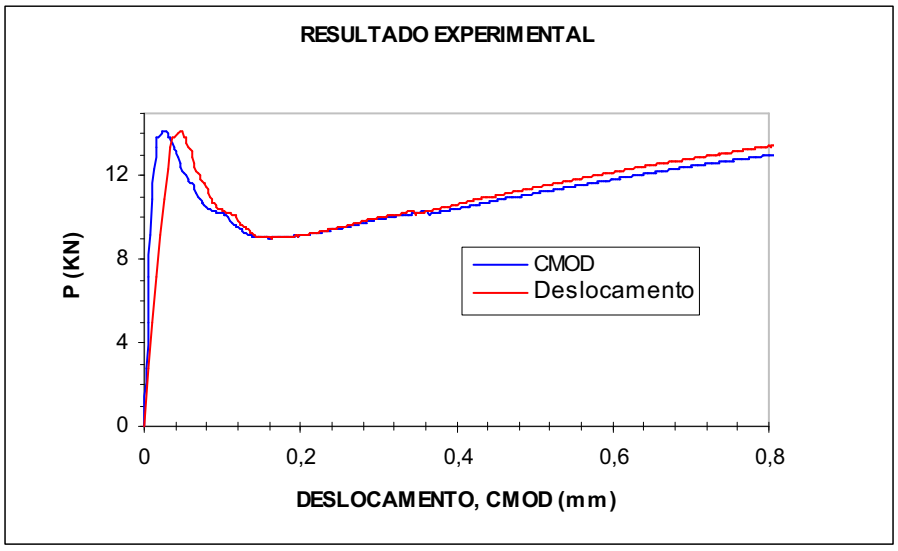


Figura 6.45 – Comparação entre a inclinação das curvas $P-\delta$ e $P-CMOD$ do resultado experimental

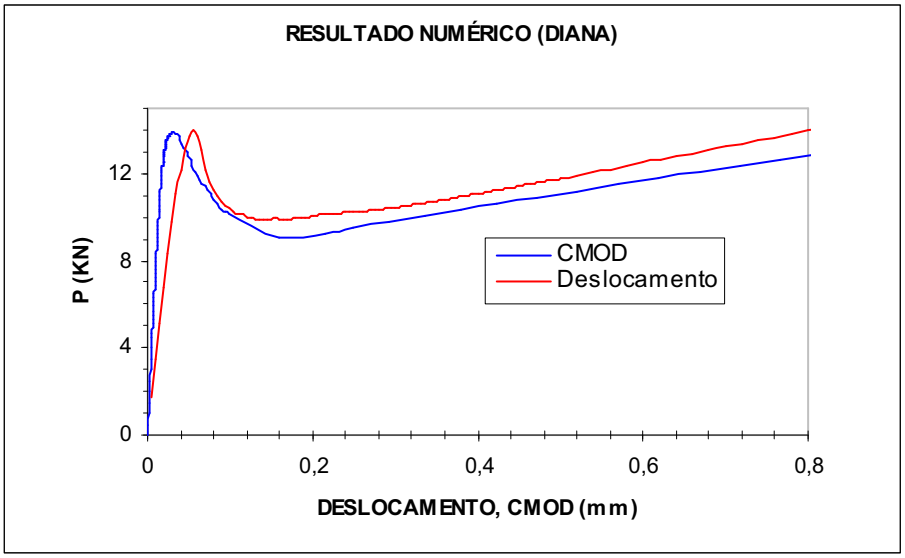


Figura 6.46 – Comparação entre a inclinação das curvas $P-\delta$ e $P-CMOD$ da análise numérica

Analisando os resultados obtidos com a simulação numérica do ensaio 3PBT, constatou-se que o limite de proporcionalidade, $f_{ct,fl}$, dado na Eq. 6.23, segundo recomendação dos Comitês Técnicos RILEM (2000a), não se verifica, sendo uma estimativa errônea para o cálculo da tensão de tração na flexão, enquanto valor da tensão para a qual se tem o início da abertura da fratura.

$$f_{ct,fl} = \frac{3F_u L}{2bh_{sp}^2},\ [N/mm^2] \tag{6.23}$$

Na equação acima F_u (em N) é o maior valor do carregamento no intervalo entre o trecho ascendente das curvas $P-\delta$ ou $P-CMOD$ e uma reta paralela ao mesmo, passando pelo ponto de abscissa $0{,}05\ mm$; L é a distância entre apoios (unidade: mm); b é a largura da viga (unidade: mm) e h_{sp} é a altura da viga menos a profundidade do entalhe (unidade: mm).

Tomando como exemplo o ensaio 3PBT, realizado para o arranjo estrutural AEI, o valor de F_u é de $13{,}9\ kN$. Esse valor ocorre no 11º passo de carregamento (FBY), ver Fig. 6.47, com um deslocamento (LOAD) correspondente a $0{,}055\ mm$. O termo LOAD para o deslocamento significa que a análise numérica do ensaio 3PBT foi realizada com controle de deslocamentos.

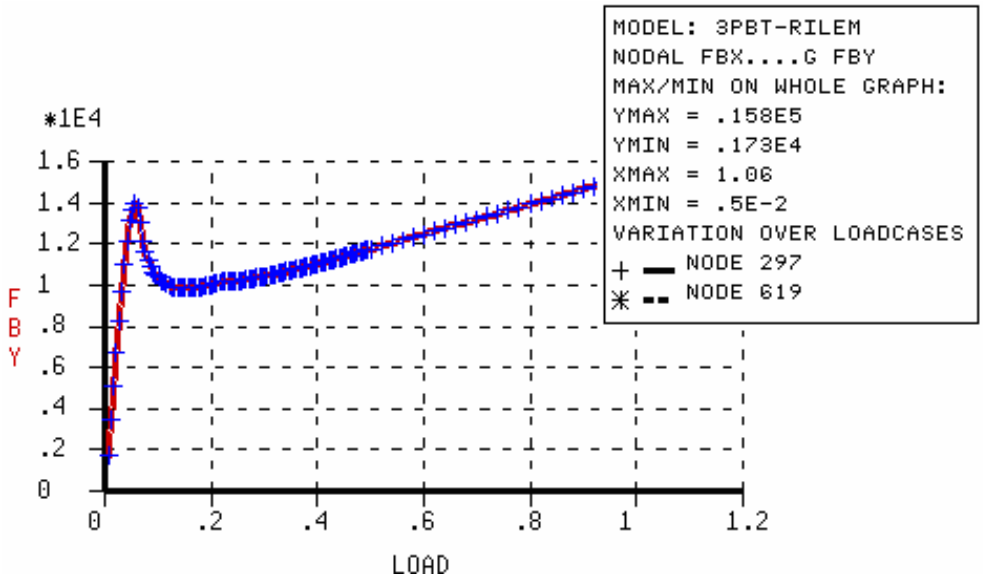


Figura 6.47 – Diagrama carga-deslocamento $P-\delta$ no ensaio 3PBT

O cálculo da tensão, de acordo com a equação 6.23, resulta no valor de $4{,}0\ MPa$. Esse valor de tensão não correspondente ao valor do parâmetro f_t da curva $\sigma - w$, obtida através da retroanálise realizada com o programa FIT3PB e igual a $3{,}04\ MPa$.

Na Fig. 6.48, vê-se que as tensões principais de tração, para o 11º passo de carregamento, não ocorrem na extremidade do entalhe, conforme sugere a escala de cores. Fica assim evidente que a abertura da fissura teve início em um passo de carregamento anterior ao estabelecimento de F_u. As figuras 6.49, 6.50 e 6.51 confirmam essa afirmação.

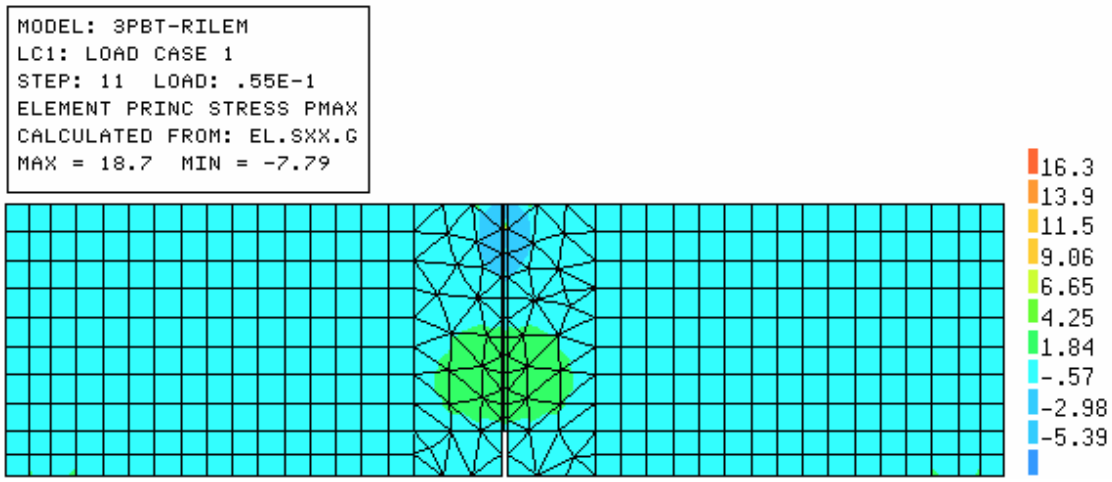


Figura 6.48 – Tensões principais de tração - ensaio 3PBT

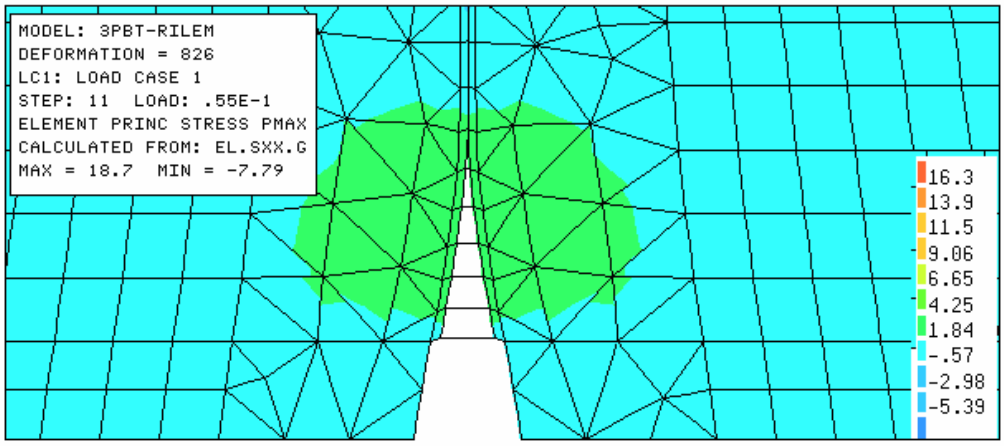


Figura 6.49 – Abertura da fissura no 11º passo de carregamento no ensaio 3PBT

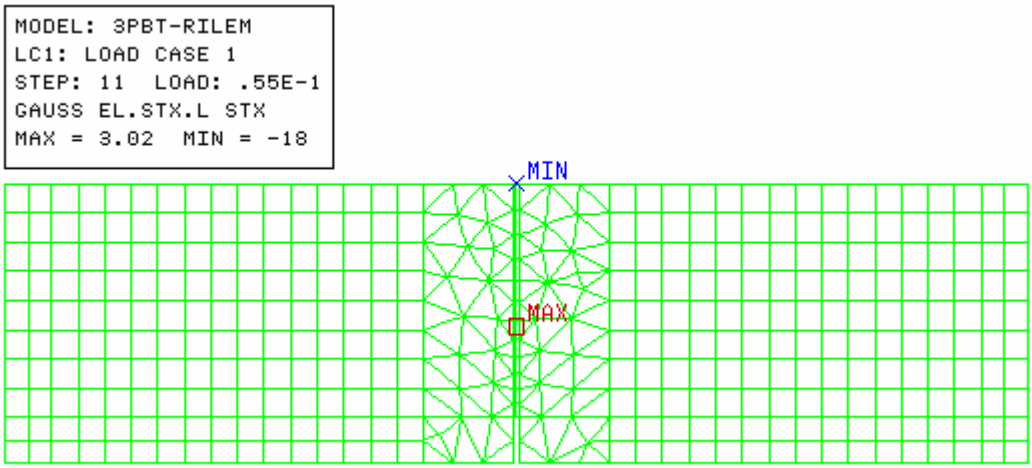


Figura 6.50 – Valores extremos das tensões de tração ao longo da fissura para o 11º passo de carregamento no ensaio 3PBT

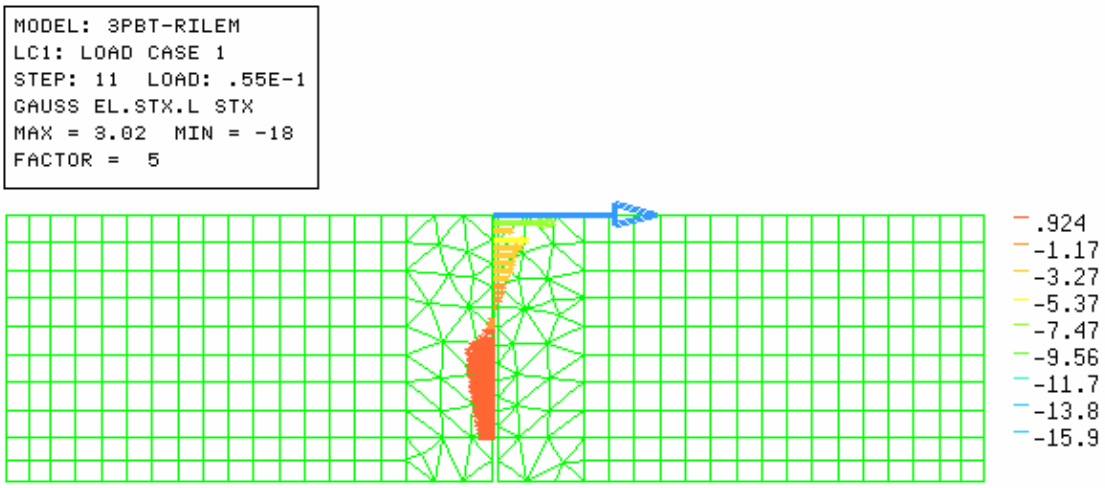


Figura 6.51 – Distribuição de tensão ao longo da fissura, ensaio 3PBT, para o 11º passo de carregamento

Analisanda a resposta numérica verificou-se que o crescimento da fissura ocorre a partir do 6º passo incremental (STEP: 6), para uma força de *9,7 kN*, aplicada no meio do vão, e para o correspondente deslocamento vertical de *0,03 mm*. A Fig. 6.52 mostra a tensão de tração (EL. STX.L STX), desenvolvida na ponta da fissura, para tal passo incremental. Pela observação da Fig. 6.52 constata-se que o valor máximo da tensão de tração,

concorda com o valor do parâmetro, f_t, dado pela curva $\sigma - w$ (Fig. 6.38), como era de se esperar.

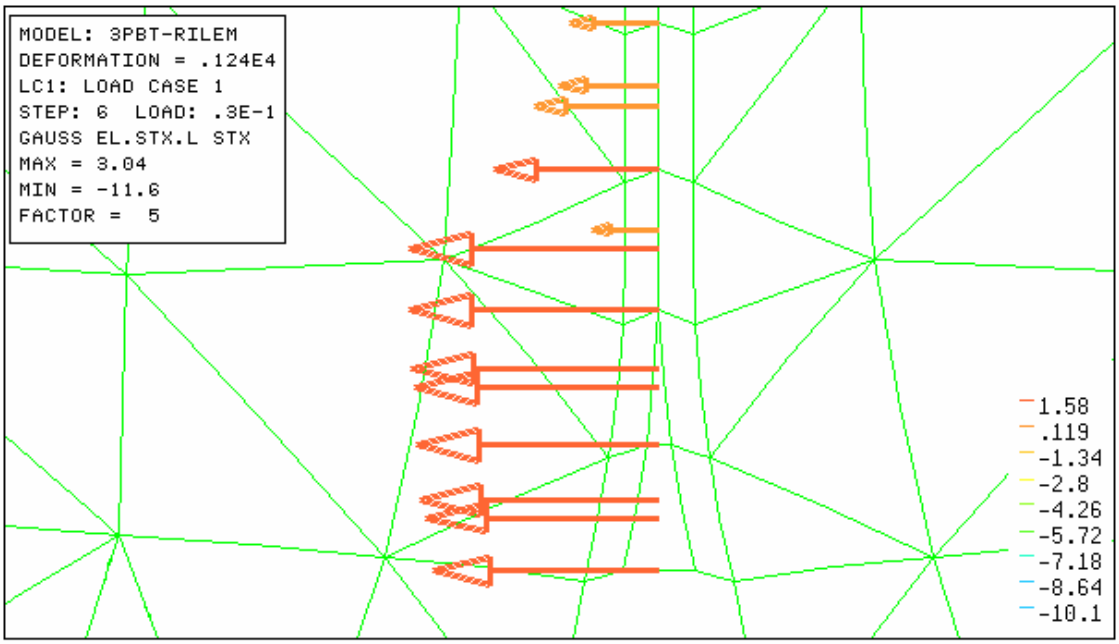


Figura 6.49 – Distribuição de tensão ao longo da fissura, para o 6º passo de carregamento no ensaio 3PBT

O processo incremental-iterativo para a simulação numérica do ensaio 3PBT foi o controle direto de deslocamento com o critério de convergência baseado em energia e o método secante BFGS, com o acelerador de convergência *"line search"*. O controle indireto tipo CMOD também foi empregado. O controle direto de deslocamento se mostrou mais adequado para este tipo de simulação, uma vez que, consumiu menos trabalho computacional.

Uma observação importante, em termos do comportamento físico das simulações realizadas, se deve ao aspecto dos gráficos apresentados na Fig. 6.41, para o arranjo estrutural AEI, e na Fig. 6.43, para o arranjo estrutural AEII. No gráfico da Fig. 6.43, não se verifica um decréscimo, seguido por uma ascensão no valor da força atuante, com o aumento da abertura CMOD, após o ponto de derivada igual a zero. O decréscimo,

seguido da ascensão, sugere o início da mobilização do efeito de ponte de transferência de tensão entre a fibra e a matriz fissurada.

Uma vez que a matriz de concreto, utilizada para a confecção da viga correspondente à Fig. 6.43, tem uma maior resistência em relação ao concreto utilizado para a viga da Fig. 6.41, sendo, portanto, mais frágil, pode se supor que a diferença de comportamento se deve à diferença entre o fator de forma entre as fibras utilizadas, já que a porcentagem de fibra é a mesma para essas matrizes. O menor diâmetro da fibra utilizada para a confecção das vigas do arranjo estrutural AEII, implica em uma maior quantidade de fibra por volume, sendo, portanto, mais eficiente no controle das fissuras que se abrem, uma vez que se tem um menor espaçamento médio entre fibras. Deve-se salientar, ainda, que na matriz mais resistente a força de adesão na interface fibra-matriz é maior e a fibra é mais solicitada no início da fissuração o que implica em um comportamento mais estável nessa fase.

6.4 Análise Não-Linear das Vigas de CA e CARFA

Para a análise da resposta não-linear física das vigas de CA e CARFA combinou-se ao critério de Rankine, que representa o limite de ruptura à tração, os critérios de Von Mises, Tresca, Drucker-Prager e o critério de Mohr-Coulomb, para a representação do limite de ruptura do material à compressão. Para a representação dos processos de fratura foram utilizadas as curvas $\sigma - w$, dadas na Fig. 6.39 e na Fig. 6.44.

A combinação do critério de Rankine com os demais critérios, acima descritos, foi realizada para as vigas do arranjo estrutural I (AEI), com seção retangular $20 \times 30\ cm$, confeccionada em concreto simples $(R20 \times 30\ cm - CA)$ e para a viga de seção retangular de concreto reforçado com fibras de aço $(R20 \times 30\ cm - CARFA)$. Esse procedimento foi seguido com o objetivo de verificar qual a melhor combinação de critérios para a análise comportamental desses materiais, quando combinados com a curva $\sigma - w$. Após a

definição do critério mais adequado, ao se comparar a resposta numérica com a resposta experimental, procedeu-se a simulação das demais vigas.

Na simulação das vigas do arranjo estrutural I (AEI), foi utilizado o controle direto de deslocamentos para o controle do passo incremental e o método secante BFGS, com acelerador de convergência tipo *"line search"*, para o controle do processo iterativo. O erro admitido no critério de convergência foi baseado em energia (ver: Capítulo 4) e igual a 10^{-4}. Na simulação das vigas do arranjo estrutural II (AEII) o controle direto de deslocamento foi substituído pelo controle do comprimento do arco, *"arch lenght control"*. Para todas as vigas o fator de retenção ao cisalhamento β, foi tomado igual a $0{,}2$. A coesão do material foi calculada como $c = f_c(1 - Sen\phi) / 2Cos\phi$ e o $Sen\phi = (f_c / f_t - 1)/(f_c / f_t + 1)$.

6.4.1 Análise Não-Linear das Vigas do Arranjo Estrutural I (AEI)

- **R20x30-CA**

Para a viga de concreto simples $(R20x30\ cm - CA)$ a combinação do critério de Rankine com os critérios de Von Mises, Tresca, Drucker-Prager e Mohr-Coulomb resultou em valores semelhantes. Uma análise do histórico das tensões desenvolvidas na viga demonstrou que o limite de ruptura à compressão não foi atingido durante o processo incremental de carregamento. A modelagem numérica apresentou uma resposta mais rígida do que a resposta experimental. O carregamento, correspondente ao deslocamento que caracteriza a ruptura da viga ensaiada, foi superior ao resultado experimental, porém, bastante próximo (Fig. 6.50).

Apesar da indefinição do critério de ruptura mais adequado para uma combinação com a curva $\sigma - w$, nesse caso específico, o limite de ruptura do material à compressão não será ignorado na simulação das demais vigas confeccionadas em CA. O critério de Drucker-

Prager por seu caráter mais geral, ao incluir o efeito da pressão hidrostática (representada por I_1) na tensão de cisalhamento, será então adotado.

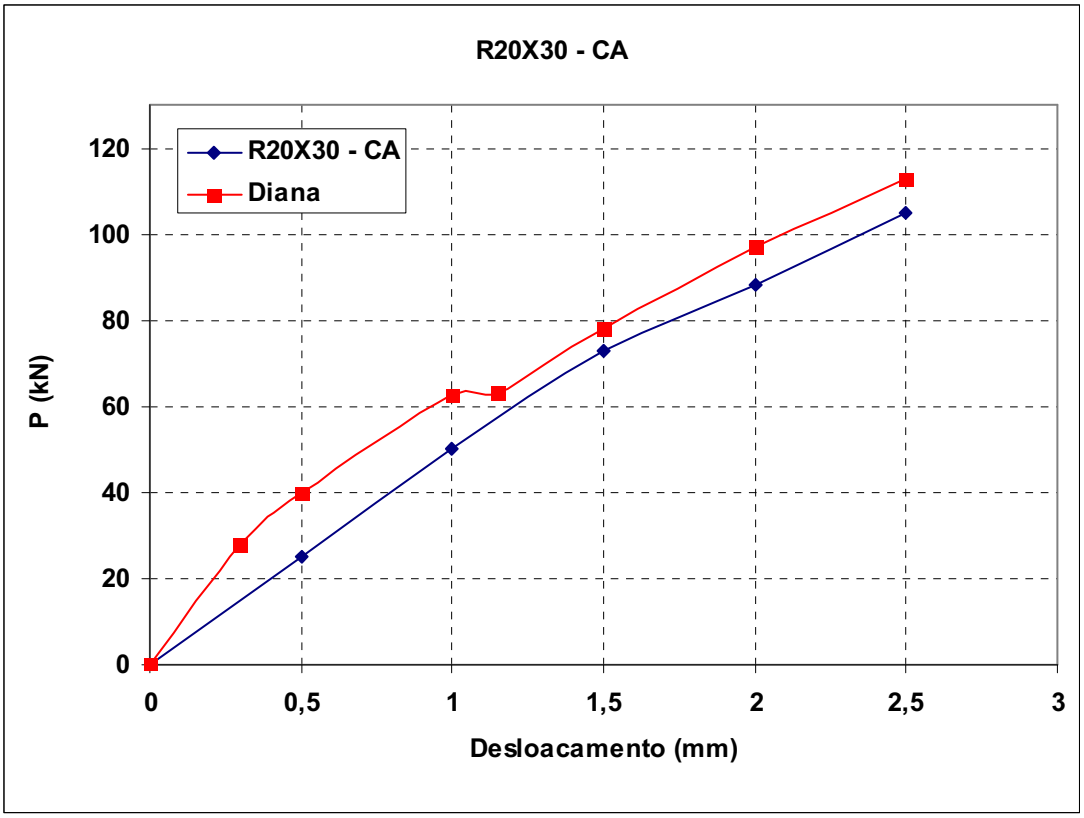


Figura 6.50 – Diagrama carga deslocamento para a viga R20x30-CA

As figuras 6.51 e 6.52 mostram o estado fissurado das vigas resultantes do ensaio experimental e da simulação numérica. A resposta numérica do panorama de fissuras, para a viga em estudo, concorda apenas parcialmente com o resultado experimental caracterizado por uma fissura dominante no vão de cisalhamento. O modelo de fissura distribuída apenas sugere o tipo de ruptura que irá prevalecer no elemento estrutural. No resultado experimental a fissura parte do apoio, face à armadura, e caminha em direção ao carregamento (Fig. 6.51). Um outro inconveniente é que o código de cálculo DIANA disponibiliza todas as deformações de fissuras nos elementos que ultrapassaram a resistência à tração do material estrutural. Dessa forma não é possível vizualizar somente

as deformações correspondentes as aberturas de fissuras de tamanho macroscópico (visíveis a olho nú).

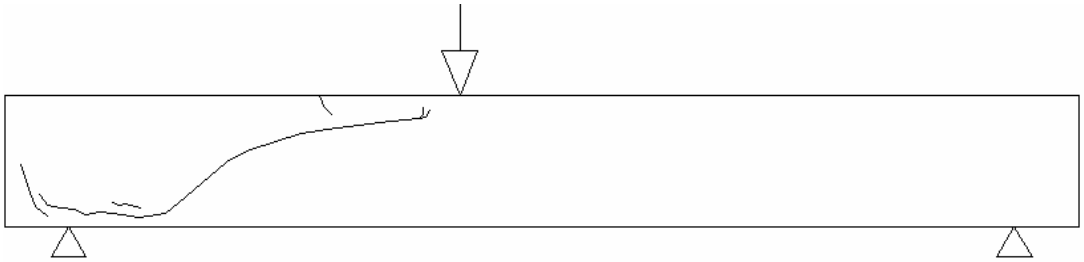


Figura 6.51 – Estado fissurado da viga R20x30-CA (ensaio experimental)

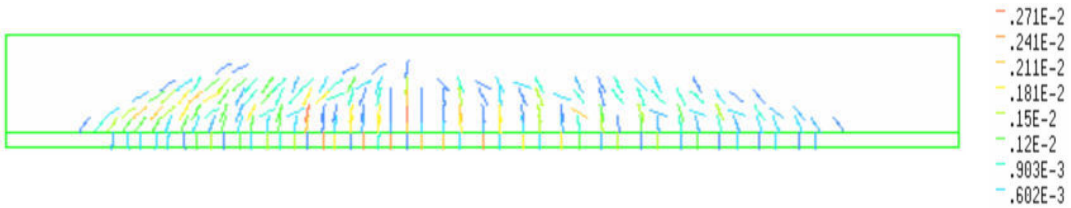


Figura 6.52 – Panorama de fissuras para a viga R20x30-CA (resposta numérica)

A maior concentração de fissuras inclinadas no vão de cisalhamento, bem como a ocorrência das maiores deformações de fissuras nessa região, não é capaz de representar a fissuração ao longo da armadura. Tal ocorrência se deve, em grande medida, à adoção da aderência perfeita entre os materiais envolvidos. Uma análise mais realista deve abandonar a idéia hipotética de aderência perfeita, admitida entre o aço e o concreto, introduzindo uma propriedade entre a interface desses materiais a fim de simular o deslizamento relativo, *"bond slip"*, entre os mesmos. A adoção dessa medida deve alterar o panorama de fissuração no elemento estrutural.

- **R20x30-CARFA**

Para a viga de concreto reforçado com fibras de aço (*R20x30 cm – CARFA*) a combinação do critério de Rankine com os critérios de Von Mises, Tresca, Drucker-

Prager e Mohr-Coulomb é mostrado na Fig. 6.53, para as duas séries de vigas ensaiadas (curvas CARFA1 e CARFA2).

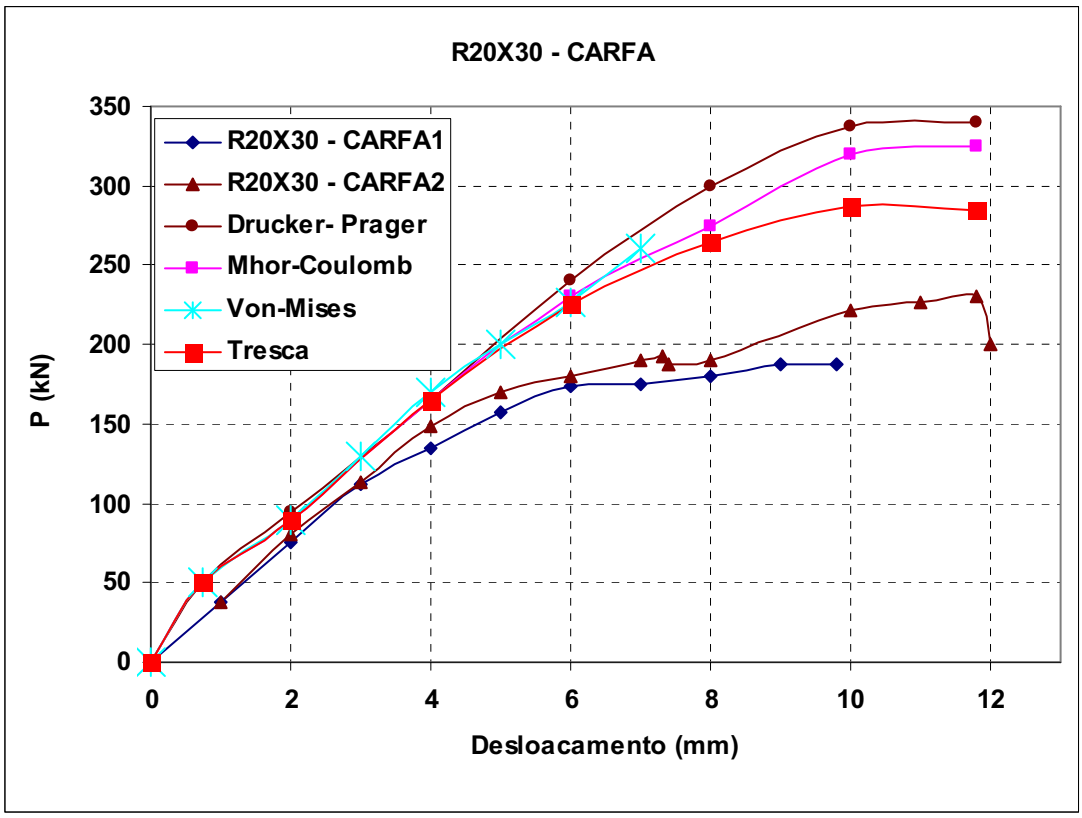


Figura 6.53 – Diagrama carga-deslocamento para a viga R20x30-CARFA

Todos os critérios utilizados resultaram em uma resposta numérica com um carregamento último superiror ao resultado experimental (Fig. 6.53). Para os critérios de Mohr-Coulomb e de Drucker-Prager, foi necessária uma maior quantidade de passos incrementais para se conseguir a convergência do sistema de equações não-lineares. Para o critério de Von Mises o colapso numérico da estrutura ocorreu com um deslocamento inferior ao deslocamento real da estrutura. O critério de Tresca foi o critério que mais se aproximou do resultado experimental. Esse critério demonstrou ser bastante estável na fase de pós-processamento da estrutura e será o critério adotado na simulação das demais vigas de CARFA.

As figuras 6.54 e 6.55 mostram o estado fissurado da viga *R20x30 cm – CARFA* resultantes do ensaio experimental e da simulação numérica, respectivamente. A representação numérica do panorama de fissuração novamente só é capaz de configurar parcialmente o estado fissurado, resultante do ensaio experimental. Uma maior concentração de fissuras no vão de cisalhamento é verificada, bem como, a inclinação das mesmas em um ângulo próximo de 45º graus. No vão de cisalhamento também ocorre os maiores valores de deformação de fissura (Fig. 6.55).

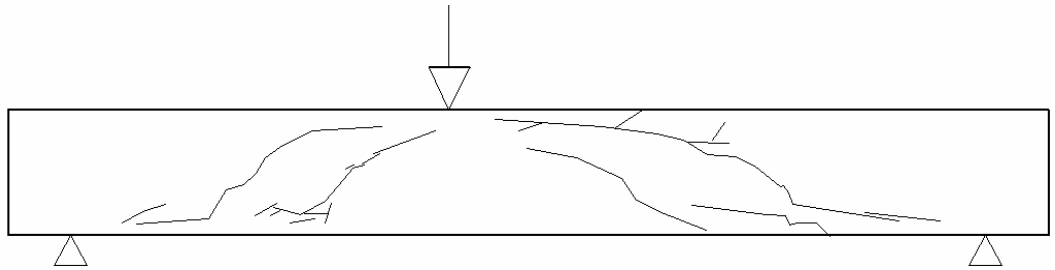


Figura 6.55 – Estado fissurado da viga R20x30-CARFA2 (ensaio experimental)

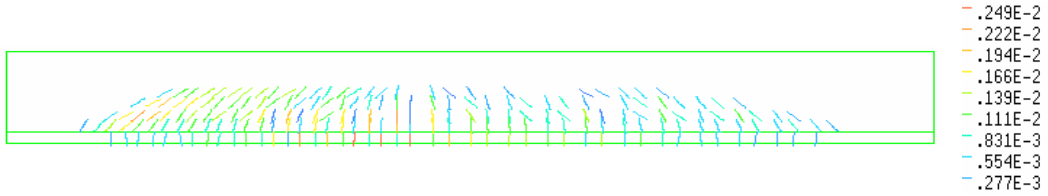


Figura 6.55 – Panorama de fissuras para a viga R20x30-CARFA (resposta numérica)

A observação feita anteriormente para a viga *R20x30 cm – CA*, relativamente à interface entre o concreto e a armadura, também se aplica à viga em estudo.

Ao se comparar os gráficos das figuras 6.50 e 6.53 vê se claramente a superioridade do concreto reforçado com fibras de aço (CRFA) em relação ao concreto simples (CS) para o tipo de ruptura cisalhamento-flexão. Essa observação evidencia a capacidade da fibra em reduzir a característica de fragilidade da matriz de cimento.

O diagrama carga-deslocamento e o panorama de fissuras, resultante da simulação numérica e do ensaio experimental, para as demais vigas do arranjo estrutural I (AEI), estão mostrados a seguir (Fig. 6.56 a 6.87).

- **R20x45-CARFA**

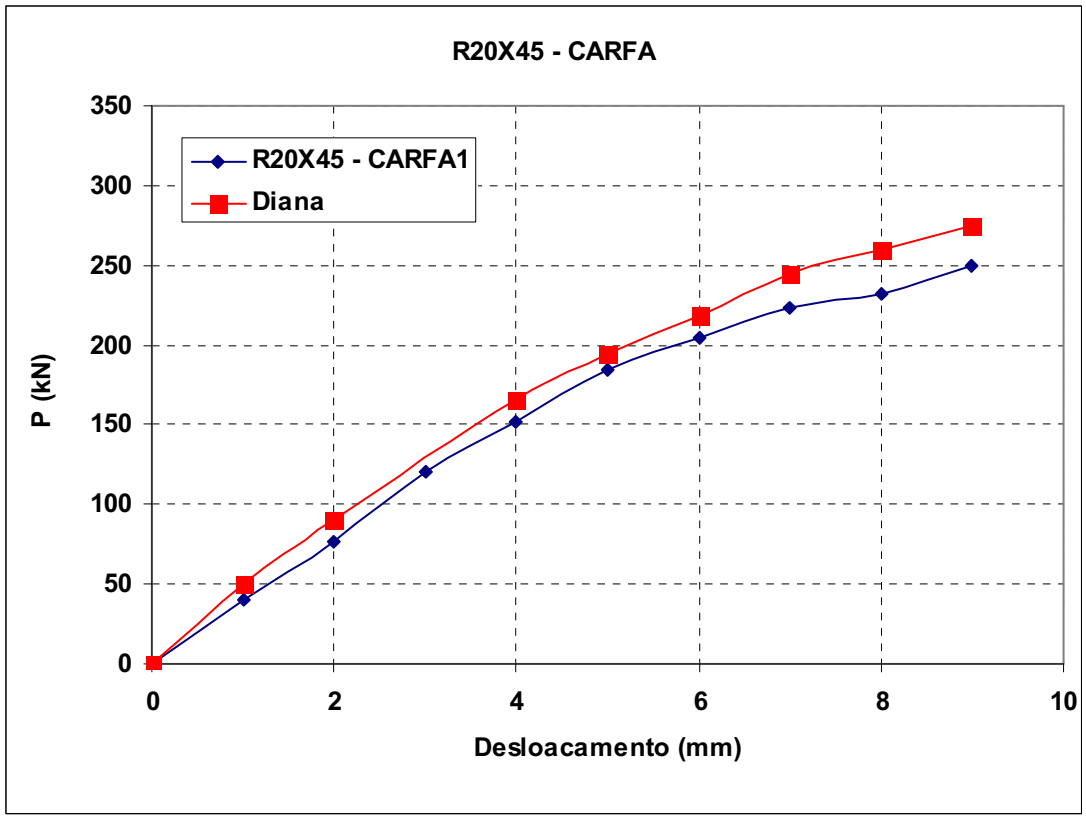


Figura 6.56 – Diagrama carga-deslocamento para a viga R20x45-CARFA

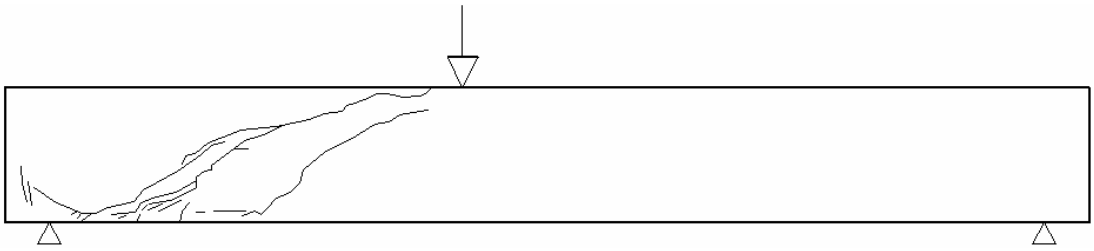


Figura 6.57 – Estado fissurado da viga R20x45-CARFA (ensaio experimental)

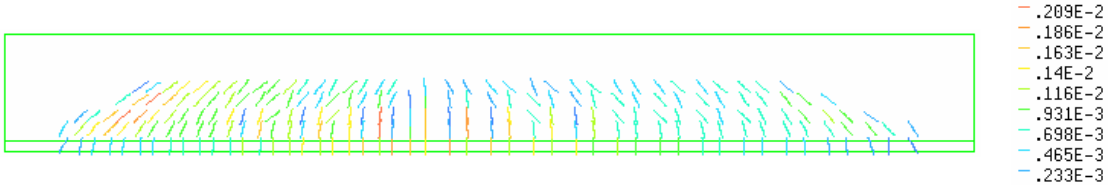


Figura 6.58 – Panorama de fissuras para a viga R20x45-CARFA (resposta numérica)

- **R20x50-CARFA**

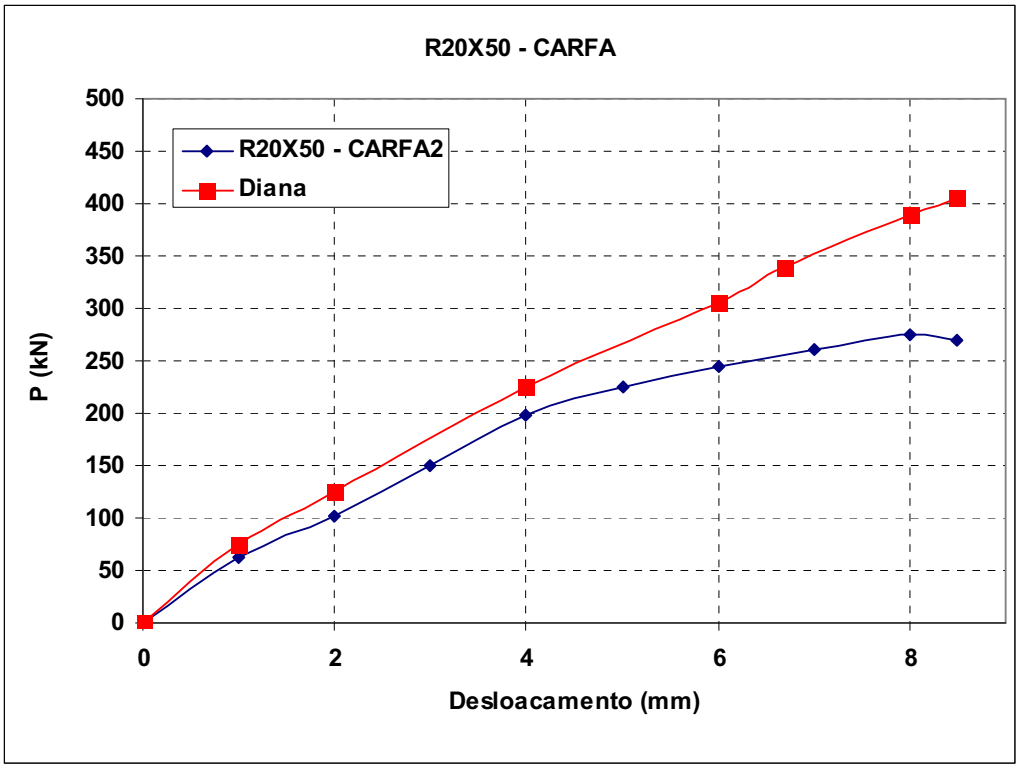


Figura 6.59 – Diagrama carga-deslocamento para a viga R20x50-CRFA

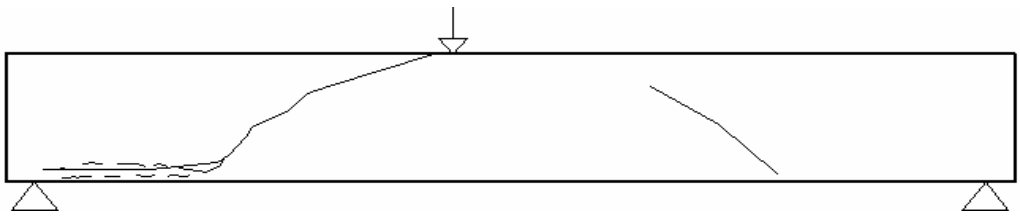


Figura 6.60 – Estado fissurado da viga R20x50-CARFA (ensaio experimental)

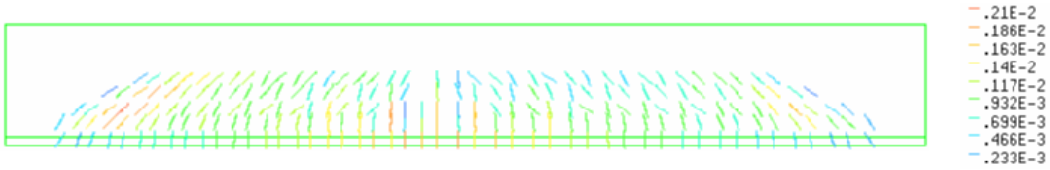


Figura 6.61 – Panorama de fissuras para a viga R20x50-CARFA (resposta numérica)

- **R20x60-CARFA**

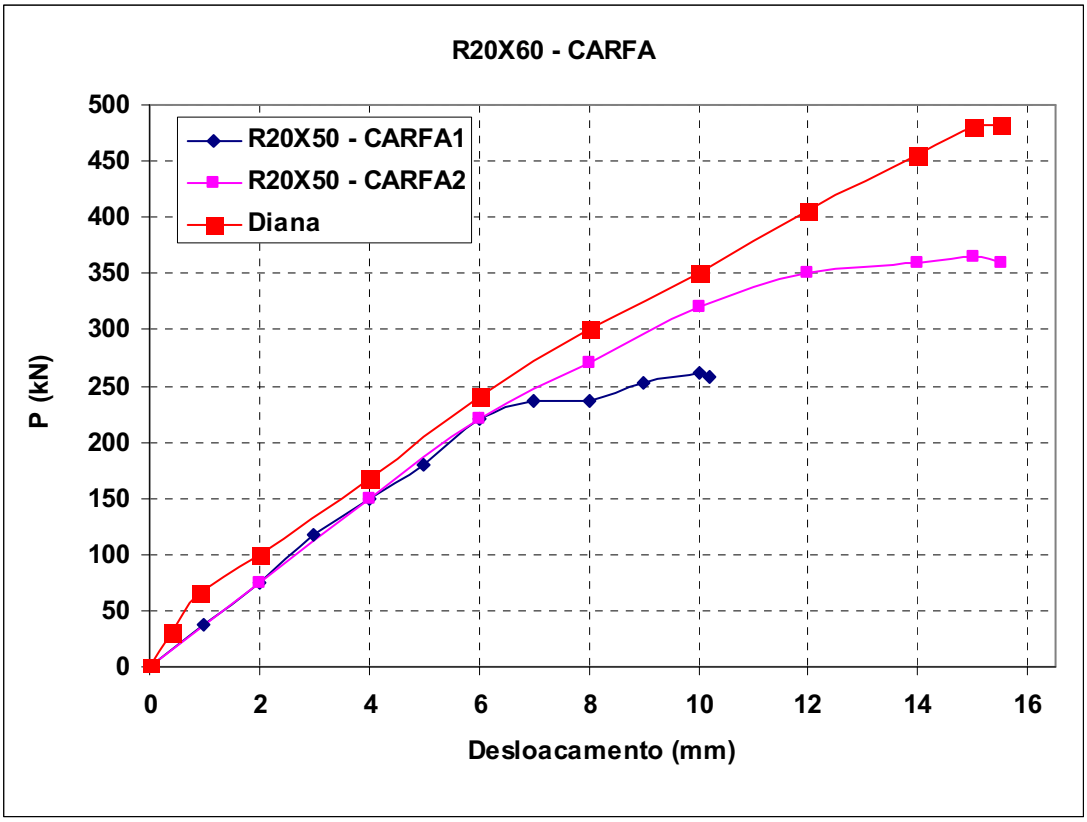


Figura 6.62 – Diagrama carga-deslocamento para a viga R20x60-CARFA

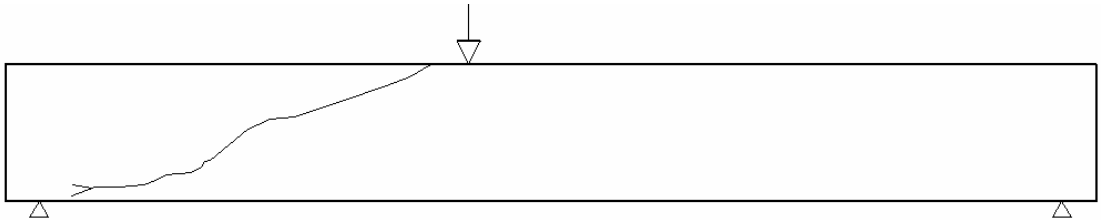


Figura 6.63 – Estado fissurado da viga R20x60-CARFA1 (ensaio experimental)

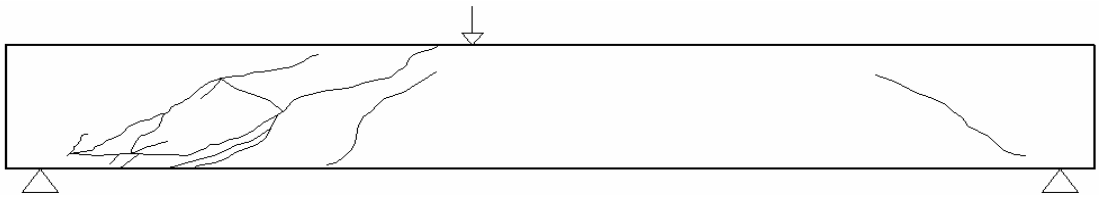


Figura 6.64 – Estado fissurado da viga R20x60-CARFA2 (ensaio experimental)

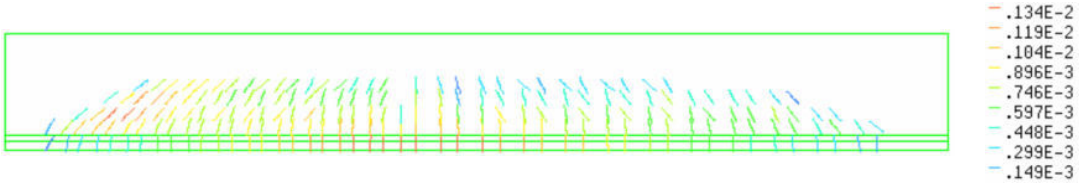


Figura 6.65 – Panorama de fissuras para a viga R20x60-CARFA (resposta numérica)

- **R20x60-CA**

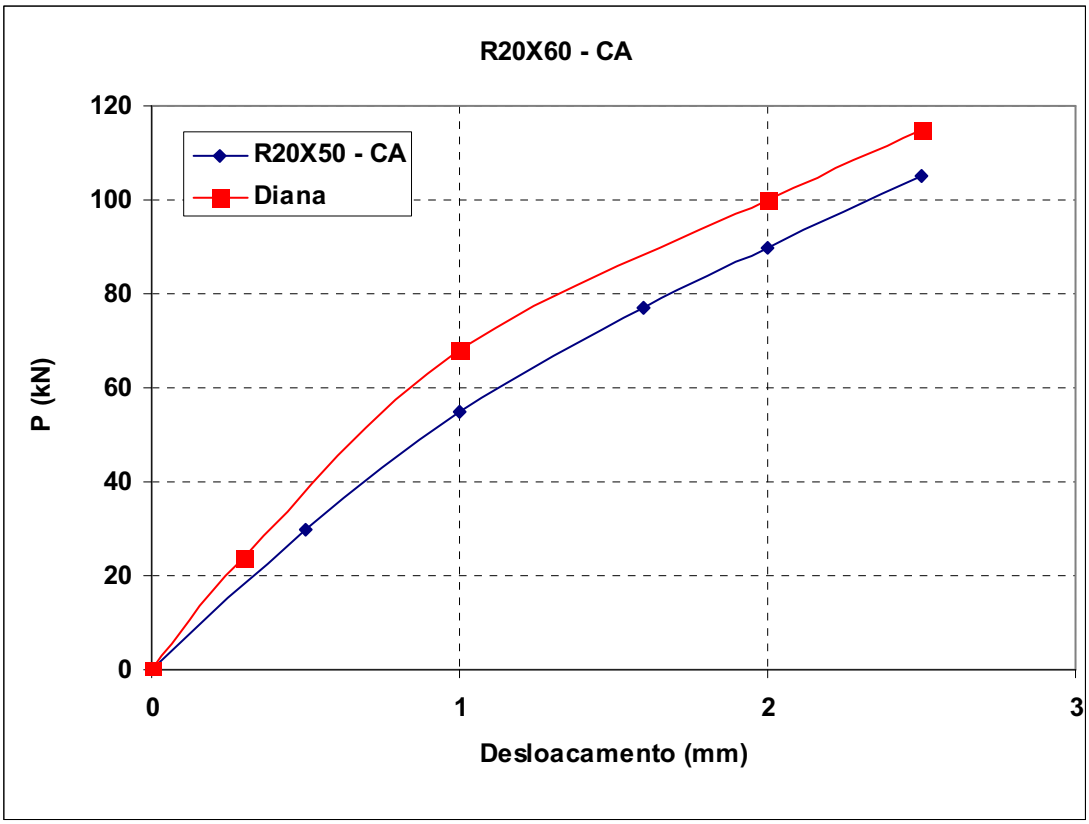


Figura 6.66 – Diagrama carga-deslocamento para a viga R20x60-CA

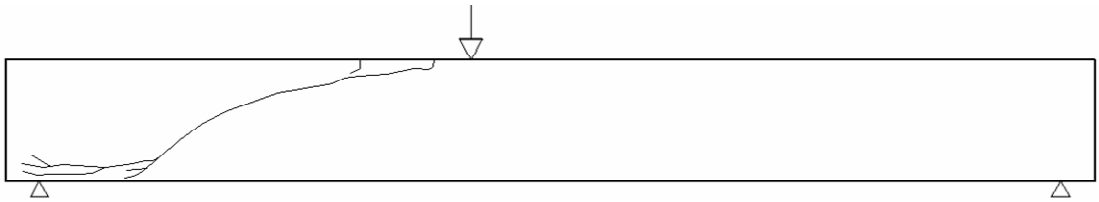


Figura 6.67 – Estado fissurado da viga R20x60-CA (ensaio experimental)

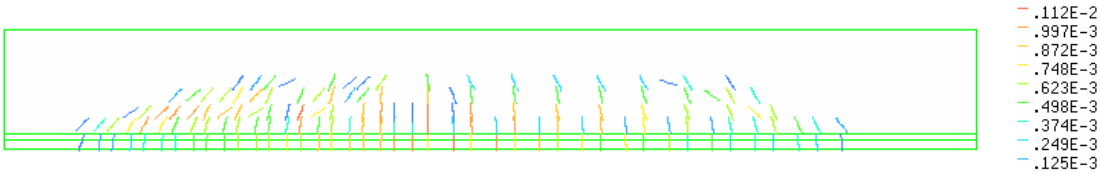


Figura 6.68 – Panorama de fissuras para a viga R20x60-CA (resposta numérica)

- **T10x50-CARFA**

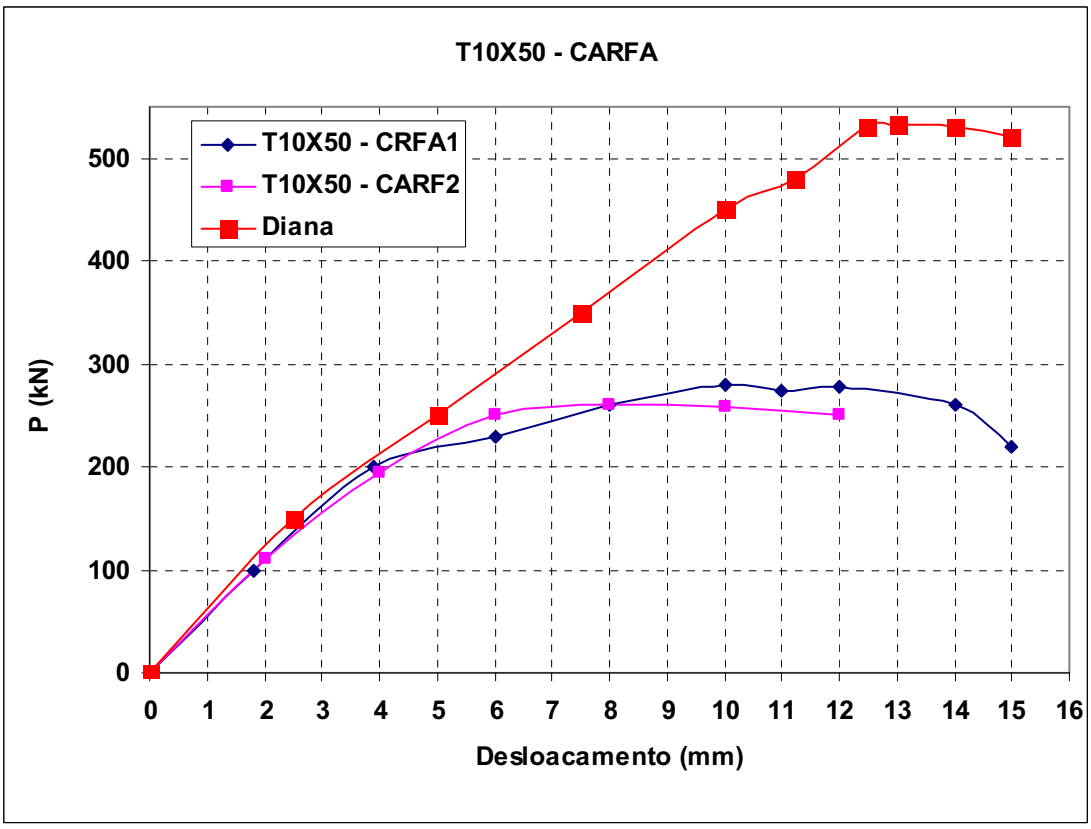


Figura 6.69 – Diagrama carga-deslocamento para a viga T10x50-CARFA

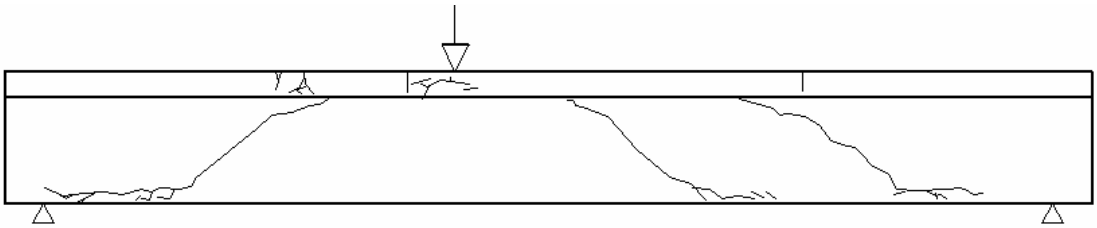


Figura 6.70 – Estado fissurado da viga T10x50-CARFA1 (ensaio experimental)

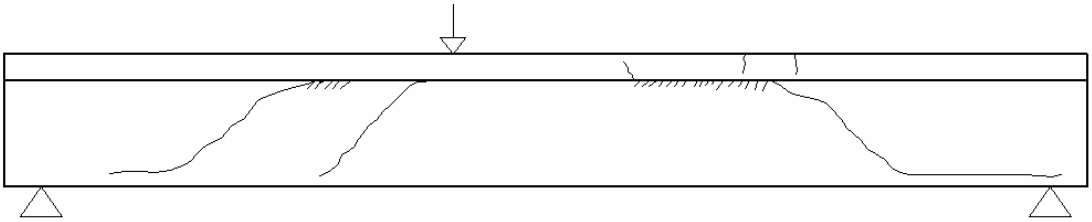


Figura 6.71 – Estado fissurado da viga T10x50-CARFA2 (ensaio experimental)

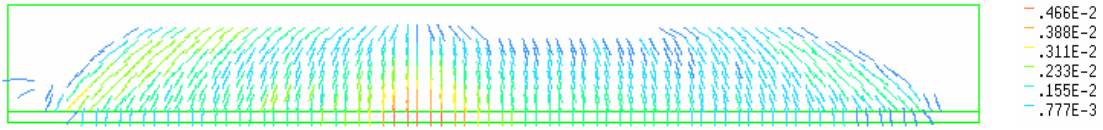


Figura 6.72 – Panorama de fissuras para a viga T10x50-CARFA (resposta numérica)

- **T15x50-CARFA**

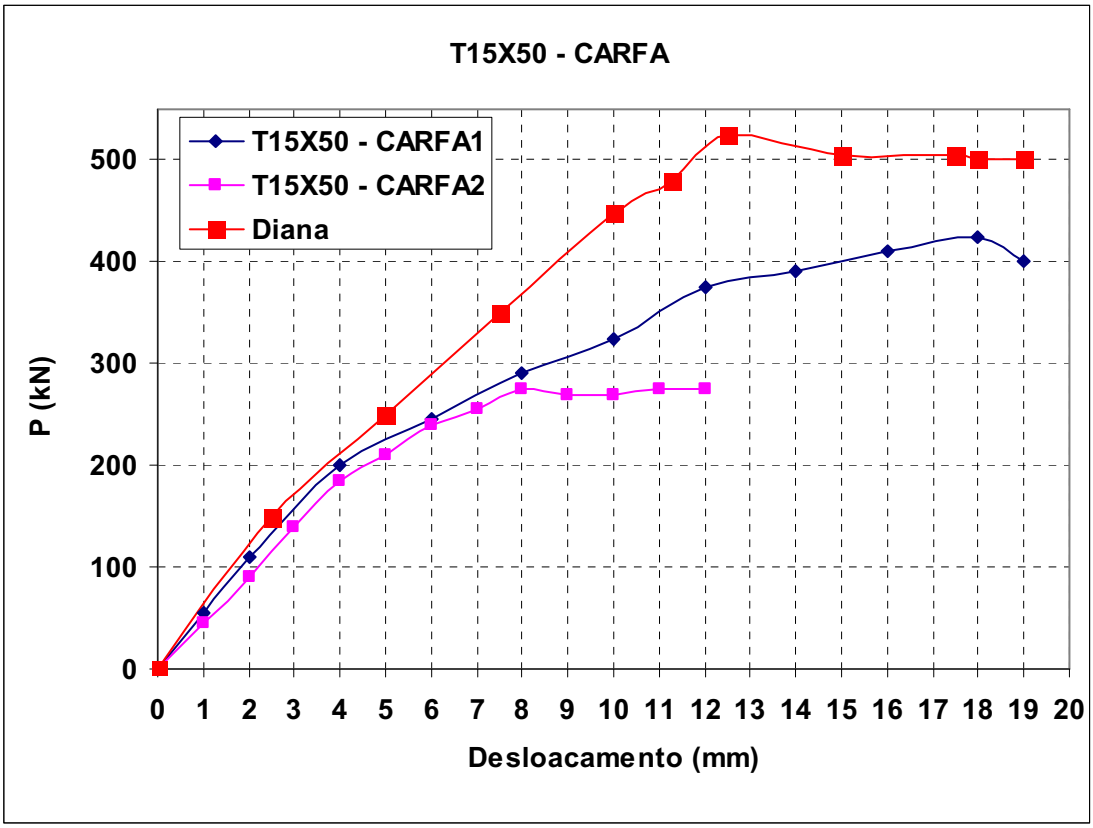


Figura 6.73 – Diagrama carga-deslocamento para a viga T15x50-CARFA

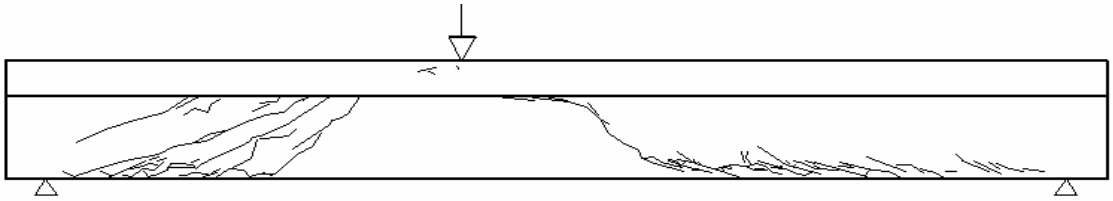


Figura 6.74 – Estado fissurado da viga T15x50-CARFA1 (ensaio experimental)

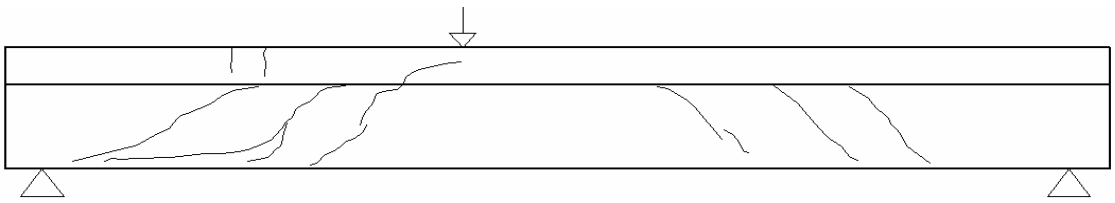


Figura 6.75 – Estado fissurado da viga T15x50-CARFA2 (ensaio experimental)

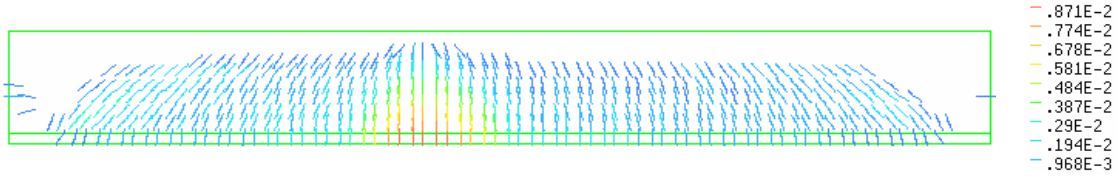


Figura 6.76 – Panorama de fissuras para a viga T15x50-CARFA (resposta numérica)

- T15x75-CARFA

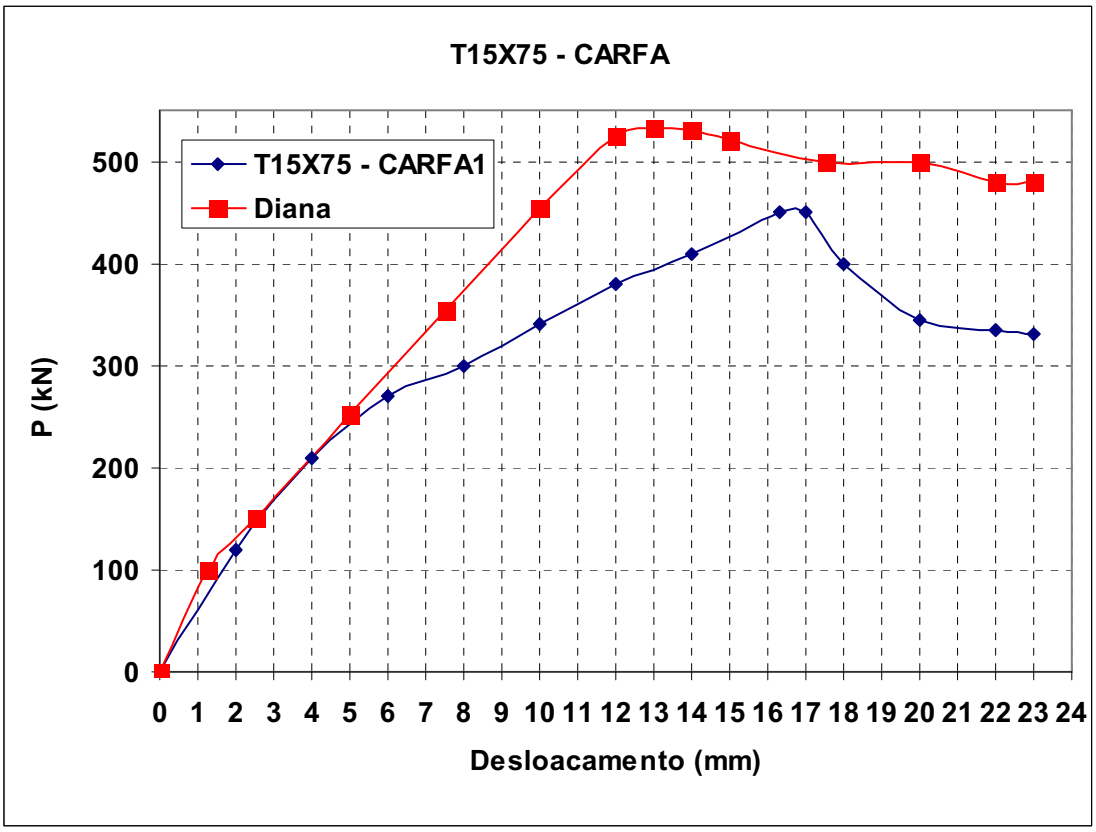


Figura 6.77 – Diagrama carga-deslocamento para a viga T15x75-CARFA

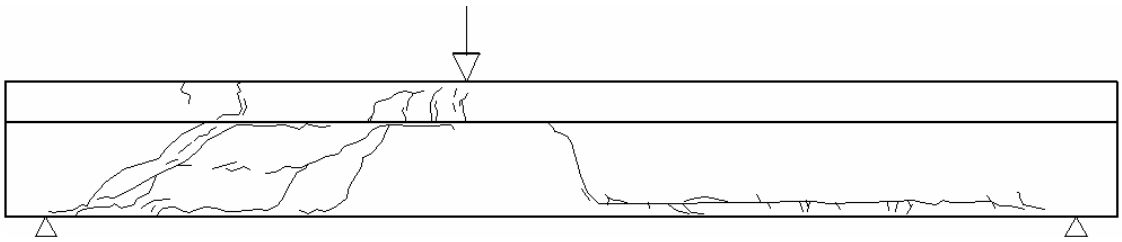


Figura 6.78 – Estado fissurado da viga T15x75-CARFA1 (ensaio experimental)

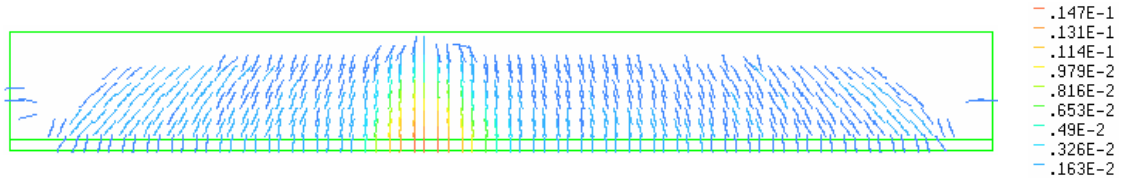


Figura 6.79 – Panorama de fissuras para a viga T15x75-CARFA (resposta numérica)

- **T15x100-CARFA**

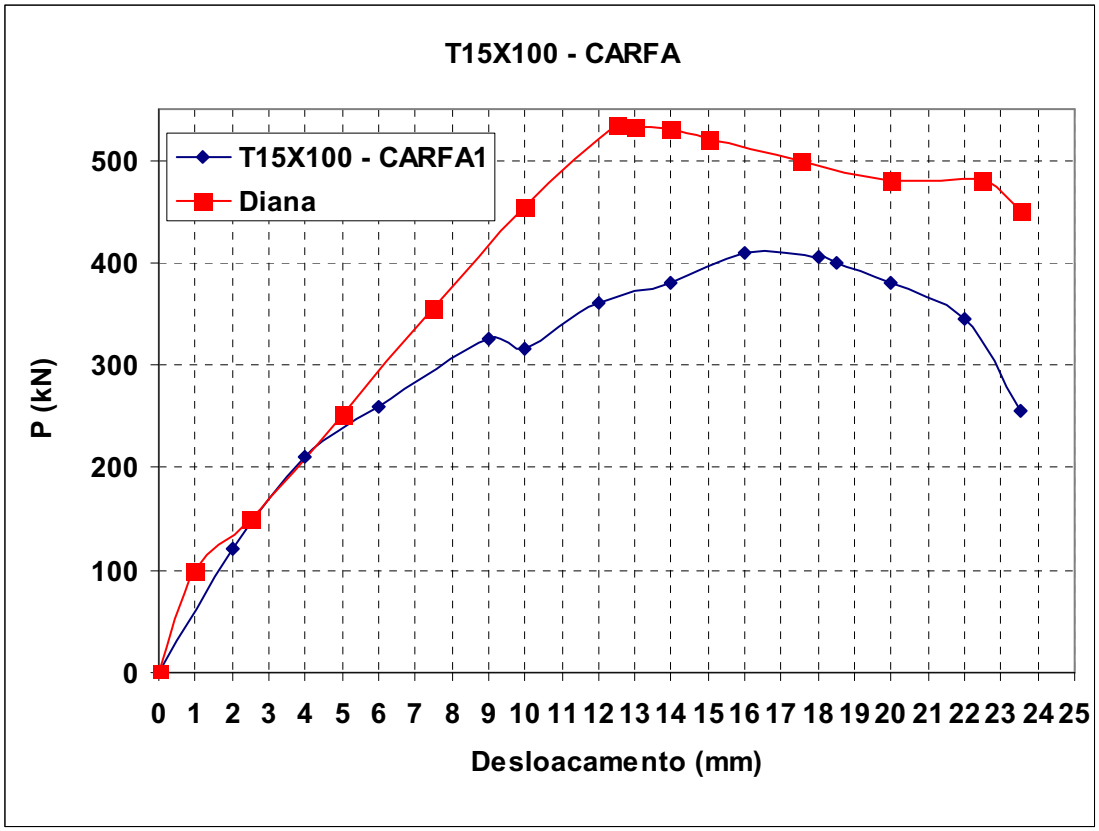


Figura 6.80 – Diagrama carga-deslocamento para a viga T15x100-CRFA

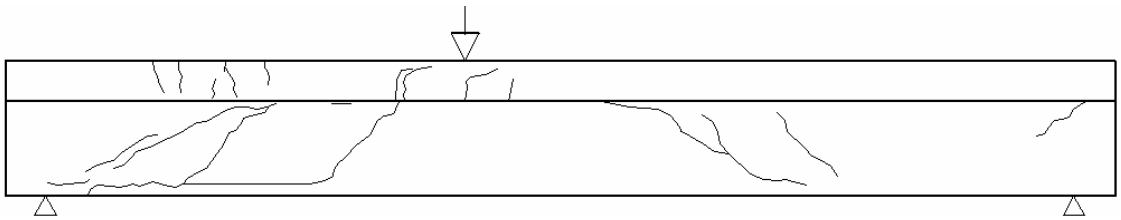


Figura 6.81 – Estado fissurado da viga T15x100-CRFA1 (ensaio experimental)

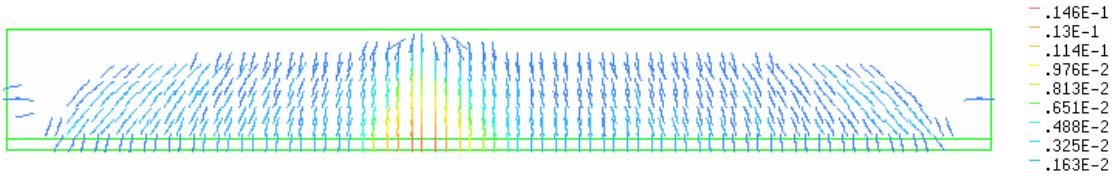


Figura 6.82 – Panorama de fissuras para a viga T15x100-CARFA (resposta numérica)

- T15x100-CA

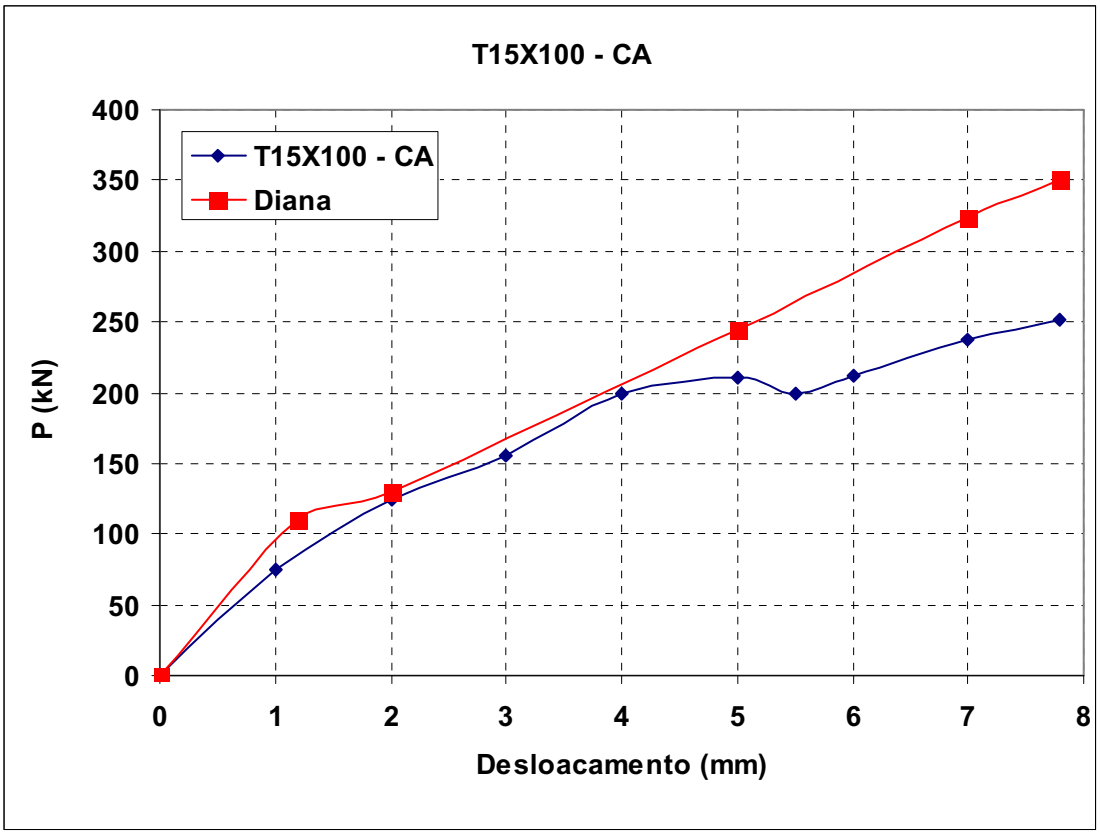


Figura 6.83 – Diagrama carga-deslocamento para a viga T15x100-CA

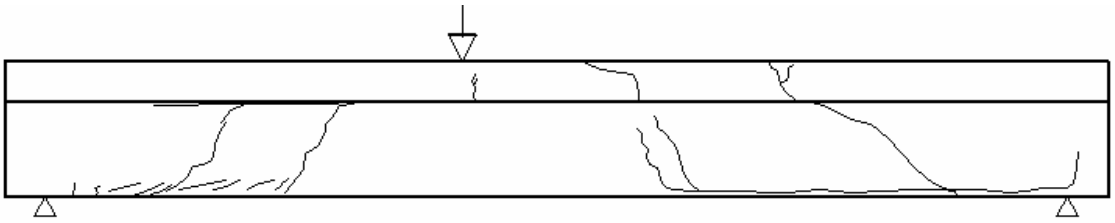


Figura 6.84 – Estado fissurado da viga T15x100-CA (ensaio experimental)

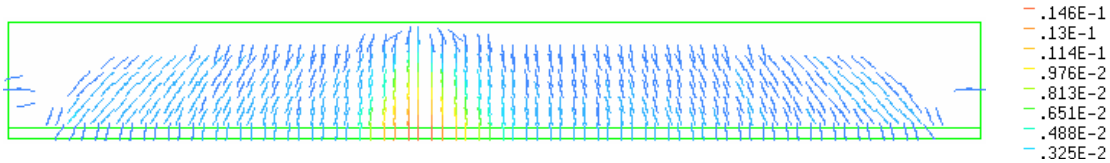


Figura 6.85 – Panorama de fissuras para a viga T15x100-CA (resposta numérica)

- T230x50-CRFA

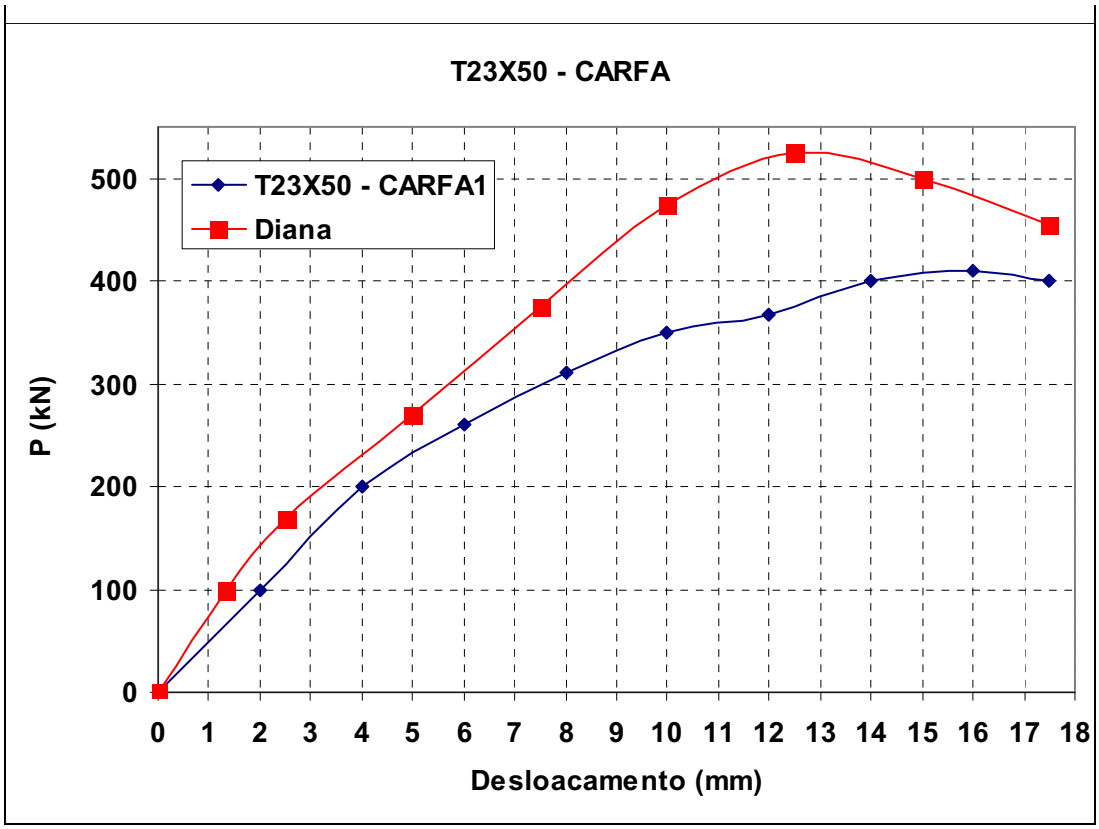


Figura 6.86 – Diagrama carga-deslocamento para a viga T23x50-CARFA

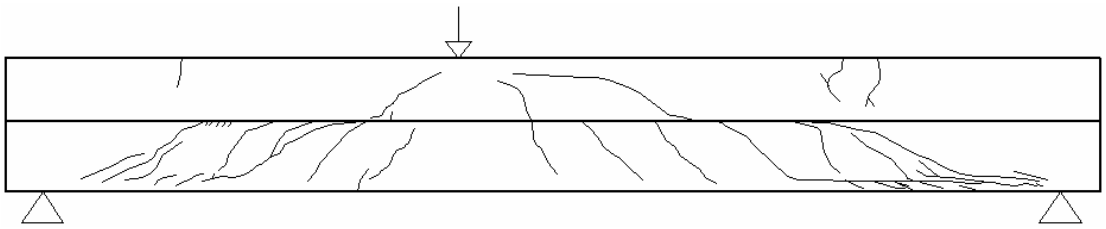


Figura 6.87 – Estado fissurado da viga T23x50-CARFA (ensaio experimental)

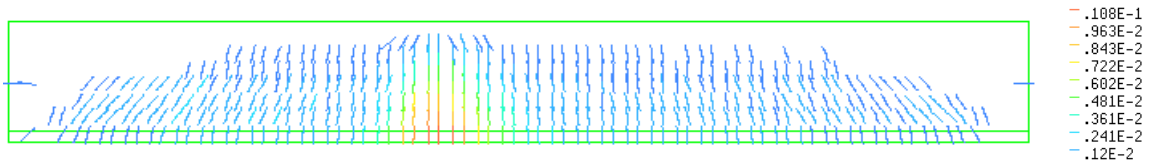


Figura 6.88 – Panorama de fissuras para a viga T23x50-CARFA (resposta numérica)

Nas vigas de concreto armado reforçado com fibras de aço (CARFA) e seção retangular o valor do carregamento, relativamente ao deslocamento último do ensaio experimental, foi superestimado na simulação numérica do conjunto de vigas, exceção feita à viga *R20x45 cm – CARFA*. Nas vigas ensaiadas mais de uma vez, a fim de se verificar a repetibilidade dos resultados, têm-se uma menor discrepância entre a resposta numérica e a resposta experimental. Cabe salientar que a repetibilidade dos resultados não se verificou, o que sugere alguma deficiência em alguma fase da investigação experimental.

Para as vigas de seção retangular em concreto armado (CA) a resposta numérica foi compatível com a resposta experimental. A maior inclinação no trecho inicial das curvas carga-deslocamento, tanto para as vigas de CARFA, quanto para as vigas de CA, mostrou uma maior rigidez do modelo numérico para esse tipo de análise. Quanto ao panorama das fissuras, obtido com a simulação numérica, são validas as observações feitas anteriormente para as vigas *R20x30 cm – CA* e *R20x30 cm – CARFA*.

Para as vigas com seção em T o método de análise utilizado superestima a capacidade de carregamento da estrutura, tanto para as vigas de CA, embora de forma menos acentuda, quanto para as vigas de CARFA. Uma investigação criteriosa das possíveis causas dessa

discrepância de comportamento deve ser feita, possivelmente, com o emprego de modelos numéricos tridimensionais. Vê-se claramente para essas vigas que a inclinação das fissuras tem uma direção aproximada de 45° no vão de cisalhamento e nas proximidades dos apoios. Essas fissuras inclinadas de 45º parecem estar sendo limitadas, na parte superior da viga, pela mesa da seção em T, embora avançam em direção ao carregamento aplicado, conforme evidência experimental. A observação do panorama das fissuras no vão de cisalhamento e nas proximidades dos apoios não é sugestivo quanto ao tipo de ruptura dominante no elemento estrutural. Não há concordância entre o panorama de fissuras obtido da simulação numérica com a resposta experimental. Na simulação numérica, as máximas deformações de fissuras ocorrem abaixo do ponto de aplicação do carregamento e na face inferior das vigas, ao invés de ocorrerem no vão de cisalhamento. As fissuras desenvolvidas na interface aço-concreto, no ensaio experimental, também não é pronunciada na investigação numérica.

6.4.2 Análise Não-Linear das Vigas do Arranjo Estrutural II (AEII)

Para a viga do arranjo estrutural II (AEII) modelada com concreto simples (CS), a energia de fraturamento foi estimada, de acordo com a Eq. (6.24), proposta pelo **CEB-FIP Model Code** (1990), uma vez que, o ensaio 3PBT só foi realizado para a viga de CRFA, cuja curva tensão abertura de fissura ($\sigma - w$), para a representação dos processos de fratura, foi mostrada no gráfico da Fig. 6.40, item 6.3.

$$G_f = G_{f0}\left(\frac{f_{cm}}{f_{cmo}}\right)^{0,7} \tag{6.24}$$

Na Eq. (6.24) f_{cm} é a resistência média do concreto à compressão aos 28 dias, f_{cmo} assume o valor de *10 MPa* e G_{f0}, obtido da Tab.6.13, é função do diâmetro máximo do agregado.

Tabela 6.13 – Relações entre o diâmetro máximo do agregado e a energia de fratura

$d_{máx}$ (mm)	G_{f0} (J/m^2)
8	25
16	30
32	58

Sendo o diâmetro máximo do agregado igual a $19\ mm$ para o concreto utilizado na confecção da viga do AEII, tem-se, por interpolação, $G_{f0} = 33{,}75\ J/m^2$ e $G_f = 94{,}76\ J/m^2$. Adotando a curva de amolecimento linear para a simulação do comportamento do material durante o fraturmento tem-se $\varepsilon^{cr}_{nn,ult} = 7{,}2 * 10^{-4}$, para uma largura de banda $h = 50mm$ e $f_t = 5{,}27\ MPa$.

- **AEII-CARFA e AEII-CA**

Para as vigas do arranjo estrutural II (AEII), confeccionadas em concreto armado (CA) e com concreto armado reforçado com fibras de aço (CARFA), o aspecto do diagrama carga-deslocamento (Fig. 6.89 e Fig. 6.91) se assemelhou ao diagrama obtido do ensaio experimental, caracterizado por um comportamento, cujos estádios de deformação são bastante nítidos. Para ambas as vigas, simuladas numericamente, a carga correspondente ao início da plastificação da armadura se aproximou da resposta encontrada no ensaio experimental. O mesmo se aplica ao valor obtido numéricamente para a carga de primeira fissura (carga correspondente a mudança de inclinação da curva carga-deslocamento), conforme se vê na Fig. 6.89. Na Fig. 6.90 é mostrado a tensão desenvolvida na armadura longitudinal ao longo do comprimento da viga e para o passo de carregamento correspondente a colapso da estrutura. Após a plastificação da armadura a viga trabalha como um tirante de concreto.

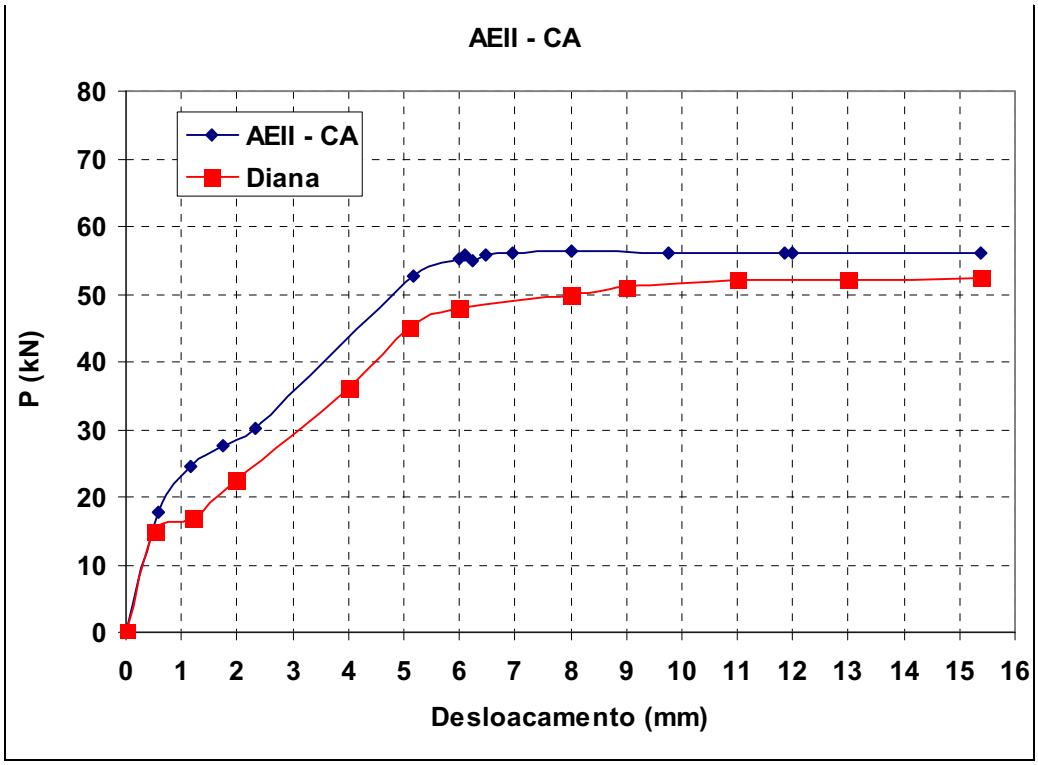


Figura 6.89 – Diagrama carga-deslocamento para a viga de CA do arranjo estrutural AEII

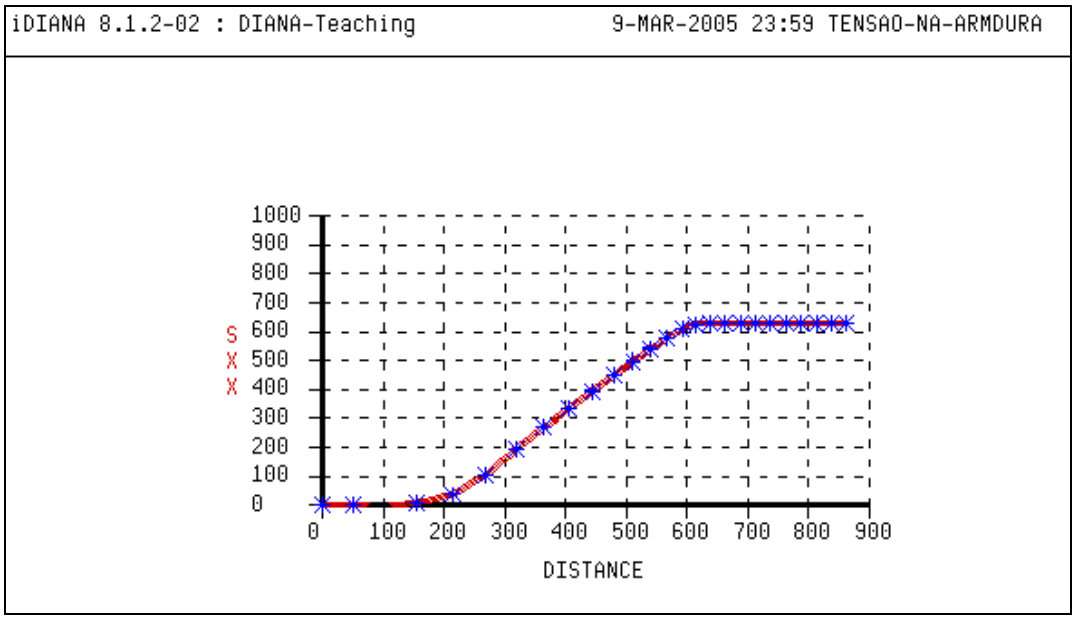


Figura 6.90 – Diagrama de tensão ao longo da armadura para a viga de CA do arranjo estrutural AEII

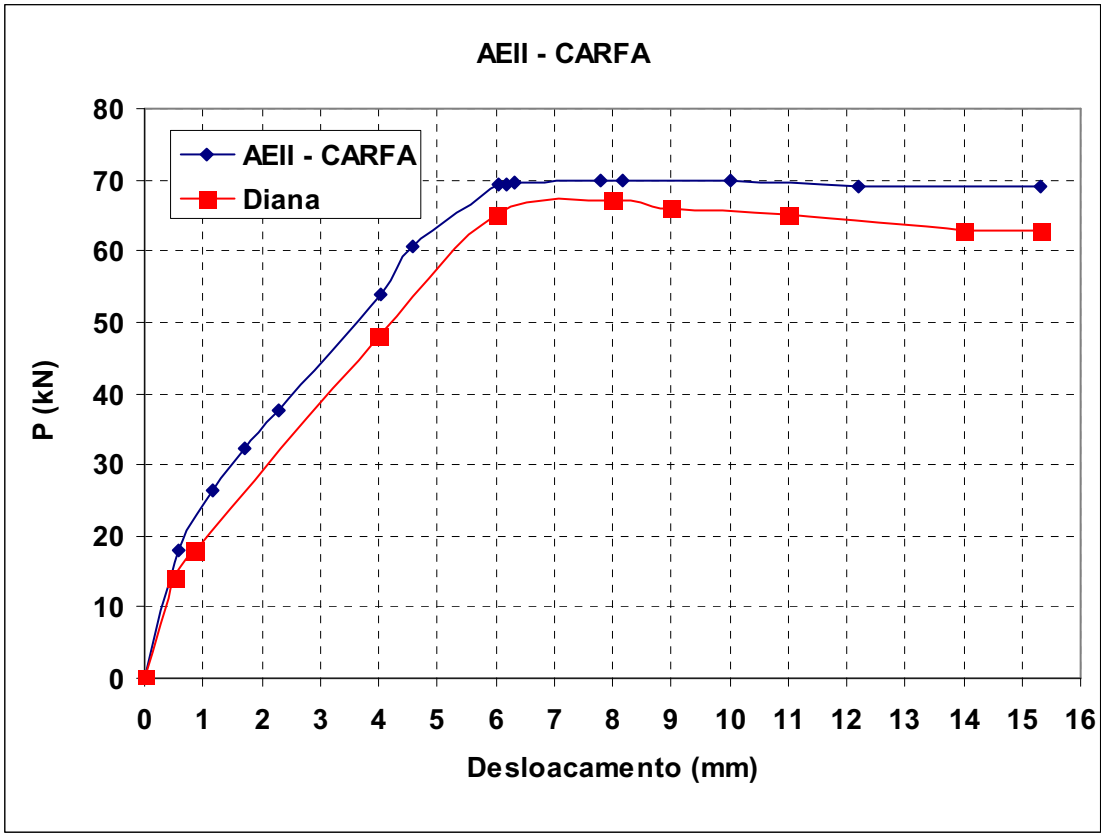


Figura 6.91 – Diagrama carga-deslocamento para a viga de CARFA do AEII

Na Fig. 6.92 é mostrado o panorama de fissuras das vigas AEII-CARFA e AEII-CA, obtidas do ensaio experimental. Na Fig. 6.93 é mostrado o panorama de fissuração para a viga AEII-CARFA, fruto da simulação numérica. Nessa figura apenas a metade da viga está sendo mostrada, uma vez que na simulação numérica foi explorada a simetria estrutural. O panorama de fissuração para a viga AEII-CA é bastante semelhante ao da viga de CARFA e portanto não é mostrada.

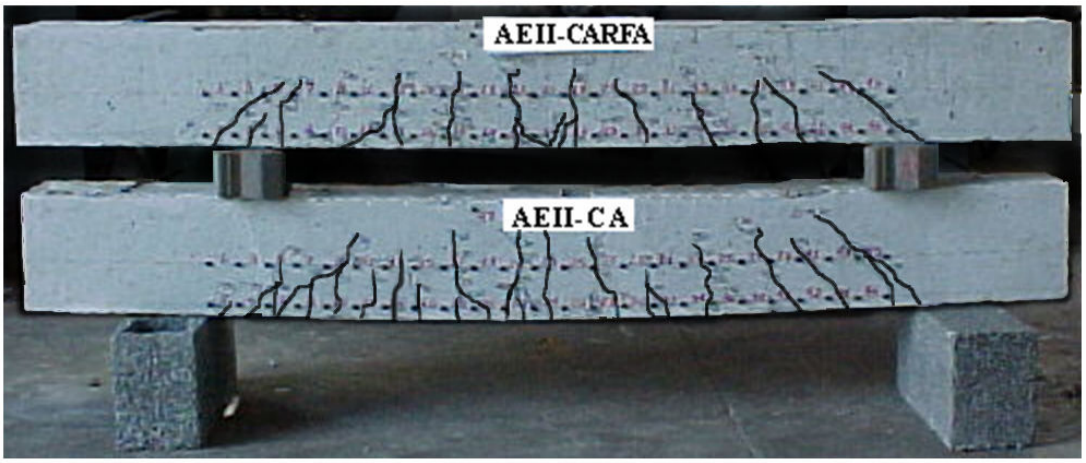


Figura 6.92 – Estado fissurado das vigas do arranjo estrutural II (AEII) – ensaio experimental

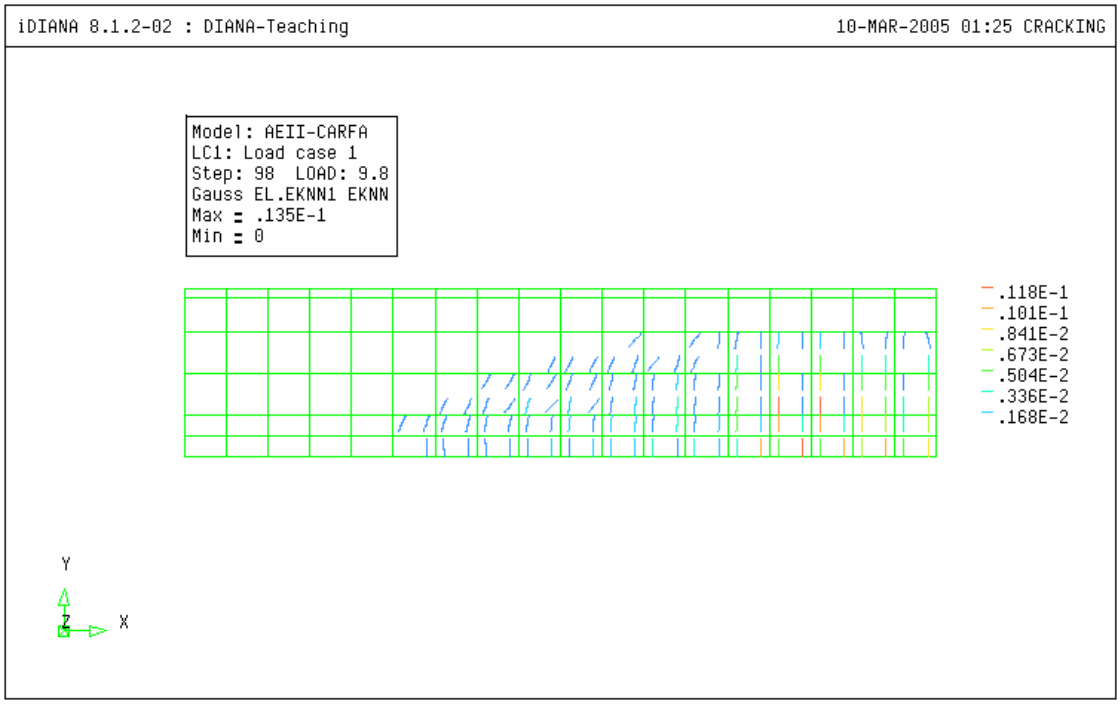


Figura 6.93 – Panorama de fissuras para a viga AEII-CRFA (resposta numérica)

Analisando o panorama de fissuração obtido na simulação numérica (Fig. 6.93), com o panorama de fissuração obtido experimentalmente (Fig. 6.92), constata-se a capacidade do modelo de fissura distribuída em sugerir o tipo de ruptura em elementos estruturais onde a ruptura por flexão é predominante. Na Fig. 6.93, observa-se claramente que o tipo de ruptura dominante é o Modo I de fraturamento (devido à flexão pura, relativamente ao carregamento aplicado) conforme indicam as fissuras verticais na extremidade mais à esquerda da viga onde ocorre as maiores deformaçãoes de fissuras.

Capítulo 7

Considerações Finais

Este trabalho apresentou um estudo dos processos de fratura em vigas armadas confeccionadas com concreto simples (CS) e com concreto reforçado com fibras de aço (CRFA), através de modelos numéricos de fissuras baseados na curva de amolecimento $\sigma - w$. O estudo se desenvolveu de forma comparativa entre as respostas obtidas com a análise numérica e os resultados obtidos de ensaios experimentais. A análise numérica foi realizada com o código de elementos finitos **DIANA Finite Element Analysis.** Os resultados numéricos e os resultados experimentais foram discutidos através da comparação dos diagramas carga-deslocamento do ponto de aplicação de carga e do panorama de fissuração dos espécimes analisados.

Antes de se estabelecer o modelo de elementos finitos definitivo, para a simulação dos processos de fratura, avaliou-se a qualidade da malha de elementos finitos, com uma análise do estado de tensão no regime elástico linear e com o subsídio de formulações analíticas. Em seguida o ensaio à flexão 3PBT, utilizado para a obtenção da curva $\sigma - w$, foi simulado com o finalidade de se avaliar o método indireto de obtenção da lei constitutiva do material. A resposta numérica mostrou que existe objetividade na forma de obtenção de tal parâmetro e a curva obtida analiticamente, através de retroanálise, é bastante representativa. Essa conclusão foi formulada através da comparação das curvas $P - \delta$, $P - CMOD$ e com a avaliação do estado de tensão na ponta da trinca.

Considerações Finais

Dando seguimento ao estudo dos processos de fratura para as vigas em escala real, com e sem fibras de aço, após a escolha do critério de ruptura mais adequado para uma combinação com a curva $\sigma - w$, observou-se, para as vigas do arranjo estrutural I (AEI), que as curvas carga-deslocamento, resultantes da simulação numérica, apresentou uma maior inclinação em relação as curvas experimentais. Isso evidenciou uma maior rigidez do modelo numérico.

Para as vigas do arranjo estrutrural AEI e seção retangular, confeccionadas com concreto reforçado com fibras, a resposta numérica superestimou o carregamento relativamente ao deslocamento último obtido experimentalmente. Para as vigas de seção retangular em concreto armado (CA) a resposta numérica foi compatível com a resposta experimental. Para as vigas com seção em T, o método de análise utilizado também superestimou a capacidade de carregamento da estrutura, tanto para as vigas de CA, embora de forma menos acentuda, quanto para as vigas de CARFA.

Devido à própria variabilidade dos resultados obtidos para as vigas ensaiadas mais de uma vez na investigação experimental, a fim de se verificar a repetiblidade dos resultados, uma explicação razoável do comportamento dos diagramas carga-deslocamento, verificado para as vigas de CA e de CARFA, necessita de uma maior investigação. Essa investigação deve contemplar as condições em que os ensaios foram realizados, os equipamentos, a necessidade de medição de um maior número de variáveis para a tradução do comportamento mecânico do material e/ou estrutura objeto do estudo e melhorias nos modelos numéricos implementados, como, por exemplo, contemplar do efeito de flexão localizada da armadura e o deslocamento relativo entre a armadura e o material cimentício.

Para as vigas do arranjo estrutural I (AEI), a inclinação das fissuras em uma direção aproximada de 45º no vão de cisalhamento e nas proximidades do apoio, a maior concentração de fissuras nessa região, bem como, a ocorrência das maiores deformações de fissuras só foi capaz de configurar parcialmente o tipo de ruptura das vigas de seção retangular. Para as seções em T o panorama de fissuras é excessivo e não sugere o tipo de ruptura por cisalhamento, conforme a resposta experimental. Nas vigas do arranjo

estrutural II (AEII) o panorama de fissuras, obtido na siumulação numérica, é bastante representativo do tipo de ruptura dominante na viga armada projeta para ruptura por efeito de flexão.

A riqueza de detalhes obtida com a simulação numérica de elementos estruturais evidencia seu potencial para uma investigação minuciosa do comportamento estrutural. Uma investigação mais criteriosa garantindo maior veracidade as análises levadas a efeito nesse trabalho, consiste na simulação da aderência entre os materiais envolvidos, na simulação numérica das vigas de seção T no espaço tridimensional, na investigação da relação de dependência entre os parâmetros que caracterizam as propriedades físicas das fibras (orientação da fibra, fator de forma, eficiência da ancoragem, volume de fibra incorporado na matriz de cimento, etc.) com o modelo constitutivo do material no estado multi-axial de tensão. Essas investigações, frente as limitações de abrangência e de tempo, estão reservadas para futuras incursões.

Referências Bibliográficas

ARGYRIS, J. H.; KELSEY, S., (1956). *"Energy Theorems and Structural Analysis"*, Aircraft Engineering, v.26 e 27, *appud Fellipa 2004*.

ASSAN, A. N., (2003). *"Método dos Elementos Finitos: Primeiros Passos"*, 2º ed., Campinas, S. P., Editora Unicamp, Coleção Livro-Texto.

AVESTON, J., COOPER, G. A., KELLY, A., (1971). "*The Properties of Fiber Composites",* Conference Proceedingins, IPC Science and technology Press: Guildford, UK, 1971, pp. 15-24, *appud Bentur e Mindess 1990; Shah et al 1995*.

BALAGURU, P.; KENDZULAK, J., (1987). *"Mechanical Properties of Slurry Infiltrated Fiber Concrete (SIFCON)"*; Fiber Reinforced Concrete: Properties and Applications - ACI Committee 544; S. P. Shah, G. B. Batson; SP-105 ACI, Detroit, pp. 247-68.

BALAGURU, P.; SHAH, S. (1992) *"Fiber Reinforced Cement Composites"*; McGraw Hill; New York.

BARRÁGAN, B. E., (2002). "*Failure and Toughness of Steel Fiber Reinforced Concrete Under Tension And Shear"*. Tese de Doutorado*,* Universitat Politecnica de Catalunya.

BAŽANT, Z. P. (1976) "*Instability, Ductility and Size Effect in Strain-Softening Concrete"*, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, v. 102, pp. 331-344.

BAŽANT, Z. P.; CEDOLIN, L., (1979). "*Blunt Crack Band Propagation in Finite Element Analysis"*, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, v. 105, pp. 297-315.

BAŽANT, Z. P.; CEDOLIN, L. (1980) "*Fracture Mechanics of Reinforced Concretes"*, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, v. 106, pp. 1257-1306.

BAŽANT, Z. P.; CEDOLIN, L., (1983). "*Finite Element Modeling of Crack Band Propagations"*, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, v. 109, pp. 69-92.

Referências Bibliográficas

BAŽANT, Z. P.; Oh, B. H., (1983). "*Crack Band Theory for Fracture of Concrete"*, Materials and Structures, RILEM, Paris, v. 16, pp. 155-176.

BAŽANT, Z. P.; PLANAS, J., (1998). "*Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials"*, W. F. CHEN, Pardue University, CRC Press, Boca Raton/Boston/New York/Washington, D.C.

BAŽANT, Z. P., (1991). "*Size Effects on Fracture and Localization: Apreçu of Recent Advances and Their Extension to Simultaneous Fatigue and Rate-Sensitivity"*, in Fracture Process in Concrete, Rock and Ceramics, J.G.M. Van Mier, J.G. Roots and A. Bakker. RILEM, E. & F. N. Spon, London/New York/Melbourne/Madras, pp. 417-429.

BENTUR, A.; MINDESS, S., (1990). "*Fiber Rreinforced Cementious Composites"*, Elsevier Applied Science, London/New York.

BITTENCOURT, T. N.; WAWRZYNEK, P. A., INGRAFFEA, A. R., (1996). *"Quasi-Automatic Simulation of Crack Propagation for 2D LEFM Problems*, Engineering Fracture Mechanics, v. 35, pp. 321-334.

BITTENCOURT, T. N.; KANG, T. W., (2004). *"Simulação de Propagação de Fissuras no Concreto Utilizando o Modelo Reticulado da Mesoestrutura"*, Revista Concreto, Ibracon, v. 36, pp. 46-54.

BROEK, D., (1987). *"Elementary Engineering Fracture Mechanics"*, Martinus Nijhoff Publishers, Klower Academic Publisher Group, Dodrecht/Boston/Lancaster.

CASANOVA, P., ROSSI, P., (1997). *"Analysis and Design of Steel Fiber-Reinforced Concrete Beams."* ACI Struct. J., 94(5), 595-602.

CEDOLIN, L.; BAŽANT, Z. P., (1980). "*Effect of Finite Element Choice in Blunt Band Analysis"*, Computer Methods in Applied Mechanics Engineering, v. 24, pp. 305-316.

CHEN, W., F.; HAN, D., J., (1988). *"Plasticity for Structural Engineers"*, Springer-Verlag, New York/Berlim/Heidelberg/London/Paris/Tokyo.

CLOUGH, R. W., (1960). The Finite Element Method in Plane Stress Analysis. ASCE CONFERENCE ON ELETRONIC COMPUTATION, Second Proceedings. pp.345-378.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. CEB-FIP Model Code 1990. London: Homas Telford Services Ltd., 1993.

COOK, J., GORDON, J. E., (1964). "*A Mechanism for the Control of Crack Propagation in All Brittle Systems*". Proc. Roy. Soc., 282A, pp. 508-520.

Referências Bibliográficas

COPE, R. J.; RAO, P.V.; CLARK, L. A.; NORRIS, P., (1980). *"Modeling of Reinforced Concrete Behavior for Finite Element Analysis of Bridges Slabs"*, C. TAAYLOR *et al*, Numerical Methods for Nonlinear Problems, Swansea, Pineridge Press, v. 1, pp. 457-470.

CRAIG, R., (1987). *"Flexural Behavior and Design of Reinforced Fiber Concrete Members"*; Fiber Reinforced Concrete: Properties and Applications - ACI Committee 544; S. P. Shah, G. B. Batson; SP-105 ACI, Detroit, pp. 517-63.

CRISFIELD, M. A., (1981). *"A Fast Incremental Iterative Solution Procedure that Handles Sanp-Through "*, Computer and Structures, v. 13, pp. 55-62.

CRISFIELD, M. A., (1983). *"An Arc-Length Method Including Line Searches and Accelerations "*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v.19, pp. 1269-1289.

CUNDALL, P. A., STRACK, O. D. L., (1979). *"A Discrete Numerical Model for Granular Assemblies"*. Géothechnique, v. 29, pp. 47-65, a*ppud Jirásek 2003*.

De BORST, R.; NAUTA, P., (1985). *"Non-orthogonal Cracks in a Smeared Finte Element Model"*. Engineering Computation, v.2, pp. 35-46.

De BORST, R., (1986). *"Non-Linear Analysis of Frictional Materials"*. Tese de Doutorado, Delft University of Technology.

De BORST, R., MUHLHAUS, H. B., (1991). "*Continuum Models for Continuous Media"*, Fracture Process in Concrete, Rock and Ceramics, J.G.M. Van Mier, J.G. Roots and A. Bakker. RILEM, E. & F. N. Spon, London/New York/Melbourne/Madras, pp. 417-429.

DENNIS, J. E., SCHNABEL, R. B., (1983). *"Numerical Methods for Unconstrained Minimization and Nonlinear Eqautions."*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jessey.

DIANA User's Manual, (2003). *TNO Bulding and Construction Research*, Delft, Netherlands.

DVORKIN, E. N.; CUITIÑO, A. M.; GOIA, G., (1990). *"Finite Elements with Displacement Interpolated Embedded Localization Lines Insensitive to Mesh Size and Distrortions"*, Computer Methods in Applied Mechanics Engineering, v.90, pp. 829-844.

FAIRBAIRN, E. M. R., MENEZES, N. C., (1993). *"Rapport Sur L'etat de L'art de L'application de la Methode des Elements Finis au Beton Arme"*, Rapport de Recherche CEBTP-SETRA index QC, pp 1-163, Paris.

FELLIPA, C. A., (2004). *"Introduction to Finite Element Method"*, Notas de Aula, University of Califórnia, Department of Aerospace Engineering Sciences.

Referências Bibliográficas

FIGUEIREDO, D. A., (2000). *"Concreto com Fibras de Aço – Apostila"*, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Departamento de Engenharia de Construção Civil, ISSN-0103-9830, BT/PCC/260.

GDOUTOS, E., E., (1993). *"Fracture Mechanics: An Introduction"*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.

GOPALARATNAM, V. P. e SHAH, S. P., (1987). *"Failure Mechanisms and Fracture of Fiber Reinforced Concrete"*, Fiber Reinforced Concrete: Properties and Applications - ACI Committee 544; S. P. Shah, G. B. Batson; SP-105-1 ACI, Detroit, pp. 1-25.

GRIFFITH, A. A., (1920). *"The Phenomena of Rupture and Flow in Solids,"* Philosophical Transcritions of the Royal Society of London, Series A-221, 1920, pp. 163-198.

GUPTA, A. K; AKBAR, H., (1984). *"Cracking in Reinforced Concrete Analysis"*, Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 110, pp. 1735-1746.

HANSEN, A., ROUX, S., HERRMANN, H. J., (1989). *"Rupture of Central Force Latticess"*, J. Phys, France, 50, 733, a*ppud Van Mier 1996*.

HELLAN, K., (1984). *"Introduction to Fracture Mechanics",* Madelaine Eichberg, McGraw-Hill, Inc., New York.

HERRMANN, H. J., (1991). *"Patterns and Scaling in Fracture "*, Fracture Process in Concrete, Rock and Ceramics, Van Mier, J.G.M., Rots, J.G., Bakker, A., Ed. Chapman & Hall/E&FN Spon, London/New York/Melbourne/Madras, pp. 417-429.

HILLERBORG, A.; MODÉER, M.; PETERSSON, P. E., (1976). *"Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements",* Cement Concrete Research, v. 6, pp. 773-782.

HILLERBORG, A., (1980). *"Analysis of Fracture by Means of Fictitous Crack Model, Particularly for Fiber Reinforced Concrete"*, Int. J. Cem. Comp., v. 2, pp. 117-174.

HREINNIKOFF, A., (1941). *"Solution of Problems in Elasticity by the Framework Method."*, J. Appl. Mech., vol. 8, nº A, pp. 169-175.

HOMRICH, J.; NAAMAN, A., (1987). *"Stress-Strain Properties of Sifcon in Compression"*; Fiber Reinforced Concrete: Properties and Aplications - ACI Committee 544; S. P. Shah, G. B. Batson; SP-105 ACI, Detroit, pp. 283-304.

HORDIJIK, D. A., (1991). *"Local Approach to Fatigue of Concrete"*. Tese de Doutorado, Delft University of Technology.

INGLIS, C., E., (1913). *"Stresses in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners "*, Transcritions of the Institute of Naval Architects, v.55, pp.219-241.

IRWIN, G. R., (1960). *"Plastic Zone Near a Crack Tip and Fracture Toughness",* Procedings of the Seventh Sagamore Ordnance Material Conference, pp. IV63-IV78.

IRWIN, G. R., (1968). *"Linear Fracture Mechanics, Fracture Transition, and Fracture Control",* Engineering Fracture Mechanics 1, 241-257.

JIRÁSEK, M., BAŽANT, Z. P., (1995). *"Particle Model for Quasibrittle Fracture and Aplications to Sea Ice"*, J. Eng. Mech., ASCE, v. 121, pp. 1016-1025.

JIRÁSEK, M., (2000). *"Numerical Modeling of Deformation and Failure of Materials,* Notas de Aula (comunicação pessoal).

KLISINSKI, M.; RUNESSON, K.; STURE, S., (1991). *"Finite Element with Inner Softening Band"*, Journal of Enginnering Mechanics, ASCE, 117:575-587.

KOOIMAN, A. G., (2000). "*Modeling Steel Fibre Reinforced Concrete for Structural Design"*. Tese de Doutorado*,* Department of Structural and Building Engineering, Delft University of Technology.

KWAK, H. G., FILLIPPOU, F. C., (1990). *"Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures Under Monotonic Loads",* Report on Research Conducted under Grant RTA-59M949, Structural Enginnering, Mechanics and Materials; Department of Civil Engineering, University of California, Berkley; Report Number UCB/SEMM-90/14.

KWAK, H. G., FILLIPPOU, F. C., (1997). *"Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Structures Under Monotonic Loads",* Computer and Structures, v. 65, pp. 1-16.

LI, V. C., (2002) "*Large Volume, High-Performance Applications of Fibers in Civil Engineering"*, Journal of Applied Polymer Science, v.83, pp. 660-686.

McHENRY, D. A., (1943-1944). *"Lattice Analogy for the Solution of Plane Stress Problems."*, J. Instit. Civil Engineers., vol. 21, nº 2, *appud Assan 2003*.

METHA, P., K., MONTEIRO, P., J., M., (1985). *"Concreto: Estrutura, Propriedades e Materiais"*, São Paulo, ed. Pini Ltda.

MONDRAGON, R., (1987). "*Sificon in Compression*"*;* Fiber Reinforced Concrete: Properties and Aplications - ACI Committee 544; S. P. Shah, G. B. Batson; SP-105 ACI, Detroit, pp. 269 -281.

NAAMAN, A. E.; NAMUR, G.G.; Alwan, J. M.; Najm, H. S., (1991). *"Fiber Pullout and Bond Slip: Analitical Study",* Journal of Structural Engeneering, v.117, pp. 2769-2800.

RASHID, Y. R., (1968). *"Analysis of Prestresssed Concrete Pressure Vessels"*, Nuclear Engineering and Design, vol. 7, nº 4, pp. 334-344, *appud Jirásek 2003*.

REINHARDT, R. W., (1984). *"Fracture Mechanics of an Elastic Softening Material Like Concrete"*. Heron, 29:2.

RYLO, E. C., DEVLOO, P. R. B., (2002). "*Adapitatividade hp Aplicada em Malhas de Elementos Finitos"*. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas.

RILEM, (2000a). *"Bending Test"*, Technical Committee 162-TDF Recommendations, Chairlady L. Vandewalle, Materials Structures/ Matériaux et Constructions, v. 33, pp 3-5.

RILEM, (2000). *" $\sigma - \varepsilon$ Desing Method" Principles and Applications"*, Technical Committee 162-TDF Recommendations, Chairlady L. Vandewalle, Materials Structures/ Materiaux et Constructions, v. 33, pp. 75-81.

RILEM, (2002). *"Design of Steel Fibre Reinforced Concrete Using the σ-w Method: principles and applications"*, Technical Committee 162-TDF Recommendations, Chairlady L. Vandewalle, Materials Structures/ Materiaux et Constructions, v. 35, pp. 262-278.

ROELFSTRA, P. E.; WITTMANN, F. H., (1986). *"Numerical Method to Link Strain Softening with Failure of Concrete"*, Fracture Testes and Fracture Energy, Ed. Wittman, Elsiveir, London.

ROELFSTRA, P. E.; SADOUKI, H.; WITTMANN, F. H., (1985). *"Le Beton Numérique"*, Materials Structures/ Materiaux et Constructions, v. 18, pp. 327-333.

ROELFSTRA, P. E., (1988). *"Numerical Concrete"*, Doctoral Thesis, Laboratoire de Matériaux de Construction, Ecole Politéchnique Féderale de Lausanne, Lausanne, Suisse.

SCHLANGEN, E., (1993). *"Experimental and Numerical Analysis of Fracture Process in Concrete"*, PhD Thesis, Delft University of Tecnology, Delft, The Netherlands.

SILVA Jr., J., (1982). *"Resistência dos Materiais"*, Coleção Engenharia e Arquitetura, 5º ed., Belo Horizonte.

SHAH, S. P.; OUYANG, C., (1991). "*Mechanical Behavior of Fiber-Reinforced Cement-Based Compositess"*, International Journal Cement Composites and Lightweight Concrete, v.3, pp. 159-177.

SHAH, S. P.; SWARTZ, S. E.; OUYANG, C., (1995). "*Fracture Mechanics of Concrete: Applications of Fracture Mechanics to Concrete, Rock, and Other Quasi-Brittle Materials",* John Wiley & Sons, Inc., New York/Chichester/Brisbane/Toronto/Singapore.

SOROUSSHIAN, P., (1999). *"Fiber Reinforced Concrete"*, Michigan State University, CD-ROM.

SOUSA, J. L. A. O., (2002). "*FIT3PB: A System for Inverse Analysis of Results from Three-Point-Bending Tests on Notched Beams for Obtaining a Softening Model for Plain and Fiber Reinforced Concretes",* Internal Report, Univesitat Politècnica de Catalunya.

SOUSA, J. L. A. O., GUETTU, R., e BARRAGÁN, B. E., (2002a). "*Inverse Analusis of the Notched Beam Rsponse for Determining the* $\sigma - w$ *Curve for Plain and Fiber Reinforced Concrete",* Anales de la Mecánica de la Fratura, (Proc. Encuentro del Grupo Español de Fractura, Girona, Spain, 2002), 19, 393-398.

SOUSA, J. L. A. O., GUETTU, R., e BARRAGÁN, B. E., (2002b). "*Obtaninig the* $\sigma - w$ *Curve from the Inverse Analysis of the Notched Beam Response",* Report of Brite-Euram Project: Test and Design Methods for Steel Fiber Reinforced Concrete, Sub-Tasks 3.2 e 3.4: Section Design and Structural Analysis for $\sigma - w$ Method, (CD-ROM, ISBN: 90-5682-358-2).

SOUSA, J. L. A. O., GUETTU, R., (2004). "*Inverse Analusis of the Notched Beam Test Data for Obtaining Tensile Stress-Crack Opening Relation of Fiber Reinforced Concrete",* Fibre-Reinforced Concretes - BEFIB, Procedings of the Sixth International RILEM Symposium, Di Prisco, M., Plizzari, G. A., RILEM Publications S.A.R.I., vol.2, pp. 809-818.

SUIDAN, M.; SCHONOBRICH, W. C., (1973). *"Finite Element Analysis of Reinforced Concrete"*, Journal of the Structural Division, ASCE, vol.99, pp. 2109-2122, *appud Jirásek 2000*.

TIMOSHENKO, S. P., GODIER, J. N., (1980). *"Teoria da Elasticidade"*, Guanabara Dois, 3ª ed., Rio de Janeiro.

TURNER, M. J.; CLOUGH, R. W.; MARTIN, H. C.; TOPP, L. J, (1956). *"Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures."*, Journal of Aeronautical Sciences, vol.23, p.805-824, *appud Fillipa 2004*.

VAN MIER, J. G. M., (1996). "*Fracture Processes of Concrete"*, W. F. Chen, Pardue University, CRC Press, Boca Raton/New York/London/ Tokyo.

WITTMANN, F. H., ROELFSTRA, P. E.; KAMP, C. L., (1988). *"Drying of Concrete: an application of the 3L-approach"*, Nucl. Eng. Des., v. 105, pp. 185-198, a*ppud Bazant e Planas 1998*.

WAWRZYNEK, P. A., (1981). *"Discrete Modeling of Crack Propagation: Theoretical Aspects and Implementation Issues in Two and Three Dimensions"*. Tese de Doutorado, Cornell University.